

Beiträge zu den HRENNIKOFF'schen Stabmodellen für Scheiben- und Plattenprobleme

Von der Universität Stuttgart (Technische Hochschule)
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr. -Ing.)

14.03.200

genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

ROBERT FLEGE L

geboren in Trautenau



Hauptberichter: Prof. Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Mitberichter: Prof. Dr. -Ing. H. Bufler

Tag der Einreichung: 6. Juli 1967

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Februar 1968

1968



Inhaltsverzeichnis

Literaturverzeichnis	5
Bezeichnungen	7
Vorwort	9
1. Einleitung	11
2. Entwicklung von Modellelementen	14
2.1 Modellelemente zur Behandlung von Scheiben- problemen	15
2.1.1 Rechteckelement	16
2.1.2 Gleichschenkliges Dreieckelement	22
2.2 Modellelemente für das Scheibenproblem abgelei- tet aus superponierten Grundspannungszuständen	25
2.2.1 Rechteckelement	25
2.2.2 Gleichschenkliges Dreieckelement	29
2.3 Modellelemente zur Behandlung von Platten- problemen	33
2.3.1 Rechteckelement	33
2.3.2 Gleichschenkliges Dreieckelement	37
3. Steifigkeitsmatrizen	38
3.1 Herleitung der Steifigkeitsmatrizen für das Scheibenproblem nach der 1.Methode	41
3.1.1 Rechteckelement	41
3.1.2 Gleichschenkliges Dreieckelement	51
3.2 Herleitung der Steifigkeitsmatrizen für das Scheibenproblem nach der 2.Methode	57
3.2.1 Rechteckelement	59
3.2.2 Gleichschenkliges Dreieckelement	62
3.3 Herleitung der Steifigkeitsmatrizen für das Plattenproblem nach der 2.Methode	63
3.3.1 Rechteckelement	64
3.3.2 Gleichschenkliges Dreieckelement	68

4. Anwendungsbeispiele	72
4.1 Rastereinteilung, Ersatzlasten, Konvergenz	73
4.2 Die frei drehbar gelagerte Quadratplatte	77
4.3 Die starr eingespannte Quadratplatte	89
4.4 Diskussion der Ergebnisse	104
5. Programm	106
Anhang	122

Literaturverzeichnis

- [1] A.P.HRENNIKOFF, Plane Stress and Bending of Plates by Method of Articulated Framework. Sc.D.Thesis, Department of Civil and Sanitary Engineering, M.I.T., May 1940.
- [2] A.P.HRENNIKOFF, Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method. J.of Appl.Mech., Vol.8, No.4, 1941.
- [3] K.S.PARIKH, Analysis of Shells Using Framework Analogy. Sc.D.Thesis, Department of Civil Engineering, M.I.T., May 1962.
- [4] S.SPIERIG, Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrostmodellen. Diss., Fakultät für Maschinenwesen, Technische Hochschule Hannover, Juli 1963. Abh.d.Braunsch.Wiss.Ges.XV, 1963.
- [5] J.H.ARGYRIS, S.KELSEY, Energy Theorems and Structural Analysis. London: Butterworth 1960.
- [6] R.W.CLOUGH, The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. Proceedings ASCE, 2nd Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., September 1960.
- [7] R.H.GALLAGHER, A Correlation Study of Methods of Matrix Structural Analysis. Pergamon Press, Oxford 1964.
- [8] R.J.MELOSH, A Stiffness Matrix for the Analysis of Thin Plates in Bending. J.Aerospace Sc., Vol. 28, 1961.
- [9] O.C.ZIENKIEWICZ, G.S.HOLISTER, Stress Analysis. John Wiley and Sons Ltd., London 1965.
- [10] B.M.VEUBEKE, Matrix Methods of Structural Analysis. NATO-Advisory Group for Aeronautical Research and Development, Vol.72, Pergamon Press, Oxford 1964.
- [11] W.FLÜGGE, Handbook of Engineering Mechanics. McGraw-Hill, New York - Toronto - London, 1962.

- [12] E.C.PESTEL, F.A.LECKIE, Matrix Methods in Elastomechanics. McGraw-Hill, New York, 1963.
- [13] S.TIMOSHENKO, S.WOINOWSKY-KRIEGER, Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill, New York, 1959.
- [14] F.CZERNY, Tafeln für gleichmäßig vollbelastete Rechteckplatten. Bautechnik-Archiv, Heft 11, 1955, Berlin.
- [15] J.FAHR, Das Übertragungsmatrizen-Verfahren in Anwendung auf zylindrische Schalen. Diss., Fakultät für Maschinenwesen, Technische Hochschule Hannover, Juni 1964.

Bezeichnungen

x, y, z	kartesische, ein Rechtssystem bildende Koordinaten
u_P, v_P, w_P	Verschiebungen des Punktes P in x, y, z -Richtung
φ_P, ψ_P	Drehwinkel des Stabendes P um die x, y -Achse
δ_i	Sehntangentenwinkel eines gekrümmten Stabes
a	Länge
h	Element-, Plattendicke
α, β, δ	Winkel
E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
J	Flächenträgheitsmoment
ν	Querdehnung
N_{xP}, N_{yP}	Ersatzlasten in den Elementecken in x, y -Richtung
M_{xP}, M_{yP}	Ersatzmomente in den Elementecken in x, y -Richtung
Q_P	Ersatzquerlast
S_i	Stabkraft des i -ten Stabes, i -ter Stab
$M_{i,k}$	am Stab $i-k$ in i angreifendes Stabendmoment
F_i^n	Stabquerschnitt infolge Normalspannungsbeanspruchung
F_i^s	Stabquerschnitt infolge Schubspannungsbeanspruchung
J_i^m	Trägheitsmoment infolge Biegemomentenbeanspruchung
J_i^t	Trägheitsmoment infolge Drillmomentenbeanspruchung
ϵ_x, ϵ_y	Dehnungen in x, y -Richtung
$\epsilon_{xy}, \gamma_{xy}$	Schubverzerrung, Gleitung
κ_x, κ_y	Krümmungen in x, y -Richtung
κ_{xy}	Verdrillung
ϵ_{PQ}^n	Verzerrung im Stab P-Q infolge Normalspannungen
ϵ_{PQ}^s	Verzerrung im Stab P-Q infolge Schubspannungen
κ_{PQ}^m	Krümmung im Stab P-Q infolge Biegemomente

κ_{PQ}^t	Krümmung im Stab P-Q infolge Drillmomente
σ_x, σ_y	Normalspannungen in x,y-Richtung
$\tau, \tau_{xy}, \tau_{yx}$	Schubspannungen
$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y$	konstante Normalspannungen in x,y-Richtung
$\bar{\tau}, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\tau}_{yx}$	konstante Schubspannungen
m_x, m_y	Biegemomente je Längeneinheit um die x,y-Achse
t_{xy}	Drillmoment je Längeneinheit
f	Lastvektor
d	Verschiebungs-, Deformationsvektor der Eckpunkte
v	Vektor der Stabdeformationen
p	Vektor der Stabschnittgrößen
$[A]$	geometrische Matrix
$[a_i], [T]$	Transformationsmatrizen
$[K_p]$	Diagonalmatrix
$[K_i]$	Steifigkeitsmatrix für den i-ten Zustand eines Elementes
$[K]$	Gesamtsteifigkeitsmatrix

Vorwort

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in fünf Kapitel. Nach einer Einleitung, welche die geschichtliche Entwicklung des Themas skizziert und die bisher durchgeführten Ansätze streift, werden im 2.Kapitel zwei ebene Stabmodelle - das Rechteck und das gleichschenklige Dreieck - betrachtet und für das Scheiben- und Plattenproblem die charakteristischen Größen - die Stabquerschnitte und die Flächenträgheitsmomente - abgeleitet. Das 3.Kapitel ist der Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen für die beiden Modelle für den Fall des Scheiben- und Plattenproblems gewidmet. Unter Verwendung der Steifigkeitsmatrix für das gleichschenklige Dreieck erfolgt im 4.Kapitel die Berechnung einer allseitig frei drehbar gelagerten und einer allseitig starr eingespannten Quadratplatte. Das 5.Kapitel enthält schließlich das für die elektronische Rechnung verwendete Algol-Programm. In einem Anhang werden die im 3.Kapitel aufgestellten vier Steifigkeitsmatrizen explizit angegeben.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Professor Dr.-Ing.F.W.BORN-SCHEUER dafür danken, daß er mir an seinem Lehrstuhl für Bau-
statik die Möglichkeit gegeben hat, diese Arbeit anzufertigen.

Für die vielfältigen Anregungen und die große Anteilnahme an ihrem Zustandekommen spreche ich Herrn Oberingenieur Dr.-Ing. E.STEIN meinen besonderen Dank aus.

Herrn Professor Dr.-Ing.H.BUFLER danke ich sehr für die Übernahme des Korreferats.

1. Einleitung

Bei der Lösung statischer Scheiben-, Platten- und Schalenprobleme wird man auf ein partielles Randwertproblem geführt, das nur in einfachen Sonderfällen geschlossen lösbar ist. Daher ist man im allgemeinen auf Näherungslösungen angewiesen.

Unter der Vielzahl solcher Näherungslösungen haben in den letzten Jahren mehrere Methoden immer größere Bedeutung erlangt, die unter den Bezeichnungen Ersatzmodelle und Elementmethode - in der angelsächsischen Literatur als Framework Analogy, Method of Articulated Framework, Lattice Analogy und Finite Element Method in Structural Analysis - bekannt wurden.

Der entscheidende Anstoß zu dieser Entwicklung ging von den in den Jahren 1940 und 1941 erschienenen bahnbrechenden Arbeiten von A.P.HRENNIKOFF [1], [2] aus. HRENNIKOFF ersetzt ein endliches Kontinuumelement durch ein gleichberandetes Fachwerkelement und fordert dafür äquivalente Steifigkeiten. Das bedeutet, daß die Querschnitte und die Flächenträgheitsmomente der Stäbe so bestimmt werden, daß die Deformationseigenschaften des Ersatzmodells mit denjenigen des zu ersetzenden Kontinuums möglichst weitgehend übereinstimmen. Die Berechnung des Stabwerks erfolgt iterativ. Er gibt für die Behandlung von Scheiben- und Plattenproblemen Quadrat-, Rechteck- und gleichseitige Dreieckelemente an.

Neuen Aufschwung erfährt diese Näherungsmethode durch den Einsatz von Rechenanlagen und die Aufbereitung des Verfahrens durch die Anwendung von Matrizen, insbesondere durch die Formulierung sogenannter Steifigkeits- und Nachgiebigkeitsmatrizen.

