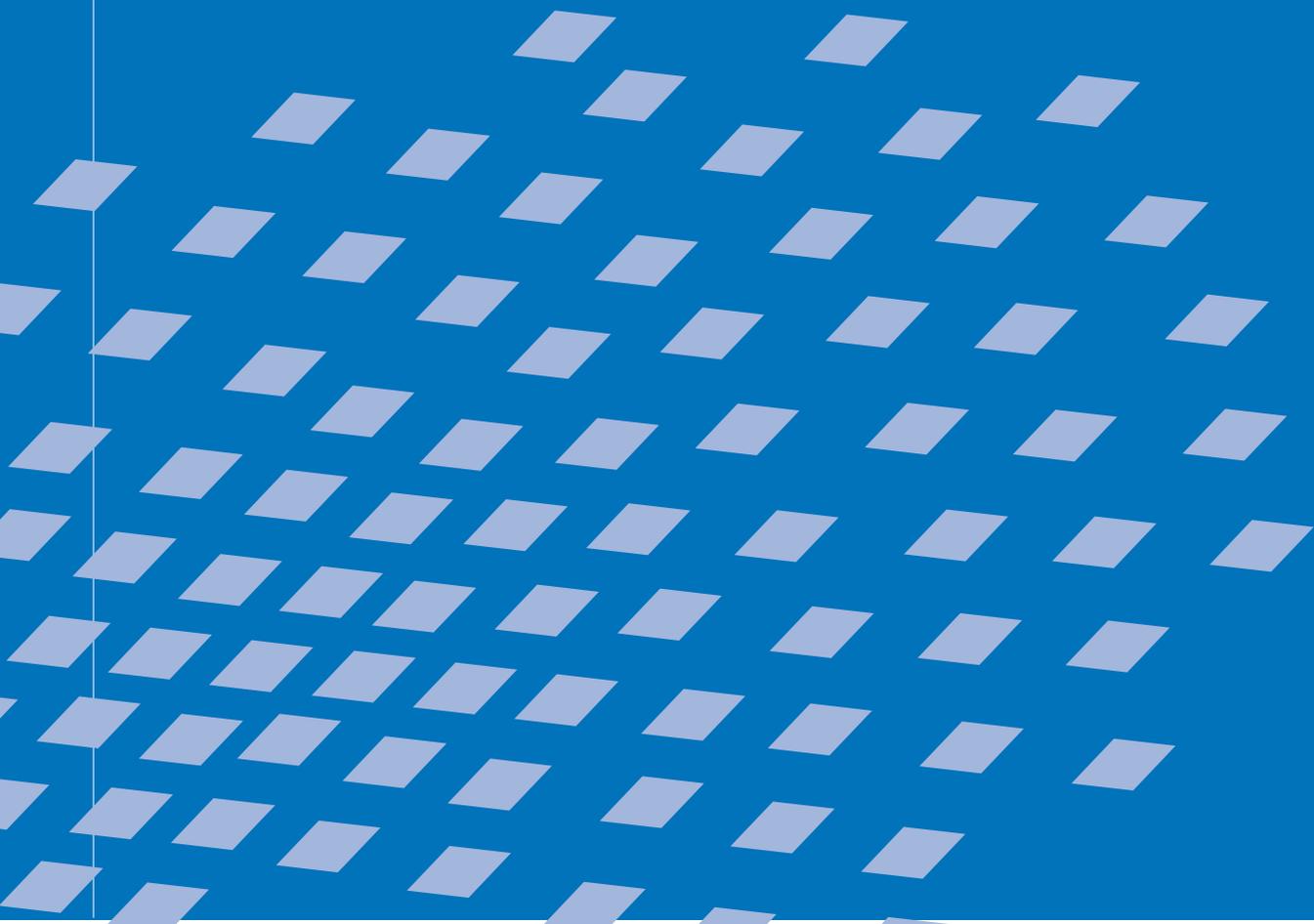




Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung

Andreas Lipka

Andreas Lipka



Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung

von

Andreas Lipka

Bericht Nr. 47 (2007)

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

Stuttgart 2007



© Andreas Lipka

Berichte können bezogen werden über:
Institut für Baustatik und Baudynamik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
D-70550 Stuttgart
Tel.: 07 11 / 6 85 661 23
Fax: 07 11 / 6 85 661 30
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

ISBN 978-3-00-020978-9

Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Andreas Lipka

aus Magdeburg

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Dr. h. c. Ekkehard Ramm

Mitberichter: Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Franz G. Rammerstorfer

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Januar 2007

Zusammenfassung

Die Strukturoptimierung wird in dieser Arbeit nicht in ihrer ursprünglichen Zielsetzung zur Ermittlung der Topologie und Form eines Tragsystems eingesetzt. Vielmehr dient sie der Auslegung von innovativen Materialien in Leichtbaukonstruktionen: Poröse Materialien wie Metall- und Polymerschäume und faserverstärkte Werkstoffe, hier der textilbewehrte Beton. Die besonderen Eigenschaften dieser Materialien und die möglichen Anwendungsbereiche motivieren verschiedene Zielkriterien, die das makroskopische Bauteilverhalten beschreiben. Die Steuerung des komplexen Verformungs- und Versagensverhalten dieser Materialien erfolgt mit Hilfe der materiellen Topologieoptimierung. Das Konfliktverhalten mehrerer Zielkriterien wird im Sinne einer Mehrkriterienoptimierung mit einbezogen.

Die in der klassischen materiellen Topologieoptimierung während der Iteration zugelassenen "grauen" Zwischenbereiche bekommen, bezogen auf den optimalen Einsatz von porösen Materialien, physikalische Bedeutung. Ausgehend von dem Zusammenhang zwischen der Dichte des porösen Materials und den mechanischen Eigenschaften wird die Dichte als Optimierungsvariable eingesetzt, um die optimale Dichteverteilung zu bestimmen. Die Optimierung der Dichteverteilung zellulärer Materialien unter Berücksichtigung linearer und nichtlinearer Kinematik wird für linear und nichtlinear elastisches Materialverhalten vorgestellt. Die Parallelität zur beanspruchungsadaptiven Anpassung natürlichen zellulären Materials und fertigungstechnische Kriterien optimierter künstlicher zellulärer Materialien werden diskutiert. Die Erfassung des prinzipiellen Verhaltens von zellulären Materialien anhand von Einheitszellenmodellen eröffnet die Möglichkeit des Materialdesigns. Optimierungsziele beim Entwurf des mikrostrukturellen Aufbaus zellulärer Materialien sind spezielle anisotrope makroskopische Materialeigenschaften, aber auch die Verbesserung des duktilen Verhaltens.

Für die Optimierung einer Bewehrungsanordnung in dünnwandigen Betonbauteilen mit neuartigen Fasermaterialien werden mit der klassischen Topologieoptimierung und einem vorgegebenen prinzipiellen Faserlayout diejenigen Fasern bestimmt, die für ein bestimmtes Strukturverhalten benötigt werden. Berücksichtigt wurde das nichtlineare Stoffverhalten des Betons, aber auch der Bewehrung. Besondere Beachtung findet hierbei die Modellierung des Verbundmaterials mit einer langfaserigen Bewehrung im Kontext einer mehrschichtigen Platten/Schalenformulierung. Anhand von Beispielen wurde die Bestimmung der Menge, Schichtung und Ausrichtung in dem vorgestellten Optimierungskonzept diskutiert.

Für die Modellierung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens von zellulären und textilbewehrtem Faserverbundwerkstoffen werden die in dieser Arbeit implementierten Formulierungen vorgestellt und für die Optimierung aufbereitet. Die nichtlinearen Optimierungsprobleme werden mit gradientenbasierten Verfahren gelöst. Die Effizienz der Algorithmen zur numerischen Integration auf der Ebene der Finiten Elemente und die Berechnung der Gradienteninformation konnte durch Parallelisierung deutlich gesteigert werden.

Die unterschiedlichen Entwurfsaufgaben in den gezeigten Beispielen verdeutlichen das Potential der Strukturoptimierung für den *verbesserten Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung*.

Abstract

The present study proposes a method to improve the application of materials in structural elements with the structural optimization method. Structural optimization is not used with its original objective, the determination of the topology and shape of a structure. It is rather used for the development and application of innovative materials in light-weight structures: porous materials such as metallic and polymeric foams and reinforced composite materials, here the textile reinforced concrete. The material topology optimization is used to control the complex deformation- and failure behavior of these materials. Due to the very special properties of these materials and their resulting applications, several design criteria are investigated which describe the macroscopic behavior of structural elements. Conflicting design criteria are considered by the implication of a multicriteria optimization.

Porous materials are usually utilized in topology optimization in order to relax the integer "1-0" (black and white) problem, allowing to identify zones with and without design material. In the present contribution the concept is not used as a mathematical vehicle; rather the existence of a "real" physically existing material is assumed with a varying intermediate density (grey zones); in other words, the porosity is being introduced as a design variable which is then being adjusted by the controlling optimization process. With respect to that it can be referred to "natural" material like the spongiosa in bones and tissues with a varying density. Since the mechanical behavior of porous materials is decisively influenced by the density and the shape and size of the pores, diverse micro- and macroscopic material models have been developed to display the correlation of the density and the mechanical properties. The relations between the density of the porous material and the mechanical properties are used in order to determine the optimal density distribution. The optimization is introduced for linear and non-linear material behavior based on either linear or nonlinear kinematics. Constraints concerning the producebility of optimized artificial cellular materials are discussed. The investigation of the principal behavior of cellular materials with unit cell models opens the possibility of material design. Design criteria for the layout of the microstructure are special anisotropic macroscopic material properties but also the improvement of the ductile behavior.

For the optimization of the layout of the reinforcement in thin walled concrete structures with innovative fiber materials, those fibres are determined by the classical topology optimization and a given principal fibre layout, which is necessary for a special kind of structural behavior. During this process the nonlinear material behavior of the concrete as well as the reinforcement is taken into account.

Due to the large number of design variables in material based topology optimization, mathematically orientated optimality criteria methods combined with variational adjoint methods to determine the sensitivities turn out to be efficient and robust.

The results of the variety of investigated optimization problems emphasize the potential of the proposed method for the improved application of innovative materials by material topology optimization.

Vorwort und Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

In dieser Zeit hatte ich in Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Dr. h. c. Ekkehard Ramm einen sehr zuverlässigen, anspruchsvollen und kritischen Doktorvater. Mein besonderer Dank gilt ihm für seine wissenschaftliche Anleitung sowie für sein Interesse und für die Unterstützung beim Anfertigen dieser Arbeit. Für das entgegengebrachte Vertrauen, eine Lehrveranstaltung frei gestalten zu dürfen, möchte ich mich ebenfalls herzlich bedanken.

Mein besonderer Dank gilt außerdem Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. Franz G. Rammerstorfer für die freundliche Übernahme des Mitberichts.

Meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik möchte ich für die gemeinsame Zeit und Zusammenarbeit danken, besonders Michael Gee, Tobias Erhart und Matthias Hörmann für die fachlichen und privaten Gespräche und insbesondere Gian Antonio d'Addetta für die Durchsicht des Manuskripts.

Meinen Eltern, Bodo und Margarete Lipka, danke ich für die Motivation, Unterstützung und die Ermöglichung, diesen Weg einschlagen zu können. Ebenso bedanke ich mich bei meinen Schwiegereltern Manfred und Ljerka Poethke für den geschaffenen Freiraum, der diese Arbeit mit ermöglicht hat.

Meiner lieben Frau Dagmar Lipka möchte ich ein besonderes Dankeschön für die Unterstützung und ihr Verständnis aussprechen. Sie hat mir die nötige Kraft gegeben und mir jederzeit zur Seite gestanden.

Andreas Lipka

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung	5
1.3	Übersicht	6
2	Grundlagen der Strukturanalyse	9
2.1	Nichtlineare Kontinuumsmechanik	9
2.1.1	Kinematik großer Deformationen	9
2.1.2	Spannungen	11
2.1.3	Materialgleichungen	11
2.1.4	Klassifizierung	14
2.1.5	Randwertproblem	17
2.2	Finite Elemente	18
2.2.1	Lösen des räumlichen nichtlinearen Randwertproblems	18
2.2.2	Elementtypen	19
2.3	Homogenisierung periodischer Mikrostrukturen	22
2.3.1	Repräsentatives Volumenelement und Homogenisierung	22
2.3.2	Homogenisierungsgleichungen	24
2.3.3	Energetische Betrachtungen	27
3	Grundelemente der Strukturoptimierung	30
3.1	Entwurfsmodell – Analysemodell – Optimierungsmodell	30
3.2	Optimierungsalgorithmen	33
3.3	Materielle Topologieoptimierung als Teilgebiet der Strukturoptimierung	39
3.4	Klassische Entwurfskriterien im Leichtbau und Erweiterungen	43
3.5	Sensitivitätsanalyse	48
3.6	Optimierungsstrategien für große Optimierungsprobleme	55
3.7	Mehrkriterienoptimierung	58
3.7.1	Einleitung	58
3.7.2	Grundbegriffe	59
3.7.3	Klassifizierung der Verfahren	60
3.7.4	Weitere Verfahren	62
3.7.5	Pareto–Optimierung	64
3.7.6	Beispiel einer Brückenkonstruktion	66
4	Modellierung zellularer Materialien	73
4.1	Mechanisches Verhalten realer Schäume	75
4.2	Untersuchung der Porengeometrie	76

4.3	Phänomenologische makroskopisch orientierte Modellierung	80
4.3.1	Materialmodellierung für Metallschäume	81
4.3.2	Materialmodellierung für Polymerschäum bei finiten Verzerrungen	82
5	Steuerung der Dichteverteilung zellularer Materialien	86
5.1	Bestimmung der Dichteverteilung in Sandwichsystemen	87
5.1.1	Anpassung von Eigenfrequenzen	87
5.1.2	Maximierung der Steifigkeit	90
5.1.3	Erhöhung der kritischen Last	93
5.1.4	Untersuchung des lokalen und des globalen Stabilitätsversagens	98
5.2	Verbesserung des Energieabsorptionsvermögens	102
6	Materialdesign – Entwurf der Porenstruktur zellularer Materialien	108
6.1	Betrachtung natürlicher Knochen	109
6.1.1	Aufbau und Funktionsweise	109
6.1.2	Mechanische Modellierung	110
6.1.3	Einsatz von Optimierungsverfahren in der Biomechanik	112
6.1.4	Hierarchische Optimierung mit natürlichem Material	113
6.2	Entwurfskriterien für den strukturellen Aufbau künstlicher zellularer Materialien ...	117
6.3	Periodische Mikrostrukturen mit extremalen Eigenschaften	118
6.3.1	Zellulare Materialien mit negativem Querdehnungseffekt	120
6.3.2	Beeinflussung des Temperaturendehnungsverhaltens	125
6.3.3	Entwurf von duktilen Mikrostrukturen	131
7	Modellierung textilbewehrten Betons	134
7.1	Phänomene des Strukturverhaltens	136
7.1.1	Matrixmaterial	136
7.1.2	Textile Bewehrung	137
7.1.3	Verbundwerkstoff	138
7.3	Anisotropes Plastizitätsmodell mit Entfestigung für Beton	140
7.4	Versagen des Fasermaterials und Modellierung des Verbundes	142
8	Bestimmung des Faserlayouts textilbewehrten Betons	144
8.1	Entwurfskriterien und Designparameter	144
8.2	Vorstellung der eigenen Strategie	146
9	Zusammenfassung und Ausblick	152
9.1	Zusammenfassung	152
9.2	Ausblick	154
Literatur	155

Abkürzungen, Bezeichnungen, Vereinbarungen

Auf folgende Abkürzungen und Bezeichnungen wird in der vorliegenden Arbeit mehrfach zurückgegriffen. Abweichende und weiterführende Definitionen werden an den entsprechenden Stellen angegeben.

Abkürzungen

<i>CAD</i>	Computer Aided Design
<i>CAGD</i>	Computer Aided Geometric Design
<i>CARAT</i>	Computer Aided Research and Analysis Tool – FEM Programmsystem
<i>FEM</i>	Finite-Element-Methode
<i>MMA</i>	Methods of Moving Asymptotes
<i>OC</i>	Optimalitätskriterienverfahren
<i>PvV</i>	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
<i>RVE</i>	Repräsentatives Volumenelement
<i>SQP</i>	Sequentielle Quadratische Programmierung

Mathematische Notationen

div_x	Divergenz bezüglich räumlichem Koordinatensystem
grad_x	Gradient bezüglich räumlichem Koordinatensystem
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^+	Menge der positiven reellen Zahlen
\mathbb{R}^3	Dreidimensionaler Euklidischer Raum

Bezeichnungen

Symbole

$d(\cdot)$	infinitesimale Größen
$\delta(\cdot)$	Variationen
$\Delta(\cdot)$	inkrementelle Größen
$\nabla_{(\cdot)}$	Gradientenoperator, Ableitung nach (\cdot)
$\nabla_{(\cdot)}^{ex}$	partielle explizite Ableitung nach (\cdot)

$(\cdot)^{dev}$	Kennzeichnung deviatorischer Größen
$(\cdot)^{el}$	Kennzeichnung elastischer Größen
$(\cdot)^{pl}$	Kennzeichnung plastischer Größen
$(\cdot)^{trial}$	Kennzeichnung der Versuchsgrößen im Prädiktor
$(\cdot)^h$	Näherungsfunktionen, approximierte Größen
$(\hat{\cdot})$	Kennzeichnung der Größen im Lösungspunkt

Geometriebeschreibung

A	Fläche
B	homogener Körper
B^h	diskretisierter Körper
Γ	Rand
h_S	Höhe (Blech, Profile, Struktur)
\mathbf{J}	Jacobi – Matrix
$ \mathbf{J} $	Jacobi – Determinante
l_S	Länge (Blech, Profile, Struktur)
Ω	Kontrollvolumen, Volumen, Entwurfsraum
\mathcal{P}	Punkt im Euklidischen Raum
t_S	Dicke (Blech, Profile, Struktur)
V	Volumen, Volumen in der Referenzkonfiguration
v	Volumen in der Momentankonfiguration
\mathbf{X}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration
\mathbf{x}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration

Kinematik

\mathbf{b}	elastischer linker Cauchy – Green – Tensor
$\tilde{\mathbf{C}}$	elastischer rechter Cauchy – Green – Tensor
$\delta \mathbf{u}$	virtuelle Verschiebungen
\mathbf{E}	Green – Lagrange – Verzerrungstensor
\mathbf{E}^{lin}	linearer Anteil des Green – Lagrange – Verzerrungstensors
ε^E	eindimensionale 'Ingenieur' – Verzerrung
$\epsilon_{1,2,3}$	Verzerrung in Hauptrichtungen

ε	Euler – Almansi – Verzerrungstensor
ϵ	logarithmischer Verzerrungstensor
F	materieller Deformationsgradient
λ	Eigenwerte
$\lambda_{1,2,3}$	Streckungen in den Hauptrichtungen
N	Eigenrichtungen in der Referenzkonfiguration
n	Eigenrichtungen in der Momentankonfiguration
t	Zeit
u	Verschiebungen
\ddot{u}	Beschleunigungen

Räumliche Diskretisierung

B	B-Operatormatrix
d	Vektor der Knotenverschiebungen
\tilde{N}	Matrix der Ansatzfunktionen

Dynamik

ω	Kreisfrequenz
ϑ	Eigenfrequenz

Optimierungsgrößen

χ	Indikatorfunktion diskreter Größen
$\bar{\chi}$	kontinuierliche Verteilungsfunktion
η	Lagrange – Multiplikatoren für die Gleichheitsnebenbedingungen
f	Zielfunktion
\tilde{f}	modifizierte Zielfunktion, adjungierter Ansatz
\hat{f}	Ersatzfunktion in der Mehrkriterienoptimierung
g	Vektor der Ungleichheitsnebenbedingungen
γ_L	Lagrange – Multiplikatoren für die Ungleichheitsnebenbedingungen
h	Vektor der Gleichheitsnebenbedingungen
\tilde{H}	Hesse Matrix (Matrix der zweiten Ableitungen)
L	Lagrange – Funktion
\mathcal{A}	Lösungsraum des Optimierungsproblems
\bar{m}	vorgeschriebene Masse

μ	Lagrange – Multiplikatoren für die adjungierte Sensitivitätsanalyse
n_f	Anzahl der Zielfunktionen
n_g	Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen
n_h	Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen
p_f	Exponent in der Kreiselmeier – Steinhäuser Funktion
s	Vektor der Entwurfsvariablen
s_L	Vektor der unteren Restriktion der Entwurfsvariablen
s_U	Vektor der oberen Restriktion der Entwurfsvariablen
w_i	Wichtungsfaktoren

Homogenisierung, Materialdesign

C^h	homogenisierter Materialtensor bzw. – matrix
C^*	vorgegebener Materialtensor bzw. – matrix
ϵ^0	Einheitsverzerrungsfeld
ϵ^*	Fluktuationsverzerrungen
H	Periodizität
N_P	Anzahl periodischer Wiederholungen
Ω_Y	Gebiet eines periodischen RVE
w	Wichtungsfaktoren
Y	Gebiet einer Basiszelle

Arbeit, Energie, Steifigkeits- und Massenmatrizen

K	Steifigkeitsmatrix
K^e	linear elastische Steifigkeitsmatrix
K^g	geometrische Steifigkeitsmatrix
K^{pl}	Steifigkeitsmatrix mit rein plastischen Anteilen
K_T	tangentiale Steifigkeitsmatrix
K^u	Anfangsverschiebungsmatrix
M	Massenmatrix
W	Arbeit der inneren Kräfte
\tilde{W}	Arbeit der äußeren Kräfte

Kräfte, Lasten, Spannungen

\mathbf{b}	Massenkräfte
β^T	temperaturabhängige Spannungsgröße
\mathbf{F}_{intern}	interne Knotenkräfte
\mathbf{F}_{extern}	externe Knotenkräfte
\mathbf{G}	Ungleichgewichtskräfte
I_1, J_2, J_3	Invarianten des Spannungstensors bzw. –deviators
λ	Lastfaktor
p	Druckspannung
\mathbf{P}	Lastvektor
\mathbf{P}^{pseu}	Pseudo – Lastvektor
P_v	Betrag einer eindimensionalen Last
q	von Mises – Vergleichsspannung
\mathbf{S}	2. Piola – Kirchhoff – Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{S}}$	1. Piola – Kirchhoff – Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy – Spannungstensor
T	Temperatur
\mathbf{t}	Oberflächenlasten
$\boldsymbol{\tau}$	Kirchhoff – Spannungstensor
$\tau_{1,2,3}$	Kirchhoff – Spannungen in Hauptrichtungen

Werkstoff, Material

$\bar{\alpha}$	Skalierungsparameter für Metallschäume
α^T	Temperaturausdehnungskoeffizient
$\bar{\alpha}, \bar{b}, \bar{\beta}, \bar{M}$	Materialparameter, Metallschaumplastizität
$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$	Parameter hyperelastischer Materialmodelle
$\tilde{\alpha}, \tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{p}$	Parameter hyperelastischer Materialmodelle
α_p, μ_p	Parameter im Ogdenmaterial
b	Potenzfunktion, SIMP – Ansatz
β	Exponent für das makroskopische Werkstoffmodell
\mathbf{C}	Materialtensor bzw. – matrix
C_1, C_2	Parameter der Skalierungsbeziehungen zellulärer Materialien

C^{ep}	elastoplastischer Materialtensor bzw. – matrix
χ^{12}	Indikatorfunktion zur Unterscheidung der Materialphasen 1 und 2
E	Elastizitätsmodul
E_0	Elastizitätsmodul des Referenzmaterials
E_{eff}	effektiver Elastizitätsmodul des porösen Materials
E^h	Elastizitätsmodul des homogenisierten zellularen Materials
E^H	linearer Ver – bzw. Entfestigungsmodul
E_s	Elastizitätsmodul des Grundmaterials der Zellwände bzw. – stege
ε_d	Verrungsmaß zur Charakterisierung des Beginns der Verdichtung
G	Schubmodul
G^h	Schubmodul des homogenisierten zellularen Materials
γ	plastischer Multiplikator
H	Verfestigungsfunktion
K	Kompressionsmodul
K_1, K_2	Kelvin – Moduli
κ	interne Variable
λ	Lamé – Konstante
M	Masse
μ	Lamé – Konstante
\tilde{n}	Normalenvektor auf die Fließfläche
ν	Poisson – Zahl, Querdehnzahl
ν^h	Poisson – Zahl, Querdehnzahl des homogenisierten zellularen Materials
p_c	hydrostatische Druckfestigkeit
p_t	hydrostatische Zugfestigkeit
φ	Abbildung
ϕ	Fließfunktion
Ψ	beliebige Materialfunktionen
q	Vektor interner Variablen
ρ	Dichte, Porosität
$\bar{\rho}$	relative Dichte
ρ_0	Referenzdichte

ρ_s Dichte des Zellwandmaterials

σ^y Fließspannung

Elastoplastisches Mehrflächenmodell

α^*, β^* Formfunktionen der Drucker – Prager – Teilflächen

f_{ck} charakteristische Zylinderdruckfestigkeit

f_{cm} maximale Druckfestigkeit

f_{ctm} mittlere Zugfestigkeit

G_c Bruchenergie (einaxialer Druckversuch)

G_t Bruchenergie (einaxialer Zugversuch)

γ_1, γ_2 Modellparameter der Versagensfläche

γ_3, γ_4 Modellparameter des Evolutionsgesetzes im Druckbereich

h^* charakteristische Elementlänge

Schalengeometrie und –kinematik

a_3 Schalendirektor

g Metriktensor

g^* Koordinatensystem in der Schalenschicht

$\bar{\gamma}$ globale Bewehrungsrichtung

i orthonormiertes Basissystem

r Ortsvektor der Schalenmittelfläche

θ Kontinuitätskoeffizienten der geschichteten Schale

v Verschiebungsvektor

textile Bewehrung

f_{yk} Zugfestigkeit

sonstige Größen

I_F Flächenträgheitsmoment

\cup Assemblierungsoperator

1 Einleitung

1.1 Motivation

Unter Strukturoptimierung versteht man die rechnerische Optimierung von Tragwerken und Bauteilen hinsichtlich eines oder mehrerer Optimierungsziele unter der besonderen Berücksichtigung der mechanischen Beanspruchung und Beanspruchbarkeit. Die Anfänge der Strukturoptimierung werden häufig mit der Arbeit Galilei's in Verbindung gebracht, welcher bereits 1638 das Gewicht eines Balkens durch einen dem Biegespannungsverlauf angepassten Querschnitt minimierte (Szabo (1979)). Diese Optimierungsaufgabe hat bis heute, ebenso wie die Optimierung von Maxwell (1890) mit Stabtragwerken, hinsichtlich einer gleichmäßigen Beanspruchung nicht an Bedeutung verloren und ist Gegenstand vieler aktueller Veröffentlichungen. Tragwerke und Werkstoffe, die ihren strukturellen Aufbau nach den Spannungstrajektorien infolge einer Belastung ausrichten, werden auch heute noch mit den Referenzlösungen in Form von Michells feingliedrigen, ausschließlich druck- und zugbeanspruchten Strukturen minimalen Gewichts aus dem Jahr 1904 verglichen (Wiedmann (1989)). Die Faszination dieser Strukturen und ihre Bedeutung für die gegenwärtige Forschung werden ebenfalls durch aktuelle Veröffentlichungen von Lewinsky (2005) oder Rozvany (2005) verdeutlicht.

Die Kombination von Methoden zur Strukturanalyse mit heuristischen oder mathematischen Optimierungsalgorithmen in der modernen Strukturoptimierung wird erstmals in Schmit (1960) beschrieben und ist mittlerweile zentraler Bestandteil einiger kommerzieller Programme (TOP der Firma Ford, Optishape der Fa. Quint Co., Optistruct der Fa. Altair Computing u.a. (in Huang et al. (1993), Papalambros (2002), Thomas (2002))).

So ist die Strukturoptimierung ein etabliertes Werkzeug, das beim Entwurf und der Auslegung von Bauteilen insbesondere im Maschinen- und Fahrzeugbau, der Luft- und Raumfahrtindustrie aber auch für den Entwurf von Bauwerken angewendet wird, um Vorschläge oder Lösungen komplexer Aufgabenstellungen zu erzeugen. Mit der Strukturoptimierung kann das mechanische Verhalten von Strukturbauteilen und Tragwerken hinsichtlich verschiedener Ziele effektiv verbessert werden.

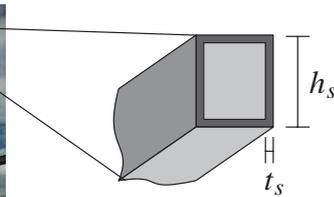
Das grundlegende Ziel ist *der optimale Werkstoffeinsatz*: einerseits zur Erhöhung der Wirtschaftlichkeit und andererseits um Grenzen der Werkstoffe auszuloten und zu überwinden. Das klassische Optimierungsziel des Leichtbaus, die Minimierung des Gewichts einer Konstruktion oder die Erhöhung der Steifigkeit, dient der Einsparung von Rohstoffen. Eine gleichmäßige Materialausnutzung führt zu einer langen Dauerhaftigkeit. Gegenstand heutiger Forschung ist die Generierung zuverlässiger Strukturen. Die Berücksichtigung mehrerer Optimierungsziele und nicht-linearer Effekte bereits während des Optimierungsprozesses helfen, die Strukturoptimierung zu einem vielseitig anwendbaren und zuverlässigen Werkzeug zu entwickeln. Ein weiterer Faktor zu mehr Realismus in der Strukturantwort stellt die Erfassung von Schwankungen der Material-, Geometrie- und Beanspruchungsgrößen sowie der Lagerbedingungen dar (Evgrafov und Patriksson (2003a und b)). Melchers (2001) optimiert Sandwich-Strukturen und faserverstärkte

Balken und Platten mit probabilistischen Ansätzen bezüglich Größe und Position der Belastung. Die Optimierung der Materialverteilung in einem Entwurfsraum zur Generierung von Brückentragwerken, aber auch von kinematischen Mechanismen bei gleichzeitiger Bestimmung der Position der Lagerbedingungen wird von Buhl (2002) durchgeführt. Verschiedene Formulierungen zur Berücksichtigung von Streuungen der Parameter im Optimierungsprozess werden von Jin et al. (2003) anhand einer einfachen Zwei-Balken-Struktur hinsichtlich Effizienz und Anwendbarkeit diskutiert.

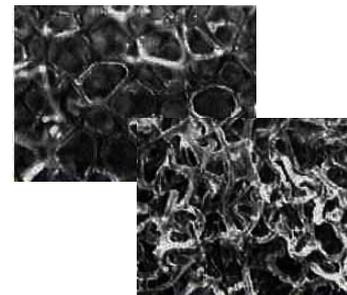
Heute werden die numerischen Optimierungsmethoden angewendet, um die Abmessungen von Stahlprofilen zu bestimmen oder die Form bestimmter Maschinenbauteile zu verbessern. Beurteilt wird der Entwurf mit bestimmten Zielkriterien. Die Designparameter sind hier in der Regel geometrische Größen (Bild 1.1).



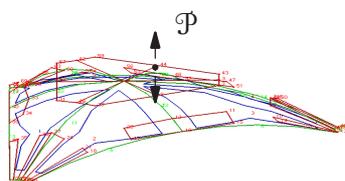
Parkhaus der Neuen Messe Stuttgart (2006)



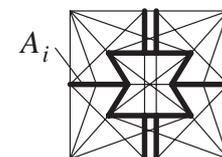
Bau des Kresge Auditorium (1954), Courtesy of MIT Museum, Photo W16-214a



Schaum mit positivem und negativem Querdehneffekt (Lakes, 1987)



Visualisierung der mathematischen Formfunktionen



Optimierte Pore mit diskreter Grundstruktur

Bild 1.1: Geometrische Größen als wesentliche Parameter in der Strukturoptimierung

Die freien Parameter bei der Bemessung von Stahlkonstruktionen oder bei der Bestimmung der optimalen Form von Schalentragwerken sind geometrische Parameter. Zur Bestimmung des prinzipiellen Aufbaus eines Tragwerks wird in der Topologieoptimierung der mikroskopische Aufbau des Tragwerks betrachtet und geometrische Parameter poröser, periodisch aufgebauter Werkstoffe auf der Mikroebene variiert.

In der klassischen Topologieoptimierung dienen die porösen Materialmodelle zur Relaxation des "0/1"-Problems bzw. zur Beantwortung der Frage, wo Material und wo kein Material anzuordnen ist. Strebt der Festkörperanteil des porösen Materials an einem Punkt im Entwurfsraum gegen eine obere Schranke, beschreibt dieser Punkt einen Teil der Tragstruktur. Die untere Schranke bezeichnet in der Regel den Teil des Entwurfsraumes ohne Material. Der kontinuierliche Übergang vom Festkörper zur Luft wird durch eine kontinuierliche Veränderung der Dicke der Porenstege oder die Veränderung der Größe einer eingeschlossenen Pore erzielt. Poröse Ma-

terialien haben somit eine besondere Bedeutung in der allgemeinsten Form der Strukturoptimierung, der Topologieoptimierung. Einen Überblick der bearbeiteten Themen in der Topologieoptimierung geben Eschenauer und Olhoff (2001).

Um den optimalen Materialeinsatz weiter zu verbessern, wird in einer weiteren Teildisziplin der Strukturoptimierung, dem sogenannten *Materialdesign*, der mikrostrukturelle Aufbau von porösen Materialien oder Verbundwerkstoffen mit einem oder mehreren Basismaterialien bestimmt, um spezielle makroskopische Eigenschaften zu erzielen. So wurden in der jüngeren Vergangenheit Optimierungsverfahren zum besseren Verständnis der Eigenschaften natürlicher zellulärer Materialien eingesetzt. Die Anwendung der Strukturoptimierung auf der Mikroebene eröffnet darüber hinaus die Möglichkeit, Werkstoffe mit extremen makroskopischen Eigenschaften zu entwerfen. Als Beispiele seien hier ein negativer Querdehnungseffekt oder eine verschwindende Ausdehnung bei Temperaturerhöhung zu nennen. Aufgrund der Hohlräume in den zellulären Materialien lässt sich das Deformationsverhalten der Zellstege und -wände gut steuern. Aber auch der spezielle Aufbau faserverstärkter Verbundwerkstoffe aus unterschiedlichen Basismaterialien eignet sich als Ausgangspunkt für den Entwurf von Werkstoffen auf Mikroebene. Basierend auf einem anisotropen mikrostrukturierten Material ermittelt Pedersen (1993) die optimale Orientierung dieses Werkstoffs für eine bestimmte Belastung. Sigmund bestimmt für vorgegebene makroskopische Werkstoffeigenschaften mit Topologieoptimierungsverfahren den Aufbau von Mikrozellen (Sigmund 1994a, 1994b).

Im Bereich der Werkstoffwissenschaften sind zwei neuartige Materialtypen Gegenstand intensiver Forschung: aus dem Bereich der künstlichen zellulären Materialien die Polymer- und Metallschäume und als Beispiel der faserverstärkten Materialien der Textilbeton.

Aufgrund der speziellen Eigenschaften wurden verschiedene zelluläre Materialien für mögliche Anwendungsbereiche im Leichtbau entwickelt. Sie zeichnen sich durch eine hohe Steifigkeit und Festigkeit, aber auch durch ein hohes Energieabsorptionsvermögen aus. Temperaturbeständigkeit und dämpfende Eigenschaften sind weitere Merkmale dieser interessanten Materialien. Im Bild 1.2 sind Beispiele für Anwendungsbereiche poröser Materialien dargestellt.

Ein neuartiger Polymerschäum demonstriert eindrucksvoll, wie man von der Fähigkeit zellulärer Materialien, unterschiedliche Eigenschaften zu kombinieren, profitieren kann. Neben einer hohen Energiedissipation ermöglicht er zudem eine effektive Luftzirkulation und trägt somit zu einer Steigerung der Sicherheit bei. Verglichen mit Polymerschäumen weisen Metallschäume ein deutlich höheres Energieabsorptionsvermögen bei gleicher Deformation auf. Neben einer hohen Steifigkeit bei einer gleichzeitig geringen Dichte sind sie ausgesprochen temperaturbeständig und somit prädestiniert für den Einsatz im Fahrzeugbau (Kretz et al. (2002)). Diese Eigenschaften gemeinsam mit verbesserten Herstellungsverfahren (Schäffler und Rajner (2003), Vatchiants und Manukyan (2003)) eröffnen viele Möglichkeiten zur Anwendung dieser Werkstoffe in den Bereichen der Wärmedämmung, des Brandschutzes und der Schwingungsdämpfung.

Auf der Suche nach dem optimalen Material für bestimmte Anwendungen ermöglicht oft erst die Kombination von Werkstoffen unterschiedlicher Eigenschaften, einen Werkstoff 'nach Maß' zu entwerfen. Beispiele hierfür sind die *Faserverbundwerkstoffe*. Wurde in der Antike bereits

Stroh zur Eigenschaftsverbesserung von Lehmziegeln verwendet, so ist der Stahlbeton ein heute nicht mehr wegzudenkender Vertreter dieser Werkstoffkategorie. Besonders der Stahlbeton verbindet die positiven Eigenschaften des preiswerten, aber spröden Betons mit denen des duktilen Stahls. Eine neuere Weiterentwicklung ist der textilbewehrte Beton.



Brock, USA



Karmann GmbH
Deutschland

Bild 1.2: Anwendungsbeispiele für zellulare Materialien

Ebenso wie beim Stahlbeton übernehmen hochfeste Glas-, Carbon- oder Kevlarfasern die Zugkräfte; Druckkräfte werden jedoch nach wie vor von dem Beton aufgenommen. Durch eine gezielte Anordnung der Fasern in Richtung der Zugspannungen, ähnlich wie im Stahlbetonbau, wird der Wirkungsgrad der in den Beton eingelegten Fasern gesteigert. Im Gegensatz zum konventionellen stahlbewehrten Beton ist keine Mindestbetondeckung zur Vermeidung der Korrosion der Bewehrung notwendig. Ein Verfahren zur Sanierung von Betonmasten mit multiaxialen AR-Glasgelegen wird in Proske et al. (2001) und Schierz et al. (2002a, 2002b) vorgestellt. Der neue Verbundwerkstoff ermöglicht die Herstellung und den Einsatz von sehr dünnwandigen und hochbelastbaren Betonbauteilen mit guten mechanischen Eigenschaften (Hegger et al. (1999, 2004), Reinhardt (2002, 2003)). Erste Bauteilversuche haben gezeigt, dass Materialstärken von 10–20 mm erzielt werden können (Krüger (2004)). Im Bild 1.3 sind Beispiele für derartige Bauteile und eine Tragkonstruktion, für die sich der Einsatz textilbewehrten Betons besonders eignet, abgebildet.

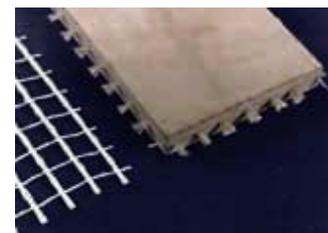


Bild 1.3: Bauteile aus Textilbeton, dünnwandige Konstruktionen, Basismaterialien

Die Strukturoptimierung stellt eine Möglichkeit dar, der Modellierung derartig komplexer Materialien und dem Entwurf realer Tragwerke unter Verwendung dieser Materialien gerecht zu werden und bietet sich als ideales Werkzeug an, um den optimalen Werkstoffeinsatz zu steuern.

Die Untersuchung der Energiedissipation poröser Werkstoffe oder das Verformungsverhalten dünnwandiger faserverstärkter Bauteile erfordert die Berücksichtigung der relevanten nichtlinearen Effekte. Dazu zählen sowohl das Plastizieren der Porenwände sowie deren Ausbeulen bei Schäumen, als auch das spröde Versagen des Matrix- und Fasermaterials im textilbewehrten Beton.

Dementsprechend hängen die Optimierungsergebnisse sehr stark von dem zugrunde gelegten mechanischen Modell ab. Soll die Strukturoptimierung eingesetzt werden, um den optimalen Einsatz der genannten Werkstoffe zu steuern, ist es wichtig, nichtlineare Effekte bereits während des Optimierungsprozesses zu berücksichtigen.

1.2 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist der Einsatz der Strukturoptimierung und hier insbesondere ihrer allgemeinsten Variante, der Topologieoptimierung, um den Einsatz ausgewählter Basismaterialien in Bauteilen im Hinblick auf gewünschte Eigenschaften zu verbessern ('zu optimieren'). Die vorliegende Arbeit greift schwerpunktmäßig zwei neuartige Materialtypen heraus: zelluläre Materialien (zum Beispiel Metallschäume) und faserverstärkte Verbundwerkstoffe, dazu zählt der Textilbeton. Bei den zellulären Materialien ist das Ziel, die Dichteverteilung durch die Topologieoptimierung zu steuern, in der die Porosität ohnehin als Entwurfsvariable auftritt. Bei den faserverstärkten Verbundwerkstoffen wird die Faseranordnung und -menge bei prinzipiell vorgegebenem Bewehrungslayout optimiert und folgende Fragestellung bearbeitet: "Wo ist die Bewehrung anzuordnen?". Als Zielkriterien werden beispielsweise die geringste Menge Bewehrungsmaterial ermittelt, die Steifigkeit metallschaumgefüllter Hohlprofile erhöht oder das Energieabsorptionsvermögen von Polymerschäumen gesteuert. Über diese makroskopische Betrachtungsweise hinaus, wird außerdem die Mikrostruktur poröser Materialien untersucht. Das Ziel ist hier, die Porengeometrie mit Hilfe der materiellen Topologieoptimierung so zu steuern, dass bestimmte makroskopische Materialeigenschaften entstehen. Um die genannten Materialien bestmöglich an das Einsatzgebiet anzupassen und das Potential dieser Materialien auszuloten, machen die Fragestellungen nur Sinn, wenn das realistische, d.h. nichtlineare Materialverhalten bis zum strukturellen Versagen berücksichtigt wird. In diesem Kontext werden folgende Schwerpunkte in dieser Arbeit behandelt:

- *Zelluläre Materialien:* Die in der Topologieoptimierung eingesetzten porösen Werkstoffe dienen in der Regel als Vehikel zur Relaxation des 0–1 (weiß/schwarz) Optimierungsproblems zum Auffinden der Bereiche ohne und mit Material. In dieser Arbeit bekommen die dort während der Iteration zugelassenen "grauen" Bereiche (zwischen 0 und 1) eine physikalische Bedeutung: Die Porosität wird als Entwurfsparameter eingeführt und die Dichteverteilung in Sandwichbauteilen und Hohlprofilen durch den Optimierungsprozess gesteuert. Als Vergleich sei auf 'natürliche' Werkstoffe, wie die Knochenspongiosa, mit angepasster Dichteverteilung hingewiesen.
- *Faserverbundwerkstoffe:* Wie bei den Schäumen wird die Topologieoptimierung eingesetzt, um das Layout der Bewehrungsführung in textilibewehrtem Beton zu bestimmen. Hier wird allerdings das klassische regularisierte 0–1 Verfahren angewendet, da keine grauen Zwischenwerte der Dichte zugelassen sind, z.B. das SIMP-Verfahren, (Solid-Isotropic-Microstructure with Penalization). Es wird gezeigt, wie mit diesem Ansatz die Menge, Schichtung und Ausrichtung durch die Optimierung festgelegt werden können. Dabei werden spezielle Vorgaben, zum Beispiel eine orthogonale Bewehrungsführung, berücksichtigt. Die einge-

setzte Strategie wird mit bereits existierenden Verfahren aus der Literatur verglichen und diskutiert.

- *Materialdesign*: Die mikrostrukturelle Betrachtungsweise der Topologieoptimierung und die Beziehung zu realen zellularen Materialien eröffnet die Möglichkeit des Materialdesigns. Durch die Anordnung eines oder mehrerer Basismaterialien (Phasen) auf der Mikrostrukturebene mit anschließender Homogenisierung können neue Werkstoffe auf Basis zellulärer Materialien mit gezielten Eigenschaften, wie negativer Querdehnungszahl oder verschwindender Wärmeausdehnung, entworfen werden.
- *Konstitutive Modelle für zellulare Materialien und Faserverbundwerkstoffe*. Aufgrund der Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse vom zugrunde gelegten mechanischen Modell und dem Ziel, das Potential der Strukturoptimierung für den Einsatz und den Entwurf neuartiger Materialien auszuloten, finden geeignete Formulierungen makroskopischer, phänomenologischer Konstitutivmodelle Eingang. Neben einer nichtlinearen Kinematik werden auch das nichtlineare Materialverhalten von Polymerschäumen und das spröde Versagen von Faser- und Matrixmaterial im textildbewehrten Beton berücksichtigt. Dazu spielt die Charakterisierung der Modelle und die Diskussion über den Einsatz innerhalb der Topologieoptimierung eine zentrale Rolle.

Kombinationen bzw. Konfliktlösungen werden im Sinne der Mehrkriterien- oder Vektoroptimierung eingebracht. Als Beispiel sei die Optimierung der Traglast bei gleichzeitiger Erhöhung der Duktilität genannt. Dieser Entwurfsfall hat aufgrund des spröden Verhaltens der Fasern und des Matrixmaterials im textildbewehrten Beton besondere Bedeutung.

Als Bauteile werden typische dünnwandige Balken-, Platten- und Schalenkomponenten untersucht, beispielsweise ausgeschäumte Hohlprofile aus Aluminium, textildbewehrte Balken mit aufgelöstem Querschnitt oder sandwichartige Platten-/ Schalenpaneele. Die Aussagekraft der Optimierungsergebnisse wird durch dreidimensional orientierte Berechnungen gesteigert. Besonderes Augenmerk ist deshalb auf die effiziente numerische Umsetzung der eingesetzten Verfahren und Optimierungstrategien gerichtet. Eine durchdachte Datenstruktur und ein effizientes Programmkonzept mit der Möglichkeit des verteilten parallelen Rechnens, stellen eine den bisher genannten Zielsetzungen untergeordnete aber nicht minder wichtige Basis dar. Die algorithmische Umsetzung der verwendeten Methoden erfolgt in das FE-Programm CARAT, das am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart entwickelt wird (Bletzinger (1990), Kimmich (1990), Reitinger (1994), Gee (2004)).

1.3 Übersicht

Die wesentlichen Aspekte, die in dieser Arbeit ausführlich diskutiert werden, und die hierfür erforderlichen Bausteine sollen nun kurz erläutert werden. Als Basis für die Optimierung mit zellularen und faserverstärkten Materialien unter besonderer Berücksichtigung des nichtlinearen Strukturverhaltens werden in *Kapitel 2* die notwendigen mechanischen Grundlagen für die Berechnung der Strukturantwort bereitgestellt. Das Kapitel beinhaltet eine kurze Zusammenfassung der Formulierungen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik mit der Beschreibung kleiner

aber auch finiter Deformationen, den entsprechenden Bilanzgleichungen und der inelastischen Materialformulierung. Für die numerische Lösung des Anfangsrandwertproblems wird eine räumliche Finite Element Formulierung verwendet und die Lösung des linearisierten Gleichungssystems mit dem Newton–Verfahren erreicht. Für die Bestimmung der makroskopischen Materialeigenschaften zellulärer Materialien wird die Homogenisierung periodischer Mikrostrukturen in einem weiteren Abschnitt ausgeführt.

Die Grundlagen der Strukturoptimierung und insbesondere das Zusammenspiel der drei beteiligten Teildisziplinen sind Bestandteile des *Kapitels 3*: erstens die abstrakte, mathematische Beschreibung des Optimierungsproblems, zweitens die Parametrisierung und drittens die Strukturanalyse. Die Behandlung sogenannter großer Optimierungsprobleme und die Berücksichtigung mehrerer, auch konkurrierender Optimierungsziele werden ausführlicher vertieft.

In *Kapitel 4* werden verschiedene Möglichkeiten der Modellierung zellulärer Materialien erörtert. Zur Berücksichtigung des linear elastischen und des nichtlinearen Materialverhaltens werden makroskopisch orientierte kontinuumsmechanische Modelle vorgestellt und Einsatzbereiche aufgezeigt. Hierbei wird insbesondere auf die Beschreibung der Materialparameter in Abhängigkeit der Porosität, die in den späteren Beispielen als Entwurfsvariable dient, eingegangen. Neben der makroskopisch phänomenologischen Betrachtungsweise wird die mikroskopische Betrachtungsweise der Porengeometrie eingesetzt, wie sie in verschiedenen Arbeiten benutzt wird, um eine Relation zwischen makroskopischen Materialparametern und den Abmessungen der Zellstege und Zellwände und damit der Dichte zu bestimmen (Gibson und Ashby (1999)). Ziel dieser Analyse ist es, bei Vorgabe gewünschter mechanischer Eigenschaften neue Porengeometrien mit dem Materialdesign zu erzeugen.

Die im Kapitel 4 vorgestellten Materialmodelle poröser Materialien werden in *Kapitel 5* verwendet, um die Dichteverteilung von Bauteilen mit einem Schaumkern so zu bestimmen, dass die Steifigkeit, die Traglast unter Berücksichtigung nichtlinearer Kinematik oder das dynamische Verhalten verbessert werden. Darüber hinaus wird eine Strategie vorgestellt, mit der sich das nichtlineare Verformungsverhalten zellulärer Strukturen kontrollieren lässt.

Aufgrund der speziellen Eigenschaften poröser Materialien werden verschiedene Entwurfskriterien motiviert. Besonderheiten, die aus der Berücksichtigung nichtlinearen Tragverhaltens resultieren, werden bezüglich der Optimierungsziele und der Effizienz aufgezeigt.

Die im Kapitel 5 erarbeiteten Erfahrungen und Verfahren werden im *Kapitel 6* zur Optimierung neuer poröser Materialien auf Mikroebene verwendet. Es wird gezeigt, dass es möglich ist, bei entsprechendem mikrostrukturellen Aufbau reale zelluläre Materialien mit bestimmten extremalen makroskopischen Eigenschaften (z.B. verschwindendes Ausdehnungsverhalten bei Temperaturerhöhung) zu erzielen.

Die verwendeten Materialmodelle für Beton und Fasermaterial und deren Interaktion im Verbundmaterial textilbewehrter Beton werden in *Kapitel 7* vorgestellt und die Diskretisierung in Form einer verschmierten Bewehrung erläutert. Die Möglichkeit der kontinuierlichen Diskretisierung der Bewehrung innerhalb des verwendeten 3D–Schalenmodells ist ebenfalls Gegenstand dieses Kapitels.

Das in den Kapiteln 2.2 und 7 vorgestellte Konzept zur Modellierung textilbewehrten Betons in dünnwandigen Betonbauteilen wird in *Kapitel 8* zur Bestimmung eines optimierten kontinuierlichen Bewehrungslayouts bei Berücksichtigung nichtlinearen Materialversagens eingesetzt. Die hier vorgestellte Methode wird mit verschiedenen anderen bekannten Verfahren zur Bestimmung des Ortes und der Ausrichtung der erforderlichen Bewehrung verglichen.

Eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen der behandelten Themen folgt schließlich in *Kapitel 9*.

Im Anhang sind einige notwendige und hilfreiche Bausteine zur Optimierung mit den genannten Materialien ausführlicher dargelegt. Die Sensitivitätsanalyse unter Berücksichtigung nichtlinearen Strukturverhaltens wird zusammengefasst. In einem zweiten Teil wird die konsistente Linearisierung eines Materialmodells für Metallschaum bei finiten Deformationen angegeben und eine effiziente Möglichkeit zur Beschreibung dreidimensionaler Optimierungsergebnisse durch glatte Oberflächen mit Verfahren aus der Bildbearbeitung vorgestellt.

2 Grundlagen der Strukturanalyse

In diesem Kapitel werden die zum Verständnis der weiteren Arbeit notwendigen Grundlagen der Kontinuumsmechanik zusammengefasst. Diese Grundlagen bilden einerseits die Basis für die linearen und nichtlinearen Materialformulierungen zur Beschreibung der betrachteten modernen Werkstoffe und zur Berücksichtigung der geometrisch nichtlinearen Effekte in den Strukturberechnungen. Andererseits bilden diese Grundlagen die Basis für effiziente Lösungsstrategien in der Optimierung unter Berücksichtigung linearem und nichtlinearem Strukturverhaltens.

Die kinematischen Beziehungen, die Bilanzsätze und die Materialgleichungen zur Modellierung des Werkstoffverhaltens im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik werden im ersten Abschnitt dieses Kapitels in der zum Verständnis der weiteren Arbeit notwendigen Tiefe dargestellt. Die Berechnung des geometrisch nichtlinearen Verhaltens von Strukturelementen mit Berücksichtigung inelastischen Materialverhaltens mit der Finiten-Element-Methode erfordert eine räumliche und zeitliche Diskretisierung, die anschließend diskutiert wird. Vereinfachungen und Besonderheiten, die sich aus der Annahme linearer Kinematik und/oder linearem Werkstoffverhaltens ergeben, werden an gegebener Stelle aufgezeigt. Der letzte Abschnitt behandelt die Beziehung zwischen den homogenen kontinuumsmechanischen Eigenschaften am Materialpunkt und seinem heterogenen Aufbau mit dem Konzept repräsentativer Volumenelemente und der Homogenisierung periodischer Mikrostrukturen.

Um der Optimierung mit der hier dargestellten Mechanik in den folgenden Kapiteln ausreichend Raum zu lassen, werden die Ausführungen in der gebotenen Kürze dargestellt. Für eine tiefere Einsicht in die dargestellte Thematik wird auf die entsprechende Standardliteratur der Kontinuumsmechanik verwiesen, z.B. Bonet und Wood (1997), Simo und Hughes (1998), Belytschko et al. (2000) und Wriggers (2001). Eine umfassende Übersicht ist in der Enzyklopädie (Stein et al. (2004)) dargestellt.

2.1 Nichtlineare Kontinuumsmechanik

In der Kontinuumsmechanik wird vom mikroskopischen Aufbau der Materie, zum Beispiel der Gitterstruktur kristalliner Festkörper und der molekularen Struktur von Flüssigkeiten, abgesehen und die Materie als Kontinuum approximiert. Die Kinematik beschreibt die Deformation und die Bewegung eines Körpers im Raum, die Definition von Verzerrungsmaßen und die zeitliche Ableitung kinematischer Größen.

2.1.1 Kinematik großer Deformationen

Die mathematische Beschreibung der Bewegung eines Körpers im Euklidischen Raum erfolgt üblicherweise durch eine Folge von Abbildungen dieses Körpers. Der Körper B in Bild 2.1 kann durch eine Menge Punkte veranschaulicht werden, die einen Bereich des Raums \mathbb{R}^3 einnehmen.

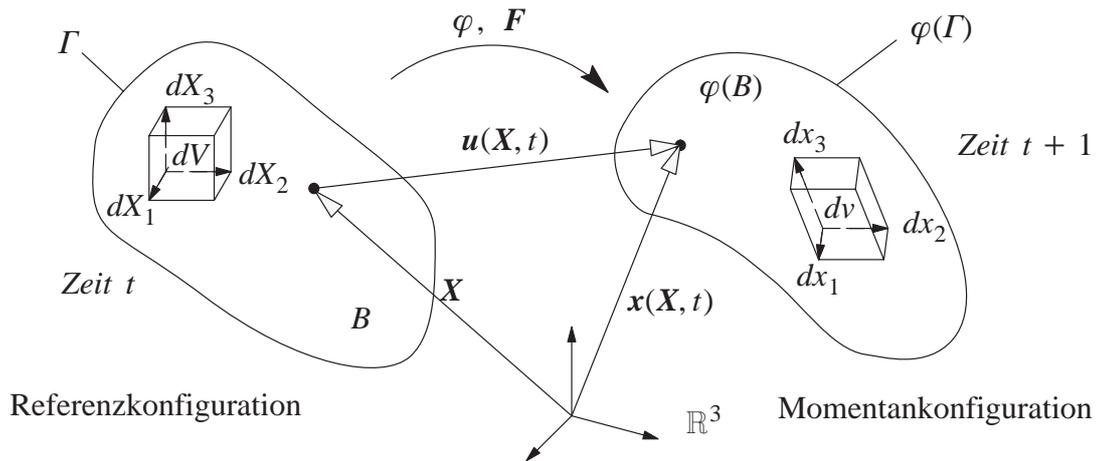


Bild 2.1: Bewegung und Deformation eines materiellen Körpers

Die einzelnen Abbildungen werden auch Konfigurationen genannt. Die Lage der materiellen Punkte wird mit den Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{X} beschrieben. Unter einer Verzerrung oder Deformation versteht man die Veränderung der gegenseitigen Lagebeziehungen der Materiepunkte. Mit dieser Betrachtungsweise ist eine Charakterisierung des Körpers im Sinne von Gestalt, Oberfläche und Volumen möglich. Die Bewegung des Körpers ist durch die Folge von Konfigurationen mit Bezug zu einer Zeit t gegeben. Eine besondere Stellung nimmt die Referenzkonfiguration als Bezugsconfiguration ein. Die Referenzkonfiguration kann frei gewählt werden. In der Regel wird für diese Konfiguration die Ausgangskonfiguration zu Beginn einer Deformation gewählt. In dieser Konfiguration befindet sich der Körper in einem spannungsfreien und unbelasteten Ausgangszustand. Die Momentankonfiguration bezeichnet die aktuelle bzw. räumliche Lage.

Die Koordinaten eines materiellen Punktes werden bezüglich des Ursprungs mit einem Ortsvektor \mathbf{x} bzw. \mathbf{X} angegeben. Die Beschreibung der Bewegung zum Zeitpunkt t bzw. die Abbildung zwischen zwei Konfigurationen erfolgt mit einer Abbildungsvorschrift $\varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}$. Durch Differentiation des Ortsvektors erhält man den Deformationsgradienten \mathbf{F}

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.1)$$

Der Deformationsgradient transformiert das Linienelement $d\mathbf{X}$ in die Momentankonfiguration. Ebenso kann mit der Determinante des Deformationsgradienten $\det \mathbf{F}$ ein Volumenelement transformiert werden

$$dv = \det \mathbf{F} dV . \quad (2.2)$$

Da der Deformationsgradient noch Starrkörperanteile enthält, wird das Skalarprodukt des linearen Operators als Basis für verschiedene Verzerrungsmaße eingeführt. Mit dem rechten Cauchy–Green–Tensor $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ ist die Objektivität gegeben. Dieser Tensor beschreibt die Deformation des Momentanzustandes, bezogen auf die Referenzkonfiguration. Es lassen sich verschiedene

Verzerrungsmaße nach Ogden (1997) formulieren. In dieser Arbeit wird neben dem Verzerrungsmaß \tilde{C} auch der nichtlineare Green–Lagrange–Verzerrungstensor \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\tilde{C} - \mathbf{1}). \quad (2.3)$$

angewendet. Die Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung führt auf den linearisierten Verzerrungstensor \mathbf{E}^{lin} . Der nichtlineare Green–Lagrange–Verzerrungstensor und dessen linearisierte Form sind aufgrund ihres Bezugs zum rechten Cauchy–Green Tensor in der Referenzkonfiguration definiert.

2.1.2 Spannungen

Der auf ein Flächenelement ΔA mit dem Normalenvektor \mathbf{n} in der Momentankonfiguration wirkende Spannungsvektor \mathbf{t} definiert durch das Cauchy–Theorem

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}. \quad (2.4)$$

den Cauchy’schen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$, der aufgrund des Bezugs zur deformierten Konfiguration als physikalisch wahrer Spannungstensor bezeichnet wird. Für eine Darstellung mit Bezug auf den undeformierten Körper, d.h. in der Referenzkonfiguration, kann der Cauchy’sche Spannungstensor durch die Transformation

$$\tilde{\mathbf{S}} := \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.5)$$

in den unsymmetrischen 1. Piola–Kirchhoff–Spannungstensor $\tilde{\mathbf{S}}$ überführt werden. Aus numerischen und algorithmischen Gründen wird der symmetrisierte 2. Piola–Kirchhoff–Spannungstensor

$$\mathbf{S} := \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{S}} \quad (2.6)$$

bevorzugt. Dieser bezieht nun Kraft und Fläche auf den undeformierten Körper und ist das energetisch konjugierte oder arbeitskonforme Spannungsmaß zur Green–Lagrange–Verzerrung.

2.1.3 Materialgleichungen

In dieser Arbeit kommen verschiedene Kontinuumsmodelle zur Beschreibung des linearen und nichtlinearen Werkstoffverhaltens bei kleinen und großen Deformationen zur Anwendung.

Die Analyse des Deformationsverhaltens realer Werkstoffe führt auf die klassische Einteilung in linear–elastisches, nichtlinear–elastisches, elastisch–plastisches und elastisch–geschädigtes Materialverhalten. Darüber hinaus sind auch Kombinationen und die weitere Klassifizierung aufgrund der Beobachtung thermischer, zeitabhängiger oder chemischer Einflüsse auf das Werkstoffverhalten möglich. Die Spannungs–Verzerrungsbeziehungen in Bild 2.2 veranschaulichen diese Klassifizierung anhand einachsiger beanspruchter Modellproben.

Elastisches Materialverhalten zeichnet sich dadurch aus, dass jedem Verzerrungszustand eindeutig ein Spannungszustand zugeordnet werden kann. Darüber hinaus stellt sich bei vollständiger

Entlastung die undeformierte Konfiguration wieder ein. Materialien mit bleibenden Verzerrungen nach Entlasten werden plastische Materialien genannt.

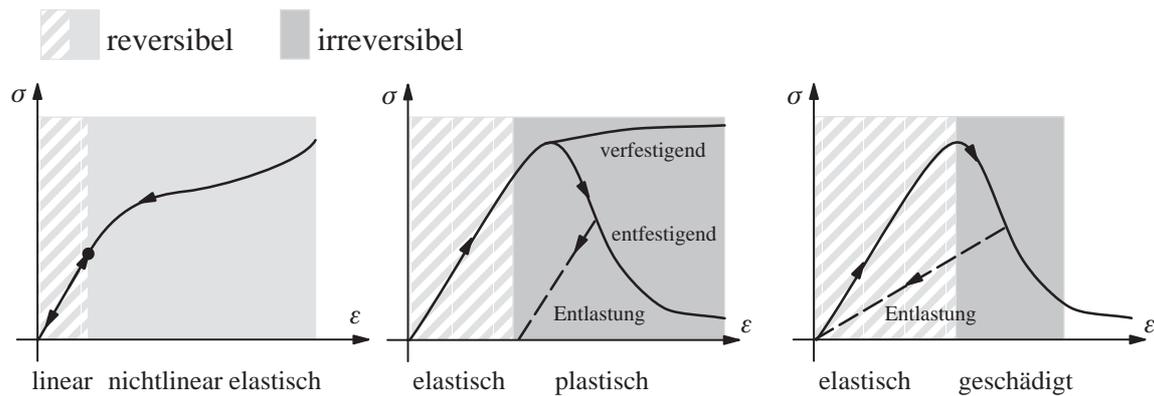


Bild 2.2: Spannungs– Dehnungsdiagramme der Werkstoffe in dieser Arbeit

Werden die mechanischen Eigenschaften eines Materials infolge der chemischen, thermischen oder physikalischen Zerstörung seines strukturellen Aufbaus während der Belastung abgemindert, bezeichnet man dieses Phänomen als Schädigung.

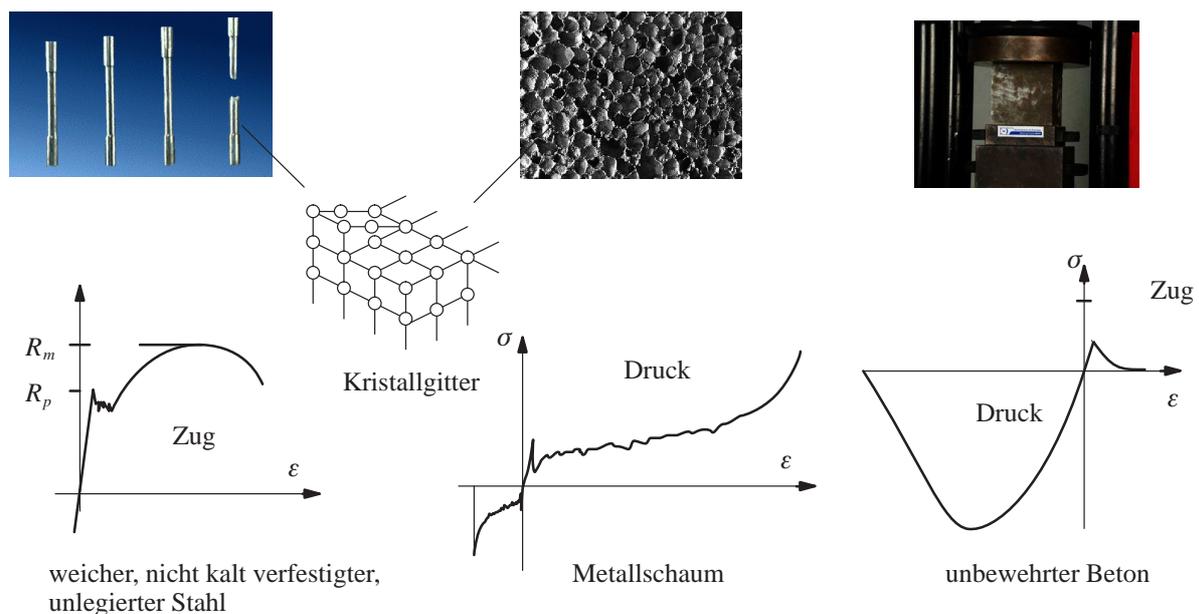


Bild 2.3: Qualitative Spannungs– Dehnungs– Diagramme realer Werkstoffe

Der idealisierten Betrachtungsweise wird im Folgenden das Verformungsverhalten von realen Materialien gegenübergestellt. Bild 2.3 zeigt typische Spannungs–Dehnungs–Diagramme von drei Werkstoffen, die in dieser Arbeit untersucht werden. Das gut bekannte Deformationsverhalten von unlegiertem Stahl und den in dieser Arbeit schwerpunktmäßig untersuchten Metallschaum. Der Werkstoff Beton kann weder durch eine idealisierte Betrachtungsweise in Form reiner Schädigung mit der Plastizitätstheorie ausreichend genau beschrieben werden. In dieser Arbeit wird deshalb eine Kombination dieser beiden Modellvorstellungen in Form eines gekoppelten Schädigungs–Plastizitätsmodells verwendet (Kapitel 7.2).

Obwohl Metallschäume aus denselben metallischen Basismaterialien aufgebaut sind, wie die Probekörper der beschriebenen Zugprobe mit identischem Verhalten der Kristallstruktur auf der Mikroebene, verhalten sie sich aus makroskopisch–kontinuumsmechanischer Sicht sehr unterschiedlich. Für das Verständnis des Verformungsverhaltens ist die Betrachtung weiterer Ebenen erforderlich. Der kristalline Aufbau der Metalle mit einem Kristallgitterabstand von ca. 10^{-7} mm und den darin enthaltenen Versetzungen ist für das duktile Verformungsverhalten der Porenstruktur der porösen Metallschäume genauso wie bei massiven Stahlbauteilen verantwortlich. Der Einfluss des im Mikrometerbereich sichtbaren Korngefüges auf das Verformungsverhalten massiver Stahlbauteile kann in der Regel in einer kontinuumsmechanisch verschmierten Betrachtung ausreichend genau berücksichtigt werden.

Die Spannungs–Dehnungs–Diagramme für duktile Metallschäume unterscheiden sich von denen Stahls. Allerdings wird der linear elastische Bereich aufgrund der Biegung und Ausrichtung der Zellstruktur in Richtung der Beanspruchung deutlich früher verlassen. Die duktile Verformbarkeit des makroskopisch betrachteten Werkstoffs weist aufgrund der sukzessiven elastoplastischen Deformation der Porenstruktur ein deutlich ausgeprägteres Fließplateau über einen sehr großen Verzerrungsbereich auf und dies sowohl im Zug, als auch im Druckbereich.

Der Auswahl oder der Entwurf geeigneter Materialgleichungen für die numerische Modellierung kommt der wiederholten Berechnung der Strukturantwort im Optimierungsprozess eine besondere Bedeutung zu. Neben dem Wunsch nach einer möglichst hohen Approximationsgenauigkeit ist der Robustheit und der Effizienz besondere Beachtung für die erfolgreiche numerische Berechnung zu widmen. Ein Katalog der zu berücksichtigenden Kriterien sollte die zwei folgenden Fragen beinhalten:

1. Welche experimentellen Daten stehen zur Verfügung?

- Last–Verschiebungs–Diagramme von Zug– und Druckversuchen
- Ergebnisse einaxialer oder mehraxialer Untersuchungen
- Informationen über zeitabhängige oder chemische Effekte

Liegen keine Informationen aus Druckversuchen vor, kann eventuell das Deformationsverhalten aus mehraxialen Zug– und Scherversuchen abgeschätzt werden. Fehlen bestimmte aussagekräftige Informationen, sind einfachere und meist auch effizientere mathematische Beschreibungen den komplexeren Materialmodellen mit vielen Parametern vorzuziehen. Bisher blieb der Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit und der Temperatur auf das elastische und inelastische Verhalten unberücksichtigt. So verhalten sich Polymere bei niedrigen Temperaturen elastisch–spröde und zeigen bei höheren Temperaturen ein ausgesprochen duktileres plastisches Verhalten. Dehnratenabhängige Werkstoffe werden viskoelastische bzw. viskoplastische Materialien genannt. Die in dieser Arbeit eingesetzten Materialmodelle sind ausschließlich dehnratenunabhängig.

2. Welche Phänomene sollen in der numerischen Berechnung abgebildet werden?

- lineares oder nichtlineares elastisches Materialverhalten
- perfekte, ver- oder entfestigende plastische Verformungen
- irreversible Verformungen aufgrund einer Schädigung
- Einflüsse aus zyklischen Belastungsvorgängen

Erfolgen die numerischen Berechnungen im sogenannten Bereich kleiner Verzerrungen, wie zum Beispiel bei vielen Aufgabenstellungen mit dünnwandigen Schalenstrukturen, reicht meist die Berücksichtigung linearen Werkstoffverhaltens oder der Einsatz einfacher Formulierungen zur Berücksichtigung plastischer Deformationen. Für Werkstoffe, die sich bei sehr kleinen Deformationen bereits plastisch verformen, wird mit linearen Werkstoffmodellen das elastische Werkstoffverhalten ausreichend genau approximiert. Die funktionalen Zusammenhänge zur Abbildung linearer isotroper Verfestigung bei polykristallinen Werkstoffen lässt sich analytisch geschlossen herleiten und die Berechnungen erheblich effizienter durchführen, als bei der Berücksichtigung einer nichtlinearen Verfestigung mit entsprechend exponentiellen Verfestigungsgesetzen. Vereinfachend kann die Beschreibung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens von Beton mit einfachen kontinuumsmechanischen Schädigungsmodellen erfolgen (Hettich (2006)), im Gegensatz zu den recht komplexen gekoppelten Plastizitäts- und Schädigungsmodellen in Kapitel 4.3 (Menrath (1999), Haufe (2001)). Andererseits sind linear elastische Werkstoffmodelle und Formulierungen auf Basis linearer Kinematik für die Berechnung mit großen Deformationen und die Optimierung des Energieabsorptionsvermögens bei Stoßvorgängen völlig ungeeignet. Zusammenfassend erfolgt die Approximation realen Werkstoffverhaltens mit mathematischen Modellen für die Berechnung realer Strukturbauteile so genau wie nötig und so effizient wie möglich.

2.1.4 Klassifizierung

Neben der Klassifizierung der Materialien nach ihren physikalischen Eigenschaften wird im folgenden Abschnitt auch die Kontinuumsmechanik und die algorithmische Umsetzung zur weiteren Gliederung verwendet. Aufgrund der Gemeinsamkeit der in dieser Arbeit verwendeten linear und nichtlinearen elastischen Materialien mit Bezug zu einem elastischen Potential, behandelt der erste Abschnitt die Gruppe der hyperelastischen Materialien. Linear elastische Materialien, die für kleine Verschiebungen und große Verschiebungen mit kleinen Verzerrungen eingesetzt werden können, ordnen sich als Sonderfall in dieser Gruppe ein. Die Wahl des Verzerrungsmaßes und bestimmte Anforderungen an das Potential entscheiden über den Einsatz dieser Formulierung auch für große Verzerrungen. Die Beschreibung des nichtlinearen, irreversiblen Materialverhaltens erfolgt im Rahmen der Elastoplastizität. Der Einfluss der Schädigung wird bei der Beschreibung der elastoplastischen Materialformulierung für Beton in Kapitel 7.2 kurz aufgegriffen.

Man spricht von hyperelastischen Materialien, wenn den konstitutiven Beziehungen ein elastisches Potential zugrunde liegt, aus dem Spannungsgrößen und Materialtensoren abgeleitet werden. Mit dieser Annahme kann jedem Verzerrungstensor ein Spannungstensor eindeutig zugeordnet werden. Die Arbeit ist unabhängig vom Lastpfad.

Neben den Wachstumsbedingungen

$$\lim_{\det F \rightarrow +\infty} \Psi \rightarrow \infty, \quad \lim_{\det F \rightarrow 0} \Psi \rightarrow \infty \quad (2.7)$$

ist die Forderung nach Konvexität elementar für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen.

Mit Berücksichtigung der Ausführungen zur Determinante des Deformationsgradienten lässt sich leicht die physikalische Bedeutung dieser Bedingungen erklären. Geht das Volumen eines Körpers aufgrund einer Deformation gegen 0, wachsen die Spannungen gegen unendlich. Eine unendliche Vergrößerung des Volumens geht ebenfalls mit unendlich großen Spannungen einher.

Das Potential Ψ wird auch elastisches Potential bzw. die Verzerrungsenergiegedichte genannt und setzt Verzerrungsgrößen und Spannungsmaße in Zusammenhang. Der 2. Piola–Kirchhoff’sche Spannungstensor S berechnet sich gemäß:

$$S = 2 \frac{\partial \Psi(\tilde{C})}{\partial \tilde{C}} = \frac{\partial \Psi(E)}{\partial E} \quad (2.8)$$

Die konstitutive Beziehung zwischen Spannung und Verzerrungsgrößen erfolgt über den Werkstoff- bzw. Materialtensor C . Dieser Werkstofftensor wird in seiner linearisierten Form, z.B. in der tangentialen Steifigkeitsmatrix, in den einzelnen Schritten der nichtlinearen Berechnungen mit dem Newton–Raphson–Verfahren benötigt..

Reduziert man die Annahme (2.8) auf einen linearen Zusammenhang zwischen den Spannungs- und den Verzerrungskomponenten, folgt das Hookesche Gesetz

$$\sigma = C \varepsilon \quad (2.9)$$

mit dem Werkstofftensor C . Diese Formulierung kommt als isotropes und anisotropes St.–Venant–Kirchhoff–Material an verschiedenen Stellen der Arbeit zum Einsatz, z.B. in dem linearen Materialmodell von Gibson und Ashby (1988) für Metallschäume bei kleinen Deformationen. Es wird in der Regel durch den linearen Zusammenhang zwischen dem 2. Piola–Kirchhoff’schen Spannungstensor und dem Green–Lagrange Verzerrungstensor beschrieben.

$$S = \lambda \text{tr } E \mathbf{1} + 2\mu E \quad (2.10)$$

Aufgrund der Verwendung des Green–Lagrange Verzerrungstensors ist dieses Gesetz für Problemstellungen für isotropes Materialverhalten mit großen Verschiebungen und Rotationen, jedoch nur für kleine Verzerrungen geeignet.

Thermische Einflüsse können bei dieser Formulierung mit dem Tensor β^T und der Temperaturdifferenz aus der Temperatur T_0 im undeformierten Zustand und der Temperatur T im deformierten Zustand T berücksichtigt werden.

$$\sigma = C\varepsilon - \beta^T(T - T_0) \quad (2.11)$$

β^T lässt sich aus dem Kompressionsmodul K , der Wärmedehnzahl α^T und dem Kronecker–Delta δ für isotropes Werkstoffverhalten berechnen.

$$\boldsymbol{\beta}^T = K\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\delta} \quad (2.12)$$

Allerdings ist bei höheren Temperaturen die Abhängigkeit der Materialparameter von der betrachteten Temperatur $\mathbf{C} = \mathbf{C}(T)$ zu berücksichtigen. Die Temperaturabhängigkeit mit einem linearen isotropen Basismaterial wird in Kapitel 6 bei Beispielen des Materialdesigns auf Mikrostrukturebene eingesetzt.

Die Plastizitätstheorie stellt eine Möglichkeit zur mathematischen Beschreibung makroskopischen Werkstoffverhaltens mit Berücksichtigung der Belastungsgeschichte dar. Die Trennung des reversiblen elastischen Bereichs vom irreversiblen erfolgt im Spannungsraum durch

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (2.13)$$

mit der Fließbedingung $\phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ in Abhängigkeit von dem aktuellen Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}$ und einigen internen Variablen \mathbf{q} zur Beschreibung der Belastungsgeschichte. Die Verzerrungen lassen sich bei Beschränkung auf kleine Verzerrungen additiv in elastische und in plastische Anteile zerlegen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{el} + \boldsymbol{\varepsilon}^{pl} \quad (2.14)$$

Die Betrachtung der Verzerrungszuwächse bzw. der Verzerrungsraten ergibt

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} \quad (2.15)$$

Daraus folgt bei Betrachtung kleiner Verzerrungen die Rate der Spannungen zu:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{pl} \quad (2.16)$$

Mit Hilfe geeigneter Evolutionsgleichungen der plastischen Verzerrungsrate wird das Werkstoffverhalten nach Verletzen der Fließbedingung berücksichtigt.

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{pl} = \gamma \tilde{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (2.17)$$

$\tilde{\mathbf{n}}$ bezeichnet den Normalenvektor auf der Fließfläche oder auf ein zusätzlich zu definierendes plastisches Potential. Unterscheidet sich das plastische Potential von der Fließfunktion ϕ , so spricht man vom nichtassoziierten Fließen, sonst von einer assoziierten Plastizität. Der plastische Multiplikator γ ist ein Skalar, der die Schrittweite in Richtung der Normalen angibt. Werkstoffe verhalten sich selten ideal plastisch nach dem Erreichen der Fließgrenze. Die Beschreibung des ver- bzw. des entfestigenden Verhaltens erfolgt durch eine entsprechende mathematische Funktion $\mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q})$ in Abhängigkeit vom Spannungszustand und der Belastungsgeschichte. Die internen Variablen \mathbf{q} im Spannungsraum können sich dann folgendermaßen entwickeln:

$$\dot{\mathbf{q}} = -\gamma \mathbf{H}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (2.18)$$

Mit Hilfe der Kuhn–Tucker–Bedingungen

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad \phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \leq 0, \quad \gamma \phi = 0 \quad (2.19)$$

erfolgt die Bestimmung des plastischen Multiplikators γ mit der Konsistenzbedingung.

$$\dot{\phi}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \nabla_{\boldsymbol{\sigma}}\phi \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \nabla_{\mathbf{q}}\phi \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.20)$$

Stoffgesetze, die elastoplastische Effekte berücksichtigen, werden zur Beschreibung des Verformungsverhaltens der Porenstruktur von Metallschäumen in Kapitel 6.3.3, aber auch zur Modellierung des Matrixmaterials Beton in textilbewehrten Bauteilen in Kapitel 7.2 benötigt. In diesen Beispielen werden zwar große Verschiebungen, aber nur kleine Verzerrungen betrachtet. Deshalb findet bei diesen Beispielen eine Materialformulierung Anwendung, die auf der additiven Zerlegung der Verzerrungsgrößen basiert.

2.1.5 Randwertproblem

Die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen erfolgten ohne Berücksichtigung der realen Zeit, d.h. sie wurden quasi-statisch durchgeführt. Als Ausgangspunkt zur Lösung wird die Erhaltung des Impulses gewählt. Demnach ist der Gesamtimpuls innerhalb eines abgeschlossenen Systems konstant. Die Gleichung für die lokale Impulsbilanz eines Materiepunktes lautet bei Vernachlässigung der zeitabhängigen Trägheitsterme:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad , \quad (2.21)$$

mit den Volumenkräften $\rho \mathbf{b}$. Die Impulsbilanz definiert die lokale Gleichgewichtsbedingung für einen Materiepunkt und wird deshalb als starke Form bezeichnet. Die Impulsbilanz und die Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u} \text{ auf } \Gamma_D \text{ und } \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \text{ auf } \Gamma_N \quad (2.22)$$

definieren das Randwertproblem. Durch Wichten der lokalen Gleichgewichtsbeziehung und der Neumann-Randbedingung mit einer Testfunktion $\delta(\cdot)$, anschließender Integration und Anwendung des Gauss'schen Integralsatzes lässt sich mit der Methode der gewichteten Residuen die schwache Form des Gleichgewichts angeben.

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_B \boldsymbol{\sigma} : \operatorname{grad}_x \delta \mathbf{u} dV - \int_B \tilde{\mathbf{b}} \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} dA = 0 \quad (2.23)$$

Das Produkt aus der Dichte ρ und den Massenkräften \mathbf{b} wird im Weiteren mit der eingepägten Volumenkraftdichte $\tilde{\mathbf{b}}$ zusammengefasst. Die Interpretation der Testfunktion als virtuelle Verschiebung führt auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV). Im Gegensatz zur lokalen Gleichgewichtsbeziehung stellt das Prinzip eine globale Form des Gleichgewichts dar. Der erste Term in der Gleichung (2.23) ist die innere virtuelle Arbeit $\delta \tilde{W}$. Das Skalarprodukt der Volumenlasten $\tilde{\mathbf{b}}$ und den Oberflächenkraftdichte $\bar{\mathbf{t}}$ mit den virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ bildet die äußere virtuelle Arbeit $\delta \tilde{W}$. Wird das Gleichgewicht

$$G(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta W - \delta \tilde{W} = 0 \quad (2.24)$$

in der Momentankonfiguration unter Berücksichtigung materieller und/oder kinematischer Nichtlinearität ausgewertet, stellt es eine nichtlineare Gleichung in den Verschiebungen dar.

2.2 Finite Elemente

2.2.1 Lösen des räumlichen nichtlinearen Randwertproblems

Die schwache Form des Gleichgewichts ist der Ausgangspunkt verschiedener Diskretisierungsmethoden. In dieser Arbeit erfolgt die räumliche *Diskretisierung* mit Finiten Elementen. Die Approximation des Verschiebungsverlaufs \mathbf{u} innerhalb eines Finiten Elementes erfolgt über die Ansatzfunktionen $\tilde{\mathbf{N}}$ auf Basis der diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{d} .

$$\mathbf{u}^h := \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{d} \quad (2.25)$$

Mit Hilfe einer Operatormatrix \mathbf{B} werden die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ innerhalb des Elementes approximiert.

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (2.26)$$

Unter Verwendung des Bubnov–Galerkin–Verfahrens erfolgt die Approximation der Verschiebungen \mathbf{u} und der Variation der Verschiebungen $\delta\mathbf{u}$ nach dem gleichen Schema. Die diskretisierte schwache Form des Gleichgewichts in Matrixnotation folgt

$$G(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \delta\mathbf{d}^T \left[\int_B \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_B \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{b}} dV - \int_I \tilde{\mathbf{N}}^T \tilde{\mathbf{t}} dA \right] = 0 . \quad (2.27)$$

Der Operator \bigcup bezeichnet die Assemblierung der Finiten Elemente. Der erste Term der Gleichung lässt sich zu den inneren Kräften \mathbf{F}_{intern} und die zwei verbleibenden Terme zu den äußeren Kräften \mathbf{F}_{extern} zusammenfassen. Damit kann die diskrete Form des globalen Kräftegleichgewichts angegeben werden.

$$\mathbf{F}_{intern} - \mathbf{F}_{extern} = 0 \quad (2.28)$$

Die Linearisierung der Gleichung (2.28) führt für lineare Probleme auf ein einziges zu lösendes Gleichungssystem. Bei Berücksichtigung materieller bzw. kinematischer Nichtlinearität stehen die inneren Knotenkräfte \mathbf{F}_{intern} in einer nichtlinearen funktionalen Beziehung zu den Verschiebungen \mathbf{u} . Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt inkrementell, iterativ mit Hilfe des Newton–Raphson–Verfahrens. Ausgangspunkt bildet die Verletzung des Gleichgewichts (2.28), ausgedrückt durch das Residuum \mathbf{G} .

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_{intern} - \mathbf{F}_{extern}. \quad (2.29)$$

Das Residuum definiert die Differenz zwischen den inneren und äußeren Kräften. Die Ungleichgewichtskräfte \mathbf{G} sind innerhalb des iterativen Prozesses zu Null zu bestimmen. Für die Lösung mit dem Newton–Raphson–Verfahren ist die Gleichung (2.29) zu linearisieren. Die Betrachtung eines Inkrements führt bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung auf das linearisierte globale Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = -\mathbf{G}, \text{ mit } \mathbf{K}_T = \frac{\delta \mathbf{G}}{\delta \mathbf{d}} \quad (2.30)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist die inkrementelle Änderung des Verschiebungsvektors $\Delta \mathbf{d}$. Die Hesse- oder tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T im betrachteten Iterationsschritt folgt aus der Linearisierung der inneren Knotenkräfte.

2.2.2 Elementtypen

Innerhalb der Methode der Finiten Elemente kommen verschiedene Elementtypen zur Approximation des betrachteten Gebietes zur Anwendung. In diesem Abschnitt soll auf einige für diese Arbeit relevanten Besonderheiten bezüglich der verwendeten Finiten Element Typen eingegangen werden. Hierfür wird das bisher betrachtete Kontinuum durch einen Körper B ersetzt, der durch eine endliche Anzahl finiter Elemente diskretisiert sein soll.

$$B = B^h = \bigcup_{n=1}^{n_{ele}} \Omega_i^e \quad (2.31)$$

Aufgrund der überwiegend dreidimensionalen Untersuchungen und der generellen Anwendbarkeit wurden der größte Teil der Berechnungen mit dreidimensionalen Kontinuumselementen durchgeführt. Durch die höhere Elementgüte gegenüber z.B. Tetraederelementen kommen bei den gezeigten Beispielen Hexaeder-Elemente zur Anwendung. Die verwendeten Kontinuumselemente basieren auf dem klassischen isoparametrischen Konzept, d.h., sowohl die Geometrie der Momentan- und der Referenzkonfiguration als auch die Verschiebungsgrößen im Finiten Element werden durch die gleichen Ansatzfunktionen approximiert.

