

Kummer 1966

Beiträge zu den direkten Variationsver- fahren in der Elastostatik der Balken und Flächentragwerke

Von der Technischen Hochschule Stuttgart zur Erlangung der Würde
eines Doktor - Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Erwin Stein

geboren zu Altendiez/Lahn

13.09.2006



Hauptberichter:

Prof. Dr.- Ing. F. W. Bornscheuer

Mitberichter:

Prof. Dr. phil. Dr.- Ing. e.h. U. Wegner

Tag der Einreichung:

17. November 1964

Tag der mündlichen Prüfung:

19. Dezember 1964

1965

V o r w o r t

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Assistententätigkeit bei Herrn Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer am Lehrstuhl für Baustatik und Elastizitätslehre der Technischen Hochschule Stuttgart.

Herrn Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer möchte ich meinen aufrichtigen Dank für seine vielseitigen Anregungen und die stets fördernde Unterstützung meiner Studien und besonders dieser Arbeit aussprechen.

Herrn Prof. Dr. phil. Dr.-Ing. e.h. U. Wegner danke ich sehr für die Übernahme des Korreferats und viele wesentliche Hinweise auf mathematischem und elastizitätstheoretischem Gebiet.

Außerdem ist es mir eine besonders angenehme Pflicht, an dieser Stelle meinen verehrten Hochschullehrern an der Technischen Hochschule Darmstadt, den Herren Professoren Dr.-Ing. K. Karas, Dr.-Ing. Dr.-Ing. e.h. K. Klöppel, Dr.-Ing. A. Mehmel, Dr. phil. A. Walther zu danken.

Inhaltsverzeichnis
=====

	Seite
Schrifttum	8
1. Einleitung	13
2. Überblick über den heutigen Stand der Berechnungsverfahren bei Platten sowie dünnen und flachen Schalen nach der technischen Biegetheorie.	15
3. Die Darstellung der direkten Variationsverfahren am Biegebalken.	26
3.1 Das Dirichletsche Prinzip	26
3.2 Das Ritzsche Verfahren	31
3.3 Die Galerkinschen Gleichungen	43
3.4 Die Transformation von Friedrichs	48
3.5 Das Trefftzsche Verfahren für verschiedene Randbedingungen	49
3.6 Die Verallgemeinerung der direkten Variationsverfahren von Ritz und Trefftz	65
4. Die direkten Variationsverfahren in der Kirchhoffschen Plattentheorie.	67
4.1 Ausgangsgleichungen	67
4.2 Das Ritzsche Verfahren für μ - freie Ränder	68
4.3 Die Galerkinschen Gleichungen	69
4.4 Die Ansatzfunktionen der Galerkinschen Gleichungen für verschiedene Randbedingungen	70
4.5 Das Abspalten gewöhnlicher Differentialgleichungen nach Picone - Kantorowitsch - Krylow	76
4.6 Die Trefftzschen Gleichungen für verschiedene Randbedingungen	98
4.7 Die Ansatzfunktionen für die Trefftzschen Gleichungen	107

	Seite
5. Eine geschlossene Matritzendarstellung der Berechnung von in Querrichtung durchlaufenden Tonnenschalen mit Kämpferrandträgern, unter Verwendung des Kraftgrößenverfahrens.	108
5.1 Zur Berechnung der Tonnenschalen nach der technischen Biegetheorie	108
5.2 Geometrie und allgemeine Bezeichnungen der Schalenreihe	112
5.3 Organisation der Berechnung	113
5.4 Formelplan mit Erläuterungen	116
5.4.1 Die homogene Lösung einer unsymmetrischen Schale für das n - te Fourierglied	116
5.4.2 Aufstellen der Matrizen, die die Verformungen der Randträger an den Anschnittlinien mit den Schalen - infolge der statisch Überzähligen X_i - enthalten.	129
5.4.3 Die Gleichungsmatrix für die statisch überzähligen Randschnittgrößen	133
5.4.4 Die Verformungen von Schale und Randträger infolge äußerer Belastung (Partikularlösung)	135
5.4.5 Ermittlung der endgültigen Wirkungen (Schnittgrößen und Deformationen) durch Superposition aller Einflüsse	140
6. Die Berechnung einer in Richtung der Erzeugenden durchlaufenden Tonnenschale nach Picone - Kantorowitsch - Krylow.	144
6.1 Rechnungsgang und Ausgangsgleichungen	144
6.2 Die Darstellung des Verfahrens in Matrizen-schreibweise	148
6.3 Die Übergangsbedingungen von der Schale zum Randträger	154

	Seite
6.4 Die Transformation der Wirkungen von der Schale zum Randträger in der Anschnittlinie	155
6.5 Die Deformationen des Randträgers infolge der Randschnittgrößen der Schale und der eingepprägten Kräfte	162
6.6 Die näherungsweise Erfüllung der Übergangsbedingungen von der Schale zum Randträger mit Galerkinprozessen	164
6.7 Die Darstellung des gesamten Verfahrens für beliebig viele Ansatzfunktionen	172
7. Die Trefftzschen Gleichungen für Kreiszyinderschalen mit beliebigen Randbedingungen an den Kämpfern und Bindern.	175
7.1 Die Trefftzschen Gleichungen für den schwach gekrümmten Kreisbogenträger mit beliebigen Randbedingungen	175
7.2 Die Herleitung der Trefftzschen Gleichungen für schwach gekrümmte Kreiszyinderschalen durch Variation des elastischen Potentials	183
7.3 Die Herleitung der Trefftzschen Gleichungen für schwach gekrümmte Kreiszyinderschalen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte	192
7.4 Die 1 - te Trefftzsche Gleichung für die allseitig eingespannte Kreiszyinderschale	196
7.5 Die i -te Trefftzsche Gleichung für die allseitig unverschieblich und gelenkig gelagerte Kreiszyinderschale	198
7.6 Die i - te Trefftzsche Gleichung für freie Ränder z.B. Ausschnitte	198
7.7 Die Ansätze für das Trefftzsche Verfahren und Hinweise für die Durchführung	200
8. Zusammenfassung	202

S c h r i f t t u m

=====

- [1] Bornscheuer, F.W. u. E. Stein Die Elastizitätslehre im Schrifttum (Jahresübersicht).
VDI - Z. 103 (1961) Nr. 31, S. 1563/77
- [2] Wegner, U. u. H. Schwalbach: Elastizitätslehre (Jahresübersicht).
VDI - Z. 104 (1962) Nr. 30, S. 1573/77
- [3] Bornscheuer, F.W. u. E. Stein: Lineare Elastizitätslehre (Jahresübersicht).
VDI - Z. 105 (1963) Nr. 33, S. 1560/69
- [4] Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. 3. Auflage. Berlin, Göttingen, Heidelberg. Springer Verlag. 1962
- [5] Miesel, K.: Über die Festigkeit von Kreiszyklinderschalen mit nicht achsensymmetrischer Belastung.
Ing. Archiv 1 (1930) S. 22
- [6] Dischinger, F.: Die strenge Theorie der Kreiszyklinderschale in ihrer Anwendung auf die Zeiss - Dywidag - Schalen.
Beton und Eisen 34 (1935) S. 257/64 und 283/94.
- [7] Finsterwalder, U.: Die Theorie der zylindrischen Schalengewölbe System Zeiss - Dywidag und ihre Anwendung auf die Großmarkthalle Budapest.
IVBH 1932. S. 127/151
- [8] Rüdiger, D. u. J. Urban Kreiszyklinderschalen.
Leipzig: B.G. Teubner Verlagsgesellschaft 1955.
- [9] Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik.
Berlin: Akademie - Verlag 1958.

- [10] Lévy, M.: Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangulaire. Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences 1899. S. 535/40
- [11] Rabich, R. Die Statik der Schalenträger. Bauplanung und Bautechnik 9 (1955) S. 115/25, 162/67 und 10 (1956) S. 4/15
- [12] Aass, A. jr.: Matrix progression method. Eine Matrizenmethode zur Lösung komplizierter Aufgaben der Elastostatik. Der Bauingenieur 39 (1964) S. 306/11
- [13] Falk, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Ing. Archiv 24 (1956) S. 216/32
- [14] Tottenham, H.: Matrix progression technique in structural analysis. Zu: Proceedings of a Symposium "On the use of computers in civil engineering". Band 1,2 Lissabon: Laboratorio Nacional de Engenharia Civil 1962 Paper Nr. 58, S. 1/31
- [15] Wegner, U.: Zur Stabilität des mehrfeldrigen elastisch gestützten Stabes I. Luftfahrt - Forschung 19 (1942) S. 374/80
- [16] Apeland, K.: Stress analysis of translational shells. Proc. ASCE 87 EM 1 (1961) S. 111/39
- [17] Trefftz, E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. 2. Internat. Kongress für Techn. Mech. Zürich 1926 S. 131/37

- [18] Wegner, U.: Eine neue Methode zur approximativen Lösung von Spannungsproblemen bei Platten und Scheiben. Forschungshefte aus dem Gebiet des Stahlbaus. Heft 6 (1943) S. 183/89
- [19] Berger, E.R.: Ein Minimalprinzip zur Auflösung der Plattengleichung. Österr. Ing. Archiv 7 (1953) S. 39/49
- [20] Förster, W.: Biorthonormierte Funktionen zur Lösung allgemeiner Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie. Ing. Archiv 33 (1964) S. 162/72
- [21] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 2. Auflage Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag 1955
- [22] Weber, C.: Über genäherte Lösungen von Differentialgleichungen mit Hilfe von Minimalansätzen. ZAMM 21 (1941) S. 310/11
- [23] Biezeno, C.B. u. R. Grammel Technische Dynamik 2. Auflage. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag 1953
- [24] Courant, R. u. D. Hilbert Methoden der mathematischen Physik. Bd. 1,2 Berlin: Springer Verlag 1931
- [25] Kantorowitsch, L.W. u. W.I. Krylow Näherungsmethoden der höheren Analysis. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956
- [26] Michlin, S.G.: Variationsmethoden der höheren Analysis. Berlin: Akademie Verlag 1962
- [27] Tricomi, F.G.: Vorlesungen über Orthogonalreihen. Berlin: Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag 1955

- [28] Funk, P.: Variationsrechnung und ihre Anwendung in Physik und Technik. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer Verlag 1962.
- [29] Rüdiger, D.: Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie zweidimensionaler elastischer Kontinua. Ing. Archiv 29 (1960) S. 115/24
- [30] Günther, W.: Ein Iterationsverfahren zur gleichzeitigen Berechnung der Beanspruchungsgrößen und der Durchbiegung einer kreissymmetrischen Ringplatte. Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 4 (1952) S. 94/106
- [31] Picone, M.: Beitrag in einem italienischen Akkademiebericht vor 1920.
- [32] Willers, F.A.: Die erste Variation der Formänderungsarbeit ausgebeulter Platten. ZAMM 20 (1940) S. 118
- [33] Falk, S.: Das Verfahren von Rayleigh - Ritz mit Hermiteschen Interpolationspolynomen. ZAMM 43 (1963) S. 149/66
- [34] Fuchssteiner, W.: Über die Bildung der Koeffizienten bei der Entwicklung einer Funktion nach einem vorgeschriebenen Funktionensystem. ZAMM 35 (1955) S. 184/90

- [35] Zurmühl, R.: Matrizen 3. Auflage.
Berlin, Göttingen, Heidelberg:
Springer Verlag 1961
- [36] Gantmacher, F.R.: Matrizenrechnung, Bd. 1,2 Berlin:
Deutscher Verlag der Wissenschaften
1958
- [37] Chetty, S.M.K.: An investigation into linear ana-
lysis of hyperbolic paraboloid
shells. Diss. University of Sout-
hampton, Fac. of Engineering 1961
- [38] Stein, E. u. Die elektronische Berechnung
W. Riehle durchlaufender Rechteckplatten
mit veränderlicher Dicke für nicht-
stationäre Belastung.
Unveröffentlichte Arbeit

I. Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt allgemeine inhomogene Randwertprobleme von Balken, Platten und flachen Translationschalen unter statischer Belastung nach der technischen Biegetheorie.

Die Rechenverfahren werden für Platten und Kreiszyklinderschalen (mit dem Gaußschen Krümmungsmaß null) über rechteckigem Grundriß entwickelt. Bei den (positiv gekrümmten) elliptischen Paraboloiden und den (negativ gekrümmten) hyperbolischen Paraboloiden als Schalen mit Flächen zweiter Ordnung sind die Rechenabläufe völlig entsprechend denjenigen der Kreiszyklinderschale. Es können sich aber besondere numerische Schwierigkeiten ergeben, vor allem bei den negativ gekrümmten Schalen.

Es werden die von den Minimalprinzipien von Dirichlet und Friedrichs abgeleiteten direkten Variationsverfahren nach Ritz, Galerkin, Picone-Kantorowitsch-Krylow und Trefftz in einer für die Programmierung von Digitalrechenautomaten günstigen Matrizendarstellung verwendet. Dabei sind Betrachtungen über die Ansatzfunktionen und deren Vollständigkeit wichtig. Als Beispiele für homogene Randbedingungen werden eingespannte und gelenkig gelagerte Ränder untersucht. Inhomogene Randbedingungen werden anhand elastisch gestützter und durchlaufender Schalen betrachtet. Diese Bedingungen sind beliebig zu kombinieren. Beim Zusammensetzen einzelner Schalenfelder werden das Kraftgrößen-, Formänderungsgrößen- und Übertragungsverfahren herangezogen.

Die ausführliche analytische Darstellung der Variationsmethoden und deren statische Deutung wird der Einfachheit und Durchsichtigkeit wegen für den Biegebalken und den Kreisbogenträger und zum Aufzeigen der besonderen Probleme im Zweidimensionalen für die Platte (Kirchhoffsche

Theorie) durchgeführt.

Für die Biegetheorie der dünnen und flachen Schalen werden die durch viele Untersuchungen der letzten Jahre als folgerichtige erste Näherung erkannten beiden linearen partiellen Differentialgleichungen mit einer Spannungsfunktion ϕ und einer Verschiebungsfunktion w nach v. Karman, Reissner, Marguerre, Wlassow, oder die gleichwertigen drei linearen partiellen Differentialgleichungen für die Verschiebungsfunktionen u , v , w zugrunde gelegt. Bei der Kreiszylinderschale enthalten sie die Näherungen nach Donnell-Karman-Jenkins (DKJ-Näherungen). Hierüber wurde in [1][2][3] berichtet.

Die Randträger der Schalen müssen in einer der Genauigkeit der Schalentheorie adäquaten Weise behandelt werden. Meist genügt die Balkentheorie.

Die Lösungen werden in der klassischen mathematischen Schreibweise unter Benutzung üblicher Differentialoperatoren durchgeführt. Da das Grundgebiet rechteckig ist, werden kartesische Koordinaten und Zylinderkoordinaten benutzt.

2. Überblick über den heutigen Stand der Berechnungsverfahren bei Platten sowie dünnen und flachen Schalen nach der techn. Biegetheorie

Die "technische" Biegetheorie der dünnen und flachen Schalen ist entweder in drei linearen partiellen Differentialgleichungen für die Verschiebungen u, v, w der Schalenmittelfläche, zwei Differentialgleichungen für eine Spannungsfunktion Φ der Membrankräfte und die Verschiebungsfunktion w oder in einer Differentialgleichung für die übergeordnete Wlassowsche Spannungsfunktion Ψ darstellbar. Auch für eine komplexe Spannungsfunktion ist eine partielle Differentialgleichung möglich.

Die Mittelfläche einer dünnen und flachen Schale sei analytisch dargestellt in den krummlinigen orthogonalen Flächenkoordinaten α, β und dem Abstand z zur Grundrißebene x, y oder in einem geeignet gewählten kartesischen Achsensystem x, y, z .

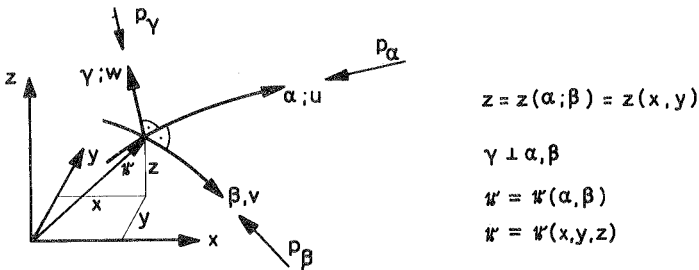


Bild 1

Koordinaten der Schalenmittelfläche

Die Belastung ist $p_\alpha, p_\beta, p_\gamma$ [kp/m^2] in Richtung der Achsen α, β, γ . Für Eigengewicht und Schnee wird oft $p_\alpha = p_\beta = 0$ gesetzt.

Mit $u = u(\alpha, \beta), v = v(\alpha, \beta), w = w(\alpha, \beta)$ und den linearen, partiellen Differentialoperatoren L_{ik} in α und β mit $L_{ik} = L_{ki}$, womit der Bettische Reziprozitätssatz gültig ist, lauten die Verschiebungsdifferentialgleichungen:

$$L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) = C \cdot p_{\alpha}$$

$$L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) = C \cdot p_{\beta} \quad (2.1-3)$$

$$L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) = C \cdot p_{\gamma}$$

Ist die Mittelfläche eine Fläche 2. Ordnung, so sind die Operatoren L_{ik} nicht ortsabhängig, die Differentialgleichungen haben konstante Koeffizienten.

Bei Anwendung der Variationsverfahren nach Galerkin und Picone - Kantorowitsch - Krylow geht man von diesen Gleichungen aus, weil die Verschiebungsfunktionen im Ritzansatz bestimmten Randbedingungen genügen müssen.

Die v. Karmanschen Gleichungen sind:

$$\nabla_K^2 \Phi - \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \nabla^4 w = -p_{\gamma} \quad (2.4)$$

$$\nabla^4 \Phi + Eh \nabla_K^2 w = 0 ; \quad \text{mit } p_{\alpha} = p_{\beta} = 0 \quad (2.5)$$

Die Operatoren sind:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} ; \quad \nabla_K^2 = \frac{1}{R_{\beta}} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{R_{\alpha}} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \quad (2.6,7)$$

- R_{α}, R_{β} : Hauptkrümmungsradien an der Stelle α, β
- E : Elastizitätsmodul
- h : Schalendicke
- μ : Querdehnzahl

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} = K: \text{ Plattensteifigkeit}$$

Die Dgl. (2.4) beschreibt das Gleichgewicht in Normalenrichtung.

$\nabla_K^2 \Phi$ ist die Summe der Komponenten der Membrankräfte in Normalenrichtung γ . Sie ergeben sich aus der allgemein doppelten Krümmung der Mittelfläche in Richtung α und β .

$K \cdot \nabla^4 w \equiv K \cdot \Delta \Delta w$ ist die Summe der Querkraftinkremente, also der homogene Teil der Kirchhoffschen Plattengleichung.

Die Gleichung (2.5) beinhaltet die Kompatibilität der Deformationen der Schalenmittelfläche. $\nabla^4 \phi = 0$ ist die Scheibengleichung.

Die Voraussetzung der euklidischen Verformungsgeometrie ist erfüllt, wenn gilt:

$$\frac{1}{R_\alpha} \approx \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} ; \quad \frac{1}{R_\beta} \approx \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Die x- und y- Richtungen werden hierfür in Richtung der Projektionen der Tangenten der α - und β -Koordinatenlinien angenommen.

Man erkennt die enge Verwandtschaft dieser Schalengleichungen mit den v. Karmanschen Gleichungen für die Platte mit großen Ausbiegungen. Dort ergeben sich die Gewölbekräfte infolge der Krümmung der elastisch ausgebogenen Fläche.

Mit Einführung der übergeordneten Spannungsfunktion Ψ gemäß

$$w = \nabla^4 \Psi ; \quad \phi = -Eh \nabla_K^2 \Psi \quad (2.8,9)$$

ergeben sich die Gleichungen (2. 4,5) zu:

$$K \nabla^8 \Psi + Eh \nabla_K^4 \Psi = p_y \quad (2.10)$$

Bei verschwindender Krümmung $R_\alpha = R_\beta \rightarrow \infty$ wird $\nabla_K = 0$, es bleibt die Plattengleichung

$$\nabla^4 w = - \frac{p_y}{K}$$

Reihenlösungen dieser Dgln. wurden zuerst für die Kreiszyinderschalen entwickelt. Aus den vollständigen Flüggeschen Verschiebungs - Dgln. [4] erhält man die Gleichungen (2.4,5) mit den Näherungen nach v. Karman, Donnell, Jenkins, die auch von Wlasow benutzt wurden. Die Lösung der Flüggeschen Dgln. wurde zuerst von Miesel [5] für Binderrandstörungen und von Dischinger [6] für Kämpferrandstörungen angegeben. Die Partikularlösung u_0 , v_0 , w_0 wird jeweils wie die Belastung p_x , p_y , p_z drei Doppel-

fourierreihen angesetzt. Für jedes Paar von Zählindizes der Reihen ergibt sich ein dreigliedriges lineares Gleichungssystem für die jeweiligen Fourierkoeffizienten der Verschiebungen. Es ist wichtig festzustellen, daß nur ein einziger Satz von Kombinationen trigonometrischer Funktionen unter Beachtung notwendiger Symmetrien möglich ist, d.h. das Herausheben der Funktionen und damit die algebraischen Gleichungen gestattet. Schon Finsterwalder [7] hatte aber erkannt, daß man anstatt der Partikularlösung in den baupraktisch wichtigen Fällen die Membranlösung verwenden darf. In [6] ist an Hand einer Lastaufteilung für Normalbelastungen eine sehr übersichtliche Abgrenzung der Anwendbarkeit der Membrantheorie in Abhängigkeit von Zylinderradius a , Länge l , Schalendicke h sowie Zählindizes m und n mit Hilfe von Kurventafeln gegeben. Mit Hilfe der von Rüdiger und Urban [8] entwickelten Partikularlösung (ausgehend von den Gleichungen (2. 4,5)) läßt sich für jedes Fourierglied der Belastung der Anteil bestimmen, der durch die Membranlösung abgetragen wird. Auch für alle anderen nicht negativ gekrümmten Schalen mit stetig gekrümmter Mittelfläche, stetiger Stützung und Belastung ist die Membrantheorie anstelle der Partikularlösung der Biegetheorie anwendbar. Bei negativ gekrümmten Schalen können singuläre Lösungen auftreten, so daß die Partikularlösung erforderlich wird. Für negativ gekrümmte Flächen 2.Ordnung erhält man als Differentialgleichung der Membrantheorie die Wellengleichung. Wlassow hat in [9] S.91 ff die Lösungen diskutiert.

Die Biegetheorie wird herangezogen, um die mit der Membrantheorie (oder auch Partikularlösung) nicht erfüllbaren Randbedingungen zu befriedigen, also die Biegerandstörungen zu beschreiben. Hierzu sind nur die homogenen Dgl. erforderlich, wie aus den Überlagerungssätzen linearer Dgl. hervorgeht.

Der klassische Lösungsansatz zur Entkopplung homogener linearer partieller Differentialgleichungen- sowohl für die Schalen als auch für Platten- ist nach Maurice Levy benannt [10]. Levy benutzte ihn für die Platte. Er ist ein spezieller Bernoullischer Produkt-

ansatz mit einer trigonometrischen Funktion in einer Veränderlichen. Für die homogene Plattengleichung

$$\Delta \Delta w_1 = 0 \quad (2.11)$$

ist es die Einfachreihenlösung

$$w_1 = \sum_n \sin \frac{n\pi}{a} x \cdot Y_n(y), \quad (2.12)$$

wenn die Rechteckplatte in x-Richtung bei $x = 0$ und $x = a$ gelenkig gelagert ist. Auch mit hyperbolischen Funktionen $\sinh \frac{n\pi}{a} x$ oder $\cosh \frac{n\pi}{a} x$ gelingt die Entkopplung. Ein allgemeiner Produktansatz der Form $w_1 = X(x) Y(y)$ ist wegen der gemischten Ableitung in $\Delta \Delta w$ nicht möglich. Mit dem Levy - Ansatz gelangt man bei der Platte zu der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{d^4 Y_n(y)}{dy^4} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{a^2} \frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} + \frac{n^4 \pi^4}{a^4} Y_n(y) = 0 \quad (2.13)$$

für jeden Zählindex n .

Mit dem Ansatz

$$Y_n(y) = e^{\rho y} \quad (2.14)$$

ergibt sich aus Gl.(2.13) ein Polynom 4. Grades, die charakteristische Gleichung, die stets 4 Wurzeln, hier die Doppelwurzeln

$$\rho_{1;2} = + \frac{n \cdot \pi}{a} \quad ; \quad \rho_{3;4} = - \frac{n \cdot \pi}{a} \quad \text{hat.}$$

Nach den erwähnten Überlagerungssätzen, dem Superpositionsgesetz der Elastostatik, ergibt sich die vollständige homogene Lösung aus dem Funktionalsystem zu:

$$Y_n(y) = C_1 e^{\frac{n\pi}{a} y} + C_2 y e^{\frac{n\pi}{a} y} + C_3 e^{-\frac{n\pi}{a} y} + C_4 y e^{-\frac{n\pi}{a} y} \quad (2.15)$$

Die 4 Integrationskonstanten der partiellen Dgl.4.Ordnung gestatten die Erfüllung von 4 Randbedingungen in y-Richtung, an jedem Rand zwei, was durch Einführung der Ersatzquerkräfte nach Kirchhoff zu einer eindeutigen Lösung führt. Entscheidend ist, daß durch den Levy-Ansatz die Randbedingungen in x-Richtung schon festgelegt sind, die homogene Lösung also grundsätzlich nur die Erfüllung beliebiger Randbedingungen in einer, hier der y-Richtung gestattet.

Analoges gilt für die Schalen. Bei der Kreiszyinderschale z.B. ergeben sich zwei Möglichkeiten für die homogene Lösung, sei es in den Verschiebungsfunktionen u_1 , v_1 , w_1 oder in der Spannungsfunktion Φ_1 und w_1 oder in Ψ_1 . Man kann einmal den trigonometrischen Ansatz in Richtung der Erzeugenden machen [6] [7]. Dann entkoppeln sich die partiellen Dgl. in ein gewöhnliches Dgl.- System 8. Ordnung (oder eine Dgl. 8. Ordnung), mit der 8 beliebige Rand- oder Übergangsbedingungen an den Kämpferrändern erfüllt werden können, an jedem Rand 4 entweder nur geometrische, nur statische oder gemischte. Die Querrichtung ist demnach als eindimensionales Problem zu behandeln. Besonders bei Schalen empfiehlt sich das Kraftgrößenverfahren der Stabstatik anstelle der direkten Formulierung der Übergangsbedingungen von der Schale zum Randglied oder zur nächsten Schale. Mit Hilfe von Randwerttabellen für die Einheitslastfälle an den Schnittufern lassen sich die statisch Überzähligen, als die die Integrationskonstanten deutbar sind, berechnen. Diese Methode ist z.B. in [8] und [11] verfolgt. Auch die Übertragungsmethode oder matrix progression method ist geeignet. Sie wurde von Aass in [12] dargestellt und baut auf Arbeiten von Falk [13] und Tottenham [14] sowie Wegner [15] auf.

Schließlich ist das Formänderungsgrößenverfahren zuweilen von Vorteil. Alle dies Methoden kommen auch bei den Zwangsentkoppelungen der direkten Variationsverfahren in Frage und werden in dieser Arbeit angewandt.

Bei der Tonnenschale sind also die Binderrandbedingungen nicht etwa von der Konstruktion her gegeben, sondern sie sind durch den trigonometrischen Lösungsansatz festgelegt. Es sind die Bedingungen eines frei aufliegenden Trägers mit einer Binderscheibe, die in sich völlig starr ist und senkrecht dazu keinerlei Steifigkeit hat. Randschubkräfte sind vorhanden. Die Partikularlösung enthält dieselben Bedingungen. Dieses Berechnungsmodell ist bei Einfeldschalen praktisch annähernd ausführbar. Teilweise Ein-

spannungen sind aber oft nicht vermeidbar, vor allem bei Binder-
rahmen von Shedschalen. In Richtung der Erzeugenden durchlaufen-
de Tonnenschalen kann man mit dem Levy - Ansatz nicht erfassen.

Die zweite Möglichkeit besteht in der Berechnung der Binderrand-
störungen des geschlossenen Rohres, bei dem die trigonometrischen
Funktionen in Ringrichtung angesetzt werden [5]. Das gewöhnliche
Dgl.- System gestattet die Erfüllung von 2 mal 4 Binderrandbe-
dingungen, z.B. für den Behälter auf Einzelstützen.

Beim elliptischen Paraboloid liegen die Verhältnisse ähnlich.
Für die Richtung, in der die trigonometrischen Funktionen ange-
setzt werden, gelten die Randbedingungen von frei drehbaren,
festen Lagern, die Randschubkräfte sind nicht null. In der an-
deren Richtung sind beliebige Randbedingungen erfüllbar. Eine
nach allen Richtungen durchlaufende, also an allen Rändern ein-
gespannte Schale ist nicht erfaßbar.

Die negativ gekrümmte hyperbolische Paraboloidschale über recht-
eckigem Grundriß mit geraden Rändern enthält in den zur Entkopp-
lung möglichen trigonometrischen Funktionen Randbedingungen, die
konstruktiv nicht verwirklicht sind, denn die Randschubkräfte
sollen null sein. Diese tragen aber in der Membranlösung die ge-
samte Last ab. Die von Apeland und Popov in [16] entwickelten
Randwerttabellen sind deshalb in ihrem praktischen Wert begrenzt.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind bei den Kreis-
zylinderschalen stets konjugiert komplex. Damit hat die homogene
Lösung der Tonnenschale die mathematische Form von 2 mal 4 ge-
dämpften Schwingungen, die von den beiden Kämpferrändern ins In-
nere der Schale abklingen. Da die Querkräfte q_{φ} und damit die
Biegemomente m_{φ} die wesentliche Aufgabe der Lastumlagerung haben,
sind sie über die gesamte Schale vorhanden. Bei der hyperbolischen
Paraboloidschale sind die Wurzeln der charakteristischen Gleichung
teils reell, teils konjugiert komplex, so daß die Randstörungen
teilweise die Form gedämpfter Schwingungen und teilweise die Form
reeller $e^{\lambda y}$ - Funktionen haben. Hier ist das Abklingverhalten je
nach den Randbedingungen unterschiedlich. Bei den positiv gekrümm-
ten elliptischen Paraboloiden ist das Abklingverhalten durchweg

sehr gut.

Aus den beschriebenen mathematischen und physikalischen Gegebenheiten besteht die Aufgabe der numerischen Analysis nun darin, die Biege- und Randstörungen für beliebige, auch inhomogene Randbedingungen an allen vier Rändern zu berechnen. Man unterscheidet die folgenden Näherungsmethoden:

Variationsmethoden:

Hierzu gehören vor allem die direkten Variationsmethoden. Die vom Energieprinzip abgeleiteten Verfahren gliedern sich wie folgt:

1. Von Minimalprinzipien hergeleitete Verfahren.
 - 1.1 Das Ritzsche Verfahren als direkte Methode des Dirichlet'schen Prinzips oder Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie.
 - 1.2 Das Trefftz'sche Verfahren als direkte Methode des Prinzips von Castigliano und Friedrichs oder Prinzips vom Maximum der Ergänzungsarbeit oder Minimum der Formänderungsarbeit, ausgedrückt in den Spannungen oder Schnittgrößen.
2. Vom Prinzip der virtuellen Arbeiten hergeleitete Verfahren.
 - 2.1 Die Galerkin'sche Methode, die von den Dgl'n. ausgehend das Prinzip der virtuellen Verschiebungen benutzt.

Spezielle Methode zu 2.1:

- 2.1a Die Methode von Picone - Kantorowitsch - Krylow der näherungsweise Reduktion partieller Dgl'n. in gewöhnliche Dgl'n. Diese Methode nimmt den Galerkin - Prozeß nur in einer Veränderlichen vor, geht also von einem Ansatz mit einer Parameterfunktion aus.
3. Beliebige weitere Variationsmethoden im Sinne von Ritz und Trefftz, bei denen durch Änderung der Bedingungen an die Ansatzfunktionen entsprechende Bedingungsgleichungen für Entwicklungskoeffizienten auftreten. Damit ergeben sich gemischte Näherungsmethoden für die Dgl'n. und Randbedingungen. Das System aller Möglichkeiten ergibt sich aus den kanonischen Gleichungen des Variationsproblems.

Die Methode 2.1a wird in den Kapiteln 4 und 6 benutzt. Es ist günstig, das entstehende gewöhnliche Dgl.- System in ein System von Dgln. 1. Ordnung zu transformieren. Damit muß das vorliegende Randwertproblem durch wiederholte Lösung eines Anfangswertproblems (Übertragungsmethode) erfaßt werden. Bei vielen Übertragungen können sich aber schleichende Rangabfälle einstellen, so daß zwischendurch die ein - oder mehrmalige Anwendung des Formänderungsgrößenverfahrens von Vorteil ist.

In der vorliegenden Arbeit ist in Kapitel 5 gezeigt, daß auch das Kraftgrößenverfahren bei entsprechender Matrixschreibweise für die Rechenautomaten geeignet ist. Ein besonderes Problem stellen inhomogene Randbedingungen in beiden Koordinatenrichtungen dar. Für eine Richtung wählt man günstig zunächst geometrische starre Randbedingungen und benutzt dann die Deformationsmethode zur Berechnung des wirklichen Zustandes. Dabei sind zusätzliche Galerkinschritte erforderlich. Dies wird in Kapitel 6 untersucht.

Die der Ritzschen und Galerkinschen Gebietsmethode entsprechende Randmethode ist die nach Trefftz [17] benannte direkte Variationsmethode mit Ansätzen, die die homogenen Dgln. erfüllen. Für die eingespannte Platte hat Wegner [18] erstmals die Trefftzschen Gleichungen angegeben. Für allgemeine Plattenprobleme wurden die Gleichungen von Berger [19] angegeben. Wegner führt aus, daß die Methoden von Ritz und Galerkin gegenüber der Trefftzschen Methode folgende Nachteile haben:

1. Schwierigkeiten bei der Bestimmung der Ansatzfunktionen für schwierige Randbedingungen, z.B. für beliebig begrenzte Ränder und inhomogene Randbedingungen.
2. Schwierigkeiten, die analytische Gestalt der Funktionen einfach zu halten, Symmetrien darzustellen und nicht vorhandene Symmetrien zu vermeiden.
3. Die Fortführung der Ansätze im Hinblick auf die Vollständigkeit.

Bei dem Trefftzschen Verfahren treten diese Probleme für reguläre Lösungen nicht auf. Hier sei auf eine Arbeit von Förster [20] hingewiesen. Außerdem werden weit schärfere Bedingungen für die höheren Ableitungen erfüllt als beim Ritzschen Verfahren.

Zu den Näherungsverfahren gehören weiterhin die Methode des Fehlerquadratminimums als Gebietsmethode für die Dgl., die unbekannte Funktion oder eine besondere Ableitung, ferner die Kollokationsmethode, die Methode der Problemumkehr nach Biezeno - Koch und andere.

Einleitend für die vorliegende Arbeit werden die Energiemethoden kurz besprochen.

Die Galerkinsche Methode ist in der Handhabung oft angenehmer als die Ritzsche. Beide Methoden haben aber bei zweidimensionalen Problemen den Nachteil langsamer Konvergenz, da die Ritzkonstanten eine zweifach unendliche Vielfalt besitzen. Liegen inhomogene Randbedingungen vor, z.B. eine Durchlaufwirkung, so kann man die erforderlichen Singularitäten entweder sofort im Ansatz unterbringen oder man rechnet die Aufgabe mit homogenen Randbedingungen und schließt das Kraft - oder Formänderungsgrößenverfahren zur Herstellung von Verträglichkeit oder Gleichgewicht an.

Als sehr geeignet hat sich das Verfahren nach Picone - Kantorowitsch - Krylow für rechteckige Grundgebiete erwiesen. Durch die näherungsweise Zurückführung der partiellen Dgl(n). in ein gewöhnliches Dgl.-System sind erheblich weniger Ansatzfunktionen erforderlich als beim zweidimensionalen Galerkinverfahren. Außerdem sind mit der homogenen Lösung des totalen Dgl.- Systems beliebige inhomogene Randbedingungen in der betreffenden Richtung erfüllbar, z.B. der Anschluß von Randträgern. Hierzu sind wegen der fehlenden Affinität der Verformungen am Anschnitt von Schale und Randträger (diese gilt nur für trigonometrische Funktionen) zusätzliche Galerkinschritte erforderlich, um die Kontinuität näherungsweise herzustellen.

Einschränkend ist festzustellen, daß bei den Verfahren nach Ritz, Galerkin und Picone - Kantorowitsch - Krylow die Dgln. des äquivalenten Variationsproblems selbst adjungiert sein müssen, dann gilt der Betti - Maxwellsche Satz. Beim Ritzschen Verfahren müssen die äußeren Kräfte außerdem konserva-

tiv sein, dann existiert ein Potential der äußeren Kräfte. Demgegenüber bestehen diese Bedingungen bei dem Trefftz'schen Verfahren nicht, denn es wird ein dem vorliegenden Randwertproblem äquivalentes Variationsproblem für die Randbedingung formuliert.

Es läßt sich sagen, daß bei weitem noch nicht alle Möglichkeiten der Energiemethoden ausgeschöpft sind. Mit gemischten oder verallgemeinerten direkten Variationsverfahren und deren für Rechenautomaten günstigen Formulierung lassen sich viele ungelöste Randstörungsprobleme einfacher darstellen.

Der Vollständigkeit wegen soll die andere große Gruppe von Näherungsmethoden ohne Erläuterung angeführt werden.

Differenzen - und Elementmethoden

1. Differenzenverfahren verschiedener Genauigkeit
 - 1.a Mehrstellenverfahren
2. Trägerrostmethoden
3. Elementmethoden

Außerdem sind noch finite Integralgleichungsmethoden zu nennen, die mechanisch als Lastaufteilungsverfahren zu deuten sind.

3. Die Darstellung der direkten Variationsverfahren am Biegebalken

3.1. Das Dirichletsche Prinzip

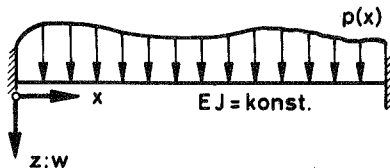


Bild 2

Eingespannter Balken mit stetiger Belastung $p(x)$

Differentialgleichungen des Biegebalkens:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = w'''' = \frac{p}{EJ} \quad (3.1) \quad M'' = -p ; \quad w'' = -\frac{M}{EJ} \quad (3.1)$$

Das Dirichletsche Prinzip oder Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie besagt: In einem konservativen System herrscht dann und nur dann stabiles Gleichgewicht, wenn die potentielle Energie ein Minimum ist.

In der Elastostatik werden die äußeren Kräfte linear von Null bis zum Endwert aufgebracht. Die Formänderungsarbeit infolge Biegung lautet:

$$A_i = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^l M \, d\varphi = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^l M \frac{M}{EJ} \, dx = -\frac{1}{2} EJ \int_{x=0}^l (w'')^2 \, dx \quad (3.2)$$

Das Potential der inneren Kräfte ist:

$$\Pi_i = -A_i = \frac{1}{2} EJ \int_{x=0}^l (w'')^2 \, dx \quad (3.3)$$

Die äußere Arbeit ist:

$$A_a = \frac{1}{2} \int_{x=0}^l p \, w \, dx \quad (3.4)$$

Das Potential der äußeren Kräfte ist gleich der negativen Endwertarbeit.

$$\Pi_a = -2 A_a = -\int_{x=0}^l p \, w \, dx \quad (3.5)$$

Das Prinzip fordert:

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \frac{1}{2} EJ \int_{x=0}^l (w'')^2 dx - \int_{x=0}^l p w dx = \text{Min} \quad (3.6)$$

Mathematisch liegt ein gewöhnliches Variationsproblem vor. Die "Extremale" $w(x)$ wird unter extremalen Bedingungen für das bestimmte Integral Π gesucht. Außerdem muß die Biegelinie den durch die Lagerung festgelegten Randbedingungen genügen. Diese sind beim beidseitig eingespannten Balken rein geometrisch, nämlich:

$w = w' = 0$ für $x = 0 ; l$. Das vorliegende Variationsproblem hat die allgemeine Form:

$$\Pi = \int_0^l F(x, w, w', w'') dx = \text{Min} \quad (3.7)$$

Bei Voraussetzung der Existenz einer analytischen Lösung $y(x)$ geschieht die Lösung nach Euler und Lagrange durch Einführung der zulässigen Vergleichsfunktion oder variierten Funktion.

$$\bar{w}(x) = w(x) + \epsilon \omega(x) ; \quad \epsilon \omega(x) = \delta w \quad (3.8)$$

Sie ist eine spezielle (lineare) Parameterfunktion mit dem beliebigen Parameter ϵ . Die willkürliche Funktion $\omega(x)$ hat außer den Randbedingungen dieselben Stetigkeitsforderungen zu erfüllen wie die Extremale $w(x)$. Diese ist mit $\epsilon = 0$ in $\bar{w}(x)$ eingebettet.

$$\Pi(\epsilon) = \int_0^l F(x, w + \epsilon \omega, w' + \epsilon \omega', w'' + \epsilon \omega'') dx \quad (3.9)$$

Die Bedingung $\Pi = \text{stationär}$ wird erfüllt mit:

$$\left(\frac{d \Pi(\epsilon)}{d \epsilon} \right)_{\epsilon=0} = 0 \quad \text{oder} \quad \delta \Pi = \left(\frac{d J(\epsilon)}{d \epsilon} \right)_{\epsilon=0} \cdot \epsilon = 0 \quad (3.10)$$

Die erste Variation von Π muß null sein. Π ist ein Minimum, wenn die 2. Variation positiv ist. Dies ist im stabilen Gleichgewicht konservativer Systeme der Elastostatik gesichert, weil das Potential der inneren Kräfte als positiv definite quadratische Form darstellbar ist.

Die Ausführung von Gl. (3.10) ergibt:

$$\left(\frac{d\pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_0^l \frac{\partial F}{\partial w} \omega dx + \int_0^l \frac{\partial F}{\partial w'} \omega' dx + \int_0^l \frac{\partial F}{\partial w''} \omega'' dx \quad (3.11)$$

Teilintegration des zweiten Terms in Gl. (3.11) liefert:

$$\int_0^l \frac{\partial F}{\partial w'} \omega' dx = \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial w'} \omega\right]_{x=0}^{x=l}}_0 - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) \omega dx$$

Teilintegration des dritten Terms in Gl. (3.11) liefert:

$$\int_0^l \frac{\partial F}{\partial w''} \omega'' dx = \underbrace{\left[\frac{\partial F}{\partial w''} \omega'\right]_{x=0}^{x=l}}_0 - \underbrace{\left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) \omega\right]_{x=0}^{x=l}}_0 + \int_0^l \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) \omega dx \quad (3.12)$$

$$\left(\frac{d\pi(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_0^l \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) \right] \omega dx = 0 \quad (3.13)$$

Nach dem 1. Fundamentalsatz der Variationsrechnung kann

Gl. (3.13) wegen der Willkür von ω nur erfüllt sein, wenn gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) = 0 \quad (3.14)$$

Dies ist die Euler - Lagrangesche Dgl. des Variationsproblems.

Mit $F = \frac{1}{2} EJ(w'')^2 - pw$ ergibt sich (3.15)

$$\frac{\partial F}{\partial w} = -p \quad ; \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial w''}\right) = (EJw'')'' = EJw'''' \quad \text{für } EJ = \text{konst.} \quad (3.16)$$

Damit erhält man aus Gl. (3.14) die Dgl. des Biegebalkens:

$$w'''' = \frac{p}{EJ} \quad (3.17) \text{ identisch} \quad (3.1)$$

Eine notwendige Bedingung für die Erfüllung des Extremalprinzips ist, daß die Biegelinie w eine Lösung der Dgl. (3.17) ist. Jedoch ist nicht jede Lösung der Euler - Lagrangeschen Dgl. auch eine Lösungsfunktion des Variationsproblems.

Bei gelenkig gelagerten Balken mit $M = 0$ für $x = 0; l$ wird der erste Randterm in Gl. (3.12) auch null, weil nach Gl. (3.15) und (3.1) gilt:

$$\frac{\partial F}{\partial w''} = EJw'' = -M \quad (3.18)$$

Von der statischen Anschauung her läßt sich das Prinzip und seine analytische Behandlung wie folgt beschreiben und deuten. Der Ausgang aller Betrachtungen ist der Energiesatz. Er besagt, daß in einem konservativen System der Elastostatik das Potential der inneren Kräfte gleich der Arbeit der äußeren oder eingepprägten Kräfte ist.

$$\Pi_i = A_a ; \quad \Pi_i = \frac{1}{2} EJ \int_0^l (w'')^2 dx ; \quad A_a = \frac{1}{2} \int p w dx \quad (3.19)$$

oder, da $\Pi_i = -A_i$ ist,

$$A_a + A_i = 0 \quad (3.20)$$

Dieser Satz beinhaltet ein Naturprinzip, das im Satz von der Erhaltung der Energie verankert ist. Der Energiesatz enthält die mathematisch wichtige Aussage der Existenz eines Potentials Π_i der inneren Kräfte und damit eines totalen Differentials $d\Pi_i$, also die Wegunabhängigkeit des Integrals $\int d\Pi_i$ über beliebige Zwischenzustände.

Nach dem Dirichletschen Prinzip werden kompatible Verformungszustände verglichen, aus denen derjenige mit dem kleinsten Potential zu finden ist. Das Potential ist also als Funktion der Verschiebungen zu schreiben, das Gleichgewicht ist noch nicht formuliert. Demnach muß im Potential das Moment M mit Hilfe des Elastizitätsgesetzes $M = -EJw''$ durch die Verschiebung w ausgedrückt werden. Von den drei Aussagen, die zur Bestimmung der Schnittgrößen und Verschiebungen eines elastischen Systems gemacht werden können, sind damit zwei benutzt, nämlich

1. Das Hookesche Werkstoffgesetz als lineare Verknüpfung der Spannungen und Dehnungen:

$$\sigma_x = E \cdot \epsilon_x$$

2. Die Beziehungen zwischen Verzerrungen und Ver-

schiebungen oder die geometrische Gleichung $\epsilon_x(x; z) = \frac{\partial u(x; z)}{\partial x}$.

Mit der Bernoulli-Hypothese $u(x; z) = -z \cdot w'(x)$ ergibt sich

$$\epsilon_x(x; z) = -z w''(x)$$

Die dritte Aussage, in der Statik meist die erste, nämlich die Gleichgewichtsbedingung(en) wird nicht benutzt. Anstelle des Gleichgewichts wird das Energieminimum gefordert. Da die Theorie logisch eindeutig und widerspruchsfrei ist, ergibt sich gerade, daß unter allen auf Grund der beiden ersten Aussagen möglichen Verformungen diejenige die Extremalbedingung erfüllt, die auch den Gleichgewichtsbedingungen genügt. Dies ist der Inhalt der Eulerschen Differentialgleichung.

Der Vorgang des Variierens ist die analytische Anwendung einer der wichtigsten Methoden beim physikalischen Experiment, des Störprinzips. Das System wird aus der Extremallage ausgelenkt, um zu erkennen, ob für alle geometrisch möglichen, also vertäglichen und denkbaren Variationen- das sind die virtuellen Verschiebungen δw - Energie zugeführt werden muß. Dabei bleibt die Belastung konstant. Das Extremum liegt vor für $\delta \Pi = 0$. Das Zeichen δ ist Symbol und Operator zugleich. Es kennzeichnet den virtuellen Charakter der untersuchten Funktion oder des Integrals über diese Funktion und ihre Ableitungen und ist zugleich Differentialoperator, also auch durch den Operator d ersetzbar.

Mit diesen Überlegungen läßt sich das Variationsproblem ohne Einführung des Eulerschen Parameteransatzes lösen.

Wenn nur virtuelle Verschiebungen zugelassen werden, kann die äußere Last während dieser Verschiebungen konstant gehalten werden. Dann hat die virtuelle Verschiebung δw den Energiezuwachs $\delta \Pi$ zur Folge.

$$\delta \Pi = \delta \Pi_i + \delta \Pi_a = \delta \left(\frac{EJ}{2} \int_{x=0}^l (w'')^2 dx \right) - \int_{x=0}^l p \cdot \delta w \cdot dx \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{EJ}{2} \int_0^l (w'')^2 dx \right) &= \frac{EJ}{2} \int_0^l \delta (w'')^2 dx \\ &= \frac{EJ}{2} \int_0^l \frac{\partial (w'')^2}{\partial w''} \delta w'' dx \\ &= EJ \int_0^l w'' \delta w'' dx \end{aligned} \quad (3.22)$$

Teilintegration liefert:

$$EJ \int_0^l w'' \delta w'' dx = EJ \left[\underbrace{w'' \delta w' - w''' \delta w}_0 \right]_0^l + EJ \int_0^l w'''' \delta w dx \quad (3.23)$$

0 nach Voraussetzung

Die Forderung $\delta \Pi = 0$ ergibt:

$$\delta \Pi = 0 = \int_0^l (EJ \cdot w'''' - p) \delta w \cdot dx \quad (3.24)$$

Dies ist nur möglich für

$$EJ w'''' - p = 0 \quad (3.25)$$

Das Energieprinzip liefert also dieselbe Aussage wie die direkte Formulierung des Gleichgewichts. Es kann aber darüber hinaus über die Art des Gleichgewichts Aufschluß geben.

3.2. Das Ritzsche Verfahren

Das Ritzsche Verfahren ist eine Methode der Analysis zur näherungsweise Berechnung eines Variationsproblems. In der Elastostatik wird unmittelbar das Dirichletsche Prinzip benutzt. Der Grundgedanke besteht darin, für die gesuchte Extremale w einen n -parametrischen Näherungsansatz \bar{w} zu machen:

$$\bar{w}(x) = \sum_{v=1}^n c_v \cdot w_v(x) \quad (3.26)$$

Die c_v sind völlig freie Konstanten. Die $w_v(x)$ sind zulässige Funktionen, die also nur die geometrischen Randbedingungen und die Stetigkeit der Funktion und ihrer Ableitung erfüllen müssen. Sie brauchen nicht das Gleichgewicht zu erfüllen, also auch nicht die inhomogene oder

homogene Balkendifferentialgleichung (3.25).

Nach Einsetzen von \bar{w} in das Potential $\bar{\Pi}$

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} EJ \int_0^l (\bar{w}''')^2 dx - \int_0^l p \bar{w} dx \quad (3.27)$$

sind alle Integrationen ausführbar, $\bar{\Pi}$ ist nur noch eine Funktion der Ritzkonstanten c_v

$$\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(c_1, c_2, \dots, c_v, \dots, c_n) \quad (3.28)$$

Fordert man $\bar{\Pi} = \text{Min}$, so erkennt man den entscheidenden Gewinn des Ritzansatzes: Er führt das Variationsproblem in ein gewöhnliches Extremalproblem zurück. Die c_v sind die unabhängigen Variablen von $\bar{\Pi}$. $\bar{\Pi} = \text{Extr.}$ wird erfüllt für die n Bedingungen:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_v} = 0 \quad ; \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (3.29)$$

$\bar{\Pi}_i$ ist eine quadratische Form, weil w'' quadratisch vorkommt. Beim partiellen Differenzieren entstehen also n lineare inhomogene Gleichungen, die Bestimmungsgleichungen für die c_v .

Durchführung:

Zunächst wird Gleichung (3.26) in Gleichung (3.27) eingesetzt.

$$\bar{\Pi} = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left(\sum_{v=1}^n c_v w_v'' \right)^2 dx - \int_0^l p \cdot \sum_{v=1}^n c_v w_v \cdot dx \quad (3.30)$$

Die s -te Bedingungsgleichung für die c_v lautet:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_s} = 0 = EJ \int_0^l \bar{w}'' \cdot w_s'' \cdot dx - \int_0^l p \cdot w_s \cdot dx \quad (3.31)$$

Es wird ein relatives Minimum von $\bar{\Pi}$ mit $\bar{\Pi} \cong \Pi$ erreicht, wenn die w_v eine Minimalfolge bilden und jedes w_v eine zulässige Funktion ist, d.h. die geometrischen Randbedingungen und die Stetigkeit von w_v und w_v' erfüllt sind.

Die Fehlerfunktion $\bar{w} - w$ hat einen zusätzlichen Zwang und damit einen Betrag $\bar{\Pi} - \Pi$ zur Folge. Für spezielle Klassen von Funktionen kann die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge gegen die wahre Lösung, die auch der Differentialgleichung und den Randbedingungen genügt, nachgewiesen werden. Ebenso konvergiert die gliedweise differenzierte Funktionenfolge gegen die entsprechende Ableitung der wahren Lösung.

Die Bedingungen an die w_V sollen nun untersucht werden.

Die Randbedingungen für die w_V

Der erste Term von Gleichung (3.31) wird zweimal partiell integriert. Dabei wird \bar{w}'' differenziert.

$$0 = EJ \left\{ \left[\bar{w}'' w_S' \right]_{x=0}^{x=l} - \left[\bar{w}''' w_S \right]_{x=0}^l + \int_{x=0}^l \bar{w}'''' w_S dx \right\} - \int_0^l p w_S dx \quad (3.32)$$

$$0 = \int_{x=0}^l (EJ \bar{w}'''' - p) w_S dx + EJ \left[\bar{w}'' w_S' - \bar{w}''' w_S \right]_{x=0}^{x=l} \quad (3.33)$$

Faßt man die Differenz

$$EJ \bar{w}'''' - p = p^* \quad (3.34)$$

als Fehlerbelastung p^* oder Fehler der DGL. (3.25) auf und führt die Schnittgrößen \bar{M} und \bar{Q} ein:

$$\bar{M} = -EJ \bar{w}'' \quad (3.35)$$

$$\bar{Q} = -EJ \bar{w}''' \quad (3.36)$$

so ist die s-te Bedingungsgleichung (3.33) für $\bar{\Pi} = \text{stat.}$ als Arbeitsgleichung anzusprechen.

$$0 = \int_{x=0}^l p^* w_S dx + \left[\bar{Q} w_S \right]_{x=0}^{x=l} - \left[\bar{M} w_S' \right]_{x=0}^{x=l} \quad (3.37)$$

Aus den Gleichungen (3.33) oder (3.37) sind die Randbedingungen, die jedes w_V einzeln erfüllen muß, zu erkennen.

Hierzu betrachten wir verschiedene Lagerungen.

1. Der beidseitig eingespannte Balken

Er hat die rein geometrischen Randbedingungen

$$[w]_{x=0}^{x=l} = [w']_{x=0}^{x=l} = 0.$$

Da im allgemeinen $[\bar{Q}]_{x=0}^{x=l} \neq 0$ und $[\bar{M}]_{x=0}^{x=l} \neq 0$ ist, können die beiden Randterme in Gleichung (3.33) wegen der Willkür der w_V nur dann null werden, wenn gilt:

$$w_S = w'_S = 0 \quad \text{für } x = 0; l$$

Mit $\int_0^l p^* w_S dx = 0$ wird die Fehlerfunktion p^* im Balkenbereich zur Gewichtsfunktion w_S orthogonal gemacht.

Die Ritzkonstanten c_V werden so bestimmt, daß insgesamt n gewogene Mittel von p^* null werden.

Eine anschauliche mechanische Deutung läßt die Arbeitsgleichung (3.37) durch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen zu. Faßt man die w_V als virtuelle Verschiebungen auf, so wird die Fehlerbelastung p^* mit den zugehörigen Lagerreaktionen als eine Gleichgewichtsgruppe bestimmt. Dies wird bei der Galerkinschen Methode näher verfolgt.

Weiterhin interessiert, ob und für welche Funktion eine Approximation im Mittel erreicht wird. Diese ist so definiert, daß das mittlere Fehlerquadrat der betreffenden Funktion im betrachteten Integrationsbereich möglichst klein sein soll. Der absolut kleinste Fehler wird erreicht, wenn die Entwicklungskoeffizienten c_V des Funktionensystems Fourierkoeffizienten sind.

Wie Collatz in [21], S. 206 zeigt, wird beim Ritzschen Verfahren das Fehlerquadrat der zweiten Ableitung der Durchbiegung, also der elastischen Krümmung zum Minimum gemacht, siehe auch [22].

