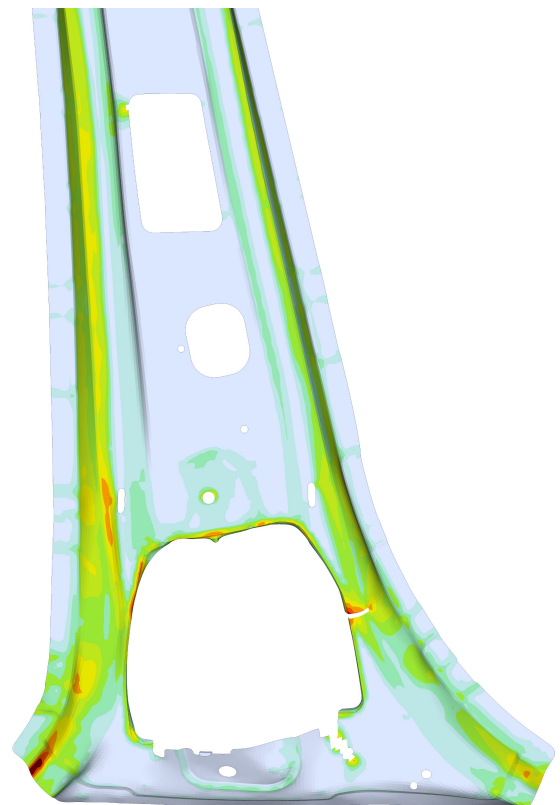
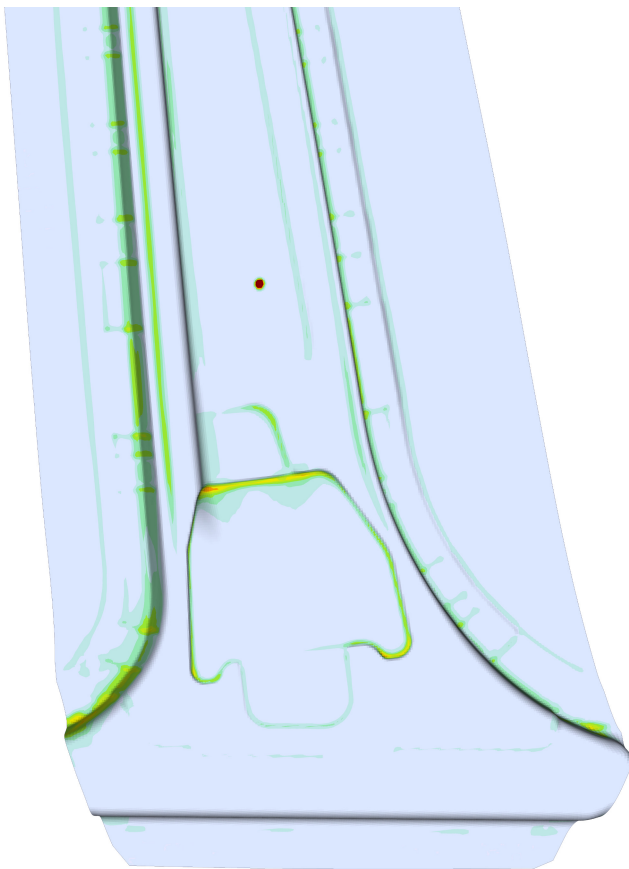


# Lokalisierung und Versagen von Blechstrukturen

Frieder Neukamm





# **Lokalisierung und Versagen von Blechstrukturen**

von

**Frieder Neukamm**

Bericht Nr. 68

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2018



*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123  
Fax: 0711 - 685 66130  
E-Mail: [sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de](mailto:sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de)  
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-060427-0



# Lokalisierung und Versagen von Blechstrukturen

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Frieder Neukamm**

aus Nürtingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart  
Mitberichter: Prof. Dr. Pavel Hora, Zürich  
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Karl Roll, Stuttgart  
Tag der mündlichen Prüfung: 21. Juni 2018

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2018



## Kurzfassung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Vorhersage der Lokalisierung und des Materialversagens von Blechstrukturen in explizit dynamischen Simulationen. Die Simulation von hochdynamischen Vorgängen ist beispielsweise in der Fahrzeugentwicklung zu einem unverzichtbaren Werkzeug geworden. Um prognosefähig zu sein, ist es von größter Wichtigkeit, dabei auch die Entstehung von Materialversagen korrekt abzubilden. Je nach Lastfall kann ein Materialversagen katastrophale Folgen haben, weshalb eine mögliche Rissbildung frühzeitig im Entwicklungsprozess in der Simulation erkannt werden muss. Nur so können Maßnahmen ergriffen werden, um eine optimale Auslegung sicherzustellen.

Ausgangspunkt war die Crashesimulation von Fahrzeugen mit der Erkenntnis, dass es nicht ausreichend ist, nur dort die Qualität der Simulation zu verbessern. Automobilkarosserien sind in der Regel aus tiefgezogenen Blechteilen zusammengefügt. Es liegt auf der Hand, dass die Eigenschaften der fertigen Blechteile auch durch die Herstellungsprozesse bestimmt werden. Deswegen wird als Basis für eine höhere Prognosegüte auch die Berücksichtigung der vorhergehenden Schritte in der Herstellungsprozesskette der Blechteile – wie der Umformsimulation – angestrebt.

In dieser Arbeit wird die Entwicklung des phänomenologischen Schädigungs- und Versagensmodells GISSMO („Generalized Incremental Stress-State dependent damage Model“) beschrieben. Mit pragmatischen Ansätzen soll ein Maximum an Prognosegüte erreicht und mit einfacher Anwendbarkeit kombiniert werden. Basis des Konzepts ist die modulare Kopplung an beliebige Plastizitätsalgorithmen, um eine durchgängige Schädigungsmodellierung für die Prozesskette zu ermöglichen. Damit kann GISSMO sowohl an die Materialmodelle der Umform-, als auch an die der Crashesimulation gekoppelt werden. So können in beiden Bereichen die bestehenden Konstitutivgesetze, die sich in der Regel stark unterscheiden, beibehalten werden. Die disziplinübergreifende Übertragung der Schädigung zwischen den Prozessschritten wird durch das universell koppelbare Schädigungsmodell erreicht. In beiden genannten Anwendungen wird in der Regel eine Diskretisierung mit 5-parametrischen Schalenelementen verwendet, weswegen der Schwerpunkt für die Entwicklung des Modells auf dieser Diskretisierung liegt.

Kern von GISSMO ist die Evolutionsgleichung der Schädigung, welcher ein inkrementeller Ansatz ähnlich dem von JOHNSON UND COOK (1985) zugrunde liegt. Basierend auf Beobachtungen von WECK U. A. (2006) an Modellmaterialien, sowie den Erkenntnissen aus mikromechanischen Ansätzen wie dem von GURSON (1977) wird ein nichtlineares Anwachsen der Schädigung ermöglicht. Damit werden die physikalischen Vorgänge der Schädigung – wie Neubildung und Koaleszenz von Defekten – im phänomenologischen Modell abgebildet. Im Gegensatz zu den klassischen Ansätzen wird die äquivalente plastische Dehnung aus der Evolutionsgleichung eliminiert, so dass das Konzept prinzipiell auch für stark nichtproportionale oder zyklische Belastungen tauglich wird. Als steuernde Größe des Modells dient die äquivalente plastische Bruchdehnung, die abhängig

von der Dreiachsigkeit als Maß des Belastungszustands definiert wird. Um eine größtmögliche Flexibilität zu erreichen, wird auf Ansatzfunktionen für diese Kurve verzichtet. Stattdessen erfolgt der Input tabelliert.

Für die Anwendung in der Prozesskette ist eine weitgehende Unabhängigkeit von den verwendeten Netzgrößen notwendig. Typischerweise bildet sich ab dem Beginn der Instabilität oder Lokalisierung eine starke – und unphysikalische – Abhängigkeit der Ergebnisse von der Diskretisierung aus. Für die industrielle Anwendung in der Gesamtfahrzeugsimulation sind der möglichen Netzfeinheit enge Grenzen gesetzt. Um das Modell praxistauglich zu halten, ist also der Umgang mit Elementgrößen weit oberhalb der darzustellenden Phänomene von Instabilität und Lokalisierung notwendig. Deswegen werden Methoden entwickelt, wie mit Hilfe einer zusätzlichen Evolution der Zeitpunkt der beginnenden plastischen Instabilität erfasst werden kann. Ab diesem Moment müssen Maßnahmen zur Regularisierung einsetzen. Auf Basis des „Effective Stress Concept“ von LEMAITRE (1985) wird eine Rückkopplung der Schädigung auf die Steifigkeit definiert. Um eine bestmögliche Regularisierung der dissipierten Energie zu ermöglichen, wird der Ansatz um eine Schädigungsschwelle erweitert. Zusätzlich wird eine elementgrößenabhängige Nichtlinearität in die Kopplung eingeführt. Damit gelingt eine weitgehende Regularisierung der Ergebnisse auf makroskopischer Ebene, wie beispielsweise der über eine Meßlänge gemessenen technischen Spannung oder technischen Dehnung.

Alternativ zur inkrementellen Methode wird der Zwei-Parameter-Ansatz vorgestellt, mit dem aus der Fließkurve der Lokalisierungsart in den Koordinaten von Dreiachsigkeit und Dickenreduktion vorab bestimmt werden kann. Es ergibt sich die Grenzformänderungsfläche, englisch „Forming Limit Surface“ (FLS). Vorausgesetzt wird ein ebener Spannungszustand. Dem Ansatz liegt eine Grenzwertbetrachtung zugrunde: Um eine gewisse Dickendehnung zu erreichen, muss eine gewisse – unter biaxialer Belastung minimale – Menge an äquivalenter plastischer Dehnung aufgewendet werden. Da sich die Spannungsdreiachsigkeit sprunghaft ändern kann, existiert damit eine untere Grenzfläche für die erreichbaren Zustände. Für die maximal erreichbare plastische Dehnung („obere Grenzfläche“) existiert eine solche Betrachtung nicht. Hierfür werden mit Hilfe des verallgemeinerten Modells von HUTCHINSON UND NEALE (1978a) die Lokalisierungsstellen für proportionale Belastung bestimmt. Über diesen Punkten wird schließlich eine Fläche aufgespannt, die zusammen mit der oben erwähnten Grenzfläche die Grenzformänderungsfläche (FLS) bildet. Die genannten Schritte finden im Vorfeld einer Simulation rein auf Basis des Fließorts und der Verfestigungsfunktion statt. Während der Simulation muss nur abgeprüft werden, ob sich ein Zustand noch unterhalb der FLS befindet. Damit bietet sich eine – im Vergleich zu vielen anderen Methoden – numerisch sehr effiziente Vorgehensweise, um das Lokalisierungsrisiko zu bewerten.

Ein weiterer Abschnitt befasst sich mit der Identifikation von Parametern, die in der Praxis entscheidend für die Anwendbarkeit ist. Die komplexen Vorgänge von Lokalisierung und Versagen spielen sich meist auf Materialebene ab und lassen sich messtechnisch in der Regel nur in ihren Resultierenden erfassen. Deswegen muss oft auf „reverse engineering“-Ansätze zurückgegriffen werden, um aus den makroskopischen Messdaten

eine treffende und allgemeine Beschreibung des Materialverhaltens zu bekommen. Analog zu den bereits erwähnten Komponenten des Modells wird dazu eine strukturierte Vorgehensweise dargestellt.

Als „Proof of Concept“ werden schließlich noch zwei Simulationsbeispiele vorgestellt. Mit dem Kreuzstempelversuch wird ein bekannter Komponententest aus der Umformtechnik herangezogen. Hier wird die qualitativ richtige Prognose des Orts der ersten Rissbildung bewertet. Als Beispiel einer Anwendung in der Prozesskette Umform- zu Crashsimulation wird die Innenschale einer B-Säule berechnet. Die Übertragung der Ergebnisse der Umformsimulation auf das Crashmodell trägt hier zu einer Verbesserung der Prognosegüte bei.

## Abstract

### Localization and Failure of Sheet Metal Structures

Subject of this work is the prediction of localization and material failure of sheet metal structures in explicit dynamic simulations. The simulation of highly dynamic processes has become indispensable in automotive development, for example. In order to be predictive, it is of the utmost importance to determine the formation of material failure correctly. Depending on the loadcase, material failure can have catastrophic consequences; therefore, a possible crack formation must be recognized early in the development process in simulation. Only in this way measures can be taken to ensure an optimum in structural performance.

Starting point was automotive crash simulation, nevertheless realizing that it would not be sufficient to improve simulation quality on this side only. Automobile bodies are usually composed of deep-drawn sheet metal parts. It is obvious that the properties of the finished sheet metal parts are also determined by the manufacturing processes. For this reason, consideration of the previous steps in the production process chain of the sheet metal parts - such as the forming simulation - is also aimed at as a basis for a higher forecasting quality.

This work describes the development of the phenomenological damage and failure model GISSMO („Generalized Incremental Stress State dependent damage MOdel“). With pragmatic approaches, a maximum in forecast quality is to be achieved and combined with ease of use. The concept is based on a modular coupling to arbitrary plasticity algorithms, in order to enable a continuous damage modeling throughout the process chain. GISSMO can thus be coupled to both the material models of forming and crash simulations. As a result, the existing constitutive laws, which are generally very different, can be maintained in both areas. The interdisciplinary transfer of data between the process steps is achieved by the universally couplable damage model. In both of these applications the discretization with 5-parameter shell elements is prevailing, so the focus is on the development of the model for this discretization.

The core of GISSMO is the evolution equation of damage, which is based on an incremental approach similar to that by JOHNSON UND COOK (1985). Based on observations by WECK U. A. (2006) on model materials, as well as the findings from micromechanical approaches such as that of GURSON (1977), a non-linear increase of damage is implemented. The physical processes of damage – such as the formation and coalescence of defects – are to be depicted in the phenomenological model. In contrast to classical approaches, the equivalent plastic strain is eliminated from the evolution equation, so that in principle it is also suitable for strongly non-proportional or cyclic loads. The equivalent plastic strain to failure, which is defined depending on stress triaxiality, ser-

ves as the controlling variable of the model. In order to achieve the greatest possible flexibility, no functions are used for this curve. Instead, the input is fully tabulated.

For application in the process chain, a high degree of independence from the used mesh sizes is necessary. Typically, from the beginning of instability or localization, a strong and nonphysical dependence of the results on discretization develops. For the industrial application in full-vehicle simulations, the possible mesh refinement is narrowly limited. In order to keep the model practical, the handling of element sizes far larger than the typical length scales of instability and localization phenomena is necessary. For this reason, methods are being developed to determine the onset of plastic instability by means of an additional evolution. From this moment, measures must be taken to regularize. Based on the „Effective Stress Concept“ by LEMAITRE (1985), a coupling of damage to stiffness is defined. To enable a high degree of regularization for the dissipated energy, the approach is extended by a damage threshold. In addition, an element-size dependent non-linearity is introduced into the coupling. In this way, the results can be largely regularized at the macroscopic level, such as, for example, technical stress or technical strain measured over a certain length.

As an alternative to the incremental method, a two-parameter approach leading to the Forming Limit Surface (FLS) is presented. It allows to determine the localization locus in coordinates of triaxiality and thickness reduction from the flow curve beforehand. A plane stress condition is assumed. The approach is based on a consideration of the limiting values: in order to achieve a certain thickness strain, a certain amount of equivalent plastic strain has to be applied. It is minimal under biaxial load. Since the stress triaxiality can change abruptly, a lower boundary surface exists for the reachable states. For the maximum achievable plastic strain („upper boundary surface“), such a consideration does not exist. For this purpose, the localization loci for proportional loading are determined using the generalized model of HUTCHINSON UND NEALE (1978a). Using these points, a surface is generated which, together with the above-mentioned boundary, forms the Forming Limit Surface (FLS). The above steps take place before the simulation, purely on the basis of yield locus and the hardening function. During the simulation it is only necessary to check whether a state is still below the FLS. This provides a numerically very efficient approach – compared to many other methods – to evaluate the localization risk.

Another section deals with the identification of model parameters, which is crucial for the applicability of the model. The complex processes of localization and failure usually occur on material level, and can usually be measured only in their resultants. This is why often „reverse engineering“ approaches have to be used in order to obtain an accurate and general description of the material behavior based on macroscopic measurement data. Following the components of the model mentioned above, a structured approach is presented.

Finally, two simulation examples are presented as a „proof of concept“. Using the Cross Die, a typical formability test is simulated. Here, the qualitatively correct forecast of the location of first crack formation is evaluated. As an example of an application in the

## Abstract

---

process chain of forming to crash simulation, the inner shell of a B-pillar is simulated. The transfer of results from forming simulation to the crash model contributes to an improvement in the prognosis quality.



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Wesentlichen während meiner Zeit als Industriedoktorand bei der Daimler AG in Sindelfingen. Eingebettet in die wohl organisierte Umgebung der Fahrzeugentwicklung für die Großserie durfte ich aus einer sehr speziellen Perspektive heraus beobachten, wo Weiterentwicklungen der Finite-Elemente-Methode am dringendsten gebraucht werden. Einen direkteren Zugang zu den Sorgen und Nöten der Anwender kann man sich kaum vorstellen – das Thema Anwendungs- und Ergebnisorientierung stand entsprechend immer im Mittelpunkt der Arbeit.

Meine universitäre Heimat habe ich am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart gefunden. Besonderer Dank geht an meinen Doktorvater Professor Manfred Bischoff. Trotz meiner speziellen Position als Externer am Institut hatte ich immer das Gefühl, dazu zu gehören und als Mitglied des Instituts geschätzt zu sein. Nicht zuletzt hat Professor Bischoff über all die Jahre immer Interesse an meiner Arbeit gezeigt und damit auch maßgeblich zu ihrem Gelingen beigetragen. Meinen Mitberichtern Prof. Hora und Prof. Roll danke ich für das Interesse an meiner Arbeit und die Übernahme des Mitberichts. Aus der Diskussion kamen für mich wertvolle Impulse, die ich gerne aufgenommen habe.

Besonderer Dank geht auch an meinen langjährigen Betreuer und Kollegen Dr. Markus Feucht, der es verstanden hat, im industriellen Umfeld ein fruchtbares Klima für Grundlagenentwicklung zu schaffen. Zusammen mit ihm, Paul Du Bois sowie Dr. André Haufe wurden in diesen Jahren viele ernsthafte Themen in lockerer Atmosphäre diskutiert. Die Impulse und Anregungen daraus haben mich von Anfang an maßgeblich beeinflusst und eine Begeisterung vermittelt, die schnell auf mich abgefärbt hat.

Mein herzlicher Dank geht auch an alle Kollegen, mit denen ich während dieser Zeit zusammenarbeiten durfte: Sowohl am Institut als auch bei der Daimler AG habe ich Menschen kennen gelernt, die mich in vielerlei Weise inspiriert und beeinflusst haben. Besonders erwähnt sei Dr. Johannes Irlinger, dem ich für sein großes Engagement beim Korrekturlesen danken möchte. In fachlicher wie auch in menschlicher Hinsicht durfte ich von meinem Umfeld sehr viel Unterstützung erfahren. Durch meine Rolle als Industriedoktorand konnte ich das in beiden „Welten“ erleben und habe es sehr geschätzt – vielen Dank dafür!

Nicht zuletzt möchte ich meinen Eltern, meiner Familie und vor allem meiner Julia für all die Unterstützung und den Rückhalt in dieser langen Zeit danken!

Böblingen, im Juli 2018

Frieder Neukamm



---

# Inhaltsverzeichnis

|  |             |
|--|-------------|
| <b>Abbildungsverzeichnis</b>   | <b>xiii</b> |
| <b>Tabellenverzeichnis</b>   | <b>xv</b>   |
| <b>Abkürzungen und Bezeichnungen</b>                                 | <b>xvii</b> |
| <b>1 Einleitung</b>  | <b>1</b>    |
| 1.1 Problemstellung und Hintergründe . . . . .                       | 1           |
| 1.2 Ziele der Arbeit . . . . .                                       | 3           |
| 1.3 Gliederung . . . . .   | 4           |
| <b>2 Grundlagen</b>  | <b>7</b>    |
| 2.1 Mechanik . . . . .   | 7           |
| 2.2 Finite Elemente in Anwendungen der passiven Sicherheit . . . . . | 11          |
| 2.3 Umformsimulationen für Blechwerkstoffe . . . . .                 | 13          |
| 2.3.1 Konstitutivmodelle für Umformsimulationen . . . . .            | 14          |
| 2.4 Die Prozesskette der Blechteilherstellung . . . . .              | 18          |
| 2.4.1 Disziplinübergreifende Betrachtung . . . . .                   | 18          |
| 2.4.2 Datenübertragung . . . . .                                     | 19          |
| <b>3 Versagensbeschreibung</b>                                       | <b>21</b>   |
| 3.1 Phänomenologie . . . . .   | 22          |
| 3.1.1 Versagensmoden von Blechen . . . . .                           | 23          |
| 3.1.2 Lastfälle und praktische Relevanz . . . . .                    | 25          |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.2      | Eine kurze Übersicht existierender Versagensmodelle . . . . .           | 25        |
| 3.2.1    | Umrechnung vom Spannungs- in den Dehnungsraum . . . . .                 | 26        |
| 3.2.2    | Einfache Versagenskriterien . . . . .                                   | 29        |
| 3.2.3    | Das Modell von Gurson . . . . .   | 32        |
| 3.2.4    | Erweiterungen des Gursonmodells . . . . .                               | 36        |
| 3.2.5    | Das Modell von Johnson & Cook . . . . .                                 | 39        |
| 3.3      | Anwendung in der Prozesskette . . . . .                                 | 41        |
| 3.3.1    | Inkompatible Konstitutivgesetze . . . . .                               | 42        |
| 3.3.2    | Näherungsweise Anpassung für das GTN-Modell . . . . .                   | 44        |
| 3.3.3    | Korrektur der Dehnung für einachsigen Zug . . . . .                     | 46        |
| <b>4</b> | <b>Instabilität und Lokalisierung</b>                                   | <b>51</b> |
| 4.1      | Beschreibung und Phänomenologie . . . . .                               | 52        |
| 4.1.1    | Unterschiede zwischen Metallen und Beton sowie Geomaterialien . . . . . | 53        |
| 4.2      | Kriterien für die Instabilität . . . . .                                | 54        |
| 4.2.1    | Stabilität und Objektivität . . . . .                                   | 56        |
| 4.2.2    | Der Akustiktensor . . . . .   | 57        |
| 4.3      | Lokalisierung . . . . .   | 61        |
| 4.3.1    | Phänomenologische Beschreibung . . . . .                                | 62        |
| 4.3.2    | Diffuse Einschnürung nach Swift sowie Xue . . . . .                     | 62        |
| 4.3.3    | Lokalisierte Einschnürung nach Hill . . . . .                           | 64        |
| 4.3.4    | Das Modell von Marciniak & Kuczyński . . . . .                          | 65        |
| 4.3.5    | Das Modell von Hutchinson & Neale . . . . .                             | 69        |
| 4.3.6    | Spannungsbasierte Kriterien . . . . .                                   | 73        |
| <b>5</b> | <b>Das Modell GISSMO</b>  | <b>75</b> |
| 5.1      | Versagensdefinition . . . . .   | 78        |
| 5.1.1    | Skalare Schädigungsevolution . . . . .                                  | 78        |
| 5.1.2    | Dreiachsigkeit und Bruchdehnung . . . . .                               | 82        |
| 5.2      | Behandlung der Lokalisierung in GISSMO . . . . .                        | 85        |
| 5.2.1    | Analyse mehrstufiger Verformungsprozesse . . . . .                      | 85        |
| 5.2.2    | Inkrementelle Vorhersage . . . . .                                      | 88        |
| 5.2.3    | Zwei-Parameter Ansatz (Forming Limit Surface FLS) . . . . .             | 90        |
| 5.3      | Entfestigung und Schädigung . . . . .                                   | 99        |
| 5.3.1    | Das Konzept der effektiven Spannung . . . . .                           | 101       |
| 5.3.2    | Abgrenzung des postkritischen Bereichs . . . . .                        | 102       |
| 5.3.3    | Dreiachsigkeitsabhängige Regularisierung . . . . .                      | 104       |
| 5.3.4    | Anwendung in der Prozesskette . . . . .                                 | 105       |

|                                 |   |                |
|---------------------------------|---|----------------|
| <b>6</b>                        | <b>Anwendung und Parameteridentifikation</b>              | <b>107</b>     |
| 6.1                             | Plastisches Fließen . . . . .                             | 108            |
| 6.1.1                           | Beschreibung der Fließbedingung . . . . .                 | 108            |
| 6.1.2                           | Isotrope Verfestigung . . . . .                           | 109            |
| 6.1.3                           | Viskose Effekte . . . . .                                 | 113            |
| 6.2                             | Parameter für Versagen und Instabilität . . . . .         | 114            |
| 6.2.1                           | Bestimmung von Versagenskurven aus Experimenten . . . . . | 114            |
| 6.2.2                           | Identifikation von Instabilitätsparametern . . . . .      | 116            |
| <br><b>7</b>                    | <br><b>Beispiele</b>                                      | <br><b>119</b> |
| 7.1                             | Kreuzstempelversuch . . . . .                             | 119            |
| 7.2                             | B-Säule . . . . .   | 124            |
| 7.2.1                           | Umformsimulation . . . . .                                | 124            |
| 7.2.2                           | Mapping . . . . .   | 125            |
| 7.2.3                           | Crashsimulation . . . . .                                 | 125            |
| <br><b>8</b>                    | <br><b>Zusammenfassung</b>                                | <br><b>129</b> |
| 8.1                             | Bewertung . . . . .                                       | 129            |
| 8.2                             | Ausblick . . . . .  | 131            |
| <br><b>Literaturverzeichnis</b> |   | <br><b>133</b> |



---

# Abbildungsverzeichnis

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Simulationsmodell Frontalcrash . . . . .  | 12 |
| 2.2 | Prozesskette für Blechbauteile . . . . .  | 19 |
| 3.1 | Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm (schematisch) . . . . .                       | 22 |
| 3.2 | Poren im Material und Bruchbild, Stahl Weldox 420 (BARSOUM 2006) . . . . .            | 24 |
| 3.3 | Bruchfläche einer Probe nach ebener Verformung (TAŞAN 2010) . . . . .                 | 25 |
| 3.4 | Vergleich der einfachen Versagenskriterien . . . . .                                  | 32 |
| 3.5 | Typische Versagenskurve des <i>GTN</i> -Modells . . . . .                             | 36 |
| 3.6 | Modulares Konzept für die Prozesskette . . . . .                                      | 41 |
| 3.7 | Modulares Konzept unter Verwendung des <i>GTN</i> -Modells . . . . .                  | 43 |
| 3.8 | Entwicklung von Porenvolumenanteil $f$ und plastischer Querdehnzahl $\nu^p$ . . . . . | 45 |
| 4.1 | Porenwachstum in IF-Stahl (TAŞAN 2010) . . . . .                                      | 54 |
| 4.2 | Definition der <i>Lyapunow</i> -Stabilität . . . . .                                  | 55 |
| 4.3 | Körper mit Diskontinuität . . . . .   | 59 |
| 4.4 | Lokalisierungsmoden in der Ebene . . . . .  | 59 |
| 4.5 | Anfangsimperfektion des <i>MK</i> -Modells . . . . .                                  | 66 |
| 4.6 | Orientierung der Lokalisierung beim <i>HN</i> -Modell . . . . .                       | 70 |
| 4.7 | Vergleich der Lokalisierungsmodelle . . . . .   | 72 |
| 5.1 | Betrachtete Prozessschritte . . . . .   | 75 |
| 5.2 | Modulares Konzept für <i>GISSMO</i> . . . . .   | 76 |
| 5.3 | Querschnitt durch vorgeschädigtes <i>RVE</i> mit Defekten . . . . .                   | 78 |
| 5.4 | Vergleich der Schädigungsakkumulationen . . . . .                                     | 81 |
| 5.5 | Dreiaxsigkeit als Maß für die Belastungsart . . . . .                                 | 83 |

|      |  |     |
|------|--|-----|
| 5.6  | Zugversuche mit verschiedenen Elementgrößen, ohne Regularisierung . . .                    | 86  |
| 5.7  | Zugversuche, plastische Dehnung in Lokalisierungszone . . . . .                            | 86  |
| 5.8  | Schema der Regularisierung . . . . .   | 87  |
| 5.9  | Forming Limit Diagram (FLD) . . . . .  | 88  |
| 5.10 | Erreichbare Zustände für proportionale Deformation, HN-Kurve . . . . .                     | 93  |
| 5.11 | Proportionale und biaxiale Grenzfläche . . . . .   | 94  |
| 5.12 | Schnitt bei $\eta = \frac{1}{3}$ . . . . .   | 94  |
| 5.13 | Ergebnisfläche des HN-Modells für beliebige Vordehnungen . . . . .                         | 97  |
| 5.14 | Resultierende Forming Limit Surface (FLS) . . . . .  | 98  |
| 5.15 | Schnitte durch die FLS . . . . .   | 98  |
| 5.16 | Resultierende Spannung im Ein-Element-Test . . . . .                                       | 103 |
| 5.17 | Zugversuche mit verschiedenen Elementgrößen, mit Regularisierung . . .                     | 103 |
| 5.18 | Einfluss von <i>SHRF</i> und <i>BIAXF</i> auf die Bruchdehnung . . . . .                   | 105 |
| 6.1  | Details Zugversuch . . . . .   | 112 |
| 6.2  | Verlauf der Dreiachsigkeit für verschiedene Probenformen . . . . .                         | 115 |
| 7.1  | Simulationsmodell des Kreuzstempelversuchs . . . . .                                       | 120 |
| 7.2  | Kurven aus Materialkarte Dualphasenstahl . . . . .   | 121 |
| 7.3  | Plastische Instabilität <i>F</i> , Ziehtiefe 47mm . . . . .                                | 121 |
| 7.4  | Schädigung <i>D</i> kurz vor Anriss. Ziehtiefe 55mm . . . . .                              | 122 |
| 7.5  | Element Nr. 10787, Verlauf von <i>D</i> , <i>F</i> und $\eta$ über der Ziehtiefe . . . . . | 122 |
| 7.6  | Mittlere Dreiachsigkeit $\eta_m$ kurz vor Anriss, Ziehtiefe 55mm . . . . .                 | 123 |
| 7.7  | Kreuzstempelversuch – Vergleich Simulationsergebnis zu Realversuch . .                     | 123 |
| 7.8  | Aufbau der Umformsimulation für die B-Säule . . . . .                                      | 124 |
| 7.9  | Umformsimulation: Schädigung, Dickenverteilung, plastische Dehnung . .                     | 125 |
| 7.10 | Mapping, Verteilung der Schädigung <i>D</i> . . . . .                                      | 126 |
| 7.11 | Seitencrash nach IIHS . . . . .  | 126 |
| 7.12 | Fußbereich der B-Säule innen nach Crash . . . . .  | 127 |



---

# Tabellenverzeichnis

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 3.1 | Parameter des <i>GTN</i> -Modells für einen Dualphasenstahl . . . . . | 36  |
| 6.1 | Flussdiagramm zur Materialkartenerstellung . . . . .                  | 107 |
| 7.1 | Materialparameter Dualphasenstahl (*MAT_024) . . . . .                | 120 |
| 7.2 | GISSMO-Parameter (*MAT_ADD_EROSION) . . . . .                         | 121 |



---

# Abkürzungen und Bezeichnungen

Grundsätzlich werden Skalare in Standardschrift gedruckt – Vektoren, Tensoren und Matrizen sind **fett**. Häufig referenzierte Bezeichnungen finden sich in der folgenden Tabelle. Eine Übersicht der GISSMO-Parameter findet sich in Tabelle 6.1.

## Abkürzungen

|        |  |
|--------|--|
| BIW    | Body in White, (Fahrzeug-)Karosserie                                       |
| FLD    | Forming Limit Diagram, Grenzformänderungsdiagramm                          |
| FFLD   | Fracture Forming Limit Diagram   |
| FLS    | Forming Limit Surface, Grenzformänderungsfläche                            |
| GISSMO | Generalized Incremental Stress State dependent damage MOdel                |
| GTN    | Gurson-Tvergaard-Needleman (Modell)  |
| HN     | Modell von HUTCHINSON UND NEALE (1978a)                                    |
| IIHS   | Insurance Institute for Highway Safety (USA)                               |
| JC     | Modell von JOHNSON UND COOK (1985)   |
| MAGD   | *MAT_ADD_GENERALIZED_DAMAGE (LS-DYNA)                                      |
| MK     | Modell von MARCINIAK UND KUCZYŃSKI (1967)                                  |
| MPP    | Massively Parallel Processing, Massenparallelrechner                       |
| NH     | Modell von NAHSHON UND HUTCHINSON (2008)                                   |
| PDE    | Partial Differential Equation  |
| RVE    | Repräsentatives Volumenelement   |
| Umat   | User-Material in LS-DYNA   |
| WING   | Werkstoffinnovationen für Industrie und Gesellschaft, Bundes-Förderprojekt |

## Lateinische Buchstaben

|                             |   |
|-----------------------------|---|
| $a$                         | Verhältnis der Hauptspannungen                                |
| $A$                         | Querschnittsfläche  |
| $A_g, A$                    | Gleichmaßdehnung, Bruchdehnung (Zugversuch)                   |
| $A, B, C$                   | Fließparameter des JC-Modells                                 |
| $a, \mathbf{b}, \mathbf{C}$ | Koeffizienten der Fließbedingung nach FENG UND YANG (1984)    |
| $a, b, c, N$                | Parameter der Extrapolation nach HOCKETT UND SHERBY (1975)    |
| $a, c, h, p, M$             | Koeffizienten der Fließbedingung nach BARLAT UND LIAN (1989)  |
| $\mathbf{b}$                | Volumenlast   |
| $b$                         | Verhältnis der Hauptdehnraten                                 |
| $\mathbf{C}$                | Materieller Tangentenmodul                                    |
| $D$                         | Schädigungsvariable (GISSMO)                                  |
| $\mathbf{D}$                | Deformationsrate  |
| $D_1 \cdots D_5$            | Versagensparameter des JC-Modells                             |
| $E$                         | Elastizitätsmodul   |
| $f$                         | Porenvolumenanteil  |
| $f_1, f_2, f_3$             | Kraftkomponenten (MK- und HN-Modell)                          |
| $F$                         | Umformschwere, Instabilitätsfaktor (GISSMO), (Längs-) Kraft   |
| $F, G, H, L,$               | Koeffizienten der Fließbedingung nach HILL (1948)             |
| $M, N$                      |   |
| $\mathbf{g}$                | Schnittebene  |
| $G$                         | Gewichtungsfunktion der Schädigung                            |
| $\mathbf{h}$                | Verfestigungsfunktion   |
| $H$                         | Plastischer Modul   |
| $\mathbf{H}$                | Verschiebungsgradient   |
| $I_1, I_2, I_3$             | Invarianten des Cauchy-Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ |
| $J_1, J_2, J_3$             | Invarianten des Spannungsdeviators $\mathbf{s}$               |
| $k$                         | Faktor der elementgrößenabhängigen Regularisierung (GISSMO)   |
| $K, n$                      | Parameter der exponentiellen Verfestigungsfunktion            |
| $l$                         | Dickendehnung bei Versagen (FFLD)                             |
| $l_0$                       | Messlänge   |
| $l_E$                       | Charakteristische Länge der Diskretisierung                   |
| $L$                         | Länge der Prozesszone   |
| $m$                         | Fading-Exponent FADEXP (GISSMO)                               |
| $\mathbf{m}$                | Polarisationsvektor   |
| $n$                         | Schädigungsexponent (GISSMO)                                  |
| $\mathbf{n}$                | Rillennormale (HN-Modell)                                     |
| $p$                         | Druck   |

|                          |  |
|--------------------------|--|
| $\mathcal{P}$            | Plastische Leistung  |
| $q$                      | Von Mises Vergleichsspannung ( $= \sigma_{VM}$ )                 |
| $q_1, q_2$               | Parameter des GTN-Modells  |
| $\mathbf{q}$             | Zustandsgrößen des Materials                                     |
| $\mathbf{Q}$             | Akustiktensor, Lokalisierungstensor                              |
| $r$                      | Lankford-Parameter, R-Werte                                      |
| $\mathbf{r}$             | Fließregel   |
| $R_{p0,2}$               | 0,2%-Dehngrenze  |
| $R_m$                    | Zugfestigkeit  |
| $\mathbf{s}$             | Deviatorischer Anteil des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ |
| $t$                      | Zeit, Blechstärke  |
| $T$                      | Temperatur   |
| $\mathbf{u}$             | Verschiebung   |
| $\mathbf{v}$             | Geschwindigkeit  |
| $W$                      | (Deformations-)Energie   |
| $\mathbf{x}, \mathbf{X}$ | Ortsvektoren   |

## Griechische Buchstaben

|                                   |   |
|-----------------------------------|---|
| $\beta$                           | Parameter des erweiterten NH-Modells      |
| $\delta$                          | Kroneckersymbol                           |
| $\delta$                          | Abweichung der Lösung                     |
| $\boldsymbol{\epsilon}$           | Infinitesimaler Verzerrungstensor         |
| $\epsilon_t$                      | Technische Dehnung                        |
| $\epsilon_{eq}^p$                 | Äquivalent plastische Dehnung             |
| $\epsilon_f^p$                    | Bruchdehnung                              |
| $\epsilon_{loc}^p$                | Lokalisierungsdehnung                     |
| $\eta$                            | Spannungsdreiaxsigkeit                    |
| $\eta_m$                          | Mittlere Dreiaxsigkeit                    |
| $\Gamma^i$                        | Diskontinuitätsfläche                     |
| $\kappa$                          | Verfestigungsvariable                     |
| $\dot{\lambda}$                   | Rate des plastischen Multiplikators       |
| $\omega$                          | Parameter des NH-Modells                  |
| $\rho$                            | Dichte                                    |
| $\Phi$                            | Fließfunktion                             |
| $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ | Hauptumformgrade                          |
| $\psi$                            | Winkel der Rillenorientierung (HN-Modell) |
| $\boldsymbol{\sigma}$             | Cauchy-Spannungstensor                    |
| $\boldsymbol{\sigma}^{\nabla J}$  | Jaumann-Rate der Spannung                 |

## Abkürzungen und Bezeichnungen

---

|               |   |
|---------------|---|
| $\sigma_t$    | Technische Spannung   |
| $\sigma_{VM}$ | Von Mises Vergleichsspannung ( $=q$ )   |
| $\sigma_m$    | Hydrostatische Spannung ( $= \frac{I_1}{3}$ )   |
| $\sigma_M$    | Matrixspannung (GTN-Modell)   |
| $\sigma_Y$    | Fließspannung (Yield Stress)  |
| $\tau_{max}$  | Maximale Schubspannung  |
| $\theta_L$    | Lodewinkel  |
| $\nu$         | Querdehnzahl (Poissonzahl)  |
| $\xi$         | Lode-Parameter, Lokalisierungswinkel nach HILL (1952), relative Rillentiefe (MK- und HN-Modell) |
| $\zeta$       | Relative Blechdicke (FLS)   |

---

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung und Hintergründe

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Aspekten der Weiterentwicklung von Simulationsmethoden für Probleme der Strukturmechanik im Hinblick auf spezielle Anwendungen im industriellen Umfeld der Fahrzeugentwicklung. Hier findet vor allem die Finite-Elemente-Methode ihre Anwendung, womit das Verhalten von Strukturen oder Bauteilen unter verschiedenen, hauptsächlich dynamischen Belastungen vorhergesagt werden soll. Ein besonderer Schwerpunkt liegt auf den Anwendungen für Simulationen der passiven Sicherheit, deren Prognosefähigkeit verbessert werden soll. Als zentrales Element eines Fahrzeugs spielt das Verhalten der Karosserie unter Crashbelastung hier die dominierende Rolle. Dementsprechend liegt das Hauptaugenmerk bei der Entwicklung auf dem Verformungsverhalten der komplexen, hauptsächlich aus Blechen gefügten Strukturen der Karosserie (eng.: *body in white*). Zusätzlich zur Betrachtung der Eigenschaften bei dynamischen Verformungen werden noch zahlreiche andere Aspekte wie statische Lastfälle, Fußgängerschutz, Insassenschutz etc. bewertet, die jedoch im Rahmen dieser Arbeit eine untergeordnete Rolle spielen.

Grundsätzlich lastet großer Druck auf den Entwicklern von Fahrzeugkarosserien, Gewicht sowie Entwicklungs- und Fertigungskosten einzusparen. Gleichzeitig werden von Seite der Gesetzgeber und Ratingagenturen wie beispielsweise EuroNCAP immer höhere Anforderungen an die passive Sicherheit der Fahrzeuge gestellt. Dies bedeutet immer neue Herausforderungen für die Crashsimulation, um mit einem Minimum an Versuchen eine zuverlässige Absicherung der gewünschten Eigenschaften bereits in einem sehr frühen Projektstadium zu gewährleisten. Erschwerend kommt hinzu, dass sich das Verhalten moderner Leichtbauwerkstoffe wie hochfeste Stähle, Aluminium und Kunststoffe

mit konventionellen Methoden nur unzureichend beschreiben lässt. Speziell bei hochfesten und ultrahochfesten Werkstoffen muss stets mit der Bildung von Rissen unter Crashbelastung gerechnet werden, deren zutreffende Prognose entscheidend für die Güte der Simulation sein kann.

Als zentraler Ansatz für die Verbesserung der Prognosefähigkeit sollen hier die Einflüsse aus vorhergehenden Bearbeitungsschritten der Blechteilherstellung auf die Eigenschaften eines Bauteils mit berücksichtigt werden. Diese Prozesskette beschreibt mithin die Vorgeschichte eines Blechteils. Im Allgemeinen kann davon ausgegangen werden, dass alle in einer Fahrzeugkarosserie verbauten Blechteile zuvor mit Hilfe von formgebenden Verfahren wie dem Tiefziehen hergestellt wurden. Eine weitergehende Berücksichtigung der Prozesskette beinhaltet zusätzlich die Betrachtung der Herstellprozesse der Halbzeuge, also der Anfangseigenschaften der Bleche nach deren Herstellung. Gemeinsam ist allen diesen Prozessen die Einbringung von plastischen Verformungen in das Bauteil, einhergehend mit lokaler Verfestigung und Veränderungen des Gefüges wie Kornorientierung, Versetzungen, Mikrodefekten, Ausdünnung und teilweise Phasenumwandlungen.

Eingebettet in das vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderte Projekt „WING“ (Förderkennzeichen 03X0501) wurde dazu speziell die Bestimmung und Übertragung von lokalen Eigenschaftsveränderungen von einer Umform- zur Crashsimulation betrachtet. Der Zielsetzung dieser Arbeit entsprechend wurde der Schwerpunkt auf die für das Versagen relevanten Parameter gelegt. Dazu war es notwendig, sich in der Tiefe mit den Mechanismen von Schädigung und Versagen bei Umformvorgängen zu beschäftigen. Da eine Prognose der Schädigung bisher in Umformsimulationen nicht Stand der Technik ist, war es zudem notwendig neue Methoden auch für die Umformsimulation zu entwickeln, um fundierte Informationen über den Vorschädigungszustand nach der Umformung zu erhalten.

Da das Ergebnis der Entwicklungen im industriellen Umfeld der Fahrzeugentwicklung eingesetzt werden soll, wurde während der gesamten Arbeit stets großes Augenmerk darauf gelegt, praxisnahe Lösungen und Methodiken zu betrachten. Deswegen war ein wichtiges Kriterium stets die Anwendbarkeit im durch die Projektarbeit geprägten und stark durchrationalisierten Alltag der Berechner. In der vorliegenden Arbeit schlägt sich dieser Umstand durch eine stark anwendungsorientierte Vorgehensweise nieder. Dies bedingt oftmals die Verwendung von pragmatischen Methoden, die für den praktischen Einsatz gute Ergebnisse in der betrachteten Anwendung liefern. Als zentrales Thema für die Prognose von Schädigung und Versagen seien hier die verwendeten Diskretisierungen der industriellen Umform- und Crashsimulationen genannt. Trotz zunehmender Leistungsfähigkeit der Rechnersysteme werden auch in absehbarer Zukunft die verwendeten Netzgrößen um Größenordnungen über den charakteristischen Längenskalen der zu modellierenden Phänomene von Schädigung und Versagen liegen. Um trotzdem zu



Vorhersagen über diese Phänomene zu kommen, wurden Techniken untersucht, die durch die Entwicklung von zusätzlichen inneren Variablen des Materialmodells das im Grunde nicht prädiktive Modell für eine Anwendbarkeit in den untersuchten Fällen ertüchtigen. Dazu wurde auch der Simulation von lokalisierter inelastischer Deformation und den begleitenden Phänomenen besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Hier liegt die Zielsetzung auf einem besseren Verständnis der Vorgänge und einer praxisnahen Umsetzung in der Berechnung. Mit Hilfe der entwickelten Methoden soll eine vereinfachte, *phänomenologische* Beschreibung dieser Vorgänge für die industriellen Simulationen ermöglicht werden, die auf makroskopischer Ebene prädiktive Ergebnisse auch für lokalisierte Deformation und Rissbildung liefern kann.

## 1.2 Ziele der Arbeit

Zielsetzung der im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen ist die Verbesserung der Prognosefähigkeit von Finite-Elemente-Simulationen der passiven Sicherheit in der Automobilentwicklung hinsichtlich Schädigung und Versagen. Im Detail werden dazu folgende zentrale Punkte betrachtet:

- Verbesserung der Beschreibung duktilen Versagens von metallischen Werkstoffen in dynamischen Simulationen der passiven Sicherheit. Hier soll der Trend zur Verwendung hoch- und höchstfester Werkstoffe bei der Karosseriekonstruktion seinen Niederschlag in verbesserten Berechnungsmethoden finden, da für diese Werkstoffe die Ausbildung von Rissen eher zu erwarten ist als für konventionelle, weiche Tiefziehgüten.
- Entwicklung von numerischen Methoden zur Beschreibung von duktilem Versagen und Schädigung für Simulationen der Umformtechnik. Bis jetzt noch nicht Stand der Technik, sollen hier Methoden geschaffen werden, die die Ausbildung von Rissen und lokalisierter Deformation mit Hilfe von inneren Variablen des Materialmodells darstellen können.
- Entwicklung von pragmatischen und praxistauglichen Ansätzen zur makroskopischen Modellierung der mit lokalisierter inelastischer Deformation und Rissbildung verbundenen Vorgänge. Die Finite-Elemente-Diskretisierung der genannten Berechnungsdisziplinen im Gesamtfahrzeugmodell muss aus Kostengründen mit Netzgrößen erfolgen, die mindestens eine Größenordnung oberhalb der typischen Längenskalen dieser Vorgänge liegen. Deswegen sollen Methoden aufgezeigt werden, um makroskopisch zutreffende Aussagen mit Hilfe erweiterter Formulierungen aus den – lokal nicht prädiktiven – Simulationen zu gewinnen.

- Praxistaugliche Konzepte für die Übertragung der bei den Umformsimulationen berechneten inneren Variablen auf nachfolgende Simulationen der passiven Sicherheit. Besondere Wichtigkeit kommt hier der Berücksichtigung der unterschiedlichen Diskretisierungen und Netzgrößen zu, die sich typischerweise in den beiden Disziplinen finden.
- Entwicklung von Methoden für eine praxismgerechte Identifikation von Modellparametern. Als zentraler Bestandteil für eine sinnvolle Anwendbarkeit der entwickelten Modelle werden Vorgehensweisen für die Identifikation der Modellparameter anhand von einfachen Probenversuchen vorgestellt.
- Implementierung des Modells für die praktische Anwendung. Im Rahmen dieser Arbeit wurde das entwickelte Modell „GISSMO“ zunächst als User Material in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm LS-DYNA eingebunden. Im weiteren Verlauf erfolgte dann eine Übernahme in den fest implementierten Fundus der Materialmodelle von LS-DYNA.
- Erprobung und Verifikation mit Hilfe von Versuchen. Validierung anhand ausgewählter Simulationen von Bauteilen, Strukturen und in Gesamtfahrzeugrechnungen.

### 1.3 Gliederung

In **Kapitel 2** wird ein kurzer Abriss der Finite-Elemente-Methoden und Formulierungen gegeben, auf welchen diese Arbeit aufsetzt. Insbesondere wird auf die spezifischen Besonderheiten der betrachteten Simulationsmethoden in der industriellen Anwendung eingegangen.

**Kapitel 3** befasst sich mit der Versagensprognose speziell von metallischen Blechwerkstoffen. Neben einer Darstellung der relevanten Vorgänge im Material werden existierende Ansätze vorgestellt, und es wird eine Analyse der notwendigen Eigenschaften eines Versagensmodells zur Anwendung in der Prozesskette Umform- und Crashsimulation durchgeführt.

**Kapitel 4** befasst sich im Wesentlichen mit den Phänomenen lokalisierter Deformation, wie sie in metallischen Werkstoffen für große plastische Deformationen zu erwarten sind. Neben einer Beschreibung der für die Praxis relevanten Phänomene wird auf ihre numerische Modellierung eingegangen, wobei besonderes Augenmerk auf die Unterschiede zwischen duktilen Metallen und spröden Materialien wie Beton gelegt wird.

In **Kapitel 5** wird das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte Modell „GISSMO“ vorgestellt. Hier wird unter Berücksichtigung der in den vorhergehenden Kapiteln dargeleg-

ten Grundlagen auf die pragmatischen Lösungsansätze zur Behandlung von lokalisierter inelastischer Deformation und duktilem Versagen eingegangen. Dazu werden auch numerische Aspekte der Implementierung vorgestellt.

Im Hinblick auf die Anwendung des vorgestellten Modells „GISSMO“ befasst sich **Kapitel 6** mit geeigneten Methoden zur Identifikation von Parametern anhand von Versuchen. Neben den wesentlichen Parametern für das Schädigungsmodell wird hier auch dargelegt, wie die plastische Verfestigung aus Versuchsdaten bestimmt werden kann.

In **Kapitel 7** sind Beispiele dokumentiert, die die praktische Anwendung der dargelegten Methoden anhand von Strukturen und Bauteilen aus dem Bereich der Karosseriekonstruktion und der Umformtechnik verdeutlichen sollen.

**Kapitel 8** enthält eine Bewertung und Zusammenfassung der vorgestellten Methoden.



---

# Grundlagen

In diesem Abschnitt werden in kompakter Form die den folgenden Ausführungen zugrundeliegenden mechanischen Beziehungen und die verwendete Notation eingeführt. Für eine ausführliche Beschreibung der Grundlagen und deren Anwendung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode sei auf die entsprechende Literatur verwiesen, beispielsweise ZIENKIEWICZ UND TAYLOR (1967), PARISCH (2003), WRIGGERS (2001), ALTENBACH UND ALTENBACH (1994) sowie BELYTSCHKO U. A. (2000).

## 2.1 Mechanik

Die Beschreibung des Verhaltens von Festkörpern unter mechanischer Beanspruchung wird üblicherweise mit Hilfe der Methoden der Kontinuumsmechanik vorgenommen. Diese Betrachtungsweise setzt in der Regel die Annahme eines gleichförmigen, kontinuierlichen Festkörpers oder Fluids voraus. Die Lösung der resultierenden Probleme mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode bedient sich einiger grundlegender Beziehungen:

Mit Hilfe der **Impulsbilanz** wird der Zusammenhang zwischen den äußeren Kräften auf einen Körper und dessen Beschleunigung hergestellt, entsprechend dem 2. Newtonschen Axiom. Im folgenden wird die Einsteinsche Summationskonvention verwendet, nach der über in einem Produkt mehrfach vorkommende lateinische Indizes von 1 bis 3 summiert wird, über griechische Indizes von 1 bis 2. Die verwendete Notation orientiert sich im Wesentlichen an BELYTSCHKO U. A. (2000). Geschrieben als partielles Differential ergibt sich für die Impulsbilanz:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = \rho \frac{Dv_i}{Dt}. \quad (2.1)$$

In dieser Beziehung gibt die räumliche Ableitung des Spannungstensors  $\sigma_{ji}$  die resultierende interne Kraft bezogen auf das Einheitsvolumen wieder,  $b_i$  eine spezifische Volumenlast. Auf der rechten Seite findet sich die zeitliche Impulsänderung, die auch als Trägheitsterm bezeichnet wird. Für statische Beanspruchungen, in der Regel idealisiert als sich unendlich langsam ändernde Größen, verschwindet der Einfluss der Trägheitseffekte, und die rechte Seite wird zu null gesetzt.

Die **Kinematik** beschreibt den Zusammenhang zwischen einem Verschiebungsfeld und einem resultierenden Verzerrungsmaß. Zur Beschreibung einer beliebigen Bewegung eines Kontinuums im Raum ist es zweckmäßig, den von einem Materialpunkt zu einem definierten Zeitpunkt (in der Regel zum Zeitpunkt  $t = t_0$ ) belegten Raumpunkt mit dem Ortsvektor  $\mathbf{X}$  zu bezeichnen. Weist man nun dem Raumpunkt, der von diesem Materialpunkt zum Zeitpunkt  $t \neq t_0$  belegt wird, den Ortsvektor  $\mathbf{x}$  zu, so kann man die Bewegung des Kontinuums ausgehend von den beiden betrachteten Zeitpunkten beschreiben. Die Verschiebung selbst wird durch die Differenz  $\mathbf{u}$  der beiden Ortsvektoren dargestellt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \qquad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}. \qquad (2.2)$$

Der erste Ausdruck stellt eine umkehrbare und eindeutige Beziehung zwischen den beiden Konfigurationen her. In dieser Abbildungsvorschrift finden sich die materiellen Koordinaten des Materialpunkts als unabhängige Variablen wieder. Aus diesem Grund wird diese Beschreibung auch als materielle oder *Lagrangesche* Betrachtungsweise bezeichnet; sie bietet sich für die Beschreibung von Festkörpern in der Regel an. Aus Gl. (2.2) erhält man den Verschiebungsgradienten als Ableitung der Verschiebungsdifferenz nach den materiellen Koordinaten:

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}. \qquad (2.3)$$

Nach Gl. (2.2) kann für die Verschiebungsdifferenz statt  $u_i = u_i(X_j)$  auch eine Darstellung unter Verwendung von  $x_i = X_i + u_i$  gewählt werden:  $u_i = u_i(x_k(X_j))$ . Eingesetzt in Gl. (2.3) ergibt sich

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \left( \delta_{kj} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right), \qquad (2.4)$$

unter Verwendung des Kroneckersymbols  $\delta_{kj}$  mit

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = j \\ 0 & \text{für } k \neq j. \end{cases} \qquad (2.5)$$

Für die weiteren Betrachtungen wird die – für viele technische Problemstellungen zulässige – Annahme kleiner Verzerrungen zugrunde gelegt ( $\partial u_i / \partial X_j \ll 1$ ). Unter dieser Annahme kann der quadratische Anteil in Gl. (2.4) vernachlässigt werden (zweiter Term in der Klammer), und man muss für die Ableitung nicht mehr zwischen materiellen und räumlichen Koordinaten  $X_i$  respektive  $x_i$  unterscheiden. Damit lässt sich Gl. (2.3) als  $H_{ij} = u_{i,j}$  schreiben, wobei der Index nach dem Komma die Ableitung nach  $x_j$  symbolisiert. Zerlegt man diesen Ausdruck nun in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil, erhält man

$$H_{ij} = u_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2} (u_{i,j} - u_{j,i}) = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (2.6)$$

Daraus erhält man den symmetrischen ( $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ), sogenannten *infinitesimalen Verzerrungstensor*

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (2.7)$$

Dieses Verzerrungsmaß wird im Folgenden benutzt, da die Implementierung der vorgestellten Modelle im Hinblick auf eine spätere Verwendung in der industriellen Simulation auf dieser Basis zu erfolgen hatte. Für große Verzerrungen können durch diese Linearisierung Abweichungen entstehen, die im Rahmen dieser Arbeit aber nicht untersucht wurden.