Eine Fortsetzung der von HRENNIKOFF eingeschlagenen Richtung findet diese Entwicklung 1962 in der Dissertation von K.S. PARIKH [3]. Er betrachtet dabei ein dreidimensionales Quaderelement und bestimmt für konstante sowie linear veränderliche Spannungszustände - bei den letzteren allerdings mit der Einschränkung, daß er lediglich Schubspannungen in der Scheibenebene und diese wiederum nur linear veränderlich

über die Elementhöhe in seinen Betrachtungen erfaßt - die daraus resultierenden Stabquerschnitte.

S.SPIERIG [4] gibt Steifigkeitsmatrizen zur Behandlung von Scheiben- und Plattenproblemen für das Rechteck, das allgemeine Dreieck und Trapez an. Jedoch unterliegen die Matrizen der Einschränkung, daß sie strenggenommen nur für die speziellen Querdehnungszahlen $\nu = \frac{1}{3}$ und $\nu = \frac{1}{4}$ gültig sind.

Während bei dem soeben geschilderten Vorgehen die elastischen Eigenschaften eines zwei- oder dreidimensionalen Kontinuums durch ein Stabmodell angenähert und ersetzt werden, also im Grunde durch Verknüpfung eindimensional ausgebildeter Elemente, so ist es bei J.H.ARGYRIS [5], R.W.CLOUGH [6], R.H.GALLAGHER [7], R.J.MELOSCH [8], O.C.ZIENKIEWICZ, G.S.HOLISTER [9], B.M.VEUBEKE [10] und anderen Autoren das zweidimensionale endliche Element als solches selbst, das bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix zugrunde liegt.

Bei diesem Vorgehen unterscheidet man im wesentlichen zwei Modellarten, nach denen die Näherungen benannt sind; einmal ist es die Methode mit sogenannten Verschiebungsmodellen und zum anderen die mit Gleichgewichtsmodellen. Diese Bezeichnungen sind auf Grund der Annäherung des jeweiligen Modells an das tatsächliche elastische Verhalten des zu untersuchenden Kontinuums gewählt. Bei dem ersten Modell werden die Verträglichkeitsbedingungen, bei dem zweiten die Gleichgewichtsbedingungen durch entsprechende Ansätze bei der Aufstellung der Steifigkeits- bzw. der Nachgiebigkeitsmatrix erfüllt. Im allgemeinen werden von der ersten Modellart die Gleichgewichtsbedingungen und von der zweiten die Verträglichkeitsbedingungen verletzt. Dies ist eine Folge der jeweils zugrunde liegenden Ansätze, weil einmal das Gleichgewicht und das andere Mal die Kompatibilität in die Betrachtungen nicht einbezogen werden. So elegant gerade die Methode des Verschiebungsmodells zu formulieren ist, so erhebt sich die Frage, ob nicht durch die Verletzung der Gleichgewichtsbedingungen, falsche Lösungen zu erwarten sind. Auf diesen Punkt weist R.W.CLOUGH in der Diskussion seiner Ergebnisse hin, die er für eine allseitig frei drehbar gelagerte (NAVIERsche Randbedingungen) Rechteckplatte unter Einheitslast mit verschiedenen Verschiebungsmodellen erhalten hat. (vgl. [9], Seite 115)

Bei den hier behandelten HRENNIKOFFschen Stabmodellen gelingt es, eine Kompromißlösung für die Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen durch die folgende Hypothese in der Weise zu finden, daß man das Gleichgewicht und die Kompatibilität in den Modellecken jeweils im Mittel durch geeignete Ansätze erfüllt. Das bedeutet, daß man sowohl sogenannte gemittelte Ersatzlasten in den Eckpunkten der Modelle zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen heranzieht und daraus die Querschnitte und FLächenträgheitsmomente der Stäbe bestimmt, als auch bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen die Stabverzerrungen und Stabkrümmungen in den Modellecken mittelt.

Der Versuch, die ebenen Stabmodelle dahingehend zu erweitern, daß man linear veränderliche Spannungen durch Ersatzlasten in den Modellecken ersetzt, führte schon bei dem Gleichungssystem zur Bestimmung der Stabquerschnittswerte auf Widersprüche.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, für beliebige Querdehnungszahlen die Steifigkeitsmatrizen für das Scheiben- und Plattenproblem für rechteckige und gleichschenkelig-dreieckige ebene Stabmodelle aufzustellen und den Einfluß dieser Werkstoffgröße am Beispiel einer Quadratplatte für die Werte $\nu = 0, 0.166, 0.333, 0.4$ und 0.5 aufzuzeigen.

2. Entwicklung von Modellelementen

Das Ziel dieses Kapitels ist, Modellelemente verschiedener Konfiguration zu entwickeln. Als Typen kann man dabei das Rechteck und das Dreieck wählen. An und für sich genügt es, nur das letztere zu betrachten und hierbei speziell ein gleichschenkliges Dreieck. Denn aus zwei verschiedenen gleichschenkligen Dreiecken kann man ein rechtwinkliges Dreieck und aus zwei verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken ein beliebiges Dreieck aufbauen. Das Rechteck ist schließlich aus zwei gleichen rechtwinkligen Dreiecken darstellbar. (Abb.2.1)

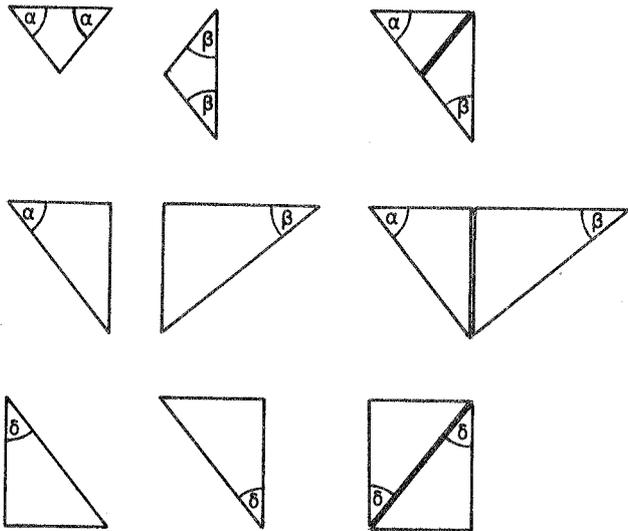


Abb.2.1

Die Reduktion auf ein gleichschenkliges Dreieck hat entscheidende Vorteile bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix, da nur zwei Parameter - eine Länge und ein Winkel - auftreten, während beim beliebigen Dreieck zu den eben genannten Größen noch eine weitere dazukommt. Dies hat zur Folge, daß die Steifigkeitsmatrix des beliebigen Dreiecks einen komplizierteren

Aufbau hat als die des gleichschenkligen Dreiecks. Da das Bestreben dahin geht, einfach gebaute Modellelemente zu erhalten, mit denen beliebige elastische Gebilde wie Scheiben, Platten und Schalen ersetzt werden können, ist dieses Vorgehen zweckmäßig.

In den folgenden Abschnitten werden die Steifigkeitsmatrizen zur Behandlung von Scheiben- und Plattenproblemen für das Rechteck- und das gleichschenklige Dreieckelement aufgestellt. Die gesonderte Betrachtung des Rechteckelements hat seinen Grund in der übersichtlichen Darstellung der wesentlichen Überlegungen.

2.1 Modellelemente zur Behandlung von Scheibenproblemen

Ein Kontinuumelement wird durch ein HRENNIKOFFsches Stabmodell ersetzt. Vom Werkstoff des Kontinuums wird vorausgesetzt, daß er homogen und isotrop sei und dem Elastizitätsgesetz für einen HOOKEschen Körper gehorche. Aus diesen Annahmen folgen die auf Seite 16 angegebenen Spannungs-Dehnungsbeziehungen. Für die Behandlung des Modells wählt man dieselben Abmessungen wie beim Kontinuum. Damit das Stabmodell dem Kontinuumelement äquivalent ist, müssen die Steifigkeiten äquivalent sein. Das bedeutet, daß die Querschnittswerte für die Stäbe des Modells so bestimmt werden, daß die Deformationseigenschaften des Modells mit denen des zu ersetzenden Kontinuums in allen Eckpunkten übereinstimmen.

Dazu unterwirft man das Kontinuum wie das Stabmodell nacheinander den drei homogenen Verzerrungszuständen:

1. reine Dehnung in x-Richtung
2. reine Dehnung in y-Richtung
3. reine Schubverzerrung

Allen Untersuchungen liege von nun an ein kartesisches x,y -Koordinatensystem in der Scheibenebene zugrunde.

Aus der Äquivalenz der drei Deformationszustände am Kontinuum und am Stabmodell erhält man dann die Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Querschnittswerte der Stäbe.

2.1.1 Rechteckelement

Das in Abb.2.2 dargestellte rechteckige Stabmodellelement - im folgenden kurz Rechteckelement genannt - sei nun ebenso wie das zugehörige Kontinuum einem allgemeinen Verzerrungszustand unterworfen, der durch die Verzerrungen ϵ_x , ϵ_y , ϵ_{xy} beschrieben werde. Dem entspricht nach dem

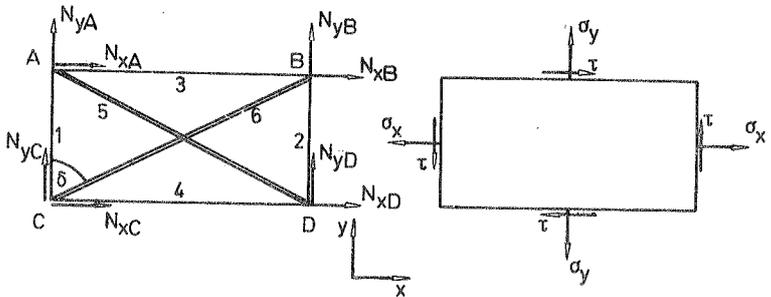


Abb.2.2

HOOKESchen Gesetz der ebene Spannungszustand ($\sigma_z = 0$) im Kontinuum.

