

DYNAMISCHE STABILITÄT NACH DER METHODE DER FINITEN ELEMENTE MIT ANWENDUNGEN AUF KUGELSCHALEN

von
ALBRECHT BURMEISTER

29.7.87

Z



Bericht Nr. 6 (1987)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm

Stuttgart 1987

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 30. April 1987

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. H. Bufler

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das Ziel verfolgt, das Verhalten dynamisch beanspruchter Tragwerke hinsichtlich Stabilität zu beurteilen.

Nach einem Abschnitt, der zur Begriffsbestimmung sowie zur Beschreibung der verschiedenartigen Instabilitätsphänomene dienen soll, wird auf die Methode der finiten Elemente eingegangen. In diesem Zusammenhang werden Bewegungsgleichungen für explizite und implizite Zeitintegrationsverfahren abgeleitet, sowie die Massenmatrizen für Schalenelemente in konsistenter und zusammengefaßter Form angegeben.

Für die Analyse im Zeitbereich erweist sich das von Newmark konzipierte Verfahren - für die hier untersuchte Problemklasse - als besonders geeignet. Die Frage nach der Stabilität des Integrationsalgorithmus erfordert insofern gesonderte Überlegungen, als Instabilitäten sowohl auf der Seite der Struktur, als auch auf der Seite des numerischen Verfahrens möglich sind. Sie kann für die hier untersuchten Methoden positiv beantwortet werden. Unterschiedliche Anforderungen, wie Genauigkeit und Effizienz, erfordern eine Zeitschrittweite, für die Stabilität des numerischen Algorithmus stets gewährleistet ist. Ein hier unter Verwendung von Padé-Aproximationen für nichtlineare Probleme formuliertes Verfahren, gestattet die Erfüllung höchster Genauigkeitsansprüche.

Die Stabilitätsanalyse allein mit Hilfe von Zeitverlaufsberechnungen erweist sich als äußerst aufwendig, ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist daher die Entwicklung einfacher Kriterien. Auf der Basis der 1. Ljapunovschen Methode konnte zunächst die Gültigkeit des "kinetischen Stabilitätskriteriums" ($\omega=0$) auch für dynamische Durchschlags- bzw. Verzweigungsprobleme gezeigt werden. Weiterhin wurde daraus eine "direkte" Methode entwickelt, die es mit Hilfe eines Eigenwertproblem es für den Lastparameter

gestattet, die kritische Lasthöhe aus nur einer Zeitverlaufsrechnung zu ermitteln.

Der Frage nach der Stabilität von Kugelschalen unter zeitabhängigen, örtlichen Belastungen kommt in der Ingenieurpraxis einige Bedeutung zu. Zu dieser Problemstellung wurde insofern ein Beitrag geleistet, als anhand einer typischen Schalengeometrie (Radius: 28 m, Wanddicke: 38 mm) das Strukturverhalten unter einer entlang eines Breitenkreises wirkenden Schneidenlast mit unterschiedlichem zeitlichen Verlauf diskutiert wurde. Neben einer unverstärkten wurde auch eine durch Stützen und Rinde verstärkte Kugelkappe untersucht. Abhängigkeiten der dynamischen Beullast vom Zeitverlauf der Belastung, Lastradius bzw. von der Verstärkungsgeometrie sowie Einflüsse aus nichtlinearem Werkstoffverhalten standen im Mittelpunkt des Interesses.

Bei der unverstärkten, wie bei der stützenverstärkten Schale trat unter ca. 70 % der statischen Versagenslast rotationssymmetrisches dynamisches Beulen ein. Das stark von der Belastungsperiode abhängige Systemverhalten unter sinusförmigem Belastungszeitverlauf wird mit zunehmender Periode dem Verhalten unter plötzlich aufgebrachter und anschließend konstant gehaltener Ringlast ähnlich. Für die stützenverstärkte Schale unter einem Rechteckimpuls unendlicher Dauer konnte eine geringere Wirksamkeit der Verstärkung als im statischen Fall festgestellt werden. Die in Abhängigkeit von der Verstärkungsgeometrie angegebenen dynamischen Versagenslasten sind für praktische Zwecke direkt verwendbar.

Summary

In this study the stability of dynamically loaded structures is analysed using the finite element method.

After deriving the equations of motion and mass matrices of degenerated shell elements different procedures for the analysis of dynamic stability are discussed. First numerical time integration procedures are analysed with regard to the special requirements of stability analysis. According to the nonlinear structural behaviour an incremental/iterative solution procedure is applied. In order to control the accuracy in buckling analyses a nonlinear 4th order implicit time integration algorithm is developed using Padé functions. Comparing this method to those of the Newmark family it was found that the conventional integration schemes are sufficient for buckling analyses.

In the case of dynamic buckling instabilities, for example under a sudden pressure load, the analysis can be simplified evaluating stability criteria parallel to a nonlinear time response analysis. Starting with the eigenproblem of the system matrix the applicability of the kinetic stability criterion is shown. Based on this criterion an eigenproblem for the load parameter is developed in order to approximate the critical step load directly.

In the last part of this study nozzle reinforced as well as unreinforced spherical shells are analysed under ring loads with different time histories. Considering both the reinforced as well as the unreinforced structure an axisymmetric dynamic buckling occurred at a load level (step load) of about 70 percent of the static buckling load. Comparing the efficiency of the reinforcement under static and under dynamic loading a higher efficiency was found in the static load case.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	Seite	9
1. Einleitung, Zielsetzung		14
2. Statische und dynamische Stabilität		19
2.1 Allgemeines		19
2.2 Stabilitätsbegriff nach Ljapunov		20
2.3 Möglichkeiten zur Unterscheidung von Stabilitätsfällen		22
2.4 Statisch belastete Systeme		24
2.5 Zeitabhängige Systeme		28
2.5.1 Freie Schwingungen		29
2.5.2 Parametererregte Schwingungen		29
2.5.3 Selbsterregte Schwingungen		33
2.5.4 Erzwungene Schwingungen		35
2.5.4.1 Durchschlagen unter dynamischer Belastung		36
2.5.4.2 Verzweigen unter dynamischer Belastung		41
2.5.5 Zusammenfassung Kapitel 2		43
3. Untersuchung der dynamischen Stabilität mit der Methode der finiten Elemente		44
3.1 Übersicht über vorhandene Methoden		44
3.2 Bewegungsgleichung, Ortdiskretisierung mit FE		49
3.2.1 Bewegungsgleichung		49
3.2.1.1 Bewegungsgleichung für explizite Integrationsverfahren		49
3.2.1.2 Bewegungsgleichung für implizite Integrationsverfahren		53
3.2.2 Konsistente Massenmatrizen degenerierter Elemente		56
3.2.2.1 2D-degeneriertes Element		57
3.2.2.2 3D-degeneriertes Element		61
3.2.3 Zusammengefaßte Massenmatrizen degenerierter Elemente		67

3.2.4	Zusammenfassung Abschnitt 3.2	73
3.3	Direkte Zeitintegrationsverfahren	75
3.3.1	Literaturübersicht	75
3.3.2	Anforderungen, Verfahren für dynamische Stabilitätsprobleme	78
3.3.3	Darstellung der Methoden	82
3.3.3.1	Implizite Verfahren	83
3.3.3.2	Explizites Verfahren	97
3.3.4	Beispielrechnungen	100
3.3.4.1	Zweibock	100
3.3.4.2	Kreisbogen	102
3.3.4.3	Kugelkappe	121
3.3.4.4	Zusammenfassung der Beispielrechnungen	130
3.4	Kriterien zur Bestimmung der dynamischen Beullast	132
3.4.1	Energiekriterien	133
3.4.2	Eigenwertkriterien	137
3.4.2.1	Eigenwerte der Systemmatrix	139
3.4.2.2	Eigenkreisfrequenzen	150
3.4.2.3	Eigenwertkriterium zur direkten Bestimmung der kritischen Last	153
3.4.2.4	Verifizierung der Kriterien	158
3.4.3	Zusammenfassung Abschnitt 3.4	168
4.	Dynamische Stabilität von Kugelschalen	171
4.1	Literaturübersicht	171
4.2	Ungestörte Kugelschale unter Ringlast	176
4.2.1	Allgemeines	176
4.2.2	Orts- und Zeitdiskretisierung	178
4.2.3	Stufenlast	185
4.2.3.1	Einfluß des Belastungsradius	189
4.2.3.2	Einfluß der materiellen Nichtlinearität	189
4.2.4	Rechteckimpuls	190
4.2.5	Sinusförmige Belastung	192
4.2.6	Zusammenfassung Abschnitt 4.2	199

4.3	Stützenverstärkte Kugelschale	201
4.3.1	Allgemeines	201
4.3.2	Orts- und Zeitdiskretisierung	203
4.3.3	Sinusförmige Belastung	206
4.3.4	Stufenlast	208
4.3.4.1	Einfluß der materiellen Nichtlinearität	210
4.3.4.2	Variation der Verstärkungsgeometrie	212
4.3.5	Zusammenfassung Abschnitt 4.3	214
5.	Schlußfolgerungen	216
	Schrifttum	218

Bezeichnungen

Indizierung

Kopfzeiger links	t	Wirkungszustand (Zeitpunkt)
rechts	E1	Elementgröße
	$^{(1)}$	Iterationszyklus
Fußzeiger links	o	Bezugszustand (Zeitpunkt)
rechts	$_{i,j,k}$	Komponenten der kartesischen Koordinaten bzw. Gaußpunkte bei der numerischen Integration
	$_{,i}$	partielle Ableitung nach der i-ten Koordinate
	$_n$	Zähler
	$_{KRIT}$	Kritische Größe

Geometrie

$^t x_1, ^t x_2, ^t x_3$ bzw. x, y, z	Kartesische Koordinaten
$r, s, t,$ $^o \varphi(k), ^o \psi_1(k)$	lokale, natürliche Koordinaten Winkel der Schalenormalen zu den Koordinatenachsen am Knoten k
$^o V, ^o A$ $d(^o V)$ $^o \varrho$	Volumen, Querschnittsfläche infinitesimales Volumenelement Dichte

Statische und kinematische Größen

$^o S_{ij}$	Kirchhoff - Piola Spannungstensor 2. Art (KP 2)
$^o \bar{S}_{ij}$	Inkrement des Piola - Kirchhoff Spannungstensors 2. Art
$^t \tau_{ij}$	Cauchy Spannungstensor
$^t \varepsilon_{ij}$	Green - Lagrange Verzerrungstensor
$^o \varepsilon_{ij}$	Inkrement des Green - Lagrange Verzerrungstensors

${}^0_t x_{i,j}$	Deformationsgradient
δu_i	virtuelle Verschiebungen
${}^t\alpha(k), {}^t\beta(k)$	Winkelveränderungen der Schalennormalen (Bild 3.3.)
$M_c(m,n)$	Element der konsistenten Massenmatrix
M_i	dem Freiheitsgrad i zugeordnete Masse

Konstitutive Größen

E	Elastizitätsmodul
${}^0C_{i,j,k,l}$	inkrementeller konstitutiver Tensor
ν	Querdehnzahl

Arbeits- und Energieausdrücke

$\delta W_{(n)}, \delta W_{(n)}^{E1}$	virtuelle Arbeit der Träg- heitskräfte
$\delta W_{(i)}, \delta W_{(i)}^{E1}$	virtuelle Arbeit der verall- gemeinerten inneren Kräfte
$\delta W_{(e)}, \delta W_{(e)}^{E1}$	virtuelle äußere Arbeit
H	Hamilton-Funktion
T	kinetische Energie
U	potentielle Energie
$S^{(j)}$	Änderung der Energie der Ungleichgewichtskräfte

Sonstige Bezeichnungen

$\delta_{i,j}$	Kronecker Symbol
\det	Determinante
$\det J$	Determinante der Jacobimatrix
Re	Realteil
t	Zeit
Δt	Zeitinkrement
τ	Zeitkoordinate zwischen t und

	$t+\Delta t$
$\Delta(t)$	Unterschied zwischen gestörter und ungestörter Lösung
ω_1, ω_i	Eigenkreisfrequenz
Ω	Erregerkreisfrequenz
ε	Lehrsches Dämpfungsmaß
y_i	Normalkoordinate der Eigenform Φ_i
$\lambda_i, \bar{\lambda}_i$	Eigenwerte bei der Stabilitätsanalyse
α_i	Wichtungsfaktor für den Gaußpunkt i
$a_i, \alpha, \alpha_n, \alpha_p, \beta, \delta$	Parameter bei der Zeitintegration
ε, δ	Parameter bei der Stabilitätsanalyse

Matrizen und Spaltenvektoren

A	Systemmatrix
B	Operatormatrix \rightarrow Verbindung zwischen linearem Anteil der Verzerrungsinkremente und den inkrementellen Knotenverschiebungen
\hat{B}	Operatormatrix \rightarrow Verbindung zwischen inkrementellen Verschiebungsableitungen und inkrementellen Knotenverschiebungen
C	Matrix der Werkstoffkennwerte $C_{i,jk}$
D	Dämpfungsmatrix
$\mathbf{F}, \mathbf{F}^{el}$	Vektor der verallgemeinerten inneren Knotenkräfte F_i
f	verallgemeinerter Erregervektor
H	Hurwitz-Matrix

I	Einheitsmatrix
${}^t J$	Jacobimatrix
${}^t K$	Tangentensteifigkeitsmatrix
${}^t K_e, {}^t K_e^{EL}$	elastische Steifigkeitsmatrix
${}^t K_g, {}^t K_g^{EL}$	geometrische Steifigkeitsmatrix
${}^t K_u$	Anfangsverschiebungsmatrix
${}^t K^A$	effektive Gesamtsteifigkeitsmatrix
M_c, M_c^{EL}	konsistente Massenmatrix
M_i	zusammengefaßte Massenmatrix
$\bar{M}(k, l)$	Untermatrix der Elementmassenmatrix (verallgemeinerte Trägheitskräfte am Knoten k infolge von Einheitsbe- schleunigungen am Knoten l)
N	Matrix der Interpolationsfunktionen $N(k)$
${}^t R, {}^t R^{EL}$	Vektor der verallgemeinerten äußeren Knotenkräfte ${}^t R_i$
\tilde{R}	Vektor der effektiven verallgemei- nerten äußeren Knotenkräfte \tilde{R}_i
${}^t R^A$	Vektor der effektiven verallgemei- nerten Ungleichgewichtskräfte ${}^t R_i^A$
${}^t q$	Vektor der Volumenkräfte ${}^t q_i$
${}^t S$	Matrix der Kirchhoff-Piola Spannungen

2. Art ${}^tS_{1j}$

${}^t t$	Vektor der Oberflächenkräfte ${}^t t_i$
${}^t u(k), {}^t \dot{u}, {}^t \ddot{u}, {}^t \ddot{\ddot{u}}$	Vektor der Knotenverschiebungen ${}^t u_i(k)$ - Geschwindigkeiten ${}^t \dot{u}_i(k)$ - Beschleunigungen ${}^t \ddot{u}_i(k)$
$u(k), \dot{u}$	Inkrement der Knotenverschiebungen $u_i(k)$
Δu	Vektor der Änderung Δu_i der inkrementellen Knotenverschiebungen
${}^t x_i(k)$	Vektor der Knotenkoordinaten ${}^t x_i$
${}^t z, z, \Delta z$	Zustandsvektor
${}^t \dot{z}$	Zeitableitung des Zustandsvektors
O	Nullmatrix
Φ	Fundamentalmatrix, Matrix der Eigenvektoren Φ_i

Weitere Bezeichnungen werden im Text erläutert.

1. Einleitung, Zielsetzung

Physikalisch gesehen ist die mit instabilen Zuständen verbundene, häufig sprunghafte Änderung der Systemantwort sowohl vom Phänomen her, als auch in der Gesamtschau möglichen Systemverhaltens, höchst interessant. Bei realen Konstruktionen steht allerdings die von Instabilitäten ausgehende Gefährdung der Standsicherheit des Tragwerkes im Vordergrund. Hier muß das Ziel sein, solche Zustände unbedingt zu vermeiden.

Mit der Ausdehnung des Anwendungsbereiches der Tragstrukturen von Bauwerken in Bereiche extremer Belastungssituationen bzw. hoher Sicherheitsbedürfnisse stellt sich diese Aufgabe in zunehmendem Maße. Als Beispiele seien "off-shore" Bauwerke unter der Einwirkung von Wellen sowie Kernkraftwerke unter Erdbebenbeanspruchung genannt. Bereits anschaulich läßt sich nachvollziehen, daß derartige Belastungen nicht mehr als statisch angenähert werden können. Daraus folgt, daß in diesem Bereich - insbesondere bei der Untersuchung der Stabilität - der Zeitabhängigkeit von Last und Systemverhalten Rechnung getragen werden muß.

Das Ziel dieser Arbeit soll es daher sein, in Verbindung mit der finiten Elementmethode, möglichst allgemein gültige Verfahren für die Analyse der Stabilität von Tragwerken unter zeitabhängiger Belastung bereitzustellen. Zur sprachlichen Vereinfachung wird in diesem Zusammenhang auch der Begriff "dynamische Stabilität" verwendet.

Vor der Konkretisierung dieses Zieles soll ein Überblick über den Stand der Forschung gegeben werden. In diesem Zusammenhang sind Forschungstätigkeiten auf folgenden Gebieten relevant:

- Stabilitätstheorie, Kriterien
- Methode der finiten Elemente
- Zeitintegrationsverfahren
- Anwendungen

Die Literatur zur Stabilitätstheorie mechanischer Systeme, kann in drei Gruppen unterteilt werden. Neben Arbeiten zur Stabilität von gelagerten Systemen /31/, stehen solche, die sich mit beweglichen Strukturen beschäftigen /2/, /78/. Mehr allgemein gehaltene, theoretische Abhandlungen, werden einer dritten Gruppe zugeordnet.

Innerhalb der beiden erstgenannten Themenbereiche, findet sich zumeist eine am Phänomen orientierte Gliederung, typische Probleme sind z.B. Stabknicken, Schalenbeulen (1. Gruppe) bzw. Kreiselprobleme, Stabilität von Rotoren (2. Gruppe).

Die hier besonders interessierende Stabilität von im Ausgangszustand nicht kinematischen Systemen unter zeitabhängigen Lasten, die zukünftig als dynamische Stabilität von Tragwerken bezeichnet werden soll, nimmt eine Zwischenstellung ein und wird wohl deshalb in keiner der beiden genannten Gruppen behandelt. Auf die problemabhängige Behandlung des Themas wird auch die Tatsache zurückgeführt, daß der Frage, worauf sich die Stabilitätsaussage bezieht (Stabilität des Gleichgewichts, Stabilität der Bewegung), im Schrifttum nicht konsequent nachgegangen wird. Weiterhin ist festzustellen, daß die für die Stabilitätsuntersuchung zur Verfügung stehenden Methoden oft anhand kleiner Probleme entwickelt wurden und bei großen Systemen, u.a. aus Wirtschaftlichkeitsgründen, kaum anwendbar sind.

Hierin ist der Grund dafür zu sehen, daß für die Behandlung dynamischer Stabilitätsprobleme nur sehr aufwendige oder sehr grobe Verfahren zur Verfügung stehen. Wirtschaftliche und einfach handzuhabende, d.h. kontrollierbare Kriterien hoher Genauigkeit sind nicht bekannt.

Die hohe Entwicklungsstufe, die die Methode der finiten Elemente erreicht hat, zeigt sich nicht zuletzt an der weiten Verbreitung und dem breiten Anwendungsgebiet der Methode. In Verbindung mit direkter Zeitintegration stellt sie ein gebräuchliches Verfahren für die Lösung strukturdynamischer Probleme dar. Obwohl damit bereits dynamische Stabilitätsprobleme von Tragwerken erfolgreich gelöst wurden /67/, fehlen doch systematische Untersuchungen zu

der Frage, welche der verfügbaren Zeitintegrationsmethoden für derartige Probleme besonders geeignet sind.

Die aus der Literatur bekannte Diskussion über die Stabilität von Integrationsverfahren bei nichtlinearen Problemen basiert zwar auf den Erkenntnissen der Stabilitätstheorie, berücksichtigt aber nicht die besonderen Schwierigkeiten, die im Zusammenhang mit der Analyse stabilitätsgefährdeter Systeme auftreten.

Im Schrifttum finden sich für eine Reihe von Systemen Untersuchungen über die dynamische Stabilität unter verschiedenartigen Belastungen. Speziell bei der Kugelschale beschränken sich diese Analysen auf einfache Geometrien, bzw. einfache Lastfälle. Für die in der Praxis häufig vorkommenden Fälle wie stützenverstärkte Kugelschalen unter dynamisch wirkender Teilflächenlast liegen keine Ergebnisse vor. Hier wird immer noch mit sehr groben Näherungen gearbeitet.

Vor diesem Hintergrund läßt sich die oben pauschal formulierte Zielsetzung folgendermaßen konkretisieren:

1. Im Kapitel 2 werden die bei mechanischen Systemen wesentlichen Instabilitätsphänomene diskutiert. Damit sollen bestehende Gemeinsamkeiten aufgezeigt und die Einordnung der dynamischen Stabilität von Tragwerken vorgenommen werden. Darüber hinaus sollen Möglichkeiten aufgezeigt werden, die verschiedenartigen Stabilitätsprobleme zu klassifizieren.
2. Im Rahmen der Verfahren zur Behandlung dynamischer Stabilitätsprobleme wird, wegen der angestrebten Allgemeingültigkeit die erste Ljapunovsche Methode bevorzugt. Damit kann die Analyse geeigneter Verfahren auf reine Zeitverlaufsberechnungen (Abschnitt 3.3), sowie auf Zeitverlaufsberechnungen mit begleitenden Maßnahmen (Abschnitt 3.4) beschränkt werden.
Die Frage nach besonders günstigen Methoden für die

dynamische Stabilitätsanalyse ist eng verbunden mit der Frage nach geeigneten Zeitintegrationsverfahren. Deshalb sollen erfolgversprechende Integrationsmethoden ausgewählt und anhand von geeigneten Beispielen unter den Aspekten Effizienz und Genauigkeit diskutiert werden. Weiterhin soll auf das Problem der Stabilität der Verfahren bei Instabilität des mechanischen Systems besonders eingegangen werden. Schließlich sollen Empfehlungen für die Wahl des Zeitinkrementses sowie der einzusetzenden Iterationsalgorithmen, gegebenenfalls in Verbindung mit Maßnahmen zur Konvergenzbeschleunigung, erarbeitet werden.

Als Grundlage für die Zeitintegrationsverfahren sollen im Abschnitt 3.2 die im Rahmen der finiten Elementmethode diskretisierten Bewegungsgleichungen abgeleitet werden. Hierbei wird auf die Unterschiede abgehoben, die sich bei der Herleitung für implizite und explizite Methoden ergeben. Sie beziehen sich u.a. darauf, an welcher Stelle die Orts- bzw. Zeitdiskretisierung einzuführen ist. Ein weiteres Anliegen des Kapitels 3 ist die Darstellung der Trägheitskräfte. Die aus der Literatur nicht verfügbaren Massenmatrizen für isoparametrische, degenerierte Elemente werden unabhängig vom Verschiebungsansatz abgeleitet.

Auf dieser Grundlage sollen im Abschnitt 3.4 Methoden entwickelt bzw. den bestehenden gegenübergestellt werden, die eine direkte Bestimmung der dynamischen Stabilitätsgrenze gestatten. In diesem Zusammenhang wird auch gezeigt, wie das Eigenwertproblem für die Kreisfrequenzen aus dem Eigenwertproblem der Systemmatrix gewonnen werden kann. Damit wird das "kinetische Stabilitätskriterium" (Ziegler /131/) auf das allgemeinere, mit Hilfe der Eigenwerte der Systemmatrix formulierte Kriterium zurückgeführt. Dabei wird generell angenommen, daß die mit Hilfe des diskreten Rechenmodells gewonnene Aussage bezüglich der Stabilität auch für das zugrundeliegende kontinuierliche System gelten.

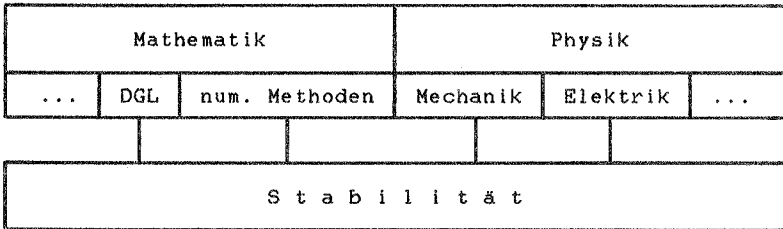
3. Der dynamischen Stabilität von Kugelschalen unter lokaler Belastung mit unterschiedlichem Zeitverlauf ist das Kapitel 4 gewidmet. Neben unverstärkten sollen auch stützenverstärkte Schalen untersucht werden. Die in diesem Zusammenhang notwendigen Berechnungen wurden am Rechenzentrum der Universität Stuttgart mit dem im Rahmen dieser Arbeit um den Dynamikteil erweiterten finiten Elementprogramm NISA 80 durchgeführt. Das Programm eignet sich in dieser Version zur Analyse geometrisch und materiell nichtlinearer Strukturen unter statischer und dynamischer Belastung.

2. Statische und dynamische Stabilität

2.1 Allgemeines

Der Problemkreis Stabilität bzw. Instabilität spielt in vielen Disziplinen der Ingenieur- bzw. Naturwissenschaften eine besondere Rolle. Eine Übersicht ist, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, in Tafel 2.1 zusammengestellt.

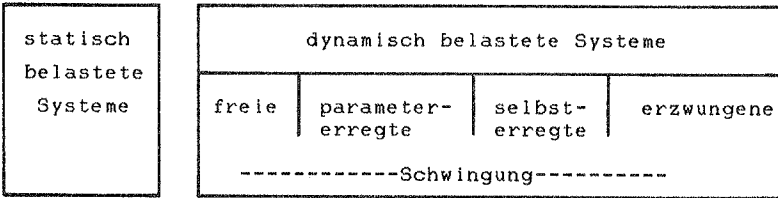
Tafel 2.1



In diesem Kapitel sollen die mit Instabilitäten mechanischer Systeme verbundenen Phänomene besprochen und eine Einordnung der Stabilität dynamisch beanspruchter Tragwerke vorgenommen werden. Nach einem Abschnitt zur Stabilitätsdefinition von Ljapunov (Abschnitt 2.2.) wird auf die Möglichkeiten zur Klassifizierung von Stabilitätsproblemen eingegangen (Abschnitt 2.3). Im Anschluß daran folgt eine exemplarische Zusammenstellung der unterschiedlichen Stabilitätsprobleme.

Der Übersichtlichkeit halber wird hierbei eine Gliederung entsprechend der Zeitabhängigkeit der Belastung eingeführt. Nach der Behandlung statisch belasteter Systeme (s. Abschnitt 2.4), wird im Abschnitt 2.5 auf dynamisch belastete Systeme eingegangen. Hierbei wird wie in Tafel 2.2 dargestellt eine Unterteilung hinsichtlich der Anregung vorgenommen.

Tafel 2.2



2.2 Stabilitätsbegriff nach Ljapunov

Beginnend bei Archimedes bzw. Aristoteles existierten über längere Zeit hinweg mehrere Stabilitätsdefinitionen gleichzeitig /78/, /117/. Sie waren in der Regel auf spezielle physikalische Probleme zugeschnitten. Als Beispiel sei die Stabilitätsdefinition von Lagrange-Dirichlet genannt, die trotz mangelnder Allgemeingültigkeit bei statisch und dynamisch (s. Abschnitt 3.4.1) belasteten, konservativen Systemen Verwendung findet.

Erst auf der Grundlage der 1892 von Ljapunov vorgelegten Stabilitätsdefinition konnte Allgemeingültigkeit erreicht werden. Die daraufhin einsetzende Weiterentwicklung der Methode hat inzwischen einen hohen Stand erreicht /122/ und ist auch heute noch nicht abgeschlossen /81/.

Unter Hinweis auf die mathematischen Voraussetzungen (s. z.B. /42/) kann nach Ljapunov Stabilität folgendermaßen definiert werden:

Die Lösung der homogenen, linearen Differentialgleichung

$$\dot{u} = f(u, t)$$

ist $u = f(u(0), t)$ mit $u(0) = u$ zur Zeit $t=0$.

Eine spezielle Lösung sei

$$u = f(a, t)$$

Sie ist stabil, wenn zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ gefunden werden kann, so daß für

$$|u(0) - a| < \delta(\varepsilon)$$

für alle $t > 0$ gilt:

$$|u(u(0), t) - u(a, t)| < \varepsilon$$

Gilt zusätzlich:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |u(u(0), t) - u(a, t)| = 0$$

so liegt asymptotische Stabilität vor.

Im eindimensionalen Fall kann dies wie folgt veranschaulicht werden (Bild 2.1).

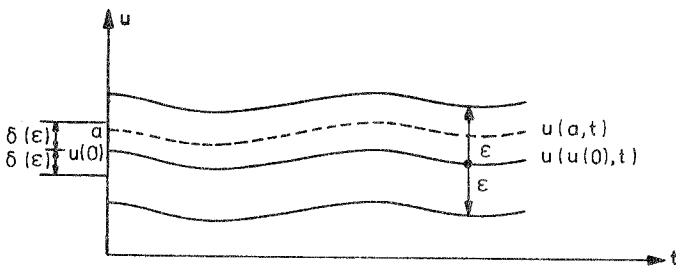


Bild 2.1: Ljapunovsche Stabilität am System mit 10F

Anschaulich formuliert liegt Stabilität also genau dann vor, wenn geringe Störungen der Anfangsbedingungen nur beliebig kleine Unterschiede zwischen gestörter und ungestörter Lösung bewirken.

Wenn im folgenden bevorzugt anschauliche Formulierungen verwendet werden, so geschieht dies aus Gründen der sprachlichen Vereinfachung und stets im Sinne der obigen mathematischen Formulierung.

Die von Ljapunov eingeführte Beschränkung der Störungen auf die Anfangsbedingungen wurde später u.a. von Duboschin (1940) aufgehoben (s. z.B. /78/, /122/). Aufgrund dieser Verallgemeinerung sind nun beliebige Störungen aller das Systemverhalten beeinflussenden Parameter zugelassen. Als Beispiele seien hier Anfangsbedingungen, Systemkenngrößen sowie äußere Belastungen genannt.

Die von Duboschin /82/ geschaffene Möglichkeit, beliebige Störungen zu verwenden, hat die weitreichende Konsequenz, daß nunmehr mit Hilfe der oben angegebenen Definition, beliebige Probleme behandelt werden können. Dies ist insbesondere im Hinblick auf Systeme wichtig, deren Stabilität nicht von den Anfangsbedingungen sondern von der Belastung abhängt.

Da im Sinne obiger Definitionen z.B. bei der durch Innendruck belasteten Kugelschale mit ideal elastisch-ideal plastischem Werkstoffverhalten instabile Gleichgewichtszustände aufgrund eines ausgeprägten Fließplateaus möglich sind, soll, um bei der herkömmlichen Trennung in Spannungs- und Stabilitätsprobleme zu bleiben, in diesem Kapitel Hookesches Werkstoffverhalten vorausgesetzt werden.

2.3 Möglichkeiten zur Unterscheidung von Stabilitätsfällen

Zunächst sei darauf hingewiesen, daß in der theoretisch ausgerichteten Literatur der Begriff Stabilität nur in Verbindung mit homogenen Problemen gebraucht wird, im inhomogenen Fall wird von Beschränktheit gesprochen /88/. Demgegenüber taucht im Zusammenhang mit Tragkonstruktionen, die durch inhomogene Beziehungen beschrieben werden, nur der Begriff Stabilität auf. Im folgenden soll diese begriffliche Trennung fallengelassen werden und nur von Stabilität gesprochen werden.

Zur Klassifizierung der bei mechanischen Systemen auftretenden Stabilitätsprobleme können einerseits die das Systemverhalten beschreibenden Gleichungen herangezogen werden. Man gelangt so zu den sogenannten Stabilitätsfällen: Stabilität des Gleichgewichts, Stabilität der Bewegung. Dabei werden alle diejenigen Probleme, die durch Beziehungen beschrieben werden, die Zeitableitungen beinhalten, unter Stabilität der Bewegung eingeordnet; bei Systemen, in deren Gleichungen Zeitableitungen nicht vorkommen, wird von Stabilität des Gleichgewichts gesprochen.

Andererseits kann zur Klassifizierung auch die verallgemeinerte Stabilitätsdefinition von Ljapunov herangezogen werden; eine schematische Darstellung hierzu ist in Bild 2.2 angegeben.

Das zu untersuchende System befindet sich zum Zeitpunkt $t=t_1$ im Ausgangszustand A_0 , hierbei kann es sich um eine Gleichgewichtslage oder um eine Bewegung handeln. A_0 wird als Ausgangszustand bezeichnet, er geht ohne die Einwirkung von Störungen für $t > t_1$ in den ungestörten Zustand A_{12} über.

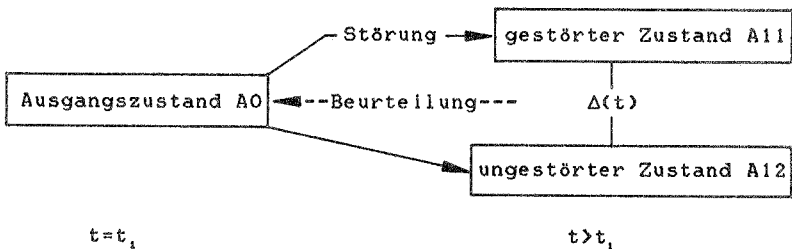


Bild 2.2: Schema zur Stabilitätsuntersuchung

Sofern auf den Ausgangszustand eine Störung einwirkt, befindet sich das System für $t > t_1$ in einem gestörten Zustand A_{11} , der sich von A_{12} unterscheidet. Die Größe des Unterschiedes

$$\Delta(t) = |u(u(0), t) - u(a, t)|$$

ist im Sinne der Stabilitätsdefinition von Ljapunov - in Abhängigkeit von der aufgebrachten Störung - entscheidend dafür, ob A_{12} stabil oder instabil ist.

Solange keine zusätzlichen Forderungen gestellt werden, führen die Klassifizierungen auf der Basis der Systemgleichungen und ausgehend von dem Schema in Bild 2.2 auf dasselbe Ergebnis. Wenn aber gefordert wird, daß

1. der Ausgangszustand
2. die Störungen und
3. das Instabilität anzeigende Phänomen

durch dieselben sogenannten charakteristischen Freiheitsgrade beschrieben werden, so gelangt man teilweise zu Klassifizierungen, die sich von denen, die auf der Basis der Systemgleichungen vorgenommen wurden, unterscheiden. Die charakteristischen Freiheitsgrade stellen einen Teil der insgesamt vorhandenen Freiheitsgrade eines Systems dar.

Auf die Klassifizierung, die sich aufgrund obiger Vereinbarungen 1. bis 3. ergeben, soll bei den folgenden Beispielen hingewiesen werden. Sie wird zur Vereinfachung als "alternative Klassifizierung" bezeichnet.

2.4. Statisch belastete Systeme

Zur Analyse der Stabilität statisch belasteter Systeme stehen aus der Literatur eine Reihe von Kriterien zur Verfügung. Eine Zusammenstellung, die auf Bufler zurückgeht, findet sich in /28/; hier sind auch Klassifizierungen der vorkommenden kritischen Punkte (symmetrisches, unsymmetrisches Verzweigen etc.) angegeben.

Besonders erwähnt werden soll in diesem Zusammenhang nur das von Ziegler /131/ eingeführte kinetische Stabilitätskriterium, das auch bei nichtkonservativen Problemen erfolgreich angewendet werden kann. Hierin ist der Grund zu sehen, daß letztere teilweise der dynamischen Stabilität

zugeordnet werden /111/. Wegen der bei nichtkonservativen Systemen möglichen Instabilitätserscheinungen sei z.B. auf /109/ verwiesen.

Im folgenden sollen die im Abschnitt 2.3 angegebenen Punkte zur Beurteilung des Stabilitätsfalles auf den axial, richtungstreu belasteten Stab angewendet werden. Das Beispiel ist trivial, es dient hier zur Veranschaulichung der Vorgehensweise sowie zur Präzisierung einiger Begriffe.

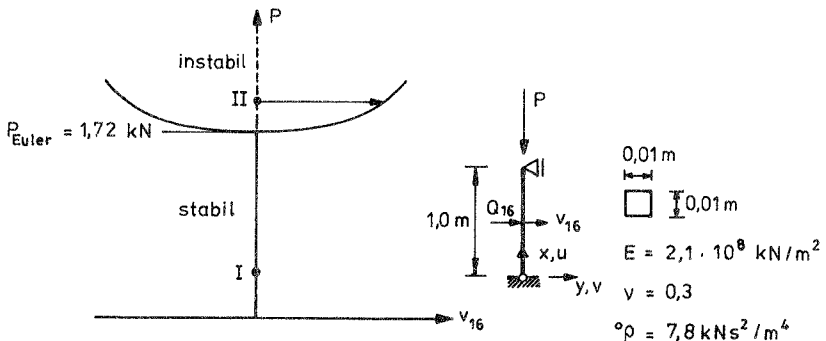


Bild 2.3: Verzweigungsproblem unter statischer Last

Der perfekte Stab, wird gemäß Bild 2.3 zunächst bis zum Punkt I belastet. Die hier erreichte Gleichgewichtslage, die durch $v(16)=v_{16}=0$ gekennzeichnet ist, stellt für die Stabilitätsanalyse den Ausgangszustand A0 dar. Als Störung wird in Stabmitte eine Zusatzlast mit dreiecksförmigem Zeitverlauf aufgebracht, die in Richtung des signifikanten Freiheitsgrades $v(16)$ wirkt.

Im Bild 2.4 sind die ungestörte Lösung A12 und die aus der Störung resultierenden Zustände A11 über der Zeit aufgetragen. Hieraus ergibt sich Stabilität des Zustandes I. Da A0 eine Gleichgewichtslage darstellt, die Störung in $v(16)$ aufgebracht und $\Delta(t)$ in $v(16)$ gemessen wurde, liegt auch nach der alternativen Klassifizierung (s. Abschnitt 2.3) Stabilität einer Gleichgewichtslage vor.

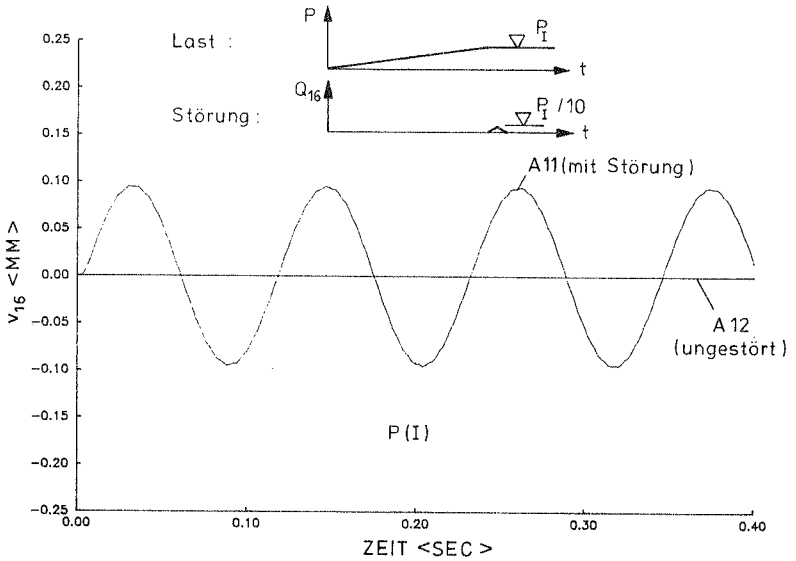


Bild 2.4: Gestörte und ungestörte Lösung im Punkt I

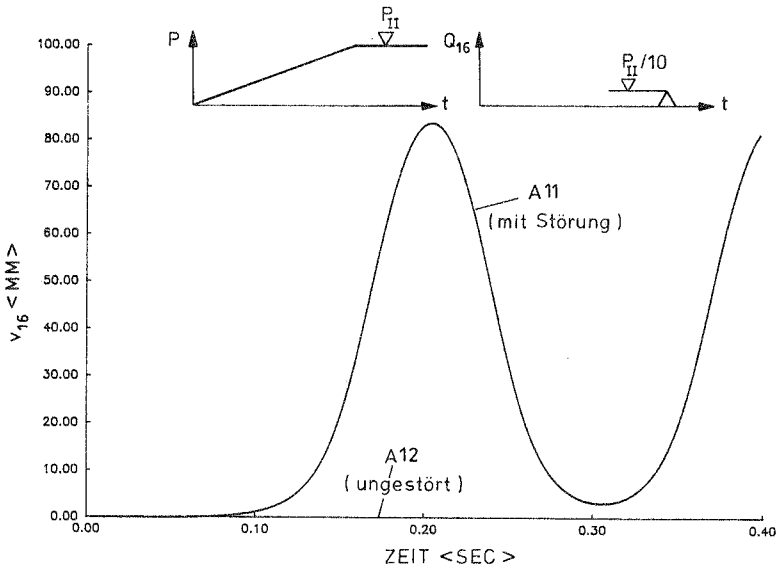


Bild 2.5: Gestörte und ungestörte Lösung im Punkt II

Wird die Last bis zum Punkt II gesteigert und wieder eine Störung in $v(16)$ aufgebracht, so ergeben sich die in Bild

2.5 dargestellten Zustände A11 und A12. Die Tatsache, daß $\Delta(t)$ nun nicht mehr durch die Größe der aufgebrachtten Störung beeinflussbar ist, zeigt die Instabilität der Gleichgewichtslage II an.

Das Systemverhalten unter dieser Last, das als Ausknicken bezeichnet wird, ist durch den Übergang des Systems von der instabilen zu einer stabilen Gleichgewichtslage gekennzeichnet. Dieser Vorgang läuft prinzipiell gleichartig bei Problemen ab, die üblicherweise als Kippen, Beulen etc. bezeichnet werden, und ist insofern charakteristisch für das Verhalten statisch belasteter Systeme.

Die dargestellte, ausführliche Stabilitätsuntersuchung ist insbesondere bei einfachen Systemen nicht erforderlich. Hier führen in der Regel einfache Kriterien zum Ziel. Eine Übersicht, über die in diesem Zusammenhang möglichen Näherungsstufen findet sich z.B. bei Ramm /101/.

Komplizierte, evtl. imperfekte Strukturen unter entsprechenden Lasten erfordern normalerweise eine komplette nichtlineare Analyse. Mit der Methode der finiten Elemente steht hierfür ein geeignetes Werkzeug zur Verfügung. Die in diesem Zusammenhang erforderlichen Formulierungen, Elemente, Iterationsverfahren etc. wurden von Brendel /28/ ausführlich dargestellt und sollen hier nicht weiter erörtert werden.

2.5 Zeitabhängige Systeme

Unter der Zielsetzung, eine Übersicht über die wesentlichen Stabilitätsprobleme mechanischer Systeme zu geben, werden aus den einzelnen Bereichen besonders typische Beispiele ausgewählt.

Alle in diesem Abschnitt erörterten Probleme lassen sich aufgrund ihrer Zeitabhängigkeit der Stabilität einer Bewegung zuordnen. Im folgenden soll daher nur auf die alternative Klassifizierung nach Abschnitt 2.3 eingegangen werden.

In Tafel 2.3 sind konkrete Anwendungsgebiete den entsprechend Tafel 2.2 unterteilten Problemklassen zugeordnet. Während zu den parametererregten - sowie zu den erzwungenen Schwingungen ein umfangreiches Schrifttum existiert, sind die Untersuchungen selbsterregter Schwingungen auf einige spezielle Strukturen begrenzt.

Tafel 2.3

dynamisch belastete Systeme			
freie	parametererregte	selbsterregte	erzwungene
-----Schwingung-----			
Maschinen- teile /88/	Stab- Flächen- tragwerke /27/, /57/	Hängebrücken Seile Tragflügel /41/, /121/	Stab- Flächen- tragwerke /58/, /70/

Eine Gesamtschau unter dem genannten Aspekt ist aus der Literatur nicht bekannt, selbst allgemein gehaltene Werke /49/, /92/ umfassen in der Regel nur einen Teil der genannten Probleme.

2.5.1 Freie Schwingungen

In diesem Abschnitt werden Systeme behandelt, die durch homogene, lineare oder nichtlineare Differentialgleichungen beschrieben werden und nicht den folgenden Abschnitten zuzuordnen sind.

Zunächst sei das in Bild 2.6 dargestellte Stangenpendel betrachtet.



Bild 2.6: Stangenpendel

Das Pendel besitzt die Ruhelagen I und II. Seine Bewegung wird durch den Freiheitsgrad w beschrieben, der damit gleich dem signifikanten Freiheitsgrad ist. Zur Stabilitätsuntersuchung der Lage I, wird gemäß 2.3 eine Störung in w aufgebracht, die daraus resultierende Schwingung um I stellt die gestörte Lösung (A11) dar. Da die Amplitude der Schwingung durch entsprechende Störungen beliebig klein gehalten werden kann, ist die Ruhelage I stabil; für Lage II ist diese Bedingung nicht zu erfüllen, sie ist instabil. Bei der Stabilitätsanalyse beider Lagen (Ausgangszustand A_0) wurden die Punkte 2. und 3. nach Abschnitt 2.3. erfüllt, deshalb muß nach der alternativen Klassifizierung von Stabilität, bzw. Instabilität einer Ruhelage gesprochen werden.

2.5.2 Parametererregte Schwingungen

Parametererregte Schwingungen wurden gemäß /55/ bereits 1924 von Beliaev sowie später u.a. von Mettler /87/ und Bolotin /27/ behandelt. Eine sehr detaillierte Litera-

turübersicht zu diesem Thema findet sich in /92/.

Die Bezeichnung parametererregte Schwingungen, rührt von frühen Arbeiten her, in denen nur einfache Systeme behandelt wurden, die durch homogene Differentialgleichungen beschreibbar sind. Die "Anregung" resultiert dabei aus meist schnell veränderlichen periodischen Koeffizienten /92/.

Mit der Analyse von gelagerten Systemen mit mehreren Freiheitsgraden unter äußerer Belastung wurden weitere mögliche Anregungsmechanismen erkannt. Die in diesem Zusammenhang interessanten inneren Resonanzen und Kombinationsresonanzen werden durch Schwingungen in bestimmten Eigenformen angeregt. Als Beispiel für "innere parametrische Resonanz" seien die durch symmetrische Eigenformen angeregten unsymmetrischen Eigenformen einer Zylinderschale unter gleichmäßigem Außendruck angeführt /57/.

Die genannten Phänomene setzen ganzzahlige Verhältnisse der Perioden des Systems voraus. Für innere Parametererregung gilt mit der Erregerfrequenz Ω , den Eigenkreisfrequenzen ω_i und den ganzen Zahlen a_i :

$$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \dots + a_n\omega_n = 0$$

Kombinationsresonanzen sind möglich, wenn gilt:

$$a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + \dots + a_n\omega_n = \Omega$$

Eine ausführliche Darstellung dieser Thematik sowie der bei gedämpften Systemen möglichen Grenzzyklen findet sich in /92/, /108/.

Aufgrund dieser Überlegungen sind parametererregte Schwingungen gelagerter Systeme dadurch gekennzeichnet, daß sie nicht direkt durch äußere Einwirkungen angeregt werden. Der Umstand, daß das Auftreten parametrischer Resonanzen an das Vorhandensein von Störungen gebunden ist, kennzeichnet sie als Stabilitätsprobleme und unterscheidet sie von gewöhnlichen Resonanzen.

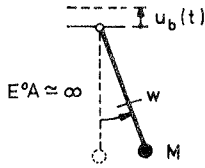


Bild 2.7: Rüttelpendel

Zunächst wird das einfache Stangenpendel (Bild 2.7) mit periodisch vertikal bewegtem Aufhängepunkt betrachtet. Das Problem wird durch die Mathiesche Differentialgleichung:

$$\ddot{w} + \omega^2(1 + \varepsilon \cos \Omega t)w = 0$$

beschrieben, wobei ω die Eigenkreisfrequenz der Pendelschwingung darstellt. Der Term $\varepsilon \cos \Omega t$ ($\varepsilon \ll 1$) beinhaltet die Vertikalbewegung des Aufhängepunktes. Die Stabilitätsbereiche dieser Beziehung, können direkt aus der Stabilitätskarte (Bild 2.8) abgelesen werden. Sie ordnet den auf ω bezogenen Erregerfrequenzen Ω - in Abhängigkeit von ε - stabile bzw. instabile Lösungen zu, die einzelnen Bereiche werden durch periodische Lösungen getrennt. Diese Zusammenhänge sind in der Literatur ausführlich beschrieben /49/ und sollen hier nicht weiter erörtert werden.

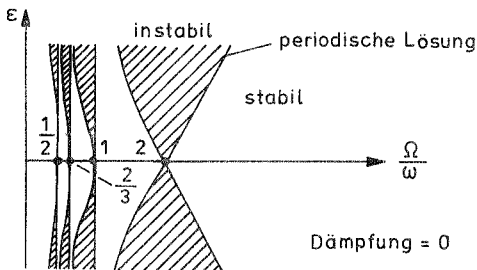


Bild 2.8: Stabilitätskarte nach /49/

Zur alternativen Klassifizierung des vorliegenden Stabili-

tätsfalles, soll kurz das Phänomen beschrieben werden: Das Pendel führe die geschilderte Vertikalbewegung aus, die Parameter seien so, daß Instabilität möglich ist. Sie wird sich am Systemverhalten solange nicht bemerkbar machen, solange $w=0$ gilt. Erst bei Vorhandensein einer Störung ($w \neq 0$) tritt parametrische Resonanz auf, sie ist hier durch wachsende Pendelausschläge gekennzeichnet.

Aus dieser Schilderung geht mit w als signifikantem Freiheitsgrad bereits hervor, daß hier Stabilität bzw. Instabilität der Gleichgewichtslage $w=0$ (Ausgangszustand: $w=0$) vorliegt.

Ein weiteres, klassisches Beispiel stellt der in Bild 2.9 skizzierte Stab unter pulsierender Axiallast dar, der insbesondere in /87/, /27/ behandelt wurde. Bolotin /27/ spricht in diesem Zusammenhang von "kinetischer Instabilität".

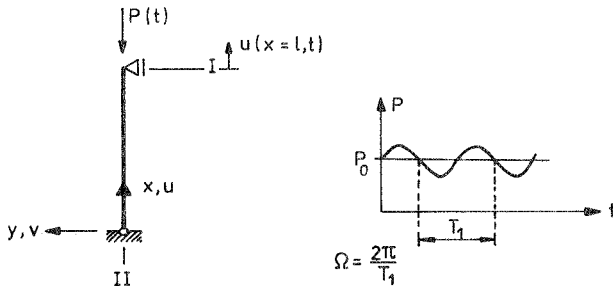


Bild 2.9: Stab unter pulsierender Axiallast

Hier soll gezeigt werden, wie die im Abschnitt 2.3 zur alternativen Klassifizierung angegebenen Regeln verwendet werden können, um im Detail festzulegen in welchem Zustand Instabilität auftritt. Speziell bei dem Stab kommen als Ausgangszustand die Vertikalschwingung um Lage I sowie die Ruhelage II $v(x)=0$ in Betracht.

Aufgrund der vorangegangenen Beispiele ist nun leicht zu sehen, daß nur Stabilität der Lage II in Frage kommt. Begründet wird dies dadurch, daß die sich als Biege-

schwingung äüßernde parametrische Resonanz durch v beschrieben werden kann und eine Störung in v voraussetzt. Der Ausgangszustand ist hier also durch $v(x)=0$ gegeben.

2.5.3 Selbsterregte Schwingungen

Selbsterregte Schwingungen spielen bei schlanken Konstruktionen des Bauwesens sowie im Flugzeugbau eine bedeutende Rolle. Sie sind dadurch gekennzeichnet, daß die Energiezufuhr vom umgebenden Medium in die Konstruktion durch das System selbst gesteuert wird. Wie bei den parametererregten Schwingungen kann dieser Prozeß nur durch eine Störung in Gang kommen, was ihn als Stabilitätsproblem kennzeichnet.

Trotz gewisser Parallelen zu parametrischen Resonanzen besteht die phänomenologische Trennung zu Recht. Die bei selbsterregten Schwingungen wirkenden Kräfte werden durch die aus einer Störung resultierende Bewegung gesteuert, was zu konstanten Koeffizienten der Differentialgleichung führt, während parametrischen Resonanzen durch veränderliche Koeffizienten oder durch geeignete Verhältnisse zwischen den Eigenfrequenzen des Systems gekennzeichnet sind.

Auf die Problematik stabiler bzw. instabiler Grenzyklen, die bei selbsterregten Schwingungen ebenfalls möglich sind, sei nur hingewiesen; Details hierzu finden sich z.B. in /42/, /49/.

Da der Bezug zur Stabilitätstheorie in der Bauingenieur-literatur kaum hergestellt wird, soll neben der Klassifizierung auch eine entsprechende Beschreibung des Phänomens gegeben werden. Aufgrund seiner Einfachheit, wird dazu der in Bild 2.10 dargestellte, stark vereinfachte Tragflügel betrachtet.

Der parallel angeströmte, starre Flügel befinde sich unter der Auftriebskraft A in seiner statischen Gleichgewichtslage ($u(t)=0$). Da die Stabilitätsuntersuchung bei diesem einfachen Beispiel nur nach Vertikalschwingungen fragt, liegt der signifikante Freiheitsgrad ($u(t)$) und damit der

Ausgangszustand A_0 ($u(t)=0$) fest. Da als Störung $u \neq 0$ zugelassen ist, muß das Problem nach der alternativen Klassifizierung der Stabilität einer Gleichgewichtslage zugeordnet werden.

Von Stabilität der Vertikalschwingung kann in diesem Zusammenhang nicht gesprochen werden, da diese Bewegung eine Störung voraussetzt und somit als Ausgangszustand nicht in Frage kommt.

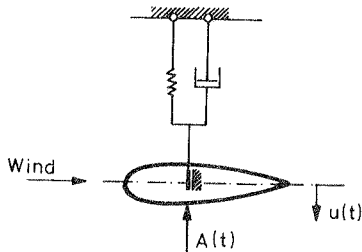


Bild 2.10: Flügelsegment nach /44/

In der Realität, treten Störungen in Form von Turbulenzen oder Böen auf. Die daraus resultierende Bewegung wird durch

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega\dot{u} + \omega^2 u = A(u(t))$$

beschrieben, wobei $A(t)$ verschiebungsabhängig ist. Bei Stabilität des Gleichgewichtszustandes kehrt das gedämpfte System in diesen zurück, bei Instabilität, die oberhalb einer kritischen Windgeschwindigkeit auftritt, wird eine selbsterregte Vertikalschwingung angefacht. Sie wird als Flattern bezeichnet, womit ähnlich den vorhergegangenen Beispielen das Instabilität anzeigende Phänomen beschrieben wird.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß neben den geschilderten Schlagschwingungen auch Drehschwingungen vorkommen, man spricht in diesem Zusammenhang auch von Torsionsdivergenz /44/. Aufgrund von aerodynamischer Dämpfung sind die beiden letztgenannten nicht so gefährlich wie Biegetorsionsschwingungen, die weniger gedämpft sind

und deshalb schneller zum Bruch führen. Weiterhin sei angemerkt, daß in einfachen Fällen auch eine quasi statische Betrachtungsweise möglich ist. Ähnlich dem Eulerstab liefert sie nur die kritische Windgeschwindigkeit, das nachkritische Verhalten erfordert eine nichtlineare Theorie /26/.

Selbsterregte Schwingungen an Tragwerken des Bauwesens sind, entsprechend der beim Tragflügel gezeigten Vorgehensweise, ebenfalls der Stabilität einer Gleichgewichtslage zuzuweisen. Im folgenden sollen die bei diesen Strukturen wesentlichen Phänomene in Bezug zur Stabilitätsuntersuchung gemäß Bild 2.2. gesetzt werden.

Mit Abreißflattern wird ein Instabilitätsphänomen gekennzeichnet, das beispielsweise bei Hängebrücken auftritt und zum Einsturz der Takomabrücke führte. Störungen stellen dabei Strömungsabriss und Wirbelbildung dar.

Die von eisbehafteten Freileitungssseilen her bekannte Galloping-Instabilität resultiert aus der Querschnittsform. Infolge der aus einer Störung der Gleichgewichtslage resultierenden Bewegung wird der Querschnitt schräg angeströmt, wodurch bei entsprechender Gestalt Quertriebskräfte entstehen, die die Bewegung weiter anregen /105/. Da hier offenbar die Querschnittsgestalt über Stabilität oder Instabilität entscheidet, wird oft auch von stabilen bzw. instabilen Querschnitten gesprochen, was im Sinne obiger Überlegungen (s. Abschnitt 2.3) falsch ist.

2.5.4 Erzwungene Schwingungen

Tragwerke des Bauwesens, oder allgemeiner nichtkinematische Systeme, führen unter zeitabhängiger Belastung erzwungene Schwingungen aus. In diesem Abschnitt werden die in diesem Zusammenhang möglichen Stabilitätsprobleme untersucht. Zur Unterscheidung von verwandten Problemen, die bei statischen Lasten möglich sind, wird hierfür der Begriff dynamische Stabilität von Tragwerken verwendet. Dementsprechend werden kritische Lasten als dynamische Beul- bzw. dynamische

Verzweigungslast bezeichnet. Zur Begriffsbildung sei weiterhin angemerkt, daß in Analogie zu statisch belasteten Strukturen von Stabilität und nicht von Beschränktheit gesprochen wird. Dies wird trotz der Inhomogenität der Probleme dadurch begründet, daß bei freien Schwingungen dieser Systeme keine Stabilitätsprobleme auftreten. Im folgenden soll eine stabilitätstheoretische Beschreibung der beobachtbaren Phänomene gegeben und auf die alternative Klassifizierung nach Abschnitt 2.3 eingegangen werden.

2.5.4.1 Durchschlagen unter dynamischer Belastung

Zur Veranschaulichung der oben genannten Zusammenhänge eignet sich besonders gut der in Bild 2.11 dargestellte symmetrische Zweibock. Das System besitze als einzigen Freiheitsgrad die Vertikalverschiebung des mittleren Knotens, ein Ausknicken der Einzelstäbe sei ausgeschlossen.

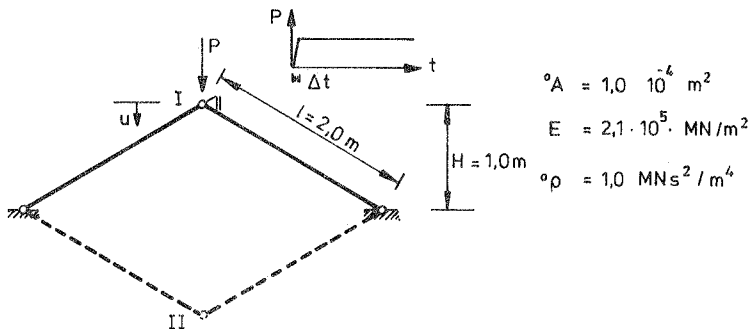


Bild 2.11: Zweibock

Zu Vergleichszwecken sind in Bild 2.12 die sich bei statischer Belastung mit Last- bzw. Verschiebungskontrolle ergebenden Lastverschiebungskurven dargestellt: Mit Erreichen der Last P_1 wird die obere Gleichgewichtslage instabil, das System schlägt in die untere, stabile Gleichgewichtslage II durch.

