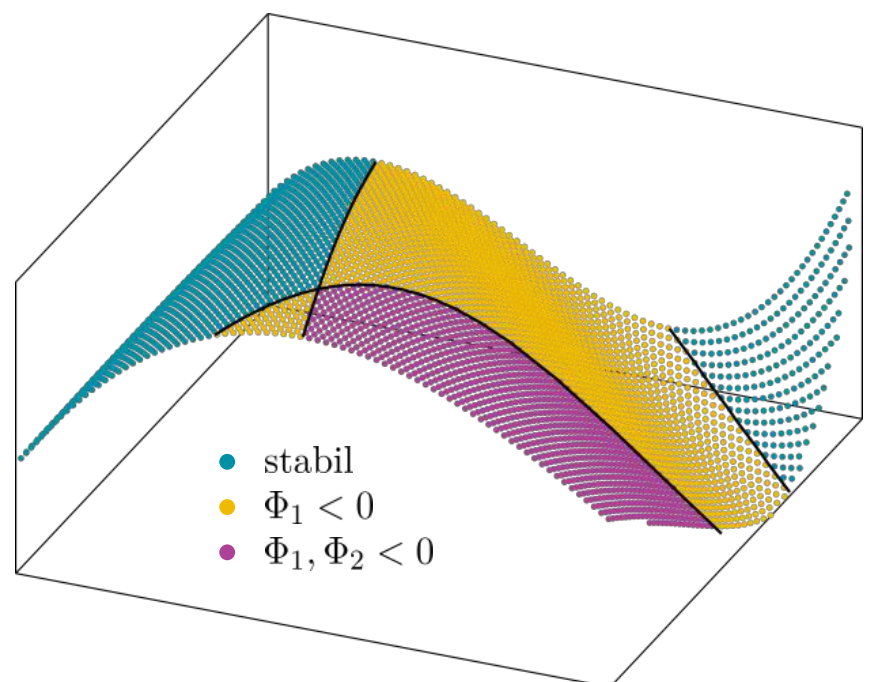
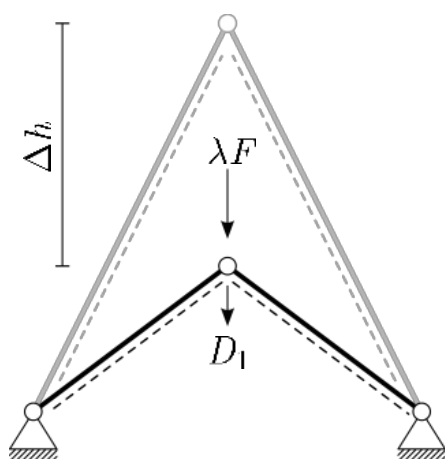


# Algorithmen zur nichtlinearen Stabilitätsanalyse dünnwandiger Strukturen

Steffen Roth





# Algorithmen zur nichtlinearen Stabilitätsanalyse dünnwandiger Strukturen

von

**Steffen Roth**

Bericht Nr. 71  
Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff  
2020



© Steffen Roth

*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123  
Fax: 0711 - 685 66130  
E-Mail: [sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de](mailto:sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de)  
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D 93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-067327-6



# Algorithmen zur nichtlinearen Stabilitätsanalyse dünnwandiger Strukturen

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Steffen Roth**

aus Bad Kissingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner, Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Juli 2020

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2020



## Kurzfassung

Die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit der Stabilität von Tragwerken reicht in der Geschichte weit zurück. Leonhard Euler befasste sich bereits im Jahr 1744 mit dem Stabilitätsversagen druckbelasteter Stäbe. Bis heute ist die Frage nach der Stabilität in vielen Bereichen, vom Bauwesen bis zur Luft- und Raumfahrt, relevant für die Bemessung und Konstruktion einzelner Bauteile sowie gesamter Tragstrukturen.

Die Analyse eines Tragwerks hinsichtlich seiner Stabilität kann dabei in drei Abschnitte untergliedert werden: erstens die Untersuchung des Systems vor dem Stabilitätsversagen, zweitens die Eigenschaften des Systems an einem kritischen Punkt sowie drittens die Untersuchung des Verhaltens im Nachbeulbereich.

Für eine geometrisch nichtlineare Analyse des Vor- und Nachbeulbereichs existiert eine Vielzahl inkrementell-iterativer Lösungsverfahren, die seit den 1970er Jahren entwickelt wurden. Sie ermöglichen die zuverlässige Berechnung nichtlinearer Gleichgewichtspfade einer Struktur, auch wenn diese in Last oder Verschiebung rückläufig sind. In den vergangenen Jahrzehnten wurden diese Methoden stetig weiterentwickelt und verbessert, etwa durch die Erweiterung auf mehrere Parameter. So lassen sich für Systeme mit mehreren Veränderlichen die resultierenden Gleichgewichtspfade zu Gleichgewichtsflächen erweitern. Mithilfe begleitender Maßnahmen kann zudem an jedem Gleichgewichtspunkt eine Aussage über die Stabilität des Systems getroffen werden.

Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf dem zweiten der oben genannten Punkte. Es werden Methoden präsentiert, die eine direkte Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten für Systeme ermöglichen, die durch eine von außen aufgebrachte Knotenverschiebung belastet werden. Hierfür wird die für Kraftlastfälle bereits verfügbare Methode der erweiterten Systeme, die in der Literatur meistens mit dem englischen Begriff *Extended Systems* bezeichnet wird, modifiziert und ergänzt. Für die direkte Berechnung von Durchschlagspunkten wird die Residuumsleichung für das Gleichgewicht um eine Stabilitätsbedingung erweitert. Diese ist ausschließlich an kritischen Punkten erfüllt und lässt sich aus dem Indifferenzkriterium nach Euler herleiten. Eine Nebenbedingung, die eine triviale Lösung vermeidet und die Anzahl der Gleichungen und die Anzahl der Unbekannten ausgleicht, ergibt sich aus der Normierung der Länge des Eigenvektors. Für die direkte Ermittlung von Verzweigungspunkten muss zusätzlich das Kriterium zur Unterscheidung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten für den Fall inhomogener Dirichlet-Randbedingungen neu hergeleitet werden. Nach einer konsistenten Linearisierung des nichtlinearen Gleichungssystems lässt sich die Lösung mittels inkrementell-iterativer Methoden ermitteln. Mit den präsentierten Methoden wird das Anfangsnachbeulverhalten für Systeme mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen numerisch analysiert, wodurch die bisherige Kategorisierung nach KOITER (1967) erweitert wird.

Zur Linearisierung des nichtlinearen Gleichungssystems ist die Ermittlung einer Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix in Richtung des Beulvektors erforderlich. In der

bisherigen Literatur wird die Ableitung mittels Differenzenquotienten angenähert. Diese Methoden benötigen eine geringe Rechenzeit, ihre Eigenschaften hängen jedoch von einem Parameter, der Größe des Differenzschritts, ab. Wird dieser zu groß oder zu klein gewählt, ist der resultierende Fehler zu groß und die iterative Berechnung konvergiert nur langsam oder gar nicht zur gesuchten Lösung. In dieser Arbeit werden erstmals Methoden zur Ermittlung totaler und partieller Ableitungen, die auf hyperkomplexen Zahlen basieren, mit der Methode der Extended Systems kombiniert. Diese Methoden sind unabhängig von der Parameterwahl und ermöglichen eine exakte Berechnung erster und zweiter Ableitungen. In der vorliegenden Arbeit werden die beschriebenen Methoden auf die Ermittlung der Richtungsableitung übertragen.

Bei der Untersuchung der Tragfähigkeit einer stabilitätsgefährdeten Struktur haben Imperfektionen einen großen Einfluss auf die Traglast. Bereits kleinste Abweichungen in der Geometrie eines Tragwerks oder Eigenspannungen im Material können, besonders bei schlanken Tragwerken, zu einer deutlichen Abminderung der Traglast führen. Um den Einfluss geometrischer Imperfektionen genauer untersuchen zu können, werden in dieser Arbeit zwei Methoden präsentiert, die sich in ihrem Umgang mit Imperfektionen grundlegend voneinander unterscheiden. Bei der ersten Methode ist die Imperfektionsform eine gegebene Größe. Durch eine effiziente, sich wiederholende Berechnung kritischer Punkte für eine Vielzahl an Imperfektionsformen oder -amplituden lassen sich damit kritische Pfade ermitteln. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit durch eine geeignete Wahl der Prädiktoren für die unterschiedlichen Imperfektionsformen bzw. über eine zusätzliche Erweiterung der Gleichungssysteme zur direkten Berechnung kritischer Punkte um eine Zusatzgleichung zur Pfadverfolgung. Bei der zweiten Methode werden die Imperfektionen als Unbekannte in das Gleichungssystem eingebracht. Durch eine zusätzliche Bedingung, die sich aus der Variation des Potentials nach den Imperfektionen ergibt, sowie das Einbinden der Nebenbedingung über eine Straffunktion lassen sich mit dieser Methode ungünstigste Imperfektionsformen finden. Diese Methode ist eine Weiterentwicklung der von DEML UND WUNDERLICH (1997) vorgeschlagenen Vorgehensweise.

Abschließend werden die hier vorgestellten Methoden und Algorithmen an einer Auswahl an numerischen Experimenten demonstriert. Anhand der Beispiele wird u. a. gezeigt, dass die Richtungsableitung für eine Vielzahl an Elementformulierungen effizient ermittelt werden kann. Hierbei kommen vom einfachen ebenen Stabelement über isogeometrische Schalenelemente bis hin zu Volumenschalenelementen, die durch eine Erweiterung des Verzerrungsansatzes künstliche Versteifungseffekte reduzieren, zum Einsatz. Zudem wird die Anwendbarkeit der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Methoden auf nichttriviale Systeme im Rahmen der Finite-Elemente-Methode mit vielen Freiheitsgraden nachgewiesen.

## Abstract

The scientific debate on the stability of structures goes back a long way in history. Leonhard Euler dealt with the stability failure of pressure-loaded bars as early as 1744. To this day, the question of stability is relevant for the design and construction of individual components and entire supporting structures in many areas of engineering, from civil engineering to aerospace.

The analysis of a structure regarding its stability can be divided into three sections: first, the investigation of the system prior to stability failure, second, the system properties directly at a critical point and third, the investigation of the postbuckling behavior.

For a geometrically non-linear analysis of the pre- and postbuckling behavior, a variety of incremental-iterative solution methods exist, which have been developed since the 1970s. They allow the reliable calculation of non-linear equilibrium paths with snap-backs and snap-throughs in load and displacement. In the past decades, these methods have been continuously developed and improved, for example by extending them to multiple parameters. Thus, the resulting equilibrium areas can be determined for systems with several variables. Furthermore, conclusions can be drawn about the stability of the system at each equilibrium point with the help of accompanying measures.

The focus of the present thesis is laid on the second of the above-mentioned issues. Methods are presented that allow a direct calculation of limit and bifurcation points for systems loaded by an externally applied nodal displacement. For this purpose, the method of extended systems, which already exists for force load cases, is modified and supplemented. For the direct calculation of limit points, the residual equation for equilibrium is extended by a stability condition. This condition is only fulfilled at critical points and can be derived from the indifference criterion according to Euler. A constraint that avoids a trivial solution and balances the number of equations and the number of unknowns is obtained by normalizing the length of the eigenvector. For the direct determination of bifurcation points, the criterion for distinguishing limit and bifurcation points for the case of non-homogeneous Dirichlet boundary conditions must also be derived accordingly. After consistent linearization of the non-linear system of equations, the solution can be determined by incremental-iterative procedures. With the presented methods the initial post buckling behaviour according to KOITER (1967) is analyzed numerically for systems including inhomogeneous Dirichlet boundary conditions, whereby the previously described categorization can be extended.

Due to the linearization of the non-linear system of equations, it is necessary to determine a directional derivative of the stiffness matrix into the direction of the buckling vector. In the existing literature, the derivation is approximated with difference quotients. These methods require only a short computing time, but depend on a parameter to be selected. If this parameter is chosen too large or too small, the resulting error is too large, respectively and the iterative calculation requires more iterations or diverges within a finite number of iterations. In this thesis, methods for determining total

and partial derivatives are combined with the method of extended systems based on hyper-complex numbers for the first time. These methods are independent of parameter choice and allow an exact calculation of first and second derivatives. Moreover, in the present thesis, the described methods are applied to the determination of directional derivatives.

When investigating the load-bearing capacity of a structure at risk of stability, imperfections have a major influence on the critical load. Even the smallest deviations in the geometry of a structure or residual stresses in the material can lead to a significant reduction in the load-bearing capacity, especially in the case of slender structures. In order to investigate the influence of geometric imperfections more precisely, two methods are presented in this thesis, which differ fundamentally in their handling of imperfections. In the first method, the shape of the imperfection is prescribed. By an efficient, repetitive calculation of critical points for a large number of imperfection shapes or amplitudes, critical paths, also called fold lines, can be determined. This is done in the present work by a suitable predictor choice for the different imperfection modes or by an additional extension of the systems of equations for the direct calculation of critical points by an additional equation for path tracing. In the second method, the imperfections are introduced as unknowns into the system of equations. By using an additional condition resulting from the variation of the potential energy with respect to the imperfections as well as by including the constraint via a barrier function, this method can be used to find unfavorable imperfection shapes.

Finally, a selection of the methods and algorithms presented in this thesis are demonstrated in numerical experiments. Among other things, the examples show that the directional derivative can be efficiently determined for a large number of element formulations, from simple truss elements to isogeometric mid-surface shell elements to solid shell elements, which reduce locking effects by an extension of the strain ansatz. In addition, the applicability of the methods developed in this thesis to non-trivial systems within the framework of FEM with many degrees of freedom is demonstrated.

## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart.

Ein ganz besonderer Dank gebührt meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff. Lieber Manfred, vielen Dank, dass du dich gemeinsam mit mir auf das Experiment eingelassen hast. Die vielen fachlichen Diskussionen mit dir haben regelmäßig neue spannende Fragen aufgeworfen und meine Forschungsarbeit immens bereichert. Auch der Einsatz für dein Institut und deine Mitarbeiter ist vorbildhaft und hat mich, besonders in den schwierigen Phasen immer aufs Neue motiviert. Daneben sorgst du mit deinem Humor und deinem weit über die Baustatik hinausreichendem Interesse für eine unvergleichbare Stimmung am Institut.

Des Weiteren bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Werner Wagner für das Interesse an meiner Arbeit, für die Übernahme des Mitberichtes sowie das schnelle Anfertigen des Gutachtens.

Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm bedanke ich mich für die fruchtbaren und erkenntnisreichen Diskussionen rund um mein Forschungsthema und darüber hinaus.

Ein besonderer Dank geht an alle meine ehemaligen Kolleg\*innen am Institut für Baustatik und Baudynamik. Ihr habt durch den fachlichen Austausch und die zahlreichen Diskussionen, aber auch durch die vielen erfreulichen Abende, zum Erfolg dieser Arbeit mit beigetragen. Besonders hervorheben möchte ich an dieser Stelle Dr.-Ing. Malte von Scheven, der mir und meinem PC rund um die Uhr aus der Patsche geholfen hat sowie Florian Geiger, der über Jahre das Büro mit mir teilte und somit mein erster Ansprechpartner bei allen wissenschaftlichen und privaten Fragen war.

Für die gewissenhafte Korrektur und die konstruktive Kritik an meiner schriftlichen Arbeit bedanke ich mich bei allen Kolleg\*innen und Freund\*innen, die mir dabei geholfen haben.

Zu guter Letzt bedanke ich mich bei all meinen Freunden, meiner Familie und meiner Freundin Florina von ganzem Herzen für all die Liebe und Unterstützung während meines Studiums und der Promotion.

Stuttgart, im Oktober 2020

Steffen Roth

*„Ich habe fertig.“*  
– Giovanni Trapattoni–





---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>xi</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>xv</b>
<b>Abkürzungen und Bezeichnungen</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Stand der Technik . . . . .	2
1.3 Zielsetzung . . . . .	5
1.4 Gliederung der Arbeit . . . . .	6
<b>2 Grundlagen der Kontinuumsmechanik</b>	<b>9</b>
2.1 Nichtlineare Festkörpermechanik . . . . .	9
2.1.1 Bewegung, Kinematik und Verzerrung . . . . .	10
2.1.2 Spannungsmaße und Konstitutivgleichungen . . . . .	11
2.1.3 Gleichgewicht . . . . .	13
2.1.4 Randbedingungen . . . . .	14
2.2 Elastostatisches Randwertproblem . . . . .	14
2.3 Lösungsverfahren . . . . .	16
2.3.1 Diskretisierung im Raum . . . . .	16
2.3.2 Linearisierung . . . . .	18
<b>3 Phänomene der geometrisch nichtlinearen Strukturmechanik</b>	<b>21</b>
3.1 Nichtlineare Effekte in der Strukturmechanik . . . . .	22
3.2 Statische Gleichgewichtspfade und Gleichgewichtsflächen . . . . .	24
3.3 Stabilität statischer Gleichgewichtszustände . . . . .	28
3.4 Kritische Punkte und kritische Pfade . . . . .	29
3.4.1 Durchschlagspunkte bei Kraftlastfällen . . . . .	30

3.4.2	Durchschlagspunkte bei Verschiebungslastfällen . . . . .	31
3.4.3	Verzweigungspunkte . . . . .	31
3.4.4	Kritische Pfade bei Mehrparametersystemen . . . . .	32
3.5	Nachbeulverhalten . . . . .	33
3.5.1	Kraftlastfälle . . . . .	34
3.5.2	Verschiebungslastfälle . . . . .	35
3.5.3	Mehrparametersysteme . . . . .	39
3.6	Imperfektionen . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Geometrisch nichtlineare Strukturanalyse</b>	<b>43</b>
4.1	Pfadverfolgungsmethoden . . . . .	44
4.1.1	Prädiktorschritt . . . . .	50
4.1.2	Konsistente Linearisierung . . . . .	51
4.1.3	Korrektoriteration . . . . .	52
4.1.4	Bogenlängenkontrolle für inhomogene Dirichlet-Randbedingungen	53
4.2	Auffinden kritischer Punkte . . . . .	53
4.3	Direkte Berechnung kritischer Punkte für Kraftlastfälle . . . . .	55
4.3.1	Unterscheidung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten für Kraftlastfälle . . . . .	56
4.3.2	Durchschlagspunkte . . . . .	58
4.3.3	Verzweigungspunkte . . . . .	60
4.4	Direkte Berechnung kritischer Punkte für Verschiebungslastfälle . . . . .	62
4.4.1	Durchschlagspunkte . . . . .	62
4.4.2	Verzweigungspunkte . . . . .	64
4.5	Wahl der Startwerte bei Extended Systems . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Geometrisch nichtlineare Imperfektionsanalyse</b>	<b>69</b>
5.1	Berechnung kritischer Pfade imperfekter Systeme . . . . .	70
5.1.1	Wiederberechnung kritischer Punkte an imperfekten Systemen . .	70
5.1.2	Automatisierte Berechnung kritischer Pfade . . . . .	72
5.2	Berechnung ungünstiger Imperfektionsformen . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Numerische Ableitungen</b>	<b>79</b>
6.1	Klassische Differenzenverfahren . . . . .	80
6.2	Ableiten mit der Complex-step-Methode . . . . .	84
6.3	Ableiten mit hyperdualen Zahlen . . . . .	87
6.4	Rechnen mit hyperkomplexen Zahlen . . . . .	89
6.5	Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix . . . . .	91
6.6	Automatisches Differenzieren . . . . .	94

<b>7 Numerische Experimente</b>	<b>99</b>
7.1 Berechnung kritischer Punkte . . . . .	99
7.2 Berechnung kritischer Pfade . . . . .	110
<b>8 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>113</b>
8.1 Zusammenfassung . . . . .	113
8.2 Ausblick . . . . .	115
<b>A Anhang</b>	<b>117</b>
A.1 Analyse eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe . . . . .	117
A.2 Symmetrische entfestigende Feder . . . . .	119
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>123</b>



---

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Kinematik eines Festkörpers $\mathcal{B}$ in der Referenz- und der Momentankonfiguration . . . . .	10
3.1	Übersicht über nichtlineare Effekte in der Strukturmechanik, vgl. WAGNER (2017) . . . . .	22
3.2	Modell des flachen, symmetrischen Dreigelenktragwerks (links) und der dazugehörige Gleichgewichtspfad (rechts) . . . . .	25
3.3	Modell des flachen, asymmetrischen Dreigelenktragwerks (links oben) und der dazugehörige Gleichgewichtspfad für die Freiheitsgrade $D_1$ und $D_2$ (rechts oben & links unten), räumliche Darstellung mit Projektionen (rechts unten) . . . . .	26
3.4	Modell des hohen, symmetrischen Dreigelenktragwerks (links) und die dazugehörige Gleichgewichtskurve (rechts) mit Primär- und Sekundärpfad	27
3.5	Modell eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe (links) und die dazugehörige Gleichgewichtsfläche (rechts) . . . . .	28
3.6	Stabilität eines Gleichgewichtszustand am Beispiel einer Kugel. Stabiler Gleichgewichtszustand (links), indifferenter Gleichgewichtszustand (mittig) und instabiler Gleichgewichtszustand (rechts) . . . . .	29
3.7	Durchschlagspunkte für Kraftlastfall am Beispiel eines Dreigelenktragwerks (qualitativ) . . . . .	30
3.8	Durchschlagspunkte für Verschiebungslastfall am Beispiel eines modifizierten Dreigelenktragwerks (qualitativ) . . . . .	31
3.9	Verzweigungspunkt am Beispiel eines Dreigelenktragwerks (qualitativ) . .	32
3.10	Modell eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe (links) und die dazugehörige Gleichgewichtsfläche (rechts) mit kritischen Pfaden . . . . .	33
3.11	Klassifikation kritischer Punkte für Kraftlastfälle, angelehnt an KOITER (1967) . . . . .	35

3.12	Stabilität des Nachbeulbereichs bei Durchschlagspunkt in Anlehnung an KOITER (1967) unter Verschiebungslast . . . . .	36
3.13	Stabiler symmetrischer Verzweigungspunkt in Anlehnung an KOITER (1967) unter Verschiebungslast . . . . .	37
3.14	Asymmetrischer Verzweigungspunkt in Anlehnung an KOITER (1967) unter Verschiebungslast . . . . .	37
3.15	Instabiler symmetrischer Verzweigungspunkt in Anlehnung an KOITER (1967) unter Verschiebungslast . . . . .	38
3.16	Modell eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe (links) und die dazugehörige Gleichgewichtsfläche mit Stabilitätseigenschaften (rechts) . . .	39
3.17	Auswirkungen geometrischer Imperfektionen für Durchschlagsprobleme am Beispiel eines modifizierten Dreigelenktragwerks . . . . .	40
3.18	Auswirkungen geometrischer Imperfektionen für Verzweigungsprobleme am Beispiel eines druckbelasteten Pendelstabs mit horizontaler Feder . .	41
4.1	Vergleich von Last- und Verschiebungskontrolle sowie deren Grenzen in Anlehnung an BISCHOFF U. A. (2016) . . . . .	47
4.2	Vergleich der Bogenlängenkontrollen nach Riks & Wempner (links) und Ramm (rechts) . . . . .	48
4.3	Flussdiagramm zur Berechnung kritischer Punkte bei inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen. . . . .	68
5.1	Exemplarische Darstellung eines Gleichgewichtspfads bei steigender Imperfektionsamplitude (links), direkte Berechnung der kritischen Punkte (rechts), in Anlehnung an REITINGER (1994) . . . . .	71
5.2	Modifiziertes Dreigelenktragwerk mit variabler Imperfektion . . . . .	71
5.3	Gleichgewichtsfläche des modifizierten Dreigelenktragwerks mit Gleichgewichtspfad des perfekten Systems (pink) und kritischem Pfad (blau) . . .	72
5.4	Imperfektes Dreigelenktragwerk . . . . .	77
5.5	Kritischer Pfad des asymmetrischen Dreigelenktragwerks . . . . .	78
6.1	Übersicht über die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden zur numerischen Ableitung . . . . .	79
6.2	Steigung der Sekante . . . . .	81
6.3	Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient für die erste Ableitung von Gl. (6.9) . . . . .	83
6.4	Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient sowie CSDA für die erste Ableitung von Gl. (6.9) . .	85
6.5	Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient, CSDA und CSDA mit dualen Zahlen für die erste Ableitung von Gl. (6.9) . . . . .	86

6.6	Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient sowie CSDA für die zweite Ableitung von Gl. (6.9) . . . . .	87
6.7	Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient, CSDA und hyperdualen Zahlen für die zweite Ableitung von Gl. (6.9) . . . . .	89
6.8	Ebene Scheibe unter Verschiebungslast, Modelldaten und Randbedingungen (links), Diagramm mit Vergleich der relativen Rechenzeiten (rechts) . . . . .	93
7.1	Statisches System des L-förmigen Rahmentragwerks in Anlehnung an LEE u. A. (1968) . . . . .	100
7.2	Details zur Modellierung des Rahmentragwerks mit vier linearen Q1-Scheibenelementen über die Dicke $t$ . . . . .	100
7.3	Details zur Modellierung des Rahmentragwerks mit zwei Volumenschalelementen über die Dicke $t$ und einem über die Tiefe $w$ . . . . .	101
7.4	Gleichgewichtspfade für $x$ -Verschiebung mit Durchschlagspunkten bei unterschiedlicher Diskretisierung . . . . .	102
7.5	Gleichgewichtspfade für $y$ -Verschiebung mit Durchschlagspunkten bei unterschiedlicher Diskretisierung . . . . .	102
7.6	Detail der Gleichgewichtspfade für $x$ -Verschiebung mit Durchschlagspunkten bei unterschiedlicher Diskretisierung . . . . .	103
7.7	System der ebenen Scheibe mit Randbedingungen für eine Diskretisierung mit 200 Elementen . . . . .	105
7.8	Primärpfad (PP) und Sekundärpfade (SP+ und SP-) für die Mittelpunktverschiebung des ebenen Scheibentragwerks . . . . .	105
7.9	Konturplots der Verschiebungen und der Eigenvektoren für verschiedene Netzfeinheiten . . . . .	106
7.10	System der gekrümmten Schale mit Randbedingungen . . . . .	107
7.11	Detail des Gleichgewichtspfads der gekrümmten Schale . . . . .	108
7.12	Verschiebungen im Nachbeulbereich (links) und Eigenvektor am kritischen Punkt (rechts) der gekrümmten Schale bei grober Diskretisierung, überhöhte Darstellung . . . . .	109
7.13	Verschiebungen im Nachbeulbereich (links) und Eigenvektor am kritischen Punkt (rechts) der gekrümmten Schale bei feiner Diskretisierung, überhöhte Darstellung . . . . .	109
7.14	Grundriss und Ansicht der Gitterschale nach FORDE (1986) . . . . .	110
7.15	Räumliche Ansicht des unverformten Systems (links) und des Eigenvektors (rechts) in 50-facher Überhöhung . . . . .	110
7.16	Gleichgewichtsfläche der Gitterschale (grau) mit dem Gleichgewichtspfad des perfekten Systems (pink) und dem kritischem Pfad (blau) . . . . .	111

A.1	Dreigelenktragwerk mit variabler Höhe . . . . .	117
A.2	Gleichgewichtspfade für Dreigelenktragwerke unterschiedlicher Höhe mit Durchschlagspunkten (LP) und Verzweigungspunkten (BP) . . . . .	119
A.3	Ungedehnte (links) und gedehnte Feder (rechts) . . . . .	119
A.4	Federkraft (links) und Federsteifigkeit (rechts) . . . . .	120



---

# Tabellenverzeichnis

7.1	Übersicht über die unterschiedlichen Diskretisierungen . . . . .	101
7.2	Vergleich der Rechenzeiten für verschiedene Ableitungsmethoden . . . . .	103
7.3	Konvergenzverhalten für unterschiedlich große Werte des Intervalls $h$ bei Ermittlung der Richtungsableitung mit CSDA und VD . . . . .	104
7.4	Ergebnisse für $\lambda_{\text{krit}}$ in Abhängigkeit der Netzfeinheit für ebene Scheibe .	106
7.5	Ergebnisse für $\lambda_{\text{krit}}$ in Abhängigkeit der Netzfeinheit für gekrümmte Schale	108



---

# Abkürzungen und Bezeichnungen

## Abkürzungen

AD	.....	automatisches Differenzieren
B	.....	Verzweigungspunkt (bifurcation point)
CAD	.....	computer-aided design
CSDA	.....	Complex-step Derivative Approximation
CSDA <sub>R</sub>	.....	Richtungsableitung mit CSDA
ES	.....	Extended Systems
FEM	.....	Finite-Elemente-Methode
L	.....	Durchschlagspunkt (limit point)
UMFPACK	..	Unsymmetric MultiFrontal PACKage

## Mathematische Notationen

$(\bullet)^{-1}$	.....	Inverse von $(\bullet)$
$(\bullet)^{\top}$	.....	Transponierte von $(\bullet)$
$ (\bullet) $	.....	Betrag einer skalaren Größe $(\bullet)$
$\ (\bullet)\ _2$	.....	Euklid'sche Norm eines Vektors $(\bullet)$
$(\bullet)^{-\top}$	.....	Transponierte der Inversen von $(\bullet)$
$(\bullet \cdot \bullet)$	.....	Skalarprodukt zwischen Vektoren bzw. zwischen Tensoren (inneres Produkt)
$(\bullet \otimes \bullet)$	.....	Dyadisches Produkt
$\delta(\bullet)$	.....	virtuelle Größe
$\det(\bullet)$	.....	Determinante von $(\bullet)$
$\operatorname{div}(\bullet)$	.....	Divergenz von $(\bullet)$ bezogen auf die Momentankonfiguration
$\operatorname{DIV}(\bullet)$	.....	Divergenz von $(\bullet)$ bezogen auf die Referenzkonfiguration

$\text{lin}(\bullet)$	.....	Linearisierung von $(\bullet)$
$\frac{d(\bullet)}{d(\bullet)}$	.....	totale Ableitung
$\frac{\partial(\bullet)}{\partial(\bullet)}$	.....	partielle Ableitung
$\text{tr}(\bullet)$	.....	Spur von $(\bullet)$
$\cup$	.....	Assemblierungsoperator
$f'_v(\mathbf{x})$	.....	Richtungsableitung der Funktion $f(\mathbf{x})$ in Richtung des Vektors $\mathbf{v}$

### Lateinische Buchstaben

$\mathbf{b}$	.....	Volumenlast in der Momentankonfiguration
$\mathbf{B}_0$	.....	Volumenlast in der Referenzkonfiguration
$\mathbf{B}$	.....	B-Operator
$\mathcal{B}$	.....	Materieller Körper
$c$	.....	allgemeine zu inkrementierende Größe der Zusatzgleichung $f$
$\hat{c}$	.....	allgemeine vorgegebene Schrittweite in Zusatzgleichung $f$
$\mathbf{C}$	.....	Materialmatrix
$\mathbf{C}_{CG}$	.....	rechter Cauchy-Green-Tensor
$\mathbb{C}$	.....	vierstufiger Materialtensor
$D(\bullet)$	.....	inkrementelle Änderung der Größe $(\bullet)$
$D_i$	.....	einzelne Einträge aus $\mathbf{D}$
$d\mathbf{X}, d\mathbf{x}$	.....	differenzielles Linienelement in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\mathbf{d}$	.....	Vektor der diskreten Knotenverschiebungen auf Elementebene
$\mathbf{D}$	.....	globaler Vektor der diskreten Knotenverschiebungen
$\hat{\mathbf{D}}$	.....	globaler Vektor der vorgeschriebenen Knotenverschiebungen
$\tilde{\mathbf{D}}$	.....	globaler Vektor der diskreten Knotenverschiebungen in einem Nachbarzustand
$e$	.....	Element der Finite-Elemente-Diskretisierung
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	.....	Normierte Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems
$E$	.....	Elastizitätsmodul
$\mathbf{E}$	.....	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor
$f$	.....	Zusatzgleichung
$F_0$	.....	Einzellast
$\mathbf{f}_{\text{int}}, \mathbf{f}_{\text{ext}}$	.....	Vektoren der inneren und äußeren Kräfte auf Elementebene
$\mathbf{F}$	.....	Deformationsgradient

$\mathbf{F}_{\text{int}}, \mathbf{F}_{\text{ext}}$	....	globale Vektoren der inneren und äußeren Kräfte
$\mathbf{F}_{\text{Dir}}$	.....	Ableitung der internen Kräfte nach der vorgegebenen Verschiebungsänderung
$G$	.....	Schubmodul
$h$	.....	Größe des Intervalls bei numerischen Ableitungen
$i$	.....	Iterationsschritt, in Kapitel 6 der Imaginärteil einer komplexen Zahl
$\mathbf{I}$	.....	zweistufiger Identitätstensor bzw. Einheitsmatrix
$\mathbb{I}_{\text{sym}}$	.....	symmetrischer vierstufiger Identitätstensor
$\Im(\bullet)$	.....	Imaginärteil von $(\bullet)$
$\Im_{\epsilon_1}(\bullet)$	.....	erster Imaginärteil der hyperdualen Zahl $(\bullet)$
$\Im_{\epsilon_2}(\bullet)$	.....	zweiter Imaginärteil der hyperdualen Zahl $(\bullet)$
$\Im_{\epsilon_1 \epsilon_2}(\bullet)$	.....	dritter Imaginärteil der hyperdualen Zahl $(\bullet)$
$J$	.....	Jacobi-Determinante
$\mathbf{k}_T$	.....	Tangentensteifigkeitsmatrix auf Elementebene
$\mathbf{K}_e$	.....	globale elastische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_g$	.....	globale geometrische Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_T$	.....	globale Tangentensteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_u$	.....	globale Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_{\text{Dir}}$	.....	Ableitung der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T$ nach der vorgegebenen Verschiebungsänderung
$\mathbf{K}_{\Phi}$	.....	Richtungsableitung der globalen Tangentensteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T$ in Richtung von $\Phi$
$\mathbf{K}_{\text{tot}}$	.....	Gesamtsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{L}$	.....	untere Dreiecksmatrix
$m$	.....	inkrementeller Schritt
$n$	.....	Anzahl der Freiheitsgrade des Systems
$n_{\text{ele}}$	.....	Anzahl der finiten Elemente
$\mathbf{N}, \mathbf{n}$	.....	Normale in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\mathbf{N}_e$	.....	Matrix der Formfunktionen des Elements $e$
$N_i$	.....	Formfunktion
$P$	.....	Materieller Punkt
$\mathbf{P}$	.....	erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\mathbf{R}$	.....	Residuum der Ungleichgewichtskräfte
$\mathbf{R}_{\text{tot}}$	.....	Residuum des erweiterten Gleichungssystems
$\mathbb{R}^3$	.....	euklidischer Raum

$\mathcal{R}(\bullet)$ .....	Imaginärteil von $(\bullet)$
$s$ .....	Bogenlänge, in Abschnitt 4.3.1 und 4.4.2 auch Bahnparameter
$\hat{s}$ .....	vorgeschriebene Bogenlänge
$\mathbf{S}$ .....	zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$S_P$ .....	Steifigkeitsparameter
$t$ .....	Zeit bzw. Pseudozeit
$\mathbf{t}$ .....	Cauchy-Spannungsvektor
$t_0$ .....	Anfangszeitpunkt des betrachteten Zeitintervalls
$\hat{\mathbf{T}}, \hat{\mathbf{t}}$ .....	vorgeschriebene Spannung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\mathbf{u}$ .....	Verschiebungsvektor eines materiellen Punkts
$\hat{\mathbf{u}}$ .....	vorgeschriebene Verschiebung
$\mathbf{U}$ .....	obere Dreiecksmatrix
$\bar{U}_{ii}$ .....	Diagonaleinträge der oberen Dreiecksmatrix $\mathbf{U}$
$\mathbf{v}$ .....	Ableitungsrichtung der Richtungsableitung
$W$ .....	Verzerrungsenergiedichte
$\mathbf{x}$ .....	Ortsvektor eines materiellen Punkts in der Momentankonfiguration
$\mathbf{X}$ .....	Ortsvektor eines materiellen Punkts in der Referenzkonfiguration

### Griechische Buchstaben

$\alpha$ .....	Variable zur Regularisierung des erweiterten Gleichungssystems bei der Berechnung von Verzweigungspunkten
$\beta$ .....	Skalierungsfaktor
$\Gamma, \gamma$ .....	Rand des Gebiets $\Omega_0, \Omega_t$ in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\Gamma_D, \gamma_D$ .....	Oberfläche mit Dirichlet-Randbedingung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\Gamma_N, \gamma_N$ .....	Oberfläche mit Neumann-Randbedingung in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\Delta(\bullet)$ .....	Änderung der Größe $(\bullet)$ zwischen zwei Iterationsschritten
$\delta\Pi$ .....	virtuelle Arbeit
$\Delta\mathbf{t}$ .....	Tangentenvektor in Zusatzgleichung nach Riks/Wempner
$\Delta\mathbf{u}$ .....	iterative Änderung des Normalenvektors in Zusatzgleichung nach Riks/Wempner
$\varepsilon, \varepsilon^+, \varepsilon^-$ .....	geometrische Imperfektionen

$\epsilon$ .....	Imaginäre Einheit einer dualen Zahl
$\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_1\epsilon_2$ ...	Imaginäre Einheiten einer hyperdualen Zahl
$\lambda, \lambda_i$ .....	Steigerungsfaktor
$\lambda_L$ .....	1. Lamé-Konstante
$\mu_L$ .....	2. Lamé-Konstante
$\nu$ .....	Querdehn- bzw. Poissonzahl
$\Pi$ .....	potenzielle Energie
$\rho_0, \rho$ .....	Dichte in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\sigma$ .....	Cauchy-Spannungstensor
$\Phi$ .....	Eigenvektor
$\chi$ .....	Abbildungsfunktion zwischen Referenz- und Momentankonfiguration
$\Psi$ .....	Korrekturfaktor
$\omega$ .....	Eigenwert
$\Omega_0, \Omega_t$ .....	Gebiet des materiellen Körpers $\mathcal{B}$ in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
$\Omega_e$ .....	Gebiet eines finiten Elements

### Kopf- und Fußzeiger

$(\bullet)^i$ .....	Größe $(\bullet)$ im Iterationsschritt $i$
$(\bullet)_e$ .....	Größe $(\bullet)$ gehört zum finiten Element $e$
$(\bullet)_{\text{krit}}$ .....	Größe $(\bullet)$ an einem kritischen Punkt
$(\bullet)_{\text{tot}}$ .....	Größe $(\bullet)$ mit mehr als $n$ Einträgen





# 1

---

## Einleitung

„Es bewegt sich alles, Stillstand gibt es nicht“ schrieb der Künstler Jean Tinguely in seinem Manifest „Für Statik“ im Jahr 1959. In einer Welt ohne Stillstand kann es somit auch keine Stabilität geben, leitet sich der Begriff der Stabilität doch vom Lateinischen *stabilis* ab, dass mit *fest stehend* übersetzt werden kann. Anders als in dieser radikalen Verneinung der Stabilität im Sinne statischer Gleichgewichtszustände, die aus dem Zitat Tinguelys abgeleitet werden kann, ist die Existenz stabiler Zustände, aber auch deren Grenzen, in vielen wissenschaftlichen Disziplinen von großer Bedeutung. In der Kernphysik etwa, in der die Stabilität eines Atomkerns gegenüber radioaktivem Zerfall untersucht wird. Auch in den Wirtschaftswissenschaften oder der Thermodynamik werden Systeme auf ihre Stabilität und deren Grenzen hin analysiert. Dabei stellt sich immer die Frage nach der maximalen Größe einer auf das System einwirkenden Störung, die gerade noch zu keiner signifikanten Abweichung in der Systemantwort führt (vgl. SCHMITZ (2016)). In der vorliegenden Arbeit geht es um die Frage nach der Stabilität in der geometrisch nichtlinearen Strukturmechanik. Neben dem Verhalten der Struktur im stabilen und instabilen Zustand ist vorrangig die Frage nach der Berechnung stabilitätskritischer Zustände von Interesse.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst kurz die Motivation erläutert, die zu dieser Arbeit geführt hat. Es folgen ein kurzer Überblick über den Stand der Technik, die Ziele der Arbeit sowie deren Gliederung.

### 1.1 Motivation

Die Frage nach der Stabilität einer dünnwandigen, druckbelasteten Struktur ist in vielen Bereichen der Ingenieurwissenschaften von großem Interesse. Dabei wird der Begriff

häufig im Zusammenhang mit dem Versagen eines Bauteils oder eines gesamten Tragwerks in Verbindung gebracht. Die Versagensszenarien des Knickens, Biegedrillknickens oder Beulens sowie die rechnerischen und konstruktiven Vorschriften, um eben dies zu vermeiden, sind für die jeweiligen Strukturen und Werkstoffe in den entsprechenden Normen geregelt.

Daneben gibt es seit einigen Jahren immer mehr Forschungsarbeiten mit dem Ziel, Stabilitätsversagen gezielt zu nutzen. Beispiele hierfür sind z. B. die Untersuchung und Entwicklung auxetischer Metamaterialien (LAZARUS UND REIS (2015)) oder die gezielte Veränderung der Topografie und damit der aerodynamischen Eigenschaften von Tragflächen (TERWAGNE U. A. (2014)). In der Arbeit von REIS (2015) werden diese verschiedenen Sichtweisen mit *Buckliphobia* und *Buckliphilia* bezeichnet.

Für beide Fälle ist zunächst das nichtlineare Verhalten der Struktur, also der nichtlineare Zusammenhang zwischen der Kraft, die auf ein Tragwerk wirkt und der deformierten Geometrie von Interesse. Da aufgrund der Nichtlinearität des Problems die Lösung nicht direkt ermittelt werden kann, kommen hierfür inkrementell-iterative Methoden zum Einsatz. Den Übergang zwischen stabilem und instabilem Gleichgewicht bilden sogenannte kritische Punkte, an denen die Steifigkeitsmatrix singulär wird. Man unterscheidet dabei zwischen Durchschlags- und Verzweigungspunkten, wobei Verzweigungspunkte nochmals untergliedert werden können in symmetrisch stabile, symmetrisch instabile sowie asymmetrische Verzweigungspunkte. Sowohl für die Vermeidung von Schäden an Tragwerken als auch für die gezielte Manipulation gewünschter Struktureigenschaften ist eine exakte Berechnung dieser kritischen Punkte hilfreich.

Imperfektionen können die Traglast dünnwandiger Strukturen stark reduzieren. Hierzu existiert bereits eine Vielzahl an Forschungsarbeiten. Die Suche nach der ungünstigsten Imperfektionsform gleicht dabei häufig der Suche nach der Nadel im Heuhaufen. Ob für reale Tragwerke die eine ungünstigste Imperfektionsform überhaupt existiert, wird in SCHNEIDER U. A. (2005) zudem hinterfragt. Aus akademischer Sicht ist dennoch von Interesse, Imperfektionsformen systematisch zu untersuchen und die zumindest theoretisch ungünstigste Imperfektionsform zu finden.

## 1.2 Stand der Technik

Bei der Erstellung des folgenden Abschnitts wurde auf die Arbeiten von WAGNER (1991) und REITINGER (1994) zurückgegriffen.

Die ersten Stabilitätsuntersuchungen gehen in der Zeit weit zurück. Euler untersuchte bereits 1744 das Ausknicken druckbelasteter Stäbe. Ausführliche Untersuchungen des

Stabilitätsverhaltens von Schalen erfolgen vor etwa einem Jahrhundert in den Arbeiten von ZOELLY (1915) (Kugelschalen) sowie LORENZ (1908), TIMOSCHENKO (1910) und FLÜGGE (1932) (Kreiszyinderschalen). Die hierbei rechnerisch ermittelten Grenzlaster wichen jedoch weit von den experimentell ermittelten Lasten ab. In den Arbeiten von VON KÁRMÁN UND TSIEN (1939) und VON KÁRMÁN UND TSIEN (1941) wurde aus diesem Grund die Untersuchung auf den Nachbeulbereich erweitert.

Eine asymptotisch exakte Näherung des Nachbeulbereichs für kontinuierliche elastische Strukturen, auch Anfangsnachbeulanalyse genannt, lieferte die Arbeit von KOITER (1967), die bereits im Jahr 1945 in niederländischer Sprache erschien. Durch eine Reihenentwicklung des Belastungs- und Verschiebungszustands im unmittelbaren Nachbeulbereich lässt sich der Sekundärpfad in der Umgebung des Verzweigungspunkts ermitteln. Das Verhalten des Sekundärpfads im Nachbeulbereich ermöglicht schließlich eine Kategorisierung der verschiedenen Verzweigungspunkte. Etwa zwanzig Jahre nach Koiter erfolgte eine Weiterentwicklung der Anfangsnachbeulanalyse u. a. durch Arbeiten von SEWELL (1965), THOMPSON (1969), BUDIANSKY UND HUTCHINSON (1972), THOMPSON UND HUNT (1973b) sowie BUDIANSKY (1974).

Fast alle bisher aufgeführten Arbeiten beschäftigen sich mit der Untersuchung des nichtlinearen Systemverhaltens und der Stabilität kontinuierlicher Systeme. Mit dem Aufkommen des Computers in den 60er Jahren des vergangenen Jahrhunderts verlagern sich die Untersuchungen hin zur numerischen Analyse diskreter Systeme. Die vermutlich erste Arbeit, die sich aus numerischer Sicht mit dem Verzweigen befasst, stammt von THURSTON (1969) und lässt sich als numerisches Pendant zur Koiter'schen Anfangsnachbeulanalyse interpretieren.

Mit der immer schneller voranschreitenden Entwicklung der Finite-Elemente-Methode in den 1960er und 1970er Jahren verschob sich der Forschungsschwerpunkt immer weiter hin zu numerischen Stabilitätsuntersuchungen. Dies liegt zum einen an der Entwicklung neuer Elementformulierungen für Stäbe, Scheiben und Schalen, mit denen sich schlanke Tragwerke untersuchen lassen. Es liegt zum anderen an der Entwicklung verschiedener Methoden zur Pfadverfolgung bei nichtlinearem Strukturverhalten. Diese Entwicklung fand sowohl in den Ingenieurwissenschaften wie auch in der numerischen Mathematik statt. Wichtige Arbeiten in der Ingenieurliteratur stammen dabei von WEMPNER (1971), RIKS (1972), RIKS (1979), CRISFIELD (1981), RAMM (1981) sowie SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS (1986). Im Bereich der Mathematik sind hier die Arbeiten von KELLER (1977), RHEINBOLDT (1981) oder FRIED (1984) zu nennen. Eine Erweiterung der Problemstellung auf mehrere Kontrollparameter, in der Literatur auch als generalisierte Pfadverfolgung bezeichnet, findet sich u. a. in SPENCE UND JEPSON (1984) sowie ERIKSSON (1998).

Zur Berechnung kritischer Punkte wurden zunächst Näherungsverfahren entwickelt. Dabei werden begleitend zu einer Pfadverfolgung z. B. die Determinante der Steifigkeitsmatrix oder deren Eigenwerte analysiert. Wird entlang eines Gleichgewichtspfad ein kritischer Punkt überschritten, kann man sich diesem über Bisektionsmethoden annähern. Hier sei u. a. auf die Arbeiten von BRENDEL (1979), BRENDEL UND RAMM (1982) und WAGNER UND WRIGGERS (1988) verwiesen.

Die direkte Berechnung kritischer Punkte findet sich zuerst in der mathematischen Literatur. Durch eine Erweiterung der Gleichgewichtsbedingung um eine Stabilitätsbedingung, die nur an einem kritischen Punkt erfüllt ist, ließen sich erstmals Durchschlags- und Verzweigungspunkte direkt berechnen. Wichtige Arbeiten sind hierbei KEENER UND KELLER (1973), SEYDEL (1977), MOORE (1980) sowie SPENCE UND JEPSON (1984). Die genannten Arbeiten beschränken sich dabei jedoch auf Systeme mit nur wenigen Freiheitsgraden. Eine Übertragung dieser Methoden auf Anwendungen im Ingenieurwesen, bei denen die Zahl der Freiheitsgrade deutlich größer ist, gelang durch die Arbeit von WRIGGERS U. A. (1988) und WRIGGERS UND SIMO (1990). Auch hier lässt sich, wie bereits bei der Pfadverfolgung, die Problemstellung auf Systeme mit mehr als einem Lastparameter erweitern. Untersuchungen hierzu finden sich beispielsweise in ERIKSSON (1994), ERIKSSON (1997), REZAIIEE-PAJAND UND MOGHADDASIE (2014), COX U. A. (2018) sowie GROH U. A. (2018).

Wie bereits erwähnt überschätzen rechnerisch ermittelte Grenzlaster die bei realen Experimenten ermittelten Grenzlaster deutlich. Dies lässt sich durch Imperfektionen in der Geometrie oder dem Material erklären, die in einem Rechenmodell mit perfekter Geometrie und homogenem Materialverhalten nicht berücksichtigt werden. Im Bauwesen werden daher häufig eigenformaffine Vorverformungen berücksichtigt. Um die ungünstigste Imperfektionsform rechnerisch ermitteln zu können, wurden die Imperfektionen in der Arbeit von DEML (1997) und DEML UND WUNDERLICH (1997) als zusätzliche Unbekannte eingeführt. Einen anderen Ansatz, der sich stärker an realen Tragwerken orientiert und auf einem stochastischen Ansatz für Imperfektionsformen beruht, verfolgen die Arbeiten von LAUTERBACH U. A. (2018) und FINA U. A. (2020).

Wie bereits bei den Pfadverfolgungsmethoden wurden auch die Methoden zur exakten Berechnung erster und zweiter Ableitungen auf unterschiedliche Weise sowohl in den Ingenieurwissenschaften als auch in der Mathematik entwickelt. In der numerischen Mathematik werden die hier vorgestellten Methoden unter dem Begriff *automatic differentiation* zusammengefasst. Sie beruhen auf einer Zerlegung der abzuleitenden Funktion in grundlegende mathematische Operationen und Funktionen, die anschließend unter Berücksichtigung der Kettenregel abgeleitet werden können. Eine erste Beschreibung der Methode findet sich in der Arbeit von WENGERT (1964), die in RALL (1983) und RALL (1986) weiterentwickelt wurde. Eine sehr gute Zusammenfassung findet sich dazu

in GRIEWANK UND WALTHER (2008). Die in den Ingenieurwissenschaften entwickelten Methoden lassen sich durch die Zuhilfenahme hyperkomplexer Zahlen aus den klassischen Differenzenquotienten herleiten. Erste Arbeiten finden sich bereits in LYNESS UND MOLER (1967) und LYNESS (1967). Sie bilden die Grundlage für die Algorithmen in SQUIRE UND TRAPP (1998) und MARTINS U. A. (2003) zur Berechnung erster Ableitungen und in FIKE UND ALONSO (2011) zur exakten Berechnung erster und zweiter Ableitungen.