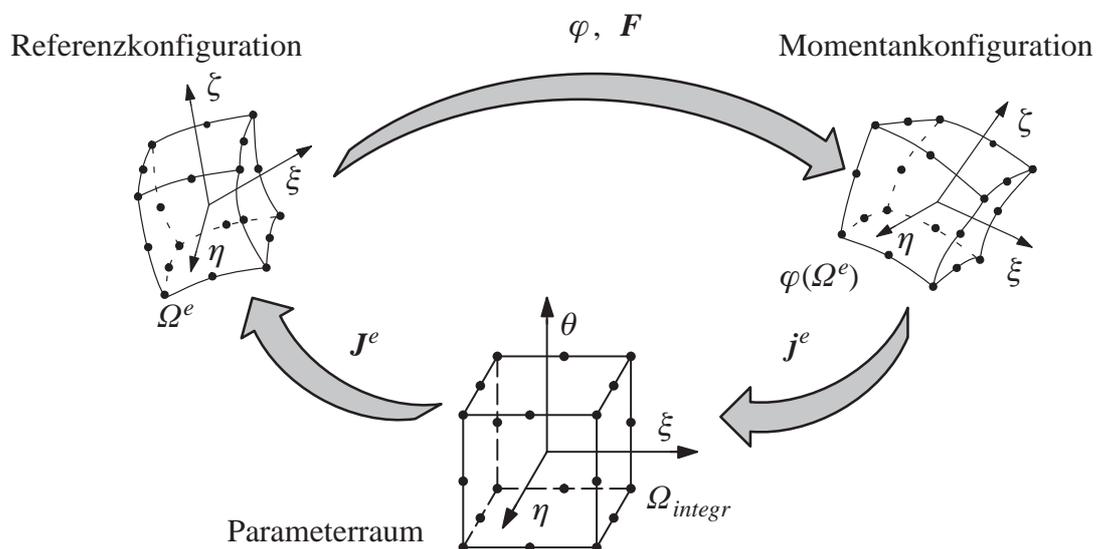


Bild 2.4: Konfigurationen und isoparametrische Abbildung des Finiten Elements

Die Interpolation innerhalb des Elementes erfolgt in dieser Arbeit mit quadratischen Ansatzfunktionen. Analog zur kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise kann nun das Finite Element in den verschiedenen Konfigurationen angegeben werden (siehe Bild 2.4).

Ein Ziel dieser Arbeit ist die Bewehrungsfindung für Platten-, Scheiben- und beliebig gekrümmte Schalenträgerwerke. Aufgrund der geringen Ausdehnung dieser Trägerwerke in Dickenrichtung kommt ein dreidimensionales Multilayer-Schalenelement mit einem linearen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung je kinematischer Schicht zur Anwendung. Die einzelnen kinematischen Schichten und eine abschnittsweise Integration zusätzlich definierter materieller Schichten erlauben die schichtweise Modellierung textilbewehrter Betonbauteile (siehe Bild 2.5). Die Beschreibung der Geometrie erfolgt über eine Referenzfläche.

Im Gegensatz zu konventionellen Schalenelementen wird hier zur Beschreibung der Dickenänderung der Schale ein zusätzlicher Freiheitsgrad pro Schicht eingeführt. Die Rotation des Direktors (Schalennormale einer kinematischen Schicht) wird mit Hilfe eines Differenzvektors abgebildet. Jeder Knoten des Elements besitzt drei Verschiebungsfreiheitsgrade und für jede kinematische Schicht drei weitere Freiheitsgrade.

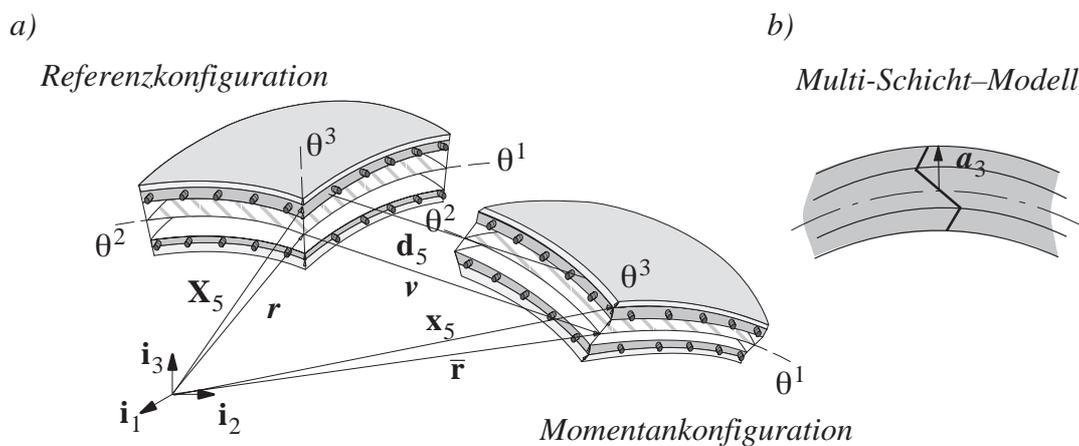


Bild 2.5: a) Höhere Schalenkinematik im unverformten und verformten Zustand
b) Multilinearer Verschiebungsansatz in Dickenrichtung

Der lineare Verschiebungsansatz in Dickenrichtung in jeder Schicht des hier verwendeten Schalenelements liefert konstante Normalverzerrungen in Dickenrichtung, so dass für lineare Elastizität die Spannungen in der Schalenfläche linear über die Dicke verlaufen. Aufgrund der Berücksichtigung des vollständigen dreidimensionalen Spannungs- und Verzerrungszustandes wird der Einsatz von Materialmodellen ermöglicht, die aus der dreidimensionalen Formulierung umodifiziert übernommen werden können. Zur Vermeidung künstlicher Versteifungseffekte aufgrund parasitärer Normalspannungen in Dickenrichtung infolge Biegung verwendet Haufe (2001) bei einer Schicht einen zusätzlichen Freiheitsgrad (7-Parameter-Formulierung). Allerdings reduziert sich der Versteifungseffekt aufgrund der erhöhten Kinematik bei mehreren Schichten, so dass auf die Ergänzung durch diese zusätzlichen Freiheitsgrade verzichtet werden kann.

Für eine ausführliche Diskussion bezüglich dieser speziellen Elementtechnologie sei auf Braun (1995), Bischoff (1999), Bischoff und Ramm (1997, 2000) und Bischoff et al. (1999) hingewiesen. Zur Auswertung des eindimensionalen nichtlinearen Materialmodells für die Modellierung der Faserbewehrung werden die Verzerrungen des Schalenraums der bewehrten materiellen Schicht in das Koordinatensystem der Bewehrungslage transformiert. Zur Beschreibung der

Orientierung der Bewehrung kann der Winkel γ in Bild 2.6, linke Abbildung, zwischen dem Bewehrungs- und Schalenkoordinatensystem vorgegeben werden (Eitel (1999)).

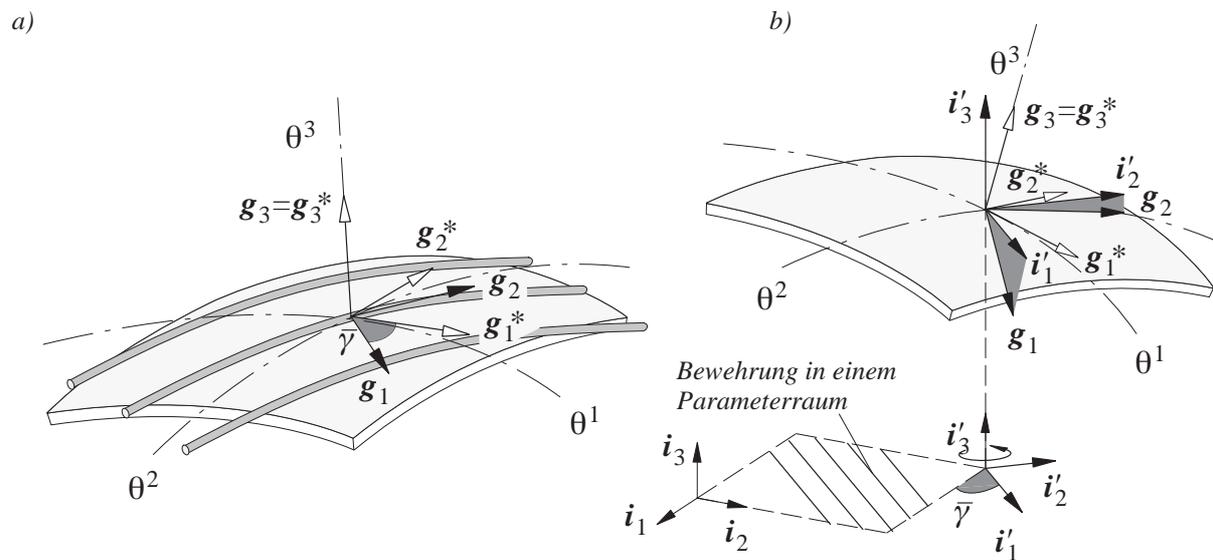


Bild 2.6: a) Basisvektoren der Schalen- und der Bewehrungsschicht
b) Transformation hinsichtlich globalem Basiskoordinatensystem

Die Ausrichtung der Bewehrung erfordert ein geeignetes Koordinatensystem. Die Orientierung in einem globalen Koordinatensystem führt zu einer kontinuierlichen Bewehrung in einem Volumen. Bei Schalentragwerken ist darüberhinaus der Verlauf der Bewehrung an die Schalenkrümmung anzupassen. Die Ausrichtung der Bewehrung an lokale Koordinatensysteme in den Finiten Elementen setzt die Kenntnis der Orientierung der einzelnen Elemente voraus. Zur Vermeidung der Abhängigkeit der Bewehrung von der Diskretisierung wird ein orthonormiertes Koordinatensystem \mathbf{i} eingeführt. In diesem Koordinatensystem wird die Bewehrung mit der globalen Bewehrungsrichtung $\bar{\gamma}$ definiert. Basierend auf diesem Koordinatensystem wird die Bewehrungsrichtung sukzessive vom Parameterraum in das krummlinige Schalenkoordinatensystem transformiert (siehe 2.6, rechte Abbildung) und in jedem Gaußpunkt der aktuelle Winkel der Bewehrung berechnet. Hierdurch wird sichergestellt, dass auch bei einer gekrümmten Schale eine kontinuierliche Bewehrungsführung entsprechend einer langfaserigen textilen Bewehrung abgebildet werden kann. Für die entsprechenden Transformationen wird auf die Arbeit von Braun et al. (1994, 1995) verwiesen.

Zur numerischen Simulation des Tragverhaltens von Stahlbetonkonstruktionen mit nachträglich aufgebrachtener textiler Verstärkung wird von Steinigen (2001) ebenfalls eine Diskretisierung mit geschichteten Finiten Elementen mit einem nichtlinearen Modell zur Beschreibung des Stahlbetons und zur Erfassung des Schubversagens zwischen dem bestehenden Bauteil und der nachträglichen Verstärkung eingesetzt.

2.3 Homogenisierung periodischer Mikrostrukturen

In der Praxis wird im Regelfall eine makroskopische Modellierung des Materialverhaltens eingesetzt. Die mikrostrukturelle Betrachtungsweise von Werkstoffen findet dagegen meist in der Forschung Anwendung und hat ein besseres Verständnis des mechanischen Verhaltens zum Ziel. In dieser Arbeit konzentriert sich diese Art der Betrachtung auf zelluläre Materialien, wie z.B. Polymerschäume. Die sogenannte Mikroskala wird folglich durch den zellulären Aufbau, die Porengeometrie, beschrieben. Die Grundlage für die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen bilden zahlreiche Publikationen über das Studium des Materialverhaltens unter Berücksichtigung des Beulens und Plastizierens der Zellwände bzw. Zellstege und den daraus resultierenden Auswirkungen auf die makroskopischen Materialeigenschaften (Gibson und Ashby (1988), Rammerstorfer und Böhm (2000), Daxner et al. (2003)).

Einen möglichen Zugang zur Untersuchung von Materialien auf zwei verschiedenen Ebenen bildet die Homogenisierung der mechanischen Eigenschaften auf der kleineren Skala. Das Ergebnis sind die makroskopischen 'verschmierten' Materialeigenschaften. Bei Annahme eines linear elastischen Materials mit Potentialcharakter lassen sich die Zusammenhänge zwischen diesen beiden Skalen über einfache Energiebeziehungen angeben und die effektiven makroskopischen Eigenschaften berechnen. Voraussetzung innerhalb dieser Homogenisierungsmethode ist die Existenz sich periodisch wiederholender Mikrostrukturen bzw. statistisch repräsentativer Zellgeometrien.

In den folgenden drei Abschnitten wird zum einen auf die Periodizität eingegangen und die asymptotische Ausdehnung definiert, zum anderen werden die Formulierung des Randwertproblems und die Homogenisierungsgleichungen in der schwachen Form für elastisches Materialverhalten angegeben. Mittels einer numerischen Homogenisierung 1. Ordnung werden die effektiven makroskopischen Materialparameter für zwei- und dreidimensionale Repräsentative Volumen Elemente (RVE) unter Berücksichtigung periodischer Randbedingungen (Zaoui 2001) bestimmt. Diese Vorgehensweise ist auch als sequentielle Multiskalenmethode bekannt (Kouznetsova (2002)).

2.3.1 Repräsentatives Volumenelement und Homogenisierung

Die Grundidee der mehrskaligen Mechanik basiert auf der Berücksichtigung mindestens zweier unterschiedlicher Betrachtungsebenen. Die Betrachtungsebenen unterscheiden sich durch ihre Größen- bzw. Längenskalen. Auf der makroskopischen Ebene betrachten wir einen homogenen Körper bestehend aus Materiepunkten im Sinne der bisher beschriebenen kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise. Eine zweite Ebene eröffnet sich durch die Betrachtung der direkten Umgebung eines Materialpunktes und deren mikromechanische Beschreibung, z.B. durch eine diskrete Porengeometrie. Grundlegende Voraussetzung der makroskopischen Betrachtungsweise ist die Homogenität. Die Einführung der Mikrostruktur ermöglicht hingegen die Betrachtung des heterogenen Aufbaus auf der Mikro-Ebene. Die charakteristischen Abmessungen eines Bauteils und des mikrostrukturellen Aufbaus sind im Bild 2.7 veranschaulicht.

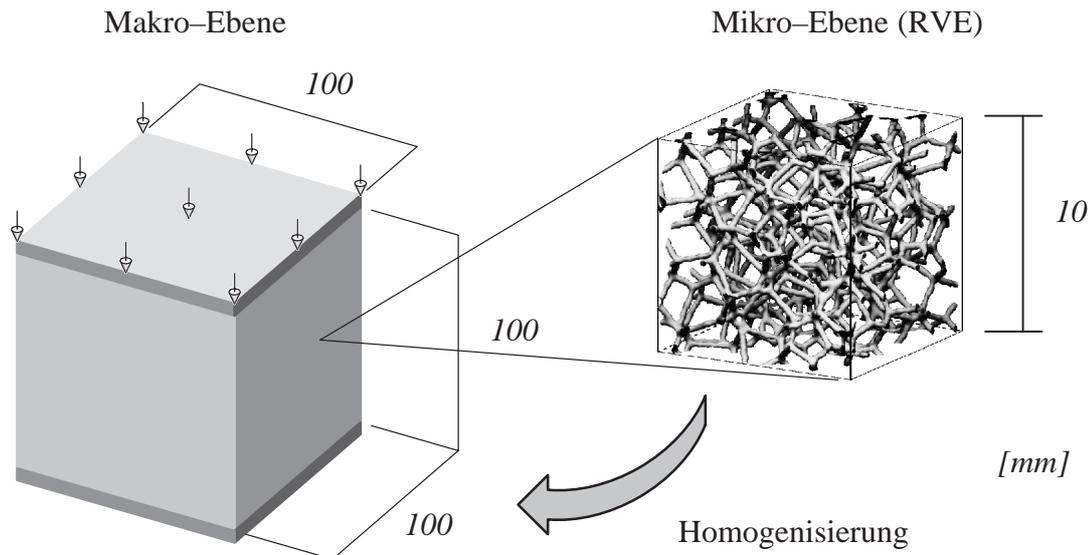


Bild 2.7: Beispiel der verschiedenen Betrachtungsebenen

Eine Umgebung, die einerseits hinreichend groß (die Abmessungen dieser Umgebung sind deutlich größer als die Abmessungen der Mikrogeometrie) und andererseits hinreichend klein ist, d.h., die Spannungsgradienten in der Umgebung sind auf Makroebene vernachlässigbar, bezeichnet man als repräsentatives Volumenelement, bzw. RVE (siehe Bild 2.8), die Voraussetzung der unterschiedlichen Skalen als Skalenseparation (Khisaeva und Ostoja-Starzewski 2006). RVE realer Werkstoffproben können z.B. mit der Computertomografie gewonnen und analysiert werden (siehe auch Kapitel 6).

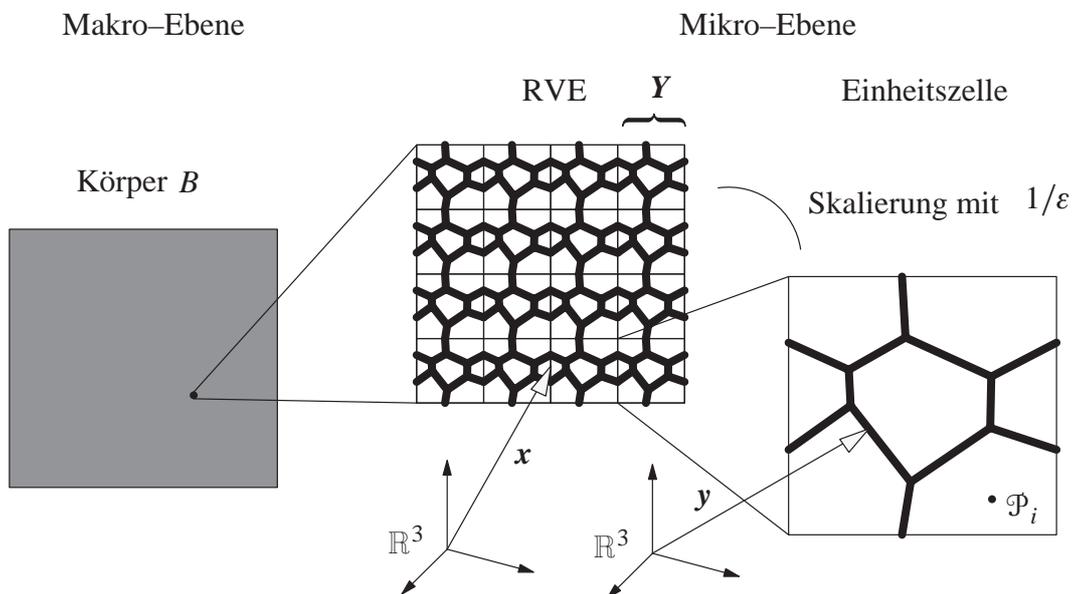


Bild 2.8: Periodische Inhomogenität und Vergrößerung

Die charakteristischen Längen der betrachteten Skalen hängen von dem Material und dem Betrachter ab. Für Werkstoffe, wie z.B. Stahl, ist die Abmessung der Korngrenzen im Mikrometerbereich, wohingegen bei geologischen Materialien die Längenskala von Gesteinsbrocken im

Meterbereich liegen kann und der Betrachter der makroskopischen Skala typischerweise auf mehrere hundert Meter makroskopischen Geomaterials blickt.

In dieser Arbeit werden zellulare Materialien und deren Porenstruktur untersucht, d.h. die Zellwände und Zellstege sind ausreichend groß, um sie mit kontinuumsmechanischen Ansätzen beschreiben zu können.

Das RVE in Bild 2.8 ist ein periodisches Teilstück des Gesamtkörpers. Die Periodizitätseigenschaft basiert auf der vereinfachenden Annahme, dass das RVE aus einer Vielzahl identischer Einheitszellen aufgebaut ist. Die einzelne Einheitszelle besteht aus verschiedenen Phasen. Die geometrischen und physikalischen funktionalen Beziehungen wiederholen periodisch mit der Eigenschaft H ,

$$H(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x} + N_p \mathbf{Y}) \quad (2.32)$$

über den ganzen Körper hat. \mathbf{Y} ist der Periodizitätsvektor mit dem sich das Volumen der Einheitszelle mit den Abmessungen y_1, y_2 und y_3 wiederholt. In Bild 2.8 bezeichnen \mathbf{x} und \mathbf{y} die Ortsvektoren zu den jeweiligen Skalen. N_p ist eine 3×3 Diagonalmatrix mit beliebigen ganzzahligen Werten auf der Hauptdiagonalen. Die Periodizität fordert, dass die Funktion H identische Werte an den Punkten \mathcal{P}_i gleicher Position innerhalb verschiedener Zellen i annimmt. Zur Vermeidung von Oszillationen aufgrund des Größenverhältnis zwischen der Einheitszelle und dem gesamten Körper wird eine Skalierung $\mathbf{y} = \mathbf{x}/\varepsilon$ mit einer dem Problem angepassten kleinen Zahl ε eingeführt. Das Bild 2.9 verdeutlicht diesen Zusammenhang anhand einer beliebigen Funktion \tilde{f} .

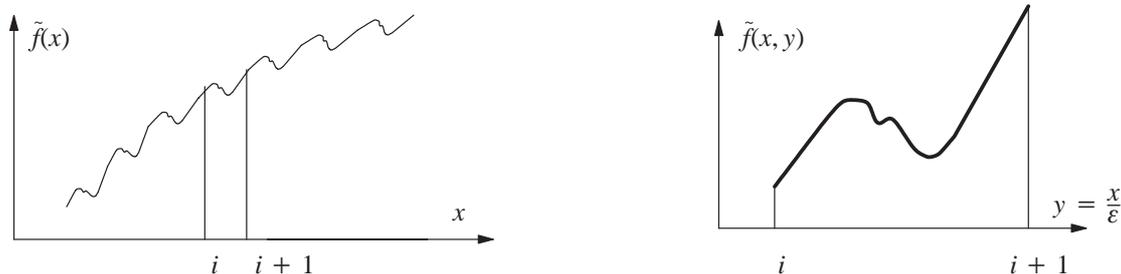


Bild 2.9: Oszillierende Funktion und Ausschnittsvergrößerung

Zur Lösung des Randwertproblems sind Annahmen bezüglich der periodischen Randbedingungen der Einheitszelle notwendig. Die Randbedingungen müssen die Periodizitätseigenschaft erfüllen, um eine periodisch korrekte Verformungsfigur nach Zusammensetzen der Einheitszellen zu erhalten.

2.3.2 Homogenisierungsgleichungen

Vom mathematischen Standpunkt aus gesehen, basiert die Theorie der Homogenisierung auf einer Grenzwertbetrachtung auf Grundlage von Annahmen bezüglich der Periodizität und der Asymptotik. Differentialgleichungen mit hochoszillierenden Koeffizienten werden hierin z.B. durch konstante Koeffizienten ersetzt, so dass die Lösung der ursprünglichen Gleichungen dennoch möglichst gut approximiert wird. In der in dieser Arbeit durchgeführten Optimierung zellulärer Materialien wird diese Oszillation makroskopischer Parameter aufgrund einer Variation der mikrostrukturellen Größen beobachtet.

Aus den verschiedenen in der Literatur diskutierten Homogenisierungsmethoden wird im Weiteren die Methode von Hassani & Hinton (1999), basierend auf einer asymptotischen Reihenentwicklung vorgestellt. Eine weitere Methode, die z.B. von Sigmund (1994) für das Materialdesign verwendet wurde, geht von einer Gleichsetzung der Verzerrungsenergie der betrachteten Mikrostruktur mit der Verzerrungsenergie der verschmierten Einheitszelle aus. Beide Verfahren führen bei linear elastischen Werkstoffen auf das gleiche Ergebnis. Ziel ist die Entwicklung von funktionalen Zusammenhängen zwischen den makroskopischen Materialparametern und dem Aufbau und Verformungsverhalten zellulärer Werkstoffe auf Mikroebene, die einerseits in der Herleitung des Verformungsverhalten der Mikrostruktur berücksichtigen und andererseits für die Berechnung von Strukturbauteilen entsprechend verschmierte Materialparameter zur Verfügung stellen, so dass hier auf die Modellierung der Mikrostruktur verzichtet werden kann.

Betrachtet wird die Einheitszelle. Das Verschiebungsfeld \mathbf{u} des z.B. linearen Randwertproblems hängt von \mathbf{x} und bei Berücksichtigung der Geometrie der Einheitszelle auch von \mathbf{y} ab (vgl. Bild 2.8). Aufgrund der Periodizitätseigenschaft kann \mathbf{u} als asymptotische Reihe in ε entwickelt werden (Bourgat (1977)).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{u}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (2.33)$$

mit $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ausgangspunkt für die Herleitung der Homogenisierungsgleichungen bildet die Gleichgewichtsbeziehung (2.23), die Spannungs–Verzerrungsbeziehung für lineare Elastizität (2.9) und die Verzerrungs–Verschiebungsbeziehung mit dem linearisierten Verzerrungstensor in Komponentenschreibweise $E_{kl} = 1/2(\partial u_k/\partial x_l + \partial u_l/\partial x_k)$. Für die folgenden Ausführungen wird zweckmäßigerweise die Indexschreibweise gewählt. Dabei wird die Einsteinsche Summationskonvention verwendet.

Einsetzen der Reihenentwicklung für die Verschiebung in die schwache Form des Gleichgewichts (2.23) führt mit der Spannungs–Verzerrungsbeziehung (2.10) auf

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} C_{ijkl} \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial y_j} + \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right] \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial y_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} \right] d\Omega + \\ & \int_{\Omega} C_{ijkl} \left[\left[\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right] \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right] \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial y_j} + \varepsilon(\dots) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{b}}_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{t}_i \delta u_i d\Gamma . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass die partiellen Ableitungen einer Funktion $\Phi(x, y)$ mit $y = y(x)$ für den Fall $y = x/\epsilon$ wie folgt dargestellt werden kann:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (2.35)$$

Glatte und periodische Randbedingungen und die anschließende Sortierung nach den Potenzen von ϵ ergibt nach kurzer Rechnung für $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{1}{\epsilon^2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} \frac{\partial (\delta u)_i}{\partial y_j} d\Omega = 0 \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\Omega} C_{ijkl} \left[\left[\frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right] \frac{\partial (\delta u)_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \frac{\partial (\delta u)_i}{\partial x_j} \right] d\Omega = 0 \quad (2.37)$$

$$\int_{\Omega} C_{ijkl} \left[\left[\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right] \frac{\partial (\delta u)_i}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right] \frac{\partial (\delta u)_i}{\partial y_j} \right] d\Omega = \int_{\Omega} f_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (2.38)$$

Unter Anwendung des Divergenztheorems folgt für eine beliebige Wahl der Variationsfunktion $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(\mathbf{y})$ aus Gleichung (2.36) die Lösung:

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \quad (2.39)$$

Das makroskopische Gleichgewicht lässt sich nun mit der Gleichung (2.38) für beliebige $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ und der Skalierung mit dem Volumen der Einheitszelle mit dem Faktor $1/Y$ angeben.

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{Y} \int_{\tilde{\Omega}} C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) d\tilde{\Omega} \right] \frac{\partial (\delta u_i(\mathbf{x}))}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{Y} \int_{\tilde{\Omega}} (f_i dY) \delta u_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} t_i \delta u_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.40)$$

Analog erhält man durch das Einsetzen für beliebige $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}(\mathbf{y})$ in Gleichung (2.37) das mikroskopische Gleichgewicht innerhalb der Einheitszelle.

$$\int_{\tilde{\Omega}} C_{ijkl} \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^2}{\partial y_l} \right) \frac{\partial (\delta u_i(\mathbf{y}))}{\partial y_j} d\tilde{\Omega} = \int_{\tilde{\Omega}} f_i \delta u_i(\mathbf{y}) d\tilde{\Omega} \quad (2.41)$$

Das Verschiebungsfeld \mathbf{u} soll sich nun aus den Verschiebungen \mathbf{u}^0 in der makroskopischen Ebene und den Verschiebungen \mathbf{u}^1 in der mikroskopischen Ebene zusammensetzen. Terme hö-

herer Ordnung werden vernachlässigt. Die beiden Gleichungen für das mikroskopische und das makroskopische Gleichgewicht führen auf das Variationsproblem,

$$\int_{\tilde{\Omega}} C_{ijkl} \frac{\partial \kappa_{kl}^p}{\partial y_m} \frac{\partial (\delta u_i(\mathbf{y}))}{\partial y_j} d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} C_{ijkl} \frac{\partial (\delta u_i(\mathbf{y}))}{\partial y_j} d\Omega \quad (2.42)$$

mit dem sich die Fluktuationsverzerrungen ε^* aus κ durch die partielle Ableitung nach dem lokalen Ortsvektor aufgrund der inhomogenen Struktur der Einheitszelle berechnen lassen. Die Lösung \mathbf{u}^1 kann in der folgenden Form angegeben werden (Guedes et al. (1990)).

$$u_i^1 = -\kappa_i^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u_k^0(\mathbf{x})}{\partial x_l} + \tilde{u}_i^1(\mathbf{x}) \quad (2.43)$$

Gleichung (2.43) in die makroskopische Gleichgewichtsbeziehung (2.40) eingesetzt, ergibt schließlich

$$\int_{\Omega} \left[\frac{1}{Y} \int_{\tilde{\Omega}} \left[\left(C_{ijkl} - C_{ijpm} \frac{\partial \kappa_p^{kl}}{\partial y_m} \right) dY \right] \frac{\partial (\delta u_k^0(\mathbf{x}))}{\partial x_l} \frac{\partial (\delta u_i(\mathbf{x}))}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega^a} \left[\frac{1}{Y} \int_{\tilde{\Omega}} f_i dY \right] \delta u_i(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} t_i \delta u_i(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.44)$$

in der man den homogenisierten Materialtensor

$$C_{ijkl}^H(\mathbf{x}) = \frac{1}{Y} \int_{\tilde{\Omega}} \left[C_{ijkl} - C_{ijpm} \frac{\partial \kappa_p^{kl}}{\partial y_m} \right] d\Omega \quad (2.45)$$

sowie die Volumenkraftdichte der Einheitszelle

$$b_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{Y} \int_{\tilde{\Omega}} f_i d\Omega \quad (2.46)$$

identifizieren kann. In dieser Arbeit wurden die Gleichungen (2.42) und (2.45) diskretisiert und durch Lösen der Gleichung (2.42) und anschließendem Einsetzen der Fluktuationsverzerrungen $\varepsilon_{ij}^* = \partial \kappa_i^{kl} / \partial y_j$ in (2.45) wurde der homogenisierte Materialtensor bestimmt. Dieser homogenisierte Materialtensor ist das Optimierungsziel in den Beispielen in Abschnitt 6.1.4, 6.3.1 und 6.3.2).

2.3.3 Energetische Betrachtungen

Eine weitere Möglichkeit der Herleitung der Homogenisierungsgleichungen ergibt sich aus der Gleichheit der homogenisierten Mikroenergien und der makroskopischen Energie. Der Zusam-

menhang zwischen den bereits beschriebenen Homogenisierungsgleichungen (2.47) und (2.48) zu den von Sigmund (1994) für das Materialdesign verwendeten Homogenisierungsgleichungen wird im Folgenden gezeigt. Ausgangspunkt ist die Definition der folgenden bilinearen Form

$$a_y(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \frac{1}{Y} \int_{\tilde{\Omega}} C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial y_l} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial y_j} d\Omega \quad (2.49)$$

und mit $\xi^{ij} = y_j \delta_{ik} e_k$ kann das Variationsproblem durch folgende Aufgabenstellung zur Bestimmung von κ^{kl} ersetzt werden:

$$a_y(\kappa^{kl} - \xi^{kl}, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad (2.50)$$

Gleichung (2.45) lässt sich nun folgendermaßen angeben

$$C_{ijkl}^H(\mathbf{x}) = a_y(\xi^{kl} - \kappa^{kl}, \kappa^{ij}). \quad (2.51)$$

Da die Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ frei wählbar ist, führt $\delta \mathbf{u} = \kappa^{ij}$ und die Summe der Gleichungen (2.50) und (2.51) auf

$$C_{ijkl}^H(\mathbf{x}) = a_y(\xi^{kl} - \kappa^{kl}, \xi^{ij} - \kappa^{ij}) . \quad (2.52)$$

Die Gleichungen (2.49) und (2.52) führen auf

$$\int_{\tilde{\Omega}} C_{ijpm} \frac{\partial \kappa_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial y_j} d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} C_{ijkl} \frac{\partial \xi_p^{kl}}{\partial y_m} \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial y_j} d\Omega . \quad (2.53)$$

Entsprechend den bisherigen Ausführungen lassen sich die Verzerrungstensoren und deren Variation mit

$$\varepsilon_{pm}^{*kl} = \frac{\partial \kappa_p^{kl}}{\partial y_m} , \quad \varepsilon_{pm}^{0,kl} = \frac{\partial \xi_p^{kl}}{\partial y_m} \quad \text{und} \quad \delta \varepsilon_{ij} = \frac{\partial (\delta u_i)}{\partial y_j} \quad (2.54)$$

angeben und damit die von Sigmund gewählte Darstellungsform des Variationsproblems

$$\int_{\tilde{\Omega}} C_{ijpm} \delta \varepsilon_{ij} \varepsilon_{pm}^{*,kl} d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} C_{ijkl} \delta \varepsilon_{ij} \varepsilon_{pm}^{0,kl} d\Omega \quad (2.55)$$

und der Homogenisierungsgleichung für den homogenisierten Materialtensor

$$C_{ijkl}^H = \frac{1}{Y} \int_{\tilde{\Omega}} C_{ijpm} (\varepsilon_{pm}^{0,kl} - \varepsilon_{pm}^{*,kl}) d\Omega . \quad (2.56)$$

angeben. Lösen des Variationsproblems (2.55) für die Einheitsverzerrungsfelder ε^0 und Einsetzen der Lösung ε^* in (2.56) führt letztendlich auf die gesuchten Einträge der Materialmatrix.

Für Temperaturlastfälle wird von Sigmund die folgende Gleichung zur Bestimmung der homogenisierten Temperaturkoeffizienten β_{kl}^H verwendet (siehe auch Gleichung (2.11)).

$$\beta_{kl}^H = \int_{\tilde{\Omega}} C_{pqrs} (\alpha_{pq} - \varepsilon_{pq}^C) (\varepsilon_{rs}^{0,ij} - \varepsilon_{rs}^{*,ij}) d\Omega . \quad (2.57)$$

In der Gleichung (2.57) bezeichnen α_{pq} die Temperatúrausdehnungskoeffizienten des Materials der Mikrostruktur, $\varepsilon_{rs}^{0,ij}$ die Einheitsverzerrungen und $\varepsilon_{rs}^{*,ij}$ die Fluktuationsverzerrungen aus (2.55). Mit Hilfe einer zusätzlichen Variationsgleichung werden die Verzerrungen ε_{pq}^C aus der Temperaturbelastung bestimmt.

$$\int_{\tilde{\Omega}} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}^C d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} \beta_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega . \quad (2.58)$$

Die homogenisierten Temperatúrausdehnungskoeffizienten können nach (2.11) und (2.12) und nun mit Gleichung (2.59) berechnet werden.

$$\alpha_{ij}^H = C_{ijkl}^{H^{-1}} \beta_{kl}^H . \quad (2.59)$$

3 Grundelemente der Strukturoptimierung

Automatische Analyse- und Optimierungsverfahren sind heutzutage etablierte Techniken, die einerseits zur Verkürzung von Produktions- und Entwicklungskosten beitragen und andererseits neue Wege aufzeigen. Üblicherweise werden mechanische Gesetze auf ein in Form und Topologie festgelegtes Strukturbauteil angewendet. Dagegen ist es bei Vorgabe gewisser Randbedingungen Aufgabe der Strukturoptimierung, Form und Topologie für ein bezüglich ausgewählter Zielkriterien bestmögliches Strukturverhalten zu bestimmen. Die Strukturoptimierung unterstützt den Entwicklungs- und Berechnungsingenieur mit Hilfe mathematischer Algorithmen bessere, vielleicht sogar optimale Entwürfe zu finden. Neben mechanisch orientierten Entwurfskriterien bietet das Konzept der Strukturoptimierung darüber hinaus die Möglichkeit, auch komplexe und fachübergreifende Aufgabenstellungen, wie z.B. mit Herstellungsbedingungen, im Optimierungsprozess zu berücksichtigen. Zu den mechanisch orientierten Entwurfskriterien zählen die Minimierung des Gewichts oder maßgebender Verschiebungen, die Einhaltung maximaler Spannungen (Duysinx und Bendsoe (1997)), die Verbesserung des Stabilitätsverhaltens beulgefährdeter Bauteile (Reitinger und Ramm (1995), Neves et al. (1995), Kemmler (2004)) oder des Energieabsorptionsvermögens bei Stoßvorgängen (Chen (2001), Pederson (2002), Soto (2004)). Die Form eines Stoßabsorbers wird von Villaggio (2002) für elastisch-dynamisches Strukturverhalten bestimmt. Geometrisch nichtlineare Effekte werden von Kemmler (2003), Bruns und Tortorelli (2001) und Buhl et al. (2000) berücksichtigt. In Schwarz (2001) wird eine Methode vorgestellt, mit der sowohl materiell, als auch geometrisch nichtlineare Form- und Topologieoptimierungsprobleme unter Verwendung eines impliziten Integrationsverfahrens gelöst werden können. Wiechmann (2001) behandelt Formoptimierungsprobleme elastoplastischer Materialien mit kleinen und finiten Verzerrungen unter Berücksichtigung mehrerer veränderlicher Lastfälle. Die Ergänzung dieser Zielkriterien kann durch die Auswahl eines geeigneten Herstellungsverfahrens und die damit verbundenen Fertigungsrestriktionen erfolgen (Sydow (2003)).

Inhalt dieses Kapitels ist die Verarbeitung verschiedener Entwurfskriterien in einer in sich geschlossenen Optimierungsaufgabe und die Lösung dieser Aufgabe mit dem Konzept der Strukturoptimierung. Die in diesem Konzept beteiligten mathematischen und mechanischen Teildisziplinen werden kurz vorgestellt; eine Einordnung der in dieser Arbeit verwendeten Bausteine in dieses Konzept wird vorgenommen. Aufgrund der besonderen Bedeutung für diese Arbeit werden zwei Aspekte ausführlicher diskutiert: Zum einen die Definition und die Behandlung sogenannter 'großer Optimierungsprobleme' und zum anderen die Verarbeitung mehrerer Optimierungsziele im Sinne einer klassischen Mehrkriterienoptimierung.

3.1 Entwurfsmodell – Analysemodell – Optimierungsmodell

Entwurfskriterien und Entwurfsvariablen

Die Entwurfskriterien werden für die Formulierung der Optimierungsaufgabe im mathemati-

schen Sinne mit den primären Optimierungszielen, den Zielfunktionen f und den Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen h und g , ausgedrückt. Der Lösungsraum des Optimierungsproblems wird durch die Nebenbedingungen beschränkt; man nennt das Optimierungsproblem folglich auch beschränktes Optimierungsproblem im Gegensatz zum unbeschränkten Optimierungsproblem. Eine klassische Beispiel für eine Zielfunktion ist die Minimierung einer bestimmten Verschiebung, z.B. der maximalen Auslenkung in der Mitte eines Balkens. Als Gleichheitsnebenbedingung können zum Beispiel die Masse des Balkens konstant vorgegeben werden und die maximal zulässigen Spannungen mit einer Ungleichheitsnebenbedingung restringiert werden. Formal kann die Zielfunktion mit einer Nebenbedingung durch entsprechende mathematische Manipulationen leicht ausgetauscht werden; allerdings zeigt die Praxis, dass diese Vertauschung einen Einfluss auf den Optimierungsverlauf hat und darüber hinaus das Optimierungsergebnis mit einem eindeutigen Optimierungsziel und sinnvoll gewählten Nebenbedingungen intuitiv leichter beurteilt werden kann. Die freien Variablen in der Entwurfsaufgabe sind die Entwurfsvariablen s , deren Werte für die optimale Lösung innerhalb des Entwurfsprozesses zu bestimmen sind.

Einige wenige sehr spezielle Optimierungsprobleme lassen sich analytisch lösen. Typische Vertreter sind die Michellstrukturen (Michell (1904), Lewinsky (2005), Rozvany (2005)). Der überwiegende Teil der Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik ist jedoch hochgradig nicht-linear und wird in der Regel mit numerischen Verfahren in einem iterativen Prozess berechnet. Die wesentlichen Elemente dieses iterativen Prozesses nämlich das Optimierungsmodell mit der mathematisch abstrakten Formulierung des Optimierungsproblems, das Entwurfsmodell mit der Definition der freien Entwurfparameter, das Analysemodell für die Ermittlung der Strukturantwort und Beziehungen zwischen diesen Komponenten, lassen sich nach Eschenauer (1985) wie in Bild 3.1 gezeigt darstellen.

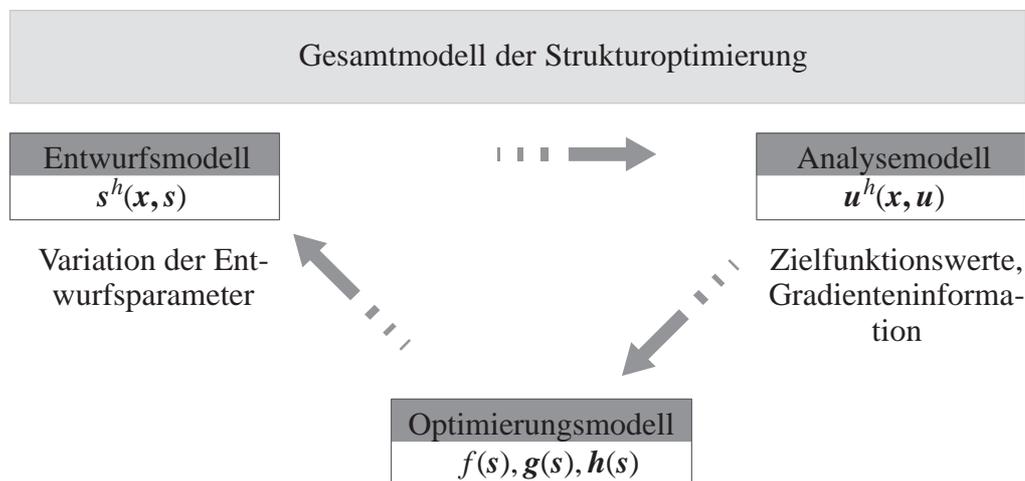


Bild 3.1: Die drei Säulen des Optimierungsproblems (nach Eschenauer (1985))

Ausgangspunkt bildet der erste Entwurf im Entwurfsmodell. Die Gestalt des Ausgangsentwurfes wird mit den Funktionen s^h approximiert. Die Strukturantwort u^h wird für den aktuellen Satz der Entwurfsvariablen s im Analysemodell hinsichtlich bestimmter Randbedingungen berechnet. Mit Kenntnis der Strukturantwort werden die Zielfunktionswerte f und die Gleichheits- und

Ungleichheitsnebenbedingungen \mathbf{h} und \mathbf{g} bestimmt. Für bestimmte Verfahren sind weitere Informationen, wie die Empfindlichkeit bzw. Sensitivität der Struktur bezüglich der Entwurfsparameter, zu bestimmen. Mit diesen Informationen lässt sich mit einer geeigneten Optimierungsstrategie ein neuer Satz modifizierter Entwurfsparameter für ein neues verbessertes Entwurfsmodell bestimmen. Die Formulierung der im Folgenden diskutierten Optimierungsaufgabe und deren Lösung ist Teil des *Optimierungsmodells*. Die im Analysemodell und im Entwurfsmodell verwendeten Modellierungen müssen nicht zwingend identisch sein, lediglich der Zusammenhang zwischen Strukturantwort, Entwurfsparameter und Entwurfskriterium muss gegeben sein. Der Optimierungsprozess ist abgeschlossen, wenn ein Satz Entwurfsvariablen gefunden wurde, für den der Zielfunktionswert nicht weiter verbessert werden kann, und die Nebenbedingungen eingehalten sind. Dieser Zustand wird meist durch die Überprüfung eines Konvergenzkriteriums ermittelt. Ist dieses Kriterium nicht erfüllt, beginnt die nächste Iteration mit der erneuten Strukturanalyse.

Erweiterung für Aufgaben mit einer hierarchischen Struktur

Wird die Strukturanalyse auf verschiedenen Ebenen, z.B. auf der Strukturebene und auf einer mikroskopischen Materialebene, durchgeführt, lassen sich verschiedene Entwurfskriterien auf den verschiedenen Ebenen formulieren. In diesem Fall kann man nicht zuletzt aus Effizienzgründen verschiedene Optimierungsprobleme auf den jeweiligen Ebenen getrennt voneinander formulieren. So kann z.B. mit der Topologieoptimierung das prinzipielle Layout einer Struktur und gleichzeitig auf der Materialebene die Faserausrichtung des Materials in einem iterativen Prozess bestimmt werden (Reiter (1996)). Die Kopplung der zwei Optimierungsprobleme erfolgt dann in einem oder mehreren der drei Elemente des Optimierungsproblems (Bild 3.1). Diese Art der Optimierung wird als Multi-Level-Optimierung bezeichnet (de Wit et al. (2006)). Werden hingegen verschiedene, vielleicht sogar konkurrierende Optimierungsziele auf einer Ebene verfolgt, spricht man von einer Mehrkriterienoptimierung.

Formulierung und Lösung der Optimierungsaufgabe

Die Ermittlung einer optimalen Lösung erfolgt in der Regel mit den Verfahren der mathematischen Programmierung. Hierunter versteht man Optimierungsmodelle, mit deren Hilfe komplexe Probleme in mathematischer Sprache beschrieben werden.

Mit der mathematisch abstrakten Formulierung der Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned}
 \min f(\mathbf{s}); \quad & f(\mathbf{s}) \in \mathbb{R} \\
 \mathbf{h}(\mathbf{s}) = \mathbf{0}; \quad & \mathbf{h}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_h} \\
 \mathbf{g}(\mathbf{s}) \leq \mathbf{0}; \quad & \mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_g}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

erfolgt die Bestimmung der diskreten Entwurfsvariablen \mathbf{s} so, dass die Zielfunktion f unter Berücksichtigung der Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen ein Minimum einnimmt. n_h bezeichnet die Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen \mathbf{h} und n_g die der Ungleichheitsnebenbedingungen \mathbf{g} . Der Wertebereich der Entwurfsvariablen \mathbf{s} wird durch die Restriktionen s_L und s_U beschränkt:

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s} = \{ \mathbf{s} \in V_s \mid s_L \leq \mathbf{s} \leq s_U \}. \quad (3.2)$$

Die Überführung des beschränkten in ein unbeschränktes Optimierungsproblem erfolgt durch Einführung der Lagrange-Funktion

$$L(\mathbf{s}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}_L) = f(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{h}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\gamma}_L^T \mathbf{g}(\mathbf{s}) \rightarrow \text{stat.} \quad (3.3)$$

mit den Vektoren der Lagrangemultiplikatoren $\boldsymbol{\eta}$ und $\boldsymbol{\gamma}_L$. Es ergeben sich die notwendigen Bedingungen zur Beschreibung eines Sattelpunktes, die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}} L(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_L) &= \nabla_{\mathbf{s}} f(\hat{\mathbf{s}}) + \hat{\boldsymbol{\eta}}^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}) + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_L^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{0} \\ \nabla_{\boldsymbol{\eta}} L(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_L) &= \mathbf{h}(\hat{\mathbf{s}}) = \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{\gamma}}_L^T \nabla_{\boldsymbol{\gamma}_L} L(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\boldsymbol{\eta}}, \hat{\boldsymbol{\gamma}}_L) &= \hat{\boldsymbol{\gamma}}_L^T \mathbf{g}(\hat{\mathbf{s}}) = 0 \quad \text{mit } \hat{\boldsymbol{\gamma}}_L \geq 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

wobei ($\hat{\cdot}$) die Lösung und $\nabla_{\mathbf{s}}(\cdot)$ die Ableitung der betrachteten Größe nach den Entwurfsvariablen bezeichnet.

3.2 Optimierungsalgorithmen

Mit der mathematischen Formulierung der Optimierungsaufgabe lassen sich sehr unterschiedliche Optimierungsaufgaben lösen. Die Maximierung des Energieabsorptionsvermögens von elastoplastischen Materialien oder die Verbesserung des Stabilitätsverhaltens beulgefährdeter Bauteile führt zum einen zu sehr aufwendigen Strukturanalysen zur Bestimmung der Zielfunktionswerte und zum anderen zu hochgradig nichtlinearen Optimierungsproblemen. Die Anzahl der Entwurfskriterien, d.h. die Komponenten im Zielfunktionsvektor und in den Nebenbedingungen, sind ebenso wie die Anzahl der freien Entwurfparameter stark problemabhängig. Die Anzahl der Entwurfsvariablen in der Formoptimierung ist selten größer als 5–10, im Gegensatz zu den oft weit über 100.000 freien Parametern in den Topologieoptimierungsbeispielen im kommerziellen Anwendungsbereich (Sydow (2003)). Aus diesen Gründen ist der Wahl des Optimierungsalgorithmus besondere Beachtung zu widmen. Die Lösung wird mit iterativen Optimierungsverfahren bestimmt. Die heute häufigsten zur Anwendung kommenden und auf ihre Anwendbarkeit in dieser Arbeit untersuchten Verfahren werden im Folgenden vorgestellt.

Klassifizierung der Verfahren

Die in der Strukturoptimierung verwendeten Optimierungsalgorithmen können im Wesentlichen in zwei Gruppen eingeteilt werden, in Gradientenverfahren und gradientenfreie Verfahren. Innerhalb der Gradientenverfahren wird nochmals zwischen den Verfahren der Mathematischen Programmierung, den Optimalitätskriterienverfahren und den Approximationsmethoden unterschieden.

Weiterhin ist zwischen diskontinuierlichen oder kontinuierlichen Entwurfparameter zu unterscheiden. Die Methoden der Mathematischen Programmierung verwenden kontinuierliche Va-

riablen wie z.B. die Koordinaten bestimmter Punkte in der Formoptimierung. Die Auswahl eines geeigneten Stahlbauprofiles führt auf eine diskontinuierliche bzw. ganzzahlige Problemstellung, wofür sich ein stochastisches Verfahren besser eignen kann. Neben den Methoden der Mathematischen Programmierung und den stochastischen Verfahren nehmen die Optimalitätskriterienverfahren aufgrund ihrer physikalischen Motivation und die Response–Surface–Methode eine Sonderstellung ein. Die einzelnen Verfahren werden nun kurz diskutiert.

Methoden der mathematischen Programmierung

Die Methoden der mathematischen Programmierung starten von einem initialen Entwurf. Dieser Entwurf wird so modifiziert, dass der Zielfunktionswert abnimmt und schließlich einen Minimalwert erreicht. Der aktuelle Entwurf wird aus dem vorherigen Zustand durch einen Schritt im Lösungsraum berechnet. Dieser Schritt benötigt eine Richtung Δs und eine Schrittweite d . Dieser Prozess kann mit folgender Gleichung angegeben werden.

$$s^{k+1} = s^k + d\Delta s \quad (3.5)$$

Die Methoden der mathematischen Programmierung bestimmen sowohl die Schrittweite, als auch die Richtung auf deterministische Weise und können weiterhin danach unterschieden werden, wie sie den nächsten Entwurf berechnen: direkte Methoden, gradientenbasierte Methoden und Methoden höherer Ordnung.

Direkte Methoden benötigen lediglich die Zielfunktionswerte, um Richtung und Größe des nächsten Schrittes zu bestimmen. Die Gradientenverfahren erfordern sowohl die Funktionswerte als auch die Gradienten der Funktionen bezüglich der Entwurfsvariablen. Damit benötigen die zuletzt genannten Verfahren zwar mehr Aufwand bei der Berechnung der erforderlichen Informationen, sie benötigen aber dann weniger Iterationen, um eine Lösung zu bestimmen.

Entsprechend den aktuellen Veröffentlichungen werden überwiegend die Methoden der Sequentiellen Quadratischen Programmierung und die MMA–Verfahren (Methods of the Moving Asymptotes) zur Lösung von Problemen in der Strukturoptimierung eingesetzt. Weitere Methoden, die in diesem Gebiet Anwendung finden sind die Approximationsmethoden der sequentiellen konvexen und der sequentiellen linearen Programmierung.

Der einfachste Zugang zu diesen Verfahren erfolgt mit der Sequentiellen Linearen Programmierung. Mit den linearisierten Entwurfskriterien wird über eine einfache Taylor–Reihenentwicklung eine Iterationsvorschrift für die Berechnung einer verbesserten Lösung entwickelt. Die sukzessive Verbesserung erfolgt aufgrund der linearen Approximation gradientenbasiert in sehr kleinen Schritten und neigt zu starken Oszillationen (Kirsch (1993)). Diese Verfahren wurden von Fleury (1986) vorgestellt und sind detailliert in Bletzinger (1990) oder Baier et al. (1994) beschrieben.

Die Methode der beweglichen Asymptoten (MMA) ist eine Weiterentwicklung der Konvexen Linearisierung. Zur Vermeidung der Nachteile der linearen Programmierung werden die Faktoren der Gradienten in der Reihenentwicklung gegenüber der konvexen Linearisierung modifi-

ziert und damit die Effektivität des Lösungsprozesses gesteigert. Die Methode konvergiert ausgesprochen schnell, manchmal divergiert sie aber auch und neigt nach den Erfahrungen in dieser Arbeit stärker in lokalen Minima zu stagnieren als die später diskutierten OC-Verfahren.

Implementierungen der Methode der Sequentiellen Quadratischen Programmierung (SQP) basieren auf den Arbeiten von Powell und Schittkowski (1985). Die Idee ist, das originale beschränkte Problem durch ein quadratisches Unterproblem zu ersetzen.

$$\min \tilde{f}(\Delta s) = \frac{1}{2} \Delta s^T \tilde{H} \Delta s + \nabla f^T \Delta s + f \quad (3.6)$$

mit Berücksichtigung der Nebenbedingungen

$$\nabla g_i(s)^T \Delta s + g_i(s) \geq 0, i \in I \quad (3.7)$$

$$\nabla h_i(s)^T \Delta s + h_i(s) = 0, i \in E . \quad (3.8)$$

\tilde{H} ist die sogenannte Hesse-Matrix der Lagrange Funktion. Die Such-Richtung wird durch Lösen des quadratischen Unterproblems bestimmt. Ein 'line-search' entlang dieser Richtung wird mit dem originalen Problem durchgeführt. Die Hesse-Matrix im quadratischen Unterproblem wird nicht exakt gelöst, sondern startet als Identitätsmatrix und wird dann mit einer speziellen Vorschrift (Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno-Algorithmus) berechnet. Das SQP-Verfahren findet auch in anderen Bereichen der Strukturmechanik Anwendung, z.B. bei der Parameteridentifikation komplexer nichtlinearer Materialmodelle (Rieger et al. (2003)).

Die zweite große Gruppe sind die Optimalitätskriterien-Verfahren. Die Grundidee besteht darin, ein problemangepasstes Kriterium zu definieren, das mit der optimalen Lösung erfüllt wird. Neben dem Optimalitätskriterium wird außerdem eine Rekursionsformel hergeleitet, um einen Satz neuer Entwurfsvariablen im jeweiligen Optimierungsschritt zu bestimmen. Die ursprünglichen Optimalitätskriterienverfahren sind sehr spezielle Methoden aufgrund des für jede Optimierungsaufgabe neu zu definierendes Optimalitätskriteriums. Allerdings zeichnen sie sich durch eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit aus. Bekanntester Vertreter dieser Gruppe ist das 'Fully Stressed Design' (FSD). Das Optimalitätskriterium resultiert aus der Idee, dass bei einer Struktur minimalen Gewichts gleichzeitig alle Teile des Tragwerks gleichmäßig und maximal zulässig ausgenutzt werden. Der Grad der Beanspruchung wird über die Spannungsverteilung ermittelt.

Bei einem Stabtragwerk seien die Querschnittsflächen der einzelnen Stäbe die Entwurfsvariablen. Innerhalb des Optimierungsprozesses wird der nächst bessere Entwurf durch Multiplikation der aktuellen Querschnittsflächen mit dem Quotienten aus dem aktuellen Spannungswert durch den maximal zulässigen Spannungswert ermittelt. Das Optimalitätskriterium in diesem Fall ist die gleichmäßige Spannungsverteilung mit dem maximal zulässigen Wert. Die rekursive Vorschrift ist mit dem Produkt aus aktueller Zustandsvariable und dem beschriebenen Quotienten gegeben.

Für statisch bestimmte Tragwerke kann gezeigt werden, dass auf diese Weise optimierte, d.h. voll ausgenutzte Strukturen tatsächlich den Strukturen minimalen Gewichts entsprechen (z.B. Baier (1994)). Statisch unbestimmte Tragwerke minimalen Gewichts sind jedoch gewöhnlich nicht voll beansprucht. In den zuletzt genannten Fällen ist die Lösung des Optimierungsprozesses

ses zwar nicht das Optimum aber ein signifikant verbesserter Entwurf, verglichen mit dem Ausgangsentwurf.

Dem Nachteil der ursprünglichen Optimalitätskriterienverfahren, auf ein bestimmtes Kriterium ausgerichtet zu sein, wird mit den mathematisch orientierten Optimalitätskriterienverfahren begegnet. Ein Optimalitätskriterium, das universell anwendbar ist, sind die Karush–Kuhn–Tucker–Bedingungen zur Definition des Optimums. In Abhängigkeit der Optimierungsaufgabe werden nun die Formeln für die Neuberechnung der Entwurfparameter definiert. Ein Beispiel für dieses Vorgehen ist in Baier et al. (1994) beschrieben.

Stochastische Verfahren

Die dritte große Gruppe der Optimierungsalgorithmen umfasst die Methoden der stochastischen Verfahren. Diese Verfahren kommen in der Regel ohne Gradienteninformation aus und benötigen lediglich die Werte der Entwurfskriterien. Sie sind damit sehr universell anwendbar, aber aufgrund einer Vielzahl an Funktionsauswertungen, d.h. vollständiger Strukturanalysen im Fall der Strukturoptimierung, numerisch extrem aufwendig. Der klassische Vertreter dieser Gruppe ist das Monte–Carlo–Verfahren. In verschiedenen Versuchen wird jeweils ein Satz Entwurfsvariablen rein zufällig gewählt und jeweils die Zielfunktionen ausgewertet. Der Satz mit dem besten Zielfunktionswert bestimmt die zunächst "optimale" Lösung. Diese vollständig ungerichtete Suche ist numerisch extrem aufwendig und deshalb auf Probleme beschränkt, die eine schnelle Strukturanalyse zulassen. Für effizientere, z.B. gradientenbasierte Verfahren, können die mit der Monte–Carlo–Methode generierten Entwürfe jedoch eine gute Ausgangsbasis für die nachfolgend gerichtete Optimierung sein. So beobachtet zum Beispiel Sigmund (1994) im Materialdesign eine starke Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse vom Ausgangsentwurf, was die Rechnungen in dieser Arbeit auch bestätigt haben.

Wesentlicher Vorteil des Monte–Carlo–Verfahrens ist die mögliche Bestimmung des globalen Optimums. Dem steht allerdings der Faktor Zeit entgegen, wodurch dieser theoretische Vorteil wieder zunichte gemacht wird.

Eine Erhöhung der Effizienz stochastischer Verfahren durch eine gerichtete Suche erfolgt z.B. in den evolutionären Strategien und in den genetischen Algorithmen. Die Schrittweite und die Suchrichtung werden stochastisch bestimmt. Beide Strategien werden durch natürliche Wachstumsprozesse inspiriert. Mutation, Rekombination und Auslese führen entsprechend dem Vorbild in der Natur zu einem optimalen bzw. verbesserten Ergebnis.

Natural analoge Optimierungsverfahren wie die genetischen Algorithmen, die sich am natürlichen Evolutionsprozess orientieren, stellen ebenso wie das Monte–Carlo Verfahren keine besonderen Bedingungen an die Problemstellung (Zielfunktion, Struktur der Nebenbedingungen). Mit solchen Verfahren können in akzeptabler Zeit dem Optimum nähere Lösungen gefunden werden, als mit traditionellen oder zufälligen Suchverfahren, auch wenn sich gesicherte Schranken im Allgemeinen nicht angeben lassen.

Das einfachste Element dieser Verfahren, die Replikation, bedeutet eine exakte Kopie eines Entwurfs. In der Rekombination werden zwei Entwürfe so kombiniert, dass ein oder mehrere neue

Entwürfe entstehen. Eine leichte Variation eines Entwurfes und die damit verbundene Generierung eines neuen Entwurfes wird als Mutation bezeichnet. Die Auslese bezeichnet die Auswahl der besseren Entwürfe auf Basis ihres Fitness-Wertes für die anschließende Replikation, Mutation und Rekombination.

Im Gegensatz zu den Verfahren der mathematischen Programmierung, in denen innerhalb jeder Iteration nur ein Entwurf untersucht wird, ist der Ausgangspunkt hier die Generierung einer Population bestehend aus mehreren verschiedenen Individuen. Ein Individuum beschreibt innerhalb des bisher verwendeten Kontextes einen einzelnen Entwurf mit einem Satz Entwurfsvariablen. Eine Population besteht demnach aus mehreren Entwürfen, die miteinander verglichen werden. Der Vergleich erfolgt bei diesen Verfahren mit der sogenannten Fitness, die nach einer bestimmten problemabhängigen Vorschrift aus den verschiedenen Entwurfskriterien gebildet wird. Mit dieser Information erfolgt die Generierung einer neuen Population, indem einzelne Individuen ausgewählt, verändert und mit anderen Individuen kombiniert werden. Neben der Fitness finden auch noch stochastische Elemente Berücksichtigung. Folglich werden einerseits die im Sinne der Zielkriterien besseren Entwürfe für den nächsten Schritt herangezogen, aber gleichzeitig eine relative Variabilität zugelassen, die wiederum das Erreichen des Optimums garantieren soll. Es liegt auf der Hand, dass der Grad der Variabilität bestimmt, ob z.B. ein lokales Optimum wieder verlassen werden kann. Da diese Variabilität von Parametern bestimmt wird, die der Benutzer vorgibt, werden diese Methoden nicht zwingend zum Optimum führen, da aufgrund der Abhängigkeit vom Benutzer nicht garantiert werden kann, dass ein lokales Optimum wieder verlassen wird. Ab einer bestimmten Problemgröße ist es ohnehin unmöglich, eine optimale Lösung in realer Zeit zu ermitteln.

Die auf den vorangegangenen Ausführungen basierenden evolutionären und genetischen Strategien unterscheiden sich im Wesentlichen aufgrund der unterschiedlichen Gewichtung von Mutation und Selektion.

Entsprechend des Darwinistischen Vorbildes wird bei den *evolutionären Strategien* die Selektion, also die Auslese der Entwürfe mit einer schlechteren Fitness, in den Vordergrund gestellt. Es dominiert das Prinzip 'Survival of the fittest' bzw. der Stärkere überlebt. Die Anfänge der evolutionären Strategien gehen auf Rechenberg und Schwefel (1989) zurück. Eine weitere Unterteilung Evolutionärer Strategien ergibt sich aus der Anzahl und Größe der Population, ob die neuen Entwürfe aus den alten und den neuen oder nur aus den neuen ausgewählt werden oder ob eine Rekombination zugelassen wird oder nicht. Es kann allerdings gezeigt werden, dass das Verhältnis der Anzahl der Ausgangsentwürfe zu der Anzahl der neuen Entwürfe die Konvergenzgeschwindigkeit und die Wahrscheinlichkeit beeinflusst, in einem lokalen Minimum zu enden. Die einfachste Evolutionsstrategie hat eine Populationsgröße von 1. Es wird durch Mutation ein neues Individuum erzeugt, das das alte Individuum verdrängt, wenn es mindestens so fit ist.

Genetische Algorithmen wurden ursprünglich nicht für die Strukturoptimierung entwickelt, sondern dienten zur Modellierung natürlicher Wachstumsprozesse. Im Gegensatz zu den evolutionären Strategien werden die Entwurfsvariablen in Analogie zur Darstellung natürlicher Gene auf zwei verschiedene Weisen repräsentiert. Eine reelle Zahl, z.B. eine Koordinate eines Punktes im Raum, wird in eine binäre Darstellung überführt. Dieser Vorgang wird auch Codieren genannt,

der inverse Prozess demzufolge Dekodierung. Die Berechnung der Fitness erfolgt mit den reellen Zahlen, die Variation oder Kombination wird mit den binären Zeichenketten durchgeführt. Ein Standard-Genetischer Algorithmus beginnt mit der Berechnung der Fitness jedes Entwurfs. Zwei Entwürfe werden unter Einbeziehung ihres Fitness-Wertes ausgewählt. Eine Cross-over Wahrscheinlichkeit führt zu zwei neuen Entwürfen. Die Mutation, d.h. die Inversion einzelner Bits, erfolgt mit einer relativ geringen Wahrscheinlichkeit. Dieser Vorgang wird wiederholt, bis die gleiche Anzahl neuer Entwürfe wie die Anzahl der Ausgangsentwürfe erreicht ist.

Um sich von dem notwendigen numerischen Aufwand ein Bild zu machen, kann man davon ausgehen, dass eine Population in der Regel aus 20 bis 200 Entwürfen besteht und ein bis mehrere hundert neue Populationen erzeugt werden müssen, bis ein deutlich verbessertes Ergebnis vorliegt. Im Bereich der Strukturoptimierung werden diese Verfahren vorwiegend für die Optimierung elastischer Stabwerktragwerke angewendet, was auch neueren Veröffentlichungen zu entnehmen ist (Hayalioglu (2001), Kawamura (2002), Osyczka (2002), Parsons (2002)).

Ein wesentliches Problem beider Verfahren, der genetischen Algorithmen und der evolutionären Strategien, ist die Handhabung der Nebenbedingungen. Eine Übersicht über diese Problematik ist z.B. in Eiben et al. (1999) gegeben. Zwei prinzipielle Strategien wurden im Rahmen dieser Arbeit anhand einfacher Formoptimierungsprobleme untersucht: Zum einen der Ausschluss nicht zulässiger Entwürfe durch Modifikation der Dekodierungsfunktionen und zum Anderen die Einführung geeigneter Bestrafungsfunktionen, die die Fitness-Werte der Entwürfe abmindern, welche die Nebenbedingungen verletzen. Eine dritte Möglichkeit ist die Verwendung einer Mehrkriterienoptimierungsstrategie, z.B. mit einer skalaren Ersatzfunktion.

Die Kombination gradientenbasierter Verfahren und stochastischer Verfahren erfolgt bei einer in neuerer Zeit populären Methode, der 'Response Surface Methode'. Auf Basis möglichst gleichmäßig verteilter Sätze von Entwurfsvariablen werden die Zielfunktionswerte errechnet. Diese Zielfunktionswerte bilden nun Stützstellen im Raum, durch die eine polynomiale Ersatzfunktion approximiert wird. Diese Ersatzfunktion kann nun für die numerisch deutlich weniger aufwändige Approximation weiterer Zielfunktionswerte und deren Sensitivitäten benutzt werden. Die Güte der Approximationsfunktion wird entsprechend der gewünschten Genauigkeit gewählt. In der Regel wird dieses Verfahren jedoch nur für eine geringe Anzahl von Entwurfsvariablen verwendet. Redhe et al. (2002) oder Jansson et al. (2003) bestimmen mit diesem Verfahren u.a. die Blechdicke und die Querschnittsabmessungen eines quadratischen Hohlprofils bei einem Stoßvorgang. Papila und Haftka (2003) führen eine klassische Gewichtsminimierung von mit Steifen verstärkten Blechen unter Berücksichtigung des Rissfortschritts mit der Response-Surface-Methode durch.

Innerhalb dieser Arbeit wurden neben Verfahren der mathematischen Programmierung (SQP) (siehe Beispiel in Abschnitt 6.3.1) auch stochastische Optimierungsverfahren (evolutionäre und genetische Strategien) untersucht (Matsuo (2003)). Für die Lösung von Topologieoptimierungsproblemen mit einer großen Anzahl von Entwurfsvariablen hat sich das Optimalitätskriterienverfahren nach Maute (1998) als ausgesprochen effizient und robust erwiesen.

3.3 Materielle Topologieoptimierung als Teilgebiet der Strukturoptimierung

Historisch bedingt, aber auch aus Gründen der Effizienz werden die einzelnen Etappen des Entwurfsprozesses meist gesondert betrachtet und getrennt bzw. in einem iterativen Prozess nacheinander gelöst. Die vielfältigen Verfahren der Strukturoptimierung lassen sich beispielsweise nach Ramm et al. (1998) in Bild 3.2 der Topologieoptimierung, der Formoptimierung, der Bemessungs- und Querschnittsoptimierung und dem Materialdesign zuordnen.

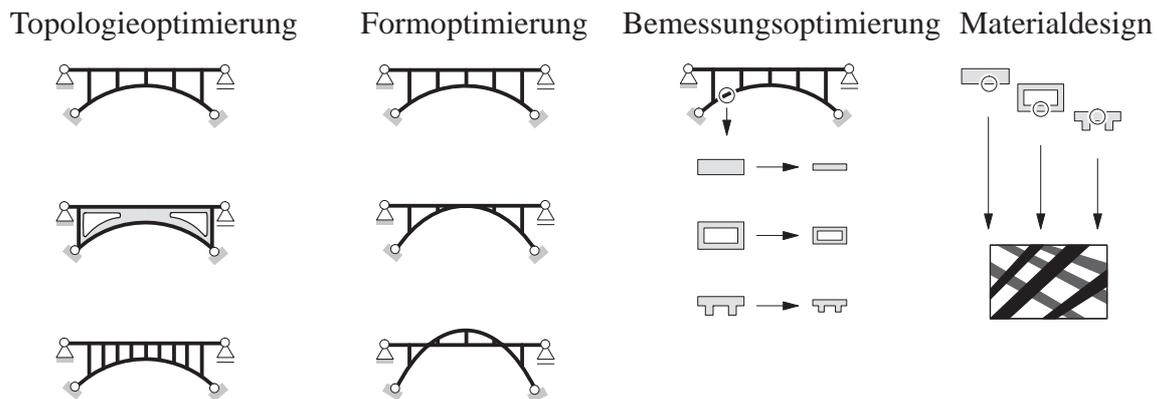


Bild 3.2: Klassifizierung der Verfahren der Strukturoptimierung (Ramm et al. (1998))

Mit der Topologieoptimierung, wird das prinzipielle Layout einer Struktur bestimmt. Mit bekannter Anzahl, Position und Größe der Elemente einer Struktur kann mit einer anschließenden Querschnitts- oder Formoptimierung die Qualität des Strukturbauteils weiter verbessert werden. Die Querschnittsoptimierung umfasst die Auswahl eines geeigneten Querschnitts und die Dimensionierung von Querschnitten. In der Formoptimierung werden zum Beispiel die Koordinaten von Punkten des Randes variiert, um die Form bestimmten Entwurfskriterien anzupassen. Ein typisches Beispiel ist die Bestimmung von Krümmungsradien in Maschinenbauteilen zur Verminderung von Kerbspannungsspitzen und somit zur Erhöhung der Dauerstandsfestigkeit durch einen ausgeglichenen Spannungszustand am Rand. Mit festgelegter Topologie und definierten Form- und Querschnittswerten ist die Anpassung des verwendeten Werkstoffs an die Belastung und die Entwurfskriterien das Ziel des Materialdesigns. Der rückwirkende Einfluss des lokal veränderten Materials auf die Zielfunktion lässt sich in einem iterativen Prozess aus Topologie-/Formoptimierung und Werkstoffoptimierung berücksichtigen (siehe auch Beispiel in Abschnitt 6.1.4). Darüber hinaus ist aber auch der Entwurf neuer Hochleistungswerkstoffe in diesem Teilgebiet der Strukturoptimierung möglich.

Die Topologieoptimierung für den Entwurf von Tragstrukturen und Strategien zur Bestimmung des mikrostrukturellen Aufbaus von Materialien finden in dieser Arbeit Verwendung. Die *materielle Topologieoptimierung* als Basis dieser beiden Strategien ist Thema der nachfolgenden Ausführungen.

Man unterscheidet in der Topologieoptimierung zwischen einem geometrischen ('bubble-Methode'), einem materiell diskreten und einem materiell kontinuierlichen Ansatz. Beim geometrischen Ansatz werden in eine gegebene Struktur Löcher eingebracht und in einem zweiten Schritt

deren Form festgelegt. Der materiell diskrete Ansatz basiert auf der Optimierung einer Grundstruktur aus endlich vielen Stab- oder Balkenelementen. Bei Anwendung der materiell kontinuierlichen Topologieoptimierung wird das Layout eines kontinuierlichen Tragwerks durch die Materialverteilung im Entwurfsraum beschrieben, hier definiert durch die Indikatorfunktion

$$\chi(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{kein Material} \\ 1 & \rightarrow \text{Material} \end{cases} \quad \chi \in L^\infty(\Omega) . \quad (3.9)$$

Die Optimierungsaufgabe, als '0-1'-Materialverteilungsproblem formuliert, führt auf ein nichtkonvexes Optimierungsproblem. Zur Regularisierung dieses mathematisch schlecht gestellten Optimierungsproblems werden sowohl makroskopische als auch mikrostrukturierte poröse Werkstoffmodelle eingesetzt, die zwar suboptimal sind, aber dennoch das Ziel einer möglichst klaren '0-1'-Verteilung anstreben. Die Parameterfunktion χ wird in eine kontinuierliche Funktion $\bar{\chi}$: $0 \leq \bar{\chi} \leq 1$ überführt, in der $\bar{\chi}$ einen Indikator für ein poröses Material darstellt. Eine ausführliche Diskussion verschiedener in der Topologieoptimierung eingesetzter poröser Werkstoffmodelle wird zum Beispiel in Maute (1998) oder Eschenauer und Olhoff (2001) vorgenommen. Sie unterscheiden sich im Wesentlichen durch ihre Materialsteifigkeit in Abhängigkeit von der relativen Dichte ρ/ρ_0 (nichtlinearer Zusammenhang zwischen der Komponente C_{1111} des Materialtensors verschiedener Werkstoffmodelle zur relativen Dichte in Bild 3.4).

Ein einfaches, leicht verständliches, makroskopisch isotropes Materialmodell wurde von Bendsøe (1989) vorgestellt. Bei der Verwendung von Mikrostrukturen werden die effektiven Materialeigenschaften in Abhängigkeit des Aufbaus der Mikrostruktur durch Homogenisierungsverfahren bestimmt. Ziel der Homogenisierungsverfahren ist, das Strukturverhalten durch rein makroskopische Zustandsgleichungen im lokalen Mittel zu beschreiben. Hierzu werden auf die Mikrozelle charakteristische Verformungen entsprechend den Einheitszuständen aufgebracht und aus der Gleichheit der Energien auf Mikro- und Makro-Ebene die Koeffizienten des homogenisierten Materialtensors analytisch oder numerisch bestimmt. Die wohl bekanntesten in der Optimierung eingesetzten Mikrostrukturen, sind die Rechteck-Einheitszelle mit Loch ("micro-hole") oder die sogenannten mehrfach geschichteten Rang-n Lamine. Hassani und Hinton (1998) geben einen detaillierten Überblick über die Homogenisierung in der Topologieoptimierung und leiten die numerischen und analytischen Lösungen der Homogenisierungsgleichungen für die genannten Mikrostrukturen her. In die Optimierungsaufgabe gehen die geometrischen Parameter, z.B. die Abmessungen des rechteckigen Lochs und die Orientierung der Rechteckeinheitszelle, als Variablen ein.

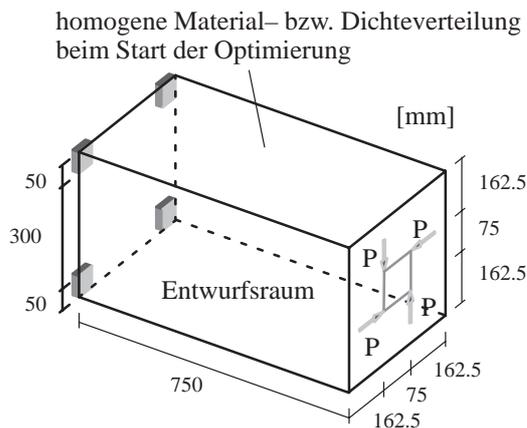
Ziel dieses Verfahrens ist es, das Material an Stellen einzusetzen, an denen es zum Erreichen der vorgegebenen Kriterien benötigt wird. Bild 3.3 zeigt exemplarisch das Ergebnis der optimierten Materialverteilung in einem dreidimensionalen Entwurfsraum. Die Bestimmung der äußeren Hülle der optimierten Struktur ist im Anhang A3 erläutert. Das verwendete spezielle poröse SIMP-Material wird im Folgenden mit den Gleichungen (3.11) und (3.12) erläutert.

Bendsøe und Kikuchi (1988) verwenden zur Ermittlung der optimalen Materialverteilung einerseits die Einheitszelle mit rechteckigem Loch und eine Einheitszelle mit zwei isotropen Materialien unterschiedlicher Steifigkeit. Eine Einheitszelle mit einem polygonartigen Ein-

schluss weichen Materials, d.h. nahezu beliebiger Form, wird von Dvorak et al. (1996) untersucht.

Optimierungsaufgabe:

Optimierungsziel: max. Steifigkeit
 Nebenbedingung: konstante Masse
 Entwurfsvariablen: Dichte der Finiten Elemente



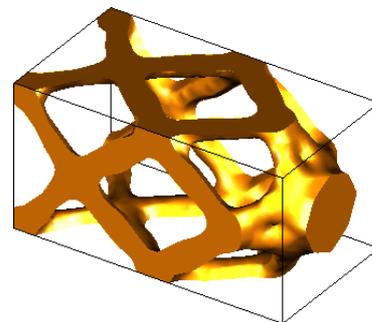
Poröses 'SIMP'-Material

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0.3$
 $\frac{\rho}{\rho_0} = 25\% \text{ (relative Dichte)}$
 $\beta = 2.0$

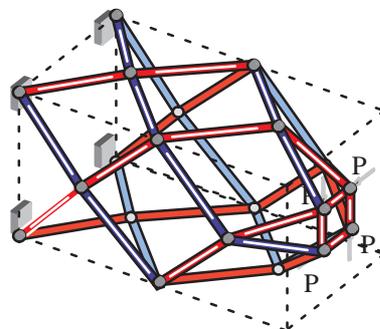
Belastung:

$P = 10.0 \text{ N}$

Ergebnis der Optimierung:



Oberfläche – Isofläche der optimierten Dichteverteilung für eine Dichte von 0.3



Interpretation mit Zug- und Druckstäben

Bild 3.3: Materiell kontinuierliche Topologieoptimierung – 3D Beispiel

Motiviert von den Ingenieurbereichen, die sich mit Grundwasserströmungen, der Bodenmechanik oder fluid- gesättigten, porösen Medien befassen, wenden Terada et al. (1998) die Homogenisierung auf zweiphasige Mikrozellen mit einer festen und einer flüssigen Phase an. Für den linear elastischen isotropen Fall bietet sich eine periodische Mikrostruktur mit gleichseitigen dreieckigen Einschlüssen an.

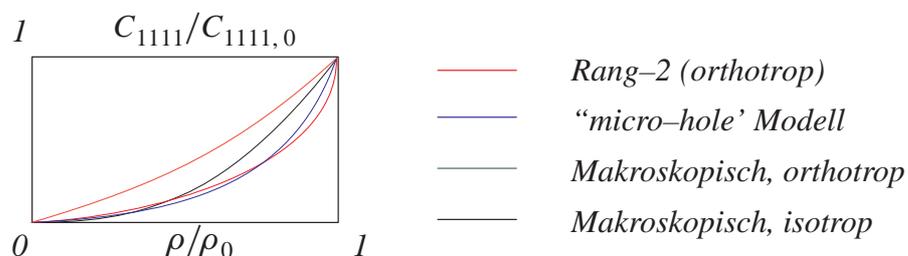


Bild 3.4: Vergleich der Materialsteifigkeiten verschiedener Werkstoffmodelle

Vorteilhaft ist die Beschreibung der Geometrie mit nur einem Parameter, der sich aus dem Seitenverhältnis des eingeschlossenen Dreiecks zur Kantenlänge der betrachteten Einheitszelle ergibt. Bei einer plastischen Deformation ist diese einfache Geometrie jedoch nicht ausreichend (Yuge et al. (1999)). Zur Vermeidung lokaler Minima im Optimierungsprozess optimieren Olhoff et al. (1998) mit optimalen 'Rang-3 Laminaten' dreidimensionale Strukturen. Mehrfach geschichtete 'Rang-Lamine' stellen Werkstoffe mit maximaler Steifigkeit für beliebige anisotrope Belastungszustände dar (Francfort & Murat (1989)) und lösen das Optimierungsproblem exakt. Allaire & Aubry (1999) bestätigen diese Feststellung, zeigen aber auch Grenzen der 'Rang-Lamine' auf. Weitere optimale Mikrostrukturen sind die 'ummantelten Kugeln' von Hashin (1962) oder die 'ummantelten Ellipsoide' von Grabovsky & Kohn (1995). Maute und Ramm stellen ein orthotropes Mikro-Werkstoffmodell vor (Maute & Ramm (1995)). Für Kirchhoff- und Reissner/Mindlin-Platten wird mit homogenisierten porösen Werkstoffen die optimierte Topologie in Suzuki & Kikuchi (1991), Diaz et al. (1995) und Lewinsky (1993) bestimmt. Cherkhaev & Palais (1996) optimieren mit 'Rang-3' Laminaten die Topologie von Schalen. Bendsøe et al. (1995) berücksichtigen mehrere Lastfälle, die gewichtet in das Optimierungsproblem eingehen, und vergleichen die Optimierungsergebnisse einiger einfacher Mikrostrukturen, wie dem 'Rang-2' Material mit einer nicht-optimalen Mikrostruktur. Zur Berücksichtigung von Diskontinuitäten im Werkstoff wie Risse oder abgestufte Mikromaterialien untersuchen Fish & Wagiman (1993) lokal nichtperiodische heterogene Materialien unter Verwendung von kurzen und langen Fasern in den Mikrostrukturen. Diaz & Kikuchi (1992) wenden die Einheitszelle mit Rechteckloch und die Homogenisierung zur Optimierung von makroskopischen Strukturen bezüglich ihrer Eigenfrequenzen an. In einer anderen Arbeit von Kikuchi et al. (1998) wird die Homogenisierung zur Generierung flexibler oder beweglicher Strukturen eingesetzt.

Innerhalb dieser Arbeit kommt vor allem das makroskopisch isotrope Materialmodell entsprechend dem SIMP-Ansatz (Solid Isotropic Microstructure with Penalty for intermediate density) nach Bendsøe (1988) zum Einsatz. Dieses beschreibt einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Materialparametern und der kontinuierlichen Parameterfunktion $\bar{\chi}$

$$\bar{\chi}_i = \frac{\rho_i}{\rho_0} . \quad (3.10)$$

ρ_0 bezeichnet die Dichte des isotropen, homogenen Materials. Der Zusammenhang zwischen der Dichte ρ_i , z.B. innerhalb eines Finiten Elementes i , und den zugehörigen Materialeigenschaften wird bei Verwendung des klassischen SIMP-Ansatzes mit einer Potenzfunktion beschrieben

$$b_i = \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\beta , \quad \beta \geq 3 . \quad (3.11)$$

Der Einfluss Wahl des Exponenten auf die Stabilität der Optimierungsergebnisse ist zum Beispiel in Reiter (1996) beschrieben. Die Steifigkeit des porösen Materials kann über diesen Exponenten β explizit gesteuert werden (Bild 3.5). Angewendet auf den E-Modul

$$E_{eff} = b_i E_0 \quad (3.12)$$

nimmt der effektive E-Modul E_{eff} und damit die Steifigkeit bei gleicher relativer Dichte mit wachsendem Exponenten ab. E_0 bezeichnet den Elastizitätsmodul des Referenzmaterials.

In der Regel wird der Parameter β innerhalb theoretisch vorgegebener Grenzen so gewählt, dass durch die Bestrafung der Materialparameter von Zwischenzuständen eine möglichst klare '0-1'-Verteilung für das optimierte Tragwerk erzielt wird.

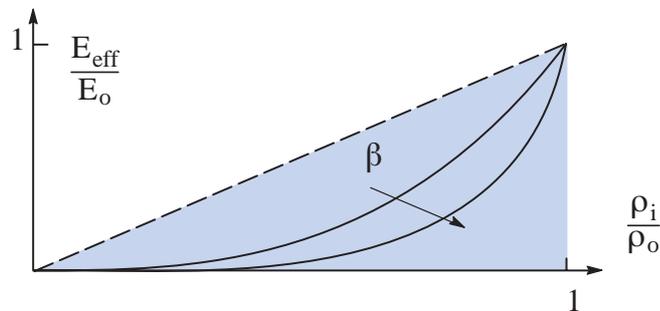


Bild 3.5: Dichte-Steifigkeitsfunktion im SIMP-Ansatz

Vorgreifend auf den weiteren Bericht wird Folgendes angemerkt: Metall- und Polymerschäume weisen ebenfalls einen nichtlinearen Zusammenhang zwischen der Dichte und der Materialsteifigkeit auf, der über eine vergleichbare Beziehung beschrieben werden kann (vergleiche Kapitel 3). Beide Materialformulierungen, die des klassischen SIMP-Ansatzes, sowie die Modelle zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Metall- und Polymerschäumen, sind zentraler Bestandteil dieser Arbeit und werden für die Optimierung eingesetzt. Während die Porosität beim SIMP-Ansatz als mathematisches Hilfsmittel zur Regularisierung eingesetzt wird, ist sie bei den Metall- und Polymerschäumen ein physikalisch realer Entwurfsparameter.

Bei Verwendung gradientenbasierter Verfahren ist die Bestimmung der Gradienten der Zielfunktion und der Nebenbedingungen, also der Sensitivitäten, besondere Beachtung zu schenken. Die Auswahl eines geeigneten Verfahrens wird im Abschnitt 3.5 diskutiert.