Setzt man in Gleichung (3.27) für p die exakte Lösung w gemäß Dgl. (3.25) ein, so erhält man:

$$\bar{\Pi} = EJ \int_0^l \left[\frac{1}{2} (\bar{w}''')^2 - w'''' \bar{w} \right] dx \quad (3.38)$$

Zweimalige Teilintegration des zweiten Terms ergibt mit

$$M = -EJ w'' \quad (3.39) \quad \text{und} \quad Q = -EJ w''' \quad (3.40)$$

$$\bar{\Pi} = EJ \int_0^l \left[\frac{1}{2} (\bar{w}''')^2 - w'' \bar{w}'' \right] dx + [Q\bar{w}]_0^l - [M\bar{w}']_0^l \quad (3.41)$$

Durch Addieren und Subtrahieren von $\frac{EJ}{2} \int_0^l (w'')^2 dx$ und unter Beachtung von $\bar{w} = \bar{w}' = 0$ für $x = 0; l$ erhält man:

$$\bar{\Pi} = \frac{EJ}{2} \int_0^l (\bar{w}'' - w'')^2 dx - \frac{EJ}{2} \int_0^l (w'')^2 dx \quad (3.42)$$

Der zweite Term in Gleichung (3.42) ist eine Konstante. Das Näherungspotential unterscheidet sich im Funktionsanteil, also dem ersten Term, nicht vom Fehlerquadrat der Biegemomente oder der 2. Ableitungen von w , nämlich:

$$J(w'') = \int_0^l (\bar{w}'' - w'')^2 dx = \text{Min} \quad (3.43)$$

Da die Biegemomente das Hauptziel der Berechnung sind, arbeitet das Ritzsche Verfahren sehr günstig.

Bei der Fehlerquadratmethode für die Differentialgleichung lautet die Variationsaufgabe:

$$J(w''''') = \int_0^l (EJ \bar{w}'''' - p)^2 dx = (EJ)^2 \int_0^l (\bar{w}'''' - w''''')^2 dx = \text{Min} \quad (3.44)$$

Ausgehend von Gleichung (3.41) oder Gleichung (3.43) lassen sich auch die Randbedingungen für die w_v leicht erkennen. Mit dem Ansatz (3.26) ergibt sich die s -te Minimalbedingung zu:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_s} = 0 = EJ \int_0^l (\bar{w}'' \cdot w_s'' - w'' \cdot w_s'') dx + [Q \cdot w_s]_0^l - [M \cdot w_s']_0^l$$

Mit Einführung der exakten Schnittgrößen gemäß Gleichung (3.39) und (3.40):

$$0 = \int_0^l \underbrace{(M - \bar{M})}_{M^*} w_s'' dx + [Q \cdot w_s]_0^l - [M \cdot w_s']_0^l \quad (3.45)$$

Die Randterme können bei eingespannten Rändern nur verschwinden, wenn gilt:

$$w_s = w_s' = 0 \quad \text{für} \quad x = 0; l$$

Das Nullwerden des Integrals bedeutet, daß die Fehlermomente M^* zu den Krümmungen der s -ten Ansatzfunktion w_s'' orthogonal gemacht werden oder daß die Arbeit der Fehlermomente längs der elastischen Krümmungen w_s'' null ist.

2. Der beidseitig gelenkig gelagerte Balken

Die gemischt geometrisch-statischen Randbedingungen sind:

$$w = M = 0 \quad \text{für } x = 0; l$$

Aus Gleichung (3.37) folgt, daß wieder $w_s = 0$ für $x = 0; l$ erfüllt sein muß. Wichtig ist aber, daß w_s'' in den Randtermen nicht auftritt, sondern die zweite Ableitung der Gesamtlösung in der Form

$$\bar{M} = -EJ \bar{w}'' - EJ \sum_{v=1}^n c_v \cdot w_v''.$$

Selbstverständlich ist $[\bar{M} \cdot w_s']_{x=0}^{x=l} = 0$, wenn gilt:

$$w_v'' = 0 \quad \text{für } x = 0; l$$

Diese Bedingungen sind aber für das Ritzsche Verfahren nicht notwendig. Gleichung (3.37) lautet jetzt:

$$0 = \int_0^l p^* w_s dx - [\bar{M} w_s']_{x=0}^{x=l} \quad \text{mit } w_s' \neq 0 \quad \text{für } x = 0; l \quad (3.46)$$

Die w_v sind eine Minimalfolge, wenn gilt:

$$\bar{\Pi}(n+1) < \bar{\Pi}(n) \quad \text{mit } \bar{w}(n) = \sum_{v=1}^n c_v \cdot w_v$$

Damit wird auch die Fehlerbelastung p^* im Mittel über den Integrationsbereich kleiner, so daß gilt:

$$\left| \int_0^l p^*(n+1) \bar{w} dx \right| < \left| \int_0^l p^*(n) \bar{w} dx \right| \quad (3.47)$$

Die Arbeit der Fehlerbelastung wird mit wachsendem n kleiner. Dies ist erfüllt, obwohl die c_v nicht nach Gleichung (3.44) bestimmt werden. Dann muß auch $\bar{M}(n+1) < \bar{M}(n)$ für $x = 0; l$ werden, damit Gleichung (3.46) erfüllt wird. Viel einfacher geht aus Gleichung (3.45) hervor, daß die w_v'' keine Randbedingungen erfüllen müssen. Der Randterm $[M \cdot w_s']_0^l$ wird null, weil für das exakte Moment M gilt: $M = 0$ für $x = 0; l$

3. Der Kragträger

Die Randbedingungen sind $w = w' = 0$ für $x = 0$ und $M = Q = 0$ für $x = l$.

Aus Gleichung (3.45) erkennt man, daß mit den geometrischen Randbedingungen $w_s = w_s' = 0$ für $x = 0$, die Randterme verschwinden

und damit die Fehler der zweiten Ableitungen minimalisiert werden.

4. Inhomogene Randbedingungen

Z.B. links eingespannter, rechts mit einer Verschiebung und einer Drehfeder gestützter Stab. Die Federkonstanten sind:

$$\epsilon_V \left[\frac{\text{cm}}{\text{kp}} \right] \quad \text{und} \quad \epsilon_D \left[\frac{1}{\text{kp cm}} \right]$$

Die Randbedingungen lauten:

$$x = 0: \quad w = w' = 0 \quad \text{und damit } w_s = w'_s = 0$$

$$x = l: \quad w = -\epsilon_V Q \quad ; \quad w' = \epsilon_D M \quad \text{und damit auch}$$

$$\bar{w} = -\epsilon_V \bar{Q} \quad ; \quad \bar{w}' = \epsilon_D \bar{M}$$

Damit ergeben sich $n + 2$ Bestimmungsgleichungen für die c_V , sowie \bar{Q} und \bar{M} an der Stelle $x = l$, nämlich n Gleichungen

$$0 = \int_{x=0}^l p^* w_s dx + (\bar{Q} w_s)_{x=l} - (\bar{M} w'_s)_{x=l}, \quad \text{siehe Gleichung (3.37).}$$

sowie:

$$(\bar{w} = -\epsilon_V \bar{Q})_{x=l} \quad \text{und} \quad (\bar{w}' = +\epsilon_D \bar{M})_{x=l} \quad (3.48)$$

Zusammenfassend ergibt sich:

Die Ansatzfunktionen w_V müssen beim Ritzschen Verfahren einzeln die geometrischen Randbedingungen erfüllen, nicht die statischen oder im allgemeinen Fall die dynamischen (Bezeichnung nach Grammel [23]). Bei einer allgemeinen Ordnung $2 \cdot m$ der Differentialgleichung bezeichnet Collatz [21] die Bedingungen an die Ansatzfunktionen bis zur Ableitung $m-1$ als wesentliche.

Die Ansatzfunktionen, die die wesentlichen Randbedingungen erfüllen, werden von Collatz zulässige Funktionen genannt, sie müssen außer-

dem m -mal stetig differenzierbar sein. Dagegen werden Funktionen, die alle Randbedingungen bis zur Ordnung $2m-1$ erfüllen und $2m$ -mal stetig differenzierbar sind, Vergleichsfunktionen genannt.

Vergleichsfunktionen, die auch die homogene Differentialgleichung erfüllen, sind Eigenfunktionen des Problems.

Zur Frage der Konvergenz und Vollständigkeit des Funktionensystems der $w_1, w_2, \dots, w_v, \dots, w_n$.

Es ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen die Funktionsfolge

$$\bar{w}_1 = c_1 \cdot w_1 ; \bar{w}_2 = \sum_{v=1}^2 c_v \cdot w_v ; \dots ; \bar{w}_n = \sum_{v=1}^n c_v \cdot w_v$$

eine Minimalfolge ist, d.h. wann gilt: $\bar{\Pi}(\bar{w}_n) < \bar{\Pi}(\bar{w}_{n+1})$ (3.49)

$$\text{und: } \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\Pi}(\bar{w}_n) = \bar{\Pi}(w) \quad (3.50)$$

also wann die Folge der Integrale $\bar{\Pi}(\bar{w}_n)$ gegen das gesuchte minimale Potential $\bar{\Pi}$ strebt, das zur exakten Lösung w gehört.

Weiterhin interessiert, unter welchen Voraussetzungen die Minimalfolge gegen die wahre Lösung gleichmäßig konvergiert.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{w}_n = w \quad (3.51)$$

Hinreichend für Gleichung (3.50) ist, daß die w_v ein relativ vollständiges Funktionensystem bilden.

Dieses liegt im Falle von

$$\bar{\Pi} = \int_0^1 F(x, w, w'') dx$$

vor, wenn eine beliebige zulässige Funktion $y(x)$ einschließlich $y''(x)$ durch die Schar der w_v beliebig genau approximiert wird.

Es muß gelten:

$$|\bar{w}_n - y| < \epsilon ; |\bar{w}_n'' - y''| < \epsilon \quad (3.52)$$

wobei n eine natürliche Zahl und ϵ jede positive Zahl sein kann.

Es muß also auch eine Funktion w^* , die $\bar{\Pi} = \text{Min.}$ bedingt, gemäß Gleichung (3.52) darstellbar sein. Nach Gleichung (3.52) soll gelten:

$$|w_n - w^*| < \epsilon ; |w_n'' - w^{*''}| < \epsilon \quad (3.53)$$

Dann wird auch $F(x, \bar{w}_n, \bar{w}_n'') - F(x, w^*, w^{*''}) dx$

positiv und die Differenz

$$\bar{\Pi} - \Pi = \int_0^l F(x, \bar{w}_n, \bar{w}_n'') dx - \int_0^l F(x, w^*, w^{*''}) dx < \epsilon_1 \quad (3.54)$$

d.h. kleiner als eine beliebige positive Zahl.

Das ist aber gerade die Aussage des Dirichletschen Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie. Damit ist die Forderung der Gleichung (3.52) bestätigt.

Die Frage ist, ob w^* mit der exakten Lösung w identisch ist, d.h. ob jetzt auch Gleichung (3.51) gilt. Sie ist außerordentlich schwierig.

Bei der Behandlung eines Variationsproblems stellen sich grundsätzlich die folgenden 4 Fragen:

1. Hat das Variationsproblem eine Lösung?
2. Ist diese Lösung identisch mit der aus der Euler - Larrange-schen Dgl. sich ergebenden Lösung?
3. Konvergiert eine Folge von Funktionen eines vollständigen Funktionensystems gegen die vorhandene wahre Lösung, wenn die Funktionenfolge ein Extremum (Minimum) des Variations-integrals bringt?
4. Existieren die gliedweisen Ableitungen der Extremalfunktionen, streben sie auch gegen die vorhandenen wahren Ableitungen und konvergieren sie?

Diese Fragen sind mit zunehmender Schwierigkeit nur für den Einzelfall zu beantworten.

Hier sei auf die Arbeiten von Courant - Hilbert in [24], Kantorowitsch - Krylow in [25] und von Michlin in [26] hingewiesen.

Die Frage der Vollständigkeit der Ansatzfunktionen ist von großer Bedeutung, da bei Nichterfüllung auch bei Berücksichtigung vieler Glieder (z.B. im Falle der Benutzung von Rechenautomaten) die

Näherungen nach Ritz sehr stark vom wirklichen Ergebnis abweichen können. Weiterhin sind die Betragszeichen in Gleichung (3.53) zu beachten. An den einzelnen Stellen x kann die Differenz $\bar{w}_n - w^*$ sowohl positiv als auch negativ sein. Das Ritzsche Verfahren gibt nur für das Potential und den kleinsten Eigenwert die obere Schranke, nicht für die gesuchte Funktion und deren Ableitungen selbst.

Zur Wahl der Ansatzfunktionen

Damit eine schnelle Konvergenz eintritt, wird man möglichst die Ansatzfunktionen als Vergleichsfunktionen wählen, die ja alle Randbedingungen erfüllen.

Um vollständige Funktionensysteme zu haben, muß man zunächst deren lineare Unabhängigkeit fordern. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die lineare Abhängigkeit der w_ν ist das Verschwinden der Gramschen Determinante, siehe Courant - Hilbert [24], S. 52. Der Satz ist umkehrbar. Jedes linear unabhängige Funktionensystem ist aber im betrachteten Integrationsbereich durch eine lineare Transformation in ein orthonormiertes überführbar, siehe z.B. bei Tricomi [26] S. 8. Dann gilt auch, daß ein orthogonales Funktionensystem stets linear unabhängig ist. Für die bekannteste Orthogonalreihe, die Fourierreihe, gilt die wichtige Besselsche Ungleichung:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 \cong \int_0^1 [f(x)]^2 dx \quad (3.55)$$

Sie besagt, daß ein orthonormiertes Funktionensystem dann am besten eine gegebene Funktion $f(x)$ im Mittel approximiert, wenn die Entwicklungskoeffizienten c_ν Fourierkoeffizienten sind. Diese Approximation und damit Gleichung (3.55) ergibt sich aus der Forderung, daß das mittlere Fehlerquadrat

$$\int_0^1 \left(f - \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \Psi_\nu \right)^2 dx$$

möglichst klein sein soll. Die Ψ_ν sind orthonormierte Funktionen

Tritt in Gleichung (3.55) das Gleichheitszeichen, so liegt die Vollständigkeitsrelation oder Parsevalsche Gleichung vor. Sie charakterisiert die vollständigen normierten Orthogonalsysteme. Die Fourierreihen und bekannte orthogonale Polynome erfüllen diese Bedingung. Sie konvergieren im Mittel gegen die gesuchte Funktion.

Ein nicht orthonormiertes abzählbares System von Funktionen w_v ist vollständig im Intervall 0 bis 1, wenn es für jede positive Zahl ϵ endlich viele Konstanten c_v gibt, damit gilt:

$$\int_0^1 \left(f(x) - \sum_{v=1}^n c_v w_v \right)^2 dx < \epsilon \quad (3.56)$$

Am einfachsten ist also der Vollständigkeitsrechnung zu tragen, wenn man als Ansatzfunktionen ein orthonormiertes System nimmt. Die Fourierreihen und gängigen Orthogonalpolynome erfüllen aber oft nicht die vorliegenden Randbedingungen. Man müsste also ein System linear unabhängiger Funktionen, die den gewünschten Randbedingungen genügen, orthogonalisieren. Dieser Aufwand lohnt sich aber nicht, da -außer bei den Fourierreihen- die Ableitungen des orthogonalisierten Systems nicht mehr orthogonal sind. Im Potential treten die 2. Ableitungen auf. Bilden sowohl die Ansatzfunktionen als auch deren 2. Ableitungen Orthogonalsysteme, so gelangt man beim Ritzschen Verfahren zu einem völlig orthogonalisierten Gleichungssystem für die Entwicklungskoeffizienten. Beim Übergang von w_n zu w_{n+1} bleiben alle Koeffizienten c_v ($v = 1$ bis n) unverändert, es ist nur der neue Koeffizient c_{v+1} zu bestimmen. Sind nur die Funktionen w_v orthogonal, nicht die w_v'' , so ändern sich beim Schritt von n zu $n+1$ sämtliche Entwicklungskoeffizienten c_v , weil das Gleichungssystem für die c_v voll besetzt ist. Die mittlere Approximation der zweiten Ableitungen beim Ritzschen Verfahren ist nur bei Abänderung aller Koeffizienten möglich.

Von den nicht orthogonalisierten Systemen nimmt man zweckmäßig Polynome mit normierten Veränderlichen, damit die Integrationen einfach sind. Von besonderer Nützlichkeit ist hier der Weierstraßsche Approximationssatz, nach dem die Potenzen $1, x, x^2, x^3, \dots$ in einem abgeschlossenen Intervall, z.B. $0 \leq x \leq 1$, ein vollstän-

diges Funktionensystem bilden, durch das eine stetige Funktion gleichmäßig approximiert wird. Dieser Satz läßt sich noch erweitern, daß auch die stetigen Ableitungen der vorgelegten Funktion durch die Ableitungen der Polynome gleichmäßig approximiert werden, was für die Biegemomente wichtig ist. Bemerkenswert ist, daß im Gegensatz zu den trigonometrischen Funktionen die gewöhnlichen Potenzen nicht orthogonal sind. Durch ihre Orthogonalisierung entstehen die Polynome von Legendre, z.B. im Bereich $-1 \leq x \leq +1$. Durch Hinzunahme von Belegungsfunktionen erhält man die weiteren orthogonalen Polynome. Ausgehend von den Legendreschen Polynomen lassen sich die Vollständigkeit und die verschärften Konvergenzeigenschaften leicht beweisen.

Beispiele für die Ansatzfunktionen finden sich in den Abschnitten über Platten und Schalen. Wichtig ist, daß man Singularitäten - wie das Stützmoment eines Durchlaufträgers - im Ansatz vorsieht, sofern man nicht getrennte Felder betrachtet.

3.3 Die Galerkinschen Gleichungen

Das Verfahren von Galerkin verfolgt das Ziel, mit einem n-parametrischen speziellen Ritzansatz die Differentialgleichung(en) des Problems im betrachteten Bereich im Mittel möglichst gut zu erfüllen. Es ist also eine Gebietsmethode.

Für die DGl. $EJ w'''' = -p$ (3.25)

wird der Näherungsansatz

$$\bar{w}_n = \bar{w} = \sum_{v=1}^n c_v \cdot w_v(x) \quad (3.57)$$

gewählt. Die w_v sollen Vergleichsfunktionen sein, d.h. alle geometrischen und statischen Randbedingungen erfüllen. Die Entwicklungskoeffizienten c_v werden aus den n linearen Gleichungen

$$\int_0^l \frac{(EJ \bar{w}'''' - p) w_s}{p^*} dx = 0 ; \quad s=1,2,\dots,n \quad (3.58)$$

bestimmt.

Es handelt sich also auch um ein Integralverfahren. Der Unterschied und Hauptvorzug gegenüber dem Ritzschen Verfahren besteht darin, daß kein Zusammenhang zwischen Randwert- und Variationsproblem benutzt wird, also keine Minimalaussage gemacht wird. Damit können die Galerkinschen Gleichungen auch dann angewandt werden, wenn die Kräfte nicht konservativ sind und damit kein Potential der äußeren Kräfte existiert. Der Rechenaufwand für das Ritzsche und Galerkinsche Verfahren ist etwa gleich, wenn man nach Ritz von der Gleichung (3.31) ausgeht.

Deutungen der Galerkinschen Gleichungen

Die Fehlerfunktion p^* der Differentialgleichung wird im Balkenbereich orthogonal zu den Gewichtsfunktionen w_v gemacht. Die Entwicklungskonstanten c_v werden so gewählt, daß insgesamt n gewogene Mittel der Fehlerfunktion p^* null werden. Die Differentialgleichung wird offenbar nicht im Mittel approximiert, denn durch Differenzieren des Integrals der Fehlerquadrate der Differentialgleichung Gleichung (3.44) entsteht die s-te Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial J(w''''')}{\partial c_s} = 2 \int_0^l \underbrace{(EJ \bar{w}'''' - p)}_{p^*} w_s'''' dx = 0 \quad (3.59)$$

die wegen der 4. Ableitung von w_s nicht mit Gleichung (3.58) übereinstimmt.

Durch zweimalige partielle Integration von Gleichung (3.58) sieht man, daß die Galerkinschen Gleichungen wie die Ritzschen das Integral der Fehlerquadrate der zweiten Ableitungen zum Minimum machen also die zweiten Ableitungen im Mittel approximieren.

$$\begin{aligned} \int_0^l (EJ \bar{w}'''' - p) w_s dx &= \int_0^l EJ (\bar{w}'''' - w''''') w_s dx \\ \int_0^l EJ (\bar{w}'''' - w''''') w_s dx &= [EJ (\bar{w}'''' - w''''') w_s]_0^l - [EJ (\bar{w}'' - w''') w_s']_0^l + \\ &\quad + \int_0^l EJ (\bar{w}'' - w''') w_s'' dx \end{aligned}$$

Damit:

$$\begin{aligned} \int_0^l (EJ \bar{w}'''' - p) w_s dx &= -[(\bar{Q} - Q) w_s]_0^l + [(\bar{M} - M) w_s']_0^l + \\ &\quad + \int_0^l EJ (\bar{w}'' - w''') w_s'' dx = 0 \end{aligned} \quad (3.60)$$

Werden die Randterme identisch null, so lautet die s-te Bedingungsgleichung:

$$\int_0^l EJ (\bar{w}'' - w''') w_s'' dx = \int_0^l \underbrace{(\bar{M} - M)}_{M^*} w_s'' dx = 0 \quad (3.61)$$

Die linke Seite ist gleich der partiellen Ableitung des Integrals der Fehlerquadrate $J(EJ w'')$ nach c_s .

$$J(EJ w'') = \int_0^l (EJ \bar{w}'' - EJ w'')^2 dx = \text{Min} \quad (3.43 a)$$

Das Verschwinden der Randterme in Gleichung (3.60) erfordert die Erfüllung aller Randbedingungen, der geometrischen und statischen. Die Ansatzfunktionen w_v müssen Vergleichsfunktionen sein.

Durch Vergleich von Gleichung (3.60) mit Gleichung (3.45) erkennt man den Grund für die unterschiedlichen Bedingungen an die c_v bei Galerkin und Ritz. In Gleichung (3.60) kommen

$$\bar{M} = -EJ \bar{w}'' \quad \text{und} \quad \bar{Q} = -EJ \bar{w}'''$$

vor, in Gleichung 3.45) nicht.

Bei gleichen Vergleichsfunktionen w_v liefern demnach die Verfahren nach Ritz und Galerkin gleiche Ergebnisse.

Man könnte mit dem n -parametrischen Ritzansatz, in dem die w_v Vergleichsfunktionen sind, auch eine Kollokation innerhalb des Balkens durchführen, also die Differentialgleichung an n diskreten z.B. gleichabständigen Punkten erfüllen. Das ergibt n Bedingungengleichungen für die c_v . Damit ergeben sich n Nullstellen für die Fehlerbelastung p^* , um die p^* oszilliert. Da p^* bei der Stetigkeit aller anderen Funktionen stetig sein muß, werden die Beträge $|\max p^*|$ mit wachsenden n im allgemeinen kleiner.

$$|\max p_n^*| > |\max p_{n+1}^*|$$

Hierfür gibt es aber Ausnahmen, z.B. bei den Interpolationspolynomen für die \arctan -Funktion. C. Runge wies hierfür nach, daß sich Schläuche zwischen den Nullstellen bilden. Stärkeres Oszillieren bedeutet im allgemeinen kleinere absolute Fehler. Man kann nachweisen, daß nach den Galerkinschen Gleichungen ebenso viele Nullstellen für p^* auftreten wie bei der Kollokation. Der Nachteil dieses Verfahrens besteht aber darin, daß über die 2. Ableitungen keine Aussagen gemacht wurden. Hier zeigt sich der Vorteil der Integralverfahren gegenüber der Kollokation.

Mechanisch lassen sich die Galerkinschen Gleichungen unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen, der allgemeinsten Gleichgewichtsaussage, gewinnen. Von hier aus ist auch der allgemeinere Anwendungsbereich gegenüber der Ritzschen Methode zu erkennen. Die Ansatzfunktionen w_v werden als virtuelle Verschiebungen aufgefaßt.

Mit der Forderung des Prinzips

$$\delta A = \int_0^l p^* w_s dx = 0 \quad (3.62)$$

wird die Fehlerbelastung p^* mit den zugehörigen Randschnittgrößen (Lagerkräfte) zu einer Gleichgewichtsgruppe. Auch das Oszillieren von p^* ist von hier aus zu erklären.

Die direkte Herleitung der Galerkinschen Gleichungen aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Die Deformationen werden variiert. Dabei wirken die Schnittgrößen und äußeren Lasten in voller Größe.

$$\delta A = 0 = + \int_0^l \bar{M} \delta w'' dx + \int_0^l p \delta w dx$$

Mit dem Ansatz

$$\bar{w} = \sum_{v=1}^n c_v w_v; \quad \bar{M} = -EJ \sum_{v=1}^n c_v w_v''$$

ist

$$\delta \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial c_s} c_s = w_s \cdot c_s \quad ; \quad \delta \bar{w}'' = \frac{\partial \bar{w}''}{\partial c_s} c_s = w_s'' \cdot c_s$$

$$\delta \bar{A} = 0 = c_s \left(\int_0^l \bar{M} w_s'' dx + \int_0^l p w_s dx \right)$$

Teilintegration:

$$0 = + [\bar{M} w_s']_0^l - [\bar{Q} w_s]_0^l + \int_0^l (\bar{M}'' w_s + p w_s) dx$$

Wenn die w_v Vergleichsfunktionen sind, verschwinden die Randterme. Mit $\bar{M}'' = -EJ \bar{w}''''$ erhält man:

$$\int_0^l (EJ \bar{w}'''' - p) w_s dx = 0$$

Dies ist die s -te Galerkinsche Gleichung.

Die Ansatzfunktionen w_v

Außer den Randbedingungen gelten für die w_v dieselben Bedingungen und Eigenschaften wie beim Ritzschen Verfahren, um die mittlere Approximation der 2. Ableitungen von w zu erreichen. Wesentlich für eine schnelle, genügend genaue Näherung ist, daß man außer den notwendigen Bedingungen stets alle qualitativen Kenntnisse

des jeweiligen Problems verwertet, vor allem Symmetrieeigenschaften.

Die Frage der Fortsetzung gewählter Ansatzfunktionen im Sinne der Vollständigkeit läßt sich auch iterativ behandeln. Man wählt z.B. $\bar{w}_1 = c_1 \cdot w_1$; w_1 ist eine Vergleichsfunktion z.B. ein Polynom.

Dann erhält man aus

$$\int_0^l (c_1 \cdot w_1'''' - p) w_1 \cdot dx = 0$$

die Konstante c_1 . Die Fehlerbelastung ist

$$p_1^* = c_1 \cdot w_1'''' - p$$

Hieraus läßt sich durch Integration der DGL

$$EJ \cdot w_2'''' = p^*$$

und Einarbeitung der Randbedingungen w_2 finden. Der nächste Ansatz ist

$$\bar{w}_2 = c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2.$$

3.4. Die Transformation von Friedrichs

Mit der Transformation von Friedrichs läßt sich das Dirichletsche Prinzip-(das Minimalprinzip für die Verschiebungen oder Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie-)in das Castiglianosche Prinzip-(das Minimalprinzip für die Spannungen oder Schnittgrößen-) transformieren. Davon ausgehend läßt sich auch ein Prinzip vom Maximum der Ergänzungsarbeit aussprechen. Mit der Transformation von Friedrichs gelingt demnach die Umwandlung eines gewöhnlichen Minimalprinzips in ein Maximalprinzip, siehe z.B. Funk [28], S. 498

Das Minimalprinzip Gleichung (3.6) lautet

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \frac{1}{2} E J \int_{x=0}^l (w'')^2 dx - \int_{x=0}^l p w dx = \text{Min} \quad (3.6)$$

Das Potential Π ist- unter Beachtung des Energiesatzes $A_i + A_a = 0$ - gleich der Formänderungsarbeit, die im Balken gespeichert ist.

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = -A_i - 2A_a = -A_i + 2A_i = A_i \quad (3.63)$$

In [28] S. 513 ist diese Transformation für den Biegebalken durchgeführt.

Es wird der in der Variationsrechnung nützliche Satz von der "Unschädlichkeit der Hinzufügung von Nebenbedingungen" (Bezeichnung nach Funk) benützt. Die Nebenbedingungen werden mit Lagrangeparametern multipliziert und zum Variationsintegral addiert.

Nach dieser Umformung spricht man vom befreiten Problem. Weiterhin wird für die gesuchte Funktion die variierte Funktion eingeführt. Man gelangt formal, z.B. für den eingespannten Balken, zu dem Castiglianoschen Prinzip:

$$\frac{1}{2} \int_{x=0}^l \frac{1}{E J} M^2 dx = \text{Min} \quad (3.64)$$

unter der Nebenbedingung $M'' = -p$. Also enthält die Nebenbedingung die Gleichgewichtsbedingungen.

Bei Trägern mit statischen Randbedingungen treten diese (Randbedingungen) auch in den Nebenbedingungen auf.

3.5 Das Trefftzsche Verfahren für verschiedene Randbedingungen

Das Trefftzsche Verfahren ist wie das Ritzsche eine direkte Methode der Analysis zur näherungsweise Lösung eines Variationsproblems. Es wird ebenfalls ein n-parametriger Näherungsansatz benutzt. Trefftz bezeichnete die Methode in [17] als Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Beim Trefftzschon Verfahren wird die vorliegende Variationsaufgabe in ein äquivalentes Variationsproblem für die Randbedingungen transformiert, während beim Ritzschen Verfahren ein äquivalentes Variationsproblem für die Differentialgleichung des Problems erzeugt wird. Diese Unterscheidung ist deskriptiv. Collatz bezeichnet in [21] das Trefftzische Verfahren als Randmethode und das Ritzsche Verfahren als Gebietsmethode.

Die Gleichungen von Trefftz sind aus der Transformation von Friedrichs durch Einführung des Näherungsansatzes herleitbar. Hier soll aber wie beim Ritzschen Verfahren eine unmittelbare Herleitung unter Benutzung der statischen Anschauung erfolgen.

Die Ableitung soll mit dem eingespannten Balken beginnen.

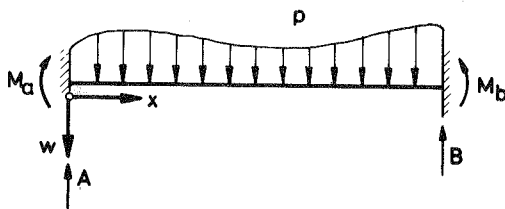


Bild 3

Eingespannter Balken mit Lagerreaktionen

Das Dirichletsche Prinzip besagt für $EJ = \text{konst.}$

$$\Pi = \frac{1}{2} EJ \int_{x=0}^l (w''')^2 dx - \int_{x=0}^l p w dx = \text{Min} \quad (3.6)$$

Der Trefftzsche Ansatz für die angenäherte Durchbiegung w lautet:

$$\bar{w} = w_0 + \sum_{v=1}^n c_v \cdot w_v \quad (3.65)$$

mit: $w_0'''' = \frac{p}{EJ}$ und $w_v'''' = 0$, $v = 1; 2 \dots; n$, also $\bar{w}'''' = \frac{p}{EJ}$ (3.66)

w_0 ist ein Partikularintegral der inhomogenen Differentialgleichung, die w_v erfüllen die homogene Differentialgleichung, die dem Variationsproblem zugeordnet ist.

Die w_0 und w_v brauchen weder die geometrischen noch die statischen Randbedingungen zu erfüllen.

Die Bedingungen sind also genau umgekehrt wie beim Ritzschen Verfahren.

Die geometrischen "Nebenbedingungen" beim eingespannten Balken sind:

$$w|_{x=0} = w|_{x=l} = w'|_{x=0} = w'|_{x=l} = 0$$

Wie schon im vorigen Abschnitt erwähnt, kann man nach der Befreiungsmethode von Lagrange die Nebenbedingungen, mit Lagrangeparametern multipliziert, zu dem Potential addieren, ohne den Inhalt des Variationsproblems zu verändern.

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} EJ \int_0^l w''^2 dx - \int_0^l p w dx + \\ & + \lambda_1 w(l) - \lambda_2 w(0) + \mu_1 w'(l) - \mu_2 w'(0) = \text{Min} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Die erste Variation von π ist:

$$\begin{aligned} \delta \pi = & EJ \int_0^l w'' (\delta w)'' dx - \int_0^l p \delta w dx + \\ & + \lambda_1 \delta w(l) - \lambda_2 \delta w(0) + \mu_1 \delta w'(l) - \mu_2 \delta w'(0) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Zweimalige Teilintegration des ersten Integrals:

$$\begin{aligned} \delta \pi = & EJ [w''(l) \cdot \delta w'(l) - w''(0) \cdot \delta w'(0)] - \\ & - EJ [w'''(l) \cdot \delta w(l) - w'''(0) \cdot \delta w(0)] + \\ & + EJ \int_0^l w''' \delta w dx - \int_0^l p \delta w dx + \end{aligned} \quad (3.69)$$

$= 0$ wegen $\underbrace{EJ w''' - p = 0}_{\text{DGL. des Problems}}$

$$+ \lambda_1 \delta w(l) - \lambda_2 \delta w(0) + \mu_1 \delta w'(l) - \mu_2 \delta w'(0)$$

Die Extremalbedingung ist $\delta \pi = 0$. Infolge der angesetzten "geometrischen" Randbedingungen $w(l) = w(0) = w'(l) = w'(0) = 0$ müsse

dann noch die folgenden statischen Einzelbedingungen erfüllt sein:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad EJ w''(l) + \mu_1 &= 0 ; \quad \mu_1 = -EJ w''(l) = M(l) = M_b \text{ [kpm]} \\ 2. \quad EJ w''(0) + \mu_2 &= 0 ; \quad \mu_2 = -EJ w''(0) = M(0) = M_a \text{ [kpm]} \\ 3. \quad -EJ w'''(l) + \lambda_1 &= 0 ; \quad \lambda_1 = EJ w'''(l) = -Q(l) = B \text{ [kp]} \\ 4. \quad -EJ w'''(0) + \lambda_2 &= 0 ; \quad \lambda_2 = EJ w'''(0) = -Q(0) = -A \text{ [kp]} \end{aligned} \right\} (3.70)$$

Damit sind die Lagrangeparameter bestimmt. Es sind die Spannungsmomente und Auflagerkräfte des beidseitig eingespannten Balkens, allgemein die Randschnittgrößen.

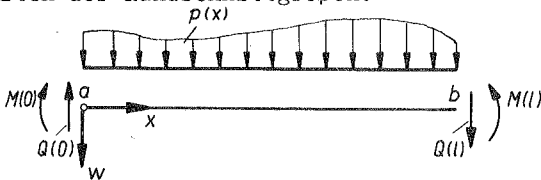
Damit ergibt sich für das Potential:

$$\begin{aligned} \pi &= \underbrace{\frac{1}{2} EJ \int_0^l (w'')^2 dx}_{\pi_i} - \underbrace{\int_0^l p w dx}_{\pi_a} + \\ &+ \underbrace{\left[\frac{EJ}{-Q} w'' \cdot w \right]_0^{x=l} - \left[\frac{EJ}{-M} w'' \cdot w' \right]_0^{x=l}}_{\pi_{aR}} \end{aligned} \quad (3.71)$$

oder:

$$\begin{aligned} \pi &= \underbrace{\frac{1}{2} EJ \int_0^l (w'')^2 dx}_{\pi_i} - \underbrace{\int_0^l p w dx}_{\pi_a} - \\ &\underbrace{[Q \cdot w]_0^{x=l} + [M \cdot w']_0^{x=l}}_{\pi_{aR}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die Randanteile $-[Q \cdot w]_0^{x=l}$ und $[M \cdot w']_0^{x=l}$ sind die doppelten negativen Arbeiten der Randschnittgrößen.



$$A_{aR} = \frac{1}{2} [Q(l) \cdot w(l) - Q(0) \cdot w(0) - M(l) \cdot w'(l) + M(0) \cdot w'(0)] \quad (3.73)$$

Die Randschnittgrößen sind damit eingeprägte, äußere Kräfte. Sie gehen in die Potentialgleichung (3.72) mit den Faktoren „1“ (nicht $-\frac{1}{2}$) ein. Demnach ist die Summe der Randanteile in π dem

Potential der äußeren Kräfte π_a zuzuordnen:

$$\pi_{aR} = -2 A_{aR} = -[Q \cdot w]_0^{x+l} + [M \cdot w']_0^{x+l} \quad (3.74)$$

$$\pi_a^* = \pi_a + \pi_a^R \quad ; \quad \pi = \pi_i + \pi_a^* \quad (3.75)$$

Durch Teilintegration von π_i in Gleichung (3.71) erhält man:

$$\begin{aligned} \pi &= \underbrace{\frac{1}{2} E J \int_0^l w'''' w \, dx + \left[\frac{E J}{2} w'' w' \right]_0^{x+l} - \left[\frac{E J}{2} w''' w \right]_0^{x+l}}_{\pi_i = -A_i} \\ &\quad - \underbrace{\int_0^l p w \, dx + [E J w'' w]_0^{x+l} - [E J w' w']_0^{x+l}}_{\pi_a} - \underbrace{[E J w'' w]_0^{x+l}}_{\pi_{aR}} = \text{Min} \end{aligned} \quad (3.76)$$

Hieraus ist ein Minimal - und ein Maximalprinzip formulierbar.

Unter Beachtung der Differentialgleichung $\frac{1}{2} (E J w'''' - p) = 0$ ergibt sich Gleichung (3.76) zu:

$$\pi = A_i = -\frac{1}{2} \int_0^l p w \, dx + \frac{1}{2} [E J w'' w]_0^{x+l} - \frac{1}{2} E J [w' w']_0^{x+l} = \text{Min} \quad (3.77)$$

Dies ist das Minimalprinzip. Die Formänderungsarbeit, die gleich dem Gesamtpotential ist, soll ein Minimum sein.

Die Formänderungsarbeit ist:

$$A_i = \pi = \pi_a^* + \pi_i = -2 A_a^* - A_j \quad (3.78)$$

Der Energiesatz lautet:

$$A_a^* + A_i = 0 \quad ; \quad A_a^* = A_a + A_{aR} \quad (3.79)$$

Mit Gleichung (3.79) wird Gleichung (3.78) eine Identität.

Die Endwertarbeit ist: $2 A_a^* = -\pi_a^*$.

Die Ergänzungsarbeit (nach Engesser) ist:

$$\begin{aligned} A_E &= 2 A_a - A_i \\ \text{und } A_E^* &= 2 A_a^* - A_i = -\pi_a^* + \pi_i \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} A_E &= 2 A_a - A_i \\ A_E^* &= 2 A_a^* - A_i = -\pi_a^* + \pi_i \end{aligned}} \right\} (3.80)$$

Durch Vergleich von Gleichung (3.78) und Gleichung (3.80) ergibt sich:

$$A_E^* = A_i - 2 \pi_a^* \quad (3.81)$$

Aus Gleichung (3.80) folgt, daß für $A_i = \text{Min}$ gelten muß:

$$A_E^* = \text{Max.}$$

Aus Gleichung (3.76), (3.77) und (3.81) ergibt sich:

$$A_E^* = \frac{3}{2} \left\{ \int_0^l p w dx - [EJ w''' w]_0^{x=l} + [EJ w'' w']_0^{x=l} \right\} = \text{Max} \quad (3.82)$$

Dies ist das Maximalprinzip.

Aus Gleichung (3.77), $A_i = \text{Min}$, folgt die gleichwertige Aussage:

$$-A_i = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l p w dx - [EJ w''' w]_0^{x=l} + [EJ w'' w']_0^{x=l} \right\} = \text{Max} \quad (3.83)$$

Dann muß auch gelten:

$$J = \int_0^l p w dx - [EJ w''' w]_0^{x=l} + [EJ w'' w']_0^{x=l} = \text{Max} \quad (3.84)$$

Mit dem Trefftz'schen Ansatz Gleichung (3.65)

$$\bar{w} = w = w_0 + \sum_{r=1}^k c_r \cdot w_r ; \quad w''' = \frac{p}{EJ} ; \quad w_r''' = 0.$$

lauten die 4 Extremalbedingungen für Gleichung (3.84):

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c_s} = 0 &= \int_0^l p w_s dx - [EJ w_s''' w_s + EJ w_s'' w_s']_0^{x=l} \\ &+ [EJ w_s'' w_s' + EJ w_s' w_s'']_0^{x=l} ; \quad s=1; 2; \dots; v_i; \dots; n \end{aligned} \quad (3.85)$$

$$\text{Mit } EJ w_s'' = -M_s ; \quad EJ w_s''' = -Q_s$$

$$EJ w'' = -M ; \quad EJ w''' = -Q \quad \text{folgt:}$$

$$\int_0^l p w_s dx = [w_s' M_s]_0^{x=l} - [w_s Q_s]_0^{x=l} + [M w_s']_0^{x=l} - [Q w_s]_0^{x=l} \quad (3.86)$$

Mit den Randbedingungen $w = w' = 0$ für $x = 0$; l gilt:

$$[w_s' M_s]_0^{x=l} = 0 \quad \text{und} \quad [w_s Q_s]_0^{x=l} = 0.$$

Damit ergeben sich für den eingespannten Balken die vier Gleichungen ($s = 1, 2, 3, 4$):

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l p w_s dx &= [M w_s']_0^{x=l} - [Q w_s]_0^{x=l} \\ M &= -EJ w'' ; \quad Q = -EJ w''' \end{aligned} \right\} (3.87)$$

Die Gleichung muß auch für w_0 gelten:

$$\int_0^l p w_0 dx - [M w_0']_0^{x=l} - [Q w_0]_0^{x=l}$$

Dann folgt mit Gleichung (3.87):

$$\int_0^l p w dx = [M w']_0^{x=l} - [Q w]_0^{x=l} \quad (3.88)$$

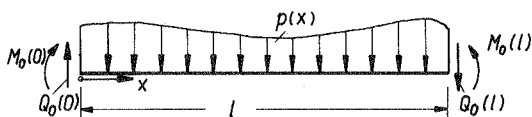
Der Ansatz w ist:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 + c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \\ w' &= w_0' + c_2 + 2 c_3 x + 3 c_4 x^2 \\ w'' &= w_0'' + 2 c_3 + 6 c_4 x \\ w''' &= w_0''' + 6 c_4 \end{aligned} \right\} (3.89)$$

Bilden der Gleichungen (3.87):

s = 1:

$$\int_0^l p dx = EJ [w_0'''(l) - w_0'''(0)] = - [Q_0(l) - Q_0(0)]$$



Diese Gleichung enthält das Gleichgewicht der vertikalen Kräfte:

$$\int_0^l p dx + Q_0(l) - Q_0(0) = 0 \quad (3.90)$$

s = 2:

$$\begin{aligned} \int_0^l p x dx &= -EJ [w_0''(l) - w_0''(0)] + EJ w_0'''(l) \cdot l \\ &= M_0(l) - M_0(0) - l \cdot Q_0(l) \end{aligned} \quad (3.91)$$

Diese Gleichung enthält das Momentengleichgewicht um den Punkt $x = 0$.

s = 3:

$$\begin{aligned} \int_0^l p x^2 dx &= -2 EJ \cdot l \cdot w_0''(l) - 2 EJ \underbrace{(2 \cdot l \cdot c_3 + 3 \cdot l^2 \cdot c_4)}_{w'(l) - w_0'(l) - c_2} + EJ \cdot l^2 \cdot w_0'''(l) \\ &= 2 \cdot l \cdot M_0(l) + 2 \cdot EJ [w_0'(l) - w_0'(0)] - l^2 Q_0(l) \end{aligned} \quad (3.92)$$

Hierbei wurde $w'(l) = w'(0) = 0$ beachtet.

Nach der Mohrschen Analogie drückt diese Gleichung das Gleichgewicht der als Belastung aufgefaßten Momente aus.

s = 4:

$$\int_0^l p x^3 dx = -3 EJ l^2 w_0''(l) - 3 EJ l^2 (2 c_3 + 6 c_4 \cdot l) + EJ l^3 w_0'''(l) + 6 EJ l^3 c_4$$

$$= 3 \cdot l^2 M_0(l) - 6 EJ \cdot l (c_2 + 2 l c_3 + 3 l^2 c_4) - l^3 Q_0(l) + 6 EJ (l \cdot c_2 + l^2 c_3 + l^3 c_4)$$

$$\int_0^l p x^3 dx = 3 l^2 \cdot M_0(l) + 6 EJ \cdot l \cdot w_0'(l) - l^3 \cdot Q_0(l) - 6 EJ [w_0(l) - w_0(0)] \quad (3.93)$$

Diese Gleichung enthält das Momentengleichgewicht für die als Belastung gedeutete Momentenfläche.

Die Gleichungen (3.90) bis (3.93) geben besonders deutlich Aufschluß über die Güte des Trefftzschens Verfahrens: Nicht nur Randbedingungen für die Durchbiegung und die 1. Ableitung, sondern auch für die 2. und 3. Ableitung, also die Momente höherer Ordnung, werden mit den Trefftzschens Gleichungen erfüllt. Damit arbeitet das Trefftzsches Verfahren grundsätzlich besser als das Ritzsche. Dies läßt sich leicht einsehen, wenn man bedenkt, daß in den Ritzschen Ansätzen nur Randbedingungen für die Durchbiegungen und die ersten Ableitungen erfaßt sind, während in den Trefftzschens Ansätzen homogene Lösungen der Differentialgleichung vorliegen, also auch Aussagen über die 2. und 3. Ableitungen der Durchbiegungen im Balken gemacht werden.

Nach diesen Betrachtungen zur Aequivalenz des Trefftzschens und Ritzschens Verfahrens werden nun die Trefftzschens Gleichungen des beidseitig eingespannten Balkens - ausgehend vom elastischen Potential - unter Verwendung baustatischer Begriffe und Überlegungen hergeleitet.

Mit den Gleichungen (3.69) bis (3.72) wurde gezeigt, daß die Lagrangeparameter in den Zusatztermen (aus den Randbedingungen) die Dimensionen der Auflagerreaktionen haben. Die Zusatzterme sind die Potentiale der Lagerreaktionen infolge der Deformationen $\bar{w}/_{x=0;l}$ und $\bar{w}'/_{x=0;l}$.

Der Trefftzsche Ansatz Gleichung (3.65) erfüllt nach Voraussetzung nicht die Randbedingungen, so daß die Randterme $\bar{\Pi}_{aR}$ in $\bar{\Pi}$ zu berücksichtigen sind.

Für das Potential der Auflagerkräfte wird $\bar{\Pi}_{aR_1}$ eingeführt.

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_{aR_1} &= \bar{A} \cdot \bar{w}/_{x=0} + \bar{B} \cdot \bar{w}'/_{x=l} = -\bar{A}_{R_1} \\ \bar{A} &= \bar{Q}/_{x=0} = -EJ \bar{w}'''/_{x=0} \quad ; \quad \bar{B} = -\bar{Q}/_{x=l} = EJ \bar{w}'''/_{x=l} \\ \bar{\Pi}_{aR_1} &= EJ [\bar{w}'' \bar{w}]_0^l\end{aligned}\tag{3.94}$$

Für das Potential der Einspannmomente wird $\bar{\Pi}_{aR_2}$ eingeführt.

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_{aR_2} &= -\bar{M}_a \cdot \bar{w}'/_{x=0} + \bar{M}_b \cdot \bar{w}'/_{x=l} = -\bar{A}_{R_2} \\ \bar{M}_a &= \bar{M}/_{x=0} = -EJ \bar{w}''/_{x=0} \quad ; \quad \bar{M}_b = \bar{M}/_{x=l} = -EJ \bar{w}''/_{x=l} \\ \bar{\Pi}_{aR_2} &= -EJ [\bar{w}'' \bar{w}]_0^l\end{aligned}\tag{3.95}$$

Die Anteile $\bar{\Pi}_{aR_1}$ und $\bar{\Pi}_{aR_2}$ sind zum Potential der äußeren Kräfte zu addieren.

Das Näherungspotential lautet mit dem Ansatz \bar{w} :

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} E J \int_{x=0}^l (\bar{w}'')^2 dx - \int_{x=0}^l p \cdot \bar{w} \cdot dx + E J [\bar{w}''' \bar{w}]_0^l - E J [\bar{w}'' \bar{w}']_0^l \quad (3.96)$$

Die Forderung $\bar{\Pi} = \bar{\Pi}(c_v) = \text{Min}$ wird erfüllt durch die n Gleichunge

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_s} = 0 = E J \int_{x=0}^l \bar{w}'' w_s'' dx - \int_{x=0}^l p \cdot w_s \cdot dx + E J [w_s''' \bar{w} + \bar{w}''' \cdot w_s]_0^l - E J [w_s'' \bar{w}' + \bar{w}'' \cdot w_s']_0^l \quad (3.97)$$

Die Integrale in Gleichung (3.97) sind gleich denen der Gleichung (3.31) nach Ritz.

Wie beim Ritzschen Verfahren wird Teilintegration auf das erste Integral angewandt. Wieder wird \bar{w}'' differenziert.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_s} = 0 &= E J [\bar{w}'' w_s']_0^l - E J [\bar{w}''' w_s]_0^l + E J \int_0^l \bar{w}'''' \cdot w_s \cdot dx - \int_0^l p \cdot w_s \cdot dx \\ &- E J [\bar{w}'' w_s']_0^l + E J [\bar{w}''' w_s]_0^l \\ &- E J [\bar{w}' \cdot w_s'']_0^l + E J [\bar{w} \cdot w_s''']_0^l \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_s} = 0 = \int_0^l (EJ w_0'''' - p + EJ \sum_{v=1}^n c_v w_v'''') w_s dx - EJ [\bar{w}' w_s'']_0^l + EJ [\bar{w} w_s''']_0^l \quad (3.98)$$

Die Klammer im Integral von Gleichung (3.98) wird identisch null wegen der Bedingungen (3.66). Damit ergibt sich die s-te Gleichung zu:

$$-EJ [\bar{w}' w_s'']_0^l + EJ [\bar{w} w_s''']_0^l = 0 \quad (3.99)$$

Mit den Schnittgrößen

$$EJ w_s'' = -M_s \quad \text{und} \quad EJ w_s''' = -Q_s \quad (3.100)$$

haben die Randterme in Gleichung (3.98) die mechanische Bedeutung von Arbeiten.

$$[\bar{w}' M_s]_{x=0}^{x=l} - [\bar{w} Q_s]_{x=0}^{x=l} = 0 \quad (3.101)$$

Dies ist die s-te Trefftzsche Gleichung für den beidseitig eingespannten Balken. Die entsprechende Gleichung für die allseitig eingespannte Platte wurde erstmals von Wegner [18] angegeben. Siehe auch Berger [19] und Rüdiger [29]. Trefftz selbst behandelte das St.-Venantsche Torsionsproblem eines Rechteckquerschnitts.

Man sieht sofort, daß Gleichung (3.74) durch $\bar{w} = \bar{w}' = 0$ für $x = 0$; identisch erfüllt wird, womit die exakte Lösung der Aufgabe vorliegt.

Der Inhalt der Gleichung (3.101) läßt sich unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Kräfte deuten - wie sich analog die Galerkin'schen Gleichungen nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen deuten ließen.

Das Prinzip der virtuellen Kräfte ist eine Energieaussage, die die Verträglichkeitsbedingungen für die Verzerrungen beinhaltet. Die virtuellen Kräfte sind über das lineare Hookesche Gesetz mit den Verschiebungen verknüpft und erfüllen die Gleichgewichtsbedingungen.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ist eine Energieaussage, die die Gleichgewichtsbedingungen beinhaltet.

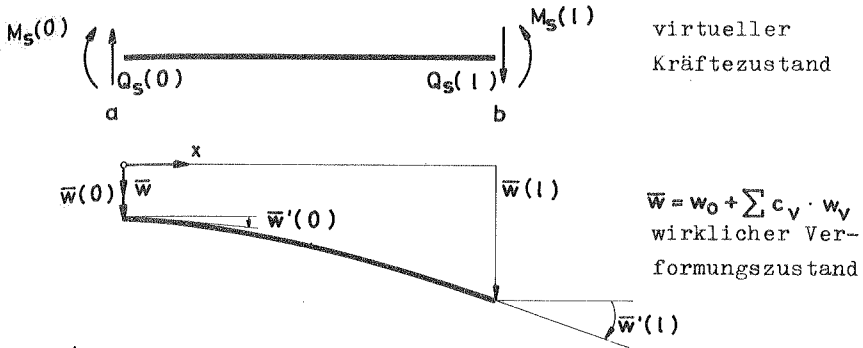


Bild 4

Zur Deutung der Trefftzschen Gleichungen beim eingespannten Balken

Arbeitsgleichung für die \$s\$-te virtuelle Kräftegruppe:

$$\delta A = 0 = M_s(0) \bar{w}'(0) - M_s(l) \bar{w}'(l) - Q_s(0) \bar{w}(0) + Q_s(l) \bar{w}(l) \quad (3.102)$$

virtuelle Kräfte			
wirkliche Wege			

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung (3.101).

Die Arbeit der virtuellen Kräfte \$M_s\$; \$Q_s\$ längs der wirklichen Deformationen \$\bar{w}'\$; \$\bar{w}\$ ist null. Die virtuellen Kräfte müssen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Das trifft zu, weil die \$M_s\$, \$Q_s\$ von einer Teillösung der homogenen Differentialgleichung hervorgehen. Aus diesem Grund kann auch keine Belastung \$p_s\$ und somit kein Integral

$$\int_0^l \bar{w} p_s dx$$

auftreten.

Direkte Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte

Man gewinnt die Trefftzschen Gleichungen auch durch direkte Anwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte. Für den eingespannten Balken ergibt sich die \$s\$-te Gleichung mit den virtuellen

Schnittgrößen $M_S = -EJ w_S''$; $Q_S = -EJ w_S'''$:

$$\delta A_S = 0 = \int_0^l \bar{w}'' \delta \bar{M} dx + [\bar{w}' \delta \bar{M}]_0^l - [\bar{w} \delta \bar{Q}]_0^l$$

$$\delta A_S = 0 = + \int_0^l \bar{w}'' M_S dx + [\bar{w}' M_S]_0^l - [\bar{w} Q_S]_0^l \quad (3.103)$$

Teilintegration des Integrals ergibt:

$$0 = + [\bar{w}' M_S]_0^l - [\bar{w} Q_S]_0^l + \int_0^l \bar{w} M_S'' dx + [\bar{w}' M_S]_0^l - [\bar{w} Q_S]_0^l \quad (3.104)$$

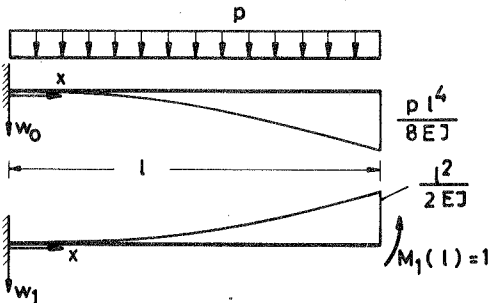
Nach Voraussetzung ist $M_S'' = -EJ w_S'''' = 0$

Dann ergibt sich die Gleichung (3.101).

$$0 = + [\bar{w}' M_S]_0^l - [\bar{w} Q_S]_0^l \quad (3.105)$$

Diese Herleitung ist analog der Gewinnung der Galerkinschen Gleichung durch direkte Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen. Es läßt sich zeigen, daß die Trefftzschen Gleichungen bei Stabwerken die Gleichungen nach Castigliano oder die Verträglichkeitsbedingungen (Elastizitätsgleichungen) des Kraftgrößenverfahrens der Baustatik sind. Dies wird im folgenden erläutert.

Zunächst werden die Ansatzfunktionen in einer speziellen Form gewählt, so daß alle die Verschiebungen desselben "statisch bestimmten Grundsystems", nämlich des Kragträgers sind. Dann erkennt man die Elastizitätsgleichungen sofort.



Für Gleichstreckenlast p :

$$w_0 = \frac{p}{24 EJ} (x^4 + 6l^2 x^2 - 4lx^3) \quad [m]$$

$$M_0(l) = Q_0(l) = 0$$

$$M_1(l) = -EJ w_1'' = 1 ; Q_1(l) = 0$$

$$w_1 = -\frac{x^2}{2 EJ} \quad \left[\frac{m}{kp m} \right]$$

$$w_1'''' = 0$$

Bild 5

Kragträger als statisch bestimmtes Grundsystem des beidseitig eingespannten Trägers, belastet mit dem statisch überzähligen Moment M_1



$$Q_2(l) = -EJw_2''' = 1 ; M_2(l) = 0$$

$$w_2 = \frac{1}{2EJ} \left(l \cdot x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \left[\frac{m}{kp} \right]$$

$$w_2'''' = 0$$

Bild 6: Kragträger mit Belastung durch die stat. überzählige Querkraft $Q_2(l) = 1$

Aus dem Ansatz:

$$\bar{w} = w = w_0 + c_1 \cdot w_1 + c_2 \cdot w_2$$

sieht man: $c_1 = \bar{M}(l) = M(l) = X_1$ [kpm]; $c_2 = \bar{Q}(l) = Q(l) = X_2$ [kp]

Die Entwicklungskoeffizienten sind die statisch Überzähligen.