## 1.3 Zielsetzung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung zuverlässiger Algorithmen zur direkten Berechnung kritischer Punkte für statische Systeme, die durch inhomogene Dirichlet-Randbedingungen belastet sind. Weiterhin sollen diese Algorithmen zur Untersuchung der Imperfektionsempfindlichkeit schlanker Tragwerke erweitert werden.

Zur Berücksichtigung der Verschiebungslastfälle bei der direkten Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten werden die auch als Extended Systems bezeichneten Methoden, die in WRIGGERS U. A. (1988) erstmals im Zusammenhang mit der Finite-Elemente-Methode vorgestellt wurden, angepasst. Dafür müssen alle notwendigen Bedingungen für Verschiebungslasten neu hergeleitet werden. Die neuen Bedingungen lassen sich anschließend in einem erweiterten nichtlinearen Gleichungssystem zusammenfassen.

Bevor das nichtlineare Gleichungssystem gelöst werden kann, muss dieses zunächst konsistent linearisiert werden. Im anschließenden iterativen Lösungsprozess muss die Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix in Richtung des zum Nulleigenwert gehörenden Eigenvektors bestimmt werden. Zur Berechnung der Richtungsableitung werden in diesem Zusammenhang erstmals numerische Ableitungsalgorithmen angewandt, die auf hyperkomplexen Zahlenformaten beruhen. Die Algorithmen zur numerischen Berechnung erster und zweiter Ableitungen nach MARTINS U. A. (2003) und FIKE UND ALONSO (2011) werden hierfür auf die Berechnung der Richtungsableitung übertragen. Ziel ist dabei die zuverlässige Berechnung der Richtungsableitung, die mittels komplexzahliger Ableitungsmethoden praktisch fehlerfrei und parameterunabhängig möglich ist.

Aufbauend auf den bisher entwickelten Methoden soll in einem nächsten Schritt die Imperfektionsempfindlichkeit schlanker Strukturen untersucht werden. Hierfür müssen die Algorithmen erneut erweitert werden. Ziel ist dabei zum einen eine effiziente Berechnung kritischer Punkte für eine Vielzahl imperfekter Ausgangssysteme. Zum anderen soll es eine Modifikation der in DEML (1997) vorgestellten Methoden zur Bestimmung der ungünstigsten Imperfektionsformen ermöglichen, diese auch dann zu finden, wenn

bei zunehmender Imperfektionsamplitude die kritische Last nach einem anfänglichen Abfall wieder ansteigt.

### 1.4 Gliederung der Arbeit

**Kapitel 2** liefert einen Überblick über die in dieser Arbeit notwendigen Grundgleichungen der nichtlinearen Festkörpermechanik. Sie ermöglichen die Formulierung des elastostatischen Randwertproblems in der starken Form, das anschließend mit der Methode der gewichteten Residuen in die schwache Form überführt wird. Diese bildet die Grundlage zur Lösung mit der Finite-Elemente-Methode.

In **Kapitel 3** wird nach einem allgemeinen Überblick über nichtlineare Effekte in der Strukturmechanik der Fokus auf geometrisch nichtlineare Phänomene gelegt. Neben den Eigenschaften statischer Gleichgewichtspfade und deren Erweiterung zur Gleichgewichtsfäche wird auf den Begriff der Stabilität in dieser Arbeit sowie die Definition kritischer Punkte genauer eingegangen. Des Weiteren wird die Kategorisierung des Anfangsnachbeulverhaltens nach KOITER (1967) auf Verschiebungslastfälle erweitert. Abschließend wird der Einfluss von Imperfektionen auf die Stabilität schlanker Strukturen beschrieben.

Die Kapitel 4 und 5 befassen sich anschließend mit der Analyse der in Kapitel 3 beschriebenen Phänomene.

**Kapitel 4** gibt hierfür zuerst einen Überblick über Methoden zur Verfolgung statischer Gleichgewichtspfade, bevor verschiedene Methoden zur Analyse der Stabilität von Gleichgewichtspunkten verglichen werden. Im Anschluss werden erweiterte Gleichungssysteme zur direkten Berechnung kritischer Punkte für Kraftlastfälle vorgestellt. Darauf aufbauend werden die erweiterten Gleichungssysteme zur direkten Berechnung kritischer Punkte für Verschiebungslastfälle hergeleitet.

**Kapitel 5** beschäftigt sich mit Möglichkeiten zur systematischen Untersuchung der Imperfektionsempfindlichkeit schlanker Tragwerke. Hierfür wird neben effizienten Algorithmen zur wiederholten Berechnung kritischer Punkte für eine Vielzahl imperfekter Systeme auch ein Algorithmus zur Suche nach der ungünstigsten Imperfektionsform vorgestellt, der auf der Arbeit von DEML (1997) beruht.

**Kapitel 6** befasst sich mit der numerischen Berechnung von partiellen und totalen Ableitungen analytischer Funktionen. Hierfür werden zunächst die klassischen Differenzenquotienten erläutert und die dabei auftretenden Fehler untersucht. Anschließend werden neuere Methoden, die auf den Arbeiten von MARTINS U. A. (2003) und FIKE

UND ALONSO (2011) basieren, vorgestellt. Diese Methoden basieren auf hyperkomplexen Zahlen und ermöglichen eine fehlerfreie Berechnung von Ableitungen. Abschließend werden die präsentierten Methoden zur Ermittlung der Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix in Richtung des Beulvektors erweitert.

In **Kapitel 7** wird eine Auswahl der neuen Methoden, die in dieser Arbeit vorgestellt werden, an numerischen Beispielen demonstriert. Hierbei werden die Vorteile und Besonderheiten aufgezeigt und mit bisherigen Verfahren oder Beispielen aus der Literatur verglichen.

**Kapitel 8** fasst alle Neuerungen und Erkenntnisse die sich aus der Arbeit geben, noch einmal zusammen. Abschließend wird an ausgewählten Beispielen aufgezeigt, wie die beschriebenen Methoden weiterentwickelt oder außerhalb des bisherigen Anwendungsgebiets eingesetzt werden können.





# 2

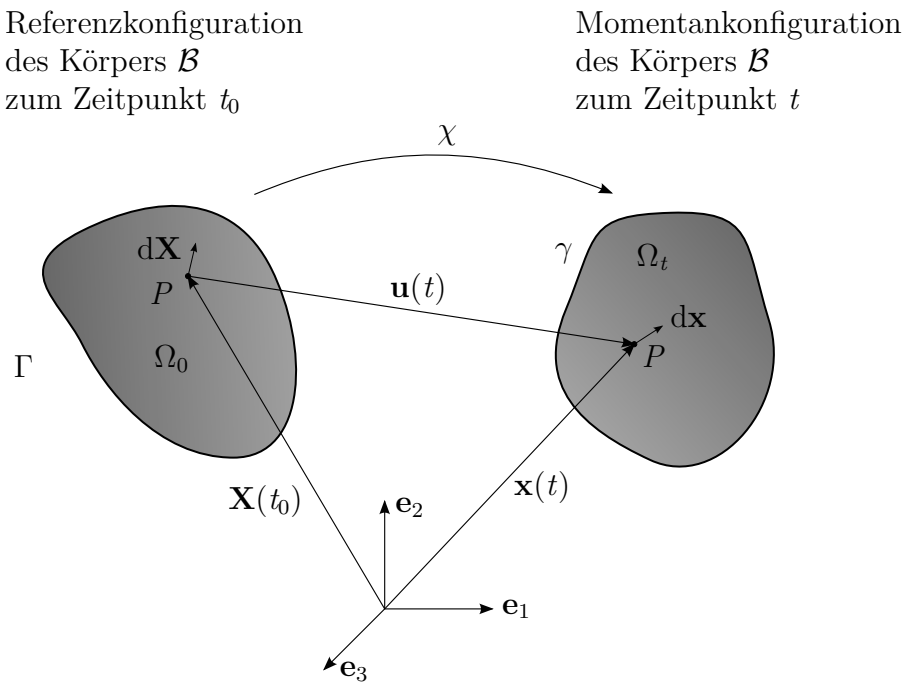
---

## Grundlagen der Kontinuumsmechanik

Die Kontinuumsmechanik ist die Grundlage strukturmechanischer Problemstellungen. Im ersten Abschnitt 2.1 wird daher der Zusammenhang zwischen Deformationen, Verzerrungen und Spannungen aufgezeigt. Diese Beziehungen führen – zusammen mit den statischen und geometrischen Randbedingungen – auf das elastostatische Randwertproblem, das in Abschnitt 2.2 von der starken in die schwache Form überführt wird. In Abschnitt 2.3 wird auf die grundlegende Vorgehensweise bei der Methode der finiten Elemente eingegangen. Hierbei wird die schwache Form des kontinuierlichen Problems zunächst in eine diskrete Form überführt. Auch das diskretisierte Problem ist aufgrund nichtlinearer Zusammenhänge noch nicht direkt lösbar, weshalb es zunächst linearisiert und anschließend mit inkrementell-iterativen Methoden gelöst wird. Das folgende Kapitel hat jedoch keineswegs den Anspruch, einen umfassenden Überblick über die Grundlagen der Kontinuumsmechanik zu bieten.

### 2.1 Nichtlineare Festkörpermechanik

Die Festkörpermechanik ist das Teilgebiet der Kontinuumsmechanik, das sich auf die Beschreibung der Bewegung deformierbarer Körper konzentriert. Die weiteren Teilgebiete der Kontinuumsmechanik – die Strömungslehre und die Gastheorie – spielen für diese Arbeit keine Rolle und werden daher nicht näher betrachtet. Neben einer komprimierten Übersicht über die grundlegenden kontinuumsmechanischen Gleichungen soll das folgende Kapitel vor allem eine Einführung in die in dieser Arbeit verwendete Notation bieten. Für ein tiefer gehendes Studium der Kontinuumsmechanik sei auf die Lehrbücher von HOLZAPFEL (2000), BONET UND WOOD (1999), ALTENBACH UND ALTENBACH (1994) und IBRAHIMBEGOVIC (2009) verwiesen, an denen sich dieser Abschnitt orientiert.



**Abbildung 2.1:** Kinematik eines Festkörpers  $\mathcal{B}$  in der Referenz- und der Momentankonfiguration

### 2.1.1 Bewegung, Kinematik und Verzerrung

Die Abbildung 2.1 zeigt einen Körper  $\mathcal{B}$  im euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  zum Zeitpunkt  $t_0$  in seiner Referenzkonfiguration – die in dieser Arbeit immer der Ausgangskonfiguration entspricht – sowie zum Zeitpunkt  $t$  in der aktuellen bzw. Momentankonfiguration. Das vom Körper  $\mathcal{B}$  eingenommene Gebiet zum Zeitpunkt  $t_0$  wird mit  $\Omega_0$  bezeichnet, zum Zeitpunkt  $t$  mit  $\Omega_t$ . Alle weiteren Größen werden in der Referenzkonfiguration groß und in der Momentankonfiguration klein geschrieben. Der Rand des Gebietes ( $\Gamma$  bzw.  $\gamma$ ) wird, je nach äußerer Beanspruchung, weiter unterteilt in den Dirichlet-Rand ( $\Gamma_D$  bzw.  $\gamma_D$ ) und den Neumann-Rand ( $\Gamma_N$  bzw.  $\gamma_N$ ).

Die Lage eines materiellen Punkts  $P$  im Gebiet  $\Omega_0$  ist in seinem Ausgangszustand durch den Ortsvektor  $\mathbf{X}$  beschrieben. Mithilfe der Abbildungsfunktion  $\chi$  lässt sich die Lage des Punkts  $P$  in der Momentankonfiguration beschreiben als

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t). \quad (2.1)$$

Damit ergibt sich der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  des materiellen Punkts  $P$  aus der Differenz der beiden Ortsvektoren zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \quad (2.2)$$

Zur Beschreibung der Deformationen wird der materielle Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  eingeführt. Er ergibt sich aus der partiellen Ableitung des aktuellen Ortes  $\mathbf{x}$  nach dem Ortsvektor in der Referenzkonfiguration  $\mathbf{X}$ :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.3)$$

Er lässt sich auch geometrisch als Abbildung eines differentiellen Linienelements der Referenzkonfiguration  $d\mathbf{X}$  auf ein differentiell Linienelement der Momentankonfiguration  $d\mathbf{x}$  interpretieren:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.4)$$

Der Deformationsgradient liefert eine vollständige Beschreibung der Deformation eines Körpers. Er ist jedoch zur Beschreibung der Verzerrungen ungeeignet, da er auch Starrkörperbewegungen enthält. Dies führt bei Verwendung von  $\mathbf{F}$  als Verzerrungsmaß zu unphysikalischen Spannungen bei reinen Translationen oder Rotationen. Um dies zu vermeiden, wird in der vorliegenden Arbeit der Green-Lagrange'sche Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  als Verzerrungsmaß gewählt. Dieser ist besonders für große Verschiebungen bei gleichzeitig kleinen Verzerrungen geeignet:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^\top \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{CG} - \mathbf{I}). \quad (2.5)$$

Der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  ist ein richtungsunabhängiger und symmetrischer Tensor zweiter Stufe, der quadratisch in den Verschiebungen  $\mathbf{u}$  ist. Er lässt sich sowohl aus dem Deformationsgradienten als auch aus dem rechten Cauchy-Green-Tensor  $\mathbf{C}_{CG}$  und dem Identitätstensor  $\mathbf{I}$  ermitteln. Tieferegehende Ausführungen zur Ermittlung von  $\mathbf{C}_{CG}$  finden sich u. a. in MARS DEN UND HUGHES (1994).

### 2.1.2 Spannungsmaße und Konstitutivgleichungen

Wirken äußere Lasten auf einen Körper  $\mathcal{B}$ , werden in seinem Inneren Spannungen erzeugt. Zur Beschreibung dieser Spannungen können verschiedene Spannungsmaße herangezogen werden. Die Cauchy-Spannungen beziehen die aktuelle Kraft auf die echte, verformte Fläche in der Momentankonfiguration. Sie werden daher häufig auch als wahre Spannungen bezeichnet. Der Cauchy-Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  ist nach dem Cauchy-Theorem über den Cauchy-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und die Einheitsnormale der Schnittfläche  $\mathbf{n}$  bzgl.

der aktuellen Konfiguration definiert zu

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\top. \quad (2.6)$$

Zur Beschreibung der Spannungen in der Referenzkonfiguration wird ein weiteres Spannungsmaß benötigt, die 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen  $\mathbf{S}$ , auch PK2-Spannungen genannt. Sie lassen sich mithilfe des materiellen Deformationsgradienten  $\mathbf{F}$  und dessen Determinante – häufig auch als Jacobi-Determinante  $J$  bezeichnet – als Funktion der Cauchy-Spannungen darstellen:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-\top}. \quad (2.7)$$

Der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor stellt das zu den Green-Lagrange'schen Verzerrungen (Gleichung (2.5)) energetisch konjugierte Spannungsmaß dar.

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen wird in den Konstitutiv- oder Werkstoffgleichungen beschrieben. Das in dieser Arbeit verwendete hyperelastische Saint-Venant-Kirchhoff-Materialmodell stellt eine Erweiterung der linearen Elastizität dar, bei der die Green-Lagrange'schen Verzerrungen  $\mathbf{E}$  sowie die PK2-Spannungen  $\mathbf{S}$  die linearen Verzerrungen und Spannungen ersetzen.

Hyperelastische Materialmodelle sind nicht pfadabhängig. Die Spannungen lassen sich über deren Potential, in diesem Fall auch als Verzerrungsenergiedichte  $W(\mathbf{E})$  bezeichnet, ausdrücken:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.8)$$

Für das hier verwendete Saint-Venant-Kirchhoff-Materialmodell berechnet sich die Verzerrungsenergiedichte wie folgt:

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda_L (\text{tr}(\mathbf{E}))^2 + \mu_L \text{tr}(\mathbf{E} : \mathbf{E}). \quad (2.9)$$

Die Ableitung nach den Verzerrungen liefert schließlich die PK2-Spannungen

$$\mathbf{S} = \lambda_L \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu_L \mathbf{E} \quad (2.10)$$

mit den beiden Lamé-Konstanten  $\lambda_L$  und  $\mu_L$ , die sich aus dem Elastizitätsmodul  $E$  und der Querdehnzahl  $\nu$  berechnen lassen:

$$\lambda_L = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu_L = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.11)$$

Die zweite Lamé-Konstante  $\mu_L$  entspricht dabei dem Schubmodul  $G$ .

Der Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen lässt sich auch über den vierstufigen Materialtensor  $\mathbb{C}$  ausdrücken, der bei St.-Venant-Kirchhoff-Material konstant ist:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad (2.12)$$

mit

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} = \lambda_L (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu_L \mathbb{I}_{\text{sym}} \quad (2.13)$$

Hierbei steht  $\mathbb{I}_{\text{sym}}$  für den vierstufigen, symmetrischen Identitätstensor.

Im allgemeinen Fall besitzt der Materialtensor  $\mathbb{C}$  81 unabhängige Einträge. Aufgrund der Symmetrie von  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{E}$  lässt sich die Zahl der unabhängigen Einträge auf 21 reduzieren. Wird wie in der vorliegenden Arbeit ausschließlich isotropes Materialverhalten angenommen, reduziert sich die Zahl der unabhängigen Einträge weiter von 21 auf die zwei Lamé-Konstanten.

Weitere Modelle zur Beschreibung des Materialverhaltens sowie ausführlichere Erläuterung finden sich unter anderem in SIMO UND HUGHES (1998), HOLZAPFEL (2000) und BELYTSCHKO U. A. (2014).

### 2.1.3 Gleichgewicht

Die kinematischen Gleichungen stellen den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen her, die Konstitutivgleichungen die Verbindung von Verzerrungen und Spannungen. Die nun folgenden Gleichgewichtsbedingungen verknüpfen die äußeren Lasten mit den Spannungen im Inneren des Körpers  $\mathcal{B}$ .

Für statische Problemstellungen kann das Gleichgewicht allein aus der Impulsbilanz hergeleitet werden. Beschleunigungen werden hierbei vernachlässigt.

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (2.14)$$

Der Ausdruck  $\rho \mathbf{b}$  entspricht dabei den auf den Körper wirkenden Volumenkräften,  $\text{div } \boldsymbol{\sigma}$  beschreibt die internen Kräfte in der Momentankonfiguration. In der Referenzkonfiguration lassen sich die internen Kräfte aus der Divergenz des 1. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{P}$  berechnen, welcher sich durch Multiplikation mit dem inversen Deformationsgradienten in den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensors  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$  überführen

lässt. Somit lautet die Gleichgewichtsbedingung in der Referenzkonfiguration

$$\text{Div}(\mathbf{FS}) + \rho_0 \mathbf{B}_0 = 0. \quad (2.15)$$

### 2.1.4 Randbedingungen

Neben den drei im Gebiet  $\Omega_0$  aufgestellten Bedingungen für die Kinematik (Gl. (2.5)), die Werkstoffbeziehung (Gl. (2.12)) und das Gleichgewicht (Gl. (2.15)) müssen nun noch die Bedingungen für den Rand  $\Gamma$  bestimmt werden. Hierbei wird zwischen den statischen (Spannungs- bzw. Neumann-) Randbedingungen und kinematischen (Verschiebungs- bzw. Dirichlet-) Randbedingungen unterschieden. Auf dem Neumannrand  $\Gamma_N$  muss der Spannungsvektor  $\mathbf{T}$  mit dem aufgetragenen Spannungsvektor  $\hat{\mathbf{T}}$  im Gleichgewicht stehen. Über das Cauchy-Theorem in der Referenzkonfiguration und die Überführung des 2. in den 1. Piola-Kirchhoff-Tensor ergibt sich die Neumann-Randbedingung zu

$$\mathbf{FSN} = \hat{\mathbf{T}}, \quad (2.16)$$

mit dem Normalenvektor  $\mathbf{N}$  auf dem Neumannrand  $\Gamma_N$ .

Die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  am Dirichlet-Rand  $\Gamma_D$  müssen den vorgeschriebenen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  entsprechen:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.17)$$

Sind die Verschiebungen am Dirichlet-Rand gleich null, spricht man auch von homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Dies entspricht der Situation an einer Lagerung. Bei inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen wird eine vorgeschriebene Verschiebung ungleich null auf den Rand aufgebracht. Inhomogene Dirichlet-Randbedingungen werden im Ingenieurwesen häufig als Verschiebungslastfall bezeichnet.

## 2.2 Elastostatisches Randwertproblem

Die Gleichungen (2.16) und (2.17) komplettieren die Grundgleichungen des elastostatischen Randwertproblems (siehe (2.18)). Sie sind an jedem Materialpunkt erfüllt und liegen somit in der starken Form vor. Sie sind hier noch einmal übersichtlich für die Referenzkonfiguration zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
 \text{Kinematik:} & \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^\top \mathbf{F} - \mathbf{I}) & \text{in } \Omega_0 \\
 \text{Werkstoff:} & \quad \mathbf{S} = \mathbb{C}:\mathbf{E} & \text{in } \Omega_0 \\
 \text{Gleichgewicht:} & \quad \text{Div}(\mathbf{FS}) + \rho_0 \mathbf{B}_0 & \text{in } \Omega_0 \\
 \text{Neumann-Randbedingungen:} & \quad \mathbf{FSN} = \hat{\mathbf{T}} & \text{auf } \Gamma_N \\
 \text{Dirichlet-Randbedingungen:} & \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} & \text{auf } \Gamma_D
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

In der starken Form lassen sich die Differentialbeziehungen nur für wenige Sonderfälle analytisch lösen. Wird die starke Form jedoch in eine integrale Form überführt – die sogenannte schwache Form – kann eine approximierete Lösung mit geeigneten Näherungsverfahren, etwa der Finite-Elemente-Methode, bestimmt werden. Zur Überführung der starken Form in die schwache Form kommt die Methode der gewichteten Residuen zum Einsatz. Dabei wird zunächst eine Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  eingeführt, die die homogenen Verschiebungsrandbedingungen erfüllen muss. Multipliziert man die Gleichgewichtsbedingung (2.15) und die Krafrandbedingungen (2.16) mit  $\delta \mathbf{u}$  und integriert den Ausdruck über das Gebiet  $\Omega_0$  bzw. den Rand  $\Gamma_N$ , erhält man den Ausdruck

$$\int_{\Omega_0} (\text{Div}(\mathbf{FS}) + \rho_0 \mathbf{B}_0) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_N} (\hat{\mathbf{T}} - \mathbf{FSN}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma_N = 0 \tag{2.19}$$

und damit einen Ausdruck für die virtuelle Arbeit.

Stellt  $\delta \mathbf{u}$  ein virtuelles Verschiebungsfeld dar, ergibt sich aus der Methode der gewichteten Residuen das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV). Mehrmalige Umformungen, die z.B. in BELYTSCHKO U. A. (2014) ausführlich beschrieben sind, führen auf folgenden Ausdruck für das PvV:

$$\delta \Pi_{\text{PvV}}(\mathbf{u}) = \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta \mathbf{E}:\mathbf{S} \, d\Omega_0}_{-\delta \Pi_{\text{int}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{B}_0 \, d\Omega_0 + \int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{T}} \, d\Gamma_N}_{\delta \Pi_{\text{ext}}} = 0 \tag{2.20}$$

Für Problemstellungen, die ein Potential besitzen, kann das PvV auch mittels des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie (PMPE) hergeleitet werden. Die Variation des Potentials

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega_0} W_{\text{int}}(\mathbf{E}) \, d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma_N \quad (2.21)$$

führt nach mehreren Umformungen ebenfalls auf den Ausdruck in Gl. (2.20).

Neben dem hier vorgestellten Einfeldfunktional, bei dem das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  als einzige Primärvariable auftritt, wird in dieser Arbeit auch eine Elementformulierung verwendet, die auf einem Mehrfeldfunktional basiert. Für das achtknotige Volumenschalenelement Shell 10 wird das Funktional nach SIMO UND RIFAI (1990) verwendet, das eine modifizierte Variante des Prinzips von Hu-Washizu (HU (1955) und WASHIZU (1955)) darstellt. Hierauf näher einzugehen, würde jedoch den Rahmen dieses Kapitels sprengen. Daher sei an dieser Stelle auf IRSLINGER (2013) und BISCHOFF (1999) verwiesen. Alle weiteren in der Arbeit verwendeten Elemente basieren auf einem Einfeldfunktional. Aus diesem Grund wird auf weitere Mehrfeldfunktionale nicht tiefer eingegangen. Ausführliche Herleitungen der Prinzipien finden sich für den linearen Fall z. B. in VON SCHEVEN UND BISCHOFF (2016) und für den nichtlinearen Fall u. a. in BELYTSCHKO U. A. (2014).

## 2.3 Lösungsverfahren

Eine analytische Lösung des elastostatischen Randwertproblems lässt sich nur für wenige Sonderfälle finden, weshalb in der Regel numerische Näherungsverfahren zum Einsatz kommen. In der Strukturmechanik ist dies häufig die Finite-Elemente-Methode (FEM), die das kontinuierliche Problem in eine diskrete Form überführt. Dazu wird das kontinuierliche Primärvariablenfeld durch eine Näherung ersetzt, die mithilfe einer endlichen Anzahl  $n$  unbekannter Knotenwerte gebildet wird.

### 2.3.1 Diskretisierung im Raum

Bei der FEM wird zuerst das kontinuierliche Gebiet  $\Omega$  in eine endliche Zahl finiter Elemente unterteilt, die an Knoten miteinander verbunden sind, an denen wiederum die Freiheitsgrade definiert sind:

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \Omega_e. \quad (2.22)$$



Hierbei steht der obere Index  $h$  für diskretisierte Größen, der Index  $e$  für Größen eines Elements  $e$ ,  $n_{\text{ele}}$  bezeichnet die Anzahl der Elemente,  $\cup$  ist der Assemblierungsoperator.

Um Knotenwerte im Element interpolieren zu können, werden Formfunktionen  $N_i$  definiert, die in der Matrix der Formfunktionen  $\mathbf{N}_e$  elementweise zusammengefasst werden. Ein Ansatz für die diskretisierte Geometrie lässt sich somit durch den Ortsvektor der Knoten  $\mathbf{X}^i$  und den Formfunktionen aufstellen. Aus mathematischer Sicht wird dabei ein System partieller Differentialgleichungen in ein System algebraischer Gleichungen überführt.

Neben der Geometrie werden auch das kontinuierliche Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  sowie die virtuellen Verschiebungen  $\delta\mathbf{u}$  durch die Formfunktionen  $\mathbf{N}_e$  und die diskreten Vektoren der Element-Knotenverschiebungen  $\mathbf{d}$  innerhalb eines Elements approximiert:

$$\mathbf{u}_e^h = \mathbf{N}_e \mathbf{d}, \quad (2.23)$$

$$\delta\mathbf{u}_e^h = \mathbf{N}_e \delta\mathbf{d}. \quad (2.24)$$

Werden für die Approximation der Verschiebungen die gleichen Formfunktionen gewählt wie für die Approximation der Geometrie, spricht man vom isoparametrischen Konzept. Wenn für den Ansatz der virtuellen Verschiebungen die gleichen Formfunktionen verwendet werden wie für physikalische Verschiebungen, spricht man auch vom Bubnov-Galerkin-Verfahren. Beide Prinzipien sind Grundlage vieler verschiebungsbasierter Elementformulierungen, wie sie auch in dieser Arbeit verwendet werden. Wenn für die Beschreibung der Geometrie und der Verschiebungen die aus der CAD-Modellierung bekannten Spline-Funktionen verwendet werden, spricht man zudem von isogeometrischen finiten Elementen.

Um die Lesbarkeit der Gleichungen in diesem Abschnitt zu erleichtern, wird in der Folge bei diskreten Größen auf den Kopfzeiger  $(\bullet)^h$  verzichtet. Das PvV aus Gleichung (2.20) lässt sich damit in diskretisierter Form wie folgt schreiben:

$$\delta\Pi_{\text{PvV}}(\mathbf{D}) = -\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\text{int}}(\mathbf{D}) - \delta\Pi_{\text{PvV}}^{\text{ext}}(\mathbf{D}) = \delta\mathbf{D}^T (\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{D})) = 0. \quad (2.25)$$

Hierbei ist  $\mathbf{D}$  der globale Vektor der Knotenverschiebungen,  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  und  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  sind die Vektoren der sog. inneren und äußeren Kräfte. Diese globalen Größen lassen sich wieder aus den Elementgrößen assemblieren:

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{f}_{\text{int}}^e, \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{f}_{\text{ext}}^e, \quad (2.26)$$

mit

$$\mathbf{f}_{\text{int}}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} \, d\Omega_e. \quad (2.27)$$

Das Gleichgewicht der inneren und äußeren Arbeiten kann nach Gleichung (2.25) auch in das Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{D}) = \mathbf{R}(\mathbf{D}) = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

überführt werden, da für die virtuellen Knotenverschiebungen  $\delta\mathbf{D}$  eine beliebige Testfunktion gewählt werden kann, die lediglich die Verschiebungsrandbedingungen erfüllen muss.

### 2.3.2 Linearisierung

Aufgrund der nichtlinearen Beziehung zwischen den inneren Kräften  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  und den Knotenverschiebungen  $\mathbf{D}$  ist das Kräftegleichgewicht nicht direkt lösbar, weshalb zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems ein iteratives Verfahren notwendig ist. Eine Möglichkeit hierfür ist das Newton-Raphson-Verfahren, das in der Nähe der Lösung quadratische Konvergenz aufweist. Hierfür muss zunächst Gleichung (2.28) linearisiert werden. Dies entspricht der Entwicklung einer Taylorreihe bis zum linearen Glied um die Lösung des  $i$ -ten Iterationsschritts:

$$\text{lin } \mathbf{R}(\mathbf{D}^{i+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{D}^i) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}^i} \Delta \mathbf{D}^{i+1} \quad (2.29)$$

mit

$$\Delta \mathbf{D}^{i+1} = \mathbf{D}^{i+1} - \mathbf{D}^i. \quad (2.30)$$

In dieser Arbeit werden keine mitgehenden Lasten berücksichtigt, daher entsteht keine Abhängigkeit der äußeren Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  von den Knotenverschiebungen. Eine anschauliche Darstellung verschiebungsabhängiger Drucklasten findet sich in SCHWEIZERHOF UND RAMM (1984). Gleichung (2.28) vereinfacht sich damit zu

$$\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{R}(\mathbf{D}) = \mathbf{0} \quad (2.31)$$

Somit lässt sich die partielle Ableitung in Gleichung (2.29) zusammen mit Gleichung (2.20) umformulieren zu

$$\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} = \underbrace{\bigcup_e \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}^\top \mathbf{C} \mathbf{B} + \mathbf{B}_{,\mathbf{d}} \mathbf{S}) \, d\Omega_e}_{\mathbf{K}_T} \quad (2.32)$$

wobei  $(\bullet)_{,\mathbf{d}}$  eine vereinfachte Schreibweise für die partielle Ableitung auf Elementebene nach den Elementverschiebungen  $\mathbf{d}$  ist. Der nichtlineare B-Operator  $\mathbf{B}$  setzt die Verzerrungen im Element mit den Knotenverschiebungen in Beziehung,  $\mathbf{C}$  steht für die Materialmatrix. Sie entspricht dem Materialtensor vierter Stufe  $\mathbb{C}$  in Voigt'scher Notation.

Die daraus resultierende globale Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ , die aus den auf Elementebene berechneten Elementsteifigkeitsmatrizen assembliert wird, lässt sich weiter in drei Teile zerlegen:

- die elastische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$ ,
- die Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_u$  und
- die geometrische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_g$ .

Die geometrische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_g$  entspricht dabei dem zweiten Summanden im Integral in Gleichung (2.32). Sie beinhaltet die Steifigkeit, die durch Änderung der inneren Kräfte im Element entsteht, weshalb sie im Englischen auch als initial stress stiffness matrix bezeichnet wird. Der erste Summand in Gleichung (2.32) entspricht der Matrix  $\mathbf{K}_{e,u}$ . Die Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_u$ , die die Änderung der elastischen Steifigkeit aufgrund der Änderung der Geometrie beschreibt, lässt sich durch

$$\mathbf{K}_u = \mathbf{K}_{e,u} - \mathbf{K}_e \quad (2.33)$$

berechnen. Die elastische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_e$  beschreibt die Steifigkeit des unverformten Ausgangssystems und ist somit unabhängig von den Verschiebungen. Weitere Informationen hierzu finden sich u. a. in BISCHOFF U. A. (2016), DE BORST U. A. (2012) oder BELYTSCHKO U. A. (2014).

Wie bereits erwähnt werden in dieser Arbeit keine zeitabhängigen, dynamischen Effekte berücksichtigt. Aus diesem Grund ist eine Diskretisierung in der Zeit nicht erforderlich.



---

## Phänomene der geometrisch nichtlinearen Strukturmechanik

Bei strukturmechanischen Analysen werden häufig lineare Zusammenhänge zwischen Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen angenommen. Diese linearen Theorien stellen häufig eine ausreichend genaue Näherung dar. So sind etwa im Bauwesen die Anforderungen an die Gebrauchstauglichkeit so streng, dass die Deformationen der einzelnen Bauteile oftmals sehr klein sind. Es genügt in diesen Fällen daher das Gleichgewicht am unverformten System zu bilden. Doch es gibt im Bauwesen auch Tragwerke (z.B. Seilnetze), für die die Strukturantwort des mechanischen Modells nach linearer Theorie das reale Verhalten des Tragwerks nicht ausreichend genau abbilden kann. In diesen Fällen muss mit nichtlinearen Theorien gearbeitet werden.

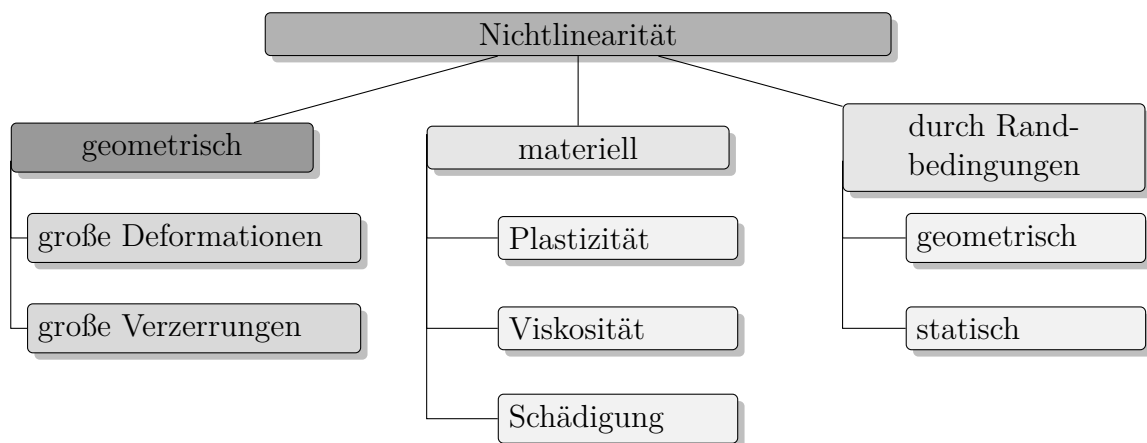
Eine Übersicht über die verschiedenen Ursachen nichtlinearen Strukturverhaltens findet sich in Abschnitt 3.1. Hierin wird näher auf die Hintergründe und die Unterschiede zwischen geometrischen und materiellen Nichtlinearitäten sowie Nichtlinearitäten durch Randbedingungen eingegangen. Abschnitt 3.2 beschäftigt sich zunächst mit den Möglichkeiten der Darstellung des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen aufgebrachtener Last und resultierender Verschiebung. Hierfür werden ebene und räumliche Darstellungen der primären und sekundären Gleichgewichtspfade für Systeme mit einem Lastparameter vorgestellt. In einem nächsten Schritt wird für den Fall mehrerer veränderlicher Parameter die Darstellung der Last-Verschiebungs-Beziehung über Gleichgewichtsflächen beschrieben. In Abschnitt 3.3 wird zunächst ein kurzer Überblick über verschiedene Definitionen von Stabilität gegeben. Anschließend wird der in der Arbeit verwendete Begriff der Stabilität statischer Gleichgewichtszustände in der Strukturmechanik genauer erläutert. In Abschnitt 3.4 wird auf die kritischen Punkte eingegangen. Es wird das unterschiedliche Verhalten von Durchschlags- und Verzweigungspunkten aufgezeigt, zudem werden auch hier die Besonderheiten bei Mehrparametersystemen vorgestellt. Im Anschluss folgt in Abschnitt 3.5 die Frage nach dem Verhalten unmittelbar nach dem

Erreichen eines kritischen Punkts. Neben der Einteilung nach KOITER (1967) wird in dieser Arbeit erstmals auch auf die Unterscheidung kritischer Punkte für Systeme mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen in Bezug auf das Nachbeulverhalten eingegangen. Abschließend befasst sich Abschnitt 3.6 mit dem Einfluss von Imperfektionen auf die Stabilität von Tragwerken, auf die Eigenschaften kritischer Punkte sowie auf das Nachbeulverhalten.

Die Ergebnisse aller gezeigten Beispiele in diesem Kapitel sind rein qualitativ. Sie dienen lediglich der Beschreibung und Veranschaulichung ausgewählter Effekte. Wenn nicht anders angegeben sind bei allen Beispielen die Querschnittsfläche sowie der Elastizitätsmodul konstant.

## 3.1 Nichtlineare Effekte in der Strukturmechanik

Die in der Festkörpermechanik auftretenden Nichtlinearitäten lassen sich nach ihrem Ursprung in drei Gruppen einteilen:



**Abbildung 3.1:** Übersicht über nichtlineare Effekte in der Strukturmechanik, vgl. WAGNER (2017)

Von *geometrischer Nichtlinearität* spricht man, wenn der Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und den resultierenden Verschiebungen nicht mehr linear ist. Diese Nichtlinearität entsteht durch Änderungen der Steifigkeit aufgrund der Geometrieänderung, die, anders als bei einer linearen Berechnung, nicht mehr vernachlässigbar klein ist. Geometrisch nichtlineare Effekte treten also bei großen Deformationen auf. Die großen Deformationen führen dazu, dass das Gleichgewicht nicht mehr am unverformten System gebildet werden kann. Die Gleichgewichtsbedingung gilt also für den deformierten Zustand, dieser ist zu Beginn der Berechnung jedoch unbekannt. Die Lösung kann somit

nicht in einem Schritt ermittelt werden, sondern muss durch einen iterativen Prozess bestimmt werden. Hierbei wird die Gleichgewichtsbedingung in jedem Iterationsschritt am deformierten System neu aufgestellt.

Bei großen Deformationen muss man zwischen großen Verschiebungen bzw. Rotationen bei kleinen Verzerrungen und bei großen Verzerrungen unterscheiden. Diese Arbeit konzentriert sich auf Fälle, bei denen die Verschiebungen und Rotationen groß, die Verzerrungen jedoch klein sind. Beispiele hierfür sind z. B. Schalen- oder Seilkonstruktionen. Große Verschiebungen und Rotationen in Kombination mit großen Verzerrungen, wie sie etwa bei Umformprozessen auftreten, werden hier nicht näher analysiert.

Von *materieller Nichtlinearität* ist die Rede bei einem nichtlinearen Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen. Die Nichtlinearität kann wiederum verschiedene Ursachen haben, weshalb zwischen den drei folgenden Effekten unterschieden wird.

- Gehen nach Be- und Entlastungsvorgang die Deformationen nicht vollständig zurück, spricht man von *Plastizität*. Das Materialverhalten wird auch als pfadabhängig bezeichnet.
- Von *Schädigung* spricht man, wenn das Materialgesetz Schädigungen auf Mikroebene berücksichtigt.
- Ist das Materialgesetz zudem zeit- bzw. geschwindigkeitsabhängig, spricht man von *Viskosität*. Ein bekannter Effekt ist hierbei das Kriechen.

Es existieren daneben verschiedene Mischformen wie die nichtlineare Viskoplastizität. Einen ausführlichen Überblick über verschiedene lineare und nichtlineare Materialmodelle und deren Implementierung findet man in BELYTSCHKO U. A. (2014).

Als Drittes bleiben noch die Nichtlinearitäten, die durch *Randbedingungen* hervorgerufen werden. Ein Beispiel für Nichtlinearitäten durch statische Randbedingungen sind mitgehende Lasten wie Gas- oder Flüssigkeitsdruck. Diese Lasten stehen immer senkrecht auf der Oberfläche und ändern somit in jedem Iterationsschritt ihre Richtung. Ein Beispiel für Nichtlinearitäten durch Verschiebungsrandbedingungen sind Kontaktprobleme. Auch hier sei wieder auf die Literatur verwiesen. Mitgehende Lasten werden u. a. in WRIGGERS (2001) behandelt. Eine ausführliche Auseinandersetzung mit Kontaktproblemen findet sich u. a. in WRIGGERS (2007).

Die geometrische und die materielle Nichtlinearität zeigen sich in den ersten beiden der drei Feldgleichungen aus Gl. (2.18). Der dritte Punkt, die nichtlinearen Randbedingungen, entsprechen den letzten beiden Gleichungen aus Gl. (2.18). Lediglich die dritte Feldgleichung, die Gleichgewichtsbedingung, ist für den linearen und den nichtlinearen Fall identisch. In der Literatur ist vereinzelt die Rede von *statischer Nichtlinearität*, wenn

das Gleichgewicht am verformten System gebildet wird. Da die entsprechende Feldgleichung jedoch unverändert bleibt, erscheint diese Bezeichnung unpassend und wird hier nicht weiter verwendet.

Im Rahmen dieser Arbeit soll der Fokus auf geometrisch nichtlineare Effekte gelegt werden. Materielle Nichtlinearitäten sowie Nichtlinearitäten durch Randbedingungen werden nur der Vollständigkeit halber kurz erläutert.

## 3.2 Statische Gleichgewichtspfade und Gleichgewichtsflächen

Wird der Zusammenhang zwischen der bei einem realen Versuch auf einen Probekörper aufgebrachten Last und der daraus resultierenden Verschiebung für ein reales Experiment grafisch aufgetragen, spricht man von einer Last-Verschiebungskurve. Bei numerischen Experimenten lässt sich dieser Zusammenhang ebenfalls darstellen, man spricht dann von einem Gleichgewichtspfad. Diese beiden Kurven können identisch sein, wenn das Experiment quasi-statisch – also ohne Berücksichtigung dynamischer Effekte – durchgeführt wird.

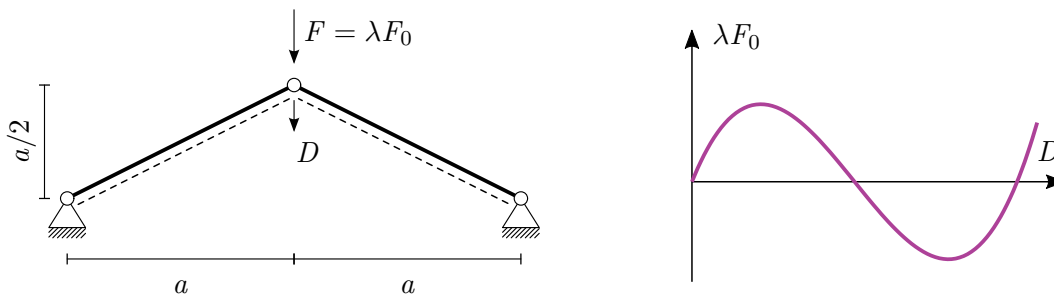
### Gleichgewichtspfade in der Ebene

Die Eigenschaften und unterschiedlichen Arten der Darstellung von Gleichgewichtspfaden und -flächen sollen zunächst anhand einiger einfacher Beispiele gezeigt werden. Hierfür wird zunächst das in Abbildung 3.2 dargestellte flache, symmetrische und durch eine Einzellast  $F$  belastete Dreigelenktragwerk untersucht. Das Verhalten des Tragwerks lässt sich dabei mit nur einem Freiheitsgrad  $D$  beschreiben. Dies liegt zum einen darin begründet, dass sowohl das System als auch die Last symmetrisch sind. Zum anderen ist die Geometrie so gewählt, dass kein Verzweigen auftritt. Für welche Geometrien dies zutrifft, wird im Anhang A.1 analysiert und beschrieben.

Im rechten Teil von Abbildung 3.2 ist der Gleichgewichtspfad dargestellt. Er entspricht der Last-Verschiebungskurve für ein verschiebungsgesteuertes Experiment. An jedem Punkt entlang dieser Kurve befindet sich das System im Gleichgewicht. Beginnt der Pfad wie hier im Ursprung, spricht man vom Primärpfad.

Bei Tragwerken, die durch eine äußere Kraft  $F$  belastet sind, wird hierbei eine ausgewählte Verschiebung  $D$  auf der Abszissenachse angetragen, die aufgebrachte Last  $F = \lambda F_0$





**Abbildung 3.2:** Modell des flachen, symmetrischen Dreigelenktragwerks (links) und der dazugehörige Gleichgewichtspfad (rechts)

oder der Lasterhöhungsfaktor  $\lambda$  auf der Ordinatenachse. Wirkt dagegen eine Verschiebungslast, befindet sich an jedem belasteten Knoten ein zusätzliches Lager. Auf der Abszissenachse wird die an den zusätzlichen Lagern aufgebrauchte Verschiebung  $\hat{D} = \lambda \hat{D}_0$  angetragen, auf der Ordinatenachse die resultierende Lagerkraft  $F$ , die im Nachgang aus den Verschiebungen rückgerechnet werden kann. Werden mehrere Knoten verschoben, bietet es sich in vielen Fällen an, eine Resultierende zu ermitteln und für  $F$  diese Resultierende durch die Anzahl der verschobenen Knoten zu dividieren.

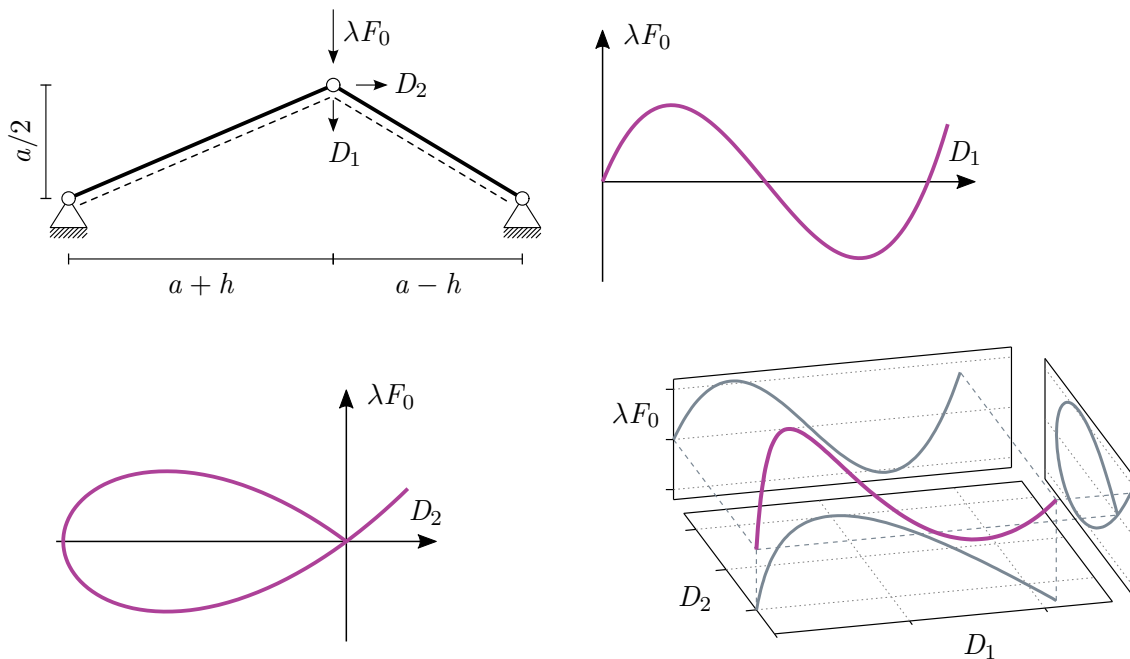
Da bei diesem Beispiel nur ein veränderlicher Parameter  $\lambda$  und eine Verschiebung existieren, liegt die Gleichgewichtskurve in einer Ebene.

### Gleichgewichtspfade im Raum

Im nächsten Beispiel betrachten wir das in Abbildung 3.3 dargestellte asymmetrische Dreigelenktragwerk. Durch die Asymmetrie entstehen in diesem Beispiel nicht nur vertikale, sondern auch horizontale Verschiebungen. Es handelt sich um ein System mit einem Lastparameter und zwei Freiheitsgraden, der Gleichgewichtspfad liegt also im dreidimensionalen Raum.

In der räumlichen Darstellung in Abbildung 3.3 erkennt man, dass es sich bei den beiden ebenen Gleichgewichtspfaden für die Verschiebungen  $D_1$  und  $D_2$  um Projektionen des Gleichgewichtspfads in zweidimensionale Unterräume handelt.