Zu der lastkontrollierten Lösung ist anzumerken, daß sie

mittels einer dynamischen Untersuchung gewonnen wurde. Die "statische" Belastung wurde durch eine linear ansteigende Last-Zeit-Funktion dargestellt, bei einer geringeren Belastungsgeschwindigkeit als der hier untersuchten verschwinden die Schwingungen in den vorkritischen Zuständen (Bild 2.12), die Durchschlagslasten unter Last- und Verschiebungskontrolle stimmen dann exakt überein.

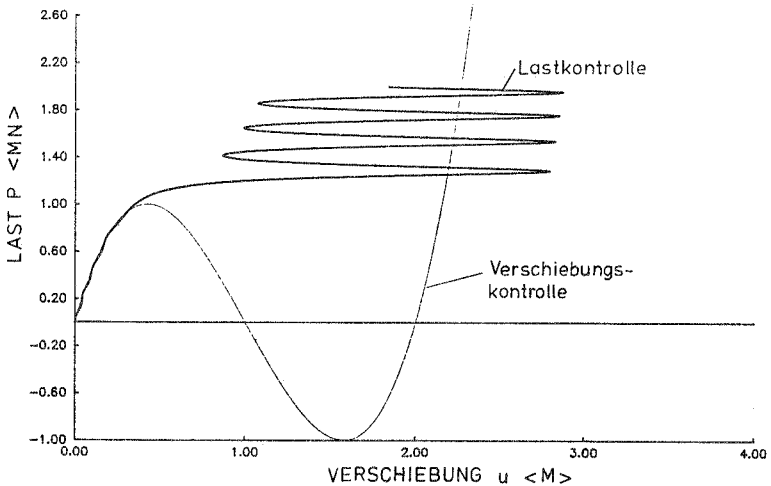


Bild 2.12: Lastverschiebungskurven unter statischer Last

Wird die Belastung nun schlagartig aufgebracht und anschließend konstant gehalten (Stufenlast), so sollte sich das System, da es nur einen Freiheitsgrad besitzt, ähnlich verhalten. Die Höhe der kritischen Last ist nun allerdings nicht mehr analytisch zu bestimmen. Üblicherweise wird zu ihrer Ermittlung so vorgegangen, daß die Last schrittweise erhöht und die sich daraus ergebenden Verschiebungszeitverläufe berechnet werden. Das Durchschlagen in die untere Gleichgewichtslage ist hieran als plötzliche Änderung des Systemverhaltens ablesbar und zeigt das Erreichen der dynamischen Durchschlagslast an. Dieses anschauliche Kriterium wurde von Budiansky, Roth /30/ eingeführt. Für das Beispiel ergibt sich die dynamische Durchschlagslast nach Bild 2.13 zu $P=0,77$ MN und liegt

damit deutlich unter der statischen von $P=1,0$ MN.

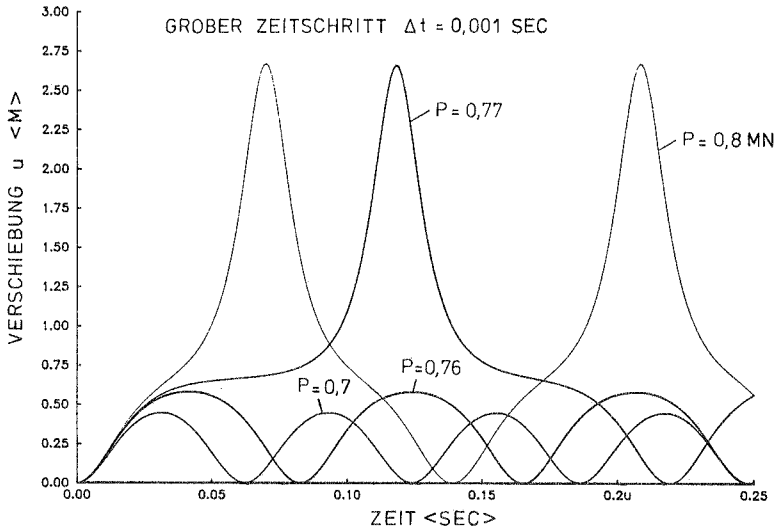


Bild 2.13: Dynamische Durchschlagslast

Es stellt sich hier die Frage, wie das geschilderte praktische Vorgehen stabilitätstheoretisch zu begründen ist.

Der nach Ljapunov (vergl. Bild 2.2.) erforderliche Vergleich zwischen gestörter und ungestörter Lösung ist in Bild 2.14 dargestellt. Für die Integration der Bewegungsgleichung nach Newmark ($\beta=1/4$, $\delta=1/2$) wurde der Zeitschritt so klein gewählt, daß die Lösung frei von Einflüsse aus der Zeitintegration ist; vom Störungscharakter der Numerik soll erst später die Rede sein (Bild 2.15).

Zur Stabilitätsuntersuchung der Lösung für $P=0,77$ MN werden nun zwei unterschiedliche Störungen verwendet: Neben einer impulsförmigen Störlast, dargestellt durch eine kurzzeitige Lasterhöhung auf $P=0,771$, wird eine dauernd wirkende Störlast von $\Delta P=0,0005$ MN betrachtet. Die daraus resultierenden Verschiebungszeitverläufe zeigen die Instabilität der ungestörten Lösung an (Bild 2.14).

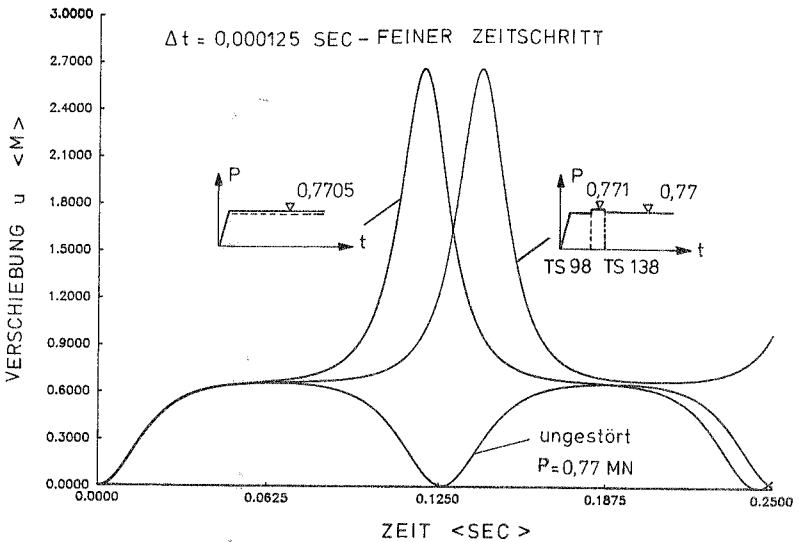


Bild 2.14: Gestörte und ungestörte Lösung

Mit diesen Untersuchungen ist einerseits gezeigt, daß hinsichtlich des Zeitverlaufes der Störlast keine Einschränkungen bestehen, andererseits ist damit folgende Interpretation des oben erwähnten praktischen Vorgehens möglich: Bei der schrittweisen Erhöhung der Stufenlast ($P_1, \dots, P_i, P_{i+1}, \dots$), stellt der Zeitverlauf unter $P=P_i$ die ungestörte und der aus P_{i+1} resultierende, die gestörte Lösung dar. Wird der Übergang des Systems in die untere Gleichgewichtslage das erste Mal unter P_{i+1} beobachtet, so folgt daraus zunächst Instabilität unter P_i und daraus wegen $P_{i+1} > P_i$ erst Instabilität der Lösung für P_{i+1} . Bei den Untersuchungen für Bild 2.14 wurde über die Zeitschrittwahl, die im Rahmen der Annahmen "exakte Lösung" realisiert. Da man bei praktischen Untersuchungen aus Wirtschaftlichkeitsgründen bestrebt ist, einen möglichst großen Zeitschritt zu wählen (s. Bild 2.13), ist zu klären, wie die daraus resultierenden Ungenauigkeiten die Stabilitätsuntersuchung beeinflussen. Zu diesem Zweck sind in Bild 2.15 Zeitverlaufsberechnungen unter $P=0,77 \text{ MN}$ mit ver-

schieden großen Δt dokumentiert.

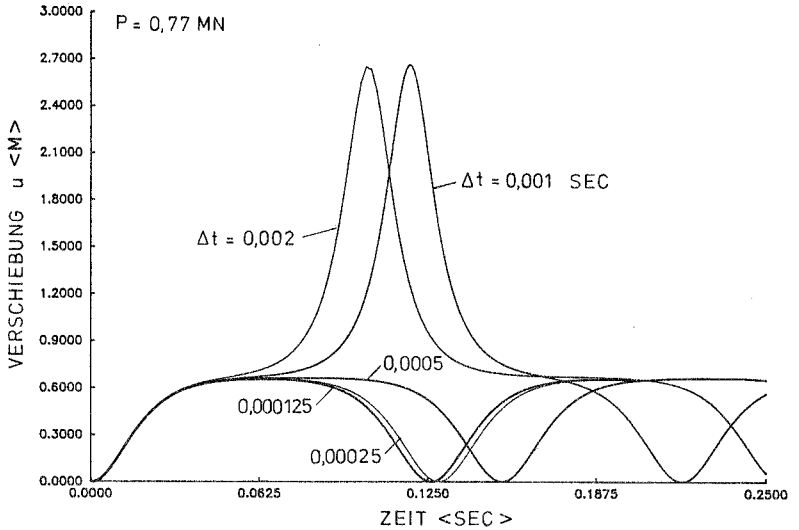


Bild 2.15: Störungen aus der Zeitintegration

Zunächst folgt daraus, daß das oben verwendete Zeitinkrement von $\Delta t = 0,000125 \text{ sec}$ tatsächlich die "exakte Lösung" liefert. Weiterhin ergeben die Berechnungen mit $\Delta t \geq 0,001 \text{ sec}$ Verschiebungszeitverläufe, die der oben gefundenen, gestörten Lösung entsprechen. Da es sich hierbei nicht um eine Instabilität des Zeitintegrationsverfahrens handelt, was im Abschnitt 3.3.4.1 noch gezeigt wird, folgt hieraus, daß die aus der Numerik resultierenden Ungenauigkeiten ebenfalls Störungscharakter besitzen.

Bei der praktischen Berechnung wird, um die für die ungestörte Lösung erforderliche kleine Zeitschrittweite zu umgehen, vom Störungscharakter der Numerik kein Gebrauch gemacht. Damit ist im Rahmen der oben skizzierten Vorgehensweise davon auszugehen, daß sowohl P_i als auch P_{i+1} mit numerischen Ungenauigkeiten behaftet sind. Dies wird sich zwar auf die Genauigkeit der ermittelten dynamischen Durchschlagslast auswirken, das prinzipielle Vorgehen wird,

da beide Lösungen gleichermaßen gestört sind, dadurch nicht in Frage gestellt.

Bei diesem Beispiel muß nach Beiden im Abschnitt 2.3 diskutierten Klassifizierungsmöglichkeiten von Stabilität einer Bewegung gesprochen werden; der Ausgangszustand ist identisch mit der Schwingung, die durch die Last angeregt wird, als Störung kann eine impulsförmige Störlast dienen, und das Durchschlagen in die untere Gleichgewichtslage ist durch u beschreibbar.

Bei den bisherigen Ausführungen zu diesem Beispiel wurde stillschweigend vorausgesetzt, daß als Ausgangszustand kein Durchschlagvorgang gewählt wird, in diesem Fall würde die oben stabilitätstheoretisch begründete Vorgehensweise nicht zum Ziel führen. Bei dem Zweibock ist diese Frage aufgrund des einfachen Systemverhaltens leicht zu entscheiden, bei komplizierteren Strukturen, die ebenfalls durchschlagen, können zusätzliche Überlegungen erforderlich werden. Hier können unter anderem auch die Kriterien des Abschnittes 3.4 eingesetzt werden.

2.5.4.2 Verzweigen unter dynamischer Belastung

Das Verzweigen von nicht kinematischen Systemen unter dynamischer Belastung soll am Beispiel des im Bild 2.3 dargestellten Eulerstabes diskutiert werden. Zur Abgrenzung von parametrischen Resonanzen wird, wie im vorherigen Abschnitt, eine plötzlich aufgebrachte Axiallast betrachtet. Instabilität in Form der in /48/ beschriebenen, gekoppelten, hochwelligen Längs- und Biegeschwingungen sind, aufgrund des vorausgesetzten Hookeschen Materialverhaltens (s. Abschnitt 2.2), nicht möglich.

Im Gegensatz zum Zweibock hat die dadurch angeregte Schwingung keine Komponenten in einer möglichen Ausweichrichtung des Systems. Daraus folgt bereits, daß analog zur Analyse unter statischer Belastung, eine quer zur Stabachse gerichtete Störung erforderlich ist.

Bild 2.16 zeigt verschiedene Verschiebungszeitverläufe, die

sich nach Aufbringen der axialen Stufenlast plus der in Bild 2.16 dargestellten Störung ergeben. Solange P unter der Eulerlast bleibt, erfüllen die aus der Störung resultierenden Querschwingungen die Bedingung der Stabilität. Sobald die Stufenlast die statische Knicklast überschreitet, verläßt die gestörte Lösung die ε -Umgebung der ungestörten und zeigt damit Instabilität des Ausgangszustandes an; statische und dynamische Verzweigungslast stimmen für dieses Beispiel überein.

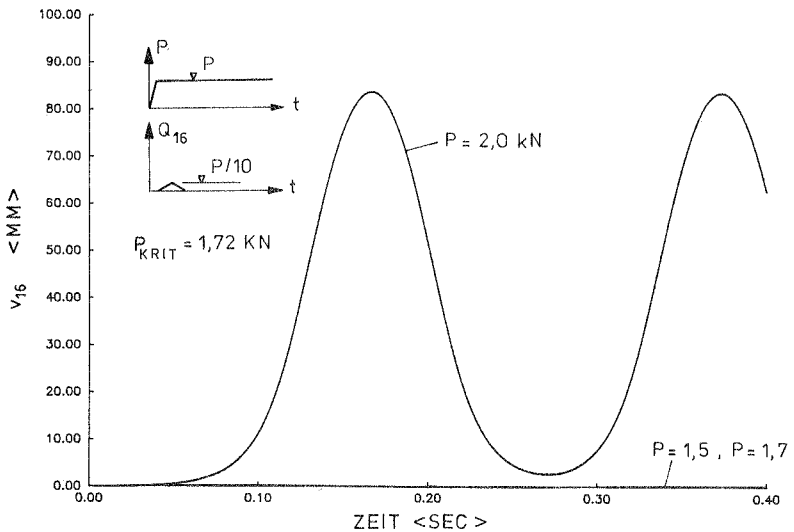


Bild 2.16: Eulerstab unter Stufenlast

Nach der alternativen Klassifizierung wird der Ausgangszustand - wie im statischen Fall - durch $v=0$ beschrieben, eine Störung in dieser Richtung erzeugt oberhalb der dynamischen Verzweigungslast den Übergang des Systems in die ausgebogene Lage, die ebenfalls durch v ($v \neq 0$) beschrieben wird. Damit liegt auch beim Verzweigen unter dynamischer Belastung eine Instabilität der Gleichgewichtslage vor und zwar derjenigen Lage ($v=0$), um die das System bei Stabilität schwingt, beziehungsweise die es bei Instabilität verläßt.

Bei dem Versuch, das bei Instabilität beobachtbare Ausweichen des Systems als Instabilität einer Bewegung anzusprechen, wird die zweite Forderung der alternativen Klassifizierung verletzt. Der durch die Stablängsschwingung dargestellte Ausgangszustand kann durch eine axialgerichtete Störung nicht so beeinflußt werden, daß sich der beschriebene Ausweichvorgang einstellt.

2.5.5 Zusammenfassung Kapitel 2

Mit Hilfe der oben dargestellten Untersuchungen konnte gezeigt werden, daß sämtliche bei mechanischen Systemen auftretenden Stabilitätsprobleme auf der Basis der Stabilitätsdefinition von Ljapunov gemeinsam behandelt werden können.

Speziell bei dynamischen Stabilitätsproblemen von Tragwerken konnte die praktische Ermittlung der dynamischen Beullast in Bezug zur Stabilitätstheorie gebracht werden. Für die in diesem Zusammenhang wesentlichen Zeitintegrationsverfahren konnte gezeigt werden, daß den daraus resultierenden numerischen Ungenauigkeiten Störungscharakter zukommt.

3. Untersuchung der dynamischen Stabilität mit der Methode der finiten Elemente

Mit der Methode der finiten Elemente steht ein numerisches Werkzeug zur Verfügung, das prinzipiell die Lösung beliebiger Stabilitätsprobleme gestattet. Damit verlieren die für Spezialaufgaben entwickelten Verfahren an Bedeutung und sollen hier nicht erörtert werden. Im Abschnitt 3.1 wird daher nur eine Übersicht über verschiedene Näherungsstufen gegeben und die Einordnung der finiten Elementmethode vorgenommen.

Die Methode selbst wird im Abschnitt 3.2 vorgestellt, im Detail soll hier die Diskretisierung der Trägheitskräfte mit Hilfe degenerierter Elemente dargestellt werden. Im Anschluß daran (s. Abschnitt 3.3) werden Zeitintegrationsverfahren unter dem Aspekt diskutiert, besonders geeignete Algorithmen auszuwählen und Empfehlungen für die Zeitschrittwahl, Maßnahmen zur Konvergenzbeschleunigung etc. zu erarbeiten. Hier soll auch auf Probleme eingegangen werden, die sich bei nichtlinearen Untersuchungen allgemein und insbesondere bei Stabilitätsanalysen in Verbindung mit der direkten Zeitintegration ergeben.

Im darauffolgenden Abschnitt 3.4 werden aus der Literatur bekannte Verfahren, die eine direkte Bestimmung der dynamischen Beullast gestatten, vorgestellt und bewertet. Darüberhinaus wird eine eigene Methode entwickelt und anhand von Beispielen in ihrer Wirksamkeit überprüft.

3.1 Übersicht über vorhandene Methoden

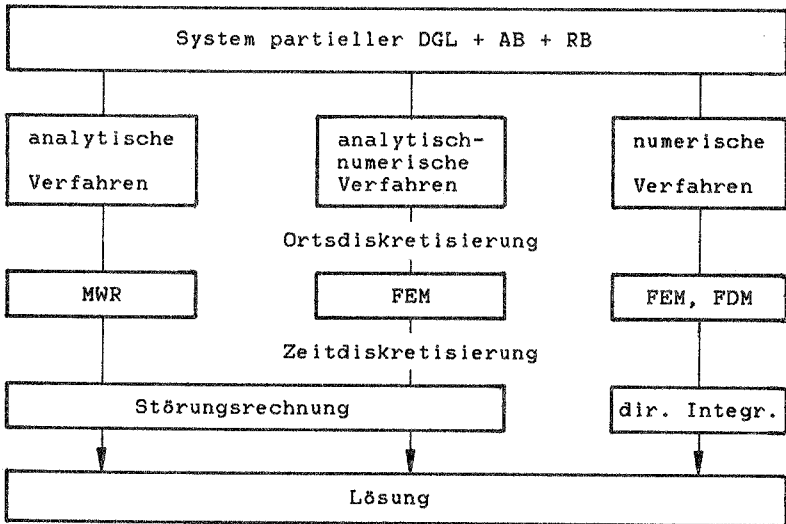
Mathematische Verfahren zur Lösung von Stabilitätsproblemen basieren im wesentlichen auf dem von Ljapunov angegebenen Methoden /82/. Sie sollen unter Hinweis auf die hierzu vorhandene ausführliche Literatur /27/, /92/, /49/ nur kurz beschrieben werden.:

1. **Ljapunovsche Methode:** hier wird der Verlauf von gestörter und ungestörter Lösung über die Zeit betrachtet, wozu die Lösung eines Systems von Differentialgleichungen

erforderlich ist. Anwendungen hierzu finden sich z.B. in /13/, /90/, /67/. Hier sei bereits darauf hingewiesen, daß Eigenwert-Stabilitätskriterien nur bei linearen Systemen direkt zum Ziel führen, bei nichtlinearen Problemen können sie, aufgrund der Zeitvarianz der Systemmatrizen, nur begleitend eingesetzt werden. Auf diese Thematik wird im Abschnitt 3.4 noch näher eingegangen.

2. (direkte) Ljapunovsche Methode: sie vermeidet die Lösung des Gleichungssystems; stattdessen werden Funktionen gesucht, die die Ljapunovsche Matrixgleichung erfüllen /82/. Beispiele hierzu finden sich z.B. bei Hagedorn /49/. Da diese Ljapunov-Funktionen oft nur unter erheblichen Schwierigkeiten beziehungsweise gar nicht /92/ gebildet werden können ist die Verwendung der Methode beschränkt, daher soll hier auf eine ausführliche Darstellung verzichtet werden.

Tafel 3.1 Approximative Lösungsverfahren



Die 1. Methode erfordert im allgemeinen die Lösung eines Systems partieller Differentialgleichungen mit Anfangs- (AB) und Randbedingungen (RB). Da hierfür nur in einfachen Sonderfällen exakte Lösungen existieren, sollen im folgenden nur Näherungslösungen diskutiert werden. Eine Auswahl gebräuchlicher Verfahren ist in Tafel 3.1 zusammengestellt, alternative Strategien finden sich z.B. in /92/. Wegen weiterer Möglichkeiten, die Trennung von Orts- und Zeitdiskretisierung vorzunehmen, sei auf /59/ verwiesen.

Nach /92/ wird im Rahmen der Ortsdiskretisierung die Methode der gewichteten Residuen in analytischer Form häufig angewandt. Für die Lösung im Zeitbereich kann z.B. die Störungsrechnung nach Lindstedt (für periodische Lösungen /42/) eingesetzt werden. Aufgrund der Beschränkungen, die allein aus dem im Rahmen der Methode der gewichteten Residuen (MWR) notwendigen Ansatz (z.B. Galerkin) resultieren, ist das analytische Verfahren auf einfache Strukturen mit einfachen Randbedingungen beschränkt.

Diesen Nachteil umgehen die analytisch-numerischen Verfahren. So wurde z.B. in /35/ eine Ortsdiskretisierung mit Hilfe der finiten Elemente (FE) durchgeführt und aus dem linearisierten Eigenwertproblem

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \Phi(x) = 0 \quad (3.1)$$

die Eigenvektoren Φ_i bestimmt. Mit den Lagrangeschen Gleichungen und einem Ansatz der Form

$$\mathbf{u} = \sum_i y_i(t) \Phi_i(x) \quad (3.2)$$

ergibt sich ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen (DGL) zweiter Ordnung. Dieses reine Zeitproblem kann wieder mit einer Störungsrechnung analytisch gelöst werden. Da diese Methode auf einer Störung der Lösung des linearen Problems basiert, kann sie nur bei schwach nichtlinearen Problemen angewandt werden /92/.

Dieser Einschränkung unterliegen die numerischen Verfahren nicht. Während bei der Ortsdiskretisierung mit Hilfe finiter Differenzen (FD) gewisse Einschränkungen hinsichtlich der Geometrie der Ränder der Struktur bestehen, gestattet die finite Elementmethode (FEM) prinzipiell die Lösung allgemein nichtlinearer Probleme.

Im Zusammenhang mit der FEM empfiehlt es sich, von einer Integralformulierung auszugehen. Sie kann aus den Differentialgleichungen mit Hilfe der MWR oder durch die Anwendung eines Variationsprinzips erhalten werden (s. z.B. /32/, /40/). Im Abschnitt 3.2 ist diese Vorgehensweise ausführlich dargestellt, dort wird wegen der einzusetzenden Verschiebungselemente vom um die Trägheitskräfte erweiterten Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V.) ausgegangen.

Den nächsten Schritt des numerischen Verfahrens stellt die Überführung der nunmehr in Integralform vorliegenden Bewegungsgleichung mit Hilfe eines bereichsweisen Ansatzes (Ortsdiskretisierung) in ein System von gewöhnlichen DGL 2. Ordnung dar, wobei die nichtlinearen Terme in den verallgemeinerten inneren Kräften enthalten sind

$$(\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{u})):$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (3.3)$$

bzw. unter Einschluß der physikalischen Dämpfung

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (3.4)$$

Führt man weiterhin eine Diskretisierung im Zeitbereich ein und trifft Annahmen für die Beziehungen zwischen Verschiebungen und ihren Zeitableitungen, so ergibt sich ein System von algebraischen Gleichungen, das für alle Zeitschritte t , $t + \Delta t \dots$ zu lösen ist. Auf die Unterschiede, die sich im Rahmen der Ableitung für explizite und implizite Zeitintegrationsverfahren ergeben, sei hingewiesen. Sie betreffen den Zeitpunkt, zu dem Orts- bzw. Zeitdiskretisierung

einzuführen sind, und werden im Abschnitt 3.2 ausführlich behandelt.

Die Möglichkeit einer Ortsdiskretisierung mit Hilfe von FD wurde bereits angedeutet. Von Baitinger /12/ wurde in Verbindung mit expliziter Zeitintegration ein effizientes Verfahren vorgestellt. Aufgrund der Schwierigkeiten, die bei finiten Differenzen z.B. bei unregelmäßigen Rändern auftreten können, sind derartige Konzepte allerdings auf spezielle Anwendungsgebiete beschränkt.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß beliebig nichtlineare, zeitabhängige Probleme nur mit Hilfe numerischer Verfahren und hier speziell mit einer Ortsdiskretisierung nach der FEM und direkter Integration im Zeitbereich zufriedenstellend zu lösen sind. Im folgenden wird deshalb eine Beschränkung auf FE-Modelle (speziell Verschiebungsmodelle) und direkte Zeitintegration vorgenommen. Damit ist die Lösung beliebig nichtlinearer, zeitvarianter, konservativer und nichtkonservativer, heteronomer und autonomer Systeme möglich.

3.2 Bewegungsgleichung, Ortsdiskretisierung mit FE

3.2.1 Bewegungsgleichung

In diesem Abschnitt soll die im Sinne der FE diskretisierte Bewegungsgleichungen des Kontinuums formuliert werden. Für die Statik wurde diese Aufgabe beispielsweise von Ramm /101/ gelöst, für die Dynamik findet sich eine detaillierte Lösung bei Bufler /33/, außerdem sei auf /16/ verwiesen. In /16/ wurde die Bewegungsgleichung aus der statischen Gleichgewichtsbeziehung erhalten, indem die Trägheitskräfte aus den Volumenkräften abgespalten wurden. Dies ist formal insofern nicht ganz korrekt, als dadurch die virtuelle Arbeit der d'Alembertschen Trägheitskräfte im P.d.v.V. der virtuellen äußeren Arbeit zugeordnet wird.

Bei der im folgenden dargestellten Ableitung wird die virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte direkt eingeführt. Im Hinblick auf die unterschiedlichen Lösungsstrategien, die für explizite und implizite Zeitintegrationsverfahren erforderlich sind, wird die diskretisierte Bewegungsgleichung für beide Methoden getrennt hergeleitet. Auf die Unterschiede, die sich dabei insbesondere im Hinblick auf die Reihenfolge ergeben, in der Orts- und Zeitdiskretisierung einzuführen sind, soll besonders eingegangen werden.

3.2.1.1 Bewegungsgleichung für explizite Integrationsverfahren

Zunächst wird die Bewegungsgleichung für explizite Integrationsverfahren hergeleitet. Sofern nichts Gegenteiliges vereinbart wird, gilt die Einsteinsche Summationskonvention. Im Hinblick auf die Ortsdiskretisierung mit Hilfe von finiten Elementen mit Verschiebungsansätzen wird vom P.d.v.V. unter Einschluß der d'Alembertschen Trägheitskräfte ausgegangen.

Bezogene Größen, die eine Bewegung des Kontinuums in raumfesten, kartesischen Koordinaten beschreiben, werden auf die Ausgangslage zum Zeitpunkt $t=0$ bezogen. Dies entspricht einer "totalen Lagrange-Darstellung" (TL); die ebenfalls mögliche "mitgehende Lagrange-Formulierung" (UL) ist für den statischen Fall ausführlich in /258/ behandelt, hier soll dieser Hinweis genügen. Unter Hinweis auf die Stetigkeitsanforderungen an die verwendeten Spannungen, Dehnungen und Verschiebungen /33/ ergibt sich aus dem P.d.v.V. für die virtuellen Arbeiten zu jedem Zeitpunkt t :

$$-(\delta W_{(m)} + \delta W_{(i)}) = \int_{\circ V} \circ \ddot{u}_k \delta u_k d(\circ V) + \int_{\circ V} \circ S_{i,j} \delta \circ \epsilon_{i,j} d(\circ V) \quad (3.5)$$

$$\delta W_{(a)} = \int_{\circ V} \circ t_i \delta u_i d(\circ A) + \int_{\circ V} \circ \rho \circ q_i \delta u_i d(\circ V) \quad (3.6)$$

Wegen $\delta W_{(a)} + \delta W_{(i)} + \delta W_{(m)} = 0$ (3.7) erhält man:

$$\int_{\circ V} \circ \rho \ddot{u}_k \delta u_k d(\circ V) = \delta W_{(a)} - \int_{\circ V} \circ S_{i,j} \delta \circ \epsilon_{i,j} d(\circ V) \quad (3.8)$$

Hierin treten neben den Oberflächen- bzw. Volumenkräften $\circ t_i$ bzw. $\circ q_i$ die Green-Lagrange-Verzerrungen

$$\circ \epsilon_{i,j} = 0,5(\circ u_{i,j} + \circ u_{j,i} + \circ u_{k,i} \circ u_{k,j}) \quad (3.9)$$

sowie die Kirchhoff-Piola Spannungen 2. Art zum Zeitpunkt t

$$\circ S_{i,j} = \circ S_{j,i} = \circ x_{i,k} \circ x_{j,l} \circ \tau_{kl} \circ \rho / \circ \rho \quad (3.10)$$

auf; $\circ x_{i,j}$ bezeichnet den Deformationsgradienten, $\circ \tau_{kl}$ eine Komponente des Cauchy Spannungstensors.

Gleichung (3.8) stellt die schwache Form der Bewegungsgleichung des Kontinuums in allgemeiner Weise dar, einschränkende Annahmen sind noch nicht enthalten.

Nun wird eine Ortsdiskretisierung im Sinne der finiten

Elemente mit gleichartiger Interpolation von Geometrie und Verschiebungen durchgeführt (isoparametrische Elemente). Mit den Knotenkoordinaten $\mathbf{x}_i(k)$ bzw. -Verschiebungen $\mathbf{u}_i(k)$ gilt für das Element:

$${}^e \mathbf{x}_i = \mathbf{N}_{(i)}^T {}^e \mathbf{x}_i(k) \quad (3.11)$$

$${}^e \mathbf{u}_i = \mathbf{N}_{(i)}^T {}^e \mathbf{u}_i(k)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{bzw. } {}^e \mathbf{u} &= \mathbf{N}^T {}^e \mathbf{u}(k) \\ \delta \mathbf{u} &= \mathbf{N}^T \delta \mathbf{u}(k) \\ {}^e \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}^T {}^e \ddot{\mathbf{u}}(k) \\ {}^e \ddot{\mathbf{u}} &= \mathbf{N}^T {}^e \ddot{\mathbf{u}}(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Die Matrix der Interpolationsfunktionen \mathbf{N} bzw. der Spaltenvektor für die i -te Richtung $\mathbf{N}_{(i)}$, sind von der Art des Ansatzes und des Elementes abhängig. Die virtuelle Arbeit der d'Alembertschen Trägheitskräfte gemäß Gleichung (3.8), die sich in Matrixschreibweise wie folgt darstellen läßt:

$${}^e \delta W_{(H)} = \int_{\circ V} \delta \mathbf{u}^T {}^e \ddot{\mathbf{u}} d(\circ V) \quad (3.13)$$

wird mit dem Ansatz (3.12) in die diskrete Form überführt. Sie wird nur für ein Element angeschrieben, die Integration ist dabei über das Elementvolumen auszuführen:

$$\begin{aligned} {}^e \delta W_{(H)}^{E1} &= \int_{\circ V^{E1}} \delta \mathbf{u}^T(k) \mathbf{N} \mathbf{N}^T {}^e \ddot{\mathbf{u}}(k) d(\circ V) \\ &= \delta \mathbf{u}^T(k) \mathbf{M}_c^{E1} {}^e \ddot{\mathbf{u}}(k) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\text{mit } \mathbf{M}_c^{E1} = \int_{\circ V^{E1}} \mathbf{N} \mathbf{N}^T d(\circ V) \quad (3.15)$$

Gleichung (3.15) stellt die konsistente Massenmatrix eines Elementes dar, die Matrix für das Gesamtsystem \mathbf{M}_c ergibt sich aus dem Zusammenbau der Einzelmatrizen, wobei die

Knotengleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen zu erfüllen sind. Entsprechend dem für die Massenmatrix gezeigten Vorgehen führt die virtuelle äußere Arbeit zu:

$$\begin{aligned} {}^t\delta W_{(a)}^{E1} &= \delta \mathbf{u}^T(k) {}^t\mathbf{R}^{E1} \\ &= \delta \mathbf{u}^T(k) \left[\int_{\circ A} {}^t\mathbf{N}^T {}^t\mathbf{t} d(\circ A) + \int_{\circ V} {}^t\mathbf{N}^T {}^t\mathbf{q} d(\circ V) \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

sowie die virtuelle Arbeit der verallgemeinerten inneren Kräfte /101/ zu:

$${}^t\delta W_{(i)}^{E1} = \delta \mathbf{u}^T(k) {}^t\mathbf{F}^{E1} = \delta \mathbf{u}^T(k) \int_{\circ V} {}^t\mathbf{B}^T {}^t\mathbf{S} d(\circ V) \quad (3.17)$$

Die Operatormatrix ${}^t\mathbf{B}$ sowie der Vektor der Kirchhoff-Piola Spannungen 2. Art sind in /101/ angegeben, deshalb soll hier auf eine detaillierte Darstellung verzichtet werden.

Mit den Vektoren der verallgemeinerten inneren ${}^t\mathbf{F}$ beziehungsweise äußeren Knotenkräfte ${}^t\mathbf{R}$ für das Gesamtsystem läßt sich nun Gleichung (3.8) in diskretisierter Form anschreiben:

$$\delta \mathbf{u}^T(k) \mathbf{M}_c {}^t\ddot{\mathbf{u}}(k) = \delta \mathbf{u}^T(k) [{}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}]$$

bzw. $\boxed{\mathbf{M}_c {}^t\ddot{\mathbf{u}}(k) = {}^t\mathbf{R} - {}^t\mathbf{F}}$ (3.18)

${}^t\mathbf{F} = {}^t\mathbf{F}({}^t\mathbf{u})$ beinhaltet die nichtlinearen Terme.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Bewegungsgleichung (3.18) nur bezüglich des Ortes diskretisiert ist, die Zeitdiskretisierung wird erst im Rahmen des Zeitintegrationsverfahrens durchgeführt. Die Größen in Gleichung (3.18) sind direkt berechenbar; deshalb sind bei der weiteren Lösung Linearisierung und Iteration nicht erforderlich.

3.2.1.2 Bewegungsgleichung für implizite Integrationsverfahren

Zur Herleitung der in Verbindung mit impliziter Zeitintegration erforderlichen Form der Bewegungsgleichung, wird das P.d.v.V. zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ angeschrieben. Dies bedeutet, daß bereits hier die Diskretisierung bezüglich der Zeit eingeführt wird. Damit werden nur noch die Zeitpunkte $t_0, t_1, \dots, t, t+\Delta t$ mit dem zeitlichen Abstand Δt betrachtet.

Zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ ergibt sich aus Gleichung (3.8):

$$\int_{\circ V}^{\circ} {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_k \delta u_k d(\circ V) = {}^{t+\Delta t} \delta W_{(a)} - \int_{\circ V}^{\circ} {}^{t+\Delta t} \circ S_{i,j} \delta {}^{t+\Delta t} \circ \varepsilon_{i,j} d(\circ V) \quad (3.19)$$

$$\text{mit } {}^{t+\Delta t} \delta W_{(a)} = \int_{\circ A}^{\circ} {}^{t+\Delta t} t_i \delta u_i d(\circ A) + \int_{\circ V}^{\circ} {}^{t+\Delta t} \circ q_i \delta u_i d(\circ V)$$

Den Zeitinkrementen Δt werden Verschiebungs-, Dehnungs- und Spannungsinkremente $u_i, \circ \varepsilon_{i,j}$, bzw. $\circ S_{i,j}$ zugeordnet.

Damit lassen sich die Größen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ darstellen:

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t} u_i &= {}^t u_i + u_i \\ {}^{t+\Delta t} \circ \varepsilon_{i,j} &= {}^t \circ \varepsilon_{i,j} + \circ \varepsilon_{i,j} \\ \circ \varepsilon_{i,j} &= \circ e_{i,j} + \circ \eta_{i,j} \\ {}^{t+\Delta t} \circ S_{i,j} &= {}^t \circ S_{i,j} + \circ S_{i,j} \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Mit Gleichung (3.9) sind die Green-Lagrange-Verzerrungen zum Zeitpunkt t gegeben, für den linearen Anteil des Verzerrungsinkrementes $\circ e_{i,j}$ sowie für den nichtlinearen Anteil $\circ \eta_{i,j}$ gilt /101/:

$$\circ e_{i,j} = 0,5(\circ u_{i,j} + \circ u_{j,i} + {}^t u_{k,i} \circ u_{k,j} + {}^t u_{k,j} \circ u_{k,i}) \quad (3.21)$$

$$\circ \eta_{i,j} = 0,5 \circ u_{k,i} \circ u_{k,j} \quad (3.22)$$

Die konstitutiven Gleichungen für das Inkrement lauten:

$${}_0S_{i,j} = {}_0C_{i,jkl} {}_0\varepsilon_{kl} \quad (3.23)$$

Die Beziehung gilt für lineares und nichtlineares Materialverhalten, Einzelheiten hierzu finden sich z.B. in /18/.

$$\text{Mit } \delta^{t+\Delta t} {}_0\varepsilon_{i,j} = \delta({}_0^t\varepsilon_{i,j} + {}_0\varepsilon_{i,j}) = \delta_0\varepsilon_{i,j} = \delta_0e_{i,j} + \delta_0\eta_{i,j}$$

und den Gleichungen (3.20), (3.23) erhält man aus (3.19) die inkrementelle Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \int_{{}_0V} {}_0^t \delta^{t+\Delta t} \ddot{u}_k \delta u_k d({}_0V) + \int_{{}_0V} {}_0C_{i,jkl} {}_0\varepsilon_{kl} \delta_0\varepsilon_{i,j} d({}_0V) + \int_{{}_0V} {}_0^t S_{i,j} \delta_0\eta_{i,j} d({}_0V) = \\ = {}^{t+\Delta t} \delta W_{(a)} - \int_{{}_0V} {}_0^t S_{i,j} \delta_0e_{i,j} d({}_0V) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Sie ist wegen der Nichtlinearität in den Verschiebungsincrementen nicht direkt lösbar, mit Hilfe einer Linearisierung, die sich durch den Übergang ${}_0\varepsilon_{i,j} \rightarrow {}_0e_{i,j}$ ergibt, wird Lösbarkeit hergestellt. Der daraus resultierende Fehler wird mittels Iteration beseitigt.

Zu diesem Konzept finden sich in der Literatur ausführliche Darstellungen z.B. /101/, /38/, hier wird darauf im Abschnitt 3.3.3 eingegangen.

Die linearisierte, bezüglich der Zeit bereits diskretisierte Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} \int_{{}_0V} {}_0^t \delta^{t+\Delta t} \ddot{u}_k \delta u_k d({}_0V) + \int_{{}_0V} {}_0C_{i,jkl} {}_0e_{kl} \delta_0e_{i,j} d({}_0V) + \int_{{}_0V} {}_0^t S_{i,j} \delta_0\eta_{i,j} d({}_0V) = \\ = {}^{t+\Delta t} \delta W_{(a)} - \int_{{}_0V} {}_0^t S_{i,j} \delta_0e_{i,j} d({}_0V) \end{aligned} \quad (3.25)$$

wird nun mit Hilfe des Ansatzes (3.12) auch bezüglich des Ortes diskretisiert. Analog zu der oben geschilderten Vorgehensweise erhält man nun:

$$\mathbf{M}_c^{**\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}(k) + {}_0^t \mathbf{K} \mathbf{u}(k) = {}^{**\Delta t} \mathbf{R} - {}_0^t \mathbf{F} \quad (3.26)$$

Die Tangentensteifigkeitsmatrix ${}_0^t \mathbf{K}$ läßt sich nach /101/ in die inkrementelle elastische (${}_0^t \mathbf{K}_e$) und die geometrische Steifigkeitsmatrix (${}_0^t \mathbf{K}_g$) zerlegen.

$${}_0^t \mathbf{K} = {}_0^t \mathbf{K}_e + {}_0^t \mathbf{K}_g \quad (3.27)$$

Die Beziehung (3.26) enthält wieder Matrizen bzw. Vektoren des Gesamtsystems, die sich aus dem Zusammenbau ergeben. Auf Elementebene gelten wieder (3.15), (3.17) sowie:

$${}^{**\Delta t} \mathbf{R}^{El} = \int_{\circ A^{El}} \mathbf{N}^{**\Delta t} \mathbf{t} d(\circ A) + \int_{\circ V^{El}} \mathbf{N}^{**\Delta t} \mathbf{q} d(\circ V) \quad (3.28)$$

Die inkrementellen Steifigkeitsmatrizen sowie die darin enthaltenen Größen sind in /101/ angegeben:

$${}_0^t \mathbf{K}_e^{El} = \int_{\circ V^{El}} {}_0^t \mathbf{B}^T \circ \mathbf{C} {}_0^t \mathbf{B} d(\circ V) \quad (3.29)$$

$${}_0^t \mathbf{K}_g^{El} = \int_{\circ V^{El}} {}_0^t \mathbf{B}^T \mathbf{S} {}_0^t \mathbf{B} d(\circ V) \quad (3.30)$$

Für große Verdrehungen liefert die konsistente Linearisierung von (3.19) bei Schalen und Stäben (degeneriertes Konzept) einen Zusatzterm in der Tangentensteifigkeitsmatrix /102/.

Als Unterschied zur Bewegungsgleichung für explizite Verfahren hat sich gezeigt, daß für implizite Methoden bereits bei der Herleitung von (3.26) die Zeitdiskretisierung durchzuführen ist. Aufgrund der oben dargestellten Linearisierung ist bei impliziten Verfahren im allgemeinen eine Gleichgewichtsiteration erforderlich.

Auf die stets vorhandene physikalische Dämpfung wurde bei den bisherigen Betrachtungen bewußt nicht eingegangen. Es hat sich gezeigt /18/, daß die aus der Einführung einer virtuellen Arbeit der Dämpfungskräfte resultierende

Elementdämpfungsmatrix nicht zum Ziel führt, insbesondere weil die in Wirklichkeit frequenzabhängigen Dämpfungsmaße auf Elementebene kaum oder gar nicht zu bestimmen sind. Diese Schwierigkeit wird üblicherweise dadurch umgangen, daß für die Dämpfungskräfte eine einfache Annahme wie z.B. Proportionalität zu inneren und/oder Trägheitskräften /91/ getroffen wird. Die so ermittelten Dämpfungsmatrizen:

$$\mathbf{D} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}$$

werden auf Systemebene in die diskretisierten Bewegungsgleichungen (3.18) bzw. (3.26) eingebracht. Damit stehen nun für explizite (3.31) bzw. implizite Verfahren (3.32) die vollständigen, diskretisierten Bewegungsgleichungen des Kontinuums zur Verfügung.

$$\mathbf{M}_e \dot{\ddot{\mathbf{u}}}(k) + \mathbf{D} \dot{\mathbf{u}}(k) = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{M}_e {}^{**A^t} \ddot{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{D} {}^{**A^t} \dot{\mathbf{u}}(k) + \mathbf{K} \mathbf{u}(k) = {}^{**A^t} \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (3.32)$$

3.2.2 Konsistente Massenmatrizen degenerierter Elemente

Die aus der Ortsdiskretisierung des P.d.v.V. resultierenden Elementmatrizen sind im vorherigen Abschnitt nur allgemein, d.h. ohne Spezialisierung auf ein bestimmtes Element angegeben. Da die für statische Berechnungen erforderlichen Matrizen, wie z.B. die Steifigkeitsmatrix oder die Vektoren der rechten Seite für degenerierte Elemente aus der Literatur /102/ bekannt sind, soll in den Abschnitten 3.2.2 sowie 3.2.3 nur auf die konsistente bzw. zusammengefaßte Massenmatrix dieser Elemente eingegangen werden.

Degenerierte Elemente basieren auf der direkten Diskretisierung von Geometrie und Verschiebungen des Kontinuums. Sie vermeiden die bei Verwendung von Körper-Elementen an Schalenproblemen angetroffenen Schwierigkeiten und unterscheiden sich von ihnen insofern, als zusätzliche Annahmen

bezüglich der Schalennormale und der Spannungen in Normalenrichtung getroffen werden /101/. Hier wird unterschieden zwischen allgemeinen Schalenelementen, die direkt aus dem 3D-Kontinuum hervorgehen und dem ebenen Sonderfall, bei dem die Elemente mittels Degeneration aus dem 2D-Kontinuum entstehen.

3.2.2.1 2D-degeneriertes Element

Der Verschiebungsansatz (3.12) lautet für das zweidimensionale, degenerierte, isoparametrische Element:

$$\begin{bmatrix} {}^t u_2 \\ {}^t u_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m N(k)(r) \begin{bmatrix} {}^t u_2(k) \\ {}^t u_3(k) \end{bmatrix} + 0,5s \sum_{k=1}^m N(k)(r) h(k) \begin{bmatrix} \cos {}^t \varphi(k) - \cos {}^o \varphi(k) \\ \sin {}^t \varphi(k) - \sin {}^o \varphi(k) \end{bmatrix}$$

Für die Verschiebungsinkremente ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m N(k)(r) \begin{bmatrix} u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} + 0,5s \sum_{k=1}^m N(k)(r) h(k) \begin{bmatrix} \cos {}^{t+\Delta t} \varphi(k) - \cos {}^o \varphi(k) \\ \sin {}^{t+\Delta t} \varphi(k) - \sin {}^o \varphi(k) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

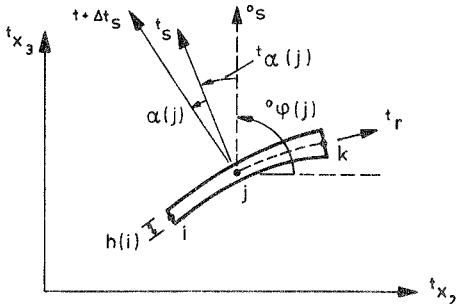


Bild 3.1: 2D-degeneriertes Element

Die Verdrehung der Normalen ${}^t \alpha(k)$ (Bild 3.1) wird als Freiheitsgrad eingeführt:

$${}^t \varphi(k) = {}^o \varphi(k) + {}^t \alpha(k)$$

bzw. $\varphi(k) = \varphi(k) + \alpha(k)$

Damit wird der 2. Term aus (3.33) zu:

$$0,5s \sum_{k=1}^m N(k)h(k) \begin{bmatrix} \cos^t \varphi(k) \cos \alpha(k) - \sin^t \varphi(k) \sin \alpha(k) - \cos^t \varphi(k) \\ \sin^t \varphi(k) \cos \alpha(k) + \cos^t \varphi(k) \sin \alpha(k) - \sin^t \varphi(k) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Die trigonometrischen Funktionen mit dem unbekanntem Inkrement $\alpha(k)$ werden durch das 1. Reihenglied angenähert:

$$\sin \alpha(k) \approx \alpha(k)$$

$$\cos \alpha(k) \approx 1$$

Damit erhält (3.34) folgende einfache Form:

$$0,5s \sum_{k=1}^m N(k)h(k) \begin{bmatrix} -\sin^t \varphi(k) \\ \cos^t \varphi(k) \end{bmatrix} \alpha(k) \quad (3.35)$$

Das inkrementelle Verschiebungsfeld läßt sich nun wie folgt darstellen:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(1) & 0 & 0,5sN(1)h(1)(-\sin^t \varphi(1)) & | & \dots \\ 0 & N(1) & 0,5sN(1)h(1)(\cos^t \varphi(1)) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(1) \\ u_3(1) \\ \alpha(1) \\ u_2(2) \\ u_3(2) \\ \alpha(2) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

bzw. in der Schreibweise von (3.12):

$$\underline{u} = \mathbf{N}^T \underline{u}(k)$$

Mit der Matrix der Interpolationsfunktionen \mathbf{N} folgt aus (3.15) die konsistente Elementmassenmatrix für das 2D-degenerierte Element in allgemeiner Form:

$$\mathbf{M}_c^{E1} = \int_{\partial V^{E1}}^{\circ} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}(1,1) & \bar{\mathbf{M}}(1,2) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \bar{\mathbf{M}}(k,1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} d(\circ V) \quad (3.37)$$

mit der Untermatrix:

$$\bar{\mathbf{M}}(k,1) = \begin{bmatrix} \frac{N(k)N(1)}{0} & \left| \begin{array}{c} 0 \\ N(k)N(1) \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} 0,5sN(k)N(1)h(1)* \\ *(-\sin^t \varphi(1)) \\ 0,5sN(k)N(1)h(1)* \end{array} \right. \\ \frac{0,5sN(k)N(1)*}{h(k)(-\sin^t \varphi(k))} & \left| \begin{array}{c} 0,5sN(k)N(1)* \\ *h(k)\cos^t \varphi(k) \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} \frac{* \cos^t \varphi(1)}{0,25s^2 N(k)N(1)*} \\ *h(k)h(1)* \\ *(\sin^t \varphi(k)\sin^t \varphi(1) + \cos^t \varphi(k)\cos^t \varphi(1)) \end{array} \right. \end{bmatrix}$$

$$\text{Wegen } \int_{\partial V^{E1}}^{\circ} sf(r)d(\circ V) = \iiint_{-1-1-1}^{111} sf(r)\det J \, dr_1 dr_2 dr_3 dt = 0$$

ergibt sich daraus:

$$\bar{\mathbf{M}}(k,1) = \begin{bmatrix} \frac{N(k)N(1)}{0} & \left| \begin{array}{c} 0 \\ N(k)N(1) \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right. \\ \frac{0}{0} & \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right| & \left| \begin{array}{c} 0,25s^2 N(k)N(1)* \\ *h(k)h(1)* \\ *(\sin^t \varphi(k)\sin^t \varphi(1) + \cos^t \varphi(k)\cos^t \varphi(1)) \end{array} \right. \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Das Ergebnis veranschaulicht die aus dem isoparametrischen Ansatz resultierende Entkoppelung von Verschiebungen und Verdrehungen und zeigt die Zeitabhängigkeit der Drehträgheiten auf. Die Trägheitsterme sind im Rahmen des Ansatzes exakt, Näherungen, wie sie z.B. beim Balkenelement üblich sind (Vernachlässigung der Drehträgheiten bei Knotenverdrehungen) sind nicht enthalten, weiterhin sind beliebig große Rotationen zugelassen.

Für kleine Unterschiede in den Knotenverdrehungen innerhalb eines Elementes gilt:

$${}^t\alpha(k) \approx {}^t\alpha(1)$$

Damit sowie mit

$${}^t\varphi(k) = {}^o\varphi(k) + {}^t\alpha$$

erhält man aus (3.38) nach einigen trigonometrischen Umformungen:

$$\bar{M}(k,1) = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{N(k)N(1)}{0} & 0 & 0 \\ \frac{0}{0} & \frac{N(k)N(1)}{0} & 0 \\ \hline & & 0,25s^2N(k)N(1)* \\ & & |*h(k)h(1)* \\ & & |*(\sin^o\varphi(k)\sin^o\varphi(1)+ \\ & & |+\cos^o\varphi(k)\cos^o\varphi(1)) \end{array} \right] \quad (3.39)$$

Die Massenmatrix wird so unabhängig vom Verschiebungszustand; es sei darauf hingewiesen, daß große Rotationen durch die oben getroffenen Annahme - geringer Verdrehungsunterschiede im Element - nicht ausgeschlossen wurden. Die konsistente Massenmatrix wurde in dieser Form in das Programm NISA 80 eingebracht. Daraus ergeben sich geringe Vorteile bei der Programmierung und insbesondere insofern Rechenzeiteinsparungen, als die aus (3.39) resultierende Massenmatrix nur einmal aufgestellt werden muß.

Das Integral (3.37) wird im Programm, nach der Transformation auf die krummlinigen Koordinaten r, s numerisch ausgeführt. Für das Element $M_c(m, n)$ der konsistenten Massenmatrix gilt:

$$\begin{aligned}
 M_c(m, n) &= \int_{\circ V \in I} \circ N(k) N(l) d(\circ V) \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \circ N(k) N(l) \det \circ J dr ds dt \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

Die numerische Integration an den Punkten i, j liefert mit den Gewichten der Integration α_i und der Breite des Elementes b_i :

$$M_c(m, n) = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) b_i, \quad (3.41)$$

mit $F(r_i, s_j) = \circ N(k)_{i,j} N(l)_{i,j} \det J_{i,j}$

3.2.2.2 3D-degeneriertes Element

Entsprechend dem für das zweidimensionale, degenerierte Element geschilderten Vorgehen:

- Einführungen von Drehfreiheitsgraden
- Linearisierung des Verschiebungsansatzes
- Berechnung von M_c mit Hilfe von N

wird nun die konsistente Massenmatrix für das aus dem 3D Kontinuum degenerierte, sogenannte Platten-/Schalenelement formuliert.

Für die Verschiebungen zum Zeitpunkt t wird angesetzt /101/:

$$\begin{bmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_2 \\ {}^t u_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m N(k)(r, s) \begin{bmatrix} {}^t u_1(k) \\ {}^t u_2(k) \\ {}^t u_3(k) \end{bmatrix} + 0,5 t \sum_{k=1}^m N(k)(r, s) h(k) \begin{bmatrix} \cos {}^t \psi_1(k) - \cos {}^0 \psi_1(k) \\ \cos {}^t \psi_2(k) - \cos {}^0 \psi_2(k) \\ \cos {}^t \psi_3(k) - \cos {}^0 \psi_3(k) \end{bmatrix}$$

bzw. für die Verschiebungskremente:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m \mathbf{EN}(k)(r, s) \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} + 0,5t \sum_{k=1}^m \mathbf{EN}(k)(r, s) h(k) \begin{bmatrix} \cos^{t+\Delta t} \psi_1(k) - \cos^t \psi_1(k) \\ \cos^{t+\Delta t} \psi_2(k) - \cos^t \psi_2(k) \\ \cos^{t+\Delta t} \psi_3(k) - \cos^t \psi_3(k) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

Auf die gleichzeitige Verwendung der Bezeichnung t als Zeit und als Normalenrichtung sei hingewiesen, allerdings tritt z.B. in (3.42) die Zeit nur als linker Kopfzeiger auf, t als Faktor vor dem Summenzeichen im 2. Ausdruck bezieht sich auf die Dickenrichtung. Eine Verwechslungsmöglichkeit besteht daher nicht.