Als dritter wichtiger Teil einer Darstellung des Verhaltens von deformierbaren Körpern wird ein **Stoffgesetz** benötigt, das den Zusammenhang zwischen der Verzerrung eines Körpers und den entstehenden Spannungen beschreibt. Die Beschreibung in der vorliegenden Arbeit stützt sich im Allgemeinen auf *hypoelastisch-plastische* Modelle. Hier wird eine lineare Beschreibung der Elastizität gewählt, die eine objektive Spannungsrate (beispielsweise die Jaumann-Rate  $\sigma^{\nabla J}$ ) über den materiellen Tangentenmodul  $\mathbf{C}^{\sigma J}$  mit der Deformationsrate  $\mathbf{D}$  verknüpft:

$$\sigma^{\nabla J} = \mathbf{C}^{\sigma J} : \mathbf{D} \quad \text{mit} \quad D_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.8)$$

Der Übergang auf die im vorherigen Abschnitt vorgestellte Annahme der kleinen Verzerrungen erfolgt durch Ersetzen der Deformationsrate durch die zeitliche Ableitung des infinitesimalen Verzerrungstensors  $\dot{\epsilon}$ . Die Verwendung einer objektiven Spannungsrate erübrigt sich dann, und man erhält den Zusammenhang zwischen der zeitlichen Ableitung der *Cauchy-Spannung* und der infinitesimalen Verzerrungsrate:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}. \quad (2.9)$$

Im Fall von linearer, isotroper Hypoelastizität wird für  $\mathbf{C}$  der *Hookesche* Elastizitätstensor

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.10)$$

eingesetzt, der die *Laméschen* Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  enthält.

Zur Erweiterung auf hypoelastisch-plastisches Verhalten wird üblicherweise eine additive Zerlegung des Dehnratentensors in einen elastischen und einen plastischen Anteil vorgenommen:

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p . \quad (2.11)$$

Plastizität wird im Allgemeinen als irreversibler, dissipativer Prozess betrachtet, der durch die zeitliche Entwicklung des Dehnungstensors und einer Anzahl von inneren Variablen gesteuert wird. Beispiele für innere Variable sind die der Verfestigungsfunktion zugeordneten Größen, siehe auch SIMO UND HUGHES (1998). Die folgende Beschreibung beschränkt sich auf *assoziierte*, ratenunabhängige Plastizität, die damit dem *Prinzip der maximalen plastischen Dissipation* folgt. Die grundlegenden Zutaten eines unter den besagten Annahmen formulierten Plastizitätsmodells finden sich in übersichtlicher Form bei JIRÁSEK (2009):

Die *Fließbedingung*

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}) \leq 0 . \quad (2.12)$$

Die *Fließregel*

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}) . \quad (2.13)$$

Das *Verfestigungsgesetz*, hier in Form einer Ratenformulierung

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}} = \dot{\lambda} \mathbf{k}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\kappa}) , \quad (2.14)$$

und der Abhängigkeit der Variablen  $\mathbf{l}$  in Gl. (2.12) und (2.13) von den Verfestigungsvariablen

$$\mathbf{l} = \mathbf{h}(\boldsymbol{\kappa}) . \quad (2.15)$$



In diesen Gleichungen sind:

- $\Phi$  die Fließfunktion (skalar)
- $\mathbf{r}$  eine Funktion, die die Richtung des plastischen Fließens vorgibt (*Fließregel*)
- $\dot{\lambda}$  die Rate des plastischen Multiplikators
- $\kappa$  eine Verfestigungsvariable
- $\mathbf{l}$  die Verfestigungsfunktion.

Hierin kann  $\kappa$  auch skalar sein – für isotrope Dehnungsverfestigung beispielsweise die äquivalente plastische Dehnung. Die Fließregel  $\mathbf{r}$  wird üblicherweise als Ableitung eines plastischen Potentials definiert.

Die Unterscheidung zwischen elastischer und plastischer Deformation wird anhand der Fließbedingung Gl. (2.12) getroffen. Sie definiert den elastischen Bereich im Spannungsraum, der von der Fließfläche begrenzt wird. Zustände, für die  $\Phi \leq 0$  ist werden als elastisch betrachtet. Plastisches Fließen findet für Spannungszustände auf der Fließfläche statt, hier gilt  $\Phi = 0$ . Zustände mit  $\Phi > 0$  sind unzulässig für nicht ratenabhängige Formulierungen.

Die Definition, gemäß derer plastisches Fließen nur für Zustände mit  $\Phi = 0$  stattfindet, führt zu den Be- und Entlastungsbedingungen, die üblicherweise in der sogenannten *Kuhn-Tucker-Form* notiert werden:

$$\Phi \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad \dot{\lambda} \Phi = 0. \quad (2.16)$$

Da während der plastischen Deformation die Fließfläche nicht verlassen werden kann ( $\Phi = 0$ ), folgt aus Gl. (2.16) die sogenannte *Konsistenzbedingung*:

$$\dot{\lambda} \dot{\Phi} = 0. \quad (2.17)$$

## 2.2 Finite Elemente in Anwendungen der passiven Sicherheit

Seit Beginn der ersten Simulationen von Crashtests im Automobilbau in den 1980er Jahren hat die Berechnung der passiven Sicherheit in der Automobilindustrie eine rasante Entwicklung genommen. Während die ersten Modelle noch sehr grob diskretisiert und bestenfalls als Prinzipmodelle erkennbar waren, liegt der Fokus mittlerweile auf einer detaillierten Modellierung des kompletten Fahrzeugs einschließlich der Anbauteile und gegebenenfalls der Insassen (Dummies). Neben der klassischen Strukturberechnung (Hochgeschwindigkeitscrash) finden sich Berechnungsdisziplinen, die sich mit dem Verhalten der Insassen beschäftigen, sowie Fußgängerschutz und Niedergeschwindigkeits-

lastfälle (Reparaturcrash). Beflügelt von zunehmender Prognosegüte ist die Simulation zu einem zentralen Baustein der Fahrzeugentwicklung geworden, wo der *digitale Prototyp* in zunehmendem Maße reale Prototypen ersetzt und so zu einem Instrument der Kostenreduktion in der Fahrzeugentwicklung geworden ist. Die wachsenden Anforderungen



**Abbildung 2.1:** Simulationsmodell Frontalcrash

an die Prognosegüte erfordern eine immer bessere Darstellung der lokalen Phänomene in den Strukturen. Zu den Herausforderungen für die methodische Weiterentwicklung der Simulationen gehört deswegen in erster Linie die Modellierung der für das globale Verhalten einer Struktur maßgebenden Einflüsse. Dazu gehören:

- Schweißpunktmodelle, insbesondere im Hinblick auf Versagen
- Modellierung von nicht-metallischen Werkstoffen, einschließlich Scheibenglas, Kunststoffen und Gummimaterialien
- Verbesserte Modelle der Crashtest-Impaktoren
- Versagensprognose dickwandiger Bauteile
- Modellierung des Versagens von Blechwerkstoffen.

Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf einem der zentralen Themen der Methodenentwicklung für die Crashsimulation in der letzten Dekade. Fanden sich in früheren Zeiten in Automobilkarosserien hauptsächlich weiche Tiefziehstähle, so besteht eine moderne Autokarosserie in der Regel aus einem breit gefächerten Materialmix. Weiche Tiefziehgüten finden sich üblicherweise nur noch in den niedrig belasteten Bereichen, während für die strukturellen Komponenten je nach Belastungsart hoch- bis höchstfeste Werkstoffe verwendet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird mit den Methoden der Kontinuumsmechanik das Verhalten von aus dünnwandigen (Blech-)Teilen zusammengesetzten Strukturen beschrieben. Der Schwerpunkt liegt auf der Darstellung des beginnenden Materialversagens. Dazu

werden vor allem die – in der industriellen Crashsimulation üblichen – Modellierungstechniken mit einfachen, 3- beziehungsweise 4-knotigen Schalenelementen mit 5 Parametern betrachtet.

Für die in dieser Arbeit vorrangig betrachteten metallischen Blechwerkstoffe gelten die Annahmen der kontinuierlichen Werkstoffeigenschaften generell bei Deformationen, die sich mit Längenskalen weit oberhalb der charakteristischen Größen der Mikrostruktur der Werkstoffe beschreiben lassen. Dies ändert sich beim Auftreten von makroskopischen Rissen und Defekten im Material, die zum Auftreten von diskontinuierlichen Feldgrößen führen können. Eine Modellierung dieser Vorgänge mit Hilfe der „klassischen“ Finite-Elemente-Ansätze kann somit im besten Fall eine makroskopische, auf die Längenskala der Elementierung verschmierte Näherung der wahren Vorgänge liefern. Die Ergebnisse einer Simulation mit den beschriebenen Annäherungen sind daher nicht prädiktiv im eigentlichen Sinne, da die wesentlichen Vorgänge auf der Mikrostrukturebene nicht abgebildet werden. Bezogen auf Problemstellungen der passiven Sicherheit im Automobilbau findet sich diese Problematik speziell in Bezug auf das Auftreten von Versagen und lokalisierter plastischer Deformation wieder. Die Anforderungen an die Rechenzeiten dieser Simulationen im stark durchrationalisierten Umfeld der Automobilentwicklung setzen den verwendeten Netzgrößen hier enge Grenzen.

## 2.3 Umformsimulationen für Blechwerkstoffe

Die Simulation des Umformprozesses von komplexen Blechteilen ist mittlerweile zum Standard in der Blechverarbeitung geworden. Zielsetzung ist in der Regel, Aussagen über die Herstellbarkeit zu bekommen, sowie eine Auslegung der Ziehanlage vor der Werkzeugerstellung durchzuführen. Der Berücksichtigung von anfänglich vorhandenen oder sich über der Deformation entwickelnden Richtungsabhängigkeiten muss in der Umformsimulation dabei besondere Wichtigkeit beigemessen werden. Ein bei Blechwerkstoffen weit verbreitetes Phänomen ist eine Anisotropie in der Blechebene, die oft durch den Herstellungsprozess bedingt ist. Die Herstellung der in der Automobilindustrie verwendeten Feinbleche beinhaltet in der Regel mehrere finale Kaltwalzvorgänge, die von verschiedenen nachfolgenden Wärmebehandlungen begleitet werden. Dabei wird der Werkstoff einer ebenen Verformung unterworfen, die sich in einer Ebene senkrecht zur Blech-Querrichtung abspielt. Trotz der verschiedenen Wärmebehandlungen erfährt dabei die Mikrostruktur des Werkstoffs eine Orientierung durch die Vorverformung. Man spricht auch von Textur. Je nach Werkstoff kann sich diese Anisotropie entscheidend auf das Werkstoffverhalten während eines Umformvorgangs auswirken. Eine leicht zu identifizierende Auswirkung der planaren Anisotropie ist die Ausbildung von sogenannten Zipfeln beim Tiefziehen von rotationssymmetrischen Näpfen.

Zur Charakterisierung der Anisotropie ist in der Umformtechnik die Benutzung der *Lankford-Parameter* oder *R-Werte* gebräuchlich. Diese Parameter können durch einachsige Zugversuche in verschiedenen Richtungen in der Blechebene bestimmt werden ( $0^\circ/45^\circ/90^\circ$  zur Blechebene). Der Parameter ist definiert als

$$r = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_3}, \quad (2.18)$$

mit  $\epsilon_2$  als Dehnung in der Blechebene senkrecht zur Belastungsrichtung im Zugversuch,  $\epsilon_3$  als Dehnung in Dickenrichtung des Blechs. Da die Blechdicke üblicherweise um Größenordnungen kleiner als die Blechbreite oder -länge ist, wäre eine Messung der Blechdicke während eines Zugversuchs potentiell stark mit Messfehlern behaftet. Deswegen wird unter Ausnutzung der Volumenkonstanz (isochores plastisches Fließen) üblicherweise nur eine Messung der Längs- und Querdehnung vorgenommen, aus der dann unter obiger Annahme der r-Wert berechnet wird. Da für viele Materialien der r-Wert mit der plastischen Deformation variiert, wird die Messung üblicherweise bei mehreren verschiedenen Längsdehnungen unterhalb der Gleichmaßdehnung durchgeführt (beispielsweise von 2-20%) und anschließend gemittelt.

Aus den r-Werten für die unterschiedlichen Orientierungen zur Walzrichtung kann als gewichtetes Mittel die sogenannte *normale Anisotropie*  $r_n$  bestimmt werden:

$$r_n = \frac{r_0 + 2r_{45} + r_{90}}{4}. \quad (2.19)$$

Diese gibt das mittlere Verhältnis der Ausdünnung zur Querdehnung in der Blechebene wieder und ist damit ein Maß für die Tiefziehfähigkeit. Für Tiefziehbleche wird allgemein ein möglichst hoher Wert für  $r_n$  angestrebt, da eine geringere Ausdünnung des Blechs beim Streckziehen höhere erreichbare Umformgrade bedeutet.

Die Differenz der  $r$ -Werte in der Ebene wiederum ist ein Maß für den Grad der ebenen Anisotropie. Ein wesentlicher Aspekt der Materialmodelle für Zwecke der Blechumformsimulation ist die Abbildung dieser Anisotropie in der Ebene.

### 2.3.1 Konstitutivmodelle für Umformsimulationen

Im Folgenden werden exemplarisch einige gebräuchliche Materialmodelle für Zwecke der Umformsimulation von metallischen Werkstoffen dargestellt. Eine Gemeinsamkeit aller vorgestellten Modelle ist die Annahme des isochoren plastischen Verhaltens ( $\dot{\epsilon}_{kk} = 0$ ). In Verbindung mit einer assoziierten Fließregel ergibt sich automatisch die Unabhängigkeit der Fließbedingung vom hydrostatischen Druck. Dieser für Metalle weit verbreiteten Annahme liegen unter anderem die Ergebnisse von BRIDGMAN (1952) zugrunde, der

bei Metallen für hydrostatische Drücke in technisch üblichen Größenordnungen keine nennenswerte Abhängigkeit des plastischen Fließens vom Druck feststellen konnte.

Die Beschreibung des plastischen Fließens, wie in Abschnitt 2.1 vorgestellt, bedient sich einer Fließbedingung, die eine Abbildung des Spannungstensors auf einen Skalar darstellt:  $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . Eine einfache Unterscheidung findet zwischen den sogenannten *quadratischen* und *nicht-quadratischen* Fließflächen statt. Bekanntester Vertreter der quadratischen Fließbedingungen ist die Bedingung nach *von Mises*, siehe Abschnitte 2.1 und 6.1.1.

Unter Ausnutzung der Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  kann dieser als Spaltenvektor dargestellt werden. Diese Notation wird als *Ingenieurnotation* oder *Voigt-Notation* (BELYTSCHKO U. A. 2000) bezeichnet. Der Spannungsvektor besteht dann aus den folgenden Komponenten:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}. \quad (2.20)$$

Die Unterscheidung zur Cauchy-Spannung in Tensornotation erfolgt durch das Einschließen in geschweifte Klammern.

Die allgemeinste quadratische Fließbedingung lässt sich nach FENG UND YANG (1984) in Voigt-Notation mit Hilfe von drei Koeffizienten  $a$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{C}$  ausdrücken:

$$\Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = a + \mathbf{b}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{\sigma}\}^T \mathbf{C} \{\boldsymbol{\sigma}\}. \quad (2.21)$$

Zusätzliche Bedingungen folgen aus Forderungen nach Konvexität der Fließbedingung.

### Fließbedingung nach Hill (1948)

Die Fließbedingung nach HILL (1948) wird hier als Vertreter der quadratischen Fließbedingungen angeführt. Sie kann als eine Verallgemeinerung der Fließfunktion nach *von Mises* für orthotrope Materialien betrachtet werden. Hier wird die Existenz zweier senkrecht zueinander orientierter Symmetrieebenen für das Materialverhalten vorausgesetzt. Die Fließbedingung wird als quadratischer Ausdruck angegeben:

$$\Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = a + F(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + G(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + H(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2. \quad (2.22)$$

Hier wird vorausgesetzt, dass die Richtung des verwendeten Koordinatensystems den Haupttrichtungen des Materials entspricht. Im Vergleich zur Formulierung nach *von Mises* in Gl. (6.1) werden die zusätzlichen Koeffizienten  $F$ ,  $G$ ,  $H$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  eingeführt, die

eine Modellierung der Anisotropie ermöglichen. Die Anforderungen an die Konvexität der Fließfläche stellen zusätzliche Bedingungen an die Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 F + G &\geq 0 & L &\geq 0 \\
 G + H &\geq 0 & M &\geq 0 \\
 H + F &\geq 0 & N &\geq 0 \\
 FG + GH + HF &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

Diese Fließbedingung hat den Vorteil der einfachen Struktur und einer begrenzten Zahl von Parametern. Ein Nachteil ist die Beschränkung auf eine vorgegebene Form der Fließfläche, was aus der quadratischen Formulierung resultiert. In Experimenten zeigte sich, dass für bestimmte Materialklassen, wie Aluminiumlegierungen, die Flexibilität der Formulierung nicht ausreicht, um das Verhalten darzustellen (BANABIC U. A. 2000). Aus diesem Grund wurde in neueren Veröffentlichungen eine Vielzahl von anderen, insbesondere *nicht-quadratischen* Fließbedingungen vorgeschlagen.

### Fließbedingung nach Barlat und Lian (1989)

Als bekannter Vertreter der *nicht-quadratischen* Fließbedingungen wird hier das Modell von BARLAT UND LIAN (1989) vorgestellt. Es wurde entwickelt, um die Beschreibung von orthotropen Blechen mit anfänglicher planarer Anisotropie in einer größeren Flexibilität zu ermöglichen. Wie die meisten nicht-quadratischen orthotropen Fließorte für die Umformsimulation ist auch dieses Modell nicht für allgemeine Spannungszustände definiert, sondern auf den ebenen Spannungszustand beschränkt. Grundlage ist auch hier eine Abwandlung der Fließfunktion nach *von Mises*. Zunächst wird eine verallgemeinerte isotrope Formulierung in Abhängigkeit von Invarianten ( $K_1$  und  $K_2$ ) des Spannungstensors ausgedrückt, vergleichbar mit dem Ansatz von HOSFORD (1972). Für den ebenen Spannungszustand lautet diese Funktion

$$\Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = |K_1 + K_2|^M + |K_1 - K_2|^M + |2K_2|^M - 2\sigma_Y^M = 0. \tag{2.24}$$

mit  $K_1, K_2$  für beliebige Spannungszustände in der (1,2)-Ebene:

$$K_1 = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = \frac{I_1}{2} \tag{2.25}$$

$$K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2}. \tag{2.26}$$

In dieser Formulierung kann mit Hilfe des Exponenten  $M$  die Form der isotropen Fließbedingung im Hauptspannungsraum verändert werden. Für  $M = 2$  ergibt sich die (*quadratische*) Fließbedingung nach *von Mises*, für zunehmendes  $M$  nähert sich die Form der

Bedingung nach Tresca an. Für Metalle mit kubisch-raumzentriertem Gitter wird ein Exponent  $M = 6$  empfohlen, für kubisch-flächenzentriertes Gitter  $M = 8$ . Dadurch ähnelt die Fließbedingung für kubisch-flächenzentrierte Metalle eher dem Tresca-Kriterium, für kubisch-raumzentrierte eher der *von Mises*-Bedingung. Das erscheint anschaulich sinnvoll, da für die kubisch-flächenzentrierte Kristallstruktur eine größere Zahl an freien Gleitebenen zu erwarten ist, auf denen ein energiearmes Gleiten möglich ist.

Um Anisotropie in der Ebene beschreiben zu können, wurden von BARLAT UND LIAN (1989) zusätzliche Faktoren  $(a, c)$  sowie  $(h, p)$  eingefügt. Anschaulich lässt sich die Fließbedingung im Spannungsraum dadurch in Richtung der Normalspannung  $\sigma_{22}$  respektive der Schubspannung  $\sigma_{12}$  „verformen“:

$$\Phi(\{\boldsymbol{\sigma}\}) = a |K_1 + K_2|^M + a |K_1 - K_2|^M + c |2K_2|^M - 2\sigma_Y^M = 0; \quad (2.27)$$

mit:

$$K_1 = \frac{\sigma_{11} + h\sigma_{22}}{2}, \quad (2.28)$$

$$K_2 = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - h\sigma_{22}}{2}\right)^2 + p^2\sigma_{12}^2}. \quad (2.29)$$

Wenn  $\sigma_Y$  gleich der Anfangsfließspannung im einachsigen Zug in Walzrichtung gesetzt wird, kann nach Gl. (2.27) der Zusammenhang  $a = 2 - c$  abgelesen werden. Bei sinnvoller Wahl von  $M$  je nach Kristallstruktur des betrachteten Werkstoffs sind dann noch drei unbekannte Parameter zu bestimmen. Dazu sind grundsätzlich zwei verschiedene Methoden möglich:

Bestimmung aus den Anfangsfließspannungen für drei Belastungen

- Zug in Walzrichtung  $\sigma_Y$
- Zug senkrecht zur Walzrichtung  $\sigma_{90}$
- Schub  $\tau_{s1}$  ( $= \sigma_{12}$  bei  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$ )

mit

$$a = 2 - c = \frac{2\left(\frac{\sigma_Y}{\tau_{s2}}\right)^M - 2\left(1 + \frac{\sigma_Y}{\sigma_{90}}\right)^M}{1 + \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_{90}}\right)^M - \left(1 + \frac{\sigma_Y}{\sigma_{90}}\right)^M} \quad (2.30)$$

$$h = \frac{\sigma_Y}{\sigma_{90}} \quad (2.31)$$

$$p = \frac{\sigma_Y}{\tau_{s1}} \left(\frac{2}{2a + 2^M c}\right)^{\frac{1}{M}}. \quad (2.32)$$

Alternativ können die  $r$ -Werte benutzt werden:

$$a = 2 - c = 2 - 2\sqrt{\frac{r_0}{1+r_0} \frac{r_{90}}{1+r_{90}}} \quad (2.33)$$

$$h = \sqrt{\frac{r_0}{1+r_0} \frac{1+r_{90}}{r_{90}}}. \quad (2.34)$$

Dabei sind die Werte der Koeffizienten nur von  $r_0$  und  $r_{90}$  abhängig. Der Wert von  $p$  kann damit nicht analytisch berechnet werden, sondern muss mit Hilfe des dritten  $r$ -Werts  $r_{45}$  iterativ bestimmt werden.

In der neueren Literatur findet sich eine Vielzahl von weiteren Modellen, wobei der Trend in der Umformtechnik zu immer komplexeren Fließbedingungen mit einer zunehmenden Zahl von freien Parametern zu gehen scheint. Einen vollkommen anderen Ansatz benutzen unter anderem VEGTER UND VAN DEN BOOGAARD (2006). Hier wird die Fließbedingung durch Bezier-Splines als stetige Interpolation von aus Versuchen ermittelten Punkten auf der Fließortkurve dargestellt.

## 2.4 Die Prozesskette der Blechteilherstellung

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Betrachtung der Herstellungsprozesskette automobiler Karosserieteile beschränkt sich im Wesentlichen auf die Prozessschritte der Umformung und nachfolgender Betriebsbelastungen, zu denen auch eine Belastung in einer Crashsituation gezählt werden muss. Eine ganzheitliche Betrachtung der Prozessschritte wurde in den Jahren 2007 bis 2010 im Rahmen des vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten Projekts „WING“ durchgeführt (Förderkennzeichen 03X0501). Ziel war eine durchgängige Modellierung von der Herstellung bis zur Verwendung des Bleches, einschließlich der Walz- und Glühvorgänge und deren Auswirkungen auf die Mikrostruktur.

### 2.4.1 Disziplinübergreifende Betrachtung

Der Datentransfer zwischen den unterschiedlichen Simulationsmodellen entlang der Kette erfolgt mit Hilfe einer Datentransferarchitektur. Dabei erfolgt nicht nur eine Umsetzung zwischen den verschiedenen Methoden, sondern auch eine Homogenisierung auf dem Weg von der mikrostruktur- beziehungsweise gefügeorientierten Betrachtungsweise der Glüh- und Walzsimulation zur Betrachtung des Kontinuums in der Umform- und Crashsimulation. Die Prozessschritte bis zur Umformsimulation beschäftigen sich auf der Ebene der Mikrostruktur mit der Evolution der Gefügetextur und -orientierung durch



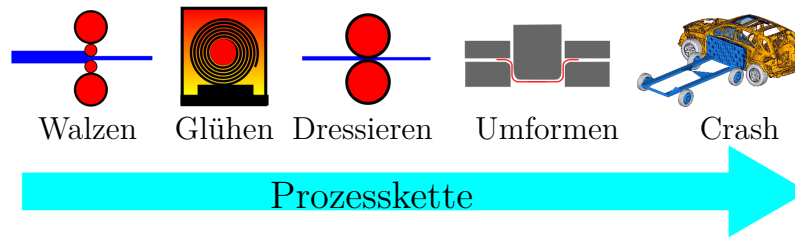


Abbildung 2.2: Prozesskette für Blechbauteile

die Walzvorgänge sowie mit der Kinetik der Phasenanteile während der Glühprozesse. Der Schritt hin zu den Eingangsdaten für die Umformsimulation erfolgt als Homogenisierung, da die weiteren Berechnungen auf der Ebene des Kontinuums erfolgen. Wie bereits erwähnt, wird die Betrachtung in der vorliegenden Arbeit auf die Prozessschritte Umform- und Crashsimulation und der zugehörigen Übertragung von Daten zwischen den genannten Simulationsarten beschränkt.

## 2.4.2 Datenübertragung

Die Übertragung von Daten zwischen den verschiedenen Berechnungsdisziplinen Umform- und Crashsimulation wird in der Praxis durch mehrere Faktoren erschwert:

- Mehrstufige Simulationen des Umformvorgangs, einschließlich Beschnitt und Abkantvorgängen
- In der Regel stark unterschiedliche Netzgrößen
- Elastische Rückfederung der Bauteile nach dem Umformvorgang
- Große Unterschiede in den zugrundeliegenden Plastizitätsmodellen
- In der Umformsimulation oft Fokus auf Herstellbarkeit, weniger auf realistische Dehnungsfelder.

Die unterschiedlichen Diskretisierungen bei beiden Disziplinen machen für eine Übertragung der Größen vom einen zum anderen Netz einen Schritt der Interpolation notwendig (*Mapping*). Für entsprechende Ansätze sei auf die einschlägige Literatur verwiesen, beispielsweise HALLQUIST (2017) oder auf die Handbücher von Pre-Prozessoren.



---

## Versagensbeschreibung

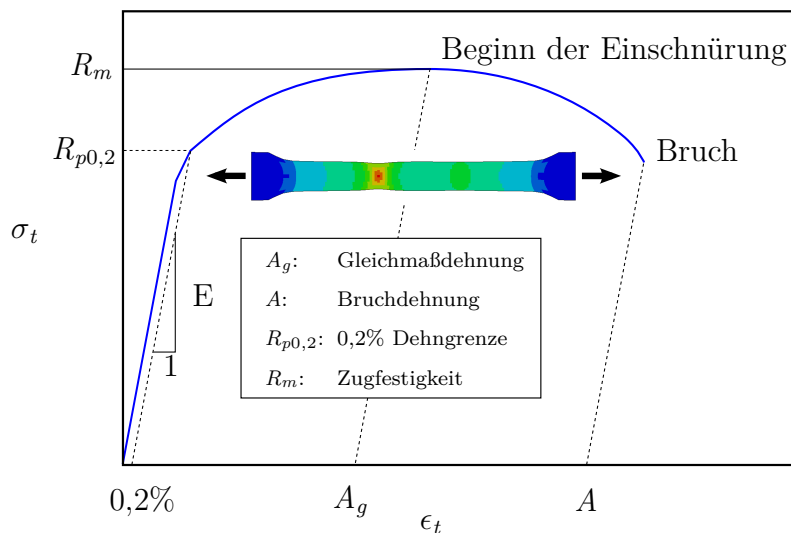
Materialversagen ist ein alltägliches Phänomen, das in den unterschiedlichsten Formen auftritt. Je nach Betrachtungsweise kann das kontrollierte Trennen von Material beabsichtigt sein – beispielsweise bei Schneidvorgängen. Als unerwünschtes Phänomen kann es – je nach Anwendung – auch katastrophale Folgen haben. Für die Bearbeitung von technischen Werkstoffen ist das kontrollierte Erzeugen von Trennflächen oft maßgeblich, wie zum Beispiel bei der spanenden Verarbeitung oder dem Stanzen von Blechteilen.

Die Betrachtung in dieser Arbeit konzentriert sich auf Anwendungen, bei denen das Auftreten von Trennflächen in Form von Rissen nicht erwünscht ist und deswegen kurz als Versagen bezeichnet wird. Allgemein stellt die Modellierung des Versagens besondere Ansprüche an eine kontinuumsmechanische Beschreibung mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode: die zugrundeliegende Annahme der *kontinuierlichen* Struktur wird durch die Bildung neuer Grenzflächen und damit von Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld in der Regel verletzt.

Entwicklungen zur Versagensmodellierung existieren im Prinzip schon seit den ersten Anwendungen der Finite-Elemente-Methode. Neben der Bestimmung des Versagenszeitpunkts, oft idealisiert durch die Ausbildung von makroskopischen Rissen im Material, ist besonders die Darstellung des Rissfortschritts im Kontinuum problematisch. In neuerer Zeit wurden unter anderem Formulierungen mit eingebetteten Diskontinuitäten oder Rissen (*embedded crack models*) vorgestellt. Die Grundlagen dieser Formulierungen wurden von ORTIZ U. A. (1987) besonders im Hinblick auf eine Verwendung für spröde Materialien, wie Beton, entwickelt. Zentraler Bestandteil sind Erweiterungen der Element-Ansatzfunktionen („X-FEM“), welche die Beschreibung von diskontinuierlichen Verläufen im Verschiebungs- und Dehnungsfeld erlauben, siehe auch JIRÁSEK (2009).

### 3.1 Phänomenologie

Als einen der einfachsten Versuche zur Bestimmung des Verhaltens eines Werkstoffs bis zum Versagen kann der einachsige Zugversuch angesehen werden. Dabei wird eine Probe, je nach Werkstoff, Art des Halbzeugs und Zielsetzung mit unterschiedlicher Geometrie und Querschnitt, einer äußeren Belastung in Längsrichtung unterworfen und bis zum Zerreißen gezogen. Für *duktile*, also plastisch deformierbare Werkstoffe, wie Tiefziehblech, erhält man typischerweise über den Versuch einen Zusammenhang von Kraft und Verschiebung, respektive technischer Spannung  $\sigma_t$  und technischer Dehnung  $\epsilon_t$ , wie in Abbildung 3.1.



**Abbildung 3.1:** Zugversuch, Spannungs-Dehnungs-Diagramm (schematisch)

Trotz der einfachen Randbedingungen des Versuchs zeigen sich während des Ablaufs sowie bei der Auswertung der resultierenden Größen mehrere nicht trivial zu erfassende Phänomene, siehe dazu auch die detailliertere Auswertung in Abbildung 6.1. In diesem Kapitel wird vor allem auf die mit der Beschreibung des Bruchvorgangs verbundenen Vorgänge eingegangen. Als klares Ergebnis des Versuchs entsteht im wieder abfallenden Teil der Versuchskurve ein makroskopischer, also mit bloßem Auge beobachtbarer Riss, der sich – je nach Werkstoff und Probengeometrie – mehr oder weniger schnell über den betrachteten Querschnitt ausbreitet und zum endgültigen Verlust der Tragfähigkeit der Probe führt.

### 3.1.1 Versagensmoden von Blechen

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Betrachtungen konzentrieren sich im Wesentlichen auf Metallbleche, da die Strukturteile von Automobilkarosserien praktisch ausschließlich aus dieser Halbzeugform gefertigt werden. Die Dünnwandigkeit der Strukturen rechtfertigt in der Regel eine Beschränkung auf die Betrachtung von Belastungen unter Zug- bis zu reiner Schubverformung, da bei reiner Druckverformung in der Ebene ein Stabilitätsversagen der Struktur, wie Beulen oder Knittern, zu erwarten ist. Ausgehend vom ursprünglichen, ungeschädigten Werkstoff scheint eine Aufteilung des duktilen Versagensprozesses in drei Phasen sinnvoll:

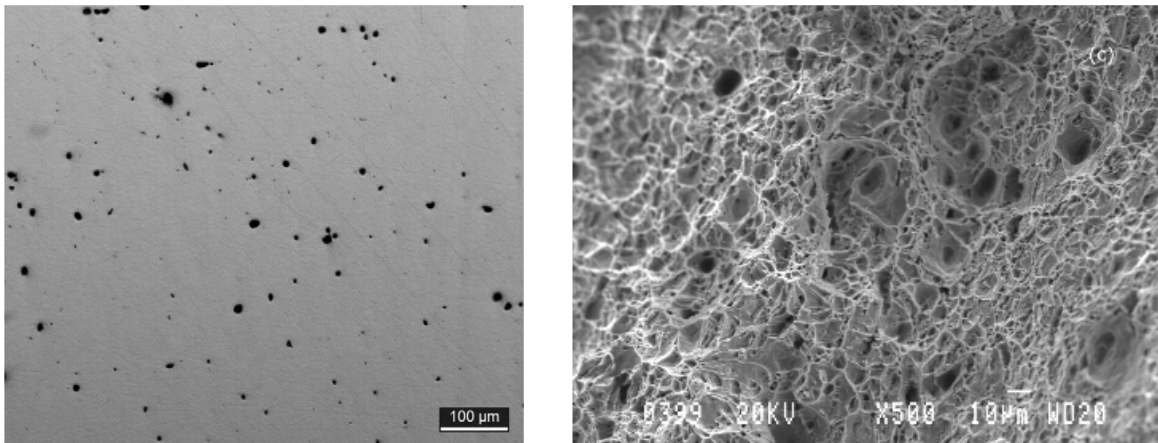
1. Akkumulation von Schädigung in der Mikrostruktur
2. Entstehung eines makroskopischen Risses (Koaleszenz der Defekte)
3. Rissfortschritt und Versagen.

Der dritte und letzte Punkt der Aufzählung beschäftigt sich mit der Ausbreitung des makroskopischen Risses in einer Struktur. Üblicherweise wird das Fortschreiten eines existierenden, makroskopischen Risses mit Hilfe der Methoden der Bruchmechanik wie dem *K-Konzept* oder dem *J-Integral* beschrieben, die häufig auf Betrachtungen der zur Erzeugung von Trennflächen notwendigen Arbeit basieren. Eine Beschreibung der gängigen Konzepte findet sich beispielsweise bei GROSS UND SEELIG (2006).

Für den betrachteten Anwendungsfall ist durch die Diskretisierung mit finiten Elementen, die – im Vergleich zur Größe der Struktur – klein sind, das erstmalige Auftreten von makroskopischen Rissen als Kriterium für den Verlust der Spannungstragfähigkeit und damit das Versagen maßgeblich. In der vorgenommenen Betrachtung liegt deshalb der Schwerpunkt auf den ersten beiden Phasen des Versagensprozesses, um die Entstehung eines makroskopischen Risses vorhersagen zu können.

Bereits während der ersten Phase entwickeln sich auf mikroskopischer Ebene im Werkstoff Defekte und Fehlstellen, wie beispielsweise Poren oder Mikrorisse. Diese Erscheinungen spielen sich im Inneren des Werkstoffs ab und sind nur teilweise durch die Veränderung von äußerlich messbaren Größen, wie einer Abnahme der makroskopischen Steifigkeit des Materials quantifizierbar. Um ein kontinuierliches Bild des Zusammenhangs zwischen plastischer Deformation und des Volumens von eingeschlossenen Poren zu erhalten, führten WECK (2007) und WECK U. A. (2008a, b, c, 2006) Messungen mit Hilfe von Computertomographen an Modellmaterialien unter plastischer Deformation durch. Dafür wurden Fehlstellen in Form von lasergebohrten Löchern ins Material eingebracht, deren Entwicklung bis zum Zusammenschluss zum makroskopischen Riss und schließlich zum Versagen beobachtet wurde.

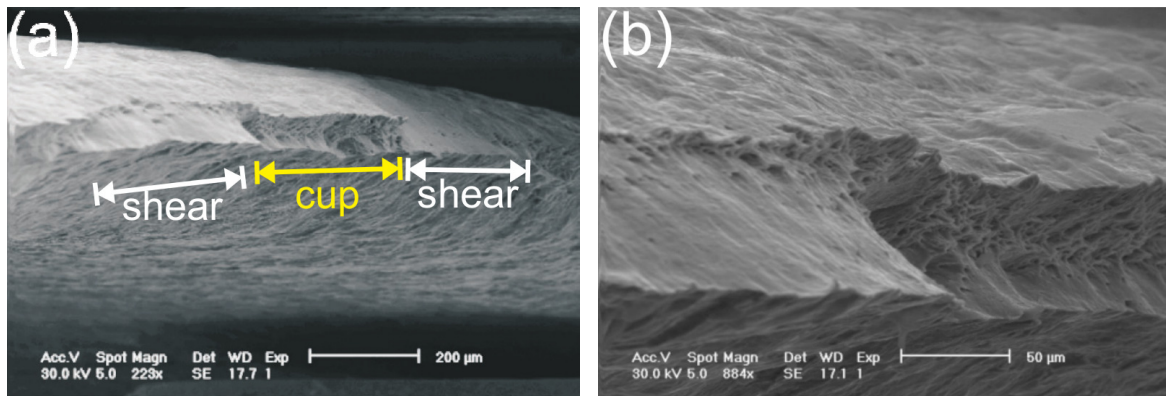
TAŞAN (2010) führte umfangreiche Untersuchungen der Gefügestruktur von plastisch deformierten Materialien mit fraktographischen Methoden durch. Es wird dargestellt, dass sich die gängige Unterscheidung von schubdominiertem Versagen und Versagen durch Wachstum und Zusammenschluss von Poren und Defekten (duktilen Versagen) durchaus in der Mikrostruktur der Bruchflächen nachvollziehen lässt. Das Versagen durch Neubildung, Zusammenschluss und Vereinigung (*Koaleszenz*) von Mikroporen zeigt sich im Bruchbild als mit grubchen- oder wabenartigen Vertiefungen (eng.: *dimples*) besetzte Oberfläche, die durch zusammengewachsene Mikroporen gebildet werden. Das Versagen entsteht schließlich durch den Bruch der Restquerschnitte zwischen den Poren, siehe auch Abbildung 3.2.



**Abbildung 3.2:** Links: Mikroporen im undeformierten Material; Rechts: Rissoberfläche nach Zugbelastung. Stahl Weldox 420, aus BARSOUM (2006)

Im Gegensatz dazu stellt sich ein Versagen durch schubdominiertes Abgleiten im Bruchbild als vergleichsweise glatte Oberfläche ohne die charakteristischen Vertiefungen dar. ZHU U. A. (2007) führten Untersuchungen an Proben aus der Aluminiumlegierung 6063 durch, bei denen diese Unterschiede in der lokalen Mikrostruktur der Bruchflächen ebenfalls beobachtet werden konnten. Eine Unterscheidung des Versagensmodus anhand der beiden Kriterien scheint jedoch problematisch, da – je nach Werkstoff – durchaus beide Erscheinungsformen nebeneinander vorkommen können, siehe Abbildung 3.3.

Abhängig vom Werkstoffverhalten, scheint die Zuordnung einer bestimmten Versagensart zu einer Probenform nicht immer eindeutig zu sein, siehe auch XUE UND WIERZBICKI (2009). Eine eindeutige Abgrenzung der Versagensmoden anhand des Bruchbilds scheint per se nicht möglich.



**Abbildung 3.3:** (a) Draufsicht auf die Bruchfläche eines unter ebener Verformung belasteten Blechs; (b) Ausschnittvergrößerung des Übergangs von Scher- zu Wabenbruch. Ferritisches Stahlblech (IF), aus TAŞAN (2010)

### 3.1.2 Lastfälle und praktische Relevanz

Grundsätzlich ist durch die zunehmende Verwendung hoch- und höchstfester Werkstoffe im Automobilbau die Prognose von Materialversagen an fast allen Stellen des Fahrzeugs zum zentralen Thema geworden. Klassischer Anwendungsfall sind die zum Schutz vor Seitenaufprall gedachten Strukturen des Fahrzeugs, namentlich die B-Säule. Durch die Konfiguration mit wenig Deformationsraum (kaum „Knautschzone“) müssen die für den Seitenaufprall gedachten Strukturen den Überlebensraum Fahrgastzelle unter einem hohen Lastniveau schützen. Dazu werden typischerweise Strukturen aus hochfesten Stählen mit definierten Deformationszonen sowie Verstärkungen aus pressgehärteten Mangan-Bor Stählen verwendet. Diese Werkstoffe weisen im ausgehärteten Zustand Zugfestigkeiten  $> 1500\text{MPa}$  auf, jedoch nur geringe Bruchdehnungen. Beispiele dieser Lastfälle finden sich in Abschnitt 7.

## 3.2 Eine kurze Übersicht existierender Versagensmodelle

Zur Vorhersage von Versagen, speziell in der Anwendung mit der Methode der finiten Elemente, wurden bereits zahlreiche Modelle und Ansätze veröffentlicht. Im Folgenden werden einige gängige Versagensmodelle vorgestellt, wobei besonders die jeweiligen Vor- und Nachteile für eine Verwendung in der numerischen Simulation hervorgehoben werden. Eine Übersicht findet sich beispielsweise bei BARSOUM (2003) und WIERZBICKI U. A. (2005).

Eine grobe Abgrenzung erfolgt dabei über die zur Beurteilung des Versagensrisikos herangezogenen Größen. Das führt zu zwei grundlegenden Modellkategorien:

- *Mikromechanische* Modelle, die auf einer Beschreibung der physikalischen Vorgänge auf der Ebene der Mikrostruktur basieren. Die für das Versagen relevanten Vorgänge, in den betrachteten Fällen Entstehung, Wachstum und Zusammenschluss von Mikroporen unter plastischer Deformation, werden mit Hilfe von Evolutionsgleichungen beschrieben. Der Übergang auf die Ebene des makroskopischen Kontinuums erfolgt durch Homogenisierung. Typischer Vertreter ist das Modell von GURSON (1977), das die Entwicklung von kugelförmigen Poren in einem inelastischen, ideal plastischen Material beschreibt. Frühere Arbeiten auf diesem Gebiet stammen unter anderem von MCCLINTOCK U. A. (1966), sowie RICE UND TRACEY (1969), die zylindrische und kugelförmige Poren in einem unendlich ausgedehnten Volumen unter einachsiger Verzerrung betrachteten.
- *Phänomenologische* Modelle, die eine resultierende Betrachtung der mikrostrukturellen Vorgänge auf der Ebene des Kontinuums vornehmen. Hier werden in der Regel zusätzliche innere Variable eingeführt, die im Gegensatz zu den auf mikromechanischen Zusammenhängen basierenden Modellen keine direkte Entsprechung zu einer physikalischen Größe besitzen. Diese Betrachtungsweise erlaubt eine vereinfachte Beschreibung der Vorgänge, die allerdings meist zu Lasten einer allgemeinen Anwendbarkeit des Modells geht. Je nach angestrebtem Anwendungszweck wird eine Verschmierung der lokalen Phänomene auf die Größenordnung der Diskretisierung vorgenommen. Eine weitere Unterscheidung der Modelle erfolgt zwischen reinen Versagenkriterien und Modellen, bei denen eine Kopplung von Schädigung und Materialverhalten wie beispielsweise der Fließbedingung erfolgt. Als Beispiel seien die Modelle von JOHNSON UND COOK (1985), LEMAITRE (1985), HORA U. A. (2008) sowie – im Vorgriff – das Modell GISSMO genannt, siehe Abschnitt 5.

#### 3.2.1 Umrechnung vom Spannungs- in den Dehnungsraum

Im Folgenden werden einige gängige Versagensmodelle und -kriterien vorgestellt. Um die Vergleichbarkeit zu gewährleisten, werden alle Kriterien in einer Notation unter Benutzung der äquivalenten plastischen Dehnung als Ordinate und der Spannungsdreiaxsigkeit als Abszisse dargestellt. Für die im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich betrachteten Probleme im ebenen Spannungszustand ist diese Charakterisierung der Belastungsart mit Hilfe der Invarianten des Spannungstensors eindeutig, solange Isotropie vorausge-



setzt wird. Die Dreiachsigkeit  $\eta$  ist definiert als

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_{VM}} = -\frac{p}{\sigma_{VM}}; \quad (3.1)$$

mit der mittleren oder hydrostatischen Spannung  $\sigma_m$ , entsprechend dem Gegenwert des hydrostatischen Drucks  $p$ .  $\sigma_m$  ist ein Maß für die erste Invariante  $I_1$  des Cauchy-Spannungstensors

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{I_1}{3} = -p. \quad (3.2)$$

Die *von Mises*-Vergleichsspannung  $\sigma_{VM}$  ist ein Maß für die zweite Invariante  $J_2$  des deviatorischen Anteils des Spannungstensors  $\mathbf{s}$ ; mit

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \boldsymbol{\delta} \quad (3.3)$$

ergibt sich

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} = \sqrt{3J_2} = q. \quad (3.4)$$

Die äquivalente plastische Dehnung wird definiert als

$$\epsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\epsilon}^p : \boldsymbol{\epsilon}^p}. \quad (3.5)$$

Sie stellt für konventionelle *von Mises*-Plastizität die skalare *leistungskonjugierte* Größe zur *von Mises*-Spannung dar.

Um eine qualitative Vergleichbarkeit von spannungsbasierten Kriterien mit den dehnungsbasierten Kriterien zu erreichen, muss nach Gl. (2.8), (2.9) und (2.10) ein Stoffgesetz zugrunde gelegt werden. Für die Umrechnung in dieser Darstellung wird assoziierte und isotrope *von Mises*-Plastizität angenommen, da sich damit die Zusammenhänge einfach und übersichtlich notieren lassen. Eine Vereinfachung für die im Folgenden angegebene Umrechnung ist die Vernachlässigung der elastischen Dehnungen. Das Material wird also als starr-plastisch angenommen, was für die Betrachtung von Versagensphänomenen in duktilen Metallen gerechtfertigt erscheint. Versagen wird für solche Werkstoffe im Bereich großer plastischer Dehnungen stattfinden, sodass die elastischen Dehnungen betragsmäßig klein gegenüber den plastischen Anteilen sind. Für das Verhältnis der beiden Hauptdehnraten  $\dot{\epsilon}_1$  und  $\dot{\epsilon}_2$  in der Blechebene wird das Verhältnis  $b$  angesetzt:

$$b = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1}. \quad (3.6)$$

Unter Annahme der Volumenkonstanz ergibt sich damit der infinitesimale Dehnraten-tensor in Hauptachsenform abhängig von der größten Hauptdehnrates  $\dot{\epsilon}_1$  und dem Dehnratenverhältnis  $b$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -(1+b) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Da für den ebenen Spannungszustand nur zwei Hauptspannungen von null verschieden sind, wird der Parameter  $a$  abhängig vom Verhältnis der beiden Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  angesetzt:

$$a = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (3.8)$$

Zusätzliche Beachtung verlangt die – je nach verwendeter Konvention – unterschiedliche Anordnung der Hauptspannungen. Üblicherweise wird die Reihenfolge nach der Größe der Hauptspannungen bestimmt:  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Damit ergibt sich für die gesuchte größte Differenz der Hauptspannungen ein unterschiedlicher Ausdruck abhängig vom betrachteten Spannungszustand.

Mit der Definition der Fließbedingung nach *von Mises*, Gl. (3.4), ergibt sich die Fließfunktion nach Gl. (2.12) zu

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}) = \sigma_{VM} - \sigma_Y = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_Y = \sqrt{3J_2} - \sigma_Y = 0, \quad (3.9)$$

mit  $\sigma_Y$  als Materialparameter, der den Fließbeginn bestimmt. Für assoziierte Plastizität wird die Fließfunktion  $\Phi$  gleich dem plastischen Potential gesetzt. Mit den Ableitungen nach Gl. (3.58) erhält man für die plastische Dehnrates nach Gl. (2.13)

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^p = \dot{\lambda} \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}) = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3\dot{\lambda}}{2\sigma_{VM}} \mathbf{s}. \quad (3.10)$$

Für die äquivalente plastische Dehnung nach Gl. (3.5) ergibt sich mit der Annahme proportionaler Belastung ( $b = \text{const.}$ )

$$\epsilon_{eq}^p = |\epsilon_1| \sqrt{\frac{4}{3}(1 + b^2 + b)}. \quad (3.11)$$

Für die *von Mises*-Spannung erhält man

$$\sigma_{VM} = |\sigma_1| \sqrt{1 + a^2 - a}, \quad (3.12)$$

sowie für die Dreiachsigkeit  $\eta$

$$\eta = -\frac{p}{\sigma_{VM}} = \frac{1+a}{3\sqrt{1+a^2-a}}. \quad (3.13)$$

Eingesetzt in die assoziierte Fließregel Gl. (2.13) ergibt sich für den ebenen Spannungszustand mit  $\sigma_3 = 0$  ein Zusammenhang zwischen  $a$  und  $b$ :

$$a = \frac{1+2b}{b+2} \quad \text{beziehungsweise} \quad b = \frac{2a-1}{2-a}. \quad (3.14)$$

Damit ergibt sich für die Dreiachsigkeit nach Gl. (3.13)

$$\eta = \frac{1+b}{\sqrt{3(1+b^2+b)}}. \quad (3.15)$$

Mit Hilfe der dargestellten Umrechnungsformeln und Annahmen kann eine Übertragung der im Folgenden dargestellten Kriterien in eine einheitliche Darstellung mit Hilfe der Dreiachsigkeit und der äquivalenten plastischen Dehnung erfolgen, siehe Abbildung 3.4. Durch die Eindeutigkeit der Beschreibung unter den oben genannten Bedingungen lassen sich die Größen auch in eine Reihe von anderen Bezugssystemen umrechnen, beispielsweise in Hauptdehnungen.

### 3.2.2 Einfache Versagenskriterien

Ein ausführlicher Vergleich einiger Versagenskriterien mit Hilfe von Versuchsdaten eines Aluminiumwerkstoffs findet sich beispielsweise in WIERZBICKI U. A. (2005). Im folgenden werden einige gängige Kriterien und Konzepte vorgestellt, um einen Überblick über die jeweiligen Vor- und Nachteile zu erhalten.

#### Konstante äquivalente Dehnung

Die einfachste Möglichkeit zur Beurteilung des Versagensrisikos in der Simulation bietet ein Vergleich der lokal auftretenden äquivalenten plastischen Dehnungen mit einem festen, als Materialkonstante betrachteten Dehnungswert. Dieser Ansatz unterstellt allerdings eine für beliebige Deformationsarten gleichbleibende Versagensdehnung, beispielsweise auch für Druckbelastung. Das ist allerdings für die betrachteten technischen Werkstoffe nicht plausibel, siehe auch Abschnitt 3.1.1.

Die Formulierung in den Koordinaten von Dreiachsigkeit und äquivalenter plastischer Bruchdehnung ist denkbar einfach:

$$\epsilon_{eq,f}^p = \text{const.} = k. \quad (3.16)$$

#### **Versagensformänderungsdiagramm (Fracture Forming Limit Diagram, FFLD)**

Diese Vorgehensweise zur Versagensbeurteilung lehnt sich an das für Umformvorgänge gebräuchliche Grenzformänderungsdiagramm (Forming Limit Diagram, FLD) an. Zur Erweiterung des FLD existieren zahlreiche Ansätze, siehe auch HORA U. A. (2007), VOLK (2006) sowie BANABIC U. A. (2009). Das FLD beschreibt aber immer die beginnende Einschnürung, siehe auch Abbildung 5.9.

Im Unterschied dazu wird mit Hilfe des FFLD ein Zusammenhang zwischen den Hauptdehnungen in der Blechebene (Umformgrade)  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bis zum Versagen hergestellt. LEE (2005) vergleicht die experimentell ermittelten Bruchdehnungen einer Anzahl von metallischen Werkstoffen aus der Literatur mit eigenen Messungen in dieser Notation. Als Ergebnis wird dargestellt, dass sich mit befriedigender Übereinstimmung die Versuchsergebnisse durch eine Gerade mit Steigung  $-1$  in  $\varphi_1$ - $\varphi_2$  Koordinaten darstellen lassen, welche sich zwischen den einzelnen Werkstoffen nur durch eine Verschiebung auf der Ordinate unterscheidet. Unter Annahme der Volumenkonstanz bei plastischer Verformung ( $\epsilon_1^p + \epsilon_2^p + \epsilon_3^p = 0$ ) nach BRIDGMAN (1952) ergibt sich

$$\epsilon_1^p + \epsilon_2^p = -\epsilon_3^p = \text{const.} = l. \quad (3.17)$$

Mit Gl. (3.11) und (3.15) ergibt sich

$$\epsilon_{eq,f}^p = \frac{2l}{3\eta}. \quad (3.18)$$

In dieser Form beschreibt das FFLD für Blechwerkstoffe also eine konstante Dickendehnung am Versagenspunkt. Damit wird bereits anschaulich klar, dass dieses Kriterium sinnvoll nur für den Bereich mit Zugbelastung (einachsiger Zug bis biaxialer Zug) zu verwenden ist, da beispielsweise für Schubbelastung in der Ebene ( $\varphi_1 = -\varphi_2$ ) keine Dickenabnahme respektive Dehnung senkrecht zur Belastungsebene auftritt. Die Anwendbarkeit auf allgemeine Deformationen in der Blechebene ist damit nicht gegeben.

#### **Maximale Schubspannung**

Im Gegensatz zu den vorhergehenden Ansätzen wird das Versagen anhand dieses Kriteriums nicht mittels eines Maßes für die Deformation bestimmt, sondern ausgehend von der

maximalen auftretenden Schubspannung im Kontinuum. Im Rahmen der Betrachtung von dünnwandigen Bauteilen aus Blechhalbzeugen werden die Schubspannungen außerhalb der Blechebene in der Regel vernachlässigt. Damit beschränkt sich die Betrachtung auf die maximale in der Blechebene auftretende Schubspannung. Dies spiegelt anschaulich die für Metallplastizität gängige Annahme wieder, dass plastische Deformationen sich auf Gleitebenen im Material abspielen, auf denen die jeweilige Schubspannung den materialspezifischen Schwellenwert überschreitet. Das Kriterium ähnelt damit der Fließbedingung nach *Tresca*. Die maximale Schubspannung  $\tau_{max}$  am Materialpunkt kann mit Hilfe einer Fallunterscheidung und den Hauptspannungen  $\sigma_I$  ausgedrückt werden:

$$\tau_{max} = \max \left\{ \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right\}. \quad (3.19)$$

Für die Umrechnung dieses Spannungskriteriums in  $(\eta, \epsilon_{eq}^p)$ -Koordinaten – und damit in den Dehnungsraum – ist ein Materialgesetz notwendig. In Anlehnung an WIERZBICKI U. A. (2005) wird zur Veranschaulichung eine einfache exponentielle Verfestigungsfunktion verwendet:

$$\sigma_{VM} = K \left( \epsilon_{eq}^p \right)^n; \quad (3.20)$$

mit der Konstante  $K$  und dem Verfestigungsexponenten  $n$ . Unter Verwendung der Gleichungen (3.8), (3.12) und (3.14) aus Abschnitt 3.2.1 ergibt sich abschnittsweise für  $\epsilon_{eq}^p$  in Abhängigkeit von  $b$  nach Definition Gl. (3.6):

$$\epsilon_{eq}^p = \begin{cases} \left[ 2\sqrt{3} \frac{\tau_{max}}{K} \frac{\sqrt{b^2+b+1}}{1-b} \right]^{1/n} & \forall -2 < b < -\frac{1}{2} \quad \left( \hat{=} -\frac{1}{3} < \eta < \frac{1}{3} \right) \\ \left[ 2\sqrt{3} \frac{\tau_{max}}{K} \frac{\sqrt{b^2+b+1}}{b+2} \right]^{1/n} & \forall -\frac{1}{2} < b < 1 \quad \left( \hat{=} \frac{1}{3} < \eta < \frac{2}{3} \right). \end{cases} \quad (3.21)$$

Darin spiegelt der obere Abschnitt die Bedingung  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$  wieder (Tiefziehen). Der untere Abschnitt entspricht  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$  (Streckziehen), respektive  $\tau_{max} = \left| \frac{1}{2}\sigma_1 \right|$  für den ebenen Spannungszustand.