Für Systemen mit mehr als zwei Freiheitsgraden ist es immer erforderlich, Projektionen des  $n + 1$ -dimensionalen Pfads in den zwei-, seltener auch den dreidimensionalen Unterraum zu betrachten. Hierbei steht  $n$  für die Zahl der Freiheitsgrade des Systems. Je nach Wahl des Unterraums, in den die Kurve projiziert wird, können jedoch Eigenschaften des Pfads und somit Verhaltensweisen des Tragwerks nicht sofort ersichtlich sein. So können etwa plötzliche Richtungsänderungen der Kurve nur in einigen der Projektionen auftreten, während der Pfad in anderen Projektionen keine Änderung seiner Richtung

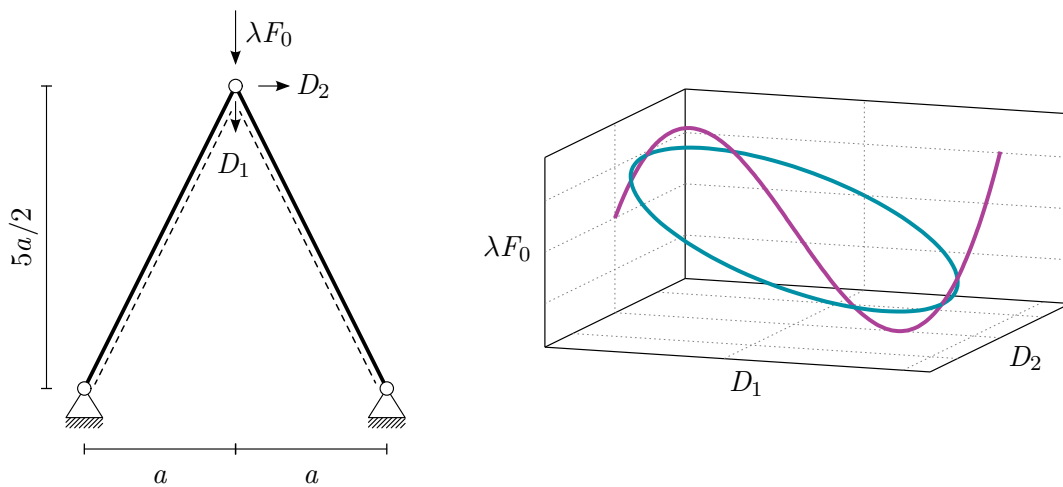


**Abbildung 3.3:** Modell des flachen, asymmetrischen Dreigelenktragwerks (links oben) und der dazugehörige Gleichgewichtspfad für die Freiheitsgrade  $D_1$  und  $D_2$  (rechts oben & links unten), räumliche Darstellung mit Projektionen (rechts unten)

aufweist. An dieser Stelle sei auf die Arbeit von POHL (2014) verwiesen, in der Methoden zur effizienten Berechnung komplexer Gleichgewichtspfade vorgestellt werden, die sich diese Eigenschaften zunutze machen.

Das dritte untersuchte Beispiel ist ein hohes Dreigelenktragwerk, wie es in Abbildung 3.4 zu sehen ist. Die Abmessungen wurden so gewählt, dass ein sekundärer Gleichgewichtspfad existiert (weitere Informationen hierzu siehe Anhang A.1). Ausgehend vom Punkt, an dem die beiden Pfade verzweigen, kann sich das Tragwerk sowohl in  $D_1$  als auch in  $D_2$ -Richtung verformen und befindet sich dabei im Gleichgewicht.

Für komplexe Tragwerke mit mehreren hundert oder tausend Freiheitsgraden existiert im Allgemeinen eine Vielzahl von Gleichgewichtspfaden. Diese können, wie hier, den Primär- oder einen anderen Gleichgewichtspfad schneiden. Es existieren aber auch isolierte Pfade, die keinerlei Verbindung zu anderen Pfaden besitzen.



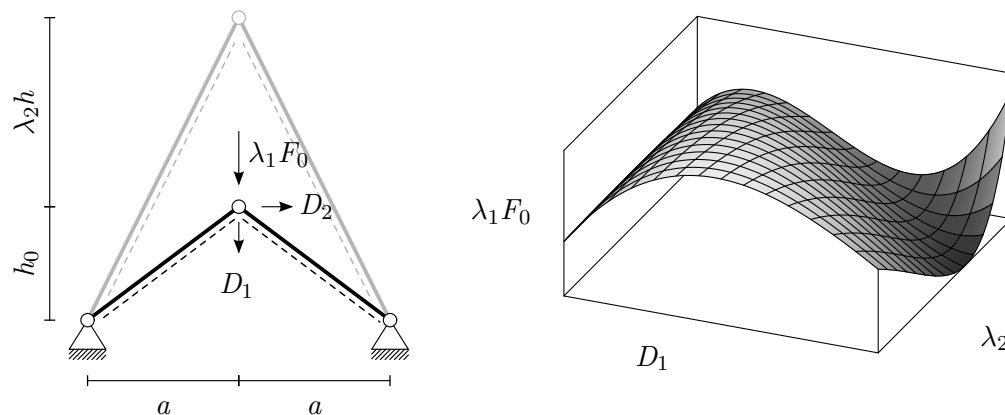
**Abbildung 3.4:** Modell des hohen, symmetrischen Dreigelenktragwerks (links) und die dazugehörige Gleichgewichtskurve (rechts) mit Primär- und Sekundärpfad

### Gleichgewichtsflächen

Bei allen bisherigen Beispielen wurde immer von einem Lastparameter  $\lambda$  ausgegangen. Im folgenden Beispiel, einem zunächst flachen Dreigelenktragwerk, wird ein zweiter Parameter eingeführt. Diese zweite zu parametrisierende Größe kann dabei frei gewählt werden. Es kann sich dabei um eine zweite Last  $\lambda_2 F_0$  handeln, aber auch um eine materielle oder geometrische Größe. So lassen sich beispielhaft der E-Modul in ausgewählten Elementen oder die ursprüngliche Lage einzelner Knoten parametrisieren. Im folgenden Beispiel wird die Höhe  $h_0 + \lambda_2 h$  des Dreigelenktragwerks variiert.

Durch den zusätzlichen Parameter  $\lambda_2$  ergibt sich die rechts in Abbildung 3.5 dargestellte Gleichgewichtsfläche. Sie lässt sich als eine kontinuierliche Aneinanderreihung der einzelnen Gleichgewichtspfade für die variiierende Höhe verstehen. Die dargestellte Fläche ist jedoch nur eine Projektion der vierdimensionalen Hyperfläche  $(\lambda_1, \lambda_2, D_1, D_2)$  in den dreidimensionalen Unterraum  $(\lambda_1, \lambda_2, D_1)$ . Auf dieser Fläche können wiederum Pfade mit ausgewählten Eigenschaften gefunden werden. Auf der hier abgebildeten Fläche kann etwa der Pfad der kritischen Punkte, im Englischen auch als Fold Line bezeichnet, verfolgt werden. Hierzu sei auf das Kapitel 5 verwiesen, in dem genau diese Pfade näher untersucht werden.

Auch bei einer Fläche, die durch einen zweiten Lastparameter entsteht, kann nach Pfaden auf der Fläche gesucht werden, die wiederum spezielle Eigenschaften besitzen. So lassen sich etwa Pfade finden, auf denen die beim Abläufen zu leistende Arbeit minimal ist. Andere Pfade verbinden zwei Gleichgewichtspunkte, für die jeweils eine gewünschte Geometrie vorgegeben ist, ohne dabei instabil zu werden.

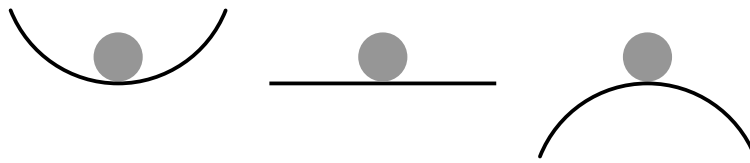


**Abbildung 3.5:** Modell eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe (links) und die dazugehörige Gleichgewichtsfläche (rechts)

### 3.3 Stabilität statischer Gleichgewichtszustände

Leonhard Euler analysiert 1744 erstmals das Knicken schlanker, gerader, druckbeanspruchter Stäbe. Noch heute sind die vier Euler'schen Knickfälle Bestandteil der Lehre für angehende Ingenieure. Im Jahr 1788 befasst sich Joseph-Louis Lagrange in „*Mécanique Analytique*“ ebenfalls mit der Frage nach Stabilität. Anders als Euler, der sich mit der Stabilität statischer Systeme auseinandersetzt, befasst sich Lagrange mit der Stabilität dynamischer Systeme. Die Definition von stabilem Gleichgewicht geht dabei auf das Minimum der potentiellen Energie zurück. Im Jahr 1892 liefert Alexander Michailowitsch Liapunov in seiner Dissertation eine Stabilitätstheorie nichtlinearer dynamischer Systeme. Danach ist ein System bzw. ein Prozess dann stabil, wenn die Lösung eines gestörten Problems nicht über alle Grenzen hinweg von der Lösung des ungestörten Systems abweicht. Weitere Ausführungen zu den genannten Theorien finden sich u. a. in LORIA UND PANTELEY (2017), TIMOSCHENKO (1936), KOLLBRUNNER UND MEISTER (1955), BÜRGERMEISTER UND STEUP (1966) sowie THOMPSON UND HUNT (1984).

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Frage der Stabilität von Gleichgewichtszuständen. Auch hierauf kann die Definition nach Liapunov übertragen werden. Ein System befindet sich demnach in einem stabilen Gleichgewichtszustand, wenn es nach einer hinreichend kleinen Störung wieder in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückkehrt. Ist ein System durch konservative Kräfte belastet, lässt sich das Verhalten gut am Beispiel der Kugel in Abbildung 3.6 beschreiben. Wird die Kugel im linken Bild ausgelenkt, kehrt sie wieder in den Ausgangszustand zurück. Hierbei lässt sich die Kurve auch als potentielle Energie betrachten. Weist die potentielle Energie ein lokales Minimum auf, befindet sich das System in einem stabilen Gleichgewicht.



**Abbildung 3.6:** Stabilität eines Gleichgewichtszustand am Beispiel einer Kugel. Stabiler Gleichgewichtszustand (links), indifferenten Gleichgewichtszustand (mitig) und instabiler Gleichgewichtszustand (rechts)

Ein Gleichgewichtszustand ist hingegen instabil, wenn bereits eine kleine Störung dazu führt, dass sich das System unaufhaltsam von der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt. Dies lässt sich an der rechten Darstellung in 3.6 erkennen. Lenkt man die Kugel nur minimal aus, rollt diese nicht wieder zurück in ihre ursprüngliche Ausgangsposition. Interpretiert man die Kurve wieder als potentielle Energie, so weist sie in diesem Fall ein lokales Maximum auf.

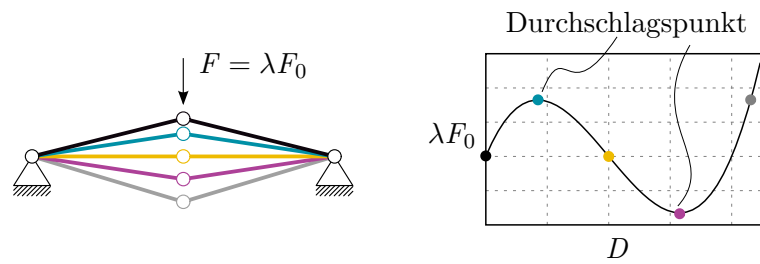
Der Fall des indifferenten Gleichgewichts ist im mittleren Bild zu sehen und bildet den Übergang zwischen stabilem und instabilem Gleichgewicht. Nach einer kleinen Auslenkung der Kugel kehrt diese nicht wieder in die Ausgangslage zurück. Die Auslenkung wächst allerdings auch nicht über alle Grenzen hinweg an.

### 3.4 Kritische Punkte und kritische Pfade

Von besonderem Interesse sind die Punkte auf dem Gleichgewichtspfad oder der Gleichgewichtsfläche, an denen die Grenze des stabilen Gleichgewichts erreicht wird. Diese kritischen Punkte zeichnen sich – frei nach Euler – dadurch aus, dass für die gegebene Belastung neben dem aktuellen Gleichgewichtszustand mindestens ein weiterer, unmittelbar benachbarter Gleichgewichtszustand existiert.

In Anlehnung an MANG UND HOFSTETTER (2000) lassen sich kritische Punkte nach ihrer Versagensart im Stabilitätsfall in drei Arten unterteilen: Durchschlagen, Verzweigen des Gleichgewichts und das Erreichen der Traglast. Da es sich im dritten Fall, dem Erreichen der Traglast, definitionsgemäß um ein materiell nichtlineares Phänomen handelt, konzentriert sich diese Arbeit auf die Untersuchung von Durchschlagspunkten, im Englischen als *limit points* bezeichnet, und Verzweigungspunkten, im Englischen *bifurcation point* genannt. Wenn im Folgenden von kritischen Punkten die Rede ist, bezieht sich dies ausschließlich auf Durchschlags- und Verzweigungspunkte.

Kritische Punkte kennzeichnen sich nach Euler also durch des Vorhandensein eines unmittelbar benachbarten Gleichgewichtszustands bei gleichbleibender Last. Dies bedeu-



**Abbildung 3.7:** Durchschlagpunkte für Kraftlastfall am Beispiel eines Dreigelenktragwerks (qualitativ)

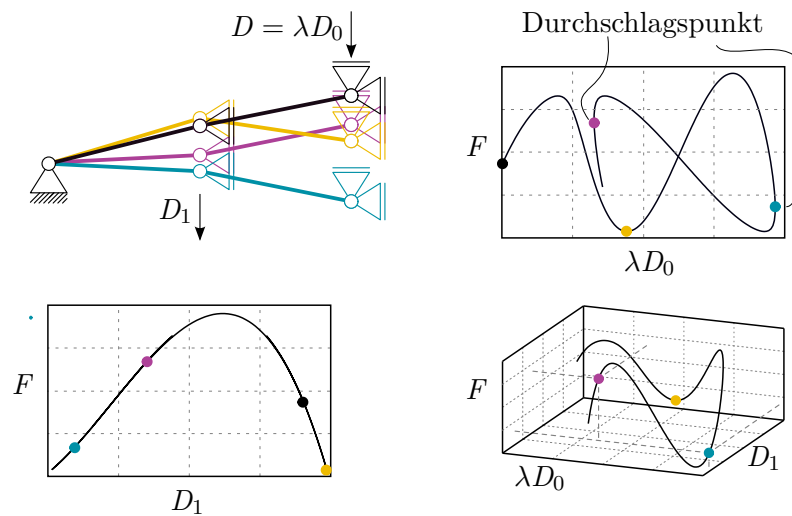
tet, dass an einem kritischen Punkt die Steifigkeit in mindestens eine Richtung gleich null sein muss. Dies hat zur Folge, dass die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  an einem kritischen Punkt singular wird und nicht mehr positiv definit ist.

Das unterschiedliche Verhalten beim Erreichen bzw. Überschreiten von kritischen Punkten lässt sich in den Abbildungen 3.7, 3.8 und 3.9 erkennen. Die Art des kritischen Punkts hängt dabei von der Richtung ab, in die der Eigenvektor am kritischen Punkt orientiert ist. Hierauf wird im Abschnitt 4.3.3 näher eingegangen.

#### 3.4.1 Durchschlagpunkte bei Kraftlastfällen

In Abbildung 3.7 ist ein flaches Dreigelenktragwerk mit dem dazugehörigen qualitativen Gleichgewichtspfad dargestellt. Hierbei ist die aufgebrachte Last  $\lambda F_0$  am mittleren Knoten über die resultierende vertikale Verschiebung des Knotens aufgetragen. Neben der in schwarz dargestellten Ausgangsgeometrie sind mehrere deformierte Zustände dargestellt. Die zu den Deformationszuständen gehörenden Punkte auf der Gleichgewichtskurve sind in den jeweils passenden Farben gekennzeichnet. Am ersten Durchschlagpunkt, hier in blau dargestellt, weist der Gleichgewichtspfad eine horizontale Tangente auf. Diese horizontale Tangente lässt sich auch anschaulich interpretieren: Das System besitzt keine Steifigkeit in Richtung der aufgebrachten Kraftlast  $\lambda F_0$ . Ohne  $\lambda$  weiter zu steigern lässt sich das System also in einen infinitesimal benachbarten Gleichgewichtszustand führen. Dies entspricht der Definition des indifferenten Gleichgewichts aus Abschnitt 3.3.

Bei einem lastkontrollierten Experiment ist das Tragwerk nach dem Erreichen des Durchschlagpunkts instabil und schlägt dynamisch durch. Nach dem Ausschwingen kommt es auf einem stabilen Ast des Gleichgewichtspfads in der grau gezeichneten Konfiguration zur Ruhe. Wird die Last im Anschluss wieder zurückgefahren, ist das System bis zum Erreichen des pink gekennzeichneten Durchschlagpunkts stabil und schlägt von dort in eine hier nicht dargestellte Gleichgewichtslage zurück.



**Abbildung 3.8:** Durchschlagspunkte für Verschiebungslastfall am Beispiel eines modifizierten Dreigelenktragwerks (qualitativ)

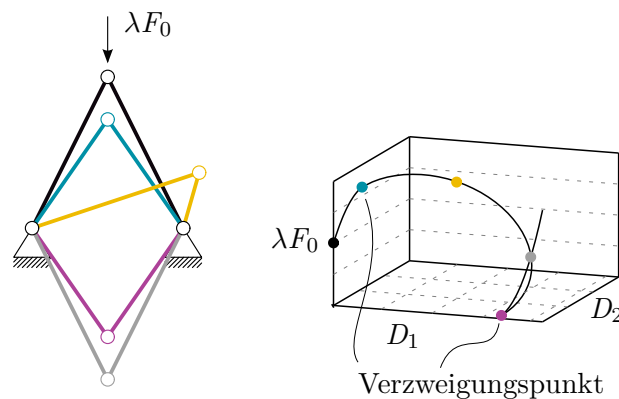
### 3.4.2 Durchschlagspunkte bei Verschiebungslastfällen

Abbildung 3.8 zeigt die Modifikation eines Dreigelenktragwerks. Es ist am rechten Knoten mit einer inhomogenen Verschiebungsrandbedingung belastet. Die dazugehörigen Gleichgewichtspfade sind daneben und darunter abgebildet. Sie zeigen die resultierende vertikale Lagerkraft  $F$  am rechten Knoten, angetragen über die aufgebrachte Verschiebung  $\lambda D_0$  bzw. die vertikale Verschiebung  $D_1$  am freien Knoten. Anders als bei Kraftlastfällen, bei denen die aufgebrachte Last  $\lambda F_0$  über die resultierende Verschiebung  $D$  angetragen wird, tritt der erste Durchschlagspunkt folglich auch nicht an der ersten horizontalen, sondern an der ersten vertikalen Tangente des Gleichgewichtspfad auf. Ähnlich wie die horizontale Tangente bei einem Kraftlastfall lässt sich auch die vertikale Tangente bei einem Verschiebungslastfall anschaulich interpretieren: am Durchschlagspunkt besitzt das System keine Flexibilität in Richtung der aufgebrachten Verschiebung  $D$ . Es existiert also in der unmittelbaren Umgebung für die gleiche aufgebrachte Verschiebung  $D$  ein weiterer Gleichgewichtszustand.

Bei einem verschiebungsgesteuerten Experiment wird das System mit Erreichen des Durchschlagspunkts instabil. Auch hier schlägt das System dynamisch durch und kommt auf einem stabilen Ast des Gleichgewichtspfad zur Ruhe.

### 3.4.3 Verzweigungspunkte

In Abbildung 3.9 ist ein hohes Dreigelenktragwerk mit dazugehörigem Gleichgewichtspfad dargestellt. Das Dreigelenktragwerk wird durch eine äußere Kraftlast  $F = \lambda F_0$



**Abbildung 3.9:** Verzweigungspunkt am Beispiel eines Dreigelenktragwerks (qualitativ)

belastet. Zum besseren Verständnis ist der Gleichgewichtspfad im Raum gegeben. Hierbei stehen  $D_1$  für die vertikale und  $D_2$  für die horizontale Verschiebung des belasteten Knotens.

Anders als bei dem niedrigen Dreigelenktragwerk in Abbildung 3.7 wird hier der Primärpfad vor dem ersten Durchschlagspunkt – also vor dem ersten lokalen Maximum – von einem Sekundärpfad gekreuzt. Man spricht daher von einem Verzweigungspunkt. Auch an einem Verzweigungspunkt wird die Steifigkeitsmatrix des diskretisierten Systems singular. Anders als bei Durchschlagspunkten verschwindet bei Verzweigungspunkten die Steifigkeit jedoch nicht in Richtung der aufgebracht Last, sondern orthogonal dazu. Ist das System perfekt, wird sich das Tragwerk entsprechend dem Primärpfad weiter verformen. Minimale Störungen der Gleichgewichtslage reichen jedoch aus, um vom Primärpfad in den Sekundärpfad (schwarz dargestellt) zu wechseln.

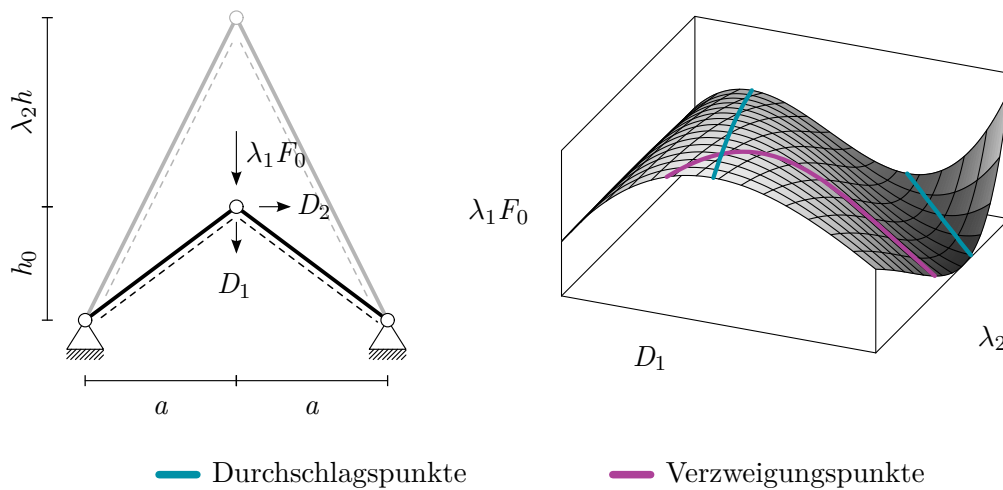
Anders als bei echten Durchschlagproblemen, bei denen sich der kritische Punkt durch die starke Änderung der Steigung der Gleichgewichtskurve ankündigt, treten Verzweigungsprobleme ohne Vorwarnung auf. Typische Beispiele hierfür aus der Praxis sind das Beulen von Zylindern, wie z. B. Silos, oder das Ausknicken druckbelasteter Stützen.

### 3.4.4 Kritische Pfade bei Mehrparametersystemen

Wie schon in Abschnitt 3.2 gezeigt, lässt sich für Systeme mit mehreren Parametern die Gleichgewichtsbeziehung als Fläche darstellen (vgl. Abb. 3.5). So wie aus einem Gleichgewichtspfad im zweidimensionalen Raum bei Hinzunahme eines weiteren Parameters (in diesem Fall die Höhe des Dreigelenktragwerks) eine Fläche im dreidimensionalen Raum entsteht, so wandelt sich der kritische Punkt zum kritischen Pfad.

Wir betrachten erneut das Dreigelenktragwerk mit variabler Höhe. In Abbildung 3.10 ist die schon bekannte Gleichgewichtsfläche dargestellt, bei der der Lasterhöhungsfaktor  $\lambda_1$





**Abbildung 3.10:** Modell eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe (links) und die dazugehörige Gleichgewichtsfläche (rechts) mit kritischen Pfaden

über die vertikale Verschiebung  $D_1$  sowie den Faktor der Höhenänderung  $\lambda_2$  dargestellt ist. Zusätzlich sind die kritischen Pfade eingezeichnet. Die blauen Pfade markieren hierbei die Lage der Durchschlagspunkte, der violette Pfad die der Verzweigungspunkte. Für Durchschlagspunkte liegt der kritische Pfad entlang des Grats, er wird im Englischen daher auch als Fold Line bezeichnet (vgl. JEPSON UND SPENCE (1985)). Erste Arbeiten zur Ermittlung kritischer Pfade für strukturmechanische Problemstellungen finden sich in ERIKSSON (1994) und ERIKSSON (1997), neuere Ergebnisse zur Stabilitätsanalyse von Mehrparametersystemen finden sich u. a. in REZAIIEE-PAJAND UND MOGHADDASIE (2014) sowie GROH U. A. (2018).

Am Schnittpunkt der beiden Kurven existieren sowohl ein Durchschlagspunkt als auch ein Verzweigungspunkt. An dieser Stelle ergeben sich beide Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix zu null.

## 3.5 Nachbeulverhalten

In Abschnitt 3.3 wurde bereits auf eine allgemeine Definition der Stabilität statischer Gleichgewichtspunkte eingegangen. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich speziell mit der Frage der Stabilität von Gleichgewichtspfaden im unmittelbaren Nachbeulbereich, also nach dem Erreichen des ersten kritischen Punkts.

Das Verhalten im Nachbeulbereich ist bei der Analyse und Bemessung eines Tragwerks von großer Bedeutung. Systeme, die nach Erreichen eines Verzweigungspunkts instabil werden, reagieren besonders empfindlich auf Imperfektionen. Dies kann dazu führen,

dass die kritische Last, also die Last beim Erreichen eines kritischen Punkts, bei einem realen Tragwerk deutlich niedriger liegt als bei einer numerischen Analyse, die von einer perfekten Anfangsgeometrie ausgeht. Bleibt ein Tragwerk nach dem Erreichen eines Verzweigungspunkts hingegen stabil, kann die aufnehmbare Last unter Umständen sogar noch gesteigert werden. Die Imperfektionsempfindlichkeit eines solchen Tragwerks ist deutlich geringer.

Die in diesem Abschnitt gezeigten Diagramme basieren auf der Arbeit von KOITER (1967), die in niederländischer Sprache bereits im Jahr 1945 erschien. Neben der Einteilung, die Koiter für Systeme unter einer äußeren Kraftlast vorgenommen hat, wird in dieser Arbeit gezeigt, dass sich diese Kategorisierung auch auf Systeme unter Verschiebungslasten übertragen lässt.

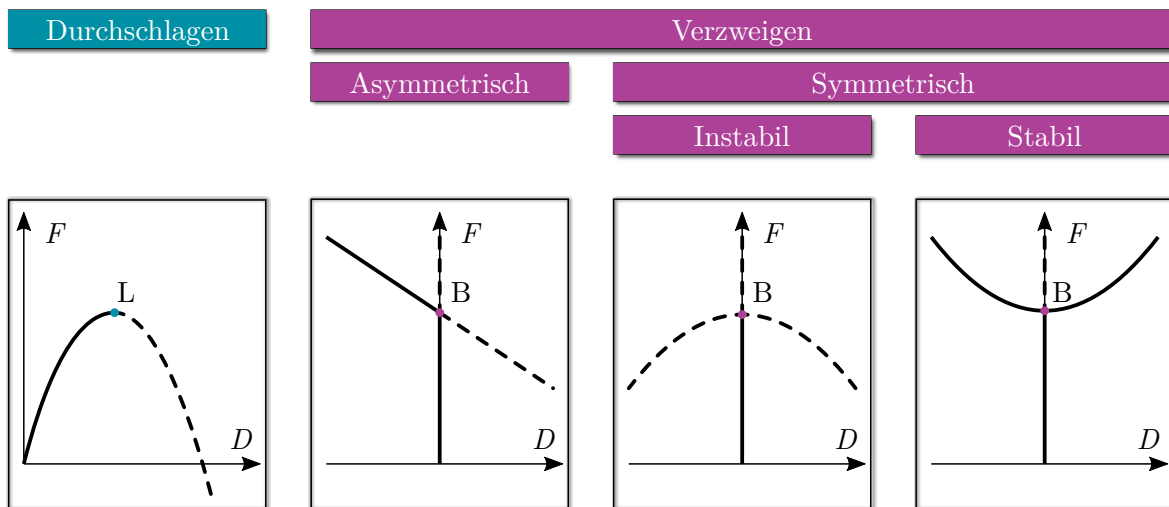
Zudem wird das Stabilitätsverhalten für Mehrparametersysteme am bekannten Beispiel des Dreigelenktragwerks visualisiert und analysiert.

#### 3.5.1 Kraftlastfälle

In dieser Arbeit wurde bereits auf den Unterschied zwischen Durchschlags- und Verzweigungspunkten eingegangen. Nach Koiter lassen sich Verzweigungspunkte anhand des Verhaltens unmittelbar nach Erreichen des kritischen Punkts nochmals unterteilen in symmetrische und asymmetrische Verzweigungspunkte. Bei symmetrischen Verzweigungspunkten unterscheidet man abermals zwischen stabilen und instabilen Punkten. Alle Varianten sind in Anlehnung an Koiter in Abbildung 3.11 dargestellt. Dabei sind instabile Abschnitte der Gleichgewichtspfade gestrichelt dargestellt. Die kritischen Punkte sind mit den Anfangsbuchstaben der englischen Bezeichnung für den jeweiligen kritischen Punkt gekennzeichnet: L steht somit für Durchschlagspunkte (limit points), B steht für Verzweigungspunkte (bifurcation points).

Wie in Abschnitt 3.3 bereits erwähnt, kann für die Untersuchung der Stabilität auch die potentielle Energie des Systems analysiert werden. Alle folgenden Aussagen beziehen sich dabei auf die Projektion der Energie in einen ausgewählten  $D$ - $F$ -Unterraum. An stabilen Gleichgewichtspunkten besitzt die Energie ein lokales Minimum, an instabilen ein Maximum. An einem stabilen Verzweigungspunkt wird die potentielle Energie ebenfalls minimal, an instabilen Verzweigungspunkten maximal. An asymmetrischen Verzweigungs- sowie Durchschlagspunkten weist die Energie einen Sattelpunkt auf. Weitere Informationen hierzu finden sich u. a. in THOMPSON UND HUNT (1973a).

Ein in der Baupraxis bekanntes Beispiel, bei dem Durchschlagsprobleme auftreten können, sind flache Bögen oder flache Kuppeln. Druckbelastete Stützen, die den Eulerlastfällen zwei bis vier entsprechen, sind Beispiele für stabile, symmetrische Verzwei-



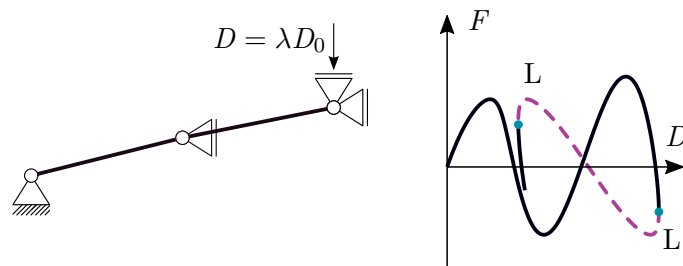
**Abbildung 3.11:** Klassifikation kritischer Punkte für Kraftlastfälle, angelehnt an KOITER (1967)

gungspunkte. Hier kann auch nach dem Erreichen der kritischen Last  $F_{\text{krit}} = \lambda_{\text{krit}} F_0$  die Last weiter gesteigert werden, ohne dass es zu einem kompletten Ausfall der Stütze kommt. Der erste Eulerfall hingegen, also eine auskragende, druckbelastete Stütze mit freiem Ende ist ein Beispiel für einen instabilen Verzweigungspunkt. Hier versagt das Bauteil schlagartig nach dem Überschreiten der kritischen Last  $F_{\text{krit}}$ . Asymmetrische Verzweigungspunkte sind seltener zu finden. Das liegt daran, dass Verzweigen nur bei symmetrischen Konstruktionen auftritt. Es müssen also Tragwerke sein, die bis zum Erreichen des Verzweigungspunkts symmetrisch sind und sich erst im Nachbeulbereich asymmetrisch verhalten. Diese Eigenschaft findet sich z. B. bei rotationssymmetrischen Strukturen.

Es sei angemerkt, dass die instabilen Äste nicht in realen, sondern nur in numerischen Experimenten mit Pfadverfolgungsalgorithmen, wie sie in Abschnitt 4.1 vorgestellt werden, ermittelt werden können. Doch auch wenn diese instabilen Äste des Gleichgewichts in der Realität nie erreicht werden, bieten sie trotzdem einen tiefen Einblick in das Verhalten eines Tragwerks. So lassen sich nach WAGNER (1991) etwa Erkenntnisse über das Imperfektionsverhalten gewinnen. Zudem lässt die Analyse statischer Gleichgewichtspfade Rückschlüsse auf das dynamische Verhalten zu.

### 3.5.2 Verschiebungslastfälle

Die in Abbildung 3.11 dargestellte Kategorisierung gilt, wie bereits erwähnt, in dieser Form nur für statische Systeme, die durch einen Kraftlastfall belastet sind. Anhand



**Abbildung 3.12:** Stabilität des Nachbeulbereichs bei Durchschlagspunkt in Anlehnung an KOITER (1967) unter Verschiebungslast

möglichst einfacher Beispiele soll gezeigt werden, dass sich die Koiter'schen Kategorien prinzipiell auch auf Systeme mit Verschiebungslastfällen übertragen lassen.

#### Durchschlagspunkte

Ein einfaches Beispiel für Durchschlagspunkte bei Verschiebungslastfällen, eine Modifikation eines Dreigelenktragwerks, ist in Abbildung 3.12 dargestellt. Neben dem Tragwerk ist der dazugehörige Gleichgewichtspfad zu sehen.

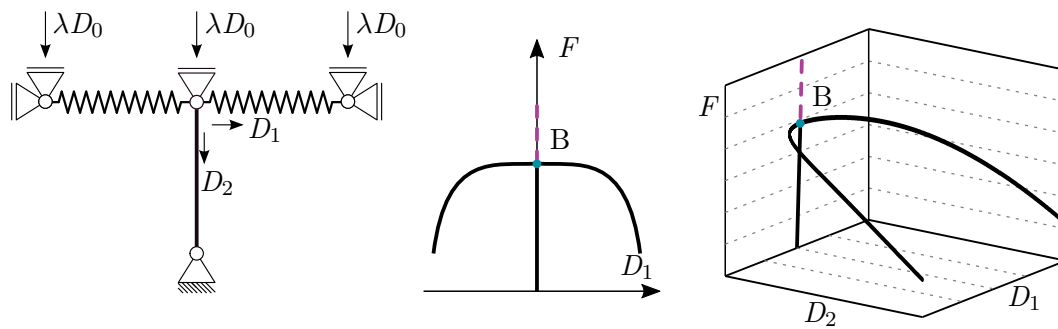
Wie in Abschnitt 3.4 bereits erwähnt, treten Durchschlagspunkte bei Systemen, die durch einen Verschiebungslastfall belastet sind, immer dann auf, wenn der Gleichgewichtspfad eine vertikale Tangente besitzt. Wie man in Abbildung 3.12 erkennen kann, ist der Abschnitt des Gleichgewichtspfads unmittelbar nach dem ersten Durchschlagspunkt instabil. Erst mit Erreichen des zweiten Durchschlagspunkts wird das System wieder stabil.

Damit ähnelt das Verhalten von Systemen unter einer Verschiebungslast im Nachbeulbereich dem Verhalten von Systemen unter einer Kraftlast.

#### Stabile symmetrische Verzweigungspunkte

Für die drei unterschiedlichen Arten von Verzweigungspunkten werden drei ähnliche Beispiele untersucht. In allen drei Fällen handelt es sich um einen druckbelasteten Pendelstab, der horizontal durch verschiedene Federn gehalten wird (Abb. 3.13, 3.14 und 3.15). Die Steifigkeit des Pendelstabs ist bei allen Beispielen deutlich größer als die Steifigkeit der Feder.

Zunächst soll der stabile symmetrische Verzweigungspunkt untersucht werden. Das zugehörige System ist in Abbildung 3.13 dargestellt. Da sich die hier verwendeten Stabelemente auf Druck und Zug unterschiedlich verhalten, werden hier zwei Federn verwendet.



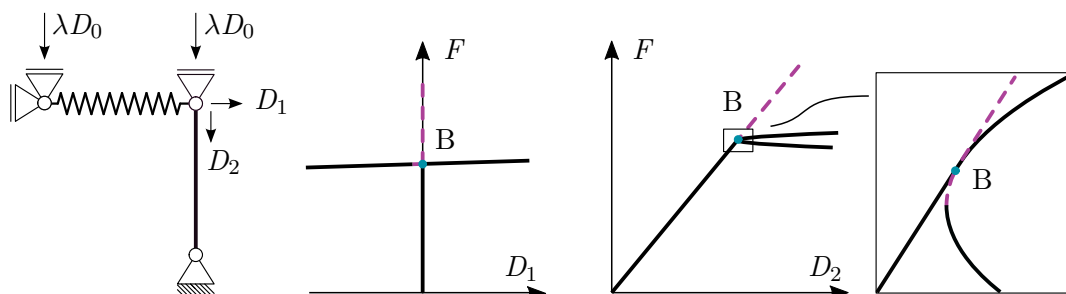
**Abbildung 3.13:** Stabiler symmetrischer Verzweigungspunkt in Anlehnung an KOITER (1967) unter Verschiebungslast

Das unterschiedliche Verhalten resultiert aus dem in dieser Arbeit verwendeten Green-Lagrange'schen Verzerrungsmaß (vgl. Anhang A.2).

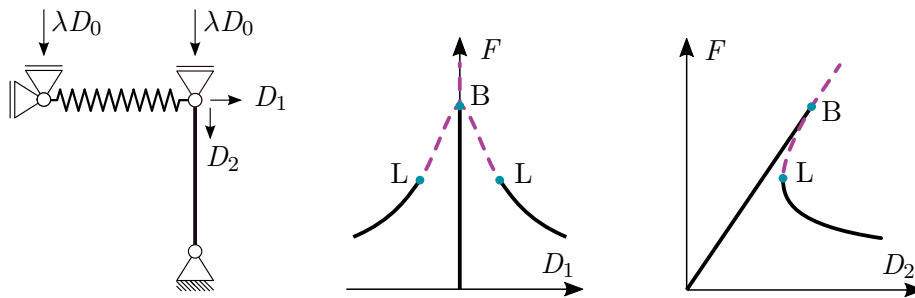
Wie auch bei Kraftlastfällen ist der Primärpfad nach dem Verzweigungspunkt instabil. Der Sekundärpfad ist symmetrisch und in beide Richtungen stabil, obwohl dieser abfallend ist. Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied beim Vergleich mit dem entsprechenden Diagramm in Abbildung 3.11. Dies lässt sich mithilfe des rechten Diagramms in Abb. 3.13 erklären. Bei einem Kraftlastfall ist ein abfallender Ast instabil, da die aufgebrachte Last  $\lambda F_0$  wieder verringert werden muss, um im Gleichgewicht zu bleiben. Dies ist bei Verschiebungslastfällen ähnlich, nur muss hier die aufgebrachte Verschiebung untersucht werden. In der räumlichen Darstellung des Gleichgewichtspfades lässt sich erkennen, dass die aufgebrachte Verschiebung  $\lambda D_0$  in Richtung von  $D_2$  weiter ansteigt.

### Asymmetrische Verzweigungspunkte

Als nächstes wird ein System betrachtet, bei dem der Gleichgewichtspfad im Nachbeulbereich asymmetrisch verläuft (Abb. 3.14). Dies liegt, wie bereits erwähnt, an den unterschiedlichen Eigenschaften der Feder bei Druck und Zug (eine Last-Verschiebungskurve



**Abbildung 3.14:** Asymmetrischer Verzweigungspunkt in Anlehnung an KOITER (1967) unter Verschiebungslast



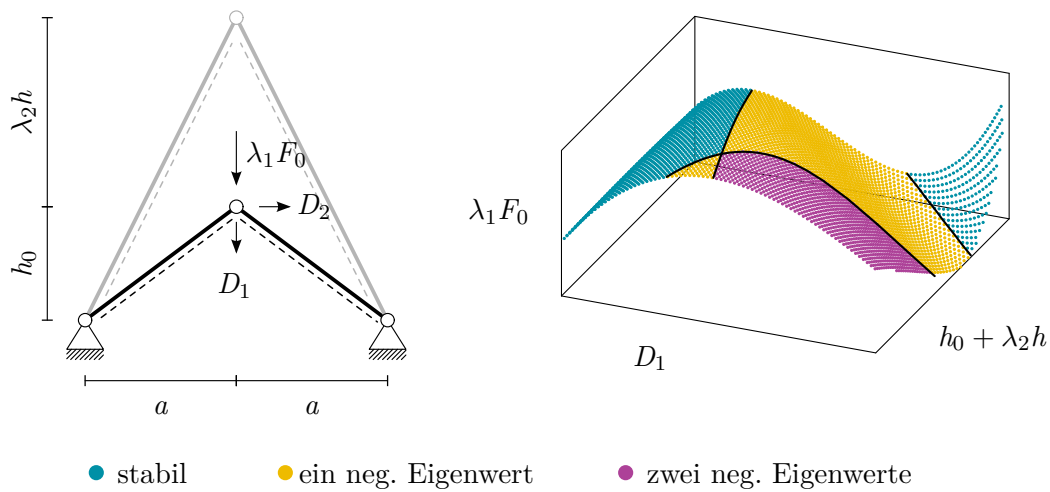
**Abbildung 3.15:** Instabiler symmetrischer Verzweigungspunkt in Anlehnung an KOITER (1967) unter Verschiebungslast

der Feder findet sich in Anhang A.2). Anhand der Projektion des Gleichgewichtspfads in die  $D_1$ - $F$  - Ebene lässt sich wieder keine Aussage über die Stabilität des Sekundärpfads treffen. Auch hier hilft nur der Blick auf den Gleichgewichtspfad in der  $D_2$ - $F$  - Ebene. Ein vergrößerter Bereich des Ausschnitts um den Verzweigungspunkt ist im rechten Diagramm dargestellt. Hier erkennt man neben dem Primärpfad den in der Projektion als zwei Äste erscheinenden Sekundärpfad. Der ansteigende Ast ist stabil, da hier die aufgebrachte Verschiebung immer weiter gesteigert wird. Der absteigende Ast ist hingegen instabil, da die aufgebrachte Verschiebung  $\lambda D_0$  abnimmt. In diesem Beispiel ist der instabile Abschnitt des Gleichgewichtspfads sehr klein. Bereits kurz nach dem Überschreiten des Verzweigungspunkts wird das System nach dem Passieren eines Durchschlagspunkts wieder stabil.

### Instabile symmetrische Verzweigungspunkte

Das abschließende Beispiel (Abb. 3.15) liefert einen kritischen Punkt, dessen Nachbeulbereich sich symmetrisch und instabil verhält. Zunächst erscheint das Beispiel identisch mit dem in Abbildung 3.14. Der Unterschied liegt hier in der verwendeten Feder. Wie bereits erwähnt verhält sich ein Stab- oder Federelement mit Green-Lagrange'schem Verzerrungsmaß unterschiedlich im Druck- und Zugbereich. Aus diesem Grund wird die Steifigkeit des Stabs so modifiziert, dass sich sowohl für Zug- als auch für Druckkräfte im Element ein entfestigendes und symmetrisches Verhalten einstellt. Eine Herleitung sowie die Spannungs-Dehnungs-Beziehung der Feder findet sich in Anhang A.2.

Im rechten Diagramm, das den Gleichgewichtspfad in der  $D_2$ - $F$ -Ebene zeigt, ist deutlich zu erkennen, dass die aufgebrachte Verschiebung nach dem Verzweigungspunkt abnimmt. Somit ist der Pfad bis zum nächsten Durchschlagspunkt instabil. Das Diagramm ähnelt den Last-Verschiebungskurven von Zylindern unter Axialdruck.



**Abbildung 3.16:** Modell eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe (links) und die dazugehörige Gleichgewichtsfläche mit Stabilitätseigenschaften (rechts)

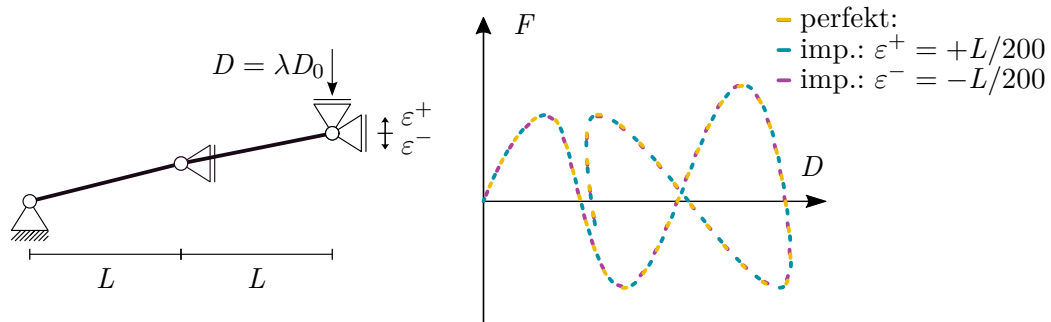
### 3.5.3 Mehrparametersysteme

Die Frage nach der Stabilität eines Gleichgewichtspunkts im Nachbeulbereich lässt sich, unabhängig von der Art des verwendeten Lastfalls, auch auf Mehrparametersysteme übertragen. In Abbildung 3.16 ist die bereits aus Abb. 3.10 bzw. 3.5 bekannte Gleichgewichtsfläche für ein Dreigelenktragwerk mit variabler Höhe nochmals dargestellt. Stabile Gleichgewichtspunkte sind in Blau dargestellt, instabile Gleichgewichtspunkte mit einem negativen Eigenwert in Gelb und mit zwei negativen Eigenwerten in Pink.

Neben der Analyse der Eigenwerte wird in der Literatur auch häufig die Beobachtung der Determinante der Tangentensteifigkeitsmatrix ( $\det \mathbf{K}_T$ ) empfohlen, wenn es um begleitende Maßnahmen zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens geht. Doch bereits bei diesem einfachen Beispiel zeigt sich, dass die Determinante nicht genügend Aussagekraft besitzt, denn sowohl im blauen wie auch im pinken Bereich gilt  $\det \mathbf{K} > 0$ . Ein allgemeiner Überblick zu begleitenden Maßnahmen zur Analyse der Stabilitätseigenschaften eines Systems findet sich in Kapitel 4.2.

## 3.6 Imperfektionen

In den vorherigen Abschnitten wurde immer von perfekten Systemen ausgegangen. Reale Tragwerke sind jedoch niemals perfekt. Sowohl durch die Herstellung als auch die Montage entstehen unterschiedliche Arten von Imperfektionen. Man unterscheidet dabei zwischen geometrischen und physikalischen Imperfektionen. Von geometrischen Im-



**Abbildung 3.17:** Auswirkungen geometrischer Imperfektionen für Durchschlagsprobleme am Beispiel eines modifizierten Dreigelenktragwerks

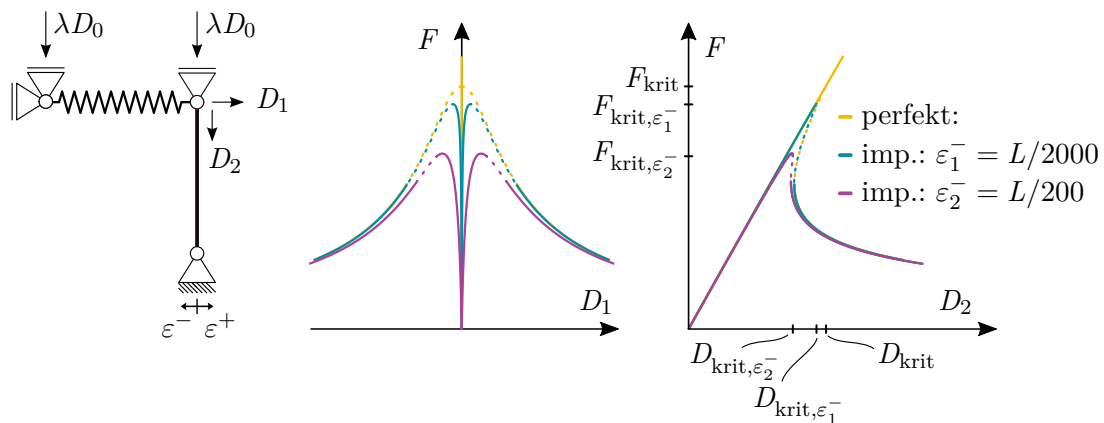
perfektionen ist die Rede, wenn einzelne Bauteile von der idealen oder perfekten Form abweichen. Beispiele hierfür sind Vorverformungen einzelner Bauteile, außerplanmäßige Schiefstellungen oder ausmittig angreifende Lasten. Diese Geometrieänderungen beziehen sich immer auf die Ausgangskonfiguration. Geometrische Imperfektionen verursachen somit keine Kräfte im unbelasteten Tragwerk. Von physikalischen oder materiellen Imperfektionen spricht man, wenn die Werkstoffeigenschaften im realen Bauwerk von den Modellannahmen abweichen. Ein Beispiel hierfür sind Eigenspannungen, die aufgrund des Bauablaufs in einzelnen Bauteilen wirken. Der Fokus dieser Arbeit liegt auf den geometrischen Imperfektionen, matrielle Imperfektionen werden nicht weiter berücksichtigt.

Wie anfällig ein Tragwerk auf Imperfektionen reagiert, hängt stark von der Art des kritischen Punkts ab. Daher soll im Folgenden kurz auf die Sensitivität unterschiedlicher Tragwerke gegenüber geometrischen Imperfektionen eingegangen werden.

Das bereits mehrfach gezeigte modifizierte Dreigelenktragwerk mit inhomogener Dirichlet-Randbedingung dient als erstes Beispiel. In Abbildung 3.17 (links) ist das Tragwerk inklusive der aufgebrachtten geometrischen Imperfektionen gegeben. In diesem Fall wird eine Verschiebung des Lagers in vertikale Richtung von  $\varepsilon^\pm = \pm L/200$  als Imperfektion auf das Tragwerk aufgebracht. Im rechten Teil der Abbildung sind die Gleichgewichtspfade der drei untersuchten Varianten dargestellt. Hierfür sind alle Graphen in unterschiedlichen Farben und gestrichelt dargestellt, da sie annähernd übereinander liegen. Selbst bei genauer Betrachtung der drei Kurven ist kaum ein Unterschied wahrnehmbar. Die Imperfektionsempfindlichkeit ist also zumindest für dieses Tragwerk recht gering. Dass dies im Allgemeinen für Durchschlagsprobleme gilt, wird z. B. in THOMPSON UND HUNT (1973a) gezeigt.