Beim Balken ergibt sich die exakte Lösung, deswegen können die Querstriche entfallen.

Die erste Trefftzsche Gleichung ist (bei $x = 0$ ergeben sich keine Arbeitsausdrücke):

$$w_0'(l) \cdot M_1(l) + w_1'(l) \cdot c_1 \cdot M_1(l) + w_2'(l) \cdot c_2 \cdot M_1(l) - w_0(l) \cdot Q_1(l) - w_1(l) \cdot c_1 \cdot Q_1(l) - w_2(l) \cdot c_2 \cdot Q_1(l) = 0$$

Mit $M_1(l) = 1$; $Q_1(l) = 0$ sowie $c_1 = X_1$; $c_2 = X_2$

$$w_0'(l) + w_1'(l) X_1 + w_2'(l) X_2 = 0$$

oder zu der Schreibweise der Baustatik

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 = 0$$

Entsprechend ist die zweite Gleichung wegen

$$M_2(l) = 0 ; Q_2(l) = 1 :$$

$$w_0(l) + w_1(l) X_1 + w_2(l) X_2 = 0$$

oder

$$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 = 0$$

δ_{ik} ist die Deformation an der Stelle i in Art, Richtung und Richtungssinn von X_i infolge $X_k = 1$.

Natürlich kann man für w_0 , w_1 , w_2 auch einfachere Funktionen wählen, die aber nicht mehr die Verschiebungen eines Trägers mit jeweils gleicher Lagerung sind, z.B.:

$$w_0 = \frac{p}{24EJ} x^4 ; w_1 = \frac{1}{l} x^2 ; w_2 = \frac{1}{l^2} x^3 \text{ oder } w_1 = \frac{x^2}{EJ} ; w_2 = \frac{x^3}{EJ}$$

Jetzt ergibt sich als 1. Gleichung mit $Q_1 = 0$ und wiederum

$$c_1 = X_1 \quad ; \quad c_2 = X_2 \quad ;$$

$$w_0'(l) M_1(l) + w_1'(l) M_1(l) X_1 + w_2'(l) M_1(l) X_2 = 0$$

$$w_0'(l) + w_1'(l) X_1 + w_2'(l) X_2 = 0$$

wie oben.

Die 2. Gleichung ist:

$$w_0'(l) M_2(l) - w_0(l) Q_2(l) + [w_1'(l) M_2(l) - w_1(l) Q_2(l)] X_1 + [w_2'(l) M_2(l) - w_2(l) Q_2(l)] X_2 = 0$$

Man sieht, daß hier eine Elastizitätsgleichung allgemeiner Art vorliegt. Die X_1 , X_2 sind nicht mehr die endgültigen, statisch überzähligen Schnittgrößen an einer bestimmten Stelle, sondern alle Schnittgrößen - und auch Verschiebungen - ergeben sich durch Linearkombinationen in Abhängigkeit von X_1 und X_2 . Dieses Ergebnis kann als Beweis dafür gelten, daß man bei einem n-fach statisch unbestimmten System n linear unabhängige Teilzustände, d.h. Lösungen des homogenen Systems finden muß. Der endgültige Zustand ergibt sich durch Linearkombination dieser homogenen Teillösungen und der Partikularlösung. Ein statisch bestimmtes System wird nicht eingeführt.

Der gelenkig gelagerte Balken

Die Randterme im Potential sind jetzt nach Gleichung (3.94):

$$\bar{\Pi}_{aR} = EJ [\bar{w}''' \bar{w}]_0^l$$

da

$$M(0) = M(l) = 0 \quad \text{ist.}$$

Die analog zu den Gleichungen (3.97) und (3.98) sich ergebende Gleichung ist:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_s} = 0 = EJ [\bar{w}'' w_s']_0^l - EJ [\bar{w}''' w_s]_0^l + EJ [\bar{w} w_s''' + \bar{w}''' w_s]_0^l$$

$$0 = EJ [\bar{w}'' w_s' + \bar{w} w_s''']_0^l \quad (3.105)$$

oder:
$$0 = [\bar{M} w'_s + \bar{w} Q_s]_0^l \quad (3.106)$$

Man sieht, daß die Gleichung mit den exakten Randbedingungen

$$\bar{M} = \bar{w} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0; l$$

identisch erfüllt wird.

Dies ist die s-te Trefftzsche Gleichung für den beidseitig gelenkig gelagerten Balken.

Auf die gleiche Weise gewinnt man die Gleichungen auch für inhomogene Randbedingungen, die ja bei den Schalen interessieren. Durch Einführung von Verschiebungs- und Drehfedern lassen sich beliebige Anschlusskonstruktionen darstellen.

In einer Tabelle S. 64 sind die Trefftzschen Gleichungen für die wichtigsten Lagerungsarten des Balkens zusammengestellt und daneben für die einfachsten Ansatzfunktionen die Bedingungsgleichungen für die c_v ausgeführt. Selbstverständlich ergibt sich beim Balken jeweils die exakte Lösung.

Die Wahl der Ansatzfunktionen w_v

Für die w_v kommen beim Balken nur die Funktionen $1, x, x^2, x^3$ und deren Kombinationen in Frage. Selbstverständlich werden Symmetrieeigenschaften beachtet. Für w_0 macht man einen "Ansatz vom Typ der rechten Seite" in der Dgl.

$$w_0'''' = \frac{p}{EJ}$$

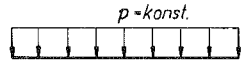
Vergleich der Trefftzschen Methode mit der Methode des Fehlerquadratminimums als Randmethode.

Für den Ansatz (3.65) mit den Bedingungen (3.66) lauten die quadrierten Randfehler beim eingespannten Balken (Ränder bei $x = 0$ und l):

$$J = \bar{w}(0)^2 + \bar{w}(l)^2 + \bar{w}'(0)^2 + \bar{w}'(l)^2$$

Die einzelnen Terme haben unterschiedliche Dimensionen. Das bedeutet, daß sie mit verschiedenen Gewichten behaftet sind.

Zusammenstellung der Gleichungen nach Trefftz für verschiedene Lagerungen des Balkens $\bar{w} = w_0 + \sum_{r=1}^k c_r w_r$; $w_0'''' = \frac{p}{EJ}$; $w_r = x^{r-1}$; $w_r'''' = 0$



	Trefftzsche Gleichungen	Bedingungsgleichungen für die Entwicklungskoeffizienten c_r für konstante Belastungen p
<p>$\bar{w} = w_0 + c_2 x^2 + c_0$</p>	$EJ[-\bar{w}' w_s'' + \bar{w} w_s''']_{-l}^{+l} = 0$	$2\left[\frac{p \cdot l^2}{2EJ} \left(\frac{p \cdot l^3}{6EJ} + 2c_2 l\right) - \frac{p \cdot l}{EJ} \left(\frac{p \cdot l^4}{24EJ} + c_2 l^2 + c_0\right)\right] = 0$ $2\left[2 \left(\frac{p \cdot l^3}{6EJ} + 2c_2 l\right)\right] = 0$
<p>$\bar{w} = w_0 + c_2 x^2 + c_0$</p>	$EJ[\bar{w}'' w_s' + \bar{w} w_s''']_{-l}^{+l} = 0$	$2 \cdot 2l \left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 2c_2\right) = 0$ $2 \cdot \frac{p \cdot l^3}{6EJ} \left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 2c_2\right) + 2 \frac{p \cdot l}{EJ} \left(\frac{p \cdot l^4}{24EJ} + c_2 l^2 + c_0\right) = 0$
<p>$\bar{w} = w_0 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x$</p>	$EJ[\bar{w}'' w_s']_l^l - EJ[\bar{w}' w_s'']_0^0 + EJ[\bar{w} w_s''']_0^0 = 0$	$1\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) = 0$ $2l\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) + 2c_1 = 0$ $3l^2\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) + 0 \cdot c_1 + 6\left(\frac{p \cdot l^4}{24EJ} + c_3 l^3 + c_2 l^2 + c_1 l\right) = 0$
<p>$\bar{w} = w_0 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x$</p>	$EJ[\bar{w}'' w_s' - \bar{w}'' w_s]_l^l - EJ[\bar{w}' w_s'']_0^0 + EJ[\bar{w} w_s''']_0^0 = 0$	$1\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) - l\left(\frac{p \cdot l}{EJ} + 6c_3\right) = 0$ $2l\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) - l^2\left(\frac{p \cdot l}{EJ} + 6c_3\right) - 2c_1 = 0$ $3l^3\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) - l^3\left(\frac{p \cdot l}{EJ} + 6c_3\right) = 0$
<p>$\bar{w} = w_0 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x$</p>	$EJ\left\{[\bar{w}'' w_s']_0^0 + [\bar{w} w_s''']_0^0 - (EJ) \epsilon [\bar{w}'''' w_s''']_l^l\right\} = 0$	$1\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2 - 2c_2\right) = 0$ $2l\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) = 0$ $3l^2\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) + 6\left(\frac{p \cdot l^4}{24EJ} + c_3 l^3 + c_2 l^2 + c_1 l\right) - EJ \epsilon \cdot 6\left(\frac{p \cdot l}{EJ} + 6c_3\right) = 0$
<p>$\bar{w} = w_0 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x$</p>	$EJ\left\{[\bar{w}'' w_s']_l^l - [\bar{w}' w_s'']_0^0 + [\bar{w} w_s''']_0^0 - (EJ) \epsilon [\bar{w}'''' w_s''']_l^l\right\} = 0$	$1\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) = 0$ $2l\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) - 2c_1 = 0$ $3l^2\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) + 6\left(\frac{p \cdot l^4}{24EJ} + c_3 l^3 + c_2 l^2 + c_1 l\right) - EJ \epsilon \cdot 6\left(\frac{p \cdot l}{EJ} + 6c_3\right) = 0$
<p>$\bar{w} = w_0 + c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x$</p>	$EJ\left\{[\bar{w}'' w_s']_l^l - [\bar{w}' w_s'']_0^0 + [\bar{w} w_s''']_0^0 + EJ \epsilon_D [\bar{w}'''' w_s''']_0^0\right\} = 0$	$1\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) = 0$ $2l\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) + 2c_1 - EJ \epsilon_D \cdot 2 \cdot 2c_2 = 0$ $3l^2\left(\frac{p \cdot l^2}{2EJ} + 6c_3 l + 2c_2\right) + 0 + 6\left(\frac{p \cdot l^4}{24EJ} + c_3 l^3 + c_2 l^2 + c_1 l\right) - EJ \epsilon_D \cdot 0 = 0$

Die s-te Bedingungsgleichung für die Koeffizienten c_v lautet:

$$\frac{\partial J}{\partial c_s} = 0 = [\bar{w} w_s]_0^{-1} + [\bar{w}' w_s']_0^{-1}$$

Zur richtigen Wahl der Gewichte der einzelnen Terme zur Erzielung gleicher Dimensionen fehlt eine generelle Handhabe. Siehe hierzu die Anmerkungen von Collatz [21] , S. 323, sowie Berger [19] .

Demgegenüber sind die Trefftzschen Gleichungen dimensionsrein.

3.6 Die Verallgemeinerung der direkten Variationsverfahren von Ritz und Trefftz.

Aus der Gleichung (3.98) oder auch aus Gleichung (3.33) läßt sich erkennen, daß die Methoden von Trefftz oder Ritz zu verändern sind, wenn man die Bedingungen an die Ansatzfunktionen ändert. Stellt man lediglich die Stetigkeitsanforderungen an die Funktionen w_v und ihre Ableitungen und unterwirft sie sonst keinen Bedingungen, so entfällt in Gleichung (3.98) nicht das Integral, die Bestimmungsgleichungen für die c_v sind schwieriger auszuwerten und die Konvergenz gegen die richtige Lösung wird langsamer. In diesem Sinne hat Rüdiger in [29] die Erweiterung der direkten Variationsverfahren dargestellt, in denen die Ansatzfunktionen keinen Bedingungen unterliegen.

Es ist aber auch möglich, andere Bedingungen an die w_v zu stellen, z.B. für eine gemischte Anwendung des Ritzschen und Trefftzschen Verfahrens. Die w_v sollen dann die geometrischen Randbedingungen und die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen - nicht die statischen Randbedingungen und die Verträglichkeitsbedingungen. Es sind aber auch andere Kombinationen mit beliebig herausgreifbaren Bedingungen möglich. Wenn man vor allem auch die Platten und Schalen in die Überlegung einbezieht, so läßt sich sagen, daß für jedes System sehr viele direkte Variationsmethoden mit den zugehörigen Bedingungen

an die Ansatzfunktionen möglich sind.

Sehr deutlich wird dies, wenn man das Variationsproblem in seine kanonische Form bringt, siehe z.B. bei Courant - Hilbert [24], Michlin [26], Funk [28], Günther [30]. Man erkennt, daß unendlich viele quasi Trefftzsche Gleichungen möglich sind.

4. Die direkten Variationsverfahren in der Kirchhoffschen Plattentheorie

4.1. Ausgangsgleichungen

Die Differentialgleichung für die Biegefläche der dünnen Platte mit kleinen Ausbiegungen ist in kartesischen Koordinaten:

$$\nabla^4 w = \Delta \Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{K} ; \quad K = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (4.1)$$

Mit den Ableitungssymbolen:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = w' ; \quad \frac{\partial w}{\partial y} = w''$$

$$w''' + 2 w'''' + w'''' = \frac{p}{K} \quad (4.2)$$

Das elastische Potential aus den Biegeverformungen und den äußeren Kräften ist: $\pi = \pi_i + \pi_a$

Das Potential der inneren Kräfte ist:

$$\pi_i = -A_i = + \frac{1}{2} \iint_F (m_x \cdot \varepsilon_x + m_y \cdot \varepsilon_y + 2 m_{xy} \cdot \varepsilon_{xy}) dx dy \quad (4.3)$$

Die Biegemomente und Drillmomente sind:

$$m_x = -K (w'' + \mu w''') \quad m_{xy} = - (1 - \mu) K w'''$$

$$m_y = -K (w''' + \mu w'') \quad (4.4)$$

Die elastischen Krümmungen sind mit der Beschränkung auf kleine Verformungen:

$$\varepsilon_x = -w'' ; \quad \varepsilon_y = -w''' ; \quad \varepsilon_{xy} = -w'''' \quad (4.5)$$

Einsetzen der Gleichung (4.4) und Gleichung (4.5) in Gleichung (4.3) sowie Addition und Subtraktion von w'' w''' im Integral ergibt:

$$\pi_i = + \frac{K}{2} \iint_F [(w'' + w''')^2 - 2(1-\mu)(w'' w''' - w''''^2)] dx dy$$

$$\pi_i = + \frac{K}{2} \iint_F [\Delta w^2 - 2(1-\mu) \left| \begin{matrix} w'' & w'''' \\ w'''' & w'''' \end{matrix} \right|] dx dy \quad (4.6)$$

$$\pi_a = - \iint_F p w \, dx \, dy \quad (4.7)$$

Wie Willers in [30] nachwies, wird bei den sogenannten μ -freien Rändern (geradlinige Navier - oder gelenkig gelagerte und eingespannte Ränder) die 1. Variation für den mit $2(1 - \mu)$ multiplizierten 2. Term in π_i identisch null. Für diese Platten gilt also:

$$\pi_i^* = \frac{K}{2} \iint_F (w'' + w''')^2 \, dx \, dy \quad (4.8)$$

4.2. Das Ritzsche Verfahren für μ -freie Ränder

Das Potential lautet:

$$\pi = \frac{K}{2} \iint_F (w'' + w''')^2 \, dx \, dy - \iint_F p w \, dx \, dy \quad (4.9)$$

Ritz-Ansatz:

$$\bar{w} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} w_{\mu\nu} \quad (4.10)$$

Man beachte, daß im Zweidimensionalen zweimal abzählbar unendlich viele Ansatzfunktionen möglich sind.

Jedes $w_{\mu\nu}$ erfüllt die geometrischen Randbedingungen und soll z. B. als Produkt zweier Funktionen von einer Veränderlichen dargestellt werden.

$$w_{\mu\nu} = f_{\mu}(x) \, g_{\nu}(y) \quad (4.11)$$

Es sei $p = p_x(x) \, p_y(y)$

Die st-te Gleichung zur Bestimmung der $c_{\mu\nu}$ ist:

$$\frac{\partial \pi}{\partial c_{st}} = 0 = \iint_F \underbrace{(\bar{w}'' + \bar{w}''')}_{\Delta \bar{w}} \underbrace{(w_{st}'' + w_{st}''')}_{\Delta w_{st}} \, dx \, dy - \frac{1}{K} \iint_F p w_{st} \, dx \, dy \quad (4.12)$$

Unter Beachtung von Gleichung (4.6) ergibt sich für eine Einfeldplatte mit den Abmessungen a und b:

$$0 = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} \left(\int_{x=0}^a f_{\mu}'' f_{\mu}'' \, dx \cdot \int_{y=0}^b g_{\nu} g_{\nu}'' \, dy + \int_{x=0}^a f_{\mu}'' f_{\mu}'' \, dx \cdot \int_{y=0}^b g_{\nu} g_{\nu}'' \, dy + \int_{x=0}^a f_{\mu} f_{\mu}'' \, dx \cdot \int_{y=0}^b g_{\nu}'' g_{\nu}'' \, dy + \int_{x=0}^a f_{\mu} f_{\mu}'' \, dx \cdot \int_{y=0}^b g_{\nu}'' g_{\nu}'' \, dy \right) - \frac{1}{K} \int_{x=0}^a p_x f_s \, dx \cdot \int_{y=0}^b p_y f_t \, dy \quad (4.13)$$

Die Summe der Integrale in der runden Klammer von Gleichung (4.8) ist ein Element der Koeffizientenmatrix. Es wird $a_{st \mu\nu}$ bezeichnet.

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} a_{st \mu\nu} - \frac{1}{K} p_{st} \quad (4.14)$$

Matrizenschreibweise:

$$\zeta = (c_{\mu\nu}) ; \quad \alpha = (a_{st \mu\nu}) ; \quad \beta = (p_{st}) \quad (4.15)$$

$$\alpha \zeta = \frac{1}{K} \beta ; \text{ hieraus } \zeta \quad (4.16)$$

4.3. Die Galerkinschen Gleichungen

Ansatz für die wirkliche Biegefläche w :

$$\bar{w} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} w_{\mu\nu} \quad (4.17)$$

In Produktdarstellung:

$$\bar{w} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} f_{\mu}(x) g_{\nu}(y) \quad (4.18)$$

Die $w_{\mu\nu}$ müssen alle Randbedingungen erfüllen, sind also Vergleichsfunktionen.

Die st -te Gleichung nach Galerkin ist:

$$\iint_F \underbrace{(K \cdot \Delta \Delta \bar{w} - p)}_{\text{Fehlerbelastung } p^*} w_{st} dx dy = 0 \quad (4.19)$$

Einsetzen von Gleichung (4.18) in Gleichung (4.19):

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} \left(\int_x f_{\mu}^{(4)} f_s dx \int_y g_{\nu} g_t dy + 2 \int_x f_{\mu}'' f_s dx \int_y g_{\nu}'' g_t dy + \int_x f_{\mu} f_s dx \int_y g_{\nu}^{(4)} g_t dy \right) - \\ - \frac{1}{K} \int_x p_x f_s dx \int_y p_y g_t dy = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Die Summe der Integrale in der runden Klammer von Gleichung (4.20) ist ein Element der Koeffizientenmatrix. Es wird $b_{st \mu\nu}$ bezeichnet.

$$\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} b_{st \mu\nu} - \frac{1}{K} p_{st} = 0 \quad (4.21)$$

Man erhält also ein zu Gleichung (4.14) völlig analoges Gleichungssystem. Wenn die $w_{\mu\nu}$ beim Ritzschen Verfahren auch Vergleichsfunktionen sind, ist

$$a_{st \mu\nu} = b_{st \mu\nu}$$

Mit der Matrix $\mathcal{L} = (b_{st \mu\nu})$ erhält man:

$$\mathcal{L} \mathcal{c} = \frac{1}{k} \mathcal{P} \quad (4.22)$$

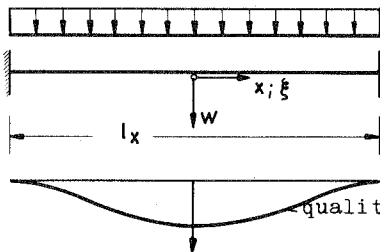
analog zu Gleichung (4.16)

4.4 Die Ansatzfunktionen der Galerkinschen Gleichungen für verschiedene Randbedingungen

Wegen der Produktdarstellung des Ansatzes (Gleichung (4.18)) kann man sich auf die x-Richtung beschränken, womit eine Balkenaufgabe vorliegt.

Zunächst ein instruktives Beispiel:

Beidseitige Einspannung mit Symmetrie in System und Belastung



Dimensionslose
Koordinate
 $\xi = \frac{x}{l_x/2}$

- qualitative Biegelinie

Die Biegelinie hat zwei Doppelnulstellen für $\xi = \pm 1$.

Dann ist eine Vergleichsfunktion w_1 darstellbar in der Form.

$$\bar{w}_1 = (\xi - 1)^2 \cdot (\xi + 1)^2 = (1 - \xi^2)^2 = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \quad (4.23)$$

Man erkennt, daß $\bar{w} = c_1 w_1$ für den Balken mit Gleichlast p

die exakte Lösung sein muß.

Galerkinprozeß:

$$\frac{d^4 \bar{w}}{dx^4} = \frac{1}{\left(\frac{l}{2}\right)^4} \cdot \frac{d^4 \bar{w}}{d\xi^4} = \frac{16}{l^4} c_1 \cdot 24$$

$$\int_{\xi=0}^1 \frac{16}{l^4} c_1 \cdot 24 (1-2\xi^2 + \xi^4) \frac{l}{2} d\xi = \frac{p}{EJ} \int_{\xi=0}^1 (1-2\xi^2 + \xi^4) \frac{l}{2} d\xi$$

$$\text{d.h. } c_1 = \frac{p}{EJ} \frac{l^4}{16 \cdot 24} = \frac{p}{EJ} \frac{l^4}{384}$$

$$\bar{w} = w = \frac{p \cdot l^4}{384} (1 - \xi^2)^2$$

Allgemeine Polynomansätze $\bar{w} = \sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^n c_{\mu\nu} f_{\mu}(x) \cdot g_{\nu}(y)$

für verschiedene homogene Randbedingungen

Es werden nur die Polynome $f_{\mu}(x)$ betrachtet, die $g_{\nu}(y)$ sind genauso zu bilden.

1. Beidseitige Einspannung mit Symmetrie zur Mitte (wie oben)

Randbedingungen:

$$\xi = \pm 1: \quad f_{\mu} = \frac{df_{\mu}}{d\xi} = 0$$

Wegen der Symmetrie kommen nur geradzählige Potenzen in Frage.

Erster Ansatz:

$$f_1 = 1 + A_1 \cdot \xi^2 + A_2 \cdot \xi^4$$

Mit den Randbedingungen, z.B. für $\xi = +1$ ergibt sich:

$$B_1 = -2; \quad B_2 = 1, \text{ also:}$$

$$f_1 = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 = (1 - \xi^2)^2.$$

Dies ist die Gleichung (4.23).

Wichtig ist, daß bei der Weiterführung der Ansätze die Vollständigkeit gewahrt wird, um überhaupt eine Minimalfolge zu erzielen. Dies wird nach dem Weierstraßschen Satz durch die Potenzreihe gewährleistet. Außerdem wird die folgende Regel benutzt:

Es sei: $F(x) = f_1(x) f_2(x)$. Dann gilt:

$F'(a) = 0$, wenn $f_1(a) = f_2(a) = 0$ ist. Dies folgt aus

$$F'(a) = f_1'(a) \underbrace{f_2(a)}_{=0} + \underbrace{f_1(a)}_{=0} f_2'(a).$$

Demnach sind die weiteren Funktionen:

$$f_2 = (1 - \xi^2)^2 (1 - \xi^2) = (1 - \xi^2)^3$$

$$f_\mu = (1 - \xi^2)^{\mu+1} \quad (4.24)$$

Man kann die Polynome auch auf andere Weise fortsetzen:

$$f_\mu = 1 + A_1 \xi^{2\mu} + A_2 \xi^{2\mu+2}$$

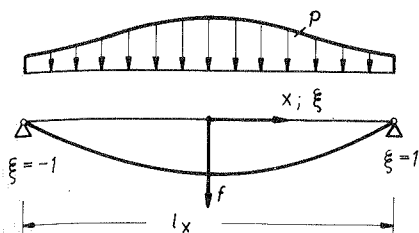
Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} f_\mu|_{\xi=1} = 0 &= 1 + A_1 + A_2 \\ f'_\mu|_{\xi=1} = 0 &= A_1 \cdot 2\mu + A_2 (2\mu + 2) \\ \underline{f_\mu = 1 - (1+\mu) \cdot \xi^{2\mu} + \mu \cdot \xi^{2\mu+2}} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} B &= \mu \\ A &= -(1+\mu) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Trigonometrischer Ansatz

$$f_\mu = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \xi\right) \cos\left(\mu \frac{\pi}{2} \xi\right); \quad \mu = 1, 3, 5 \dots \quad (4.26)$$

2. Beidseitige gelenkige Lagerung mit Symmetrie zur Mitte



$$x = \frac{l}{2} \xi ; \quad \frac{df}{d\xi} = f'$$

Randbedingungen: $\xi = \pm 1 ; f_{\mu} = f_{\mu}'' - 0$

Wieder kommen nur geradzahlige Potenzen in Frage.

Erster Ansatz:

$$f_1 = 1 + A_1 \xi^2 + A_2 \xi^4$$

Mit den beiden Randbedingungen, z.B. für $\xi = +1$ ergibt sich:

$$f_1 = 1 - \frac{6}{5} \xi^2 + \frac{1}{5} \xi^4$$

Für die Weiterführung wird beachtet:

Es sei: $F(\xi) = f_1(\xi) g(\xi)$

Dann ist: $F' = f_1' g + f_1 g'$; $F'' = f_1'' g + 2 f_1' g' + f_1 g''$

Gesucht ist eine symmetrische Potenzreihe für $g(\xi)$, so daß gilt: $g(\xi=0) \neq 0$;

$$g(\xi=1) \neq 0 ; g'(\xi=1) = 0$$

Dann ist offensichtlich: $F(\xi=1) = 0$; $F'(\xi=1) \neq 0$ und

$$F''(\xi=1) = 0.$$

Man erkennt, daß $g = 1 + (1 - \xi^2)^{2\mu}$ diesen Bedingungen genügt.

Damit lautet f_2 :

$$f_2 = \left(1 - \frac{6}{5} \xi^2 + \frac{1}{5} \xi^4\right) \left[1 + (1 - \xi^2)^{2\mu}\right]$$

Allgemein:

$$f_{\mu} = \left(1 - \frac{6}{5} \xi^2 + \frac{1}{5} \xi^4\right) \left[1 + (1 - \xi^2)^{2\mu}\right] \quad (4.27)$$

Ansatz für f_μ analog zu Gleichung (4.27)

$$f_\mu = 1 + A_1 \xi^{2\mu} + A_2 \xi^{2\mu+2}$$

Randbedingungen:

$$f_\mu / \xi = 1 = 0 = 1 + A_1 + A_2$$

$$f_\mu'' / \xi = 1 = 0 = A_1 \cdot 2\mu \cdot (2\mu - 1) + A_2 (2\mu + 2) (2\mu + 1)$$

$$A_1 [2\mu (2\mu - 1) - (2\mu + 2) (2\mu + 1)] = + (2\mu + 2) (2\mu + 1)$$

$$A_1 = - \frac{4\mu^2 + 6\mu + 2}{8\mu + 2}$$

$$A_2 = \frac{4\mu^2 - 2\mu}{8\mu + 2}$$

$$f_\mu = 1 - \frac{(\mu + 1) (2\mu + 1)}{4\mu + 1} \xi^{2\mu} + \frac{\mu (2\mu - 1)}{4\mu + 1} \xi^{2\mu + 2}$$

(4.28)

3. Einseitige Einspannung und einseitige gelenkige Lagerung



Bild 7

$$\text{Randbedingungen: } \xi = 0 : f_\mu = f_\mu'' = 0$$

$$\xi = 1 : f_\mu = f_\mu' = 0$$

Es müssen jetzt alle Potenzen auftreten, weil keine Symmetrie vorliegt.

Aus einem allgemeinen Ansatz:

$$f(\xi) = \alpha \cdot (\xi) \cdot \beta(\xi) \cdot \gamma(\xi)$$

läßt sich erkennen, daß der spezielle Ansatz

$$f_\mu(\xi) = \xi(1-\xi) \cdot \gamma_\mu(\xi)$$

geeignet ist.

Für $\xi = 0$ gilt $\gamma = 0$, für $\xi = 1$ gilt $\gamma + \gamma' = 0$.

Ansatz: $\gamma_{\mu} = \xi^{\mu} + A \cdot \xi^{\mu+1} \quad : \quad \mu = 1, 2, 3, \dots$

$$\gamma'_{\mu} = \mu \cdot \xi^{\mu-1} + (\mu+1) A \cdot \xi$$

$\gamma(\xi = 0) = 0$ identisch erfüllt.

$$\gamma(\xi = 1) + \gamma'(\xi = 1) = 0 = 1 + A + \mu + A(\mu+1) \rightarrow A = -\frac{\mu+1}{\mu+2}$$

Damit erhält man insgesamt den vollständigen Ansatz:

$$f_{\mu}(\xi) = \xi(1-\xi) \cdot \xi^{\mu} \cdot \left(1 - \frac{\mu+1}{\mu+2} \xi\right)$$

$$f_{\mu}(\xi) = \xi^{\mu+1} (1-\xi) \cdot \left(1 - \frac{\mu+1}{\mu+2} \xi\right) \quad \text{für } \mu = 1; 2, \dots \quad (4.29)$$

4.5 Das Abspalten gewöhnlicher Differentialgleichungen nach Picone [31] - Kantorowitsch - Krylow [25]*

Dieses Verfahren ist unmittelbar aus den Galerkinschen Gleichungen herleitbar. Der Grundgedanke ist, die Vergleichsfunktionen des Galerkinschen $m \cdot n$ -parametrischen Ansatzes nur in einer Veränderlichen, also in einer Richtung anzusetzen und für die andere Veränderliche unbekannte Funktionen einzuführen. In diesen sind auch die Ritzkonstanten enthalten. Die Plattengleichung wird in der y -Richtung näherungsweise und in der x -Richtung exakt gelöst.

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^n \chi_k(x) \cdot f_k(y) \quad (4.30)$$

$f_k(y)$: Entwicklungsfunktionen, die alle Randbedingungen in y -Richtung erfüllen.

$\chi_k(x)$: Unbekannte Funktionen in x -Richtung

Dies ist ein besonderer Produktansatz. Bei den jetzt ins Auge gefaßten Platten liegen in keiner Richtung Naviersche Randbedingungen vor. Damit ist die Entkopplung nach Maurice Levy mit trigonometrischen Funktionen unmöglich. Der Maurice - Levy - Ansatz lautet z.B. für Naviersche Randbedingungen in y -Richtung (Plattenbreite b):

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_k(x) \cdot \sin \frac{k\pi y}{b} ; \quad k = 1, 3, \dots \quad (4.31)$$

Da der Ansatz (4.30) die Plattengleichung nicht erfüllt, wird mit einem Galerkinprozeß in der y -Richtung wieder eine mittlere Approximation der zweiten Ableitungen w'' herbeigeführt. (siehe Kapitel 3.3). Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird nur in der y -Richtung angesetzt:

$$i\text{-te Gleichung: } \int_{y=0}^b (k \cdot \Delta \bar{w} - p) f_i(y) dy = 0 \quad (4.32)$$

* Im Schriftum wird die Methode fast nur nach Kantorowitsch-Krylow benannt.

Nach Durchführung der Integrationen erhält man n simultane gewöhnl. Differentialgleichungen 4. Ordnung für die Funktionen $\chi_1(x)$.

Einsetzen des Ansatzes Gleichung (4.30) in den Bipotentialoperator:

$$\Delta \Delta \bar{w} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d^4 \chi_k}{dx^4} f_k + 2 \frac{d^2 \chi_k}{dx^2} \frac{d^2 f_k}{dy^2} + \chi_k \frac{d^4 f_k}{dy^4} \right) \quad (4.33)$$

Abkürzungen für die Integrale:

$$\left. \begin{aligned} \int_{y=0}^b f_i \cdot f_k \, dy &= a_{ik} \quad ; \quad 2 \int_{y=0}^b f_i \frac{d^2 f_k}{dy^2} \, dy = b_{ik} \\ \int_{y=0}^b f_i \frac{d^4 f_k}{dy^4} \, dy &= c_{ik} \quad ; \quad \int_{y=0}^b f_i \cdot p(x, y) \, dy = p_i(x) \end{aligned} \right\} \quad (4.34)$$

Einführung der Matrizen:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_{(n,n)} &= (a_{ik}) \quad ; \quad \mathcal{B}_{(n,n)} = (b_{ik}) \quad ; \quad \mathcal{L}_{(n,n)} = (c_{ik}) \\ \text{und des Vektors: } \mathcal{P} &= (p_i) \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

Für die Ableitungen wird die Schreibweise eingeführt:

$$\frac{d^v \chi(x)}{dx^v} = \chi^{(v)} \quad (4.36)$$

Für den Vektor aus den unbekanntenen Funktionen χ_1 wird die Bezeichnung φ benutzt.

$$\left(\begin{array}{c} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \vdots \\ \chi_i \\ \vdots \\ \chi_n \end{array} \right) = \varphi \quad ; \quad \left(\begin{array}{c} \chi_1^{(v)} \\ \chi_2^{(v)} \\ \vdots \\ \chi_i^{(v)} \\ \vdots \\ \chi_n^{(v)} \end{array} \right) = \varphi^{(v)} \quad (4.37)$$

Nach Einführung von Gleichung (4.33) in die Gleichung (4.32) ergibt sich mit den Abkürzungen (4.34) bis (4.37) das gewöhnl. Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten:

$$\mathcal{A}_{(n,n)} \varphi_{(n,1)}^{(4)} + \mathcal{B} \varphi^{(2)} + \mathcal{L} \varphi = \frac{1}{K} \mathcal{P}_{(n,1)} \quad (4.38)$$

Zusätzlicher Galerkinprozeß bei doppelsymmetrischen Problemen

Es sei noch auf eine wesentliche Verbesserungsmöglichkeit bei doppelsymmetrischen Problemen hingewiesen. Die Lösungsfunktionen $\chi_1(x)$ sind i.a. ungleich den Ansatzfunktionen $f_1(y)$. Man erreicht die Symmetrie durch einen angehängten Galerkinprozeß, indem man die $\chi_1(x)$ für beide Richtungen verwendet.

Ansatz:
$$\bar{w} = \sum_{k=1}^n c_k \chi_k(x) \cdot \chi_k(y) \tag{4.39}$$

i-te Galerkinsche Gleichung:
$$\iint_F (\Delta \Delta \bar{w} - \frac{p}{K}) \chi_i(x) \chi_i(y) dx dy = 0 \tag{4.40}$$

Bei einer allseitig eingespannten quadratischen Platte war der Fehler für das maximale Feldmoment mit dem 1. Ansatz 18%. Nach dem zusätzlichen Galerkinprozeß sank der Fehler auf 3,5%.

Vergleichende Bemerkungen zu den Verfahren von Galerkin und Picone - Kantorowitsch - Krylow

Es ist offenkundig, daß nach Picone - Kantorowitsch - Krylow weniger Ansatzfunktionen erforderlich sind als bei dem Galerkin - Verfahren in zwei Richtungen, um eine gewünschte Genauigkeit zu erzielen. Durch die exakte Lösung der Plattengleichung in x - Richtung wird bei der gleichen Anzahl von Ansatzfunktionen die Fehlerbelastung $p^* = K \Delta \Delta \bar{w} - p$ bei Picone - Kantorowitsch - Krylow zu häufigerem Oszillieren gezwungen als bei Galerkin. Bei Galerkin können sich die Fehler über die gesamte Platte ausgleichen. Dieser Ausgleich kommt bei Picone - Kantorowitsch - Krylow an jeder Stelle x in y - Richtung zustande.

Die Lösung des Randwertproblems der Dgl. (4.38)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Lösung eines gewöhnlichen Dgl.- Systems mit konstanten Koeffizienten, siehe z.B. Zurmühl [35], Gantmacher [36].

Von Näherungsmethoden abgesehen, sollen drei Arten unterschieden werden.

1. Transformation in eine Dgl. höherer Ordnung für eine neue Funktion.
2. Lösung des ungeänderten Dgl.- Systems (4.38).
3. Reduktion in ein Dgl.- System 1. Ordnung mit entsprechend mehr Gleichungen.

Die 3. Methode ist für die elektronische Rechnung gut geeignet, weil sehr allgemeine, für viele Probleme geltende Programme aufgestellt werden können und weil mathematisch die Dgl. - Systeme 1. Ordnung am besten durchgearbeitet sind.

Bei dem Dgl.- System der 1. Ordnung liegt ein Anfangswertproblem vor. Das tatsächlich vorliegende Randwertproblem wird durch $(2n + 1)$ - fache Lösung des Anfangswertproblems, Auflösung eines $2n$ - gliedrigen Gleichungssystem und darauffolgende Superposition gelöst.

Diese Methode wurde für Flächentragwerke von Tottenham [14] und Chetty [37] benutzt und wird als "matrix progression method" bezeichnet. Bei den Stabwerken ist sie als Übertragungsmethode bekannt, die besonders Falk [13] entwickelte, siehe auch [15].

Die Methode von Picone - Kantorowitsch - Krylow ist günstig, wenn nicht in beiden Richtungen inhomogene Randbedingungen auftreten. Besonders wertvoll ist sie, wenn in einer Richtung allgemeine homogene und in der anderen Richtung allgemeine inhomogene Randbedingungen, also Durchlaufwirkungen vorhanden sind. Dabei ist die Übertragungsmethode geeignet, wenn in der Übertragungsrichtung die Querschnittswerte oder die Belastung häufig wechseln. Deshalb wurde diese Methode in [38] für die Programmierung von Einflußflächen für Brückenfahrbahnplatten benutzt. Mit homogenen

Randbedingungen an den Querträgern sind in Querrichtung von Kragarm zu Kragarm Vouten (durch Treppen) sowie die Durchlaufwirkung über biege- und torsionsweiche Längsträger formal einfach darstellbar.

Die Transformation des Dgl. - Systems (4.38) in ein Dgl. - System der 1. Ordnung

Das Dgl. - System (4.38) läßt sich mit der aus Gleichung (4.36) ergebenden Schreibweise:

$$\frac{d \varphi^{(r)}}{dx} = \varphi^{(r+1)} \quad (4.41)$$

als Dgl. - System der 1. Ordnung schreiben:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{(n,n)} & & & \\ & \xi_{(n,n)} & & \\ & & \xi_{(n,n)} & \\ & & & \xi_{(n,n)} \end{pmatrix}_{4n, 4n} \frac{d}{dx} \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi^{(3)} \\ \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(1)} \\ \varphi \end{pmatrix}}_{\eta} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \pi & -L_{(n,n)} & \pi & -L_{(n,n)} \\ \xi & \pi_{(n,n)} & \pi & \pi \\ \pi & \xi & \pi & \pi \\ \pi & \pi & \xi & \pi \end{pmatrix}}_{\gamma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi^{(3)} \\ \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(1)} \\ \varphi \end{pmatrix}}_{\eta} + \frac{1}{K} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ u_{(n,1)} \\ u \\ u \end{pmatrix}}_{p^*} \quad (4.42)$$

ξ ist die n reihige Einheitsmatrix.

π ist die n reihige Nullmatrix.

u ist der Nullvektor mit n Elementen.

In Gleichung (4.42) sind die Vektoren φ , $\varphi^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ als Unbekannte aufzufassen. Der Lösungsvektor η mit 4n Elementen ist:

$$\eta = \begin{pmatrix} \varphi^{(3)} \\ \varphi^{(2)} \\ \varphi^{(1)} \\ \varphi \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Abkürzende Schreibweise von Gleichung (4.42):

$$\mathcal{R} \frac{d}{dx} \eta = \gamma \eta + \frac{1}{K} p^* \quad (4.44)$$

Vormultiplikation von \mathcal{R}^{-1} (\mathcal{R}^{-1} existiert, wenn die f_k ein linear unabhängiges System bilden):

$$\underbrace{\mathcal{R}^{-1} \mathcal{R}}_{\mathcal{E}_{(4n, 4n)}} \cdot \frac{d}{dx} \eta = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{F} \eta + \frac{1}{K} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{P}^* \quad (4.45)$$

mit:

$$\mathcal{G}_{(4n, 4n)} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathcal{N} & \alpha^{-1} \mathcal{B} & \mathcal{N} & \alpha^{-1} \mathcal{L} \\ \mathcal{E} & \mathcal{N} & \mathcal{N} & \mathcal{N} \\ \mathcal{N} & \mathcal{E} & \mathcal{N} & \mathcal{N} \\ \mathcal{N} & \mathcal{N} & \mathcal{E} & \mathcal{N} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

und

$$\mathcal{G}_{(4n, 1)} = \mathcal{R}^{-1} \mathcal{P}^* = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} \mathcal{P} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{N} \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

ergibt sich Gleichung (4.45) zu:

$$\frac{d}{dx} \eta = \mathcal{G} \eta + \frac{1}{K} \mathcal{g} \quad (4.48)$$

Dieses ist das gesuchte Dgl. - System 1. Ordnung. Die Lösung des Anfangswertproblems nach Lagrange ist:

$$\eta = e^{\mathcal{G}x} \eta_0 - (\mathcal{E} - e^{\mathcal{G}x}) \mathcal{G}^{-1} \frac{1}{K} \mathcal{g} \quad (4.49)$$

η_0 ist der zu bestimmende Anfangsvektor. Das vorliegende Randwertproblem wird durch $\frac{4n}{2} + 1$ Lösungen des Anfangswertproblems (Übertragungen vom linken zum rechten Rand) erfasst. Die sich ergebenden $2n$ linearen inhomogenen Gleichungen bestimmen die $2n$ unbekanntene Elemente des Vektors η_0 .

Die transzendente Matrix $\Gamma_x = e^{\mathcal{G}x}$ ist durch die Taylorreihe definiert:

$$\Gamma_x = e^{\mathcal{G}x} = \mathcal{E} + \mathcal{G}x + \mathcal{G}^2 \frac{x^2}{2!} + \mathcal{G}^3 \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.50)$$

Übergang von Vektor η der partiellen Ableitungen der Durchbiegung w nach x zum Vektor $\bar{\eta}$ mit den Randschnittgrößen

$$\text{Der Vektor } \eta_{(n,1)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{(n,1)}^{(3)} \\ \varphi_{(n,1)}^{(2)} \\ \varphi_{(n,1)}^{(1)} \\ \varphi_{(n,1)} \end{pmatrix}$$

enthält nur partielle Ableitungen der Durchbiegungen w nach x , siehe Gleichung (4.30).

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^n \chi_k(x) \cdot f_k(y) = \varphi' \cdot f \quad (4.51)$$

$$\frac{\partial^r \bar{w}}{\partial x^r} = \varphi^{(r)'} f \quad (4.52)$$

Die Randschnittkräfte enthalten, z.B. infolge der Querkontraktion aber auch Ableitungen in y - Richtung.

$$\begin{aligned} \text{Biegemoment: } -\frac{m_x}{k} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &= \varphi^{(2)'} f + \mu \varphi' f^{(2)} \end{aligned} \quad (4.53)$$

Es ergibt sich das Problem, Summen durch Produkte darzustellen.

$$\text{Ansatz: } -\frac{m_x}{k} \stackrel{\text{so}}{=} \sum_{k=1}^n \alpha_k(x) \cdot r_k(y) = \alpha' w$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \alpha' &= (\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_k; \dots; \alpha_n) \\ w' &= (r_1; r_2; \dots; r_k; \dots; r_n) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\text{Querkraft: } -\frac{q_x}{K} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Ersatzkraft: } -\frac{\bar{q}_x}{K} &= \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \\ &= \varphi^{(3)'} f + \mu \varphi' f^{(2)} \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\text{Ansatz: } -\frac{\bar{q}_x}{K} \stackrel{\text{so}}{=} \sum_{k=1}^n \beta_k(x) s_k(y) = b' f$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } b' &= (\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_k; \dots; \beta_n) \\ f &= (s_1; s_2; \dots; s_k; \dots; s_n) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Aus den Gleichungen (4.53) und (4.54) ergibt sich:

$$-\frac{m_x(x,y)}{K} = \alpha' r = \varphi^{(2)'} f + \mu \varphi' f^{(2)} \quad (4.57)$$

Entsprechend aus Gleichung (4.35) und (4.36):

$$-\frac{\bar{q}_x(x,y)}{K} = b' f = \varphi^{(3)'} f + (2-\mu) \varphi^{(1)'} f^{(2)} \quad (4.58)$$

Es ist nicht möglich, aus den Gleichungen (4.57) und (4.58) die Vektoren $\varphi^{(2)}$ und $\varphi^{(3)}$ zu eliminieren.

Die Elimination ist möglich, wenn anstatt des Vektors $f_{(n,1)}(y)$ die Matrix $\tilde{f}_{(n,n)}(y)$ tritt und entsprechend für

$$\begin{aligned} f_{(n,1)}^{(v)} &= \frac{d^v f}{d y^v} \quad \text{die Matrix} \\ \tilde{f}_{(n,n)}^{(v)}(y) &= \frac{d^v}{d y^v} \tilde{f}(y). \end{aligned} \quad (4.59)$$

$\tilde{f}_{(n,n)}$ enthält die n Vektoren $f_1; f_2; \dots; f_k; \dots; f_n$ an n Stellen $y_1; y_2; \dots; y_i; \dots y_n$.

$$\tilde{f}_{(n,n)} = \begin{pmatrix} f_1(y_1) & f_2(y_1) & \dots & f_k(y_1) & \dots & f_n(y_1) \\ f_1(y_2) & f_2(y_2) & & & & \\ \vdots & & & & & \\ f_1(y_i) & & & f_k(y_i) & & \\ \vdots & & & & & \\ f_1(y_n) & & & & & f_n(y_n) \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Homogene Randbedingungen $m_x = 0$; $\bar{q}_x = 0$

$$\left. \begin{aligned} m_x = 0 : & \quad \varphi^{(2)'} \tilde{f} + \mu \varphi' \tilde{f}^{(2)} = 0 \\ \bar{q}_x = 0 : & \quad \varphi^{(3)'} \tilde{f} + (2-\mu) \varphi^{(1)'} \tilde{f}^{(2)} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

Transponieren und Vervielfachen von \tilde{f}^{i-1} :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}^{i-1} \mid & \quad \tilde{f}' \varphi^{(2)} + \mu \tilde{f}^{(2)'} \varphi \\ \tilde{f}^{i-1} \mid & \quad \tilde{f}' \varphi^{(3)} + (2-\mu) \tilde{f}^{(2)'} \varphi^{(1)} \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

\tilde{f}^{i-1} existiert, wenn die Spaltenvektoren von \tilde{f} linear unabhängig sind.

Einführung von $\tilde{f}^* = \tilde{f}^{i-1} \tilde{f}_2^{(2)'} \quad (4.63)$

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(2)} &= -\mu \tilde{f}^* \varphi \\ \varphi^{(3)} &= -(2-\mu) \tilde{f}^* \varphi^{(1)} \end{aligned} \right\} (4.64)$$

Allgemeine inhomogene Bedingungen

Ansatz: Es sei $w(y) = \int(y) = f(y) \quad (4.65)$

siehe Gleichung (4.54) und (4.55).

Die Stützwerte der Funktionen in y - Richtung seien für Biegemomente und Ersatzquerkräfte gleich. Dann sind, wieder mit der Matrix $\tilde{f}(y)$, die Biegemomente und die Ersatzquerkräfte an n Stellen y_i darstellbar als die Vektoren, siehe Gleichung (4.61)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{M_x(x, y_i)}{K} &= \alpha' \tilde{f} = \varphi^{(2)'} \tilde{f} + \mu \varphi' \tilde{f}^{(2)} \\ -\frac{Q_x(x, y_i)}{K} &= \beta' \tilde{f} = \varphi^{(3)'} \tilde{f} + (2-\mu) \varphi^{(1)'} \tilde{f}^{(2)} \end{aligned} \right\} (4.66)$$

Transponieren und Vormultiplizieren von \tilde{f}^{i-1} :

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}^{i-1} \mid \tilde{f}' \alpha &= \tilde{f}' \varphi^{(2)} + \mu \tilde{f}^{(2)'} \varphi \\ \tilde{f}^{i-1} \mid \tilde{f}' \beta &= \tilde{f}' \varphi^{(3)} + (2-\mu) \tilde{f}^{(2)'} \varphi^{(1)} \end{aligned} \right\} (4.67)$$

Mit Gleichung (4.43)

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \varphi^{(2)} + \mu \tilde{f}^* \varphi \\ \beta &= \varphi^{(3)} + (2-\mu) \tilde{f}^* \varphi^{(1)} \end{aligned} \right\} (4.68)$$

Damit erhält man die gesuchten Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(2)} &= \alpha - \mu \tilde{f}^* \varphi \\ \varphi^{(3)} &= \beta - (2-\mu) \tilde{f}^* \varphi^{(1)} \end{aligned} \right\} (4.69)$$

Einsetzen der Beziehungen (4.69) in das Dgl. - System (4.38):

$$\begin{aligned} \alpha \varphi^{(3)} + \beta \varphi^{(2)} + \mathcal{L} \varphi &= \frac{1}{K} \mathcal{P} \\ \frac{d}{dx} \varphi^{(2)} &= \varphi^{(3)} \\ \frac{d}{dx} \varphi^{(1)} &= \varphi^{(2)} \\ \frac{d}{dx} \varphi &= \varphi^{(1)} \end{aligned}$$

Man erhält:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{d}{dx} b - (2-\mu) \alpha \tilde{f}^* \frac{d}{dx} \varphi^{(1)} + \mathcal{B} \alpha - \mu \mathcal{B} \tilde{f}^* \varphi + \mathcal{L} \varphi - \frac{1}{K} \varphi \\ \frac{d}{dx} \alpha - \mu \tilde{f}^* \frac{d}{dx} \varphi - b - (2-\mu) \tilde{f}^* \varphi^{(1)} \\ \frac{d}{dx} \varphi^{(1)} = \alpha - \mu \tilde{f}^* \varphi^{(1)} \\ \frac{d}{dx} \varphi = \varphi^{(1)} \end{aligned} \right\} (4.70)$$

Nach Einsetzen der 3. Gleichung von Gl.(4.70) in die 1. Gleichung:

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d}{dx} b &= [(2-\mu) \alpha \tilde{f}^* - \mathcal{B}] \alpha - [\mu(2-\mu) \alpha (\tilde{f}^*)^2 - \mu \mathcal{B} \tilde{f}^* + \mathcal{L}] \varphi + \frac{1}{K} \varphi \\ \frac{d}{dx} \alpha &= b - 2(1-\mu) \tilde{f}^* \cdot \varphi^{(1)} \\ \frac{d}{dx} \varphi^{(1)} &= \alpha - \mu \tilde{f}^* \varphi \\ \frac{d}{dx} \varphi &= \varphi^{(1)} \end{aligned} \quad (4.71)$$

Mit den Vektoren $\bar{y} = \begin{pmatrix} b \\ \alpha \\ \varphi^{(1)} \\ \varphi \end{pmatrix}_{(4n,1)}$ $\bar{y}^* = \begin{pmatrix} \varphi \\ u \\ u \\ u \end{pmatrix}_{(4n,1)}$ (4.72)

und den Matrizen, siehe Gleichung (4.42):

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ & \varphi & & \\ & & \varphi & \\ & & & \varphi \end{pmatrix}_{(4n,4n)}$$

$$\bar{F} = \begin{pmatrix} \pi & [(2-\mu) \alpha \tilde{f}^* - \mathcal{B}] \alpha & \pi & -[\mu(2-\mu) \alpha (\tilde{f}^*)^2 - \mu \mathcal{B} \tilde{f}^* + \mathcal{L}] \\ \varphi & \pi & -2(1-\mu) \tilde{f}^* & \pi \\ \pi & \varphi & \pi & -\mu \tilde{f}^* \\ \pi & \pi & \varphi & \pi \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

ergibt sich die Matrixgleichung, siehe Gl.(4.42 bis 4.44):

$$\mathcal{R} \frac{d}{dx} \bar{y} = \bar{F} \bar{y} + \frac{1}{K} \bar{y}^* \quad (4.74)$$

Mit der explizit ausführbaren Transformation analog Gl. (4.46)

$$\bar{g} = \mathcal{R}^{-1} \bar{F} \quad (4.75)$$

erhält man das Gleichung (4.48) entsprechende Dgl. - System 1. Ordnung:

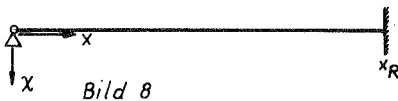
$$\frac{d}{dx} \bar{y} = \bar{g} \bar{y} + \frac{1}{K} y \quad (4.76)$$

Die Ermittlung der Matrix $\bar{g}(y)$ ist noch völlig offen. Sie kann aus den Polynomansätzen entweder an diskreten Punkten oder durch einen Galerkinprozeß bestimmt werden.

Die Ermittlung des Anfangsvektors y_0

Das Randwertproblem wird durch $(\frac{4n}{2} + 1)$ - malige Lösung eines Anfangswertproblems und nachfolgende Auflösung von $2n$ linearen Gleichungen erfaßt. Bei homogenen Randbedingungen am linken Rand ist für Hälfte der Elemente des Vektors y_0 null.

Beispiel für $n = 1$; d.h. $\bar{w} = \chi_1 \cdot f_1$



$$y_{(4,1)} = \begin{pmatrix} \psi_{(1,1)}^{(3)} \\ \psi_{(1,1)}^{(2)} \\ \psi_{(1,1)}^{(1)} \\ \psi_{(1,1)}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1^{(3)} \\ \chi_1^{(2)} \\ \chi_1^{(1)} \\ \chi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \approx \bar{q}_0 \\ 0 \\ \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Links gelenkige Lagerung,
rechts Einspannung.

Die Anfangsquerkraft \bar{q}_0 und der Anfangsdrehwinkel φ_0 sind zu bestimmen.

Am rechten Rand muß sein:

$$y_{R(4,1)} = \begin{pmatrix} \chi_R^{(3)} \\ \chi_R^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Durchbiegung und Drehwinkel} \\ \text{sind null.} \end{matrix}$$

Mit den homogenen Bedingungen am rechten Rand werden die unbekannt Elemente von $y(0) = y_0$ am linken Rand bestimmt.

Der Randvektor y_R läßt sich durch Superposition von Einheitszuständen multipliziert mit den unbekannt Elementen von y_0 darstellen, siehe Gleichung (4.49).

Mit $e^{\mathcal{G} \cdot \mathbf{x}_R} = \sqrt{R}$ ist:

$$\mathcal{G}_R = \begin{pmatrix} \chi_R^{(3)} \\ \chi_R^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \chi_0^{(3)} + \sqrt{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \chi_0^{(1)} - \mathcal{G}_{RP} \quad (4.77)$$

mit der Partikularlösung, siehe Gleichung (4.49):

$$\mathcal{G}_{RP} = -\frac{1}{K} (\mathcal{E} - \sqrt{R}) \mathcal{G}^{-1} \mathcal{G} \quad (4.78)$$

Aus der Gleichung (4.77) werden die beiden letzten Gleichungen "herausgesiebt", um $\chi_0^{(3)}$ und $\chi_0^{(1)}$ zu bestimmen.

Die vier Zeilenvektoren von \sqrt{R} seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$.

Dann lauten die Bestimmungsgleichungen für $\chi_0^{(3)}$ und $\chi_0^{(1)}$ (3. und 4. Zeile der Matrixengleichung (4.78)):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \beta_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \chi_0^{(3)} + \beta_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \chi_0^{(1)} - \chi_{RP}^{(1)} \\ 0 &= \beta_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \chi_0^{(3)} + \beta_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \chi_0^{(1)} - \chi_{RP} \end{aligned} \right\} \quad (4.79)$$

oder:

$$\left[\begin{pmatrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi_0^{(3)} \\ \chi_0^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{RP}^{(1)} \\ \chi_{RP} \end{pmatrix} \quad (4.80)$$

Hieraus $\chi_0^{(3)}$ und $\chi_0^{(1)}$.