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\nu \epsilon_x + \epsilon_y) \\ \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{xy} \quad 1) \end{aligned}$$

Nun wird gefordert, daß der Spannungszustand am Kontinuum durch statisch äquivalente Ersatzlasten N_x , N_y (Abb.2.2) ersetzt wird, die an den Eckpunkten des Elements angreifen. Man erfaßt also die in den Gleichgewichtsbedingungen auftretenden Kräfte durch gemittelte, in den Ecken des Modells wirkende Ersatzlasten. Für das Rechteckelement lauten sie mit den Bezeichnungen $a = \overline{AC}$ für die Breite und h für die Dicke des Rechteck- bzw. des Kontinuumelements:

1) Es sei hier besonders darauf hingewiesen, daß $\epsilon_{xy} = \gamma_{xy}$ ist, wenn mit γ_{xy} die Scherung bezeichnet wird.

$$(2.2) \quad \begin{aligned} -N_{xA} = N_{xD} &= \frac{ah}{2}(\sigma_x - \tau \tan \delta) ; N_{yA} = -N_{yD} = \frac{ah}{2}(\sigma_y \tan \delta - \tau) \\ N_{xB} = -N_{xC} &= \frac{ah}{2}(\sigma_x + \tau \tan \delta) ; N_{yB} = -N_{yC} = \frac{ah}{2}(\sigma_y \tan \delta + \tau) \end{aligned}$$

Die Ersatzlasten sind positiv, wenn sie in positiver x- bzw. y-Richtung weisen, sonst negativ.

Damit das Element im Gleichgewicht ist, müssen die Ersatzlasten in den Eckpunkten mit den Stabkräften im Gleichgewicht stehen. Aus der doppelten Symmetrie des Rechtecks folgt, daß lediglich die Gleichgewichtsbedingungen für den Eckpunkt A zu betrachten sind. Aus Abb.2.3 liest man ab:

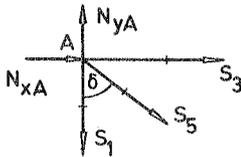


Abb.2.3

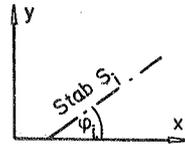


Abb.2.4

$$(2.3) \quad \begin{aligned} S_3 + S_5 \sin \delta &= -N_{xA} \\ S_1 + S_5 \cos \delta &= N_{yA} \end{aligned}$$

Wie im weiteren auf Seite 19 noch erörtert wird, werden die Ersatzlasten in einen die Normalspannungen σ_x, σ_y und in einen die Schubspannung τ enthaltenden Anteil aufgespalten. Im Falle reiner Schubspannungsbeanspruchung, also für $\sigma_x = \sigma_y = 0$, folgt aus (2.2) und (2.3):

$$(2.2a) \quad -\frac{N_{xA}}{N_{yA}} = \tan \delta \qquad (2.3a) \quad -\frac{N_{xA}}{N_{yA}} = \frac{S_3 + S_5 \sin \delta}{S_1 + S_5 \cos \delta}$$

Damit (2.2a) und (2.3a) übereinstimmen, muß $S_1 = S_3 = 0$ sein, d.h. also, daß in diesem Fall nur die Diagonalstäbe Kräfte aufnehmen.

Für die Stabkraft S_i gilt:

$$(2.4) \quad S_i = F_i E \epsilon_i$$

Da bei der Dehnung ϵ_i des Stabes S_i die Transformation auf die Verzerrungen $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ durch die Beziehung (vgl. [11], 33-5)

$$(2.5) \quad \epsilon_i = \epsilon_x \cos^2 \varphi_i + \epsilon_y \sin^2 \varphi_i + \epsilon_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i$$

gelingt, ist es möglich, einen Koeffizientenvergleich der Verzerrungen durchzuführen. Setzt man die Gleichungen (2.1), (2.2),

(2.4) und (2.5) in (2.3) ein, so ergeben sich die von SPIERIG hergeleiteten zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & F_3 \epsilon_x + F_5 (\epsilon_x \sin^2 \delta + \epsilon_y \cos^2 \delta - \epsilon_{xy} \cos \delta \sin \delta) \sin \delta \\
 & \quad = \frac{ah(\epsilon_x + \nu \epsilon_y)}{2(1-\nu^2)} - \frac{ah \tan \delta \epsilon_{xy}}{4(1+\nu)} \\
 (2.6) \quad & F_1 \epsilon_y + F_5 (\epsilon_x \sin^2 \delta + \epsilon_y \cos^2 \delta - \epsilon_{xy} \cos \delta \sin \delta) \cos \delta \\
 & \quad = \frac{ah \tan \delta (\nu \epsilon_x + \epsilon_y)}{2(1-\nu^2)} - \frac{ah \epsilon_{xy}}{4(1+\nu)}
 \end{aligned}$$

Da die Gleichungen (2.6) für jeden der drei beschriebenen Verzerrungszustände ϵ_x , ϵ_y , ϵ_{xy} erfüllt sein müssen, erhält man durch den bereits angedeuteten Koeffizientenvergleich für diese Verzerrungen sechs Bestimmungsgleichungen für die drei gesuchten Stabquerschnitte F_1 , F_3 und F_5 . SPIERIG hat gezeigt, daß diese sechs Gleichungen nur für die spezielle Querdehnungszahl $\nu = \frac{1}{3}$ widerspruchsfrei sind.

Diese Einschränkung ist darauf zurückzuführen, daß zu wenig unbekannte Stabquerschnitte zu bestimmen sind. Man kann dieses Hindernis umgehen, indem man weitere Stäbe in das Stabmodell einfügt. So gelang es HRENNIKOFF für das in Abb.2.5 dargestellte

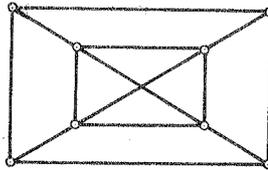


Abb.2.5

te Modell, für beliebige Querdehnungszahlen die Stabquerschnitte anzugeben.

Fügt man jedoch dem Modell zusätzliche Knotenpunkte hinzu, so wächst damit die Anzahl der Freiheitsgrade und die aufzustellende Steifigkeitsmatrix erfährt eine beträchtliche Vergrößerung. Damit nimmt aber auch zwangsläufig die auszuführende Rechenarbeit zu, wenn man ein Kontinuum durch solche Stabmodelle ersetzt.

Dies möchte man aber gerade vermeiden, da sonst schnell die Kapazität der Rechenanlagen erschöpft ist.

Nun besteht aber auch grundsätzlich die Möglichkeit, nicht nur weitere Knotenpunkte in das Modell einzufügen, um weitere Stäbe zwischen diesen zusätzlichen Knoten einbauen zu können, sondern zusätzliche Stäbe zwischen zwei schon vorhandene Knoten einzufügen (Abb.2.6).

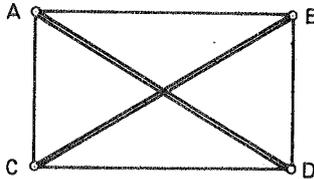


Abb.2.6

In dem Fall, wo mehrere Stäbe zwei Knoten verbinden, kann man sich das Gesamtmodell aus einzelnen Stabmodellen aufgebaut denken, wobei jedes einzelne Modell Stabquerschnitte infolge einer der Grundspannungen σ_x , σ_y , τ besitzt. Um die Steifigkeitsmatrix des Gesamtmodells zu erhalten, müssen die Steifigkeiten der einzelnen Stäbe in geeigneter Weise zusammengefaßt werden. Dieses wird in den Abschnitten 3.1 und 3.2 ausgeführt.

Zunächst sollen die Stabquerschnitte für die zwei folgenden Grundspannungszustände bestimmt werden:

1. an dem Element wirken nur die Normalspannungen σ_x und σ_y ;
2. an dem Element wirke nur die Schubspannung τ .

Im ersten Fall hat dieses Vorgehen zur Folge, daß die Ersatzlasten in (2.2) frei von Komponenten τ sind. Da ferner bei reiner Normalspannungsbeanspruchung keine Schubverzerrung ϵ_{xy} vorhanden ist, tritt diese somit in der Gleichung (2.5) nicht in Erscheinung. Das Gleichungssystem (2.6) geht damit über in

$$(2.7) \quad \begin{aligned} F_{3/5}^n \epsilon_x + F_{5/5}^n (\epsilon_x \sin^2 \delta + \epsilon_y \cos^2 \delta) \sin \delta &= \frac{ah(\epsilon_x + v\epsilon_y)}{2(1-v^2)} \\ F_{1/5}^n \epsilon_y + F_{5/5}^n (\epsilon_x \sin^2 \delta + \epsilon_y \cos^2 \delta) \cos \delta &= \frac{ah \tan \delta (v\epsilon_x + \epsilon_y)}{2(1-v^2)} \end{aligned}$$

F_1^n bedeutet den Stabquerschnitt des i-ten Stabes infolge Normalspannungsbeanspruchung des zugrunde gelegten Einzelelements. Aus den Gleichungen (2.7) ergeben sich durch Koeffizientenvergleich der Dehnungen jetzt nur noch vier Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Stabquerschnitte F_1^n , F_3^n und F_5^n :

$$\begin{aligned}
 F_3^n + F_5^n \sin^3 \delta &= \frac{ah}{2(1-v^2)} \\
 F_5^n \sin^2 \delta \cos \delta &= \frac{ahv}{2(1-v^2)} \tan \delta \\
 F_5^n \cos^2 \delta \sin \delta &= \frac{ahv}{2(1-v^2)} \\
 F_1^n + F_5^n \cos^3 \delta &= \frac{ah}{2(1-v^2)} \tan \delta
 \end{aligned}
 \tag{2.8a-d}$$

Die Gleichungen (b) und (c) sind identisch; damit bleiben drei Gleichungen zur Bestimmung von F_1^n , F_3^n und F_5^n übrig und man erhält daraus:

$$\begin{aligned}
 F_1^n = F_2^n &= \frac{ah}{2(1-v^2)} (\tan \delta - v \cot \delta) \\
 F_3^n = F_4^n &= \frac{ah}{2(1-v^2)} (1 - v \tan^2 \delta) \\
 F_5^n = F_6^n &= \frac{ah}{2(1-v^2)} \frac{v}{\sin \delta \cos^2 \delta}
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Aus Symmetriegründen müssen die Stäbe 2, 4 und 6 dieselben Querschnitte haben wie die Stäbe 1, 3 und 5.