Die resultierenden Versagenskurven der drei beschriebenen Kriterien sind in Abbildung 3.4 dargestellt. Die Parameter wurden so definiert, dass alle drei Kriterien dieselbe Bruchdehnung im einachsigen Zug ( $\eta = \frac{1}{3}$ ) ergeben:

- Konstante Bruchdehnung  $\epsilon_f^p$ :  $k = 0,5$
- FFLD:  $l = 0,25$
- Maximale Schubspannung:  $K = 1000$ ,  $n = 0,25$ ,  $\tau_{max} = 420$

Die deutlichsten Unterschiede zwischen den Kriterien zeigen sich für reinen Schub ( $\eta = 0$ ). Da das FFLD ausschließlich ein durch Ausdünnung ausgelöstes Versagen beschreibt,

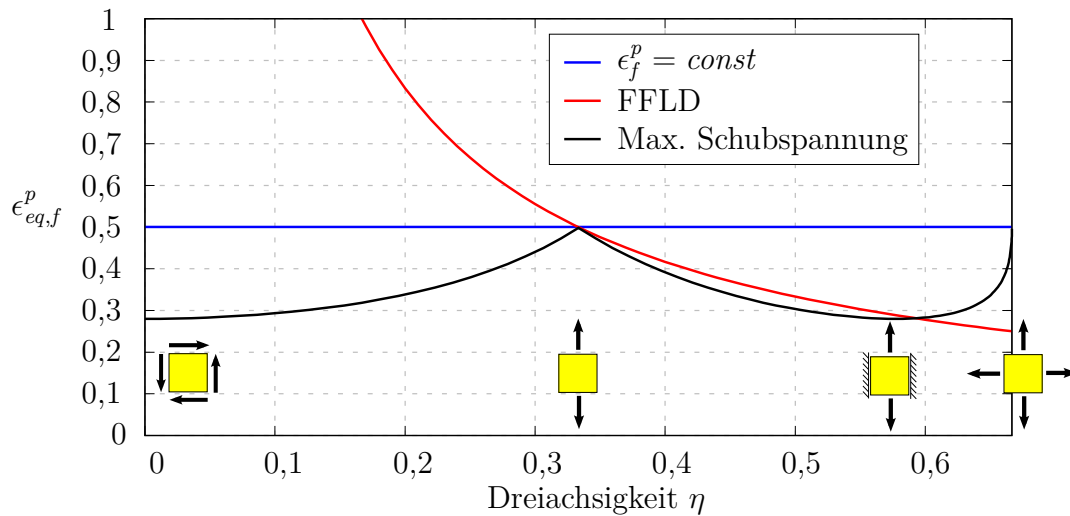


Abbildung 3.4: Vergleich der einfachen Versagenskriterien

wird unter Schubdeformation kein Bruch vorhergesagt. Dieses Verhalten ist für die betrachteten duktilen Werkstoffe nicht realistisch, ebenso die Annahme einer konstanten Bruchdehnung  $\epsilon_f^p$ . Siehe dazu auch Abschnitt 3.1.1. Das Kriterium der maximalen Schubspannung hat seine Extrema bei reinem Schub und ebener Verformung (Minimum) sowie bei einachsigem und biaxialem Zug (Maximum). Dort nimmt das Verhältnis der maximalen Schubspannung zur *von Mises*-Spannung seine Extremwerte an, siehe auch Gl. (3.21). Damit gibt es noch am ehesten einen Verlauf wieder wie er beispielsweise durch WIERZBICKI U. A. (2005) für einen Aluminiumwerkstoff bestimmt wurde, ist aber durch seine stückweise Definition und die Abhängigkeit vom Materialgesetz für die Praxis schlecht einsetzbar.

### 3.2.3 Das Modell von Gurson

Von GURSON (1977) entwickelt, handelt es sich bei diesem Modell um eines der bekanntesten mikromechanischen Modelle zur Beschreibung von duktiler Schädigung. Im Gegensatz zu den auf einer phänomenologischen, makroskopischen Betrachtungsweise basierenden Modellen wird der Werkstoff hier nicht als homogenes, gleichförmiges Kontinuum beschrieben, sondern als poröse Struktur. Betrachtet wird eine kugelförmige Pore in einer ebenfalls kugelförmigen Zelle aus unelastischem, ideal-plastischem Material, deren resultierendes Volumen sich während plastischer Deformation ändert. Für gewisse Geschwindigkeitsfelder kann eine Näherung für die Fließfunktion angegeben werden, wobei das relative Porenvolumen als Schädigungsparameter (*Porosität*) angesehen wird. Die Entwicklung des bezogenen Porenvolumens erfolgt mit Hilfe von Evolutionsgleichungen, die unter anderem auf der Massenbilanz basieren. Formal ist das Gursonmodell den

Plastizitätsmodellen mit zusätzlichen inneren Variablen zuzuordnen, siehe auch FEUCHT (1998). Das als Matrixmaterial bezeichnete Volumen zwischen den Poren wird als plastisch inkompressibler und isotroper Werkstoff betrachtet.

In der ursprünglichen Fassung wird eine Interaktion der Poren bei zunehmendem Volumenanteil nicht betrachtet. Somit ergibt sich das Versagen respektive die vollständige Abnahme der Spannungstragfähigkeit erst bei einem Porenvolumenanteil von  $f = 1$ . Dieses Verhalten ist nicht realistisch; deswegen wurde von TVERGAARD UND NEEDLEMAN (1984) eine phänomenologische Erweiterung des Modells vorgeschlagen, bei der das Porenvolumen  $f$  in den Evolutionsgleichungen durch ein effektives Porenvolumen  $f^*$  ersetzt wird. Das so modifizierte Modell wird auch als *Gurson-Tvergaard-Needleman*-(*GTN*-)Modell bezeichnet.

Die Definition von  $f$  bezieht sich auf den Anteil der Poren am betrachteten repräsentativen Volumen:

$$f = \frac{V_{\text{Poren}}}{V_{\text{Gesamt}}}. \quad (3.22)$$

In den Evolutionsgleichungen wird  $f$  nach dem Erreichen eines kritischen Porenvolumenanteils  $f_c$  durch den effektiven Porenvolumenanteil  $f^*$  ersetzt, was eine beschleunigte Schädigungsentwicklung wiedergibt. Damit können die oberhalb einer gewissen Schädigungsschwelle zu erwartenden Effekte der Interaktion von Poren, wie das Zusammenwachsen (Koaleszenz) oder die Ausbildung von Scherbändern in den Restquerschnitten, modelliert werden.

$$f^*(f) = \begin{cases} f & \forall f \leq f_c \\ f_c + \frac{1/q_1 - f_c}{f_F - f_c} (f - f_c) & \forall f > f_c \end{cases} \quad (3.23)$$

Der Parameter  $q_1$  bestimmt den Porenvolumenanteil beim endgültigen Versagen, das bei Erreichen von  $f^*(f_F) = \frac{1}{q_1}$  eintritt. Als Konsequenz verliert  $f^*$  seine direkte Bindung an die physikalische Größe der plastischen Volumenänderung und bekommt die Bedeutung eines phänomenologischen Schädigungsparameters.

Die **Fließfunktion** des *GTN*-Modells trägt der Beobachtung Rechnung, dass der Einfluss des hydrostatischen Drucks auf das Fließverhalten vom Porenvolumenanteil abhängt. Außerdem bestimmt der Porenvolumenanteil den volumetrischen Anteil der plastischen Deformation, da die Annahme isochorer Plastizität im Matrixwerkstoff im Umkehrschluss bedeutet dass eine makroskopische Änderung des Volumens nur durch eine Änderung des Porenvolumenanteils zustande kommen kann. Daher findet sich das effek-

tive Porenvolumen  $f^*$  als innere Variable in der Fließfunktion wieder:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_M, f^*) = \frac{\sigma_{VM}^2}{\sigma_M^2} - 1 + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{q_2 \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\delta}}{2\sigma_M}\right) - (q_1 f^*)^2 = 0, \quad (3.24)$$

mit

$$\begin{aligned} \sigma_M &: \text{Matrixspannung (Spannung im Restquerschnitt)} \\ q_1, q_2 &: \text{Parameter.} \end{aligned}$$

Hier bestimmt der Parameter  $q_2$  den Einfluß der hydrostatischen Spannung auf die Fließfunktion. Durch die assoziierte Fließregel nach Gl. (2.13) ergibt sich damit für poröses Material ( $f^* > 0$ ) und  $\sigma_m \neq 0$  ein volumetrischer Anteil der plastischen Dehnrate  $\dot{\epsilon}_{kk}^p \neq 0$ . Dies stellt sich in der makroskopischen Betrachtung als vom effektiven Porenvolumenanteil abhängige plastische Querkontraktionszahl  $\nu^p$  dar.

Für einen Porenvolumenanteil  $f = 0$  reduziert sich Gl. (3.24) zur nicht druckabhängigen Fließbedingung nach *von Mises*, entsprechend einem Zylinder im Hauptspannungsraum. Mit zunehmendem Porenvolumenanteil nimmt dagegen die Fließspannung ab und der resultierende Rotationskörper wird kleiner. Mit Annäherung an den Extremfall  $f = f_F$  entartet die Fließfläche zu einem Punkt im Achsenursprung, da die Spannungstragfähigkeit definitionsgemäß vollständig erschöpft ist.

Da die Porosität als innere Variable im Fließgesetz auftaucht, ist die Definition einer **Evolutionsgleichung für die Porosität** erforderlich. Wie bereits erwähnt, folgt aus der Annahme der Inkompressibilität des Matrixmaterials und unter Berücksichtigung der Massenbilanz einer Einheitszelle die Beschränkung der volumetrischen plastischen Dehnung auf das von den Poren eingenommene Teilvolumen:

$$\dot{V}_{Gesamt} = \dot{V}_{Poren}. \quad (3.25)$$

Die Veränderung des gesamten Porenvolumens setzt sich zusammen aus dem Wachstum vorhandener Poren  $\dot{f}_W$  und aus der Neubildung  $\dot{f}_N$

$$\dot{f} = \dot{f}_W + \dot{f}_N. \quad (3.26)$$

Zusammen mit Gl. (3.25) gelangt man damit zur Definition der volumetrischen Dehnung

$$\dot{f}_W = (1 - f)\dot{\epsilon}_{kk}^p. \quad (3.27)$$

Der Term für die Neubildung von Poren wird in der gezeigten Fassung des *GTN*-Modells aufgrund der rein phänomenologischen Natur der Porenneubildung in Form einer sto-



chastischen Formulierung eingeführt:

$$\dot{f}_N = \mathcal{A} \dot{\epsilon}_M^{pl}; \quad (3.28)$$

mit dem Ansatz einer *Gaußschen* Verteilung für  $\mathcal{A}$ , der die stochastische Natur der Neubildung darstellen soll. Die Neubildung wird hier als dehnungsinduziert angenommen, was der physikalischen Vorstellung einer Anstauung von Versetzungen an Korngrenzen als Ursache für die Entstehung von Fehlstellen entspricht (FEUCHT 1998). Die Definition der Gaußverteilung erfolgt über ihren Scheitelpunkt, der den Wert der plastischen Matrixdehnung wiedergibt, bei dem die Häufigkeit für die Bildung von neuen Poren am größten ist:

$$\mathcal{A}(\epsilon_M^{pl}) = \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_M^{pl} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2}, \quad (3.29)$$

mit

$f_N$  : Volumenanteil einer neugebildeten Pore

$\epsilon_N$  : Wert der plastischen Matrixdehnung, bei der bevorzugt neue Poren gebildet werden

$s_N$  : Standardabweichung.

Die Standardabweichung  $s_N$  definiert die Breite des Intervalls  $\{\epsilon_N \pm s_N\}$ , bis zu dessen Rand die Wahrscheinlichkeit für die Porenneubildung bis auf  $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 71\%$  des Maximalwerts abnimmt.

Um die **Verfestigung** zu beschreiben, muss für den Übergang von der mikroskopischen auf die makroskopische Ebene ein Zusammenhang zwischen den betreffenden Größen hergestellt werden. Beim Gursonmodell erfolgt dies durch die Forderung nach Äquivalenz der Arbeitsraten auf den beiden Ebenen, da die Dehnraten bei Porositäten  $f > 0$  nicht identisch sind. Der Betrachtung liegt die Annahme zugrunde, dass plastische Arbeit nur am Matrixmaterial verrichtet wird:

$$\dot{W}_{mikroskopisch} = \dot{W}_{makroskopisch}, \quad (3.30)$$

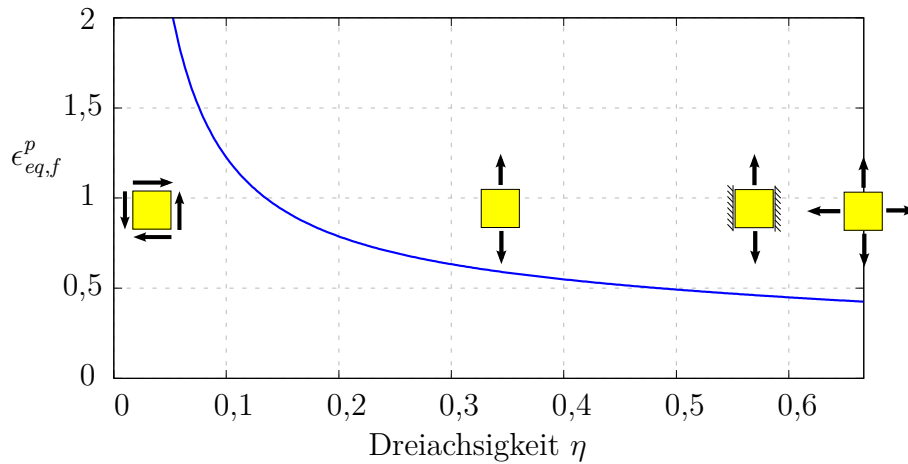
beziehungsweise

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = (1 - f) \sigma_M \dot{\epsilon}_M^p, \quad (3.31)$$

was eine Evolutionsgleichung für die plastische Dehnrates  $\dot{\epsilon}_M^{pl}$  im Matrixmaterial liefert.

Für die praktische Anwendung des Modells ist festzuhalten, dass bei einer an den physikalischen Vorgängen orientierten Wahl der Parameter der dominierende Anteil an der Entwicklung der Porosität für die betrachteten metallischen Werkstoffe aus dem Porenwachstum stammt. Damit einher geht eine direkte Abhängigkeit der Schädigungsent-

wicklung von der Höhe der hydrostatischen Spannung. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass für Belastungszustände mit verschwindenden hydrostatischen Spannungsanteilen keine Schädigungsentwicklung erfolgt, und entsprechend die aus dem Modell resultierenden äquivalenten plastischen Dehnungen bis zum Versagen gegen unendlich gehen. Es wird also kein Versagen unter reinem Schub prognostiziert, siehe auch Abbildung 3.5. Hier wurden die resultierenden Bruchdehnungen eines Dualphasenstahls über der Dreiachsigkeit aufgetragen, die verwendeten Parameter sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.



**Abbildung 3.5:** Typische Versagenskurve des *GTN*-Modells

| E [GPa] | $\nu$ | $q_1$ | $q_2$ | $f_0$  | $f_c$  | $f_F$  | $\epsilon_N$ | $s_N$ | $f_N$ |
|---------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------------|-------|-------|
| 210     | 0,3   | 1,5   | 1,0   | 0,0033 | 0,0065 | 0,0085 | 0,36         | 0,1   | 0,01  |

**Tabelle 3.1:** Parameter des *GTN*-Modells für einen Dualphasenstahl

Für die praktische Anwendung ergibt sich durch die Schädigungsformulierung eine Abhängigkeit der Ergebnisse im entfestigenden Bereich von der Diskretisierung (FEUCHT 1998). Als pragmatischer Ansatz wurde von FEUCHT UND FASSNACHT (1999) eine Definition der Parameter abhängig von der Größe der Elemente vorgeschlagen. Eine weitere Diskussion folgt in Abschnitt 4.3.

#### 3.2.4 Erweiterungen des Gursonmodells

Ausgehend von der ursprünglichen Fassung des Modells von GURSON (1977) wurden zahlreiche Erweiterungen und Modifikationen vorgeschlagen. Die weiteste Verbreitung fanden hier die bereits im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Modifikationen von TVERGAARD UND NEEDLEMAN (1984), die auf eine verbesserte praktische Anwendbarkeit des Modells zielen. Die so erweiterte Fassung findet sich in den meisten kommer-

ziellen Finite-Elemente-Programmen wieder, sie wird meist kurz als *Gurson-Tvergaard-Needleman-(GTN-)*Modell bezeichnet. Weitere Ansätze für Modifikationen beschreiben die Evolution von nicht kugelförmigen Poren, GOLOGANU U. A. (1993). DANAS UND PONTE CASTANEDA (2012) untersuchen den Einfluss des Lodewinkels auf das poröse Material. Ein weiteres Feld für Erweiterungen betrifft die dem ursprünglichen Ansatz immanente Eigenschaft, Schädigung und nachfolgendes Versagen nur für Spannungszustände mit hydrostatischen Anteilen zu beschreiben, siehe auch MOHR UND MARCADET (2015). Damit ist es unmöglich, Versagen in Form einer Ausbildung von Scherbändern mit anschließender Dekohäsion unter Schub zu beschreiben. Auf eine Behebung dieses Problems zielen die im folgenden vorgestellten Ansätze von XUE (2007), XUE (2008) sowie NAHSHON UND HUTCHINSON (2008). *Xue* führt dazu eine neue innere Variable  $D$  ein, die sich auch in der Fließfunktion wiederfindet. Damit soll eine Schubverformung, respektive das Abscheren der Restquerschnitte zwischen den Poren, abgebildet werden. Der Ansatz von *Nahshon und Hutchinson* beschränkt sich auf eine Modifikation der Evolutionsgleichung für das Porenwachstum, was die notwendigen Änderungen an der bestehenden Implementierung des *GTN*-Modells im kommerziellen Finite-Elemente-Programm LS-DYNA vereinfacht. Im Folgenden wird daher die auf diesem Ansatz basierende Modifikation dargestellt. Für die erweiterte Beschreibung wird dazu ein deviatorischer Zustandsparameter auf Basis der dritten Invarianten  $J_3$  des Spannungsdeviators  $s$  eingeführt:

$$J_3 = \det(\mathbf{s}) = \frac{1}{3} s_{ij} s_{ik} s_{jk} = s_1 s_2 s_3; \quad (3.32)$$

mit den deviatorischen Hauptspannungen  $s_i$ . Dadurch wird eine Unterscheidung der Spannungszustände axisymmetrischer Art und schubdominierter Art möglich. Mit der üblichen Anordnung der Hauptspannungen  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  ergibt sich für axisymmetrische Spannungszustände

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3 \quad \text{oder} \quad \sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3. \quad (3.33)$$

NAHSHON UND HUTCHINSON (2008) zeigen, dass hierfür  $J_3 = \pm 2(\sigma_1 - \sigma_3)^3/27 = \pm 2\sigma_{VM}^3/27$  gilt. Spannungszustände bestehend aus einer reinen Schubspannung  $\tau$  plus einem hydrostatischen Anteil

$$\sigma_1 = \tau + \sigma_m, \quad \sigma_2 = \sigma_m, \quad \sigma_3 = -\tau + \sigma_m \quad \forall \tau > 0 \quad (3.34)$$

ergeben  $J_3 = 0$ .

Ausgehend von Gl. (3.32) wird der *Lode-Parameter*  $\xi$  definiert als

$$\xi = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{VM}^3}, \quad (3.35)$$

sodass  $-1 \leq \xi \leq 1$ .

In der ursprünglichen Formulierung wird der Parameter  $\omega$  abhängig von  $\xi^2$  gebildet:

$$\omega(\boldsymbol{\sigma}) = 1 - \xi^2 = 1 - \left( \frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{VM}^3} \right)^2. \quad (3.36)$$

Dieser nimmt entsprechend nur Werte  $0 \leq \omega \leq 1$  an, mit  $\omega = 0$  für axisymmetrische Zustände nach Gl. (3.33) und  $\omega = 1$  für Zustände bestehend aus einer reinen Schubspannung mit überlagerter hydrostatischer Spannung nach Gl. (3.34). Damit wird die Evolutionsgleichung (3.27) für das Porenwachstum erweitert:

$$\dot{f} = (1 - f)\dot{\epsilon}_{kk}^p + k_\omega f \omega(\boldsymbol{\sigma}) \frac{s_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}^p}{\sigma_{VM}}. \quad (3.37)$$

Folglich ist in einem reinen Schubspannungszustand mit  $\omega = 1$  die Rate des Porenwachstums nur abhängig von dem hinzugefügten Ausdruck. Unter axisymmetrischen Spannungszuständen mit  $\omega = 0$  bleibt die Wachstumsrate unverändert. Die Konstante  $k_\omega$  bestimmt die Geschwindigkeit des Porenwachstums unter Schub; sie ist eine weitere für das Modell zu bestimmende Größe.

Mit dem quadratischen Ansatz nach Gl. (3.36) ist die resultierende Versagensdehnung in Abhängigkeit von den Koordinaten Dreiaxialigkeit  $\eta$  und Lodeparameter  $\xi$  immer symmetrisch zur Ebene  $\xi = 0$ . Neuere Versuchsergebnisse für verschiedene metallische Werkstoffe, unter anderem für eine Aluminiumlegierung des US-Standards 2024 (entsprechend 3.1354 nach DIN) von BAI UND WIERZBICKI (2008b), deuten aber auf eine nicht notwendigerweise zur Ebene  $\xi = 0$  symmetrische Form der Bruchdehnungsfläche hin. Abweichend von Gl. (3.36), wurde deswegen für die Implementierung in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm LS-DYNA ein abweichender Ansatz gewählt, siehe auch SCHMEING (2007) und NEUKAMM U. A. (2008a). In Folge dessen wurde ein zusätzlicher Parameter  $\beta$  eingeführt:

$$\omega(\boldsymbol{\sigma}) = 1 - \xi^2 - \beta\xi(1 - \xi). \quad (3.38)$$

Hiermit wird es möglich, das Modell auch für Materialien mit asymmetrischer Versagensfläche zu kalibrieren. Für  $\beta = 0$  erhält man wieder die ursprüngliche Formulierung von NAHSHON UND HUTCHINSON (2008). Eine umfangreiche Erprobung des so erweiterten Modells wurde von EBELSHEISER (2008) anhand von Versuchsergebnissen eines Blechwerkstoffs durchgeführt. Dabei zeigte sich die Notwendigkeit einer asymmetrischen Definition der Bruchdehnung auch für ausschließlich in Form von dünnwandigen Blechhalbzeugen charakterisierbare Werkstoffe. Durch die zusätzlichen Parameter steigt die Komplexität des erweiterten Modells im Vergleich zum ursprünglichen *GTN*-Modell weiter an; eine praxisnahe Anwendbarkeit vor dem Hintergrund der schwierigen und in

der Regel nur durch iterative Methoden möglichen Identifikation der Modellparameter anhand von Versuchsergebnissen erscheint zweifelhaft.

### 3.2.5 Das Modell von Johnson & Cook

Im Gegensatz zum in den vorhergehenden Abschnitten vorgestellten *GTN*-Modell und seinen Erweiterungen ist das von JOHNSON UND COOK (1985) entwickelte Modell nicht anhand einer Betrachtung der Vorgänge auf der materiellen Mikroebene aufgebaut. Stattdessen wird versucht, die resultierenden Größen durch eine phänomenologische Betrachtung auf der Makroebene abzubilden. Ausgangsbasis waren Versuchsreihen an drei grundsätzlich verschiedenen metallischen Werkstoffen:

- hochreines Kupfer (OFHC copper)
- technisch reines Eisen (Armco iron)
- niedrig legierter, hochfester Vergütungsstahl (AISI 4340 steel).

Da der Schwerpunkt der Untersuchungen auf Anwendungen aus dem Bereich der Ballistik und Militärtechnik gelegt wurde, wurden die Versuche mit unterschiedlichen Verformungsgeschwindigkeiten durchgeführt, um von quasi-statischen bis hin zu sehr hohen Dehnraten Informationen über das Werkstoffverhalten zu bekommen. Ausgehend von einem elastisch-plastischen Fließgesetz nach *von Mises* wird eine Funktion für die isotrope plastische Verfestigung in Abhängigkeit von der Temperatur, der äquivalenten plastischen Dehnrate und der äquivalenten plastischen Dehnung angegeben:

$$\sigma_{VM} = [A + B(\epsilon_{eq}^p)^n] [1 + C \ln \dot{\epsilon}^*] [1 - T^{*m}], \quad (3.39)$$

mit der äquivalenten plastischen Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$ , den Parametern  $A, B, C$  sowie

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^* &= \dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_0 && \text{dimensionslose äquivalente plastische Dehnrate} \\ T^* &= \frac{T - T_{Umgebung}}{T_{Schmelz} - T_{Umgebung}} && \text{relative Temperatur.} \end{aligned}$$

Zusätzlich zu dieser Beschreibung des Verfestigungsverhaltens ist ein weiterer wichtiger Bestandteil des Modells ein Versagensmodell. Auch hier wird, übereinstimmend mit den Beobachtungen von BRIDGMAN (1952), eine Abhängigkeit der Versagensdehnung von der hydrostatischen Spannung, ausgedrückt durch die Dreiachsigkeit  $\eta$ , eingeführt:

$$\epsilon_f = [D_1 + D_2 e^{D_3 \eta}] [1 + D_4 \ln \dot{\epsilon}^*] [1 + D_5 T^*], \quad (3.40)$$

mit den Parametern  $D_1 \cdots D_5$ . Weitere Abhängigkeiten sind auch hier die auf eine Referenzdehnrate normierte, dimensionslose Dehnrate  $\dot{\epsilon}^*$  und die relative Temperatur  $T^*$ .

Unter der Bedingung  $D_3 < 0$  wird eine monoton mit zunehmender Dreiachsigkeit fallende Abhängigkeit der Versagensdehnungen von der Dreiachsigkeit vorgegeben. Der erste Teil dieser Formulierung entspricht dem zuvor bereits bei HANCOCK UND MACKENZIE (1976) erwähnten Ansatz.

Unter Verwendung dieser Definition wird – bereits im Hinblick auf eine Verwendung in der numerischen Simulation – die Evolution der Schädigung als Summe der Schädigungsinkremente pro Zeitschritt festgelegt:

$$D = \sum \frac{\Delta \epsilon_{eq}^p}{\epsilon_f}. \quad (3.41)$$

Es wird also der Quotient aus dem Inkrement der äquivalenten plastischen Dehnung und der aktuellen, unter anderem von der Dreiachsigkeit  $\eta$  abhängigen Bruchdehnung gebildet. Der so errechnete „Schädigungsanteil“ wird aufsummiert, bis für  $D = 1$  Versagen eintritt. Das Prinzip von Gl. (3.41) ähnelt somit der aus Dauerfestigkeitsrechnungen bekannten linearen *Palmgren-Miner-Regel*.

Die Anwendung dieses Modells in der Crashsimulation beschränkt sich oft auf eine Betrachtung von isothermen Vorgängen bei Raumtemperatur. Klassisch wird für die aus dünnen Blechen bestehenden Strukturen die adiabate Erwärmung durch plastische Dissipation bei den im Crash vorkommenden Dehnraten und in Anbetracht der lokal begrenzten Plastifizierung vernachlässigt. Außerdem wird für metallische Werkstoffe eine etwaige Abhängigkeit der Versagensdehnung von der Dehnrates oft nicht berücksichtigt. Damit reduziert sich das Modell auf *von Mises*-Plastizität mit isotroper Verfestigung und einem von der Dreiachsigkeit  $\eta$  abhängigen Versagenskriterium

$$\epsilon_f = [D_1 + D_2 e^{D_3 \eta}] ; \quad (3.42)$$

unter Verwendung der Evolutionsgleichung für die Schädigung (3.41). Durch die Einfachheit der Formulierung bietet sich eine Verwendung in Kombination mit beliebigen Plastizitätsmodellen sowie in Kombination mit anderen Schädigungs- und Versagensmodellen an. Eine Verwendung in Kombination mit dem Modell von GURSON (1977) zur Beschreibung von Versagen unter Schubdeformation wurde von FEUCHT U. A. (2006) vorgestellt.

Grundsätzlich birgt die Formulierung der äquivalenten plastischen Dehnung bis zum Versagen als Exponentialfunktion in Abhängigkeit der Dreiachsigkeit  $\eta$  das Problem, dass eine mit zunehmender Dreiachsigkeit monoton abnehmende Versagensdehnung die Flexibilität bei der Modellierung verschiedenster Metalle einschränkt. Vorgegeben ist damit beispielsweise eine Versagensdehnung unter einachsigen Zug, die niedriger ist als unter reinem Schub. Diese Vorgabe erscheint für zahlreiche technische Werkstoffe nicht

zutreffend. JOHNSON UND COOK (1985) selbst stellen bei ihren Untersuchungen fest, dass die Bruchdehnung des Vergütungsstahls AISI 4340 unter reiner Schubdeformation ( $\eta = 0$ ) deutlich niedriger ist als unter einachsigen Zug ( $\eta = 1/3$ ). Dieses Verhalten lässt sich mit dem beschriebenen Modell nicht abbilden. Folglich werden in der von ihnen abgeleiteten Funktion der Versagensdehnungen die ermittelten Bruchdehnungen für reinen Schub nicht berücksichtigt und die Versagensdehnung durch die Exponentialfunktion in diesem Bereich um ein mehrfaches überhöht dargestellt. Die Autoren lassen eine Erklärung für das nicht dem Ansatz entsprechende Verhalten des Werkstoffs offen und vermuten als Ursache eine anfängliche Anisotropie des Werkstoffs.

Zahlreiche neuere Untersuchungen deuten eher auf einen Wechsel des Versagensmodus im Bereich niedriger Dreiaxsigkeiten hin, siehe auch Abschnitt 3.1.1. Dabei erfolgt ein Übergang vom durch die hydrostatische Spannung gesteuerten Mechanismus von Bildung, Wachstum und Vereinigung von Poren und Fehlstellen hin zum Versagen unter Scherung. Dieses Verhalten lässt sich teilweise anhand der Bruchoberflächen nachvollziehen, siehe auch TAŞAN (2010), BARSOU (2006) sowie BARSOU UND FALESKOG (2007). Eine Unterscheidung nach den verschiedenen Versagensmoden hat in neuerer Zeit Einzug in zahlreiche Versagensmodelle gehalten, siehe auch WIERZBICKI U. A. (2005), OEHM (2008) und SUN U. A. (2009).

### 3.3 Anwendung in der Prozesskette

Wie bereits in Abschnitt 2.4 angesprochen, wird eine durchgängige Simulation der Prozesskette der Blechteilherstellung und der anschließenden Crashbelastung durch die unterschiedlichen Anforderungen der beiden Disziplinen erschwert. Der im Rahmen der vorliegenden Arbeit eingeschlagene Weg sieht deswegen nicht vor, ein durchgängiges Materialmodell für die Simulationsdisziplinen der Umform- und Crashsimulation zu entwickeln. Verfolgt wird vielmehr ein modulares Konzept für die Prozesskette, wie in Abbildung 3.6 dargestellt. Grundlage des modularen Ansatzes ist eine Trennung der

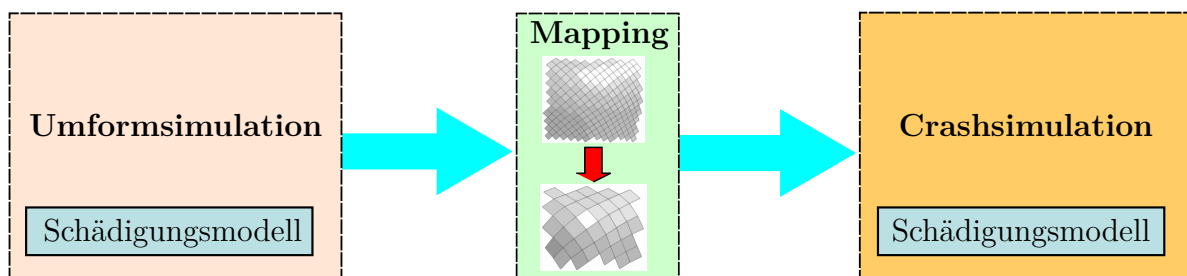


Abbildung 3.6: Modulares Konzept für die Prozesskette

Materialmodelle in zwei Komponenten: Zum einen das Konstitutivgesetz, welches das elasto-plastische Materialverhalten einschließlich Anisotropie, Ratenabhängigkeit und Verfestigung beschreibt. Der andere Baustein ist das Schädigungsmodell, das modular an das Konstitutivmodell gekoppelt wird und von diesem in Echtzeit, also bei jedem Aufruf des Modells die relevanten Daten übergeben bekommt. Damit werden im Schädigungsmodell die relevanten Größen bestimmt, und es kann – je nach Anwendung – eine Rückkopplung auf das Konstitutivgesetz erfolgen, die beispielsweise auch die Auslösung von Versagen in Form von Elementerosion beinhalten kann. Die wesentliche Größe für die Schädigungsbeschreibung ist dabei der Schädigungsparameter  $D$  selbst, der für die betrachteten Modelle als skalare Größe definiert ist. Eine durchgängige Modellierung wird dabei durch die Verwendung desselben Schädigungsmodells für beide betrachteten Simulationsdisziplinen sichergestellt, sodass trotz der Unterschiede in den Konstitutivmodellen eine konsistente Beschreibung sichergestellt ist. Als Zwischenschritt zwischen den beiden Simulationen müssen die Ergebnisdaten zwischen den unterschiedlichen Netzen der beiden Disziplinen mittels eines geeigneten Algorithmus („Mapping“) übertragen werden. In der Regel finden sich bei den Umformsimulationen deutlich feinere Diskretisierungen als in den Crashsimulationen, da die Umformung auf Bauteilebene berechnet wird, während im Crash vorwiegend Gesamtfahrzeugmodelle betrachtet werden.

Als Vorteil dieses Konzepts wird angesehen, dass die bestehenden Konstitutivmodelle für beide Simulationsdisziplinen beibehalten werden können. Das ist auch aus wirtschaftlichen Gründen ein großer Vorteil, da speziell für die teilweise sehr komplexen Fließortmodelle der Umformsimulationen eine komplette Umstellung auf ein neues Modell mit erheblichem Mehraufwand verbunden wäre. Außerdem wird so vermieden, ein für beide Disziplinen taugliches Modell erstellen zu müssen, das die Summe der Eigenschaften der Modelle beider Disziplinen mitbringen müsste und damit unnötig kompliziert werden würde.

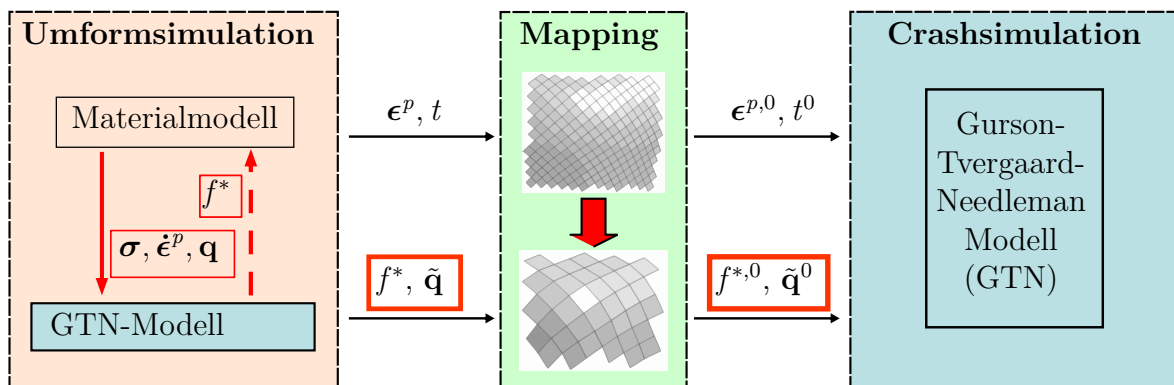
#### 3.3.1 Inkompatible Konstitutivgesetze

Für eine rein phänomenologische Schädigungsformulierung wie die von JOHNSON UND COOK (1985) ist die Kopplung an beliebige Plastizitätsmodelle auf den ersten Blick problemlos möglich. Als schwierig zeigen sich hier in erster Linie die aus den unterschiedlichen Netzgrößen resultierenden Probleme der Datenübertragung zwischen den verschiedenen Simulationsmodellen, vor allem für Bereiche mit starken Gradienten im Dehnungs- und Schädigungsfeld. Eine direkte Anbindung des Johnson-Cook-(JC-)Modells an das Gurson- beziehungsweise *GTN*-Modell ist beispielsweise im Finite-Elemente-Code LS-DYNA fest implementiert, siehe auch HALLQUIST (2017). Dazu wird ohne nähere Diskussion die äquivalente plastische Dehnung des *GTN*-Modells als treibende Größe für das JC-Kriterium verwendet. Da die Schädigungsevolution im *GTN*-Modell selbst eine



plastische Volumenänderung auslöst, wird damit der nicht-isochoere Charakter des Gursonmodells ignoriert. In der Praxis scheint dieses vereinfachte Vorgehen keine Probleme zu bereiten. Im umgekehrten Fall – Kopplung des *GTN*-Modells an isochore Plastizität – liegen die Probleme dagegen auf der Hand.

Zu Beginn dieser Arbeit stand der Ansatz zur Diskussion, das *GTN*-Modell zur Berechnung der Schädigung nach dem in Abbildung 3.7 gezeigten modularen Schema an beliebige, fast ausnahmslos auf isochorer Plastizität basierende Plastizitätsmodelle für Umformsimulationen zu koppeln. Da das *GTN*-Modell die Plastizität gekoppelt mit der Schädigungsentwicklung beinhaltet, ändert sich die rechte Seite des Schemas in Abbildung 3.6 zu dem in Abbildung 3.7 dargestellten.



**Abbildung 3.7:** Modulares Konzept unter Verwendung des *GTN*-Modells

Allerdings ist diese Kombination mit dem *GTN*-Modell, gekoppelt an ein auf isochorer Plastizität basierendes Materialmodell für Umformsimulationen, nicht auf direktem Wege möglich. Wie in Abschnitt 3.2.3 dargestellt, ist das Porenwachstum als maßgeblicher Teil der Schädigungsevolution nach Gl. (3.27) direkt mit dem volumetrischen Teil  $\dot{\epsilon}_{kk}^p$  des plastischen Dehnrate tensors verknüpft. Für eine Kopplung bedeutet dies, dass bei direkter Übernahme des isochoren plastischen Dehnrate- beziehungsweise Dehninkremententensors kein Porenwachstum vorhergesagt werden würde. Somit wäre nur der – üblicherweise untergeordnete – Anteil der Poreneubildung wirksam. Anders ausgedrückt, lässt sich das aus mehreren gekoppelten Beziehungen zur Beschreibung der Plastizität und des Porenvolumens als innerer Variable bestehende *GTN*-Modell nicht einfach auf eine reine Schädigungsbeschreibung mit isochorer Plastizität reduzieren. Das auf einer Volumenzunahme als Basis der Schädigungsbeschreibung basierende *GTN*-Modell ist damit grundsätzlich *inkompatibel* zu den auf isochorer Plastizität basierenden Materialmodellen der Umformsimulation.

### 3.3.2 Näherungsweise Anpassung für das GTN-Modell

Als Abhilfe wird deswegen eine „virtuelle“ volumetrische Dehnung vorgeschlagen. Hierfür wird mit einem isochoren äquivalenten plastischen Dehninkrement die aus einem mit gleichem Dehninkrement beaufschlagten *GTN*-Modell resultierende volumetrische Dehnung bestimmt (DU BOIS (2007–2011), NEUKAMM U. A. (2008b), SCHMEING (2007)).

Dazu wird die assoziierte Fließregel nach Gl. (2.13) verwendet, die im Hinblick auf eine Implementierung hier bereits mit den plastischen Dehninkrementen formuliert wird:

$$\Delta\epsilon_{ij}^p = \Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}. \quad (3.43)$$

Diese Beziehung lässt sich in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil separieren. Der Übersichtlichkeit halber werden im Folgenden die Abkürzungen

$$p = -\sigma_m \quad \text{nach Gl. (3.2)}$$

für den hydrostatischen Druck sowie

$$q = \sigma_{VM} \quad \text{nach Gl. (3.4)}$$

für die *von Mises*-Spannung verwendet.

Damit ergibt sich aus der Fließregel Gl. (3.43) für das volumetrische Dehnungsinkrement

$$\Delta\epsilon_{kk}^p = -\Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial p}, \quad (3.44)$$

sowie für das deviatorische Inkrement

$$\Delta\epsilon_{eq}^p = \Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial q}. \quad (3.45)$$

Durch Gleichsetzen des plastischen Inkrements  $\Delta\lambda$  folgt

$$\Delta\epsilon_{kk}^p \frac{\partial\Phi}{\partial q} + \Delta\epsilon_{eq}^p \frac{\partial\Phi}{\partial p} = 0. \quad (3.46)$$

Aufgelöst nach der gesuchten Größe  $\Delta\epsilon_{kk}^p$ :

$$\Delta\epsilon_{kk}^p = -\Delta\epsilon_{eq}^p \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial p}}{\frac{\partial\Phi}{\partial q}}. \quad (3.47)$$

Die Ableitungen der Fließbedingung des *GTN*-Modells nach Gl. (3.24) ergeben sich zu

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = \frac{3q_1 q_2 f^*}{\sigma_M} \sinh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_M}\right) \quad \text{und} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = \frac{2q}{\sigma_M^2}. \quad (3.49)$$

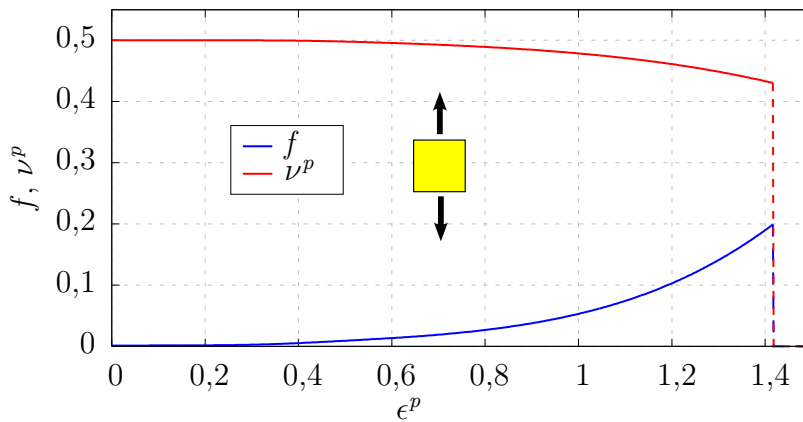
Einsetzen in (3.47) ergibt schließlich den gesuchten Zusammenhang zwischen dem isochoren äquivalenten plastischen Dehnungszinkrement  $\Delta \epsilon_{eq}^p$  und dem aus der Porenentwicklung resultierenden volumetrischen Dehnungszinkrement  $\Delta \epsilon_{kk}^p$ :

$$\Delta \epsilon_{kk}^p = \Delta \epsilon_{eq}^p \frac{3q_2 q_1 \sigma_M f^*}{2q} \sinh\left(\frac{-3q_2 p}{2\sigma_M}\right). \quad (3.50)$$

Eingesetzt in die Evolutionsgleichung für das Porenvolumen des *GTN*-Modells, Gl. (3.26), ergibt sich unter Verwendung des äquivalenten plastischen Dehnungszinkrements  $\Delta \epsilon_{eq}^p$

$$\Delta f = \left[ (1-f) \frac{3q_2 q_1 \sigma_M f^*}{2q} \sinh\left(\frac{-3q_2 p}{2\sigma_M}\right) + \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon_M^{pl} - \epsilon_N}{s_N} \right)^2} \right] \Delta \epsilon_{eq}^p. \quad (3.51)$$

Damit ist eine näherungsweise Berechnung des Gurson-Schädigungszinkrements, bestehend aus Porenwachstum  $\dot{f}_W$  und Porenneubildung  $\dot{f}_N$ , aus der äquivalenten plastischen Dehnung eines isochoren Plastizitätsmodells möglich. Dieser Methode liegt die Voraussetzung gleicher äquivalenter plastischer Dehnungszinkremente für das isochore Plastizitätsmodell und für das *GTN*-Modell zugrunde. In der Realität stimmt diese Annahme nur näherungsweise für kleine Porenvolumenanteile  $f^*$  beziehungsweise  $f$ . Mit zunehmender Porosität divergieren die Ergebnisse durch den Beitrag der volumetrischen Dehnung, siehe Abbildung 3.8.



**Abbildung 3.8:** Entwicklung von Porenvolumenanteil  $f$  und plastischer Querdehnzahl  $\nu^p$

Hier ist für ein beispielhaftes *GTN*-Material mit  $f_F = 0,2$  die Entwicklung des Porenvolumenanteils  $f$  und der plastischen Querdehnzahl  $\nu^p$  im einachsigen Zug bis zum Versagen aufgetragen. Aus Abbildung 3.8 wird deutlich, dass sich die zunehmende Porosität auf makroskopischer Ebene durch eine Abnahme der plastischen Querdehnzahl  $\nu^p$  äußert. Die Inkompatibilität der Materialmodelle (isochor vs. Porenmodell) zeigt sich also letztlich durch unterschiedliche Dehnungsfelder auf makroskopischer Ebene.

### 3.3.3 Korrektur der Dehnung für einachsigen Zug

Für den einfachen Spezialfall des einachsigen Zugs, entsprechend einer eindimensionalen Belastung, lassen sich die resultierenden Deformationen im Raum anschaulich beschreiben. Im Folgenden wird für diesen Spezialfall eine Beziehung zwischen den resultierenden äquivalenten plastischen Dehnungen der isochoren *von Mises*-Fließbedingung und der *GTN*-Fließbedingung abgeleitet. Als Voraussetzung wird hier die Äquivalenz der plastischen Dehninkremente in Zugrichtung vorgegeben, was die durch die Porosität bedingten Unterschiede der äquivalenten plastischen Dehninkremente vermeidet. Für den Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  in Hauptachsenform und seinen deviatorischen Anteil  $\mathbf{s}$  ergeben sich in diesem Fall die folgenden Darstellungen:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} + p\boldsymbol{\delta} = \sigma_1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}; \quad (3.52)$$

mit

$$p = -\frac{\sigma_{kk}}{3} = -\frac{1}{3}\sigma_1 \quad (3.53)$$

und

$$q = \sigma_{VM} = |\sigma_1|. \quad (3.54)$$

Die Fließregel der isotropen, assoziierten *von Mises*-Plastizität in inkrementeller Form nach Gl. (3.43) lässt sich erweitern zu

$$\Delta\epsilon_{ij}^p = \Delta\lambda \frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}} = \Delta\lambda \left( \frac{\partial\Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial\Phi}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial\sigma_{ij}} \right). \quad (3.55)$$

Unter Verwendung der Ableitungen

$$\frac{\partial p}{\partial\sigma_{ij}} = -\frac{1}{3} \frac{\partial\sigma_{kk}}{\partial\sigma_{ij}} = -\frac{1}{3}\delta_{ij} \quad (3.56)$$

und

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} = \frac{3}{2q} s_{ij} \quad (3.57)$$

ergibt sich aus (3.55)

$$\Delta \epsilon_{ij}^p = \Delta \lambda \left( -\frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \frac{3s_{ij}}{2q} \right). \quad (3.58)$$

Die plastische Querdehnzahl  $\nu^p$  für die orthogonalen Hauptrichtungen (1,2) ist in Dehninkrementen definiert als

$$\nu^p = -\frac{\Delta \epsilon_2^p}{\Delta \epsilon_1^p}. \quad (3.59)$$

Für die isochore *von Mises*-Plastizität ergibt sich unter der Voraussetzung eines plastischen Zustands mit  $\Phi(\sigma) = q$  für die Ableitungen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0. \quad (3.60)$$

Nach Einsetzen der bekannten Spannungskomponenten aus (3.52) in (3.58) und (3.59) erhält man das bereits bekannte Ergebnis für die isochore Plastizität

$$\nu_{iso}^p = \frac{1}{2}. \quad (3.61)$$

Für das *GTN*-Modell mit Fließbedingung  $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \sigma_M, f^*)$  nach Gl. (3.24) ergibt sich unter Verwendung ihrer Ableitungen Gln. (3.48) und (3.49)

$$\nu^p = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_M} + q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_M}\right)}{\frac{2\sigma_1}{\sigma_M} - q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_M}\right)}. \quad (3.62)$$

Damit erhält man erwartungsgemäß einen vom Porenvolumenanteil  $f^*$  abhängigen Ausdruck für die plastische Querdehnzahl im einachsigen Zug, siehe dazu auch Abbildung 3.8.

Unter Verwendung der bekannten Darstellung des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  in Hauptachsenform nach (3.52) ergibt sich mit der assoziierten Fließregel (3.43) eine Darstellung des plastischen Dehninkrementtensors  $\Delta \boldsymbol{\epsilon}^p$  für den einachsigen Zug. Davon lässt sich

ebenfalls ein deviatorischer Anteil  $\Delta \mathbf{e}^p$  abspalten:

$$\Delta \epsilon_{ij}^p = \Delta \epsilon_1^p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu^p & 0 \\ 0 & 0 & -\nu^p \end{bmatrix}, \quad (3.63)$$

$$\Delta e_{ij}^p = \Delta \epsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} \Delta \epsilon_{kk}^p \delta_{ij} = \frac{\Delta \epsilon_1^p}{3} \begin{bmatrix} 2 + 2\nu^p & 0 & 0 \\ 0 & -(1 + \nu^p) & 0 \\ 0 & 0 & -(1 + \nu^p) \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Hieraus wird das äquivalente deviatorische Dehnungsinkrement  $\Delta e_{eq}^p$  analog der äquivalenten plastischen Dehnung nach Gl. (3.5) abhängig von der plastischen Querdehnzahl  $\nu^p$  sowie des größten plastischen Hauptdehninkrements  $\Delta \epsilon_1^p$  gebildet:

$$\Delta e_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \Delta \mathbf{e}^p : \Delta \mathbf{e}^p} = \frac{2}{3} |\Delta \epsilon_1^p| (1 + \nu^p) \quad (3.65)$$

beziehungsweise

$$\Delta \epsilon_1^p = \pm \frac{3}{2} \frac{\Delta e_{eq}^p}{1 + \nu^p}. \quad (3.66)$$

Für isochore Plastizität mit  $\nu_{iso}^p = \frac{1}{2}$  ergibt sich für den betrachteten Fall der einachsigen Zugbelastung das erwartete Ergebnis, welches der Definition der äquivalenten plastischen Dehnung entspricht:

$$\Delta e_{eq}^p = |\Delta \epsilon_1^p| = \Delta \epsilon_{eq}^p. \quad (3.67)$$

Um eine Beziehung zwischen den äquivalenten plastischen Dehninkrementen der Modelle mit unterschiedlichen plastischen Querdehnzahlen für gleiche Hauptdehninkremente  $\Delta \epsilon_1^p$  zu erhalten, werden diese gleichgesetzt. Unter Verwendung von Gl. (3.61), (3.62) und (3.67) in (3.66) erhält man

$$\Delta \epsilon_{eq,GTN}^p = \Delta \epsilon_{eq,iso}^p \frac{1 + \nu_{GTN}^p}{1 + \nu_{iso}^p} = \Delta \epsilon_{eq,iso}^p \frac{2\sigma_1}{2\sigma_1 - \sigma_M q_1 q_2 f^* \sinh\left(\frac{3q_2 p}{2\sigma_M}\right)}. \quad (3.68)$$

Für eine Vereinfachung von (3.68) im Hinblick auf die Implementierung wird mit (3.2) für  $|\sigma_1| = q = \sigma_{VM}$  die *von Mises*-Spannung  $q$  eingesetzt (einachsiger Zug). Mit für moderate Porenvolumenanteile vertretbarem Fehler wird die mikroskopische Fließspannung  $\sigma_M$  mit der makroskopischen *von Mises*-Spannung  $q = \sigma_{VM}$  gleichgesetzt. Eine Linearisierung wird erreicht durch Entwicklung des sinh-Terms in einer Reihe, die mit dem linearen Glied abgebrochen wird ( $\sinh(x) \approx x$ ). Damit erhält man eine Näherung

von Gl. (3.68):

$$\Delta\epsilon_{eq,GTN}^p \approx \Delta\epsilon_{eq,iso}^p \frac{4}{4 + 3q_1 q_2^2 f^* \eta}, \quad (3.69)$$

mit der Dreiaxsigkeit  $\eta$  nach Definition in Gl. (3.1).

Gl. (3.69) kombiniert mit (3.51) ergibt das für den einachsigen Zug korrigierte Schädigungsinkrement des *GTN*-Modells, berechnet aus einem isochoren äquivalenten plastischen Dehnungsinkrement. Mit

$$A = \left[ (1 - f) \frac{3q_2 q_1 \sigma_M f^*}{2q} \sinh\left(\frac{-3q_2 p}{2\sigma_M}\right) + \frac{f_N}{s_N \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon_M^{pl} - \epsilon_N}{s_N}\right)^2} \right] \quad (3.70)$$

aus Gl. (3.51) ergibt sich

$$\Delta f = A \frac{4}{4 + 3q_1 q_2^2 f^* \eta} \Delta\epsilon_{eq,iso}^p. \quad (3.71)$$

Damit wird das Porenvolumeninkrement  $\Delta f$  des *GTN*-Modells für den einachsigen Zug korrekt bestimmt. Leider gilt die beschriebene Herleitung nur für den Spezialfall des einachsigen Zugs, sie lässt sich nicht auf allgemeine Spannungszustände erweitern. Grund dafür sind die resultierenden *inkompatiblen* Dehnungsinkremente, die eine Anpassung der Beschreibung nur begrenzt erlauben. Notwendig ist die Vorgabe der gleichzusetzenden Dehnungsmaße in ausgewählten Hauptrichtungen, welche eine exakte Korrektur für Porenvolumenanteile  $f^* > 0$ , respektive  $\dot{\epsilon}_{kk}^p \neq 0$  nur für ausgesuchte Spannungszustände wie einachsigen oder biaxialen Zug erlauben.