Das zweite Beispiel zeigt ein System mit einem instabilen symmetrischen Verzweigungspunkt. Der Pendelstab mit horizontaler Feder (Abb. 3.18) ist bereits im vorherigen Abschnitt 3.5 genauer beschrieben. Im Gegensatz zum gerade betrachteten Beispiel mit





**Abbildung 3.18:** Auswirkungen geometrischer Imperfektionen für Verzweigungsprobleme am Beispiel eines druckbelasteten Pendelstabs mit horizontaler Feder

Durchschlagspunkt zeigt sich hier der Einfluss der Imperfektionen deutlich. Bereits bei einer Auslenkung des Fußpunkts um  $\frac{L}{2000}$  sinken der Wert des kritischen Lastfaktors  $\lambda_{\text{krit}}$  sowie der Wert der resultierenden Lagerkraft signifikant. So reduziert sich der kritische Lastfaktor  $\lambda_{\text{krit}}$  beim Erreichen des kritischen Punkts auf 93 % der ursprünglichen kritischen Verschiebung, die resultierende Last am Lager sinkt um 7 % ab. Wird die Imperfektion weiter auf  $\frac{L}{200}$  erhöht, was ein im Bauwesen übliches Maß darstellt, sinkt der Wert des Lasterhöhungsfaktors  $\lambda_{\text{krit}}$  sogar auf 76 %. Die resultierende Lagerreaktion beträgt hierbei nur noch 71 %, verglichen mit dem perfekten System.



# 4

---

## Geometrisch nichtlineare Strukturanalyse

Bei der statischen Berechnung eines Tragwerks unter Annahme einer geometrisch linearen Theorie und linear-elastischem Materialverhalten kann die gesamte Last in einem einzigen Schritt aufgebracht werden. Jeder weitere Gleichgewichtspunkt kann im Nachhinein durch Inter- bzw. Extrapolation gefunden werden. Zudem genügt es, das Gleichungssystem einmal zu lösen, um Größen wie die Verschiebungen und die dazugehörigen Schnittgrößen zu ermitteln.

Verhält sich ein System geometrisch nichtlinear, kann der gesamte Gleichgewichtspfad hingegen nicht in einem einzigen Schritt bestimmt werden. Es ist daher notwendig, einzelne Gleichgewichtspunkte auf dem Pfad inkrementell zu ermitteln und damit den Gleichgewichtspfad Punkt für Punkt abzulaufen. Aus diesem Grund spricht man im Zusammenhang mit den hierfür verwendeten Algorithmen auch von Pfadverfolgung. Auch an einem Gleichgewichtspunkt lässt sich die exakte Lösung aufgrund der Nichtlinearität im Allgemeinen nicht direkt ermitteln. Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird üblicherweise das Newton-Raphson-Verfahren angewandt. Hierfür wird das Gleichungssystem zunächst linearisiert und im Anschluss iterativ gelöst. Dieses Prinzip aus inkrementellem und iterativem Vorgehen wird häufig auch Prädiktor-Korrektor-Verfahren genannt.

Abschnitt 4.1 behandelt verschiedene Methoden zur Pfadverfolgung. Neben den bekannten Methoden für Last-, Verschiebungs- und Bogenlängenkontrolle wird auf die von POHL (2014) entwickelten adaptiven Methoden eingegangen. In Abschnitt 4.2 werden Methoden zur Untersuchung der Stabilität einzelner Gleichgewichtspunkte, die häufig begleitend während einer Pfadverfolgung eingesetzt werden, aufgezeigt. Hierbei werden verschiedene bereits bekannte Methoden vorgestellt und verglichen.

Die beiden darauf folgenden Abschnitte befassen sich mit der direkten Berechnung kritischer Punkte. In Abschnitt 4.3 werden zunächst die aus SEYDEL (1977), MOORE (1980) und WRIGGERS U. A. (1988) bekannten Methoden für den Fall einer äußeren Kraftlast vorgestellt. Im Anschluss werden in Abschnitt 4.4 die in dieser Arbeit entwickelten Varianten zur direkten Berechnung kritischer Punkte für Systeme unter Verschiebungslastfällen präsentiert. Sie stellen eine Erweiterung der bisher bekannten Methoden für Systeme dar, die durch äußere Kraftlastfälle beansprucht sind.

Abschließend wird in Abschnitt 4.5 in knapper Form auf die Wahl der Prädiktorwerte sowie die Auswirkungen des gewählten Prädiktors auf das Konvergenzverhalten der vorgestellten Algorithmen eingegangen.

### 4.1 Pfadverfolgungsmethoden

Ein System befindet sich nach Gl. (2.28) im statischen Gleichgewicht, wenn die einwirkenden äußeren Kräfte mit den inneren Kräften im Gleichgewicht stehen. Ist dies der Fall, ergeben sich die Ungleichgewichtskräfte, auch als Residuum  $\mathbf{R}$  bezeichnet, zu null:

$$\mathbf{R}(\mathbf{D},\lambda) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D},\lambda) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{D},\lambda) = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

mit

$$\mathbf{F}_{\text{ext}}(\mathbf{D},\lambda) = \lambda \mathbf{F}_{\text{ext},0}(\mathbf{D}). \quad (4.2)$$

Im allgemeinen Fall hängen sowohl der interne wie auch der externe Kraftvektor von den Verschiebungen  $\mathbf{D}$  und dem Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  ab. Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts wird für die Herleitung der Methoden zunächst vereinfachend von einer äußeren Kraftlast als alleinigem Lastfall ausgegangen. Der Vektor der inneren Knotenkräfte  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  hängt somit nur vom Vektor der diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{D}$  und nicht vom Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  ab. Mitgehende Lasten, wie Gas- oder Flüssigkeitsdruck, werden, wie bereits erwähnt, ebenfalls nicht berücksichtigt, weshalb der äußere Lastvektor  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  unabhängig von den Verschiebungen  $\mathbf{D}$  ist. Für den Fall inhomogener Dirichlet-Randbedingungen findet sich eine ausführliche Darstellung der Algorithmen in POHL (2014). Zudem finden sich eine Zusammenstellung der wesentlichen Gleichungen für die Bogenlängenkontrolle bei inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen noch einmal am Ende dieses Unterkapitels unter Punkt (4.1.4). Mit den genannten Annahmen vereinfacht

sich die Gleichgewichtsbedingung zu

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) = \mathbf{0} \quad (4.3)$$

Stellt man die Lösung von Gleichung (4.1) grafisch dar, ergeben sich die in Abschnitt 3.2 vorgestellten Gleichgewichtspfade. Da die analytische Lösung jedoch nur in den wenigsten Fällen bestimmt werden kann, werden einzelne diskrete Punkte entlang des Gleichgewichtspfads ermittelt. Hierbei kommen, wie bereits erwähnt, inkrementell-iterative Verfahren zum Einsatz, bei denen in einem Prädiktorschritt der Startpunkt der Korrekturiteration bestimmt wird. Um kontrollieren zu können, mit welcher Schrittweite der Pfad abgelaufen wird, wird das obige Gleichungssystem um eine skalarwertige Nebenbedingung  $f(\mathbf{D}, \lambda)$  ergänzt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{D}, \lambda) \\ f(\mathbf{D}, \lambda) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

In allgemeiner Form ergibt sich diese Kontrollgleichung zu

$$f(\mathbf{D}, \lambda) = c - \hat{c} = 0. \quad (4.5)$$

Hierbei steht  $c$  für die zu inkrementierende Größe,  $\hat{c}$  für die vorgegebene Schrittweite. Diese allgemeine Form lässt sich – je nach Wahl von  $c$  und  $\hat{c}$  – in eine Last-, Verschiebungs- oder Bogenlängenkontrolle überführen. Das erweiterte Gleichungssystem (4.4) besteht nun aus  $n+1$  Gleichung. Zudem besitzt es  $n+1$  unbekannte Größen: die  $n$  unbekanntes Knotenverschiebungen  $\mathbf{D}$  sowie den skalaren Laststeigerungsfaktor  $\lambda$ .

Bevor die einzelnen Methoden vorgestellt werden soll kurz auf die Notation eingegangen werden, die auch im weiteren Verlauf der Arbeit angewandt wird. Größen mit einem vorangestellten  $\Delta$ , wie der Vektor  $\Delta\mathbf{D}$ , beinhalten die Änderungen zwischen dem aktuellen Iterationsschritt  $i$  und dem vorangegangenen Iterationsschritt  $i-1$ , somit ist  $\Delta(\bullet) = (\bullet)^i - (\bullet)^{i-1}$ . Variablen mit einem vorangestellten  $D$  stehen für die inkrementellen Änderungen. Während der laufenden Korrekturiteration enthalten sie die Differenz der jeweiligen Größe im aktuellen Iterationsschritt  $i$  und im letzten konvergierten Gleichgewichtszustand. Nach dem Ende einer Iteration kann die inkrementelle Änderung aus der Differenz der Größen im aktuellen Inkrement  $m$  und im zuvor konvergierten Zustand  $m-1$  ermittelt werden, damit ergibt sich  $D(\bullet) = (\bullet)_m - (\bullet)_{m-1}$ .

### Last- und Verschiebungskontrolle

Die wohl intuitivsten Methoden zur Pfadverfolgung sind die Lastkontrolle und die Verschiebungskontrolle. Sie sind die numerischen Umsetzungen der bei realen Prüfmaschi-

nen zum Einsatz kommenden Kontrollmethoden. Bei der Lastkontrolle wird als Schrittweite ein Lastinkrement  $D\hat{\lambda}$  vorgegeben. Damit erhält man als Nebenbedingung

$$f = D\lambda - D\hat{\lambda} = 0. \quad (4.6)$$

Über die Vorgabe des Lastinkrements  $D\hat{\lambda}$  lässt sich der Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  direkt berechnen. Da  $\lambda$  damit keine Unbekannte mehr ist, reduziert sich deren Zahl auf  $n$ . Für diesen Fall kann das erweiterte Gleichungssystem in Gleichung (4.4) wieder auf die Gleichgewichtsbedingung in Gleichung (4.3) reduziert werden.

Analog zur Lastkontrolle wird bei der Verschiebungskontrolle ein Verschiebungsinkrement  $DD_i$  vorgegeben. Für den allgemeinen Fall ergibt sich die Kontrollgleichung zu

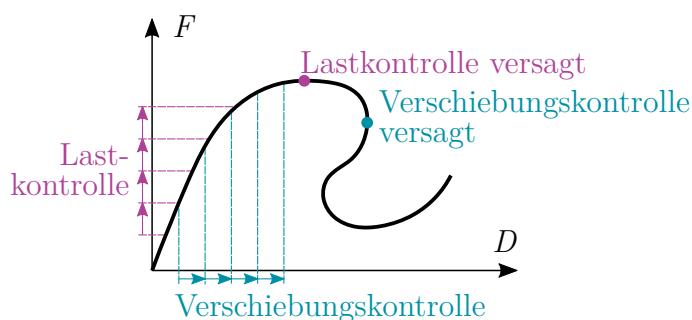
$$f = DD_i - D\hat{D}_i = 0 \quad (4.7)$$

für eine vorgeschriebene Verschiebung  $D_i$  am  $i$ -ten Freiheitsgrad. An dieser Stelle ist der Unterschied zwischen der Kontrollmethode und dem einwirkenden Lastfall hervorzuheben. Diese Arbeit beschränkt sich auf Kraftlasten und Verschiebungslasten. Daraus ergeben sich mit den zwei vorgestellten Kontrollmethoden die vier folgenden Kombinationsmöglichkeiten:

- kraftkontrollierter Kraftlastfall,
- kraftkontrollierter Verschiebungslastfall,
- verschiebungskontrollierter Kraftlastfall,
- verschiebungskontrollierter Verschiebungslastfall.

Für den Sonderfall, dass bei einem verschiebungskontrollierten Verschiebungslastfall der belastete und der kontrollierte Freiheitsgrad identisch sind, entspricht die Nebenbedingung der eines kraftkontrollierten Kraftlastfalls in Gl. (4.6). Auch in diesem Fall ist der Laststeigerungsfaktor, mit dem die aufgebrachte Verschiebung gesteigert wird, keine unbekannte Größe mehr. Eine ausführliche Beschreibung der vier aufgelisteten Varianten mit den entsprechenden Struktogrammen der Algorithmen findet sich in POHL (2014).

Last- und Verschiebungskontrolle eignen sich jedoch nur bedingt, um stark nichtlineare Pfade bis in den Nachbeulbereich hinein zu verfolgen. So versagt die Lastkontrolle, wie in Abbildung 4.1 zu sehen, an Gleichgewichtspunkten mit horizontaler Tangente. Für den Fall eines kraftkontrollierten Kraftlastfalls entspricht dies einem Durchschlagspunkt. Die Verschiebungskontrolle versagt hingegen, wenn der Gleichgewichtspfad eine vertikale Tangente aufweist (Abb. 4.1). Für den Fall eines verschiebungskontrollierten Verschiebungslastfalls entspricht dies ebenfalls einem Durchschlagspunkt.



**Abbildung 4.1:** Vergleich von Last- und Verschiebungskontrolle sowie deren Grenzen in Anlehnung an BISCHOFF U. A. (2016)

### Bogenlängenkontrolle

Anders als Last- oder Verschiebungskontrolle enthält die Nebenbedingung der Bogenlängenkontrolle sowohl die Knotenverschiebungen  $\mathbf{D}$  als auch den Lastparameter  $\lambda$ . Dank dieser Kombination können mit der Bogenlängenkontrolle Gleichgewichtspfade bis weit in den Nachbeulbereich hinein verfolgt werden. In der Literatur findet sich hierzu ein Vielzahl an Verfahren, etwa in WEMPNER (1971), RIKS (1972), RIKS (1979), CRISFIELD (1981) und RAMM (1981).

In Abbildung 4.2 sind zwei dieser Methoden schematisch dargestellt. Die Abbildung links zeigt das Verfahren nach RIKS (1972) und WEMPNER (1971), bei dem die Lösung auf einer Normalenebene gesucht wird, die senkrecht auf dem Prädiktor steht. Hierfür wird zunächst mittels Tangentenprädiktor  $\mathbf{t}$  ein Startpunkt für die Korrektoriteration bestimmt. Bei der anschließenden Korrektoriteration wird entlang der Normalen nach einer Lösung gesucht. Die Nebenbedingung lautet in diesem Fall

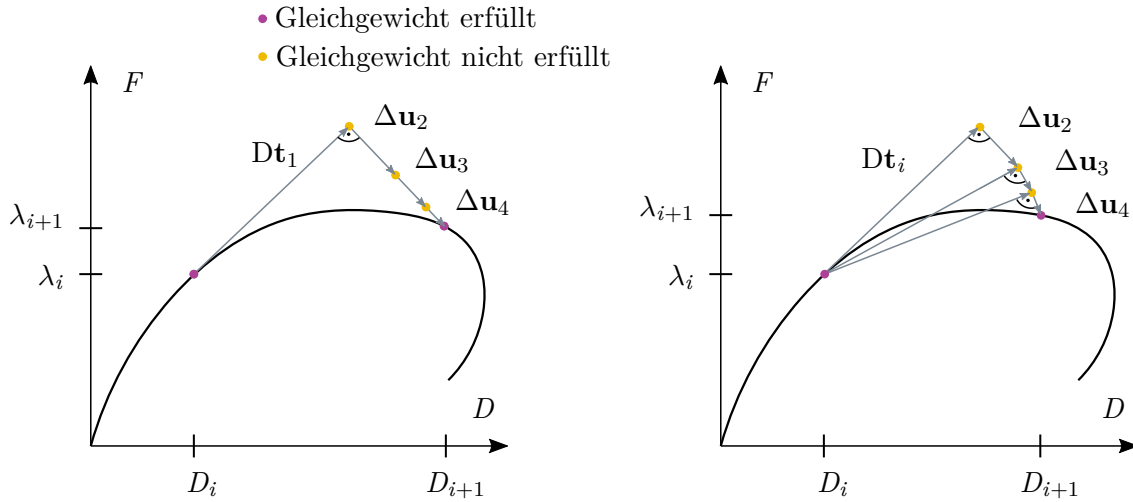
$$\mathbf{D}\mathbf{t} \cdot \Delta\mathbf{u} = 0 \quad (4.8)$$

oder in Matrixnotation

$$\mathbf{D}\mathbf{D}_t^T \Delta\mathbf{D} + \mathbf{D}\lambda_t \Delta\lambda = 0 \quad (4.9)$$

Der Vektor  $\mathbf{D}\mathbf{D}_t$  enthält die Differenz der Verschiebung zwischen dem Prädiktorschritt und dem zuletzt konvergierten Gleichgewichtspunkt. Gleiches gilt für das Lastinkrement  $\mathbf{D}\lambda_t$ .

In RAMM (1981) wird eine Modifikation des Verfahrens nach Riks/Wempner vorgestellt. Anders als bei Riks/Wempner wird hier die Normalenebene in jedem Iterationsschritt aktualisiert. Das Verfahren ist in Abbildung 4.2 rechts dargestellt. Die Nebenbedingung



**Abbildung 4.2:** Vergleich der Bogenlängenkontrollen nach Riks & Wempner (links) und Ramm (rechts)

lautet

$$D\mathbf{t}_i \cdot \Delta \mathbf{u}_i = 0 \tag{4.10}$$

oder in Matrixnotation

$$D\mathbf{D}_{t,i}^T \Delta \mathbf{D} + D\lambda_{t,i} \Delta \lambda = 0. \tag{4.11}$$

Für sehr kleine Schrittweiten liefern die beiden Methoden ähnliche Ergebnisse.

Eine weitere Methode, die sowohl in CRISFIELD (1981) als auch in RAMM (1981) vorgestellt wird, ist die Iteration auf einer Kugelfläche. Die entsprechende quadratische Nebenbedingung lautet

$$\sqrt{D\mathbf{D}^T D\mathbf{D} + \Psi^2 D\lambda^2} - \hat{s} = 0. \tag{4.12}$$

Sie enthält neben den Last- und Verschiebungsincrementen auch die vorgeschriebene Bogenlänge  $\hat{s}$  sowie den Korrekturfaktor  $\Psi$ . Dieser ist notwendig, da in der Bogenlängengleichung Größen mit unterschiedlichen Dimensionen stehen. Durch eine geeignete Wahl von  $\Psi$  lassen sich eventuell auftretende numerische Probleme vermeiden. Eine gute Abschätzung für  $\Psi$  erhält man, wenn die beiden Summanden aus Gl. (4.12) die gleiche Größe besitzen:

$$\Psi = \sqrt{\frac{D\mathbf{D}^T D\mathbf{D}}{D\lambda^2}} = \frac{\|D\mathbf{D}\|_2}{D\lambda} \tag{4.13}$$



Betrachtet man den Grenzfall  $\Psi \rightarrow 0$ , bei dem der Einfluss des Lastfaktors verschwindet, vereinfacht sich die Nebenbedingung zu

$$f = \sqrt{\mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{D}} - \hat{s} = \|\mathbf{D}\mathbf{D}\|_2 - \hat{s} = 0. \quad (4.14)$$

Dies entspricht einer Variante der Verschiebungskontrolle, bei der anstatt der Verschiebungen an einem einzelnen Freiheitsgrad die Norm der Gesamtverschiebung gesteuert wird. Man spricht in diesem Fall auch von der zylindrischen Bogenlängenkontrolle.

Wird  $\Psi$  hingegen sehr groß gewählt ( $\Psi^2\mathbf{D}\lambda^2 \gg \mathbf{D}\mathbf{D}^T\mathbf{D}\mathbf{D}$ ), nähert man sich einer Lastkontrolle immer weiter an.

Sowohl CRISFIELD (1981) als auch RAMM (1981) schlagen vor, die quadratische Zusatzgleichung direkt zu lösen. Dies liefert zwei Lösungen der Gleichung, da sich der Gleichgewichtspfad und die Zusatzgleichung in zwei Punkten schneiden. Dabei muss die Sinnvolle der zwei Lösungen algorithmisch gewählt werden. In der vorliegenden Arbeit wird die Nebenbedingung in Anlehnung an SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS (1986) hingegen linearisiert und iterativ gelöst. Hierauf wird in Abschnitt 4.1.2 eingegangen.

Neben den drei hier vorgestellten Möglichkeiten für eine Bogenlängenkontrolle existiert noch eine Vielzahl weiterer Varianten. Einen Vergleich sowie eine geometrische Interpretation einer größeren Anzahl an Bogenlängenverfahren findet sich CARRERA (1994).

Die hier präsentierten Methoden zur Pfadverfolgung lassen sich noch weiter optimieren. So kommt in dieser Arbeit u. a. eine automatisierte Schrittweitenkontrolle zum Einsatz, wie sie in RAMM (1981) beschrieben ist. Hierbei wird die vorgegebene Bogenlänge  $\hat{s}$  in jedem Schritt in Abhängigkeit der Iterationszahl im letzten Lastschritt und der maximal vorgegebenen Anzahl an Iterationen skaliert.

$$\hat{s}_{\text{neu}} = \sqrt{\frac{i}{i_{\text{max}}}} \hat{s}_{\text{alt}} \quad (4.15)$$

Auch ein Bisektionsverfahren kommt zum Einsatz, bei dem die Schrittweite verringert wird, wenn die Bogenlängenkontrolle nicht in einer vorgegeben maximalen Anzahl an Iterationsschritten konvergiert. Weitere Information hierzu finden sich u. a. in POHL (2014).

Im weiteren Verlauf der Arbeit kommt ausschließlich das Bogenlängenverfahren mit der Nebenbedingung nach Gleichung (4.12) zum Einsatz. Aus diesem Grund werden die folgenden Unterpunkte ausschließlich für die gewählte Variante präsentiert.

### 4.1.1 Prädiktorschritt

In dieser Arbeit kommen drei unterschiedliche Prädiktoren zum Einsatz. Neben dem Sekanten- sowie dem Tangentenprädiktor wird ein Eigenprädiktor genutzt, bei dem mithilfe des Eigenvektors vom Primärpfad in einen Sekundärpfad verzweigt werden kann.

Am Beginn jeder nichtlinearen Berechnung wird zunächst ein Tangentenprädiktor als Startprädiktor verwendet. Hierfür wird das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_e^{-1} \lambda \mathbf{F}_{\text{ext},0} = \mathbf{D}\mathbf{D} \quad (4.16)$$

für einen Laststeigerungsfaktor von  $\lambda = \mathbf{D}\lambda = 1,0$  gelöst. Anschließend lässt sich der Korrekturfaktor nach Gl. (4.13) ermitteln. Mit der daraus resultierenden Bogenlänge  $s$  nach Gleichung (4.12) können abschließend sowohl der Lastfaktor wie auch das Ergebnis für die Verschiebungen aus Gl. (4.16) skaliert werden:

$$\mathbf{D}\mathbf{D} = \mathbf{D}\mathbf{D} \frac{\hat{s}}{s}, \quad \mathbf{D}\lambda = 1,0 \frac{\hat{s}}{s}. \quad (4.17)$$

Durch die Skalierung ist die Bogenlängengleichung (4.12) erfüllt. Im weiteren Verlauf der Pfadverfolgung kommt ein Sekantenprädiktor zum Einsatz. Hierfür wird sowohl für die Verschiebungen wie auch für den Lastfaktor die Differenz aus den beiden zuletzt konvergierten Gleichgewichtspunkte in den Inkrementen  $m$  und  $m-1$  berechnet und auf den aktuellen Gleichgewichtspunkt im Inkrement  $m$  addiert. Durch dieses Vorgehen wird die Nebenbedingung automatisch zu Beginn jeder Gleichgewichtssiteration erfüllt.

Wird ein Verzweigungspunkt direkt berechnet, kann danach anstelle des Primärpfads auch der Sekundärpfad weiter abgelaufen werden. Dieses „Abbiegen“ auf einen anderen Pfad wird im Englischen als *branch switching* bezeichnet (u.a. RIKS (1984), STEIN U. A. (1990) oder FUJII UND RAMM (1997)). In dieser Arbeit wird hierfür der zuvor ermittelte Eigenvektor  $\Phi$  als einmaliger Startprädiktor verwendet. Um die Größe des Prädiktorschritts wählen zu können, wird der Eigenvektor mit dem Parameter  $\beta$  skaliert:

$$\mathbf{D}\mathbf{D} = \beta \Phi. \quad (4.18)$$

Für den Eigenprädiktor wird  $\mathbf{D}\lambda$  ein sehr kleiner Wert nahe null zugewiesen. Bei symmetrischen Verzweigungspunkten mit einer horizontalen Tangente entspricht das dem Verhalten des Systems. Exemplarische Berechnungen haben darüber hinaus gezeigt, dass auch für unsymmetrische Verzweigungspunkte zuverlässig auf den Nachbeulpfad abgebogen werden kann.

Bei allen drei vorgestellten Prädiktorvarianten, die in dieser Arbeit zum Einsatz kommen, handelt es sich um eine lineare Extrapolation. Es existieren daneben noch eine

Reihe weiterer linearer aber auch nichtlinearer Ansätze für den Prädiktor. In WAGNER (1991) und ERIKSSON (1993) wird beispielsweise ausführlich auf einen quadratischen Prädiktor eingegangen. Diese sollen hier aber nicht weiter vertieft werden.

### 4.1.2 Konsistente Linearisierung

Ist der Prädiktor nach einer der drei vorgestellten Methoden bestimmt, folgt im Anschluss die Korrektoiteration. In dieser Arbeit kommt zur Lösung des nichtlinearen Problems ausschließlich das Newton-Raphson-Verfahren zum Einsatz. Hierfür muss zunächst das Gleichungssystem aus Gl. (4.4) in  $\mathbf{D}$  und  $\lambda$  um den aktuellen Gleichgewichtspunkt linearisiert werden. Wie bereits erwähnt, wird in dieser Arbeit die Nebenbedingung in Anlehnung an SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS (1986) ebenfalls linearisiert und iterativ gelöst. Hierfür wird für die Gleichgewichtsbedingung sowie die Kontrollgleichung das Taylorpolynom bis zum linearen Glied entwickelt.

$$\begin{aligned} \text{lin } \mathbf{R}(\mathbf{D}^{i+1}, \lambda^{i+1}) &= \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i) + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \mathbf{D}^i} \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \lambda^i} \Delta \lambda^{i+1} = \mathbf{0} \\ \text{lin } f(\mathbf{D}^{i+1}, \lambda^{i+1}) &= f(\mathbf{D}^i, \lambda^i) + \frac{\partial f(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \mathbf{D}^i} \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial f(\mathbf{D}^i, \lambda^i)}{\partial \lambda^i} \Delta \lambda^{i+1} = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Bei der vereinfachten Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (4.3) hängen die internen Kräfte nur von den Verschiebungen und die externen Kräfte nur vom Lastfaktor ab. Somit lässt sich die erste Gleichung in (4.19) vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \text{lin } \mathbf{R}^{i+1} &= \mathbf{R}^i + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^i}{\partial \mathbf{D}^i} \Delta \mathbf{D}^{i+1} - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{ext}}^i}{\partial \lambda^i} \Delta \lambda^{i+1} \\ &= \mathbf{R}^i + \mathbf{K}_{\text{T}}^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} - \mathbf{F}_{\text{ext},0}^i \Delta \lambda^{i+1} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Zur besseren Übersicht wird eine reduzierte Schreibweise im Vergleich zu (4.19) verwendet. Dabei erhält man die Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{T}}$  aus der Ableitung des internen Kraftvektors nach den Verschiebungen.

Wie in Abschnitt 4.1 bereits erwähnt, enthält der Vektor  $\mathbf{DD}$  die inkrementelle Änderung der diskreten Knotenverschiebungen und ergibt sich zu  $\mathbf{DD} = \mathbf{D}_m - \mathbf{D}_{m-1}$  mit den Inkrementen  $m$  und  $m-1$ . Partielles Ableiten der Nebenbedingung nach  $\mathbf{D}$  und  $\lambda$  führt damit zu

$$f_{,\mathbf{D}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{DD}} = \frac{\mathbf{DD}}{\sqrt{\mathbf{DD}^\top \mathbf{DD} + \Psi^2 \mathbf{D} \lambda^2}} \quad (4.21)$$

und

$$f_{,\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial D \lambda} = \frac{\Psi D \lambda}{\sqrt{D D^T D D + \Psi^2 D \lambda^2}}. \quad (4.22)$$

Die Gleichung aus (4.19) lassen sich mit den Gleichungen (4.20) bis (4.22) auch in Matrixnotation aufschreiben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{F}_{\text{ext}} \\ f_{,D} & f_{,\lambda} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\text{tot}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta \lambda \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{D}_{\text{tot}}} = - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ f \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_{\text{tot}}} \quad (4.23)$$

### 4.1.3 Korrektoriteration

Nach der Linearisierung wird das Gleichungssystem aus Gl. (4.23) iterativ mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst. Dabei kann das unsymmetrische Gleichungssystem mit  $n + 1$  Unbekannten mit einem entsprechenden Löser direkt gelöst werden. In dieser Arbeit kommt an dieser Stelle die Programmbibliothek *UMFPACK* zum Einsatz. Eine kurze Beschreibung hierzu findet sich in DAVIS (2004). Aufgrund der zusätzlichen Zeile und Spalte weist die Gesamtmatrix des erweiterten Gleichungssystems  $\mathbf{K}_{\text{tot}}$  weder die Bandstruktur noch die Symmetrie der Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  auf. Als Abbruchkriterium wird hier, wie auch in den folgenden Algorithmen, eine Toleranzschranke für die gesamte Residuumsnorm  $\|\mathbf{R}_{\text{tot}}\|_2$  mit  $\mathbf{R}_{\text{tot}} = [\mathbf{R}, f]^T$  gewählt.

Eine Alternative basiert auf einer von BATOZ UND DHATT (1979) für die Verschiebungskontrolle vorgestellten Lösung in zwei Schritten, wie sie u. a. von RAMM (1981) verwendet wird. Bei diesem Verfahren bleiben die Symmetrieeigenschaften der zu invertierenden Matrix erhalten. Hierfür muss neben einer skalaren Gleichung das Gleichungssystem mit  $n$  Unbekannten für zwei rechte Seiten gelöst werden. Eine ausführliche Beschreibung dieser Methoden finden sich u. a. in SCHWEIZERHOF (1990) und WAGNER (1991). In der vorliegenden Arbeit kommen beide Methoden zum Einsatz.

Bei einem direkten Vergleich konnten keine signifikanten Unterschiede der Rechenzeit festgestellt werden. Dies lässt sich maßgeblich auf den verwendeten Löser zurückführen, da dieser auf die Lösung unsymmetrischer, dünnbesetzter Matrizen spezialisiert ist und somit auch das Gesamtsystem in einem Schritt effizient löst.

Trifft man bei der Pfadverfolgung exakt auf einen kritischen Punkt (oder zumindest in die unmittelbare Nähe), wird die Matrix  $\mathbf{K}_T$  des Gleichungssystems (4.23) singulär. An dieser Stelle bricht der Pfadverfolgungsalgorithmus ab, da die Matrix zur Lösung nicht

mehr invertiert werden kann. Dies spielt in der praktischen Anwendung jedoch keine Rolle, weshalb hierfür keine besonderen Maßnahmen ergriffen werden müssen.

#### 4.1.4 Bogenlängenkontrolle für inhomogene Dirichlet-Randbedingungen

In Abschnitt 4.4.2 wird eine Methode zur direkten Berechnung kritischer Punkte für inhomogene Dirichlet-Randbedingungen präsentiert. Zur Vorbereitung werden an dieser Stelle die Änderungen bei der Pfadverfolgung mittels Bogenlängenkontrolle für Verschiebungslastfälle anstelle von äußeren Kraftlasten aufgezeigt.

Wird das System nicht durch eine äußere Kraft belastet, müssen auch keine äußeren Kräfte im Gleichgewicht berücksichtigt werden. Die internen Kräfte sind in diesem Fall dafür nicht nur von den resultierenden Verschiebungen  $\mathbf{D}$ , sondern auch von den aufgebrauchten Verschiebungen  $\hat{\mathbf{D}}(\lambda) = \lambda \mathbf{D}_0$  und somit auch vom Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  abhängig:

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) = \mathbf{0}. \quad (4.24)$$

Die Nebenbedingung sowie deren Ableitungen bleiben unverändert. Die Linearisierung führt schließlich auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{F}_{\text{int},\lambda} \\ f_{,\mathbf{D}} & f_{,\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ f \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Auf die Ermittlung von  $\mathbf{F}_{\text{int},\lambda} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda}$  wird in Abschnitt 4.4 genauer eingegangen (siehe Gl. (4.53)). Eine ausführliche Darstellung der hier lediglich angerissenen Methode findet sich u. a. in POHL (2014).

## 4.2 Auffinden kritischer Punkte

In Kapitel 3.5.3 wurde bereits kurz auf unterschiedliche Methoden zur Untersuchung der Stabilität einzelner Gleichgewichtspunkte eingegangen. Eine weit verbreitete Methode ist eine neben der Pfadverfolgung begleitend durchgeführte Analyse zum Stabilitätsverhalten (vgl. KRÄTZIG (1989), BURMEISTER UND RAMM (1990), REITINGER (1994) oder RUST (2009)). Hierfür bieten sich verschiedene Indikatoren an, die Aussagen über die Stabilität eines Gleichgewichtspunkts liefern:

- die Eigenwerte  $\omega_i$  der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ ,
- die Diagonalelemente  $U_{ii}$  nach einer **LU**-Zerlegung der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$ ,
- der Steifigkeitsparameter  $S_p$  nach BERGAN U. A. (1978),
- die Determinante der Steifigkeitsmatrix  $\det \mathbf{K}_T$ .

Die Analyse der Eigenwerte  $\omega_i$  der Steifigkeitsmatrix ist hierfür besonders geeignet. So lässt die Anzahl der negativen Eigenwerte einen verlässlichen Rückschluss auf die Stabilitätseigenschaften zu. Ändert sich bei einer zur Pfadverfolgung begleitend durchgeführten Eigenwertanalyse das Vorzeichen von einem oder mehreren Eigenwerten innerhalb eines Lastschritts, so wurden in diesem Lastschritt ein oder mehrere kritische Punkte überschritten. Dies gilt unabhängig davon, ob es sich dabei um Verzweigungs- oder Durchschlagspunkte handelt. Die Ermittlung der Eigenwerte ist jedoch rechenintensiv.

Anstelle der Eigenwerte lassen sich auch die Diagonaleinträge  $U_{ii}$  analysieren, die man durch eine **LU**-Zerlegung der Steifigkeitsmatrix erhält. Dabei wird die Steifigkeitsmatrix in die untere Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  sowie die obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{U}$  zerlegt. Die Anzahl der negativen Einträge der Hauptdiagonale von  $\mathbf{U}$  entspricht der Anzahl der negativen Eigenwerte. Überschreitet man bei der Ermittlung eines Gleichgewichtspfad mit Pfadverfolgungsmethoden einen kritischen Punkt, so ändert sich nicht nur die Anzahl der negativen Eigenwerte, sondern auch die Zahl der negativen Diagonaleinträge. Anders als die Ermittlung der Eigenwerte ist die Ermittlung der Diagonalwerte jedoch ohne oder nur mit geringem Mehraufwand verbunden. Je nach gewähltem Lösungsverfahren nach Abschnitt 4.1.3 und Löser, stehen die obere Dreiecksmatrix  $\mathbf{U}$  und somit die Diagonaleinträge  $U_{ii}$  ohne zusätzliche Berechnungen zur Verfügung.

Der Steifigkeitsparameter  $S_p$  nach BERGAN U. A. (1978) eignet sich zum Auffinden von Durchschlagspunkten. Eine sehr anschauliche Beschreibung sowie Interpretation findet sich in WAGNER (1991). Die Methode eignet sich jedoch nicht zum Auffinden von Verzweigungspunkten, weshalb diese Methode im weiteren Verlauf nicht zum Einsatz kommt.

Die Analyse der Determinante eignet sich ebenfalls nur bedingt, um Aussagen über die Stabilität von Gleichgewichtspunkten zu treffen. Gilt  $\det \mathbf{K} < 0$ , ist der aktuelle Gleichgewichtspunkt instabil. Ist  $\det \mathbf{K} > 0$ , kann jedoch keine Aussage getroffen werden. Denn wenn die Anzahl der negativen Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix und somit auch die Anzahl der negativen Einträge der Hauptdiagonale  $U_{ii}$  gerade ist, so erhält man für die Determinante ebenfalls einen positiven Wert:

$$\det \mathbf{K} = \prod_{i=1}^n \omega_i = \prod_{i=1}^n U_{ii} \quad (4.26)$$

Gleichung (4.26) zeigt, dass sich die Determinante aus den Eigenwerten wie auch aus den Hauptdiagonaleinträgen  $U_{ii}$  berechnet. Ein Rückschluss auf die Stabilitätseigenschaften ist somit besser direkt aus diesen Werten möglich, ohne die Determinante zu berechnen.

Bei Systemen mit einer hohen Anzahl an Freiheitsgraden nimmt die Determinante zudem sehr große Werte an. Diese können dabei so groß werden, dass sie den Zahlenbereich übersteigen können, mit denen Computer arbeiten (vgl. LÉGER U. A. (2015)).

## 4.3 Direkte Berechnung kritischer Punkte für Kraftlastfälle

Mit den bisher vorgestellten Methoden lassen sich statische Gleichgewichtspfade an kritischen Punkten vorbei bis in den Nachbeulbereich verfolgen. Darüber hinaus kann an jedem ermittelten Gleichgewichtspunkt die Stabilität des Gleichgewichts untersucht werden. In diesem Abschnitt wird nun je ein Algorithmus zur direkten Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten vorgestellt. Diese basieren im Wesentlichen auf den Arbeiten von SEYDEL (1977), MOORE (1980) und WRIGGERS U. A. (1988). Eine ausführliche Übersicht, an der sich dieser Abschnitt in Teilen orientiert, findet sich zudem in WAGNER (1991). Im Englischen werden diese Methoden als *Extended Systems* bezeichnet.

Für die Ermittlung kritischer Punkte muss, vergleichbar mit Abschnitt 4.1, die Gleichgewichtsbedingung aus Gleichung (4.3) um eine Bedingung erweitert werden, die nur an kritischen Punkten erfüllt ist.

Die Bedingung, die dort gelten muss, lässt sich aus dem in Abschnitt 3.3 vorgestellten Indifferenzkriterium nach Euler entwickeln. Demnach befindet man sich an einem kritischen Punkt, wenn neben dem aktuellen Gleichgewichtspunkt ein benachbarter Gleichgewichtspunkt auf dem identischen Lastniveau  $\lambda_{\text{krit}}$  existiert. Ausgehend von der Gleichgewichtsbedingung am kritischen Punkt

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}_{\text{krit}}, \lambda_{\text{krit}}) = \mathbf{0} \quad (4.27)$$

muss für einen benachbarten Verschiebungszustand  $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_{\text{krit}} + \epsilon \Delta \mathbf{U}$  ebenfalls Gleichgewicht herrschen. Durch Linearisierung des benachbarten Zustands in Richtung von  $\Delta \mathbf{U}$  erhält man schließlich

$$\text{lin } \tilde{\mathbf{R}}(\tilde{\mathbf{D}}, \lambda_{\text{krit}}) = \cancel{\mathbf{R}(\mathbf{D}_{\text{krit}}, \lambda_{\text{krit}})} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \tilde{\mathbf{D}}} \frac{\partial \tilde{\mathbf{D}}}{\partial \epsilon} = \mathbf{0} + \mathbf{K}_{\text{T}}(\mathbf{D}_{\text{krit}}, \lambda_{\text{krit}}) \Delta \mathbf{U}. \quad (4.28)$$

Der benachbarte Zustand muss sich ebenfalls im Gleichgewicht befinden, was auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{D}_{\text{krit}}, \lambda_{\text{krit}}) \Delta \mathbf{U} = \mathbf{0}. \quad (4.29)$$

Existiert für das Gleichungssystem (4.29) eine nichttriviale Lösung ( $\Delta \mathbf{U} \neq \mathbf{0}$ ), gilt für die Determinante der Steifigkeitsmatrix

$$\det \mathbf{K}_T = 0. \quad (4.30)$$

Diese Nebenbedingung wird u. a. in ABBOTT (1978) vorgeschlagen. In Abschnitt 4.2 wird jedoch bereits auf Probleme im Zusammenhang mit der Ermittlung der Determinante eingegangen. Aus diesem Grund wird Gleichung (4.30) in dieser Arbeit nicht als Nebenbedingung verwendet. In WAGNER (1991) finden sich noch eine Variante, bei der das Gleichungssystem (4.3) und Gleichung (4.30) zusätzlich um die Bogenlängengleichung erweitert wird, jedoch ohne Gleichung (4.30) konsistent zu linearisieren.

Alternativ lässt sich die Nebenbedingung auch aus dem Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K}_T - \omega_i \mathbf{I}) \Phi_i = \mathbf{0} \quad (4.31)$$

herleiten. An einem kritischen Punkt ist mindestens einer der Eigenwerte  $\omega_i$  ein Nulleigenwert, wodurch sich Gleichung (4.31) vereinfacht zu

$$\mathbf{K}_T \Phi = \mathbf{0}, \quad (4.32)$$

was gleichbedeutend ist mit  $\det \mathbf{K}_T = 0$ . Dies zeigt sich auch beim Vergleich von Gl. (4.29) und (4.32). Beide Nebenbedingungen gelten unabhängig vom Lastfall und sowohl für Verzweigungs- wie auch für Durchschlagspunkte.

### 4.3.1 Unterscheidung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten für Kraftlastfälle

An einem kritischen Punkt ist die Bedingung in Gl. (4.32) erfüllt. Es bleibt jedoch unklar, ob es sich dabei um einen Durchschlags- oder einen Verzweigungspunkt handelt. Um hierüber Klarheit zu erlangen, wird die Gleichgewichtsbedingung (4.3) wie in WAGNER (1991) in Abhängigkeit eines Bahnparameters  $s$  formuliert:

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}(s), \lambda(s)) = \mathbf{0}. \quad (4.33)$$



Durch Ableitung der parametrisierten Residuumsleichung nach  $s$  erhält man

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial s} - \mathbf{F}_{\text{ext},0} \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \mathbf{0} \quad (4.34)$$

Multipliziert man anschließend beide Seiten des Gleichungssystems mit dem Transponierten des zum Nulleigenwert gehörenden Eigenvektors  $\Phi$ , führt dies zu

$$\Phi^T \mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial s} - \Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext},0} \frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0 \quad (4.35)$$

Der erste Summand verschwindet durch Gleichung (4.32) am kritischen Punkt. Es verbleibt somit nur der zweite Summand:

$$\Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext},0} \frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0. \quad (4.36)$$

Dieser wird zu null, wenn entweder

$$\Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext},0} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0 \quad (4.37)$$

gilt.

Ist die erste Bedingung erfüllt, steht also der Eigenvektor  $\Phi$ , der häufig auch als Beulvektor bezeichnet wird, senkrecht auf dem äußeren Lastvektor, handelt es sich um einen Verzweigungspunkt. Dies lässt sich anschaulich am hohen, symmetrischen Dreigelenktragwerk aus Abbildung 3.4 erklären. Am Verzweigungspunkt weicht der belastete Knoten nach rechts in Richtung  $D_2$  aus. Der Beulvektor steht damit senkrecht auf dem Lastvektor, der in  $D_1$ -Richtung zeigt.

Ist die zweite Bedingung erfüllt, handelt es sich um einen Durchschlagspunkt, was sich ebenfalls anschaulich am Beispiel eines Dreigelenktragwerks (vgl. Abb. 3.2) demonstrieren lässt. An einem Durchschlagspunkt besitzt der Gleichgewichtspfad eine horizontale Tangente. Dies bedeutet, dass sich die Änderung von  $\lambda$  entlang des Pfades am Durchschlagspunkt zu null ergibt. Das Dreigelenktragwerk schlägt in Richtung der einwirkenden Kraft durch.

In WRIGGERS UND SIMO (1990) sowie in WAGNER (1991) wird eine detailliertere Methode vorgestellt, mit der sich darüber hinaus bestimmen lässt, um welche Art von Durchschlags- oder Verzweigungspunkt es sich handelt. Da dies im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht zum Einsatz kommt, wird für tieferegehende Informationen auf die entsprechende Literatur verwiesen.

### 4.3.2 Durchschlagspunkte

Mit Gleichung (4.32) als Nebenbedingung lässt sich zunächst ein Gleichungssystem aufstellen, dessen Bedingungen sowohl an Durchschlags- als auch an Verzweigungspunkten erfüllt sind. Um die triviale Lösung  $\Phi = \mathbf{0}$  zu vermeiden, wird das Gleichungssystem zudem um eine skalare Gleichung ergänzt, die die Länge des Eigenvektors festlegt, in diesem Fall zu  $\|\Phi\|_2 = 1$ . Damit ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D})\Phi \\ \Phi^\top \Phi - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Insgesamt besteht das Gleichungssystem somit aus  $2n + 1$  Gleichungen. Neben dem Vektor der diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{D}$  und dem Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  kommen die Einträge des Eigenvektors  $\Phi$  zu den unbekanntenen Größen hinzu, womit den  $2n + 1$  Gleichungen auch  $2n + 1$  Unbekannte gegenüberstehen.

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird ebenfalls mit dem Newton-Raphson-Verfahren ermittelt. Hierfür werden zunächst alle drei Residuumsleichungen in Richtung aller drei unbekannter Größen linearisiert:

$$\text{lin } \mathbf{R}_1^{i+1} = \mathbf{R}_1^i + \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} - \mathbf{F}_{\text{ext},0}^i \Delta \lambda^{i+1}, \quad (4.39)$$

$$\text{lin } \mathbf{R}_2^{i+1} = \mathbf{R}_2^i + \frac{\partial \mathbf{K}_T^i}{\partial \mathbf{D}^i} \Phi \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \mathbf{K}_T^i \Delta \Phi^{i+1}, \quad (4.40)$$

$$\text{lin } R_3^{i+1} = R_3^i + (2\Phi^i)^\top \Delta \Phi^{i+1}. \quad (4.41)$$

In Matrixschreibweise ergibt sich daraus das folgende, im Allgemeinen unsymmetrische Gleichungssystem:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_{\text{ext},0} \\ \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \mathbf{D}} \Phi & \mathbf{K}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 2\Phi^\top & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\text{tot}}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D} \\ \Delta \Phi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D})\Phi \\ \Phi^\top \Phi - 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Wie bereits mehrfach erwähnt, gilt auch hierfür die Annahme, dass keine mitgehenden Lasten wirken und die äußeren Lasten somit nicht von den Verschiebungen abhängen (vgl. REITINGER (1994)).

In der Literatur (z. B. WRIGGERS U. A. (1988), WAGNER (1991) und REITINGER (1994)) wird in der Folge das Gleichungssystem aufgeteilt um die dadurch entstehenden  $n \times n$  großen Gleichungssysteme nacheinander in mehreren einzelnen Schritten zu lösen. Bei dieser mehrstufigen Methode bleiben Bandstruktur und Symmetrie erhalten. Da jedoch an einem kritischen Punkt die Steifigkeitsmatrix singulär wird, kann dies zu numerischen Problemen führen. In REITINGER (1994) werden zur Lösung dieses Problems verschiedene Penalty-Methoden vorgestellt.

In der vorliegenden Arbeit wird die erweiterte Matrix des gesamten unsymmetrischen Gleichungssystems  $\mathbf{K}_{\text{tot}}$  ohne Unterteilung, wie auch bereits in Abschnitt 4.1.3 für das Bogenlängenverfahren erläutert, mithilfe des Löserpakets *UMFPACK* invertiert. Dabei bleibt  $\mathbf{K}_{\text{tot}}$  auch beim Erreichen eines Durchschlagspunkts regulär, auch wenn die zweimal darin enthaltene Steifigkeitsmatrix singulär wird.

Um die Regularität der Matrix an einem Durchschlagspunkt anschaulich zu erklären, wird auch hier das Dreigelenktragwerk (z. B. Abb. 3.2) herangezogen. Hat man den ersten Durchschlagspunkt ermittelt, besitzt das System keine Steifigkeit mehr in Richtung der äußeren Last. Der Eintrag der Steifigkeitsmatrix in  $D_2$ -Richtung für eine Last in die gleiche Richtung ( $K_{22}$ ) verschwindet. Da in der zweiten Zeile jedoch ein Eintrag im Lastvektor  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  vorhanden ist (dieser steht in der rechten Spalte der Matrix in Gl. (4.42)), entsteht hier keine Nullzeile und somit bleibt die Matrix regulär.

Die Ableitung des Produkts aus Steifigkeitsmatrix und Beulvektor  $\Phi$  nach den Verschiebungen wird in der weiteren Arbeit mit  $\mathbf{K}_\Phi$  abgekürzt. Diese Ableitung lässt sich u. a. nach WRIGGERS UND SIMO (1990) auch als Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix in Richtung des Eigenvektors interpretieren:

$$\mathbf{K}_\Phi = \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \mathbf{D}} \Phi = \left. \frac{d}{dh} \left( \mathbf{K}_T (\mathbf{D} + h\Phi) \right) \right|_{h=0}. \quad (4.43)$$

In dieser Arbeit erfolgt die Ableitung der Steifigkeitsmatrix auf Elementebene, anschließend wird die Systemmatrix assembliert. Für einfache Elemente, etwa Stabelemente, lässt sich die Ableitung der Steifigkeitsmatrix noch von Hand bestimmen und implementieren. Für komplexere Elemente ist dies hingegen nur schwer möglich, da die Steifigkeitsmatrix nicht als Funktion der Verschiebungen zur Verfügung steht (vgl. BISCHOFF U. A. (2016)). In den Arbeiten von WRIGGERS U. A. (1988) und WRIGGERS UND SIMO (1990) wird hierfür ein Differenzenquotient vorgeschlagen. Diese Verfahren können jedoch, je nach Wahl des Intervalls  $h$ , fehlerhafte Ergebnisse liefern. Wird der Wert für  $h$  zu groß gewählt, erhält man eine schlechte Näherung der Ableitung, ein zu kleines  $h$  ruft numerische Probleme hervor. Die Ableitung der Steifigkeitsmatrix kann daher als der Schwachpunkt der Methode bezeichnet werden.

In Kapitel 6 werden daher verschiedene Methoden zur zuverlässigen und, je nach Variante, exakten Ermittlung erster Ableitungen präsentiert. Mit den dort vorgestellten Methoden lässt sich  $\mathbf{K}_\Phi$  effizient bestimmen, wodurch sich auch kritische Punkte zuverlässig berechnen lassen.