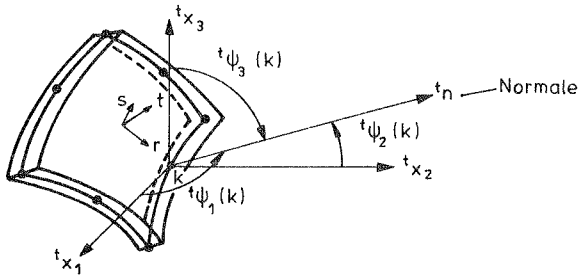


Bild 3.2: 3D-degeneriertes Element

Anstelle der Winkel ψ_1, ψ_2, ψ_3 wird nun ψ sowie $\psi = \psi_1$ verwendet. Für die Richtungs-cosinus ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \cos^t \psi_1(k) &= \cos^t \psi(k) \\ \cos^t \psi_2(k) &= \sin^t \psi(k) \cos^t \psi(k) \\ \cos^t \psi_3(k) &= \sin^t \psi(k) \sin^t \psi(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.43)$$

Nun werden die Knotenverdrehungen ${}^t\alpha(k), {}^t\beta(k)$ (Bild 3.3) eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} {}^t\psi(k) &= {}^0\psi(k) + {}^t\beta(k) \\ {}^t\varphi(k) &= {}^0\varphi(k) + {}^t\alpha(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.44a)$$

Für die Winkel zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ erhält man mit den Inkrementen der Knotenverdrehungen: $\alpha(k)$, $\beta(k)$:

$$\left. \begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\psi(k) &= {}^t\psi(k) + \beta(k) \\ {}^{t+\Delta t}\varphi(k) &= {}^t\varphi(k) + \alpha(k) \end{aligned} \right\} \quad (3.44b)$$

und entsprechend (3.43) für die Richtungscosinus, wobei die trigonometrischen Funktionen wieder durch das jeweils 1. Reihenglied angenähert werden:

$$\begin{aligned} \cos {}^{t+\Delta t}\psi_1(k) &= \cos {}^t\psi(k) - \sin {}^t\psi(k)\beta(k) \\ \cos {}^{t+\Delta t}\psi_2(k) &= [\sin {}^t\psi(k) + \cos {}^t\psi(k)\beta(k)][\cos {}^t\varphi(k) - \sin {}^t\varphi(k)\alpha(k)] \\ \cos {}^{t+\Delta t}\psi_3(k) &= [\sin {}^t\psi(k) + \cos {}^t\psi(k)\beta(k)][\sin {}^t\varphi(k) + \cos {}^t\varphi(k)\alpha(k)] \end{aligned} \quad (3.45)$$

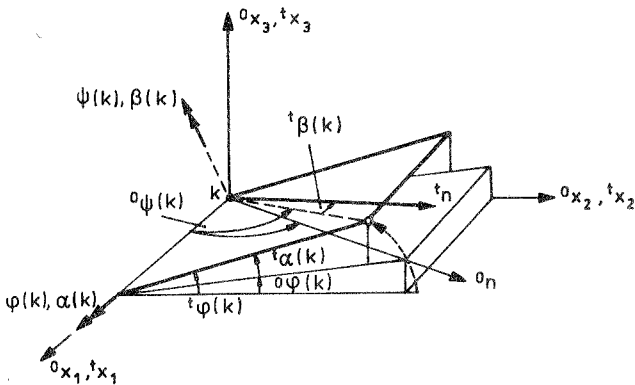


Bild 3.3: Verdrehfreiheitsgrade

Damit erhält man für die Verschiebungen außerhalb der Elementmittelfläche:

$$\begin{aligned}
 & 0,5t \sum_{k=1}^m N(k)(r,s)h(k) \begin{bmatrix} \cos^{t+\Delta t} \psi_1(k) - \cos^t \psi_1(k) \\ \cos^{t+\Delta t} \psi_2(k) - \cos^t \psi_2(k) \\ \cos^{t+\Delta t} \psi_3(k) - \cos^t \psi_3(k) \end{bmatrix} = \\
 & = 0,5t \sum_{k=1}^m N(k)(r,s)h(k) \begin{bmatrix} 0 & -\sin^t \psi(k) \\ -\sin^t \psi(k) \sin^t \varphi(k) & \cos^t \psi(k) \cos^t \varphi(k) \\ \sin^t \psi(k) \cos^t \varphi(k) & \cos^t \psi(k) \sin^t \varphi(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix} \\
 & \hspace{20em} (3.46)
 \end{aligned}$$

Das inkrementelle Verschiebungsfeld kann nun matriziell angeschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N(1) & 0 & 0 & | & 0 & | & -0,5tN(1)h(1)* & \vdots & \dots \\ & & & & & & * \sin^t \psi(1) & & \\ 0 & N(1) & 0 & | & -0,5tN(1)h(1)* & | & 0,5tN(1)h(1)* & \vdots & \dots \\ & & & & & & * \sin^t \psi(1) \sin^t \varphi(1) & & \\ 0 & 0 & N(1) & | & 0,5tN(1)h(1)* & | & 0,5tN(1)h(1)* & \vdots & \dots \\ & & & & & & * \sin^t \psi(1) \cos^t \varphi(1) & & \\ & & & & & & * \cos^t \psi(1) \cos^t \varphi(1) & & \\ & & & & & & * \cos^t \psi(1) \sin^t \varphi(1) & & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(1) \\ u_2(1) \\ u_3(1) \\ \alpha(1) \\ \beta(1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\underline{u} = \underline{N}^T \underline{u}(k) \hspace{15em} (3.47)$$

Mit \underline{N} erhält man nach (3.15) die konsistente Massenmatrix in der Form (3.37). Berücksichtigt man:

$$\int_{\partial V \in I} t f(r,s) d(\partial V) = 0$$

so erhält man die Untermatrix für den Knoten k, l :

$$\bar{M}(k, l) =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} N(k)N(l) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N(k)N(l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N(k)N(l) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,25t^2 N(k)N(l) * & -0,25t^2 N(k)N(l) * \\ & & & *h(k)h(l) * & *h(k)h(l) * \\ & & & * \sin^t \psi(k) \sin^t \psi(l) * & * \sin^t \psi(k) \cos^t \psi(l) * \\ & & & * \cos^t \psi(k) -^t \psi(l) * & * \sin^t \psi(k) -^t \psi(l) * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,25t^2 N(k)N(l) * & 0,25t^2 N(k)N(l) * \\ & & & *h(k)h(l) * & *h(k)h(l) * \\ & & & * \cos^t \psi(k) \sin^t \psi(l) * & * [\sin^t \psi(k) \sin^t \psi(l) + \\ & & & * \sin^t \psi(k) -^t \psi(l) * & + \cos^t \psi(k) \cos^t \psi(l) * \\ & & & & * \cos^t \psi(k) -^t \psi(l) *] \end{array} \right] \quad (3.48)$$

Auch hier zeigt sich erwartungsgemäß die Entkoppelung von Verschiebungen und Verdrehungen sowie die Abhängigkeit der Drehträgheiten von der Zeit. Aus den obengenannten Gründen ist eine Zeitunabhängigkeit der Massenmatrix wünschenswert. Im Gegensatz zum 2D-degenerierten Element ist dies bei dem Schalenelement durch die Annahme kleiner Verdrehungsunterschiede innerhalb des Elementes nicht zu erreichen. Beispielsweise erhält man unter der Annahme:

$${}^t \alpha(k) \approx {}^t \alpha(l)$$

$${}^t \beta(k) \approx {}^t \beta(l)$$

sowie mit (3.44a) nach einigen trigonometrischen Umformungen für $\bar{M}(k, l)_{4,4}$ aus (3.48):

$$\bar{M}(k, l)_{4,4} = 0,25t^2 N(k)N(l)h(k)h(l) [\sin^0 \psi(k) \sin^0 \psi(l) + \sin^t \beta(k) \sin^t (\psi(k) +^0 \psi(l) +^t \beta(k))] \cos^t (\psi(k) -^0 \psi(l))$$

Um eine konsistente Massenmatrix zu erhalten, in der nur

die Winkel der Lage zum Zeitpunkt $t=0$ vorkommen, ist bei diesem Element also zusätzlich ${}^t\beta(k)=0$ zu fordern, dies entspricht der Annahme kleiner Verdrehungen in ${}^t\psi(k)$:

$${}^t\psi(k) \approx {}^0\psi(k)$$

Eine entsprechende Annahme für ${}^t\psi(k)$ bzw. ${}^t\varphi(1)$ ist nicht erforderlich.

Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich aus (3.48):

$$\bar{\mathbf{M}}(k,1)=$$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} N(k)N(1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N(k)N(1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N(k)N(1) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,25t^2 N(k)N(1) * \\ & & & *h(k)h(1) * \\ & & & * \sin^0 \psi(k) \sin^0 \psi(1) * \\ & & & * \cos^0(\varphi(k) - \varphi(1)) * \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0,25t^2 N(k)N(1) * \\ & & & *h(k)h(1) * \\ & & & * \sin^0 \psi(k) \cos^0 \psi(1) * \\ & & & * \sin^0(\varphi(k) - \varphi(1)) * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0,25t^2 N(k)N(1) * \\ & & & *h(k)h(1) * \\ & & & * \cos^0 \psi(k) \sin^0 \psi(1) * \\ & & & * [\sin^0 \psi(k) \sin^0 \psi(1) + \\ & & & * \sin^0(\varphi(k) - \varphi(1)) * \\ & & & + \cos^0 \psi(k) \cos^0 \psi(1) * \\ & & & * \cos^0(\varphi(k) - \varphi(1)) * \end{array} \right] \quad (3.49)$$

Für die Implementierung in NISA 80 wurde die aus (3.49) resultierende Massenmatrix gewählt. Aufgrund des geringen Einflusses der Drehträgheiten auf die Lösung ist der durch obige Annahmen begründete Genauigkeitsverlust unbedeutend.

Das Integral (3.37) wird bei diesem Element in Dickenrichtung analytisch und in der Fläche numerisch ausgeführt. Entsprechend dem oben geschilderten Vorgehen (3.40), (3.41) ergibt sich für Terme, die t^2 nicht enthalten:

$$M_c(m,n) = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) h_{ij} \quad (3.50a)$$

bzw. für die Drehträgheiten:

$$M_c(m,n) = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) h_{ij} / 3 \quad (3.50b)$$

mit z.B. $F(r_i, s_j) = 0,25N(k)N(l)h(k)h(l)\sin^{\circ}\psi(k)\sin^{\circ}\psi(l) * \cos[\phi(k) - \phi(l)] \det J_{ij}$

3.2.3 Zusammengefaßte Massenmatrizen degenerierter Elemente

Bringt man die symmetrische, bandstrukturierte, positiv definite Massenmatrix nach (3.15) bzw. (3.37) auf Diagonalform, was einer näherungsweise Zusammenfassung der verteilten Masse in den Knoten (lumped mass matrix) entspricht, so ergeben sich verschiedene Vorteile: Neben Speicherplatzeinsparungen und Vereinfachungen bei der Programmierung ist die Verkürzung der Rechenzeit, insbesondere bei expliziten Zeitintegrationsverfahren, hervorzuheben. Letztere ist darin begründet, daß sich die Matrizeninversion bei fehlender bzw. entsprechend strukturierter Dämpfungsmatrix sehr einfach gestaltet.

Weiterhin bewirken die zusammengefaßten Massen teilweise eine Verbesserung der Rechenergebnisse, die auf der Kompensation der zu hohen Steifigkeit von Verschiebungselementen basiert. Die damit verbundene Vergrößerung der Perioden gestattet es, bei impliziten Verfahren größere Zeitschrittweiten zu verwenden /130/.

Den genannten Vorteilen stehen einige wesentliche Anforderungen an die Art gegenüber wie die Massen zusammengefaßt werden. So ist im Hinblick auf explizite Verfahren sowie auf die Lösung des Eigenwertproblems (3.1) die positive Definitheit der zusammengefaßten Massenmatrix sicherzustellen. Weiterhin ist bei Elementverfeinerung Konvergenz gegen die exakte Lösung zu fordern. Sie ist nach /96/ gesichert, wenn die kinetische Energie des Elementes durch die zusammengefaßten Massen richtig dargestellt wird.

Dazu ist es erforderlich, daß die Translationsmasse des Elementes beim Zusammenfassen erhalten bleibt.

Obwohl den Drehträgheiten normalerweise nur eine geringe Bedeutung zukommt, ist im Hinblick auf explizite Verfahren unbedingt $M_{\text{ROT}} \neq 0$ zu fordern.

Für das Zusammenfassen der Massen stehen heute mathematische Verfahren zur Verfügung, die das zunächst praktizierte, intuitive Vorgehen erübrigen /39/, /96/, /133/. Im folgenden sollen verschiedene Möglichkeiten unter dem Aspekt diskutiert werden, für die Implementierung in NISA ein effizientes Verfahren auszuwählen, das sämtliche oben genannte Anforderungen erfüllt.

1. Die gleichmäßige Verteilung der Masse auf die Elementknoten, wird nach /133/ durch abschnittsweise konstante Interpolationsfunktionen \tilde{N} ohne Überlappung erreicht. Entsprechend (3.40) gilt damit:

$$M_i(m, n) = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

$$M_i(n, n) = \int_{\circ \vee E_i}^{\circ} \tilde{N}(n) \tilde{N}(n) d(\circ V) \quad (3.51)$$

Die Methode liefert bei Elementen mit linearen Ansätzen dieselben Verteilungen, wie die unten angeführten Verfahren, stellt aber bei höheren Elementen eine zu grobe Näherung dar. Sie ist dann auch als ineffektiv zu bezeichnen /24/.

2. Eine weitere Näherungsstufe besteht darin, die Terme von M_i zeilenweise zu addieren und die so erhaltenen Summen auf der Hauptdiagonale anzuordnen. Mathematisch wird dies durch einen Gewichtungsprozeß erreicht, bei dem als Gewichtungsfunktion $N(n)$ gewählt wird /96/:

$$M_i(n, n) = \int_{\circ \vee E_i}^{\circ} N(n) d(\circ V) \quad (3.52)$$

Dasselbe Vorgehen wird auch bei der Ermittlung

konsistenter Knotenlasten aus gleichmäßig verteilten, konstanten Elementlasten verwendet. Die Methode ist nach /24/ ebenfalls nicht effektiv, einen gewissen Nachteil hinsichtlich der Interpretierbarkeit stellen auch die damit möglichen negativen Massen dar.

3. Eine diagonale Massenmatrix entsteht nach /96/ wegen:

$$N(n)(r(m), s(m), t(m)) = \delta_{nm} \quad (3.53)$$

auch, wenn bei der numerischen Integration von (3.40) als Integrationspunkte die Knotenpunkte gewählt werden. Dies entspricht einer Newton-Cotes-Integration, die allerdings weniger genau als die Integration nach Gauss ist /40/.

4. Eine von Hinton vorgeschlagene "lumping"-Prozedur überführt die konsistente Massenmatrix mittels der Konvergenzbedingung in die zusammengefaßte Massenmatrix /24/, /96/. Die Diagonalglieder von M_c werden so skaliert, daß die Gesamtmasse erhalten bleibt:

$$M_i(n, n) = \int_{\circ V^{EI}} d(\circ V) \int_{\circ V^{EI}} N(n)N(n)d(\circ V) \left[\sum_k \int_{\circ V^{EI}} N(n)N(n)d(\circ V) \right]^{-1} \quad (3.54)$$

Die Effizienz der Methode nach /24/ wird in /95/ bestätigt, als weiterer Vorteil dieses Konzeptes sind die daraus resultierenden, stets positiven Translations- und Drehmassen zu nennen.

Aufgrund seiner Vorzüge wurde das Verfahren von Hinton ausgewählt und in NISA implementiert. Die damit ermittelten Verteilungsfaktoren sind am Beispiel des Schalenelementes im Bild 3.4 zusammengestellt.

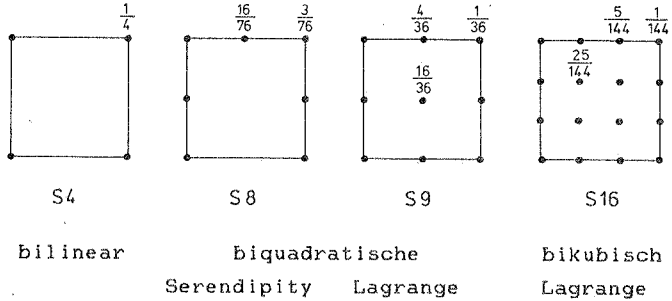


Bild 3.4: Verteilungsfaktoren für zusammengefaßten Massen

Um Aufschlüsse über das Elementverhalten in Abhängigkeit von der Darstellung der Trägheitskräfte zu erhalten, wurde am Beispiel einer quadratischen Kragplatte ($l=3,0$ m; $h=0,2$ m; $E=3 \cdot 10^7$ kN/m²; $q=2,5$ kNsec²/m⁴) Eigenwertberechnungen durchgeführt. In den Bildern 3.6 - 3.9 sind die mit NISA berechneten Ergebnisse der Lösung nach /51/ (s. Bild 3.5) gegenübergestellt. Dabei sind jeweils die für den dritten Eigenwert erhaltenen Bezugswerte (in Prozent) über der Anzahl der verwendeten Elemente aufgetragen.

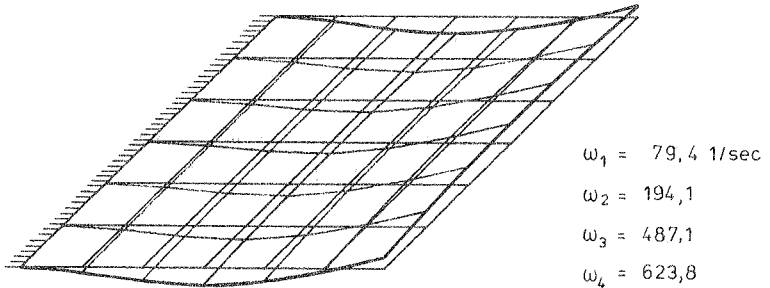


Bild 3.5: Dritte Eigenform, Eigenkreisfrequenzen nach /51/

Das Konvergenzverhalten des linearen Elementes entspricht ganz dem oben erwähnten Verhalten. Während mit M_c die Eigenkreisfrequenz überschätzt wird, liefert M_1 eine genauere Lösung, zudem wird hier die erwähnte Kompensation der zu hohen Steifigkeit offensichtlich.

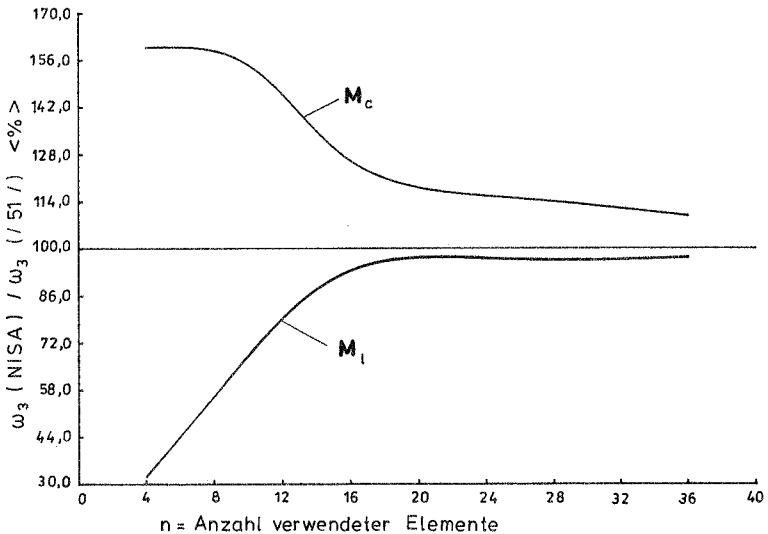


Bild 3.6: S4-Element, regelmäßiges Netz
(reduzierte - 1x1 - Integration)

Zu den bei diesem Element in Verbindung mit reduzierter Integration möglichen "zero-energy-modes" ist folgendes festzustellen: Innere Elementkinematiken treten nur dann auf, wenn für die Idealisierung nur eine Reihe von Elementen verwendet wird. Sobald mehrere Elementreihen nebeneinander liegen, also das Element flächig eingesetzt wird, sind die Kinematiken unterdrückt. Unter Berücksichtigung dieses Effektes kann das Element in diesem Fall ohne Zusatzmaßnahmen, wie sie u.a. in /20/ vorgeschlagen wurden, auch mit reduzierter Integration eingesetzt werden.

Auch das quadratische Serendipity-Element S8 erfährt eine Verbesserung durch die Verwendung von zusammengefaßten Massen. Infolge des anfänglichen Oszillierens (Bild 3.7) sind bereits mit wenigen Elementen gute Eigenwertlösungen zu erwarten.

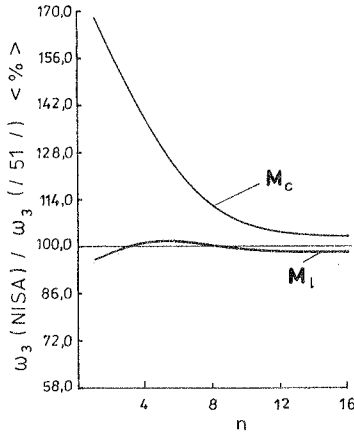


Bild 3.7: S8-Element (volle - 3x3 - Integration)

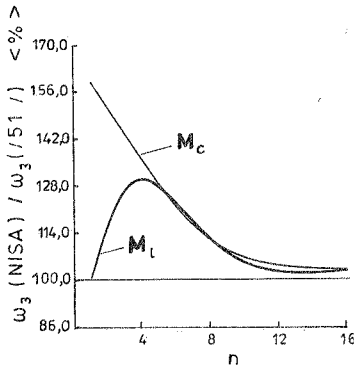


Bild 3.8: S9-Element (3x3)

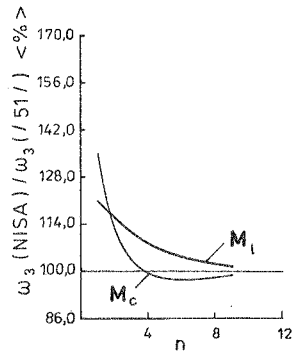


Bild 3.9: S16-Element (4x4)

Bei den beiden Lagrange-Elementen S9 und S16 wird die Kompensation zu hoher Steifigkeiten durch M_l nicht mehr festgestellt. Während der quadratische Ansatz, mit Ausnahme des Bereichs sparsamer Idealisierungen, praktisch übereinstimmende Ergebnisse für M_c und M_l liefert, zeigt das bikubische Element eine Versteifung des Systems durch das Zusammenfassen der Massen an.

Aufgrund der vorliegenden Studie erweist sich das S8-Element als den anderen überlegen. Das Konvergenzverhalten

und die erreichte Genauigkeit (Fehler $< 2\%$) sind besser als beim quadratischen Lagrange-Element. Der Vorteil der Konvergenz zur exakten Lösung beim S16-Element rechtfertigt den damit verbundenen höheren Aufwand nicht, der sich infolge der größeren Bandbreite bei der Gleichungslösung ergibt. Ein weiterer Vorteil des quadratischen Serendipity-Elementes ist darin zu sehen, daß es auch bei reduzierter Integration keine "zero-energy-modes" im System liefert und im Bereich praktisch vorkommender Schlankheitsverhältnisse auch kein "Locking" zeigt /115/.

3.2.4 Zusammenfassung Abschnitt 3.2

Im Rahmen dieses Abschnittes wurde die Lösung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der finiten Elementmethode vorgestellt. Wenn auch für spezielle Probleme effizientere Verfahren existieren, so beweist doch die mit der FEM erreichte Allgemeingültigkeit den besonderen Wert des Verfahrens.

Im Zusammenhang mit der Herleitung der Bewegungsgleichung konnte gezeigt werden, daß die oft zitierte Reihenfolge von Orts- und Zeitdiskretisierung nur für explizite Zeitintegrationsverfahren zutrifft. Für implizite Methoden gilt die umgekehrte Reihenfolge, die Zeitdiskretisierung ist bereits bei der Anwendung des P.d.v.V. einzuführen. Nach der Herleitung von konsistenten und zusammengefaßten Massenmatrizen für degenerierte Elemente, konnte anhand einer vergleichenden Studie im wesentlichen eine Verbesserung des Elementverhaltens durch zusammengefaßte Massen festgestellt werden.

Die im Rahmen obiger Herleitungen eingeführten einschränkenden Annahmen sind nachfolgend zusammengestellt:

- Aus den im Rahmen der Degeneration eingeführten Annahmen /101/ hinsichtlich der Dehnungen und Spannungen in Dickenrichtung resultiert die Forderung, daß die zu behandelnden Schalen höchstens mäßig dick sein dürfen.

- Im Rahmen der Herleitung der konsistenten Massenmatrix des Schalenelementes wurden große Rotationen zumindest in einem Verdrehfreiheitsgrad ausgeschlossen. Wegen des geringen Einflusses, den die Drehträgheiten auf die Lösung nehmen, können mit den so erhaltenen Massenmatrizen - bei entsprechender Formulierung der Steifigkeiten - auch Probleme mit großen Verdrehungen gelöst werden.

3.3 Direkte Zeitintegrationsverfahren

Ziel dieses Abschnittes ist es, die im Abschnitt 3.2.1 aufgestellte Bewegungsgleichung zu lösen. Dazu sollen anhand der in der Literatur verfügbaren Erfahrungen Zeitintegrationsmethoden ausgewählt werden, die den speziellen Anforderungen des dynamischen Stabilitätsproblems genügen (s. Abschnitt 3.3.2).

Soweit erforderlich, werden die Verfahren für die Anwendung im nichtlinearen Bereich aufbereitet (s. Abschnitt 3.3.4). Im Anschluß daran wird die Implementierung in NISA anhand von Beispielen auf ihre Richtigkeit hin überprüft. In diesem Zusammenhang sollen die ausgewählten Methoden auch hinsichtlich Eignung und Effizienz getestet und allgemeine Empfehlungen für ihre Anwendung erarbeitet werden. Hierzu zählen Richtlinien über die Größe des auszuwählenden Zeitschrittes - in Verbindung mit der eingesetzten Iterationsmethode - sowie Wirtschaftlichkeitsüberlegungen zu möglichen Maßnahmen der Konvergenzbeschleunigung.

Eine FE-Idealisierung, die das Systemverhalten den Anforderungen entsprechend gut wiedergibt sowie ein Zeitinkrement, das die Belastungsfunktion korrekt abbildet, werden dabei vorausgesetzt.

3.3.1 Literaturübersicht

Der Übersichtlichkeit halber sollen die Entwicklungen der Zeitintegrationsverfahren für lineare und nichtlineare Probleme getrennt besprochen werden.

Auf dem Gebiet der linearen Methoden wurden bereits sehr früh die Verfahren von Houbolt (1950) sowie Newmark (1959) entwickelt. Eine rege Forschungstätigkeit setzte danach erst mit Beginn der 70iger Jahre ein. Zunächst stand die Analyse der bereits vorhandenen Verfahren hinsichtlich Genauigkeit und numerischer Stabilität im Vordergrund /17/, /76/.

Ab Mitte der 70iger Jahre begann dann eine Phase der Entwicklung neuer Verfahren, so wurden von Trujillo /124/ Padé-Approximationen verwendet, Park /99/, Hilber /53/ sowie Gellert /47/ entwickelten eigene Verfahren. Zienkiewicz /132/ stellte die Ableitung der klassischen Methoden über gewichtete Residuen dar, Trujillo /123/ konstruierte unter Verwendung von oberen und unteren Dreiecksmatrizen ein für positiv definite Steifigkeitsmatrizen unbedingt stabiles explizites Verfahren. Die Entwicklung von implizit-expliziten Methoden von Hughes, Liu /62/ fällt ebenfalls in diesen Zeitraum.

Seit Beginn der 80iger Jahre wurden zwar ebenfalls noch neue Verfahren entwickelt, Senjanovic /110/, Bazzi, Anderheggen /19/, im Vordergrund standen aber allgemeine Darstellungen /45/, /127/, /132/ sowie Stabilitätsnachweise für die neueren Methoden /89/, /22/. Weiterhin wurden in dieser Zeit Verbesserungen der bestehenden Verfahren /98/ und Zusatzmaßnahmen, wie z.B. automatische Schrittweitenfindung /25/ entwickelt.

Die Anwendung direkter Zeitintegrationsverfahren auf nichtlineare Probleme begann ebenfalls bereits mit Beginn der 70iger Jahre. Zunächst wurden zur Beurteilung der Methoden, mangels analytischer Nachweise, Vergleichsrechnungen eingesetzt /128/, /130/, /94/. Die Untersuchungen beschränkten sich in der Regel auf die Verfahren nach Houbolt, Newmark, Wilson, Park, wobei dem Einfluß der Formulierung ("pseudo-force" bzw. Tangentensteifigkeit) auf das Stabilitätsverhalten Rechnung getragen wurde /84/, /118/. Bei der pseudo-force Formulierung werden Nichtlinearitäten durch Korrekturglieder auf der Lastseite berücksichtigt /74/.

Ungefähr ab Mitte der 70iger Jahre wurde auch für nichtlineare Probleme die Stabilität der Verfahren mit Hilfe analytischer Methoden nachgewiesen. Belytschko, Schöberle /23/ und Hughes /65/, /63/ verwendeten dazu ein

Energiekriterium.

Parallel dazu entstanden eine Reihe von Veröffentlichungen zu dem Thema finite Elemente in der nichtlinearen Dynamik /15/, /21/, /1/, /126/. In diese Zeit fällt auch die Entwicklung der Methode von Gellert /46/. Sie ist für nichtlineare Probleme unbedingt stabil wenn \mathbf{K} positiv- oder semidefinit bleibt.

Arbeiten zu implizit-expliziten Verfahren im nichtlinearen Bereich /61/, /100/ datieren auf Anfang der 80iger Jahre. In jüngster Zeit richtet sich das Interesse auch im nichtlinearen Bereich auf die Verbesserung der Effizienz einzelner Verfahren /50/, /97/.

Im Hinblick auf den in dieser Arbeit behandelten Problemkreis läßt sich der aktuelle Stand der Forschung folgendermaßen charakterisieren:

- Die wesentlichen Effekte der numerischen Zeitintegrationsverfahren sind verstanden, eine ausführliche Darstellung findet sich beispielsweise in /74/.
- Für die klassischen Verfahren wie Houbolt, Newmark, Wilson- θ und zentrale Differenzen liegen ausreichende Erfahrungen im linearen sowie im nichtlinearen Bereich vor, für einige der neuentwickelten Methoden wie die α -Verfahren fehlen diese.
- Mit Hilfe der im Schrifttum verfügbaren Untersuchungen, ist folgende Bewertung der Verfahren möglich: Da die pseudo-force Formulierung nur für schwach nichtlineare Probleme geeignet ist /21/, /1/, stellt die Tangentensteifigkeitsmethode das für nichtlineare Probleme geeignetere Konzept dar. Vorteile des Houbolt-Verfahrens gegenüber der Newmark-Methode, die verschiedentlich /128/, /130/ im Zusammenhang mit der pseudo-force Formulierung gefunden wurden, sind damit gegenstandslos. Außerdem stellt die starke numerische Dämpfung der Methode - wegen der damit verbundenen Unterschätzung der kritischen Last-

Grund genug dar, sie bei dynamischen Stabilitätsproblemen nicht zu verwenden.

Aufgrund von vergleichenden Studien /84/ kann der Newmark-Methode in Verbindung mit einer Tangentensteifigkeits-Formulierung ein sehr gutes Stabilitätsverhalten bescheinigt werden. Demgegenüber schneidet die Kollokationsmethode nach Wilson deutlich schlechter ab, hier treten trotz $\theta > 1,37$ Instabilitäten auf, und zwar unabhängig von der verwendeten Formulierung /84/. Von den klassischen impliziten Verfahren mit besonders guten Eigenschaften bleiben somit nur die Methode von Park und die nach Newmark übrig, wobei das Newmark-Verfahren noch den Vorteil einer Einschrittmethode besitzt.

Zudem sind bei nichtlinearen Problemen, nach Weber /127/, Verfahren mit Annahmen hinsichtlich der Beschleunigung (Newmark) solchen mit Verschiebungsannahmen vorzuziehen.

- Bei den expliziten Verfahren kann aus dem Studium der Literatur das zentrale Differenzenverfahren als das geeignetste angegeben werden. Es besitzt die größte Stabilitätsgrenze der expliziten Methoden /76/, /75/ und ist effizienter als das Runge-Kutta-Verfahren /126/. Das von Trujillo /123/ angegebene explizite Verfahren mit unbedingter Stabilität im linearen Fall ist wegen seiner Beschränkung auf positiv definite K ebenfalls ungeeignet.

3.3.2 Anforderungen, Auswahl von Verfahren für dynamische Stabilitätsprobleme

Bei der Auswahl von Zeitintegrationsmethoden für nicht-lineare Untersuchungen ist auf die spezielle Eigenart dieser Probleme Rücksicht zu nehmen. Generell gehen mit den sich ändernden Systemsteifigkeiten unterschiedliche Perioden der einzelnen Eigenformen einher. Speziell bei Stabilitätsproblemen ist davon auszugehen, daß sich in Verbindung mit abnehmender Systemsteifigkeit eine Vergrös-

serung der Perioden einstellen wird. Eine Zeitschrittwahl aufgrund der Frequenzen des unbelasteten Systems wird infolge dieses Effektes im Zuge der Berechnung zu einer Genauigkeitssteigerung führen.

Ein Charakteristikum der dynamischen Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe von Zeitverlaufsberechnungen stellt das Erreichen von instabilen Zuständen dar. Sie sind durch $\mathbf{K} = \text{indefinit}$ gekennzeichnet. Um ein beobachtetes Instabilwerden der Lösung eindeutig dem System zuschreiben zu können, ist in diesem Bereich die Stabilität der Integrationsmethode unbedingt erforderlich.

Wie die Diskussion in /23/, /63/, /64/, /65/ gezeigt hat, ist unbedingte Stabilität des Verfahrens mit konstanter Durchschnittsbeschleunigung im nichtlinearen Bereich nur für positiv definite \mathbf{K} gewährleistet. Dies gilt gleichermaßen für Methoden, die auf finiten Elementen im Zeitbereich basieren /77/.

Generell wird also davon auszugehen sein, daß bei den hier untersuchten Problemen der dynamischen Stabilität aufgrund des Verlustes der positiven Definitheit von \mathbf{K} Instabilitäten des Verfahrens möglich sind. Daher ist im Einzelfall die Stabilität der Methoden nachzuweisen. Da bei der dynamischen Stabilitätsanalyse mit Hilfe der Zeitverlaufsberechnung begleitende Zusatzuntersuchungen aus methodischen Gründen strenggenommen nicht zugelassen sind (s. Abschnitt 3.1), und zudem die Verfahren des Abschnittes 3.4 teilweise nur pauschal Stabilität oder Instabilität erkennen lassen, wird bei den Beispielrechnungen jeweils die Stabilität der Zeitintegration - unabhängig vom Systemverhalten - nachgeprüft.

Eine weitere Anforderung an die Integrationsmethoden betrifft die numerische Dämpfung in den maßgebenden Eigenformen. Hier ist zu fordern, daß sie nicht zu einer wesentlichen Unterschätzung der dynamischen Beullast führt.

Da die in der Literatur verfügbaren vergleichenden Untersuchungen der Methoden nicht speziell auf die Bedürfnisse des dynamischen Stabilitätsproblems zugeschnitten sind

und zudem das Verhalten der Verfahren vom Grad der Nichtlinearität abhängt, kann die geeignetste Methode zunächst nicht angegeben werden. Beachtet man die in /52/ angegebenen allgemeinen Kriterien, so kommt von den klassischen, impliziten Methoden, entsprechend Abschnitt 3.3.1, nur das Verfahren von Newmark in Betracht. Der von Park angegebene Algorithmus scheidet als Mehrschrittverfahren und wegen seiner nicht unerheblichen numerischen Dämpfung aus.

Von den Newmark-Methoden wird nur die Parameterkombination $\beta=1/4$, $\delta=1/2$ betrachtet, andere Kombinationen, wie z.B. $\beta=1/12$ sind trotz höherer Genauigkeit /29/ aufgrund ihrer selbst bei linearen Problemen nur bedingten Stabilität ungeeignet.

Da die α -Verfahren nach Hilber /53/ und Bossak /129/ eine verbesserte Version der Newmark-Methode darstellen, werden sie in die Untersuchungen ebenfalls mit aufgenommen.

Weiterhin soll auch die Verwendung von Padé-Approximationen /125/ diskutiert werden. Sie entsprechen bei homogenen Problemen, bei entsprechender Ansatzwahl, dem Verfahren von Gellert und lassen von daher ein sehr gutes Stabilitätsverhalten erwarten. Gegenüber der Gellertschen Methode besitzen sie zudem den Vorteil, daß die Genauigkeit über die verwendete Approximation gesteuert werden kann.

Im allgemeinen kann davon ausgegangen werden, daß die expliziten Verfahren nur bei Wellenausbreitungsvorgängen den impliziten überlegen sind /24/. Der Vollständigkeit halber und um diese Aussage zu überprüfen, wird die zentrale Differenzenmethode in die weiteren Untersuchungen ebenfalls mit eingeschlossen.

Abschließend sei zur Methodenauswahl folgendes festgestellt: Von den bekannten impliziten und expliziten Methoden wurden die erfolgsversprechendsten ausgewählt. Um eine gewisse Vollständigkeit hinsichtlich der Verfahrensklassen zu

erreichen, wird soweit erforderlich auch die Wilson- θ -Methode (Kollokation) zu Vergleichszwecken herangezogen. Die Klasse der predictor-corrector Verfahren, für die üblicherweise die Zeitschrittbeschränkung der zentralen Differenzenmethode gilt, konnte nach Voruntersuchungen von der weiteren Diskussion ausgeschlossen werden, nachdem sich gezeigt hatte, daß selbst durch zusätzliche Verwendung von Iterationen keine Verbesserung der Methode erreicht werden konnte.

3.3.3 Darstellung der Methoden

Aufgrund der ausführlichen Darstellungen von Knudson /74/, soll hier auf die Wiedergabe bekannter Eigenschaften der Methoden, Parallelen zur modalen Analyse (s. z.B. /18/), sowie auf die Diskussion von Klassifizierungsmöglichkeiten wie implizit-explizit, Mehrschritt- Einschrittverfahren etc. verzichtet werden. Bezüglich des Stabilitätsbegriffs sei auf die Abschnitte 2.2 und 3.4 verwiesen; die dort angegebenen Definitionen, bzw. allgemeingültigen Methoden zur Stabilitätsuntersuchung sind problemunabhängig, sie gelten gleichermaßen für Strukturen wie für numerische Verfahren. Auf einzelne Aspekte, die nur die Methoden betreffen, wird bei der Darstellung der Verfahren eingegangen.

Zum Thema Genauigkeit bei nichtlinearen Problemen sind einige zusätzliche Überlegungen erforderlich. Aufgrund der bei impliziten Methoden erforderlichen Lösungsstrategie, Linearisierung plus Iteration, wird die Genauigkeit der Lösung sowohl von der Zeitintegrationsmethode als auch von der Gleichgewichtsiteration beeinflusst. Auf der Seite der Zeitintegration ist bei impliziten Verfahren der Einfluß höherer Eigenformen, Darstellung der Belastungsfunktion sowie der Trägheitskräfte zu nennen.

Auf der Seite der Gleichgewichtsiteration sind in erster Linie die gewählte Genauigkeitsschranke und die zu ihrer Kontrolle gewählten Größen von Bedeutung. Neben Verschiebungsnormen eignet sich insbesondere auch die Norm der Energie der Ungleichgewichtskräfte, da sie die Vermischung von Dimensionen vermeidet.

Wichtig ist festzuhalten, daß die Einflüsse der Zeitintegrationsmethode und der Gleichgewichtsiteration (dynamisches Gleichgewicht) auf die Genauigkeit der Lösung insofern unabhängig voneinander sind, als Fehler auf der einen Seite nicht durch einen erhöhten Aufwand auf der anderen Seite zu beheben sind. So läßt sich bei vorgegebenem Zeitschritt, die Konvergenz innerhalb der Gleichgewichtsiteration praktisch nicht durch die Ordnung des

gewählten Zeitintegrationsverfahrens beeinflussen. Andererseits lassen sich Fehler in den Annahmen einer Integrationsmethode (Trägheitskräfte, Belastungsfunktion) durch die Iteration nicht beseitigen; von der Realität abweichende Trägheitskräfte führen über ungenaue innere Kräfte auch zum dynamischen Gleichgewicht.

Eine im Rahmen der Annahmen exakte Lösung wird daher, ausreichende Genauigkeit beim Iterationsprozeß vorausgesetzt, nur durch entsprechende Genauigkeit bei der Zeitintegration möglich sein. Auf diesen Aspekt soll im Rahmen der Beispielrechnungen (s. Abschnitt 3.3.4.2) noch detaillierter eingegangen werden.

3.3.3.1 Implizite Verfahren

Newmark-Verfahren

Die Methode nach Newmark war mehrfach Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen, entsprechend gut ist ihre Formulierung auch im nichtlinearen Bereich /15/ bekannt. Hier wird in der Regel unterschieden zwischen der Ermittlung des Verschiebungsinkrementes und der Berechnung seiner Änderungen während der Gleichgewichtsiteration.

Auf diese klassische Darstellung soll im folgenden nur kurz eingegangen werden. Im Vordergrund steht die Entwicklung einer Formulierung, die am Anfang (Berechnung des Verschiebungsinkrementes) und während der Gleichgewichtsiteration (Änderungen des Inkrementes) gleichermaßen gilt und die zudem eine einfachere Darstellung der α -Verfahren gestattet.

Mit den von Newmark eingeführten Ansätzen:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + [(1-\delta){}^t\ddot{\mathbf{u}} + \delta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}]\Delta t \quad (3.55)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + {}^t\dot{\mathbf{u}}\Delta t + [(1/2-\beta){}^t\ddot{\mathbf{u}} + \beta {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}}]\Delta t^2 \quad (3.56)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} \quad (3.57)$$

erhält man, nach Elimination von ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = a_1 \mathbf{u} - a_4 {}^t\dot{\mathbf{u}} - a_3 {}^t\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.58)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} = a_0 \mathbf{u} - a_2 {}^t\dot{\mathbf{u}} - a_5 {}^t\ddot{\mathbf{u}}$$

Folgende Konstante werden eingeführt:

$$a_0 = 1/(\beta\Delta t^2), \quad a_1 = \delta/(\beta\Delta t), \quad a_2 = 1/(\beta\Delta t)$$

$$a_3 = (1/2\beta)-1, \quad a_4 = (\delta/\beta)-1, \quad a_5 = ((\delta/2\beta)-1)\Delta t$$

Die inkrementelle Bewegungsgleichung (3.32) führt zu folgender impliziten Beziehung für das Verschiebungsincrement:

$${}^t_0\overset{\Delta}{\mathbf{K}}\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\overset{\Delta}{\mathbf{R}} - {}^t\mathbf{F} \quad (3.59)$$

mit der effektiven Steifigkeitsmatrix:

$${}^t_0\overset{\Delta}{\mathbf{K}} = a_0\mathbf{M} + a_1\mathbf{D} + {}^t\mathbf{K} \quad (3.60)$$

und den verallgemeinerten effektiven Knotenkräften:

$${}^{t+\Delta t}\overset{\Delta}{\mathbf{R}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + \mathbf{M}(a_2 {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{D}(a_4 {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{u}}) \quad (3.61)$$

Hierin wurde $\mathbf{u}(k)$ durch \mathbf{u} und \mathbf{M}_c durch \mathbf{M} ersetzt, diese Schreibweise soll aus Vereinfachungsgründen auch weiterhin beibehalten werden.

Die Gleichgewichtsforderung für die aus der Linearisierung resultierenden Ungleichgewichtskräfte liefert die Bestimmungsgleichung für die Änderung des Verschiebungsincrementes während der Iteration (Formulierung für die modifizierte Newton-Raphson-Iteration):

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} + {}^t_0\overset{\Delta}{\mathbf{K}}\Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \quad (3.62)$$

${}^{t+\Delta t} \mathbf{F}$ stellt die inneren Kräfte zu einem beliebigen Zeitpunkt zwischen t und $t+\Delta t$ dar.

Mit den Beziehungen (3.58), wobei nun die angepassten Verschiebungskremente Verwendung finden:

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} = a_1(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - a_4 {}^t \dot{\mathbf{u}} - a_5 {}^t \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.63)$$

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} = a_0(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) - a_2 {}^t \dot{\mathbf{u}} - a_3 {}^t \ddot{\mathbf{u}}$$

erhält man die Grundgleichung für die Gleichgewichtsiteration, die hier für die modifizierte Newton-Raphson-Iteration angeschrieben wird.

$${}^t \hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \check{\mathbf{R}} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} \quad (3.64)$$

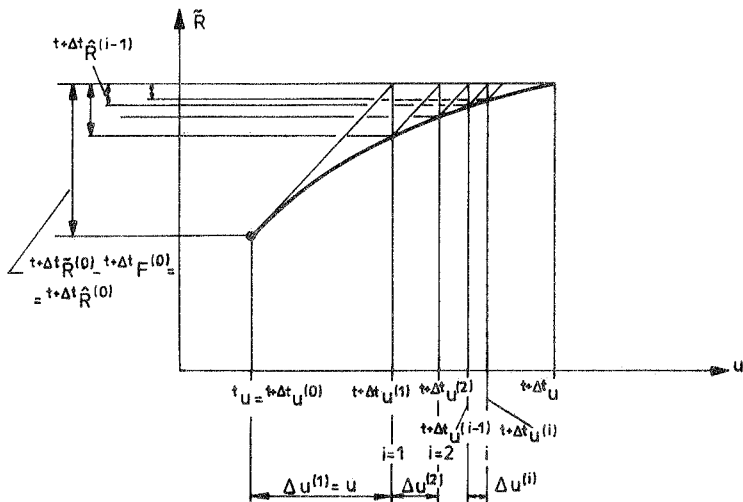


Bild 3.10: Modifizierte Newton-Raphson-Iteration

Mit den Bezeichnungen gemäß Bild 3.10, kann der gesamte Lösungsprozess vereinfacht dargestellt werden, woraus sich insbesondere im Hinblick auf die α -Verfahren Vorteile ergeben:

$${}^t_0 \hat{\mathbf{K}} \Delta \mathbf{u}^{(1)} = {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{R}}^{(1-1)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(1-1)} \quad (3.65)$$

mit ${}^t_0 \hat{\mathbf{K}}$ entsprechend (3.60), sowie mit

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{R}}^{(1-1)} = & {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - \mathbf{M} (a_0 \sum_{i=1}^i \Delta \mathbf{u}^{(1-1)} - a_2 {}^t \ddot{\mathbf{u}} - a_3 {}^t \ddot{\ddot{\mathbf{u}}}) - \\ & - \mathbf{D} (a_4 \sum_{i=1}^i \Delta \mathbf{u}^{(1-1)} - a_4 {}^t \dot{\mathbf{u}} - a_5 {}^t \ddot{\mathbf{u}}) \end{aligned} \quad (3.66)$$

Für die Verschiebungen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gilt:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(1)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{(1-1)} + \Delta \mathbf{u}^{(1)} = {}^t \mathbf{u} + \sum_{i=1}^i \Delta \mathbf{u}^{(1)} \quad (3.67)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}^{(1)} = a_1 \sum_{i=1}^i \Delta \mathbf{u}^{(1)} - a_3 {}^t \dot{\mathbf{u}} - a_5 {}^t \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.68)$$

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}^{(1)} = a_0 \sum_{i=1}^i \Delta \mathbf{u}^{(1)} - a_2 {}^t \dot{\mathbf{u}} - a_4 {}^t \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.69)$$

mit $\Delta \mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{0}$

und $\Delta \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}$

Aus Stabilitätsgründen wird im folgenden, sofern nichts anderes angegeben, stets das Newmark-Verfahren mit der Parameterkombination $\beta=1/4$, $\delta=1/2$ (konstante Durchschnittsbeschleunigung) verwendet. Wie aus (3.60) hervorgeht, kann mit Hilfe der stets positiv definiten Massenmatrix über die Wahl von Δt auch bei indefiniter Steifigkeitsmatrix noch positive Definitheit von $\hat{\mathbf{K}}$ hergestellt werden. Daraus folgt, daß die Newton-Raphson-Iteration bei Stabilitätsproblemen unter zeitabhängiger Belastung erfolgreich eingesetzt werden kann. Anders als im statischen Fall braucht also nicht auf Bogenlängenverfahren /38/ zurückgegriffen werden.

Der geschilderte Stabilisierungseffekt hängt für $\mathbf{D}=\mathbf{0}$ nur von a_0 und damit im wesentlichen von der Zeitschrittweite ab. Gleiches gilt auch für die im folgenden dargestellten α -Verfahren von Hilber und Bossak.

Hilber- α -Verfahren

Der von Hilber /53/ für die Newmark-Verfahren eingeführte zusätzliche Dämpfungsterm $\bar{\mathbf{D}}$ gewährleistet sowohl unbedingte Stabilität als auch Kontrollierbarkeit der numerischen Dämpfung der Methode. Diese Zusatzdämpfung ist proportional zu den inneren Kräften:

$$\bar{\mathbf{D}}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} = \alpha_H \mathbf{K}^{t+\Delta t} (\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t) = \alpha_H \mathbf{K}^t \mathbf{u} \quad (3.70)$$

Sie liefert bei positiv definitiver Steifigkeitsmatrix und zunehmenden Verschiebungen $(\mathbf{u}^{t+\Delta t} > \mathbf{u}^t)$ eine der physikalischen entgegengerichtete, negative Dämpfung für $\alpha < 0$.

Mit (3.70) lautet die Bewegungsgleichung nun:

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} + (1 + \alpha_H) \mathbf{K}^t \mathbf{u} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{F}^t \quad (3.71)$$

Die beim Newmark-Verfahren angegebene vereinfachte Darstellungsweise gilt auch für die Hilbersche Methode, wenn anstelle von (3.60)

$$\mathbf{K}^A = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{D} + (1 + \alpha_H) \mathbf{K} \quad (3.72)$$

eingeführt wird.

Unbedingte Stabilität bei linearen Problemen verlangt die Erfüllung folgender Bedingungen:

$$-1/3 \leq \alpha_H \leq 0; \quad \beta = 0,25(1 - \alpha_H)^2; \quad \delta = 0,5 - \alpha_H$$

Bossak- α -Verfahren

Mit der gleichen Zielsetzung wie Hilber wurde in /129/ eine Zusatzdämpfung proportional zu den Trägheitskräften eingeführt, die sich hieraus ergebende Methode wird nach einem der Autoren von /129/ als Bossak- α -Verfahren bezeichnet.

$$\bar{D}^{**\Delta t} \ddot{u} = \alpha_p M (-^{**\Delta t} \ddot{u} + {}^t \ddot{u}) \quad (3.73)$$

Für $\alpha_p > 0$ ergibt sich bei beschleunigter Bewegung ($^{**\Delta t} \ddot{u} > {}^t \ddot{u}$) eine negative zusätzliche Dämpfung, also eine anfachende Wirkung.

Die Bewegungsgleichung schreibt sich nun:

$$(1 - \alpha_p) M {}^{**\Delta t} \ddot{u} + \alpha_p M {}^t \ddot{u} + D {}^{**\Delta t} \dot{u} + {}^t K u = {}^{**\Delta t} R - {}^t F \quad (3.74)$$

Der Vorteil der oben eingeführten kompakten Darstellung des gesamten Lösungsvorgangs, zeigt sich auch bei dieser Methode. Mit:

$${}^t \hat{K} = a_0 (1 - \alpha_p) M + a_1 D + {}^t K \quad (3.75)$$

anstelle von (3.60), sowie mit

$$\begin{aligned} {}^{**\Delta t} \tilde{R} = & {}^{**\Delta t} R - (1 - \alpha_p) M (a_0 \sum_{i=1}^j \Delta u - a_2 {}^t \dot{u} - (a_3 - \alpha_p / (1 - \alpha_p)) {}^t \ddot{u}) - \\ & - D (a_1 \sum_{i=1}^j \Delta u - a_4 {}^t \dot{u} - a_5 {}^t \ddot{u}) \end{aligned} \quad (3.76)$$

anstelle von (3.66), geht das Newmark- in das Bossak- α Verfahren über.

Für unbedingte Stabilität im linearen Fall sowie Genauigkeit 2. Ordnung sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

$$\beta \geq 0,5 \delta \geq 0,25; \quad \alpha_p = 0,5 - \delta$$

Hinsichtlich der durchzuführenden Rechenoperationen pro Zeitschritt ergeben sich aus (3.75), (3.76) insofern Vorteile dieser Methode gegenüber dem Hilber- α -Verfahren, als innerhalb eines Zeitschrittes weder bei der Berechnung der linken noch der rechten Gleichungsseite zusätzliche Operationen anfallen. Bei der erforderlichen Rechenzeit pro Schritt muß sich dies allerdings nicht unmittelbar auswirken, da hierbei die Anzahl durchzuführender Gleichgewichtsiterationen eine bedeutende Rolle spielt.

Padé-Approximationen

Wurde bei den bis hierher besprochenen Integrationsmethoden direkt von der Bewegungsgleichung (3.32) ausgegangen, so soll nun ein Verfahren vorgestellt werden, das die Gleichgewichtsbeziehung in Form der Zustandsgleichung zugrunde legt. Auf die Herleitung der Gleichungen für nichtlineare Berechnungen soll weiter unten, nach der Vorstellung des Lösungsweges für das lineare Problem, eingegangen werden.

Die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (3.77)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{c}$$

hat für zeitinvariante Systeme ($\mathbf{A} = \text{konst.}$) folgende Lösung /88/, /124/:

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{c} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (3.78)$$

bzw.

$$\mathbf{z}(t+\Delta t) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z}(t) + e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{f}(\tau) d\tau \quad (3.79)$$

Die Auswertung des Integrals für eine abschnittsweise lineare Belastungsfunktion führt (3.79) über in:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z} &= e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{z} + (e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{f} + \\ &+ [e^{\mathbf{A}\Delta t} \Delta t - (e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1}] \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{f} - e^{\mathbf{A}\Delta t} \mathbf{f}) / \Delta t \end{aligned} \quad (3.80)$$

Anstelle der vollständigen Reihenlösung für die Matrixexponentialfunktion:

$$e^{A\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t + (\mathbf{A}\Delta t)^2/2 + \dots + (\mathbf{A}\Delta t)^n/n! \quad (3.81)$$

werden Padé-Approximationen /125/ verwendet. Deshalb wird die Methode im folgenden auch als Padé-Verfahren bezeichnet.

Das skizzierte Vorgehen ist auf nichtlineare Probleme nicht direkt übertragbar, hier sind eine Reihe zusätzlicher Überlegungen erforderlich.

Zunächst ist zu überprüfen, inwieweit die Grundvoraussetzung der Zeitinvarianz von \mathbf{A} erfüllt ist. Prinzipiell gilt $\mathbf{A}=\mathbf{A}(t)$, also Zeitvarianz. Aufgrund der bereits vorgenommenen Inkrementierung (s. Abschnitt 3.2) und wegen $\mathbf{M}, \mathbf{D}, \mathbf{K}=\text{konst.}$ im Inkrement ist aber Zeitinvarianz für das Inkrement gewährleistet. Auf dieser Basis kann also das oben dargestellte Konzept verwendet werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird die Herleitung der für nichtlineare Probleme notwendigen Beziehungen in drei Schritten vorgenommen:

1. Überführung der inkrementellen Bewegungsgleichung in die Zustandsgleichung
2. Entwicklung der Beziehungen für das Inkrement des Zustandsvektors
3. Darstellung der Gleichgewichtssiteration

Im folgenden wird anstelle der korrekten Bezeichnung \mathbf{A} zur Vereinfachung \mathbf{A} verwendet.

1. Überführung der inkrementellen Bewegungsgleichung in die Zustandsgleichung

Die Bewegungsgleichung für implizite Verfahren:

$$\mathbf{M}^{\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}^{\Delta t} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{F} \quad (3.32)$$

wird durch formelles Hinzufügen von:

$$\mathbf{K}^{\Delta t} \mathbf{u} = \mathbf{K}^{\Delta t} \mathbf{u} \quad (3.82)$$

auf die Form:

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} + {}_0\mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}_0\mathbf{F} + {}_0\mathbf{K}^t \mathbf{u} \quad (3.83)$$

gebracht. Der so gebildete Term:

$${}_0\mathbf{K}^t \mathbf{u} + {}_0\mathbf{K} \mathbf{u} = {}_0\mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \quad (3.84)$$

stellt aufgrund der vorhandenen Nichtlinearität keineswegs die inneren Kräfte zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ dar. Wie noch gezeigt wird, bleibt dies ohne Einfluß auf die Lösung, da der genannte Ausdruck infolge der inkrementellen Formulierung des Verfahrens wieder herausfällt.

Mit Hilfe der Identität:

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.85)$$

läßt sich die Beziehung folgendermaßen darstellen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{K} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}_0\mathbf{F} + {}_0\mathbf{K}^t \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Nach Multiplikation von links mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & | & \mathbf{O} \\ \hline -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} & | & \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

sowie mit

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

geht sie in die inkrementelle Zustandsgleichung über:

$$\boxed{{}^{t+\Delta t} \mathbf{z} = \mathbf{A} {}^{t+\Delta t} \mathbf{z} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}} \quad (3.89)$$

Darin sind

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{I} \\ - & + & - \\ -\mathbf{M}^{-1} {}^t \mathbf{K} & | & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{(\text{impl})} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} + {}^t \mathbf{K} {}^t \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Ganz entsprechend erhält man - ausgehend von der Bewegungsgleichung (3.31) für das explizite Verfahren - den verallgemeinerten Erregervektor zum Zeitpunkt t :

$${}^t \mathbf{f}_{(\text{expl})} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} ({}^t \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} + {}^t \mathbf{K} {}^t \mathbf{u}) \end{bmatrix} \quad (3.92)$$

Da (3.91) bzw. (3.92) unterschiedliche Bewegungsgleichungen ((3.91): implizite - (impl), (3.92): explizite - (expl)) zugrunde liegen, lassen sich die beiden Beziehungen formal nicht ineinander überführen.

Wie aus (3.90) bis (3.92) hervorgeht, ist sowohl \mathbf{A} (über ${}^t \mathbf{K}$) als auch \mathbf{f} (über ${}^t \mathbf{F}$) eine Funktion des Verschiebungsvektors ${}^t \mathbf{u}$.

2. Entwicklung der Beziehungen für das Inkrement des Zustandsvektors

Die Lösung wird wegen der diskretisierten Form der Zustandsgleichung an diskreten Zeitpunkten ermittelt. Für das Inkrement des Zustandsvektors gilt:

$$\boxed{\mathbf{z} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{z} - {}^t \mathbf{z} = (\mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) {}^t \mathbf{z} + \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{e}^{\mathbf{A}\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{e}^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{f}(\tau) d\tau} \quad (3.93)$$

Um Genauigkeit 4. Ordnung zu erhalten, wird die exponentielle Matrix durch:

$$e^{A\Delta t} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}\Delta t/2 + (\mathbf{A}\Delta t)^2/12)^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t/2 + (\mathbf{A}\Delta t)^2/12) \quad (3.94)$$

approximiert /124/. Unter der Annahme einer stückweise linearen Belastungsfunktion ergibt sich nun aus (3.93):

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = & [(\mathbf{I} - \mathbf{A}\Delta t/2 + (\mathbf{A}\Delta t)^2/12)^{-1} \times \\ & \times (\mathbf{I} + \mathbf{A}\Delta t/2 + (\mathbf{A}\Delta t)^2/12) - \mathbf{I}]^t \mathbf{z} + \\ & + (e^{A\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} {}^t \mathbf{f} + \\ & + [e^{A\Delta t} \Delta t - (e^{A\Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1}] \mathbf{A}^{-1} ({}^t \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}) / \Delta t \end{aligned} \quad (3.95)$$

Nach Linksmultiplikation mit:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A}\Delta t/2 + (\mathbf{A}\Delta t)^2/12)$$

sowie einigen Umformungen, erhält man:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}\Delta t/2 + (\mathbf{A}\Delta t)^2/12) \mathbf{z} = \\ & = \mathbf{A}\Delta t {}^t \mathbf{z} + ({}^{t+\Delta t} \mathbf{f} + {}^t \mathbf{f}) \Delta t/2 + \mathbf{A} ({}^t \mathbf{f} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}) \Delta t^2/12 \end{aligned} \quad (3.96)$$

bzw. ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - & \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \\ \hline - & + & - \\ \hline -\mathbf{M}^{-1} {}^t \mathbf{K} & | & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{array} \right] \Delta t/2 + \\ & + \left[\begin{array}{c|c|c} -\mathbf{M}^{-1} {}^t \mathbf{K} & | & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \\ \hline - & + & - \\ \hline \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{M}^{-1} {}^t \mathbf{K} & | & -\mathbf{M}^{-1} {}^t \mathbf{K} + \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D} \end{array} \right] \Delta t^2/12 \right) \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{I} \\ - & + & - \\ -\mathbf{M}^{-1} {}^t_0\mathbf{K} & | & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t\mathbf{u} \\ \\ {}^t\dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} \Delta t + \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + {}^t\mathbf{R} - 2 {}^t_0\mathbf{F} + 2 {}^t_0\mathbf{K} {}^t\mathbf{u}) \end{bmatrix} \Delta t/2 + \\
&+ \begin{bmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{I} \\ - & + & - \\ -\mathbf{M}^{-1} {}^t_0\mathbf{K} & | & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \\ \mathbf{M}^{-1}({}^t\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R}) \end{bmatrix} \Delta t^2/12 \quad (3.97)
\end{aligned}$$

Diese unsymmetrische Form der Gleichung ist für die numerische Lösung höchst ungeeignet. Durch Linksmultiplikation mit

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

/36/ wird die Beziehung symmetrisiert. Damit erhält man nach einigen Umformungen die Bestimmungsgleichung für das Inkrement, die im Programm direkt aufgestellt wird:

$$\begin{aligned}
&\boxed{ \begin{bmatrix} \mathbf{D} + {}^t_0\mathbf{K}\Delta t/2 & | & \mathbf{M} - {}^t_0\mathbf{K}\Delta t^2/12 \\ - & + & - \\ \mathbf{M} - {}^t_0\mathbf{K}\Delta t^2/12 & | & -\mathbf{M}\Delta t/2 - \mathbf{D}\Delta t^2/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \\ \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} ({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} + {}^t\mathbf{R} - 2 {}^t_0\mathbf{F})\Delta t/2 \\ (\mathbf{M} {}^t\dot{\mathbf{u}}_{12}/\Delta t + {}^t\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{R})\Delta t^2/12 \end{bmatrix} \quad (3.99)
\end{aligned}$$

Im Gegensatz zu den oben dargestellten Verfahren ist eine Trennung der beiden Matrixgleichungen und separates Lösen für \mathbf{u} bzw. $\dot{\mathbf{u}}$ nun nicht mehr möglich. Aus der Gleichungslösung ergeben sich gleichzeitig Verschiebungen und Geschwindigkeiten. Allerdings wird die damit verbundene Ersparnis zusätzlicher Vektoroperationen durch den erhöhten Aufwand bei der Gaußschen Elimination mehr als ausgeglichen.