Unter anderem aufgrund dieses Umstands wurde die begonnene Entwicklung der Verwendung des *GTN*-Modells in der Prozesskette nicht weiter verfolgt. Im Weiteren wurde stattdessen die Entwicklung des phänomenologischen, mit der Vorgabe isochorer Plastizität kompatiblen Modells GISSMO betrieben, siehe Abschnitt 5.





# 4

---

## Instabilität und Lokalisierung

In diesem Abschnitt wird auf die bei der numerischen Simulation großer plastischer Deformationen auftretenden Phänomene von Instabilität und lokalisierter Deformation eingegangen. Im praktischen Sprachgebrauch werden beide Bezeichnungen oft für das Verlassen eines Zustands gleichförmiger plastischer Deformation in einem Körper unter äußerer Belastung verwendet. Demgegenüber findet sich in der Literatur meist eine Abgrenzung zwischen den Begriffen *Stabilität* und *Lokalisierung*. Ersterer beschreibt allgemein das Verhalten von Lösungsalgorithmen, Stoffgesetzen oder mechanischen Systemen, siehe auch (BELYTSCHKO U. A. 2000). *Lokalisierung* hingegen bezeichnet die Ausbildung von diskreten Bändern oder Bereichen in einem Körper, in dem sich die Dehnungsinckremente, ausgehend von einer gleichförmigen plastischen Deformation, konzentrieren. Je nach Problemstellung können Diskontinuitäten im Dehnungs- respektive Dehnratenfeld auftreten, während das Verschiebungsfeld kontinuierlich bleibt (JIRÁSEK 2009). Materielle Instabilität führt üblicherweise zu Lokalisierung unter fortgesetzter Deformation. Dies kann speziell bei Materialien mit auf mikroskopischer Ebene vorhandenen Entfestigungsmechanismen beobachtet werden. Umgekehrt scheint das Auftreten von lokalisierter Deformation nicht notwendigerweise an die Existenz materieller Instabilität gekoppelt zu sein.

Die Analyse der mit Instabilität und Lokalisierung verbundenen Phänomene geht auf die Arbeiten von *Hadamard* zurück, der die Bedingungen für eine verschwindende Ausbreitungsgeschwindigkeit von Beschleunigungswellen in elastischem Material beschrieb. Eine anschauliche Darstellung findet sich auch bei SCHREYER UND CHEN (1986). HILL (1958, 1961) entwickelte die grundlegenden Bedingungen für die Existenz eindeutiger und stabiler Lösungen des Randwertproblems unter Verwendung von elastisch-plastischen Stoffgesetzen.

Im Folgenden wird der Schwerpunkt, wie bereits zuvor, auf die Behandlung dieser Phänomene in duktilen, also plastisch deformierbaren Metallen in Form von Blechhalbzeugen unter ebener Belastung gelegt.

### 4.1 Beschreibung und Phänomenologie

Auch hier wird wieder auf den bereits in Abschnitt 3.1 vorgestellten Zugversuch zurückgegriffen. Als markanter Punkt findet sich in der Kurve der technischen (Längs-) Spannung  $\sigma_l$  über der technischen Dehnung  $\epsilon_l$  der Punkt der maximalen Spannung wieder, die als Zugfestigkeit  $R_m$  bezeichnet wird. Nach Erreichen dieses Punktes fällt die Spannungstragfähigkeit der Probe wieder ab. Diesem Verhalten liegt die Ausbildung von lokalisierter plastischer Deformation zugrunde, die sich – je nach Werkstoff und Probenform – zunehmend in einem Band endlicher Breite konzentriert. Die weitere plastische Deformation im Rest der Probe hört praktisch auf. Die Abnahme der makroskopischen Längsspannung führt im Weiteren zu einer elastischen Entlastung in den nicht zum Lokalisierungsbereich gehörenden Bereichen der Probe. Je nach verwendeter Messlänge für die makroskopische technische Dehnung erfolgt der Bruch der Probe nach nur geringer weiterer Zunahme der makroskopischen Längsdehnung, während in der Lokalisierungszone die lokalen Dehnungen stark zunehmen.

Ein weiteres Phänomen der Lokalisierung ist die Ausbildung von sogenannten *Lüders-Bändern* kurz nach dem Beginn des plastischen Fließens, siehe auch STÖREN UND RICE (1975). Diese Erscheinung tritt vor allem bei unlegierten, weichen Stahlblechen auf und steht in Zusammenhang mit der Beobachtung einer ausgeprägten Fließgrenze („Fließplateau“) im einachsigen Zug. Hier bleibt die Längsspannung nach Beginn des plastischen Fließens kurzzeitig konstant oder fällt wieder auf einen niedrigeren Wert ab. Dadurch bilden sich örtlich begrenzte Zonen lokalisierter Deformation, die unter weiter zunehmender plastischer Deformation wieder verschwinden können. Begründet wird dies mit dem plötzlichen Lösen von Versetzungen auf der materiellen Mikroebene, was zu einem kurzzeitigen Abfallen der Fließspannung führt. Als nur für den Bereich sehr kleiner plastischer Dehnungen auftretender Effekt wird die Ausbildung der Lüders-Bänder im Folgenden nicht weiter behandelt, da der zugrundeliegende physikalische Effekt im Allgemeinen nicht zur Ausbildung permanenter Lokalisation unter großer plastischer Deformation führt (RICE 1976).

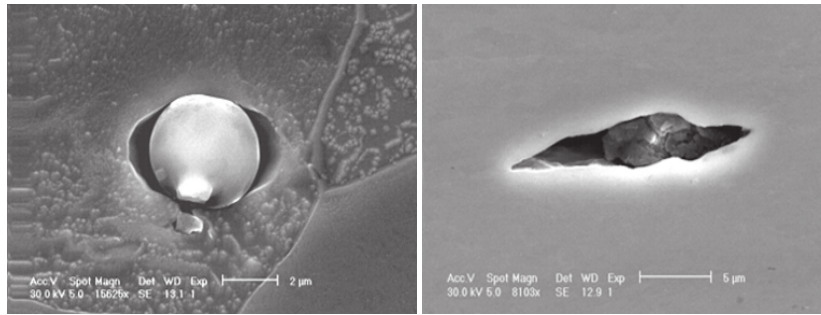
### 4.1.1 Unterschiede zwischen Metallen und Beton sowie Geomaterialien

In diesem Abschnitt wird kurz auf die sich stark unterscheidenden mechanischen Eigenschaften dieser Werkstoffe eingegangen. Die Unterschiede im makroskopischen Verhalten sind durch den grundlegend verschiedenen Aufbau der Mikrostruktur begründet. In der Literatur finden sich zahlreiche Arbeiten, die sich mit der numerischen Stabilität und der Modellierung von Lokalisierung für Beton und Geomaterialien beschäftigen. Eine Übersicht existierender Modelle findet sich beispielsweise bei JIRÁSEK (2009) oder HAUFE (2001).

Der Werkstoff Beton wird zu den *kohäsiven Reibungsmaterialien* gezählt. Die physikalischen Vorgänge auf der Mikroebene beinhalten unter Deformation oft die Ausbildung von Mikrorissen bereits unter relativ kleinen Dehnungen. Der Werkstoff ist inhomogen aufgebaut, in der Regel bestehend aus der Zementmatrix und Zuschlagstoffen die in Form von diskreten Teilchen im Werkstoff existieren. Das macht eine Homogenisierung notwendig, um die Eigenschaften auf makroskopischer Ebene beschreiben zu können. Die frühzeitige Ausbildung von Mikrorissen, die sich zu einer Rissprozesszone vereinigen und schließlich zum makroskopischen Versagen führen, resultiert damit in einem *makroskopisch entfestigenden* Verhalten. Für die Modellierung macht das geeignete Maßnahmen zur Lokalisierungsbegrenzung notwendig. Deswegen finden sich zahlreiche Ansätze für die Behandlung dieser Thematik im Kontext der Modellierung von Beton, deren Übertragung auf metallische Werkstoffe nur unter Einschränkungen möglich ist.

Ähnliches gilt für zahlreiche Geomaterialien wie Sande und Erden. Hier ist bedingt durch die granulare Struktur bereits von vornherein die Existenz von Trennflächen vorgegeben. Das makroskopische Verhalten ist damit bestimmt durch eine Kombination der aus Kohäsion resultierenden Kräfte, und den durch den hydrostatischen Druckzustand bestimmten Kräften aus dem inneren Haft- und Reibungsverbund der Partikel.

Für metallische Werkstoffe, insbesondere für die hier vorwiegend behandelten duktilen Blechwerkstoffe für den Karosseriebau, werden andere Beobachtungen für das Werkstoffverhalten auf mikroskopischer Ebene gemacht. TAŞAN (2010) untersuchte dazu die Veränderungen der Mikrostruktur zweier Blechwerkstoffe bis zum Auftreten von lokalisierter Deformation und nachfolgendem Versagen. Für ein ferritisches Stahlblech (IF) mit homogener Struktur und dementsprechend wenigen, für die Initiierung von Schädigung aktivierbaren Mechanismen ergab sich bis zum Zeitpunkt der Lokalisierung keine erkennbare Entwicklung von Schädigung in der Mikrostruktur. Die Aktivierung der materialinternen Schädigungsmechanismen findet im Wesentlichen nach der Ausbildung von lokalisierter Deformation unter Zugbelastung statt, siehe Abbildung 4.1. Der dominierende Mechanismus ist unter den untersuchten Zugbelastungen das Wachstum von



**Abbildung 4.1:** Links: Porenwachstum ausgehend von Partikel unter einachsigen Zug; Rechts: Porenwachstum ausgehend von Partikel unter biaxialem Zug. Ferritisches Stahlblech (IF), aus TAŞAN (2010)

Mikroporen, die beispielsweise an harten Einschlüssen entstehen. Ebenfalls untersucht wurde ein Dualphasenstahl mit Phasen unterschiedlicher Deformationscharakteristik. Hier kommen neben dem weichen Ferrit sehr harte Martensitkörner vor. Das ergibt große interne Steifigkeitsunterschiede und damit leichter zu aktivierende Schädigungsmechanismen. Es zeigt sich, dass diese Mechanismen auch schon bei Dehnungszuständen unterhalb der Lokalisierungsdehnung aktiviert werden können. Als Resultat ergibt sich – ebenfalls in Übereinstimmung mit Messungen – eine verminderte Restdehnfähigkeit im postkritischen Bereich. Für im Rahmen der oben genannten Arbeit nicht untersuchte Stähle noch höherer Festigkeit wird in der Praxis auch sprödes Bruchverhalten ohne vorhergehende Lokalisierung beobachtet.

Trotz der festgestellten Schädigungsentwicklung schon vor der Ausbildung von Lokalisierung wird entfestigendes Verhalten im Sinne eines plastischen Modul  $H < 0$  nach Gl. (4.19), respektive  $\dot{\kappa} < 0$  nach Gl. (2.14) für Metalle nicht festgestellt. In der Literatur finden sich ausschließlich Messungen – und auf Kristallplastizitätsmodellen basierende Verfestigungskurven – die einen monoton steigenden Verlauf der Fließspannung über der äquivalenten plastischen Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$  zeigen. Davon ausgehend unterscheiden sich die betrachteten metallischen Werkstoffe grundlegend von den zuvor erwähnten Beton- und Geomaterialien: Ein negativer plastischer Tangentenmodul  $H < 0$  mit Ausnahme des für diese Betrachtung nicht relevanten Bereiches sehr kleiner plastischer Dehnungen (*Lüders-Bänder*) ist nicht zu erwarten.

## 4.2 Kriterien für die Instabilität

In der Literatur finden sich zahlreiche Ansätze zur Beurteilung der Stabilität von Materialgesetzen. Allgemein ist die Definition von Stabilität abhängig vom Betrachter und der Art des betrachteten Systems, siehe auch BELYTSCHKO U. A. (2000). Die hier vorgenom-

meine Betrachtung orientiert sich an der von *Lyapunow* entwickelten Stabilitätstheorie. Sie besagt in einer allgemeinen Weise, dass ein System dann stabil ist wenn eine kleine Störung der Anfangswerte zu einer endlichen Variation der Ergebnisse führt, siehe auch ARGYRIS UND MLEJNEK (1991).

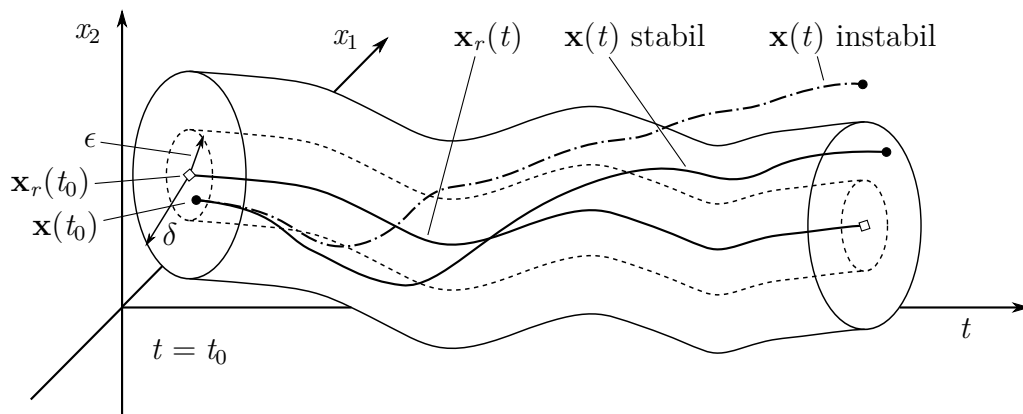
Betrachtet wird ein beliebiges zeitkontinuierliches System mit Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ , das im betrachteten Bereich  $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$  stetig ist. Man geht von der Lösung  $\mathbf{x}_r(t)$  des Systems für Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_r(t_0)$  aus. Wenn (hier in einer skalaren Norm  $\epsilon \geq 0$  gemessene) kleine Änderungen der Anfangsbedingungen eingebracht werden, ergibt sich für diese Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}(t_0)$  die Lösung  $\mathbf{x}(t)$ . Das System wird als stabil bezeichnet, wenn für diese kleinen Abweichungen der Anfangsbedingungen

$$\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_r(t_0)\| \leq \epsilon \quad (4.1)$$

ein  $\delta = C\epsilon$  existiert, sodass

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_r(t)\| < \delta \quad \forall t > t_0. \quad (4.2)$$

Die Gültigkeit für alle  $t > t_0$  impliziert  $C \neq f(t)$ , siehe auch Abbildung 4.2.



**Abbildung 4.2:** Definition der *Lyapunow*-Stabilität für ein zeitabhängiges System mit zwei Variablen

Vereinfacht ausgedrückt wird ein System nach dieser Definition als stabil bezeichnet, wenn aus kleinen Änderungen der Anfangsbedingungen kleine Abweichungen der Lösung über der Zeit resultieren.

### 4.2.1 Stabilität und Objektivität

In einer eher mathematisch orientierten Betrachtungsweise wird das Auftreten von Instabilität im Kontinuum allgemein mit einem Wechsel des Typs der zugrundeliegenden Differentialgleichungen in Verbindung gebracht. Im Folgenden wird ein eindimensionales System unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte betrachtet, siehe auch FEUCHT (1998) und BELYTSCHKO U. A. (2000). Die Kombination von Impulsbilanz Gl. (2.1), Kinematik (2.7) und Stoffgesetz (2.9) ergibt den als Wellengleichung bekannten Zusammenhang für die Verschiebung  $u(x,t)$ :

$$C \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (4.3)$$

Es handelt sich um eine partielle Differentialgleichung (PDE) zweiter Ordnung, die sich nach ihren Charakteristiken klassifizieren lässt, siehe auch FERZIGER (1981). Diese bezeichnen – je nach Ordnung der betrachteten PDE – Linien, Flächen oder Hyperflächen, auf denen in Normalenrichtung Diskontinuitäten in der Lösung existieren können. Eine PDE zweiter Ordnung lässt sich entlang einer Charakteristik zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduzieren. Die Existenz reeller Charakteristiken bedeutet daher, dass bestimmte Richtungen existieren, entlang denen sich Störungen (wie beispielsweise eine Wellenfront) ausbreiten können. Unter der Annahme einer Dichte  $\rho > 0$  ergibt sich für Gl. (4.3) folgende Klassifizierung abhängig vom Vorzeichen des materiellen Tangentenmoduls  $C$ :

- Für  $C > 0$  ist die Gleichung *hyperbolisch*. Es existieren zwei reelle Gruppen von Charakteristiken, entlang denen sich Störungen mit der Geschwindigkeit  $c = \sqrt{\frac{C}{\rho}}$  ausbreiten können.
- Für  $C < 0$  ist die Gleichung *elliptisch*. Es existieren keine reellen Charakteristiken, dementsprechend macht die Definition einer Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen keinen Sinn. Jeder Punkt im betrachteten Bereich wird von Änderungen an jedem anderen Punkt ohne Zeitabhängigkeit beeinflusst.
- Für  $C = 0$  ergibt sich der Grenzfall der *parabolischen* PDE, für den nur eine Gruppe von reellen Charakteristiken existiert. Die gedachte Ausbreitungsgeschwindigkeit von Störungen würde entlang dieser Charakteristiken gegen unendlich gehen.

Hier wird deutlich, dass für das oben beschriebene dynamische Problem der Übergang von materieller Verfestigung ( $C > 0$ ) zu Entfestigung mit  $C < 0$  einen Wechsel des Typs der zugrundeliegenden PDE von hyperbolisch zu elliptisch (*Verlust der Hyperbolizität*) bedeuten würde (BELYTSCHKO U. A. 2003). Damit verliert die Beschreibung ihre physikalische Relevanz, das Randwertproblem wäre dann *schlecht gestellt* – siehe auch BAŽANT UND CEDOLIN (1991).

Für statische Probleme, denen im Allgemeinen eine elliptische PDE zugrunde liegt, erfolgt im beschriebenen eindimensionalen Fall für den Übergang zu einem negativen Tangentenmodul  $C$  der Wechsel von elliptischer zu hyperbolischer PDE (*Verlust der Elliptizität*).

BAŽANT UND BELYTSCHKO (1985) entwickelten eine exakte Lösung für ein eindimensionales Problem der Wellenausbreitung in einem Stab unter Verwendung von entfestigendem Material. Als Ergebnis stellen sie fest, dass das Auftreten von Entfestigung in einem klassischen, lokalen (oder auch *Boltzmann*)-Kontinuum aus mathematischer Sicht durchaus zu sinnvollen Lösungen führen kann. Im betrachteten eindimensionalen Fall kann für gegebene Anfangs- und Randbedingungen eine Lösung in geschlossener Form gefunden werden. Wie erwartet, tritt mit Erreichen der Entfestigung Lokalisierung auf, was dazu führt, dass sich die Deformation in einem Bereich der Länge null konzentriert. Damit wächst die Dehnung in diesem Punkt gegen unendlich, während die im post-kritischen Dehnungsbereich dissipierte Arbeit gegen Null geht. Das widerspricht den Beobachtungen aus Versuchen, wonach Lokalisierung und nachfolgendes Versagen immer mit Dissipation verbunden ist, und Lokalisierung in Bereichen mit endlicher, materialspezifischer Ausdehnung stattfindet. Damit einhergehend wird die Notwendigkeit von Regularisierungsmaßnahmen begründet, um eine physikalisch sinnvolle Modellierung der Lokalisierung zu erreichen.

### 4.2.2 Der Akustiktensor

Wie im vorhergehenden Abschnitt dargestellt, ist das Auftreten von Instabilität in einem mechanischen System eng verknüpft mit dem Verhalten des Konstitutivmodells und dem resultierenden materiellen Tangentenmodul. Für die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Formulierungen, die auf einer Notation unter Annahme kleiner Deformationen beruhen (siehe Abschnitt 2.1), kann eine vereinfachte Analyse vorgenommen werden. In diesem Kontext kann das *Stabilitätspostulat* von DRUCKER (1959) als Basis herangezogen werden. Es besagt, dass die an einem Körper verrichtete Arbeit durch Änderung des Verschiebungsfelds größer oder gleich null sein muss:

$$\dot{\epsilon}^T \dot{\sigma} \geq 0 \quad \forall \dot{\epsilon}. \quad (4.4)$$

STOUGHTON UND YOON (2006) zeigen, dass diese Bedingung für Elastoplastizität mit einer assoziierten Fließregel immer erfüllt ist, sofern die Steigung der Verfestigungsfunktion für isotrope Verfestigung positiv ist ( $\partial\sigma_Y/\partial\epsilon_{eq}^p > 0$ ). Als weitere notwendige Bedingung wird die Konvexität der durch die Fließbedingung aufgespannten Fließfläche genannt. DE BORST U. A. (1993) führen in diesem Zusammenhang das Beispiel des einachsigen Zugversuchs an. Für die *nominellen* Spannungs- und Dehnungsmaße wird

Ungleichung (4.4) erfüllt, solange die Steigung der *homogenisierten* Kurve der Längsspannung über der Längsdehnung positiv ist. Mit dem Begriff homogenisiert wird hier die Vernachlässigung der anfänglichen Inhomogenität im Material sowie einer ungleichmäßigen Spannungsverteilung aus den Randbedingungen der Probe bezeichnet.

Im Vorgriff auf die folgenden Ausführungen sei darauf verwiesen, dass die üblicherweise in der Praxis gemessene technische Dehnung im Verlauf des Zugversuchs bei duktilem Material ihre Aussagekraft verliert. Die technische (oder Ingenieur-)Dehnung wird durch den Quotienten der über eine fixe Messlänge bestimmten Verlängerung zur anfänglichen Messlänge bestimmt und verliert beim Auftreten von Lokalisierung den Bezug zur lokalen Dehnung. DE BORST U. A. (1993) bezeichnen dies als Verlust der physikalischen Signifikanz. Gleiches gilt für die technische oder Ingenieurspannung, die als Quotient der Längskraft zur anfänglichen Querschnittsfläche bestimmt wird. Sie erlaubt durch die Ausbildung von inhomogener Deformation im postkritischen Bereich keinen Rückschluss mehr auf die lokale Belastung des Werkstoffs in diesem Bereich.

Ausgehend von Gl. (4.4) kann für inkrementell formulierte Beziehungen von Spannung und Dehnung der materielle Tangentenmodul eingesetzt werden:

$$\dot{\epsilon}^T \mathbf{C} \dot{\epsilon} \geq 0. \quad (4.5)$$

Hier lässt sich der Grenzfall der Gleichheit mit dem Beginn der materiellen Instabilität verbinden. Diese wird erreicht beim Verlust der Positiv-Definitheit von  $\mathbf{C}$ :

$$\det(\mathbf{C} + \mathbf{C}^T) = 0. \quad (4.6)$$

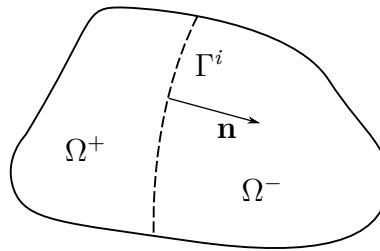
Für – im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich betrachtete – Materialgesetze mit assoziiertem plastischen Potential und konvexer Fließfläche, ergibt sich ein symmetrischer materieller Tangentenmodul. Damit reduziert sich (4.6) zu

$$\det(\mathbf{C}) = 0. \quad (4.7)$$

Diese Betrachtung bezieht sich auf Stabilität am Materialpunkt.

Die nachfolgende Beschreibung der Bedingungen für das Auftreten einer Unstetigkeit im Kontinuum orientiert sich an der ausführlichen Herleitung in JIRÁSEK (2009). Betrachtet wird ein Körper  $\Omega$  mit einer inneren Diskontinuitätsfläche  $\Gamma^i$ , die den Körper in zwei Bereiche  $\Omega^+$  und  $\Omega^-$  teilt, siehe Abbildung 4.3. Die Grenzfläche markiert dabei einen potentiell diskontinuierlichen Verlauf beispielsweise der Größen Dehnrates und Spannung. Trotzdem sind die diskontinuierlichen Verläufe von Spannungsrate und Dehnrates über die Gleichgewichtsbedingungen miteinander verknüpft. Zunächst wird der Zusammenhang einer Verschiebungsgröße betrachtet: Die Betrachtung des räumlichen Gradienten





**Abbildung 4.3:** Körper mit Diskontinuität  $\Gamma^i$

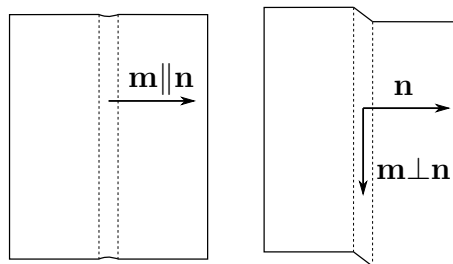
des Geschwindigkeitsfelds am Materialpunkt ergibt als Folge aus der Kontinuitätsbedingung, dass sich nur die senkrecht auf der Diskontinuitätsfläche stehenden Anteile sprunghaft ändern dürfen. Anschaulich ergibt sich für die beiden Grenzwerte (+/-) des Gradienten der Komponente  $v_1$ :

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{x}}\right)^+ = \left(\frac{\partial v_1}{\partial \mathbf{x}}\right)^- + c_1 \mathbf{n}; \quad (4.8)$$

mit dem skalaren Wert  $c_1$ , der die Größe des Sprungs wiedergibt. Übertragen auf den vollständigen Gradienten des Geschwindigkeitsfelds  $\mathbf{v}$  ergibt sich

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right)^+ = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}\right)^- + \mathbf{c} \otimes \mathbf{n}. \quad (4.9)$$

Hier ist  $\mathbf{c}$  ein Tensor erster Stufe, der unter Verwendung seiner Norm  $e = \|\mathbf{c}\|$  aufgespalten werden kann:  $\mathbf{c} = e\mathbf{m}$ . Der so normierte Vektor  $\mathbf{m}$  wird als *Polarisationsvektor* bezeichnet, welcher die Richtung der Diskontinuität charakterisiert, siehe Abbildung 4.4. Zwischen den dargestellten Grenzfällen Mode I und II sind in der Ebene beliebige Orientierungen des Vektors  $\mathbf{m}$  möglich, die als *gemischte* Moden bezeichnet werden.



**Abbildung 4.4:** Lokalisierungsmoden in der Ebene: symmetrisch, Mode I (li.); antisymmetrisch, Mode II (re.)

Unter der im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich verwendeten Annahme kleiner Verzerrungen, für die nach Gl. (2.7) der symmetrische Anteil  $\epsilon$  des linearisierten Verschie-

bungsgradienten  $\mathbf{H}$  verwendet wird, ergibt sich aus (4.9)

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- + e (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n})_{sym} . \quad (4.10)$$

Das Kräftegleichgewicht erfordert, dass die senkrecht auf  $\Gamma^i$  wirkenden Spannungsraten im Gleichgewicht stehen müssen:

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- . \quad (4.11)$$

Unter Verwendung eines inkrementell linearen Stoffgesetzes nach Gl. (2.9) ergibt sich

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{C}^+ : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^+ \quad \text{sowie} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- = \mathbf{C}^- : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- . \quad (4.12)$$

Durch Einsetzen von (4.12) und (4.10) in (4.11) erhält man

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^+ : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- + \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^+ : (\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}^- : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^- . \quad (4.13)$$

Unter der Annahme, dass für eine entstehende Diskontinuität das Stoffgesetz auf beiden Seiten von  $\Gamma^i$  gleich ist ( $\mathbf{C}^+ = \mathbf{C}^-$ ) erhält man nach Auflösen unter Berücksichtigung der kleinen Symmetrie von  $\mathbf{C}$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} e = 0 . \quad (4.14)$$

Unter der Voraussetzung von  $e \neq 0$  erhält man ein homogenes Eigenwertproblem für den Tensor zweiter Stufe  $\mathbf{Q}$  mit

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} ; \quad (4.15)$$

der als *Akustiktensor* oder auch als *Lokalisierungstensor* bezeichnet wird. Nichttriviale Lösungen existieren, wenn  $\mathbf{Q}$  singularär ist:

$$\det(\mathbf{Q}) = 0 . \quad (4.16)$$

In diesem Fall ist  $\mathbf{m}$  Eigenvektor von  $\mathbf{Q}$  zum Eigenwert 0. Die physikalische Interpretation von  $\mathbf{Q}$  ist, dass die Eigenwerte die Ausbreitungsgeschwindigkeit von kleinen Störungen oder Wellen durch das Gebiet beschreiben. Die zugehörigen Eigenvektoren (Polarisationsvektoren) geben die Art der Welle wieder. Um zu prüfen ob eine Diskontinuität zu erwarten ist, muss also Gl. (4.16) für alle in Frage kommenden Orientierungen  $\mathbf{n}$  nach Gl. (4.15) abgeprüft werden.

Im Folgenden wird kurz auf die Behandlung von isotroper, assoziierter Elastoplastizität mit Fließbedingung nach *von Mises* eingegangen. Die Fließbedingung analog Gl. (2.12),

respektive Gl. (3.9) mit isotroper Verfestigung, ergibt sich zu

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}) = \sigma_{VM} - \sigma_Y(\epsilon_{eq}) = 0; \quad (4.17)$$

mit der Ableitung

$$\boldsymbol{\Phi}' = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2\sigma_{VM}} \mathbf{s}. \quad (4.18)$$

Enthalten ist der deviatorische Anteil  $\mathbf{s}$  des *Cauchy*-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  nach Gl. (3.3). Für assoziierte Plastizität wird das plastische Potential gleich der Fließbedingung gesetzt. Damit ist der nach Gl. (2.13) die Richtung des plastischen Fließens bestimmende Tensor  $\mathbf{r}$  (*Fließregel*) die Ableitung der Fließbedingung:  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\Phi}'$ . Für ausschließlich von der äquivalenten plastischen Dehnung  $\epsilon_{eq}$  abhängige, isotrope Verfestigung ergibt die Ableitung nach den Verfestigungsvariablen analog Gl. (2.15)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = -\frac{d\sigma_Y(\epsilon_{eq})}{d\epsilon_{eq}} = -H(\epsilon_{eq}) \quad (4.19)$$

den skalaren plastischen Modul  $H$ . Dieser kann anschaulich als Steigung der isotropen Verfestigungskurve identifiziert werden.

Wie bereits in Abschnitt 4.1.1 angedeutet, ist für die hier betrachteten metallischen Werkstoffe in der Regel materielle Verfestigung, also  $H > 0$  zu erwarten. Unter der Voraussetzung von assoziierter Plastizität ist dann der materielle Tangentenmodul  $\mathbf{C}$  und damit auch der Akustiktensor  $\mathbf{Q}$  positiv definit. Damit sind für diese Werkstoffe unter den obigen Bedingungen keine Diskontinuitäten auf materieller Ebene zu erwarten, siehe auch JIRÁSEK (2009).

## 4.3 Lokalisierung

Die im vorhergehenden Abschnitt dargestellten Methoden beschreiben die notwendigen Voraussetzungen für die Entwicklung von Instabilität auf Materialpunktebene. Dort ist unter normalen Bedingungen für die betrachteten Werkstoffe keine (materielle) Instabilität zu erwarten. Trotzdem tritt bei der plastischen Verformung von Blechwerkstoffen selbstverständlich Lokalisierung im makroskopischen Maßstab auf. Der Grund für diese scheinbare Diskrepanz ist in den unterschiedlichen Betrachtungsebenen zu suchen: Beim Sprung von der Materialpunktebene auf die Strukturebene eröffnen sich andere Mechanismen, die eine *strukturelle Instabilität* in Form von *Lokalisierung* erlauben.

### 4.3.1 Phänomenologische Beschreibung

In der Umformtechnik werden die mit dem Überbegriff *Lokalisierung* beschriebenen Phänomene üblicherweise als Kriterium für Versagen beziehungsweise als nicht akzeptabler Umformfehler verstanden. Eine Abgrenzung erfolgt hier in der Regel zwischen zwei verschiedenen Erscheinungsformen der Lokalisierung, die sich für zahlreiche duktile Werkstoffe beobachten lassen:

- diffuse Einschnürung
- (vollständig) lokalisierte Einschnürung.

Hierbei bezeichnet der Begriff der *diffusen Einschnürung* allgemein die Ausbildung eines nicht mehr gleichförmigen Verformungszustands in einer Probe, ausgehend von einem homogenen Verformungsfeld. Diese Definition ist in erster Linie für einachsige Zugproben anschaulich, wo der Beginn der diffusen Einschnürung mit der Gleichmaßdehnung identifiziert werden kann. Nachfolgend bildet sich in flachen Zugproben aus Blechwerkstoffen eine Zone, in der die Dehnung stärker zunimmt als in den anderen Probenbereichen. Sichtbar wird dies durch die Ausbildung einer Krümmung an den bis dahin parallelen Flanken der Probe sowie durch die in diesem Bereich zunehmende Dickendehnung. Diese Prozesszone hat bei Zugproben zu Beginn etwa die Größenordnung der Probenbreite. Der Beginn der diffusen Einschnürung kann als Verzweigungspunkt von einem gleichförmigen stabilen Deformationsmodus hin zu einer nicht mehr gleichförmigen Deformation betrachtet werden. Ab hier nimmt mit zunehmender Verformung die aufzuwendende Kraft ab, was als *strukturelle Instabilität* betrachtet werden kann.

In Abgrenzung dazu bezeichnet die *lokalisierte Einschnürung* die Konzentration der Verformung in einem kleinen Bereich endlicher Länge. Die Größe dieses Bereichs wird allgemein als werkstoffabhängig und konstant angenommen, sie bewegt sich für die betrachteten metallischen Werkstoffe in der Größenordnung  $< 1\text{ mm}$ , während beispielsweise für Geomaterialien wie Felsen auch Größenordnungen  $> 1\text{ m}$  beobachtet werden können (JIRÁSEK 2009). Für zahlreiche Materialien und Belastungszustände geht der Ausbildung lokalisierter Deformation eine diffuse Einschnürung voraus, die mit fortschreitender Belastung einen stetigen Übergang zur vollständigen Lokalisierung beschreibt.

### 4.3.2 Diffuse Einschnürung nach Swift sowie Xue

Wie bereits erwähnt, lässt sich für den einfachen Fall der einachsigen Zugbelastung der Beginn diffuser Einschnürung anschaulich mit der Gleichmaßdehnung identifizieren. In der üblichen Auswertung solcher Versuche wird die resultierende Zugkraft über der Verlängerung des Messquerschnitts aufgetragen, also Kraft über Weg. Äquivalent dazu ist

die Darstellung in technischen (oder Ingenieur-)Spannungen, respektive Dehnungen, die einfach durch Division durch den Anfangsquerschnitt der Probe, beziehungsweise die Anfangsmesslänge gebildet werden. Hier entspricht die Gleichmaßdehnung dem Dehnungswert, bei welchem das Spannungsmaximum erreicht wird. Diese einfache, nur für den betrachteten einachsigen Zug taugliche Bedingung wird auch als *Considère*-Kriterium bezeichnet.

SWIFT (1952) verallgemeinert diese Bedingung zur analytischen Definition des diffusen Einschnürungsbeginns für beliebige andere Belastungszustände. Im eindimensionalen Fall lautet die Bedingung für das Erreichen des Kraftmaximums in der Probe  $dF = 0$ . Ausgeschrieben als totales Differential mit der wahren (Cauchy-) Spannung  $\sigma$  und der Querschnittsfläche  $A$ :

$$dF = \sigma dA + Ad\sigma = 0; \quad (4.20)$$

respektive

$$\frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{dA}{A} = 0 \quad \forall(A, \sigma) \neq 0. \quad (4.21)$$

Unter Ausnutzung der Volumenkonstanz mit  $\frac{dA}{A} = -d\epsilon_p$  folgt daraus das bekannte Kriterium für diffuse Einschnürung

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = \sigma. \quad (4.22)$$

Für die Übertragung auf allgemeine Spannungszustände werden im Folgenden wieder das Hauptspannungsverhältnis  $a$  nach Gl. (3.8) sowie das Verhältnis der Hauptdehnraten  $b$  nach Gl. (3.6) verwendet.

Damit ergibt sich das Kriterium für die maximale Kraft in allgemeiner Form:

$$\frac{\partial \sigma_{VM}}{\partial \epsilon_p} - \sigma_{VM} \frac{2 - a + (2a - 1)ab}{2(1 + ab)\sqrt{1 - a + a^2}} \leq 0. \quad (4.23)$$

Ein anderer Ansatz zur Beschreibung desselben Phänomens wird von XUE (2010) sowie XUE UND BELYTSCHKO (2010) gewählt. Betrachtet wird das Maximum der verrichteten plastischen Leistung

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \sigma_{VM} \dot{\epsilon}_{eq}. \quad (4.24)$$

Als notwendige Bedingung für ein Extremum gilt:

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \epsilon_{eq}} = 0. \quad (4.25)$$

Für assoziierte *von Mises*-Plastizität fällt dieses Maximum durch die Verwendung der leistungskonjugierten Größen *von Mises*-Spannung sowie äquivalente plastische Dehnung für den einachsigen Zug mit dem *Swift*-Kriterium zusammen. Unter der Annahme eines konstanten Deformationszustands sowie assoziierter Plastizität ergibt sich für Gl. (4.25)

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \epsilon_{eq}^p} = \dot{\epsilon}_{eq} \frac{\partial \sigma_{VM}}{\partial \epsilon_{eq}} + \sigma_{VM} \frac{\partial \dot{\epsilon}_{eq}}{\partial \epsilon_{eq}}; \quad (4.26)$$

mit

$$H = \frac{\partial \sigma_{VM}}{\partial \epsilon_{eq}} \quad \text{plastischer Verfestigungsmodul analog Gl. (4.19)} \quad (4.27)$$

$$\theta_L = -\frac{1}{3} \arcsin \left( \frac{27 J_3}{2 \sigma_{VM}^3} \right) \quad \text{Lodewinkel.} \quad (4.28)$$

Damit ergibt sich als Bedingung für die diffuse Einschnürung aus Gl. (4.26)

$$H - \sigma_{VM} \cos \left( \theta_L + \frac{\pi}{6} \right) \leq 0. \quad (4.29)$$

Diese ist eine auf allgemeine Deformationszustände verallgemeinerte Fassung des *Considère*-Kriteriums, die statt auf dem Maximum der Längskraft auf dem Maximum der plastischen Leistung  $\mathcal{P}$  basiert. XUE (2010) stellt allerdings fest, dass ein solches Kriterium, angewendet auf ein reines  $J_2$ -Plastizitätsmodell ohne Schädigungsformulierung, nicht in der Lage ist, die in Versuchen beobachteten diffusen Einschnürungen korrekt wiederzugeben.

### 4.3.3 Lokalisierte Einschnürung nach Hill

Eine der grundlegenden Abhandlungen zur Beschreibung lokalisierter Einschnürung stammt von HILL (1952). Die vollständig lokalisierte plastische Deformation wird mathematisch idealisiert als Auftreten einer Diskontinuität im Verschiebungs- beziehungsweise Geschwindigkeitsfeld dargestellt, siehe auch Abschnitt 4.2.2. Die notwendigen Voraussetzungen für das Auftreten solcher Diskontinuitäten, ausgehend von einem kontinuierlichen Deformationsfeld, werden beschrieben. Betrachtet werden dünne Körper wie Bleche, bei denen Lokalisierung ausschließlich in der Blechebene auftreten kann.

Als notwendige Bedingung für das Auftreten einer Diskontinuität wird die Existenz einer Orientierung  $\xi$  im (Dehnungs-)Feld der Blechebene mit Dehnungsanteil in  $\xi$ -Richtung

$\epsilon_\xi = 0$  betrachtet. Die Diskontinuität, respektive die Einschnürung, ist senkrecht zu dieser Richtung orientiert, sodass der Dehnungsanteil in Längsrichtung der Diskontinuität  $\epsilon_\xi = 0$  ist. Unter dieser Annahme ergibt sich für die Orientierung der Einschnürung

$$\tan \xi = \frac{1}{\sqrt{-b}}, \quad (4.30)$$

mit dem Verhältnis  $b$  der Hauptdehnraten in der Blechebene nach Gl. (3.6). Damit erhält man für den einachsigen Zugspannungszustand mit  $b = -0,5$  einen Winkel  $\xi = 54,7^\circ$  für die Orientierung des Lokalisierungsbands in Bezug zur Längsrichtung. Das entspricht den in Versuchen beobachteten Werten, siehe auch MARCINIAK U. A. (2002). Als Bedingung für Lokalisierung ergibt sich für den plastischen Modul  $H$  nach Gl. (4.19):

$$H \leq \sigma_{VM} \frac{1+b}{\sqrt{\frac{4}{3}(1+b+b^2)}}. \quad (4.31)$$

Zur Veranschaulichung wird analog zu Gl. (3.20) eine einfache Exponentialfunktion für den Zusammenhang zwischen Fließspannung und plastischer Dehnung (Verfestigung) angenommen:

$$\sigma_{VM} = K (\epsilon_{eq})^n. \quad (4.32)$$

Mit der Annahme proportionaler Belastung und unter Verwendung von Gl. (3.11) ergibt sich die bekannte Gleichung für den Beginn der Lokalisierung. Aufgelöst nach der größten Hauptdehnung in der Blechebene  $\epsilon_1$ :

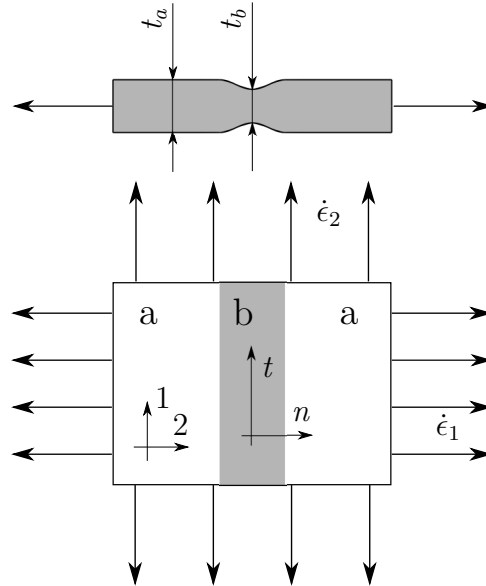
$$\epsilon_1^* = \pm \frac{n}{1+b}. \quad (4.33)$$

Wie schon aus Gleichung 4.30 ersichtlich, existieren Lösungen nur für negative  $b$ . Unter der Voraussetzung von  $\epsilon_1 > 0$  (Zugverformung) wird Lokalisierung nur für den Bereich mit negativer kleinster Hauptdehnung in der Blechebene  $\epsilon_2 \leq 0$  vorhergesagt. Anschaulich existiert im Bereich des Streckziehens mit  $\epsilon_1 > 0$  und  $\epsilon_2 > 0$  keine Orientierung mit  $\epsilon_\xi = 0$  in der Blechebene. Damit ist der Ansatz von *Hill* nicht geeignet, um – in der Realität zu beobachtende – Lokalisierung in diesen Belastungsarten (biaxialer Zug) zu beschreiben.

#### 4.3.4 Das Modell von Marciniak & Kuczyński

Im von MARCINIAK UND KUCZYŃSKI (1967) vorgestellten Modell wird die Evolution einer Imperfektion in Form einer Rille in Blechdickenrichtung betrachtet. Während *Hill* von einem idealen Blechfeld mit konstanter Dicke ausgeht, beschreibt dieser phänome-

nologische Ansatz die Entwicklung einer anfänglich bereits existierenden Imperfektion. Damit eröffnet sich die Möglichkeit, die Ausbildung von lokalisierter Deformation im Bereich des Streckziehens mit  $\dot{\epsilon}_1 > 0$  und  $\dot{\epsilon}_2 > 0$  in der Blechebene zu beschreiben, die in der Realität zu beobachten ist.



**Abbildung 4.5:** Anfangsimperfektion und Hauptrichtungen des Modells von MARCINIAK UND KUCZYŃSKI (1967)

Betrachtet wird ein rechteckiger Bereich  $a$  des belasteten Blechs mit anfänglicher Blechdicke  $t_0^a$ , siehe Abbildung 4.5. Die Imperfektion wird durch einen rillenförmigen Bereich  $b$  mit Anfangsdicke  $t_0^b$  definiert. Im Folgenden werden mit dem hochgestellten Index  $a$  oder  $b$  jeweils die Größen außerhalb und innerhalb der Imperfektion gekennzeichnet. Die relative Rillentiefe wird mit dem Quotienten  $\xi$  bezeichnet:

$$\xi = \frac{t_0^a - t_0^b}{t_0^a} = \frac{t_0^b}{t_0^a} - 1. \quad (4.34)$$

Es wird angenommen, dass die Längsrichtung der Imperfektion  $t$  senkrecht zur größten Hauptdehnrate  $\dot{\epsilon}_1$  ist. Unter der Voraussetzung von isotroper, assoziierter Plastizität sind die Hauptrichtungen von Dehnrate und Spannung koinzident. Damit ergeben sich die Spannungskomponenten in Bezug zur Richtung der Imperfektion, ausgehend von den Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ :

$$\sigma_{nn} = \sigma_1 \quad (4.35)$$

$$\sigma_{tt} = \sigma_2 \quad (4.36)$$

$$\sigma_{nt} = 0. \quad (4.37)$$



Weiterhin wird angenommen, dass sich die Orientierung der Hauptrichtungen und der Imperfektion während der Deformation nicht verändert (proportionale Belastung). Damit wird die Unterscheidung der Imperfektionsrichtung zu den mechanischen Hauptrichtungen hinfällig, und der in Gl. (3.6) eingeführte Quotient  $b$  lässt sich äquivalent auch mit den Hauptdehnungen statt mit den Hauptdehnraten aufstellen. Damit lassen sich die kinematischen Gleichgewichtsbedingungen über der Rille leicht aufstellen:

$$\epsilon_{nn} = \epsilon_1^b \neq \epsilon_1^a \quad (4.38)$$

$$\epsilon_{tt} = \epsilon_2^b = \epsilon_2^a \quad (4.39)$$

$$\epsilon_{nt} = 0 \quad (\text{Hauptrichtung}) \quad (4.40)$$

$$b^a = \frac{\epsilon_2^a}{\epsilon_1^a} \quad (\text{proportionale Belastung}). \quad (4.41)$$

Das Kräftegleichgewicht senkrecht zur Imperfektion liefert ein Kriterium für die spezifischen Kräfte  $f_1^i$  (Kraft pro Längeneinheit):

$$f_1^a = \sigma_1^a t^a = \sigma_1^b t^b = f_1^b, \quad (4.42)$$

mit den Blechdicken  $t^a$  und  $t^b$ .

Aus der Volumenkonstanz (plastisch isochores Verhalten) ergibt sich für die Dickendehnung  $\epsilon_3^a$  im Bereich  $a$

$$\epsilon_3^a = -\epsilon_1^a(1 + b^a) \quad (\text{isochor}), \quad (4.43)$$

und daraus folgend für die Dicke, ausgehend von der anfänglichen Dicke  $t_0^a$

$$t^a = e^{\epsilon_3^a} t_0^a \approx (\epsilon_3^a + 1) t_0^a. \quad (4.44)$$

Für das Verhältnis der Hauptspannungen  $a$  in der Blechebene wird wieder die Definition nach Gl. (3.8) verwendet. Unter der Annahme des ebenen Spannungszustands gilt zusätzlich

$$a^a = \frac{\sigma_2^a}{\sigma_1^a} \quad \text{nach Gl. (3.8)} \quad \text{sowie} \quad \sigma_3 = 0. \quad (4.45)$$

Mit der angenommenen isochoren und assoziierten plastischen Fließregel nach *von Mises* ergibt sich für die Fließspannung

$$\sigma_{VM}^a = \sigma_Y^a (\epsilon_{eq}^a) = \sqrt{(\sigma_1^a)^2 (1 + (a^a)^2 - a^a)}. \quad (4.46)$$

Der Zusammenhang zwischen Hauptspannungen und -dehnungen ergibt sich damit nach Gl. (3.14) zu

$$a^a = \frac{2b^a + 1}{b^a + 2}. \quad (4.47)$$

Damit lässt sich die resultierende Schnittkraft senkrecht zur Imperfektion aus Gl. (4.44) und Gl. (4.46) bestimmen:

$$f_1^a = \sigma_1^a t^a = \frac{\sigma_Y^a(\epsilon_{eq}^a)}{\sqrt{1 + (a^a)^2 - a^a}} e^{\epsilon_3^a} t_0^a. \quad (4.48)$$

Um die Entwicklung der Größen in der Imperfektion zu bestimmen, muss zunächst das – sich über die Deformation ändernde – Dehnungsverhältnis in der Rille bestimmt werden. Dazu wird im Folgenden auf die inkrementellen Dehnungsänderungen  $\Delta\epsilon$  übergegangen, da eine Beschreibung der Entwicklung nur in inkrementeller Form möglich ist. Als Vorgabe für den Algorithmus wird ein Dehnungsinkrement  $\Delta\epsilon_1^b$  als Startwert vorgegeben. Das Dehnungsverhältnis in der Rille ergibt sich zu

$$b^b = \frac{\Delta\epsilon_2^b}{\Delta\epsilon_1^b} = \frac{\Delta\epsilon_2^a}{\Delta\epsilon_1^a}. \quad (4.49)$$

Damit ergibt sich das Inkrement der Dickendehnung analog Gl. (4.43) zu

$$\Delta\epsilon_3^b = -\Delta\epsilon_1^b(1 + b^b). \quad (4.50)$$

Mit der für jedes Belastungsinkrement durchgeführten Addition der Inkremente ergibt sich die aktuelle Dickendehnung zu

$$\epsilon_3^b = \epsilon_3^b + \Delta\epsilon_3^b, \quad (4.51)$$

und die Blechdicke in der Imperfektion zu

$$t^b = e^{\epsilon_3^b} t_0^a (1 - \xi) \approx (\epsilon_3^b + 1) t_0^a (1 - \xi). \quad (4.52)$$

Analog Gl. (4.46) ergibt sich die Spannung  $\sigma_1^b$

$$\sigma_1^b = \frac{\sigma_Y(\epsilon_{eq}^b)}{\sqrt{1 + (a^b)^2 - a^b}}; \quad (4.53)$$

mit  $a^b$  wie schon  $a^a$  in Gl. (4.47)

$$a^b = \frac{2b^b + 1}{b^b + 2}. \quad (4.54)$$

Damit lässt sich wie in Gl. (4.48) die Schnittkraft senkrecht zur Imperfektion aus Gl. (4.52) und Gl. (4.53) bestimmen:

$$f_1^b = \sigma_1^b t^b = \frac{\sigma_Y^b(\epsilon_{eq}^b)}{\sqrt{1 + (a^b)^2 - a^b}} e^{\epsilon_3^b} t_0^a (1 - \xi). \quad (4.55)$$

Algorithmisch wird nun geprüft, ob das Kräftegleichgewicht über die Rille erreicht wurde:

$$f^b \stackrel{?}{=} f^a. \quad (4.56)$$

Je nach dem Ergebnis dieser Auswertung wird der Algorithmus ab Gl. (4.49) mit einem erhöhten  $\Delta\epsilon_1^b$  erneut durchlaufen:

$$f^b < f^a \quad \implies \quad \text{erhöhe } \Delta\epsilon_1^b \text{ und prüfe erneut.}$$

Für den Fall, dass  $f^b = f^a$  (Gleichgewicht erreicht), wird geprüft, ob Lokalisierung in der Rille vorliegt:

$$\frac{\Delta\epsilon_1^b}{\Delta\epsilon_1^a} \begin{cases} \leq 10 & \text{keine Lokalisierung} \\ > 10 & \text{Lokalisierung.} \end{cases} \quad (4.57)$$

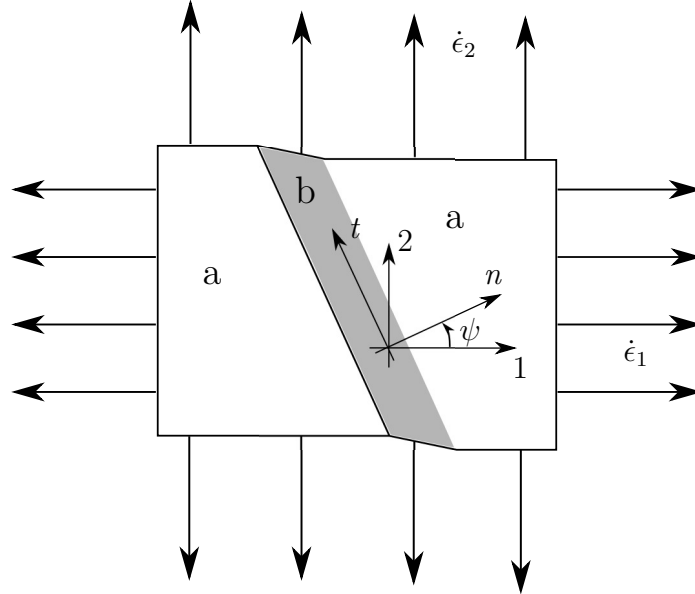
Für die Lokalisierung wird also der Dehnungszuwachs innerhalb der Rille mit dem außerhalb verglichen. Als Kriterium für das Erreichen von Lokalisierung wird ein um den Faktor 10 erhöhter Dehnungszuwachs in der Rille definiert. Das ist ein empirisch festgelegter Wert, der einen deutlichen Zuwachs im Dehnungsinkrement repräsentiert.

Mit diesem Modell kann damit der Beginn von lokalisierter Deformation im Bereich des Streckziehens ( $\dot{\epsilon}_1 > 0$  und  $\dot{\epsilon}_2 > 0$ ) dargestellt werden. Hier ist die zugrunde gelegte Annahme der Orientierung des Lokalisierungsbandes senkrecht zur größten Hauptdehnung hinreichend. Für den Bereich mit  $\dot{\epsilon}_2 \leq 0$  trifft dies allerdings nicht zu.

### 4.3.5 Das Modell von Hutchinson & Neale

Das von HUTCHINSON UND NEALE (1978a, b); HUTCHINSON U. A. (1978) vorgeschlagene Modell stellt im Wesentlichen eine Erweiterung des Modells von MARCINIAK UND KUCZYŃSKI (1967) dar. Um den Bereich der Deformationszustände auch auf den Be-

reich des Tiefziehens zu übertragen, wurde die Annahme der senkrechten Orientierung der Lokalisierung zur ersten Hauptrichtung aufgegeben.



**Abbildung 4.6:** Orientierung der Lokalisierung beim Modell von HUTCHINSON UND NEALE (1978a)

Damit ist die Rillennormale  $\mathbf{n}$  nicht mehr parallel zur ersten Hauptrichtung. Zusätzlich ändert sich die Orientierung der Rille mit fortschreitender Deformation. Damit sind auch die Hauptrichtungen innerhalb (Bereich  $b$ ) und außerhalb (Bereich  $a$ ) des Lokalisierungsbandes nicht mehr gleich. Die Stärke der Anfangsimperfektion wird analog zum *Marciniak-Kuczyński*-(*MK*-)Modell mit dem Faktor  $\xi$  bezeichnet, siehe Gl. (4.34):

$$\xi = \frac{t_0^a - t_0^b}{t_0^a} = \frac{t_0^b}{t_0^a} - 1. \quad (4.58)$$

Im Gegensatz zum *MK*-Modell ergeben sich die Spannungskomponenten in der Ebene normal und tangential zur Imperfektion auch im ungestörten Bereich nun nicht mehr trivial. Die Umrechnung erfolgt mit Hilfe der Winkelfunktionen in der Ebene:

$$\sigma_{nn}^a = \sigma_1^a \cos^2 \psi + \sigma_2^a \sin^2 \psi \quad (4.59)$$

$$\sigma_{tt}^a = \sigma_1^a \sin^2 \psi + \sigma_2^a \cos^2 \psi \quad (4.60)$$

$$\sigma_{nt}^a = (\sigma_2^a - \sigma_1^a) \cos \psi \sin \psi. \quad (4.61)$$

Auch die kinematischen Gleichgewichtsbedingungen lassen sich nun nicht mehr einfach aufstellen, sondern müssen für jede anfängliche Rillenorientierung  $\psi_0$  und jeden Deformationszustand  $b$  nach Gl. (4.49) berechnet werden.