Betrachtet man nun den zweiten Fall, so sind die Ersatzlasten frei von Komponenten σ_x und σ_y . Da ferner bei reiner Schubspannungsbeanspruchung für die Stäbe 1 und 3 $S_1 = S_3 = 0$ gilt, (siehe Seite 17) folgt jetzt unmittelbar aus (2.3) mit (2.1), (2.2) und (2.4):

$$\begin{aligned}
 -F_5^s \cos \delta \sin^2 \delta \epsilon_{xy} &= -\frac{ah \tan \delta}{4(1+v)} \epsilon_{xy} \\
 -F_5^s \cos^2 \delta \sin \delta \epsilon_{xy} &= -\frac{ah}{4(1+v)} \epsilon_{xy}
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

F_5^S bedeutet den Stabquerschnitt des fünften Stabes infolge Schubspannungsbeanspruchung des zugrunde gelegten Einzelelements. Aus den zwei Gleichungen (2.10) folgt jeweils der Querschnitt

$$(2.11) \quad F_5^S = \frac{ah}{4(1+v)} \frac{1}{\sin\delta \cos^2\delta}$$

Wiederum müssen aus Symmetriegründen die Stäbe 5 und 6 dieselben Querschnitte haben.

Setzt man in die Gleichungen (2.9) und (2.11) den speziellen Wert $v = \frac{1}{3}$ ein, so erhält man:

$$(2.12) \quad \begin{aligned} F_1^n &= F_2^n = \frac{3}{16} ah (3 \tan\delta - \cot\delta) \\ F_3^n &= F_4^n = \frac{3}{16} ah (3 - \tan^2\delta) \\ F_5^n &= F_6^n = \frac{3}{16} ah \frac{1}{\sin\delta \cos^2\delta} \\ F_5^S &= F_6^S = \frac{3}{16} ah \frac{1}{\sin\delta \cos^2\delta} \end{aligned}$$

Die Stabquerschnitte F_1^n, \dots, F_4^n sind dieselben wie die von SPIERIG angegebenen. Für die Diagonalstäbe erhält man, wie aus (2.12) ersichtlich ist, sowohl für die Querschnitte, die aus reiner Normalspannungsbeanspruchung resultieren als auch für diejenigen, die aus reiner Schubspannungsbeanspruchung hervorgehen, jeweils die SPIERIGschen Werte.

Bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix für das Rechteckelement in Abschnitt 3.2.1 kommen wir auf diese Frage nochmals zurück. An dieser Stelle sei lediglich noch das arithmetische Mittel von F_5^n und F_5^S angegeben, das infolge der obigen Erörterung ebenfalls mit dem von SPIERIG angegebenen Wert für den Diagonalstab übereinstimmt:

$$(2.13) \quad F_5 = \frac{1}{2}(F_5^n + F_5^S) = \frac{ah}{8(1-v^2)} \frac{v+1}{\sin\delta \cos^2\delta} \Bigg|_{v = \frac{1}{3}} = \frac{3}{16} \frac{ah}{\sin\delta \cos^2\delta}$$

2.1.2 Gleichschenkliges Dreieckelement

Das Element in Abb.2.7 besteht aus den drei Randstäben 1, 2 und 3 sowie einem inneren Stab 4. Äußere Kräfte sollen nur an den drei Eckpunkten A, B und C angreifen. Der Punkt

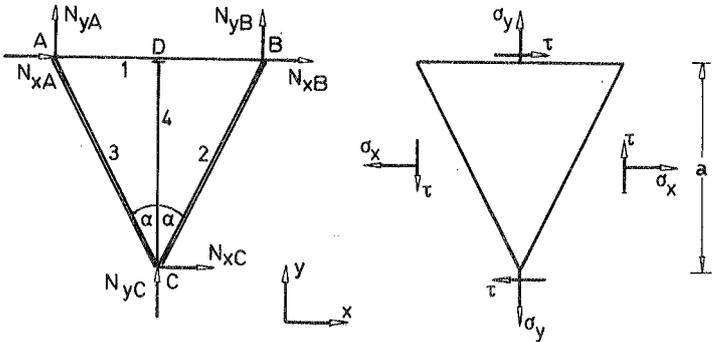


Abb.2.7

D des Stabes 1 sei gleitend auf dem Stab 1 gelagert und wie bei SPIERIG durch ein starres Zahnstangengetriebe in der Mitte des Stabes 1 fixiert. Die Stäbe 2, 3 und 4 haben nur Normalkräfte aufzunehmen, während der Stab 1 infolge der internen Belastung bei D auch Biegemomente und Querkräfte zu übertragen hat. Hinsichtlich dieser Belastung wird der Stab 1 als starr vorausgesetzt, sodaß er stets gerade bleibt.

Die Ersatzlasten N_x und N_y , die an den Eckpunkten des Elements (Abb.2.7) angreifen und der Beanspruchung σ_x , σ_y und τ statisch gleichwertig sein sollen, lauten:

$$\begin{aligned}
 N_{xA} &= \frac{ah}{2}(-\sigma_x + \tau \tan \alpha), & N_{yA} &= \frac{ah}{2}(\sigma_y \tan \alpha - \tau) \\
 (2.14) \quad N_{xB} &= \frac{ah}{2}(\sigma_x + \tau \tan \alpha), & N_{yB} &= \frac{ah}{2}(\sigma_y \tan \alpha + \tau) \\
 N_{xC} &= -\tau a \tan \alpha, & N_{yC} &= -\sigma_y a \tan \alpha
 \end{aligned}$$

Analog wie in Abschnitt 2.1.1 werden wieder die zwei dort angegebenen Grundspannungszustände getrennt zur Bestimmung der Stabquerschnitte herangezogen.

Die Ersatzlasten infolge der Grundspannungen σ_x , σ_y müssen mit den entsprechenden Stabkräften im Gleichgewicht stehen. Aus Abb.2.7 liest man für die Eckpunkte A und C ab:

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_3 \sin \alpha &= -N_{xA} \\
 S_3 \cos \alpha + \frac{1}{2} S_4 &= N_{yA} \\
 (S_2 - S_3) \sin \alpha &= -N_{xC} \\
 (S_2 + S_3) \cos \alpha + S_4 &= -N_{yC}
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

Das Gleichgewicht für den Eckpunkt B ist aus Symmetriegründen erfüllt. Mit (2.1), (2.4), (2.5) und (2.14) folgt aus (2.15):

$$\begin{aligned}
 F_1^n \epsilon_x + F_3^n \sin \alpha (\epsilon_x \sin^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha) &= \frac{ah}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x + \nu \epsilon_y) \\
 F_3^n \cos \alpha (\epsilon_x \sin^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} F_4^n \epsilon_y &= \frac{ah}{2(1-\nu^2)} \tan \alpha (\epsilon_y + \nu \epsilon_x) \\
 (F_2^n - F_3^n) \sin \alpha (\epsilon_x \sin^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha) &= 0 \\
 (F_2^n + F_3^n) \cos \alpha (\epsilon_x \sin^2 \alpha + \epsilon_y \cos^2 \alpha) + F_4^n \epsilon_y &= \frac{ah}{1-\nu^2} \tan \alpha (\epsilon_y + \nu \epsilon_x)
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich für die Dehnungen erhält man die Stabquerschnitte infolge Normalspannungsbeanspruchung.

$$\begin{aligned}
 F_1^n &= \frac{ah}{2(1-\nu^2)} (1 - \nu \tan^2 \alpha) \\
 F_2^n = F_3^n &= \frac{ah\nu}{2(1-\nu^2)} \frac{1}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} \\
 F_4^n &= \frac{ah}{1-\nu^2} (\tan \alpha - \nu \cot \alpha)
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

Mit den Ersatzlasten für die Grundspannung τ , die frei von Komponenten σ_x , σ_y sind, erhält man aus (2.15) mit (2.1), (2.4), (2.5) und (2.14): 2)

2) Hier gilt - analog wie auf Seite 17 gezeigt wurde - $S_1 = S_4 = 0$.

$$\begin{aligned}
 (2.18) \quad & - F_3^S \sin^2 \alpha \cos \alpha \epsilon_{xy} = - \frac{ah}{4(1+v)} \tan \alpha \epsilon_{xy} \\
 & - F_5^S \sin \alpha \cos^2 \alpha \epsilon_{xy} = - \frac{ah}{4(1+v)} \epsilon_{xy} \\
 & (F_2^S + F_3^S) \sin^2 \alpha \cos \alpha \epsilon_{xy} = \frac{ah}{2(1+v)} \tan \alpha \epsilon_{xy} \\
 & (F_2^S - F_3^S) \cos^2 \alpha \sin \alpha \epsilon_{xy} = 0
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich der Schubverzerrung ϵ_{xy} :

$$(2.19) \quad F_2^S = F_3^S = \frac{ah}{4(1+v)} \frac{1}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

Auch bei diesem Element stimmen die Querschnittswerte von F_1^n und F_4^n für den speziellen Wert $v = \frac{1}{3}$ mit den von SPIERIG angegebenen Werten überein. Für die Schrägstäbe gelten auch hier die auf Seite 21 stehenden Erörterungen.

Das arithmetische Mittel von F_2^n und F_2^S lautet:

$$(2.20) \quad F_2 = \frac{1}{2}(F_2^n + F_2^S) = \frac{ah}{8(1-v^2)} \frac{v+1}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} \Big|_{v=\frac{1}{3}} = \frac{3}{16} \frac{ah}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

2.2 Modellelemente für das Scheibenproblem abgeleitet aus superponierten Grundspannungszuständen

Anstatt Äquivalenz der drei Verzerrungszustände am Kontinuum und Modellelement zu fordern, um daraus wie in Abschnitt 2.1 die Querschnittabmessungen der einzelnen Modellstäbe zu bestimmen, kann man diese auch unmittelbar aus der folgenden Überlegung herleiten.

Irgendein dem Modell aufgeprägter Spannungszustand kann in einzelne Grundspannungszustände zerlegt werden, deren Linearkombination den vorgegebenen Spannungszustand darstellt. Sodann werden die Äquivalenzbedingungen für das Stabmodell aufgestellt, indem nacheinander jeder Grundspannungszustand herangezogen wird. Folgten in Abschnitt 2.1 die Querschnittsflächen aus einem Koeffizientenvergleich der Verzerrungen, so erhält man diese hier aus einem Vergleich der Spannungen.

In den zwei folgenden Abschnitten werden die Stabquerschnitte auf diese Weise für das Rechteck- und das gleichschenklige Dreieckelement abgeleitet, die mit den in Abschnitt 2.1 angegebenen Ergebnissen übereinstimmen.

