

Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen

von

Anton Matzenmiller



z

Bericht Nr. 8 (1988)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1988

1

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 8. August 1988

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. H. Bufler

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Zusammenfassung

Die Arbeit befaßt sich mit der effizienten Formulierung von rechnerunterstützten Lösungskonzepten zur nichtlinearen Tragwerksuntersuchung. Im Vordergrund dieser Aufgabe steht die Linearisierung der mechanischen Gleichungen für iterative Lösungstechniken, deren Leistungsfähigkeit den Rechenaufwand maßgeblich bestimmt. Der Formulierung liegt die Gleichgewichtsaussage in Form des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in der Lagrangeschen Beschreibung zugrunde, die der Eulerschen Betrachtungsweise gegenübergestellt wird. Für die Lösung der nichtlinearen Gleichgewichtsaussage mit Hilfe des Newton-Verfahrens werden die Iterationsmatrizen systematisch hergeleitet, wobei auf die Behandlung dünnwandiger Flächentragwerke besonders eingegangen wird.

Zur Erfassung elastoplastischen Materialverhaltens mit den zeitabhängigen Gleichungen der Fließtheorie werden verschiedene Zeitintegrationsalgorithmen untersucht. Auf deren systematische Einbeziehung in die Iterationsgleichungen für das Newton-Verfahren wird danach abgezielt. Die spezielle Anpassung der inkrementierten Werkstoffbeziehungen elastoplastischer Kontinua an die Erfordernisse schalenartiger Strukturen schließt den methodischen Teil der Arbeit ab.

Als diskretisierendes Verfahren wird die finite Elementmethode zur Lösung der untersuchten Beispiele eingesetzt. Die überragende Konvergenzgeschwindigkeit des Newton-Verfahrens mit den konsistent linearisierten Steifigkeitsmatrizen wird demonstriert und mit alternativen Lösungstechniken verglichen.

Summary

An efficient formulation of computational based solution concepts is developed for the nonlinear analysis of structures. Emphasis is placed on consistent linearization of the mechanical equations for an iterative solution strategy of the Newton-type, mainly governing the numerical expenditure. Finite deformations are covered in the Lagrangean picture, where the principle of virtual displacements is presented and compared to the Eulerian description. For the numerical solution of the nonlinear equilibrium equations the iteration matrices are systematically derived, where special consideration is given to shell equations.

Elastoplastic deformations are described with rate dependent equations of flow theory, requiring time integration. Different time integration schemes for the constitutive equations are investigated and rigorously built into the framework of the linearization process. The conceptual part is closed by adapting the incremental flow equations for continua to the special necessities of shell analysis.

The finite element method is used for discretization of the analysed examples. The superior convergence rate of the Newton-method is demonstrated and compared to alternative solution strategies.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	9
2	Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	14
2.1	Notation	14
2.1.1	Vorbemerkungen und Begriffe	14
2.1.2	Koordinaten	14
2.1.3	Tensoren	17
2.1.4	Vereinfachte Darstellung	18
2.2	Gleichgewichtsaussagen	20
2.3	Kinematische Beziehungen	24
2.4	Elastische Stoffgesetze	25
2.5	Elastoplastische Stoffgesetze	26
2.5.1	Zur Theorie plastischer Deformationen	26
2.5.2	Grundlagen der Fließtheorie	28
2.5.3	Versuchswesen und einaxiales Verfestigungsverhalten	33
2.5.4	Anwendung auf die J_2 -Fließtheorie	34
2.6	Elastoplastischer Werkstofftensor der Fließtheorie	35
2.7	Erweiterung der Fließregel	37
2.7.1	Diskussion der klassischen Fließregel	37
2.7.2	Das Prinzip vom Maximum der Dissipationsleistung	38
3	Beschreibung finiter Deformationen des allgemeinen Kontinuums	40
3.1	Hinweise zur Notation	40
3.2	„Schwache Form“ des materiellen Gleichgewichts	40
3.3	Lösung der nichtlinearen virtuellen Arbeitsgleichung	42
3.4	Konsistente Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit in Lagrangescher Betrachtungsweise	44
3.4.1	Linearisierung bezüglich des Verschiebungsfeldes	44
3.4.2	Linearisierung der Spannungen bei Hyperelastizität	44
3.5	Mitgehende Lagrange-Formulierung	46
3.5.1	Zur Wahl des Bezugszustandes für die Linearisierung	46
3.5.2	Transformation in räumliche Tensoren und Einordnung der mitgehenden Formulierung	47
3.6	Implementierung der Lagrange-Darstellung in Rechenprogramme	49
3.6.1	Matrizenschreibweise	49

3.6.2	Zur Effizienz der numerischen Operationenfolge . . .	52
3.7	Konsistente Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit in Eulerscher Betrachtungsweise	53
3.7.1	Gleichgewichtsaussage und Werkstoffgesetz	53
3.7.2	Linearisierung der inneren Arbeit räumlicher Tensoren	53
3.7.3	Linearisierung des Cauchy-Spannungstensors	55
3.7.4	Erläuterungen zum Stoffgesetz und zur Symmetrie der Anfangsspannungsmatrix	58
4	Dünnwandige Strukturen	60
4.1	Motivation	60
4.2	Schalenannahmen	61
4.2.1	Schalenkinematik	61
4.2.2	Vergleich des degenerierten Konzepts mit der klassischen Schalenformulierung	62
4.2.3	Kinematische Variable zur Lagebeschreibung des Direktors	65
4.3	Schalenformulierung mit allgemeinen Flächenkoordinaten	68
4.3.1	Wahl des Bezugssystems	68
4.3.2	Formulierung der degenerierten Schale im allgemeinen, krummlinigen Koordinatensystem	68
4.3.3	Verzerrungstensor in allgemeinen Schalenkoordinaten	70
4.3.4	Konstitutives Gesetz in allgemeinen Schalenbasen	72
4.4	Schalenformulierung in lokalen, kartesischen Koordinaten	73
4.4.1	Konstruktion der lokalen, kartesischen Basen	73
4.4.2	Transformation zwischen allgemeinen, krummlinigen und lokalen, kartesischen Tensorkoordinaten	74
4.4.3	Tensoren in lokalen kartesischen Koordinaten	75
4.5	Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit der Schale	77
4.5.1	Besonderheiten bei dünnwandigen Strukturen	77
4.5.2	Spezifische virtuelle innere Arbeit	77
4.5.3	Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit	78
4.5.4	Diskretisierung der Schalengleichungen	79
4.5.5	Linearisierte Schalengleichung in Matrizenform	80
4.6	Numerische Beispiele	85
4.6.1	Kragarm unter Endmoment	85
4.6.2	Einhüftiger Rahmen („Lee’s Frame“)	86
4.6.3	Hypar-Schale	89

5	Algorithmen zur Spannungsberechnung elastoplastischer Kontinua	94
5.1	Grundlagen der Formulierung und der Notation	94
5.2	Aktualisierung der Geometrie und des Materialzustandes . .	98
5.3	Zusammenstellung der klassischen Integrationsverfahren zur elastoplastischen Spannungsberechnung.	104
5.3.1	Vorbemerkungen	104
5.3.2	Explizite Integrationsmethoden	105
5.3.3	Implizite Spannungsintegration mit Hilfe des allgemeinen Prädiktor-Korrektorverfahrens	111
5.3.4	α -Methoden zur Integration des Werkstoffgesetzes .	112
5.4	Spannungsberechnung durch getrennte Ermittlung der elastischen und plastischen Anteile	114
5.4.1	Vorbetrachtungen	114
5.4.2	Zur Begriffsbildung des elastischen Prädiktor-plastischen Korrektorverfahrens („operator split - method“) . . .	114
5.4.3	Elastisches Prädiktor - plastisches Korrektorverfahren: Prinzipielles Vorgehen	117
5.4.4	Elastisches Prädiktor - plastisches Korrektorverfahren: Formale Darstellung des Spannungsalgorithmus' .	119
5.4.5	Inkrementierung der Differentialgleichungen der Fließtheorie	123
5.5	Entwicklung des vollständig impliziten Algorithmus'	125
5.5.1	Zeitliche Diskretisierung (Interpolation)	125
5.5.2	Lösung der plastischen Gleichungen	126
5.5.3	Wertung des impliziten elastischen Prädiktor-plastischen Korrektorverfahrens	128
5.5.4	Zeitableitung des inkrementellen Evolutionsgesetzes .	129
5.5.5	Zur Symmetrie der konsistenten Tangentenmoduli .	130
5.6	Gemischte explizite - implizite Verfahren	132
5.6.1	Semiimplizites Verfahren	132
5.6.2	Semiexplizites Verfahren	133
5.7	Anwendung des elastischen Prädiktor - plastischen Korrektorverfahrens auf die J_2 -Fließtheorie	139
5.7.1	Grundgleichungen für die implizite Methode	139
5.7.2	Spektralzerlegung der Matrizen P und D des allgemeinen dreidimensionalen Kontinuums	140
5.7.3	Geschlossene Lösung des Spannungsalgorithmus' . . .	145
5.7.4	Spektrale Zerlegung des elastoplastischen Tensors . .	148

5.7.5	Ermittlung des plastischen Multiplikatorinkrements	149
5.7.6	Spezifikation gängiger Verfestigungsfunktionen	150
6	Elastoplastischer Tangentenmodul	155
6.1	Zur iterativen Gleichgewichtsermittlung	155
6.2	Konsistente elastoplastische Tangentensteifigkeit des vollständig impliziten Algorithmus'	158
6.3	Konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul des impliziten Algorithmus' für die J_2 -Fließtheorie	162
7	Elastoplastizität bei dünnwandigen Flächentragwerken	165
7.1	Zur Degeneration ratenabhängiger Werkstoffgesetze	165
7.2	Elimination der Normaldehnungsrate in Dickenrichtung aus dem Ergänzungstensor der J_2 -Fließtheorie	166
7.3	Impliziter elastoplastischer Algorithmus für Schalen	169
7.4	Fehlerabschätzung des Spannungsalgorithmus'	176
7.4.1	Vorbemerkungen	176
7.4.2	Numerische Ergebnisse der Fehleruntersuchung	176
7.4.3	Auswertung der Fehlerkarten	182
7.5	Konsistente elastoplastische Spannungs-Dehnungsbeziehung	184
8	Traglastuntersuchungen an numerischen Beispielen	185
8.1	Bemerkungen zur Auswahl der Rechenbeispiele	185
8.2	Kreisförmig ausgesparte Membran	186
8.3	Quadratplatte unter Querlast	189
8.4	Flaches Zylinderschalenfeld	191
8.5	Flüssigkeitsgefüllte Rotationsschale	193
9	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	198
	Schrifttum	201
A	Anhang	213
A1	Frechet- und Richtungsableitung	A1.1
A2	Konsistenz des elastischen Prädiktor - plastischen Korrektorverfahrens	A2.1

Zeichenerklärung

Bezeichnungen, Abkürzungen, Symbole

\mathbf{v}	Fettschrift zur Kennzeichnung von Vektoren oder Matrizen
$\hat{\mathbf{e}}$	Einheitsvektor für Koordinatenbasis
\vec{n}	Vektor der Länge „eins“
\mathbf{A}^T	Transponierte einer Matrix oder eines Vektors
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Matrizenprodukt
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^T$	dyadisches Produkt zwischen zwei Vektoren
$\det \mathbf{A}$	Determinante einer Matrix oder eines zweistufigen Tensors
$X_{aB} Y_{ac}$	Produkt zweier Tensoren in vereinfachter Darstellung Die Summation erstreckt sich über den gemeinsamen Index a
$x^i_{,j} = \frac{\partial x^i}{\partial X_j}$	partielle Ableitung
$d(\)$	Differential
$\Delta \Delta(\)$	aktuelles Inkrement aus der Linearisierung des virtuellen Arbeitsprinzips einer Größe zwischen aufeinanderfolgenden Konfigurationen i und $i - 1$
$\Delta(\)$	gesamtes Inkrement einer Größe zwischen der aktuellen i Konfiguration und der letzten Gleichgewichtslage n
δ	Variationssymbol
$i(\)$	Größe im Ungleichgewichtszustand i
$n(\)$	Größe im Gleichgewichtszustand n
\equiv	äquivalent
\propto	proportional
$:=$	definitorisches Gleichheitszeichen
\approx	ungefähr
\parallel	parallel

Als Doppelbezeichnungen werden verwendet:

F	Deformationsgradient in den Abschnitten 2.1 - 2.4, 3 und 4 Verfestigungsfläche in den Abschnitten 2.5 - 2.7, 5 und 8
λ	plastischer Multiplikator Laststeigerungsfaktor in den numerischen Beispielen

Es wird die Summenkonvention über wiederholte obere und untere Indizes von Tensoren vorausgesetzt. Alle weiteren Abkürzungen und Zeichen werden bei ihrer erstmaligen Verwendung im Text erklärt.

1 Einleitung

Der zunehmende Einsatz von schalenartigen Strukturen auch außerhalb des traditionellen Bauwesens hat ein wachsendes Interesse an zuverlässigen Strukturaussagen geweckt. Umfangreiche Schalenberechnungen werden beispielsweise im Flugzeugbau und Raumfahrtwesen, Schiffs- und Kraftfahrzeugbau, in der „Off-shore-Technik“, in jüngster Zeit auch in der Biomechanik, der medizinischen Technik sowie in der neuhinzukommenden Konsumgüterindustrie durchgeführt. Die Erfordernisse der Gewichtsoptimierung und der Wirtschaftlichkeit haben zusammen mit modernen Formgebungsmethoden und verbesserten Materialien zu Strukturen mit immer geringeren Wandstärken geführt, für welche die geometrisch nichtlinearen Effekte eine wichtige Rolle spielen können. Die Ausnutzung der Tragreserven im inelastischen Bereich zur Sicherheitsbeurteilung steht im Vordergrund der materiell nichtlinearen Strukturanalyse.

Die Formulierung und matrizielle Aufbereitung rechnerunterstützter Lösungskonzepte zur wirklichkeitsgetreueren Erfassung des nichtlinearen Tragverhaltens ist Gegenstand dieser Arbeit. Zur Lösung der dabei auftretenden nichtlinearen mechanischen Gleichungen werden iterative Verfahren eingesetzt, die sich in der Traglastanalyse etabliert haben /Bathe 1973, 1982/, /Key 1978/, /Hibbitt 1981/, /Hallquist 1983, 1984/, /Bushnell 1985/, /NISA80 1983/. Obwohl die bestehenden Methoden brauchbare und zuverlässige Ergebnisse liefern, müssen diese häufig mit hohem Rechenaufwand in den Algorithmen und vielen Iterationszyklen erkauft werden. Sie erfordern bei zunehmender Nichtlinearität immer kleinere Laststufen bei gleichzeitig ansteigenden Iterationszahlen zum Erreichen vorgeschriebener Genauigkeiten. Typische Beispiele hierfür sind Konvergenzschwierigkeiten des Newton-Verfahrens bei der numerischen Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme für dünnwandige Flächentragwerke mit ausgedehnten plastischen Zonen. Selbst bei Verkleinerung der Lastinkremente wächst die Iterationszahl des Newton-Verfahrens und damit die eingesetzte Rechenzeit bei Weiterbelastung unzumutbar schnell an.

Die Arbeit widmet sich speziell dem methodischen Konzept zur Verbesserung und Vereinfachung der Lösungsverfahren

- für die iterative Ermittlung des Gleichgewichtszustandes dünnwandiger Tragwerke
- und für die Spannungsberechnung elastoplastischer Werkstoffe unter besonderer Berücksichtigung der statischen Schalenhypthesen.

Für beide Teilaufgaben sollen implizite Lösungstechniken verwendet werden, welche wesentlich größere Lastschritte als vergleichbare explizite Methoden erlauben. Thema zahlreicher Untersuchungen ist der Vergleich verschiedener impliziter Lösungsverfahren vom iterativen Typ in Form der Standard-, Quasi- und modifizierten Newton-Methoden /Matthies 1979/, /Bathe 1980/, /Schweizerhof 1986/.

Von zentraler Bedeutung für das hier verwendete Standard-Newton-Verfahren ist die formale Linearisierung der zu lösenden mechanischen Gleichungen. Die daraus analytisch ermittelte Tangentensteifigkeit spielt die Rolle der Iterationsmatrix und ist mit der Hessematrix des unter Umständen zugrunde gelegten Verzerrungspotentials identisch. Im Gegensatz zu den Quasi-Newton-Methoden, wo die momentane Steifigkeit durch dyadische Vektorprodukte zwischen dem Lösungs- und dem Ungleichgewichtskräftevektor bestmöglichst angenähert wird, kann von der Iteration mit der Tangentensteifigkeit quadratische Konvergenz der Lösungsvariablen im Grenzbereich bei genügender „Glattheit des Problems“ erwartet werden. Verallgemeinernde Aussagen hinsichtlich der numerischen Effizienz einzelner Methoden sind jedoch nicht ohne Berücksichtigung problembedingter Restriktionen zu treffen, wie Anzahl der zu lösenden Gleichungen, Grad und lokale Begrenztheit der Nichtlinearitäten, Implementierung und Reihenfolge der numerischen Operationen in den Algorithmen sowie Vektorisierbarkeit des Programms und Art des Gleichungslösers.

Unabhängig von der Diskretisierung werden die Feldgleichungen der Kontinuumsmechanik zur systematischen Herleitung der Tangentensteifigkeit linearisiert. In Abhängigkeit der Werkstoffannahmen zwischen den materiellen oder den räumlichen Spannungs- und Verzerrungstensoren ist entweder vom virtuellen Arbeitsprinzip in der Lagrangeschen oder in der Eulerschen Fassung auszugehen. Im Gegensatz zu den meisten anderen Formulierungen wird anstelle des Verschiebungsfeldes der Ortsvektor der aktuellen Konfiguration als primäre Variable behandelt. Die einfachere Darstellung der Steifigkeitsmatrix macht die Effizienz der Operationenfolge für den Aufbau der Elementsteifigkeit transparent.

Durch Variation der Verzerrungen, welche eine Funktion der virtuellen Geometrieänderungen sind, läßt sich zeigen, daß die materielle Formulierung sowohl in Form der totalen Lagrange-Beschreibung dargestellt werden kann als auch in der mitgehenden Fassung, indem der materielle Verschiebungsgradient auf die räumlichen Koordinaten transformiert wird. Die Gleichwertigkeit beider Fassungen ist in /Ramm 1976a/ betont worden. Im Rahmen dieser Ausführungen wird das Wesen der mitgehenden Formulierung mit

der Art des virtuellen und inkrementellen Verschiebungsgradienten in Verbindung gebracht. Die Frage der Einordnung der mitgehenden Darstellung in die Klasse der Stoffgesetze zwischen räumlichen oder materiellen Tensoren ist damit ebenso geklärt wie Effizienzüberlegungen.

Zur Formulierung der in /Ramm 1976a/ vorgestellten Schalengleichungen wird von der Kontinuumstheorie mit affinen Koordinaten im dreidimensionalen Raum ausgegangen. Im Unterschied zur Darstellung der Tensoren im globalen affinen Koordinatensystem werden hier Flächenkoordinaten benutzt, obwohl die Beschreibung der Konfiguration durch affine Koordinaten erfolgt. Die Vorteile sind mit den entfallenden numerischen Transformationen zwischen den affinen Tensorkomponenten und den Flächenkoordinaten zu begründen, wo die statischen Schalenhypothesen am einfachsten in die konstitutiven Gleichungen eingearbeitet werden können. Der nichtlineare Einfluß der Variablen zur Lagebeschreibung des Schalendirektors auf die kinematischen Beziehungen wird bei der Variation und Linearisierung des Arbeitsprinzips in Form zusätzlicher Steifigkeitsterme deutlich /Frey 1977/.

Die Verbesserung bestehender Algorithmen zur effizienteren Spannungsberechnung elastoplastischer Werkstoffe mit numerischer Zeitintegration ist Schwerpunkt des zweiten Teils der Arbeit. Letztendlich wird auf die exakte Erfassung der statischen Schalenhypothesen in expliziten / impliziten Spannungsalgorithmen zur Zeitintegration ratenabhängiger Werkstoffgesetze abgezielt sowie auf deren rigorose Miteinbeziehung in die Linearisierung der Gleichgewichtsaussagen zur iterativen Lösung. Gegenwärtige Praxis in der Strukturanalyse ist die iterative Erfüllung der statischen Schalenhypothesen in einer Nachlaufberechnung für die Spannungsermittlung /Hallquist 1985/ oder es werden nicht klar definierte Korrekturmaßnahmen getroffen.

Zur Erfassung der tangentialen Spannungs-Dehnungsbeziehung inelastischer Stoffgesetze wird in der Regel der elastoplastische konstitutive Tensor der Fließtheorie verwendet. In /Bathe 1987/ ist als „effektives“ Spannungs-Dehnungsgesetz die bezogene Differenz zwischen den numerisch gestörten Verzerrungszuständen und dem aktuellen Spannungszustand vorgeschlagen worden. Erste Beobachtungen der Konvergenzverlangsamung infolge nicht konsistenter Steifigkeitsmatrizen gehen auf Nagtegaal /Nagtegaal 1982/ zurück.

Die mathematisch widerspruchsfreie jedoch physikalisch umstrittene Bedeutung der Werkstoffgesetze zwischen materiellen Spannungs- und Deformationstensoren eignet sich zur Erfassung der Deformationsgesetze dünnwandiger Strukturen. Diese werden zwar finiten Drehungen, jedoch in der Regel kleinen Verzerrungen unterzogen, wenn von Blechumformvorgängen

oder ähnlich großen Beanspruchungen abgesehen wird. Aus diesem Grunde darf auch an der Lagrange-Formulierung mit materiellen Tensoren für die Plastizitätstheorie festgehalten werden /Green 1965, 1968/, so daß auf die numerisch aufwendige Integration der geometrisch bedingten Anteile in den Spannungsflüssen im Fall endlicher Rotationen verzichtet werden kann. Die algorithmische Behandlung inelastischer Stoffgesetze gliedert sich in dieser Arbeit wie folgt:

Am Beginn des fünften Abschnitts werden die gängigen numerischen Integrationsmethoden für die Fließtheorie erläutert, um einen Überblick über diesen sehr lebhaften Forschungsschwerpunkt des Berechnungswesens zu gewinnen. Das anfangs eher willkürlich erscheinende elastische Prädiktor-plastische Korrektorverfahren zur numerischen Lösung des dehnungskontrollierten Anfangswertproblems der konstitutiven Differentialgleichungen wird aus dem vorwärtigen Differenzenquotienten der Euler-Methode entwickelt. Bei der Herleitung wird auf die anschaulichen Zusammenhänge besonderer Wert gelegt, wogegen es im Anhang als ein in sich geschlossenes mathematisches Integrationskonzept abgehandelt wird. Als vollkommen implizites Integrationsverfahren wird das elastische Prädiktor-plastische Korrektorverfahren auf Werkstoffe mit Verfestigung angewendet. Die Interaktion zwischen den kontinuumsmechanischen Grundgleichungen und dem Zeitintegrationsverfahren spielt direkt in den Lösungsalgorithmus hinein und gibt Anlaß zur Modifikation des Zeitintegrationsverfahrens. Die Sonderstellung der J_2 -Fließtheorie erlaubt, den iterativen Prozeß zur Integration der Spannungen anhand impliziter Differenzenquotienten stark zu vereinfachen. Daraus ergibt sich das im Schrifttum als „radiale Rückkehrmethode“ /Krieg 1977/ bekannte Verfahren für den Spezialfall der idealplastischen Prandtl-Reuss-Theorie zwangsläufig.

Die konsequente Einbeziehung des Zeitintegrationsverfahrens zur Spannungsermittlung in die Linearisierung der virtuellen Arbeitsgleichungen ist Gegenstand des sechsten Kapitels. Als Folge der wegunabhängigen Gleichgewichtssiteration weicht die konsistent linearisierte Spannungs-Dehnungsbeziehung mit wachsendem Zeitinkrement vom konstitutiven Tensor der Fließtheorie stärker ab. Die hiervon verursachte Konvergenzverlangsamung des Standard-Newton-Verfahrens mit der inkonsistenten Tangententeifigkeitsmatrix läßt sich an numerischen Beispielen demonstrieren.

Im siebten Kapitel wird der für das dreidimensionale Kontinuum entwickelte Spannungsalgorithmus auf das degenerierte Schalenkonzept angewendet. Im Fall der von Mises Fließtheorie reduziert sich die Lösung der nichtlinearen Werkstoffbeziehungen auf die iterative Nullstellenbestimmung einer

einzigsten Gleichung. Mit der konsistenten Materialsteifigkeit zwischen den fünf unabhängigen Spannungs- und Dehnungskomponenten wird der methodische Teil der Arbeit abgeschlossen. An geometrisch und physikalisch nichtlinearen Strukturberechnungen wird das verbesserte Konvergenzverhalten des Standard-Newton-Verfahrens mit den konsistenten Iterationsmatrizen zur Lösung des Stukturgleichgewichts demonstriert und ein Vergleich zu den Quasi-Newton-Verfahren angestellt. Als Berechnungsbeispiele sind neben reinen Membran- und Biegeproblemen auch Schalen mit progressiver Umlagerung von Membranbeanspruchungen in Biegedeformationen bei kombinierter geometrischer und materieller Nichtlinearität untersucht worden.

Weitere Hinweise auf das Schrifttum finden sich in den einzelnen Kapiteln.

2 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

2.1 Notation

2.1.1 Vorbemerkungen und Begriffe

Zur Beschreibung von Bewegungsvorgängen und zur zeitlichen Einordnung von Ereignissen in eine Folge (z.B. Abhängigkeit plastischer Deformationen von der Vorgeschichte) ist es notwendig, den dimensionslosen Parameter t einzuführen. Er wird hier auch als die „Zeit“ t bezeichnet, obwohl er außer in dynamischen oder viskosen Prozessen kein wirkliches Zeitmaß darstellt, sondern nur eine Anzahl von Ereignissen in ihrer zeitlichen Reihenfolge ordnet.

Unter der Konfiguration C eines Körpers \mathcal{B} versteht man eine Abbildung φ von \mathcal{B} in den dreidimensionalen Raum \mathfrak{R}^3 . Mit dem Begriff Konfiguration $C = \varphi(\mathcal{B})$ meint man also den deformierten Zustand eines Körpers, der vom Parameter Zeit t abhängig ist.

2.1.2 Koordinaten

Unter einem Koordinatensystem im \mathfrak{R}^3 versteht man eine unendlich oft differenzierbare Abbildung der offenen Teilmenge $U_z \subset \mathfrak{R}^3$ in den \mathfrak{R}^3 .

$$(z^1, z^2, z^3) \longrightarrow (x^1(z^1, z^2, z^3), x^2(z^1, z^2, z^3), x^3(z^1, z^2, z^3)) \quad (2.1)$$

Die Koordinatenlinien sind Kurven $c_1(s), c_2(s), c_3(s)$ mit dem Laufparameter s für deren Komponenten $z^i(c_j(s))$ im euklidischen (affinen) Koordinatensystem gilt:

$$\begin{aligned} \text{für } c_1(s): \quad z^i(c_1(s)) &= z^i(s, x^2, x^3) \quad \text{wobei } x^2, x^3 \text{ fest sind} \\ \text{ebenso:} \quad z^i(c_2(s)) \quad \text{und} \quad z^i(c_3(s)) \end{aligned}$$

Als Basisvektoren an diese Kurven dienen die Tangentenvektoren \mathbf{e}_a .

$$\mathbf{e}_a = \frac{\partial z^i}{\partial x^a} \hat{\mathbf{i}}_i \quad (2.2)$$

Die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{i}}_i$ sind die Basen des affinen Koordinatensystems im \mathfrak{R}^3 . Die Basen \mathbf{e}_a sind somit Funktionen der Koordinaten x^1, x^2, x^3 . Sie werden auch als allgemeine, krummlinige Koordinaten bezeichnet und zur Formulierung von stabförmigen oder flächenartigen Strukturen bevorzugt.

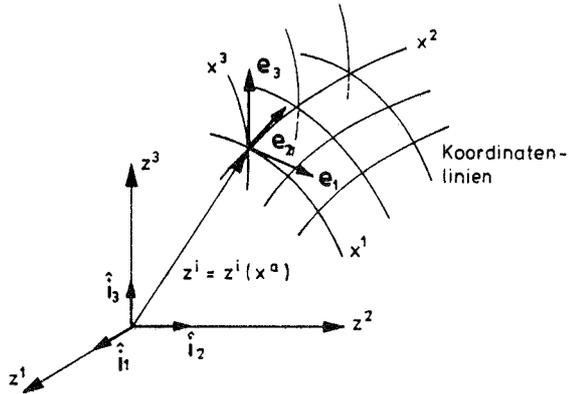


Bild 2.1 : Affines und krummliniges Koordinatensystem

Bezeichnungen in der Ausgangskonfiguration zur Zeit $t = 0$:

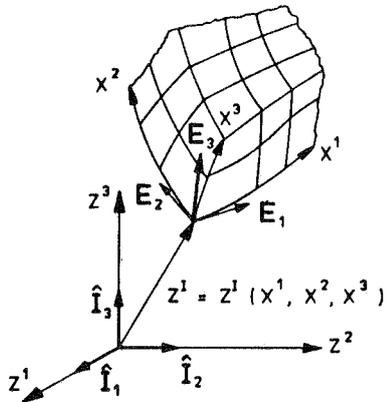


Bild 2.2 : Materielle Koordinatensysteme

Materielle Basen: $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$
 Materielle Koordinaten: X^1, X^2, X^3

$$\mathbf{E}_A = \frac{\partial z^I}{\partial X^A} \hat{\mathbf{i}}_I$$

Materieller Metriktensor:

$$G_{AB} = \mathbf{E}_A \cdot \mathbf{E}_B \quad (2.3)$$

$$G_{AB} = \frac{\partial Z^I}{\partial X^A} \frac{\partial Z^J}{\partial X^B} \delta_{IJ} \quad (2.4)$$

Hinweis: Die Zeitableitung des Metriktensors G_{AB} verschwindet,

$$\frac{d}{dt} G_{AB} = 0$$

denn es gilt :

$$Z^I := z^i \Big|_{t=0} = z^i (c_1(t=0))$$

Bezeichnungen in der Momentankonfiguration zur Zeit t :

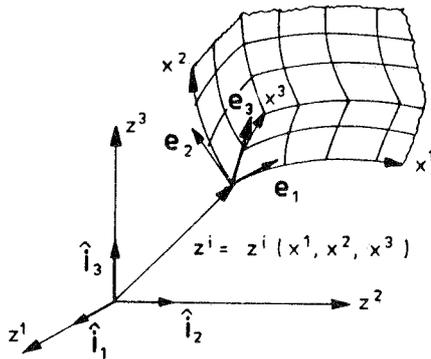


Bild 2.3 : Räumliche Koordinatensysteme

Räumliche Basen: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

Räumliche Koordinaten: x^1, x^2, x^3

$$\mathbf{e}_a = \frac{\partial z^i}{\partial x^a} \hat{\mathbf{i}}_i$$

Räumlicher Metriktensor:

$$g_{ab} = \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b \quad (2.5)$$

$$g_{ab} = \frac{\partial z^i}{\partial x^a} \frac{\partial z^j}{\partial x^b} \delta_{ij} \quad (2.6)$$

2.1.3 Tensoren

Als materielles Tensorfeld der Stufe m soll eine Funktion bezeichnet werden, die jedem geordneten System von Vektoren $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m)$ im materiellen Basensystem \mathbf{E}_A im Punkt X^I eine reelle Zahl zuordnet und die in jedem der m Argumente linear ist /Marsden 1983/. Mit den i kovariant und j kontravariant dargestellten Vektoren

$$\mathbf{b}_i = b_A^{(i)} \cdot \mathbf{E}^A$$

sowie

$$\mathbf{b}_j = b_{(j)}^A \cdot \mathbf{E}_A$$

ergeben sich die i -fach kontravarianten und j -fach kovarianten Koordinaten $T^{B_1 \dots B_i}_{A_1 \dots A_j}$ des Tensors T , wobei $i + j = m$ ist.

$$T(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = T\left(b_{B_1}^{(1)} \cdot \mathbf{E}^{B_1}, \dots, b_{B_i}^{(i)} \cdot \mathbf{E}^{B_i}, b_{(i+1)}^{A_1} \cdot \mathbf{E}_{A_1}, \dots, b_{(m)}^{A_j} \cdot \mathbf{E}_{A_j}\right) \quad (2.7)$$

T ist multilinear in allen Argumenten \mathbf{b}_i und \mathbf{b}_j .

$$T(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = \underbrace{T\left(\mathbf{E}^{B_1}, \dots, \mathbf{E}^{B_i}, \mathbf{E}_{A_1}, \dots, \mathbf{E}_{A_j}\right)}_{=: T^{B_1 \dots B_i}_{A_1 \dots A_j}} \cdot b_{B_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot b_{B_i}^{(i)} \cdot b_{(i+1)}^{A_1} \cdot \dots \cdot b_{(m)}^{A_j} \quad (2.8)$$

$$T(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_m) = T^{B_1 \dots B_i}_{A_1 \dots A_j} \cdot b_{B_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot b_{B_i}^{(i)} \cdot b_{(i+1)}^{A_1} \cdot \dots \cdot b_{(m)}^{A_j} \quad (2.9)$$

Sinngemäß lautet die Definition eines räumlichen Tensorfeldes im Punkt x^i mit den Koordinaten

$$T^{b_1 \dots b_i}_{a_1 \dots a_j} := \mathbf{T}\left(\mathbf{e}^{b_1}, \dots, \mathbf{e}^{b_i}, \mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_{a_j}\right) \quad (2.10)$$

Die Koordinaten des räumlichen Tensors unterliegen den zeitlichen Änderungen der Basen $\mathbf{e}_a = \frac{\partial x^i}{\partial x^a} \hat{\mathbf{i}}_i$, die von der Konfiguration $\varphi(X, t) = x$ und damit von der Bewegung abhängen.

Ein Doppelfeldtensor im Punkt X^I über der Abbildung φ von \mathcal{B} in den \mathfrak{R}^3 ist eine multilineare Funktion in den Vektoren \mathbf{b}_i , die entweder im System der materiellen oder der räumlichen Basen dargestellt werden. Dessen Koordinaten sind definiert zu:

$$T^{B_1 \dots B_i}_{A_1 \dots A_j} b_1 \dots b_k_{a_1 \dots a_l} := T\left(\mathbf{E}^{B_1}, \dots, \mathbf{E}^{B_i}, \mathbf{E}_{A_1}, \dots, \mathbf{E}_{A_j}, \mathbf{e}^{b_1}, \dots, \mathbf{e}^{b_k}, \mathbf{e}_{a_1}, \dots, \mathbf{e}_{a_l}\right) \quad (2.11)$$

Die wichtigsten Beispiele für Doppelfeldtensoren sind der Deformationsgradient und der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor.

Es kann gezeigt werden /Marsden 1983/, daß ein auf \mathcal{B} gegebenes Vektorfeld $\mathbf{b}_x = b_x^A \cdot \mathbf{E}_A$ im Punkt X^I mit dem Deformationsgradienten F durch die Abbildung $T\varphi \cdot \mathbf{b}_x \equiv \varphi_* \mathbf{b}_x$ in die aktuelle Konfiguration $C = \varphi(\mathcal{B})$ transformiert wird (sogenannte „push forward“-Operation).

$$(T\varphi \cdot \mathbf{b}_x)^i \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\partial \varphi^i}{\partial X^J} b^J \cdot \mathbf{e}_i \quad (2.12)$$

Die Koordinaten des Deformationsgradienten sind definiert zu:

$$F^i{}_J := \frac{\partial \varphi^i}{\partial X^J} = \frac{\partial x^i}{\partial X^J} \quad (2.13)$$

Das für Vektorkoordinaten gegebene Transformationsgesetz schließt die Transformation der Basisvektoren mit ein. Die Matrix der Koordinaten des Deformationsgradienten ist dann mit der Jakobimatrix (Funktionalmatrix) identisch. Die Transformationsregeln für die kovarianten Vektorkoordinaten sowie für sämtliche gemischte Darstellungen sollen hier nicht alle wieder gegeben werden. Vielmehr werden sie für die benötigten Spannungs- und Deformationstensoren an entsprechender Stelle angeben.

2.1.4 Vereinfachte Darstellung

Im Schrifttum werden häufig affine kartesische Koordinaten bevorzugt. Die Koordinatenlinien auf dem Körper \mathcal{B} sollen in der aktuellen Konfiguration C und der ursprünglichen Lage 0C zur Zeit $t = 0$ geradlinig sein und parallel zu den Standardbasen $\hat{\mathbf{i}}_i = \hat{\mathbf{I}}_I$ verlaufen - kanonische Koordinaten. Der Ursprung beider Basissysteme soll zusammenfallen.

Für die materiellen und räumlichen Basen gilt:

$$\mathbf{E}_A = \frac{\partial Z^I}{\partial X^A} \hat{\mathbf{I}}_I = \delta_{IA} \hat{\mathbf{I}}_I = \hat{\mathbf{I}}_A \quad (2.14)$$

$$\mathbf{e}_a = \frac{\partial z^i}{\partial x^a} \hat{\mathbf{i}}_i = \delta_{ia} \hat{\mathbf{i}}_i = \hat{\mathbf{i}}_a \quad (2.15)$$

Die Metriktensoren gehen in das Kronecker-Symbol über.

$$G_{AB} = \delta_{IA} \delta_{JB} \delta_{IJ} = \delta_{AB} \quad (2.16)$$

$$g_{ab} = \delta_{ia} \delta_{jb} \delta_{ij} = \delta_{ab} \quad (2.17)$$

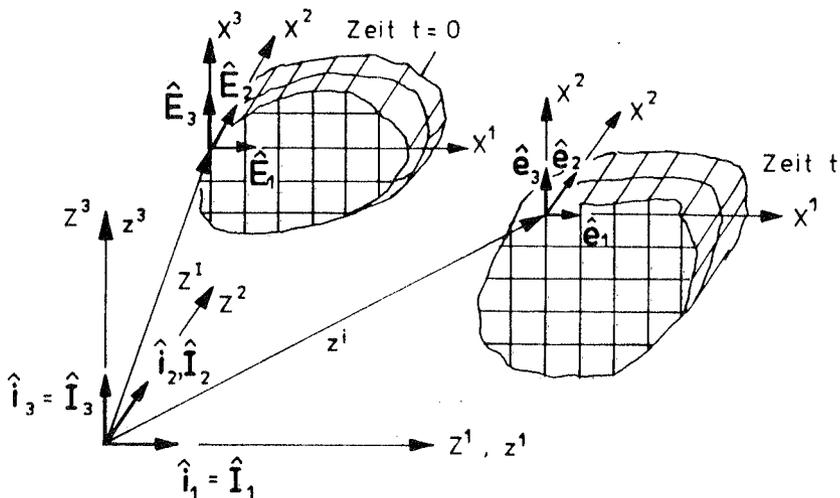


Bild 2.4 : Kartesische Koordinatensysteme

Es genügt bei allen Tensorkoordinaten nur mit unteren Indizes zu arbeiten. Kleinbuchstaben für Indizes sind weiterhin für räumliche Koordinaten, Großbuchstaben für materielle Koordinaten vorbehalten. Die im Teil 3 für das allgemeine Kontinuum verwendete Schreibweise orientiert sich an /Malvern 1969/, wo für die Euklidischen Koordinaten Z^I, z^i die Bezeichnungen X_I, x_i eingeführt werden. Sie lassen sich mit dem Ortsvektor eines Partikels von \mathcal{B} identifizieren. Die Konfiguration zur Zeit $t = 0$ wird auch mit Ausgangslage oder Ausgangsgeometrie X_I bezeichnet, die aktuelle Konfiguration mit Momentanzustand oder aktuelle Geometrie x_i . Für die Beschreibung der Größen in Abhängigkeit der materiellen Koordinaten hat sich der Begriff Lagrangesche Formulierung, für jene in Abhängigkeit der räumlichen Koordinaten die Bezeichnung Eulersche Formulierung eingebürgert. Es wird darauf hingewiesen, daß nur im Kapitel 3.7 und im Teil 4 der Arbeit allgemeine, krummlinige Koordinaten mit der in Abschnitt 2.1.2 eingeführten Schreibweise verwendet werden.

2.2 Gleichgewichtsaussagen

Auf die Struktur wirken als äußere Lasten
 die Kräfte q_i auf der Oberfläche a_σ ,
 die Volumenkräfte ρb_i
 sowie die Trägheitskräfte $\rho \ddot{x}_i$
 ein.

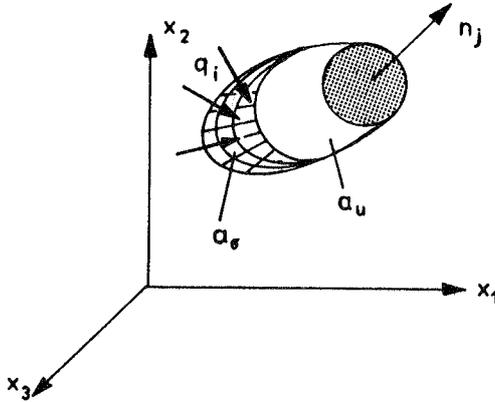


Bild 2.5 : Aktuelle Konfiguration der Struktur mit Volumen v und Oberfläche a

$t_i = \sigma_{ji} n_j$ Spannungsvektor

σ_{ij} = Cauchy-Spannungstensor

n_j = Normale des differentiellen Flächenelementes

Auf dem Rand a_σ : $t_i = q_i$

Auf dem Rand a_u : $u_i = \bar{u}_i$

Aus der Forderung des Gleichgewichtsprinzips, daß die Summe aller äußeren Kräfte verschwinden soll,

$$\int_{a_u} t_i da + \int_{a_\sigma} q_i da + \int_v (\rho b_i - \rho \ddot{x}_i) dv = 0 \quad (2.18)$$

geht mit Hilfe der Randbedingung $q_i = \sigma_{ij} n_j$ auf a_σ und des Divergenztheorems die lokale Gleichgewichtsbedingung in der Eulerschen Betrachtungsweise hervor.

$$\int_v (\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \ddot{x}_i) dv = 0 \quad (2.19)$$

↔

$$\begin{aligned} \sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \ddot{x}_i &= 0 && \text{im Gebiet } v \\ u_i &= \bar{u}_i && \text{am Rand } a_u \\ t_i = \sigma_{ji} n_j &= q_i && \text{am Rand } a_\sigma \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ohne weitere Ausführungen wird bemerkt, daß aus dem Momentengleichgewicht die Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

hervorgeht, falls keine eingepprägten äußeren Momente auftreten sollen.

Durch Multiplikation der Differentialgleichung mit der Wichtungsfunktion $w_i = w_i(u_i)$ und Integration über das Gebiet v wird ein Funktional F_u konstruiert.

$$\begin{aligned} F_u := \int_v w_i (\sigma_{ji,j} + \rho b_i - \rho \ddot{x}_i) dv &= 0 \\ u_i &= \bar{u}_i \text{ auf } a_u \\ t_i = \sigma_{ji} n_j &= q_i \text{ auf } a_\sigma \end{aligned} \quad (2.21)$$

Die Bedingung $F_u = 0$ stellt keineswegs schwächere Anforderungen an die Gleichgewichtsaussage als die lokale Differentialgleichung, denn sie muß für jede beliebige Wichtungsfunktion w_i erfüllt sein. Durch partielle Integration und Anwendung des Theorems von Gauss erhält man die „schwache Form“ der Gleichgewichtsaussage.

$$\int_v w_{i,j} \sigma_{ji} dv = \int_{a_u} w_i t_i da + \int_{a_\sigma} w_i q_i da + \int_v w_i (\rho b_i - \rho \ddot{x}_i) dv \quad (2.22)$$

Werden die Wichtungsfunktionen w_i mit den virtuellen Verschiebungen δu_i identifiziert, so spricht man auch von der kanonischen Form der Galerkingleichungen oder vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Die virtuellen Verschiebungen sollen die wesentlichen Randbedingungen $u_i - \bar{u}_i = 0$ erfüllen, d.h. $\delta u_i = 0$ auf dem Rand a_u .

$$\int_v \delta u_{i,j} \sigma_{ji} dv = \underbrace{\int_{a_\sigma} \delta u_i q_i da + \int_v \delta u_i (\rho b_i - \rho \ddot{x}_i) dv}_{\delta W_{ext} = \text{äußere virtuelle Arbeit}} \quad (2.23)$$

Die Eulersche Fassung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen soll nun in die Lagrangesche Darstellung umgeformt werden. Über den Kraftvektor

kann der Spannungsvektor t_i in den Pseudospnungsvektor 0t_i umgerechnet werden.

$${}^0t_i dA = t_i da \quad (2.24)$$

Die Komponentenzzerlegung des Pseudospnungsvektors 0t_i (wahrer Kraftvektor dividiert durch differentielles Flächenelement des Ausgangszustands) mit der Flächennormalen N_J in der unverformten Lage führt auf den un-symmetrischen ersten Piola-Kirchhoff-Tensor P_{iJ} .

$${}^0t_i =: P_{iJ} N_J \quad (2.25)$$

Aus dem Momentengleichgewicht resultiert die Vertauschbarkeit in den Indices i und j für die Gleichung

$$P_{iK} F_{jK} = P_{jK} F_{iK} .$$

Gebräuchlich ist auch, den ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor mit der transponierten Matrix der Komponenten zu definieren $T_{ji}^0 \hat{=} P_{iJ}$. Innerhalb dieser Arbeit wird die in /Marsden 1983/ oder /Truesdell 1965/ gegebene Definition Gl. 2.25 bevorzugt.

Zwischen dem Cauchy- und dem Piola-Kirchhoff-Spannungstensor besteht folgendes Transformationsgesetz:

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} P_{iK} F_{jK} \quad (2.26)$$

Gleichung Gl. 2.23 ergibt sich mit Hilfe von $dv = \frac{\rho_0}{\rho} dV$ und der Kontinuitätsgleichung $\det F_{iJ} = \frac{\rho_0}{\rho}$ zu:

$$\int_V \delta u_{i,J} P_{iJ} dV = \delta W_{ext} \quad (2.27)$$

Mit Hilfe von

$$x_i = X_i + u_i \quad (2.28)$$

folgt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Darstellung mit Doppelfeldtensoren.

$$\int_V \delta F_{iJ} P_{iJ} dV = \delta W_{ext} \quad (2.29)$$

(Lagrange-I-Fassung nach /Bufler 1971/)

In seiner Eigenschaft als Doppelfeldtensor bezieht das erste Piola-Kirchhoff-Spannungsmaß den aktuellen Kraftvektor auf die Ausgangskonfiguration. Der zweite Index der Tensorkomponenten korrespondiert mit

den materiellen Basen, während der erste auf die räumlichen Basen wirkt, welche in der Zeit veränderlich sind. Die Darstellung der virtuellen inneren Arbeit im Lagrangeschen Bild mit vollkommen materiellen Tensoren legt die Definition des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors nahe.

$$\int_V \delta F_{iJ} \delta_{ik} P_{kJ} dV = \int_V \delta F_{iJ} F_{iL} F_{Lk}^{-1} P_{kJ} dV = \delta W_{ext} \quad (2.30)$$

Definition des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors:

$$S_{JI} := P_{kJ} F_{Ik}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad P_{iJ} = S_{KJ} F_{iK} \quad (2.31)$$

$$\int_V \delta F_{iJ} F_{iL} S_{JL} dV = \delta W_{ext} \quad (2.32)$$

Aufgrund der Symmetrie des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors (Boltzmann-Kontinuum) läßt sich die virtuelle innere Arbeit in materiellen Koordinaten folgendermaßen nachweisen:

$$\int_V \delta \left(\frac{1}{2} F_{kI} F_{kJ} \right) S_{IJ} dV = \delta W_{ext} \quad (2.33)$$

(Lagrange-II-Fassung nach /Bufler 1971/)

Prinzip der virtuellen Verschiebungen in materieller Darstellung (nur materielle Tensoren)

2.3 Kinematische Beziehungen

Aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen geht der kinematische Operator für das Dehnungsmaß in materiellen Koordinaten \bar{C}_{IJ} (rechter Cauchy-Green-Deformationstensor) hervor, denn der statische und der kinematische Operator sind über den Gaußschen Integralsatz miteinander gekoppelt. Der rechte Cauchy-Green-Deformationstensor \bar{C}_{IJ} veranlaßt zur Definition des Green-Lagrange-Verzerrungstensors ϵ_{IJ} , der als energetisch konjugierte Verzerrungsgröße dem zweiten Piola-Kirchoff-Spannungstensor zugeordnet ist.

$$\epsilon_{IJ} = \frac{1}{2} (F_{kI} F_{kJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2} (\bar{C}_{IJ} - \delta_{IJ}) \quad (2.34)$$

Der rechte Cauchy-Green-Tensor ist ein Maß für die Deformation der räumlichen Metrik g_{ij} infolge der Bewegung φ in der Darstellung mit materiellen (Lagrangeschen) Koordinaten.

Das zum Green-Lagrange-Verzerrungstensor gehörende Dehnungsmaß in den räumlichen Koordinaten ist der Euler-Almansi-Verzerrungstensor e_{ij} . Auf den ersten Blick scheint dessen Definition

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - F_{Ki}^{-1} F_{Kj}^{-1}) \quad (2.35)$$

unmotiviert. Er geht jedoch mit dem Transformationsgesetz für kovariante Tensoren direkt aus dem materiellen Verzerrungstensor ϵ_{KL} hervor. Da der rechte Cauchy-Green-Deformationstensor identisch mit der Transformation des räumlichen Metriktensors g_{ij} auf die materiellen Koordinaten ist (sogenannte „pullback“-Operation im englischen Schrifttum), geht dessen Relevanz auch unmittelbar aus dem Werkstoffgesetz hervor.

2.4 Elastische Stoffgesetze

Sowohl das Gleichgewicht als auch die Deformationen können durch die materiellen oder die räumlichen Tensoren eindeutig beschrieben werden. Jedoch entscheiden die Werkstoffbeziehungen letztendlich über die zu verwendende Formulierung. Physikalisch sinnvolle Werkstoffgesetze müssen den Objektivitätsforderungen hinsichtlich Starrkörperrotation oder Invarianz gegen Drehung des Koordinatensystems genügen. Sie sind daher zwischen geeigneten Spannungs- und Verzerrungsmaßen zu formulieren. Im materiellen - oder Lagrangeschen - Sinn wird das Materialgesetz zwischen dem zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und den Green-Lagrange-Verzerrungen angeschrieben,

$$S_{IJ} = f(\epsilon_{IJ}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon_{IJ}} \quad (2.36)$$

in der räumlichen - oder Eulerschen - Fassung ist es zwischen den Cauchy-Spannungen und den Almansi-Verzerrungen gegeben.

$$\sigma_{ij} = f(e_{ij}) = \frac{\partial \psi}{\partial e_{ij}} \quad (2.37)$$

Die Funktionen $\Psi = \Psi(\epsilon_{IJ})$ und $\psi = \psi(e_{ij})$ repräsentieren das spezifische elastische Verzerrungspotential in der materiellen bzw. räumlichen Fassung. Über die Dichte ρ des Materials stehen die Potentialfunktionen mit den freien Energiefunktionen $\hat{\Psi}$ bzw. $\hat{\psi}$ in Verbindung. Auf die konstitutiven Tensoren wird im Teil 3 eingegangen, welche für hyperelastische Kontinua nur im Zuge der Linearisierung von Bedeutung sind. Passend zum elastischen Potential Ψ kann die Existenz eines elastischen Komplementärpotentials $\Omega = \Omega(S_{IJ})$ angenommen werden, wobei die Invertierbarkeit der Werkstoffbeziehung vorauszusetzen ist. In Konsequenz zur Fließtheorie im Spannungsraum wird häufig das Spannungspotential Ω aufgestellt, da die Spannungen als primäre Werkstoffvariable behandelt werden. Über die Legendre-Transformation kann von den Spannungen auf die Dehnungen als unabhängige Variable umgestiegen werden. Bei stabilen elastischen oder verfestigenden elastoplastischen Materialien sind aufgrund des streng monotonen Wachstums der Spannungs-Dehnungskurve die notwendigen Bedingungen für die Inversion des Stoffgesetzes gegeben.

2.5 Elastoplastische Stoffgesetze

2.5.1 Zur Theorie plastischer Deformationen

Irreversible Deformationen in Strukturen kommen durch das Unvermögen des Werkstoffes zustande, beliebig großen Spannungen zu widerstehen. Während das elastische Verhalten dadurch gekennzeichnet ist, daß bei Be- und Entlastung die gleiche Spannungs-Dehnungskurve durchlaufen wird und zwischen Spannungen und Dehnungen ein umkehrbarer und eindeutiger Zusammenhang besteht, erfolgt beim elastoplastischen Material die Entlastung auf einer elastischen Kurve mit verbleibenden Deformationen. Die erneute Wiederbelastungskurve stimmt mit dem Entlastungsgraphen bis auf eine schmale Hysteresis-Schleife überein, die vom mathematischen Modell in der Regel nicht erfaßt wird.

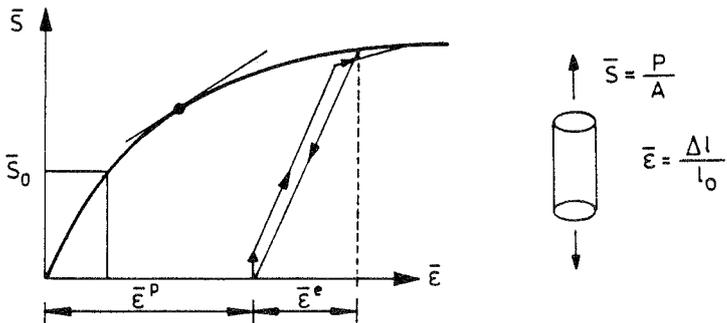


Bild 2.6 : Arbeitsdiagramm

Im Vordergrund der Plastizitätstheorie in der Kontinuumsmechanik steht weniger die Modellbildung der mikroskopischen Vorgänge im kristallinen Bereich des Werkstoffes sondern die phänomenologische Erfassung des Deformationsverhaltens unter mechanischer Beanspruchung. Bei der hier verwendeten Plastizitätstheorie handelt es sich um die Fließtheorie, welche im Gegensatz zur Deformationstheorie nach Hencky und Nadai eine geschwindigkeitsabhängige Werkstofftheorie ist. Die Deformationstheorie, welche eine totale Verzerrungstheorie ist, kann die Wegabhängigkeit des Belastungspfades nicht erfassen, da die totalen Dehnungen als Funktion des Spannungszustands dargestellt werden. Daher ist sie zur Unterscheidung von solchen Beanspruchungsvorgängen ungeeignet, wo die Verbindungskurve aller durchlaufenen Spannungszustände im Hauptspannungsraum von einem

„radialen“ Belastungsweg stärker abweicht. Typische Beispiele hierfür sind die ungleichmäßige Steigerung unterschiedlicher Lastgruppen oder die sogenannte Spannungsumlagerung bei Flächentragwerken unter proportionaler Laststeigerung.

Die hier verwendete Formulierung der Fließtheorie in materieller Darstellung geht auf Green und Naghdi zurück /Green 1965/. Sie eignet sich besonders zur Modellierung von dünnwandigen Flächentragwerken, welche zwar endlichen Rotationen aber in der Regel kleinen Verzerrungen unterzogen werden. Kennzeichnend für die Fließtheorie im Spannungsraum ist, daß beim plastischen Verhalten aus dem Spannungszustand lediglich die Richtung des plastischen Verformungszuwachses $\dot{\epsilon}_{IJ}^p$ bestimmt werden kann.

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^p = f(S_{IJ})$$

Das Eintreten eines plastischen Verformungszuwachses ist an eine Belastungsänderung dergestalt gebunden, daß beim stabilen Material das innere Produkt aus Spannungs- und plastischen Verzerrungsänderungen zumindest nicht negativ sein darf.

$$\dot{S}_{IJ} \dot{\epsilon}_{IJ}^p \geq 0 \quad (2.38)$$

Gleiches gilt auch für einen Spannungszyklus, dessen dissipierte plastische Arbeit positiv sein muß, wenn vom Spannungszustand ${}^A S_{IJ}$ weiterbelastet wird.

$$\left(S_{IJ} - {}^A S_{IJ} \right) \dot{\epsilon}_{IJ}^p \geq 0 \quad (2.39)$$

Das Gleichheitszeichen tritt im ideal-plastischen Fall auf.

Aus diesen beiden nach Drucker benannten Postulaten leiten sich die beiden Bedingungen ab,

- daß die Fließflächen überall konvex sein müssen,

und

- daß der plastische Verformungszuwachs senkrecht zu den Höhenlinien des plastischen Potentials $\phi = \phi(S_{IJ})$ sein muß (Normalenregel).

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial S_{IJ}} \quad (2.40)$$

Der Skalar λ dient als Maßstabsfaktor zwischen dem Gradienten und dem Verzerrungszuwachs. Da λ monoton wachsend ist, wird $\dot{\lambda}$ nicht negativ sein.

2.5.2 Grundlagen der Fließtheorie

A) Fließbedingung

Zur Klassifizierung ob eine vorgegebene Beanspruchungsänderung elastischer oder plastischer Natur ist, wird eine skalarwertige Fließbedingung $F(S_{IJ}, \epsilon_{IJ}^p, \kappa) = 0$ /Fung 1965/, /Betten 1986/ auf der Grundlage von Materialversuchen eingeführt. F umschließt die Menge aller zulässigen, d.h. physikalisch möglichen Spannungszustände S_{IJ} . Als Konsequenz der Stabilitätsannahmen nach Drucker ist die Fließbedingung F mit dem plastischen Potential ϕ identisch. Beim assoziierten (zugeordneten) Fließgesetz dient sie gleichzeitig als Potentialfunktion, deren Gradient in Richtung der plastischen Verzerrungsänderungen weist.

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial S_{IJ}} \quad (2.41)$$

Auf der Basis von Gl. 2.38 und der zugeordneten Fließregel ist die Belastungsänderung eines stabilen, verfestigenden Materials

$$\begin{aligned} & \text{elastisch, falls } F < 0 \\ & \text{oder } F = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial S_{IJ}} \dot{S}_{IJ} < 0 \text{ (Entlastung)} \\ \text{und} & \\ & \text{plastisch, falls } F = 0 \text{ und } \frac{\partial F}{\partial S_{IJ}} \dot{S}_{IJ} > 0 \text{ (Belastung).} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Das stets positive Vorzeichen des Multiplikators $\dot{\lambda}$ ist ausgenutzt worden.

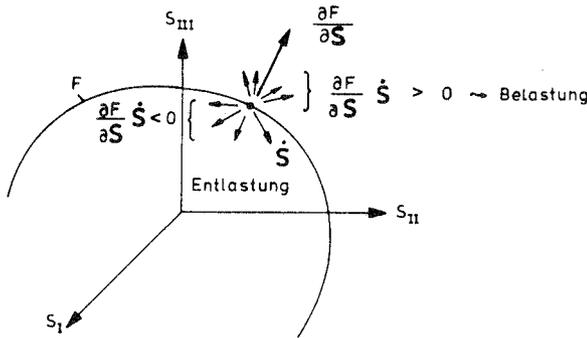


Bild 2.7 : Belastungskriterium der Fließtheorie

Obwohl eine große Auswahl sorgfältig bestimmter Fließkriterien im Schrifttum /Chen 1982/, /Dafalias 1986a, 1986b/ zu finden ist, sind die Un-

terschiede zwischen ihnen oftmals wesentlich kleiner als die Unsicherheiten infolge Streuung der Materialkennwerte des vorliegenden Werkstoffes.

Im Vordergrund der weiteren Überlegungen stehen zuerst die methodischen Gesichtspunkte der numerischen Lösungsverfahren geschwindigkeitsabhängiger Stoffgesetze, die für die gesamte Klasse von Fließkriterien mit Verfestigung sowie für assoziierte und nichtassoziierte Fließregeln entwickelt werden.

Die Isotropiebedingungen sind erfüllt, wenn das Fließkriterium direkt in den Invarianten des Spannungstensors I_1, II_2, III_3 oder dessen Deviators J_2, J_3 formuliert wird, um den hydrostatischen Druck I_1 von der zweiten und dritten Invariante zu separieren.

$$F = F(I_1, J_2, J_3, \dot{\epsilon}_{IJ}^p, \kappa) \quad (2.43)$$

Bei isotroper Verfestigung soll die Form der Verfestigungsfläche F und ihre Lage im Hauptspannungsraum erhalten bleiben.

$$F = f(I_1, J_2, J_3) - Y(\dot{\epsilon}_{IJ}^p, \kappa) = 0 \quad (2.44)$$

Die geometrische Darstellung der Bedingung $F = 0$ im Spannungsraum wird als Verfestigungsfläche /Betten 1986/, /Hill 1950/ bezeichnet, welche der Fließfläche $f(I_1, J_2, J_3) = \textit{konstant}$ gleichkommt, solange keine plastischen Deformationen stattgefunden haben. Durch die Fließregel Gl. 2.41 wird üblicherweise verlangt, daß der plastische Fluß normal zu den Höhenlinien der Fließfläche stattfindet.

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} \quad (2.45)$$

Der plastische Verzerrungszuwachs wird von der Verfestigungsfunktion Y nicht beeinflusst.

Einer der bedeutendsten und einfachsten Ansätze für Fließflächen geht auf R. von Mises (1928) zurück. Er schlägt die zur zweiten Deviatorinvarianten proportionale Gestaltänderungsarbeit als Beanspruchungsmaß für den Beginn des Plastifizierens vor.

$$f = \frac{1}{2} S'_{IJ} S'_{IJ} \quad (2.46)$$

Ersetzt man die Koordinaten des Spannungsdeviators durch die Koordinaten des Spannungstensors,

$$S'_{IJ} = S_{IJ} - \frac{1}{3} \delta_{IJ} S_{KK} \quad (2.47)$$

so lautet Gleichung 2.46:

$$f = \frac{1}{2} S_{IJ} S_{IJ} - \frac{1}{6} (S_{KK})^2 \quad (2.48)$$

Nicht empfehlenswert für numerische Berechnungen mit impliziten Lösungsverfahren sind Fließflächen mit „Ecken“, wie sie beispielsweise durch das Tresca- oder das Mohr-Coulomb-Kriterium gegeben sind. Konvergenzprobleme während der Gleichgewichtssiteration sind häufig Ursache der fehlenden Stetigkeitseigenschaften der ersten und zweiten Ableitungen /Hughes 1986/, /Needleman 1985/, sofern keine Zusatzmaßnahmen getroffen werden.

B) Verfestigungsverhalten

Mit der Funktion $Y(\dot{\epsilon}_{IJ}^p, \kappa)$ in Gl. 2.44 wird das Verfestigungsverhalten infolge der plastischen Deformationen beschrieben. Die Beschränkung auf ideal-elastoplastische Werkstoffe ist aus der Sicht numerischer Lösungsverfahren grundlos und führt zu zwei vermeidbaren Schwierigkeiten:

- Die Tangentensteifigkeitsmatrix ist im Bereich großer Fließzonen schlecht konditioniert, da der Werkstofftensor des ideal-elastoplastischen Materials singulär wird.
- Bei zahlreichen elastoplastischen Werkstoffen kann die Fließgrenze nicht eindeutig definiert werden. Als Fließpunkt ist gegebenenfalls die sogenannte Proportionalitätsgrenze am Übergang zum degressiven Verlauf des Arbeitsdiagrammes oder die scheinbare elastische Grenze nach Johnson zu nehmen, an welcher die Steigung der Spannungs-Dehnungskurve auf fünfzig Prozent ihres anfänglichen Wertes abgefallen ist. Die Unsicherheiten bei der Bestimmung der äquivalenten einaxialen Fließspannung lassen sich durch den Verfestigungsverlauf korrigieren.

In Traglastberechnungen von Flächentragwerken werden metallische Werkstoffe teilweise bis zum fünfzigfachen der Fließdehnung beansprucht, so daß dem Verfestigungsverhalten angemessene Bedeutung zukommt.

Eng mit den Verfestigungsannahmen ist die Frage nach der „Äquipräsens“ aller unabhängigen Zustandsvariablen verbunden /Malvern 1969/, /Truesdell 1960/: Welches sind die unabhängigen Zustandsgrößen zur Beschreibung elastoplastischer Werkstoffgesetze? Treten neben den plastischen Dehnungen weitere interne Variable κ zur vollständigen Festlegung des plastischen Zustandes auf? Lehmann bemerkt in /Lehmann 1972/ hierzu, daß

selbst die einaxiale plastische Verzerrung $\bar{\epsilon}^p$ eine fragwürdige Größe zur Beschreibung des irreversiblen Zustandes ist, „denn der gleiche plastische Verzerrungszustand läßt sich auf sehr verschiedenen Wegen erreichen, die sicherlich zu unterschiedlichen Zuständen des Körpers führen. Das gleiche gilt für die plastische Arbeit“, welche ebensowenig auf die Eindeutigkeit des Deformationsweges für ein wegabhängiges Material abhebt.

Zitat aus /Lehmann 1972, S.297/: „In dieser Situation behilft man sich wo es um das konkrete Formulieren von Stoffgesetzen im Rahmen einer phänomenologischen Theorie geht - allgemein damit, daß man ‚Pseudozustandsgrößen‘, eben etwa die plastischen Verzerrungen und die plastische Arbeit einführt und ihre Abhängigkeit von den übrigen Zustandsgrößen beschreibt“. Auf der Grundlage thermodynamischer Energiegleichungen zeigt Lehmann /Lehmann 1982, Gl.(25)/, daß unter bestimmten Voraussetzungen die interne Variable κ ausschließlich in Abhängigkeit der plastischen Arbeitrate \dot{W}^p und der inelastischen Dehnungsrate $\dot{\epsilon}_{IJ}^p$ gesetzt werden kann.