Gleich wie beim zuvor dargestellten Verfahren berechnen sich die Dickendehnung  $\epsilon_3^a$  respektive die aktuelle Blechdicke  $t^a$  nach den Gln. (4.43) und (4.44). Das resultierende Verhältnis der Hauptspannungen  $a^a$  wird nach Gl. (4.47) bestimmt. Als vierte benötigte Größe wird die aktuelle Fließspannung im Material nach Gl. (4.46) berechnet.

Als Neuerung gegenüber dem *Marciniak-Kuczyński*-Modell wird eine Evolutionsgleichung für die Rillenorientierung abhängig von der ersten Hauptdehnung benötigt, da diese nicht mehr konstant ist:

$$\psi = \arctan \left( e^{(1-b)\epsilon_1^a} \tan \psi_0 \right). \quad (4.62)$$

Damit ergibt sich eine geänderte Spannungskomponente  $\sigma_{nn}^a$  senkrecht zur Rille, die mit Hilfe von Gl. (4.59) berechnet wird. Daraus folgt die resultierende Schnittkraft senkrecht zur Rille, ausgehend vom Zustand außerhalb der Rille:

$$f = \sigma_{nn}^a t^a. \quad (4.63)$$

Um eine übersichtlichere Darstellung der folgenden Gleichungen zu erreichen, werden einige Ausdrücke zusammengefasst:

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad (4.64)$$

$$B = \frac{3(\sin^2 \psi + b \cos^2 \psi)^2}{4(1 + b + b^2)}, \quad (4.65)$$

$$D = \frac{\sqrt{3}(\sin^2 \psi + b \cos^2 \psi)}{4\sqrt{1 + b + b^2}}, \quad (4.66)$$

$$H = \sqrt{1 + \left( \frac{2(b-1)\sin \psi \cos \psi}{(b+2)\cos^2 \psi + (2b+1)\sin^2 \psi} \right)^2}. \quad (4.67)$$

Damit werden die resultierenden Größen im Bereich der Imperfektion bestimmt:

$$\sigma_{nn}^b = \frac{\sigma_Y(\epsilon_p^b)}{AH} \sqrt{1 - B \left( \frac{\Delta \epsilon_p^a}{\Delta \epsilon_p^b} \right)^2}, \quad (4.68)$$

$$\Delta \epsilon_3^b = \Delta \epsilon_p^b \left( -\frac{A}{H} \sqrt{1 - B \left( \frac{\Delta \epsilon_p^a}{\Delta \epsilon_p^b} \right)^2} - D \frac{\Delta \epsilon_p^a}{\Delta \epsilon_p^b} \right), \quad (4.69)$$

$$\epsilon_3^b = \epsilon_3^b + \Delta \epsilon_3^b. \quad (4.70)$$

Daraus lässt sich die resultierende Dicke in der Rille  $t^b$  bestimmen:

$$t^b = e^{\epsilon_3^b} t_0^a (1 - \xi). \quad (4.71)$$

Die resultierende Schnittkraft senkrecht zur Rille ergibt sich damit analog zu Gl. (4.55) zu

$$f^b = \sigma_{nn}^b t^b. \quad (4.72)$$

Gleich wie beim Modell von *Marciniak und Kuczyński* wird dann algorithmisch geprüft, ob das Kräftegleichgewicht über die Rille erfüllt ist:

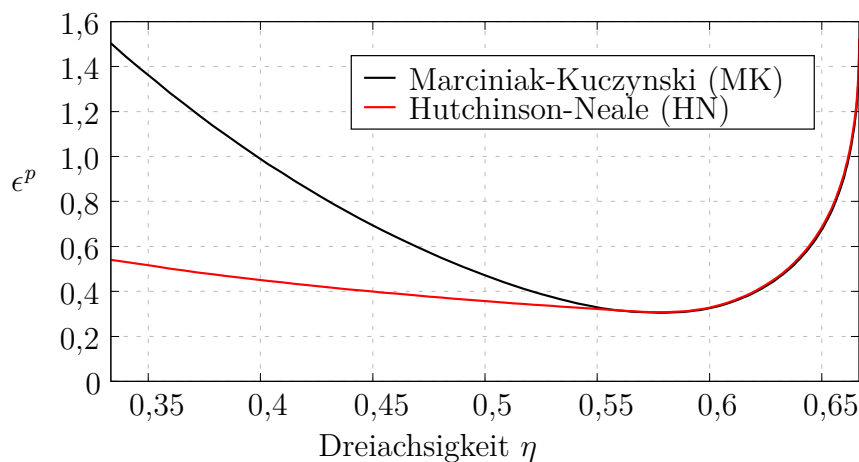
$$f^b \stackrel{?}{=} f^a \quad \text{für alle } \psi. \quad (4.73)$$

Diese Prüfung erfolgt nun in Unterscheidung zum oben genannten Modell für jede Rillenorientierung  $\psi$ .

Für den Fall, dass  $f^b = f^a$  (Gleichgewicht erreicht), wird geprüft, ob Lokalisierung in der Rille vorliegt:

$$\frac{\Delta \epsilon_p^b}{\Delta \epsilon_p^a} \begin{cases} \leq 10 & \text{keine Lokalisierung} \\ > 10 & \text{Lokalisierung.} \end{cases} \quad (4.74)$$

Falls Gl. (4.73) nicht erfüllt ist, wird der Algorithmus für die fraglichen Rillenorientierungen  $\psi$  mit einem erhöhten  $\Delta \epsilon_p^b$  erneut durchlaufen. Wenn für alle Rillenorientierungen Gleichgewicht erzielt werden konnte wird geprüft, ob Orientierungen gefunden wurden, bei denen Lokalisierung nach Gl. (4.74) auftrat. Von diesen Orientierungen  $\psi$  wird diejenige bestimmt, bei der das beim kleinsten Wert der plastischen Vergleichsdehnung  $\epsilon_p^a$  auftrat. Dieser Wert bestimmt dann (nach Umrechnung mit Hilfe des Dehnungsverhältnisses  $b^a$ ) einen Punkt auf der Grenzformänderungskurve und die dazugehörige Orientierung  $\psi$  des Lokalisierungsbands.



**Abbildung 4.7:** Vergleich der Lokalisierungsmodelle

Für den Bereich des Streckziehens ( $\dot{\epsilon}_1 > 0$  und  $\dot{\epsilon}_2 > 0$ ) respektive  $\frac{2}{3} \geq \eta \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,58$  ergibt sich – wie erwartet – stets eine Orientierung senkrecht zur ersten Hauptrichtung ( $\psi = 0$ ). Damit fällt für diesen Bereich die Lösung mit der des *Marciniak-Kuczyński*-Modells zusammen. Für die übrigen Zug-Belastungsarten ergeben sich allerdings deutliche Unterschiede. In Abbildung 4.7 werden die Abweichungen im Bereich des Tiefziehens deutlich – hier liefert das *MK*-Modell keine realistische Prognose mehr, das wesentlich aufwendigere *HN*-Modell dagegen bringt Lösungen für  $\psi \neq 0$ .

### 4.3.6 Spannungsbasierte Kriterien

Zusätzlich zu den bekannten und in den vorhergehenden Abschnitten beschriebenen dehnungsbasierten Modellen zur Prognose von Lokalisierung und Instabilität sind in den letzten Jahren auch einige Ansätze beschrieben worden, die eine Prognose auf der Basis von Spannungsbetrachtungen ermöglichen sollen. Hintergrund ist, dass die einfachen dehnungsbasierten Ansätze wie *Hill* oder *Swift* stets auf der Annahme eines konstanten Belastungszustands beruhen und somit nicht zur Beschreibung einer Belastung unter variablen Deformationszuständen geeignet sind. Die komplexeren Modelle wie das *Marciniak-Kuczyński*- sowie besonders das *Hutchinson-Neale*-Modell können zwar ohne weiteres eine Pfadabhängigkeit berücksichtigen, bedürfen aber für die Verwendung in einem Finite-Elemente-Programm eines deutlich erhöhten Rechenaufwands. Um auf anderem Wege mit einfachen und numerisch billigen Algorithmen eine Prognose zu erhalten, wurden deswegen spannungsbasierte Kriterien vorgeschlagen. Diese sollen ebenfalls in der Lage sein, Prognosen auch bei nicht-proportionalen Belastungen abzugeben.

Von ALSOS U. A. (2008) wurde die Kombination eines in den Spannungsraum übertragenen *Hill*-Kriteriums und des Kriteriums von BRESSAN UND WILLIAMS (1983) vorgeschlagen. Das sogenannte *BW*-Kriterium geht davon aus, dass die Ausbildung der Lokalisierung durch das Erreichen einer kritischen Scherspannung in einer schrägen Ebene durch die Dicke des Blechs erreicht wird. Hierbei wird die geneigte Lokalisierungsebene mit der Bedingung  $\dot{\epsilon}_t = 0$  bestimmt, welche sich allerdings im Gegensatz zum Kriterium von *Hill* nicht in der Blechebene befindet. Da die Gültigkeit dieses Kriteriums nur für den Bereich des Streckziehens ( $\dot{\epsilon}_1 > 0$  und  $\dot{\epsilon}_2 > 0$ ) gegeben ist, wird für die übrigen Spannungszustände das Kriterium von *Hill* verwendet, siehe auch Abschnitt 4.3.1. Die Kombination von beiden wird als *BWH*-Kriterium bezeichnet. Letztlich beschränkt sich damit die Bewertung auf die Bestimmung einer kritischen Schubspannung  $\tau_{cr}$  in einer Ebene, die sich je nach Deformationszustand außerhalb (*BW*) beziehungsweise in der Blechebene (*Hill*) bewegt. Das Auftreten von Lokalisierung in einem durch die Dicke geneigten Scherband scheint bei metallischen Werkstoffen unter den betrachteten Bedingungen bis jetzt nicht beobachtet worden zu sein, siehe auch MÜSCHENBORN UND SONNE (1975). Ein solches Verhalten wäre beispielsweise bei Geomaterialien zu erwar-

ten. Das *BW*-Kriterium wird daher eher als ein (einfaches) Kriterium für Scherbruch betrachtet, welcher auf der makroskopischen Dehnungsskala in der Regel kurz nach dem Auftreten der Lokalisierung zu beobachten ist. Siehe dazu auch Abschnitt 3.1.1.

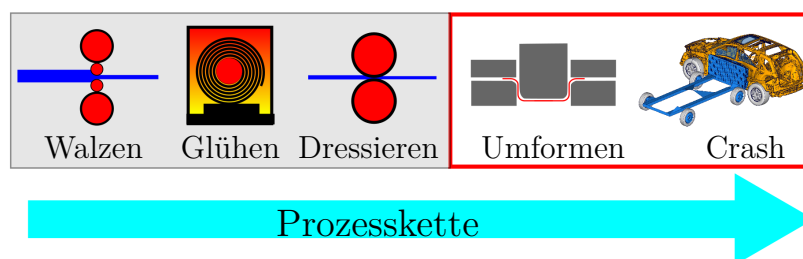
STOUGHTON (2000) sowie STOUGHTON UND ZHU (2004) stellten in mehreren Veröffentlichungen ein auf Spannungsmaßen basierendes Modell für die Lokalisierung von Blechwerkstoffen vor. Basierend auf Untersuchungen von GRAF UND HOSFORD (1993), die Aluminiumblech der amerikanischen Bezeichnung Al2008-T4 untersuchten, wurden die existierenden, dehnungsbasierten Modelle für Lokalisierung in den Spannungsraum übertragen. Damit bekommt man eine Beschreibung der Lokalisierungsbedingungen im Hauptspannungsraum. Dadurch soll eine Vorhersage unabhängig vom Deformationspfad möglich sein. Diese Vorgehensweise bringt jedoch mehrere Nachteile mit sich: Man bekommt eine Abhängigkeit der Vorhersage von Fließort (Fließbedingung) und von der Evolution der Fließspannung. Zusätzlich sind die Spannungen in dynamischen Simulationen mit expliziter Zeitschrittintegration oft stark oszillierend, sodass eine Auswertung erschwert wird. Von einer weiteren Untersuchung der spannungsbasierten Ansätze wurde daher im Rahmen dieser Arbeit abgesehen.



## Das Modell GISSMO

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das Instabilitäts- und Versagensmodell *Generalized Incremental Stress-State dependent damage MOdel* („GISSMO“) entwickelt und zunächst als User-Materialgesetz in das kommerzielle Finite-Elemente-Programm LS-DYNA implementiert.

Ausgangspunkt der Entwicklung war, dass im Rahmen des vom BMBF geförderten Projektes „Integrale Werkstoffmodellierung entlang der Prozesskette“ (Förderkennzeichen 03X0501) der Bedarf nach einer interdisziplinären Modellierung von Vorschädigung und Versagen entlang der Herstellungsprozesskette für Blechteile aufkam. Schwerpunkt der Betrachtung war der unmittelbar für die Crashsimulation relevante Teil der Prozesskette, namentlich die Umformung eines Blechteils vom flachen Halbzeug in seine endgültige Form und die daran anschließende Belastung unter Crashbedingungen, siehe auch Abschnitt 2.4 sowie BUTZ U. A. (2010) und SPRINGUB U. A. (2010).



**Abbildung 5.1:** Betrachtete Prozessschritte

Eine wichtige Anforderung an die zu entwickelnde Methode war die Anwendbarkeit im industriellen Maßstab. Daraus ergaben sich folgende Randbedingungen:

1. Beschränkung auf praxistaugliche Netzgrößen (Crash:  $\geq 3mm$ , Umformung:  $\approx 1mm$ )

2. Verwendung etablierter (Schalen-) Elementformulierungen
3. Zentrale Erstellung von Materialkarten anhand von Elementarproben, universell für alle Lastfälle
4. Verzicht auf spezielle Modellierungsmethoden
5. Größtmögliche Anwenderfreundlichkeit im Postprocessing
6. Numerisch effiziente Formulierung (Rechenzeit)
7. Bestmögliche Abbildung der physikalischen Gegebenheiten im Modell
8. Tauglich für die Prognose in Umform- und Crashsimulation
9. Modular an beliebige Plastizitätsmodelle koppelbar.

Es ist einleuchtend, dass hier einige Zielkonflikte in Kauf genommen werden müssen. Für die Versagensprognose sollen beispielsweise Vorgänge der Rissentstehung modelliert werden, die sich in der Regel in Größenordnungen  $\ll 1mm$  abspielen, was mit den vorgegebenen Netzgrößen naturgemäß nicht darstellbar ist. Deswegen mussten zahlreiche Kompromisse gemacht werden, was in den folgenden Abschnitten erläutert wird.

Als besonders wichtig für die Anwendbarkeit im industriellen Umfeld stellte sich heraus, dass das Modell modular mit praktisch beliebigen, existierenden Plastizitätsmodellen der Umform- und Crashsimulation gekoppelt werden kann. Das erlaubt unter anderem das Beibehalten von vorhandenen Methoden und Modellen, aber auch von existierenden Materialparametern (Materialkarten). Damit ist ein wichtiger Faktor für Kosten und Aufwand vorweg genommen, siehe Abbildung 5.2.

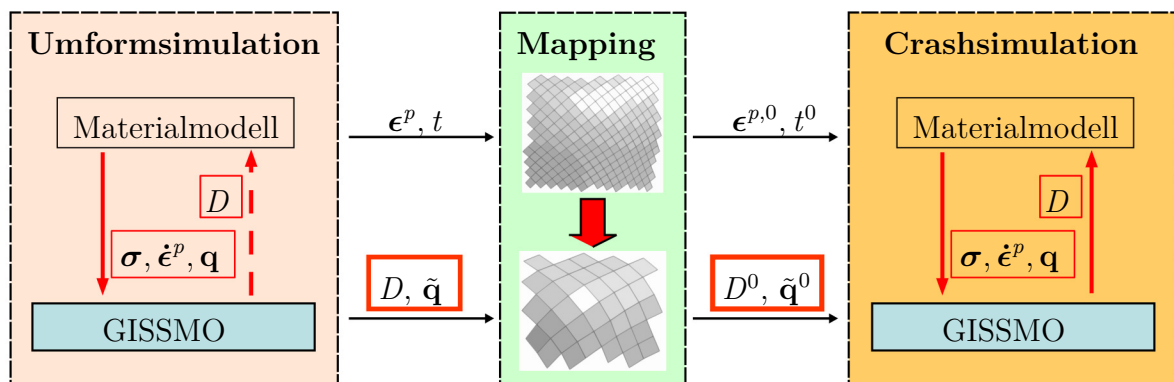


Abbildung 5.2: Modulares Konzept für GISSMO

Zu Beginn der Arbeit wurde eine Analyse der bis dahin bekannten Versagensmodelle vorgenommen, siehe auch Abschnitt 3.2. Besonderes Augenmerk wurde dabei auf eine

---

mögliche Eignung für die Anwendung in der Prozesskette gelegt. Das bis dahin hauptsächlich verwendete mikromechanische Modell von GURSON (1977) wurde auf seine Erweiterbarkeit hin untersucht, wobei besonders das Problem der druckabhängigen Fließbedingung und Schädigungsevolution eine Anwendung in Kombination mit isochoren Plastizitätsmodellen erschwert, siehe auch Abschnitt 3.3. Die in Abschnitt 3.3.2 sowie 3.3.3 dargestellten Ansätze zur Behebung dieses Problems konnten für die praktische Anwendung keine befriedigende Lösung bieten.

Am Ende der Voruntersuchungen stand die Erkenntnis, dass mit keinem der bis dahin untersuchten Modelle die gesteckten Ziele voll erreicht werden konnten. Deswegen wurde „auf dem Reißbrett“ mit der Entwicklung des für den Anwendungszweck maßgeschneiderten Modells „GISSMO“ begonnen. Hierbei wurde versucht, die Erfahrungen aus den existierenden Modellen zu nutzen und die positiven Eigenschaften zu kombinieren.

Heraus kamen die folgenden „Zutaten“ für das neue Modell:

- Phänomenologische, inkrementelle Schädigungsevolution
- Gute Anpassbarkeit an experimentell beobachtetes Materialverhalten
- Abbildung der Vorgänge von plastischer Instabilität und Lokalisierung
- Weitgehende Eliminierung der Netzgrößenabhängigkeit durch Regularisierung
- Möglichkeit zur Rückkopplung vom Schädigungsmodell zum Konstitutivgesetz (Entfestigung)
- Numerisch stabile, objektive Beschreibung der Vorgänge
- Fokussierung auf eine Verwendung mit Schalenelementen
- Möglichkeit der modularen Kopplung mit beliebigen Plastizitätsmodellen.

Der Begriff „phänomenologisches Modell“ bezeichnet hier die Zielsetzung, nicht unbedingt die den beobachteten Phänomenen zugrundeliegenden mikromechanischen Vorgänge im Detail darzustellen, sondern deren resultierende Auswirkungen auf makroskopischer Ebene. Diese Vorgehensweise begründet sich unter anderem aus den genannten Größenordnungen der Diskretisierung und der Notwendigkeit eines möglichst einfachen und effektiven Modells. Trotzdem sollen die zugrundeliegenden physikalischen Phänomene verstanden und in ihren Auswirkungen realistisch berücksichtigt werden. In der Implementierung wurde zunächst ausschließlich eine Verwendung mit Schalenelementen betrachtet, da diese Diskretisierung in den betrachteten Anwendungen beinahe ausschließlich verwendet wird. Das ermöglicht gewisse Vereinfachungen in der Beschreibung des Spannungszustands. Eine Verwendung mit Volumenelementen ist aber durchaus möglich, sie wird in der Praxis mittlerweile häufig angewandt. In den meisten Fällen genügt

die – ursprünglich nur für Schalen entwickelte – Formulierung auch hier den Anforderungen. BASARAN (2011) erweiterte später das ursprüngliche GISSMO um zusätzliche Möglichkeiten zur Beschreibung von voll dreidimensionalen Spannungszuständen für die Verwendung mit Volumenelementen.

### 5.1 Versagensdefinition

Die Zielsetzung von GISSMO ist es, mit einem möglichst einfachen, phänomenologischen Modell die komplexen Vorgänge im Bereich großer plastischer Deformationen, Lokalisierung und Versagen in ihren resultierenden Größen abbilden zu können. Als erste wichtige Zutat ist damit die Charakterisierung eines Werkstoffs im Hinblick auf sein Versagensverhalten notwendig. Im Folgenden wird der Begriff „Schädigung“ als Maß für den relativen Verlust an Dehnbarkeit, bezogen auf die ursprünglichen Werkstoffeigenschaften, verwendet. Zunächst wird auf die Entwicklung der Schädigung mit zunehmender Verformung eingegangen. Das verwendete Konzept für die material- und belastungszustandsabhängige Definition der Bruchdehnung wird dann im darauffolgenden Abschnitt vorgestellt.

#### 5.1.1 Skalare Schädigungsevolution

Zur Beschreibung des Versagens wird zunächst eine Betrachtung eines kritischen Querschnitts des repräsentativen Volumenelements (RVE) unter plastischer Deformation herangezogen, siehe Abbildung 5.3. Dieser Ansatz findet sich in zahlreichen phänomenologischen Modellen, wie dem von LEMAITRE (1985).

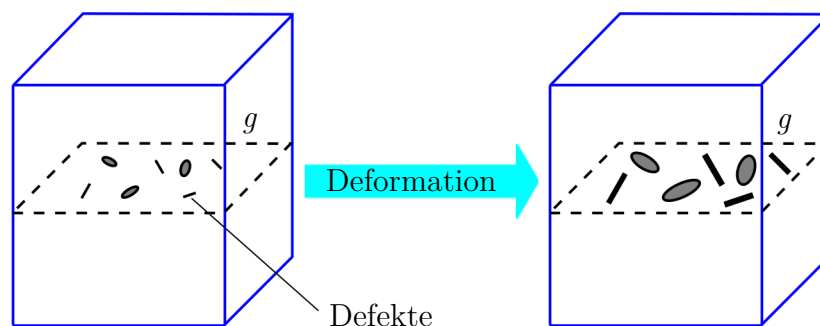


Abbildung 5.3: Querschnitt durch vorgeschädigtes RVE mit Defekten

Anschaulich lässt sich daraus ein Schädigungsmaß  $D$  für die Schnittebene  $\mathbf{g}$  definieren als

$$D^g = \frac{A_{Defekte}^g}{A_0^g}, \quad (5.1)$$

mit dem Gesamtquerschnitt  $A_0^g$  und dem Querschnitt der Defekte  $A_{Defekte}^g$ . Das so gebildete Schädigungsmaß  $D$  mit  $0 \leq D \leq 1$  erreicht damit den Wert  $D = 1$  beim vollständigen Verlust der Tragfähigkeit in der Schnittebene. Für die weitere Betrachtung in diesem Abschnitt wird davon ausgegangen, dass die Defekte im RVE gleichmäßig verteilt und *isotrop*, das heißt richtungsunabhängig sind. Damit ist das Schädigungsmaß nicht mehr von der Ausrichtung der Schnittebene abhängig:

$$D = \frac{A_{Defekte}}{A_0}. \quad (5.2)$$

Die Größe des geschädigten Querschnitts  $A_{Defekte}$  kann in der Regel nicht direkt beobachtet werden. Für das phänomenologische Modell muss deswegen ein Zusammenhang in Form einer Evolutionsgleichung gebildet werden, der die Entwicklung der *inneren Größe* Schädigung in Relation zu einer beobachtbaren Größe setzt. Wie bereits erwähnt, wird unter der obigen Annahme der Richtungsunabhängigkeit auf eine skalare Größe zurückgegriffen, um die Komplexität des Modells so gering wie möglich zu halten. Verwendet wird das Inkrement der äquivalenten plastischen Dehnung für jeden Zeitschritt, da sie ein Maß für die Entwicklung der plastischen Deformation darstellt. Allgemein kann diese Evolutionsgleichung in differentieller Form notiert werden:

$$dD = G(\mathbf{q}) d\epsilon_{eq}^p. \quad (5.3)$$

Darin ist  $G$  eine skalare Gewichtungsfunktion, die mit dem Parameter  $\mathbf{q}$  die verschiedenen Zustandsgrößen, wie Belastungszustand und Vorschädigung sowie werkstoffspezifische Größen enthält. Das Inkrement der äquivalenten plastischen Dehnung  $d\epsilon_{eq}^p$  übernimmt die „Treiberrolle“ für eine Zunahme der Schädigung, was anschaulich dem erwarteten Versagensmechanismus duktiler Werkstoffe entspricht. Hier ist die Annahme beinhaltet, dass alle Vorgänge im elastischen Bereich voll reversibel sind, und Schädigung ausschließlich unter irreversibler (plastischer) Deformation auftritt. Weiterhin ist diese Größe positiv semidefinit, was in Verbindung mit einem ebenfalls positiv semidefiniten Funktional  $G$  dafür sorgt, dass das Schädigungsinkrement immer  $dD \geq 0$  ist. In integraler Form ergibt sich

$$D = \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} G(\mathbf{q}) d\epsilon_{eq}^p. \quad (5.4)$$

Zahlreiche Versagensmodelle – wie das Modell von JOHNSON UND COOK (1985) – setzen einen einfachen linearen Zusammenhang zwischen äquivalenter plastischer Dehnung und Versagensdehnung als Basis an:

$$D = \frac{\epsilon_{eq}^p}{\epsilon_f^p}. \quad (5.5)$$

Enthalten sind nur die aktuelle äquivalente plastische Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$  und die Versagensdehnung  $\epsilon_f^p$ . Diese einfache Lösung des Integrals Gl. (5.4) existiert nur für  $\epsilon_f^p = \text{const.}$ , in der Regel also für proportionale Belastung. Daraus ergibt sich die Gewichtungsfunktion  $G_{JC}$  zu

$$G_{JC} = \frac{1}{\epsilon_f^p}. \quad (5.6)$$

Es wird also ein linearer Zusammenhang analog der aus der Bruchmechanik bekannten *Palmgren-Miner*-Regel angesetzt, vergleiche Gl. (3.41). In Abschnitt 3.1.1 wurden Untersuchungen an Modellmaterialien zitiert, beispielsweise von WECK (2007), sowie Untersuchungen der Mikrostruktur von realen Werkstoffen (TAŞAN 2010). Hierbei zeigte sich ein nichtlinearer Verlauf der Porenfläche beziehungsweise des Porenvolumens über der plastischen Dehnung bis zum Bruch. Zu Beginn, bei geringen Deformationen, ist der Gradient der Schädigung relativ gering, während er kurz vor dem Versagen rapide ansteigt. Dieses Verhalten entspricht dem durch das mikromechanische Modell von GURSON (1977) prognostizierten Verlauf, der ebenfalls einen nichtlinearen Zusammenhang ergibt. Anschaulich resultiert das aus den auf der Mikroebene beobachtbaren Vorgängen der beginnenden Interaktion zwischen den Schadstellen, wie der Koaleszenz der Mikroporen und Gitterdefekte. Für die angestrebte phänomenologische Beschreibung dieser Vorgänge ist deshalb eine nichtlineare Evolutionsgleichung für die Schädigung notwendig.

Definiert wird eine Erweiterung des linearen Zusammenhangs nach Gl. (5.5) um einen Exponenten  $n$ :

$$D = \left( \frac{\epsilon_{eq}^p}{\epsilon_f^p} \right)^n \quad \text{für } \epsilon_f^p = \text{const.} \quad (5.7)$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung des Zusammenhangs aus Gl. (5.4)

$$dD = \frac{n}{\epsilon_f^p} \left( \frac{\epsilon_{eq}^p}{\epsilon_f^p} \right)^{n-1} d\epsilon_{eq}^p = G(n, \epsilon_{eq}^p, \epsilon_f^p) d\epsilon_{eq}^p. \quad (5.8)$$

In dieser Gewichtungsfunktion ist noch die aktuelle äquivalente plastische Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$  enthalten. XUE (2007) und weitere Autoren verwenden eine Gewichtungsfunktion dieser

Form. Für GISSMO wurde jedoch versucht, diese unerwünschte Abhängigkeit der Schädigungsevolution von der aktuellen plastischen Dehnung zu beheben. Aus den bekannten Untersuchungen der Mikrostrukturevolution lässt sich keine solche Abhängigkeit in der Realität ableiten. Auch anschaulich wird klar, dass beispielsweise durch starke Verformungen unter Druckbelastung entstehende hohe plastische Vordehnungen nicht notwendigerweise einen Einfluß auf ein späteres Versagen unter Zug haben müssen.

Durch Einsetzen von Gl. (5.7) in Gl.(5.8) lässt sich der Ausdruck eliminieren. Es ergibt sich

$$dD = \frac{n}{\epsilon_f^p} D^{(1-1/n)} d\epsilon_{eq}^p = G(n, \epsilon_f^p(\eta), D) d\epsilon_{eq}^p; \quad (5.9)$$

mit

$D$  : dimensionslose Schädigungsvariable,  $0 \leq D \leq 1$

$n$  : Exponent für die Nichtlinearität

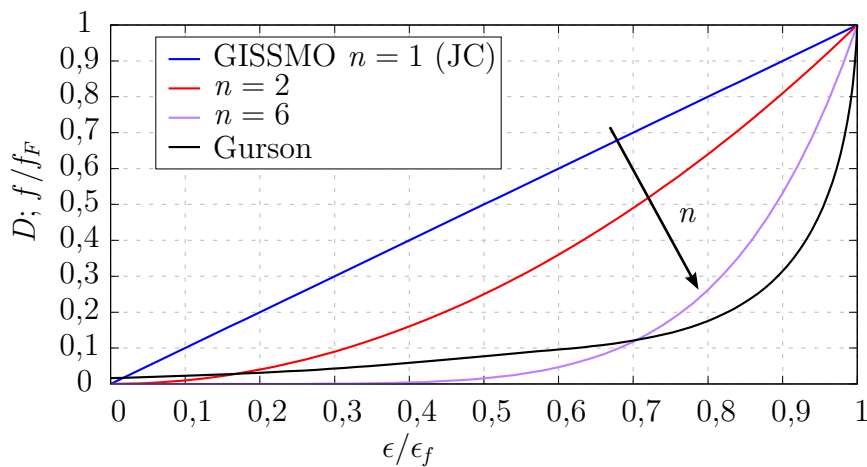
$\epsilon_f^p$  : äquivalente plastische Bruchdehnung (in Abhängigkeit der Dreiachsigkeit  $\eta$ )

$d\epsilon_{eq}^p$  : äquivalentes plastisches Dehninkrement.

Damit bekommt man eine nichtlineare Differentialgleichung in  $D$ , die die Bruchdehnung  $\epsilon_f^p$  sowie die aktuelle Schädigung  $D$  enthält. Die aktuelle äquivalente plastische Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$  ist nicht enthalten, damit ist die aktuelle Schädigung  $D$  die einzige Geschichtsvariable welche die Schädigungsentwicklung beeinflusst. Für den Grenzfall  $n = 1$  fällt Gl. (5.9) wieder auf den linearen Zusammenhang des JC-Modells, analog Gl. (3.41), zurück:

$$dD = \frac{1}{\epsilon_f^p} d\epsilon_{eq}^p. \quad (5.10)$$

In dieser phänomenologischen Evolutionsgleichung bekommt man mit dem Exponenten



**Abbildung 5.4:** Vergleich der Schädigungsakkumulationen

$n$  die Möglichkeit, die nach den mikromechanischen Untersuchungen und Modellen in der Realität zu erwartende Nichtlinearität mit genügender Genauigkeit abzubilden, siehe Abbildung 5.4.

Für die Praxis ist die Bestimmung des Exponenten  $n$  schwierig, da in der Regel der Schädigungszustand eines Materials nicht direkt beobachtbar sein wird. XUE (2007) bestimmte anhand von Daten eines historischen, mehrstufigen Zugversuchs von BRIDGMAN (1952) den Exponenten eines Stahlwerkstoffs zu  $n = 2,21$  für eine ähnliche Schädigungsevolution. In der Regel wird jedoch mangels Versuchsdaten eine exakte Bestimmung nicht möglich sein, siehe auch Abschnitt 6.2.

### 5.1.2 Dreiachsigkeit und Bruchdehnung

Wie bereits in den Abschnitten 3.1 und 3.2 dargestellt, wird im Folgenden die Dreiachsigkeit  $\eta$  als Maß für die Art der vorherrschenden Belastung verwendet. Diese Vorgehensweise basiert auf den Beobachtungen von BRIDGMAN (1952), der Versuche mit verschiedenen Materialien unter hohen hydrostatischen Drücken durchführte. Er stellte fest, dass für Metalle praktisch keine Auswirkungen des Drucks auf das plastische Fließen zu beobachten ist, siehe auch SPITZIG UND RICHMOND (1984). Großen Einfluss hat die Größe des hydrostatischen Drucks dagegen auf die Duktilität, respektive die Bruchdehnung eines Materials. So konnte er zeigen, dass unter genügend hohem hydrostatischem Druck auch ausgesprochen spröde Materialien ein duktileres Verhalten zeigen können. Auf dieser grundlegenden Untersuchung basiert die Mehrheit der in neuerer Zeit entwickelten Versagensmodelle. Die mikromechanischen Modelle von RICE UND TRACEY (1969), GURSON (1977), MCCLINTOCK U. A. (1966) und weitere zeigen diese Abhängigkeit implizit durch die Evolution der mikrostrukturellen Größen wie dem Porenvolumenanteil. Andere Modelle, wie das phänomenologische Modell von JOHNSON UND COOK (1985) berücksichtigen diesen Zusammenhang direkt durch die Einführung der entsprechenden Größe in die Evolutionsgleichung der Schädigung.

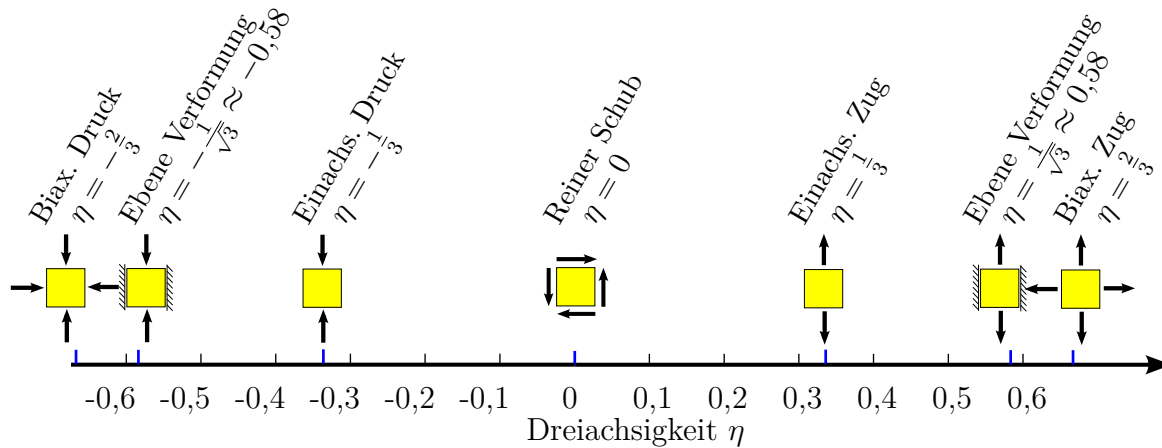
Im Folgenden wird die bereits in Abschnitt 3.2 eingeführte Definition der Dreiachsigkeit nach Gl. (3.1) genutzt:

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_{VM}} . \quad (5.11)$$

Darin ist nach Gl. (3.2) die mittlere oder hydrostatische Spannung  $\sigma_m = -p$  ein Maß für die erste Invariante  $I_1$  des Cauchy-Spannungstensors. Die *von Mises*-Vergleichsspannung  $\sigma_{VM}$  nach Gl. (3.4) ist ein Maß für die zweite Invariante  $J_2$  des deviatorischen Anteils des Spannungstensors. Diese Definition über die Invarianten des Cauchy-Spannungstensors bringt den Vorteil der Unabhängigkeit vom verwendeten Bezugssystem mit sich. Weiter-



hin bekommt man durch die Normierung mit der *von Mises*-Spannung eine anschauliche Größe an die Hand, siehe Abbildung 5.5. Für den *ebenen Spannungszustand* ist die Beschreibung der Belastungsart eindeutig und auf das Intervall  $-\frac{2}{3} \leq \eta \leq \frac{2}{3}$  begrenzt.



**Abbildung 5.5:** Dreiachsigkeit als Maß für die Belastungsart

Durch die Normierung mit der *von Mises*-Spannung ist allerdings keine Beschreibung der Belastungsintensität mehr enthalten.

Aufbauend auf den Erkenntnissen aus den untersuchten Versagensmodellen wurde als „Herzstück“ von GISSMO eine Definition der äquivalenten plastischen Bruchdehnung  $\epsilon_f^p$  über der Spannungsdreiachsigkeit  $\eta$  gewählt. Ein typischer Verlauf von Bruchdehnung über Dreiachsigkeit eines Dualphasenstahls ist in Abbildung 7.2 dargestellt.

Untersuchungen neueren Datums, wie beispielsweise von WIERZBICKI U. A. (2005) an Aluminium 2024, zeigen dass für manche Werkstoffe kein monotoner Verlauf der Bruchdehnungskurve zu erwarten ist. Für das besagte Aluminium wurde eine Kurve mit einem lokalen Maximum im Bereich des einachsigen Zugs ( $\eta = \frac{1}{3}$ ) vorgeschlagen. Die Kalibrierung eines Modells für solche Werkstoffe bereitet Probleme, wenn ein analytischer Ansatz für die Kurve verwendet wird. Bei zahlreichen etablierten Modellen, wie beispielsweise dem in Abschnitt 3.2.5 vorgestellten Ansatz von JOHNSON UND COOK (1985), wird die Bruchdehnung mit Hilfe einer Exponentialfunktion definiert, die diese Flexibilität nicht besitzt.

Deswegen wird in GISSMO für die Definition der Bruchdehnung eine punktweise definierte Kurve verwendet, zwischen deren Stützstellen linear interpoliert wird. Damit ist es dem Anwender überlassen, ob er einen analytischen Ansatz zugrunde legen will oder eine beliebige freie Definition. Der Anschauung folgend ist somit für alle Deformationszustände mit konstanter Dreiachsigkeit („proportionale Belastung“) die Bruchdehnung bei der jeweiligen Dreiachsigkeit direkt durch die Kurve vorgegeben. Für beliebige Deformationspfade, bei denen die Dreiachsigkeit nicht konstant ist, ergibt sich stattdessen

eine resultierende Bruchdehnung aus dem resultierenden Belastungspfad. Ausgehend von der Evolution der Schädigung, siehe Gl.(5.9), ergibt sich die resultierende Schädigung für beliebige Deformationspfade aus dem Integral der Schädigungsinkremente

$$D = \int \frac{n}{\epsilon_f^p(\eta)} D^{(1-1/n)} d\epsilon_{eq}^p. \quad (5.12)$$

Im allgemeinen Fall ändert sich die aktuelle Bruchdehnung  $\epsilon_f^p(\eta)$  über der Belastung, was je nach Definition der Bruchdehnung eine geschlossene Lösung von Gl. (5.12) unmöglich macht. Die dem Ansatz zugrundeliegende Lösung, Gl. (5.7), existiert damit nur für Belastungen mit  $\epsilon_f^p = \text{const.}$ , in der Regel also proportionale Belastung. Aus Gl. (5.12) ergibt sich die *resultierende* Bruchdehnung  $\tilde{\epsilon}_f^p$  als Ergebnis für  $D = 1$

$$1 = \int_0^{\tilde{\epsilon}_f^p} \frac{n}{\epsilon_f^p} D^{(1-1/n)} d\epsilon_{eq}^p. \quad (5.13)$$

Für den praktischen Gebrauch ist zusätzlich die Definition einer *mittleren Dreiachsigkeit* sinnvoll, die direkten Rückschluss auf den vorherrschenden Deformationszustand einer Belastung zulässt. Dazu muss für den allgemeinen Fall der nichtlinearen Evolution eine geeignete Mittelung gefunden werden. Im Kontext der Versagensprognose ist besonders interessant, bei welcher Dreiachsigkeit besonders viel Schädigung entsteht. Daraus lässt sich die für das Versagen verantwortliche Belastungsart (Schub, Zug, biaxial) ableiten. Eine Gewichtung der Mittelung nach der Schädigung bietet sich also an. Unter Verwendung der Gewichtungsfunktion  $G(n, \epsilon_f^p, D)$  aus Gl. (5.9) erhält man

$$\eta_m = \frac{1}{D} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \frac{n}{\epsilon_f^p(\eta)} D^{(1-1/n)} \eta d\epsilon_{eq}^p = \frac{1}{D} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} G \eta d\epsilon_{eq}^p, \quad (5.14)$$

mit den Integrationsgrenzen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ . Für eine Belastung vom undeformierten Zustand bis zum Versagen ( $D = 1$ ) ergibt sich

$$\eta_m = \int_0^{\epsilon_f^p} \frac{n}{\epsilon_f^p(\eta)} D^{(1-1/n)} \eta d\epsilon_{eq}^p. \quad (5.15)$$

Die so ermittelte Größe wird in der Implementierung für jeden Zeitschritt ermittelt und für das Postprocessing gespeichert. In vergleichbarer Weise wird beispielsweise auch eine mittlere Dehnrage ermittelt.

## 5.2 Behandlung der Lokalisierung in GISSMO

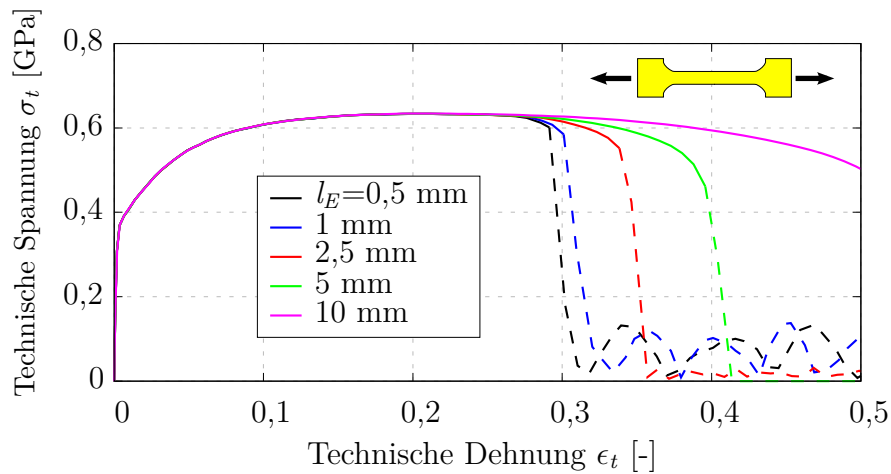
Für die praktische Anwendung der Finite-Elemente-Methode in Umform- und Crashsimulationen ist die richtige Abbildung des Lokalisierungsverhaltens eines Werkstoffs von großer Bedeutung. In der Crashsimulation sind vor allem die durch die Lokalisierung entstehenden hohen lokalen Dehnungskonzentrationen wichtig. Meist wird nach dem Ausbilden einer Lokalisierung nur noch ein geringer Zuwachs an makroskopischer Dehnung im Bauteil entstehen, bevor das Versagen auftritt. Für Umformsimulationen ist das Auftreten von lokalisierter Deformation üblicherweise gleichzusetzen mit dem Überschreiten des akzeptablen Umformgrads. Deswegen ist für diese Disziplin die zuverlässige Abbildung des Beginns der Lokalisierung essentiell. Für die Crashsimulation, bei der – je nach Lastfall – Dehnungen bis weit jenseits der Lokalisierungsgrenze akzeptiert werden, sind vor allem die Möglichkeiten zur Behandlung der spezifischen Phänomene des *postkritischen* Bereichs maßgeblich.

### 5.2.1 Analyse mehrstufiger Verformungsprozesse

Wie in Abschnitt 4.2 ausgeführt, findet in der Modellierung der Vorgänge beim Erreichen der Lokalisierung in der Regel ein Wechsel des Typs der dem System zugrunde liegenden Differentialgleichung statt (*Verlust der Hyperbolizität*). Für die vorliegende Arbeit stand die praxistaugliche Behandlung dieser Thematik im Vordergrund. Die beobachtbare Auswirkung dieser Vorgänge ist vor allem die beginnende *Netzabhängigkeit*, für deren Behandlung im Modell zusätzliche innere Größen vorgesehen sind. Für die Anwendbarkeit von GISSMO im industriellen Umfeld ist eine weitgehende Eliminierung der Netzabhängigkeit notwendig.

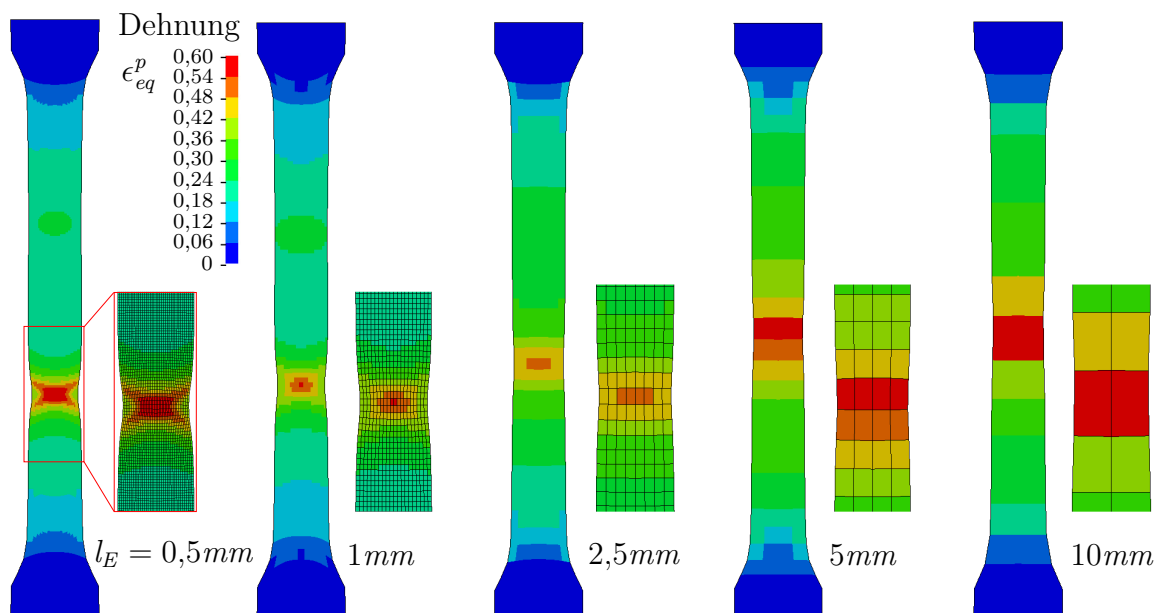
Könnte man sich für eine alleinige Verwendung des Modells in der Crashsimulation noch mittels spezifisch für eine Elementgröße angepasster Parameter behelfen, scheidet dieser Ansatz für die Verwendung in der Prozesskette aus. Die aufeinanderfolgenden Prozessschritte können wie ein mehrstufiger Deformationsprozess betrachtet werden, bei dem sich die physikalischen Randbedingungen, wie Belastungsart, -richtung und -geschwindigkeit in der Regel stark unterscheiden. Was die Modellierung angeht, sind sowohl unterschiedliche Konstitutivmodelle als auch unterschiedliche Diskretisierungen zu erwarten. Besonders in Crashsimulationen, die üblicherweise mit Gesamtfahrzeugmodellen durchgeführt werden, sind den verwendbaren Netzfeinheiten enge Grenzen gesetzt. Damit ist es unabdingbar, dass das Schädigungs- und Versagensmodell eine weitgehende Unabhängigkeit der Ergebnisse von unphysikalischen Faktoren wie Diskretisierung und Elementformulierung bietet.

Das Problem wird deutlich, wenn man Simulationen eines Zugversuchs mit unterschiedlichen Netzgrößen  $l_E$  betrachtet, siehe Abbildung 5.6. Man sieht, dass bis zum Punkt



**Abbildung 5.6:** Zugversuche mit verschiedenen Elementgrößen  $l_E$ , ohne Regularisierung

der Gleichmaßdehnung die Ergebnisse sehr gut übereinstimmen. Im folgenden Verlauf beginnen die Kurven zu divergieren, was einen großen Einfluss sowohl auf die Höhe der technischen Spannung  $\sigma_t$  als auch auf die resultierende technische Bruchdehnung  $\epsilon_{t,f}$  hat. Grund für den Unterschied ist die Konzentration der Deformation auf einen räumlich eng begrenzten Bereich. Die Größe dieser Lokalisierungszone ist nicht konstant, siehe Abbildung 5.7.

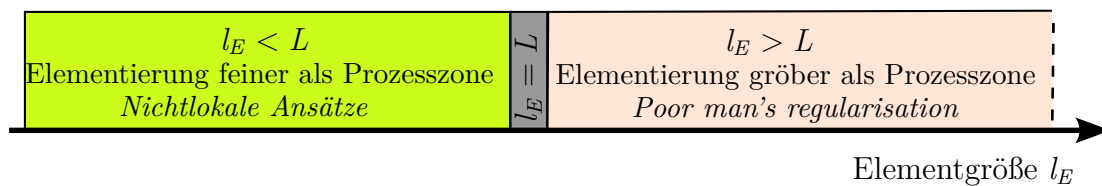


**Abbildung 5.7:** Zugversuche, plastische Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$  in der Lokalisierungszone

Die diffuse Einschnürung findet zunächst in einem Bereich in der Größenordnung der Probenbreite statt, siehe Abschnitt 4.3.1. Bereits hier beginnen die Lösungen voneinander abzuweichen. Die lokalisierte Einschnürung konzentriert sich dann in einem Bereich mit Länge  $L \leq t$ . Für die finale Rissbildung ist eine Prozesszone im Bereich der Korngröße (0,05..0,3mm) zu erwarten. Durch die Diskretisierung wird eine unphysikalische, wesentlich größere Längenskala in das Modell eingebracht, siehe Abbildung 5.7.

Um diesen unerwünschten Einfluss der Netzgröße zu verhindern, sind zahlreiche Ansätze untersucht worden. Für feine Diskretisierungen mit Elementgrößen kleiner als die real zu beobachtende Prozesszone können nichtlokale Ansätze sowie Kontinuums-elemente mit zusätzlichen Freiheitsgraden, wie *Cosseratkontinua*, verwendet werden. Dieser Bereich findet sich im Schema Abbildung 5.8 auf der linken Seite, siehe auch BAŽANT UND PIJAUDIER-CABOT (1989). Eine Übersicht über die in Frage kommenden Formulierungen findet sich beispielsweise bei JIRÁSEK (2009).

Für den hier im Vordergrund stehenden Anwendungsfall wird die durch die Diskretisierung vorgegebene Längenskala praktisch immer deutlich oberhalb der real zu beobachtenden Größenordnung liegen. Hier ist durch diese Methoden kein Vorteil zu erwarten, siehe Abbildung 5.8 rechts. Die Konsequenz aus der notwendigen groben Diskretisierung



**Abbildung 5.8:** Schema der Regularisierung

in der Praxis ist eine per Definition *nicht prädiktive* Modellierung, da die verwendeten Netze die real auftretende Deformation nicht abbilden können. Der Begriff „*Poor Man's Regularisation*“ umschreibt, dass trotz der eigentlich ungeeigneten Diskretisierung eine Regularisierung stattfinden muss.

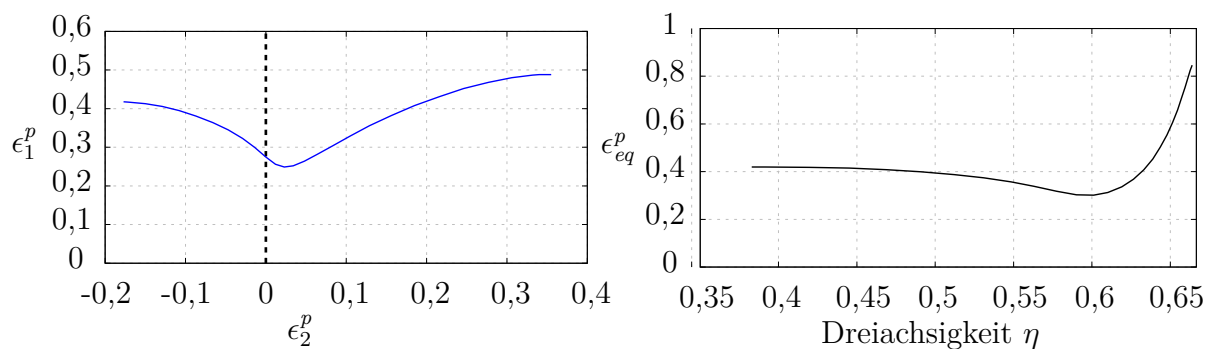
Zentraler Bestandteil von GISSMO ist deswegen die pragmatische Umsetzung der „*Poor Man's Regularisation*“. Dazu wird versucht, die makroskopischen, also über einen genügend großen Bereich gemessenen Größen zu regularisieren. Beim einachsigen Zugversuch wären solche Größen beispielsweise die technische Spannung  $\sigma_t$  und die technische Dehnung  $\epsilon_t$ , die über eine gewisse Messlänge bestimmt werden, siehe Abbildung 5.7. Damit kann auf dem größer gewählten, makroskopischen Maßstab eine weitgehende Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Diskretisierung erzielt werden, obwohl sich die Ergebnisse auf Elementebene stark unterscheiden können. Besonders wichtig ist diese Regularisie-

rung für die Verwendung in der Prozesskette, wo die Ergebnisse zwischen unterschiedlich diskretisierten Modellen der Umform- und Crashsimulation übertragen werden müssen.

## 5.2.2 Inkrementelle Vorhersage

Wie im vorhergehenden Abschnitt vorgestellt, wird es ab dem Beginn der *diffusen Einschnürung* (siehe auch Abschnitt 4.3.1) notwendig, Maßnahmen im Modell vorzusehen, um die gewünschte Regularisierung auf makroskopischer Ebene zu erreichen. Dazu muss zunächst auf Elementebene erkannt werden, wann dieser Punkt der beginnenden Lokalisierung erreicht ist. Als direkte Kriterien dafür stehen in erster Linie makroskopische Betrachtungen zur Verfügung, wie das *Considère*-Kriterium. Da diese Größen auf Element- beziehungsweise Integrationspunktebene nicht zur Verfügung stehen, müssen Rückschlüsse vom Verhalten auf Elementebene auf die makroskopische Ebene gezogen werden. Dazu wurden zahlreiche Ansätze veröffentlicht, unter anderem die in Abschnitt 4.3.2 vorgestellten Kriterien von SWIFT (1952), XUE (2010) sowie XUE UND BELYTSCHKO (2010) für diffuse Einschnürung. Diese erlauben eine geschlossene Beurteilung des aktuellen Deformationszustands. Eine Berücksichtigung des bis dahin beschrittenen Deformationpfades findet nicht statt, respektive nur über die skalare Geschichtsvariable der äquivalenten plastischen Dehnung. Damit werden die zu erwartenden großen Unterschiede in den Belastungsarten nicht wiedergegeben.