2.2.1 Rechteckelement

Zugrunde liege das in Abb.2.2 dargestellte Rechteckelement. Dieses sei nacheinander den drei konstanten Spannungszuständen σ_x , σ_y und τ unterworfen.

$$1. \sigma_x = \text{const.} = \bar{\sigma}_x, \quad \sigma_y = \tau = 0$$

Dem Spannungszustand $\bar{\sigma}_x$ entsprechen Dehnungen in der x- und y - Richtung des eingeführten kartesischen Koordinatensystems, nämlich

$$(2.21) \quad \epsilon_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\bar{\sigma}_x}{E}$$

Die dritte Verzerrung, die Scherung, tritt bei reiner Normal-

spannungsbeanspruchung des Elements nicht auf.

Aus den in (2.21) angegebenen Dehnungen lassen sich die Knotenverschiebungen bestimmen, wenn das Element längs der Symmetrielinien fixiert wird.

$$(2.22) \quad \begin{aligned} -u_A = u_B = -u_C = u_D &= \epsilon_x \frac{a}{2} \tan \delta = \frac{a}{2} \tan \delta \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \\ v_A = v_B = -v_C = -v_D &= \epsilon_y \frac{a}{2} = -v \frac{a}{2} \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \end{aligned}$$

Mit diesen Verschiebungen ergeben sich die einzelnen Stabkräfte³⁾

$$(2.23) \quad \begin{aligned} S_1 &= \frac{F_1 E}{a} (v_A - v_C) = -v F_1 \bar{\sigma}_x \\ S_3 &= \frac{F_3 E}{a \tan \delta} (u_B - u_A) = F_3 \bar{\sigma}_x \\ S_5 &= \frac{F_5 E \cos \delta}{a} [(u_D - u_A) \sin \delta + (v_A - v_D) \cos \delta] = F_5 (\sin^2 \delta - v \cos^2 \delta) \bar{\sigma}_x \end{aligned}$$

Setzt man diese Stabkräfte unter Verwendung der in (2.2) angegebenen Ersatzlasten in die Gleichgewichtsbedingungen (2.3) ein, so ergeben sich nach einem Koeffizientenvergleich der Normalspannung $\bar{\sigma}_x$ die zwei Gleichungen

$$(2.24) \quad \begin{aligned} F_3 + F_5 (\sin^2 \delta - v \cos^2 \delta) \sin \delta &= \frac{ah}{2} \\ -v F_1 + F_5 (\sin^2 \delta - v \cos^2 \delta) \cos \delta &= 0 \end{aligned}$$

zur Bestimmung der drei gesuchten Querschnittsflächen F_1 , F_3 , F_5 . Die in (2.24) gewonnenen zwei Gleichungen reichen zur eindeutigen Bestimmung der drei Unbekannten nicht aus. Es liegt daher nahe, den zweiten Normalspannungszustand σ_y zur Aufstellung von zwei weiteren Gleichungen heranzuziehen.

$$2. \quad \sigma_y = \text{const.} = \bar{\sigma}_y, \quad \sigma_x = \tau = 0$$

Aus den daraus resultierenden Verzerrungen

$$(2.25) \quad \epsilon_y = \frac{\bar{\sigma}_y}{E} \quad \epsilon_x = -v \frac{\bar{\sigma}_y}{E} \quad \gamma_{xy} = 0$$

³⁾ (2.23) kann man auch direkt aus (2.4), (2.5) und (2.21) erhalten.

erhält man die Knotenverschiebungen

$$(2.26) \quad u_A = -u_B = u_C = -u_D = \frac{a}{2} v \tan \delta \frac{\bar{\sigma}_y}{E}$$
$$v_A = v_B = -v_C = -v_D = \frac{a}{2} \frac{\bar{\sigma}_y}{E}$$

und mit diesen schließlich über die Stabkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen die zwei Gleichungen:

$$(2.27) \quad -v F_3 + F_5(-v \sin^2 \delta + \cos^2 \delta) \sin \delta = 0$$
$$F_1 + F_5(-v \sin^2 \delta + \cos^2 \delta) \cos \delta = \frac{ah}{2} \tan \delta$$

Die in (2.24) und (2.27) angegebenen vier inhomogenen Gleichungen sind - wie man sich sofort überzeugt - verträglich und ergeben eindeutig die drei gesuchten Querschnittflächen

$$(2.28) \quad F_1 = \frac{ah}{2(1-v^2)} (\tan \delta - v \cot \delta)$$
$$F_3 = \frac{ah}{2(1-v^2)} (1 - v \tan^2 \delta)$$
$$F_5 = \frac{ahv}{2(1-v^2)} \frac{1}{\sin \delta \cos^2 \delta}$$

die mit den in (2.9) angegebenen Resultaten übereinstimmen und unter Zugrundelegung der beiden Grundspannungszustände σ_x und $\sigma_y = \text{const.}$ abgeleitet wurden.

Um den Einfluß der konstanten Schubspannung τ auf das Stabmodell zu erfassen, denkt man sich wieder zwei weitere Diagonalstäbe zwischen den Eckpunkten A und D sowie B und C eingefügt (Abb.2.6) und bestimmt die Stabquerschnitte dieser hinzugefügten Stäbe, die sich infolge des Grundspannungszustandes $\tau = \text{const.}$ ergeben.

$$3. \tau = \text{const.} = \bar{\tau}, \sigma_x = \sigma_y = 0$$

Im Falle reiner Schubspannungsbeanspruchung sind die beiden Stab-

kräfte $S_1 = S_3 = 0$ (siehe Seite 17). Die noch fehlende Stabkraft S_5 in Abhängigkeit von der Schubspannung $\bar{\tau}$ lässt sich unter Vermeidung des Umweges über die Eckpunktverschiebungen - dasselbe Vorgehen ist auch für die Fälle reiner Normalspannungsbeanspruchung möglich - unmittelbar über die Verzerrung der Diagonalen AD bestimmen (Abb.2.8)

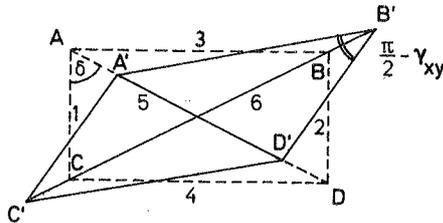


Abb. 2.8

Aus (2.4) folgt unter Berücksichtigung der Transformationsgleichung für die Verzerrungen in (2.5) für die Kraft im Druckstab 5:

$$\begin{aligned}
 (2.29) \quad S_5 &= -EF_5 \epsilon_5 \\
 &= -EF_5 \sin\delta \cos\delta \epsilon_{xy}
 \end{aligned}$$

Um die gewünschte Abhängigkeit der Stabkraft S_5 von $\bar{\tau}$ zu erhalten, wird die dritte Beziehung von (2.1) herangezogen:

$$\begin{aligned}
 (2.30) \quad S_5 &= -EF_5 \sin\delta \cos\delta \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau} \\
 &= -2(1+\nu)F_5 \sin\delta \cos\delta \bar{\tau}
 \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingungen (2.3) unter Berücksichtigung von $S_1 = S_3 = 0$ und Koeffizientenvergleich mit $\bar{\tau}$ liefert zwei identische Gleichungen für F_5 :

$$(2.32) \quad \begin{aligned} -2(1+\nu)F_5 \sin^2\delta \cos\delta &= -\frac{ah}{2} \tan\delta \\ -2(1+\nu)F_5 \sin\delta \cos^2\delta &= -\frac{ah}{2} \end{aligned}$$

Daraus folgt für $F_5 = F_6$:

$$(2.33) \quad F_5 = F_6 = \frac{ah}{4(1+\nu)} \frac{1}{\sin\delta \cos^2\delta}$$

Auch dieses Ergebnis stimmt mit dem in (2.11) überein.

2.2.2 Gleichschenkliges Dreieckelement

Das Vorgehen zur Gewinnung der Stabquerschnittflächen dieses Sta bmodells entspricht in den wesentlichen Gesichtspunkten dem beim Rechteckelement. Zugrunde liege das in Abb.2.7 beschriebene Element; an dessen drei Eckpunkten greifen die in (2.14) angegebenen Ersatzlasten an.

$$1. \sigma_x = \text{const.} = \bar{\sigma}_x, \quad \sigma_y = \tau = 0$$

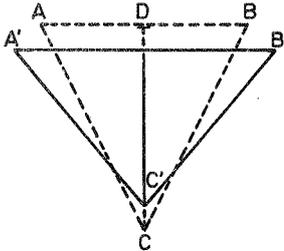


Abb.2.9

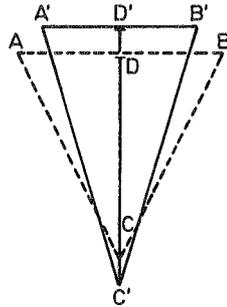


Abb.2.10

Daraus resultierende Verzerrungen:

$$(2.34) \quad \epsilon_x = \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \quad \epsilon_y = -\nu \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \quad \gamma_{xy} = 0$$

Zugehörige Verschiebungen der Eckpunkte (Abb.2.9):

$$\begin{aligned}
 -u_A &= u_B = \varepsilon_x a \tan \alpha = a \tan \alpha \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \\
 u_C &= 0 \\
 -v_A &= -v_B = v_C = \frac{a}{2} v \frac{\bar{\sigma}_x}{E} \\
 v_D &= \frac{1}{2}(v_A + v_B) = -\frac{a}{2} v \frac{\bar{\sigma}_x}{E}
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

Die Verschiebung des Mittelpunktes D des Stabes 1 ergibt sich aus dem arithmetischen Mittel der Verschiebungen der Stabendpunkte A und B. Mit den in (2.35) aufgestellten Beziehungen lassen sich die Stabkräfte in Abhängigkeit der Normalspannung $\bar{\sigma}_x$ angeben; sie lauten:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{F_1 E}{2a \tan \alpha} (u_B - u_A) = F_1 \bar{\sigma}_x \\
 S_2 &= \frac{F_2 E \cos \alpha}{a} [(u_B - u_C) \sin \alpha + (v_B - v_C) \cos \alpha] \\
 &= F_2 (\sin^2 \alpha - v \cos^2 \alpha) \bar{\sigma}_x \\
 S_3 &= F_3 (\sin^2 \alpha - v \cos^2 \alpha) \bar{\sigma}_x \\
 S_4 &= \frac{F_4 E}{a} (v_D - v_C) = -v F_4 \bar{\sigma}_x
 \end{aligned}
 \tag{2.36}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen (2.15) erhält man damit die vier Gleichungen

$$\begin{aligned}
 F_1 + F_3 \sin \alpha (\sin^2 \alpha - v \cos^2 \alpha) &= \frac{ah}{2} \\
 F_3 \cos \alpha (\sin^2 \alpha - v \cos^2 \alpha) - \frac{v}{2} F_4 &= 0 \\
 F_2 &= F_3 \\
 2F_3 \cos \alpha (\sin^2 \alpha - v \cos^2 \alpha) - v F_4 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.37}$$