Die naheliegendsten Möglichkeiten zur Darstellung des skalaren Verfestigungsmaßes Y als Funktion der einfachsten invarianten Größen sind die

- *plastische Arbeit* W^p aus dem inneren Produkt des Spannungs- und plastischen Verzerrungstensors

$$\dot{W}^p = S_{IJ} \dot{\epsilon}_{IJ}^p \quad \text{Arbeitsverfestigung} \quad (2.49)$$

und die

- *plastische Vergleichsdehnung* $\bar{\epsilon}^p$, welche entweder aus der zweiten oder dritten Invariante des Tensors der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten gebildet werden kann.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}^p &\propto \dot{\epsilon}_{IJ}^p \dot{\epsilon}_{IJ}^p \\ \bar{\epsilon}^p &\propto \dot{\epsilon}_{IJ}^p \dot{\epsilon}_{JK}^p \dot{\epsilon}_{KI}^p \end{aligned} \right\} \text{Verzerrungsverfestigung} \quad (2.50)$$

Die Abhängigkeit der Vergleichsdehnung $\bar{\epsilon}^p$ von der ersten Tensorinvarianten $\dot{\epsilon}^p_{KK}$ ist zwar denkbar, widerspricht jedoch den meisten Versuchsergebnissen, da die plastischen Deformationen im wesentlichen dilatationsunabhängig sind. Durch Integration über die Zeit erhält man für die plastische Arbeit:

$$W^p = \int_0^t S_{IJ} \dot{\epsilon}_{IJ}^p d\tau \quad (2.51)$$

und für den üblichen Fall der Vergleichsdehnung:

$$\bar{\epsilon}^p = \int_0^t \left(\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{IJ}^p \dot{\epsilon}_{IJ}^p \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \quad (2.52)$$

Möglich ist ebenso, die plastischen Verzerrungskomponenten zuerst aufzutegrieren $\epsilon_{IJ}^p = \int_0^t \dot{\epsilon}_{IJ}^p d\tau$ und danach skalare Größen in Form der Invarianten zu bilden.

Sowohl die Vergleichsdehnungsrate $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ als auch die Dissipationsleistung \dot{W}^p sind proportional zur Änderung des plastischen Multiplikatorinkrements $\dot{\lambda}$ und können entsprechend vereinheitlicht werden:

$$\dot{\kappa} = \dot{\lambda} \mathcal{H} \quad (2.53)$$

\Leftrightarrow

$$\dot{\kappa} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\bar{\epsilon}}^p \\ \dot{W}^p \end{array} \right\} = \dot{\lambda} \cdot \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{2}{3} \frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} \frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ S_{IJ} \frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} \end{array} \right\} \quad (2.54)$$

Die skalarwertige Funktion \mathcal{H} wird im weiteren auch als *Verfestigungsannahme* bezeichnet. Da die interne Variable als „Pseudozustandsgröße“ eingeführt worden ist, hängt die Funktion \mathcal{H} vom Gradienten der Fließfläche und vom Spannungszustand S_{IJ} ab, der sich mit dem Parameter t ändert.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H} \left(S_{IJ}, \frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} \right)$$

Die interne Variable κ wird durch Zeitintegration der Gl. 2.53 ermittelt.

$$\kappa = \int_0^t \mathcal{H}(S_{IJ}(\tau)) \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau \quad (2.55)$$

Die Abhängigkeit der Verfestigungsannahme \mathcal{H} von den Spannungen hat weitreichende Konsequenzen auf die Symmetrie der elastoplastischen Spannungs-Dehnungsbeziehung für die konsistente Tangentensteifigkeit der wegunabhängigen Iteration - siehe Teil 6. Desweiteren erfüllt der Gradient in der Fließregel zur Bestimmung der Verzerrungsgeschwindigkeiten nicht mehr die Normalitätsbedingung hinsichtlich der Verfestigungsfläche Gl. 2.44, welche infolge Verfestigung aus der Fließfläche hervorgeht.

2.5.3 Versuchswesen und einaxiales Verfestigungsverhalten

Über die Verfestigungsannahme \mathcal{H} gelingt es, das mehraxiale Verfestigungsverhalten in das einer „einaxialen“ Beanspruchung zu überführen. Dadurch wird die Anzahl notwendiger Experimente auf ein paar wenige Versuchsreihen beschränkt, zum Beispiel: einaxialer Zug- oder Druckversuch, reiner Schub- oder Triaxialversuch. Aus den Meßergebnissen dieser Experimente kann ein sogenanntes Arbeitsdiagramm erstellt werden, in welchem die einaxiale Fließspannung \bar{S} über der internen Variablen κ aufgetragen ist. Der plastische Verfestigungsmodul $H(\kappa) := \frac{d\bar{S}}{d\kappa}$ steht für die Änderung der einaxialen Fließspannung \bar{S} als Funktion des plastischen Parameters κ .

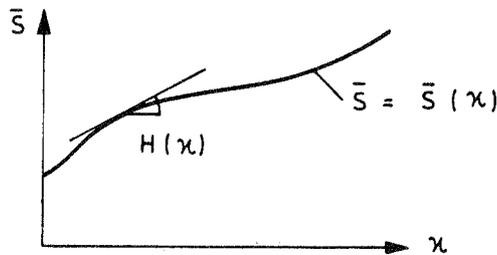


Bild 2.8 : Fließspannung in Abhängigkeit der internen Variable des einaxialen Vergleichszustands

Oftmals wird die einaxiale Fließspannung \bar{S} direkt in Abhängigkeit der einaxialen Verzerrung $\bar{\epsilon}$ oder deren plastischen Anteils $\bar{\epsilon}^p$ angegeben.

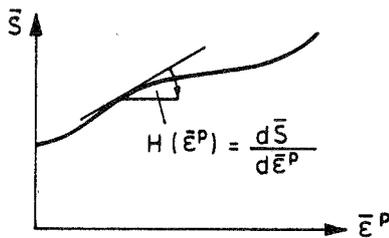


Bild 2.9 : Arbeitsdiagramm zwischen der einaxialen Fließspannung und der plastischen Vergleichsdehnung

Durch Einsetzen des einaxialen Spannungszustandes einer Zug- oder Druckprobe in das von Mises-Fließkriterium nach Gl. 2.48 kann die Ver-

festigungsfunktion Y in Zusammenhang mit der einaxialen Fließspannung \bar{S} gebracht werden.

$$F = \left(\frac{1}{2} S_{11}^2 - \frac{1}{6} S_{11}^2 \right) - Y = 0$$

$$\iff Y = \frac{1}{3} S_{11}^2 \stackrel{!}{=} \frac{1}{3} \bar{S}^2 \quad (2.56)$$

Als Funktion der Fließgrenze einer einaxialen Zug- oder Druckprobe lautet die Fließbedingung dann:

$$F = \frac{1}{2} S'_{IJ} S'_{IJ} - \frac{1}{3} \bar{S}^2 = 0 \quad (2.57)$$

2.5.4 Anwendung auf die J_2 -Fließtheorie

Die plastischen Verzerrungsraten ergeben sich im Fall des assoziierten von Mises-Fließkriteriums zu:

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^p = \dot{\lambda} S'_{IJ} \quad (2.58)$$

Aus der Verfestigungshypothese der plastischen Arbeit können die einaxialen plastischen Verzerrungsänderungen ermittelt werden,

$$\dot{W}^p = \bar{S} \dot{\epsilon}^p \stackrel{!}{=} S_{IJ} \dot{\epsilon}_{IJ}^p \quad (2.59)$$

indem von Gl. 2.58, Gl. 2.57 und Gl. 2.48 nacheinander Gebrauch gemacht wird.

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \sqrt{\frac{2}{3} S'_{IJ} S'_{IJ}} \quad (2.60)$$

Wie sofort erkennbar ist, führt die Verzerrungsverfestigungshypothese im Sonderfall der J_2 -Fließtheorie auf dasselbe Ergebnis wie unter Gl. 2.60, wenn die Fließregel Gl. 2.58 in die Definitionsgleichung für die äquivalente plastische Verzerrungsgeschwindigkeit Gl. 2.50 bzw. Gl. 2.52 eingesetzt wird.

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{\lambda} S'_{IJ}) (\dot{\lambda} S'_{IJ})}$$

2.6 Elastoplastischer Werkstofftensor der Fließtheorie

Mit Hilfe der fünf Grundgleichungen der Fließtheorie soll ein formelmäßiger Zusammenhang zwischen den Spannungs- und Verzerrungsgeschwindigkeiten gefunden werden.

$$\text{Fließannahme: } \dot{\epsilon}_{IJ} = \dot{\epsilon}_{IJ}^e + \dot{\epsilon}_{IJ}^p \quad (2.61)$$

$$\text{Elastizitätsgesetz: } \dot{\epsilon}_{IJ}^e = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_{IJ} \cdot \partial S_{KL}} \dot{S}_{KL} \quad (2.62)$$

$$\text{Fließregel: } \dot{\epsilon}_{IJ}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial S_{IJ}} \quad (2.63)$$

$$\text{Fließbedingung: } F = f - Y = 0 \quad (2.64)$$

$$\text{Verfestigungsannahme: } \dot{\kappa} = \dot{\lambda} \mathcal{H} \quad (2.65)$$

Das Elastizitätsgesetz und die Fließregel werden in Gl. 2.61 verwendet.

$$\dot{\epsilon}_{IJ} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_{IJ} \cdot \partial S_{KL}} \dot{S}_{KL} + \dot{\lambda} \frac{\partial \phi}{\partial S_{IJ}} \quad (2.66)$$

Die Änderung des plastischen Multiplikators $\dot{\lambda}$ geht aus der Konsistenzbedingung hervor, die aus dem totalen Differential der Fließbedingung entsteht.

$$\dot{F} = \frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} \dot{S}_{IJ} - \frac{dY}{d\kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (2.67)$$

Die Verfestigungsannahme erlaubt die Auflösung der Konsistenzgleichung nach dem Parameter $\dot{\lambda}$, falls nicht ideale Elastoplastizität vorliegt.

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H}} \frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} \dot{S}_{IJ} \quad (2.68)$$

Mit dem Ergebnis in Gl. 2.68 kann eine Beziehung zwischen den plastischen Dehnungsraten und den Spannungsraten hergestellt werden.

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^p = \frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H}} \frac{\partial \phi}{\partial S_{IJ}} \frac{\partial f}{\partial S_{KL}} \dot{S}_{KL} \quad (2.69)$$

Desgleichen gilt für die totalen Verzerrungsgeschwindigkeiten:

$$\dot{\epsilon}_{IJ} = \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_{IJ} \cdot \partial S_{KL}} + \frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H}} \frac{\partial \phi}{\partial S_{IJ}} \frac{\partial f}{\partial S_{KL}} \right] \dot{S}_{KL} \quad (2.70)$$

Hinter der Hessematrix des elastischen Komplementärpotentials verbirgt sich ein vierstufiger Tensor D_{IJKL}^{-1} , der für stabiles Material positiv definit und symmetrisch ist.

$$D_{IJKL}^{-1} := \frac{\partial^2 \Omega}{\partial S_{IJ} \cdot \partial S_{KL}} \quad (2.71)$$

Im zweiten Summanden in Gl. 2.70 steht das tensorielle Produkt

$$\frac{\partial \phi}{\partial S_{IJ}} \frac{\partial f}{\partial S_{KL}} \quad (2.72)$$

aus den Gradienten des plastischen Potentials ϕ und der Fließfläche f . Mit Vorgriff auf die symbolische Schreibweise in Teil 5 werden die Gleichungen Gl. 2.69 und Gl. 2.70 in Matrizen geschrieben und der Fließvektor \mathbf{a} sowie der Gradient \mathbf{q} an das plastische Potential definiert.

$$\mathbf{a} := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \quad (2.73)$$

$$\mathbf{q} := \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \quad (2.74)$$

$$\dot{\epsilon}^p = \frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H}} [\mathbf{q} \otimes \mathbf{a}^T] \dot{\mathbf{S}} \quad (2.75)$$

$$\dot{\epsilon} = \left[\mathbf{D}^{-1} + \frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H}} \mathbf{q} \otimes \mathbf{a}^T \right] \dot{\mathbf{S}} \quad (2.76)$$

Aus der Sicht der Matrizenalgebra kommt zur Matrix des elastischen Ergänzungstensors \mathbf{D}^{-1} das dyadische Produkt zweier Vektoren $\mathbf{q} \otimes \mathbf{a}^T$ hinzu, in welchen die Koordinaten zweistufiger Tensoren eingelagert sind. Für derartige Rang-eins-Modifikationen einer Matrix steht die Sherman-Morrison-Formel zur Inversion der Matrixsumme bereit.

$$\dot{\mathbf{S}} = \left[\mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{q} \otimes \mathbf{a}^T \mathbf{D}}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H} + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{q}} \right] \dot{\epsilon} \quad (2.77)$$

Der inverse elastische Ergänzungstensor \mathbf{D}^{-1} kommt in den obigen Formeln dem elastischen Materialsteifigkeitstensor aus dem Potential Ψ Gl. 2.36 gleich.

$$\mathbf{D} := \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon \cdot \partial \epsilon} \quad (2.78)$$

2.7 Erweiterung der Fließregel

2.7.1 Diskussion der klassischen Fließregel

Im Teil 5 wird gezeigt, wie die Fließregel Gl. 2.45 erweitert werden muß, um die Symmetrie des konstitutiven Tensors aus Gründen der Behandlung der internen Variable als Pseudozustandsgröße zu erhalten. Sowohl von experimenteller Seite /Lehmann 1982/, /Shiratori 1979/ als auch aufgrund theoretischer Überlegungen /Lehmann 1972/, /Betten 1986/, /Boehler 1976/, /Murakami 1979/ sind derartige Vorschläge bekannt. Das Gemeinsame hierbei ist ein zusätzlicher Term in der Fließregel /Lehmann 1982, Gl.(21)/ für isotrope Werkstoffe.

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^P = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial S_{IJ}} + \mathcal{H}_{IJKL} \dot{S}_{KL} \quad (2.79)$$

In der Regel wird \mathcal{H} durch einen Tensor vierter Stufe repräsentiert, welcher die sogenannten „Effekte zweiter Ordnung“ beschreibt. In /Lehmann 1982/ wurde für den Tensor \mathcal{H}_{IJKL} ein Vielfaches des vierstufigen Einheitstensors verwendet, womit eine rechnerisch wesentlich bessere Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen von Blix /Blix 1983/ erzielt werden konnte. Aufgrund theoretischer Betrachtungen kann die erweiterte Fassung der Fließregel mit den Methoden der Darstellungstheorie tensorwertiger Funktionen ebenfalls gefunden werden.

Innerhalb dieser Arbeit steht die Modifikation der Normalenregel am Ende einer formalen Differentiation der Fließbedingung durch Anwenden der Kettenregel auf die inneren Pseudozustandsgrößen. Desgleichen werden im Verlauf eines vollständigen Linearisierungsprozesses in Teil 6 zusätzliche Terme in den konstitutiven Gleichungen erzeugt, welche den Symmetrieforderungen von Ratenpotentialen widersprechen. Die Ursachen hierfür gehen auf die Verwendung der internen Größe κ als Pseudovariablen zurück. Mit zunehmenden plastischen Deformationen weicht die Verfestigungsfläche stärker von der anfänglichen Fließfläche ab. Gemäß der Normalenregel nach Gl. 2.45 verläuft der plastische Fluß jedoch senkrecht zur anfänglichen Fließfläche und nicht zur momentanen Verfestigungsfläche F . Der fehlende Korrekturterm ergibt sich aus der Zeitableitung der internen Variablen κ ,

$$\dot{\kappa} = \kappa(\lambda, S_{IJ}) \quad (2.80)$$

die als Funktion des plastischen Multiplikators λ sowie des Spannungszustandes S_{IJ} angenommen wird.

$$\dot{\kappa} = \frac{d\kappa}{d\lambda} \dot{\lambda} + \frac{\partial \kappa}{\partial S_{IJ}} \dot{S}_{IJ} \quad (2.81)$$

Gleichwertig mit der Fließregel ist das Prinzip der maximalen Dissipationsleistung \dot{W}^p /Drucker 1959/, /Hill 1950/, /Lubliner 1984/, /Simo 1987/, welches zur Beschreibung elastoplastischer Stoffgesetze anstelle der Fließregel postuliert werden kann und im Sonderfall eines isothermen und adiabatischen Prozesses dem Prinzip der maximalen spezifischen Entropieproduktion äquivalent ist. Auf die mathematischen Zusammenhänge wird in Abschnitt 2.7.2 eingegangen.

Zur numerischen Zeitintegration geschwindigkeitsabhängiger Stoffgleichungen muß in der Fließregel der Gradient an das plastische Potential für das gesamte Zeitinkrement fest vorgegeben werden - siehe Abschnitt 5.2, Gl. 5.27. Mit der Vorgabe dieses Gradienten für das gesamte Zeitintervall kann das zugehörige Inkrement der Dissipationsarbeit berechnet werden, welches durch Integration der Dissipationsleistung über den betrachteten Zeitabschnitt entsteht. Notwendigerweise muß die inkrementelle Dissipationsarbeit nicht maximal sein, denn sie ist von der Wahl des Zeitpunkts abhängig, an dem der Gradient aufgestellt wird. Naheliegender für die numerische Zeitintegration ist daher, anstelle der Fließregel das Maximum von der inkrementellen Dissipationsarbeit ΔW^p zu fordern. Damit ist gewährleistet, daß die numerisch ermittelte Last-Verschiebungskurve ein Weg maximaler inkrementeller Dissipationsarbeit zwischen aufeinanderfolgenden Zeitschritten ist. Selbst wenn die zahlenmäßigen Unterschiede praktischer Berechnungen marginal sind, so ist doch der methodisch konzeptionelle Aspekt des Prinzip von der maximalen inkrementellen Dissipationsarbeit attraktiv.

2.7.2 Das Prinzip vom Maximum der Dissipationsleistung

Das Prinzip vom Maximum der Dissipationsleistung reicht historisch zumindest bis auf R. von Mises /von Mises 1928/ zurück: „Die Deformationsgeschwindigkeiten eines plastischen Körpers unter Einfluß eines Spannungszustandes, der an der Fließgrenze liegt, regeln sich derart, daß sie bei einer unendlich kleinen Variation der Spannungen innerhalb der Fließgrenze keine zusätzliche Arbeit leisten.“

$$\dot{W}^p = S_{IJ} \dot{\epsilon}_{IJ}^p \longrightarrow \text{maximal} \quad (2.82)$$

mit der Nebenbedingung:

$$F = f - Y = 0$$

Das erweiterte Lagrangesche Funktional, in welchem der Lagrangesche Multiplikator $\dot{\lambda} \geq 0$ immer positiv ist,

$$L_{W^p} = -\dot{W}^p + \dot{\lambda} F \longrightarrow \text{stationär} \quad (2.83)$$

wird stationär für jedes beliebige virtuelle δS_{IJ} , wenn die erste Variation - siehe Kapitel 3.1 - zu null wird.

$$\delta L_{WP} = \frac{\partial L_{WP}}{\partial S_{IJ}} \delta S_{IJ} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.84)$$

$$\Leftrightarrow \quad \dot{\epsilon}_{IJ}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial S_{IJ}} \quad (2.85)$$

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^p = \dot{\lambda} \left[\frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} - \frac{dY}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial S_{IJ}} \right] \quad (2.86)$$

Die erweiterte Fließregel ergibt sich aus dem Verschwinden des Gradienten des erweiterten Funktionals, in welchem das Maximalproblem auf eine Minimierungsaufgabe transformiert worden ist /Luenberger 1984/, /Betten 1986/, /Oden 1976/. Aus Gl. 2.86 wird die Normalität des plastischen Flusses zur aktuellen Verfestigungsfläche deutlich. Sie unterscheidet sich insofern von Gl. 2.79, als die Spannungsraten \dot{S}_{IJ} noch nicht explizit in der Fließregel vorzufinden sind. Über die Konsistenzbedingung

$$\dot{F} = \frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} \dot{S}_{IJ} - \frac{dY}{d\kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (2.87)$$

und die Ratengleichung für die interne Variable Gl. 2.81 kann der plastische Multiplikator $\dot{\lambda}$ aus der erweiterten Fließregel eliminiert werden.

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\lambda}} \left(\frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} - \frac{dY}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial S_{IJ}} \right) \dot{S}_{IJ} \quad (2.88)$$

$$\dot{\epsilon}_{IJ}^p = \frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\lambda}} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial S_{IJ}} - \frac{dY}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial S_{IJ}} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial S_{KL}} - \frac{dY}{d\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial S_{KL}} \right) \right] \dot{S}_{KL} \quad (2.89)$$

Das dyadische Produkt in Gl. 2.89

$$T_{IJKL} := [()_{IJ} ()_{KL}]$$

des Gradienten der Fließbedingung mit sich selbst kann vor der doppelten Überschiebung in Gl. 2.88 gebildet werden. Die lineare Abbildung der Spannungsraten \dot{S}_{KL} in die plastischen Verzerrungsraten $\dot{\epsilon}_{IJ}^p$ erfolgt dann über eine in den Indexpaaren IJ und KL symmetrische Transformation T_{IJKL} auch bei Berücksichtigung der Effekte zweiter Ordnung in der Fließregel.

Durch die Konsistenzbedingung \dot{F} ist es prinzipiell möglich, die Spannungsraten \dot{S}_{IJ} mit der Rate des plastischen Multiplikators linear zu verknüpfen, so daß die in Gl. 2.89 gefundene Beziehung als Sonderfall in der von Lehmann angegebenen Fließregel enthalten ist. Einzelheiten über das Bildungsgesetz für T_{IJKL} werden in /Lehmann 1982/ nicht behandelt.

3 Beschreibung finiter Deformationen des allgemeinen Kontinuums

3.1 Hinweise zur Notation

Die Linearisierung der vollständigen Zustandsgleichungen in der Kontinuums- und Strukturmechanik spielt für deren numerische Lösung eine Schlüsselrolle. Im Ingenieurwesen werden die mechanischen Gleichungen sehr häufig linearisiert, indem Terme höherer Ordnung im Verlauf der Herleitung vernachlässigt werden. Mit der Konsequenz, daß ein formaler Linearisierungsprozeß vermieden wird, bleiben die analytischen Wurzeln der linearen Beziehungen zu ihren vollständigen Theorien im Dunkeln. Ein bezeichnendes Beispiel hierfür sind die verschiedenen Näherungsstufen nicht-linearer Stab- bzw. Seiltheorien in Form der baustatischen Theorie II. Ordnung.

Die Gleichgewichtsaussage eines belasteten Körpers kann als Funktion seiner Bewegung ausgedrückt werden. Die funktionelle Abhängigkeit aller Zustandsvariablen einschließlich des Spannungstensors vom Deformationsgradienten und damit von der Konfiguration $x = \varphi(X, t)$ liefert die Grundlage für die Linearisierungsaufgabe.

Die Bildung der Fréchet-Ableitung entspricht dem, was üblicherweise unter dem Begriff der Linearisierung einer Feldgleichung verstanden wird. Das Funktional $f(x_\tau)$ heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle ${}^i x_\tau$ wenn ein beschränkter linearer Operator $\mathcal{D}f$ existiert - siehe Anhang A1. Für die praktische Rechnung wird die Fréchet-Ableitung aus der Richtungsableitung gebildet, welche die Änderung des Funktionals $f(x_\tau)$ in Richtung der „Geraden“ ${}^i x_\tau + \eta \Delta \Delta u_\tau$ mißt (zur Schreibweise: $\Delta \Delta$ - siehe Kapitel 5.2).

$$\mathcal{D}f \cdot \Delta \Delta u_\tau = \left. \frac{d}{d\eta} f\left({}^i x_\tau + \eta \Delta \Delta u_\tau\right) \right|_{\eta=0} \quad (3.1)$$

3.2 „Schwache Form“ des materiellen Gleichgewichts

Das Charakteristische der Verschiebungsmethode in der finiten Elementtechnik besteht darin, die Differentialgleichungen der lokalen Gleichgewichtsaussage in materiellen Koordinaten durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu ersetzen. Aus Gründen optimaler Genauigkeit des diskretisierten Rechenmodells und minimalen Rechenaufwands aufgrund einer symmetrischen Steifigkeitsmatrix wird mit der „schwachen Form“ - oder auch der kanonischen Form der Galerkingleichungen - des Funktionals gearbeitet, in wel-

chem üblicherweise der materielle Verzerrungstensor nach Green-Lagrange erscheint.

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (3.2)$$

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta w_{int} dV = - \int \delta \epsilon_{IJ} S_{IJ} dV \quad (3.3)$$

δw_{int} = spezifische (negative) virtuelle innere Arbeit

Die Variation des Ortsvektors \mathbf{x} ist äquivalent zur Variation des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} . Über die Gâteaux-Ableitung - siehe Anhang A1 - geht der Deformationsgradient des allgemeinen Kontinuums in die Variation des Verschiebungsgradienten $\delta u_{i,J}$ über.

$$\delta F_{iJ} = \left. \frac{d}{d\eta} \frac{\partial (x_i + \eta \delta u_i)}{\partial X_J} \right|_{\eta=0} = \delta u_{i,J} \quad (3.4)$$

Demzufolge wird der virtuelle Green-Lagrange Verzerrungstensor, dessen Komponenten auf die materiellen Koordinaten bezogen sind, geschrieben als:

$$\delta \epsilon_{IJ} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{\partial}{\partial X_I} (x_m + \eta \delta u_m) \frac{\partial}{\partial X_J} (x_m + \eta \delta u_m) - \delta_{IJ} \right]_{\eta=0} \quad (3.5)$$

Die Richtungsableitung wird mit den partiellen Ableitungen vertauscht und die Produktregel der Differentiation kommt zur Anwendung.

$$\delta \epsilon_{IJ} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial x_m}{\partial X_I} \frac{\partial \delta u_m}{\partial X_J} + \frac{\partial \delta u_m}{\partial X_I} \frac{\partial x_m}{\partial X_J} \right] \quad (3.6)$$

In Kurzform:

$$\delta \epsilon_{IJ} = \frac{1}{2} [F_{mI} \delta u_{m,J} + \delta u_{m,I} F_{mJ}] \quad (3.7)$$

Die spezifische virtuelle innere Arbeit lautet unter Ausnutzung der Symmetrie des Spannungstensors:

$$\delta w_{int} = \delta u_{m,J} F_{mI} S_{IJ} \quad (3.8)$$

Für diese Darstellung wurde in /Ramm 1976/, /Bathe 1975/ der Begriff totale Lagrange-Formulierung geprägt. Die Verschiebungen sind die primären Unbekannten, nach denen bei der Verschiebungsmethode variiert wird. Die Kompatibilitätsgleichungen für die Verzerrungen sind als notwendige Integrabilitätsbedingungen daher immer erfüllt. Im Unterschied zu Formulierungen mit den Verzerrungen als primäre Variable bedürfen die Kompatibilitätsbeziehungen bei der Verschiebungsmethode keiner weiteren Beachtung.

3.3 Lösung der nichtlinearen virtuellen Arbeitsgleichung

Es ist das Ziel, das Verschiebungsfeld $u_i(x_j)$ aus Gl. 3.2 in Verbindung mit Gl. 3.8 zu berechnen. Dazu müssen die Spannungen als abhängige Variable der Verzerrungen mit Hilfe des Werkstoffgesetzes ersetzt werden. Für viele Materialmodelle können die totalen Spannungen nicht direkt eliminiert werden; beispielsweise wenn keine geschlossene Auflösung des Materialgesetzes nach den Spannungen möglich ist oder wenn ratenabhängige Werkstoffmodelle (Hypoelastizität, Fließtheorie in der Plastizität, Viskosität) vorliegen. Schon linear elastische Randwertprobleme in der materiellen Formulierung sind in der Regel nicht mehr geschlossen nach den Komponenten des Verschiebungsfeldes $u_i(x_j)$ auflösbar, da die virtuelle innere Arbeit eine kubische Funktion der drei Verschiebungskomponenten ist.

Das Newton-Iterationsverfahren kann zur numerischen Lösung der virtuellen Arbeitsgleichung in allen genannten Fällen eingesetzt werden. Im Zuge der hierfür notwendigen Linearisierung zeigt sich, daß es genügt, die Ratenabhängigkeit des Werkstoffgesetzes zu kennen. Die rigorose Einbeziehung der zeitlich diskretisierten Gleichungen eines ratenabhängigen Stoffgesetzes in die Linearisierung der Gleichgewichtsaussagen wird am Beispiel der Fließtheorie in Kapitel 6 und 7 demonstriert. Daher kann auch auf das Prinzip der virtuellen Leistung zur Lösung ratenabhängiger Werkstoffgesetze verzichtet werden. Im Schrifttum wird häufig von Inkrementierung oder inkrementellem Gleichgewicht gesprochen, womit die linearisierte Form der virtuellen Arbeitsgleichung gemeint ist. Zum neuen Zeitpunkt ${}^{n+1}t$ wird das gesuchte Verschiebungsfeld aus dem Prinzip der virtuellen Arbeiten ermittelt, indem die Lösung durch eine Sequenz von linearen Iterationsschritten i , ausgehend von den bekannten Feldgrößen zur Zeit ${}^n t$, beliebig genau angesteuert wird.

$${}^i \mathbf{K} \Delta \Delta \mathbf{u} = {}^{n+1} \mathbf{R}_{ext} - {}^i \mathbf{R}_{int} \quad (3.9)$$

$${}^{i+1} \mathbf{u} = {}^i \mathbf{u} + \Delta \Delta {}^i \mathbf{u} \quad (3.10)$$

Falls die Norm des inkrementellen Verschiebungsvektors eine vorgegebene Toleranzschranke unterschreitet

$$\| \Delta \Delta {}^i \mathbf{u} \| < U_{Tol} , \quad \text{wird} \quad {}^{n+1} \mathbf{u} = {}^{i+1} \mathbf{u}$$

gesetzt.

Grundsätzlich kann mit jeder nicht singulären Iterationsmatrix \mathbf{K} eine numerische Lösung versucht werden. Solange die Iterationsmatrix \mathbf{K} nicht nahezu orthogonal zum Lösungsvektor $\Delta \Delta \mathbf{u}$ wird, ist eine Verbesserung

der erreichten Näherungslösung möglich. Bei stark nichtlinearen Problemen wird die Konvergenzgeschwindigkeit und der Anziehungsbereich (zulässige Schrittweite) jedoch sehr klein, so daß in der Praxis nur noch Iterationsmatrizen nahe der Tangentenmatrix zum Erfolg führen. Von fundamentaler Bedeutung für das Standard-Newton-Verfahren ist die Kenntnis der Tangentenmatrix zur Zeit t , welche durch formale Linearisierung mit Hilfe der Richtungsableitung der virtuellen Arbeitsgleichung gefunden wird.

$$\delta W(x_\tau) = \delta W(x_\tau)|_{i_t} + \mathcal{D}\delta W(x_\tau)|_{i_t} \cdot \Delta\Delta u_\tau + R(\|\Delta\Delta u_\tau\|) \quad (3.11)$$

Das Restglied R ist eine sogenannte Ordnungsfunktion, für die gilt:

$$\frac{R(\|\Delta\Delta u_\tau\|)}{\|\Delta\Delta u_\tau\|} \longrightarrow 0 \quad \text{wenn} \quad \|\Delta\Delta u_\tau\| \longrightarrow 0 \quad (3.12)$$

Die ersten beiden Reihenglieder in Gl. 3.11 werden zu $\mathcal{L}\delta W$ zusammengefaßt bevor von Gl. A1.3 Gebrauch gemacht wird.

$$\mathcal{L}\delta W(x_\tau) = \delta W(x_\tau) + \left. \frac{d}{d\eta} \delta W(x_\tau + \eta \Delta\Delta u_\tau) \right|_{\eta=0} \quad (3.13)$$

Bild /3.1/ zeigt die Änderung der virtuellen Arbeit δW in Abhängigkeit der deformierten Konfiguration \mathbf{x} der Struktur mit der Tangente zur Zeit t .

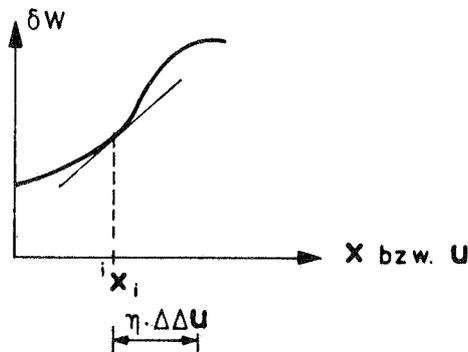


Bild 3.1 : Virtuelle Arbeit δW in Abhängigkeit der Konfiguration \mathbf{x}

Da im Folgenden nur verschiebungsunabhängige Belastungen betrachtet werden, beschränkt sich die Linearisierung auf die virtuelle innere Arbeit.

3.4 Konsistente Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit in Lagrangescher Betrachtungsweise

3.4.1 Linearisierung bezüglich des Verschiebungsfeldes

Die Richtungsableitung der „schwachen Form“ des Gleichgewichtsprinzips in materieller Darstellung nach Gl. 3.3 kann zum Zeitpunkt t geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\delta w_{int} &= \delta\epsilon_{IJ} S_{IJ}|_{i_t} + \\ &+ \left[\delta\epsilon_{IJ} \frac{\partial S_{IJ}}{\partial\epsilon_{KL}} \frac{\partial\epsilon_{KL}}{\partial x_\tau} + S_{IJ} \frac{\partial}{\partial x_\tau} (\delta\epsilon_{IJ}) \right]_{i_t} (x_\tau - {}^i x_\tau) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Die Richtungsableitung des materiellen Verzerrungstensors im allgemeinen Kontinuum führt formal zum selben Ergebnis wie die Variation in Gl. 3.7.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\epsilon_{KL} \cdot \Delta\Delta u_\tau &= \frac{d}{d\eta} [\epsilon_{KL} (x_\tau + \eta \Delta\Delta u_\tau)]_{\eta=0} = \frac{\partial\epsilon_{KL}}{\partial x_\tau} \Delta\Delta u_\tau \\ &= \frac{1}{2} (F_{nK} \Delta\Delta u_{n,L} + \Delta\Delta u_{n,K} F_{nL}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Aus Gl. 3.14, Gl. 3.15 und Gl. A1.2 resultiert unter Berücksichtigung der Symmetrie des zweiten Kirchhoff-Piola-Spannungstensors die nach dem Verschiebungsfeld linearisierte und variierte innere Arbeit:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\delta w_{int} &= \delta u_{m,J} F_{mI} S_{IJ}|_{i_t} + \\ &+ \delta u_{m,J} \left[F_{mI} \frac{\partial S_{IJ}}{\partial\epsilon_{KL}} F_{nK} + S_{JL} \delta_{mn} \right]_{i_t} \Delta\Delta u_{n,L} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die partiellen Ableitungen des Spannungstensors nach den Verzerrungen beschreiben die Änderungen der Spannungskomponenten in Abhängigkeit der Verzerrungen und sind deshalb werkstoffspezifische Kenngrößen. Im Teil 5 wird gezeigt, daß der Algorithmus zur Spannungsberechnung von konstitutiven Gleichungen in Ratenform in unmittelbarem Zusammenhang mit diesen partiellen Ableitungen steht. Bei Stoffgesetzen in Abhängigkeit der totalen Dehnungen, wie es bei hyperelastischen Materialien der Fall ist, steht der augenblickliche Materialsteifigkeitstensor vierter Stufe in der linearisierten Beziehung.

3.4.2 Linearisierung der Spannungen bei Hyperelastizität

Gegeben sei das elastische Verzerrungspotential $\Psi = \Psi(\epsilon_{IJ})$ als Funktion des materiellen Dehnungstensors ϵ_{IJ} , aus dessen Gradient die Spannungskomponenten des zweiten Piola-Kirchhoff-Tensors hervorgehen - siehe Kapitel

2.4, Gl. 2.36. Der Spannungstensor S_{IJ} soll bezüglich der Konfiguration ${}^i\mathbf{x}$ zur Zeit ${}^i t$ linearisiert werden.

$$\mathcal{L}S_{IJ} = {}^i S_{IJ} + \frac{\partial S_{IJ}}{\partial \epsilon_{KL}} \frac{\partial \epsilon_{KL}}{\partial x_\tau} \Delta \Delta u_\tau \quad (3.17)$$

Bei hyperelastischem Stoffgesetz lauten die Spannungen nach Ausführung der Richtungsableitung bezüglich den Komponenten des Verschiebungsfeldes:

$$\mathcal{L}S_{IJ} = {}^i S_{IJ} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon_{IJ} \cdot \partial \epsilon_{KL}} F_{nK} \Big|_{i,t} \Delta \Delta u_{n,L} \quad (3.18)$$

Die Hessematrix des elastischen Potentials ist für zweimal stetig differenzierbare Funktionen symmetrisch und wird mit

$${}^i C_{IJKL} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \epsilon_{IJ} \cdot \partial \epsilon_{KL}} \Big|_{i,t} \quad (3.19)$$

abgekürzt. Die linearisierte virtuelle innere Arbeit ergibt sich dann zu:

$$\mathcal{L}\delta w_{int} = \delta u_{m,J} \{ F_{mI} S_{IJ} \Big|_{i,t} + [F_{mI} C_{IJKL} F_{nK} + S_{JL} \delta_{mn}]_{i,t} \Delta \Delta u_{n,L} \} \quad (3.20)$$

Zwei der vier Indizes des auf die materiellen Koordinaten bezogenen Werkstoffensors ${}^i C_{IJKL}$ in Gl. 3.20 werden im linearen Anteil der virtuellen inneren Arbeit zur Zeit ${}^i t$ auf die neue Konfiguration ${}^i\mathbf{x}$ und somit auf die räumlichen Koordinaten transformiert.

$${}^i \overset{\circ}{C}_{mJnL} := {}^i F_{mI} {}^i C_{IJKL} {}^i F_{nK} \quad (3.21)$$

Sowohl der virtuelle $\delta u_{m,J}$ als auch der inkrementelle Verschiebungsgradient $\Delta \Delta u_{n,L}$ werden in Gl. 3.20 durch partielle Ableitung nach ihren materiellen Koordinaten $X_I = x_i|_{t=0}$ gebildet. Deshalb ist in beiden Gradienten bei der sogenannten totalen Lagrange-Formulierung die zweite Komponente als eine auf die Ausgangskonfiguration bezogene Größe zu behandeln. Sie sind mit den noch ebenfalls im materiellen Koordinatensystem gemessenen Komponenten des teilweise transformierten Materialsteifigkeitstensors ${}^i \overset{\circ}{C}_{mJnL}$ multiplikativ verknüpft.

Bemerkenswert ist, daß sich die aktuelle Tangentensteifigkeit von der Anfangssteifigkeit lediglich durch die Modifikation des konstitutiven Tensors $\overset{\circ}{C}_{mJnL}$ abhebt.

$$\overset{\circ}{C}_{mJnL} = {}^i F_{mJ} {}^i C_{IJKL} {}^i F_{nK} + {}^i S_{JL} \delta_{mn} \quad (3.22)$$

Die praktische Bedeutung dieser Beziehung liegt darin, daß in jedem geometrisch linearen Computerprogramm die aktuelle Tangentensteifigkeit erzeugt werden kann, indem C_{IJKL} durch \tilde{C}_{mJnL} ersetzt wird.

Hinweis zur Aufteilung des Deformationsgradienten:

Für die Linearisierung der materiellen Formulierung Gl. 3.20 kann der Verschiebungsgradient anstelle des Deformationsgradienten verwendet werden.

$$F_{iJ} = \delta_{iJ} + u_{i,J} \quad (3.23)$$

Im linearen Teil der inneren Arbeit ist dann die Trennung in die elastische Steifigkeitsmatrix einer geometrisch linearen Theorie und in die Anfangsverschiebungsmatrix möglich. Hinsichtlich Programmverarbeitung ist diese Aufteilung allerdings unwirtschaftlich.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\delta w_{int} = \delta u_{m,J} [&F_{mI} S_{IJ} + (\delta_{mI} C_{IJKL} \delta_{nK} \\ &+ u_{mI} C_{IJKL} \delta_{nK} \\ &+ \delta_{mI} C_{IJKL} u_{nK} \\ &+ u_{mI} C_{IJKL} u_{nK} + S_{JI} \delta_{mn}) \Delta\Delta u_{n,L}] \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.5 Mitgehende Lagrange-Formulierung

3.5.1 Zur Wahl des Bezugzustandes für die Linearisierung

Der Begriff „mitgehende Lagrange-Formulierung“ wurde in /Ramm 1976/ und /Bathe 1975/ für die auf einen aktualisierten Referenzzustand bezogene Inkrementierung eingeführt. Im Kontext mit der materiellen Formulierung des vorigen Kapitels unterscheidet sich die mitgehende Lagrange-Formulierung von der totalen Fassung nur in den partiellen Ableitungen des virtuellen und inkrementellen Verschiebungsgradienten bezüglich verschiedener Referenzgeometrien. Aufgrund der Werkstoffannahmen ist sie selbstverständlich eine materielle Beschreibung.

Der virtuelle und der inkrementelle Verschiebungsgradient werden im Gegensatz zu Gl. 3.7 und Gl. 3.15 zuerst als räumliche Tensoren bezüglich der aktualisierten Referenzgeometrie gebildet und dann mit Hilfe des Deformationsgradienten in die Koordinaten der Ausgangskonfiguration transformiert. Die Zulässigkeit dieser Operationen wird durch die Kettenregel der Differentiationsrechnung bestätigt.

$$\delta u_{m,J} = \frac{\partial}{\partial x_p} (\delta u_m) \frac{\partial x_p}{\partial X_J} = \delta u_{m,p} F_{pJ} \quad (3.25)$$

Desgleichen:

$$\Delta\Delta u_{n,L} = \Delta\Delta u_{n,q} F_{qL} \quad (3.26)$$

Die spezifische virtuelle innere Arbeit in materieller Fassung nach Gl. 3.8 kann auf die räumliche Darstellung umgeschrieben werden:

$$\delta w_{int} = \delta u_{m,p} F_{pJ} F_{mI} S_{IJ} \quad (3.27)$$

Der Zusammenhang zwischen dem zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor S_{IJ} und dem Kirchhoffschen Spannungsmaß τ_{ij} ist durch vorangehende Gleichung unmittelbar gegeben.

$$\tau_{mp} = F_{mI} F_{pJ} S_{IJ} \quad (3.28)$$

Durch Integration über das Gebiet der Ausgangskonfiguration wird die gesamte virtuelle innere Arbeit aufsummiert.

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta w_{int} dV = - \int_V \delta u_{m,p} \tau_{mp} dV \quad (3.29)$$

In die Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit nach Gl. 3.20 werden für den virtuellen und inkrementellen Verschiebungsgradienten die Ergebnisse unter Gl. 3.25 bzw. Gl. 3.26 eingebracht.

$$\begin{aligned} \delta w_{int} &= \delta u_{m,p} F_{pJ} F_{mI} S_{IJ}|_{i_t} + \\ &+ \delta u_{m,p} \left[F_{pJ} F_{mI} \frac{\partial S_{IJ}}{\partial \epsilon_{KL}} F_{nK} F_{qL} + F_{pJ} S_{JL} \delta_{mn} F_{qL} \right]_{i_t} \Delta\Delta u_{n,q} \end{aligned} \quad (3.30)$$

mit $I, J, K, L = 1, 2, 3$ und $m, n, p, q = 1, 2, 3$

3.5.2 Transformation in räumliche Tensoren und Einordnung der mitgehenden Formulierung

Zu beachten ist, daß die innere Arbeit in der materiellen Darstellung unter Verwendung der Tensoren S_{IJ} , ϵ_{KL} linearisiert worden ist, zwischen denen die Werkstoffannahme besteht. Der erste Summand der rechten Seite von Gl. 3.30 repräsentiert die virtuelle innere Arbeit zur Zeit t . Der konstitutive Tensor für elastisches Material wird mit dem Transformationsgesetz für Tensoren vierter Stufe im linearisierten Arbeitsanteil auf die aktuelle Konfiguration übertragen. Da gleichzeitig über das Volumen der Struktur in der Momentankonfiguration anstelle der Anfangsgeometrie integriert

werden soll, wird das Volumendifferential dV der Ausgangslage in das der augenblicklichen Geometrie dv umgerechnet.

$$dv = \det F dV \quad (3.31)$$

$$\hat{c}_{mpnq} := \frac{1}{\det F} F_{mI} F_{pJ} F_{nK} F_{qL} C_{IJKL} \quad (3.32)$$

Sinngemäß werden die Anfangsspannungen S_{IJ} in Gl. 3.32 in Form des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors in die Komponenten des Cauchy-Maßes umgeformt.

$$\sigma_{pq} := \frac{1}{\det F} F_{pI} F_{qJ} S_{IJ} \quad (3.33)$$

$$\delta W_{int} = - \int_v \delta u_{m,p} \sigma_{mp} dv \quad (3.34)$$

Die spezifische virtuelle innere Arbeit in der mitgehenden Lagrange-Beschreibung erhält dann die Form:

$$\mathcal{L} \delta w_{int} = \delta u_{m,p} \tau_{pm} |_{i_t} + \delta u_{m,p} [\hat{c}_{mpnq} + \tau_{pq} \delta_{mn}]_{i_t} \Delta \Delta u_{n,q} \quad (3.35)$$

Anmerkungen:

- Da der vierstufige Tensor \hat{c}_{mpnq} aus Gl. 3.32 zu errechnen ist, ändern sich seine Komponenten mit den Deformationen. Sie stellen deshalb keine von den kinematischen Einflüssen isolierte Werkstoffkenngrößen dar.
- Die Iterationsgleichung Gl. 3.35 basiert auf der materiellen Formulierung, obwohl nach der Transformation ausschließlich räumliche Tensoren darin auftreten.
- Eine Ersparnis an Rechenoperationen bei der mitgehenden Formulierung ist nicht zu erkennen, falls die vierstufige Transformation des konstitutiven Tensors mitgenommen wird.
- Bei Strukturanalysen mit großen Rotationen aber kleinen Verzerrungen kann der Deformationsgradient F_{iJ} näherungsweise durch den zugehörigen Rotationstensor ersetzt werden. Aufgrund der Forminvarianz isotroper Tensoren darf unter diesen Umständen auf die vierstufige Transformation des Werkstoffensors aus Gründen der Rechenzeiteinsparung verzichtet werden.

3.6 Implementierung der Lagrange-Darstellung in Rechenprogramme

3.6.1 Matrizenschreibweise

Der Übersichtlichkeit halber wird die Iterationsgleichung Gl. 3.20 der totalen Lagrange-Formulierung mit der im ingenieurwissenschaftlichen Schrifttum gängigen Matrizenschreibweise dargestellt. Sie eignet sich vor allem für die unmittelbare Implementierung in finite Element-Programme, wo die vierfache Indizierung des Materialsteifigkeitstensors rechenintensive Schleifenoperationen nach sich ziehen würde. In gewohnter Weise wird der kinematische Operator zur Darstellung der Verschiebungsableitungen $\bar{\nabla} \mathbf{u}$ oder zur Bildung des Gradienten für den aktuellen Ortsvektor $\bar{\nabla} \mathbf{x}$ durch \mathbf{B} symbolisiert.

$$\delta(\bar{\nabla} \mathbf{u}) = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (3.36)$$

Als Kurzschreibweise für die Elemente in der Matrix des Operators \mathbf{B} wird die Vereinbarung getroffen: $\partial_I(\) = \frac{\partial}{\partial X_I}(\)$

$$\mathbf{f}_{[9x1]} = [F_{iJ}] = \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{2,2} \\ x_{3,3} \\ x_{1,2} \\ x_{2,1} \\ x_{1,3} \\ x_{3,1} \\ x_{2,3} \\ x_{3,2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} := \begin{vmatrix} \partial_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \partial_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \partial_3 \\ \partial_2 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \partial_1 & \cdot \\ \partial_3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \partial_1 \\ \cdot & \partial_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \partial_2 \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

Damit ist die Matrizenform des Vektors der inneren Kräfte ${}^i\mathbf{R}_{int}$ und der Tangentensteifigkeitsmatrix ${}^i\mathbf{K}$ für das linearisierte Gleichungssystem Gl. 3.9 der virtuellen Verschiebungsarbeit vollständig definiert.

$${}^i\mathbf{R}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{s} dV \quad (3.38)$$

$$\mathbf{K}|_{i_t} = \int_V \mathbf{B}^T \underbrace{(\mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F} + \mathbf{S})}_{=: \dot{\mathbf{C}}_{[9x9]}} \mathbf{B} dV \quad (3.39)$$

$$\left| \begin{array}{c} \mathbf{K}_{e/u} \\ \text{Anfangsverschiebungen} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \mathbf{K}_g^I \\ \text{Anfangsspannungen} \end{array} \right| \quad (3.40)$$

Die Matrix \mathbf{S} in der geometrischen Steifigkeit ist identisch mit der Darstellung in /Ramm 1976/. Das Matrizenprodukt $\mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F}$ kann durch verschiedene mögliche Besetzungen der Matrix \mathbf{F} mit den Komponenten $F_{i,j}$ des Deformationsgradienten hergestellt werden, besonders wenn die Symmetrie der Indizes im vierstufigen konstitutiven Tensor ausgenutzt wird.

$$C_{IJKL} = C_{JIKL} = C_{IJLK} = C_{KLIJ} \quad (3.41)$$

Eine denkbare Besetzungsanordnung der Komponenten in der Matrix \mathbf{F} ist sinngemäß gleichlautend derjenigen von \mathbf{S} . Es wird an dieser Stelle jedoch darauf Wert gelegt, daß gelten soll:

$$\epsilon_{[9x1]} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F} \mathbf{f}_{[9x1]} - \mathbf{i} \right) \quad (3.42)$$

Im Spaltenvektor $\epsilon_{[9x1]}$ sind die Komponenten des Verzerrungstensors in derselben Reihenfolge eingelagert wie in den Vektoren $\mathbf{f}_{[9x1]}$ gemäß Gl. 3.37 oder \mathbf{s} gemäß Gl. 3.44. Die Komponenten des Vektors \mathbf{i} gehen aus dem Kronecker-Symbol hervor und müssen in Übereinstimmung mit obiger Reihenfolge lauten:

$$\mathbf{i} := \left[1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad (3.43)$$

Desweiteren sollen alle F_{ii} - Komponenten nur auf der Hauptdiagonalen in der Matrix \mathbf{F} auftreten, so daß die geometrisch lineare Rechnung als Sonderfall in der Matrixschreibweise der Lagrange-Fassung enthalten ist, indem die Matrix \mathbf{F} in die Einheitsmatrix \mathbf{I} übergeht. Die Darstellbarkeit der Verzerrungen ϵ durch die obige Matrixgleichung wird im Zusammenhang mit sogenannten „degenerierten Stoffgesetzen“ wichtig, um die statische Hypothese (Degenerationsbedingungen: $S_{33} = \dot{S}_{33} = 0$) für dünnwandige Flächentragwerke in die Formulierung einbringen zu können.

$$\mathbf{s} = \left[S_{11} \ S_{22} \ S_{33} \ S_{12} \ S_{21} \ S_{13} \ S_{31} \ S_{23} \ S_{32} \right]^T \quad (3.44)$$

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} S_{11} & \cdot & \cdot & S_{21} & \cdot & S_{31} & \cdot & \cdot & \cdot \\ & S_{22} & \cdot & \cdot & S_{12} & \cdot & \cdot & S_{23} & \cdot \\ & & S_{33} & \cdot & \cdot & \cdot & S_{13} & \cdot & S_{23} \\ & & & S_{22} & \cdot & S_{32} & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & S_{11} & \cdot & \cdot & S_{31} & \cdot \\ & & & & & S_{33} & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & S_{11} & \cdot & S_{21} \\ & & & & & & & S_{33} & \cdot \\ & & & & & & & & S_{22} \end{vmatrix} \quad (3.45)$$

Unter den obengenannten Voraussetzungen lautet die Matrix \mathbf{F} dann:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & F_{21} & \cdot & F_{31} & \cdot & \cdot \\ \cdot & F_{22} & \cdot & F_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & F_{32} \\ \cdot & \cdot & F_{33} & \cdot & \cdot & F_{13} & \cdot & F_{23} & \cdot \\ \cdot & F_{21} & \cdot & F_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & F_{31} \\ F_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & F_{22} & \cdot & F_{32} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & F_{31} & \cdot & \cdot & F_{11} & \cdot & F_{21} & \cdot \\ F_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & F_{23} & \cdot & F_{33} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & F_{32} & \cdot & \cdot & F_{12} & \cdot & F_{22} & \cdot \\ \cdot & F_{23} & \cdot & F_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & F_{33} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Für die Matrizendarstellung der Komponenten des konstitutiven Tensors $C_{IJKL} \rightarrow [C_{AB}]$ gilt als Zuordnung zwischen den Indices IJ und A :

IJ	11	22	33	12	21	13	31	23	32	ebenso für $KL \rightarrow B$
A	1	2	3	4	4	5	5	6	6	

Konstitutiver Tensor in Matrizenform der Größe [9x9]:

$$[C_{AB}] = \mathbf{C}_{[9 \times 9]} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{14} & C_{15} & C_{15} & C_{16} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{24} & C_{25} & C_{25} & C_{26} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{34} & C_{35} & C_{35} & C_{36} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{44} & C_{45} & C_{45} & C_{46} & C_{46} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{44} & C_{45} & C_{45} & C_{46} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{54} & C_{55} & C_{55} & C_{56} & C_{56} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{54} & C_{55} & C_{55} & C_{56} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{64} & C_{65} & C_{65} & C_{66} & C_{66} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{64} & C_{65} & C_{65} & C_{66} & C_{66} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Mit den Lamé-Konstanten λ und μ gilt bei linearer, isotroper Elastizität:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & & & & & & & & \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & & & & & & & & \\ & & \lambda + 2\mu & & & & & & & & \\ & & & \lambda + 2\mu & & & & & & & \\ & & & & \mu & \mu & & & & & \\ & & & & & \mu & & & & & \\ & & & & & & \mu & \mu & & & \\ & & & & & & & \mu & & & \\ & & & & & & & & \mu & \mu & \\ & & & & & & & & & \mu & \\ & & & & & & & & & & \mu \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

sym

3.6.2 Zur Effizienz der numerischen Operationenfolge

Unabhängig von der Interpolationsordnung des Verschiebungsfeldes wird das Produkt $\mathbf{F}^T \mathbf{C} \mathbf{F}$ zuerst ausgeführt, wozu im dreidimensionalen Fall $2 \cdot 3 \cdot 9^2 = 486$ Multiplikationen anfallen. Für die Bildung des Produkts $\mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ zur Aufstellung einer Hälfte der Steifigkeitsmatrix inklusive der vollen Blöcke auf der Hauptdiagonalen kann nachfolgende Rechnung zur Ermittlung der Anzahl aller notwendigen Multiplikationen aufgemacht werden, wobei die schwache Besetzung der Operatormatrix \mathbf{B} für das n -knotige Kontinuumsselement ausgenutzt wird.

$$\begin{aligned} \text{Für } \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{B} &: & (3 \cdot 3 \cdot 9) \cdot n &= 81 n \\ \text{Für } \mathbf{B}^T (\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{B}) &: & (3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot \frac{1}{2} (n^2 + n) &= \frac{27}{2} n + \frac{27}{2} n^2 \end{aligned}$$

Für die veränderte Multiplikationsfolge in der üblichen Form sind mindestens $27 \cdot (n^2 + 4n)$ Produkte zu bilden sind, die sich wie folgt aufschlüsseln:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}^T &: & 3 \cdot (3 + 6) \cdot n &= 27n \\ (\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T) \cdot \mathbf{C} &: & 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot n &= 54n \\ (\mathbf{B}^T \mathbf{F}^T \mathbf{C}) \cdot (\mathbf{F} \mathbf{B}) &: & 6 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} (n^2 + n) &= 27n + 27n^2 \end{aligned}$$

Mit zunehmender Knotenzahl n eines Elements strebt diese Operationensequenz gegen den doppelten Rechenaufwand.

3.7 Konsistente Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit in Eulerscher Betrachtungsweise

3.7.1 Gleichgewichtsaussage und Werkstoffgesetz

Das Werkstoffgesetz soll zwischen den räumlichen Tensoren in Form der Cauchy-Spannungen σ_{ij} und der Euler-Almansi-Verzerrungen e_{ij} definiert sein. Unter der Voraussetzung, daß eine freie Energiefunktion $\hat{\psi}$ existiert, kommt deren Gradient zusammen mit der momentanen Dichte ρ des Kontinuums den Komponenten des Cauchy-Spannungstensors im hyperelastischen Material gleich.

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_{ij}} \quad (3.49)$$

In der virtuellen inneren Arbeit der Eulerschen Fassung ist der virtuelle räumliche Verschiebungsgradient $\delta u_{i,j} = \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ das zu den Cauchy-Spannungen σ_{ij} (genauer ausgedrückt: zu den kontravarianten Komponenten σ^{ij}) energetisch konjugierte virtuelle Verzerrungsmaß - siehe Gl. 2.23.

$$\delta W_{int} = \int_v \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dv \quad (3.50)$$

Neben dem Cauchy-Spannungstensor σ_{ij} sind sowohl der virtuelle räumliche Verschiebungsgradient $\delta u_{i,j}$ als auch das Differential des Volumens dv von der aktuellen Geometrie und damit von den räumlichen Koordinaten x_i abhängig. Deshalb sind sowohl der virtuelle räumliche Verschiebungsgradient als auch das Differential des Volumens $dv = \det F dV$ auf die materiellen Koordinaten X_I und somit auf die Ausgangsgeometrie zu beziehen.

$$\delta W_{int} = \int_V \frac{\delta \partial u_i}{\partial X_S} \frac{\partial X_S}{\partial x_j} \sigma_{ij} \det F dV \quad (3.51)$$

3.7.2 Linearisierung der inneren Arbeit räumlicher Tensoren

Zur iterativen Lösung der „schwachen Form“ der Gleichgewichtsbeziehung in den räumlichen Koordinaten wird für das Newton-Verfahren die tangentiale Steifigkeitsmatrix gesucht. Dazu ist die Richtungsableitung des Integranden in Gl. 3.51 zu bilden, dessen linearer Zuwachs zu berechnen ist. Auf die zeitliche Unveränderlichkeit des variierten materiellen Verschiebungsgradienten wird hingewiesen.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \left(F_{S_j}^{-1} \sigma_{ij} \det F \right) \Delta \Delta u_\tau &= \left(\mathcal{D} \sigma_{ij} F_{S_j}^{-1} \det F + \sigma_{ij} \mathcal{D} F_{S_j}^{-1} \det F \right. \\ &\quad \left. + \sigma_{ij} F_{S_j}^{-1} \mathcal{D} \det F \right) \Delta \Delta u_\tau \end{aligned} \quad (3.52)$$

- Richtungsableitung des inversen Deformationsgradienten $F_{S_j}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}F_{S_j}^{-1} \Delta \Delta u_\tau &= \lim_{\eta \rightarrow 0} F_{S_j}^{-1}(x_\tau + \eta \Delta \Delta u_\tau) \\
 &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\partial X_S}{\partial(x_j + \eta \Delta \Delta u_j)} \\
 &= -F_{S_k}^{-1} \cdot \Delta \Delta u_{k,j}
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

- Richtungsableitung der Jakobideterminanten $\det F$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} \det F \Delta \Delta u_\tau &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \det F(x_\tau + \eta \Delta \Delta u_\tau) \\
 &= \det F \cdot \Delta \Delta u_{i,l}
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Mit diesen beiden Teilergebnissen erhält man für Gl. 3.51:

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}|_{i_t} + \int_v (\delta u_{i,j} \mathcal{D}\sigma_{ij} \Delta \Delta u_\tau - \delta u_{i,k} \sigma_{ij} \Delta \Delta u_{k,j} + \delta u_{i,j} \sigma_{ij} \Delta \Delta u_{l,l}) dv \tag{3.55}$$

$$\delta W_{int} = \delta W_{int}|_{i_t} + \int_v \delta u_{i,j} [\mathcal{D}\sigma_{ij} \Delta \Delta u_\tau - (\sigma_{il} \delta_{jk} - \sigma_{ij} \delta_{kl}) \Delta \Delta u_{k,l}] dv \tag{3.56}$$

Diese allgemeinste Fassung der linearisierten Gleichgewichtsaussage in der räumlichen Darstellung ist weder auf eine gegebene Art des Materialgesetzes (in totalen Größen oder in ratenabhängiger Form) noch auf eine bestimmte objektive Ableitung des Cauchy-Spannungstensors beschränkt. Bei der Richtungsableitung des räumlichen Spannungstensors in kontravarianter Darstellung σ^{ij} ist zu beachten, daß dessen Bezugszustand zeitlichen Änderungen unterliegt. Die Zeitableitung (der Operator zur Bildung des zeitlichen Differentials ist formal derselbe wie für die Richtungsableitung) des Werkstoffgesetzes unter Gl. 3.49 in der Form

$$d\sigma_{ij} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_{ij} \cdot \partial e_{kl}} \right) = \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial e_{ij} \cdot \partial e_{kl}} de_{kl} \tag{3.57}$$

ist nicht vollständig, denn den zeitlichen Änderungen der Basen des Cauchy-Spannungstensors ist noch nicht Rechnung getragen worden. Würde dieses auf Ratenform übergeleitete Werkstoffgesetz nach Gl. 3.57 in die linearisierte Gleichgewichtsaussage Gl. 3.56 anstelle der Richtungsableitung des Cauchy-Spannungstensors $\mathcal{D}\sigma_{ij}$ eingesetzt, dann hätte das zum einen eine unsymmetrische Iterationsmatrix zur Folge, zum anderen würde die Iterationsmatrix nicht mit der tangentialen Steifigkeit übereinstimmen (inkonsistente Linearisierung).

3.7.3 Linearisierung des Cauchy-Spannungstensors

Die Linearisierung des Cauchy-Spannungstensors nach den Verschiebungen über die Verzerrungen wirft sofort die Frage nach dem Werkstoffgesetz auf, dessen Zeitableitung eine objektive Spannungsrate mit den Verzerrungsraten verknüpft. Um die Linearisierungsaufgabe vom Problem der Objektivität hypoelastischer Stoffgesetze fernzuhalten, wird an der eingangs angenommenen Hyperelastizität festgehalten.

Zum Zweck der Linearisierung des Cauchy-Spannungstensors wird vom Konzept der sogenannten Lie-Ableitung Gebrauch gemacht /Guo 1963/, /Marsden 1983/, mit welchem die zeitlichen Änderungen eines Tensors bezüglich den Änderungen eines räumlichen Vektorfeldes bestimmt werden. Vereinfacht gesprochen: Ein räumlicher Tensor wird auf einen zeitlich unveränderlichen Bezugszustand transformiert („pull-back“-Operation); in diesem Zustand zusammen mit der Transformation abgeleitet und danach in den aktuellen Bezugszustand zurücktransformiert. Die daraus gewonnene Zeitableitung ist immer objektiv. Es ist bekannt, daß die Lie-Ableitung des räumlichen Spannungstensors in kontravarianten Koordinaten durch die Transformation mit dem räumlichen Deformationsgradienten F_{Ij}^{-1} auf die Oldroyd-Rate und durch die Piola-Transformation, bei welcher die Jakobideterminante $\det F$ zur Berücksichtigung der Dichteänderung in die Transformation miteingeht, auf die Truesdell-Rate führt. Die Jaumann-Spannungsrate ergibt sich aus der Kombination der Lie-Ableitungen der beiden gemischten einfach ko- und einfach kontravarianten Darstellungen des Cauchy-Spannungstensors.

Einige Erläuterungen zur Notation:

- Gesucht ist die Änderung des Spannungstensors relativ zur Änderung der Geometrie $v_i = \dot{x}_i$, d.h. zum Geschwindigkeitsfeld der Strukturbewegung. Dies soll durch den Fußzeiger v im Symbol L_v für die Lie-Ableitung angedeutet werden:

$$L_v (\sigma^{ij})$$

- Die Transformation der räumlichen Koordinaten des Tensors auf die zeitlich invarianten materiellen Koordinaten wird mit φ^{t*} bezeichnet („pull-back“).
- In diesem Sinne steht das Zeichen φ_{t*} für die Rücktransformation der materiellen auf die räumlichen Koordinaten („push-forward“).

- Nur für die Lie-Ableitung der tensoriellen Größen brauchen die ko- und kontravarianten Komponenten der verwendeten Tensoren unterschieden werden, da innerhalb des gesamten dritten Kapitels affine, kartesische Koordinaten (kanonische Koordinaten) vorausgesetzt sind.