3.4 Klassische Entwurfskriterien im Leichtbau und Erweiterungen

Die überwiegende Anzahl der Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik werden heute immer noch auf Basis einer linearen Kinematik und mit linear elastischen Materialien durchgeführt (Sydow (2003)). Das wohl am häufigsten eingesetzte Entwurfskriterium ist die Maximierung der Steifigkeit, bei gleichzeitiger Minimierung der Masse der Konstruktionsbauteile. Dieses klassische Kriterium des Leichtbaus kann auf unterschiedliche Weise definiert werden.

Mit einer linearen Annahme für die Strukturanalyse kann die Steifigkeit durch die Minimierung eines charakteristischen Verschiebungswertes eines oder mehrerer Freiheitsgrade bestimmt werden.

$$\min f = -\hat{\mathbf{I}}^T \mathbf{d} \tag{3.13}$$

Mit einem speziellen Sortierungsvektor $\hat{\mathbf{I}}$ werden die gesuchten Einträge des diskreten Verschiebungsvektors \mathbf{d} entnommen. Die entsprechenden Positionen in diesem Vektor haben den Wert Eins. Die restlichen Einträge des Vektors $\hat{\mathbf{I}}$ sind bis auf die Positionen der betrachteten Freiheitsgrade Null.

Ein weiteres globales Kriterium ist die Minimierung der Verzerrungsenergie, die mit der folgenden Gleichung angegeben werden kann.

$$\min f = \int_{\Omega} \int_{\hat{\varepsilon}} \sigma^T d\varepsilon d\Omega, \quad (3.14)$$

Dieses Kriterium hat die Eigenschaft, dass eine Struktur bestimmt wird, die sich durch eine hohe Steifigkeit im gesamten Entwurfsraum auszeichnet. Das Kriterium (3.13) führt dagegen auf ein Tragwerk, das für den Spezialfall einer einzelnen Last direkt vom betrachteten Freiheitsgrad in die Richtung der Auflager abträgt.

Beide Kriterien benötigen zusätzlich eine Nebenbedingung bezüglich der Menge des verwendeten Materials. Wird beliebig viel Material zugelassen, führt dies naturgemäß zu einem vollständigen Ausfüllen des Entwurfsraums mit diesem Material; das optimierte Tragwerk entspricht dem ursprünglichen Entwurfsraum. Um jedoch ein Tragwerk innerhalb des Entwurfsraums zu bestimmen, kann die Entwurfsaufgabe um eine Gleichheitsnebenbedingung mit der Forderung nach konstanter Masse im Entwurfsraum erweitert werden.

$$h(s) = 1 - \frac{M_t}{M_{t_0}} = 0 \quad (3.15)$$

In Gleichung (3.15) wird die Masse des Ausgangsentwurfs mit M_t bezeichnet, die Masse in den folgenden Optimierungsschritten mit M_{t_0} . Alternativ ist diese Begrenzung auch mit einer Ungleichheitsnebenbedingung mit der Angabe eines Maximalwertes für das gesamte verwendbare Material möglich.

Ein weiteres Kriterium für eine leichte und steife Konstruktion kann aus dem Vertauschen von Zielfunktion und Nebenbedingung der bisher formulierten Optimierungsprobleme abgeleitet werden. Die Minimierung der Masse im Entwurfsraum bei gleichzeitiger Berücksichtigung maximaler Werte für die einzelnen Komponenten des Verschiebungsvektors ist eine zu den bisher beschriebenen Darstellungen äquivalente und vielleicht auch intuitivere Aufgabe. Jedoch wird in der Regel die Kombination aus der Minimierung der Verzerrungsenergie bei konstanter oder maximaler Massenvorgabe aufgrund der höheren Effizienz des Optimierungsverfahrens bevorzugt.

Die Minimierung der Verzerrungsenergie oder der Ergänzungsarbeit führt im linearen Fall auf das gleiche Optimierungsergebnis. Diese Minimierungsaufgaben können graphisch wie in Kemmler et al. (2006), durch die Suche nach der kleinst möglichen Dreiecksfläche dargestellt werden (siehe Bild 3.6 links). Die Berücksichtigung nichtlinearer Kinematik in der Strukturoptimierung führt jedoch auf die Definition unterschiedlicher Entwurfskriterien. Die Minimierung der Flächen links in Bild 3.6 für ein vorgegebenes Lastniveau, das im gesamten Optimierungsprozess konstant gehalten wird, führt auf die beiden weiteren Diagramme rechts in Bild 3.6. Es wird deutlich, dass sich die zu den beiden Last–Verschiebungs Kurven gehörenden Strukturen vollkommen unterschiedlich verhalten. Die Minimierung der Verzerrungsenergie, d.h. die Minimierung der dunkelgrauen Fläche führt zu einem weichen Verhalten zu Beginn der Belastung und einer zunehmenden Versteifung im weiteren Verlauf der Deformation.

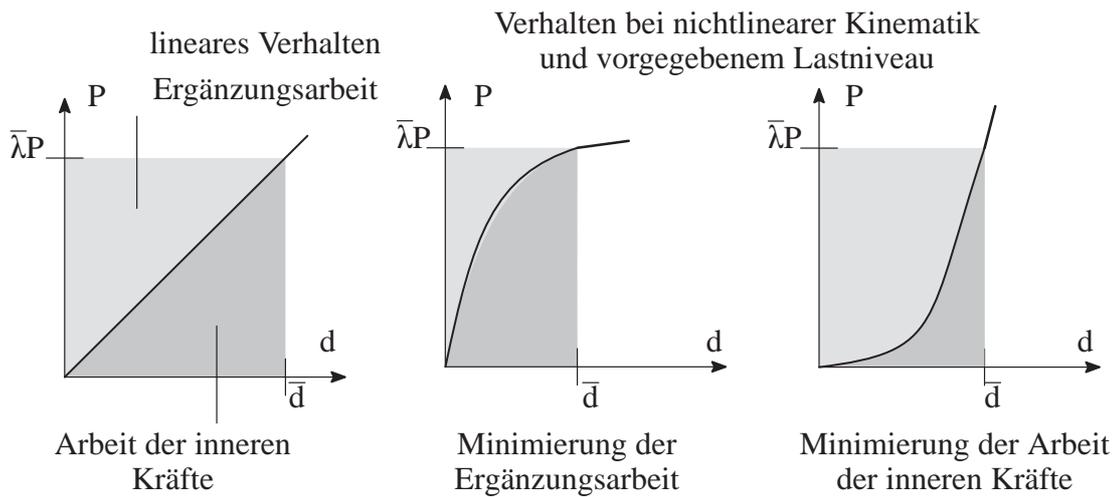


Bild 3.6: Entwurfskriterien für leichte und steife Konstruktionen (Kemmler et al. (2006))

Die Minimierung der Ergänzungsarbeit führt dagegen auf eine anfänglich sehr steife Struktur, die bei fortschreitender Deformation zunehmend weicher wird. Allerdings veranschaulichen die Diagramme in Bild 3.6 nur das Verhalten eines kontrollierten Freiheitsgrades. Die beiden integralen Entwurfskriterien werden aber auch maßgebend von den übrigen Freiheitsgraden beeinflusst (Bild 3.7).

Charakterisierung des Strukturverhaltens

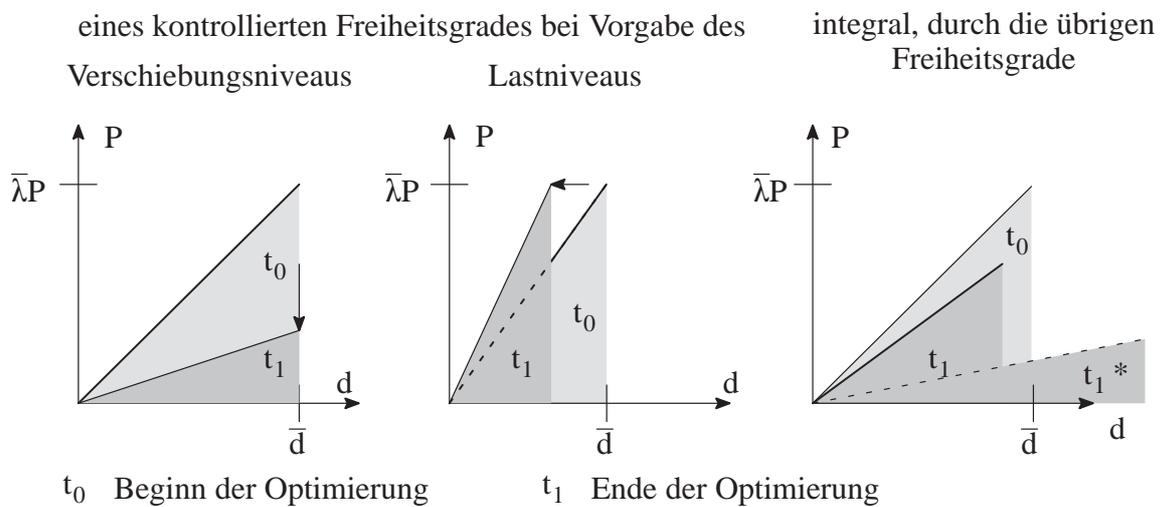


Bild 3.7: Beurteilung anhand einzelner Freiheitsgrade und im integralen Sinn für den linearen Sonderfall

Die Charakterisierung des Strukturverhaltens durch den kontrollierten Freiheitsgrad erfolgt bezüglich einer vorgegebenen Last oder einer bestimmten Verschiebung und kann durch die Optimierung für linear elastisches Materialverhalten gut gesteuert. Allerdings wird im nichtlinearen Fall des Verformungsverhalten bis zum Erreichen der vorgegebenen Last- oder Verschiebungsgröße integral erfasst. Die Kurven im Last-Verformungsdiagramm können bei gleichen Endpunkten sehr unterschiedlich sein.

Neben der oftmals nur unzureichenden Kontrolle des Last–Verformungsverhaltens des betrachteten Freiheitsgrades entzieht sich auch der weitaus größere Teil der Struktur, die übrigen Freiheitsgrade, der direkten Kontrolle. Die im rechten Diagramm in Bild 3.7 dargestellte optimierte Last–Verformungscharakteristik stellt für die besprochenen Kriterien einen Idealfall dar. Das Verschiebungsfeld nimmt in der optimierten Konfiguration in einer hier nicht näher beschriebenen Mittellung kleinere Werte an als der Startentwurf. Allerdings kann die Minimierung der in den Bildern dargestellten grauen Fläche auch durch den gestrichelten Bereich im Sinne der Entwurfsaufgabe erreicht werden. Die großen Verschiebungen bei kleinerer Last entsprechen nun gar nicht mehr dem ursprünglichen Ziel, die Steifigkeit einer Struktur zu erhöhen, um die Deformation zu minimieren.

Dieses Verhalten optimierter Strukturen wurde auch von Schwarz (2001) beobachtet, der das integrale Entwurfskriterium Duktilität mit elastoplastischen Materialien untersuchte. Er schlägt die Erweiterung der Optimierungsaufgabe um Nebenbedingungen für verschiedene Verschiebungen vor, um die Strukturantwort besser kontrollieren zu können, weist aber auch auf die problematische Auswahl der zu kontrollierenden Freiheitsgrade hin.

Die Entwurfskriterien 'End–Steifigkeit', 'Anfangs–Steifigkeit' und das Produkt aus dem Wert einer bestimmten Laststufe und der zugehörigen Verschiebung, der sogenannten 'end-compliance' stellen weitere in der Literatur diskutierte Möglichkeiten der Kontrolle der optimierten Last–Verschiebungskurven dar und sind im Bild 3.8 dargestellt.

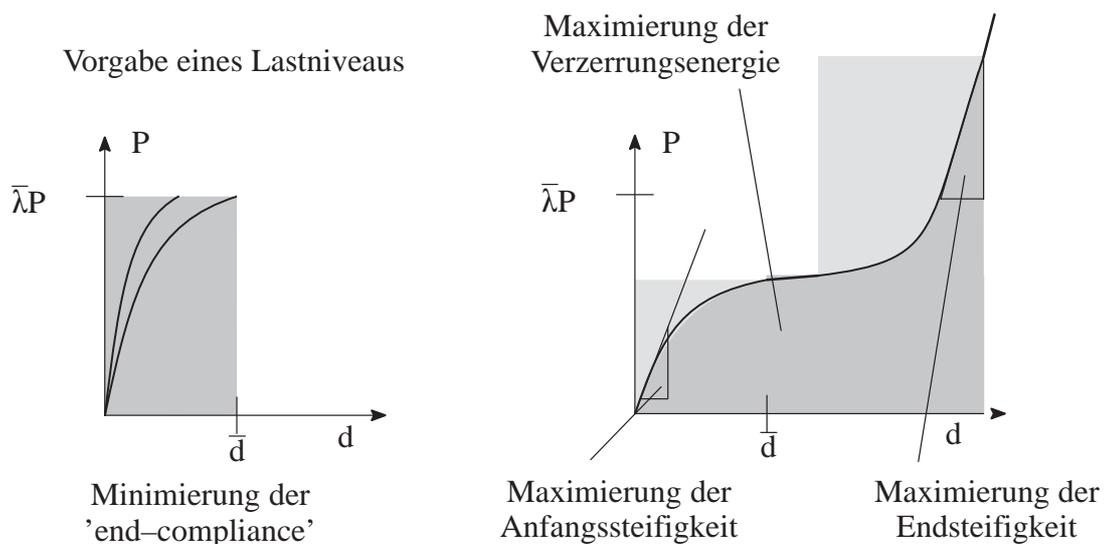


Bild 3.8: Verschiedene Entwurfskriterien für leichte und steife Konstruktionen

Das Optimierungsziel 'end-compliance' in Verbindung mit der Vorgabe eines bestimmten Lastniveaus resultiert in der Minimierung der Verschiebungen für dieses Lastniveau und kann als Minimierung der quadratischen Fläche im linken Diagramm in Bild 3.8 veranschaulicht werden. Werden gleichzeitig verschiedene Laststufen in einem Optimierungsprozess im Sinne einer Mehrkriterienoptimierung oder in Form zusätzlicher Nebenbedingungen berücksichtigt, lässt sich zumindest für einen bestimmten Freiheitsgrad die Strukturantwort sehr präzise vorgeben. Die Weiterführung dieses Gedankens kann auch die Kombination der im rechten Teil des Bildes

dargestellten Optimierungsaufgabe darstellen. Hier werden die bereits genannten integralen Entwurfskriterien verwendet, um die Strukturantwort möglichst genau zu charakterisieren. Ziel der in diesem Abschnitt aufgeführten Überlegungen ist die Überführung eines schlecht gestellten bzw. nicht eindeutigen Optimierungsproblems in ein gut gestelltes möglichst eindeutiges Optimierungsproblem.

Druckbeanspruchte Elemente steifer Strukturen minimalen Gewichts neigen eher dazu, bei höheren Lasten durch Beulen und Knicken zu versagen, als weniger spezialisierte Tragwerke (Thompson (1972), Kemmler (2004)). Ein weiteres, in dieser Arbeit untersuchtes Entwurfsziel ist deshalb die Verbesserung des Stabilitätsverhaltens.

Stabilitätsnebenbedingungen werden von Kocvara (2002) berücksichtigt. Eine ausführliche Übersicht über Zielfunktionen und Formulierungen des Optimierungsproblems bei Berücksichtigung von Stabilitätskriterien und ein Ansatz zur Verbesserung des elastischen Strukturverhaltens im post-kritischen Bereich werden in Bochenek (2003) gegeben. Schwarz (2001) berücksichtigt neben der materiellen und geometrischen Nichtlinearität ebenfalls Stabilitätsnebenbedingungen. Für eine ausführliche Diskussion dieser Thematik und die Berechnung kritischer Punkte in einer nichtlinearen Berechnung wird auf Ramm (1981), Kemmler (2004), Wagner (1991) und Reitinger (1994) verwiesen. Das Stabilitätsversagen wird durch Durchschlags- und Verzweigungspunkte charakterisiert (Bild 3.9).

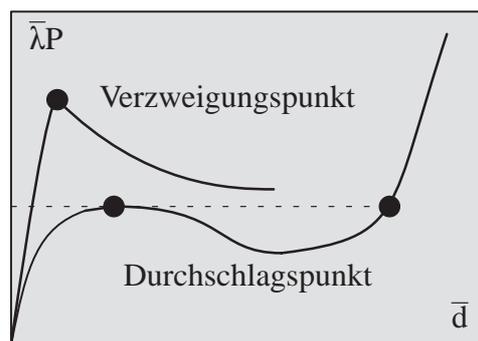


Bild 3.9: Versagen stabilitätsgefährdeter Strukturen

In dieser Arbeit wurde diese Art der Stabilitätsuntersuchung lediglich für das Problem mit linearem Vorbeulverhalten angewendet und das Instabilitätsproblem auf Basis einer linearen Vorbeulanalyse untersucht.

$$(\mathbf{K}^e + \lambda_i \mathbf{K}^g) \mathbf{N}_i = \mathbf{0} . \quad (3.16)$$

Der linear elastische Anteil \mathbf{K}^e der Steifigkeitsmatrix ist unabhängig von der Laststeigerung. Der zweite Teil \mathbf{K}^g wird linear mit dem Lastfaktor λ bis zum Versagen gesteigert. \mathbf{N}_i sind die zu den Eigenwerten λ_i zugehörigen Eigenformen. Die Bestimmung der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^g(\tilde{\mathbf{d}})$ erfolgt mit der Berechnung der diskreten Verschiebungen $\tilde{\mathbf{d}}$ nach einer linearen Analyse

$$\mathbf{K}^e \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{P} . \quad (3.17)$$

Zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens von Sandwichbauteilen und aufgrund der dämpfenden Eigenschaften von Schäumen werden in Kapitel 5 die Eigenfrequenzen mit der Strukturoptimierung kontrolliert.

Für die Verbesserung des dynamischen Verhaltens metallschaumgefüllter Bauteile wird in dieser Arbeit die Maximierung von Eigenfrequenzen durchgeführt. Praktischer Hintergrund ist die Zielsetzung, Bauteile zu entwerfen, deren Eigenfrequenzen nicht im Bereich der Erregerfrequenzen liegen. Hierdurch können bei Karosseriebauteilen von Kraftfahrzeugen Resonanzeffekte und damit unerwünschtes 'Dröhnen' vermieden werden. Ein weiterer Anwendungsfall ist die Vermeidung von Eigenfrequenzen um 2 Hz bei Fußgängerbrücken, um ein als unangenehm empfundenenes Schwingen zu vermeiden, das besonders bei sehr leichten und steifen Konstruktionen beobachtet wird.

Sonderfälle dieses Vorgehens sind die 'Maximierung der niedrigsten Frequenz' und die 'Anpassung von Eigenfrequenzen' an vorgegebene Werte.

Ausgangspunkt ist die diskretisierte Bewegungsgleichung der linearen Dynamik unter Vernachlässigung der Dämpfung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^e\mathbf{d} = \mathbf{R} \quad . \quad (3.18)$$

Die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die zugehörigen Eigenformen N_i werden durch Lösen des linearen Eigenwertproblems bestimmt

$$(\mathbf{K}^e - \omega_i^2\mathbf{M})N_i = \mathbf{0} \quad . \quad (3.19)$$

Die Eigenfrequenzen ϑ_i berechnen sich aus den Eigenkreisfrequenzen bekanntermaßen wie folgt:

$$\vartheta_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad . \quad (3.20)$$

Ähnlich der Optimierungsaufgabe mit Steifigkeit und Masse ist die 'Maximierung der kritischen Grenzlast oder der kleinsten Eigenfrequenz mit der genannten Nebenbedingung' der 'Minimierung der Masse bei vorgegebener Grenzlast bzw. bei der Vorgabe der kleinsten Eigenfrequenz' gleichwertig. Dies kann anhand der Kuhn-Tucker Bedingungen (Gleichung (3.4)) nachgewiesen werden (Maute (1998), Ramm et al. (1994)).

3.5 Sensitivitätsanalyse

Die Parameterempfindlichkeit der Strukturantwort wird in der Sensitivitätsanalyse ermittelt. Die Ableitungen (Sensitivitäten) der Strukturantwort sind für linear elastisches Strukturverhalten relativ problemlos zu bestimmen.

Aufgrund der hohen Konvergenzgeschwindigkeit und der relativ kleinen Anzahl an Strukturanalysen wird in den meisten Arbeiten, die nichtlineares Strukturverhalten berücksichtigen, der Einsatz gradientenbasierter Optimierungsverfahren (Maute (1998), Schwarz (2001), Kemmler (2004)) bevorzugt. Voraussetzungen sind kontinuierlich veränderbare Entwurfsparameter und kontinuierliche Entwurfskriterien.

Bei nichtlinearen Problemstellungen sind spezielle Verfahren zur Berechnung der Sensitivitäten notwendig. Als erste stellten Ryu et al. (1995) sowie Tsay und Arora (1989, 1990) eine allgemeine Methode zur Berechnung der Sensitivitäten bei geometrischer und materieller Nichtlinearität vor. Allerdings können bei diesem Ansatz ausschließlich pfadunabhängige Materialmodelle behandelt werden. Eine Erweiterung auf pfadabhängige Problemstellungen wie die von-Mises-Plastizitätstheorie wurde von Kleiber (1993) vorgenommen. Im Gegensatz zu Kleiber verwenden Vidal & Haber (1993) und Barthold & Wiechmann (1997) zur Integration der konstitutiven Beziehungen eine implizite Methode (Euler-Rückwärts), allerdings ausschließlich für geometrisch lineare Problemstellungen. Für den Spezialfall eines ebenen Spannungszustandes sei auf die Arbeit von Kleiber & Kowalczyk (1996) verwiesen. In Schwarz et al. (1999) wird eine Methode vorgestellt, bei der sowohl materiell wie auch geometrisch nichtlineare Optimierungsprobleme unter Verwendung eines impliziten Integrationsverfahrens gelöst werden können. Außerdem kann bei diesem Ansatz entfestigendes Materialverhalten mit einem 'verschmierten' Rißmodell berücksichtigt werden. In einem vereinfachten Ansatz von Bugada et al. (1999) wird ein ähnliches Vorgehen beschrieben. Für die Berechnung großer plastischer Verzerrungen ist eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten erforderlich (Miehe (1993)). Die Verwendung dieser Theorie in der Formoptimierung wird in Chen et al. (1992), Wiechmann & Barthold (1998) und Balagangadhar & Tortorelli (1998) beschrieben. Desweiteren sei auf Veröffentlichungen zur Behandlung von Umformungsprozessen verwiesen (Kleiber et al. (1997)). Die Ermittlung der Sensitivität der Strukturantwort bzw. der Entwurfskriterien für große Verzerrungen bei elastischem Materialverhalten wird in Tortorelli (1992) und Barthold et al. (1994) diskutiert. Die bisher beschriebenen Methoden werden vor allen für Formoptimierungsprobleme angewendet. Für derartige Problemstellungen lassen sich die Sensitivitäten mit der direkten Methode effizient bestimmen, die für pfadabhängige Probleme empfohlen wird (Vidal & Haber (1993), Kleiber (1997)). Aus Effizienzgründen wird in der Topologieoptimierung häufig die adjungierte Methode zur Ermittlung der Sensitivitäten bevorzugt. Maute et al. (1998) maximieren die Duktilität von Tragwerken für Topologieoptimierungsprobleme unter Verwendung eines elastoplastischen Materialmodells. Swan & Kosaka (1997) maximieren die Traglast und vergleichen die Ergebnisse der Optimierung mit elastoplastischen Materialverhalten mit den Ergebnissen minimaler Verzerrungsenergie. Die Optimierung der Steifigkeit von Rahmentragwerken wird in Yuge & Kikuchi (1995) beschrieben. Mayer et al. (1996) bestimmen die Topologie von Schalentragwerken für elastoplastisches Materialverhalten, um die Energieabsorption bei dynamischer Belastung zu maximieren. Für die Bestimmung der Sensitivitäten wird jedoch ein quasi-statisches Tragverhalten zugrunde gelegt. Allgemein kann gesagt werden, dass für die Sensitivitätsanalyse in der Topologieoptimierung für elastoplastisches Materialverhalten in der Regel vereinfachte Ansätze verwendet werden.

In der Topologieoptimierung existieren verschiedene Ansätze zur Maximierung der Steifigkeit von Tragwerken für geometrisch nichtlineares Strukturverhalten (Bruns & Tortorelli (1998), Buhl et al. (1999), Kemmler et al. (1999)). Außerdem wird in Kemmler et al. (1999) eine Methode zur Maximierung der kritischen Last für Topologieoptimierungsprobleme vorgestellt, die auch schon von Reitinger & Ramm (1995) und Polynkin et al. (1995) in der Formoptimierung

verwendet wurde. Ein Überblick über die verschiedenen Methoden der Sensitivitätsanalyse für nichtlineares Strukturverhalten ist in Kleiber (1997) zu finden.

In der Literatur wird relativ übereinstimmend von dem hohen numerischen Aufwand der Sensitivitätsanalyse berichtet. Man geht von etwa dreißig bis neunzig Prozent aus, bezogen auf den gesamten numerischen Aufwand aus Strukturanalyse, Sensitivitätsanalyse und der Neuberechnung der Entwurfsvariablen. Aus diesem Grund muss der Sensitivitätsanalyse besondere Beachtung gewidmet werden. Zum einen haben oftmals relativ kostspielige Bestandteile der Sensitivitätsanalyse einen geringen qualitativen Anteil an dem endgültigen Wert der Sensitivität und können damit fallen gelassen werden und zum anderen führen inexakte Sensitivitäten leicht zu wenig verbesserten Optimierungsergebnissen durch Stagnation in lokalen Minima oder gar zu falschen Resultaten. Abschließend kann gesagt werden, dass eine komplexe numerische Analyse in der Regel auch relativ komplexe Sensitivitätsanalysen erfordert, die andererseits aber auch ein hohes Maß an Einsparpotential bieten.

Die Sensitivitätsanalyse ist eine maßgebende Komponente bei der Optimierung mit gradientenbasierten Optimierungsverfahren. Eine sinnvolle Auswahl eines Verfahrens zur Berechnung der Sensitivitäten basiert demzufolge auf der *Anzahl sowohl der Entwurfskriterien*, als auch der *Anzahl der Entwurfsparameter*. Bei entsprechend modularem Aufbau der Sensitivitätsanalyse (Kemmler (2004), Schwarz (2001)) können die Ergebnisse einzelner Teile mehrfach für die verschiedenen anderen Teile Verwendung finden. Es existieren oftmals diskontinuierliche bzw. un stetige Stellen in den mathematischen Formulierungen, z.B. in den konstitutiven Beschreibungen, so dass Ableitungen an diesen Stellen nicht existieren und numerisch gesondert behandelt werden müssen.

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist das Gebiet der Auswertung der Sensitivitäten. Es ist leicht nachvollziehbar, dass der Teil der Berechnung, der auf dem Gebiet des diskretisierten Finiten Elementes erfolgt, deutlich effizienter durchgeführt werden kann, als die Teile der Sensitivitätsanalyse, die eine Lösung auf dem globalen Gebiet erfordern. Zum Beispiel erfordert die Berechnung der Sensitivität der Strukturantwort in Form des Verschiebungsfeldes in der Regel das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit den vollständig assemblierten Systemmatrizen. Diese Sensitivität des Verschiebungsfeldes kann allerdings nun für die Berechnung auf Elementebene von verschiedenen Teilen der endgültigen Gradienten verwendet werden, z.B. für die Sensitivitäten der Duktilität und des kritischen Lastfaktors (Schwarz (2001)).

Bei der Implementierung der Strukturoptimierung in vorhandene Finite-Element-Programme ergibt sich ein weiteres Problem, da meist nur sehr begrenzte Informationen innerhalb der Berechnung zur Verfügung stehen. Die Sensitivitätsanalyse kann dann entweder nur stark approximiert oder nur sehr aufwendig durchgeführt werden.

Wie bereits mehrfach erwähnt, lassen sich die Gradienten auf unterschiedliche Weise analytisch herleiten und mit unterschiedlichen Verfahren berechnen. Die Kenntnis der Unterschiede der einzelnen Strategien ermöglicht in Verbindung mit den bisher diskutierten maßgeblichen Einflussfaktoren letztendlich erst die Wahl einer exakten, robusten aber auch effizienten Methode.

Entsprechend der oben dargestellten Definition der Sensitivitäten als Gradienten der meist skalarwertigen Funktionen nach den einzelnen Entwurfsvariablen, ist die einfachste Möglichkeit

der Berechnung die *numerische Differenzenbildung*. Bei Vernachlässigung der höherwertigen Terme in einer Taylorreihenentwicklung,

$$f(\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}) + \nabla_{\mathbf{s}}f(\mathbf{s})\Delta\mathbf{s} + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{s}}^2f(\mathbf{s})(\Delta\mathbf{s})^2 + HOT \quad (3.21)$$

$$f(\mathbf{s} - \Delta\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}) - \nabla_{\mathbf{s}}f(\mathbf{s})\Delta\mathbf{s} + \frac{1}{2}\nabla_{\mathbf{s}}^2f(\mathbf{s})(\Delta\mathbf{s})^2 + HOT \quad (3.22)$$

können die Gradienten bei Abbruch nach dem linearen Term mit dem Vorwärts- oder Rückwärtsdifferenzenverfahren oder bei zusätzlicher Berücksichtigung der quadratischen Terme und Subtraktion der beiden Gleichungen (3.21) und (3.22) durch das Zentrale Differenzenverfahren approximiert werden.

$$\nabla_{\mathbf{s}}f(\mathbf{s}) \approx \frac{f(\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) - f(\mathbf{s})}{\|\Delta\mathbf{s}\|} \quad \text{Vorwärtsdifferenzenverfahren} \quad (3.23)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}}f(\mathbf{s}) \approx \frac{f(\mathbf{s}) - f(\mathbf{s} - \Delta\mathbf{s})}{\|\Delta\mathbf{s}\|} \quad \text{Rückwärtsdifferenzenverfahren} \quad (3.24)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}}f(\mathbf{s}) \approx \frac{f(\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) - f(\mathbf{s} - \Delta\mathbf{s})}{\|2 \cdot \Delta\mathbf{s}\|} \quad \text{Zentrales Differenzenverfahren} \quad (3.25)$$

Das Vor- und das Rückwärtsdifferenzenverfahren sind folglich erster und das Zentrale Differenzenverfahren zweiter Ordnung genau.

Neben den Vorteilen einer ausgesprochen einfachen Implementierung, da lediglich die Funktionswerte der Entwurfskriterien vor und nach dem Aufbringen einer Störung für die Differenzenbildung benötigt werden, überwiegen dennoch die offensichtlichen Nachteile dieser Methode. Einerseits hängt die Qualität der Gradienten stark von der Größe der Störung $\Delta\mathbf{s}$ ab, deren Wertebereich letztendlich von der numerischen Genauigkeit limitiert wird und zum anderen werden eine Vielzahl an Funktionsauswertungen in Form von vollständigen Strukturanalysen benötigt. Für das Vorwärtsdifferenzenverfahren sind $n_s + 1$ Strukturanalysen und für das zentrale Differenzenverfahren $2n_s + 1$ Strukturanalysen erforderlich. Wie bereits weiter oben erwähnt, können diese Funktionsauswertungen natürlich auch mit Hilfe einer approximierenden Ersatzfunktion (Response Surface Methode) berechnet werden. Allerdings nimmt dann die ohnehin schlechte Qualität der Sensitivitäten noch weiter ab, da der polynomiale Grad im Sinne einer möglichst akkuraten Approximation der Verteilung der Funktionswerte im Lösungsraum nicht im Voraus festgelegt werden kann.

In dieser Arbeit wird die numerische Differenzenbildung dennoch zur Verifikation einzelner partieller Ableitungen und der endgültigen Sensitivitäten eingesetzt. Für diese Anwendung wird die Größe der Störung, ausgehend von einem relativ großen Wert, solange verkleinert, bis eine Konvergenz des zu untersuchenden Wertes beobachtet wird.

Die maßgebenden Nachteile der numerischen Differenzenbildung können durch eine geeignete analytische Sensitivitätsanalyse kompensiert werden. Die Herleitung erfolgt entsprechend der Namensgebung analytisch und erst das Ergebnis dieser Herleitung wird schließlich implementiert. Somit kann an verschiedenen Stellen der analytischen Sensitivitätsanalyse die Zielsetzung

nach einer höheren Effizienz Rechnung getragen werden. Dies erfolgt einerseits durch die Wahl einer möglichst effizienten Reihenfolge der durchzuführenden Verknüpfungen und andererseits können bestimmte physikalische Eigenschaften zur Effizienzsteigerung ausgenutzt werden (z.B. Potentialcharakter hyperelastischer Materialien).

Eine Unterteilung der analytischen Verfahren erfolgt aufgrund der gewählten kontinuierlichen oder der bereits diskretisierten Ausgangsgleichungen in die *diskrete* und die *variationelle* Vorgehensweise. In beiden Fällen sind in der Regel explizit und implizit abhängige Teile der Entwurfskriterien zu berücksichtigen:

$$\nabla_s f = \nabla_s^{ex} f + \nabla_u f \nabla_s \mathbf{u} \quad (3.26)$$

Der implizite Anteil berücksichtigt die Änderung der Strukturantwort $\nabla_s \mathbf{u}$.

Der Ausgangspunkt der diskreten Sensitivitätsanalyse sind die bereits diskretisierten Grundgleichungen wie z.B. die diskrete Gleichgewichtsbeziehung (2.28). In einer nichtlinearen Rechnung wird in einem iterativen Prozess zur Bestimmung der inkrementellen Verschiebungen $\Delta \mathbf{d}$ das Gleichungssystem (2.30) zum Zeitpunkt t wiederholt gelöst.

Die neuen Verschiebungen werden durch Addition der inkrementellen Verschiebungen zu den Verschiebungen \mathbf{d}_t im letzten Schritt wie folgt bestimmt:

$$\mathbf{d}_{t+1} = \mathbf{d}_t + \Delta \mathbf{d} . \quad (3.27)$$

Die Berechnung der neuen Laststeigerungsfaktors λ_{t+1} erfolgt analog. Im Folgenden wird die Kennzeichnung der betreffenden Größen mit $t + 1$ unterlassen und der aktuelle Zeitschritt betrachtet. Am Ende der Iteration ist die folgende Gleichgewichtsbedingung erfüllt:

$$\mathbf{F}_{intern} - \lambda \mathbf{P} = 0 . \quad (3.28)$$

Hier wurde in der Gleichung (2.28) die äußere Last \mathbf{F}_{extern} durch den konstanten Anteil der Last \mathbf{P} und den Laststeigerungsfaktor λ ersetzt. Die Bestimmung der Sensitivität z.B. für das Kriterium Minimierung der Dehnungsenergie erfolgt für elastische Materialien mit Potentialcharakter nach dem Vorschlag von Kemmler (2004) im betrachteten Zeitschritt nach Gleichung (3.26) mit dem diskreten Verschiebungsfeld $\mathbf{d} = \mathbf{d}(\lambda)$.

$$\nabla_d \mathbf{F}_{intern} \nabla_s \mathbf{d} = \nabla_s \lambda \mathbf{P} + \lambda \nabla_s \mathbf{P} - \nabla_s^{exp} \mathbf{F}_{intern} , \quad (3.29)$$

Das genannte Entwurfskriterium kann bei Verwendung hyperelastischer Materialien ohne vollständiges Wissen der Last–Verschiebungs–Pfade ausgewertet werden. Bei Berücksichtigung materieller Nichtlinearität, bzw. bei pfadabhängigen Problemen sind die genannten Ableitungen in jedem Zeitschritt zu berechnen und zur Bestimmung der endgültigen Lösung aufzuaddieren (siehe auch Maute (1998) oder Schwarz (2001)). Unter Berücksichtigung von $\mathbf{K}_T = \nabla_d \mathbf{F}_{intern}$ führt die beschriebene Herleitung zu einem linearen Gleichungssystem, mit dem man direkt die Sensitivität der Strukturantwort $\nabla_s \mathbf{d}$ berechnen kann,

$$\mathbf{K}_T \nabla_s \mathbf{d} = \nabla_s \lambda \mathbf{P} + \lambda \nabla_s \mathbf{P} - \nabla_s^{exp} \mathbf{F}_{intern} , \quad (3.30)$$

wobei der Term auf der rechten Seite meist zu einem Pseudo–Lastvektor zusammengefasst wird. Dieser Pseudo–Lastvektor muss nun für jede Entwurfsvariable neu aufgestellt und das Gleichungssystem wiederholt gelöst werden. Die Verwendung eines direkten Gleichungslösers ermöglicht zwar die effiziente Lösung mehrerer rechter Seiten mit einer einmal faktorisierten Matrix, in der Regel ist aber der Aufwand bei zuvielen Entwurfsvariablen nicht zu unterschätzen. Die so ermittelte Sensitivität der Strukturantwort kann nun zusammen mit dem leicht zu bestimmenden expliziten Anteil der Sensitivität in Gleichung (3.26) eingesetzt und der endgültige Wert der Sensitivität berechnet werden.

In der klassischen materiellen Topologieoptimierung mit konstanten homogenisierten Materialparametern innerhalb eines Finiten Elementes hat die explizite Ableitung nach einer Entwurfsvariablen lediglich einen Einfluss auf das jeweilige Finite Element. Dagegen haben die expliziten Anteile in der Formoptimierung einen deutlich größeren Einflussbereich entsprechend dem Einflussbereich des zu variierenden Randes. Der Einflussbereich kann sich je nach gewählter Formulierung auf Teile des Systems beziehen, aber auch über das gesamte Gebiet erstrecken.

Aufgrund der Ermittlung der Sensitivität der Strukturantwort in einem ersten direkten Schritt wird diese Form der Sensitivitätsanalyse als *direkte diskrete Sensitivitätsanalyse* bezeichnet.

Das Ziel der adjungierten Sensitivitätsanalyse ist die Vermeidung der numerisch aufwendigen Berechnung der Sensitivität der Strukturantwort. In der adjungierten Variante der diskreten Sensitivitätsanalyse wird ein Ersatzproblem für die Bestimmung der adjungierten Variablen aufgestellt. Die Erweiterung kann z.B. für die oben genannte Entwurfsaufgabe mit hyperelastischen Materialien mit einer Gleichgewichtsaussage erfolgen.

$$\bar{f} = f - \boldsymbol{\mu}^T(\mathbf{K}\hat{\mathbf{d}} - \mathbf{F}_{extern}) \quad (3.31)$$

Die skalare Zielfunktion wird hierbei durch das Produkt des Vektors der Lagrange–Multiplikatoren mit dem strukturellen Gleichgewicht erweitert. Die Beachtung der impliziten und expliziten Teile führt auf folgende Ableitung:

$$\nabla_s \bar{f} = \nabla_s^{ex} f + \boldsymbol{\mu}^T[\lambda \nabla_s^{ex} \mathbf{P} - \nabla_s^{ex} \mathbf{F}_{intern}] + [\nabla_d f - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}_T] \nabla_s \mathbf{d} \quad (3.32)$$

Bei Anwendung der Produktregel und der Beachtung der Multiplikation des Vektors der Lagrange–Multiplikatoren mit einem Nullterm in Gleichung (3.31) folgt, dass die Ableitung der Lagrange–Multiplikatoren vermieden werden kann. Die Bestimmungsgleichung für die Lagrange–Multiplikatoren $\boldsymbol{\mu}$ wird nun so gewählt, dass die Berechnung von $\nabla_s \mathbf{d}$ vermieden wird.

$$\mathbf{K}_T \boldsymbol{\mu} = \nabla_d f \quad (3.33)$$

Gleichzeitig reduziert sich die Gleichung (3.32) zu

$$\nabla_s \bar{f} = \nabla_s^{exp} f + \boldsymbol{\mu}^T[\lambda \nabla_s^{ex} \mathbf{P} - \nabla_s^{ex} \mathbf{F}_{intern}] , \quad (3.34)$$

die auf Elementebene ausgewertet werden kann. Für die in dieser Arbeit betrachteten Steifigkeitskriterien wird die Gleichung in jedem Optimierungsschritt nur einmal aufgestellt und gelöst. Da der größte Teil der Berechnungen mit direkten Gleichungslösern durchgeführt wurde,

konnte die bereits in der vorangegangenen Strukturanalyse erfolgte Faktorisierung der Systemmatrix verwendet und dadurch die Effizienz des gesamten Optimierungsprozesses deutlich gesteigert werden.

Der Vergleich der Gleichungen (3.26) und (3.34) zeigt eine formale Übereinstimmung der direkten und der adjungierten Sensitivitätsanalyse. Der numerische Aufwand für die Lösung eines globalen Gleichungssystems mit den Systemmatrizen bzw. Systemvektoren ist für beide Verfahren identisch. Für viele Entwurfsaufgaben ist bei der adjungierten Methode ist für die Berechnung der Sensitivitäten diese Lösung nur einmal zu berechnen. Die direkte Methode erfordert dagegen die Lösung eines globalen Gleichungssystems für jede Optimierungsvariable. Ist die Anzahl der freien Entwurfsvariablen größer als die der Entwurfskriterien, erweist sich die adjungierte Methode als vorteilhaft. Die Gleichung (3.33) muß lediglich für die kleinere Anzahl aus Zielfunktionen und Nebenbedingungen gelöst werden. Für Formoptimierungsaufgaben mit wenigen Entwurfsvariablen, aber vielen Nebenbedingungen ist allerdings dem direkten Verfahren der Vorzug zu geben, da die Gleichung zwar für die relativ geringe Anzahl Entwurfsparameter mehrfach gelöst werden muss, aber mit der Sensitivität der Strukturantwort verschiedene auf dieser basierende Entwurfskriterien ausgewertet werden können. Die Verwendung der adjungierten Methode erfordert dagegen die Aufstellung und Lösung der Anzahl der Entwurfskriterien entsprechend vieler Ersatzprobleme und ist damit in der Regel numerisch aufwendiger. Typischer Anwendungsbereich der adjungierten Sensitivitätsanalyse ist die Topologieoptimierung mit einer sehr großen Anzahl von Entwurfsvariablen und wenigen Entwurfskriterien.

Die Verwendung der kontinuierlichen Problemfunktionen als Ausgangspunkt für die analytische Herleitung der Gradienteninformation führt auf die *variationelle Sensitivitätsanalyse*. Ausgangspunkt ist zum Beispiel die schwache Form des Gleichgewichts (siehe Gleichung (2.23)) hier in der Referenzkonfiguration.

$$\int_{\Omega} \delta ES|J|d\Omega = \int_{\Omega} \delta u\tilde{b}|J|d\Omega + \int_{\Gamma} \delta ut|J|d\Gamma \quad (3.35)$$

Genauso wie bei der diskreten, adjungierten Methode kann die Zielfunktion im Rahmen der variationellen, adjungierten Methode mit dem strukturellen Gleichgewicht (3.35) in kontinuierlicher schwacher Form erweitert und ein modifiziertes Entwurfskriterium aufgestellt werden.

$$\bar{f} = f - \mu \left[\int_{\Omega} \delta ES|J|d\Omega = \int_{\Omega} \delta u\tilde{b}|J|d\Omega + \int_{\Gamma} \delta ut|J|d\Gamma \right] \quad (3.36)$$

Bei gleicher Vorgehensweise zur bereits beschriebenen diskreten Methode lassen sich die impliziten und expliziten Teile der Sensitivität der Zielfunktion angeben.

Ebenso führt die Ableitung des strukturellen Gleichgewichts nach den Entwurfsparametern und die anschließende Diskretisierung auf die Bestimmungsgleichung für die Sensitivität der Strukturantwort. Die Sensitivität wird wieder in den impliziten Anteil der Ableitung der Zielfunktion eingesetzt, und der endgültige Wert der Sensitivität kann nun berechnet werden.

Die variationell hergeleiteten Gleichungen werden nach dem Differenzieren diskretisiert.

Eine detaillierte Herleitung der Gradienten mit der variationellen Sensitivitätsanalyse wird z.B. in Schwarz (2001) und Maute (1998) beschrieben, daher wird an dieser Stelle auf die Wiederholung verzichtet. Hier werden lediglich die speziellen Vor- und Nachteile bei der Behandlung geschichtsabhängiger Probleme zusammengefasst.

Bei den in dieser Arbeit behandelten Entwurfsaufgaben mit elastoplastischem Materialverhalten werden sowohl die Sensitivitäten der Strukturantwort als auch die der Spannungen benötigt. Die Berechnung der Sensitivität der Spannungen erfordert die Lösung eines adjungierten Problems für jeden Freiheitsgrad (Maute (1998)). Die inkrementelle Vorgehensweise zur Bestimmung der nichtlinearen Strukturantwort erhöht noch einmal die Anzahl der Strukturanalysen und erfordert darüber hinaus die Speicherung der adjungierten Daten, falls sie nicht in jedem inkrementellen Schritt neu berechnet werden sollen. Verschiedene Publikationen, die sich mit der Formoptimierung geschichtsabhängiger Probleme beschäftigen, empfehlen deshalb die variationelle, direkte Vorgehensweise.

3.6 Optimierungstrategien für große Optimierungsprobleme

In der Literatur wird häufig von großen Optimierungsproblemen gesprochen. In Bezug auf die in dieser Arbeit behandelten Topologieoptimierungsprobleme mit nichtlinearem Strukturverhalten und dem damit verbundenen hohen numerischen Aufwand zur Lösung dieser Probleme werden im Folgenden Definitionen sogenannter großer Optimierungsprobleme diskutiert. Die Definition großer Optimierungsprobleme ist nicht notwendigerweise eindeutig. Eine Möglichkeit resultiert aus der *Anzahl der freien Entwurfsparameter*. Ein Formoptimierungsproblem mit 5 bis 10 Entwurfsvariablen zur Kontrolle der Stützpunkte analytischer Flächenbeschreibungen (Bezier-, Coons- und Splineflächen) ist ein relativ kleines Optimierungsproblem. Demgegenüber ist eine Topologieoptimierungsaufgabe, in der jedes einzelne Finite Element ein bis drei Entwurfsvariablen zu Steuerung der Materialverteilung benötigt, ein großes Problem.

Eine weitere Möglichkeit, große Optimierungsprobleme von kleinen unterscheiden, ist die Berücksichtigung der *Anzahl der Entwurfskriterien*. Die Optimierung des klassischen MBB-Balkens¹ erfolgt für eine einzige Zielfunktion und eine Nebenbedingung. Die Zielfunktion ist die Steifigkeit und die Nebenbedingung fordert eine Minimierung der Masse oder zumindest eine konstante Massenbilanz innerhalb des Optimierungsprozesses. Für den Entwurf realistischer Tragwerke ist dagegen eine Vielzahl von Entwurfskriterien zu berücksichtigen. Ein Brücke soll eine geringe Durchbiegung aufweisen, nicht schlagartig, sondern duktil versagen, geringe Kosten verursachen und Resonanzen sollen vermieden werden, um nur einige wenige Kriterien zu benennen. Der MBB-Balken ist nach dieser Definition ein kleines Optimierungsproblem, der Entwurf der Brückenkonstruktion ein großes.

1. Der Entwurfsraum des MBB-Balkens besteht aus einem Balken auf zwei Stützen mit einem Längen- zu Höhen Verhältnis von vier zu eins. Mit den Verfahren der Topologieoptimierung wird ein Tragwerk für eine Einzellast in der Mitte des statisch bestimmt gelagerten Balkens gesucht. Das Ergebnis entspricht je nach gewählter Optimierungsstrategie mehr oder weniger den klassischen Michellstrukturen bzw. folgt den Spannungstrajektorien.

Unabhängig von der Anzahl der Entwurfparameter und der Anzahl der Entwurfskriterien ist ein Stabtragwerk mit elastischem Materialverhalten offensichtlich mit deutlich geringerem numerischen Aufwand zu analysieren als ein mit mehrschichtigen dreidimensionalen Schalenelementen diskretisiertes Tonnengewölbe aus Beton. Im ersten Beispiel sind ohne weiteres mehrere zehn- bis einhundert-tausend Strukturanalysen innerhalb weniger Minuten möglich und damit fast jede Optimierungsstrategie anwendbar. Das zweite Beispiel erfordert neben einer sorgfältig ausgewählten Optimierungsstrategie auch noch besondere Beachtung bei der Auswahl der Algorithmen zur Berechnung der über die Funktionswerte der Zielkriterien hinausgehenden, für die Optimierung aber notwendigen Informationen.

Nicht zuletzt stellt sich ein *großes Problem* im Sinne einer schwierig zu lösenden Aufgabe entsprechend dem normalen Sprachgebrauch dar. Die Schwierigkeit der Lösungsfindung, z.B. bei der Behandlung von Aufgabenstellungen mit stark konkurrierenden Optimierungszielen innerhalb einer Mehrkriterienoptimierung ist leicht nachvollziehbar.

In der Regel beschränken sich die Verfechter einer bestimmten Optimierungsstrategie auf einen Vergleich der Größe der untersuchten Probleme, die mit dieser Strategie behandelt werden. Die Größe der mit genetischen Algorithmen behandelten Probleme ist nicht gleich der Größe der mit gradientenbasierten Verfahren behandelbaren Probleme. Dies trifft zum einen auf die Anzahl der Entwurfsvariablen und Entwurfskriterien als auch auf die Komplexität einer nichtlinearen Strukturanalyse zu. Das klassische Travelling-Salesman-Problem (TSP)² ist dagegen mit gradientenbasierten Verfahren nur schwer zu lösen und stellt bei Anordnung der Orte in einem Kreis auch für die stochastischen Verfahren eine nicht-triviale Problemstellung dar.

Aber auch innerhalb der Anwendungen mit gradientenbasierten Verfahren werden große Optimierungsprobleme unterschiedlich bewertet. Die Untersuchungen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, lassen folgende Schlussfolgerungen zu: Für das SQP-Verfahren können eintausend Entwurfsvariablen eine sinnvolle obere Grenze aufgrund der Vielzahl an notwendigen Funktionsanalysen darstellen. Genauso wurde speziell bei diesem Verfahren eine mit der Komplexität der Entwurfsaufgabe verbundene zunehmende Tendenz beobachtet, in lokalen Minima zu stagnieren. In dieser Arbeit hat sich gezeigt, dass mit dem hauptsächlich eingesetzten mathematisch orientierte Optimalitätskriterienverfahren die Überwindung lokaler Minima bei entsprechender Wahl der Schrittlänge möglich ist (vgl. Kapitel 8.2.1). Darüber hinaus wurde beobachtet, dass der verwendete Algorithmus unabhängig von der Anzahl der Entwurfsvariablen sehr effizient einen neuen Satz verbesserter Entwurfparameter bestimmt. Unterstellt man den OC-Verfahren prinzipiell dieses Verhalten, so kann gefolgert werden, dass bezogen auf die An-

-
2. Travelling-Salesman-Problem: Ein Handelsreisender möchte eine Rundreise durch vorgegebene Städte machen. Jede Stadt soll genau einmal besucht werden. In welcher Reihenfolge soll er die Städte besuchen, um möglichst schnell oder kostenminimal wieder zu Hause zu sein? Mit der Definition des Hamiltonkreises als ein Kreis in einem Graphen, der jeden Knoten genau einmal durchläuft, lautet die Aufgabenstellung: Finde einen kürzesten Hamiltonschen Kreis in einem gewichteten Graphen. Praktische Relevanz erfährt dieses Problem in der Halbleiterfertigung, der Fahrtroutenplanung, in Verdrahtungsaufgaben in elektronischen Geräten, Anordnung von Produktionsstandorten u.v.a. .

zahl der Entwurfsvariablen OC–Verfahren deutlich besser für diese großen Optimierungsprobleme geeignet sind. Legt man dagegen die Größe der mathematischen Optimierungsaufgabe der Definition großer Optimierungsprobleme zu Grunde, sind das deutlich flexiblere SQP– aber auch die MMA–Verfahren für in diesem Sinne große Aufgaben geeignet.

Die Lösbarkeit der Optimierungsprobleme hängt direkt von den klassischen Effizienzkriterien Speicherbedarf und Rechenzeit ab. Diese beiden Faktoren stehen in direkter Korrelation zueinander, wie leicht zu veranschaulichen ist. So werden beispielsweise Steifigkeits– und Massenmatrizen der Finiten Elemente sowohl in der Strukturanalyse, als auch in der Optimierung zur Berechnung der Sensitivitäten und Zielfunktionswerte mehrfach aber zu unterschiedlichen Zeitpunkten benötigt. Entscheidet primär die Rechenzeit über die Lösbarkeit eines strukturmechanischen Optimierungsproblems, könnte man beispielsweise die einzelnen Elementmatrizen aufheben und müsste sie nicht jedesmal neu integrieren, zumal der hierfür notwendige Speicherbedarf logischerweise linear skaliert. Dieser Gedanke ist nicht neu. In einigen kommerziellen Finite–Element–Codes werden einzelne Teile eines diskretisierten Strukturbauteils in sogenannten Super-elementen gespeichert. Hier werden mehrere Finite Elemente bereits assembliert abgespeichert und folglich skaliert der benötigte Speicherbedarf sogar weniger als linear. Ist dagegen die Rechenzeit ausschlaggebend für die Lösbarkeit, können die Integrationen der voneinander unabhängigen Finiten Elemente und Teile der Sensitivitätsanalyse parallel auf verschiedenen Prozessoren berechnet werden. In dieser Arbeit erfolgt die parallele Umsetzung mit Hilfe des MPI–Konzepts (Message–Passing–Interface (1995)). Es eignet sich hervorragend für heterogene Computernetzwerke, d.h. Computer unterschiedlicher Leistungsfähigkeit führen mit den vorhandenen Ressourcen entsprechende Teile der Berechnungen durch und tauschen die Ergebnisse über ein Netzwerk untereinander aus. Insbesondere die Optimierung unter Berücksichtigung materieller Nichtlinearität konnte so erst durchgeführt werden. Ebenso wurden die einzelnen Strukturanalysen in den Beispielen der Mehrkriterienoptimierung gleichzeitig auf verschiedenen Rechnern durchgeführt. Dies erforderte einen etwas höheren numerischen Aufwand für die Aufbereitung der Daten und die Kommunikation, da einerseits die einzelnen Strukturanalysen verteilt durchgeführt und darüber hinaus jede einzelne Strukturanalyse noch einmal durch entsprechende Partitionierung auf verschiedene Prozessoren eines Rechners effizient parallel gelöst wurden. Das hierfür erforderliche Konzept zur hierarchisch verteilten dynamischen Speicherung der Daten ist in Gee (2004) beschrieben. Die Kommunikation wurde entsprechend der Optimierungsaufgabe jeweils angepasst. Allerdings wurde auf eine dynamische Lastbalancierung verzichtet. Die möglichst gleichmäßige Auslastung erfolgte durch Aufteilung der Diskretisierung mit Hilfe von Partitionierungsalgorithmen in gleich große Gebiete. Gebietsränder mit minimaler Länge garantieren einen minimalen Kommunikationsaufwand.

Eine im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Analyse der in der Literatur veröffentlichten Beispiele (Sydow, 2003) zeigt eine Momentaufnahme heute untersuchter Optimierungsprobleme. Die meisten gezeigten Beispiele sind eher akademischer Natur und beschränken sich in der Anzahl der Entwurfsvariablen in der Formoptimierung auf weniger als zehn und in der Topologieoptimierung auf etwa dreitausend variable Parameter. Die untersuchten Diskretisierungen verwenden einige hundert bis wenige tausend hauptsächlich lineare elastische Finite Elemente.

Oft werden Algorithmen angewendet, die für viele bezüglich einer bestimmten Aufgabenstellung 'typischen' Eingabedaten mit hoher Wahrscheinlichkeit und in annehmbarer Zeit eine zufriedenstellende Lösung finden. Viele kommerzielle Anwender haben weder das Kapital noch die Zeit oder das Know-How, um für ein gegebenes Optimierungsproblem mit dem bekannten Methodenreservoir und problemspezifischen Kenntnissen einen maßgeschneiderten Algorithmus zu entwerfen. Sie benötigen robuste und universell einsetzbare Algorithmen.

Ein kleiner Katalog maßgebender Kriterien fasst die bisherigen Ausführungen zu großen Optimierungsproblemen und zur Auswahl einer geeigneten Strategie zusammen:

- Anzahl und Art der Entwurfparameter (ganzzahlig/kontinuierlich)
- Anzahl und Komplexität der Funktionsanalysen
- Anzahl, Art und Aufwand der Sensitivitätsanalysen
- Informationstechnische Basis und Beschränkungen in der Implementierung wie z.B. bei kommerziellen Codes

Die Untersuchung verschiedener Optimierungsalgorithmen im Zusammenhang mit dieser Arbeit (Matsuo (2003), Sydow (2003), Kato (2004)) zeigt, dass zur Lösung der betrachteten Aufgabenstellungen ausschließlich robuste gradientenbasierte Strategien geeignet sind.

3.7 Mehrkriterienoptimierung

3.7.1 Einleitung

Entwurfsaufgaben sind in den seltensten Fällen von nur einem Entwurfskriterium abhängig. Zudem können die Kriterien widersprüchlich sein. Das bedeutet, dass der endgültige Entwurf, der bezüglich eines Kriteriums optimal ist, andere konkurrierende Kriterien möglicherweise negativ beeinflusst. Beispielsweise kann die Zielsetzung nach einer leichten und steifen Brückenkonstruktion zu einem negativen dynamischen Verhalten führen. Das klassische Entwurfskriterium des Leichtbaus ist in diesem Fall auf die Anpassung der Eigenfrequenzen zu erweitern, um die maßgebenden Eigenfrequenzen aus dem Spektrum der Erregerfrequenzen einer im Gleichschritt marschierenden Fußgängergruppe zu bringen. Ein aktuelles Beispiel, in dem nicht alle maßgebenden Entwurfskriterien ausreichend berücksichtigt wurden, ist die 'Millennium Bridge' in



Bild 3.10, eine Fußgängerbrücke über die Themse in London, die im Jahr 2000 bereits zwei Tage nach ihrer Eröffnung aufgrund heftiger Schwingungen wieder geschlossen werden musste.

Bild 3.10: London Millenium Bridge (Foto: Arpingstone)

Die Lösung des Optimierungsproblems ist nicht eindeutig. Es ist nicht möglich, alle Kriterien gleichzeitig in vollem Maße zu erfüllen. Die bestmöglichen Lösungen stellen somit Kompro-

misslösungen dar und es ist letztendlich die Aufgabe des Konstrukteurs, diese Teilaspekte entsprechend ihrer Bedeutung zu bewerten. Die unterschiedliche Wichtung führt auf verschiedene Entwurfsvorschläge. Die verschiedenen Vorschläge sind zu beurteilen und das endgültige Ergebnis auszuwählen. Die Strategien der Mehrkriterienoptimierung unterstützen damit durch verschiedene Entwurfsvorschläge oder entsprechend der Wichtung unterschiedlich verbesserte Ergebnisse den entwerfenden Konstrukteur beim Tragwerksentwurf. Die Vielzahl der Strategien zur Berücksichtigung mehrerer Entwurfskriterien in der Optimierung wird in dieser Arbeit durch die Anwendung auf die materielle Topologieoptimierung eingeschränkt. So sind die Verfahren, die auf der Basis von Ausschlusskriterien basieren, durch eine einfache Manipulation der Auslese gut für die zuvor diskutierten stochastischen Verfahren (Kapitel 5.2) geeignet. Bei den verwendeten Optimierungsstrategien mit gradientenbasierten Verfahren führt das Ausschließen bestimmter Entwürfe innerhalb des Optimierungsprozesses aber zwangsläufig zu starken Oszillationen und einem unstetigen Optimierungsverlauf.

Im folgenden Abschnitt dieses Kapitels werden die Grundbegriffe der Mehrkriterienoptimierung erläutert und einige ausgewählte Verfahren der Mehrkriterienoptimierung vorgestellt. Die besondere Berücksichtigung der Eigenschaften der materiellen Topologieoptimierung führt schließlich zur Auswahl besonders geeigneter Strategien, die mit numerischen Untersuchungen anhand eines Beispiels aus der Strukturoptimierung analysiert werden.

3.7.2 Grundbegriffe

Der Lösungsraum \mathcal{A} der Zielfunktionen $f = \{f_1, f_2, \dots\}$ wird durch die Menge aller möglichen Zielfunktionswerte bestimmt. Die Zielfunktionswerte werden durch alle infrage kommenden Kombinationen der Entwurfsvariablen s_i innerhalb der vorgegebenen Schranken bestimmt. Aufgrund der besseren Veranschaulichung beschränken sich die nachfolgenden Diskussionen auf lediglich zwei Zielfunktionen. Desweiteren wird davon ausgegangen, dass die Zielfunktionswerte zu minimieren sind. Bild 3.11 zeigt zwei mögliche Lösungsräume mit zwei verschiedenen Situationen.

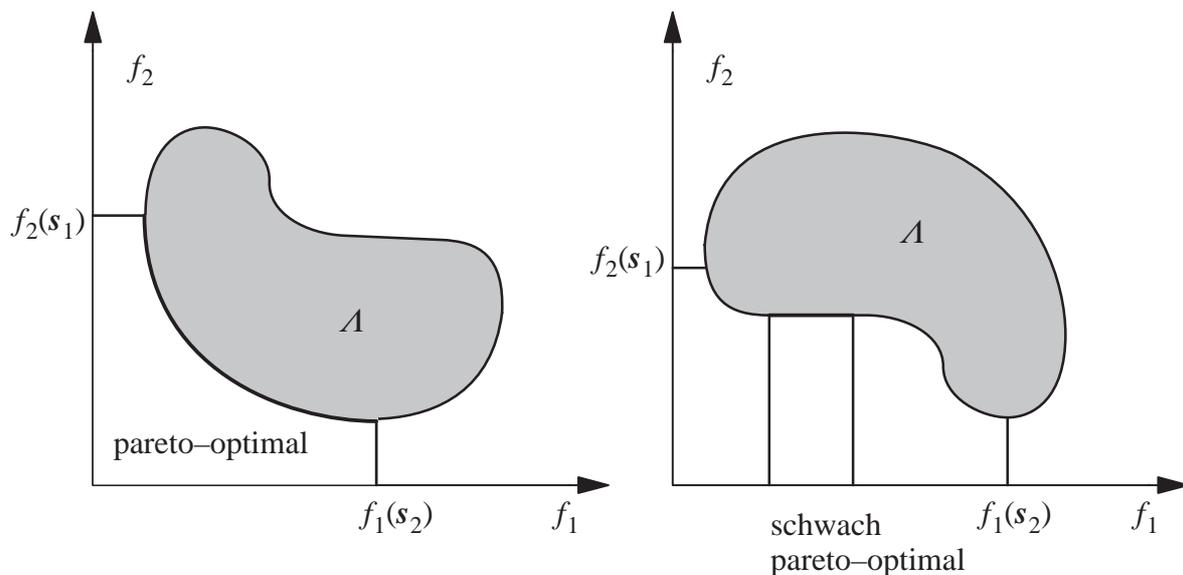


Bild 3.11: Anwendungsbeispiele für zellulare Materialien

Der konvexe Bereich auf dem Rand der Lösungsmenge im linken Bild bezeichnet das Edgeworth–Pareto–Optimum (ES), im Folgenden einfach Pareto–Optimum genannt. Die Zielfunktion f_1 nimmt für die Entwurfsvariablen s_1 ein Minimum ein und stellt damit eine optimale Lösung für dieses Kriterium dar. Ebenso definiert der Satz Entwurfsvariablen s_2 für die Zielfunktion f_2 das Optimum. Das Einsetzen von s_1 in f_2 und s_2 in f_1 liefert die im linken Bild dargestellten Punkte. Das Pareto–Optimum wird von diesen beiden Punkten begrenzt. Das ES ist folglich dadurch definiert, dass kein neuer Satz Entwurfsvariablen gefunden wird, für den mindestens ein Zielfunktionswert verbessert werden kann, ohne mindestens einen anderen Zielfunktionswert zu verschlechtern. Folglich liegen die pareto–optimalen Punkte immer auf dem Rand der Lösungsmenge.

Schwach–pareto–optimale Lösungen werden durch die dicke Linie im rechten Diagramm in Bild 3.11 veranschaulicht. Eine Variation der Entwurfsvariablen in diesem Bereich führt lediglich zur Änderung eines Entwurfskriteriums. Das andere Entwurfskriterium bleibt unberührt.

Ein weiterer Fall, der bei nichtkonvexen Lösungsräumen auftreten kann, ist ebenfalls in Bild 3.11 rechts dargestellt. In diesem nichtkonvexen Teil der Umrandung existieren keine pareto–optimalen Lösungen, d.h. obwohl eine Lösung auf dem Rand der Lösungsmenge gefunden wurde, existieren für die eine Zielfunktion noch bessere Lösungen, bei dem gleichen Zielfunktionswert der anderen Funktion.

Für widersprüchliche konkurrierende Entwurfskriterien existieren unendlich viele Lösungsvektoren. Eine eindeutige Lösung ist das Ziel verschiedener Strategien zur Mehrkriterienoptimierung.

3.7.3 Klassifizierung der Verfahren

Von den verschiedenen Möglichkeiten der Mehrkriterienoptimierung werden in diesem Abschnitt lediglich die in dieser Arbeit untersuchte Wichtungsmethode und die Germeier–Methode näher erläutert und die Distanzmethode zur Vollständigkeit erwähnt.

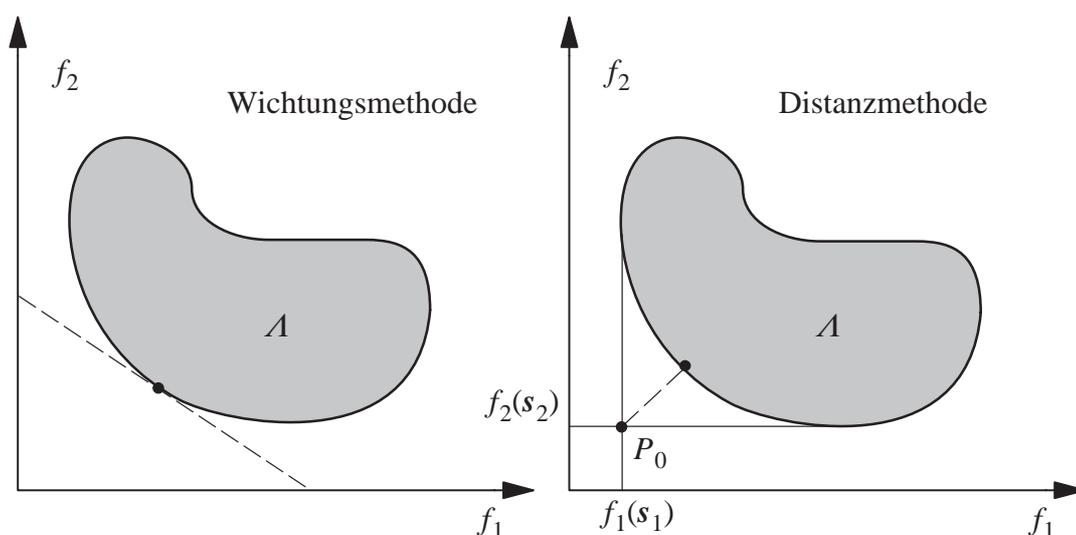


Bild 3.12: Geometrische Interpretation der Wichtungs– und der Distanzmethode

Der wohl einfachste Zugang zur Berücksichtigung mehrerer Optimierungsziele in einer Optimierungsaufgabe ist die Einführung einer *skalarwertigen Ersatzfunktion*. Die Wichtungsmethode entspricht dem intuitiven Vorgehen beim Abwägen verschiedener Einflussfaktoren bei der Lösung eines Problems. Die einzelnen Kriterien f_i werden entsprechend ihrer Bedeutung mit einem Wichtungsfaktor w_i multipliziert und einfach aufaddiert.

$$\hat{f} = \sum_{i=1}^{n_f} w_i f_i, \quad \sum_i w_i = 1 \quad (3.37)$$

Der unterschiedlichen Größenordnung der einzelnen Zielfunktionen wird durch eine entsprechende Normierung Rechnung getragen. Die gestrichelte Gerade links im Bild 3.12 ergibt sich für $n_f = 2$, durch eine einfache Umformung der ausgeschriebenen Gleichung (3.37) nach $f_2 = m \cdot (-w_1 f_1) + c$, mit der Steigung m und der Konstanten c . Die Wichtungsmethode kann nun durch das Heranführen einer Tangente mit der Steigung $-w_1/w_2$ an den Rand des Lösungsraums interpretiert werden. Diese Annäherung erfolgt aus dem zulässigen Bereich innerhalb des dargestellten Lösungsraums. Marler und Arora (2004) verwenden die folgende Normierung der Zielfunktionswerte auf den Wertebereich von Null bis Eins

$$\bar{f}_i = \frac{f_i - f_i(s_i)}{f_i^N - f_i(s_i)} \quad \text{mit } f_i^N = \max[f_i(s_i)] \quad (3.38)$$

und bezeichnen diese Normierung im Vergleich mit anderen Verfahren als zuverlässig.

In dieser Arbeit wurde alternativ auch eine adaptive Wichtung innerhalb des Optimierungsprozesses durchgeführt. Beispielsweise kann bei der klassischen Steifigkeitsoptimierung die Maximierung der kritischen Last erst dann in den Optimierungsprozess durch die Steigerung des zugehörigen Wichtungsfaktors von Null beginnend eingebracht werden, wenn schon einzelne dünne Stäbe in der Topologieoptimierung sichtbar geworden sind und ihr Einfluss deutlich wird.

Die Multiplikation der gewichteten Zielkriterien anstelle der bisher beschriebenen Addition führt zur Methode der gewichteten Produkte.

$$\hat{f} = \prod_{i=1}^{n_f} f_i^{w_i}, \quad w_i \geq 0 \quad (3.39)$$

Die Wichtung erfolgt über den weniger anschaulichen Exponenten w_i und ist wahrscheinlich der Grund für die geringe Akzeptanz dieser Methode.

Die Distanzmethode, die ebenfalls in Bild 3.12 dargestellt ist, versucht die Entfernung zwischen einem Punkt P_0 und dem Rand des Lösungsraums zu minimieren. Eine gute Wahl für diesen Punkt ist der sogenannte Utopia-Punkt, dessen Koordinaten durch die Minimalwerte der jeweiligen Zielfunktionen beschrieben werden $[f_1(s_1); f_2(s_2)]$.

$$\tilde{f} = \left[\sum_{i=1}^{n_f} |f_i - \bar{f}_i|^{p_f} \right]^{\frac{1}{p_f}}; \quad 1 \leq p_f \leq \infty \quad (3.40)$$

Die Wahl des Parameters p_f ist weniger intuitiv und damit schwieriger. Der Startpunkt P_0 liegt außerhalb des Lösungsraums.

Zur Veranschaulichung der Methoden mit einer exponentiellen Wichtung der Entwurfskriterien wird eine andere Darstellung im $f - s$ -Raum gewählt (Bild 3.13). Die Germeier-Methode, als ein Vertreter der Methoden mit exponentieller Wichtung der Entwurfskriterien, verwendet die Kreiselmeier-Steinhäuser-Funktion für die Berechnung der skalaren Ersatzfunktion.

$$\tilde{f} = \frac{1}{p_f} \ln \left[\sum_{i=1}^{n_f} e^{p_f w_i f_i} \right]^{\frac{1}{p_f}} ; p_f \geq 0 \quad (3.41)$$

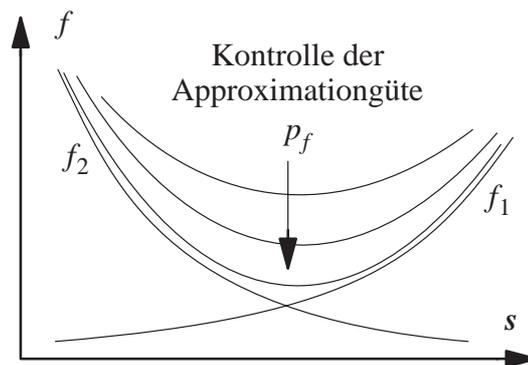


Bild 3.13: Geometrische Interpretation der Germeier-Methode

Wird der Parameter p zu klein gewählt, folgt zwangsläufig eine zu ungenaue Approximation der ursprünglichen Situation. Zu große Werte haben dagegen eine wenig glatte Ersatzfunktion zur Folge und führen zu einem schlechteren Konvergenzverhalten im Optimierungsprozess.

Für die Lösung der Optimierungsaufgabe mit gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen müssen für alle genannten Verfahren die Gradienten aller Entwurfskriterien in jedem Optimierungsschritt berechnet werden. Der numerische Aufwand kann durch Verfahren reduziert werden, die anstelle einer mehr oder weniger starken Bestrafung der Entwurfskriterien inaktive Kriterien in den jeweiligen Optimierungsschritten ausschalten, was aber wiederum zu stärkeren Oszillationen führen kann. Beispielsweise berichtet Kemmler (2004) vom Einfluss der kritischen Last auf das Optimierungsergebnis, obwohl dieses als Nebenbedingung definierte Entwurfskriterium während des Optimierungsprozesses in keinem Optimierungsschritt aktiv wurde. Der Einfluss erfolgte aufgrund der analytisch berechneten Sensitivitäten.

3.7.4 Weitere Verfahren

Formal ist die Entwurfsaufgabe mit mehreren Zielkriterien einer alternativen Formulierung mit nur einer Zielfunktion und der Berücksichtigung der weiteren Kriterien als Gleichheits- und Ungleichheitsnebenbedingungen äquivalent (Lagrange-Funktion siehe Gleichung (3.3)). Allerdings führt die Verwendung unterschiedlicher Strategien aufgrund der Problematik lokaler Minima und die Existenz gleichwertiger Lösungen oft zu sehr unterschiedlichen Entwürfen.

Die Aufteilung des Lösungsraums in zulässige und unzulässige Bereiche (Bild 3.14) wird in der ϵ_L -beschränkten Methode durchgeführt.

Die Optimierungsaufgabe lautet nun

$$\min_s f_r(s) , \text{ mit } f_{i \neq r}(s) \leq \epsilon_{L,i} \wedge 1 \leq i, r \leq n_f \quad (3.42)$$

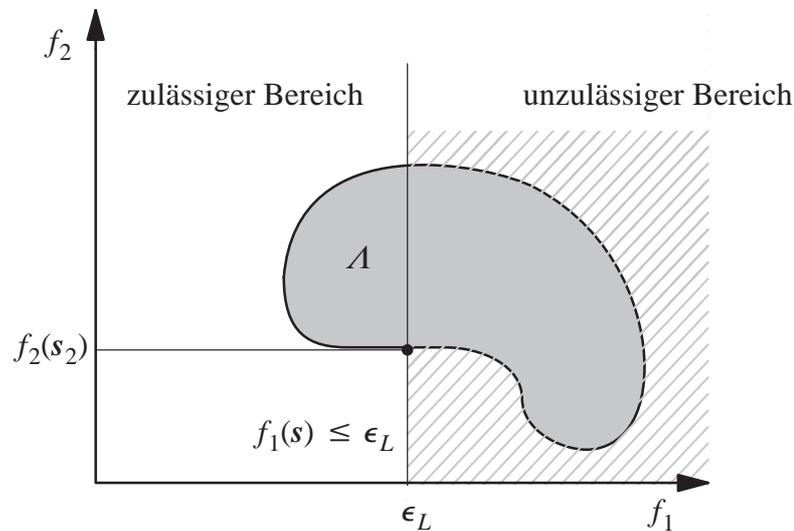


Bild 3.14: Beschränkung des Lösungsraums

Die Schranke ϵ_L wird innerhalb des Lösungsraumes so gewählt, dass $f_{i \neq r}$ ausschließlich sinnvolle zulässige Werte annimmt. Die Bestimmung der Pareto-Front erfolgt nun durch eine Variation der Schranke innerhalb eines bestimmten Bereiches. Mit dieser Methode können Lösungen sowohl in konvexen als auch in nicht-konvexen und dominierten Abschnitten der Pareto-Front bestimmt werden. Allerdings sind die gefundenen Punkte dann nicht notwendigerweise pareto-optimale Punkte.

Gegenüber der gewichteten gleichzeitigen Berücksichtigung der verschiedenen Zielkriterien in den bisher beschriebenen Methoden erfolgt die sequentielle Abarbeitung unter Berücksichtigung der Bedeutung der Zielfunktionen zum Beispiel in der lexikographischen und der ihr verwandten hierarchischen Methode. In beiden Methoden wird in einem initialen Schritt die maßgebende Zielfunktion minimiert. In den weiteren Schritten wird jeweils die Zielfunktion mit der nächst niedrigeren Priorität minimiert und die vorher bereits minimierten Zielkriterien als Ungleichheitsnebenbedingung im weiteren Optimierungsprozess berücksichtigt. Die Optimierungsaufgabe kann man wie folgt angeben:

$$\min_s f_i(s) \text{ mit } 1 \leq i \leq n_f \quad (3.43)$$

mit den ab dem zweiten Optimierungsprozess zusätzlichen Nebenbedingungen

$$f_{j-1}(s) \leq f_{j-1}(s_{j-1}) \text{ mit } 2 \leq j \leq i . \quad (3.44)$$

Nach der Minimierung der letzten Zielfunktion f_{n_f} unter Berücksichtigung der $(n_f - 1)$ Nebenbedingungen aller zuvor behandelten Zielkriterien, definiert der Satz mit den Entwurfsvariablen \hat{s} den zur optimalen Lösung gehörenden Satz an Entwurfsvariablen.

Die Forderung, eine einmal minimierte Zielfunktion nicht wieder vergrößern zu dürfen, führt zu einer starken Einschränkung des Lösungsraums. Ein Lösungsansatz besteht darin, dass sich einmal bestimmte Zielfunktionswerte innerhalb einer gewissen Toleranz wieder verschlechtern dürfen. Dieses Verfahren wird auch *hierarchische Methode* genannt.

$$f_{j-1}(s) \leq \left(1 \pm \frac{\epsilon_{Lj-1}}{100}\right) f_{j-1}(s_{j-1}) \text{ mit } 2 \leq j \leq i . \quad (3.45)$$

Der Parameter ϵ_L steuert die prozentual mögliche Verschlechterung der bisher bestimmten Minima.

3.7.5 Pareto-Optimierung

Die Behandlung von Optimierungsaufgaben mit mehreren Optimierungszielen durch die oben beschriebene Wichtungsmethode weist gewisse Nachteile auf. Zum einen werden schwach pareto-optimale Punkte und Punkte in konvexen und dominierten Regionen nicht erkannt und die gefundenen Lösungspunkte sind in der Regel sehr ungleichmäßig auf der Front verteilt (Bild 3.15).

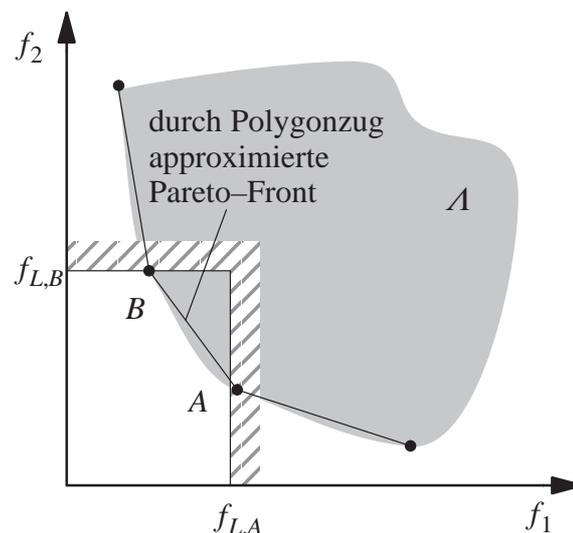


Bild 3.15: Approximierte Paretofront mit gleichmäßig verteilten Punkten

Zum anderen werden viele Optimierungsläufe durchgeführt, die keine wesentlich neuen Informationen liefern und zu Punktanhäufungen führen. Desweiteren fehlen Informationen in den Bereichen mit wenigen Lösungspunkten. Mit der *Methode der adaptiv gewichteten Summe* der Zielfunktionen lassen sich gleichmäßig verteilte Punkte auf der Lösungsfrent generieren. In diesem Verfahren werden neben der veränderlichen Wichtung der i Zielfunktionen auch neue Nebenbedingungen in den Optimierungsprozess eingebracht, um den Lösungsraum zu beschränken und neue Punkte innerhalb eines Segments zu generieren.

Um neue möglichst gleichverteilte Punkte im Bereich eines Segments zu bestimmen, wird ein Bereich innerhalb des Segments ermittelt und mit zusätzlichen Nebenbedingungen in die Optimierungsaufgabe eingebracht mit den für den betrachteten Abschnitt zu definierenden Restriktionen

$$f_A(s) \leq f_A(s_A) - \delta \text{ und } f_B(s) \leq f_B(s_B) - \delta \quad (3.46)$$

angegeben. Der zulässige Lösungsraum wird durch den um den Wert δ verkleinerten Bereich zwischen den bereits ermittelten Lösungspunkten angegeben. Diese Prozedur wird mit den neuen verfeinerten Segmenten so lange wiederholt, bis eine ausreichend fein verteilte Punktmenge auf der Pareto-Front gefunden wurde. Durch entsprechende Einschränkung (Bild 3.15) lassen sich so Punkte in konkaven Regionen und schwach pareto-optimale Punkte bestimmen. Eine Erweiterung der Methode für mehr als zwei Zielfunktionen ist zum Beispiel in Kim und Weck (2005) beschrieben.

Alternativ berechnet die *Normalized Normal Constraint Methode* die Punkte P_i auf der verfeinerten Pareto-Front zwischen zwei bereits gefundenen Pareto-Punkten P_1 und P_2 mit folgender Formel:

$$P_i = w_i P_1 + (1 - w_i) P_2, \quad 1 < i < n \quad (3.47)$$

Die Wichtung $w_{i+1} = w_i + \Delta w$ ergibt sich wieder aus der gewünschten Anzahl der Unterteilungen n . Für $w_i = 0$ ergibt sich der Punkt \tilde{P}_2 und für $w_i = 1$ der Punkt \tilde{P}_1 . Die Schrittweite berechnet sich zu:

$$\Delta w = 1/(n - 1) \quad (3.48)$$

Die Berechnung der neuen Punkte erfolgt in einem auf 0–1 normierten Raum in Bild 3.16.

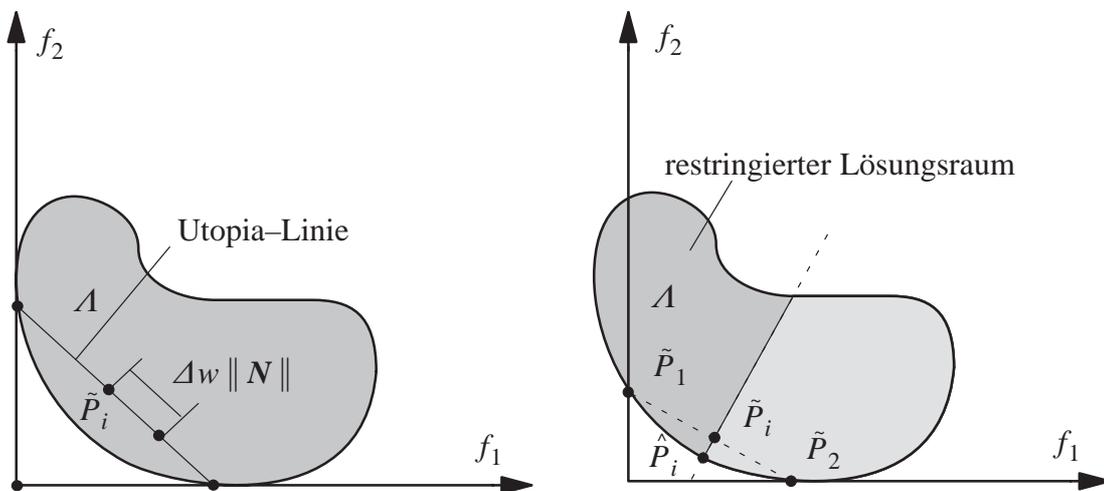


Bild 3.16: Geometrische Interpretation der Normalized Normal Constraint Methode

Die Berechnung der Koordinaten der Punkte $\tilde{P}_1(f_1(s_1), f_2(s_1))$ und $\tilde{P}_2(f_1(s_2), f_2(s_2))$ erfolgt durch die Normierung der Zielfunktion

$$\tilde{f}_i = \frac{f_i - f_i^U}{f_i^N - f_i^U} \quad (3.49)$$

und hiermit die in Bild 3.16 dargestellte Richtung N

$$N = f(s_2) - f(s_1) \quad (3.50)$$

Der Punkt \tilde{P}_i dient nun als Ausgangspunkt für die anschließende Optimierung mit der ursprünglichen Optimierungsaufgabe zur Bestimmung des neuen Punktes \hat{P}_i auf der Pareto-Front. Die endgültige Bestimmung des pareto-optimalen Punktes erfolgt durch die Rücktransformation der normierten Größen in den ursprünglichen Lösungsraum.

Eine Übersicht über verschiedene Verfahren der Mehrkriterienoptimierung und die Charakterisierung der hier beschriebenen Verfahren zur Generierung einer gleichmäßigen Verteilung der Punkte auf der Pareto-Front sind in Marler und Arora (2002) und Messac et al. (2003) ausführlich dargestellt. Außerdem werden Hinweise auf die weiterführende Literatur gegeben.

3.7.6 Beispiel einer Brückenkonstruktion

Tragwerke, die mit Hilfe von Optimierungsverfahren generiert werden, sind sehr häufig hochspezialisierte Tragwerke. Sie stellen ein Optimum bezüglich der gewählten Belastung und dem zugrunde liegenden mechanischem Modell dar und sind für abweichende Belastungen nicht optimal (Thompson (1972)). Ziel ist es, möglichst viele Einflußfaktoren zu erfassen, die letztendlich für die Gestalt- bzw. Formgebung der Tragkonstruktion maßgebend sind, z.B. in Form einer Mehrkriterienoptimierung (Stadler und Dauer (1993), Eschenauer et al. (1990), Yang (2002)) oder der Berücksichtigung von verschiedenen Nebenbedingungen.