3. Darstellung der Gleichgewichtsiteration

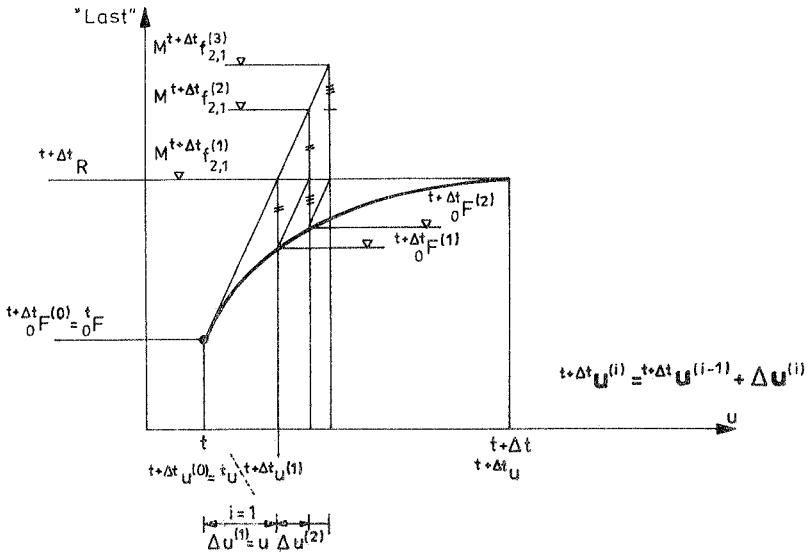


Bild 3.11: Gleichgewichtsiteration, modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren

Die Gleichgewichtsiteration, die aus obigen Gründen (s. Abschnitt 3.3.3) in der Regel auch bei Verwendung der Padé-Approximationen erforderlich ist, liegt folgendes Konzept zugrunde: Da Gleichung (3.93) nur mit dem Bezugszustand ${}^t \mathbf{z}$ gilt (die während der Gleichgewichtsiteration erreichten Zwischenpunkte ${}^t \mathbf{z} + \mathbf{z} \dots$ verletzen die Gleichgewichtsbedingung), wird zur Berechnung der Änderung des Inkrementes $\Delta \mathbf{z}$ der Zustandsvektor ${}^{t+\Delta t} \mathbf{z}$ herangezogen. Die $\Delta \mathbf{z}$ entsprechenden Ungleichgewichtskräfte werden formal als äußere Kräfte behandelt (s. Bild 3.11) und entsprechend (3.83) auf der rechten Seite mitgenommen. Damit erhält man in jedem Iterationsschritt einen verbesserten Zustandsvektor ${}^{t+\Delta t} \mathbf{z}^{(1)}$ beziehungsweise aus der Differenz zu ${}^{t+\Delta t} \mathbf{z}^{(i-1)}$ die Änderung des Inkrementes $\Delta \mathbf{z}^{(i)}$. Für den verallgemeinerten Erregervektor ergibt sich während der Iteration:

$$i=1: {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{2,1}^{(1)} = \mathbf{M}^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(0)} + {}^t \mathbf{K} \mathbf{u})$$

$$i=2: {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{2,1}^{(2)} = \mathbf{M}^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(1)} + {}^t \mathbf{K} \mathbf{u} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(1)})$$

$$i=3: {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{2,1}^{(3)} = \mathbf{M}^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(2)} + {}^t \mathbf{K} \mathbf{u} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(1)} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(2)})$$

$$\text{allgemein: } {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}_{2,1}^{(i)} = \mathbf{M}^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} + {}^t \mathbf{K} \mathbf{u} + \sum_{i=2}^i {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(i-1)}) \quad (3.100)$$

Für die Änderung des Inkrementes des Zustandsvektors resultiert aus:

$$\Delta \mathbf{z}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{z}^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{z}^{(i-1)} \quad (3.101)$$

mit (3.80), folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{z}^{(i)} &= (e^{\mathbf{A} \Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^{(i)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^{(i-1)}) + \\ &+ [e^{\mathbf{A} \Delta t} \Delta t - (e^{\mathbf{A} \Delta t} - \mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1}] \mathbf{A}^{-1} [{}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^{(i-1)} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{f}^{(i)}] / \Delta t \end{aligned} \quad (3.102)$$

In ausgeschriebener Form erhält man gemäß obiger Ableitung nach der Symmetrisierung:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{D} + {}^t \mathbf{K} \Delta t / 2 & \mathbf{M} - {}^t \mathbf{K} \Delta t^2 / 12 \\ \hline \mathbf{M} - {}^t \mathbf{K} \Delta t^2 / 12 & -\mathbf{M} \Delta t / 2 - \mathbf{D} \Delta t^2 / 12 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{(i)} \\ \Delta \dot{\mathbf{u}}^{(i)} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} (-{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-2)} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(i-1)}) \Delta t / 2 \\ -(-{}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-2)} + {}^t \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(i-1)}) \Delta t^2 / 12 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.103)$$

die Grundgleichung für die Iteration. Das dargestellte Vorgehen gilt ebenfalls bei Verwendung der Standard Newton-

Raphson-Iteration, dort ist lediglich anstelle von ${}^0\mathbf{K}$, ${}^{t+\Delta t}{}^0\mathbf{K}^{(i-1)}$ zu setzen.

3.3.3.2 Explizites Verfahren

Da die übliche Art, die zentrale Differenzenmethode darzustellen, in der Literatur häufig zu finden ist (s. z.B. /18/), soll sie hier nicht wiedergegeben werden. Stattdessen soll gezeigt werden, wie die entsprechenden Beziehungen mit Hilfe von Padé-Approximationen erhalten werden können.

Im Gegensatz zu impliziten Verfahren erforderte die Herleitung der Bewegungsgleichung (3.31) (explizite Methoden) keine Linearisierung in den Verzerrungen, eine Gleichgewichtsiteration ist deshalb bei dem expliziten Verfahren nicht erforderlich. Die folgende Entwicklung expliziter Beziehungen wird demzufolge in zwei Schritten vorgenommen:

1. Überführung der inkrementellen Bewegungsgleichung in die Zustandsgleichung

Wie bei dem impliziten Verfahren wird die Bewegungsgleichung (3.31) mit Hilfe der Identität:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \quad (3.104)$$

in die Zustandsgleichung analog zu (3.89) übergeführt. Hierin sind:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{I} \\ - & + & - \\ \mathbf{0} & | & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f}_{(expl)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}({}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}{}^0\mathbf{F}) \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

weiterhin gilt:

$${}^t \mathbf{f}_{(expl)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}({}^t \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F}) \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Die Bewegungsgleichung (3.31) ist nur bezüglich des Ortes diskretisiert. Entsprechend der in (3.80) enthaltenen Annahme einer abschnittsweise linearen Belastungsfunktion muß nun auch hinsichtlich der Zeit diskretisiert werden. Damit ist die allgemeine Lösung (3.80) verwendbar.

2. Bestimmungsgleichung für den Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t+\Delta t$

Die Matrizenexponentialfunktion wird nun durch

$$e^{\mathbf{A}\Delta t} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + (\mathbf{A}\Delta t)^2/2$$

angenähert /124/; der Zustandsvektor zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ wird mit (3.80):

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{z} &= (\mathbf{I} + \mathbf{A} + (\mathbf{A}\Delta t)^2/2) {}^t \mathbf{z} + \\ &+ ({}^t \mathbf{f} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{f})\Delta t/2 + \mathbf{A} {}^t \mathbf{f}\Delta t^2/2 \end{aligned} \quad (3.108)$$

bzw. ausgeschrieben und umgeformt :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} \\ {}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & | & \mathbf{I}\Delta t - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\Delta t^2/2 \\ \hline \mathbf{0} & | & \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\Delta t + (\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D})^2\Delta t^2/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t \mathbf{u} \\ {}^t \dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}({}^t \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F})\Delta t^2/2 \\ \mathbf{M}^{-1}({}^t \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F})\Delta t/2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\mathbf{M}^{-1}({}^t \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F})\Delta t^2/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.109)$$

Dies sind bereits die Beziehungen des zentralen Differenzenverfahrens, die getrennt gelöst werden können

und in dieser Formulierung keine Startprozedur erfordern. Für den Sonderfall eines ungedämpften Systems mit einem Freiheitsgrad folgt:

$${}^{t+\Delta t}\dot{u} = {}^t\dot{u} + M^{-1}({}^tR - {}^tF + {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F)\Delta t/2 \quad (3.110)$$

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u}\Delta t + M^{-1}({}^tR - {}^tF)\Delta t^2/2 \quad (3.111)$$

Zum Beweis der Übereinstimmung des Verfahrens mit der zentralen Differenzenmethode wird in die Bewegungsgleichung (3.18) die Differenzenbeziehung:

$${}^t\ddot{u} = ({}^{t-\Delta t}u - 2{}^tu + {}^{t+\Delta t}u)/\Delta t^2$$

eingesetzt. Als Ergebnis erhält man:

$${}^{t+\Delta t}u = 2{}^tu - {}^{t-\Delta t}u + M^{-1}({}^tR - {}^tF)\Delta t^2$$

Unter Verwendung der zweiten Differenzengleichung:

$${}^{t-\Delta t}u = -2{}^t\dot{u}\Delta t + {}^{t+\Delta t}u$$

folgt daraus Gleichung (3.111)

$${}^{t+\Delta t}u = {}^tu + {}^t\dot{u}\Delta t + M^{-1}({}^tR - {}^tF)\Delta t^2/2$$

Wie im Rahmen der Beispielrechnungen noch gezeigt wird (s. Abschnitt 3.3.4.3), ergeben sich hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit keine nennenswerten Unterschiede zwischen beiden Formulierungen.

3.3.4 Beispielrechnungen

3.3.4.1 Zweibock

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf den im Abschnitt 2.5.4 vorgestellten Zweibock. Unter der dynamischen Beullast, die dort zu $P=0,77$ MN bestimmt wurde, ergab sich für $\Delta t > 0,000125$ sec ein stark von der Größe des Zeitschrittes abhängiges Systemverhalten. Dies wurde auf den Störungscharakter der Zeitintegrationsmethode zurückgeführt. Im folgenden soll gezeigt werden, daß die dabei vorausgesetzte Stabilität des Newmark-Verfahrens, auch für den größten verwendeten Zeitschritt von $\Delta t = 0,001$ sec wirklich gegeben ist.

Der Nachweis basiert auf der Überlegung, daß Stabilität bzw. Instabilität der Zeitintegrationsmethode nur von der Größe des Zeitschrittes und nicht von der Belastung des Systems bestimmt wird. Daraus folgt, daß sich eine Instabilität der Integrationsmethode, die bei dem größeren Zeitschritt möglich wäre, unabhängig von der Lasthöhe bemerkbar machen muß. Demnach können die Belastungen für den Nachweis so gewählt werden, daß sich Störungen aus dem Verfahren im Zeitverlauf nicht mehr bemerkbar machen. Bei Stabilität der Zeitintegration mit dem größeren Zeitschritt dürfen die oben geschilderten Phänomene nun nicht mehr auftreten, die Lösungen müssen für $\Delta t = 0,001$ bzw. $\Delta t = 0,000125$ übereinstimmen.

Entsprechend dieser Zusammenhänge wurden, wie in den Bildern 3.12 und 3.13 dargestellt, für Belastungen knapp unter- bzw. oberhalb der dynamischen Beullast Zeitverlaufsrechnungen sowohl mit dem kleinsten als auch mit dem größten oben genannten Zeitschritt durchgeführt. Es ergibt sich Übereinstimmung zwischen beiden Lösungen. Damit ist die Stabilität des Newmark-Verfahrens auch für $\Delta t = 0,001$ sec bewiesen und die unter der Beullast beobachteten Einflüsse der Zeitschrittweite eindeutig auf den Störungscharakter der Numerik zurückgeführt.

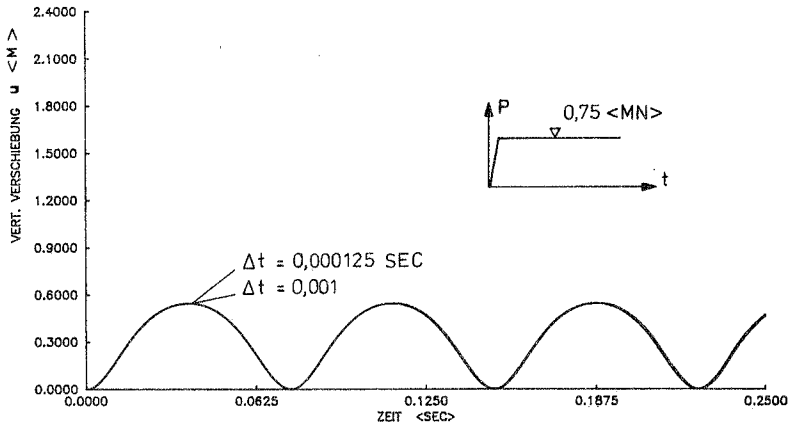


Bild 3.12: Verschiebungszeitverlauf, $P=0,75 \text{ MN}$

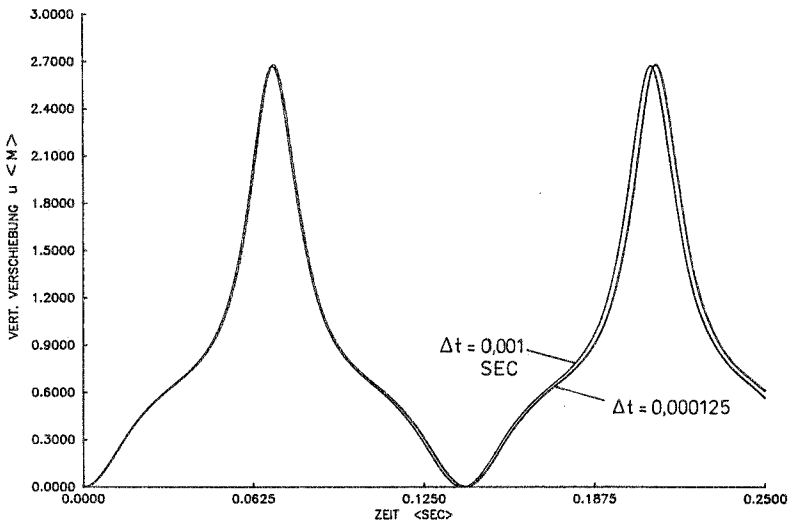
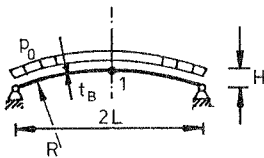


Bild 3.13: Verschiebungszeitverlauf, $P=0,8 \text{ MN}$

3.3.4.2 Kreisbogen

1. Allgemeines, Idealisierung

Der in Bild 3.14 dargestellte Kreisbogenträger unter gleichmäßiger, plötzlich aufgebrachtter Belastung wurde bereits in /15/, /39/ untersucht. Er stellt ein typisches, dynamisches Stabilitätsproblem eines Tragwerkes dar und ist besonders geeignet, die in NISA implementierten Methoden auszutesten. Darüber hinaus sollen die oben ausgewählten Verfahren hinsichtlich Eignung, Genauigkeit, Effizienz sowie der Einflüsse der Zeitschrittweite, Art des Iterationsverfahrens etc. auf die Lösung untersucht werden.



Breite $b = 1,0$ in

$$T_1 = 2,37 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$$

$$T_2 = 1,46 \cdot 10^{-3}$$

$$T_3 = 0,553 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 67,115 \text{ in}$$

$$L = 17,371 \text{ in}$$

$$H = 2,287 \text{ in}$$

$$t_B = 1,0 \text{ in}$$

$$E = 10^7 \text{ lb/in}^2$$

$$\nu = 0,2$$

$$\rho = 2,44 \times 10^{-4} \text{ lb sec}^2 / \text{in}^4$$

$$r = \frac{H}{2L} = \frac{1}{15}$$

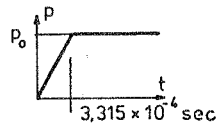


Bild 3.14: Kreissträger, System, Belastung, Perioden

Da die Analyse des kompletten Systemverhaltens hier nicht im Vordergrund steht, wird vereinfachend nur das halbe System idealisiert, d.h. nur das symmetrische Problem betrachtet. Für die Idealisierung werden zehn 4-knotige, 2-dimensionale, degenerierte, isoparametrische Elemente mit vollständig reduzierter Integration eingesetzt; ferner wird von zusammengefaßten Massen ausgegangen. Die Idealisierung ist dergestalt, daß die Lösung durch die Ortsdiskretisierung nicht beeinflusst wird.

Die Anzahl der Unbekannten beträgt damit 89, die

Bandbreite von \mathbf{K} ist 12. Weiterhin wird Hookesches Materialverhalten angenommen und die konsistent linearisierte Steifigkeitsmatrix nach /102/ in TL-Formulierung verwendet. Die Belastung wird wie in /15/ innerhalb von 0,0003315 sec aufgebracht und anschließend konstant gehalten. Dies entspricht einem plötzlich wirkenden Außendruck (step-load).

2. Dynamische Beullast, Vergleich mit der Literatur

Mit Hilfe des Newmark-Verfahrens ($\beta=1/4$, $\delta=1/2$) wird, unter Vernachlässigung der physikalischen Dämpfung, die dynamische Beullast ermittelt. Der in Bild 3.15 für verschiedene hohe Belastungen dargestellte zeitliche Verlauf der Vertikalverschiebung des Scheitelpunktes (Knoten 1) wurden mit $\Delta t_1=0,00016575$ sec berechnet. $\Delta t_1 (\approx T_1/14)$ stellt ungefähr das 60-fache des für Wellenausbreitungsvorgänge zulässigen Zeitschrittes dar. Dieses Verhältnis ist nur wegen des verwendeten, impliziten Verfahrens und der Beschränkung auf das globale Systemverhalten möglich.

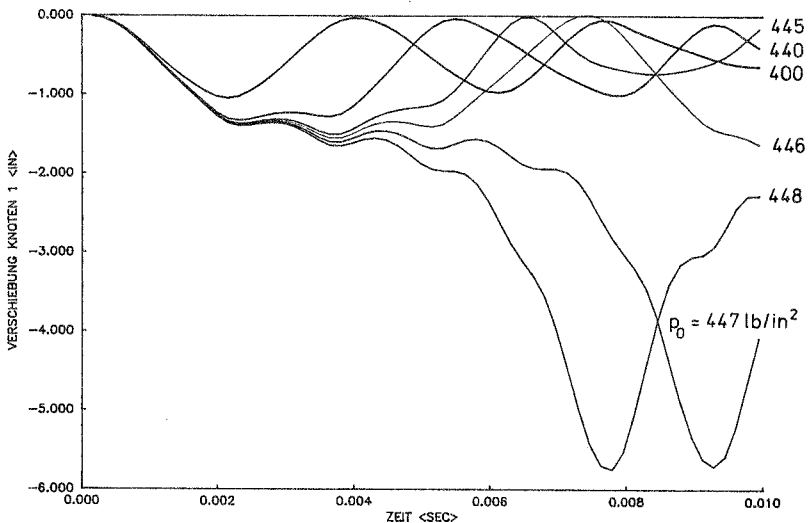


Bild 3.15: Ermittlung der dynamischen Beullast

Der Instabilität des Gleichgewichts signalisierende, plötzliche Übergang des Systems in eine Schwingung um die untere stabile Gleichgewichtslage wird zum ersten Mal unter $p=447 \text{ lb/in}^2$ beobachtet. Wird die Berechnung mit $p=448 \text{ lb/in}^2$ durchgeführt, so tritt das Verschiebungsmaximum zu einem früheren Zeitpunkt auf. Diese Abhängigkeit des Zeitpunktes des Erreichens der unteren Gleichgewichtslage von der Belastungshöhe gilt allgemein, sie wird im folgenden benutzt werden, um Aussagen hinsichtlich einer Über- bzw. Unterschätzung der dynamischen Beullast zu treffen, die bei einzelnen Integrationsverfahren möglich ist. Wie der zeitliche Verlauf der Verschiebungen für $p<447$ zeigt, treten nach Durchlaufen des ersten Verschiebungsmaximums nicht unerhebliche numerische Dämpfungseffekte auf. Aus diesem Grund wurde zur Ermittlung der dynamischen Beullast nur das erste Verschiebungsmaximum und das hieraus erfolgende Durchschlagen des Systems herangezogen. Das sich für $p=446$ andeutende Maximum für $t>0,01 \text{ sec}$ wurde daher nicht beachtet. Weiterhin begründen die geschilderten numerischen Effekte die oben getroffene Vernachlässigung der physikalischen Dämpfung. Aus dieser Vorgehensweise resultieren bei den hier betrachteten Problemen dynamische Durchschlagslasten auf der sicheren Seite. Auf eine mögliche destabilisierende Wirkung der physikalischen Dämpfung sei an dieser Stelle hingewiesen.

In Bild 3.16 sind die hier berechneten Ergebnisse denen von /15/ gegenübergestellt, wobei die längs des Kreisbogens aufintegrierten normierten Verschiebungen über der Zeit aufgetragen sind. Die oben berechnete dynamische Beullast liegt nur 0,7 % über der in /15/ angegebenen von $p=444$. Der zeitliche Unterschied, der beim Auftreten der Maximalverschiebung beobachtet wird, ist unbedeutend. Er ist auf die in /15/ gewählte Idealisierung mit ebenen Scheibenelementen sowie auf die Empfindlichkeit der Lösung im Bereich der kritischen Last (s.u.) zurückzuführen. Eine Kontrollrechnung mit NISA, bei der ebenfalls 8-knotige Scheibenelemente verwendet wurden, lieferte eine dynamische

Beullast von 444,0 lb/in², also exakt den in /15/ angegebenen Wert.

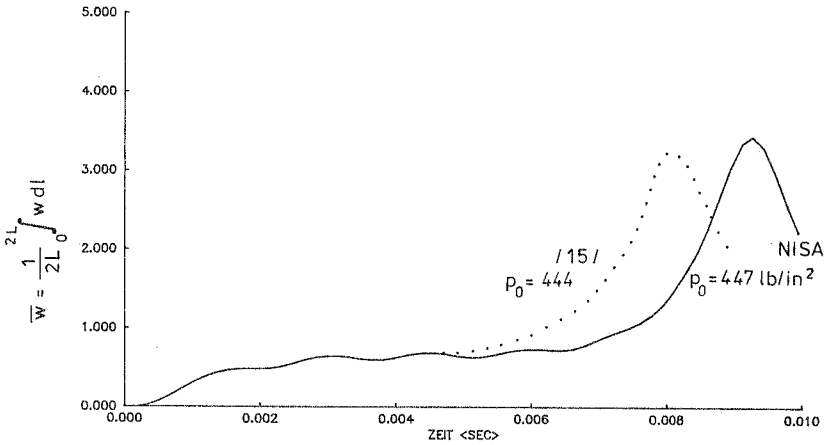


Bild 3.16: Vergleich: NISA - /15/

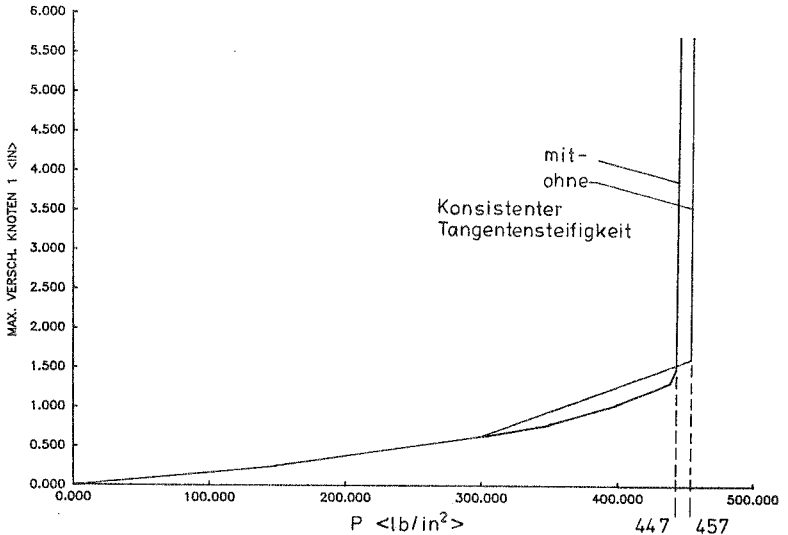


Bild 3.17: Dynamische Beullast

Sehr anschaulich läßt sich die dynamische Beullast auch mit der in Bild 3.17 gewählten Auftragung gemäß /30/ (Maximalverschiebung über aufgebrachtter Last) darstellen. Zusätzlich ist in Bild 3.17 auch die kritische Lasthöhe eingezeichnet, die sich ohne den in /102/ eingeführten Zusatzterm in \mathbf{K} zu $p=457$ ergibt. Der geringe Unterschied von nur 2,3 % in den dynamischen Beullasten weist darauf hin, daß große Rotationen bei diesem Beispiel keine Rolle spielen.

3. Vergleich der Zeitintegrationsverfahren

Um die Frage zu beantworten, inwieweit die einzelnen Integrationsverfahren in der Lage sind, das dynamische Beulverhalten darzustellen, wurden (Bild 3.18) jeweils unter der oben gefundenen Beullast Zeitverlaufsberechnungen durchgeführt. Das Zeitinkrement von $\Delta t_i=0,00016575$ sec ist dabei so gewählt, daß die Gleichgewichtsiteration mit dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren durchgeführt werden kann, und nicht die Standard-Form eingesetzt werden muß.

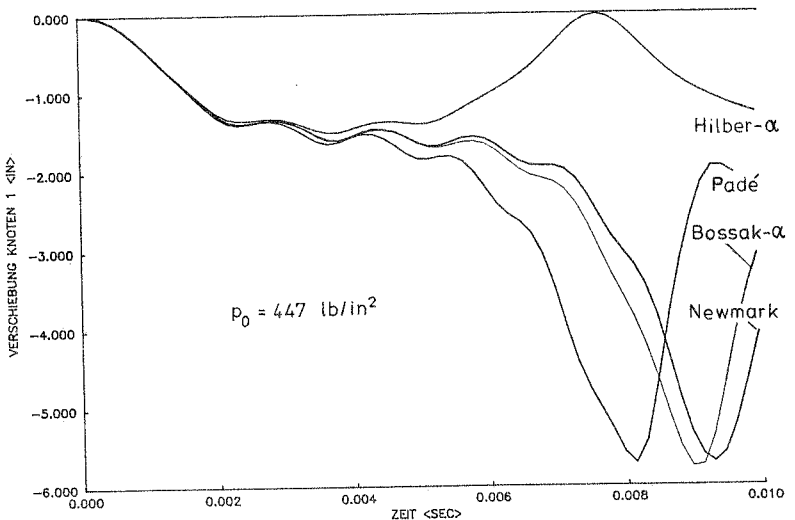


Bild 3.18: Vergleich der Verfahren für $\Delta t_i=0,00016575$ sec

Nachdem die Wilson- θ - sowie die Methode der zentralen Differenzen aus Wirtschaftlichkeitsgründen (s. unter 5.) auszuschließen waren, konnten die Untersuchungen auf die α -Verfahren ($\alpha=-0,1$; $\beta=0,3025$; $\delta=0,6$) und das Padé-Verfahren 4. Ordnung beschränkt werden.

Zunächst sind die nur geringen Unterschiede zwischen den Zeitverläufen nach Bossak bzw. Newmark festzustellen. Das zeitlich frühere Auftreten der Maximalverschiebung bei der Lösung nach Bossak deutet auf eine dynamische Beullast hin, die geringfügig unter dem nach Newmark ermittelten Wert liegt. Dies wird der Wirkung der Zusatzdämpfung des Bossak-Verfahrens zugeschrieben, die hier anfachenden Charakter besitzt.

Der mit dem Hilber- α -Verfahren berechnete Verschiebungs-Zeitverlauf, zeigt das dynamische Beulen noch nicht an. Der Kurvenverlauf entspricht ungefähr dem mit Newmark für $p = 446$ berechneten. Die Unterschätzung der dynamischen Beullast weist auf eine positive numerische Dämpfung des Verfahrens hin. Sie ist auf den Umstand zurückzuführen, daß K im Bereich der kritischen Last nicht mehr positiv definit ist, und damit der Dämpfungscharakter des Verfahrens bei zunehmenden Verschiebungen entgegengesetzt dem Vorzeichen von α wird. Obwohl die dynamische Beullast nur geringfügig unterschätzt wird, sollte die Methode aufgrund der erwähnten starken Abhängigkeit der numerischen Dämpfung von der Systemsteifigkeit nur mit Vorsicht eingesetzt werden.

Schließt man wieder vom Zeitpunkt des Auftretens der Maximalverschiebung auf die Höhe der dynamischen Beullast, so zeigt der nach dem Padé-Verfahren berechnete Verschiebungs-Zeitverlauf, daß die Padé-Approximation eine geringere kritische Last liefert als das Newmark-Verfahren. Die nach der Padé-Methode für $p=447$ gefundene Kurve stimmt näherungsweise mit dem nach dem Newmark-Verfahren für $p=448$ ermittelten Verlauf überein.

4. Einfluß der Zeitschrittweite

Zur Klärung der Frage, inwiefern das Lösungsverhalten der einzelnen Integrationsmethoden von der Wahl des Zeitschrittes abhängt, wurden die unter 3. geschilderten Berechnungen mit $\Delta t_2 = 0,0003315$ sec wiederholt. Die Größe des Zeitinkrementes macht die Verwendung der Standard Newton-Raphson Iteration erforderlich.

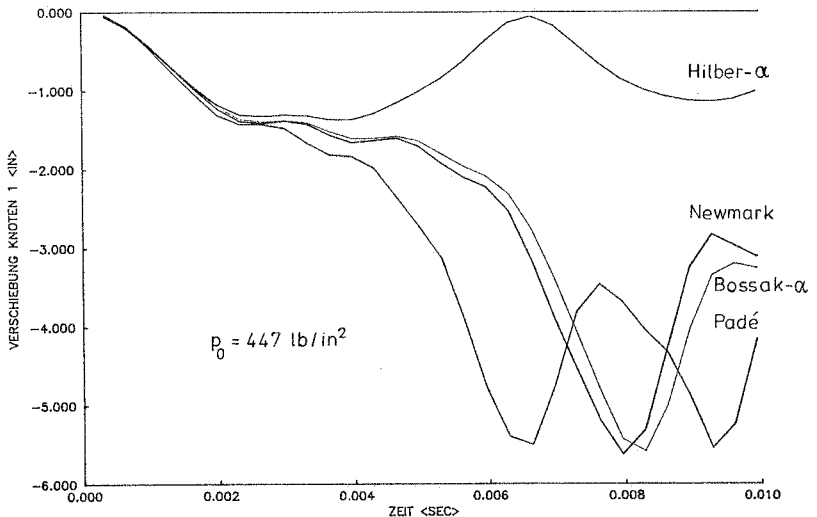


Bild 3.19: Vergleich der Verfahren, $\Delta t_2 = 0,0003315$ sec

Wie aus Bild 3.19 abzulesen ist, liefern das Padé- und das Hilber- α -Verfahren ein Systemverhalten, das dem aus Bild 3.18 sehr ähnlich ist. Lediglich beim Newmark- und Bossak- α -Verfahren ergeben sich, was den Zeitpunkt des Verschiebungsmaximums anbelangt, Unterschiede zum oben beschriebenen Verhalten. Hier ist nicht eindeutig feststellbar, ob dieser Effekt auf Periodenfehler des Newmark-Verfahrens zurückgeht, die bei der vergrößerten Zeitschrittweite wahrscheinlich sind, oder ob ein veränderter Dämpfungscharakter der Bossak- α -Methode vorliegt. Wegen der Abhängigkeit der

Bossakschen Zusatzdämpfung (s. Abschnitt 3.3.3.1) von der Änderung der Trägheitskräfte, die über den Zeitverlauf sicher unterschiedliche Vorzeichen besitzt, muß angenommen werden, daß ihre vorherrschende Wirkung nicht exakt vorherbestimmbar ist und gewissen Zufälligkeiten unterliegt. Allerdings zeigt sich hier auch, daß die zusätzliche Dämpfung nach Bossak in ihrer Auswirkung auf das Systemverhalten weniger gravierend ist, als diejenige nach Hilber.

Insgesamt treten bei allen Verfahren die Verschiebungsmaxima zu früheren Zeitpunkten auf, als dies bei der kleineren Zeitschrittweite der Fall ist. Hier zeigt sich wieder der bereits beim Zweibock diskutierte Störungscharakter der numerischen Lösung (s. Abschnitt 2.5.4), der aufgrund von $\Delta t_2 > \Delta t_1$ hier stärker zutage tritt.

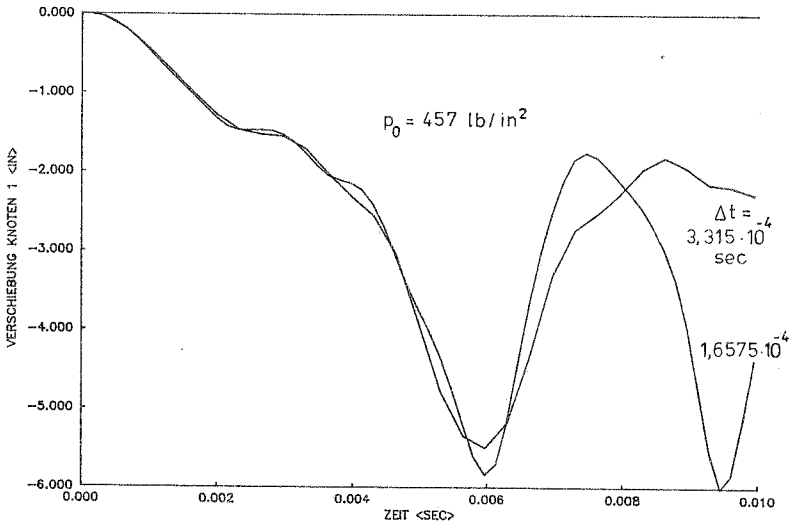


Bild 3.20: Untersuchung zur Stabilität der Integrationsmethode

Die bei dieser Aussage vorausgesetzte Stabilität der Zeitintegrationsmethode ist noch zu zeigen. Dazu sind im Bild 3.20 Verschiebungszeitverläufe dargestellt, die mit

dem Newmark-Verfahren für $p = 457$ jeweils für Δt_1 und Δt_2 berechnet wurden. Die Last liegt deutlich oberhalb der dynamischen Beullast, die Verschiebungsmaxima beider mit unterschiedlichen Zeitschritten berechneten Kurven stimmen überein. Damit ist auch für dieses Beispiel gezeigt, daß die Annahme der Stabilität des Zeitintegrationsverfahrens zu Recht getroffen wurde.

5. Effizienz der Verfahren

Zur Beurteilung der Effizienz der untersuchten Verfahren werden die bei den oben diskutierten Berechnungen ($p=447 \text{ lb/in}^2$) verbrauchten Rechenzeiten verglichen. Die in Tabelle 3.1 zusammengestellten Werte wurden an der CRAY-1M ermittelt und beinhalten neben reinen Rechenzeiten auch Aussagen über den belegten Speicherplatz und erforderliche IO-Operationen.

Angaben über das zentrale Differenzen-Verfahren, sowie über die Wilson- θ -Methode sind in der Tabelle aus folgenden Gründen nicht enthalten: Konvergenz konnte bei der Lösung nach Wilson- θ ($\theta=1,4$) nur für $\Delta t \leq 6,63 \times 10^{-5}$ sec erreicht werden. Da die verbrauchte Rechenzeit pro Zeitschritt ähnlich der des Newmark-Verfahrens ist, kann die Wilson- θ -Methode damit als unwirtschaftlich ausgeschlossen werden. Gleiches gilt für die Lösung mit zentralen Differenzen: zwar verbraucht das Newmark-Verfahren pro Schritt das 3-fache der Rechenzeit der zentralen Differenzen-Methode pro Zeitschritt, das Verhältnis zwischen verwendetem Zeitinkrement nach Newmark und dem nach zentralen Differenzen zulässigen ist aber größer als 100!

Zunächst ist festzustellen, daß das Newmark- sowie die beiden α -Verfahren näherungsweise gleiche Rechenzeiten verbrauchen, die Vorteile des Newmark-Verfahrens gegenüber den beiden anderen sind gering. Dies gilt sowohl für den kleineren Zeitschritt mit modifizierter Newton-Raphson-Iteration als auch für den größeren mit Standard Newton-Raphson-Iteration. Der Vorteil der geringeren Anzahl von Zeitschritten, bei der größeren Zeitschrittweite, wird

durch den erhöhten Aufwand bei der Gleichgewichtsiteration wieder zunichte gemacht.

Tabelle 3.1

Verfahren	Rechenzeit für $t = 0$ bis $0,009945$ sec	
	Δt_1	Δt_2
Newmark	29,8 mNR	30,1 SNR
Bossak- α	32,3 mNR	32,6 SNR
Hilber- α	30,5 mNR	30,5 SNR
Padé	(109,6) m/SNR	82,7 SNR

mNR - modifizierte Newton-Raphson-Iteration

SNR - Standard Newton-Raphson-Iteration

Zusatzuntersuchungen mit kleineren Zeitinkrementen als $0,00016575$ sec /114/ zeigten, daß hierfür wieder mehr Rechenzeit aufgewendet werden muß. Aufgrund dieser Überlegungen ist hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz derjenige Zeitschritt als optimal zu bezeichnen, der die Verwendung des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens für die Gleichgewichtsiteration zuläßt, und bei dem Konvergenz nach ca. 3 Iterationsschritten erreicht wird.

Zu den für die Lösung nach dem Padé-Verfahren verbrauchten Rechenzeiten ist folgendes anzumerken: Der kleinere Zeitschritt ließ die Verwendung des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens nur bis zum 45. Zeitschritt zu, anschließend mußte auch bei diesem Zeitinkrement die Standard Newton-Raphson-Iteration eingesetzt werden. Derartige Konvergenzschwierigkeiten wurden bei den α - bzw. Newmark-Verfahren nicht beobachtet, da dort in der effektiven Steifigkeitsmatrix der Term $a_{,M}$ enthalten ist, der sich numerisch günstig auswirkt (s. Abschnitt 3.3.3.1).

Im Gegensatz zu den übrigen Methoden ergeben sich beim Padé-Verfahren Rechenzeiteinsparungen bei Verwendung des größeren Zeitschrittes. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Lösung des vergrößerten Gleichungssystems bei diesem Beispiel mehr Zeit in Anspruch nimmt als das Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix.

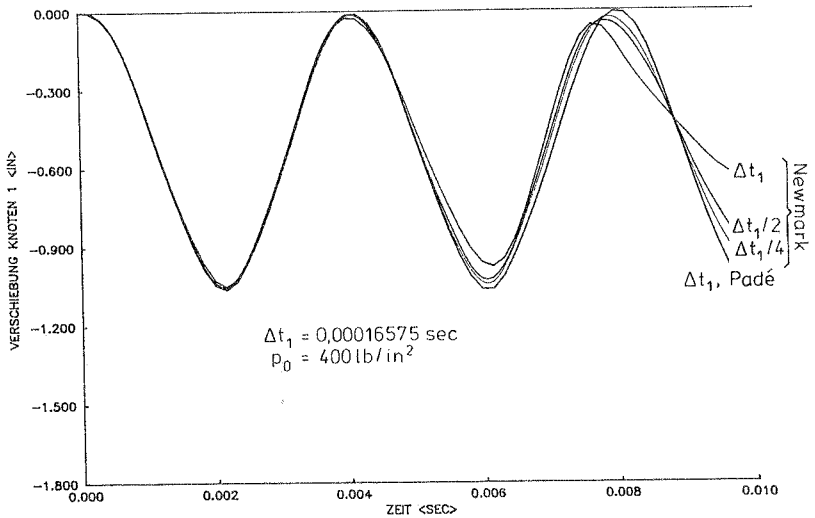


Bild 3.21: Vergleich: Padé - Newmark

Unabhängig vom gewählten Zeitschritt, erweist sich die Padé-Methode als wesentlich rechenzeitintensiver als beispielsweise das Newmark-Verfahren. Aufgrund der höheren Genauigkeit, die mit der verwendeten Padé-Approximationen verbunden ist, erscheint dieser direkte Vergleich fragwürdig. Um dies zu veranschaulichen, wurden wie in Bild 3.21 dargestellt, die Ergebnisse nach dem Newmark- bzw. Padé-Verfahren für die Laststufe $p=400,0 \text{ lb/in}^2$ einander gegenübergestellt. Es zeigt sich, daß um die Genauigkeit des Verfahrens 4. Ordnung ($\Delta t_1 = 0,00016575$) zu erreichen, bei Newmark die 4-fache Anzahl von Zeitschritten erforderlich ist. Die dabei verbrauchte Rechenzeit liegt nun in

der Größenordnung derjenigen des Padé-Verfahrens. Damit kann festgestellt werden, daß die verwendete Padé-Approximation 4. Ordnung, gemessen an der erreichten Genauigkeit der Lösung, durchaus in Konkurrenz zu den übrigen hier behandelten Verfahren treten kann. Inwieweit dies auch für größere Beispiele zutrifft, wird im folgenden noch zu überprüfen sein.

6. Genauigkeit der Lösung

Tatsächlich resultieren die geschilderten Genauigkeitsprobleme behauptet, aus den Zeitintegrationsmethoden. Sie sind durch zusätzliche Maßnahmen bei der Gleichgewichtsiteration nicht zu beseitigen (s. Abschnitt 3.3.3). Neben der üblicherweise kontrollierten Verschiebungsnorm wurde zusätzlich die Energienorm der Ungleichgewichtskräfte (nach /14/) entsprechend

$$\Delta \mathbf{u}^{(1)T} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} - \mathbf{M} {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}^{(i-1)}) = \text{EINORM} \quad (3.112)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(1)T} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^t \mathbf{F} - \mathbf{M} {}^t \ddot{\mathbf{u}}) = \text{ENORM}$$

$$\text{EINORM} \leq \text{RTOL} * \text{ENORM}$$

kontrolliert und die Genauigkeitsschranke RTOL variiert. Beide Maßnahmen führten nicht zu einer Veränderung des Ergebnisses, lediglich zu einem erhöhten Aufwand an Rechenzeit.

Daß andererseits auch die Qualität der in den Zeitintegrationsmethoden enthaltenen Annahmen die Gleichgewichtsiteration kaum beeinflußt, zeigt ein Vergleich der von Integrationsverfahren unterschiedlicher Ordnung benötigten Anzahl von Gleichgewichtsiterationen. Bei der Lösung nach Newmark (Δt_2 , p=447) werden durchschnittlich 2,7 Iterationen pro Zeitschritt (I/TS) durchgeführt, für die Padé-Approximation 4. Ordnung ergeben sich durchschnittlich 2,6 I/TS.

7. Methoden zur Konvergenzbeschleunigung

Zur Verbesserung des Konvergenzverhaltens der im Zusammenhang mit dem Newmark-Verfahren beschriebenen Newton-Raphson-Iteration sind aus dem Schrifttum eine Reihe von Verfahren bekannt. Eine Literaturübersicht findet sich z.B. bei Crisfield /37/. Methoden zur Konvergenzbeschleunigung wurden ebenfalls in /14/ zur Anwendung empfohlen.

Zwei Verfahren, die bei statischen Problemen bereits mit Erfolg eingesetzt wurden /106/, /38/ sind "acceleration" und "line search". Sie sollen am Beispiel des Kreisbogens näher untersucht werden. Die modifizierte Newton-Raphson-Iteration mit "acceleration", wird nach /37/ auch als Sekanten-Newton-Methode bezeichnet. Wie in /37/ dargestellt, kann dieses Verfahren direkt aus den quasi Newton-Methoden abgeleitet werden. Gegenüber diesen hat die Sekantenmethode den Vorteil, daß sie mit den im Zuge der modifizierten Newton-Raphson-Iteration berechneten Größen auskommt.

"Acceleration" stellt nichts anderes dar, als eine Skalierung des im ersten Schritt des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens berechneten Verschiebungsincrementes:

$$\Delta \mathbf{u}^{(1)} = A^{(1)} \Delta \mathbf{u}^{*(1)} \quad (3.113)$$

Mit dem aus

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{*(1)} = {}^{**} \Delta \mathbf{R}^{(1-1)} \quad (3.114)$$

(s. (3.65)) berechneten Verschiebungsincrement $\Delta \mathbf{u}^{*(1)}$.

Der Skalierungsfaktor $A^{(1)}$ ergibt sich nach /38/ zu:

$$A^{(1)} = -\Delta \mathbf{u}^{(1-1)T} {}^{**} \Delta \mathbf{R}^{(1-2)} [\Delta \mathbf{u}^{(1-1)T} ({}^{**} \Delta \mathbf{R}^{(1-1)} - {}^{**} \Delta \mathbf{R}^{(1-2)})]^{-1} \quad (3.115)$$

Der Verlauf der Iteration ist am System mit einem Freiheitsgrad im Bild 3.22 schematisch dargestellt.

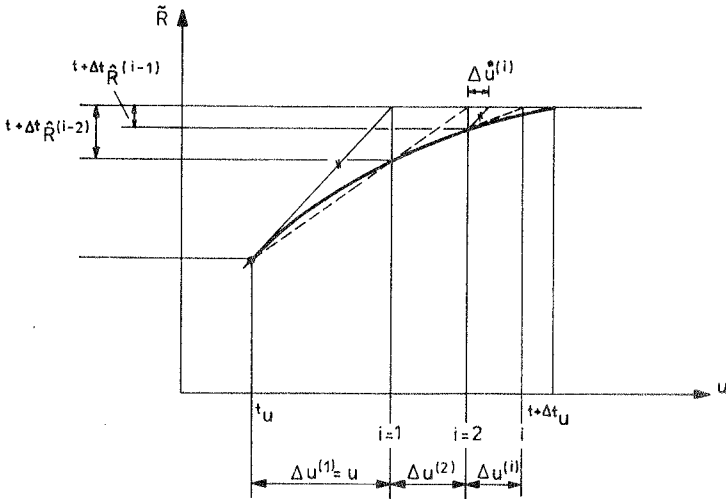


Bild 3.22: Iterationsverlauf mit "acceleration"

Als weitere Methode soll hier das line search-Verfahren getestet werden. Die aus der mathematischen Optimierung bekannte Methode ist nach /37/ ebenfalls in der Lage, das Konvergenzverhalten zu verbessern. Gegenüber der "acceleration" sind allerdings zusätzliche Größen zu berechnen. Das Verfahren basiert auf der Minimierung der Energie der Ungleichgewichtskräfte, wobei es nach /38/ ausreicht, das Minimum nur näherungsweise zu bestimmen.

Mit der Änderung des Verschiebungszinkrements $\Delta u^{(i)}$ im i -ten Iterationszyklus aus

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^{(i)} = \mathbf{R}^{(i-1)} \quad (3.116)$$

ergeben sich nach /38/ die verbesserten Verschiebungen zu

$$\mathbf{u}^{(j)} = \mathbf{u}^{(i-1)} + B^{(j)} \Delta \mathbf{u}^{(i)} \quad (3.117)$$

mit dem Skalierungsfaktor $B^{(j)}$. Die Iteration innerhalb des

"line search" Prozesses, wird mit j bezeichnet. Mit Hilfe der Änderung der Energie der Ungleichgewichtskräfte,

$$s^{(j)} = \Delta u^{(j)T} \hat{R}^{(j)} \Delta u^{(j)} \quad (3.118)$$

wird mittels der Interpolationsvorschrift:

$$B^{(j)}/B^{(j-1)} = -s^{(j)}/(s^{(j)} - s^{(j-1)}) \quad (3.119)$$

jeweils ein neues $B^{(j)}$ berechnet. Die dabei mögliche Extrapolation für $s > 0$ wird aus Genauigkeitsgründen nicht durchgeführt. Die "line search" Iteration wird abgebrochen, sobald die Genauigkeitsschranke LSTOL erreicht wird:

$$|s^{(j)}|/|s^{(0)}| < \text{LSTOL} \quad (3.120)$$

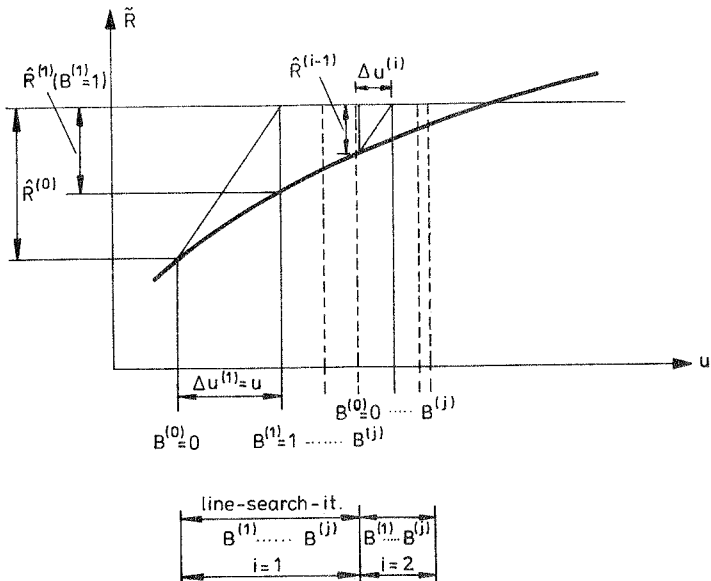


Bild 3.23: Iteration mit "line search"

In Bild 3.23 ist der Ablauf der modifizierten Newton-

Raphson-Iteration in Verbindung mit "line search" schematisch dargestellt.

Zur Klärung der Frage, inwieweit sich die Effizienz der Analyse durch den Einsatz der geschilderten Verfahren steigern läßt, wurde der Kreisbogenträger unter $p=447$, jeweils für Δt_1 und Δt_2 berechnet.

Beide Verfahren wurden in Verbindung mit der modifizierten Newton-Raphson-Iteration eingesetzt. In Bild 3.24, sind die mit Δt_1 ermittelten Verschiebungszeitverläufe beider Methoden dem des Newmark-Verfahrens ohne Zusatzmaßnahmen gegenübergestellt.

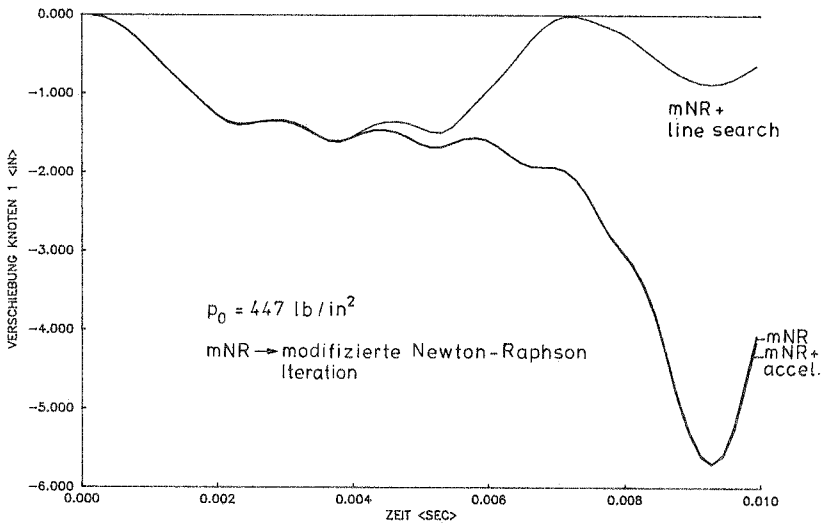


Bild 3.24: Newmark-Verfahren mit Zusatzmaßnahmen

Während sich zwischen der reinen modifizierten Newton-Raphson-Iteration und der beschleunigten Version praktisch keine Unterschiede ergeben, treten in Verbindung mit "line search" ($LSTOL=0,6$) erhebliche Abweichungen auf. Die Lösung mit "line-search" stimmt in etwa mit der oben für $p=446$ berechneten überein. Dieser Effekt ist der in /37/ erwähnten Dämpfungseigenschaft der Methode zuzuschreiben. Diese "Wegabhängigkeit" wird auf die während der line

search Iteration nur ungenau ($LSTOL=0,6$) ermittelten Geschwindigkeiten und Beschleunigungen zurückgeführt.

Zur Beurteilung der Effizienz beider Methoden werden die in Tabelle 3.2 zusammengestellten Rechenzeiten herangezogen.

Für die kleinere Zeitschrittweite Δt_1 führen beide Maßnahmen zur Konvergenzbeschleunigung auf eine Verringerung der durchschnittlichen Iterationszahl pro Zeitschritt. Eine Reduzierung der Rechenzeit ist aufgrund der zusätzlich erforderlichen Rechenoperationen nicht feststellbar. Im direkten Vergleich der Zusatzmaßnahmen schneidet die "acceleration" aufgrund der geringeren Anzahl zusätzlicher Rechenoperationen (Vergrößerung der Rechenzeit um 20%, gegenüber 35% bei LS) und der erhöhten Wirksamkeit (geringere Anzahl von Iterationen/Zeitschritt), besser ab.

Tabelle 3.2

Verfahren Newmark	Rechenzeit für $t=0$ bis $0,009945$ sec			
	Δt_1		Δt_2	
	I/TS	Zeit	I/TS	Zeit
mNR bzw. SNR	3,0	mNR 29,8	2,7	SNR 30,1
mNR-acceleration	2,7	40,1	5,3	30,8
mNR-line search	2,2	35,5	(5,0)	(28,0)

I/TS - Iterationen/Zeitschritt (Durchschnitt)

mNR - modifizierte Newton-Raphson-Iteration

SNR - Standard Newton-Raphson-Iteration

Bei dem größeren Zeitinkrement (Δt_2) stehen der durchschnittlichen Iterationszahl von 2,7 nach Standard-Newton-Raphson 5,3 bei Verwendung des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens mit "acceleration" gegenüber. Die jeweils verbrauchten Rechenzeiten stimmen nahezu überein.

Daraus kann geschlossen werden, daß die "beschleunigte", modifizierte Newton-Raphson-Iteration bei umfangreicheren Problemen insofern Vorteile bietet, als sie auch bei größeren Zeitschrittweiten die Verwendung des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens gestattet und die gerade bei großen Problemen - in Verbindung mit der Standard-Newton-Raphson-Iteration - rechenzeitintensive Neuaufstellung der Steifigkeitsmatrix vermeidet.

Die Verwendung von "line search", gestattet es bei dieser Zeitschrittweite nicht, mit der modifizierten Newton-Raphson-Iteration auszukommen. Wie in Tabelle 3.2 durch die Klammer vermerkt, tritt nach dem 20. Zeitschritt Divergenz auf. War die Methode bereits für Δt , unwirtschaftlich, so ist sie damit bei diesem Beispiel als nicht konkurrenzfähig auszuschließen.

8. Zusammenfassung der Untersuchungen am Kreisbogen

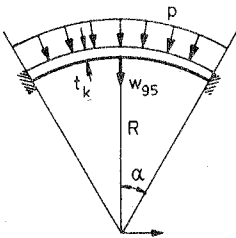
- Alle untersuchten Integrations-Verfahren sind für die Ermittlung der dynamischen Beullast einsetzbar.
- Aufgrund von Wirtschaftlichkeitsüberlegungen kann das zentrale Differenzen- und das Wilson- θ -Verfahren ausgeschlossen werden. Das ebenfalls sehr rechenzeitintensive Padé-Verfahren 4. Ordnung ist nur dann konkurrenzfähig, wenn seine hohe Genauigkeit benötigt wird. Wegen der positiven Dämpfung, die das Hilber- α -Verfahren bei indefiniter Steifigkeitsmatrix liefert, ist mit dieser Methode eine Unterschätzung der dynamischen Beullast verbunden. Hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz sind das Newmark- sowie das Bossak- α -Verfahren generell zu empfehlen ($\alpha < 0$). Dies gilt, obwohl die Wirkung der Bossakschen Zusatzdämpfung nicht generell vorhersagbar ist, da sie wesentlich schwächer ist als die der Hilber- α -Methode. Bei der unten empfohlenen Zeitschrittweite ergab sich nach Bossak eine negative Zusatzdämpfung, also eine Anfächung.

- Im allgemeinen ist die Zeitschrittweite so zu wählen, daß Konvergenz mit der modifizierten Newton-Raphson-Iteration, innerhalb von ca. 3 Iterationsschritten erreicht wird.
- Bei größeren Zeitinkrementen und Systemen mit mehr als ca. 100 Unbekannten bietet die Verwendung der modifizierten Newton-Raphson-Iteration in Verbindung mit "acceleration" Vorteile gegenüber der Standard Newton-Raphson-Iteration. Allerdings ist zu beachten, daß mit derart großen Zeitschritten berechnete Zeitverläufe mit erheblichen numerischen Ungenauigkeiten behaftet sein können. Solche Zeitinkremente sollten daher nur für die qualitative Ermittlung der dynamischen Beullast gewählt werden. Wird auf die Qualität des Verschiebungszeitverlaufes Wert gelegt, so sollten die oben erwähnten kleineren Zeitschrittweiten verwendet werden.
- Die Anwendung der "line search" Methode, in Verbindung mit der modifizierten Newton-Raphson-Iteration, ist aufgrund der bei diesem Beispiel gesammelten Erfahrungen aus Wirtschaftlichkeitsgründen sowie wegen möglicher Konvergenzprobleme nicht zu empfehlen.
- Mit entsprechenden Untersuchungen konnte die Stabilität der Methoden auch im Bereich instabiler Gleichgewichtszustände nachgewiesen werden. Anzumerken ist in diesem Zusammenhang noch, daß der Versuch, Instabilität des Newmark-Verfahrens zu erzeugen, stets an Konvergenzproblemen bei der Gleichgewichtsiteration scheiterte. Wenn damit auch entsprechende Nachweise nicht zu ersetzen sind, so bestätigt dies doch das eingangs (s. Abschnitt 3.3.1) zitierte gute Stabilitätsverhalten der Methode.