In der virtuellen inneren Arbeit tauchen die kontravarianten Komponenten des Cauchy-Spannungstensors auf, deren Lie-Ableitung in /Marsden 1983/ zu finden ist.

$$L_v(\sigma^{ij}) = \varphi_{t*} \left[\frac{d}{dt} \varphi^{t*}(\sigma^{ij}) \right] \quad (3.58)$$

$$= \varphi_{t*} \left[\frac{d}{dt} \left((F^{-1})^{K_i} (F^{-1})^{L_j} \sigma^{ij} \right) \right] \quad (3.59)$$

Unter Beachtung der gewählten affinen Koordinaten können die kovarianten Ableitungen durch die partiellen ersetzt werden und es ergibt sich:

$$L_v(\sigma^{ij}) = \dot{\sigma}^{ij} - \dot{x}_{i,m} \sigma^{mj} - \dot{x}_{j,m} \sigma^{im} \quad (3.60)$$

Der Spannungsfluß $L_v(\sigma^{ij})$ ist unter der Bezeichnung Oldroyd-Rate /Oldroyd 1950/ bekannt. Er wird über das Werkstoffgesetz mit den zeitlichen Änderungen des Euler-Almansi-Verzerrungstensors in Zusammenhang gebracht. Im Zuge der Linearisierung des Euler-Almansi-Verzerrungstensors wird auf Gl. 3.53 zurückgegriffen. Zu ergänzen bleibt auch hier, daß die Änderung des räumlichen Euler-Almansi-Verzerrungstensors bezüglich der momentanen Änderung des Geometriefeldes x_i von Relevanz ist.

$$L_v(\sigma^{ij}) = L_v \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial e_{ij}} \right) \quad (3.61)$$

Mit Hilfe der Formeln für die relative Dichte $\frac{\rho}{\rho_0} = (\det F)^{-1}$ und den in /Marsden 1983/ angegebenen Rechenregeln folgt:

$$L_v(\sigma^{ij}) = L_v \left(\frac{\rho_0}{\det F} \right) \cdot \frac{\partial \psi}{\partial e_{ij}} + \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial e_{ij} \cdot \partial e_{kl}} L_v(e_{kl}) \quad (3.62)$$

Die Lie-Ableitung der kovarianten Koordinaten des Euler-Almansi-Verzerrungstensors wird analog zum kovarianten Metriktenor /Marsden 1983/ der deformierten Konfiguration behandelt.

$$L_v(e_{kl}) = \varphi_{t*} \left(\frac{d}{dt} \varphi^{t*}(e_{kl}) \right) \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned}
L_v(e_{kl}) &= \varphi_{t*} \left(\frac{d}{dt} (F^k_I F^l_J e_{kl}) \right) \\
L_v(e_{kl}) &= \varphi_{t*} \left(\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (F^k_I F^k_J - \delta_{IJ}) \right) \\
L_v(e_{kl}) &= \frac{1}{2} (\dot{x}_{k,l} + \dot{x}_{l,k})
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Desweiteren gilt mit Hilfe von Gl. 3.54 für die Ableitung der inversen Jakobideterminanten:

$$L_v(\det F)^{-1} = -\frac{\det F}{(\det F)^2} \dot{x}_{l,l} \tag{3.65}$$

Die Linearisierung des Cauchy-Spannungstensors ist mit den Ergebnissen von Gl. 3.60, Gl. 3.62, Gl. 3.64 und Gl. 3.65 vollständig. Die äußerlich formale Identität der Operatoren für die Zeit- und Richtungsableitung ist bereits früher festgestellt worden, so daß die Geschwindigkeiten mit den Verschiebungsinkrementen vertauscht werden dürfen: $\dot{x} \rightarrow \Delta\Delta u_i$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}\sigma_{ij}\Delta\Delta u_\tau - \Delta\Delta u_{i,m} \sigma^{mj} - \Delta\Delta u_{j,m} \sigma^{im} = \\
&\quad - \frac{\rho_0}{\det F} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial e_{ij}} \Delta\Delta u_{l,l} + \rho \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \frac{1}{2} (\Delta\Delta u_{k,l} + \Delta\Delta u_{l,k})
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Definition des augenblicklichen räumlichen Materialsteifigkeitstensors:

$$c_{ijkl} := \rho \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \tag{3.67}$$

Bemerkungen:

1. Der Tensor c_{ijkl} ist im Unterschied zum Werkstofftensor \hat{c}_{ijkl} nach Gl. 3.32 der mitgehenden Lagrange-Formulierung nicht durch Transformation des materiellen konstitutiven Tensors C_{ijkl} auf die aktuelle Konfiguration entstanden. Er enthält deshalb auch keine „Geometrieinflüsse“.
2. Wegen der Symmetrie des zweiten Indexpaares $c_{ijkl} = c_{ijlk}$ darf vereinfacht werden:

$$c_{ijkl} \frac{1}{2} (\Delta\Delta u_{k,l} + \Delta\Delta u_{l,k}) = c_{ijkl} \Delta\Delta u_{k,l} \tag{3.68}$$

In kartesischen Koordinaten läßt sich für Gl. 3.66 schreiben,

$$\mathcal{D}\sigma_{ij}\Delta\Delta u_\tau = (c_{ijkl} - \sigma_{ij}\delta_{kl} + \sigma_{ij} \delta_{ik} + \sigma_{il} \delta_{jk}) \Delta\Delta u_{k,l} \tag{3.69}$$

welche danach in die linearisierte virtuelle Arbeitsgleichung Gl. 3.56 eingesetzt wird:

$$\delta W_{int} = \int_v \delta u_{i,j} \sigma_{ij} dv \Big|_{t} + \int_v \delta u_{i,j} (c_{ijkl} + \sigma_{lj} \delta_{ik}) \Delta \Delta u_{k,l} dv \Big|_{t} \quad (3.70)$$

3.7.4 Erläuterungen zum Stoffgesetz und zur Symmetrie der Anfangsspannungsmatrix

Das einfache Endergebnis in Gl. 3.70 stimmt formal mit jenem der mitgehenden Lagrange-Formulierung überein, beruht allerdings auf einem unterschiedlichen Werkstoffgesetz. Der konstitutive Tensor c_{ijkl} ist identisch mit der Hessematrix eines Potentials (freie Energie), das eine Funktion des räumlichen Verzerrungsmaßes ist. Insbesondere ist er nicht das Produkt eines in materiellen Größen definierten Werkstoffgesetzes nach Transformation in die momentane Lage der Struktur. Festzuhalten bleibt, daß die Linearisierung des Spannungstensors nicht von der willkürlichen Wahl einer Spannungsrate abhängt. Vielmehr ergibt sich die Spannungsrate aus der objektiven Ableitung des Tensors von selbst. Da die kontravarianten Komponenten im virtuellen Arbeitsprinzip auftreten, führt die Linearisierung zwangsläufig auf die sogenannte Oldroyd-Rate. Die Annahme eines hyperelastischen Werkstoffgesetzes in Form der freien Energie $\hat{\psi}$ als Funktion der totalen räumlichen Verzerrungen ist äquivalent zur Doyle-Erikson-Formel /Doyle 1956/.

$$\sigma^{ij} = 2\rho \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial g_{ij}} \quad (3.71)$$

$\hat{\psi}$ = freie Energie in räumlicher Darstellung
 g_{ij} = kovarianter Metriktensor der aktuellen Konfiguration

Deren Richtungsableitung führt auf das Problem einer objektiven Verzerrungsrate des kovarianten Metriktensors.

$$L_v (\sigma^{ij}) = L_v (\rho) \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial g_{ij}} + \rho \frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial g_{ij} \cdot \partial g_{kl}} \mathcal{L}_v (g_{kl}) \quad (3.72)$$

Das zur Geschwindigkeit der Bewegung des Ortsvektors x_i gehörende objektive Verzerrungsmaß resultiert aus der Lie-Ableitung des kovarianten Metriktensors, siehe /Marsden 1983/.

$$L_v (g_{ab}) = \dot{x}_{b|a} + \dot{x}_{a|b} \quad (3.73)$$

Im affinen Koordinatensystem gehen die kovarianten Ableitungen $\dot{x}_{b|a}$ in die partiellen über.

Unter der Voraussetzung eines hyperelastischen Stoffgesetzes hat die Linearisierung notwendigerweise eine symmetrische Struktursteifigkeitsmatrix ergeben. Die Belegung der geometrischen Steifigkeitsmatrix mit dem Produkt $\sigma_{ij}\delta_{ik}$ in Gl. 3.70 hat dieselbe Struktur wie in Gl. 3.45. Die Symmetrie der Matrix resultiert aus der Annahme eines Potentials als Grundlage für das Werkstoffgesetz. Sie ist das Ergebnis der Vertauschbarkeit der zweifachen Richtungsableitungen des Potentials infolge Linearisierung des zugehörigen Cauchy-Spannungstensors und Variation der gesamten Verzerrungsenergie.

Wird ein hypoelastisches Stoffgesetz zwischen irgendeiner Spannungsrate (z.B. Jaumann-Rate) und den Deformationsgeschwindigkeiten definiert, so führt der konsistente Linearisierungsprozeß in der geometrischen Steifigkeit im allgemeinen zu Asymmetrie. Weder der Term $\sigma_{il}\delta_{jk}$ aus der Richtungsableitung des virtuellen räumlichen Verschiebungsgradienten noch das Produkt $\sigma_{ij}\delta_{kl}$ infolge der Differentiation der Jakobideterminanten $\det F$ erzeugen eine symmetrische Belegung der geometrischen Steifigkeitsmatrix.

4 Dünnwandige Strukturen

4.1 Motivation

Grundsätzlich können dünnwandige Strukturen mit dreidimensionalen Kontinuums-elementen modelliert werden, jedoch sind derartigen numerischen Analysen wirtschaftlich vertretbare Grenzen gesetzt. Für ein zuverlässiges Ingenieurmodell resultiert aus dem erforderlichen Feinheitsgrad der Elementdiskretisierung eine unnötig große Anzahl unbekannter Knotenverschiebungen. Desweiteren ist die Konditionszahl c_{ond} der Steifigkeitsmatrix des 3D-Kontinuumsmodells ausgesprochen groß. Sie ist das Verhältnis des kleinsten zum größten Eigenwert der Struktursteifigkeitsmatrix. Der kleinste Eigenwert λ_{min} ist durch das physikalische Verhalten der Struktur gegeben. Er kann nach oben durch die Biegesteifigkeit eines charakteristischen Elements abgeschätzt werden. Der größte Eigenwert λ_{max} ist jedoch proportional zur Dehnsteifigkeit der Struktur in Dickenrichtung und damit vom Feinheitsgrad der Diskretisierung weitgehend unabhängig.

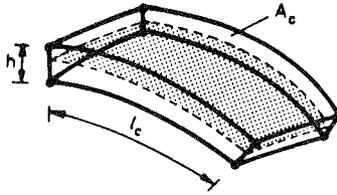


Bild 4.1 : Charakteristische Abmessungen eines dünnwandigen dreidimensionalen Strukturelements

l_c = charakteristische Länge eines Elements

h = Wanddicke

A_c = Flächeninhalt der Referenzfläche

J = Flächenträgheitsmoment des Schalenquerschnitts

$$c_{ond} = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} < \frac{EA_c}{\frac{EJ}{l_c^3}} \propto \left(\frac{l_c}{h}\right)^4 \quad (4.1)$$

Die Konditionszahl ist gemäß Gl. 4.1 proportional zur vierten Potenz des Schlankheitsgrades $\frac{l_c}{h}$ der Struktur und wächst deshalb mit abnehmender Wandstärke h sehr schnell an. Um die Stellenzahl zur binären Darstellung der Daten im Rechner (die sogenannte „Wortlänge“) klein zu halten,

ist es daher geboten, sämtliche Steifigkeiten, welche mit Deformationen der Struktur in Dickenrichtung in Verbindung stehen, auszuschalten. Die relativen Dickenänderungen der Struktur werden nicht als eigenständige Unbekannte in der numerischen Analyse mitgeführt. Eine weitere Einschränkung der Schalendiskretisierung mit Kontinuumselementen tritt bei dynamischen Analysen zu Tage. Nach dem Courant-Friedrichs-Kriterium /Courant 1928/ muß der Informationsfluß im numerischen Modell von Knoten zu Knoten mindestens so groß wie die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c in der physikalischen Struktur sein. Die zulässige Schrittweite des Zeitintegrationsverfahrens Δt_{zul} ist proportional zum kleinsten Knotenabstand ΔX , der im Kontinuumsmodell durch die Schalendicke nach oben festliegt.

$$\Delta t_{zul} < \frac{\Delta X}{c}$$

4.2 Schalenannahmen

4.2.1 Schalenkinematik

Wesentlichstes Merkmal bei der Beschreibung der Konfiguration einer Schale ist die Abbildung der „inneren“ Geometrie des dünnwandigen Kontinuums durch Reduktion auf ein zweidimensionales mathematisches Modell. Die materiellen und räumlichen Schalenkoordinaten sollen parallel zur Referenzfläche des dünnwandigen Kontinuums verlaufen und in der ursprünglichen Lage mit Θ^1, Θ^2 sowie in der aktuellen Geometrie mit θ^1, θ^2 ausgemessen werden. Die dritte Koordinate Θ^3 verläuft in Richtung des Direktors \hat{N} der Ausgangslage, während θ^3 in Richtung des Direktors \hat{n} der momentanen Konfiguration weist. (Mit der Schreibweise $(\hat{\cdot})$ soll ein normierter Vektor gekennzeichnet werden.)

Die gesamte räumliche Verschiebung eines Materiepartikels des Kontinuums wird in die absolute Bewegung der Referenzfläche und in eine Bewegung relativ zur Referenzfläche zerlegt. Im affinen, euklidischen Basensystem werden die Komponenten des Ortsvektors eines Punktes der Ausgangslage mit Z^I und jene der aktuellen Konfiguration mit z^i bezeichnet. Dann setzt sich die Position \mathbf{z} eines beliebigen Punktes der aktuellen Konfiguration der Schale zusammen aus dem Ortsvektor der Schalenbezugsfläche $\bar{\mathbf{z}}$ und dem relativen Abstand θ^3 des betrachteten Punktes zur Referenzfläche gemessen in Richtung des Schalendirektors \hat{n} (kinematische Hypothese).

$$\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} + \theta^3 \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (4.2)$$

Der Positionsvektor \mathbf{Z} des unverformten Zustands lautet:

$$\mathbf{Z}(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = \bar{\mathbf{Z}}(\Theta^1, \Theta^2) + \Theta^3 \cdot \hat{\mathbf{N}}(\Theta^1, \Theta^2) \quad (4.3)$$

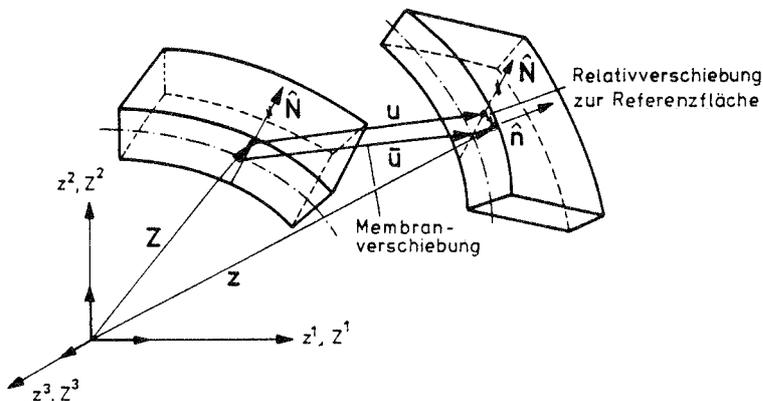


Bild 4.2 : Kinematische Hypothese der Schale

4.2.2 Vergleich des degenerierten Konzepts mit der klassischen Schalenformulierung

Schalenformulierungen lassen sich entweder aus der Annahme einer Cosserat-Referenzfläche (direktes Vorgehen) oder aus den dreidimensionalen Feldgleichungen des Kontinuums herleiten. Innerhalb der zweiten Gruppe, in welche sich alle konstitutiven Gesetze des allgemeinen Kontinuums unmittelbar übertragen lassen, hebt sich das degenerierte Schalenkonzept /Irons 1969/ vom klassischen Vorgehen ab. Die nahe Verwandtschaft der Degenerationsidee zur klassischen Herleitung der Schalengleichungen aus den Feldbeziehungen des allgemeinen Kontinuums ist lange Zeit nicht betont worden.

A) Schalenformulierung mit Annahme einer Flächentheorie

Die klassische Herleitung der Schalengleichungen ist durch die Spezifizierung des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} im Tangenten-Normalen-System der Referenzfläche gekennzeichnet. Die Verschiebungskomponenten zeigen in Richtung der Flächenvektoren $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2$ und entlang der Normalen $\hat{\mathbf{N}}$, so daß in

Tangential- und Querverschiebung der Schalenreferenzfläche unterschieden werden kann/Naghdi 1972, S.449/.

$$\mathbf{u} = u^1 \cdot \mathbf{G}_1 + u^2 \cdot \mathbf{G}_2 + u^3 \cdot \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{z} - \mathbf{Z}$$

Bei Gültigkeit der „Dünne-Hypothese“ /Başar 1985/ darf von der Unveränderlichkeit der Schalenbasis in der Referenzfläche über die Schalendicke ausgegangen werden.

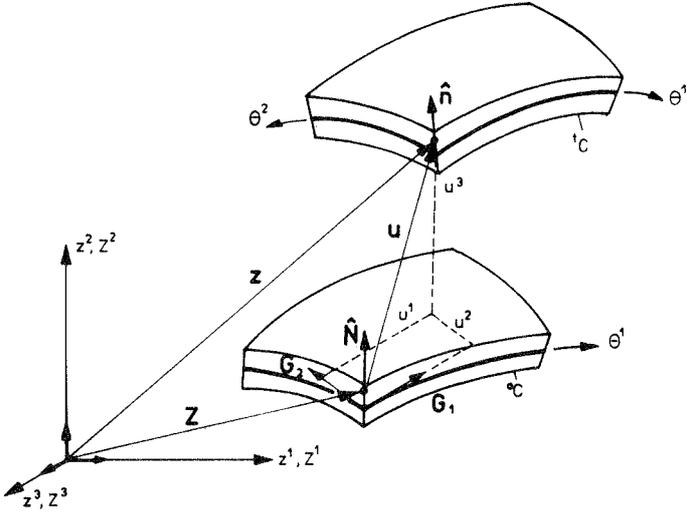


Bild 4.3 : Verschiebungsfeld \mathbf{u} der Schale im Tangenten-Normalen-System $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \hat{\mathbf{N}}$

Wie zuvor schon ausgeführt, sind mittels Bernoulli-Annahme auch im lokalen Basensystem der Schale die Verschiebungsvektoren \mathbf{u} aller Punkte entlang der Normalen $\hat{\mathbf{N}}$ im Abstand Θ^3 zur Referenzfläche in eine Translation der Schalenbezugsfläche $\bar{\mathbf{u}}$ und in eine Rotationsbewegung des Direktors $\hat{\mathbf{n}}$ zerlegbar.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \Theta^3 (\hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{N}})$$

Die Bewegung des Differenzvektors $\mathbf{w} := \hat{\mathbf{n}} - \hat{\mathbf{N}}$ kann mit einer der in Abschnitt 4.2.3 genannten kinematischen Gruppen beschrieben werden. Die Vektorkomponenten im lokalen, krummlinigen Koordinatensystem seien w^i , wobei üblicherweise die Koordinate w^3 wegen der unveränderlichen Länge

des Direktors als Abhängige der beiden Komponenten w^1 und w^2 behandelt wird /Başar 1986/.

$$\mathbf{u} = (\bar{u}^1 + \Theta^3 w^1) \mathbf{G}_1 + (\bar{u}^2 + \Theta^3 w^2) \mathbf{G}_2 + (\bar{u}^3 + \Theta^3 w^3) \hat{\mathbf{N}}$$

Konsequenterweise werden bei diesem Typ von Schalenelementen sowohl die lokalen Verschiebungskomponenten w^i als auch die kinematischen Feldvariablen zur Lagebeschreibung des Schalendirektors direkt interpoliert.

B) Isoparametrisches, degeneriertes Schalenkonzept

Im Unterschied zu den Schalengleichungen aus einer Flächentheorie werden die Feldgleichungen für die aktuelle Geometrie \mathbf{z} und die Verschiebungen \mathbf{u} im affinen, euklidischen Koordinatensystem Bild 2.4 beschrieben.

$$\mathbf{z} = \bar{z}^i \cdot \hat{\mathbf{i}}_i + \theta^3 n^i \cdot \hat{\mathbf{i}}_i \quad (4.4)$$

bzw.

$$\mathbf{u} = \bar{u}^i \cdot \hat{\mathbf{I}}_i + \theta^3 (n^i - N^i) \cdot \hat{\mathbf{i}}_i \quad (4.5)$$

In der weiteren Formulierung für die kinematischen Beziehungen wird direkt mit den Feldgleichungen der deformierten Geometrie gearbeitet, jedoch treten die affinen, euklidischen Koordinaten des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} in virtueller und inkrementeller Form im Arbeitsausdruck auf. Insbesondere werden die *affinen* Komponenten des Ortsvektors der aktuellen Geometrie diskretisiert und interpoliert.

$$\mathbf{z} = \Phi^K [\bar{z}^{iK} + \theta^3 n^{iK}] \cdot \hat{\mathbf{i}}_i \quad (4.6)$$

$$\Phi^K = \Phi^K(\theta^1, \theta^2) \quad \text{Interpolationsfunktionen}$$

Durch formales Linearisieren gelangt man zu den inkrementellen Verschiebungen $\Delta \Delta \mathbf{u}$ bzw. durch Variation zu den virtuellen Größen $\delta \mathbf{u}$, deren Komponenten euklidisch sind. Die Isoparametrie der Diskretisierung zwischen Geometrie und Verschiebungen ist a priori gewährleistet.

$$\delta \mathbf{u} = \Phi^K [\delta \bar{u}^{iK} + \Theta^3 \delta n^{iK}] \cdot \hat{\mathbf{I}}_i \quad (4.7)$$

Da die affinen Basensysteme $\hat{\mathbf{i}}_i$ und $\hat{\mathbf{I}}_i$ zusammenfallen, brauchen sie nicht länger unterschieden zu werden. Es soll die Vereinbarung gelten, daß die Indizes i, j, k, l bzw. I, J, K, L Koordinaten im affinen, euklidischen System markieren.

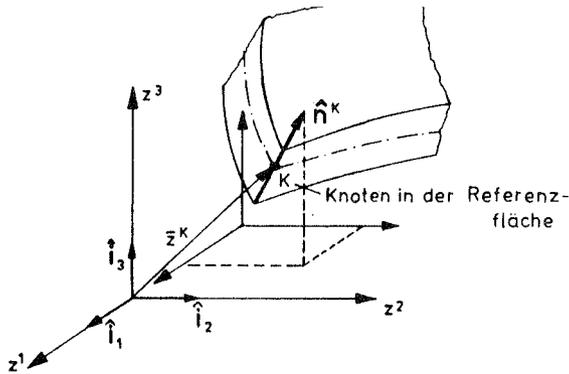


Bild 4.4 : Diskretisierung der affinen, euklidischen Koordinaten des aktuellen Zustands

Zu beachten ist, daß die Lösungsvariablen mit den Komponenten der Geometrieänderungen z^i im affinen Koordinatensystem identisch sind. Daher werden Tangential- und Querverschiebung (z.B. Aufweitung des Zylinderradius) nicht direkt ermittelt. Dies mag von ingenieurwissenschaftlicher Seite bedauert werden, da auch die Struktursteifigkeitsmatrix nicht explizit über Membran- und Querschubsteifigkeit Auskunft gibt. Unter dem Aspekt automatischer Weiterverarbeitung der Geometriedaten allgemeiner Bauteile sind jedoch die Komponenten im affinen, euklidischen System besser geeignet. Allerdings müssen numerische Transformationen für die Verschiebungskomponenten zwischen den lokalen, krummlinigen Schalenbasen und den euklidischen Koordinaten in Kauf genommen werden; denn die geometrischen Randbedingungen der Schale liegen zumeist im Tangenten-Normalen-System der Referenzfläche vor (z.B. Membranlagerung oder gelenkige Ränder).

4.2.3 Kinematische Variable zur Lagebeschreibung des Direktors

Prinzipiell gibt es mindestens fünf verschiedene Möglichkeiten, die Bewegung des Schalendirektors \hat{n} zu beschreiben.

1. *Richtungswinkel*: In /Ramm 1976a/ werden Richtungswinkel verwendet, welche auch im weiteren hier benutzt werden.
2. *Euler-Winkel*: Die neue Orientierung eines im Raum gedrehten orthogonalen Achsenkreuzes wird durch drei nacheinander auszuführende

Drehungen um ausgewählte Koordinatenachsen gefunden. Zuerst wird um die dritte Achse rotiert, danach um die Achse zwei der neuen Lage und anschließend um die aktuelle Achse drei. Charakteristisch für Euler-Winkel sind die Drehungen um die Achsen der augenblicklichen Orientierung des Koordinatenkreuzes und die spezielle Folge der Rotationen. Diesen Eigenschaften ist die Attraktivität der Euler-Winkel in den zahlreichen Publikationen zur Beschreibung der Bewegung des Schalendirektors zu verdanken.

3. *Cardan-Winkel*: Auch als Bryant-Winkel bezeichnet beschreiben die Cardan-Winkel die gedrehte Lage eines Körpers im Raum durch eine Sequenz dreier Rotationen. Zuerst wird um die Achse in Richtung des Basisvektors \hat{e}_1 rotiert, danach um die Achse \hat{e}'_2 des gedrehten Koordinatenkreuzes, woraus die Basen \hat{e}_i^* entstehen und schließlich um die dritte Achse \hat{e}_3^* . Von den Euler-Winkeln unterscheiden sich die Cardan-Rotationen nur durch die Wahl der Drehachsen. Bei kleinen Rotationen können die Cardan-Winkel wie die Komponenten eines Vektors behandelt werden, denn es gilt das Kommutativgesetz und die Addition.
4. *Rotationsvektor*: Jede beliebige Drehung eines Basensystems im Raum soll durch eine einzige Rotation um eine geschickt gewählte Achse zustandekommen, welche durch einen Vektor (den sogenannten „Rotationsvektor“) der Länge „eins“ mit zwei unabhängigen Koordinaten definiert ist.
5. *Eulerparameter*: Die beiden Koordinaten des Rotationsvektors und der Drehwinkel werden auf die vier Eulerparameter q_0, q_1, q_2 und q_3 umgerechnet. Sie unterliegen der zusätzlichen Bedingungsgleichung, daß sich ihre euklidische Norm zu „eins“ ergeben muß. Man spricht von den Eulerparametern auch als von den normalisierten Quaternionen. Im Gegensatz zu den Richtungs-, Euler- und Cardanwinkeln weisen die Quaternionen keine Singularitäten auf, so daß damit alle gedrehten Lagen eindeutig identifiziert werden können.
6. *Relativverschiebung*: Die relativen Verschiebungskomponenten zwischen zwei Punkten an der Schalenober- und -unterseite eines Querschnitts werden zur Richtungsermittlung des Schalendirektors verwendet.

Im Rahmen dieser Arbeit werden die in /Ramm 1976a/ vorgeschlagenen Richtungscosinus zur Angabe der Richtung des Direktors benutzt.

$$\mathbf{z} = \bar{z}^i \cdot \hat{\mathbf{i}}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \cos \Psi_i(\theta^1, \theta^2) \cdot \hat{\mathbf{i}} \quad (4.8)$$

Zwischen den drei Richtungswinkeln Ψ_i besteht genau eine Abhängigkeit. Deshalb sind in /Ramm 1976a/ die beiden Winkel Ψ und ε als unabhängige Variable eingeführt worden. Um mißverständliche Notation zu vermeiden, soll mit $\omega = \Psi_1$ der Winkel zwischen Direktor und z^1 -Achse bezeichnet werden, während $\varpi = \varepsilon$ den Winkel zwischen der Projektion des Direktors in die z^2, z^3 - Ebene und der z^2 - Achse mißt. (Hinweis: In /Ramm 1976a/ sind für die Änderungen der Winkel Ψ und ε die Variablen β und α eingeführt worden, wogegen hier $\Delta\Delta\omega$ und $\Delta\Delta\varpi$ geschrieben wird).

Die fünf unabhängigen kinematischen Variablen der Schale \bar{z}^1, \bar{z}^2 und \bar{z}^3 sowie ω und ϖ werden zum Vektor \mathbf{y} zusammengestellt,

$$\mathbf{y} = [y_S] = \left[\bar{z}^1 \quad \bar{z}^2 \quad \bar{z}^3 \quad \omega \quad \varpi \right]^T \quad (4.9)$$

mit dem die Geometrie der Schale eindeutig festliegt.

$$z^i = \bar{z}^i + \theta^3 f^i(\omega, \varpi) \quad (4.10)$$

$$\text{worin} \quad f^i = \begin{bmatrix} \cos \omega \\ \sin \omega \cos \varpi \\ \sin \omega \sin \varpi \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

4.3 Schalenformulierung mit allgemeinen Flächenkoordinaten

4.3.1 Wahl des Bezugssystems

Unter der Bezeichnung „Bezugssystem“ soll im folgenden dasjenige Koordinatensystem verstanden werden, in welchem die Komponenten der Spannungs- und Verzerrungstensenoren für das virtuelle Arbeitsprinzip aufgestellt werden. Drei verschiedene Bezugssysteme können auseinandergehalten werden:

- Das affine, globale Koordinatensystem mit den Basisvektoren $\hat{\mathbf{i}}$ bzw. $\hat{\mathbf{I}}$ gemäß Bild 4.2 ist in /Ramm 1976/ als Bezugssystem für alle Tensorcomponenten gewählt worden. Mit diesen Tensorkoordinaten ist das degenerierte, isoparametrische Konzept zweifellos am konsequentesten im Sinne einer nichtlinearen Kontinuumsformulierung zur Schalenberechnung umgesetzt worden. Die kartesischen Komponenten des konstitutiven Tensors werden nach der Degeneration mit der orthornormalen Transformationsmatrix ins affine, globale Basensystem $\hat{\mathbf{i}}$ gebracht, wo sie mit den ebenfalls affinen Tensorkoordinaten des Verzerrungsmaßes zur Bildung der inneren Arbeit überschoben werden. Auch innerhalb der in /Ramm 1986/ modifizierten Herleitung wird der Deformationsgradient F^i_j im affinen, kartesischen System aufgestellt.

Zur Beurteilung des Tragverhaltens dünnwandiger Bauteile bieten sich Tangenten-Normalen-Systeme für die Tensorkoordinaten an, da der Beanspruchungszustand direkt in Membran-, Querschub- und Biegeanteil aufgliedert wird. Neben den

- allgemeinen krummlinigen Flächenkoordinaten θ^a, Θ^A

lassen sich auch

- lokale kartesische Schalenkoordinaten ξ^α in einem orthogonalen Tangenten-Normalen-System auszeichnen. Dieses spezielle Bezugssystem wird im nächsten Kapitel benutzt.

4.3.2 Formulierung der degenerierten Schale im allgemeinen, krummlinigen Koordinatensystem

Die materiellen und räumlichen Basen des allgemeinen, krummlinigen Koordinatensystems gehen mit den in Abschnitt 2.1.2 angegebenen Formeln aus

den partiellen Ableitungen der undeformierten und der aktuellen Konfiguration nach den Schalenkoordinaten Θ^A bzw. θ^a hervor.

$$\mathbf{G}_1 = \frac{\partial \mathbf{Z}^I}{\partial \Theta^1} \cdot \hat{\mathbf{I}}_I \quad \mathbf{G}_2 = \frac{\partial \mathbf{Z}^I}{\partial \Theta^2} \cdot \hat{\mathbf{I}}_I \quad \hat{\mathbf{N}} = \frac{\partial \mathbf{Z}^I}{\partial \Theta^3} \cdot \hat{\mathbf{I}}_I \quad (4.12)$$

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{z}^i}{\partial \theta^1} \cdot \hat{\mathbf{i}}_i \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{z}^i}{\partial \theta^2} \cdot \hat{\mathbf{i}}_i \quad \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial \mathbf{z}^i}{\partial \theta^3} \cdot \hat{\mathbf{i}}_i \quad (4.13)$$

Die Normale $\hat{\mathbf{N}}$ wird in der Regel aus dem Vektorprodukt der Basen \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 konstruiert.

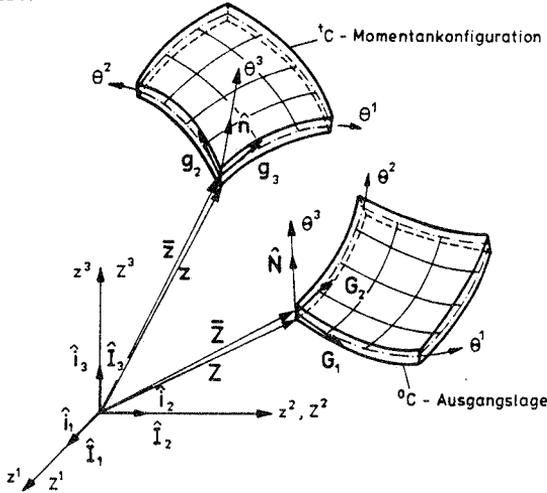


Bild 4.5 : Koordinatensysteme mit Koordinatenlinien $c_1(s)$ und $c_2(s)$. Die Linie $c_3(s)$ schneidet im Ausgangszustand die Referenzfläche orthogonal.

Insbesondere bei der analytischen Vorabintegration über die Schalendicke wird bei Gültigkeit der „Dünne-Hypothese“ von der Unveränderlichkeit der Basensysteme \mathbf{G}_I und \mathbf{g}_i in Dickenrichtung ausgegangen, wobei die Basisvektoren $\bar{\mathbf{G}}_I$ und $\bar{\mathbf{g}}_i$ auf der Referenzfläche $\bar{\mathbf{Z}}^I$ bzw. $\bar{\mathbf{z}}^i$ stellvertretend für alle Punkte auf dem Schalendirektor ermittelt werden.

$$\bar{\mathbf{G}}_1 := \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}^I}{\partial \Theta^1} \cdot \hat{\mathbf{I}}_I \quad \bar{\mathbf{G}}_2 := \frac{\partial \bar{\mathbf{Z}}^I}{\partial \Theta^2} \cdot \hat{\mathbf{I}}_I$$

$$\bar{\mathbf{g}}_1 := \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}^i}{\partial \theta^1} \cdot \hat{\mathbf{i}}_i \quad \bar{\mathbf{g}}_2 := \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}^i}{\partial \theta^2} \cdot \hat{\mathbf{i}}_i$$

Bei der numerischen Integration in Normalenrichtung wird in der Regel die „Dünne-Hypothese“ teilweise aufgegeben; denn abgesehen von den zusätzlichen numerischen Operationen bedeutet die Rechnung mit den exakten Basen keine weitere Erschwernis.

Sowohl der materielle G_{AB} als auch der räumliche Metriktenor g_{ab} in kovarianter Darstellung sind gemäß Gl. 2.4 bzw. Gl. 2.6 aus den Skalarprodukten zwischen den Basen zu bestimmen.

4.3.3 Verzerrungstensor in allgemeinen Schalenkoordinaten

Numerisch sehr effektiv können die kovarianten Komponenten des Green-Lagrange-Verzerrungsmaßes ϵ_{AB} aus den Metriktenoren konstruiert werden. Auch in krummlinigen Koordinaten kann der Verzerrungstensor ϵ_{AB} über den rechten Cauchy-Green-Deformationstensor \tilde{C}_{AB} eingeführt werden.

$$2\epsilon_{AB} = \tilde{C}_{AB} - G_{AB} \quad (4.14)$$

$$2\epsilon_{AB} = g_{ab} F^a{}_A F^b{}_B - G_{AB} \quad (4.15)$$

$$2\epsilon_{AB} = \left(\frac{\partial z^i}{\partial \theta^a} \frac{\partial z^j}{\partial \theta^b} \delta_{ij} \right) \frac{\partial \theta^a}{\partial \Theta^A} \frac{\partial \theta^b}{\partial \Theta^B} - \frac{\partial Z^I}{\partial \Theta^A} \frac{\partial Z^J}{\partial \Theta^B} \delta_{IJ} \quad (4.16)$$

$$2\epsilon_{AB} = \frac{\partial z^i}{\partial \Theta^A} \delta_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial \Theta^B} - \frac{\partial Z^I}{\partial \Theta^A} \delta_{IJ} \frac{\partial Z^J}{\partial \Theta^B} \quad (4.17)$$

Häufig werden die in Gl. 4.17 auftretenden skalaren Produkte zwischen den Flächenvektoren von Anfang an als Metriktenoren \tilde{g}_{AB} und \tilde{G}_{AB} definiert /Green 1968/, /Malvern 1969/.

$$\tilde{g}_{AB} = \frac{\partial z^i}{\partial \Theta^A} \delta_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial \Theta^B} \quad (4.18)$$

$$\tilde{G}_{AB} = \frac{\partial Z^I}{\partial \Theta^A} \delta_{IJ} \frac{\partial Z^J}{\partial \Theta^B} \quad (4.19)$$

Das Green-Lagrange-Verzerrungsmaß wird dann als Differenz der beiden Metriktenoren vereinbart, welche allerdings nicht mit den in Gl. 2.4 und Gl. 2.6 definierten Größen zu verwechseln sind.

$$\epsilon_{AB} = \frac{1}{2}(\tilde{g}_{AB} - \tilde{G}_{AB}) \quad (4.20)$$

Die Funktionalmatrizen aus den partiellen Ableitungen $\frac{\partial Z^I}{\partial \Theta^A}$ bzw. $\frac{\partial z^i}{\partial \Theta^A}$ werden auch als Jakobimatrizen der anfänglichen bzw. aktuellen Konfiguration bezeichnet und beinhalten die Basisvektoren für die allgemeinen Schalenkoordinaten.

$$[Z^I,{}_A] = \left[\frac{\partial Z^I}{\partial \Theta^A} \right] = \left[\begin{array}{ccc} Z^1,{}_{\Theta^1} & Z^1,{}_{\Theta^2} & Z^1,{}_{\Theta^3} \\ Z^2,{}_{\Theta^1} & Z^2,{}_{\Theta^2} & Z^2,{}_{\Theta^3} \\ \underbrace{Z^3,{}_{\Theta^1}}_{\mathbf{G}_1} & \underbrace{Z^3,{}_{\Theta^2}}_{\mathbf{G}_2} & \underbrace{Z^3,{}_{\Theta^3}}_{\mathbf{N}} \end{array} \right] \quad (4.21)$$

$$[Z^i, A] = \begin{vmatrix} \bar{Z}^1, \Theta^1 & \bar{Z}^1, \Theta^2 & f^1 \\ \bar{Z}^2, \Theta^1 & \bar{Z}^2, \Theta^2 & f^2 \\ \bar{Z}^3, \Theta^1 & \bar{Z}^3, \Theta^2 & f^3 \end{vmatrix} + \Theta^3 \begin{vmatrix} f^1, \Theta^1 & f^1, \Theta^2 & 0 \\ f^2, \Theta^1 & f^2, \Theta^2 & 0 \\ f^3, \Theta^1 & f^3, \Theta^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.22)$$

Anmerkungen:

- Die Ersparnis an Rechenoperation im Vergleich zur Formulierung mit affinen Tensorkoordinaten ϵ_{IJ} gemäß

$$\epsilon_{IJ} = \frac{1}{2}(F_{kI} F_{kJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial z^k}{\partial \Theta^A} \frac{\partial \Theta^A}{\partial Z^I} \right) \left(\frac{\partial z^k}{\partial \Theta^B} \frac{\partial \Theta^B}{\partial Z^J} \right) - \delta_{IJ} \right) \quad (4.23)$$

geht auf die hinfällig gewordene Produktbildung mit der inversen Jakobimatrix $\frac{\partial \Theta^A}{\partial Z^I}$ zurück.

- Die Linearisierung der Green-Lagrange-Verzerrungen Gl. 4.17 mittels Fréchet-Ableitung führt auf die in /Parisch 1986/, /Dvorkin 1984/, /Park 1986/ benutzten Ergebnisse für lineare Schalelemente.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \epsilon_{AB} \cdot \Delta \Delta u &= \frac{d}{d\eta} \epsilon_{AB} (z + \eta \cdot \Delta \Delta u)|_{\eta=0} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \Theta^A} \delta_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial \Theta^B} + \frac{\partial z^i}{\partial \Theta^A} \delta_{ij} \frac{\partial u^j}{\partial \Theta^B} \right) \quad (4.24) \end{aligned}$$

- Die Kenntnis des Deformationsgradienten F^a_B im Basensystem der allgemeinen krummlinigen Schalenkoordinaten kann von Bedeutung sein.

$$F^a_B = \frac{\partial \theta^a}{\partial z^i} \frac{\partial z^i}{\partial Z^J} \frac{\partial Z^J}{\partial \Theta^B} = \frac{\partial \theta^a}{\partial z^i} F^i_J \frac{\partial Z^J}{\partial \Theta^B} \quad (4.25)$$

Da die Geometrie in den affinen, euklidischen Koordinaten gegeben ist, liegen die affinen Komponenten des Deformationsgradienten F^i_J im euklidischen Basensystem \hat{I}_I bzw. \hat{i} direkt vor. In praktischen Berechnungen wird F^i_J über die Kettenregel der Differentiation aus den diskretisierten Feldgleichungen der aktuellen und anfänglichen Geometrie gewonnen.

$$F^i_J = \frac{\partial z^i}{\partial r^A} \frac{\partial r^A}{\partial Z^J}$$

Mit r^A sind normierte (natürliche) Koordinaten für die Interpolationsfunktionen bezeichnet - siehe Abschnitt 4.5.4.

4.3.4 Konstitutives Gesetz in allgemeinen Schalenbasen

Hinsichtlich des numerischen Aufwandes ist die Schalenformulierung in den allgemeinen Basen immer dann vorzuziehen, wenn isotropes, linear elastisches Material vorliegt, oder wenn die privilegierten Achsen (in Richtung der Symmetrieebenen des Werkstoffes) anisotroper Deformationsgesetze mit den Koordinatenlinien $c_i(s)$ der Schale zusammenfallen. In diesen Fällen kann der konstitutive Tensor zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix direkt verarbeitet werden, ohne daß er zuerst mit dem vierstufigen Transformationsgesetz in das allgemeine Basensystem der Schale übertragen wird.

Im Bildungsgesetz für die Komponenten des linear elastischen Werkstofftensors der materiellen Formulierung C^{ABCD} in allgemeinen Koordinaten muß selbstverständlich mit dem materiellen Metriktensor G^{AB} /Naghdi 1972, S.557/ in kontravarianter Darstellung gearbeitet werden, dessen Komponenten durch Inversion aus der kovarianten Metrik G_{AB} gemäß Gl. 2.4 hervorgehen.

$$C^{ABCD} := \lambda G^{AB} G^{CD} + \mu (G^{AC} G^{BD} + G^{AD} G^{BC}) \quad (4.26)$$

Die kontravarianten Komponenten des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors S^{AB} ergeben sich aus dem Werkstoffgesetz.

$$S^{AB} = C^{ABCD} \epsilon_{CD} \quad (4.27)$$

Zur Elimination der Dehnsteifigkeit in Normalenrichtung wird die statische Hypothese (die sogenannten „Degenerationsbedingungen“) aufgestellt, wonach die Normalspannungskomponente S^{33} verschwinden soll. Die Degenerationsrichtung in der materiellen Formulierung fällt mit der Richtung der Normalen \hat{N} zusammen. Dadurch vereinfacht sich die statische Kondensation des konstitutiven Tensors, denn bei Orthogonalität der Normalen \hat{N} zu den Basen \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 kann die Degenerationsbedingung bei isotropem Material mühelos in die Matrix des konstitutiven Tensors eingebracht werden. Für die Degeneration ratenabhängiger Werkstoffgesetze wird auf Abschnitt 7.1 verwiesen.

4.4 Schalenformulierung in lokalen, kartesischen Koordinaten

4.4.1 Konstruktion der lokalen, kartesischen Basen

Sehr häufig lassen sich Werkstoffgesetze vereinfachen, wenn in Schub- und Normalspannungskomponenten getrennt werden kann, wie es mit kartesischen Basen der Fall ist. Dann läßt sich vor allem bei nichtlinearem Materialverhalten die erforderliche Anzahl numerischer Operationen im Spannungsalgorithmus auf ein Minimum begrenzen und die Transformation von den kartesischen Koordinaten auf die allgemeinen, krummlinigen Basen wird hinfällig. Für das Studium des Tragverhaltens einer Struktur mit Lastabtragung in Hauptrichtung und Querbeanspruchung eignen sich Schnittgrößen an orthogonal zueinander verlaufenden Schnittufern oftmals besser. Werden Eulerwinkel zur Beschreibung der Bewegung des Direktors benutzt, so bieten sich die lokalen, kartesischen Basen als Rotationsachsen geradezu an.

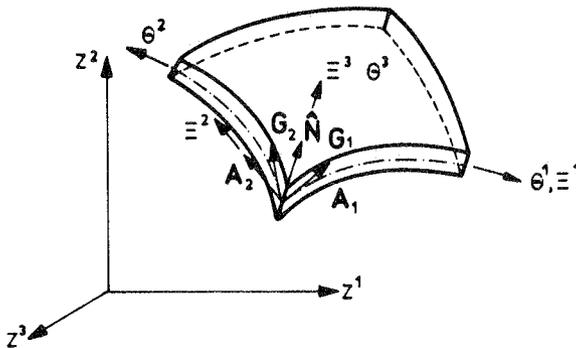


Bild 4.6 : Allgemeines krummliniges und lokales kartesisches Koordinatensystem in der Ausgangskonfiguration C^0

Jeder Punkt der Schalenreferenzfläche in der Ausgangskonfiguration 0C wird mit eigenen lokalen kartesischen Koordinaten Ξ^α ausgestattet. Die zugehörigen orthonormierten Basen \mathbf{A}_1 und \mathbf{A}_2 sollen zugleich Flächenvektoren sein. Alle Koordinatenlinien verlaufen senkrecht zueinander, denn auch der Basisvektor \mathbf{A}_3 fällt mit der Normalrichtung $\hat{\mathbf{N}}$ zusammen. Der Einfachheit halber sollen die normierten Basen \mathbf{A}_1 und $\hat{\mathbf{G}}_1$ - siehe Bild 4.6 -

miteinander identisch sein.

$$\hat{\mathbf{G}}_1 = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Theta^1} \right\|} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Theta^1} \quad (4.28)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_2 = \frac{1}{\left\| \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Theta^2} \right\|} \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Theta^2} \quad (4.29)$$

Die Basen $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ werden nach untenstehenden Kriterien konstruiert:

$$\mathbf{A}_1 \parallel \hat{\mathbf{G}}_1 \quad (4.30)$$

$$\mathbf{A}_3 = \hat{\mathbf{G}}_1 \times \hat{\mathbf{G}}_2 \quad (4.31)$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3 \times \mathbf{A}_1 \quad (4.32)$$

Aus numerischen Gründen wird der Vektor \mathbf{A}_3 aus dem Kreuzprodukt anstelle der Ableitung $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Xi^3}$ geformt.

4.4.2 Transformation zwischen allgemeinen, krummlinigen und lokalen, kartesischen Tensorkoordinaten

Für die Funktionalmatrix \mathbf{j} zur Transformation der Tensoren und partiellen Ableitungen zwischen den krummlinigen und lokalen, kartesischen Koordinaten muß das Bildungsgesetz noch gefunden werden, das der Kettenregel der Differentiation unterliegt.

$$\frac{\partial Z}{\partial \Theta^A} = \frac{\partial Z}{\partial \Xi^\alpha} \frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial \Theta^A} \quad (4.33)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Z^1}{\partial \Theta^1} & \frac{\partial Z^1}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial Z^1}{\partial \Theta^3} \\ \frac{\partial Z^2}{\partial \Theta^1} & \frac{\partial Z^2}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial Z^2}{\partial \Theta^3} \\ \frac{\partial Z^3}{\partial \Theta^1} & \frac{\partial Z^3}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial Z^3}{\partial \Theta^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z^1}{\partial \Xi^1} & \frac{\partial Z^1}{\partial \Xi^2} & \frac{\partial Z^1}{\partial \Xi^3} \\ \frac{\partial Z^2}{\partial \Xi^1} & \frac{\partial Z^2}{\partial \Xi^2} & \frac{\partial Z^2}{\partial \Xi^3} \\ \frac{\partial Z^3}{\partial \Xi^1} & \frac{\partial Z^3}{\partial \Xi^2} & \frac{\partial Z^3}{\partial \Xi^3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \Xi^1}{\partial \Theta^1} & \frac{\partial \Xi^1}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial \Xi^1}{\partial \Theta^3} \\ \frac{\partial \Xi^2}{\partial \Theta^1} & \frac{\partial \Xi^2}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial \Xi^2}{\partial \Theta^3} \\ \frac{\partial \Xi^3}{\partial \Theta^1} & \frac{\partial \Xi^3}{\partial \Theta^2} & \frac{\partial \Xi^3}{\partial \Theta^3} \end{vmatrix} \quad (4.34)$$

$$[\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2 \quad \mathbf{G}_3] = [\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2 \quad \mathbf{A}_3] \quad \mathbf{j} \quad (4.35)$$

$$j^\alpha_A = \frac{\partial \Xi^\alpha}{\partial \Theta^A} \quad (4.36)$$

Die Transformation der partiellen Ableitungen geschieht durch Nachmultiplikation mit der Jakobimatrix.

$$\frac{\partial}{\partial \Theta^A} () = \frac{\partial}{\partial \Xi^\alpha} () j^\alpha_A \quad (4.37)$$

Aufgrund der Identität der Basisvektoren mit den partiellen Ableitungen der Funktionsgleichung für die Referenzfläche kann die Transformationsmatrix \mathbf{j} aus den Skalarprodukten der Basisvektoren \mathbf{A}_α aufgestellt werden.

$$\mathbf{A}_\alpha = \left[A_\alpha^I \right] = \frac{\partial Z^I}{\partial \Xi^\alpha} \hat{\mathbf{I}}_I \quad (4.38)$$

Dazu wird Gl. 4.35 nacheinander mit den kontravarianten Basisvektoren $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$ vormultipliziert. Das entstehende Gleichungssystem wird in Matrizen zusammengefaßt.

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathbf{A}^1 \mathbf{G}_1 & \mathbf{A}^1 \mathbf{G}_2 & \mathbf{A}^1 \hat{\mathbf{N}} \\ \mathbf{A}^2 \mathbf{G}_1 & \mathbf{A}^2 \mathbf{G}_2 & \mathbf{A}^2 \hat{\mathbf{N}} \\ \mathbf{A}^3 \mathbf{G}_1 & \mathbf{A}^3 \mathbf{G}_2 & \mathbf{A}^3 \hat{\mathbf{N}} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{A}^1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}^1 \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}^1 \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}^2 \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}^2 \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}^2 \mathbf{A}_3 \\ \mathbf{A}^3 \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}^3 \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}^3 \mathbf{A}_3 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} j^\alpha_A \end{array} \right| \quad (4.39)$$

Infolge der Orthonormierung der Basen \mathbf{A}_α sind die kovarianten Basisvektoren mit ihren Reziproken (kontravariante Basen) identisch, wodurch die Skalarprodukte zwischen den kontravarianten Basen \mathbf{A}^α und den kovarianten Vektoren \mathbf{G}_A auch mit den kovarianten Vektordarstellungen \mathbf{A}_α gebildet werden können. Wegen der Orthogonalität der dritten Basis \mathbf{A}^3 zu den Flächenvektoren \mathbf{G}_1 und \mathbf{G}_2 entkoppelt sich die Normalenrichtung in der Transformationsmatrix für die Flächenvektoren. Mit der Formel $\mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta = \delta_\beta^\alpha$ geht die Matrix auf der rechten Seite von Gl. 4.33 und Gl. 4.39 bei der Vormultiplikation der Größe \mathbf{j} in die Einheitsmatrix über.

$$\mathbf{j} = \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{A}_1 \mathbf{G}_1 & \mathbf{A}_1 \mathbf{G}_2 & 0 \\ \mathbf{A}_2 \mathbf{G}_1 & \mathbf{A}_2 \mathbf{G}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A}_3 \mathbf{G}_3 \end{array} \right| \quad (4.40)$$

4.4.3 Tensoren in lokalen kartesischen Koordinaten

Verzerrungen

Die Komponenten des Verzerrungstensors nach Green-Lagrange in Gl. 4.17 können durch Anwenden der Kettenregel im lokalen, kartesischen Basensystem \mathbf{A}_α errechnet werden.

$$2 \epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Theta^A}{\partial \Xi^\alpha} \frac{\partial z^i}{\partial \Theta^A} \delta_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial \Theta^B} \frac{\partial \Theta^B}{\partial \Xi^\beta} - \underbrace{\frac{\partial \Theta^A}{\partial \Xi^\alpha} \frac{\partial Z^I}{\partial \Theta^A}}_{\mathbf{A}_\alpha} \delta_{IJ} \underbrace{\frac{\partial Z^J}{\partial \Theta^B} \frac{\partial \Theta^B}{\partial \Xi^\beta}}_{\mathbf{A}_\beta} \quad (4.41)$$

Aufgrund der Orthonormalität der Vektorbasen \mathbf{A}_α folgt für deren Skalarprodukt das Kronecker-Delta.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\Theta^A}{\partial\Xi^\alpha} \frac{\partial z^i}{\partial\Theta^A} \delta_{ij} \frac{\partial z^j}{\partial\Theta^B} \frac{\partial\Theta^B}{\partial\Xi^\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right)$$

Die Transformationsregel zwischen den lokalen, kartesischen und den allgemeinen, krummlinigen Tensorkoordinaten nach Green-Lagrange $\epsilon_{\alpha\beta}$ und ϵ_{AB} ist aus Gl. 4.41 und Gl. 4.17 nach Vor- und Nachstellen der Transformationsmatrix $\frac{\partial\Theta^A}{\partial\Xi^\alpha}$ abzulesen.

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{\partial\Theta^A}{\partial\Xi^\alpha} (\epsilon_{AB}) \frac{\partial\Theta^B}{\partial\Xi^\beta}$$

$$\epsilon_{AB} = \mathbf{j}^\alpha_A (\epsilon_{\alpha\beta}) \mathbf{j}^\beta_B$$

Materialgesetz und Spannungen

Die schwache Besetzung des konstitutiven Tensors Gl. 3.48 für isotropes, elastisches Material im orthogonalen Koordinatensystem mit den Basen \mathbf{A}_α kann ausgenutzt werden. Ebenso wie beim Verzerrungstensor brauchen die ko- und kontravarianten Koordinaten des Material- und Spannungstensors nicht mehr länger unterschieden werden und können wie im Teil 3 dargestellt werden.

4.5 Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit der Schale

4.5.1 Besonderheiten bei dünnwandigen Strukturen

Auf die Fréchet-Ableitung ist die Wahl des Bezugssystems - d.h. die Verwendung von affinen Koordinaten oder Schalenkoordinaten - ohne Einfluß, da alle materiellen Tensorkomponenten bei der Bildung der inneren Arbeit überschoben werden. Bemerkenswert ist allerdings die Tatsache, daß die kinematischen Variablen zur Lagebeschreibung des Direktors sowohl für Schalen als auch für Stäbe nichtlinear in das Verschiebungsfeld \mathbf{u} und in die aktuelle Geometrie \mathbf{z} eingehen. Diese Problematik taucht immer dann auf, wenn die Länge des Direktors unveränderlich bleiben soll, gleichgültig für welche der in Abschnitt 4.2.3 aufgeführten Möglichkeiten zur Positionsangabe entschieden wird. Am Beispiel der beiden in /Ramm 1976/ eingeführten linear unabhängigen Richtungswinkel wird der Linearisierungsprozeß durchgeführt. Da die linearisierten Gleichungen unabhängig vom Bezugssystem der Schalenformulierung gelten, werden die Indizes i, j, h, l sowohl für die Darstellung mit affinen Koordinaten I, J, K, L als auch für die Schalenformulierungen mit lokalen, krummlinigen Basen A, B, C, D bzw. mit lokalen, kartesischen Basen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verwendet.

4.5.2 Spezifische virtuelle innere Arbeit

Die spezifische innere Arbeit als Funktion der virtuellen Verzerrungen

$$\delta w_{int} = \delta \epsilon_{ij} S^{ij} \quad (4.42)$$

wird durch die Richtungsableitung in die Abhängigkeit der virtuellen Verschiebungen y_S Gl. 4.9 gebracht, welche bei der Schale die drei Komponenten für die Translation \bar{z}^i und die beiden unabhängigen Winkel zur Lagebeschreibung des Direktors sind. Da die Winkel ω und ϖ als Argumente trigonometrischer Funktionen in der aktuellen Konfiguration z^i enthalten sind, muß auf die Kettenregel der Differentiation zurückgegriffen werden.

$$\delta \epsilon_{ij} = \left. \frac{d\epsilon_{ij}}{d\eta} (y_S + \eta \delta y_S) \right|_{\eta=0} \quad (4.43)$$

$$\delta \epsilon_{ij} =: \epsilon_{ij,S} \delta y_S \quad (4.44)$$

Mit Hilfe der Kurzschreibweise für die partielle Ableitung in Gl. 4.17

$$z_{,j}^i := \frac{\partial z^i}{\partial \Theta^j} \quad (4.45)$$

und der Variation der aktuellen Konfiguration z^i nach den kinematischen Variablen der Schale δy_S

$$\delta z^i_{,j} := \left. \frac{d}{d\eta} z^i_{,j}(y_S + \eta \delta y_S) \right|_{\eta=0} \quad (4.46)$$

$$= \frac{\partial z^i_{,j}}{\partial y_S} \delta y_S =: z^i_{,jS} \delta y_S \quad (4.47)$$

ist die Vorschrift zur Bildung der virtuellen Verzerrungen infolge Variation der Schalenvariablen y_S gefunden.

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(z^i_{,iS} \delta_{ij} z^j_{,j} + z^i_{,i} \delta_{ij} z^j_{,jS} \right) \delta y_S \quad (4.48)$$

Für die virtuelle innere Arbeit steht dann der Ausdruck:

$$\delta w_{int} = \delta y_S z^m_{,iS} z^m_{,j} S^{ij} \quad (4.49)$$

4.5.3 Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit

Durch nochmaliges Anwenden desselben Operators wie für die Variation ergibt sich der linearisierte virtuelle Arbeitsausdruck als Grundlage für das Standard-Newton-Verfahren. Über die trigonometrischen Funktionen werden die Winkel ω, ϖ nichtlinear in die Feldgleichungen für die Geometrie der Schale abgebildet, so daß ein zusätzlicher Term in der geometrischen Steifigkeit /Frey 1977/ im Vergleich zum allgemeinen Kontinuum erscheint.

$$\mathcal{L} \delta w_{int} = \delta y_S \epsilon_{i,j,S} S^{ij}|_{i_t} + \delta y_S \left[\epsilon_{i,j,S} \frac{\partial S^{ij}}{\partial \epsilon_{h\ell}} \epsilon_{h\ell,T} + S^{ij} \epsilon_{h\ell,ST} \right]_{i_t} \Delta \Delta y_T \quad (4.50)$$

Einsetzen von Gl. 4.44 und Gl. 4.48 in den linearen Arbeitsanteil:

$$\mathcal{D} \delta w_{int} = \delta y_S \left[z^m_{,iS} z^m_{,j} \frac{\partial S^{ij}}{\partial \epsilon_{h\ell}} z^n_{,h} z^n_{,\ell T} + z^m_{,iS} S^{ij} z^m_{,jT} + S^{ij} z^m_{,i} z^m_{,jST} \right]_{i_t} \Delta \Delta y_T \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \text{Wertebereich der Indizes: } \quad i, j, h, \ell &= 1, 2, 3 \\ S, T &= 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

und in den konstanten Term:

$$\delta w_{int}|_{i_t} = \delta y_S z^m_{,iS} z^m_{,j} S^{ij} \Big|_{i_t} \quad (4.52)$$

4.5.4 Diskretisierung der Schalengleichungen

Die partiellen Ableitungen $z_{,j}^i$ der diskretisierten Geometrie mit affinen Koordinaten sind ein typisches Merkmal des degenerierten Schalenkonzepts. In der Regel werden die Interpolationsfunktionen Φ in Abhängigkeit der natürlichen Koordinaten ¹ r, s und t ausgedrückt, welche nun an die Stelle der krummlinigen Schalenkoordinaten treten. Es gilt: $-1 \leq r, s, t \leq +1$

$$z^i = \Phi^K(r, s) \left[\bar{z}^i{}^K + t \frac{h}{2} f^i(\omega^K, \varpi^K) \right] \quad (4.53)$$

Im Einklang mit dem isoparametrischen Konzept werden nicht die Winkel ω^K und ϖ^K interpoliert, sondern die Komponenten des Direktors \hat{n} im affinen Koordinatensystem. Die Knotendrehwinkel ω^K und ϖ^K erscheinen in den Gleichungen für die Geometrie als Argumente trigonometrischer Funktionen Gl. 4.11.

Im lokalen, orthogonalen Dreibein wird der Basisvektor \mathbf{A}_2 normal zum Direktor \hat{N} und zum Flächengradienten $\frac{\partial Z}{\partial r}$ errichtet.

Anmerkung:

Zwischen dem Green-Lagrange-Verzerrungstensor ϵ_{IJ} im affinen kartesischen Koordinatensystem

$$\begin{aligned} \epsilon_{IJ} &= \frac{1}{2} (F^k{}_I F^k{}_J - \delta_{IJ}) \\ \Leftrightarrow \epsilon_{IJ} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z^k}{\partial Z^I} \frac{\partial z^k}{\partial Z^J} - \delta_{IJ} \right) \\ \Leftrightarrow \epsilon_{IJ} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r^C}{\partial Z^I} \frac{\partial z^k}{\partial r^C} \frac{\partial z^k}{\partial r^D} \frac{\partial r^D}{\partial Z^J} - \delta_{IJ} \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

und dem Green-Lagrange-Maß ϵ_{AB} im allgemeinen, krummlinigen System r, s, t besteht das Transformationsgesetz für kovariante Tensorkomponenten.

$$\epsilon_{AB} = \frac{\partial Z^I}{\partial r^A} \epsilon_{IJ} \frac{\partial Z^J}{\partial r^B} \quad (4.55)$$

$$\Leftrightarrow \epsilon_{AB} = \frac{\partial Z^I}{\partial r^A} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r^C}{\partial Z^I} \frac{\partial z^k}{\partial r^C} \frac{\partial z^k}{\partial r^D} \frac{\partial r^D}{\partial Z^J} - \delta_{IJ} \right) \frac{\partial Z^J}{\partial r^B} \quad (4.56)$$

¹Hinweis zur Notation: Da bislang Großbuchstaben für die materiellen Koordinaten verwendet worden sind, wären die natürlichen Koordinaten mit R, S und T zu bezeichnen. Es wird an dieser Stelle jedoch mit den geläufigeren Kleinbuchstaben gearbeitet. Als Vereinbarung soll die Schreibweise gelten: $r^A c_A = r \cdot c_1 + s \cdot c_2 + t \cdot c_3$

$$\Leftrightarrow \epsilon_{AB} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z^k}{\partial r^A} \frac{\partial z^k}{\partial r^B} - \frac{\partial Z^I}{\partial r^A} \frac{\partial Z^I}{\partial r^B} \right)$$

Da die Interpolation isoparametrisch in dem Sinne gewählt wird, daß die aktuelle und ursprüngliche Konfiguration mit demselben Netz diskretisiert werden, gehen die natürlichen Koordinaten der Ausgangskonfiguration 0C zur Zeit $t = 0$ durch die Bewegung in die natürlichen Koordinaten auf der Momentankonfiguration tC über. Diese spezielle Wahl der materiellen und räumlichen Koordinaten in Form der natürlichen wird bislang in erster Linie aus Vereinfachungsgründen getroffen. Formal kann deshalb mit den Formeln Gl. 4.20, Gl. 4.18 und Gl. 4.19 anstelle von Gl. 4.16 das Green-Lagrange-Verzerrungsmaß definiert werden. Allerdings wird aus der letzten Formel selbst nicht offensichtlich, ob die Tensorkomponenten in den natürlichen Koordinaten r, s und t als materielle oder als räumliche zu identifizieren sind /Green 1968/. Dies ergibt sich erst aus der Darstellung des Verzerrungstensors im affinen kartesischen System. Die strenge Unterscheidung zwischen materiellen und räumlichen Koordinaten gewinnt auch an praktischer Bedeutung, wenn die Diskretisierung während der Deformation geändert wird, wie es beispielsweise bei Umformprozessen der Fall ist.

4.5.5 Linearisierte Schalengleichung in Matrizenform

Die partiellen Ableitungen der affinen Komponenten des Ortsvektors $z_{,j}^i$ bezüglich der krummlinigen oder der lokal kartesischen Schalenkoordinaten werden zur Matrix \mathbf{J} zusammengefaßt, welche dasselbe Belegungsmuster mit nicht verschwindenden Komponenten aufweist wie der Deformationsgradient in Gl. 3.46. Aufgrund der statischen Kondensation zur Einbringung der Degenerationsannahmen werden sämtliche Komponenten in der dritten Spalte und Zeile des Werkstoffgesetzes zum Verschwinden gebracht, so daß auf die damit verbundenen „Nulloperationen“ in den Produkten $\mathbf{J}^T \mathbf{C}_s \mathbf{J}$ in Gl. 4.67 bzw. $\mathbf{J}^T \mathbf{s}$ in Gl. 4.68 verzichtet werden kann.

$$[z_{,j}^i] = \mathbf{J}_{[8 \times 9]} = \begin{vmatrix} z_{,1}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & z_{,1}^2 & \cdot & z_{,1}^3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & z_{,2}^2 & \cdot & z_{,2}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{,2}^3 \\ \cdot & z_{,1}^2 & \cdot & z_{,1}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{,1}^3 \\ z_{,2}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & z_{,2}^2 & \cdot & z_{,2}^3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & z_{,1}^3 & \cdot & \cdot & z_{,1}^1 & \cdot & z_{,1}^2 & \cdot \\ z_{,3}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & z_{,3}^2 & \cdot & z_{,3}^3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & z_{,2}^3 & \cdot & \cdot & z_{,2}^1 & \cdot & z_{,2}^2 & \cdot \\ \cdot & z_{,3}^2 & \cdot & z_{,3}^1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & z_{,3}^3 \end{vmatrix} \quad (4.57)$$

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß der obere Index $i = 1, 2, 3$ sich auf die affinen Koordinaten bezieht, während die durch den unteren Index gekennzeichneten Ableitungen wahlweise bezüglich der affinen ($Z^J \rightarrow j \equiv j = 1, 2, 3$), krummlinigen ($\Theta^A \rightarrow j \equiv A = 1, 2, 3$) oder lokal kartesischen ($\Xi^\alpha \rightarrow j \equiv \alpha = 1, 2, 3$) Schalenkoordinaten ausgeführt werden.