Der Einfluss mehrerer Kriterien und deren Wichtung auf das Ergebnis eines Entwurfs mit der Topologieoptimierung wird im Folgenden veranschaulicht. Gegenstand dieses Beispiels ist der Entwurf einer Brückenkonstruktion. Diese sehr beliebte Entwurfsaufgabe wird in den meisten Fällen mit dem Optimierungsziel maximaler Steifigkeit mit linearer Kinematik und linear elastischem Materialverhalten untersucht. Der hier untersuchte spezielle Entwurfsraum mit einem fest vorgegebenen Fahrbahnträger in Bild 3.17 ist der Arbeit von Maute (1998) entnommen. Das Eigengewicht der Fahrbahn ist in der Gleichlast p enthalten. Das Eigengewicht der zu verteilenden Masse im Entwurfsraum wird im Optimierungsprozess nicht berücksichtigt.

Die Optimierungsaufgabe wurde mit einem OC-Verfahren und den in Bild 3.17 dargestellten Randbedingungen und den angegebenen Parametern gelöst. Die graphische Ausblendung der Finiten Elemente mit einer Dichte nahe der unteren Restriktion resultiert in der abgebildeten Bogenbrücke.

Die Berücksichtigung unterschiedlicher Lastfälle in der Optimierungsaufgabe wird in der Regel im Sinne der Mehrkriterienoptimierung mit der skalaren Ersatzfunktion (Gleichung (3.37)) umgesetzt (z.B. in Kato (2004)). Die Wichtung der einzelnen Lastfälle erfolgt mit den Beträgen der Lasten, die zu entsprechend gewichteten Zielfunktionen und Sensitivitäten führen.

Brücken erfahren sehr unterschiedliche Belastungen (Eigengewicht, Verkehrslasten) und unter Berücksichtigung der jeweiligen Situation werden unterschiedliche Typen (Bogen-, Hängebrücken) bevorzugt. Bild 3.18 zeigt einen zum Beispiel in Bild 3.17 veränderten Entwurfsraum mit horizontal verschieblichen Auflagerpunkten an beiden Seiten des Entwurfsraums und unver-

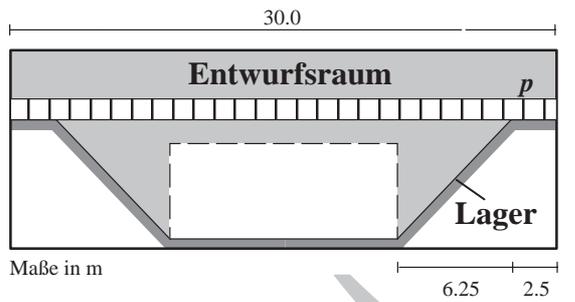
schieblichen Auflagerpunkten oben. Die horizontale Reihe Finiter Elemente direkt unter der Gleichlast idealisieren die Fahrbahn. Das Eigengewicht der Fahrbahn wird im Optimierungsprozess nicht berücksichtigt. Die relative Dichte dieser Finiten Elemente ist eins und bleibt im Optimierungsprozess unverändert.

Optimierungsaufgabe:

Optimierungsziel: max. Steifigkeit
 Nebenbedingung: konstante Masse
 Entwurfsvariable: Dichte der Finiten Elemente

Poröses 'SIMP'-Material

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0.3$
 $\frac{\nu}{m} = 25\% \text{ (Masse)}$
 $\beta = 3.0$



lineares Material und lineare Kinematik

Belastung:

$p = 10.0 \text{ N/mm}$

Optimierte Topologie:

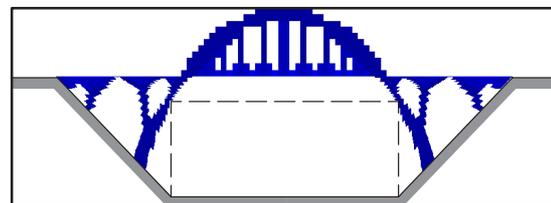


Bild 3.17: Bogenbrücke als Ergebnis klassischer Topologieoptimierung

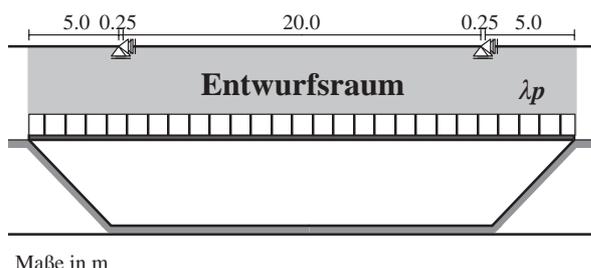
Für die Realisierung des Tragwerks sind unter den oberen Auflagerpunkten die angedeuteten Stützen anzuordnen, die in einem gesonderten Optimierungsprozess entworfen werden können und im Ergebnis in Bild 3.18 unten rechts nur zur Veranschaulichung eingezeichnet wurden.

Optimierungsaufgabe:

Optimierungsziel: max. Steifigkeit
 Nebenbedingung: konstante Masse
 Entwurfsvariablen: Dichte der Finiten Elemente

Poröses 'SIMP'-Material

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0.3$
 $\frac{\nu}{m} = 15\% \text{ (Masse)}$
 $\beta = 3.0$



Maße in m

lineares Material und nichtlineare Kinematik

Belastung:

$\lambda p = 24.0 \text{ kN/m}$

Optimierte Topologie:

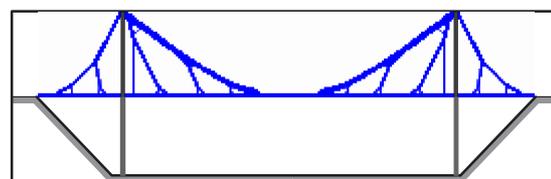


Bild 3.18: Hängebrücke bei Berücksichtigung nichtlinearer Kinematik

Die Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik im Entwurfsprozess, eine höhere Laststufe und der veränderte Entwurfsraum führen zur ausschließlich zugbeanspruchten Konstruktion in

Form einer Schrägseilbrücke in Bild 3.18. Die Kombination der beiden Entwurfsaufgaben ist Thema einer im Rahmen dieses Vorhabens betreuten Diplomarbeit (Ebner (2006)). Das Ziel war der Entwurf einer Brücke mit verschiedenen Lastfällen unter Berücksichtigung nichtlinearer Kinematik.

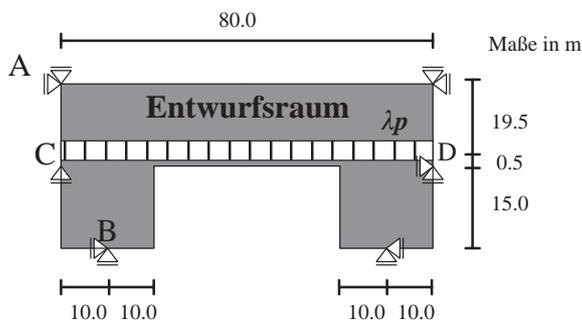
Für ein möglichst leicht zu interpretierendes Ergebnis wurde der Entwurfsraum so gewählt, dass für eine sehr kleine Laststufe und entsprechend linearer Kinematik die Bogenbrücke die bestmögliche Lösung repräsentiert. Die Erhöhung der Last und die Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik im Optimierungsprozess führen bei sonst identischer Entwurfsaufgabe zu einer Hängekonstruktion (siehe Bild 3.19).

Optimierungsaufgabe:

- Optimierungsziel: max. Steifigkeit
- Nebenbedingung: konstante Masse
- Entwurfsvariablen: Dichte der Finiten Elemente

Poröses 'SIMP'-Material

- $E = 610000 \text{ N/mm}^2$
- $\nu = 0.3$
- $\frac{m}{m} = 15\% \text{ (Masse)}$
- $\beta = 2.5$



Belastung:

- $p = 200.0 \text{ kN/m}$
- $\lambda_1 \Rightarrow \text{niedriges Lastniveau}$
- $\lambda_2 \Rightarrow \text{hohes Lastniveau}$
- $\hat{f} = w_1 f_1 + w_2 f_2$
- $f_i = W(\lambda_i)$

Optimierte Topologie: (nichtlineare Kinematik)

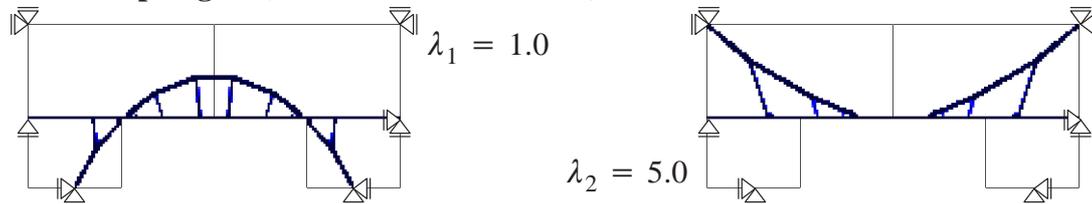


Bild 3.19: Bogen- und Hängebrücke mit identischem Entwurfsraum

Die Belastung erfolgt durch sechzehn Einzellasten, die gleichmäßig verteilt von links nach rechts auf der gedachten Fahrbahn angreifen. Neben dem horizontal verschieblichen Auflager links im Punkt C wurden zwei unverschiebliche Lagerpunkte oben links im Punkt A und an der unteren vertikalen Begrenzung des Entwurfsraums im Punkt B definiert. Aufgrund des größeren Abstands des oberen Auflagers im Punkt A vom Schwerpunkt der Linie C–D durch die Lastangriffspunkte, gegenüber dem unteren Auflager B, wird bei kleinen Lasten, also im linearen Fall, die druckbeanspruchte Bogenstruktur generiert. Die idealisierte Fahrbahn ist über Zugbänder an den oberen Teil des Bogens angeschlossen. Die Erhöhung der vorgeschriebenen Belastung und die Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik im Optimierungsprozess führen auf die ausschließlich zugbeanspruchte Hängebrücke (rechts unten im Bild 3.19), obwohl die Belastung der Fahrbahn über eine deutlich größere Entfernung in die oberen Auflager geführt wird. Allerdings wird für die oberen Auflager in der Realität eine zusätzliche Konstruktion benötigt, wenn die örtlichen Gegebenheiten keine direkte Lagerung ermöglichen. Die Masse dieser zusätzlichen

Konstruktionen muss dann bei einer vergleichenden Bewertung der beide optimierten Tragstrukturen mit berücksichtigt werden.

Die Zusammenführung der beiden Entwurfsaufgaben zu einer Mehrkriterienaufgabe erfolgt durch zwei Strukturanalysen mit unterschiedlich hohen Laststufen in jedem Optimierungsschritt, der anschließenden Skalierung und der Wichtung der Entwurfskriterien, und durch die Superposition zur skalaren Ersatzfunktion nach Gleichung (3.37). Die Skalierung der Werte einer Strukturanalyse erfolgt in jedem Optimierungsschritt auf den Wertebereich zwischen Null und Eins.

Die Gewichte für die beiden Lastfälle mit unterschiedlichen Lasthöhen wurden jeweils zwischen Null und Eins in Zehntelschritten erhöht bzw. abgemindert, so dass die Summe der Gewichte zusammen wieder Eins ergab. Die optimierten Strukturen enthalten topologisch sowohl Elemente der Hängebrücke, als auch der Bogenbrücke. Die verschiebungskontrollierten Strukturanalysen führen zu den in Bild 3.20 dargestellten Last–Verformungs–Charakteristiken von drei ausgewählten optimierten Tragstrukturen. Zur Verdeutlichung des Einflusses der nichtlinearen Kinematik wurde in der Strukturanalyse nach erfolgreicher Optimierung eine deutlich höhere Belastung im Vergleich zur verwendeten maximalen Laststufe in der Optimierung aufgebracht.

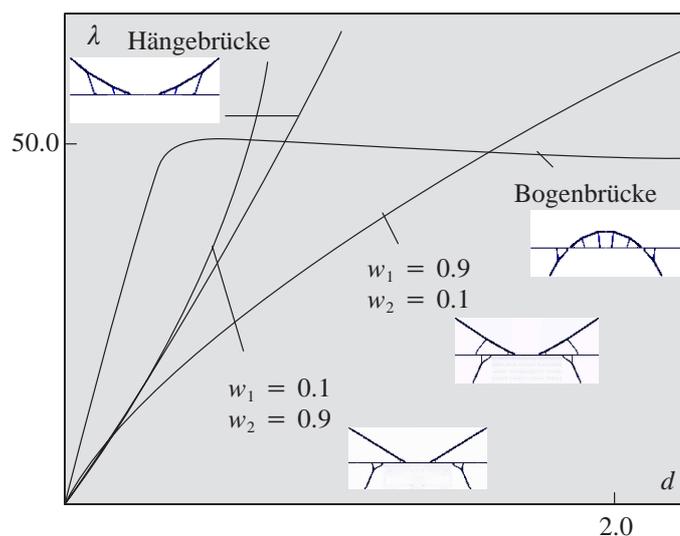


Bild 3.20: Last–Verformungscharakteristik der optimierten Tragstrukturen

Die Bewertung der optimierten Strukturen erfolgt sinnvoller Weise anhand einer charakteristischen Verschiebung $d(\lambda)$, hier die des kontrollierten Freiheitsgrades, in Feldmitte. Dieser Wert ist deutlich anschaulicher, als das eigentliche Optimierungsziel: der skalare Wert der Verzerungsenergie. Aus diesem Grund wurden für die Darstellung der Pareto–Front in Bild 3.21 die Verschiebungen als äquivalentes Entwurfskriterium für zwei konkrete Laststufen gewählt: die Verschiebung für $\lambda = 52$ und die Verschiebung für $\lambda = 5$.

Es wird deutlich, dass die Hängebrücke für kleine Lasten eine größere Verschiebung $d(\lambda)$ in Feldmitte aufweist als die Bogenbrücke. Für höhere Lasten ist die zugbeanspruchte Hängebrücke im Vorteil. Da die Bogenbrücke für eine sehr geringe Last optimiert wurde, weist sie für dieses Lastniveau auch eine bessere Performance auf. Allerdings sind die Punkte auf der Pareto–

Front in Bild 3.21 nur bedingt als Pareto-optimal zu bezeichnen, da aufgrund der Verwendung eines gradientenbasierten Optimierungsverfahrens und der damit verbundenen Problematik lokaler Minima nicht garantiert werden kann, dass nicht doch noch bessere Lösungen zu erzielen sind.

Dennoch kann eine derartige Pareto-Front als Entscheidungshilfe innerhalb des Entwurfsprozesses dazu beitragen, dass die Auswirkungen infolge einer Wichtungsänderung zugunsten des einen oder des anderen Optimierungsziels schnell abgeschätzt werden können.

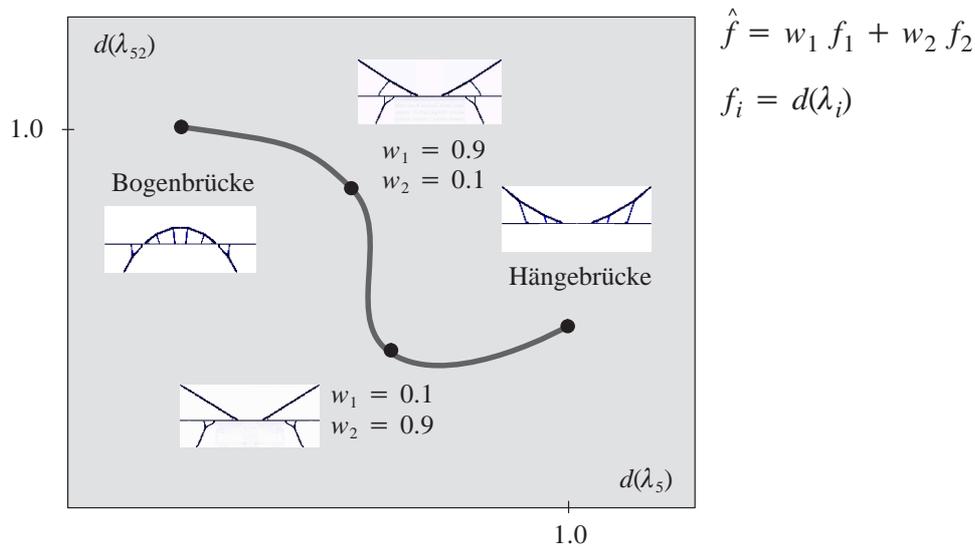
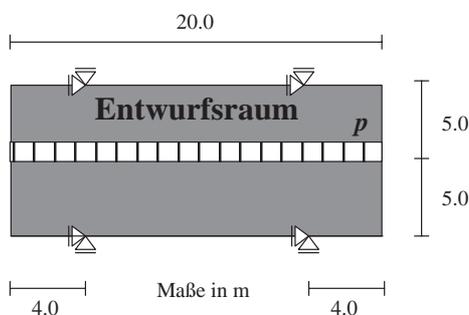


Bild 3.21: Pareto-Front der Verschiebungen von zwei unterschiedlichen Laststufen

In der folgenden Entwurfsaufgabe (Bild 3.22) wird die zu Beginn dieses Kapitels erwähnte Problematik leichter Brücken bezüglich einer dynamischen Erregung untersucht. Die Charakterisierung des Verhaltens einer Struktur bei einer dynamischen Belastung erfolgt durch die Eigenfrequenzen, die mit einer Eigenwertanalyse berechnet werden.

Optimierungsaufgabe:

- Optimierungsziel: max. Steifigkeit & max. 1. bis 4. Eigenfrequenz
- Nebenbedingung: konstante Masse
- Entwurfsvariablen: Dichte der Finiten Elemente



Belastung:

$p = 24.0 \text{ kN/mm}$

Poröses 'SIMP'-Material

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$

$\nu = 0.3$

$\bar{m} = 12\% \text{ (Masse)}$

$\beta = 4.0$

Bild 3.22: Entwurfsaufgabe für die simultane Verbesserung der Steifigkeit und des dynamischen Verhaltens einer Brücke

Die Kontrolle über das dynamische Verhalten der optimierten Struktur erfolgt durch die Erweiterung der klassischen Entwurfsaufgabe 'Maximierung der Steifigkeit' ($-f_1$) um die 'Maximierung bestimmter Eigenfrequenzen' (f_2). Alternativ ist auch die Minimierung der Eigenfrequenzen innerhalb vorgegebener Grenzen oder die Anpassung an vorgegebene Werte mit Hilfe eines 'least-square'-Problems möglich. Bild 3.22 zeigt den Entwurfsraum, die Knotenlager, die Gleichstreckenlast entlang des Längsträgers und die Materialdaten.

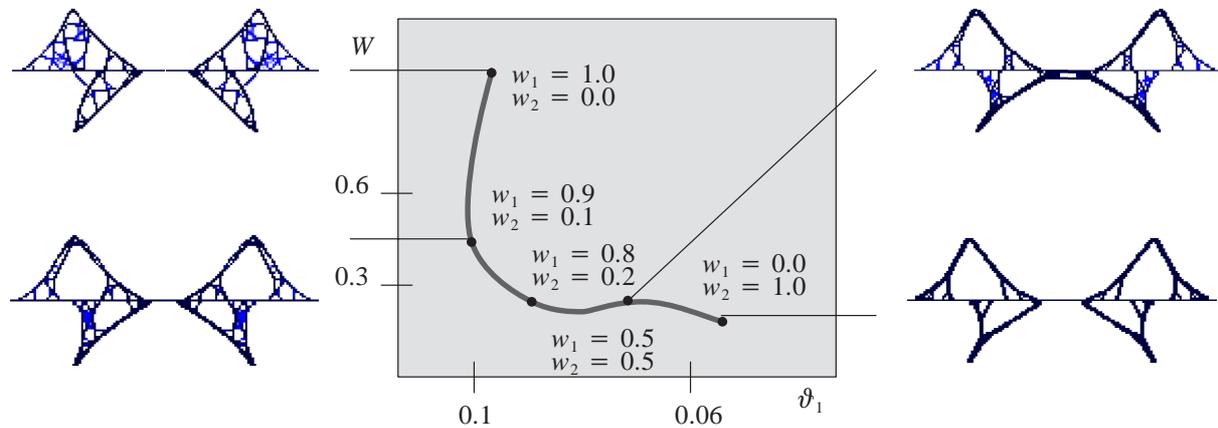


Bild 3.23: Optimierungsergebnisse und Pareto-Front

Die optimierten Dichteverteilungen für fünf unterschiedliche Wichtungen der beiden Entwurfskriterien sind in Bild 3.23 dargestellt. Die Summe der Wichtungsfaktoren hatte in jeder Berechnung den Wert eins. Die Optimierungsziel maximaler Steifigkeit mit der Wichtung $w_1 = 0.0$ und $w_2 = 1.0$ führt zu einer relativ klaren Tragstruktur in der sich leicht die druckbeanspruchten Elemente zum unteren Auflager und eine zugbeanspruchte Hängestruktur zu den oberen Auflagerpunkten identifizieren lassen. Die Gleichlast wird über ein sehr einfaches Tragwerk in die Auflager geleitet. Steht dagegen die Maximierung der Eigenfrequenzen im Vordergrund beobachtet man in den optimierten Dichteverteilungen eine zunehmende Aussteifung zwischen den Zug- und Druckstreben. Das zur direkten Lastabtragung verwendete Material nimmt ab, da die Masse im Entwurfsraum als konstant vorgegeben wurde. Die Verzerrungsenergie bzw. die Deformation wird gleichzeitig größer. Die zunehmende Aussteifung resultiert in ebenfalls größer werdenden Eigenfrequenzen.

Diese Zusammenhänge veranschaulicht das Diagramm im Bild 3.23. Auf der vertikalen Achse sind die verbesserten Zielfunktionswerte für die Verzerrungsenergie W aufgetragen. Auf der horizontalen Achse nimmt der Wert für die erste Eigenfrequenz ϑ_1 nach rechts hin ab. Der Nullpunkt bezeichnet somit analog zu den bisherigen Diagrammen die beste Lösung für die beiden Entwurfskriterien.

Um Schwingungen in hochporösen Bereichen zu vermeiden, wurden die Elemente mit einer relativen Dichte kleiner 0.05 bei der Assemblierung der Systemmassenmatrix ausgenommen. Auf eine Glättung im Entwurfsraum mit dem Ziel netzunabhängiger Optimierungsergebnisse wurde verzichtet. Alle Ergebnisse wurden mit der gleichen Diskretisierung berechnet. Aufgrund der Verwendung ebener Elemente mit biquadratischen Ansatzfunktionen werden auch die in der To-

pologieoptimierung oft diskutierten Checkerboard-Muster vermieden. Die bisherigen Ausführungen bezogen sich auf zwei skalare Zielfunktionen. Für die Maximierung der Eigenfrequenzen, eines der zwei Entwurfskriterien, wurden jedoch die vier kleinsten Eigenfrequenzen berücksichtigt. Der hierzu gehörige skalare (Ersatz-) Zielfunktionswert wurde mit Hilfe der Kreisselmeier-Steinhäuser-Funktion berechnet und beschreibt somit ein zweites der eigentlichen Entwurfsaufgabe untergeordnetes Mehrkriterienoptimierungsproblem. Dieses Problem wurde allerdings von der Untersuchung des Einflusses der Wichtung einzelner Optimierungsziele ausgenommen und deshalb als ein Entwurfskriterium in der eigentlichen gewichteten Zwei-Kriterien-Optimierungsaufgabe diskutiert.

Anmerkung: Die Maximierung der Eigenfrequenzen bei variabler Masse führt in der Regel auch ohne deren Kombination mit einem Steifigkeitskriterium zu leichten Konstruktionen, da diese aufgrund ihrer geringen Masse bei gleichzeitig hoher Steifigkeit folgerichtig hohe Eigenfrequenzen aufweisen. Die hier untersuchte Kombination der beiden Kriterien beinhaltet aber ebenfalls die Möglichkeit, die Frequenzen zu minimieren oder an vorgegebene Werte anzupassen und trotzdem die Steifigkeit zu erhöhen. Die unterschiedlich starke Wichtung der beiden Kriterien führt darüberhinaus zu sehr unterschiedlichen Entwurfsvorschlägen, was die Optimierungsergebnisse des gezeigten Beispiels verdeutlichen.

4 Modellierung zellularer Materialien

Neben den bereits vielfach eingesetzten Polymerschäumen ist in den letzten Jahren ein verstärktes Interesse an Metallschäumen zu verzeichnen. Aufgrund der besonderen Eigenschaften metallischer zellularer Materialien werden im Folgenden verschiedene Anwendungsbereiche und Modellierungsmöglichkeiten dieses innovativen Werkstoffs als Vertreter der zellularen Materialien genannt. Die hohe spezifische Steifigkeit, das große Energiedissipationsvermögen und die guten Schall- und Wärmedämmeigenschaften ein breites Anwendungsspektrum im Maschinenbau, der Bauindustrie und der chemischen Industrie (Banhart (1994, 1997, 1999), Studiengesellschaft für Stahlanwendung ev. (1997), Aluminiumzentrale (1999)). Metallschäume sind gegenüber Kunststoffschäumen insbesondere dort überlegen, wo aufgrund eines geringeren zur Verfügung stehenden Bauraumes bei gleicher Verformung ein höheres Energieabsorptionsvermögen erwünscht ist (de Boer & Ehlers (1986)). Eine Einsatzmöglichkeit im Automobilbau ist beispielsweise der Schutz der Fahrzeuginsassen durch Verbesserung des Crash-Verhaltens. Die absorbierte Energie wird größtenteils durch plastische Vorgänge dissipiert, d.h. es erfolgt eine kontrollierte Stoßenergieabsorption ohne Rückprall (Fuganti et al. (1999)). Als gelungenes Beispiel kann die Fahrzeug-Konzeptstudie AFB (Aluminium-Foam-Body) der Karmann GmbH angesehen werden (Seelinger (1999)). Durch die Verwendung von Sandwichbauteilen aus Aluminiumplatten mit innenliegendem Aluminiumschaumkern konnte gezeigt werden, dass bei Reduzierung des Gewichts eine deutlich höhere Steifigkeit gegenüber einfachen Stahlblechen bei akzeptablen Produktionskosten erzielt werden kann. Durch seine hohe Steifigkeit, der damit verbundenen kraftstoffsparenden Leichtbauweise und der guten Schallabsorptionseigenschaften trägt der Einsatz von Metallschaum zum Schutz der Umwelt bei. Um die Effizienz von Sandwichbauteilen noch zu erhöhen, optimieren Vonach et al. (2000) die Dichteverteilung des Aluminiumschaumkerns. In der Bauindustrie ist ein Einsatz im Fassadenbau, in schallabsorbierenden, nicht brennbaren Verkleidungen, zur Unterdrückung von Schwingungen und zur Verbesserung des Beulverhaltens dünnwandiger Bauteile bzw. der Effizienz von Crash-Elementen in der Fahrzeugindustrie, sowie zur Konstruktion von extrem leichten Tragwerken, z.B. mobilen Brücken, denkbar (Sedlacek & Paschen (1997)).

Die verschiedenen Herstellungsverfahren für metallische Schäume können in die vier Hauptverfahrensgruppen: Schmelzmetallurgische Verfahren, Abscheidetechniken, Sputter-Technologie und Pulvermetallurgische Verfahren unterschieden werden. Überblicke über die neuesten Entwicklungen bei den Herstellungsverfahren und insbesondere den industriellen Anwendungen metallischer Schäume werden in Banhart & Baumeister (1997), Degischer & Kottar (1999), Ehlers & Droste (1999), Banhart (2001), Wadley (2002) oder Degischer und Kriszt (2002) gegeben. Es wurden verschiedene Verfahren zur Herstellung von Metallschäumen entwickelt, die es ermöglichen, einen den jeweiligen Erfordernissen angepasste Schaumstruktur zu erzeugen. Vorrangige Ziele hierbei sind, eine möglichst gleichmäßige Porenstruktur und gute Oberfläche bzw. ein möglichst guter Verbund mit Deckblechen bei den Sandwichstrukturen zu erzeugen (Bernard et al. (2002), Körner et al. (2002), Seeliger (2002), Zhu und Windle (2002), Zhao und Sun (2001)). Leitmeier et al. (2002) erreichen mit einem Gasinjektionsverfahren eine

ausgesprochen gleichmäßige Zellstruktur und damit reproduzierbare physikalische Eigenschaften bei guter Einstellbarkeit der Porengröße und der Dichte. Für die Herstellung möglichst dünner Sandwichbleche sind Schäume mit kleinen Poren notwendig (Chino et al. (2002)). Mit den verschiedenen Herstellungsverfahren können sowohl die relative Dichte als auch die Größe der Poren in bestimmten Bereichen gesteuert werden (Davies et al. (2001)). Somit lassen sich Metallschäume mit unterschiedlichen Eigenschaften erzeugen, die sie für bestimmte Einsatzgebiete interessant machen. Selbst ausgerichtete zylindrische Porengeometrien lassen sich in gewissen Grenzen erzeugen (Hyun und Nakajima (2002), Shapovalov und Boyko (2003)).

Aufbauend auf den Grundlagen in Kapitel 2 werden nun verschiedene Möglichkeiten der Modellierung zellulärer Materialien diskutiert. Ausgehend von Beobachtungen des Verformungsverhaltens realer Schäume wurden verschiedene Materialmodelle für die numerische Simulation entwickelt. Prinzipiell kann man hierbei zwei verschiedene Ansätze unterscheiden. Der erste, man kann ihn auch als mikroskopischen Ansatz bezeichnen, geht von einer möglichst exakten Beschreibung einer statistisch korrekten Porengeometrie aus. Über das Verformungs- und Versagensverhalten der Einzelzelle wird das Verhalten des Gesamtsystems modelliert. Der zweite Ansatz bezieht sich auf ein idealisiertes Gesamtmodell und beschreibt das makroskopische Materialverhalten auf der Basis eines Ersatzkontinuums. Deshpande und Fleck (2000) entwickeln anhand von Druckversuchen für einen geschlossenporigen und einen offenporigen Aluminiumschaum ein einfaches, phänomenologisches isotropes Materialmodell zur Beschreibung des makroskopischen Materialverhaltens, sowie ein etwas komplexeres Materialmodell mit unterschiedlichem Verfestigungsverhalten bei hydrostatischer bzw. deviatorischer Beanspruchung. Miller (2000) modifiziert das Drucker-Prager Fließkriterium und passt mit Hilfe zusätzlicher Parameter die Fließfläche und das Verfestigungsverhalten an Zug- und Druckversuche an. Droste (2002) modelliert den elastoplastischen Werkstoff mit einem Einflächenfließmodell bei finiten Deformationen im Rahmen der Theorie Poröser Medien zur Simulation von Kompressions- und Extensionsversuchen an geschäumtem Aluminium. Die Abhängigkeit der Traglast und das plastische Verhalten von der plastischen Querdehnung bei Metallschäumen wird in Onck (2001) an einem phänomenologischen druckabhängigen Plastizitätsmodell diskutiert. Eine ausführliche Beschreibung verschiedener konstitutiver Modelle von Metallschäumen wird in (Hanssen et al. 2002a, 2002b) gegeben.

Die Berücksichtigung des speziellen Strukturverhaltens zellulärer Materialien, das bereits im vorhergehenden Kapitel angedeutet wurde, wird hier mit einem Überblick über verschiedene Modellierungsmöglichkeiten der Zellstruktur auf der Mikroebene vertieft. Der Schwerpunkt liegt hier auf dem Verformungsverhalten einzelner oder mehrerer Poren und den damit verbundenen Auswirkungen auf das makroskopische Strukturverhalten des zellulären Materials.

Im zweiten Teil werden makroskopisch orientierte kontinuumsmechanische Materialmodelle für die Berechnung realer Strukturbauteile diskutiert und die in dieser Arbeit verwendeten Materialgleichungen vorgestellt. Entsprechend den vorangehenden Ausführungen gliedern sich diese Formulierungen nach ihrem Einsatz zur Approximation des elastischen und inelastischen Materialverhaltens mit Berücksichtigung kleiner und großer Deformationen.

4.1 Mechanisches Verhalten realer Schäume

Die Eigenschaften zellulärer Materialien werden durch das Strukturverhalten des Grundmaterials, aber auch durch die Dichte, die Homogenität, den Dichtegradienten und die Porenstruktur bestimmt. Zur Bestimmung der mechanischen Eigenschaften zellulärer Materialien findet man in der Literatur neben Zug-, Biege- und Schubversuchen (v. Hagen & Bleck (1999), v. Hagen et al. (1999)), den klassischen ein- und mehraxialen Druckversuchen zur Bestimmung der Spannungs-Stauchungs-Kurve (v. Hagen & Bleck (1999), Chastel et al. (1999), Hartmann & Singer (1999), Kriszt et al. (1999)), auch das Verfahren der digitalen Bildanalyse (Huschka (1997)) und die Computertomographie (Hartmann et al. (1999), Cornelis et al. (1999), Degischer & Kottar (1999)), um Metallschäume zu klassifizieren und Aussagen über die Zusammenhänge zwischen dem strukturellen Aufbau und den mechanischen Eigenschaften zu ermöglichen. Die Beschreibung poröser Werkstoffe, wie beispielsweise Metallschaum, erfordert die Berücksichtigung der relevanten nichtlinearen Effekte. Dazu zählen das Plastizieren der Porenwände sowie deren Ausbeulen. Bei weiterer Laststeigerung (Druckbelastung) wird der Porenanteil derart verringert, daß zusätzlich Kontaktprobleme auftreten, die das Tragverhalten maßgeblich beeinflussen. Der typische Verlauf der Spannungs-Stauchungs-Kurve geht von einem anfänglichen Bereich mit näherungsweise linearem Verlauf in eine Region mit nur geringem Spannungsanstieg (Plateau) über, um dann bei fortgeschrittener Verdichtung steil anzusteigen (Banhart & Baumeister (1997), Hucko & Faria (1997)) (vgl. Bild 2.3).

Je ausgeprägter der Plateau-Bereich ausgebildet ist, desto höher ist das Energieabsorptionsvermögen (Hartmann & Singer (1997)). Die durch den Schaum absorbierte Energie pro Volumen wird durch die Fläche unter der Spannungs-Stauchungs-Kurve veranschaulicht. Die Festigkeit bei Metallschäumen wird vor allem durch die Dichte, die Porenstruktur und den Werkstoff (vgl. Bild 4.1) der Zellwände und -stege und den Wärmebehandlungszustand (Weber (1995), Rammerstorfer et al. (1999, 2000)) beeinflusst.

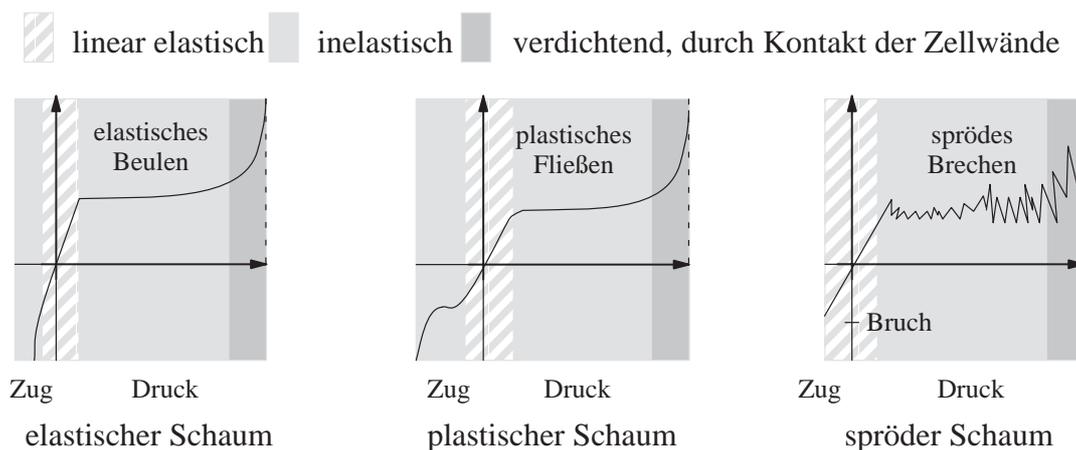


Bild 4.1: Idealisierte Spannungs-Dehnungsdiagramme verschiedener Schäume

Nach Gibson und Ashby (1999) wird das Deformationsverhalten im linear elastischen Bereich vom elastischen Biegen der Zellstege und Dehnen der Zellwände bestimmt. Nach Überschreiten einer bestimmten Grenze kollabieren die Poren sukzessive infolge elastischen Beulens, plastischer Verformung oder durch sprödes Brechen der Zellstruktur in Abhängigkeit vom Zellwand-

material. Der Kontakt zwischen den Zellwänden führt zum asymptotischen Anstieg jenseits eines bestimmten Verdichtungspunktes (vgl. Bild 4.1).

4.2 Untersuchung der Porengeometrie

Der Einfluss der Porenstruktur auf die Eigenschaften zellulärer Materialien und hier speziell der geometrische Aufbau wird in diesem Abschnitt näher untersucht. Die aus dem Verformungsverhalten der Poren gewonnenen Kenntnisse werden zum einen bei der Auswahl geeigneter makroskopischer Werkstoffmodellierungen und zum anderen für den Entwurf von zellulären Strukturen in der Topologieoptimierung verwendet und an den entsprechenden Stellen dieser Arbeit wieder aufgenommen.

Gibson und Ashby geben in dem schon klassischen Buch (Gibson und Ashby (1999)) über zelluläre Materialien eine Vielzahl an Beziehungen zwischen der Dichte und den physikalischen Eigenschaften verschiedener Schäume an, die als Grundlage zur Berechnung realer Strukturen dienen können (Davies et al. (2001), Roberts und Garboczi (2001)). Es werden z.B. direkte Beziehungen zwischen Dichte und elastischer Steifigkeit, aber auch zwischen der Dichte und den plastischen Materialparametern sowie der hydrostatischen Beanspruchbarkeit herausgearbeitet.

Die Autoren (Gibson und Ashby) entwickeln anhand des Verformungsverhaltens von kubischen Einheitszellenmodellen (Bild 4.2) fundamentale konstitutive Beziehungen.

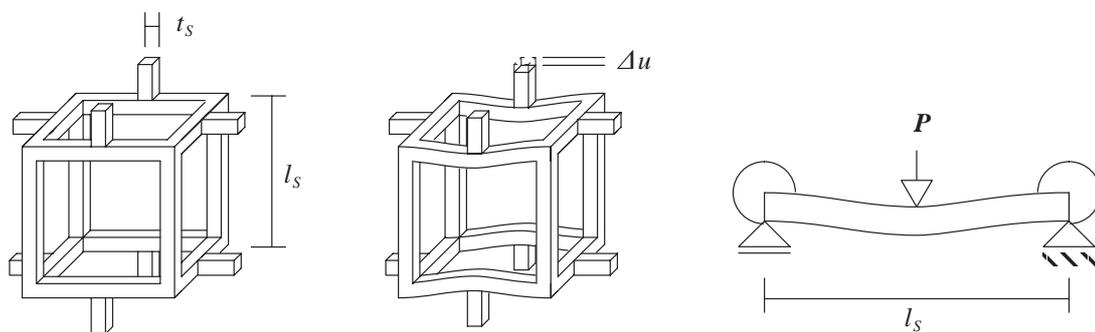


Bild 4.2: Porenmodell für offenporige Schäume (Gibson & Ashby (1999))

Der offenporige Schaum wird als Kombination von Stegen mit quadratischem Querschnitt und Knotenpunkten verstanden. Die Stege zwischen den Zellen sind versetzt angeordnet. Mit Zellwänden zwischen den Stegen wird das Verhalten geschlossener Schäume simuliert. Obwohl die Porengeometrie realer Schäume deutlich komplexer ist, kann das Verformungsverhalten mit diesen einfachen Modellen sehr gut approximiert werden.

Die folgenden Ausführungen sind Gibson und Ashby (1999) entnommen und dienen der Veranschaulichung der in dieser Arbeit verwendeten Skalierungsbeziehungen. Die relative Dichte ρ/ρ_s bezeichnet den Quotienten aus der Dichte ρ des zellulären Materials und der Dichte ρ_s des Materials der Zellwände und Zellstege. Die Berechnung der relativen Dichte der kubischen Po-

ren in Bild 4.2 erfolgt über das betrachtete Volumenelement mit den Abmessungen der Steglängen l und der Stegdicken s und lässt sich für offenporige und geschlossenporige Schäume mit gleich großer Steg- und Zellwanddicke durch die folgenden Relationen angeben:

$$\frac{\rho}{\rho_s} \propto \left(\frac{t_S}{l_S}\right)^2 \quad (\text{offenporig}) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\rho}{\rho_s} \propto \left(\frac{t_S}{l_S}\right) \quad (\text{geschlossenporig}) \quad (4.1)$$

Aufgrund der versetzten Anordnung der Verbindungselemente zwischen den Zellen kann das elastische Verformungsverhalten der offenporigen Schäume auf die linear elastische Biegung eines auf beiden Seiten gelagerten Balkens mit einer Einzellast P_v in der Mitte zurückgeführt werden. Die Auslenkung Δu in Stabmitte kann mit der klassischen Balkentheorie (Timoschenko, Goodier (1970)) zu

$$\Delta u \propto \frac{P_v l_S^3}{E_s I_F} \quad (4.2)$$

angenommen werden. Das Flächenträgheitsmoment I_F ist bekanntermaßen proportional zur vierten Potenz der Stabdicke t_S .

$$I_F \propto t_S^4 \quad (4.3)$$

Wird nun ein einaxialer Spannungszustand $\sigma = E^h \varepsilon^E$ auf die gesamte Zelle aufgebracht, greift an jedem Steg die Kraft P_v an und mit der Wahl des Verzerrungsmaßes zu $\varepsilon^E \propto \Delta u / l_S$ lässt sich der folgende Zusammenhang für den homogenisierten E-Modul E^H der kubischen Einheitszelle angeben:

$$E^h = \frac{\sigma}{\varepsilon^E} = \frac{C_1 E_s I_F}{l_S^4}, \quad (4.4)$$

Die Größen $(\cdot)_s$ kennzeichnen den Werkstoff der Zellwände und Zellstege der Porenstruktur und $(\cdot)^h$ die Parameter des 'verschmierten' porösen Materials der homogenen Einheitszelle. Unter Berücksichtigung der Proportionalitätsbeziehungen (4.1), (4.2) und (4.4) folgt die fundamentale Skalierungsbeziehung zwischen dem Elastizitätsmodul und der Dichte des homogenen porösen Werkstoffs:

$$\frac{E^h}{E_s} = C_1 \left(\frac{\rho}{\rho_s}\right)^2. \quad (4.5)$$

Der Faktor C_1 beinhaltet alle geometrischen Konstanten und wird in Gibson und Ashby (1999) mit $C_1 = 1.0$ approximiert. Hagiwara & Green (1987) wählen $C_1 = 0.3$ für Aluminiumschaum.

Das Vorgehen für die Schubbeanspruchung der Einheitszelle erfolgt analog durch Aufbringen der Schubspannung σ_τ auf die Zelle und die Herleitung der Skalierungsbeziehung für den Schubmodul G^h über die Biegung der Zellstege

$$G^h = \frac{\sigma_\tau}{\varepsilon_\gamma} = \frac{C_2 E_s I_F}{l_S^4}, \quad (4.6)$$

und schließlich mit Bezug zum Elastizitätsmodul:

$$\frac{G^h}{E_s} = C_2 \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 . \quad (4.7)$$

Die Querdehnzahl ν^h ist ausschließlich von der Porengeometrie abhängig und nicht von der Dichte des makroskopisch verschmiert betrachteten porösen Materials. Sie wird von Gibson und Ashby über die folgende Beziehung für linear-elastisches isotropes Material

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.8)$$

als dritter abhängiger Materialparameter C_3 eingeführt:

$$C_3 = \nu^h = \frac{C_1}{2C_2} - 1 . \quad (4.9)$$

Interessanterweise werden diese von Gibson und Ashby mit den sehr einfachen Porenmodellen entwickelten Skalierungsbeziehungen nicht nur durch experimentelle Untersuchungen, sondern auch durch wesentlich kompliziertere Einheitszellenmodelle und Modellschäume bestätigt.

In Bild 4.3 sind verschiedene Einheitszellenmodelle dargestellt. Es ist offensichtlich, dass die Qualität der mit diesen Modellen ermittelten mechanischen Eigenschaften stark von der gegenüber der realen Porenstruktur vereinfachten Modellierung abhängt. Die fundamentale Annahme dieser Modelle besteht in der Beschreibung einer statistisch korrekten Porengeometrie eines homogenen zellularen Materials. Die mechanischen Eigenschaften werden mit einem mehr oder weniger stark vereinfachten Modell ermittelt, das für das gesamte betrachtete Dichtespektrum Gültigkeit hat. Aus dem Verhalten der einzelnen Zellen wird letztendlich für ein zelluläres Material mit einer bestimmten Porengrößenverteilung, das Verhalten des makroskopischen Gesamtsystems ermittelt.

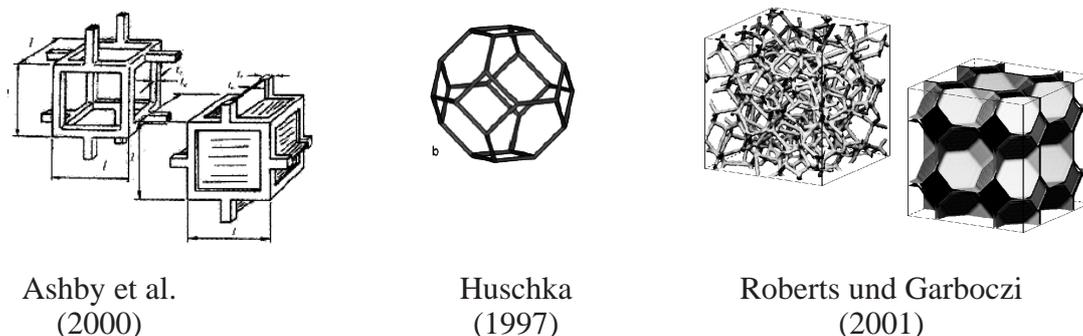


Bild 4.3: Einheitszellenmodelle zur Untersuchung von Polymer- und Metallschäumen

Einen Überblick über Porenmodelle und eine Untersuchung der mechanischen Eigenschaften und ihre Eignung für metallische Schäume gibt Huschka (1997). Exakter als im relativ einfachen Modell von Gibson und Ashby werden die Poren in Form eines pentagonalen Dodekaeders mit Stegen dreieckigen Querschnitts oder in Form eines Tetraikaeders mit Stegen quadratischen Querschnitts beschrieben (zur realitätsnahen Erzeugung von Schaummodellen siehe auch Daxner et al. 2006).

So ermittelt Huschka durch eine möglichst exakte Modellierung der Porengeometrie mit einem Tetraikaidekaeder (Bild 4.3) für den in dieser Arbeit betrachteten Dichtebereich ähnliche Skalierungsbeziehungen.

$$0.1 \leq \rho/\rho_s \leq 0.7 \rightarrow E/E_s \approx 1.388 \cdot (\rho/\rho_s)^{2.11} \quad (4.10)$$

Darüber hinaus vermeidet Huschka (1997) die mehrfache Berücksichtigung der Volumina der Eckknoten in der Berechnung der Dichte. Das Ziel dieser Arbeit ist die möglichst exakte Bestimmung der Parameter in den genannten Skalierungsbeziehungen. Für eine Diskussion des quantitativen Fehlers dieser Größen wird auf die Arbeit von Huschka (1997) verwiesen.

Huschka (1997) leitet mit seinem Porenmodell darüber hinaus einen Zusammenhang zwischen Schaumdichte und dem nichtlinearen Verlauf der Spannungs–Stauchungskurve her. Er berücksichtigt Inhomogenitäten durch eine Einführung von Faktoren, die für das jeweilige Matrixmaterial und die Homogenität des zu untersuchenden Schaumes experimentell bestimmt werden. Mit den ermittelten Faktoren lässt sich das Verhalten des Schaumes bestimmter Homogenität und bekanntem Grundmaterials über verschiedene Dichtebereiche simulieren.

Weitere Porenmodelle anderer Autoren, die vor allem zur Abschätzung des Verformungsverhaltens von Kunststoffschäumen entwickelt wurden werden in Huschka (1997) und Weber (1995) beschrieben. Die Diskrepanz zwischen den mit diesen Modellschäumen ermittelten Parametern zu den in den Versuchen gemessenen Werten wird der Inhomogenität der realen Schaumproben und der damit verbundenen starken Streuung der Messwerte zugewiesen.

Badiche et al. (2000) verwenden ein Netzwerk aus Timoshenko–Balkenelementen in Form eines mikromechanischen Ansatzes zur Bestimmung der effektiven Materialparameter für offenporige Nickelschäume und einen makroskopischen Ansatz zur Berechnung von Strukturen mit Finite–Element–Programmen. Anhand numerischer Untersuchungen mit einer einfachen Einheitszelle diskutieren Zhang und Lee (2003) das mikroskopische Verhalten von offenporigen Schäumen. Sie verwenden das klassische von Mises–Plastizitätsmodell zur Beschreibung des elastoplastischen Verhaltens der Streben der Einheitszelle und entwickeln eine Fließbedingung zur Beschreibung des makroskopischen Materialverhaltens. Diese Fließbedingung wird mit Gibson’s Fließbedingung (Gibson et al. (1989)) verglichen. Elastisches und plastisches Stabilitätsversagen wird im Einheitszellenmodell jedoch nicht berücksichtigt.

Daxner et al. (2000) untersuchen die Zusammenhänge zwischen verschiedenen geometrischen Parametern und den elastoplastischen Materialeigenschaften von Metallschäumen anhand diskretisierter Porenstrukturen perfekter und imperfekter zwei– und dreidimensionaler Modellschäume (Rammerstorfer & Daxner (2000)).

Der Einfluss des Korngefüges des metallischen Grundwerkstoffs der Porenstruktur auf die Festigkeitseigenschaften von Metallschäumen wird in Hupfer (2003) mit der Finiten–Element–Methode und einem speziellen Werkstoffmodell zur Erfassung kristallplastischer Phänomene untersucht. Feinkörnige Gefüge mit mehreren Körnern in Dickenrichtung der Zellwände und –stege wirken sich nach den Ergebnissen der Arbeit sehr positiv auf die mechanischen Eigenschaften realer Metallschäume aus und motivieren die Erweiterung bisheriger Untersuchungen mit dis-

kreten Porenmodellen und hauptsächlich isotropen Werkstoffmodellen für das Zellwandmaterial.

Die genaueste Abbildung des Verformungsverhaltens zellulärer Materialien erfolgt durch die Digitalisierung der Porenstruktur mit Hilfe der Computer–Tomographie, der Vernetzung des Volumenmodells und die Analyse mit der Finiten–Element–Methode (rechte Abbildung in Bild 4.3). Allerdings ist die Aussagekraft auf die spezielle Probe beschränkt. Diese Art der Untersuchung kann aber für das Verständnis des Verhaltens zellulärer Materialien auf der Ebene der Porengeometrie hilfreich sein. Eine deutlich allgemeingültigere Approximation des Deformationsverhaltens von zellulären Materialien durch ein homogenes Ersatzkontinuum im statistischen Mittel wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

4.3 Phänomenologische makroskopisch orientierte Modellierung

Zur Entwicklung mikroorientierter Materialmodelle muss die innere Geometrie des porösen Mediums bekannt sein. Die innere Porenstruktur poröser Festkörper ist aber derart komplex, dass sie nur schwer exakt beschrieben werden kann (Ehlers (1989)). Zum anderen führen stark vereinfachte Porenmodelle zu einer ungenauen Zuweisung der mechanischen Eigenschaften zum betrachteten Schaum oder zu einer Beschränkung ihrer Gültigkeit auf bestimmte Dichtebereiche (Huschka (1997)). Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, verwenden verschiedene Forschergruppen Ersatzkontinua, z.B. in Form eines 'verschmierten' Modellkörpers nach der Theorie der Porösen Medien, basierend auf der durch das Konzept der Volumenanteile eingeschränkten Mischungstheorie (Blum et al. (1996), Ehlers (1989), Ehlers & Droste (1989, 1999)). Der Metallschaum wird als ein mit einem kompressiblen Porengas gefülltes, materiell inkompressibles, elastisch–plastisches Festkörperskelett modelliert. In diesem gesättigten Zweiphasenmodell nimmt jede Komponente für sich gleichzeitig mit den übrigen Komponenten den gesamten Kontrollraum ein, der durch das Festkörperskelett gebildet wird (Ehlers & Droste (1998)). Mit dieser Modellvorstellung ist es möglich, den Aluminiumschaum makroskopisch als Kontinuum zu beschreiben. Ein Überblick über die historische Entwicklung der Theorie der Porösen Medien wird in de Boer (1998) gegeben.

Aus Gründen der numerischen Effizienz und der oftmals vorhandenen Schwierigkeit bei der Bestimmung der Parameter auf der Mikroebene werden für die numerische Berechnung von Strukturbauteilen in dieser Arbeit überwiegend makroskopisch orientierte und phänomenologisch motivierte Materialmodelle eingesetzt.

In den nachfolgenden Beispielen kommt das St.–Venant–Kirchhoff–Material zur effizienten Modellierung bei kleinen Verzerrungen für die Beschreibung des linearen Zusammenhangs zwischen den Spannungen und den Verzerrungsgrößen zur Anwendung. Für die Beschreibung des Materialverhaltens von Metall– und Polymerschäumen wird dieses Gesetz mit speziellen Skalierungsfunktionen für die Optimierung aufbereitet.

Die Behandlung nichtlinear elastischer Polymerschäume mit besonderer Beachtung des kompressiblen Verhaltens bei großen Deformationen erfolgt mit einem hyperelastischen Material. Ziel ist es, für verschiedene Materialformulierungen die Spannungs– und Materialtensoren in Abhängigkeit von der Porosität anzugeben. Dabei ist das Verständnis um das lineare/nichtlineare

elastische oder inelastische Verformungsverhalten der Porenstruktur für die Auswahl eines geeigneten makroskopisch orientierten Materialmodells hilfreich und wird an geeigneter Stelle wieder aufgegriffen.

4.3.1 Materialmodellierung für Metallschäume – materiell lineares Strukturverhalten

Aufbauend auf den in Abschnitt 4.2 dargelegten Untersuchungen geben Gibson und Ashby (1999) Relationen zwischen dem Verhältnis der Dichte ρ von Metallschäumen zur Dichte des Materials der Zellwände bzw. –stege ρ_s und den Parametern zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens zellulärer Materialien an. Für den Elastizitätsmodul E^h geschlossenerporiger Metallschäume wurde anhand experimenteller Ergebnisse die Skalierungsbeziehung (4.5) erweitert und folgende Gleichung angegeben:

$$E - Modul : \quad E^h = \bar{\alpha} E_s \left[0.5 \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 + 0.3 \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right) \right] \quad (4.11)$$

E_s bezeichnet den Elastizitätsmodul des Materials der Zellwände bzw. –stege. Der Parameter $\bar{\alpha}$ wird in Abhängigkeit des betrachteten Metallschaums im Bereich

$$0.5 \leq \bar{\alpha} \leq 1 \quad (4.12)$$

gewählt. In den in dieser Arbeit untersuchten Beispielen wurde der Faktor $\bar{\alpha}$ vereinfachend zu 0.8 gewählt.

Für offenporige Schäume wird die folgende Beziehung angegeben:

$$E - Modul : \quad E^h = (0.1 \div 4.0) E_s \left(\frac{\rho}{\rho_s} \right)^2 \quad (4.13)$$

Zur Beschreibung des elastischen Materialverhaltens wird außerdem die Querdehnzahl ν^h in den hier angegebenen Grenzen bestimmt

$$Poisson-Zahl \nu : \quad \nu^h = 0.32 \div 0.34 . \quad (4.14)$$

Die Moduli offenporiger Metallschäume skalieren mit dem Faktor $(\rho/\rho_s)^2$. Für geschlossenerporige Schäume wird ein zusätzlicher linearer Term addiert. Diese Beziehungen zwischen der Dichte und der Steifigkeit zeigen starke Ähnlichkeit zu den Gleichungen des in der Topologieoptimierung eingesetzten porösen Materials des SIMP-Ansatzes.

In den Strukturanalysen mit Berücksichtigung des Einflusses der Dichteverteilung auf das Verformungsverhalten von Metallschäumen wird der poröse Werkstoff als Kontinuum betrachtet und das elastische Werkstoffverhalten mit der Hookeschen bzw. St.Venant–Kirchhoff’schen Materialbeschreibung modelliert. Die Elastizitätskonstanten E^h und ν^h dienen als Eingangsgrößen für die Berechnung der elastischen Koeffizienten des linear elastischen Konstitutivgesetzes in Gleichung (2.9). Die in (2.17) angegebenen Lamé–Konstanten λ und μ stehen zu den eher technisch gebräuchlichen Größen E , G und ν in folgendem Zusammenhang:

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \text{ und } G = \mu . \quad (4.15)$$

Das dem elastischen Werkstoffverhalten hyperelastischer Materialien zugrunde gelegte Potential muss positiv definit sein.

$$E > 0 \wedge -1 < \nu < 0.5 \quad (4.16)$$

Besondere Beachtung ist dem zulässigen negativen Wertebereich der Querdehnzahl zu widmen. Dieser Bereich ist ein Zielkriterium bei dem Entwurf zellularer Materialien mit negativem Querdehneffekt in Kapitel 8.

4.3.2 Materialmodellierung für Polymerschaum bei finiten Verzerrungen

Die Untersuchung zellularer Materialien bei großen Verzerrungen erfordert den Einsatz entsprechender Konstitutivgesetze mit Berücksichtigung der kinematischen Formulierungen. Bei der Auswahl einer geeigneten Formulierung ist die Klassifizierung des Materials, aus dem die Zellwände und die Zellstege bestehen, eine erste wichtige Entscheidungshilfe. Ein nichtlinear elastisches Basismaterial führt zu einem elastischen makroskopischen Deformationsverhalten. Bei Entlastung findet ein derartiger Schaum wieder zu seiner ursprünglichen Form zurück.

Das Verformungsverhalten der Porenstruktur wird durch elastisches Beulen und einer deutlichen Volumenänderung während der Deformation charakterisiert. Diese Beulmoden verschwinden bei vollständiger Entlastung. Die konstitutive Beschreibung dieser Klasse von Materialien erfolgt in dieser Arbeit durch *kompressible hyperelastische Formulierungen*.

Neben den Anforderungen, die sich aus den Beobachtungen des realen physikalischen Verhaltens ergeben, müssen hyperelastische Materialien auch mathematisch begründeten Forderungen genügen. Die Forderung nach materieller Objektivität wird zum Beispiel durch die Formulierung der Materialfunktion Ψ in Invarianten I_1, I_2, I_3 und damit von Koordinaten unabhängiger Darstellung entsprochen. Die Invarianten lassen sich aus dem Eigenwertproblem in der Referenzkonfiguration

$$\left(\tilde{\mathbf{C}} - \lambda_A^2 \mathbf{1}\right) \mathbf{N}^A = \mathbf{0} \quad \text{für } A = 1, 2, 3 \quad (4.17)$$

mit der charakteristischen Gleichung

$$I_3 - I_2 \lambda_A^2 + I_1 \lambda_A^4 - \lambda_A^6 = 0 \quad (4.18)$$

bestimmen.

Da sich einige dieser Materialien sehr unterschiedlich bei Druck- oder Schubbeanspruchung verhalten, wird die Deformation in der Regel in einen volumetrischen und in einen deviatorischen Teil aufgespalten (Holzapfel (2001)). Ausgehend vom materiellen Deformationsgradienten und dem rechten Cauchy–Green Tensor als Deformationsmaß lassen sich verschiedene Potentiale zur Charakterisierung des Materialverhaltens angeben. Da in dieser Arbeit dem Kompressionsverhalten besondere Beachtung gewidmet wird, erfolgt hier die Konzentration auf die Volumenänderung, die durch die Determinante des Deformationsgradienten $\det \mathbf{F}$ beschrieben wird.

Das hyperelastische Materialmodell, das in dieser Arbeit zur Anwendung kommt, basiert auf den etablierten elastischen Potentialen, die ihren Ursprung in den phänomenologischen Materialmodellen von Ogden (1984) haben und in Hauptdehnungen formuliert sind. Diese Modelle be-

schreiben die Änderung der Hauptspannungen von einer Referenz- in die Momentankonfiguration.

Diese Änderung kann nach Valanis und Landel (1967) für die drei Hauptstreckungen durch drei separate Funktionen formuliert und das elastische Potential als Summe dieser Funktionen angegeben werden.

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^3 \Psi(\lambda_p) \quad (4.19)$$

Die Wahl der Funktion zu

$$\Psi(\lambda_a) = \sum_{p=1}^3 \Psi \frac{\mu}{\alpha_p} (\lambda_a^{\alpha_p} - 1) \quad (4.20)$$

führt auf die bekannte Formulierung nach Ogden

$$\Psi = \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) . \quad (4.21)$$

Die Genauigkeit, mit der experimentelle Ergebnisse durch dieses Potential approximiert werden können, wird durch die Anzahl N der dimensionslosen Parameter α_p und μ_p bestimmt. Der Schubmodul der linearen Theorie kann durch die Summe der zu den einzelnen Streckungen gehörenden Moduli bestimmt werden.

$$2\mu = \sum_{p=1}^3 w_p \mu_p \alpha_p \quad (4.22)$$

Zur Berücksichtigung der Kompressibilität wird die dargestellte Funktion um einen entsprechenden Term erweitert.

$$\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Psi_{iso}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \Psi_{vol}(J) \quad (4.23)$$

$J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ definiert das Volumenverhältnis. Jemiolo und Turteltaub (2000) entwickelten ein auf dieser Formulierung basierendes Potential.

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \rho) &= \sum_{i=1}^N (2m_i (\lambda_1^{\tilde{\alpha}_i} + \lambda_2^{\tilde{\alpha}_i} + \lambda_3^{\tilde{\alpha}_i} - 3)) \\ &+ \sum_{i=1}^N (\tilde{n}_i ((\lambda_1 \lambda_2)^{\tilde{\beta}_i} + (\lambda_2 \lambda_3)^{\tilde{\beta}_i} + (\lambda_3 \lambda_1)^{\tilde{\beta}_i} - 3) + \tilde{p}_i (J^{\tilde{\gamma}_i} - 1)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Das Kompressionsverhalten wird über den Parameter \tilde{p}_i gesteuert.

$$\tilde{p}_i = \frac{2(\tilde{m}_i \tilde{\alpha}_i + \tilde{n}_i \tilde{\beta}_i)}{\tilde{\gamma}_i} \quad (4.25)$$

Für den Spezialfall $N = 1$ werden die Funktionen \tilde{m}_i und \tilde{n}_i folgendermaßen bestimmt.

$$\tilde{m} = \frac{1}{6\tilde{\alpha}} \left[\frac{2(2\tilde{\beta} + 3\tilde{\gamma})K_2 - \tilde{\beta}K_1}{\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}(\tilde{\beta} - 2\tilde{\alpha})} \right] \quad \tilde{n} = \frac{1}{3\tilde{\beta}} \left(\frac{\tilde{\alpha}K_1 - (\tilde{\alpha} + 3\tilde{\gamma})K_2}{\tilde{\alpha}\tilde{\beta} - \tilde{\gamma}(\tilde{\beta} - 2\tilde{\alpha})} \right). \quad (4.26)$$

Um einen Zusammenhang zwischen den mechanischen Eigenschaften und der Porosität des zellularen Werkstoffes herzustellen, werden durch die Parameter $\tilde{m}, \tilde{n}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$ und die sogenannten Kelvin-Moduli K_1, K_2 funktionale Zusammenhänge zur relativen Dichte hergestellt.

$$K_1(\bar{\rho}) = 3E_s\bar{\rho}^2, \quad K_2(\bar{\rho}) = 3/4E_s\bar{\rho}^2 \quad \tilde{\alpha}(\bar{\rho}), \tilde{\beta}(\bar{\rho}), \tilde{\gamma}(\bar{\rho}). \quad (4.27)$$

E_s beschreibt den E-Modul des isotropen Zellwandmaterials. Das nichtlineare Materialverhalten wird durch die Parameter $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_i$ kontrolliert. Für einen PE-Schaum wählen die Autoren eine parabolische Funktion, für PU-Schaum wird eine lineare Beziehung zwischen der relativen Dichte und den genannten Parametern gewählt. Die in dieser Arbeit verwendeten Funktionen sind in Bild 4.4 dargestellt.

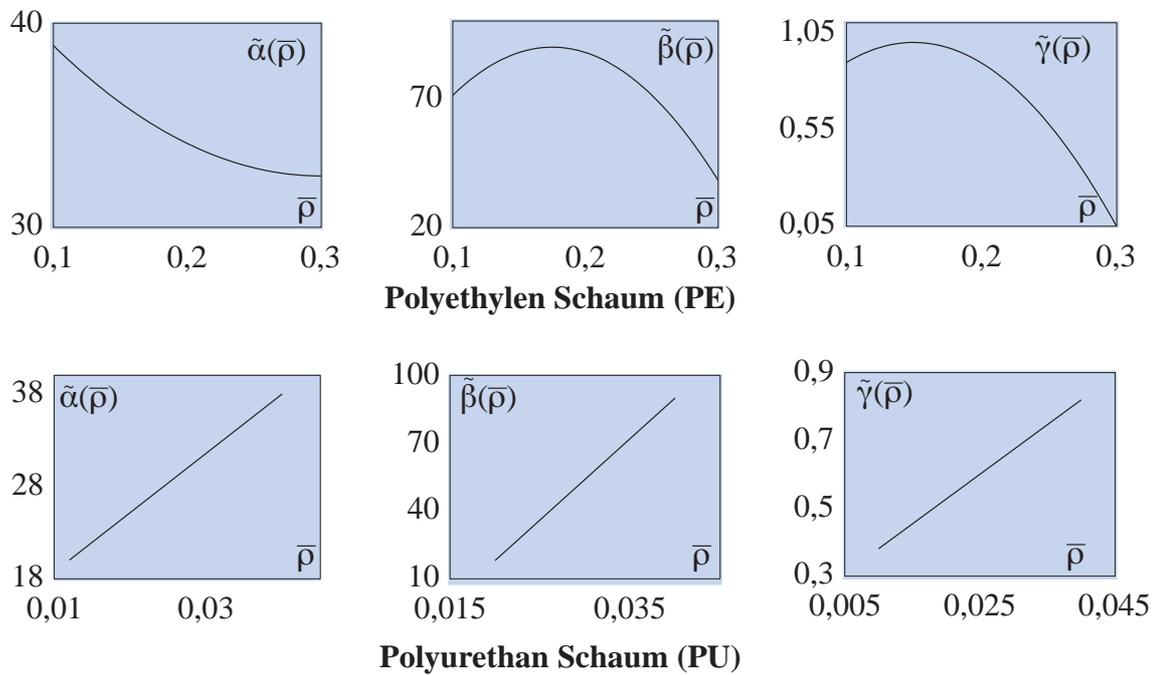


Bild 4.4: Funktionale Beziehungen zur relativen Dichte (Jemiolo und Turteltaub (2000))

Da es hier primär um die Untersuchung der Anwendbarkeit der materiellen Topologieoptimierung geht, wurde auf die Anpassung an weitere Polymerschäume verzichtet und die von den Autoren ermittelten Approximationen unverändert übernommen.

Die Spannungen und der Werkstofftensor berechnen sich entsprechend der gewählten Formulierung des elastischen Potentials in Hauptstreckungen λ_A zu:

$$S_A = \frac{1}{\lambda_A} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_A}; \quad (4.28)$$

wobei hier die Darstellung mit den 2. Piola-Kirchoff-Spannungen S_A in Hauptrichtungen gewählt wurde. Bezüglich der weitergehenden Ableitungen für die zugehörige Materialtangente C_{AB} und für die Implementierung im Rahmen einer Total-Lagrange-Formulierung wird an dieser Stelle auf die einschlägige FE-Literatur verwiesen.

Um das kompressible nichtlineare Strukturverhalten zu untersuchen, wird ein Würfel aus PE-Schaum untersucht (Bild 4.5). Die Probe wird vertikal verschiebungskontrolliert zusammengedrückt. Die im Bild 4.5 dargestellten Lastplatten an Ober- und Unterseite werden jeweils durch die Koppelung ihrer vertikalen Freiheitsgrade modelliert. Aufgrund der Symmetrie wurde die Berechnung am Achtel-System durchgeführt.

Die deformierte Struktur ist unskaliert dargestellt. Einem anfänglich linearen Bereich schließt sich ein mehr oder weniger stark ausgeprägtes Plateau an. Besonders bei den Proben mit geringer Dichte kann die Last bei deutlicher Verformungszunahme nur wenig gesteigert werden. Die weitere Belastung führt zum Kontakt gegenüberliegender Zellwände und damit zur weitergehenden Verfestigung.

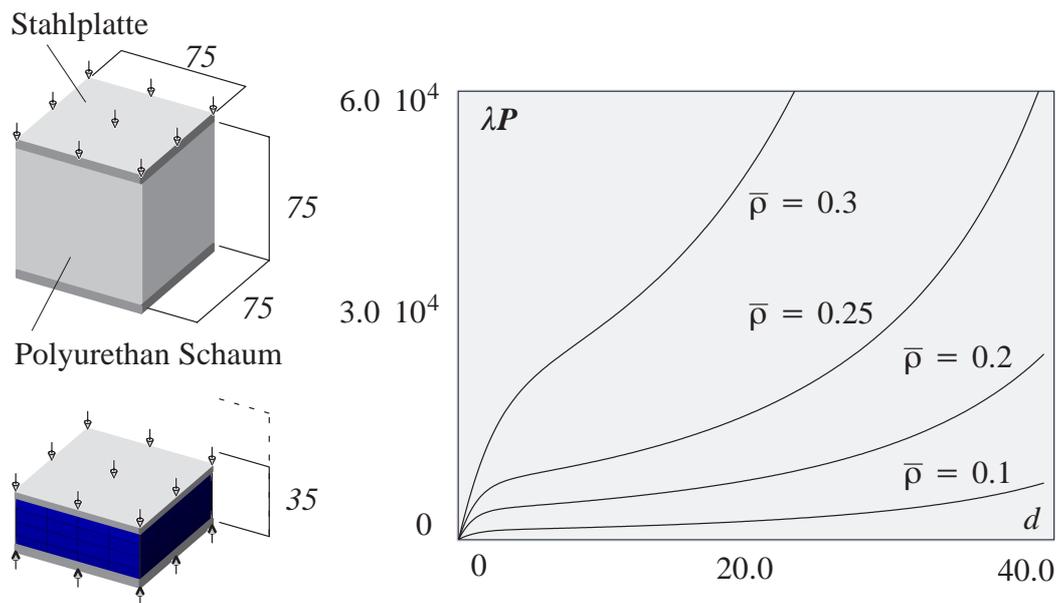


Bild 4.5: Strukturverhalten von Polymerschaum in Abhängigkeit von der relativen Dichte

Das elastische Potential nach Jemiolo und Turteltaub (2000) kommt in den Beispielen im Kapitel 5 zur Untersuchung des lokalen Beulverhaltens von Sandwichbauteilen mit einem Polymerschaumkern und zur Untersuchung des Energieabsorptionsvermögens derartiger zellulärer Proben zum Einsatz.

5 Steuerung der Dichteverteilung zellularer Materialien durch Topologieoptimierung

Aus den besonderen Materialeigenschaften zellularer Materialien lassen sich verschiedene Einsatzgebiete ableiten. Entsprechend dem Einsatzgebiet werden dabei verschiedene Anforderungen an den Werkstoff gestellt. Aufgrund der bereits erwähnten hohen Steifigkeit und dem niedrigen spezifischen Gewicht eignen sich Polymerschäume für verschiedene Einsatzgebiete des klassischen Leichtbaus. Demzufolge dient das klassische Optimierungsziel nach *maximaler Steifigkeit* dem bestmöglichen Einsatz dieses Materials, z.B. in den Tragflächen von Segelflugzeugen. Aufgrund der besonderen thermischen Eigenschaften eignen sich metallische Schäume darüber hinaus auch für Einsatzgebiete als tragende Elemente in der Nähe von Verbrennungsmotoren mit einer besonders hohen thermischen Beanspruchung. Die Beeinflussung der thermischen Eigenschaften zellularer Materialien mit den Verfahren der Strukturoptimierung wird im Kapitel 6.3.2 am Beispiel des Materialdesigns noch einmal aufgegriffen.

Die Korrelation von einem geringen spezifischen Gewicht und einer hohen Steifigkeit spiegelt sich in den Eigenfrequenzen wider. Die Kombination dieser beiden mechanischen Eigenschaften kann in entsprechend speziellen Konstruktionsaufgaben ausgenutzt werden. So wird gegenwärtig der Einsatz von Metallschäumen in Portalfräsmaschinen untersucht. Dieser Werkzeugmaschinentyp erfordert leichte und steife Konstruktionen, damit hohe Verfahrgeschwindigkeiten erzielt werden können. Aufgrund der speziellen Antriebe und der hohen Drehzahl der Frässpindel mit einem breiten Spektrum an Erregerfrequenzen und der damit verbundenen Auswirkungen auf die Genauigkeit kann die Zielsetzung in einer Optimierungsaufgabe neben der Maximierung der Steifigkeit die *Anpassung der Eigenfrequenzen* beinhalten.

Zur Bestimmung einer optimierten Dichteverteilung bei linear elastischem Materialverhalten werden die Beziehungen für das poröse Material des SIMP-Ansatzes direkt durch die in den Gleichungen (4.11) und (4.13) angegebenen Relationen ersetzt. Der untersuchte Dichtebereich wurde nach den Empfehlungen von Ashby et al. (2000) so gewählt, dass die angegebenen Materialdichte-Beziehungen Gültigkeit haben bzw. gewährleistet ist, dass für eine bestimmte Dichte ein Metallschaum mit der entsprechenden Steifigkeit ausgewählt werden kann. In den Beispielen mit großen Verzerrungen wird das hyperelastische Materialmodell nach Jemiole und Turteltaub (2000) Gleichung (4.24) eingesetzt. Die Diskretisierung erfolgt mit Kontinuumselementen (siehe Kapitel 2.2.2). Für die Berechnung der Sensitivitäten wird auf den Anhang A1 verwiesen.

Das Energieabsorptionsvermögen von Polymerschäumen wird zum Beispiel in Sturzhelmen (siehe Bild 1.2) ausgenutzt. Soll das Tragverhalten von Strukturbauteilen ausgeschöpft werden, ist das primäre Ziel dagegen die *Erhöhung der Traglast*. In der Regel bedingt diese Maximierung der maximal ertragbaren Last jedoch eine Verschlechterung des duktilen Verhaltens. Diese Klasse Entwurfskriterien und der Umgang mit dieser Problematik werden ausführlicher im Abschnitt 5.2 anhand eines Beispiels diskutiert und die Entwicklung einer entsprechenden Optimierungsstrategie erläutert (siehe auch Daxner et al. (1999), (2000) und (2003)).

5.1 Bestimmung der Dichteverteilung in Sandwichsystemen

Die Maximierung der Eigenfrequenzen und die Vorstellung des Konzepts zur Bestimmung einer optimalen Dichteverteilung ist Gegenstand des ersten Beispiels in Abschnitt 5.1.1. Die Minimierung der Masse kombiniert mit einer Kontrolle von Verschiebungen führt nach den Ausführungen in Kapitel 3.4 auf leichte und steife Strukturen. Eine alternative Entwurfsaufgabe stellt die Minimierung der Verzerrungsenergie bei konstanter Masse im Optimierungsprozess dar. Letzteres Optimierungsziel ist effizienter in einer numerischen Implementierung umzusetzen, weshalb dieser Zielsetzung im zweiten Beispiel in Abschnitt 5.1.2 der Vorzug gegeben wird. Darüber hinaus erhält man eine integrale Kontrolle über das Tragwerk, d.h. im optimierten Tragwerk treten zumindest im linearen Fall an keiner Stelle größere Verformungen auf. Allerdings lassen sich auf diese Weise die Verformungen einzelner Punkte nicht direkt kontrollieren. Soll zum Beispiel die Vertikalverschiebung in der Mitte einer Brücke im Rahmen eines Gebrauchstauglichkeitsnachweises minimiert werden, kann die Minimierung der Verschiebung an dieser Stelle oder eine gewichtete Kombination dieses Kriteriums zusammen mit dem Energiekriterium eine sinnvolle Entwurfsaufgabe sein.

Die Maximierung der Steifigkeit mit Hilfe von Energiekriterien kann auf verschiedene Weise erfolgen. Neben der oft angewandten Minimierung der Arbeit der inneren Kräfte wird in verschiedenen Veröffentlichungen auch die Minimierung der Ergänzungsarbeit, der sogenannten 'end-compliance', und der Anfangssteifigkeit verwendet. Im linearen Fall führen alle diese Kriterien zum gleichen Ergebnis. Bei Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik unterscheiden sich aber die Ergebnisse grundlegend.

Tragwerke, die möglichst leicht sind und dennoch geringe Verformungen aufweisen, bestehen häufig aus Elementen mit einer hohen Schlankheit. Aufgrund dieser Schlankheit versagen die Bauteile bei einer Druckbeanspruchung infolge Beulens oder Knickens. Sinnvolle Kriterien für den Entwurf weniger stabilitätsgefährdeter Bauteile sind Themen im dritten und vierten Beispiel in den Abschnitten 5.1.3 und 5.1.4.

Die direkte Kontrolle der nichtlinearen Strukturantwort zellulärer Materialien und die damit verbundene Beeinflussung des Energieabsorptionsvermögens wird im letzten Beispiel in Abschnitt 5.2 dieses Kapitels diskutiert.

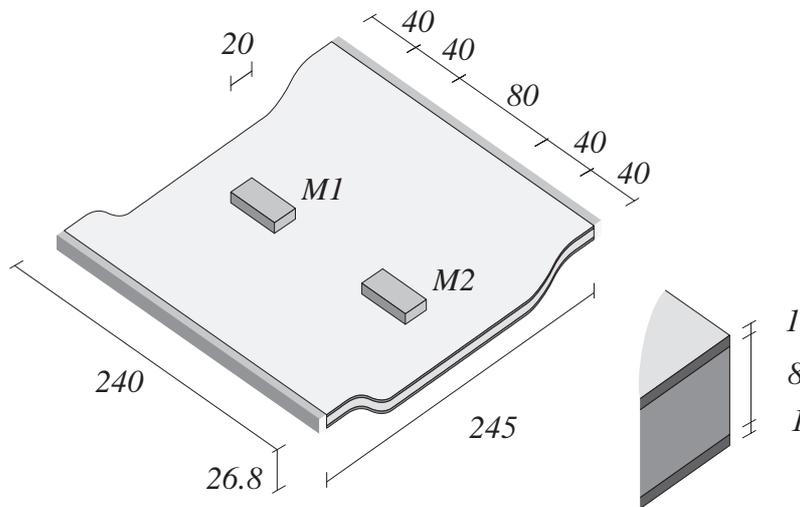
5.1.1 Anpassung von Eigenfrequenzen

Im ersten Beispiel wird die Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenz untersucht, um sie z.B. aus einem nicht gewünschten Spektralbereich einer schwingenden Maschine zu bringen.

Das untersuchte Bauteil besteht aus einem 'wannenartigen' Sandwich mit Aluminiumdeckblechen und einer Aluminiumschaumfüllung. Das Sandwich hat eine Gesamtdicke von einem Zentimeter, der Aufbau und die Abmessungen sind in Bild 5.1 angegeben. Für die Berechnung wurde das halbe System mit 2500 20-knotigen Hexaederelementen diskretisiert. Das obere und untere Deckblech des Bauteils sind an den kürzeren geraden Seiten fest eingespannt. In der Mitte befinden sich in den äußeren Viertelpunkten der Mittelachse zwei Einzelmassen.

Optimierungsziel: Maximale erste Eigenfrequenz
Nebenbedingung: Masse (Aluminiumschaum)

Maße in [mm]



Deckblech:

$$E = 70\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

Aluminiumschaum:

$$E_s = 70\,000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu^h = 0.33$$

$$\bar{\rho} = 50\%$$

Massen:

$$M_1 = M_2 = 6.4 \text{ kg}$$

Bild 5.1: Sandwich mit Metallschaumkern

Mit einer Eigenwertanalyse wurden die ersten beiden Eigenfrequenzen und die in Bild 5.2 dargestellten dazugehörigen Eigenformen für eine gleichförmige Dichteverteilung des Aluminiumschaumkerns mit einer Porosität von 50% ermittelt.

1. Eigenform

Berechnung am
halben System

2. Eigenform

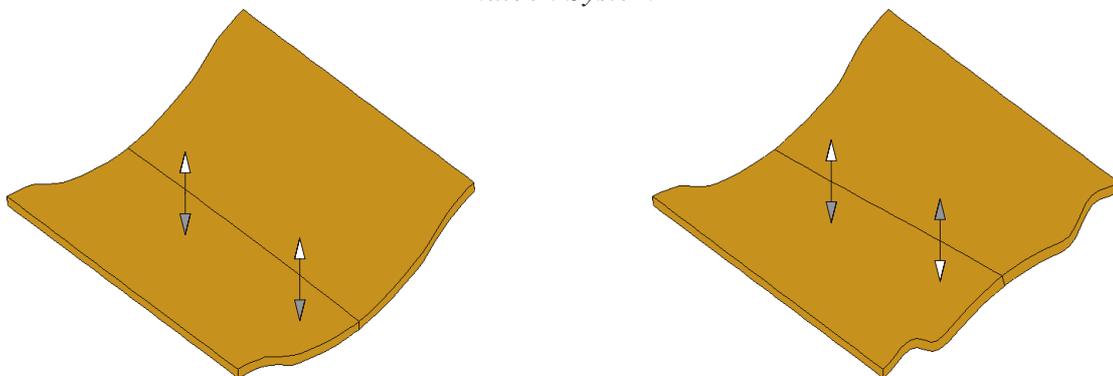


Bild 5.2: Eigenformen

Mit Hilfe der materiellen Topologieoptimierung wird nun eine Verteilung der Dichte des Aluminiumschaums ermittelt, so dass die erste Eigenfrequenz möglichst maximal wird. Der obere und untere Grenzwert der relativen Dichte beträgt 20% bzw. 80%. Die Dichte als Optimierungsvariable ist innerhalb der Elemente konstant. Die gesamte Masse des porösen Materials wird mit einer entsprechenden Nebenbedingung im Optimierungsprozess konstant gehalten. Im Laufe des Optimierungsprozesses kann sich aufgrund der Änderung der Materialverteilung im Entwurfsraum die maßgebende Eigenform mit der dann niedrigsten Eigenfrequenz verändern.

Daher werden in der betrachteten Aufgabe die vier niedrigsten Eigenfrequenzen in Form einer Mehrkriterienoptimierung berücksichtigt. Das nicht glatte Optimierungsproblem wird durch die Kreisselmeier–Steinhäuser–Funktion (3.41) approximiert, d.h. geglättet. Für die Maximierung der kleinsten Eigenfrequenz lautet dann das neue Problem

$$\min f = \min \frac{1}{p_f} \ln \sum_{i=1}^n e^{-p_f \vartheta_i(s)} \quad . \quad (5.1)$$

ϑ_i bezeichnet die Eigenfrequenz der betrachteten Eigenform i und n die Anzahl der zu berücksichtigenden Eigenwerte. Mit dem Wichtungsfaktor p_f wird die Approximationsgenauigkeit gesteuert. Die Ableitungen der Frequenzen werden mit der diskreten, direkten Methode bestimmt, wie es im Anhang der Arbeit angegeben ist.

Die Lösung des Eigenwertproblems wird mit Hilfe eines Subspace–Verfahrens berechnet. Zur Bestimmung der Materialverteilung des porösen Werkstoffs zwischen den Deckblechen kommt ein von Maute (1998) entwickeltes OC–Verfahren zur Anwendung.

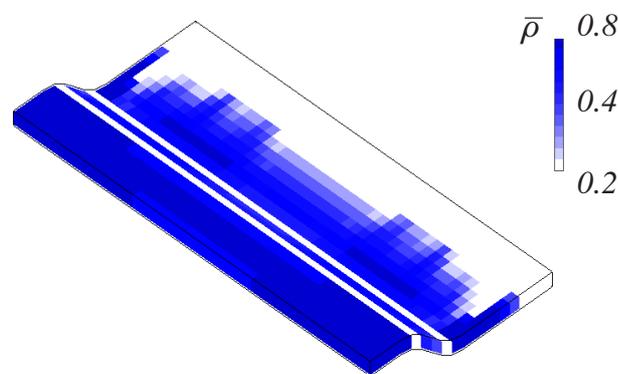


Bild 5.3: Optimierte Dichteverteilung

Eine Änderung der maßgebenden ersten beiden Eigenformen während des Optimierungsprozesses wurde nicht beobachtet, wodurch es gerechtfertigt die Berechnungen am halben System durchzuführen. Die beiden niedrigsten Eigenfrequenzen im Ausgangszustand mit gleichmäßiger Dichteverteilung betragen 7.163 Hz und 7.568 Hz. Mit der optimierten Materialverteilung (Bild 5.3) werden Frequenzen von 9.202 Hz und 9.746 Hz erreicht. Beobachtet wird eine Konzentration des Metallschaums höherer Dichte und damit höherer Steifigkeit im Bereich der eingespannten Deckbleche und in den Krümmungen des Sandwichs. Aufgrund der geringen Masse des Aluminiumschaums wird die Erhöhung der Frequenz weniger durch deren Verteilung sondern maßgeblich durch die Erhöhung der Steifigkeit des Gesamtsystems bewirkt. Veranschaulichen kann man sich diese Beobachtung an einem einfachen ebenen Sandwich ohne zusätzliche Einzelmassen; die maximale erste Eigenfrequenz ergäbe sich für eine maximale Steifigkeit und Masse im Bereich des Auflagers und eine minimale Masse in der frei schwingenden Plattenmitte.

Prinzipiell sind Metallschaumfüllungen mit einer variablen Dichteverteilung, z.B. in Form syntaktischer Schäume, herstellbar. Das Verfahren wird in Banhart et al. (1997) oder Hartmann (1999) beschrieben und ermöglicht eine reproduzierbar einstellbare Porenstruktur. Zur besonde-

ren Berücksichtigung der Herstellbarkeit soll in einem weiteren Versuch die Dichte innerhalb größerer Flächen einfacher Geometrie konstant gehalten werden. Die einzelnen Metallschaumplatten konstanter Dichte ließen sich in diesem Fall mit speziellen Schweißverfahren zusammenfügen. Für die Modellierung des Entwurfsraums werden mit einem CAGD-System sogenannte Designflächen (bzw. -volumina) definiert, die anschließend diskretisiert werden. Die Gebiete, in denen die Dichte konstant gehalten werden soll, sind in Bild 5.4a in der Draufsicht gut zu erkennen. Die Entwurfsvariablen sind nicht mehr die Dichtewerte einzelner finiter Elemente, sondern die Dichte dieser Designvolumina. Zur Bestimmung der Sensitivitäten der Entwurfskriterien der Designvolumina werden die analytisch errechneten Sensitivitäten der einzelnen finiten Elemente linear 'gelinkt'.