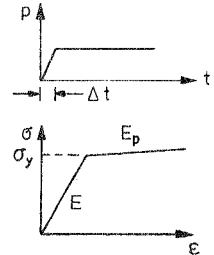
3.3.4.3 Kugelkappe

1. Allgemeines, Idealisierung

Die dynamische Analyse der in Bild 3.25 skizzierten, vollständig eingespannten Kugelkappe unter richtungstreuer Außendruckbelastung stellt gegenüber dem oben behandelten Kreisbogen in mehrerer Hinsicht ein völlig anders gear- tetes Problem dar.



$$\begin{aligned}
 R &= 22,27 \text{ in} \\
 t_k &= 0,41 \text{ in} \\
 \alpha &= 26,67^\circ \\
 E &= 10,5 \times 10^6 \text{ psi} \\
 \rho &= 2,45 \times 10^{-4} \text{ lb sec}^2 / \text{in}^4 \\
 \nu &= 0,3 \\
 \sigma_y &= 24000 \text{ psi} \\
 E_p &= 0,21 \times 10^6 \text{ psi} \\
 P &= 600 \text{ psi}
 \end{aligned}$$



$$T_1 = 5,70 \text{ sec}, \quad T_2 = 5,57 \text{ sec}, \quad T_3 = 4,95 \text{ sec}, \quad T_4 = 4,13 \text{ sec}$$

Bild 3.25: System, Belastung, Perioden

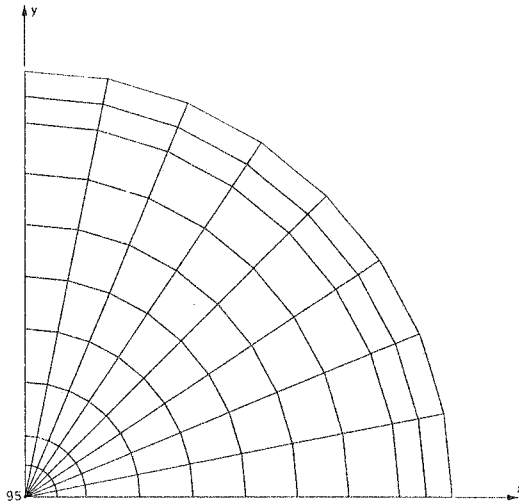


Bild 3.26: Idealisierung (Projektion in die x-y-Ebene)

Zunächst spielt neben der geometrischen Nichtlinearität, aufgrund der geringen Schlankheit der Schale ($R/t=54,3$), insbesondere die physikalische Nichtlinearität eine bedeutende Rolle. Das nichtlineare Verhalten des Werkstoffes wird gemäß /107/ mit Hilfe der v. Mises Fließbedingung und dem Fließgesetz nach Prandtl/Reuss - mit isotroper Verfestigung - dargestellt.

Weiterhin ergibt sich bei einer räumlichen Idealisierung der Struktur ein gegenüber dem Bogen deutlich vergrößertes Gleichungssystem, was sich auf das numerische Verhalten und die Effizienz der Zeitintegrationsmethoden auswirkt. Darüber hinaus bietet eine 3D-Modellierung die Möglichkeit, das Verhalten der in NISA implementierten isoparametrischen degenerierten Schalenelemente im nichtlinearen dynamischen Bereich zu testen. Um zusätzlich Aussagen über die Effizienz einzelner Elemente zu erhalten, wurde ein Viertel der Schale auf unterschiedliche Weise idealisiert. Das in Bild 3.26 dargestellte Knotenraster erlaubt sowohl die Verwendung von 80 bilinearen 4-knotigen (S4), sowie von 20 biquadratischen, 9-knotigen Elementen (S9). Um dies auszunutzen, wurde das S9-Element trotz einiger Nachteile (s. Abschnitt 3.2.3) dem quadratischen Serendipity-Element (S8) vorgezogen.

Bei gleicher Anzahl von Unbekannten (410), ergibt die 90°-Idealisierung mit S4-Elementen eine Bandbreite von 51, während die Verwendung des höherwertigen Elementes (S9) eine Bandbreite von 97 liefert. Beide Elemente werden in einer mitgehenden Lagrange-Formulierung (UL) in der Elementebene vollständig reduziert und in Dickenrichtung mit 5 Integrationspunkten über die Elementdicke vorabintegriert /115/. Die Darstellung der Trägheitskräfte erfolgt mit zusammengefaßten Massen.

2. Vergleich mit der Literatur

Für das Beispiel sind aus der Literatur /15/, /20/ Lösungen mit unterschiedlichen Idealisierungen bekannt. In /15/ wird eine Lösung mit zehn 8-knotigen, isoparametrischen, rota-

tionssymmetrischen Elementen angegeben. Die Autoren in /20/ verwendeten für die Idealisierung eines Schalenviertels 48 4-knotige Hughes-Elemente mit "hourglass-control".

In Bild 3.27, ist die Vertikalverschiebung des Mittelpunktes der Kugelschale über der Zeit aufgetragen. Den Lösungen aus /15/, /20/ sind die mit NISA (Newmark, $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-5}$) für die S4- bzw. S9-Idealisierung berechneten-Ergebnisse gegenübergestellt. Während die bei einer Voruntersuchung /103/ eingesetzte Idealisierung mit fünf S16-Elementen sich als zu groß erwies, ist nun festzustellen, daß das Modell mit S9-Elementen ausreichend genau ist und sehr gut mit der Lösung nach /15/ übereinstimmt.

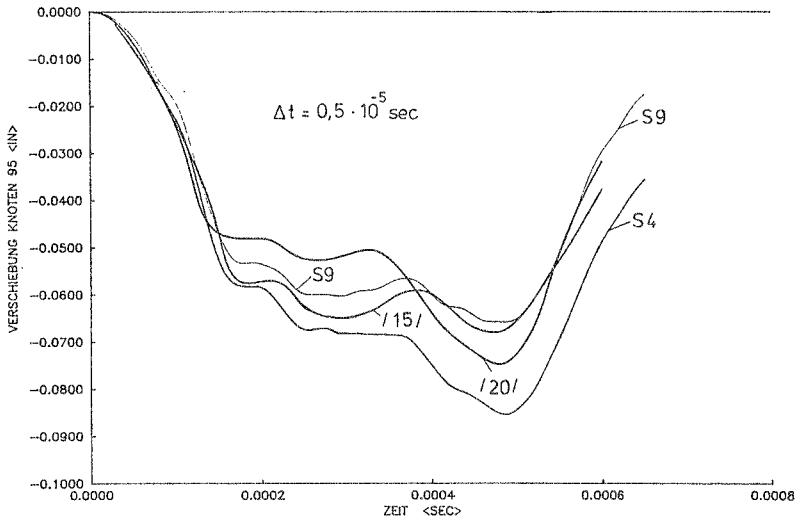


Bild 3.27: Vergleich: NISA-Literatur

Obwohl die als zu weich zu bezeichnende S4-Lösung größere Abweichungen aufweist, ist sie generell noch als brauchbar einzustufen.

3. Überlegungen zur Zeitschritt- und Elementwahl

Zur Untersuchung des Rechenzeitbedarfs in Abhängigkeit von der Zeitschrittweite wurde der Verschiebungszeitverlauf

sowohl mit $\Delta t_1 = 0,5 \times 10^{-5}$ ($\approx T_1 / 1,1 \times 10^6$) als auch mit $\Delta t_2 = 1 \times 10^{-5}$ berechnet. Diese sehr kleinen Zeitinkremente werden durch die materielle Nichtlinearität bestimmt. Wie aus den Bildern 3.28 und 3.29 hervorgeht, wird die Lösung für beide Idealisierungen von der Größe des Zeitschritts nicht beeinflusst, die Kurven stimmen jeweils nahezu überein. Deutliche Unterschiede ergeben sich allerdings hinsichtlich der Wirtschaftlichkeit, wie aus den in Tabelle 3.3 zusammengestellten Rechenzeiten abzulesen ist.

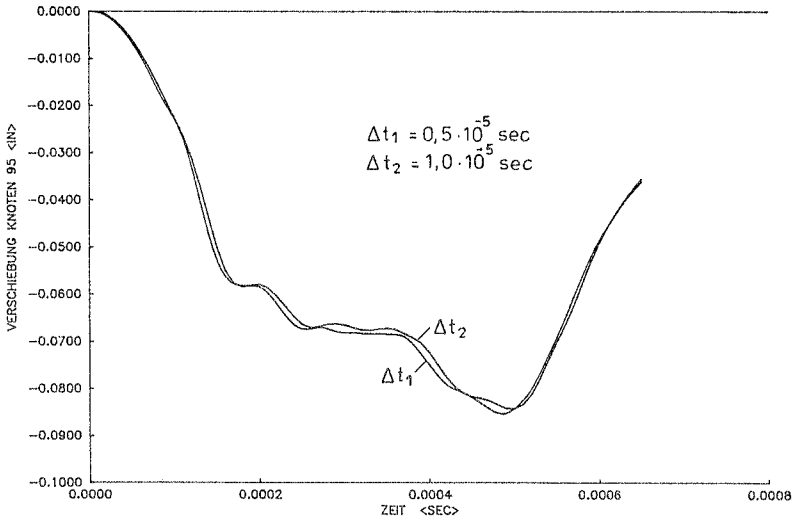
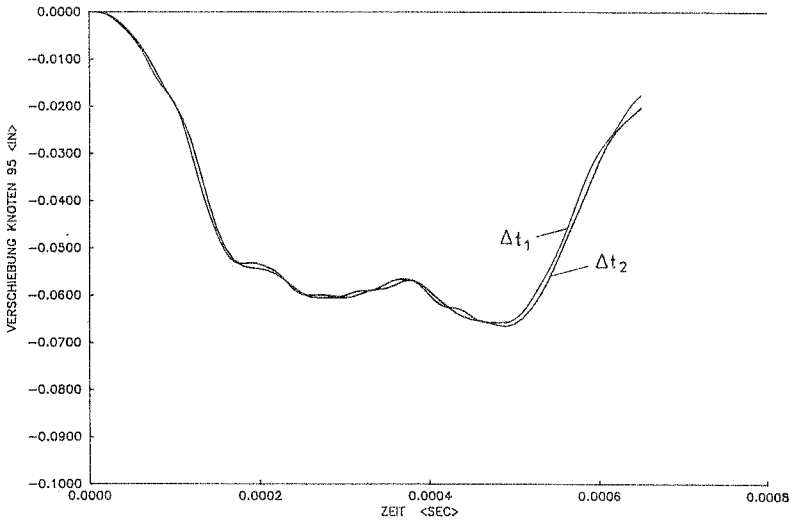
Tabelle 3.3 Rechenzeit in sec

Zeitschritt [sec]	S4	S9
$0,5 \times 10^{-5}$	677,2	744,1
$1,0 \times 10^{-5}$	287,6	440,4

Die hier angegebenen Zeiten beziehen sich auf den Zeitbereich $0:0,65$ msec, sie wurden wieder an der CRAY-1M ermittelt.

Da hierin unterschiedliche Einflüsse, wie Speicherplatzbedarf, IO-Operationen, Bandbreite und Konvergenzverhalten enthalten sind, ist der zwischen Δt_1 und Δt_2 bestehende lineare Zusammenhang an den Rechenzeiten nicht mehr ablesbar.

Generell sind bei der Verwendung des S4-Elementes Rechenzeiteinsparungen gegenüber einer Idealisierung mit S9-Elementen festzustellen. Dies gilt für alle untersuchten Zeitschrittweiten und war aufgrund der günstigeren Bandbreite auch zu erwarten. Bezieht man die Qualität der Lösung mit in die Wirtschaftlichkeitsüberlegung ein, so stellt die S9-Idealisierung wegen der damit erreichten höheren Genauigkeit die bessere Wahl dar. Der geringere Rechenzeitbedarf für die Lösung mit dem größeren Zeitschritt scheint zunächst den beim Kreisträger gefundenen Ergebnissen zu widersprechen.

Bild 3.28: S4-Element, Variation von Δt Bild 3.29: S9-Element, Variation von Δt

Zieht man allerdings zusätzlich in Betracht, daß bei beiden

hier gewählten Zeitinkrementen die Standard Newton-Raphson-Iteration angewendet werden muß, so ist dieser Widerspruch beseitigt. Die Vorteile der größeren Zeitschrittweite bezüglich der Rechenzeit basieren, obwohl die Standard Newton-Raphson-Iteration dabei zu einem früheren Zeitpunkt eingesetzt werden muß, auf der geringeren Anzahl zu berechnender Zeitschritte.

4. Vergleich der Verfahren

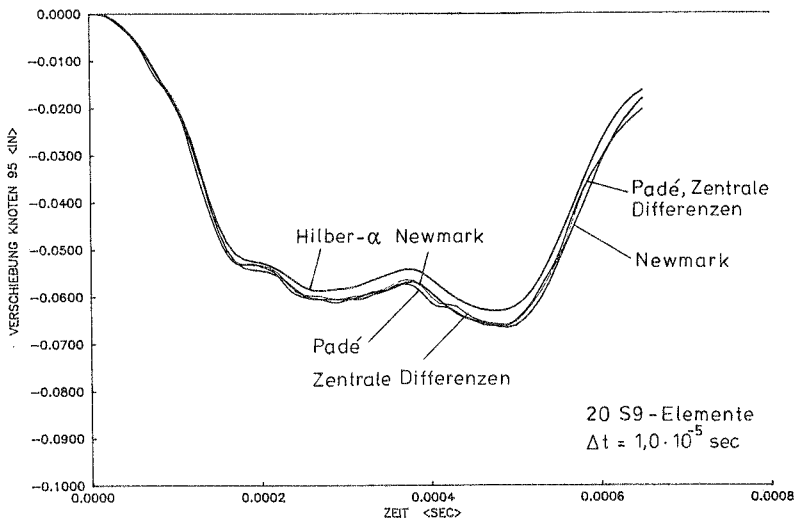


Bild 3.30: Vergleich der Integrationsmethoden

Aufgrund der Ergebnisse des vorhergehenden Abschnittes, wird zum Vergleich der Zeitintegrationsverfahren die Idealisierung mit S9-Elementen verwendet. Für die impliziten Methoden wird der Zeitschritt Δt_i gewählt. Die Zeitschrittweite für das explizite Verfahren wird unter Beachtung der Courant-Friedrich-Levy-Bedingung ("die für die Wellenausbreitung zwischen zwei benachbarten Knoten benötigte Zeit muß $\geq \Delta t$ sein") am oberen Schalenrand zu $2,5 \times 10^{-7}$ sec festgelegt. Die mit diesen Annahmen berechneten Verschiebungs-Zeitverläufe des Mittelknotens der Schale, sind in Bild

3.30 zusammengestellt.

Entsprechend den beim Kreisbogen durchgeführten Untersuchungen wurde das Wilson- θ -Verfahren aus Wirtschaftlichkeitsgründen ausgeschlossen und die Bossak- α -Methode wegen ihrer großen Ähnlichkeit zum Newmark-Verfahren hier nicht mehr betrachtet. Während die Zeitverläufe nach Newmark, der zentralen Differenzenmethode und nach der Padé-Approximation 4. Ordnung praktisch übereinstimmen, ist für das Hilber- α -Verfahren ($\alpha=-0,1$; $\beta=0,3025$; $\delta=0,6$) ein geringer Dämpfungseinfluß festzustellen.

Damit ist für diese Zeitschrittweiten die Unabhängigkeit des Zeitverlaufs vom Integrationsverfahren gezeigt, die eingangs erwähnten Unterschiede zwischen den Lösungen aus der Literatur und den mit NISA berechneten sind damit eindeutig auf das Elementverhalten zurückgeführt.

Zur Beurteilung der Effizienz der Integrationsmethoden, sind in Tabelle 3.4 wieder die jeweils verbrauchten Rechenzeiten zusammengestellt.

Tabelle 3.4 Rechenzeiten, Idealisierung mit S9-Elementen

Verfahren-Zeitschritt	Rechenzeit für $t=0$ bis $6,5 \times 10^{-4}$ sec
Newmark - $1,0 \times 10^{-5}$	440,4 sec
Hilber- α - $1,0 \times 10^{-5}$	580,6 sec
Padé - $1,0 \times 10^{-5}$	4116,7 sec
zentr.Diff. - $2,5 \times 10^{-7}$	829,2 sec

Als besonders effektiv ist zunächst das Newmark-Verfahren herauszustellen; die Methode nach Hilber ist demgegenüber

bereits deutlich aufwendiger. Der wesentlich höhere Aufwand, der für die Padé-Approximation getrieben werden muß, erklärt sich aus der rechenzeitaufwendigen Lösung des vergrößerten Gleichungssystems. Da das Verfahren aufgrund der durch die materielle Nichtlinearität diktierten, kleinen Zeitschrittweite keine Genauigkeitsvorteile mit sich bringt, ist es für dieses Beispiel als unwirtschaftlich zu bezeichnen.

Trotz des wesentlich geringeren Zeitinkrementes der expliziten Methode verhalten sich die Rechenzeiten von zentralen Differenzen und Newmark wie 2:1. Dies resultiert aus der materiellen Nichtlinearität, die sich bei der Berechnung der linken Seite rechenzeitmäßig ungünstig auswirkt. Verzichtet man auf die Vorteile bei der Generierung der Eingabedaten und wählt eine Idealisierung, die für das zentrale Differenzenverfahren eine größere Zeitschrittweite zuläßt, so stellt die explizite Methode eine Alternative zum Newmark-Verfahren dar.

Eine zusätzlich durchgeführte Rechnung, bei der für die explizite Lösung die Formulierung entsprechend Padé gewählt wurde (s. Abschnitt 3.3.3.2), erbrachte keine Vorteile gegenüber der klassischen Formulierung bzw. Implementierung des zentralen Differenzenverfahrens.

5. Zusammenfassung der Untersuchungen an der Kugelkappe

Die Untersuchungen an der Kugelkappe, die durch die Größe des Problems sowie durch die Bedeutung der materiellen Nichtlinearität zu charakterisieren sind, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Aufgrund der größeren Verlässlichkeit der Idealisierung mit S9-Elementen sowie des vertretbaren rechenzeitmäßigen Mehraufwandes ist dieses Element dem 4-knotigen vorzuziehen. Da das in NISA ebenfalls enthaltene S8-Element im Rahmen dieser Untersuchung mit dem 9-knotigen direkt vergleichbar ist, sind die hier gefundenen Ergebnisse auch für das 8-knotige Element gültig. Wegen der

größeren Bandbreite, die das S16-Element mit sich bringt, sind mit seiner Verwendung höhere Rechenzeiten verbunden. Nimmt man die Aussagen des Abschnittes 3.2.3 hinzu, so erweist sich das 8-Knotige als ein für Schalenprobleme besonders geeignetes Element.

- Hinsichtlich der zu wählenden Zeitschrittweite sind allgemeingültige Erklärungen kaum möglich. In der Regel sind Zeitschrittweiten, die Konvergenz mit dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren gewährleisten aufgrund der materiellen Nichtlinearität unwirtschaftlich klein. Daraus folgt, daß Zusatzmaßnahmen zur Konvergenzverbesserung, da sie kaum größere Δt erlauben, keine Effizienzsteigerung erwarten lassen. Das optimale Verhältnis zwischen Zeitinkrement, bzw. Anzahl von Zeitschritten und der je Zeitschritt erforderlichen Anzahl von Standard Newton-Raphson-Iterationen ist bei Problemen, für die Erfahrungswerte fehlen, durch Vergleichsrechnungen festzulegen. Dafür ist üblicherweise ein Zeitschritt ausreichend.

- Die Effizienz des Newmark-Verfahrens konnte durch die an diesem Beispiel durchgeführten Untersuchungen bestätigt werden. Wegen des nur unerheblichen Mehraufwandes, der für das Bossak- α -Verfahren erforderlich ist, gilt obige Aussage auch für diese Methode. Das von Hilber konzipierte Verfahren ist demgegenüber als etwas schlechter einzustufen.

Von einer Verwendung der Padé-Approximation 4. Ordnung, ist aus Wirtschaftlichkeitsgründen abzuraten.

Für das zentrale Differenzenverfahren konnte bedingt durch die materielle Nichtlinearität zwar eine Effizienzsteigerung festgestellt werden, wirtschaftlich wird die Methode aber erst dann, wenn die Idealisierung die Belange des Verfahrens berücksichtigt und sehr kleine Zeitschrittweiten infolge zu engmaschiger Netze vermeidet.

3.3.4.4 Zusammenfassung der Beispielrechnungen

Mit den vorgestellten Beispielrechnungen konnte zunächst die Richtigkeit der in NISA implementierten Verfahren gezeigt werden. Weiterhin bestätigen sie die Eignung der degenerierten Elemente auch für nichtlineare dynamische Probleme.

Weiterhin konnte mit dem Nachweis der Stabilität der Integrationsmethode, auch bei indefiniter Steifigkeitsmatrix, der Störungscharakter numerischer Ungenauigkeiten bestätigt werden.

Die Beispiele sind hinsichtlich Strukturverhalten und Größe des numerischen Problems so gewählt, daß für die Auswahl des Zeitintegrationsverfahrens sowie der Zeitschrittgröße folgende Empfehlungen gegeben werden können:

- Für Probleme, bei denen die geometrische Nichtlinearität überwiegt, dazu zählen dynamische Stabilitätsprobleme, erweisen sich das Newmark- sowie das Bossak- α -Verfahren als besonders wirtschaftlich. Auch die Hilber- α -Methode ist oben mit einzuordnen; vor dem Hintergrund indefiniter Steifigkeitsmatrizen sollte, um die dynamische Beullast nicht wesentlich zu unterschätzen, α größer als $-0,1$ gewählt werden.

Bei der Wahl von α für das Bossak-Verfahren ist zu berücksichtigen, daß die gewünschte negative Zusatzdämpfung nicht ohne weiteres zu realisieren ist. Gegenüber der Methode von Hilber, die bei dynamischen Stabilitätsproblemen stets dämpfend wirkt, stellt dies insofern keinen Nachteil dar, als der Zusatzterm nach Bossak schlechtestenfalls auch dämpfend wirkt, sein Einfluß (bei gleichem α) aber deutlich geringer ist. Daher wird für das Bossak-Verfahren ebenfalls $\alpha < 0$ empfohlen. Hier wurde damit bei der empfohlenen Zeitschrittweite eine Anregung erreicht.

Die Padé-Approximation 4. Ordnung stellt nur dann eine wirtschaftliche Alternative dar, wenn die hohe Genauigkeit des Verfahrens benötigt wird.

Sofern der Zeitschritt nicht durch die Belastung festgelegt wird, sollte er nur so groß gewählt werden, daß die Iteration mit dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren durchgeführt werden kann und Konvergenz nach ca. 3 Iterationen erreicht wird. Die Verwendung größerer Zeitinkremente sollte auf die qualitative Ermittlung der dynamischen Beullast beschränkt bleiben. Hierbei empfiehlt es sich, anstelle der Standard Newton-Raphson-Iteration die modifizierte Version in Verbindung mit "acceleration" zu verwenden. Aus Gründen der Wirtschaftlichkeit und wegen der dämpfenden Eigenschaft des "line-search" Verfahrens, ist die Methode nicht generell zu empfehlen.

- Systeme, deren Verhalten wesentlich durch die materielle Nichtlinearität bestimmt wird, machen einige Zusatzüberlegungen erforderlich. Abgesehen von expliziten Methoden, bei denen die Zeitschrittweite durch die Courant-Friedrich-Levy-Bedingung festgelegt wird, sind wirtschaftliche Zeitinkremente nur in Verbindung mit Standard Newton-Raphson-Iteration zu erreichen. Hierbei sind Zusatzmaßnahmen zur Konvergenzbeschleunigung wenig sinnvoll.

Als wirtschaftliche Zeitintegrationsmethoden kommen auf der Seite der impliziten Verfahren nur noch Newmark und Bossak- α in Betracht. Die Verwendung von zentralen Differenzen stellt eine Alternative dar; allerdings ist bei der Idealisierung darauf zu achten, daß unwirtschaftliche Zeitschrittweiten infolge von örtlich zu engmaschigen FE-Netzen vermieden werden.

3.4 Kriterien zur Bestimmung der dynamischen Beullast

Mit den Ergebnissen des vorigen Abschnittes können Zeitverlaufsberechnungen beliebig nichtlinearer Systeme in jeder Hinsicht (Zeitschritt, Elementtyp, Iteration) effektiv und den Genauigkeitsansprüchen angepaßt durchgeführt werden. Allerdings ist das bisher angewandte Vorgehen zur Ermittlung der dynamischen Stabilitätsgrenze von Tragwerken - allein mit Hilfe von Zeitverlaufsberechnungen - äußerst unwirtschaftlich. Wünschenswert sind Kriterien, die eine direkte Bestimmung der Stabilitätsgrenze von Tragwerken unter dynamischer Belastung gestatten.

Aufgrund der Erfahrungen mit statischen Stabilitätsuntersuchungen ist davon auszugehen, daß eine einfache Rechenformel, die durch komplette Linearisierung und quasi statische Behandlung des Problems zu erreichen wäre, sicher nicht zum Ziel führt. Da dynamische Stabilitätsprobleme durch kinetische Effekte gekennzeichnet sind, kann von den teilweise verwendeten, quasi statischen Berechnungen (s. z.B. /36/) nur in Sonderfällen ein zuverlässiges Ergebnis erwartet werden. Daraus folgt bereits, daß eine wirklichkeitsnahe Analyse nicht ohne die Lösung der Bewegungsgleichung auskommt. Als optimal hinsichtlich Wirtschaftlichkeit und Genauigkeit sind demnach solche Verfahren zu bezeichnen, die mit nur einer Zeitverlaufsberechnung auskommen und die Stabilitätsaussage mit Hilfe eines zusätzlichen Kriteriums liefern. Grobe Annahmen, z.B. hinsichtlich der Systemsteifigkeit, wie sie das in /86/ vorgestellte Konzept enthält, sind dabei nicht zugelassen.

Unter diesem Aspekt sollen im folgenden die aus der Literatur bekannten Methoden vorgestellt und bewertet werden (Abschnitte 3.4.1, 3.4.2.1). Weiterhin soll im Abschnitt 3.4.2.3 die Eignung des von Ziegler /131/ eingeführten "kinetischen Stabilitätskriteriums" ($\omega=0$) für Stabilitätsprobleme dynamisch belasteter Tragwerke nachgewiesen werden. Darüber hinaus wird im Abschnitt 3.4.2.4 ein

Konzept entwickelt, das als einziges den oben gestellten Forderungen genügt und eine "direkte" Bestimmung der dynamischen Beullast unter Einschluß von Nichtlinearitäten und kinetischen Effekten gestattet. Im Anschluß daran soll das entwickelte Verfahren anhand von Beispielen verifiziert werden (Abschnitt 3.4.2.4).

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Gültigkeit der mit Hilfe des diskreten Modells gewonnenen Stabilitätsaussage auch für das zugrunde liegende Kontinuum angenommen wird. Eine ausführliche Diskussion dieser Thematik findet sich bei Leipholz /79/.

Auf die Möglichkeit, die Bewegungsgleichungen auf Mathieu-Gleichungen zu reduzieren und die Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe von Stabilitätskarten vorzunehmen /69/, /113/, sei nur hingewiesen, das Verfahren ist aufgrund der für die Reduzierung erforderlichen, teilweise erheblichen Annahmen /120/ nur in Sonderfällen anwendbar.

Ein weiteres Verfahren, das von Almroth, Meller, Brogan /8/ als quasi statisch, von Babcock /11/ als "freezing in time technique" angesprochen wird, sei ebenfalls nur kurz erwähnt. Die kritische Lasthöhe wird aus einer Störungsrechnung bestimmt (s. z.B. /54/), wobei als Störung eine Eigenform des unbelasteten Systems verwendet und dem Ausgangszustand überlagert wird. Die damit verbundene Vernachlässigung der Zeitabhängigkeit der vorkritischen Verformungen (quasi statisch) sowie die Unfähigkeit der Methode, eine sich im Laufe der Zeit ändernde Reihenfolge der Eigenformen darzustellen, bedingen den groben Näherungscharakter dieses Konzeptes.

3.4.1 Energiekriterien

Auf die Verwendung von Energiekriterien zur Stabilitätsanalyse von Zeitintegrationsverfahren /23/ wurde im Abschnitt 3.3.1 bereits hingewiesen; sie basieren auf der Beschränktheit der Gesamtenergie des Systems. Demgegenüber sind die im folgenden diskutierten Kriterien speziell auf die

Stabilität von Tragwerken zugeschnitten.

Das von Hoff, Bruce /56/ erstmals angewandte "saddlepoint-criterion" benutzt zur Stabilitätsaussage die Energien des schwingenden Systems. Das Verfahren ist der direkten Ljapunovschen Methode zuzuordnen und wird durch den 1. Ljapunovschen Stabilitätssatz abgesichert /49/; danach ist eine Gleichgewichtslage stabil, solange die Hamilton Funktion:

$$H = T + U \quad (3.121)$$

positiv definit ist und nur im Gleichgewichtszustand zu Null wird; H ist dann eine Ljapunov-Funktion /93/. Dieser Satz ist auch als Satz von Lagrange und Dirichlet bekannt /49/ und stellt die Grundlage der Stabilitätsanalyse statisch belasteter, konservativer Systeme dar. Die Behandlung nichtkonservativer Systeme auf der Basis obigen Satzes ist nach Leipholz /79/ ebenfalls möglich, wenn die totale Energie um die Arbeit der nichtkonservativen Kräfte erweitert wird.

Die Stabilitätsanalyse mit Hilfe des Energiekriteriums läßt sich am System mit einem Freiheitsgrad besonders gut veranschaulichen. Hier wird dazu der in Bild 2.11 dargestellte Zweibock verwendet und wieder eine Punktmasse angenommen. Ausgehend von der Bewegungsgleichung, wobei, um Verwechslungen zu vermeiden, die Höhe des unbelasteten Systems nun mit \bar{H} bezeichnet wird:

$$M \ddot{u} + E^t A / l^3 (2\bar{H}^2 \dot{u} - 3\bar{H} \dot{u}^2 + \dot{u}^3) - \dot{P} = 0$$

ergeben sich die kinetische - und die potentielle Energie wie folgt:

$$T = (1/2) M \dot{u}^2$$

$$U = \int_0^{\dot{u}} [E^t A / l^3 (2\bar{H}^2 \dot{u} - 3\bar{H} \dot{u}^2 + \dot{u}^3) - \dot{P}] d\dot{u}$$

$$U = E \cdot A / l^3 (\bar{H}^2 u^2 - \bar{H} u^3 + 1/4 u^4) - P u$$

Die potentielle Energie des Systems ist für verschieden große P , in Abhängigkeit von u , im Bild 3.31 dargestellt. Der plötzlich aufgebrachten Last (Stufenlast s. Bild 2.11) wurde, wie bereits aus der Berechnung der potentiellen Energie hervorgeht, Rechnung getragen.

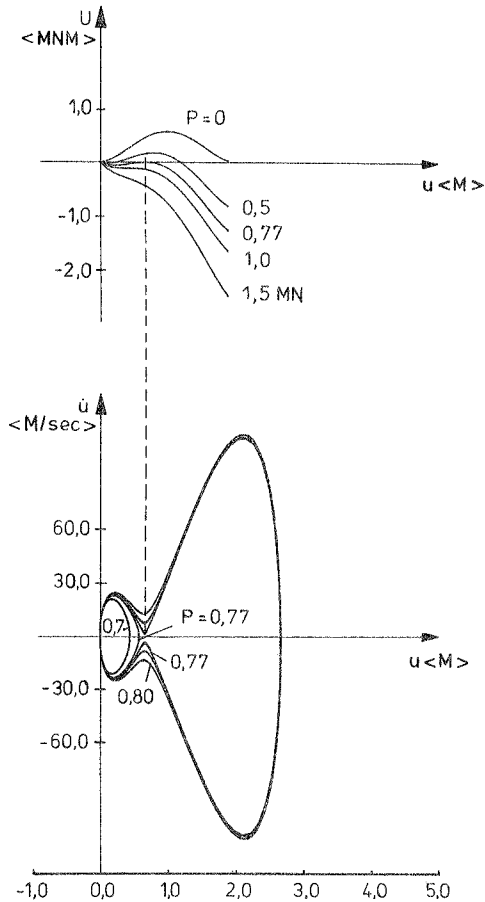


Bild 3.31: Potentielle Energie und Phasenportrait des Zweibocks

Wie aus Bild 3.31 ersichtlich, reicht die durch $P < 0,77 \text{ MN}$ in das System eingetragene Energie ($H=U$ für $\dot{u}=0$) nicht aus, um das System in die untere Gleichgewichtslage zu bringen. Unter der dynamischen Durchschlagslast von $P=0,77 \text{ MN}$ zeigt die zugehörige Energiefunktion ein lokales Maximum mit $U=0$; dies bedeutet, daß eine beliebig kleine Störenergie ausreicht, um das Durchschlagen in die untere Gleichgewichtslage herbeizuführen.

Das im Bild 3.31 ebenfalls dargestellte Phasenportrait gestattet es, im Zusammenhang mit der Energiefunktion, die maximale Energie des Systems ($H=U$ für $\dot{u}=0$) direkt abzulesen, weiterhin kann die kritische Lasthöhe aus dem Übergang der geschlossenen Phasenkurve in die Separatrix direkt entnommen werden.

Wie zu sehen ist, geht die bis hierher betrachtete, einfache Form der Energiefunktion bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden verloren. Allgemein ergibt sich bei Systemen mit n Freiheitsgraden zu jeder Belastungsfunktion eine Energie-Hyperfläche im n -dimensionalen Raum. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, wurde z.B. in /66/ das Verformungsverhalten von Kreisbögen mit Hilfe zweier Eigenformen beschrieben. Die Energiefläche, als Funktion der Verformungsamplituden der beiden "modes", wird so wieder zu einer Fläche im dreidimensionalen Raum. Sie weist einen Sattelpunkt auf, die hierzu gehörende potentielle Energie wird als kritisch bezeichnet. Von der zugeordneten kritischen Belastung wird gefordert, daß sie eine Geschwindigkeitsverteilung erzeugt, deren kinetische Energie betragsmäßig gleich der kritischen potentiellen Energie ist. Dies entspricht der Annahme, daß das Systemverhalten nur von der Größe des aus dem Belastungszeitverlauf resultierenden Impulses und nicht von seiner Form abhängt. Die so ermittelte dynamische Beullast stellt insofern eine untere Grenze dar, als das System nicht zwangsläufig den Sattelpunkt erreicht, also unter Umständen auf höherem Energieniveau verbleibt /66/, /56/.

Das Sattelpunktkriterium wurde von Akkas /4/ in der Form: "die zum Erreichen des instabilen Gleichgewichtszustandes

erforderliche äußere Arbeit ist für statische und dynamische Belastung gleich groß", zur Bestimmung dynamischer Beullasten von außendruckbelasteten Kugelschalen (symmetrisches Versagen) verwendet. Diese Bedingung auf den Zweibock angewandt, liefert das in Bild 3.32 dargestellte Ergebnis.

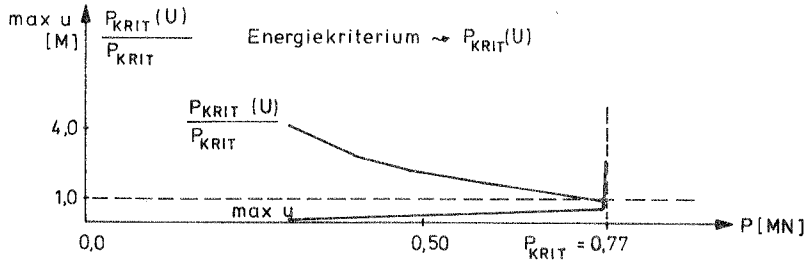


Bild 3.32: Zweibock - Energiekriterium

Damit ist zunächst die Anwendbarkeit des Kriteriums auf kleine Probleme gezeigt. Für größere Systeme, insbesondere solche, deren Verhalten durch mehrere Eigenformen bestimmt wird, erscheint das Energiekriterium, aufgrund der bereits erwähnten Annahmen und seines modalen Charakters, sowie der voraussetzungsgemäß gleichen Versagensformen unter statischer wie unter dynamischer Belastung als ungeeignet.

3.4.2 Eigenwertkriterien

Im folgenden sollen mit Hilfe der Eigenwerte der Systemmatrix (s. z.B. /88/) bzw. mit Hilfe der Eigenkreisfrequenzen Bedingungen formuliert werden, unter denen es zu einem Anwachsen der gestörten Lösung, d.h. zu Instabilität kommt. Wegen der zentralen Bedeutung, die den Eigenwerten zukommt, spricht man auch von Eigenwertkriterien.

Bei der Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer Systeme ist zu beachten, daß die Systemmatrizen und damit auch die Eigenwerte über der Zeit nicht konstant sind, und daß deshalb die Beurteilung der Stabilität nur unter Beachtung

des zeitlichen Verlaufs der Eigenwerte möglich ist. Zur Veranschaulichung sei das von Kleiber et. al. /72/ vorgeschlagene Konzept der im folgenden entwickelten Vorgehensweise gegenübergestellt. In /72/ wird die linearisierte Differenzbewegung des nichtlinearen Problems betrachtet und daraus mit der Eigenkreisfrequenz der Störungsbewegung als Bedingung für Instabilität $\omega=0$ erhalten. Aufgrund der Nichtlinearität des Systems muß das Eigenwertproblem für die Eigenkreisfrequenzen parallel zur Zeitverlaufsberechnung an den diskreten Zeitpunkten t , $t+\Delta t$ usw. gelöst werden. Mit den so ermittelten Eigenkreisfrequenzen ist die Beurteilung der Definitheit der Tangentensteifigkeitsmatrix nur in dem jeweils zugehörigen Zeitpunkt möglich. In /72/ wird die Bedingung für Instabilität als erfüllt angesehen, sobald zu einem Zeitpunkt $\omega=0$ auftritt.

In der vorliegenden Arbeit wird ebenfalls von der linearisierten Differenzbewegung ausgegangen, die anschließend in die entsprechende Zustandsgleichung überführt wird. Damit kann mit Hilfe der Fundamentalmatrix, welche die Differenzbewegung im Zustandsraum beschreibt, die Stabilitätsuntersuchung vorgenommen werden.

Bei zeitinvarianten Systemen wird durch die Beschränktheit der Fundamentalmatrix sichergestellt, daß ein Anwachsen der gestörten Lösung nicht möglich ist. Diese Beschränktheitsaussage, die auch mit Hilfe der Eigenwerte der Systemmatrix möglich ist, wird bei der Analyse nichtlinearer Systeme im Inkrement verwendet. Dies ist insofern zulässig, als infolge der Linearisierung der Differenzbewegung Zeitinvarianz im Inkrement vorliegt. Konkret wird also der Verlauf der Eigenwerte über der Zeit, d.h. an dem diskreten Zeitpunkt t , $t+\Delta t$ berechnet und damit die Stabilität des Systems beurteilt.

Die auf den Eigenwerten der Systemmatrix basierenden Kriterien gelten für beliebige mechanische Systeme und lassen sich auf das von Ziegler /131/ - für statisch belastete Systeme - angegebene Stabilitätskriterium ($\omega=0$)

überführen. Durch diesen Übergang wird die Gültigkeit des Kriteriums für Tragwerke unter zeitabhängiger Belastung gezeigt. Auf dieser Grundlage wird schließlich ein Kriterium formuliert, das es gestattet, die dynamische Beullast mit Hilfe nur einer Zeitverlaufsberechnung "direkt" zu ermitteln.

Der rechenzeitmäßige Aufwand für die Zeitverlaufsanalyse unter verschiedenen Lastniveaus wird bei diesem Konzept also auf die parallel zur Zeitverlaufsberechnung durchzuführende Eigenwertanalyse reduziert.

3.4.2.1 Eigenwerte der Systemmatrix

Wie erwähnt kann bei zeitinvarianten Systemen die Stabilität (homogene Systeme) bzw. Beschränktheit (inhomogene Systeme) durch die Beschränktheit der Fundamentalmatrix nachgewiesen werden /88/. Da die Beschränktheit, bzw. Unbeschränktheit der Fundamentalmatrix direkt von den Eigenwerten der Systemmatrix abhängt, kann die Stabilitätsuntersuchung auf diese Eigenwertanalyse reduziert werden.

Als Grundlage für die Behandlung nichtlinearer Probleme wird kurz die Vorgehensweise bei linearen, zeitinvarianten Systemen geschildert /88/. Zunächst soll die Stabilitätsdefinition von Ljapunov (s. Abschnitt 2.2) mit Hilfe der Vektornorm $\|\mathbf{z}\|$ (z.B. Euklidische Länge: $\|\mathbf{z}\| = (\mathbf{z}^T \mathbf{z})^{1/2}$) angegeben werden. In Analogie zum Abschnitt 2.2 wird die ungestörte Lösung mit $\mathbf{z}(\mathbf{z}(0), t)$ und die gestörte Lösung mit $\mathbf{z}(\mathbf{a}, t)$ bezeichnet.

Stabilität des zeitinvarianten Systems:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{z}(t)$$

liegt vor, wenn für beschränkte Anfangsbedingungen:

$$\|\mathbf{z}(0) - \mathbf{a}\| < \delta(\epsilon) \tag{3.122}$$

für alle $t > 0$ mit $\delta > 0$, $\epsilon > 0$ gilt:

$$\|z(z(0), t) - z(a, t)\| < \varepsilon \quad (3.123)$$

Mit der aus den Lösungsvektoren Φ_i der homogenen Zustandsgleichung aufgebauten Fundamentalmatrix:

$$\Phi(t) = [\Phi_1(t) \quad \Phi_2(t) \quad \dots \quad \Phi_n(t)]$$

gilt:

$$z(t) = \Phi(t)z(0) \quad (3.124)$$

Aus einem Vergleich mit (3.78) ergibt sich auch:

$$\Phi(t) = e^{At}$$

Es wird eine mit der oben verwendeten Vektornorm verträgliche Matrixnorm $\|\Phi(t)\|$ eingeführt, so daß gilt:

$$\|\Phi(t)z(0)\| \leq \|\Phi(t)\| * \|z(0)\|$$

Ist nun $\Phi(t)$ beschränkt, d.h.

$$\|\Phi(t)\| \leq c, \quad c > 0, t \geq 0$$

und gilt (3.122), so folgt aus (3.123) mit (3.124):

$$\begin{aligned} & \|\Phi(t)z(0) - \Phi(t)a\| = \\ & = \|\Phi(t)\| * \|z(0) - a\| < c\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

also Stabilität. Umgekehrt folgt aus einer unbeschränkten Fundamentalmatrix stets ein Anwachsen der gestörten Lösung und damit Instabilität. Aufgrund dieser Eigenschaft der Fundamentalmatrix kann die Stabilitätsanalyse auf die Untersuchung der Beschränktheit von $\Phi(t)$ begrenzt werden.

Bei der im folgenden vorgestellten Stabilitätsanalyse zeitvarianter Systeme soll die begriffliche Trennung in

Stabilität und Beschränktheit fallengelassen werden. In Anlehnung an statisch belastete Systeme soll nur von Stabilität gesprochen werden.

Durch das inkrementelle Lösungskonzept wird das zeitvariante System durch ein abschnittsweise zeitinvariantes System angenähert; diese Vorgehensweise wurde bereits im Abschnitt 3.3.3.1 bei der Padé-Approximation angewandt. Damit können innerhalb des Inkrementes die für zeitinvariante Systeme gültigen Kriterien angewandt werden. Für die praktische Berechnung erhält man also parallel zum Zeitverlauf der Systemantwort zu jedem Zeitpunkt t Bedingungen für Stabilität oder Instabilität. Zur Beurteilung des Systemverhaltens müssen diese Bedingungen während des gesamten zeitlichen Verlaufs der Bewegung betrachtet werden, hierauf soll nach der Vorstellung der erforderlichen Beziehungen eingegangen werden.

Aus der nur bezüglich des Ortes diskretisierten Bewegungsgleichung (3.31) erhält man für die gestörte Bewegung:

$$\mathbf{M}'\ddot{\mathbf{u}}_s + \mathbf{D}'\dot{\mathbf{u}}_s = \mathbf{R} - \mathbf{F}'(\mathbf{u}_s) \quad (\text{TL})$$

wobei für die gestörte Bewegung jetzt anstelle von $\mathbf{u}(\mathbf{a}, t)$

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.125)$$

geschrieben wird, $\ddot{\mathbf{u}}$ bezeichnet die Differenzbewegung. Unter der Voraussetzung, daß $\mathbf{F}'(\mathbf{u}_s)$ eine differenzierbare Funktion darstellt, lassen sich die inneren Kräfte der Störbewegung in eine Taylorreihe entwickeln:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u} + \ddot{\mathbf{u}}) = \mathbf{F}'(\mathbf{u}) + \mathbf{F}'(\mathbf{u})_{,L} \ddot{\mathbf{u}} + \dots$$

Vernachlässigt man die quadratischen und höheren Glieder und berücksichtigt:

$$\mathbf{F}'(\mathbf{u})_{,L} = \mathbf{K}$$

so erhält man folgende linearisierte, diskretisierte Gleichung für die Störbewegung:

$$\mathbf{M}(\dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}) + \mathbf{D}(\dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}) + {}_0\mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{R} - {}_0\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad (3.126)$$

Unter der Annahme gleicher Belastungsfunktionen für die gestörte und die ungestörte Bewegung (Störung in den Anfangsbedingungen) ergibt sich aus (3.126) und (3.31) folgende linearisierte Gleichung für die Differenzbewegung:

$$\mathbf{M} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}} + \mathbf{D} \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + {}_0\mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.127)$$

Um die Stabilitätsanalyse mit Hilfe der Fundamentalmatrix durchführen zu können, wird (3.127) in eine Zustandsgleichung überführt. Entsprechend der im Abschnitt 3.3.3.1 (Gleichungen (3.85) bis (3.88)) vorgestellten Vorgehensweise erhält man folgende linearisierte, homogene Zustandsgleichung:

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{A} \tilde{\mathbf{z}} \quad (3.128)$$

wobei \mathbf{A} (gemäß (3.90)) infolge der Linearisierung mit der Systemmatrix der ungestörten Bewegung übereinstimmt.

Ganz entsprechend läßt sich aus der Störbewegung zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ (aus (3.31)) folgende Beziehung für die Differenzbewegung zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ gewinnen:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\tilde{\mathbf{u}}} + \mathbf{D} {}^{t+\Delta t}\dot{\tilde{\mathbf{u}}} + {}_0\mathbf{K}_t \tilde{\mathbf{u}}_t + {}_0\mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} - {}_0\mathbf{K} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Wird die Tangentensteifigkeit der gestörten Bewegung durch diejenige der ungestörten Bewegung angenähert:

$${}_0\mathbf{K}_t = {}_0\mathbf{K}$$

so läßt sich die Beziehung folgendermaßen vereinfachen:

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\tilde{\mathbf{u}}} + \mathbf{D} {}^{t+\Delta t}\dot{\tilde{\mathbf{u}}} + {}_0\mathbf{K} {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.127a)$$

Aus der hieraus entwickelten Zustandsgleichung:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\tilde{z}} = \mathbf{A} {}^{t+\Delta t}\tilde{z}$$

(\mathbf{A} gemäß (3.90)) läßt sich mit (3.128) für das Inkrement der linearisierten Differenzbewegung wie folgt schreiben:

$$\dot{\tilde{z}} = \mathbf{A}\tilde{z} \quad (3.129)$$

Das hier skizzierte Vorgehen zur Gewinnung der Beziehung (3.129), das durch Linearisieren der inneren Kräfte und durch die Annahme ${}^t\mathbf{K}_g = {}^t\mathbf{K}$ gekennzeichnet ist, liefert ein Ergebnis, das auch durch ein Einfrieren des Bewegungszustandes zum Zeitpunkt t und anschließender Betrachtung der aus einer in t (auf den eingefrorenen Zustand) aufgebrachten Störung resultierenden Bewegung erhalten werden kann. Da das Einfrieren zum Zeitpunkt t , $t+\Delta t$ usw. jeweils neu durchgeführt wird, handelt es sich um ein "Einfrieren im Inkrement".

Infolge des Einfrierens ist $\mathbf{A} = \text{konst.}$, weiterhin folgt daraus, daß die ungestörte Lösung durch ${}^t\mathbf{z} = \text{konst.}$ repräsentiert wird. Damit wird die Störbewegung durch die homogenisierte Beziehung (3.89) beschrieben:

$${}^t\dot{\mathbf{z}}_g = \mathbf{A} {}^t\mathbf{z}_g$$

bzw.

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{z}}_g = \mathbf{A} {}^{t+\Delta t}\mathbf{z}_g$$

Daraus erhält man wegen:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{z}_g = {}^t\mathbf{z} + {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{z}}$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{z}}_g = {}^{t+\Delta t}\dot{\tilde{\mathbf{z}}}$$

$${}^t\mathbf{z}_g = {}^t\mathbf{z} + {}^t\tilde{\mathbf{z}}$$

$${}^t\dot{\mathbf{z}}_g = {}^t\dot{\tilde{\mathbf{z}}}$$

für das Inkrement der Differenzbewegung Gleichung (3.129):

$$\dot{\tilde{z}} = \mathbf{A} \tilde{z}$$

Für die Stabilitätsanalyse wird zunächst das Inkrement der Differenzbewegung betrachtet. Nach (3.80) ergibt sich die Lösung von (3.129) zu:

$$\tilde{z} = {}^{t+\Delta t} \tilde{z} - {}^t \tilde{z} = (e^{\mathbf{A}\Delta t} - \mathbf{I}) {}^t \tilde{z} \quad (3.130)$$

Mit der zum Zeitpunkt t berechneten, innerhalb des Inkrementes konstanten Fundamentalmatrix (Zeitinvarianz im Inkrement):

$${}^t \Phi(\Delta t) = e^{\mathbf{A}\Delta t} \quad (3.131)$$

gilt auch (zur Vereinfachung wird $\Phi(\Delta t)$ anstelle von ${}^t \Phi(\Delta t)$ geschrieben):

$$\tilde{z} = (\Phi(\Delta t) - \mathbf{I}) {}^t \tilde{z} \quad (3.132)$$

Um zu einer Darstellung der Fundamentalmatrix zu gelangen, die für die Stabilitätsuntersuchung besser geeignet ist, wird für das Inkrement der Differenzbewegung folgendermaßen angesetzt (zur Vereinfachung wird $\bar{\lambda}$ anstelle von ${}^t \bar{\lambda}$ geschrieben):

$$\tilde{z} = e^{\bar{\lambda}\Delta t} \bar{z} \quad (3.133)$$

dies entspricht der Annahme, daß \tilde{z} und \bar{z} dieselbe Richtung besitzen, d.h. (3.133) erfüllt folgende Gleichung:

$$\dot{\tilde{z}} = \bar{\lambda} \tilde{z}$$

Mit (3.133) in (3.129) eingesetzt erhält man:

$$\bar{\lambda} e^{\bar{\lambda}\Delta t} \bar{z} = \mathbf{A} e^{\bar{\lambda}\Delta t} \bar{z} \quad (3.134)$$

Dies stellt das Eigenwertproblem der Systemmatrix dar:

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I})\bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (3.135)$$

Da die Systemmatrizen der gestörten und der ungestörten Bewegung identisch sind, stimmen auch die Eigenwerte für beide Bewegungen überein.

Es wird davon ausgegangen, daß keine mehrfachen Eigenwerte auftreten, dies stellt für die folgenden Ausführungen keine Einschränkung dar.

Werden nun die Eigenwerte zu:

$$\bar{\Lambda} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

und die Eigenvektoren zur Modalmatrix $\bar{\mathbf{Z}}$:

$$\bar{\mathbf{Z}} = [\bar{\mathbf{z}}_1 \quad \bar{\mathbf{z}}_2 \quad \dots \quad \bar{\mathbf{z}}_n] \quad (3.137)$$

zusammengefaßt, so läßt sich mit:

$$e^{\bar{\Lambda}\Delta t} = \begin{bmatrix} e^{\bar{\lambda}_1\Delta t} & & & \\ & e^{\bar{\lambda}_2\Delta t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\bar{\lambda}_n\Delta t} \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

die Lösung von (3.129) auch wie folgt angeben /88/:

$$\bar{\mathbf{z}} = (\bar{\mathbf{Z}}e^{\bar{\Lambda}\Delta t}\bar{\mathbf{Z}}^{-1} - \mathbf{I})^t \bar{\mathbf{z}} \quad (3.139)$$

Ein Vergleich mit (3.132) liefert:

$$\Phi(\Delta t) = \bar{\mathbf{Z}}e^{\bar{\Lambda}\Delta t}\bar{\mathbf{Z}}^{-1} \quad (3.140)$$

Da die Modalmatrix konstant ist, kann die Untersuchung der

Fundamentalmatrix hinsichtlich Beschränktheit auf die Analyse von (3.138) bzw. auf die Eigenwerte $\bar{\lambda}$ aus (3.135) begrenzt werden.

Zunächst werden die zum Zeitpunkt t berechneten Eigenwerte betrachtet. Gilt zumindest für einen Eigenwert:

$$\operatorname{Re} \bar{\lambda} > 0 \quad (3.141)$$

so folgt daraus nur - da die Feststellung nur für das Inkrement gilt -, daß ein Anwachsen des Terms $e^{\bar{\lambda} \Delta t}$, also Unbeschränktheit der Fundamentalmatrix möglich ist. Gilt umgekehrt für alle zum Zeitpunkt t berechneten $\bar{\lambda}$:

$$\operatorname{Re} \bar{\lambda} < 0 \quad (3.142)$$

so ist die Beschränktheit der Fundamentalmatrix im Inkrement gesichert. Als kritisch wird der Fall:

$$\bar{\lambda} = 0 \quad (3.143)$$

angesehen.

Nun soll überprüft werden, wie die Stabilität des Systems mit Hilfe der für das Inkrement gültigen Aussagen zu beurteilen ist. Bereits anschaulich ist nachvollziehbar, daß die Erfüllung einer der Bedingungen (3.141) bis (3.143) im Inkrement nur eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für die Stabilität beziehungsweise der Instabilität der Lösung darstellt, da in einem darauffolgenden Inkrement bereits andere Verhältnisse möglich sind. Für die folgenden Überlegungen wird deshalb davon ausgegangen, daß der Verlauf von $\bar{\lambda}$ in dem maßgebenden Zeitbereich ermittelt wurde, d.h. (3.135) für jedes Inkrement - parallel zu einer Zeitverlaufsberechnung - gelöst wurde. Bei praktisch vorkommenden Systemen liegt der für die Stabilitätsuntersuchung relevante Zeitbereich aufgrund des Zeitverlaufs der Belastung bzw. Periodizität der Lösung fest. Zunächst wird der Fall betrachtet, daß innerhalb des relevanten Zeitabschnittes nur Eigenwerte angetroffen

werden, die die Bedingung (3.142) erfüllen. Dies bedeutet, daß ein Anwachsen des Terms $e^{\bar{\lambda} \Delta t}$ ausgeschlossen ist und Stabilität vorliegt. Allgemein stellt die Bedingung (3.142) - angewandt auf alle innerhalb des relevanten Zeitbereichs auftretenden $\bar{\lambda}$ - eine notwendige und hinreichende Bedingung für Stabilität dar.

Treten nun innerhalb des relevanten Zeitbereichs neben Eigenwerten, die (3.142) erfüllen, für eine begrenzte Anzahl von Inkrementen auch solche Eigenwerte auf für die (3.141) gilt, so ist die Beurteilung der Stabilität mit Schwierigkeiten verbunden. Wie im Rahmen der Beispiele (s. Abschnitt 3.4.2.4) noch gezeigt wird, kommt es in diesen Fällen - obwohl die (notwendigen) Bedingungen dafür erfüllt sind - nicht immer zu einem Anwachsen der gestörten Lösung, d.h. zur Ausbildung des Instabilitätsphänomens. Auf diesen systemabhängigen Effekt soll im Abschnitt 3.4.2.4 noch näher eingegangen werden. Da Instabilität per Definition aber dadurch gekennzeichnet ist, daß die gestörte Lösung die ϵ -Umgebung verläßt, kann in den genannten Fällen im Grunde nicht von Instabilität gesprochen werden. Zur genauen Bestimmung der Stabilitätsgrenze müßten demnach wieder Zeitverlaufsberechnungen herangezogen werden. Um dies zu umgehen, d.h. um auch Instabilität mit Hilfe von Eigenwertbetrachtungen feststellen zu können, wird im folgenden definiert, daß Instabilität dadurch gekennzeichnet ist, daß (3.141) im Inkrement erfüllt ist. Die Definition bedeutet anschaulich ein über das Zeitinkrement hinausgehendes Einfrieren des Zustandes, für den (3.141) gilt; eine spätere Änderung der Verhältnisse wird damit ausgeschlossen. Diese Definition stellt also eine Einschränkung dar, liefert aber die dynamische Beullast auf der sicheren Seite (s. Abschnitt 3.4.2.4).

Neben der direkten Bestimmung der Eigenwerte aus (3.135) kann zur Stabilitätsaussage im Rahmen des vorgestellten inkrementellen Konzeptes auch das aus

$$\det(\mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I}) = 0 \quad (3.144)$$

resultierende charakteristische Polynom:

$$p(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^n + a_1 \bar{\lambda}^{n-1} + \dots + a_{n-1} \bar{\lambda} + a_n$$

herangezogen werden. Hierzu stehen aus der Literatur zur Stabilität zeitinvarianter Systeme das hinreichende Kriterium von Stodola sowie die notwendig und hinreichenden Kriterien von Routh, Liénard-Chipart und Hurwitz zur Verfügung /88/. Sie lassen sich ebenso wie das aus (3.135) abgeleitete Kriterium (3.143) der ersten Ljapunovschen Methode zuordnen /49/.

Stellvertretend sei nachfolgend das Hurwitz-Kriterium angegeben. Es liefert asymptotische Stabilität, wenn für alle Hauptabschnittsdeterminanten H_i der Hurwitz-Matrix:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & \dots & & & & a_n \end{bmatrix}$$

gilt:

$$H_i > 0 \quad (3.145)$$

wobei a_1, a_2, \dots, a_n die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms darstellen.

Eine rechnerische Vereinfachung liefert das Kriterium von Liénard-Chipart insofern, als es die Erfüllung der Bedingung (3.145) nur für jede zweite Hurwitz-Determinante verlangt /88/.

Im folgenden wird zur Veranschaulichung, sowie in Vorbereitung des folgenden Abschnittes, das Vorgehen nach

(3.145) am Beispiel des Zweibocks dargestellt.

Da sich das Hurwitz-Kriterium auf asymptotische Stabilität bezieht, muß das gedämpfte System betrachtet werden. Die Systemmatrix lautet hierfür:

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1} {}^t K & -M^{-1} D \end{bmatrix}$$

Aus (3.144) ergibt sich das charakteristische Polynom:

$$\bar{\lambda}^2 + \bar{\lambda} D/M + {}^t \omega^2 = 0$$

mit den charakteristischen Koeffizienten $a_1 = D/M$, $a_2 = {}^t \omega^2$.
Damit läßt sich die Hurwitz-Matrix

$$\mathbf{H-H} = \begin{bmatrix} D/M & 1 \\ 0 & {}^t \omega^2 \end{bmatrix}$$

sowie die Hauptabschnittsdeterminanten $H_1 = D/M$ und $H_2 = {}^t \omega^2 D/M$ berechnen. Für die Stabilitätsgrenze ergibt sich aus $H_2 = 0$:

$${}^t \omega = 0$$

Dies stellt genau die von statisch belasteten Systemen her bekannte Bedingung des kinetischen Stabilitätskriteriums dar.