Die klassische Umformanalyse verwendet für die Beurteilung von Deformationszuständen das sogenannte *Grenzformänderungsdiagramm* (engl. Forming Limit Diagram, FLD). Hier sind die aus Versuchen ermittelten Punkte der beginnenden Lokalisierung für verschiedene Belastungsarten eingetragen. In der Umformtechnik wird üblicherweise eine Notation in plastischen Hauptdehnungen  $\epsilon_1^p$ ,  $\epsilon_2^p$  (entspricht den Umformgraden  $\varphi_i$ ) verwendet, siehe Abbildung 5.9 links. Das abgebildete FLD für einen mikrolegierten Stahl stammt aus der Materialdatenbank der Daimler AG. Die Notation in Hauptdehnun-



**Abbildung 5.9:** Forming Limit Diagram (FLD) für einen mikrolegierten Stahl.  
Links: Hauptdehnungen; Rechts: Plast. Dehnung über Dreiachsigkeit

gen ist für Belastungen außerhalb des zugdominierten Bereichs problematisch, da nicht eindeutig. Zum Vergleich wird die Kurve im rechten Teil des Diagramms in Koordinaten von Dreiachsigkeit  $\eta$  und äquivalenter plastischer Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$  dargestellt. Die Umrechnung erfolgt mit Hilfe von Gl. (3.11) und Gl. (3.15) unter den in Abschnitt 3.2.1 beschriebenen Annahmen. Die Vorgehensweise zur Erstellung dieser Kurven wird durch die zwischenzeitlich veröffentlichte Norm EN ISO 12004 (2008) vereinheitlicht.

MÜSCHENBORN UND SONNE (1975) führten Untersuchungen an verschiedenen Stahl-Tiefziehgütern unter variierender Belastung durch. Es wurden zweistufige Versuche ausgewertet, bei denen zwei Deformationsvorgänge mit jeweils proportionaler Belastung aneinander gereiht wurden. Es zeigte sich, dass jeder Teil des Deformationspfads einen Einfluss auf die bis zur Lokalisierung erreichbare Gesamtdehnung hat. Damit verliert für Deformationen mit wechselnden Beanspruchungsarten die klassische Grenzformänderungskurve ihre Gültigkeit.

Für GISSMO wurde deswegen ein inkrementeller Ansatz ähnlich dem schon in Abschnitt 5.1.1 vorgestellten Ansatz für die Schädigung gewählt. BAI UND WIERZBICKI (2008a) nutzen einen ähnlichen Ansatz. Analog zur Schädigungsvariable  $D$  aus Gl. (5.9), die ein Maß für die abgenommene Restduktilität des Werkstoffs ist, wird das Maß  $F$  der Umformschwere definiert. Es verkörpert anschaulich die Restumformbarkeit bis zur Lokalisierung.

$$dF = \frac{n}{\epsilon_{loc}^p} F^{(1-1/n)} d\epsilon_{eq}^p = H(n, \epsilon_{loc}^p(\eta), F) d\epsilon_{eq}^p. \quad (5.16)$$

Hierin ist – analog zu Gl. (5.9) –  $n$  ein Exponent, der für einen nichtlinearen Verlauf der Evolution über der äquivalenten plastischen Dehnung sorgt. Als materialspezifische Eingangsgröße für die Gewichtungsfunktion  $H$  wird eine in Abhängigkeit der Dreiachsigkeit  $\eta$  definierte Kurve der Lokalisierungsdehnung  $\epsilon_{loc}^p$  verwendet. Analog der Eigenschaften der Evolutionsgleichung Gl. (5.9) ergibt sich für eine proportionale Belastung  $\eta$  und damit  $\epsilon_{loc}^p = \text{const.}$  wiederum  $F = 1$  an den durch die Kurve vorgegebenen Dehnungswerten. Für den Sonderfall der proportionalen Belastung lässt sich die Evolutionsgleichung analog zu Gl. (5.12) integrieren, und man erhält den einfachen Zusammenhang analog zu Gl. (5.7):

$$F = \left( \frac{\epsilon_{eq}^p}{\epsilon_{loc}^p} \right)^n \quad \text{für } \epsilon_{loc}^p = \text{const.} \quad (5.17)$$

Damit wird der vollständige Deformationspfad bis zum Erreichen der Lokalisierung entsprechend der Gewichtungsfunktion  $H$  berücksichtigt. Der vorgestellte einfache Ansatz zeigt – obwohl rein phänomenologisch – in der Praxis gute Ergebnisse für die bis jetzt betrachteten Werkstoffe. Ab dem Erreichen der prognostizierten Lokalisierung ( $F = 1$ )

können dann im Modell Vorkehrungen wirksam werden, um die beginnende Elementgrößenabhängigkeit zu behandeln, siehe Abschnitt 5.3. Essentiell für eine zutreffende Prognose ist die geeignete Wahl der Lokalisierungskurve  $\epsilon_{loc}^p(\eta)$ , siehe dazu Abschnitt 6.2.2.

### 5.2.3 Zwei-Parameter Ansatz (Forming Limit Surface FLS)

Mit dem in Abschnitt 5.2.2 vorgestellten inkrementellen Ansatz existiert in GISSMO eine einfache und numerisch genügsame Lösung, um für die meisten Anwendungsfälle eine ausreichend genaue Abschätzung des Lokalisierungsbeginns zu erhalten. Besonders für Anwendungen in der Umformtechnik wird jedoch ein weiter verfeinertes Modell gewünscht, das auch für sehr komplexe Belastungsarten wie zyklische (Zug-Druck-) Belastungen verlässliche Prognosen liefert. Eines der bekanntesten Modelle für diesen Zweck ist das Instabilitätskriterium in *CrachFEM* der Firma MATFEM, beschrieben in OEHM (2008). Für die Prognose der Lokalisierung wird ein Submodell einer Imperfektion durch die Blechdicke benutzt und deren Entwicklung über der Deformation betrachtet. Damit wäre das Modell eine Weiterentwicklung des in Abschnitt 4.3.4 vorgestellten Modells von MARCINIAK UND KUCZYŃSKI (1967). Da keine weiterführenden Informationen verfügbar sind, war ein direkter Rückschluss auf die Methode nicht möglich. Nachteilig scheint der hohe Bedarf an Rechenzeit zu sein. Für jedes gefährdete Element muss zudem eine Vielzahl von inneren Variablen mitgeführt werden, was den Speicherbedarf in die Höhe treibt. Aus diesem Grund und wegen der fehlenden Nachvollziehbarkeit im Detail wurde von einer Verwendung dieses Modells als „Black Box“ abgesehen.

Stattdessen wurde in Zusammenarbeit mit DU BOIS (2007–2011) eine allgemeinere Fassung des in Abschnitt 4.3.5 vorgestellten Modells von HUTCHINSON UND NEALE (1978a, b); HUTCHINSON U. A. (1978) betrachtet. Bei der Instabilität im betrachteten Kontext handelt es sich um ein reines Plastizitätsphänomen. Deshalb werden die bis hierhin getroffenen Annahmen weiterhin verwendet und durch einige weitere Vereinfachungen ergänzt:

- i. Der elastische Anteil der Gesamtdehnung wird vernachlässigt, da für die betrachteten duktilen Materialien im interessierenden Bereich  $\epsilon^e \ll \epsilon^p$  gilt. Damit wird von isochorer, starr-plastischer Deformation ausgegangen ( $\nu^p = \nu = 0,5$ ).
- ii. Die angegebenen Beziehungen setzen den ebenen Spannungszustand voraus. Bei der Verwendung mit Schalenelementen führt diese Vereinfachung zu einem potentiellen Fehler, der aber nach bisheriger Erfahrung in der Praxis toleriert werden kann.



- iii. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird von *isotropem* Materialverhalten ausgegangen. Für richtungsabhängige Fließbedingungen ist die Herleitung ebenfalls möglich, jedoch gegebenenfalls deutlich komplexer.
- iv. Es wird die Verwendung einer assoziierten Fließregel vorausgesetzt, siehe auch Abschnitt 2.1. Das bedeutet, dass die Hauptrichtungen des Cauchy-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  koinzident mit denen des Dehnratentensors  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$  sind:  $\Phi^\sigma = \Phi^\epsilon = \Phi$ .

Unter diesen Voraussetzungen wird der aktuelle Zustand eines Elements durch drei Größen beschrieben:

1. Die Dreiachsigkeit  $\eta$  als Beschreibung des Spannungszustands.
2. Die relative Dicke des Blechs  $\zeta = \frac{t}{t_0}$ , die für die Betrachtung der Lokalisierung üblicherweise auf den Bereich der Ausdünnung  $0 < \zeta \leq 1$  beschränkt wird. Alternativ wird die Dickendehnung  $\epsilon_3 = \ln \zeta = -|\ln \zeta|$  mit  $-\infty < \zeta \leq 0$  verwendet.
3. Die äquivalente plastische Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$ . Im Folgenden wird der Index  $p$  weggelassen, siehe Vereinfachung i.).

Mit diesen drei Größen wird ein System aufgespannt, in dem sich alle momentanen Deformationszustände unter den oben genannten Annahmen darstellen lassen. Da eine Größe (üblicherweise die äquivalente plastische Dehnung) als Basis der Beschreibung verwendet wird, kann diese Darstellung mit zwei freien Größen als *Zwei-Parameter-Ansatz* bezeichnet werden. Darin sind die Größen durch die Fließbedingung und die assoziierte Fließregel gekoppelt. Die Größen der Dickendehnung  $\epsilon_3$  sowie die äquivalente plastische Dehnung  $\epsilon_{eq}$  sind dabei kinematische Zustandsgrößen des irreversiblen Deformationsvorgangs, die sich nur in kontinuierlicher Weise ändern können. Dies gilt insbesondere auch für verschiedene Schritte eines mehrstufigen Deformationsvorgangs. Die äquivalente plastische Dehnung ist nach ihrer Definition außerdem positiv semidefinit und monoton zunehmend, also  $d\epsilon_{eq} \geq 0$  sowie  $\epsilon_{eq} \geq 0$ . Demgegenüber kann sich der aktuelle Spannungszustand  $\eta$  sprunghaft und diskontinuierlich verändern, je nach den aktuellen Randbedingungen.

In diesen Koordinaten stellt sich ein Kriterium für den Beginn der Lokalisierung als dreidimensionale Fläche dar. Deswegen wurde hierfür die Bezeichnung „Grenzformänderungsfläche“, engl. „Forming Limit Surface (FLS)“ gewählt.

### Proportionale Belastung

Im Folgenden wird das Konzept der FLS zunächst am Sonderfall der *proportionalen Belastung* aufgezeigt. Proportional bedeutet – wie schon in den vorangegangenen Abschnitten – dass die Deformation über den gesamten Weg monoton und in derselben

Belastungsart ( $\eta = \text{const.}$ ) entsteht. Für eine übersichtliche Darstellung wird im Folgenden wieder das in Abschnitt 3.2.1, Gl. (3.6) eingeführte Verhältnis der Hauptdehnraten in der Blechebene  $b$  verwendet, das für proportionale Belastung mit dem Verhältnis der Hauptdehnungen gleichgesetzt werden kann:

$$b = \frac{\dot{\epsilon}_2}{\dot{\epsilon}_1} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \text{ nur für proportionale Belastung.} \quad (5.18)$$

Außerdem wird das Verhältnis der Hauptspannungen  $a$  nach Gl. (3.8) verwendet:

$$a = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}. \quad (5.19)$$

Die Größe  $a$  ist nach Gl. (3.13) mit der Dreiachsigkeit verknüpft:

$$\eta = \frac{1 + a}{\sqrt{1 + a^2 - a}}. \quad (5.20)$$

Die Größen  $a$  und  $b$  sind über die Gln. (3.14) verbunden. Zunächst beschränkt sich die Betrachtung auf den Bereich der Deformationszustände zwischen einachsigem Zug und äquibiaxialem Zug mit  $\frac{1}{3} \leq \eta \leq \frac{2}{3}$ , entsprechend  $-\frac{1}{2} \leq b \leq 1$ . Dieses Intervall deckt die üblicherweise für Lokalisierung betrachteten Deformationszustände ab. Die für eine gegebene Dickendehnung minimal notwendige plastische Dehnung ergibt sich für äquibiaxiale Deformation in der Blechebene mit  $\eta = \frac{2}{3}$ , respektive  $b = 1$ . Aus der Bedingung für Volumenkonstanz

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 0 \quad (5.21)$$

erhält man für  $\epsilon_3$

$$\epsilon_3 = \ln \zeta = -|\ln \zeta| = -\epsilon_1(1 + b). \quad (5.22)$$

Mit Gl. (3.11) ergibt sich für die äquivalente plastische Dehnung

$$\epsilon_{eq} = \frac{2}{b+1} |\ln \zeta| \sqrt{\frac{1 + b^2 + b}{3}} = \frac{-2\epsilon_3}{3\eta}. \quad (5.23)$$

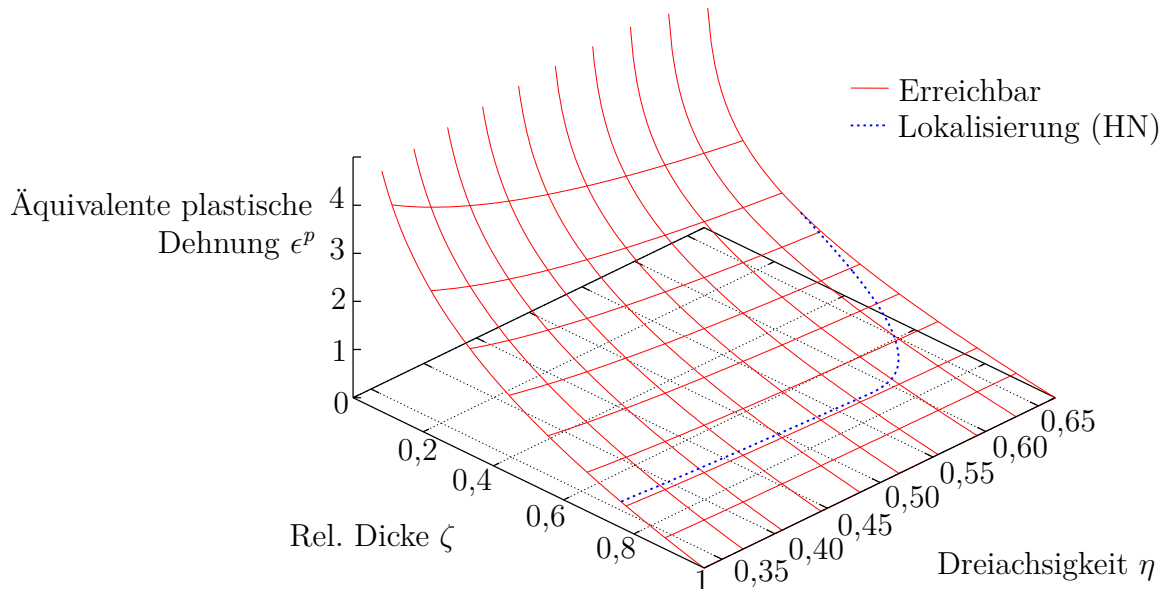
Damit erhält man die Grenzkurve für äquibiaxialen Zug mit  $\eta = \frac{2}{3}$ :

$$\epsilon_{eq} = -\epsilon_3 = |\epsilon_3|, \quad (5.24)$$

sowie die Grenzkurve des betrachteten Intervalls für einachsigen Zug mit  $\eta = \frac{1}{3}$ :

$$\epsilon_{eq} = -2\epsilon_3 = 2|\epsilon_3|. \quad (5.25)$$

Für proportionale Belastungen im Intervall  $\frac{1}{3} \leq \eta \leq \frac{2}{3}$  liegen also alle erreichbaren Zustände auf einer Fläche zwischen den beiden durch Gl. (5.24) und Gl. (5.25) vorgegebenen Randkurven.



**Abbildung 5.10:** Erreichbare Zustände für proportionale Deformation, HN-Kurve

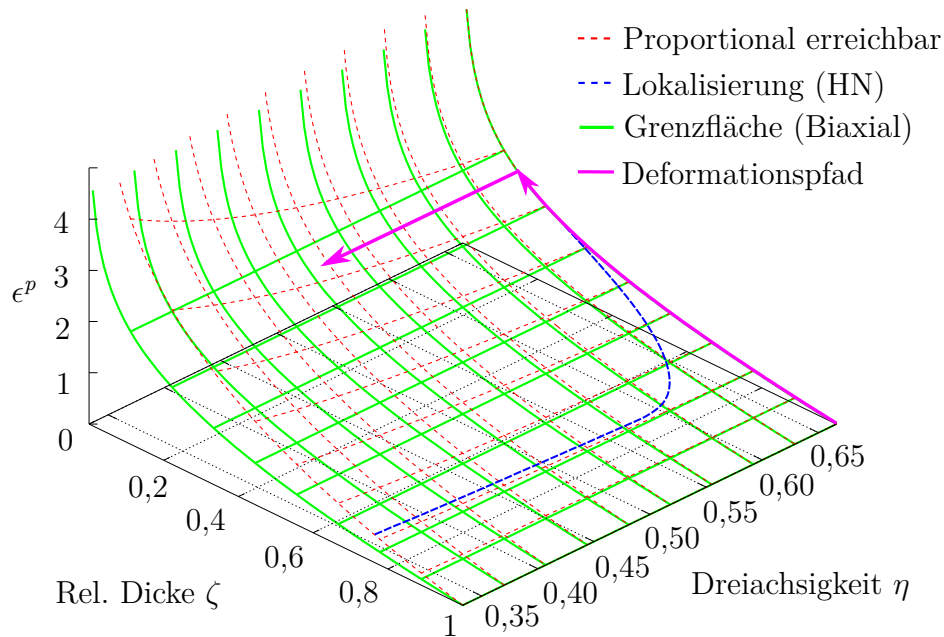
In Abbildung 5.10 ist zusätzlich eine mit Hilfe des *Hutchinson-Neale-(HN)-*Kriteriums erzeugte Kurve für einen mikrolegierten Stahl dargestellt. Sie teilt die Fläche der durch proportionale Belastung erreichbaren Zustände in einen Teil der nicht lokalisierten, homogenen Deformation (unten) und einen Teil der lokalisierten Deformation (oben). Für rein proportionale Belastung bringt die Zwei-Parameter-Darstellung der FLS keine zusätzliche Information, da durch die Definition der HN-Kurve in zwei Koordinaten (Ein-Parameter-Darstellung) die Lokalisierungsgrenze eindeutig beschrieben ist.

### Grenzwertbetrachtung für nichtproportionale Belastung

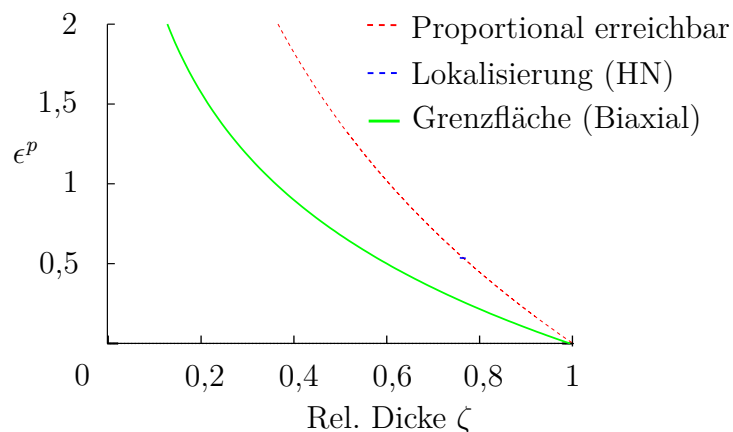
Für beliebige *nichtproportionale Belastung* mit variierender Dreiachsigkeit  $\eta \neq \text{const.}$  wird zunächst eine Grenzwertbetrachtung durchgeführt. Dabei wird das komplette Intervall der im ebenen Spannungszustand erreichbaren Dreiachsigkeiten mit  $-\frac{2}{3} \leq \eta \leq \frac{2}{3}$  betrachtet, siehe auch Abbildung 5.5.

Für die für eine gegebene Dickendehnung minimal notwendige plastische Dehnung wird aus Gl. (5.23) anschaulich klar, dass das Minimum dieser Funktion im ebenen Spannungszustand für den oberen Rand des Dreiachsigkeitsintervalls mit  $\eta = \frac{2}{3}$  (äquibiaxialer Zug) erreicht wird. Die für das Erreichen eines gegebenen Zustandspunkts  $P$  mit

Dreiaxsigkeit  $\eta$  und Dickendehnung  $\epsilon_3$  notwendige plastische Dehnung kann also nie kleiner sein als die aus Gl. (5.24) mit Dreiaxsigkeit  $\eta = \frac{2}{3}$  resultierende. Da sich die Dreiaxsigkeit sprunghaft verändern kann, ist jeder Punkt auf der unteren Grenzfläche nach Gl. (5.24) durch eine biaxiale Zugbelastung mit anschließendem Sprung der Dreiaxsigkeit erreichbar. Der pinkfarbene Deformationspfad in Abbildung 5.11 zeigt eine biaxiale Zugbelastung, gefolgt von einem Sprung der Dreiaxsigkeit.



**Abbildung 5.11:** Proportionale und biaxiale Grenzfläche, Deformationspfad mit sprunghafter Änderung der Dreiaxsigkeit



**Abbildung 5.12:** Schnitt durch Abb. 5.11 bei  $\eta = \frac{1}{3}$

Zustände unterhalb der Grenzfläche sind im ebenen Spannungszustand unter den genannten Voraussetzungen nicht erreichbar. Für beliebige nichtproportionale Belastung existiert jedoch zu höheren plastischen Dehnungen hin keine solche Grenzfläche. Anschaulich können beispielsweise durch zyklische Zug-Druck-Belastungen mit wechselndem Vorzeichen der Dreiachsigkeit  $\pm\eta$  und  $|\eta| = \text{const.}$  sowie  $b = \text{const.}$  beliebig hohe plastische Vordehnungen erzeugt werden, ohne dass am Ende eine Dickendehnung verbleibt, siehe Abbildung 5.15 rechts. Es gilt:

$$\epsilon_{eq} \geq |\epsilon_3|. \quad (5.26)$$

Der Zeitpunkt der Lokalisierung für allgemeine nichtproportionale Belastung hängt von der gewählten Verfestigungsfunktion des Konstitutivmodells ab.

### Allgemeinere Verwendung des Hutchinson-Neale-Modells

Im gewählten Koordinatensystem der FLS stellt die Lokalisierungsgrenze für beliebige Vordehnungen wiederum eine Fläche dar. Diese wird numerisch mit Hilfe des in Abschnitt 4.3.5 beschriebenen Modells von *Hutchinson&Neale* bestimmt. Ein Vorteil dieses Modells ist die Berücksichtigung von beliebig orientierten Imperfektionen („Rillen“), deren Richtungsänderungen durch plastische Deformation mit einer Evolutionsgleichung entwickelt werden.

Da das Modell nur für Belastungen im Zugbereich ( $0 \leq \eta \leq \frac{2}{3}$ ,  $-1 \leq b \leq 1$ ) entwickelt wurde, muss die Gültigkeit der Gleichungen für das volle Intervall der Dreiachsigkeiten im ebenen Spannungszustand untersucht werden. Besonderes Augenmerk muss auf die übliche und im verwendeten Finite-Elemente-Programm LS-DYNA automatisch erfolgende Anordnung der Komponenten des Spannungstensors gelegt werden. Die Anordnung der Hauptspannungen erfolgt nach der Konvention  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ . Dazu werden die auftretenden Belastungsarten in Quadranten unterteilt:

1. Äquibiaxialer Zug – einachsiger Zug:  
 $\frac{2}{3} \geq \eta \geq \frac{1}{3}$  und  $1 \geq b \geq -\frac{1}{2}$
2. Einachsiger Zug – reiner Schub:  
 $\frac{1}{3} \geq \eta \geq 0$  und  $-\frac{1}{2} \geq b \geq -1$
3. Reiner Schub – einachsiger Druck:  
 $0 \geq \eta \geq -\frac{1}{3}$  und  $-1 \leq b \leq -\frac{1}{2}$
4. Einachsiger Druck – äquibiaxialer Druck:  
 $-\frac{1}{3} \geq \eta \geq -\frac{2}{3}$  und  $-\frac{1}{2} \leq b \leq 1$

Die Herleitung der Bestimmungsgleichungen des *HN*-Modells in HUTCHINSON UND NEALE (1978a) wurde für alle vier Quadranten nachvollzogen. Um die Gültigkeit auf den Druckbereich mit  $-\frac{2}{3} \leq \eta \leq 0$  zu erweitern, müssen die Vorzeichen in den Beziehungen in Gl. (4.68) und Gl. (4.69) angepasst werden.

Für die Spannung  $\sigma_{nn}^b$  senkrecht zur Imperfektion ergibt sich

$$\text{Quadrant 1+2} \quad \sigma_{nn}^b = \frac{\sigma_Y(\epsilon_p^b)}{AH} \sqrt{1 - B \left( \frac{d\epsilon_p^a}{d\epsilon_p^b} \right)^2}, \quad (5.27)$$

$$\text{Quadrant 3+4} \quad \sigma_{nn}^b = -\frac{\sigma_Y(\epsilon_p^b)}{AH} \sqrt{1 - B \left( \frac{d\epsilon_p^a}{d\epsilon_p^b} \right)^2}. \quad (5.28)$$

Dabei ist Gl. (5.27) die ursprünglich von *Hutchinson und Neale* abgeleitete Form, Gl. (5.28) unterscheidet sich durch das Vorzeichen.

Für das Inkrement der Dickendehnung  $d\epsilon_3$  ergibt sich

$$\text{Quadrant 1+2} \quad d\epsilon_3^b = d\epsilon_p^b \left( -\frac{A}{H} \sqrt{1 - B \left( \frac{d\epsilon_p^a}{d\epsilon_p^b} \right)^2} - D \frac{d\epsilon_p^a}{d\epsilon_p^b} \right), \quad (5.29)$$

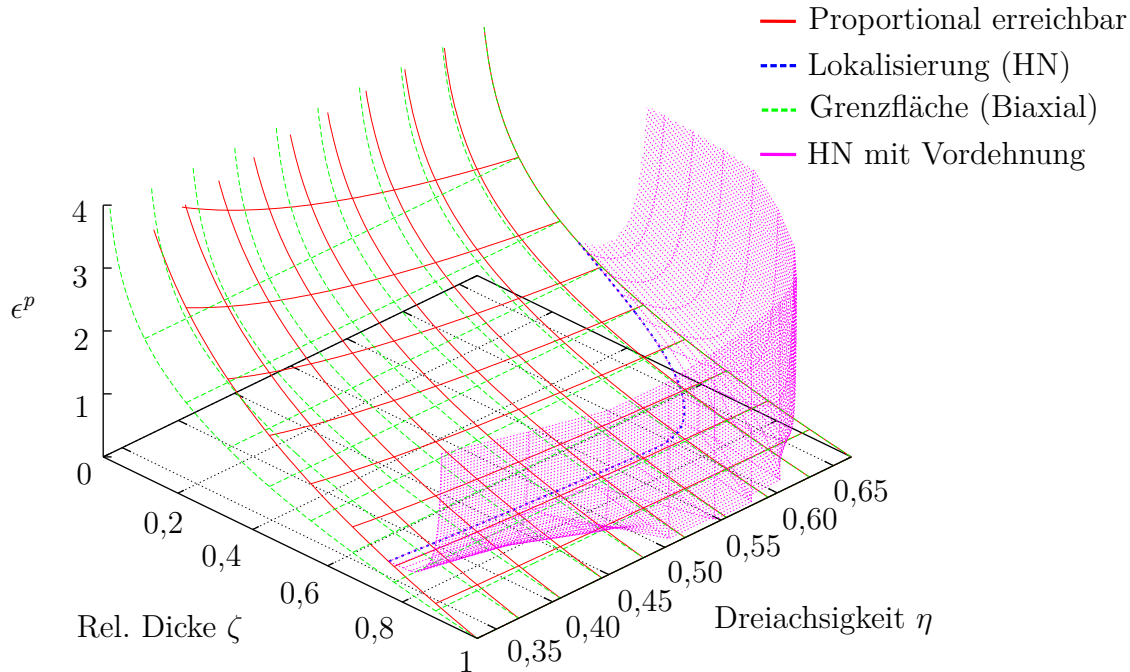
$$\text{Quadrant 3+4} \quad d\epsilon_3^b = -d\epsilon_p^b \left( -\frac{A}{H} \sqrt{1 - B \left( \frac{d\epsilon_p^a}{d\epsilon_p^b} \right)^2} - D \frac{d\epsilon_p^a}{d\epsilon_p^b} \right). \quad (5.30)$$

Auch hier ist Gl. (5.29) die ursprüngliche Fassung, Gl. (5.30) unterscheidet sich durch das Vorzeichen. Mit den entsprechenden Fallunterscheidungen kann das so erweiterte Modell für beliebige Deformationsvorgänge im ebenen Spannungszustand eingesetzt werden.

### Die Grenzformänderungsfläche (Forming Limit Surface FLS)

Das so verallgemeinerte *HN*-Modell kann mit beliebigen Startbedingungen für plastische Vordehnung  $\epsilon_{eq}$  und Dickendehnung  $\epsilon_3$  verwendet werden. Da im Modell die Entwicklung mehrerer über verschiedene Anfangsausrichtungen verteilter Imperfektionen dargestellt wird, können beliebige Randbedingungen und Belastungszustände aufgebracht werden. Für eine rein zyklische Belastung mit  $|\eta| = \text{const.}$ , entsprechend  $b = \text{const.}$  findet keine Entwicklung der Imperfektionen relativ zum Grundmaterial statt. Deshalb können alle Zustände, die in Richtung der Dickendehnung unterhalb der Lokalisierungslinie für proportionale Belastung liegen, durch einfaches Ansetzen einer plastischen Vordehnung in der *HN*-Routine abgedeckt werden. Dazu wird eine genügende Anzahl von Stützstellen der FLS durch mehrfaches Durchlaufen mit zunehmender plastischer Vordehnung für Stützstellen im Dreiachsigenbereich  $\frac{2}{3} \geq \eta \geq \frac{1}{3}$  erzeugt. Man erhält die Lokalisierungs-

fläche für alle Zustände mit Dickendehnungen unterhalb der HN-Linie für proportionale Belastung, siehe Abbildung 5.13.



**Abbildung 5.13:** Ergebnisfläche des HN-Modells für beliebige Vordehnungen

Der noch fehlende Teil der FLS ist der Bereich zwischen der oben bestimmten Fläche und der unteren Grenzfläche. Hier können Zustände existieren, die eine höhere Dickendehnung als die durch die proportionale Belastung darstellbare besitzen. Zur Bestimmung dieses Bereichs wird bei einer Dreiachsigkeit von  $\eta = \frac{2}{3}$  die gewünschte Dickendehnung erzeugt und dann bei einer niedrigeren Dreiachsigkeit  $\frac{2}{3} > \eta \geq \frac{1}{3}$  weiter belastet. Auf diese Art werden auch in diesem Bereich Stützstellen erzeugt, und zwar bis zum Schnittpunkt der interpolierten Fläche mit der unteren Grenzfläche. Damit erhält man den noch fehlenden Teil bis zum Schnittpunkt mit der unteren Grenzfläche. Ab diesem Schnittpunkt folgt die Fläche der unteren Grenzfläche – man erhält zusammengesetzt die Grenzformänderungsfläche (Forming Limit Surface FLS), siehe Abbildungen 5.14 sowie 5.15.

Die so erzeugte Lokalisierungsfläche (FLS) scheint nach den bis jetzt vorliegenden Erfahrungen den Ort der beginnenden Lokalisierung für alle betrachteten proportionalen und nichtproportionalen Lastpfade darzustellen. Eine Möglichkeit für einen geschlossenen Beweis dieser Annahme wurde bis jetzt nicht gefunden. Für die Anwendung des Modells konnte jedoch eine sehr gute Übereinstimmung der Vorhersage mit den in numerischen Beispielen beobachteten Lokalisierungszeitpunkten bestätigt werden. Die Methode bietet gegenüber anderen Methoden den Vorteil, dass die Fläche vorab numerisch

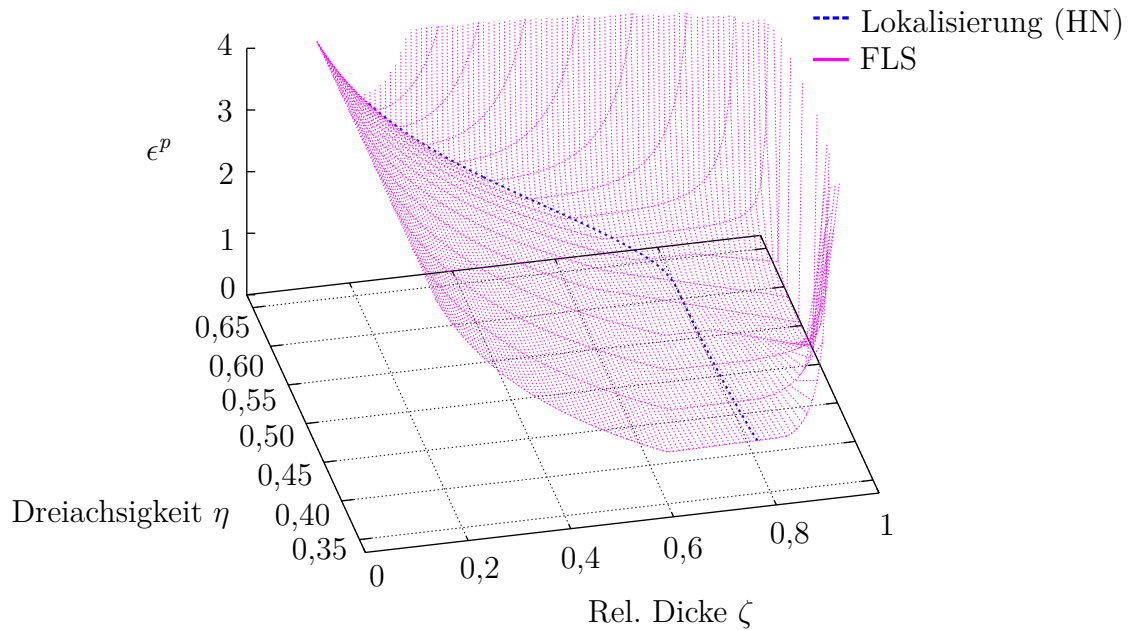


Abbildung 5.14: Resultierende Forming Limit Surface (FLS)

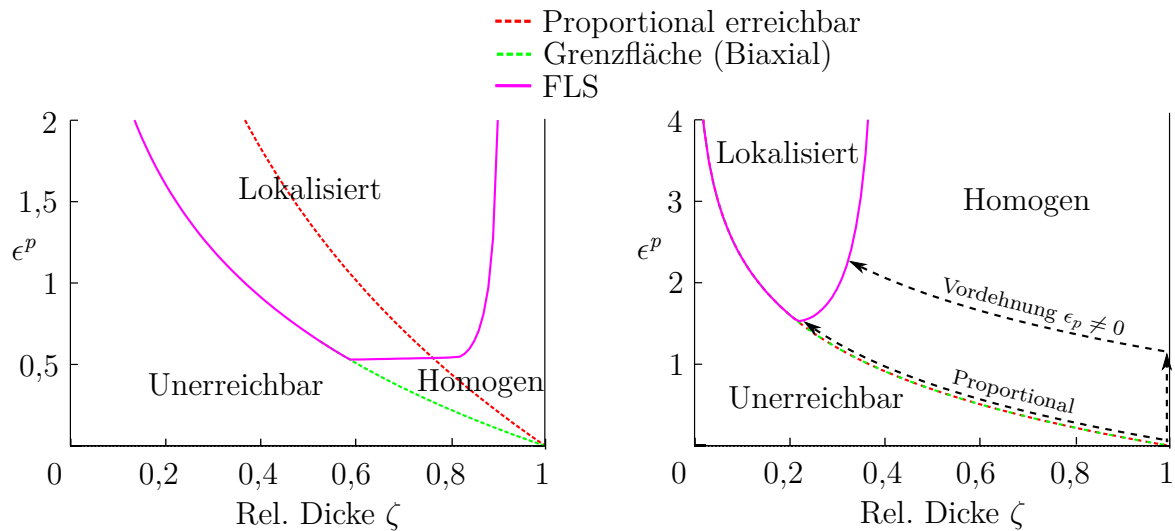


Abbildung 5.15: Schnitte durch die FLS.

Links:  $\eta = \frac{1}{3}$  (einachsiger Zug); Rechts:  $\eta = \frac{2}{3}$  (biaxialer Zug)

mit Hilfe der Verfestigungskurve  $\sigma_Y(\epsilon_{eq})$  erzeugt werden kann. Im Schädigungsmodell muss dann nur noch für jedes Lastinkrement überprüft werden, ob der aktuelle Zustand in  $(\eta, \epsilon_3, \epsilon_{eq})$ -Koordinaten unterhalb der FLS liegt (keine Lokalisierung) oder darüber (Lokalisierung). Das ist numerisch einfach und ohne einen hohen zusätzlichen Aufwand an Rechenzeit durchzuführen. Gleich wie bei der in Abschnitt 5.2.2 vorgestellten einfa-



chen inkrementellen Lokalisierungsprognose können ab diesem Zeitpunkt Maßnahmen zur Regularisierung der Netzgrößenabhängigkeit in Kraft treten.

Die eigentliche Erzeugung der FLS erfolgt also im Vorfeld einer FE-Simulation (Pre-Processing), sie wurde deswegen nicht in LS-DYNA implementiert. Ein separates Programm erzeugt im Vorfeld aus der Verfestigungskurve die FLS, welche dann als Input dient.

## 5.3 Entfestigung und Schädigung

Wie in Abschnitt 5.2 dargestellt, tritt in den Modellen ab dem Beginn der inhomogenen beziehungsweise lokalisierten Deformation eine unerwünschte Netzgrößenabhängigkeit der Ergebnisse auf. Die Ursache für dieses Verhalten ist in erster Linie die Einführung einer künstlichen Längenskala ins Modell, die durch die Kantenlänge der Diskretisierung vorgegeben wird. Wie bereits in Abschnitt 5.2.1 dargestellt, treten im Bereich der Lokalisierung große Gradienten im Verschiebungsfeld auf. Abhängig von der Ordnung der Ansatzfunktionen der verwendeten Elemente müsste für eine ausreichend genaue Abbildung der lokalisierten Deformation die Elementierung sehr fein sein ( $l_E \ll 1\text{mm}$ ). Für diese feine Diskretisierung könnte dann mit Hilfe geeigneter Methoden wie nichtlokaler Ansätze, Cosserat-Kontinua etc. eine weitgehend *objektive Beschreibung* der Vorgänge in der Lokalisierungszone unabhängig von der Diskretisierung erreicht werden.

Wie bereits zuvor dargelegt, ist für die Verwendung in (Crash-)Simulationen des gesamten Fahrzeugs eine solch feine Diskretisierung aus Gründen der Rechenzeit zumindest heute noch nicht darstellbar. Deswegen befindet man sich immer im Bereich der so genannten „poor man’s regularisation“, wo die charakteristische Größe der Diskretisierung deutlich gröber als das darzustellende Deformationsmuster ist. Es ist deswegen nicht möglich, die lokale Verformung darzustellen, die Simulationen sind per Definition *nicht prädiktiv*. Zusätzlich ist für jede weitere, andere charakteristische Länge der Diskretisierung eine andere Lösung des Problems zu erwarten. *Netzkonvergenz* ist damit im betrachteten Bereich nicht vorhanden.

Aus der Simulation müssen trotz der genannten Probleme Aussagen für die Auslegung von Bauteilen, speziell auch im Hinblick auf das Auftreten von Lokalisierung und Versagen, getroffen werden – siehe auch STORHEIM U. A. (2015). Also ist eine pragmatische Lösung notwendig. Im Modell GISSMO wird mit Hilfe einer Schädigungsformulierung versucht, weitgehend netzunabhängige Lösungen auf *makroskopischer Ebene* zu erzielen. Als makroskopisch wird eine Ebene zwischen der mikroskopischen, im Modell auf Integrationspunktebene abgebildeten lokalen Vorgänge im Material und der Struktur- bzw. Bauteilebene definiert. Ein Beispiel für eine solche makroskopische Längenskala und die

zugehörigen Messgrößen sind die technische Spannung  $\sigma_t$  und die technische Dehnung  $\epsilon_t$ , die über eine deutlich oberhalb der Längenskala der Diskretisierung liegende Messlänge  $l_0$  bestimmt werden. Zielsetzung der in GISSMO implementierten Regularisierung ist:

1. Weitgehend netzgrößenunabhängige Ergebnisse makroskopischer Größen wie technische Spannungen/Dehnungen in modellrelevanten Größenordnungen, beispielsweise Messlänge eines Zugversuchs. Trotz der Vorkehrungen können auf Elementbeziehungsebene die *lokalen* Ergebnisse stark differieren.
2. Weitgehend netzgrößenunabhängige Energiedissipation bis zum Versagen in den relevanten Bereichen. Beispiele sind die Vorgänge in einer Lokalisierungszone bis zum Riss.

Als besonders wichtig für das globale Verhalten eines Simulationsmodells wird dabei die zutreffende Prognose der im Bereich des Versagens dissipierten Deformationsenergie empfunden. Ausgehend vom irreversiblen und dissipativen Vorgang der plastischen Deformation werden im Bereich der Lokalisierung auf kleinem Raum große Mengen an Verformungsarbeit umgesetzt, was aus den genannten Gründen von der Vernetzung so nicht wiedergegeben werden kann. Zusätzlich wird beim letzten Schritt des Versagensprozesses – der Entstehung eines makroskopischen Risses – Energie durch die Bildung neuer Grenzflächen an den Rissufer verbraucht. Beide Effekte müssen damit durch das Modell berücksichtigt werden, um eine global nach beiden Gesichtspunkten aussagekräftige Simulation zu ermöglichen.

Als Werkzeug dafür wird eine elastoplastische Schädigung definiert. In den meisten anderen Kontinuumsschädigungsmodellen wird einer reversiblen, elastischen Deformation ein irreversibler Anteil als Schädigung hinzugefügt. Im Unterschied dazu wird in GISSMO – der Zielsetzung entsprechend – Schädigung zur Beeinflussung des durch die plastische Deformation dominierten Prozesses verwendet. Es wird also dem irreversiblen Prozess der Plastizität ein weiterer irreversibler, dissipativer Prozess überlagert. Diese Vorgehensweise begründet sich hauptsächlich aus der Forderung nach Netzgrößenunabhängigkeit der Ergebnisse.

Damit wird die in GISSMO verwendete Schädigung teilweise zur Kompensation von – vor allem aus ungenügender Diskretisierung resultierenden – unphysikalischen Modellfehlern verwendet. Trotzdem sollen die Auswirkungen der physikalischen Einflußfaktoren, wie die zur Bildung von freien Rissoberflächen notwendige Energie, möglichst realistisch abgebildet werden.

### 5.3.1 Das Konzept der effektiven Spannung

Bei der Betrachtung der Kraft-Weg-Kurven der simulierten Zugversuche aus Abbildung 5.6 wird sofort deutlich, dass sich die resultierenden Kraftverläufe im postkritischen Bereich stark unterscheiden. Der Grund dafür ist das lokal durch die verschiedenen Diskretisierungsgrößen stark unterschiedliche Deformationsfeld, siehe Abbildung 5.7. Um eine makroskopische Regularisierung der Größen zu erreichen, muss also im postkritischen Bereich der Deformation eine Anpassung der lokalen Steifigkeiten respektive der Tangenten der Steifigkeit erfolgen. Um das zu erreichen, wurde das „*Effective Stress Concept*“ verwendet. Im Folgenden wird auf die von LEMAITRE (1985); LEMAITRE UND DESMORAT (2005) eingeführte Fassung aufgebaut. Grundlage des Modells ist die Aufteilung eines repräsentativen Querschnitts des betrachteten Materials. Dazu wird wieder auf Abbildung 5.3 zurückgegriffen.

In einer Schnittebene mit Normale  $\mathbf{g}$  wird die Schnittfläche  $A_0^g$  in einen ungeschädigten und einen geschädigten Teil aufgeteilt. Wie in Abschnitt 5.1.1 dargelegt, wird von gleichverteilten und in ihrer Wirkung richtungsunabhängigen Defekten ausgegangen. Damit ist keine Abhängigkeit von der Schnittrichtung  $\mathbf{g}$  vorhanden (Isotropie). Die Flächenanteile der Defekte in Bezug zur Ausgangsfläche liefern damit direkt ein Maß für die Schädigung, siehe Gl. (5.2):

$$D = \frac{A_{\text{Defekte}}}{A_0} = \frac{A_0 - A_{\text{Rest}}}{A_0}. \quad (5.31)$$

$D$  kann damit Werte  $0 \leq D \leq 1$  annehmen, wobei  $D = 0$  dem ungeschädigten Werkstoff entspricht. Bei  $D = 1$  besteht der Querschnitt nur noch aus Defekten, was dem vollständigen Verlust der Tragfähigkeit (Versagen) entspricht.

Nach dem Ansatz von *Lemaitre* („Effective Stress Concept“) wirkt sich die durch den Anteil an Mikrodefekten reduzierte Querschnittsfläche auf die resultierende Materialtangente  $\mathbf{C}$  aus. Mit Hilfe des skalaren Schädigungsparameters  $D$  kann so eine einfache Kopplung zwischen Schädigung und Steifigkeit erreicht werden. Für eine vorgegebene Dehnung des repräsentativen Volumens vermindert sich die in den Restquerschnitten wirksame (effektive) Spannung  $\sigma^*$  zur reduzierten Spannung  $\sigma$ :

$$\sigma = \sigma^* (1 - D). \quad (5.32)$$

Das führt zu einer Verminderung der materiellen Steifigkeit, die in GISSMO mit der kontinuierlichen Evolution der Schädigung nach Gl. (5.9) von Anfang an wirksam werden würde. Deswegen wurde ein erweiterter Ansatz gewählt.

### 5.3.2 Abgrenzung des postkritischen Bereichs

Den Erkenntnissen aus Abschnitt 5.2.1 folgend, werden die Deformationsvorgänge in GISSMO in zwei Bereiche aufgespalten:

1. Homogener Deformationsbereich

In diesem Bereich liegt keine lokalisierte Deformation vor. Die Ergebnisse zeigen hier keine Abhängigkeit von der Diskretisierung, dementsprechend sind keine Maßnahmen zur Regularisierung notwendig. Die Evolution des Schädigungsparameters nach Gl. (5.9) findet statt, aber keine Kopplung mit der Steifigkeit.

2. Postkritischer Bereich

Ab dem Beginn der Lokalisierung (ermittelt mit dem inkrementellen Verfahren nach Abschnitt 5.2.2 oder der FLS nach Abschnitt 5.2.3) ist Netzgrößenabhängigkeit zu erwarten. Ab hier sind Regularisierungsmaßnahmen wie die Kopplung von Schädigung und materieller Steifigkeit notwendig, um die makroskopischen Ergebnisgrößen weitgehend unabhängig von der Netzgröße zu bekommen. Lokal können sich die Ergebnisgrößen trotzdem stark unterscheiden.

Die Verwendung der Instabilitätsprognose (Evolution von  $F$  nach Gl. (5.16) oder Verwendung der FLS) findet ausschließlich im homogenen Deformationsbereich statt. Hier ist keine netzgrößenabhängige Definition von Parametern notwendig, da *Netzkonvergenz* existiert.

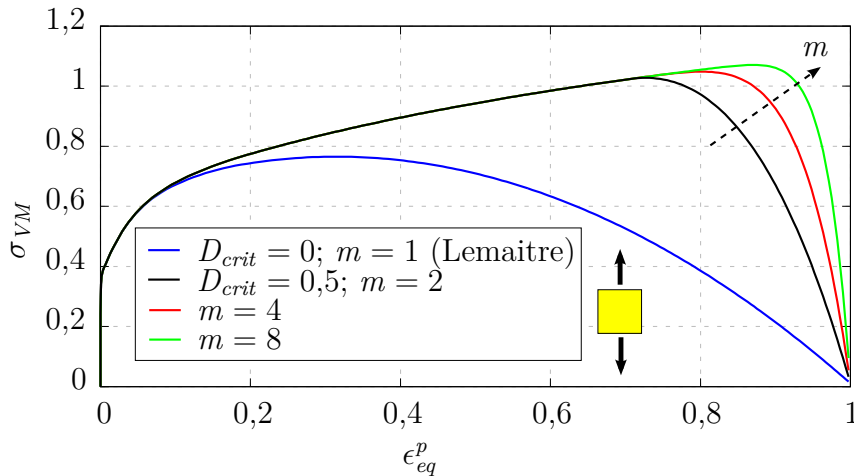
Ab dem Erreichen des postkritischen Bereichs ( $F = 1$  beziehungsweise Zustand oberhalb der FLS) beginnt die inhärente Netzabhängigkeit des Modells. Da trotz Regularisierung die lokalen Feldgrößen („mikroskopische Ebene“) im postkritischen Bereich stark netzabhängig sein können, ist die Definition einer elementgrößenabhängigen Kurve der Bruchdehnungen  $\epsilon_f^p$  notwendig. Man kann also die Evolution von  $D$  nach Gl. (5.9) als den netzabhängigen Teil von GISSMO betrachten.

Die konsequente Aufteilung eines Deformationsvorgangs nach obigem Schema macht damit den Beginn einer Kopplung analog zu Gl. (5.32) erst ab dem festgestellten Beginn der Lokalisierung notwendig. Für die Implementierung in GISSMO wird die beim festgestellten Beginn der Lokalisierung ( $F = 1$  bzw. Schnittpunkt mit FLS) existierende Schädigung  $D$  als innere Größe  $D_{crit}$  gespeichert. Die Kopplung nach *Lemaitre*, Gl. (5.32), wird abgewandelt zu

$$\sigma = \sigma^* \left( 1 - \left[ \frac{D - D_{crit}}{1 - D_{crit}} \right]^m \right). \quad (5.33)$$

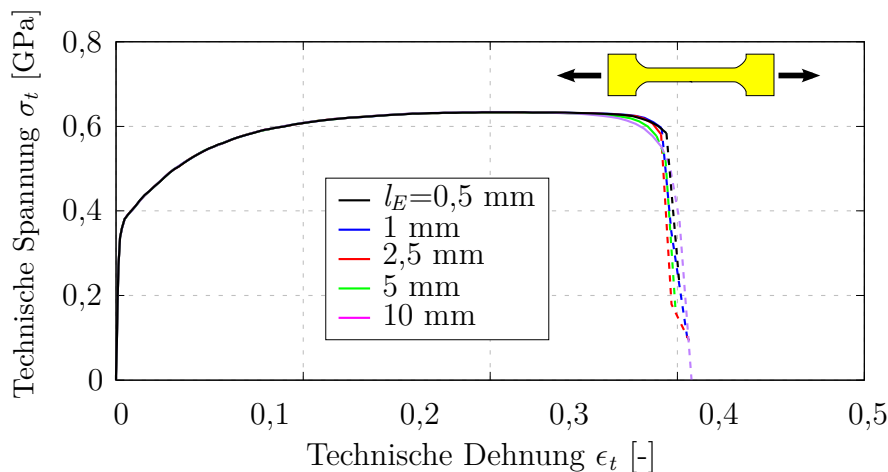
Hierin sind  $D$  der aktuelle Schädigungswert und  $D_{crit}$  der Schädigungswert zum Zeitpunkt des Lokalisierungsbeginns. Mit Hilfe des Exponenten  $m \geq 1$  kann der Verlauf der

Kopplung beeinflusst werden. Damit ergibt sich auf Elementebene (*Mikroebene*) ein Ausblenden der resultierenden Spannung abhängig von  $D_{crit}$  und  $m$ , siehe Abbildung 5.16.



**Abbildung 5.16:** Resultierende Spannung im Ein-Element-Test

Um auf *makroskopischer* Ebene (hier der Ebene der technischen Spannung/Dehnung) eine vollständige Regularisierung bis zum Bruch der Probe zu erreichen, ist je nach Material eine elementgrößenabhängige Definition der im postkritischen Bereich dominierenden Parameter  $\epsilon_f^p$  und  $m$  sinnvoll, siehe Tabelle 7.2 und Abbildung 7.2. Der Parameter  $m$  (FADEXP) ist dabei gut geeignet, die Menge an im postkritischen Bereich dissipierter Energie zu steuern; er kann fix oder per *Loadcurve* definiert werden. Damit können auf Makroebene die Ergebnisse der bereits in Abbildung 5.6 gezeigten Simulationen eines Zugversuchs weitgehend regularisiert werden, siehe Abbildung 5.17.



**Abbildung 5.17:** Zugversuche mit verschiedenen Elementgrößen  $l_E$ , mit Regularisierung

Sowohl die resultierenden technischen Bruchdehnungen als auch die Verläufe der technischen Spannung stimmen dann weitgehend überein. Die spezifische „technische“ De-

formationsenergie (bezogen auf die undeformierte Volumeneinheit) auf Makroebene ist für *von Mises*-Plastizität

$$W = \int \sigma_{VM,tech} d\epsilon_{eq,tech}. \quad (5.34)$$

Durch die gute Übereinstimmung der Kurvenverläufe ist damit auch diese Größe auf Makroebene weitgehend unabhängig von der Elementierung. Nicht regularisiert sind lediglich noch Beanspruchungen außerhalb der Blechebene wie beispielsweise Biegung, siehe auch PACK UND MOHR (2017).

### 5.3.3 Dreiachsige abhängige Regularisierung

Wie in den Abschnitten 4.3 und 5.2 ausgeführt, ist Lokalisierung in metallischen Werkstoffen nur für zugdominierte Belastungen ( $\eta > 0$ ) zu erwarten. In der Praxis kann davon ausgegangen werden, dass sich Lokalisierung für proportionale Belastungen weitgehend auf den Bereich des Streckziehens ( $\frac{1}{3} \leq \eta \leq \frac{2}{3}$ ) beschränkt. Für hochfeste Tiefziehstähle wiederum ist oft ein Sprödbbruch vor Beginn der Lokalisierung im Bereich des äquibiaxialen Zugs ( $\eta \rightarrow \frac{2}{3}$ ) zu erwarten, siehe auch WALTERS (2014).

Deswegen wurden für die Implementierung von GISSMO Vorkehrungen getroffen, um die Elementgrößenabhängigkeit der Bruchdehnung  $\epsilon_f(\eta)$  in den Bereichen  $\eta \rightarrow 0$  und  $\eta \rightarrow \frac{2}{3}$  zu beschränken. Wenn für diese Deformationszustände keine Lokalisierung vor dem Bruch auftritt, tritt auch kein postkritischer Bereich auf. Eine elementgrößenabhängige Definition der Parameter würde dann zu falschen Ergebnissen führen. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, wurden zwei zusätzliche Parameter eingeführt: Die elementgrößenabhängige Definition wird in den Dreiachsigekeitsbereichen abgemindert, in denen keine Lokalisierung zu erwarten ist.