### 4.3.3 Verzweigungspunkte

Anders als bei Durchschlagspunkten bleibt die Gesamtmatrix  $\mathbf{K}_{\text{tot}}$  aus Gleichung (4.42) beim Erreichen eines Verzweigungspunkts nicht regulär. Dies ist gleichbedeutend mit einem Rangabfall der zu invertierenden Matrix, was zu Fehlern beim Lösen führen kann. Auch dies wird am Beispiel eines hohen Dreigelenktragwerks (Abb 3.4) ersichtlich. Am Verzweigungspunkt besitzt der Lastvektor  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  einen Nulleintrag in die Richtung, in die der Beulvektor zeigt. Aus diesem Grund entsteht in der entsprechenden Zeile des Gleichungssystems (4.42) eine Nullzeile. Somit sind die einzelnen Zeilen der Matrix nicht mehr linear unabhängig.

Dieses Problem lässt sich mit einem von MOORE (1980) vorgeschlagenen, nochmals erweiterten System, lösen. Zum einen wird bei dieser Methode die erste Residuumsleichung um einen Term ergänzt, der den Rangabfall der Gesamtmatrix verhindern soll:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) - \alpha\Phi = \mathbf{0}. \quad (4.44)$$

Dabei konvergiert der Wert der neu eingeführten Variable  $\alpha$  gegen Null. Zur anschaulichen Erklärung lässt sich  $\alpha$  als eine künstlich auf das System aufgebrachte Federsteifigkeit in Richtung des Beulvektors  $\Phi$  interpretieren. Da am Verzweigungspunkt die Steifigkeit in Richtung von  $\Phi$  verschwindet, konvergiert  $\alpha$  ebenfalls gegen null.

Zudem wird das System um diejenige Bedingung, die einen Verzweigungspunkt charakterisiert, erweitert:

$$R_4 = \Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0. \quad (4.45)$$

Damit stehen zur Bestimmung der  $2n + 2$  Unbekannten ( $\mathbf{D}$ ,  $\Phi$ ,  $\lambda$  und  $\alpha$ )  $2n + 2$  Gleichungen zur Verfügung. Daraus ergibt sich das aus den vier Residuumsleichungen be-

stehende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{D}, \lambda, \Phi, \alpha) \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{D}, \Phi) \\ R_3(\Phi) \\ R_4(\Phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) - \alpha \Phi \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D})\Phi \\ \Phi^T \Phi - 1 \\ \Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext},0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.46)$$

Zur Lösung werden zunächst alle vier Residuungleichungen linearisiert:

$$\begin{aligned} \text{lin } \mathbf{R}_1^{i+1} &= \mathbf{R}_1^i + \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} - \alpha^i \mathbf{I} \Delta \Phi^{i+1} - \mathbf{F}_{\text{ext},0}^i \Delta \lambda^{i+1} - \Phi^i \Delta \alpha^{i+1}, \\ \text{lin } \mathbf{R}_2^{i+1} &= \mathbf{R}_2^i + \mathbf{K}_\Phi^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \mathbf{K}_T^i \Delta \Phi^{i+1}, \\ \text{lin } R_3^{i+1} &= R_3^i + (2\Phi^i)^T \Delta \Phi^{i+1}, \\ \text{lin } R_4^{i+1} &= R_4^i + \mathbf{F}_{\text{ext},0}^{iT} \Delta \Phi^{i+1}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Die Gleichungen lassen sich wieder in Matrixform darstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\alpha \mathbf{I} & -\mathbf{F}_{\text{ext},0} & -\Phi \\ \mathbf{K}_\Phi & \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 2\Phi^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_{\text{ext},0}^T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D} \\ \Delta \Phi \\ \Delta \lambda \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) - \alpha \Phi \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D})\Phi \\ \Phi^T \Phi - 1 \\ \Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext},0} \end{bmatrix}. \quad (4.48)$$

Auch hierfür finden sich in der Literatur unterschiedliche Ansätze zur Lösung des unsymmetrischen Gleichungssystems. In der Arbeit von DEUFLHARD U. A. (1987) wird eine Methode vorgeschlagen, bei der das gesamte Gleichungssystem in mehrere Unterprobleme geteilt wird. Bei diesen Unterteilungen bleiben die zu lösenden Matrizen symmetrisch und die Bandstruktur erhalten. In dieser Arbeit wird, wie auch in SEYDEL (1977) vorgeschlagen, die gesamte Matrix invertiert und das Gesamtsystem gelöst.

Zu Beginn der direkten Berechnung eines kritischen Punkts kann noch nicht unterschieden werden, ob es sich um einen Durchschlags- oder Verzweigungspunkt handelt. Wird bei der im Rahmen einer Pfadverfolgungsmethode durchgeführten begleitenden Analyse der Diagonalelemente  $U_{ii}$  nach Abschnitt 4.2 ein kritischer Punkt überschritten, wird zunächst mit der Lösung des in Gleichung (4.42) vorgestellten Gleichungssystems begonnen. Parallel dazu wird nach jedem Iterationsschritt überprüft, um welche Art von kritischen Punkt es sich handelt. Hierfür wird das Ergebnis von  $\Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext}}$  untersucht. Unterschreitet dieser Wert, der für Verzweigungspunkte Null beträgt, eine vorher zu

wählende Toleranzschranke, wird zu Gleichungssystem (4.48) gewechselt. In der Praxis haben sich für die Schranke Werte zwischen  $10^{-2}$  und  $10^{-4}$  als geeignet erwiesen. Wird die Schranke noch kleiner gewählt, so besteht die Gefahr, dass die Gesamtmatrix singular wird, bevor in den stabilen Algorithmus gewechselt wird. Wird die Schranke hingegen zu groß gewählt, besteht die Gefahr, dass fälschlicherweise in den Algorithmus zur Berechnung eines Verzweigungspunkts gewechselt wird, obwohl es sich um einen Durchschlagspunkt handelt. Der zweite Fall kann bei imperfekten Systemen auftreten, wie sie in Abbildung 3.18 zu sehen sind. Bereits kleinste geometrische Imperfektionen führen dazu, dass sich das Verzweigungsproblem in ein Durchschlagsproblem wandelt. Bei sehr kleinen Imperfektionen ist für diese Beispiele auch der Wert von  $\Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext}}$  sehr klein.

### 4.4 Direkte Berechnung kritischer Punkte für Verschiebungslastfälle

Die Algorithmen zur direkten Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten, die in der numerischen Mathematik in den siebziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts entwickelt werden (u.A. SEYDEL (1977) und SEYDEL (1979)), sind spätestens seit WRIGGERS U. A. (1988) und WRIGGERS UND SIMO (1990) auch in den Ingenieurwissenschaften angekommen. In den genannten Veröffentlichungen beschränkt sich die Ermittlung der kritischen Punkte jedoch auf äußere Kraftlastfälle. Im nächsten Abschnitt werden daher die bereits vorgestellten Methoden erstmals auf die direkte Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten für Verschiebungslastfälle erweitert.

#### 4.4.1 Durchschlagspunkte

Hierfür muss zunächst die Gleichgewichtsbedingung angepasst werden. Anders als bisher hängen die inneren Kräfte jetzt auch vom Laststeigerungsfaktor ab. Genauer gesagt hängen sie – neben den freien Verschiebungen  $\mathbf{D}$  – nun auch von den aufgebrachten Verschiebungen  $\hat{\mathbf{D}}(\lambda)$  ab, die wiederum von  $\lambda$  abhängen. In Analogie zu den Kraftlastfällen wird im Weiteren davon ausgegangen, dass

$$\hat{\mathbf{D}}(\lambda) = \lambda \hat{\mathbf{D}}_0 \tag{4.49}$$

ist. Der Übersicht halber wird im Folgenden festgelegt, dass keine Kraftlast auf das Tragwerk wirkt. Unter diesen Annahmen ergibt sich die folgende Gleichgewichtsbedin-

gung:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) = \mathbf{0}. \quad (4.50)$$

Dies hat zur Folge, dass sich auch in der zweiten Residuungleichung Änderungen ergeben, da die Steifigkeitsmatrix, die sich aus der Ableitung des internen Kraftvektors nach den freien Verschiebungen ergibt, nun ebenfalls von den aufgebrauchten Verschiebungen  $\hat{\mathbf{D}}(\lambda)$  abhängt:

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{K}_T(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda))\Phi = \mathbf{0}. \quad (4.51)$$

Die dritte Residuungleichung bleibt unverändert, was auf das folgende Gleichungssystem führt:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda), \Phi) \\ R_3(\Phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda))\Phi \\ \Phi^T\Phi - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.52)$$

Aufgrund der veränderten Residuen soll in diesem Abschnitt ausführlich auf die sich ergebenden Unterschiede bei der Linearisierung eingegangen werden. Unter Anwendung der Kettenregel erhält man für das erste Residuum

$$\begin{aligned} \text{lin } \mathbf{R}_1^{i+1} &= \mathbf{R}_1^i + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^i}{\partial \mathbf{D}^i} \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^i}{\partial \lambda^i} \Delta \lambda^{i+1} \\ &= \mathbf{R}_1^i + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^i}{\partial \mathbf{D}^i} \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^i}{\partial \hat{\mathbf{D}}^i} \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}^i}{\partial \lambda^i} \Delta \lambda^{i+1} \\ &= \mathbf{R}_1^i + \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}^i}{\partial \hat{\mathbf{D}}^i} \hat{\mathbf{D}}_0^i \Delta \lambda^{i+1}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Anstelle des externen Lastvektors, der bei Kraftlastfällen in der Linearisierung des Gleichgewichts auftaucht, erhält man für Verschiebungslastfälle den Vektor

$$\mathbf{F}_{\text{int},\lambda} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \hat{\mathbf{D}}} \hat{\mathbf{D}}_0. \quad (4.54)$$

Er lässt sich anschaulich als der Vektor der an den aufgebrauchten Knotenverschiebungen wirkenden Lagerkräfte interpretieren. Da er eine Folge der inhomogenen Dirichlet-

Randbedingungen ist, wird er im Weiteren mit  $\mathbf{F}_{\text{Dir}}$  bezeichnet:

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda} = \mathbf{F}_{\text{Dir}}. \quad (4.55)$$

Die Linearisierung der zweiten Residuumsleichung liefert

$$\begin{aligned} \text{lin } \mathbf{R}_2^{i+1} &= \mathbf{R}_2^i + \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}^i} (\mathbf{K}_T \Phi)^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial}{\partial \Phi^i} (\mathbf{K}_T \Phi)^i \Delta \Phi^{i+1} + \frac{\partial}{\partial \lambda^i} (\mathbf{K}_T \Phi)^i \Delta \lambda^{i+1} \\ &= \mathbf{R}_2^i + \frac{\partial}{\partial \mathbf{D}^i} (\mathbf{K}_T \Phi)^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \frac{\partial}{\partial \Phi^i} (\mathbf{K}_T \Phi)^i \Delta \Phi^{i+1} + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{D}}^i} (\mathbf{K}_T \Phi)^i \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}^i}{\partial \lambda^i} \Delta \lambda^{i+1} \\ &= \mathbf{R}_2^i + \mathbf{K}_\Phi^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \mathbf{K}_T^i \Delta \Phi^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{K}_T^i}{\partial \hat{\mathbf{D}}^i} \hat{\mathbf{D}}_0 \Phi^i \Delta \lambda^{i+1} \end{aligned} \quad (4.56)$$

Bei inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen hängt die Steifigkeitsmatrix auch vom Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  ab, weshalb hier – anders als bei Kraftlastfällen – die partielle Ableitung nach dem Lasterhöhungsfaktor  $\lambda$  nicht verschwindet. In Analogie zu den internen Kräften wird die Matrix  $\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \lambda} = \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \hat{\mathbf{D}}} \hat{\mathbf{D}}_0$  in dieser Arbeit mit  $\mathbf{K}_{\text{Dir}}$  abgekürzt.

Die Linearisierung des dritten Residuums bleibt unverändert, Gleichung (4.41) kann daher übernommen werden. In Matrixform ergibt sich daraus

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\text{Dir}} \\ \mathbf{K}_\Phi & \mathbf{K}_T & \mathbf{K}_{\text{Dir}} \Phi \\ \mathbf{0}^\top & 2\Phi^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D} \\ \Delta \Phi \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) \Phi \\ \Phi^\top \Phi - 1 \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

#### 4.4.2 Verzweigungspunkte

Für die direkte Ermittlung von Verzweigungspunkten für Kraftlastfälle wird das Gleichungssystem um die Nebenbedingung  $\Phi^\top \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$  erweitert (siehe Gleichung (4.45)). Wirkt ausschließlich ein Verschiebungslastfall auf das Tragwerk, ist der Lastvektor  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  gleich null. Bevor daher das Gleichungssystem zur Ermittlung von Verzweigungspunkten für Verschiebungslastfälle aufgestellt werden kann, muss zunächst die passende Zusatzgleichung gefunden werden. Hierfür wird wie in Abschnitt 4.3 die Gleichgewichtsbedingung aus Gl. (4.50) in Abhängigkeit des Bahnparameters  $s$  aufgestellt:

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{D}(s), \hat{\mathbf{D}}(\lambda(s))) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}(s), \hat{\mathbf{D}}(\lambda(s))) = \mathbf{0}. \quad (4.58)$$



Die Ableitung nach dem Bahnparameter  $s$  liefert

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \mathbf{D}} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial s} + \frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial \hat{\mathbf{D}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial s} + \mathbf{F}_{\text{Dir}} \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \mathbf{0}. \quad (4.59)$$

Im Anschluss werden wieder beide Seiten des Gleichungssystems (4.59) von links mit dem transponierten Eigenvektor multipliziert:

$$\Phi^T \mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial s} + \Phi^T \mathbf{F}_{\text{Dir}} \frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0. \quad (4.60)$$

Der erste Summand in Gleichung (4.60) verschwindet am kritischen Punkt. Somit muss, ähnlich wie bei Kraftlastfällen, eine der beiden folgenden Bedingungen gelten:

$$\Phi^T \mathbf{F}_{\text{Dir}} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0. \quad (4.61)$$

Wie bei Kraftlastfällen gilt der rechte Ausdruck in Gl.(4.61) an einem Durchschlagspunkt. Somit entspricht  $\Phi^T \mathbf{F}_{\text{Dir}} = 0$  der gesuchten Bedingung am Verzweigungspunkt bei Verschiebungslastfällen.

Damit stehen alle Bedingungen für die Berechnung von Durchschlagspunkten bei Verschiebungslastfällen fest, das notwendige Gleichungssystem lautet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda), \Phi, \alpha) \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda), \Phi) \\ R_3(\Phi) \\ R_4(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda), \Phi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) - \alpha \Phi \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda)) \Phi \\ \Phi^T \Phi - 1 \\ \Phi^T \mathbf{F}_{\text{Dir}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Das Vorgehen bei der Linearisierung des ersten Residuums  $\mathbf{R}_1$  entspricht im Wesentlichen einer Kombination aus den Gleichungen (4.39) und (4.53) und ergibt sich zu

$$\text{lin } \mathbf{R}_1^{i+1} = \mathbf{R}_1^i + \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} - \alpha^i \mathbf{I} \Delta \Phi^{i+1} + \mathbf{F}_{\text{Dir}}^i \Delta \lambda^{i+1} - \Phi^i \Delta \alpha^{i+1}. \quad (4.63)$$

Die Linearisierung von  $\mathbf{R}_2$  entspricht Gleichung (4.56),  $\text{lin } R_3$  kann Gleichung (4.41) entnommen werden. Um die einzelnen Schritte der Umformungen bei der Linearisierung des vierten Residuums übersichtlicher zu gestalten, wird der Vektor  $\mathbf{F}_{\text{Dir}}$  zunächst wieder als partielle Ableitung  $\mathbf{F}_{\text{Dir}} = \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda}$  notiert. Daraus folgt

$$\text{lin } R_4^{i+1} = R_4^i + \left( \Phi^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda \partial \mathbf{D}} \right)^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} + \left( \frac{\partial^2 \Phi^T \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda \partial \Phi} \right)^i \Delta \Phi^{i+1} + \left( \Phi^T \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda^2} \right)^i \Delta \lambda^{i+1}. \quad (4.64)$$

Wird eine Funktion nach zwei Variablen partiell abgeleitet, ist nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge, in der die partiellen Ableitungen nach den einzelnen Variablen durchgeführt werden, irrelevant für das Ergebnis. Damit lassen sich die einzelnen Anteile aus Gleichung (4.64) weiter umformen. Zur besseren Übersicht wird hierfür die Umformung jedes Summanden einzeln aufgeführt:

$$\begin{aligned}\Phi^\top \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda \partial \mathbf{D}} \Delta \mathbf{D} &= \Phi^\top \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \lambda} \Delta \mathbf{D} = \Phi^\top \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \hat{\mathbf{D}}} \frac{\partial \hat{\mathbf{D}}}{\partial \lambda} \Delta \mathbf{D} \\ &= \Phi^\top \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \hat{\mathbf{D}}} \hat{\mathbf{D}}_0 \Delta \mathbf{D} = \Phi^\top \mathbf{K}_{\text{Dir}} \Delta \mathbf{D},\end{aligned}\tag{4.65}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi^\top \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda \partial \Phi} \Delta \Phi = \mathbf{F}_{\text{Dir}} \Delta \Phi,\tag{4.66}$$

$$\Phi^\top \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda^2} \Delta \lambda = \hat{\mathbf{D}}_0^\top \left( \Phi^\top \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \hat{\mathbf{D}} \partial \hat{\mathbf{D}}} \right) \hat{\mathbf{D}}_0 \Delta \lambda = \Phi^\top \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{Dir}}}{\partial \hat{\mathbf{D}}} \hat{\mathbf{D}}_0 \Delta \lambda.\tag{4.67}$$

Fasst man die einzelnen Anteile in einer Matrix zusammen, erhält man

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & -\alpha \mathbf{I} & \mathbf{F}_{\text{Dir}} & -\Phi \\ \mathbf{K}_\Phi & \mathbf{K}_T & \mathbf{K}_{\text{Dir}} \Phi & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 2\Phi^\top & 0 & 0 \\ \Phi^\top \mathbf{K}_{\text{Dir}} & \mathbf{F}_{\text{Dir}}^\top & \Phi^\top \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{Dir}}}{\partial \lambda} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D} \\ \Delta \Phi \\ \Delta \lambda \\ \Delta \alpha \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \lambda) - \alpha \Phi \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D}, \lambda) \Phi \\ \Phi^\top \Phi - 1 \\ \Phi^\top \mathbf{F}_{\text{Dir}} \end{bmatrix}\tag{4.68}$$

Verglichen mit Gleichung (4.48) besitzt dieses Gleichungssystem deutlich weniger Nulleinträge. Bei der Assemblierung der neu hinzugekommenen Blöcke kann jedoch auf bestehende Algorithmen und bereits berechnete Größen zurückgegriffen werden. So lässt sich etwa  $\mathbf{F}_{\text{Dir}}$  aus entsprechenden Einträgen der Elementsteifigkeitsmatrizen sowie der aufgetragenen Verschiebung ermitteln.

Eine ausführliche Übersicht für die Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten am Beispiel eines Systems mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen ist abschließend in einem Flussdiagramm in Abb. 4.3 dargestellt.

## 4.5 Wahl der Startwerte bei Extended Systems

Abschließend soll noch kurz auf die Wahl der Startwerte der unbekanntenen Größen  $\mathbf{D}$ ,  $\Phi$ ,  $\lambda$  und  $\alpha$  eingegangen werden. In dieser Arbeit kommen für den zum Nulleigenwert gehörenden Eigenvektor  $\Phi$  zwei unterschiedliche Varianten zum Einsatz. Die beste Näherung für den Startwert von  $\Phi$  bietet der Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert der Steifigkeitsmatrix im letzten auskonvergierten Gleichgewichtspunkt. Bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden kann diese Berechnung jedoch sehr zeitaufwendig sein. Eine deutlich einfachere Wahl stellt ein auf die Länge eins normierter Einheitsvektor dar. Er erfüllt die dritte Residuumsleichung  $R_3 = \Phi^T \Phi - 1 = 0$ , ist jedoch eine äußerst schlechte Näherung und führt somit zu mehr Iterationsschritten. Am Ende gilt es abzuwägen, ob die zusätzlichen Iterationsschritte beim Einheitsvektor oder die aufwendige Berechnung des ersten Eigenvektors schwerer zu Buche schlagen. Eine allgemeingültige Lösung gibt es hierfür nicht, es muss vielmehr von Fall zu Fall entschieden werden. Eine Übersicht über weitere Möglichkeiten zur Wahl von  $\Phi$  findet sich in WAGNER (1991).

Für den Vektor der diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{D}$  sowie den Laststeigerungsfaktor  $\lambda$  stellen die Ergebnisse des zuletzt bestimmten Gleichgewichtspunkts eine gute Wahl dar. Die Variable  $\alpha$  wird zu null gesetzt.

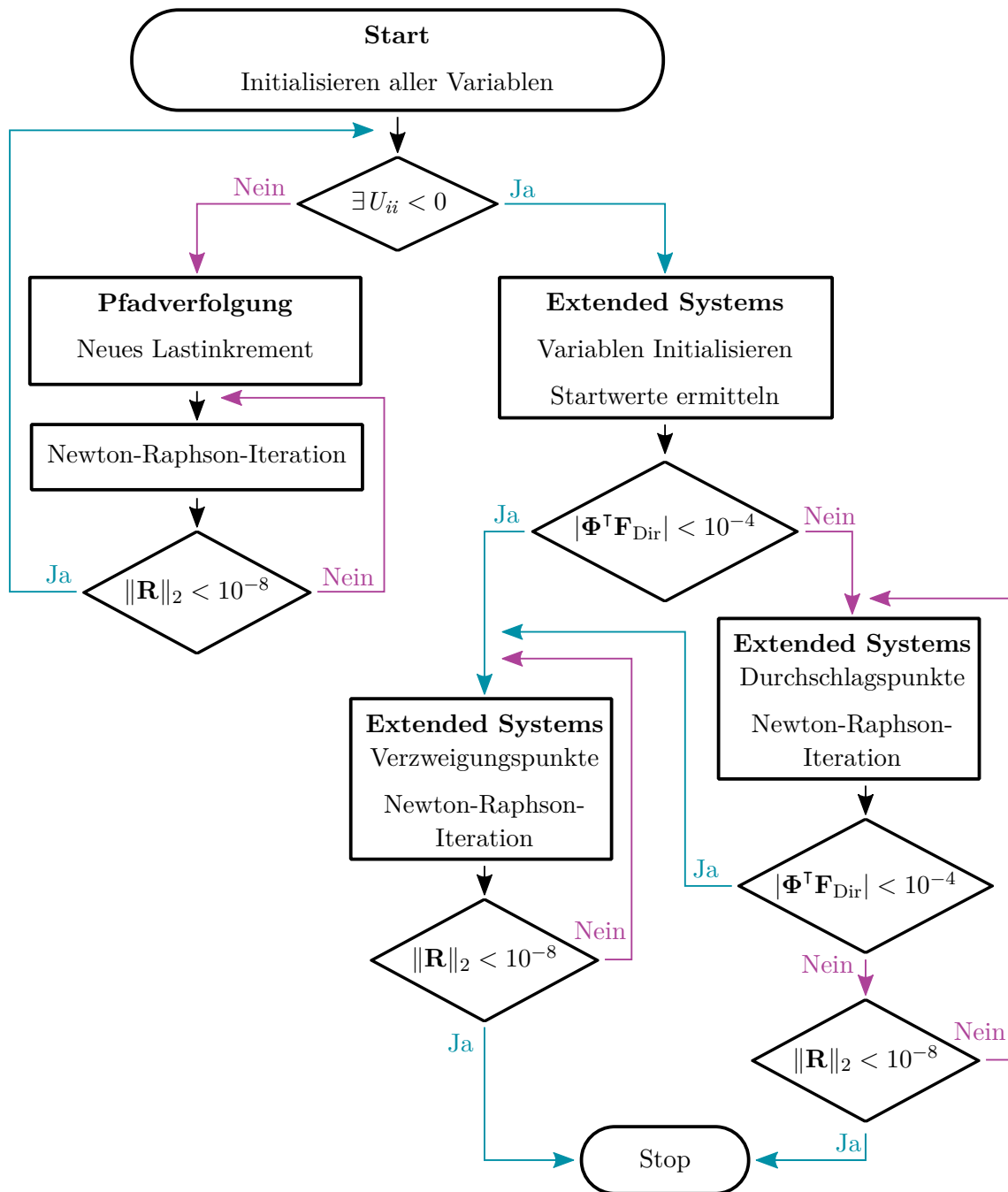


Abbildung 4.3: Flussdiagramm zur Berechnung kritischer Punkte bei inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen.

---

## Geometrisch nichtlineare Imperfektionsanalyse

Die Ermittlung der Traglast für ein schlankes, druckbelastetes Tragwerk hängt stark von Größe und Form der berücksichtigten Imperfektionen ab. Die Frage, welche Imperfektion am Ende zur geringsten Traglast führt, stellt ein nicht-triviales Problem dar. So besagt Eurocode 3, Teil 1-6, der die Themen Festigkeit und Stabilität von Schalen im Stahlbau regelt, dass „Die Form der geometrischen Ersatzimperfektionen [...] so zu wählen [ist], dass sie den bezogenen elastisch-plastischen Beulwiderstand [...] der imperfekten Schale so ungünstig wie möglich beeinflussen“ (DIN EN 1993-1-6 (2017)). In SCHMIDT (2009) wird in diesem Zusammenhang darauf verwiesen, dass eigenformaffine Vorverformungen für viele Fälle eine geeignete Wahl darstellen, in einigen Fällen aber auch deutlich von der ungünstigsten Lösung abweichen können.

Zur Untersuchung von Imperfektionen und deren Einfluss auf das Tragverhalten werden in dieser Arbeit verschiedene Ansätze präsentiert, die sich in ihrem Umgang mit den Imperfektionen grundlegend unterscheiden. In Abschnitt 5.1 sind die Imperfektionen eine gegebene Größe. Die vorgestellten Methoden basieren dabei auf einer Wiederberechnung kritischer Punkte, die sich die Ergebnisse bereits berechneter kritischer Punkte zu Nutze machen.

In Abschnitt 5.2 werden die Imperfektionen nicht vorgegeben sondern als zusätzliche Unbekannte in das Systems eingebracht. Dies kehrt die Suche nach der ungünstigsten Imperfektion um in ein Finden eben dieser. Die in diesem Abschnitt vorgestellte Methode stellt eine Modifikation der von DEML (1997) präsentierten Algorithmen dar.

In diesem Kapitel werden, wie in Abschnitt 3.6 bereits erwähnt, ausschließlich geometrische Imperfektionen berücksichtigt. Die Motivation hinter den entwickelten Methoden und somit auch die Herangehensweise an die Problemstellung ist zudem akademischer

Natur. Bei der Ermittlung der Traglast eines realen, stabilitätsgefährdeten Tragwerks sind viele weitere Aspekte zu beachten, auf die an dieser Stelle nicht eingegangen wird.

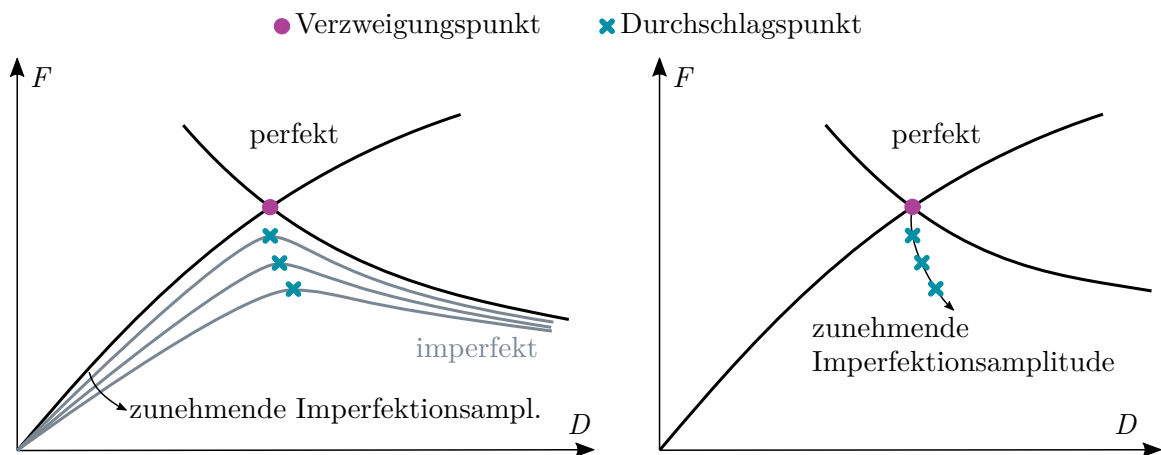
### 5.1 Berechnung kritischer Pfade imperfekter Systeme

In diesem Abschnitt werden zwei Methoden präsentiert, die für eine oder mehrere gegebene Imperfektionsformen mit variierender Imperfektionsamplitude eine effiziente Analyse des Imperfektionseinflusses auf den kritischen Lastfaktor eines statischen Systems ermöglichen. In Abschnitt 5.1.1 wird eine Methode vorgestellt, die eine effiziente Berechnung kritischer Punkte für eine Vielzahl imperfekter Systeme präsentiert. Erste Untersuchungen hierzu finden sich in MOAVEN (2016). Abschnitt 5.1.2 zeigt eine erneute Erweiterung der Gleichungssysteme zur direkten Berechnung kritischer Punkte um eine Kontrollgleichung, die eine inkrementelle Steigerung des Imperfektionsfaktors ermöglicht. Mit den vorgestellten Gleichungssystemen können somit erstmals kritische Pfade für Systeme mit inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen inkrementell-iterativ berechnet werden.

#### 5.1.1 Wiederberechnung kritischer Punkte an imperfekten Systemen

Wie in Kapitel 4 bereits erläutert, konvergieren die dort vorgestellten Algorithmen zur direkten Berechnung kritischer Punkte für Tragwerke mit sehr vielen Freiheitsgraden nur in der Nähe der Lösung. Sollen also die kritischen Punkte eines Tragwerks für eine große Zahl unterschiedlicher Imperfektionsformen und somit für eine große Zahl verschiedener Ausgangsgeometrien untersucht werden, muss nach Abbildung 4.3 für jeden kritischen Punkt zuerst mit Pfadverfolgungsalgorithmen in die Nähe des kritischen Punkts gerechnet werden, bevor dieser mit Extended Systems exakt bestimmt werden kann. Ein Großteil der Rechenzeit entfällt dabei auf die immer wiederkehrende Pfadverfolgung. In Abbildung 5.1 links ist das Vorgehen exemplarisch dargestellt.

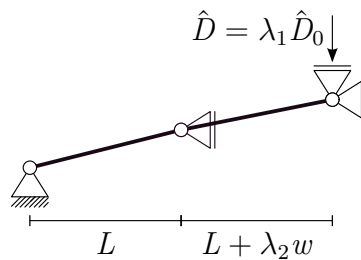
Bei der hier präsentierten Methode muss zunächst der erste kritische Punkt am (perfekten) Ausgangssystem, wie im Flussdiagramm in Abbildung 4.3 aufgezeigt, mit einer vorangestellten Pfadverfolgungsmethode bestimmt werden. Beim Ausgangssystem muss es sich nicht zwangsläufig um das perfekte System handeln, die Berechnung kann auch an einem imperfekten Tragwerk gestartet werden. Das perfekte System bietet sich jedoch als Referenz an und wird im weiteren Verlauf der Arbeit immer als Ausgangssystem verwendet.



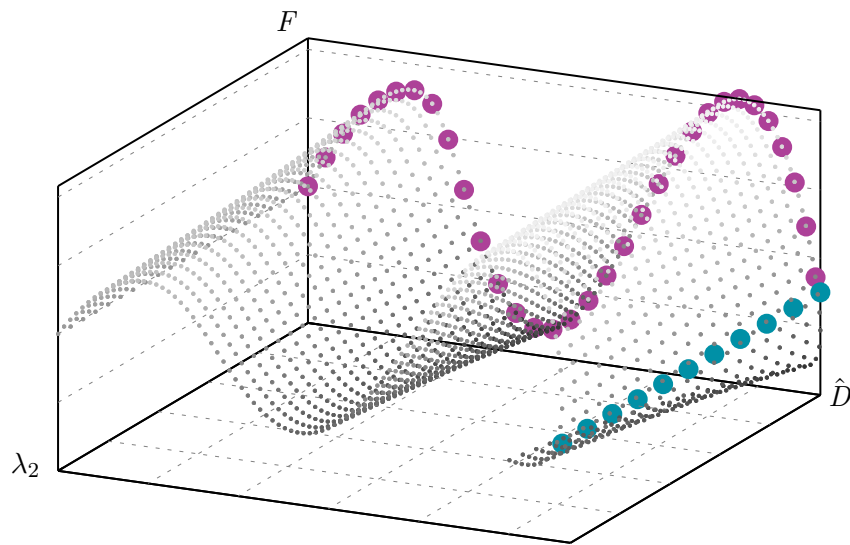
**Abbildung 5.1:** Exemplarische Darstellung eines Gleichgewichtspfads bei steigender Imperfektionsamplitude (links), direkte Berechnung der kritischen Punkte (rechts), in Anlehnung an REITINGER (1994)

Für die Berechnung eines weiteren kritischen Punkts an einem imperfekten System kann auf die Pfadverfolgung verzichtet werden. Anstatt mit einem Pfadverfolgungsalgorithmus erneut in die Nähe des kritischen Punkts für das imperfekte System zu rechnen, lassen sich die Ergebnisse des zuvor berechneten kritischen Punkts des Ausgangssystems als Prädiktor verwenden. Für jeden weiteren kritischen Punkt lässt sich wieder das Ergebnis am jeweils zuvor berechneten kritischen Punkt als Prädiktor wählen. Das Verfahren ist in Abbildung 5.1 rechts exemplarisch dargestellt.

Das Vorgehen soll an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden. Abbildung 5.2 zeigt eine modifizierte Variante eines Dreigelenktragwerks. Es wird am rechten Knoten durch eine vertikale Lagerverschiebung  $\hat{D} = \lambda_1 \hat{D}_0$  belastet. In Abbildung 5.3 ist die zugehörige Gleichgewichtsfläche dargestellt. Sie zeigt die Last-Verschiebungs-Beziehung in Abhängigkeit von den Imperfektionen  $\lambda_2 \hat{w}$ . Die in pink dargestellten Punkte repräsentieren die Gleichgewichtskurve des perfekten Systems, die in blau dargestellten Punkte zeigen den kritischen Pfad.



**Abbildung 5.2:** Modifiziertes Dreigelenktragwerk mit variabler Imperfektion



**Abbildung 5.3:** Gleichgewichtsfläche des modifizierten Dreigelenktragwerks mit Gleichgewichtspfad des perfekten Systems (pink) und kritischem Pfad (blau)

Wird bei diesem Verfahren, wie im Beispiel gezeigt, lediglich die Länge der Imperfektionsnorm skaliert, die Form der Imperfektion jedoch beibehalten, lassen sich damit kritische Pfade ermitteln. Darüber hinaus kann bei dieser Methode aber auch die Imperfektionsform in jedem Schritt geändert werden. So lassen sich beispielhaft auch zu höheren Eigenwerten gehörige Eigenvektoren als Imperfektionsformen wählen.

### 5.1.2 Automatisierte Berechnung kritischer Pfade

In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Berechnung kritische Pfade imperfekter Systeme vorgestellt, die aus einer Kombination von Pfadverfolgung und Extended Systems in einem Gleichungssystem besteht. Hierfür werden die Imperfektionen in Abhängigkeit des Parameters  $\lambda_2$  beschrieben. Im Anschluss lässt sich ein Gleichungssystem zur direkten Ermittlung kritischer Punkte um eine Kontrollgleichung nach Art der Gl. (4.5) erweitern. In der vorliegenden Arbeit wird hierbei die inkrementelle Änderung des Imperfektionsparameters kontrolliert, was zu der folgenden Zusatzgleichung führt:

$$f = D\lambda_2 - D\hat{\lambda}_2 = 0 \quad (5.1)$$



In der Literatur finden sich bereits ähnliche Formulierungen. So werden in ERIKSSON (1994) und ERIKSSON (1997) Algorithmen vorgestellt, mit denen sich Mehrparametersysteme auch im kritischen Zustand analysieren lassen. Eine ähnliche Formulierung findet sich auch in REZAIIEE-PAJAND UND MOGHADDASIE (2014) sowie in COX U. A. (2018). Auch dort werden die Methode der Extended Systems mit einer Variante der Bogenlängenkontrolle kombiniert. In der vorliegenden Arbeit liegt der Fokus, im Gegensatz zur genannten Literatur, auf der Analyse des Einflusses geometrischer Imperfektionen. Dies führt dazu, dass die zusätzliche Kontrollgleichung sehr einfach ausfällt. Zudem wird in dieser Arbeit erstmals die Ermittlung kritischer Pfade für Verschiebungslastfälle präsentiert.

Der erste kritische Punkt entlang eines kritischen Pfads, der für das perfekte Ausgangssystem berechnet wird, ist in vielen Fällen ein Verzweigungspunkt. Wie in Abschnitt 3.6 gezeigt, reagieren Systeme mit einem instabilen Verzweigungspunkt besonders sensibel auf Imperfektionen. Da Verzweigungspunkte nur bei Systemen mit einer symmetrischen Geometrie auftreten, imperfekte Systeme im Allgemeinen jedoch eine asymmetrische Geometrie besitzen, kommen für die Berechnung kritischer Pfade nur die Gleichungssysteme zur direkten Ermittlung von Durchschlagspunkten für Kraft- und Verschiebungslastfälle ((4.38) und (4.52)) zum Einsatz.

### Kraftlastfälle

Für Kraftlastfälle ergibt sich damit das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \lambda_2) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda_1) \\ \mathbf{K}(\mathbf{D}, \lambda_2) \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} - 1 \\ D\lambda_2 - D\hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Eine konsistente Linearisierung führt schließlich auf

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_{\text{ext},0} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda_2} \\ \mathbf{K}_{\boldsymbol{\Phi}} & \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \lambda_2} \boldsymbol{\Phi} \\ \mathbf{0}^T & 2\boldsymbol{\Phi}^T & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D} \\ \Delta \boldsymbol{\Phi} \\ \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \lambda_2) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda_1) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D}, \lambda_2) \boldsymbol{\Phi} \\ \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} - 1 \\ D\lambda_2 - D\hat{\lambda}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

### Verschiebungslastfälle

Das Gleichungssystem für den Fall inhomogener Dirichlet-Randbedingungen lautet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda_1), \lambda_2) \\ \mathbf{R}_2(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda_1), \Phi, \lambda_2) \\ R_3(\Phi) \\ R_4(\lambda_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda), \lambda_2) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D}, \hat{\mathbf{D}}(\lambda), \lambda_2) \Phi \\ \Phi^\top \Phi - 1 \\ D\lambda_2 - D\hat{\lambda}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Eine konsistente Linearisierung führt schließlich auf

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \mathbf{0} & \mathbf{F}_{\text{Dir}} & \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \lambda_2} \\ \mathbf{K}_\Phi & \mathbf{K}_T & \mathbf{K}_{\text{Dir}} & \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \lambda_2} \Phi \\ \mathbf{0}^\top & 2\Phi^\top & 0 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{D} \\ \Delta \Phi \\ \Delta \lambda_1 \\ \Delta \lambda_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \lambda_2) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda_1) \\ \mathbf{K}_T(\mathbf{D}, \lambda_2) \Phi \\ \Phi^\top \Phi - 1 \\ D\lambda_2 - D\hat{\lambda}_2 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

In beiden Varianten treten Ableitungen nach dem Imperfektionsparameter  $\lambda_2$  auf. Diese werden, analog zu den Größen  $\mathbf{K}_\Phi$  oder  $\mathbf{K}_{\text{Dir}}$ , mit den in Kapitel 6 vorgestellten numerischen Methoden zur exakten und effizienten Ermittlung erster Ableitungen bestimmt.

Das Beispiel in Abbildung 5.2 ist so gewählt, dass der kritische Pfad auch mit dem Gleichungssystem (5.4) ermittelt werden kann. Bei entsprechender Parameterwahl liefert diese Methode gleiche Ergebnisse. Anders als bei der Methode in Abschnitt 5.1.1 kann der kritische Pfad durch die Erweiterung des Gleichungssystems automatisiert ermittelt werden. Es lässt sich jedoch ausschließlich die Amplitude einer gewählten Imperfektionsform variieren.

## 5.2 Berechnung ungünstiger Imperfektionsformen

Die Aussagekraft der Ergebnisse, die mit den im vorherigen Abschnitt vorgestellten Algorithmen ermittelt werden können, hängt stark von der Wahl der Imperfektionsform ab. Das Finden der ungünstigsten Imperfektionsform bleibt dabei dem Zufall überlassen. Um eine mögliche kritischste Imperfektionsform für ein Tragwerk aktiv zu suchen

und nicht zufällig zu finden, werden für den folgenden Algorithmus die Imperfektionen  $\mathbf{w}$  als zusätzliche Unbekannte eingeführt. Sie können an allen freien Knoten oder nur an ausgewählten Knoten hinzugefügt werden. Dies führt zu  $n_{\text{imp}}$  zusätzlichen Unbekannten, für die folglich  $n_{\text{imp}}$  zusätzliche Gleichungen eingeführt werden müssen. Dabei gilt  $n_{\text{imp}} \leq n$ . Der hier vorgestellte Algorithmus basiert maßgeblich auf den in den Arbeiten von DEML (1997) und DEML UND WUNDERLICH (1997) präsentierten Methoden zur Bestimmung ungünstigster Imperfektionsformen.

Die gesuchte zusätzliche Bedingung wird in DEML (1997) als Energie-Kriterium bezeichnet und geht auf KOITER (1976) zurück. Demnach ist die potentielle Energie an einem Gleichgewichtspunkt für die ungünstigste Imperfektionsform minimal. Dies lässt sich anschaulich interpretieren. Besitzt die potentielle Energie in Abhängigkeit der Imperfektionen an einem kritischen Punkt ein Minimum, so ist auch die zu leistende Arbeit, die für eine Deformation von der unverformten Referenzlage in die Gleichgewichtslage benötigt wird, minimal. Dies gilt entsprechend auch für die kritische Last. Somit ergibt sich das gesuchte Energie-Kriterium aus der ersten Variation der potentiellen Energie nach den Imperfektionen.

Um die Größe der Imperfektionen zu begrenzen und nicht ins Unendliche ansteigen zu lassen, wird eine sog. Straffunktion, wie sie auch bei der Optimierung unter Nebenbedingungen zum Einsatz kommt, auf das Potential addiert. Im Englischen wird diese auch als *barrier function* bezeichnet. Hierin unterscheidet sich der hier vorgestellte Algorithmus maßgeblich von den Methoden in DEML (1997). Dort wird die Begrenzung der Imperfektionen als Nebenbedingung mit der Lagrange-Multiplikator-Methode eingebracht. Zur Bestimmung des Lagrange-Multiplikators wird jedoch eine zusätzliche Gleichung benötigt. In DEML (1997) wird hierfür eine Norm des Imperfektionsvektors auf einen gewählten Wert festgeschrieben. Auf diese Zusatzgleichung kann in der hier vorgestellten Methode verzichtet werden.

Eine Straffunktion hat das Ziel, das Gebiet, in dem nach der Lösung gesucht wird, zu begrenzen. Soll etwa verhindert werden, dass ein gesuchter Wert  $x$  eine vorgegebene maximale Größe  $\hat{w}$  überschreitet, so ist im Idealfall der Wert einer Straffunktion für  $x > \hat{w}$  unendlich, in allen anderen Fällen ist der Wert gleich null. Zur Annäherung dieser diskontinuierlichen Funktion wird häufig eine logarithmische Funktion in der Form

$$g(x) = -\beta \ln(\hat{w} - x) \tag{5.6}$$

gewählt. Nähert man sich der Wert von  $x$  einer festgelegten Grenze  $\hat{w}$ , wird das durch die Straffunktion bestraft. Mit dem Barriereparameter  $\beta$  lässt sich der Einfluss der Straffunktion skalieren.

In dieser Arbeit wird die Variable  $x$  durch die Länge des Imperfektionsvektors  $\|\mathbf{w}\|_2$  ersetzt. Diese Länge wird durch die maximal zulässige Länge von  $\mathbf{w}$  begrenzt. Damit ergibt sich die in der vorliegenden Arbeit auf das Potential addierte Straffunktion zu

$$g(\mathbf{w}) = -\beta \ln(\hat{w} - \|\mathbf{w}\|_2). \quad (5.7)$$

Das modifizierte Potential  $\bar{\Pi}$  ergibt sich schließlich zu

$$\bar{\Pi} = \Pi(\mathbf{D}, \mathbf{w}) + g(\mathbf{w}). \quad (5.8)$$

Die erste Bedingung, die wie bisher auch erfüllt sein muss, ist das Gleichgewicht. Sie lässt sich auch als Variation des Potentials schreiben. Da die Straffunktion nur von den Imperfektionen  $\mathbf{w}$  abhängt, ergibt sich die Gleichung wie bereits in Abschnitt 4.4 zu

$$\mathbf{R}_1(\mathbf{D}, \mathbf{w}, \lambda) = \frac{\partial \bar{\Pi}(\mathbf{D}, \mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{D}} = \frac{\partial \Pi(\mathbf{D}, \mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{D}} = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}, \mathbf{w}) - \mathbf{F}_{\text{ext}}(\lambda) = \mathbf{0}. \quad (5.9)$$

Das zweite Residuum bildet, wie in Abschnitt 4.3 hergeleitet, die Bedingung für einen kritischen Punkt:

$$\mathbf{R}_2(\mathbf{D}, \mathbf{w}, \Phi, \lambda) = \frac{\partial^2 \Pi(\mathbf{D}, \mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{D}^2} \Phi = \mathbf{K}(\mathbf{D}, \mathbf{w}) \Phi = \mathbf{0}. \quad (5.10)$$

Die dritte Residuungleichung erhält man aus der Variation des Potentials nach den Imperfektionen:

$$\mathbf{R}_3 = \frac{\partial \bar{\Pi}(\mathbf{D}, \mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}} = \frac{\partial \Pi(\mathbf{D}, \mathbf{w}, \lambda)}{\partial \mathbf{w}} + \frac{\partial g(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \mathbf{0}. \quad (5.11)$$

Als vierte Bedingung wird in diesem Fall nicht die Länge des Eigenvektors, die zur Vermeidung trivialer Lösungen bei der Methode der Extended Systems zum Einsatz kommt, verwendet. In Analogie zu DEML (1997) wird hierfür eine Bedingung eingeführt, die eine triviale Lösung vermeidet und gleichzeitig sicherstellt, dass es sich bei dem ermittelten kritischen Punkt um einen Durchschlagspunkt handelt:

$$R_4 = \Phi^T \mathbf{F}_{\text{ext},0} - 1 = 0 \quad (5.12)$$

Da ein symmetrisches System Voraussetzung für einen Verzweigungspunkt ist, imperfekte Tragwerke im Allgemeinen jedoch eine imperfekte Ausgangsgeometrie besitzen,

treten Verzweigungspunkte bei imperfekten Grundsystemen nur für wenige Sonderfälle auf.

Nach der Linearisierung ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{D} \partial \mathbf{w}} & -\mathbf{F}_{\text{ext},0} \\ \mathbf{K}_{\Phi} & \mathbf{K} & \frac{\partial(\mathbf{K}\Phi)}{\partial \mathbf{w}} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{w} \partial \mathbf{D}} & \mathbf{0} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{w}^2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{F}_{\text{ext},0} & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}\mathbf{D} \\ \mathbf{D}\Phi \\ \mathbf{D}\mathbf{w} \\ \mathbf{D}\lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \\ R_4 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Die Methode lässt sich gut an dem flachen Dreigelenktragwerk in Abbildung 5.4 veranschaulichen, wenngleich dieses Tragwerk grundsätzlich eine geringe Imperfektionsempfindlichkeit aufweist. Die Geometrie ist so gewählt, dass ein Verzweigen ausgeschlossen werden kann (vgl. Anhang A.1). Neben den beiden Verschiebungsfreiheitsgraden  $D_1$  und  $D_2$  wird nur ein zusätzlicher Imperfektionsfreiheitsgrad  $w$  in horizontale Richtung am freien Knoten eingeführt. Die geringste kritische Last und somit die ungünstigste Imperfektionsform besitzt das Dreigelenktragwerk in Abbildung 5.4, wenn es symmetrisch ist, wenn also für die projizierten Längen  $a = b = 10$  gilt. Für die hier gewählte Geometrie bedeutet dies, dass die ungünstigste Imperfektion bei  $w = \frac{b-a}{2} = -1$  liegt.