Wird die affine Schalenformulierung bevorzugt, so sind die partiellen Ableitungen mit dem Deformationsgradienten wie in /Ramm 1986/ angegeben identisch.

Der Operator $z_{,s}^i$ zur Konstruktion der Richtungsableitung Gl. 4.47 der Jakobimatrix Gl. 4.22 für die aktuelle Geometrie soll in Matrizenform mit \mathbf{B}_s symbolisiert werden, worin der Fußzeiger s auf die Schale hindeutet.

$$\delta z_{,j}^i = \frac{\partial z_{,j}^i}{\partial y_s} \delta y_s \quad (4.58)$$

$$\delta \mathbf{z}_{,j} = \mathbf{B}_s \delta y_s \quad (4.59)$$

Am Knoten K haben die ausgeschriebenen Matrizen folgendes Aussehen:

$$\begin{bmatrix} \delta z_{,1}^1 \\ \delta z_{,2}^2 \\ \delta z_{,3}^3 \\ \delta z_{,1}^2 \\ \delta z_{,1}^2 \\ \delta z_{,3}^1 \\ \delta z_{,1}^3 \\ \delta z_{,2}^3 \\ \delta z_{,2}^3 \end{bmatrix} = \dots \left[\underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{,1}^K & \cdot & \cdot & \bar{\Phi}_{,1}^K \cdot f_{1,4}^K & \bar{\Phi}_{,1}^K \cdot f_{1,5}^K \\ \cdot & \Phi_{,2}^K & \cdot & \bar{\Phi}_{,2}^K \cdot f_{2,4}^K & \bar{\Phi}_{,2}^K \cdot f_{2,5}^K \\ \cdot & \cdot & \Phi_{,3}^K & \bar{\Phi}_{,3}^K \cdot f_{3,4}^K & \bar{\Phi}_{,3}^K \cdot f_{3,5}^K \\ \Phi_{,2}^K & \cdot & \cdot & \bar{\Phi}_{,2}^K \cdot f_{1,4}^K & \bar{\Phi}_{,2}^K \cdot f_{1,5}^K \\ \cdot & \Phi_{,1}^K & \cdot & \bar{\Phi}_{,1}^K \cdot f_{2,4}^K & \bar{\Phi}_{,1}^K \cdot f_{2,5}^K \\ \Phi_{,3}^K & \cdot & \cdot & \bar{\Phi}_{,3}^K \cdot f_{1,4}^K & \bar{\Phi}_{,3}^K \cdot f_{1,5}^K \\ \cdot & \cdot & \Phi_{,1}^K & \bar{\Phi}_{,1}^K \cdot f_{3,4}^K & \bar{\Phi}_{,1}^K \cdot f_{3,5}^K \\ \cdot & \Phi_{,3}^K & \cdot & \bar{\Phi}_{,3}^K \cdot f_{2,4}^K & \bar{\Phi}_{,3}^K \cdot f_{2,5}^K \\ \cdot & \cdot & \Phi_{,2}^K & \bar{\Phi}_{,2}^K \cdot f_{3,4}^K & \bar{\Phi}_{,2}^K \cdot f_{3,5}^K \end{bmatrix}}_{\text{Knoten } K} \dots \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ \delta \bar{z}^1 \\ \delta \bar{z}^2 \\ \delta \bar{z}^3 \\ \delta \omega \\ \delta \varpi \\ \vdots \end{bmatrix} \begin{array}{c} \Uparrow \\ K \\ \Downarrow \end{array} \quad (4.60)$$

wobei $\bar{\Phi}_{,j}^K = \left(t \Phi_{,j}^K + J_{,3}^{-1} \Phi^K \right) \frac{h}{2}$

Die zweimal Fréchet-differenzierte Funktionalmatrix $[z_{,ST}^m]$ hat nur in denjenigen Spalten und Zeilen von Null verschiedene Elemente, welche mit den Knotenwinkeln ω und ϖ in Verbindung stehen.

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11,ST} \\ \mathbf{J}_{22,ST} \\ \mathbf{J}_{33,ST} \\ \mathbf{J}_{12,ST} \\ \mathbf{J}_{21,ST} \\ \mathbf{J}_{13,ST} \\ \mathbf{J}_{31,ST} \\ \mathbf{J}_{23,ST} \\ \mathbf{J}_{32,ST} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}_{m,j,ST} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 \dots & & & & & & 0 \\
 & & & & & & 0 \\
 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & & \\
 0 & \bar{\Phi}_{ij}^K & & & 0 & & \\
 & & & & & f_{m,44}^K & f_{m,45}^K \\
 & & & & & f_{m,54}^K & f_{m,55}^K \\
 0 & & & & 0 & & \dots \\
 \dots & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Knoten K

Die einmal Gâteaux-differenzierten Komponenten des Schalendirektors sind:

$$\begin{aligned}
 f_{1,4}^K &= -\sin \omega & f_{1,5}^K &= 0 \\
 f_{2,4}^K &= \cos \omega \cos \varpi & f_{2,5}^K &= -\sin \omega \sin \varpi \\
 f_{3,4}^K &= \cos \omega \sin \varpi & f_{3,5}^K &= \sin \omega \sin \varpi
 \end{aligned} \quad (4.61)$$

Die zweifach Gâteaux-differenzierten Untermatrizen $[f_{i,ST}^K]$ sind ausschließlich mit den trigonometrischen Funktionen der Knotenwinkel belegt:

$$\begin{array}{c} f_{1,ST}^K \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -\cos \omega & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c} f_{2,ST}^K \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -\sin \omega \cos \varpi & -\cos \omega \sin \varpi \\ \hline -\cos \omega \sin \varpi & -\sin \omega \cos \varpi \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} f_{3,ST}^K \\ \begin{array}{|c|c|} \hline -\sin \omega \sin \varpi & +\cos \omega \cos \varpi \\ \hline +\cos \omega \cos \varpi & -\sin \omega \sin \varpi \\ \hline \end{array} \end{array}
 \quad \text{für } S, T = 4, 5$$

Die Spannungskomponenten S^{ij} in der geometrischen Steifigkeit werden wie schon im Kapitel 3.6 zur Matrix \mathbf{S} Gl. 3.45 zusammengefaßt, wobei jedoch zu beachten ist, daß die Komponenten $S^{33} = \dot{S}^{33} = 0$ verschwinden. Bei der Matrizenmultiplikation mit dem degenerierten Tensor \mathbf{C}_s des isotropen, linear elastischen Materials in lokalen, kartesischen Koordinaten kann die schwache Besetzung der Matrizen vorteilhaft ausgenutzt werden ($\alpha = \frac{5}{6}$

Sinngemäß wird definiert:

$$\mathbf{0} := \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.66)$$

Anhand der bisherigen Matrizendefinitionen in Gl. 4.60 bis Gl. 4.64 ist die zur Programmierung geeignete Notation gefunden, mit welcher die konsistent zu den Schalenvariablen \mathbf{y} linearisierte Tangentensteifigkeit:

$$\mathbf{K}|_{i,t} = \int_V \mathbf{B}_s^T \left(\mathbf{J}^T \mathbf{C}_s \mathbf{J} + \mathbf{S} \right) \mathbf{B}_s \, dV + \int_V \hat{\mathbf{s}}^T \hat{\mathbf{B}}_s \mathbf{N} \, dV \quad (4.67)$$

$$\mathbf{K}_{e/u} \quad \mathbf{K}_g^I \quad \mathbf{K}_g^{II}$$

und der innere Knotenkraftvektor in symbolischer Schreibweise angegeben werden können.

$$\mathbf{R}_{int}|_{i,t} = \int_V \mathbf{B}_s^T \mathbf{J}^T \mathbf{s} \, dV \quad (4.68)$$

Gl. 4.67 und Gl. 4.68 enthalten im Vergleich zu Gl. 3.38 und Gl. 3.40 die speziell auf die Schale bezogenen Matrizen \mathbf{B}_s und \mathbf{C}_s , sowie anstelle des Deformationsgradienten \mathbf{F} nunmehr die Funktionalmatrix (Jakobimatrix) \mathbf{J} , die neben der Deformation auch die Transformation in die lokalen Schalenkoordinaten (gekrümmt oder kartesisch) beschreibt. Nur für den Fall der affinen Koordinaten geht \mathbf{J} in \mathbf{F} über. Ferner kommt die zusätzliche geometrische Steifigkeit \mathbf{K}_g^{II} hinzu.

Die Symmetrie der Tangentensteifigkeit \mathbf{K} hängt nur von der Symmetrie des konstitutiven Tensors ab und ist für den isotropen Fall Gl. 4.62 gewährleistet. Sowohl die Matrix \mathbf{S} als auch die Untermatrizen $\mathbf{J}_{m_j, \mathcal{ST}}$ im Hypervektor \mathbf{N} sind aufgrund der Vertauschbarkeit der zweiten Gâteaux-Ableitungen notwendigerweise symmetrisch.

4.6 Numerische Beispiele

4.6.1 Kragarm unter Endmoment

Der in Bild 4.7 gezeichnete Kragarm wird in die Richtung der globalen Z^2 -Achse gelegt, mit fünf bikubischen Elementen modelliert und durch das Endmoment $M = 2\pi \frac{EI}{l}$ belastet. Das Endmoment soll in fünf gleichgroßen Lastschritten bis zum endgültigen Wert gesteigert werden.

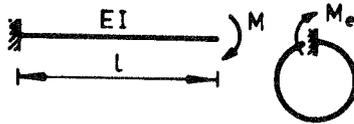


Bild 4.7 : Kragarm unter Endmoment - Anfängliche und endgültige Geometrie

Als Toleranzgrenze für den Abbruch der Iteration wird für die Verschiebungsnorm $U_{Tol} = 10^{-3}$ und für die Norm der Ungleichgewichtskräfte $R_{Tol} = 10^{-1}$ vorgegeben. Der Iterationsverlauf kann wie folgt zusammengefaßt werden:

- Ohne Berücksichtigung des zweiten Teils der geometrischen Steifigkeitsmatrix K_g^{II} tritt im zweiten Lastschritt Divergenz ein.
- Der Iterationsverlauf der mitgehenden Lagrange-Formulierung ist in Tabelle 1 festgehalten. Anstelle der exakten Transformation mit Hilfe des Deformationsgradienten - siehe Gl. 3.32 - ist die orthogonale Transformation zwischen dem lokalen, kartesischen und dem globalen, affinen Koordinatensystem verwendet worden.

Laststufe	Iterationszahl
1	8
2	10
3	24
4	14
5	12

Tabelle 1 : Iterationsschritte des Newton-Verfahrens zur Gleichgewichtsermittlung

- Weitere Rechnungen bestätigen die Erwartung, daß das Iterationsverhalten in allen untersuchten Richtungen der z^2 - z^3 -Ebene dasselbe ist.

Dagegen ist diese Beobachtung nicht zu machen, falls die Stabachse der Struktur in Richtung der z^1 -Achse gelegt wird, wo in diesem Fall die Richtungsabhängigkeit der gewählten Rotationswinkel zum Tragen kommt.

- Der Iterationsverlauf ist wesentlich stabiler, falls die Knotenfreiheitsgrade des Schalelements in Querrichtung zur Belastungsebene gekoppelt werden.

4.6.2 Einhäufiger Rahmen („Lee’s Frame“)

Das von Lee u.a. /Lee 1968/ analytisch gelöste Biegeproblem des einhäufigen Rahmens wird als weiteres Testbeispiel zur Untersuchung des Einflusses der zusätzlichen geometrischen Steifigkeitsmatrix K_g^{II} herangezogen. Der Rahmen wird durch zehn gleichlange, degenerierte, bikubische Schalelemente modelliert. Die großen Deformationen vor Eintreten des Durchschlagpunk-

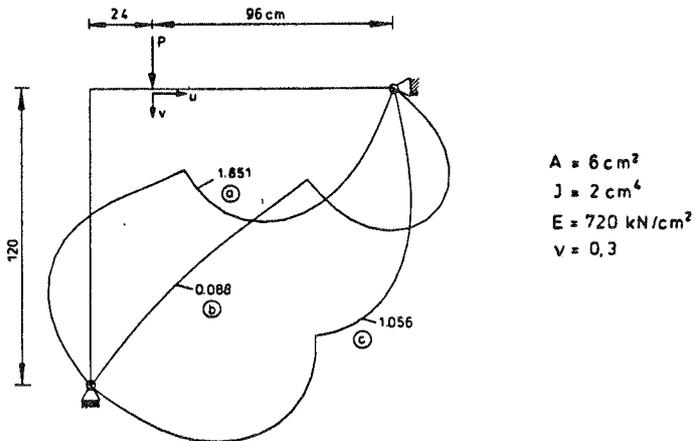


Bild 4.8 : Ausgangsgeometrie mit drei Verschiebungszuständen des einhäufigen Rahmens

tes sind für die ausgesprochen starke Nichtlinearität der Struktur schon im stabilen Bereich der Last-Verschiebungskurve verantwortlich, so daß sich nur die verschiebungskontrollierte Iterationstechnik /Ramm 1981/, /Schweizerhof 1986/ als erfolgreich erweist. Die Durchschlagslast wird nach sieben Schritten mit gleichgroßer Bogenlänge erreicht.

Nach weiteren acht gleichen Schritten wird eine Horizontalverschiebung

von 73 cm erzielt und gleichzeitig der Umkehrpunkt der Vertikalverschiebung mit lotrechter Tangente im Last-Verschiebungsdiagramm von Bild 4.9 beobachtet.

Das lokale Minimum in beiden Verschiebungsdiagrammen wird nach ins-

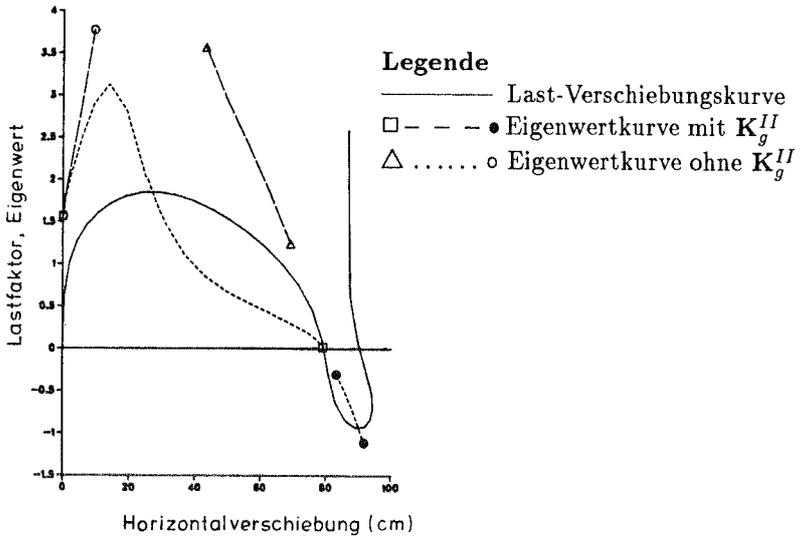


Bild 4.9 : Last P und begleitende Eigenwerte EW in Abhängigkeit der Horizontalverschiebung

gesamt 22 Laststufen durchlaufen. Die totale Lagrange-Formulierung mit der konsistenten Tangentensteifigkeit erfordert für das Standard-Newton-Verfahren zwischen drei und sieben Iterationen pro Laststufe. In den allermeisten Fällen tritt jedoch nach bereits fünf Zyklen Konvergenz für dieselben Toleranzschranken wie im vorigen Beispiel ein. Wie erwartet - siehe /Golub 1986/ - ist zwischen der siebten und 22. Laststufe genau ein Hauptdiagonalglied der „Dreieck zerlegten“ Tangentensteifigkeitsmatrix negativ.

Um die Vollständigkeit der Tangentensteifigkeitsmatrix numerisch zu verifizieren, wird auf jeder Laststufe eine lineare Eigenwertanalyse mit der vorhandenen Verschiebungsgeometrie und dem herrschenden Spannungszustand eingeschaltet. Für die Bestimmung der begleitenden Eigenwerte /Ramm 1976/, /Brendel 1978/ wird das Eigenwertproblem in der mitgehenden Lagrange-Beschreibung gelöst. Die Verbindungslinie der begleitenden Eigenwerte schneidet in Übereinstimmung mit der Voraussage die Last-

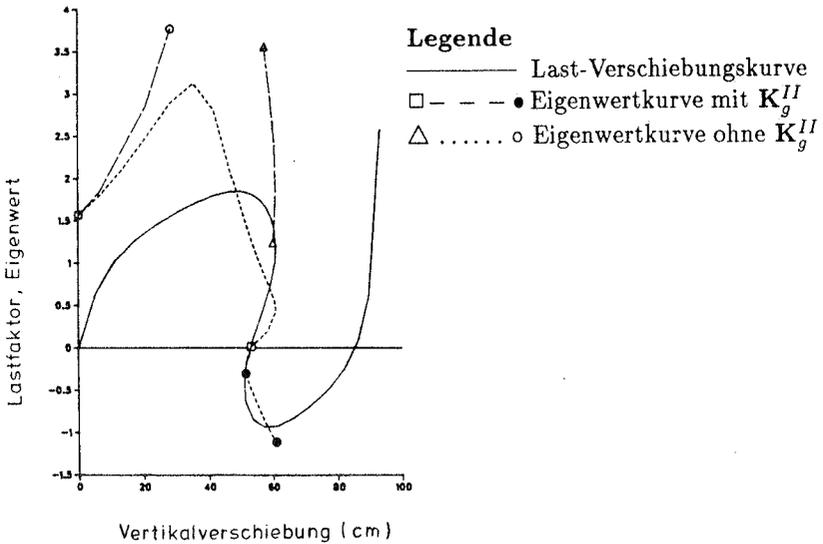


Bild 4.10 : Last P und begleitende Eigenwerte EW in Abhängigkeit der Vertikalverschiebung

Verschiebungskurven in beiden Extrempunkten und strebt ebenfalls gegen deren Nullstellen mit der Abszisse. In der Nähe der Nullstelle selbst liefert der Eigenwertlöser keine verwertbaren Ergebnisse, da die elastische Steifigkeitsmatrix ebenfalls singulär wird.

In einer Vergleichsrechnung ist beim Standard-Newton-Verfahren auf die Mitnahme des zweiten Teils der geometrischen Steifigkeitsmatrix K_g^{II} verzichtet worden. In den ersten dreizehn Lastschritten erhöht sich die Anzahl der notwendigen Iterationen zur Erzielung derselben Konvergenztoleranz um die Hälfte aller Zyklen im Vergleich zum Vorgehen mit konsistenter Tangente. Weder der Vorzeichenwechsel eines Hauptdiagonalterms der Steifigkeitsmatrix kann wiedergegeben werden, noch kann die ebenfalls in die Bilder 4.9 und 4.10 eingetragene Kurve der begleitenden Eigenwerte zum Schnitt mit den Last-Verschiebungspfaden gebracht werden. Im Lastschritt 14 erhöht sich die Iterationszahl auf 23 bevor das Verfahren im darauffolgenden Schritt divergiert, wo in unmittelbarer Nachbarschaft zum Umkehrpunkt mit lotrechter Tangente gemäß Bild 4.10 vergeblich eine Lösung gesucht wird.

4.6.3 Hypar-Schale

Ein geeignetes Beispiel für die Berechnung großer Rotationen von Schalen ist das von Başar und Ding /Başar 1988/, /Ding 1988/ erstmals untersuchte hyperbolische Paraboloid, welches über einer quadratischen Grundfläche aufgespannt ist. Eine perspektivische Zeichnung ist in Bild 4.11 gegeben. Die

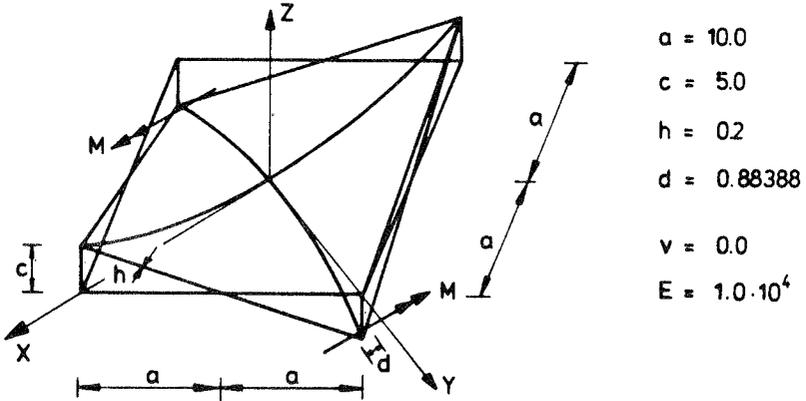


Bild 4.11 : Geometrie des hyperbolischen Paraboloids mit Maßangaben nach Başar und Ding

nach unten gezogenen Ecken der Struktur sind membrangelagert und durch Biegemomente beansprucht. In Schalenmitte ($x = y = 0$) ist die Struktur in x -Richtung unverschieblich, sowie um alle drei Koordinatenachsen unver-

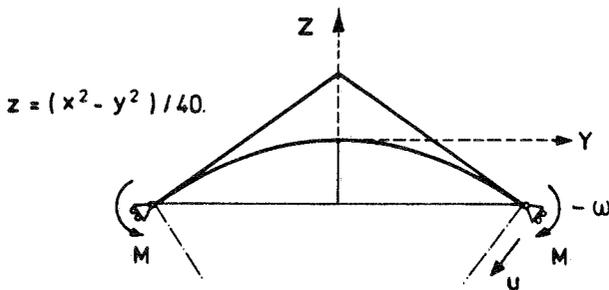


Bild 4.12 : Seitenansicht der HP-Schale (ω = Rotation um die x -Achse, u = Lagerverschiebung)

drehbar gelagert. Die Schale wird mit 8×3 bikubischen Schalenelementen

diskretisiert, wobei die Gradation des Elementnetzes einer geometrischen Reihe folgt, um den zunehmenden Biegekrümmungen gegen die belasteten Ecken hin Rechnung zu tragen. Das Verhältnis der Grundlängen zweier benachbarter Elemente ist zu 0,64842 festgelegt worden /Stander 1988/. In Bild 4.13 ist die gewählte Elemententeilung im Grundriß dargestellt.

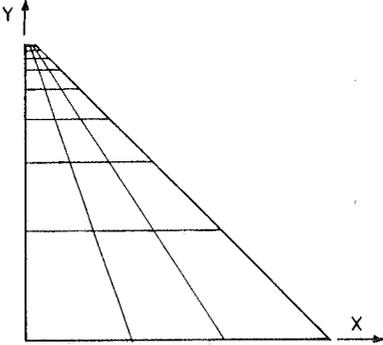


Bild 4.13 : Elemententeilung in der Grundrißebene

Die Momentenbelastung wird als konstante Streckenlast in die „abgeschrägten“ Ecken eingeleitet. Die äußere Last wird durch Vorgabe von acht gleichgroßen Lastinkrementen bis zum Wert $\lambda = 4.0$ des Lastfaktors aufgebracht, wodurch eine Rotation der Lasteinleitungsstelle von nahezu einer

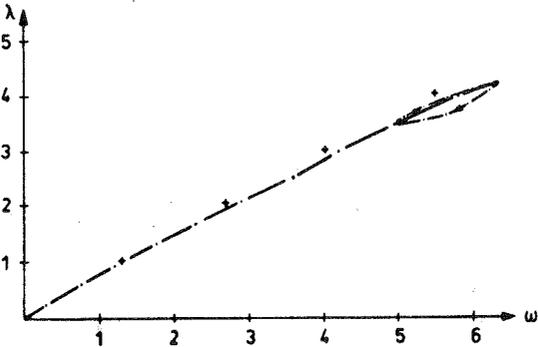


Bild 4.14 : Lastfaktor λ in Abhängigkeit der Verdrehung ω der Kragarmspitze (+ Ergebnisse aus /Başar 1988/)

vollen Umdrehung verursacht wird. In Bild 4.14 ist der fast lineare Verlauf

zwischen Lastfaktor und Verdrehung der Schale am Lagerknoten zu erkennen.

Mit anwachsender Belastung wird über Biegebeanspruchungen zunehmend mehr Last abgetragen, da aufgrund der Abflachung der HP-Schale quer zur Hauptbeanspruchungsrichtung der Membranzustand immer weniger ausgebildet werden kann. Damit ist die schwache Degression der Last-Verdrehungskurve in Bild 4.14 zu erklären. Die in jedem Lastschritt aufgetretenen Iterationszahlen zur Erzielung einer Konvergenzgenauigkeit von 10^{-3} sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Laststufe	Lastfaktor	Iterationsanzahl		ω Verdrehung	u Verschiebung
		mit K_g^{II}	ohne K_g^{II}		
1	0.5	7	8	-0.6359	-2.080
2	1.0	7	12	-1.348	-5.437
3	1.5	6	> 15	-2.074	-9.250
4	2.0	7		-2.842	-12.932
5	2.5	6		-3.604	-15.785
6	3.0	6		-4.230	-17.693
7	3.5	7		-4.987	-19.120
8	4.0	7		-5.858	-19.970

Tabelle 2: Iterationsschritte des Newton-Verfahrens zur Gleichgewichtsermittlung

Selbst für die relativ grobe Konvergenztoleranz ist die Anzahl der notwendigen Iterationen in den ersten beiden Lastschritten ohne zusätzliche geometrische Steifigkeitsmatrix K_g^{II} deutlich höher als die vergleichbaren Zahlen mit der vollständigen Tangentensteifigkeit. Bereits im dritten Lastschritt ist für die vorgegebene Schrittweite keine Konvergenz mehr zu erzielen.

In den Abbildungen 4.15 und 4.16 sind die Verschiebungszustände für einen Lastfaktor von $\lambda = 2,0$ und $4,0$ zu sehen.

Wird die Konvergenztoleranz auf 10^{-6} für die Euklidische Norm abgesenkt, so fallen in den ersten sieben Lastschritten acht Iterationen und im achten Lastschritt neun Iterationen pro Laststufe an. Trotz erhebli-

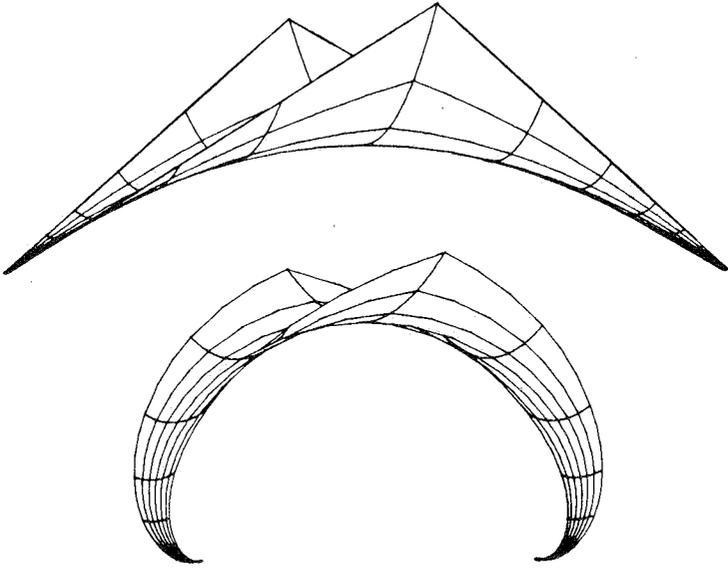


Bild 4.15 : Undeformierte Lage und Verschiebungszustand beim Lastfaktor $\lambda = 2,0$

cher Verringerung der Toleranzschranke steigt die erforderliche Iterationszahl nicht wesentlich an (1-2 zusätzliche Iterationen pro Laststufe), was für die Standard-Newton-Technik nahe des Grenzwerts charakteristisch ist. Im Gegensatz dazu benötigt die Iteration ohne Berücksichtigung der \mathbf{K}_g^{II} -Anteile bereits 12 Iterationszyklen im ersten Lastschritt um der verkleinerten Konvergenztoleranz zu genügen. Als allgemeine Regel kann festgehalten werden, daß sich die Iterationszahl bei Verwendung der Tangentensteifigkeit angesichts einer sehr starken Verfeinerung der Toleranzschranke nicht wesentlich erhöht. Dagegen steigt die Iterationszahl bei nicht konsistenten Iterationsmatrizen sehr schnell an, wie es beispielsweise auch beim modifizierten Newton-Verfahren zu beobachten ist.

Die Verzweigungslast nahe $\lambda \simeq 4,25$ wird in drei weiteren Lastschritten ($\lambda = 4,09$, $\lambda = 4,18$ und $\lambda = 4,19$) angesteuert. Die begleitenden Eigenwerte aus der Gleichung $\left[\mathbf{K}_{e/u} + \lambda \left(\mathbf{K}_g^I + \mathbf{K}_g^{II} \right) \right] \mathbf{v} = 0$ fallen dabei vom Wert 7,5 beim Lastfaktor $\lambda = 4,00$ auf 5,0 bei $\lambda = 4,19$ ab. Mit Hilfe einer Störungsrechnung - als Perturbation wird das Fünffache des bezüglich der Steifigkeit normierten ersten Eigenwerts der Konfiguration unter der

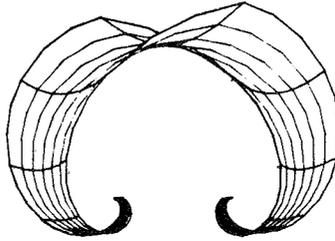


Bild 4.16 : Konfiguration für den Lastfaktor $\lambda = 4,0$

4,19-fachen Ausgangslast überlagert - wird die Rechnung im niedrigsten Verzweigungsast fortgesetzt. Dabei schlägt die nach innen gekrümmte Spitze der Hyparschale in der Nähe der Lasteinleitungsstelle nach außen durch. Zur Verfolgung des abfallenden sekundären Gleichgewichtsastes wird das konstante Bogenlängenverfahren verwendet. Beim Lastfaktor $\lambda = 3,4$ erreicht die Kurve ihr Minimum und steigt danach bis auf $\lambda = 4,3$ an, wo sich ein zweiter Verzweigungspunkt einstellt. Die Zuverlässigkeit der zuvor hergeleiteten Steifigkeitsmatrizen wird zum einen durch das Zusammenfallen der Verzweigungspunkte mit den Schnittpunkten zwischen dem Last-Verschiebungspfad und der begleitenden Eigenwertkurve bestätigt. Zum anderen weist die zerlegte Steifigkeitsmatrix im abfallenden Gleichgewichtsast zwischen den Lastfaktoren $\lambda = 4,19$ und $\lambda = 3,4$ genau ein negatives Hauptdiagonalglied auf.

Da der sehr lokale Beulbereich auf die unmittelbare Umgebung der Lasteinleitungsstelle beschränkt ist, kann bei weiterer Verfeinerung des gewählten FE-Netzes ein geringfügiges Absinken der Verzweigungslasten erwartet werden.

5 Algorithmen zur Spannungsberechnung elastoplastischer Kontinua

5.1 Grundlagen der Formulierung und der Notation

Zur Formulierung der elastoplastischen Deformationsgesetze werden hier sowohl die Spannungen als auch die Verzerrungen auf die materiellen Koordinaten bezogen, da die allermeisten dünnwandigen Strukturen zwar großen Verschiebungen im Sinne von Rotationen und Translationen unterzogen werden können, die Verzerrungen sind jedoch weiterhin „mäßig klein“ (in der Regel kleiner als zehn Prozent). Für die numerische Berechnung des Last-Verschiebungsverlaufs müssen die Differentialgleichungen zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens integriert werden. Dazu sind die in Kapitel 2.5 zusammengestellten Beziehungen der Fließtheorie in inkrementeller Form bereitzustellen, was Hauptgegenstand dieses Abschnitts ist.

$$(\cdot) \mapsto \Delta(\cdot)$$

Zur Vereinfachung der Darstellung wird anstelle der Indexnotation die symbolische Schreibweise für die zweistufigen Spannungs- und Dehnungstensoren verwendet. Die Tensorkoordinaten werden wie im Ingenieurschrifttum üblich in Spaltenvektoren dargestellt. Dabei ist zu beachten, daß im Unterschied zur Matrixschreibweise der Abschnitte 3.6 und 4.5 in allen nachfolgenden Kapiteln die Tensorkomponenten in sechsdimensionalen Vektoren \mathbf{S} und $\boldsymbol{\epsilon}$ abgelegt werden. Auf eine unterschiedliche Bezeichnung für Piola-Kirchhoff-Spannungen zweiter Art und Green-Lagrange-Verzerrungen wird an dieser Stelle verzichtet, da im folgenden ausschließlich mit den unten aufgeführten Definitionen gearbeitet wird.

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2 \epsilon_{12} \\ 2 \epsilon_{13} \\ 2 \epsilon_{23} \end{vmatrix} \quad (5.1)$$

Entsprechend werden die Koordinaten des vierstufigen Werkstofftensors D_{IJKL} in eine Matrix \mathbf{D} der Größe [6x6] eingelagert, welche analog des Zuordnungsschemas in Kapitel 3.6 auf das [9x9]-Format für \mathbf{C} bzw. [8x8] für \mathbf{C}_s zur Bildung der Elementsteifigkeitsmatrizen gebracht werden kann -

Kugelanteil $p \mathbf{1}$ zerlegen. Die Projektionsmatrix $\overset{K}{\mathbf{P}}$ für das orthogonale Komplement (Kugelanteil) entsteht aus:

$$\overset{K}{\mathbf{P}} := \mathbf{I} - \overset{D}{\mathbf{P}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

Die Orthogonalitätsbedingung

$$\overset{D}{\mathbf{P}} \overset{K}{\mathbf{P}} = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

ist offensichtlich. Im Verlauf dieses Abschnitts erweist sich die Darstellung des Kugelanteils $\overset{K}{\mathbf{P}}$ in Form eines dyadischen Produkts als nützlich:

$$\overset{K}{\mathbf{P}} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T \quad \text{wobei} \quad \mathbf{1} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

$$\text{und} \quad \overset{D}{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \overset{K}{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (5.10)$$

Anmerkung zur Indexschreibweise:

Hinter $\overset{K}{\mathbf{P}}$, $\overset{D}{\mathbf{P}}$ und $\mathbf{1}$ verbergen sich als Darstellungen in Indexschreibweise:

$$\overset{K}{\mathbf{P}} = \left[\frac{1}{3} \delta_{IJ} \delta_{KL} \right] \quad (5.11)$$

$$\overset{D}{\mathbf{P}} = \left[\delta_{IK} \delta_{JL} - \frac{1}{3} \delta_{IJ} \delta_{KL} \right] \quad (5.12)$$

$$\text{sowie} \quad \mathbf{1} = [\delta_{IJ}] \quad (5.13)$$

Die Doppelindizierung der Matrixelemente folgt der Anordnung in den Vektoren von Gl. 5.1. Damit kann von der symbolischen Darstellung auf die Indexschreibweise umgestiegen werden. In Abschnitt 5.7 wird von einer

weiteren Definition Gebrauch gemacht:

$$\mathbf{11} := \frac{1}{2} (\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}) = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (5.14)$$

Fließbedingungen nach von Mises und Drucker-Prager

Überführt man das von Mises Fließkriterium Gl. 2.57 in die Matrizenform,

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{S}'^T \overset{M}{\mathbf{P}} \mathbf{S}' - \frac{1}{3} \bar{S}^2 = 0 \quad (5.15)$$

$$\text{mit } \overset{M}{\mathbf{P}} := \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{vmatrix} \quad (5.16)$$

so ergibt sich:

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{S} - \frac{1}{3} \bar{S}^2 = 0 \quad (5.17)$$

Hierbei ist die Definition

$$\mathbf{P} := \overset{D}{\mathbf{P}}^T \overset{M}{\mathbf{P}} \overset{D}{\mathbf{P}} \quad (5.18)$$

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad (5.19)$$

verwendet worden. Für das Fließkriterium nach Drucker-Prager erhält man analog:

$$F = \alpha \mathbf{p}^T \mathbf{S} + (\mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{S})^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3} \bar{S}^2 = 0 \quad (5.20)$$

$$\text{worin } \mathbf{p}^T = [1, 1, 1, 0, 0, 0] \quad (5.21)$$

5.2 Aktualisierung der Geometrie und des Materialzustandes

Ziel der nichtlinearen Tragwerksanalyse mit sogenannten „impliziten“ Integrationsverfahren ist es, große Lastschritte zuzulassen und die zugehörigen Zustandsgleichungen iterativ zu lösen. Für nichtlineare Berechnungen werden häufig Verschiebungsmethoden eingesetzt, bei denen der neue Gleichgewichtszustand auf iterativem Wege über das Verschiebungsfeld gefunden wird. Während der Iteration treten vor allem bei der Analyse dünnwandiger Flächentragwerke sehr große Ungleichgewichtskräfte auf, die den Werkstoff bis weit in den nichtlinearen Bereich beanspruchen. Aufgrund der Wegabhängigkeit der Werkstoffgesetze ist es erforderlich, inelastische Materialbeanspruchungen infolge rechnerischer, d.h. „künstlicher“ Ungleichgewichtszustände zu eliminieren. Deshalb dürfen die endgültigen inelastischen Deformationen, welche den Materialzustand charakterisieren, nur an solchen geometrischen Konfigurationen aktualisiert werden, an denen das Gleichgewicht erfüllt ist (in der neueren englischsprachigen Fachliteratur hat sich dafür die Bezeichnung „state determination“ eingebürgert).

Die wegunabhängige Iteration für wegababhängiges Material kommt dadurch zustande, daß die Spannungs- und Dehnungsinkremente immer zwischen der aktuellen Lage ${}^i\mathbf{x}$ zum Zeitpunkt ${}^i t$ und der letzten Gleichgewichtslage ${}^{n}\mathbf{x}$ zur Zeit ${}^n t$ gemessen werden. Insbesondere dürfen die gesamten inelastischen Dehnungen nicht aus der Summe der Inkremente zwischen den aufeinanderfolgenden Zuständen ${}^i\mathbf{x}$ und ${}^{i-1}\mathbf{x}$ zu den Zeitpunkten ${}^i t$ und ${}^{i-1} t$ ermittelt werden, da an diesen Zwischenzuständen ${}^i\mathbf{x}$ bzw. ${}^{i-1}\mathbf{x}$ während der Iteration kein Gleichgewicht herrscht.

Die dabei auftretenden unerwünschten Fließvorgänge an Ungleichgewichtslagen werden am Beispiel eines Kragarms (Länge l , Querschnittswerte A, I) unter anwachsender Momentenbelastung demonstriert. Größere Quer-

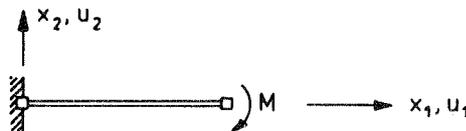


Bild 5.1 : System und Belastung des Kragarms

verschiebungen der Kragarmspitze am Ende des ersten Iterationsschritts bedingen merkliche Axialdehnungen bis weit in den plastischen Bereich.

Während der weiteren Iteration werden jedoch die elastischen Anteile dieser axialen Dehnungen wieder zum Verschwinden gebracht.

1. Iterationsschritt (lineare Lösung) :

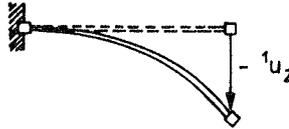


Bild 5.2 : Verschiebungsfigur am Ende des ersten Iterationsschritts

Längsverschiebung der Stabachse: ${}^1u_1(x_1) \equiv 0$

Querverschiebung der Stabachse: ${}^1u_2(x_1) = \frac{1}{2} \frac{M \cdot x_1^2}{EI}$

Membrandehnung (Zug): ${}^1\epsilon_{11} = \frac{1}{2} (u_{2,1})^2 > \bar{\epsilon}_{11} > 0$

$$\Delta^1\epsilon_{11} = {}^1\epsilon_{11} - 0 > 0$$

$${}^1S_{11}^* = E {}^1\epsilon_{11}$$

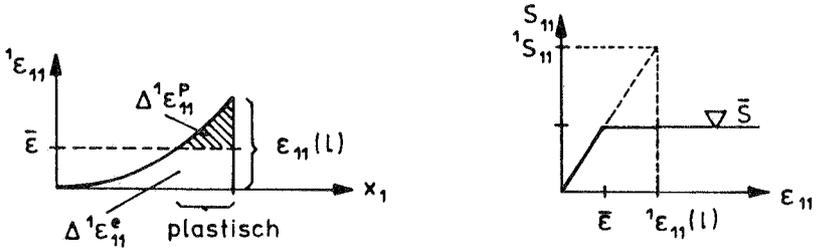


Bild 5.3 : Verlauf der Axialdehnung und -spannung über die Stablänge

Mit zunehmender Entfernung x_1 von der Einspannstelle vergrößern sich die Green-Lagrange-Verzerrungen ${}^1\epsilon_{11}$ und übersteigen allmählich die einaxiale äquivalente Fließdehnung $\bar{\epsilon}$.

2. Iterationsschritt:

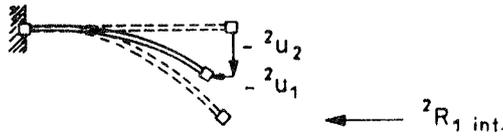


Bild 5.4 : Verschiebungsfigur am Ende des 2. Iterationsschritts

Mit Vorgriff auf die in den Bildern 5.5 und 5.6 erklärte Notation wird bereits an dieser Stelle davon Gebrauch gemacht, wenn das Dehnungsinkrement $\Delta\Delta^2\epsilon_{11}$ als Differenz zwischen den Verzerrungszuständen des ersten und zweiten Iterationsschritts berechnet wird.

$$\begin{aligned} \text{Membranstauchung (Druck):} \quad {}^2\epsilon_{11} &= -\|{}^2u_{1,1}\| \\ &\quad + \frac{1}{2} [({}^2u_{1,1})^2 + ({}^2u_{2,1})^2] \end{aligned}$$

$$\text{Dehnungsinkrement:} \quad \Delta\Delta^2\epsilon_{11} = {}^2\epsilon_{11} - {}^1\epsilon_{11} < 0$$

$$\text{Membranspannungen:} \quad {}^2S_{11} = E (\Delta^1\epsilon^e_{11} + \Delta\Delta^2\epsilon_{11}) < \bar{S}$$

$$\text{Entlastung:} \quad \implies \Delta\Delta^2\epsilon^p_{11} = 0$$

Im zweiten Iterationsschritt tritt Membranstauchung ein, so daß der Spannungszustand innerhalb des Fließkörpers zu liegen kommt, d.h. im eindimensionalen Fall unterhalb der Fließgrenze. Das System entlastet in der Membranwirkung und wird wieder elastisch. Die künstlichen plastischen Membrandehnungen ${}^2\bar{\epsilon}^p = {}^1\bar{\epsilon}^p + 0$ aufgrund des ersten Iterationsschrittes verbleiben jedoch in der Struktur, obwohl der endgültige Gleichgewichtszustand keine Membranbeanspruchungen aufweist.

Der am Kragarm verursachte Fließvorgang in der Stabachse infolge der endlichen Drehungen innerhalb eines Lastinkrements kommt auch beim dreidimensionalen Kontinuum im Fall der wegabhängigen Iteration zustande. Im Bild 5.5 ist der iterationsbedingte Entlastungsvorgang zwischen den Schritten $i - 1$ und i im Spannungs-Dehnungsdiagramm dargestellt.

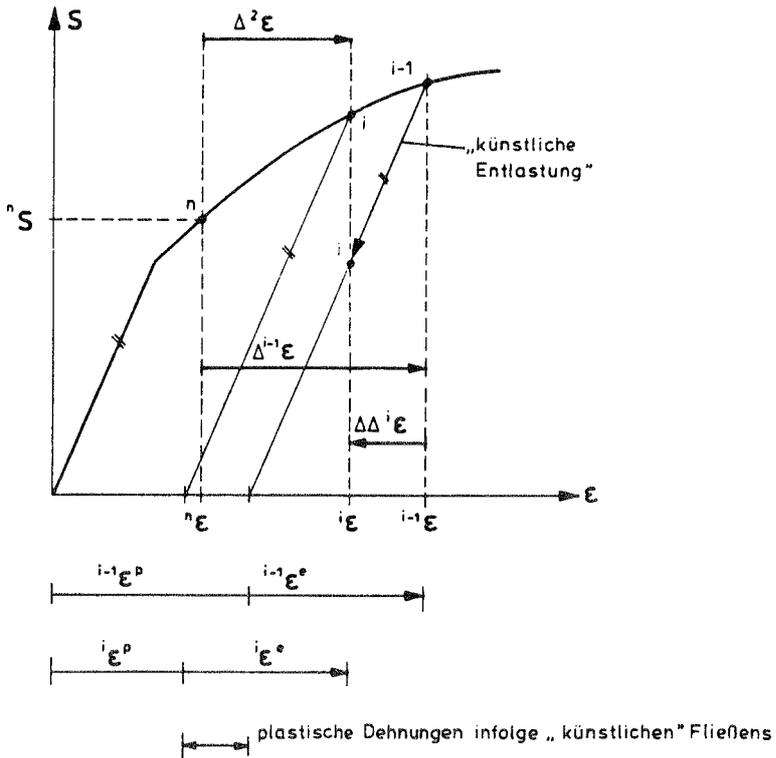


Bild 5.5 : Künstliches Fließen während der iterativen Ermittlung der neuen Gleichgewichtslage infolge Abbau der Membrankräfte zwischen den Zuständen $i - 1$ und i

Zur Vermeidung des „künstlichen Plastifizierens“ ist daher auf das in Bild 5.6 veranschaulichte Vorgehen bei der Bestimmung der Spannungs-, Dehnungs- und plastischen Multiplikatorinkremente zurückzugreifen. Die grundsätzlichen Unterschiede bei der Neuberechnung der aktuellen Geometrie ${}^i x$ mit Hilfe der Änderung der Verschiebungsinkremente $\Delta \Delta^i u$ und die Bestimmung des gesamten Dehnungszuwachses $\Delta^i \epsilon$ bezüglich des letzten Gleichgewichtszustandes zur Zeit ${}^n t$ werden in der Schreibweise durch die wiederholte Verwendung des $\Delta \Delta$ - Zeichens betont.

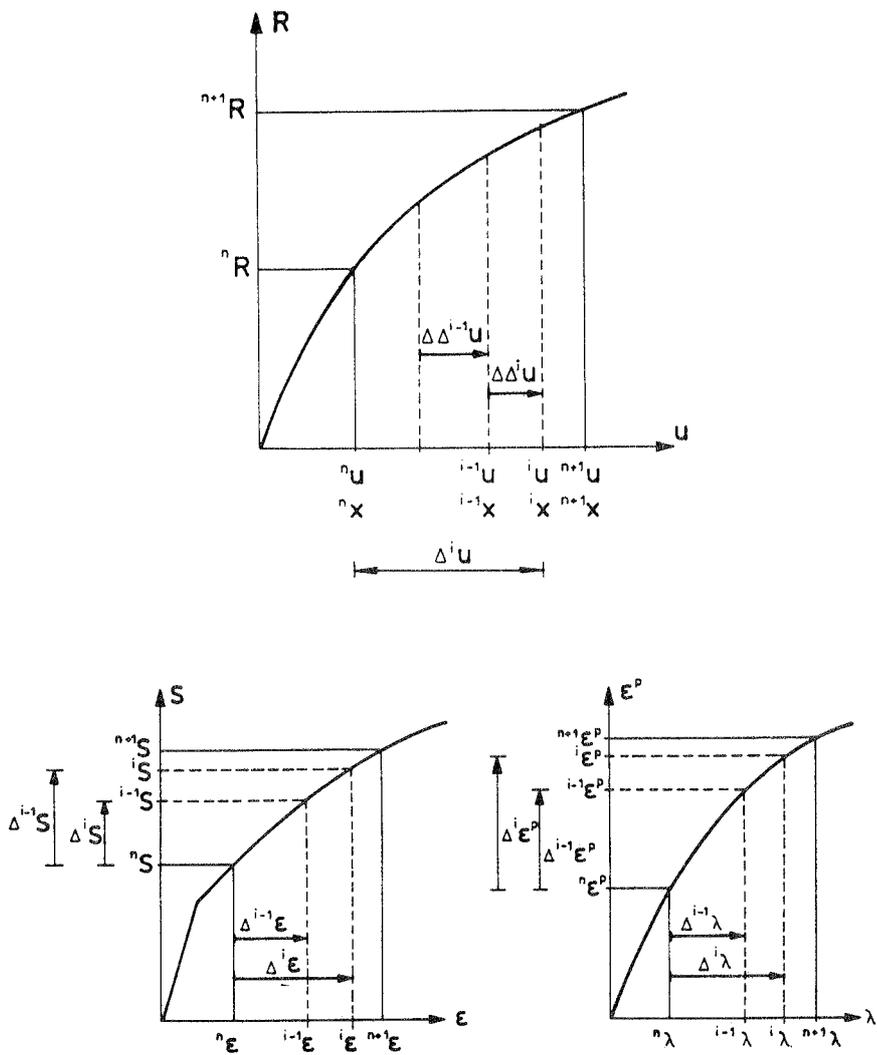


Bild 5.6 : Bedeutung der inkrementellen Größen

Die aktuelle Geometrie ${}^i\mathbf{x}$ der Struktur berechnet sich entweder aus dem letzten Zwischenzustand ${}^{i-1}\mathbf{x}$ oder aus der Anfangslage ${}^0\mathbf{x}$.

$${}^i\mathbf{x} = {}^{i-1}\mathbf{x} + \Delta\Delta {}^i\mathbf{u} = {}^0\mathbf{x} + \left({}^n\mathbf{u} + \Delta {}^{i-1}\mathbf{u} \right) + \Delta\Delta {}^i\mathbf{u} \quad (5.22)$$

Der Green-Lagrange-Dehnungstensor ${}^i\epsilon$ zur Zeit ${}^i t$ ist durch den Deformationsgradienten ${}^i F_{iJ}$ der momentanen Konfiguration ${}^i\mathbf{x}$ definiert.

$${}^i F_{iJ} = \frac{\partial^i x_i}{\partial X_J} \quad (5.23)$$

$${}^i \epsilon_{IJ} = \frac{1}{2} \left({}^i F_{kI} {}^i F_{kJ} - \delta_{IJ} \right) \quad (5.24)$$

Der entscheidende Schritt zur wegunabhängigen Iteration wird bei der Berechnung des gesamten Verzerrungsinkrements $\Delta {}^i\epsilon$ vollzogen, welches den Dehnungszuwachs zwischen der aktuellen Konfiguration ${}^i\mathbf{x}$ und der letzten Gleichgewichtslage ${}^n\mathbf{x}$ mißt.

$$\Delta {}^i\epsilon = {}^i\epsilon - {}^n\epsilon \quad (5.25)$$

In Übereinstimmung mit der Fließtheorie kann das Dehnungsinkrement $\Delta {}^i\epsilon$ in einen elastischen $\Delta {}^i\epsilon^e$ und einen plastischen Anteil $\Delta {}^i\epsilon^p$ zerlegt werden.

$$\Delta {}^i\epsilon = \Delta {}^i\epsilon^e + \Delta {}^i\epsilon^p \quad (5.26)$$

Die Addition von elastischen und plastischen Dehnungsinkrementen darf nur unter den eingangs genannten Voraussetzungen bei großen Rotationen in Gegenwart kleiner Verzerrungen getroffen werden, was für dünnwandige Flächentragwerke allerdings typisch ist (Kovarianzprinzip). Der plastische Anteil $\Delta {}^i\epsilon^p$ unterliegt dem Fließgesetz in Gestalt der Normalenregel:

$$\Delta {}^i\epsilon^p = \Delta\lambda \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{n t + \alpha ({}^i t - {}^n t)} \quad (5.27)$$

Der inkrementelle Charakter von Gl. 5.27 erlaubt den Gradienten des Potentials während der Iteration zu irgendeinem Zeitpunkt ${}^n t + \alpha ({}^i t - {}^n t)$ zwischen Anfang ${}^n t$ und Ende ${}^i t$ des Zeitinkrements $\Delta t = {}^i t - {}^n t$ zu wählen:

$$0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.28)$$

Insbesondere hat die Wahl des Parameters α und die damit verbundene Festlegung des Fließvektors (Fließrichtung des plastisch deformierten Materials)

$$\mathbf{a} := \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{n t + \alpha ({}^i t - {}^n t)} \quad (5.29)$$

Anlaß für eine Reihe unterschiedlicher Lösungsvorschläge zur elastoplastischen Spannungsberechnung gegeben, deren Gemeinsamkeiten anfänglich nicht erkannt worden sind. Unter einem expliziten Spannungsintegrationsverfahren ist hier der Fall $\alpha = 0$ gemeint, während für $\alpha = 1$ ein implizites Verfahren vorliegt. Darüberhinaus sollen im ersten Fall sowohl die Fließbedingung als auch der Differentialquotient in der Verfestigungsannahme am Anfang des Zeitinkrements zum Zeitpunkt ${}^n t$ erfüllt sein, wogegen bei der impliziten Methode alle konstitutiven Beziehungen zur Zeit ${}^i t$ befriedigt sein sollen.

Im Kapitel 5.3. werden die bekanntesten Verfahren zur Spannungsberechnung mittels Integration des elastoplastischen konstitutiven Tensors \mathbf{D}^{ep} erklärt. Im Kapitel 5.4 wird auf die sogenannten elastischen Prädiktorplastischen Korrekturverfahren eingegangen, die aus der rechnerischen Aufteilung des elastoplastischen Problems in zwei Lösungsphasen entstehen und zwar in eine zuerst rein elastische Randwertaufgabe (kinematische Feldgleichungen und Randbedingungen) und danach in eine rein plastische Anfangswertaufgabe (konstitutive Gleichungen der Elastoplastizität).

5.3 Zusammenstellung der klassischen Integrationsverfahren zur elastoplastischen Spannungsberechnung.

5.3.1 Vorbemerkungen

Zur Ermittlung des neuen Spannungszustandes ${}^i \mathbf{S}$ und der inelastischen Dehnungen ${}^i \boldsymbol{\epsilon}^p$ müssen die als Differentialgleichungen vorliegenden Beziehungen der Fließtheorie - die a priori eine infinitesimale Theorie ist - nach der Zeit integriert werden. Die Aufgabe besteht darin, aus

- den Anfangswerten: $\begin{array}{ll} \text{gesamte Dehnungen} & {}^n \boldsymbol{\epsilon} \\ \text{inelastische Dehnungen} & {}^n \boldsymbol{\epsilon}^p \end{array}$
- der konstitutiven Beziehung: $d\mathbf{S} = \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\epsilon}$
- und den aktuellen Dehnungen ${}^i \boldsymbol{\epsilon}$ zum Zeitpunkt ${}^i t$

den neuen Spannungszustand ${}^i \mathbf{S}$ und die inelastischen Dehnungen ${}^i \boldsymbol{\epsilon}^p$ zu berechnen. Die eindeutige Angabe des neuen Spannungszustandes ${}^i \mathbf{S}$ ist selbst für ideal elastoplastisches Materialverhalten möglich, denn das Problem wird durch Vorgabe des neuen Dehnungszustandes ${}^i \boldsymbol{\epsilon}$ vollkommen kontrolliert (der hierfür verwendete Ausdruck „dehnungskontrolliertes Problem“ betont diesen Sachverhalt nachhaltig).

Das typische Vorgehen der klassischen Algorithmen zur elastoplastischen Spannungsberechnung besteht darin, das geschwindigkeitsabhängige Stoffgesetz mit Hilfe des elastoplastischen Tensors \mathbf{D}^{ep} entlang des Dehnungsweges $\Delta^i \epsilon = \int_{n\epsilon}^i \epsilon d\epsilon$ vom Zeitpunkt n_t bis i_t zu integrieren. Hierbei wird das elastische Problem parallel zur plastischen Aufgabe gelöst. Obwohl sich beide Teilprobleme auf der Ebene der infinitesimalen elastischen und plastischen Dehnungen $d\epsilon^e$ und $d\epsilon^p$ additiv zusammensetzen, machen die klassischen Lösungsverfahren von den mathematischen Vorteilen dieser additiven Verknüpfung in der Fließtheorie keinen Gebrauch. Da der konstitutive Tensor \mathbf{D}^{ep} vom Spannungszustand \mathbf{S} selbst abhängig ist, liegt dem ratenabhängigen Stoffgesetz der Fließtheorie ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem erster Ordnung zugrunde, dessen Größe sich nach der Anzahl der unabhängigen Spannungs- und Dehnungskomponenten richtet. Im Fall des dreidimensionalen Kontinuums liegen sechs gekoppelte Differentialgleichungen vor, zu deren Lösung sämtliche numerischen Zeitintegrationsverfahren zur Verfügung stehen. Es sind dies die Euler-Vorwärtsstrategien (explizite Methoden) und die allgemeinen Prädiktor-Korrektorverfahren (implizite Methoden). Mit den in der Strukturmechanik gebräuchlichen Annahmen für den ebenen Spannungszustand, die Rotationssymmetrie oder die Degeneration bei Flächentragwerken verringert sich zwar die Zahl der unabhängigen Differentialgleichungen einerseits; andererseits unterliegt das Lösungsverfahren zusätzlichen Beschränkungen (siehe Teil 7). Nachfolgend wird ein Überblick über die expliziten und impliziten Integrationsmethoden zur Spannungsermittlung im elastoplastischen Kontinuum gegeben.

5.3.2 Explizite Integrationsmethoden

Der neue Spannungszustand $^i \mathbf{S}$ kann aus den Spannungsraten durch Zeitintegration hergestellt werden.

$$^i \mathbf{S} = {}^n \mathbf{S} + \int_{n\mathbf{S}}^i \mathbf{S} d\mathbf{S} = {}^n \mathbf{S} + \int_{n_t}^i \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau} d\tau \quad (5.30)$$

Durch Einsetzen des in differentieller Form vorliegenden elastoplastischen Materialgesetzes Gl. 2.77 wird auf die Integration des konstitutiven Tensors entlang des Dehnungsweges übergegangen.

$$^i \mathbf{S} = {}^n \mathbf{S} + \int_{i\epsilon}^n \epsilon \mathbf{D}^{ep}(\epsilon) \cdot d\epsilon \quad (5.31)$$

Nach der zeitlichen Diskretisierung gehen die Dehnungsgeschwindigkeiten in die Inkremente $\Delta^i \epsilon$ gemäß Gl.5.25 über.

$${}^i \mathbf{S} = {}^n \mathbf{S} + \sum_{k=1}^m \Delta \mathbf{S}^k = {}^n \mathbf{S} + \sum_{k=1}^m \mathbf{D}^{ep}(\epsilon^k) \frac{\Delta^i \epsilon}{m} \quad \text{mit} \quad \epsilon^k = {}^n \epsilon + \frac{k}{m} ({}^i \epsilon - {}^n \epsilon) \quad (5.32)$$

Durch Anwendung der Euler-Vorwärts-Methode auf Gl.5.32 zur numerischen Integration erhält man das klassische Spannungsintegrationsverfahren mit Subinkrementierung. Da der elastoplastische Tensor \mathbf{D}^{ep} am Anfang eines Subinkrements aufgestellt wird, spricht man auch von einer expliziten Methode oder einem Tangentenprädiktorverfahren /Schreyer 1979/, /Nyssen 1981/ und /Krieg 1977/. Für nichtlineare Berechnungen mit FE-Programmen wird der daraus hergeleitete einfache Algorithmus der expliziten Methode bis in jüngster Zeit am häufigsten verwendet. Zum Beispiel wurde er auch von Sättele /Sättele 1980/ in das Programmsystem NISA80 /NISA80 1983/ eingebracht. Zur Gegenüberstellung mit den Verfahren in den Kapiteln 5.4 bis 5.6, welche auf der getrennten Lösung des elastoplastischen Problems beruhen, soll er kurz zusammengefaßt werden.

Veranschaulichung der expliziten Integrationsmethode

Schritt 1:

- Das Spannungskrement $\Delta^i \mathbf{S}^*$ wird unter der Annahme vollständig elastischen Materialverhaltens beim Aufbringen des Dehnungskrements $\Delta^i \epsilon$ ermittelt.

$$\Delta^i \mathbf{S}^* = \mathbf{D} \Delta^i \epsilon \quad (5.33)$$

Überprüfung der Fließbedingung:

$$F({}^n \mathbf{S} + \Delta^i \mathbf{S}^*) < 0 \quad \text{elastisch,} \quad \implies \quad \text{setze:} \quad {}^i \mathbf{S} = {}^n \mathbf{S} + \Delta^i \mathbf{S}^*$$

$$\geq 0 \quad \text{plastisch,} \quad \implies \quad \text{weiter mit Schritt 2}$$

Schritt 2:

- Der Spannungszustand \mathbf{S}^c bei Eintritt des Fließens ist zu berechnen. In die Anschauung umgesetzt bedeutet es, den Durchstoßpunkt \mathbf{S}^c des Vektors $\Delta^i \mathbf{S}^*$ auf der Fließfläche zur Zeit t in Bild 5.7 zu ermitteln. Der Parameter β zur Ermittlung des Kontaktspannungszustandes

$$\mathbf{S}^c = {}^n \mathbf{S} + \beta \Delta^i \mathbf{S}^* \quad (5.34)$$

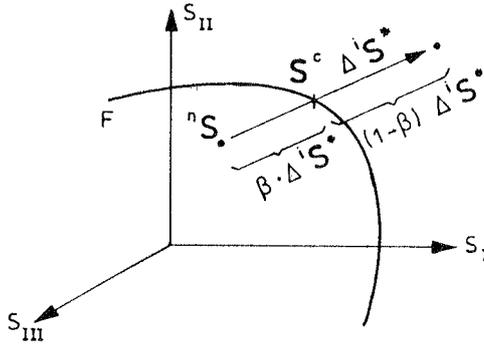


Bild 5.7 : Darstellung des sogenannten „Kontaktspannungszustandes“ S^c auf der Fließfläche im Hauptspannungsraum

ergibt sich aus dem Fließkriterium:

$$F = ({}^nS + \beta \Delta^i S^*) \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.35)$$

In der Regel liegt diese Bedingung in impliziter Form als nichtlineare Funktionsgleichung des Faktors β vor, der iterativ zu ermitteln ist.

Schritt 3:

- Ermittlung des Dehnungszuwachses $\Delta^i \epsilon^c$ bis zum Fließenbeginn, wenn sich die Deformationen vom Zeitpunkt ${}^n t$ bis ${}^i t$ ändern und das Materialverhalten als linear elastisch innerhalb des Zeitinkrements vorausgesetzt wird - siehe Bild 5.8.

$$\Delta^i \epsilon^c = \beta \Delta^i \epsilon \quad (5.36)$$

$$\Delta^i \epsilon^{ep} = \Delta^i \epsilon^p + \Delta^i \epsilon^e = (1 - \beta) \Delta^i \epsilon \quad (5.37)$$

Die Schritte 2 und 3 entfallen, wenn der Punkt ${}^n S$ bereits auf der Fließfläche liegt.

Schritt 4:

- Aufstellung des elastoplastischen Tensors ${}^c D^{ep}$ zum Zeitpunkt ${}^c t$ mit Hilfe des Fließvektors ${}^c \mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{c t}$ (und dem Gradienten des plastischen Potentials bei nichtassozierten Fließregeln ${}^c \mathbf{q} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{c t}$).

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \epsilon} \Big|_{c t} =: {}^c \mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{D} \mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^T \mathbf{D}}{\frac{d\mathbf{S}}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\Delta\lambda} + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} \Big|_{c t} \quad (5.38)$$

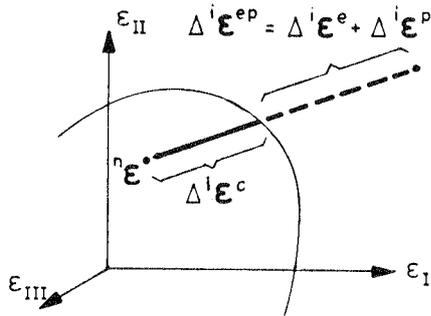


Bild 5.8 : Darstellung der Fließfläche und Unterteilung des Dehnungsincrements im Hauptverzerrungsraum

Schritt 5:

- Berechnung des neuen Spannungszustandes ${}^i\mathbf{S}$, der im Zusammenhang mit dem expliziten Verfahren auch unter dem Begriff Tangentenprädiktor ${}^i\mathbf{S}^+$ /Schreyer 1979/ bekannt ist.

$${}^i\mathbf{S}^+ = \underbrace{{}^n\mathbf{S} + \mathbf{D} \Delta^i \epsilon^c}_{\mathbf{S}^c} + \underbrace{\mathbf{D}^{ep}(\Delta^i \epsilon^e + \Delta^i \epsilon^p)}_{\Delta^i \mathbf{S}} \quad (5.39)$$

Das Spannungsincrement $\Delta^i \mathbf{S}$ liegt in der Tangentialebene der Ver-

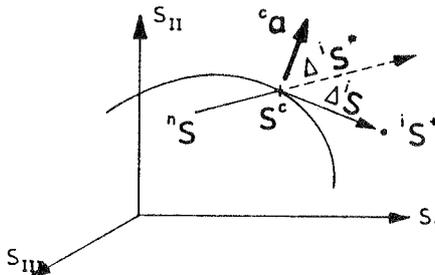


Bild 5.9 : Tangentenprädiktor und Fließvektor ${}^c\mathbf{a}$ an die Verfestigungsfläche cF zur Zeit t

festigungsfläche im Punkt \mathbf{S}^c . Für den gesuchten Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}$ kann unter der Voraussetzung kleiner Schrittweiten $\Delta^i \mathbf{S}$ der Zustand ${}^i\mathbf{S}^+$ verwendet werden. Er kann im Hinblick auf eine zusätzliche Korrektur aber auch als Prädiktor verstanden werden.