Die mathematische Klarheit dieses Konzeptes darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß sowohl die Lösung des Problems (3.135) wie auch die Auswertung des Determinanten-Kriteriums z.B. von Liénard-Chipart rechenzeitintensive Prozesse darstellen. Dies, sowie der Umstand, daß die Systemmatrix gesondert aufgestellt werden müßte - sie steht auch bei Verwendung des Padé-Verfahrens nicht zur Verfügung - lassen die hier vorgestellten Kriterien als unwirtschaftlich und damit als nur bedingt geeignet erscheinen.

Hier sei noch angemerkt, daß sich das Eigenwertproblem (3.135) auch für die Stabilitätsuntersuchung von Zeitintegrationsverfahren eignet. Im Zusammenhang mit dynamischen Stabilitätsproblemen tritt aber die Schwierigkeit auf, daß beim Auftreten von Instabilität nun nicht mehr unterschieden werden kann, ob sie aus dem Integrationsverfahren oder aus dem Systemverhalten herrührt (vergl. Abschnitt 3.3.2). Insofern ist, wie bereits gezeigt (s. Abschnitt 3.3.4.1), die Stabilität der Integrationsmethode getrennt nachzuweisen.

3.4.2.2 Eigenkreisfrequenzen

Die Anwendung der Kriterien des vorigen Abschnittes auf das Beispiel des Zweibocks legte bereits den Schluß nahe, daß das kinetische Stabilitätskriterium auch für Tragwerke unter dynamischen Belastungen Gültigkeit besitzt. Hier soll nun gezeigt werden, wie sich das Eigenwertproblem für die Eigenkreisfrequenzen des Systems, direkt aus (3.135) gewinnen läßt.

Mit der Systemmatrix **A** nach (3.90) ergibt sich (3.135) ausgeschrieben (**D=0**):

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I})\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} -\bar{\lambda}\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\bar{\lambda}\mathbf{I} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (3.146)$$

Mit:

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \dot{\bar{\mathbf{u}}} \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

liefert die zweite Gleichung aus (3.146):

$$-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\lambda}\dot{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{0} \quad (3.148)$$

bzw. zusammen mit der ersten Gleichung:

$$-\mathbf{M}^{-1} {}^t\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\lambda}^2 \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Nun wird direkt das Eigenwertproblem für die Eigenkreisfrequenzen eingeführt (die Formulierung für das Inkrement der Differenzbewegung erhält man aus den Beziehungen (3.127) und (3.127a)):

$$({}^t\mathbf{K} - {}^t\omega^2 \mathbf{M})\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.149)$$

bzw.

$$-\mathbf{M}^{-1} {}^t\mathbf{K}\bar{\mathbf{u}} = -{}^t\omega^2 \bar{\mathbf{u}} \quad (3.150)$$

Damit läßt sich (3.148) wie folgt umschreiben (zur Vereinfachung wird ω anstelle von ${}^t\omega$ geschrieben):

$$-\omega^2 \mathbf{I} \bar{\mathbf{u}} - \bar{\lambda}^2 \mathbf{I} \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.151)$$

$$\text{bzw. } \omega^2 = -\bar{\lambda}^2 \quad (3.152)$$

Für positiv definite ${}^t\mathbf{K}$ ergeben sich aus (3.149) stets reelle Eigenkreisfrequenzen $\omega > 0$ und damit aus (3.152) stets $\text{Re} \bar{\lambda} = 0$, $\text{Im} \bar{\lambda} \neq 0$ also Stabilität. Andererseits erhält man für $\omega^2 < 0$ stets $\text{Re} \bar{\lambda} > 0$, also Instabilität. Die Grenze zwischen Stabilität und Instabilität ergibt sich nach (3.143) genau dann, wenn gilt:

$$\boxed{\omega = 0} \quad (3.153)$$

Da im stabilen Bereich $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \dots$ gilt, ist (3.153) gleichbedeutend mit:

$$\omega_1 = 0$$

Damit ist - unter der genannten Einschränkung - das kinetische Stabilitätskriterium auch für dynamische Stabilitätsprobleme gültig (s. auch /72/). Die Verwendung von ω anstelle von $\bar{\lambda}$ ist insofern von Vorteil, als die in (3.149) auftretenden Matrizen bei der Berechnung ohnehin vorhanden

sind und das zu lösende Eigenwertproblem (3.149) wesentlich kleiner als das nach (3.135) ist.

Es sei darauf hingewiesen, daß (3.153) erst durch die oben eingeführte vereinfachende Definition: "Instabilität tritt ein, sobald $\bar{\lambda}=0$ gilt" zu einem Stabilitätskriterium wird. Zur Beurteilung der Stabilität muß - wie im vorigen Abschnitt beschrieben - strenggenommen der gesamte zeitliche Verlauf von w betrachtet werden. Wenn im folgenden (3.153) als Stabilitätskriterium angesprochen wird, so geschieht dies stets in diesem Sinne.

Das Ergebnis einer Anwendung des Kriteriums auf den Zweibock aus Bild 2.11 ist in Bild 3.33 dargestellt. Für verschieden hohe Stufenlasten wurde das Eigenwertproblem (3.149) parallel zur Zeitverlaufsberechnung gelöst und die sich ergebenden jeweils kleinsten Eigenkreisfrequenzen über der Lasthöhe aufgetragen. Es zeigt sich, daß die mit Hilfe von $w_1=0$ berechnete kritische Lasthöhe von $P_{KRIT}=0,77$ MN mit der aus Zeitverlaufsberechnungen (s. Bild 2.13) gewonnenen übereinstimmt. Die oben eingeführte Definition stellt bei diesem Beispiel also keine Einschränkung dar.

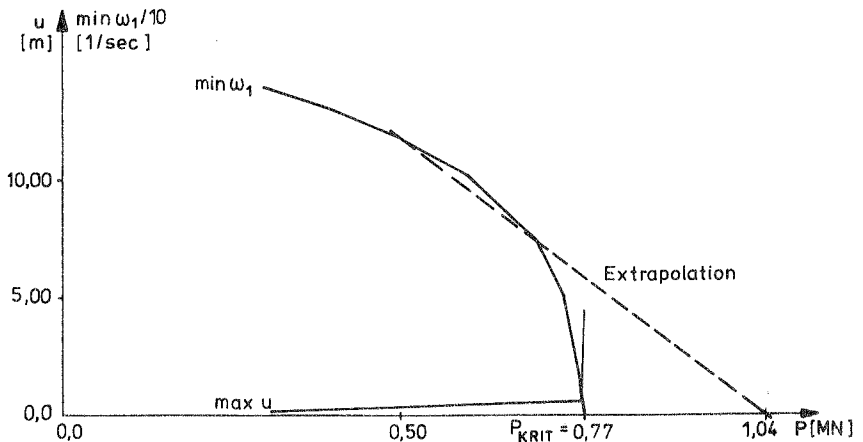


Bild 3.33: Zweibock - Kinetisches Stabilitätskriterium

Der durch $\omega_1=0$ angezeigte Verlust der positiven Definitheit von \mathbf{K} bedeutet, daß das System während des Durchschlagvorganges kinematisch ist. Das dynamische Gleichgewicht wird in diesem Zustand allein von der Belastung und den Trägheitskräften gebildet.

Bei höherer Auflösung zeigt sich, daß der Verlauf von $\min \omega$, die x-Achse rechtwinklig schneidet. Daraus folgt bereits, daß das Kriterium (3.153) nur begleitend eingesetzt werden kann, eine extrapolierende Ermittlung der kritischen Lasthöhe von tiefer gelegenen Lastniveaus aus ist nur in unmittelbarer Umgebung der dynamischen Beullast möglich (s. Bild 3.33). Selbst die unter Berücksichtigung des rechtwinkligen Achsenschnittes (z.B. mit Hilfe einer quadratischen Ersatzparabel) mögliche Näherungsberechnung von P_{KRIT} erfordert die Untersuchung mehrerer Lastniveaus und ist damit aufwendiger als die im folgenden Abschnitt vorgestellte Methode.

3.4.2.3 Eigenwertkriterium zur direkten Bestimmung der kritischen Last

Auf der Basis der bisher betrachteten Eigenwertkriterien wird - wieder unter der Annahme, daß Instabilität durch $\omega=0$ gekennzeichnet ist - ein Kriterium formuliert, das insbesondere für Stufenlasten eine direkte Bestimmung der dynamischen Durchschlags - bzw. der dynamischen Verzweigungslast gestattet. Wird Proportionalität zwischen Spannungen und äußerer Belastung angenommen, so läßt sich direkt diejenige Lasthöhe angeben, unter der gerade (3.153) erfüllt wird. Da die erwähnte Proportionalität bei nichtlinearen Systemen nicht vorliegt, führt die Annahme zu einem Fehler, der wie anhand von Beispielen noch gezeigt wird (Abschnitt 3.4.2.4) in der Nähe der kritischen Last gering ist.

Die angenommene Proportionalität bedeutet, daß zwischen der äußeren Belastung und den nichtlinearen Anteilen der Steifigkeitsmatrix folgender linearer Zusammenhang besteht. Mit dem Lastparameter λ ($\neq \bar{\lambda}$) gilt:

$${}^t\mathbf{R} \rightarrow \lambda {}^t\mathbf{R}, \quad {}^t\mathbf{K}_0 \rightarrow \lambda {}^t\mathbf{K}_0 \quad (3.154)$$

$$\text{bzw.} \quad {}^t\mathbf{K}_0 + \lambda {}^t\mathbf{K}_0 \rightarrow {}^t\mathbf{K}_0 + \lambda {}^t\mathbf{K}_0$$

Wird diese Beziehung in (3.149) eingebracht, so ergibt sich (zur Vereinfachung wird wieder $\lambda = \lambda$ geschrieben):

$$({}^t\mathbf{K}_0 + \lambda {}^t\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.155)$$

Die vorhandene Belastung werde nun so vergrößert, daß gerade die kritische Lasthöhe erreicht wird:

$$\mathbf{R}_{\text{KRIT}} = \lambda {}^t\mathbf{R} \quad (3.156)$$

Unter \mathbf{R}_{KRIT} gilt aber:

$$\omega_1 = 0 \quad (3.153)$$

Damit ergibt sich aus (3.155):

$$\boxed{({}^t\mathbf{K}_0 + \lambda {}^t\mathbf{K}_0) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}} \quad \text{UL} \quad (3.157)$$

Dies stellt ein Eigenwertproblem für den Lastparameter λ dar, $\bar{\mathbf{u}}$ enthält die Versagensform. Die kritische Lasthöhe erhält man aus (3.156) mit dem kleinsten Eigenwert $\lambda = \lambda_1$.

Unter $\mathbf{R}_{\text{KRIT}} = {}^t\mathbf{R}$, also $\lambda_1 = 1$, wird (3.157) exakt erfüllt, für $\lambda_1 \neq 1$ ergibt sich insofern ein Näherungscharakter, als (3.154) üblicherweise eine Näherung darstellt, die umso besser ist, je geringer die Nichtlinearität des Systems ist. Analog zu dem Eigenwertproblem (3.157) für UL-Formulierung, ergibt sich in TL-Formulierung:

$$({}^0\mathbf{K}_0 + \lambda ({}^0\mathbf{K}_u + {}^0\mathbf{K}_0)) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{TL} \quad (3.158)$$

beziehungsweise:

$$\boxed{({}^0\mathbf{K}_0 + \lambda {}^0\mathbf{K}_0) \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}} \quad \text{TL} \quad (3.159)$$

Sämtliche Eigenwertprobleme werden im Programm NISA mit Hilfe einer Unterraum-Vektoriterationstechnik nach /18/ gelöst.

Die Bestimmung der kritischen Lasthöhe mit Hilfe von λ_1 z.B. aus (3.157) bedeutet anschaulich eine Skalierung der Belastung auf einen Wert (R_{KRIT}), unter dem gerade $\omega_1=0$ erreicht wird. Das Verfahren soll daher auch als "Skalierungsmethode" bezeichnet werden.

Für die praktische Ermittlung der dynamischen Beullast wird zunächst für ein bestimmtes Lastniveau der zeitliche Verlauf von λ_1 berechnet, er ist affin zum Zeitverlauf von ω_1 (s. Bild 3.36). Für die Berechnung der kritischen Lasthöhe nach (3.156) ist das hier aufgefundene Minimum von λ_1 ($\min \lambda_1$) zu verwenden:

$$R_{KRIT} = \min \lambda_1 \cdot R \quad (3.160)$$

In den Fällen, in denen das Systemverhalten durch eine ausgezeichnete Verschiebung mit einem zu λ_1 affinen Zeitverlauf charakterisierbar ist, kann die Effizienz der Skalierungsmethode dadurch gesteigert werden, daß das Eigenwertproblem nur zu dem Zeitpunkt gelöst wird, zu dem die ausgezeichnete Verschiebung ihren Maximalwert erreicht (Bild 3.34). Nach obigen Ausführungen und denen des Abschnittes 3.4.2.1 bedeutet diese Vorgehensweise ein Einfrieren des Zustandes maximaler Verschiebung und eine anschließende Skalierung in der oben beschriebenen Weise.

Wie in Bild 3.34 angedeutet, tritt das Verschiebungsmaximum mit zunehmender Lasthöhe - hervorgerufen durch die Abnahme von ω_1 - zunehmend später auf. Der Ausnutzung dieses Effektes, die aus Gründen der Wirtschaftlichkeit sicher wünschenswert ist, sind insofern Grenzen gesetzt, als eine ausreichend genaue Bestimmung der dynamischen Beullast nur von einem Lastniveau aus zu erwarten ist, das nicht zu weit unter dem kritischen liegt. Grenzen hierfür werden im folgenden noch angegeben.

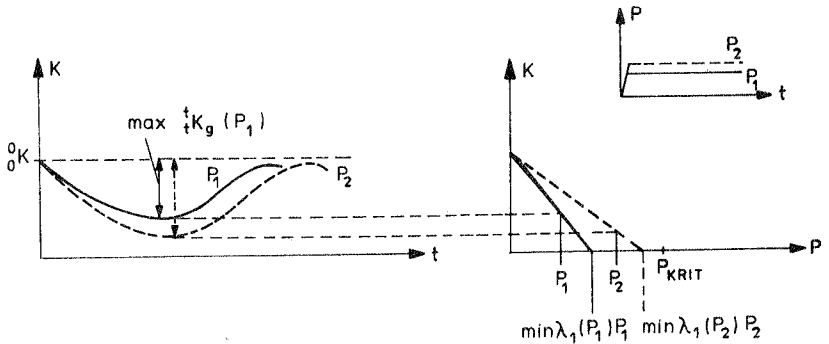


Bild 3.34: Bestimmung der dynamischen Stabilitätsgrenze mittels Extrapolation, System mit $i^\circ F$

Es sei darauf hingewiesen, daß die Eigenwertprobleme (3.157) bis (3.159) der Form nach mit den in /28/ bzw. /101/ für statisch belastete Systeme dargestellten Kriterien übereinstimmen. Infolge der Gültigkeit von (3.157) bis (3.159) für allgemeine Systeme, die durch den Bezug auf (3.135) gegeben ist, wird das Vorgehen in /28/ zusätzlich abgesichert. Außerdem ist durch obige Ableitung gezeigt, daß die in /28/ angegebenen begleitenden Eigenwertuntersuchungen direkt aus der Bedingung $\omega=0$ hervorgehen (s.a. /33/).

Da die in /28/ untersuchten, statischen Stabilitätsprobleme einen Sonderfall der hier behandelten dynamischen - darstellen, sind die in /28/ gesammelten Erfahrungen auch hier verwendbar. Zunächst kann /28/ entnommen werden, daß die in (3.154) angesetzte Proportionalität zwischen äußerer Belastung und nichtlinearen Steifigkeitstermen ausreichend ist, die in /28/ zusätzlich angegebenen Eigenwertprobleme liefern keine Verbesserung des Konzeptes.

Die Mitvergrößerung der Anfangsverschiebungen, die hier nur nach (3.158) möglich ist (eine Formulierung mit der Änderung inkrementeller Steifigkeiten führt nicht zum Ziel, da bei schwingenden Systemen in der Regel $\Delta K=0$ auftritt), bewirkt insbesondere bei Schalen unter konzentrierten Lasten eine Verschlechterung der Ergebnisse. Dies kann anhand eigener Untersuchungen an einer Kugelkappe unter dynamisch wirkender Ringbelastung bestätigt werden.

Aufgrund dieser Erfahrungen können von den Eigenwertproblemen (3.157) und (3.159) allgemein gute Ergebnisse erwartet werden; (3.158) ist wegen der genannten Probleme nicht generell zu empfehlen. Eine endgültige Bewertung soll erst nach den Beispielrechnungen vorgenommen werden.

Zur Veranschaulichung des hier entwickelten Konzeptes wird zunächst wieder der Zweibock betrachtet. Bei mehreren Zeitverlaufsrechnungen mit unterschiedlich hohen Stufenlasten wurden jeweils im Verschiebungsmaximum die Eigenwerte (aus (3.157)) berechnet. In Bild 3.35 sind die mit Hilfe dieser Lastparameter ($\min \lambda_1$) ermittelten kritischen Lasthöhen ($\min \lambda_1 \cdot P$) - bezogen auf P_{KRIT} - den bereits weiter oben berechneten Ergebnissen gegenübergestellt.

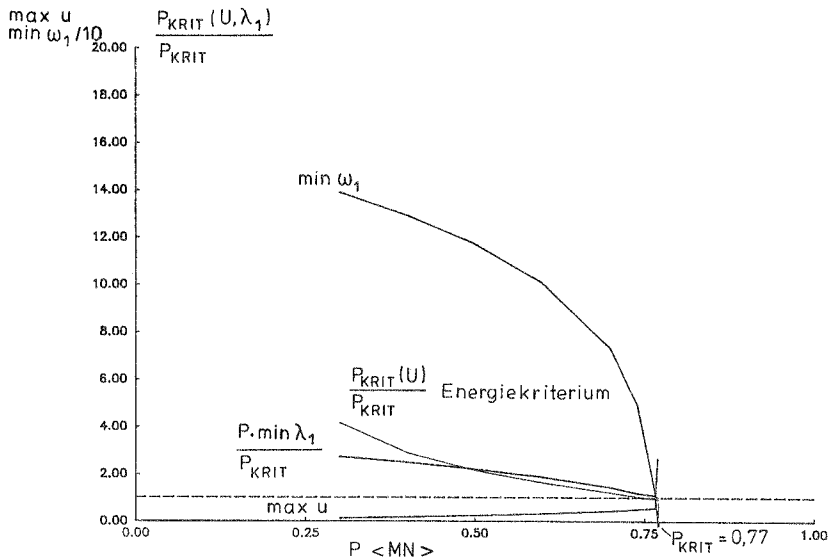


Bild 3.35: Zweibock, Gegenüberstellung der Kriterien

Aus der Darstellung in Bild 3.35 folgt, daß das hier entwickelte Konzept tatsächlich extrapolierend eingesetzt werden kann und damit eine im Sinne oben aufgestellter Forderungen direkte Bestimmung der dynamischen Durch-

schlagslast gestattet. Es ist allgemeiner verwendbar und weniger restriktiv als das Energiekriterium; zudem ist es verglichen mit dem Kriterium (3.143) wesentlich wirtschaftlicher.

3.4.2.4 Verifizierung der Kriterien

Um die Zuverlässigkeit der oben formulierten Skalierungsmethode nachzuweisen, werden im folgenden Systeme untersucht, die sich sowohl hinsichtlich der Problemgröße, als auch hinsichtlich des Systemverhaltens unterscheiden. Zum dynamischen Verzweigen werden der durch eine axiale Stufenlast beanspruchte Stab sowie eine starr eingespannte Kugelkappe unter gleichmäßigem, plötzlich wirkendem Außen- druck betrachtet. Dynamisches Durchschlagen wird anhand des Kreisbogens aus Abschnitt 3.3.4.2 diskutiert.

1. Eulerstab

Der im Bild 2.3 dargestellte Eulerstab unter einer axialen Stufenlast wurde bereits im Abschnitt 2.5.4.2 mit Hilfe reiner Zeitverlaufsberechnungen auf dynamische Stabilität hin untersucht. Hier soll nun die Stabilitätsanalyse mit Hilfe des Kriteriums (3.153) sowie die Anwendung der Skalierungsmethode untersucht werden.

In Bild 3.36 sind der zeitliche Verlauf der Eigenkreisfrequenz ω_1 sowie des Lastparameters λ_1 aus (3.157) für unterschiedlich hohe Lastwerte dargestellt (UL, $\Delta t=0,002$ sec). Neben der Axiallast wurde in Stabmitte eine Störlast mit dreieckförmigem Zeitverlauf aufgebracht (s. Bild 2.16). Die Verwendung einer Störung ist für die Skalierungsmethode nicht zwingend, für dieses Beispiel liefert sie aber eine Verbesserung des Ergebnisses; hierauf wird später noch näher eingegangen.

Zunächst soll anhand Bild 3.36 die Stabilität des Systems beurteilt und die sich aus der Definition "Instabilität wird bereits durch $\omega_1=0$ angezeigt" ergebenden Ein-

schränkungen diskutiert werden. Der Verlauf von ω_1 ist periodisch, d.h. der dargestellte Zeitbereich ist für die Stabilitätsbeurteilung ausreichend. Für $P=1,0$ bzw. $P=1,5$ kN gilt $\omega_1 > 0$, damit ist ein Anwachsen der gestörten Lösung ausgeschlossen, es liegt Stabilität vor. Unter $P=1,58$ kN tritt kurzzeitig $\omega_1^2 < 0$ auf (punktierter Kurvenverlauf). Aus der Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe von Zeitverlaufs-berechnungen (s. Bild 2.16) ist aber bekannt, daß Instabilität erst bei $P=1,72$ kN auftritt. Aus der Tatsache, daß $\omega_1 = 0$ bzw. $\omega_1^2 < 0$ bereits unterhalb der kritischen Lasthöhe beobachtet wird folgt, daß das Kriterium (3.153) und damit auch die Skalierungsmethode die dynamische Versagenslast auf der sicheren Seite liefert. Der beschriebene Effekt geht auf die oben eingeführten Vereinfachungen zurück und wird auch bei den folgenden Beispielen zu beobachten sein.

Aus Bild 3.36 folgt, daß ω_1 sehr stark von der Axiallast P , sowie mit wachsendem P auch stark von der Zeit abhängig ist. Für die Verwendung von (3.153) als begleitende Maßnahme ist es daher wesentlich, das Minimum von ω_1 exakt zu treffen. Der Verlauf von λ_1 zeigt demgegenüber nur eine schwache Abhängigkeit von der Zeit und eine gegenüber ω_1 verringerte Abhängigkeit von der Höhe der Axiallast. Allein hieran läßt sich die verbesserte Möglichkeit erkennen, mit Hilfe von λ_1 die dynamische Verzweigungslast direkt zu bestimmen. Aus der schwachen zeitlichen Abhängigkeit folgt weiterhin, daß sich - zumindest für dieses Beispiel - auch dann akzeptable Näherungslösungen für die kritische Last ergeben, wenn λ_1 außerhalb des Minimums von ω_1 ermittelt wird.

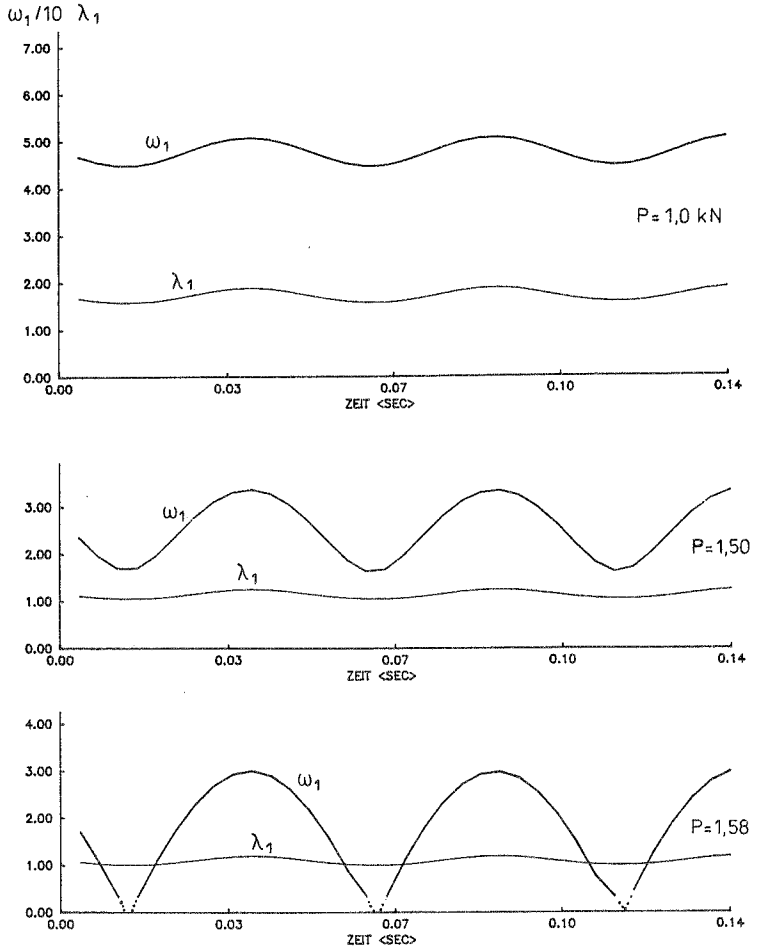


Bild 3.36: Eulerstab - Zeitverlauf von ω_1 , λ_1 , $\Delta t=0,002\text{sec}$

Die sich aus den Zeitverlaufsberechnungen ergebenden Minimalwerte $\min\omega_1$, $\min\lambda_1$ sowie die entsprechend Bild 2.16

berechneten, maximalen Querverschiebungen der Stabmitte ($\max v(16)$), sind in Bild 3.37 über der jeweiligen Axiallast aufgetragen. Aus der Berechnung mit $\Delta t_1=0,002$ sec (durchgezogene Linien) ergibt sich die kritische Lasthöhe zu $P_{KRIT}=1,58$ kN. Durch eine Halbierung der Zeitschrittweite ($\Delta t_2=0,001$ sec) wird die aus $\max v(16)$ resultierende, dynamische Verzweigungslast nicht beeinflusst, aus den Eigenwerten $\min \lambda_1$ bzw. $\min \omega_1$ erhält man nun einen verbesserten Wert von $P_{KRIT}=1,66$ kN. Hieran läßt sich zweierlei ablesen: Zunächst zeigt sich, wie bei Verschiebungselementen zu erwarten, eine höhere Genauigkeit der Verschiebungen gegenüber den Spannungen, dies wirkt sich über K_0 direkt auf die Eigenwerte aus.

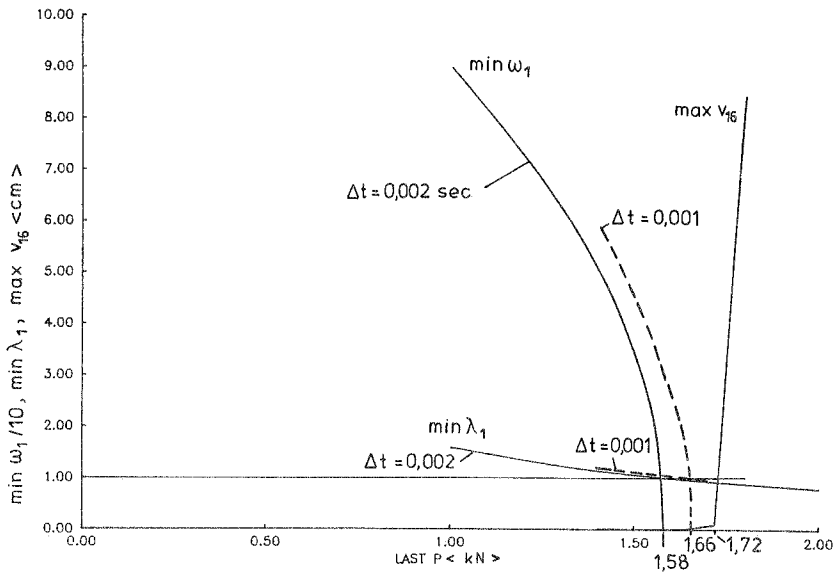


Bild 3.37: Eulerstab - Vergleich der Kriterien

Weiterhin bewirkt die feinere Zeitdiskretisierung eine verbesserte Darstellung der hochfrequenten Längsschwingung des Stabes; auch hieraus folgt über genauere Längsverschiebungen bzw. -spannungen eine genauere geometrische Steifigkeitsmatrix und daraus wiederum verbesserte Eigenwerte.

Mit Hilfe der oben erwähnten Störlast in Stabquerrichtung wird über die dadurch erregte Längs-Biegeschwingung zusätzlich der Einfluß höherer Eigenformen der Längsschwingung abgeschwächt, woraus ebenfalls eine Genauigkeitssteigerung der Eigenwerte resultiert.

Anhand zusätzlicher Untersuchungen konnte festgestellt werden, daß die aus der Skalierungsmethode gewonnene kritische Lasthöhe den mit Hilfe reiner Zeitverlaufsberechnungen ermittelten Wert von 1,72 kN, trotz weiterer Verfeinerung von Orts- und Zeitdiskretisierung, nicht erreicht. Diese Differenz d.h. die Unterschätzung der dynamischen Verzweigungslast durch die Skalierungsmethode ist auf die im Rahmen der Ableitung der Stabilitätskriterien eingeführten Vereinfachungen zurückzuführen: Einfrieren im Inkrement (Linearisierung der inneren Kräfte der Störbewegung, ${}^0\mathbf{K}_n = {}^0\mathbf{K}$) und Einfrieren des Zustandes, für den (3.143) gilt. Da durch das Einfrieren dynamische Effekte außer Acht gelassen werden, kann die höhere kritische Last aus Zeitverlaufsberechnungen vereinfachend auch als eine Folge der stabilisierenden Wirkung von Trägheitskräften aufgefaßt werden. Hierauf soll bei dem folgenden Beispiel des Kreisbogens noch näher eingegangen werden.

Für die Anwendung der Skalierungsmethode ist es wesentlich zu wissen, mit welcher Genauigkeit die dynamische Stabilitätsgrenze von tiefer gelegenen Belastungsniveaus aus bestimmt werden kann, d.h. inwiefern die Annahme der Proportionalität von Last und Spannung (3.154) zutrifft. Vergleicht man unter diesem Aspekt die für den Zweibock und den Eulerstab ermittelten Ergebnisse, so findet man beim Stab eine wesentlich höhere Genauigkeit als bei dem System mit nur einem Freiheitsgrad.

Beispielsweise ergibt sich für den Stab unter $P=1,0$ kN bereits der richtige Wert für P_{KRIT} . Da ein prinzipiell gleichartiges Verhalten auch bei dem nachfolgend diskutierten Kreisbogen zu beobachten ist, kann das unterschiedliche Versagen (Durchschlagen, Verzweigen) und das

damit verbundene unterschiedlich nichtlineare vorkritische Verhalten als alleinige Ursache ausgeschlossen werden. Letzteres wird zwar die Güte der Extrapolation beeinflussen, der Grund für die oben erwähnten, unterschiedlichen Genauigkeiten ist aber in der unterschiedlichen Anzahl von Freiheitsgraden begründet. Während der Eigenwert beim Zweibock über K_0 direkt von der einen Verschiebung u abhängt, wird K_0 bei den Systemen mit mehreren Freiheitsgraden von einzelnen Verschiebungskomponenten stärker und von anderen weniger stark beeinflusst. Den "schwächeren" Komponenten kommt insofern eine ausgleichende Wirkung zu, als sie den Einfluß der dominierenden Freiheitsgrade (in modalem Sinne) vermindert und so die Abhängigkeit der Eigenwerte von der Lasthöhe herabsetzt.

Das Beispiel ist für einen Vergleich des Rechenaufwandes für die Stabilitätsanalyse wegen des linearen Vorbeulverhaltens sicher ungeeignet, dennoch sei festgestellt, daß der zwischen den Rechenzeiten für die statische und die dynamische Analyse bestehende Faktor von ca. 7 für die Effizienz der hier verwendeten Methode spricht. Erst aus dem für den Kreisbogen ermittelten Verhältnis von 2,2 wird die Wirtschaftlichkeit des vorgeschlagenen Konzeptes ersichtlich. Abschließend sei zu diesem Beispiel festgestellt, daß die Skalierungsmethode im Gegensatz zum Kriterium (3.153) auch für Lastwerte oberhalb P_{KRIT} zuverlässige Werte liefert. Weiterhin sei angemerkt, daß sich unabhängig von der Formulierung (3.157) bzw. (3.158), (3.159) gleiche Ergebnisse einstellen, allerdings treten bei der Verwendung von (3.158) teilweise Konvergenzprobleme bei der Eigenwertberechnung auf.

2. Kreisbogen

Analog zu der oben geschilderten Vorgehensweise, wird bei dem Kreisbogen (Bild 3.14) die dynamische Stabilitätsanalyse mit Hilfe der begleitenden Eigenwertuntersuchungen für ω_1 bzw. λ_1 durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Bild 3.38 zusammengestellt. Auch für dieses Beispiel erweisen

sich die Eigenwerte als unabhängig von der verwendeten Formulierung (3.157), (3.158) bzw. (3.159).

Auch hier zeigt sich das wesentlich günstigere Verhalten der Skalierungsmethode (λ_1) gegenüber der Analyse der Eigenkreisfrequenzen (ω_1). Beide Kriterien liefern die kritische dynamische Last übereinstimmend zu $P_{KRIT} = 380,0 \text{ lb/in}^2$ gegenüber $P_{KRIT} = 447 \text{ lb/in}^2$ aus den Zeitverlaufsrechnungen (Bild 3.15).

Im Gegensatz zum Eulerstab ist dieses Ergebnis durch eine Verfeinerung der Orts- bzw. Zeitdiskretisierung nicht weiter zu verbessern.

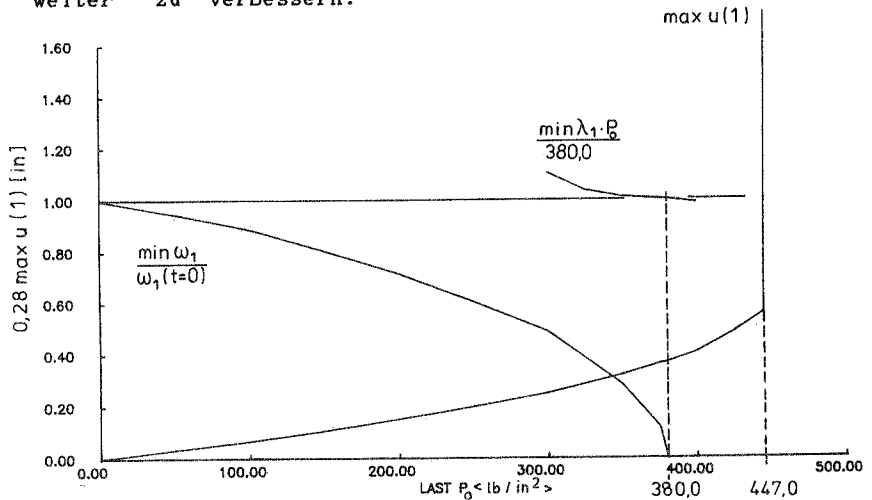


Bild 3.38: Kreisbogen-Vergleich der Kriterien

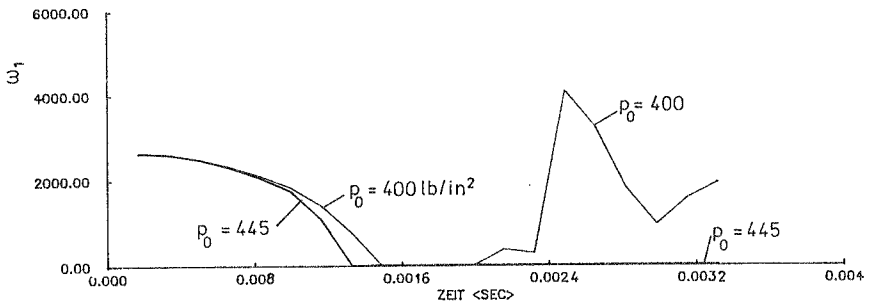


Bild 3.39: Zeitverläufe der Eigenkreisfrequenz ω_1

Die Unterschätzung der dynamischen Beullast, die auf die im vorigen Beispiel diskutierten Ursachen zurückgeht, soll mit Hilfe der in Bild 3.39 dargestellten Zeitverläufe von ω_1 interpretiert werden.

Unter $p=400 \text{ lb/in}^2$ tritt $\omega_1^2 \leq 0$ nur für eine relativ kurze Zeitspanne auf, sie reicht für eine Entwicklung des Durchschlagvorgangs nicht aus. Derselbe Effekt ergibt sich auch bei der im folgenden Kapitel behandelten Kugelkappe unter harmonisch wirkender Ringbelastung. Anders ausgedrückt liegt bei Erreichen des Zustandes, für den gerade $\omega_1=0$ gilt, eine Verteilung der Trägheitskräfte - in allen beteiligten Eigenformen - vor, die das System stabilisiert und die eine, wegen der Indefinitheit der Steifigkeitsmatrix, in der Struktur vorhandene Kinematik noch nicht wirksam werden läßt. Erst für $p=447 \text{ lb/in}^2$ kommt die Kinematik zum Tragen, das System schlägt in die untere, nun stabile Lage durch.

Anzufügen ist noch, daß mit Erreichen von $\omega_1=0$ ein Wechsel in den Eigenformen, die den Verschiebungszustand in modalem Sinne beschreiben, einhergeht. Dies ist auch an dem im Bild 3.40 dargestellten Durchschlagvorgang ablesbar.

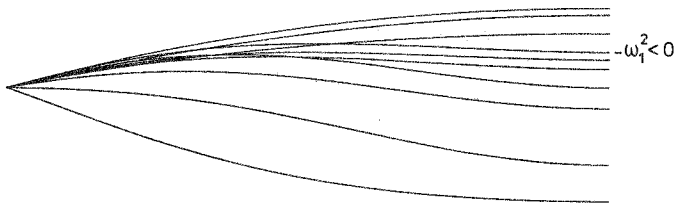


Bild 3.40: Durchschlagvorgang

Eine weitere Bemerkung betrifft den Verlauf von ω_1 (Bild 3.39). Die vor $\omega_1=0$ gefundene, zum Verschiebungs-Zeitverlauf affine Änderung von ω_1 über der Zeit tritt nach Durchlaufen des durch $\omega_1^2 < 0$ gekennzeichneten Bereiches nicht mehr auf, stattdessen erhält man einen Kurvenzug, der physikalisch nicht zu begründen ist und auf

Ungenauigkeiten der Lösung schließen läßt. Letzteres trifft tatsächlich zu und läßt sich folgendermaßen begründen: Für $\omega_1^2 < 0$ wird das dynamische Gleichgewicht nur von den äußeren- und den Trägheitskräften gebildet, damit nimmt der Einfluß der Beschleunigungen auf die Genauigkeit der Lösung zu. Da die Zeitschrittweite der Darstellung der Verschiebungen angepaßt wurde, die Beschleunigungen aber wesentlich steilere Gradienten besitzen, können sie nicht mit derselben Genauigkeit abgebildet werden. Der so entstehende Fehler ist an den diskutierten Eigenkreisfrequenzen direkt ablesbar. Für die Skalierungsmethode ist der beschriebene Effekt insofern ungefährlich, als hierbei Lastwerte betrachtet werden, für die $\omega_1 > 0$ gilt.

3. Kugelkappe

Für die in Bild 3.41 skizzierte Kugelkappe unter gleichmäßig verteilter Außendruckbelastung ist die statische Versagenslast nach /43/ $p_{KRIT} = 0,65 \text{ N/mm}^2$; das Versagen findet in sechs Umfangsbeulwellen statt.

Von Akkas /5/ wurde mit Hilfe der Störungsrechnung die kritische, dynamische Verzweigungslast (Stufenlast) zu $P = 0,29 \text{ N/mm}^2$ berechnet. Mit Hilfe der Eigenformen der freien Schwingung ($p=0$) wurde hierzu ein Versagen in zwei Umfangsbeulwellen ermittelt. Die zum symmetrischen Versagen (Beulenwellenzahl $n=0$) gehörende dynamische Beullast ergibt sich nach /5/ zu $p = 0,43 \text{ N/mm}^2$.

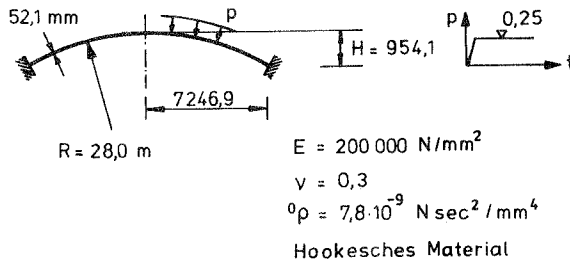


Bild 3.41: Kugelkappe unter Außendruck, Schalenparameter=11

Für die eigene Berechnung wurde, entsprechend der nach /5/ zu erwartenden Versagensform, ein 90° -Sektor mit acht S8-Elementen in Umfangsrichtung und sechs S8 in Meridianrichtung gewählt. Parallel zu einer Zeitverlaufsrechnung nach Newmark ($\beta=1/4$, $\delta=1/2$, $\Delta t=0,0005 \text{ sec} \approx T_g/40$) wurde das Eigenwertproblem nach Gleichung (3.142) gelöst.

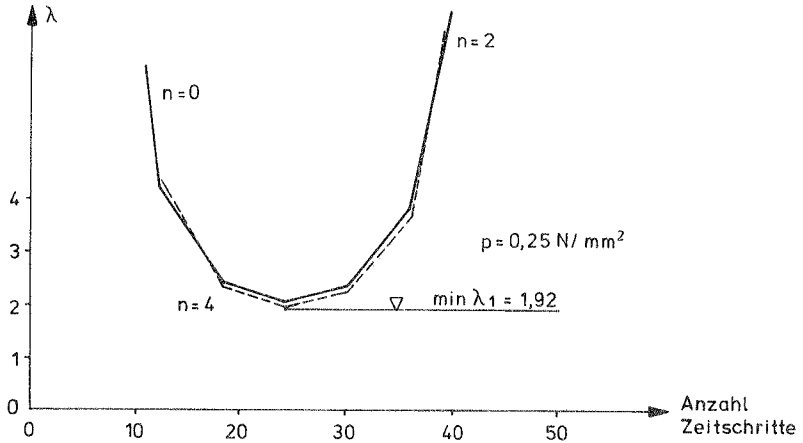


Bild 3.42: Entwicklung der Versagensformen

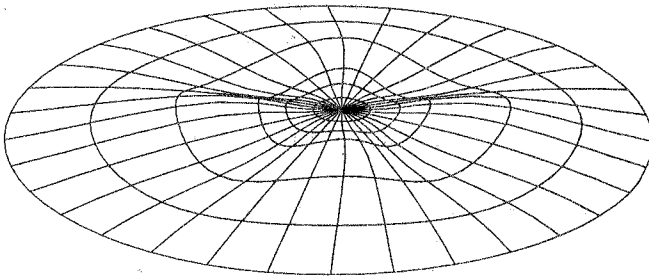


Bild 3.43: Kugelkappe - dynamisches Verzweigen in $n=4$

Wie aus Bild 3.42 hervorgeht, bleibt die Reihenfolge der Eigenformen bis zum Zeitschritt 16 erhalten, anschließend findet ein Wechsel der niedrigsten Form auf $n=4$ (Bild 3.43) statt. Die hierzu gehörende, nach der Skalierungsmethode

berechnete kritische Lasthöhe beträgt:

$$P_{KRIT} = 1,92 \times 0,25 = 0,47 \text{ N/mm}^2.$$

Bei einer etwas höheren Last ($p = 0,49 \text{ N/mm}^2$) erfolgt ein Versagen ($n=0$) in einer höheren, symmetrischen Form. Aufgrund des geringen Abstandes der kritischen Lasthöhen wird die Form mit $n=4$ bei einer Zeitverlaufsanalyse nicht auftreten.

Mit diesen Untersuchungen wird zum einen die in /5/ für symmetrisches Durchschlagen angegebene Lasthöhe bestätigt, andererseits ist dadurch gezeigt, daß die Nichtberücksichtigung eines sogenannten "Mode-Wechsels" zu einer fehlerhaften Bestimmung der dynamischen Versagenslast führt.

Weiterhin kann festgestellt werden, daß neben λ_1 auch $\lambda_2 \dots$ Aussagen über das nachkritische Systemverhalten gestatten. Wie der Verlauf der beiden Eigenwerte λ_1, λ_2 in Bild 3.42 nahelegt, ist aufgrund der starken zeitlichen Abhängigkeit eine näherungsweise Bestimmung der kritischen Last außerhalb extremaler Verschiebungen im Gegensatz zum Eulerstab nun nicht mehr vertretbar.

Diese Untersuchungen belegen sehr deutlich, daß sich statisches und dynamisches Versagen nicht nur hinsichtlich der Lasthöhe, sondern auch hinsichtlich des Versagenszustandes unterscheiden.

3.4.3 Zusammenfassung Abschnitt 3.4

Die Untersuchungen des Abschnittes 3.4, bei dem das Ziel verfolgt wurde, die aufwendige dynamische Stabilitätsanalyse mit Hilfe reiner Zeitverlaufsberechnungen durch geeignete Methoden zu ersetzen, können wie folgt zusammengefaßt werden:

- Mit Hilfe von Eigenwerten können Bedingungen für Stabilität bzw. Instabilität formuliert werden, die aufgrund der Systemnichtlinearität aber nur im Inkrement gelten.

Deshalb muß zur Stabilitätsbeurteilung der gesamte zeitliche Verlauf dieser Eigenwerte herangezogen werden. Bei der Feststellung von Instabilität kann dies dadurch umgangen werden, daß das Auftreten von $\bar{\lambda}=0$ im Inkrement als eine Bedingung für das Erreichen der kritischen Lasthöhe definiert wird.

Durch den Übergang auf Bedingungen für Eigenkreisfrequenzen kann die Eignung des kinetischen Stabilitätskriteriums für Stabilitätsprobleme dynamisch belasteter Tragwerke nachgewiesen werden. Neben diesem, nur begleitend einzusetzenden Kriterium, konnte mit dem Eigenwertproblem für den Lastparameter ein Verfahren vorgestellt werden, das die direkte Bestimmung der dynamischen Versagenslast gestattet.

- Mit Hilfe der durchgeführten Beispielrechnungen konnten die guten Eigenschaften sowie die Effizienz der Skalierungsmethode belegt werden. Abgesehen von dem Extremfall eines Systems mit nur einem Freiheitsgrad liefert sie nach den an obigen Beispielen gesammelten Erfahrungen für $0,9 \leq \lambda_1 \leq 1,5$ die dynamische Versagenslast mit guter Genauigkeit. Voraussetzung hierfür sind sorgfältige, dem Systemverhalten angepaßte Diskretisierungen im Orts- und Zeitbereich, die nicht nur eine möglichst genaue Wiedergabe der Verschiebungen in der Zeit gestatten, sondern insbesondere auch auf eine ausreichend genaue Ermittlung der Spannungen ausgerichtet sind. Eine weitere Anforderung betrifft die Formulierung der Elemente sowie des Eigenwertproblems. Im Vorgriff auf das folgende Kapitel kann das Eigenwertproblem in der Formulierung (3.158) als nicht generell geeignet bezeichnet werden; es liefert z.B. bei der Kugelschale unter lokaler Belastung unzureichende Ergebnisse. Selbstverständlich sind die Genauigkeitsansprüche auch an die Lösung des Eigenwertproblems zu stellen.

- Anhand der dynamisch, durch Außendruck beanspruchten Kugelkappe konnte nachgewiesen werden, daß die Nicht-

Berücksichtigung von "Mode-Wechseln" während des nicht-linearen Bewegungsablaufes, zu einer erheblichen Fehleinschätzung der dynamischen Stabilitätsgrenze führen kann.

- Für die praktische, dynamische Stabilitätsanalyse wird vorgeschlagen, eine Zeitverlaufsberechnung unter Beachtung der im Abschnitt 3.3.4.4 angegebenen Empfehlungen durchzuführen und die dynamische, kritische Lasthöhe mit Hilfe der Skalierungsmethode zu bestimmen.

Hierzu sollte der aus extremalen Verschiebungszuständen berechnete Eigenwert λ_1 herangezogen werden. Von der Verwendung von Werten, die zu anderen Zeitpunkten ermittelt werden, ist aufgrund der damit verbundenen problemabhängigen Fehlerquellen abzuraten. Für die Zeitverlaufsberechnung sollte eine Lastamplitude angesetzt werden, die unterhalb der kritischen liegt, ein Wert von ca. 70% der statischen Versagenslast wird in der Regel zum Ziel führen.

Bei Problemen, die neben der geometrischen auch materielle Nichtlinearitäten aufweisen, nimmt mit dem Grad der materiellen Nichtlinearität auch der Näherungscharakter der Skalierungsmethode zu. Insbesondere bei dominierender materieller Nichtlinearität muß auf reine Zeitverlaufsberechnungen zurückgegriffen werden.

4. Dynamische Stabilität von Kugelschalen

Kugelschalen stellen im Behälter- und Kraftwerksbau häufig anzutreffende Tragwerke dar, sie können je nach Nutzung und Standort erheblichen dynamischen Belastungen ausgesetzt sein. Neben globalen Einwirkungen, beispielsweise aus Druckwellen oder Erdbeben, sind auch lokale möglich, so z.B. im Anschlußbereich von Stützkonstruktionen oder an Stellen von Rohrdurchführungen. Die örtlichen Belastungen lassen sich in "direkte" und "indirekte" unterteilen. Zu den direkten gehören z.B. Druckstoßbelastungen aus Rohrleitungen, die indirekten resultieren aus den globalen Belastungen. Als Beispiel seien die sich aus Basisbeschleunigungen ergebenden Trägheitskräfte an Stützenverstärkungen genannt. Letztere können bei massereichen Verstärkungsstrukturen erhebliche Werte annehmen.

In dem vorliegenden Kapitel wird speziell die Stabilität der Schale unter örtlichen, dynamischen Belastungen behandelt. Im Vordergrund sollen dabei das grundsätzliche Verhalten der Struktur, sowie Einflüsse aus unterschiedlichen Belastungs-Zeitverläufen, materieller Nichtlinearität und Verstärkungsgeometrie stehen. Nach einer Übersicht über die vorhandene Literatur (Abschnitt 4.1) wird eine unverstärkte Kugelschale (Abschnitt 4.2) sowie im Anschluß daran eine stützenverstärkte Schale (Abschnitt 4.3) untersucht. Die Belastung wird dabei auf den Stützen bzw. entlang eines Breitenkreises wirkend angenommen.

Aufgrund der im Abschnitt 3.3.4 gefundenen Vorteile des Newmark-Verfahrens ($\beta=1/4$, $\delta=1/2$) gegenüber anderen Zeitintegrationsmethoden soll es bei sämtlichen Berechnungen dieses Kapitels - ohne Zusatzmaßnahmen zur Konvergenzbesserung - eingesetzt werden.

4.1 Literaturübersicht

Innerhalb des Schrifttums zur dynamischen Stabilität von Kugelschalen nimmt die gleichmäßig verteilte Außendruckbelastung mit unterschiedlichem zeitlichen Verlauf eine

Sonderstellung ein. Dementsprechend soll zunächst ein Überblick über diejenigen Arbeiten gegeben werden, die sich mit diesem Belastungstyp befassen.

Bereits 1962 wurde von Budiansky und Roth /30/ das rotationssymmetrische Problem mit Hilfe von Eigenformen der eingespannten, dünnen Kreisplatte behandelt. Für die Stabilitätsanalyse verwendeten die Autoren Zeitverlaufsrechnungen, die kritische Lasthöhe (Stufenlast) wurde mit Hilfe der sprunghaften Änderung des Systemverhaltens festgelegt. Die Bedingung für die Stabilitätsgrenze entspricht zwar der Definition von Ljapunov, ein entsprechender Bezug hierzu wurde in /30/ allerdings nicht hergestellt. Trotzdem wurde das "Kriterium von Budiansky, Roth" in der Folgezeit nahezu ausschließlich verwendet, Lösungen mit Hilfe der Störungsrechnung /54/ bzw. Mathieu-Gleichungen /113/ stellen Ausnahmen dar.

Anhand von rechteckförmigen Belastungs-Zeitverläufen (Rechteckimpulsen) unterschiedlicher Dauer konnte in /30/ gezeigt werden, daß die kritische Lasthöhe für kurze Impulse oberhalb der statischen liegt. Mit zunehmender Impulsdauer sinkt der kritische dynamische Druck bis unter den statischen ab bis bei einer kritischen Dauer des Impulses ein konstanter Wert erreicht wird. Die kritische Impulsdauer (\rightarrow kritischer Impuls) ist dadurch gekennzeichnet, daß die Maximalverschiebung gerade am Ende des Impulses auftritt, eine Vergrößerung der Einwirkungsdauer beeinflußt die kritische Lasthöhe dann nicht mehr.

Die Abhängigkeit der dynamischen Durchschlagslast vom Zeitverlauf der Belastung stand bis Anfang der 70iger Jahre im Mittelpunkt des Interesses. Archer und Lange /10/ verbesserten die in /30/ angegebenen Ergebnisse und gaben den kritischen Impuls in Abhängigkeit vom Kugelschalenparameter λ_k (s. Bild 4.1) an. Huang /60/ zeigte u.a., daß der für unendlich lange Impulse gefundene Sprung in der Kurve der über der Lasthöhe aufgetragenen Maximalverschiebungen verloren geht, wenn kurze Impulsdauern betrachtet werden. Für diese Fälle ergibt sich ein stetiger

Kurvenverlauf, also strenggenommen kein Stabilitätsproblem. Um für praktische Anwendungen die Maximalverschiebungen zu begrenzen, wird in /60/ vorgeschlagen, als kritische Lasthöhe diejenige zu bezeichnen, für die die Kurve einen Wendepunkt hat (Wendepunkts-Kriterium). In /60/ wie auch in /119/, /116/ ist für einen unendlich langen Rechteckimpuls (Stufenlast) der für symmetrisches Versagen ermittelte kritische Druck in Abhängigkeit von λ_k angegeben. Ein in /7/ enthaltener Vergleich mit den kritischen, statischen Lasten (symmetrisches Versagen) zeigt eine gewisse Ähnlichkeit der beiden Kurven. Allerdings tritt unter plötzlich aufgebrachtem Außendruck Instabilität bereits bei 38 % des kritischen statischen Druckes auf ($\lambda_k=8$).

Von Mescall und Tsui /85/ wurde der Einfluß der Dämpfung auf die kritische Stufenbelastung untersucht. Es zeigt sich, daß die elastische, dynamische Beullast für $\lambda_k \leq 6,5$ von der Dämpfung nicht beeinflusst wird, für Werte $\lambda_k > 6,5$ ist dieser Einfluß spürbar. So ergibt sich beispielsweise für 2,5 % der kritischen Dämpfung eine Erhöhung des kritischen Druckes um ca. 10 %.

Veröffentlichungen zum unsymmetrischen Versagen der durch plötzlich aufgebrachten Außendruck belasteten Kugelschale datieren auf Anfang der 70iger Jahre /73/, /13/; eine Arbeit von Akkas /5/ (1976) wurde bereits erwähnt (Abschnitt 3.4.2.4). Die schon von Ball, Burt /13/ angegebenen möglichen Versagensformen wurden in /90/ wie folgt präzisiert:

1. Unsymmetrisches dynamisches Beulen mit kleinen Verschiebungen: Das System führt zeitweilig Schwingungen in einer unsymmetrischen Eigenform aus und kehrt danach in den symmetrischen Zustand vor dem dynamischen Verzweigen zurück.
2. Vollständiges unsymmetrisches dynamisches Beulen: Bei höheren Lastniveaus als nach 1. findet ein symmetrisches Versagen statt, das allerdings durch unsymmetrische Modes eingeleitet wird.

3. Vollständiges dynamisches Durchschlagen: Bei noch höherer Belastung tritt sofort symmetrisches Beulen ein, unsymmetrische Eigenformen werden nicht mehr erregt. Aufgrund dieser Zusammenhänge sind, anders als unter statischer Belastung, die Unterschiede zwischen Drücken, die zu symmetrischen bzw. unsymmetrischen Versagensformen führen, bei zeitabhängiger Belastung gering /5/. Auf genauere, eigene Untersuchungen zu diesem Problem (s. Bild 3.42) sei an dieser Stelle hingewiesen. Ähnlichkeiten mit den unter statischer Belastung angetroffenen Verhältnissen sind für das unsymmetrische Versagen nicht mehr feststellbar.

Einflüsse von Imperfektionen auf die dynamische Stabilität der Schale wurden ebenfalls in /90/ behandelt, eine systematische Untersuchung dieses Effektes findet sich in /70/ und /71/. Mit Hilfe von dreiecksförmigen Impulsen konnte in /71/ gezeigt werden, daß der Verlauf der Maximalverschiebungen in Abhängigkeit von der Lasthöhe durch Imperfektionen flacher wird und zwar proportional zur Größe der Imperfektion. Wie unter statischen Lasten führen Abweichungen von der idealen Geometrie auch im dynamischen Fall zu einer von der Imperfektion abhängigen Reduzierung der kritischen Lasthöhe. Allerdings wurde für die in /70/ untersuchten Fälle, für Imperfektionen, die kleiner als die halbe Wanddicke sind, ein geringerer Einfluß als bei statischer Last festgestellt.

Einflüsse der materiellen Nichtlinearität auf das dynamische Stabilitätsverhalten der Schale wurden in /68/, /113/ sowie insbesondere in /83/ diskutiert. Aus den Untersuchungen von McNamara und Marcal /83/ folgt zunächst, daß ihr Einfluß auf die dynamische Stabilität geringer ist als auf die statische. Weiterhin folgt aus /83/, daß die Abhängigkeit nur für Kugelschalenparameter $\lambda_k \leq 4$ vorhanden ist, für $\lambda_k > 4$ stimmen die elastische und elastoplastische Lösung überein.

Neben den bereits erwähnten Untersuchungen an isotropen

Schalen, stehen auch solche an orthotropen /9/ sowie an unsymmetrisch ausgesteiften /112/ zur Verfügung. Auch hieran läßt sich erkennen, daß die dynamische Stabilität von Kugelschalen unter zeitabhängigen Außendruckbelastung in einem hohen Maße erforscht ist. Es stehen somit auch für praktische Anwendung hilfreiche Ergebnisse zur Verfügung. Für andere Belastungsarten gilt dies nicht in gleichem Maße, wie eine Zusammenstellung in /134/ zeigt. Zwar finden sich z.B. in /119/ Zeitverlaufsberechnungen für eine konzentrierte Belastung sowie für eine unsymmetrische Teilflächenlast, praktisch verwertbare Angaben zur dynamischen Stabilität sind im wesentlichen aber nur in /116/ enthalten. Wegen der sehr stark vereinfachten Behandlung des Themas am System mit nur einem Freiheitsgrad ist auch die erst 1985 erschienene Arbeit von Akiyama et. al. /3/ nicht sehr hilfreich.