Die in diesem Abschnitt eingeführte Methode unterscheidet sich von den bisher in dieser Arbeit gezeigten und auch von den in DEML (1997) vorgestellten Methoden in einem wesentlichen Punkt. Durch die Addition der Straffunktion auf das Potential wird das zugrunde liegende physikalische Problem nicht mehr exakt gelöst, sondern nur eine Näherung an das ursprüngliche Problem. Dies lässt sich an einem Zahlenbeispiel demonstrieren. Hierfür wird die maximale Imperfektion zu  $\hat{w} = 2$  gewählt, der Imperfektionsparameter wird zu  $\beta = 1,0$  festgesetzt. Das Gleichungssystem liefert als Ergebnis für

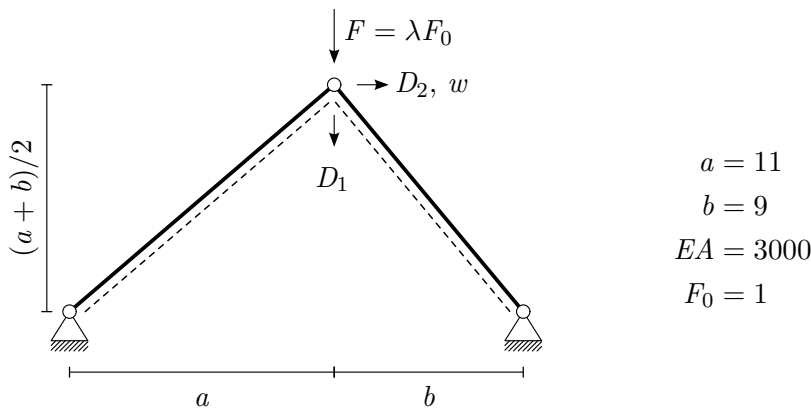
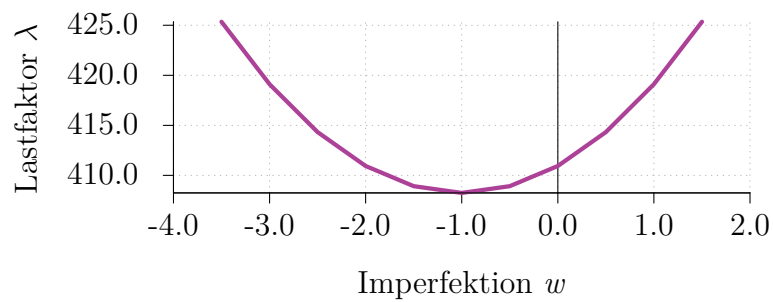


Abbildung 5.4: Imperfektes Dreigelenktragwerk



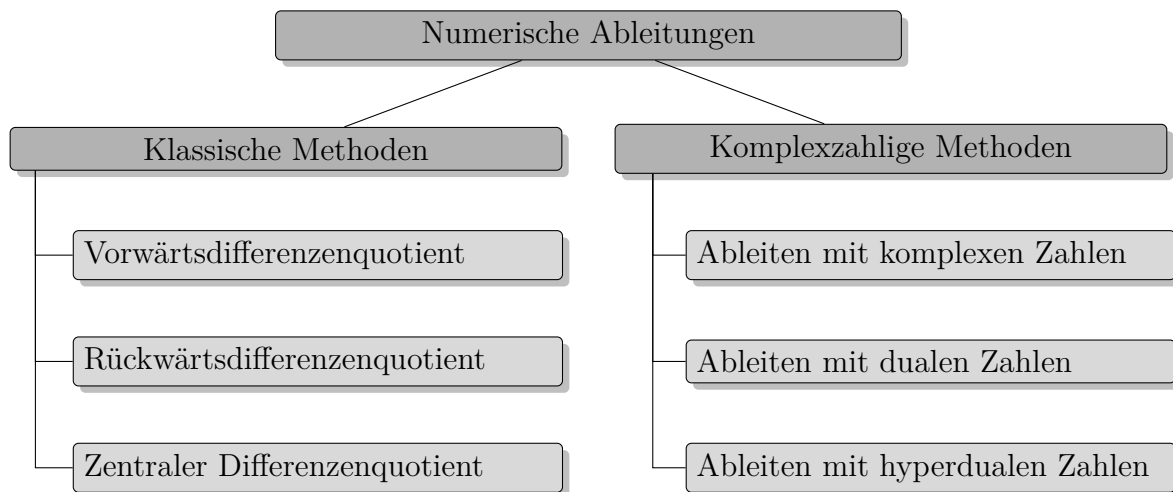
**Abbildung 5.5:** Kritischer Pfad des asymmetrischen Dreigelenktragwerks

die ungünstigste Imperfektion einen Wert von  $w = -0,963$ , die exakte Lösung liegt bei  $w = -1,0$ . Anders als in der Arbeit von DEMML (1997), in der die Nebenbedingung exakt erfüllt wird, findet die in dieser Arbeit präsentierte Methode jedoch auch Lösungen die kleiner als die maximal vorgegebene Imperfektion sind.

# 6

## Numerische Ableitungen

Für die direkte Berechnung kritischer Punkte muss die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  nach den Verschiebungen  $\mathbf{D}$  abgeleitet werden. Da sich für viele Elementformulierungen die analytische Lösung dieser Ableitung nicht oder nur unter unverhältnismäßigem Aufwand ermitteln lässt, werden in diesem Kapitel mehrere bereits bekannte Verfahren zur numerischen Ableitung analytischer Funktionen vorgestellt und erstmals im Kontext der direkten Berechnung kritischer Punkte angewandt. Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Methoden lassen sich grundlegend in zwei Kategorien aufteilen.



**Abbildung 6.1:** Übersicht über die in dieser Arbeit vorgestellten Methoden zur numerischen Ableitung

Im Abschnitt 6.1 werden mit dem Vorwärtsdifferenzen-, dem Rückwärtsdifferenzen- und dem Zentralen Differenzenverfahren zunächst die klassischen Methoden zur numerischen Ableitung analytischer Funktionen vorgestellt. Die Qualität der Näherungslösung

schwankt bei allen drei Methoden enorm und ist maßgeblich von der Wahl der Parameter abhängig.

In den darauf folgenden Abschnitten werden die Methoden erläutert, die zur Ermittlung der Ableitung verschiedene hyperkomplexe Zahlen und die zugehörige Algebra verwenden. Hierbei wird in Abschnitt 6.2 zunächst eine Methode vorgestellt, die auf komplexen Zahlen basiert – die sog. Complex-step Derivative Approximation, kurz CSDA (MARTINS U. A. (2003)). Bei dieser Methode liegt der Fehler der Näherung im Rahmen der Rechengenauigkeit von Computern und ist somit vernachlässigbar klein. Anstelle komplexer Zahlen können bei dieser Methode auch duale Zahlen verwendet werden. Für diesen Fall ist das Ergebnis keine Näherung mehr, sondern die exakte Lösung des Problems. Somit verschwindet der Fehler vollständig.

Im Anschluss wird in Abschnitt 6.3 eine Ableitungsmethode vorgestellt, die auf den extra hierfür von FIKE UND ALONSO (2011) entwickelten hyperdualen Zahlen beruht. Anders als die bisherigen Varianten liefert die Methode der hyperdualen Zahlen sowohl für erste wie auch für zweite Ableitungen die exakte Lösung.

Abschnitt 6.4 befasst sich mit den Rechenregeln und den Besonderheiten, die sich bei der Ermittlung der Ableitung mit komplexen und im Besonderen mit hyperdualen Zahlen ergeben.

Bei der direkten Berechnung kritischer Punkte muss das Produkt aus Steifigkeitsmatrix und Beulvektor nach den Verschiebungen abgeleitet werden. Diese Ableitung lässt sich auch als Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix in Richtung des Beulvektors verstehen. In Abschnitt 6.5 wird die Methode der CSDA auf Richtungsableitungen übertragen und damit eine stabile und effiziente Methode zur Lösung des Problems vorgestellt.

Abschließend wird in Abschnitt 6.6 die Methode des *automatisierten Ableitens* vorgestellt. Diese Methoden, die im Fachbereich der numerischen Mathematik entwickelt wurden, ermöglichen ebenfalls die exakte numerische Berechnung erster und zweiter Ableitungen. Neben einer kurzen Herleitung der Methoden wird die Analogie zur Ableitungsberechnung mit dualen und hyperdualen Zahlen aufgezeigt.

### 6.1 Klassische Differenzenverfahren

Die Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$  an der Stelle  $x$  kann geometrisch als die Steigung einer Tangente an die Funktion  $f$  im Punkt  $x$  interpretiert werden. Sie ist durch den



Differentialquotienten definiert zu

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (6.1)$$

Der Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  lässt sich mit numerischen Methoden nicht umsetzen. Die Tangentensteigung lässt sich aber mit der Steigung der Sekante durch die Auswertung der Funktion  $f$  an den Stellen  $x$  und  $x+h$  für abnehmende Werte für  $h$  annähern (vgl. Abbildung 6.2).

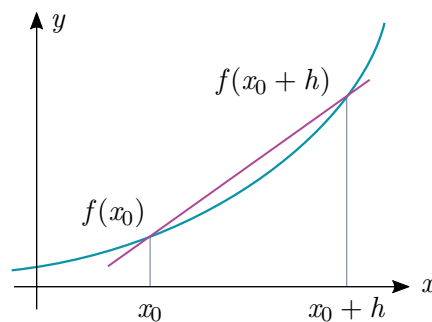


Abbildung 6.2: Steigung der Sekante

### Vorwärtsdifferenzenquotient

Der Differenzenquotient, der für sehr kleine Werte von  $h$  eine Näherung des Differentialquotienten aus Gleichung (6.1) beschreibt, lässt sich über eine Taylorreihenentwicklung der Funktion  $f(x+h)$  an der Entwicklungsstelle  $x$  herleiten.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x+h-x)^n \\ &= f(x) + \frac{f'(x)}{1}h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 \dots \end{aligned} \quad (6.2)$$

Umformen der Gleichung (6.2) führt auf den Ausdruck für die Ableitung

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (6.3)$$

Vernachlässigt man die Terme höherer Ordnung, erhält man eine Näherung der Ableitung:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (6.4)$$

### Rückwärtsdifferenzenquotient

Das Vorgehen bei Rückwärts- und Vorwärtsdifferenzenquotient ist nahezu identisch. Es muss lediglich die Funktion  $f(x-h)$  als Taylorreihe am Entwicklungspunkt  $x$  wie in Gleichung (6.2) entwickelt und umgeformt werden:

$$\begin{aligned} f(x-h) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x-h-x)^n \\ &= f(x) - \frac{f'(x)}{1}h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f'''(x)}{6}h^3 \dots \end{aligned} \quad (6.5)$$

Daraus lässt sich ein Ausdruck für die Ableitung näherungsweise ermitteln:

$$f'(x) \approx \frac{f(x-h) - f(x)}{h}. \quad (6.6)$$

### Zentraler Differenzenquotient

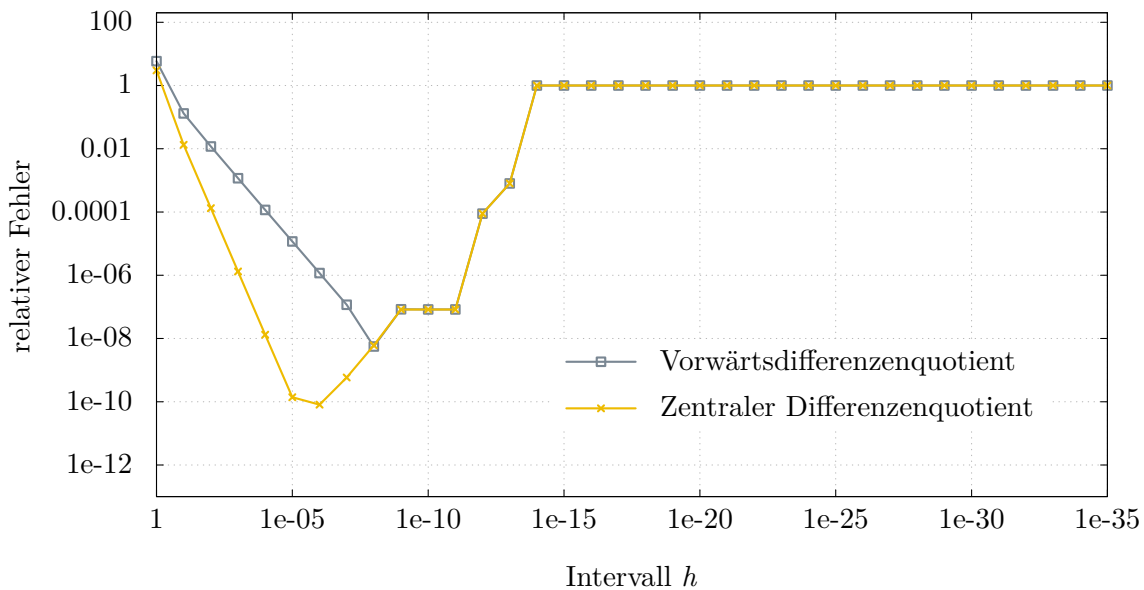
Der zentrale Differenzenquotient ergibt sich aus der Differenz der beiden Taylorreihen (Gl. (6.2) & Gl.(6.5)):

$$f(x+h) - f(x-h) = \frac{2f'(x)}{1}h + \frac{2f'''(x)}{6}h^3 \dots \quad (6.7)$$

Nach Umformung ergibt sich folgender Ausdruck für die erste Ableitung:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (6.8)$$

Da aufgrund der Differenz der beiden Taylorreihen alle Ausdrücke mit geraden Exponenten entfallen, ist der zentrale Differenzenquotient eine Ordnung genauer als Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenquotienten. Dies kann man auch in Abbildung 6.3 erkennen.



**Abbildung 6.3:** Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient für die erste Ableitung von Gl. (6.9)

Dort ist der relative Fehler der numerischen Ableitung gegenüber der analytischen Lösung für die Funktion

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{\sin^3 x + \cos^3 x}}, \quad (6.9)$$

ausgewertet an der Stelle  $x = 1,5$ , über die Intervallgröße  $h$  für den Vorwärtsdifferenzen- und den zentralen Differenzenquotienten angetragen.

Wie sich in der Grafik erkennen lässt, nimmt der relative Fehler für das Vorwärtsdifferenzenverfahren (und damit auch für das Rückwärtsdifferenzenverfahren) zunächst proportional zur Intervallgröße  $h$  ab, der relative Fehler des zentralen Differenzenverfahrens hingegen proportional zu  $h^2$ . Diesen Fehler, der durch das Streichen der höheren Glieder der Taylorreihe entsteht, nennt man auch *Diskretisierungsfehler* oder *truncation error*.

Abbildung 6.3 zeigt aber auch, dass sich der relative Fehler mit abnehmendem  $h$  wieder vergrößert. Dies entsteht durch die Differenz, die in den Gleichungen (6.4), (6.6) und (6.8) jeweils im Zähler auftaucht. Für abnehmende Werte von  $h$  nähern sich die Ausdrücke für  $f(x)$  und  $f(x \pm h)$  immer weiter an. Die Subtraktion zweier nahezu gleich großer Gleitkommazahlen ist bei numerischen Methoden von der Genauigkeit des Gleitkommaformats abhängig. Liegt die Abweichung von  $f(x)$  und  $f(x \pm h)$  außerhalb der Rechnergenauigkeit ergibt sich die Differenz zu null und der relative Fehler folglich zu

eins. Diesen Fehler bezeichnet man auch als *Auslöschung* bzw. *subtractive cancellation error*.

## 6.2 Ableiten mit der Complex-step-Methode

Die Verwendung komplexer Zahlen zur Berechnung von Ableitungen geht bereits auf Veröffentlichungen von LYNESS UND MOLER (1967) und LYNESS (1967) zurück. Die in diesem Abschnitt vorgestellte Complex-step Derivative Approximation, im Folgenden mit CSDA abgekürzt, geht auf SQUIRE UND TRAPP (1998) und MARTINS U. A. (2003) zurück.

Auch die CSDA basiert auf einer Taylorreihenentwicklung. Im Gegensatz zu Gl. (6.2) wird jedoch die Taylorreihe der analytischen Funktion  $f(x + ih)$  entwickelt, d. h. anstelle einer reellen Größe  $h$  wird die Funktion um eine rein imaginäre Größe  $ih$  gestört:

$$\begin{aligned} f(x + ih) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (ih)^n \\ &= f(x) + \frac{f'(x)}{1} ih + \frac{f''(x)}{2} (ih)^2 + \frac{f'''(x)}{6} (ih)^3 \dots \\ &= f(x) + \frac{f'(x)}{1} ih - \frac{f''(x)}{2} h^2 - \frac{f'''(x)}{6} ih^3 \dots \end{aligned} \quad (6.10)$$

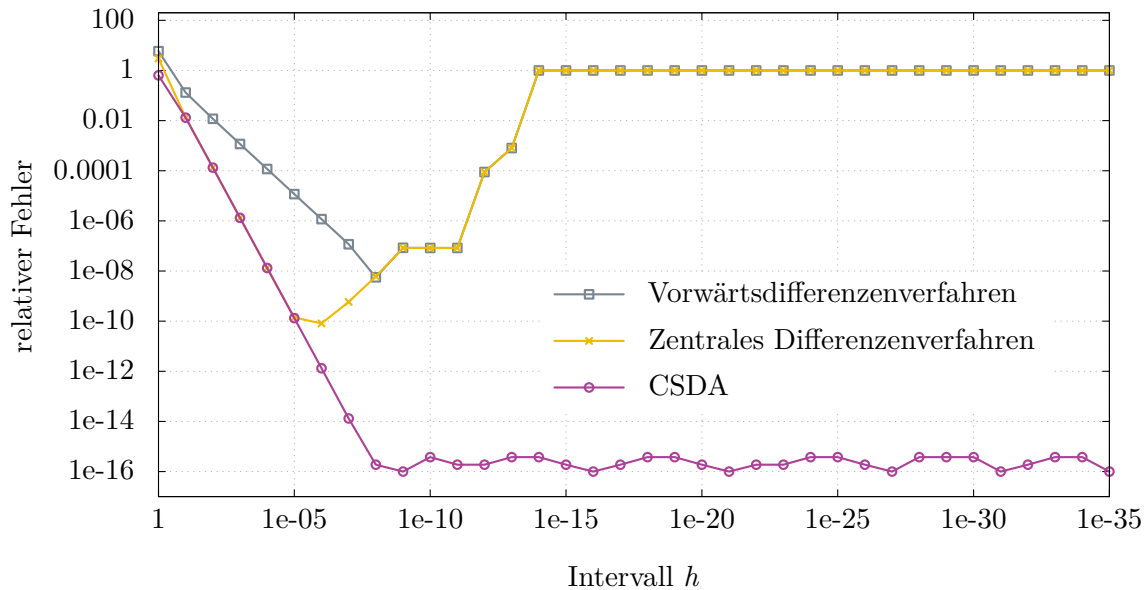
Durch Sortieren der einzelnen Reihenglieder in reelle und imaginäre Anteile erhält man

$$f(x + ih) = \left( f(x) + \frac{f''(x)}{2} (ih)^2 \right) + i \left( \frac{f'(x)}{1} h - \frac{f'''(x)}{6} h^3 \right) + \dots \quad (6.11)$$

In Gleichung (6.11) erkennt man, dass die gesuchte erste Ableitung nur im Imaginärteil auftaucht. Auflösen nach  $f'(x)$  liefert schließlich folgenden Näherung:

$$f'(x) \approx \frac{\Im(f(x + ih))}{h}. \quad (6.12)$$

In Abbildung 6.4 ist wieder der relative Fehler der Berechnung der Ableitung für die Funktion aus Gleichung (6.9) über der Intervallgröße  $h$  dargestellt. Wie man nach dem Umsortieren in Gleichung (6.11) erkennt, taucht der quadratische Term nur im Realteil auf und entfällt somit. Das erste Reihenglied, das gestrichen wird, ist also auch hier das kubische. Daher nimmt für die CSDA der Fehler, wie im Diagramm zu erkennen, proportional zu  $h^2$  ab. Die CSDA ist daher auch nach der zweiten Ordnung genau.



**Abbildung 6.4:** Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient sowie CSDA für die erste Ableitung von Gl. (6.9)

Im Gegensatz zum klassischen Differenzenquotienten steigt der Fehler bei abnehmendem  $h$  jedoch nicht wieder an, sondern strebt gegen einen Wert kleiner als  $10^{-15}$ . Der Grund hierfür liegt in der entfallenen Subtraktion im Zähler der Gleichung (6.12), da nur der imaginäre Anteil der Taylorreihe Verwendung findet. Dies bedeutet, dass die CSDA für ausreichend kleine Werte von  $h$  zuverlässige Ergebnisse für die erste Ableitung liefert.

Anstatt der komplexen Zahlen können für die Ermittlung der ersten Ableitung auch duale Zahlen verwendet werden. Duale Zahlen sind ebenfalls zweidimensionale hyperkomplexe Zahlen der Form

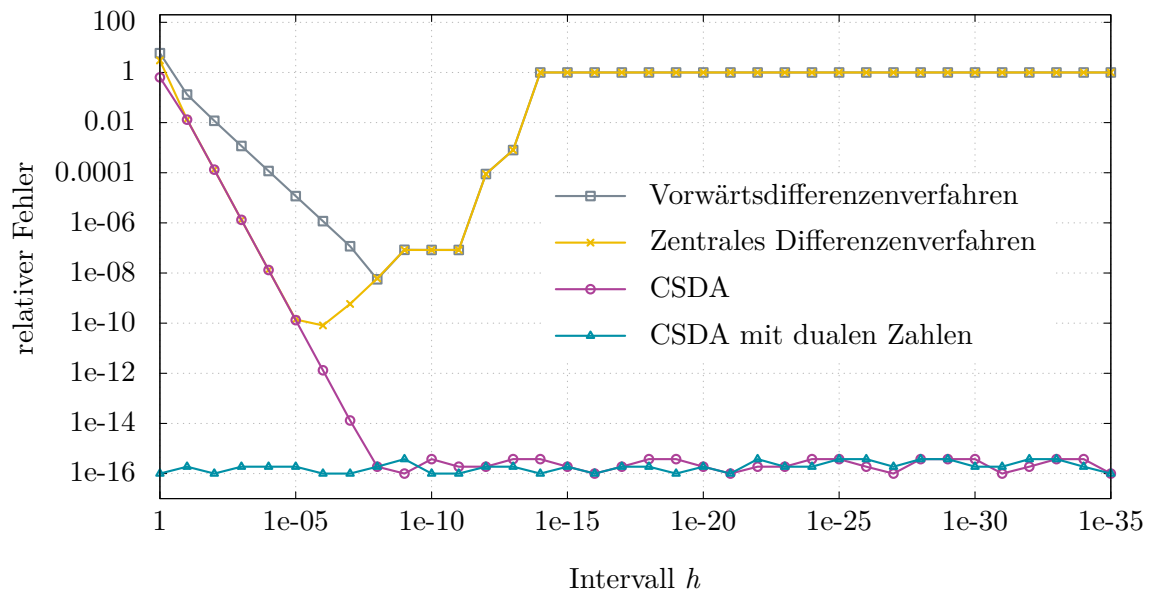
$$z = a_0x + a_1\epsilon. \quad (6.13)$$

Für die imaginäre Einheit  $\epsilon$  gilt

$$\begin{aligned} \epsilon^2 &= 0, \\ \epsilon &\neq 0. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Man kann zur Herleitung der ersten Ableitung wieder eine Taylorreihe der Funktion  $f(x + \epsilon h)$  entwickeln:

$$f(x + \epsilon h) = f(x) + f'(x)\epsilon h. \quad (6.15)$$



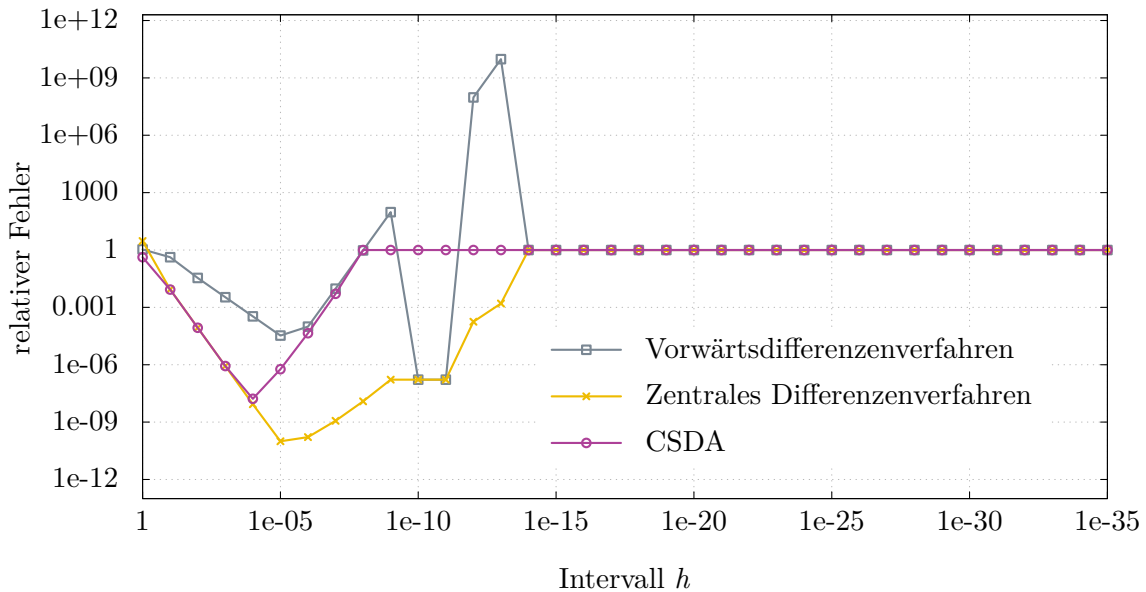
**Abbildung 6.5:** Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient, CSDA und CSDA mit dualen Zahlen für die erste Ableitung von Gl. (6.9)

Hier entfallen jedoch wegen  $\epsilon^2 = 0$  alle höheren Reihenglieder. Somit erhält man für die erste Ableitung folgenden Ausdruck:

$$f'(x) = \frac{\Im(f(x + \epsilon h))}{h}. \quad (6.16)$$

Aus diesem Grund handelt es sich bei Gl. (6.16) nicht um eine Näherung – anders als etwa bei Gl. (6.6) oder Gl. (6.12) – da keine Reihenglieder höherer Ordnung gestrichen werden, sondern um die exakte Lösung. Dies zeigt sich auch deutlich in Abbildung 6.5. Mit der Kombination aus CSDA und dualen Zahlen entfällt nicht nur der Fehler der Auslöschung. Auch der Diskretisierungsfehler verschwindet. Somit ist das Ergebnis der ersten Ableitung unabhängig von der Intervallgröße  $h$ .

Zur Ermittlung der ersten Ableitungen kommt in dieser Arbeit jedoch trotzdem die CSDA mit komplexen Zahlen zum Einsatz. Dies liegt zum einen daran, dass bei ausreichend kleinem  $h$  beide Methoden Ergebnisse liefern, die im Rahmen der numerischen Rechengenauigkeit liegen. Vielmehr aber liegt es daran, dass komplexe Zahlen in der C++-Standardbibliothek enthalten sind, anders als die dualen Zahlen. Somit erhöht sich die Effizienz des in Zusammenhang mit dieser Arbeit verwendeten, in C++ geschriebene Finite-Elemente-Programms *NumPro* des Instituts für Baustatik und Baudynamik deutlich. Ein kurzer Einblick zum Umgang mit komplexen Zahlen in C++ findet sich in Abschnitt 6.4.



**Abbildung 6.6:** Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient sowie CSDA für die zweite Ableitung von Gl. (6.9)

## 6.3 Ableiten mit hyperdualen Zahlen

Mit allen bisher vorgestellten Methoden wurden lediglich erste Ableitungen ermittelt. Die jeweils entwickelte Taylorreihe lässt sich jedoch auch immer nach der zweiten Ableitung auflösen. Stellt man etwa Gleichung (6.11) um, erhält man

$$f''(x) \approx \frac{2\left(f(x) - \mathcal{R}(f(x + ih))\right)}{h^2} \quad (6.17)$$

als Näherung für die zweite Ableitung mit der CSDA. Hier verschwindet die Subtraktion im Zähler nicht – anders als bei der ersten Ableitung. Daher tritt für zweite Ableitungen sowohl mit den klassischen Differenzenquotienten als auch mit der CSDA wieder das Problem der Auslöschung zu Tage. Dies lässt sich auch in Abbildung 6.6 erkennen, in der der relative Fehler bei der Ermittlung der zweiten Ableitung über der Größe des Intervalls  $h$  für die Funktion in Gl. (6.9) aufgetragen ist.

Um den Fehler der Auslöschung auch für zweite Ableitungen zu vermeiden, muss das quadratische Reihenglied, das die Information über die zweite Ableitung enthält, ebenfalls in einem Imaginärteil stehen. Dies wird durch Verwendung sog. hyperdualer Zahlen ermöglicht, die in FIKE UND ALONSO (2011) erstmals präsentiert werden.

Zur Ermittlung der ersten und zweiten Ableitung wird auch hier wieder die Taylorreihe einer Funktion  $f(x + z)$  an der Stelle  $x$  entwickelt. Hierbei steht  $z$  zunächst für den

Imaginärteil der hyperdualen Zahl:

$$\begin{aligned} f(x+z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (z)^n \\ &= f(x) + zf'(x) + \frac{1}{2!} z^2 f''(x) + \frac{1}{3!} z^3 f'''(x) + \dots \end{aligned} \quad (6.18)$$

Hyperduale Zahlen sind – ähnlich wie Quaternionen – höher-dimensionale hyperkomplexe Zahlen mit drei Imaginärteilen. Sie stellen eine Erweiterung der dualen Zahlen dar. Für die drei imaginären Einheiten  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  und  $\epsilon_1\epsilon_2$  einer hyperdualen Zahl

$$a = a_0 + a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + a_3\epsilon_1\epsilon_2 \quad (6.19)$$

gilt, analog zu den dualen Zahlen,

$$\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = (\epsilon_1\epsilon_2)^2 = 0 \quad (6.20)$$

$$\epsilon_1 \neq 0, \epsilon_2 \neq 0, \epsilon_1\epsilon_2 \neq 0. \quad (6.21)$$

In Gl. (6.22) sind die ersten Potenzen für eine hyperduale Zahl  $a = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + 0\epsilon_1\epsilon_2$  angegeben:

$$\begin{aligned} a &= a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 \\ a^2 &= a_1^2\epsilon_1^2 + a_2^2\epsilon_2^2 + 2a_1a_2\epsilon_1\epsilon_2 \\ a^3 &= a_1^3\epsilon_1^3 + 3a_1a_2^2\epsilon_1\epsilon_2^2 + 3a_1^2a_2\epsilon_1^2\epsilon_2 + a_2^3\epsilon_2^3 \\ a^4 &= a_1^4\epsilon_1^4 + 6a_1^2a_2^2\epsilon_1^2\epsilon_2^2 + 4a_1^3a_2\epsilon_1^3\epsilon_2 + 4a_1a_2^3\epsilon_1\epsilon_2^3 + a_2^4\epsilon_2^4 \end{aligned} \quad (6.22)$$

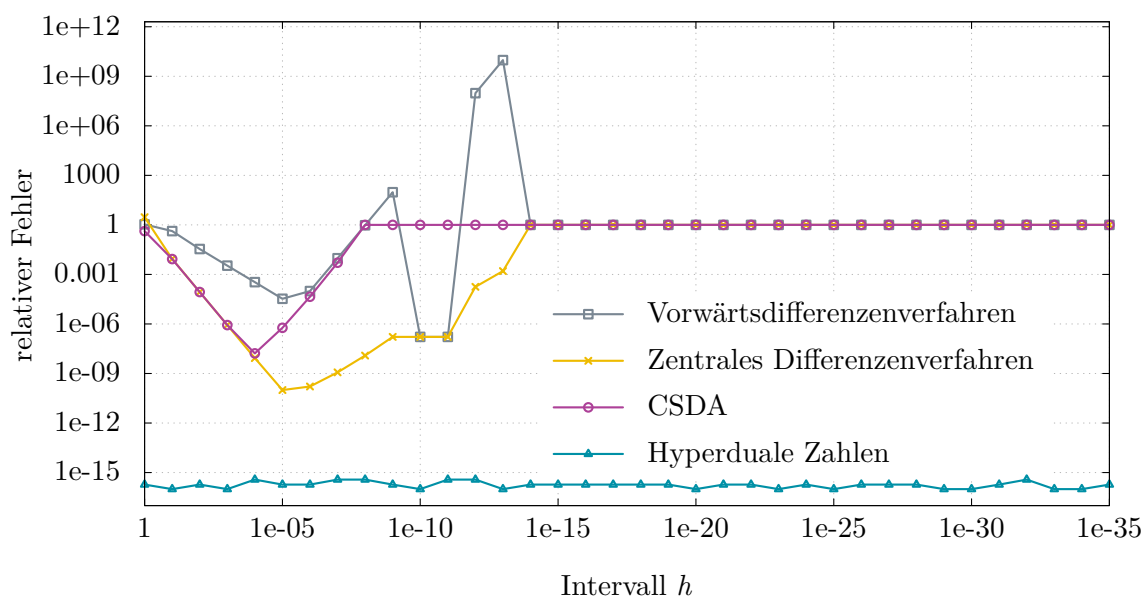
Auch hier zeigt sich, wie schon bei den dualen Zahlen in Abschnitt 6.2, dass sich, beginnend ab der dritten Potenz, alle höheren Terme in Gleichung (6.22) zu null ergeben. Daraus lässt sich, ähnlich wie bei Gleichung (6.15), die Taylorreihe der Funktion  $f(x+z)$  mit  $z = a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + 0\epsilon_1\epsilon_2$  zur Herleitung der zweiten Ableitung entwickeln:

$$f(x+z) = f(x) + a_1f'(x)\epsilon_1 + a_2f'(x)\epsilon_2 + a_1a_2f''(x)\epsilon_1\epsilon_2. \quad (6.23)$$

Auch hier müssen die höheren Reihenglieder nicht abgeschnitten werden, sondern entfallen von selbst. Damit ergibt sich der folgende Ausdruck für die erste Ableitung mit der Methode der hyperdualen Zahlen mithilfe des ersten Imaginärteil der Funktion zu

$$f'(x) = \frac{\mathfrak{S}_{\epsilon_1}(f(x+z))}{a_1} \quad (6.24)$$





**Abbildung 6.7:** Vergleich des relativen Fehlers von Vorwärtsdifferenzen- und zentralem Differenzenquotient, CSDA und hyperdualen Zahlen für die zweite Ableitung von Gl. (6.9)

und mithilfe des zweiten Imaginärteil zu

$$f'(x) = \frac{\Im_{\epsilon_2}(f(x+z))}{a_2}. \quad (6.25)$$

Die zweite Ableitung der Funktion erhält man durch den dritten Imaginärteil:

$$f''(x) = \frac{\Im_{\epsilon_1\epsilon_2}(f(x+a_1\epsilon_1+a_2\epsilon_2+0\epsilon_1\epsilon_2))}{a_1a_2}. \quad (6.26)$$

Mit Gl. (6.26) hat man nun eine Methode zur fehlerfreien Berechnung der zweiten Ableitung analytischer Funktionen. Dies lässt sich in Abbildung 6.7 erkennen. Es entfällt sowohl der Diskretisierungsfehler, da keine Reihenglieder vernachlässigt werden, zudem entsteht keine Auslöschung, da im Zähler weder für erste noch für zweite Ableitungen Differenzen entstehen.

## 6.4 Rechnen mit hyperkomplexen Zahlen

In diesem Abschnitt sollen einige Besonderheiten und Rechenregeln für den Umgang mit hyperkomplexen Zahlen, speziell für die in den Abschnitten 6.2 und 6.3 vorgestellten

Methoden zur Ableitung, aufgezeigt und erläutert werden. Hierbei liegt der Fokus dieses Abschnitts in erster Linie auf den hyperdualen Zahlen. Da duale Zahlen aus den bereits in Abschnitt 6.2 erwähnten Gründen nicht zum Einsatz kommen, werden sie in diesem Abschnitt nicht weiter behandelt.

Um mit hyperdualen Zahlen arbeiten zu können, werden zunächst die von FIKE UND ALONSO (2011) aufgestellten Rechenregeln aufgezeigt und Operatoren definiert. Hierfür sind die zwei hyperdualen Zahlen  $a$  und  $b$  gegeben mit

$$a = a_0 + a_1\epsilon_1 + a_2\epsilon_2 + a_3\epsilon_1\epsilon_2 \quad \text{mit} \quad a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad (6.27)$$

$$b = b_0 + b_1\epsilon_1 + b_2\epsilon_2 + b_3\epsilon_1\epsilon_2 \quad \text{mit} \quad b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}. \quad (6.28)$$

Die Addition  $a + b$  zweier hyperdualer Zahlen folgt den Regeln beim Rechnen mit komplexen Zahlen und ist definiert zu

$$a + b = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\epsilon_1 + (a_2 + b_2)\epsilon_2 + (a_3 + b_3)\epsilon_1\epsilon_2, \quad (6.29)$$

für die Multiplikation gilt

$$ab = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)\epsilon_1 + (a_0b_2 + a_2b_0)\epsilon_2 + (a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0)\epsilon_1\epsilon_2. \quad (6.30)$$

Der Kehrwert einer hyperdualen Zahl ergibt sich zu

$$a^{-1} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2}\epsilon_1 - \frac{a_2}{a_0^2}\epsilon_2 + \left( -\frac{a_3}{a_0^2} + \frac{2a_1a_2}{a_0^3} \right) \epsilon_1\epsilon_2. \quad (6.31)$$

Mithilfe des Kehrwerts einer hyperdualen Zahl lässt sich die Division  $\frac{b}{a}$  durch das Produkt  $ba^{-1}$  ausdrücken. In Gl. (6.31) lässt sich jedoch erkennen, dass der Kehrwert nur für einen Realteil ungleich null definiert ist. Hierin unterscheiden sich hyperduale Zahlen von komplexen Zahlen, für die der Kehrwert gebildet werden kann, wenn entweder der Real- oder der Imaginärteil ungleich null ist. Berücksichtigt man jedoch das Einsatzgebiet hyperdualer Zahlen, spielt diese Einschränkung nur eine untergeordnete Rolle. Hyperduale Zahlen ersetzen reelle Zahlen in bestehenden Algorithmen zur Berechnung der nichtlinearen Elementsteifigkeitsmatrizen. Der Realteil einer hyperdualen Zahl muss in diesem Anwendungsrahmen immer der Berechnung mit reellen Zahlen entsprechen, bei denen eine Nulldivision ebenfalls ausgeschlossen ist. Aus diesem Grund ist eine Division durch eine hyperduale Zahl mit einem Realteil  $a_0 = 0$  ausgeschlossen.

Eine weitere Besonderheit ergibt sich für nicht analytische Funktionen, wie beispielsweise die Betragsfunktion. Sowohl bei komplexen wie auch bei hyperdualen Zahlen muss das Ergebnis des Realteils mit dem Ergebnis einer entsprechenden Berechnung mit reellen

Zahlen übereinstimmen. Es ist somit unabhängig vom Imaginärteil. Aus diesem Grund ergibt sich der Betrag  $|x + iy|$  im Rahmen der in dieser Arbeit verwendeten CSDA für komplexe Zahlen nach MARTINS U. A. (2003) in Abhängigkeit von  $x$  zu

$$|x + iy| = \begin{cases} -x - iy, & \text{für } x < 0 \\ +x + iy, & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (6.32)$$

Für hyperduale Zahlen gilt die Regel entsprechend.

In Computerprogrammen kommen häufig Vergleichsoperatoren zum Einsatz. Da auch hier das Ergebnis für den Realteil einer komplexen bzw. hyperdualen Zahl mit dem Ergebnis für reelle Zahlen übereinstimmen muss, ist es naheliegend, auch hier nur die Realteile miteinander zu vergleichen.

## 6.5 Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix

In dieser Arbeit werden die in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Algorithmen zur numerischen Berechnung der ersten Ableitung angewandt auf die Ableitung des Produkts aus Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T$  und kritischem Eigenvektor  $\Phi$  nach den Verschiebungen  $\mathbf{D}$ , die im Rahmen der direkten Berechnung kritischer Punkte ermittelt werden muss (siehe Abschnitte 4.3 und 4.4). Wie bereits in WRIGGERS UND SIMO (1990) angemerkt, lässt sich  $\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \mathbf{D}} \Phi$  auch als Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix in Richtung des Beulvektors verstehen.

Eine Richtungsableitung  $f'_v$  einer Funktion  $f(\mathbf{x})$  beschreibt die Änderung des Funktionswert an der Stelle  $\mathbf{x}$  bei einer Änderung der Funktionsvariablen in Richtung von  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ , oder in anderen Worten, die Steigung der Funktion  $f$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  in Richtung von  $\mathbf{v}$ . Sie ist definiert zu

$$f'_v(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h} = \left. \frac{d}{dh} f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) \right|_{h=0} \quad (6.33)$$

für

$$\|\mathbf{v}\|_2 = 1. \quad (6.34)$$

Mit dieser Definition lässt sich jede partielle Ableitung auch als Richtungsableitung in Richtung aller Koordinatenachsen interpretieren. Die Richtungsableitung selbst stellt wiederum eine spezielle Form des Gâteaux-Differentials dar. Eine ausführlichere Erläuterung zu Richtungs- und Gâteaux-Ableitung finden sich u. a. in ARENS U. A. (2018).

Die Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix in Richtung des Beulvektors ergibt sich damit zu

$$\mathbf{K}_\Phi = \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \mathbf{D}} \Phi = \left. \frac{d}{dh} \left( \mathbf{K}_T(\mathbf{D} + h\Phi) \right) \right|_{h=0}. \quad (6.35)$$

Mit der in Abschnitt 6.2 vorgestellten Methode der Complex-step Derivative Approximation, lässt sich Gleichung (6.35) näherungsweise wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{K}_\Phi = \left. \frac{d}{dh} \left( \mathbf{K}_T(\mathbf{D} + h\Phi) \right) \right|_{h=0} \approx \frac{\Im \left( \mathbf{K}_T(\mathbf{D} + ih\Phi) \right)}{h}. \quad (6.36)$$

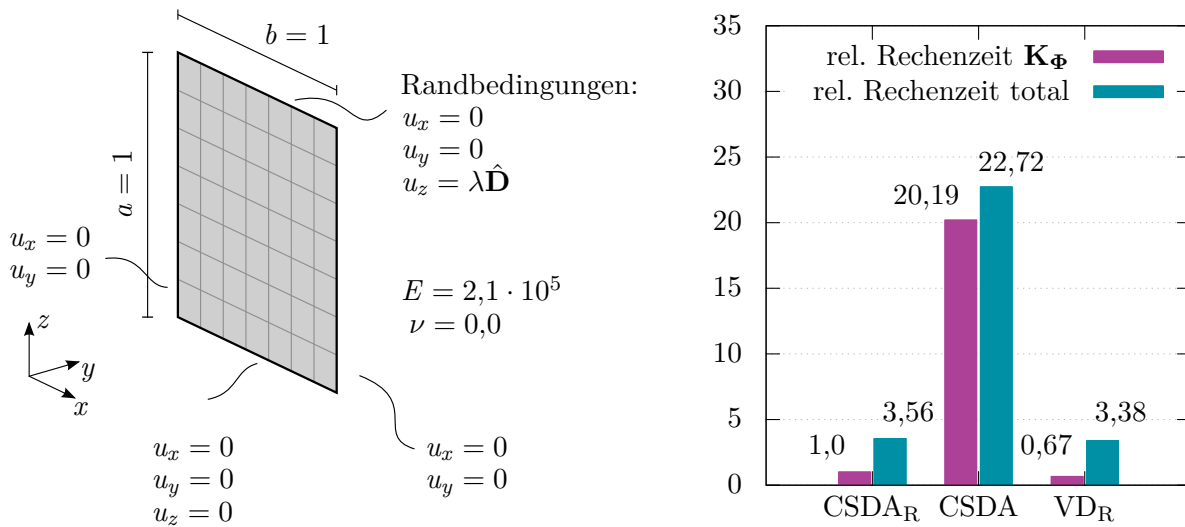
In dieser Arbeit wird, wie auch in WRIGGERS UND SIMO (1990) vorgeschlagen, die Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix auf Elementebene durchgeführt. Im Weiteren wird jedoch, anders als in WRIGGERS UND SIMO (1990) auf eine Mehrschrittlösung verzichtet. Es wird stattdessen die Matrix  $\mathbf{K}_\Phi$  auf Systemebene assembliert und anschließend das gesamte Gleichungssystem gelöst:

$$\mathbf{K}_\Phi = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{k}_\phi = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \frac{\Im \left( \mathbf{k}_T(\mathbf{d} + ih\phi) \right)}{h}. \quad (6.37)$$

Hierbei muss jeder Eintrag der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}_T$  nur einmal nach der skalaren Größe  $h$  abgeleitet werden, wofür jede Elementsteifigkeitsmatrix nur einmal an der Stelle  $(\mathbf{d} + ih\phi)$  berechnet werden muss.

Wird die Ableitung dagegen herkömmlich ermittelt, muss das Intervall  $ih$  einmal auf jeden Eintrag der Elementverschiebungen  $\mathbf{d}$  addiert werden. Anschließend muss mit jedem dieser neuen Verschiebungsvektoren die Elementsteifigkeitsmatrix berechnet und mit den entsprechenden Einträgen des Eigenvektors  $\phi$  multipliziert werden. Damit können dann die einzelnen Spalten bzw. Zeilen der Matrix  $\mathbf{k}_\phi$  ermittelt werden. Bei diesem vorgehen müsste also bei  $n$  Freiheitsgraden pro Element jede Elementsteifigkeitsmatrix auch  $n$ -mal berechnet werden.

Dies zeigt sich auch beim Vergleich der Rechenzeiten des in Abbildung 6.8 dargestellten Beispiels. Es handelt sich hierbei um eine ebene, gelenkig gelagerte, quadratische Scheibe. Sie ist an ihrem oberen Rand durch eine Lagerverschiebung  $\lambda \hat{\mathbf{D}}$  belastet. Das Beispiel besteht aus einem Patch, der mit  $7 \times 7$  quadratischen, 9-knotigen, isogeometrischen Kirchhoff-Love-Schalenelementen diskretisiert ist, daraus ergeben sich  $n = 27$  Freiheitsgrade pro Element. Im daneben dargestellten Diagramm werden die relativen



**Abbildung 6.8:** Ebene Scheibe unter Verschiebungslast, Modelldaten und Randbedingungen (links), Diagramm mit Vergleich der relativen Rechenzeiten (rechts)

Rechenzeiten bis zur Ermittlung des ersten kritischen Punkts (Verzweigen) für drei unterschiedliche Varianten zur Berechnung der Ableitung  $\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial \mathbf{D}} \Phi$  gegenübergestellt.

Die beiden linken Balken zeigen die Rechenzeit bei einer Kombination aus CSDA und Richtungsableitung, kurz CSDA<sub>R</sub>, entsprechend Gleichung (6.36). Die beiden Balken in der Mitte geben die Rechenzeit bei partieller Ableitung nach den Verschiebungen mit der CSDA wieder. Die beiden rechten Balken zeigen die Rechenzeit für die Ermittlung der Richtungsableitung als Vorwärtsdifferenz, kurz VD<sub>R</sub>, nach Gleichung (6.35). In jedem der Balkenpaare steht der linke Balken für die relative Zeit zur Berechnung der Matrix  $\mathbf{K}_\Phi$ , der rechte gibt die Gesamtzeit der Berechnung bis zur Ermittlung des ersten kritischen Punkts wieder. Hierfür wird jede Berechnung mehrmals durchgeführt, anschließend werden die Ergebnisse der Rechenzeit gemittelt und zur Variante CSDA<sub>R</sub> ins Verhältnis gesetzt.

Wie das linke und das rechte Balkenpaar im Vergleich mit dem mittleren zeigen, ist die Berechnung der Richtungsableitung deutlich effizienter als die herkömmliche partielle Ableitung, auch wenn der Unterschied geringer ausfällt als die Anzahl der Freiheitsgrade. Dies lässt sich u. a. mit der geringen Systemgröße begründen. Die gesamte Rechenzeit ist bei dieser geringen Anzahl an Freiheitsgrade so gering, dass sich Funktionsaufrufe zur Rechenzeiterfassung sowie Unterschiede bei der Implementierung sofort bemerkbar machen. Vergleicht man dagegen die Rechenzeiten der beiden Richtungsableitungen CSDA<sub>R</sub> und VD<sub>R</sub>, erkennt man, dass der Unterschied wie erwartet gering ausfällt. Dieser Unterschied zwischen den beiden Richtungsableitungen lässt sich durch die Mehrzahl an Rechenoperationen, die bei der Verwendung komplexer Zahlen entstehen, begründen.

Eine Untersuchung zum Mehraufwand sowie zur Konvergenz der Ergebnisse bei unterschiedlicher Wahl des Intervalls  $h$  findet sich in Abschnitt 7.1.

### 6.6 Automatisches Differenzieren

Die bisher vorgestellten Varianten zur numerischen Berechnung der Ableitung einer Funktion stammen aus dem Feld der Ingenieurwissenschaften. Auch die Mathematik und die Informatik beschäftigen sich seit Langem mit der numerischen Berechnung von Funktionsableitungen. Eine erste Beschreibung der in diesem Abschnitt vorgestellten Methode geht auf WENGERT (1964) zurück, weitere wichtige Beiträge finden sich in RALL (1983) und RALL (1986). Für diese Methode hat sich der Begriff des *automatischen Differenzierens* oder das *Differenzieren von Algorithmen*, im Englischen als *automatic differentiation* oder *algorithmic differentiation* bezeichnet, etabliert. Das automatische Differenzieren, im Folgenden mit AD abgekürzt, wird in der Literatur nochmals in den Vorwärtsmodus und den Rückwärtsmodus unterteilt (vgl. GRIEWANK UND WALTHER (2008)). In dieser Arbeit wird lediglich auf den Vorwärtsmodus eingegangen, der Rückwärtsmodus ist ausführlich in GRIEWANK UND WALTHER (2008) beschrieben.

Der Vorwärtsmodus kann als eine Kombination aus symbolischen und numerischen Methoden zur Berechnung einer Ableitung betrachtet werden. Die Idee dahinter ist, dass sich jedes mathematische Problem in grundlegende mathematische Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division etc.) und Funktionen ( $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\log$ , etc.) zerlegen lässt. Die Ableitungen dieser Funktionen sind bekannt und können leicht implementiert werden. Diese Zerlegung einer beliebigen Funktion in bekannte Funktionen geschieht auch, wenn ein Computerprogramm den Wert dieser beliebigen Funktion an einer vorgegebenen Stelle auswertet. Hierbei wird das Ergebnis nicht in einem Schritt ermittelt, sondern schrittweise nacheinander, bis schließlich das Endergebnis feststeht. Diese Kombination unterschiedlicher Teilfunktionen lässt sich wiederum mit der Kettenregel ableiten, um schließlich die Ableitung einer beliebigen Funktion zu erhalten.

Zur Ermittlung der Ableitung einer Funktion muss daher in jedem Schritt, der für das Lösen der Funktion algorithmisch notwendig ist, auch die Ableitung berechnet werden, was am Ende auf die gesuchte Lösung führt. Dieses Vorgehen soll am folgenden Beispiel aufgezeigt werden.