Schritt 6:

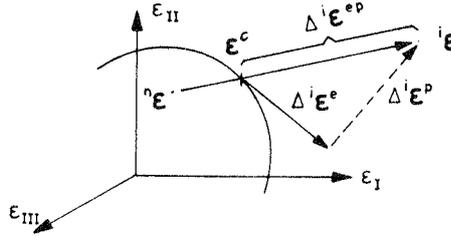


Bild 5.10 : Zerlegung des Dehnungsincrementes im Hauptverzerrungsraum

- Bestimmung des plastischen Dehnungsincrementes $\Delta^i \epsilon^p$:

$$\Delta^i \epsilon^p = \Delta^i \epsilon^{ep} - \underbrace{\mathbf{D}^{-1} \Delta^i \mathbf{S}}_{\Delta^i \epsilon^e} \quad (5.40)$$

Das Spannungsincrement $\Delta^i \mathbf{S}$ wird durch $\mathbf{D}^{ep} \Delta^i \epsilon^{ep}$ ersetzt.

$$\Delta^i \epsilon^p = \Delta^i \epsilon^{ep} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{D}^{ep} \Delta^i \epsilon^{ep} \quad (5.41)$$

$$= \Delta^i \epsilon^{ep} - \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{a} \otimes \mathbf{a}^T \mathbf{D}}{\frac{d\bar{S}}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\Delta\lambda} + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} \right] \Delta^i \epsilon^{ep} \quad (5.42)$$

$$= \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D} \Delta^i \epsilon^{ep}}{\frac{d\bar{S}}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\Delta\lambda} + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} \mathbf{a} \quad (5.43)$$

Der Ausdruck $\mathbf{D} \Delta^i \epsilon^{ep}$ ist mit $(1 - \beta) \Delta^i \mathbf{S}^*$ identisch.

$$\Delta^i \epsilon^p = (1 - \beta) \frac{\mathbf{a}^T \cdot \Delta^i \mathbf{S}^*}{\frac{d\bar{S}}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\Delta\lambda} + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} \mathbf{a} \quad (5.44)$$

Schritt 7:

- Das plastische Vergleichsdehnungsincrement $\Delta^i \bar{\epsilon}^p$ und die neue Lage der Verfestigungsfläche werden je nach Art der Verfestigungshypothese errechnet.

Arbeitsverfestigung: $\Delta^i \bar{\epsilon}^p = \frac{\Delta^i \epsilon^{pT} \mathbf{S}^c}{c \bar{S}}$

Verzerrungsverfestigung: $\Delta^i \bar{\epsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta^i \epsilon^{pT} \Delta^i \epsilon^p}$

Aus der plastischen Vergleichsdehnung $\Delta^i \bar{\epsilon}^p$ resultiert die einaxiale Fließspannung \bar{S}^i nach Bild 2.9.

$$\bar{S}^i = \bar{S}^c + \Delta^i \bar{\epsilon}^p \implies \bar{S}^i = \bar{S}(\bar{\epsilon}^p) \quad (5.45)$$

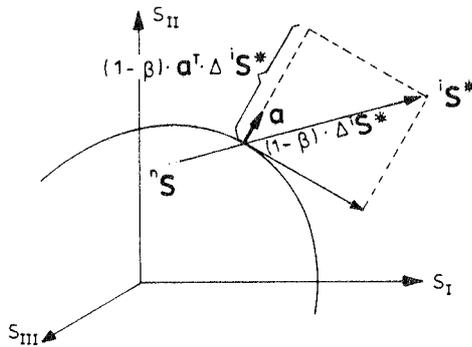


Bild 5.11 : Darstellung des Skalarproduktes $\mathbf{a}^T \cdot \Delta^i \mathbf{S}^*$ im Hauptspannungsraum - siehe auch Kapitel 5.4.3

Euler-Verfahren mit Korrektur

Die Konvexität der Fließfläche bedingt systematische und daher wachsende Fehler bei der Berechnung des neuen Spannungszustandes ${}^i \mathbf{S} = {}^i \mathbf{S}^+$, da sich der Abstand des Tangentenprädiktors ${}^i \mathbf{S}^+$ von der Fließfläche mit jedem Zeitschritt vergrößert. Weder die Fließregel noch die Fließbedingung F sind am Ende des Zeitintervalls erfüllt, was für ein explizites Verfahren charakteristisch ist. Um wenigstens die Fließbedingung $F = 0$ zum Zeitpunkt ${}^i t$ einzuhalten und unwirtschaftlich kleine Zeitschritte zu vermeiden, ist in jedem Fall eine Korrektur des Tangentenprädiktors ${}^i \mathbf{S}^+$ entweder nach jedem Subinkrement oder einmalig am Ende des Zeitschritts vorzunehmen.

Schritt 8:

- Als mögliche Korrektur des Tangentenprädiktors auf die Fließfläche sind verschiedene Projektionsrichtungen vorgeschlagen worden /Hinton 1980/, /Hibbitt 1981/, /Marques 1984/, z.B. parallel zum Fließvektor zur Zeit ${}^i t$ oder orthogonal zur Fließfläche zur Zeit ${}^i t$. Voraussetzung hierfür ist jedoch die Kenntnis der aktuellen Lage der Verfestigungsfläche ${}^i F = 0$. Diese kann unabhängig vom Tangentenprädiktor ${}^i \mathbf{S}^+$ wie in Schritt 7 mit Hilfe der plastischen Vergleichsdehnung ${}^i \bar{\epsilon}^p$ und der einaxialen Fließspannung \bar{S} bestimmt werden. Anzumerken ist, daß das Werkstoffgesetz ${}^c \mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^{ep}(\mathbf{S}^c) = \frac{d\mathbf{S}}{d\epsilon} |_{c,t}$ aus Schritt 4 zu Beginn des Plastifizierens aufgestellt wird. Es stimmt mit dem neuen Spannungszustand ${}^i \mathbf{S}$ aufgrund der Differenzenquotienten der expliziten Zeitintegrationsmethode nicht überein.

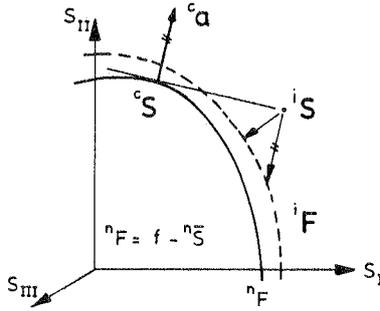


Bild 5.12 : Korrektur des Tangentenprädiktors

5.3.3 Implizite Spannungsintegration mit Hilfe des allgemeinen Prädiktor-Korrektorverfahrens

Im Vergleich zu den expliziten Methoden bietet das Prädiktor-Korrektor-Verfahren, welches zur Klasse der Integrationsverfahren vom geschlossenen (iterativen) Typ zählt, den Vorteil unbedingter numerischer Stabilität und kleinerer Abbruchfehler als die gewöhnliche Euler-Vorwärts-Methode. Die beim iterativen Formalismus durchzuführenden Schritte werden kurz vorgestellt, wobei die ersten drei identisch denjenigen des vorangegangenen Abschnitts sind. Im vierten Schritt werden der Fließvektor ${}^c \mathbf{a}$ und der Gradient des plastischen Potentials zur Zeit t mit den Spannungen ${}^i \mathbf{S}^* := {}^n \mathbf{S} + \Delta {}^i \mathbf{S}$ ermittelt, womit der konstitutive Tensor ${}^i \mathbf{D}^{ep}$ als rückwärtiger Differenzenquotient aufgestellt wird.

Im anschließenden Korrekturschritt ergibt sich der neue Spannungszustand ${}^i \mathbf{S}$. Der Einfachheit halber soll der alte Spannungszustand ${}^n \mathbf{S}$ in den Gleichungen der Unterabschnitte 5.3.3 und 5.3.4 bereits auf der Fließfläche liegen.

$${}^i \mathbf{S} = \mathbf{S}^c + {}^i \mathbf{D}^{ep} \Delta {}^i \boldsymbol{\epsilon}^{ep} \quad (5.46)$$

Dieser läßt sich iterativ verbessern, indem der konstitutive Tensor ${}^i \mathbf{D}^{ep}$ mit den neuen Werten des Zustands ${}^i \mathbf{S}$ nochmals aufgestellt und Gl. 5.46 erneut angewendet wird. Dieser Prozeß ist solange zu wiederholen, bis sich die gewählten Normen aus den Komponenten des konstitutiven Tensors ${}^i \mathbf{D}^{ep}$ und des Spannungszustandes ${}^i \mathbf{S}$ nur noch innerhalb vorgeschriebener Toleranzschranken ändern. Dann stimmen der konstitutive Tensor ${}^i \mathbf{D}^{ep}$ und der neue Spannungszustand ${}^i \mathbf{S}$ zum Zeitpunkt t überein, was zum Wesen der impliziten Zeitintegrationsalgorithmen gehört. Allerdings darf nicht überse-

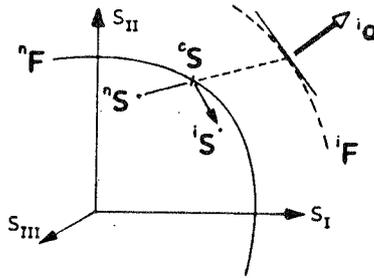


Bild 5.13 : Neuer Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}$

hen werden, daß der Punkt ${}^i\mathbf{S}$ i.a nicht auf der endgültigen Verfestigungsfläche iF zur Zeit it liegt. Wie zuvor kann der Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}$ durch eine abschließende Projektion auf die Verfestigungsfläche iF gebracht oder durch Subinkrementierung beliebig genau an diese angenähert werden.

5.3.4 α -Methoden zur Integration des Werkstoffgesetzes

Das explizite und das implizite Verfahren liefern bei endlicher Schrittweite in der Regel voneinander abweichende Ergebnisse für den neuen Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}$, dessen exakter Wert aufgrund der Konvexität der Fließfläche „zwischen“ den beiden Näherungsergebnissen liegt. Wünschenswert ist daher ein „mittlerer“ Gradient ähnlich Gl. 5.27 zur Zeit αt in Form des konstitutiven Tensors $\alpha \mathbf{D}^{ep} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} |_{\alpha t}$, der als Differenzenquotient höherer Genauigkeit die Güte des Neuberechneten Spannungszustandes ${}^i\mathbf{S}$ verbessern soll. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf davon ausgegangen werden, daß die Spannungszustände ${}^n\mathbf{S}$ und ${}^{n-1}\mathbf{S}$ bereits auf der Fließfläche liegen.

$${}^i\mathbf{S} = {}^n\mathbf{S} + {}^n\mathbf{D}^{ep} \Delta^i\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.47)$$

In Anlehnung an die allgemeinen Prädiktor-Korrektorverfahren sind die Spannungen ${}^i\mathbf{S}^*$ nach der Formel

$${}^i\mathbf{S}^* = {}^{n-1}\mathbf{S} + 2 {}^n\mathbf{D}^{ep} \Delta^i\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.48)$$

zu bilden. Der neue Zustand errechnet sich zu - siehe /Ralston 1967/:

$${}^i\mathbf{S} = {}^n\mathbf{S} + 0,5 ({}^i\mathbf{D}^{ep} + {}^n\mathbf{D}^{ep}) \Delta^i\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.49)$$

Die hierdurch beschriebenen Zusammenhänge werden in Bild 5.14 verdeut-

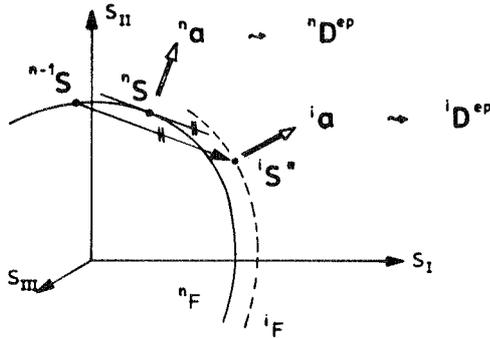


Bild 5.14 : Bedeutung der Eingangsgrößen für die α -Methode

licht.

In Kombination mit der Subinkrementierung bei einer Schrittweite von $h = \frac{1}{m}(i^t - n^t)$ - wobei m die Anzahl der Schritte ist - sind die Berechnungsformeln bis zur Ordnung $O(h^3)$ genau. Nachteilig ist jedoch die zusätzliche Kenntnis der Matrizen ${}^{n-1}\mathbf{S}$ und ${}^i\mathbf{D}$ neben den Größen ${}^n\mathbf{S}$ und ${}^n\mathbf{D}^{ep}$, welche im Rechner alle vorgehalten werden müssen. Im Sinne dieser Mehrschrittverfahren sind auch die in /Ortiz 1985/ vorgeschlagenen Integrationsformeln für die verallgemeinerte Trapez- und Mittelpunktsregel zu sehen. Aus Gründen der Vollständigkeit werden sie an dieser Stelle aufgeführt.

A) Verallgemeinerte Trapezregel

Das Werkstoffgesetz wird zur Zeit ${}^\alpha t$ aufgestellt,

$${}^\alpha\mathbf{D}^{ep} = \alpha {}^n\mathbf{D}^{ep} + (1 - \alpha) {}^i\mathbf{D}^{ep} \quad (5.50)$$

wobei der Tensor ${}^i\mathbf{D}^{ep}$ mit dem elastischen Spannungsprädiktor ${}^i\mathbf{S}^*$ gemäß

$${}^i\mathbf{S}^* = {}^n\mathbf{S} + \mathbf{D} \Delta^i\epsilon \quad (5.51)$$

gebildet wird. Für den neuen Spannungszustand gilt dann:

$${}^i\mathbf{S} = {}^n\mathbf{S} + \alpha\mathbf{D}^{ep} \Delta^i\epsilon \quad (5.52)$$

B) Verallgemeinerte Mittelpunktsregel

Das Werkstoffgesetz ${}^\alpha\mathbf{D}^{ep}$ wird mit dem Spannungszustand ${}^\alpha\mathbf{S}$ aufgestellt,

$${}^\alpha\mathbf{S} = \alpha {}^n\mathbf{S} + (1 - \alpha) {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.53)$$

in den der elastische Prädiktor ${}^i\mathbf{S}^*$ eingeht. Es ergeben sich:

$${}^i\mathbf{S} = {}^n\mathbf{S} + \alpha\mathbf{D}^{ep} \Delta^i\epsilon \quad \text{mit} \quad \alpha\mathbf{D}^{ep} = \mathbf{D}^{ep}(\alpha\mathbf{S}) \quad (5.54)$$

5.4 Spannungsberechnung durch getrennte Ermittlung der elastischen und plastischen Anteile

5.4.1 Vorbetrachtungen

Die im vorigen Kapitel dargelegten Methoden zur Spannungsermittlung in der Elastoplastizität beruhen alle auf der Integration des Werkstoffensors \mathbf{D}^{ep} , mit welchem die elastische und plastische Teilaufgabe simultan gelöst werden. Im Gegensatz dazu steht eine zweite Klasse von Spannungsalgorithmen, die das elastische Problem getrennt von der plastischen Aufgabe behandeln. Dabei wird die Gegebenheit ausgenutzt, daß die beiden Teilaufgaben additiv in den Dehnungsgeschwindigkeiten bzw. -inkrementen $\Delta\epsilon^e$ und $\Delta\epsilon^p$ miteinander verknüpft sind. Im weiteren wird dieses auf der Separation beruhende Lösungskonzept mit dem Begriff „*elastisches Prädiktor-plastisches Korrektorverfahren*“ belegt.

Vorteilhaft bei diesem Vorgehen ist, daß die Spannungsneuberechnung im Plastischen ohne rechenintensive Aufstellung der elastoplastischen Matrix \mathbf{D}^{ep} mit Hilfe des Fließvektors \mathbf{a} vollziehbar ist. Beim Übergang vom elastischen in den plastischen Bereich kann auf die Bestimmung des Kontaktspannungszustands verzichtet werden. Die algebraisch einfachere Gleichungsstruktur der getrennten Berechnungsmethode gestattet desweiteren den Spannungsalgorithmus rigoros in die Linearisierung der virtuellen Arbeitsgleichungen miteinzubeziehen, aus denen die Tangentensteifigkeitsmatrix für das Newton-Verfahren zur Gleichgewichtsiteration hergeleitet wird.

Zunächst wird der Grundgedanke des elastischen Prädiktor-plastischen Korrektorverfahrens und dessen enge Verwandtschaft mit den im vorigen Kapitel aufgezeigten Verfahren eingehender betrachtet, woraus auch die Begriffsbildung einsichtig wird. Der Klarheit wegen wird darauf hingewiesen, daß der Unterschied zwischen den klassischen Spannungsintegrationsverfahren und dem elastischen Prädiktor-plastischen Korrektorverfahren nicht in der Wahl des Zeitpunkts besteht, an dem die konstitutiven Gleichungen erfüllt sind, d.h. ob ein explizites oder implizites Verfahren vorliegt - siehe Kapitel 5.5.

5.4.2 Zur Begriffsbildung des elastischen Prädiktor-plastischen Korrektorverfahrens („operator split - method“)

Für die Gegenüberstellung der prinzipiellen Gemeinsamkeiten zwischen der klassischen Methode und dem elastischen Prädiktor-plastischen Korrektorverfahren wird eine explizite Einschritttechnik betrachtet. Der Tangenten-

prädiktor ${}^i\mathbf{S}^+$ soll anstelle vieler Subinkremente durch einen einzigen Schritt approximiert berechnet /Stein 1985/. Dabei wird eine u.U. große „Abdrift“ des Spannungszustandes von der Fließfläche bewußt hingenommen, jedoch in einem nachfolgenden Korrekturschritt beseitigt. Um uneingeschränkte Stabilität des numerischen Verfahrens zu garantieren, soll die Projektion des Tangentenprädiktors \mathbf{S}^+ orthogonal auf die Fließfläche erfolgen, so daß die Fließregel $\Delta \dot{\epsilon}^p = \Delta \lambda \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_t$ am Ende des Zeitschritts erfüllt wird.

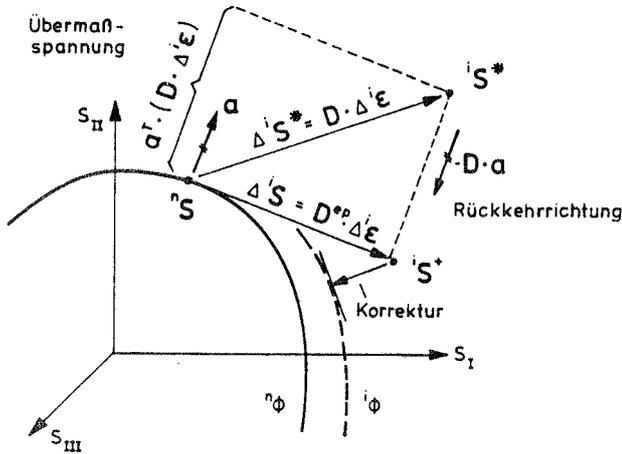


Bild 5.15 : Tangentenprädiktor ${}^i\mathbf{S}^+$ und elastischer Prädiktor ${}^i\mathbf{S}^*$ im Hauptspannungsraum

$${}^i\mathbf{S}^* = {}^n\mathbf{S} + \Delta^i\mathbf{S}^* \tag{5.55}$$

$${}^i\mathbf{S}^+ = {}^n\mathbf{S} + \Delta^i\mathbf{S} \tag{5.56}$$

Die Korrektur des Tangentenprädiktors ${}^i\mathbf{S}^+$ in Richtung der inkrementellen plastischen Dehnung $\Delta \dot{\epsilon}^p$ um den Betrag $\Delta^i\epsilon^{Korrektur}$ entspricht einer ausschließlich plastischen Relaxation. Die Gesamtdehnungen $\dot{\epsilon}$ bleiben unter diesem Gesichtspunkt unverändert, da ein Teil der elastischen Verzerrungen ${}^i\epsilon^{e+}$ des Tangentenprädiktorzustandes

$${}^i\epsilon^{e+} = \mathbf{D}^{-1} {}^i\mathbf{S}^+ \tag{5.57}$$

in plastische Dehnungen $\dot{\epsilon}^p$ übergeht.

$${}^i\epsilon^p = {}^i\epsilon^{p+} + \Delta^i\epsilon^{p\text{Korrektur}} \tag{5.58}$$

Die Vorstellung, den Tangentenprädiktor ${}^i\mathbf{S}^+$ im Sinne einer plastischen Relaxation zu korrigieren, läßt sich auch auf den elastischen Spannungsprädiktor ${}^i\mathbf{S}^*$ übertragen.

$$\Delta^i\mathbf{S} = [\mathbf{D} \Delta^i\boldsymbol{\epsilon}] - \frac{\mathbf{D} \mathbf{a} \otimes (\mathbf{a}^T [\mathbf{D} \Delta^i\boldsymbol{\epsilon}])}{\frac{d\mathcal{S}}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\Delta\lambda} + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} \quad (5.59)$$

Der algebraische Ausdruck

$$[\mathbf{D} \Delta^i\boldsymbol{\epsilon}] = \Delta^i\mathbf{S}^* \quad (5.60)$$

repräsentiert das Spannungsinkrement $\Delta^i\mathbf{S}^*$ vom alten Spannungszustand zum elastischen Prädiktor. Das Skalarprodukt

$$\mathbf{a}^T [\mathbf{D} \Delta^i\boldsymbol{\epsilon}] = \mathbf{a}^T \Delta^i\mathbf{S}^* \quad (5.61)$$

zwischen dem elastischen Prädiktorinkrement $\Delta^i\mathbf{S}^*$ und dem Fließvektor \mathbf{a} - siehe Bild /5.15/ - gibt die Größe der Komponente des Spannungsinkrements in Richtung des Gradienten der Fließfläche an (Übermaßspannung). Der Term $\mathbf{D} \mathbf{a}$ bestimmt die Rückkehrrichtung vom elastischen Prädiktor auf die Fließfläche. Gl. 5.59 kann unter Einbeziehung von Gl. 5.61 geschrieben werden als:

$$\underbrace{{}^n\mathbf{S} + \Delta^i\mathbf{S}}_{\text{Gl. 5.56}} = \underbrace{{}^n\mathbf{S} + \Delta^i\mathbf{S}^*}_{\text{Gl. 5.55}} - \frac{\mathbf{a}^T \Delta^i\mathbf{S}^*}{\frac{d\mathcal{S}}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\Delta\lambda} + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} \underbrace{(\mathbf{D} \mathbf{a})}_{\text{Rückkehrrichtung}} \quad (5.62)$$

$$\begin{array}{lcl} {}^i\mathbf{S}^+ & = & {}^i\mathbf{S}^* - \frac{\mathbf{a}^T \Delta^i\mathbf{S}^*}{\frac{d\mathcal{S}}{d\kappa} \frac{d\kappa}{d\Delta\lambda} + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a}} (\mathbf{D} \mathbf{a}) \\ \text{Tangenten-} & \text{elastischer} & \\ \text{prädiktor} & = \text{Prädiktor} & - \text{„Übermaß-} \\ & & \text{spannung“} \end{array} \quad (5.63)$$

Gl. 5.63 beinhaltet sowohl einige anschaulich als auch methodisch bedeutungsvolle Aussagen:

- Der Tangentenprädiktor ${}^i\mathbf{S}^+$ setzt sich aus dem elastischen Spannungsprädiktor ${}^i\mathbf{S}^*$ und der Übermaßspannung zusammen.
- Für das Endergebnis ist es gleichgültig, ob der Tangentenprädiktor ${}^i\mathbf{S}^+$ mit Hilfe der elastoplastischen \mathbf{D}^{ep} -Matrix direkt ermittelt wird, oder ob zuerst der elastische Prädiktor ${}^i\mathbf{S}^*$ bestimmt und danach ein

plastischer Korrekturschritt angeschlossen wird, indem der elastische Prädiktor ${}^iS^*$ auf die Tangentialebene („linearisierte Fortsetzung“ der Fließfläche) gelotet wird. Der aktuelle Spannungsprädiktor ist für die klassische Methode ohne Bedeutung; dagegen ist er für das elastische Prädiktor-plastische Korrektervorgehen von zentraler Wichtigkeit.

- Die elastoplastische Spannungsberechnung kann in zwei Schritten erfolgen:
 1. Berechnung des elastischen Prädiktors ${}^iS^*$ unter der Annahme, daß sich der Werkstoff bei Laststeigerung von ${}^n t$ nach ${}^i t$ unter dem Dehnungsinkrement $\Delta {}^i \epsilon$ rein elastisch verhält; d.h. die plastischen Deformationen zur Zeit ${}^n t$ werden unverändert beibehalten (das inelastische Deformationsverhalten des Werkstoffs ist „eingefroren“)
 2. Vom elastischen Prädiktorzustand aus wird eine rein plastische Relaxationsphase durchlaufen, in der die Konfiguration der Struktur mit dem gesamten Verzerrungszustand fixiert bleibt. Dabei wird ein Teil der elastischen Dehnungen ${}^i \epsilon^e$ - vergleichbar mit einem Relaxationsversuch - in inelastische Verzerrungen ${}^i \epsilon^p$ umgesetzt.

Die sukzessive Ausführung der beiden Rechenphasen kann im physikalischen Versuch nicht beobachtet werden, sondern es soll ein anschauliches Bild für die nachstehende Klasse von Algorithmen zur schrittweisen Berechnung des Spannungszustandes vermittelt werden.

5.4.3 Elastisches Prädiktor - plastisches Korrekterverfahren: Prinzipielles Vorgehen

Im Gegensatz zu der klassischen expliziten Methode wird der elastische Prädiktorzustand nicht zuerst auf die Tangentialebene durch S^c zur Zeit ${}^c t$ projiziert und der hieraus gewonnene Tangentenprädiktor S^+ im nachfolgenden Korrekturschritt durch eine zweite Projektion auf die Fließfläche gebracht. Vielmehr wird der elastische Prädiktor S^* durch eine einzige Projektion auf die Menge aller zulässigen Spannungszustände (Fließkörper im dreidimensionalen Hauptspannungsraum) abgebildet, so daß die Fließbedingung $F({}^i S, \kappa) = 0$ am Ende des Zeitinkrements zum Zeitpunkt ${}^i t$ erfüllt ist. Dieses ursprünglich von Wilkins /Wilkins 1964/ und Maenchen /Maenchen

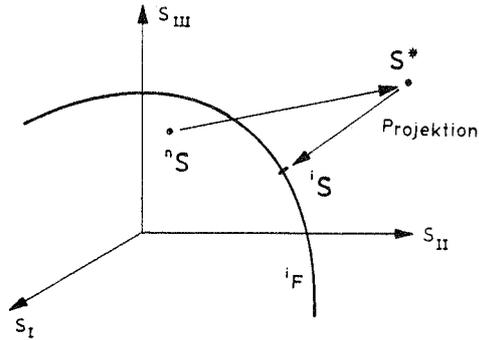


Bild 5.16 : Projektion des Spannungsprädiktors S^* auf die Fließfläche iF im Hauptspannungsraum

1964/ vorgeschlagene sowie später von Krieg & Krieg /Krieg 1977/ untersuchte Verfahren wurde bis dahin nur auf die J_2 -Fließtheorie angewendet und unter der Bezeichnung „radial return“ im Schrifttum bekannt. Auf eine mathematisch fundierte Grundlage konnte es von Ortiz /Ortiz 1981/ im Fall idealer von Mises - Elastoplastizität gestellt und in die Gruppe der Produktalgorithmen - siehe /Kato 1976/, /Moreau 1963/, /Pazy 1974/ - eingereiht werden. Damit gelang es, einen analytischen Konsistenzbeweis zur Absicherung der Konvergenz des Algorithmus' zu erbringen.

Im Sonderfall der elastischen idealplastischen von Mises-Fließtheorie kann der neue Spannungszustand iS des allgemeinen 3D-Kontinuums aus dem elastischen Prädiktor $^eS^*$ durch einfache Skalierung dessen Ortsvektors gefunden werden. Und zwar geschieht dieses im Verhältnis: „Radius der zylindrischen Fließfläche zur Länge des Ortsvektors des elastischen Prädiktors in der Deviatorebene“. Dieses Vorgehen kommt einer radialen Rückkehr vom elastischen Prädiktorzustand auf die kreisförmige Fließkurve in der π -Ebene des von Mises Fließkriteriums gleich. Im Bild 5.17 ist die entscheidende Projektion des elastischen Prädiktor-plastischen Korrektorverfahrens im Hauptspannungsraum und in der Deviatorebene graphisch dargestellt.

Stillschweigend ist ein implizites Einschrittverfahren vorausgesetzt worden, dessen Projektionsrichtung auf die Fließfläche mit dem Fließvektor ia zur Zeit it zusammenfällt.

Das elastische Prädiktor-plastische Korrektorverfahren wurde unzutreffenderweise manchmal nur als rein implizites Verfahren verstanden /Krieg 1977/, /Nyssen 1980/ und entsprechend sprachlich gegen den in Kapitel 5.3

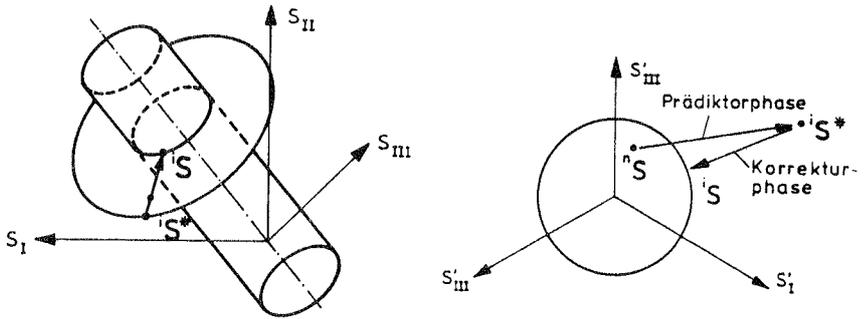


Bild 5.17 : Plastischer Korrekturschritt des elastischen Prädiktors im Hauptspannungsraum und in der Deviatorebene

dargelegten klassischen Integrationsalgorithmus in expliziter Fassung abgegrenzt. Diese keineswegs notwendige Einengung der Methode auf das implizite Verfahren zur Zeitintegration wird in Abschnitt 5.6 zugunsten einer symmetrischen Matrixgleichung zwischen Spannungs- und Verzerrungsgeschwindigkeiten ohnehin fallengelassen - siehe auch Kapitel 5.5.

Losgelöst von der bisher anschaulichen Vorgehensweise der elastischen Prädiktor-plastischen Korrektormethode wird nun auf die formale Herleitung besonderer Wert gelegt, um auch allgemeinere Fließkriterien, Verfestigung des Werkstoffs oder ebene Spannungsprobleme behandeln zu können.

5.4.4 Elastisches Prädiktor - plastisches Korrektungsverfahren: Formale Darstellung des Spannungsalgorithmus'

In Übereinstimmung mit der Vorgehensweise des oben geschilderten Verfahrens wird im ersten Schritt (Prädiktorschritt) der Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}^*$ durch Lösen der Elastizitätsaufgabe gefunden. Die zu diesem gedachten Zustand gehörenden elastischen Dehnungen (elastischer Dehnungsprädiktor) ${}^i\boldsymbol{\epsilon}^*$ berechnen sich entweder mit Hilfe von Gl. 5.25 aus den alten elastischen Dehnungen ${}^n\boldsymbol{\epsilon}$

$${}^i\boldsymbol{\epsilon}^* := {}^n\boldsymbol{\epsilon}^e + \Delta {}^i\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.64)$$

oder aus den bekannten plastischen Dehnungen ${}^n\boldsymbol{\epsilon}^p$ zu:

$${}^i\boldsymbol{\epsilon}^* := {}^i\boldsymbol{\epsilon} - {}^n\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (5.65)$$

Für linearelastisches Material kann ${}^i\mathbf{S}^*$ aus dem alten Spannungszustand ${}^n\mathbf{S}$ und dem elastischen Zuwachs $\Delta{}^i\mathbf{S}^*$ gemäß Gl. 5.33 ermittelt werden.

$${}^i\mathbf{S}^* = {}^n\mathbf{S} + \mathbf{D} \Delta{}^i\boldsymbol{\epsilon} \quad (5.66)$$

Der neue Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}$ zum Zeitpunkt ${}^i t$ kann in den Ausdruck

$${}^i\mathbf{S} = {}^n\mathbf{S} + \mathbf{D} \Delta{}^i\boldsymbol{\epsilon}^e \quad (5.67)$$

gefaßt werden, wobei das elastische Dehnungsinkrement durch Gleichung 5.26 bestimmt wird.

$${}^i\mathbf{S} = {}^n\mathbf{S} + \mathbf{D} (\Delta{}^i\boldsymbol{\epsilon} - \Delta{}^i\boldsymbol{\epsilon}^p) \quad (5.68)$$

Setzt man die Definitionsgleichung für den elastischen Prädiktorzustand Gl. 5.66 in Gl. 5.68 ein,

$${}^i\mathbf{S} = {}^i\mathbf{S}^* - \mathbf{D} \Delta{}^i\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (5.69)$$

so beschreibt der Subtrahent der rechten Gleichungsseite

$$\Delta{}^i\mathbf{S}^p := \mathbf{D} \Delta{}^i\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (5.70)$$

die rein plastische Relaxation (Korrekturschritt) vom Prädiktor ${}^i\mathbf{S}^*$ auf die Fließfläche. Durch Vorgabe des Verschiebungsfeldes bleiben die Gesamtdehnungen dabei unverändert.

$${}^i\mathbf{S} = {}^i\mathbf{S}^* - \Delta{}^i\mathbf{S}^p \quad (5.71)$$

Gl. 5.66 und die Definitionsgleichung Gl. 5.33 werden in Gl. 5.71 eingesetzt:

$$\begin{array}{rccccccc} {}^i\mathbf{S} & = & {}^n\mathbf{S} & + & \Delta{}^i\mathbf{S}^* & - & \Delta{}^i\mathbf{S}^p & \\ \text{Neuer} & & \text{Alter} & & \text{elastischer} & & \text{plastische} & \\ \text{Zustand} & = & \text{Zustand} & + & \text{Prädiktor} & - & \text{Korrektur} & \end{array} \quad (5.72)$$

Die schrittweise Entwicklung des Algorithmus' soll am untenstehenden Schema verdeutlicht werden. Die einzelnen Konfigurationen sind mit ${}^i\mathbf{B}$ gekennzeichnet. Ihre Verzerrungszustände unterscheiden sich durch die miteingetragenen Dehnungsanteile.

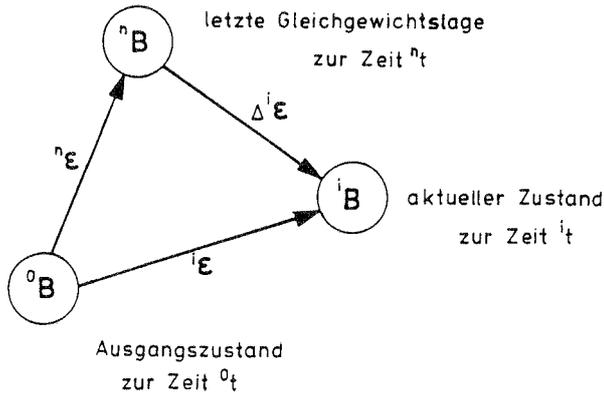


Bild 5.18 : Definition der physikalischen Zustände der Struktur

Die deformierten Zustände ${}^n\mathbf{B}$ und ${}^i\mathbf{B}$ können in gedachte elastische und plastische Teilzustände zerlegt werden. Diese werden zusammen mit

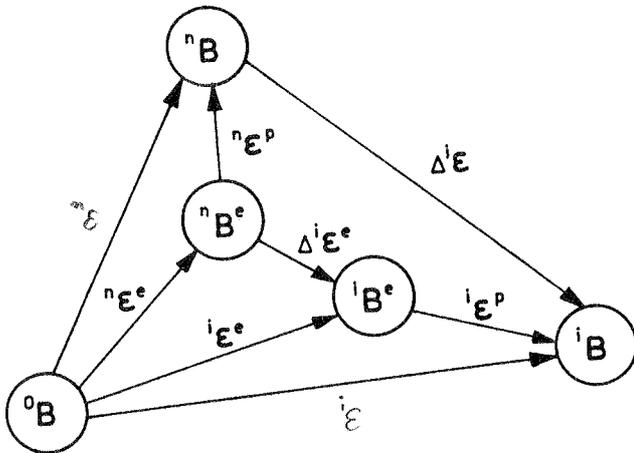


Bild 5.19 : Hinzunahme der ausschließlich elastischen Zustände ${}^n\mathbf{B}^e$, ${}^i\mathbf{B}^e$

den Konfigurationen aus Bild 5.18 in Bild 5.19 übernommen.

In einem weiteren Schritt wird der elastische Prädiktorzustand \mathbf{B}^* in das Diagramm mit den verschiedenen Konfigurationen übernommen. Durch Überlagerung des totalen Dehnungsinkrements $\Delta^i\epsilon$ zur „elastischen Konfiguration“ des Zustandes ${}^n\mathbf{B}^e$ erreicht man den Prädiktorzustand \mathbf{B}^* , von

welchem aus man im ausschließlich plastischen Korrekturschritt den gesuchten elastischen Zustand ${}^i\mathbf{B}^e$ erreicht. Der elastische Prädiktorschritt ist

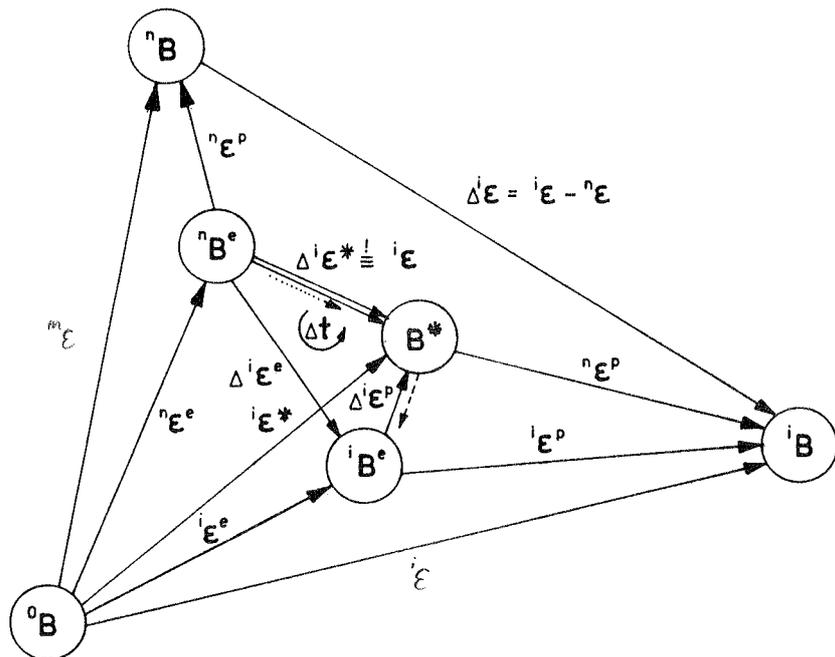


Bild 5.20 : Einführung des elastischen Prädiktorzustandes \mathbf{B}^* zur Berechnung der Konfiguration ${}^i\mathbf{B}$

durch die mit einem zusätzlichen Pfeil versehene und punktiert gezeichnete Linie in Bild 5.20 hervorgehoben, wogegen die plastische Relaxationsphase durch die gestrichelte Linie markiert ist.

In Bild 5.21 sind die einzelnen Schritte für die Spannungsberechnung in einer Graphik des Hauptdehnungsraumes nochmals zusammengefaßt. Darin sind auch die Verfestigungsflächen nF und iF zu Beginn und am Ende des Zeitschritts skizzenhaft eingetragen, nachdem sie in Abhängigkeit der Verzerrungen umgerechnet worden sind.

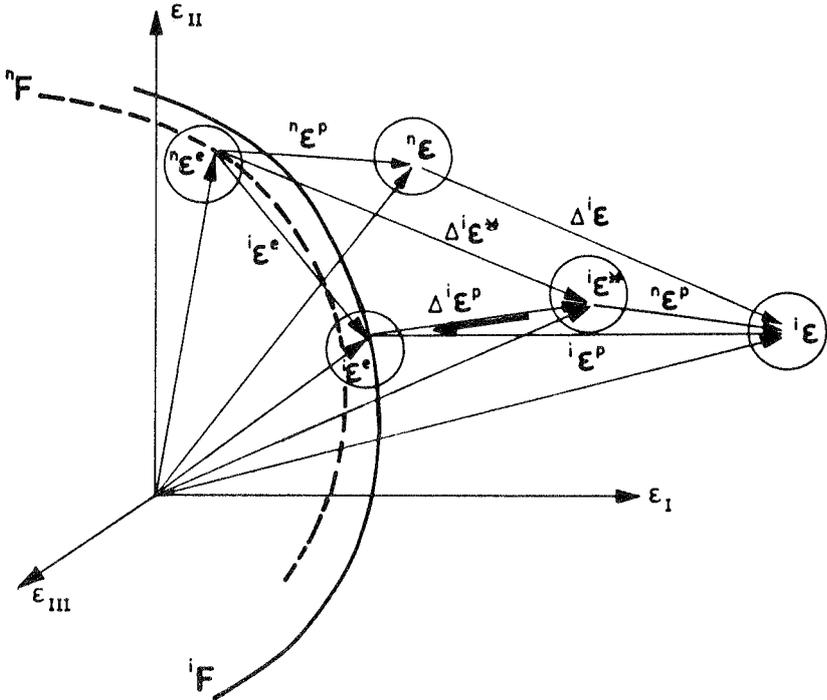


Bild 5.21 : Veranschaulichung der einzelnen Dehnungszustände des elastischen Prädiktor-plastischen Korrekturverfahrens

5.4.5 Inkrementierung der Differentialgleichungen der Fließtheorie

Das Fließgesetz Gl. 2.40 und die Verfestigungsannahme Gl. 2.54 liegen als Differentialgleichungen in der Zeit vor und müssen für ein numerisches Verfahren inkrementiert werden, wozu der Mittelwertsatz der Integralrechnung bereitsteht. Insbesondere betrifft dies den plastischen Multiplikator.

$$\dot{\lambda} := \frac{d\lambda}{dt} \longrightarrow \Delta^i \lambda := \int_{n_t}^{i_t} \frac{d\lambda}{d\tau} d\tau \quad (5.73)$$

$$\Delta^i \lambda = \left. \frac{d\lambda}{dt} \right|_{\alpha_t} (i_t - n_t) \quad (5.74)$$

$$\Delta^i \lambda = {}^i \lambda - {}^n \lambda \quad (5.75)$$

Aus der Fließregel geht das in Gl. 5.27 spezifizierte Dehnungsinkrement $\Delta^i \epsilon^p$ hervor.

$$\Delta^i \epsilon^p = \Delta^i \lambda \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\alpha_t} \quad (5.76)$$

Das Zeitintegral der internen Variablen κ gemäß Gl. 2.55 zwischen den Zeitpunkten ${}^n t$ und ${}^i t$ wird ebenfalls mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ausgewertet.

$${}^i \kappa = {}^n \kappa + \left[\frac{d\lambda}{d\tau} \mathcal{H}(\mathbf{S}) \right] \Big|_{\alpha_t} ({}^i t - {}^n t) \quad (5.77)$$

und ${}^n t \leq \alpha_t \leq {}^i t$

In Verbindung mit Gl. 5.74 und Gl. 5.75 geht Gl. 5.77 über in:

$${}^i \kappa = {}^n \kappa + \Delta^i \lambda \mathcal{H}(\mathbf{S}) \Big|_{\alpha_t} \quad (5.78)$$

Grundsätzlich ist man bei der Wahl des Zeitpunkts α_t zur Bestimmung des Gradienten des plastische Potentials $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\alpha_t}$ und des verallgemeinerten Verfestigungsmoduls

$$\mathcal{H}(\mathbf{S}) = \dot{\lambda} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}}^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\alpha_t} \\ \mathbf{S}^T \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{\alpha_t} \end{array} \right. \quad (5.79)$$

vom Standpunkt der Physik aus betrachtet frei. Numerische Gründe wie *Stabilität*, *Genauigkeit* und *Konvergenzgeschwindigkeit* des Algorithmus' entscheiden letztendlich über die Wahl des Zeitpunkts α_t . Drei Vorgehensweisen können unterschieden werden:

- implizites Verfahren (Kapitel 5.5)
- semiimplizites Verfahren (Kapitel 5.6)
- semiexplizites Verfahren (Kapitel 5.6)

5.5 Entwicklung des vollständig impliziten Algorithmus'

5.5.1 Zeitliche Diskretisierung (Interpolation)

Im Rahmen einer vollständig impliziten Methode ${}^{\alpha}t = {}^i t$ sollen sowohl

- der Gradient in der Gleichung für die plastischen Dehnungsänderungen $\Delta \epsilon^p$ Gl. 5.76,
- die Fließbedingung Gl. 2.44, aus der das plastische Multiplikatorinkrement $\Delta^i \lambda$ bestimmt wird

als auch

- die Verfestigungsannahme zur Berechnung der internen Variablen Gl. 2.54

am Ende des Zeitschritts zum Zeitpunkt ${}^i t$ erfüllt sein. Die Fließregel nimmt die Gestalt an:

$$\Delta^i \epsilon^p = \Delta \lambda \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i,t} \quad (5.80)$$

Bei einem vollständig impliziten Verfahren muß konsequenterweise Gl. 5.77 übergehen in:

$${}^i \kappa = {}^n \kappa + \Delta^i \lambda \, {}^i \mathcal{H} \quad (5.81)$$

wobei die Vereinbarung getroffen wird:

$${}^i \mathcal{H} := \mathcal{H} \left({}^i \mathbf{S}, \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i,t} \right) \quad (5.82)$$

Nach Einfügen von Gl. 5.80 in Gl. 5.69 gibt nachfolgende Beziehung Auskunft über den neuen Spannungszustand.

$${}^i \mathbf{S} = {}^i \mathbf{S}^* - \mathbf{D} \Delta^i \lambda \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i,t} \quad (5.83)$$

Das plastische Multiplikatorinkrement $\Delta^i \lambda$ wird durch das Fließkriterium F kontrolliert, das in Einklang mit einem vollständig impliziten Verfahren am Ende des Zeitschritts gelten muß. Festzuhalten bleibt, daß beim impliziten Verfahren der Gradient des plastischen Potentials in Gl. 5.83 eine Funktion des neuen Spannungszustandes ${}^i \mathbf{S}$ selbst ist. Bei einfachen Potentials gelingt es, Gl. 5.83 in eine explizite Bestimmungsgleichung für ${}^i \mathbf{S}$ umzuformen.

Abschließend sei angemerkt, daß der elastoplastische Algorithmus vollständig dehnungskontrolliert ist, d.h. für den vorgegebenen Dehnungszustand ${}^i\epsilon$ wird der neue Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}$ gesucht. Die Aufspaltung der gesamten Dehnungen ${}^i\epsilon$ in elastische ${}^i\epsilon^e$ und plastische ${}^i\epsilon^p$ Anteile wird betragsmäßig durch die Fließbedingung F und richtungsmäßig durch das Fließgesetz geregelt und ist bei der numerischen Berechnung Aufgabe des Spannungsalgorithmus'.

Beim allgemeinen Kontinuum kommt zu den sechs Spannungskomponenten, welche aus Gl. 5.83 bestimmt werden, das plastische Multiplikatorinkrement als siebte Unbekannte hinzu. Zu deren Ermittlung steht die Fließbedingung Gl. 2.44 zur Zeit ${}^i t$ als weitere plastische Bestimmungsgleichung zur Verfügung.

$$F({}^i\mathbf{S}) = f({}^i\mathbf{S}) - Y({}^i\kappa) = 0 \quad (5.84)$$

5.5.2 Lösung der plastischen Gleichungen

Fall I: Die Bestimmungsgleichung Gl. 5.83 für den neuen Spannungszustand ist nach ${}^i\mathbf{S}$ auflösbar.

Für den Fall, daß Gl. 5.83 geschlossen nach ${}^i\mathbf{S}$ umgestellt werden kann, wird sie zusammen mit Gl. 5.81 in die Fließbedingung Gl. 5.84 eingesetzt. Daraus entsteht eine skalare Bestimmungsgleichung zur Berechnung des plastischen Multiplikatorinkrements $\Delta^i\lambda$.

$$F(\Delta^i\lambda) = f(\Delta^i\lambda) - Y(\Delta^i\lambda) = 0 \quad (5.85)$$

Dieses geht dann in Gl. 5.83 zur Ermittlung des neuen Spannungszustands sowie in Gl. 5.80 und Gl. 5.81 zur Berechnung der plastischen Größen ein. Im allgemeinen ist die Beziehung Gl. 5.85 nicht explizit nach $\Delta^i\lambda$ auflösbar, so daß ein iteratives Lösungsverfahren verwendet werden muß. Eigene Erfahrungen zeigen, daß sich aus Gründen einer minimalen Anzahl numerischer Operationen das Standard-Newton-Verfahren zur Lösung dieser skalaren Gleichung anbietet. Aus der Taylorreihenentwicklung der Funktion $F(\Delta^i\lambda) = 0$ um den Punkt $\Delta\lambda^k$

$$F|_{\Delta\lambda^k} + \frac{dF}{d\Delta\lambda}\Big|_{\Delta\lambda^k} (\Delta\lambda^{k+1} - \Delta\lambda^k) + \dots \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.86)$$

wird die Rekursionsformel zur schrittweisen Berechnung des plastischen Multiplikatorinkrements $\Delta^i\lambda$ aufgestellt.

$$\Delta\lambda^{k+1} = \Delta\lambda^k - \frac{F|_{\Delta\lambda^k}}{\frac{dF}{d\Delta\lambda}\Big|_{\Delta\lambda^k}} \quad (5.87)$$

Es wird die Kurzschreibweise

$${}^k(\quad) = (\quad)(\Delta\lambda^k) \quad (5.88)$$

für die von $\Delta\lambda^k$ abhängigen Größen im k -ten Iterationsschritt zur Lösung der plastischen Gleichungen eingeführt. Mit dem Startwert $\Delta\lambda^0 = 0$ wird für die relative Änderung des plastischen Multiplikators $(\Delta\lambda^{k+1} - \Delta\lambda^k)/\Delta\lambda^{k+1}$ schon nach fünf bis sechs Iterationen die Toleranzgrenze von 10^{-4} unterschritten. Die Veränderlichen des letzten Iterationsschritts können dann mit ausreichender Genauigkeit als Zustandsvariable für den Zeitpunkt t übernommen werden.

$$\Delta^i\lambda = \Delta\lambda^{k+1} \quad (5.89)$$

$${}^i\mathbf{S} = {}^{k+1}\mathbf{S} \quad (5.90)$$

$${}^i\mathcal{H} = {}^{k+1}\mathcal{H} \quad (5.91)$$

$${}^i\kappa = {}^{k+1}\kappa \quad (5.92)$$

$$\Delta^i\epsilon^p = \Delta^{k+1}\epsilon^p \quad (5.93)$$

Fall II: Lösung der Bestimmungsgleichung Gl. 5.83 und der Fließbedingung für ${}^i\mathbf{S}$ und $\Delta^i\lambda$ allgemeiner Fließgesetze

Bei komplizierteren plastischen Potentialen ϕ kann Gl. 5.83 oftmals nicht auf eine geschlossene Form für ${}^i\mathbf{S}$ gebracht werden, so daß sie zusammen mit der Fließbedingung Gl. 5.84 zur zahlenmäßigen Ermittlung von ${}^i\mathbf{S}$ und $\Delta^i\lambda$ simultan gelöst werden muß. Das auch hier bevorzugte Standard-Newton-Verfahren erfordert die Ableitung von F nach $\Delta\lambda$.

$$\frac{dF}{d\Delta\lambda} = \frac{\partial F^T}{\partial {}^i\mathbf{S}} \frac{d{}^i\mathbf{S}}{d\Delta\lambda} \quad (5.94)$$

ebenso wie die Differentiation von ${}^i\mathbf{S}$ gemäß Gl. 5.83 nach $\Delta\lambda$:

$$\frac{d{}^i\mathbf{S}}{d\Delta\lambda} = \mathbf{D} \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{t} - \Delta\lambda \mathbf{D} \left. \frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{S} \cdot \partial\mathbf{S}} \right|_{t} \frac{d\mathbf{S}}{d\Delta\lambda} \quad (5.95)$$

$$\frac{d{}^i\mathbf{S}}{d\Delta\lambda} = \left[\mathbf{I} + \Delta\lambda \mathbf{D} \left. \frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{S} \cdot \partial\mathbf{S}} \right|_{t} \right]^{-1} \mathbf{D} \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{t} \quad (5.96)$$

Mit dem Startwert $\Delta\lambda^{k=0} = 0$ ergibt sich dann folgendes Iterationsschema:

1. Berechne

$${}^k\mathbf{S} = {}^i\mathbf{S}^* - \Delta\lambda^k \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{k\mathbf{S}}$$

2. Ermittle

$$F|_{k\mathbf{S}} = F({}^k\mathbf{S}) \neq 0$$

3. Bestimme

$$\left. \frac{d\mathbf{S}}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k} = \left[\mathbf{I} + \Delta\lambda^k \mathbf{D} \left. \frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{S} \cdot \partial\mathbf{S}} \right|_{k\mathbf{S}} \right]^{-1} \mathbf{D} \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{k\mathbf{S}}$$

4. und

$$\left. \frac{\partial F}{\partial\mathbf{S}} \right|_{k\mathbf{S}} = \left. \frac{\partial f}{\partial\mathbf{S}} \right|_{k\mathbf{S}} - \left. \frac{\partial Y}{\partial\mathbf{S}} \right|_{k\mathbf{S}}$$

5. Multipliziere

$$\left. \frac{dF}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k} = \left. \frac{\partial F^T}{\partial\mathbf{S}} \right|_{k\mathbf{S}} \left. \frac{d\mathbf{S}}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k}$$

6. Berechne einen verbesserten $\Delta\lambda$ - Wert mit der Iterationsgleichung

$$\Delta\lambda^{k+1} = \Delta\lambda^k - \frac{F|_{\Delta\lambda^k}}{\left. \frac{dF}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k}}$$

7. Überprüfe die Konvergenz

$$\left| (\Delta\lambda^{k+1} - \Delta\lambda^k) / \Delta\lambda^{k+1} \right| \leq \lambda_{\text{Tot}}$$

Falls ja: Setze $\Delta^i\lambda = \Delta\lambda^{k+1} \longrightarrow$ Ende

Falls nein: Setze $k = k + 1 \longrightarrow$ wiederhole Schritt 1. bis 7.

5.5.3 Wertung des impliziten elastischen Prädiktor-plastischen Korrektorverfahrens

Als Nachteile des oben zusammengefaßten Algorithmus' sind anzusehen:

- Beim dreidimensionalen Kontinuum muß über insgesamt sieben Gleichungen (\mathbf{S} , $\Delta\lambda$) iteriert werden (siehe Fall II).
- Bei Fließflächen ohne C^2 -Stetigkeit können Konvergenzschwierigkeiten auftreten, die sich allerdings mit Hilfe des „Bündelalgorithmus“ /Zowe 1984/ durch das Konzept der Subdifferenziale wieder beseitigen lassen.

Diesen vertretbaren Nachteilen stehen eine Reihe entscheidender Vorteile gegenüber:

- Die Bestimmung des Kontaktspannungszustandes beim Übergang vom elastischen in den elastoplastischen Zustand erübrigt sich.
- Die Aufstellung der D^{ep} -Matrix zur Spannungsintegration entfällt.
- Beliebige große Zeitschritte bedeuten keinen numerischen Mehraufwand, da auf die Subinkrementierung aus Stabilitätsgründen verzichtet werden kann.
- Bei sehr großen Zeitschritten strebt der Inkrementierungsfehler dieses Algorithmus' selbst in Form der Einzschrittmethode gegen Null - siehe Kapitel 7.5.
- Der Algorithmus ist formal einfach, da der Prädiktorschritt ausschließlich elastisch und der anschließende Korrektorschritt ausschließlich plastisch ist. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Aufspaltung des elastoplastischen Operators („operator split“ - siehe /Ortiz 1981/).
- Am Ende der Iteration sind neben den Gleichgewichtsbedingungen auch die Materialbeziehungen (Fließkriterium, Fließregel und Verfestigungsannahme) erfüllt (vollständig impliziter Algorithmus).

5.5.4 Zeitableitung des inkrementellen Evolutionsgesetzes

Nach der zeitlichen Differentiation von Gl. 5.81

$${}^i\dot{\kappa} = \underbrace{{}^n\dot{\kappa}}_{=0} + \Delta^i\dot{\lambda} {}^i\mathcal{H} + \Delta^i\lambda {}^i\dot{\mathcal{H}} \quad (5.97)$$

hängt die Änderung der internen Variablen κ zum Zeitpunkt it direkt von den Spannungsgeschwindigkeiten ${}^i\dot{\mathcal{S}}$ ab.

$${}^i\dot{\kappa} = \Delta^i\dot{\lambda} {}^i\mathcal{H} + \Delta^i\lambda \left. \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathcal{S}} \right|_{{}^it} {}^i\dot{\mathcal{S}} \quad (5.98)$$

Beim Vergleich der infinitesimalen Beziehung nach der Fließtheorie Gl. 2.53 mit der Zeitableitung der diskretisierten internen Variablen ${}^i\kappa$ nach Gl. 5.98

wird ersichtlich, daß ein zusätzlicher Term im zeitlichen Differential der Variablen κ wie in Gl. 2.81 auftritt.

$$\Delta^i \lambda \left. \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i_t} \dot{\mathbf{S}}$$

Damit verbunden ist eine „unsymmetrische Verknüpfungsmatrix“ zwischen den inkrementellen, plastischen Dehnungsänderungen $\Delta^i \epsilon^p$ und den zeitlichen Änderungen des Spannungstensors ${}^i \dot{\mathbf{S}}$ wie nachfolgend gezeigt wird.

5.5.5 Zur Symmetrie der konsistenten Tangentenmoduli

Die Zeitableitung der inkrementierten plastischen Dehnungen Gl. 5.76 lautet:

$$\Delta^i \epsilon^p = \Delta^i \dot{\lambda} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i_t} + \Delta^i \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}} \dot{\mathbf{S}} \quad (5.99)$$

Aus der Zeitableitung der Fließbedingung Gl. 5.84 $\dot{F} = 0$ (Konsistenzbedingung) bestimmt man die Änderung des plastischen Multiplikatorinkrements $\Delta^i \dot{\lambda}$, indem von Gl. 5.98 Gebrauch gemacht wird.

$$\dot{F} = \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i_t} \dot{\mathbf{S}} - \frac{dY}{d\kappa} \dot{\kappa} = 0 \quad (5.100)$$

Unter Heranziehung des zeitlichen Differentials der internen Variable $\dot{\kappa}$ aus Gl. 5.98 kann die Konsistenzbedingung nach $\Delta^i \dot{\lambda}$ aufgelöst werden.

$$\Delta^i \dot{\lambda} = \left. \frac{\frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} - \Delta^i \lambda \frac{dY}{d\kappa} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{S}}}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H}} \right|_{i_t} \dot{\mathbf{S}} \quad (5.101)$$

Mit Hilfe des analog in Gl. 2.68 auftretenden Vorfaktors

$${}^i A := \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i_t} \dot{\mathcal{H}} \quad (5.102)$$

folgt schließlich:

$$\Delta^i \dot{\lambda} = \left[\frac{1}{A} \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} - \frac{\Delta \lambda}{\mathcal{H}} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{S}} \right]_{i_t} \dot{\mathbf{S}} \quad (5.103)$$

Nach Einfügen von Gl. 5.101 in die Zeitableitung des diskretisierten Fließgesetzes Gl. 5.99 ergibt sich:

$$\Delta^i \dot{\epsilon}^p = \left[\frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H}} \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \otimes \left(+ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} - \right. \quad \text{üblicher Anteil vgl. Gl. 2.69} \right. \\ \left. - \underbrace{\Delta \lambda \frac{dY}{d\kappa} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{S}}}_{\text{Verfestigung}} \right)^T + \underbrace{\Delta \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}}}_{\text{Krümmung von } \phi} \right]_{i,t} \dot{\mathbf{S}} \\ \text{zusätzliche Anteile des Algorithmus' (5.104)}$$

Im Vergleich zur infinitesimalen Beziehung Gl. 2.75 kommt in der Zeitableitung der diskretisierten plastischen Dehnungen ein zweiter Summand hinzu (zweite Zeile der obigen Gleichung), in welchen die Hessematrix des plastischen Potentials $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}}$ und der Gradient der Verfestigungsannahme $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{S}}$ eingehen. Die Matrix der „konsistenten Tangentenmoduli“ zwischen den plastischen Dehnungsänderungen $\Delta^i \dot{\epsilon}^p$ und den Spannungsänderungen $\dot{\mathbf{S}}$ wird unter diesen Umständen unsymmetrisch.

Selbst im Fall eines assoziierten Fließgesetzes entsteht eine unsymmetrische Beziehung zwischen den inkrementierten plastischen Dehnungs- $\Delta^i \dot{\epsilon}^p$ und Spannungsänderungen $\dot{\mathbf{S}}$.

$$\Delta^i \dot{\epsilon}^p = \left[\frac{1}{\frac{dY}{d\kappa} \mathcal{H}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \otimes \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} - \Delta \lambda \frac{1}{\mathcal{H}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \otimes \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{S}} + \Delta \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}} \right]_{i,t} \dot{\mathbf{S}} \quad (5.105)$$

Nur bei verschwindendem Multiplikatorinkrement $\Delta^i \lambda \rightarrow 0$ oder bei idealer Elastoplastizität $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{S}} \rightarrow 0$ entfallen die unsymmetrischen Anteile und die Symmetrieeigenschaften werden zurückgewonnen.

Es stellt sich hier die Frage, ob der diskretisierte Spannungs-Dehnungspfad ein Weg maximaler dissipativer Leistung ist. Darüber läßt sich innerhalb eines endlichen Zeitschritts wie bei allen diskretisierenden Verfahren keine Aussage treffen. Für die beste Lösung müßte an die Stelle der Fließregel das Prinzip vom Maximum der inkrementellen dissipativen Arbeit über das betrachtete Zeitinkrement treten. Grundlage hierfür ist das in Abschnitt 2.7 gegebene Prinzip der maximalen dissipativen Leistung, wonach sich die plastischen Dehnungsänderungen so einstellen, daß die Extremalforderung erfüllt ist.

5.6 Gemischte explizite - implizite Verfahren

5.6.1 Semiimplizites Verfahren

Wie in Abschnitt 5.5.5 gezeigt worden ist, resultiert aus dem vollständig impliziten Spannungsalgorithmus eine unsymmetrische Spannungs-Dehnungsbeziehung. Aus der Sicht des numerischen Aufwandes sind unsymmetrische Steifigkeitsmatrizen jedoch unbefriedigend. Es ist daher erstrebenswert, den vollständig impliziten Algorithmus derart abzuändern, daß der Vorteil unbedingter Stabilität des Spannungsmoduls zwar erhalten bleibt, während der Nachteil unsymmetrischer Matrizen gleichzeitig überwunden wird. Unter diesen Voraussetzungen muß im impliziten Integrationsverfahren die zeitliche Diskretisierung der Evolutionsgleichung für die interne Variable κ explizit erfolgen. Zur sprachlichen Abgrenzung wird diese gemischte explizite-implizite Methode als semiimplizites Verfahren bezeichnet.

$${}^i\kappa = {}^n\kappa + \Delta^i\lambda \mathcal{H} \left({}^n\mathbf{S}, \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{n_t} \right) \quad (5.106)$$

Definition der Verfestigungsannahme in expliziter Form zur Zeit ${}^n t$:

$${}^n\mathcal{H} := \mathcal{H} \left({}^n\mathbf{S}, \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{n_t} \right) \quad (5.107)$$

$${}^i\kappa = {}^n\kappa + \Delta^i\lambda {}^n\mathcal{H} \quad (5.108)$$

Die zeitliche Änderung der diskretisierten Variablen κ vereinfacht sich zu:

$${}^i\dot{\kappa} = \Delta\dot{\lambda} {}^n\mathcal{H} \quad (5.109)$$

Die algebraischen Strukturen der beiden Gleichungen nach der Fließtheorie Gl. 2.53 und dem semiimpliziten Algorithmus Gl. 5.109 sind ähnlich. Beim Vergleich der Zeitableitung der internen Variable für die implizite Methode Gl. 5.98 mit derjenigen für die semiimplizite zeitliche Diskretisierung wird augenscheinlich, daß im letzteren Fall die Spannungsänderungen ${}^i\dot{\mathbf{S}}$ ohne Einfluß sind und nur noch die Zeitableitung des plastischen Multiplikatorinkrements verbleibt. In die zeitliche Änderung der internen Variablen geht die Verfestigungsannahme ${}^n\mathcal{H}$ nach Gl. 5.107 als fester Parameter ein, der vom aktuellen Zeitschritt $\Delta^i t$ unabhängig ist. Im Bild 5.22 stellt die fest vorgegebene Verfestigungsfunktion ${}^n\mathcal{H}$ zur Zeit ${}^n t$ das Steigungsmaß des Graphen dar.

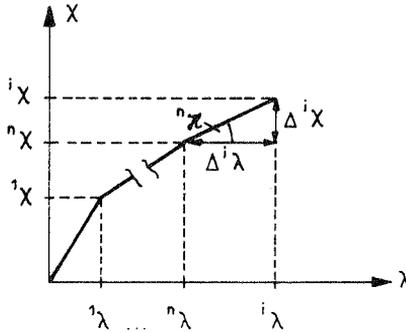


Bild 5.22 : Interne Variable ${}^i\kappa$ als linear abhängige Größe des plastischen Multiplikatorinkrements $\Delta^i\lambda$ innerhalb eines Zeitschritts.