Damit ist die Definition der Bruchdehnungskurve abhängig von der Dreiachsigekeit  $\eta$ , der Elementgröße  $l_E$  sowie den Faktoren *SHRF* und *BIAXF*:

$$\epsilon_f = f(\eta, l_E, SHRF, BIAXF). \quad (5.35)$$

Mit dem Faktor  $k(l_E)$  für die elementgrößenabhängige Skalierung der Bruchdehnung ergibt sich abschnittsweise

$$\epsilon_{f,res}(\eta) = \begin{cases} \epsilon_f(\eta) [SHRF(1-k) + k] & \forall \quad \eta \leq 0 \\ \epsilon_f(\eta) [SHRF(1-3\eta)(1-k) + k] & \forall \quad 0 < \eta \leq \frac{1}{3} \\ \epsilon_f(\eta) [BIAXF(3\eta-1)(1-k) + k] & \forall \quad \frac{1}{3} < \eta \leq \frac{2}{3} \end{cases} \quad (5.36)$$

mit der resultierenden Bruchdehnung  $\epsilon_{f,res}(\eta)$ . In Abbildung 5.18 ist als Beispiel die Bruchdehnungskurve des Dualphasenstahls aus Abschnitt 7.1 mit elementgrößenabhängiger Skalierung dargestellt.

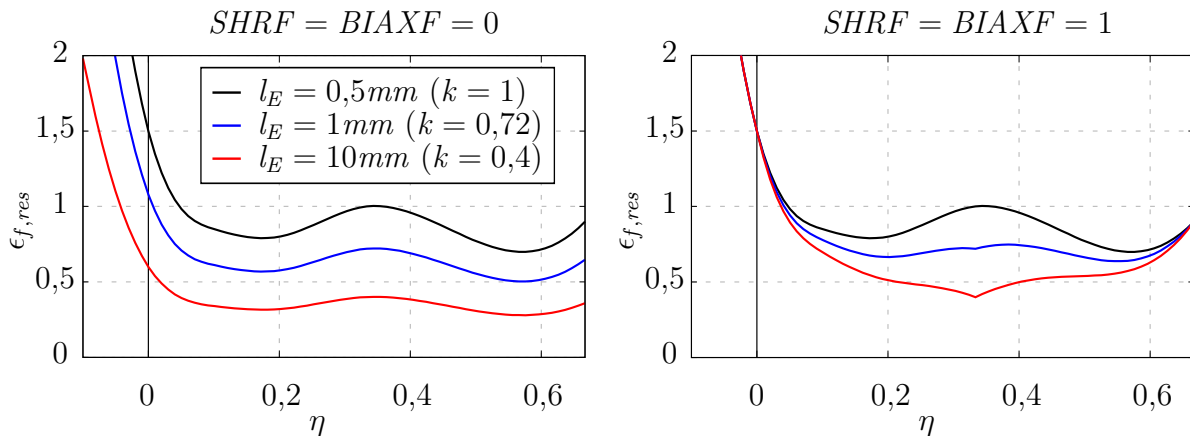


Abbildung 5.18: Einfluss von  $SHRF$  und  $BIAXF$  auf die Bruchdehnung

Die Bestimmung der Parameter  $SHRF$  und  $BIAXF$  kann je nach Material in der Regel nicht direkt erfolgen, siehe auch Abschnitt 6.2.1.

### 5.3.4 Anwendung in der Prozesskette

Im folgenden Abschnitt wird auf einige Besonderheiten der Anwendung von GISSMO in der Prozesskette Umform- und Crashsimulation eingegangen. Die durchgängige Modellierung über mehrere Stufen der Prozesskette beinhaltet dabei immer eine Übertragung von lokalen Ergebnisgrößen zwischen unterschiedlichen Netzen, siehe auch Abbildung 5.2. Wie bereits festgestellt, können trotz der Maßnahmen zur Regularisierung auf Element- bzw. Integrationspunktebene große Differenzen zwischen den Ergebnisgrößen für unterschiedliche Netzgrößen auftreten, siehe auch Abbildung 5.6 und 5.7. Anders ausgedrückt, sind die Ergebnisse auf Mikroebene nicht *objektiv*, sobald der postkritische Deformationsbereich mit Lokalisierung erreicht wird. Hier liefert jede Netzgröße ein lokal unterschiedliches Dehnungsfeld als Ergebnis.

Für die Übertragung („Mapping“) wird mit Hilfe eines geeigneten Werkzeugs die lokale Verteilung der Geschichtsvariablen auf das Netz der nachfolgenden Simulation übergeben. Nach den Ausführungen in den vorangegangenen Abschnitten ist klar, dass eine solche Übertragung nur für noch nicht lokalisierte Deformation sinnvoll ist. Bis zum Beginn der Lokalisierung ist die lokale Verteilung der Variablen weitgehend unabhängig von der Elementgröße, sodass eine Übertragung auf ein anderes Netz sinnvoll erfolgen kann.

Besondere Aufmerksamkeit muss allerdings dem nach Abschnitt 5.3.2 elementgrößenabhängig definierten Teil von GISSMO gewidmet werden. Speziell die Evolution der Schädigung  $D$  nach Gl. (5.9) liefert durch die Verwendung einer von der Elementgröße abhängigen Kurve für die Bruchdehnung  $\epsilon_f(\eta, l_e)$  unterschiedliche Werte. Eine spätere Umrechnung der resultierenden Werte ist durch die Nichtlinearität der Evolution und die beliebigen, im Nachhinein nicht nachvollziehbaren Deformationspfade nicht möglich. Deswegen kann in GISSMO eine weitere Evolution der Schädigung definiert werden. Es wird eine Referenzschädigung  $D_{ref}$  für eine beliebige „Referenz-Elementgröße“ ausgegeben. Dazu wird eine zweite Evolution der Schädigung nach Gl. (5.9) durchgeführt, in der die zur Referenz-Elementgröße gehörende Bruchdehnungskurve  $\epsilon_{f,ref}$  verwendet wird:

$$dD_{ref} = \frac{n}{\epsilon_{f,ref}^p} D^{(1-1/n)} d\epsilon^p = G(n, \epsilon_{f,ref}^p, D) d\epsilon^p. \quad (5.37)$$

Die so erzeugte Referenzschädigung entspricht bis zum Erreichen der Lokalisierung der aus einer fiktiven Simulation mit einem Netz der Referenzgröße zu erwartenden Schädigung. Es handelt sich um eine ausschließlich für die anschließende Übertragung gedachte Größe, die keine Relevanz für die Simulation mit der tatsächlichen Elementgröße hat. Die weiteren Ergebnisgrößen sind nach der Definition in Abschnitt 5.3.2 unabhängig von der Netzgröße und können im Bereich homogener Deformation ohne weitere Vorkehrungen zwischen den Netzen übertragen werden.



## Anwendung und Parameteridentifikation

Im Folgenden werden geeignete Methoden zur Identifikation der Eingangsparameter für das Modell GISSMO vorgestellt. Im Zuge der Entwicklung wurde besonderes Augenmerk darauf gelegt, dass die Eingangsgrößen des Modells möglichst anwenderfreundlich zu ermitteln sind. So weit wie möglich sollen sich diese direkt aus physikalisch beobachtbaren Größen von Versuchen mit Elementarproben ableiten lassen. Weitere Parameter können nach den gemachten Erfahrungen für bestimmte Werkstoffgruppen, wie hochfeste Stähle, mit Standardwerten besetzt werden. Für die Anwendung werden an praktischen Beispielen die entwickelten Vorgehensweisen dargelegt. Der typische Ablauf zur Erstellung einer GISSMO-Materialkarte für LS-DYNA ist in Tabelle 6.1 dargestellt.

|   |
|---|
| Bestimmung von Fließfläche und Verfestigung (Fließkurve)                                    |
| Instabilitätskurve <b>ECRIT</b> aus Fließkurve bestimmen                                    |
| Schädigungsexponent $n$ ( <b>DMGEXP</b> ) festlegen   |
| Versagenskurve <b>LCSDG</b> für feine Elementierung (z.B. 0,5mm) an Versuche anpassen       |
| Bestimmung des Fading-Exponenten $m$ ( <b>FADEXP</b> ) für feine Elementierung              |
| Regularisierungsfaktor $k$ ( <b>LCREGD</b> ) für gröbere Elementierungen (1..10mm) anpassen |
| Fading-Exponenten $m$ ( <b>FADEXP</b> ) für gröbere Elementierungen anpassen                |
| <b>SHRF</b> und <b>BIAXF</b> bestimmen (Komponentenversuche)                                |

**Tabelle 6.1:** Flussdiagramm zur Materialkartenerstellung

## 6.1 Plastisches Fließen

Notwendige Grundlage für die zutreffende Beschreibung der Vorgänge von Lokalisierung und Versagen ist zunächst die genaue Abbildung des plastischen Fließverhaltens eines Werkstoffs. Schwerpunkt der Anwendung von GISSMO sind *duktile*, also plastisch deformierbare Werkstoffe. Für die Anwendung in den tragenden Strukturen von Automobilen wird in der Regel großer Wert auf ein hohes Energieabsorptionsvermögen eines Werkstoffs gelegt. Damit können große plastische Deformationen auftreten und mit ihnen die in den vorhergehenden Abschnitten besprochenen Phänomene von Lokalisierung und Versagen. Für diese duktilen Werkstoffe löst meist das Auftreten von Lokalisierung und die zugehörige Konzentration von plastischer Deformation die Bildung eines makroskopischen Risses aus. Da das Lokalisierungsverhalten eines simulierten Werkstoffs direkt von der verwendeten Fließregel und der Verfestigungsfunktion abhängt, wird das Lokalisierungs- und Bruchverhalten in erster Linie von den zugrundeliegenden Plastizitätsformulierungen und deren Eingangsgrößen beeinflusst.

### 6.1.1 Beschreibung der Fließbedingung

Wie bereits in den vorhergehenden Abschnitten erwähnt, wurde für die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit praktisch ausschließlich die Fließbedingung nach *von Mises* verwendet. Der Vollständigkeit halber werden die grundlegenden Beziehungen hier kurz wiederholt, siehe auch Abschnitt 2.1. Die Fließbedingung  $\Phi$  nach Gl. (2.12) ist

$$\Phi = \sqrt{J_2} - k_0 = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}} - k_0 = 0; \quad (6.1)$$

sie hängt ausschließlich vom deviatorischen Anteil  $\mathbf{s}$  des Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma}$  ab. Die Konstante  $k_0$  lässt sich nach Gl. (3.4) durch die *von Mises*-Vergleichsspannung  $\sigma_{VM}$  ersetzen:

$$k = \sqrt{J_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{VM}. \quad (6.2)$$

Das plastische Potential wird gleich der Fließbedingung gesetzt (assoziierte Fließregel). Damit ergibt sich die Fließregel  $\mathbf{r}$  zu

$$\mathbf{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{s}. \quad (6.3)$$

Diese Beziehung wird auch als *Normalenregel* bezeichnet. Der aus Gl. (6.3) und Gl. (2.13) resultierende plastische Dehnratentensor  $\dot{\epsilon}^p$  ist damit immer spurfrei ( $\text{tr}(\dot{\epsilon}^p) = 0$ ), das plastische Fließen ist *isochor*.

Während für Anwendungen der Crashsimulation fast ausschließlich die isotrope *von Mises*-Fließbedingung zur Verwendung kommt, wird für die Umformtechnik praktisch immer auf planar anisotrope Materialmodelle zurückgegriffen. Beispiele dafür sind die in Abschnitt 2.3.1 vorgestellten Modelle von HILL (1948) und BARLAT UND LIAN (1989) sowie eine Vielzahl von neueren und komplexen Modellen. Die grundlegende Vorgehensweise bei der Parameteridentifikation für diese Modelle ist identisch mit der für das isotrope Material. In Unterscheidung zur isochoren *von Mises*-Plastizität verliert aber die äquivalente plastische Dehnrate  $\dot{\epsilon}_{eq}^p$  ihre Bedeutung. Richtigerweise müsste für beliebige Fließbedingungen der *plastische Multiplikator*  $\lambda$  Verwendung finden, siehe auch Gl. (2.13). Um die modulare Koppelbarkeit von GISSMO an beliebige elastisch-plastische Materialmodelle sicherzustellen, wird trotzdem das äquivalente plastische Dehninkrement verwendet, da es für alle in Betracht kommenden Materialmodelle in LS-DYNA als Geschichtsvariable geführt wird. Auch hier wird also im Sinne einer *pragmatischen Lösung* auf eine Näherung zurückgegriffen, die jedoch nach den bisher gemachten Erfahrungen für die Praxis eine ausreichende Genauigkeit liefert.

Weiterer Aufwand wird für die zusätzliche Definition der Anisotropieparameter fällig. Die Beschreibung dieser Thematik bewegt sich außerhalb der Zielsetzung dieser Arbeit, deswegen sei hier auf die einschlägige Fachliteratur wie BANABIC U. A. (2000) verwiesen.

## 6.1.2 Isotrope Verfestigung

Als Verfestigung wird die Eigenschaft von Werkstoffen bezeichnet, bei zunehmender plastischer Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$  einen Anstieg der zur weiteren Deformation notwendigen Fließspannung nach Gl. (6.1) zu zeigen. Diese auch als *Kaltverfestigung* bezeichnete Zunahme wird bei Metallen üblicherweise durch eine plastizitätsinduzierte Ansammlung von Gitterdefekten beschrieben, die eine größere Energiemenge für die weitere plastische Deformation des Kristallgitters notwendig macht. Im Hauptspannungsraum zeigt sich das als eine selbstähnliche Zunahme des Radius der Fließbedingung. Bleibt dabei der Mittelpunkt des Zylinders respektive der Ellipse erhalten, spricht man von rein isotroper Verfestigung.

Zahlreiche Werkstoffe zeigen ein nicht vollständig mit isotroper Verfestigung darstellbares Verhalten, das besonders bei zyklischer (Zug-Druck-)Belastung deutlich wird (Bauschinger-Effekt). Dieses Verhalten wird auch als *kinematische Verfestigung* bezeichnet.

Für die beschriebene Problemstellung bei Metallen, besonders für die Lokalisierungsphänomene, ist in der Regel der isotrope Verfestigungsanteil entscheidend. Deswegen konzentriert sich die Beschreibung auf die Ermittlung der für die nichtlineare isotrope Verfestigung notwendigen Verfestigungskurve in Abhängigkeit von der äquivalenten plastischen Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$ . Diese Kurve findet sich in den Grundgleichungen der isotropen *von Mises*-Plastizität im Faktor  $l$  nach Gl. (2.15) wieder.

Für Anwendungen in der Umformtechnik werden oft Druckversuche für die Identifikation von Fließkurven herangezogen, siehe beispielsweise bei HOCHHOLDINGER U. A. (2009). Diese Vorgehensweise birgt für Blechwerkstoffe meist das Problem der inhärenten Reibung zwischen den Blechlagen. Im Crashbereich wird in der Regel ein einachsiger Zugversuch für die Erstellung der Fließkurve verwendet. Dieser hat den Vorteil einfacher – und in der Simulation reproduzierbar darstellbarer – Randbedingungen. Für die betrachteten Blechwerkstoffe wird dafür eine Probe aus dem Halbzeug geschnitten, die damit einen rechteckigen Prüfquerschnitt besitzt. Die Probe wird bis zum Bruch gezogen. Man erhält für ein typisches duktiles Tiefziehblech eine Kurve von Kraft über Weg, respektive technischer Spannung  $\sigma_{tech}$  über technischer Dehnung  $\epsilon_{tech}$ , wie in Abbildung 3.1 dargestellt. Die technischen Größen sind dabei definiert als

$$\sigma_{tech} = \frac{F}{A_0} \quad (6.4)$$

$$\epsilon_{tech} = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (6.5)$$

Die technische Spannung  $\sigma_{tech}$  ist dabei der Quotient der äußeren Kraft in Längsrichtung der Probe zur Querschnittsfläche im undeformierten Zustand  $A_0$ . Die technische Dehnung ist der Quotient der Längenänderung  $\Delta l$  über der Messlänge  $l_0$ . Ausgehend von der additiven Zerlegung des infinitesimalen Dehnratentensors nach Gl. (2.11) wird der elastische Anteil der Dehnung abgezogen. Dabei wird von einem konstanten Elastizitätsmodul  $E$  ausgegangen:

$$\epsilon_{tech}^p = \epsilon_{tech} - \frac{\sigma_{tech}}{E}. \quad (6.6)$$

Für den Bereich bis zur Gleichmaßdehnung können jetzt auf einfache Art und Weise die makroskopisch gemessenen, auf die Anfangslängen bezogenen Größen, in „wahre“ *Cauchy*-Spannungen und -Dehnungen umgerechnet werden, die sich auf den aktuell vorhandenen Querschnitt, respektive die Messlänge, beziehen. Dies geschieht unter der Annahme eines eindimensionalen Spannungszustands sowie isochorer Plastizität. Damit gilt:

$$A_0 l_0 = A l. \quad (6.7)$$

Daraus folgt für die wahre Spannung

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{Fl}{A_0 l_0} = \sigma_{tech}(1 + \epsilon_{tech}). \quad (6.8)$$

Für die eindimensionale wahre Dehnung wird der differentielle Ansatz der Dehnung integriert:

$$\epsilon = \int_{l_0}^l d\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln(1 + \epsilon_{tech}). \quad (6.9)$$

Damit existiert unter den obigen Annahmen (isochore Plastizität, eindimensionaler und homogener Spannungszustand in den betrachteten Querschnitten) ein Zusammenhang zwischen den technischen und den wahren Größen. Anschaulich kann davon ausgegangen werden, dass mit dem Überschreiten der Gleichmaßdehnung zumindest die letzten beiden Annahmen verletzt werden. Mit der zunehmenden Ausbildung einer Einschnürung und dem Übergang zur lokalisierten Deformation treten Spannungen quer zur Belastungsrichtung auf, siehe Abbildung 6.1. Diese sind nur für Spezialfälle mit bekannter Geometrie bestimmbar. Ein Ansatz für runde Kerben findet sich beispielsweise bei BRIDGMAN (1952). Der weitere Verlauf der Fließkurve ab der Gleichmaßdehnung kann also nicht mehr direkt aus den gemessenen technischen Größen bestimmt werden. In der Literatur finden sich zahlreiche Ansätze für die Extrapolation der Fließkurven, siehe beispielsweise BANABIC U. A. (2000).

In der Praxis ergeben sich damit fast beliebig viele Möglichkeiten für die Extrapolation der Fließkurve. Als tauglicher Ansatz hat sich eine Unterteilung der Fließkurve herausgestellt, siehe auch HAUFE (2013):

- direkte Umrechnung der Größen anhand Gl. (6.8) und (6.9) bis zur Gleichmaßdehnung
- ab der Gleichmaßdehnung  $C^1$ -stetiger Anschluss einer Extrapolationskurve.

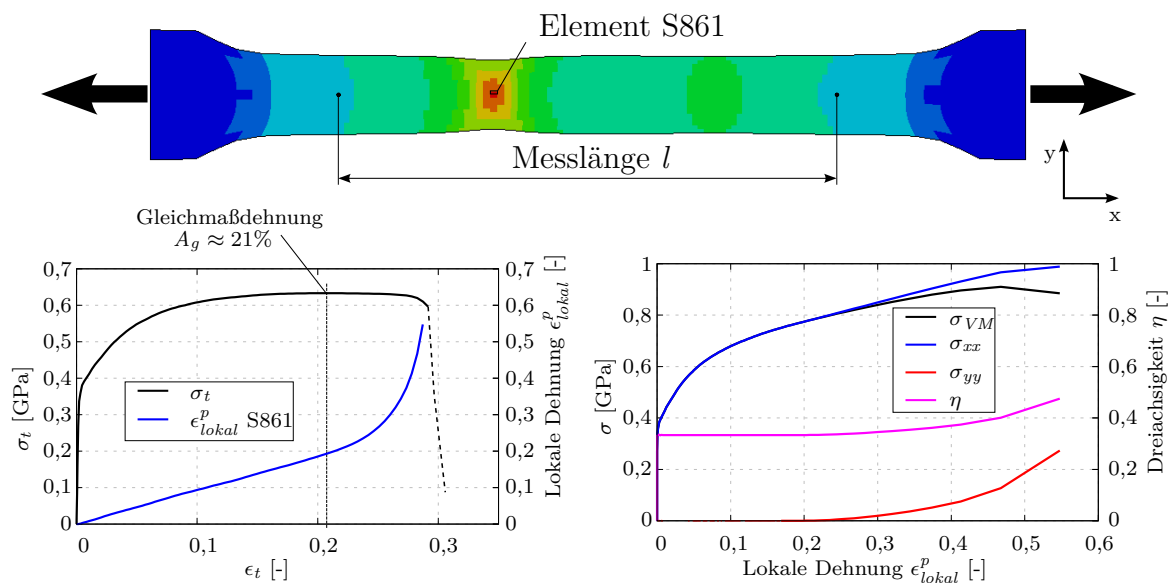
Damit erhält man eine exakte Abbildung des Versuchsergebnisses bis zur Gleichmaßdehnung. Exemplarisch wird hier die Vorgehensweise mit dem Extrapolationsansatz nach HOCKETT UND SHERBY (1975) vorgestellt. Je nach Form der Kurve können auch beliebige andere Extrapolationsansätze verwendet werden. Die *Hockett-Sherby*-Gleichung enthält vier unabhängige Parameter ( $a, b, c, N$ ):

$$\sigma_Y(\epsilon_{eq}^p) = a - be^{-c(\epsilon_{eq}^p)^N}. \quad (6.10)$$

Darin findet sich mit  $\sigma_{Y,0} = a - b$  die Anfangsfließspannung wieder. Parameter  $a$  beschreibt die „Sättigungsspannung“, gegen welche die Fließspannung für sehr große Dehnungen  $\epsilon_{eq}^p$  konvergiert. Durch die Forderung nach  $C^1$ -stetigem Anschluss der Extrapo-

lation an die direkt umgerechnete Fließkurve bleiben noch zwei freie Parameter ( $c, N$ ) übrig. Durch eine geeignete Wahl kann die Form der Extrapolationskurve im postkritischen Bereich (nach der Gleichmaßdehnung) variiert werden.

Um einen weiteren Stützpunkt der Fließkurve im Bereich hoher Zugdehnungen zu erhalten, wird von einigen Autoren die Vermessung der Bruchfläche der gebrochenen Zugprobe vorgeschlagen. Genaue Messung vorausgesetzt, erhält man so den Querschnitt der Prozesszone nach dem Bruch. Vor dem Hintergrund der in Abbildung 6.1 dargestellten Spannungsverhältnisse in der Lokalisierungszone ist jedoch ersichtlich, dass damit keine Aussage über die Fließspannung  $\sigma_Y (= \sigma_{VM})$  möglich ist. Mit Beginn der Lokalisierung bildet sich in der Einschnürung eine zunehmende Querspannung  $\sigma_{yy}$  aus, sodass  $\sigma_{VM} \neq \sigma_{xx}$ . Auch die Dreiaxsigkeit  $\eta$  nimmt dadurch zu, siehe auch DARLET UND DESMORAT (2015). In der Realität bestimmbar ist jedoch ausschließlich die Längsspannung  $\sigma_{xx}$  über die insgesamt an der Probe aufgebrauchte Kraft und den nach dem Bruch vermessenen Querschnitt. Auch die Annahme einer Gleichverteilung über den Schnitt scheint in der Lokalisierung nicht unbedingt naheliegend.



**Abbildung 6.1:** Details zum Zugversuch.

Links: Technische Spannung  $\sigma_t$  und lokale Dehnung  $\epsilon_{lokal}^p$  in Element S861 vs. technische Dehnung  $\epsilon_t$  (gemessen über Messlänge  $l$ );

Rechts: Spannungen und Dreiaxsigkeit in Element S861 vs. lokale Dehnung  $\epsilon_{lokal}^p$  in Element S861

Der Darstellung in Abbildung 6.1 folgend, würde man durch Gleichsetzen der *von Mises*-Spannung  $\sigma_{VM}$  mit der Längsspannung ( $\sigma_Y = \sigma_{xx}$ ) die Fließspannung  $\sigma_Y$  deutlich überschätzen. Damit würde man eine zu steile Fließkurve mit einem zu hohen *plasti-*

schen Modul  $H$  generieren. Für andere Probenformen sind die Zusammenhänge teils noch deutlich komplizierter, siehe Abbildung 6.2.

Im allgemeinen Fall mit  $\sigma_{xx} \neq \sigma_Y$  in der Prozesszone wird für die Praxis der „reverse engineering“-Ansatz gewählt werden müssen. Dabei wird durch Simulation des Zugversuchs mit der erzeugten Fließkurve die resultierende technische Spannungs- und Dehnungskurve generiert und mit der Versuchskurve verglichen. Die Erfahrung zeigt, dass oft nur wenige Iterationsschritte notwendig sind um eine hinreichend gute Übereinstimmung bei Verwendung einer ausreichend feinen Netzgröße zu erzeugen.

### 6.1.3 Viskose Effekte

Zahlreiche metallische Werkstoffe wie Stähle oder Aluminium zeigen in Versuchen eine Abhängigkeit der Fließspannung von der Deformationsrate  $\dot{\epsilon}_{eq}^p$ . Dies kann je nach Anwendung großen Einfluss auf das Verhalten der betrachteten Struktur haben. Um diesen Effekt zu quantifizieren, müssen, wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, Zugversuche mit verschiedenen Abzugsgeschwindigkeiten durchgeführt werden. Die resultierenden Kurven der technischen Spannung über technischer Dehnung zeigen in der Regel einen Anstieg der Spannung mit zunehmender Dehnrates. Zur Berücksichtigung dieser Effekte kann in der Materialformulierung eine zeitabhängige Überspannung definiert werden. Gebräuchliche Ansätze dafür sind beispielsweise der von *Cowper und Symonds*, siehe auch HALLQUIST (2017).

Besondere Schwierigkeiten für die Anwendung rühren zum Einen aus den vielfältigen messtechnischen Problemen bei hohen Abzugsgeschwindigkeiten her. Zum anderen bleibt bei steigenden Dehnrates nicht notwendigerweise die Gleichmaßdehnung konstant, wodurch sich auch die resultierende Bruchdehnung verändern kann. Zusätzlich muss in der Lokalisierungszone mit noch weit höheren Dehnrates als der nominalen gerechnet werden, siehe auch GROLLEAU U. A. (2008). Zur Abbildung der Vorgänge scheint deshalb ein „reverse engineering“-Ansatz zur Identifikation der Fließkurven, wie in Abschnitt 6.1.2 beschrieben, über alle relevanten Dehnrates am aussichtsreichsten.

Die Abbildung aller Effekte, einschließlich Instabilität und Versagen, über variablen Dehnrates birgt immer noch ernsthafte Probleme und ist Gegenstand aktueller Arbeiten – siehe auch ANDRADE U. A. (2015).

## 6.2 Parameter für Versagen und Instabilität

In diesem Abschnitt werden Methoden zur Identifikation von Parametern für die Darstellung von Instabilität und nachfolgendem Materialversagen beschrieben. Wie bereits erwähnt, ist eine Voraussetzung, um diese Phänomene prognostizieren zu können, die exakte Abbildung des plastischen Fließens im Grundmaterial. Dazu wird eine bestmögliche Anpassung der Größen, wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, vorausgesetzt – siehe auch ANDRADE U. A. (2016).

Als Erstes wird der dimensionslose Schädigungsexponent  $n$  für die Evolutionsgleichungen (5.9) und (5.16) festgelegt. Er taucht im Input als Parameter **DMGEXP** auf. Wie in Abschnitt 5.1.1 beschrieben, wird  $n$  üblicherweise nicht konkret bestimmbar sein – der innere Schädigungszustand eines Materials ist in der Regel nicht direkt beobachtbar. Notwendig sind mehrstufige Versuche mit unterschiedlichen Dreiachsigkeiten  $\eta$  bis zum Bruch, wie unter anderem von BRIDGMAN (1952) durchgeführt. Für die Praxis hat sich  $n = 2$  als guter Startwert erwiesen.

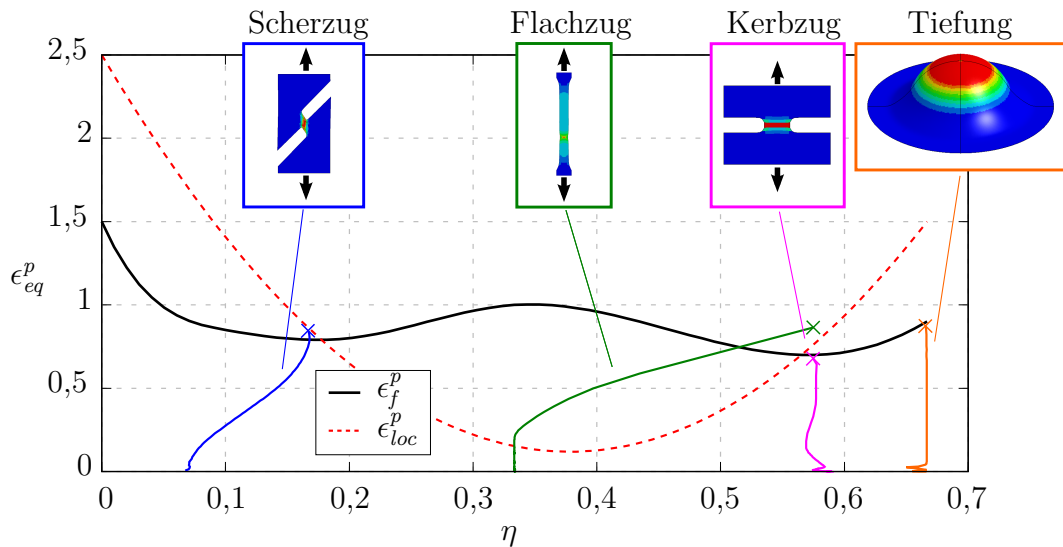
### 6.2.1 Bestimmung von Versagenkurven aus Experimenten

Im Modell GISSMO erfolgt die Definition des Versagens im ersten Schritt abhängig von der Dreiachsigkeit  $\eta$ , siehe auch Abschnitt 5.1.2. Für ebene Spannungszustände liefert die Dreiachsigkeit eine eindeutige Beschreibung der Belastungsart. Der Beschreibung liegt die Annahme zugrunde, dass das Material unter unterschiedlichen Belastungsarten auch unterschiedliche Bruchdehnungen aufweist. Um also eine möglichst umfassende Charakterisierung eines Werkstoffs zu erhalten, werden Versuche benötigt, die möglichst alle relevanten Belastungsarten abdecken. Siehe dazu auch EFFELSBURG U. A. (2012) sowie DUNAND UND MOHR (2010).

Als einfachster Vertreter bietet sich der einachsige Zugversuch an. Hier ist zunächst nach Gl. (3.1)  $\eta = \frac{1}{3}$ . Anschaulich liegt aber auf der Hand, dass sich die Dreiachsigkeit lokal mit dem Erreichen der Gleichmaßdehnung verändern wird. In der Lokalisierung – und damit in der eigentlichen Prozesszone – bildet sich durch die Behinderung der Querdehnung ein mehrachsiger Spannungszustand mit veränderlicher Dreiachsigkeit aus. Das gilt mit wenigen Ausnahmen für die meisten bekannten Proben bei duktilen Werkstoffen, siehe auch ROTH UND MOHR (2016).

Abbildung 6.2 zeigt typische simulierte Verläufe der Dreiachsigkeiten für verschiedene Probenformen. Dargestellt ist jeweils das kritische (zuerst versagende) Element, Kantenlänge 0,5mm. Die Simulationen wurden mit der Materialkarte des Dualphasenstahls aus Abschnitt 7.1 durchgeführt. Ebenfalls abgebildet sind die Versagenkurve  $\epsilon_f^p$  (LCSDG)





**Abbildung 6.2:** Verlauf der Dreiachsigkeit für verschiedene Probenformen  
 Von links nach rechts: Scherzugprobe 0°; Zugprobe A80; Kerbzugprobe mit Radius 1mm; biaxialer Tiefungsversuch

sowie die Lokalisierungskurve  $\epsilon_{loc}^p$  (ECRIT) des Materials. Anschaulich werden zwei Probleme ersichtlich:

- Die kritischen Elemente einer Probe versagen in der Regel bei anderen als den Anfangsdreiachsigkeiten (große Deformation und Lokalisierung).
- Die lokalen Versagensdehnungen hängen stark von der Netzgröße ab.

Der erste Punkt bedeutet für die Parameteridentifikation, dass das Ergebnis der Anpassung (die lokal resultierende Bruchdehnung in der Probe) das Resultat einer gewichteten Evolution der Schädigung im jeweiligen Element ist, siehe auch KORGESAAAR U. A. (2014). Gesteuert wird dies durch die Evolutionsgleichung der Schädigung aus Gl. (5.9). Damit entsteht ein komplexer Zusammenhang zwischen der Evolutionsgleichung mit ihren Parametern und den makroskopischen Ergebnissen der nachsimulierten Probenversuche. Auch hier wird also in der Praxis ein „reverse engineering“-Ansatz notwendig, da eine direkte Identifikation der Punkte auf der Bruchdehnungskurve nur in Ausnahmefällen möglich ist. MOHR UND OSWALD (2008) versuchen, mit speziellen Probenformen eine konstantere Dreiachsigkeit über die Deformation zu erzeugen. Dazu werden filigrane, über die Blechdicke bearbeitete Proben verwendet, die aber in der Anwendung noch nicht verbreitet sind.

Es hat sich als gute Praxis herausgestellt, zuerst eine Bruchdehnungskurve **LCSDG** für eine konstante, hinreichend kleine Netzgröße über alle Spannungszustände zu ermitteln. Zur Berücksichtigung der Netzgrößenabhängigkeit können dann für alle weiteren – in

der Regel größeren – Kantenlängen Faktoren  $k(l_E)$  in **LCREGD** abhängig von der Netzgröße definiert werden, um die Bruchdehnungskurve entsprechend zu skalieren, siehe auch Abschnitt 5.3.2.

Zu guter Letzt bleibt die Bestimmung der in Abschnitt 5.3.3 vorgestellten Faktoren **SHRF** und **BIAXF**, siehe auch Abbildung 5.18. Damit wird eine Abhängigkeit der Regularisierung von der Dreiaxsigkeit dargestellt: im Bereich  $\eta \ll \frac{1}{3}$  ist keine Lokalisierung zu erwarten. Im Bereich des Streckziehens ( $\eta \rightarrow \frac{2}{3}$ ) kann für hochfeste Tiefziehstähle ebenfalls oft ein Sprödbbruch ohne vorhergehende, beobachtbare Lokalisierung erwartet werden.

Da auch hier eine direkte Bestimmung der Faktoren für unterschiedliche Elementierungen schwer fällt, wird in der Praxis aufgrund der klar nachvollziehbaren Beobachtung meist  $SHRF = 1$  gesetzt. Damit ist nach Gl. (5.36) bei  $\eta = 0$  keine Elementgrößenabhängigkeit der Bruchdehnung mehr vorhanden. Die direkte Bestimmung des  $BIAXF$  durch Nachsimulation ist oftmals nicht möglich, da für viele Werkstoffe keine reproduzierbaren Probenversuche im biaxialen Bereich vorhanden sind. Hier kann die Betrachtung von zusätzlichen Stauch- oder Drei-Punkt-Biegeversuchen Indikationen liefern: oftmals äußert sich ein zu geringer  $BIAXF$  in übermäßigem Versagen in solchen Versuchen. Für die Praxis hat sich ein  $BIAXF$  im Bereich 0,5..1 für hochfeste Stähle als guter Startwert erwiesen.

### 6.2.2 Identifikation von Instabilitätsparametern

Dem Aufbau von GISSMO liegt die Annahme zugrunde, dass im Bereich bis zum Auftreten einer Instabilität die Deformationsvorgänge allein durch das verwendete Plastizitätsmodell abgebildet werden. Simuliert man jedoch Zugproben mit verschiedenen Netzgrößen bis über die Gleichmaßdehnung hinaus, erhält man typischerweise ein von der verwendeten Netzgröße abhängiges Verhalten, wie in Abbildung 5.6 dargestellt. Wie bereits in Abschnitt 5.3.2 beschrieben, müssen ab dem Erreichen der Instabilität Maßnahmen getroffen werden, um die unerwünschte Netzgrößenabhängigkeit für die makroskopische Ebene zu begrenzen.

Die Vorab-Bestimmung des Instabilitätspunktes mit der FLS nach Abschnitt 5.2.3 zeigt nicht immer die erwarteten Ergebnisse. Als pragmatische Vorgehensweise für die inkrementelle in-situ-Prognose nach Abschnitt 5.2.2 wurden in GISSMO deshalb zwei Möglichkeiten implementiert, die beginnende Instabilität in Abhängigkeit von der Dreiaxsigkeit zu definieren:

#### 1. **ECRIT als Kurve**

Die in Abschnitt 4.3 vorgestellten Modelle können für die verschiedenen Deforma-

tionsarten in der (Blech-)Ebene solche Kurven  $\epsilon_{loc}^p(\eta)$  liefern. In der Praxis hat es sich jedoch als problematisch herausgestellt, die beispielsweise mit den Modellen von Swift oder Xue erzeugten Kurven direkt als Input für GISSMO zu verwenden, siehe auch Abschnitt 4.3.1. Als Ursache dafür kommen eine Reihe von Unzulänglichkeiten in der Beschreibung in Frage, je nach Plastizitätsmodell vor allem des Fließortes und der Verfestigungskurve.

Am einfachsten lässt sich zunächst der Instabilitätspunkt für den einachsigen Zug mit  $\eta = \frac{1}{3}$  ermitteln. Er stimmt auch bei den meisten der im Abschnitt 4.3 vorgestellten Modelle überein. Ausgehend von diesem Punkt können weitere Punkte im Bereich des Streckziehens (biaxiale Belastung), respektive der Schubdeformation gesetzt werden. Indikator für diese üblicherweise nicht eindeutig bestimmbar Punkte kann auch die Simulation der Proben mit verschiedenen Netzgrößen liefern (Beginn der Netzgrößenabhängigkeit). Hierbei ist es durchaus plausibel, dass für diese Bereiche teilweise keine Instabilität vor dem Versagen prognostiziert wird, siehe Abbildung 7.2.

## 2. Parameter DCRIT

Alternativ kann statt der oben beschriebenen *Instabilitätskurve*  $\epsilon_{loc}^p(\eta)$  auch der Faktor *DCRIT* benutzt werden. Damit wird die Instabilitätskurve als Vielfaches der Versagenskurve definiert:

$$\epsilon_{loc}^p(\eta) = DCRIT \epsilon_f^p(\eta) . \quad (6.11)$$

Diese Option ist als vereinfachtes Verfahren in erster Linie für spröde Materialien gedacht. Bei insgesamt geringer plastischer Deformation bis zum Versagen bringt die Definition einer separaten Instabilitätskurve keinen Zuwachs an Abbildungsgenauigkeit. Mit einem Faktor  $DCRIT = 0,4..0,9$  kann für diese Fälle auf einfachem Wege ein Minimum an Energiedissipation vor dem Spröddbruch dargestellt werden. Damit können vor allem durch die Diskretisierung bedingte, unphysikalische Effekte bei der Elementlöschung („Reißverschlusseffekt“) begrenzt werden.

Ein Beispiel für die Anpassung einer Versagens- und Instabilitätskurve findet sich in Abbildung 7.2.

Wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, wird in GISSMO anhand der Kurve  $\epsilon_{loc}^p(\eta)$  und der Evolutionsgleichung (5.16) der Instabilitätsfaktor  $F$  für jedes Zeitinkrement aufsummiert. Mit dem Erreichen von  $F = 1$  in einem Integrationspunkt wird die weitere Deformation als instabil betrachtet, und die beschriebenen Maßnahmen zur Regularisierung der makroskopischen Größen treten in Kraft. Diese lassen sich als netzgrößenabhängige Rückkopplung der Schädigung auf das Verfestigungsgesetz beschreiben.

Als wichtiger Parameter dient hier der **Exponent  $m$  (FADEXP)** aus Gl. (5.33). Er kann je nach Material abhängig von der Elementgröße definiert werden. So kann eine weitgehende Regularisierung der auf makroskopischer Ebene umgesetzten Verformungsenergie erreicht werden, siehe auch Abbildung 5.17. Die Bestimmung dieses Parameters erfolgt sinnvollerweise durch Simulation eines einachsigen Zugversuchs mit unterschiedlichen Elementgrößen. Für die Belange der Crashesimulation werden üblicherweise Netzkantenlängen von 0,5..10mm betrachtet. Dazu ist es notwendig, genügend große Zugproben zu verwenden. Beispielhaft sei die Probenform nach DIN 50125 A80 mit 20mm Breite des Messquerschnitts genannt, siehe auch Abbildung 5.7. Man erhält typischerweise über der Netzgröße monoton fallende Werte für den Exponenten, siehe Abbildung 7.2 rechts. Das erscheint anschaulich plausibel: Mit zunehmender Kantenlänge der Diskretisierung wird die Abbildung der lokalisierten Deformation immer schlechter, und regularisierende Maßnahmen müssen frühzeitig mit größerer Intensität einsetzen.

Eine Überprüfung der gefundenen netzabhängigen Exponenten für andere Spannungszustände wie reinen Schub oder Kerbzug wäre absolut wünschenswert. Da aber bei praktisch allen bis zum Bruch prüfbaren Probenformen sehr kleine Prozesszonen notwendig sind, ist eine Vernetzung mit gröberen Elementen in der Regel nicht sinnvoll.

---

## Beispiele

Nachdem in den vorhergehenden Abschnitten das Modell GISSMO einschließlich seiner Parameter beschrieben wurde, wird im Folgenden die praktische Anwendung des Modells anhand von zwei Beispielen gezeigt. GISSMO wurde zunächst als User Material (Umat) für den kommerziellen Finite-Elemente-Löser LS-DYNA implementiert. Mit Erreichen eines gewissen Reifegrads der Formulierung wurde das Umat dann fest in den Code implementiert. GISSMO ist damit als Teil von \*MAT\_ADD\_EROSION fester Bestandteil von LS-DYNA geworden.

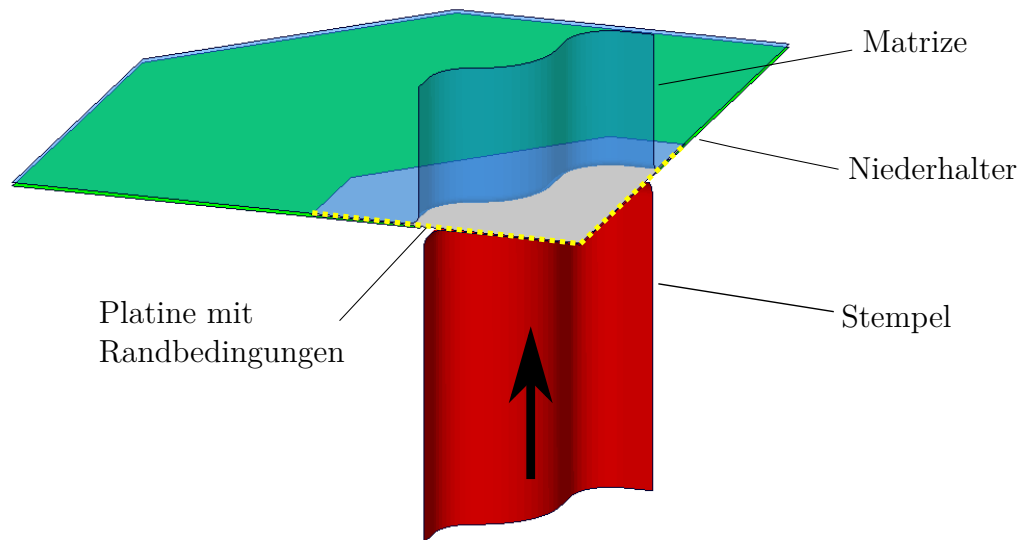
Das erste Beispiel ist ein typischer Umformversuch, an dem die Anwendung auf ein komplexes Ziehteil demonstriert werden kann. Am zweiten Beispiel wird die Anwendung von GISSMO in der Prozesskette Umform- zu Crashsimulation an einer B-Säulenschale als typisches Bauteil einer Fahrzeugkarosserie gezeigt. Erster Teil ist die Durchführung der Umformsimulation und das Übertragen der resultierenden Ergebnisgrößen auf das Crashnetz. Im zweiten Teil wird das vorgeschädigte Bauteil unter einer typischen Crashbelastung deformiert und die Ergebnisse mit der Simulation ohne Vorschädigung verglichen.

### 7.1 Kreuzstempelversuch

Der Kreuzstempelversuch (*eng.: Cross Die Test*) ist ein Komponententest aus der Umformtechnik, mit dem die Formbarkeit von Blechwerkstoffen beurteilt werden kann. Als Besonderheit tritt bei diesem erweiterten Napfziehversuch ein breites Spektrum von unterschiedlichen Deformationszuständen auf: von Streckziehen (biaxialer Zug) im Bereich der Ecken, Tiefziehen (Zug/Schub) in den Flanschen bis hin zur Druckbelastung mit Materialaufdickung in den Ecken der Flansche. Außerdem treten besonders in den Flanschen stark nichtproportionale Belastungen auf, beispielsweise mit einem Wechsel

von Druck- zu Zugbelastung. Dadurch ist eine Prognose der erreichbaren Ziehtiefe oder auch nur des Versagensorts mit einfachen Kriterien wie dem FLD/FFLD in der Regel nicht möglich. Das macht dieses Bauteil besonders interessant für eine Simulation unter Verwendung von GISSMO.

Für die Simulation des Ziehprozesses wurde ein Viertelmodell verwendet mit Symmetriebedingungen an den Schnittkanten. Die Blechplatte wurde mit Schalenelementen mit 1mm Elementkantenlänge vernetzt. Damit hat das Gesamtmodell insgesamt 20656 Elemente, die Simulationszeit beträgt auf 32 Prozessoren MPP etwa 3 Minuten.



**Abbildung 7.1:** Simulationsmodell des Kreuzstempelversuchs

Für dieses Beispiel wird ein typischer Dualphasenstahl aus dem Karosseriebau eingesetzt. Als Basis wird eine modifizierte Materialkarte aus der Datenbank der Daimler AG verwendet, die ursprüngliche Anpassung erfolgte durch ANDRADE U. A. (2017). Der verwendete Material-Input für LS-DYNA besteht aus zwei Teilen:

Der Plastizitätskarte \*MAT\_PIECEWISE\_LINEAR\_PLASTICITY (\*MAT\_024), Parameter siehe Tabelle 7.1.

| Dichte $\left[\frac{kg}{mm^3}\right]$ | E-Modul [GPa] | Querdehnzahl |
|---------------------------------------|---------------|--------------|
| 7,85E-06                              | 210           | 0,3          |

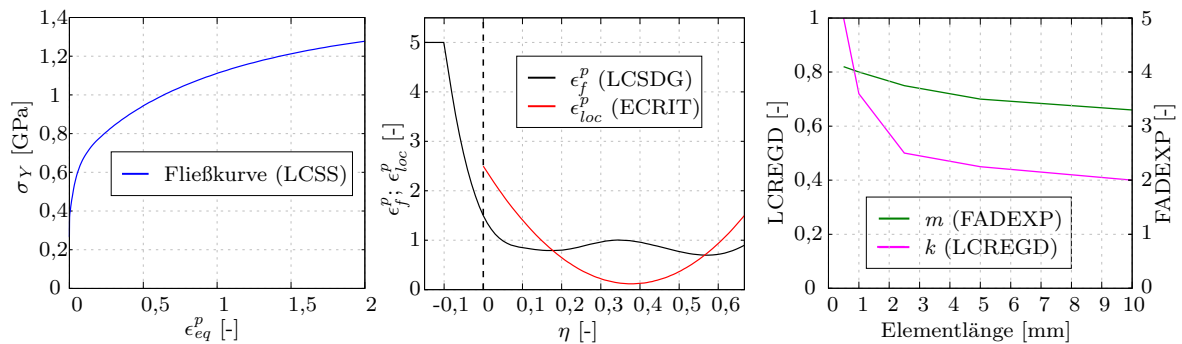
**Tabelle 7.1:** Materialparameter Dualphasenstahl (\*MAT\_024)

Die Parameter der eigentlichen GISSMO-Karte \*MAT\_ADD\_EROSION sind in Tabelle 7.2 dargestellt.

| DMGEXP | SHRF | BIAXF |
|--------|------|-------|
| 2.     | 1.   | 1.    |

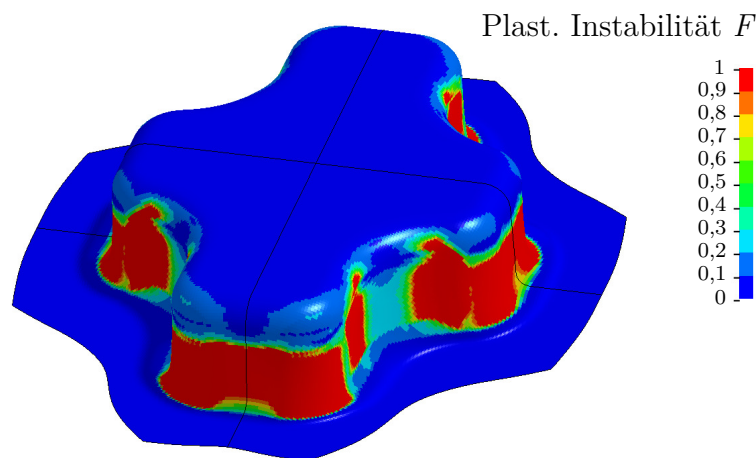
**Tabelle 7.2:** GISSMO-Parameter (\*MAT\_ADD\_EROSION)

Die referenzierten Kurven finden sich in Abbildung 7.2. Links die Fließkurve (Loadcurve LCSS), in der Mitte die Kurven der Bruchdehnung  $\epsilon_f^p$  (LCSDG) und der kritischen Dehnung  $\epsilon_{loc}^p$  (ECRIT). Rechts sind der elementgrößenabhängige Fading-Exponent  $m$  (FADEXP) sowie der Faktor  $k$  (LCREGD) für die Regularisierung der Bruchdehnung dargestellt.



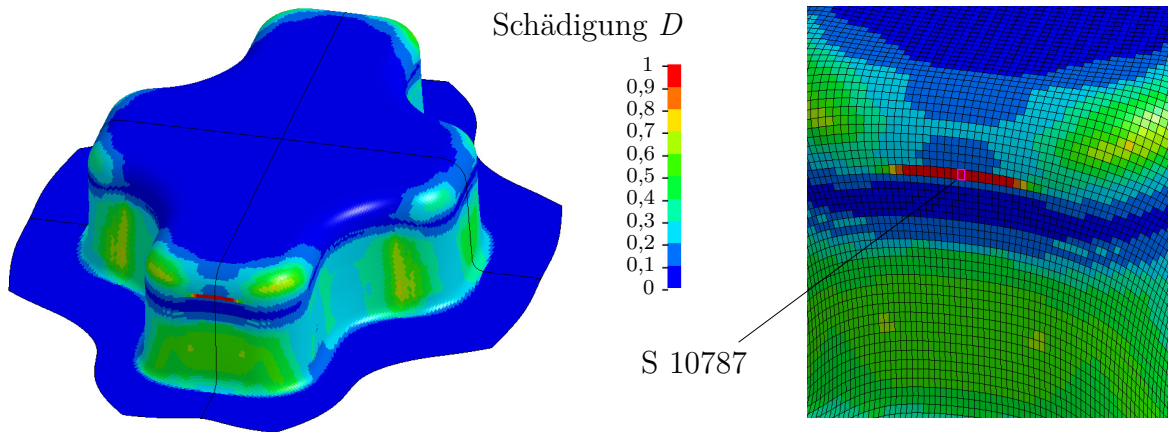
**Abbildung 7.2:** Kurven aus Materialkarte Dualphasenstahl

Über den Verlauf des Ziehprozesses entwickelt sich die plastische Instabilität  $F$ . Abbildung 7.3 zeigt die Verteilung bei einer Ziehtiefe von 47 mm. Man sieht, dass bereits Bereiche an den Stirnflächen beginnen zu lokalisieren (diffuse Lokalisierung).



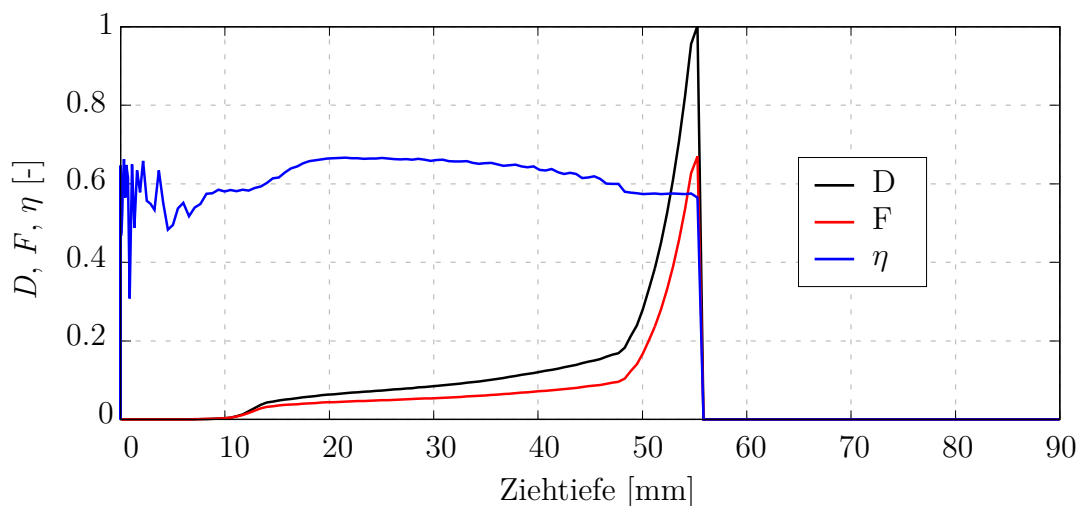
**Abbildung 7.3:** Plastische Instabilität  $F$ , Ziehtiefe 47mm

Im weiteren Verlauf werden bei einer Ziehtiefe von 58 mm die ersten Elemente gelöscht, siehe Abbildung 7.4. Dargestellt ist die Verteilung der Schädigung  $D$  über das Bauteil vor der Löschung der ersten Elemente.



**Abbildung 7.4:** Links: Schädigung  $D$  kurz vor Anriss;  
Rechts: Detail mit Netz. Ziehtiefe 55mm

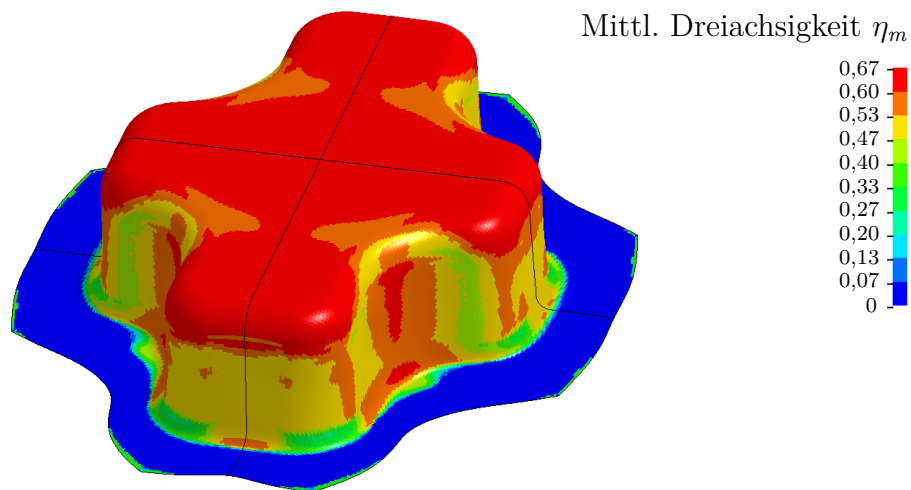
In Diagramm 7.5 ist der Verlauf der Größen  $D$  sowie  $F$  des kritischen Elements Nr. 10787 über den Ziehprozess abgebildet.