Die erreichten unteren beiden Eigenfrequenzen betragen 8.337 Hz und 8.896 Hz. Verglichen mit dem Ausgangssystem und dem Ergebnis mit einer variablen Dichteverteilung, stellt das Optimierungsergebnis einen Kompromiss zwischen der Herstellmöglichkeit und dem gewünschten mechanischen Verhalten dar.

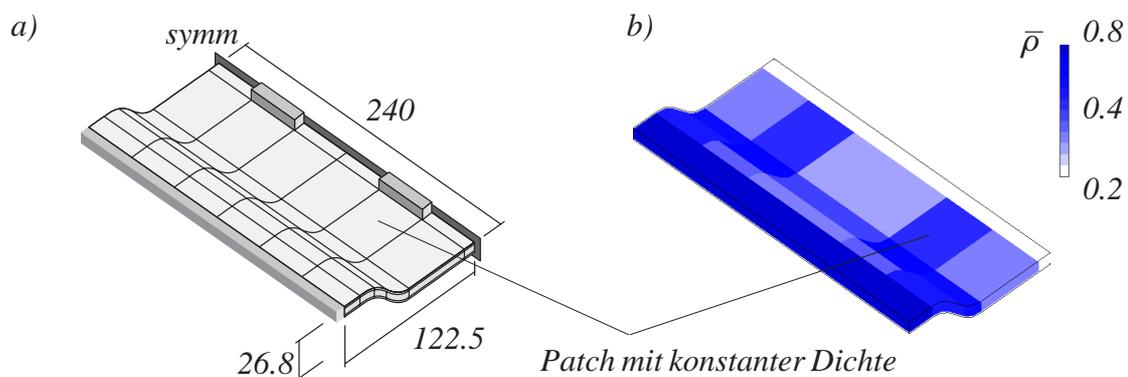


Bild 5.4: a) Aluminiumschaumkern mit größeren Bereichen gleicher Dichte
b) Optimierte Dichteverteilung des Aluminiumschaumkerns

5.1.2 Maximierung der Steifigkeit

Aufgrund der hohen Steifigkeit bei gleichzeitig geringem Gewicht ist der Metallschaum prädestiniert für den Einsatz im Leichtbau. Die Steifigkeit bzw. die Dehnungsenergie eines Tragwerks charakterisiert sowohl den inneren Spannungszustand als auch die Verformungen. Im folgenden Beispiel wird die Optimierung der Dichteverteilung mit dem klassischen Optimierungsziel, 'Maximierung der Steifigkeit' durch die Minimierung der Verzerrungsenergie bei konstanter Masse im Optimierungsprozess, untersucht.

Das in Bild 5.5 dargestellte Rohr aus einem Metallschaumsandwich wird im Folgenden untersucht. Berücksichtigt wurde bei diesem dünnwandigen Bauteil geometrisch nichtlineares Strukturverhalten. Motiviert wird das Beispiel durch den Einsatz von Sandwichbauteilen aus Metallschaum in Behältern mit relativ großem Durchmesser und Höhe, aber dünner Wandung. Der Aufbau der Rohrwandung besteht aus zwei Aluminiumdeckblechen mit 1.0 mm Dicke und einem innenliegenden 8.0 mm dicken Aluminiumschaumkern, der wiederum den Entwurfsraum

für die durchgeführte Optimierung darstellt. Die Geometrie und die Randbedingungen sind dem Bild 5.5 zu entnehmen. Die Berechnung erfolgt vereinfacht am Viertel-System, diskretisiert mit 1200 20-knotigen Hexaederelementen. Aufgrund dieser Betrachtungsweise wird die Bewegungsfreiheit der Struktur natürlich eingeschränkt. Die Beurteilung der Ergebnisse erfolgt deshalb mit den entsprechenden Einschränkungen die sich aus den Annahmen der Randbedingungen ergeben. Betrachtet wird im Folgenden der linke Teil des im Bild 5.5 dargestellten Systems. Die Deckbleche am linken Rand sind vollständig fixiert. Auf die Deckbleche an diesem Rand des halben Systems wird eine konstanten Ringlast aufgebracht. Der rechte Rand enthält eine Symmetrierandbedingung. Die nichtlineare Strukturanalyse erfolgt lastgesteuert. Die Last wird in 30 gleichmäßigen Schritten bis auf den Wert von 288 MN gesteigert.

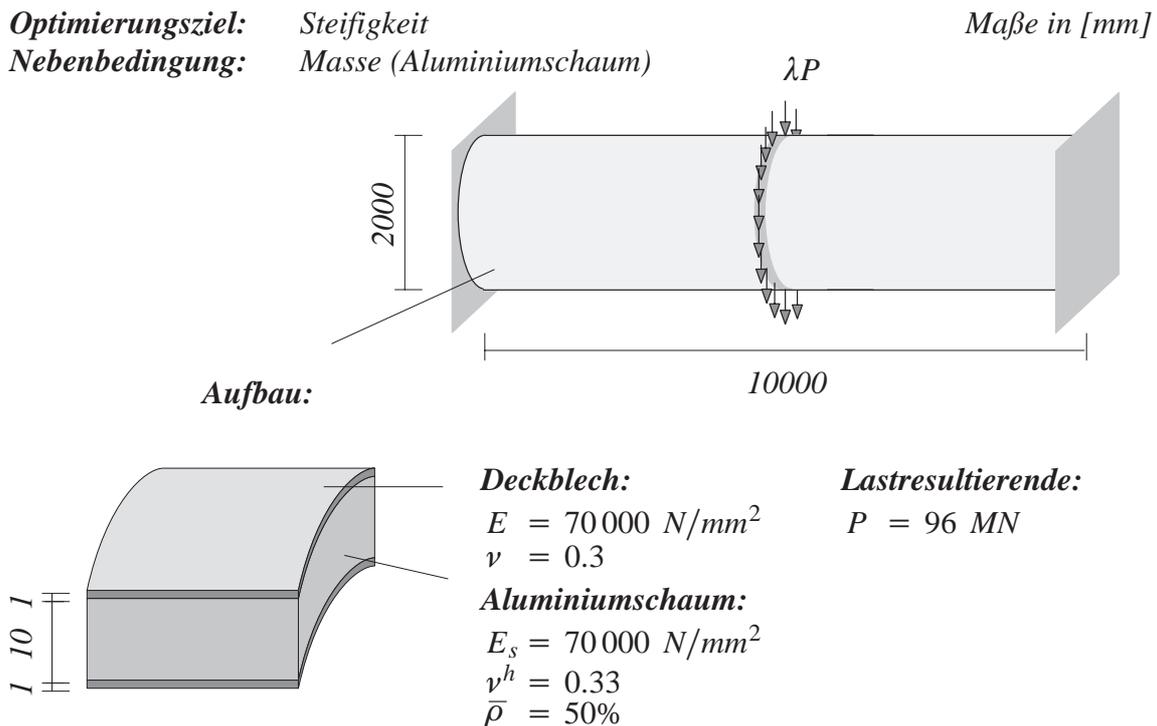


Bild 5.5: Zylindrisches Rohr mit Sandwichwandung: Geometrie und Materialparameter

Die Sensitivitäten wurden mit der adjungiert, diskreten Methode (vgl. Anhang 1.1a) effizient bestimmt. Bei Berücksichtigung linearen Materialverhaltens nach Gibson und Ashby (1999) werden die Ableitungen des Werkstoffensors anhand der explizit vorliegenden Beziehungen zwischen der Dichte des Aluminiumschaums und den Materialparametern für einen geschlossenporigen Aluminiumschaum analytisch ermittelt.

Sowohl in der Ausgangskonfiguration mit einer gleichmäßigen Dichteverteilung als auch im optimierten Ergebnis zeigen sich beidseitig dominante Beulen, die diagonal von links oben nach rechts unten verlaufen (Bild 5.6). Zur Erhöhung der Steifigkeit bildet sich aufgrund der Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik ein Zugband vom linken oberen Rand zum rechten unteren Rand aus. Bei Annahme einer linearen Kinematik erhält man typischerweise ein symmetrisches Bild der Dichteverteilung, bezogen auf die horizontale Symmetrieebene des Rohres. Bei einem vorgegebenen Lastniveau von 288 MN beträgt die maximale Verschiebung u (in Bild 5.6

ingezeichnet) für den Ausgangsentwurf mit einer gleichmäßigen Dichteverteilung 2.55 mm und für die optimierte Dichteverteilung 2.25 mm, die Verschiebung konnte also um ca. 12 % reduziert werden.

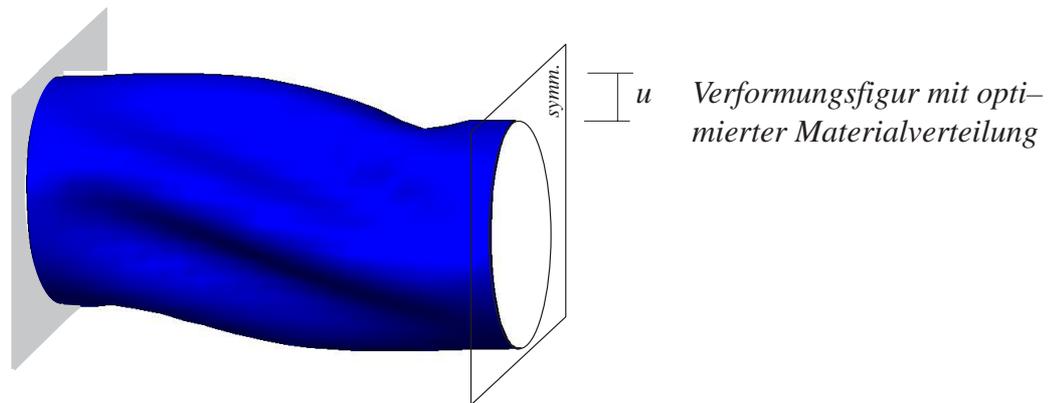


Bild 5.6: Vereinfachte Berechnung am halben System

Verglichen mit hier nicht weiter dargestellten Optimierungsversuchen, wird eine nicht unerhebliche Abhängigkeit der optimierten Materialverteilung vom vorgegebenen Lastniveau beobachtet. Für detailliertere Ausführungen wird an dieser Stelle auf die Arbeit von Kemmler (2004) verwiesen. Ziel weiterer Untersuchungen kann die gleichzeitige Berücksichtigung verschiedener Maximallastvorgaben in einer Mehrkriterienoptimierung zur Vermeidung der Generierung extrem problemangepasster Materialverteilungen, analog zum Beispiel in Kapitel 3.7.6, sein.

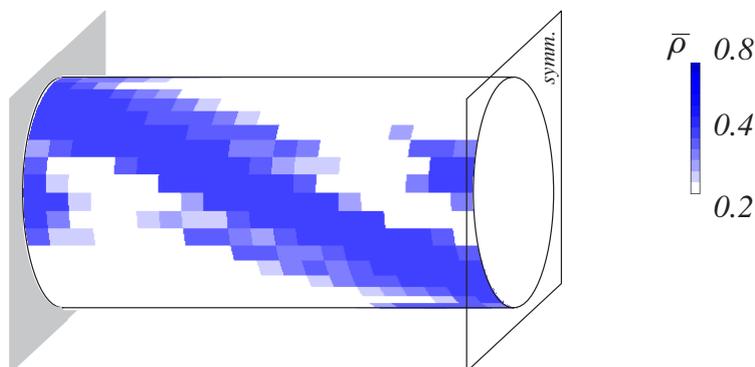


Bild 5.7: Optimierte Dichteverteilung des Aluminiumschaumkerns

Eine weitere Interpretationsmöglichkeit der optimierten Materialverteilung in Bild 5.7 ergibt sich durch die Anordnung des porösen Materials mit höherer Steifigkeit im Bereich der dominierenden Beule und damit eine Beeinflussung des Versagensverhaltens der Struktur. Diese Beobachtung motiviert die Untersuchung des Einflusses der Dichteverteilung des Metallschaums auf das Stabilitätsverhalten im folgenden Beispiel.

5.1.3 Erhöhung der kritischen Last

Polymerschäume und neuerdings auch Metallschäume eignen sich aufgrund ihrer hohen Steifigkeit bei geringem spezifischen Gewicht als Kern in extrem leichten Sandwichbauteilen. Betrachtet man ein Sandwichpanel, das auf Biegung beansprucht wird, so übertragen die Deckbleche die Zug- und Druckspannungen. Der im Vergleich zu den Deckblechen leichte Schaum übernimmt die Schubkräfte und verhindert das lokale Beulen des Deckblechs auf der Druckseite. Der Einfluß der Deckblechdicke und des Schaumkernmaterials auf das Versagensverhalten von Sandwichblechen mit Aluminiumschaumfüllung wird in Chen et al. (2001) und Harte et al. (2000) untersucht. Sie verwenden die Ergebnisse, um einen möglichst optimalen Aufbau des Sandwichbauteils für einen bestimmten Lastfall zu bestimmen. Vor allem das Energieabsorptionsvermögen metallschaumgefüllter Hohlprofile ist Gegenstand aktueller Untersuchungen (Santosa et al. (2000, 2001), Seitzberger et al. (1999)). Diese Bauteile können zum Beispiel in der Fahrzeugindustrie als Schutzelemente für die Insassen eingesetzt werden. Der Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit auf das Verformungsverhalten und das Energieabsorptionsvermögen geschlossenerporiger Schäume wird in Dannemann (2000) experimentell untersucht.

Dünnwandige Sandwichbauteile können durch langwelliges d.h. globales Beulen versagen. Bis zum Erreichen der kritischen Beullast treten jedoch nur sehr kleine Verzerrungen auf. Die Beullasten lassen sich für die Beispiele mit einer linearen Eigenwertanalyse abschätzen. Das Optimierungsziel besteht dann in der Maximierung des kritischen Lastfaktors, der mit der linearen Eigenwertanalyse abgeschätzt wird. Dickwandige Sandwichbauteile oder Bauteile versagen eher durch lokale Beulen, die mit großen lokalen Verformungen und Verzerrungen im zellularen Material einhergehen. Darüberhinaus ist auch ein Versagen durch Knittern der Deckbleche möglich. In Bild 5.8 sind die in dieser Arbeit untersuchten Versagensformen dargestellt.

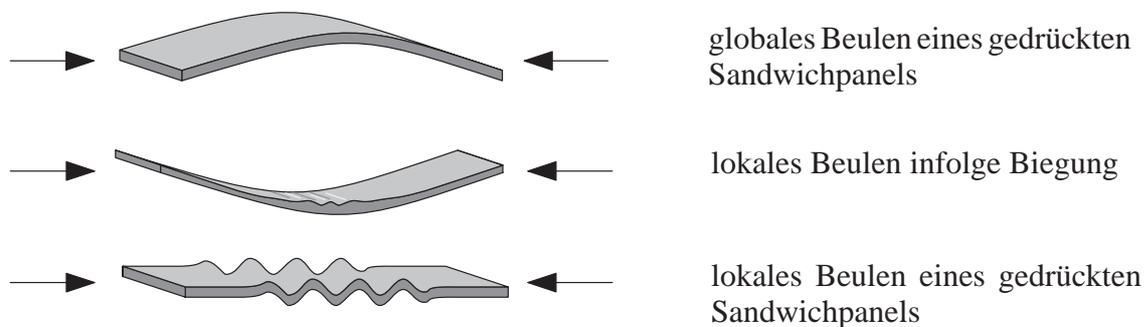


Bild 5.8: Versagen eines Sandwichpanels durch Beulen

Die Berücksichtigung der kritischen Beullast kann im Optimierungsprozess bezüglich des nichtlinearen Vorbeulverhaltens mit einer begleitenden Eigenwertanalyse innerhalb einer nichtlinearen Berechnung erfolgen. Weiterhin ist die Anwendung von verschiedenen Kriterien zur lokalen Erhöhung der Steifigkeit denkbar. Aufgrund der Erfahrungen anderer Autoren mit Entwürfen von Aussteifungen in Rahmentragwerken mit der klassischen Topologieoptimierung sind die Verfahren der Strukturoptimierung gut geeignet, steifen und weichen Schaum so innerhalb des Sandwichbauteils zu verteilen, dass eine Aussteifung eines in den äußeren Abmessungen vorgegebenen Sandwichbauteils so ausgeführt wird, dass ein frühzeitiges Beulen vermieden werden

kann. Probleme durch lokales Beulen in hochporösen Bereichen im Laufe des Optimierungsprozesses sind nicht zu erwarten, da derartige zellulare Materialien in diesem Bereich geringer Dichte nicht herstellbar sind. Die untere Schranke der Dichte als Designparameter ist damit deutlich höher als in den klassischen Topologieoptimierungsaufgaben mit dem Ziel einer klaren 0/1 Verteilung. Allerdings ist eine Vertauschung der maßgebenden Eigenformen innerhalb des Optimierungsprozesses wahrscheinlich. Dies kann mit dem kurzwelligen Beulmoden mit sehr dicht beieinander liegenden kritischen Versagenslasten veranschaulicht werden. Dieser Problematik ist für dicht beieinander liegende Beullasten langwelliger Moden noch relativ leicht durch die Berücksichtigung mehrerer Eigenwerte innerhalb der Optimierung zu begegnen. Für die kurzwelligen Moden mit einer großen Bandbreite unterschiedlicher Beulformen bei nahezu gleicher Laststeigerungsstufe muss auf andere Zielkriterien, wie z.B. integrale Energiekriterien ausgewichen werden. Der Problematik mehrerer Eigenwerte mit gleichem kritischen Laststeigerungsfaktor kann durch die Modellierung der Lagerbedingungen mit der Einschränkung der zulässigen Deformation begegnet werden. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt. Zusammenfassend kann man bei genauer Kenntnis des Versagensverhaltens durchaus das globale Stabilitätsverhalten mit der Maximierung der kritischen Beullast verbessern. Universeller sind allerdings Steifigkeitskriterien, die mit begleitenden Beulanalysen kombiniert werden.

Im vorangegangenen Beispiel in Bild 5.7 erkennt man die Anordnung des porösen Materials mit höherer Steifigkeit im Bereich der dominierenden Beule und die damit verbundene Beeinflussung des Versagensverhaltens der Struktur. Diese Beobachtung motiviert die Untersuchung des Einflusses der Dichteverteilung des Metallschaums auf das Stabilitätsverhalten in den folgenden Beispielen. Im ersten Fall wird der Einfluss der Dichteverteilung auf das globale Stabilitätsverhalten eines aluminiumschaumgefüllten Hohlprofils mit rechteckigem Querschnitt untersucht (Bild 5.9).

Optimierungsziel: Maximale Grenzlast Maße in [mm]
Nebenbedingung: Masse (Aluminiumschaum)

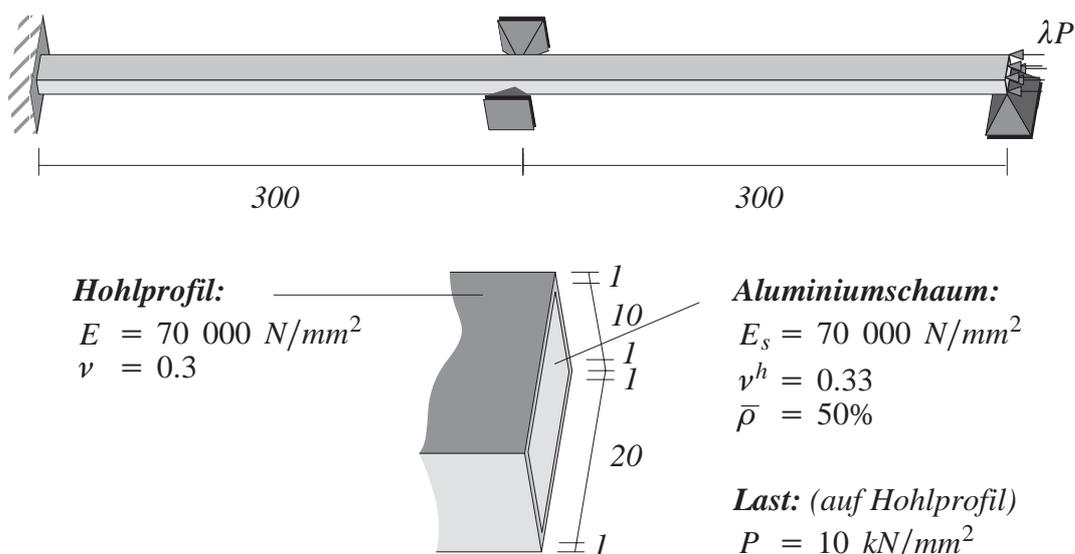


Bild 5.9: Aluminiumschaumgefülltes Hohlprofil: Geometrie, Materialdaten und Lasten

Die Zielsetzung ist die Maximierung der kleinsten kritischen Last bei vorgegebener Masse im Entwurfsraum. Für das Material des Hohlprofils wurde Aluminium gewählt. Wie im Bild 5.9 dargestellt, ist das Profil am linken Ende starr gelagert. In der Mitte wird ein Ausweichen senkrecht zur Seite mit der geringeren Höhe durch eine entsprechende Lagerung verhindert. Auf der Seite der Lasteinleitung erfolgt die Lagerung verschieblich in Stablängsrichtung bei freier Verdrehbarkeit. Die Flächenlast auf den rechten Rand des Hohlprofils ist mit 10 kN/mm^2 vorgegeben. Für das mit 2560 20-knotigen Hexaederelementen diskretisierte System werden die kritische Grenzlast und die entsprechenden Eigenformen (Bild 5.10) mit einem Eigenwertlöser bei einer gleichmäßigen Metallschaumfüllung und einer relativen Dichte von 50% bestimmt.

Mit den im Bild 5.9 angegebenen Materialparametern wurde nun eine Optimierung der Dichteverteilung für eine Füllung des Hohlprofils mit einem geschlossenporigen Aluminiumschaum durchgeführt. Die Sensitivitäten für die Maximierung der kleinsten kritischen Last wurden entsprechend den Ausführungen im Anhang bestimmt.

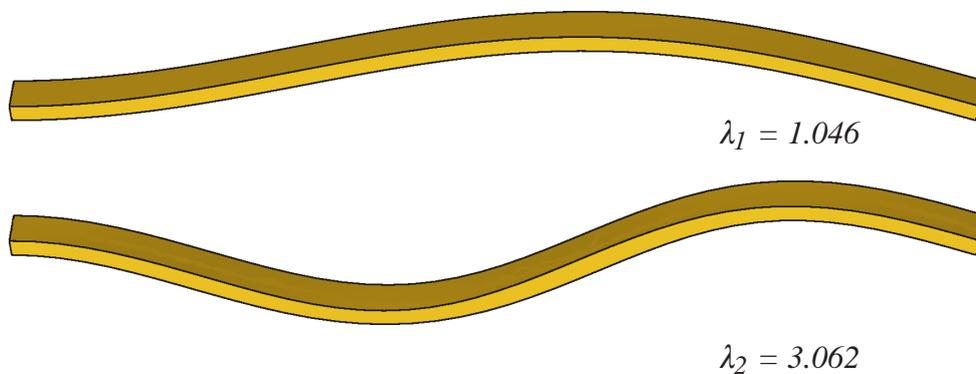


Bild 5.10: Eigenformen und Eigenwerte

Erwartungsgemäß erfolgt eine Konzentration des Metallschaums mit höherer Dichte und Steifigkeit im Bereich der Einspannung und im Bereich der größten Auslenkung der ersten Eigenform (Bild 5.11), also in den Bereichen mit der größten Krümmung. Die optimierte Dichteverteilung dient im Wesentlichen der Austeifung und weniger der Lastabtragung in Längsrichtung des Profils. Ein Vergleich mit der kleinsten kritischen Last des Ausgangssystems mit einer homogenen Dichteverteilung ergibt eine Erhöhung der kritischen Last um ca. 40 %.

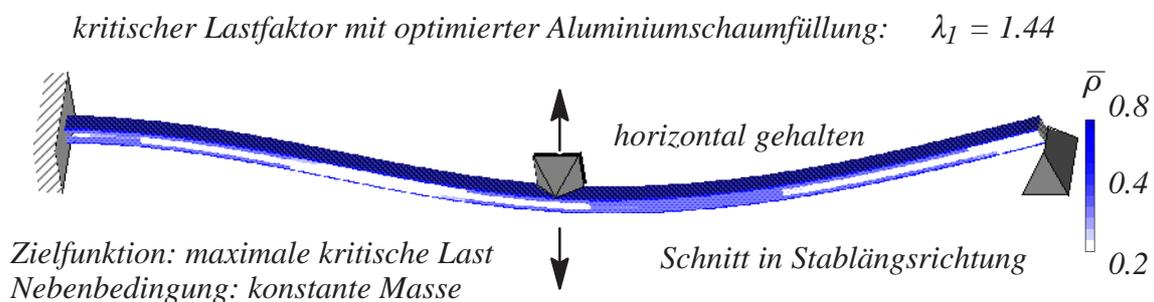


Bild 5.11: Erste Eigenform mit optimierter Dichteverteilung der Aluminiumschaumfüllung

Ein Wechsel der Reihenfolge der Eigenwerte wurde nicht beobachtet. Darüber hinaus traten lediglich einfache Eigenwerte auf, so dass die im Anhang A2.1b angegebene Gleichung (10.27) zur analytischen Berechnung der Sensitivitäten für diese Optimierungsaufgabe gilt.

Der Einfluss der Dichteverteilung auf das globale Beulverhalten einer Sandwichplatte ist Gegenstand des weiteren Beispiels. Das System und der Aufbau der Sandwichplatte sind in Bild 5.12 dargestellt. Für die Deckbleche wurde wie in den vorangegangenen Beispielen ein Aluminiumblech gewählt. Der Aluminiumschaumkern stellt den Entwurfsraum für die Bestimmung der Dichteverteilung dar. Die angegebene Belastung wirkt auf die Deckbleche. Der Aluminiumschaumkern selbst ist weder gelagert noch belastet.

Optimierungsziel: Maximale Grenzlast Maße in [mm]
Nebenbedingung: Masse (Aluminiumschaum)

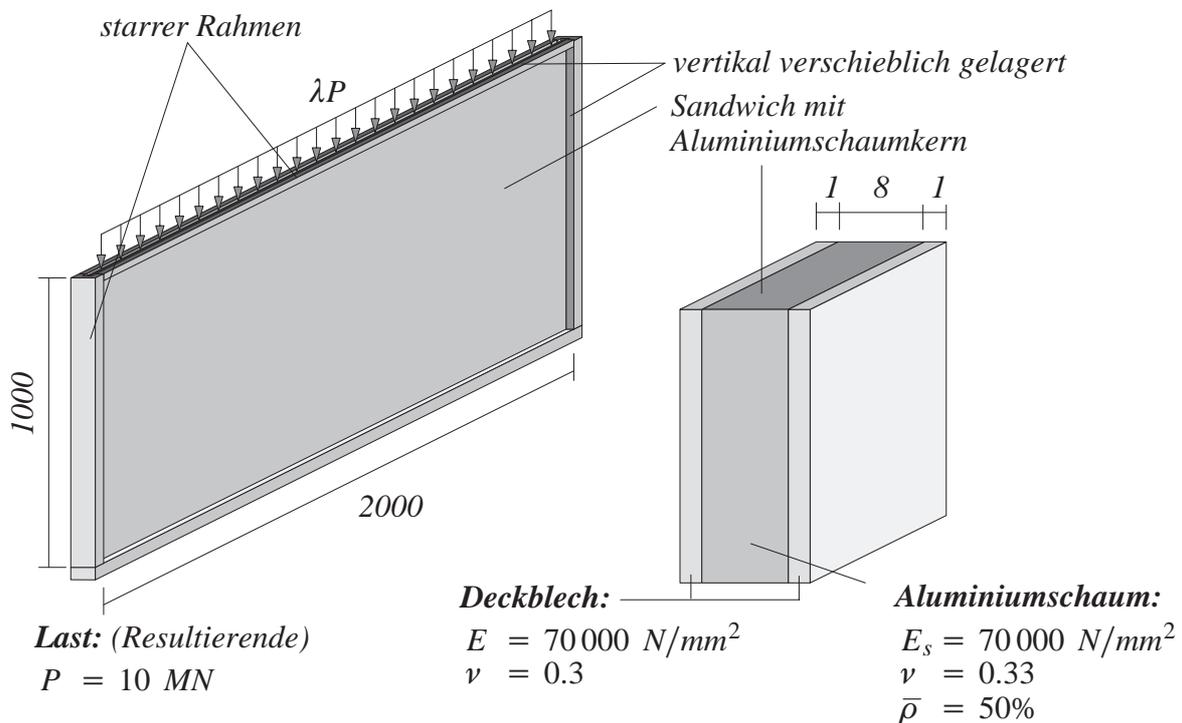


Bild 5.12: Aluminiumschaumgefülltes Hohlprofil: Geometrie, Materialdaten und Lasten

Bei einem parallel zur Sandwichmittelfläche gedrückten Bauteil können sowohl beide Deckbleche lokales Beulen aufweisen, aber auch das gesamte Bauteil kann durch langwelliges globales Beulen versagen. Die Beulform, mit der das Sandwich versagt, hängt neben den Abmessungen des Bauteils und den Dicken der Deckbleche und des Schaumkerns auch von den verwendeten Materialien ab. Ein steifer Schaumkern versagt in der Regel eher lokal als ein weicher Kern. Die kritische Last für das globale Beulen steigt aber mit zunehmender Gesamtsteifigkeit.

Am unteren Rand sind die Deckbleche der Sandwichplatte starr eingespannt, am linken und rechten Rand vertikal verschieblich gelagert. Es wurden zwei unterschiedliche Systeme untersucht. Die erste Platte ist am oberen belasteten Rand vertikal verschieblich gelagert. Beim zweiten System kann sich der obere Rand frei verformen. Die entsprechenden statischen Systeme werden in Bild 5.13 noch einmal verdeutlicht.

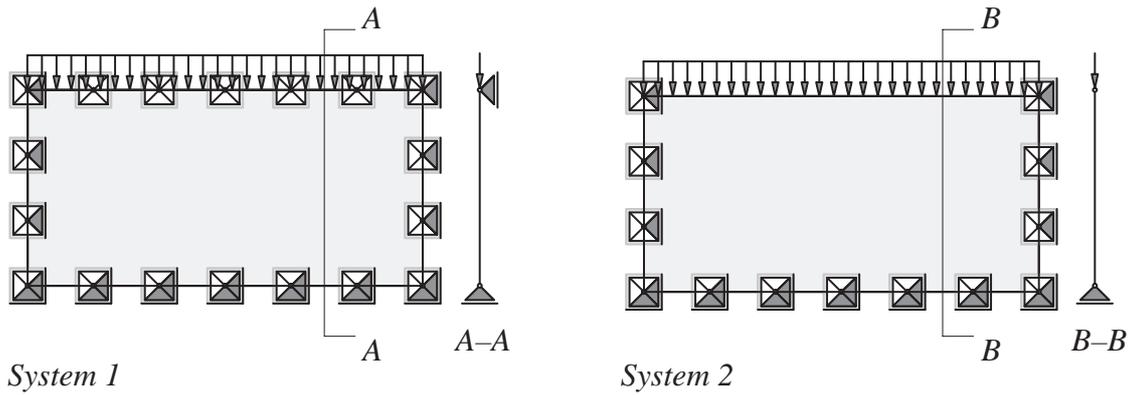


Bild 5.13: Statisches System

Diskretisiert wurde die Sandwichstruktur mit 2400 Hexaederelementen. Mit einer Eigenwertuntersuchung wurden für die Ausgangskonfiguration mit einer homogenen Dichteverteilung des Aluminiumschaumkerns die zwei kleinsten Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenformen bestimmt. Die gleichmäßige Dichte des Aluminiumschaums beträgt 50%. Der Einfluss der unterschiedlichen Lagerbedingungen des oberen Randes wird in Bild 5.14 verdeutlicht.

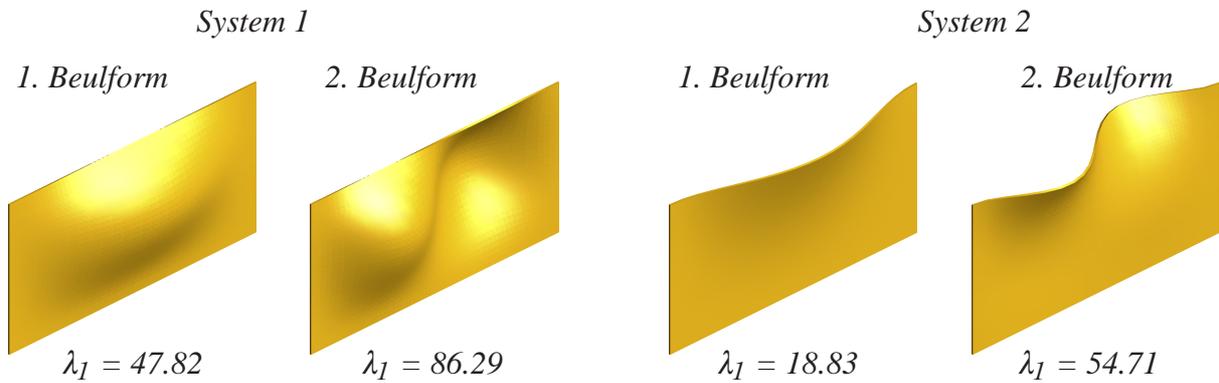


Bild 5.14: Eigenformen und Eigenwerte mit gleichmäßiger Dichteverteilung

Mit der durchgeführten Optimierung der Dichteverteilung wird für das System mit dem freien oberen Rand eine Erhöhung des Lastfaktors um 17% erreicht. Für das Beispiel mit dem gelagerten Rand ergibt sich eine um 26.5% höhere kritische Last. Vergleicht man die Beulformen in Bild 5.14, die mit denen der optimierten Sandwichplatten (Bild 5.15) übereinstimmen,

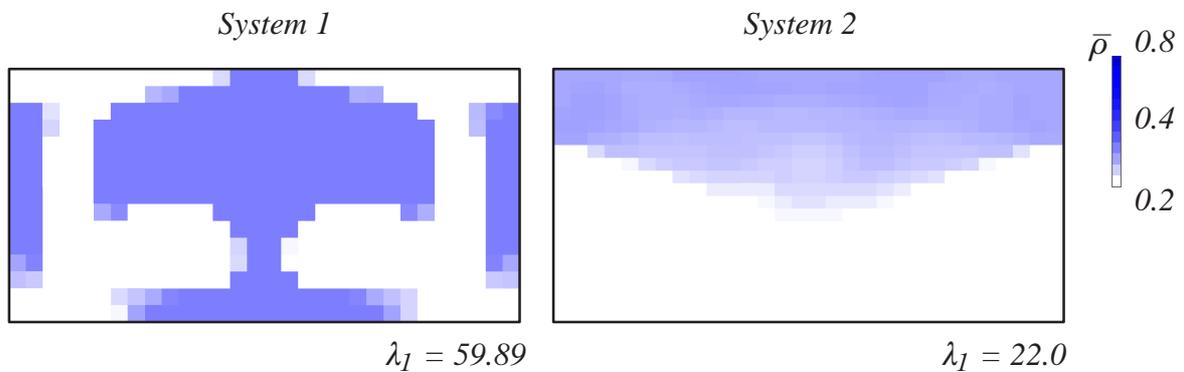


Bild 5.15: Optimierte Dichteverteilung der Aluminiumschaumfüllung

erkennt man, wie in dem vorherigen Beispiel eine Konzentration des Aluminiumschaums mit höherer Steifigkeit im Bereich der sich ausbildenden Beulen. Zur Verbesserung des Stabilitätsverhaltens wird wiederum die aussteifende Wirkung der Aluminiumschaumfüllung genutzt. Im Gegensatz zu dem System mit dem freien Rand, in dem Schaum mit größerer Dichte hauptsächlich am oberen Rand angelagert wird und damit quasi zu einer Verstärkung des freien Randes beiträgt, wird für das System mit dem gehaltenen oberen Rand zum einen eine Verstärkung der Einspannung an den seitlichen und dem unteren Rand erzielt und zum anderen eine vertikale Stützung in Plattenmitte generiert. Darüber hinaus erfolgt eine Materialkonzentration im stärker gekrümmten Bereich und bewirkt damit eine zusätzliche Steifigkeitserhöhung.

Die Auswahl der gezeigten Beispiele verdeutlicht die universelle Einsatzmöglichkeit der materiellen Topologieoptimierung zur Bestimmung der Dichteverteilung metallischer Schäume mit verschiedenen mechanischen Zielsetzungen. Betrachtet wurden vorwiegend dünnwandige Sandwichstrukturen, deren Verhalten durch das elastische Materialverhalten bestimmt sind. Für die Optimierung der Materialverteilung dreidimensionaler 'dickwandiger' Bauteile oder metallschaumgefüllter Hohlprofile ist allerdings der Einsatz nichtlinearer Materialformulierungen erforderlich.

5.1.4 Untersuchung des lokalen und des globalen Stabilitätsversagens mit PU-Schaum

Die bisher gemachten Untersuchungen mit einem weitgehend linearen Vorbeulverhalten sind anwendbar auf dünnwandige Tragwerke, die keine nennenswerten Verformungen bis zum Eintreten des langwelligen Beulversagens haben. Neben dem globalen bzw. langwelligen Beulen des Sandwiches sind aber noch andere Versagensszenarien möglich.

Dabei kommt der Art des Verbundes zwischen Deckblech und Schaumkern wesentliche Bedeutung zu. Versagt der Verbund, kann der Schaumkern ein lokalisiertes Versagen der Deckbleche nicht mehr verhindern und es bilden sich kleinere lokale Beulmoden aus (vgl. Vonach et al. (2000)). Wird die Delamination ausreichend behindert, kann sich dennoch in Abhängigkeit vom verwendeten Schaumkern ein lokales Beulen einstellen.

Aufgrund eines steiferen Schaumes kann ein derartiges Sandwichpanel bei gleichen Verformungen höher belastet werden als ein Sandwichpanel mit einem weicherem Schaumkern. Ein schlagartiges Nachgeben des Schaumkerns führt nun ebenfalls zu einem lokalen Beulen. Ebenso ist eine Kombination der beschriebenen Phänomene möglich.

Die Motivation für die Untersuchung des lokalen Beulens resultiert aus den experimentellen Untersuchungen Ahmer Wadees (1999) mit Sandwich-Panelen mit Stahldeckschichten und Polymerschaumkern, wie sie im Bild 5.16 dargestellt sind. Die Experimente wurden an verschiedenen Sandwichpanelen mit unterschiedlichen Abmessungen und weichen und steiferen Schaumkernen durchgeführt. Untersucht wurden der Einfluss der Dicke der Deckbleche, die Steifigkeit und die Dicke des Schaumkerns.

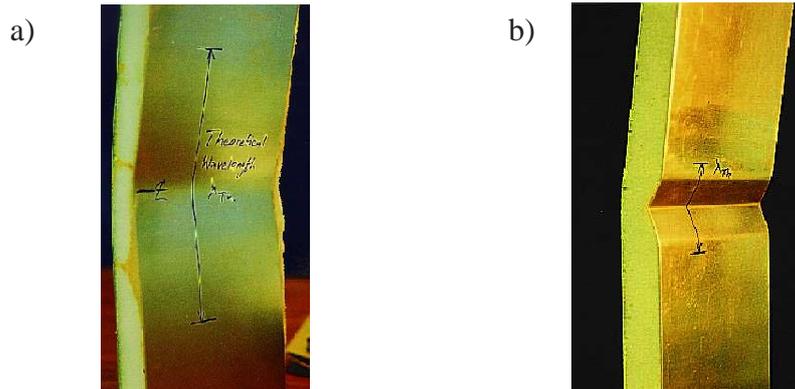


Bild 5.16: Globales und lokalisiertes Beulversagen eines Sandwichpanels mit PU-Schaumkern (Ahmer Wadee 1999)

Das linke Bild zeigt das Versagen infolge globalen Beulens, das sich typischerweise bei den Proben mit einem weichen Schaumkern einstellt. Das lokale Beulversagen im rechten Bild ist auf die höhere Steifigkeit des verwendeten Schaumkerns zurückzuführen. In beiden Fällen wurde das Versagen durch eine kurzzeitig aufgebrachte, relativ kleine Last senkrecht zur Sandwichmitelfläche initiiert.

Im Folgenden werden die Ergebnisse numerischer Untersuchungen mit derartigen Sandwichpanelen und die Ergebnisse der Anpassung der Dichteverteilung mit Hilfe der materiellen Topologieoptimierung vorgestellt. Für diese Untersuchungen wurden aus der Serie der von Wadee untersuchten Sandwichstrukturen das in Bild 5.17 dargestellte Panel ausgewählt und verschiedene

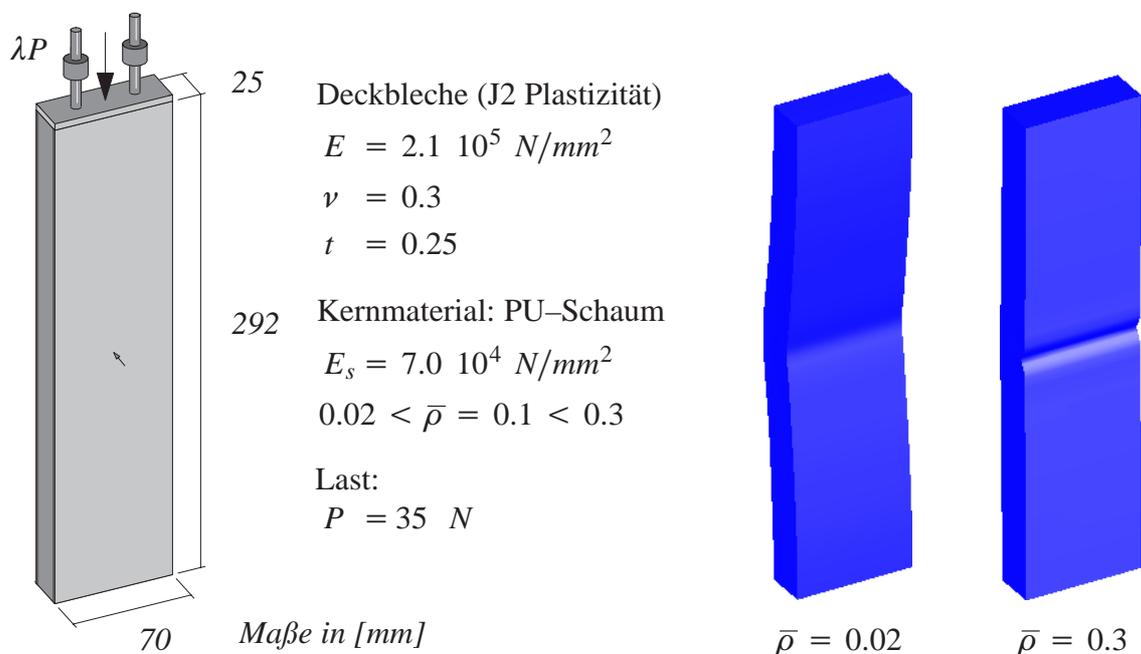


Bild 5.17: Nichtlineare Analyse eines Sandwichpanels mit PU-Kern

geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen mit Schaumkernen unterschiedlicher Steifigkeit durchgeführt. Die Abmessungen des Sandwichpanels sind in Bild 5.17 angegeben. Gegenüber den experimentellen Untersuchungen wurde die Lagerung zugunsten einer stabileren numerischen Analyse modifiziert. Das an der oberen Seite eingezeichnete Lager ist vertikal verschiebbar, die horizontale Bewegung und die Verdrehung ist aber behindert. Die Materialparameter und die aufgebrachte Last sind ebenfalls angegeben. Das Werkstoffverhalten der Deckbleche wird mit einem J2-Plastizitätsmodell für finite Verformungen modelliert. Die Parameter für das hyperelastische Materialmodell für den PU-Schaum Gleichung (4.24) und die funktionalen Relationen zur Dichte (Bild 4.4) wurden der Veröffentlichung von Jemiolo und Turteltaub (2000) entnommen. Auf eine Anpassung an die experimentellen Untersuchungen Wadees wurde verzichtet, da es hier um die Einsatzmöglichkeiten der Strukturoptimierung geht. Das Panel ist mit 912 Hexaederelementen mit quadratischen Formfunktionen diskretisiert.

Für die Interpretation der durchgeführten Optimierung wurden zwei Berechnungen mit homogenen Schaumkernen minimaler und maximaler Dichte durchgeführt. Die deformierten Systeme der zwei Beispiele sind im Bild 5.17 rechts dargestellt. Der Vergleich mit dem Experiment, Bild 5.16, zeigt, dass das Deformationsverhalten sehr gut approximiert wird. Für die Struktur mit dem weichen Schaumkern stellt sich das auch in den Versuchen beobachtete globale Beulversagen ein. Ebenso zeigt das Panel mit dem steiferen Kern das lokale Beulversagen.

Das Konzept der materiellen Topologieoptimierung wurde nun eingesetzt, um dessen Einsatzmöglichkeiten zur Beeinflussung des Tragverhaltens von diesem Sandwichpanel zu untersuchen. Der Wertebereich der Entwurfsvariablen wurde nach oben mit dem Wert der Dichte des steifen Schaumes und nach unten mit dem Wert der Dichte des weichen Schaumes in Bild 5.17 begrenzt.

Die Optimierung der Dichteverteilung des PU-Schaumkerns führt in Abhängigkeit des gewählten Steifigkeitskriteriums zu sehr unterschiedlichen Optimierungsergebnissen. Es wurden die Steifigkeitskriterien 'Minimierung der Verzerrungsenergie' und 'Maximierung der End-Compliance' untersucht. Das Diagramm in Bild 5.18 zeigt das Deformationsverhalten des optimierten Sandwichpanels im Vergleich zur Ausgangssituation der Optimierung mit dem homogenen Schaumkern.

Die schwarze Kurve zeigt das Verformungsverhalten des Panels mit der homogenen relativen Dichteverteilung von 0.1. Dieser Wert befindet sich zwischen den beiden Grenzwerten von 0.02 und 0.3 für $\bar{\rho}$ der zuvor untersuchten Beispiele. Man erkennt nach dem anfänglich linearen Verlauf die Auswirkung des lokalen Beulens und die weitere weitgehend lineare Zunahme der Last. Ab einem bestimmten Punkt ist keine weitere Last aufnehmbar und das Panel zeigt nach dem Ausbilden einer langwelligen Beule leicht entfestigendes Strukturverhalten.

Zielsetzung der durchgeführten Optimierung war die Verbesserung des pre- und postkritischen Verhaltens durch die Veränderung der Dichteverteilung im Schaumkern. Aufgrund des nichtlinearen Verhaltens wurden die genannten Steifigkeitskriterien unter Einbeziehung einer nichtlinearen Kinematik angewendet. Es wurden in einer Serie von Optimierungen im Sinne der Zielfunktionen für vorgegebene Lastniveaus verbesserte Dichteverteilungen bestimmt. Das

Konstanthalten der Masse im Entwurfsraum wurde mit einer entsprechenden Nebenbedingung im Optimierungsprozess eingebracht.

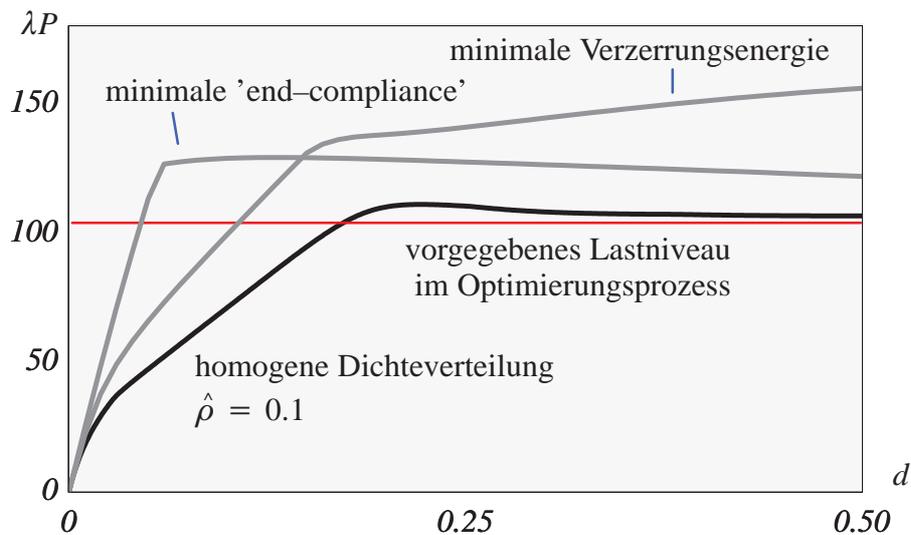


Bild 5.18: Last-Verschiebungsdiagramme – homogene und optimierte Dichteverteilung

Die beiden grauen Kurven des im Bild 5.18 dargestellten Diagramms zeigen das Deformationsverhalten für die zwei verfolgten Optimierungsziele. Das vorgegebene Lastniveau ist mit der horizontalen Linie eingezeichnet. Die beiden Kurven verdeutlichen verschiedene Charakteristika der durchgeführten Optimierungen. Wie bereits in Kapitel 3.4 ausgeführt, zeichnen sich die beiden Zielkriterien dadurch aus, dass sie das mechanische Verhalten der gesamten Struktur in einem integralen Sinn erfassen. Die Optimierungsergebnisse, die mit den beiden integralen Zielkriterien 'Minimierung der end-compliance' und die 'Minimierung der Verzerrungsenergie', unterscheiden sich im linearen Bereich nur unwesentlich, können jedoch bei Aktivierung der Verzerrungsenergie nur sinnvoll anhand ihrer nichtlinearen Strukturantwort in der optimierten Konfiguration interpretiert werden. Um das generierte Optimierungsergebnis zu interpretieren, wird das prinzipiell unterschiedliche Verhalten der beiden Zielfunktionen mit den beiden Diagrammen im Bild 5.19 noch einmal veranschaulicht.

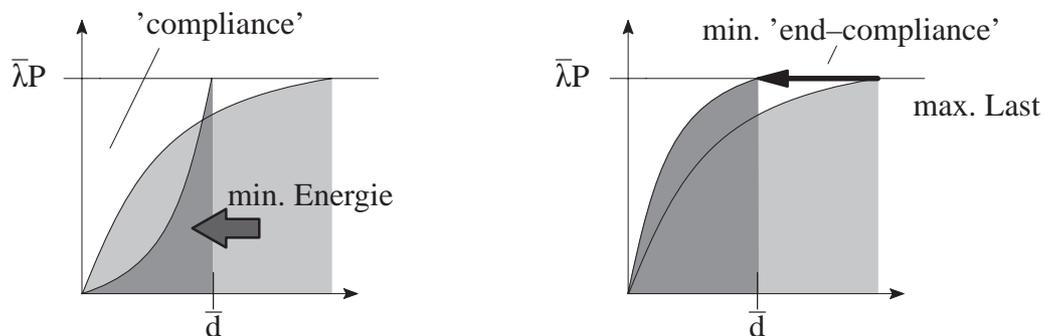


Bild 5.19: Vergleich 'min. Verzerrungsenergie' und 'min. end-compliance'

Für ein vorgegebenes Lastniveau werden für das Optimierungsziel 'end-compliance' die Verschiebungen für dieses Niveau explizit minimiert. Das qualitative Ergebnis ist im rechten Bild 5.19 dargestellt und entspricht den durchgeführten Optimierungen. Die Anpassung der Struktur an das Lastniveau führt zu dem in Bild 5.18 dargestellten schlagartigen Versagen, da jenseits des Lastniveaus keine Reserven zur weiteren Aufnahme weiterer Lasten aktiviert werden können. Die Minimierung der gespeicherten Verzerrungsenergie führt zwar auch zu einer Minimierung der Verschiebungen für dieses Lastniveau, aber auch dazu, dass sich die Struktur "der Belastung entzieht", was sich bei der optimierten Struktur mit deutlich größeren Verschiebungen unterhalb des Lastniveaus ausdrückt.

Die Last-Verschiebungs-Kurve der optimierten Sandwichpaneel zeigt aber, dass die Materialverteilung für die Minimierung der Verzerrungsenergie zwar zu einer geringeren Anfangssteifigkeit vor Erreichen der vorgeschriebenen Maximallast führt, aber auch zu einer weiteren Laststeigerung bei der weitergehenden Verformung jenseits des vorgegebenen Lastniveaus. Die Aktivierung der Reserven der optimierten Struktur im nachkritischen Bereich ist für viele Entwurfsaufgaben erforderlich, da das schlagartige Versagen vermieden wird. Kann dagegen ausgeschlossen werden, dass ein derartig hohes Lastniveau erreicht wird, ist der Struktur, die mit dem Ziel minimaler 'end-compliance' optimiert wurde, aufgrund der höheren Steifigkeit zu Beginn der Verformungsgeschichte der Vorzug zu geben.

Anmerkung: Entsprechend der ursprünglichen Zielsetzung führen beide 'Steifigkeitskriterien' zu Strukturen höherer Steifigkeit, allerdings führt das Verlassen des linearen Bereichs im Optimierungsprozess dazu, dass das Optimierungsziel Steifigkeit an Eindeutigkeit verliert. Eine weitere wichtige Anmerkung ist, dass aufgrund der Vielzahl, der im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen, diese verallgemeinerten Schlussfolgerungen getroffen werden können. Die Optimierung wurde aber jeweils für ein bestimmtes Lastniveau durchgeführt und die Ergebnisse sind deshalb anhand der Zielkriterien auch nur sinnvoll bis zum Erreichen dieses Niveaus interpretierbar. Der Bereich nach diesem Niveau entzieht sich der Kontrolle durch den Optimierungsprozess. Um eine bessere Kontrolle des Strukturverhaltens auch in diesem Bereich zu bekommen, wird im nachstehenden Beispiel eine andere Optimierungsstrategie verfolgt.

5.2 Verbesserung des Energieabsorptionsvermögens

Kemmler (2004) vergleicht in seiner Arbeit verschiedene Energiekriterien bei Berücksichtigung nichtlinearer Kinematik. Er zeigt, dass jedes Optimierungsergebnis entsprechend seiner Zielsetzung optimal ist. Für den Entwurf einer leichten und steifen Brückenkonstruktion reichen lineare Annahmen und die Auswahl eines Entwurfskriteriums erfolgt in der Regel nach Kriterien der Effizienz unter Berücksichtigung der Anzahl der Entwurfsvariablen und der Anzahl der Entwurfskriterien und Nebenbedingungen in der Optimierungsaufgabe.

Das primäre Ziel beim Entwurf leichter und steifer Konstruktionen ist in der Regel die Minimierung von Verschiebungen durch die Erhöhung der Steifigkeit. Allerdings hat sich gezeigt, dass eine solche Optimierung Strukturen generiert, die zu großen Deformationen neigen. Bereiche mit wenig Material können sich stark verformen, ohne dass viel Energie aufgewendet wird. An-

dere Bereiche mit viel bzw. steiferen Material entziehen sich einer Verformung. In der Regel sind so optimierte Konstruktionen für reale Tragwerke völlig ungeeignet, es sei denn, dass die Verformungsgeschichte stärker gewichtet wird, als die Art der Verformung. So ist es zum Beispiel bei einem Federelement relativ unwichtig, wie sich die Feder verformt: Im Vordergrund steht die aufnehmbare Kraft in verschiedenen Verformungszuständen.

Darüber hinaus macht die Erhöhung der Steifigkeit in den Bereichen potentieller Beulen einen Sinn, um den Zeitpunkt des ersten Beulens so weit wie möglich hinauszuschieben.

Für elastische Strukturbauteile, die planmäßig großen Verformungen unterworfen werden, wie zum Beispiel federnde Elemente, ist der Wahl des Energiekriteriums besondere Beachtung zu schenken. Wie in Kapitel 3.4 bereits ausgeführt, können mit unterschiedlichen Steifigkeitskriterien unterschiedliche Abschnitte der Verformungsgeschichte beeinflusst werden. So ist es möglich, die Steifigkeit einer Struktur für die anfängliche Verformung zu erhöhen und gleichzeitig die Steifigkeit am Ende der Verformungsgeschichte zu minimieren.

Zellulare Materialien mit einem elastischen Verformungsverhalten, wie zum Beispiel Schaumstoffteile die im Sportbereich zum Schutz von Personen eingesetzt werden, werden normalerweise nach ihrem Raumgewicht bzw. der Dichte ausgewählt. Aufgrund des direkten Zusammenhangs zwischen der Dichte und den mechanischen Eigenschaften zellularer Materialien kann aber neben der trivialen Aussage, dass sich ein schwerer Schaum steifer verhält und ein leichter Schaum weicher, auch die absorbierte Energie im Falle eines Stoßvorgangs wichtig sein.

Mit Hilfe der Strukturoptimierung lässt sich die Dichteverteilung so steuern, dass ein beliebiges Deformationsverhalten auch bei großen Deformationen zu erzielen ist. Dies wird im Folgenden anhand eines kleinen Beispiels gezeigt.

Um einen maßgeblichen Einfluss der Art des Strukturbauteils auf das Deformationsverhalten einer zellularen Probe auszuschließen, wird im folgenden Beispiel der in Bild 5.20 abgebildete Polymerschaumwürfel untersucht.

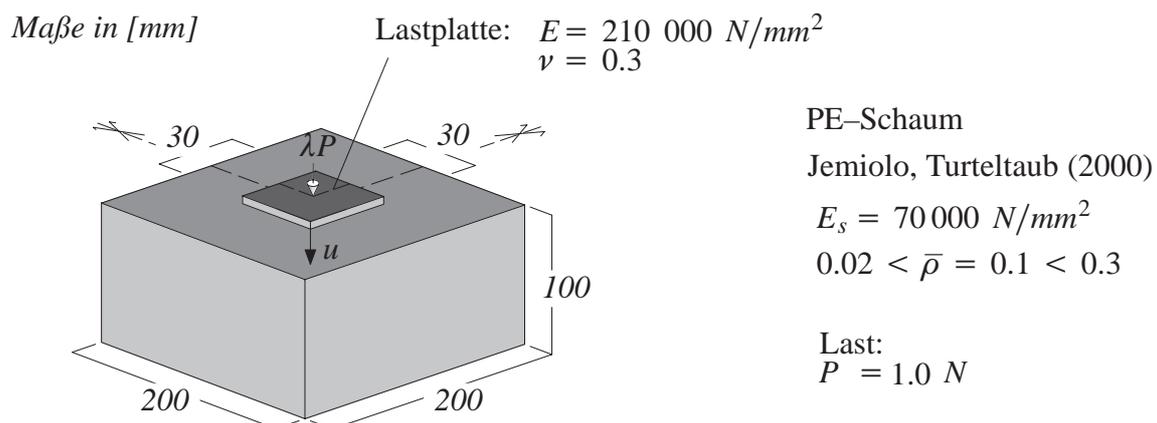


Bild 5.20: PE-Schaum-Testwürfel: Geometrie, Belastung, Materialdaten

Das Bild 5.20 zeigt den Würfel mit den angegebenen Abmessungen und den Werten für die Materialparameter des wiederum eingesetzten hyperelastischen Materials mit einer Lastplatte auf der Oberseite. Die Unterseite des Quaders ist vertikal gelagert. Aufgrund der Symmetrie wurden

die Berechnungen am Viertel-System durchgeführt und die Schnittflächen entsprechend der Symmetriebedingung horizontal gelagert. Die Lastplatte und der Polymerschamwürfel sind mit 890 Kontinuumelementen mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisiert.

Ebenso wie im vorhergehenden Beispiel wurde eine lastkontrollierte geometrisch und materiell nichtlineare Strukturanalyse mit einer homogenen Dichteverteilung und einer relativen Dichte $\bar{\rho}$ von 0.1 und den in Bild 5.20 angegebenen Grenzen durchgeführt. Bild 5.21 zeigt die unskalierte Deformationsfigur für die aufgebrachte Last.

Wiederum wurde die jeweilige Dichteverteilung durch Optimierung mit den Optimierungszielen 'Minimierung der Verzerrungsenergie' und 'Minimierung der end-compliance' bestimmt. Die in der mittleren und rechten Abbildung in Bild 5.21 dargestellten deformierten Polymerschamwürfel zeigen den prinzipiellen Unterschied der Optimierungsergebnisse. Für beide Entwurfskriterien wird zur Erhöhung der Steifigkeit Schaum mit höherer Dichte und Steifigkeit direkt unter der Lastplatte angeordnet. Allerdings geht im Fall der 'Minimierung der end-compliance' der Bereich mit dem Schaum höherer Dichte bis unter die Lastplatte. Die 'Minimierung der Verzerrungsenergie' zeigt dagegen einen kleinen Bereich mit Polymerscham geringerer Dichte direkt unter der Lastplatte. Dies bestätigen die im vorigen Beispiel gemachten Ausführungen, dass sich bei Anwendung des letzteren Entwurfskriteriums die Struktur mit größeren Deformationen reagiert.

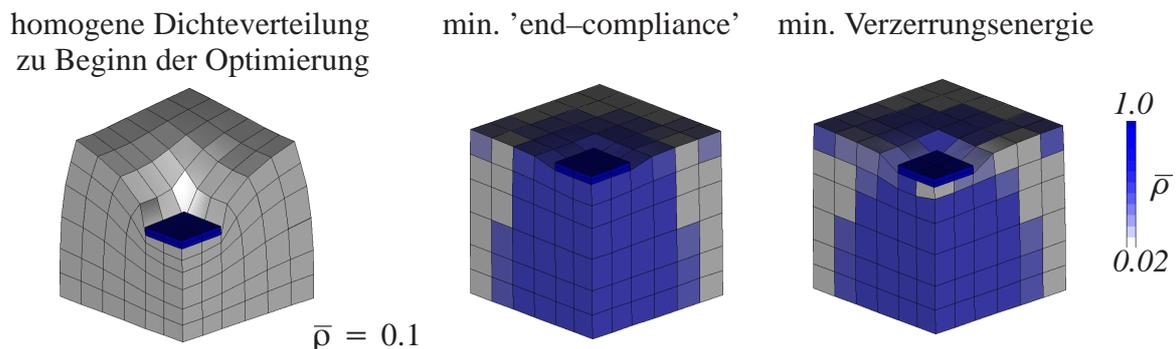


Bild 5.21: Deformationsfiguren mit homogener (initialer) und optimierter Dichteverteilung

Die zugehörigen Last-Verschiebungskurven in Bild 5.22 veranschaulichen die vorhergehenden Ausführungen. Aufgrund der Erhöhung der Steifigkeit wird die Verschiebung des kontrollierten Freiheitsgrades minimiert. Der Würfel, der für die Minimierung der Verzerrungsenergie optimiert wurde, weist eine höhere Verschiebung für den kontrollierten Freiheitsgrad auf.

Für bestimmte Entwurfsaufgaben sind diese Resultate allerdings noch unbefriedigend, vor allem für die Anwendungen, in denen eine kontrollierte Energieabsorption wünschenswert ist, ist die Optimierungsaufgabe entsprechend den Zielsetzungen zu erweitern. Beispiele wurden bereits im Kapitel 1.1 genannt: Sturzhelme oder auch Bauteile, die zur Erhöhung der passiven Sicherheit der Insassen in Innenräumen von Kraftfahrzeugen eingesetzt werden.

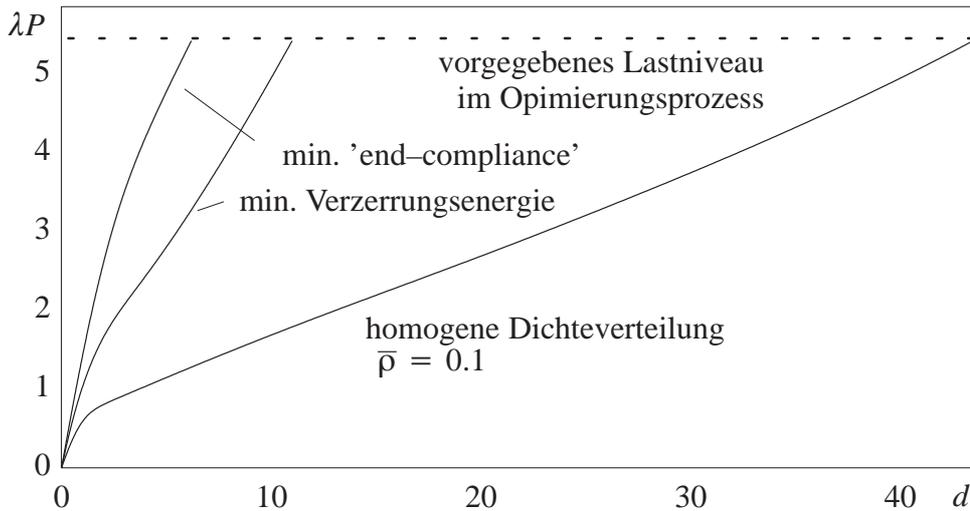


Bild 5.22: Last-Verschiebungskurven mit homogener und optimierter Dichteverteilung

Um eine bessere Kontrolle über das Last-Verformungsverhalten zu erhalten, soll im Folgenden die gewünschte nichtlineare Strukturantwort direkt als primäres Ziel im Optimierungsprozess dienen. Die Optimierungsaufgabe besteht darin, die Last-Verformungskurve an vorgegebenen Punkten durch eine optimierte Dichteverteilung anzunähern. Als Beispiel für dieses Vorgehen diene wiederum der Würfel mit einer anfänglich homogenen Dichteverteilung. Das Optimierungsproblem wird als Fehlerquadratminimum-Problem für n Punkte auf der gewünschten Last-Verformungskurve definiert.

$$\min f = \min \sum_{i=1}^n w_i ((\lambda_i P_i)^* - \lambda_i P_i)^2 \quad (5.2)$$

Die nichtlineare Strukturantwort des Würfels für eine bestimmte Dichteverteilung wird durch die Punkte auf der Last-Verschiebungskurve charakterisiert. Die Koordinaten dieser Punkte ergeben sich aus dem Lastniveau $\lambda_i P_i$ und der zugehörigen Verschiebung \hat{d} des kontrollierten Punktes. Die gewünschte Strukturantwort wird für die gleichen Verschiebungen durch die Punkte $(\lambda_i P_i)^*$ festgelegt. In dieser Mehrkriterienoptimierung definiert w_i einen Wichtungsfaktor, der eine Kontrolle des Optimierungsprozesses ermöglicht.

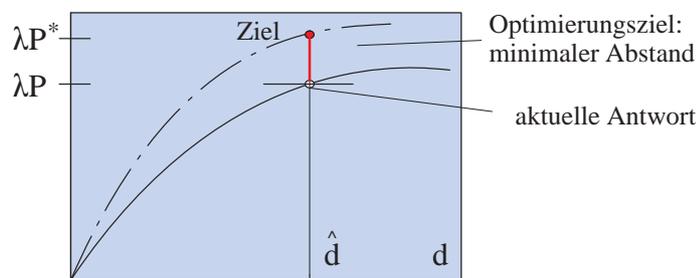


Bild 5.23: Minimierung des Abstandes zweier Laststufen

Das Diagramm in Bild 5.23 illustriert das Optimierungsproblem für einen vorgegebenen Punkt. Die durchgezogene Linie zeigt den Ist-Zustand im Optimierungsprozess an und die strichpunktierte Linie die gewünschte Last-Verformungscharakteristik; der Abstand zwischen den beiden Lastniveaus, bezogen auf eine bestimmte Verschiebung, dient als Zielfunktion, die zu minimieren ist.

Die schwarze Kurve in Bild 5.24 zeigt für den Würfel die Strukturantwort der Ausgangskonfiguration mit der homogenen Dichteverteilung zu Beginn der durchgeführten Optimierung. Die zwei Punkte A und B definieren die Punkte auf der gewünschten Last-Verschiebungskurve. Die graue Kurve zeigt schließlich die Strukturantwort des Würfels mit der optimierten Dichteverteilung.

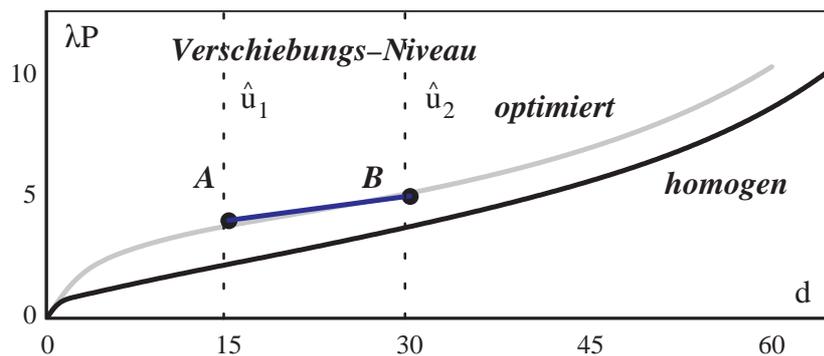


Bild 5.24: Optimierte Dichteverteilung für maximale Energieabsorption

Die erzielte Last-Verschiebungskurve trifft die beiden Punkte nicht exakt. Sie ist aber relativ nah an diesen Punkten. Das Ergebnis kann sicherlich durch eine Erweiterung des Lösungsraumes mit einer feineren Diskretisierung oder durch die Vorgabe weiterer Punkte auf der gewünschten Last-Verschiebungskurve und entsprechender Wichtung noch verbessert werden.

Um ein weiches Strukturverhalten zu erzielen, wurden zwei weitere Punkte C/D als Zielpunkte definiert (Bild 5.25).

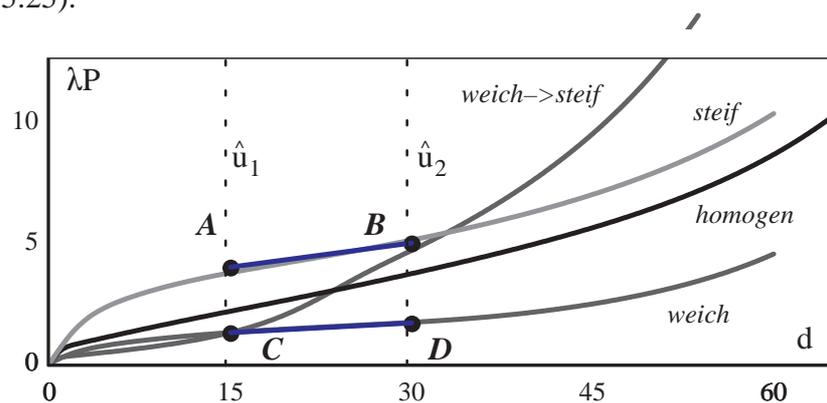


Bild 5.25: Optimierte Dichteverteilung für weiches Eindringen und minimale oder maximaler Energieabsorption

Die beiden Punkte wurden unterhalb der zur homogenen Dichteverteilung gehörenden Kurve gewählt und man erkennt, dass die nichtlineare Strukturantwort diese beiden Punkte sehr gut

trifft. Um eine Vorstellung vom Potential dieser Methode zu bekommen, wurden für eine weitere Optimierung die Punkte C und B ausgewählt. Die dritte Kurve, die durch diese Punkte führt, zeigt ein weiches Eindringen der Lastplatte in den PU-Schaumwürfel und eine maximal mögliche Energieabsorption bei der weiteren Verformung.

Die verschiedenen Ergebnisse verdeutlichen, wie mit der eingesetzten Strategie die Strukturantwort durch die Anpassung der Dichteverteilung zellulärer Materialien kontrolliert werden kann. Zum Beispiel könnte mit diesem Verfahren eine Matte für den Sport entworfen werden, die sich bei geringem Gewicht und weiches Eintauchen des Sportlers dennoch durch maximale Energieabsorption auszeichnet. Im Sinne der Mehrkriterienoptimierung lässt sich die Optimierungsaufgabe auch für Personen sehr unterschiedlichen Gewichts erweitern.

6 Materialdesign – Entwurf der Porenstruktur zellularer Materialien

Die Bestimmung der optimalen Dichteverteilung poröser Materialien erfolgte im vorherigen Kapitel mit Hilfe der materiellen Topologieoptimierung und unter Ausnutzung funktionaler Zusammenhänge zwischen der Dichte des porösen Materials und den mechanischen Parametern kontinuumsmechanisch orientierter Materialmodelle. Aufgrund der höheren numerischen Effizienz kamen in den gezeigten Beispielen isotrope makroskopisch 'verschmierte' Materialmodelle zur Modellierung von Metall- und Polymerschäumen zum Einsatz. Die Porosität wurde als Entwurfsparameter eingeführt und die Dichteverteilung in Sandwichbauteilen und Hohlkörpern durch den Optimierungsprozess gesteuert.

Der mikrostrukturelle Aufbau zellularer Materialien, d.h. die Größe und Form, die Ausrichtung und die Topologie der Poren, hat einen maßgeblichen Einfluss auf das Verformungsverhalten auf der Strukturebene, wie zum Beispiel auf die Durchbiegung einer Sandwichplatte. In diesem Kapitel wird der Einfluss dieses mikrostrukturellen Aufbaus untersucht. Motivation und Ausgangspunkt für die weiteren Untersuchungen bildet die optimale Mikrostruktur natürlichen Knochenmaterials. Der innere Aufbau natürlicher Knochen ist durch seine Inhomogenität und richtungsabhängige Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften gekennzeichnet, die sehr stark mit dem Ort und der jeweiligen Beanspruchung variieren. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die Grundlagen über den Aufbau und die Funktionsweise des Knochens kurz zusammengefasst. Anhand eines numerischen Modells eines Femurs wird für ein künstliches Problem die makroskopische Dichteverteilung zunächst analog zur bisherigen Vorgehensweise mit einem geeigneten makroskopischen Materialmodell bestimmt. In einer zweiten Berechnung wird innerhalb dieses makroskopisch orientierten Optimierungsprozesses auch der mikrostrukturelle Aufbau am Materiepunkt berücksichtigt. Die Entwurfskriterien der beiden Ergebnisse werden miteinander verglichen, und es wird damit der Einfluss des optimierten anisotropen porösen Materials verdeutlicht. Im darauf folgenden Abschnitt wird die zur Optimierung der Mikrostruktur des Femurs angewandte Optimierungsstrategie für den Entwurf periodischer Mikrostrukturen mit extremalen makroskopischen Eigenschaften des dazugehörigen zellularen Materials für technische Anwendungen eingesetzt. Die Optimierungsstrategie enthält die Bausteine: numerische Homogenisierung, materielle Topologieoptimierung und SIMP-Material. Dabei spielt die Topologieoptimierung für den Entwurf periodischer Materialien die Rolle einer inversen Homogenisierung. Mit Bezug auf zellulare Materialien wird der Ansatz von Guedes et al. (2003) unter Berücksichtigung mehrerer Lastfälle untersucht. Lokales Beulen in optimierten Mikrostrukturen wird von Neves et al. (2002) untersucht. Rodrigues et al. (2002) optimieren gleichzeitig in einem hierarchischen Ansatz sowohl die globale Materialverteilung als auch die lokalen Materialeigenschaften, wobei mit dem SIMP-Ansatz auf lokaler Ebene die bestmögliche Mikrostruktur für eine gegebene Dichte gesucht wird. Das komplexe Versagensverhalten der Porenstruktur von Metallschäumen motiviert den Entwurf des Porenlayouts mit Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens des Zellwandmaterials im letzten Abschnitt dieses Kapitels.

6.1 Betrachtung natürlicher Knochen

Der Aufbau und die Funktionsweise von Knochen und deren spezielle Zellstruktur ist Gegenstand einer Vielzahl wissenschaftlicher Untersuchungen, um zum Beispiel das Verhalten und die Beanspruchung des Knochens vor und nach operativen Eingriffen abschätzen zu können. Typischer Gegenstand dieser biomechanischen Untersuchungen sind die Wechselwirkungen zwischen Implantaten und der sie umgebenden Knochenstruktur. Aufgrund der Fähigkeit des Knochens, sich wechselnden Beanspruchungen anzupassen, führt die Änderung der Beanspruchung durch Einsetzen eines Implantates zu einer Veränderung der Knochenstruktur (Pettermann (1997), Reiter (1996)). Die Kenntnis um den Aufbau und die Funktionsweise natürlichen Knochenmaterials hilft bei Vorhersagen des Verhaltens des Knochens über einen bestimmten Zeitraum und unterstützt die Planung vor dem operativen Eingriff (Jaramaz (1999)). Der Einsatz numerischer Berechnungsverfahren ermöglicht die Anpassung von Implantaten realitätsnah und patientenspezifisch (Krach et al. (1995), Ebbecke (2006)).

Die enge Verwandtschaft zwischen natürlichen Knochenmaterialien und künstlich hergestellten Schäumen sind die Grundlage für aktuelle Forschungsarbeiten zur Herstellung künstlichen Knochenmaterials, das der menschlichen Knochensubstanz sehr ähnlich ist. Diese porösen Materialien bestehen aus einem speziellen Grundmaterial, das von menschlichen Knochenzellen angenommen wird, sich mit ihnen verbindet und als Ersatz für geschädigte Kiefer- oder Hüftknochen eingesetzt werden kann.

6.1.1 Aufbau und Funktionsweise

Der innere Aufbau eines Knochens besteht aus einem offenporigen System, das aus feinen Trabekeln (Knochenbälkchen) besteht (siehe Bild 6.1). Diese offenporige poröse Struktur wird Spongiosa (von lateinisch: spongia – Schwamm) genannt.

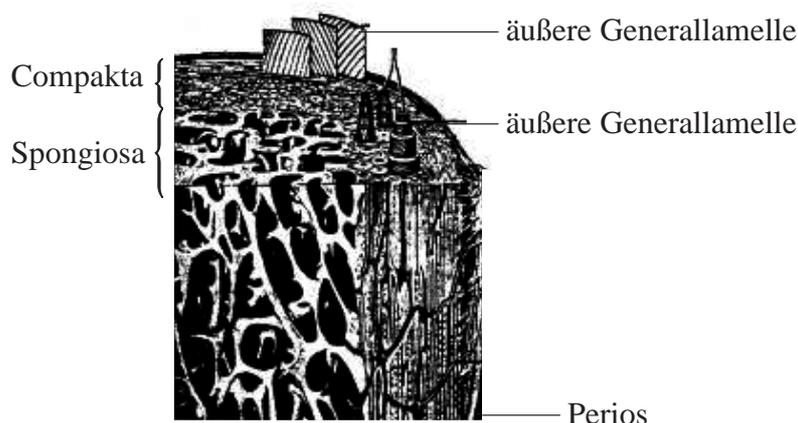


Bild 6.1: Poröser Knochenaufbau

Analysen haben gezeigt, dass die Elemente des feinmaschigen Netzes entlang der Spannungstrajektorien des belasteten Knochens ausgerichtet sind. Allerdings ist die Struktur des Knochens

als lebendes Material einem zeitlichen Werdeprozess unterworfen. Die stochastisch orientierten Fasern des noch jungen Knochens richten sich entlang der Trajektorien des inneren Spannungszustandes aus und bilden die bekannte Lammellenstruktur mit den ca. 15 mm langen Kollagenfasern. Wird die natürliche Struktur des Knochens durch eine Verletzung zerstört oder erfolgt eine Änderung der äußeren Belastung (zum Beispiel bei erhöhter sportlicher Betätigung), passt sich die innere Struktur des Knochens auch im fortgeschrittenen Alter diesen geänderten Bedingungen ständig an (Pettermann (1997), Reiter (1996)).

6.1.2 Mechanische Modellierung

Konsistent zur bisherigen Vorgehensweise wird die Betrachtung des vollständigen Knochens der makroskopischen Ebene zugewiesen. Die Modellierung erfolgt mit makroskopisch verschmierten Materialmodellen. Die Untersuchung einzelner Poren oder die Betrachtung eines Ausschnittes der spongiösen Struktur erfolgt auf der Mikroebene, zum Beispiel auf der Basis repräsentativer Volumenelemente.

Die numerische Simulation von Knochen erfordert entsprechende konstitutive Beziehungen für die Charakterisierung der mechanischen Eigenschaften. Ebenso wie bei den künstlichen Metall- und Polymerschäumen kann mit der makroskopischen Betrachtungsweise Skalierungsbeziehungen zwischen der Dichte und verschiedenen mechanischen Parametern entwickelt werden, z.B. für den Elastizitätsmodul in einer isotropen Modellierung:

$$\frac{E}{E_o} = \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^\beta \quad (6.1)$$

wobei abweichend zu anderen in dieser Arbeit beschriebenen Skalierungsbeziehungen, Nackenhorst (1997) mit E_o den mittleren Elastizitätsmodul und mit ρ_o die mittlere Dichte zu Beginn des Knochenwachstums definiert. Der Exponent β kann nach Rice et. al. (1988) zu $\beta = 2$ gewählt werden und steht damit in enger Beziehung zu den anderen in dieser Arbeit verwendeten Skalierungsbeziehungen poröser Werkstoffe. Mit diesen Parametern werden wie gewohnt, Spannungen und Verzerrungen mit der Beschränkung auf kleine Verzerrungen über das Hooke'sche Gesetz in eine konstitutive Beziehung gebracht und isotrope wie anisotrope Materialmodelle angegeben (Pettermann (1997), Reiter (1996), Ebbecke (2006)).

Die experimentelle Bestimmung des Elastizitätsmoduls kann mit verschiedenen Verfahren erfolgen, wobei die relative schnelle Änderung der Knochensubstanz und die damit einhergehende Veränderung der Materialeigenschaften nach Entnahme aus dem lebenden Körper eine gewisse Problematik beinhaltet. Die mechanische Messung einer Knochenprobe liefert beispielsweise unter Berücksichtigung einer realitätsnahen Deformationsgeschwindigkeit die Spannungs-Dehnungskurve in Bild 6.2 (Yamada (1970)).

Aufgrund des kontinuierlichen Übergangs vom linearen zum nichtlinearen Verhalten wird wie bei anderen Materialien auch ein Grenzwert für die Verzerrung angenommen und der Modul anhand der Steigung der Parallelen zur Anfangssteigung der gemessenen Kurve ermittelt.

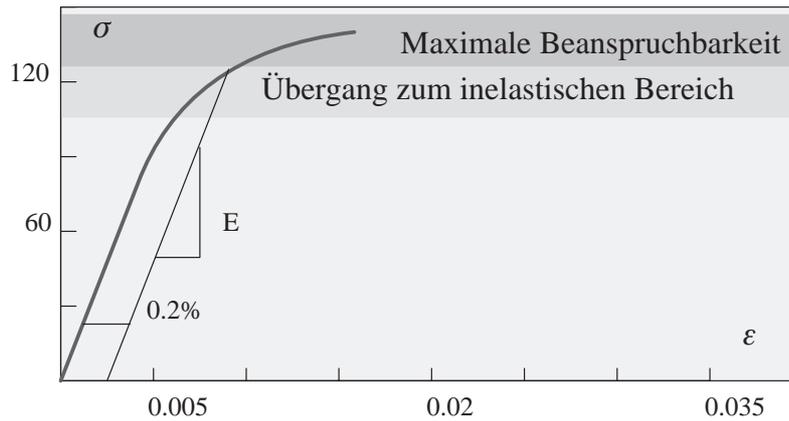


Bild 6.2: Spannungs–Dehnungslinie einer Knochenprobe (Yamada (1970))

Die Druckfestigkeit σ_D eines Knochens mit der Dichte ρ wird zum Beispiel mit dem Beginn des Zusammenbruchs der Poren definiert. Carter und Hayes (1977) setzen diese Druckfestigkeit zur Verzerrungsrate $\dot{\varepsilon}$ in Relation.

$$\sigma_D = \sigma_0 \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0} \right)^{0.06} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \quad (6.2)$$

Die mit 0 indizierten Größen sind Referenzwerte, die für das zugehörige Lebewesen zu ermitteln sind. Die 'Trockendichte' der Knochenstruktur, also die Masse der Knochenbälkchen, bezogen auf das Volumen des Knochens, kann zwischen 0.15 bis 1.0 g/cm³ variieren. In der Regel erfolgt die numerische Simulation in den meisten Veröffentlichungen mit der Annahme geometrisch und materiell linearem Verhalten.

Die numerische Berechnung mit der Finiten–Element–Methode erfordert eine geeignete Triangulierung des Knochens bzw. der Knochenstruktur. Da die Generierung derartiger dreidimensionaler Netze relativ aufwendig ist, werden in der Regel reguläre dreidimensionale Netze verwendet und die Knochenstruktur mit Hilfe der Voxeltechnik abgebildet (Saxena (1999)). Da die Daten der Computertomografie ohnehin als dreidimensionale Punktwolke vorliegen, werden die Punkte, die das Knochenmaterial repräsentieren, auf eine reguläre Diskretisierung übertragen. Allerdings werden die glatten Oberflächen der Knochen bzw. der Knochenstruktur nur treppenartig approximiert, was im numerischen Modell zu entsprechenden Singularitäten führt. Dieses Vorgehen ist auch aus der Topologieoptimierung mit der 0/1–Verteilung für die Dichte bekannt. Die Tragstruktur wird mit den Elementen identifiziert, die eine Eins beinhalten. Die im Vergleich zur Spongiosa relativ einfache geometrische Form des Femurs kann aber auch mit einer glatten Oberflächenbeschreibung und einer Triangulierung mit Hexaeder bzw. Tetraederelementen erfolgen. Zur besseren Vergleichbarkeit verschiedener numerischer Untersuchungen stellt Viceconti et al. (1996) ein CAD–Modell der Oberfläche eines standardisierten Femurs der Allgemeinheit zur Verfügung.

6.1.3 Einsatz von Optimierungsverfahren in der Biomechanik

In verschiedenen Arbeiten werden Optimierungsverfahren für die Untersuchung der porösen Struktur von Knochen eingesetzt. Andererseits kommen Methoden, die ursprünglich zur numerischen Simulation der Umlagerungsprozesse von Knochenmaterial entwickelt wurden, in der Strukturoptimierung zur Anwendung (Daxner (2003), Reiter (1996)).