Eine einfachere Darstellung ergibt sich, wenn man mit Hilfe zweier Matrizen \hat{K}_1 und \hat{K}_2 die gesamten Vektoren \mathcal{G}_0 und \mathcal{G}_{RP} anschreibt.

Die verschwindenden Elemente von \mathcal{G}_R werden durch die Matrix festgelegt.

$$\hat{\mathcal{G}}_{R(2n,1)} = \hat{K}_{R(2n,4n)} \mathcal{G}_{(4n,1)} \quad (4.81)$$

Im betrachteten Beispiel der Einspannung mit $n = 1$ ist:

$$\hat{K}_R = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{(2,4)} \quad (4.82)$$

Die unbekanntenen, nicht verschwindenden Elemente von η_0 werden durch die Matrix \bar{k}_0 festgelegt.

$$\hat{\eta}_0^{(2n,1)} = \bar{k}_0^{(2n,4n)} \cdot \eta_0^{(4n,1)} \quad (4.83)$$

Im betrachteten Beispiel der gelenkigen Lagerung mit $n = 1$ ist:

$$\bar{k}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

Damit läßt sich das Gleichungssystem (4.80) für η_0 in die Form bringen:

$$\bar{k}_R \bar{k}_R' \bar{k}_0' \bar{k}_0 \eta_0 = \bar{k}_R \eta_{RP} \quad (4.85)$$

Ordnung: $(2n, 4n) \cdot (4n, 4n) \cdot (4n, 2n) \cdot (2n, 4n) \cdot (4n, 1) = (2n, 4n) \cdot (4n, 1)$

Eine explizite Darstellung von η_0 hat praktisch keinen Wert, da man im Rechenautomaten die Inversion vermeidet.

Da \bar{k}_R keine quadratische Matrix ist, ist sie nicht eliminierbar

Im betrachteten Beispiel ist mit Gl.(4.84)

$$\bar{k}_0' \bar{k}_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

Der allgemeine Fall mit n Ansatzfunktionen $f_{y...}$

Man kann unmittelbar Gl.(4.85) beibehalten, wenn man die Matrizen \bar{k}_R und \bar{k}_0 allgemein darstellt.

Für das Beispiel links ($x = 0$) gelenkiger Lagerung und Einspannung am rechten Rand ist analog zu Gl.(4.82):

$$\bar{k}_R = \begin{pmatrix} \kappa_{(n,n)} & \kappa & \xi_{(n,n)} & \kappa \\ \kappa & \kappa & \kappa & \xi \end{pmatrix}_{(2n,4n)} \quad (4.87)$$

Entsprechend zu Gl.(4.84):

$$\bar{k}_0 = \begin{pmatrix} \kappa_{(n,n)} & \kappa & \kappa & \kappa \\ \kappa & \kappa & \xi & \xi \end{pmatrix}_{(2n,4n)} \quad (4.88)$$

Die Ermittlung des Lösungsvektors η an jeder gewünschten Stelle x geschieht mit der Gl.(4.49).

Jetzt sollen an m Stellen x_i im Schnitt y_k die Durchbiegungen \bar{w} (Vektor \bar{w}) sowie die partiellen Ableitungen angegeben werden,

z.B.
$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \bar{w}'^{(1)}$$

Nach Gleichung (4.51) ist:

$$\bar{w}_{i,k} = \sum_{r=1}^n \chi_r(x_i) \cdot f_r(y_k) = \varphi'(x_i) \cdot f(y_k) = f'(y_k) \cdot \varphi(x_i) \quad (4.89)$$

$$\varphi(x_i) = \begin{pmatrix} \pi & & & \\ & \pi & & \\ & & \pi & \\ & & & \varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} \eta_j(x_i)_{(4n,1)} \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ (4n,4n) \end{matrix}$$

$$\bar{w}'_{i,k} = f'(y_k) = \begin{pmatrix} \pi & & & \\ & \pi & & \\ & & \pi & \\ & & & \varphi \end{pmatrix} \eta_j(x_i) \quad (4.90)$$

$$\bar{w}''_{i,k} = f''(y_k) = \begin{pmatrix} \pi & & & \\ & \pi & & \\ & & \pi & \\ & & & \varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} \phi(x) \\ \\ \\ (4n,4n) \end{matrix} \quad (4.91)$$

mit $\phi(x) = (\eta_j(x_1); \eta_j(x_2); \dots; \eta_j(x_1); \dots; \eta_j(x_m)) \quad (4.92)$

Entsprechend ergibt sich:

$$\frac{\partial \bar{w}''_{i,k}}{\partial x} = f''(y_k) \begin{pmatrix} \pi & & & \\ & \pi & & \\ & & \pi & \\ & & & \varphi \end{pmatrix} \cdot \phi(x) \quad (4.93)$$

Die Berechnung der Matrix $\Gamma_x = e^{G \cdot x}$ durch Reihenentwicklung

Bei Verwendung der Reihendarstellung Gl.(4.50) sind etwa 30 - 40 Reihenglieder und damit Matrizenmultiplikationen erforderlich, um Γ_x auf durchweg 10 signifikante Ziffern zu bringen. Mit der Reihendarstellung ergeben sich lange Rechenzeiten, wenn die Ergebnisvektoren an sehr vielen Stellen x berechnet werden sollen. Die Reihe muß an jeder Stelle x neu ausgewertet werden.

Es ist rechentechnisch viel günstiger, sofort $e^{G \cdot x} \cdot \eta_0$ zu bilden,

als zuerst $e^{g \cdot x}$ auszurechnen und dann mit η_0 zu multiplizieren. Gleichung (4.50) lautete:

$$\bar{r}_x = e^{g \cdot x} = \mathcal{E} + x \cdot g + \frac{x^2}{2!} \cdot g^2 + \frac{x^3}{3!} \cdot g^3 + \dots$$

Jedes neue Reihenglied erfordert eine Matrizenmultiplikation. Hingegen ist in

$$e^{g \cdot x} \eta_0 = \eta_0 + \underbrace{x \cdot g \eta_0}_{\eta_{(1)}} + \underbrace{\frac{1}{2} x \cdot g \cdot g \eta_{(1)}}_{\eta_{(2)}} + \underbrace{\frac{1}{3} x \cdot g \cdot g \cdot g \eta_{(2)}}_{\eta_{(3)}} + \dots \quad (4.94)$$

jeweils nur eine Multiplikation von einer Matrix mit einem Vektor vorzunehmen

$$e^{g \cdot x} \eta_0 = \eta_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \eta_{(v)} ; \quad \eta_{(v)} = \frac{x}{v} g \eta_{(v-1)}$$

$$e^{g \cdot x} \eta_0 = \eta_0 + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{x^v}{v!} g^v \eta_{(0)} \quad \text{mit} \quad \eta_{(0)} = \eta_0 \quad (4.95)$$

Ähnlichkeitstransformation von $e^{g \cdot x}$

Um die Matrix g dimensionslos zu machen, kann eine Ähnlichkeitstransformation durchgeführt werden.

$$g^* = p^{-1} \cdot g \cdot p \quad (4.96)$$

Es gilt:

$$e^{p^{-1} g x p} = p^{-1} e^{g x} p, \quad (4.97)$$

wie man durch Aufschreiben der Taylorreihe für den linken Ausdruck von Gleichung (4.97) zeigen kann. Hierdurch ergeben sich wesentliche Rechenvorteile.

$$\begin{aligned} e^{p^{-1} g x p} &= \mathcal{E} + p^{-1} g p x + p^{-1} \underbrace{g p^{-1} g p}_{g^2} \frac{x^2}{2!} + \dots \\ &= p^{-1} \mathcal{E} p + p^{-1} g \cdot x p + p^{-1} g^2 \frac{x^2}{2!} p + \dots \\ &= p^{-1} \left(\underbrace{\mathcal{E} + g \cdot x + g^2 \frac{x^2}{2!} + \dots}_{e^{g x}} \right) p \end{aligned}$$

Für die folgende Spektralzerlegung ist wichtig, daß g^* dieselben Eigenwerte wie g hat.

Die Berechnung der Matrix $e^{\mathcal{G} \cdot x}$ durch "Spektralzerlegung"

Die Matrizenfunktion $e^{\mathcal{G} \cdot x}$ besitzt ein Ersatzpolynom $f(\mathcal{G})$, in das die Eigenwerte der Matrix \mathcal{G} eingehen. Mit dem Ersatzpolynom ist die Matrizenfunktion exakt darstellbar. Neben diesem Vorteil ist wesentlich, daß an verschiedenen Stellen x nicht jeweils eine völlig neue Matrix zu ermitteln ist wie bei der Reihenentwicklung, sondern daß die Hauptarbeit nur einmal durchzuführen ist.

Es gilt, siehe z.B. [35] , [36] (\mathcal{G} ist $4n$ - reihig):

$$e^{\mathcal{G}x} = f(\mathcal{G}) = \sum_{\nu=1}^{4n} e^{\lambda_{\nu}x} \cdot \frac{m_{\nu}(\mathcal{G})}{m_{\nu}(\lambda_{\nu})} ; \quad \nu = 1; 2 \dots 4n \quad (4.98)$$

Die λ_{ν} sind die Eigenwerte des Matrizen Eigenwertproblems

$$(\mathcal{G} - \lambda \mathcal{E}) \eta = 0 \quad (4.99)$$

Der Rang der Matrix \mathcal{G} sei $4n$. Die Eigenwerte λ_{ν} seien alle verschieden, dann sind die Elementarteiler linear.

Damit gilt:

$$m_{\nu}(\lambda) = \frac{m(\lambda)}{\lambda - \lambda_{\nu}} = \frac{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{4n})}{\lambda - \lambda_{\nu}} \quad (4.100)$$

$m(\lambda)$ ist das Minimalpolynom oder die charakteristischen Gleichung. Die Nullstellen λ_{ν} sind also alle verschieden.

$m_{\nu}(\lambda)$ sind die Lagrangeschen Interpolationspolynome.

$m_{\nu}(\mathcal{G})$ ist das Matrizenpolynom (Cayley - Hamiltonsche Gleichung).

Schwieriger wird die Berechnung des Ersatzpolynoms bei mehrfachen Nullstellen der charakteristischen Gleichung, also nichtlinearen Elementarteilern von \mathcal{G} .

Darstellung von $e^{g \cdot x}$ für die Einfachreihenlösung der Platte

Ansatz:
$$w = \sum_v \chi_v(x) \cdot \sin v \frac{\pi y}{b} \quad (4.104)$$

d.h. Naviersche Randbedingungen bei $y = 0$ und b . Mit den Sinusansätzen ergibt sich eine vollständige Orthogonalisierung, so daß jedes Fourierglied für sich betrachtet wird.

Man erhält die Übertragungsmatrix g_v , siehe Gleichung (4.75):

$$g_v = \begin{pmatrix} 0 & \mu \frac{v^2 \pi^2}{b^2} & 0 & (1-\mu^2) \frac{v^4 \pi^4}{b^4} \\ 1 & 0 & -2(1-\mu) \frac{v^2 \pi^2}{b^2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \mu \frac{v^2 \pi^2}{b^2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.105)$$

Herstellung einer dimensionslosen Matrix g_v^*

Der Vektor $\eta_{v(4,1)}$ wird umgeformt in:

$$\eta_v = P \cdot \eta_v^* \quad (4.106)$$

mit
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^3} & & & \\ & \frac{1}{b^2} & & \\ & & \frac{1}{b} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

Mit der dimensionslosen Veränderlichen $\xi = \frac{x}{b}$ ergibt sich das Dgl. - System (4.48) zu:

$$\frac{d}{d\xi} (P \eta_v^*) = g_v P \eta_v^*$$

$$\frac{d}{d\xi} \eta_v^* = \frac{b \cdot P^{-1} g_v P}{g_v^*} \eta_v^* \quad (4.108)$$

Die dimensionslose Matrix g_v^* ist:

$$g_v^* = \begin{pmatrix} 0 & \mu v^2 \pi^2 & 0 & (1-\mu^2) v^4 \pi^4 \\ 1 & 0 & -2(1-\mu)v^2 \pi^2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \mu v^2 \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.109)$$

Die charakteristische Gleichung für das spezielle Eigenwertproblem

$$(g_v^* - \lambda \cdot \mathcal{E}) \cdot \eta_v^* = 0$$

lautet:

$$\det |g_v^* - \lambda \mathcal{E}| = 0$$

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 v^2 \pi^2 + v^4 \pi^4 = 0 \quad (4.110)$$

Die Eigenwerte sind zwei Doppelwurzeln:

$$\lambda_{1,2} = +v\pi \quad ; \quad \lambda_{3,4} = -v\pi \quad (4.111)$$

Die Eigenwerte der Matrix

$$g_v^* \cdot \frac{x}{a} \quad \text{sind} \quad \bar{\lambda} = \lambda \frac{x}{a}.$$

$\frac{x}{a} = \xi$ ist die dimensionslose Koordinate.

Bezeichnung: $\varepsilon = \bar{\lambda}_{1,2} = +v\pi \xi \quad ; \quad -\varepsilon = \bar{\lambda}_{3,4} = -v\pi \xi \quad (4.112)$

Die Matrix $\Gamma_v^*(\xi) = e^{g_v^* \cdot \xi}$ ergibt sich mit dem Cayley - Hamiltonschen Theorem zu:

$$\Gamma_v^*(\xi) = f(g_v^* \cdot \xi) = c_0 \mathcal{E} + c_1 g_v^* \cdot \xi + c_2 (g_v^* \cdot \xi)^2 + c_3 (g_v^* \cdot \xi)^3 = P(g_v^* \cdot \xi) \quad (4.113)$$

Die Bedingungsgleichungen für die Konstanten c_i sind:

$$f(\bar{\lambda}_i) = P(\bar{\lambda}_i)$$

und bei Mehrfachwurzeln:

$$\frac{df}{d\bar{\lambda}_i} = \frac{dP}{d\bar{\lambda}_i} \quad \text{usw.}$$

} (4.114)

Mit dem Minimalpolynom

$$f(\bar{\lambda}) = c_0 + c_1 \bar{\lambda} + c_2 \bar{\lambda}^2 + c_3 \bar{\lambda}^3$$

$$\frac{df}{d\bar{\lambda}} = c_1 + 2c_2 \bar{\lambda} + 3c_3 \bar{\lambda}^2$$

} (4.115)

lauten die Bedingungsgleichungen für die Konstanten c_1 , siehe Gleichung (4.112):

$$\left. \begin{aligned} e^\epsilon &= c_0 + c_1 \epsilon + c_2 \epsilon^2 + c_3 \epsilon^3 & (1) \\ e^\epsilon &= c_1 + c_2 2\epsilon + c_3 3\epsilon^2 & (2) \\ e^{-\epsilon} &= c_0 - c_1 \epsilon + c_2 \epsilon^2 - c_3 \epsilon^3 & (3) \\ e^{-\epsilon} &= c_1 - c_2 2\epsilon + c_3 3\epsilon^2 & (4) \end{aligned} \right\} (4.116)$$

Umordnung:

$$\begin{aligned} (1) + (3) : & +c_0 & +c_2 \epsilon^2 & = \frac{e^\epsilon + e^{-\epsilon}}{2} = \cosh \epsilon \\ (1) - (3) : & +c_1 \cdot \epsilon & +c_3 \cdot \epsilon^3 & = \frac{e^\epsilon - e^{-\epsilon}}{2} = \sinh \epsilon \\ (2) + (4) : & +c_1 & +c_3 3\epsilon^2 & = \frac{e^\epsilon + e^{-\epsilon}}{2} = \cosh \epsilon \\ (2) - (4) : & & +c_2 2\epsilon & = \frac{e^\epsilon - e^{-\epsilon}}{2} = \sinh \epsilon \end{aligned}$$

Die Lösungen sind:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \cos \epsilon - \frac{\epsilon}{2} \sinh \epsilon & c_2 &= \frac{1}{2\epsilon} \sinh \epsilon \\ c_1 &= -\frac{1}{2} \cosh \epsilon + \frac{3}{2\epsilon} \sinh \epsilon & c_3 &= \frac{1}{2\epsilon^2} \cosh \epsilon - \frac{1}{2\epsilon^3} \sinh \epsilon \end{aligned} \right\} (4.117)$$

Weiterhin ist es bei der Einfachreihenlösung möglich, die Matrix $e^{g_r^* \epsilon}$ unmittelbar aus dem Funktionssystem der homogenen Lösung der Plattengleichung zu gewinnen. Dies ist rechentechnisch sehr günstig.

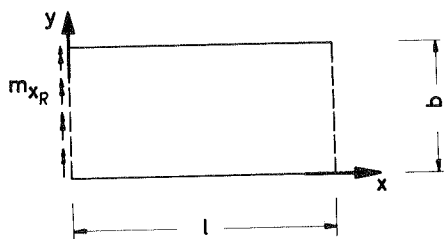
Numerische Schwierigkeiten

Bei den Übertragungen $\eta(x_R) = e^{g \cdot x_R} \eta_0$ können sich Ungenauigkeiten einstellen, wenn über sehr lange Felder oder über viele Abschnitte übertragen wird. Derselbe Effekt tritt bei höheren Reihengliedern auch in kürzeren Feldern auf. In allen diesen Fällen werden die Elemente der Matrix $e^{g \cdot x_R}$ zahlenmäßig sehr groß. Da aber für eine endliche Wirkung η_0 an der Stelle $x = 0$ am Rande x_R auch nur eine Wirkung gleicher Größenordnung vorhanden sein kann, ergeben sich die Elemente von $\eta(x_R)$ als kleine Differenzen sehr großer Zahlen. Bei praktischen Plattenberechnungen waren nach etwa sieben Fouriergliedern ($n = 7$) alle neun Mantissenstellen des Rechenautomaten falsch.

Aus der statischen Anschauung läßt sich leicht erkennen, daß in den angeführten Fällen nur noch eine sehr geringe Beeinflussung der beiden betrachteten Ränder vorliegt, so daß bei hohen Reihengliedern nur noch aufgeschaukelte Fehler am rechten Rand auftreten. In der Rechnung ist dann eine Entkopplung der Ränder vorzunehmen.

Sehr deutlich kann man diesen Effekt an den Bedingungsgleichungen für die Integrationskonstanten der homogenen Lösung der Platte an Hand eines einfachen Randlastfalls sehen. Für ein großes Verhältnis $\frac{l}{b}$, oder großes n_1 , sind nur die beiden ersten Gleichungen des Systems (4.120) von Interesse. Die Determinante des gesamten Gleichungssystems (4.120) wird immer kleiner, es liegt ein "schleichender" Rangabfall vor. Es ist übrigens zweckmäßig, für die vom rechten Rand ausgehenden Wirkungen die Koordinatentransformationen $x' = l - x$ durchzuführen.

Die Rechteckplatte mit Randbelastung an einem Rand



Die Ränder $y = 0$ und $y = b$ sind Navier-gelagert, die Ränder $x = 0$ und $x = l$ sind frei.

$$m_x|_{Rand} = \sum_n m_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.118)$$

Bild 9

Rechteckplatte mit Belastung durch ein Randmoment:

Einfachreihenlösung der Dgl. $\Delta \Delta w = 0$

$$w = \sum_n X_n(x) \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.119)$$

(erfüllt alle Randbedingungen in y - Richtung)

ergibt die gewöhnliche Dgl.:

$$\frac{d^4 X_n}{dx^4} - 2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \frac{d^2 X_n}{dx^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} X_n = 0$$

Ansatz: $X_n(x) = e^{\lambda x}$

Charakteristische Gleichung: $\lambda^4 - 2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \lambda^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 = 0$

Bezeichnung: $\frac{n\pi}{b} = \beta$; $\lambda_{1,2} = +\beta$; $\lambda_{3,4} = -\beta$

$X_n(x) = A \cosh \beta x + B x \cosh \beta x + C \sinh \beta x + D x \sinh \beta x$

Für $l = \infty$ muß gelten: $A = -C$; $B = -D$

Randbedingungen in x - Richtung:

$$\begin{array}{ll} x = 0: & m_x = m_{xR} \\ & q_x = 0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} x = l: & m_x = 0 \\ & q_x = 0 \end{array}$$

Es sei: Querkontraktion $\mu = 0$

$$m_x = -K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; q_x = -K \frac{\partial(\Delta w)}{\partial x} ; \bar{q}_x = -K \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

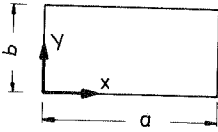
Gleichungssystem für die Integrationskonstanten:

	A	B	C	D	
$x=0: m_x:$	β			2	$= -\frac{m_n}{K \cdot \beta}$
$q_x:$		1	$-\beta$		$= 0$
$x=l: m_x:$	$\beta \cosh \beta l$	$\beta l \cosh \beta l + 2 \sinh \beta l$	$\beta \sinh \beta l$	$\beta l \sinh \beta l + 2 \cosh \beta l$	$= 0$
$q_x:$	$-\beta \sinh \beta l$	$-\beta l \sinh \beta l + \cosh \beta l$	$-\beta \cosh \beta l$	$-\beta l \cosh \beta l + \sinh \beta l$	$= 0$

Für das Übertragungsverfahren sind hier im wesentlichen zwei Abhilfen möglich, entweder das Rechnen mit doppelter Wortlänge, was die Rechenzeit etwa vervierfacht oder das Zwischenschalten des Formänderungsgrößenverfahrens über Lagern oder auch im Feld einer Platte. Hiermit wird die Übertragungslänge verkleinert. Die Drehwinkel und Verschiebungen werden an diesen Stellen als Unbekannte eingeführt und alle Übertragungen für die Einheitsdeformationen und die äußeren Lasten im Starrsystem durchgeführt.

Bei Durchlaufplatten über biege - und torsionselastische Stützen mit Vouten, für welche die Plattendicke treppenförmig abgesetzt wird, hat sich die kombinierte Anwendung des Übertragungsverfahrens und des Formänderungsgrößenverfahrens sehr gut bewährt. Das Übertragungsverfahren zeigt seine Stärke bei den vielen Plattenabschnitten infolge veränderlicher Dicke, während das Formänderungsgrößenverfahren die rechentechnischen Schwierigkeiten behebt. Auf diese Weise wurde in [38] ein Programm in Algolschreibweise zur Berechnung der Einflußflächen von Brückenfahrbahnplatten entwickelt. Als Singularlösungen dienen die Singularitäten nach Happel und Pucher.

4.6. Die Trefftzischen Gleichungen für verschiedene Randbedingungen



Die Randbedingungen seien völlig offen, jedoch homogen. Es sind keine elastischen Randlagerungen vorhanden.

Das Näherungspotential setzt sich aus drei Anteilen zusammen.

$$\bar{\pi} = \bar{\pi}_i + \bar{\pi}_a + \bar{\pi}_{aR}$$

Nach den Gleichungen (4.6) und (4.7) ist:

$$\bar{\pi}_i = K \iint_F \left\{ \frac{1}{2} (\Delta \bar{w})^2 - (1-\mu) [\bar{w}'' \bar{w}''' - (\bar{w}')^2] \right\} dx dy \quad (4.121)$$

$$\bar{\pi}_a = - \iint_F \rho \bar{w} dx dy \quad (4.122)$$

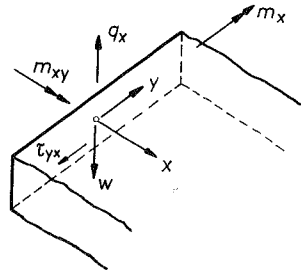
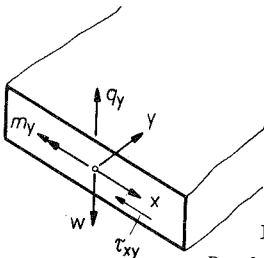


Bild 10

Randschnittgrößen

An den Rändern $y = 0$ und $y = b$ ergeben sich die Integrale:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{aR_1}(y=0;b) = -2 A_{aR}(y=0;b) = & - \int_{x=0}^a [-\bar{q}_y \bar{w} + \bar{m}_y \bar{w}' + \bar{m}_{yx} \bar{w}']_{y=0}^{y=b} dx + \\ & + \int_{x=0}^a [-\bar{q}_y \bar{w} + \bar{m}_y \bar{w}' + \bar{m}_{yx} \bar{w}']_{y=0}^{y=b} dx \end{aligned}$$

$$\bar{\pi}_{aR_1}(y=0;b) = \int_{x=0}^a [-\bar{q}_y \bar{w} + \bar{m}_y \bar{w}' + \bar{m}_{yx} \bar{w}']_{y=0}^{y=b} dx \quad (4.123)$$

Entsprechend:

$$\bar{\pi}_{aR_2}(x=0;a) = \int_{y=0}^b [-\bar{q}_x \bar{w} + \bar{m}_x \bar{w}' + \bar{m}_{xy} \bar{w}']_{x=0}^{x=a} dy \quad (4.124)$$

$$\text{Insgesamt: } \bar{\pi}_{aR} = \bar{\pi}_{aR_1}(y=0;b) + \bar{\pi}_{aR_2}(x=0;a) \quad (4.125)$$

Der Trefftzsche Ansatz lautet:

$$\bar{w} = w_0 + \sum_{r=1}^n C_r w_r \quad (4.126)$$

Die Bedingungen sind:

$$\Delta \Delta w_0 = \frac{\rho}{K} ; \quad \Delta \Delta w_r = 0 \quad (4.127)$$

Einsetzen des Trefftz'schen Ansatzes und Bilden der s - ten Extremalbedingung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_s} = 0 &= K \iint_F \left\{ \Delta \bar{w} \Delta w_s - (1-\mu) \left[w_s'' \bar{w}'' + \bar{w}'' w_s'' - 2 w_s' \bar{w}_s' \right] \right\} dx dy - \iint \rho w_s dx dy - \\ &+ \int_0^a \left[-q_{y,s} \bar{w} - \bar{q}_y w_s + m_{y,s} \bar{w}' + \bar{m}_y w_s' + \right. \\ &\quad \left. + m_{xy,s} \bar{w}'' + \bar{m}_{xy} w_s'' \right]_{y=a}^{y=b} dx + \\ &+ \int_0^b \left[-q_{x,s} \bar{w} - \bar{q}_x w_s + m_{x,s} \bar{w}' + \bar{m}_x w_s' + \right. \\ &\quad \left. + m_{xy,s} \bar{w}'' + \bar{m}_{xy} w_s'' \right]_{x=0}^{x=a} dy \end{aligned} \quad (4.128)$$

Ausmultiplizieren und partielles Integrieren von $\frac{\partial \bar{\pi}_i}{\partial c_s}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}_i}{\partial c_s} &= K \iint_F \left\{ \bar{w}'' w_s'' + \bar{w}'' w_s'' + \bar{w}'' w_s'' + \bar{w}'' w_s'' - \right. \\ &\quad \left. - (1-\mu) \left(\bar{w}'' w_s'' + \bar{w}'' w_s'' - 2 \bar{w}' w_s' \right) \right\} dx dy \\ &= K \iint_F \left\{ \bar{w}'' w_s'' + \bar{w}'' w_s'' + 2 \bar{w}' w_s' + \right. \\ &\quad \left. + \mu \left(\bar{w}'' w_s'' + \bar{w}'' w_s'' \right) - 2 \mu \cdot \bar{w}' w_s' \right\} dx dy \\ \frac{1}{K} \frac{\partial \bar{\pi}_i}{\partial c_s} &= \int_{y=0}^b \left[\bar{w}'' w_s' - \bar{w}''' w_s \right]_0^{x=a} dy + \iint_F \bar{w}''' w_s dx dy + \\ &+ \int_{x=0}^a \left[\bar{w}'' w_s' - \bar{w}''' w_s \right]_0^{y=b} dx + \iint_F \bar{w}'''' w_s dx dy + \\ &+ \int_0^a \left[\bar{w}' w_s' \right]_0^{y=b} dx - \int_0^b \left[\bar{w}' w_s' \right]_0^{x=a} dy + \int_0^b \left[\bar{w}' w_s' \right]_0^{x=a} dy - \int_0^a \left[\bar{w}' w_s' \right]_0^{y=b} dx + \\ &+ \iint_F 2 \bar{w}'''' w_s dx dy + \\ &+ \mu \int_{y=0}^b \left[\bar{w}'' w_s' \right]_0^{x=a} dy - \mu \int_{x=0}^a \left[\bar{w}' w_s' \right]_0^{y=b} dx + \mu \iint_F \bar{w}' w_s' dx dy + \\ &+ \mu \int_{x=0}^a \left[\bar{w}'' w_s' \right]_0^{y=b} dx - \mu \int_{y=0}^b \left[\bar{w}' w_s' \right]_0^{x=a} dy + \mu \iint_F \bar{w}' w_s' dx dy + \\ &- 2 \mu \iint_F \bar{w}' w_s' dx dy = 0 \end{aligned} \quad (4.129)$$

Die beiden letzten Doppelintegrale ergänzen sich zu null.

$$\frac{1}{K} \frac{\partial (\bar{\pi}_i + \bar{\pi}_a)}{\partial c_s} = \iint_F \underbrace{(\Delta \Delta \bar{w} - \frac{\rho}{K})}_{\equiv 0 \text{ nach Voraussetzung}} w_s dx dy + \text{Randintegrale} \quad (4.130)$$

Die Querkräfte sind:

$$q_x = -K(w''' + w''') ; \quad q_y = -K(w''' + w''') \quad (4.132)$$

Einsetzen der Gleichungen(4.4) und (4.129) in Gleichung (4.126):

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} \frac{\partial \bar{\pi}_{GR}}{\partial c_s} = & \int_0^a [\bar{w}(w_s''' + w_s''')]_0^{y=b} dx + \int_0^a [\bar{w}''' + \bar{w}'''] w_s dx - \\ & - \int_0^a [\bar{w} \cdot (w_s'' + \mu w_s'')]_0^{y=b} dx - \int_0^a [(\bar{w}'' + \mu \bar{w}'')] w_s dx - \\ & - \int_0^a [(1-\mu) \bar{w}' w_s']_0^{y=b} dx - \int_0^a [(1-\mu) \bar{w}' w_s']_0^{y=b} dx + \\ & + \int_0^b [\bar{w}(w_s''' + w_s''')]_0^{x=a} dy + \int_0^b [(\bar{w}''' + \bar{w}''')] w_s dy - \\ & - \int_0^b [\bar{w}'(w_s'' + \mu w_s'')]_0^{x=a} dy - \int_0^b [(\bar{w}'' + \mu \bar{w}'')] w_s dy - \\ & - \int_0^b [(1-\mu) \bar{w}' w_s']_0^{x=a} dy - \int_0^b [(1-\mu) \bar{w}' w_s']_0^{x=a} dy \end{aligned} \quad (4.133)$$

In einer Tabelle werden sämtliche verbleibenden Randterme zusammengestellt.

	1. aus $\bar{\pi}_i$	2. aus $\bar{\pi}_{OR}$	3. aus $\bar{\pi}_{OR}$	4. $\frac{\partial \bar{\pi}_{OR}}{\partial c_s}$ allgemein
1.	$\int_{x=0}^a [(\bar{w}''' + \bar{w}''') w_s]_{x=0}^{y=b} dx$	$\int_{x=0}^a [(\bar{w}''' + \bar{w}''') w_s]_{x=0}^{y=b} dx$	$\int_0^a [(w_s''' + w_s'') \bar{w}]_0^{y=b} dx$	$\frac{\partial}{\partial c_s} \left[- \int_{x=0}^a [\bar{q}_y \bar{w}]_0^{y=b} dx \right]$
2.	$\int_{x=0}^a [(\bar{w}''' + \mu \bar{w}'') w_s]_{x=0}^{y=b} dx$	$- \int_{x=0}^a [(\bar{w}''' + \mu \bar{w}'') w_s]_{x=0}^{y=b} dx$	$- \int_0^a [(w_s''' + \mu w_s'') \bar{w}]_0^{y=b} dx$	$\frac{\partial}{\partial c_s} \left[+ \int_{x=0}^a [\bar{m}_y \bar{w}]_0^{y=b} dx \right]$
3.	$\int_{x=0}^a [(1-\mu) \bar{w}''] w_s]_{x=0}^{y=b} dx$	$- \int_{x=0}^a [(1-\mu) \bar{w}''] w_s]_{x=0}^{y=b} dx$	$- \int_0^a [(1-\mu) w_s'' \bar{w}]_0^{y=b} dx$	$\frac{\partial}{\partial c_s} \left[+ \int_{x=0}^a [\bar{m}_{yx} \bar{w}]_0^{y=b} dx \right]$
4.	$- \int_{y=0}^b [(\bar{w}''' + \bar{w}''') w_s]_{y=0}^{x=a} dy$	$+ \int_{y=0}^b [(\bar{w}''' + \bar{w}''') w_s]_{y=0}^{x=a} dy$	$+ \int_0^b [(w_s''' + w_s'') \bar{w}]_0^{x=a} dy$	$\frac{\partial}{\partial c_s} \left[- \int_{y=0}^b [\bar{q}_x \bar{w}]_0^{x=a} dy \right]$
5.	$+ \int_{y=0}^b [(\bar{w}''' + \mu \bar{w}'') w_s]_{y=0}^{x=a} dy$	$- \int_{y=0}^b [(\bar{w}''' + \mu \bar{w}'') w_s]_{y=0}^{x=a} dy$	$- \int_0^b [(w_s''' + \mu w_s'') \bar{w}]_0^{x=a} dy$	$\frac{\partial}{\partial c_s} \left[+ \int_{y=0}^b [\bar{m}_x \bar{w}]_0^{x=a} dy \right]$
6.	$+ \int_{y=0}^b [(1-\mu) \bar{w}''] w_s]_{y=0}^{x=a} dy$	$- \int_{y=0}^b [(1-\mu) \bar{w}''] w_s]_{y=0}^{x=a} dy$	$- \int_0^b [(1-\mu) w_s'' \bar{w}]_0^{x=a} dy$	$\frac{\partial}{\partial c_s} \left[+ \int_{y=0}^b [\bar{m}_{xy} \bar{w}]_0^{x=a} dy \right]$

Tabelle der möglichen Terme der s - ten Trefftz'schen Gleichung für die Rechteckplatte mit homogenen Randbedingungen.

Die s - te Trefftzsche Gleichung für die allseitig eingespannte Rechteckplatte

In $\bar{\pi}_{aR}$ entfallen die Terme mit den Drillmomenten. Diese sind identisch null. In der Tabelle S.101 ergänzen sich die Randintegrale der 1. und 2. Spalte in den Zeilen 1, 2, 4 und 5 zu null. Es bleiben die Ausdrücke der 3. Spalte (Zeile 1, 2, 4, 5) sowie die Anteile von $\bar{\pi}_i$ (1. Spalte) in der 3. und 6. Zeile.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_s} - 0 &= \underbrace{- \int_{x=0}^a \left[\frac{\partial}{\partial y} (\Delta w_s) \bar{w} \right]_0^{y=b} dx + \int_{y=0}^b \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_s) \bar{w} \right]_0^{x=a} dy -}_{\oint \frac{\partial(\Delta w_s)}{\partial n} \bar{w} ds, \text{ aus 1. Zeile, 3. Spalte}} \\ &\quad \text{und 4. Zeile, 3. Spalte, Tabelle S. 101} \\ &= - \int_{x=0}^a \left[(w_s'' + w_s'') \bar{w} \right]_0^{y=b} dx + \int_{x=0}^a \left[(1-\mu) w_s' \bar{w}' \right]_0^{y=b} dx - \\ &= - \int_{y=0}^b \left[(w_s'' + w_s'') \bar{w}' \right]_0^{x=a} dx + \int_{y=0}^b \left[(1-\mu) w_s'' \bar{w}' \right]_0^{x=a} dx + \\ &\quad - \oint \Delta w_s \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} ds \text{ aus 2. und 5. Zeile, 3. Spalte, Tabelle S. 101} \\ &= \underbrace{\int_{x=0}^a \left[(1-\mu) w_s' \bar{w}' \right]_0^{y=b} dx + \int_{y=0}^b \left[(1-\mu) w_s'' \bar{w}' \right]_0^{x=a} dy}_{\text{aus 3. Zeile, 1. Spalte}} \\ &\quad \text{und 6. Zeile, 1. Spalte Tabelle S. 101} \end{aligned} \tag{4.134}$$

s ist die Randkoordinate in Randrichtung, n ist die Koordinate normal dazu.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_s} - 0 &= \oint_R \left(\frac{\partial(\Delta w_s)}{\partial n} \bar{w} - \Delta w_s \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) ds + \\ &\quad + (1-\mu) \oint_R \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} + \frac{\partial w_s}{\partial s} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial s \partial n} \right) ds \end{aligned} \tag{4.135}$$

Das zweite Umlaufintegral läßt sich nach der Produktregel umformen in:

$$(1-\mu) \oint_R \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial s^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} + \frac{\partial w_s}{\partial s} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial s \partial n} \right) ds = (1-\mu) \oint_R \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial w_s}{\partial s} \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) ds = 0 \tag{4.136}$$

Damit verschwindet der mit $(1 - \mu)$ multiplizierte Ausdruck identisch und es bleibt die von Wegner [18] auf anderem Wege gewonnene μ -freie s-te Trefftzsche Gleichung für die allseitig einge-

spannte Platte:

$$0 = \oint_R \left(\frac{\partial(\Delta w_s)}{\partial n} \bar{w} - \Delta w_s \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (4.137)$$

Ausgeschrieben in kartesischen Koordinaten gemäß Gleichung (4.134):

$$0 = \left. \begin{aligned} & \int_{x=0}^a \left[\frac{\partial}{\partial y} (\Delta w_s) (w_0 + \sum c_\nu w_\nu) - \Delta w_s (w_0' + \sum c_\nu w_\nu') \right]_0^{y=b} dx + \\ & + \int_{y=0}^b \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_s) (w_0 + \sum c_\nu w_\nu) - \Delta w_s (w_0' + \sum c_\nu w_\nu') \right]_0^{x=a} dy \end{aligned} \right\} (4.138)$$

$$\Delta w_s = w_s'' + w_s''$$

$$\sum_{\nu=1}^n c_\nu \left\{ \int_{x=0}^a \left[\frac{\partial}{\partial y} (\Delta w_s) w_\nu - \Delta w_s \cdot w_\nu' \right]_0^{y=b} dx + \int_{y=0}^b \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_s) w_\nu - \Delta w_s w_\nu' \right]_0^{x=a} dy \right\} +$$

$$+ \int_{x=0}^a \left[\frac{\partial}{\partial y} (\Delta w_s) \cdot w_0 - \Delta w_s w_0' \right]_0^{y=b} dx +$$

$$+ \int_{y=0}^b \left[\frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_s) w_0 - \Delta w_s w_0' \right]_0^{x=a} dy = 0 \quad (4.139)$$

s-te Gleichung: $\sum_{\nu=1}^n c_\nu a_{s\nu} + a_s = 0$

Eine weitere Herleitung der Trefftz'schen Gleichungen für eingespannte Platten

Für die eingespannte Platte ergeben sich die Trefftz'schen Gleichungen auch durch Variation des inneren Potentials π_i mit Hilfe des Euler - Lagrangeschen Ansatzes.

Nimmt man vorweg, daß in π_i der mit $(1 - \mu)$ multiplizierte Term ohne Einfluß ist, so ist:

$$\pi_i^* = K \frac{1}{2} \iint_F (\Delta w)^2 dF \quad (4.140)$$

Der Variationsansatz ist: $w = \bar{w} + \underbrace{\varepsilon \eta}_{\delta w}$ (4.141)

Die gesuchte Extremalfunktion \bar{w} ist mit $\varepsilon = 0$ in die Schar der w eingebettet.

Die erste Variation von π_1^* ist:

$$\delta \pi_1^* = \frac{\partial \pi_1^*}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \cdot \varepsilon \quad (4.142)$$

Einsetzen der Gleichung (4.140) und (4.141) in Gleichung (4.142)

$$\delta \pi_1^* = K \iint_F \Delta \bar{w} \Delta(\delta w) dF \quad (4.143)$$

Zur Umwandlung des Bereichsintegrals (4.143) wird der Greensche Integralsatz in der Form des Symmetrietheorems angewandt.

Für $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ gilt:

$$\iint_F (u \cdot \Delta v - v \cdot \Delta u) dF = \oint_R \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds$$

oder:

$$\iint_F u \cdot \Delta v \cdot dF = \iint_F \Delta u \cdot v \cdot dF + \oint_R \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \quad (4.144)$$

Es wird gesetzt: $\Delta \bar{w} = \Delta v$

$$\Delta(\delta w) = u$$

Damit ergibt die Greensche Formel:

$$\delta \pi_1^* = K \iint_F \Delta \Delta(\delta w) \cdot \bar{w} dF + K \oint_R \left(\Delta(\delta w) \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - \bar{w} \frac{\partial \Delta(\delta w)}{\partial n} \right) ds \quad (4.145)$$

Die Extremalbedingung ist: $\delta \pi_1^* = 0$.

Im Trefftzschen Ansatz:

$$\bar{w} = w_0 + \sum_{\nu=1}^n c_\nu \cdot w_\nu ; \quad \Delta \Delta w_0 = \frac{p}{K} ;$$

$$\Delta \Delta w_\nu = 0$$

sei: $\delta w = c_k \cdot w_k$.

(4.146)

Einsetzen von Gleichung (4.146) in Gleichung (4.145):

$$0 = \iint_F c_k \frac{\Delta \Delta w_k}{=0} \cdot \bar{w} \cdot dF + \oint_R c_k \left(\Delta w_k \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - \bar{w} \frac{\partial \Delta w_k}{\partial n} \right) ds \quad (4.147)$$

Das Randintegral ist nur dann null, wenn gilt:

$$0 = \oint \left(\Delta w_k \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} - \frac{\partial(\Delta w_k)}{\partial n} \bar{w} \right) ds \quad (4.148)$$

Diese Gleichung ist identisch mit Gleichung (4.137).

Die s - te Trefftzsche Gleichung für die allseitig Navier - gelagerte Platte

In $\bar{\pi}_{aR}$ entfallen die Terme mit den Biegemomenten. (2. und 5. Zeile der 2. und 3. Spalte in Tabelle S.101). Damit verbleiben aus der Tabelle S.101 folgende Integrale:

Zeilen 1; 3; 4; 6, darin Spalte 3
 Zeilen 2 und 5, darin Spalte 1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_s} = 0 = & \underbrace{\int_{x=0}^a \int_{y=0}^{y=b} \frac{\partial}{\partial y} (\Delta w_s) \bar{w} \, dx + \int_{y=0}^b \int_{x=0}^{x=a} \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w_s) \bar{w} \, dy}_{\oint_R \frac{\partial (\Delta w_s)}{\partial n} \bar{w} \, ds, \text{ aus 1. Zeile, 3. Spalte und 4. Zeile, 3. Spalte}} \\ & + \underbrace{\int_{x=0}^a \int_{y=0}^{y=b} \Delta \bar{w} \cdot w_s' \, dx - (1-\mu) \int_{x=0}^a \int_{y=0}^{y=b} \bar{w}'' \cdot w_s' \, dx}_{\oint_R \frac{\partial w_s}{\partial n} \Delta \bar{w} \cdot ds \text{ aus 2. und 5. Zeile, 1. Spalte}} \\ & + \underbrace{\int_{y=0}^b \int_{x=0}^{x=a} \Delta \bar{w} \cdot w_s' \, dy - (1-\mu) \int_{y=0}^b \int_{x=0}^{x=a} \bar{w}'' \cdot w_s' \, dy}_{\oint_R \frac{\partial w_s}{\partial n} \Delta \bar{w} \cdot ds \text{ aus 2. und 5. Zeile, 1. Spalte}} \\ & - (1-\mu) \underbrace{\int_{x=0}^a \int_{y=0}^{y=b} \bar{w}' \cdot w_s' \, dx - (1-\mu) \int_{y=0}^b \int_{x=0}^{x=a} \bar{w}'' \cdot w_s' \, dy}_{\text{aus 3. und 6. Zeile, 3. Spalte}} \end{aligned} \quad (4.149)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_s} = 0 = & \oint_R \left(\frac{\partial (\Delta w_s)}{\partial n} \bar{w} + \frac{\partial w_s}{\partial n} \Delta \bar{w} \right) ds + \\ & - (1-\mu) \oint_R \left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial s \partial n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right) ds \end{aligned} \quad (4.150)$$

Umformung des zweiten Umlaufintegrals:

$$\begin{aligned} (1-\mu) \oint_R \left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w_s}{\partial s \partial n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right) ds = \\ = (1-\mu) \oint_R \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w_s}{\partial n} \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \right) ds = 0 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die allseitig Navier - gelagerte Platte die s-te Trefftzsche Gleichung zu:

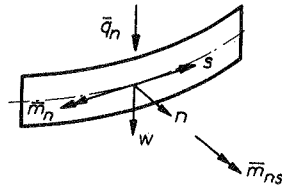
$$0 = \oint_R \left(\frac{\partial (\Delta w_s)}{\partial n} \bar{w} + \frac{\partial w_s}{\partial n} \Delta \bar{w} \right) ds \quad (4.151)$$

Wieder entfallen also die mit $(1 - \mu)$ multiplizierten Integrale d.h. es liegt wie bei der Einspannung eine sogenannte μ -freie Lagerung vor.

Die s-te Trefftzsche Gleichung für einen freien Rand

Die Gleichung enthält nur Terme der ersten Spalte der Tabelle. Alle Randschnittgrößen sind null und damit alle Terme der 2. und 3. Spalte. Wie leicht zu überprüfen und in Kapitel 7.6 dargestellt ist, ergibt sich die Gleichung:

$$\oint_R \left[\bar{m}_n \frac{\partial w_s}{\partial n} - \bar{q}_n \cdot w_s + \bar{m}_{ns} \frac{\partial w_s}{\partial s} \right] ds = 0 \quad (4.152)$$



Diese Gleichung ist auch geeignet, um Ausschnitte und unregelmäßige freie Ränder zu erfassen, wobei numerisch zu integrieren ist.

4.7. Die Ansatzfunktionen für die Trefftzschen Gleichungen

Hierfür sind am besten die Lösungen geeignet, die sich aus dem Levy'schen Einfachreihenansatz

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_n X_n(x) \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} ; & \frac{n\pi}{b} &= \beta_n \\ \text{oder } w &= \sum_n Y_n(y) \cdot \sin \frac{n\pi x}{a} ; & \frac{n\pi}{a} &= \alpha_n \end{aligned} \right\} (4.153)$$

für die homogene Plattengleichung

$$\Delta \Delta w = 0$$

ergeben, siehe Gleichung (4.119) und folgende.

Die Trefftzschen Ansatzfunktionen w_V sind dann:

$$\left. \begin{aligned} \cosh(\beta_V \cdot x) \sin(\beta_V \cdot y) ; & \quad x \cdot \cosh(\beta_V \cdot x) \sin(\beta_V \cdot y) \\ \sinh(\beta_V \cdot x) \sin(\beta_V \cdot y) ; & \quad x \cdot \sinh(\beta_V \cdot x) \sin(\beta_V \cdot y) \\ \text{oder} \\ \cosh(\alpha_V \cdot y) \sin(\alpha_V \cdot x) ; & \quad y \cdot \cosh(\alpha_V \cdot y) \sin(\alpha_V \cdot x) \end{aligned} \right\} (4.154)$$

usw.

Auch die biharmonischen Polynome sind anwendbar, führten aber bei praktischen Rechnungen zu unbefriedigenden Ergebnissen.

5. Eine geschlossene Matrizendarstellung der Berechnung von in Querrichtung durchlaufenden Tonnenschalen mit Kämpfer-randträgern - unter Verwendung des Kraftgrößenverfahrens

5.1 Zur Berechnung der Tonnenschalen nach der technischen Biegetheorie

Aus den drei Flüggeschen linearen, partiellen Dgln. Gl. (6.3) ergeben sich mit den Näherungen nach Donnell, v. Karman, Jenkins (DKJ - Näherungen) die drei Dgln. der technischen Biegetheorie dünner und flacher Kreiszyinderschalen in den Verschiebungsfunktionen u , v , w (s. Kapitel 6, Gl. (6.1-3)). Bei Vernachlässigung der Querkontraktion nennen Neuber und Rabich [11] diese Theorie "quasi vollständig" im Vergleich zur "vollständigen" Flüggeschen Theorie.

Die gleiche technische Biegetheorie ist nach Wlassow in zwei Dgln. für eine Spannungsfunktion (von der die Membrankräfte abgeleitet sind) und die Verschiebung normal zur Schalenmittelfläche darstellbar. Hieraus ist eine partielle Dgl. der 8. Ordnung für die Spannungsfunktion herleitbar. Dieser Darstellung schließen sich Rüdiger und Urban [8] an. Auch eine komplexe Dgl. ist möglich.

Weiterhin sind die drei Verschiebungs - Dgln. durch Einführung weiterer 5 unbekannter Funktionen in ein System von 8 Dgln. der 1. Ordnung transformierbar. Dieses ist nach der Übertragungsmethode oder matrix progression method als Anfangswertproblem zu behandeln. Im 6. Kapitel wird das Verfahren für allgemeine Übergangsbedingungen entwickelt. Es ist besonders für digitale Rechenautomaten geeignet, weniger für Handrechnung. Bei vielen Übertragungen oder hohen Reihengliedern (lange Schalen) kann aber das Zwischenschalten des Formänderungsgrößenverfahrens erforderlich werden, um Ungenauigkeiten infolge kleiner Differenzen sehr großer Zahlen bei den Matrizenmultiplikationen zu vermeiden, siehe auch den Abschnitt "Numerische Schwierigkeiten" im Kapitel 4.5.

Für das Rechnen mit Tischrechenmaschinen haben unter anderem Rabich [11] sowie Rüdiger und Urban [8] Tabellenwerke aufgestellt. Sie gelten für Tonnenschalen, die mathematisch durch Produktansätze mit trigonometrischen Funktionen in Längsrichtung (Ansätze nach Maurice Levy) gekennzeichnet sind. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung des homogenen Dgl.-Systems sind (mit $e^{p\varphi}$ - Ansätzen) in allen oben geschilderten Formen (3; 2; 1 oder 8 Dgl.) stets zwei konjugiert komplexe Doppelwurzeln, insgesamt durch Vorzeichenkombination 8 Wurzeln, da das Dgl. - System von der 8. Ordnung ist.

Damit haben alle Wirkungen (Deformationen und Schnittgrößen) in Bogenrichtung die mathematische Form gedämpfter Schwingungen, von denen jeweils 4 vom linken Rand und 4 vom rechten Rand abklingen. Da die Eigenwerte Doppelwurzeln sind, kann man sich mit 4 Lösungsfunktionen, die von einem Rand abklingen, begnügen. Sie stellen, mit den Integrationskonstanten multipliziert, nach den Überlagerungssätzen linearer Dgl. die allgemeine Lösung des homogenen Dgl. - Systems dar. Sämtliche Wirkungen sind Linearkombinationen der unabhängigen Funktionen des Dgl. - Systems (z.B. der Verschiebungen u , v , w) und deren partiellen Ableitungen nach den Koordinatenrichtungen x und φ , sie haben also wieder die Form gedämpfter Schwingungen, die vom betrachteten Kämpferrand abklingen. Die Tabellen in [11] und [8] enthalten für eine Reihe von Schalenparametern die Vorzahlen dieser "gedämpften Schwingungen" für alle interessierenden Wirkungen sowie den Verlauf dieser Funktionen in Bogenrichtung. Die Tafelwerte werden also zum Aufstellen der sogenannten Randwerttabelle und bei der Superposition nach Ermittlung der statisch überzähligen Randschnittgrößen (am Kämpferrand) benötigt.

Die Wlassowschen Gleichungen haben den Vorteil, daß man die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sofort explizit angeben kann, ohne ein allgemeines Polynom 4. Grades auflösen zu müssen. Weiterhin ist für die Programmierung wichtig, daß die Wlassowschen Gleichungen in der Form der Gl. (2.4,5) für alle flachen Schalen aus Flächen 2. Ordnung gelten.

Es fällt auf, daß die Tafelwerte bei Rüdiger - Urban [8] für fast 50 Schalenparameter $\epsilon = 0,03 \div 0,90$ angegeben sind. Der Grund hierfür ist, daß Interpolationen in den Vorzahlen und Lösungsfunktionen zu groben Fehlern führen. Die Lösungen sind empfindlich gegen Änderungen des Schalenparameters.

Die Lösung der drei homogenen Verschiebungs - Dgln. erfordert jeweils die Ermittlung der Nullstellen eines allgemeinen Polynoms 4. Grades, in das sich das rein quadratische, charakteristische Polynom 8. Grades reduzieren läßt. Mit Hilfe der kubischen Resolvente lassen sich auch explizite Formeln entwickeln und programmieren, die aber wesentlich aufwendiger als bei der Lösung nach Wlassow sind. Jedoch ist diese Methode mit der kubischen Resolvente allgemeinen iterativen Methoden vorzuziehen, weil programmtechnisch die richtige Zuordnung der Wurzeln Schwierigkeiten bereitet. Rabich hat sich auf die Tafelwerte für nur 8 Schalenparameter beschränkt. Dies ist berechtigt, weil bei der Darstellung mit drei Verschiebungsfunktionen Interpolationen zwischen den Schalenparametern ohne große Fehler möglich sind. Hierauf weisen auch die Näherungen von Schorer, der die Verzerrungen $\epsilon_{\varphi}(z=0)$ und $\gamma_{x\varphi}(z=0)$ vernachlässigte, also bis auf die zu den Bogenmomenten m_{φ} führenden Querschnittsverformungen weitgehend die Bernoullischen Hypothesen der Balkentheorie einführte. Es wird mit den drei Verschiebungsfunktionen gearbeitet. Die charakteristischen Wurzeln ergeben sich jetzt wie bei Wlassow sehr einfach aus $\rho^8 = \text{konst.}$ Aas Jakobsen und Tottenham wiesen darauf hin, daß man diese Schorersche Lösung für einen größeren Bereich geometrischer Abmessungen benutzen kann. Dies ist darin begründet, daß die Schnittgrößen am Kämpferrand nur von den Verhältnissen der Ordinaten der "gedämpften Schwingungen" abhängen. Diese Verhältnisse ändern sich aber bei variablem Schalenparameter sehr viel schwächer als die Ordinaten selbst.

Die in diesem Kapitel entwickelte Lösungsmethode basiert auf den Arbeiten von Wlassow [9] sowie Rüdiger und Urban [8]. Sie ist eine vollständige Matrizendarstellung für digitale Rechenautomaten. Vergleichend zur Übertragungsmethode im Kapitel 6 soll ge-

zeigt werden, daß auch das Kraftgrößenverfahren zur Erzielung allgemeiner Übergangsbedingungen an den Kämpferrändern sehr geschlossen darstellbar ist, wobei außerdem numerische Schwierigkeiten entfallen.

Die stationäre Belastung muß in eine Fouriersdoppelreihe entwickelbar sein. Auch Temperaturbelastungen sowie Kriechen und Schwinden können untersucht werden. Es können beliebig viele Fourierglieder berücksichtigt werden. Die Berechnung wird für allgemeine unsymmetrische Rand - oder Übergangsbedingungen formuliert. Dabei werden in Querrichtung drei durchlaufende Schalen vorgesehen. Für die Praxis ist dies meist ausreichend. Jedoch kann die Anzahl der Schalen beliebig vergrößert werden.

Sämtliche Lineartransformationen werden als Matrizenoperationen geschrieben. Die rein algebraischen Ausdrücke sind teilweise dem Buch von Rüdiger - Urban [8] entnommen.