Gegeben ist die Funktion

$$y = f(x_1, x_2) = x_1 x_2 - \sin(x_2), \tag{6.38}$$

gesucht ist die partielle Ableitung

$$f_{,x_2} = \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \quad (6.39)$$

nach  $x_2$  an den Stellen  $x_2 = 2$  und  $x_2 = 3$ .

Um die Funktion  $f(x_1, x_2)$  an den angegebenen Stellen auszuwerten, benötigt ein Computerprogramm fünf Schritte. Zuerst werden die Werte für  $x_1$  und  $x_2$  den Variablen  $v_1$  und  $v_2$  zugewiesen:

$$v_1 = x_1 = 2, \quad (6.40)$$

$$v_2 = x_2 = 3. \quad (6.41)$$

Anschließend kann der erste Teil der Funktion, das Produkt  $x_1 x_2$ , unter Berücksichtigung von (6.40) und (6.41) der Variable  $v_3$  zugewiesen werden:

$$v_3 = v_1 v_2 = 2 \cdot 3 = 6. \quad (6.42)$$

Der zweite Teil der Funktion,  $\sin(x_2)$ , wird in  $v_4$  gespeichert:

$$v_4 = \sin(v_2) = \sin(3). \quad (6.43)$$

Abschließend ergibt sich die Lösung zu

$$v_5 = v_3 - v_4 = 6 - \sin(3) \approx 5,86. \quad (6.44)$$

Zur Ermittlung der Ableitung  $f_{,x_2}$  muss anschließend jeder Ausdruck nach  $x_2$  abgeleitet werden. Ableitungen werden in diesem Zusammenhang durch einen Punkt über der Variable gekennzeichnet. Die ersten beiden Ableitungen ergeben sich zu

$$\dot{v}_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x_2} = 0 \quad (6.45)$$

$$\dot{v}_2 = \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 1 \quad (6.46)$$

Unter Anwendung der Produktregel folgt

$$\dot{v}_3 = \frac{\partial}{\partial x_2}(v_1 v_2) = \dot{v}_1 v_2 + v_1 \dot{v}_2 = 0 + 2 \cdot 1 = 2. \quad (6.47)$$

Aus dem vierten und fünften Term folgt schließlich

$$\dot{v}_4 = \frac{\partial v_4}{\partial x_2} = \cos(v_2) \cdot 1, \quad (6.48)$$

$$\dot{v}_5 = \dot{v}_3 - \dot{v}_4 = \dot{v}_3 - \cos(v_2) = 2 - \cos(3) \approx 3. \quad (6.49)$$

Zur Ermittlung der Ableitung einer allgemeinen Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x = x_0$  muss also in jedem Zwischenschritt, der algorithmisch zur Berechnung des Funktionswerts notwendig ist, auch die Ableitung der Zwischenfunktionen in den einzelnen Schritten nach  $x$  an der Stelle  $x = x_0$  ermittelt werden. Dies führt am Ende auf die gesuchte Lösung der Ableitung.

Eine weitere Herleitung der beschriebenen Methode kann auch hier über die dualen Zahlen (siehe Abschnitt 6.2) erfolgen, da die Algebra der dualen Zahlen den Vorschriften der Kettenregel entspricht (vgl. HOFFMANN (2016)). Bei der oben beschriebenen Methode werden in jedem Rechenschritt sowohl der Funktionswert wie auch der Wert der Ableitung berechnet. Das Gleiche geschieht beim Rechnen mit dualen Zahlen, wenn man Gleichung (6.15) nicht wie in Gleichung (6.16) nach der Ableitung auflöst. Für den Fall, dass das Intervall  $h = 1$  gewählt wird, erhält man

$$f(x + \epsilon) = f(x) + f'(x)\epsilon. \quad (6.50)$$

Wertet man also die abzuleitende Funktion an der Stelle  $x_0 + \epsilon$  aus, erhält man automatisch die Lösungen der Funktion sowie deren Ableitung an der Stelle  $x = x_0$ . Betrachtet man den Ausdruck  $f(x_0) + f'(x_0)\epsilon$  selbst wieder als duale Zahl  $z = a_0 + a_1\epsilon$ , dann entspricht für  $\epsilon = 1$  der Imaginärteil  $a_1$  dem Wert der Ableitung  $f'(x_0)$  und der Realteil  $a_0$  entspricht dem Funktionswert der ursprünglichen Funktion  $f(x_0)$ . Dass dies dem Vorgehen aus Gl. (6.40) bis (6.49) entspricht, soll am Beispiel der Funktion aus Gleichung (6.38) gezeigt werden. Da die Funktion nach  $x_2$  abgeleitet wird, wird  $x_2$  durch die duale Zahl  $x_2 + \epsilon$  ersetzt. Dies führt auf die Gleichung

$$f(x_1, x_2 + \epsilon) = x_1(x_2 + \epsilon) - \sin(x_2 + \epsilon). \quad (6.51)$$

Jeder der beiden Summanden stellt wieder eine Funktion nach Gleichung (6.50) dar. Aus dem ersten Summanden folgt damit

$$\underbrace{x_1(x_2 + \epsilon)}_{g(x_1, x_2 + \epsilon)} = \underbrace{x_1 x_2}_{g(x_1, x_2)} + \underbrace{x_1 \epsilon}_{g'_{x_2}(x_1, x_2)\epsilon}. \quad (6.52)$$



Auch der zweite Summand lässt sich nach diesen Regeln umformen zu

$$\underbrace{\sin(x_2 + \epsilon)}_{h(x_1, x_2 + \epsilon)} = \underbrace{\sin(x_2)}_{h(x_1, x_2)} + \underbrace{\cos(x_2)\epsilon}_{h'_{x_2}(x_1, x_2)\epsilon} . \quad (6.53)$$

Fasst man die einzelnen Ausdrücke zusammen und wertet die Funktion an den Stellen  $x_1 = 2$  und  $x_2 = 3$  aus erhält man mit  $\epsilon = 1$  den folgenden Ausdruck:

$$f(x_1, x_2 + \epsilon) = \underbrace{x_1 x_2 - \sin(x_2)}_{f(x_1, x_2)} + \underbrace{(x_1 \cos(x_2))\epsilon}_{f'_{x_2}(x_1, x_2)\epsilon} = \underbrace{2 \cdot 3 - \sin(3)}_{f(x_1=2, x_2=3)} + \underbrace{2 - \cos(3)}_{f'_{x_2}(x_1=2, x_2=3)\epsilon} . \quad (6.54)$$

Wie bereits bei der CSDA mit dualen Zahlen sind alle AD-Methoden frei von Diskretisierungsfehlern, auch Auslöschung tritt nicht auf.



# 7

---

## Numerische Experimente

In diesem Kapitel wird eine Auswahl der Algorithmen, die in den Kapiteln 4, 5 und 6 gezeigt werden, an verschiedenen Benchmarkbeispielen demonstriert. Hierfür kommen unterschiedliche Elementtypen zum Einsatz, um die breite Anwendbarkeit der Methoden zu demonstrieren. Das erste Beispiel in Abschnitt 7.1 ist eine Variante des L-förmigen Rahmentragwerks nach LEE U. A. (1968). Es handelt sich dabei um ein Durchschlagsproblem. In diesem Zusammenhang erfolgt zudem ein Vergleich der in Kapitel 6 präsentierten Ableitungsmethoden.

Anschließend werden zwei Verzweigungsprobleme untersucht, die sich in ihrem Stabilitätsverhalten im Nachbeulbereich unterscheiden. Hierfür wird zuerst ein ebenes Scheibentragwerk analysiert, dessen Sekundärpfad stabil ist. Im Anschluss erfolgt die Untersuchung eines gekrümmten Schalentragwerks. Hierbei ist der Sekundärpfad unmittelbar nach dem Erreichen des kritischen Punkts instabil.

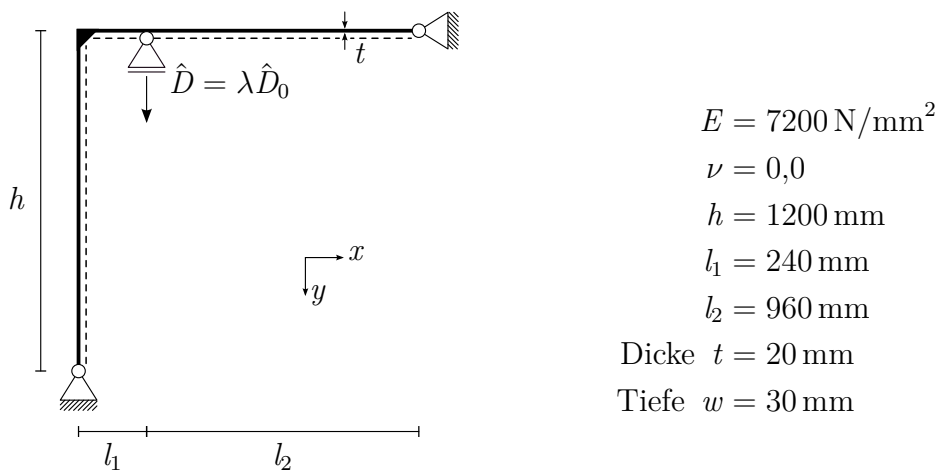
In Abschnitt 7.2 wird abschließend die Imperfektionsempfindlichkeit einer Gitterschale mit den Methoden aus Kapitel 5 untersucht.

In den gezeigten Beispielen werden nur dann Einheiten verwendet, wenn diese auch in den Referenzbeispielen der genannten Literatur vorkommen. In allen anderen Fällen wird auf Einheiten verzichtet.

### 7.1 Berechnung kritischer Punkte

#### Durchschlagen

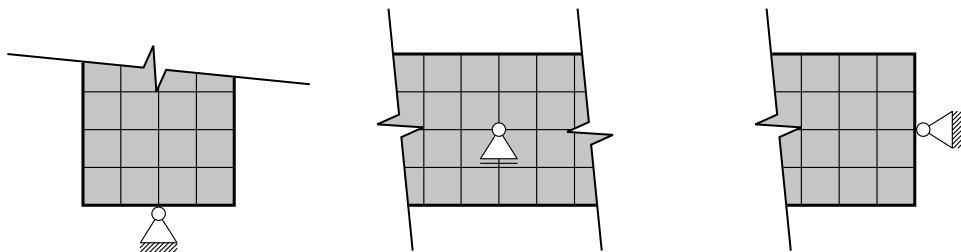
Das erste Beispiel ist an das Rahmentragwerk in LEE U. A. (1968) angelehnt. Es findet sich auch in den Veröffentlichungen von SMOLEŃSKI (1999) und LEAHU-ALUAS UND ABED-MERAIM (2011). Es handelt sich dabei um einen gelenkig gelagerten, L-förmigen



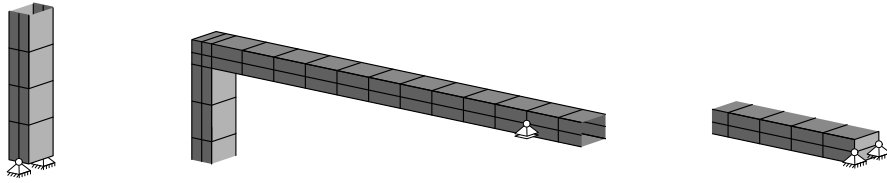
**Abbildung 7.1:** Statisches System des L-förmigen Rahmentragwerks in Anlehnung an LEE U. A. (1968)

Rahmen (siehe Abb. 7.1), der im Riegel durch eine Auflagerverschiebung belastet ist. Hierin unterscheidet sich das hier untersuchte Tragwerk von den in der genannten Literatur verwendeten Systemen, die durch eine äußere Kraftlast beansprucht werden.

In dieser Arbeit wird die in Abbildung 7.1 dargestellte Geometrie mit zwei unterschiedlichen Elementtypen diskretisiert, die beide von den in der Literatur verwendeten Elementen abweichen. Zunächst werden vierknotige Scheibenelemente Q1 mit linearen Ansatzfunktionen unter Annahme eines ebenen Spannungszustands verwendet. In Abbildung 7.2 sind einige Details dazu dargestellt. Des Weiteren wird das System mit achtknotigen Volumenschalenelementen diskretisiert, deren Formulierung in IRSLINGER (2013) vorgestellt wird. Es handelt sich dabei um das in Abschnitt 2.2 bereits erwähnte Element Shell 10, das auf einem Mehrfeldfunktional basiert. Durch ANS-Ansätze sowie durch die Verwendung der EAS-Methode werden Lockingeffekte reduziert. Um zu gewährleisten, dass die Lagerbedingungen in der Stabachse angreifen, wird für beide Elementtypen über die Dicke  $t$  immer eine gerade Zahl an Elementen verwendet (vgl. Abb. 7.2).



**Abbildung 7.2:** Details zur Modellierung des Rahmentragwerks mit vier linearen Q1-Scheibenelementen über die Dicke  $t$



**Abbildung 7.3:** Details zur Modellierung des Rahmentragwerks mit zwei Volumenschalenelementen über die Dicke  $t$  und einem über die Tiefe  $w$

Wie in Kapitel 3.4.2 bereits diskutiert, besitzt der Gleichgewichtspfad an einem Durchschlagspunkt eine vertikale Tangente, wenn das System durch eine Verschiebung belastet wird. In den Abbildungen 7.4 und 7.5 sind die Gleichgewichtspfade für die Verschiebung des belasteten Knotens in  $x$ - und  $y$ -Richtung über die Lagerreaktion am belasteten Knoten für drei unterschiedliche Netzfeinheiten dargestellt. Als Referenz dienen die Kurven aus LEAHU-ALUAS UND ABED-MERAİM (2011). Neben den Gleichgewichtspfaden sind für jede Netzfeinheit auch die Durchschlagspunkte eingezeichnet.

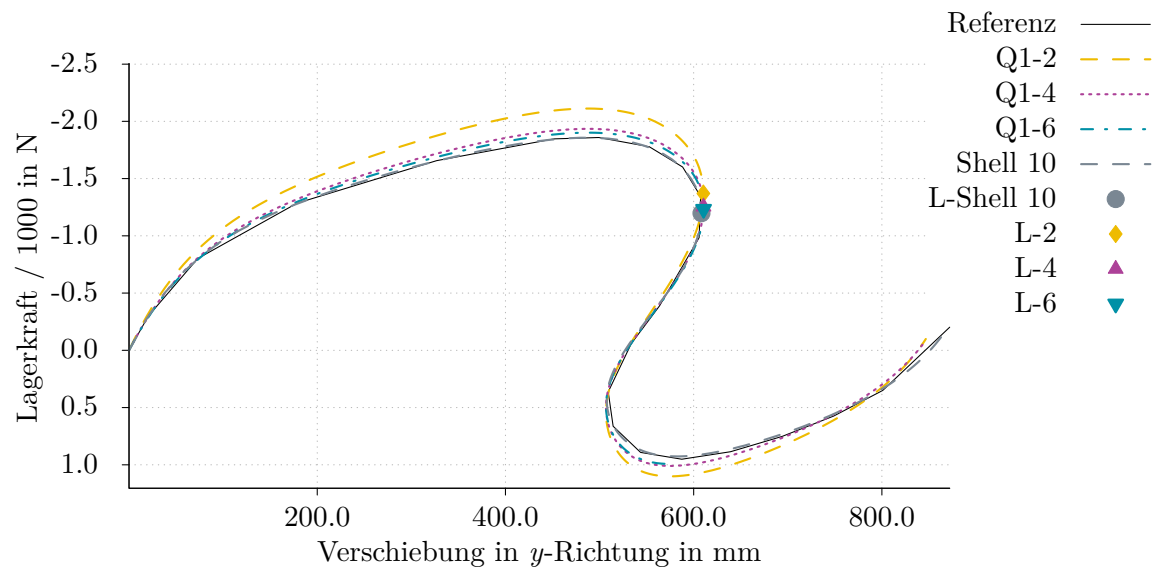
Zur Analyse des Tragwerks werden die folgenden vier Diskretisierungen verwendet:

	$n_{\text{ele}}$ über $t$	$n_{\text{ele}}$ über $w$	$n$	$n_{\text{ele}}$
Q1-2	2	1	1429	476
Q1-4	4	1	4765	1904
Q1-6	6	1	10117	4332
Shell 10	2	1	1480	164

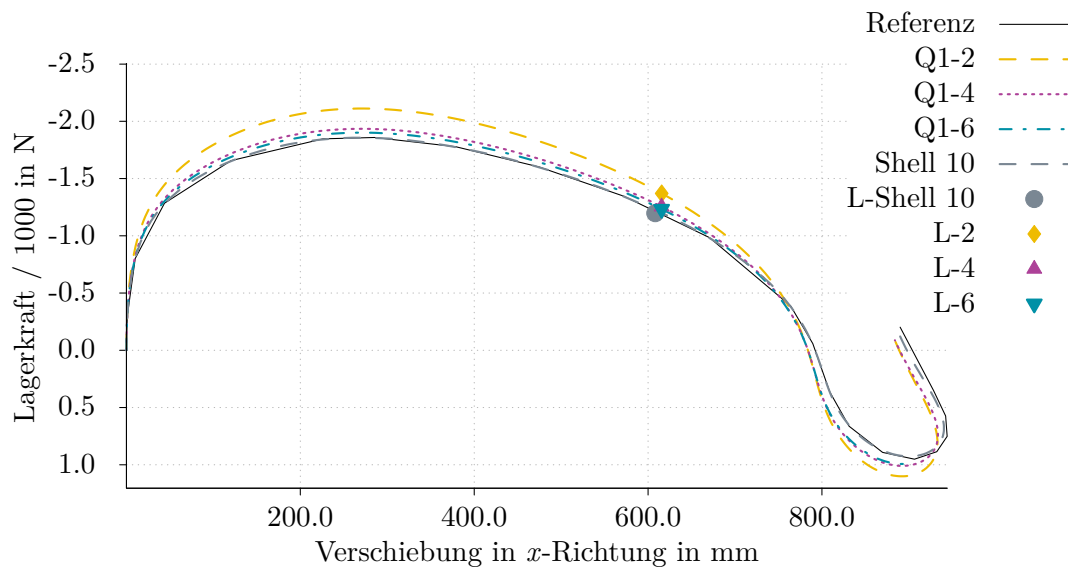
**Tabelle 7.1:** Übersicht über die unterschiedlichen Diskretisierungen

Die Ergebnisse zeigen, dass sich das mit lediglich zwei Scheibenelementen über die Dicke  $t$  vernetzte Modell Q1-2 zu steif verhält. Dies lässt sich auf Lockingeffekte in den verwendeten Scheibenelementen zurückführen. Mit einer Netzverfeinerung über die Dicke (vgl. Q1-4 und Q1-6) nähert sich die Lösung der Referenzlösung an. Für das Volumenschalenelement Shell 10 mit zwei Elementen über die Dicke  $t$  stimmen die Ergebnisse sehr gut mit den Referenzergebnissen überein. Man kann in Diagramm 7.4 und noch einmal genauer in 7.6 jedoch auch erkennen, dass der Algorithmus für die jeweilige Diskretisierung die richtige Lösung findet, da jeder berechnete kritische Punkt eine vertikale Tangente besitzt.

An dieser Stelle soll noch einmal die Effizienz bei der Ermittlung der Richtungsableitung mit klassischen Differenzenverfahren sowie mit der CSDA verglichen werden. Hierfür werden für das mit Volumenschalenelementen diskretisierte Modell die Rechenzeiten zur

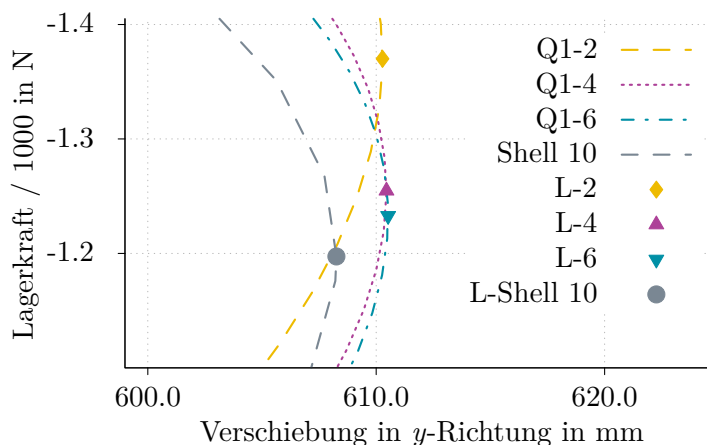


**Abbildung 7.4:** Gleichgewichtspfade für  $x$ -Verschiebung mit Durchschlagpunkten bei unterschiedlicher Diskretisierung



**Abbildung 7.5:** Gleichgewichtspfade für  $y$ -Verschiebung mit Durchschlagpunkten bei unterschiedlicher Diskretisierung

Ermittlung der Richtungsableitung sowohl für das Vorwärtsdifferenzenverfahren (VD) als auch für die CSDA sowie die jeweiligen gesamten Rechenzeit miteinander verglichen. In Tabelle 7.2 ist hierfür die mittlere Rechenzeit bezogen auf die Zeit zur Ermittlung der Richtungsableitung mit CSDA angegeben. Es lässt sich erkennen, dass die Berechnung der Ableitung mit der CSDA etwas mehr als doppelt so viel Rechenzeit benötigt als die Berechnung mit dem Vorwärtsdifferenzenverfahren. Dies lässt sich auf den höheren



**Abbildung 7.6:** Detail der Gleichgewichtspfade für  $x$ -Verschiebung mit Durchschlagspunkten bei unterschiedlicher Diskretisierung

numerischen Aufwand zurückführen und entspricht somit der Erwartung. Es zeigt sich jedoch auch, dass die gesamte Berechnung des kritischen Punkts inklusive der dafür notwendigen Pfadverfolgung bei Verwendung der CSDA nur etwa 2% mehr Rechenzeit benötigt. Auf die gesamte Berechnung ist der Mehraufwand damit vernachlässigbar klein.

Ableitung CSDA	Ableitung VD	Gesamtzeit CSDA	Gesamtzeit VD
1,0	0,45	12,540	12,28

**Tabelle 7.2:** Vergleich der Rechenzeiten für verschiedene Ableitungsmethoden

Neben dem Vergleich der Rechenzeit soll an diesem Beispiel auch der in Abschnitt 6.1 beschriebenen Fehler der Auslöschung sowie dessen Folgen demonstriert werden. Hierfür wird die Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix für unterschiedliche Werte für die Intervallgröße  $h$  nach Gleichung (6.36) mit CSDA sowie nach Gleichung (6.35) mit VD ermittelt. In Tabelle 7.3 sind für abnehmende Werte von  $h$  jeweils der Wert für  $\lambda_{\text{krit}}$  sowie die benötigte Anzahl an Iterationsschritten angegeben. Als Abbruchkriterium wird der Wert der Residuumsnorm nach Abschnitt 4.1.3 zu  $\|\mathbf{R}_{\text{tot}}\|_2 < 1 \cdot 10^{-8}$  gewählt. Der bereits in Kapitel 6 aufgezeigte Fehler der Auslöschung lässt sich auch hier sehr gut erkennen. Je kleiner der Wert für  $h$  wird, umso schlechter konvergiert die Lösung des Gleichungssystems. Dies liegt am größer werdenden Fehler bei der Berechnung der Ableitung. Man kann zudem erkennen, dass der Wert für  $h$ , für den die Ableitung mit VD im Rahmen der Rechengenauigkeit richtig ermittelt wird ( $1 \cdot 10^{-4}$ ), deutlich größer ist als in den Beispielen aus Kapitel 6 ( $1 \cdot 10^{-8}$ ). Dies liegt an den für dieses Beispiel gewählten Einheiten (Newton und Millimeter) und der sich daraus ergebenden Größenordnung der

Verschiebungen. Dieser Wert ändert sich, wenn die Abmessungen des Tragwerks sowie die Verschiebungen in einer anderen Einheit angegeben werden.

$h$	$\lambda_{\text{krit,CSDA}}$	Iterationen CSDA	$\lambda_{\text{krit,VD}}$	Iterationen VD
$1 \cdot 10^{-4}$	12,16517486	8	12,16517486	8
$1 \cdot 10^{-5}$	12,16517486	8	12,16517486	10
$1 \cdot 10^{-6}$	12,16517486	8	12,16517486	19
$1 \cdot 10^{-7}$	12,16517486	8	keine Konvergenz	
$1 \cdot 10^{-8}$	12,16517486	8	keine Konvergenz	

**Tabelle 7.3:** Konvergenzverhalten für unterschiedlich große Werte des Intervalls  $h$  bei Ermittlung der Richtungsableitung mit CSDA und VD

Die hohe Anzahl an Iterationsschritten lässt sich durch die große Schrittweite der Bogenlängenkontrolle und den daraus resultierenden schlechten Prädiktorwerten für die Ermittlung des kritischen Punkts begründen.

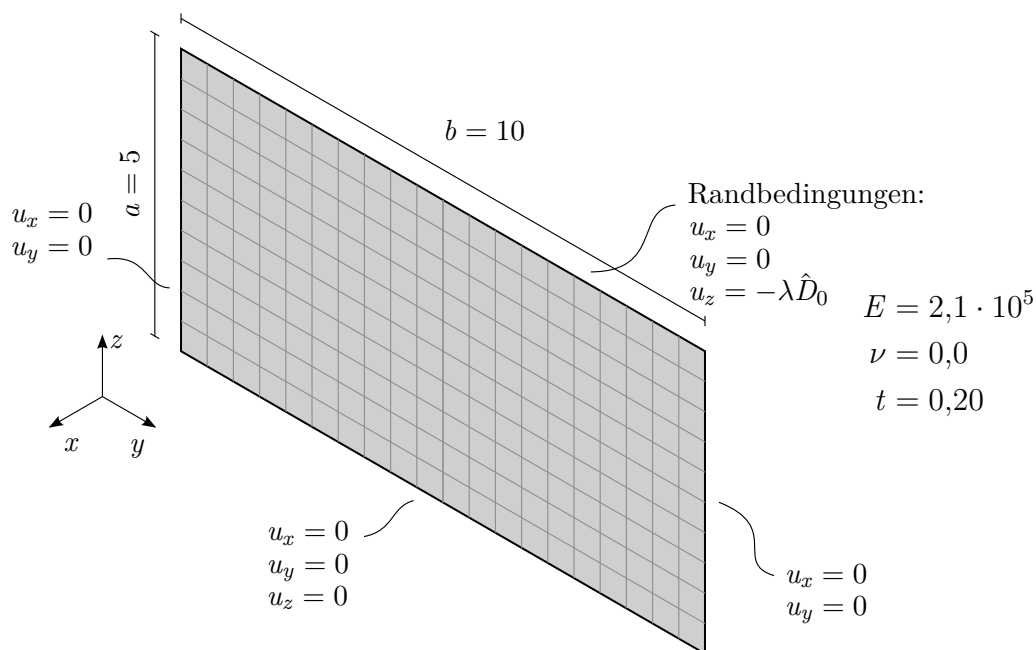
### Symmetrisches Verzweigen

Das zweite Beispiel ist ein ausschließlich in der Tragwerksebene belastetes Scheibentragwerk. Zur Diskretisierung der Geometrie werden dennoch Schalenelemente verwendet, da dadurch Beuleffekte aus der Tragwerksebene heraus berücksichtigt werden. Das statische System ist in Abbildung 7.7 dargestellt. Es ist an den beiden kurzen seitlichen Rändern in  $x$ - und  $y$ -Richtung gehalten, in  $z$ -Richtung sind die beiden Ränder frei verschieblich. Der untere Rand ist in alle drei Richtungen unverschieblich gelagert. Am oberen Rand sind alle Knoten in  $x$ - und  $y$ -Richtung gehalten, in  $z$ -Richtung werden alle Knoten gleichmäßig um  $\lambda \hat{D}_0$  nach unten verschoben.

Die Geometrie wird mit isogeometrischen Schalenelementen nach OESTERLE U. A. (2017), die drei Verschiebungsfreiheitsgrade pro Knoten besitzen, diskretisiert. Die Elemente basieren auf der Schalentheorie nach Kirchhoff-Love. Die Scheibe ist dabei als ein Patch modelliert, der mit einer unterschiedlichen Anzahl an Elementen  $n_{\text{ele}}$  vernetzt wird. Es werden quadratische Ansätze gewählt.

Der erste kritische Punkt, der bei einer inkrementell-iterativen Berechnung erreicht wird, ist ein stabiler symmetrischer Verzweigungspunkt. Abbildung 7.8 zeigt neben dem Primärpfad auch den Sekundärpfad. Der mit SP- gekennzeichnete Pfadabschnitt ist dabei der Teil des Sekundärpfads, für dessen Berechnung der als Prädiktor verwendete Eigenvektor mit  $-1$  multipliziert wird. Die Ergebnisse für SP+ erhält man entsprechend, wenn der Eigenvektorprädiktor mit  $+1$  multipliziert wird.

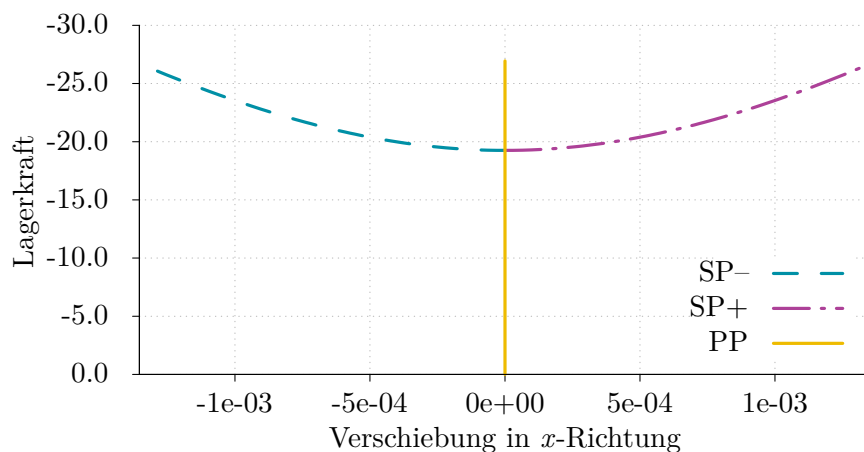




**Abbildung 7.7:** System der ebenen Scheibe mit Randbedingungen für eine Diskretisierung mit 200 Elementen

In Tabelle 7.4 sind die Werte für  $\lambda_{\text{krit}}$  in Abhängigkeit unterschiedlicher Netzfeinheiten aufgelistet.

Die Tabelle zeigt, dass der Wert für  $\lambda_{\text{krit}}$  mit zunehmender Netzfeinheit immer langsamer abnimmt und gegen die Referenzlösung einer Vorbeulanalyse von  $\lambda_{\text{krit}} = 10,281$  konvergiert. Bei Beulproblemen ist neben dem kritischen Lastfaktor auch das Verformungsverhalten der Struktur für Gleichgewichtspunkte auf dem Sekundärpfad sowie die



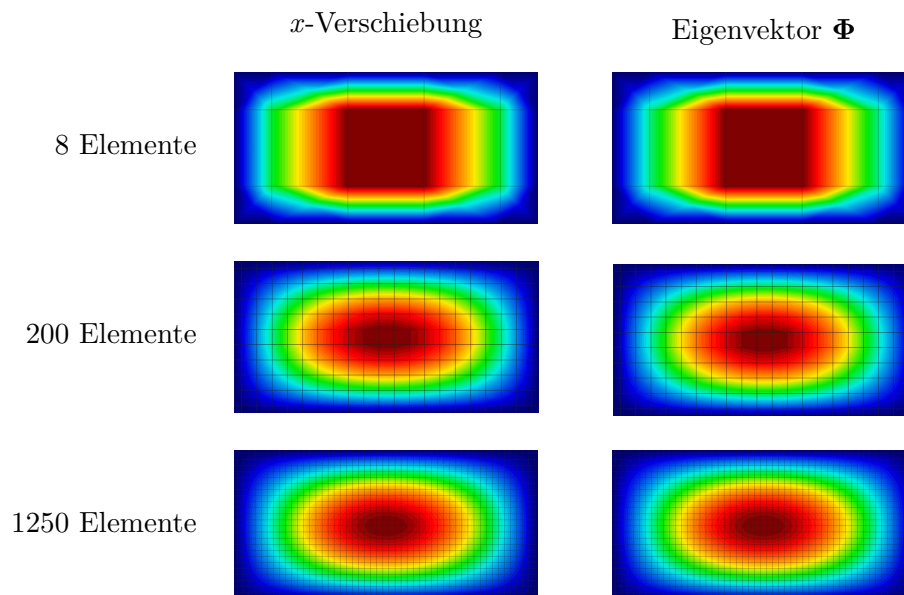
**Abbildung 7.8:** Primärpfad (PP) und Sekundärpfade (SP+ und SP-) für die Mittelpunktverschiebung des ebenen Scheibentragwerks

$n_{\text{ele},x}$	$n_{\text{ele},y}$	$n_{\text{ele}}$	$n$	$\lambda_{\text{krit}}$
4	2	8	28	11,72854
10	5	50	160	10,51434
20	10	200	620	10,34667
30	15	450	1380	10,31594
40	20	800	2440	10,30521
50	25	1250	3800	10,30025
70	35	2450	7420	10,29593

**Tabelle 7.4:** Ergebnisse für  $\lambda_{\text{krit}}$  in Abhängigkeit der Netzfeinheit für ebene Scheibe

Form des Eigenvektors am kritischen Punkt relevant. In Abbildung 7.9 ist links jeweils die Verschiebung der Scheibe in  $x$ -Richtung dargestellt, die rechten Abbildungen zeigen jeweils den Eigenvektor  $\Phi$ . Die Verschiebungen sind für einen beliebigen Lastschritt auf dem Sekundärpfad SP+ dargestellt,  $\Phi$  ist der Eigenvektor zum Null-Eigenwert der Steifigkeitsmatrix am kritischen Punkt und ist Teil der Lösung des erweiterten Gleichungssystems aus (4.57). Sowohl Verschiebungen wie auch der Eigenvektor werden jeweils für 8, 200 und 1250 Elemente gegenübergestellt.

Der Vergleich zeigt, dass bereits für das grösste untersuchte Netz mit 4 Elementen in  $y$ - und 2 Elementen in  $z$ -Richtung die Verschiebungen in  $x$ -Richtung mit dem Eigenvektor



**Abbildung 7.9:** Konturplots der Verschiebungen und der Eigenvektoren für verschiedene Netzfeinheiten

übereinstimmen. Dies lässt sich für dieses Beispiel auf das aus strukturmechanischer Sicht eindeutige Systemverhalten im Nachbeulbereich zurückführen.

### Asymmetrisches Verzweigen

Das dritte Beispiel stellt eine gekrümmte Variante des zuvor untersuchten ebenen Scheibentragwerks dar. In Abbildung 7.10 ist das statische System mit allen Randbedingungen dargestellt. Die Länge der vier Ränder entspricht dabei den Längen der Ränder in Abb. 7.7. Im Unterschied zu 7.1 ist das aktuelle System gekrümmt, der Grundriss entspricht einem Viertelkreis. Die Dicke der Schale wurde auf  $t = 0,063662$  reduziert, damit ergibt sich ein  $R/t$ -Verhältnis von 100.

Zur Diskretisierung werden wie zuvor isogeometrische Schalenelemente nach OESTERLE U. A. (2017) verwendet, die auf den Theorien von Kirchhoff und Love basieren.

Der erste kritische Punkt auf dem Gleichgewichtspfad ist wieder ein Verzweigungspunkt. Im Gegensatz zur ebenen Variante sind die Gleichgewichtspunkte auf dem Sekundärpfad jedoch instabil. Dies lässt sich im Diagramm in Abbildung 7.11 am Verhalten des Sekundärpfads im unmittelbaren Nachbeulbereich erkennen. Sowohl bei einer positiven wie auch negativen Verzweigungsrichtung nimmt nach dem Überschreiten des ersten Verzweigungspunkts die aufgebrauchte Verschiebung ab, beide Sekundärpfade sind rückläufig.

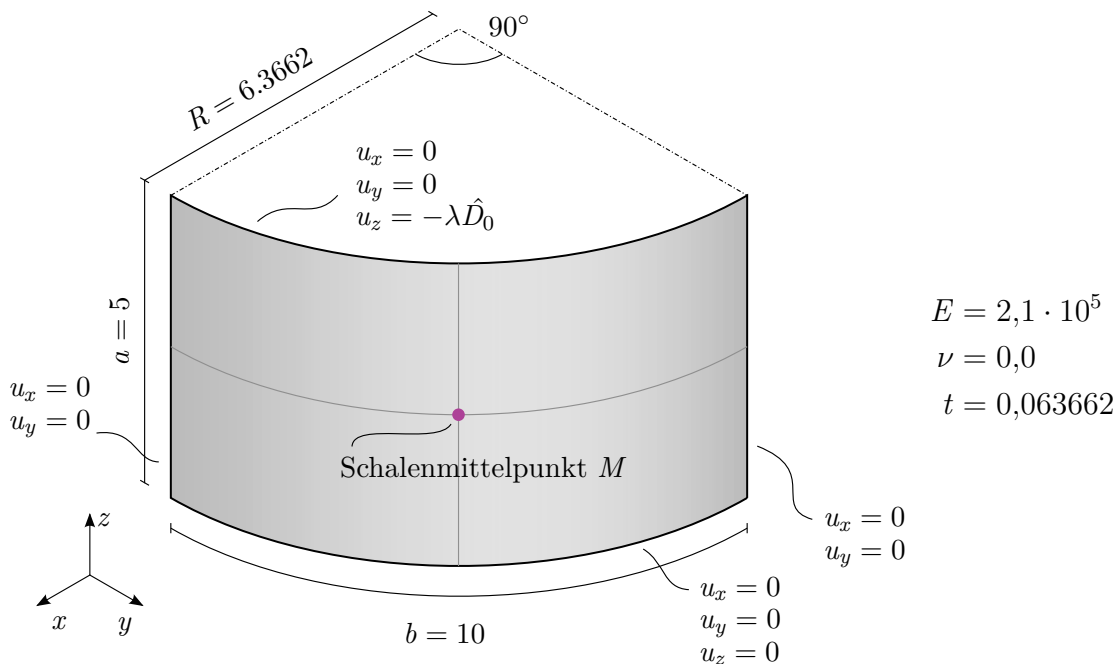
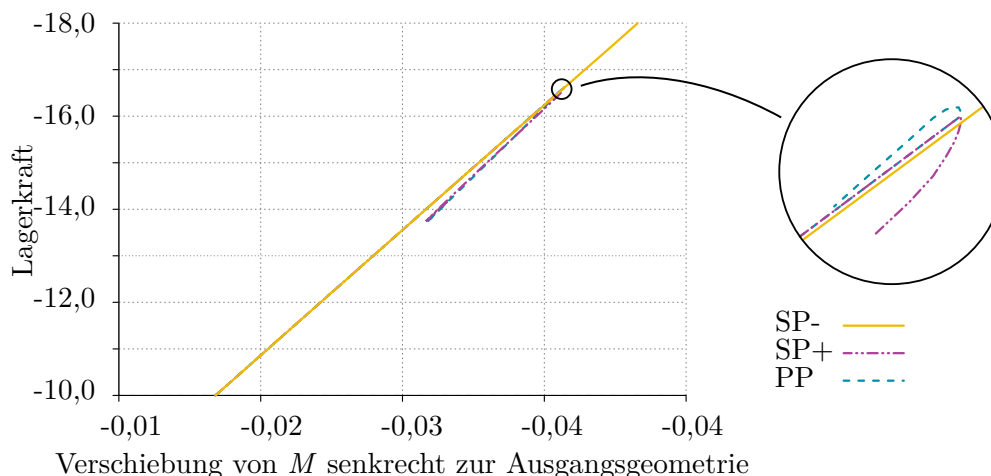


Abbildung 7.10: System der gekrümmten Schale mit Randbedingungen



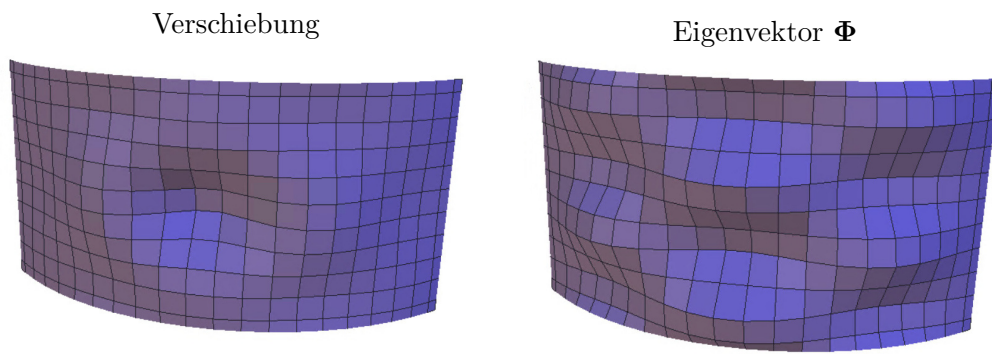
**Abbildung 7.11:** Detail des Gleichgewichtspfads der gekrümmten Schale

Auch für dieses Beispiel werden unterschiedliche Netzfeinheiten untersucht. In Tabelle 7.5 sind die Ergebnisse für  $\lambda_{\text{krit}}$  bei verschiedenen feinen Netzen aufgeführt. Die Tabelle zeigt, dass die Abweichungen für  $\lambda_{\text{krit}}$  bereits bei recht groben Netzen schnell abnehmen. Als Referenzlösung dient auch in diesem Beispiel das Ergebnis einer Vorbeulanalyse mit  $\lambda_{\text{krit}} = 29,164$ .

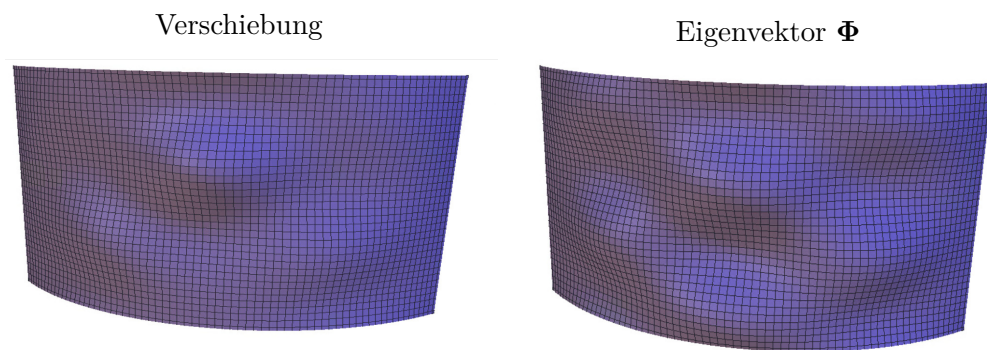
$n_{\text{ele},x}$	$n_{\text{ele},y}$	$n_{\text{ele}}$	$n$	$\lambda_{\text{krit}}$
4	2	8	28	63,09606
10	5	50	160	31,53722
20	10	200	620	30,67285
30	15	450	1380	29,90674
40	20	800	2440	29,63051
50	25	1250	3800	29,49629
70	35	2450	7420	29,36272

**Tabelle 7.5:** Ergebnisse für  $\lambda_{\text{krit}}$  in Abhängigkeit der Netzfeinheit für gekrümmte Schale

Anders als bei der ebenen Geometrie aus 7.1 ist bei diesem Beispiel jedoch das Nachbeulverhalten deutlich komplexer. Abbildung 7.12 zeigt links das deformierte Tragwerk im Nachbeulbereich für ein System mit 200 Elementen, der dazugehörige Gleichgewichtspunkt liegt auf dem Sekundärpfad. Die rechte Abbildung zeigt den zum Nulleigenwert gehörenden Eigenvektor  $\Phi$  am kritischen Punkt. Die Ergebnisse sind überhöht dargestellt. Im Gegensatz zum vorangegangenen Beispiel, bei dem auch bei sehr groben Netzen das qualitative Verhalten der Verschiebungen  $\mathbf{D}$  und  $\Phi$  vergleichbar war, zeigt sich hier



**Abbildung 7.12:** Verschiebungen im Nachbeulbereich (links) und Eigenvektor am kritischen Punkt (rechts) der gekrümmten Schale bei grober Diskretisierung, überhöhte Darstellung



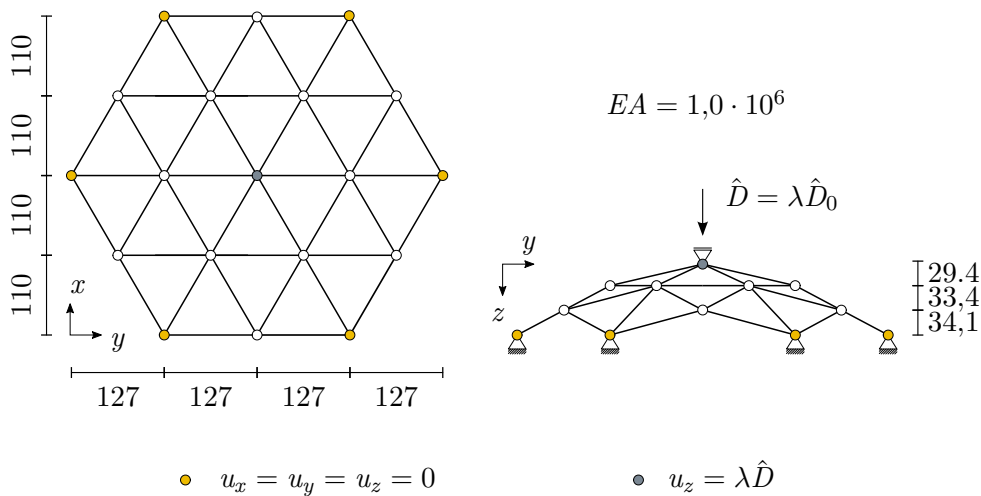
**Abbildung 7.13:** Verschiebungen im Nachbeulbereich (links) und Eigenvektor am kritischen Punkt (rechts) der gekrümmten Schale bei feiner Diskretisierung, überhöhte Darstellung

recht deutlich der Unterschied. Sowohl über die Höhe als auch entlang des Umfangs unterscheidet sich die Anzahl der einfallenden Beulen.

Abbildung 7.13 zeigt zur Linken ebenfalls das deformierte Tragwerk im Nachbeulbereich, rechts daneben ist wieder qualitativ der zum Nulleigenwert gehörenden Eigenvektor  $\Phi$  am kritischen Punkt abgebildet. Auch hier sind die Ergebnisse zur besseren Visualisierung überhöht dargestellt. Das Tragwerk ist dabei in 2450 Elemente unterteilt. Man erkennt an diesem Beispiel, dass für die beiden Ergebnisdarstellungen sowohl über die Höhe als auch in Umfangsrichtung die Anzahl der Beulen übereinstimmen, auch wenn sich die einzelnen Beulen in Ihrer Intensität unterscheiden.

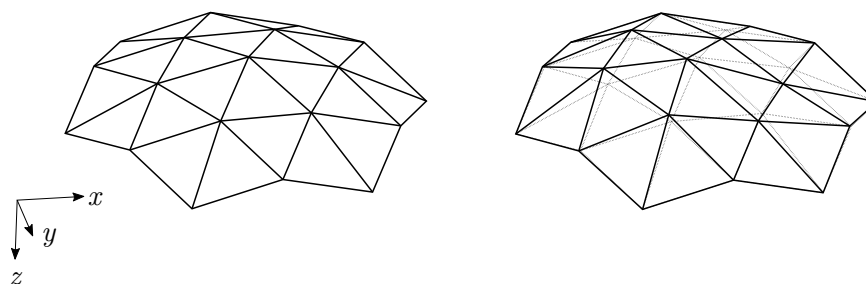
## 7.2 Berechnung kritischer Pfade

Das letzte Beispiel in diesem Kapitel zeigt eine Anwendung der Methoden zur Analyse des Imperfektionseinflusses auf schlanke Tragwerke. Hierfür wird die Gitterschale in Abbildung 7.14 untersucht. Die Gitterschale ist an den 6 Eckknoten unverschieblich in alle Raumrichtungen gehalten. Sie wird am mittleren Knoten durch die aufgebrauchte Verschiebung  $\hat{D} = \lambda \hat{D}_0$  in  $z$ -Richtung belastet. Als Referenz zu diesem Beispiel dient die Arbeit von FORDE (1986).

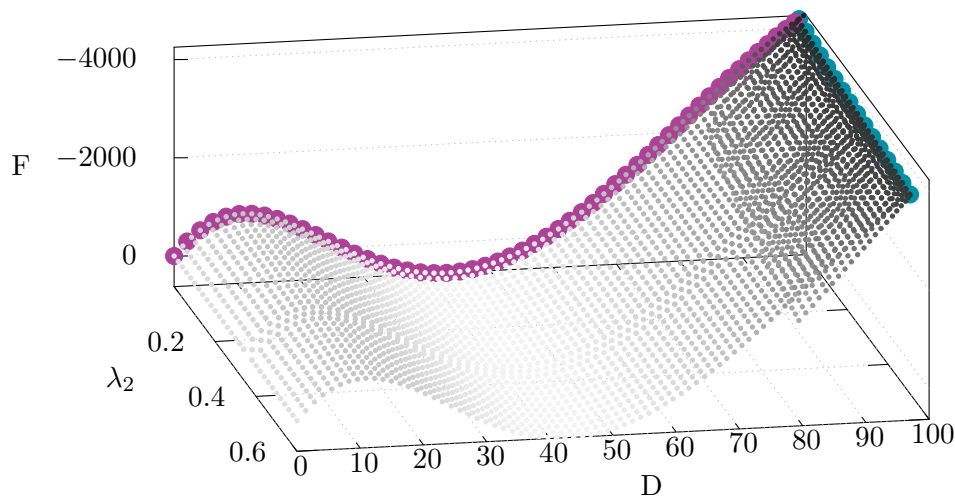


**Abbildung 7.14:** Grundriss und Ansicht der Gitterschale nach FORDE (1986)

In einem ersten Schritt werden zunächst der Primärpfad sowie der Verzweigungspunkt des perfekten Ausgangssystems ermittelt. Als Imperfektionsform wird der Eigenvektor gewählt, der sich bei der Berechnung des kritischen Punkts als Teil der Lösung ergibt. Dieser ist in der rechten Darstellung in Abb. 7.15 überhöht dargestellt. Die maximale Imperfektion ist dabei so gewählt, dass die größte Vorverdrehung eine im Bauwesen übliche Größenordnung von  $l/200$  nicht überschreitet.