Bestimmung der Dichteverteilung mit numerischen Algorithmen

Nackenhorst und seine Mitarbeiter (in Ebbecke (2006)) verwenden die Skalierungsbeziehung in Gleichung (6.1) in Verbindung mit der Evolutionsgleichung (6.3) für die zeitliche Änderung der lokalen Dichte ρ .

$$\dot{\rho} = k\left(\frac{W}{W_{ref}} - 1\right) \quad (6.3)$$

Der Parameter k beschreibt die Abhängigkeit des Umlagerungsprozesses von der Zeit mit Bezug zum Quotienten aus der berechneten Verzerrungsenergiedichte W und einer Referenzenergiedichte W_{ref} . Diese einfache Gleichung einer Geraden mit der Steigung $(1/W_{ref})$ impliziert für $W > W_{ref}$ eine Konzentration dichteren Knochenmaterials an einem Materiepunkt und für $W < W_{ref}$ die Reduktion von Masse. Weiterhin muss berücksichtigt werden, dass ein Knochenaufbau nur innerhalb gewisser oberer und unterer Schranken der Beanspruchung stattfinden sollte. Ist die Belastung zu hoch, findet ebenfalls ein Abbau des Knochenmaterials statt. Physikalisch relevantere Modelle als das mit Gleichung (6.3) beschriebene, werden z.B. in Reiter (1996) und Pettermann (1997) diskutiert. Die Lösung der Evolutionsgleichung erfolgt mit einem einfachen Eulervorwärtsverfahren. Weitere Evolutionsgleichungen werden in Ebbecke (2006) beschrieben. Er setzt statt eines isotropen, ein orthogonal anisotropes linear elastisches Werkstoffgesetz zur Berücksichtigung des realen Verhaltens von Knochenmaterial ein. Er kommt zu dem Schluss, dass aufgrund nahezu identischer Dichteverteilungen der beiden Berechnungen mit der isotropen Modellierung auf der einen und der anisotropen auf der anderen Seite, die Berücksichtigung des anisotropen Verhaltens vernachlässigbar ist. Vom Standpunkt der Optimierung kann diese Auffassung nicht geteilt werden, da neben dem Layout maßgeblich die eingesetzten Entwerfkriterien über die Qualität des Ergebnisses entscheiden. Dieser Gedanke wird im Folgenden an einem Beispiel noch einmal aufgegriffen.

Die genannte Methode findet ihren sinnvollen Einsatz in der Berechnung des Knochenumlagerungsprozesses zur Vorhersage der Qualität einer Prothese (Krach et al. (1995), Schröder (1995), Nackenhorst (1997)) und ermöglicht so die Verbesserung existierender Prothesenmodelle (Krach et al. (1995)). Die grundsätzlich positive Fähigkeit der Knochen, sich ändernden zyklischen Belastungen durch einen Umbau der Struktur allmählich anzupassen, führt dazu, dass auch eine lokale zyklische Spannungsreduktion eine Minderung des Knochenmaterials bedingt. Untersuchungen haben gezeigt, dass bei übermäßiger Beanspruchung ebenfalls ein lokaler Abbau des Knochenmaterials stattfindet und zur Lockerung von Implantaten führt (Reiter (1996)). Bei der strukturmechanischen Analyse von Implantaten ist es oftmals nicht nur wichtig, die Festigkeit des Implantates an sich, sondern auch die Wechselwirkung mit der umgebenden Knochenstruktur zu untersuchen.

Bestimmung einer der realen Belastung statisch äquivalenten Last

Die zyklischen Kräfte, die auf den Femur einwirken, zeigen in Betrag und Richtung große Schwankungen. Deshalb werden in der Regel nur die maßgebenden Einwirkungen im Mittel berücksichtigt. Darüber hinaus erfolgt die Anpassung der Knochenstruktur in einem Zeitraum von Wochen oder Monaten, so dass die dynamischen Effekte vernachlässigt und die Beanspruchung durch gemittelte, statische Ersatzlasten approximiert werden. Ebbecke (2006) bezeichnet diese Lasten als 'statisch äquivalente Lasten'. Diese Lasten ermittelt er in seiner Arbeit durch Lösen eines least-square Problems mit einer gradientenbasierten Optimierungsstrategie, indem er die Differenz einer gemessenen Dichteverteilung eines realen Knochens zur optimierten Dichteverteilung mit einer beliebigen Belastung minimiert. Da die optimierte Dichteverteilung von der Belastung abhängt, kann mit der Vorgabe der bekannten gemessenen Dichteverteilung die gesuchte Beanspruchung am numerischen Modell ermittelt werden. Die freien Entwurfsvariablen sind die Komponenten des Lastvektors.

Materialdesign

Mathematisch orientierte Optimierungsverfahren werden in Sigmund (1999) in Verbindung mit numerischen Homogenisierungsverfahren eingesetzt, um die Topologie der Poren zellulärer Materialien zu entwerfen. Er vergleicht die optimierten Mikrostrukturen mit dem Aufbau von Knochenmaterial. Das klassische Optimierungsziel "Maximierung der Steifigkeit" wird eingesetzt, um die Frage zu beantworten, ob dem natürlichen Knochenwachstum das gleiche Konstruktionsprinzip wie dem des Leichtbaus zugrunde liegt. Er verneint diese Frage, was der klassischen Vorstellung zumindest teilweise widerspricht, dass das Knochenmaterial nach lokalen zyklischen Spannungszuständen ausgerichtet ist, um die gegebenen Lasten optimal abzutragen. Die logische Konsequenz ist, dass die natürlichen Wachstumsprozesse (auch) noch andere Entwurfskriterien beinhalten, eine Schlussfolgerung, die für fast alle realen Entwurfsaufgaben Gültigkeit hat.

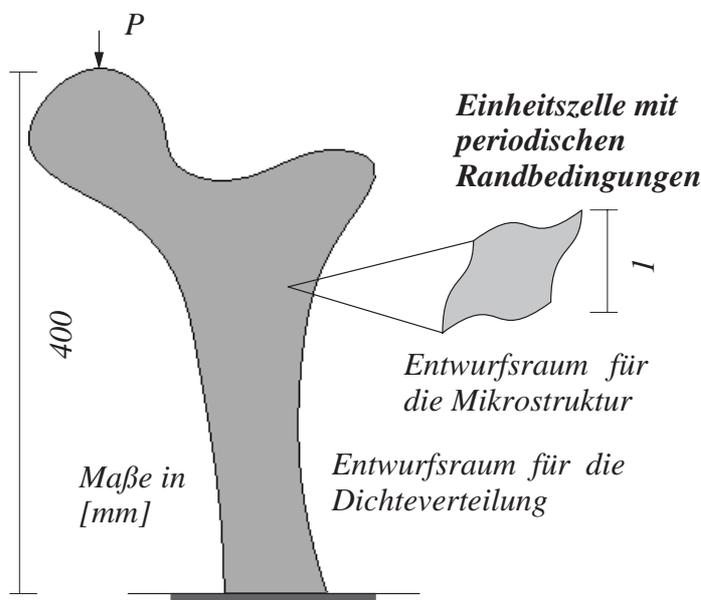
Diese kurzen Anmerkungen können nur einen kleinen Ausschnitt aus diesem interessanten Teilgebiet der Mechanik vermitteln und wurden aufgrund ihrer engen Verwandtschaft zu den hier durchgeführten Berechnungen ausgewählt. Eine weitere Arbeit, die die Berechnung der optimalen Dichteverteilung realer Knochen zum Thema haben, ist Kuhl und Steinmann (2003). Ein Vergleich heuristischer Knochenwachstumsalgorithmen mit mathematischer Optimierungsverfahren, bezüglich der Maximierung der Steifigkeit in einem Femur, findet man zum Beispiel in Maute (1998).

6.1.4 Hierarchische Optimierung mit natürlichem zellularem Material

Der Einfluss einer optimierten Mikrostruktur auf die mechanischen Eigenschaften einer Struktur wird in diesem Abschnitt anhand eines Beispiels aufgezeigt. Allerdings werden hier anstelle der heuristischen Algorithmen zur Simulation der Knochenumbaureaktionen, analog zum bisherigen Vorgehen, mathematisch orientierte Optimierungsverfahren angewendet und somit ein künstliches Problem definiert. Das Entwurfskriterium ist das klassische Optimierungsziel des Leichtbaus: die Maximierung der Steifigkeit. Aufgrund der übereinstimmenden Aussage verschiedener Veröffentlichungen, die von einer optimalen Dichteverteilung und von optimal ange-

passten Knochenstrukturen hinsichtlich der äußeren Kräfte, die auf einen Knochen einwirken, berichten, wird dieses Entwurfskriterium für den optimalen Einsatz des Materials für die Lastabtragung verwendet. Die Kombination mit weiteren Entwurfskriterien erfolgt hier nicht, da die Untersuchung des Einflusses der optimalen Mikrostruktur im Vordergrund steht. Es muss betont werden, dass mit der hier durchgeführten Optimierung keinesfalls die Simulation natürlichen Knochenwachstums angestrebt wird, da die Umsetzung dieser Prozesse entsprechende Randbedingungen und geeignete Methoden erfordert (vgl. Ausführungen in Abschnitt 6.1.2 und 6.1.3). Die Berechnungen wurden an einem vereinfachten Modell eines Femurs durchgeführt, da die Biomechanik in dieser Arbeit nicht schwerpunktmäßig behandelt wird. Lediglich soll die Analogie zu den in dieser Arbeit im Vordergrund stehenden künstlichen zellularen Materialien aufgezeigt werden. Die für die zweidimensionalen Berechnungen approximierte Geometrie eines Femurs und die Randbedingungen sind der Arbeit von Maute (1998) entnommen und zusammen mit dem Entwurfsraum für die Porengeometrie in Bild 6.3 dargestellt.

Optimierungsziel: *Minimierung der Verzerrungsenergie*
Nebenbedingung: *konstante Masse im Entwurfsraum*



Isotropes SIMP-Material:

$$E_s = 2000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.29$$

$$0.2 < \bar{\rho} < 0.8$$

Material in der Einheitszelle:

$$E_s = 2000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.29$$

$$0.001 < \bar{\rho} < 1.0$$

Gesamte Masse im 'Femur':

$$\bar{\rho} = 30\%$$

Last:

$$P = 100 \text{ N}$$

Bild 6.3: Hierarchische Optimierungsaufgabe für den 'Femur'

Die Kopplung der Bestimmung der makroskopischen Dichteverteilung mit der lokalen Optimierung des mikrostrukturellen Aufbaus ist im Bild 6.4 zusammengefasst. Der linke Teil des Ablaufdiagramms beschreibt die gewöhnliche materielle Topologieoptimierung zur Bestimmung der optimalen Dichteverteilung im Entwurfsraum.

Mit den Werten für die Dichte $\bar{\rho}$ in einem Finiten Element und dem Spannungszustand in einem Gausspunkt erfolgt bei Überschreiten einer beliebig wählbaren Schranke $\bar{\rho}^{limit}$ der Entwurf einer optimalen Mikrostruktur in einem Materiepunkt (rechts in Bild 6.4). Dieser Materiepunkt wurde hier mit dem aktuellen Gausspunkt gleichgesetzt. Die Schranke wurde zur Steigerung der Effizienz eingeführt mit der Annahme, dass die Bereiche der Makrostruktur mit niedriger Porosität nur einen geringen Beitrag zur Lastabtragung liefern und somit auf die Anpassung der Mikro-

trukturalisiert werden kann. Unterhalb der Schranke erfolgt die weitere Berechnung mit dem initialen isotropen porösen linear elastischen Materialmodell.

Wird der Grenzwert überschritten, erfolgt die Anpassung der Masse in der Einheitszelle an den aktuellen Dichtewert und die Optimierung der Mikrostruktur wird gestartet.

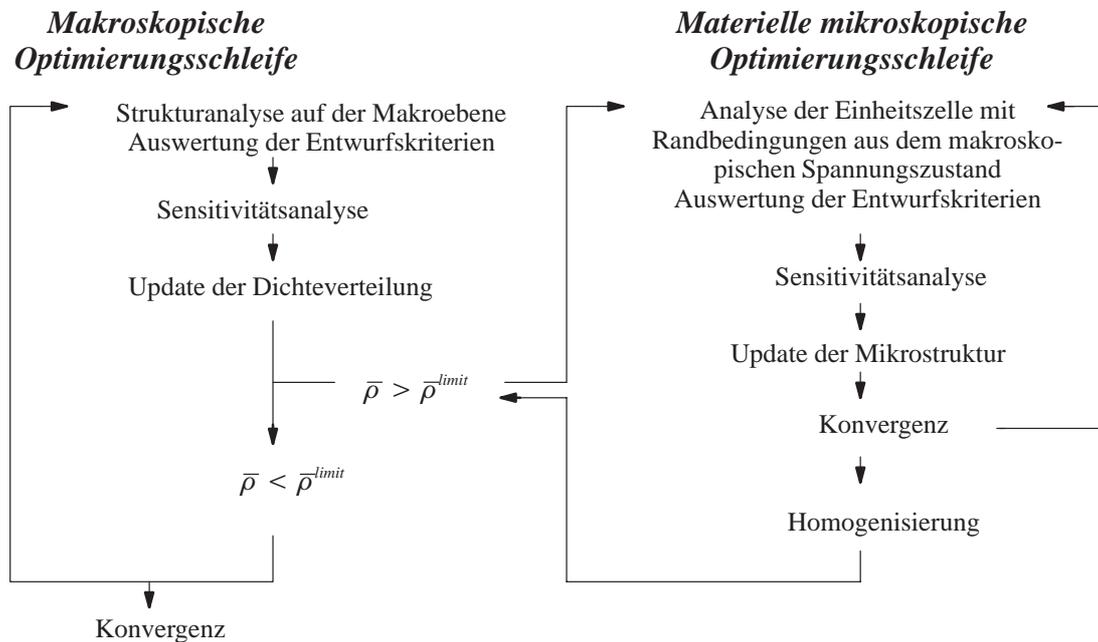


Bild 6.4: Hierarchische Optimierung der Dichteverteilung und der lokalen Mikrostruktur

Der iterative Prozess zur Bestimmung des mikrostrukturellen Layouts in allen Punkten wird solange durchlaufen, bis sich der gewichtete Zielfunktionswert nicht mehr ändert. Die Masse im Entwurfsraum der Mikrostruktur wird während der Iteration in der Einheitszelle über die entsprechende Gleichheitsnebenbedingung (3.15) konstant gehalten; die lokale Dichte am aktuellen Punkt der makroskopischen Struktur ändert sich in dieser Phase demzufolge nicht. Die numerische Homogenisierung nach Kapitel 2.3.2 der Mikrostruktur liefert den Materialtensor (Gleichung (2.45)) für die Bestimmung der makroskopischen Strukturantwort, nachdem für alle Finiten Elemente der Makrostruktur die optimalen Mikrostrukturen in den jeweiligen Gauspunkten bestimmt wurden.

Das Ergebnis der Optimierung der makroskopischen Dichteverteilung und der lokalen Beanspruchung angepasster Mikrostrukturen ist in Bild 6.5 dargestellt. Die Diskretisierung des Femurs erfolgte mit 652 und die des Entwurfsraums für die Mikrostrukturen mit 900 ebenen Finiten Elementen mit biquadratischen Ansatzfunktionen. An verschiedenen ausgewählten Punkten des makroskopischen Femurs sind periodisch ergänzte Mikrostrukturen abgebildet.

Das Koordinatensystem, in dem das makroskopische poröse Material definiert ist, ist das selbe wie die Koordinatensysteme der Diskretisierung des Femurs und der Einheitszellen und wird durch das globale Koordinatensystem in Bild 6.5 definiert. Die Ausrichtung des mikrostrukturellen Aufbaus im Bereich der Zug- und Druckzonen im unteren und mittleren Bereich, aber auch im Bereich des Femurkopfes, ist somit leicht nachvollziehbar.

optimierte Dichteverteilung in der makroskopischen Struktur

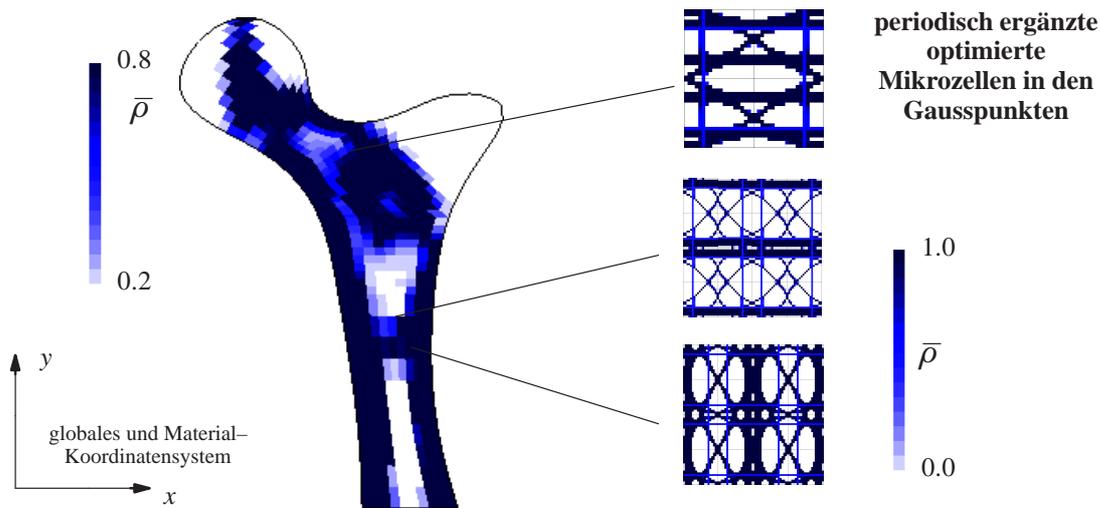


Bild 6.5: Optimierte makroskopische Dichteverteilung und Mikrostruktur

Das Diagramm in Bild 6.6 verdeutlicht den Einfluss der optimierten Mikrostruktur auf die Zielfunktionswerte für das Entwurfskriterium maximaler Steifigkeit. Die schwarze Kurve zeigt den typischen Verlauf der gradientenbasierten materiellen Topologieoptimierung mit der schnellen Konvergenz in den ersten Optimierungsschritten. Die relativ geringe Verbesserung des Zielfunktionswertes bis zum Unterschreiten des Konvergenzkriteriums ist ebenso charakteristisch für die gradientenbasierte Optimierung.

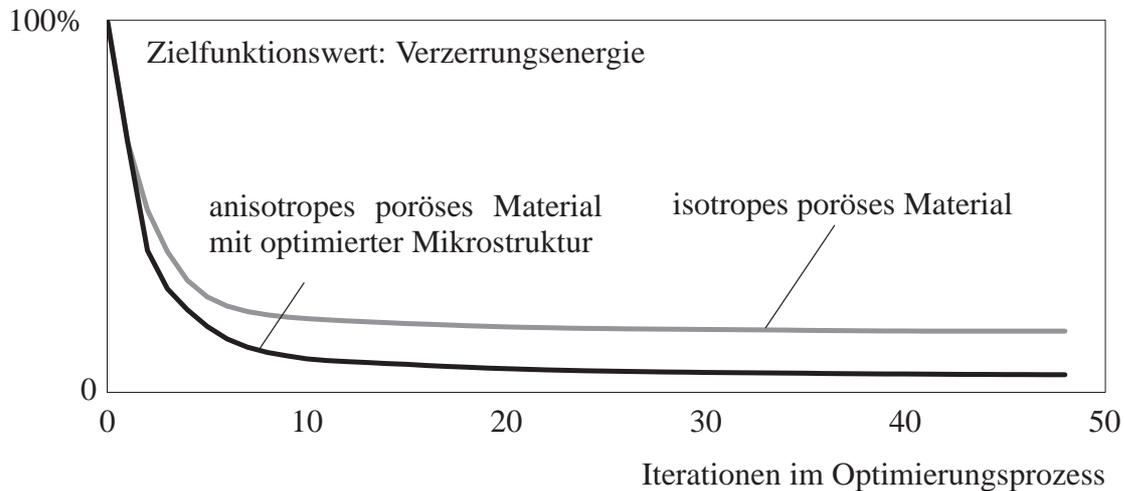


Bild 6.6: Quantitativer Vergleich der Optimierung der Knochenstruktur

Während sich in diesem Bereich der Zielfunktionswert nur geringfügig verbessert, findet in der Regel jedoch eine starke Änderung der Topologie und die Bestimmung einer relativ klaren 0/1-Verteilung statt. Allerdings bezeichnen 0 und 1 im Fall der Bestimmung der Dichteverteilung innerhalb des Knochens nicht (wie sonst in der Topologieoptimierung) die zwei Phasen Luft und Festkörper, sondern die Restriktionen der minimal und maximal möglichen Werte der Kno-

chendichte. In diesem Fall wurden diese Werte der Knochendichte mit zwanzig und achtzig Prozent des Vollmaterials gewählt, aus dem das poröse Grundgerüst besteht.

Wird zur Optimierung der makroskopischen Dichteverteilung zusätzlich noch die Ausrichtung der Mikrostruktur bestimmt, ergibt sich die schwarze Kurve. Es zeigt sich, dass bei gleicher Masse im gesamten Entwurfsraum eine deutliche Verbesserung der Zielfunktionswerte aufgrund der Ausrichtung der Mikrostrukturen entsprechend des lokalen Spannungszustandes zu erzielen sind. Gegenüber des isotropen zellularen Materialmodells des SIMP-Ansatzes kann das zur Verfügung stehende Grundmaterial innerhalb der Einheitszellen deutlich besser zur Lastabtragung eingesetzt werden. Infolge der kontinuierlichen Umverteilung des Materials im Optimierungsprozess wird eine fortwährende Anpassung der Mikrostruktur an die neue lokale Situation beobachtet. Durch die optimale Ausrichtung wurde Material in andere Bereiche des Knochens transportiert und so die Gesamtsteifigkeit des Systems erhöht. Die gegenseitige Beeinflussung der Optimierung der makroskopischen Dichteverteilung mit der Bestimmung der mikroskopischen Porenstruktur hat gezeigt, dass es nicht ausreichend ist, am Ende der Bestimmung der makroskopischen Dichteverteilung mit dieser lokalen Dichte und der Information des Spannungszustands die Porengeometrie zu entwerfen. Die Verbesserung des Zielfunktionswertes fällt in diesem Fall weit weniger deutlich aus.

6.2 Entwurfskriterien für den strukturellen Aufbau künstlicher zellulärer Materialien

Grundsätzlich unterschiedliche Eigenschaften zellulärer Werkstoffe lassen sich mit zwei verschiedenen Faktoren bestimmen. Zum einen werden die mechanischen Eigenschaften von zellulären Materialien durch die Art des Werkstoffs bestimmt, aus dem die poröse Struktur besteht. Zum anderen hat natürlich die Topologie und die Form der Poren Einfluss auf das Deformations- und Versagensverhalten der Schäume.

Die Basismaterialien metallischer Schäume sind zum Beispiel Aluminium, verschiedene Metalllegierungen, aber auch Kombinationen mit keramischen Materialien als Folge spezieller Herstellungsverfahren (gesinterte Schäume). Ein wesentlicher Vorteil metallischer Schäume gegenüber Polymerschäumen ist die hohe Temperaturbeständigkeit. Die Kombination verschiedener Grundwerkstoffe mit unterschiedlichen Temperatúrausdehnungsverhalten kann benutzt werden, um einen zellulären Werkstoff mit bestimmten Ausdehnungsverhalten zu entwerfen. Mit der *Deformation infolge Temperaturänderung* als Zielkriterium lassen sich zum Beispiel zelluläre Materialien mit verschwindender oder gar negativer Ausdehnung bei einer Temperaturerhöhung generieren. Hierzu ist eine dritte Phase im porösen Material notwendig, die die gewünschte Kinematik bei Temperaturerhöhung auf Porenebene erlaubt. Neben Gas sind auch sehr weiche kompressible Werkstoffe für diese Phase denkbar.

Der Einsatz von zwei unterschiedlichen Materialien für die Zellwände und -stege ermöglicht auch die Beeinflussung des Eigenschwingungsverhaltens von dem zellulären Grundwerkstoff. Die Kombination aus hoher Steifigkeit und geringer Masse prädestiniert diese neuartigen Werkstoffe für den Einsatz im Maschinenbau. Hier treten neben hohen Temperaturen auch Vibratio-

nen in sehr unterschiedlichen Frequenzbereichen auf. Die Optimierung von Einheitszellenmodellen, so dass deren Eigenfrequenzen im Bereich der Erregerfrequenzen liegen, kann ein besonders dämpfendes zelluares Material zur Folge haben. Die Eigenschaften der zu kombinierenden Grundmaterialien sollten neben unterschiedlichen Steifigkeiten auch unterschiedliche Massen aufweisen, um gut an einen Frequenzbereich angepasst werden zu können. Neben dem dynamischen Verhalten der einzelnen Zellen ist aber auch das komplexe Schwingungsverhalten der gesamten Struktur zu beachten.

Es ist leicht nachvollziehbar, dass der Einsatz eines duktilen Basismaterials, wie zum Beispiel des metallischen Grundwerkstoffs bei den Metallschäumen, auch zu einem mehr oder weniger stark ausgeprägtem duktilen Verformungsverhalten eines Strukturbauteils aus diesem zellularen Material führt, ein sprödes Basismaterial eher mit einem schlagartigen Versagen des Strukturbauteils einhergeht. Hier ist ein typischer Vertreter der poröse Leichtbeton.

Allerdings hat neben dem Grundwerkstoff auch die Porengeometrie und das damit verbundene spezielle Deformationsverhalten der Pore einen Einfluss auf die Duktilität des porösen Werkstoffs. Tritt ein Versagen eines zellularen Materials mit duktilem Zellmaterial bei entsprechend schlanken Zellstegen oder dünnen Zellwänden aufgrund von Knicken oder Beulen dieser Komponenten ein, so kann eine Struktur aus einem derartigen Werkstoff durchaus schlagartig versagen und ist damit dem spröden Versagen sehr ähnlich. Ebenso kann das sukzessive Versagen eines Bauteils aus porösen keramischen Werkstoffen zu einem duktilen Versagen diese Bauteils führen. Nach einer Festlegung auf ein bestimmtes Grundmaterial sind demzufolge Duktilität und maximal aufnehmbare Last für den Entwurf der Porengeometrie mit der materiellen Topologieoptimierung mögliche Entwurfskriterien.

Ist das Verformungsverhalten der Pore durch ein lineares Vorbeulverhalten geprägt, ist auch die kritische Last, abgeschätzt mit einer linearen Eigenwertanalyse, ein sinnvolles Zielkriterium. Das Ziel in der Optimierungsstrategie ist dann die Maximierung der kritischen Last.

Aufgrund der beschriebenen Interaktion des Verhaltens der Pore mit dem Strukturverhalten eines Bauteils aus dem entsprechenden zellularen Material, ergibt auch die gleichzeitige Betrachtung dieser beiden Ebenen in Form einer Mehrkriterienoptimierung einen Sinn. Sowohl die Materialverteilung innerhalb des Strukturbauteils, als auch der eigentliche Aufbau der Pore sind innerhalb eines Optimierungsproblems zu bestimmen (siehe auch angepasste Ausrichtung von Fasern in Reiter (1996)). Innerhalb dieser Strategie können auf beiden Ebenen das gleiche Optimierungsziel, wie zum Beispiel die Maximierung der Steifigkeit, aber auch unterschiedliche Ziele definiert werden. Als Beispiel sei ein Sturzhelm erwähnt, bei dem die Maximierung der Luftdurchlässigkeit des porösen Materials und gleichzeitig im Falle eines Unfalls das Ziel maximaler Energieabsorption zu erfüllen sind.

6.3 Periodische Mikrostrukturen mit extremalen Eigenschaften

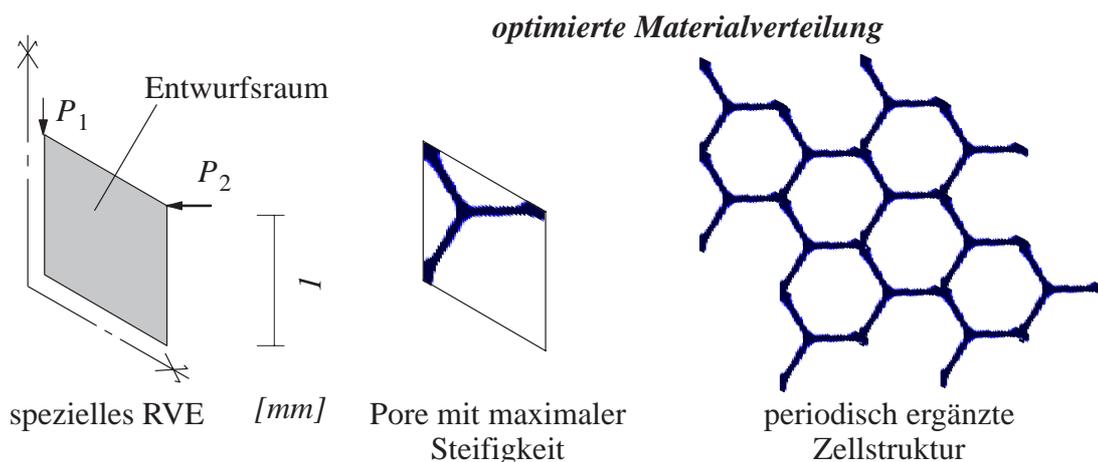
Inhalt dieses Abschnitts ist der Entwurf der mikrostrukturellen Porenstruktur zellularer Materialien. Mit Hilfe numerischer Homogenisierungsverfahren und gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen wird auf Basis des Konzepts repräsentativer Volumenelemente (RVE) der

Aufbau der Porenstruktur poröser Materialien mit extremen makroskopischen Eigenschaften bestimmt. Im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt erfolgt die Optimierung anhand einer einzelnen repräsentativen Einheitszelle ohne die Interaktion mit einer makroskopischen Struktur; Rückschlüsse auf das makroskopische Verhalten des periodisch ergänzten zellulären Materials erfolgen mit der numerischen Homogenisierung. Für die Diskretisierung der untersuchten Einheitszellen wurden ebene Finite Elemente mit biquadratischen Ansatzfunktionen verwendet. Zur Vermeidung von Versteifungseffekten wurde eine reduzierte Integration eingesetzt.

Die Idee, das makroskopische Werkstoffverhalten mit der Anwendung der Topologieoptimierung zu steuern, basiert maßgeblich auf der Arbeit von Sigmund (1994). Einige der in seiner Arbeit vorgestellten Beispiele werden hier auf ihre Anwendbarkeit zur Optimierung realer Schäume und zur Verifikation des eigenen Vorgehens untersucht und mit anderen Strategien kombiniert.

Dass der Entwurfsraum periodischer Mikrostrukturen nicht zwingend quadratisch sein muss, zeigt das Bild 6.7 und das Ergebnis der Optimierung mit einer klar erkennbaren Zellstruktur eines porösen Materials.

Optimierungsziele: Steifigkeit für 2 Lastfälle
Nebenbedingung: Masse im Entwurfsraum $\bar{\rho} = 15\%$



Last:

$$P_{1,2} = 1.0 \text{ N}$$

SIMP-Material:

$$E_s = 10 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0.33 \quad \beta = 3.0$$

Bild 6.7: Entwurf zellulärer Materialien mit der Topologieoptimierung

Für den Entwurfsraum wurde eine rhombusförmige Zellgeometrie nach Diaz und Bernard (2003) gewählt und mit dem Optimierungsziel minimaler Verzerrungsenergie eine Zellstruktur maximaler Steifigkeit generiert. Die im Rahmen dieser Arbeit behandelten Homogenisierungsprobleme beschränken sich auf den zweidimensionalen Bereich. Für die numerische Homogenisierung wird die Einheitszelle für drei Einheitsverzerrungszustände analysiert. Die Autoren zeigen, dass durch Variation von nur zwei Parametern zur Änderung der Zellgeometrie, Mikros-

strukturen sehr effizient generiert werden können. Die nachfolgenden Optimierungsbeispiele basieren jedoch auf quadratischen Entwurfsräumen mit einer Kantenlänge gleich eins.

Aufgrund der starken Oszillationen der homogenisierten makroskopischen Materialeigenschaften innerhalb des Optimierungsprozesses für den Entwurf der Mikrostruktur und der starken Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse sowohl vom Ausgangsentwurf zu Beginn der Optimierung als auch von der Diskretisierung wurden verschiedene Strategien untersucht. Darüber hinaus liegt der Schwerpunkt in dieser Arbeit auf der Generierung zellulärer Werkstoffe mit einer klar erkennbaren porösen Struktur. Die Ergebnisse unterscheiden sich durch eine entsprechend gestellte Optimierungsaufgabe von künstlichen mikroorientierten Materialien, wie z.B. den Rang- n Laminaten.

In einem zweiten Abschnitt in diesem Kapitel wird der Einfluss der materiellen Nichtlinearität auf die Topologie der optimierten Mikrostrukturen untersucht. Dieser Teil der Arbeit wird motiviert durch Studien zellulärer Materialien mit diskretisierten Zellstrukturen zur Abschätzung des Übergangs vom linearen zum nichtlinearen Materialverhalten von Metallschäumen (Daxner et al. (2003)).

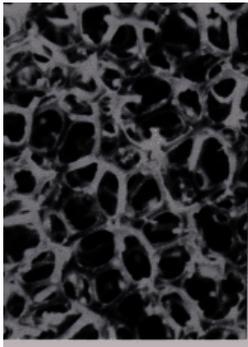
Aufgrund der starken Sensitivität der makroskopischen Antwort bezüglich einer Variation der Parameter auf der Mikroebene und der Existenz gleichwertiger Lösungen wurden folgende Aspekte besonders untersucht, mit dem Ziel eine robuste Strategie zur Optimierung des mikrostrukturellen Aufbaus poröser Materialien zu entwickeln.

- Verifikation der numerischen Homogenisierung
- Plausibilität der Optimierungsaufgabe
- Einfluss des Startentwurfs zu Beginn der Optimierung
- Wahl des Optimierungsalgorithmus und des Konvergenzverhaltens

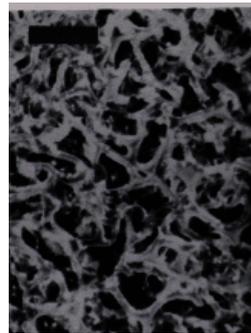
6.3.1 Zellulare Materialien mit negativem Querdehnungseffekt

Das folgende Beispiel beschreibt den Entwurf eines künstlichen porösen Materials, das einen negativen Querdehnungseffekt aufweist. Bei einem Zugstab aus diesem Material wird sich demzufolge die Querschnittsfläche mit Erhöhung der Belastung vergrößern. Eine Druckbeanspruchung resultiert in der Kontraktion des Querschnitts. Bild 6.8 zeigt ein poröses Material mit einer negativen Querdehnung aufgrund einspringender Zellwände.

Aufgrund ihres praktischen Bezugs sind die Anleitungen von Lakes (1987) zur Herstellung derartiger Materialien besonders hervorzuheben. Er beschreibt die Herstellung von zellulären Materialien mit einem negativen Querdehneffekt aus realen Metall- aber auch Polymerschäumen in der Einfachheit von Kochrezepten: Kubische Würfel aus duktilem Metallschaum sind beispielsweise nacheinander in allen drei Richtungen um etwa fünf Prozent zu stauchen. Diese Prozedur ist solange zu wiederholen, bis das Volumen des Würfels aufgrund plastischer Deformation um den Faktor 2 bis 4 reduziert worden ist. Die Anzahl der Wiederholungen und der erreichbare negative Querdehneffekt hängt letztendlich von der Dichte des verwendeten Metallschaums ab.



konventioneller
Polymerschaum



gestauchter Polymer-
schaum mit einspringenden
Zellstegen



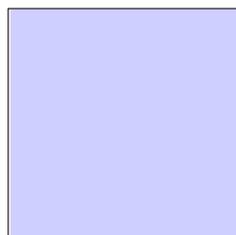
Veranschaulichung einer
einzelnen Pore mit ein-
springenden Zellstegen

Bild 6.8: Polymerschaum mit negativem Querdehneffekt (Lakes, 1987)

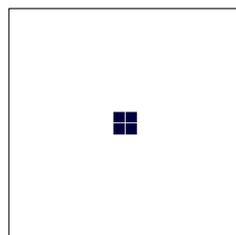
Die besondere Kinematik der Poren von zellularen Materialien und der Einsatz der Optimierung für den Entwurf dieser Materialien sind Thema dieses Abschnitts.

Den Ausgangspunkt für diesen Entwurf bildet eine zweidimensionale Einheitszelle mit der Approximation der periodischen Randbedingungen nach dem Vorschlag von Hassani und Hinton (1998). Die Berechnungen wurden aufgrund der Symmetrie am Viertelsystem durchgeführt. Der daraus resultierende Fehler auf einzelne Einträge der homogenisierten Materialmatrix kann bei den ausgewählten Zielsetzungen akzeptiert werden.

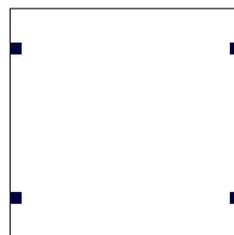
Gegenstand der ersten Untersuchung ist der Einfluss des Startentwurfs zu Beginn der Optimierung auf das Optimierungsergebnis. Bild 6.9 zeigt neben der homogenen Verteilung des isotropen SIMP-Materials drei weitere Dichteverteilungen für eine Diskretisierung mit 1600 ebenen Finiten Elementen unterschiedlicher Steifigkeit.



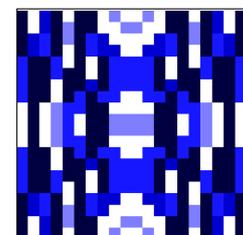
homogene Mate-
rialverteilung



Störung in der
Mitte



Störung am Rand



stochastisch er-
zeugte Störung

Bild 6.9: Verschiedene Dichteverteilungen als Start für das Materialdesign

Aufgrund der Ausführungen in Kapitel 2.3 eignet sich die homogene Dichteverteilung nicht für die Initiierung des Optimierungsprozesses, da die Sensitivitäten bezüglich der einzelnen Entwurfsvariablen für die aufgebrachten homogenen Spannungs- bzw. Verzerrungszustände identisch sind. Deshalb wurde eine stochastisch verteilte Störung mit Hilfe eines in einem genetischen Algorithmus (Matsuo (2003)) enthaltenen Zufallszahlengenerators erzeugt. Die ursprüngliche Idee, die Fähigkeit genetischer Algorithmen, mehrere gleichwertige Lösungen bei gleichzeitiger Unempfindlichkeit gegenüber lokalen Minima auszunutzen, wurde aufgrund der

extremen Ineffizienz dieser Verfahren verworfen und nicht weiter untersucht. Allerdings hat sich gezeigt, dass Startentwürfe, wie in Bild 6.9 rechts dargestellt, helfen, mit der anschließend gradientenbasierten Optimierung verschiedene Optimierungsergebnisse zu erzeugen und Lösungen lokaler Minima zu identifizieren.

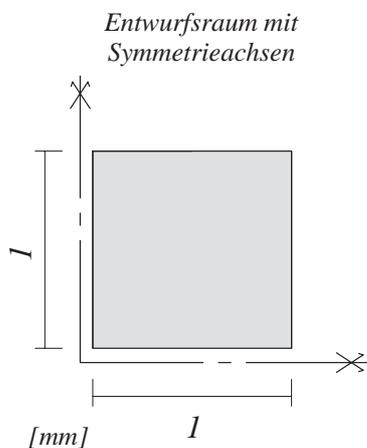
Das Optimierungsziel in den folgenden vier Aufgaben sind die homogenisierten Materialmatrixeinträge einer Mikrozelle. Für die untersuchten zweidimensionalen Probleme enthält die Materialmatrix vier voneinander unabhängige Einträge.

$$C_{ij}^h = \begin{bmatrix} C_{11}^h & C_{12}^h & 0 \\ C_{21}^h & C_{22}^h & 0 \\ 0 & 0 & C_{33}^h \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

1. Beispiel mit negativem Querdehneffekt: Minimierung von Materialmatrixeinträgen

Die Kombination aus Optimierungsstrategie, die Art der Diskretisierung und der Ausgangsentwurf zu Beginn der Optimierung haben mehr als in den anderen in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen maßgeblichen Einfluss auf das Optimierungsergebnis. Der Entwurf einer Einheitszelle mit einem negativem Querdehneffekt wird in diesem Beispiel durch die Minimierung des Nebendiagonalelements in der homogenisierten Materialmatrix C_{12}^h (Gleichung (6.4)) erreicht.

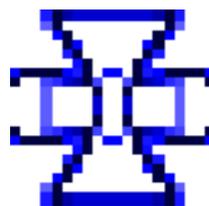
Optimierungsziel: *Negativer Querdehneffekt durch* $\min C_{12}^h$
Nebenbedingung: *konstante Masse im Entwurfsraum* $\bar{\rho} = 15\%$



SIMP:
 $E_s = 10 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0.33$
 $\beta = 3.0$

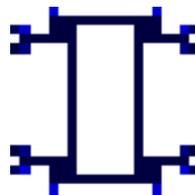
optimierte Materialverteilung

nach anfänglicher "Störung in der Mitte"



$$\begin{aligned} C_{11}^h &= 0.335 & C_{12}^h &= -0.133 \\ C_{21}^h &= -0.133 & C_{22}^h &= 0.335 \end{aligned}$$

nach anfänglicher "Störung am Rand"



$$\begin{aligned} C_{11}^h &= 0.335 & C_{12}^h &= -0.133 \\ C_{21}^h &= -0.133 & C_{22}^h &= 0.335 \end{aligned}$$

Bild 6.10: 'Pore' mit negativem Querdehneffekt, Einfluss der Ausgangskonfiguration

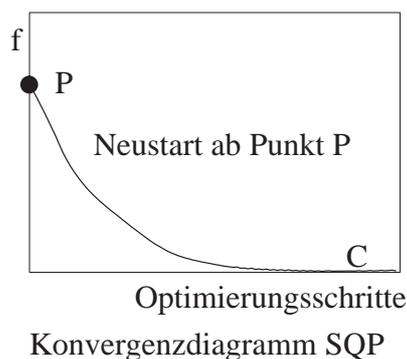
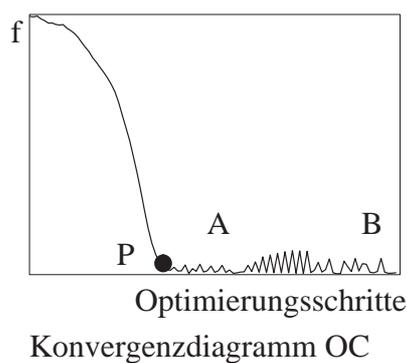
Das Layout der optimierten Zelle wird mit Hilfe des in Kapitel 3.3 beschriebenen SIMP-Materials bestimmt. Die Materialparameter und die Abmessungen sind im Bild 6.10 angegeben. Die

beiden Konfigurationen in der Mitte in Bild 6.9 dienen als Ausgangsentwurf. Im Optimierungsprozess werden in jedem Schritt drei Einheitsverzerrungszustände auf die Zelle aufgebracht, die Fluktuationsverzerrungen berechnet und mit diesen die homogenisierten Materialmatrizeinträge bestimmt (siehe Kapitel 2.3.2). Die Minimierung der Nebendiagonalelemente der homogenisierten Materialmatrix führt auf die optimierten Zellstrukturen in Bild 6.10. Die unterschiedlichen Strukturen resultieren aus dem unterschiedlichen Startentwurf.

2. Beispiel mit negativem Querdehneffekt: Anpassung an vorgegebene Materialmatrizeinträge

Mit Hilfe stochastischer Methoden können verschiedene Ausgangsentwürfe für die Optimierung analog zum Vorgehen im ersten Beispiel generiert und verschiedene Lösungen ermittelt werden. Aufgrund der Ineffizienz stochastischer Optimierungsverfahren wurde im folgenden Beispiel die Kombination aus verschiedenen gradientenbasierten Optimierungsalgorithmen untersucht. Die Optimierungsaufgabe ist bis auf die Zielfunktion identisch zur ersten Aufgabe (Bild 6.11).

Optimierungsziel: *Negativer Querdehneffekt durch Vorgabe der Materialmatrix*
Nebenbedingung: *konstante Masse im Entwurfsraum $\bar{\rho} = 15\%$*



Optimierungsziel:

$$\begin{aligned} C_{11}^* &= 0.346 & C_{12}^* &= -0.244 \\ C_{21}^* &= -0.244 & C_{22}^* &= 0.382 \end{aligned}$$

optimierte Materialverteilung

		Homogenisierte Parameter:	
A		$C_{11}^H = 0.346$	$C_{12}^H = -0.244$
		$C_{21}^H = -0.244$	$C_{22}^H = 0.382$
B		$C_{11}^H = 0.364$	$C_{12}^H = -0.244$
		$C_{21}^H = -0.244$	$C_{22}^H = 0.364$
C		$C_{11}^H = 0.365$	$C_{12}^H = -0.260$
		$C_{21}^H = -0.260$	$C_{22}^H = 0.365$

Bild 6.11: Konvergenzstudie mit der Vorgabe eines negativen Querdehneffekts

Die Ergebnisse des ersten Beispiels basierend auf den beiden unterschiedlichen Ausgangssituationen sind noch einmal in der Mitte in Bild 6.12 dargestellt. Die Analyse der beiden Strukturen zeigt die zwei prinzipiell unterschiedlichen Mechanismen, die zum gewünschten negativen Querdehneffekt der makroskopischen Struktur führen. In der oberen Abbildung führt der exzentrische Anschluss der Zellstege am Zellknoten zu einer Rotation des Knotens und damit zur Aus-

dehnung der Pore bei einer vertikalen Zugbelastung dieses Zellausschnitts. Die optimierte Struktur im unteren Bild entspricht der Analogie zur invertierten Honigwabe, die Verlängerung des Materials in eine Richtung führt zur Streckung der Zellstege, die im 45 Grad Winkel angeordnet sind, und damit zur Ausdehnung des porösen Materials in die andere Richtung.

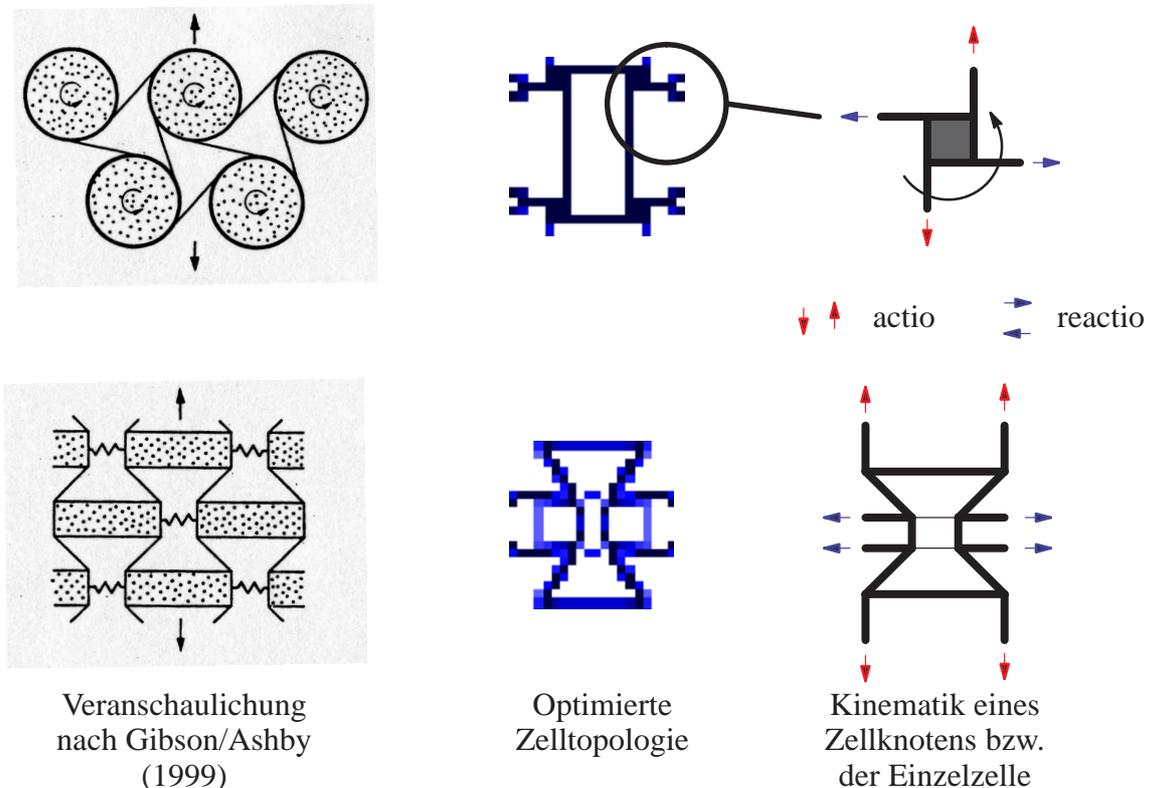


Bild 6.12: Kinematik der Zellstruktur mit negativem Querdehneffekt

Gibson und Asby (1999) verdeutlichen in ihrem Buch die beiden Effekte zum einen mit Hilfe zylindrischer Rollen, die über Zugbänder verbunden sind, zum anderen durch den dargestellten Aufbau einer künstlichen Zelle mit dehnsteifen und dehnweichen Verbindungsstegen (Bild 6.12).

Die Norm der Quadrate der Differenz zwischen vorgegebenem und homogenisiertem Materialmatrixeintrag wurde als skalare Zielfunktion gewählt und entsprechend (6.5) aufsummiert. Bei der Optimierung der einzelnen Matrixeinträge handelt es sich damit um ein typisches Mehrkriterienoptimierungsproblem (Kapitel 3.7). Die vorgegebene Materialmatrix wird mit C^* bezeichnet.

$$f(s) = w_{11} \left(C_{11}^h - C_{11}^* \right)^2 + w_{22} \left(C_{22}^h - C_{22}^* \right)^2 + w_{12} \left(C_{12}^h - C_{12}^* \right)^2 \quad (6.5)$$

Verschiedene Rechnungen mit unterschiedlichen Parametern in den beiden Optimierungsalgorithmen haben gezeigt, dass das heuristische OC-Verfahren relativ unabhängig von der initialen Konfiguration startet, das SQP-Verfahren dagegen stagnierte bei der Mehrzahl der untersuchten Startentwürfe nach wenigen Optimierungsschritten in einem lokalen Minimum. Für die Beispiele, in denen beide Verfahren eine endgültige akzeptable Lösung fanden, unterschieden sich

die gefundenen Topologien nicht. Die Zielfunktionswerte waren in allen Fällen sehr nahe an der gewünschten Lösung, wie eine im Rahmen dieser Arbeit betreute Seminararbeit (Avci (2004)) gezeigt hat. Es hat sich gezeigt, dass das verwendete OC–Verfahren von Maute (1998) sehr rasch das Minimum der Optimierungsaufgabe erreicht. Allerdings beginnt der Optimierungsprozess bei unveränderter Schrittweite stark zu oszillieren. Das Bild 6.11 zeigt den Optimierungsverlauf mit dem OC–Verfahren für die Startkonfiguration mit den anfänglich gestörten Elementen im Zentrum der Einheitszelle. Der Neustart mit dem SQP–Verfahren ab der markierten Stelle (Punkt P) zeigt eine deutlich bessere Konvergenz.

6.3.2 Beeinflussung des Temperatúrausdehnungsverhaltens

Die im vorhergehenden Kapitel durchgeführte Optimierung der Porenstruktur zellulärer Materialien mit negativem Ausdehnungsverhalten senkrecht zur Beanspruchungsrichtung diente hauptsächlich der Entwicklung einer geeigneten robusten Optimierungsstrategie. Die Untersuchungen konzentrierten sich auf das Konvergenzverhalten und den Einfluss des Ausgangsentwurfs auf den Optimierungsverlauf und das Ergebnis. Sie dienten darüber hinaus der Verifikation der ausgewählten Methodik.

Für viele technische Anwendungen sind Materialien mit geringem oder gar negativem Ausdehnungsverhalten bei Temperaturänderung wünschenswert. In Maschinenbauteilen zur Minimierung und Einstellbarkeit der Reibung sich aneinander bewegender Teile, in empfindlichen optischen Geräten oder auch in Parabolspiegeln, die extremen klimatischen Bedingungen ausgesetzt sind, also überall dort, wo eine hohe Maßhaltigkeit und Formtreue gefordert sind. Aber auch in Gehäusen oder Anbauteilen von Verbrennungsmotoren ist der zukünftige Einsatz temperaturneutraler Leichtbauwerkstoffe denkbar.

Die Zielsetzung der folgenden vier Beispiele ist der Entwurf eines Verbundmaterials, das sich bei Erwärmung nicht wie viele natürlichen Materialien ausdehnt, sondern formtreu bleibt, bzw. zusammenzieht. Besonders hervorgehoben wird

- die Formulierung der Optimierungsaufgabe
 - Probleme, die bei der Optimierung derartiger Materialien auftreten
 - der Einfluss der Anzahl und die Art der Grundmaterialien auf das Optimierungsergebnis
- und die Suche nach möglichst leicht interpretierbaren und damit herstellbaren Strukturen.

An dieser Stelle soll aber auch angemerkt werden, dass derartige Materialien bereits existieren, so z.B. die carbonfaserverstärkten Verbundwerkstoffe (CFK), die sogar eine negative Temperatúrausdehnung aufweisen können.

Optimierung mit mehrphasigen Materialien

Für den Entwurf von Materialien mit negativer Temperatúrausdehnung werden die von Sigmund (1994) vorgeschlagenen zwei– und drei–Phasen Materialien sowie der SIMP–Ansatz in den folgenden Beispielen eingesetzt. Die Optimierung mehrphasiger Materialien wird für verschiedene Optimierungsaufgaben mit elastischem Materialverhalten angewandt, z.B. zur Generierung von

Mikromechanismen oder im Materialdesign (Yin et al. (2002), Sigmund (2001), Kikuchi et al. (2004)). Das drei-Phasen Material besteht aus zwei Festkörperphasen und Luft bzw. Gas als dritter Phase. Der Materialtensor \mathbf{C} des Materials setzt sich aus denen der beiden Festkörper \mathbf{C}^1 und \mathbf{C}^2 zusammen.

$$\mathbf{C} = \bar{\rho}^\beta [(1 - \chi^{12})\mathbf{C}^1 + \chi^{12}\mathbf{C}^2] \quad , \quad \beta \geq 1 \quad , \quad 0 < \chi^{12} < 1. \quad (6.6)$$

Der Parameter χ^{12} dient als eine Art Regler zwischen den zwei Festkörperphasen. Der erste Faktor auf der rechten Seite der Gleichung führt über die Bestrafung der Dichte zwischen ihrer oberen und unteren Schranke zu einer klaren Verteilung der Phasen Luft und Festkörper im Entwurfsraum. Am Ende des Optimierungsprozesses sollten im Entwurfsraum ausschließlich Gebiete mit folgenden Kombinationen der beiden Parameter $\bar{\rho}$ und χ^{12} vorhanden sein:

$$\text{Fall A : } \bar{\rho} \approx 0 \quad (6.7)$$

$$\text{Fall B : } \bar{\rho} = 1 \text{ und } \chi^{12} = 0 \quad (6.8)$$

$$\text{Fall C : } \bar{\rho} = 1 \text{ und } \chi^{12} = 1 \quad (6.9)$$

Der im Fall A beschriebene Bereich wird mit Luft identifiziert. Im Fall B ist der dazugehörige Bereich durch den Festkörper mit dem Werkstofftensor \mathbf{C}^1 ausgefüllt und im Fall C mit dem Grundwerkstoff mit dem Werkstofftensor \mathbf{C}^2 . Ein zwei-Phasen Material lässt sich aus der Gleichung (6.6) ableiten, indem die relative Dichte und damit die Phase Luft oder Gas vernachlässigt wird.

$$\mathbf{C} = (1 - \chi^{12})\mathbf{C}^1 + \chi^{12}\mathbf{C}^2 \quad , \quad 0 < \chi^{12} < 1. \quad (6.10)$$

Der Temperatureausdehnungskoeffizient der zwei- und drei-Phasen Materialien wird analog zur Berechnung des Materialtensors aus den Koeffizienten α_T^1 und α_T^2 der beiden Festkörperphasen ermittelt, indem in den Gleichungen (6.6) und (6.10) der Materialtensor \mathbf{C} durch den Temperatureausdehnungskoeffizienten α ersetzt wird.

Optimierungsversuch mit einem zweiphasigen Material

Der Entwurf von Materialien mit negativer Temperatureausdehnung auf der Makroebene erfordert nach Sigmund (1994) mindestens drei verschiedene Phasen bzw. Materialien auf der Mikroebene. Verbundwerkstoffe mit einer Mikrostruktur aus einer oder zwei Phasen weisen insgesamt einen Temperatureausdehnungskoeffizient größer oder gleich Null auf. Die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen mit zwei-Phasen Materialien haben gezeigt, dass die homogenisierten makroskopischen Materialeigenschaften der optimierten Einheitszellenmodelle sehr stark auf geringste Änderungen der Parameter der Mikrozeile reagieren. Nicht sichtbare Änderungen in der Mischung und in der Verteilung der beiden Phasen führten häufig zu einem Wechsel von negativen zu positiven homogenisierten Temperatureausdehnungskoeffizienten, d.h. das Problem ist sehr parameterempfindlich. Stabile Ergebnisse wurden nur für die Vorgabe von positiven Temperatureausdehnungskoeffizienten erzielt. Bild 6.13 zeigt die Verteilung eines zweiphasigen Materials innerhalb der Mikrozeile und die homogenisierten Materialparameter von drei der in einer Seminararbeit (Avci (2004)) entwickelten Mikrostrukturen. Die Seitenlänge der quadratischen Zellen beträgt 1mm.

Die Materialparameter für das zwei-Phasen Material (Gleichung (6.10)) sind im Bild 6.13 angegeben und sind der Arbeit von Sigmund (2001) entnommen. Der Entwurfsraum wurde mit 400 Finiten Elementen diskretisiert und die homogenisierten Materialparameter mit der numerischen Homogenisierung (siehe Kapitel 2.3.3) berechnet. Die Minimierung des homogenisierten Temperatureausdehnungskoeffizienten α^h führt auf die unterschiedlichen Ergebnisse, die aus den unterschiedlichen vorgeschriebenen Mischungsverhältnissen χ^{12} resultieren. Die optimierten Materialverteilungen zeigen Bereiche (gelb-grün) mit Mischungen der beiden Phasen. Darüberhinaus zeigen die Ergebnisse, dass der negative Temperatureausdehnungseffekt nur mit einem sehr weichen zweiten Material erzielt werden konnte. Dies bestätigt die logische Konsequenz und auch die in dieser Arbeit gemachte Erfahrung, dass der Entwurf von Werkstoffen mit extremen makroskopischen Eigenschaften leichter möglich ist, wenn die unterschiedlichen Basismaterialien ebenfalls extrem unterschiedliche Eigenschaften aufweisen.

Diese Überlegungen und die durchgeführten Untersuchungen bestätigen Sigmunds (1994) These, dass für den Entwurf von Werkstoffen auf Mikroebene mindestens drei Phasen erforderlich sind. Eine weitere Forderung führt auf die Vorgabe einer sehr weichen kompressiblen Phase oder Luft. Somit sind die in dieser Arbeit schwerpunktmäßig behandelten porösen Materialien gut geeignet für eine derartige Aufgabenstellung. Allerdings ist die Porenstruktur entsprechend den oben gemachten Ausführungen aus mindestens zwei Materialien mit unterschiedlichem Temperatureausdehnungskoeffizienten aufzubauen. Mit einem derartig aufgebauten porösen Material wird das Auslösen der für die negative Temperatureausdehnung notwendigen Kinematik auf Mikroebene ermöglicht.

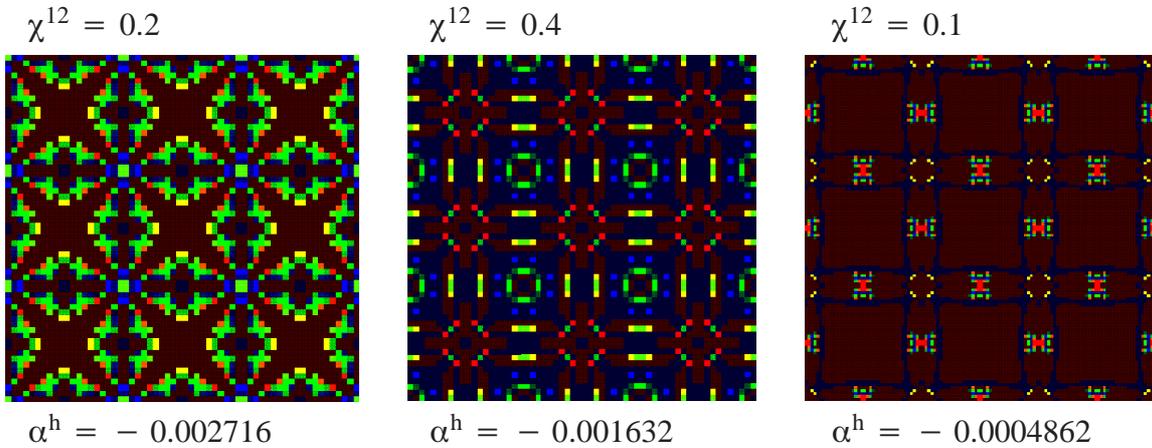
Optimierungsversuch mit einem dreiphasigen Material

Das Bild 6.14 zeigt eine Porenstruktur, die analog zur Idee von Sigmund (1994) optimiert wurde. Die Zielsetzung im Optimierungsprozess ist wieder die Minimierung des homogenisierten Temperatureausdehnungskoeffizienten. Die Materialparameter des drei-Phasen Materials und die homogenisierten Parameter des makroskopischen Werkstoffs sind im Bild angegeben. Die Wahl der Parameter erfolgte mit dem Ziel einer raschen Konvergenz und stabiler Ergebnisse. Durch fehlenden Bezug zur Realität sind deshalb die durchgeführten Untersuchungen rein akademischer Natur. Ziel war die Bewertung der prinzipiellen Machbarkeit.

Im Optimierungsergebnis zeigen die blauen und die roten Bereiche in der mit 900 Finiten Elementen diskretisierten Mikrozelle die zwei Festkörperphasen, der weiße Bereich entspricht der Luft, die den Freiraum für die Kinematik der beiden anderen Phasen schafft und so den negativen Querdehnungseffekt ermöglicht. In diesem Beispiel und einer Vielzahl weiterer vergleichbarer Berechnungen wurde wiederum eine starke Abhängigkeit der Optimierungsergebnisse von der Feinheit der Diskretisierung, den verwendeten Finiten Elementen mit linearen oder quadratischen Ansatzfunktionen und der eingesetzten Filtermethode von Sigmund (1994) beobachtet. Mit der Filtermethode kann die Feinheit der optimierten Struktur kontrolliert werden, indem die Sensitivitäten über die benachbarten Elemente geglättet werden. Beim Ergebnis in Bild 6.14 wurde die Filtermethode nicht angewendet. Deutlich stärker auf den Ausgang der Optimierung als bei dem Beispiel mit dem Ziel eines negativen Querdehnungseffektes wirkt sich aber die Ausgangskonfiguration zu Beginn der Optimierung auf das Ergebnis aus.

Optimierungsziel: Minimaler Temperatureausdehnungskoeffizient
Nebenbedingung: konstantes Mischungsverhältnis der Phasen

Mischungsverhältnis: Phase 1 / Phase 2



2 Phasenmaterial:

Phase 1: ■

Phase 2: ■

$$\begin{aligned} E_s^1 &= 100 \text{ N/mm}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ \alpha_T^1 &= 0.0001 \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_s^2 &= 0.001 \text{ N/mm}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ \alpha_T^2 &= 0.1 \text{ K}^{-1} \end{aligned}$$

Bild 6.13: Prinzipielle Untersuchung mit 2 frei definierten Phasen und minimierter Temperatureausdehnung, Avci (2004)

Optimierungsziel: Minimaler Temperatureausdehnungskoeffizient
Nebenbedingung: Masse (Summe beider Phasen)

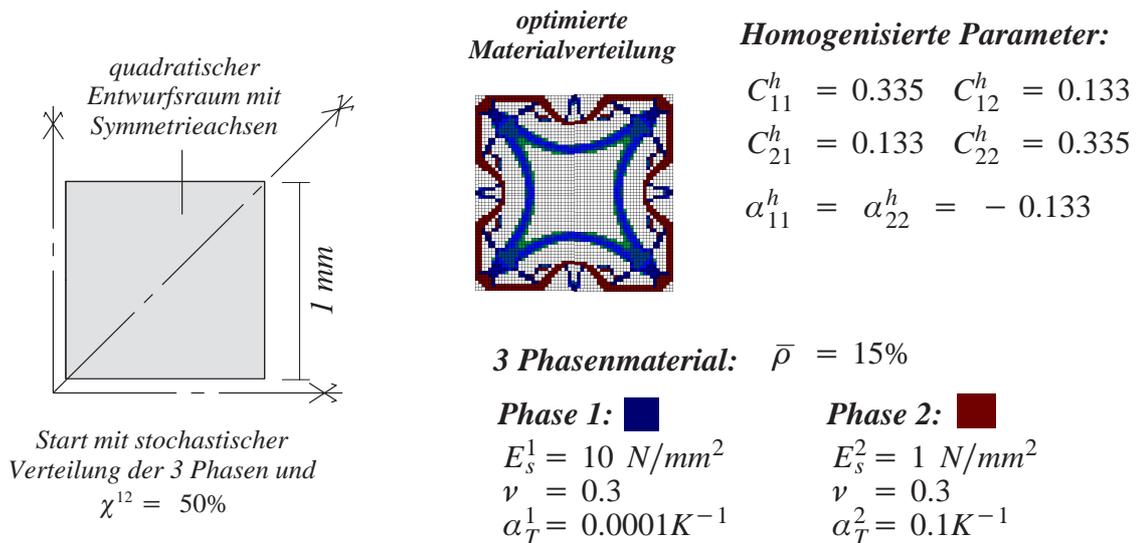


Bild 6.14: Negative Temperatureausdehnung mit einem 3-Phasenmaterial

Aufgrund der Komplexität der optimierten zwei- und drei-Phasen Materialien in den Bildern 6.13 und 6.14 wurden weitere Optimierungsstrategien untersucht, mit dem Ziel einfacherer Zellstrukturen, die vielleicht sogar in ein realistisches Material umgesetzt werden können.

Minimierung der Verschiebung infolge Temperaturerhöhung

Im Beispiel in Bild 6.15 wird innerhalb Entwurfsraumes eine quadratische unveränderliche Aluminiumplatte vorgegeben. Die Diskretisierung des Entwurfsraums erfolgt mit 400 ebenen Finiten Elementen. Die negative Temperatúrausdehnung wird durch die Minimierung der Verformung infolge der vorgegebenen Temperaturerhöhung erreicht.

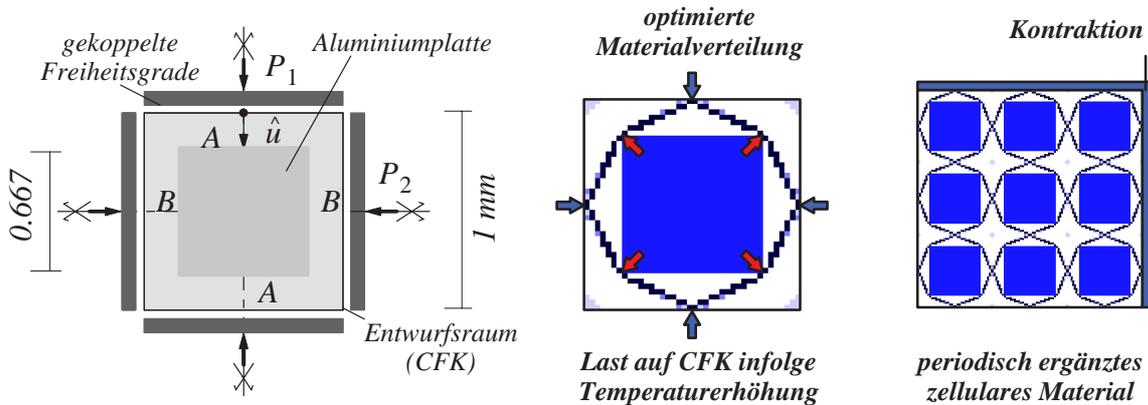
Die dunkelgraue Fläche in der Zelle links im Bild 6.15 zeigt die Aluminiumplatte mit einer hohen Temperatúrausdehnung. Im hellgrauen Entwurfsraum ist ein poröses Material vorgeschrieben, das am Ende des Optimierungsprozesses als Feststoff die Materialeigenschaften von CFK einnimmt. Dieses spezielle Material ist nur sehr aufwendig herzustellen und mit entsprechenden Kosten verbunden. Aus diesem Grund ist in diesem Beispiel ein großer Teil mit dem deutlich preiswerteren Aluminium abgedeckt. Die Zielfunktion im Optimierungsprozess setzt sich aus der Minimierung der vertikalen und horizontalen Deformation der Punkte A und B infolge des Temperaturlastfalls und der Minimierung der Verzerrungsenergie für die beiden Lastfälle P_1 und P_2 zur Erhöhung der Steifigkeit zusammen. Die mittlere Abbildung in Bild 6.15 zeigt die optimierte Zellstruktur und die idealisierten Kräfte, die bei einer Temperaturerhöhung wirken. Die rechte Abbildung veranschaulicht den negativen Temperatúrausdehnungseffekt mit periodisch ergänzten Mikrozellen in einer Nachlaufrechnung. Das Optimierungsergebnis in der mittleren Abbildung in Bild 6.15 zeigt mit dem um die quadratische Aluminiumplatte umlaufenden dünnen CFK-Roving den sinnvollen Einsatz der beiden Basismaterialien entsprechend ihren besonderen Eigenschaften. Die optimierte Materialverteilung tendiert zu einer kinematischen Instabilität, der mit einer mehrschichtigen Anordnung der entwickelten Mikrostruktur durch Kombination mit zwei Deckschichten begegnet werden kann. Die Deckschichten können dabei durchaus einen positiven Temperatúrausdehnungskoeffizienten aufweisen, da dieser über eine entsprechend eingestellte Neigung der optimierten Struktur aus Carbon und der damit einhergehenden mehr oder weniger stark ausgeprägten Kontraktion bei Erhöhung der Temperatur kompensiert werden kann. Ebenfalls kann mit Vorgabe einer dreieckigen Basiszelle und einer dreieckigen Aluminiumplatte ein stabilerer Gesamtwerkstoff erzielt werden.

Negativer Temperatúrausdehnungseffekt mit einer einfachen Zellstruktur

Die Optimierung eines eindeutig interpretierbaren porösen Materials mit negativer Temperatúrausdehnung ist die Zielsetzung im Beispiel in Bild 6.16. Die sehr grob diskretisierte quadratische Einheitszelle mit der Seitenlänge von 4mm führt zu einer starken Beschränkung des Lösungsraums und damit zu einem leichter interpretierbaren Ergebnis. Die Berechnung wurde am Viertelsystem mit 100 ebenen Finiten Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen durchgeführt.

Als Ausgangskonfiguration wurde analog zu den Einheitszellenmodellen für Metallschäume von Gibson und Ashby innerhalb des Entwurfsraums ein Quadrat mit dem blauen Gebiet vorgegeben und eine Mixtur aus den beiden Phasen im restlichen Bereich.

Optimierungsziel: Negative Temperatureausdehnung
Nebenbedingung: konstante Masse im Entwurfsraum $\bar{\rho} = 5\%$



SIMP-Material (CFK):

$$E_s = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.0$$

$$\alpha_T = 5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

$$\beta = 3.0$$

Aluminium:

$$E = 7.6 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\alpha_T = 23.4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$$

Last:

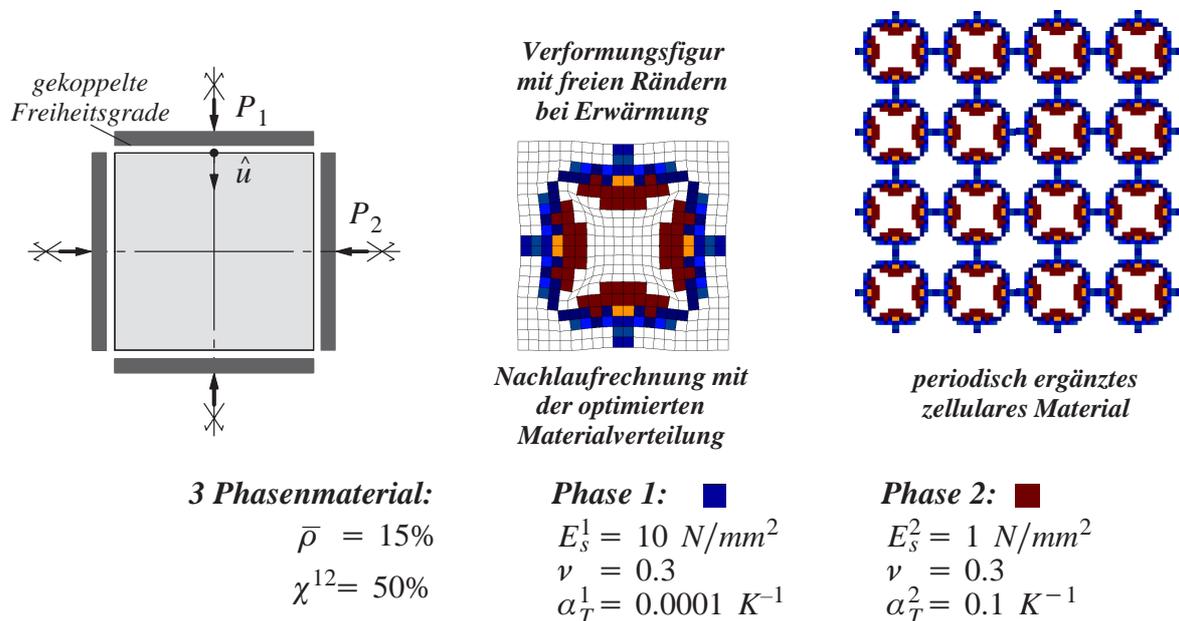
$$P_{1,2} = 1.0 \text{ N}$$

Last (Temperatur):

$$\Delta T = 1.0$$

Bild 6.15: Mikrozeile mit negativer Temperatureausdehnung

Optimierungsziel: Negative Temperatureausdehnung und max. Steifigkeit für P_1 und P_2
Nebenbedingung: Masse (Summe beider Phasen)



3 Phasenmaterial:

$$\bar{\rho} = 15\%$$

$$\chi^{12} = 50\%$$

Phase 1: ■

$$E_s^1 = 10 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\alpha_T^1 = 0.0001 \text{ K}^{-1}$$

Phase 2: ■

$$E_s^2 = 1 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\alpha_T^2 = 0.1 \text{ K}^{-1}$$

Bild 6.16: 'Pore' mit negativem Temperaturkoeffizienten und frei definierten Phasen

Das blaue Quadrat zeigt die steife Einheitszelle, die die tragende Funktion übernimmt. Das Ziel im Optimierungsprozess setzt sich wie im verangegangenen Beispiel aus der Minimierung der Verschiebung infolge eines Temperaturlastfalls und der Minimierung der Verzerrungsenergie

mit den zwei Einzellasten zusammen. Aufgrund der Steifigkeit als Entwurfskriterium in der Optimierungsaufgabe zeigt das Optimierungsergebnis, dass das blaue Quadrat weitestgehend unverändert beibehalten wurde, mit dem Material der zweiten Phase mit dem hohen Temperaturausdehnungskoeffizienten aber die Kinematik erzeugt wird, die zum Zusammenziehen der Zelle bei Temperaturerhöhung führt, wie die nach Ende der Optimierung durchgeführte Strukturanalyse mit geänderten Randbedingungen zeigt. Das periodisch ergänzte zellulare Material in Bild 6.16 verdeutlicht die Möglichkeit einer praktischen Umsetzung des optimierten Materials.

6.3.3 Entwurf von duktilen Mikrostrukturen

In diesem Abschnitt wird der Einfluss des Aufbaus der Porenstruktur auf das Optimierungsergebnis unter Berücksichtigung der materiellen Nichtlinearität in der Optimierung untersucht. Es wird davon ausgegangen, dass das Erreichen der Fließgrenze auf makroskopischer Ebene durch Erreichen der Fließgrenze des Grundwerkstoffs der Porenstruktur eintritt. Die Motivation für diese Optimierung bildet die Untersuchung verschiedener Porenmodelle auf die Anfangsfließfläche von Daxner et al. (2000). Die Autoren gehen davon aus, dass bei Eintreten des Fließens oder Beulens auf Mikroebene auch die Initiierung des plastischen Verhaltens auf makroskopischer Ebene stattfindet und bestimmen mit verschiedenen Kombinationen der Beanspruchung Punkte auf der Anfangsfließfläche, die zur Abgrenzung des elastischen vom plastischen Werkstoffverhalten des zellularen Materials auf der Makroebene fungiert.

Optimierungsziele: Fall A: Steifigkeit Fall B: Duktilität

Nebenbedingung: Masse im Entwurfsraum $\bar{\rho} = 15\%$

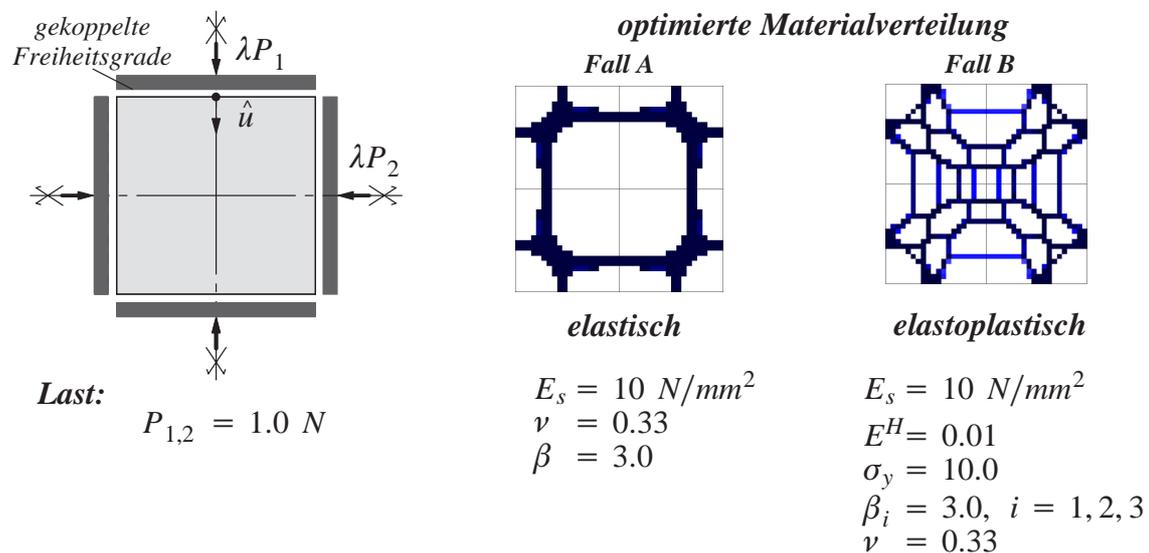


Bild 6.17: Entwurf einer Porenstruktur mit elastoplastischem Materialverhalten

Das Optimierungsziel in der hier durchgeführten Berechnung ist zum einen die Maximierung der Steifigkeit mit linear elastischem Materialverhalten und die Maximierung der Duktilität mit einem nichtlinearen Werkstoff. Bild 6.17 zeigt den gewählten quadratischen Entwurfsraum einer isolierten Mikrozelle mit der Seitenlänge von 4mm und die verwendeten Materialparameter für

das in Kapitel 2.1.3 (Gleichungen (2.14) bis (2.20)) und im Anhang (Gleichungen (10.39) bis (10.41)) beschriebenen Plastizitätsmodell für den metallischen Grundwerkstoff. Die Mikrozeile ist mit 900 ebenen Finiten Elementen mit quadratischen Ansatzfunktionen diskretisiert.

Neben periodischen Randbedingungen wird wieder durch das 'Linking' der Entwurfsvariablen eine zur Hauptdiagonalen symmetrische Zellstruktur erzwungen. Die Belastung wurde in jedem Optimierungsschritt durch die kontrollierte Verschiebung des Randes über eine Koppelung der Freiheitsgrade in einer nichtlinearen Strukturanalyse in 200 Schritten bis zum Erreichen der Verschiebung von 0,1 mm gesteigert. Die beiden Lastfälle in vertikaler und in horizontaler Richtung wurden im Sinne einer Mehrkriterienoptimierung mit gleicher Wichtung zu einer skalaren Ersatzfunktion zusammengefasst.

Die durchgeführte Topologieoptimierung führt zu den beiden sehr unterschiedlichen Zellstrukturen. Die Minimierung der Verzerrungsenergie führt auf die relativ einfache Zellstruktur in der Mitte in Bild 6.17. Die Maximierung der Duktilität resultiert in einer deutlich feingliedrigeren Zellstruktur als die Minimierung der Verzerrungsenergie. Die Zelle rechts im Bild 6.17 zeigt ein deutlich höheres Verformungsvermögen aufgrund der Berücksichtigung elastoplastischen Materialverhaltens im Optimierungsprozess. Die quantitative Erfassung der Ergebnisse erfolgt mit einer nichtlinearen Strukturanalyse, die mit den optimierten Materialverteilungen durchgeführt wurde. Die Last-Verschiebungskurven der optimierten Zellmodelle sind in Bild 6.18 dargestellt.

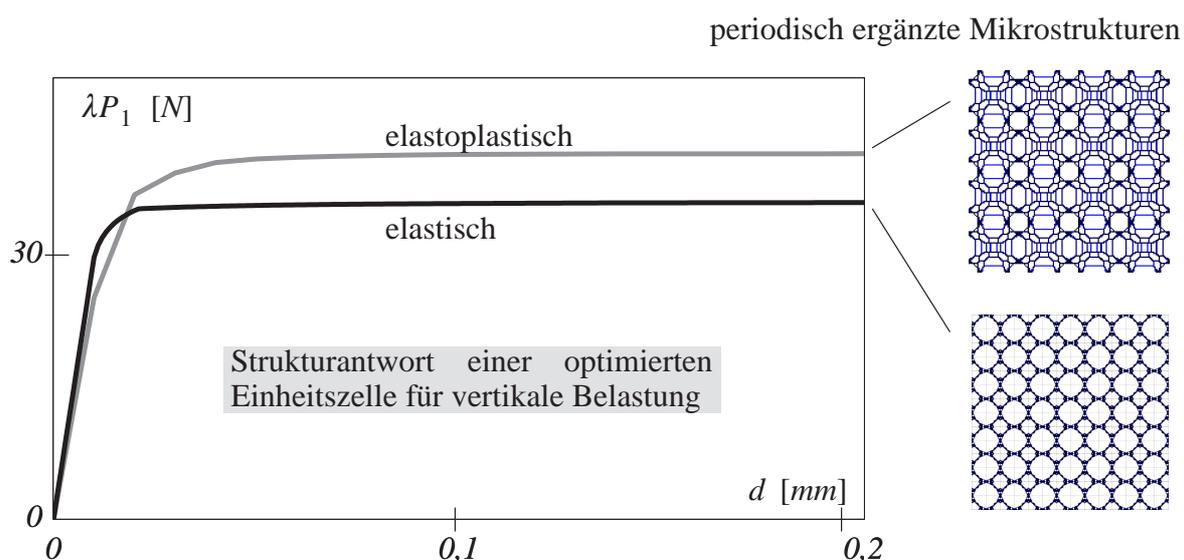


Bild 6.18: Last-Verformungsdiagramme optimierter Porenstrukturen

Das Ergebnis der Optimierung unter Berücksichtigung des elastoplastischen Materialverhaltens zeigt ein etwas weiches Strukturverhalten zu Beginn der Belastung. Nach Erreichen der Fließgrenze zeigt diese Struktur eine höhere Energieabsorption (Bild 6.18). Die periodisch aneinandergesetzten Mikrostrukturen dienen der Veranschaulichung des optimierten Materials. Die nichtlineare Nachlaufrechnung wurde jedoch mit den einzelnen Zellen durchgeführt.

Durch eine Überführung der Topologie in eine Struktur mit glatten Rändern können quantitative Unterschiede der beiden Ergebnisse noch deutlicher gezeigt werden und der Approximations-

fehler aufgrund der gezackten Ränder der optimierten Poren kann minimiert werden. Die Arbeiten von Maute (1998), Schwarz (2001) und Kemmler (2004) zeigen aber, dass der offensichtliche Unterschied in der Strukturantwort noch deutlicher wird, weshalb aufgrund der bereits vorhandenen Eindeutigkeit des Ergebnisses hier auf die Neuvernetzung mit glatten Rändern verzichtet wird. Die Last–Verschiebungskurve in Bild 6.18 zeigt aber auch, dass der Zeitpunkt des Eintretens des Fließens nicht alleiniges Kriterium zur Beurteilung des Energieabsorptionsvermögens sein sollte.

7 Modellierung textilbewehrten Betons

Textilbewehrter Beton ist ein zukunftsweisendes Material, dass aufgrund der besonderen Eigenschaften mit dem klassisch stahlbewehrten Beton konkurrieren kann oder in einigen Anwendungsbereichen sogar ersetzt wird. Die extreme Leistungsfähigkeit dieses neuen Verbundbaustoffes wurde z.B. in der 8. Deutschen Betonkanu-Regatta anhand eines textilbewehrten Kanus mit Wandstärken bis minimal 1,5mm gezeigt (Bayer (2000)). Die Verwendung von Glas- oder Carbonfasern erlaubt einerseits die Herstellung extrem dünnwandiger Bauteile oder sogenannter verloraener Schalungen und andererseits kann mit speziellen Wirkverfahren das Bewehrungsmaterial konkreten Randbedingungen besser angepasst werden, als dies mit Bewehrungsstählen oder Matten möglich ist. Zur Aktivierung der textilen Bewehrung im ungerissenen Zustand untersuchen Reinhardt et al. (2003) vorgespannte textile Bewehrungen in 10mm dünnen Platten.