5.2 Geometrie und allgemeine Bezeichnungen der Schalenreihe

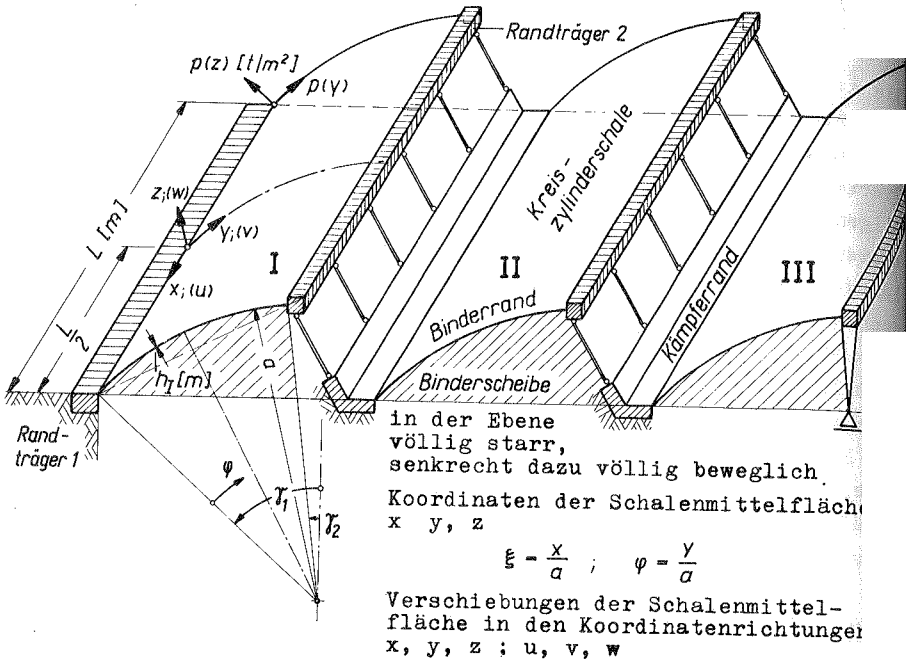


Bild 11

System in axonometrischer Darstellung

Geometrische Größen jeder der Schalen I, II, III:

Länge (Abstand der Binderscheiben, für alle Schalen der Tonnenreihe gleich):

L [m]

Radius der Schale I: Schalenmittelfläche

a_I [m]

Dicke der Schale I (konstant):

h_I [m]

Randwinkel der Schale I, gemessen von der Vertikalen:

$\gamma_{I_1} ; \gamma_{I_2}$

Allgemeine Konstanten

Elastizitätsmodul:

E [kp/cm²]

Querkontraktionszahl:

ν []

5.3 Organisation der Berechnung

Es ist das Randwertproblem

$$\Delta \Delta \Delta \Delta F + \frac{1-\nu^2}{k} \cdot \frac{\partial^4 F}{\partial \xi^4} = f(p_y, p_z) \quad (5.1)$$

zu lösen.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y}{a} \quad (5.2)$$

$$k = \frac{h^2}{12 \cdot a^2} \text{ (Schalenparameter)} \quad k = 10^{-4} \div 10^{-6}$$

F: Spannungsfunktion, von der die Membrankräfte $n_x, n_\varphi, n_{x\varphi}$ abgeleitet sind.

Zusammenhang zwischen F und w:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \frac{E \cdot h \cdot a}{1-\nu^2} k \cdot \Delta \Delta w = g(p_y, p_z) \quad (5.3)$$

Die Dgl. (5.1) gilt für jede Kreiszylinderschale. Als Partikularlösung für jedes Fourierglied der Belastung dient im allgemeinen die Membranlösung. In ihr, wie auch im Ansatz für die Partikularlösung werden mit den trigonometrischen Ansätzen für alle Wirkungen (Schnittgrößen und Verschiebungen) in Längsrichtung alle Randbedingungen an den Binderscheiben sofort erfüllt. Man kann auch sagen: Die Binderscheibe wird so idealisiert, daß sie dem analytisch einzig möglichen Satz von Randbedingungen entspricht.

In der Lösung der homogenen Dgl. (5.1) werden dieselben trigonometrischen Ansätze wie in der Partikularlösung benutzt. Damit ist zur Erfüllung der Rand- oder Übergangsbedingungen an den Kämpfern ($\varphi = \gamma_1 ; \gamma_2$) eine gewöhnliche lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten zu betrachten. Da die Dgl. von der 8. Ordnung ist, ergeben sich als allgemeine Lösung der homogenen Gleichung vier Funktionen in der Form gedämpfter Doppelschwingungen (die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind alle konjugiert komplex).

Das Randwertproblem ist auf drei Arten lösbar:

1. Man formuliert direkt alle Übergangs- und Randbedingungen (bei einer Einzelschale acht lineare Gleichungen mit acht Unbekannten, bei k Schalen $8 \cdot k$ Gleichungen mit $8 \cdot k$ Unbekannten). Diese Bedingungen werden in den Verschiebungen (u, v, w) und den Schnittgrößen formuliert.
- 2a. Man bringt nach Art des Kraftgrößenverfahrens der Statik die unbekanntes Schnittgrößen $X_i = 1$ ($i = 1, 2, 3, 4$) an jedem Kämpferrand an und ermittelt die Verformungen und Schnittgrößen hieraus. Dann wird das System der Elastizitätsgleichungen (Kontinuitätsbedingungen) formuliert.
- 2b. Man bringt nach Art des Formänderungsgrößenverfahrens der Statik die unbekanntes Deformationen $\chi_i = 1$ an jedem Kämpferrand an und ermittelt die Zwangsgrößen und Deformationen hieraus. Dann wird das System der Elastizitätsgleichungen (Gleichgewichtsbedingungen) formuliert.
3. Da das eigentliche Randwertproblem durch eine lineare gewöhnliche Dgl. mit konstanten Koeffizienten beschrieben wird, ist auch die Formulierung als Übertragungsproblem leicht möglich. Infolge der vier unbekanntes Deformationen oder Schnittgrößen am linken Rand sind jeweils die acht-reihigen Übertragungsmatrizen bis zum rechten Rand miteinander zu multiplizieren, ebenfalls für die äußere Belastung. Dann sind unabhängig von der Anzahl der Schalen vier lineare Gleichungen zu lösen und die Übertragungen zwecks Superposition noch einmal vorzunehmen.

Es wird in dieser Berechnung nach 2a vorgegangen, weil aus Gründen der Betonschalung meist alle Kreiszyinderschalen gleich sind und so die Einheitslastfälle nur einmal für die ganze Tonnenreihe zu betrachten sind. Die Berechnung nach 2b wäre auch günstig. Die mathematische Durchführung ist ähnlich derjenigen nach 2a.

Die Berechnung wird in sieben große Gruppen aufgeteilt:

1. Homogene Lösung der Schale oder der Schalen, Bereitstellung der Parameter, Einheitslastfälle der Schale(n), Randwerte aus den Einheitslastfällen und deren Transformation auf die Hauptachsen der Randträger, außerdem Ausgangsmatrizen für die Superposition.
2. Partikular- oder Membranlösung der Schalen, zuvor Fourierentwicklung der Belastung, Transformation auf die Hauptachsen der Randträger.
3. Homogene Lösung der Randträger, Transformation der Wirkungen des Randträgers auf die Anschnittpunkte der Schalen.
4. Partikularlösung der Randträger.
5. Zusammenstellung und Lösung der Elastizitätsgleichungen.
6. Superposition der gesuchten Schnittgrößen und Deformationen und deren Ausgabe.
7. Kontrollen und deren Ausgabe.

5.4 Formelplan mit Erläuterungen

5.4.1 Die homogene Lösung einer unsymmetrischen Schale für das n-te Fourierglied

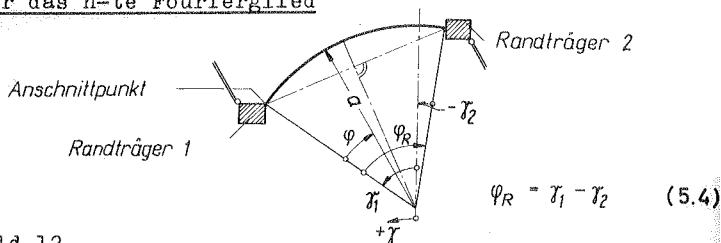


Bild 12

Abmessungen eines Schalenquerschnittes

<u>Parameterübernahme:</u>	L [m]	Länge der Tonne
Dimensionen in	a [m]	Radius der Tonne
eckigen Klammern	h [m]	Dicke der Tonne
	γ_1 [1]	linker Randwinkel
	γ_2 [1]	rechter Randwinkel
	v [1]	Querkontraktionszahl

1. Schalenparameter

$$k = \frac{h}{12 \cdot a^2} \quad [1] \quad (5.5)$$

Kennzeichnung des n-ten Fourierschrittes:

$$\lambda = \frac{n \cdot \pi \cdot a}{L} \quad [1] ; \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.6)$$

Hauptparameter:

$$\varepsilon = \lambda \cdot \sqrt[4]{\frac{4-k}{1-v^2}} \quad [1] \quad (5.7)$$

Nebenparameter:

$$\omega = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} \quad [1] \quad (5.8)$$

Wurzeln der charakteristischen Gleichung der homogenen Dgl. (5.1) nach Einführung des Bernoullischen Produktansatzes mit einer trigonometrischen Funktion in x - Richtung und dem Exponentialansatz in φ - Richtung:

$$\rho_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\alpha_1 \pm i \cdot \mu_1) ; \quad \rho_{3,4} = -\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\alpha_2 \pm i \cdot \mu_2) \quad (5.9)$$

$$\rho_{5,6} = +\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\alpha_1 \pm i \cdot \mu_1) ; \quad \rho_{7,8} = +\frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\alpha_2 \pm i \cdot \mu_2)$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{(1+\epsilon)^2 + 1} + (1+\epsilon) \}} ; \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{(1-\epsilon)^2 + 1} - (1-\epsilon) \}} \quad (5.10)$$

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{(1+\epsilon)^2 + 1} - (1+\epsilon) \}} ; \quad \mu_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \{ \sqrt{(1-\epsilon)^2 + 1} + (1-\epsilon) \}}$$

Einführung der Winkel $\bar{\varphi}$:
siehe Gleichung (5.8)

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\omega} \quad (5.11)$$

Randwinkel der Schale:

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{\varphi_1}{\omega} = 0 \quad (5.12)$$

$$\bar{\varphi}_2 = \frac{\chi_1 - \chi_2}{\omega}$$

Bilden des Vektors \mathfrak{g}

$$\mathfrak{g} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha_1 \cdot \bar{\varphi}_2} \cdot \cos \mu_1 \cdot \bar{\varphi}_2 \\ e^{-\alpha_2 \cdot \bar{\varphi}_2} \cdot \cos \mu_2 \cdot \bar{\varphi}_2 \\ e^{-\alpha_1 \cdot \bar{\varphi}_2} \cdot \sin \mu_1 \cdot \bar{\varphi}_2 \\ e^{-\alpha_2 \cdot \bar{\varphi}_2} \cdot \sin \mu_2 \cdot \bar{\varphi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Einheitsbelastungsfälle für die Randschnittgrößen am Rand 1

W bezeichnet allgemein eine Wirkung, d.h. eine Schnittgröße oder eine Verformung.

Ansatz:
$$W = \psi_W \cdot \hat{W} \left\{ \begin{matrix} \cos \lambda \xi \\ \sin \lambda \xi \end{matrix} \right. \quad (5.14)$$

Da gemäß Elastizitätsgesetz die Wirkungen Linearkombinationen der Ableitungen der Spannungsfunktion F und der Verschiebungsfunktion w nach den Koordinaten ξ , φ sind, müssen sie wie F und w selbst in φ - Richtung die Form gedämpfter Doppelschwingungen haben.

Es gilt also allgemein:

$$\widehat{W} = e^{-\alpha_1 \bar{\varphi}} \cdot \left. \begin{aligned} & [(A_1 \cdot \alpha_1 - B_1 \cdot \beta_1) \cdot \sin \mu_1 \cdot \bar{\varphi} + \\ & \quad + (A_1 \cdot \beta_1 + B_1 \cdot \alpha_1) \cdot \cos \mu_1 \cdot \bar{\varphi}] + \\ & + e^{-\alpha_2 \bar{\varphi}} \cdot \left[(A_2 \cdot \alpha_2 - B_2 \cdot \beta_2) \cdot \sin \mu_2 \cdot \bar{\varphi} + \right. \\ & \quad \left. + (A_2 \cdot \beta_2 + B_2 \cdot \alpha_2) \cdot \cos \mu_2 \cdot \bar{\varphi} \right] \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} & + e^{+\alpha_1 \bar{\varphi}} \cdot \left[(A_3 \cdot \alpha_1 - B_3 \cdot \beta_1) \cdot \sin \mu_1 \cdot \bar{\varphi} + \right. \\ & \quad \left. + (A_3 \cdot \beta_1 - B_3 \cdot \alpha_1) \cdot \cos \mu_1 \cdot \bar{\varphi} \right] + \\ & + e^{+\alpha_2 \bar{\varphi}} \cdot \left[(A_4 \cdot \alpha_2 - B_4 \cdot \beta_2) \cdot \sin \mu_2 \cdot \bar{\varphi} + \right. \\ & \quad \left. + (A_4 \cdot \beta_2 - B_4 \cdot \alpha_2) \cdot \cos \mu_2 \cdot \bar{\varphi} \right] \end{aligned}$$

Die mit $e^{-\alpha_1 \bar{\varphi}}$ und $e^{-\alpha_2 \bar{\varphi}}$ multiplizierten trigonometrischen Funktionen klingen vom Rand $\bar{\varphi} = 0$ ab, während die mit $e^{+\alpha_1 \bar{\varphi}}$ und $e^{+\alpha_2 \bar{\varphi}}$ multiplizierten trigonometrischen Funktionen vom Rand $\bar{\varphi} = \gamma_1 + \gamma_2$ abklingen. Man kann jedoch mit den von $\bar{\varphi} = 0$ abklingenden Funktionen alleine auskommen, wenn man diese unter Beachtung der Vorzeichen auch vom Rand 2 abklingen läßt.

A_1, B_1, A_2, B_2 sind Integrationskonstanten, die sich aus den Randbedingungen ergeben. $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ sind Festwerte für jede Wirkung, die von den Schalenparametern abhängen.

Auf Seite 119 sind in einer Tabelle die Werte $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ für alle Wirkungen zusammengestellt.

	Ψ_W	α_{1W}	β_{1W}	α_{2W}	β_{2W}
Π_φ	1	+1	0	+1	0
\bar{Q}_φ	$\frac{\omega}{2}$	$+ \alpha_1 + \mu_1 [1 - \varepsilon(1 - \nu)]$	$+ \alpha_1 [1 - \varepsilon(1 - \nu)] - \mu_1$	$- \alpha_2 + \mu_2 [1 + \varepsilon(1 - \nu)]$	$+ \alpha_2 [1 + \varepsilon(1 - \nu)] + \mu_2$
Q_φ		$+ \alpha_1 + \mu_1$	$+ \alpha_1 - \mu_1$	$+ \mu_2 - \alpha_2$	$+ \alpha_2 + \mu_2$
$\Pi_{\varphi x}$	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$	$+ \alpha_1$	$-\mu_1$	$+ \alpha_2$	$-\mu_2$
Π_φ	$\frac{\alpha \cdot \omega^2}{2}$	-1	$- [1 + \varepsilon(1 - \nu)]$	+1	$- [1 - \varepsilon(1 - \nu)]$
Π_x	$\frac{1}{\varepsilon}$	$- (1 + \varepsilon)$	+1	$+ [1 - \varepsilon]$	+1
$E \varepsilon_x$	$\frac{1}{h \cdot \varepsilon}$	$- [1 + \varepsilon(1 + \nu)]$	+1	$+ [1 - \varepsilon(1 + \nu)]$	+1
$E U$	$\frac{\alpha}{h \cdot \lambda \cdot \varepsilon}$				
$E V$	$\frac{\alpha \cdot \omega}{h \cdot \varepsilon^2}$	$+ \alpha_1 [1 - \varepsilon(1 + \nu)] - \mu_1$	$- \alpha_1 - \mu_1 [1 - \varepsilon(1 + \nu)]$	$- \alpha_2 [1 + \varepsilon(1 + \nu)] - \mu_2$	$- \alpha_2 + \mu_2 [1 + \varepsilon(1 + \nu)]$
$E W$	$\frac{2 \cdot \alpha}{h \cdot \varepsilon^2}$	0	+1	0	-1
Π_x	$\frac{\alpha \cdot \omega^2}{2}$	$-\nu$	$+ \varepsilon - \nu(1 + \varepsilon)$	$+\nu$	$- \varepsilon - \nu(1 - \varepsilon)$
$\Pi_{\varphi x}$	$\frac{\alpha \sqrt{\varepsilon} \cdot \omega^2 (1 - \nu)}{2}$	$-\mu_1$	$-\alpha_1$	$+ \mu_2$	$+ \alpha_2$
$E \bar{Q}$	$\frac{2}{h \cdot \varepsilon^2 \cdot \omega}$				
\bar{Q}_x	$\frac{\sqrt{\varepsilon} \cdot \omega}{2}$	$+ (2 - \nu)$	$+ (2 - \nu) + \varepsilon(1 - \nu)$	$- (2 - \nu)$	$+ (2 - \nu) - \varepsilon(1 - \nu)$
Q_x		+1	+1	-1	+1

Es sind folgende Randsingularitäten oder Einheitslastfälle der statisch überzähligen Schnittgrößen am linken Rand zu betrachten.

	1)	2)	3)	4)	
$X_1 = \hat{n}_\varphi =$	1	0	0	0	
$X_2 = \hat{q}_\varphi =$	0	1	0	0	
$X_3 = \hat{n}_{\varphi x} =$	0	0	1	0	(5.16)
$X_4 = \hat{m}_\varphi =$	0	0	0	1	

Folgende Matrix (\hat{K}_T) der Vorzahlen α , β der überzähligen Schnittgrößen n_φ , q_φ , $n_{\varphi x}$, m_φ wird herausgegriffen:

$$\hat{K}_T = \begin{pmatrix} \alpha_{1n\varphi} & \beta_{1n\varphi} & \alpha_{2n\varphi} & \beta_{2n\varphi} \\ \alpha_{1q\varphi} & \beta_{1q\varphi} & \alpha_{2q\varphi} & \beta_{2q\varphi} \\ \alpha_{1n\varphi x} & \beta_{1n\varphi x} & \alpha_{2n\varphi x} & \beta_{2n\varphi x} \\ \alpha_{1m\varphi} & \beta_{1m\varphi} & \alpha_{2m\varphi} & \beta_{2m\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

$$\hat{K}_T = \begin{pmatrix} +1 & 0 & +1 & 0 \\ +\alpha_1 + \mu_1 \cdot [1 - \varepsilon(1 - \nu)] & +\alpha_1 [1 - \varepsilon \cdot (1 - \nu)] - \mu_1 & -\alpha_2 + \mu_2 \cdot [1 + \varepsilon(1 - \nu)] & +\alpha_2 [1 + \varepsilon \cdot (1 - \nu)] + \mu_2 \\ +\alpha_1 & -\mu_1 & +\alpha_2 & -\mu_2 \\ -1 & -[1 + \varepsilon(1 - \nu)] & +1 & -[1 - \varepsilon(1 - \nu)] \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Damit sind vier Gleichungssysteme zu lösen,

z.B. Lastfall $n_\varphi = 1$:

$$\left. \begin{aligned} A_1 \cdot \beta_{1n_\varphi} + B_1 \cdot \alpha_{1n_\varphi} + A_2 \cdot \beta_{2n_\varphi} + B_2 \cdot \alpha_{2n_\varphi} &= 1 \\ A_1 \cdot \beta_{1\bar{q}_\varphi} + B_1 \cdot \alpha_{1\bar{q}_\varphi} + \dots &= 0 \\ A_1 \cdot \beta_{1n_{\varphi x}} + B_1 \cdot \alpha_{1n_{\varphi x}} + \dots &= 0 \\ A_1 \cdot \beta_{1m_\varphi} + B_1 \cdot \alpha_{1m_\varphi} + \dots &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

Demnach ist die Matrix der Lösungsvektoren, die die Integrationskonstanten für alle vier Einheitsbelastungen enthält, gleich der Kehrmatrix \hat{k}_γ^{-1} , wobei die Reihenfolge der Integrationskonstanten

B_1, A_1, B_2, A_2 ist:

also:

$$\hat{k}_\gamma \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{n}_\varphi = 1 & \hat{q}_\varphi = 1 & \hat{n}_{\varphi x} = 1 & \hat{m}_\varphi = 1 \\ B_1 & B_1 & B_1 & B_1 \\ A_1 & A_1 & A_1 & A_1 \\ B_2 & B_2 & B_2 & B_2 \\ A_2 & A_2 & A_2 & A_2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{L}} = \mathcal{E} \quad (5.20)$$

Vorzunehmende Operation:

$$\mathcal{L} = \hat{k}_\gamma^{-1} \quad (5.21)$$

\hat{k}_γ^{-1} existiert, wie man sofort nachprüft.

Ursache und Wirkung am gleichen Rand 1 (links):

$$\hat{n}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{n}_\varphi \\ \hat{q}_\varphi \\ \hat{n}_{\varphi x} \\ \hat{m}_\varphi \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{infolge} \\ X_1 = \hat{n}_\varphi = 1 \\ \text{am Rand 1} \\ \\ \\ \text{Rand 1} \end{matrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n_\varphi} & \beta_{1n_\varphi} & \alpha_{2n_\varphi} & \beta_{2n_\varphi} \\ \alpha_{1\bar{q}_\varphi} & \beta_{1\bar{q}_\varphi} & \alpha_{2\bar{q}_\varphi} & \beta_{2\bar{q}_\varphi} \\ \alpha_{1n_{\varphi x}} & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m_\varphi} & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ A_2 \end{pmatrix}^{-1} \quad (5.22)$$

Die statisch Überzähligen X_1, X_2, X_3, X_4 wirken am Rand 1 der Schale I, die Überzähligen X_5, X_6, X_7, X_8 wirken am Rand 2 der Schale I.

$$\hat{K}_1^{1-4} = (\hat{u}_1^1; \hat{u}_1^2; \hat{u}_1^3; \hat{u}_1^4) = (K_J)(L) = \mathcal{L} \quad (5.23)$$

$$(u_1^1; u_1^2; u_1^3; u_1^4) = (v_J)(\mathcal{L}) = v_J \quad (5.24)$$

$$v_J = \begin{pmatrix} \psi_{n_\varphi} & & & \\ & \psi_{\bar{q}_\varphi} & & \\ & & \psi_{n_{\varphi x}} & \\ & & & \psi_{m_\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Transformation der Randschnittgrößen $n_\varphi, \bar{q}_\varphi$ in die Richtungen der Hauptachsen 1,2 des Randträgers 1, siehe Bild 13, S. 129:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= n_\varphi \cdot \cos \xi_1 + \bar{q}_\varphi \cdot \sin \xi_1 \\ p_2 &= -n_\varphi \cdot \sin \xi_1 + \bar{q}_\varphi \cdot \cos \xi_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

Bereitstellung zweier Matrizen, nämlich der teilweise transformierten Schnittgrößen und der teilweise transformierten Deformation am Rand 1 infolge der dort wirkenden Überzähligen X_1, X_2, X_3, X_4 .

Matrix der Schnittgrößen: $(T_1^{X_{1-4}})_{4,4}$

Matrix der Deformationen: $(W_{Sch}^{X_{1-4}})_{4,4}$

$$(T_1^{X_{1-4}})_{4,4} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 & p_1^4 \\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 & p_2^4 \\ n_{x\varphi}^1 & n_{x\varphi}^2 & n_{x\varphi}^3 & n_{x\varphi}^4 \\ m_\varphi^1 & m_\varphi^2 & m_\varphi^3 & m_\varphi^4 \end{pmatrix} \text{Rand 1} \quad (5.27)$$

$$(\gamma_1^{X_{1-4}})_{4,4} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \xi_1 & \sin \xi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \xi_1 & \cos \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{(\gamma_1)_{4,4}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Psi_{n\varphi} & & & \\ & \Psi_{q\varphi} & & \\ & & \Psi_{n\chi\varphi} & \\ & & & \Psi_{m\varphi} \end{pmatrix}}_{(\vartheta_T)_{4,4}} \quad (5.28)$$

da nach Gl. (5.21) gilt: $(\tilde{\kappa}_T)_{4,4} (\tilde{L})_{4,4} = \mathcal{E}$

$$(\gamma_1^{X_{1-4}})_{4,4} = \begin{pmatrix} \Psi_{n\varphi} \cdot \cos \xi_1 & \Psi_{q\varphi} \cdot \sin \xi_1 & 0 & 0 \\ -\Psi_{n\varphi} \cdot \sin \xi_1 & \Psi_{q\varphi} \cdot \cos \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Psi_{n\chi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Psi_{m\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

$$(\gamma_1^{X_{1-4}})_{4,4} = (\gamma_1)(\vartheta_T) = \underbrace{\gamma_1 \vartheta_T}_{\tilde{\kappa}_T^*} \tilde{\kappa}_T \tilde{L} \quad (5.30)$$

$$\boxed{\gamma_1^{X_{1-4}} = \gamma_1 \tilde{\kappa}_T^* \tilde{L}} \quad \text{mit:} \quad \boxed{\tilde{\kappa}_T^* = \vartheta_T \tilde{\kappa}_T} \quad (5.31)$$

Ermittlung von $\mathcal{N}_{Sch 1}^{X_{1-4}}$

$$(\mathcal{N}_{Sch 1}^{1-4})_{4,4} = \begin{pmatrix} d_1^1 & d_1^2 & d_1^3 & d_1^4 \\ d_2^1 & d_2^2 & d_2^3 & d_2^4 \\ -Eu^1 & -Eu^2 & -Eu^3 & -Eu^4 \\ E\vartheta^1 & E\vartheta^2 & E\vartheta^3 & E\vartheta^4 \end{pmatrix} \quad (5.32)$$

Transformationsformeln für die Verschiebungen in Richtung der Hauptachsen des Randträgers, siehe Bild 13:

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= -E \cdot v \cdot \cos \xi_1 - E \cdot w \cdot \sin \xi_1 \\ d_2 &= E \cdot v \cdot \sin \xi_1 - E \cdot w \cdot \cos \xi_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{N}_{Sch 1}^{X_{1-4}})_{4,4} &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos \xi_1 & -\sin \xi_1 & 0 & 0 \\ \sin \xi_1 & -\cos \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{-(\mathcal{T}_1)_{4,4}} \underbrace{\begin{pmatrix} \Psi_{Ev} \\ \Psi_{Ew} \\ \Psi_{Eu} \\ -\Psi_{E\vartheta} \end{pmatrix}}_{(\mathcal{D}_{\mathcal{N}})_{4,4}} \\
 & \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{1Ev} & \beta_{1Ev} & \alpha_{2Ev} & \beta_{2Ev} \\ \alpha_{1Ew} & \beta_{1Ew} & \alpha_{2Ew} & \beta_{2Ew} \\ \alpha_{1Eu} & \beta_{1Eu} & \alpha_{2Eu} & \beta_{2Eu} \\ \alpha_{1E\vartheta} & \beta_{1E\vartheta} & \alpha_{2E\vartheta} & \beta_{2E\vartheta} \end{pmatrix}}_{(\bar{\mathcal{R}}_{\mathcal{N}})_{4,4}} (\mathcal{L})_{4,4} \quad (5.34)
 \end{aligned}$$

$$(\mathcal{N}_{Sch 1}^{X_{1-4}})_{4,4} = -\mathcal{T}_1 \underbrace{\bar{\mathcal{R}}_{\mathcal{N}}^*}_{\mathcal{D}_{\mathcal{N}}} \mathcal{L}$$

$$\mathcal{N}_{Sch 1}^{X_{1-4}} = -\mathcal{T}_1 \bar{\mathcal{R}}_{\mathcal{N}}^* \mathcal{L} \quad (5.35)$$

Aus der Tabelle Seite 119 der Vorfaktoren für alle Wirkungen.

Teilweise transformierte Schnittgrößen und teilweise transformierte Deformationen am Rand 2 infolge der Überzähligen X_1, X_2, X_3, X_4 am Rand 1.

Matrix der Schnittgrößen: $(\mathcal{T}_2^{X_{1-4}})_{4,4}$

Matrix der Verformungen: $(\mathcal{N}_{Sch 2}^{X_{1-4}})_{4,4}$

Zunächst:

$$\mathcal{T}_2^{X_{1-4}} = \begin{pmatrix} p_1^1 & p_1^2 & p_1^3 & p_1^4 \\ p_2^1 & p_2^2 & p_2^3 & p_2^4 \\ n_{x\varphi}^1 & n_{x\varphi}^2 & n_{x\varphi}^3 & n_{x\varphi}^4 \\ m_{\varphi}^1 & m_{\varphi}^2 & m_{\varphi}^3 & m_{\varphi}^4 \end{pmatrix} \text{ Rand 2} \quad (5.36)$$

Die Hauptachsen 1 und 2 an den Rändern 1 und 2 haben im allgemeinen nicht die gleiche Lage. Die Lage der Hauptachsen 1; 2 am Rand 2 ist durch den Winkel η_2 gegeben:

$$\xi_2 = \gamma_2 - \eta_2, \quad \text{siehe Bild 13}$$

$$\bar{r}_2 = \begin{pmatrix} \cos \xi_2 & \sin \xi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \xi_2 & \cos \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.37)$$

Umordnung der allgemeinen Darstellung für eine Wirkung, siehe Gl. (5.15):

$$\begin{aligned} \hat{W} &= (\alpha_1 B_1 + \beta_1 A_1) \cdot g_1 + & ; & \quad g_1 = e^{-\alpha_1 \bar{\varphi}} \cdot \cos \mu_1 \bar{\varphi} \\ &+ (\alpha_2 B_2 + \beta_2 A_2) \cdot g_2 + & ; & \quad g_2 = e^{-\alpha_2 \bar{\varphi}} \cdot \cos \mu_2 \bar{\varphi} \\ &+ (\alpha_1 A_1 + \beta_1 (-B_1)) \cdot g_3 + & ; & \quad g_3 = e^{-\alpha_1 \bar{\varphi}} \cdot \sin \mu_1 \bar{\varphi} \\ &+ (\alpha_2 A_2 + \beta_2 (-B_2)) \cdot g_4 & ; & \quad g_4 = e^{-\alpha_2 \bar{\varphi}} \cdot \sin \mu_2 \bar{\varphi} \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$W = \Psi_W \cdot \hat{W} \quad , \quad \text{nach Gleichung (5.4)} \quad (5.39)$$

Matrizendarstellung einer Wirkung:

$$\text{Vektor} \quad (\bar{\alpha}) = (\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2)$$

$$\text{Vektor} \quad (\gamma) = \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

$$\text{Matrix} \quad \psi^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

$$v^*(\chi) = \begin{pmatrix} A_1 \\ -B_1 \\ A_2 \\ -B_2 \end{pmatrix} \quad (5.42)$$

$$W/\bar{\varphi} = \Psi_W \cdot (\bar{\alpha})_{1,4} (\chi)_{4,1} \quad (5.43)$$

$$W/\bar{\varphi} = \Psi_W \cdot (\bar{\alpha})_{1,4} \underbrace{\begin{pmatrix} g_1 & & & \\ & g_1 & & \\ & & g_2 & \\ & & & g_2 \end{pmatrix}}_{g_1} (\chi)_{4,1} + \Psi_W \cdot (\bar{\alpha})_{1,4} \underbrace{\begin{pmatrix} g_3 & & & \\ & g_3 & & \\ & & g_4 & \\ & & & g_4 \end{pmatrix}}_{g_2} (v^*)_{4,4} \cdot (\chi)_{4,1} \quad (5.44)$$

$$W/\bar{\varphi} = \Psi_W (\bar{\alpha})_{1,4} \underbrace{[g_1 + g_2 v^*]_{4,4}}_{(g)_{4,4}} (\chi)_{4,1} \quad (5.45)$$

$$W/\bar{\varphi} = \Psi_W (\bar{\alpha})_{1,4} (g)_{4,4} (\chi)_{4,1} \quad (5.46)$$

$$g = g_1 + g_2 v^* = \begin{pmatrix} g_1 & g_3 & 0 & 0 \\ -g_3 & g_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2 & g_4 \\ 0 & 0 & -g_4 & g_2 \end{pmatrix} \quad (5.47)$$

Eine weitere Aufschlüsselung von g ist möglich jedoch nicht von Nutzen.

Damit ergibt sich für γ_2^{1-4}

$$(\gamma_2^{1-4})_{4,4} = (\bar{\gamma}_2)_{4,4} \underbrace{\mathcal{E}_\gamma (v_\gamma)_{4,4} (\bar{K}_\gamma)_{4,4}}_{\bar{K}_\gamma^*} (g)_{4,4} (L)_{4,4} \quad (5.48)$$

$$\bar{\gamma}_2^{X_{1-4}} = \bar{\gamma}_2 \varrho_T \bar{v}_{10} \bar{k}_T \varrho L$$

$$\bar{v}_T \bar{k}_T = \bar{k}_T^*$$

$$\varrho_T = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (5.50)$$

$$\bar{\gamma}_2^{X_{1-4}} = \bar{\gamma}_2 \varrho_T \bar{k}_T^* \varrho L \quad (5.49)$$

Matrix der Deformationen $\mathcal{N}_{Sch 2}^{X_{1-4}}$

$$(\mathcal{N}_{Sch 2}^{X_{1-4}}) = -\bar{\gamma}_2 \varrho_{10} \underbrace{\bar{v}_{10} \bar{k}_{10}}_{\bar{k}_{10}^*} \varrho L \quad (5.51)$$

$$\bar{v}_{10} \bar{k}_{10} = \bar{k}_{10}^* ; \quad \varrho_{10} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & +1 & & \\ & & +1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

Aufstellung der 8 - reihigen Verformungsmatrix $\mathcal{N}_{Sch I}^{X_{1-8}}$ der unsymmetrischen Schale

Sie setzt sich aus den 4 - reihigen Matrizen zusammen.

$$\mathcal{N}_{Sch I}^{X_{1-8}} = \begin{pmatrix} (\mathcal{N}_{Sch 1}^{X_{1-4}})_{4,4} & (\mathcal{N}_{Sch 1}^{X_{5-8}})_{4,4} \\ \text{Rand 1} & \\ (\mathcal{N}_{Sch 2}^{X_{1-4}})_{4,4} & (\mathcal{N}_{Sch 2}^{X_{5-8}})_{4,4} \\ \text{Rand 2} & \end{pmatrix}_{I(8,8)} \quad (5.53)$$

Mit:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{Sch 1}^{X_{1-4}} &= -\bar{\gamma}_1 \underbrace{\bar{v}_{10} \bar{k}_{10}}_{\bar{k}_{10}^*} L ; & \mathcal{N}_{Sch 1}^{X_{5-8}} &= -\bar{\gamma}_1 \varrho_{10} \underbrace{\bar{v}_{10} \bar{k}_{10}}_{\bar{k}_{10}^*} \varrho L \\ \mathcal{N}_{Sch 2}^{X_{1-4}} &= -\bar{\gamma}_2 \varrho_{10} \underbrace{\bar{v}_{10} \bar{k}_{10}}_{\bar{k}_{10}^*} \varrho L ; & \mathcal{N}_{Sch 2}^{X_{5-8}} &= -\bar{\gamma}_2 \underbrace{\bar{v}_{10} \bar{k}_{10}}_{\bar{k}_{10}^*} L \end{aligned} \quad (5.54)$$

Also:

$$(\mathcal{N}_{Sch I}^{X_{1-8}}) = - \begin{pmatrix} (\bar{\gamma}_1 \bar{k}_{10}^* L)_{4,4} & (\bar{\gamma}_1 \varrho_{10} \bar{k}_{10}^* \varrho L)_{4,4} \\ (\bar{\gamma}_2 \varrho_{10} \bar{k}_{10}^* \varrho L)_{4,4} & (\bar{\gamma}_2 \bar{k}_{10}^* L)_{4,4} \end{pmatrix}_{8,8} \quad (5.55)$$

Verformungsmatrix einer Schalenreihe aus drei Schalen.
Die Matrix ist $3 \times 8 = 24$ reihig.

$$\begin{matrix} \text{I} X_{1-4} \\ \text{I} X_{5-8} \\ \text{II} X_{1-4} \\ \text{II} X_{5-8} \\ \text{II} X_{8-12} \\ \text{II} X_{12-16} \\ \text{III} X_{16-20} \\ \text{III} X_{20-24} \end{matrix} \begin{matrix} \text{I} X_{1-4} \\ \text{I} X_{5-8} \\ \text{II} X_{1-4} \\ \text{II} X_{5-8} \\ \text{II} X_{8-12} \\ \text{II} X_{12-16} \\ \text{III} X_{16-20} \\ \text{III} X_{20-24} \end{matrix} \begin{matrix} \text{I} X_{1-4} \\ \text{I} X_{5-8} \\ \text{II} X_{1-4} \\ \text{II} X_{5-8} \\ \text{II} X_{8-12} \\ \text{II} X_{12-16} \\ \text{III} X_{16-20} \\ \text{III} X_{20-24} \end{matrix} \begin{matrix} \text{I} X_{12-16} \\ \text{II} X_{12-16} \\ \text{III} X_{12-16} \\ \text{III} X_{16-20} \\ \text{III} X_{20-24} \end{matrix} \begin{matrix} \text{II} X_{16-20} \\ \text{II} X_{20-24} \\ \text{III} X_{16-20} \\ \text{III} X_{20-24} \end{matrix} \begin{matrix} \text{II} X_{20-24} \\ \text{III} X_{20-24} \\ \text{III} X_{16-20} \\ \text{III} X_{20-24} \end{matrix}$$

(5.56)

5.4.2 Aufstellung der Matrizen, die die Verformungen der Randträger an den Anschnittlinien mit den Schalen - infolge der statisch Überzähligen X_1 - enthalten

Es sind die Randträger I 1, I 2, II 1, II 2, usw. vorhanden. Jeder Randträger hat die Hauptachsen 1 und 2.

Darstellung der geometrischen Verhältnisse am Randträger I 1.

Der Anschnittpunkt mit der Schale ist O.

Der Schwerpunkt des Randträgers ist S.

Der Schubmittelpunkt des Randträgers ist M.

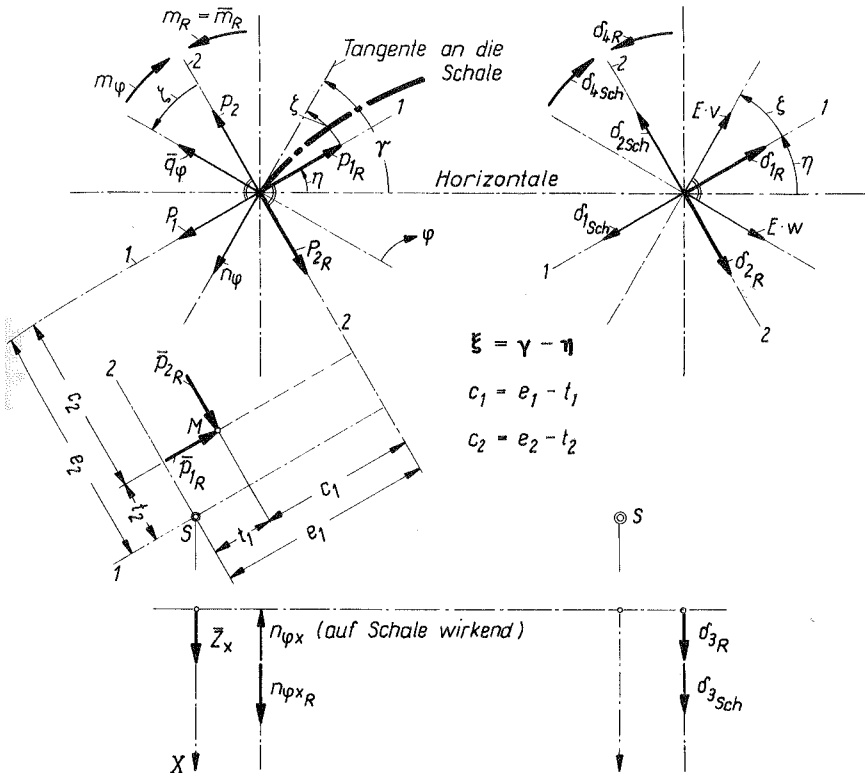


Bild 13

Schnittgrößen und Deformationen von Schale und Randträger in der Anschnittlinie

Die Kenngrößen des Randträgerquerschnittes sind:

Lage des Anschnittpunktes O bezüglich des Schwerpunktes S, gemessen im Hauptachsensystem 1; 2: e_1, e_2 [m]

Lage des Schubmittelpunktes M bezüglich des Schwerpunktes S, gemessen im Hauptachsensystem 1; 2: t_1, t_2 [m]

Neigung der Hauptachsen 1 - 1 gegen die Horizontale η [°]

Damit: $\xi_j = \gamma_j - \eta_j$ [1]

Querschnittsfläche: F [m²]

Trägheitsmomente: $J_{11}; J_{22}$ [m⁴]

St. Venantscher Drillwiderstand: J_t [m⁴]

$$l = \frac{L}{n \cdot \pi} \text{ [m]}; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

Für jeden Randträger werden zunächst die folgenden zwei Matrizen gebildet:

Matrix $(\bar{\rho}_{R1}^{\bar{p}})_{4,4}$: Amplituden der Deformationen des Randträgers 1 in der Anschnittlinie infolge der Einheitsbelastungen \bar{p}_1, \bar{p}_2 im Schubmittelpunkt, \bar{z}_x im Schwerpunkt und \bar{m} .

$$\bar{\rho}^1 = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{z}_x, \bar{m}) \quad (5.57)$$

$$(\bar{\rho}_{R1}^{\bar{p}}) \quad \bar{p}_1 = 1 \cdot \cos \lambda \xi \quad \bar{p}_2 = 1 \cdot \cos \lambda \xi \quad \bar{z}_x = 1 \cdot \cos \lambda \xi \quad \bar{m}_\varphi = 1 \cdot \cos \lambda \xi \quad f(x)$$

d_{1R}	$+\frac{l^4}{J_{22}}$	—	—	$-(1+\nu) \cdot \frac{l^2}{J_H} c_2$	$\cos \frac{n\pi x}{L}$
d_{2R}	—	$+\frac{l^4}{J_{11}}$	—	$-(1+\nu) \cdot \frac{l^2}{J_H} c_1$	$\cos \frac{n\pi x}{L}$
d_{3R}	$+\frac{l^4}{J_{22}} \cdot \frac{e_1}{l}$	$-\frac{l^4}{J_{11}} \cdot \frac{e_2}{l}$	$+\frac{l}{F}$	—	$\sin \frac{n\pi x}{L}$
d_{4R}	—	—	—	$+1(1+\nu) \cdot \frac{l^2}{J_H}$	$\cos \frac{n\pi x}{L}$

(5.58)

Matrix $(\bar{p}_1^{\mathcal{P}})_{4,4}$: Amplituden der äquivalenten Lasten durch M und S für die Einheitslasten

$$\mathcal{P}' = (p_1, p_2, n_{\varphi \times R}, m_{\varphi R}) \quad (5.59)$$

im Anschnitt 0 des Randträgers 1.

$$(\bar{p}_1^{\mathcal{P}})_{4,4} \quad p_1 = 1 \cdot \cos \lambda \xi \quad p_2 = 1 \cdot \cos \lambda \xi \quad n_{\varphi \times} = 1 \cdot \sin \lambda \xi \quad m_{\varphi} = 1 \cdot \cos \lambda \xi \quad f(x)$$

\bar{p}_1	1	—	$+\frac{e_1}{l}$	—	$\cos \frac{n\pi x}{L}$
\bar{p}_2	—	1	$-\frac{e_2}{l}$	—	$\cos \frac{n\pi x}{L}$
\bar{Z}_x	—	—	l	—	$\cos \frac{n\pi x}{L}$
\bar{m}_{φ}	$-c_2$	$-c_1$	—	1	$\cos \frac{n\pi x}{L}$

(5.60)

Matrix $(\mathcal{N}_{R1}^{\mathcal{P}})_{4,4}$: Amplituden der Deformationen des Randträgers 1 in 0 infolge der Einheitslasten \mathcal{P} in 0.

$$(\mathcal{N}_{R1}^{\mathcal{P}})_{4,4} = (\mathcal{N}_{R1}^{\bar{\mathcal{P}}})_{4,4} (\bar{p}_1^{\mathcal{P}})_{4,4} \quad (5.61)$$

Matrix $(\mathcal{N}_{R1}^{X_{1-4}})_{4,4}$: Amplituden der Deformationen des Randträgers 1 in 0 infolge der statisch überzähligen Einheitslasten X_{1-4} .

Infolge der statisch überzähligen Einheitslasten X_{1-4} am Rand 1 wirken auf den Randträger die Schnittgrößen $\mathcal{T}_1^{X_{1-4}}$.

$$\text{Damit: } \mathcal{N}_{R1}^{X_{1-4}} = \mathcal{N}_{R1}^{\mathcal{P}} \mathcal{T}_1^{X_{1-4}} \quad (5.62)$$

Mit Gl. (5.61) und Gl. (5.31), nämlich $\mathcal{T}_1^{X_{1-4}} = \bar{\mathcal{T}}_1 \bar{K}_T^* L$:

$$\mathcal{N}_{R1}^{X_{1-4}} = \mathcal{N}_{R1}^{\bar{\mathcal{P}}} \bar{p}_1^{\mathcal{P}} \bar{\mathcal{T}}_1 \bar{K}_T^* L \quad (5.63)$$

Entsprechend erhält man die Amplituden der Deformationen an der Anschnittlinie von Randträger 2 infolge der Einheitslasten X_{1-4} am Rand 1:

$$\mathcal{N}_{R2}^{X_{1-4}} = \mathcal{N}_{R2}^{\mathcal{P}} \mathcal{T}_2^{X_{1-4}} \quad (5.64)$$

Mit Gl. (5.61) (Index R2) und Gl. (5.49):

$$\mathcal{N}_{R2}^{X_{1-4}} = \mathcal{N}_{R2}^{\bar{P}} \bar{P}_2^{\bar{P}} \bar{z}_2 \varepsilon_T \mathcal{K}_T^* \mathcal{G} \mathcal{L} \quad (5.65)$$

Analog ergeben sich die Deformationen an den Rändern 2 und infolge der Überzähligen X_{5-8} am Rand 2:

$$\mathcal{N}_{R2}^{X_{5-8}} = \mathcal{N}_{R2}^{\bar{P}} \bar{P}_2^{\bar{P}} \bar{z}_2^{X_{5-8}} ; \quad \mathcal{N}_{R1}^{X_{5-8}} = \mathcal{N}_{R1}^{\bar{P}} \bar{P}_1^{\bar{P}} \bar{z}_1^{X_{5-8}} \quad (5.66)$$

$$\mathcal{N}_{R2}^{X_{5-8}} = \mathcal{N}_{R2}^{\bar{P}} \bar{P}_2^{\bar{P}} \bar{z}_2 \mathcal{K}_T^* \mathcal{L} \quad (5.67)$$

$$\mathcal{N}_{R1}^{X_{5-8}} = \mathcal{N}_{R1}^{\bar{P}} \bar{P}_1^{\bar{P}} \bar{z}_1 \varepsilon_T \mathcal{K}_T^* \mathcal{G} \mathcal{L} \quad (5.68)$$

Liegt nur eine unsymmetrische Schale vor, so ergeben sich folgende Randträgerverformungen:

$$\left(\mathcal{N}_{RI}^{X_{1-8}} \right)_{8,8} = \begin{pmatrix} \left(\mathcal{N}_{RII}^{X_{1-4}} \right)_{4,4} & \mathcal{N}_{RII}^{X_{5-8}} \\ \mathcal{N}_{RII}^{X_{1-4}} & \mathcal{N}_{RII}^{X_{5-8}} \end{pmatrix}_{8,8} \quad (5.69)$$

$$\mathcal{N}_{RI}^{X_{1-8}} = \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{R1}^{\bar{P}} \bar{P}_1^{\bar{P}} \bar{z}_1 \mathcal{K}_T^* \mathcal{L} & \mathcal{N}_{R1}^{\bar{P}} \bar{P}_1^{\bar{P}} \bar{z}_1 \varepsilon_T \mathcal{K}_T^* \mathcal{G} \mathcal{L} \\ \mathcal{N}_{R2}^{\bar{P}} \bar{P}_2^{\bar{P}} \bar{z}_2 \varepsilon_T \mathcal{K}_T^* \mathcal{G} \mathcal{L} & \mathcal{N}_{R2}^{\bar{P}} \bar{P}_2^{\bar{P}} \bar{z}_2 \mathcal{K}_T^* \mathcal{L} \end{pmatrix}_I \quad (5.70)$$

5.4.3 Die Gleichungsmatrix für die statisch überzähligen Randschnittgrößen

Die gegenseitigen Verformungen aus Schale und Randträger ergeben sich durch Addition der entsprechenden Matrizen, z. B.:

$$\mathcal{N}_{I_1}^{X_{1-4}} = \mathcal{N}_{Sch I_1}^{X_{1-4}} + \mathcal{N}_{R I_1}^{X_{1-4}} \quad (5.71)$$

$$\mathcal{N}_{I_1}^{X_{1-8}} = \begin{pmatrix} (-\bar{z}_1 \bar{K}_N^* + \mathcal{N}_{R1}^{\bar{P}} \bar{P}_1^{\bar{P}} \bar{z}_1 \bar{K}_T^*) L_{(4,4)} & (-\bar{z}_1 \bar{z}_N \bar{K}_N^* + \mathcal{N}_{R1}^{\bar{P}} \bar{P}_1^{\bar{P}} \bar{z}_1 \bar{z}_T \bar{K}_T^*) \mathcal{Q} L_{4,4} \\ (-\bar{z}_2 \bar{z}_N \bar{K}_N^* + \mathcal{N}_{R2}^{\bar{P}} \bar{P}_2^{\bar{P}} \bar{z}_2 \bar{z}_T \bar{K}_T^*) \mathcal{Q} L_{(4,4)} & (-\bar{z}_2 \bar{K}_N^* + \mathcal{N}_{R2}^{\bar{P}} \bar{P}_2^{\bar{P}} \bar{z}_2 \bar{K}_T^*) L_{(4,4)} \end{pmatrix}_I \quad (5.72)$$

$\mathcal{N}_{I_1}^{X_{1-8}}$ ist die Gleichungsmatrix zur Ermittlung der statisch überzähligen X_{1-8} .

Für eine Tonnenreihe mit drei Schalen ergibt sich folgende Bandmatrix:

	X_{1-4}	X_{5-8}	X_{9-12}	X_{13-16}	X_{17-20}	X_{21-24}
I_1	${}^{1-4}W_{Sch I_1} + {}^{1-4}W_{RI_1}$	${}^{5-8}W_{Sch I_1} + {}^{5-8}W_{RI_1}$				
I_2	${}^{1-4}W_{Sch I_2} + {}^{1-4}W_{RI_2}$	${}^{5-8}W_{Sch I_2} + {}^{5-8}W_{RI_2}$	${}^{9-12}W_{RI_2}$	${}^{13-16}W_{RI_2}$		
II_1	${}^{1-4}W_{RI_1}$	${}^{5-8}W_{RI_1}$	${}^{9-12}W_{Sch II_1} + {}^{9-12}W_{RI_1}$	${}^{13-16}W_{Sch II_1} + {}^{13-16}W_{RI_1}$		
II_2			${}^{9-12}W_{Sch II_2} + {}^{9-12}W_{RI_2}$	${}^{13-16}W_{Sch II_2} + {}^{13-16}W_{RI_2}$	${}^{17-20}W_{RI_2}$	${}^{21-24}W_{RI_2}$
III_1			${}^{9-12}W_{RI_1}$	${}^{13-16}W_{RI_1}$	${}^{17-20}W_{Sch III_1} + {}^{17-20}W_{RI_1}$	${}^{21-24}W_{Sch III_1} + {}^{21-24}W_{RI_1}$
III_2					${}^{17-20}W_{Sch III_2} + {}^{17-20}W_{RI_2}$	${}^{21-24}W_{Sch III_2} + {}^{21-24}W_{RI_2}$

$$= ({}^{X_{1-24}}_{I-III}) / 24, 24$$

5.4.4 Die Verformungen von Schale und Randträger infolge äußerer Belastung (Partikularlösung)

Der Verformungsvektor w^0 ergibt sich aus der Partikularlösung der Schale w_{Sch}^0 und den Verformungen w_R^0 des Randträgers in der Anschnittlinie infolge äußerer Belastung.

$$w^0 = w_{Sch}^0 + w_R^0 \quad (5.74)$$

Ermittlung des Vektors w_{Sch}^0

$$w_{Sch I,1}^0 = \begin{pmatrix} d_1^0 \\ d_2^0 \\ -E u^0 \\ E v^0 \end{pmatrix}_{Sch I I} \quad (5.75)$$

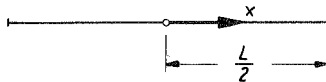
$$\left. \begin{aligned} d_{1I1}^0 &= (-E \cdot v^0 \cos \xi - E \cdot w^0 \sin \xi)_{I1} \\ d_{2I2}^0 &= (E \cdot v^0 \sin \xi - E \cdot w^0 \cos \xi)_{I1} \end{aligned} \right\} \quad (5.76)$$

$$w_{Sch I,1}^* = \begin{pmatrix} -E v^0 \\ -E w^0 \\ -E u^0 \\ E v^0 \end{pmatrix}_{Sch I I} = \begin{pmatrix} + \frac{\alpha}{h \cdot \lambda} F_{\lambda 1} (2\lambda^2 + 1) \cdot \sin \gamma_1 \\ - \frac{1}{h} \frac{W_{\lambda 1}}{k} \cos \gamma_1 \\ + \frac{\alpha}{h \cdot \lambda} F_{\lambda 1} \cos \gamma_1 \\ \frac{1}{\alpha} \left[+ \frac{1}{h} \frac{W_{\lambda 1}}{k} - \frac{\alpha}{h \cdot \lambda^2} F_{\lambda 1} (2\lambda^2 + 1) \right] \sin \gamma_1 \end{pmatrix}_I \quad (5.77)$$

$$w_{Sch I I}^0 = \gamma_{I1} \cdot w_{Sch I,1}^* \quad (5.78)$$

$w_{Sch I I}^0$ für gleichmäßig verteilte Belastung q_{Sch} [t / m²]

Fourierentwicklung von q_{Sch} in Richtung der Erzeugenden (x - Richtung):



$$[q] = t/m^2 \quad q_{Sch}(x) = \frac{4q_{Sch}}{\pi} \left(\cos \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi x}{L} + \dots \right) \quad (5.79)$$

$$q_{Sch1} = \frac{4 q_{Sch}}{\pi} ; \quad q_{Sch2} = \frac{4}{3\pi} q_{Sch} ; \quad q_{Sch3} = \frac{4}{5\pi} q_{Sch} \dots \quad (5.80)$$

$$q_{Schn} = \frac{4}{(2n-1)\pi} q_{Sch} ; \quad \lambda = \frac{n\pi a}{L} \text{ (siehe Gl. 5.6)}$$

$$F_{\lambda 1} = \frac{4}{(2n-1)\pi} q_{Sch} \cdot a^2 \frac{(\lambda^2 + 1)^2 k + 2}{(\lambda^2 + 1)^4 k + \lambda^4} \quad (5.81)$$

$$W_{\lambda 1} = \frac{4}{(2n-1)\pi} q_{Sch} \cdot a^2 \frac{(\lambda^2 + 1)^2 + (2\lambda^2 + 1)}{(\lambda^2 + 1)^4 k + \lambda^4} \quad (5.82)$$

Ermittlung des Vektors \mathcal{W}_{RII}^0

Dieser Vektor, z.B.

$$\mathcal{W}_{RII}^0 = \begin{pmatrix} \sigma_1^0 \\ \sigma_2^0 \\ -E u^0 \\ E v^0 \end{pmatrix}_{RII}, \quad (5.83)$$

setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

$$\mathcal{W}_{RII}^0 = \mathcal{W}_{RII}^{OR} + \mathcal{W}_{RII}^{OSch} \quad (5.84)$$

\mathcal{W}_{RII}^{OR} entsteht durch direkte Belastung des Randträgers, also Eigengewicht und eine zusätzliche Linienlast.

\mathcal{W}_{RII}^{OSch} entsteht aus der Belastung des Randträgers durch die Schale im partikulären Zustand.