Die Konsistenzbedingung führt auf die Zeitableitung des plastischen Multiplikators, wobei anstelle von Gl. 5.98 nun Gl. 5.109 eingefügt wird.

$$\Delta^i\dot{\lambda} = \frac{1}{\left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i_t} {}^n\mathcal{H}} \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i_t} \dot{\mathbf{S}} \quad (5.110)$$

und

$${}^i_A := \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i_t} {}^n\mathcal{H} \quad (5.111)$$

Die zeitliche Änderung des plastischen Dehnungsinkrements Gl. 5.99 ist damit:

$$\Delta^i\dot{\epsilon}^P = \left[\frac{1}{\left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i_t} {}^n\mathcal{H}} \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i_t} \otimes \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i_t} + \Delta^i\lambda \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}} \right] \dot{\mathbf{S}} \quad (5.112)$$

Bei assoziierten Fließgesetzen ($\phi = f$) wird die erwünschte Symmetrie in der Matrix der „konsistenten Tangentenmoduli“ des Spannungsalgorithmus’ zwischen den plastischen Dehnungs- und Spannungsraten offensichtlich. Neben dieser vorallem rechentechnisch vorteilhaften Eigenschaft ist die unbedingte Stabilität des Spannungsalgorithmus’ weiterhin gewährleistet.

5.6.2 Semiexplizites Verfahren

Bei algebraisch aufwendigen Fließbedingungen - vor allem, wenn sie transzendente Funktionen der dritten Invariante des Spannungstensors sind - oder

bei nicht glatten Funktionen (fehlende C^1 -Stetigkeit) zur Beschreibung des Versagenskriteriums ist es schwierig, wenn nicht sogar unmöglich, die Hessematrix der Fließbedingung zu finden. In diesen Fällen bietet sich ein semiexplizites Verfahren an. Darunter wird in diesem Zusammenhang verstanden, daß sowohl der Gradient in der Fließregel nach Gl. 5.76 als auch die Verfestigungsfunktion \mathcal{H} nach Gl. 5.107 am Anfang des Zeitinkrements zum Zeitpunkt ${}^n t$ ermittelt werden.

$$\Delta^i \epsilon^p = \Delta^i \lambda \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \quad (5.113)$$

$${}^i \boldsymbol{\kappa} = {}^n \boldsymbol{\kappa} + \Delta^i \lambda {}^n \boldsymbol{\kappa} \quad (5.114)$$

Die Fließbedingung soll dagegen weiterhin am Ende des Zeitinkrements erfüllt sein. Wie sich schon anschaulich zeigen läßt, geht die unbedingte Stabilität des Algorithmus' verloren (Bild 5.23). Da die Abstiegsrichtung

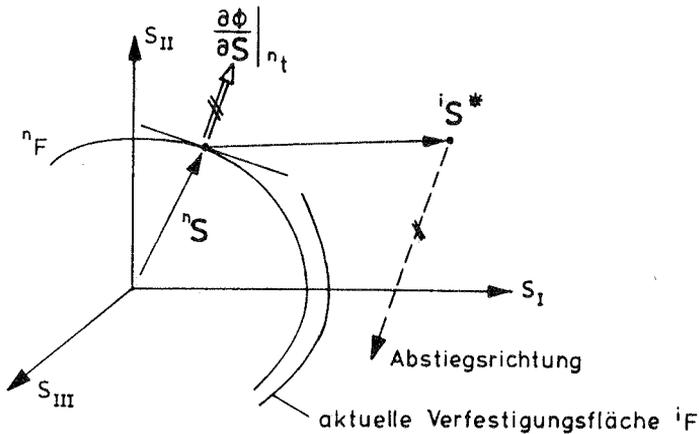


Bild 5.23 : Semiexpliziter Algorithmus für assoziierte Plastizität.

in Bild 5.23 durch den Gradienten $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t}$ vorgegeben ist, gibt es elastische Prädiktorzustände ${}^i \mathbf{S}^*$, für welche kein neuer Spannungszustand ${}^i \mathbf{S}$ gefunden werden kann.

Die zu Gl. 5.78 entsprechende Beziehung des semiexpliziten Spannungsalgorithmus' liegt bis auf das noch zu bestimmende plastische Multiplikatorinkrement in bereits geschlossener Form vor.

$${}^i \mathbf{S} = {}^i \mathbf{S}^* - \mathbf{D} \Delta^i \lambda \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \quad (5.115)$$

Die bislang unbekannte Größe $\Delta^i \lambda$ geht aus der Fließbedingung F hervor, welche gegebenenfalls wiederum iterativ zu lösen ist.

$$F = f({}^i \mathbf{S}(\Delta^i \lambda)) - Y({}^i \mathbf{S}(\Delta^i \lambda)) = 0 \quad (5.116)$$

Anmerkungen zu den plastischen Dehnungsänderungen

Die Zeitableitung des plastischen Dehnungsinkrements $\Delta^i \epsilon^p$ nach Gl. 5.113 zur Linearisierung des Spannungsalgorithmus' erinnert an die infinitesimale Fließregel,

$$\Delta^i \epsilon^p = \Delta^i \lambda \left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \quad (5.117)$$

da $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} = \text{konstant}$ im Intervall von ${}^n t$ nach ${}^i t$ ist.

Bei Änderung des Prädiktors ${}^i \mathbf{S}^*$ variiert lediglich das plastische Multiplikatorinkrement $\Delta^i \lambda$; die Abstiegsrichtung auf die Verfestigungsfläche bleibt davon unbeeinträchtigt - siehe Bild 5.24.

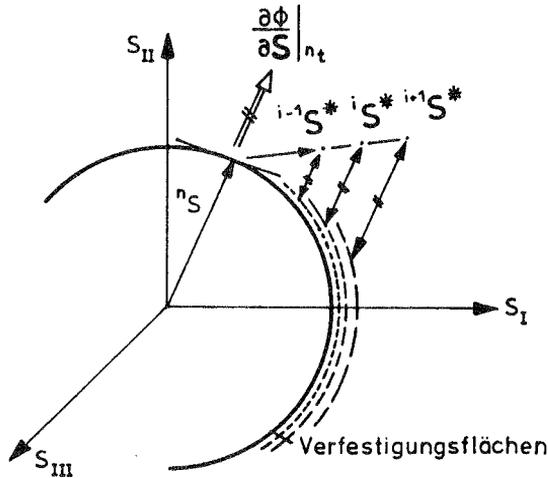


Bild 5.24 : Änderung der Größe $\Delta^i \lambda$ als Maß für den Abstand des Spannungsprädiktors zur Verfestigungsfläche

Aus der Zeitableitung der Fließbedingung Gl. 5.116 zum Zeitpunkt αt

$$\dot{F} = \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\alpha t} \cdot {}^i \dot{\mathbf{S}} - \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{\alpha t} \cdot {}^i \dot{\kappa} = 0 \quad (5.118)$$

errechnet sich $\Delta^i \dot{\lambda}$, nachdem vom Differential der internen Variablen κ gemäß Gl. 5.114 Gebrauch gemacht worden ist.

$${}^i \dot{\kappa} = \Delta^i \dot{\lambda} {}^n \mathcal{H} \quad (5.119)$$

$$\Rightarrow \Delta^i \dot{\lambda} = \frac{1}{\left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{\alpha_t}} {}^n \mathcal{H} \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\alpha_t} {}^i \dot{\mathbf{S}} \quad (5.120)$$

Definition

$${}^\alpha A := \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{\alpha_t} {}^n \mathcal{H} \quad (5.121)$$

und Substitution von Gl. 5.120, und Gl. 5.121 in Gl. 5.113:

$$\Delta^i \dot{\epsilon}^p = \frac{1}{{}^\alpha A} \left[\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \otimes \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\alpha_t} \right] {}^i \dot{\mathbf{S}} \quad (5.122)$$

Damit die inkrementellen Verzerrungsgeschwindigkeiten $\Delta^i \dot{\epsilon}^p$ assoziierter Fließgesetze mit einer symmetrischen Matrix aus den Spannungsraten ${}^i \dot{\mathbf{S}}$ abgebildet werden Gl. 5.122, muß in der Konsistenzbedingung nach Gl. 5.118 der Gradient an die Fließfläche ebenfalls zum Zeitpunkt ${}^n t$ aufgestellt werden.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\alpha_t = n_t}$$

Aus Gründen der numerischen Effizienz ist zu fordern, daß sowohl die

- Fließbedingung $F = 0$ zur Zeit ${}^n t$

als auch die

- Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ zur Zeit ${}^n t$

erfüllt sein müssen.

$$\Delta^i \dot{\epsilon}^p = \frac{1}{{}^n A} \left[\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \otimes \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \right] {}^i \dot{\mathbf{S}} \quad (5.123)$$

Zur Verträglichkeit der Konsistenz- und Fließbedingung

Der Gradient $\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \right|_{\alpha_t = n_t}$ zur Wahrung der Symmetrie zwischen den Änderungen des plastischen Verzerrungssinkrements und den Spannungsraten gemäß Gl. 5.122 entstammt der Konsistenzbedingung. Folgerichtig muß diese dann lauten:

$$\dot{F} = \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \dot{\mathbf{S}} - \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{n_t} {}^n\mathcal{H} \Delta^i \lambda = 0 \quad (5.124)$$

Durch Zeitintegration der Konsistenzbedingung erhält man das zugehörige Fließkriterium bis auf eine noch zu bestimmende Integrationskonstante c .

$${}^i\mathcal{F} := \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \mathbf{S} - \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{n_t} {}^n\mathcal{H} \Delta^i \lambda - c = 0 \quad (5.125)$$

Es wird gefordert:

$${}^i\mathcal{F} \stackrel{!}{=} {}^nF \quad \text{für} \quad {}^i t \rightarrow {}^n t$$

Dann folgt im Grenzfall

$$\Delta^i \lambda \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{S} \rightarrow {}^n\mathbf{S}$$

aus dem Fließkriterium,

$${}^i\mathcal{F} = \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} {}^n\mathbf{S} - \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{n_t} {}^n\mathcal{H} \cdot 0 - c \stackrel{!}{=} {}^nF = {}^n f - {}^n Y \quad (5.126)$$

daß die Integrationskonstante c den Wert

$$c = {}^n Y \quad (5.127)$$

annehmen muß, um obige Forderung zu befriedigen. Das zur vorangehenden Konsistenzbedingung verträgliche Fließkriterium ergibt sich zu:

$${}^i\mathcal{F} = \left. \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} \mathbf{S} - \left[{}^n Y + \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{n_t} {}^n\mathcal{H} \Delta^i \lambda \right] = 0 \quad (5.128)$$

Durch die Gleichung für ${}^i\mathcal{F}$ wird die Tangentialebene an die eigentliche Verfestigungsfläche F beschrieben, denn die Funktion ${}^i\mathcal{F}$ repräsentiert die Linearisierung des Fließkriteriums F zum Zeitpunkt ${}^n t$. In dieser Gestalt wird die Fließbedingung auch im Rahmen der expliziten Integrationsverfahren verwendet.

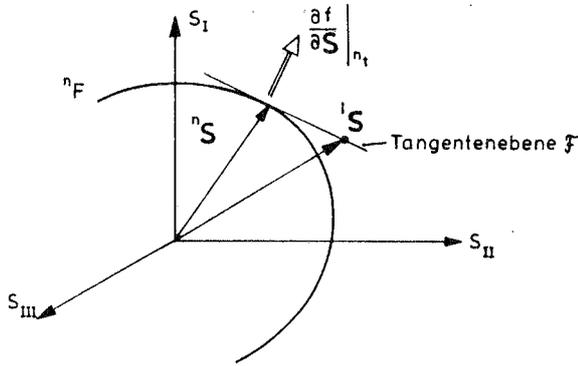


Bild 5.25 : Tangentialebene \mathcal{F} im Punkt ${}^n\mathbf{S}$ an die Fließfläche F

Die Aufgabe des Hesse-Normalenvektors $\vec{\mathbf{h}}$ zur Beschreibung der Ebene \mathcal{F} übernimmt der Gradient $\left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \right|_{n_t} =: \vec{\mathbf{h}}$, während der Abstand d der Ebene zum Ursprung im Spannungsraum durch den Term

$$d = \left[{}^nY + \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{n_t} {}^n\mathcal{H} \Delta^i\lambda \right]$$

geregelt wird. Damit die Konsistenz- und Fließbedingung verträglich zueinander sind, muß \mathcal{F} an Stelle von F zur Berechnung von $\Delta^i\lambda$ verwendet werden. Am Ende des Zeitschritts ist demzufolge die mit \mathcal{F} bezeichnete Bedingungsgleichung und nicht das eigentliche Fließkriterium F erfüllt. Die bereits von den klassischen Verfahren bekannte Problematik wird wieder aufgeworfen, wonach eine Korrektur des Spannungszustandes auf die Fließfläche F notwendig wird.

5.7 Anwendung des elastischen Prädiktor - plastischen Korrektorverfahrens auf die J_2 -Fließtheorie

5.7.1 Grundgleichungen für die implizite Methode

Am Beispiel der assoziierten Fließtheorie nach von Mises mit Verfestigung wird das Vorgehen demonstriert. Zum Zeitpunkt t lautet Gl. 5.15:

$$f = \frac{1}{2} {}^i\mathbf{S}^T \mathbf{P} {}^i\mathbf{S} \quad (5.129)$$

$$Y = \frac{1}{3} {}^i\bar{S}^2 \quad \text{und} \quad {}^i\bar{S} = \bar{S}({}^i\kappa) \quad (5.130)$$

$$\phi \stackrel{!}{=} F = f - Y = 0 \quad (5.131)$$

Anhand des impliziten Gradienten

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \right|_{i,t} = \mathbf{P} \mathbf{S} |_{i,t} \quad (5.132)$$

kann das plastische Dehnungsinkrement in Gl. 5.80 durch die Beziehung

$$\Delta {}^i\epsilon^p = \Delta {}^i\lambda \mathbf{P} {}^i\mathbf{S} \quad (5.133)$$

und der Spannungszustand nach Gl. 5.83 durch die Formel

$${}^i\mathbf{S} = {}^i\mathbf{S}^* - \Delta {}^i\lambda \mathbf{D} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S} \quad (5.134)$$

ausgedrückt werden. Im plastischen Multiplikatorinkrement ist dem Einfluß des isotropen Verfestigungsverhaltens bereits Rechnung getragen; siehe Abschnitt 5.7.6. Die Aussage unter Gl. 5.134 kann im Fall der von Mises-Fließtheorie nach ${}^i\mathbf{S}$ umgestellt werden.

$$\left(\mathbf{I} + \Delta {}^i\lambda \mathbf{D} \mathbf{P} \right) {}^i\mathbf{S} = {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.135)$$

Unter der Annahme von linear elastischem Material (sogenanntes "Kappussches Werkstoffgesetz") ist die rechte Gleichungsseite dem elastischen Dehnungsprädiktor nach Gl. 5.64 oder Gl. 5.65 äquivalent.

$${}^i\epsilon^* = \mathbf{D}^{-1} {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.136)$$

Aus Gl. 5.135 geht schließlich die Berechnungsformel für die endgültigen Spannungen ${}^i\mathbf{S}$ in Abhängigkeit des Dehnungsprädiktors ${}^i\epsilon^*$ hervor.

$$\left(\mathbf{D}^{-1} + \Delta {}^i\lambda \mathbf{P} \right) {}^i\mathbf{S} = {}^i\epsilon^* \quad (5.137)$$

Zur geschlossenen Auflösung von Gl. 5.135 bzw. Gl. 5.137 nach ${}^i\mathbf{S}$ müssen die Matrizenanteile

$$\mathbf{I} + \Delta^i \lambda \mathbf{D} \mathbf{P} \quad (5.138)$$

und

$$\mathbf{D}^{-1} + \Delta^i \lambda \mathbf{P} \quad (5.139)$$

invertiert werden. Um die rechenintensive numerische Inversion nach Möglichkeit zu vermeiden, wird ein geschlossener Ausdruck für die Inverse dieser Matrizen angestrebt. Dazu wird von der spektralen Zerlegung der Matrizen \mathbf{D} und \mathbf{P} Gebrauch gemacht, denn \mathbf{D} besitzt bei isotropem elastischem Stoffgesetz dieselbe orthogonale Transformationsmatrix \mathbf{Q} wie die Matrix \mathbf{P} . Dieser algebraische Umstand wurde bereits in /Simo 1986/ am ebenen Spannungszustand ausgenutzt.

5.7.2 Spektralzerlegung der Matrizen \mathbf{P} und \mathbf{D} des allgemeinen dreidimensionalen Kontinuums

A) Zerlegung der Matrix \mathbf{P}

Die Spektralzerlegung der Matrix \mathbf{P} wird über die Lösung des speziellen Eigenwertproblems

$$\mathbf{P} \bar{\mathbf{n}} = \gamma \bar{\mathbf{n}} \quad (5.140)$$

angegangen, worin die Größe γ für die Eigenwerte und das Symbol $\bar{\mathbf{n}}$ für die orthogonormierten Eigenvektoren stehen. Aus der Forderung, daß die Determinante

$$\text{Det} |\mathbf{P} - \gamma \mathbf{I}| = 0 \quad (5.141)$$

verschwinden muß, liefert das zugehörige charakteristische Polynom die Eigenwerte γ_1 bis γ_6 , welche zur Matrix der Eigenwerte Λ_P zusammengefaßt werden:

$$\Lambda_P = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{vmatrix} \quad (5.142)$$

Die Eigenvektoren $\bar{\mathbf{n}}^1$ bis $\bar{\mathbf{n}}^6$ ergeben sich aus den Eigenwerten. Aus $\gamma_3 = 0$ und Gl. 5.140 folgt der Eigenvektor $\bar{\mathbf{n}}^3$, der an den hydrostatischen Anteil eines Tensors zweiter Stufe erinnert.

$$\bar{\mathbf{n}}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T \quad (5.143)$$

Die Gleichung 5.140 liefert für $\gamma_1 = 1$ die vier Bestimmungsgleichungen:

$$n_1^1 + n_2^1 + n_3^1 = 0 \quad (5.144)$$

$$\text{und } n_4^1 = n_5^1 = n_6^1 = 0 \quad (5.145)$$

Analoges gilt für $\gamma_2 = 1$:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 0 \quad (5.146)$$

$$\text{und } n_4^2 = n_5^2 = n_6^2 = 0 \quad (5.147)$$

Wegen der zusammenfallenden ersten und zweiten Eigenwerte $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ muß als weitere Orthogonalitätsbedingung zusätzlich gefordert werden:

$$\vec{n}^1 \top \vec{n}^2 = 0 \quad (5.148)$$

$$\text{in Komponentenform } n_1^1 \cdot n_1^2 + n_2^1 \cdot n_2^2 + n_3^1 \cdot n_3^2 = 0 \quad (5.149)$$

Zur Bestimmung der sechs unbekanntenen Komponenten in den drei Gleichungen Gl. 5.144, Gl. 5.146 und Gl. 5.149 stehen zwei weitere Normierungsbedingungen zur Verfügung.

$$\|\vec{n}^1\| = 1 \quad \text{und} \quad \|\vec{n}^2\| = 1$$

Eine der sechs Komponenten kann noch frei gewählt werden, d.h. entweder die Richtung des Eigenvektors \vec{n}^1 oder jene des Vektors \vec{n}^2 ist aus unendlich vielen Lagen in der „Hyperebene“ senkrecht zum Eigenvektor \vec{n}^3 auswählbar. Dieser Sachverhalt wird an einem vereinfachten Modell erläutert, da die ersten drei Eigenwerte von den letzten drei entkoppelt sind. Es genügt daher, das Grundsätzliche bei der Richtungsbestimmung der ersten beiden Eigenvektoren im dreidimensionalen Raum (mit den Basen $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ zu betrachten - siehe Bild 5.26. Folgende Vereinbarungen werden getroffen:

$$\vec{n}^1 \mapsto \hat{n}^1 = [n_1^1, n_2^1, n_3^1]^T$$

$$\vec{n}^2 \mapsto \hat{n}^2 = [n_1^2, n_2^2, n_3^2]^T$$

$$\vec{n}^3 \mapsto \hat{n}^3 = [n_1^3, n_2^3, n_3^3]^T$$

Im Hinblick auf das im Teil 7 diskutierte Degenerationskonzept zur Analyse dünnwandiger Flächentragwerke wird geschickterweise der Eigenvektor \hat{n}^2 in die von den Einheitsvektoren \hat{e}_1 und \hat{e}_2 aufgespannte Koordinatenebene gelegt. Darin ist der Vektor \hat{n}^3 parallel zum Einheitsvektor \hat{e}_3 , der in

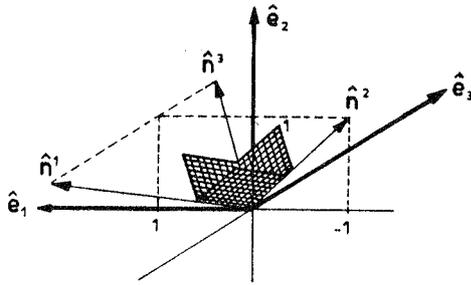


Bild 5.26 : Darstellung der Vektoren \hat{n}^i im dreidimensionalen kartesischen System \hat{e}_i

die Normalenrichtung N der Schale zeigt - siehe Kapitel 7.1. Die Forderung: „ \hat{n}^2 soll in der \hat{e}_1 - \hat{e}_2 -Ebene liegen“ ist äquivalent mit der Aussage: „Die Komponente n_3^2 in Richtung der \hat{e}_3 -Achse muß verschwinden“.

$$n_3^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad (5.150)$$

Zusammen mit den Bedingungsgleichungen Gl. 5.149 und Gl. 5.150 ergeben die Beziehungen Gl. 5.144 und Gl. 5.145 die drei Eigenvektoren:

$$\hat{n}_1 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \quad \hat{n}_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \hat{n}_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \quad (5.151)$$

Die orthonormierten Eigenvektoren \hat{n}^1 bis \hat{n}^6 werden als Zeilenvektoren in der Matrix \mathbf{Q}^T abgespeichert.

$$\mathbf{Q}^T = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \quad (5.152)$$

Damit ist die Spektralzerlegung der Matrix \mathbf{P} vollständig.

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \Lambda_P \mathbf{Q}^T \quad (5.153)$$

B) Spektralzerlegung der Matrix des isotropen Elastizitätstensors

Es soll gelten:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q} \Lambda_D \mathbf{Q}^T \quad (5.154)$$

Um für den elastischen konstitutiven Tensor \mathbf{D} dieselben orthonormalen Transformationsmatrizen \mathbf{Q} wie für \mathbf{P} zu bekommen, wird die Matrix der Eigenwerte Λ_D gesucht, welche die Gleichung

$$\Lambda_D = \mathbf{Q}^T \mathbf{D} \mathbf{Q} \quad (5.155)$$

befriedigt. Die Matrix der Eigenwerte lautet demzufolge:

$$\Lambda_D = \frac{E}{1+\nu} \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \frac{1+\nu}{1-2\nu} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (5.156)$$

und deren Inverse:

$$\Lambda_D^{-1} = \frac{1+\nu}{E} \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \frac{1-2\nu}{1+\nu} & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{vmatrix} \quad (5.157)$$

Im weiteren wird noch von der Identität

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathbf{Q} \Lambda_D^{-1} \mathbf{Q}^T \quad (5.158)$$

Gebrauch gemacht.

C) Zerlegung des konstitutiven, linear elastischen Tensors in Kompressions- und Schubanteil

Mit der gefundenen Spektralzerlegung kann der elastische konstitutive Tensor in einen dilatatorischen und einen deviatorischen Anteil aufgespalten werden. Im Fall kleiner Verzerrungen ist diese Aufteilung additiver Natur. Gerade bei der von Mises-Fließtheorie erweist sich die Abtrennung des Kompressionsanteils als sehr aufschlußreich.

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q} \left[\Lambda_D^{comp} + \Lambda_D^{devia} \right] \mathbf{Q}^T \quad (5.159)$$

Komponentendarstellung:

$$\Lambda_D^{comp} = \frac{E}{1-2\nu} \begin{vmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} \quad (5.160)$$

$$\Lambda_D^{devia} = \frac{E}{1+\nu} \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (5.161)$$

Ausmultiplizieren in Gl. 5.159:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{3(1-2\nu)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{vmatrix} + \frac{E}{1+\nu} \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & & \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (5.162)$$

In Anlehnung an die geometrisch lineare Elastizitätstheorie werden formal der Kompressions- und Schubmodul K bzw. G definiert, welche in der geometrisch nichtlinearen Theorie jedoch nicht mehr ihre eigentliche physikalische Bedeutung haben. Die Kompressibilität ist dann mit Hilfe der Determinante des Deformationsgradienten zu ermitteln, dessen linearisierter Teil proportional zur Divergenz des Verschiebungsfeldes ist.

$$\text{Kompressionsmodul} \quad K := \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (5.163)$$

$$\text{Schubmodul} \quad 2G := \frac{E}{1+\nu} \quad (5.164)$$

$$\mathbf{11} := \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (5.165)$$

Mit Gl. 5.9 und Gl. 5.10 geht Gl. 5.159 über in:

$$\mathbf{D} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T + 2G \left[\mathbf{11} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T \right] \quad (5.166)$$

$$\mathbf{D} = 3K \overset{K}{\mathbf{P}} + 2G \left[\mathbf{11} - \overset{K}{\mathbf{P}} \right] \quad (5.167)$$

Anmerkung:

Die Matrix $\mathbf{11}$ entsteht nach demselben Bildungsgesetz, mit dem von der Indeschreibweise des konstitutiven Tensors vierter Stufe auf die Matrizen-schreibweise umgestiegen wird. Die Komponenten des vierstufigen Tensors

$$11_{IJKL} = \frac{1}{2}(\delta_{IK} \delta_{JL} + \delta_{IL} \delta_{JK}) \quad (5.168)$$

werden wie schon im Kapitel 5.1 gezeigt in ein quadratisches Zahlenschema $\mathbf{11}$ mit 6x6 Elementen eingeordnet.

5.7.3 Geschlossene Lösung des Spannungsalgorithmus'

Setzt man Gl. 5.153 und Gl. 5.154 in Gl. 5.135 und Gl. 5.137 ein, dann nehmen die grundlegenden Formeln zur Neuberechnung des Spannungszustandes ${}^i\mathbf{S}$ die Gestalt:

$${}^i\mathbf{S} = \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \Delta^i \lambda \Lambda_D \Lambda_P)^{-1} \mathbf{Q}^T {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.169)$$

$$\text{bzw. } {}^i\mathbf{S} = \mathbf{Q} (\Lambda_P^{-1} + \Delta^i \lambda \Lambda_P)^{-1} \mathbf{Q}^T {}^i\boldsymbol{\epsilon}^* \quad (5.170)$$

an. Die beiden Matrizerterme

$$\mathbf{I} + \Delta^i \lambda \Lambda_D \Lambda_P \quad (5.171)$$

$$\text{und } \Lambda_D^{-1} + \Delta^i \lambda \Lambda_P \quad (5.172)$$

stellen Diagonalmatrizen dar, deren Inversen aus dem Kehrwert der Hauptdiagonalglieder direkt gebildet werden können. Mit der Definition

$$\mathbf{H} := \mathbf{D}^{-1} + \Delta^i \lambda \mathbf{P} \quad (5.173)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{H} = \mathbf{Q} (\Lambda_D^{-1} + \Delta^i \lambda \Lambda_P) \mathbf{Q}^T \quad (5.174)$$

kann die Kurzform zur Berechnung des neuen Spannungszustandes ${}^i\mathbf{S}$ aus dem Prädiktor

$${}^i\mathbf{S} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^{-1} {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.175)$$

$$\text{bzw. } {}^i\mathbf{S} = \mathbf{H}^{-1} {}^i\boldsymbol{\epsilon}^* \quad (5.176)$$

mit den dazugehörigen inversen Matrizen in Normalkoordinaten angegeben werden.

$$\mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^{-1} \equiv (\mathbf{I} + \Delta^i \lambda \mathbf{D} \mathbf{P})^{-1} \mathbf{D}^{-1} \equiv \mathbf{Q} (\mathbf{I} + \Delta^i \lambda \Lambda_D \Lambda_P)^{-1} \mathbf{Q}^T \quad (5.177)$$

$$\mathbf{H}^{-1} \equiv (\mathbf{D}^{-1} + \Delta^i \lambda \mathbf{P})^{-1} \equiv \mathbf{Q} (\Lambda_D^{-1} + \Delta^i \lambda \Lambda_P)^{-1} \mathbf{Q}^T \quad (5.178)$$

A) Darstellung des Matrixausdrucks nach Gl. 5.177
In Komponentenform:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^{-1} = & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{1 + \frac{\Delta^i \lambda E}{1 + \nu}} \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad (5.179) \\ \mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^{-1} = & \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ & & 0 \\ & & 0 \\ & & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad (5.180) \end{aligned}$$

In symbolischer Schreibweise ergibt sich mit Gl. 5.9 und Gl. 5.10:

$$\mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T + \frac{1}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \left[\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T \right] \quad (5.181)$$

$$\mathbf{H}^{-1} \mathbf{D}^{-1} = \overset{\mathbf{K}}{\mathbf{P}} + \frac{1}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \overset{\mathbf{D}}{\mathbf{P}} \quad (5.182)$$

B) Darstellung des Matrizenausdrucks nach Gl. 5.178

In Komponentenform:

$$\mathbf{H}^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & & \\ & E & \\ & & 1-2\nu \end{vmatrix} + \frac{1}{\frac{1+\nu}{E} + \Delta^i \lambda} \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} \quad (5.183)$$

$$\mathbf{H}^{-1} = 3K \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & & & 0 \\ & & & & 0 \end{vmatrix} + \frac{2G}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & & \frac{1}{2} \\ & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (5.184)$$

In symbolischer Schreibweise mit Gl. 5.9 und Gl. 5.165:

$$\mathbf{H}^{-1} = K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T + \frac{2G}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \left[\mathbf{11} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T \right] \quad (5.185)$$

$$\mathbf{H}^{-1} = 3K \overset{K}{\mathbf{P}} + \frac{2G}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \left[\mathbf{11} - \overset{K}{\mathbf{P}} \right] \quad (5.186)$$

Nach Einfügen der Gleichungen Gl. 5.182 und Gl. 5.186 in Gl. 5.175 bzw. Gl. 5.176 wird offensichtlich, daß der Kompressionsanteil im Spannungsalgorithmus vom Fließen des Materials unbeeinflusst bleibt.

$${}^i \mathbf{S} = \left[\overset{K}{\mathbf{P}} + \frac{1}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \overset{D}{\mathbf{P}} \right] {}^i \mathbf{S}^* \quad (5.187)$$

sowie

$${}^i \mathbf{S} = \left[3K \overset{K}{\mathbf{P}} + \frac{2G}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \left(\mathbf{11} - \overset{K}{\mathbf{P}} \right) \right] {}^i \boldsymbol{\epsilon}^* \quad (5.188)$$

Der elastoplastische Algorithmus nach Gl. 5.188 unterscheidet sich nur durch den Vorfaktor des deviatorischen Anteils vom isotropen, linear elastischen Stoffgesetz Gl. 5.167. Im Unterschied zum elastoplastischen Werkstofftensor des ratenabhängigen Gesetzes der Fließtheorie sind die Normalspannungskomponenten im Algorithmus weiterhin von den Schubverzerrungen entkoppelt. Gleiches trifft auch auf die Schubspannungs- und Längsdehnungskomponenten zu, was in Gl. 5.192 des nächsten Abschnitts offenbar wird.

5.7.4 Spektrale Zerlegung des elastoplastischen Tensors

Auch im Hinblick auf die in Kapitel 7.8 ausführlich behandelten degenerierten Kontinua wird an dieser Stelle schon auf die Spektralzerlegung des elastoplastischen Deformationsgesetzes der Fließtheorie eingegangen, welches in den orthonormalen Koordinaten wie in Gl. 5.152 für Dehnungen $\mathbf{Q}^T \dot{\epsilon}$ und Spannungen $\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{S}}$ definiert wird. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß die Kompressibilitätsbeziehung zwischen hydrostatischem Druck und Dilatation von den deviatorischen Gleichungen entkoppelt ist. Erwartungsgemäß zeigt sich, daß die Plastizität im Fall der von Mises-Fließtheorie keinen Einfluß auf die Kompressionsbeziehung der konstitutiven Gleichungen hat.

Das elastoplastische Deformationsgesetz der J_2 -Fließtheorie entsprechend Gl. 2.76 und Gl. 5.132:

$$\dot{\epsilon} = \left[\mathbf{D}^{-1} + \frac{1}{A} \mathbf{P} \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^T \mathbf{P} \right] \dot{\mathbf{S}} \quad (5.189)$$

wird mit Hilfe der Gleichungen Gl. 5.153 und Gl. 5.158 spektral zerlegt.

$$\dot{\epsilon} = \mathbf{Q} \left[\mathbf{A}_D^{-1} + \frac{1}{A} \mathbf{A}_P \mathbf{Q}^T \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_P \right] \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{S}} \quad (5.190)$$

Im Basensystem gemäß Bild 5.26 kann nachgewiesen werden, daß das Matrizenprodukt

$$\mathbf{II} := \mathbf{A}_P \mathbf{Q}^T \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_P \quad (5.191)$$

eine Matrix \mathbf{II} ergibt, deren Elemente in der dritten Spalte und dritten Zeile sich zu null ergeben (Elemente ungleich null sind durch „x“ gekennzeichnet).

$$\mathbf{II} = \begin{vmatrix} x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \end{vmatrix} \quad (5.192)$$

Nach Vormultiplikation mit \mathbf{Q}^T hat Gl. 5.190 folgende Komponentendarstellung:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \nu \\ E \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \frac{1-2\nu}{1+\nu} & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{vmatrix} + \\
 + \frac{1}{A} \begin{bmatrix} x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{vmatrix} \quad (5.193)$$

Auffallend ist, daß die Kompressibilitätsgleichung (repräsentiert durch Zeile drei in Gl. 5.193) unabhängig von den plastischen Beziehungen ist, was für das assoziierte Fließgesetz nach von Mises als Charakteristikum bereits angedeutet wurde. Die dritte Gleichungszeile wird in Kapitel 7.3 zur Reduktion der ersten Zeile verwendet, um bei der Degeneration in $\hat{\mathbf{e}}_3$ -Richtung die abhängig gewordene Dehnungskomponente $\hat{\epsilon}_{33}$ zu eliminieren.

5.7.5 Ermittlung des plastischen Multiplikatorinkrements

Mit Hilfe von Gl. 5.169 wird der aktuelle Spannungszustand durch den elastischen Spannungsprädiktor in der Fließbedingung Gl. 5.131 ersetzt, so daß eine Bestimmungsgleichung für das noch unbekannte plastische Multiplikatorinkrement entsteht.

$$F = \frac{1}{2} {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{Q} \left(\mathbf{I} + \Delta^i \lambda \mathbf{A}_D \mathbf{A}_P \right)^{-2} \mathbf{A}_P \mathbf{Q}^T {}^i\mathbf{S}^* - \frac{1}{3} {}^i\bar{S}^2 = 0 \quad (5.194)$$

Unter Zuhilfenahme der Matrixausdrücke in Gl. 5.142, Gl. 5.152 und Gl. 5.156 läßt sich diese Beziehung vereinfachen.

$$F = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \Delta^i \lambda 2G)^2} {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^* - \frac{1}{3} {}^i\bar{S}^2 = 0 \quad (5.195)$$

Gl. 5.195 kann problemlos bewiesen werden, wenn zuerst der in Klammern stehende Ausdruck in Gl. 5.194 invertiert und danach ausmultipliziert wird. Die neben dem plastischen Multiplikatorinkrement noch nicht näher festgelegte Größe ist die einaxiale Fließspannung ${}^i\bar{S}$, welche i.a. ebenfalls eine Funktion des plastischen Multiplikators $\Delta^i\lambda$ ist.

5.7.6 Spezifikation gängiger Verfestigungsfunktionen

A) Ideal elastoplastisches Material

Bei Vorliegen von ideal elastoplastischem Material mit unveränderlicher Fließgrenze $\bar{S}_0 := \bar{S}(\kappa) = \textit{konstant}$ läßt sich Gl. 5.195 geschlossen nach dem plastischen Multiplikatorinkrement auflösen.

$$\Delta^i\lambda = \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{\bar{S}_0} \sqrt{\frac{3}{2} {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^*} - 1 \right) \quad (5.196)$$

Dieses Ergebnis wurde bereits von Wilkins in /Wilkins 1964/ und Krieg in /Krieg 1977/ auf anschaulichem Weg gefunden; siehe Bild 5.17.

$$\text{Definition} \quad r_0 := \frac{1}{\bar{S}_0} \sqrt{\frac{3}{2} {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^*} \quad (5.197)$$

Wegen der Äquivalenz der beiden Aussagen

$$r_0 > 1 \quad \text{und} \quad F({}^i\mathbf{S}^*) > 0$$

gilt:

$$\Delta^i\lambda = \frac{1}{2G} (r_0 - 1) > 0 \quad (5.198)$$

Nachdem Gl. 5.198 in die beiden Beziehungen Gl. 5.187 bzw. Gl. 5.188 eingesetzt worden ist, ergibt sich:

$${}^i\mathbf{S} = \left(\overset{K}{\mathbf{P}} + \frac{1}{r_0} \overset{D}{\mathbf{P}} \right) {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.199)$$

$${}^i\mathbf{S} = \left(3K \overset{K}{\mathbf{P}} + \frac{2G}{r_0} \overset{D}{\mathbf{P}} \right) {}^i\boldsymbol{\epsilon}^* \quad (5.200)$$

Die beiden letzten Gleichungen demonstrieren, daß der Kompressionsanteil $\overset{K}{\mathbf{P}}$ des Spannungsprädiktors im Algorithmus ${}^i\mathbf{S}^*$ in der plastischen Relaxationsphase unverändert beibehalten wird.

B) Verfestigendes Material

Bei gegebenem Verlauf des plastischen Verfestigungsmoduls $H(\kappa)$ nach Bild 2.8 errechnet sich die einaxiale Fließspannung ${}^i\bar{S}$ aus dem Integral:

$${}^i\bar{S} = \int_0^{\kappa} H(\kappa) d\kappa \quad (5.201)$$

Die interne Variable der aktuellen Konfiguration ist in einem impliziten Verfahren durch Gl. 5.81 eindeutig spezifiziert. Da die isotrope Arbeits- und Verzerrungsverfestigung im Fall der J_2 -Fließtheorie dasselbe Endresultat liefern, kann die interne Variable mit der äquivalenten einaxialen plastischen Verzerrung identifiziert werden.

$${}^i\bar{\epsilon}^p = {}^n\bar{\epsilon}^p + \Delta^i\lambda \quad {}^i\mathcal{H} \quad (5.202)$$

Demzufolge ist es ausreichend, sich auf das Evolutionsgesetz gemäß Gl. 2.60 in Verbindung mit Gl. 5.4 und Gl. 5.18 zu konzentrieren.

$${}^i\bar{\epsilon}^p = {}^n\bar{\epsilon}^p + \Delta^i\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} \quad {}^i\mathbf{S}^T \mathbf{P} \quad {}^i\mathbf{S} \quad (5.203)$$

Nach Substitution von Gl. 5.187 folgt:

$${}^i\bar{\epsilon}^p = {}^n\bar{\epsilon}^p + \frac{\Delta^i\lambda}{1 + \Delta^i\lambda \quad 2G} \sqrt{\frac{2}{3}} \quad {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} \quad {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.204)$$

B1) Lineare sowie multilineare Verfestigung

Das Integral in Gl. 5.201 vereinfacht sich im Fall der linearen Verfestigung zu:

$${}^i\bar{S} = \bar{S}_0 + H \quad {}^i\bar{\epsilon}^p \quad (5.205)$$

und im Fall der multilinearen Verfestigung zu:

$${}^i\bar{S} = {}^n\bar{S} + H \quad ({}^i\bar{\epsilon}^p - {}^n\bar{\epsilon}^p) \quad (5.206)$$

Da kein prinzipieller Unterschied in den numerischen Methoden zwischen der Behandlung der linearen und der multilinearen Verfestigung besteht, darf die weitere Herleitung auf den linearen Fall beschränkt werden, wenn folgende Vereinbarung beachtet wird:

$${}^n\bar{S} = \bar{S}_0 + H \quad {}^n\bar{\epsilon}^p \quad (5.207)$$

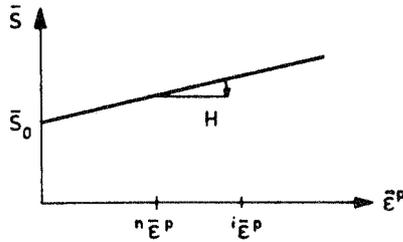


Bild 5.27 : Lineare Verfestigung

Aus Gl. 5.205 läßt sich unter Verwendung von Gl. 5.204 und Gl. 5.207 die gesuchte Formel zur Berechnung der einaxialen Vergleichsspannung in Abhängigkeit des plastischen Multiplikatorinkrements herleiten.

$${}^i\bar{S} = n\bar{S} + \frac{\Delta^i\lambda}{1 + \Delta^i\lambda} \frac{2}{2G} H \sqrt{\frac{3}{2}} {}^i\mathbf{S}^{*\text{T}} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.208)$$

Mit diesem Ergebnis ist die Bestimmungsgleichung Gl. 5.195 für das plastische Multiplikatorinkrement vollständig und kann sogar geschlossen nach $\Delta^i\lambda$ aufgelöst werden.

$$\Delta^i\lambda = \frac{\frac{1}{n\bar{S}} \sqrt{\frac{3}{2}} {}^i\mathbf{S}^{*\text{T}} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^* - 1}{\frac{2}{3} \frac{H}{n\bar{S}} \sqrt{\frac{3}{2}} {}^i\mathbf{S}^{*\text{T}} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^* + 2G} \quad (5.209)$$

Der Verfestigungsvorgang während des aktuellen Zeitschritts wird in Bild 5.28 am Beispiel der von Mises-Fließkurve in der Deviatorebene veranschaulicht.

$$\text{Definition:} \quad r := \frac{1}{n\bar{S}} \sqrt{\frac{3}{2}} {}^i\mathbf{S}^{*\text{T}} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^* > 1 \quad (5.210)$$

$$\text{für alle} \quad F({}^i\mathbf{S}^*) > 0$$

Dann gilt:

$$\Delta^i\lambda = \frac{1}{2G} \frac{r - 1}{\frac{H}{3G} r + 1} \quad (5.211)$$

Einsetzen von Gl. 5.211 in Gl. 5.187 und Gl. 5.188 :

$${}^i\mathbf{S} = \left[\frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^{\text{T}} + \frac{H}{3G} \frac{r + 1}{\left(\frac{H}{3G} + 1\right) r} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^{\text{T}} \right) \right] {}^i\mathbf{S}^* \quad (5.212)$$

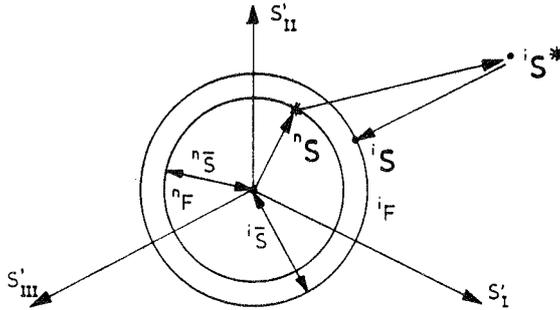


Bild 5.28 : Verfestigungskurven nF und iF mit zugehörigem Spannungsprädiktor in der Deviatorebene für die J_2 -Fließtheorie

$${}^iS = \left[K \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T + 2G \frac{H}{3G} \frac{r+1}{\left(\frac{H}{3G} + 1\right) r} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}^T \right) \right] {}^ie^* \quad (5.213)$$

B2) Beliebige Verfestigungsfunktion

Oftmals liegt die Verfestigungsfunktion $\bar{S}(\bar{\epsilon}^p)$ als Polynom höheren Grades, als transzendente Funktion oder in nicht geschlossener Form vor. Beispiele hierfür sind das Ramberg-Osgood-Modell und das stückweise Potenzgesetz:

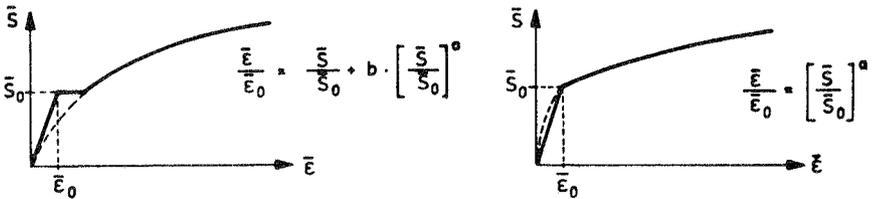


Bild 5.29 : Ramberg-Osgood-Modell und stückweises Potenzgesetz zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens (a, b Materialkennwerte)

In derartigen Fällen wird der bereits in Abschnitt 5.4.5 allgemein geschilderte Lösungsweg zur iterativen Bestimmung von $\Delta^i \lambda$ aus Gl. 5.195 eingeschlagen. Die für das Standard-Newton-Verfahren notwendige Linear-

sierung der Fließbedingung Gl. 5.195 mündet zusammen mit Gl. 5.204 in:

$$\left. \frac{dF}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k} = \frac{1}{2} {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^* \frac{d}{d\Delta\lambda} [1 + \Delta\lambda 2G]^{-2} \Big|_{\Delta\lambda^k} - \frac{2}{3} \left[\bar{S} \frac{d\bar{S}}{d\bar{\epsilon}^p} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{d\Delta\lambda} \right]_{\Delta\lambda^k} \quad (5.214)$$

und

$$\left. \frac{d\bar{\epsilon}^p}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k} = \sqrt{\frac{2}{3} {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^*} \frac{d}{d\Delta\lambda} \left(\frac{\Delta\lambda}{1 + \Delta\lambda 2G} \right) \Big|_{\Delta\lambda^k} \quad (5.215)$$

denn es gilt:

$$\frac{d}{d\Delta\lambda} n_{\bar{\epsilon}^p} = 0$$

Zu Beginn der lokalen Standard-Newton-Iteration ist Gl. 5.195 nicht erfüllt. Da der neue Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}$ und die einaxialen Größen \bar{S} , $\bar{\epsilon}^p$ und H im k -ten Iterationsschritt bei festgehaltenem Prädiktor ${}^i\mathbf{S}^*$ nur noch vom aktuellen Wert des plastischen Multiplikators $\Delta^k\lambda$ abhängen, werden folgende Definitionen vereinbart:

$${}^k H := H(\Delta\lambda^k) = \left. \frac{d\bar{S}}{d\bar{\epsilon}^p} \right|_{\Delta\lambda^k} \quad (5.216)$$

$${}^k \bar{S} := \bar{S}(\Delta\lambda^k) \quad (5.217)$$

$${}^k \bar{\epsilon}^p := \bar{\epsilon}^p(\Delta\lambda^k) \quad (5.218)$$

Durch Einsetzen von Gl. 5.215 bis Gl. 5.218 in Gl. 5.214 folgt dann:

$$\left. \frac{dF}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k} = - {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^* \frac{2G}{(1 + \Delta\lambda^k 2G)^3} - \frac{2}{3} {}^k \bar{S} \left. \frac{d\bar{S}}{d\bar{\epsilon}^p} \right|_{\Delta\lambda^k} \sqrt{\frac{2}{3} {}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^*} \left(\frac{1}{1 + \Delta\lambda^k 2G} - \frac{\Delta\lambda^k 2G}{(1 + \Delta\lambda^k 2G)^2} \right) \quad (5.219)$$

\Leftrightarrow

$$\left. \frac{dF}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k} = - \frac{\sqrt{{}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^*}}{(1 + \Delta\lambda^k 2G)^2} \left(\frac{\sqrt{{}^i\mathbf{S}^{*T} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S}^*}}{1 + \Delta\lambda^k 2G} 2G + \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} {}^k \bar{S} {}^k H \right) \quad (5.220)$$

6 Elastoplastischer Tangentenmodul

6.1 Zur iterativen Gleichgewichtsermittlung

Die in schwacher Form vorliegenden nichtlinearen Gleichgewichtsbedingungen - siehe Teil 3 - werden zum Zweck des Newton-Iterationsverfahrens linearisiert. Von primärem Interesse ist die Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit Gl. 3.14, deren Matrixschreibweise lautet:

$$\delta w_{int} = \delta \epsilon^T \mathbf{S}|_{i_t} + \left[\delta \epsilon^T \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{S}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta \epsilon \right]_{i_t} \Delta \Delta^i \mathbf{u} \quad (6.1)$$

Im Hinblick auf eine wegabhängige Iteration mit infinitesimaler Schrittweite steht das elastoplastische Stoffgesetz in Ratenform gemäß Gl. 2.77 zwischen den Spannungs- und Deformationsgeschwindigkeiten; denn für die Zeitableitung des Spannungstensors zur Zeit i_t gilt:

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} \Big|_{i_t} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \epsilon} \Big|_{i_t} \frac{d\epsilon}{dt} \Big|_{i_t} \quad (6.2)$$

$${}^i \dot{\mathbf{S}} = {}^i \mathbf{D}^{ep} {}^i \dot{\epsilon} \quad (6.3)$$

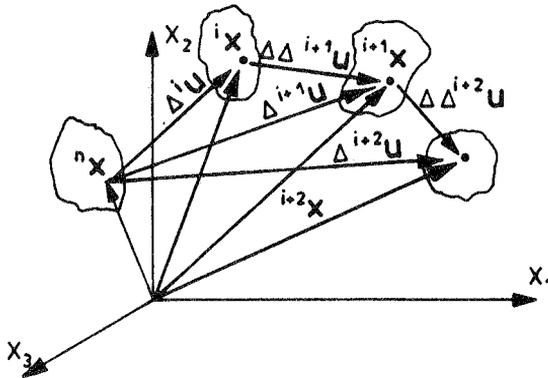


Bild 6.1 : Aktualisierung der Konfiguration ${}^i \mathbf{x}$ während der Iteration bezüglich des letzten Zwischenzustandes ${}^{i-1} \mathbf{x}$

Bei der wegunabhängigen Iteration wird jedoch davon ausgegangen, daß die elastoplastische Spannungsberechnung immer bezüglich der Werte am Anfang des Inkrements zum Zeitpunkt ${}^n t$ geschieht, die Linearisierung zur

Ermittlung der neuen Geometrie jedoch um den Zustand zur Zeit t erfolgt. Im Unterschied zur wegunabhängigen Iteration fällt der Anfangszustand für die stoffrelevanten Größen ${}^n\epsilon^p$, ${}^n\kappa$, nS von denen aus die neuen Werte ${}^i\epsilon^p$, ${}^i\kappa$, iS berechnet werden, nicht mit dem Ausgangszustand ${}^{i-1}x$ für die Aktualisierung der Geometrie ${}^i x$ zusammen.

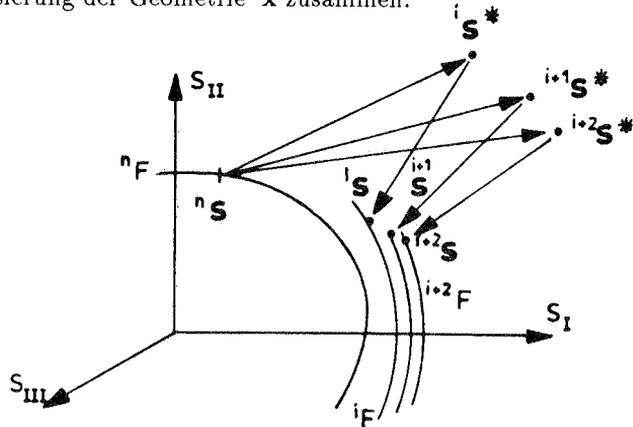


Bild 6.2 : Berechnung der Spannungszustände iS während der Iteration bezüglich des letzten Gleichgewichtszustandes nS

Wird eine wegunabhängige Iteration gefordert, dann stimmt der infinitesimale elastoplastische Tensor in Gl. 2.77 nicht mit dem Spannungsgradienten $\frac{\partial S}{\partial \epsilon}$ des Algorithmus' zur Spannungsermittlung bei wegunabhängiger Iteration überein. Desgleichen ist die hieraus abgeleitete Steifigkeitsmatrix nicht die Tangentensteifigkeit. Offenbar wird dies am Abfall der Konvergenzgeschwindigkeit während der Standarditeration nach Newton mit dem konstitutiven Tensor nach Gl. 2.77 für die Steifigkeitsmatrix. Das vereinfachte Spannungs-Dehnungsdiagramm in Bild 6.3 spiegelt den Spannungszuwachs $\Delta^i S$ in Abhängigkeit des Dehnungszuwachses $\Delta^i \epsilon$ wider.

Festzuhalten bleibt, daß die Dehnungszuwächse bei der wegunabhängigen Iteration in der Regel gegen einen von null verschiedenen Grenzwert konvergieren. Somit strebt auch die Matrix der konsistenten Tangentenmoduli zwischen den Spannungs- und Dehnungsänderungen nicht gegen das infinitesimale Stoffgesetz der Fließtheorie.

Nachfolgend wird die Herleitung der Tangentensteifigkeit für den wegunabhängigen Iterationsalgorithmus gezeigt. Zur Unterscheidung von der üblichen elastoplastischen Steifigkeit wird hierfür der Begriff „konsistente elastoplastische Tangentensteifigkeit“ verwendet. Darunter versteht man die

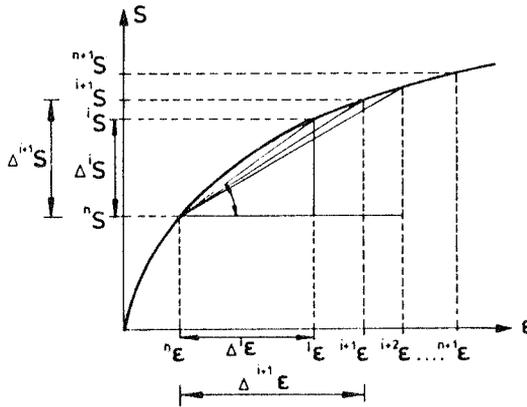


Bild 6.3 : Tangentenbeziehung im Spannungs-Dehnungsdiagramm

Linearisierung des Algorithmus' zur Spannungsberechnung als Grundlage für das Standard-Newton-Verfahren zur iterativen Berechnung des Gleichgewichts im Zustand zur Zeit $n+1t$. Während der Iteration werden die Spannungen iS , die elastischen und inelastischen Dehnungen ${}^i\epsilon^e$, ${}^i\epsilon^p$ und die interne Variable ${}^i\kappa$ zur Zeit it in Abhängigkeit der bekannten Größen nS , ${}^n\epsilon^e$, ${}^n\epsilon^p$, ${}^n\kappa$ zur Zeit nt und deren Inkremente $\Delta{}^iS$, $\Delta{}^i\epsilon^e$, $\Delta{}^i\epsilon^p$, $\Delta{}^i\kappa$ zwischen den Zuständen it und nt berechnet. Zentraler Teil der konsistenten Steifigkeitsmatrix in der Elastoplastizität ist die aus der Richtungsableitung des elastoplastischen Algorithmus' Gl. 5.83 hervorgehende Beziehung zwischen den Spannungs- und Verzerrungsänderungen zur Zeit it .

$$DS|_{i,t} = \frac{d}{d\eta} S \left({}^i\epsilon + \eta \Delta{}^i\epsilon \right) \Big|_{\eta=0} \quad (6.4)$$

$$D^iS =: {}^iD_{kons.}^{ep} \cdot D^i\epsilon \quad (6.5)$$

Wegen der Gleichheit des Operators für die Zeit- und Richtungsableitung und zur Untersuchung des ratenabhängigen Stoffgesetzes der Fließtheorie zwischen den infinitesimalen Spannungen und Verzerrungen in Teil 2.6 wird folgende Schreibweise für die Linearisierung in diesem und im nächsten Teil vereinbart:

$$d() = \frac{d}{dt} () \quad (6.6)$$

Die direkte Differentiation des elastoplastischen Spannungsalgorithmus' nach den Dehnungen zur Zeit it führt unmittelbar auf die Matrix der kon-

sistenten Tangentenmoduli zwischen $d^i\mathbf{S}$ und $d^i\boldsymbol{\epsilon}$, denn die Spannungsbe-
rechnung zur Zeit ${}^i t$ ist vollständig durch Vorgabe des Dehnungszustandes ${}^i\boldsymbol{\epsilon}$
kontrolliert. Dies wird durch die Gleichungen Gl. 5.83, Gl. 5.74 und Gl. 5.25
in Kombination mit Gl. 5.85 bestätigt.

$${}^i\mathbf{S} = {}^n\mathbf{S} + \mathbf{D} ({}^i\boldsymbol{\epsilon} - {}^n\boldsymbol{\epsilon}) - \mathbf{D} \Delta^i\lambda \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{,t} \quad (6.7)$$

In der Regel ist die Ausführung der direkten Differentiation des vollständig
impliziten Algorithmus' bei verfestigenden Materialien nicht unkompliziert,
da weder Gl. 5.85 nach $\Delta^i\lambda$ auflösbar ist, noch kann die tensorwertige Funk-
tionsgleichung für das plastische Potential ϕ in Gl. 6.7 mühelos nach ${}^i\mathbf{S}$
umgestellt werden. Wegen der hier zugrunde gelegten Plastizitätstheorie
im Spannungsraum sind die algebraischen Umformungen zur Herleitung der
inversen Beziehung

$$d^i\boldsymbol{\epsilon} = {}^i\mathbf{D}_{Kons.}^{ep}{}^{-1} d^i\mathbf{S} \quad (6.8)$$

wesentlich einfacher. Mit Hilfe der bereits in Kapitel 2.6 erwähnten Sher-
man-Morrison-Formel wird anschließend invertiert.

6.2 Konsistente elastoplastische Tangentensteifigkeit des vollständig impliziten Algorithmus'

Ausgangspunkt zur Herleitung der konsistenten Tangentensteifigkeit für den
wegunabhängigen Spannungsalgorithmus sind Gl. 5.25 und Gl. 5.26.

$${}^i\boldsymbol{\epsilon} = {}^n\boldsymbol{\epsilon} + \Delta^i\boldsymbol{\epsilon}^e + \Delta^i\boldsymbol{\epsilon}^p \quad (6.9)$$

Einsetzen von Gl. 5.33 und Gl. 5.80 in Gl. 6.9 ergibt:

$${}^i\boldsymbol{\epsilon} = {}^n\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{D}^{-1} ({}^i\mathbf{S} - {}^n\mathbf{S}) + \Delta^i\lambda \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{,t} \quad (6.10)$$

Durch totale Differentiation (Zeitableitung) der Größen zum Zeitpunkt
 ${}^i t$ erhält man die Dehnungsänderungen $d^i\boldsymbol{\epsilon}$ in Abhängigkeit der Span-
nungsänderungen $d^i\mathbf{S}$. Zu beachten ist ferner, daß sowohl $d^i\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$ als
auch $d^i\mathbf{S} = \mathbf{0}$ sind, da ${}^n\boldsymbol{\epsilon}$ und ${}^n\mathbf{S}$ zum Zeitpunkt ${}^i t$ konstant und somit
zeitlich unveränderlich sind.

$$d^i\boldsymbol{\epsilon} = \left(\mathbf{D}^{-1} + \Delta^i\lambda \left. \frac{\partial^2\phi}{\partial\mathbf{S} \cdot \partial\mathbf{S}} \right|_{,t} \right) d^i\mathbf{S} + \left. \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{S}} \right|_{,t} d\Delta^i\lambda \quad (6.11)$$

Wie schon in Gl. 5.99 taucht auch hier im Vergleich zu Gl. 2.77 ein neuer Summand $\Delta^i \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}}$ auf. Dieser wird vor allem bei großen Lastschritten wesentlicher Bestandteil der konsistenten elastoplastischen Tangentensteifigkeit, denn das plastische Multiplikatorinkrement $\Delta^i \lambda$ konvergiert im Verlauf der wegunabhängigen Iteration gegen einen Grenzwert endlicher Größe.

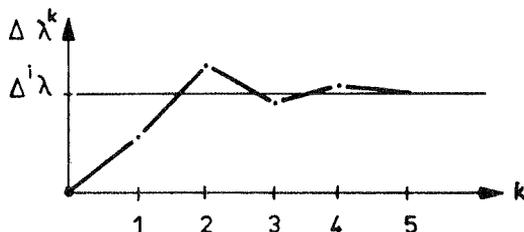


Bild 6.4 : Verlauf der Konvergenz des Multiplikatorinkrements $\Delta^i \lambda$ in Abhängigkeit des Iterationsschritts k

Die zweiten Ableitungen des plastischen Potentials $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}}$ geben Auskunft über die Richtungsänderung des Gradienten $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}}$ und damit über die Richtungsänderung des plastischen Flusses $\dot{\epsilon}^p$.