Bild 7.1: Textilbewehrter Beton in dünnwandigen Bauteilen

Gegenüber kurzfaserbewehrtem Beton ist bei einer Bewehrung mit technischen Textilien aus Glas-, Aramid- oder Carbon-Fasern mit höheren Festigkeiten bei gleichzeitig deutlich duktilerem Verhalten zu rechnen (Curbach (1997, 1998), Hempel (2001)). Trotz der Sprödigkeit der Grundmaterialien, Mörtel und Fasern, entwickelt das Verbundmaterial durch die Reibung zwischen Matrix und Fasern und innerhalb des Rovings eine beachtliche Duktilität.

Vor allem aber das niedrige Gewicht und die hohe Festigkeit des Fasermaterials lassen einen Einsatz im Leichtbau (Schalen und Falwerke), in mittragenden Schalungselementen und im Rahmen von Sanierungs- und Instandsetzungsarbeiten und zur Verstärkung von vorhandenen Bauwerken erwarten (Meyer (1991)). Bischoff & Wulfhorst (1998) untersuchen den Einsatz von Bewehrungstextilien in dünnwandigen Betonrohren. Hegger et al. (1999) entwickeln bauteilintegrierte mittragende Schalungselemente aus textilbewehrtem Beton. Der Einsatz des neuartigen Verbundwerkstoffes in dünnen Platten und ihr Einsatz im Fassadenbau wird von Hempel et al. (1999) untersucht. Aufgrund bestimmter Vorteile gegenüber herkömmlichen Verbundwerkstoffen im Bauwesen (Kurzfaserbeton, Stahlbeton) hat der Einsatz textiler Gewirke als Bewehrung in Betonbauteilen perspektivisch gute Chancen (Curbach et al. (1998)). Bei der Verwendung von Stahl als Bewehrungsmaterial ist eine deutlich größere Mindestbetonüberdeckung erforderlich, um diesen durch die alkalische Umgebung vor Korrosion zu schützen. Eine minimale Bauteildicke von 7–10 cm ist bei Verwendung von Stahlbeton unumgänglich. Glas- oder Carbonfasern korrodieren unter den üblichen Umweltbedingungen nicht und lassen deshalb wesentlich schlankere Bauteile, wie sie z.B. bei Schalenträgwerken ausreichend sind, zu.

Allerdings ist die Frage der Alkali- Resistenz noch Gegenstand intensiver Forschung. Gegenüber kurzfaserbewehrten Betonen ist mit höheren Festigkeiten bei gleichzeitig deutlich duktilerem Verhalten zu rechnen (Rössler et al. (1998)). Ein weiteres wichtiges Kriterium für den Einsatz eines Baustoffes ist der Preis. Wie beim Stahlbeton trägt der kostengünstige Beton die Druckkräfte und die Textilfaser analog zum Stahlstab die Zugkräfte ab (Curbach et al. (1997)). Normalerweise werden bis zu 90% der Kosten des Kurzfaserbetons durch das Fasermaterial verursacht. Da sich für die meisten Bewehrungsaufgaben passende textile Strukturen entsprechend der vorhandenen Belastung und der Bauteilgeometrie erzeugen lassen. Gegenüber dem Kurzfaserbeton ist mit einer erheblichen Reduktion der Fasermengen und damit der Kosten zu rechnen (Hempel et al. (1999), Curbach et al. (1998), Dugas et al. (1998)).

Mit der Herstellung dreidimensionaler Textilien ist es möglich, die Fasern im Bauteil dort anzuordnen, wo sie auftretende Zugkräfte übernehmen müssen (Rössler et al. (1998)). Durch die Optimierung der Bewehrungsstrukturen sind die mechanischen Eigenschaften wie die Duktilität in einem großen Bereich steuerbar und somit ein sprödes Versagen ohne vorherige sichtbare Ankündigung vermeidbar (Hempel et al. (1999)). Eine Einteilung der Textilien in Gewebe, Geflechte, Gestricke, Gewirke und Gelege und eine Beschreibung der textilen Struktur ist in Rössler et al. (1998) und Curbach et al. (1998) zu finden. Mit einer am Institut für Textiltechnik der RWTH Aachen entwickelten und von der Fa. Herzog gebauten Flechtmaschine ist es möglich, räumliche Textilstrukturen mit Fasern unterschiedlichen Querschnitts und beliebiger Ausrichtung anzufertigen.

Zur Charakterisierung des Tragverhaltens textilbewehrter Strukturen wurden an der RWTH Aachen Dehnkörperversuche und Versuche mit Biegebalken durchgeführt. Es wurde der Einfluss verschiedener textiler Bewehrungsmaterialien, die Bewehrungsmenge und die Bewehrungsorientierung auf das Tragverhalten untersucht (Hegger et al. (1999)). An der TU Dresden untersuchte man textilbewehrte Hohlkörperbalken und an der Unterseite mit textilen Konstruktionen nachträglich verstärkte Stahlbetonbauteile (Curbach et al. (1997)). Rössler et al. (1998) führten 4-Punkt-Biegeversuche mit textilbewehrten U-Profilen mit Glas- und Carbongeweben durch. Döinghaus (1998) untersucht kurzfaserbewehrte dünne Platten und vergleicht die Ergebnisse mit denen Textilien bewehrter Platten mit Glasfasern. Beobachtet wird eine deutliche Festigkeitssteigerung gegenüber Kurzfaserbeton bei geringerer Fasermaterialmenge. Der Einfluss der Faserorientierung auf die Duktilität und die Festigkeit wurde auch von Mashima et al. (1990) an Zugproben untersucht.

Übereinstimmendes Ergebnis der verschiedenen Arbeiten ist die Abhängigkeit der Eigenschaften des Faserverbundwerkstoffes von der Faserorientierung, dem Bewehrungsgehalt, der textilen Struktur, dem Matrixmaterial und dem Verbundverhalten zwischen Faser- und Matrixmaterial. Das spröde Versagensverhalten der Fasern wird aus bautechnischer Sicht als Nachteil empfunden, da sich das Versagen nicht durch deutlich sichtbare Risse ankündigt, wie es beim Stahlbeton der Fall ist. Zurückzuführen ist dieses Verhalten auf das geringere plastische Arbeitsvermögen der Glas- und Kohlenstofffasern gegenüber Stahl. Vor allem bei einer sehr geringen Bewehrungsmenge versagt auch das komplette Bauteil plötzlich und ohne Vorankündigung. Vorteilhaft erweist sich die Textilbewehrung bezüglich eines sehr fein verteilten Rissbildes, woraus die größere Duktilität im Vergleich zu kurzfaserbewehrtem Beton resultiert. Diago-

nalschüsse, Fasern die von der Hauptzugspannungsrichtung abweichen, wirken sich positiv auf die Duktilität aus. Vor allem in multiaxialen Geweben und bei den 3D-Geflechtes ist ein gutes Entwicklungspotential bezüglich komplexer Bauteilgeometrien zu erwarten. Ziel ist neben der Erhöhung der Duktilität auch die Reduktion der Bauteilkosten durch die Konzentration der teuren Fasern auf die tatsächlich beanspruchten Zonen. Die Ausrichtung der Fasern und damit die Gewebestruktur stellt letztlich ein klassisches Optimierungsproblem bezüglich verschiedener möglicher Optimierungsziele (Erhöhung der Duktilität, Maximierung der Steifigkeit) dar und ist Gegenstand dieser Arbeit. Aufgrund des komplexen Verformungs- und Versagensverhaltens dieses heterogenen Verbundwerkstoffs sind die Verfahren der Strukturoptimierung prädestiniert zur Bestimmung der Bewehrungsführung bei Berücksichtigung des nichtlinearen Strukturverhaltens. Um die Optimierung sinnvoll für diese Aufgabe einsetzen zu können, werden in diesem Abschnitt die wesentlichen Phänomene des Tragverhaltens zusammengefasst und auf verschiedene Modellierungsmöglichkeiten für die numerische Berechnung eingegangen. Die in dieser Arbeit verwendete phänomenologisch makroskopische Materialmodellierung wird dargestellt und deren Auswahl begründet.

7.1 Phänomene des Strukturverhaltens

Analog zum Verbundwerkstoff Stahlbeton werden beim “Textilbewehrten Beton” die Druckkräfte vom relativ preiswerten Matrixmaterial Beton aufgenommen und die Zugkräfte von dem entsprechend angeordneten Fasermaterial (Hegger et al. (1999), Rostasy et al. (1992)). Im Gegensatz zum gewöhnlichen Stahlbeton findet als Matrixmaterial in der Regel ein hochfester Feinbeton aus Zuschlagstoffen mit kleinem Korndurchmesser Anwendung. Dennoch ist sowohl das Matrixmaterial als auch die Bewehrung in Form von Geweben aus Kohle- oder alkaliresistenten Glasfasern und nicht zuletzt der komplette Verbundwerkstoff ein stark heterogener Werkstoff mit einem entsprechend komplexen Versagensverhalten. Das komplexe Versagensverhalten kann durch die gesonderte Betrachtung der einzelnen Werkstoffe und die Einführung verschiedener Betrachtungsebenen analysiert und mit diesem Verständnis entsprechende Materialgleichungen ausgewählt bzw. den besonderen Anforderungen angepasst werden.

7.1.1 Matrixmaterial

Das Verformungs- und Bruchtragverhalten textilbewehrter Bauteile hängt neben der Art, Menge und Orientierung der Bewehrung maßgeblich vom Matrixmaterial ab. Das Matrixmaterial setzt sich aus zwei Phasen zusammen: den Zuschlagstoffen und dem Zementstein. Die Strukturantwort wird von der Art der verwendeten Zuschlagstoffe, d.h. deren Korngrößenverteilung, der Steifigkeit und der Festigkeit des Zementsteins und der Interaktion dieser beiden Phasen bestimmt. Bei textilbewehrten Bauteilen wird aufgrund der geringen Dicke und der meist geringen Maschenweite des textilen Gewebes in der Regel Feinbeton verwendet. Er übernimmt die Übertragung der Druckkräfte und vermeidet das Ausknicken der Bewehrung. Die geringe Zugfestigkeit wird bei der Bemessung von Strukturbauteilen aus Beton meist vernachlässigt, da der Werkstoff schlagartig ohne sichtbare Ankündigung bei einer derartigen Beanspruchung versagt.

Hinsichtlich des Einsatzes von Beton in Kombination mit einer textilen Bewehrung, sind an den Beton als Matrixmaterial zusammenfassend folgende Forderungen zu stellen:

- möglichst fließfähige Konsistenz für die Herstellung
- geringe Alkalität bei Verwendung von AR-Glasfilamenten
- gezielte Festbetoneigenschaften

In der Regel kommen aus diesen Gründen bei einer textilen Bewehrung nur hochfeste Feinbetone zum Einsatz. Brameshuber et al. (2002) untersucht verschiedene neu entwickelte Feinbetone mit niedriger Alkalität und auch den Verbundwerkstoff anhand von Zug- und Vierpunkt-Biegeversuchen. Die Art des verwendeten Feinbetons hat neben den bisher isoliert betrachteten mechanischen Eigenschaften einen direkten Einfluss auf das Verbundverhalten zwischen der Bewehrung und der Faser und damit auf das Bruchtragverhalten des Bauteils. Das Eindringen des noch flüssigen Feinbetons zwischen die einzelnen Filamente im Inneren des Garnes, aus dem die textile Bewehrung besteht, verändert darüber hinaus das Strukturverhalten des Textils (Bramshuber und Bannholzer (2001)).

7.1.2 Textile Bewehrung

Im Unterschied zum Stahl bestehen die Bewehrungsstränge, die Rovings, aus einer Vielzahl textiler Filamente. Somit ist für dieses Bewehrungsmaterial die isotrope Betrachtungsweise wie für den Stahl üblich nicht zulässig. Kohlenstofffasern zeichnen sich durch eine hohe Festigkeit und Elastizität, geringe Kriechneigung, geringe Wärmeausdehnung und eine hohe chemische Beständigkeit aus, versagen spröde und sind relativ teuer. Glasfasern besitzen eine hohe Zugfestigkeit bei einer geringen Dichte und finden aufgrund ihres günstigen Preis/Leistungsverhältnisses im Kurzfaserbeton bereits seit mehr als zwei Jahrzehnten ihre Anwendung (Curbach et al. (1998)). Ein wichtiger Unterschied zur duktilen Stahlbewehrung ist das schlagartige Versagen der Rovings bei Zugbelastung, aber auch bei einer eventuellen Vorschädigung durch eine Querbelastung und das Faserbeulen bei Druck. Besondere Aufmerksamkeit wurde der Filamentschädigung im Herstellungsprozeß gewidmet (Bild 7.2). Mit Zugproben wurde das Kriech-

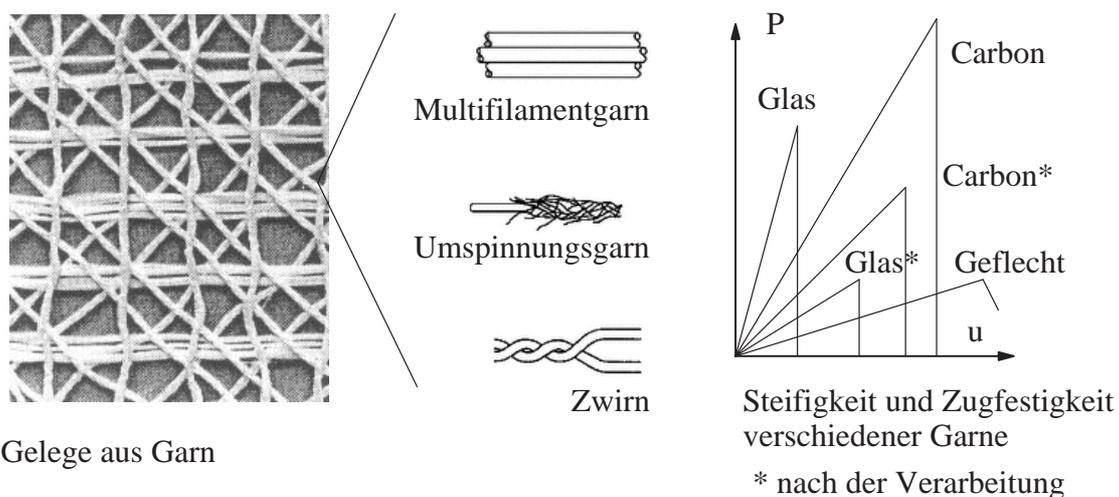


Bild 7.2: Textiles Bewehrungsmaterial, mechanische Eigenschaften

und Relaxationsverhalten bestimmt (Al–Masri und Wulfhorst (2001)). Im Stahlbeton garantiert das hohe Verformungsvermögen des Stahls eine hohe Duktilität des gesamten Verbundmaterials. Eine gewisse Duktilität wird allerdings aufgrund des sukzessiven Versagens der einzelnen Fasern im Roving beobachtet.

Damit das Fasermaterial seiner Aufgabe gerecht werden kann, sind an diesen Werkstoff verschiedene Forderungen zu stellen. Die Steifigkeit und die Festigkeit müssen deutlich über dem des Matrixmaterials Beton liegen. Außerdem ist die Bruchdehnung deutlich über der des Betons anzusetzen. Nur so versagt die Faser nicht vor dem Beton und kann so neben der Erhöhung der Steifigkeit auch die Festigkeit des Verbundmaterials textilbewehrter Beton erhöhen.

Gemeinsam ist beiden Bewehrungsmaterialien, dass über die Beschaffenheit der Oberfläche des Garns und des Rovings der Verbund zum umgebenden Matrixmaterial gesteuert werden kann.

7.1.3 Verbundwerkstoff

Untersuchungen mit stahlbewehrtem Beton zeigen, dass das *linear elastische Tragverhalten* des Betons durch die Bewehrung wenig beeinflusst wird (Kollegger (1988)). Dieser Sachverhalt kann zum einen auch auf den Fall einer textilen Bewehrung übertragen werden und zum anderen sind entsprechende Materialmodelle, die für die Modellierung des reinen Beton entwickelt wurden, auch im Verbundwerkstoff anwendbar.

Der Einfluß des Bewehrungsgrades, der Beschichtung der Textilien, der Schlichte und der Feinbetonmatrix auf die Bruchtragfähigkeit wird von Hegger et al. (2002) an mit Glasfasertextilien bewehrten Dehnkörpern untersucht. Bei einer gegenüber der Zugrichtung gedrehten Orientierung der textilen Bewehrung wird eine deutlich verminderte aufnehmbare Kraft des Faserstranges durch Brechen der Fasern an der Risskante festgestellt. Reinhardt et al. (2003) diskutieren den Einfluß einer Imprägnierung mit Epoxidharz sowie der Bewehrung mit Carbon- und AR-Glasfasern. Der Einfluß der Vorspannung und die Anordnung der Fasern in Balken mit schubdominantem Versagen wird von Padmarajaiah und Ramaswamy (2001) rechnerisch und experimentell untersucht.

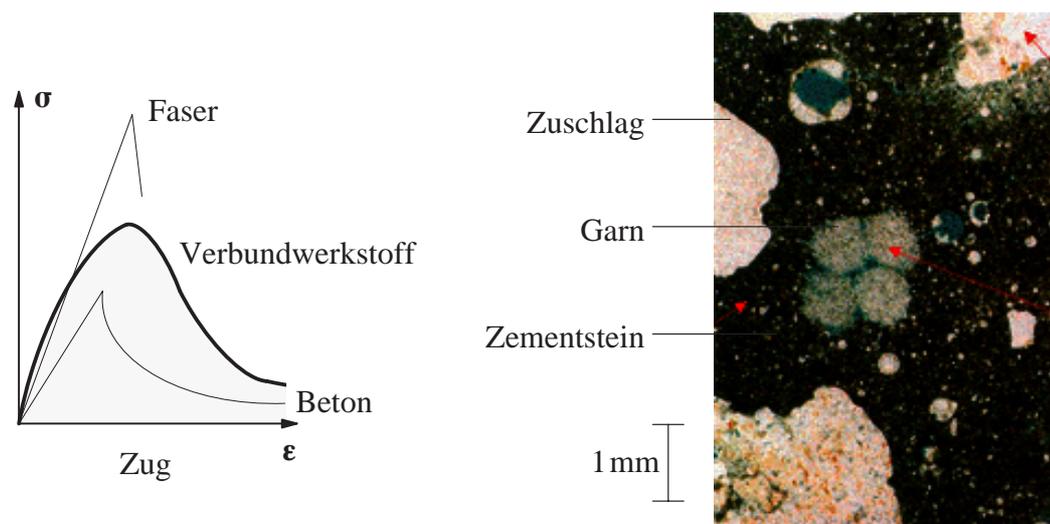


Bild 7.3: Deformationsverhalten und Aufbau des Verbundwerkstoffs

Die Verbindung von Textil und Feinbeton resultiert in einem Verbundwerkstoff, dessen *nichtlineares Tragverhalten* normalerweise nicht aus der bekannten Strukturantwort der einzelnen Bestandteile ermittelt werden kann. Zum einen weisen das Matrixmaterial und das Fasermaterial ein stark unterschiedliches Materialverhalten auf, das durch die Kombination der beiden Materialien darüber hinaus in gewissen Grenzen beeinflusst wird. Zum anderen hat die Art des Verbundes und die Reibung beim Auszug des Fasermaterials aus dem Grundwerkstoff einen maßgeblichen Einfluss auf das duktile Tragverhalten des Verbundwerkstoffs.

Bei reiner Zugbeanspruchung setzt sich die Steifigkeit des bewehrten Querschnitts aus den Komponenten unbewehrter Beton, Fasermaterial und dem *tension-stiffening*, ein in Richtung der Bewehrung wirkender versteifender Effekt durch die mitragende Wirkung des Betons zwischen den Rissen, additiv zusammen.

Brameshuber und Banholzer (2001) stellen im Rahmen des Sonderforschungsbereiches "Textilbewehrter Beton – Grundlagen für eine neuartige Technologie" (SFB 532) ein analytisches Modell zur Beschreibung des Verbundes zwischen Faser und Betonmatrix auf und untersuchen analytisch und mit Pull-Out-Versuchen die Verbundeigenschaften zwischen Filament und Filament sowie zwischen Matrix und Filament. Ein vereinfachtes Modell zur Bestimmung der charakteristischen Größen des elastischen Haftverbundes zwischen Matrix und Faser, die maximale Verbundspannung und der Verbundmodul, wird von Brameshuber et al. (2000) angegeben. Streuungen in den Versuchsergebnissen bei Pull-Out Versuchen werden maßgeblich auf Schädigungen des äußeren und inneren Verbundes zurückgeführt (Banholzer (2001)).

Die textilen Bewehrungsstränge bestehen aus mehreren einzelnen Filamenten. Aufgrund des daraus resultierenden inhomogenen Querschnitts hat die textile Bewehrung ein grundlegend anderes Verbundverhalten des Verbundwerkstoffes zur Folge als die Bewehrung mit dem homogenen Stahl. Anders als bei der Stahlbewehrung gibt es Filamente, die einen direkten Kontakt zur Matrix haben und andere, im Roving innenliegende Filamente, die ausschließlich Kontakt zu den sie umgebenden Fasern haben. Nach Ohno und Hannant (1994) werden die außenliegenden Fasern als Randfasern und die innenliegenden Fasern als Kernfasern bezeichnet.

An der TU Dresden (Sonderforschungsbereich SFB 528) wurde das Verbundverhalten zwischen Fasern und Matrix sowie zwischen den einzelnen Faserlagen experimentell untersucht (Weise et al. (2001)) und die Ergebnisse mit der Verbundtheorie von Ohno-Hannant (1994) verglichen. Für nichtlineare Finite-Element-Berechnungen passen Krüger et al. (2002) ein Verbundmodell, das auf den Annahmen für Stahl-/Betonverbund basiert, für die textile Bewehrung an. Verglichen wird dieser Ansatz mit entsprechenden Biegeversuchen. Für den Beton wird ein Microplane-Modell eingesetzt (Ozbolt et al. (2001)). Littwin (2001) beschreibt mit Hilfe von Pull-Out Versuchen und quasi eindimensionalen Finite-Element Rechnungen das Verbundverhalten und betont die Bedeutung der Berücksichtigung statistischer Streuungen der Verbundeigenschaften und der geometrischen Kenngrößen.

Raupach et al. (2003) führen Biege- und Zugversuche durch und beschreiben die unterschiedliche Lastabtragung der inneren und äusseren Filamente eines Garnes. Durch eine Tränkung des Glasfasergeleges mit verschiedenartigen Polymerharzen werden auch die inneren Fasern zur Lastabtragung herangezogen (Schorn und Raupach (2002)). Raupach und Brockmann (2002)

führen Bauteilversuche zur Beurteilung der Dauerhaftigkeit bezüglich einer textilen Bewehrung mit alkaliresistenten Glasrovings (AR–Glas) durch. Zwei Versagensmechanismen sind Gegenstand dieser Arbeit: der chemische und der mechanische Angriff auf die Glasbewehrung und ein damit einhergehender Festigkeits– und Duktilitätsverlust.

Aufgrund des besseren Verbundes der Randfasern zum umgebenden Matrixmaterial werden in der Regel in diesen Schichten höhere Kräfte übertragen als zwischen den Fasern im Inneren des Rovings.

Genauso wie bei der Stahlbewehrung hat natürlich die Oberflächenbeschaffenheit einen Einfluss auf den Verbund. Das nichtlineare Deformationsverhalten des Verbundwerkstoffs wird durch das Ablösen der Faser von der Matrix bis hin zum Herausziehen der Faser bestimmt. Zwischen den Fasern wird der Verbund maßgeblich durch die Klebewirkung der bei der Herstellung des Rovings aufgetragenen Schichte bestimmt.

7.2 Anisotropes Plastizitätsmodell mit Entfestigung für Beton

Das in dieser Arbeit verwendete elasto–plastische Werkstoffmodell für Beton wurde ursprünglich von Menrath (1999, 2003) zur Berechnung von zweidimensionalen Tragwerken entwickelt und von Haufe (2001) für den Einsatz zur Berechnung von dreidimensionalen Schalenstrukturen modifiziert.

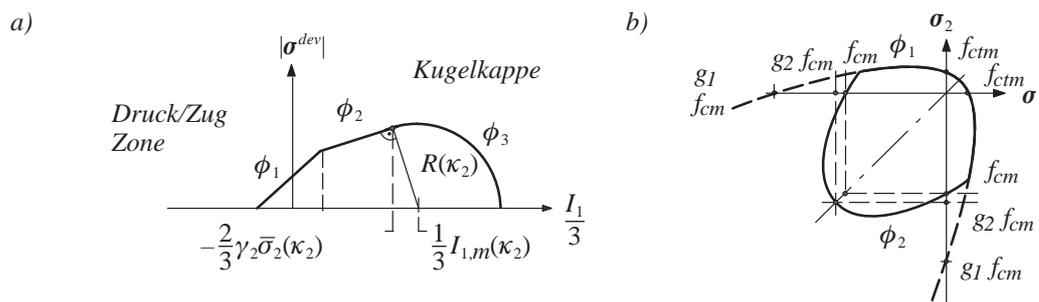


Bild 7.4: a) Fließfläche für Beton im Invariantenraum
b) Drucker–Prager–Teilflächen im 2D–Hauptspannungsraum

Die Fließfläche besteht aus zwei Drucker–Prager–Teilflächen (ϕ_1, ϕ_2) und einer Kugelkappe (ϕ_3) (Bild 7.4).

Das Versagen unter Zugbeanspruchung wird mit der ersten Drucker–Prager–Teilfläche ϕ_1 beschrieben, während durch die Teilflächen ϕ_2 und ϕ_3 das Versagen unter Druck–Beanspruchung definiert wird.

Die Fließfunktionen der Drucker–Prager–Teilflächen werden durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$\phi_1(\sigma^{dev}, \mathbf{I}_1, \kappa_1) = |\sigma^{dev}| + \alpha_1^* \mathbf{I}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_1^* \bar{\sigma}(\kappa_1) \quad (7.1)$$

$$\phi_2(\sigma^{dev}, \mathbf{I}_1, \kappa_2) = |\sigma^{dev}| + \alpha_2^* \mathbf{I}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \beta_2^* \bar{\sigma}(\kappa_2) \quad (7.2)$$

$\bar{\sigma}(\kappa_1)$ und $\bar{\sigma}(\kappa_2)$ definieren die äquivalenten Spannungen im Zug- und Druckbereich, $|\boldsymbol{\sigma}^{dev}|$ ist die Norm des deviatorischen Spannungstensors und die Parameter α_1^* , α_2^* , β_1^* , β_2^* werden wie folgt aus den einaxialen Zug- und Druckfestigkeiten f_{ctm} , f_{cm} und den geometrischen Fittingparametern γ_1 , γ_2 berechnet:

$$\alpha_1^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_1 f_{cm} - f_{ctm}}{\gamma_1 f_{cm} + f_{ctm}} \quad , \quad \alpha_2^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\gamma_2 - 1}{2\gamma_2 - 1} \quad , \quad (7.3)$$

$$\beta_1^* = \frac{2\gamma_1 f_{cm}}{\gamma_1 f_{cm} + f_{ctm}} \quad , \quad \beta_2^* = \frac{\gamma_2}{2\gamma_2 - 1} \quad . \quad (7.4)$$

Die Fließfläche ϕ_3 wird durch den Radius R und den Mittelpunkt L definiert

$$\phi_3(\boldsymbol{\sigma}^{dev}, \mathbf{I}_1, \kappa_2) = \sqrt{|\boldsymbol{\sigma}^{dev}|^2 + \frac{1}{9}[\mathbf{I}_1 - L(\kappa_2)]^2} - R(\kappa_2) \quad (7.5)$$

mit

$$R(\kappa_2) = \gamma_2 \bar{\sigma}(\kappa_2) \sqrt{\frac{2}{3} + 6\alpha_2^{*2}} \quad ; \quad L(\kappa_2) = -(\sqrt{54}\alpha_2^* + 2)\gamma_2 \bar{\sigma}(\kappa_2) \quad . \quad (7.6)$$

Die Definition der verwendeten Parameter wird rechts in Bild 7.4 in der σ_1 , σ_2 – Hauptspannungsebene veranschaulicht.

Für das entfestigende Verhalten des reinen Betons im Zugbereich wird ein exponentieller Verlauf angenommen (siehe 7.5, links). Dieser wird durch die in der Rissfläche freigesetzte Bruchenergie G_t gesteuert. Die Vermeidung der Netzabhängigkeit bei entfestigendem Verhalten erfolgt durch die Einführung einer charakteristischen Elementlänge h^* .

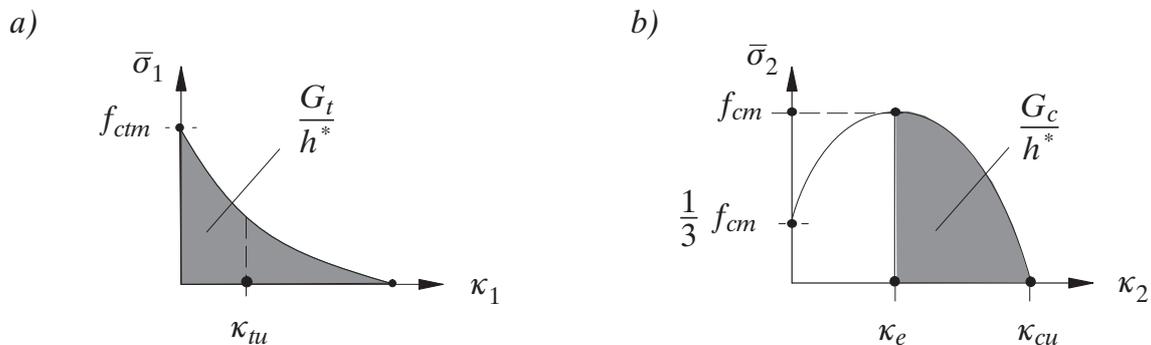


Bild 7.5: Evolutionsgesetz a) für den Zugbereich b) für den Druckbereich

Zur vollständigen Beschreibung des nichtlinearen Materialverhaltens gehört weiterhin die Beschreibung des Druckverhaltens. Nach anfänglich linear elastischem Verhalten verhält sich der Beton verfestigend. Kurz vor dem Erreichen der maximalen Druckfestigkeit kommt es zu einer Auflockerung des Gefüges, verbunden mit einem Volumenzuwachs. Im weiteren Verlauf wird das entfestigende Verhalten durch die freigesetzte Bruchenergie G_c bestimmt. Sowohl das verfestigende als auch das entfestigende Verhalten werden mit einer parabolischen Funktion abgebildet (siehe Abbildung 7.5, rechts). Eine weiterführende Beschreibung dieses Materialmodells,

die Beschreibung der Vorgehensweise zur Bestimmung der Materialparameter sowie die numerische Umsetzung sind ausführlich in Haufe (2001), Menrath (1999) und Menrath et al. (1999) beschrieben.

Die Anpassung der Parameter für den in dieser Arbeit verwendeten Feinbeton wurde von Eitel (1999) durchgeführt. Die Parameter werden bei den dargestellten Beispielen angegeben.

7.3 Versagen des Fasermaterials und Modellierung des Verbundes

Die mechanische Beschreibung der textilen Bewehrung basiert im Wesentlichen auf den am Institut für Massivbau der RWTH Aachen durchgeführten Zug- und Biegeversuchen an Bauteilen aus Textilbeton. Bei diesen Versuchen wurde ein multiaxiales Gelege (WIMAG) aus Glasfaser-garn (NEG AR 615 tex) zur Bewehrung von Feinbeton verwendet, wobei nur die Orientierungen 0° , 45° und -45° der Rovings zur Belastungsrichtung innerhalb des Textils verwendet wurden. Die Rovings, aus denen sich die textile Bewehrung zusammensetzt, bestehen aus einer Vielzahl von Spinnfäden, die wiederum durch Filamente gebildet werden. Bei der Entwicklung eines Modells für eine textile Bewehrung aus Glasfasern müssen sowohl die Eigenschaften der einzelnen Fasern, als auch die der gesamten Struktur berücksichtigt werden. Insbesondere hat der Verbund zwischen Roving und Matrix sowie das Verhalten der einzelnen Fasern innerhalb des Rovings maßgeblichen Einfluss auf das reale Verhalten des Verbundwerkstoffes. Die mikromechanische Modellierung zur Beschreibung der physikalischen Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Fasern innerhalb des Rovings und zwischen dem Roving und der Feinbetonmatrix findet in der hier verfolgten makroskopischen Betrachtungsweise keine Berücksichtigung, da es hier um die prinzipielle Vorgehensweise beim Einsatz der Topologieoptimierung geht. Diese Art der Modellierung und die Optimierung des Strukturverhaltens unter Berücksichtigung mikromechanischer Einflüsse ist Gegenstand der Arbeit eines weiteren Forschungsprojektes des Instituts für Baustatik (Kato et al. (2006)).

Aufgrund des fehlenden Verbundes zwischen der Betonmatrix und den inneren Filamenten eines Spinnfadens ist eine unterschiedliche Lastabtragung der inneren und äußeren Filamente zu beobachten. Ein Modell zur Berücksichtigung des unterschiedlichen Verbundverhaltens zwischen den einzelnen Filamenten sowie den äußeren Filamenten mit dem Beton wird in Ohno/Hannant (1994) in Form einer multilinearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung angegeben. Der Einfluss stark variierender Verbundeigenschaften und die damit einhergehenden starken Abweichungen der Dehnungen einzelner Fasern führen zu einem sukzessiven Versagen des gesamten Faserstranges. Durch eine verminderte Bruchdehnung und Zugfestigkeit, sowie durch die Modellierung des Faserstranges durch eine dominierende Faser und einige untergeordnete Fasern geringerer Festigkeit, kann dem reissverschlussartigen Versagen des Rovings in einem makroskopischen Modell Rechnung getragen werden (Eitel (1999)). Die Modellierung der textilen Bewehrung in der Betonmatrix für die nachfolgend durchgeführte Optimierung erfolgt in vereinfachter Form. Es wurden folgende Annahmen getroffen:

- Aufgrund der oben beschriebenen Effekte erreicht die Bruchspannung der Textilbewehrung nicht den theoretisch möglichen Wert der Zugfestigkeit eines Spinnfadens. Die Bruchspannung wird mit ca. 67% des maximal erreichbaren Wertes angenommen.
- Es werden für die nachfolgenden Rechnungen ausschließlich Gelege betrachtet, bei denen alle Faserstränge in gestreckter Form in unterschiedlichen Ebenen im Textil eingebunden werden, so dass die einzelnen Fadenscharen zusammengefasst betrachtet werden können.
- Das Textil wird in Form einer verschmierten Bewehrung modelliert.
- Eine Wechselwirkung von Beton und Fasermaterial in Form eines tension–stiffening Effekts zur Erfassung des Mitwirkens des Betons zwischen den Rissen bleibt unberücksichtigt, da die Diskretisierung auch in Fasernähe sehr fein ist.
- Der oben beschriebene Reißverschluss-effekt, aufgrund sukzessiven Reißens einzelner Fasern innerhalb des Rovings, wird vernachlässigt und eine bilineare Spannungs–Dehnungsbeziehung (Bild 7.6) angenommen.

Die Modellierung der Bewehrung erfolgt, indem die Steifigkeit der Bewehrung zur Steifigkeit des Betons addiert wird. Der Anteil der Bewehrung wird dabei über einen definierten Anteil der Querschnittsfläche, entsprechend dem gewählten Bewehrungsgrad und der Bewehrungsrichtung, gleichmäßig im Betonelement eingebettet ("verschmiert").

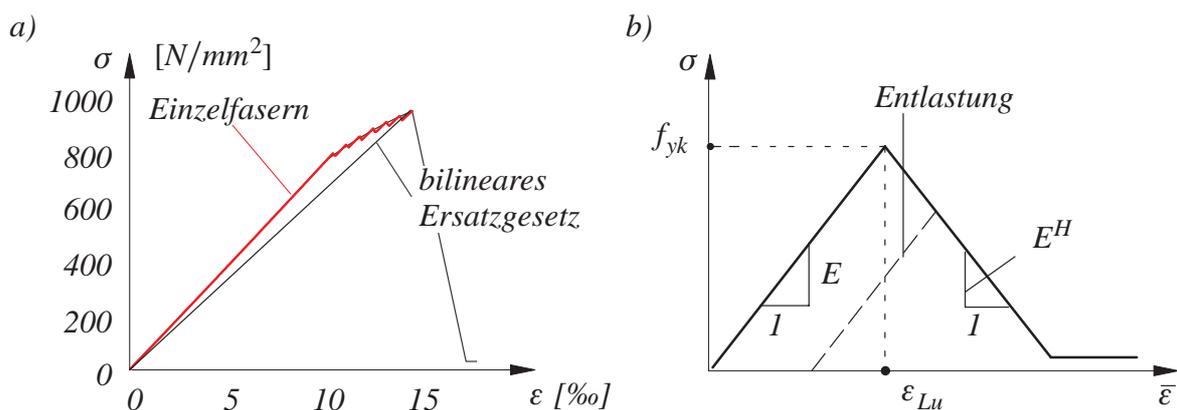


Bild 7.6: a) Spannungs–Dehnungs–Beziehung für Gelege aus Glasfasern
b) vereinfachte Modellierung

Dem Werkstoffmodell wird ein eindimensionales elasto–plastisches Verhalten zugrunde gelegt. Durch eine entsprechende Wahl des Verfestigungs–Moduls E^H wird das spröde Versagensverhalten nach anfänglich linear elastischem Verhalten beschrieben.

Bei dem Konzept der "verschmierten" eingebetteten Bewehrungsmodellierung können verschiedene Bewehrungslagen bei dünnwandigen Tragwerken durch eine abschnittsweise Integration in Dickenrichtung mit unterschiedlichen Orientierungen im Elementraum definiert werden. Die Orientierung wird durch einen Winkel bezüglich eines gewählten Koordinatensystems definiert. Der Bewehrungsgrad richtet sich nach dem Anteil der Querschnittsflächen des Fasermaterials zur Betonmatrix. Die Bruchspannung entspricht der Zugfestigkeit f_{yk} und der Elastizitätsmodul E dem E–Modul der textilen Bewehrung.

8 Bestimmung des Faserlayouts textilbewehrten Betons

Mit Hilfe des beschriebenen Konzepts in Abschnitt 7.2 und 7.3 zur Modellierung faserverstärkter Verbundwerkstoffe wird im Folgenden der Einsatz der Topologieoptimierung zur Ermittlung eines Bewehrungslayouts erläutert.

Mit der Herstellung zwei- und dreidimensionaler Textilien ist es möglich, für viele Bewehrungsaufgaben passende textile Strukturen zu erzeugen (Franzke (2001), Stockmann (2001), Domostatik (2001)). Durch eine gezielte Anordnung der Fasern in Richtung der Zugspannungen kann der Wirkungsgrad der in den Beton eingelegten Fasern gesteigert werden. Besondere Bedeutung für das Bruchtragverhalten hat neben dem Verbundverhalten der Faserbündel und der Feinbetonmatrix vor allem die Art, Menge und Orientierung der textilen Bewehrung sowie die Querschnittsform der Bewehrungstextilien (Molter (2001)). Durch eine wirtschaftliche Ausnutzung relativ preisgünstiger alkaliresistenter Glasfasern stellen diese bei einem guten Ausnutzungsgrad der Bewehrung für bestimmte Anwendungen eine wirtschaftliche Alternative zum Stahl im Stahlbetonbau für Leichtbauteile dar (Hegger und Molter (2001)).

Bei Vorgabe der prinzipiell möglichen Fasertopologie werden mit der diskreten materiellen Topologieoptimierung die Orte bestimmt, an denen für ein bestimmtes Optimierungsziel Bewehrung erforderlich ist. Ein wesentlicher Vorteil dieses Verfahrens bezüglich der Herstellbarkeit ist es, dass die Ausrichtung potentieller Fasern vorab definiert wird, z.B. in Form einer orthogonalen und/oder diagonalen Faseranordnung. Die Bewehrung wird entsprechend den Ausführungen in Kapitel 7.3 mit der Ausrichtung, bezogen auf ein orthogonales Koordinatensystem, und dem Verhältnis der Querschnittsflächen des Fasermaterials und des Betons innerhalb eines oder mehrerer Schichten des verwendeten Schalenelementes vorgegeben. Mit dem beschriebenen Konzept der verschmierten Bewehrung ist es möglich, ein über mehrere finite Elemente kontinuierlich verlaufendes Bewehrungsmaterial in unterschiedlichen Richtungen und Ebenen, aber auch innerhalb einer Ebene, zu modellieren. Hierdurch ist auch die Optimierung einer abgestuften Bewehrung innerhalb einer Schicht möglich. Da nicht die mechanischen Eigenschaften der textilen Bewehrung direkt modelliert werden (siehe Annahmen im Abschnitt 7.3) und die direkte Interaktion zwischen Matrix- und Fasermaterial beim Hinzufügen und Hinwegnehmen der Bewehrung vereinfachend vernachlässigt wird, werden in der Sensitivitätsanalyse die Ableitungen des Plastizitätsmodells zur Modellierung des Betons vernachlässigt. Die implementierte Sensitivitätsanalyse erfolgt nach den Ausführungen im Anhang A2.3 mit entsprechenden Vereinfachungen bezüglich des eindimensionalen Plastizitätsmodells für die Faserbewehrung. Anstelle der inkrementellen Berechnung der Sensitivitäten ist natürlich auch ein einfacherer Ansatz in Bezug auf das eindimensionale Werkstoffmodell des Fasermaterials denkbar, z.B. die Berechnung der Sensitivitäten am Ende der Lastaufbringung im Sinne eines hyperelastischen Modells.

8.1 Entwurfskriterien und Designparameter

Der Entwurf eines Bewehrungslayouts von bewehrten Bauteilen aus Beton erfolgt in der Regel auf der Grundlage linearer Elastizität. Die Minimierung der Verformungen kann mit verschiede-

nen Kriterien zur Maximierung der Steifigkeit in der Optimierung erfolgen. Neben der Gebrauchstauglichkeit ist auch das postkritische Tragverhalten im Fokus heutiger Forschung. Aufgrund des spröden Versagensverhaltens der einzelnen Komponenten im textilbewehrten Beton, ist deren nichtlineares Materialverhalten aber auch der nichtlinearen Strukturantwort des Bauteils insgesamt Rechnung zu tragen. Deshalb ist für den praktischen Einsatz von textilbewehrtem Beton die Forderung nach einer sichtbaren Ankündigung des Versagens des Strukturbauteils in Form einer kontinuierlichen Zunahme von Rissen von besonderer Bedeutung. Das primäre Optimierungsziel ist in diesem Fall die Maximierung der Duktilität. Die textile Bewehrung ermöglicht die Herstellung extrem dünnwandiger Bauteile. Aufgrund der Schlankheit der Bauteile ist neben der Nichtlinearität des Materials auch der geometrischen Nichtlinearität besondere Beachtung zu schenken. Ebenso wie in der Strukturanalyse ist auch in der Optimierung derartiger Strukturen die Maximierung der Beullast mit Berücksichtigung des nichtlinearen Materialverhaltens eine material- und bauteilgerechte Zielsetzung.

Wechselt man von der makroskopischen Betrachtungsweise auf die Skala, wo die einzelnen Komponenten des textilbewehrten Betons sichtbar werden, erhält man Zugang zu weiteren Mechanismen, die maßgeblichen Einfluss auf das Strukturverhalten haben. Theocaris & Stavroulakis (1998) untersuchen Faserverbundwerkstoffe mit unterschiedlichen Querdehnzahlen auf Mikrostrukturebene mittels Homogenisierung, indem sie ein gewünschtes mechanisches Verhalten beschreiben und die Differenz zwischen dem Modellmaterial und der realen Struktur minimieren. In der Regel wird in der Literatur eine geradlinige Faser innerhalb der betrachteten Einheitszelle vorausgesetzt. Lardeur & Bourdeau (1996) optimieren in einem Finiten Element einen kontinuierlich gekrümmten Verlauf der Fasern mit dem Tsai–Hill–Versagenskriterium. Das Deformations- und Versagensverhalten hängt sowohl vom heterogenen Aufbau der Matrix, also des Feinbetons, aber auch von der in dieser Skala sichtbaren Heterogenität des textilen Bewehrungsmaterials ab.

Die Optimierung der Zusammensetzung des Betons ist Thema verschiedener wissenschaftlicher Arbeiten. Das Werkstoffverhalten und speziell die Rissentwicklung hängen ab von der Korngrößenverteilung der Zuschlagstoffe, den Eigenschaften des Zementsteins, aber auch von der Anzahl, der Verteilung und Art der Defekte infolge des Herstellungsprozesses. Mit den Parametern zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens dieser Komponenten und deren Zusammenspiel kann mit Hilfe mathematischer Optimierungsverfahren die Maximierung der Festigkeit und die Erzielung eines bestimmten Nachbruchverhaltens eingestellt werden. Allerdings ist dem Autor bisher noch keine Arbeit bekannt, die diese Aufgabenstellung mit Hilfe der Verfahren der Strukturoptimierung behandelt. Die Korngrößenverteilung der Zuschläge hat aber auch einen Einfluss auf die Fließfähigkeit des Betons und damit der Durchdringung des Fasermaterials. Die Kontrolle der Interaktion des Betons mit dem Fasermaterial ist ebenfalls eine vielversprechende Aufgabe, die mit den Verfahren der Strukturoptimierung angegangen werden kann. Da der Feinbeton nur in die äußeren Schichten der textilen Bewehrung eindringt, hat die Art des verwendeten Feinbetons einen Einfluss auf das Verbundverhalten nur in dieser äußeren Schicht des Rovings. Neben der Art des Feinbetons spielt aber analog zur glatten oder gerippten Stahlbewehrung auch die Oberfläche der Rovings eine Rolle. Durch einen spiralförmig umlaufenden Faden, der mit einem Kunstharz auflaminiert wird, lässt sich ähnlich wie bei Stahl auch hier eine Rippenstruktur

zur Verbesserung des Verbundverhaltens erzeugen. Da in einem Roving bestehend aus einzelnen Filamenten, in der Regel die inneren Filamente zur Lastabtragung weniger herangezogen werden, stellt man mit dieser Art von Bewehrung in der Regel niedrigere Werte für die Steifigkeit und die Festigkeit eines textilbewehrten Betons fest, als im Vergleich zu den Materialeigenschaften der Einzelkomponenten. Es wurden verschiedene Untersuchungen gemacht, um den Einfluss eines vollständig mit Epoxidharz getränkten Rovings auf das Gesamttragverhalten zu untersuchen (z.B. Raupach et al. (2003)). Aufgrund der Imprägnierung mit Harz werden auch die inneren Filamente zur Lastabtragung herangezogen; die Steifigkeit und die Festigkeit sind deutlich höher als bei Verwendung von Rovings mit Filamenten, die nicht miteinander verbunden sind. Wie schon erwähnt ist ein sukzessives deutlich sichtbares Versagen tragender Bauteile wünschenswert. Die Erhöhung des Verbundes zwischen dem Roving und Beton bzw. zwischen den Filamenten innerhalb des Rovings erhöht zwar die Anfangssteifigkeit und die maximal aufnehmbare Last, das Versagen der Einzelfasern erfolgt aber plötzlich. Das Ziel einer auf diese Problematik angesetzten Strukturoptimierung kann nun das sukzessive Versagen der einzelnen Komponenten des Verbundwerkstoffes sein. Mit Hilfe der Optimierung kann die Anordnung von Fasern unterschiedlicher Werkstoffe und unterschiedlicher Imprägnierung oder Oberflächenbeschaffenheit erfolgen. Ebenso kann über die Art der Oberflächenbeschaffenheit der Rovings und einer örtlich unterschiedlichen Verteilung der Körnung der Feinbetonmatrix der Schlupf zwischen Roving und Matrix kontrolliert aktiviert werden. Tritt letztendlich ein sukzessives Versagen dieser einzelnen Bauteile mit einem deutlichen gut verteilten Rissbild ein, ist das Resultat das gewünschte duktile Verhalten des gesamten Verbundwerkstoffes.

Neben dem duktilen Versagensverhalten sind die maximal ertragbare Last und minimale Verformungen im elastischen Bereich ebenso von Bedeutung. Die Verarbeitung dieser verschiedenen Zielsetzungen kann letztendlich Teil einer Mehrkriterienoptimierung sein. Anhand von pareto-optimalen Lösungen lässt sich dann der für einen bestimmten Einsatzzweck bestmögliche Kompromiss auswählen. Verschiedene Arbeiten mit der Zielsetzung, den Einfluss der Art der textilen Struktur (Gewebe, Gewirke, Gestricke) in der numerischen Simulation zu erfassen, motivieren den Einsatz von Optimierungsverfahren zur Bestimmung einer Gewebestruktur. Die Ergebnisse verschiedener Untersuchungen zeigen den Einfluss der Gewebestruktur auf die Verbesserung der duktilen Eigenschaften des textilen Betons. Gerade im Hinblick auf die Möglichkeit dreidimensionaler textiler Strukturen durch Einsatz speziell entwickelter Strick- und Webtechniken, bietet sich der Einsatz von Optimierungsverfahren für den Entwurf derartiger textilen Strukturen an.

8.2 Vorstellung der eigenen Strategie

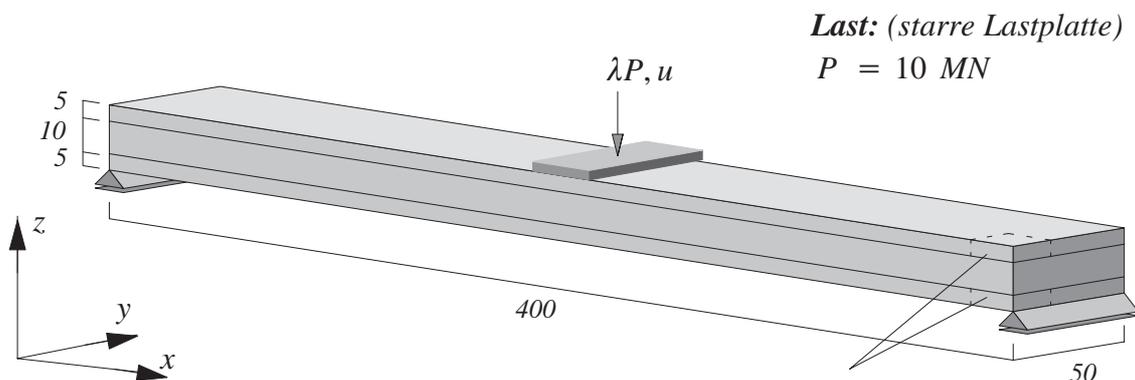
In den zwei folgenden Beispielen wird mit der Topologieoptimierung und einer diskreten Grundstruktur das Layout einer textilen Bewehrung bestimmt. Bei einem vorgegebenen Bewehrungslayout, das sich an einer stabwerkartigen Grundstruktur orientiert, werden die Filamentgruppen bestimmt, die in der textilen Struktur zur Kraftabtragung eingearbeitet werden sollen. Das zur Sprödigkeit neigende Versagensverhalten des faserbewehrten Betons motiviert das Optimierungsziel: Maximierung der Duktilität der Bauteile. Zur Relaxation des Optimierungsproblems

wird das SIMP–Verfahren zur Bestimmung der Bewehrungsführung eingesetzt. Dieses wurde, wie im Kapitel 3.3 erläutert, für das gewählte Plastizitätsmodell zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens der Bewehrung modifiziert. Die Grundidee des SIMP–Ansatzes, die Bestrafung der porösen Bereiche, bleibt erhalten. Wie die beiden folgenden Beispiele zeigen, kann mit diesem Verfahren ein sinnvolles Layout bestimmt werden.

a) Beispiel für eine textile Verstärkung eines Plattenstreifens

Die Geometrie, die Abmessungen und die Lagerbedingungen des zu bewehrenden Plattenbalkens sind im Bild 8.1 dargestellt. Die Plattenmittelfläche des 400 mm langen Balkens ist an beiden Enden vertikal gelagert. Die Berechnung erfolgte am halben System. Die verwendete Platten/ Schalenformulierung lässt zwar prinzipiell eine Lagerung an der Oberfläche zu, da diese aber numerisch und algorithmisch aufwendiger ist, wird bei den beiden gezeigten Beispielen die Schalenmittelfläche gelagert und belastet. Die Belastung erfolgt über eine Kopplung der Freiheitsgrade in der Mitte des Balkens in Form einer starren Lastplatte.

Optimierungsziel: Duktilität Maße in [mm]
Nebenbedingung: Masse (Fasermaterial)



Last: (starre Lastplatte)
 $P = 10 \text{ MN}$

Beton:
 $E = 30000 \text{ N/mm}^2$
 $\nu = 0.2$
 $f_{tm} = 3.4 \text{ N/mm}^2$
 $f_{cm} = 38 \text{ N/mm}^2$
 $G_t = 0.05 \text{ Nmm/mm}^2$
 $G_c = 50 \text{ Nmm/mm}^2$

Glasfaser:
 $E = 74000 \text{ N/mm}^2$
 $E^H = 10^6 \text{ N/mm}^2$
 $f_{yk} = 1110 \text{ N/mm}^2$

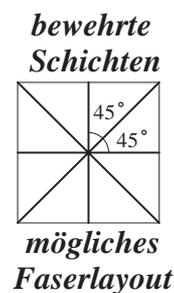


Bild 8.1: Mittig belasteter Plattenbalken: Geometrie und Materialparameter

Für die materiell nichtlineare Berechnung wurde die Hälfte des Plattenbalkens mit achtknotigen Elementen mit biquadratischen Ansatzfunktionen in der Ebene diskretisiert. Innerhalb der Schalenelemente wurden drei materielle Schichten in Dickenrichtung definiert. In allen drei Schichten wird der Beton mit den im Bild 8.1 angegebenen Parametern modelliert. Innerhalb der oberen und der unteren Schicht wird die textile Struktur in Form der multiaxialen Gelege durch eine einaxiale Bewehrung diskretisiert (Bild 8.2). Um einen Einfluss aufgrund der Kraftumlagerun-

gen innerhalb eines Geleges auszuschließen, wurde lediglich ein gestreckter Verlauf der Fasern in dem multiaxial-verwirkten Gelege berücksichtigt.

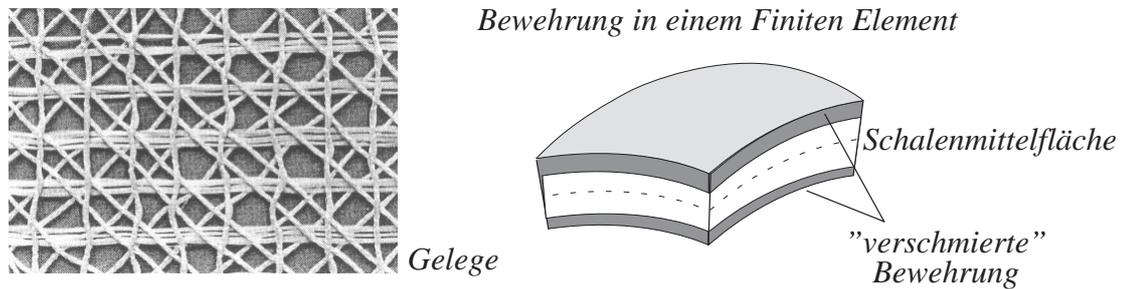


Bild 8.2: Vorgegebenes Faserlayout in einem Plattenelement

Es wurde ein Gelege mit Rovings zur Verstärkung der Ober- und Unterseite des Plattenbalkens diskretisiert. Dabei wurden die Fasern entsprechend ihrer tatsächlichen Orientierung in der textilen Struktur ausgerichtet. Die jeweils gleich großen Anteile der Fasern werden in vier verschiedene Richtungen (0° , 90° , 45° und -45°) verschmiert. Die maximal mögliche textile Bewehrung von 0.85%, bezogen auf die Schichthöhe, ist in die vier Richtungen in der Mitte der Schicht gleichmäßig verteilt. Der maximal vorgegebene Bewehrungsgrad entspricht dem Solid-Material des SIMP-Ansatzes (relative Dichte $\bar{\rho} = 1$), wobei jeder Bewehrungsrichtung eine Optimierungsvariable ($\bar{\rho}_i$, $i = 1..4$) innerhalb eines Elementes zugewiesen wird. Zwischenzustände wurden durch geeignete Wahl des Exponenten im SIMP-Material "bestraft". Im ungerissenen Zustand verhält sich das Matrixmaterial annähernd linear-elastisch. Das Ergebnis der Optimierung ist in Bild 8.3 dargestellt. Hellgrau dargestellte Fasern haben eine relative Dichte von ca. 0.9. Die Dichte der schwarz abgebildete Fasern ist nahezu 1.0.

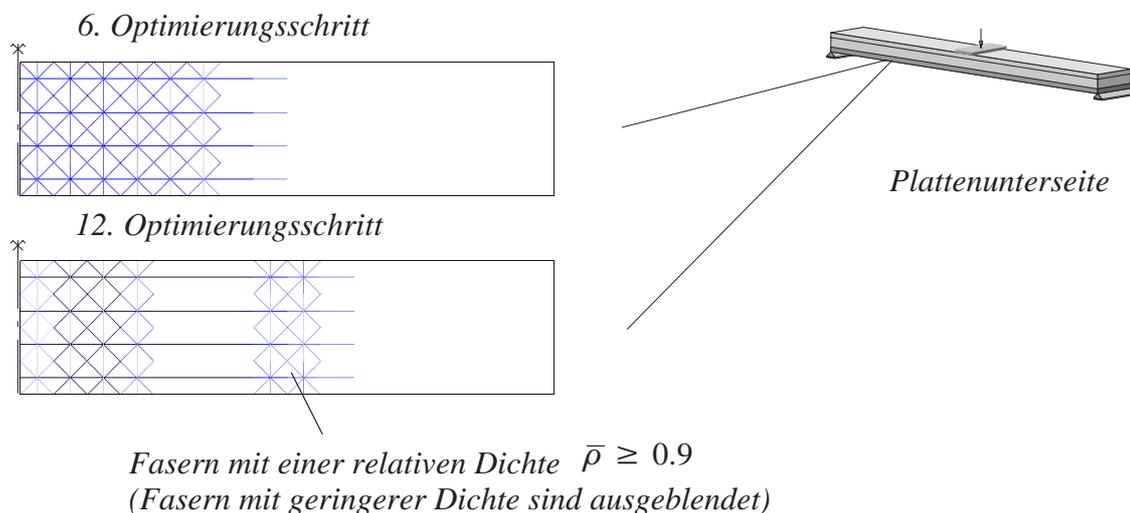


Bild 8.3: Faserbewehrung im 6. und 12. von 23 Optimierungsschritten

Da die Querschnittsfläche des Fasermaterials, bezogen auf die Querschnittsfläche des Betons, sehr gering ist, ist der Einfluss der textilen Bewehrung vor dem ersten Reißen des Betons ebenfalls sehr gering. Das elastische Verhalten des Verbundmaterials wird durch die Fasern kaum be-

einflusst. In den ersten sechs Schritten des Optimierungsprozesses mit dem Ziel maximaler Duktilität ist eine Konzentration der Bewehrung im gerissenen Bereich des Betons in der unteren Schicht zu beobachten. Mit der Zunahme der Duktilität ist auch eine Zunahme der Traglast zu beobachten (Bild 8.4).

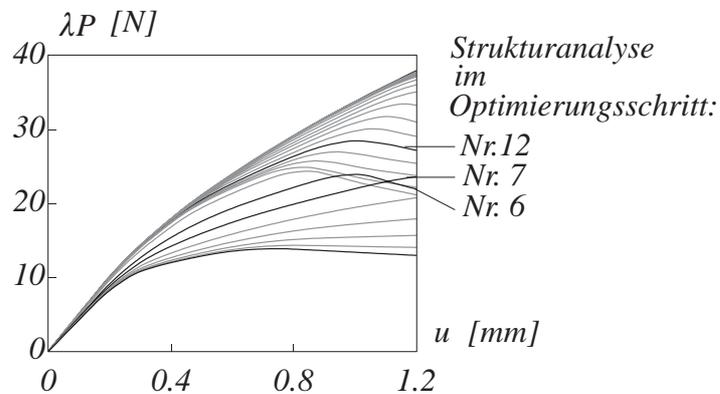


Bild 8.4: Last-Verschiebungskurven innerhalb der Optimierung

Im siebten Optimierungsschritt reißt der Beton infolge der Bewehrungsverteilung aus der aktuellen Optimierungssituation im ersten Drittel auf der Unterseite des Balkens. Durch Umverteilung des Bewehrungsmaterials aus dem mittleren in den nun gerissenen Bereich wird im weiteren Optimierungsprozess sowohl die Traglast als auch die Duktilität gesteigert. Das Resultat ist die zu erwartende Zugsbewehrung auf der Unterseite des Balkens und die Aufnahme der Druckkräfte durch den Beton an der oberen Seite (Bild 8.5) und unterscheidet sich damit klar von typischen optimierten Bewehrungslayouts, wenn im Optimierungsprozess nur linear elastisches Materialverhalten berücksichtigt wird. Das Ergebnis mit linearem Materialverhalten ist eine gleichmäßige Bewehrung im Zug- und Druckbereich. Die Betrachtung der optimierten Faserverteilung zeigt jedoch, dass im mittleren Bereich keine Fasern angeordnet werden. Der Grund hierfür liegt in der Modellierung bzw. in der Kopplung der Freiheitsgrade im Lasteinleitungsbereich.

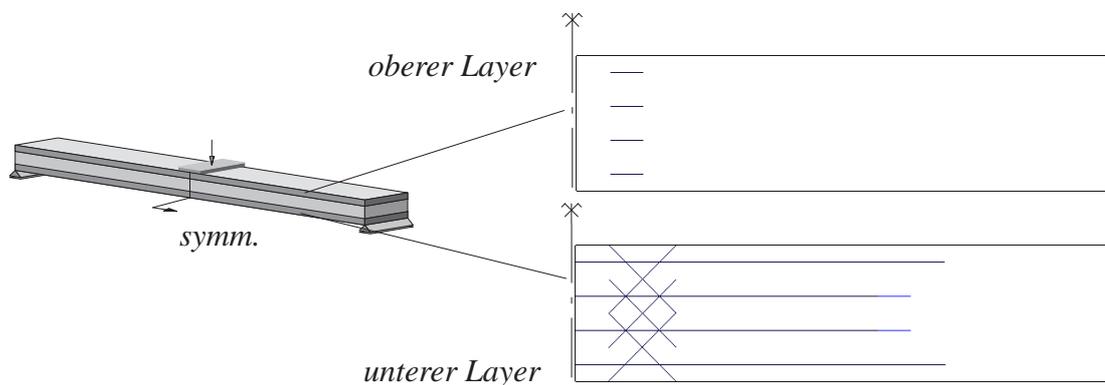


Bild 8.5: Optimiertes Faser-Layout

b) Beispiel für eine textile Bewehrung einer quadratischen Platte

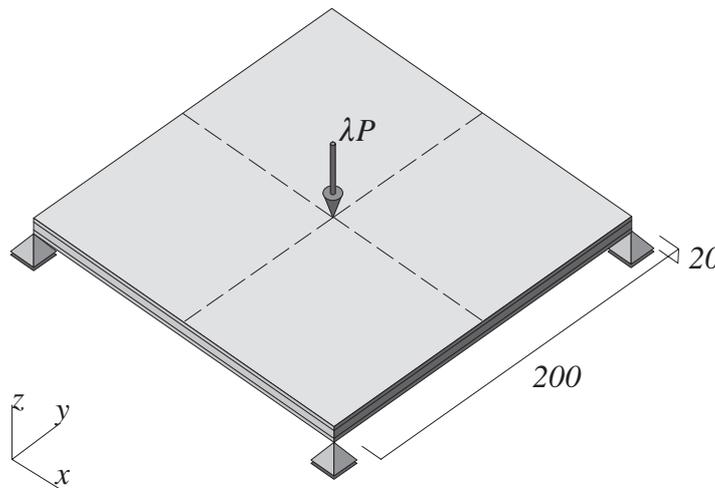
In der zweiten Studie soll ein Bewehrungsanordnung einer konzentriert gelagerten Quadratplatte unter zentrischer Last bestimmt werden. Die numerische Simulation ähnlicher Platten mit einer Stahlbewehrung war im Laufe der Jahre immer wieder Gegenstand von Veröffentlichungen, so dass das prinzipielle Verformungsverhalten und das Rissbild bekannt sind.

Für die materiell nichtlineare Simulation wird ein Viertel der Platte, wie im ersten Beispiel mit achtknotigen dreischichtigen finiten Elementen, diskretisiert (Bild 8.6).

Optimierungsziel: Duktilität

Maße in [mm]

Nebenbedingung: Masse (Fasermaterial)



Last: (starre Lastplatte)

$$P = 10 \text{ MN}$$

Beton:

$$E = 30000 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

$$f_{tm} = 3.4 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{cm} = 38 \text{ N/mm}^2$$

$$G_t = 0.05 \text{ Nmm/mm}^2$$

$$G_c = 50 \text{ Nmm/mm}^2$$

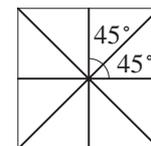
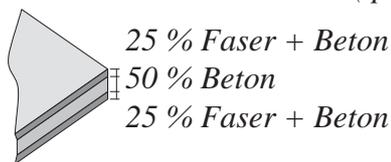
Glasfaser:

$$E = 74000 \text{ N/mm}^2$$

$$E^H = 10^6 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yk} = 1110 \text{ N/mm}^2$$

3 materielle Schichten: (prozentuale Höhenangabe)



**mögliches
Faserlayout**

Bild 8.6: Geometrie, Lasten und Materialdaten

Die Einzellast und die Lagerbedingungen wurden über die direkt angrenzenden Elementknoten verschmiert. Die Plattendicke wird in drei abschnittsweise integrierten materiellen Schichten innerhalb einer kinematischen Schicht aufgelöst. Die einzelnen Schichthöhen betragen jeweils 25%, 50% und 25% der Gesamtdicke von 20mm. Die obere und untere Schicht wird mit einer maximal möglichen textilen Bewehrung von 0.85%, bezogen auf die Schichthöhe in vier Richtungen (0° , 90° , 45° und -45°), gleichmäßig bewehrt. Die sich aus der mehrlagigen Bewehrungsanordnung ergebenden Unterschiede des inneren Hebelarms werden nicht berücksichtigt, d.h. die Bewehrungslagen werden alle in derselben Schichthöhe angeordnet.

Für die hier durchgeführte Optimierung wurden die Materialdaten des für eine textile Bewehrung geeigneten Feinbetons verwendet.

Mit der materiellen Topologieoptimierung wurden die Orte für die textile Bewehrung so bestimmt, dass das Optimierungsziel Duktilität möglichst maximal wird. Die zu verteilende Bewehrung ist mit 25% der maximal möglichen Bewehrung im ganzen Tragwerk vorgegeben und wird während der Optimierung in Form einer Nebenbedingung konstant gehalten.

Das Ergebnis der Optimierung in Bild 8.7 zeigt erwartungsgemäß eine Konzentration der Bewehrung im gerissenen Bereich in der Mitte und senkrecht zu den Symmetrieachsen auf der Unterseite der Platte.

Zielfunktion: Duktilität

Nebenbedingung: Masse des Fasermaterials 25% (voll bewehrt: 100%)

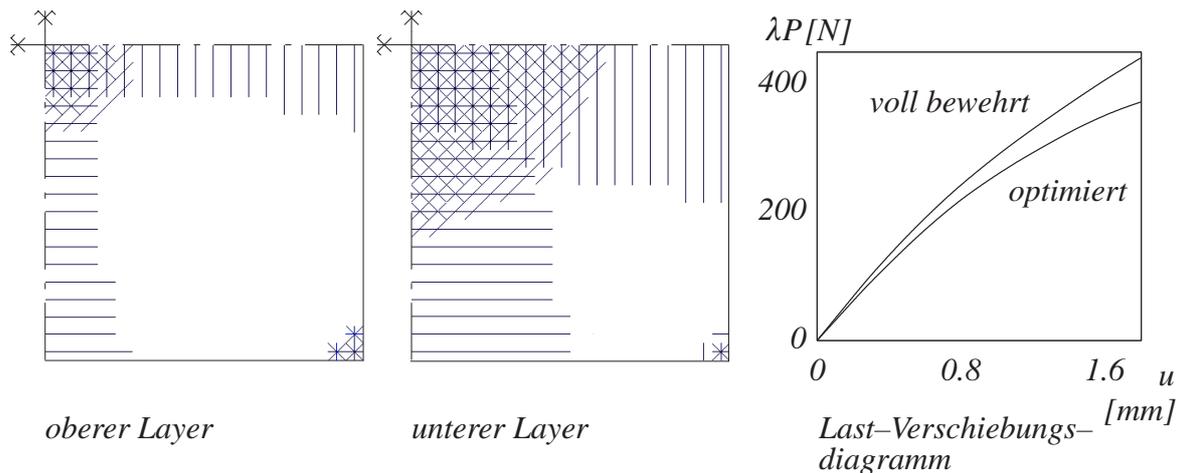


Bild 8.7: Optimiertes Faserlayout (Plattenviertel), Last-Verschiebungsdiagramm

Dargestellt ist die Bewehrung, deren 'Dichte' den oberen Grenzwert von 1.0 erreicht hat. Für die leichtere Interpretation der optimierten Bewehrung wurde aufgrund der erzielten klaren '0-1'-Verteilung die verschmierte Bewehrung nahe des unteren Grenzwertes von 10^{-3} nicht visualisiert.

Anhand der Last-Verschiebungskurven für zwei verschiedene Bewehrungssituationen wird das Potential der Topologieoptimierung für die Bewehrungsfindung ersichtlich. Bei gleicher Last wird mit deutlich geringerer Bewehrungsmenge eine ähnlich hohe Duktilität im Vergleich zu voller Bewehrungsmenge erreicht.

9 Zusammenfassung und Ausblick

9.1 Zusammenfassung

Die materielle Topologieoptimierung wird hier nicht in ihrer ursprünglichen Zielsetzung zur Ermittlung des Tragsystems im Entwurfsraum ("Skelett") eingesetzt. Vielmehr dient sie der Auslegung des Materials in Leichtbaukonstruktionen. Zwei typische Materialarten wurden ausgewählt: Faserverstärkte Werkstoffe, hier insbesondere der Textilbeton, und poröse Materialien wie Metall- und Polymerschäume, aber auch Leichtbeton. Die Steuerung des komplexen Verformungs- und Versagensverhalten dieser innovativen Materialien erfolgte mit Hilfe der materiellen Topologieoptimierung. Aufgrund der besonderen Eigenschaften und möglicher Anwendungsbereiche kamen verschiedene Zielkriterien, die das makroskopische Bauteilverhalten beschreiben, zum Einsatz:

- Maximierung der Steifigkeit
- Maximierung der Traglast
- Maximierung der Duktilität
- Maximierung der niedrigsten Eigenfrequenzen .

Dabei wurde auch das Konfliktverhalten im Sinne einer Mehrkriterienoptimierung mit einbezogen. Die unterschiedlichen Entwurfsaufgaben in den gezeigten Beispielen verdeutlichen das Potential der vorgestellten Methodik.

Für die numerische Analyse wurden lineare und nichtlineare Formulierungen zur Modellierung des Werkstoffverhaltens von Metall- und Polymerschäumen und textilbewehrtem Beton in das Finite-Elemente-Programmsystem CARAT des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart implementiert. Abweichend von den bisherigen Bestrebungen mit dem Ziel eines modularen und leicht erweiterbaren Aufbaus der einzelnen Elemente der Optimierung erwiesen sich geschlossene, aber dafür deutlich effizientere und robustere Algorithmen als vorteilhaft. Für die Lösung unterschiedlicher Optimierungsprobleme und die Entwicklung geeigneter Strategien, wurden gradientenbasierte Optimierungsalgorithmen (OC, MMA, SQP) und gradientenfreie Optimierungsalgorithmen (GA) an das Programmsystem angeschlossen. Die Effizienz der Algorithmen zur numerischen Integration auf der Ebene der Finiten Elemente und die Berechnung der Gradienteninformation konnte durch Parallelisierung deutlich gesteigert werden.

Die Optimierung der Dichteverteilung zellulärer Materialien in dünnwandigen Sandwichbauteilen unter Berücksichtigung linearer und nichtlinearer Kinematik konnte für linear und nichtlinear elastisches Materialverhalten erfolgreich durchgeführt werden. Ausgehend von dem Zusammenhang zwischen der Dichte des porösen Materials und den mechanischen Eigenschaften wurde die Dichte als Entwurfsvariable eingesetzt, um die optimale Dichteverteilung zu bestimmen. Die in der klassischen materiellen Topologieoptimierung während der Iteration zugelassenen "grauen" Zwischenbereiche bekamen, bezogen auf den optimalen Materialein-

satz von *porösen Materialien*, physikalische Bedeutung. Damit geht das Ziel über den üblichen Einsatz poröser Materialien im Leichtbau mit am Ort vorgegebener Dichte hinaus; hier geht es um die im Raum variable Dichteverteilung. Die Parallelität zur beanspruchungsadaptiven Anpassung der Spongiosa im Knochen wurde in einem Beispiel dargestellt. Darüber hinaus erfolgte anhand einer Eigenfrequenzoptimierung die Diskussion fertigungstechnischer Kriterien. Herstellungsbedingten Einschränkungen wurden durch das Generieren größerer Flächen einfacher Geometrie mit gleichbleibender Dichte Rechnung getragen.

Für die Optimierung metallschaumgefüllter Hohlprofile oder dickwandiger Sandwichbauteile bei großen Verzerrungen kam eine Methodik zur Behandlung finiter elastischer Deformationen zur Anwendung. Untersucht wurden hyperelastische Werkstoffmodelle für die Modellierung von Polymerschäumen, ein J2-Plastizitätsmodell zur Beschreibung des Materialverhaltens der Hohlprofile bzw. der Deckbleche und ein Cam-Clay-Plastizitätsmodell für eine Metallschaumfüllung. Für die Optimierung mit stark kompressiblen Werkstoffen im Bereich großer Verzerrungen haben sich die hyperelastischen Materialmodelle aufgrund ihrer Robustheit bewährt. Das prinzipielle nichtlineare Verformungsverhalten von weichen und steifen Polymerschäumen, aber auch von Metallschäumen kann für bestimmte quasistatische Belastungssituationen, in denen lokale Ent- und Belastungsvorgänge eine untergeordnete Rolle spielen, mit diesen hyperelastischen Modellierungen relativ gut approximiert werden.

Für die Optimierung einer Bewehrungsanordnung in dünnwandigen Betonbauteilen mit neuartigen Fasermaterialien wurde mit der klassischen Topologieoptimierung und einem vorgegebenen prinzipiellen Faserlayout diejenigen Fasern bestimmt, die für ein bestimmtes Strukturverhalten benötigt werden. Berücksichtigt wurde das nichtlineare Stoffverhalten des Betons, aber auch der Bewehrung. Besondere Beachtung findet hierbei die Modellierung des Verbundmaterials mit einer langfaserigen Bewehrung im Kontext einer mehrschichtigen Platten/Schalenformulierung. Anhand von Beispielen wurde die Bestimmung der Menge, Schichtung und Ausrichtung in dem vorgestellten Optimierungskonzept diskutiert.

Die Erfassung des prinzipiellen Verhaltens von zellularen Materialien anhand von Einheitszellenmodellen eröffnet die Möglichkeit des Materialdesigns. Optimierungsziele beim Entwurf des mikrostrukturellen Aufbaus zellulärer Materialien sind spezielle anisotrope makroskopische Materialeigenschaften, aber auch die Verbesserung des duktilen Verhaltens mit besonderer Berücksichtigung des Beulens und des Plastizierens der Zellstege bzw. -wände der Mikrostruktur. Die gezeigten Beispiele der optimierten Mikrostrukturen sind bisher noch akademischer Natur. Kriterien bezüglich der Herstellbarkeit, z.B. mit Bezug zu syntaktischen metallischen Schäumen, sind für den Entwurf realer Schäume zu berücksichtigen.

Die Abhängigkeit des Optimierungsprozesses von der initialen Dichteverteilung in der Einheitszelle motivierte den Einsatz probabilistischer Optimierungsmethoden (Genetische Algorithmen, Monte Carlo Verfahren) zur Erzeugung eines geeigneten Startentwurfs. Durch die Kombination mit den bisher hauptsächlich verwendeten gradientenbasierten Verfahren wurde eine hohe Effizienz bei gleichzeitigem Erreichen einer optimierten Lösung sichergestellt.

9.2 Ausblick

Die in dieser Arbeit gezeigten Beispiele verdeutlichen das Potential der Strukturoptimierung für den bestmöglichen Einsatz und den Entwurf fortschrittlicher Materialien. Aufgrund des Literaturstudiums in unterschiedlichen Fachgebieten und der in den Berechnungen gewonnenen Erkenntnisse eröffnet sich eine Vielzahl weiterer Anwendungsbereiche der vorgestellten Methodik. Einige dieser Einsatzmöglichkeiten die an verschiedenen Stellen dieser Arbeit bereits angesprochen wurden, werden hier nochmal stichpunktartig aufgegriffen und ergänzt.

Die beschriebenen Strategien zur Mehrkriterienoptimierung können für den Entwurf der Porenstruktur aus einem oder mehreren Materialien eingesetzt werden, damit zelluläre Materialien neben ihrer Funktion als Schallabsorber oder fluidumströmtes Filtermaterial auch eine tragende bzw. aussteifende Funktion übernehmen.

In dieser Arbeit wurden die Berechnungen ausschliesslich unter der Annahme quasistatischer Belastungssituationen durchgeführt. Unter gewissen Bedingungen können in diesen Fällen auch Metall- und duktile Polymerschäume mit nichtlinear elastischen Werkstoffmodellen mit ausreichender Genauigkeit in der numerischen Berechnung eingesetzt werden. Die Vorteile, die sich bezüglich Effizienz und Robustheit in der Numerik ergeben, wurden in der Arbeit erwähnt. Das spezielle elastoplastische Verformungsvermögen metallischer Schäume kann zum Beispiel in sogenannten Einspieluntersuchungen mit wiederholten statischen aber auch dynamischen Be- und Entlastungszyklen ausgenutzt werden.

Die Erzeugung eines duktilen Verformungsverhaltens keramischer zellulärer Materialien in Containerschiffen oder modernen Brücken ist hinsichtlich des sonst häufig vorherrschenden spröden Versagens der Zellstruktur ein lohnendes Optimierungsziel.

Für die textilbewehrten Betonbauteile bietet sich aufgrund der hohen Schlankheit und der damit verbundenen großen Deformationen die Erweiterung der Optimierungsaufgabe um Stabilitätskriterien und die zusätzlicher Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik an. Die Untersuchung des strukturellen Aufbaus dieses heterogenen Werkstoffs mit Hilfe der Strukturoptimierung ist Thema einer aktuellen Arbeit (Kato et al. (2006)) und bietet aufgrund der vielfältigen Parameter auf der Komponentenebene (Faserdurchmesser, Kombination unterschiedlichen Fasermaterials, Steuerung des Verbundverhaltens, Art der textilen Struktur) ein großes Potential für die optimale Anpassung dieses Werkstoffs an sein jeweiliges Einsatzgebiet.

Auch die Einführung der Mehrskalenproblematik in den Optimierungsprozess ist ein wichtiges Ziel, um Parameter und Zielfunktionen auf der Makroebene mit denen der Mikroebene zu verbinden. Das im Kapitel 6.1.4 gezeigte Beispiel der optimierten Dichteverteilung porösen Knochenmaterials mit gleichzeitiger Bestimmung der optimalen Porenstruktur motiviert die weitergehende Untersuchung bis zum strukturellen Versagen der betreffenden Bauteile und Werkstoffe. Die Kombination von Verfahren der Strukturoptimierung und hier insbesondere die Multilevel-Optimierung mit dem Konzept Repräsentativer Volumenelemente, numerischen Homogenisierungsverfahren oder auch die Variationelle Mehrskalen Methode (VMM) bietet sich für diese Art der Optimierung an.

Literatur

- Allaire, G. Aubry, S. (1999): 'On optimal microstructures for a plane shape optimization problem', *Structural Optimization*, **17**, 86–94.
- Allaire, G., Jouve, F., Toader, A.–M. (2004): 'Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method', *J. Comp. Phys.* 194, pp. 363–3934.
- Aluminium–Zentrale (1999): *Aluminiumschaum*. Merkblatt W 17 – 1. Auflage Aluminium–Zentrale.
- Ashby, M., Evans, T., Fleck, N.A., Gibson, L.J., Hutchinson, J.W., Wadley, H.N.G. (2000): *Metal Foams: A Design Guide*. Butterworth Heinemann, Boston, USA, ISBN 0–7506–7219–6.
- Ashby, M.F., Gibson, L.J. (1982): 'The mechanics of three-dimensional cellular materials', *Proc.R.Soc.Lond.* A382, 43.
- Avci, O. (2004): *Einsatz der Topologieoptimierung für den Materialentwurf eines Parabolspiegels für Temperaturbelastung*, Seminararbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Badiche, X., Forest, S., Guibert, T., Bienvenu, Y., Bartout, J.D., Jenny, P., Croset, M., Bernet, H. (2000): 'Mechanical Properties and Non-homogeneous Deformation of Open-cell Nickel Foams: Application to the Mechanics of Cellular Solids and of Porous Materials', *Materials Science and Engineering* A289, 276–288.
- Balagangadhar, D., Tortorelli, D.A. (1998): 'Design and analysis of large deformation continuous elastoplastic manufacturing processes via a steady displacement-based formulation', in *The 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. St.Louis, USA.
- Banhart, J. (1997): *Aluminium foams on the way to mass production*. Report on the Metfoam '99 Conference, 16–19 June 1999, Bremen.
- Banhart, J. (2001): 'Manufacture, Characterisation and Application of Cellular Metals and Metal Foams', *Progress in Materials Science*, **46**, 559–632.
- Banhart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (1997): *Metallschäume*. Konferenzband zum Symposium Metallschäume, edited by J. Banhart. MIT-Verlag.
- Banhart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (1999): *Metal Foams and Porous Metal Structures*. International Conference on Metal Foams and Porous Metal Structures, 14–16th June, Bremen.
- Banhart, J., Baumeister, J. (1997): 'Das Verformungsverhalten geschäumter Metalle', *Metall*, **51**, 19–24.
- Banhart, J., Baumeister J., Weber, M. (1994): 'Metallschaum – ein Werkstoff mit Perspektiven', *Aluminium*, **70.3/4**, 209–212.
- Banhart, J., Fleck, N.A., Mortensen, A. (2003): *Cellular Metals: Manufacture, Properties, Applications*. International Conference on Cellular Metals and Metal Foaming Technology, 23th–25th June 2003, Berlin. MIT Publ.
- Banholzer, B. (2001): 'Zum Mechanismus des Pull-Out-Verhaltens von Garnen aus einer zementgebundenen Matrix', in Hegger, J. (Hrsg.) (2001): *Textilbeton – Tagungsband zum 1. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532 am 15.+16. Februar 2001 in Aachen*. ISBN 3–980, 7302–1–2., RWTH Aachen, 99–112.
- Barthold, F.–J., Falk, A. Stein, E. (1994): 'Structural optimization for rubberlike materials using analytical sensitivity analysis', in *Advances in Design Automation*, edited by B. J. Gilmore, D. A. Hoeltzel, D. Dutta & H. Eschenauer. CIMNE, Barcelona.
- Barthold, F.–J., Wiechmann, K. (1997): 'Variational design sensitivity for inelastic deformations', in *Proc. of the 5th Int. Conf. Computational Plasticity*, edited by D. R. J. Owen, E. Onate & E. Hinton. CIMNE, Barcelona.
- Bayer, E. (2000): 'Betonkanus: Neue Ideen und Bautechniken', *Beton* **10**, 564–570.
- Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B. (2000): *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, Wiley, New York.

- Belytschko, T., Xiao, S.P., Parimi, C., (2003):** 'Topology Optimization with Implicit Functions and Regularization', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57** (8): 1177–1196.
- Bendsøe, M.P. (1989):** 'Optimal shape design as a material distribution problem', *Structural Optimization*, **1**, 193–202.
- Bendsøe, M. P., Diaz, A., Lipton, R., Taylor, J.E. (1995):** 'Optimal design of material properties and material distribution for multiple loading conditions', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **38**, 1149–1170.
- Bendsøe, M. P., Kikuchi, N. (1988):** 'Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **71**, 197–224.
- Bendsøe, M.P., Sigmund, O (1999):** 'Material interpolation schemes in topology optimization', *Archive of Applied Mechanics* **69**, 635–654.
- Bernard, T., Bergmann, H.W., Haberling, C., Haldenwanger, H.G. (2002):** 'Joining Technologies for Al-Foams – Al-Sheet Compound Structures', *Advanced Engineering Materials* **4**, 798–802.
- Bergan, P.G. (2003):** 'A new sandwich design concept for ships', in *Proceedings of the International Conference on Adaptive Modeling and Simulation (ADMOS)*, Göteborg, Schweden, 85–87.
- Bischoff, M. (1999):** *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Bericht Nr. 30, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Bischoff, M., Ramm, E. (1997):** 'Shear deformable shell elements for large strains and rotations', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **40**, 4427–4449.
- Bischoff, M., Ramm, E. (2000):** 'On the Physical Significance of Higher Order Kinematic and Static Variables in a Three-dimensional Shell Formulation', *Int. J. Solids & Structures*, **37**, 6933–6960.
- Bischoff, M., Ramm, E., Braess, D. (1999):** 'A Class of Equivalent Enhanced Assumed Strain and Hybrid Stress Elements', *Computational Mechanics*, **22**, 443–449.
- Bischoff, T., Wulfhorst, B. (1998):** 'Textilbewehrte Betonrohre – die Herstellung von Rohren mit neuartigen Bewehrungstextilien', *Bauen mit Textilien*, **1**, 14–16.
- Bletzinger, K.–U. (1990):** *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Report No. 11, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Bluhm, J., de Boer, R., Skolnik, J. (1996):** *Allgemeine Plastizitätstheorie für poröse Medien*. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen der Universität–GH–Essen, **73**.
- Bochenek, B. (2003):** 'Problems of structural optimization for post-buckling behaviour', *Structural Optimization*, Vol. **25**, 5–6, 423–435.
- de Boer, R. (1998):** 'Theory of porous media – past and present', *Z. Angew. Math. Mech.*, **78**, 7.441–466.
- de Boer, R., Ehlers, W. (1986):** 'On the problem of fluid- and gas-filled elastoplastic solids', *Int. J. Solids Struct.*, **22**, 1231–1242.
- Bonet, J., Wood, R.D. (1997):**. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Brameshuber, W., Banholzer, B. (2001):** 'Eine Methode zur Beschreibung des Verbundes zwischen Faser und zementgebundener Matrix', *Beton- und Stahlbetonbau* **96**, 663–669.
- Brameshuber, W., Banholzer, B., Brümmer, G. (2000):** 'Ansatz für eine vereinfachte Auswertung von Faser-Ausziehversuchen', *Beton- und Stahlbetonbau* **95**, 702–706.
- Brameshuber, W., Brockmann, T., Hegger, J., Molter, M. (2002):** 'Untersuchungen zum textilbewehrten Beton', *Beton* **52**, 424–429.
- Braun, M. (1995):** *Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken*. Report No. 19, Dissertation. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Braun, M., Bischoff, M., Ramm, E. (1994):** 'Nonlinear Shell Formulation for Complete Three-Dimensional Constitutive Laws Including Composites and Laminates', *Computational Mechanics*, **15**, 1–18.