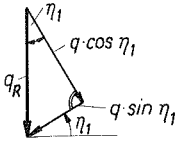
Nach Gl. (5.61) ist:

$$\mathcal{W}_{RII}^{OR} = \mathcal{W}_{RII}^{\bar{P}} \bar{\mathcal{P}}_{RII}^0 \quad (5.85)$$

Der Vektor $\bar{\mathcal{P}}_{RII}^0$ enthält die eingepprägten Belastungen des Randträgers im Schubmittelpunkt und Schwerpunkt.

$$\bar{\mathcal{P}}_{RII}^0 = \begin{pmatrix} \bar{p}_{1R}^0 \\ \bar{p}_{2R}^0 \\ \bar{z}_x^0 \\ \bar{m}^0 \end{pmatrix}_{RII} \quad (5.86)$$

Für Gleichstreckenlast q_R [t/m]; $n = 1$ ergibt sich:



$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1^0 &= -\frac{4 \cdot q_R}{\pi} \cdot \sin \eta_1 & \bar{z}_x^0 &= 0 \\ \bar{p}_2^0 &= +\frac{4 \cdot q_R}{\pi} \cdot \cos \eta_1 & \bar{m}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.87)$$

n-tes Fouriierglied:

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1^0 &= -\frac{4}{(2n-1)\pi} \cdot q_R \cdot \sin \eta_1 & \bar{z}_x^0 &= 0 \\ \bar{p}_2^0 &= +\frac{4}{(2n-1)\pi} \cdot q_R \cdot \cos \eta_1 & \bar{m}^0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.88)$$

Mit Gl. (5.62) und (5.61) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{w}_{RII}^{0Sch} &= \bar{w}_{RII}^{\bar{p}} \cdot \bar{p}_{Sch I I}^0 & (5.89) \\ &= \bar{w}_{RII}^{\bar{p}} \cdot \bar{p}_{RII}^{\bar{p}} \quad \text{siehe Gl. (5.61)} \end{aligned}$$

Der Vektor $\bar{p}_{Sch I I}^0$ enthält die partikulären Schnittgrößen der Schale I am Rand 1, wobei die Normal- und die Querkraft in die Richtungen der Hauptachsen 1 und 2 zerlegt sind.

$$\bar{p}_{Sch I I}^0 = \begin{pmatrix} p_{1Sch}^0 \\ p_{2Sch}^0 \\ n_{x\varphi}^0 \\ m_{\varphi}^0 \end{pmatrix} \quad (5.90)$$

$$\bar{p}_{Sch I I}^0 = \bar{z}_{II} \cdot \bar{p}_{Sch I I}^* \quad (5.91)$$

$$\bar{p}_{Sch I I}^* = \begin{pmatrix} n_{\varphi}^0 \\ \bar{q}_{\varphi}^0 \\ n_{x\varphi}^0 \\ m_{\varphi}^0 \end{pmatrix}_{Sch I I} = \begin{pmatrix} (-\lambda^2 F_{\lambda 1} + a \frac{4}{(2n-1)\pi} q_{Sch}) \cdot \cos \gamma_1 \\ -\frac{1}{a} w_{\lambda 1} (2\lambda^2 + 1) \cdot \sin \gamma_1 \\ \lambda \cdot F_{\lambda 1} \cdot \sin \gamma_1 \\ \frac{1}{1-\nu^2} w_{\lambda 1} (1 + \nu \cdot \lambda^2) \cdot \cos \gamma_1 \end{pmatrix}_I \quad (5.92)$$

$$\mathbb{10}_{RI1}^{0Sch} = \mathbb{10}_{RI1}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{10}}_{RI1}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{1}}_{I1} \mathbb{p}_{Sch I1}^* \quad (5.93)$$

Zusammenfassung des Belastungsvektors z.B. am Rand 1 der Schale I.

$$(\mathbb{10}_{I1}^0)_{4,1} = \bar{\mathbb{1}}_{I1} \mathbb{10}_{Sch I1}^* + \mathbb{10}_{RI1}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{10}}_{RI1}^0 + \mathbb{10}_{RI1}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{10}}_{RI1}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{1}}_{I1} \mathbb{p}_{Sch I1}^* \quad (5.94)$$

Entsprechend:

$$(\mathbb{10}_{I2}^0)_{4,1} = \bar{\mathbb{1}}_{I2} \mathbb{10}_{Sch I2}^* + \mathbb{10}_{RI2}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{10}}_{RI2}^0 + \mathbb{10}_{RI2}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{10}}_{RI2}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{1}}_{I2} \mathbb{p}_{Sch I2}^* + \mathbb{10}_{RI2}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{10}}_{RI2}^{\bar{p}} \bar{\mathbb{1}}_{II1} \mathbb{p}_{Sch II1}^* \quad (5.95)$$

$$\mathbb{10}_{Sch I2}^* = \begin{pmatrix} \frac{a}{h \cdot \lambda} F_{\lambda 1} (2\lambda^2 + 1) \cdot \sin \gamma_2 \\ -\frac{1}{h} \frac{W_{\lambda 1}}{k} \cdot \cos \gamma_2 \\ + \frac{a}{h \cdot \lambda} F_{\lambda 1} \cdot \cos \gamma_2 \\ \frac{1}{a} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{W_{\lambda 1}}{k} - \frac{a}{h \cdot \lambda^2} F_{\lambda 1} (2\lambda^2 + 1) \right] \sin \gamma_2 \end{pmatrix}_I \quad (5.96)$$

$$\bar{\mathbb{10}}_{RI2}^0 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{(2n-1)\pi} q_R \cdot \sin \eta_2 \\ -\frac{4}{(2n-1)\pi} q_R \cdot \cos \eta_2 \\ \bar{z}^0 \\ \bar{m}^0 \end{pmatrix}_I \quad (5.97)$$

$$\mathbb{p}_{Sch I2}^* = \begin{pmatrix} \left[-\lambda^2 \cdot F_{\lambda 1} + a \frac{4}{(2n-1)\pi} q_{Sch} \right] \cos \gamma_2 \\ -\frac{1}{a} W_{\lambda 1} (2\lambda^2 + 1) \cdot \sin \gamma_2 \\ \lambda \cdot F_{\lambda 1} \cdot \sin \gamma_2 \\ \frac{1}{1-\nu^2} W_{\lambda 1} (1+\nu \cdot \lambda^2) \cdot \cos \gamma_2 \end{pmatrix}_I \quad (5.98)$$

$$\mathbb{p}_{Sch II1}^* = \begin{pmatrix} \left[-\lambda^2 \cdot F_{\lambda 1} + a \frac{4}{(2n-1)\pi} q_{Sch} \right] \cos \gamma_1 \\ -\frac{1}{a} W_{\lambda 1} (2\lambda^2 + 1) \cdot \sin \gamma_1 \\ \lambda \cdot F_{\lambda 1} \cdot \sin \gamma_1 \\ \frac{1}{1-\nu^2} W_{\lambda 1} (1+\nu \cdot \lambda^2) \cdot \cos \gamma_1 \end{pmatrix}_{II} \quad (5.99)$$

Die Kopplungsanteile in den Belastungsgliedern ergeben sich infolge der Randträger.

Randträger I 2, Anteile aus Schale II:

$$(w_{RI2}^0)^{II} = \kappa_{RI2}^{\bar{p}} \bar{p}_{RI2}^{\rho} \zeta_{II1} \rho_{Sch II 1}^*$$

Randträger II 1, Anteile aus Schale I:

$$(w_{RI1}^0)^I = \kappa_{RI1}^{\bar{p}} \bar{p}_{RI2}^{\rho} \zeta_{I2} \rho_{Sch I 2}^*$$

(5.100)

Insgesamt:

$$(w_{II1}^0)_{4,1} = \zeta_{II1} \kappa_{Sch II 1}^* + \kappa_{RI1}^{\bar{p}} \bar{p}_{RI1}^0 + \kappa_{RI1}^{\bar{p}} \underbrace{\bar{p}_{RI1}^{\rho} \zeta_{II1} \rho_{Sch II 1}^*}_{\bar{p}_{Sch II 1}^0} + \kappa_{RI1}^{\bar{p}} \underbrace{\bar{p}_{RI2}^{\rho} \zeta_{I2} \rho_{Sch I 2}^*}_{\bar{p}_{Sch I 2}^0}$$

(5.101)

Zusammenfassung:

z. B.: $\bar{p}_{RI2}^{\rho} \zeta_{I2} \rho_{Sch I 2}^* = \bar{p}_{Sch I 2}^0$

(5.102)

Damit:

$$\bar{p}_{RI2}^{\rho} \zeta_{II1} \rho_{Sch II 1}^* = \bar{p}_{Sch II 1}^0$$

(5.103)

$$\kappa_{I1}^0 = \zeta_{I1} \kappa_{Sch I 1}^* + \kappa_{RI1}^{\bar{p}} (\bar{p}_{RI1}^0 + \bar{p}_{Sch I 1}^0)$$

$$\kappa_{I2}^0 = \zeta_{I2} \kappa_{Sch I 2}^* + \kappa_{RI2}^{\bar{p}} (\bar{p}_{RI2}^0 + \bar{p}_{Sch I 2}^0 + \bar{p}_{Sch II 1}^0)$$

(5.104)

$$\kappa_{II1}^0 = \zeta_{II1} \kappa_{Sch II 1}^* + \kappa_{RI1}^{\bar{p}} (\bar{p}_{RI1}^0 + \bar{p}_{Sch II 1}^0 + \bar{p}_{Sch I 2}^0)$$

$$\kappa_{II2}^0 = \zeta_{II2} \kappa_{Sch II 2}^* + \kappa_{RI2}^{\bar{p}} (\bar{p}_{RI2}^0 + \bar{p}_{Sch II 2}^0 + \bar{p}_{Sch II 1}^0)$$

(5.105)

$$\kappa_{III1}^0 = \zeta_{III1} \kappa_{Sch III 1}^* + \kappa_{RI1}^{\bar{p}} (\bar{p}_{RI1}^0 + \bar{p}_{Sch III 1}^0 + \bar{p}_{Sch II 2}^0)$$

$$\kappa_{III2}^0 = \zeta_{III2} \kappa_{Sch III 2}^* + \kappa_{RI2}^{\bar{p}} (\bar{p}_{RI2}^0 + \bar{p}_{Sch III 2}^0)$$

(5.106)

5.4.5 Ermittlung der endgültigen Wirkungen (Schnittgrößen und Deformationen) durch Superposition aller Einflüsse

Die Wirkung W (φ_i, ξ_j) soll an r frei wählbaren Stellen i in Querrichtung und s frei wählbaren Stellen j in Längsrichtung bestimmt werden.

Diagonalmatrix der Koeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ der Wirkung W :

$$\hat{v}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \beta_1 & & \\ & & \alpha_2 & \\ & & & \beta_2 \end{pmatrix} \quad (5.107)$$

Vektor $g_{1,i}$ der Funktionen $g_{1,1}$ und $g_{1,2}$ an der Stelle φ_i

$$g'_{1,i} = (g_{i1} \quad g_{i1} \quad g_{i2} \quad g_{i2}) \quad (5.108)$$

$$g_{i1} = e^{-\alpha_1 \bar{\varphi}_i} \cos \mu_1 \bar{\varphi}_i ; \quad g_{i2} = e^{-\alpha_2 \bar{\varphi}_i} \cos \mu_2 \bar{\varphi}_i \quad (5.109)$$

$$g'_{1,i} \hat{v}_\alpha \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = g_1 \alpha_1 B_1 + g_1 \beta_1 A_1 + g_2 \alpha_2 B_2 + g_2 \beta_2 A_2 \quad (5.110)$$

$$g'_{2,i} = (g_{i3} \quad -g_{i3} \quad g_{i4} \quad -g_{i4}) \quad (5.111)$$

$$g_{i3} = e^{-\alpha_1 \bar{\varphi}_i} \sin \mu_1 \bar{\varphi}_i ; \quad g_{i4} = e^{-\alpha_2 \bar{\varphi}_i} \sin \mu_2 \bar{\varphi}_i \quad (5.112)$$

$$g'_{2,i} \hat{v}_\alpha \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ A_2 \end{pmatrix} = g_3 \alpha_1 B_1 - g_3 \beta_1 A_1 + g_4 \alpha_2 B_2 - g_4 \beta_2 A_2 \quad (5.113)$$

Die Wirkung $W(\varphi_i, \xi_j)$ infolge einer Überzähligen X_k ergibt sich damit zu:

$$\begin{aligned}
 W^{inf. X_k}(\varphi_i, \xi_j) &= \Psi_W \cdot g'_{1,i} \cdot v'_\alpha \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ A_2 \end{pmatrix}^{inf. X_k=1} \cdot X_r \begin{Bmatrix} \cos \lambda \xi_j \\ \sin \lambda \xi_j \end{Bmatrix} + \\
 &+ \Psi_W \cdot g'_{2,i} \cdot v'_\alpha \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ A_2 \end{pmatrix}^{inf. X_k=1} \cdot X_r \begin{Bmatrix} \cos \lambda \xi_j \\ \sin \lambda \xi_j \end{Bmatrix} \quad (5.114)
 \end{aligned}$$

$$W^{inf. X_k}(\varphi_i, \xi_j) = \Psi_W \frac{(g'_{1,i} + g'_{2,i})}{g'_i} v'_\alpha \begin{pmatrix} B_1 \\ A_1 \\ B_2 \\ A_2 \end{pmatrix}^{inf. X_k=1} \cdot X_r \begin{Bmatrix} \cos \lambda \xi_j \\ \sin \lambda \xi_j \end{Bmatrix} \quad (5.115)$$

$$g'_i = g'_{1,i} + g'_{2,i} = (g_{11} + g_{13} ; g_{11} - g_{13} ; g_{12} + g_{14} ; g_{12} - g_{14}) \quad (5.116)$$

Infolge der statisch Überzähligen $e^{1-4} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ 1 \end{pmatrix}$ am (linken) Rand 1 ergibt sich:

$$W^{inf. X_{1-4}}(\varphi_i, \xi_j) = \Psi_W g'_i \cdot v'_\alpha \cdot \mathcal{L} e^{1-4} \begin{Bmatrix} \cos \lambda \xi_j \\ \sin \lambda \xi_j \end{Bmatrix} \quad (5.117)$$

Für r Stellen φ_i ist folgende Matrix \mathcal{G} zu bilden:

$$\mathcal{G}_{(r,4)} = \begin{pmatrix} g_{11} + g_{13} & g_{11} - g_{13} & g_{12} + g_{14} & g_{12} - g_{14} \\ g_{21} + g_{23} & g_{21} - g_{23} & g_{22} + g_{24} & g_{22} - g_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{i1} + g_{i3} & g_{i1} - g_{i3} & g_{i2} + g_{i4} & g_{i2} - g_{i4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{r1} + g_{r3} & g_{r1} - g_{r3} & g_{r2} + g_{r4} & g_{r2} - g_{r4} \end{pmatrix} \quad (5.118)$$

$$z.B.: g_{11} \pm g_{13} = e^{-\alpha_1 \bar{\varphi}_1} (\cos \mu_1 \bar{\varphi}_1 \pm \sin \mu_1 \bar{\varphi}_1)$$

$$g_{12} \pm g_{14} = e^{-\alpha_2 \bar{\varphi}_1} (\cos \mu_2 \bar{\varphi}_1 \pm \sin \mu_2 \bar{\varphi}_1)$$

Für s Stellen ξ_j ist folgender Vektor \mathcal{A} der trigonometrischen Funktionen zu bilden:

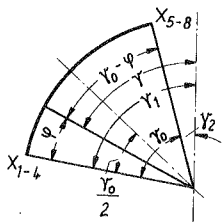
$$\mathcal{A}'_{(1,s)} = \left(\left\{ \begin{array}{c} \cos \lambda \xi_1 \\ \sin \lambda \xi_1 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{c} \cos \lambda \xi_2 \\ \sin \lambda \xi_2 \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{c} \cos \lambda \xi_j \\ \sin \lambda \xi_j \end{array} \right\}; \left\{ \begin{array}{c} \cos \lambda \xi_s \\ \sin \lambda \xi_s \end{array} \right\} \right) \quad (5.119)$$

Damit ergibt sich die Matrix der Wirkung $[W_I(\varphi, \xi)]_{(r,s)}^{X_{1-4}}$ (r Zeilen, s Spalten), z.B. der Schale I infolge X_{1-4} , d.h. der Störungen am linken Rand (Rand 1):

$$[W_I(\varphi, \xi)]_{(r,s)}^{X_{1-4}} = \Psi_W \underbrace{g_{(r,4)}(\varphi) v_{\alpha(4,4)} L_{(4,4)} e_{(4,1)}^{1-4}}_{(r,1)} \mathcal{A}'_{(1,s)}(\xi) \quad (5.120)$$

Infolge der Störungen am rechten Rand (Rand 2) ergibt sich die Matrix $[W_I(\varphi, \xi)]_{(r,s)}^{X_{5-8}}$

Hierbei sind folgende Winkelverhältnisse zu beachten:



$$Y_0 = Y_1 - Y_2$$

$$Y = Y_1 - \varphi$$

Auch die Wirkung $W(\varphi, \xi)^{X_{5-8}}$ wird mit den vom linken Rand abklingenden gedämpften Schwingungen beschrieben und zwar an der Stelle φ' für den Winkel $\gamma_0 - \varphi$. Dies entspricht einer Spiegelung an der Stelle

$$\varphi = \frac{\gamma_0}{2} .$$

Es ist nur zu beachten, ob die Wirkung bei der Superposition positiv oder negativ einzuführen ist.

$$[W_I(\varphi, \xi)]_{r,s}^{X_{5-8}} = \pm \Psi_W g_{(r,4)}(\varphi') v_{\alpha(4,4)} L_{(4,4)} e^{5-8} \mathcal{A}'_{(1,s)}(\xi) \quad (5.121)$$

Außerdem ist die Partikular- oder Membranlösung $[W_I(\varphi, \xi)]_{r,s}^0$ hinzuzufügen.

$$[W_I] = [W_I]^0 + [W_I]^{X_I-4} + [W_I]^{X_I-8} \quad (5.122)$$

Allgemein läßt sich $[W_I]^0$ darstellen als:

$$[W_I]_{(r,s)}^0 = K_I \varphi_{(r,1)}(\gamma) \varphi'_{(1,s)}(\xi) \quad (5.123)$$

$$K_I = K_I(a_I, L_I, h_I, m, n)$$

$$\varphi_{(r,1)}(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma_1 \\ \sin \gamma_1 \\ \cos \gamma_2 \\ \sin \gamma_2 \\ \vdots \\ \cos \gamma_r \\ \sin \gamma_r \end{pmatrix} \quad (5.124)$$

$\varphi'_{(1,s)}(\xi)$ nach Gleichung (5.119)

$$\gamma_i = \gamma_i - \varphi_i$$

Kontrollen:

Da nach dem Kraftgrößenverfahren gerechnet wurde, müssen Formänderungskontrollen durchgeführt werden. Die gegenseitigen Verformungen von Schale und Randträger (an der Anschnittlinie) nach Art, Richtung und Richtungssinn der statisch Überzähligen müssen null sein.

6. Die Berechnung einer in Richtung der Erzeugenden durchlaufenden Tonnenschale nach dem Verfahren von Picone - Kantorowitsch - Krylow

6.1. Rechnungsgang und Ausgangsgleichungen

Ausgehend von den Verschiebungs - Dgl'n. mit den DKJ-Näherungen wird für die in Richtung der Erzeugenden durchlaufende Tonnenschale eine näherungsweise Entkopplung der Verschiebungsfunktion nach Verfahren von Picone [31] und Kantorowitsch - Krylow [25] durchgeführt. Mit Näherungsansätzen in Richtung der Erzeugenden, welche die homogenen Binderrandbedingungen erfüllen, und Durchführung des Galerkinprozesses für diese Richtung erhält man ein System von drei gekoppelten gewöhnlichen Dgl'n. für die Querrichtung, mit denen die inhomogenen Kämpferrandbedingungen erfüllt werden. Durch Transformation in ein Dgl.- System der 1. Ordnung wird das Randwertproblem durch wiederholte Lösung eines Anfangswertproblems gelöst. Hierbei ergibt sich ein interessanter Vergleich zum Kraftgrößenverfahren, das im 5. Kapitel benutzt wurde.

Die Belastung besteht aus Eigengewicht.

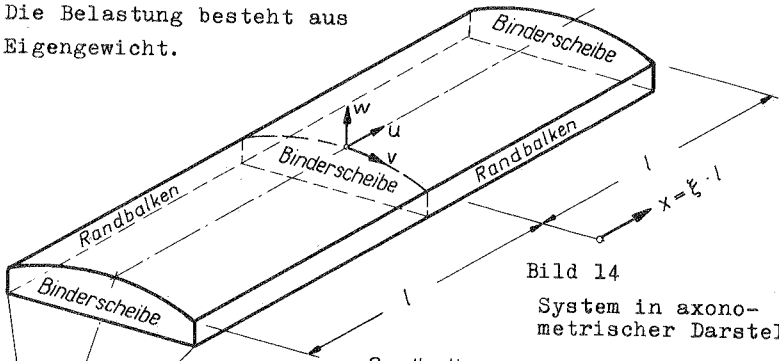


Bild 14
System in axonometrischer Darstellung

Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 x=0: \quad u=v=w=0 \\
 \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \right\} \text{völlige Einspannung} \\
 & \left. \begin{aligned}
 x=\pm l: \quad v=w=0 \\
 m_x=0 = K \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \varphi^2} \right) \rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\
 n_x=0 = D \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{a \partial \varphi} + \mu \frac{w}{a} \right) \xrightarrow[\text{näherungsweise}]{\text{näherungsweise}} \frac{\partial u}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{übliche} \\ \text{Binderrand-} \\ \text{bedingung} \\ \text{einer} \\ \text{Tonnen-} \\ \text{schale} \end{array}
 \end{aligned}$$

In der Flüggeschen vollständigen Theorie der Kreiszyinderschalen werden die Donnell'schen Näherungen eingeführt. Die vernachlässigten Glieder werden in eckige Klammern gesetzt.

Gleichgewicht (6.1)

Elastizitätsgesetz der Schale (6.2)

$$1) a \cdot \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} + X \cdot a = 0$$

$$2) a \cdot \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \varphi} - [q_{\varphi}] + Y \cdot a = 0$$

$$3) n_{\varphi} + a \cdot \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_{\varphi}}{\partial \varphi} + Z \cdot a = 0$$

$$4) \frac{\partial m_{\varphi}}{\partial \varphi} + a \cdot \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial x} - q_{\varphi} \cdot a = 0$$

$$5) \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial \varphi} + a \cdot \frac{\partial m_x}{\partial x} - q_x \cdot a = 0$$

$$6) m_{\varphi x} + a(n_{x\varphi} - n_{\varphi x}) = 0$$

Gl. 6 infolge Donnell'scher Näherung identisch erfüllt.

mit $m_{\varphi x} = m_{x\varphi}$

$$1) a \cdot \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} = -X \cdot a$$

$$2) \frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \varphi} + a \cdot \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} - \left[\frac{1}{a} \frac{\partial m_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial x} \right] = -Y \cdot a$$

$$3) \frac{1}{a} \frac{\partial^2 m_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{\varphi x}}{\partial x \partial \varphi} + a \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + n_{\varphi} = -Z \cdot a$$

$$\text{mit: } D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)} ; K = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$k = \frac{K}{D \cdot a^2} = \frac{h^2}{12 a^2}$$

$$n_x = \frac{D}{a} \left(a \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu w \right) - \left[\frac{K}{a} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]$$

$$n_{\varphi} = \frac{D}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + a \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left[\frac{K}{a^3} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]$$

$$n_{x\varphi} = \frac{D}{a} \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left[\frac{K}{a^3} \frac{1-\mu}{2} \left(a \frac{\partial v}{\partial x} - a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \right]$$

$$n_{\varphi x} = \frac{D}{a} \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left[\frac{K}{a^3} \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \right]$$

$$m_x = \frac{K}{a^2} \left(a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \left[a \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \right)$$

$$m_{\varphi} = \frac{K}{a^2} \left([w] + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \mu \cdot a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$m_{x\varphi} = \frac{K}{a^2} (1-\mu) \left(a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} - a \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] \right)$$

$$m_{\varphi x} = \frac{K}{a^2} (1-\mu) \left(a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \left[\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{a}{2} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right)$$

Differentialgleichungssystem in den Verschiebungen u, v, w (6.3)

$u(x, \varphi)$	$v(x, \varphi)$	$w(x, \varphi)$	
$a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \left[k \frac{1-\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]$	$a \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}$	$\mu \cdot a \frac{\partial}{\partial x} - \left[k \left(a^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{1-\mu}{2} a \frac{\partial^3}{\partial x \partial \varphi^2} \right) \right]$	$= -\frac{a^2}{D} X$
$a \frac{1+\mu}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varphi}$	$\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\mu}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left[k \frac{3(1-\mu)}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right]$	$\frac{\partial}{\partial \varphi} - \left[k \frac{3-\mu}{2} a^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \varphi} \right]$	$= -\frac{a^2}{D} Y$
$\mu \cdot a \frac{\partial}{\partial x} - \left[k \left(a^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{1-\mu}{2} a \frac{\partial^3}{\partial x \partial \varphi^2} \right) \right]$	$\frac{\partial}{\partial \varphi} - \left[k \frac{3-\mu}{2} a^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial \varphi} \right]$	$1 + k \left(a^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \varphi^2} + \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} \right) + \left[2 \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 1 \right]$	$= -\frac{a^2}{D} Z$

Man beachte die Symmetrie der Differentialoperatoren sowohl in den Flüggeschen als auch in den Donnellschen Gleichungen. Infolge dieser Symmetrie ist der Betti - Maxwellsche Satz erfüllt. Damit ist die Geschlossenheit und Folgerichtigkeit der Donnellschen Näherungen geprüft. Würde man q_φ in der 2. Gleichgewichtsbedingung nicht vernachlässigen, wäre die Symmetrie gestört.

Das vereinfachte Dgl.- System (6.3) ist mit den abkürzenden Bezeichnungen:

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x} = (\quad)' \text{ und } \frac{\partial(\quad)}{\partial \varphi} = (\quad)'$$

$$\begin{aligned} a^2 u'' + \frac{1-\mu}{2} u'' + a \frac{1+\mu}{2} v'' + \mu a w' &= 0 \\ a \frac{1+\mu}{2} u'' + v'' + a^2 \frac{1-\mu}{2} v'' + w' &= -\frac{a^2}{D} Y \\ \mu a u' + v' + w + k(a^4 w'''' + 2a^2 w'''' + w''''') &= -\frac{a^2}{D} Z \end{aligned} \quad (6.4)$$

Hierbei wurde die Belastung X null gesetzt.

Das Elastizitätsgesetz lautet:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \frac{D}{a} (au' + \mu v' + \mu w) & m_x &= \frac{K}{a^2} (a^2 w'' + \mu w'') \\ n_\varphi &= \frac{D}{a} (v' + a\mu u' + w) & m_\varphi &= \frac{K}{a^2} (w'' + \mu a^2 w'') \\ n_{\varphi x} = n_{x\varphi} &= \frac{D}{a} \frac{1-\mu}{2} (u' + av') & m_{\varphi x} = m_{x\varphi} &= \frac{K}{a^2} (1-\mu) a w' \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Bei den vorliegenden Randbedingungen an der mittleren Binderscheibe versagt der trigonometrische Ansatz nach Maurice - Levy. Der n - parametrische Näherungsansatz nach Picone - Kantorowitsch - Krylow lautet:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_n &= \sum_{v=1}^n f_{1v}(x) \cdot \phi_{1v}(\gamma) \\ \bar{v}_n &= \sum_{v=1}^n f_{2v}(x) \cdot \phi_{2v}(\gamma) \\ \bar{w}_n &= \sum_{v=1}^n f_{3v}(x) \cdot \phi_{3v}(\gamma) \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Die f_{1v} , f_{2v} , f_{3v} erfüllen alle homogenen geometrischen und statischen Randbedingungen in x - Richtung, die ϕ_{1v} , ϕ_{2v} , ϕ_{3v} werden aus den gewöhnlichen Dgl.- Systemen für jedes v in φ - Richtung bestimmt. Sie erfüllen die inhomogenen Kämpferrandbedingungen.

In erster Näherung wird angesetzt:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= f_1(x) \cdot \phi_1(y) = u \\ \bar{v}_1 &= f_2(x) \cdot \phi_2(y) = v \\ \bar{w}_1 &= f_3(x) \cdot \phi_3(y) = w\end{aligned}\tag{6.7}$$

Die Wahl der Funktionen f_1, f_2, f_3

Es werden Polynome angesetzt, deren Grad mindestens gleich dem Grad der in den Dgln. vorkommenden Ableitungen ist.

$$f_1 = x^2 - 2 \cdot l \cdot x$$

$$f_2 = x^3 - l \cdot x^2$$

$$f_3 = 2 \cdot x^4 - 5 \cdot l \cdot x^3 + 3 \cdot l^2 \cdot x^2$$

$$\begin{aligned}f_1 &\text{ erfüllt die Randbedingungen } f_1(0) = f_1(l) = 0 \\ f_2 &\text{ erfüllt die Randbedingungen } f_2(0) = f_2'(0) = f_2(l) = 0 \\ f_3 &\text{ erfüllt die Randbedingungen } f_3(0) = f_3'(0) = f_3(l) = f_3''(l) = 0\end{aligned}\tag{6.8}$$

Über die Fortsetzung dieser Polynome siehe Kapitel 4.4

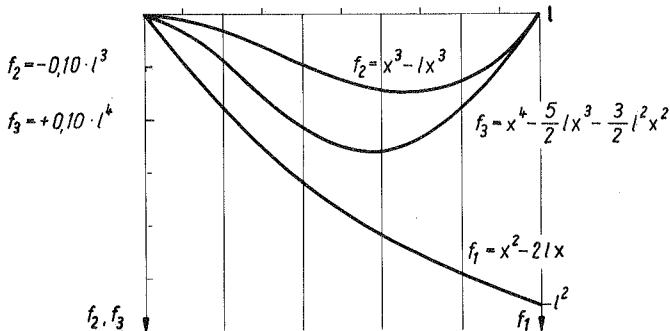


Bild 15

Die Ansatzfunktionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$

Damit ist der Ansatz:

$$\begin{aligned}\bar{u}_1 &= \phi_1(\varphi)(x^2 - 2 \cdot l \cdot x) \\ \bar{v}_1 &= \phi_2(\varphi)(x^3 - l \cdot x^2) \\ \bar{w}_1 &= \phi_3(\varphi)(2x^4 - 5 \cdot l \cdot x^3 + 3 \cdot l^2 \cdot x^2)\end{aligned}\tag{6.9}$$

6.2. Die Darstellung des Verfahrens in Matrixschreibweise

Der Ansatz (6.9) wird in die Dgln. (6.4) eingesetzt. Diese sind die Gleichgewichtsbedingungen in x-, φ - und z - Richtung. Die Funktionen f_1 , f_2 , f_3 werden als virtuelle Verschiebungen in diesen Richtungen betrachtet und der Galerkinprozeß für die x - Richtung durchgeführt.

$$\int_{x=0}^l \left[a^2 \dot{\phi}_1 \cdot 2 + \frac{1-\mu}{2} \dot{\phi}_1^{**} (x^2 - 2lx) + a \frac{1+\mu}{2} \dot{\phi}_2^* (3x^2 - 2lx) + \mu a \dot{\phi}_3 (8x^3 - 15lx^2 + 6l^2x) \right] \cdot \underbrace{(x^2 - 2 \cdot l \cdot x)}_{f_1} \cdot dx = 0$$

$$\int_{x=0}^l \left[a \frac{1+\mu}{2} \dot{\phi}_1^* (2x - 2 \cdot l) + \dot{\phi}_2^{**} (x^3 - lx^2) + a^2 \frac{1-\mu}{2} \dot{\phi}_2 (6x - 2l) + \dot{\phi}_3^* (2x^4 - 5lx^3 + 3l^2x^2) + \frac{a^2}{D} Y \right] \cdot \underbrace{(x^3 - lx^2)}_{f_2} dx = 0$$

$$\int_{x=0}^l \left[\mu a \dot{\phi}_1 (2x - 2l) + \dot{\phi}_2^* (x^3 - lx^2) + \dot{\phi}_3 (2x^4 - 5lx^3 + 3l^2x^2) + ka^4 \dot{\phi}_3 \cdot 48 + 2ka^2 \dot{\phi}_3^{**} (24x^2 - 30lx + 6l^2) + ka \dot{\phi}_3^{****} (2x^4 - 5lx^3 + 3l^2x^2) + \frac{a^2}{D} Z \right] \cdot \underbrace{(2x^4 - 5lx^3 + 3l^2x^2)}_{f_3} dx = 0 \quad (6.10)$$

Nach Ausführung aller bestimmten Integrale in x - Richtung erhält man das gewöhnliche Dgl. - System.

$$\begin{aligned} -40 a^2 l^3 \dot{\phi}_1 + 8(1-\mu) l^5 \dot{\phi}_1^{**} - a(1+\mu) l^5 \dot{\phi}_2^* + 4\mu a l^6 \dot{\phi}_3 &= 0 \\ 2a(1+\mu) l^5 \dot{\phi}_1^* + \frac{12}{21} l^7 \dot{\phi}_2^{**} - 4a^2(1-\mu) l^5 \dot{\phi}_2 + l^8 \dot{\phi}_3^* - 5 \frac{a^2}{D} l^4 Y &= 0 \\ -8\mu a l^6 \dot{\phi}_1 - l^8 \dot{\phi}_2^* + \left(\frac{38}{21} l^9 + ka^4 432 l^5 \right) \dot{\phi}_3 - \\ - \frac{288}{7} ka^2 l^7 \dot{\phi}_3^{**} + \frac{38}{21} k \cdot 1,81 \cdot l^9 \cdot \dot{\phi}_3^{****} + 9 \frac{a^2}{D} l^5 Z &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dieses Dgl. - System wird in eine Dgl. - System der 1. Ordnung transformiert.

Folgende Funktionen werden definiert:

$$\left. \begin{array}{l} \phi_1 \ ; \ \phi_2 \ ; \ \phi_3 \ ; \ \phi_4^* = \phi_4 \ ; \\ \phi_2^* = \phi_5 \\ \phi_3^* = \phi_6 \\ \phi_4^* = \phi_7 \\ \phi_5^* = \phi_8 \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

Hiermit ergibt sich (6.11) zu:

$$\begin{aligned} & -40a^2 \cdot l^3 \phi_1 + 8(1-\mu)l^5 \phi_4^* - a(1+\mu)l^5 \phi_5 + 4\mu a l^6 \phi_3 = 0 \\ & + 2a(1+\mu)l^5 \phi_4 + 0,5714 l^7 \phi_5^* - 4a^2(1-\mu)l^5 \phi_2 - l^8 \phi_6 - 5 \frac{a^2}{D} l^4 Y = 0 \\ & - 8\mu a l^6 \phi_1 - l^8 \phi_5 + (1,81 \cdot l^9 + k \cdot a^4 \cdot 432 \cdot l^5) \phi_3 - 41,14 k a^2 l^7 \phi_7 + \\ & + 1,81 \cdot k \cdot l^9 \phi_8^* + 9 \frac{a^2}{D} l^5 Z = 0 \end{aligned} \quad (6.13)$$

Die Gleichung (6.12) und (6.13) lassen sich zusammenfassend in Matrixschreibweise darstellen:

(6.14)

$$\frac{d}{d\varphi} \cdot \underset{\mathcal{Z}}{\begin{array}{|c|} \hline \phi_1 \\ \hline \phi_2 \\ \hline \phi_3 \\ \hline \phi_4 \\ \hline \phi_5 \\ \hline \phi_6 \\ \hline \phi_7 \\ \hline \phi_8 \\ \hline \end{array}} = \underset{\alpha}{\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & & & \\ \hline & & & & & 1 & & \\ \hline + \frac{5a^2}{(1-\mu)l^2} & & - \frac{\mu a \cdot l}{2(1-\mu)} & & + \frac{a(1+\mu)}{8(1-\mu)} & & & \\ \hline & + \frac{4a^2(1-\mu)}{0,5714 l^2} & & - \frac{2a(1+\mu)}{0,5714 l^2} & & + \frac{l}{0,5714} & & \\ \hline & & & & & & 1 & \\ \hline & & & & & & & 1 \\ \hline + \frac{8a\mu}{1,81 k l^3} & & - \frac{l}{k} + \frac{432a^4}{1,81 \cdot l^9} & & + \frac{1}{1,81 k \cdot l} & & + \frac{41,14 a^2}{1,81 l^2} & \\ \hline \end{array}} \cdot \underset{\mathcal{Z}}{\begin{array}{|c|} \hline \phi_1 \\ \hline \phi_2 \\ \hline \phi_3 \\ \hline \phi_4 \\ \hline \phi_5 \\ \hline \phi_6 \\ \hline \phi_7 \\ \hline \phi_8 \\ \hline \end{array}} + \underset{\mathcal{B}}{\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline + \frac{5a^2}{0,5714 l^2 D} Y \\ \hline \\ \hline \\ \hline - \frac{9a^2}{1,81 k l^9 D} Z \\ \hline \end{array}}$$

Das Dgl. - System 1. Ordnung (6.14) läßt sich abkürzend schreiben:

$$\frac{d}{d\varphi} \cdot \mathcal{Z} = \alpha \cdot \mathcal{Z} + \mathcal{B} \quad (6.15)$$

Symmetrieeigenschaften von \mathfrak{z}

Da die Schale in Geometrie und Belastung symmetrisch bezüglich $\varphi = 0$ ist, müssen auch die Verschiebungen u und w symmetrisch, jedoch v und der Drehwinkel ψ antimetrisch bezüglich $\varphi = 0$ sein.

Das bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} u^* &= w^* = w^{***} = 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \text{für } \varphi = 0$$

Mit den Gleichungen (6.12) ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} v &= \phi_2 = 0 \\ u^* &= \phi_4 = 0 \\ w^* &= \phi_6 = 0 \\ w^{***} &= \phi_8 = 0 \end{aligned} \right\} \text{für } \varphi = 0 \quad (6.16)$$

Der Lösungsvektor $\mathfrak{z}' = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8)$ hat also an der Stelle $\varphi = 0$ die Gestalt:

Anfangsvektor: $\mathfrak{z}'_0 = (\phi_1, 0, \phi_3, 0, \phi_5, 0, \phi_7, 0)_0$ (6.17)

Das Dgl.- System (6.15) hat die Lösung:

$$\mathfrak{z}'_{(\varphi)} = e_{(8,8)}^{\alpha\varphi} \mathfrak{z}'_{(0)} - (E_{(8,8)} - e_{(8,8)}^{\alpha\varphi}) e_{(8,8)}^{-1} \psi_{(8,1)} \quad (6.18)$$

$E_{(8,8)}$ ist die Einheitsmatrix.

Man erhält den Lösungsvektor $\mathfrak{z}(\varphi)$ an jeder Stelle φ , wenn der Anfangsvektor \mathfrak{z}'_0 bestimmt ist.

Es ist günstig, einen kleineren Anfangsvektor $\bar{\mathfrak{z}}_0$ einzuführen.

$$\bar{\mathfrak{z}}_0 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_3 \\ \phi_5 \\ \phi_7 \end{pmatrix}_0 \quad (6.19)$$

Dann ist weiterhin folgende Konstantenmatrix erforderlich:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & 1 & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & 1 & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & 1 \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

84

Damit ist:

$$z_0 = k_1 \bar{z}_0 \quad (6.21)$$

Außerdem wird die normierte Veränderliche $\bar{\varphi}$ eingeführt

$$\varphi = \gamma_0 \cdot \bar{\varphi} ; \quad -1 \leq \bar{\varphi} \leq +1 \quad (6.22)$$

Damit ist die Transformationsmatrix der homogenen Lösung (siehe Gleichung 6.18):

$$e^{\alpha \gamma_0 \bar{\varphi}} = \mathcal{L}(\bar{\varphi}) \quad (6.23)$$

Die Partikularlösung ist (siehe Gleichung 6.18):

$$(\mathcal{P} - e^{\alpha \gamma_0 \bar{\varphi}}) \alpha^{-1} b = z_1 \quad (6.24)$$

Insgesamt:

$$z(\bar{\varphi}) = \mathcal{L}(\bar{\varphi}) k_1 \bar{z}_0 - z_1(\bar{\varphi}) \quad (6.25)$$

Das vorliegende Randwertproblem wird durch wiederholte Lösung des Anfangswertproblems gelöst. Mit den vier Anfangswerten des Vektors \bar{z}_0 sind vier homogene Randbedingungen oder Übergangsbedingungen zum Randträger erfüllbar.

Wäre $\varphi = 0$ keine Symmetrieachse, so hätte \bar{z}_0 acht Elemente und es könnten an beiden Kämpferrändern je vier Randbedingungen erfüllt werden.

Die Beziehungen zwischen z und den Wirkungen (Deformationen und Schnittgrößen) am Kämpferrand

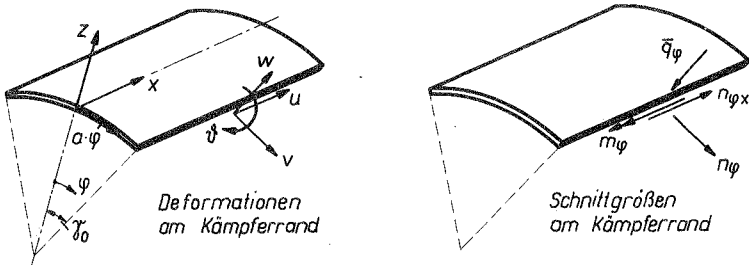


Bild 16

Die Deformationen sind gemäß Gleichung (6.7):

$$\left. \begin{aligned} u &= \Phi_1 \cdot f_1 \\ v &= \Phi_2 \cdot f_2 \\ w &= \Phi_3 \cdot f_3 \\ \vartheta &= \frac{v}{a} - \frac{1}{a} w = \frac{1}{a} (\Phi_2 \cdot f_2 - \Phi_3 \cdot f_3) \end{aligned} \right\} (6.26)$$

Die Schnittgrößen sind gemäß Gleichung (6.5) und (6.7):

$$\left. \begin{aligned} n_\varphi &= \frac{D}{a} (\Phi_2 \cdot f_2 + \Phi_3 \cdot f_3 + a\mu \Phi_1 f_1') \\ n_{\varphi x} = n_{\varphi x} &= \frac{D}{a} \frac{1-\mu}{2} (\Phi_1 \cdot f_1 + a \Phi_2 f_2') \\ m_\varphi &= \frac{K}{a^2} (\Phi_3 \cdot f_3 + \mu a^2 \Phi_3 f_3'') \\ \hat{Q}_\varphi - Q_\varphi + m'_{\varphi x} &= \frac{1}{a} m_\varphi + m'_{\varphi x} + m'_{\varphi x} = \frac{1}{a} m_\varphi + 2 \frac{K}{a^2} (1-\mu) a w'' \\ &= \frac{K}{a^3} \Phi_3 \cdot f_3 + \frac{K}{a} (2-\mu) f_3'' f_3' \end{aligned} \right\} (6.27)$$

\hat{Q}_φ ist die Kirchhoffsche Ersatzquerkraft.

Die Gleichungen (6.26) und (6.27) lassen sich unter Beachtung der Definitionsgleichungen (6.12) in Matrixschreibweise zusammenfassen:

u	f_1					Φ_1
v		f_2				Φ_2
w			f_3			Φ_3
ϑ		$\frac{f_2}{a}$			$-\frac{f_3}{a}$	Φ_4
$n_{\varphi x}$		$D \frac{1-\mu}{2} f_2'$		$\frac{D}{a} \frac{1-\mu}{2} f_1$		Φ_5
n_φ	$D \cdot \mu f_1'$		$\frac{D}{a} f_3$		$\frac{D}{a} f_2$	Φ_6
\hat{Q}_φ					$\frac{K}{a^2} (2-\mu) f_3''$	$\frac{K}{a^3} f_3$
m_φ			$K \cdot \mu f_3''$		$\frac{K}{a^2} f_3$	Φ_8

$\mathbb{N}_{(8,1)}$

$\mathbb{N}_{(8,8)}$

$\mathbb{Z}_{(8,1)}$

Abkürzend: $\mathbb{N} = \mathbb{N} \cdot \mathbb{Z}$

(6.29)

Die restlichen Schnittgrößen sind:

$$\left. \begin{aligned} n_x &= \frac{D}{a} (a \phi_1 f_1' + \mu \phi_2 f_2 + \mu \phi_3 f_3) \\ m_x &= \frac{K}{a^2} (a^2 \phi_3 f_3'' + \mu \phi_3'' f_3) \\ m_{\varphi} = m_{\varphi x} &= \frac{K}{a} (1 - \mu) \phi_3' f_3' \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

6.3 Die Übergangsbedingungen von der Schale zum Randträger

Die Wirkungen ~~wo~~ müssen an der Anschnittlinie 0 (Kämpfer-
rand) von der Schale zum Randträger übertragen werden. Die
Randschnittkräfte der Schale wirken mit umgekehrten Vorzei-
chen (als Reaktionen) auf den Randträger. Außerdem wird der
Randträger durch eingeprägte Kräfte, vor allem durch sein
Eigengewicht, belastet. Wie im 5. Kapitel werden die Reak-
tionen der Schale auf den Randträger in der Anschnittlinie
durch äquivalente Querlasten parallel zu den Biegehaupt-
achsen durch den Schubmittelpunkt und Längslasten in der
Schwerlinie transformiert. Sie rufen zusammen mit den ein-
geprägten Kräften Verformungen der Anschnittlinie und na-
türlich der Schwerlinie des Randbalkens hervor.

Die Übergangsbedingungen sind dann erfüllt, wenn die Ver-
formungen der Anschnittlinie der Schale gleich denjenigen
des Randträgers infolge seiner Belastung aus Schale und
Randträger sind, - oder wenn die in die Schwerlinie des
Randträgers transformierten Deformationen der Schale gleich
den Deformationen der Schwerlinie des Randträgers sind.

Aus diesen (vier) Bedingungen ist der Anfangsvektor \vec{f}_0 zu
bestimmen.

Infolge der fehlenden trigonometrischen Ansätze in Rich-
tung der Erzeugenden ergibt sich jedoch ein einschneiden-
des Problem:

Die Kontinuität zwischen Schale und Randträger kann nicht
an allen Punkten x gleichzeitig erfüllt werden, denn die
Schnittkräfte der Schale erzeugen im Randbalken grund-
sätzlich andere Verformungskurven als die mit den Polyno-
men $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ für die Schale gewählten. Durch
2- und 4 - malige Integration der Differentialgleichungen
des Randträgers ergeben sich nur die trigonometrischen
(und die hyperbolischen) Funktionen wieder sich selbst,
während die hier vorliegenden Polynome zu solchen höherer
Ordnung führen. Dieses Dilemma wird durch eine näherungsweise
Kontinuität im Mittel mit Hilfe von Galerkinprozeßen um-
gangen.

6.4. Transformation der Wirkungen von der Schale zum Randträger in der Anschnittlinie

Vergl. Kapitel 5, S.129 , Bild 13.

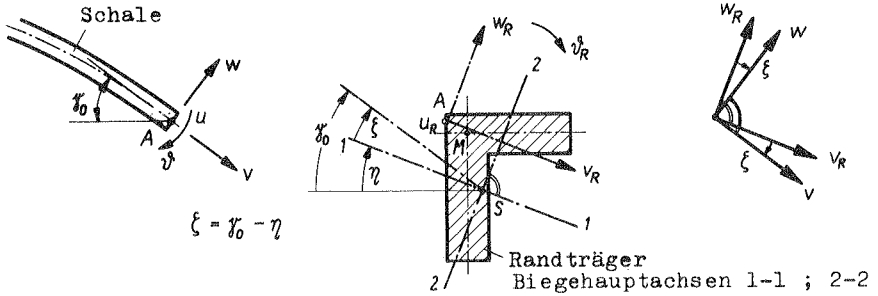


Bild 17: Deformationen von Schale und Randträger in der Anschnittlinie A

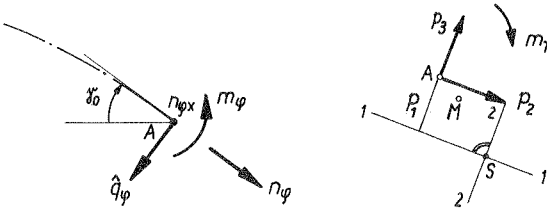


Bild 18 : Schnittgrößen der Schale und Belastungen des Randträgers in der Anschnittlinie A

$$\left. \begin{aligned} w_R &= w \cdot \cos \xi - v \cdot \sin \xi \\ v_R &= w \cdot \sin \xi + v \cdot \cos \xi \\ u_R &= u \\ \vartheta_R &= \vartheta \end{aligned} \right\} (6.31)$$

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \hat{q}_\varphi \sin \xi - n_\varphi \cos \xi \\ p_3 &= \hat{q}_\varphi \cos \xi + n_\varphi \sin \xi \\ p_1 &= - n_{\varphi x} \\ m_T &= + m_\varphi \end{aligned} \right\} (6.32)$$

Die Transformationsgleichungen (6.31) und (6.32) werden in der folgenden Matrizenmultiplikation zusammengefaßt:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_R \\ v_R \\ w_R \\ \vartheta_R \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ m_T \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}0_R} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \cos\xi & \sin\xi & & & & & \\ & -\sin\xi & \cos\xi & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -\cos\xi & \sin\xi & \\ & & & & & \sin\xi & \cos\xi & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{F}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ \vartheta \\ n_{\varphi x} \\ n_{\varphi} \\ \hat{q}_{\varphi} \\ m_{\varphi} \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}0(\varphi = \varphi_0)} \quad (6.33)$$

$$\mathcal{H}0_R = \mathcal{F} \mathcal{H}0(\varphi_0)$$

Die Transformationen der Wirkungen des Randträgers von der Anschnittlinie A in die Achsen durch den Schubmittelpunkt M und den Schwerpunkt S

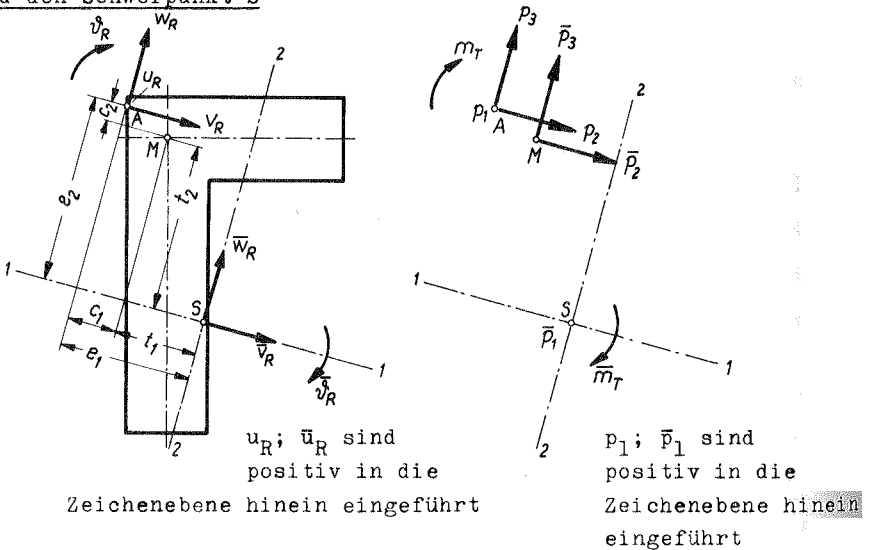


Bild 19: Äquivalente Deformationen und Belastungen des Randträgers in A einerseits, sowie in S und M andererseits.

Die Verschiebungen in der Schwerlinie \bar{v}_R , \bar{w}_R , \bar{u}_R und die Drehung \bar{v}'_R lassen sich durch die Verschiebungen in der Anschnittlinie v_R , w_R , u_R und dem Winkel v'_R wie folgt ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}'_R &= v'_R \\ \bar{v}_R &= v_R - e_2 \cdot v'_R \\ \bar{w}_R &= w_R - e_1 \cdot v'_R \\ \bar{u}_R &= u_R + e_2 \frac{dw_R}{dx} - e_1 \frac{dv_R}{dx} \end{aligned} \right\} (6.34)$$

Ebenfalls lassen sich zu den Anschnittbelastungen \bar{p}_1 , \bar{p}_2 , \bar{p}_3 , m_T äquivalente Belastungen p_1 , p_2 , p_3 , m_T durch den Schubmittelpunkt und Schwerpunkt angeben.

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= p_1 \\ \bar{p}_2 &= p_2 + \frac{dp_1}{dx} e_1 \\ \bar{p}_3 &= p_3 - \frac{dp_1}{dx} e_2 \\ \bar{m}_T &= m_T + p_2 c_2 + p_3 c_1 \end{aligned} \right\} (6.35)$$

Mit der Gleichung (6.31) ergibt sich die Gleichung (6.34) in Abhängigkeit der Randdeformationen der Schale an der Stelle $\varphi = \gamma_0$.

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_R &= \left[u + e_2 \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \sin \xi + \frac{\partial w}{\partial x} \cos \xi \right) - \right. \\ &\quad \left. - e_1 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \xi + \frac{\partial w}{\partial x} \sin \xi \right) \right]_{\varphi = \gamma_0} \\ \bar{v}_R &= \left[v \cdot \cos \xi + w \cdot \sin \xi - e_2 \cdot v' \right]_{\varphi = \gamma_0} \\ \bar{w}_R &= \left[-v \cdot \sin \xi + w \cdot \cos \xi - e_1 \cdot v' \right]_{\varphi = \gamma_0} \\ \bar{v}'_R &= v'_{\varphi = \gamma_0} \end{aligned} \right\} (6.36)$$

Mit den Gleichungen (6.32) ergeben sich die Gl. (6.35) in Abhängigkeit der Randschnittgrößen der Schale.