Da die zweite und vierte dieser Gleichungen identisch sind, reichen die verbleibenden drei Gleichungen zur Bestimmung der vier unbekanntenen Querschnittsflächen nicht aus; daher betrachtet man zusätzlich

$$2. \sigma_y = \text{const.} = \bar{\sigma}_y, \sigma_x = \tau = 0$$

Resultierende Verzerrungen:

$$(2.38) \quad \epsilon_y = \frac{\bar{\sigma}_y}{E} \quad \epsilon_x = -v \frac{\bar{\sigma}_y}{E} \quad \gamma_{xy} = 0$$

Zugehörige Verschiebungen der Eckpunkte (Abb.2.10):

$$(2.39) \quad \begin{aligned} u_A = -u_B = v a \tan \alpha \frac{\bar{\sigma}_y}{E} \quad u_C = 0 \\ v_A = v_B = -v_C = \frac{a}{2} \frac{\bar{\sigma}_y}{E} \quad v_D = \frac{1}{2}(v_A + v_B) = \frac{a}{2} \frac{\bar{\sigma}_y}{E} \end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise wie bei $\bar{\sigma}_x = \text{const.}$ folgen wieder vier Gleichungen, wovon zwei identisch sind; sie lauten:

$$(2.40) \quad \begin{aligned} -v F_1 + F_3 \sin \alpha (-v \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) &= 0 \\ F_3 \cos \alpha (-v \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \frac{1}{2} F_4 &= \frac{ah}{2} \tan \alpha \\ F_2 &= F_3 \\ 2F_3 \cos \alpha (-v \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + F_4 &= ah \tan \alpha \end{aligned}$$

Mit (2.37) und (2.40) hat man insgesamt fünf verschiedene Gleichungen zur Bestimmung der vier Stabquerschnitte. Das System ist verträglich; F_1, \dots, F_4 lassen sich eindeutig daraus berechnen.

$$(2.41) \quad \begin{aligned} F_1 &= \frac{ah}{2(1-v^2)} (1-v \tan^2 \alpha) \\ F_2 = F_3 &= \frac{ahv}{2(1-v^2)} \frac{1}{\sin \alpha \cos^2 \alpha} \\ F_4 &= \frac{ah}{1-v^2} (\tan \alpha - v \cot \alpha) \end{aligned}$$

Diese Ergebnisse stimmen mit den in (2.17) angegebenen überein.

3. $\tau = \text{const.} = \bar{\tau}$, $\sigma_x = \sigma_y = 0$

Resultierende Verzerrungen: 4)

$$(2.42) \quad \epsilon_x = \epsilon_y = 0, \quad \gamma_{xy} = \frac{\bar{\tau}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \bar{\tau} \quad 5)$$

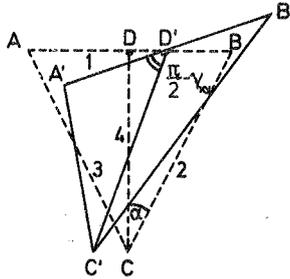


Abb.2.11

Infolge reiner Schubspannungsbeanspruchung ist wieder $S_1 = S_4 = 0$. Die noch fehlenden Stabkräfte S_2 und S_3 lassen sich aus den Verzerrungen der Schrägstäbe 2 und 3 bestimmen. Aus (2.4) folgt mit (2.5):

$$(2.43a) \quad \begin{aligned} S_2 &= EF_2 \epsilon_2 = EF_2 \sin \alpha \cos \alpha \epsilon_{xy} \\ S_3 &= -EF_3 \epsilon_3 = -EF_3 \sin \alpha \cos \alpha \epsilon_{xy} \end{aligned}$$

Mit (2.42) erhält man die Stabkräfte in Abhängigkeit von $\bar{\tau}$:

$$(2.43b) \quad \begin{aligned} S_2 &= 2(1+\nu)F_2 \sin \alpha \cos \alpha \bar{\tau} \\ S_3 &= -2(1+\nu)F_3 \sin \alpha \cos \alpha \bar{\tau} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingungen (2.15) und Koeffizientenvergleich mit $\bar{\tau}$ ergibt für F_2 und F_3 die vier Gleichungen

$$(2.44) \quad \begin{aligned} -2(1+\nu) \sin^2 \alpha \cos \alpha F_3 &= -\frac{ah}{2} \tan \alpha \\ -2(1+\nu) \sin \alpha \cos^2 \alpha F_3 &= -\frac{ah}{2} \\ 2(1+\nu) \sin^2 \alpha \cos \alpha (F_3 + F_2) &= ah \tan \alpha \\ -2(1+\nu) \sin \alpha \cos^2 \alpha (F_3 - F_2) &= 0 \end{aligned}$$

woraus sich schließlich als Ergebnis für $F_2 = F_3$ ergibt:

$$(2.45) \quad F_2 = F_3 = \frac{ah}{4(1+\nu)} \frac{1}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

4) Siehe Fußnote auf Seite 23

5) Betreffs γ_{xy} siehe Fußnote 1) auf Seite 16

2.3 Modellelemente zur Behandlung von Plattenproblemen

Die maßgebenden Flächenträgheitsmomente der einzelnen Stäbe werden in ähnlicher Weise abgeleitet wie die Stabquerschnitte in Abschnitt 2.1. Man prägt dem Stabmodell nacheinander verschiedene Verformungszustände auf, die das Element aus der Plattenebene heraus deformieren. Anstelle der Verzerrungen ϵ_x , ϵ_y , ϵ_{xy} treten jetzt die Krümmungen κ_x , κ_y , κ_{xy} . Zugrunde liege ein kartesisches x, y, z -System, wobei die z -Achse auf der Plattenebene senkrecht stehe. Es gelten dieselben Überlegungen wie in Abschnitt 2.1. Man hat für jeden der drei Verformungszustände (Krümmungen) die zugehörige äußere Belastung am Kontinuum und aus dieser das statisch äquivalente System der an den Eckpunkten des Stabmodells angreifenden Ersatzlasten.

Auch hier sind die Modellelemente bezüglich jedes homogenen, querkraftfreien Biegezustandes dem Kontinuum elastisch äquivalent. Das folgt aus der Tatsache, daß jeder homogene Biegezustand als Linearkombination der drei speziellen Krümmungszustände darstellbar ist.

2.3.1 Rechteckelement

Das in Abb.2.12 dargestellte Rechteckelement wird wie das zugehörige Kontinuum einem allgemeinen homogenen Krümmungszustand unterworfen, der durch die Krümmungen κ_x , κ_y , κ_{xy} beschrieben wird. Dem entspricht nun am Kontinuum ein Belas-

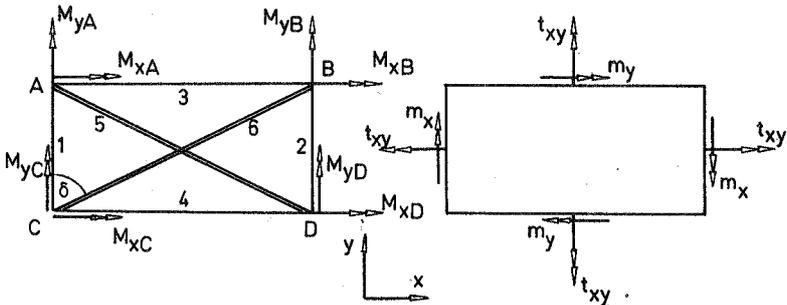


Abb.2.12

tungszustand, der durch die KIRCHHOFFSchen Gleichungen angegeben wird:

$$(2.46) \quad \begin{aligned} m_x &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_x + \nu\kappa_y) \\ m_y &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (\nu\kappa_x + \kappa_y) \\ t_{xy} &= \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} \kappa_{xy} \end{aligned}$$

An die Stelle von (2.4) und (2.5) tritt (vgl. z.B. [13])

$$(2.47) \quad M_i = EJ_i \kappa_i = EJ_i (\kappa_x \cos^2 \varphi_i + \kappa_y \sin^2 \varphi_i + 2\kappa_{xy} \sin \varphi_i \cos \varphi_i)$$

Dabei bedeuten h die Plattendicke, m und t Biege- und Drillmomente je Längeneinheit (Abb.2.12), M_i das Biegemoment, J_i das Flächenträgheitsmoment des i -ten Stabes bezüglich einer in der Querschnittsfläche liegenden und durch den Schwerpunkt gehenden Hauptachse, κ_i seine Krümmung.

Die Momente und Winkel werden durch Vektoren mit Doppelpfeil angegeben und die Zuordnung von Vektoren und Drehsinn erfolgt nach der Rechtsschraubenregel.

Für das weitere wird für die Momente und Winkel folgende Vorzeichenvereinbarung getroffen:

1. Die Momente und Winkel an den Eckpunkten des Elements, die die Belastungs- und Auslenkungsgrößen der Modellecken angeben, sind positiv, wenn ihre Vektoren in Richtung der positiven Halbachsen des zugrunde gelegten Koordinatensystems weisen (Abb.2.13).