- Bruns, T.E., Tortorelli, D.E. (2001):** 'Topology Optimization of Non-linear Elastic Structures and Compliant Mechanisms', *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.* **190**, 3443–3459.
- Borja, R.I., Tamagnini, C. (1998):** 'Cam-Clay plasticity, Part III: Extension of the infinitesimal model to include finite strains', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **155**, 73–95.
- Bourgat, J.F. (1977):** 'Numerical experiments of the homogenization method for operators with periodic coefficients', *Lecture Notes in Mathematics* **704**, Springer-Verlag, Berlin, 143–198.
- Bugeda, G., Gil, L., Onate, E. (1999):** 'Structural shape sensitivity analysis for nonlinear material models with strain softening', *Structural Optimization*, **17**, 162–171.
- Buhl, T., Pedersen, C.B.W., Sigmund, O. (1999):** 'Designing geometrically non-linear structures using topology optimization', in *Proceedings of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, May, 17–21, 1999, Buffalo, USA.
- Buhl, T. (2002):** 'Simultaneous Topology Optimization of Structure and Supports', *Structural Optimization*, Vol. **1**, 336–346.
- Buhl, T., Pedersen, C., Sigmund, O. (2000):** 'Stiffness Design of Geometrically Nonlinear Structures Using Topology Optimization', *Structural Optimization*, Vol. **19**, 4, 93–104.
- Chastel, Y., Hudry, E., Forest, S., Peytour, C. (1999):** 'Mechanical behaviour of aluminium foams for various deformation paths. Experiment and modelling', in „*Metall Foams and Porous Metal Structures*”, 263–268.
- Chen, C., Harte, A.M., Fleck, N.A. (2001):** 'The Plastic Collapse of Sandwich Beams with a Metallic Foam Core', *Int. J. Mech. Sci.* **43**, 1483–1506.
- Chen, X., Hisada, T., Kleiber, M., Noguchi, H. (1992):** 'Comparison of different sensitivity analysis algorithms for large deformation elasto-plastic problems', in *Design sensitivity analysis*, edited by M. Kleiber & T. Hisada. Atlanta Technology Publ.
- Cherkaev, A.V., Palais, R. (1996):** 'Optimal design of three-dimensional axisymmetric elastic structures', *Structural Optimization*, **12**, 35–45.
- Chino, Y., Nakanishi, H., Kobata, M., Iwasaki, H., Mabuchi, M. (2002):** 'Processing of a Porous 7075 Al Alloy by Bubble Expansion in Semi-solid State', *Scripta Materiala* **47**, 769–773.
- Cirak, F., Ramm, E. (2000):** 'A-posteriori error estimation and adaptivity for elastoplasticity using the reciprocal theorem', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **47**, 379–393.
- Cornelis, E., Kottar, A., Sasov, A., Dyke, D.V. (1999):** 'Desktop x-ray microtomography for studies of metal foams', in: Banhart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (ed.): „*Metall Foams and Porous Metal Structures*“, *International Conference on Metal Foams and Porous Metal Structures, 14–16th June, Bremen (1999)*.
- Curbach, M. (1997):** 'Verwendung von technischen Textilien im Betonbau', *Bauen mit Textilien*, SH, 17–26.
- Curbach, M., Baumann, L., Jesse, F., Martius, A. (2001):** 'Textilbewehrter Beton für die Verstärkung von Bauwerken', *Beton* **51**, 430–434.
- Curbach, M., Fuchs, H., Hegger, J., Noistering, J., Offermann, P., Reinhardt, H.-W., Sasse, H., Schorn, H., Wörner, J.-D., Wulfhorst, B., Arnold, R., Bartl, A.-M., Bischoff, T., Deusser, S., Döinghaus, P., Franzke, G., Jesse, F., Kleist, A., Rössler, G., Schneider, M., Will, N. (1998):** 'Neuer Baustoff Textilbeton – Sachstandbericht zur aktuellen technischen Entwicklung', *Betonwerk+Fertigteil-Technik*, **6**, 45.
- Dannemann, K.A., Lankford, J. (2000):** 'High Strain Rate Compression of Closed-cell Aluminium Foams', *Materials Science and Engineering A* **293** (1–2), 157–164.
- Davies, N.G., Teisen, J., Schuh, C., Dunand, D.C. (2001):** 'Solid-state Foaming of Titanium by Superplastic Expansion of Argon-filled Pores', *Journal of Materials Research* **16**, 1508–1519.
- Daxner, T. (2003):** *Multi-Scale Modeling and Simulation of Metallic Foams*. Dissertation, VDI Verlag GmbH, Düsseldorf.
- Daxner T., Bitsche R.D., Böhm H.J. (2006):** "Space-Filling Polyhedra as Mechanical Models for Solidified Dry Foam"; in: "Porous Metals and Metal Foaming Technology", H. Nakajima, N. Kanetake (Hrg.); The Japan Institute of Metals, Sendai, 2006, ISBN 4-88903-405-6, S. 441 – 446.

- Daxner, T., Denzer, R., Böhm, H. J., Rammerstorfer, F. G., Maier, M. (2000):** 'Simulation des elasto-plastischen Verhaltens von Metallschaum mit Hilfe von 2D und 3D Einheitszellen-Modellen', in *Metallschäume*. Editor: H. P. Degischer, pp. 447–450, Wiley-VCH, Weinheim, 2000.
- Daxner, T., Böhm, H.J., Rammerstorfer, F.G. (2003):** 'Numerical investigation of local yielding in metallic foams', in: *Cellular Metals: Manufacture, Properties, Applications (Proc. MetFoam 2003)*, (Banhart, J., Fleck, N., and Mortensen, A., eds.), 413–418, Verlag MIT, Bremen, Germany.
- Daxner, T., Böhm, H.J., Rammerstorfer, F.G. (1999):** 'Mesoscopic simulation of inhomogeneous metallic foams with respect to energy absorption', *Comput.Mater.Sci.*, **16**, 61–69.
- Daxner, T., Böhm, H. J., Rammerstorfer, F. G. (2000):** 'Adaptation of density distributions for optimising aluminium foam structures', *Materials Science and Technology*, Vol. **16**, 935–939.
- Degischer, H. P., Kottar A.(1999):** 'On the non-destructive testing of metal foams', in: Bhanart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (ed.): „Metall Foams and Porous Metal Structures“, *International Conference on Metal Foams and Porous Metal Structures, 14–16th June, Bremen* (1999).
- Degischer, H.-P., Kriszt, B. (2002):** *Handbook of Cellular Metals: Production, Processing, Applications*. Wiley, New York.
- Deshpande, V.S., Fleck, N.A. (2000):** 'Isotropic Constitutive Models for Metallic Foams', *J. Mech. Phys. Solids*, **48**, 1253–1283.
- Diaz, A., Kikuchi, N. (1992):** 'Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **35**, 1487–1502.
- Diaz, A., Lipton, R., Soto, C. (1995):** 'A new formulation of the problem of optimum reinforcement of Reissner-Mindlin plates', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **123**, 121–139.
- Döinghaus, P. (1998):** 'Glasfasertextilien als Bewehrung in Betonbauteilen', *Bauen mit Textilien*, **3**, 18–21.
- Droste, A. (2002):** *Beschreibung und Anwendung eines elastisch-plastischen Materialmodells mit Schädigung für hochporöse Metallschäume*. Dissertation. Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen), Lehrstuhl II, Universität Stuttgart.
- Dugas, M., Weise, S., Curbach, M., Hempel, R., Offermann, P., Franzke, G. (1998):** 'Force-deformation behaviour of tensile-loaded specimen made of textile reinforced concrete', in *Textile & Construction*. Lyon, France.
- Dvorák, J., Haslinger, J., Miettinen, M. (1996):** 'On the problem of optimal material distribution', Laboratory of Scientific Computing, Department of Mathematics, University of Jyväskylä, Report, **7**, 1–30.
- Ebner, S. (2006):** *Mehrkriterienoptimierung von Strukturbauteilen*, Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Ebbecke, B. (2006):** *Theoretische und algorithmische Konzepte zur Beschreibung des beanspruchungsadaptiven Knochenwachstums*, Dissertation, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, F 06.3.
- Ehlers, W. (1989):** *Poröse Medien – ein kontinuumsmechanisches Modell auf der Basis der Mischungstheorie*. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen der Universität-GH-Essen, 47.
- Ehlers, W., Droste, A. (1999):** 'A continuum model for highly porous aluminium foam', in *Metallschäume – Metal Foams*, edited by W. Ehlers. Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen).
- Ehlers, W., Droste, A. (1999):** 'Modellierung von Metallschäumen mit der Theorie Poröser Medien', *Z. Angew. Math. Mech.*, **79**, 539–540.
- Eitel, L. (1999):** *Untersuchung des Tragverhaltens von textildewehrten Betonbauteilen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Eschenauer, H.A., Koski, J., Osyczka, A. (1990):** 'Multicriteria Design Optimization', Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Eschenauer, H.A., Olhoff, N. (2001):** 'Topology Optimization of Continuum Structures: A Review', *Appl. Mech. Rev.*, **54**(4), 331–390.

- Eschenauer, H.A. (1985):** Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauweisen : Ein Forschungsvorhaben der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) 1980–1984, Technischer Bericht, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Universität–Gesamthochschule Siegen.
- Fish, J., Wagiman, A. (1993):** 'Multiscale finite element method for a locally nonperiodic heterogeneous medium', *Computational Mechanics*, **12**, 164–180.
- Francfort, G. A., Murat, F. (1986):** 'Homogenization and optimal bounds in linear elasticity', *Arch. Rational Meth. Anal.*, **94**, 307–334.
- Fuganti, A., Lorenzi, L., Hanssen A.G., Langseth, M. (1999):** 'Aluminium foam for automotive applications', in: Banhart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (ed.): „Metall Foams and Porous Metal Structures“, *International Conference on Metal Foams and Porous Metal Structures, 14–16th June, Bremen* (1999).
- Gee, M. (2004):** *Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik*. Dissertation, Bericht Nr. 43, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Deutschland.
- Geers, M., Kouznetsova, V., Brekelmans, W. (2002):** 'Perspectives in Multi-scale Modeling of Composite and Heterogeneous Materials Upon Localization', in *WCCM V – Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria.
- Gibson, L.J., Ashby, M.F. (1999)** *Cellular Solids: Structure and Properties*. Second Edition, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Grabovsky, Y., Kohn, R.V. (1995):** 'Microstructures minimizing the energy of a two phase elastic composite in two space dimensions. I – II', *J. Mech. Phys. Solids*, **43**, 933–947.
- Guedes, J.M., Kikuchi, N. (1990):** 'Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **83**, 143–198.
- Guedes, J.M., Rodrigues, H.C., Bendsøe, M.P. (2003):** 'A material optimization model to approximate energy bounds for cellular materials under multiload conditions', *Structural Optimization*, Vol. **25**, 5–6, 446–452.
- v. Hagen, H., Bleck, W. (1999):** 'Bending and bulging tests on steel sheet/aluminium foam sandwiches', in: Banhart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (ed.): *Metall Foams and Porous Metal Structures, International Conference on Metal Foams and Porous Metal Structures, 14–16th June, Bremen* (1999).
- v. Hagen, H., Nicklas D., Bleck, W. (1997):** 'Charakterisierung von Sandwichverbunden aus Aluminiumschaum und Stahldeckblechen', in: Banhart, J., M. F. Ashby & A. Fleck (ed.): '*Metallschäume*', *Konferenzband zum Symposium Metallschäume*, edited by J. Banhart. MIT-Verlag (1997).
- Hartmann, M. (1999):** 'Syntactic magnesium-based foams', *Aluminium*, **75.3**, 154–156.
- Hartmann, M., Crössmann, I., Reindel, K., Singer, R.F. (1999):** 'Microstructure and mechanical properties of cellular magnesium matrix composites', in: Banhart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (ed.): *Metall Foams and Porous Metal Structures, International Conference on Metal Foams and Porous Metal Structures, 14–16th June, Bremen* (1999).
- Hartmann, M., Singer, R.F. (1997):** 'Herstellung und Eigenschaften syntaktischer Magnesiumschäume', in: Banhart, J., M. F. Ashby & A. Fleck (ed.): '*Metallschäume*', *Konferenzband zum Symposium Metallschäume*, edited by J. Banhart. MIT-Verlag (1997).
- Hashin, Z. (1962):** 'The elastic moduli of heterogenous materials', *ASME J. Appl. Mech.*, **29**, 143–150.
- Hassani, B., Hinton, E. (1998):** 'A review of homogenization and topology optimization II – analytical and numerical solution of homogenization equations', *Computers & Structures*, **69**, 719–738.
- Harte, A.M., Fleck, N.A., Ashby, M.F. (2000):** 'Sandwich Panel Design Using Aluminum Alloy Foam', *Advanced Engineering Materials* **2**, 219–222.
- Haufe, A. (2001):** *Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke am Beton mit der Plastizitätstheorie*. Report No. **35**, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Haufe, A., Ramm, E. (2002):** 'Nonlinear Layered Shell Formulation for RC-Structures', *Multiscale Computational Engineering* (to be published).
- Hegger, J. (Hrsg.) (2001):** *Textilbeton – Tagungsband zum 1. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532 am 15.+16. Februar 2001 in Aachen*. ISBN 3–980, 7302–1–2.

- Hegger, J., Will, N., Schneider, H.N., Kölzer, P. (2004):** Neue Bauteile aus textilbewehrtem Beton', *Beton- und Stahlbetonbau*, Band 99, No. 06/2004, Seiten 482 – 487.
- Hegger, J., Döinghaus, P., Littwin, R., Will, N., Bischoff, T., Wulfhorst, B. (1999):** 'Das Tragverhalten von Textilbeton – Versuche und Berechnungen', *Bauen mit Textilien*, **2**, 20–23.
- Hegger, J., Molter, M. (2002):** 'Der neue Verbundwerkstoff Textilbewehrter Beton', *Fertigteil-Technik* **2**, 22–24.
- Hegger, J., Sasse, H.R., Wulfhorst, B., Döinghaus, P., Molter, M., Rössler, G., Schneider, M. (1999):** 'U-Träger als bauteilintegrierte Schalung', *Bauen mit Textilien*, **2**, 24–28.
- Hegger, J., Will, N., Molter, M., Littwin, R. (2002):** 'Bruch- und Rißverhalten von textilbewehrtem Beton', *Bautechnik* **79**, Heft 4, 268–271.
- Hempel, R., Curbach, M., Offermann, P., Franzke, G., Engler T., Fuchs, H. (1999):** 'Dünne Platten aus textilbewehrtem Beton und ihre Einsatzmöglichkeiten im Fassadenbau', *Bauen mit Textilien*, **1**, 22–25.
- Hettich, T., Ramm, E. (2006):** 'Interface Material Failure Modeled by the Extended Finite Element Method and Level Sets', *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, in press.
- Holzapfel, G.A. (2001):** *Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley.
- Huang, J., Walsh, T., Mancini, L., Wlotkowski, M., Yang, R.J., Chuang, C.H. (1993):** 'A New Approach for Weight Reduction in Truck Frame Design', SAE 1993 Transaction, *J. of Commercial Vehicles*.
- Hucko, B., Faria, L. (1997):** 'Material model of metallic cellular solids', *Computers & Structures*, **62**, No. **6**, 1049–1057.
- Hupfer, K. (2003):** *Einfluß der Mikrostruktur auf die Festigkeitseigenschaften von Metallschäumen*. Dissertation, Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr. 53–2003, TU Braunschweig.
- Huschka, S. (1997):** *Modellierung eines Materialgesetzes zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften von Aluminiumschaum*. VDI Fortschrittsberichte, Reihe 5. Nr. 525.
- Hyun, S.K., Nakajima, H. (2002):** 'Fabrication of Lotus-Structured Porous Iron by Unidirectional Solidification under Nitrogen Gas', *Advanced Engineering Materials* **4**, 741–744.
- Jemiolo, S., Turteltaub, S. (2000):** 'A Parametric Model for a Class of Foam-Like Isotropic Hyperelastic Materials', *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **67**, 248–254.
- Jin, R., Du, X., Chen, W. (2003):** 'The use of metamodeling techniques for optimization under uncertainty', *Structural Optimization*, Vol. **25**, 99–116.
- Jirasek, M., Bazant, Z.P. (2002):** *Inelastic analysis of structures*. New York, Wiley.
- Kato, J. (2004):** *The optimization of concrete-filled carbon shell systems*. Master Thesis, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Kato, J., Lipka, A., Ramm, E. (2006):** 'Preliminary investigation for optimization of fiber-reinforced cementitious composite structures', in Proc. of 3rd Europ. Conf. on Comp. Mech., Lisbon 2006, "Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering" (ed. C.A. Mota-Soares et al.) Springer.
- Kemmler, R. (2004):** *Stabilität und große Verschiebungen in der Form- und Topologieoptimierung*. Report No. 40, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Kemmler, R., Schwarz, S., Ramm, E. (1999):** 'Topology optimization including geometrically nonlinear response', in: *Proceedings of the 3rd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*, May, 17–21, Buffalo, USA.
- Kemmler, R., Lipka, A., Ramm, E. (2005):** 'Large Deformations and Stability in Topology Optimization', *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **30**, No. 6, 459 – 476.
- Khisaeva, Z.F., Ostoja-Starzewski M. (2006):** 'On the Size of RVE in Finite Elasticity of Random Composites', *Journal of Elasticity* **85**, 153–173.
- Kikuchi, H.Qi.N., Mazumder, J. (2004):** 'Interface study and boundary smoothing on designed composite material microstructures for manufacturing purposes', *Structural Optimization*, Vol. 26, 5, 326 – 332.

- Kim, I.Y., Weck, O.L. (2005):** 'Adaptive Weighted Sum Method for bi-objective Optimization', *Structural and Multidisciplinary Optimization*, **29**, No. 2, 149 – 158.
- Kimmich, S. (1990):** *Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen*. Report No. 12, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Kleiber, M. (1993):** 'Shape and non-shape structural sensitivity analysis for problems with any material and kinematic non-linearity', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **108**, 73–97.
- Kleiber, M., Antunez, H., Hien, T.D., Kowalczyk, P. (1997):** *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics: Theory and Finite Element Computations*. Wiley & Sons, Toronto.
- Kleiber, M., Kowalczyk, P. (1996):** 'Sensitivity analysis in plane stress elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **137**, 395–409.
- Klinkel, S. (2000):** *Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*. Report No. 7, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe.
- Kocvara, M. (2002):** 'On the modelling and solving of the truss design problem with global stability constraints', *Structural Optimization*, Vol. **1**, 189–203.
- Körner, C., Thies, M., Singer, R.F. (2002):** 'Modelling of Metal Foaming with Lattice Boltzmann Automata', *Advanced Engineering Materials* **4**, 765–769.
- Kouznetsova, V.G. (2002):** *Computational homogenization for the multi-scale analysis of multi-phase materials*, Dissertation, Netherlands Institute for Metals Research, Technische Universität Eindhoven.
- Krach W., Rammerstorfer F.G., Reiter T.J., Zenz P. (1995):** 'Computergestützte Vorhersage des Knochenumbaus am Beispiel von Knieendoprothesen', *Biomed.Technik* **40**, 78–80.
- Kretz, R., Hausberger, K., Götzinger, B. (2002):** 'Energy-Absorbing Behaviour of Aluminium Foams: Head Impact Tests on the A-Pillar of a car', *Advanced Engineering Materials* **4**, 781–785.
- Kriszt, B., Foroughi, B., Faure, K., Degischer, H.P. (1999):** 'Deformationbehaviour of aluminium foam under uniaxial compression (a case study):', in: Banhart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (ed.): „Metall Foams and Porous Metal Structures“, *International Conference on Metal Foams and Porous Metal Structures, 14–16th June, Bremen* (1999).
- Krüger, M. (2004):** *Vorgespannter textilbewehrter Beton*. Dissertation. Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart.
- Krüger, M., Ozbolt, J., Reinhardt, H.-W. (2002):** 'A Discrete Bond Model for 3D Analysis of Textile Reinforced and Prestressed Concrete Elements', *Otto-Graf-Journal* Vol. **13**, 111–128.
- Kuhl, E., Menzel, A., Steinmann, P. (2003):** 'Computational modeling of growth – A critical review, a classification of concepts and two new consistent approaches', *Comp. Mech.*, Vol. **32**, 71–88.
- Lakes, R. (1987):** 'Foam structures with a negative Poisson's ratio', *Science* **235**, 1038–1040.
- Lardeur, P., Bourdeau, S. (1996):** 'An Optimality Criteria Method for the Optimization of the Fibers Orientation in Composite Structures under Small or Large Displacements', in: *Proc. ECCOMAS'96, 2nd ECCOMAS (European Community on Computational Methods in Applied Sciences)*, Paris, September 9–13, 1996, J.A.Désidéri, P.Le Tallec, E.Onate, J.Périaux & E.Stein (eds.), John Wiley & Sons, Chichester, 973–979 (1996).
- Lee, E.H. (1969):** 'Elastic-plastic deformation at finite strains', *ASME J. Appl. Mech.*, **36**, 1–6.
- Leitmeier, D., Degischer, H.P., Frankl, H.J. (2002):** 'Development of a Foaming Process for Particulate Reinforced Aluminum Melts', *Advanced Engineering Materials* **4**, 735–740.
- Lewinsky, T. (1993):** 'Optimal design of three-dimensional axisymmetric elastic structures', *Structural Optimization*, **6**, 59–64.
- Lewinsky, T. (2005):** 'New Designs of Michell-like Cantilevers Corresponding to Different Allowable Tensile and Compressive Stresses', in: *Proc. WCSMO6 – 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* (Eds. J. Herskovits, S. Mazonche og A. Canelas), 30 May – 3 June 2005, Rio de Janeiro, Brasil, CD-ROM, ISBN: 85–285–0070–5.

- Lipka, A., Ramm, E. (2005):** 'A concept for the optimization of metal foam structures', in: Proc. *WCSMO6 – 6th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization* (Eds. J. Herskovits, S. Matorche og A. Canelas), 30 May – 3 June 2005, Rio de Janeiro, Brasil, CD-ROM, ISBN: 85-285-0070-5.
- Lipka, A., Ramm, E. (2006):** 'Optimization of foam filled structures using gradient algorithms', in: *IUTUAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials: Status and Perspectives* (eds. M.P. Bendsøe, N. Olhoff and O. Sigmund), pp. 537–548, Springer.
- Lipka, A., Schwarz, S., Ramm, E. (2001):** 'Topology optimization of three-dimensional structures with consideration of elastoplastic structural response', in: *Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Proc. of the 2nd European Conference on Computational Mechanics – ECCM 2001*, Cracow, Poland.
- Littwin, R. (2001):** 'Verifizierung und Optimierung eines Verbundgesetzes', in Hegger, J. (Hrsg.) (2001): *Textilbeton – Tagungsband zum 1. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532 am 15.+16. Februar 2001 in Aachen*. ISBN 3-980, 7302-1-2, RWTH Aachen, 137–150.
- Loop, C. (1987):** *Smooth subdivision surfaces based on triangles*. Master's Thesis, University of Utah, Department of Mathematics.
- Lutz, E. (1999):** *Untersuchung des Tragverhaltens von textilbewehrten Betonbauteilen*. Diplomarbeit. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Mashima, M., Hannant, D. J., Keer, J.G. (1990):** 'Tensile properties of polypropylene reinforced cement with different fiber orientations', *ACI Materials Journal*, **2**, 172–178.
- Matsuo, Ch. (2003):** *Optimal Seismic Design of Shell Structures Using Genetic Algorithm*. Master Thesis, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Maute, K. (1998):** *Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken*. Bericht Nr. 25, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Maute, K., Ramm, E. (1995):** 'Adaptive topology optimization', *Structural Optimization*, **10**, 100–112.
- Maute, K., Schwarz, S., Ramm, E. (1998):** 'Adaptive Topology Optimization of Elastoplastic Structures', *Structural Optimization* **15**, **2**, 81–91.
- Maute, K., Schwarz, S., Ramm, E. (1998):** 'Conceptual design by structural optimisation', in *Proceedings of the Euro-C 1998 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, edited by R. de Borst, N. Bicanic, H. Mang & G. Meschke, 33–42. A.A. Balkema, Rotterdam, Brookfield, Badgastein, Austria.
- Maute, K., Schwarz, S., Ramm, E. (1999):** 'Structural Optimization – The Interaction Between Form and Mechanics', *ZAMM – Z. Angew. Math. Mech.* **79**, **10**, 651–673.
- Maxwell, C. (1890):** *Scientific Paper II*, Cambridge University Press.
- Mayer, R.R., Kikuchi, N., Scott, R.A. (1996):** 'Application of topological optimization techniques to structural crashworthiness', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**, 1383–1403.
- Melchers, R.E. (2001):** 'Optimality-criteria-based Probabilistic Structural Design', *Structural Optimization*, Vol. **1**, 34–39.
- Menrath, H. (1999):** Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern. Report No. 29, *Dissertation*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Menrath, H., Haufe, A., Ramm, E. (1999):** 'Ein nichtlineares Materialmodell für FE-Analysen von Stahlverbundträgern', *Stahlbau*, **68**, Heft 9, 703–713.
- Messac, A., Ismail-Yahaya, A., Mattson, C.A. (2003):** 'The normalized normal constraint method for generating the Pareto frontier', *Structural Optimization*, Vol. **25**, 86–98.
- Meyer, A. (1991):** 'Wellcrete – eine fortschrittliche Technologie für die kostengünstige Produktion hochwertiger Faserbetonprodukte', *Betonwerk+Fertigteile-Technik*, **8**, 70–79.
- Miehe, C. (1993):** *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität – Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 93/1.

- Miller, R.E. (2000):** 'A Continuum Plasticity Model of the Constitutive and Indentation Behaviour of Foamed Metals', *Int. J. Mech. Sci.*, **42**, 729–754.
- Mosler, U., Heinzl, G., Martin, U., Oettel, H. (2001):** 'Quantitative Charakterisierung der zellularen Struktur von Aluminiumschäumen', *Sonderbände der Praktischen Metallographie* **32**, 121.
- Neves, M.M., Sigmund, O., Bendsøe, M.P. (2002):** 'Topology optimization of periodic microstructures with a penalization of highly localized buckling modes', *International Journal for Numerical Methods on Engineering*, **54**(6), 809–834.
- Ogden, R.W. (1997):** *Nonlinear Elastic Deformations*. Dover.
- Ohno, S., Hannant, D.J. (1994):** 'Modeling the Stress–Strain Response of Continuous Fiber Reinforced Cement Composites', *ACI Material Journal*, 91, No.3, 306–312.
- Olhoff, N., Rønholt, E., Scheel, J. (1998):** 'Topology optimization of threedimensional structures using optimum microstructures', *Structural Optimization*, **16**, 1–18.
- Onck, P.R. (2001):** 'Application of a Continuum Constitutive Model to Metallic Foam DEN–specimens in Compression', *Int. J. Mech. Sci.* **43**, 2947–2959.
- Osyczka, A. (2002):** *Evolutionary Algorithms for Single and Multicriteria Design Optimization*. Springer Verlag, Berlin, ISBN 3–7908–1418–01.
- Padmarajiah, S.K., Ramaswamy, A. (2001):** 'Behavior of Fiber–Reinforced Prestressed and Reinforced High–Strength Concrete Beams Subjected to Shear', *ACI Structural Journal* **98**, 752–761.
- Papila, M., Haftka, R.T. (2003):** 'Implementation of a crack propagation constraint within a structural optimization software', *Structural Optimization*, Vol. **25**, No. 5–6, 327–338.
- Pedersen, P. (1993):** 'Optimal orientation of anisotropic materials', in *Optimization of Large Structural Systems*, edited by G. Rozvany. Kluwer, Dordrecht.
- Pettermann H.E., Reiter T.J., Rammerstorfer F.G. (1997):** 'Computational Simulation of Internal Bone Remodeling', *Arch.Comput.Meth.Engng.* **4**, 295–323.
- Polynkin, A. van Keulen A.F., Toropov, V.V. (1995):** 'Optimization of geometrically nonlinear thin–walled structures using the multipoint approximation method', *Structural Optimization*, **9**, 105–116.
- Proske, D., Brückner, A., Hempel, R., Ortleb, S., Franzke, G., Engler, Th., Schierz, M. (2001):** 'Concrete Mast Restoration Using Multiaxial AR Glass Structures', in: *Techtextil–Symposium 2001*. Frankfurt/ Main, Lecture No. 333, April 24th.
- Ramm, E. (1981):** 'Strategies for tracing the nonlinear response near limit points', In *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, herausgegeben von W. Wunderlich, E. Stein & K.–J. Bathe, S. 63–89. Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- Ramm, E., Bletzinger, K.–U., Reitinger, R., Maute, K. (1994):** 'The challenge of structural optimization', in Topping, B.H.V. (Hrsg.): *Advances in structural optimization*. Edinburgh: Civil–Comp Press, 27–52.
- Ramm, E.; Maute, K.; Schwarz, S. (1998):** Conceptual design by structural optimization. In: Conference Proceedings of EURO–C 1998; R. de Borst, N. Bicanic, H. Mang, G. Meschke (eds); Badgastein, Austria, March 31 – April 3, 1998; Balkema, Rotterdam, 879–896.
- Ramm, E., Schwarz, S., Kemmler, R., Lipka, A. (2000):** 'Structural optimization – The interaction of form and mechanics', in *Proc. of 18. CAD–FEM Users Meeting, Internationale FEM– Technologietage*, 20–22 September 2000, Friedrichshafen, Germany.
- Rammerstorfer F.G., Böhm H.J. (2000):** 'Finite Element Methods in Micromechanics of Composites and Foam Materials', In: *Computational Mechanics for the Twenty–First Century* (Ed. B.H.V. Topping), S. 145–164, Saxe–Coburg Publications, Edinburgh.
- Rammerstorfer, F.G., Daxner, T. (2000):** 'Micro/macro plasticity effects in metallic foams', in *ECCOMAS 2000 – Proc. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, 11–14 September.
- Rammerstorfer, F. G., Gradinger, R. (1999):** 'On the influence of mesoinhomogenities on the crash worthiness of metal foams', *Acta mater.*, **47**, 143–148.

- Raupach, M., Brockmann, J. (2002):** 'Untersuchungen zur Dauerhaftigkeit von textilbewehrtem Beton', *Beton* **52**, 72–79.
- Raupach, M., Orłowsky, J., Puttermann, M., Walk–Lauffer, B. (2003):** 'Untersuchungen zur Verbundverbesserung der inneren Roving–Filamente: Polymermodifizierung von Textilbeton', *Beton* **53**, 114–120.
- Redhe, M., Forsberge, J., Jansson, T., et al. (2002):** 'Using the Response Surface Methodology and the D–optimality Criterion in Crashworthiness Related Problems: – An Analysis of the Surface Approximation Error Versus the Number of Function Evaluations', *Structural Optimization*, Vol. **24**, No. 3, 185 – 194.
- Reinhardt, H.–W., Krüger, M., Große, C.–U. (2003):** 'Concrete Prestressed with Textile Fabric', *Journal of Advanced Concrete Technology*, Vol. **1**, No. 3, 231–239.
- Reinhardt, H.–W., Krüger, M., Grosse, C.U. (2002):** 'Thin plates prestressed with textile reinforcement', in: *Concrete: Materials Science to Application. A Tribute to Surendra P. Shah*. USA, Farmington Hills, Michigan: ACI SP–206, 355–372. – Ed. by Balaguru, P, Naaman, A., Weiss, W.; ISBN 0–87031–075–5.
- Reiter, T.J. (1996):** *Functional Adaptation of Bone and Application in Optimal Structural Design*. Dissertation. Bericht aus dem Institut für Leichtbau und Struktur–Biomechanik, Universität Wien, VDI–Verlag GmbH, Düsseldorf, Reihe 17, Nr. 145.
- Reitinger, R. (1994):** *Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke*. Report No. 17, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Reitinger, R., Ramm, E. (1995):** 'Buckling and imperfection sensitivity in the optimization of shell structures', *Thin-walled Structures*, **23**, 159–177.
- Roberts, A.P., Garboczi, E.J. (2001):** 'Elastic Moduli of Model Random Three–dimensional Closed–cell Cellular Solids', *Acta Materialia* **49**, 189–197.
- Rodrigues, H., Guedes, J.M., Bendsoe, M.P. (2002):** 'Hierarchical Optimization of Material and Structure', *Structural Optimization*, Vol. **24**, No. 1, 1 – 10.
- Rössler, G., Kleist, A., Schneider, M., Bischoff, T. (1998):** 'Warum Textilien als Betonüberdeckung', *Bauen mit Textilien*, **2**, 8–12.
- Rostasy, F. S., Budelmann H., Hankers, C. (1992):** 'Faserverbundwerkstoffe im Stahlbeton– und Spannbetonbau', *Beton und Stahlbetonbau*, **5**, 123–129.
- Ryu, Y. S., Haririan, M., Wu C.C., Arora, J.S. (1985):** 'Structural design sensitivity analysis of nonlinear response', *Computers & Structures*, **21**, 245–255.
- Santosa, S, Banhart, J., Wierzbicki, T. (2000):** 'Bending Crush Resistance of Partially Foam–Filled Sections', *Advanced Engineering Materials* **2**, 223–227.
- Santosa, S., Banhart, J., Wierzbicki, T. (2001):** 'Experimental and Numerical Analyses of Bending of Foam–Filled Sections', *Acta Mech.* **148**, 199–213.
- Saxena R, Keller, T.S, Sullivan, J.M. (1999):** 'A Three–Dimensional Finite Element Scheme to Investigate the Apparent Mechanical Properties of Trabecular Bone', *Comput Methods Biomech Biomed Engin.* **2**(4):285–294.
- Schierz, M., Engler, Th., Franzke, G., Offermann, P., Curbach, M., Hempel, R. (2002):** 'Textilbewehrungen: Ein Material auf das man bauen kann – Textile Bewehrungen zur bautechnischen Instandsetzung und Verstärkung', *Kettenwirkpraxis* **36** (4), 20–21.
- Schleupen, A., Maute, K., Ramm, E. (2000):** 'Adaptive FE–Procedure in Shape Optimization', *Structural Optimization* **19**, 282–302.
- Schmit, L. A. (1960):** 'Structural design by Systematic Synthesis', in *Proc. of the Second National Congress on Electronic Computation*, Structures Division ASCE, Pittsburgh. PA, Sept. 105–132.
- Schwarz, S. (2001):** *Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten*. Bericht Nr. **34**, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Schwarz, S., Kemmler, R., Ramm, E. (1999):** 'Shape and topology optimization with nonlinear structural response', in *ECCM'99 – Proc. European Conference on Computational Mechanics*, Munich, Germany, 31 August – 3 September 1999 .

- Schwarz, S., Maute, K., Ramm, E. (2001):** 'Topology and Shape Optimization for Elastoplastic Structural Response', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 190, 2135–2155.
- Schwarz, S., Ramm, E. (2001):** 'Sensitivity Analysis and Optimization for Nonlinear Structural Response', *Eng. Comp.* 18, 610–641.
- Sedlacek, G., Paschen, M. (1997):** 'Aluschaum und Aluminiumschaum – Stahlblech Verbund im Leichtbau', in: Banhart, J., M. F. Ashby & A. Fleck (ed.): '*Metallschäume*', Konferenzband zum Symposium Metallschäume, edited by J. Banhart. MIT-Verlag (1997).
- Seelinger, H.-W. (1999):** 'Application strategies for aluminium-foam-sandwich parts (AFS)', in: Banhart, J., Ashby, M.F., Fleck, A. (ed.): 'Metall Foams and Porous Metal Structures', *International Conference on Metal Foams and Porous Metal Structures, 14–16th June, Bremen* (1999).
- Seeliger, H.W. (2002):** 'Manufacture of Aluminum Foam Sandwich (AFS) Components', *Advanced Engineering Materials* 4, 753–758.
- Seitzberger, M., Rammerstorfer, F.G., Degischer H.P., Gradinger, R. (1999):** 'Crushing of axially compressed steel tubes filled with aluminium foam', *Acta Mech.*, 125, 93–105.
- Shapovalov, V., Boyko, L. (2003):** 'Gasar – a new class of porous materials: syntheses, structure, properties and prospective application', in Banhart, J., Fleck, N.A., Mortensen, A. (2003): *Cellular Metals: Manufacture, Properties, Applications*, International Conference on Cellular Metals and Metal Foaming Technology, 23th–25th June 2003, Berlin. MIT Publ.
- Sigmund, O. (1994):** *Design of material structures using topology optimization*. Dissertation, Department of Solid Mechanics, Technical University of Denmark.
- Sigmund, O. (1994):** 'Materials with prescribed constitutive parameters: an inverse homogenization problem', *Int. J. Solids Struct.*, 31, 2313–2339.
- Sigmund, O. (2001):** *Topology Optimization Methods with Applications in Mechanism, MEMS and Material Design*. Habilitation, Department of Mechanical Engineering, Technical University of Denmark.
- Simo, J.C. (1992):** 'Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 99, 61–112.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1998),** *Computational Inelasticity*. Springer, New York.
- Simo, J.C., Meschke, G. (1993):** 'A new class of algorithms for classical plasticity extended to finite strains. Application to geomaterials', *Comp. Mech.*, 11, 253–278.
- de Souza Neto, E.A., Peric, D., Dutko, M., Owen, D.R..J. (1995):** 'Finite Strain Implementation of an Elasto-Plastic Model for Crushable Foam', in N.-E. Wilberg (Ed.), *Advances in Finite Element Technology*, CIMNE, Barcelona, 174–188.
- Stadler, W., Dauer, J. (1993):** 'Multicriteria Optimization in Engineering: A Tutorial and Survey', in: *Structural Optimization: Status and Promise*, edited by M.P. Kamat, Volume 150. AIAA.
- Stein E., de Borst, R., Hughes, T.J.R. (2004):** *Encyclopedia Of Computational Mechanics, Volume 2: Solids and Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester.
- Steinigen, F. (2001):** 'Numerische Simulation des Tragverhaltens textilverstärkter Bauwerke', in Hegger, J. (Hrsg.) (2001): *Textilbeton – Tagungsband zum 1. Fachkolloquium der Sonderforschungsbereiche 528 und 532 am 15.+16. Februar 2001 in Aachen*. ISBN 3-980, 7302-1-2, TU Dresden, 233–344.
- Studiengesellschaft Stahlanwendung e.V. (Hrsg.) (1997):** *Industrielle Nutzung von Stahlblechverbundwerkstoffen mit geschäumtem Aluminium – Projekt1: Sandwichkonstruktionen aus Stahlblech mit geschäumtem Aluminium*, Forschungsbericht P 281.1, Düsseldorf .
- Suzuki, K., Kikuchi, N. (1991):** 'Generalized layout optimization of three-dimensional shell structures', in *Geometric aspect of industrial design*, 62–88. V. Komkov, Philadelphia, SIAM.
- Swan, C.C., Kosaka, I. (1997):** 'Voigt-Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behavior', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 40, 3785– 3814.
- Sydow, A. (2003):** *Structural Optimisation of Machine Parts Considering their Fabrication*. Master Thesis. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

- Terada, K., Ito, T., Kikuchi, N. (1998):** 'Characterization of the mechanical behaviors of solid–fluid mixture by the homogenization method', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **153**, 223–257.
- Theocaris, P.S., Stavroulakis, G.E. (1998):** 'The homogenization method for the study of variation of Poisson's ratio in fiber composites', *Arch. of Appl. Mech.*, **68**, 281–295.
- Thompson, J. (1972):** 'Optimization as a Generator of Structural Instability', *Int. J. Mech. Sci*, **14**, 627–629.
- Tortorelli, D.A. (1992):** 'Sensitivity analysis for non–linear constrained elastostatic systems', *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **33**, 1643–1660.
- Tsay, J.J., Arora, J.S. (1989):** 'Optimum design of nonlinear structures with path dependent response', *Structural Optimization*, **1**, 203–213.
- Tsay, J.J., Arora, J.S. (1990):** 'Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. part 1: General theory', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **81**, 183–208.
- Viceconti, M., Casali M., Massari B., Cristofolini, L., Bassini S., Toni, A. (1996a):** 'The "Standardized femur program". Proposal for a reference geometry to be used for the creation of finite element models of the femur', *J. Biomech.*, Vol. **29**, 1241.
- Vidal, C.A., Haber, R.B. (1993):** 'Design sensitivity analysis for rate–independent elastoplasticity', *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **107**, 393–431.
- Villaggio, P. (2002):** 'How to Design a shock Absorber. *Structural Optimization*', Vol. **1**, 88–93.
- Vonach, W.K., Daxner, T., Rammerstorfer, F.G. (2000):** 'In–situ sandwiches with optimized metal foam cores', in *Proc. Sandwich 2000*, ETH Zürich, Sept.5–7.
- Ahmer Wadee, M., (1999):** 'Experimental evaluation of interactive buckle localization in compression sandwich panels', *J. Sandwich Structures & Materials*, **1(3)**: 230–254.
- Wadley, H.N.G. (2002):** 'Cellular Metals Manufacturing', *Advanced Engineering Materials* **4**, 726–733.
- Wagner, W. (1991):** *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht–Nr. 91/1.
- Weber, M. (1995):** *Herstellung von Metallschäumen und Beschreibung der Werkstoffeigenschaften*. Dissertation, TU Clausthal.
- Wiechmann, K. (2001):** *Theorie und Numerik zur Berechnung und Optimierung von Strukturen mit elastoplastischen Deformationen*. Dissertation, Forschungsberichte aus dem Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, F01/8.
- Wiechmann, K., Barthold, F.–J. (1998):** 'Remarks on variational design sensitivity analysis of structures with large elasto–plastic deformations', in *The 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*. St.Louis, USA.
- de Wit, A.J., Lipka, A., Ramm, E., van Keulen, F. (2006):** 'Multi–level optimization of material and structural layout', in Proc. of 3rd Europ. Conf. on Comp. Mech., Lisbon 2006, "Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering" (ed. C.A. Mota–Soares et al.) Springer.
- Yamada H. (1970):** *Strength of biological materials*. Evans FG, editor. Baltimore: Williams and Wilkins Co. 297.
- Yin, L., Ananthasuresh, G.K. (2002):** 'Topology Optimization of Compliant Mechanisms with Multiple Materials Using a Peak Function Material Interpolation Scheme', *Structural Optimization*, Vol. **1**, 49–62.
- Yuge, K., Iwai N., Kikuchi, N. (1999):** 'Optimization of 2–d structures subjected to nonlinear deformations using the homogenization method', *Structural Optimization*, **17**, 286–299.
- Yuge, K. Kikuchi, N. (1995):** 'Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation', *Structural Optimization*, **10**, 197–208.
- Zaoui A. (2001):** Changement d'échelle: motivation et méthodologie; in *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1: Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques* 19–39; Editions Hermes, Paris,2001.
- Zhang, T., Lee, J. (2003):** 'A Plasticity Model for Cellular Materials with Open–celled Structure', *Int. J. Plast.*, **19**, 749–770.

Anhang

A1 Sensitivitätsanalyse mit linearem und nichtlinearem Strukturverhalten

A1.1 Sensitivitätsanalyse, materiell und geometrisch linear

a) Optimierungsziel: Steifigkeit

Die Zielsetzung nach maximaler Steifigkeit ist gleichbedeutend mit der Suche nach einer Materialverteilung mit minimaler Formänderungsenergie unter einer bestimmten Belastung. Für dieses Optimierungsziel wurde eine adjungierte Methode verwendet, wobei die variationelle und die diskrete Variante zum gleichen Ergebnis kommen. Im Folgenden wird das Ergebnis der diskreten Vorgehensweise kurz zusammengefasst.

Die Definition der Zielfunktion: Minimale Verzerrungsenergie erfolgt bei Annahme einer linearen Kinematik in diskretisierter Form durch:

$$f = \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}^{linT} \mathbf{C} \mathbf{E}^{lin} |\mathbf{J}| d\Omega . \quad (10.1)$$

\mathbf{E}^{lin} bezeichnet den linearen Anteil der Green–Lagrange–Verzerrungen, \mathbf{C} den Materialtensor und $|\mathbf{J}|$ die Jacobideterminante. Mit der diskretisierten Gleichgewichtsbedingung

$$\mathbf{K}^e \mathbf{d} - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (10.2)$$

wobei \mathbf{K}^e die linear elastische Steifigkeitsmatrix, \mathbf{P} den Vektor der äußeren Lasten und \mathbf{d} die diskreten Verschiebungen bezeichnet, wird die Zielfunktion um einen adjungierten Ansatz erweitert

$$\tilde{f} = \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}^{linT} \mathbf{C} \mathbf{E}^{lin} |\mathbf{J}| d\Omega - \boldsymbol{\mu}^T [\mathbf{K}^e \mathbf{d} - \mathbf{P}] . \quad (10.3)$$

Die Bestimmungsgleichung für den Vektor der adjungierten Variablen $\boldsymbol{\mu}$ erhält man durch Ableiten der Gleichung (10.3) nach den Entwurfsvariablen s und Zusammenfassen der Terme bezüglich der Ableitung $\nabla_s \mathbf{d}$

$$\nabla_s \tilde{f} = \nabla_s^{expl} f + [\nabla_s \mathbf{d} - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}^e] \nabla_s \mathbf{d} - \boldsymbol{\mu}^T [\nabla_s^{expl} \mathbf{K}^e \mathbf{d} - \nabla_s \mathbf{P}] . \quad (10.4)$$

Mit $\nabla_s \mathbf{d} = \mathbf{P}$ folgt unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft von \mathbf{K}^e

$$\mathbf{K}^{e-1} \mathbf{P} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \quad (10.5)$$

und es entfällt in Gleichung (10.4) die Bestimmung von $\nabla_s \mathbf{d}$. Durch Identifikation von $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{d}$ in Gleichung (10.5) kann die Sensitivität der Dehnungsenergie direkt berechnet werden

$$\nabla_s \tilde{f} = \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \nabla_s^{expl} \int_{\Omega} \mathbf{E}^{linT} \mathbf{C} \mathbf{E}^{lin} |\mathbf{J}| d\Omega - \mathbf{d}^T \nabla_s^{ex} \mathbf{K}^e \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \nabla_s \mathbf{P} \quad (10.6)$$

und es folgt der bekannte Ausdruck für die Sensitivität der Zielfunktion:

$$\nabla_s \tilde{f} = - \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}^{linT} \nabla_s \mathbf{C} \mathbf{E}^{lin} |\mathbf{J}| d\Omega + \mathbf{d}^T \nabla_s \mathbf{P} . \quad (10.7)$$

b) Optimierungsziel: Maximierung von Eigenfrequenzen

Zwei typische Aufgaben zur Verbesserung des dynamischen Verhaltens von Strukturbauteilen sind beispielsweise: die Maximierung der niedrigsten Frequenz und die Anpassung von Eigenfrequenzen an vorgegebene Werte.

Für die Verbesserung des dynamischen Verhaltens metallschäumgefüllter Bauteile wird in diesem Vorhaben die Maximierung von Eigenfrequenzen durchgeführt. Praktischer Hintergrund ist die Wunsch, Bauteile zu entwerfen, deren Eigenfrequenzen nicht im Bereich der Erregerfrequenzen liegen. Hierdurch können z.B. bei Karosseriebauteilen von Kraftfahrzeugen Resonanzeffekte und damit unerwünschtes 'Dröhnen' vermieden werden. Ein weiterer Anwendungsfall ist z.B. die Vermeidung von Eigenfrequenzen um 2 Hz bei Fußgängerbrücken, um ein als unangenehm empfundenes Schwingen zu vermeiden.

Ausgangspunkt ist bei Annahme einer linearen Kinematik und linear elastischem Materialverhalten die diskretisierte allgemeine Bewegungsgleichung unter Vernachlässigung der Dämpfung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^e \mathbf{d} = \mathbf{R} . \quad (10.8)$$

Die Masse ist mit \mathbf{M} , die linear elastische Steifigkeitsmatrix mit \mathbf{K}^e und die Verschiebungen und Beschleunigungen mit \mathbf{d} bzw. $\ddot{\mathbf{d}}$ gekennzeichnet. Die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die zugehörigen Eigenformen Ψ_i werden durch Lösen des folgenden linearen Eigenwertproblems bestimmt

$$(\mathbf{K}^e - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Psi_i = \mathbf{0} . \quad (10.9)$$

Die Eigenfrequenzen berechnen sich aus den Eigenkreisfrequenzen bekanntermaßen wie folgt:

$$\vartheta_i = \frac{\omega_i}{2\pi} . \quad (10.10)$$

Für die Herleitung der Sensitivitäten wird die Gleichung (3.19) mit dem Eigenvektor Ψ^T multipliziert und nach den Entwurfsvariablen s abgeleitet

$$\Psi_i^T (\nabla_s \mathbf{K}^e - \nabla_s (\omega_i^2) \mathbf{M} - \omega_i^2 \nabla_s \mathbf{M}) \Psi_i = 0 . \quad (10.11)$$

Die Ableitung der Eigenformen Ψ_i nach den Entwurfsvariablen s entfällt bei Berücksichtigung der Gleichung (3.19) und den Symmetrieeigenschaften von \mathbf{K}^e und \mathbf{M} .

Auflösen der Gleichung (10.11) nach $\nabla_s (\omega_i)^2$ ergibt

$$(\Psi_i^T \mathbf{M} \Psi_i) \nabla_s (\omega_i^2) = \Psi_i^T (\nabla_s \mathbf{K}^e - \omega_i^2 \nabla_s \mathbf{M}) \Psi_i . \quad (10.12)$$

Mit entsprechender Skalierung der Eigenvektoren, so dass $\Psi_i^T \mathbf{M} \Psi_i = 1$ ist, kann die Sensitivität der Eigenfrequenzen mit Gleichung (3.20) unter Berücksichtigung von $\nabla_s (\omega_i^2) = 2\omega_i \nabla_s \omega_i$ folgendermaßen angegeben werden:

$$\nabla_s \vartheta_i = \frac{\nabla_s(\omega_i^2)}{4\pi\omega_i} . \quad (10.13)$$

A1.2 Sensitivitätsanalyse, materiell linear und geometrisch nichtlinear

a) Optimierungsziel: Steifigkeit

Für die Berücksichtigung geometrisch nichtlinearen Strukturverhaltens kann die Gleichgewichtsbedingung nicht in einem Schritt nach den Verschiebungen aufgelöst werden. In dieser Arbeit wird das Newton–Raphson–Verfahren zur Lösung der linearisierten Gleichgewichtsbedingung eingesetzt.

Im Fall geometrischer Nichtlinearität, bei gleichzeitig materiell linearem Verhalten, bietet die variationelle Sensitivitätsanalyse keine nennenswerten Vorteile.

Die Formulierung der Zielfunktion für die Minimierung der Verzerrungsenergie erfolgt analog zur Gleichung (10.1)

$$f = \sum_{i=1}^{n_{ele}} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E} |J| d\Omega , \quad (10.14)$$

wobei hier zur Berücksichtigung der nichtlinearen Kinematik die Green–Lagrange–Verzerrungen \mathbf{E} verwendet werden.

Die Erweiterung der Zielfunktion erfolgt in diesem Fall mit der Gleichgewichtsaussage bei einem vorgegebenen Lastniveau $\bar{\lambda}\mathbf{P}$

$$\bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda}\mathbf{P} = \mathbf{0} , \quad (10.15)$$

mit den internen diskretisierten Knotenkräften $\bar{\mathbf{R}}$ des Systems für diese Last und es folgt der adjungierte Ansatz

$$\tilde{f} = f - \boldsymbol{\mu}^T [\bar{\mathbf{R}} - \bar{\lambda}\mathbf{P}] . \quad (10.16)$$

$\boldsymbol{\mu}$ bezeichnet den Vektor der adjungierten Variablen. Durch Ableiten der erweiterten Zielfunktion \tilde{f} nach den Entwurfsvariablen s erhält man

$$\nabla_s \tilde{f} = \nabla_s^{expl} f + [\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} f - \boldsymbol{\mu}^T \bar{\mathbf{K}}_T] \nabla_s \bar{\mathbf{d}} + \boldsymbol{\mu}^T [\bar{\lambda} \nabla_s^{expl} \mathbf{P} - \nabla_s^{expl} \bar{\mathbf{R}}] . \quad (10.17)$$

Berücksichtigt wurde die Ableitung der inneren Kräfte nach den Verschiebungen

$$\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{K}}_T . \quad (10.18)$$

Die Matrix $\bar{\mathbf{K}}_T$ stellt dabei die Tangentensteifigkeit am Ende des letzten Inkrements dar und ersetzt in Gleichung (10.17) die Ableitung der inneren Kräfte $\bar{\mathbf{R}}$ nach der Verschiebungen $\bar{\mathbf{d}}$.

Durch die Wahl des adjungierten Vektors zu

$$\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} [\nabla_{\bar{\mathbf{d}}} f] \quad (10.19)$$

wird wiederum die Berechnung von $\nabla_s \bar{\mathbf{d}}$ vermieden. Unter Berücksichtigung, dass die Ableitung der Dehnungsenergie f nach den Verschiebungen $\bar{\mathbf{d}}$ der äußeren Last $\bar{\lambda}\mathbf{P}$ entspricht, erfolgt die

Bestimmung der adjungierten Variablen durch das Lösen der Gleichung (10.19). Durch Einsetzen des Vektors der adjungierten Variablen in Gleichung (10.17) erhält man

$$\nabla_s \tilde{f} = \nabla_s^{expl} f + \boldsymbol{\mu}^T [\bar{\lambda} \nabla_s^{expl} \mathbf{P} - \nabla_s^{expl} \bar{\mathbf{R}}] . \quad (10.20)$$

Die Sensitivitäten können auf Elementebene mit bekanntem $\boldsymbol{\mu}$ bestimmt werden

$$\nabla_s f^e = \frac{1}{2} \nabla_s^{expl} \int_{\Omega} \mathbf{E}^T \mathbf{C} \mathbf{E} |\mathbf{J}| d\Omega^e + \boldsymbol{\mu}^T [\nabla_s^{expl} \hat{\mathbf{R}} - \bar{\lambda} \nabla_s^{expl} \hat{\mathbf{P}}] , \quad (10.21)$$

wobei $\hat{\mathbf{R}}$ und $\hat{\mathbf{P}}$ die Werte für das betrachtete Element aus dem Gesamtvektor enthalten.

Dem Vorschlag Kemmlers (2004) folgend, wird aufgrund des Potentialcharakters innerhalb des Optimierungsprozesses nach Erreichen der vorgegebenen Maximallast und nach Berechnung einer neuen Dichteverteilung lediglich das Gleichgewicht wieder ausiteriert.

b) Optimierungsziel: Maximierung der kritischen Last

Ein Ziel innerhalb dieses Vorhabens ist die Verbesserung des Beulverhaltens metallschaumgefüllter Hohlprofile und Sandwichbauteile. In einem ersten Schritt wird im Hinblick auf eine Verbesserung des globalen Beulverhaltens die Maximierung der kritischen Grenzlast bei geometrisch nichtlinearem Tragverhalten mit einem linearen Materialmodell untersucht.

Mit Annahme eines linearen Vorbeulverhaltens (Verformungen im Vorbeulbereich bleiben unberücksichtigt) wird die Grenzlast mit einer linearen Eigenwertanalyse abgeschätzt:

$$(\mathbf{K}^e + \lambda_i \mathbf{K}^g) \boldsymbol{\Psi}_i = 0 . \quad (10.22)$$

Dabei ist \mathbf{K}^e die linear elastische Steifigkeitsmatrix und $\boldsymbol{\Psi}_i$ die zu den Eigenwerten λ_i gehörigen Eigenformen. Die Bestimmung der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^g(\tilde{\mathbf{d}})$ erfolgt mit der Berechnung der diskreten Verschiebungen $\tilde{\mathbf{d}}$ in einer linearen Analyse

$$\mathbf{K}^e \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{P} . \quad (10.23)$$

Für die Berechnung der Sensitivitäten wird das Eigenwertproblem (3.16) mit der Eigenform $\boldsymbol{\Psi}_i^T$ vormultipliziert und mit dem Skalarprodukt des Vektors der adjungierten Variablen $\boldsymbol{\mu}^T$ und der linearen Gleichgewichtsaussage (3.17) erweitert

$$\boldsymbol{\Psi}_i^T (\mathbf{K}^e + \lambda_i \mathbf{K}^g) \boldsymbol{\Psi}_i - \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{K}^e \tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{P}) = 0 . \quad (10.24)$$

In der totalen Ableitung der Gleichung (10.24) nach den Entwurfsvariablen s mit Berücksichtigung der impliziten Abhängigkeit der geometrischen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^g(\tilde{\mathbf{d}})$ von den Verschiebungen

$$\begin{aligned} & \nabla_s \boldsymbol{\Psi}_i^T (\mathbf{K}^e + \lambda_i \mathbf{K}^g) \boldsymbol{\Psi}_i + \boldsymbol{\Psi}_i^T (\mathbf{K}^e + \lambda_i \mathbf{K}^g) \nabla_s \boldsymbol{\Psi}_i \\ & + \boldsymbol{\Psi}_i^T (\nabla_s \mathbf{K}^e + \nabla_s \lambda_i \mathbf{K}^g + \lambda_i \nabla_s \mathbf{K}^g + \lambda_i \nabla_{\tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{K}^g \nabla_s \tilde{\mathbf{u}}) \boldsymbol{\Psi}_i \\ & - \nabla_s \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{K}^e \tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{P}) - \boldsymbol{\mu}^T (\nabla_s \mathbf{K}^e \tilde{\mathbf{d}} + \mathbf{K}^e \nabla_s \tilde{\mathbf{d}} - \nabla_s \mathbf{P}) = 0 . \end{aligned} \quad (10.25)$$

entfällt mit Gleichung (3.16) und bei Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft von \mathbf{K}^e und \mathbf{K}^g , die Berechnung der Sensitivitäten der Eigenformen. Mit Berücksichtigung der Gleichung (3.17) wird die Berechnung der Sensitivität der adjungierten Variablen $\nabla_s \boldsymbol{\mu}^T$ vermieden.

Durch das Ordnen der verbleibenden Terme in Gleichung (10.25) und bei entsprechender Wahl der Bestimmungsgleichung für die Berechnung der adjungierten Variablen $\boldsymbol{\mu}^T$

$$\boldsymbol{\Psi}_i^T \lambda_i \nabla_d \mathbf{K}^g \boldsymbol{\Psi}_i - \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{K}^e = \mathbf{0} \quad (10.26)$$

entfällt die Berechnung von $\nabla_s \tilde{\mathbf{d}}$. Mit bekanntem $\boldsymbol{\mu}^T$ können die Sensitivitäten der Eigenwerte $\nabla_s \lambda_i$ wie folgt angegeben werden

$$\boldsymbol{\Psi}_i^T \mathbf{K}^g \boldsymbol{\Psi}_i \nabla_s \lambda_i = - \boldsymbol{\Psi}_i^T (\nabla_s^{expl} \mathbf{K}^e + \lambda_i \nabla_s^{expl} \mathbf{K}^g) \boldsymbol{\Psi}_i + \boldsymbol{\mu}^T (\nabla_s^{expl} \mathbf{K}^e \tilde{\mathbf{d}} - \nabla_s \mathbf{P}) . \quad (10.27)$$

Mit der Bedingung $\boldsymbol{\Psi}_i^T \mathbf{K}^g \boldsymbol{\Psi}_i = 1$, die durch eine Skalierung der Eigenvektoren erfüllt wird, können schließlich die Sensitivitäten der Eigenwerte nach Gleichung (10.27) berechnet werden.

A1.3 Sensitivitätsanalyse, materiell nichtlinear und geometrisch linear

Optimierungsziel: Duktilität

Für nichtlineare pfadabhängige Materialmodelle sind die Sensitivitäten, genauso wie die Strukturanalyse, inkrementell nach jedem Zeitschritt zu berechnen. Die Zielfunktion zur Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens ist in diesem Vorhaben die Duktilität. Die Duktilität wird durch das Integral der Verzerrungsenergie für eine vorgegebene Verschiebung definiert

$$\min f = - \int_{\Omega} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega . \quad (10.28)$$

Aufgrund der feinen Diskretisierung und der damit einhergehenden hohen Anzahl an Entwurfsvariablen in der materiellen Topologieoptimierung wurde in einem ersten Ansatz eine variationell adjungierte Sensitivitätsanalyse nach Maute (1998) verwendet.

Die Spannungs–Dehnungsbeziehung wird für das hier verwendete makroskopisch, isotrope, poröse Plastizitätsmodell in folgender inkrementeller Form angegeben:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}^{el} . \quad (10.29)$$

Nach der variationell adjungierten Formulierung lassen sich die Sensitivitäten der Duktilität wie folgt berechnen

$$\nabla_s f = - \nabla_s \int_{\Omega_i} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = - \nabla_s \int_{\Omega_i} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} d\Omega = - \int_{\Omega_i} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\sigma}} (\nabla_s d\boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{\sigma}^T \nabla_s d\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega \quad (10.30)$$

Mit der Ableitung der inkrementellen Spannungs–Dehnungsbeziehung

$$\nabla_s d\boldsymbol{\sigma} = \nabla_s (\mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla_s \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D}^{ep} \nabla_s d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (10.31)$$

erhält man:

$$\nabla_s f = - \int_{\Omega_i} \int_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \int_{\boldsymbol{\sigma}} (d\boldsymbol{\varepsilon}^T \nabla_s \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} + \nabla_s d\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} + d\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}^{ep} \nabla_s d\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega . \quad (10.32)$$

Die Ableitung des Prinzips der virtuellen Arbeit (ohne Berücksichtigung von Volumenkräften) nach der Entwurfsvariablen führt auf

$$\int_{\Omega_i} \nabla_s(d\sigma^T) \delta\varepsilon d\Omega - \int_{\Gamma} \nabla_s(d\lambda \hat{\mathbf{t}})^T \delta\mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad . \quad (10.33)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass in der Topologieoptimierung der Raum Ω unabhängig von den Entwurfsvariablen s ($\nabla_s d\Omega = 0$) ist und die Testfunktion $\delta\mathbf{u}$ in den entsprechenden Ansatzräumen beliebig gewählt werden kann, so dass $\nabla_s \delta\mathbf{u} = \nabla_s \delta\varepsilon = \mathbf{0}$ ist.

Die Ableitung der inkrementellen Spannungs–Verzerrungsbeziehung (10.31) und Gleichung (10.33) führen auf

$$\int_{\Omega_i} \int_{\hat{\varepsilon}} \int_{\sigma} (d\varepsilon^T \nabla_s \mathbf{D}^{ep} + \nabla_s d\varepsilon^T \mathbf{D}^{ep}) d\varepsilon d\Omega = \int_{\Gamma} \int_{\hat{\mathbf{u}}} \int_{\lambda} \nabla_s(d\lambda \hat{\mathbf{t}}^T) d\mathbf{u} d\Gamma \quad . \quad (10.34)$$

Die Variation der Verschiebungen und der Verzerrungen wird durch $\delta\mathbf{u} = d\mathbf{u}$ und $\delta\varepsilon = d\varepsilon$ identifiziert. Durch Einsetzen der inkrementellen Gleichgewichtsbedingung in die Sensitivität der Zielfunktion und bei Annahme einer designunabhängigen Last erhält man

$$\nabla_s f = \int_{\Omega} \int_{\hat{\varepsilon}} \int_{\varepsilon} d\varepsilon^T \nabla_s \mathbf{D}^{ep} d\varepsilon d\Omega - 2 \int_{\Gamma} \int_{\hat{\mathbf{u}}} \int_{\lambda} \nabla_s d\lambda \hat{\mathbf{t}}^T d\mathbf{u} d\Gamma \quad . \quad (10.35)$$

Die Ableitung des inkrementellen Lastfaktors nach den Entwurfsparametern ist für die lastkontrollierten Rechnungen gleich Null. Im Falle der Kontrolle einer einzelnen Verschiebung wird für die durchgeführten Berechnungen angenommen, dass nur der kontrollierte Freiheitsgrad belastet wird. Die Sensitivität des Lastfaktors wird von Maute (1998) für verschiebungskontrollierte Rechnungen mit Hilfe der diskretisierten, inkrementellen Gleichgewichtsbedingung hergeleitet und lässt sich in kontinuierlicher Form wie folgt angeben:

$$\nabla_s d\lambda = \int_{\Omega} d\varepsilon^T \nabla_s \mathbf{D}^{ep} d\varepsilon d\Omega / \hat{\mathbf{t}}^T d\mathbf{u} \quad . \quad (10.36)$$

Die Sensitivität der Zielfunktion wird aus den letzten beiden Gleichungen ermittelt:

$$\nabla_s f = - \int_{\Omega_i} \int_{\hat{\varepsilon}} \int_{\varepsilon} d\varepsilon^T \nabla_s \mathbf{D}^{ep} d\varepsilon d\Omega \quad . \quad (10.37)$$

Der einzig unbekannte Term ist die Ableitung des elastoplastischen Tangentenmoduls $\nabla_s \mathbf{D}^{ep}$. Die Ableitung der elastoplastischen Tangente wird wie folgt angegeben:

$$\nabla_s \mathbf{D}^{ep} = \nabla_D \mathbf{D}^{ep} \nabla_s \mathbf{D} + \nabla_{E^h} \mathbf{D}^{ep} \nabla_s E^h + \nabla_{\sigma_y} \mathbf{D}^{ep} \nabla_s \sigma_y \quad , \quad (10.38)$$

mit den Ableitungen für den Elastizitätsmodul E , dem Verfestigungsmodul E_h und der Fließspannung σ_y , die entsprechend der Grundidee des SIMP–Ansatzes wie folgt gewählt wurden

$$E = b_1(\rho_i)E_0, \quad E^h = b_2(\rho_i)E_0^h, \quad \sigma_y = b_3(\rho_i)\sigma_{y0} \quad . \quad (10.39)$$

Die Eigenschaften des isotropen homogenen Ausgangsmaterials werden mit $(\cdot)_o$ indiziert. b_1, b_2, b_3 sind Funktionen, die so gewählt werden, dass durch die Bestrafung der Materialparameter von Zwischenzuständen eine klare '0–1'–Verteilung erzielt wird

$$b_j = \left(\frac{\rho_i}{\rho_o} \right)^{\beta_j} \quad . \quad (10.40)$$

Die Ableitungen der Materialparameter ergeben sich zu

$$\nabla_s(\cdot) = \frac{\beta_j}{\rho_o} \rho_i^{\beta_j-1} (\cdot)_o = \frac{\beta_j}{\rho_i} (\cdot)_j \quad . \quad (10.41)$$

Eine detaillierte Darstellung der Ableitung der einzelnen Terme der elastoplastischen Tangente in Gleichung (10.38) wird z.B. in Maute (1998) bzw. Schwarz (2001) gegeben.

A1.4 Nebenbedingung

Die Formulierung der in diesem Vorhaben bearbeiteten Optimierungsaufgaben erfolgt mit der Gleichheitsnebenbedingung h einer konstant angenommenen Masse, angegeben in der kontinuierlichen Form:

$$h = \int_{\Omega} \rho d\Omega - \hat{m} = 0 \quad . \quad (10.42)$$

ρ bezeichnet die Dichte des isotropen homogenen Materials und \hat{m} den Wert der im Entwurfsraum Ω verfügbaren Masse.

Anmerkung: Die Optimierungsaufgabe: 'Maximierung der Steifigkeit mit einer konstant vorgegebenen Masse' ist der 'Minimierung der Masse bei Vorgabe der Steifigkeit', z.B. bei Vorgabe der Verschiebung einer einzelnen am Tragwerk angreifenden Last, äquivalent. Ebenso ist die Maximierung der kritischen Grenzlast oder der kleinsten Eigenfrequenz mit der genannten Nebenbedingung, der Minimierung der Masse bei vorgegebener Grenzlast bzw. bei der Vorgabe der kleinsten Eigenfrequenz gleichwertig. Dies kann anhand der Kuhn–Tucker Bedingungen (Gleichung (3.4)) einfach nachgewiesen werden (Maute (1998) Ramm et al. (1994)).

A2 Flächenrückführung in der 3D–Topologieoptimierung

Die Ergebnisse der materiellen Topologieoptimierung mit einer konstanten Dichte innerhalb eines Finiten Elementes führen zu treppenartigen oder gezackten Randbeschreibungen in Abhängigkeit von der gewählten Diskretisierung, wie z.B. in den Beispielen im Kapitel 3.7.6. Aus mechanischer Sicht erweist sich das Auftreten zahlreicher lokaler Singularitätsstellen an diesen nichtglatten Rändern vor allem bei spannungsbasierten Entwurfskriterien als problematisch. Diese Problematik und die Aufbereitung der Optimierungsergebnisse für den weiteren Konstruktionsprozess mit CAD–Systemen machen eine sogenannte Oberflächenrückführung wünschenswert. Glatte Oberflächen ermöglichen zum einen die adaptive Neuvernetzung der opti-

mierten Struktur, zum anderen erleichtern sie wesentlich die Interpretation komplizierter dreidimensionaler Strukturen. Es existieren unterschiedliche Arten, Oberflächen zu beschreiben. Im zweidimensionalen Fall lassen sich mit mathematischen Formfunktionen, wie z.B. mit den B-Splines, kontinuierliche Ränder erzeugen, die durch die Position von wenigen Kontrollknoten festgelegt sind. Die Beschreibung dreidimensionaler Oberflächen mit Coons-, Beziers- oder Nurbs-Flächen erfordert jedoch die Dekomposition geometrisch komplexer dreidimensionaler Strukturen. Deren Generierung ist mit dem Ziel eines automatisch ablaufenden Prozesses nicht trivial.

Mit der im Folgenden vorgestellten Methodik lassen sich dagegen glatte Randbeschreibungen auch für topologisch komplexe dreidimensionale Optimierungsergebnisse mit sehr kurzen Berechnungszeiten erzeugen. Hierfür wird ein Triangulierungsverfahren eingesetzt, das ursprünglich für die Visualisierung dreidimensionaler Punktwolken in der Computertomografie entwickelt wurde. In der Computertomografie wird im sogenannten Marching-Cube-Algorithmus ein Kontrollvolumen schrittweise durch die dreidimensionale Punktwolke aus skalaren Messergebnissen geführt und für einen bestimmten Wert eine Art Isofläche erzeugt. In jedem Schritt werden die skalaren Werte der einzelnen Punkte innerhalb des Kontrollvolumens auf dessen Eckknoten projiziert, mit einer einfachen Interpolation die Koordinaten der Punkte diesen Wertes auf den Kanten des Würfels berechnet und Dreiecke zur Beschreibung eines Patches der gesuchten Oberfläche, wie im Bild 9.1 dargestellt, generiert.

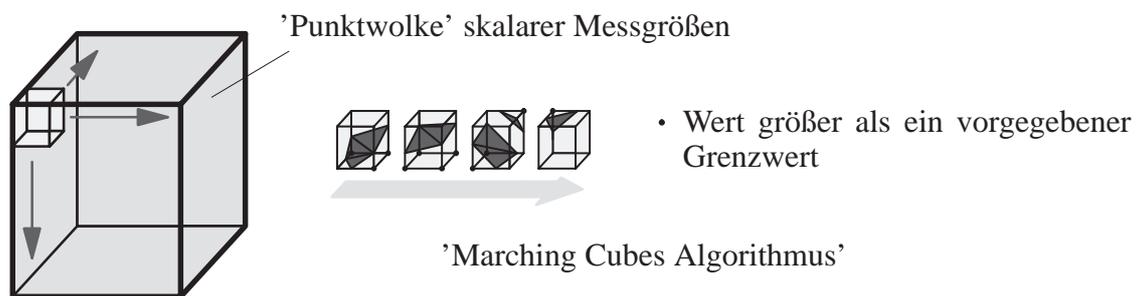


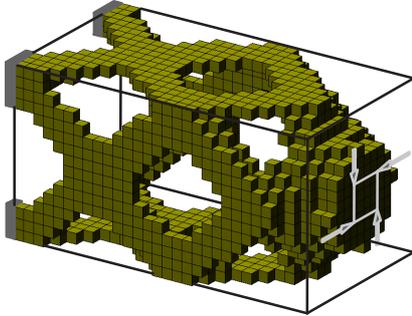
Bild 9.1: Triangulierung von Isoflächen in Punktwolken

Mit diesem Verfahren können aber auch die Ergebnisse der Topologieoptimierung aufbereitet werden. Dazu wurden in dieser Arbeit gemittelte Knotenwerte aus der konstanten Dichte der an einen Knoten angrenzenden Hexaeder-Elemente berechnet und eine Triangulierung mit der beschriebenen Methode bestimmt. Das Ergebnis einer Flächenrückführung mit dieser Methode ist in Bild 9.2 anhand des Beispiels aus Kapitel 3.3 dargestellt.

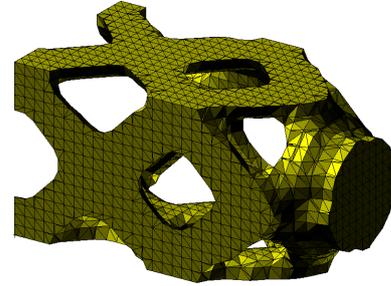
Aufgrund der relativ groben Triangulierung der Oberfläche und ihrer Abhängigkeit von der Diskretisierung wurden in einem zweiten Schritt sogenannte Subdivisionsalgorithmen für die Glättung eingesetzt. Klassifiziert werden diese Verfahren in Interpolations- und Approximationsmethoden. Bei den interpolierenden Algorithmen werden innerhalb eines Patches zwischen den Knoten des groben alten Netzes neue Punkte für das feinere und damit glattere neue Netz mit einer einfachen Vorschrift berechnet

$$\mathcal{P}^{n+1} = 0.5(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) + 0.05(\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4) + 0.025(\mathcal{P}_5 + \mathcal{P}_6 + \mathcal{P}_7 + \mathcal{P}_8) . \quad (10.43)$$

Der neue Punkt \mathcal{P}^{n+1} auf der Kante mit den Punkten \mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2 berechnet sich aus den gemittelten Koordinaten der umliegenden Punkte unter Berücksichtigung der Entfernung.



- Entwurfsraum mit Hexaeder-Elementen mit einer Dichte größer als 0.3



- Trinagulierte Oberfläche

Bild 9.2: Der 'Marching-Cubes-Algorithmus' in der 3D-Topologieoptimierung

Die Position der Punkte des groben Netzes werden unverändert in des neue Netz übernommen. Eine Grenzwertbetrachtung zeigt, dass die wiederholte Unterteilung nach diesem Schema auf eine c_1 -kontinuierliche Oberfläche führt. Die Abbildung in Bild 9.3 links zeigt die spezielle Form eines Patches und dessen neue Triangulierung nach dem Butterfly-Algorithmus. Der dick gezeichnete schwarze Punkt ist der gesuchte neue Punkt, die hell gezeichneten die unveränderlichen Punkte des groben Netzes.

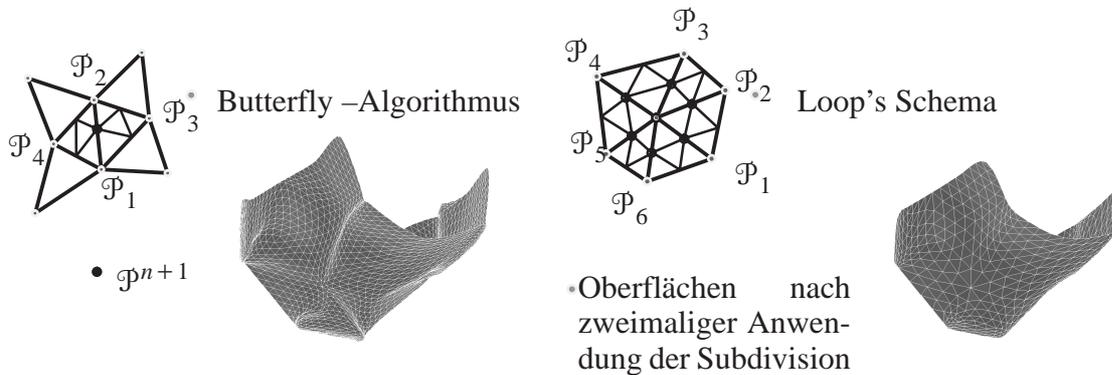


Bild 9.3: Interpolierende und approximierende Subdivisionsalgorithmen

Rechts im Bild 9.3 ist der Patch einer Approximationsmethode, dem Verfahren nach Loop (1987) und die erzeugte Triangulierung abgebildet. In dieser Approximationsmethode werden sowohl die Koordinaten der neuen Knoten (in der Abbildung rechts in Bild 9.3 schwarz gezeichnet),

$$\mathcal{P}_I^{n+1} = \frac{3}{8}(\mathcal{P}_m^n + \mathcal{P}_i^n) + \frac{1}{8}(\mathcal{P}_{i-1}^n + \mathcal{P}_{i+1}^n) \quad (10.44)$$

als auch die Positionen der alten Knoten als gewichtete Mittelwerte der Nachbarknoten innerhalb des Patches neu berechnet. \mathcal{P}_m bezeichnet den Punkt in der Mitte des Patches rechts in Bild 9.3.

$$\mathcal{P}_m^{n+1} = \left[1 - \sum_{k=1}^N w_k \right] \mathcal{P}_m^n + \sum_{i=1}^N w_i \mathcal{P}_i^n . \quad (10.45)$$

Für die Berechnung der Gewichte gibt Loop die Formel in Gleichung (10.46) an.

$$w = \frac{1}{N} \left[\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos 2 \frac{\pi}{N} \right)^2 \right] . \quad (10.46)$$

Die hellen Punkte sind Punkte auf dem originalen groben und auch auf dem neuen feineren Netz mit den nach Gleichung (10.45) Neuberechneten Koordinaten.

Die Wahl anderer Werte für die Gewichte wird zum Beispiel in Cirak et al. (2000) diskutiert, die den Loop-Algorithmus zur Interpolation des Verschiebungsfeldes in dünnen Schalenelementen einsetzen. Die Methode nach Loop erzeugt bei wiederholter Anwendung durch sukzessive Verfeinerung auf das jeweils neu erzeugte Netz eine c_2 -kontinuierliche Oberfläche. Die zweimalige Verfeinerung der Oberfläche eines kleinen Netzes in Bild 9.3 zeigt, dass die Anwendung der Interpolationsmethode schneller zu Dreiecken stark unterschiedlicher Größe führt, als die Anwendung der Approximationsmethode. Eine lokale Häufung sehr kleiner Dreiecke führt zu einem erhöhten numerischen Aufwand, die generierte Oberfläche wird insgesamt aber nicht als ausreichend glatt empfunden. Zudem können die einzelnen Knoten eines Dreiecks aufgrund der begrenzten Genauigkeit der Speicherung der Zahlen im Computer nicht mehr anhand ihrer Koordinaten unterschieden werden, was eine besondere Behandlung dieser Punkte erforderlich macht.

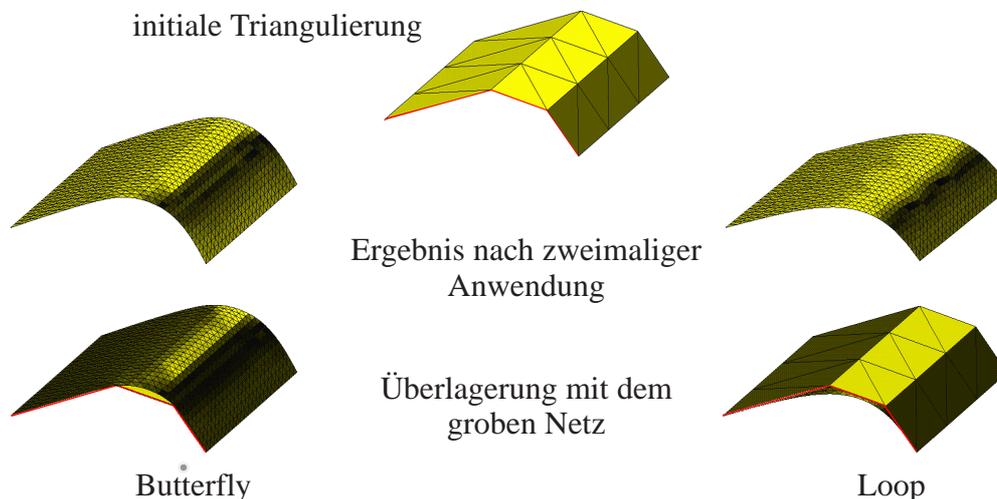


Bild 9.4: Einfluss der 'Subdivision' auf das Volumen unter einer geglätteten Schale

Bei der Anwendung der Approximationsmethoden geht einerseits Information aufgrund der Neuberechnung aller Knoten auf dem neuen feinen Netz verloren, andererseits werden aber Netze mit einer gleichmäßigeren Größenverteilung der Dreiecke auf dem neuen Netz erzielt. Die genannte Nachbehandlung wird weitestgehend vermieden. Bild 9.4 veranschaulicht zudem den

Einfluss auf das Volumen unter einer konvexen Schale durch Verfeinerung mit den beiden genannten Verfahren.

Im Hinblick auf eine bessere Darstellung der Optimierungsergebnisse mit dem Ziel einer leichteren Interpretierbarkeit ist deshalb der Approximationsmethode der Vorzug zu geben. Das Ergebnis einer zweimaligen Verfeinerung der mit dem Marching-Cube-Algorithmus triangulierten Dichteverteilung in Bild 9.2 ist in Bild 9.5 dargestellt. Zum Einsatz kam hier die Approximationsmethode nach Loop.

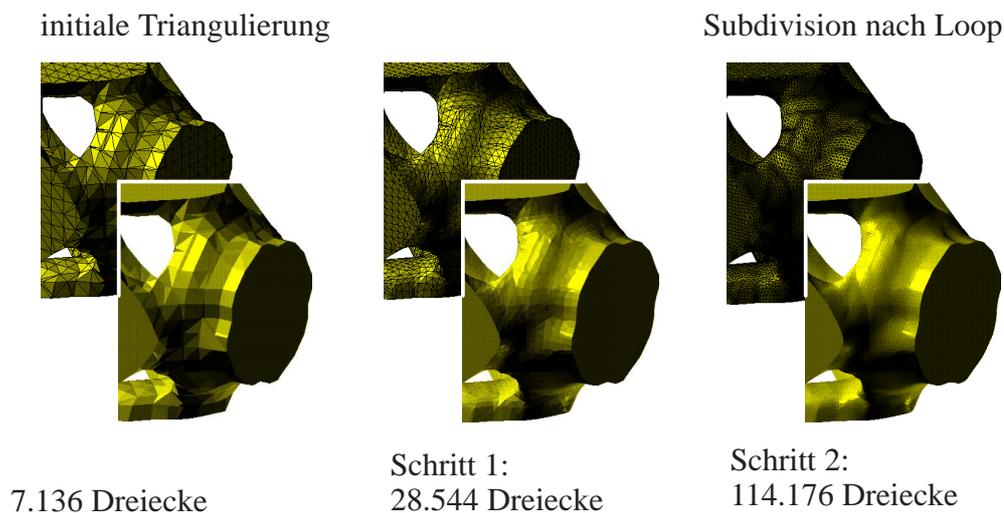


Bild 9.5: Glättung von Oberflächen in der 3D-Topologieoptimierung

Die hierarchische Repräsentation von Flächen mit unterschiedlichen Triangulierungen (Lee (1998)) durch die Kombination der vorgestellten Subdivisionsalgorithmen mit Algorithmen zur kontrollierten Erzeugung eines größeren Netzes eröffnet auch die Möglichkeit einer besonderen Art der Formoptimierung. Analog zur häufig angewendeten Variation von Kontrollknoten mathematischer Formfunktionen in der Formoptimierung ist die Kontrolle einiger weniger Knoten des größten Netzes innerhalb des hierarchischen Ansatzes für die Formoptimierung dreidimensionaler Strukturen denkbar. Die aufwendige Bestimmung dreidimensionaler mathematischer Formfunktionen kann so vermieden werden. Die Kombination mit der neuerdings in der Topologieoptimierung eingesetzten Levelset-Methode (Belytschko et al. (2003), Allaire et al. (2004)) zur Trennung zweier Phasen könnte zudem die schwierige Neuvernetzung der dreidimensionalen optimierten Struktur vermeiden.

Lebenslauf

Name: *Andreas Lipka*

Geburtsdatum: *25. Oktober 1971 in Magdeburg*

Eltern: *Bodo und Margarete Lipka, geb. Kytlic*

Familienstand: *verheiratet, zwei Kinder*

1978 – 1985 *Hubert–Materlik–Oberschule in Magdeburg*

1985 – 1991 *Besuch des Justinus–Kerner–Gymnasium in Heilbronn*

Juli 1991 *Abitur*

1991 – 1992 *15-monatiger Zivildienst in Heilbronn*

1992 – 1999 *Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart*

März 1999 *Abschluss als Diplom-Ingenieur*

März 1999 –
August 2006 *angestellt als wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart*

Oktober 2006 – *Entwicklungsingenieur ZF–Lenksysteme in Schwäbisch Gmünd*

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.

- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.

- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2002) D.P. Mok:**
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann**
Nichtlineare Versagensanalysen von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler**
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) G. D'Addetta**
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee**
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) T. Erhart**
Strategien zur numerischen Modellierung transientser Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.

- 45 (2005) M. Leukart**
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsma-
terialien.
- 46 (2006) F. Huber**
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontrag-
werken.



Universität Stuttgart

ISBN 978-3-00-020978-9