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= [-n_{\varphi x}]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{p}_2 &= [-n_{\varphi} \cdot \cos \xi + \hat{q}_{\varphi} \cdot \sin \xi - \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial x} e_1]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{p}_3 &= [n_{\varphi} \cdot \sin \xi + \hat{q}_{\varphi} \cdot \cos \xi + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial x} e_2]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{m}_T &= [m_{\varphi} + (-n_{\varphi} \cdot \cos \xi + \hat{q}_{\varphi} \cdot \sin \xi) c_2 + (n_{\varphi} \cdot \sin \xi + \hat{q}_{\varphi} \cdot \cos \xi) c_1]_{\varphi=\gamma_0} \end{aligned} \right\} (6.37)$$

Mit Einsetzen der Gl. (6.26) ergeben sich die Gl. (6.36) zu:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_R &= [\phi_1 \cdot f_1 + e_2 (-\phi_2 \cdot f_2' \sin \xi + \phi_3 \cdot f_3' \cos \xi) - \\ &\quad - e_1 (\phi_2 \cdot f_2' \cos \xi + \phi_3 \cdot f_3' \sin \xi)]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{u}_R &= [\phi_1 \cdot f_1 - \phi_2 \cdot f_2' (e_1 \cdot \cos \xi + e_2 \cdot \sin \xi) - \phi_3 \cdot f_3' (e_1 \cdot \sin \xi - e_2 \cdot \cos \xi)]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{v}_R &= [\phi_2 \cdot f_2 \cos \xi + \phi_3 \cdot f_3 \sin \xi - \frac{e_2}{\alpha} (\phi_2 \cdot f_2 - \phi_3 \cdot f_3)]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{v}_R &= [\phi_2 \cdot f_2 (\cos \xi - \frac{e_2}{\alpha}) + \phi_3 \cdot f_3 \sin \xi + \phi_6 \cdot f_3 \frac{e_2}{\alpha}]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{w}_R &= [-\phi_2 \cdot f_2' \sin \xi + \phi_3 \cdot f_3 \cos \xi - \frac{e_1}{\alpha} (\phi_2 \cdot f_2 - \phi_3 \cdot f_3)]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{w}_R &= [-\phi_2 \cdot f_2 (\sin \xi + \frac{e_1}{\alpha}) + \phi_3 \cdot f_3 \cos \xi + \phi_6 \cdot f_3 \frac{e_1}{\alpha}]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{v}_R &= \phi_2 \cdot f_2 \frac{1}{\alpha} - \phi_6 \cdot f_3 \frac{1}{\alpha} \end{aligned} \right\} (6.38)$$

Mit Einsetzen der Gleichung (6.27) oder der Matrixgleichung (6.28) ergeben sich die Gleichungen (6.37) zu:

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_1 &= [-\frac{D}{\alpha} \frac{1-\mu}{2} (\phi_4 f_1 + a \phi_2 \cdot f_2')]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{p}_1 &= [-D \frac{1-\mu}{2} f_2' \phi_2 - \frac{D}{\alpha} \frac{1-\mu}{2} f_1 \phi_4]_{\varphi=\gamma_0} \\ \bar{p}_2 &= [-\frac{D}{\alpha} (\phi_5 \cdot f_2 + \phi_3 \cdot f_3 + a \mu \cdot \phi_1 \cdot f_1') \cos \xi] + \\ &\quad + \frac{K}{\alpha^2} (\phi_6 \cdot f_3 + a^2 (2-\mu) \cdot \phi_6 \cdot f_3'') \sin \xi - \\ &\quad - D \frac{e_1}{\alpha} \frac{1-\mu}{2} (\phi_4 \cdot f_1' + a \phi_2 \cdot f_2'')_{\varphi=\gamma_0} \end{aligned} \right\} (6.39)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_2 &= \left[-D\mu \cdot \cos \xi \cdot f_1' \cdot \phi_1 - D \cdot e_1 \frac{1-\mu}{2} f_2'' \phi_2 - \frac{D}{\alpha} \cos \xi \cdot f_3 \cdot \phi_3 - \right. \\
 &\quad \left. - D \frac{e_2}{\alpha} \frac{1-\mu}{2} f_1' \phi_4 - \frac{D}{\alpha} \cos \xi \cdot f_2 \phi_5 + \frac{K}{\alpha} (2-\mu) \sin \xi f_3'' \phi_6 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K}{\alpha^3} \sin \xi f_3 \phi_8 \right]_{\varphi=\gamma_0} \\
 \bar{p}_3 &= \left[\frac{D}{\alpha} (\phi_5 f_2 + \phi_3 \cdot f_3 + \alpha \mu \phi_1 f_1') \sin \xi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K}{\alpha^3} (\phi_8 f_3 + \alpha^2 (2-\mu) \phi_6 f_3'') \cos \xi + \right. \\
 &\quad \left. + D \frac{e_2}{\alpha} \frac{1-\mu}{2} (\phi_4 f_1' + \alpha \phi_2 f_2'') \right]_{\varphi=\gamma_0} \\
 \bar{p}_3 &= \left[D\mu \cdot \sin \xi \cdot f_1' \cdot \phi_1 + D \cdot e_2 \frac{1-\mu}{2} f_2'' \phi_2 + \frac{D}{\alpha} \sin \xi \cdot f_3 \cdot \phi_3 + \right. \\
 &\quad \left. + D \frac{e_2}{\alpha} \frac{1-\mu}{2} f_1' \phi_4 + \frac{D}{\alpha} \sin \xi \cdot f_2 \phi_5 + \frac{K}{\alpha} (2-\mu) \cos \xi \cdot f_3'' \phi_6 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K}{\alpha^3} \cos \xi f_3 \phi_8 \right]_{\varphi=\gamma_0} \\
 \bar{m}_7 &= \left[\frac{K}{\alpha^2} (\phi_7 f_3 + \mu \alpha^2 \cdot \phi_3 f_3'') - \right. \\
 &\quad \left. + \frac{D}{\alpha} (c_1 \sin \xi - c_2 \cos \xi) \cdot (\phi_5 f_2 + \phi_3 f_3 + \alpha \mu \cdot \phi_1 f_1') + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K}{\alpha^3} (c_1 \cos \xi + c_2 \sin \xi) (\phi_8 f_3 + \alpha^2 (2-\mu) \cdot \phi_6 \cdot f_3'') \right]_{\varphi=\gamma_0} \\
 \bar{m}_7 &= \left\{ D \cdot \mu (c_1 \sin \xi - c_2 \cos \xi) f_1' \cdot \phi_1 + \left[K \mu \cdot f_3'' + \frac{D}{\alpha} (c_1 \sin \xi - c_2 \cos \xi) f_3 \right] \phi_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{D}{\alpha} (c_1 \sin \xi - c_2 \cos \xi) f_2 \cdot \phi_5 + \frac{K}{\alpha} (2-\mu) (c_1 \cos \xi + c_2 \sin \xi) f_3'' \phi_6 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{K}{\alpha^2} \cdot f_3 \cdot \phi_7 + \frac{K}{\alpha^3} (c_1 \cos \xi + c_2 \sin \xi) f_3 \phi_8 \right\}_{\varphi=\gamma_0}
 \end{aligned} \tag{6.39}$$

Die Gleichungen (6.38) und (6.39) lassen sich in Matrixenschreibweise zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_R \\ \bar{v}_R \\ \bar{w}_R \\ \bar{j}_R \\ \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{m}_T \end{pmatrix} = \bar{\mathbb{M}}_R ; \quad \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \\ \phi_7 \\ \phi_8 \end{pmatrix}_{\varphi=\gamma_0} = \mathcal{J}(\varphi=\gamma_0)$$

$$\bar{\mathbb{M}}_R = \mathcal{R} \cdot \mathcal{J}(\varphi=\gamma_0) \tag{6.40}$$

Die Matrix \mathcal{R} enthält die Faktoren der ϕ_ν in den Gleichungen (6.38) und (6.39).

Die Matrix \mathcal{R} hat folgende Gestalt:

f_1	$-f_2' (e_1 \cdot \cos \xi + e_2 \cdot \sin \xi)$	$-f_2' (e_1 \cdot \sin \xi - e_2 \cdot \cos \xi)$						
	$f_2 (\cos \xi - \frac{e_2}{a})$	$f_2 \cdot \sin \xi$		$\frac{e_2}{f_3} \frac{1}{a}$				
	$f_2 (\sin \xi + \frac{e_1}{a})$	$f_3 \cdot \cos \xi$		$\frac{e_1}{f_3} \frac{1}{a}$				
	$f_2 \frac{1}{a}$			$-\frac{1}{f_3} \frac{1}{a}$				
	$-\frac{D}{a} \frac{1-\mu}{2} f_2'$							
$-D\mu \cdot f_1' \cdot \cos \xi$	$-D e_1 \frac{1-\mu}{2} f_2''$	$-\frac{D}{a} f_3 \cdot \cos \xi$		$-\frac{D}{a} f_2 \cdot \cos \xi$	$\frac{K}{a} (2-\mu) f_3'' \sin \xi$		$\frac{K}{a^3} f_3 \cdot \sin \xi$	
$D\mu \cdot f_1' \cdot \sin \xi$	$D e_2 \frac{1-\mu}{2} f_2''$	$\frac{D}{a} f_3 \cdot \sin \xi$		$\frac{K}{a} (2-\mu) f_3'' \sin \xi$	$\frac{K}{a} (2-\mu) f_3'' \cos \xi$		$\frac{K}{a^3} f_3 \cdot \cos \xi$	
$D\mu \cdot f_1' (c_1 \sin \xi - c_2 \cos \xi)$		$\frac{K\mu}{a} f_3'' + \frac{D}{a} f_3 (c_1 \sin \xi - c_2 \cos \xi)$		$\frac{D}{a} f_2 (c_1 \sin \xi - c_2 \cos \xi)$	$\frac{K}{2} (2-\mu) \cdot f_3'' \cdot (c_1 \cos \xi + c_2 \sin \xi)$	$\frac{K}{a^2} f_3$	$\frac{K}{a^3} f_3 (c_1 \cos \xi + c_2 \sin \xi)$	

Die Matrix \mathcal{R} läßt sich natürlich auch durch Matrizenmultiplikationen gewinnen.

Nach Gl. (6.29) ergeben sich die Wirkungen am Schalenrand zu:

$$w_R = w(\varphi = \gamma_0) = \mathcal{N} \mathcal{J}(\varphi = \gamma_0) = \mathcal{N} \mathcal{J}_R \quad (6.29a)$$

Die Transformation der Wirkungen von Schalenrand zum Randträger wird durch Gleichung (6.33) beschrieben:

$$w_R = \mathcal{Z} w(\varphi = \gamma_0) \quad (6.33)$$

Die Transformation des Vektors w_R (in der Anschnittlinie des Randträgers) in den Vektor \bar{w}_R (in der Schwerlinie bzw. Achse durch den Schubmittelpunkt des Randträgers) wird durch die Gl. (6.35) und (6.36) beschrieben:

$$\bar{w}_R = \mathcal{R}_{(8,8)} w_R \quad (6.41)$$

Einsetzen der Gleichungen (6.29a) und (6.33) in Gl. (6.41) ergibt:

$$\bar{w}_R = \underbrace{\mathcal{R} \mathcal{Z} \mathcal{N}}_{\mathcal{R}} \mathcal{J}_R \quad (6.42)$$

Die schon ermittelte Matrix \mathcal{R} ist:

$$\mathcal{R}_{(8,8)} = \mathcal{R} \mathcal{Z} \mathcal{N} \quad (6.43)$$

Aus der Matrix \mathcal{K} , Gleichung (6.41) geht der Verlauf der Wirkungen in x - Richtung hervor.

Transformierte Randdeformationen der Schale:

\bar{u}_R	enthält	f_1, f_2, f_3 ,	ist insgesamt in x-Richtung ein Polynom	3. Grades
\bar{v}_R	"	f_2, f_3 ,	"	4. Grades
\bar{w}_R	"	f_2, f_3 ,	"	4. Grades
$\bar{\alpha}_R$	"	f_2, f_3 ,	"	4. Grades

Belastungen aus den Randschnittgrößen der Schale:

\bar{p}	enthält	f_1, f_2'	ist insgesamt in x-Richtung ein Polynom	2. Grades
\bar{p}_2	"	$f_1, f_2, f_2'', f_3, f_3''$	"	4. Grades
\bar{p}_3	"	$f_1', f_2, f_2'', f_3, f_3''$	"	4. Grades
\bar{m}_T	"	f_1', f_2, f_3, f_3''	"	4. Grades

Man erkennt, daß die Belastungen des Randträgers Deformationen desselben hervorrufen, die mit den transformierten Deformationen von der Schale übereinstimmen.

6.5. Die Deformationen des Randträgers infolge der Randschnittgrößen der Schale und der eingepprägten Kräfte

Die transformierten Schnittkräfte der Schale, Gleichung (6.39) verursachen Verformungen des Randbalkens nach folgenden Differentialgleichungen:

Biegung um die Hauptachsen 1-1 und 2-2

Die Hauptträgheitsmomente sind J_1 (bezügl. Achse 1 - 1) und J_2 (bezügl. Achse 2 - 2)

$$\bar{v}_R^{*''''} = - \frac{\bar{p}_2}{EJ_2}$$

$$\bar{w}_R^{*''''} = - \frac{\bar{p}_3}{EJ_1}$$

(6.44a)

Normalkraftbeanspruchung des geraden Balkens

Der Randträgerquerschnitt ist F.

$$\bar{u}_R^{*''} = \frac{1}{EF} N' = - \frac{\bar{p}_1}{EF} \quad (6.44b)$$

Torsionsbeanspruchung des Randbalkens

(Beidseitige Einspannung gegen verdrehen).

Der St. Venantsche Torsionswiderstand ist J_D .

$$\bar{\vartheta}_R^{*''} = \frac{M_D}{GJ_D} = - \frac{\bar{m}_T}{GJ_D} \quad (6.44c)$$

Damit verlaufen diese Verformungen nach folgenden Polynomen:

Verformung	\bar{u}_R^*	infolge	\bar{p}_1	: Polynom	4. Grades
"	\bar{v}_R^*	"	\bar{p}_2	: "	8. Grades
"	\bar{w}_R^*	"	\bar{p}_3	: "	8. Grades
"	$\bar{\vartheta}_R^*$	"	m_T	: "	6. Grades

Die Deformationen \bar{u}_R^* , \bar{v}_R^* , \bar{w}_R^* , $\bar{\vartheta}_R^*$ sind also von \bar{u}_R , \bar{v}_R , \bar{w}_R , $\bar{\vartheta}_R$ grundsätzlich verschieden.

Die eingepprägten Kräfte des Randträgers, vor allem Eigengewicht, werden in Richtung der Hauptachsen transformiert. Die konstante Linienlast g_R [kp/cm] habe die Komponenten g_{R_2} und g_{R_3} in Richtung der Hauptachsen 1-1 und 2-2.

$$g_{R_2} = g \sin \nu = g_{R_2} \quad (6.45)$$

$$g_{R_3} = - g \cos \nu = g_{R_3}$$

Die Momentenbelastung $m_{RT} = \bar{m}_{RT}$ ist:

$$m_{RT} = - g_{R_3} t_1 - g_{R_2} t_2$$

Die Verformungen des Randträgers infolge dieser Belastungen sind:

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{u}_{R_0}^* &= 0 \\
 \bar{v}_{R_0}^{*''} &= - \frac{\bar{\xi}_{R2}}{EJ_2} \\
 \bar{w}_{R_0}^{*'''} &= - \frac{\bar{\xi}_{R3}}{EJ} \\
 \bar{\gamma}_{R_0}^{*''} &= - \frac{\bar{m}_{RT}}{GJ_D}
 \end{aligned} \right\} (6.46)$$

6.6. Die näherungsweise Erfüllung der Übergangsbedingungen von der Schale zum Randträger mit Galerkinprozessen

Die Übergangsbedingungen zwischen Schale und Randträger können mit den Ansatzfunktionen f_1, f_2, f_3 nicht exakt an jeder Stelle x erfüllt werden. Mit Hilfe der Galerkinschen Gleichungen wird die Kontinuität der einzelnen Deformationen im Mittel erzielt.

Für die Deformationen $\bar{u}_R, \bar{v}_R, \bar{w}_R, \bar{\gamma}_R$ im Schwerpunkt und Schubmittelpunkt des Randträgers sollen die Ansatzfunktionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ der Schale, multipliziert mit Ritzkonstanten, gelten. Sie werden als Näherungsfunktionen mit $\hat{u}_R, \hat{v}_R, \hat{w}_R, \hat{\gamma}_R$ bezeichnet.

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{u}_R &= \alpha_1 f_1(x) \\
 \hat{v}_R &= \alpha_2 f_3(x) \\
 \hat{w}_R &= \alpha_3 f_3(x) \\
 \hat{\gamma}_R &= \alpha_4 f_3(x)
 \end{aligned} \right\} (6.47)$$

Dann können die Differentialgleichungen (6.42 - 44) nur noch näherungsweise erfüllt werden. Die Ritzkonstanten werden aus den Galerkinschen Gleichungen für diese Differentialgleichungen erfüllt, wobei die Funktionen f_1 und f_2 die vertikalen Verformungen sind.

Die Galerkinschen Gleichungen für den Randbalken sind, siehe Gleichung (6.47):

Für die DGL. (6.43):

$$\int_0^l \left(\hat{U}_R'' + \frac{\bar{p}_1}{EF} \right) \cdot f_1 \cdot dx = 0$$

oder:

$$\int_0^l \left(\mathcal{K}_1 \cdot f_1'' + \frac{\bar{p}_1}{EF} \right) \cdot f_1 \cdot dx = 0 \quad (6.48,1)$$

Für die DGLn. (6.42):

$$\int_0^l \left(\hat{V}_R''' - \frac{\bar{p}_2}{EJ_2} \right) \cdot f_3 \cdot dx = 0 ; \quad \int_0^l \left(\hat{W}_R'' - \frac{\bar{p}_3}{EJ_1} \right) \cdot f_3 \cdot dx = 0$$

oder:

$$\int_0^l \left(\mathcal{K}_2 \cdot f_3''' - \frac{\bar{p}_2}{EJ_2} \right) \cdot f_3 \cdot dx = 0 ; \quad \int_0^l \left(\mathcal{K}_3 \cdot f_3'' - \frac{\bar{p}_3}{EJ_1} \right) \cdot f_3 \cdot dx = 0 \quad (6.48,2) \quad (6.48,3)$$

Für die DGL. (6.44):

$$\int_0^l \left(\hat{J}_R'' + \frac{\bar{m}_T}{GJ_D} \right) \cdot f_3 \cdot dx = 0$$

oder:

$$\int_0^l \left(\mathcal{K}_4 \cdot f_3'' + \frac{\bar{m}_T}{GJ_D} \right) \cdot f_3 \cdot dx = 0 \quad (6.48,4)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (6.39) in die Gleichungen (6.48)

und Integration über x ergeben sich die Konstanten $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$

in Abhängigkeit des Vektors $\vec{\phi}_R = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8)_{\psi-\bar{\phi}_0}$

Einführung von Vektoren und Matrizen: Vektoren: s. Gl. (6.47) u. Gl. (6.40)

$$\vec{\mathcal{K}} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}_1 \\ \mathcal{K}_2 \\ \mathcal{K}_3 \\ \mathcal{K}_4 \end{pmatrix}_{(4,1)} \quad \hat{\mathcal{K}}_R = \begin{pmatrix} \hat{U}_R \\ \hat{V}_R \\ \hat{W}_R \\ \hat{J}_R \end{pmatrix}_{(4,1)} \quad \bar{\mathcal{K}}_R = \begin{pmatrix} \bar{U}_R \\ \bar{V}_R \\ \bar{W}_R \\ \bar{J}_R \end{pmatrix}_{(4,1)} \quad \vec{\bar{p}}_R = \begin{pmatrix} \bar{p}_1 \\ \bar{p}_2 \\ \bar{p}_3 \\ \bar{m}_T \end{pmatrix}_{(4,1)} \quad \bar{\mathcal{M}}_R = \begin{pmatrix} \bar{M}_R \\ \bar{p}_R \end{pmatrix}_{(8,1)}$$

Matrizen:

s. Gl. (6.47)

u. Gl. (6.48)

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_3(x) \\ f_3(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}_{(4,4)} \quad \vec{f}^* = \begin{pmatrix} f_1''(x) \\ f_3'''(x) \\ f_3'''(x) \\ f_3''(x) \end{pmatrix}_{(4,4)}$$

$$\hat{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{EF} & & & & \\ & \frac{1}{EJ_2} & & & \\ & & \frac{1}{EJ_1} & & \\ & & & -\frac{1}{GJ_0} & \\ & & & & \end{pmatrix} \quad (4,4)$$

$$\hat{K}_V = \begin{pmatrix} 1 & - & - & - & - \\ - & 1 & - & - & - \\ - & - & 1 & - & - \\ - & - & - & 1 & - \\ - & - & - & - & 1 \end{pmatrix} \quad (4,8) \qquad \hat{K}_P = \begin{pmatrix} - & - & - & - & 1 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & 1 & - & - \\ - & - & - & - & - & - & 1 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & 1 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 1 \end{pmatrix} \quad (4,8)$$

Damit gelten folgende Matrixgleichungen:

Für die Vektoren \bar{w}_R und \bar{p}_R als Anteile von \bar{w}_R , Gl.(6.40):

$$\bar{w}_R = \hat{K}_V \mathcal{R} z_R \quad ; \quad \bar{p}_R = \hat{K}_P \mathcal{R} z_R \quad (6.49)$$

Für die Gleichungen (6.47):

$$\hat{w}_R = \hat{J} \varrho_{\mathcal{R}} \quad (6.50)$$

Die Galerkinschen Gleichungen (6.48) haben jetzt die Form:

$$\int_0^l (\hat{f} \hat{f}^*) dx \cdot \varrho_{\mathcal{R}} = \hat{v} \int_0^l (\hat{f} \bar{p}_R) dx$$

Mit Gleichung (6.49):

$$\int_0^l (\hat{f} \hat{f}^*) dx \cdot \varrho_{\mathcal{R}} = \hat{v} \int_0^l (\hat{f} \hat{K}_P \mathcal{R}) dx \cdot z_R \quad (6.51)$$

Bezeichnungen:

$$\int_{x=0}^l (\hat{f} \hat{f}^*) dx = J_{1(4,4)} \quad ; \quad \int_0^l (\hat{f} \hat{K}_P \mathcal{R}) dx = J_{2(4,8)} \quad (6.52)$$

Damit ist der Vektor $\varrho_{\mathcal{R}}$:

$$\varrho_{\mathcal{R}} = J_1^{-1} \hat{v} J_2 z_R \quad (6.53)$$

J_1^{-1} existiere.

Damit ist nach Gl.(6.50):

$$\hat{w}_{R(4,1)} = \underbrace{\hat{f} J_1^{-1} \hat{v} J_2}_{(4,8)} z_{R(2,1)} \quad (6.54)$$

Man erkennt, daß anstelle der hier benutzten Diagonalmatrix \hat{f} auch voll besetzte Matrizen möglich sind, die eine Verbesserung des Verfahrens gestatten.

Mit Gleichung (6.54) ist also der Verschiebungsvektor \hat{w}_R bestimmt, der die näherungsweise Verformungen des Randträgers infolge der Belastungen aus den Randschnittgrößen der Schale enthält.

Mit den Belastungen der Gleichung (6.46) ergeben sich die Näherungsverformungen des Randträgers infolge seiner eingepprägten Lasten. Der Vektor dieser Belastungen wird \hat{w}_{R0} genannt:

$$\hat{w}_{R0} = \begin{pmatrix} \hat{U}_{R0} \\ \hat{V}_{R0} \\ \hat{W}_{R0} \\ \hat{\psi}_{R0} \end{pmatrix} \quad (6.55)$$

Die Summe der Vektoren $\hat{w}_R + \hat{w}_{R0}$ enthält also die Näherungsverformungen des Randträgers im Schubmittelpunkt und Schwerpunkt infolge der Belastungen aus Schale und Randträger.

Die Komponenten dieses Summenvektors sind jedoch nicht gleich den Komponenten des Vektors \bar{w}_R der transformierten Verformungen von der Schale her. Deshalb wird zu \bar{w}_R ein Näherungsvektor \hat{w}_R bestimmt. Hierfür werden wieder die Verformungen der Matrix \hat{f} angesetzt.

$$\hat{w}_R = \begin{pmatrix} \hat{U}_R \\ \hat{V}_R \\ \hat{W}_R \\ \hat{\psi}_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \cdot f_1(x) \\ \rho_2 \cdot f_3(x) \\ \rho_3 \cdot f_3(x) \\ \rho_4 \cdot f_3(x) \end{pmatrix} \quad (6.56)$$

$$\varrho_p = \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \\ \varrho_3 \\ \varrho_4 \end{pmatrix} ; \quad \hat{w}_R = \int_{(4,4)} \varrho_p \quad \left. \vphantom{\varrho_p} \right\} (6.57)$$

\hat{w}_R wird nach der Methode des Fehlerquadratminimums bestimmt:

$$\int_0^1 (\hat{w}_R - \bar{w}_R)^2 dx = \text{Min} \quad (6.58)$$

Diese Gleichung enthält die 4 Einzelbedingungen:

$$\int_0^1 (\hat{u}_R - \bar{u}_R) \frac{\partial (\hat{u}_R - \bar{u}_R)}{\partial \varrho_1} dx = 0$$

oder:

$$\int_0^1 [\varrho_1 \cdot f_1(x) - \bar{u}_R(x)] f_1(x) dx = 0$$

weiterhin:

$$\int_0^1 [\varrho_2 \cdot f_2(x) - \bar{v}_R(x)] f_2(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 [\varrho_3 \cdot f_3(x) - \bar{w}_R(x)] f_3(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 [\varrho_4 \cdot f_4(x) - \bar{v}_R(x)] f_4(x) dx = 0$$

(6.59)

Der Vektor ϱ_p - und damit \hat{w}_R - läßt sich wieder in Matrixschreibweise allgemein angeben.

Die Gleichungen (6.59) lassen sich zusammenfassend schreiben:

$$\int_0^1 [\hat{w}_R - \bar{w}_R] dx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Einsetzen der Gleichungen (6.49) und (6.57)

$$\int_0^l (\tilde{f} \tilde{f}) dx \varrho_p = \int_0^l (\tilde{f} \tilde{k}_V \tilde{\kappa}) dx \tilde{z}_R \quad (6.60)$$

Bezeichnungen:

$$\int_{x=0}^l (\tilde{f} \tilde{f}) dx = J_{3(4,4)} \quad ; \quad \int_0^l (\tilde{f} \tilde{k}_V \tilde{\kappa}) dx = J_{4(4,8)} \quad (6.61)$$

Damit ist der Vektor ϱ_p :

$$\varrho_p = J_1^{-1} J_4 \tilde{z}_R \quad J_3^{-1} \text{ existiert} \quad (6.62)$$

Damit ist nach Gleichung (6.57):

$$\widehat{\tilde{w}}_{R(4,1)} = \underbrace{\tilde{f} J_3^{-1} J_4}_{(4,8)} \tilde{z}_{R(8,1)} \quad (6.63)$$

Die 4 Übergangsbedingungen lauten:

$$\widehat{\tilde{w}}_R = \widehat{\tilde{w}}_R + \widehat{\tilde{w}}_{R0} \quad (6.64)$$

Damit läßt sich der Anfangsvektor \tilde{z}_0 bestimmen. Nach den Gleichungen (6.24) und (6.25) ist:

$$\tilde{z}_R = \tilde{z}(\varphi = \gamma_0) = e^{\alpha \cdot \gamma_0} \tilde{k}_1 \tilde{z}_0 - (\mathcal{P} - e^{\alpha \gamma_0}) \alpha^{-1} \mathcal{L} \quad (6.65)$$

Einsetzen der Gleichungen (6.54) und (6.63) in Gleichung (6.64) ergibt:

$$\tilde{f}_{(4,4)} (J_3^{-1} J_4 - J_1^{-1} \mathcal{P} J_2)_{(4,8)} \tilde{z}_{R(8,1)} = \widehat{\tilde{w}}_{R0} \quad (6.66)$$

Mit der Bezeichnung

$$J_{(4,8)} = J_3^{-1} J_4 - J_1^{-1} \mathcal{V} \cdot J_2 \quad (6.67)$$

und Gleichung (6.65) ergibt sich Gleichung (6.66) zu:

$$\mathcal{F} J e^{\alpha \gamma_0} \mathcal{K}_1 \bar{z}_0 = \mathcal{F} J (\mathcal{E} - e^{\alpha \gamma_0}) \alpha^{-1} \mathcal{L} + \hat{w}_{R0} \quad (6.68)$$

Hieraus errechnet sich \bar{z}_0 nach dem Gaußschen Algorithmus. Explizit ergibt sich \bar{z}_0 zu:

$$\bar{z}_{0(4,1)} = \underbrace{(\mathcal{F}_{(4,4)} J_{(4,8)} e^{\alpha \gamma_0} \mathcal{K}_{1(4,4)})^{-1}}_{(4,4)} \underbrace{[\mathcal{F}_{(4,4)} J_{(4,8)} (\mathcal{E} - e^{\alpha \gamma_0}) \alpha_{(8,8)}^{-1} \mathcal{L}_{(8,1)} + \hat{w}_{R0(4,1)}]}_{(4,1)} \quad (6.69)$$

Die Bildung der Kehrmatrix wird jedoch im Rechenautomaten nach Möglichkeit vermieden.

Damit läßt sich der Vektor z an jeder Stelle φ berechnen und nach Gleichung (6.29) auch der Vektor w aller Wirkungen.

Auf die gleiche Weise lassen sich die Biegerandstörungen aller übrigen flachen Schalen aus Flächen 2. Ordnung über rechteckigem Grundriß berechnen. Für das elliptische und hyperbolische Paraboloid (EP und HP) kann man die hier angegebenen Matrixgleichungen benutzen, wenn bei der Bildung der Matrizen die entsprechenden Verschiebungsdifferentialgleichungen und Ansatzfunktionen eingearbeitet werden. Bei den Randträgern ist stets zu prüfen, ob die gewöhnliche Balkentheorie im Vergleich zur Biegetheorie genügend genau ist. Viele Randträger erfordern besondere Theorien, wie das folgende Beispiel zeigt.

Die geraden Randträger der HP-Schalen sind häufig verschraubt,

d. h. die Biegehauptachsen drehen sich. Nimmt man konstante Querschnitte der Randträger an, so ergeben sich bei geraden Leitkurven und tangential zur Schalenoberfläche anschließenden oberen und unteren Querschnittsseiten Träger mit gerader Anschnittlinie (Kontaktlinie Randträger - Schalenmittelfläche) und konstanter Verschraubung. Hierdurch ändern sich die Schnittgrößen und Deformationen des Randträgers im Vergleich zum Balken mit überall parallelen Hauptachsen.

6.7 Die Darstellung des Verfahrens für beliebig viele Ansatzfunktionen

Bei unsymmetrischen Systemen ist es meist erforderlich, mehrere Ansatzfunktionen im Ansatz Gl. (6.6) zu berücksichtigen. Die in der Systemgeometrie und Belastung doppelsymmetrischen Schalen (z. B. elliptische und hyperbolische Paraboloiden über quadratischem Grundriß) gestatten die Symmetrisierung entsprechend den Angaben in Kapitel 4.5, S. 78.

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{\nu=1}^n \phi_{1\nu}(\varphi) \cdot f_{1\nu}(x) \\ v &= \sum_{\nu=1}^n \phi_{2\nu}(\varphi) \cdot f_{2\nu}(x) \\ w &= \sum_{\nu=1}^n \phi_{3\nu}(\varphi) \cdot f_{3\nu}(x) \end{aligned} \right\} (6.6)$$

Vollständige Funktionensysteme für die $f_{1\nu}$, $f_{2\nu}$, $f_{3\nu}$ wurden in Kapitel 4.4 für verschiedene homogene Randbedingungen angegeben.

Nach dem Einsetzen des Ansatzes (6.6) in das Differentialgleichungssystem (6.4) muß für jedes Tripel f_{1s} , f_{2s} , f_{3s} ein Galerkinprozeß in Längsrichtung der Schale durchgeführt werden, um die Reduktion des partiellen in ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem zu erzielen.

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^n \int_0^1 [a^2 \phi_{1\nu} f_{1\nu}'' + \frac{1-\mu}{2} \phi_{1\nu}'' f_{1\nu} + a \frac{1+\mu}{2} \phi_{2\nu}' f_{2\nu}' + \mu a \phi_{3\nu}' f_{3\nu}'] f_{1s} \cdot dx &= 0 \\ \sum_{\nu=1}^n \int_0^1 [a \frac{1+\mu}{2} \phi_{1\nu}' f_{1\nu}' + \phi_{2\nu}'' f_{2\nu} + a^2 \frac{1-\mu}{2} \phi_{2\nu} f_{2\nu}'' + \phi_{3\nu}' f_{3\nu} + \frac{a^2}{D} Y] f_{2s} \cdot dx &= 0 \\ \sum_{\nu=1}^n \int_0^1 [\mu a \phi_{1\nu} f_{1\nu}' + \phi_{2\nu}' f_{2\nu} + \phi_{3\nu} f_{3\nu} + k(a^4 \phi_{3\nu} f_{3\nu}''' + 2a^2 \phi_{3\nu}'' f_{3\nu}'' + \phi_{3\nu}''' f_{3\nu} + \frac{a^2}{D} Z)] f_{3s} \cdot dx &= 0 \end{aligned} \right\} (6.70)$$

Es werden folgende Matrizen und Vektoren eingeführt, die

eweils nur feste Zahlenwerte enthalten:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{v=1}^n \alpha^2 \int_0^l f_{1v}'' f_{1s} dx &= (I) & \sum_{v=1}^n \int_0^l f_{2v} f_{2s} dx &= (VI) & \sum_{v=1}^n \int_0^l f_{3v} f_{3s} dx &= (X) \\
 \sum_{v=1}^n \frac{1-\mu}{2} \int_0^l f_{1v} f_{1s} dx &= (II) & \sum_{v=1}^n \int_0^l \alpha^2 \frac{1-\mu}{2} f_{2v}'' f_{2s} dx &= (VII) & \sum_{v=1}^n \int_0^l f_{3v}' f_{3s} dx &= (XI) \\
 \sum_{v=1}^n \alpha \frac{1+\mu}{2} \int_0^l f_{2v} f_{1s} dx &= (III) & \sum_{v=1}^n \int_0^l f_{3v}' f_{2s} dx &= (VIII) & \sum_{v=1}^n k \alpha^4 \int_0^l f_{3v}''' f_{3s} dx &= (XII) \\
 \sum_{v=1}^n \mu \alpha \int_0^l f_{3v}' f_{1s} dx &= (IV) & \sum_{v=1}^n \frac{\alpha^2}{D} \int_0^l f_{2s} dx &= \vartheta_y & \sum_{v=1}^n k 2 \alpha^2 \int_0^l f_{3v}' f_{3s} dx &= (XIII) \\
 \sum_{v=1}^n \alpha \frac{1+\mu}{2} \int_0^l f_{1v}' f_{1s} dx &= (V) & \sum_{v=1}^n \mu \alpha \int_0^l f_{1v}' f_{3s} dx &= (IX) & \sum_{v=1}^n k \int_0^l f_{3v}' f_{3s} dx &= (XIV) \\
 & & & & \sum_{v=1}^n \frac{\alpha^2}{D} \int_0^l f_{3s} dx &= \vartheta_z
 \end{aligned} \right\} (6.71)$$

Damit ergibt sich aus Gl. (6.70) das gewöhnliche Differentialgleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned}
 (I) \phi_1 + (II) \phi_1'' + (III) \phi_2' + (IV) \phi_3 &= 0 \\
 (V) \phi_1' + (VI) \phi_2'' + (VII) \phi_2 + (VIII) \phi_3' + \vartheta_y &= 0 \\
 (IX) \phi_1 + (X) \phi_2' + (XI) \phi_3 + (XII) \phi_3 + (XIII) \phi_3'' + (XIV) \phi_3'''' + \vartheta_z &= 0
 \end{aligned} \right\} (6.72)$$

Dieses läßt sich wieder in ein Differentialgleichungssystem der 1. Ordnung transformieren.

Hierfür werden als unbekannte Vektoren eingeführt:

$$\left. \begin{aligned}
 \phi_1 \\
 \phi_2 \\
 \phi_3 \\
 \phi_4 &= \phi_1^* \\
 \phi_5 &= \phi_2^* \\
 \phi_6 &= \phi_3^* \\
 \phi_7 &= \phi_6^* = \phi_3^{**} \\
 \phi_8 &= \phi_7^* = \phi_6^{**} = \phi_3^{***}
 \end{aligned} \right\} (6.73)$$

Damit ergibt sich das Differentialgleichungssystem:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 \psi & & & & & \\
 \hline
 & \psi & & & & \\
 \hline
 & & \psi & & & \\
 \hline
 & & & (II) & & \\
 \hline
 & & & & (VII) & \\
 \hline
 & & & & & \psi \\
 \hline
 & & & & & & \psi \\
 \hline
 & & & & & & \\
 \hline
 \end{array} \\
 \alpha
 \end{array}
 \cdot \frac{d}{d\psi}
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \phi_1 \\
 \hline
 \phi_2 \\
 \hline
 \phi_3 \\
 \hline
 \phi_4 \\
 \hline
 \phi_5 \\
 \hline
 \phi_6 \\
 \hline
 \phi_7 \\
 \hline
 \phi_8 \\
 \hline
 \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
 \hline
 & & & -\psi & & \\
 \hline
 & & & & -\psi & \\
 \hline
 & & & & & -\psi \\
 \hline
 (I) & (IV) & (III) & & & \\
 \hline
 & (VII) & (V) & (VIII) & & \\
 \hline
 & & & & -\psi & \\
 \hline
 & & & & & -\psi \\
 \hline
 (IX) & (XII) & (X) & (XI) & & \\
 \hline
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 \phi_1 \\
 \hline
 \phi_2 \\
 \hline
 \phi_3 \\
 \hline
 \phi_4 \\
 \hline
 \phi_5 \\
 \hline
 \phi_6 \\
 \hline
 \phi_7 \\
 \hline
 \phi_8 \\
 \hline
 \end{array}
 +
 \begin{array}{|c|}
 \hline
 y_x \\
 \hline
 \\
 \hline
 y_z \\
 \hline
 \end{array}
 = 0
 \quad (6.74)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{z} &= -\alpha^{-1} \cdot \mathcal{L} \cdot z - \alpha^{-1} \cdot p \\
 \dot{z} &= -\mathcal{L} \cdot z - y
 \end{aligned} \right\} (6.75)$$

Die Lösung wird entsprechend Gl. (6.18) durchgeführt.

7. Die Trefftzschen Gleichungen für Kreiszyinderschalen mit beliebigen Randbedingungen an den Kämpfern und Bindern
- 7.1. Die Trefftzschen Gleichungen für den schwach gekrümmten Kreisbogenträger mit beliebigen Randbedingungen

Mit dieser Voruntersuchung sollen für den eindimensionalen Fall die aus der Krümmung des Stabes sich ergebenden Terme in den Trefftzschen Gleichungen dargestellt werden. Diese lassen sich gegenüber dem zweidimensionalen Flächentragwerk leicht überblicken und durch die statische Anschauung überprüfen.

Die Differentialgleichungen des Kreisbogenträgers in den Verschiebungsfunktionen v und w .

Man gewinnt alle Gleichungen aus den Flüggeschen Differentialgleichungen der Kreiszyinderschalen durch Nullsetzen der Ableitungen nach x . Die erste Dgl., die das Gleichgewicht in Richtung der Erzeugenden beschreibt, ist identisch null.

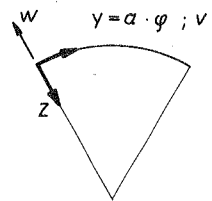
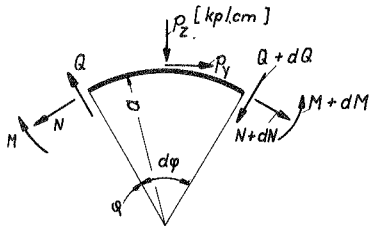


Bild 20
Element des Kreisbogenträgers mit den Schnittgrößen

Bild 21
Koordinaten y, z der Stabachse und Verschiebungen v, w

Querschnittsfläche: F [cm²]

Trägheitsmoment: J [cm⁴]

Bezeichnung der Ableitungen: $\frac{d(\quad)}{d\varphi} = (\quad)$

Gleichgewichtsbedingungen am Element, siehe Bild 20:

$$\left. \begin{aligned} N' - Q + p_y \cdot a &= 0 \quad (\text{tangential}) \\ N + Q' + p_z \cdot a &= 0 \quad (\text{normal}) \\ M' - Q \cdot a &= 0 \quad (\text{Verdrehen}) \end{aligned} \right\} (7.1)$$

oder:

$$\left. \begin{aligned} N' - Q &= -a \cdot p_y \\ \frac{1}{a} M'' + N &= -a \cdot p_z \end{aligned} \right\} (7.2)$$

Das Elastizitätsgesetz ergibt sich aus Gl. (6.5).

Es wird:

$$\left. \begin{aligned} D &= E \cdot F \quad ; \quad K = E \cdot J \\ N &= \frac{E \cdot F}{a} (v' + w) + \frac{E \cdot J}{a^3} (w + w'') \\ M &= \frac{E \cdot J}{a^2} (w + w'') \end{aligned} \right\} (7.3)$$

Der elastische Drehwinkel ϑ ist, siehe Bild 21:

$$\vartheta = \frac{1}{a} (v - w') \quad (7.4)$$

Einsetzen der Gleichung (7.3) in die Gleichung (7.2):

$$\left. \begin{aligned} v'' + w' &= -\frac{a^2}{E \cdot F} p_y \\ v' + w + \frac{J}{F \cdot a^2} (w'''' + 2w'' + w) &= -\frac{a^2}{E \cdot F} p_z \\ \frac{J}{F \cdot a^2} &= k \end{aligned} \right\} (7.5)$$

Dies sind die den Flüggeschen Dgl'n. entsprechenden Dgl'n. des Kreisbogenträgers.

Die Differentialgleichungen des flachen Kreisbogenträgers mit Donnell'schen Näherungen

In den Gleichgewichtsbedingungen Gl.(7.2) wird die Tangentialkomponente des Querkraftinkrementes vernachlässigt.

$$N' = - a p_y \quad (7.6)$$

Das Elastizitätsgesetz lautet, vergl. Gl. (7.3):

$$N = \frac{EF}{a} (v' + w) ; \quad M = \frac{EJ}{a^2} w'' \quad ; \quad \vartheta = - \frac{w'}{a} \quad (7.7)$$

Einsetzen der Gleichung (7.7) in die Gleichung (7.6):

$$\left. \begin{aligned} v'' + w'' &= - \frac{a^2}{EF} p_y \\ v' + w + kw'' &= - \frac{a^2}{EF} p_z \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Das elastische Potential des flachen Kreisbogenträgers.

Das Potential π_i der inneren Kräfte setzt sich aus dem Anteil der Normalkräfte $\pi_i^{(N)}$ und dem der Biegemomente $\pi_i^{(B)}$ zusammen:

Die Dehnung der Bogenachse ist:

$$\varepsilon = \frac{1}{a} (v' + w) \quad (7.9)$$

Die elastische Krümmung der flachen Bogenachse ist nach Donnell:

$$\varkappa = \frac{1}{a^2} w'' \quad (7.10)$$

Dann ist mit dem Elastizitätsgesetz Gleichung (7.7):

$$\pi_i^{(N)} = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} N \varepsilon a d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{EF}{a} (v' + w)^2 d\varphi \quad (7.11)$$

$$\pi_i^{(M)} = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} M \varkappa a d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{EJ}{a^3} (w'')^2 d\varphi \quad (7.12)$$

$EF = \text{konst.} ; \quad EJ = \text{konst.}$

$$\pi_i = \frac{1}{2} \frac{EF}{a} \int_0^{\varphi_0} (v' + w)^2 d\varphi + \frac{1}{2} \frac{EJ}{a^3} \int_0^{\varphi_0} (w'')^2 d\varphi \quad (7.13)$$

Wendet man auf die Gleichung (7.13) den Eulerschen Variationsprozeß an, so erhält man die homogenen Gleichungen (7.8). Damit beinhaltet das Potential (7.13) die gleichen Näherungen wie die Differentialgleichungen (7.8).

Das Potential der äußeren Kräfte und der Randkräfte an den Stellen $\varphi = 0$; φ_0 ist nach Bild 20 :

$$\pi_a^* = -2A_a^* = a \int_0^{\varphi_0} (p_z w - p_y v) d\varphi - \left[N \cdot v + M \frac{1}{a} w' - Q w' \right]_0^{\varphi_0} \quad (7.14)$$

Der n - parametrische Ansatz nach Trefftz lautet:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= w_0 + \sum_{\nu=1}^n c_\nu w_\nu \\ \bar{v} &= v_0 + \sum_{\nu=1}^n c_\nu v_\nu \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Dieser Ansatz genügt den Bedingungen, siehe Gleichung (7.8):

$$\left. \begin{aligned} v_0'' + w_0' &= -\frac{a^2}{EF} p_y & \left| \quad v_\nu'' + w_\nu' &= 0 \right. \\ v_0' + w_0 + k w_0'''' &= -\frac{a^2}{EF} p_z & \left| \quad v_\nu' + w_\nu + k w_\nu'''' &= 0 \right. \end{aligned} \right\} \quad (7.16)$$

Einsetzen des Ansatzes Gleichung (7.15) in das Potential

$$\pi = \pi_i + \pi_a$$

und Differenzieren nach der Konstanten c_s ergibt die s-te Bedingungsgleichung zur Bestimmung der c_ν .

$$\text{s-te Gleichung: } \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_s} = 0 \quad (7.17)$$

Zunächst wird $\bar{\pi}_i$ betrachtet. Man beachte:

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial c_s} = w_s ; \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial c_s} = v_s ; \quad \frac{\partial \bar{w}'}{\partial c_s} = w_s' ; \quad \frac{\partial \bar{v}'}{\partial c_s} = v_s' \quad (7.18)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}_i}{\partial c_s} = \frac{EF}{a} \left[\int_0^{\varphi_0} (\bar{v}' + \bar{w}') (v_s' + w_s) d\varphi + k \int_0^{\varphi_0} \bar{w}'' w_s'' d\varphi \right]$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}_i}{\partial c_s} = \frac{EF}{a} \left[\int_0^{\varphi_0} (\bar{v} + \bar{w}) v_s d\varphi + \int_0^{\varphi_0} (\bar{v}' + \bar{w}') w_s + k \bar{w}'' w_s'' d\varphi \right] \quad (7.19)$$

Teilintegration mit Integration von v_s^* und w_s^{**} .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}_i}{\partial c_s} &= \frac{EF}{a} \left[(\bar{v}^* + \bar{w}) v_s + k (\bar{w}^{**} w_s^* - \bar{w}^{***} w_s) \right]_0^{y_0} - \\ &- \frac{EF}{a} \int_0^{y_0} (\bar{v}^{**} + \bar{w}^*) v_s d\varphi + \frac{EF}{a} \int_0^{y_0} (\bar{v}^* + \bar{w} + k \bar{w}^{***}) w_s dy \end{aligned} \quad (7.20)$$

Einsetzen des Elastizitätsgesetzes Gleichung (7.7) in $\bar{\pi}_a$, Gleichung (7.14):

$$\bar{\pi}_a = a \int_0^{y_0} (p_z w - p_y v) d\varphi - \frac{EF}{a} \left[(v^* + w) v + k (w^{**} w^* - w^{***} w) \right]_0^{y_0} \quad (7.21)$$

Einsetzen des Ansatzes Gleichung (7.15) und partielles Differenzieren nach c_s :

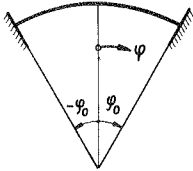
$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}_a}{\partial c_s} &= a \int_0^{y_0} p_z w_s d\varphi - a \int_0^{y_0} p_y v_s d\varphi - \frac{EF}{a} \left[(v_s^* + w_s) \bar{v} + (\bar{v}^* + \bar{w}) v_s + \right. \\ &\quad \left. + k (w_s^{**} \bar{w}^* + \bar{w}^{**} w_s^* - w_s^{***} \bar{w} - \bar{w}^{***} w_s) \right]_0^{y_0} \\ \frac{\partial \bar{\pi}_a}{\partial c_s} &= a \int_0^{y_0} p_z w_s d\varphi - a \int_0^{y_0} p_y v_s d\varphi - \frac{EF}{a} \left[(\bar{v}^* + \bar{w}) v_s + k (\bar{w}^{**} w_s^* - \bar{w}^{***} w_s) \right]_0^{y_0} - \\ &- \frac{EF}{a} \left[(v_s^* + w_s) \bar{v} + k (w_s^{**} \bar{w}^* - w_s^{***} \bar{w}) \right]_0^{y_0} \end{aligned} \quad (7.22)$$

Die gesamte s-te Gleichung ist nach Gleichung (7.20) und Gl.(7.22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_s} &= \frac{\partial \bar{\pi}_i}{\partial c_s} + \frac{\partial \bar{\pi}_a}{\partial c_s} \\ \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_s} &= - \int_0^{y_0} \left[\underbrace{\frac{EF}{a} (\bar{v}^{**} + \bar{w}^*) + a p_y}_{= 0, \text{ s. Gl. (7.8)}} v_s d\varphi + \int_0^{y_0} \left[\underbrace{\frac{EF}{a} (\bar{v}^* + \bar{w} + k \bar{w}^{***} + a p_z)}_{= 0, \text{ s. Gl. (7.8)}} w_s d\varphi + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \underbrace{\frac{EF}{a} [(\bar{v}^* + \bar{w}) v_s + k (\bar{w}^{**} w_s^* - \bar{w}^{***} w_s)]}_{\text{aus } \bar{\pi}_i} \right]_0^{y_0} - \frac{EF}{a} [(\bar{v}^* + \bar{w}) w_s + k (\bar{w}^{**} w_s^* - \bar{w}^{***} w_s)]_0^{y_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{EF}{a} \left[\underbrace{(\bar{v}^* + w_s)}_{\text{aus } [N \cdot v]_0^{y_0}} + \underbrace{k (\bar{w}^* w_s^{**} - \bar{w} w_s^{***})}_{\text{aus } [M \cdot \vartheta]_0^{y_0}} \right]_0^{y_0} \right]_0^{y_0} \end{aligned} \quad (7.23)$$

Die Trefftzchen Gleichungen für verschiedene Lagerungsarten

1. Beidseitige Einspannung



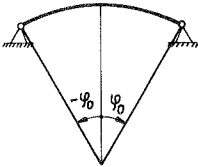
Alle Randterme sind in $\bar{\pi}_\alpha^*$ enthalten.

Aus Gleichung (7.23) erhält man:

$$\left[\bar{v} (v_s' + w_s) + k (\bar{w}'' w_s'' + \bar{w} w_s''') \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = 0 \quad (7.24)$$

Die Gleichung wird mit den Randbedingungen $\bar{v} = \bar{w} = \bar{w}'' = 0$ für $\varphi = \varphi_0$ und $-\varphi_0$ identisch erfüllt.

2. Beidseitig gelenkige Lagerung



In $\bar{\pi}_\alpha^*$ entfällt der Randterm

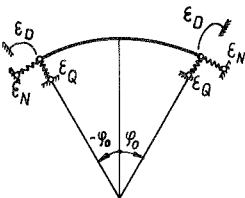
$$\left[M \cdot \vartheta \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = \left[M \cdot \frac{w'}{\alpha} \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0}$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (7.23):

$$\left[-\bar{v} (v_s' + w_s) + k (\bar{w}'' w_s'' + \bar{w} w_s''') \right]_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = 0 \quad (7.25)$$

Diese Gleichung wird mit den Randbedingungen $\bar{v} = \bar{w} = \bar{w}'' = 0$ für $\varphi = \varphi_0$ und $-\varphi_0$ identisch erfüllt.

3. Elastische Lagerung mit zwei Verschiebungsfedern und einer Drehfeder



$$[\epsilon_N] = [\epsilon_Q] = \frac{cm}{kp} ; \quad [\epsilon_D] = \frac{1}{kpcm}$$

Für $\varphi = \varphi_0$ und $-\varphi_0$ gilt:

$$v = \epsilon_N \cdot N ; \quad \frac{w'}{\alpha} = \epsilon_D \cdot M ; \quad w = \epsilon_Q \cdot Q \quad (7.26)$$

Das Potential der inneren Kräfte vergrößert sich um den Betrag:

$$\bar{\Pi}_i^{(\varepsilon)} = \frac{1}{2} [\varepsilon_N \cdot N^2 - \varepsilon_Q \cdot Q^2 + \varepsilon_D \cdot M^2]_{-y_0}^{+y_0} \quad (7.27)$$

Einsetzen des Elastizitätsgesetzes Gleichung (7.3), des Trefftz-schen Ansatzes Gl.(7.15) und Differentiation nach c_s ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}_i^{(\varepsilon)}}{\partial c_s} &= \left[\left(\frac{EF}{a} \right)^2 \varepsilon_N (\bar{v}^* + \bar{w}) (v_s^* + w_s) - \left(\frac{EF}{a} \right)^2 \frac{1}{a^2} \varepsilon_Q \bar{w} \dots w_s \dots + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{EJ}{a^2} \right)^2 \varepsilon_D \bar{w} \dots w_s \dots \right]_{-y_0}^{+y_0} \\ &= \left(\frac{EF}{a} \right)^2 \left[\varepsilon_N (\bar{v}^* + \bar{w}) (v_s + w_s) + k^2 \left(\varepsilon_D \bar{w} \dots w_s \dots - \frac{1}{a^2} \varepsilon_Q \bar{w} \dots w_s \dots \right) \right]_{-y_0}^{+y_0} \end{aligned} \quad (7.28)$$

In Gleichung (7.23) sind alle Randterme zu berücksichtigen. Aus Gleichung (7.23) und Gl.(7.28) ergibt sich die s-te Trefftzsche Gleichung zu:

$$\begin{aligned} \left[\bar{v} (v_s^* + w_s) + k (\bar{w} \dots w_s \dots - \bar{w} w_s \dots) \right]_{-y_0}^{+y_0} + \frac{EF}{a} \left[\varepsilon_N (\bar{v}^* + \bar{w}) (v_s^* + w_s) + \right. \\ \left. + k^2 \left(\varepsilon_D \bar{w} \dots w_s \dots - \frac{1}{a^2} \varepsilon_Q \bar{w} \dots w_s \dots \right) \right]_{-y_0}^{+y_0} = 0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

Die Gleichungen (7.24), (7.25) und (7.29) sind die Elastizitätsgleichungen für die jeweiligen Lagerungsfälle. Sie sind auf Seite 182 in einer Tabelle zusammengestellt. Die Trefftzschen Gleichungen liefern die exakte Lösung. Sie sind für asymmetrische Träger mit der Belastung $p_z = \text{konst.}$; $p_y = 0$, also einer konstanten Normalbelastung, ebenfalls in der Tabelle, Seite 182 angegeben.