In /116/ sind für verschiedene λ_k -Werte die dynamischen Beullasten (symmetrisches Versagen) in Abhängigkeit von der Größe der belasteten Teilfläche angegeben. Es ergeben sich ähnliche Kurvenverläufe wie im statischen Fall, allerdings sind die kritischen Lasthöhen nun geringer. Weiterhin zeigt sich, daß der Verlauf der Maximalverschiebung über der Belastungshöhe mit abnehmender Belastungsfläche flacher wird, also ein Effekt, wie er auch aus Imperfektionen /71/ bzw. kurzen Impulsen /60/ resultiert. In /116/ wird außerdem darauf hingewiesen, daß das Strukturverhalten unter Teilflächenlast sehr komplex ist und sich nicht aus den Extremfällen konzentrierte - bzw. gleichmäßig verteilte Last ableiten läßt.

Abschließend ist zu diesem Abschnitt festzustellen, daß zwar gewisse Parallelen im Systemverhalten unter statischer und dynamischer Belastung bestehen, die Einflüsse aus unsymmetrischem Verhalten, Imperfektionen und materieller Nichtlinearitäten unter dynamischer Last insgesamt aber schwächer sind. Diese Aussage gilt strenggenommen nur für die Außendruckbelastung, für nicht flächige- bzw. beliebig

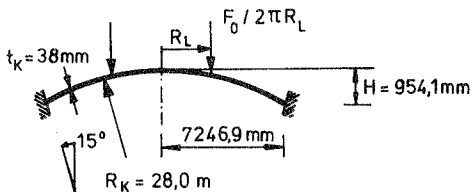
verteilte Belastungen fehlen entsprechend umfangreiche Untersuchungen, hier können bestenfalls von der Tendenz her ähnliche Abhängigkeiten angenommen werden.

4.2 Ungestörte Kugelschale unter Ringlast

4.2.1 Allgemeines

Aus den möglichen lokalen Belastungen wird für die folgenden Untersuchungen eine entlang eines Breitenkreises wirkende Schneidenlast (Ringlast) ausgewählt. Damit werden zum einen die aus zylindrischen Körpern resultierenden Einwirkungen angenähert, weiterhin stellt das Beulverhalten der ungestörten Kugelschale unter derartigen Lasten die Grundlage für das Verständnis von stützenverstärkten Konstruktionen unter in Stützenrichtung wirkenden, zeitabhängigen Einwirkungen dar.

Unter der Zielsetzung, weniger den gesamten Parameterbereich abzudecken, als vielmehr zum Verständnis des Strukturverhaltens unter den genannten Belastungen beizutragen, wird für die Analysen eine typische Schalengeometrie ausgewählt. Wenn eine prinzipielle Ähnlichkeit zwischen statischem und dynamischem Stabilitätsverhalten unter Ringlast angenommen wird (für die Teilflächenlast wurde dies in /116/ gezeigt) so ist mit Hilfe der hier durchgeführten Untersuchungen - in Verbindung mit den Ergebnissen für statische Ringlast /6/ - eine Aussage für den praktisch relevanten Bereich von λ_K möglich.



$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$\rho = 7,85 \cdot 10^{-9} \text{ Nsec}^2/\text{mm}^4$$

$$\lambda_K = 2 [3(1-\nu^2)]^{1/4} \sqrt{\frac{H}{t_K}} = 12,9$$

Bild 4.1: Kugelkappe, Geometrie

Den in Bild 4.1 dargestellten Abmessungen liegt die Geometrie eines typischen Sicherheitsbehälters eines Druckwasserreaktors zugrunde, Konstruktionen aus anderen Anwendungsgebieten weisen ähnliche Verhältnisse auf. Damit ist zum einen die Anlehnung an praktische Verhältnisse gegeben, andererseits sind so Vergleiche mit früheren statischen Untersuchungen möglich.

In Bild 4.2 sind die für statische Belastung mit unterschiedlichen Belastungsradien geometrisch nichtlinear (GNL) ermittelten Lastverschiebungskurven dargestellt (perfekte Schale). Die berechneten statischen Durchschlagslasten stimmen sehr gut mit den in /6/ angegebenen Werten überein, aus /6/ leitet sich auch die Berechtigung für die hier verwendete, rotationssymmetrische Idealisierung (G2) ab, sie wird im Abschnitt 4.2.2 im Detail vorgestellt.

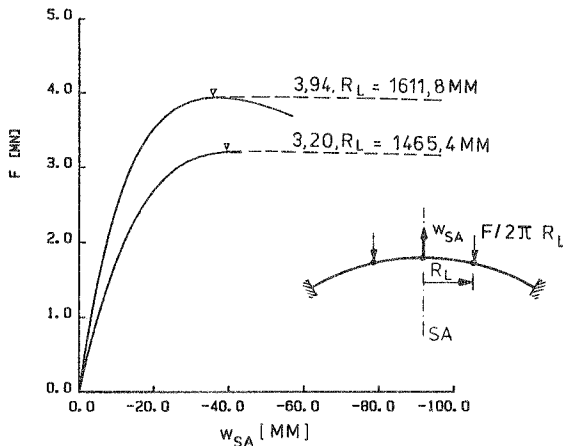


Bild 4.2: Statik, Lastverschiebungskurven, GNL

Für die Untersuchung der dynamischen Stabilität der Schale unter Ringlasten mit unterschiedlichem zeitlichen Verlauf (Rechteckförmige: Abschnitte 4.2.3, 4.2.4, sinusförmige Lastzeitfunktion: Abschnitt 4.2.5), wird die physikalische Dämpfung vernachlässigt. Im Abschnitt 4.2.3.1 wird die Berechtigung zu dieser Annahme gezeigt, sie ergibt sich aus

dem typischen Verhalten der Struktur unter der ringförmigen Belastung. Außerdem ist die Behandlung des Grenzfalles $D=0$ insofern sinnvoll, als die physikalische Dämpfung über die Frequenzen vom Systemverhalten abhängt und bekanntermaßen nur schwer zu ermitteln ist. Für praktische Stabilitätsuntersuchungen von Systemen mit positiver Dämpfung ist, um Sicherheitsrisiken infolge zu groß angenommener Dämpfung auszuschalten, daher generell $D=0$ zu empfehlen.

Im allgemeinen sind bei derartigen Untersuchungen auch Imperfektionen mit einzuschließen, für die vorliegende Belastung ist aufgrund der angeregten Biegezustände von einem geringen Imperfektionseinfluß auszugehen. Die folgenden Untersuchungen werden daher auf perfekte Strukturen beschränkt.

4.2.2 Orts- und Zeitdiskretisierung

Für eine Kugelkappe mit $\lambda_k=11$ unter statischer Ringlast ergibt sich nach /6/ symmetrisches Versagen ($n=0$). Welche Versagensform bei zeitabhängigen Ringlasten maßgebend wird, soll zunächst untersucht werden. Da nach /6/ im statischen Fall für $0 \leq R_L \leq 2063$ mm nur die Versagensformen $n=0$, $n=2$, $n=4$ auftreten, wird für die Untersuchung ein Viertel der Kugelkappe idealisiert. In Meridianrichtung werden sechs, in Umfangsrichtung acht biquadratische Serendipity Elemente eingesetzt (Bild 4.4). Entlang der Meridianränder werden Symmetriebedingungen eingeführt, im Bereich des Pols wird eine Unverschieblichkeit in Meridianrichtung angenommen. Diese Annahme gestattet es, die feine Idealisierung im Bereich des Pols durch in Meridianrichtung unverschiebliche Lager an den Knoten der ersten Elementreihe zu ersetzen. Durch diese Maßnahme wird die Anzahl der Unbekannten reduziert, ihr Einfluß auf die Genauigkeit der Lösung ist vernachlässigbar.

Für die Ermittlung der maßgebenden Versagensform wird die Skalierungsmethode eingesetzt. Parallel zu einer Zeitverlaufsrechnung wird das Eigenwertproblem (3.159) gelöst.

Die aufgebrauchte Gesamt-Ringlast beträgt $F_0=2,0$ MN, der Zeitschritt wurde zu $\Delta t=0,0017$ sec ($\approx T_1/20$) gewählt.

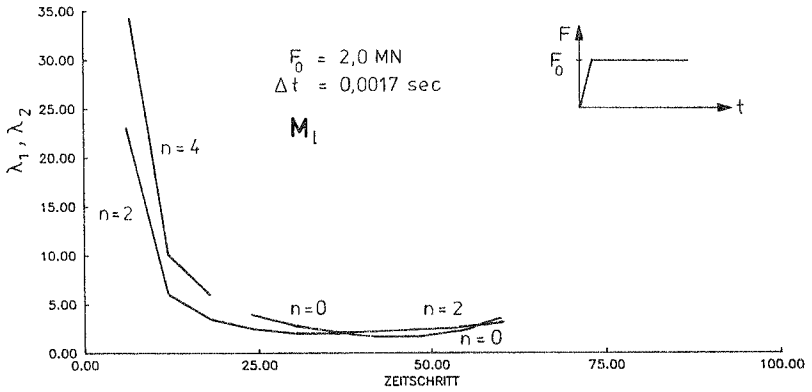


Bild 4.3: Ermittlung der maßgebenden Versagensform, GNL

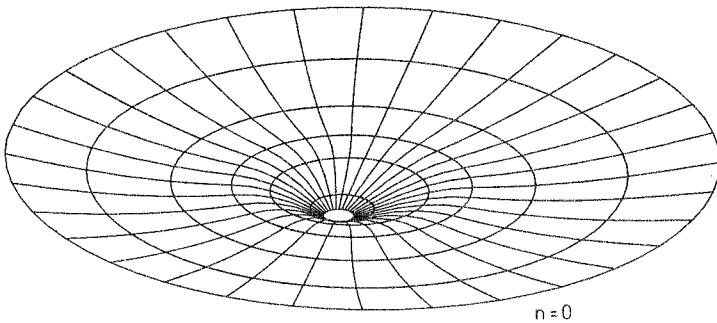
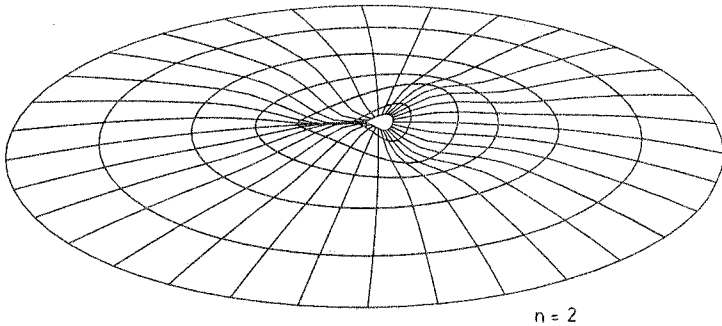


Bild 4.4: Versagensformen

Wie der in Bild 4.3 dargestellte Verlauf der niedrigsten Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 zeigt, wird wie im statischen Belastungsfall auch unter der Stufenlast symmetrisches Versagen ($n=0$) maßgebend; eine Darstellung der Versagensformen $n=0$, $n=2$ findet sich in Bild 4.4.

Der kleinste Eigenwert $\min \lambda_1$ nach Bild 4.3 führt zur kritischen Gesamt-Ringlast $F_{\text{KRIT}}=3,46$ MN. Hierzu ist anzumerken, daß die Untersuchung auf die Ermittlung der maßgebenden Versagensform ausgerichtet ist und deshalb die Eigenwertberechnung nur in jedem fünften Zeitschritt durchgeführt wurde. Da deshalb das absolute Minimum von λ_1 nicht erreicht wird, ist von einer etwas geringeren kritischen Lasthöhe auszugehen, die genaue Analyse wird im Abschnitt 4.2.3 durchgeführt.

Das hier gefundene symmetrische dynamische Beulen wird auch für höhere Stufenlasten bzw. anders geartete Belastungszeitverläufe als maßgebend angenommen. Damit kann für die folgenden Untersuchungen eine axialsymmetrische Idealisierung verwendet werden. Um ein ausreichend genaues und wirtschaftliches FE-Modell zu erhalten, werden im folgenden verschiedene Orts- und Zeitdiskretisierungen untersucht. Hierzu werden Eigenkreisfrequenzen und lineare Zeitverlaufsrechnungen eingesetzt.

Anstelle eines vierknotigen, degenerierten, axialsymmetrischen Linienelementes wird das achtknotige, rotationsymmetrische Körperelement verwendet. Obwohl dadurch die Anzahl der Unbekannten vergrößert wird, ergeben sich Rechenzeiteinsparungen durch das günstigere Konvergenzverhalten dieses Elementes im materiell nichtlinearen Fall.

Die zur Diskussion stehenden Idealisierungen sind im Bild 4.5 dargestellt. Aus Symmetriegründen wird jeweils nur eine Hälfte der Kugelkappe abgebildet, der Gesamtausschnitt beträgt wie oben 30° .

Im Hinblick auf spätere, materiell nichtlineare Berechnungen werden über die Wanddicke drei Elemente angeordnet (Mehrelementmodell statt Schichtenmodell). Aus Wirtschaft-

lichkeitsgründen werden wie in Bild 4.5 dargestellt zwei Bereiche mit unterschiedlichen Elementgrößen gewählt.

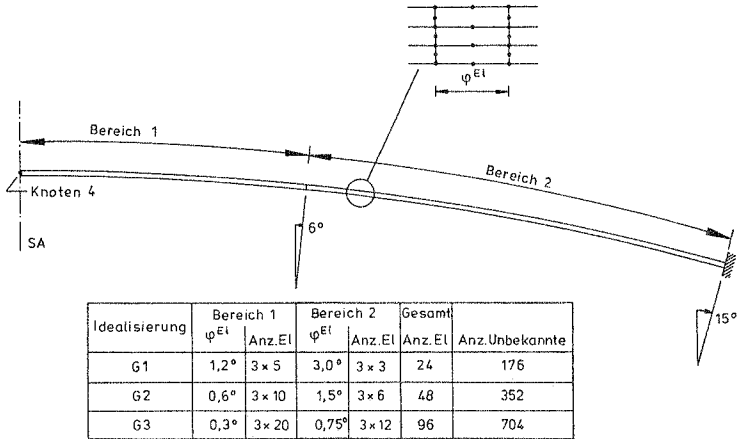


Bild 4.5: Finite Element-Modelle

Eigenwertuntersuchung

Für jede der drei Idealisierungen wurde ausgehend von konsistenten Massenmatrizen (M_c) die Eigenkreisfrequenzen berechnet. Sie sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt, die zugehörigen Eigenformen sind für die Idealisierung G2 in Bild 4.6 dargestellt.

Tabelle 4.1

Idealisierung	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
G1	185,46	208,54	287,79	319,30	585,31
G2	184,73	206,77	256,93	300,90	366,80
G3	184,44	206,14	252,22	295,92	357,73

Aufgrund der sehr feinen Rasterung kann das Modell G3 als Referenzlösung betrachtet werden. Die Elementeinteilung G2

liefert praktisch gleichwertige Eigenwerte, die Abweichung in der fünften Eigenkreisfrequenz beträgt nur 2,5 %. Die Idealisierung G1 ist bereits wesentlich steifer, hier treten beim fünften Eigenwert Unterschiede von 63,6 % auf. Nach dieser Untersuchung ist das FE-Modell G2 zu favorisieren, es erfüllt die Anforderungen nach Wirtschaftlichkeit und Genauigkeit gleichermaßen.

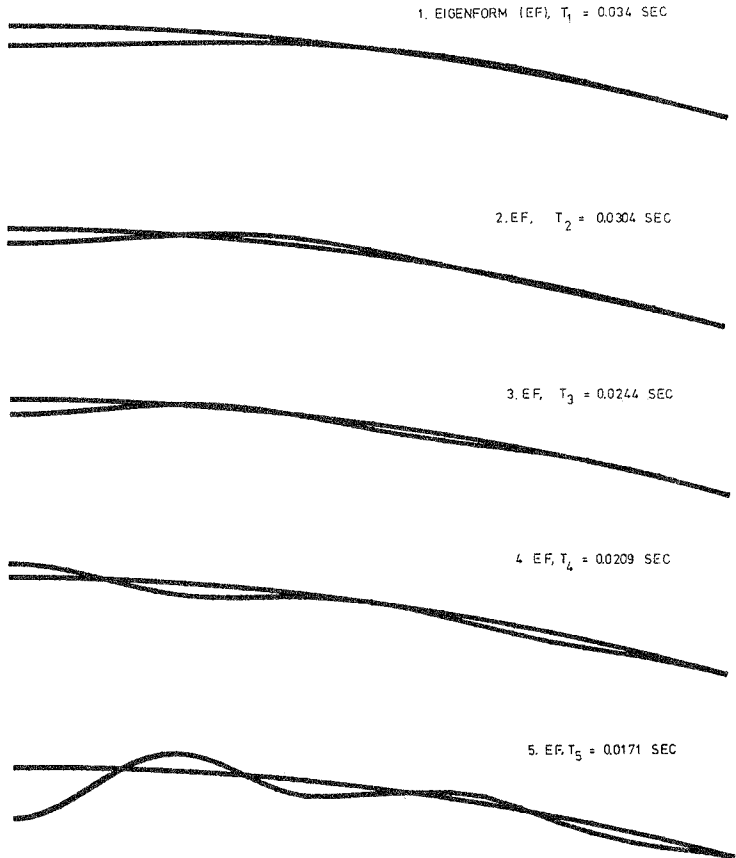


Bild 4.6: Eigenformen, Idealisierung G2

Lineare Schwingungsuntersuchungen

Ergänzend zur Berechnung der Eigenkreisfrequenzen werden zur Auswahl der Ortsdiskretisierung sowie zur Festlegung der Zeitschrittweite lineare Zeitverlaufsberechnung für eine Stufenbelastung mit $F_0=1,0$ MN durchgeführt. F stellt dabei stets die gesamte äußere Last dar. Sie wird zur besseren Vergleichbarkeit der Modelle jeweils entlang eines Knotenbreitenkreises aufgebracht dessen Radius bei allen drei Idealisierungen gleich groß ist ($R_L=1465,4$ mm). Weiterhin soll untersucht werden, inwiefern die Darstellung der Trägheitskräfte Einfluß auf die Lösung nimmt. In Bild 4.7 sind für die Idealisierung G2 Zeitverlaufsberechnungen mit unterschiedlichen Zeitinkrementen dargestellt. Während sich bei $\Delta t=0,0034$ sec bereits Dämpfungseinflüsse bemerkbar machen, stimmen die Lösungen für $\Delta t=0,00085$ bzw. $0,0017$ sec relativ gut überein.

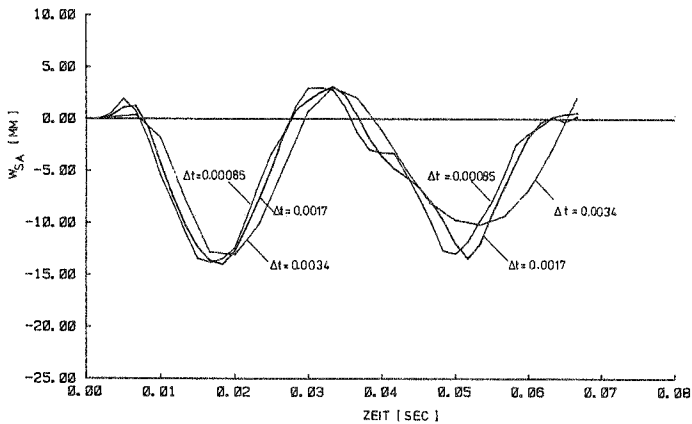


Bild 4.7: Vergleich von Δt , G2, M_c

Als Kompromiß zwischen Genauigkeit und Wirtschaftlichkeit wird für die folgenden Untersuchungen ein Zeitschritt von $\Delta t=0,0017$ sec gewählt.

Mit dem gewählten Zeitinkrement ergeben sich für die unter-

schiedlichen Idealisierungen die in Bild 4.8 dargestellten Verschiebungszeitverläufe.

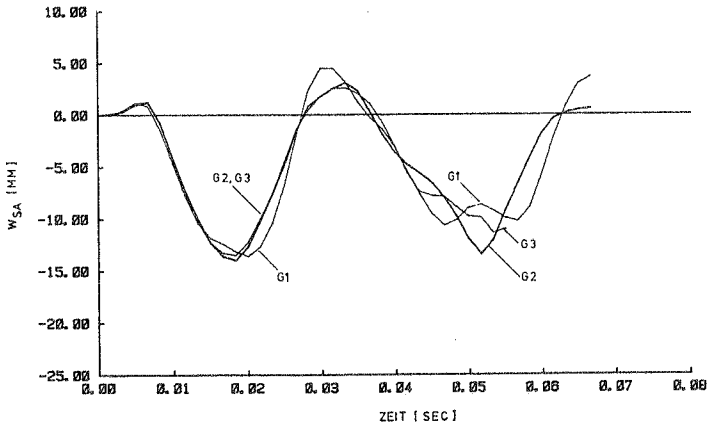


Bild 4.8: Vergleich der Idealisierungen, $\Delta t=0,0017$ sec, M_c

Die Verläufe der Vertikalverschiebung eines Knotens auf der Symmetrieachse (w_{SA}) bestätigen das Ergebnis der Eigenkreisfrequenzuntersuchung. Während die Modelle G2 sowie G3 insbesondere im Bereich des hier besonders interessierenden ersten Maximums der Verschiebungen gut übereinstimmen, zeigt das größere Modell G1 hier bereits deutliche Abweichungen. Da von der Idealisierung G2 mit 352 Unbekannten zuverlässige Ergebnisse erwartet werden können, soll diese Diskretisierung bei den folgenden Untersuchungen verwendet werden.

Zum Vergleich der Darstellung der Trägheitskräfte werden die in Bild 4.9 dargestellten Verschiebungszeitverläufe betrachtet.

Die Ergebnisse stimmen relativ gut überein, damit kann davon ausgegangen werden, daß die Wahl der Massenmatrix die Genauigkeit der Rechnung nur geringfügig beeinflussen wird.

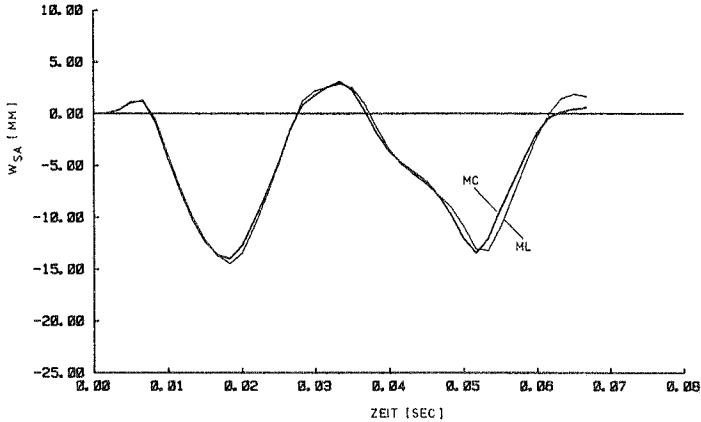


Bild 4.9: Vergleich der Massendarstellung, G2, $\Delta t=0,0017$ sec

4.2.3 Stufenlast

Mit den oben gewählten Orts- und Zeitdiskretisierungen (G2, $\Delta t=0,0017$ sec) wird in diesem Abschnitt die Stabilitätsanalyse für einen Radius der Ringlast von $R_L=1611,8$ mm durchgeführt. Weiterhin soll der Einfluß des Belastungsradius sowie der materiellen Nichtlinearität auf die dynamische Versagenslast untersucht werden.

In Bild 4.10 sind die Vertikalverschiebungen eines Knotens auf der Symmetrieachse ($w_4=w_{BA}$) für verschiedene Lasthöhen über der Zeit aufgetragen. Im betrachteten Zeitraum sind die im Bild 4.10 markierten Maxima der Vertikalverschiebung interessant, die Zeitspanne vom Belastungsbeginn bis zum Erreichen des ersten Maximalwertes wird mit zunehmender Lasthöhe größer. Bis $F_0=2,6$ MN nehmen beide Maximalamplituden mit größer werdendem F_0 überproportional zu. Wird F_0 weiter gesteigert, so nimmt die zweite Extremalverschiebung wieder ab, während die erste weiter zunimmt. Bei $F_0=3,0$ MN nehmen die Verformungen nach Durchlaufen des ersten Maximums plötzlich zu, die dynamische Beullast ist erreicht.

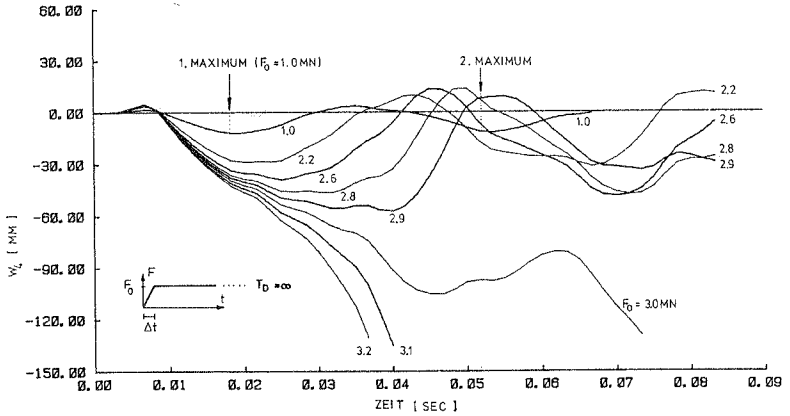


Bild 4.10: Verschiebungszeitverläufe, Stufenlast, GNL

Diese Zusammenhänge gehen auch aus Bild 4.11 hervor, hier sind beide Maximalverschiebungen w_4 (bezogen auf das erste Maximum unter $F_0=1,0$ MN) über der Lasthöhe aufgetragen.

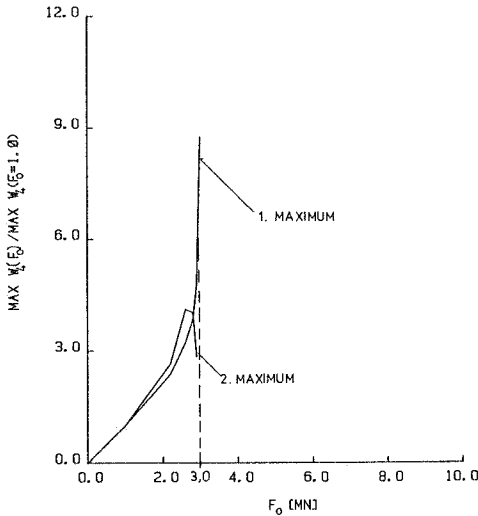


Bild 4.11: Bezogene Maximalverschiebungen, Stufenlast

Aus der Abnahme des zweiten Maximums kurz vor Erreichen der dynamischen Beullast folgt, daß das dynamische Beulen stets

im Zusammenhang mit dem ersten Verschiebungsmaximum auftritt, ein Durchschlagen nach Durchlaufen mehrerer Perioden kann für die Ringlast daher ausgeschlossen werden. Dies hat zur Folge, daß der Einfluß der physikalischen Dämpfung, der insbesondere bei lang andauernden Schwingungen spürbar wird, bei dieser Laststellung als gering einzustufen ist. Die Vernachlässigung der physikalischen Dämpfung wird also durch das Systemverhalten gerechtfertigt.

Die bezüglich des ersten Maximums gefundenen Zusammenhänge haben die Konsequenz, daß der Zeitverlauf nur bis zum Auftreten des ersten Maximums berechnet werden muß. Inwiefern dies auch für andere Zeitverläufe der Belastung gilt, muß noch untersucht werden.

Bei einer Bestimmung der dynamischen Stabilitätsgrenze mit Hilfe der in Abschnitt 3.4.2.3 vorgestellten Skalierungsmethode ist wegen der Abnahme des zweiten Maximums der im ersten Verschiebungsmaximum berechnete Wert von λ_1 zu verwenden. Für die hier behandelte Ringbelastung liefert das Eigenwertproblem (3.158) unbrauchbare kritische Lasthöhen, mit den Eigenwerten aus (3.157) bzw. (3.159) ergibt sich $F_{KRIT} = 2,74$ MN. Die Differenz zu der mit Hilfe von Zeitverlaufsberechnungen ermittelten kritischen Lasthöhe beträgt 8,7 %, sie ist auf die im Abschnitt 3.4.2.4 diskutierte, stabilisierende Wirkung von Trägheitskräften zurückzuführen.

Die dynamische Beullast $F_{KRIT} = 3,0$ MN beträgt für die Ringlast mit $R_L = 1611,8$ mm ≈ 76 % der statischen (s. Bild 4.2). Eine Ähnlichkeit besteht insofern, als sowohl unter statischer als auch unter dynamischer Ringlast symmetrisches Versagen auftritt. Gegenüber der dynamischen Außendruckbelastung ergibt sich für die ringförmige Belastung aus der Zeitabhängigkeit der Last eine kleinere Abminderung der statischen Versagensgrenze; bei der außendruckbelasteten Kugelschale trat das dynamische Versagen bereits bei 38 % des kritischen statischen Druckes auf (s. Abschnitt 4.1).

Zum Vergleich des unterschiedlichen Verhaltens unter statischer bzw. dynamischer Ringbelastung sind im Bild 4.12 jeweils mehrere aufeinanderfolgende Verschiebungszustände dargestellt.

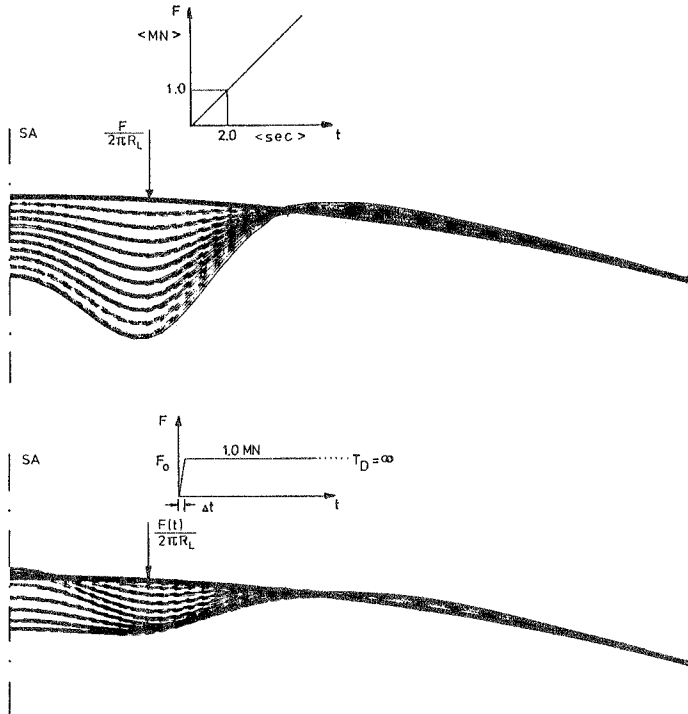


Bild 4.12: Verschiebungsfiguren

Die Wirkung der Trägheitskräfte ist deutlich zu erkennen. Anders als im statischen Fall, bewegt sich der Pol der Kugelkappe unter der stufenförmigen Last zu Belastungsbeginn nach außen, nach Umkehr der Bewegungsrichtung erfolgt ein "Durchschwingen" über die verformte Lage des Lastangriffspunktes hinaus. Wie ein Vergleich mit Bild 4.6 zeigt, setzen sich die Verschiebungen im wesentlichen aus der ersten und zweiten Eigenform zusammen.

4.2.3.1 Einfluß des Belastungsradius

Zur Ermittlung des Einflusses des Belastungsradius wurden geometrisch nichtlineare Zeitverlaufsberechnungen unter $F_0 = 1,0$ MN mit verschiedenen Belastungsradien ($R_L = 1465,4$ mm, $R_L = 1611,8$ mm) durchgeführt.

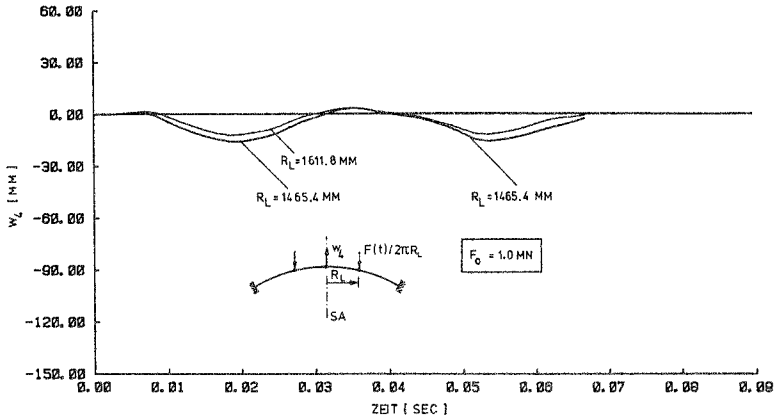


Bild 4.13: Einfluß des Belastungsradius, GNL

Bereits die in Bild 4.13 dargestellten Kurvenverläufe lassen erkennen, daß sich unter der dynamischen Ringlast die gleiche Tendenz wie bei statischer Belastung ergibt: Mit zunehmenden Radius (R_L) geht die maximale Amplitude der Vertikalverschiebung (w_4) zurück, die dynamische Beullast nimmt zu.

4.2.3.2 Einfluß der materiellen Nichtlinearität

Zur Untersuchung des Einflusses der materiellen Nichtlinearität (MNL) auf das dynamische Stabilitätsverhalten der Kugelkappe unter plötzlich aufgebrachter und anschließend konstant gehaltener Ringlast ($R_L = 1611,8$ mm) wird neben der geometrischen Nichtlinearität (s. Bild 4.10) nun auch die physikalische Nichtlinearität berücksichtigt.

Das nichtlineare Verhalten des Werkstoffes Stahl wird wie im Abschnitt 3.3.4.3 mit Hilfe der v. Mises Fließbedingung

und dem Fließgesetz nach Prandtl/Reuss dargestellt, eine Zeitabhängigkeit des Werkstoffverhaltens wird nicht berücksichtigt.

Für elastoplastisches Material mit einer Fließspannung von 370 N/mm^2 wurden wieder für unterschiedliche Lasthöhen Verschiebungszeitverläufe berechnet. Im Zustand extremer Verschiebungen treten nur in einem sehr kleinen Bereich unter der Last Plastizierungen auf. Im Verlauf der Vertikalverschiebungen des Pols macht sich dies nicht bemerkbar, die Kurven stimmen praktisch mit den entsprechenden des Bildes 4.10 überein. Damit ist davon auszugehen, daß die dynamische Beullast für die hier untersuchten Verhältnisse von der materiellen Nichtlinearität nicht beeinflußt wird, sie stimmt mit der nur geometrisch nichtlinear berechneten überein.

Dieses Ergebnis erhält man auch aus der Verwendung der Skalierungsmethode. Sie liefert bei dem hier beobachteten schwachen Einfluß der materiellen Nichtlinearität die kritische Lasthöhe wie oben zu $F_{\text{KRIT}} = 2,74 \text{ MN}$ (Eigenwertproblem (3.159)). Damit ist davon auszugehen, daß die Skalierungsmethode auch bei materiell nichtlinearen Problemen mit Erfolg eingesetzt werden kann, zumindest solange dem nichtlinearen Werkstoffverhalten keine besondere Bedeutung zukommt. Um hier Grenzwerte anzugeben sind weitere Untersuchungen erforderlich.

4.2.4 Rechteckimpuls

In diesem Abschnitt soll für die ringförmige Belastung mit rechteckförmigem Zeitverlauf die Größe des kritischen Impulses ermittelt werden. Der kritische Impuls I_{KRIT} ist nach /30/ dadurch gekennzeichnet, daß die Maximalverschiebung gerade am Ende des Impulses auftritt. Weiterhin soll untersucht werden inwiefern das Systemverhalten von der Form des Impulses abhängt.

Da die materielle Nichtlinearität bei den vorliegenden Verhältnissen keine Rolle spielt (s.o.), wird im folgenden nur die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt. Für

die Berechnung der kritischen Impulsgröße wird die im Abschnitt 3.4.2.3 formulierte Skalierungsmethode - hier mit den Eigenwerten aus (3.159) - eingesetzt. Aus der Beziehung

$$I_{KRIT} = F_0 * \min \lambda_1 * t(\min \lambda_1) \quad (4.1)$$

ergibt sich $I_{KRIT} = 0,072$ MNsec. Zur Anwendung der Skalierungsmethode auf die Berechnung des kritischen Impulses ist folgendes anzumerken: Wie aus Bild 4.10 hervorgeht, tritt mit zunehmender Lasthöhe das Verschiebungsmaximum später auf. Daraus folgt, daß bei der Ermittlung von I_{KRIT} nach (4.1) für ein Lastniveau, das unter F_{KRIT} liegt, $t(\min \lambda_1)$ unterschätzt wird. Da aber die kritische Lasthöhe gemäß $F_0 * \min \lambda_1$ bei der Skalierungsmethode in der Regel überschätzt wird, wird dieser Einfluß kompensiert, der kritische Impuls also besser abgeschätzt als die kritische Lasthöhe.

Zur Untersuchung des Einflusses der Impulsform sind in Bild 4.14 Zeitverläufe für Impulse verschiedener Form aber gleicher Größe ($I = 0,0408$ MNsec) dargestellt.

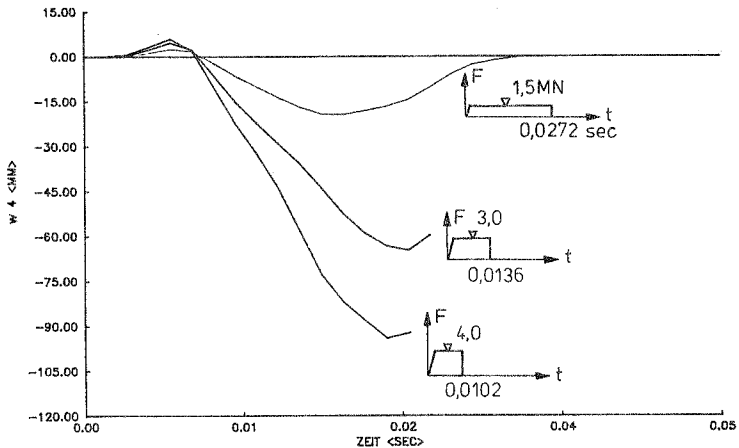


Bild 4.14: Einfluss der Impulsform, GNL

Hieran ist ablesbar, daß der Form des Impulses und insbesondere der Höhe der Last eine erhebliche Bedeutung

zukommt. Vergleicht man die Maximalverschiebungen aus Bild 4.14 mit denen des Bildes 4.10 - von letzterem wurden die Verschiebungs-Zeitverläufe ($F_0=2,0$ bzw. $2,6$ MN) der Ermittlung von I_{KRIT} zugrunde gelegt - so zeigt sich, daß auch für $I < I_{KRIT}$ für die Praxis unzulässig große Verschiebungen auftreten. Damit ist ausreichend belegt, daß dem kritischen Impuls für die Beurteilung des Stabilitätsverhaltens der Struktur keine Bedeutung zukommt.

4.2.5 Sinusförmige Belastung

Stellvertretend für nicht rechteckförmige Belastungszeitverläufe sollen in diesem Abschnitt zunächst ein sinusförmiger Impuls und auf dieser Grundlage eine sinusförmige Belastungszeitfunktion untersucht werden.

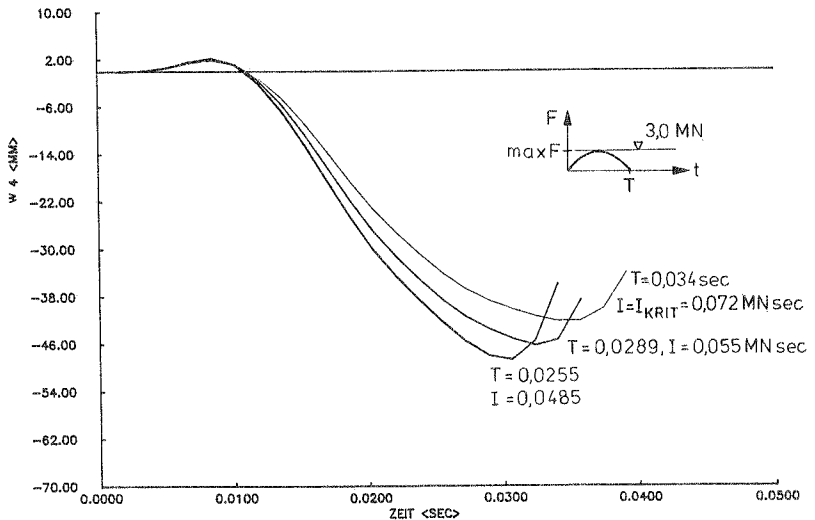


Bild 4.15: Sinusförmiger Impuls, $\max F=3,0$ MN, GNL

Für einen Impuls in der Form einer Sinus-Halbwellen der Dauer $T=0,034$ sec und der Lastamplitude $\max F=3,0$ MN ergibt sich die im vorigen Abschnitt für den Rechteckimpuls als kritisch ermittelte Größe von $I=0,072$ MNsec. Die Analyse

wurde mit Hilfe der Skalierungsmethode wieder unter der Beschränkung auf geometrische Nichtlinearität durchgeführt. Die oben gefundenen Zusammenhänge können für den sinusförmigen Impuls insofern bestätigt werden, als sich nach der Skalierungsmethode auch für $I < I_{KRIT}$ ($\max F = 3,0 \text{ MN}$) Instabilität ergibt. Entsprechende Verschiebungs-Zeitverläufe des Pols der Kugelkappe sind im Bild 4.15 dargestellt.

Die beobachteten Maximalverschiebungen sind hier sogar umgekehrt proportional zur Impulsgröße. Dies zeigt erneut, daß der Impuls kein Maß zur Beurteilung der Stabilität ist.

Mit den vorstehenden Untersuchungen konnten die für den rechteckförmigen Impuls gefundenen Zusammenhänge auch für den Sinus-Impuls bestätigt werden. Nun soll der Frage nachgegangen werden, welches Systemverhalten sich unter einer Ringlast mit sinusförmigem Zeitverlauf einstellt.

In Bild 4.16 ist ein Verschiebungszeitverlauf für $T_p = 0,068 \text{ sec}$, $\max F = 3,0 \text{ MN}$ dargestellt, die Skalierungsmethode lieferte für einen Impuls, der der ersten Halbwelle dieses Belastungszeitverlaufes entspricht, bereits Instabilität.

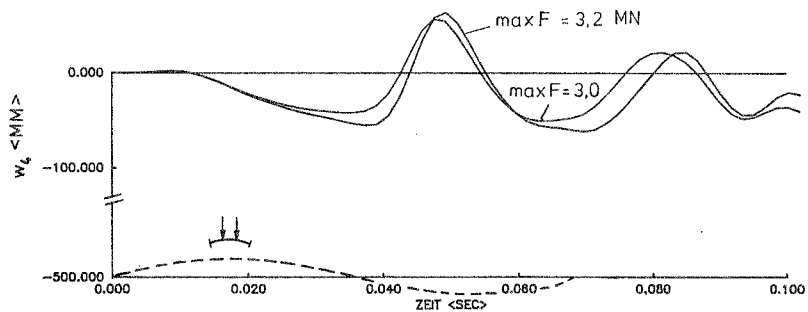


Bild 4.16: Sinusförmige Belastung, $T_p = 0,068 \text{ sec}$, GNL

Der Kurvenverlauf zeigt keine Instabilität an. Um zu überprüfen, ob diese Diskrepanz auf die bereits erwähnte stabilisierende Wirkung von Trägheitskräften zurückgeht, wurde die Berechnung mit $\max F = 3,2 \text{ MN}$ wiederholt (Bild

4.16). Diese Lasterhöhung wurde so gewählt, daß nach den Erfahrungen des Abschnittes 3.4.2.4 Instabilität auftreten müßte. Auch der sich hieraus ergebende Verschiebungszeitverlauf deutet nicht auf eine Instabilität hin. Dieses Phänomen wird darauf zurückgeführt, daß durch die hier untersuchte Belastung eine gegenüber der Stufenlast erhöhte stabilisierende Wirkung der Trägheitskräfte auftritt. Insofern kann auch von einer stabilisierenden Wirkung der Belastung gesprochen werden.

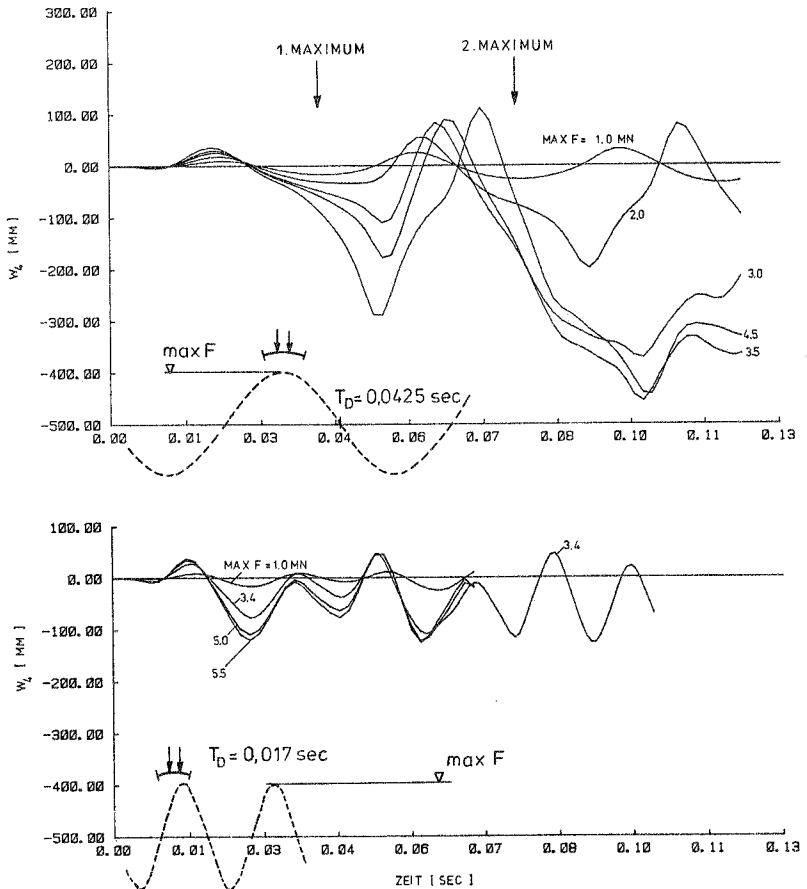


Bild 4.17: Sinusförmige Ringlast, GNL

Angesichts dieses Effektes, auf den im folgenden noch näher eingegangen wird, ist zu überlegen, ob die oben eingeführte einschränkende Annahme (Instabilität wird durch $\omega=0$ markiert) für diesen und ähnliche Belastungszeitverläufe die Stabilitätsgrenze nicht zu weit auf der sicheren Seite liefert. Zur Überprüfung des Einflusses der Belastungsperiode werden weitere Belastungszeitverläufe ($T_0=0,0425$ sec), ($T_0=0,017$ sec) betrachtet. Entgegen obigen Untersuchungen (Bild 4.16) wird wegen der damit verbundenen größeren Maximalverschiebungen die Belastung um $T_0/2$ phasenverschoben. Entsprechende Verschiebungszeitverläufe sind im Bild 4.17 dargestellt.

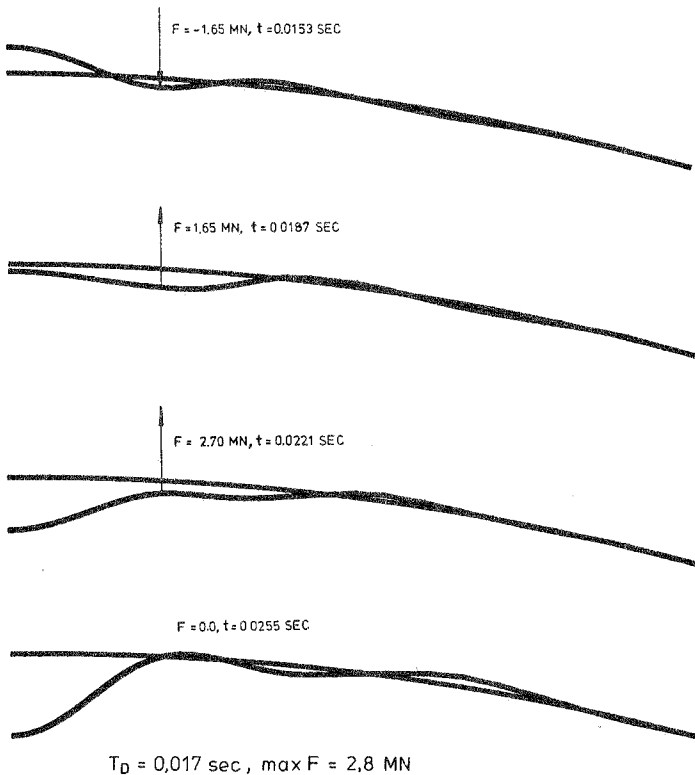


Bild 4.18: Sinusförmige Ringlast, Verschiebungsfiguren

Die stabilisierende Wirkung der Belastung zeigt sich in Bild 4.17 insofern, als auch für Lastamplituden, die deutlich über der statischen Versagenslast liegen, kein dynamisches Beulen auftritt.

Zur Interpretation dieses Effektes sollen die in Bild 4.18 zu verschiedenen Zeitpunkten in überhöhtem Maßstab dargestellten Verschiebungen und zugehörigen Belastungen betrachtet werden. Die Verformungen setzen sich im wesentlichen aus den ersten fünf Eigenformen zusammen.

Um sicherzustellen, daß die höheren Eigenformen bei der Zeitintegration richtig dargestellt werden, wurde eine Kontrollrechnung mit halbiertes Zeitschrittweite durchgeführt, sie bestätigte die Ergebnisse des Bildes 4.17.

Der stabilisierende Einfluß der Belastung ist insofern in der Anregung auch höherer Eigenformen begründet, als hierdurch Trägheitskräfte hervorgerufen werden, die den Durchschlagvorgang be- oder verhindern. Da dieser Effekt mit abnehmenden Belastungsperioden zunimmt, kann auch dahingehend argumentiert werden, daß die für die Ausbildung des Durchschlagvorganges zur Verfügung stehende Zeit ($\approx T_p/2$) bei hohen Frequenzen der Belastung zu klein ist.

Die Bezeichnung der Belastungsperiode als groß oder klein erfolgt stets unter Bezug auf die Periode der ersten Eigenform des Systems. Mit Hilfe der Perioden des linearen Eigenwertproblems (Bild 4.6) ist $T_p=0,017$ sec ($=T_1/2$) als klein, $T_p=0,0425$ sec ($=1,25T_1$) aufgrund der erhaltenen Systemantwort noch nicht als groß einzustufen. Große Belastungsperioden liefern eine der Stufenlast ähnliche Reaktion des Systems.

In Bild 4.19 bzw. Bild 4.20 sind die bezogenen Maximalverschiebungen des Pols bzw. der Lastangriffsstelle über der Lastamplitude ($T_p=0,0425$ sec) aufgetragen.

Ein Vergleich mit der entsprechenden Darstellung für die Stufenlast (Bild 4.11) zeigt insofern ein gleichartiges Verhalten des Systems, als auch unter dem sinusförmigen Belastungszeitverlauf eine Abnahme des zweiten Maximums

(Oberhalb von $\max F = 4,0$ MN) festgestellt wird.

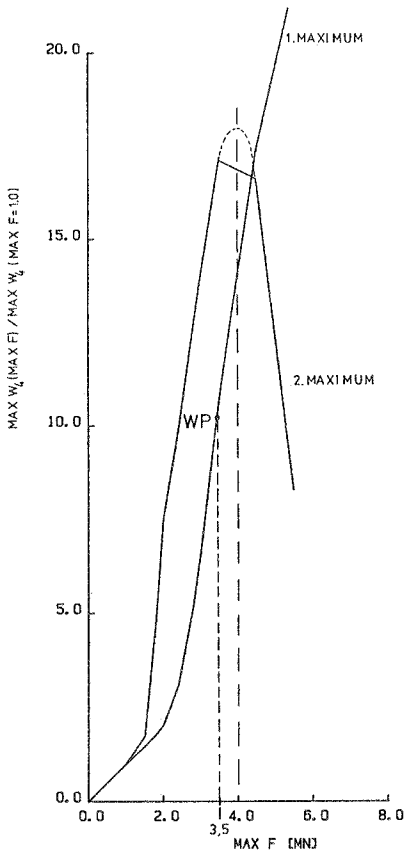


Bild 4.19: Bezogene Maximalverschiebungen, Knoten 4

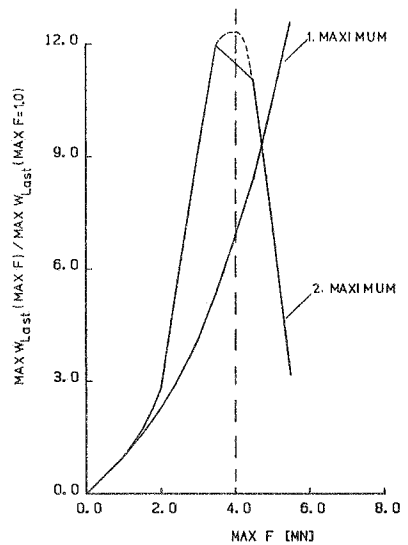


Bild 4.20: Bezogene Maximalverschiebungen, Lastangriffspunkt

Im Gegensatz zu Bild 4.11 zeigt der Kurvenverlauf für das erste Maximum (Bild 4.19) bei $\max F \approx 3,5$ MN einen Wendepunkt. Ein ähnliches Verhalten wurde in /60/ für einen Rechteckimpuls gefunden. Angesichts der auf die stabilisierende Wirkung der Belastung zurückgehenden Diskrepanz zwischen der Zeitverlaufsanalyse, die nicht auf ein Stabilitätsproblem hindeutet, und der Skalierungsmethode, die auch für

die sinusförmige Belastung eine kritische Lasthöhe von 3,0 MN liefert, ist der Frage nachzugehen, wie die Verformungen für praktische Zwecke sinnvoll zu begrenzen sind. Hierzu können die Lasthöhe unter der das erste Maximum einen Wendepunkt aufweist oder diejenige für die im Kurvenverlauf des zweiten Maximums ein Extremum auftritt (Bild 4.19) als mögliche obere Grenzen in Betracht gezogen werden. Der Verlauf des zweiten Maximums wurde, da die entsprechenden Lastamplituden nicht untersucht wurden, im Bereich seiner Extremalstelle strichliert eingezeichnet.

Da die für den Lastangriffspunkt ermittelte Kurve für die erste Maximalverschiebung (Bild 4.20) keinen Wendepunkt aufweist, gewinnt die Extremale im Kurvenverlauf des zweiten Maximums - insbesondere im Hinblick auf die folgenden Untersuchungen an der stützenverstärkten Schale - an Bedeutung.

Die hier angestellten Überlegungen zur Beschränkung der Verformungen bzw. der Lastamplitude sind für solche Belastungszeitverläufe wesentlich, für die bereits große Verformungen auftreten und die stabilisierende Wirkung der Belastung ausgeprägt ist. Für sehr kleine Perioden, wie hier für $T_p=0,017$ sec gezeigt (Bild 4.17), bleiben die Verformungen gering. Hier greifen andere Kriterien, wie z.B. das der zulässigen Spannungen. Mit der Abnahme der Belastungsfrequenz nimmt der stabilisierende Einfluß der Belastung ab, die kritische Lasthöhe nähert sich zunehmend derjenigen der Stufenbelastung.

Aus der starken Abhängigkeit der Systemantwort von dem Zeitverlauf der Belastung folgt, daß die vollständige Analyse im konkreten Fall unumgänglich ist. Eine Vereinfachung ist nur dann möglich, wenn die Lastamplitude durch die nach der Skalierungsmethode (für die Stufenlast) berechnete kritische Lasthöhe begrenzt wird. Ein solches Vorgehen wird für Belastungen mit unbekanntem Zeitverlauf - z.B. aus Erdbeben - generell empfohlen.

4.2.6 Zusammenfassung Abschnitt 4.2

Die Untersuchungen der perfekten Kugelschale unter einer entlang eines Breitenkreises wirkenden Schneidenlast mit unterschiedlichem zeitlichem Verlauf der Belastung lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Aus der räumlichen Analyse der Struktur unter einer stufenförmigen Belastung wurde das rotationssymmetrische Versagen als maßgebend festgestellt.
- Unter der plötzlich aufgebracht und anschließend konstant gehaltenen Ringlast tritt dynamisches Beulen bei 76 % der statischen Durchschlagslast ein. Die materielle Nichtlinearität spielt bei den untersuchten sehr schlanken Verhältnissen keine Rolle. Wie bei statischer Belastung nimmt die kritische Lasthöhe mit größer werdendem Belastungsradius zu.
- Mit Hilfe von Untersuchungen an impulsförmigen Belastungen konnte gezeigt werden, daß die Größe des Impulses für die Stabilitätsanalyse kein relevantes Maß darstellt. Neben der Form des Impulses kommt insbesondere der dabei erreichten Lasthöhe eine besondere Bedeutung zu.
- Das Systemverhalten unter Ringlasten mit sinusförmigem Zeitverlauf erweist sich als stark von der Periode der Belastung abhängig. Während sich für sehr kleine Belastungsperioden ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen der Maximalverschiebung und der Lastamplitude einstellt, ergibt sich mit wachsenden Perioden ein Verschiebungszeitverlauf, der charakteristisch für ein dynamisches Stabilitätsproblem ist. Aufgrund der stärker ausgeprägten stabilisierenden Wirkung von Trägheitskräften, die hier zutage tritt, wurden zur Begrenzung der zulässigen Verschiebungen verschiedene

Möglichkeiten diskutiert. Als eine Möglichkeit wurde die Lasthöhe angesehen, unter der die Kurve des über der Lastamplitude aufgetragenen zweiten Verschiebungsmaximums einen Extremwert erreicht.

Die vollständige Stabilitätsanalyse, die aufgrund dieser Zusammenhänge für jeden Zeitverlauf der Belastung mit vorgegebener Periode getrennt durchzuführen ist, läßt sich nur dadurch umgehen, daß generell die für die Stufenbelastung ermittelte kritische Lasthöhe verwendet wird. Da sie die untere Grenze darstellt, erhält man so Werte auf der sicheren Seite.