**Abbildung 7.5:** Element Nr. 10787, Verlauf von  $D$ ,  $F$  und  $\eta$  über der Ziehtiefe

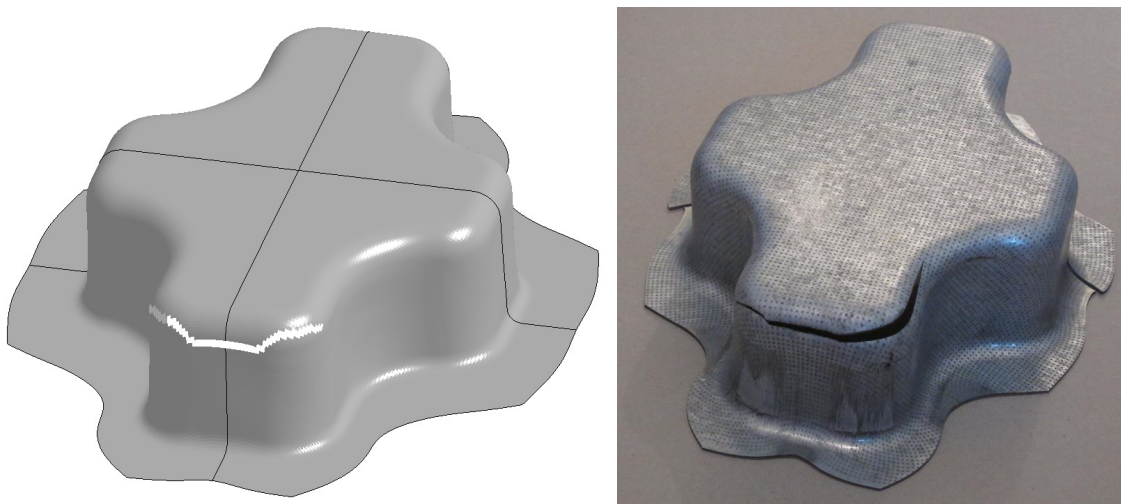
In Abbildung 7.6 ist die mittlere, schädigungsgewichtete Dreiachsigkeit zum Zeitpunkt kurz vor dem Anriss dargestellt. Man erkennt deutlich den Bereich, in dem das Versagen beginnt: Es bildet sich eine linienförmige Zone mit lokalisierter Deformation mit  $\eta = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,58$  (ebene Dehnung). Im Bereich des Flansches dominiert Druckbelastung mit  $\eta_m < 0$ .





**Abbildung 7.6:** Mittlere Dreiachsigkeit  $\eta_m$  kurz vor Anriss, Ziehtiefe 55mm

Im weiteren Verlauf bildet sich ein makroskopischer Riss an der Schmalseite des Bauteils aus, siehe Abbildung 7.7 bei einer Ziehtiefe von 58mm. Der Vergleich mit dem auf der rechten Seite dargestellten realen Bauteil zeigt qualitativ eine gute Übereinstimmung zum prognostizierten Versagensbild.



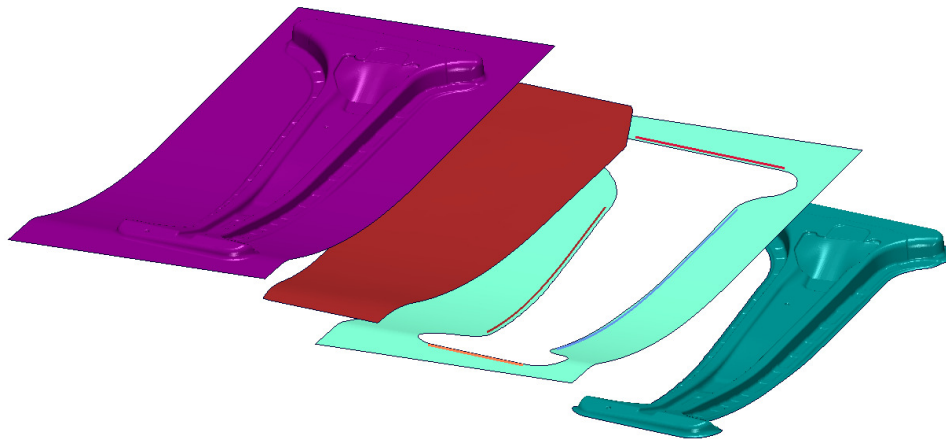
**Abbildung 7.7:** Kreuzstempelversuch – Vergleich Simulationsergebnis zu Realversuch

## 7.2 B-Säule

An der Innenschale einer B-Säule aus einer fiktiven Fahrzeugkarosserie wird die Verwendung von GISSMO in der Prozesskette demonstriert. Anhand des in Abbildung 5.2 dargestellten Schemas werden die drei Prozessschritte am Beispiel gezeigt. Der verwendete Werkstoff ist ein mikrolegierter Stahl.

### 7.2.1 Umformsimulation

Zur Auslegung der Ziehanlage und Prognose der Ziehbarkeit wurde die Simulation des Umformvorgangs mit LS-DYNA durchgeführt. In Abbildung 7.8 ist der Aufbau des Modells gezeigt.

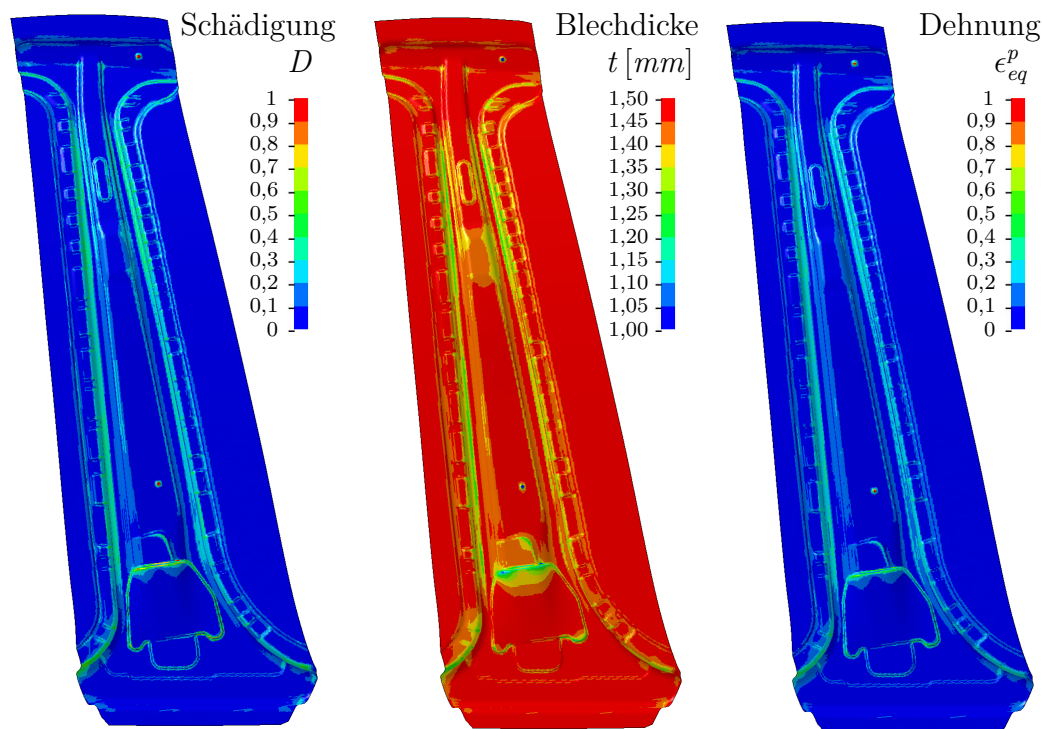


**Abbildung 7.8:** Aufbau der Umformsimulation für die B-Säule

Ausgangszustand für die Simulation mit GISSMO ist die Platine nach der Einlegesimulation zur Berücksichtigung der Schwerkraft nach dem Einlegen in das Ziehwerkzeug. Die Diskretisierung erfolgt mit Schalenelementen von etwa 2mm Kantenlänge. Das verwendete Materialmodell ist das anisotrope \*MAT\_BARLAT\_YLD2000, gekoppelt mit GISSMO.

Als Ergebnis erhält man die umgeformte Geometrie, unter anderem mit der Verteilung der Vorschädigung  $D$ , der Dickenverteilung und der äquivalenten plastischen Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$ , siehe Abbildung 7.9.

Man erkennt, dass die Vorschädigung in diesem Bauteil aus duktilem, mikrolegiertem Stahl eher moderate Werte annimmt.



**Abbildung 7.9:** Ergebnis der Umformsimulation B-Säule  
 Links: Schädigung  $D$ ; Mitte: Dickenverteilung  $t$ ;  
 Rechts: äquivalente plastische Dehnung  $\epsilon_{eq}^p$

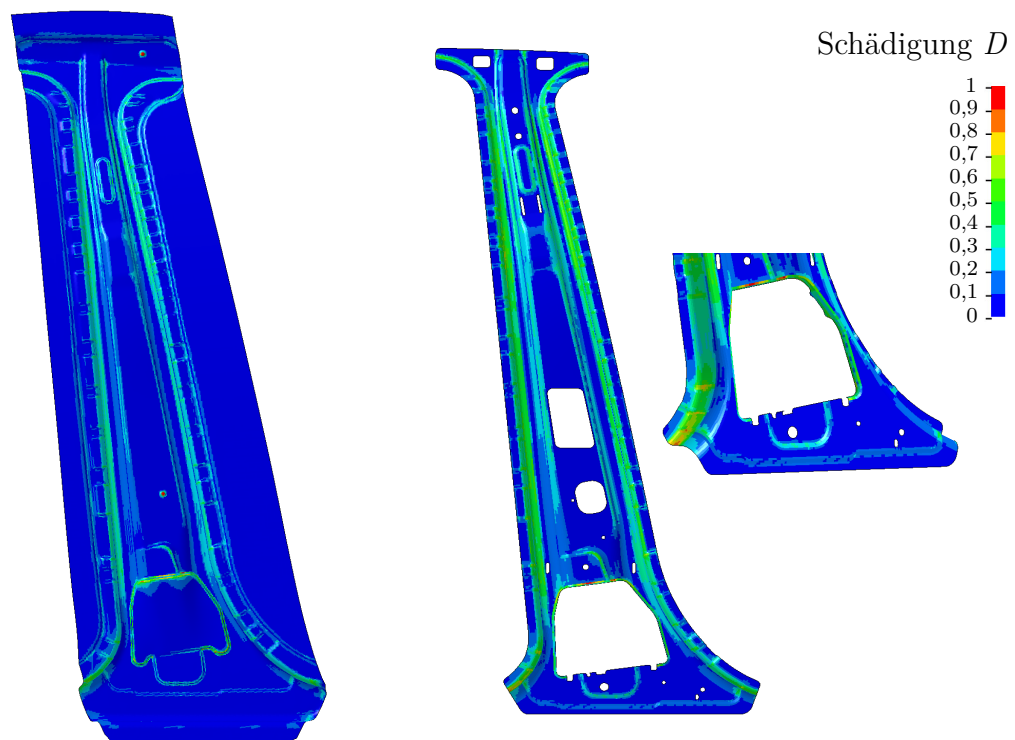
## 7.2.2 Mapping

Nach der Umformsimulation müssen die Daten vom feinen Umformnetz (hier:  $l_E = 2\text{mm}$ ) auf das gröbere Crashnetz (in diesem Fall:  $l_E = 3\text{mm}$ ) übertragen werden. Dazu wird das Tool SCAIMapper verwendet, siehe auch OECKERATH (2012). Dabei wird auch der reale Beschnittvorgang des umgeformten Bauteils vorweg genommen, da nur die letztendlich noch vorhandene Geometrie des Bauteils ihre Entsprechung im Crashnetz findet. In Abbildung 7.10 sind das Ausgangsnetz der Umformsimulation und das gemappte Bauteil für die Crashsimulation gegenübergestellt.

Übertragen werden die Größen Schädigung  $D$ ,  $DCRIT$  sowie das Instabilitätsmaß  $F$ .

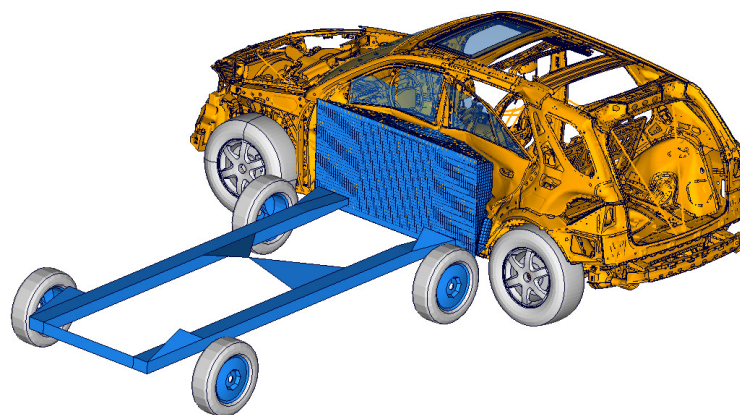
## 7.2.3 Crashsimulation

Das betrachtete Bauteil bildet die innere Schale der B-Säule. Die B-Säulen-Struktur hat die Aufgabe, den bestmöglichen Schutz der Insassen beim Seitencrash sicherzu-



**Abbildung 7.10:** Mapping der Daten, Verteilung der Schädigung  $D$  im Bauteil  
Links: Umformnetz; Rechts: Crashnetz mit Detail des Fußbereichs

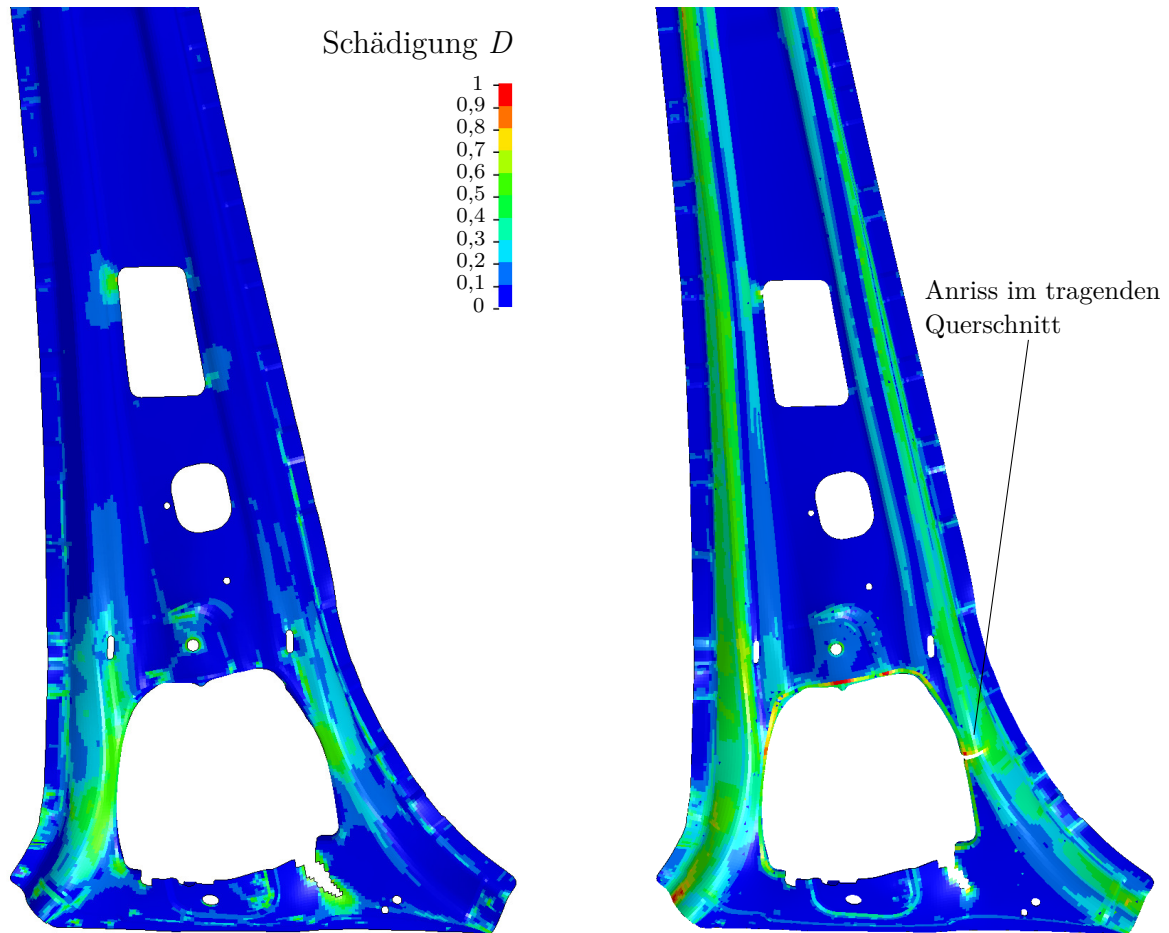
stellen. Einer der anspruchsvollsten Lastfälle dabei ist der Seitencrash nach dem US-amerikanischen Ratinginstitut IIHS, siehe Abbildung 7.11.



**Abbildung 7.11:** Seitencrash nach IIHS

Dabei wird der seitliche Anprall eines schweren, hoch stehenden Fahrzeugs (SUV) simuliert. Für den Crashtest wird eine fahrbare, deformierbare Barriere mit einem Gewicht von 1500kg und 50 km/h auf das Fahrzeug geschossen. Durch die hohe Standhöhe ent-

steht eine starke Belastung für die B-Säule. Ziel der Auslegung ist es, die Intrusionen in die Fahrgastzelle zu minimieren und dabei gleichzeitig Deformationsenergie in der Struktur aufzunehmen. Dazu ist es notwendig, gezielt ein gewisses Maß an Deformation in der B-Säule zuzulassen. Dabei darf aber keine Rissbildung in den lasttragenden Bauteilen auftreten, weil ein Versagen der B-Säule katastrophale Folgen für die Insassen haben könnte. Diese Problematik muss also in der simulationsgestützten Crash-Auslegung sicher ausgeschlossen werden können, wozu eine exakte Prognose notwendig ist.



**Abbildung 7.12:** Fußbereich der B-Säule innen nach Crash  
Links: ohne Mapping; Rechts: mit Mapping

In Abbildung 7.12 ist ein Vergleich der Simulation mit und ohne Mapping dargestellt. Trotz der insgesamt moderaten Vorschädigung von etwa  $D = 0,35$  und des sehr duktilen Werkstoffs tritt in der Simulation mit Übertragung der Vorschädigung ein Anriss auf. Dieses beginnende Versagen ist ohne Berücksichtigung der Vorschädigung aus der Prozesskette nicht sichtbar gewesen – hier wären dann Maßnahmen zur Vermeidung dieser Schwachstelle angezeigt.



---

# Zusammenfassung

## 8.1 Bewertung

Am Ausgangspunkt der Arbeit stand die Erkenntnis, dass für eine verbesserte Prognosegüte in der Crashsimulation die Darstellung von etwaigem Materialversagen essentiell ist. Je nach Lastfall kann die Entstehung von Rissen entscheidend für das Ergebnis sein. Um die Methodik ganzheitlich voranzubringen sollte nicht nur die Crashsimulation selbst, sondern auch der vorhergehende Prozessschritt der Umformsimulation verbessert werden. So kann das Vorleben der Blechbauteile über die Prozesskette beschrieben werden, um die Eingangsgrößen für die finale Crashsimulation zu liefern. Damit können die bis jetzt weitgehend getrennten Welten näher zueinander gebracht werden. Gebunden an das industrielle Umfeld mit seinen ökonomischen Randbedingungen standen vor allem pragmatische und alltagstaugliche Lösungen im Fokus. Die limitierte Feinheit in der Diskretisierung der Gesamtfahrzeugmodelle erfordert eine ausgefeilte Methodik, um die auf der Mikroebene stattfindenden Ereignisse von Lokalisierung und Versagen auf makroskopischer Ebene beschreiben zu können. Trotz des pragmatischen Ansatzes wurde Wert darauf gelegt, die zugrundeliegende Physik in ihren Resultierenden möglichst korrekt abzubilden. Für die Übertragung der Daten von einem Prozessschritt zum anderen ist außerdem eine weitgehende Unabhängigkeit von der verwendeten Netzgröße essentiell.

Wie in Abschnitt 1.2 beschrieben, wurde ein Schädigungsmodell entwickelt, das sich modular an existierende Materialmodelle koppeln lässt. So wird eine durchgängige Berücksichtigung der Schädigung über die Prozesskette ermöglicht. Basierend auf der Phänomenologie von Versagen und Instabilität werden mit Hilfe einer Reihe von inneren Variablen die relevanten Größen für deren Abbildung bestimmt.

Als Basis wurde eine Evolutionsgleichung für **Schädigung und Versagen** definiert. Im Gegensatz zu den gebräuchlichen Ansätzen hängt diese nicht von der Historie der plastischen Vordehnung ab, um beliebige Dehnungspfade erfassen zu können. Eine einfache Exponentialfunktion erlaubt die pragmatische Berücksichtigung der vermuteten Nichtlinearität der Materialschädigung. Der Input der resultierenden Bruchdehnungen über der Dreiaxsigkeit erfolgt frei definiert über eine vom Anwender zu bestimmende Kurve anstatt über eine Ansatzfunktion. So kann das Modell flexibel für verschiedenste Werkstoffe eingesetzt werden. Mit Hilfe einer Reihe von Parametern können die Einflüsse unterschiedlicher Netzgrößen berücksichtigt werden.

Ein weiterer entscheidender Baustein ist die Behandlung von **Lokalisierung und Instabilität**. Dazu wurde in GISSMO eine Evolution der Instabilität nach dem gleichen Ansatz wie für die Schädigung installiert. Mit diesem pragmatischen Ansatz kann für die meisten Anwendungsfälle eine hinreichend genaue – und dabei numerisch genügsame – Prognose der Instabilität geliefert werden.

Mit dem **Zwei-Parameter-Ansatz (Forming Limit Surface FLS)** wurde eine Methode entwickelt, um aus der Fließkurve den Lokalisierungsart in den Koordinaten von Dreiaxsigkeit und Dickenreduktion zu bestimmen.

Ausgehend von der erkannten Instabilität setzen **Regularisierungsmaßnahmen** ein, um die unerwünschte Netzgrößenabhängigkeit so weit wie möglich zu reduzieren. Dazu wurde das „Effective stress concept“ von LEMAITRE (1985) erweitert. So können die Resultate der mikroskopischen Vorgänge von Rissentstehung und -fortschritt auf makroskopischer Ebene abgebildet werden. Die Umsetzung dieser Regularisierungsstrategie ist ein zentraler Bestandteil des Modells GISSMO.

Da es essentiell für den praktischen Einsatz ist, wurde Wert darauf gelegt, dass die **Modellparameter** so einfach wie möglich zu identifizieren sind. Die Deformationsvorgänge sind bereits auf Probenebene äußerst kompliziert – alleine das Zusammenspiel von Gleichmaßdehnung, Einschnürung und Bruchdehnung bei verschiedenen Elementgrößen ist auf Materialebene kaum greifbar. Somit bleibt für die Identifikation der meisten Parameter oft nur der Weg über „reverse engineering“. In der Praxis gelingt mit dem vorgestellten Modell und den pragmatischen Methoden eine effiziente Anpassung von Materialparametern für eine Fülle von verschiedenen Werkstoffen.

Zum Abschluss wurden **Beispiele** aus dem Bereich der Umform- und Crashsimulation vorgestellt. Es zeigt sich eine Verbesserung der Prognosequalität durch die konsequente Berücksichtigung der Prozesskette. Als Erkenntnis aus der täglichen Arbeit ist die Materialmodellierung ein wesentlicher – wenn auch nicht der einzige – Baustein für eine treffende Prognose.



## 8.2 Ausblick

Das Modell GISSMO ist bereits seit einiger Zeit in der Anwendung angekommen. Dementsprechend beinhaltet dieser Ausblick auch einen Rückblick. GISSMO hat inzwischen eine große Verbreitung im Kreis der Nutzer des Solvers LS-DYNA gefunden. Für Anwendungen speziell im Bereich der Crashesimulation ist es bei zahlreichen industriellen Nutzern zum Standard geworden.

Das Modell diente in der Vergangenheit bereits als Basis für eine Anzahl an Erweiterungen. Als Beispiel sei die Arbeit von BASARAN (2011) zur Lodewinkelabhängigkeit genannt. Sogar zur Modellierung von Thermoplasten – für die das Modell ursprünglich nicht gedacht war – wurden Erweiterungen vorgenommen, da die Formulierung flexibel genug ist, um sogar für diese Werkstoffe genutzt zu werden. Ein Ende des verbreiteten Einsatzes von GISSMO scheint nicht in Sicht, was wohl für das Modell und seine Anwendbarkeit in der Praxis spricht.

Trotzdem gibt es nach wie vor viele Ansatzpunkte für weitere Entwicklungen auf der Basis von GISSMO. Eine Übersicht der aktuellen Arbeiten findet sich beispielsweise in DU BOIS U. A. (2016). Basierend auf der ursprünglichen GISSMO-Formulierung wurde eine allgemeinere Fassung als \*MAT\_ADD\_GENERALIZED\_DAMAGE (MAGD) in LS-DYNA implementiert, siehe auch ERHART U. A. (2017). Diese erlaubt es, auf beliebige Geschichtsvariablen als Treiber der Schädigung zurückzugreifen. Somit kann statt dem plastischen Dehninkrement beispielsweise die volumetrische Dehnung herangezogen werden, was die Kopplung an nicht-isochore Materialien wie SAMP (KOLLING U. A. 2005) erleichtert. Außerdem können bis zu drei „GISSMOs“ gekoppelt werden, um so beispielsweise eine Kombination von mehreren Schädigungsmechanismen betrachten zu können. Auch die Berücksichtigung von Anisotropie ist damit nun möglich, während die ursprüngliche Formulierung auf isotrope Schädigung beschränkt ist.

Ein weiterer Punkt ist die Behandlung von plastischer Dehnratenabhängigkeit im Zusammenspiel mit duktilem Versagen – hier sind zwar bereits vielversprechende Ansätze publiziert, eine abschließende Lösung ist aber noch nicht in Sicht.

Der in Abschnitt 5.2.3 vorgestellte Zwei-Parameter-Ansatz (Forming Limit Surface FLS) hat in der Praxis noch keine große Resonanz gefunden. Zu schwierig scheint die Prognose der Instabilität rein auf Basis der Fließkurve. Hier besteht sicher noch Potential, diesen interessanten Ansatz weiter bis zur Praxistauglichkeit zu entwickeln.

Zusammenfassend ist die Versagensbeschreibung von metallischen Werkstoffen nach wie vor ein komplexes Thema mit vielen ungelösten Details. GISSMO ist ein flexibles und praxistaugliches Modell, das sich für eine große Bandbreite von Werkstoffen einsetzen

lässt. Als Ausblick bietet GISSMO eine gute Basis für Weiterentwicklungen, um auch zukünftig die Prognosequalität der Simulationen noch weiter zu verbessern.

---

# Literaturverzeichnis

ALSOS U. A. 2008

Alsos, H.S.; Hopperstad, O.S.; Törnqvist, R.; Amdahl, J.: *Analytical and numerical analysis of sheet metal instability using a stress based criterion*. International Journal of Solids and Structures 45, pp. 2042-2055, 2008

ALTENBACH UND ALTENBACH 1994

Altenbach, J.; Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994

ANDRADE U. A. 2015

Andrade, F.X.C.; Feucht, M.; Böhm, R.; DuBois, P.A.; Haufe, A.: *Prediction of Dynamic Material Failure - Part II: Application with GISSMO in LS-Dyna*. 10th European LS-DYNA Conference, Würzburg, 2015

ANDRADE U. A. 2016

Andrade, F.X.C.; Feucht, M.; Haufe, A.; Neukamm, F.: *An incremental stress state dependent damage model for ductile failure prediction*. International Journal of Fracture 200, pp. 127-150, 2016

ANDRADE U. A. 2017

Andrade, F.X.C.; Koch, D.; Helbig, M.; Haufe, A.: *Anpassung einer GISSMO Materialkarte für einen Stahlwerkstoff*. DYNAmore GmbH im Auftrag der Daimler AG, interne Dokumentation, 2017

ARGYRIS UND MLEJNEK 1991

Argyris, J.; Mlejnek, H.-P.: *Dynamics of Structures. Texts on Computational Mechanics, Volume 5*. North-Holland, 1991

BAI UND WIERZBICKI 2008A

Bai, Y.; Wierzbicki, T.: *Forming severity concept for predicting sheet necking under complex loading histories*. International Journal of Mechanical Sciences 50, pp. 1012-1022, 2008

BAI UND WIERZBICKI 2008B

Bai, Y.; Wierzbicki, T.: *A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence*. International Journal of Plasticity 24, pp. 1071-1096, 2008

BANABIC U. A. 2000

Banabic, D.; Bunge, H.-J.; Pöhlandt, K.; Tekkaya, A.E.: *Formability of Metallic Materials*. Springer Verlag, 2000

BANABIC U. A. 2009

Banabic, D.; Paraianu, L.; Dragos, G.; Bichis, I.; Comsa, D.S.: *An improved version of the Modified Maximum Force Criterion (MMFC) used for predicting the localized necking in sheet metals*. Proceedings of the Romanian Academy 10, Series A, 2009

BARLAT UND LIAN 1989

Barlat, F.; Lian, J.: *Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. Part I: A yield function for orthotropic sheets under plane stress conditions*. International Journal of Plasticity 5, pp. 51-66, 1989

BARLAT U. A. 1989

Barlat, F.; Lian, J.; Baudelet, B.: *Plastic behaviour and stretchability of sheet metals. Part II: Effect of yield surface shape on sheet forming limit*. International Journal of Plasticity 5, pp. 131-147, 1989

BARSOUM 2003

Barsoum, I.: *Mixed Mode Ductile Fracture - a literature review*. KTH Stockholm, 2003

BARSOUM 2006

Barsoum, I.: *Ductile Failure and Rupture Mechanisms in Combined Tension and Shear*. Licentiate Thesis No. 96, KTH Stockholm, 2006

BARSOUM UND FALESKOG 2007

Barsoum, I.; Faleskog, J.: *Rupture mechanisms in combined tension and shear – Experiments*. International Journal of Solids and Structures 44, pp. 1768-1786, 2007

BASARAN 2011

Basaran, M.: *Stress State Dependent Damage Modeling with a Focus on the Lode Angle Influence*. Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, RWTH Aachen, 2011

## BAŽANT UND BELYTSCHKO 1985

Bažant, Z.; Belytschko, T.: *Wave Propagation in a Strain-Softening Bar: Exact Solution*. Journal of Engineering Mechanics 111, pp. 381-389, 1985

## BAŽANT UND CEDOLIN 1991

Bažant, Z.; Cedolin, L.: *Stability of Structures*. Oxford University Press, New York, 1991

## BAŽANT UND PIJAUDIER-CABOT 1989

Bažant, Z.; Pijaudier-Cabot, G.: *Measurement of Characteristic Length of Nonlocal Continuum*. Journal of Engineering Mechanics 115, pp. 755-767, 1989

## BELYTSCHKO U. A. 2003

Belytschko, T.; Chen, H.; Xu, J.; Zi, G.: *Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 58, pp. 1873-1905, 2003

## BELYTSCHKO U. A. 2000

Belytschko, T.; Liu, W.K.; Moran, B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley and Sons Ltd., Chichester, 2000

## BRESSAN UND WILLIAMS 1983

Bressan, J.D.; Williams, J.A.: *The use of a shear instability criterion to predict local necking in sheet metal deformation*. International Journal of Mechanical Sciences 25, pp. 155-168, 1983

## BRIDGMAN 1952

Bridgman, P.W.: *Studies in large plastic flow and fracture, with special emphasis on the effects of hydrostatic pressure*. McGraw Hill Inc., New York, 1952

## BUTZ U. A. 2010

Butz, A.; Lossau, S.; Springub, B.; Roters, F.: *On the modeling of dual phase steels: microstructure-based simulation from the hot rolled sheet to the deep drawn component*. International Journal of Material Forming 3, pp. 73-76, 2010

## DANAS UND PONTE CASTANEDA 2012

Danas, K.; Ponte Castaneda, P.: *Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials*. International Journal of Solids and Structures 49, pp. 1325-1342, 2012

## DARLET UND DESMORAT 2015

Darlet, A.; Desmorat, R.: *Stress triaxiality and Lode angle along surfaces of elasto-plastic structures*. International Journal of Solids and Structures 67-68, pp. 71-83, 2015

DE BORST U. A. 1993

De Borst, R.; Sluys, L.J.; Mühlhaus, H.B.; Pamin, J.: *Fundamental Issues in Finite Element Analyses of Localization of Deformation*. Engineering Computations 10, pp. 99-121, 1993

DRUCKER 1959

Drucker, D.C.: *A Definition of Stable Inelastic Material*. Journal of Applied Mechanics 26, pp. 101-106, 1959

DU BOIS 2007–2011

Du Bois, P.A.: *k/T*. Persönliche Kommunikation, 2007-2011

DU BOIS U. A. 2016

Du Bois, P.A.; Erhart, T.; Andrade, F.; Haufe, A.; Neukamm, F.; Feucht, M.; Irslinger, J.: *A new versatile tool for simulation of failure in LS-DYNA and the application to aluminium extrusions*. 14. LS-DYNA Forum, Bamberg, 2016

DUNAND UND MOHR 2010

Dunand, M.; Mohr, D.: *Hybrid experimental-numerical analysis of basic ductile fracture experiments for sheet metals*. International Journal of Solids and Structures 47, pp. 1130-1143, 2010

EBELSHEISER 2008

Ebelsheiser, H.: *Verifikation von Methoden für die Berücksichtigung der Prozesskette Umform-Crashsimulation am Beispiel verschiedener Komponentenversuche*. Diplomarbeit, Department Fahrzeugtechnik und Flugzeugbau, HAW Hamburg, 2008

EFFELSBERG U. A. 2012

Effelsberg, J.; Haufe, A.; Feucht, M.; Neukamm, F.; Du Bois, P.A.: *On parameter identification for the GISSMO damage model*. 12th International LS-DYNA Users Conference, Dearborn (MI), 2012

EN ISO 12004 2008

EN ISO 12004: *Metallische Werkstoffe - Bleche und Bänder - Bestimmung der Grenzformänderungskurve*. International Organization for Standardization (ISO), 2008

ERHART U. A. 2017

Erhart, T.; Andrade, F.; Du Bois, P.A.: *Short Introduction of a New Generalized Damage Model*. 11. European LS-DYNA Conference, Salzburg, 2017

FENG UND YANG 1984

Feng, W.W.; Yang, W.H.: *General and Specific Quadratic Yield Functions*. Composites Technology Review 6, pp. 19-21, 1984

## FERZIGER 1981

Ferziger, J.H.: *Numerical Methods for Engineering Application*. John Wiley & Sons, New York, 1981

## FEUCHT 1998

Feucht, M.: *Ein gradientenabhängiges Gursonmodell zur Beschreibung duktiler Schädigung mit Entfestigung*. Dissertation, Fachbereich Mechanik, Technische Universität Darmstadt, 1998

## FEUCHT UND FASSNACHT 1999

Feucht, M.; Faßnacht, W.: *Simulation der duktilen Rissbildung in Crashberechnungen mit Hilfe des Gurson-Modells*. 17. CADFEM User Meeting, Sonthofen, 1999

## FEUCHT U. A. 2006

Feucht, M.; Sun, D.-Z.; Erhart, T.; Frank, Th.: *Recent development and applications of the Gurson model*. 5. LS-DYNA Anwenderforum, Ulm, 2006

## GOLOGANU U. A. 1993

Gologanu, M.; Leblond, J.B.; Devaux, J.: *Approximate models for ductile metals containing non-spherical voids - Case of axisymmetric prolate ellipsoidal cavities*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 41, pp. 1723-1754, 1993

## GRAF UND HOSFORD 1993

Graf, A.; Hosford, W.: *Effect of Changing Strain Paths on Forming Limit Diagrams of Al2008-T4*. Metallurgical Transactions A 24, pp. 2503-2512, 1993

## GROLLEAU U. A. 2008

Grolleau, V.; Gary, G.; Mohr, D.: *Biaxial Testing of Sheet Materials at High Strain Rates Using Viscoelastic Bars*. Experimental Mechanics 48, pp. 293-306, 2008

## GROSS UND SEELIG 2006

Gross, D.; Seelig, Th.: *Bruchmechanik mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer Verlag, 2006

## GURSON 1977

Gurson, A.L.: *Continuum Theory of Ductile Rupture by Void Nucleation and Growth: Part I-Yield Criteria and Flow Rules for Porous Ductile Media*. Journal of Engineering Materials and Technology 99, pp. 2-15, 1977

## HALLQUIST 2017

Hallquist, J.: *LS-DYNA Keyword User's Manual R10.0*. Livermore Software Technology Corporation (LSTC), 2017

## HANCOCK UND MACKENZIE 1976

Hancock, J.W.; Mackenzie, A.C.: *On the Mechanisms of Ductile Failure in High-*

*Strength Steels Subjected to Multi-Axial Stress-States*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 24, pp. 147-169, 1976

HAUFE 2001

Haufe, A.: *Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 2001

HAUFE 2013

Haufe, A.: *DYNAmat User's Manual V0.17 (alpha)*. 2013

HILL 1948

Hill, R.: *A theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals*. Proceedings of the Royal Society of London A 193, pp. 281-297, 1948

HILL 1952

Hill, R.: *On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1, pp. 19-30, 1952

HILL 1958

Hill, R.: *A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 6, pp. 236-249, 1958

HILL 1961

Hill, R.: *Acceleration Waves in Solids*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 10, pp. 1-16, 1961

HOCHHOLDINGER U. A. 2009

Hochholdinger, B.; Grass, H.; Hora, P.: *Determination of Flow Curves by Stack Compression Tests and Inverse Analysis for the Simulation of Hot Forming*. 7th European LS-DYNA Conference, Salzburg, 2009

HOCKETT UND SHERBY 1975

Hockett, J.E.; Sherby, O.D.: *Large strain deformation of polycrystalline metals at low homologous temperatures*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 23, pp. 87-98, 1975

HORA U. A. 2007

Hora, P.; Merklein, M.; Tong, L.; Lechler, J.: *Numerical and Experimental Evaluation of Thermal Dependent FLC*. International Deep-drawing Research Group Conference, Győr, 2007

HORA U. A. 2008

Hora, P.; Tong, L.; Berisha, B.: *Orientation Dependent 3D Stress Limit Model for*



*Failure Prediction in Complex Bulk Forming Processes*. 9th International Conference on Technology of Plasticity, Gyeongju, 2008

HOSFORD 1972

Hosford, W.F.: *A generalized isotropic yield criterion*. Journal of Applied Mechanics 39, pp. 607-609, 1972

HUTCHINSON UND NEALE 1978A

Hutchinson, J.W.; Neale, K.W.: *Sheet Necking–II. Time-independent behavior*. Mechanics of Sheet Metal Forming, Eds. D.P. Koistinen and N.-M. Wang, New York, 1978

HUTCHINSON UND NEALE 1978B

Hutchinson, J.W.; Neale, K.W.: *Sheet Necking–III. Strain-rate effects*. Mechanics of Sheet Metal Forming, Eds. D.P. Koistinen and N.-M. Wang, New York, 1978

HUTCHINSON U. A. 1978

Hutchinson, J.W.; Neale, K.W.; Needleman, A.: *Sheet Necking–I. Validity of plane stress assumptions of the long-wavelength approximation*. Mechanics of Sheet Metal Forming, Eds. D.P. Koistinen and N.-M. Wang, New York, 1978

JIRÁSEK 2009

Jirásek, M.: *Modeling of Localized Inelastic Deformation*. Lecture Notes, Short course given at the Czech Technical University, Prague, 2009

JOHNSON UND COOK 1985

Johnson, G.R.; Cook, W.H.: *Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures*. Engineering Fracture Mechanics 21, pp. 31-48, 1985

KOLLING U. A. 2005

Kolling, S.; Haufe, A.; Feucht, M.; Du Bois, P.A.: *SAMP-1: A Semi-Analytical Model for the Simulation of Polymers*. 4. LS-DYNA Anwenderforum, Bamberg, 2005

KORGESAAR U. A. 2014

Korgesaar, M.; Remes, H.; Romanoff, J.: *Size dependent response of large shell elements under in-plane tensile loading*. International Journal of Solids and Structures 51, pp. 3752-3761, 2014

LEE 2005

Lee, Y.-W.: *Fracture Prediction in Metal Sheets*. PhD-Thesis, Department of Ocean Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 2005

LEMAITRE 1985

Lemaitre, J.: *A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture*. Journal of Engineering Materials and Technology 107, pp. 83-89, 1985

LEMAITRE UND DESMORAT 2005

Lemaitre, J.; Desmorat, R.: *Engineering Damage Mechanics*. Springer Verlag, Berlin, 2005

MARCINIAK U. A. 2002

Marciniak, Z.; Duncan, J.L.; Hu, S.J.: *Mechanics of Sheet Metal Forming*. Butterworth-Heinemann, 2002

MARCINIAK UND KUCZYŃSKI 1967

Marciniak, Z.; Kuczyński, K.: *Limit Strains in the Processes of Stretch-Forming Sheet Metal*. International Journal of Mechanical Sciences 9, pp. 609-620, 1967

MCCLINTOCK U. A. 1966

McClintock, F.A.; Kaplan, S.M.; Berg, C.A.: *Ductile fracture by hole growth in shear bands*. International Journal of Fracture 2, pp. 614-627, 1966

MOHR UND MARCADET 2015

Mohr, D.; Marcadet, S.J.: *Micromechanically-motivated phenomenological Hosford-Coulomb model for predicting ductile fracture initiation at low stress triaxialities*. International Journal of Solids and Structures 67-68, pp. 40-55, 2015

MOHR UND OSWALD 2008

Mohr, D.; Oswald, M.: *A New Experimental Technique for the Multi-axial Testing of Advanced High Strength Sheets*. Experimental Mechanics 48, pp. 65-77, 2008

MÜSCHENBORN UND SONNE 1975

Müschenborn, W.; Sonne, H.-M.: *Einfluß des Formänderungsweges auf die Grenzformänderungen des Feinblechs*. Archiv für das Eisenhüttenwesen 46, pp. 597-602, 1975

NAHSHON UND HUTCHINSON 2008

Nahshon, K.; Hutchinson, J.W.: *Modification of the Gurson Model for shear failure*. European Journal of Mechanics A/Solids 27, pp. 1-17, 2008

NEUKAMM U. A. 2009

Neukamm, F.; Feucht, M.; Bischoff, M.: *On the Application of Continuum Damage Models to Sheet Metal Forming Simulations*. 10th Int. Conference on Computational Plasticity COMPLAS X, Barcelona, 2009

NEUKAMM U. A. 2008A

Neukamm, F.; Feucht, M.; Haufe, A.; Roll, K.: *A Generalized Incremental Stress-*

*State Dependent Damage Model for Forming and Crashworthiness Simulations.* Proc. Numisheet Conference, Interlaken (CH), 2008

NEUKAMM U. A. 2008B

Neukamm, F.; Feucht, M.; Haufe, A.; Roll, K.: *On Closing the Constitutive Gap Between Forming and Crash Simulation.* 10th International LS-DYNA Users Conference, Dearborn (MI), 2008

OECKERATH 2012

Oeckerath, A.: *SCAIMapper Manual Version 4.2.0.* Fraunhofer SCAI, Sankt Augustin, 2012

OEHM 2008

Oehm, M. (: *Theory Manual MF GenYld+CrachFEM 3.8.* MATFEM Partnerschaft Dr. Gese & Oberhofer, München, 2008

ORTIZ U. A. 1987

Ortiz, M.; Leroy, Y.; Needleman, A.: *A finite element method for localized failure analysis.* Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 61, pp. 189-214, 1987

PACK UND MOHR 2017

Pack, K.; Mohr, D.: *Combined necking & fracture model to predict ductile failure with shell finite elements.* Engineering Fracture Mechanics 182, pp. 32-51, 2017

PARISCH 2003

Parisch, H.: *Festkörper-Kontinuumsmechanik.* B.G. Teubner, Stuttgart, 2003

RICE 1976

Rice, J.R.: *The Localization of Plastic Deformation.* Proc. 14th International Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Delft, 1976

RICE UND TRACEY 1969

Rice, J.R.; Tracey, D.M.: *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids 17, pp. 201-217, 1969

ROTH UND MOHR 2016

Roth, C.C.; Mohr, D.: *Ductile fracture experiments with locally proportional loading histories.* International Journal of Plasticity 79, pp. 328-354, 2016

SCHMEING 2007

Schmeing, F.: *Untersuchung zur durchgängigen Variablenübertragung in der integralen Simulation von Umform- und Crashvorgängen.* Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 2007

SCHREYER UND CHEN 1986

Schreyer, H.L.; Chen, Z.: *One-Dimensional Softening with Localization*. Journal of Applied Mechanics 53, pp. 791-797, 1986

SIMO UND HUGHES 1998

Simo, J.C.; Hughes, T.J.R.: *Computational Inelasticity*. Springer Verlag, New York, 1998

SPITZIG UND RICHMOND 1984

Spitzig, W.A.; Richmond, O.: *The Effect of Pressure on the Flow Stress of Metals*. Acta Metallurgica 32, pp. 457-463, 1984

SPRINGUB U. A. 2010

Springub, B.; Butz, A.; Feucht, M.; Haufe, A.; Lossau, S.; Masimov, M.; Neukamm, F.; Roll, K.; Roters, F.; Schwarzer, R.; Wagener, C.: *Zum Stand der virtuellen Werkstoffentwicklung: Vom Halbzeug zum Crash*. 9. LS-DYNA Anwenderforum, Bamberg, 2010

STORHEIM U. A. 2015

Storheim, M.; Alsos, H.S.; Hopperstad, O.S.; Amdahl, J.: *A damage-based failure model for coarsely meshed shell structures*. International Journal of Impact Engineering 83, pp. 59-75, 2015

STOUGHTON 2000

Stoughton, T.B.: *A general forming limit criterion for sheet metal forming*. International Journal of Mechanical Sciences 42, pp. 1-27, 2000

STOUGHTON UND YOON 2006

Stoughton, T.B.; Yoon, J.W.: *Review of Drucker's Postulate and the Issue of Plastic Stability in Metal Forming*. International Journal of Plasticity 22, pp. 391-433, 2006

STOUGHTON UND ZHU 2004

Stoughton, T.B.; Zhu, X.: *Review of theoretical models of the strain-based FLD and their relevance to the stress-based FLD*. International Journal of Plasticity 20, pp. 1463-1486, 2004

STÖREN UND RICE 1975

Stören, S.; Rice, J.R.: *Localized Necking in Thin Sheets*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 23, pp. 421-441, 1975

SUN U. A. 2009

Sun, D.-Z.; Andrieux, F.; Feucht, M.: *Damage modelling of a TRIP steel for integrated simulation from deep drawing to crash*. 7th European LS-DYNA Conference, Salzburg, 2009

## SWIFT 1952

Swift, H.W.: *Plastic Instability Under Plane Stress*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1, pp. 1-18, 1952

## TAŞAN 2010

Taşan, C.C.: *Micro-mechanical Characterization of Ductile Damage in Sheet Metal*. PhD-Thesis, Eindhoven University of Technology, 2010

## TVERGAARD UND NEEDLEMAN 1984

Tvergaard, V.; Needleman, A.: *Analysis of the Cup-Cone Fracture in a Round Tensile Bar*. Acta Metallurgica 32, pp. 157-169, 1984

## VEGTER UND VAN DEN BOOGAARD 2006

Vegter, H.; van den Boogaard, A.H.: *A plane stress yield function for anisotropic sheet material by interpolation of biaxial stress states*. International Journal of Plasticity 22, pp. 557-580, 2006

## VOLK 2006

Volk, W.: *New Experimental and Numerical Approach in the Evaluation of the FLD with the FE-Method*. Proceedings of FLC Zürich, 2006

## WALTERS 2014

Walters, C.L.: *Framework for adjusting for both stress triaxiality and mesh size effect for failure of metals in shell structures*. International Journal of Crashworthiness 19, pp. 1-12, 2014

## WECK 2007

Weck, A.: *The Role of Coalescence on Ductile Fracture*. PhD-Thesis, Department of Materials Science and Engineering, McMaster University, Hamilton, 2007

## WECK U. A. 2008A

Weck, A.; Segurado, J.; Llorca, J.; Wilkinson, D.; Böhm, H.: *Numerical simulations of void linkage in model materials using a nonlocal ductile damage approximation*. International Journal of Fracture 148, pp. 205-219, 2008

## WECK U. A. 2008B

Weck, A.; Wilkinson, D.S.; Maire, E.: *Observation of void nucleation, growth and coalescence in a model metal matrix composite using X-ray tomography*. Materials Science and Engineering A 488, pp. 435-445, 2008

## WECK U. A. 2008C

Weck, A.; Wilkinson, D.S.; Maire, E.; Toda, H.: *Visualization of X-ray tomography of void growth and coalescence leading to fracture in model materials*. Acta Materialia 56, pp. 2919-2928, 2008

WECK U. A. 2006

Weck, A.; Wilkinson, D.S.; Toda, H.; Maire, E.: *2D and 3D Visualization of Ductile Fracture*. Advanced Engineering Materials 8, pp. 469-472, 2006

WIERZBICKI U. A. 2005

Wierzbicki, T.; Bao, Y.; Lee, Y.-W.; Bai, Y.: *Calibration and evaluation of seven fracture models*. International Journal of Mechanical Sciences 47, pp. 719-743, 2005

WRIGGERS 2001

Wriggers, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer Verlag, Berlin, 2001

XUE 2007

Xue, L.: *Ductile Fracture Modeling - Theory, Experimental Investigation and Numerical Verification*. PhD-Thesis, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 2007

XUE 2008

Xue, L.: *Constitutive modeling of void shearing effect in ductile fracture of porous materials*. Engineering Fracture Mechanics 75, pp. 3343-3366, 2008

XUE 2010

Xue, L.: *Localization conditions and diffused necking for damage plastic solids*. Engineering Fracture Mechanics 77, pp. 1275-1297, 2010

XUE UND BELYTSCHKO 2010

Xue, L.; Belytschko, T.: *Fast methods for determining instabilities of elastic-plastic damage models through closed-form expressions*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 84, pp. 1490-1518, 2010

XUE UND WIERZBICKI 2009

Xue, L.; Wierzbicki, T.: *Numerical simulation of fracture mode transition in ductile plates*. International Journal of Solids and Structures 46, pp. 1423-1435, 2009

ZHU U. A. 2007

Zhu, H.; Zhu, L.; Chen, J.-H.; Lu, X.-F.: *Investigation of fracture mechanism of 6063 aluminum alloy under different stress states*. International Journal of Fracture 146, pp. 159-172, 2007

ZIENKIEWICZ UND TAYLOR 1967

Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*. McGraw-Hill Book Company, London, 1967

---

## Lebenslauf

### Persönliche Angaben:

Name: Frieder Johannes Neukamm  
Geburtsdatum: 31. Mai 1981  
Geburtsort: Nürtingen  
Eltern: Gabriele und Hans Neukamm

### Schulbildung:

1987 - 1991 Ersberg-Grundschule, Nürtingen  
1991 - 1997 Max-Planck-Gymnasium, Nürtingen  
1997 - 2000 Technisches Gymnasium Max-Eyth-Schule, Kirchheim unter Teck  
Juni 2000 Abitur

### Universitäre Bildung:

2001 - 2007 Studium der Luft- und Raumfahrttechnik an der Universität Stuttgart  
Oktober 2007 Diplomprüfung  
2007 - 2010 Doktorand (Industriepromotion) am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

### Arbeitserfahrung:

2003 - 2004 Diamond Aircraft Industries Inc., London (Ontario), Canada: Fachpraktikum  
2007 - 2010 Daimler AG, Sindelfingen: Doktorand (Industriepromotion)  
2011 - Daimler AG, Sindelfingen: Entwicklung Mercedes-Benz PKW





---

## Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.

- 9 (1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. M. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axial-belasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) T. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. de Mesquita Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. L. M. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.

- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.

- 31 (1999) W. A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Struktur-  
dynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturver-  
halten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit  
der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D. P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturmechanik und der Fluid-  
Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incom-  
pressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Form-  
optimierung.

- 42 (2004) **G. A. D’Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) **M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) **T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A. S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T. M. Hettich:**  
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**  
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**  
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.

- 53 (2010) J. Kato:**  
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.
- 54 (2010) C. F. Hilchenbach:**  
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**  
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B. J. Schneider:**  
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**  
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) T. Cichosz:**  
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) R. Echter:**  
Isogeometric analysis of shells.
- 60 (2013) A. Tkachuk:**  
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices.
- 61 (2013) J. Irslinger:**  
Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente.
- 62 (2014) T. E. Pohl:**  
Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung.
- 63 (2014) A. Sorg:**  
Adaptive diskret-kontinuierliche Modellierung von Materialien mit Mikrostruktur.

- 64 (2015) M. E. Matzen:**  
Isogeometrische Modellierung und Diskretisierung von Kontaktproblemen.
- 65 (2016) V. M. Effinger:**  
Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymer-schäume.
- 66 (2017) C. M. Wilking:**  
Effiziente Integration und verbesserte Kontaktspannungen für duale Mortar-Formulierungen.
- 67 (2018) B. Oesterle:**  
Intrinsisch lockingfreie Schalenformulierungen.









**Frieder Neukamm**

Diese Arbeit befasst sich mit der Simulation von Blechstrukturen unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM). Schwerpunkt ist die Vorhersage von lokalisierter Deformation und Versagen, für welche Verbesserungen und neue Ansätze vorgeschlagen werden. Die betrachteten Blechstrukturen werden üblicherweise in mehreren Prozessschritten hergestellt, beginnend mit einem Umformvorgang. Dabei können sich lokal die Eigenschaften der Blechteile verändern, was das Verhalten unter einer nachfolgenden Crashbelastung wesentlich beeinflussen kann. Zur Steigerung der Prognosegüte wird deswegen eine durchgängige Modellierung der Prozesskette mit Hilfe eines modular verwendbaren Versagensmodells eingeführt.

Als Kern dieser Arbeit wird das phänomenologische Schädigungs- und Versagensmodell GISSMO (Generalized Incremental Stress-State dependent damage MOdel) entwickelt. Wesentlicher Bestandteil ist eine Evolutionsgleichung, die den Zuwachs der Schädigung in Abhängigkeit vom Deformationszustand und der aktuellen Schädigung beschreibt. Mit Hilfe eines zusätzlichen Exponenten kann die Evolution nichtlinear gestaltet werden, um die erwarteten Vorgänge im Material besser abbilden zu können. In den betrachteten Simulationen beginnt mit dem Auftreten von lokalisierter Deformation eine unphysikalische Abhängigkeit der Ergebnisse von der Netzgröße. Deswegen ist die Prognose des Lokalisierungsbeginns notwendig, um Regularisierungsmaßnahmen einzuleiten. Dazu werden zwei Methoden entwickelt: Mit Hilfe einer inkrementellen Formulierung wird das Lokalisierungsrisiko abhängig vom durchlaufenen Deformationspfad summiert. Alternativ wird der Zwei-Parameter-Ansatz (Forming Limit Surface FLS) vorgestellt, bei dem der Zustand durch die relative Blechdicke und die plastische Dehnung charakterisiert wird.