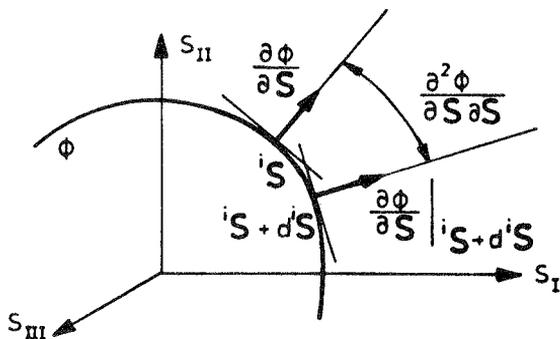


Bild 6.5 : Darstellung des plastischen Potentials ϕ im Hauptspannungsraum

Ähnlich der Vorgehensweise im Abschnitt 5.5.5 geht die Zeitableitung des Multiplikatorinkrements aus der Konsistenzbedingung Gl. 5.100 in Verbindung mit Gl. 5.98 hervor und mündet nach weiterer Herleitung in Gl. 5.103. Gemeinsam mit Gl. 6.11 entsteht schließlich die gesuchte Matrix für die

konsistenten Tangentenmoduli.

$$d^i \boldsymbol{\epsilon} = \left[\mathbf{D}^{-1} + \Delta^i \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}} + \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{i_t} \otimes \left(\frac{1}{i_A} \frac{\partial f^T}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{i_t} - \frac{\Delta^i \lambda}{i_{\mathcal{H}}} \frac{\partial \mathcal{H}^T}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{i_t} \right) \right] d^i \mathbf{S} \quad (6.12)$$

Mit den Abkürzungen

$${}^i \mathbf{H} := \mathbf{D}^{-1} + \Delta \lambda \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}} \Big|_{i_t} \quad (6.13)$$

$${}^i \mathbf{q} := \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{i_t} \quad (6.14)$$

$${}^i \mathbf{a} := \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{i_t} \quad (6.15)$$

$${}^i \mathbf{b} := \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{S}} \Big|_{i_t} \quad (6.16)$$

$${}^i A := \frac{dY}{d\kappa} \Big|_{i_t} \quad i_{\mathcal{H}} \quad (6.17)$$

kann die fundamentelle Beziehung Gl. 6.12 zwischen dem Spannungs- und Dehnungszuwachs in nachstehende Matrizenform übergeleitet werden.

$$d^i \boldsymbol{\epsilon} = \left[{}^i \mathbf{H} + \frac{1}{i_A} {}^i \mathbf{q} \otimes \left({}^i \mathbf{a}^T - \Delta^i \lambda \frac{dY}{d\kappa} \Big|_{i_t} {}^i \mathbf{b}^T \right) \right] d^i \mathbf{S} \quad (6.18)$$

Der Struktur dieser Matrixgleichung liegt eine Modifikation der Matrix \mathbf{H} vom „Rang-eins“ durch das dyadische Produkt

$${}^i \mathbf{q} \otimes \left({}^i \mathbf{a}^T - \Delta^i \lambda \frac{dY}{d\kappa} \Big|_{i_t} {}^i \mathbf{b}^T \right) \quad (6.19)$$

zugrunde. Selbst unter der Voraussetzung einer assoziierten Fließregel ($\dot{\phi} \stackrel{!}{=} f$ und $\dot{\mathbf{q}} \stackrel{!}{=} \mathbf{a}$) ist das dyadische Produkt

$${}^i \mathbf{a} \otimes \left({}^i \mathbf{a}^T - \Delta^i \lambda \frac{dY}{d\kappa} \Big|_{i_t} {}^i \mathbf{b}^T \right) \quad (6.20)$$

und damit die konsistente Materialsteifigkeitsbeziehung des impliziten Algorithmus' zwischen den Spannungs- und Verzerrungsänderungen unsymmetrisch, falls nicht eine der folgenden Gegebenheiten vorliegt:

1. infinitesimale „Schrittweite“ Δt : $\Delta^i \lambda \rightarrow 0$
2. ideale Elastoplastizität (keine Verfestigung): $\left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i_t} \rightarrow 0$
3. Sonderfall der Fließbedingung nach von Mises oder Drucker-Prager, wo die Vektoren \mathbf{b} und \mathbf{a} parallel sind:

$$\mathbf{b} \parallel \mathbf{a} \quad \text{d.h.} \quad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}}$$

4. semiimpliziter Algorithmus: $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

Die bemerkenswerte Tatsache einer unsymmetrischen Beziehung zwischen den Spannungs- und Dehnungsraten resultiert unmittelbar aus der Art des gewählten Integrationsalgorithmus'. Da jedoch dieser vollständig implizit ist, würde man eine symmetrische Verknüpfungsmatrix zwischen $d^i \mathbf{S}$ und $d^i \boldsymbol{\epsilon}$ erwarten, denn es sollte die Vertauschbarkeit der zweiten Ableitungen des Verzerrungspotentials Ψ gelten.

$$\frac{\partial^i S_{KL}}{\partial^i \epsilon_{IJ}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^i \epsilon_{IJ} \cdot \partial^i \epsilon_{KL}} \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^i \epsilon_{KL} \cdot \partial^i \epsilon_{IJ}} \quad (6.21)$$

Ursächlich resultiert diese Unsymmetrie jedoch aus der klassischen Fließtheorie, in welcher das Fließgesetz dem Verfestigungsverhalten nicht Rechnung trägt.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \approx \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{S}} \quad (6.22)$$

In der Normalenregel wird der Verfestigungsanteil im Gradienten der Fließfunktion $\frac{\partial Y}{\partial \mathbf{S}}$ vernachlässigt. Zur Inversion der Matrizenbeziehung Gl. 6.18 wird die Sherman-Morrison Formel herangezogen.

$$d^i \mathbf{S} = \left[{}^i \mathbf{H}^{-1} - \frac{{}^i \mathbf{H}^{-1} {}^i \mathbf{q} \otimes \left({}^i \mathbf{a}^T - \Delta^i \lambda \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i_t} {}^i \mathbf{b}^T \right) {}^i \mathbf{H}^{-1}}{{}^i A + \left({}^i \mathbf{a}^T - \Delta^i \lambda \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i_t} {}^i \mathbf{b}^T \right) {}^i \mathbf{H}^{-1} {}^i \mathbf{q}} \right] d^i \boldsymbol{\epsilon} \quad (6.23)$$

6.3 Konsistenter elastoplastischer Tangentenmodul des impliziten Algorithmus' für die J_2 -Fließtheorie

Der zum impliziten Spannungsalgorithmus konsistente Tangentenmodul wird für den in der Praxis sehr wichtigen Fall des Fließkriteriums nach von Mises hergestellt. Als weitere Beschränkungen werden assoziierte Plastizität und isotrope Verfestigung vorausgesetzt. Die in Kapitel 6.2 spezifizierten Größen unter den Gleichungsnummern Gl. 6.13 bis Gl. 6.17 sind dem Sonderfall der J_2 -Fließtheorie anzupassen. Soweit dieses in Kapitel 5.7 nicht schon geschehen ist, werden die benötigten Beziehungen hierfür nochmals zusammengefaßt:

$${}^i\mathbf{H} = \mathbf{D}^{-1} + \Delta^i \lambda \mathbf{P} \quad (6.24)$$

$${}^i\mathbf{q} = {}^i\mathbf{a} = \mathbf{P} {}^i\mathbf{S} \quad (6.25)$$

$${}^i\mathcal{H} = \sqrt{\frac{2}{3}} {}^i\mathbf{S}^T \mathbf{P} {}^i\mathbf{S} \quad (6.26)$$

$$\left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i,t} = \frac{2}{3} {}^i\bar{S} \left. \frac{d\bar{S}}{d\bar{\epsilon}^P} \right|_{i,t} \quad (6.27)$$

$${}^iH = \left. \frac{d\bar{S}}{d\bar{\epsilon}^P} \right|_{i,t} \quad (6.28)$$

$${}^iA = \left. \frac{dY}{d\kappa} \right|_{i,t} \quad {}^i\mathcal{H} = \left(\frac{2}{3} {}^i\bar{S} \right)^2 \quad (6.29)$$

$${}^i\mathbf{b} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} {}^i\mathbf{S}^T \mathbf{P} {}^i\mathbf{S} \right) \Big|_{i,t} = \frac{1}{{}^i\bar{S}} \mathbf{P} {}^i\mathbf{S} \quad (6.30)$$

Die obenstehenden Beziehungen werden in Gl. 6.23 eingesetzt.

$$d {}^i\mathbf{S} = \left[\mathbf{H}^{-1} - \frac{(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1})}{A + \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{S}} \right]_{i,t} d {}^i\boldsymbol{\epsilon} \quad (6.31)$$

$${}^i\bar{A} := \frac{\left(\frac{2}{3} {}^i\bar{S} \right)^2 {}^iH}{1 - \frac{2}{3} {}^iH \Delta^i \lambda} \quad (6.32)$$

Bei genauer Inspektion des Matrizenprodukts $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{P}$ wird deutlich, daß die in Kapitel 5.1 erwähnte Orthogonalitätsbedingung Gl. 5.8 in die Definitionsgleichung 5.186 eingearbeitet werden kann.

$$\mathbf{H}^{-1} \mathbf{P} = 3K \overset{\kappa}{\mathbf{P}} \mathbf{P} + \frac{2G}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \left[\mathbf{11} - \overset{\kappa}{\mathbf{P}} \right] \mathbf{P} \quad (6.33)$$

Die beiden folgenden Gesetzmäßigkeiten lassen sich einfach beweisen:

$$\overset{K}{\mathbf{P}} \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (6.34)$$

und

$$\mathbf{11} \mathbf{P} = \overset{D}{\mathbf{P}} \quad (6.35)$$

Als Zwischenergebnis bleibt festzuhalten:

$$\mathbf{H}^{-1} \mathbf{P} = \frac{2G}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \overset{D}{\mathbf{P}} \quad (6.36)$$

und

$$\mathbf{P} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{P} = \frac{2G}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \mathbf{P} \quad (6.37)$$

Damit vereinfacht sich die Bildung des konsistenten elastoplastischen Tangentensteifigkeitsmoduls, weil der dilatatorische Anteil des konstitutiven Tensors vollkommen elastisch bleibt, während der Schubmodul des deviatorischen Teils mit einem Skalar kleiner eins multipliziert wird.

$$d^i \mathbf{S} = \left[3K \overset{K}{\mathbf{P}} + \frac{2G}{1 + \Delta^i \lambda 2G} \left(\mathbf{11} - \overset{K}{\mathbf{P}} - \frac{\overset{D}{\mathbf{P}} \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^T \overset{D}{\mathbf{P}}}{\overset{i}{\tilde{\mathbf{A}}} + \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{S}} \right) \right] d^i \boldsymbol{\epsilon} \quad (6.38)$$

$$\overset{i}{\tilde{\mathbf{A}}} = \left(\frac{2}{3} \overset{i}{\tilde{\mathbf{S}}} \right)^2 \frac{\overset{i}{H}}{2G} \frac{1 + 2G \Delta^i \lambda}{1 - \frac{2}{3} \overset{i}{H} \Delta^i \lambda} \quad (6.39)$$

Der Tangentenmodul ist hinsichtlich der Plastizität weiterhin isobar, denn die Differenzmatrix $\mathbf{11} - \overset{K}{\mathbf{P}}$ hat ebenfalls deviatorischen Charakter. Zudem ist der Tangentenmodul selbst bei der vollständig impliziten Methode symmetrisch, da der Vektor $\overset{i}{\mathbf{b}}$ parallel zum Fließvektor $\overset{i}{\mathbf{a}}$ im Fall des isotropen von Mises-Kriteriums ist. Dieses Ergebnis stimmt mit anschaulichen Überlegungen überein - siehe Bild 6.6.

Zum direkten Vergleich der konsistenten Tangentenmoduli nach Gl. 6.38 mit dem elastoplastischen Stoffgesetz nach Gl. 2.77 ist letzteres auf den Fall der J_2 -Fließtheorie anzupassen. Unter Verzicht auf eine ausführliche Herleitung erhält man durch Zuhilfenahme der Idempotenz Eigenschaft des Projektionsoperators $\overset{D}{\mathbf{P}}$ schließlich:

$$\dot{\mathbf{S}} = \left[3K \overset{K}{\mathbf{P}} + 2G \left(\mathbf{11} - \overset{K}{\mathbf{P}} - \frac{\overset{D}{\mathbf{P}} \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^T \overset{D}{\mathbf{P}}}{\overset{i}{\tilde{\mathbf{A}}} + \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{S}} \right) \right] \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.40)$$

7 Elastoplastizität bei dünnwandigen Flächen-tragwerken

7.1 Zur Degeneration ratenabhängiger Werkstoffgesetze

Physikalisch nichtlineare Schalenprobleme werden vielfach durch ratenabhängige Stoffgesetze beschrieben. Neben der üblichen Schalenannahme:

- „die Normalspannungskomponente in Richtung des Schalendirektors (Dickenrichtung) ist null“

$$S_{33} = 0 \quad (7.1)$$

muß als zusätzliche Bedingung gefordert werden:

- „die zeitliche Änderung dieser Normalspannungskomponente (Spannungsrate) soll verschwinden“

$$\dot{S}_{33} = 0 \quad (7.2)$$

Von den sechs Spannungs- bzw. Dehnungskomponenten sind nur noch fünf unabhängig. Die Dehnungskomponente in Dickenrichtung ϵ_{33} bzw. deren Rate $\dot{\epsilon}_{33}$ stellt sich in Abhängigkeit der fünf anderen Komponenten so ein, daß obige Degenerationsbedingungen erfüllt sind.

Grundsätzlich sind zwei Standpunkte zu unterscheiden nach denen Materialgesetze für schubweiche Schalen postuliert können werden:

1. *Direktes Vorgehen:*

(Siehe Abschnitt 4.2.2; in /Ramm 1976/ als klassisches Vorgehen bezeichnet.) Im Rahmen einer Schalentheorie wird ein ebener Spannungszustand mit zusätzlichem Querschub angenommen, der durch fünf unabhängige Spannungs- bzw. Verzerrungskomponenten beschrieben ist. Die Tensorkomponente in Richtung des Schalendirektors existiert als solche nicht, da die Schale als verformbare Fläche durch Schub-, Biege- und Membrandeformationen verstanden wird.

2. *Kontinuumsaspekt:*

Die Schale wird als allgemeines, dreidimensionales Kontinuum behandelt, dessen Normalspannungskomponente in Richtung des Direktors verschwinden soll. Aus Gründen der numerischen Konditionierung

der Struktursteifigkeitsmatrix und des Rechenaufwandes wird die Dehnungskomponente in Dickenrichtung aus den unabhängigen kinematischen Gleichungen eliminiert und als abhängige Größe mitgeführt. In einer Nachlaufberechnung kann mit Hilfe des Werkstoffgesetzes und der statischen Größen (Spannungen) jederzeit auf die Dickenänderung zurückgeschlossen werden.

Bei der Formulierung der konstitutiven Beziehung auf den Grundlagen des dreidimensionalen Kontinuums muß zusätzlich den Degenerationsbedingungen Genüge geleistet werden. In /Hallquist 1985/ werden die Dehnungskomponenten iterativ an die Gleichungen Gl. 7.1 und Gl. 7.2 angepaßt. Gegenwärtiges Ziel jedoch ist es, die statischen Hypothesen zugunsten des Verzichts einer nachfolgenden Iteration systematisch in die fünf unabhängigen Spannungs-Dehnungsgleichungen miteinzubeziehen. Hierzu stehen zwei Wege offen:

- (a) Die Komponente $\dot{\epsilon}_{33}$ des Tensors der Verzerrungsgeschwindigkeiten wird aus dem geschwindigkeitsabhängigen Werkstoffgesetz mittels statischer Kondensation des dreidimensionalen elastoplastischen Tensors D^{ep} eliminiert - siehe /Sättele 1982/, /NISA80 1983/. Die kondensierte Stoffmatrix verbindet den reduzierten Satz der von Null verschiedenen Spannungskomponenten mit den fünf unabhängigen Verzerrungskomponenten.
- (b) Elimination der $\dot{\epsilon}_{33}$ -Dehnungsrate im konstitutiven Ergänzungstensor mit anschließender Inversion zur Herleitung des degenerierten elastoplastischen Materialsteifigkeitstensors. Im Vergleich zur Matrizenkondensation ist dieses Vorgehen numerisch effizienter.

Im Kapitel 7.2 wird gezeigt, wie im Fall der J_2 -Fließtheorie die Standpunkte unter 1. und (a) ineinander überführbar sind.

7.2 Elimination der Normaldehnungsrate in Dickenrichtung aus dem Ergänzungstensor der J_2 -Fließtheorie

Ausgangspunkt zur Herleitung eines elastoplastischen Werkstoffgesetzes für das degenerierte Schalenkonzept bildet die in orthonormalen Koordinaten vorliegende infinitesimale Spannungs-Dehnungsbeziehung nach Gl. 5.193, Abschnitt 5.7.4. Addiert man das „Wurzel-Zweifache“ ($\sqrt{2}$) der dritten

Gleichungszeile zur ersten Zeile des Gleichungssystems Gl. 5.191 hinzu, so ergibt sich unter gleichzeitiger Beachtung der Degenerationbedingung Gl. 7.1:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{33} \\ \dot{\epsilon}_{12} \\ \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{23} \end{vmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1-2\nu}{1+\nu}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{1+\nu} \\ & & & 2 \\ & & & & 2 \\ & & & & & 2 \end{vmatrix} + \frac{1}{A} \begin{vmatrix} x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \\ x & x & 0 & x & x & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{S}_{11} \\ \dot{S}_{22} \\ \dot{S}_{33} \\ \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{13} \\ \dot{S}_{23} \end{vmatrix} \quad (7.3)$$

Die Matrix des plastischen Anteils ist durch das dyadische Produkt wie folgt belegt:

$$\begin{matrix} \nearrow & \mathbf{S}^T \mathbf{Q} \mathbf{A}_P & = & \begin{vmatrix} \frac{S_{11}+S_{22}}{\sqrt{6}} & \frac{-S_{11}+S_{22}}{\sqrt{2}} & 0 & 2S_{12} & 2S_{13} & 2S_{23} \end{vmatrix} \\ \otimes & & & \\ \searrow & \mathbf{A}_P \mathbf{Q}^T \mathbf{S} = & = & \begin{vmatrix} \frac{(S_{11}+S_{22})}{\sqrt{6}} & x & x & 0 & x & x & x \\ \frac{(-S_{11}+S_{22})}{\sqrt{2}} & x & x & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 S_{12} & x & x & 0 & x & x & x \\ 2 S_{13} & x & x & 0 & x & x & x \\ 2 S_{23} & x & x & 0 & x & x & x \end{vmatrix} \end{matrix} \quad (7.4)$$

Der plastische Anteil bleibt bei der assoziierten Fließregel nach von Mises von der Addition unbetroffen, da die dritte Spektralgleichung die Kompressibilität des Materials beschreibt. Nachdem die zweite Degenerationsbedingung Gl. 7.2 in Gl. 7.3 miteinbezogen worden ist, kann das „Wurzel-Zweifache“ der dritten Spalte des elastischen Teils auf die erste Spalte aufsummiert werden. Auf der linken Gleichungsseite ist die Entkopplung der ersten beiden Gleichungen von der Dehnungskomponente $\dot{\epsilon}_{33}$ erkennbar, so daß die dritte Gleichungszeile von den fünf anderen abgetrennt werden kann.

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & 1 \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \\ \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3\frac{1-\nu}{1+\nu} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{vmatrix} + \\
+ \frac{1}{A} \begin{vmatrix} \frac{S_{11}+S_{22}}{\sqrt{6}} \\ \frac{-S_{11}+S_{22}}{\sqrt{2}} \\ 2S_{12} \\ 2S_{13} \\ 2S_{23} \end{vmatrix} \otimes \begin{vmatrix} \frac{S_{11}+S_{22}}{\sqrt{6}} & \frac{-S_{11}+S_{22}}{\sqrt{2}} & 2S_{12} & 2S_{13} & 2S_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\dot{S}_{11}+\dot{S}_{22}}{\sqrt{6}} \\ \frac{-\dot{S}_{11}+\dot{S}_{22}}{\sqrt{2}} \\ \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{13} \\ \dot{S}_{23} \end{vmatrix} \quad (7.5)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{3}} (\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}) = \frac{1-2\nu}{E} \frac{1}{\sqrt{3}} (\dot{S}_{11} + \dot{S}_{22} + \dot{S}_{33}) \quad (7.6)$$

Nach Inversion der Koeffizientenmatrix auf der linken Seite gelangt man zum elastoplastischen Stoffgesetz in Ratenform für degenerierte Kontinua:

$$\begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{22} \\ \dot{\epsilon}_{12} \\ \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\nu} & -\nu \\ -\nu & \frac{1}{1+\nu} \\ & & 2 \\ & & & 2 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{A} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & 2 \\ & & & 2 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \cdot \\
\cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} S_{11} & S_{22} & S_{12} & S_{13} & S_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & 2 \\ & & & 2 \\ & & & & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{S}_{11} \\ \dot{S}_{22} \\ \dot{S}_{12} \\ \dot{S}_{13} \\ \dot{S}_{23} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

In symbolischer Schreibweise:

$$\mathbf{D} := \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ \nu & 1 & & & \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \text{sym} \end{matrix} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{S} := \begin{vmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{23} \end{vmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon} := \begin{vmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{vmatrix} \quad (7.9)$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \left[\mathbf{D}^{-1} + \frac{1}{A} \mathbf{P} \mathbf{S} \otimes \mathbf{S}^T \mathbf{P} \right] \dot{\mathbf{S}} \quad (7.10)$$

Im Anschluß an die Lösung des vorangehenden Gleichungssystems zwischen den fünf unabhängigen Spannungs- und Verzerrungskomponenten kann die Ratengleichung für die Dehnungskomponente in Dickenrichtung ausgewertet werden.

$$\dot{\epsilon}_{33} = \frac{1 - 2\nu}{E} (\dot{S}_{11} + \dot{S}_{22}) - (\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) \quad (7.11)$$

Anmerkung:

Im Rahmen der J_2 -Fließtheorie führen die hier gezeigte formale Degeneration des elastoplastischen konstitutiven Tensors und der im Kapitel 7.1. erwähnte strukturtheoretische Aspekt auf dasselbe Ergebnis. Der formale Weg liefert zusätzlich noch die Ratengleichung für die abhängige Dehnungskomponente in Richtung des Schalendirektors.

7.3 Impliziter elastoplastischer Algorithmus für Schalen

Über die Projektionsmatrix $\overset{\text{D}}{\mathbf{P}}$ zwischen dem Spannungstensor S_{ij} (mit $S_{33} = 0$) und dessen Deviator S'_{ij} findet man die Fließbedingung nach von Mises für das degenerierte Kontinuum in Abhängigkeit der maßgebenden Spannungskomponenten.

$$\mathbf{S}' = \overset{\text{D}}{\mathbf{P}} \mathbf{S}$$

$$\overset{\text{D}}{\mathbf{P}} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & & & \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & & & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \end{vmatrix} \quad (7.12)$$

$$\mathbf{P} := \mathbf{P}^{\mathbf{D}} \mathbf{P}^{\mathbf{M}} \mathbf{P}^{\mathbf{D}} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & & & & \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{vmatrix} \quad (7.13)$$

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{i} \mathbf{S}^T \mathbf{P} \mathbf{i} \mathbf{S} - \frac{1}{3} \bar{\mathbf{i}} \bar{\mathbf{S}} = 0$$

Für die assoziierte Fließregel gilt Gl. 5.133 mit der Projektionsmatrix \mathbf{P} im Sinne obiger Definition. Die Spektralzerlegung der Matrizen \mathbf{D} und \mathbf{P} in orthonormale Koordinaten hat folgendes Aussehen:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q} \mathbf{A}_D \mathbf{Q}^T \quad , \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q} \mathbf{A}_P \mathbf{Q}^T \quad (7.14)$$

$$\mathbf{A}_D = \begin{vmatrix} \frac{E}{1-\nu} & & & & & \\ & 2G & & & & \\ & & G & & & \\ & & & G & & \\ & & & & G & \\ & & & & & G \end{vmatrix} = 2G \begin{vmatrix} \frac{1+\nu}{1-\nu} & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & \\ & & & & \frac{1}{2} & \\ & & & & & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \quad (7.15)$$

$$\mathbf{A}_P = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{vmatrix} \quad (7.16)$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ +1 & 1 & & & \\ & & \sqrt{2} & & \\ & & & \sqrt{2} & \\ & & & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Die ersten beiden Eigenvektoren $\vec{\mathbf{n}}_1$ und $\vec{\mathbf{n}}_2$ (Spalte eins und zwei) der Matrix \mathbf{Q} zeigen in der Koordinatenebene $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ in Richtung der Winkelhalbierenden.

Die Eigenrichtung $\vec{\mathbf{n}}_1$ spielt eine dem Kugelanteil vergleichbare Rolle, welche in Bild 5.26 durch den Vektor $\vec{\mathbf{n}}_3$ repräsentiert ist. Die Projektionen von $\vec{\mathbf{n}}_1$ und $\vec{\mathbf{n}}_3$ auf die $\hat{\mathbf{e}}_1$ - $\hat{\mathbf{e}}_2$ - Ebene in Bild 5.26 fallen mit dem Vektor $\vec{\mathbf{n}}_1$ in Bild 7.1 zusammen, wogegen der Vektor $\vec{\mathbf{n}}_2$ in Bild 7.1 mit dem in die

Wie schon angedeutet kann aus dem Fließkriterium des degenerierten Werkstoffmodells Gl. 7.26 keine geschlossen auflösbare Formel für $\Delta^i \lambda$ gefunden werden. Im Gegensatz zum allgemeinen dreidimensionalen Kontinuum muß $\Delta^i \lambda$ selbst bei ideal elastoplastischem Materialverhalten iterativ aus dem Fließkriterium ermittelt werden. Die notwendigen Gleichungen des Standard-Newton-Iterationsverfahrens werden für eine allgemeine Verfestigungsfunktion ${}^i \bar{S}$ zusammengestellt.

Die einaxiale Vergleichsdehnung resultiert aus Gl. 5.203. Nachdem sie bezüglich des plastischen Multiplikatorinkrements $\Delta \lambda$ differenziert worden ist, wird sie gemeinsam mit der Definitionsgleichung des plastischen Verfestigungsmoduls H nach Bild 2.8 in die Ableitung des Fließkriteriums Gl. 7.26 eingesetzt.

$$\frac{dF}{d\Delta\lambda} = {}^i \mathbf{S}^T \mathbf{P} \frac{d}{{}^i \mathbf{S}} - \frac{2}{3} {}^i \bar{S} \left. \frac{d\bar{S}}{d\bar{\epsilon}^p} \right|_{i_t} \frac{d\bar{\epsilon}^p}{d\Delta\lambda} \quad (7.27)$$

$$\frac{d\bar{\epsilon}^p}{d\Delta\lambda} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{{}^i \mathbf{S}^T \mathbf{P} {}^i \mathbf{S}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{{}^i \mathbf{S}^T \mathbf{P} {}^i \mathbf{S}}} \frac{d}{d\Delta\lambda} \left(\frac{1}{2} {}^i \mathbf{S}^T \mathbf{P} {}^i \mathbf{S} \right) \quad (7.28)$$

Schließlich erhält man für die Ableitung der Fließbedingung nach $\Delta \lambda$ eine skalare Gleichung, in der die Matrix ${}^k \mathbf{P}'$ wie nachfolgend definiert ist:

$$\left. \frac{dF}{d\Delta\lambda} \right|_{\Delta\lambda^k} = \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{1,5} {}^i \bar{S} {}^i H \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{{}^i \mathbf{S}^T \mathbf{P} {}^i \mathbf{S}}} \right] \Big|_{\Delta\lambda^k} \frac{1}{2} {}^i \mathbf{S}^{*T} \mathbf{Q} {}^k \mathbf{P}' \mathbf{Q}^T {}^i \mathbf{S}^* - \left(\frac{2}{3} \right)^{1,5} \left[{}^i \bar{S} {}^i H \sqrt{{}^i \mathbf{S}^T \mathbf{P} {}^i \mathbf{S}} \right] \Big|_{\Delta\lambda^k} \quad (7.29)$$

$${}^k \mathbf{P}' = \frac{-2G}{(1 + 2G \Delta\lambda^k)^3} \begin{vmatrix} p_{11} & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \\ & & & & 2 \end{vmatrix} \quad (7.30)$$

wobei

$$p_{11} = \frac{2}{9} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{(1 + 2G \Delta\lambda^k)^3}{\left(1 + \frac{E}{3(1-\nu)} \Delta\lambda^k \right)^3}$$

und

$$p_{ij} = 0 \quad \text{falls} \quad i \neq j \quad \text{ist.}$$

Die Spannungen ${}^i \mathbf{S}$ sind während der Iteration aus Gl. 7.19 oder Gl. 7.20 zu bestimmen.

Numerisches Beispiel zum elastoplastischen Algorithmus .

Gegeben ist linear elastisches - ideal plastisches Material, das dem assoziierten Fließkriterium nach von Mises unterliegen soll. Der Elastizitätsmodul wird zu $E = 1000 \frac{N}{mm^2}$, die Poissonzahl zu $\nu = 0$ und die Fließgrenze zu $\bar{S}_0 = 2 \frac{N}{mm^2}$ angenommen. Der Verzerrungszustand ist folgendermaßen vorgegeben:

$${}^i [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ 2\epsilon_{12} \ 2\epsilon_{13} \ 2\epsilon_{23}]^T = [6. \ 5. \ 2. \ 1. \ 1.]^T \cdot 10^{-3} \quad (7.31)$$

Der Prädiktorspannungszustand des degenerierten Stoffgesetzes ergibt sich zu:

$${}^i [S_{11}^* \ S_{22}^* \ S_{12}^* \ S_{13}^* \ S_{23}^*]^T = [6. \ 5. \ 1. \ 0.5 \ 0.5]^T \quad (7.32)$$

und dessen Komponenten im Hauptspannungsraum:

$${}^i [S_I^* \ S_{II}^* \ S_{III}^*] = [6.689 \ 4.388 \ -0.0767] \quad (7.33)$$

Der Verlauf der lokalen Newton-Iteration zur Bestimmung des plastischen Multiplikatorinkrements ist in Tabelle 3 wiedergegeben.

Schritt k	$F({}^k \mathbf{S})$	$\left. \frac{dF}{d\Delta\lambda} \right _{\Delta^k \lambda}$	$\Delta^k \lambda \cdot 10^3$
1	10.50000	-10222.2	1.02717
2	4.68811	- 3199.1	2.49264
3	1.81817	- 1177.5	4.03680
4	0.56837	- 548.3	5.07343
5	0.10640	- 360.5	5.36856
6	0.00564	- 323.2	5.38599
7	0.00002	- 322.2	5.38605

Tabelle 3 : Konvergenzverlauf der lokalen Newton-Iteration zur Ermittlung des plastischen Multiplikators $\Delta\lambda$

Durch Einsetzen des plastischen Multiplikators $\Delta^i \lambda$ in Gl. 7.19 und Gl. 7.20 kann der gesuchte Spannungszustand ${}^i \mathbf{S}$ errechnet werden, der zusammen mit den elastischen Prädiktorspannungen in den Hauptspannungsraum Bild 7.2 und die Deviatorebenen Bild 7.3 eingezeichnet ist.

$${}^i [S_{11} \ S_{22} \ S_{12} \ S_{13} \ S_{23}]^T = [2.0458 \ 1.8893 \ 0.1566 \ 0.0783 \ 0.0783]^T \quad (7.34)$$

In Hauptspannungskomponenten:

$${}^i [S_I \ S_{II} \ S_{III}] = [2.1480 \ 1.7928 \ -0.0058] \quad (7.35)$$

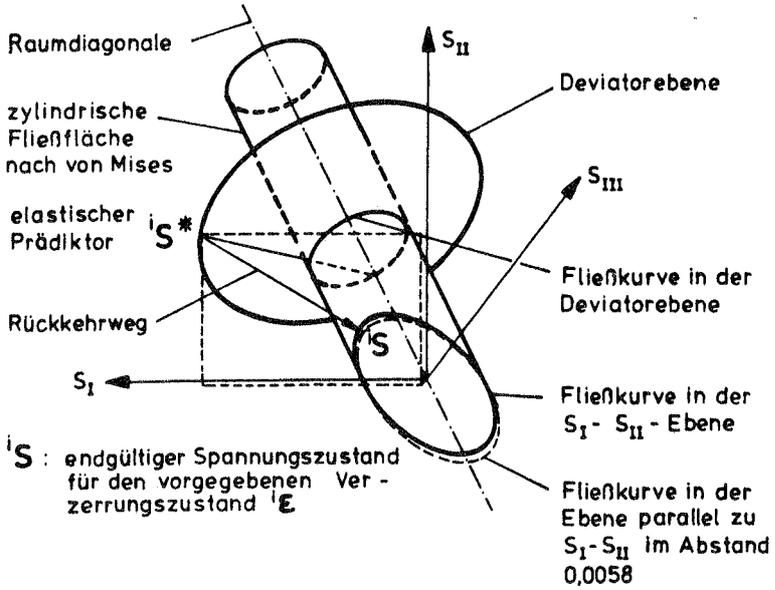


Bild 7.2 : Darstellung des Fließkriteriums nach von Mises im Hauptspannungsraum

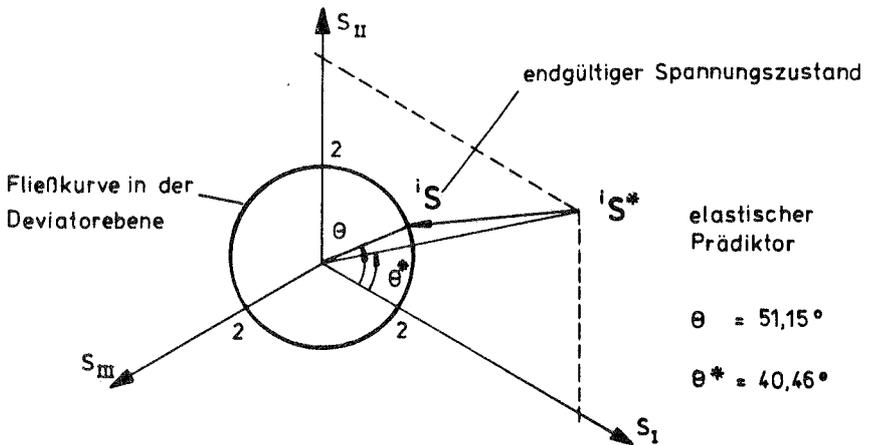


Bild 7.3 : Projektion des Fließkriteriums nach von Mises und der Spannungszustände iS^* und iS in die Deviatorerebenen

7.4 Fehlerabschätzung des Spannungsalgorithmus'

7.4.1 Vorbemerkungen

Der in den letzten beiden Kapiteln behandelte Spannungsalgorithmus soll möglichst als Einschrittmethode für praktische Berechnungen eingesetzt werden. Aufgrund der unbedingten Stabilität des impliziten Prädiktor-Korrektorverfahrens sind beliebig große Zeitschritte zulässig, denn der lokale zeitliche Diskretisierungsfehler ist beschränkt. Fehleranalysen im ebenen Spannungsfall sind in /Schreyer 1979/ und /Simo 1986/ zu finden. Für das degenerierte Werkstoffgesetz der von Mises-Elastoplastizität liegen derartige Analysen zumindest in der gängigen Literatur noch nicht vor.

7.4.2 Numerische Ergebnisse der Fehleruntersuchung

Zur Abschätzung und praktischen Beurteilung des lokalen zeitlichen Diskretisierungsfehlers der Einschrittmethode werden charakteristische Spannungszustände σ für eine numerische Untersuchung ausgewählt. Ihr Fehlermaß ist für eine große Anzahl von Nachbarnpunkten repräsentativ. Die Fehleranalysen werden sowohl für den ebenen Spannungszustand, welcher der Membran- und Biegedeformation der Schale zugrunde liegt, als auch für die Querschubbeanspruchung durchgeführt.

Die in Bild 7.4 markierten Punkte A, B und C auf der von Mises-Fließkurve in der Hauptspannungsebene S_I und S_{II} werden für die Untersuchun-

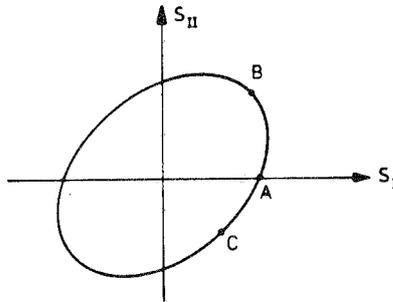


Bild 7.4 : Fließkurve nach von Mises in Abhängigkeit der beiden Hauptspannungskomponenten des ebenen Spannungszustandes mit den repräsentativen Spannungspunkten A, B und C

gen des ebenen Spannungszustandes herangezogen. Die Spannungskomponenten S_{13} und S_{23} für den Querschub sind in den Spannungszuständen der

Punkte A, B und C zu Null gesetzt.

Für die Fehlerbetrachtung des Einschrittalgorithmus' bei Plastifizieren infolge Membrandehnungen und Querschubverzerrungen sind die im Bild 7.5 markierten Spannungspunkte D, E und F ausgesucht worden. Sie liegen auf der Fließkurve in der aus Normal- und Querschubspannung S_{11} bzw. S_{13} aufgespannten Koordinatenebene. Der Fließvorgang in diesem Beanspruchungsfall ist den Degenerationsbedingungen unterworfen. Alle anderen Spannungskomponenten S_{22}, S_{12} und S_{23} in den Zuständen D, E und F werden zu Null angenommen.

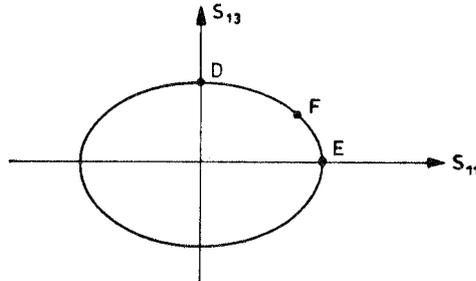


Bild 7.5 : Fließkurve nach von Mises in Abhängigkeit einer Normal- und Querschubspannungskomponente

Der Einfachheit halber wird ideale Elastoplastizität vorausgesetzt. Als Materialkennwerte werden angenommen:

$$\begin{aligned} E &= 30000 \frac{N}{mm^2} \\ \nu &= 0.3 \\ \bar{S} &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Zu den gewählten Anfangswerten ${}^n\epsilon$ und nS werden nun Dehnungszukremente $\Delta^i\epsilon$ so vorgegeben, daß Materialfließen einsetzt. Anhand des koordinierten elastischen Prädiktor - plastischen Korrektungsverfahren werden die zum aktuellen Verzerrungszustand ${}^i\epsilon = {}^n\epsilon + \Delta^i\epsilon$ gehörenden Spannungen iS durch zwei verschiedene Rechnungen ermittelt, nämlich

$$\begin{aligned} &\text{in einem Schritt} \quad n = 1 : \quad {}^iS_{app} \\ &\text{und} \\ &\text{in mehreren Schritten} \quad n = 1 \div 20 : \quad {}^iS_{ex} \end{aligned}$$

Die Berechnung der Werte ${}^iS_{ex}$ erfolgt in ausreichend vielen Schritten, d.h. Subinkrementen, so daß bei einer weiteren Steigerung der Subinkrementanzahl die ersten beiden Mantissenstellen des untenstehenden Fehlermaßes δ

unverändert bleiben. Als Maß der Abweichung des genäherten Spannungszustands ${}^i\mathbf{S}_{app}$ zum als ausreichend exakt betrachteten Wert ${}^i\mathbf{S}_{ex}$ wird die bezogene Euklidische Norm verwendet.

$$\delta := \frac{\sqrt{({}^i\mathbf{S}_{app} - {}^i\mathbf{S}_{ex})^T ({}^i\mathbf{S}_{app} - {}^i\mathbf{S}_{ex})}}{\sqrt{{}^i\mathbf{S}_{ex}^T {}^i\mathbf{S}_{ex}}} 100 \%$$

In den Bildern 7.6 bis 7.13 sind die Höhenlinien des Fehlermaßes δ aufgezeichnet, um das der approximierte Spannungszustand ${}^i\mathbf{S}_{app}$ vom „exakten“ ${}^i\mathbf{S}_{ex}$ abweicht. An den Achsen der Höhenlinienbilder ist jeweils die vorgegebene Komponente des Dehnungsinkrements $\Delta\epsilon_{IJ}$ als Vielfaches der zugehörigen einaxialen Fließdehnung aufgetragen. Für die Normaldehnungskomponente ist es der bezogene Wert $\frac{\Delta\epsilon_{11}}{\bar{\epsilon}}$ mit $\bar{\epsilon} = \frac{\bar{S}}{E}$ und für die Schubdehnungskomponente $\frac{2\Delta\epsilon_{11}}{\bar{\gamma}}$ mit $\bar{\gamma} = \frac{\bar{S}}{\sqrt{3}G}$. Bis auf die abhängige Normaldehnungskomponente in Richtung des Schalendirektors ϵ_{33} , welche durch die Degenerationsbedingungen geregelt wird, sind die anderen drei Dehnungskomponenten unverändert mit null gleichgesetzt worden.

In den Fehlerkarten Bild 7.6 bis Bild 7.8 ist an der horizontalen Achse die Steigerung der Normaldehnungskomponente $\Delta\epsilon_{11}$ und an der vertikalen Achse jene von $\Delta\epsilon_{22}$ als Vielfaches der einaxialen Fließgrenze $\bar{\epsilon}$ aufgetragen.

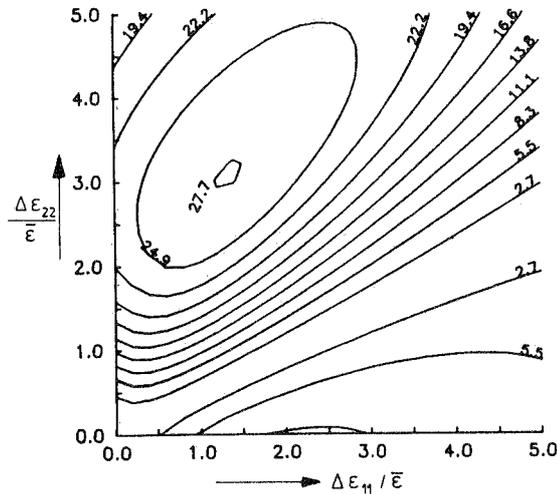


Bild 7.6 : Fehlerkarte für den Ausgangspunkte A

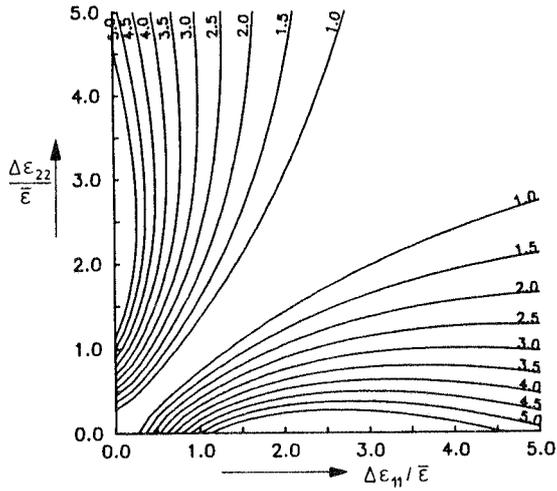
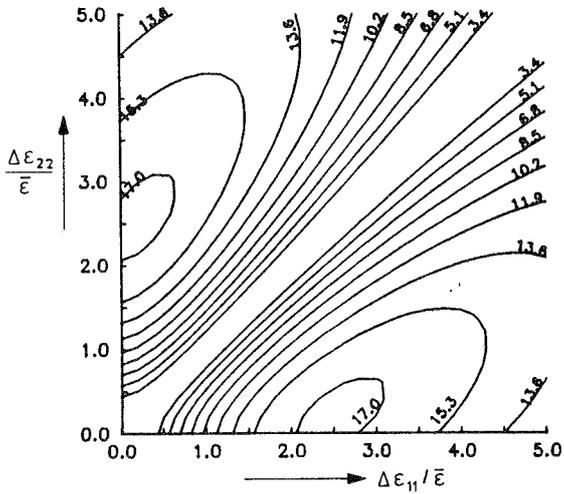


Bild 7.7 : Fehlerkarte für den Ausgangspunkt B



Für die Fehlerabschätzung der Einschrittmethode bei Fließen infolge Querschub sind die Karten Bild 7.9 bis Bild 7.11 angefertigt worden. Zusammen mit der Querschubverzerrung $\Delta\epsilon_{13}$ wird die Normaldehnungskomponente ϵ_{11} in Membranrichtung unter gleichzeitiger Beachtung der Degenerationsbedingungen gesteigert. An der horizontalen Achse ist wie schon zuvor der Steigerungsfaktor für die Normaldehnungskomponente $\Delta\epsilon_{11}$ als Vielfaches der Fließdehnung $\bar{\epsilon}$ aufgetragen, dagegen gibt die vertikale Achse in den drei nachfolgenden Bildern das Anwachsen der Querschubkomponente $2 \Delta\epsilon_{13}$ bezogen auf die Fließgrenze für reinen Schub $\bar{\gamma} = \frac{S}{\sqrt{3}G}$ an.

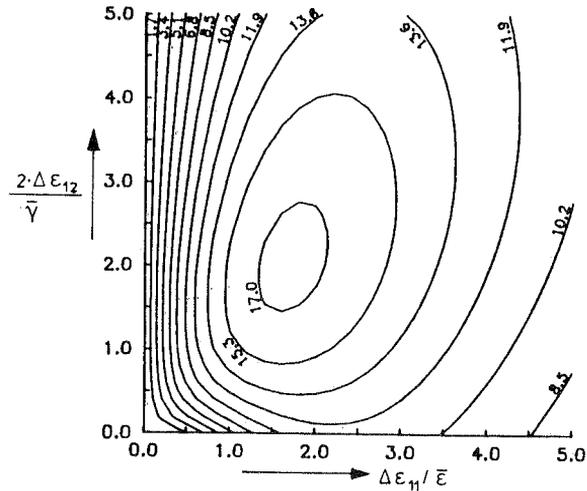


Bild 7.9 : Fehlerkarte für den Ausgangspunkt D

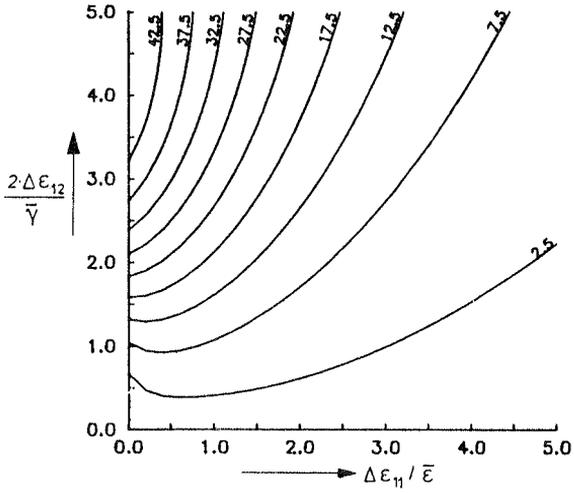


Bild 7.10 : Fehlerkarte für den Ausgangspunkt E

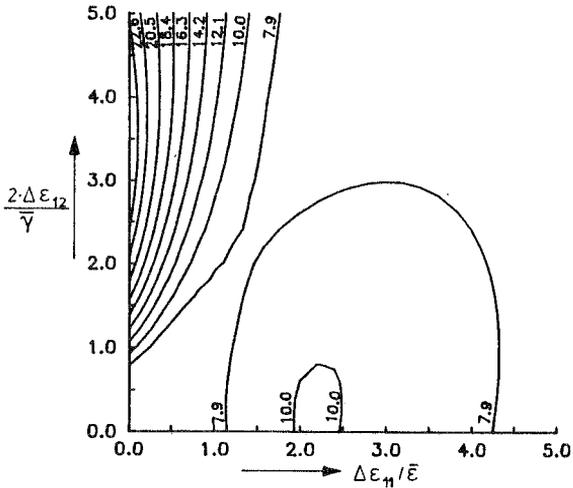


Bild 7.11 : Fehlerkarte für den Ausgangspunkt F

7.4.3 Auswertung der Fehlerkarten

Bei Steigerung der Inkremente der Dehnungskomponenten $\Delta\epsilon_{11}$ und $\Delta\epsilon_{22}$ bzw. $\Delta\epsilon_{11}$ und $\Delta\epsilon_{12}$ wächst der Fehler zuerst an und erreicht sein jeweiliges Maximum, wenn die bezogenen Inkremente in der Größe zwischen zwei und drei liegen. Bei einer weiteren Erhöhung der Inkrementgröße nimmt der Fehler wieder ab und strebt gegen null, falls die Inkrementgröße gegen unendlich geht. Diese Schlußfolgerung scheint nahe zu liegen, wenn man sich auf die Bilder 7.6, 7.8 sowie 7.9 bis 7.11 stützt, in denen aus dem Verlauf der Höhenlinien auf das Maximum geschlossen werden kann. Bestätigt wird diese Aussage auch durch die Bilder 7.12 und 7.13, in denen die numerischen

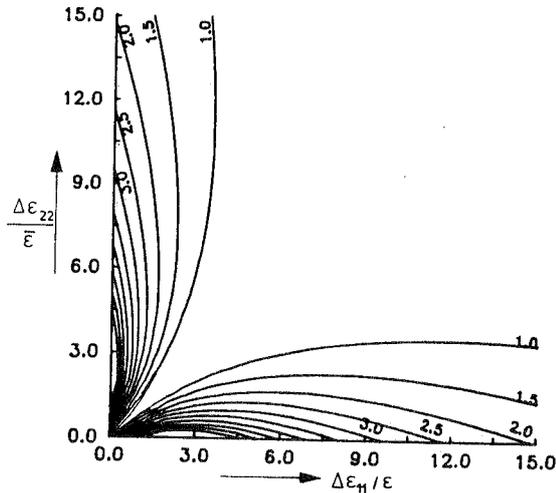


Bild 7.12 : Fehlerkarte für die Ausgangspunkte *B*

Untersuchungen der Fälle *B* und *D* exemplarisch bis auf das Fünfzehnfache der bezogenen Inkrementgrößen ausgedehnt worden sind.

Die Beschränktheit des Fehlers für wachsenden Zeitschritt (Inkrementgröße) ist ein wesentlicher Vorteil des vollständig impliziten Algorithmus'. Der Diskretisierungsfehler verschwindet, wenn das aufgebrachte Spannungsincrement normal zur Fließfläche im jeweiligen Spannungspunkt *A* bis *F* ist. Grundsätzlich gilt die Regel, je weiter das aufgebrachte Spannungsincrement von der Normalen zur Fließfläche abweicht, umso größer ist der Diskretisierungsfehler. Praktische Rechnungen zeigen, daß bei gleichmäßiger Laststeigerung die Richtung des Dehnungsincrements in erster Näherung in

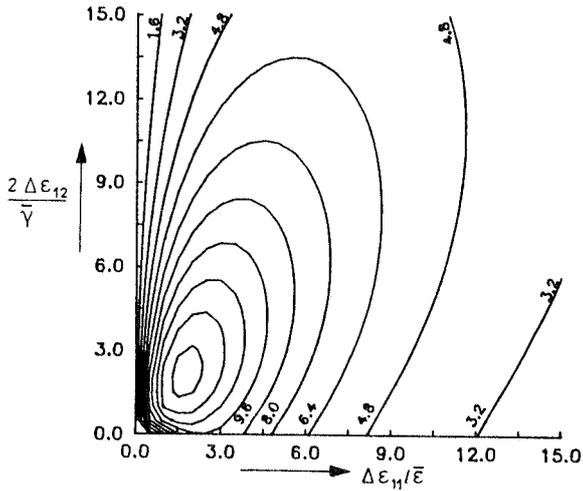


Bild 7.13 : Fehlerkarte für den Ausgangspunkt D

Richtung der Normalen deutet.

Gemessen an den relativ „groben“ Spannungsverläufen praktischer FE-Rechnungen mit Hilfe von Verschiebungsmodellen liefert der Einschritt-Algorithmus Ergebnisse tolerierbarer Genauigkeit für Traglastanalysen, da das Versagenskriterium in jedem Fall exakt erfüllt ist. Lediglich die Wichtung der Komponenten des errechneten Spannungszustandes unterliegt den Unsicherheiten der Größe des Zeitschrittes.

7.5 Konsistente elastoplastische Spannungs-Dehnungsbeziehung

Die Herleitung der konsistent linearisierten Materialsteifigkeit für die J_2 -Fließtheorie bei degenerierten Werkstoffgesetzen läuft analog zum allgemeinen Kontinuum ab. Sinngemäß sind die unter den Gleichungsnummern Gl. 6.14 bis Gl. 6.16 definierten Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{q} und \mathbf{b} auf das degenerierte Kontinuum zu übertragen, bevor sie in die Matrix der konsistenten Tangentenmoduli gemäß Gl. 6.18 übernommen werden. In der Matrix \mathbf{H} Gl. 6.13 sind die zweiten Ableitungen des plastischen Potentials nach Gl. 7.13 enthalten.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \mathbf{S} \cdot \partial \mathbf{S}} \quad (7.36)$$

$$d^i \boldsymbol{\epsilon} = \left[\underbrace{(\mathbf{D}^{-1} + \Delta^i \lambda \mathbf{P})}_{=:\mathbf{H}} + \frac{1}{i\bar{A}} (\mathbf{P}^i \mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S}^{iT} \mathbf{P}) \right] d^i \mathbf{S} \quad (7.37)$$

Nach Inversion obiger Beziehung kann die zum impliziten Spannungsalgorithmus konsistent linearisierte Steifigkeit in Matrizenform geschrieben werden als:

$$d^i \mathbf{S} = \left[\mathbf{H}^{-1} - \frac{(\mathbf{H}^{-1} \mathbf{P}^i \mathbf{S}) \otimes (\mathbf{S}^{iT} \mathbf{P}^i \mathbf{H}^{-1})}{i\bar{A} + \mathbf{S}^{iT} \mathbf{P}^i \mathbf{H}^{-1} \mathbf{P}^i \mathbf{S}} \right] d^i \boldsymbol{\epsilon} \quad (7.38)$$

Der Verfestigungsmodul $i\bar{A}$ ist wie schon in Gl. 6.32 gegeben durch:

$$i\bar{A} = \frac{\left(\frac{2}{3} i\bar{S}\right)^2 iH}{1 - \frac{2}{3} iH \Delta^i \lambda} \quad (7.39)$$

Bei idealer Elastoplastizität verschwindet $i\bar{A}$ mit $iH = 0$. Zu betonen ist, daß obige konsistente Tangentenmatrix nur die fünf unabhängigen Spannungs- und Dehnungskomponenten miteinander verbindet. Im Gegensatz zum allgemeinen Kontinuum kann hier das Matrizenprodukt $\mathbf{H}^{-1} \mathbf{P}$ nicht mehr weiter vereinfacht werden. Die Matrix \mathbf{H}^{-1} kann aufgrund der Hinzunahme der Degenerationsbedingungen weder in einen deviatorischen noch in einen dilatatorischen Teil aufgegliedert werden. Dasselbe trifft auf die Projektionsmatrix \mathbf{P} zu. Der hydrostatische Anteil des Spannungstensors wird beim degenerierten Kontinuum immer vom Fließvorgang mitbetroffen.

8 Traglastuntersuchungen an numerischen Beispielen

8.1 Bemerkungen zur Auswahl der Rechenbeispiele

Mit dem erfolgreichen Einsatz der Quasi-Newton-Verfahren /Brodie 1973/, /Powell 1978/ in der nichtlinearen Strukturberechnung /Matthies 1979/, /Bathe 1980/ steht eine aus der Optimierung bestens bewährte Alternative zu den bestehenden Iterationstechniken aus der Klasse der Newton-Verfahren bereit. Besonders für aufwendige finite Elementmodelle sind bedeutende Rechenvorteile durch den Einsatz der Quasi-Newton-Methoden zu verzeichnen. Die Anpassung der Iterationsmatrix mit Hilfe der Ungleichgewichtskräfte und Verschiebungsinkremente an die Hessematrix des Potentials stellt einen unbedeutenden Beitrag an Rechenzeit für die Faktorisierung der Steifigkeitsmatrix dar.

Die untersuchten Beispiele sind danach ausgewählt worden, daß ein reines Membranproblem (kreisförmig ausgesparte Membran), ein reines Biegeproblem (allseitig gelagerte Platte unter gleichförmig verteilter Querlast) und zwei sowohl geometrisch als auch physikalisch nichtlineare Schalenprobleme zu Vergleichsrechnungen herangezogen werden.

Insbesondere bei geometrisch und physikalisch nichtlinearen Schalenberechnungen wird häufig eine ausgesprochen langsame Konvergenz der Norm der Ungleichgewichtskräfte beobachtet, selbst wenn im Newton-Verfahren an jedem Iterationsschritt die mit dem infinitesimalen Werkstoffgesetz aufgestellte Tangentensteifigkeitsmatrix verwendet wird. Alle nachfolgenden Beispiele sind mit dem am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart entwickelten FORTRAN-Programm NISA80 /NISA80 1983/ bearbeitet worden, das von Schweizerhof /Schweizerhof 1986/ um die Quasi-Newton-Methoden erweitert wurde. In allen Rechnungen mit konstanter Bogenlänge ist die Bedingungsgleichung für die vorgeschriebene Bogenlänge mit der dafür in /Schweizerhof 1986/ vorgeschlagenen Linearisierung iterativ angenähert worden.

Ziel der numerischen Untersuchungen ist es, einerseits die verbesserten Konvergenzeigenschaften der Iteration mit konsistenter Tangentensteifigkeit im Vergleich zur Struktursteifigkeit mit dem elastoplastischen Stofftensor der Fließtheorie zu demonstrieren. Zum anderen soll die Leistungsfähigkeit des Standard-Newton-Verfahrens mit den Quasi-Newton-Methoden bei physikalischer Nichtlinearität verglichen werden. Von besonderem Interesse ist dabei die Größe des Konvergenzintervalls (im englischen Schrifttum auch mit

„domain of attraction“ bezeichnet), innerhalb dessen eine Iterationsstrategie gerade noch zur gesuchten Lösung strebt, und die Konvergenzgeschwindigkeit, welche die Anzahl der notwendigen Iterationen und damit den gesamten numerischen Aufwand bestimmt.

Als Bezeichnungsweise wird in diesem Kapitel folgendes vereinbart:

cons.N.R. : Standard-Newton-Raphson-Verfahren mit der in Kapitel 7 hergeleiteten konsistenten Tangentensteifigkeit.

class.N.R. : Newton-Raphson-Verfahren mit Neuaufbau der Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt unter Verwendung des augenblicklichen Materialsteifigkeitstensors gemäß der Fließtheorie.

mod.N.R. : Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren unter Beibehaltung der am Anfang des Lastschritts neu aufgestellten Steifigkeitsmatrix während der Iteration.

Die in NISA80 zur Verfügung stehenden Formeln der Quasi-Newton-Methoden sind mit Hinweis auf ihre Verfasser durch **BFGS** /Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno / , **DFP** /Davidon-Fletcher-Powell/ , **Broyden** und **Davidon** abgekürzt.

8.2 Kreisförmig ausgesparte Membran

In zahlreichen Publikationen ist die kreisförmig ausgesparte Membran zum Testbeispiel für Elastoplastizität des ebenen Spannungszustandes geworden. Experimentelle /Theocaris 1964/ und numerische Ergebnisse liegen in /Marcal 1969/, /Zienkiewicz 1969/, /Bathe 1976/, /Hinton 1980/, /Simo 1986/ vor. Ein Viertel der ebenen Struktur wird mit 132 bilinearen Elementen idealisiert Bild 8.1. Das Werkstoffverhalten soll dem assoziierten von Mises Gesetz mit linearer Verfestigung folgen.

Die Last ist in drei relativ großen Lastschritten (Lastfaktor $\lambda = 1, 1, 1, 4$ und $1, 7$) auf die Membran aufgebracht worden. Die Last-Verschiebungskurve in Bild 8.2 zeigt den Verlauf der Horizontalverschiebung des mit A markierten Punktes am Rand der Aussparung in Bild 8.1. Die Größe der Fließzone ist in Prozent der gesamten Fläche der Membran an jedem Lastschritt zusätzlich in das Last-Verschiebungsdiagramm aufgenommen.

Als Toleranzschranken für die Konvergenz sind $U_{tol} = 10^{-3}$ für die euklidische Norm der Verschiebunginkremente und $R_{tol} = 10^{-1}$ für die Ungleichgewichtskräfte vorgegeben. Die Anzahl der benötigten Gleichgewichtsite-

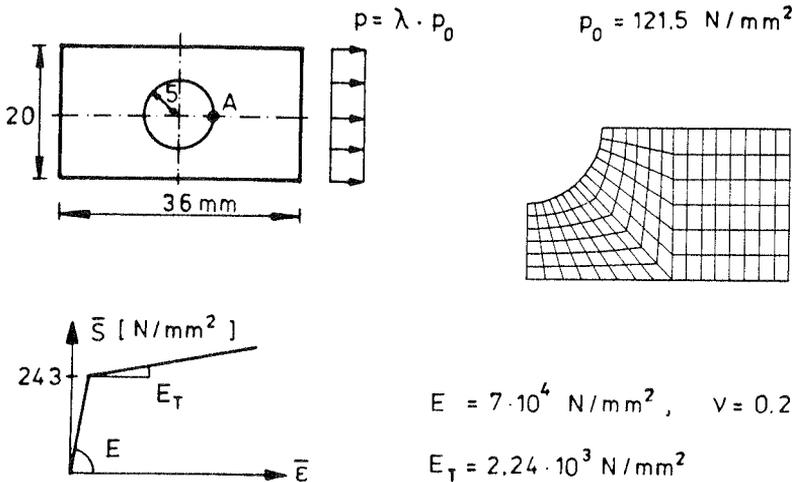


Bild 8.1 : Geometrie mit Belastung, FE-Modell und einaxiales Spannungs- Dehnungsdiagramm für die kreisförmig ausgesparte Membran

rationen ist für insgesamt sieben verschiedene Strategien in Tabelle 4 zusammengestellt, in welcher auch die aufgewendete Rechenzeit der CPU in Relation zum Standard-Newton-Verfahren eingetragen ist.

Neben der cons.N.R.-Technik haben nur noch das BFGS- und das Davidon-Verfahren in allen drei Lastschritten konvergiert. Mit der modifizierten Newton-Raphson-Methode können selbst nach 25 Iterationsschritten die gewählten Toleranzschranken nicht unterschritten werden, da bereits wesentliche Teile der Membran auf dem angestrebten Lastniveau plastisch sind und als Iterationsmatrix die elastische Steifigkeit eingesetzt wird. Dieses äußert sich in der fast konstanten Konvergenzgeschwindigkeit mit monotoner Abnahme der Verschiebungs-, Ungleichgewichtskräfte- und Energienorm.

In allen Iterationsverfahren brachte ein zusätzlich durchgeführter „Line search“ selbst bei kleiner Toleranzschranke keine nennenswerte Verbesserung der Konvergenz. Die divergenten Verfahren zeigten im allgemeinen oszillatorisches Verhalten.

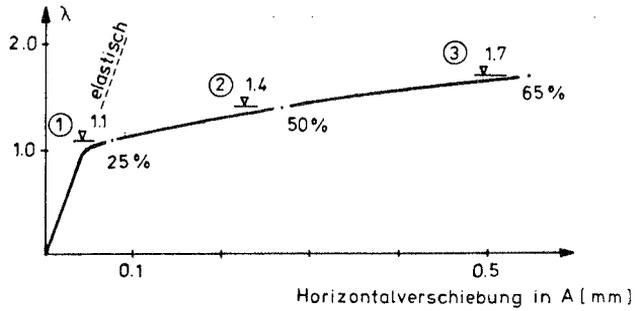


Bild 8.2 : Last-Verschiebungsdiagramm des Punktes A mit Angaben zur Größe der Fließzone

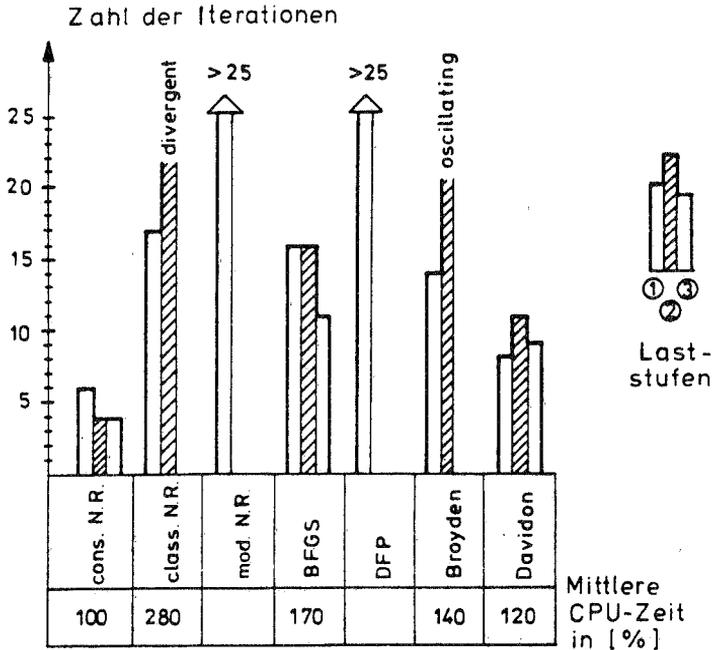


Tabelle 4 : Benötigte Iterationen zur Traglastanalyse der Membran

8.3 Quadratplatte unter Querlast

Das Tragverhalten der Quadratplatte unter gleichförmiger Querlast ist als Beispiel für ein elastoplastisches Biegeproblem ausgesucht worden. Um keine Membranspannungen zu wecken, wird geometrische Linearität vorausgesetzt, obwohl eine vollkommen nichtlineare Strukturanalyse angesichts der beträchtlichen Durchbiegungen geboten wäre. Die Tragfähigkeit der Platte wird deshalb nur durch die erschöpfte Biegezugwiderstandsfähigkeit des durchplastifizierten Querschnitts beschränkt, der aus ideal elastoplastischem Material bestehen soll.

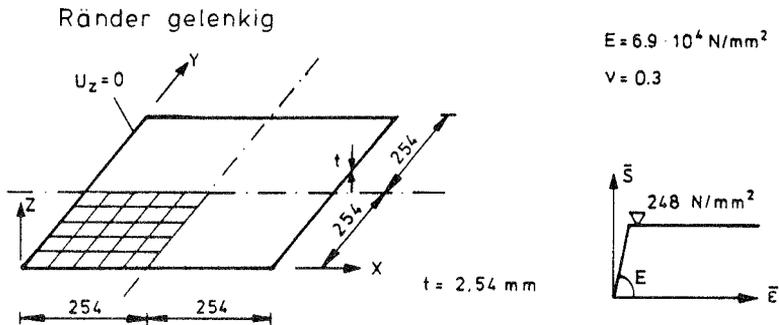


Bild 8.3 : Quadratplatte - Geometrie (Abmessungen in mm), Elementmodell und einaxiales Spannungs-Dehnungsdiagramm

Die Struktur ist mit 5×5 biquadratischen Lagrange-Elementen und sieben Schichten über die Querschnittshöhe diskretisiert worden. Die Last wird in zwei Schritten (1. Schritt: 75 % der Traglast) bis zur theoretischen Traglast nach /Sawczuk 1963/ gesteigert. Im Last-Verschiebungdiagramm Bild 8.4 ist die absolute Lastamplitude q über der Mittendurchsenkung der Platte aufgetragen.

In Tabelle 5 ist die Anzahl der aufgetretenen Iterationen von allen untersuchten Methoden aufgeführt. Das ausgezeichnete Konvergenzverhalten der Iteration mit konsistenter Tangentensteifigkeit zeigt sich vor allem im zweiten Lastschritt, an dem die anfänglich steil verlaufende Traglastkurve plötzlich sehr flach wird und große Zonen der Struktur fast vollständig durchplastifizieren. In vergleichbaren Untersuchungen /Bergan 1972/, /Bäcklund 1973/ und /Sättele 1980/ wurden für dieses Lastinkrement eine Reihe weiterer Zwischenschritte eingeschaltet, um die Traglast zu erreichen. Im Gegensatz zum Newton-Verfahren mit der Steifigkeit nach dem infinitesimalen Werk-

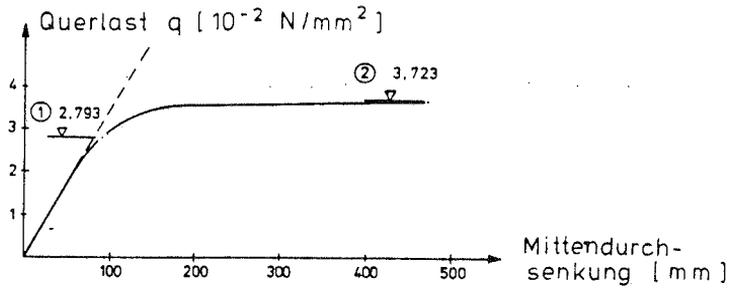


Bild 8.4 : Last-Verschiebungsdiagramm der Quadratplatte

stoffgesetz haben sowohl die BFGS- als auch die Davidon-Methode zu den vorgegebenen Toleranzschranken $U_{tol} = 10^{-3}$ und $R_{tol} = 10^{-1}$ konvergiert.

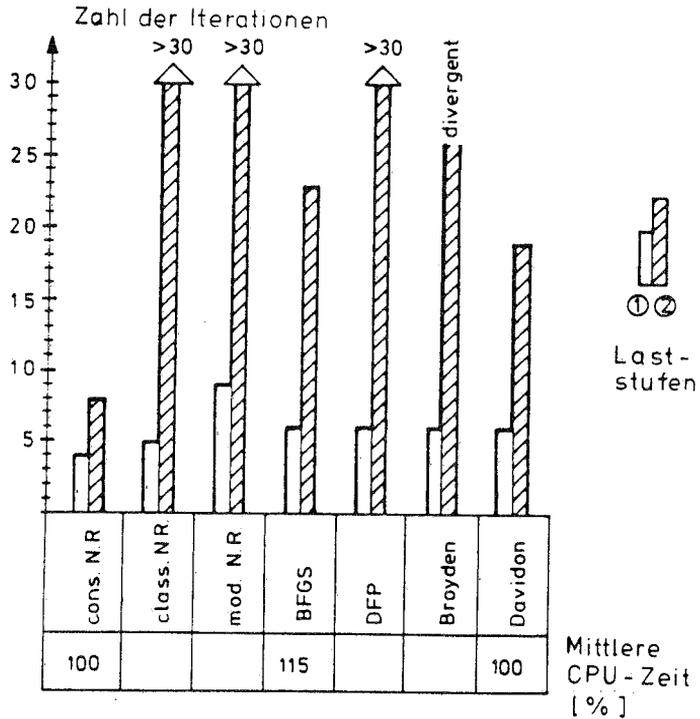


Tabelle 5 : Iterationszahl der lastkontrollierten Tragfähigkeitsanalyse der Platte

8.4 Flaches Zylinderschalenfeld

Das im Schrifttum unter der Bezeichnung „Scordelis-Lo Roof“ bekannte Zylinderschalenfeld gilt als beliebtes Testbeispiel zur Untersuchung von Strukturen mit zusammenwirkender Lastabtragung über Biege- und Membranbeanspruchung. Mit zunehmender Lastaufbringung wird das zylindrische Panel gegen die Strukturmitte hin flacher, wobei sich der Krümmungsradius des Schalenfeldes in Umfangsrichtung vergrößert. Der Membranzustand wird abgebaut, wogegen die Biegebeanspruchungen sowohl in Längs- als auch in Querrichtung stark anwachsen. Das Schalenviertel wird mit 5×5 biquadratischen Serendipity-Elementen diskretisiert. Die numerische Integration nach Gauss in der Schalenfläche ist von der Ordnung „zwei“. Über die Schalendicke liegen sieben Punkte für die Integration nach Simpson vor.