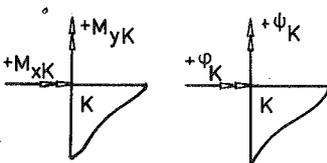


Abb.2.13

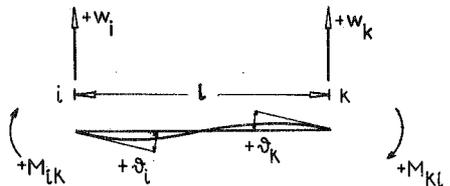


Abb.2.14

2. Alle Momente und Winkel, die an den Stabenden der herausge-

schnittenen Stäbe im Uhrzeigersinn drehen, sind positiv.
(Abb.2.14)

Aus dem Belastungszustand am Kontinuum ergeben sich die folgenden Ersatzlasten für den Eckpunkt A:

$$(2.48) \quad \begin{aligned} M_{xA} &= \frac{a}{2}(m_y \tan \delta - t_{xy}) \\ M_{yA} &= \frac{a}{2}(m_x - t_{xy} \tan \delta) \end{aligned}$$

Die Momentengleichgewichtsbedingungen (hinsichtlich Verdrillung seien sämtliche Stäbe schlaff) für den Eckpunkt A lauten:

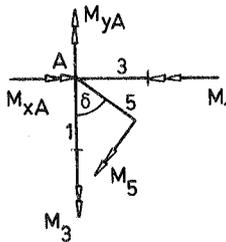


Abb.2.15

$$(2.49) \quad \begin{aligned} M_1 + M_5 \cos \delta &= M_{xA} \\ M_3 + M_5 \sin \delta &= M_{yA} \end{aligned}$$

Es werden nun die Komponenten der Ersatzlasten infolge m_x , m_y sowie t_{xy} nacheinander als Ersatzlasten in die Gleichungen (2.49) eingesetzt; dann ergeben sich mit (2.47) und (2.48):

$$J_1^m \kappa_y + J_5^m (\kappa_x \sin^2 \delta + \kappa_y \cos^2 \delta) \cos \delta = \frac{ah^3 \tan \delta}{24(1-\nu^2)} (\nu \kappa_x + \kappa_y)$$

$$J_3^m \kappa_x + J_5^m (\kappa_x \sin^2 \delta + \kappa_y \cos^2 \delta) \sin \delta = \frac{ah^3}{24(1-\nu^2)} (\kappa_x + \nu \kappa_y)$$

Koeffizientenvergleich:

$$J_5^m \sin^2 \delta \cos \delta = \frac{ah^3 \nu}{24(1-\nu^2)} \tan \delta$$

$$\begin{aligned}
 (2.51a-d) \quad J_1^m + J_5^m \cos^3 \delta &= \frac{ah^3}{24(1-v^2)} \tan \delta \\
 J_3^m + J_5^m \sin^3 \delta &= \frac{ah^3}{24(1-v^2)} \\
 J_5^m \sin \delta \cos^2 \delta &= \frac{ah^3 v}{24(1-v^2)}
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.51a) und (2.51d) sind identisch; aus den drei restlichen Gleichungen erhält man eindeutig

$$\begin{aligned}
 (2.52) \quad J_1^m = J_2^m &= \frac{h^2}{12} \frac{ah}{2(1-v^2)} (\tan \delta - v \cot \delta) \\
 J_3^m = J_4^m &= \frac{h^2}{12} \frac{ah}{2(1-v^2)} (1 - v \tan^2 \delta) \\
 J_5^m = J_6^m &= \frac{h^2}{12} \frac{ahv}{2(1-v^2)} \frac{1}{\sin \delta \cos^2 \delta}
 \end{aligned}$$

Allgemein erkennt man aus dem Vergleich von (2.9a-c) mit den soeben hergeleiteten Trägheitsmomenten in (2.52), daß die Beziehung gilt:

$$(2.53) \quad J_i^m = \frac{h^2}{12} F_i^n$$

Mit den Komponenten der Ersatzlasten infolge t_{xy} folgt aus (2.49)

$$\begin{aligned}
 (2.54) \quad -J_5^t \kappa_{xy} 2 \sin \delta \cos^2 \delta &= -\frac{ah^3}{24(1+v)} \kappa_{xy} \\
 -J_5^t \kappa_{xy} 2 \sin^2 \delta \cos \delta &= -\frac{ah^3}{24(1+v)} \tan \delta \kappa_{xy}
 \end{aligned}$$

Beide Gleichungen sind identisch; es ergibt sich eindeutig:

$$(2.55) \quad J_5^t = J_6^t = \frac{h^2}{12} \frac{ah}{4(1+v)} \frac{1}{\sin \delta \cos^2 \delta}$$

Ein Vergleich von (2.55) mit (2.11) ergibt den Zusammenhang:

$$(2.56) \quad J_i^t = \frac{h^2}{12} F_i^s \quad (\text{für } i = 5, 6)$$

2.3.2 Gleichschenkliges Dreieckelement

Zugrunde liege aufs neue das in Abb.2.7 beschriebene gleichschenklige Dreieckelement. Zu den auf Seite 33 gemachten Annahmen für die Modellstäbe ist für den Biegezustand noch folgendes zu ergänzen:

Die Ecken, an denen die Ersatzlasten angreifen, sind als Scharniergelenke ausgebildet, d.h. also, daß Momente in der Plattenebene nicht aufgenommen werden können. Ferner seien alle Stäbe schlaff gegenüber Verdrehung. Es gelten für die inneren Anlenkpunkte der Stäbe - hier insbesondere für den Punkt D - die von SPIERIG eingeführten Getriebe im weiteren Verlauf der Betrachtungen.

Die Trägheitsmomente der Modellstäbe lassen sich im Falle des gleichschenkligen Dreieckelements ebenso mit Hilfe der im vorigen Abschnitt gefundenen allgemeinen Beziehungen (2.53) und (2.56) angeben, die auch hier gültig sind; sie lauten:

$$J_1^m = \frac{h^2}{12} F_1^n = \frac{ah^3}{24(1-\nu^2)} (1 - \nu \tan^2 \alpha)$$

$$J_2^m = J_3^m = \frac{h^2}{12} F_2^n = \frac{h^2}{12} F_3^n = \frac{ah^3 \nu}{24(1-\nu^2)} \frac{1}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

(2.57)

$$J_4^m = \frac{h^2}{12} F_4^n = \frac{ah^3}{12(1-\nu^2)} (\tan \alpha - \nu \cot \alpha)$$

$$J_2^t = J_3^t = \frac{h^2}{12} F_2^s = \frac{h^2}{12} F_3^s = \frac{ah^3}{48(1+\nu)} \frac{1}{\sin \alpha \cos^2 \alpha}$$

Damit sind in diesem Kapitel sämtliche charakteristischen Werte der Modellstäbe - Querschnittsflächen und Flächenträgheitsmomente - für das Rechteck- und das gleichschenklige Dreieckelement zur Behandlung von Scheiben- und Plattenproblemen abgeleitet. Im nächsten Kapitel werden mit diesen Werten die Steifigkeitsmatrizen aufgestellt.

3. Steifigkeitsmatrizen

Bei der Herleitung der Steifigkeitsmatrizen für die im vorigen Kapitel entwickelten Modellelemente geht man von dem Zusammenhang der an den Eckpunkten von außen angreifenden Kräfte und Momente und den Verschiebungen bzw. Verdrehungen dieser Eckpunkte aus. Die äußeren Kräfte und Momente faßt man dabei in einem Spaltenvektor f , die Verschiebungen in einem Spaltenvektor d zusammen. Dann besteht zwischen f und d durch die symmetrische Steifigkeitsmatrix $[K]$ der Zusammenhang

$$(3.1) \quad f = [K] d$$

Die Matrix $[K]$ kann man nach den zwei nachfolgend beschriebenen Methoden aufstellen.

1. Methode:

Ausgehend von der Gleichung

$$(3.2) \quad v = [A] d$$

die die Verschiebungen der Eckpunkte mit den Stabdeformationen v mittels einer Matrix $[A]$, die die Geometrie des Modells beinhaltet, verknüpft, sowie der Beziehung

$$(3.3) \quad p = [K_p] v$$

die den Zusammenhang der inneren Schnittkräfte p mit den Deformationen v der einzelnen Stäbe durch eine Diagonalmatrix $[K_p]$ angibt, gelangt man mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Arbeiten (Vgl. dazu [12], Seite 286)

$$(3.4) \quad d' f = v' p$$

unter Berücksichtigung der transponierten Gleichung (3.2) zu

$$(3.5) \quad d' f = d' [A'] p$$

Aus (3.5) folgt sofort die Gleichung

$$(3.6) \quad f = [A'] p$$

die die Beziehung zwischen den äußeren Kräften der Eckpunkte und den inneren Schnittkräften der Stäbe herstellt. Setzt man weiter (3.3) und (3.2) in (3.6) ein, so erhält man

$$(3.7) \quad f = [A'] [K_p] [A] d$$

Vergleicht man (3.7) mit (3.1), so kann man unmittelbar die

Steifigkeitsmatrix $[K]$ des Stabmodells ablesen; sie lautet:

$$(3.8) \quad [K] = [A'] [K_p] [A]$$

Dieses Vorgehen ist in der geschilderten Art möglich, wenn alle Modellstäbe jeweils nur eine Querschnittfläche bzw. ein Flächenträgheitsmoment infolge aller am Element angreifenden Spannungs- bzw. Momentenzustände besitzen. Wie in Kapitel 2 erörtert wurde, hat man sich jedoch in den diagonalen Richtungen der Stabmodelle zwei Stäbe zu denken, die den Einfluß des Normal- sowie Schubspannungszustandes bzw. die Wirkung des Biege- sowie Drillmomentenzustandes aufnehmen. Aus diesem Grunde muß die oben beschriebene Methode erweitert werden.

Es seien

$$(3.9) \quad Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

n verschiedene Spannungs- oder Momentenzustände, die am Element angreifen und

$$(3.10) \quad d_1, d_2, \dots, d_n$$

$$(3.11) \quad f_1, f_2, \dots, f_n$$

die zugehörigen Verschiebungs- und Lastvektoren der Eckpunkte. Ferner seien

$$(3.12) \quad [K_1], [K_2], \dots, [K_n]$$

die Steifigkeitsmatrizen der Stabmodelle für den jeweiligen Zustand Z_i ($i=1,2,\dots,n$). Dann gilt für jeden Einzelzustand Z_i die Beziehung (3.1); für die n Zustände Z_i folgen somit die n Gleichungen

$$(3.13) \quad f_i = [K_i] d_i \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Irgendein Verschiebungsvektor d kann durch Linearkombination der n einzelnen Verschiebungsvektoren d_i ($i=1,2,\dots,n$) angegeben werden. Andererseits kann jeder Verschiebungsvektor d als Produkt von d mit einer entsprechenden Transformationsmatrix $[a_i]$ dargestellt werden:

$$(3.14) \quad d_i = [a_i] d \quad (i=1,2,\dots,n)$$

Die n Transformationsmatrizen sind vollständig durch die n Einzelzustände festgelegt und lassen sich aus einfachen geometrischen Betrachtungen bestimmen. Zu einem Zustand Z , der sich aus einer Linearkombination der Einzelzustände Z_i darstellen läßt,

kann man auch den zugehörigen Vektor f als Linearkombination der f_1 angeben:

$$(3.15) \quad f = \sum f_1$$

Aus (3.15) folgt mit (3.13) und (3.14):

$$(3.16) \quad f = \sum [K_1][a_1] \quad d = [K] d$$

wobei $[K]$ durch

$$(3.17) \quad [K] = \sum [K_1][a_1]$$

zu berechnen ist.