**Abbildung 7.15:** Räumliche Ansicht des unverformten Systems (links) und des Eigenvektors (rechts) in 50-facher Überhöhung



**Abbildung 7.16:** Gleichgewichtsfläche der Gitterschale (grau) mit dem Gleichgewichtspfad des perfekten Systems (pink) und dem kritischem Pfad (blau)

Die Analyse des Imperfektionseinflusses erfolgt im Anschluss mit dem Algorithmus zur Berechnung kritischer Pfade aus Kapitel 5.1.2. Die Schrittweite, mit der die Imperfektion inkrementell gesteigert wird, beträgt  $\lambda_2 = 0,02$ . Das Ergebnis ist in Abbildung 7.16 dargestellt. Sie zeigt die Gleichgewichtsfläche des Mehrparametersystems (grau) mit dem Gleichgewichtspfad (pink) des perfekten Systems sowie dem kritischen Pfad (blau).

Bei einem Vergleich der Rechenzeiten zeigt sich, dass für die Pfadverfolgung bis zum ersten kritischen Punkt im günstigsten Fall mehr als die 2,5-fache Rechenzeit benötigt wird, als für die direkte Berechnung des kritischen Punkts. Für jede weitere Berechnung eines kritischen Punkts für ein imperfektes System wird aufgrund der besseren Prädiktorwerte und der damit verbundenen geringeren Anzahl an Iterationen noch einmal weniger Rechenzeit benötigt. Für die in diesem Beispiel untersuchte Gitterschale reduziert sich damit die Rechenzeit auf deutlich unter 30 % im Vergleich zu einer herkömmlichen Berechnung, bei der jeder kritische Punkt einzeln berechnet wird.





---

## Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden zuverlässige Algorithmen für die direkte Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten stabilitätsgefährdeter Strukturen, die durch inhomogene Dirichlet-Randbedingungen belastet werden, hergeleitet. In einem nächsten Schritt erfolgte die Untersuchung der Imperfektionsempfindlichkeit schlanker Tragwerke durch eine Erweiterung dieser Algorithmen. Ein starker Fokus lag dabei auf der Verwendung von auf komplexen Zahlenformaten beruhenden numerischen Ableitungsalgorithmen, die eine robuste und beliebig genaue Berechnung partieller und totaler Ableitungen ermöglichen. Eine Zusammenfassung der Ergebnisse und gewonnenen Erkenntnisse sowie Anregungen für mögliche Weiterentwicklungen und Anwendungen in anderen Forschungsgebieten erfolgt in den folgenden Abschnitten.

### 8.1 Zusammenfassung

Die in der vorliegenden Arbeit präsentierten Algorithmen zur direkten Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten basieren auf den von WRIGGERS U. A. (1988) im Rahmen der FEM eingeführten Methoden. Neu ist in dieser Arbeit die Erweiterung auf Systeme, die durch inhomogene Dirichlet-Randbedingungen, also durch Verschiebungen, anstelle von äußeren Kräften belastet werden. Zur Ermittlung von Durchschlagspunkten wurden hierfür die Gleichgewichtsbedingung sowie die Stabilitätsbedingung unter Berücksichtigung der inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen formuliert und in einem erweiterten Gleichungssystem zusammengefasst. Zur Ermittlung von Verzweigungspunkten wurde zudem die Verzweigungsbedingung neu hergeleitet, mit der im Anschluss das neue Gleichungssystem aufgestellt werden konnte.

Bereits bei den für Kraftlastfälle existierenden Algorithmen ist, wie etwa in WRIGGERS UND SIMO (1990) vorgestellt, eine Richtungsableitung der Steifigkeitsmatrix in

Richtung des kritischen Beulvektors erforderlich. In den bisherigen Veröffentlichungen kommen hierfür klassische Differenzenverfahren zum Einsatz. In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass die Ergebnisqualität dieser Differenzenverfahren stark von der zu wählenden Intervallgröße  $h$  abhängig ist. Eine zuverlässige Berechnung kritischer Punkte ist somit häufig nur nach mehrmaligen Testläufen und einem Abgleich der Ergebnisse möglich. In dieser Arbeit werden zur Berechnung der Ableitung der Steifigkeitsmatrix neuere Varianten der Differenzenverfahren eingesetzt, die auf hyperkomplexen Zahlenformaten beruhen. Mit der Complex-step Derivative Approximation nach MARTINS U. A. (2003) zur Berechnung erster Ableitungen, die auf komplexen Zahlen beruht, lässt sich der Fehler der Auslöschung für sehr kleine Intervallwerte eliminieren. Ersetzt man die komplexen Zahlen durch duale Zahlen, lässt sich darüber hinaus auch der Diskretisierungsfehler eliminieren, wodurch erste Ableitungen exakt und unabhängig von der Intervallgröße  $h$  ermittelt werden können. Die Berechnung zweiter Ableitungen ist durch die von FIKE UND ALONSO (2011) eingeführten hyperdualen Zahlen fehlerfrei möglich. In der vorliegenden Arbeit wurden diese Methoden auf die Ermittlung der Richtungsableitung übertragen. Es konnte gezeigt werden, dass der numerische Mehraufwand durch die zusätzlichen Rechenoperationen beim Arbeiten mit komplexen Zahlen gering ist. Ein großer Teil der Rechenzeit bei der Ermittlung kritischer Punkte entsteht durch die vorangestellte Pfadverfolgung.

Die kritische Last, die für den Entwurf stabilitätsgefährdeter Tragwerke essentiell ist, wird durch Imperfektionen stark abgemindert. Zur Untersuchung der Imperfektionsempfindlichkeit schlanker Strukturen wurden in dieser Arbeit zwei Herangehensweisen präsentiert, die sich in ihrem Umgang mit Imperfektionen innerhalb des Algorithmus grundlegend unterscheiden. In der ersten Variante werden die Imperfektionen in Form von Geometrieänderungen vorgegeben, während sie in der zweiten Variante als zusätzliche Unbekannte in das nichtlineare Gleichungssystem eingebracht werden.

Für die erste Variante wurden zwei Algorithmen vorgestellt, die auf einer sich wiederholenden Berechnung kritischer Punkte für sich ändernde Imperfektionen basieren. Die Algorithmen zur Berechnung kritischer Punkte konvergieren jedoch nur in der Nähe der Lösung gegen das gesuchte Ergebnis. Für die Berechnung eines einzelnen kritischen Punkts muss daher ein rechenintensiver Pfadverfolgungsalgorithmus vorangestellt werden. In der Arbeit wurden zwei Methoden präsentiert, bei denen diese Pfadverfolgung bis in die Nähe eines kritischen Punkts nur einmal zu Beginn für das perfekte Ausgangssystem durchgeführt werden muss. Im ersten Algorithmus dienen zunächst die deformierte Geometrie, der Beulvektor sowie der Lastfaktor an einem kritischen Punkt des perfekten Ausgangssystems als Prädiktor zur Berechnung des kritischen Punkts eines imperfekten Systems. Jeder weitere kritische Punkt eines imperfekten Systems lässt sich wiederum aus der Lösung an einem kritischen Punkt des zuvor analysierten Systems ermitteln. Es konnte mit dieser Methode gezeigt werden, dass die deformierte Geometrie, die kritische

Last sowie der Beulvektor eines Tragwerks an einem Durchschlags- oder Verzweigungspunkts eine geeignete Wahl des Prädiktors zur Berechnung eines benachbarten kritischen Punkts für ein System mit einer veränderten Geometrie darstellen. Im zweiten Algorithmus werden die Imperfektionen über einen zusätzlichen Parameter beschrieben. Durch Kombination von Pfadverfolgungsalgorithmen und Methoden zur direkten Berechnung kritischer Punkte für Kraft- und Verschiebungslastfälle lassen sich kritische Pfade des dadurch entstandenen Mehrparametersystems, die auch als Fold Line bezeichnet werden, effizient berechnen. Auch hierfür muss die initiale Pfadverfolgung lediglich ein einziges Mal ausgeführt werden.

Die zweite Variante, bei der die Imperfektionen als zusätzliche Unbekannte eingeführt werden, beruht auf den von DEML (1997) präsentierten Methode zur Ermittlung der *kritischsten Imperfektion*. Durch eine Modifikation der Zusatzgleichung konnte erreicht werden, dass auch lokale Minima entlang eines kritischen Pfades direkt gefunden werden können.

## 8.2 Ausblick

Ein Teil der vorliegenden Arbeit befasst sich mit der Beschreibung und Analyse von Mehrparametersystemen, wobei sich der zweite Parameter dabei immer auf die Änderung der Geometrie beschränkt. Die hierfür verwendeten Methoden, die u. a. in ERIKSSON (1998), COX U. A. (2018) oder GROH U. A. (2018) beschrieben sind, sind in ihrer Anwendung jedoch immer noch beschränkt. In vielen Fällen wird nur ein Parameter verändert, während der bzw. die restlichen Parameter konstant gehalten werden. Die gleichzeitige Steuerung mehrerer Parameter wurde bereits für einige Sonderfälle gezeigt, sie ist im Allgemeinen jedoch noch nicht ausreichend untersucht. Auch besteht für die Wahl der Zusatzgleichungen noch immer Forschungsbedarf. Hier sind Bedingungen vorstellbar, die etwa die geleistete Arbeit in einem System minimieren.

In der Arbeit hat sich zudem gezeigt, dass die robusten Algorithmen zur Berechnung partieller und totaler Ableitungen ein großes Potential in der nichtlinearen Strukturmechanik bieten. Die direkte Berechnung der Steifigkeitsmatrix aus dem Potential, die Berechnung der Sensitivitäten in der Strukturoptimierung oder die konsistente Linearisierung nichtlinearer Gleichungssysteme bei stark oder nicht glatt nichtlinearen Problemen (z. B. Kontakt), sind nur einige der möglichen Anwendungsgebiete.

Die Berechnung kritischer Punkte sowie die Analyse des Nachbeulverhaltens stabilitätsgefährdeter Systeme beschränken sich in dieser Arbeit auf Fragestellungen der Strukturmechanik. Auch in der Kontinuumsmechanik treten Instabilitätsphänomene auf, die

*physikalischer* und *numerischer* Natur sein können. Physikalische Instabilitätsphänomene, wie sie in BARDET (1990) beschrieben werden, lassen sich an Kontinuumselementen numerisch untersuchen. Bei der Verwendung gemischter finiter Elemente, wie sie in AURICCHIO U. A. (2005) oder SCHRÖDER U. A. (2017) beschrieben sind, ist das häufige Auftreten numerischer Instabilitäten, die sich durch das sogenannte *hourglassing* zeigen, eine unerwünschte Begleiterscheinung und Gegenstand aktueller Forschung. Hierbei werden bisher häufig vereinfachte Methoden wie beispielsweise Bisektionsverfahren oder eine begleitende Eigenwertanalyse zur Annäherung an kritische Punkte angewandt. Mit den in der vorliegenden Arbeit präsentierten Methoden zur direkten Berechnung kritischer Punkte könnte sich die Stabilitätsanalyse gemischter Elementformulierungen systematisieren und präzisieren lassen.

Die Ergebnisse der in der vorliegenden Arbeit mit isogeometrischen Schalenelementen untersuchten Beispiele zeigen, dass die Beulform eines Systems für einen Gleichgewichtspunkt auf dem Sekundärpfad sehr gut mit dem Beulvektor am kritischen Punkt übereinstimmt. Untersuchungen am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart haben zudem gezeigt, dass bei einer Vorbeulanalyse die erwartete Beulform mit isogeometrischen Schalenelementen für deutlich gröbere Netze ermittelt werden kann als das für finite Elemente mit Lagrange'schen Ansatzfunktionen möglich ist. Zur Untersuchung der Ursachen hierfür bieten sich neben der bisher verwendeten Vorbeulanalyse auch die hier vorgestellten Algorithmen zur direkten Berechnung kritischer Punkte an.

# A

## Anhang

### A.1 Analyse eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe

In der vorliegenden Arbeit werden viele der auftretenden Phänomene an einem Dreigelenktragwerk anschaulich erläutert. Dabei hängen die Stabilitätseigenschaften des Dreigelenktragwerks von dessen Höhe in Bezug zur Breite ab. An dieser Stelle erfolgt daher eine ausführliche Analyse des Stabilitätsverhaltens eines Dreigelenktragwerks mit variabler Höhe. Die Höhe des in Abb. A.1 dargestellte Dreigelenktragwerks wird dabei über den Parameter  $\eta$  in Abhängigkeit der projizierten Länge  $a$  beschrieben.

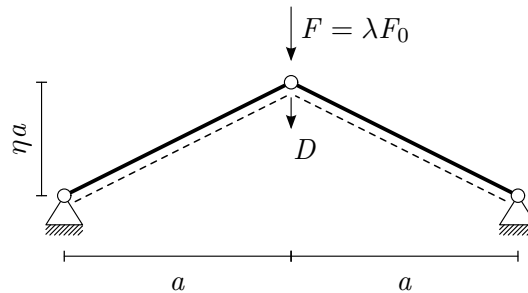


Abbildung A.1: Dreigelenktragwerk mit variabler Höhe

In einem ersten Schritt wird die auf die beiden Freiheitsgrade  $D_1$  und  $D_2$  reduzierte Steifigkeitsmatrix aufgestellt. Hierbei kann die horizontale Verschiebung  $D_2$  zu null gesetzt werden, da aufgrund der Symmetrie erst auf einem eventuellen sekundären Gleichgewichtspfad horizontale Verschiebungen auftreten können.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 \frac{EA}{(\eta^2+1)^{3/2}} + \frac{EA(2\eta+D_1)D_1}{(\eta^2+1)^{3/2}} & 0 \\ 0 & 2 \frac{EA(\eta+D_1)^2}{(\eta^2+1)^{3/2}} + \frac{EA(2\eta+D_1)D_1}{(\eta^2+1)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Zur Untersuchung der Stabilität wird an dieser Stelle nicht das in der Arbeit zur direkten Berechnung kritischer Punkte mit der Methode der Extended Systems gewählte Stabilitätskriterium  $\mathbf{K}\Phi = \mathbf{0}$  verwendet. Aufgrund des trivialen Systems bietet es sich an dieser Stelle an, die Determinante der Steifigkeitsmatrix als Stabilitätskriterium zu verwenden. An einem kritischen Punkt ergibt sich die Determinante von  $\mathbf{K}$  nach Gleichung (4.30) zu null. Dies ergibt für dieses Tragwerk

$$\det \mathbf{K} = \frac{(EA)^2 (2D_1\eta + D_1^2 + 2) (2\eta^2 + 6D_1\eta + 3D_1^2)}{(\eta^2 + 1)^3} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Löst man die Gleichung nach der Verschiebungen  $D_1$ , so erhält man für diese Gleichung vier Nullstellen in Abhängigkeit des Höhenparameters  $\eta$ :

$$D_{1,1} = -\eta + \sqrt{\eta^2 - 2}, \quad (\text{A.3})$$

$$D_{1,2} = -\eta - \sqrt{\eta^2 - 2}, \quad (\text{A.4})$$

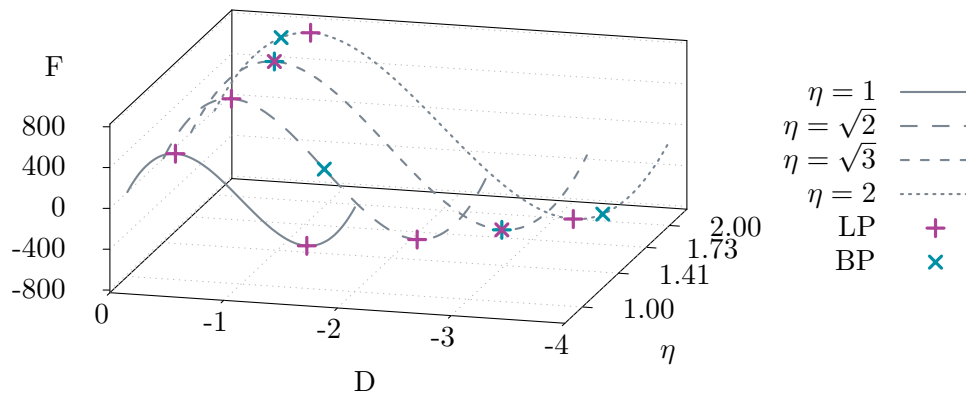
$$D_{1,3} = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \eta, \quad (\text{A.5})$$

$$D_{1,4} = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \eta. \quad (\text{A.6})$$

Die ersten beiden Nullstellen der Determinante sind für Werte von  $\eta < \sqrt{2}$  komplex. Bis zu dieser Höhe existieren somit nur zwei reellzahlige Lösungen,  $D_{1,3}$  und  $D_{1,4}$ . Dabei handelt es sich um die beiden in Abb. A.2 gezeigten Durchschlagpunkte auf dem Gleichgewichtspfad für  $\eta = 1$ . Ein Wert des Höhenparameters für ein flaches bzw. niedriges Dreigelenktragwerk, bei dem ausschließlich Durchschlagen aber kein Verzweigen auftritt, liegt somit bei  $\eta = \sqrt{2}$ .

Setzt man die Lösungen  $D_{1,1} = D_{1,3}$ , so erhält mit  $\eta = \sqrt{3}$  den Wert für den Höhenparameter, an dem der Verzweigungs- und der Durchschlagpunkt an der gleichen Stelle auftreten. Für  $\sqrt{2} \leq \eta < \sqrt{3}$  liegen auf dem Gleichgewichtspfad sowohl Durchschlags- als auch Verzweigungspunkte. Beim Ablaufen des Pfads liegt der Durchschlagpunkt jedoch immer vor dem Verzweigungspunkt, der sich wiederum zwangsläufig auf dem absteigenden Bereich des Gleichgewichtspfads befindet. Dieser Fall taucht in keinem in dieser Arbeit verwendeten Beispiele auf. In Abbildung A.2 sind die Gleichgewichtspfade der beiden Grenzfälle dargestellt.

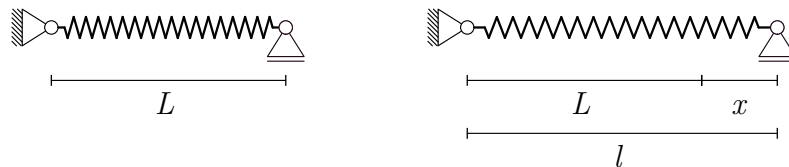
Für alle Werte von  $\eta > \sqrt{3}$  liegt der erste Verzweigungspunkt auf dem Gleichgewichtspfad immer vor dem ersten Durchschlagpunkt. In diesem Fall ist die Rede von einem hohen Dreigelenktragwerk. In Abbildung A.2 ist dies im Pfad für einen Wert für  $\eta = 2$  zu sehen.



**Abbildung A.2:** Gleichgewichtspfade für Dreieckstragwerke unterschiedlicher Höhe mit Durchschlagspunkten (LP) und Verzweigungspunkten (BP)

## A.2 Symmetrische entfestigende Feder

Zur Erweiterung der Koiter'schen Kategorisierung in Abschnitt 3.5.2 werden in den Beispielen zwei unterschiedliche Federelemente verwendet. Beide Federelemente lassen sich als Stabelement der Länge  $L = 1$  interpretieren. Zur Veranschaulichung ist in Abb. A.3 eine Feder im ungedehnten und gedehnten Zustand abgebildet.



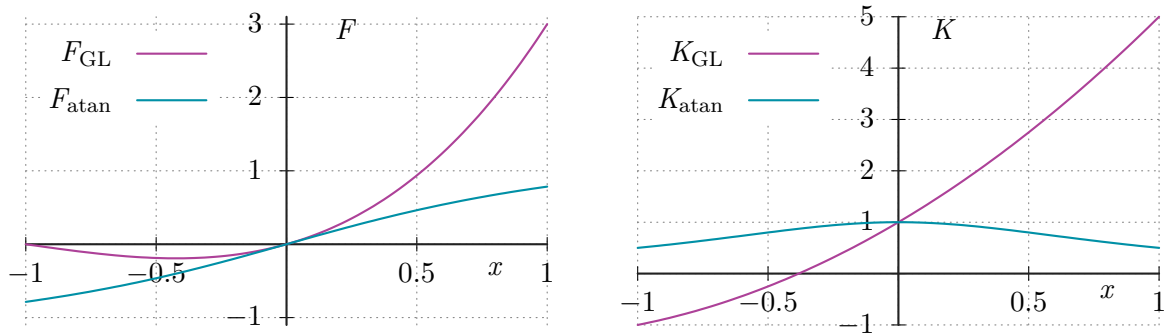
**Abbildung A.3:** Ungedehnte (links) und gedehnte Feder (rechts)

Beim ersten Element handelt es sich um eine nichtlineare Feder mit einem Green-Lagrange'schen Verzerrungsmaß, im Folgenden mit dem Index GL versehen. Das Potential der Feder ergibt sich zu

$$\Pi_{\text{GL}} = \frac{1}{2}c \left( x + \frac{1}{2}x^2 \right)^2. \quad (\text{A.7})$$

Die Federsteifigkeit  $C$  entspricht dabei der Dehnsteifigkeit  $EA$  eines entsprechenden Stabelements. Die Federkraft in Abhängigkeit der Längenänderung  $x$  erhält man aus der Ableitung des Potentials nach  $x$ :

$$F_{\text{GL}} = c \left( x + \frac{1}{2}x^2 \right) (1 + x). \quad (\text{A.8})$$



**Abbildung A.4:** Federkraft (links) und Federsteifigkeit (rechts)

In Abbildung A.4 (links) ist der Verlauf der Federkraft über  $x$  dargestellt. Man erkennt zum einen, dass sich die Feder bei Druck und Zug unterschiedlich verhält. Zum anderen steigt die Federkraft für positive Werte von  $x$  über alle Grenzen hinweg immer weiter an.

Die Federkraft eines Federelements, das auf Druck wie auf Zug entfestigendes Verhalten aufweist, muss also, anders als die Federkraft  $F_{GL}$ , sowohl für positive als auch für negative Werte von  $x$ , beschränkt sein bzw. gegen einen Grenzwert streben. Dies Verhalten zeigt u. a. die Arkustangens-Funktion. Zur Herleitung der Feder wird daher die Federkraft zu

$$F_{\text{atan}} = \arctan(cx) \tag{A.9}$$

gesetzt. Im Anschluss lässt sich das Potential der Feder durch Intergration ermitteln:

$$\Pi_{\text{atan}} = x \arctan(x) - \frac{\ln(x^2 + 1)}{2} \tag{A.10}$$

Der Verlauf der Federkraft beider Federkräfte über  $x$  ist in Abbildung A.4 (links) angetragen.

Durch Ableiten der Funktionen für die Federkräfte nach  $x$  lassen sich die Federsteifigkeiten ermitteln:

$$K_{GL} = \frac{dF_{GL}}{dx} = c(1+x)^2 + c\left(x + \frac{1}{2}x^2\right) \tag{A.11}$$

$$K_{\text{atan}} = \frac{dF_{\text{atan}}}{dx} = \frac{c}{(c^2x^2 + 1)} \tag{A.12}$$



In Abb. A.4 (rechts) sind die Verläufe der beiden Federsteifigkeiten über  $x$  angetragen. Auch hier zeigt sich das erwartete Verhalten. Sowohl für positive wie auch für negative Werte von  $x$  nimmt der Wert der Steifigkeit  $K_{\text{atan}}$  ab. Der Wert der Steifigkeit  $K_{\text{GL}}$  hingegen nimmt bei Druck ab, steigt jedoch für positive Werte von  $x$ .



---

# Literaturverzeichnis

ABBOTT 1978

ABBOTT, James P.: An Efficient Algorithm for the Determination of Certain Bifurcation Points. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 4 (1978), Nr. 1, S. 19–27

ALTENBACH UND ALTENBACH 1994

ALTENBACH, Holm ; ALTENBACH, Johannes: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Stuttgart : Teubner, 1994

ARENS U. A. 2018

ARENS, Tilo ; HETTLICH, Frank ; KARPFINGER, Christian ; KOCKELKORN, Ulrich ; LICHTENEGGER, Klaus ; STACHEL, Hellmuth: *Mathematik*. 4. Auflage. Berlin : Springer Spektrum, 2018 (Lehrbuch)

AURICCHIO U. A. 2005

AURICCHIO, Ferdinando ; VEIGA, L B. da ; LOVADINA, Carlo ; REALI, Alessandro: A stability study of some mixed finite elements for large deformation elasticity problems. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 194 (2005), Nr. 9-11, S. 1075–1092

BARDET 1990

BARDET, Jean-Pierre: Finite element analysis of plane strain bifurcation within compressible solids. In: *Computers & structures* 36 (1990), Nr. 6, S. 993–1007

BATOZ UND DHATT 1979

BATOZ, Jean-Louis ; DHATT, Gouri: Incremental Displacement Algorithms for Non-linear Problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), Nr. 8, S. 1262–1267

BELYTSCHKO U. A. 2014

BELYTSCHKO, T. ; LIU, W. K. ; MORAN, B. ; ELKHODARY, K. I.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. 2. Chichester : Wiley, 2014

BERGAN U. A. 1978

BERGAN, P. G. ; HÖRRIGMOE, G. ; BRÅKELAND, B. ; SØREIDE, T. H.: Solution Techniques for Non-linear Finite Element Problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 12 (1978), Nr. 11, S. 1677–1696

BISCHOFF U. A. 2016

BISCHOFF, M. ; RAMM, E. ; VON SCHEVEN, M. ; SACHSE, R.: *Nichtlineare finite Elemente*. Unterlagen zur Vorlesung, Wintersemester 2016/2017. Universität Stuttgart, Deutschland, 2016

BISCHOFF 1999

BISCHOFF, Manfred: *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Stuttgart, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1999

BONET UND WOOD 1999

BONET, J. ; WOOD, R. D.: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. 2. ed. Cambridge : Cambridge University Press, 1999

BRENDEL UND RAMM 1982

BRENDEL, B ; RAMM, E: Nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen mit der Methode der finiten Elemente. In: *Ingenieur-Archiv* 51 (1982), Nr. 5, S. 337–362

BRENDEL 1979

BRENDEL, Bernhard: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik*. Stuttgart, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1979

BÜRGERMEISTER UND STEUP 1966

BÜRGERMEISTER, Gustav (Hrsg.) ; STEUP, Herbert (Hrsg.): *Stabilitätsproblem, Spannungsproblem, Verzweigungslasten, Traglasten, Gleichgewichtsmethode, energetische Methode, Biegedrillknickung, Kippung, Näherungsmethoden*. 3., neubearb. Aufl. Berlin : Akademie-Verl., 1966 (Stabilitätstheorie : mit Erläuterungen zu den Knick- und Beulvorschriften)

BUDIANSKY UND HUTCHINSON 1972

BUDIANSKY, B ; HUTCHINSON, JW: Buckling of circular cylindrical shells under axial compression. (1972)

BUDIANSKY 1974

BUDIANSKY, Bernard: Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures. In: *Advances in applied mechanics* Bd. 14. Elsevier, 1974, S. 1–65

BURMEISTER UND RAMM 1990

BURMEISTER, A. ; RAMM, E.: Dynamic Stability Analysis of Shell Structures. In: KRÄTZIG, Wilfried B. (Hrsg.) ; OÑATE, Eugenio (Hrsg.): *Computational Mechanics*

---

*of Nonlinear Response of Shells*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1990 (Springer Series in Computational Mechanics), S. 152–163

CARRERA 1994

CARRERA, E.: A Study on Arc-Length-Type Methods and Their Operation Failures Illustrated by a Simple Model. In: *Computers & Structures* 50 (1994), Nr. 2, S. 217–229

COX U. A. 2018

COX, B. S. ; GROH, R. M. J. ; AVITABILE, D. ; PIRRERA, A.: Exploring the design space of nonlinear shallow arches with generalised path-following. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 143 (2018), April, S. 1–10

CRISFIELD 1981

CRISFIELD, Michael A.: A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. In: *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*. Elsevier, 1981, S. 55–62

DAVIS 2004

DAVIS, Timothy A.: Algorithm 832: UMFPACK V4.3—an Unsymmetric-Pattern Multifrontal Method. In: *ACM Transactions on Mathematical Software* 30 (2004), Nr. 2, S. 196–199

DE BORST U. A. 2012

DE BORST, René ; CRISFIELD, Mike ; REMMERS, Joris ; VERHOOSSEL, Clemens: Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition. In: *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Second Edition* (2012), 07

DEML UND WUNDERLICH 1997

DEML, M ; WUNDERLICH, W: Direct evaluation of the ‘worst’imperfection shape in shell buckling. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 149 (1997), Nr. 1-4, S. 201–222

DEML 1997

DEML, Markus: *Ein Finite-Element-Konzept zur Traglastanalyse imperfektionssensitiver Schalenstrukturen*. Techn. Univ. München, 1997

DEUFLHARD U. A. 1987

DEUFLHARD, P. ; FIEDLER, B. ; KUNKEL, P.: Efficient Numerical Pathfollowing Beyond Critical Points. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 24 (1987), Nr. 4, S. 912–927. – ISSN 0036-1429, 1095-7170

DIN EN 1993-1-6 2017

: *Eurocode 3: Bemessung und Konstruktion von Stahlbauten – Teil 1-6: Festigkeit und Stabilität von Schalen*;. 07 2017

ERIKSSON 1993

ERIKSSON, Anders: On Improved Predictions for Structural Equilibrium Path Evaluations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), Nr. 2, S. 201–220

ERIKSSON 1994

ERIKSSON, Anders: Fold lines for sensitivity analyses in structural instability. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 114 (1994), Nr. 1-2, S. 77–101

ERIKSSON 1997

ERIKSSON, Anders: Equilibrium subsets for multi-parametric structural analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 140 (1997), Nr. 3, S. 305–327

ERIKSSON 1998

ERIKSSON, Anders: Structural instability analyses based on generalised path-following. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 156 (1998), Nr. 1-4, S. 45–74

FIKE UND ALONSO 2011

FIKE, Jeffrey ; ALONSO, Juan: The Development of Hyper-Dual Numbers for Exact Second-Derivative Calculations. In: *49th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. Orlando, Florida : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 01 2011

FINA U. A. 2020

FINA, M ; WEBER, P ; WAGNER, W: Polymorphic uncertainty modeling for the simulation of geometric imperfections in probabilistic design of cylindrical shells. In: *Structural Safety* 82 (2020), S. 101894

FLÜGGE 1932

FLÜGGE, Wilhelm: Die stabilität der Kreiszyinderschale. In: *Ingenieur-Archiv* 3 (1932), Nr. 5, S. 463–506

FORDE 1986

FORDE, Bruce: *Iteration procedure for sudden local alteration of structural stiffness*. Inst. für Baustatik d. Univ., 1986

## FRIED 1984

FRIED, Isaac: Orthogonal trajectory accession to the nonlinear equilibrium curve. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 47 (1984), Nr. 3, S. 283–297

## FUJII UND RAMM 1997

FUJII, F ; RAMM, E: Computational bifurcation theory: path-tracing, pinpointing and path-switching. In: *Engineering Structures* 19 (1997), Nr. 5, S. 385–392

## GRIEWANK UND WALTHER 2008

GRIEWANK, Andreas ; WALTHER, Andrea: *Evaluating Derivatives - Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2008 (Other Titles in Applied Mathematics)

## GROH U. A. 2018

GROH, R.M.J. ; AVITABILE, D. ; PIRRERA, A.: Generalised path-following for well-behaved nonlinear structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 331 (2018), April, S. 394–426

## HOFFMANN 2016

HOFFMANN, Philipp H. W.: A Hitchhiker's Guide to Automatic Differentiation. In: *Numerical Algorithms* 72 (2016), Nr. 3, S. 775–811

## HOLZAPFEL 2000

HOLZAPFEL, G. A.: *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Chichester : Wiley, 2000

## HU 1955

HU, H. C.: On some variational principles in the theory of elasticity and plasticity. In: *Sci. Sin.* 4 (1955), S. 33–54

## IBRAHIMBEGOVIC 2009

IBRAHIMBEGOVIC, Adnan: *Nonlinear Solid Mechanics*. Springer, 2009 (Solid Mechanics and Its Applications 160)

## IRSLINGER 2013

IRSLINGER, Johannes: *Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente*. Stuttgart, Inst. für Baustatik und Baudynamik der Univ. Stuttgart, Dissertation, 2013

## JEPSON UND SPENCE 1985

JEPSON, A. ; SPENCE, A.: Folds in Solutions of Two Parameter Systems and Their Calculation. Part I. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 22 (1985), Nr. 2, S. 347–368

KEENER UND KELLER 1973

KEENER, James P. ; KELLER, Herbert B.: Perturbed bifurcation theory. In: *Archive for rational mechanics and analysis* 50 (1973), Nr. 3, S. 159–175

KELLER 1977

KELLER, Herbert B.: Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. (1977)

KOITER 1967

KOITER, Warner T.: *On the stability of elastic equilibrium*. National Aeronautics and Space Administration, 1967

KOITER 1976

KOITER, WT: Current trends in the theory of buckling. In: *Buckling of structures*. Springer, 1976, S. 1–16

KOLLBRUNNER UND MEISTER 1955

KOLLBRUNNER, Curt F. ; MEISTER, Martin: *Knicken: Theorie und Berechnung von Knickstäben, Knickvorschriften*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1955

KRÄTZIG 1989

KRÄTZIG, W. B.: Eine einheitliche statische und dynamische Stabilitätstheorie für Pfadverfolgungsalgorithmen in der numerischen Festkörpermechanik. In: *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 69 (1989), Nr. 7, S. 203–213

LAUTERBACH U. A. 2018

LAUTERBACH, S ; FINA, M ; WAGNER, W: Influence of stochastic geometric imperfections on the load-carrying behaviour of thin-walled structures using constrained random fields. In: *Computational Mechanics* 62 (2018), Nr. 5, S. 1107–1125

LAZARUS UND REIS 2015

LAZARUS, Arnaud ; REIS, Pedro M.: Soft actuation of structured cylinders through auxetic behavior. In: *Advanced Engineering Materials* 17 (2015), Nr. 6, S. 815–820

LEAHU-ALUAS UND ABED-MERAIM 2011

LEAHU-ALUAS, Ion ; ABED-MERAIM, Farid: A proposed set of popular limit-point buckling benchmark problems. (2011)

LEE U. A. 1968

LEE, Seng-Lip ; MANUEL, Francisco S. ; ROSSOW, Edwin C.: Large deflections and stability of elastic frame. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 94 (1968), Nr. 2, S. 521–548



## LÉGER U. A. 2015

LÉGER, S ; DETEIX, J ; FORTIN, A: A Moore–Penrose continuation method based on a Schur complement approach for nonlinear finite element bifurcation problems. In: *Computers & Structures* 152 (2015), S. 173–184

## LORENZ 1908

LORENZ, Rudolf: Achsensymmetrische verzerrungen in dünnwandigen hohlzylindern. In: *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure* 52 (1908), Nr. 43, S. 1706–1713

## LORIA UND PANTELEY 2017

LORIA, Antonio ; PANTELEY, Elena: Stability, as told by its developers \* \*See also Loria and Panteley (2006). This work was supported by CNRS under grant BFC 248824. In: *IFAC-PapersOnLine* 50 (2017), Juli, Nr. 1, S. 5219–5230

## LYNESS 1967

LYNESS, J. N.: Numerical algorithms based on the theory of complex variable. In: *Proceedings of the 1967 22nd national conference on -*. Washington, D.C., United States : ACM Press, 1967, S. 125–133

## LYNESS UND MOLER 1967

LYNESS, J. N. ; MOLER, C. B.: Numerical Differentiation of Analytic Functions. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 4 (1967), Nr. 2, S. 202–210

## MANG UND HOFSTETTER 2000

MANG, Herbert ; HOFSTETTER, Günter: *Festigkeitslehre*. Springer, 2000

## MARSDEN UND HUGHES 1994

MARSDEN, Jerrold E. ; HUGHES, Thomas J. R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. New York : Courier Dover Publications, 1994

## MARTINS U. A. 2003

MARTINS, Joaquim R. R. A. ; STURDZA, Peter ; ALONSO, Juan J.: The Complex-step Derivative Approximation. In: *ACM Trans. Math. Softw.* 29 (2003), September, Nr. 3, S. 245–262

## MOAVEN 2016

MOAVEN, Arash: *Effect of imperfections on geometrical nonlinear computations*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Diplomarbeit, 2016

## MOORE 1980

MOORE, Gerald: The Numerical Treatment of Non-Trivial Bifurcation Points. In: *Numerical Functional Analysis and Optimization* 2 (1980), Nr. 6, S. 441–472. – ISSN 0163-0563, 1532-2467

OESTERLE U. A. 2017

OESTERLE, Bastian ; SACHSE, Renate ; RAMM, Ekkehard ; BISCHOFF, Manfred: Hierarchic isogeometric large rotation shell elements including linearized transverse shear parametrization. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 321 (2017), S. 383–405

POHL 2014

POHL, Tanja: *Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung*. Stuttgart : Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, 2014

RALL 1986

RALL, L. B.: The Arithmetic of Differentiation. In: *Mathematics Magazine* 59 (1986), Nr. 5, S. 275–282

RALL 1983

RALL, Louis B.: Differentiation and generation of Taylor coefficients in Pascal-SC. In: *A New Approach to Scientific Computation*. Elsevier, 1983, S. 291–309

RAMM 1981

RAMM, E.: Strategies for Tracing the Nonlinear Response Near Limit Points. In: *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1981, S. 63–89

REIS 2015

REIS, Pedro M.: A perspective on the revival of structural (in) stability with novel opportunities for function: from buckliphobia to buckliphilia. In: *Journal of Applied Mechanics* 82 (2015), Nr. 11

REITINGER 1994

REITINGER, Reiner: *Stabilität Und Optimierung Imperfektionsempfindlicher Tragwerke*. Stuttgart, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Dissertation, 1994

REZAIEE-PAJAND UND MOGHADDASIE 2014

REZAIEE-PAJAND, Mohamad ; MOGHADDASIE, Behrang: Stability boundaries of two-parameter non-linear elastic structures. In: *International Journal of Solids and Structures* 51 (2014), März, Nr. 5, S. 1089–1102

RHEINBOLDT 1981

RHEINBOLDT, Werner C.: Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems. In: *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*. Elsevier, 1981, S. 103–113

## RIKS 1972

RIKS, E.: The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability. In: *Journal of Applied Mechanics* 39 (1972), Nr. 4, S. 1060–1065

## RIKS 1979

RIKS, E.: An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems. In: *International Journal of Solids and Structures* 15 (1979), Nr. 7, S. 529–551

## RIKS 1984

RIKS, E.: Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 47 (1984), Nr. 3, S. 219–259

## RUST 2009

RUST, Wilhelm: *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen: Kontakt, Geometrie, Material*. Springer-Verlag, 2009

## SCHMIDT 2009

SCHMIDT, Herbert: Stabilität stählerner Schalentragwerke. In: *Stahlbau-Kalender 2009: Schwerpunkt: Stabilität* (2009), S. 529–612

## SCHMITZ 2016

SCHMITZ, Sascha: *Wirtschaftskrisen und Rechnungslegung*. Springer, 2016

## SCHNEIDER U. A. 2005

SCHNEIDER, Werner ; TIMMEL, Ingo ; HÖHN, Karsten: The conception of quasi-collapse-affine imperfections: A new approach to unfavourable imperfections of thin-walled shell structures. In: *Thin-walled structures* 43 (2005), Nr. 8, S. 1202–1224

## SCHRÖDER U. A. 2017

SCHRÖDER, Jörg ; VIEBAHN, Nils ; WRIGGERS, Peter ; AURICCHIO, Ferdinando ; STEEGER, Karl: On the stability analysis of hyperelastic boundary value problems using three-and two-field mixed finite element formulations. In: *Computational Mechanics* 60 (2017), Nr. 3, S. 479–492

## SCHWEIZERHOF 1990

SCHWEIZERHOF, Karl: *Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik*. 1990 (Schriftenreihe, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe Heft 9)

## SCHWEIZERHOF UND RAMM 1984

SCHWEIZERHOF, Karl ; RAMM, Ekkehard: Displacement dependent pressure loads

in nonlinear finite element analyses. In: *Computers & Structures* 18 (1984), Januar, Nr. 6, S. 1099–1114

SCHWEIZERHOF UND WRIGGERS 1986

SCHWEIZERHOF, K.H. ; WRIGGERS, P.: Consistent Linearization for Path Following Methods in Nonlinear Fe Analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 59 (1986), Nr. 3, S. 261–279. – ISSN 00457825

SEWELL 1965

SEWELL, MJ: The static perturbation technique in buckling problems. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965), Nr. 4, S. 247–265

SEYDEL 1977

SEYDEL, Rüdiger: *Numerische Berechnung von Verzweigungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Technische Universität München, Dissertation, 1977

SEYDEL 1979

SEYDEL, Rüdiger: Numerical Computation of Branch Points in Nonlinear Equations. In: *Numerische Mathematik* 33 (1979), Nr. 3, S. 339–352

SIMO UND HUGHES 1998

SIMO, J. C. ; HUGHES, T. J. R.: *Computational Inelasticity*. New York : Springer-Verlag, 1998 (Interdisciplinary Applied Mathematics)

SIMO UND RIFAI 1990

SIMO, J. C. ; RIFAI, M. S.: A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 29 (1990), Juni, Nr. 8, S. 1595–1638

SMOLEŃSKI 1999

SMOLEŃSKI, W M.: Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 178 (1999), Nr. 1-2, S. 89–113

SPENCE UND JEPSON 1984

SPENCE, A ; JEPSON, A: Numerical techniques for nonlinear multi-parameter problems. In: *Numerical Analysis*. Springer, 1984, S. 169–185

SQUIRE UND TRAPP 1998

SQUIRE, William ; TRAPP, George: Using Complex Variables to Estimate Derivatives of Real Functions. In: *SIAM Review* 40 (1998), Januar, Nr. 1, S. 110–112

STEIN U. A. 1990

STEIN, E ; WAGNER, W ; WRIGGERS, P: Nonlinear stability-analysis of shell

and contact-problems including branch-switching. In: *Computational mechanics* 5 (1990), Nr. 6, S. 428–446

TERWAGNE U. A. 2014

TERWAGNE, Denis ; BROJAN, Miha ; REIS, Pedro M.: Smart morphable surfaces for aerodynamic drag control. In: *Advanced materials* 26 (2014), Nr. 38, S. 6608–6611

THOMPSON UND HUNT 1973A

THOMPSON, J. M. T. ; HUNT, G. W.: *A General Theory of Elastic Stability*. J. Wiley, 1973

THOMPSON UND HUNT 1973B

THOMPSON, John Michael T. ; HUNT, Giles W.: *A general theory of elastic stability*. Wiley, 1973

THOMPSON UND HUNT 1984

THOMPSON, John Michael T. ; HUNT, Giles W.: *Elastic instability phenomena*. Wiley Chichester etc., 1984

THOMPSON 1969

THOMPSON, John M.: A general theory for the equilibrium and stability of discrete conservative systems. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 20 (1969), Nr. 6, S. 797–846

THURSTON 1969

THURSTON, GA: Continuation of Newton's method through bifurcation points. (1969)

TIMOSCHENKO 1910

TIMOSCHENKO, S: *Über die Stabilität elastischer Systeme*. 1910

TIMOSCHENKO 1936

TIMOSCHENKO, Stepan P. [. (Hrsg.): *Theory of elastic stability*. 1. ed. New York [u.a.] : McGraw-Hill, 1936 (Engineering societies monographs)

VON KÁRMÁN UND TSIEN 1939

VON KÁRMÁN, Theodore ; TSIEN, Hsue-Shen: The buckling of spherical shells by external pressure. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 7 (1939), Nr. 2, S. 43–50

VON KÁRMÁN UND TSIEN 1941

VON KÁRMÁN, Theodore ; TSIEN, Hsue-Shen: The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. In: *Journal of spacecraft and rockets* 40 (1941), Nr. 6, S. 898–907

VON SCHEVEN UND BISCHOFF 2016

VON SCHEVEN, Malte ; BISCHOFF, Manfred: *Finite Elemente für Tragwerksberechnungen*. Unterlagen zur Vorlesung, Sommersemester 2016. Universität Stuttgart, Deutschland, 2016

WAGNER 2017

WAGNER, Marcus: *Lineare und nichtlineare FEM*. Wiesbaden : Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017

WAGNER 1991

WAGNER, Werner: *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der finiten Elemente*. Univ., 1991 (Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover F 91/1)

WAGNER UND WRIGGERS 1988

WAGNER, Werner ; WRIGGERS, Peter: A simple method for the calculation of postcritical branches. In: *Engineering computations* (1988)

WASHIZU 1955

WASHIZU, Kyūichirō: On the variational principles of elasticity and plasticity / Massachusetts Institute of Technology. 1955. – Forschungsbericht

WEMPNER 1971

WEMPNER, Gerald A.: Discrete Approximations Related to Nonlinear Theories of Solids. In: *International Journal of Solids and Structures* 7 (1971), Nr. 11, S. 1581–1599

WENGERT 1964

WENGERT, R. E.: A Simple Automatic Derivative Evaluation Program. In: *Communications of the ACM* 7 (1964), Nr. 8, S. 463–464. – ISSN 0001-0782

WRIGGERS UND SIMO 1990

WRIGGERS, P. ; SIMO, J. C.: A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 30 (1990), Nr. 1, S. 155–176

WRIGGERS U. A. 1988

WRIGGERS, P ; WAGNER, W ; MIEHE, C: A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 70 (1988), Nr. 3, S. 19

WRIGGERS 2001

WRIGGERS, Peter: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2001

WRIGGERS 2007

WRIGGERS, Peter [. (Hrsg.): *Computational contact mechanics*. Wien [u.a.] : Springer, 2007 (Courses and lectures ; 498)

ZOELLY 1915

ZOELLY, Robert: *Über ein Knickungsproblem an der Kugelschale*, Zürcher & Furrer, Dissertation, 1915





## Lebenslauf

### Persönliche Angaben:

Name: Steffen Roth  
Geburtsdatum: 30. Mai 1986  
Geburtsort: Bad Kissingen

### Schulische Ausbildung:

1992 – 1996 Grundschole, Bad Bocklet  
1996 – 1997 Hauptschole, Bad Bocklet  
1997 – 2006 Jack-Steinberger-Gymnasium, Bad Kissingen  
2006 Allgemeine Hochschulreife

### Universitäre Ausbildung:

2006 – 2012 Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart  
2012 Diplomprüfung  
2013 Preis für die Diplomarbeit, Vereinigung von Freunden der Universität Stuttgart e.V.

### Beruflicher Werdegang:

2012 – 2014 Tragwerksplaner im Büro Bornscheuer Drexler Eisele, Stuttgart  
2014 – 2020 Akademischer Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart



---

## Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nicht-lineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nicht-lineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.

- 10 (1989) **K. M. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. L. M. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) **N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.

- 33 (2001) A. Maute:**  
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Struktur-  
dynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturver-  
halten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton  
mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D. P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-  
Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incom-  
pressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Form-  
optimierung.
- 42 (2004) G. A. D’Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.

- 44 (2004) **T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A. S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T. M. Hettich:**  
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**  
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**  
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.
- 53 (2010) **J. Kato:**  
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.

- 54 (2010) C. F. Hilchenbach:**  
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**  
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B. J. Schneider:**  
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**  
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) T. Cichosz:**  
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) R. Echter:**  
Isogeometric analysis of shells.
- 60 (2013) A. Tkachuk:**  
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices.
- 61 (2013) J. Irslinger:**  
Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente.
- 62 (2014) T. E. Pohl:**  
Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung.
- 63 (2014) A. Sorg:**  
Adaptive diskret-kontinuierliche Modellierung von Materialien mit Mikrostruktur.
- 64 (2015) M. E. Matzen:**  
Isogeometrische Modellierung und Diskretisierung von Kontaktproblemen.



- 65 (2016) V. M. Effinger:**  
Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymer-schäume.
- 66 (2017) C. M. Wilking:**  
Effiziente Integration und verbesserte Kontaktspannungen für duale Mortar-Formulierungen.
- 67 (2018) B. Oesterle:**  
Intrinsisch lockingfreie Schalenformulierungen.
- 68 (2018) F. Neukamm:**  
Lokalisierung und Versagen von Blechstrukturen.
- 69 (2019) A.-K. Schäuble:**  
Variationally consistent inertia templates for speed-up and customization in explicit dynamics.
- 70 (2019) T. Willerding:**  
Multiscale simulation of phase transformation in metals.







**Steffen Roth**

Diese Arbeit befasst sich mit der direkten Berechnung kritischer Punkte dünnwandiger Strukturen, die durch eine von außen aufgebrachte Knotenverschiebung belastet sind. Hierfür werden die für Kraftlastfälle bereits verfügbaren Algorithmen zur direkten Berechnung von Durchschlags- und Verzweigungspunkten erweitert und ergänzt. Die bei dieser Methode notwendige Richtungsableitung der Tangentensteifigkeitsmatrix in Richtung des kritischen Eigenvektors wird in dieser Arbeit mit numerischen Ableitungsalgorithmen ermittelt, die auf hyperkomplexen Zahlenformaten beruhen. Hierfür wird ein ausführlicher Überblick über die in der Literatur vorhandenen Varianten mit ihren Vor- und Nachteilen gegeben. Im Gegensatz zu den klassischen Differenzenverfahren ermöglichen diese Methoden eine exakte und zuverlässige Ermittlung der Richtungsableitung.

Um den Einfluss von Imperfektionen auf die Tragfähigkeit dünnwandiger Strukturen zu analysieren, werden die im ersten Teil der Arbeit vorgestellten Algorithmen erweitert. Hierbei werden zwei grundlegend verschiedene Ansätze verfolgt. In der ersten Variante stellen die Imperfektionen eine gegebene Größe dar. Durch eine effiziente, sich wiederholende Berechnung kritischer Punkte für eine Vielzahl an Imperfektionsformen oder -amplituden lassen sich damit kritische Pfade zuverlässig ermitteln. Bei der zweiten Methode werden die Imperfektionen als Unbekannte in das Gleichungssystem eingebracht. Durch eine Erweiterung des Gleichungssystems um eine zusätzliche Bedingung, die sich aus der Variation des Potentials nach den Imperfektionen ergibt, können ungünstigste geometrische Imperfektionsformen berechnet werden.