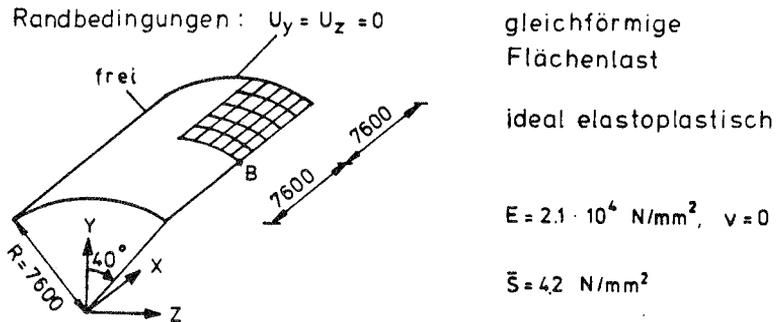


Bild 8.5 : Zylinderschalenfeld - Geometrie (Abmessungen in mm) und Elementnetz

Das aus einer sowohl geometrisch als auch materiell nichtlinearen Rechnung stammende Traglastdiagramm zwischen der Vertikalverschiebung des Randknotens B in Feldmitte und der absoluten Lastintensität q ist in der nächsten Figur abgebildet. Das Last-Verschiebungsdiagramm gibt zudem Auskunft über die prozentuale Anzahl durchplastifizierter Integrationsstellen sowie über die Größe der Lastschritte.

Mit dem konstanten Bogenlängenverfahren wird die Traglast in nur vier Laststufen überschritten. Die Anzahl der erforderlichen Iterationen ist in Tabelle 6 zusammen mit der verbrauchten CPU-Zeit festgehalten. Der direkte Vergleich zwischen der Newton-Raphson-Iteration mit konsistenter Steifigkeit und jener mit ratenabhängigem Werkstoffgesetz spricht für die Vorteile des konsequent linearisierten Algorithmus'.

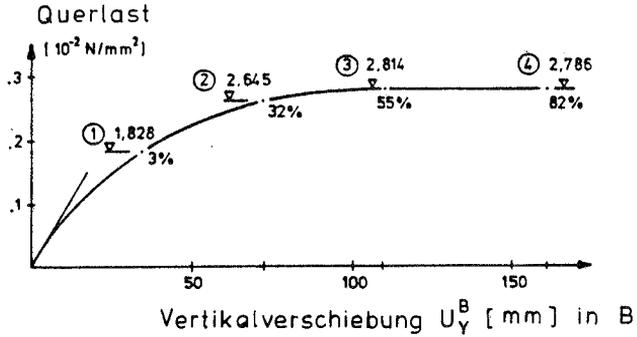


Bild 8.6 : Last-Verschiebungsdiagramm des Schalenrandes in Feldmitte

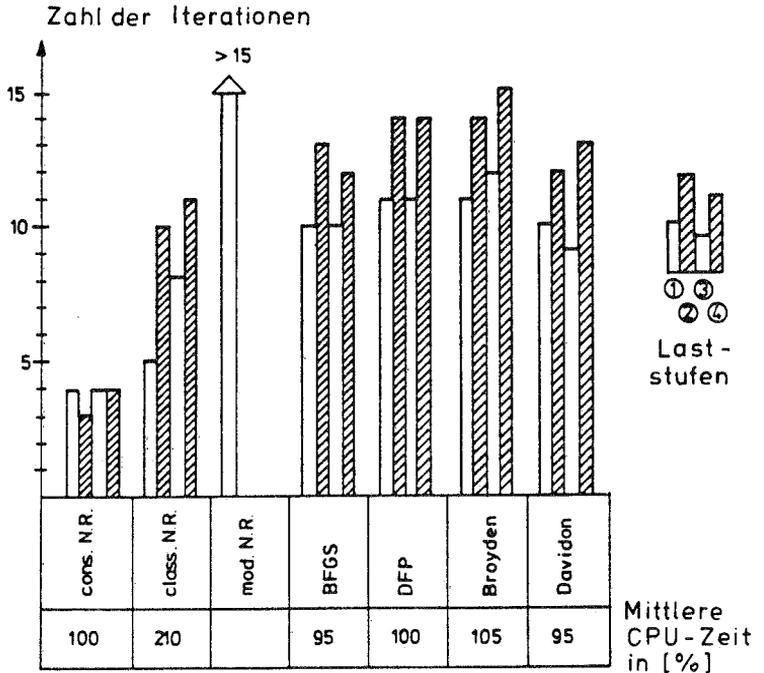


Tabelle 6 : Vergleich der Zahl benötigter Iterationszyklen zur Traglastanalyse des flachen Panels

8.5 Flüssigkeitsgefüllte Rotationsschale

Zylinder-Torus-Kegel nach /Stegmüller 1983/

Das bereits in /Stegmüller 1985/ ausführlich analysierte Rotationsschalenmodell in Bild 8.7 wird als abschließendes Beispiel für elastoplastische Traglastuntersuchungen herangezogen. Es setzt sich aus einem Zylinder mit aufgesetztem Kegelstumpf zusammen, deren Übergangsbereich aus einem Torus, bestehend aus einzelnen Kegelschüssen, gebildet wird. Die stählerne Konstruktion wird durch den konstanten Innendruck p_i und die zeitlich veränderliche Zusatzlast P in axialer Richtung beansprucht - siehe Bild 8.8.

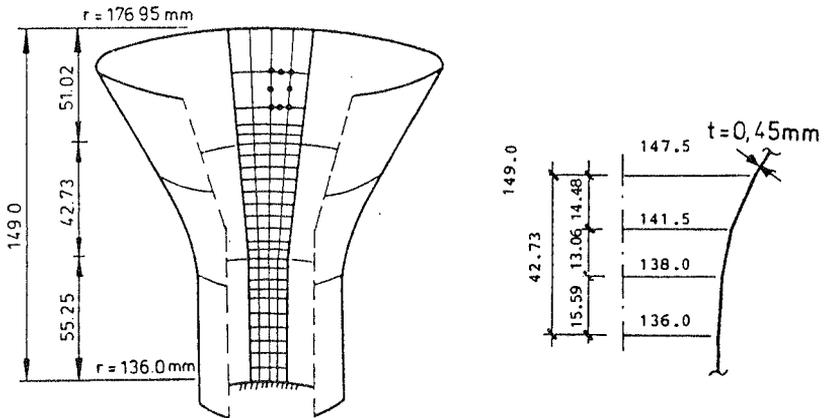


Bild 8.7 : Geometrie der aufgeschnittenen Rotationsschale (Maße in mm) aus /Stegmüller 1985/

Mittels der in /Stegmüller 1985/ gewählten Modellierung der imperfekten Struktur (Imperfektionsamplitude w der 1. Eigenform: $\frac{w}{t} = 1.0$) mit achtknotigen Schalenelementen und gleichförmig reduzierter Integration ist eine Traglastanalyse für die Steigerung der axialen Auflast P bei konstant gehaltenem Innendruck von $p_i = 0,264 \frac{N}{mm^2}$ durchgeführt worden. Der 15° -Ausschnitt der Rotationsschale ist mit 4×25 Elementen und sieben Schichten diskretisiert worden. Die Lagerbedingungen entsprechen denjenigen entlang von Rändern auf Symmetrieebenen.

Die anwachsende Axiallast P verursacht im Torus der imperfekten Schale größer werdende Biegebeanspruchungen (siehe Bild 8.9) mit beträchtlichen plastischen Deformationen. Schließlich wird das Versagen des Behälters im Torusbereich eingeleitet, wo die Biegekapazität des Querschnitts

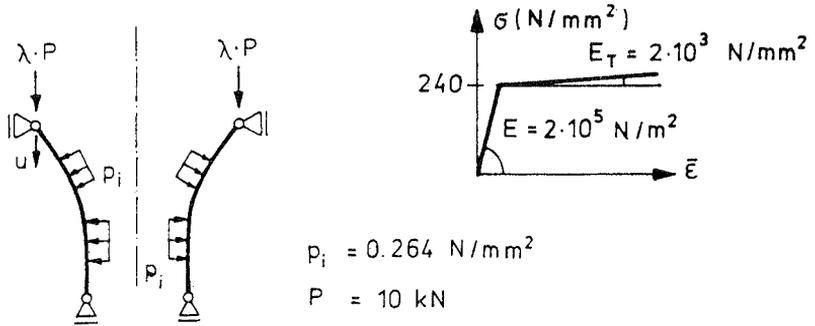


Bild 8.8 : Belastung und einaxiales Spannungs-Dehnungsdiagramm

durch die Fließgrenze des Stahls nach oben beschränkt ist. Zusätzlich wird das verbleibende plastische Widerstandsmoment durch den biaxialen Membranspannungszustand stark vermindert, dessen Komponenten in Umfangs- und Meridianrichtung in der Größenordnung von $+80 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ bzw. $-85 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$ liegen. Wegen des unterschiedlichen Vorzeichens der Normalspannungskomponenten in Anwesenheit kleiner Schubspannungen liegt der Membranspannungszustand im ungünstigen Zug-Druck-Bereich der Fließkurve (siehe Bild 7.4), so daß am Beginn der Plastifizierung keine der Normalspannungskomponenten im Zylinderkoordinatensystem die einaxiale Fließgrenze erreicht.

Das Last-Verschiebungsdiagramm in Bild 8.10 ist durch eine geometrisch und physikalisch nichtlineare Rechnung erzeugt worden. Es zeigt den Lastfaktor λ in Abhängigkeit der Axialverschiebung des oberen Randes an insgesamt 19 Zeitschritten. Mit der wenig veränderten Bogenlänge zwischen aufeinanderfolgenden Zeitschritten sind 3 bis 5 Newton-Raphson-Iterationen mit konsistenter Tangentensteifigkeit auf jeder Laststufe zu verzeichnen.

Wegen des verkleinerten Konvergenzbereichs der Quasi-Newton-Methoden muß die Bogenlänge in der zweiten Rechnung für den Effizienzvergleich auf die Hälfte ihres ursprünglichen Wertes verkleinert werden, da schon im vierten Lastschritt keine Konvergenz mit der alten Bogenlänge mehr zu erzielen war. Eine noch weitere Reduktion der Schrittgröße, z.B. auf ein Viertel des vorigen Wertes, macht die Iteration mit den Quasi-Newton-Methoden unattraktiv, denn an jedem der vier Zwischenschritte muß die Tangentensteifigkeit mindestens einmal aufgestellt werden, so daß der Rechenzeitvorteil

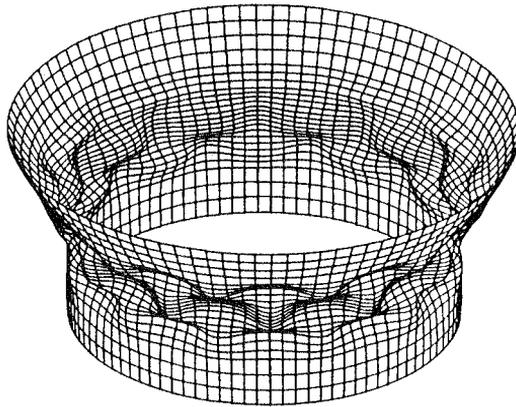


Bild 8.9 : Deformationszustand im Traglastbereich (Vergrößerungsfaktor für die Verschiebungen: 10)

gegenüber der Standard-Newton-Technik verloren geht. Von vorrangigem Interesse in dieser zweiten Rechnung mit vierzehn Zeitschritten ist das Konvergenzverhalten der Quasi-Newton-Methoden in der Nähe der Traglast und zu Beginn des überkritischen Bereichs, wo das Versagen der Struktur von ausgedehnten Fließzonen und Durchplastifizieren des Querschnitts infolge Biegebeanspruchung begleitet wird.

Das Standard-Newton-Verfahren konvergiert in der zweiten Rechnung an jedem der vierzehn markierten Zeitschritte nach drei bis vier Iterationen innerhalb der unverändert gelassenen Toleranzschranken (Verschiebungsnorm $U_{tol} = 10^{-3}$ und Kräfteform $R_{tol} = 10^{-1}$). Insgesamt sind 49 Iterationszyklen angefallen.

Alle vier untersuchten Quasi-Newton-Methoden haben in den ersten sechs Zeitschritten bis zur Traglast nach 4 bis 9 Gleichgewichtssiterationen pro Laststufe die vorgegebenen Toleranznormen unterschritten. Unmittelbar nach Überschreiten der Traglast steigt auf dem siebten Lastniveau die Iterationszahl auf 14 Zyklen für die BFGS- und Davidon- Methode bzw. 22 Zyklen im Fall des „Broyden-updates“ an. Bei der Gleichgewichtssiteration mit Hilfe der DFP-Formel wird in diesem Zeitschritt eine sehr starke Divergenz von Beginn an beobachtet. In den anschließenden Untersuchungen ist dieser Formel keine weitere Beachtung mehr geschenkt worden.

Zwischen den Lastschritten 8 bis 14 weist die verformte Geometrie der

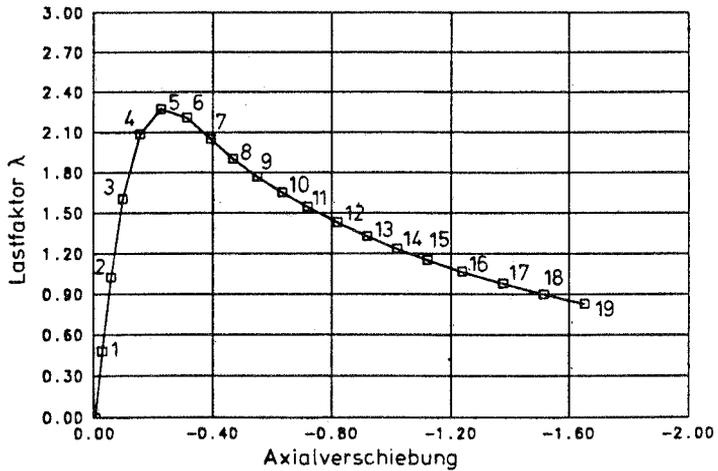


Bild 8.10 : Lastfaktor in Abhängigkeit der Axialverschiebung des oberen Randes

Struktur ausgeprägte Biegedeformationen in den Beulen des Torusbereichs auf, so daß große plastische Verzerrungen an den Außenfasern des Stahlquerschnitts auftreten. Der Querschnitt beginnt unter zunehmenden Biegekrümmungen allmählich durchzuplastifizieren, wodurch die Biegesteifigkeit stark abfällt.

Unter der weiterhin konstant gehaltenen Bogenlänge steigt die Iterationszahl bei den drei verbliebenen Quasi-Newton-Strategien (BFGS-, Broyden- und Davidon-Methode) auf 14 bis 20 pro Laststufe in den Zeitschritten 8 bis 10 an. Bei nur unmerklichen Änderungen des Lastfaktors nach den ersten Iterationszyklen streben die Euklidischen Normen für die Verschiebungsinkremente und Ungleichgewichtskräfte nur sehr langsam gegen den mit null identischen Grenzwert. Kleine Konvergenzgeschwindigkeiten bei der Iteration mit „Sekantenmatrizen“ können häufig im Zusammenhang mit materieller Nichtlinearität beobachtet werden.

Das auf der BFGS-Methode beruhende Iterationsverfahren hat auf der Laststufe 13 selbst nach 25 Iterationen noch nicht die Konvergenzkriterien erfüllt. Um trotzdem weiterrechnen zu können, wird die Bogenlänge für das BFGS-Verfahren nochmals um die Hälfte reduziert. In den anschließenden vier Schritten sind 5 bis 6 Iterationen pro Laststufe ausreichend. Das iterative Vorgehen gemäß der Broyden- und Davidon-Technik führt zwischen den Laststufen 11 und 14 nach 9 bis 15 Iterationen zum Ziel.

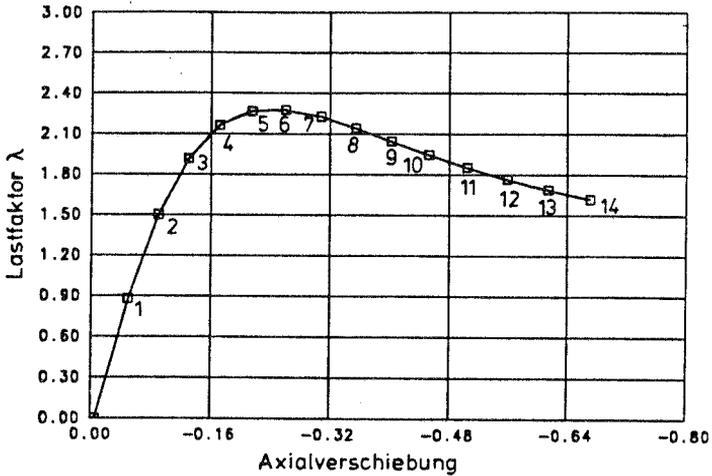


Bild 8.11 : Lastverschiebungsdiagramm aus der Vergleichsrechnung der Newton-Raphson-Iteration mit den Quasi-Newton-Methoden

Die benötigte CPU-Zeit für die ersten 12 Lastschritte beträgt für die Iteration mit der Davidon-Methode 134 % und mit dem BFGS- und Broyden-Verfahren 145 % der Rechenzeit des Standard-Newton-Verfahrens. Berücksichtigt man, daß die Schrittweite beim Standard-Newton-Verfahren verdoppelt werden kann, ohne daß eine nennenswerte Anzahl zusätzlicher Iterationen pro Lastschritt anfällt, so spricht die damit eingesparte Rechenzeit für die Newton-Raphson-Methode zur Analyse von nichtlinearen Problemen in der Größenordnung bis zweitausend Unbekannte.

9 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

In der vorliegenden Arbeit ist die effiziente Formulierung und konsistente Linearisierung der virtuellen Arbeitsgleichung zur Traglastuntersuchung mit Hilfe der finiten Elementmethode behandelt worden. Ziel der methodischen Entwicklung ist die numerische Analyse dünnwandiger Flächentragwerke, welche finiten Rotationen unterzogen werden. Das Materialverhalten kann in Form geschwindigkeitsabhängiger Stoffgesetze vorliegen, so daß elastoplastische Deformationen der Schale miterfaßt werden. Zur Lösung der nicht-linearen strukturmechanischen Gleichungen wird auf das Newton-Verfahren zurückgegriffen.

Die inhaltlichen Schwerpunkte der Arbeit werden nochmals zusammengefaßt, wobei die folgenden Aussagen festgehalten werden können:

- Die effiziente Implementierung der Matrizen in Rechenprogramme zur iterativen Lösung der Gleichgewichtsbeziehungen nach dem Standard-Newton-Verfahren ist demonstriert worden. Die günstigste Sequenz zur Ausführung der notwendigen algebraischen Operationen ergibt sich aus den vollständig linearisierten Gleichgewichtsbedingungen.
- Zur Beschreibung finiter Deformationen hat sich neben der totalen Lagrange-Beschreibung vorallem die mitgehende Lagrange-Formulierung etabliert. Im Zuge der konsistenten Linearisierung ist die mitgehende Lagrange-Formulierung als materielle Beschreibung identifiziert und gegen die Eulersche Darstellung abgegrenzt worden. Zwischen der mitgehenden und der totalen Beschreibung besteht kein konzeptioneller Unterschied, da dieselben Werkstoffannahmen zugrunde liegen.
- Bei der Formulierung der Schalengleichungen wird an der affinen Darstellung des Verschiebungsfeldes in globalen (kanonischen) Koordinaten festgehalten. Zur präziseren mechanischen Beurteilung des Schalenverhaltens fußt die hier vorgeschlagene Beschreibung auf lokalen, kartesischen Tensorkoordinaten, mit welchen die Kräfte und Deformationen in Membran-, Querschub- und Biegeaktion aufgeteilt werden. Diese Koordinatenwahl ist des weiteren für die Einbeziehung der statischen Hypothesen in die Feldgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums bei geschwindigkeitsabhängigen Werkstoffen von rechen-technischem Vorteil, da auf die vierstufige Tensortransformation des konstitutiven Gesetzes verzichtet werden kann.

- Während des formalen Linearisierungsprozesses entstehen aus den kinematischen Variablen zur Lagebeschreibung des Schalendirektors im Vergleich zum allgemeinen Kontinuum zusätzliche Anteile in der Steifigkeitsmatrix. Diese Zusatzterme sind von erheblichem Einfluß für den Iterationsverlauf und die begleitenden Eigenwerte bei finiten Rotationsvorgängen von Schalen.
- Die Erfassung physikalischer Nichtlinearitäten von Strukturen basiert häufig auf geschwindigkeitsabhängigen Werkstoffannahmen, unter welche auch die Fließtheorie fällt. Daher sind verschiedene Zeitintegrationsverfahren zur Lösung der elastoplastischen Anfangswertaufgabe untersucht worden, wobei sich insbesondere das elastische Prädiktorplastische Korrekturverfahren in Form einer impliziten Einschrittmethode anbietet. Dieses Lösungskonzept verbindet die Vorteile lokaler Diskretisierungsfehler von akzeptabler Größe mit unbedingter numerischer Stabilität bei gleichzeitig minimalem Rechenaufwand. Die spezielle Anpassung des Spannungsalgorithmus auf die Erfordernisse der J_2 -Fließtheorie erlaubt selbst im Fall der linearen Verfestigung die geschlossene Auflösung der diskretisierten Werkstoffgleichungen nach ihren Unbekannten. Obwohl das Zeitintegrationsverfahren vom impliziten Typ ist, kann beim dreidimensionalen Kontinuum auf die iterative Gleichungslösung im Fall der linearen Verfestigung verzichtet werden. Zumindest mit multilinearem Verfestigungsverlauf lassen sich die meisten ingenieurpraktischen Aufgabenstellungen zuverlässig beschreiben, so daß die Anzahl der auszuführenden numerischen Operationen für die implizite Methode in jedem Inkrement sogar in die Größenordnung der bekannterweise einfacher zu lösenden Gleichungen der expliziten Methoden kommt.
- Das allgemein gehaltene Lösungskonzept zur Integration der Stoffgleichungen gestattet es, die statischen Hypothesen der Schalentheorie exakt zu erfüllen, da sie sich in geschlossener Form in den Spannungsalgorithmus der J_2 -Theorie einbeziehen lassen. Die in der Regel iterative Spannungsneuberechnung mit impliziten Verfahren kann auf die numerische Lösung der Konsistenzgleichung reduziert werden.
- Um die Vorteile des Newton-Verfahrens auszuschöpfen, ist es notwendig das Zeitintegrationsverfahren für die konstitutiven Gleichungen im Linearisierungsprozeß zu berücksichtigen. Es ist gezeigt worden, da sich in Abhängigkeit des verwendeten Spannungsalgorithmus'

Unterschiede zwischen der konsistent linearisierten Spannungs-Dehnungsbeziehung und dem geschwindigkeitsabhängigen Stoffgesetz der Fließtheorie ergeben. Das überlegene Konvergenzverhalten mit konsistenten Steifigkeitsmatrizen des Standard-Newton-Verfahrens wird an numerischen Beispielen im Vergleich zu Iterationsmatrizen mit dem konstitutiven Gesetz der Fließtheorie deutlich und unterstreicht die Effizienz und Wettbewerbsfähigkeit der Standard-Newton-Methode als Lösungsalgorithmus.

Die Untersuchung weiterer Beispiele zur Beurteilung der Effizienz der eingesetzten Newton-Methoden bleibt zukünftigen Forschungsaufgaben vorbehalten. Insbesondere ist die Wirtschaftlichkeit des Standard-Newton-Verfahrens zur Lösung elastoplastischer Strukturprobleme mit einer sehr großen Anzahl von Knotenverschiebungen ebenso von Interesse, wie auch ein Vergleich zu den Verfahren mit iterativer Ermittlung der inversen Steifigkeitsmatrizen angestellt werden sollte.

Für schalenartige Strukturen ist die Entwicklung einer leistungsfähigen Elementformulierung für große Deformationen nach der eindirektionalen Cosserat-Theorie ein naheliegendes Forschungsziel. Die Weiterentwicklung der konstitutiven Algorithmen zur Ermittlung der Spannungsergebnisse bei elastoplastischen Schalenberechnungen ist ein wichtiger Schritt zur Effizienzsteigerung in der numerischen Strukturanalyse.

Schrifttum

- [Ahmad68] S. Ahmad, B.M. Irons und O.C. Zienkiewicz. Elements with Particular Reference to Axi-symmetric Problems. In *Matrix Meth. Struct. Mech.*, Wright-Patterson A.F.Base, 2nd Conf., Ohio, 1968.
- [Backhaus83] G. Backhaus. *Deformationsgesetze*. Akademieverlag, Ostberlin, 1983.
- [Bäcklund73] J. Bäcklund. *Finite Element Analysis of Nonlinear Structures*. Dissertation, Chalmers University, Göteborg, 1973.
- [Başar85] Y. Başar und W.B. Krätzig. *Mechanik der Flächentragwerke*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1985.
- [Başar86] Y. Başar. Eine konsistente Theorie für Flächentragwerke endlicher Verformungen und deren Operator Darstellung auf variationstheoretischer Grundlage. *Zamm* 66, 7:297–308, 1986.
- [Başar88] Y. Başar und Y. Ding. Finite rotation elements for the nonlinear analysis of shell structures. In Vorbereitung, 1988.
- [Bathe73] K.J. Bathe und E.L. Wilson. NONSAP - A general finite element program for nonlinear dynamic analysis of complex structures. In *Structural Mechanics in Reactor Technology*, Springer Verlag, Paper M3/1, Berlin, September 1973.
- [Bathe75] K.J. Bathe, E. Ramm und E.L. Wilson. Finite element formulation for large deformation dynamic analysis. *Int.J.Num. Meth.Eng.*, 9:353–386, 1975.
- [Bathe76] K.J. Bathe. *Static and dynamic geometric and material nonlinear analysis using ADINA*. Report 82448-2, MIT, Massachusetts, 1976.
- [Bathe80] K.J. Bathe und A.P. Cimento. Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. *Comp. Meth.Appl.Mech.Eng.*, 22:59–85, 1980.
- [Bathe82] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1982.

- [Bathe86] K.J. Bathe und E.N. Dvorkin. A formulation of general shell elements - the use of mixed interpolation of tensorial components. *IJNME*, 22(3):697-723, 1986.
- [Bathe87] K.J. Bathe, M. Kojic und J. Walczak. Some developments in methods for large strain elasto-plastic analysis. In D.R.J. Owen, E. Hinton und E. Onate, editors, *Computational Plasticity*, Pineridge Press, Barcelona, 1987.
- [Bergan72] P.G. Bergan. *Nonlinear analysis of plates considering geometric and material effects*. Report 72-1, Div. of Struct. Mechanics, The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, Norwegen, 1972.
- [Betten86] J. Betten. *Elastizitäts- und Plastizitätslehre*. Vieweg Verlag, Stuttgart, 1986.
- [Bland57] D.R. Bland. The associated flow rule of plasticity. *J.Mech. and Phys. of Solids*, 6:71-78, 1957.
- [Blix83] U. Blix. *Zur Berechnung der Einschnürung von Zugstäben unter Berücksichtigung thermischer Einflüsse mit Hilfe der Finite-Element-Methode*. Dissertation, Ruhr-Universität, Bochum, 1983.
- [Boehler76] J.P. Boehler und A. Sawczuk. Application of representation theorems to describe yielding of transversely isotropic solids. *Mech.Res.Comm.*, 3:277-283, 1976.
- [Brendel79] B. Brendel. *Geometrisch nichtlineare Elastostabilität*. Bericht 79-1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1979.
- [Brendel80] B. Brendel und E. Ramm. Linear and nonlinear stability analysis of cylindrical shells. *Comp.&Struct.*, 12:549-558, 1980.
- [Brodlie73] K.W. Brodlie, A.R. Gourley und J. Greenstadt. Rank-one and rank-two corrections to positive definite matrices expressed in product form. *J.Inst.Math.Appl.*, 11:73-82, 1973.
- [Bruhns73] O. Bruhns. Zur Theorie elastoplastischer Schalentragwerke. *Ing.Archiv*, 42:234-244, 1973.

- [Bufler71] H. Bufler. Energiemethoden, Vorlesungsreihe konstruktiver Ingenieurbau. Institut für Mechanik, Universität Stuttgart. 1971.
- [Bufler83] H. Bufler. On the work theorems for finite and incremental elastic deformations with discontinuous fields: A unified treatment of different versions. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 36:95–124, 1983.
- [Bufler84] H. Bufler. The principle of virtual displacements and the principle of virtual forces in the case of large deformations. *Acta Mechanica*, 53:15–26, 1984.
- [Bushnell85] D. Bushnell. *Computerized Buckling Analysis of Shells*. Martinus Nijhoff Publishers, 1985.
- [Chen82] W.F. Chen und A.F. Saleeb. *Constitutive Equations for Engineering Materials*. Volume 1, *Elasticity and Modeling*, J. Wiley, 1982.
- [Collatz64] L. Collatz. *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*. Springer Verlag, 1964.
- [Cormeau75] I. Cormeau. Numerical stability in quasi-static elasto-viscoplasticity. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 9:109–127, 1975.
- [Courant28] R. Courant, K. Friedrichs und H. Lewy. Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100:32–74, 1928.
- [Crisfield81] M.A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Comp. & Struct.*, 13:55–62, 1981.
- [Dafalias86a] Y.F. Dafalias. Bounding surface plasticity. I: Mathematical Foundation and Hypoplasticity. *J.of Eng. Mech., ASCE*, 112(9):966–987, Sept. 1986.
- [Dafalias86b] Y.F. Dafalias. Bounding surface plasticity. II: Application to isotropic cohesive soils. *J.of Eng. Mech., ASCE*, 112(12):1263–1291, Dez. 1986.
- [Dienes79] J.K. Dienes. On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies. *Acta Mechanica* 32, 217–232, 1979.

- [Ding88] Y. Ding. *Finite Rotationselemente zur nichtlinearen Analyse allgemeiner Flächentragwerke*. Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, in Vorbereitung, 1988.
- [Doyle56] T.C. Doyle und J.L. Ericksen. Nonlinear Elasticity. In *Advances in Appl. Mech.*, IV, Academic Press, 1956.
- [Drucker59] D.C. Drucker. A definition of stable inelastic materials. *J. Appl. Mech.*, 26:101–106, 1959.
- [Dvorkin84] E.N. Dvorkin und K.J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Eng. Comp.*, 1:77–78, 1984.
- [Flügge72] W. Flügge. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*. Springer Verlag, 1972.
- [Frey77] F. Frey und S. Cesotto. Some new aspects of the incremental total Lagrangian description in nonlinear analysis. In *Int. Conf. on Finite Elements in Nonlinear Mechanics*, page CO. 5.1/5.20, Geilo, Norway, 1977.
- [Fung65] Y.C. Fung. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1965.
- [Golub86] G.H. Golub und C.F. van Loan. *Matrix Computations*. North Oxford Academic Publishers, Oxford, 1986.
- [Green65] A.E. Green und P.M. Naghdi. A general theory of an elastic-plastic continuum. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 18:251–281, 1965.
- [Green68] A.E. Green und W. Zerna. *Theoretical Elasticity*. Clarendon Press, 1968.
- [Guo63] Zhong-Heng Guo. Time derivative of tensor fields in non-linear mechanics. *Arch. Mech. Stos.*, 1:131–161, 1963.
- [Hallquist83] J.O. Hallquist. *Theoretical Manual for DYNA3D*. Bericht Nr. UCID-19401, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, California, 1983.
- [Hallquist84] J.O. Hallquist. *NIKE3D: An implicit, finite-deformation, finite element code for analyzing the static and dynamic response*

of three-dimensional solids. Bericht Nr. UCID-18822, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, Livermore, California, 1984.

- [Hallquist85] J.O. Hallquist, D.J. Benson und G.L. Goudreau. Implementation of a modified Hughes-Liu shell into a fully vectorized explicit finite element code. In *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Europe-US Symposium, Springer Verlag, Trondheim, Norway, August 1985.
- [Hibbitt81] H.D. Hibbitt. *ABAQUS - Theory Manual*. Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., Providence, Rhode Island, 1981.
- [Hill50] R. Hill. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press, 1950.
- [Hinton80] E. Hinton und D.R.J. Owen. *Finite Elements in Plasticity - Theory and Practice*. Pineridge Press, Swansea, 1980.
- [Houwen86] P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer und H.B. Vries. Generalized predictor-corrector methods of high order for the time integration of parabolic differential equations. *ZAMM*, 66:595-605, 1986.
- [Hughes78] T.J.R. Hughes und R.L. Taylor. Unconditionally stable algorithms for quasi-static elasto/visco-plastic finite element analysis. *Comp. & Struct.*, 8:169-173, 1978.
- [Hughes78a] T.J.R. Hughes und K.S. Pister. Consistent linearization in mechanics of solids and structures. *Comp. & Struct.*, 8:391-397, 1978.
- [Hughes81] T.J.R. Hughes und W.K. Liu. Nonlinear finite element analysis of shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 26:331-362, 1981.
- [Hughes83] T.J.R. Hughes. Numerical implementation of constitutive models: Rate independent deviatoric plasticity. In *Workshop on Theoretical Foundations for Large Scale Computations of Nonlinear Material Behavior*, Northwestern University, Evanston, IL, 1983.

- [Hughes86] T.J.R. Hughes und F. Shakib. Pseudo-corner theory: a simple enhancement of J2-flow theory for applications involving non-proportional loading. *Engineering Computations*, 3:116–120, June 1986.
- [Irons76] B.M. Irons. The semiloof shell element. In D.G. Ashwell und R.H. Gallagher, editors, *Finite elements for thin shells and curved members*, J. Wiley, 1976.
- [Kato76] T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. Springer Verlag, New York, 1976.
- [Key78] S.W. Key. *HONDO II - A finite element computer code for the large deformation dynamic response of axisymmetric solids*. Bericht Nr. SAND78-0422, Sandia Laboratories, Albuquerque, New Mexico, 1978.
- [Krakeland77] B. Krakeland. *Large Displacement Analysis of Shells Considering Elasto-plastic and Elasto-viscoplastic Materials*. Report 77.6, Institutt for Statikk, Trondheim University, 1977.
- [Krieg77] R.D. Krieg und D.B. Krieg. Accuracies of Numerical Solution Methods for the elastic-perfectly plastic model. *J. Pressure Vessel Technology, ASME*, 99:510–515, 1977.
- [Lee68] S.L. Lee, F.S. Manuel und E.C. Rossow. Large deflection and stability of elastic frames. *J.Eng.Mech.ASCE*, 94:521–533, 1968.
- [Lehmann72] Th. Lehmann. Einige Bemerkungen zu einer allgemeinen Klasse von Stoffgesetzen für große elastoplastische Formänderungen. *Ing.Archiv*, 41:297–310, 1972.
- [Lehmann82] Th. Lehmann. On the concept of stress-strain relations in plasticity. *Acta Mech.*, 42:263–275, 1982.
- [Lubliner84] J. Lubliner. A maximum-dissipation principle in generalized plasticity. *Acta Mechanica* 52, 225–237, 1984.
- [Luenberger84] D.G. Luenberger. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, 1984.

- [MacNeal78] R.H. MacNeal. A simple quadrilateral shell element. *Comp. & Struct.*, 175–183, 1978.
- [Maenchen64] G. Maenchen und S. Sack. The Tensor Code. *Methods in Computational Physics*, 3, Academic Press, New York, 1964.
- [Malvern69] L.E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall Inc., New Jersey, 1969.
- [Marcal67] P.V. Marcal und I.P. King. Elastic-plastic analysis of two-dimensional stress systems by the finite element method. *Int.J.Mech.Sci.*, 9:143–155, 1967.
- [Marques84] J.M.M.C. Marques. Stress computation in elasto-plasticity. *Eng. Computations*, 1:42–51, 1984.
- [Marsden83] J.E. Marsden und T.J.R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice Hall, 1983.
- [Martin84] J.B. Martin, B.D. Reddy, T.B. Griffin und W.W. Bird. *Applications of mathematical programming concepts to incremental elastic-plastic analysis*. Bericht Nr. 52, Applied Mechanics Research Unit, University of Cape Town, Rondebosch, South Africa, 1984.
- [Martin87] J.B. Martin. Integration along the path of loading in elastic-plastic problems. In D.R.J. Owen, E. Hinton und E. Onate, editors, *Proceedings of the Conference on Computational Plasticity*, Pineridge Press, Barcelona, 1987.
- [Matthies79] H. Matthies und G. Strang. The solution of nonlinear finite element equations. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 14:326–352, 1979.
- [Mises28] R. von Mises. Mechanik der plastischen Formänderungen von Kristallen. *ZAMM*, 8(3), 1928.
- [Moreau63] J.J. Moreau. *Fontionelles sous-differentiables*. Ser. A 257, C. R. Acad. Sci., Paris, 1963.
- [Murakami79] S. Murakami und A. Sawczuk. On description of rate-independent behaviour for prestrained solids. *Archiv of Mechanics*, 31:251–264, 1979.

- [Naghdi72] P.M. Naghdi. *The Theory of Plates and Shells*. Volume II of *Handbuch der Physik*, Springer Verlag, 1972. Seite 425.
- [Nagtegaal82] J.C. Nagtegaal. On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 33:469–484, 1982.
- [Needleman85] A. Needleman. On finite element formulations for large elastic-plastic deformations. *Comp.&Struct.*, 20(1-3):247–257, 1985.
- [NISA80 83] H. Stegmüller, E. Ramm, J.M. Sättele und L. Häfner. *Theoretische Grundlagen zum Programmsystem NISA80*. Mitteilung Nr.1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1983.
- [Nyssen81] C. Nyssen. An efficient and accurate iterative method, allowing large incremental steps to solve elasto-plastic problems. *Comp.&Struct.*, 13:63–71, 1981.
- [Oden76] J.T. Oden und J.N. Reddy. *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Springer Verlag, 1976.
- [Oden79] T.J. Oden. *Applied Functional Analysis - A First Course for Students of Mechanics and Engineering Science*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1979.
- [Oldroyd50] J.G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of state. *Proc.Roy.Soc.London A200*, 523–541, 1950.
- [Ortiz81] M. Ortiz. *Topics in Constitutive Theory for Nonlinear Solids*. Dissertation, Dept. of Civil Eng. (SESM), Univ. of California, Berkeley, 1981.
- [Ortiz83] M. Ortiz und J.C. Simo. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 40:137–158, 1983.
- [Ortiz85] M. Ortiz und E.P. Popov. Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 21:1561–1576, 1985.
- [Ortiz87] M. Ortiz. Some computational aspects of finite deformation plasticity. In D.R.J. Owen, E. Hinton und E. Onate, editors,

Computational Plasticity, Models, Software and Applications, Pineridge Press, 1987.

- [Parisch78] H. Parisch. Geometric nonlinear analysis of shells. *Comp.-Meth.Appl.Mech.Eng.*, 14:159–178, 1978.
- [Parisch81] H. Parisch. Large displacements of shells including material nonlinearities. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 27:183–214, 1981.
- [Parisch86] H. Parisch. A practical approach to nonlinear shell theory. In T.J.R. Hughes und E. Hinton, editors, *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, Pineridge Press, 1986.
- [Pazy74] A. Pazy. *Semi-Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Lecture Notes No.10, University of Maryland, 1974.
- [Pinsky83] P.M. Pinsky, M. Ortiz und K.S. Pister. Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 40:137–158, 1983.
- [Powell78] M.J.D. Powell. *A fast algorithm for nonlinear constrained optimization calculations*. Volume 630 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer Verlag, 1978.
- [Ralston67] A. Ralston und H.S. Wilf. *Mathematische Methoden für Digitalrechner*. R.Oldenburger Verlag, München-Wien, 1967.
- [Ramm76] E. Ramm. A plate/shell element for large deflection and rotations. In *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis*, US-Germany Symp., MIT, MIT-Press, 1976.
- [Ramm81] E. Ramm und J.M. Sättele. Elasto-plastic large deformation shell analysis using degenerated elements. In T.R.J. Hughes, A. Pifko und A. Jay, editors, *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*, Vol. 48, pages 265–282, ASME Winter Ann. Mtg., AMD, Washington, 1981.
- [Ramm81a] E. Ramm. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Europe-U.S. Workshop, Bochum, Springer Verlag, 1981.

- [Ramm85] E. Ramm, K. Schweizerhof und H. Stegmüller. Ultimate load analysis of thin shells under pressure loads. In *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Europe-US Symposium, Trondheim, Norway, Springer Verlag, August 1985.
- [Ramm86] E. Ramm und A. Matzenmiller. Large deformation shell analysis based on the degeneration concept. In T.J.R. Hughes und E. Hinton, editors, *Finite element methods for plate and shell structures*, Pineridge Press, 1986.
- [Sättele80] J.M. Sättele. *Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher Nichtlinearität*. Bericht 80-3, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1980.
- [Sawczuk63] A. Sawczuk und T. Jaeger. *Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten*. Springer Verlag, Berlin, 1963.
- [Schreyer79] H-L. Schreyer, R.L. Kulak und J.M. Kramer. Accurate numerical solutions for elastic-plastic models. *J. Pressure Vessel Technology, ASME*, 101:226–234, 1979.
- [Schulz84] U. Schulz. Stabilitätsversuche an Kegel- und Torusmodellen. *Stahlbau*, 11:338–344, 1984.
- [Schweizerhof82] K. Schweizerhof. *Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen*. Bericht 82-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1982.
- [Schweizerhof86] K.H. Schweizerhof und P. Wriggers. Consistent linearization for path following methods. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 59:261–279, 1986.
- [Seidel73] J. Seidel. *Beitrag zur geometrisch nichtlinearen Theorie dünner Schalen unter Annahme kleiner Verzerrungen und großer Rotationen*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1973.
- [Shiratori79] E. Shiratori, K. Ikegami und F. Yoshida. Analysis of stress-strain relations by use of an anisotropic hardening plastic potential. *J.Mech.Phys.Solids*, 27:213–229, 1979.

- [Simo84] J.C. Simo und M. Ortiz. A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 49:221–245, 1984.
- [Simo85] J.C. Simo. Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comp.Meth.Appl.Mech.Eng.*, 48, 1985.
- [Simo86] J.C. Simo und R.L. Taylor. A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 22:649–670, 1986.
- [Simo87] J. Simo. Maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition in finite strain plasticity. In D.R.J. Owen, E. Hinton und E. Onate, editors, *Proceedings of the Conference on Computational Plasticity*, Barcelona, Pineridge Press, 1987.
- [Stanley85] G.H. Stanley. *Continuum-based Shell Elements*. Dissertation, Stanford University, California, August 1985.
- [Stegmüller85] H. Stegmüller. *Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit degenerierten Schalenelementen*. Bericht 85-1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1985.
- [Stein85] E. Stein, K.H. Lambertz und L. Plank. Ultimate load analysis of folded plate structures with large elastoplastic deformations - Theoretical and practical comparisons of different FE-algorithms. In G.N. Pande und J. Middleton, editors, *Numerical Methods in Engineering and Application*, Proceedings of the NUMETA 1985 Conference. Pineridge Press, Swansea, 1985.
- [Surana83] K.S. Surana. Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 19:581–615, 1983.
- [Taylor63] A.E. Taylor. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley&Sons, 3 edition, 1963.
- [Theocaris64] P.S. Theocaris und E. Marketos. Elastic-plastic analysis of perforated thin strips of a strain hardening material. *J.Mech.Phys.Solids*, 12:377–390, 1964.

- [Truesdell60] C. Truesdell und R.A. Toupin. *The classical field theories*. Volume 3.1 of *Encyclopedia of Physics*, ed. S.Flügge, Springer Verlag, 1960.
- [Truesdell65] C. Truesdell und W. Noll. *The nonlinear field theories of mechanics*. Volume 3/3 of *Encyclopedia of Physics*, ed. Flügge, Springer Verlag, 1965.
- [Truesdell84] C. Truesdell. *Mechanics of Solids*. Volume II of *Handbuch der Physik VIa/2*, Springer Verlag, 1984.
- [Washizu82] K. Washizu. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [Wilkins64] M.L. Wilkins. Calculation of Elastic-plastic Flow. *Methods of Computational Physics*, 3, 1964. Academic Press, New York.
- [Willam74] K.J. Willam und E.P. Warnke. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. In *Concrete Structures Subjected to Triaxial Stress*, Paper III-1. Bergamo, Italy, May 1974.
- [Zienkiewicz69] O.C. Zienkiewicz, S. Valliappan und T.P. King. Elasto-plastic solutions of engineering problems, initial stress finite element approach. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 1:75-100, 1969.
- [Zowe84] J. Zowe. Nondifferential optimization - a motivation and a short introduction into subgradient - and the bundle concept. In *Computational Mathematical Programming*, NATO Advanced Study Institute, Bad Winsheim, Juli 1984.

A Anhang

A1 Fréchet- und Richtungsableitung

Das Funktional $f(x_\tau)$ heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle ${}^i x_\tau$ wenn ein beschränkter linearer Operator $\mathcal{D}f$ existiert, so daß gilt (/Collatz 1964/, S.213):

$$\|f({}^i x_\tau + \Delta\Delta u_\tau) - f({}^i x_\tau) - \mathcal{D}f({}^i x_\tau) \cdot \Delta\Delta u_\tau\| \leq \varepsilon \|\Delta\Delta u_\tau\| \quad (\text{A1.1})$$

wobei es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $\|\Delta\Delta u_\tau\| < \delta$ und

$$\Delta\Delta u_\tau := x_\tau - {}^i x_\tau \quad (\text{A1.2})$$

Für die praktische Rechnung wird die Fréchet-Ableitung aus der Richtungsableitung gebildet, welche die Änderung des Funktionals $f(x_\tau)$ in Richtung der „Geraden“ ${}^i x_\tau + \eta \cdot \Delta\Delta u_\tau$ mißt.

$$\mathcal{D}f \cdot \Delta\Delta u_\tau = \left. \frac{d}{d\eta} f({}^i x_\tau + \eta \Delta\Delta u_\tau) \right|_{\eta=0} \quad (\text{A1.3})$$

Kettenregel:

$$\mathcal{D}f \cdot \Delta\Delta u_\tau = \left. \frac{\partial f({}^i x_\tau + \eta \Delta\Delta u_\tau)}{\partial x_\tau} \frac{d({}^i x_\tau + \eta \Delta\Delta u_\tau)}{d\eta} \right|_{\eta=0} \quad (\text{A1.4})$$

$$= \frac{\partial f({}^i x_\tau)}{\partial x_\tau} \Delta\Delta u_\tau \quad (\text{A1.5})$$

Kurzschreibweise:

$$\mathcal{D}f \cdot \Delta\Delta u_\tau =: {}^i f_{,\tau} \cdot \Delta\Delta u_\tau \quad (\text{A1.6})$$

Anmerkung:

- Für das allgemeine Kontinuum durchläuft der Fußzeiger τ die Werte 1,2,3 .

$$\mathcal{D}f \cdot \Delta\Delta u_\tau = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} \right]_{i_t} \begin{pmatrix} \Delta\Delta u_1 \\ \Delta\Delta u_2 \\ \Delta\Delta u_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A1.7})$$

- Bei der Schale sind es die natürlichen Zahlen 1 bis 5.

Am Beispiel eines Operators in Form einer gewöhnlichen Differentialgleichung soll der Linearisierungsprozeß demonstriert werden.

Es ist für $x = x(s) > 0$ und $x' = \frac{d}{ds} x$ die Differentialgleichung

$$f = x' + \ln x = 0$$

um die Stelle ${}^i x(s)$ zu linearisieren.

Die Fréchetableitung lautet:

$$\mathcal{D}f \cdot \Delta\Delta u = \frac{d}{d\eta} \left[\left({}^i x + \eta \Delta\Delta u \right)' + \ln \left({}^i x + \eta \Delta\Delta u \right) \right]_{\eta=0}$$

$$\mathcal{D}f \cdot \Delta\Delta u = \left[(\Delta\Delta u)' + \frac{1}{{}^i x + \eta \Delta\Delta u} \Delta\Delta u \right]_{\eta=0}$$

$$\mathcal{D}f \cdot \Delta\Delta u = \Delta\Delta u' + \frac{1}{{}^i x} \Delta\Delta u$$

Die „Steigung“ der Funktion f ist dann:

$$\mathcal{D}f \cdot = \left[()' + \frac{1}{{}^i x} \right].$$

Ein Funktional $f({}^i x_\tau)$ wird als Gâteaux-differenzierbar an der Stelle ${}^i x_\tau$ bezeichnet, falls alle Richtungsableitungen existieren.

A2 Konsistenz des elastischen Prädiktor - plastischen Korrektorverfahrens

Das wichtigste Kriterium zur Beurteilung der Brauchbarkeit eines Algorithmus' ist die Frage nach seiner Konsistenz, d.h. ein schrittweiser Algorithmus muß gegen die wahre Lösung konvergieren, wenn die Anzahl der Schritte n gegen unendlich strebt und die Schrittweite $h = \frac{\Delta t}{n}$ gegen „null“ geht. Das im Teil 5 vorgestellte elastische Prädiktor - plastische Korrektorverfahren muß für ein endliches Zeitintervall Δt in der Lage sein, eine beliebig gute Näherung zur wahren Lösung des elastoplastischen Randwertproblems zu liefern, selbst wenn in vielen praktischen Fällen der numerische Aufwand und die erreichte Genauigkeit - siehe Abschnitt 7.4 - die Berechnung des neuen Spannungszustandes in nur einem einzigen Schritt rechtfertigen. Aus Gründen der Vollständigkeit und zur Absicherung der Fehleranalysen in Kapitel 7.4 soll der von Ortiz /Ortiz 1981/ geführte Konsistenzbeweis für das elastische Prädiktor- plastische Korrektorverfahren im Sonderfall der idealen Elastoplastizität nach von Mises an den wichtigsten Stationen gezeigt werden. Auf die Darstellung der hierfür eingesetzten Semigruppentheorie wird verzichtet und auf die gängige mathematische Literatur /Kato 1976/, /Moreau 1963/, /Pazy 1974/ verwiesen.

Bezeichnet man mit \mathbf{v} die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = d\mathbf{u}$ ($d\mathbf{u}$ ist die Zeitableitung des Verschiebungsfeldes), so lautet die Gleichgewichtsbeziehung in symbolischer Notation für die Bewegung in Abhängigkeit der Massenträgheit - siehe Kapitel 2.2 Gl. 2.21:

$$d\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \nabla \sigma \quad (\text{A2.1})$$

worin ρ die Massendichte und $\nabla \sigma$ die Divergenz des Spannungsfeldes $\sigma_{ji,j}$ ist. Der Einfachheit halber sollen keine Volumenkräfte wirken. Das konstitutive Gesetz lautet unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen mit den Annahmen der Fließtheorie:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \mathbf{D} (\bar{\nabla} \mathbf{v} - d\epsilon^p) \\ \bar{\nabla} \mathbf{v} &:= \text{Gradient des Geschwindigkeitsfeldes } v_{i,j} \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

Für die Fließregel $d\epsilon^p = d\lambda \mathbf{a}$ soll der Operator \mathbf{T} definiert werden, mit welchem der Gradient $\mathbf{a} = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ an die Fließfläche nach von Mises F im Spannungsraum erzeugt wird.

$$\mathbf{D} d\epsilon^p = \mathbf{T} \sigma \quad (\text{A2.3})$$

Die Gleichungen A2.1, A2.3 und A2.3 lassen sich in Matrizenform schreiben:

$$\begin{bmatrix} d\mathbf{v} \\ d\boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\rho} \nabla \\ \mathbf{D} & \bar{\nabla} \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.4})$$

Abkürzungen:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{W} \mathbf{x} - \mathbf{T} \mathbf{x} \quad (\text{A2.5})$$

\mathbf{W} = Operatormatrix des elastischen Wellenausbreitungsproblems /Marsden 1983/

\mathbf{T} = Projektionsoperator, der den elastischen Prädiktor $\boldsymbol{\sigma}$ durch die Abbildungen $\mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}$ auf die Fließfläche projiziert /Collatz 1966/

\mathbf{W} und \mathbf{T} können als Summe zweier linearer Operatoren behandelt werden.

$$\mathbf{A} = \mathbf{W} - \mathbf{T} \quad (\text{A2.6})$$

$$\text{und damit } d\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{A2.7})$$

worin \mathbf{A} der Evolutionsoperator ist.

Die Aufgabe zur Herleitung eines konsistenten Algorithmus' zur schrittweisen Lösung des Anfangswertproblems

$$d\mathbf{x} = \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (\text{A2.8})$$

mit gegebenem Anfangswert ${}^0\mathbf{x}$ zur Zeit $t=0$ besteht nun darin, einen Algorithmus \mathbf{F} zu finden.

$${}^t\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\mathbf{F} \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n {}^0\mathbf{x} \quad (\text{Exponentialform}) \quad (\text{A2.9})$$

Damit kann die gesuchte Lösung $\mathbf{x}(t)$ durch n Schritte beliebig genau am Ende des Zeitintervalls zum Zeitpunkt t ermittelt werden. Um die Konvergenz der Rechnung am Ende des Zeitintervalls für eine gegen Unendlich strebende Schrittzahl n zu sichern - wobei der Algorithmus (Abbildung) \mathbf{F} wiederholt angewendet wird - muß \mathbf{F} „konsistent“ zum Operator \mathbf{A} sein. Für gewöhnliche Differentialgleichungen ist bekannt /siehe Ortiz 1981/, daß die Konsistenzforderung für den Algorithmus \mathbf{F} erfüllt ist, falls die Euler-Methode mit rückwärtigem Differenzenquotient (implizite Methode) verwendet wird. Im Zeitschritt h wird dementsprechend mit dem Differentialquotienten zur Zeit ${}^h t = h \frac{t}{n}$ gearbeitet.

$${}^h \mathbf{x} = {}^0 \mathbf{x} + \dot{\mathbf{x}}|_h \mathbf{x} h \quad \text{mit} \quad h = \frac{t}{n} \quad (\text{A2.10})$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}|_{h\mathbf{x}} = \mathbf{A} \, {}^h\mathbf{x} \quad (\text{A2.11})$$

Daraus folgt die Gleichung

$${}^h\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} + \mathbf{A} \, {}^h\mathbf{x} \, h \quad , \quad (\text{A2.12})$$

welche nach dem Vektor ${}^h\mathbf{x}$ zur Zeit ht am Ende des Zeitintervalls aufgelöst wird.

$${}^h\mathbf{x} = [\mathbf{I} - h \mathbf{A}]^{-1} \, {}^0\mathbf{x} \quad (\text{A2.13})$$

Anmerkung:

Der Term $[\mathbf{I} - h \mathbf{A}]^{-1} = {}^h\mathbf{J}$ stellt die Resolvente des Operators \mathbf{A} dar, mit welchem „resolvente Konsistenz“ garantiert ist, falls dieser als Algorithmus verwendet wird.

$$\mathbf{F}(h) = [\mathbf{I} - h \mathbf{A}]^{-1} \quad (\text{A2.14})$$

Für die Summe zweier Operatoren $\mathbf{A} = \mathbf{W} + (-\mathbf{T})$ gilt die sehr wichtige Beziehung für die Konsistenz des Algorithmus:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &=: \mathbf{S}(t) \, \mathbf{x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\mathbf{I} - \frac{t}{n} (-\mathbf{T}) \right]^{-1} \cdot \left[\mathbf{I} - \frac{t}{n} \mathbf{W} \right]^{-1} \right\}^n \, \mathbf{x} \quad (\text{A2.15}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\mathbf{F} \left(\frac{t}{n} \right) \right]^n \, \mathbf{x} \quad (\text{A2.16}) \\ &\quad (\text{Trotter Produktformel}) \end{aligned}$$

Die Bedeutung dieser Aussage liegt darin, daß der konsistente Algorithmus \mathbf{F} für die Summe zweier Operatoren $\mathbf{W} - \mathbf{T}$ aus dem Produkt der einzelnen Algorithmen \mathbf{F}_W und \mathbf{F}_T zusammengesetzt werden darf.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_T \, \mathbf{F}_W \quad (\text{A2.17})$$

$$\mathbf{F}_W := \left[\mathbf{I} - \frac{t}{n} \mathbf{W} \right]^{-1} \quad (\text{A2.18})$$

$$\mathbf{F}_T := \left[\mathbf{I} + \frac{t}{n} \mathbf{T} \right]^{-1} \quad (\text{A2.19})$$

$$\text{mit } \frac{t}{n} = {}^i t - {}^n t = \Delta^i t$$

Im Einschrittalgorithmus wird das n -fache Produkt und der obige Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty}$ nur durch ein einziges Inkrement $n = 1$ approximiert, so daß Gleichung A2.15 ausgeschrieben lautet:

$$\begin{bmatrix} i_{\mathbf{v}} \\ i_{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} = \underbrace{\left[\left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} & \end{array} \right] + \frac{t}{n} \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T} & \end{array} \right] \right]^{-1}}_{\mathbf{F}_T} \cdot \underbrace{\left[\left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} & \end{array} \right] - \frac{t}{n} \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{0} & \frac{1}{\rho} \nabla & \\ \hline \mathbf{D} & \bar{\nabla} & \mathbf{0} \end{array} \right] \right]^{-1}}_{\mathbf{F}_W} \begin{bmatrix} n_{\mathbf{v}} \\ n_{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.20})$$

Vormultiplikation mit \mathbf{F}_T^{-1} und danach mit \mathbf{F}_W^{-1} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Delta^i t \frac{1}{\rho} \nabla \\ -\Delta^i t \mathbf{D} \bar{\nabla} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} + \Delta^i t \mathbf{T} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} i_{\mathbf{v}} \\ (\mathbf{I} + \Delta^i t \mathbf{T}) i_{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} i_{\mathbf{v}} \\ i_{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{\mathbf{v}} \\ n_{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.21})$$

Gl. A2.3 wird umgeformt.

$$\Delta^i t \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma} = \Delta^i t \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p \quad (\text{A2.22})$$

$$\Leftrightarrow \Delta^i t \underbrace{\mathbf{D}^{-1} \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma}}_{\propto \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{a}} = \Delta \boldsymbol{\epsilon}^p \quad (\text{A2.23})$$

Die Identität

$$\Delta^i \lambda \mathbf{D} \mathbf{P}^i \boldsymbol{\sigma} \equiv \Delta^i t \mathbf{T} \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{A2.24})$$

veranlaßt zur Definition des elastischen Spannungsprädiktors wie in Kapitel 5.7.

$$i_{\boldsymbol{\sigma}}^* := (\mathbf{I} + \Delta^i t \mathbf{T}) i_{\boldsymbol{\sigma}} \quad (\text{A2.25})$$

Einfügen der Definition des elastischen Prädiktors $i_{\boldsymbol{\sigma}}^*$ in Gl. A2.21 ergibt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\Delta^i t \frac{1}{\rho} \nabla \\ -\Delta^i t \mathbf{D} \bar{\nabla} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{\mathbf{v}} \\ i_{\boldsymbol{\sigma}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{\mathbf{v}} \\ n_{\boldsymbol{\sigma}} \end{bmatrix} \quad (\text{A2.26})$$

Die erste Gleichungszeile lautet:

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{v}} - \Delta^i t \frac{1}{\rho} \nabla i_{\boldsymbol{\sigma}}^* &= n_{\mathbf{v}} \\ \Leftrightarrow \nabla i_{\boldsymbol{\sigma}}^* &= \rho \frac{i_{\mathbf{v}} - n_{\mathbf{v}}}{\Delta^i t} \end{aligned} \quad (\text{A2.27})$$

Aus der zweiten Gleichungszeile folgt:

$$\begin{aligned}
 -\Delta^i t \mathbf{D} \bar{\nabla}^i \mathbf{v} + {}^i \boldsymbol{\sigma}^* &= {}^n \boldsymbol{\sigma} \\
 \Leftrightarrow {}^i \boldsymbol{\sigma}^* &= {}^n \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D} \underbrace{\Delta^i t \bar{\nabla}^i \mathbf{v}}_{\bar{\nabla}(\Delta^i \mathbf{u})}
 \end{aligned} \tag{A2.28}$$

$$\text{mit } \Delta^i t \dot{\mathbf{v}} = \Delta^i \mathbf{u} \quad (\text{Verschiebungszuwachs}) \tag{A2.29}$$

Die Gültigkeit der Produktformel für den elastoplastischen Algorithmus erlaubt folgende Aussagen:

- Der elastische Spannungsprädiktor

$${}^i \boldsymbol{\sigma}^* = {}^n \boldsymbol{\sigma} + \underbrace{\mathbf{D} \bar{\nabla}^i \mathbf{u}}_{\Delta^i \boldsymbol{\sigma}^*}$$

entsteht durch rein elastische Materialbeanspruchung vom Zeitpunkt ${}^n t$ zum Zeitpunkt ${}^i t$. Die plastischen Deformationen ${}^n \boldsymbol{\epsilon}^p$ bleiben im Prädiktorschritt unverändert, d.h. es soll kein Fließen $\Delta^i \boldsymbol{\epsilon}^p$ zwischen ${}^n t$ und ${}^i t$ stattfinden („Einfrieren der plastischen Deformationen“). Die gesamten Geometrieänderungen $\Delta^i \mathbf{u}$ verursachen zuerst elastische Deformation.

- Die Ermittlung des neuen Spannungszustandes ${}^i \boldsymbol{\sigma}$ aus dem elastischen Prädiktor ${}^i \boldsymbol{\sigma}^*$ entsteht durch reine Projektion

$$\begin{aligned}
 {}^i \boldsymbol{\sigma}^* &= (\mathbf{I} + \Delta^i t \mathbf{T}) {}^i \boldsymbol{\sigma} \\
 {}^i \boldsymbol{\sigma} &= {}^i \boldsymbol{\sigma}^* + \Delta^i \lambda \mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}
 \end{aligned}$$

- Die additive Zerlegung der infinitesimalen Dehnungsänderungen

$$d\boldsymbol{\epsilon} = d\boldsymbol{\epsilon}^e + d\boldsymbol{\epsilon}^p$$

erlaubt im Algorithmus in eine multiplikative Zusammensetzung der Lösung für die rein elastischen und die rein plastischen Werkstoffbeziehungen.

$${}^i \boldsymbol{\sigma}^* = \left[\mathbf{I} + \Delta^i \lambda \mathbf{D} \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right] {}^i \boldsymbol{\sigma} = {}^n \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\epsilon} \tag{A2.30}$$

$${}^i \boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\left[\mathbf{I} + \Delta^i \lambda \mathbf{D} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1}}_{\text{Plastische Korrektur}} \underbrace{[{}^n \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{D} \Delta \boldsymbol{\epsilon}]}_{\text{Prädiktor}}$$

- Der aufgrund anschaulicher Überlegungen eher intuitiv eingeführte Spannungsprädiktor $\dot{\sigma}^*$ kann im nachhinein mathematisch durch die Produktformel für den Algorithmus zweier additiv zerlegbarer Operatoren gerechtfertigt werden. Der neue Spannungszustand $\dot{\sigma}$ entsteht durch Abbildung des Prädiktors $\dot{\sigma}^*$ auf die Fließfläche im Spannungsraum. Er liefert die Anfangswerte für den zweiten inkrementellen Prozeß innerhalb desselben Zeitschritts. Dieser zweite Vorgang ist eine rein plastische Kontraktion.
- Die Zerlegung der elastoplastischen Spannungsberechnung in die Lösung eines rein elastischen Problems mit danach folgender rein plastischer Spannungsermittlung befriedigt die Konsistenzforderung hinsichtlich unbedingter Stabilität nur dann, falls ein vollständig impliziter Algorithmus verwendet wird. Die Differentialquotienten müssen demzufolge in beiden Problemen am Ende des Zeitschritts zum Zeitpunkt t erfüllt sein.
- In weitreichendster Konsequenz zu obiger Produktformel darf für die iterative Gleichgewichtsermittlung der Struktur die elastische Steifigkeitsmatrix benutzt werden. Die Konvergenz der Iteration durch Verwendung der Anfangssteifigkeit, mit welcher die wiederholte Faktorisierung der Steifigkeitsmatrix vermieden wird, ist somit gesichert.

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur
Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbe-
anspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer
Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale
und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plat-
tenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und
Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskreti-
sierten und erweiterten Trefftz - Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger drei-
zelliger Träger unter Berücksichtigung der Profil-
verformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II.
- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite
Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke
mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf
die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.

- 79-2 H. G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppel-
schalen über quadratischem Grundriß auf Einzel-
stützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragwerken
(in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf
Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Platten-
tragwerke unter Berücksichtigung der Reissner-
schen Theorie und der Methode der gemischten
finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von
Platten und Schalen bei stofflicher und geo-
metrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität
und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:
Nichtlineare Berechnungen von Tragwerken unter
verformungsabhängiger Belastung mit finiten Ele-
menten.
- 82-3 H.-P. Andrä:
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flach-
decken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei
großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und
physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbet-
tonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter
Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und
Formabweichungen unter Innendruck und Stützen-
längskraft.

- 5 (1985) H. Stegmüller:
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter
Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:
Dynamische Stabilität nach der Methode der
finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugel-
schalen.
- 7 (1987) G. Kammler:
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von
Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem
Querschnitt unter Berücksichtigung der Inter-
aktion zwischen globalem und lokalem Versagen.