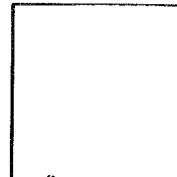
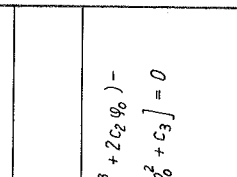
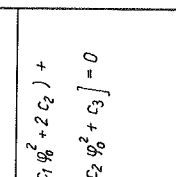
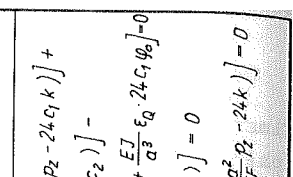
Die Ansatzfunktionen \bar{w} ; \bar{v} für konstante Normalbelastung $p = \text{konst.}$

Das Dgl.-System ist nach Gleichung (7.8)

$$\left. \begin{aligned} v'' + w' &= 0 \\ v' + w + k \cdot w \dots &= - \frac{a^2}{EF} p_z \end{aligned} \right\} (7.30)$$

Eine Partikularlösung ist:

$$w_0 = - \frac{a^2}{EF} p_z \quad ; \quad v_0 = 0 \quad (7.31)$$

 <p>$p = \text{konst.}$ $EI = \text{konst.}$ $EF = \text{konst.}$</p>	<p>Die Treffzischen Gleichungen für drei verschiedene Lagerungen des Kreisbogenenträgers unter konstanter Normalbelastung</p> <p>Ansatzfunktionen: $\bar{w} = -\frac{\sigma^2}{EF} P_2 + c_1 (\psi^4 - 24k) + c_2 \psi^2 + c_3$</p> <p>$\bar{v} = -c_1 \frac{\psi^5}{5} - c_2 \frac{\psi^3}{3} - c_3 \psi$</p>	<p>Bestimmungsgleichungen für die c_r</p> <p>$s=1: (-24k)(-c_1 \frac{\psi_0^5}{5} - c_2 \frac{\psi_0^3}{3} - c_3 \psi_0) + k \cdot 12 \psi_0^2 (4c_1 \psi_0^3 + 2c_2 \psi_0) - k \cdot 24 \psi_0 [-\frac{\sigma^2}{EF} P_2 + c_1 (\psi_0^4 - 24k) + c_2 \psi_0^2 + c_3] = 0$</p> <p>$s=2: k \cdot 2 (4c_1 \psi_0^3 + 2c_2 \psi_0) = 0$</p> <p>$w_0, \psi_0: (-\frac{\sigma^2}{EF} P_2) (-c_1 \frac{\psi_0^5}{5} - c_2 \frac{\psi_0^3}{3} - c_3 \psi_0) = 0$</p>
	<p>Treffzische Gleichungen allgemein</p> <p>$\left\{ \bar{v} (v_s^* + w_s) + k (\bar{w}^* w_s^* - \bar{w} w_s^*) \right\}_{\psi=\psi_0} = 0$</p>	<p>$s=1: -(24k)(-c_1 \frac{\psi_0^5}{5} - c_2 \frac{\psi_0^3}{3} - c_3 \psi_0) + k \cdot 4 \psi_0^3 (12c_1 \psi_0^2 + 2c_2) + k \cdot 24 \psi_0 [-\frac{\sigma^2}{EF} P_2 + c_1 (\psi_0^4 - 24k) + c_2 \psi_0^2 + c_3] = 0$</p> <p>$s=2: +k \cdot 2 \psi_0 (12c_1 \psi_0^2 + 2c_2) = 0$</p> <p>$w_0, \psi_0: (-\frac{\sigma^2}{EF} P_2) (-c_1 \frac{\psi_0^5}{5} - c_2 \frac{\psi_0^3}{3} - c_3 \psi_0) = 0$</p>
	<p>$\left\{ -\bar{v} (v_s^* + w_s) + k (\bar{w}^* w_s^* + \bar{w} w_s^*) \right\}_{\psi=\psi_0} = 0$</p>	<p>$s=1: (-24k) [-c_1 \frac{\psi_0^5}{5} - c_2 \frac{\psi_0^3}{3} - c_3 \psi_0 + \frac{EF}{\sigma} \epsilon_N (-\frac{\sigma^2}{EF} P_2 - 24c_1 k)] + k \cdot 12 \psi_0^2 [4c_1 \psi_0^3 + 2c_2 \psi_0 + \frac{EJ}{\sigma} \epsilon_H (12c_1 \psi_0^2 + 2c_2)] - k \cdot 24 \psi_0 [-\frac{\sigma^2}{EF} P_2 + c_1 (\psi_0^4 - 24k) + c_2 \psi_0^2 + c_3 + \frac{EJ}{\sigma^3} \epsilon_Q \cdot 24c_1 \psi_0] = 0$</p> <p>$s=2: k \cdot 2 [4c_1 \psi_0^3 + 2c_2 \psi_0 + \frac{EJ}{\sigma} \epsilon_D (12c_1 \psi_0^2 + 2c_2)] = 0$</p> <p>$w_0, \psi_0: (-\frac{\sigma^2}{EF} P_2) [-c_1 \frac{\psi_0^5}{5} - c_2 \frac{\psi_0^3}{3} - c_3 \psi_0 + \frac{EF}{\sigma} \epsilon_N (-\frac{\sigma^2}{EF} P_2 - 24k)] = 0$</p>
 <p>ϵ_D ϵ_H ϵ_Q ϵ_N</p> <p>Federkonstanten $\epsilon_H \left[\frac{cm}{kp} \right]$ $\epsilon_Q \left[\frac{cm}{kp} \right]$ $\epsilon_D \left[\frac{1}{kp \cdot cm} \right]$</p>	<p>$\left\{ +\bar{v} (v_s^* + w_s) + k (\bar{w}^* w_s^* - \bar{w} w_s^*) \right\} + \frac{EF}{\sigma} \left[\epsilon_H (\bar{v}^* + \bar{w}) (v_s^* + w_s) + k \epsilon^2 (\epsilon_D \bar{w}^* w_s^* - \frac{1}{\sigma^2} \epsilon_Q \bar{w}^* w_s^*) \right]_{\psi=\psi_0} = 0$</p>	<p>$s=1: (-24k) [-c_1 \frac{\psi_0^5}{5} - c_2 \frac{\psi_0^3}{3} - c_3 \psi_0 + \frac{EF}{\sigma} \epsilon_N (-\frac{\sigma^2}{EF} P_2 - 24c_1 k)] + k \cdot 12 \psi_0^2 [4c_1 \psi_0^3 + 2c_2 \psi_0 + \frac{EJ}{\sigma} \epsilon_H (12c_1 \psi_0^2 + 2c_2)] - k \cdot 24 \psi_0 [-\frac{\sigma^2}{EF} P_2 + c_1 (\psi_0^4 - 24k) + c_2 \psi_0^2 + c_3 + \frac{EJ}{\sigma^3} \epsilon_Q \cdot 24c_1 \psi_0] = 0$</p> <p>$s=2: k \cdot 2 [4c_1 \psi_0^3 + 2c_2 \psi_0 + \frac{EJ}{\sigma} \epsilon_D (12c_1 \psi_0^2 + 2c_2)] = 0$</p> <p>$w_0, \psi_0: (-\frac{\sigma^2}{EF} P_2) [-c_1 \frac{\psi_0^5}{5} - c_2 \frac{\psi_0^3}{3} - c_3 \psi_0 + \frac{EF}{\sigma} \epsilon_N (-\frac{\sigma^2}{EF} P_2 - 24k)] = 0$</p>

Die homogenen Dgln. (7.30) lassen sich überführen in:

$$w_j^{* * * * *} = 0 \quad (7.32)$$

Der symmetrische Teil der allgemeinen homogenen Lösung und damit der homogene Teil des Trefftz'schen Ansatzes ist:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^3 c_{\nu} w_{\nu} &= c_1 (\varphi^4 - 24k) + c_2 \varphi^2 + c_3 \\ \sum_{\nu=1}^3 c_{\nu} v_{\nu} &= -c_1 \frac{\varphi^5}{5} - c_2 \frac{\varphi^3}{3} - c_3 \varphi \end{aligned} \right\} (7.33)$$

Damit muß sich $\bar{w} = w_0 + \sum_{\nu=1}^3 c_{\nu} w_{\nu} \equiv w$ und

$$\bar{v} = v_0 + \sum_{\nu=1}^3 c_{\nu} v_{\nu} \equiv v \text{ ergeben.}$$

7.2 Die Trefftz'schen Gleichungen für schwach gekrümmte Kreis- zylinderschalen durch Variation des elastischen Potentials

Das elastische Potential der schwach gekrümmten Kreis- zylinderschale

Es wird die Flüggesche Theorie mit den DKJ - Näherungen gemäß den Ausgangsgleichungen des 6. Kapitels benutzt. Es ist günstig, den Membrananteil $\pi_1^{(M)}$ und den Biegeanteil $\pi_1^{(B)}$ im Potential der inneren Kräfte π_1 getrennt darzustellen.

$$\text{Es ist: } \pi = \pi_i^{(M)} + \pi_i^{(B)} + \pi_a = \pi_i + \pi_a \quad (7.34)$$

$$\pi_i^{(M)} = \frac{1}{2} \iint_F (n_x \cdot \varepsilon_x^{(M)} + n_{\varphi} \varepsilon_{\varphi}^{(M)} + n_{x\varphi} \cdot \gamma_{x\varphi}^{(M)}) dx dy \quad (7.35)$$

$$\pi_i^{(B)} = \frac{1}{2} \iint_F (m_x \cdot \varkappa_x + m_{\varphi} \varkappa_{\varphi} + 2m_{x\varphi} \cdot \varkappa_{x\varphi}) dx dy \quad (7.36)$$

Mit dem Elastizitätsgesetz Gl. (6.5), den Verzerrungen der Schalenmittelfläche und den elastischen Krümmungen ergeben sich die Gl. (7.35) und (7.36) in Abhängigkeit der Verschiebungen u, v, w .

Es ist zweckmäßig, mit den Veränderlichen x und $y = a \cdot \varphi$ zu rechnen.

Für die Differentiation gelten die Bezeichnungen:

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x} = (\quad)' ; \quad \frac{\partial(\quad)}{\partial y} = (\quad)^\dagger \quad (7.37)$$

Dann lautet das Elastizitätsgesetz Gl.(6.5):

$$\left. \begin{aligned} n_x &= D (u' + \mu \cdot v^\dagger + \mu \frac{w}{a}) \\ n_\varphi &= D (v^\dagger + \mu \cdot u' + \frac{w}{a}) \\ n_{x\varphi} &= u_{\varphi x} = D \frac{1-\mu}{2} (u^\dagger + v') \\ m_x &= \kappa (w'' + \mu \cdot w^{\dagger\dagger}) \\ m_\varphi &= K (w^{\dagger\dagger} + \mu \cdot w'') \\ m_{x\varphi} &= m_{\varphi x} = K (1-\mu) w'^{\dagger} \end{aligned} \right\} (7.38)$$

Die Querkräfte ergeben sich aus den Gleichgewichtsbedingungen:

$$q_x = K (w''' + w^{\dagger\dagger\dagger}) ; \quad q_\varphi = K (w^{\dagger\dagger\dagger} + w''') \quad (7.39)$$

Die Verzerrungen der Schalenmittelfläche sind:

$$\varepsilon_x^{(M)} = u' ; \quad \varepsilon_\varphi^{(M)} = v^\dagger + \frac{w}{a} ; \quad \gamma_{x\varphi}^{(M)} = u^\dagger + v' \quad (7.40)$$

Die elastischen Krümmungen sind:

$$\alpha_{e_x} = w'' ; \quad \alpha_{e_\varphi} = w^{\dagger\dagger} ; \quad \alpha_{e_{x\varphi}} = w'^{\dagger} \quad (7.41)$$

Durch Einsetzen von Gl.(7.38 bis 7.41) in die Gl.(7.35) und (7.36) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \pi_i^{(M)} &= \frac{D}{2} \iint_{(F)} [(u' + \mu v^\dagger + \mu \frac{w}{a}) u' + (v^\dagger + \mu u' + \frac{w}{a})(v^\dagger + \frac{w}{a}) + \\ &+ \frac{1-\mu}{2} (u^\dagger + v')^2] dx dy \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} \pi_i^{(B)} &= \frac{K}{2} \iint_{(F)} [(w'' + \mu w^{\dagger\dagger}) w'' + (w^{\dagger\dagger} + \mu w'') w^{\dagger\dagger} + \\ &+ 2(1-\mu)(w'^{\dagger})^2] dx dy \end{aligned} \quad (7.43)$$

Das Potential der äußeren Kräfte ist ohne die Randterme:

$$\pi_a = -2A_a = -\iint_{(F)} (\chi u + Yv - Zw) dx dy \quad (7.44)$$

Es soll jetzt noch geprüft werden, ob die Näherungen im Potential denjenigen in den Donnell'schen Gleichungen (6.4) entsprechen. Hierzu werden die Eulerschen Differentialgleichungen des Variationsproblems gebildet. Sie müssen mit den Gl.(6.4) übereinstimmen.

Minimalprinzip:

$$\pi = \iint F(x, y, u, u', u'', v', v'', w'', w''', w''') dx dy = \text{Extr.}$$

$$\pi = \pi_1^{(M)} + \pi_1^{(B)} + \pi_a \quad (7.45)$$

Eulersche Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} [F]_u = 0 &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u''} \\ [F]_v = 0 &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial v'} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial v''} \\ [F]_w = 0 &= \frac{\partial F}{\partial w} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial w''} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial F}{\partial w''} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial w''} \end{aligned} \right\} \quad (7.46)$$

Man beachte die Symmetrie der Operatoren in den Eulerschen Gleichungen.

Wie man erkennt, sind die beiden ersten Gleichungen nur auf $\pi_1^{(M)}$ und π_a und die letzte Gleichung auf $\pi_1^{(B)}$ und π_a anzuwenden.

Ausführung der Gleichung (7.46)

$$\begin{aligned} -\frac{2}{D} [F]_u &= +\frac{2}{D} \chi + 2u'' + \mu v'' + \mu \frac{w'}{a} + \mu v'' + \mu \frac{w'}{a} + \frac{1-\mu}{2} 2(u'' + v'') = 0 \\ u'' + \frac{1-\mu}{2} u'' + \frac{1+\mu}{2} v'' + \mu \frac{w'}{a} &= -\frac{\chi}{D} \end{aligned} \quad (7.47a)$$

Dies ist die 1. Differentialgleichung, die das Gleichgewicht in x - Richtung beschreibt.

Entsprechend ergeben sich die beiden anderen Gleichungen

$$\frac{1+\mu}{2} u'^+ + v'^+ + \frac{1-\mu}{2} v'^- + \frac{w'^+}{a} = - \frac{Y}{D} \quad (7.47b)$$

$$\mu \frac{u'^+}{a} + \frac{w'^+}{a} + \frac{w'^-}{a^2} + k \alpha^2 \Delta \Delta w = - \frac{Z}{D} \quad (7.47c)$$

Diese Dgln. (7.47) sind identisch mit den Gleichungen (6.4).

Die Ableitung der Trefftz'schen Gleichungen durch direkte Variation des elastischen Potentials

Der Näherungsansatz lautet:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u_0 + \sum_{r=1}^n c_r U_r \\ \bar{v} &= v_0 + \sum_{r=1}^n c_r V_r \\ \bar{w} &= w_0 + \sum_{r=1}^n c_r W_r \end{aligned} \right\} (7.48)$$

Das Funktionentripel u_0, v_0, w_0 erfüllt die vollständigen Gleichungen (7.47). Jedes Tripel u_r, v_r, w_r erfüllt die homogenen Gleichungen (7.47).

Die Bedingungsgleichungen für die c_r lauten:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial c_s} = 0 \quad ; \quad s = 1, 2, \dots, r, \dots, n \quad (7.49)$$

Die Differentiationen werden für die Anteile von $\bar{\Pi}_i$ getrennt durchgeführt.

Einsetzen des Ansatzes (7.48) in den Membrananteil $\bar{\Pi}_i^{(M)}$, Gl.(7.42) und partielles Differenzieren nach c_s :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}_i^{(M)}}{\partial c_s} &= \frac{D}{2} \iint (F) \left[(\bar{u}' + \mu \bar{v}' + \mu \frac{\bar{w}'}{a}) \cdot u'_s + \bar{u}' (u'_s + \mu v'_s + \mu \frac{w'_s}{a}) + \right. \\ &\quad \left. + (\bar{v}' + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}'}{a}) (v'_s + \frac{w'_s}{a}) + (\bar{v}' - \frac{\bar{w}'}{a}) (v'_s + \mu u'_s + \frac{w'_s}{a}) + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}' + \bar{v}') (u'_s + v'_s) \right] dx dy \quad (7.50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D \bar{\Pi}_i^{(M)}}{\partial c_s} &= D \iint (F) \left[(\bar{u}' + \mu \bar{v}' + \mu \frac{\bar{w}'}{a}) u'_s + (\bar{v}' + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}'}{a}) (v'_s + \frac{w'_s}{a}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}' + \bar{v}') (u'_s + v'_s) \right] dx dy \quad (7.51) \end{aligned}$$

Durch Teilintegration in x- und y-Richtung werden nicht abgeleitete Funktionen u_s und v_s gewonnen.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\pi}_i^{(M)}}{\partial c_s} &= D \int_Y \left[(\bar{u}' + \mu \bar{v}' + \mu \frac{\bar{w}'}{\alpha}) u_s \right]_{x=0}^{x=L} dy + D \int_X \left[(\bar{v}' + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}'}{\alpha}) v_s \right]_{y=-a}^{y=a} dx + \\
 &+ D \int_Y \left[\frac{1-\mu}{2} (\bar{u}'' + \bar{v}'') v_s \right]_{x=0}^{x=L} dy + D \int_X \left[\frac{1-\mu}{2} (\bar{u}'' + \bar{v}'') u_s \right]_{y=-a}^{y=a} dx - \\
 &- D \int \int (F) \left[\bar{u}'' + \mu \bar{v}'' + \mu \frac{\bar{w}'}{\alpha} + \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}'' + \bar{v}'') \right] u_s dx dy - \\
 &- D \int \int (F) \left[\bar{v}'' + \mu \bar{u}'' + \frac{\bar{w}'}{\alpha} + \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}'' + \bar{v}'') \right] v_s dx dy + \\
 &+ D \int \int (F) \left[(\bar{v}' + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}'}{\alpha}) \frac{w_s}{\alpha} \right] dx dy \quad (7.52)
 \end{aligned}$$

Einsetzen des Ansatzes (7.48) in den Biegeanteil $\bar{\pi}_i^{(B)}$ Gl.(7.43) und partielles Differenzieren nach c_s :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\pi}_i^{(B)}}{\partial c_s} &= \frac{K}{2} \int \int (F) \left[(\bar{w}'' + \mu \bar{w}''') w_s'' + \bar{w}'' (w_s'' + \mu w_s''') + \right. \\
 &+ (\bar{w}''' + \mu \bar{w}''') w_s''' + \bar{w}''' (w_s''' + \mu w_s''') + \\
 &\left. + 4(1-\mu) \bar{w}'' w_s'' \right] dx dy \quad (7.53)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\pi}_i^{(B)}}{\partial c_s} &= K \int \int (F) \left[(\bar{w}'' + \mu \bar{w}''') w_s'' + (\bar{w}''' + \mu \bar{w}''') w_s''' + \right. \\
 &\left. + 2(1-\mu) \bar{w}'' w_s'' \right] dx dy \quad (7.54)
 \end{aligned}$$

Mit zweimaliger Teilintegration erhält man in den Doppelintegralen die Veränderliche w_s :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\pi}_i^{(B)}}{\partial c_s} &= K \left\{ \int_Y \left[(\bar{w}'' + \mu \bar{w}''') w_s' \right]_{x=0}^{x=L} dy - \int_Y \left[(\bar{w}''' + \mu \bar{w}''') w_s \right]_{x=0}^{x=L} dy + \right. \\
 &+ \int_X \left[(\bar{w}''' + \mu \bar{w}''') w_s' \right]_{y=-a}^{y=a} dx - \int_X \left[(\bar{w}'''' + \mu \bar{w}''') w_s \right]_{y=-a}^{y=a} dx + \\
 &+ \int_X \left[(1-\mu) \bar{w}'' w_s' \right]_{y=-a}^{y=a} dx - \int_X \left[(1-\mu) \bar{w}'' w_s \right]_{x=0}^{x=L} dy + \\
 &+ \int_Y \left[(1-\mu) \bar{w}'' w_s' \right]_{x=0}^{x=L} dy - \int_Y \left[(1-\mu) \bar{w}'' w_s \right]_{y=-a}^{y=a} dx + \\
 &\left. + \int \int (F) \left[\bar{w}'''' + 2\mu \bar{w}'''' + \bar{w}'''' + 2(1-\mu) \bar{w}'''' \right] w_s dx dy \right\} \quad (7.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \bar{\pi}_i^{(B)}}{\partial c_s} &= K \int_Y [(\bar{w}'' + \mu \bar{w}''') w_s']_{x=0}^{x=L} dy - K \int_Y [(\bar{w}''' + \bar{w}''') w_s]_{x=0}^{x=L} dy + \\
 &+ K \int_x [(\bar{w}'' + \mu \bar{w}''') w_s']_{y=\alpha \varphi_0}^{y=\alpha \varphi_0} dx - K \int_x [(\bar{w}'' + \bar{w}''') w_s]_{y=\alpha \varphi_0}^{y=\alpha \varphi_0} dx + \\
 &+ K \int_x [(1-\mu) \bar{w}'' w_s']_{y=\alpha \varphi_0}^{y=\alpha \varphi_0} dx + K \int_Y [(1-\mu) \bar{w}'' w_s']_{x=0}^{x=L} dy + \\
 &+ K \int_Y \Delta \Delta \bar{w} \cdot w_s \cdot dx dy \tag{F}
 \end{aligned} \tag{7.56}$$

Einsetzen des Ansatzes (7.48) in das äußere Potential $\bar{\pi}_a$ und partielles Differenzieren nach c_s ergibt:

$$\frac{\partial \bar{\pi}_a}{\partial c_s} = - \int_Y (X u_s + Y v_s - Z w_s) dx dy \tag{F} \tag{7.57}$$

Man erkennt, daß in der Summe $\frac{\partial \bar{\pi}_i^{(M)}}{\partial c_s} + \frac{\partial \bar{\pi}_i^{(B)}}{\partial c_s} + \frac{\partial \bar{\pi}_a}{\partial c_s}$,

siehe Gleichung (7.52), (7.56) und (7.57), die mit u_s, v_s, w_s multiplizierten Klammerausdrücke gerade die 1., 2. und 3. Differentialgleichung des Systems (7.47) sind. Mit den Bedingungen an die Ansatzfunktionen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ werden diese Differentialgleichungen identisch erfüllt, so daß die Doppelintegrale verschwinden.

$$\begin{aligned}
 \int_Y \left\{ \underbrace{\left[\bar{u}'' + \frac{1-\mu}{2} \bar{u}'' + \frac{1+\mu}{2} \bar{v}'' + \frac{\mu}{a} \bar{w}'' + \frac{1}{D} X \right]}_{=0} u_s + \right. \\
 \left. + \underbrace{\left[\frac{1+\mu}{2} \bar{u}'' + \bar{v}'' + \frac{1-\mu}{2} \bar{v}'' + \frac{\bar{w}''}{a} + \frac{1}{D} Y \right]}_{=0} v_s - \right. \\
 \left. - \underbrace{\left[\mu \bar{u}'' + \bar{v}'' + \frac{\bar{w}''}{a} + k a^2 (\Delta \Delta \bar{w}) + \frac{1}{D} Z \right]}_{=0} w_s \right\} dx dy = 0 \tag{7.58}
 \end{aligned}$$

Sämtliche Randintegrale sind ungleich null und damit Anteile der Trefftz'schen Gleichungen.

Die Anteile $\Delta \bar{\pi}_a$ bei Vorhandensein aller Randschnittgrößen

Da die Ansatzfunktionen die Randbedingungen nicht erfüllen, entstehen aus den Lagerreaktionen folgende Zusätze zu $\bar{\pi}_a$.

$$\Delta \bar{\pi}_a = - \int_{x=0}^{x=L} [\bar{n}_\varphi \bar{v} + \bar{n}_{\varphi x} \bar{u} + \bar{m}_\varphi \bar{w}' + \bar{m}_{\varphi x} \bar{w}'' - \bar{q}_\varphi \bar{w}]_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} dx - \int_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} [\bar{n}_x \bar{u} + \bar{n}_{x\varphi} \bar{v} + \bar{m}_x \bar{w}' + \bar{m}_{x\varphi} \bar{w}'' - \bar{q}_x \bar{w}]_{x=0}^{x=L} dy \quad (7.59)$$

Führt man in Gleichung (7.59) das Elastizitätsgesetz Gleichung (7.38) ein und differenziert nach c_s , erhält man die in der Tabelle S. 195 in den Spalten 2 und 3 stehenden Terme. In der Spalte 4 sind sie nochmals allgemein dargestellt.

Für die erste Zeile in der Tabelle S. 195 ergibt sich z.B.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_s} \left\{ - \int_x [\bar{n}_\varphi \bar{v}]_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} dx \right\} &= \frac{\partial}{\partial c_s} \left\{ - \int_x [D(\bar{v}' + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{a}) \bar{v}]_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} dx \right\} \\ &= -D \int_x [(\bar{v}' + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{a}) v_s]_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} dx - \\ &\quad -D \int_x [(v_s' + \mu u_s' + \frac{w_s}{a}) \bar{v}]_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} dx \end{aligned} \quad (7.60)$$

Bei allseitiger Einspannung sind alle Terme bis auf $\bar{m}_{\varphi x} \cdot \bar{w}''$ und $\bar{m}_{x\varphi} \bar{w}''$ zu berücksichtigen, da $m_{\varphi x}$ und $m_{x\varphi}$ an den Rändern identisch null sind.

Die Anteile $\Delta \bar{\pi}_a$ bei fester Lagerung an den Kämpfern und gelenkiger und verschieblicher Lagerung an den Bindern.

$$\Delta \bar{\pi}_{a_1} = - \int_{x=0}^{x=L} [\bar{n}_\varphi \bar{v} + \bar{n}_{\varphi x} \bar{u} + \bar{m}_\varphi \bar{w}' - \bar{q}_\varphi \bar{w}]_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} dx - \int_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} [\bar{n}_{x\varphi} \bar{v} + \bar{m}_{x\varphi} \bar{w}' - \bar{q}_x \bar{w}]_{x=0}^{x=L} dy \quad (7.61)$$

Die Anteile $\Delta \bar{\pi}_i$ bei allgemeiner elastischer Randlagerung

Durch Randglieder oder Durchlaufwirkung entstehen elastische Randlagerungen. Die elastischen Nachgiebigkeiten werden durch

Federzahlen ε ausgedrückt. Die Verformungsenergie in den Federn vergrößert das innere Potential $\bar{\pi}_i$.

Die Federzahlen werden durch folgende Gleichungen festgelegt:

An den Kämpferrändern $\varphi = a \cdot \varphi_0$ und $\varphi = -a \cdot \varphi_0$:

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon} &= \varepsilon_{n_{\varphi}} \cdot n_{\varphi} \\ u_{\varepsilon} &= \varepsilon_{n_{\varphi x}} \cdot n_{\varphi x} \\ w_{\varepsilon}^+ &= \varepsilon_{m_{\varphi}} \cdot m_{\varphi} \\ w_{\varepsilon}' &= \varepsilon_{m_{\varphi x}} \cdot m_{\varphi x} \\ w_{\varepsilon} &= -\varepsilon_{q_{\varphi}} \cdot q_{\varphi} \end{aligned} \quad (7.62)$$

An den Binderrändern $x = L$ und $x = 0$:

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon} &= \varepsilon_{n_x} \cdot n_x \\ v_{\varepsilon} &= \varepsilon_{n_{x\varphi}} \cdot n_{x\varphi} \\ w_{\varepsilon}' &= \varepsilon_{m_x} \cdot m_x \\ w_{\varepsilon}^+ &= \varepsilon_{m_{x\varphi}} \cdot m_{x\varphi} \\ w_{\varepsilon} &= -\varepsilon_{q_x} \cdot q_x \end{aligned} \quad (7.63)$$

Bei starrer Lagerung sind die Federzahlen null. Bei freiem Rand entfallen die entsprechenden Anteile in $\Delta \bar{\pi}_i$ von vorneherein und außerdem die Anteile in $\Delta \bar{\pi}_a$.

Gemäß den Gleichungen (7.35) und (7.36) ergibt sich $\Delta \bar{\pi}_i$ zu:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\pi}_i &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} [\bar{n}_{\varphi} \cdot \bar{v}_{\varepsilon} + \bar{n}_{\varphi x} \cdot \bar{u}_{\varepsilon} + \bar{m}_{\varphi} \bar{w}_{\varepsilon}^+ + \bar{m}_{\varphi x} \bar{w}_{\varepsilon}' - \bar{q}_{\varphi} \bar{w}_{\varepsilon}]_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=a \cdot \varphi_0} [\bar{n}_x \bar{u}_{\varepsilon} + \bar{n}_{x\varphi} \bar{v}_{\varepsilon} + \bar{m}_x \bar{w}_{\varepsilon}' + \bar{m}_{x\varphi} \bar{w}_{\varepsilon}^+ - \bar{q}_x \bar{w}_{\varepsilon}]_{x=0}^{x=L} dy \end{aligned} \quad (7.64)$$

Einsetzen der Definitionsgleichungen (7.63) ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\pi}_i &= \frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} \left[\varepsilon_{n\varphi} \bar{n}_\varphi^2 + \varepsilon_{n\varphi x} \bar{n}_{\varphi x}^2 + \varepsilon_{m\varphi} \bar{m}_\varphi^2 + \varepsilon_{m\varphi x} \bar{m}_{\varphi x}^2 + \varepsilon_{q\varphi} \bar{q}_\varphi^2 \right]_{\gamma=-\alpha \cdot \varphi_0}^{\gamma=\alpha \cdot \varphi_0} dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\gamma=-\alpha \cdot \varphi_0}^{\gamma=\alpha \cdot \varphi_0} \left[\varepsilon_{n_x} \bar{n}_x^2 + \varepsilon_{n_{x\varphi}} \bar{n}_{x\varphi}^2 + \varepsilon_{m_x} \bar{m}_x^2 + \varepsilon_{m_{x\varphi}} \bar{m}_{x\varphi}^2 + \varepsilon \bar{q}_x^2 \right]_{x=0}^{x=L} d\gamma \end{aligned} \quad (7.65)$$

Nach Einführung des Elastizitätsgesetzes Gleichung (7.38) und des Trefftz'schen Ansatzes Gleichung (7.48) wird

$$\frac{\partial \Delta \bar{\pi}_i}{\partial c_s}$$

gebildet. Die einzelnen Terme sind in Spalte 4 der Tabelle S. 195 zusammengestellt.

Für den Ausdruck 1. Zeile, 4. Spalte ergibt sich z.B.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_s} \left(\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} \left[\varepsilon_{n\varphi} \cdot \bar{n}_\varphi^2 \right]_{\gamma=-\alpha \cdot \varphi_0}^{\gamma=\alpha \cdot \varphi_0} dx \right) &= \frac{\partial}{\partial c_s} \left(\frac{1}{2} \int_{x=0}^{x=L} \left[\varepsilon_{n\varphi} (\bar{v}^+ + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{\alpha})^2 \right]_{\gamma=-\alpha \cdot \varphi_0}^{\gamma=\alpha \cdot \varphi_0} dx \right) \\ &= \int_{x=0}^{x=L} \varepsilon_{n\varphi} (\bar{v}^+ + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{\alpha}) (v_s^+ + \mu u_s' + \frac{w_s}{\alpha}) dx \end{aligned} \quad (7.66)$$

Es ist nicht sinnvoll, mit den reziproken Federzahlen $\frac{1}{\varepsilon}$, den Federkonstanten $c = \frac{1}{\varepsilon}$ zu arbeiten. Zunächst sind in diesem Fall die Randterme viel einfacher, weil sofort nur die Randdeformationen erscheinen.

$$\text{z. B.: } c_v \cdot \bar{v} = \bar{n}_\varphi; \quad \frac{1}{2} \bar{n}_\varphi \cdot \bar{v} = \frac{1}{2} c_v \cdot \bar{v}^2; \quad \frac{\partial}{\partial c_s} \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{1}{2} c_v \cdot \bar{v}^2 \right]_{\gamma=-\alpha \cdot \varphi_0}^{\gamma=\alpha \cdot \varphi_0} dx = c_v \int_{x=0}^{x=L} \left[\bar{v} \cdot v_s \right]_{\gamma=-\alpha \cdot \varphi_0}^{\gamma=\alpha \cdot \varphi_0} dx$$

Bei starrer Lagerung sind die Federkonstanten jedoch unendlich groß, so daß diese Darstellung versagt.

7.3 Die Herleitung der Trefftzschen Gleichungen für schwach gekrümmte Kreiszylinderschalen mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte

Entsprechend zu den Betrachtungen am Balken und an der Platte (Kapitel 3 und 4) läßt sich auch hier wieder eine einfachere und damit leichter überschaubare Ableitung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte erzielen. Das Prinzip lautet für die Kreis-zylinderschale mit homogenen Randbedingungen:

$$\delta A = 0 = \iint_{(F)} \left\{ \varepsilon_{\varphi} \delta n_{\varphi} + \varepsilon_x \delta n_x + \gamma_{x\varphi} \delta n_{x\varphi} + \varepsilon_x \delta m_x + \varepsilon_{\varphi} \delta m_{\varphi} + 2 \varepsilon_{x\varphi} \delta m_{x\varphi} \right\} dx dy \quad (7.67)$$

Das Prinzip besagt: Verändert man die Schnittgrößen eines im Gleichgewicht stehenden Systems um virtuelle Beträge δn , δm , so ist die mit den wirklichen Verformungen entstehende virtuelle Arbeit null. Die eingepprägten Kräfte werden nicht variiert. Die Energieaussage beinhaltet die Verträglichkeitsbedingungen der Verzerrungen. Mit den Gleichungen (7.40) und (7.41) sowie dem Elastizitätsgesetz Gleichung (7.38) erhält man für die Näherungsfunktion \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} :

$$\begin{aligned} \delta \bar{A} = 0 = & \iint_{(F)} \left\{ (\bar{v}' + \frac{\bar{w}}{a}) \sigma (\bar{v}' + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{a}) + \bar{u}' \sigma (\bar{u}' + \mu \bar{v}' + \frac{\mu}{a} \bar{w}) + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}'' + \bar{v}') \sigma (\bar{u}'' + \bar{v}') \right\} dx dy + \\ & + K \iint_{(F)} \left\{ \bar{w}'' \sigma (\bar{w}'' + \mu \bar{w}''') + \bar{w}''' \sigma (\bar{w}''' + \mu \bar{w}''') + \right. \\ & \left. + 2(1-\mu) \bar{w}'' \sigma \bar{w}''' \right\} dx dy \end{aligned} \quad (7.68)$$

Gemäß dem Trefftzschen Ansatz Gleichung (7.48) werden die variierten Funktionen definiert:

$$\delta \bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial c_s} c_s; \quad \delta \bar{v} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial c_s} c_s; \quad \delta \bar{w} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial c_s} c_s \quad (7.69)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichungen in $\delta \bar{A}$ erhält man die s-te Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{A} = 0 = & c_s D \int \int (F) \left\{ (\bar{v}^+ + \frac{\bar{w}}{a})(v_s^+ + \mu u_s' + \frac{w_s}{a}) + \right. \\
 & + \bar{u}'(u_s' + \mu v_s^+ + \frac{\mu}{a} w_s) + \\
 & \left. + \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}^+ + \bar{v}') (u_s^+ + v_s') \right\} dx dy + \\
 & + c_s K \int \int (F) \left\{ \bar{w}^* (w_s'' + \mu w_s^{++}) + \bar{w}^{++} (w_s^{++} + \mu w_s'') + \right. \\
 & \left. + (1-\mu)(\bar{w}'^+ w_s'^+ + \bar{w}^{++} w_s'^+) \right\} dx dy
 \end{aligned} \tag{7.70}$$

Wegen der Willkür der c_s muß die Summe der Doppelintegrale null werden. Durch Teilintegration werden die Funktionen u_s, v_s, w_s differenziert, so daß das homogene Dgl. - System (7.47 a, b, c) in den Verschiebungen u_s, v_s, w_s entsteht.

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{A} = 0 = & D \int_{x=0}^{x=L} \left[\bar{v}(v_s^+ + \mu u_s' + \frac{w_s}{a}) \right]_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} dx + D \int_{x=0}^{x=L} \left[\bar{u}(u_s' + \mu v_s^+ + \mu \frac{w_s}{a}) \right]_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} dy + \\
 & + D \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{1-\mu}{2} \bar{u}(u_s^+ + v_s') \right]_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} dx + D \int_{x=0}^{x=L} \left[\frac{1-\mu}{2} \bar{v}(u_s^+ + v_s') \right]_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} dy - \\
 & - D \int \int (F) \left[\bar{u}(u_s'' + \mu v_s'^+ + \mu \frac{w_s'}{a} + \frac{1-\mu}{2} (u_s^{++} + v_s'^+)) \right] dx dy - \\
 & - D \int \int (F) \left[\bar{v}(v_s^{++} + \mu u_s'^+ + \frac{w_s^+}{a} + \frac{1-\mu}{2} (u_s'^+ + v_s'')) \right] dx dy + \\
 & + D \int \int (F) \left[\bar{w}(\mu \frac{u_s'}{a} + \frac{v_s^+}{a} + \frac{w_s}{a^2}) \right] dx dy + \\
 & + K \int_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} \left[\bar{w}'(w_s'' + \mu w_s^{++}) \right]_{x=0}^{x=L} dy - K \int_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} \left[\bar{w}(w_s'' + \mu w_s^{++}) \right]_{x=0}^{x=L} dx + \\
 & + K \int_{x=0}^{x=L} \left[\bar{w}^+(w_s^{++} + \mu w_s'') \right]_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} dx - K \int_{x=0}^{x=L} \left[\bar{w}(w_s^{++} + \mu w_s'') \right]_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} dx + \\
 & + K \int_{x=0}^{x=L} (1-\mu) \left[\bar{w}' w_s'^+ \right]_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} dx - K \int_{x=0}^{x=L} (1-\mu) \left[\bar{w} w_s'^+ \right]_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} dx + \\
 & + K \int_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} (1-\mu) \left[\bar{w}' w_s'^+ \right]_{x=0}^{x=L} dy - K \int_{y=-a \cdot \eta_0}^{y=a \cdot \eta_0} (1-\mu) \left[\bar{w} w_s'^+ \right]_{x=0}^{x=L} dx + \\
 & + K \int \int (F) \left[\bar{w}(w_s''' + 2\mu w_s''^{++} + w_s^{++++} + 2(1-\mu) w_s'^{++}) \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{7.71}$$

Die eckigen Klammerausdrücke in den Doppelintegralen bilden die homogenen Differentialgleichungen (7.47). Sie werden nach Voraussetzung von den u_s, v_s, w_s erfüllt.

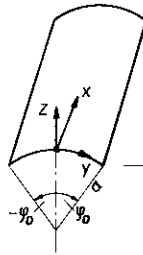
Damit verbleiben die Randintegrale, die gleich den im Abschnitt 7.2 abgeleiteten Termen der s-ten Trefftzschens Gleichung für die allseitig eingespannte Tonnenschale zusätzlich der Ausdrücke für die Drillmomente sind. Es sind die Glieder der 3. Spalte der Tabelle S.195.

Zusammenstellung der Terme der Trefftzchen Gleichungen für die kreiszylindrische Tonnenschale mit allgemeiner elastischer Lagerung an den Rändern

aus $\bar{\pi}_i$	Randterme aus $\Delta \bar{\pi}_a$			Anteile aus $\Delta \bar{\pi}_i$ (allgem. elast. Lagerung an allen Rändern)
1	2	3	(2+3)	4
$+D \int_x (\bar{v}^+ + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{a}) v_s dx$	$-D \int_x (\bar{v}^+ + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{a}) v_s dx$	$-D \int_x (v_s^+ + \mu u_s' + \frac{w_s}{a}) \bar{v} dx$	$-\frac{\partial}{\partial c_s} \int_x n_{\varphi} v dx$	$+D^2 \int_x \epsilon_{n\varphi} (\bar{v}^+ + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{a}) (v_s^+ + \mu u_s' + \frac{w_s}{a}) dx$
$+D \int_x \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}^+ + \bar{v}') u_s dx$	$-D \int_x \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}^+ + \bar{v}') u_s dx$	$-D \int_x \frac{1-\mu}{2} (u_s^+ + v_s') \bar{u} dx$	$-\frac{\partial}{\partial c_s} \int_x n_{x\varphi} u dx$	$+D^2 \int_x \epsilon_{n_{x\varphi}} \frac{(1-\mu)^2}{4} (\bar{u}^+ + \bar{v}') (u_s^+ + v_s') dx$
$+K \int_x (\bar{w}^{++} + \mu \bar{w}'') w_s^+ dx$	$-K \int_x (\bar{w}^{++} + \mu \bar{w}'') w_s^+ dx$	$-K \int_x (w_s^{++} + \mu w_s'') \bar{w}^+ dx$	$-\frac{\partial}{\partial c_s} \int_x m_{\varphi} w^+ dx$	$+K^2 \int_x \epsilon_{m_{\varphi}} (\bar{w}^{++} + \mu \bar{w}'') (w_s^{++} + \mu w_s'') dx$
$-K \int_x (\bar{w}^{+++} + \bar{w}''') w_s dx$	$+K \int_x (\bar{w}^{+++} + \bar{w}''') w_s dx$	$+K \int_x (w_s^{+++} + w_s''') \bar{w} dx$	$+\frac{\partial}{\partial c_s} \int_x q_{\varphi} w dx$	$+K^2 \int_x \epsilon_{q_{\varphi}} (\bar{w}^{+++} + \bar{w}''') (w_s^{+++} + w_s''') dx$
$+K \int_x (1-\mu) \bar{w}^{++} w_s^+ dx$	$-K \int_x (1-\mu) \bar{w}^{++} w_s^+ dx$	$-K \int_x (1-\mu) w_s^{++} \bar{w}^+ dx$	$-\frac{\partial}{\partial c_s} \int_x m_{\varphi x} w^+ dx$	$+K^2 \int_x \epsilon_{m_{\varphi x}} (1-\mu)^2 \bar{w}^{++} w_s^+ dx$
$+D \int_y (\bar{u}' + \mu \bar{v}^+ + \frac{\mu}{a} \bar{w}) u_s dy$	$-D \int_y (\bar{u}' + \mu \bar{v}^+ + \frac{\mu}{a} \bar{w}) u_s dy$	$-D \int_y (u_s' + \mu v_s^+ + \frac{\mu}{a} w_s) \bar{u} dy$	$-\frac{\partial}{\partial c_s} \int_y n_x u dy$	$+D^2 \int_y \epsilon_{n_x} (\bar{u}' + \mu \bar{v}^+ + \frac{\mu}{a} \bar{w}) (u_s' + \mu v_s^+ + \frac{\mu}{a} w_s) dy$
$+D \int_y \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}^+ + \bar{v}') v_s dy$	$-D \int_y \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}^+ + \bar{v}') v_s dy$	$-D \int_y \frac{1-\mu}{2} (u_s^+ + v_s') \bar{v} dy$	$-\frac{\partial}{\partial c_s} \int_y n_{x\varphi} v dy$	$+D^2 \int_y \epsilon_{n_{x\varphi}} \frac{(1-\mu)^2}{4} (\bar{u}^+ + \bar{v}') (u_s^+ + v_s') dy$
$+K \int_y (\bar{w}'' + \mu \bar{w}^{++}) w_s^+ dy$	$-K \int_y (\bar{w}'' + \mu \bar{w}^{++}) w_s^+ dy$	$-K \int_y (w_s'' + \mu w_s^{++}) \bar{w}^+ dy$	$-\frac{\partial}{\partial c_s} \int_y m_x w^+ dy$	$+K^2 \int_y \epsilon_{m_x} (\bar{w}'' + \mu \bar{w}^{++}) (w_s'' + \mu w_s^{++}) dy$
$-K \int_y (\bar{w}''' + \bar{w}''') w_s dy$	$+K \int_y (\bar{w}''' + \bar{w}''') w_s dy$	$+K \int_y (w_s''' + w_s''') \bar{w} dy$	$+\frac{\partial}{\partial c_s} \int_y q_x w dy$	$+K^2 \int_y \epsilon_{q_x} (\bar{w}''' + \bar{w}''') (w_s''' + w_s''') dy$
$+K \int_y (1-\mu) \bar{w}^{++} w_s^+ dy$	$-K \int_y (1-\mu) \bar{w}^{++} w_s^+ dy$	$-K \int_y (1-\mu) w_s^{++} \bar{w}^+ dy$	$-\frac{\partial}{\partial c_s} \int_y m_{x\varphi} w^+ dy$	$+K^2 \int_y \epsilon_{m_{x\varphi}} (1-\mu)^2 \bar{w}^{++} w_s^+ dy$

Bezeichnung der Ableitungen:

$$\frac{\partial(\)}{\partial x} = (\)'; \quad \frac{\partial(\)}{\partial y} = \frac{1}{a} \frac{\partial(\)}{\partial \varphi} = (\)^+$$



Die Integrale über x sind an den Kämpfern, also bei $y = +a \cdot \varphi_0$ und $y = -a \cdot \varphi_0$ zu bilden, diejenigen in y-Richtung an den Bindern $x=L$ und $x=0$. Die exakte Schreibweise ist:

z.B.: 1. Zeile, 1. Spalte:

$$D \int_x (\bar{v}^+ + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{a}) v_s dx \equiv D \int_{x=0}^{x=L} \left[(\bar{v}^+ + \mu \bar{u}' + \frac{\bar{w}}{a}) v_s \right]_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=+a \cdot \varphi_0} dx$$

oder 7. Zeile, 1. Spalte:

$$D \int_y \frac{1-\mu}{2} (\bar{u}^+ + \bar{v}') v_s dy \equiv D \int_{y=-a \cdot \varphi_0}^{y=+a \cdot \varphi_0} \left[\frac{1-\mu}{2} (\bar{u}^+ + \bar{v}') v_s \right]_{x=0}^{x=L} dy$$

Bei allgemeiner elastischer Lagerung an allen Kämpfern- und Binderrändern wird die s-te Trefftzche Gleichung durch Addition aller Zeilen und Spalten der Tabelle gebildet. Dabei heben sich die Spalten 1 und 2 gegenseitig auf. Bei starrer Lagerung wird in der entsprechenden Zeile die Spalte 4 gestrichen. Ist eine Schnittgröße durch die Art der Lagerung null, so ist in der entsprechenden Zeile die 2., 3. und 4. Spalte zu streichen.

7.4. Die i-te Trefftzsche Gleichung für die allseitig eingespannte Kreiszyinderschale

Man geht wie bei der Platte, Kapitel 4.6 vor. Die Drillmomente sind am Rand identisch null. Daher entfallen in der Tabelle S.195 die Terme in der 5. und 10. Zeile, 2. und 3. Spalte. In allen anderen Zeilen ergänzen sich die Glieder der 1. und 2. Spalte zu null. Die Glieder der 4. Spalte sind alle null.

Damit ergibt sich für die s-te Gleichung aus der Tabelle S. 195 :

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial c_i} = 0 = -D \int_{x=0}^L [(v_i^* + \mu u_i^* + \frac{w_i}{a}) \bar{v}]_{-a\%}^{y=a\%} dx - D \frac{1-\mu}{2} \int_{x=0}^L [(u_i^* + v_i^*) \bar{u}]_{-a\%}^{y=a\%} dx -$$

1. Zeile, 3. Spalte

$$-D \int_{y=-a\%}^{a\%} [(u_i^* + \mu v_i^* + \frac{\mu}{a} w_i) \bar{u}]_0^{x=L} dy - D \frac{1-\mu}{2} \int_{y=-a\%}^{a\%} [(u_i^* + v_i^*) \bar{v}]_0^{x=L} dy -$$

6. Zeile, 3. Spalte

7. Zeile, 3. Spalte

$$-K \int_{x=0}^L [(w_i^{*+} + w_i^{*}) \bar{w}^*]_{-a\%}^{y=a\%} dx + K(1-\mu) \int_{x=0}^L [w_i^{*} \bar{w}^*]_{-a\%}^{y=a\%} dx -$$

3. Zeile, 3. Spalte

3. Zeile, 3. Spalte

$$-K \int_{y=-a\%}^{a\%} [(w_i^{*+} + w_i^{*}) \bar{w}'^*]_0^{x=L} dy + K(1-\mu) \int_{y=-a\%}^{a\%} [w_i^{*+} \bar{w}'^*]_0^{x=L} dy +$$

8. Zeile, 3. Spalte

8. Zeile, 3. Spalte

$$-K \oint_R \Delta w_i \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} ds + K(1-\mu) \oint_R \frac{\partial^2 w_i}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} ds$$

$$+ K \int_{x=0}^L \left[\frac{\partial(\Delta w_i)}{\partial y} \bar{w} \right]_{-a\%}^{y=a\%} dx + K \int_{y=-a\%}^{a\%} \left[\frac{\partial(\Delta w_i)}{\partial x} \bar{w} \right]_0^{x=L} dy +$$

4. Zeile, 3. Spalte

9. Zeile, 3. Spalte

$$+ K \oint_R \frac{\partial(\Delta w_i)}{\partial n} \bar{w} ds$$

$$+ K(1-\mu) \int_{x=0}^L [\bar{w}'^* \cdot w_i']_{-a\%}^{y=a\%} dx + K(1-\mu) \int_{y=-a\%}^{a\%} [\bar{w}^{*+} \cdot w_i^*]_0^{x=L} dy$$

5. Zeile, 1. Spalte

10. Zeile, 1. Spalte

$$+ K(1-\mu) \oint_R \frac{\partial w_i}{\partial s} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial s \partial n} ds$$

s ; n sind die Randkoordinaten. Wie bei der Platte lassen sich die mit $K(1-\mu)$ multiplizierten Umlaufintegrale zusammenfassen. Dann sieht man, daß sie identisch null sind.

$$K(1-\mu) \oint_R \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} + \frac{\partial w_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial s \partial n} \right) ds =$$

$$= K(1-\mu) \oint_R \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial w_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) ds = 0$$

Damit lautet die i -te Trefftzsche Gleichung für die allseitige Einspannung:

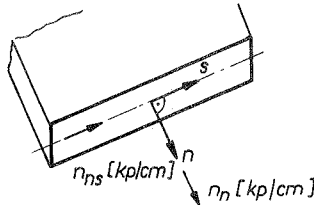
$$0 = -D \int_{x=0}^L \left[(v_i' + \mu u_i' + \frac{w_i}{\alpha}) \bar{v} + \frac{1-\mu}{2} (u_i' + v_i') \bar{u} \right]_{y=-\alpha}^{y=\alpha} dx -$$

$$-D \int_{y=-\alpha}^{\alpha} \left[(u_i + \mu v_i + \mu \frac{w_i}{\alpha}) \bar{u} + \frac{1-\mu}{2} (u_i' + v_i') \bar{v} \right]_{x=0}^{x=L} dy +$$

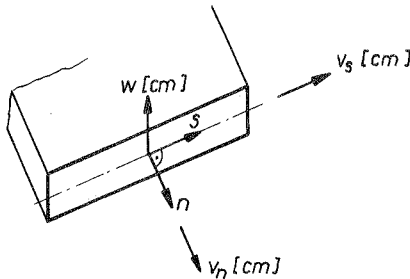
$$+ K \oint_R \left(\frac{\partial(\Delta w_i)}{\partial n} \bar{w} - \Delta w_i \frac{\partial \bar{w}}{\partial n} \right) ds$$

Der letzte Term ist identisch mit der Trefftzschen Gleichung für die allseitig eingespannte Platte.

Führt man für die Randschnittgrößen die Bezeichnung n_n und n_{ns} ein



und für die Randverschiebungen v_s und v_n ,



Zunächst wird das Verfahren von Picone - Kantorowitsch - Krylow für die Platten entwickelt. Hierbei sind Betrachtungen über die näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen für die Schnittgrößen, die Ableitungen nach beiden Veränderlichen enthalten, wichtig. Numerische Schwierigkeiten können sich bei den Matrizenmultiplikationen des Übertragungsverfahrens infolge kleiner Differenzen sehr großer Zahlen ergeben. Durch Zwischenschalten des Formänderungsgrößenverfahrens läßt sich dies vermeiden. Auch die verschiedenen Möglichkeiten der Berechnung transzendenter Matrizen werden im Hinblick auf die praktische Berechnung verfolgt.

Die Trefftzschen Gleichungen der Platte für alle möglichen Randbedingungen werden durch direkte Einführung des Näherungsansatzes ins Potential in Tabellenform zusammengestellt. Die Gleichungen für eingespannte, Navier - gelagerte und freie Ränder sind angegeben. Es ist hervorzuheben, daß die Trefftzschen Gleichungen auch gut zur Erfassung von Ausschnitten und unregelmäßigen Berandungen geeignet sind.

Für die kreiszylindrischen Tonnenschalen wird nach Erörterungen über die praktischen Rechenverfahren der Biegetheorie eine geschlossene Matrizendarstellung angegeben, die, ausgehend von den Wlassowschen Gleichungen, nach dem Kraftgrößenverfahren allgemeine Übergangsbedingungen an den Kämpferrändern gestattet.

Dann werden in Längsrichtung durchlaufende Schalen betrachtet, die mit trigonometrischen Funktionen in Längsrichtung nicht erfaßbar sind. Nach Picone - Kantorowitsch - Krylow werden in Längsrichtung Näherungspolynome für die Verschiebungen angesetzt, die die Randbedingungen erfüllen. Das gewöhnliche Dgl.- System wird in ein solches der 1. Ordnung transformiert. Besondere Schwierigkeiten ergeben sich bei den Übergangsbedingungen zu den Randträgern. Sie werden mit Galerkinprozeßen im Mittel erfüllt.

Schließlich werden auch die Trefftzschen Gleichungen in der für die Platte beschriebenen Weise für allgemeine homogene und inhomogene Randbedingungen der Kreiszylinderschalen in den Verschiebungsfunktionen hergeleitet und für wichtige Fälle besonders angegeben. In diesen Gleichungen ergeben sich als Biegeanteile dieselben Terme

8. Zusammenfassung

Mit der vorliegenden Arbeit werden zwei Ziele verfolgt.

Einmal sollten die direkten Variationsverfahren am Beispiel des einfachen Balkens sowohl mathematisch als auch von der statischen Anschauung her mit ihren Bedingungen und Möglichkeiten in dualer Betrachtungsweise dargestellt werden: Die Ritzsche und Galerkinsche Methode als äquivalentes Variationsproblem für die Dgl. und die Trefftzsche Methode als äquivalentes Variationsproblem für die Randbedingungen. Es zeigte sich die Überlegenheit der Trefftzschens Methode bei der Erfüllung der höheren Ableitungen. Die Trefftzschens Gleichungen sind als verallgemeinerte Elastizitätsgleichungen des Kraft - und Formänderungsgrößenverfahrens der Stabstatik auffaßbar. Durch die statische Deutung der Randterme, die Einführung des Trefftzschens Ansatzes in das Potential vor dem Variieren und eine Tabellenschreibweise der möglichen Terme der Trefftzschens Gleichungen sind diese für alle möglichen Randbedingungen übersichtlich und anschaulich sofort formulierbar. Auch mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte lassen sich die Trefftzschens Gleichungen gewinnen - wie analog die Galerkinschen Gleichungen unmittelbar aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen folgen. Die zweite Absicht war, die direkten Variationsverfahren für nicht exakt, z.B. in Reihenform lösbare Probleme der Flächentragwerke in möglichst geschlossenen Matrizenschreibweisen für die Automatenrechnung darzustellen. Als Beispiele wurden die Platten und Kreiszyklinderschalen gewählt.

Bei den zweidimensionalen Tragwerken ist die Reduktion der partiellen in gewöhnliche Dgln. durch Galerkinprozeße in einer Richtung nach Picone - Kantorowitsch - Krylow von großem praktischen Nutzen, da meist nur wenige Ansatzfunktionen erforderlich sind, um eine gewünschte Genauigkeit zu erzielen. Wichtig ist die Vollständigkeit der Ansatzfunktionen. Für einige Lagerungsarten werden vollständige Funktionensysteme in Form von Potenzreihen, die alle Randbedingungen erfüllen, entwickelt.

7.7 Die Ansätze für das Trefftzsche Verfahren und Hinweise für die Durchführung

Wie bei der Platte (Kapitel 4.7) eignen sich als Ansatzfunktionen u , v , w die Lösungen der homogenen Dgln., welche durch Produktansätze nach M. Levy mit trigonometrischen Funktionen in Längsrichtung der Schale zustande kommen. Unter Benutzung der für praktisches Rechnen aufbereiteten Formeln von Rabich [11]. Für die "quasivollständige Theorie" lassen sich die Ansatzfunktionen ohne große Zwischenrechnung angeben. Rabich setzt generell die Querkontraktion null.

Anstelle der Partikularintegrale u_0 , v_0 , w_0 werden im allgemeinen die Verschiebungen des Membranzustandes benutzt.

Mit den Ansätzen (Koordinatenursprung $x = 0$ in Schalenmitte)

$$u_{nv} = C_1 \cdot e^{m_r \varphi} \sin \frac{\pi n x}{L} \quad ; \quad v_{nv} = C_2 \cdot e^{m_r \varphi} \cos \frac{\pi n x}{L}$$

$$w_{nv} = C_3 \cdot e^{m_r \varphi} \cos \frac{\pi n x}{L} \quad ; \quad \xi = \frac{\pi n x}{L} = \frac{\lambda}{R} x$$

$$\lambda = \frac{\pi R}{L} n$$

R = Radius

L = Länge der Schale

d = Schalendicke

ergeben sich mit Einführung der Schalenparameter

$$\omega = \sqrt{\lambda \sqrt{\beta}} \quad ; \quad \beta = \frac{R}{100 \cdot d} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{\lambda}{\sqrt{\beta}}$$

sowie der Zahl $\alpha^4 = 30\,000$.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung:

$$m_r = -\alpha_k \pm i \cdot \mu_k \quad ; \quad \begin{array}{l} r = 1 \text{ bis } 4 \\ k = 1; 2 \end{array}$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\eta \pm \alpha)^2 + \alpha^2} + (\eta \pm \alpha)}$$

$$\mu_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{(\eta \pm \alpha)^2 + \alpha^2} - (\eta \pm \alpha)}$$

Zunächst wird das Verfahren von Picone - Kantorowitsch - Krylow für die Platten entwickelt. Hierbei sind Betrachtungen über die näherungsweise Erfüllung der Randbedingungen für die Schnittgrößen, die Ableitungen nach beiden Veränderlichen enthalten, wichtig. Numerische Schwierigkeiten können sich bei den Matrizenmultiplikationen des Übertragungsverfahrens infolge kleiner Differenzen sehr großer Zahlen ergeben. Durch Zwischenschalten des Formänderungsgrößenverfahrens läßt sich dies vermeiden. Auch die verschiedenen Möglichkeiten der Berechnung transzendenter Matrizen werden im Hinblick auf die praktische Berechnung verfolgt.

Die Trefftzschen Gleichungen der Platte für alle möglichen Randbedingungen werden durch direkte Einführung des Näherungsansatzes ins Potential in Tabellenform zusammengestellt. Die Gleichungen für eingespannte, Navier - gelagerte und freie Ränder sind angegeben. Es ist hervorzuheben, daß die Trefftzschen Gleichungen auch gut zur Erfassung von Ausschnitten und unregelmäßigen Berandungen geeignet sind.

Für die kreiszylindrischen Tonnenschalen wird nach Erörterungen über die praktischen Rechenverfahren der Biegetheorie eine geschlossene Matrizendarstellung angegeben, die, ausgehend von den Wlassowschen Gleichungen, nach dem Kraftgrößenverfahren allgemeine Übergangsbedingungen an den Kämpferrändern gestattet.

Dann werden in Längsrichtung durchlaufende Schalen betrachtet, die mit trigonometrischen Funktionen in Längsrichtung nicht erfaßbar sind. Nach Picone - Kantorowitsch - Krylow werden in Längsrichtung Näherungspolynome für die Verschiebungen angesetzt, die die Randbedingungen erfüllen. Das gewöhnliche Dgl.- System wird in ein solches der 1. Ordnung transformiert. Besondere Schwierigkeiten ergeben sich bei den Übergangsbedingungen zu den Randträgern. Sie werden mit Galerkinprozeßen im Mittel erfüllt.

Schließlich werden auch die Trefftzschen Gleichungen in der für die Platte beschriebenen Weise für allgemeine homogene und inhomogene Randbedingungen der Kreiszylinderschalen in den Verschiebungsfunktionen hergeleitet und für wichtige Fälle besonders angegeben. In diesen Gleichungen ergeben sich als Biegeanteile dieselben Terme

wie bei den Platten gleicher Randbedingungen. Hinzu kommen die Membrananteile. Es ist auch möglich, die Trefftzschen Gleichungen in einer Spannungs - und einer Verschiebungsfunktion abzuleiten. Abschließend werden Ansatzfunktionen für die Trefftzschen Gleichungen angegeben.