4.3 Stützenverstärkte Kugelschale

4.3.1 Allgemeines

Mit den Untersuchungen an stützenverstärkten Kugelschalen soll ein Beitrag zum besseren Verständnis des Verhaltens dieser Strukturen unter dynamischen Einwirkungen geleistet werden. Nach Überlegungen zur Orts- und Zeitdiskretisierung (Abschnitt 4.3.2) werden Belastungen mit sinusförmigem Zeitverlauf (Abschnitt 4.3.3) sowie stufenförmige Belastungszeitfunktionen (Abschnitt 4.3.4) betrachtet. Für letztere werden im Abschnitt 4.3.4.2 Stabilitätsgrenzen für variable Verstärkungsgeometrien angegeben, die sowohl die geometrische als auch die materielle Nichtlinearität berücksichtigen.

Für die grundlegenden Studien werden die Kugelabmessungen des vorigen Abschnittes beibehalten ($R_k=28$ m, $t_k=38$ mm). Die gewählte Stützenverstärkung (Bild 4.21) entspricht im wesentlichen der Personalschleuse eines Druckwasserreaktor-Sicherheitsbehälters ($D_s=3157,6$, $R_s=1611,8$, $l=620$, $t_s=66$, $D_r=4978,1$, $t_r=60$ [mm]). Die Gesamtbelastung F hat damit denselben Achsabstand, wie die im Abschnitt 4.2 betrachtete Ringlast ($R_r=1611,8$ mm); sie wird auf Stützenober- und Stützenunterseite gleichmäßig verteilt, wirkt in Stützenlängsrichtung und ist ins Kugelinnere gerichtet.

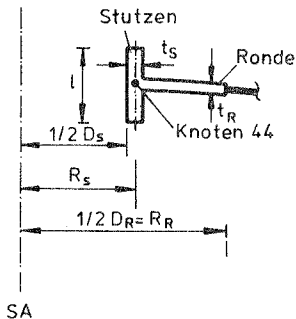


Bild 4.21: Stützenverstärkung

Unter diesen Bedingungen erhält man für statische Belastung die im Bild 4.22 dargestellte Lastverschiebungskurve. Für die Analyse wurde die in Bild 4.25 angegebene rotations-symmetrische Idealisierung mit drei Körperelementen über die Dicke verwendet. Die Annahme eines symmetrischen Versagens ($n=0$) ist insofern begründet, als sich bereits für die unverstärkte Schale $n=0$ ergab und dieses Versagensmuster zusätzlich durch die Stützenverstärkung begünstigt wird.

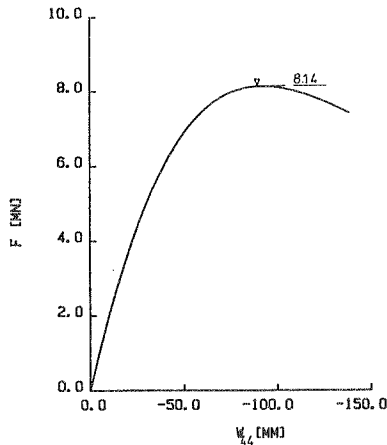


Bild 4.22: Statik, Lastverschiebungskurve, GNL

Der erhebliche Anstieg der statischen Beullast von 3,2 MN bei der unverstärkten auf 8,14 MN bei der verstärkten Schale wird durch den Stützen und insbesondere durch die Ronde bewirkt /34/.

Für die folgenden dynamischen Untersuchungen, zu denen keine Literatur bekannt ist, wird wieder eine perfekte Struktur angenommen, und die Einflüsse aus physikalischer Dämpfung vernachlässigt; weiterhin wird aus den oben genannten Gründen die Zeitintegration nach Newmark ($\beta=1/4$, $\delta=1/2$) durchgeführt.

4.3.2 Orts- und Zeitdiskretisierung

Aufgrund der bisherigen Ergebnisse kann auch für den Stutzen unter dynamischer Belastung ein symmetrisches Versagen erwartet werden. Die im Bild 4.23 dargestellten Verläufe der niedrigsten Eigenwerte λ_1 bzw. λ_2 bestätigen dies.

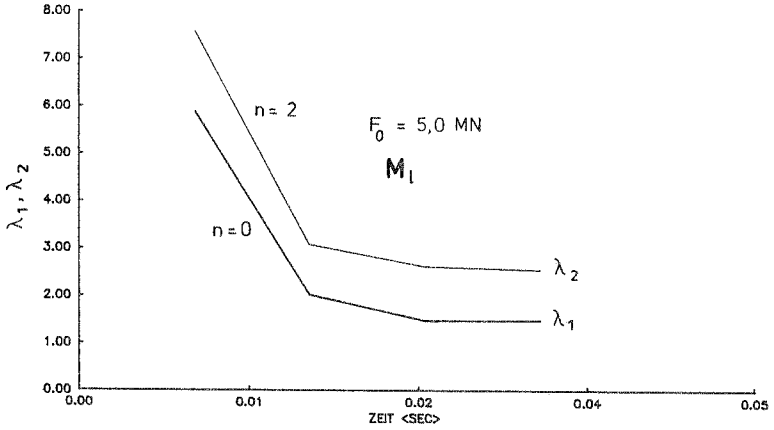


Bild 4.23: Ermittlung der maßgebenden Versagensform, GNL

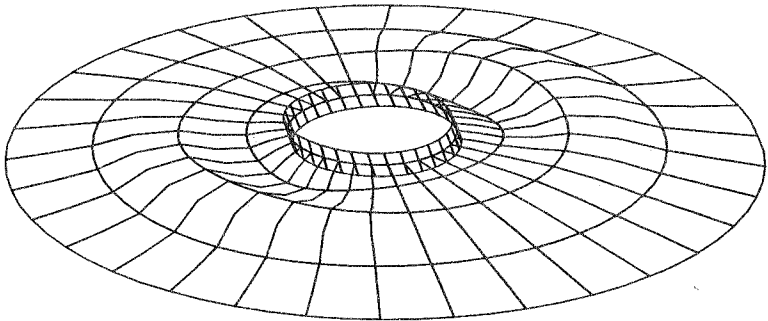


Bild 4.24: Zweite Eigenform ($n=2$)

Für diese Analyse wurde wie bei der unverstärkten Schale ein Bereich von 90° mit biquadratischen Serendipity

Elementen modelliert (Bild 4.24), die Höhe der Stufenlast beträgt $F_0=5,0$ MN, als Zeitschritt wurde $\Delta t=0,0017$ sec ($\approx T_1/23$) gewählt. Die zweite Eigenform ($n=2$) ist im Bild 4.24 dargestellt.

Wegen des maßgebenden rotationssymmetrischen Versagens kann für die folgenden Untersuchungen eine rotationssymmetrische Idealisierung eingesetzt werden. Aufbauend auf den Studien des Abschnittes 4.3.2 wird dazu die im Bild 4.25 dargestellte Idealisierung mit dem bewährten 8-knotigen Körperelement gewählt.

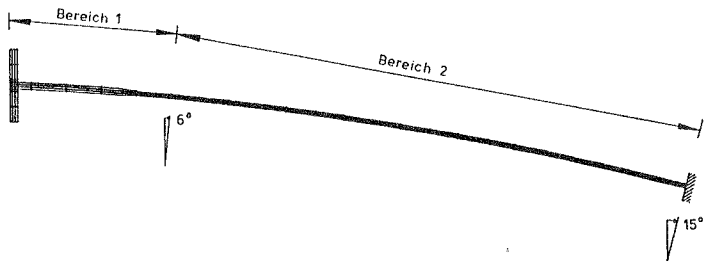


Bild 4.25: FE-Modell, 506 Freiheitsgrade

Im Bereich 1, der im wesentlichen Stutzen und Ronde umfaßt und bis $\varphi=6^\circ$ reicht, werden 42 Elemente eingesetzt. Der Rest der Schale bis zur Einspannstelle ($\varphi=15^\circ$) wird mit $3 \times 9=27$ Elementen abgebildet.

Zu Vergleichszwecken, sowie zur Überprüfung der Zeitschrittweite werden mit dem rotationssymmetrischen Modell die Eigenkreisfrequenzen, sowie die zugehörigen Eigenformen der stutzenverstärkten Schale berechnet (Bild 4.26)

Die errechneten Eigenkreisfrequenzen der stutzenverstärkten Kugelschale liegen mit Ausnahme der ersten über denen der ungestörten Kugelkappe. Der Unterschied beträgt in den ersten vier Eigenformen maximal 10 %. Damit ist das für die 3D-Berechnung gewählte Zeitinkrement abgesichert, es soll auch für die folgenden Untersuchungen beibehalten werden.

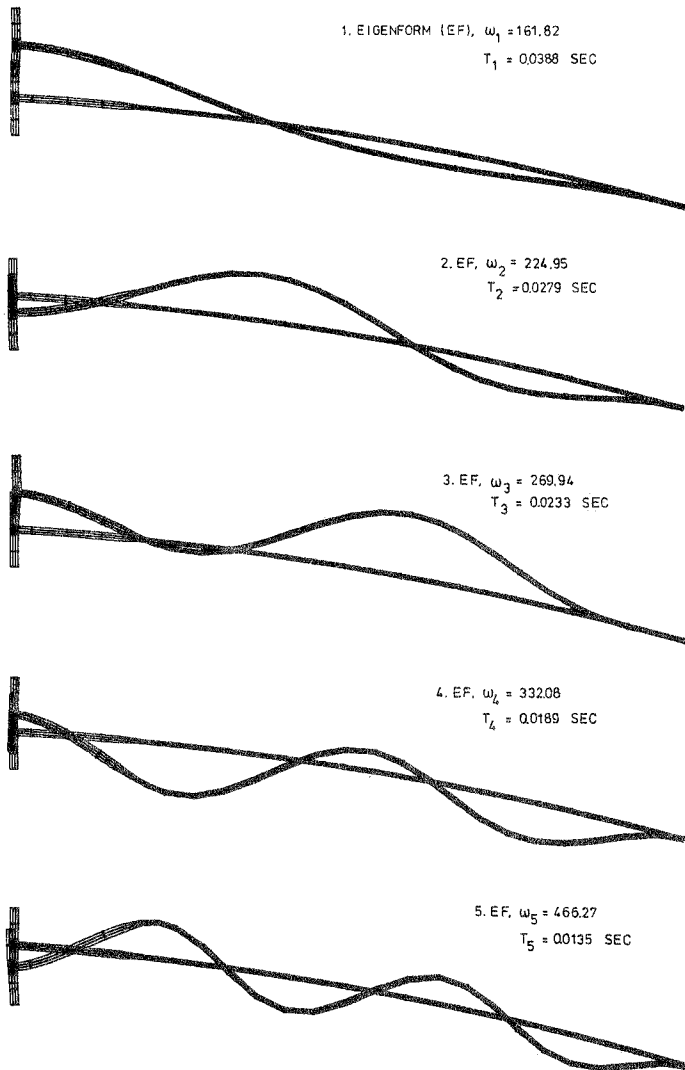


Bild 4.26: Eigenformen, Eigenkreisfrequenzen

Die erwähnte Differenz in den Eigenkreisfrequenzen ist auf die veränderten Massen- und Steifigkeitsverteilungen zurückzuführen. Dieser Einfluß macht sich auch bei den Eigenformen bemerkbar. Vergleicht man die Formen der Bilder 4.6 und 4.26, so zeigt sich einerseits ihr prinzipiell gleichartiger Verlauf, andererseits treten bei den Formen des Bildes 4.26 örtlich größere Auslenkungen auf. Diese werden durch den steifen Stutzen-Ronden-Bereich erzwungen.

4.3.3 Sinusförmige Belastung

Mit Hilfe von geometrisch nichtlinearen Zeitverlaufs-berechnungen soll gezeigt werden, daß die stutzenverstärkte Kugelschale unter einer Stutzenbelastung mit sinusförmigem Zeitverlauf ein prinzipiell gleichartiges Verhalten zeigt, wie die unverstärkte Schale. Als Belastungsperiode wurde wieder $T_D=0,0425$ sec gewählt.

In Bild 4.27 ist der zeitliche Verlauf der Vertikalverschiebung der Anschlußstelle Stutzen-Ronde (Knoten 44 s. Bild 4.21) für unterschiedliche Lastamplituden $\max F$ dargestellt.

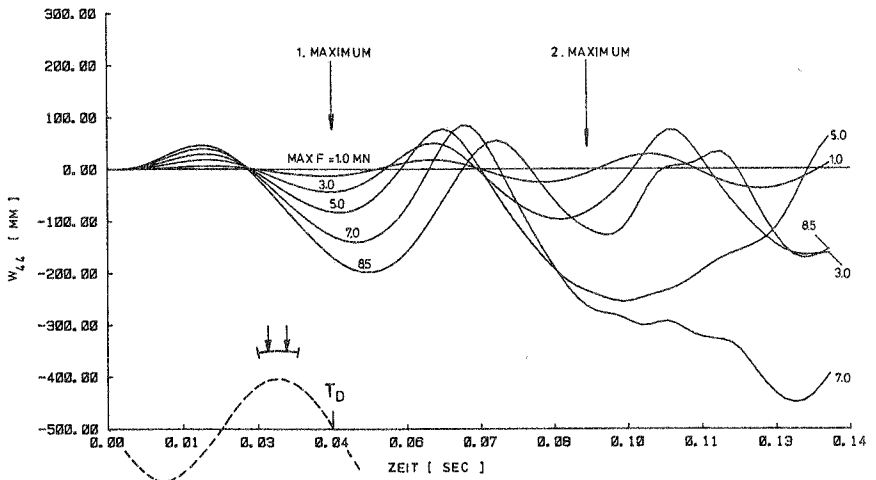


Bild 4.27: Sinusförmige Belastung, $T_D=0,0425$ sec, GNL

Wie bei der unverstärkten Schale (Bild 4.17) stellt sich mit zunehmendem $\max F$ eine Zunahme der Maximalverschiebungen im ersten Maximum ein. Für das zweite Maximum gilt dies nur bis $\max F=7,0$ MN, bei höheren Lastamplituden tritt hier ein Rückgang des zweiten Maximums auf. Weiterhin ist wie in Bild 4.17 eine zeitliche Verschiebung der beiden Extreme mit zunehmendem $\max F$ zu beobachten.

In Bild 4.28 sind die bezogenen Maximalverschiebungen des Knotens 44 über der Lastamplitude aufgetragen. Der Kurvenverlauf, der sich aus der Analyse zusätzlicher hier nicht gerechneter Lastamplituden ergibt, ist wieder strichliert angedeutet.

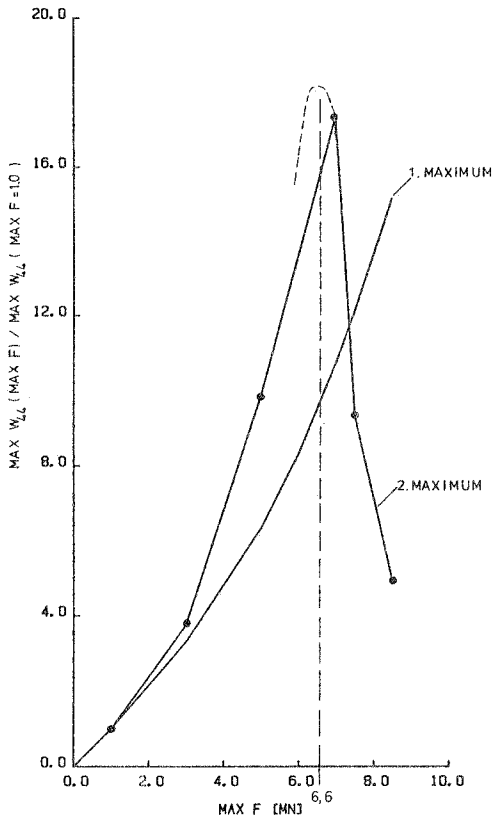


Bild 4.28: Bezogene Maximalverschiebungen

Zum Vergleich mit dem Verhalten der ungestörten Schale wird Bild 4.20 herangezogen, dort sind die bezogenen Maximalverschiebungen am Lastangriffspunkt über der Lastamplitude der Ringlast aufgetragen. Unterschiede zwischen Bild 4.20 und Bild 4.28 ergeben sich insofern, als bei der stützenverstärkten Schale die Abnahme des zweiten Maximums bei einer deutlich höheren Lastamplitude eintritt ($\max F \approx 6,6$ MN), dieser Wert liegt unterhalb der statischen Versagenslast von 8,14 MN, während er bei der ungestörten Schale mit $\max F = 4,0$ MN geringfügig über der statischen Stabilitätsgrenze von 3,94 MN liegt.

Gemeinsam ist beiden Kurven das Fehlen einer sprunghaften Änderung des Systemverhaltens; weiterhin weist sowohl der Verlauf des ersten Maximums in Bild 4.20 als auch der in Bild 4.28 keinen Wendepunkt auf. Angesichts der stabilisierenden Wirkung der sinusförmigen Belastung existiert auch für die stützenverstärkte Schale die Schwierigkeit, die Verschiebungen auf ein sinnvolles Maß zu beschränken. Die im Abschnitt 4.2.5 diskutierten Möglichkeiten gelten auch für die stützenverstärkte Kugelkappe, sie sollen hier nicht wiederholt werden.

4.3.4 Stufenlast

Die dynamische Stabilität der stützenverstärkten Kugelkappe unter einer Stufenlast soll insofern eingehender untersucht werden, als dieser Zeitverlauf den ungünstigsten Fall der Belastung darstellt und als eine untere Grenze zur Abschätzung der dynamischen Stabilität für anders geartete Belastungszeitverläufe dienen kann. Anhand der bisher verwendeten Verstärkungsgeometrie soll der Einfluß der materiellen Nichtlinearität (MNL) untersucht werden (Abschnitt 4.3.4.1). Als Referenzlösung wird dazu zunächst eine geometrisch nichtlineare, materiell lineare Analyse durchgeführt. Die im Abschnitt 4.3.4.2 vorgenommene Variation der Verstärkungsgeometrie soll einerseits die Einflüsse dieses Parameters auf die dynamische Stabilität aufzeigen, andererseits stellen diese Ergebnisse, da sie

sowohl geometrische als auch materielle Nichtlinearitäten enthalten, praxisrelevante Werte dar.

Die Ergebnisse der erwähnten geometrisch nichtlinearen Berechnungen sind im Bild 4.29 zusammengefaßt.

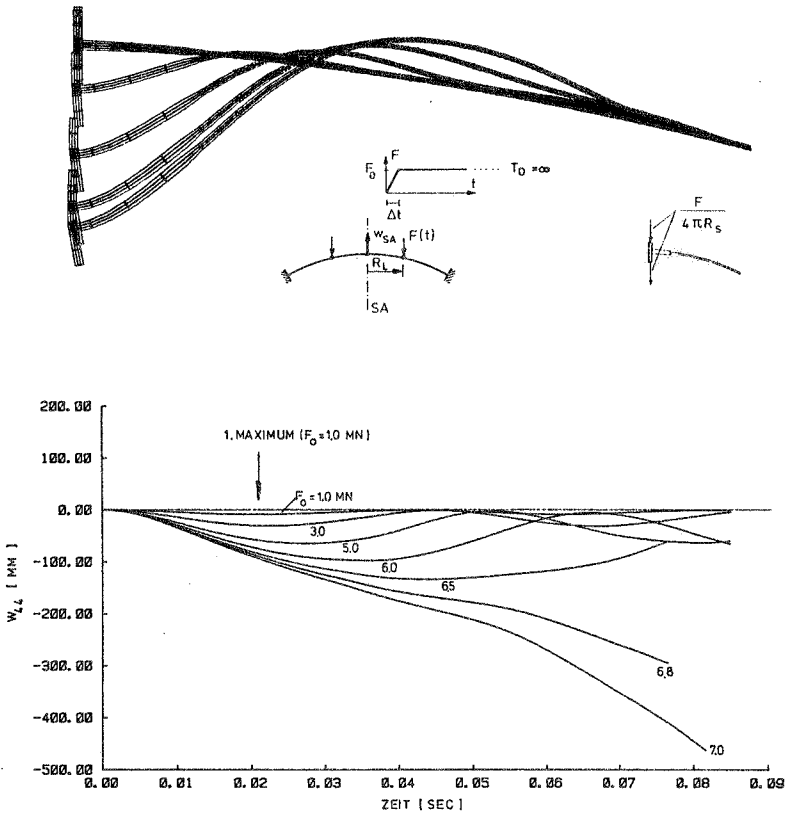


Bild 4.29: Stufenlast, GNL

Zur Veranschaulichung des Verformungsverhaltens der Struktur sind im Bild 4.29 auch mehrere Verschiebungszustände dargestellt. Die Verschiebungen entsprechen im wesentlichen der ersten und zweiten Eigenform und sind den aus statischer Belastung resultierenden sehr ähnlich /34/.

Die aus Bild 4.29 ablesbare dynamische Beullast von 6,8 MN entspricht 84 % der statischen Versagenslast. Eine Vergleichsrechnung nach der Skalierungsmethode des Abschnittes 3.4.2.3 liefert mit den Eigenwerten $\min \lambda_1$ aus (3.157) $F_{KRIT} = 5,8$ MN. Dies entspricht 71 % der statischen Beullast. Der Unterschied in den kritischen Lasten zwischen Skalierungsmethode und Zeitverlaufsanalyse resultiert aus der stabilisierenden Wirkung von Trägheitskräften, er ist bei der verstärkten Schale (15%) größer als bei der unverstärkten (8,7%).

4.3.4.1 Einfluss der materiellen Nichtlinearität

Zur Berücksichtigung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens werden wegen der zu erwartenden größeren plastischen Zonen /34/ nur Zeitverlaufsrechnungen eingesetzt. Für die Darstellung der materiellen Nichtlinearität wird wieder die v. Mises Fließbedingung und das Fließgesetz nach Prandtl/Reuss verwendet.

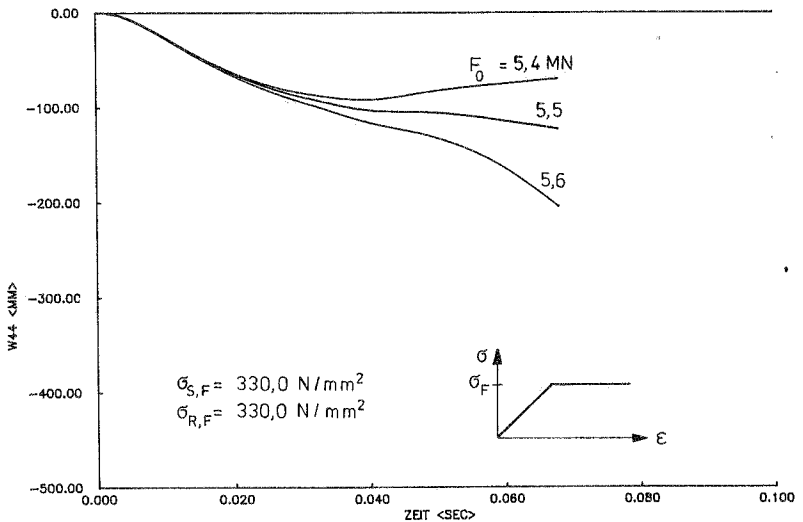


Bild 4.30: Stufenlast, GNL, MNL.

Aus der geometrisch und materiell nichtlinearen Analyse sind in Bild 4.30 - wieder für die bisher betrachtete Verstärkungsgeometrie - Verschiebungszeitverläufe für den Knoten 44 (s. Bild 4.21) aufgetragen.

Die kritische Lasthöhe ergibt sich aus Bild 4.30 zu $F_{\text{KRIT}} = 5,5 \text{ MN}$. Bezüglich der aus geometrisch nichtlinearen Zeitverlaufsberechnungen erhaltenen kritischen Lasthöhe von $6,8 \text{ MN}$ nimmt bei nichtlinearem Werkstoffverhalten die Versagensgrenze um 19% ab.

Die sich unter der extremalen Verschiebung einstellenden plastischen Zonen sind im Bild 4.31 dargestellt. Sie sind im wesentlichen auf den Übergangsbereich Stutzen-Ronde beschränkt und resultieren einerseits aus der Biegebeanspruchung sowie andererseits aus der Modellierung einer scharfen Ecke im Anschlußbereich (Kerbwirkung).

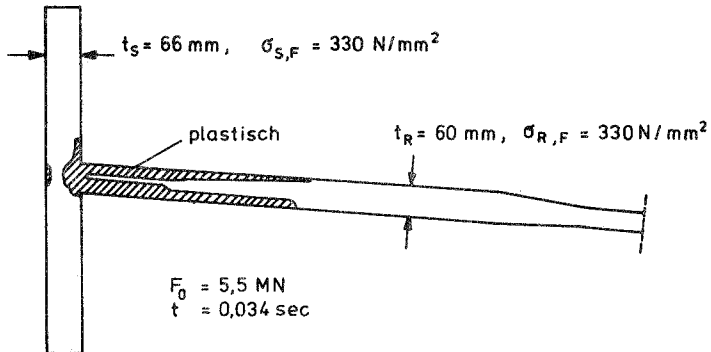
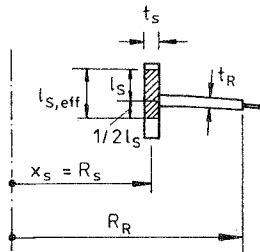


Bild 4.31: Plastische Zonen

Der Verzicht auf eine genauere Modellierung der an dieser Stelle vorhandenen Schweißnähte wirkt sich auf die Versagensgrenze kaum aus, hierzu finden sich in /34/ Literaturstellen, die dies belegen.

4.3.4.2 Variation der Verstärkungsgeometrie

In /34/ wurde für einen Stutzen mit einem Radius von ≈ 1630 mm gezeigt, daß zwischen der Verstärkungsgeometrie und der statischen Versagenslast (GNL, MNL) ein näherungsweise linearer Zusammenhang besteht. Die Geometrie der Stutzen- und Rondenverstärkung wird durch einen Parameter \bar{A} dargestellt, der Querschnittsflächen, Fließspannungen und Schwerpunktslagen der einzelnen Verstärkungsteile enthält. In Bild 4.32 sind die entsprechenden Beziehungen zusammengestellt, zusätzlich sind Angaben bezüglich der effektiven Stutzenlänge enthalten. Die Einführung einer effektiven Länge des Stutzens ist insofern sinnvoll, als eine Verlängerung des Stutzens nur innerhalb gewisser Grenzen eine Verstärkung bewirkt.



i = Stutzen, Ronde

$$x_{ideal} = \frac{\sum (A_i \sigma_{i,F} x_i)}{\sum (A_i \sigma_{i,F})}$$

x_i = Schwerpunktslage der Verstärkung i

x_{ideal} = Lage des ideellen Schwerpunktes

$$\bar{A} = A^* \frac{x_S}{x_{ideal}}$$

$$A^* = \frac{\sum (A_i \sigma_{i,F})}{A_K \sigma_{K,F}}$$

$$A_{Stutzen} = t_s \cdot l_{s,eff}$$

$$A_{Ronde} = t_R (R_R - x_S - t_s/2)$$

$$A_K \approx t_K \cdot R_R$$

Bild 4.32: Parameter zur Darstellung der Verstärkungsgeometrie

Für die dynamischen Untersuchungen wird angenommen, daß die Verstärkungsgeometrie ebenfalls durch den Parameter \bar{A} beschreibbar ist. Dies hat zur Folge, daß für die Variation der Verstärkungsgeometrie nur ein Parameter \bar{A} - beispielsweise die Stutzenwanddicke t_s - verändert werden muß. Unter

Ausnutzung dieses Zusammenhangs wurden die Abmessungen der Ronde sowie die Stützenlänge beibehalten und nur die Stützenwanddicke, die Fließspannung des Stützenmaterials und der Radius des Stützens variiert. Neben der im Abschnitt 4.3.4.1 behandelten Geometrie, die zur Vereinfachung mit V1 bezeichnet werden soll ($t_g=66$ mm, $R_g=1611,8$ mm, $\sigma_{s,r}=330$ N/mm²), wurden die Verstärkungen V2 ($t_g=48$ mm, $R_g=1620,8$ mm, $\sigma_{s,r}=310$ N/mm²) sowie V3 ($t_g=112,8$ mm, $R_g=1588,4$ mm, $\sigma_{s,r}=310$ N/mm²) untersucht. Die kritische Lasthöhe (Stufenlast) ergab sich für V2 zu 5,1 MN und für V3 zu 5,9 MN. Während die unter der Maximalverschiebung vorhandene plastische Zone in der Ronde für alle drei Verstärkungsgeometrien nahezu gleich blieb, ergab sich im Stützen wie erwartet eine deutliche Abhängigkeit von der Stützenwanddicke: Für V2 wurde ein vollständiges Durchplastizieren des Stützens im Bereich der Anschlußstelle an die Ronde beobachtet, demgegenüber trat bei V3 nur ein kleiner plastischer Bereich am Übergang zur Ronde auf, dessen Ausdehnung kleiner als ein Drittel der Stützenwanddicke blieb. Diese Abhängigkeit spiegelt Bild 4.33, das eine Gegenüberstellung der statischen und dynamischen Beullast in Abhängigkeit von \bar{A} zeigt, allerdings nicht wieder.

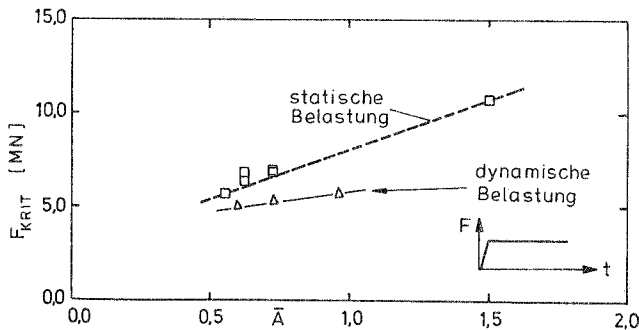


Bild 4.33: Statische und dynamische Beullast als Funktion von \bar{A} , GNL, MNL

Es ergibt sich zwar auch für die dynamische Versagenslast eine näherungsweise lineare Abhängigkeit von \bar{A} , die Steigung der Geraden ist aber deutlich geringer als im statischen Fall. Daraus folgt, daß sich eine Vergrößerung der zur Verstärkung eingesetzten Konstruktionsteile unter dynamischer Belastung wesentlich schwächer auswirkt, als unter statischer. Dies ist insofern verständlich, als sich eine Verstärkung im statischen Fall generell günstig auswirkt, unter dynamischer Belastung steht der Erhöhung der Steifigkeit die Zunahme der Masse entgegen, die sich über vergrößerte Trägheitskräfte im Verstärkungsbereich ungünstig bemerkbar macht. Dieser Effekt ist nicht zu verwechseln mit der mehrfach - zur Erläuterung von unterschiedlichen Ergebnissen aus Skalierungsmethode und Zeitverlaufsanalyse - erwähnten stabilisierenden Wirkung von Trägheitskräften. Letztere bezieht sich auf das Stabilbleiben der Lösung trotz indefiniter Tangentensteifigkeit, während oben auf das Verhältnis zwischen statischer und dynamischer Stabilität abgehoben wurde.

4.3.5 Zusammenfassung Abschnitt 4.3

Die Untersuchungen zur Stabilität der stützenverstärkten Schale unter Belastungen mit verschiedenartigem zeitlichen Verlauf lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Unter plötzlich aufgebrachter und anschließend konstant gehaltener Stützenlängsbelastung stellt sich wie im statischen Fall ein rotationssymmetrisches Versagen ein.
- Bei Belastungen mit sinusförmigem Zeitverlauf kleiner Periode wird das Durchschlagen des Systems durch die Belastung verhindert. Da dieser Effekt sehr stark vom Belastungszeitverlauf abhängt, ist eine genaue Untersuchung im Einzelfall unumgänglich. Für praktische Belange ist insofern eine Vereinfachung möglich, als die kritische Lasthöhe für Stufenlast eine untere Grenze darstellt. Dieses Vorgehen wird insbesondere für Belas-

tungen mit unbekanntem zeitlichen Verlauf zur Anwendung empfohlen.

- Die kritische Lasthöhe für stufenförmige Belastung beträgt für die untersuchte Verstärkungsgeometrie VI 84 % der statischen Versagenslast, bei elastoplastischem Werkstoffverhalten ergibt sich eine weitere Reduktion auf 68 %. Wie eine Variation der Verstärkungsgeometrie zeigt, wächst der Unterschied zwischen statischer und dynamischer Versagenslast mit zunehmender Verstärkung an. Zwar ist der Zusammenhang zwischen Verstärkungsgeometrie und der kritischen Lasthöhe wie im statischen Fall linear, neben dem günstigen Einfluß, den eine Vergrößerung der Verstärkungsgeometrie auf die Steifigkeit nimmt, tritt lokal auch eine Vergrößerung der Masse auf, was sich ungünstig auswirkt.

5. Schlußfolgerungen

Zur Behandlung der Stabilität von Tragwerken unter zeitabhängigen Belastungen wurde in der vorliegenden Arbeit ein Weg beschritten, der ausgehend von einer phänomenologischen, der Begriffsbildung dienenden Behandlung des Themas über die erforderlichen strukturmechanischen Beziehungen auf ein Kriterium führte, das eine einfache und effiziente Bestimmung der dynamischen Beullast gestattet.

- Die Beurteilung der dynamischen Stabilität nichtlinearer Strukturen kann mit Hilfe des homogenen Systems auf der Basis von im Inkrement gültigen Beschränktheitsbedingungen vorgenommen werden, wenn diese Bedingungen über den gesamten Zeitbereich kontrolliert werden. Speziell für Instabilität wird angenommen, daß sie bereits dann gegeben ist wenn innerhalb dieses Bereiches in einem Inkrement eine singuläre Steifigkeitsmatrix angetroffen wird, was gleichbedeutend mit $\omega_1=0$ ist. Mit dieser Vorgehensweise gelangt man zu einem Kriterium für Instabilität ($\omega_1=0$), sie kann als ein Einfrieren des Zustandes, für den gerade $\omega_1=0$ gilt, verstanden werden. Auf dieser Grundlage kann ein Eigenwertproblem für den Lastparameter formuliert werden. Damit ist insbesondere bei Stufenbelastung eine direkte Bestimmung der kritischen Lasthöhe möglich. Die Lösung des Eigenwertproblems parallel zu einer Zeitverlaufsberechnung gestattet die Berücksichtigung geometrischer und materieller Nichtlinearität. Speziell diese Eigenschaft zeichnet das Verfahren vor anderen, aus der Literatur bekannten Stabilitätskriterien (z.B. Energiekriterium) aus. Gewissermaßen als Nebenprodukt ergibt sich aus dieser Ableitung die Berechtigung für das bei statischen Stabilitätsuntersuchungen verwendete Eigenwertproblem für den Lastparameter.

Das vorgestellte Konzept gilt für die Stabilitätsuntersuchung erzwungener Schwingungen, anders geartete Problemstellungen, wie z.B. die der parametrischen Reso-

nanz können zwar mit Hilfe von Zeitverlaufsberechnungen aber nicht mit Hilfe der angegebenen Stabilitätskriterien gelöst werden. Die Entwicklung von Kriterien, die beispielsweise parametrische Resonanzen beziehungsweise ihre Interaktionen mit erzwungenen Schwingungen erfassen, bleibt zukünftigen Forschungen vorbehalten.

- Die Untersuchungen der dynamischen Stabilität ungestörter sowie stützenverstärkter Kugelschalen unter lokaler Belastung werden als ein Beitrag zum besseren Verständnis des Verhaltens dieser Strukturen verstanden. Die in Abhängigkeit von der Verstärkungsgeometrie angegebenen dynamischen Versagenlasten stützenverstärkter Kugelschalen stellen zwar für die Praxis wertvolle Ergebnisse dar, sie decken aber nur einen begrenzten Bereich praktisch vorkommender Konstruktionen ab und lassen insofern Raum für zukünftige Forschungen auf diesem Gebiet.

Schrifttum

- < 1> Adeli, H. Algorithms for Nonlinear Structural Dynamics
Gere, J.M. J. Struct. Div. ASCE 104 (1978) 263-280
Weaver, W.
- < 2> Ahmadian, M. On the Stability of General Dynamic Systems Using a Liapunov's Direct Method Approach
Inman, D.J. Computers & Structures
Vol.20 No.1-3 (1985) 287-292
- < 3> Akiyama, H. Ultimate Limit State of Metal Containment Shell Buckling Under Seismic Loading
Shimizu, S. 8th Int. Conf. on Struct. Mech. in Reactor Technology
Yuhara, T. Brussels, Belgium Aug.(1985)
Morishita, M.
- < 4> Akkas, N. Note on the Dynamic Buckling Loads of Shallow Spherical Shells from Static Analysis
J. Struct. Mech. Vol.9 No.4 (1981) 483-488
- < 5> Akkas, N. Bifurcation and Snap-Through Phenomena in Asymmetric Dynamic Analysis of Shallow Spherical Shells
Comp. & Struct. No.6 (1976) 241-251
- < 6> Akkas, N. Buckling and Postbuckling Behavior of Clamped Spherical Shells under Axisymmetric Ring Loads
Bauld, N.R. J. Appl. Mech. No.9 (1971) 996-1002
- < 7> Akkas, N. Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical and Conical Shells under Step Loads
Bauld Jr, N.R. AIAA J. Vol.8 No.12 (1970) 2276-2277
- < 8> Almroth, B.O. Computer Solutions for Static and Dynamic Buckling of Shells
Meller, E. Proc. IUTAM Symp. "Buckling of Structures" Harvard Univ. (1974)
Brogan, F.A.

- < 9> Alwar, R.S.
Reddy, B.S. Dynamic Buckling of Isotropic and Orthotropic Shallow Spherical Cap with Circular Hole
Int. J. Mech. Sci. Vol.21 (1979)
681-688
- < 10> Archer, R.
Lange, Ch. Nonlinear Dynamic Behavior of Shallow Spherical Shells
AIAA J. Vol.3 No.12 (1965)
2313-2317
- < 11> Babcock, C.D. Shell Stability
J. of Appl. Mech. Vol.50 No.12 (1983) 935-940
- < 12> Baitinger, K. Numerische Untersuchungen zur geometrisch nichtlinearen Schalenkinetik
Inst. f. Mechanik
Universität Stuttgart (1985)
- < 13> Ball, R.E.
Burt, J.A. Dynamic Buckling of Shallow Spherical Shells
J. Appl. Mech. Vol.11 No.8 (1973)
411-416
- < 14> Bathe, K.J.
Cimento, A.P. Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations
Comp. Methods in Applied Mech. and Engineering No.22 (1980) 59-85
- < 15> Bathe, K.J.
Ramm, E.
Wilson, E.L. Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis
Int.J.Num.Meth.in Eng.
Vol.9 (1975) 353-386
- < 16> Bathe, K.J.
Wilson, E.L.
Iding, R.H. A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems
Report No.UC SESM 74-3
Structures and Material Research
US-Dep. of Civil Engineering
Feb.(1974)
- < 17> Bathe, K.J.
Wilson, E.L. Stability and Accuracy Analysis of Direct Integration Methods
Earthquake Eng. Struct. Dyn.
Vol.1 (1973) 283-291

- < 18> Bathe, K.-J. Finite Element Procedures in Engineering Analysis
Prentice-Hall, Inc. New Jersey (1982)
- < 19> Bazzi, G. The ro-Family of Algorithms for Time-Step Integration with Improved Numerical Dissipation
Anderheggen, E. Earthq.Eng. and Struct. Dyn. Vol.10 (1982) 537-550
- < 20> Belytschko, T. Explicit Algorithms for the Nonlinear Dynamics of Shells
Lin, J.I. Comp. Meth. in Appl. Mech. andEng. Tsay, C.S. Vol.42 (1984) 225-251
- < 21> Belytschko, T. A Survey of Numerical Methods and Computer Programs for Dynamic Structural Analysis
Nucl.Eng. and Design No.37 (1976) 23-34
- < 22> Belytschko, T. Stability of Multi-Time Step Partitioned Integrators for First-Order Finite Element Systems
Smolinski, P. Computer Meth. in Appl. Mechan. and Engin. Vol.49 (1985) 281-297
Liu,W.K.
- < 23> Belytschko, T. On the Unconditional Stability of an Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics
Schoeberle, D.F. J.Appl.Mech. No.12 (1975) 865-869
- < 24> Belytschko, T. Computational Methods For Transient Analysis
Hughes,T.J.R. North-Holland Amsterdam (1983)
- < 25> Bergan, P.G. An Automatic Time-Stepping Algorithm For Dynamic Problems
Mollestad, E. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol.49 (1985) 299-318
- < 26> Bolotin, V.V. Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability
Pergamon Press (1963)

- < 27> Bolotin, V.V. Kinetische Stabilität elastischer Systeme
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin (1961)
- < 28> Brendel, B. Geometrisch nichtlineare Elasto-Stabilität, Dissertation
Bericht Nr. 79-1
Institut für Baustatik
Universität Stuttgart (1979)
- < 29> Brown, J.M.B. The Discretization Error of Newmark's Method for Numerical Integration in Structural Dynamics
Earthqu.Eng. and Struct.Dyn.
Vol.13 (1985) 43-51
- < 30> Budiansky, B. Axisymmetric Dynamic Buckling of Clamped Shallow Spherical Shells
Roth, R.S.
NASA TND-1510 (1962) 597-609
- < 31> Bürgermeister, G. Stabilitätstheorie
Steup, H.
Kretzschmar, H.
Akademie Verlag Berlin (1966)
- < 32> Bufler, H. Energiemethoden 2
Vorlesungsreihe Konstruktiver Ingenieurbau
Universität Stuttgart (1976)
- < 33> Bufler, H. Zur Struktur der Gleichungen der Elastokinetik u. Elastostabilität
ZAMM 59 (1979) 73-78
- < 34> Burmeister, A. Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft
Bornscheuer, F.W.
Ramm, E.
Institut für Baustatik
Universität Stuttgart
Bericht Nr. 4 (1984)
- < 35> Busby, H.R. Jr. Non-Linear Response of a Beam to Periodic Loading
Weingarten, V.I.
Int. Journ. Non-Linear Mechanics
Vol.7 (1972) 289-303

- < 36> Carter, A.L.
Shiflett, G.R.
Laub, A.J. The Solution of Higher Order Integration Formulae for Dynamic Response Equations by the Conjugate Gradient Method
Int. J.f. Num. Meth. Eng.
Vol.20 (1984) 339-351
- < 37> Crisfield, M.A. Accelerating and Damping the Modified Newton-Raphson Method
Computers & Structures
Vol.18 No.3 (1984) 395-407
- < 38> Crisfield, M.A. Variable Step-Lengths for Non-Linear Structural Analysis
Transport and Road Research Laboratory Report 1049
Crowthorne, Berkshire (1982)
- < 39> Crutzen, Y. Nonlinear Transient Dynamic Analysis of Thin Shells Using the Semiloof Finite Element
Universite Libre De Bruxelles
Faculte Des Sciences Appliquees
Service Des Milieux Continus (1979)
- < 40> Dhatt, G.
Touzot, G. The Finite Element Method Displayed
John Wiley & Sons , New York (1984)
- < 41> Dowell, E.H. Aeroelastic Stability of Plates and Shells:
An Innocents Guide to the Literature
- < 42> Fischer, U.
Stephan, W. Mechanische Schwingungen
VEB Fachbuchverlag Leipzig (1981)
- < 43> Fitch, J.
Budiansky, B. Buckling and Postbuckling Behavior of Spherical Caps Under Axisymmetric Load
AIAA J. Vol.8 No.4 (1970) 686-693
- < 44> Försting, H.W. Grundlagen der Aeroelastik
Springer-Verlag (1974)
- < 45> Gärtner, S. Ein superkonvergentes Zeitintegrationsverfahren für dynamische Systeme und andere Probleme m-ter Ordnung
ZAMM 66 (1986) 385-393

- < 46> Gellert, M. A Direct Integration Method for
Analysis of a Certain Class of
Non-Linear Dynamic Problems
Ing. Archiv 48 (1979) 403-415
- < 47> Gellert, M. A New Algorithm for Integration of
Dynamic Systems
Comp. & Struct. No.9 (1978) 401-408
- < 48> Grybos, R. Impact Stability of a Bar
Int. Journ. Engin. Sci.
Vol.13 (1975) 463-478,
- < 49> Hagedorn, P. Nichtlineare Schwingungen
Akademische Verlagsgesellschaft
Wiesbaden (1978)
- < 50> Hamdan, S.M. Stability and Convergence of Some
Patamapongs, N. Finite Element Algorithms for
Nonlinear Elastodynamics
Int. Journ. f. Num. Methods in
Engineering
Vol. 21 (1985) 975-999
- < 51> Harris, C.M. Shock and Vibration Handbook
Crede, C.E. Vol.1 Basic Theory and Measurements
Mc Graw Hill (1961)
- < 52> Hilber, H.M. Improved Numerical Dissipation for
Hughes, T. Time Integration Algorithms in
Taylor, R. Structural Dynamics
Earthquake Eng. Struct. Dyn.
Vol.5 (1977) 283-292
- < 53> Hilber, H.M. Analysis and Design of Numerical
Integration Methods in Structural
Dynamics
Dissertation
Grad. Div. of the Univ. of Calif.
Berkeley Dec. (1976)
- < 54> Ho, F.H. Dynamic Buckling of Spherical
Nash, W.A. Shells
Proc. Symp. "Non Classical Shell
Problems" Warsaw (1963) 330-336

- < 55> Hoff, N.J. Dynamic Stability of Structures
Proc. Int. Conf. "Dynamic Stability
of Structures" Northwestern Univ.,
Illinois (1965) 7-41
- < 56> Hoff, N.J. Dynamic Analysis of the Buckling
Bruce, V.G. of Laterally Loaded Flat Arches
J. Math. and Physics
Vol.32 (1953) 276-288
- < 57> Hsu, C.S. On Parametric Excitation and Snap-
Through Stability Probl. of Shells
Published in: Thin Shell Structures
Editors: Fung, Y.L.; Sechler E.E.
Prentice Hall (1974)
- < 58> Hsu, C.S. The Effects of Various Parameters
on the Dynamic Stability of a Shal-
low Arch
J.Appl.Mech. Juni(1967) 349-358
- < 59> Huang, C.L. Large Amplitude Vibrations of a
Sandman, B.E. Rigidly Clamped Circular Plate
Int. Journ. Non-Linear Mechanics
Vol.6 pp 451-468
Pergamon Press Ltd. (1971)
- < 60> Huang, N.C. Axisymmetric Dynamic Snap-Through
of Elastic Clamped Shallow
Spherical Shells
AIAA J. Vol.3 No.12 (1969) 215-220
- < 61> Hughes, T. Convergence of Implicit-Explicit
Stephenson, R.A. Algorithms in Nonlinear Transient
Analysis
Int. J. Eng. Sci. Vol.19 (1981)
295-302
- < 62> Hughes, T.J.R. Implicit-Explicit Finite Elements
Liu, W.K. in Transient Analysis: Stability
Theory
J.Appl.Mech. Vol.45 No.6 (1978)
371-374
- < 63> Hughes, T.J.R. Finite-Element Methods for Non-
Caughey, T.K. linear Elastodynamics which Con-
Liu, W.K. serve Energy
J.Appl.Mech. Vol.45 No.6 (1978)
366-370

- < 64> Hughes, T.J.R. A Note on the Stability of Newmarks
Algorithm in Nonlinear Structural
Dynamics
Division of Structural Eng. and
Struct. Mechanics
Dept. of Civil Eng., Univ. of Calif.
Berkeley (1975)
- < 65> Hughes, T.J.R. Stability, Convergence and Growth
and Decay of Energy of the Average
Acceleration Method in Nonlinear
Structural Dynamics
Comp. & Struct. Vol.6 No.4 (1976)
313-324
- < 66> Humphreys, J.S. On the Adequacy of Energy Criteria
for Dynamic Buckling of Arches
Technical Notes
AIAA Journal Vol.4 No.5 May (1966)
- < 67> Ishizaki, T.
Bathe, K.J. On Finite Element Large Dis-
placement and Elastic-Plastic
Dynamic Analysis of Shell
Structures
Comp. & Struct. No.12 (1980) 309-318
- < 68> Jones, N.
Ahn, C.S. Dynamic Elastic and Plastic Buck-
ling of Complete Spherical Shells
Int. J. Solids Struct. No.10 (1974)
1357-1374
- < 69> Kalnins, A. Dynamic Buckling of Axisymmetric
Shells
J. Appl. Mech. (1974) 1063-1068
- < 70> Kao, R. Nonlinear Dynamic Buckling of
Spherical Caps with Initial
Imperfections
Comp. & Struct. No.12 (1980) 49-63
- < 71> Kao, R.
Perrone, N. Dynamic Buckling of Axisymmetric
Spherical Caps with Initial
Imperfections
Comp. & Struct. Vol.9 (1978) 463-473

- < 81> Mahrenholz, O.(ed) Dynamic Stability of Inelastic Structures
Bogacz, R. (ed) Euromech Colloquium 190 Oct. (1984)
Inst. f.Meerestechnik-Strukturmech.
TU Hamburg-Harburg
- < 82> Malkin, J.G. Theorie der Stabilität einer Bewegung
R. Oldenbourg, München (1959)
- < 83> McNamara, J.F. Incremental Stiffness Method for
Marcal, P.V. Finite Element Analysis of the
Nonlinear Dynamic Problem
Pres.at Int. Symp. on Num. and
Comp. Methodes in Struct. Mech.
Urbana, Illinois Sept. (1971)
- < 84> McNamara, J.F. Solution Schemes for Problems of
Nonlinear Structural Dynamics
J. of Pressure Vessel Techn.
May (1974) 96-102
- < 85> Mescall, J. Influence of Damping on the Dynamic
Tsui, T. Stability of Spherical Caps under
Step Pressure Loading
AIAA J. Vol.9 No.7 (1971)
1244-1248
- < 86> Messier, R.H. A Finite Element Algorithm for the
Marcal, P.V. Determination of Dynamic Buckling
Proc. Symp. "FE Analysis of
Transient Nonlinear Structural
Behavior" AMD Vol.14 Houston (1975)
- < 87> Mettler, E. Biegeschwingungen eines Stabes
Mitt. Forsch. Anst. GHF Konzern 8
(1940)
- < 88> Müller, P.C. Lineare Schwingungen
Schiehlen, W.O. Akademische Verlagsgesellschaft
Wiesbaden (1976)
- < 89> Mullen, R. An Analysis of an Unconditionally
Belytschko, T. Stable Explicit Method
Comp. Struct. Vol.16 Nr.6 (1983)
691-696

- < 90> Muratta, M. Nonlinear Analysis of Rotational
Kato, S. Shells with Initial Imperfections
Gould, P.L. by Combined Finite Element Method
and Mode Superposition Method
AMD Vol.48 "Nonlinear FE-Anaysis
of Plates and Shells" Washington
(1981) 3-34
- < 91> Nagarajan, S. Non-Linear Dynamic Analysis of
Popov, E.P. Axisymmetric Shells
Int. J. Num. Meth. Eng. No.9 (1975)
535-550
- < 92> Nayfeh, A.H. Nonlinear Oscillations
Mook, D.T. J. Wiley & Sons, New York (1979)
- < 93> Nemat-Nasser, S. On the Energy Concepts in the
Roorda, J. Theory of Elastic Stability
Acta Mech. Vol.4 No.3 (1967) 296-307
- < 94> Nickell, R.E. Direct Integration Methods in
Structural Dynamics
J. of the Eng. Mech. Division
(1973) 303-317
- < 95> Oliveira, C.A.M. An Analysis of the semiloof shell
Martins, R.A.F. element stiffness and mass matrices
Engineerig Computation
Vol.2 (1985) 307-313
- < 96> Overmeire, M. van A Physical Approach to Mass Lumping
Proc. of 4th World Congress:
Accuracy, Reliability, Training in
FEM Technology
Interlaken, Schweiz (1984)
- < 97> Padovan, J. Hierarchial Implicit Dynamic
Lackney, J. Least-Square Solution Algorithm
Computers & Structures
Pergamon Press Ltd.
Vol.22 No.3 (1986) 479-489
- < 98> Park, K.C. An Improved Semi-Implicit Method
for Structural Dynamic Analysis
J. of Applied Mech. Vol.49 (1982)
589-593

- < 99> Park, K.C. An Improved Stiffly Stable Method for Direct Integration of Nonlinear Structural Dynamic Equations
J. Appl. Mech. No.6 (1975) 464-470
- <100> Plesha, M.E. A Constitutive Operator Splitting Method for Nonlinear Transient Analysis
Belytschko, T. Comp. & Struct. Vol.20 No.4 (1985) 767-777
- <101> Ramm E. Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente
Habilitationsschrift
Bericht Nr.76-2
Institut für Baustatik
Universität Stuttgart (1976)
- <102> Ramm, E. Large Deformation Shell Analyses Based on the Degeneration Concept
Matzenmiller, A. Proc. Finite Element Methods for Plate and Shell Structures
ed. T.J.R. Hughes, E. Hinton
Pineridge Press, Swansea UK (1986) 365-393
- <103> Ramm, E. Traglastuntersuchungen an Kugelbehältern mit Stützen unter dynamischer Belastung
Bornscheuer, F.W. Institut für Baustatik
Burmeister, A. Universität Stuttgart
DFG-Forschungsbericht (1985)
- <104> Rammerstorfer, F.G. Computation of the Stability of Dynamically Loaded Non-Linear Structures
Auli, W. Third Int. Conf. Num. Meth. Nonlin. Probl.
Dubrovnik Sept. (1986)
- <105> Rosemeier, G. Winddruckprobleme bei Bauwerken
Springer-Verlag Berlin (1976)
- <106> Runxiang, Z. A Study of the Different Solution Methods for Nonlinear Problems
Parisch, H. ISD-Report No.304
Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen
Stuttgart (1982)

- <107> Sättele, J.M. Ein Finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität
Dissertation
Bericht Nr. 80-3 Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1980)
- <108> Schmidt, G. Parametererregte Schwingungen
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1975)
- <109> Schweizerhof, K. Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen
Dissertation
Institut für Baustatik
Universität Stuttgart (1982)
- <110> Senjanovic, I. Harmonic Acceleration Method for Dynamic Structural Analysis
Comp. & Struct. Vol.18 No.1 (1984) 71-80
- <111> Simitzes, G.J. Suddenly-Loaded Structural Configurations
J.Engng.Mech. Vol.110 No.9 (1984) 1320-1334
- <112> Simitzes, G.J. Blackmon, C.M. Snap-Through Buckling of Eccentrically Stiffened Shallow Spherical Caps
Int.J.Solids Struct. Vol.11 (1975) 1035-1049
- <113> Song, B. Jones, N. Dynamic Buckling of Elastic-Plastic Complete Spherical Shells under Step Loading
Int.J.Impact Engng. Vol.1 No.1 (1983) 51-71
- <114> Stasch, R. Direkte Zeitintegrationsverfahren
Diplomarbeit
Institut für Baustatik
Universität Stuttgart (1986)

- <115> Stegmüller, H. Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit degenerierten Schalenelementen
Dissertation
Institut für Baustatik
Universität Stuttgart (1985)
- <116> Stephens, W. Axisymmetric Static and Dynamic
Fulton, R. Buckling of Spherical Caps due to
Centrally Distributed Pressure
AIAA J. Vol.7 No.11 (1969)
2120-2126
- <117> Stoker, J.J. On the Stability of Mechanical
Systems
Communicat. on Pure and Appl. Math.
Vol.8 (1955) 133-142
- <118> Stricklin, J.A. Comments on Nonlinear Transient
Haisler, W.E. Structural Analysis
Riesemann, von W.A. Proc. "FE Analysis of Transient
Nonlinear Structural Behavior"
AMD Vol.14 Houston (1975) 157-177
- <119> Stricklin, J.A. Nonlinear Dynamic Analysis of
Martinez, J.E. Shells of Revolution by Matrix
Tillerson, J.R. Displacement Method
Hong, J.H. AIAA-J. Vol.9 No.4 (1971) 629-636
Haisler, W.E.
- <120> Svalbonas, V. Dynamic Buckling of Shells:
Kalnins, A. Evaluation of Various Methods
Nuclear Engineering and Design
44 (1977) 331-356
- <121> Thiele, F. Zugeschärfte Berechnungsweise der
aerodynamischen Stabilität weitge-
spannter Brücken (Sicherheit gegen
winderregte Flatterschwingungen)
Stahlbau 12 (1976) 359-365
- <122> Truesdell, C. (Ed.) Mechanics of Solids Vol. 3
Theory of Viscoelasticity, Plasticity,
Elastic Waves, and Elastic
Stability
Springer-Verlag Berlin (1984)

- <123> Trujillo, D.M. An Unconditionally Stable Explicit
Algorithm for Structural Dynamics
Int.J.Num.Meth.Engng.
Vol.11 (1977) 1579-1592
- <124> Trujillo, D.M. The Direct Numerical Integration
of Linear Matrix Differential
Equations Using Pade Approximations
Int. Journ. f. Num. Meth. in Engin.
Vol.9 (1975) 259-270
- <125> Varga, R.S. Matrix Iterative Analysis
Prentice-Hall Inc.
Englewood Cliffs, N.J. (1962)
- <126> Wang, P.-H. Statische und dynamische Unter-
suchung geometrisch nichtlinearer
Tragwerke nach der Finite-Element-
Methode mit Anwendung auf Seilkon-
struktionen
Mitteilung Nr. 78-7
Institut f. Konstr. Ingenieurbau
Ruhr-Universität Bochum
- <127> Weber, M. Zur Äquivalenz der Zeitintegra-
tionsverfahren für dynamische
Systeme
ZAMM 63 (1983) 151-160
- <128> Weeks, G. Temporal Operators For Nonlinear
Structural Dynamics Problems
Journ. of the Engin. Mech. Division
Oct. (1972)
- <129> Wood, W.L.
Bossak, M.
Zienkiewicz, O.C. An Alpha Modification of Newmark's
Method
Int. J. for Num. Meth. in Eng.
Vol. 15 (1980) 1562-1566
- <130> Wu, R.W.H.
Witmer, E.A. Nonlinear Transient Responses of
Structures by the Spatial Finite-
Element Method
AIAA J. Vol.11 No.8 (1973) 1110-1117
- <131> Ziegler, H. Die Stabilitätskriterien der
Elastomechanik
Ing. Archiv 20 (1952) 49-56

- <132> Zienkiewicz, O.C. A New Look at the Newmark, Houbolt
and other Time Stepping Formulas.
A Weighted Residual Approach
Earthquake Eng. Struct. Dyn.
Vol.5 (1977) 413-418
- <133> Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method
McGraw-Hill Book Company Ltd
(1977)
- <134> Handbook of Structural Stability
Japan (1971)

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur
Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdreh-
beanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer
Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale
und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plat-
tenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und
Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskreti-
sierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger drei-
zelliger Träger unter Berücksichtigung der Profil-
verformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II.

- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H.-G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppel-schalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Platten-tragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometri-scher Nichtlinearität.

- 82-1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität
und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:
Nichtlineare Berechnungen von Tragwerken unter
verformungsabhängiger Belastung mit finiten Ele-
menten.
- 82-3 H.-P. Andrä:
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flach-
decken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei
großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und
physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbe-
tonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter
Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und
Formabweichungen unter Innendruck und Stützen-
längskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter
Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.