Damit ist die Aufgabe, die Steifigkeitsmatrix $[K]$ für das auf Seite 19 eingeführte Gesamtmodell aufzustellen, auf die Bestimmung der Steifigkeitsmatrizen $[K_1]$ ($i=1,2,\dots,n$) für die n Einzelzustände Z_1 , sowie die n Transformationsmatrizen $[a_1]$ zurückgeführt.

Zusammenfassend können die einzelnen Schritte in folgender Weise symbolisch angegeben werden. Das Zeichen \sim bedeutet dabei 'in Abhängigkeit von'. Die unteren Indexbezeichnungen sollen besonderen Nachdruck darauf legen, wann es sich um äußere oder innere Größen handelt; der obere Index i bezieht sich auf den jeweiligen Einzelzustand Z_1 ($i=1,2,\dots,n$).

(1) Statik (bzw. Prinzip der virtuellen Verschiebungen):	$f_{\text{außen}}^{(i)} \sim p_{\text{innen}}^{(i)}$	}	$f_{\text{außen}}^{(i)} \sim d_{\text{außen}}^{(i)}$
(2) Elastizitätsgesetz:	$p_{\text{innen}}^{(i)} \sim v^{(i)}$		
(3) Geometrie:	$v^{(i)} \sim d_{\text{außen}}^{(i)}$		
(4) Kraftsuperposition:	$f_{\text{außen}} = \sum f_{\text{außen}}^{(i)} \sim \sum d_{\text{außen}}^{(i)}$	}	$f_{\text{außen}} \sim d_{\text{außen}}$
(5) Geometrische Relation Transformation:	$d_{\text{außen}}^{(i)} \sim d_{\text{außen}}$		

2. Methode:

Mit obigen Bezeichnungen und der symbolischen Ausdrucksweise folgt:

(1) Statik:	$f_{\text{außen}} \sim p_{\text{innen}}$	}
(2) Kraftsuperposition:	$p_{\text{innen}} = \sum p_{\text{innen}}^{(i)}$	

- | | | |
|--|---------------------------------------|--|
| (3) Elastizitätsgesetz: | $p_{\text{innen}}^{(i)} \sim v^{(i)}$ | } $f_{\text{außen}} \sim d_{\text{außen}}$ |
| (4) Geometrische Relation, Transformation: | $v^{(i)} \sim v$ | |
| (5) Geometrie: | $v \sim d_{\text{außen}}$ | |

Es sei an dieser Stelle ausdrücklich bemerkt, daß das geschilderte Vorgehen bei der 2. Methode lediglich eine Variante der 1. Methode ist. Das erkennt man an den grundlegenden Beziehungen (1) bis (5), die bis auf die Reihenfolge ihrer Anwendung in beiden Methoden dieselben sind. In der 1. Methode erfolgt die Transformation in den Eckpunktverschiebungen, bei der 2. Methode in den Stabdeformationen, das sind die Verzerrungen beim Scheibenproblem und die Krümmungen beim Plattenproblem. Die entsprechenden Ansätze werden für das Scheiben- und das Plattenproblem in den Abschnitten 3.2 und 3.3 ausführlich erläutert.

3.1 Herleitung der Steifigkeitsmatrizen für das Scheibenproblem nach der 1. Methode

3.1.1 Rechteckelement

Die Aufstellung der Steifigkeitsmatrix $[K]$ zerfällt in zwei Teile. Im ersten werden die zwei Matrizen $[K_1]$ und $[K_2]$ aufgestellt. Dazu müssen nach Gleichung (3.8) die Matrizen $[A]$, deren Transponierte $[A']$ und $[K_p^S]$ bereitgestellt werden. ⁶⁾ $[A]$ ist eine geometrische Matrix. Die i -te Spalte von $[A]$ erhält man, indem man die Stabverlängerungen v bestimmt, wenn man das Stabmodell den Eckpunktverschiebungen $d_K = 1$ ($K=A, \dots, D$) nacheinander unterwirft und sämtliche Eckpunktverschiebungen d_P ($P=A, \dots, D$) für $P \neq K$ festhält. Die Eckpunktverschiebungen d

⁶⁾ Der obere Index S zeigt an, daß sich die Matrix $[K_p^S]$ auf das Scheibenproblem bezieht.

werden in einem raumfesten Koordinatensystem gemessen, während die Stabverlängerungen v in einem mit den einzelnen Stäben verknüpften System bestimmt werden.

Zur Aufstellung der Matrix $[A]$ ist es zweckmäßig, die acht Verformungsbilder (Abb.3.2) infolge der Eckpunktverschiebungen $d_K = 1$ ($K = A, \dots, D$), $d_P = 0$ für sämtliche $P \neq K$ aufzuzeichnen, um daraus $[A]$ spaltenweise anzugeben.

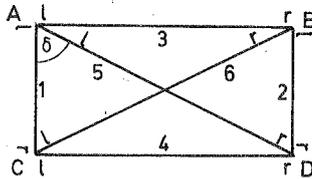


Abb.3.1

In Abb.3.1 ist l die Abkürzung für linkes, r für rechtes Stabende. Es genügt, die Verlängerungen an einem Stabende, hier z.B. am rechten, anzugeben. Die Verschiebungen des anderen Stabendes sind dann ebenfalls bestimmt, weil beide in einem mit den einzelnen Stäben verknüpften System gemessen werden. Für das Rechteck ist $[A]$ eine (6,8)-Matrix, die aus sechs Zeilen und acht Spalten besteht und die die Stabverlängerungen mit den Eckpunktverschiebungen nach Gleichung (3.2) verknüpft.

$$(3.18) [A] = \begin{matrix} & u_A & v_A & u_B & v_B & u_C & v_C & u_D & v_D \\ \begin{matrix} v_1^r \\ v_2^r \\ v_3^r \\ v_4^r \\ v_5^r \\ v_6^r \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\delta & \cos\delta & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\delta & -\cos\delta \\ 0 & 0 & \sin\delta & \cos\delta & -\sin\delta & -\cos\delta & 0 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$

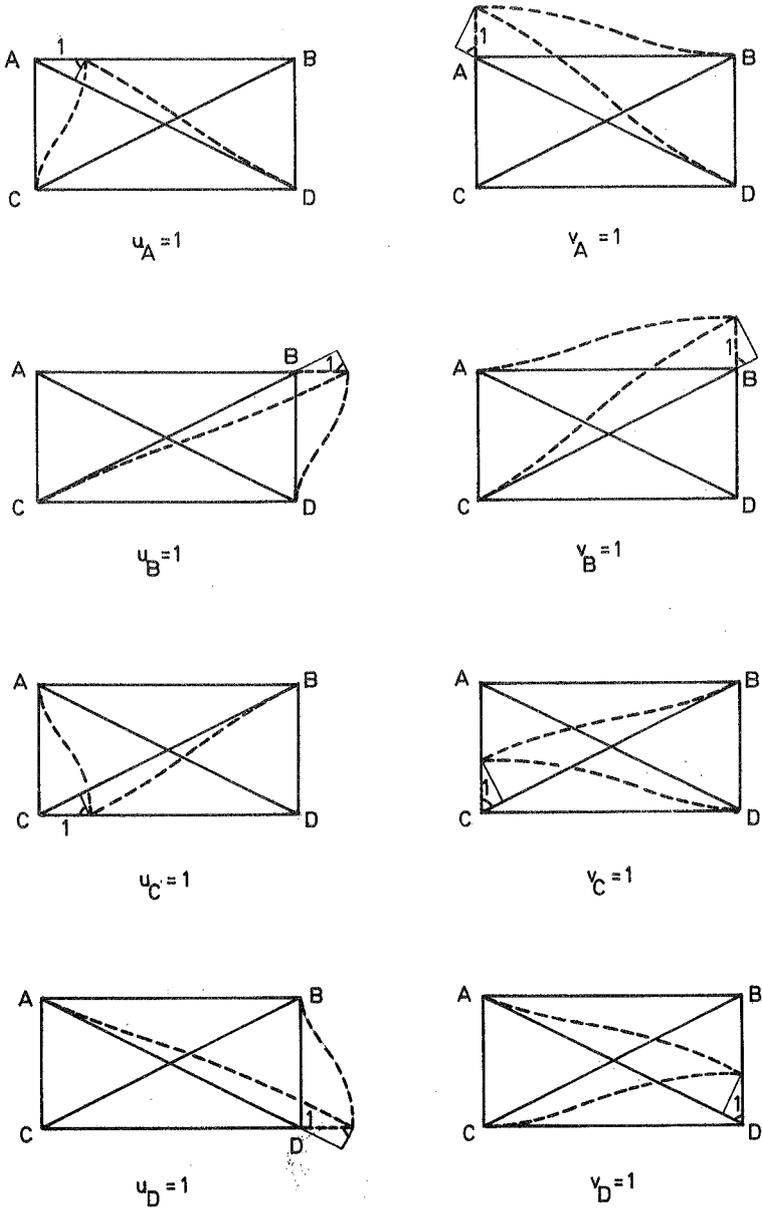


Abb. 3.2

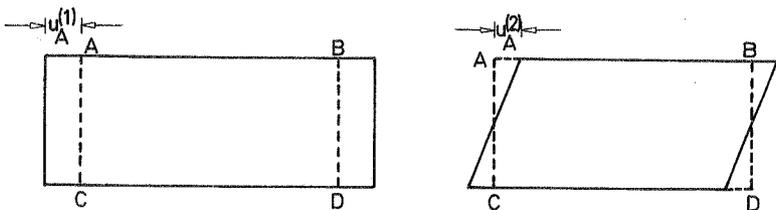
$$(3.21) \quad [K_2] = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}$$

$\frac{1-\nu}{2} t$	$\frac{1-\nu}{2} c$								
0	0	$\frac{1-\nu}{2} t$	$\frac{1-\nu}{2} c$						
0	0	$\frac{1-\nu}{2} t$	$\frac{1-\nu}{2} c$						
0	0	$\frac{1-\nu}{2} t$	$\frac{1-\nu}{2} c$						
$\frac{1-\nu}{2} t$	$\frac{1-\nu}{2} c$	0	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{1-\nu}{2} t$	$\frac{1-\nu}{2} c$	0	0	0	0	0	0	0	0

symmetrisch

$$t = \tan \delta$$

$$c = \cot \delta$$



$$Z_1: \begin{aligned} \sigma_x &= \text{const.} \\ \sigma_y &= \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \end{aligned}$$

$$Z_2: \begin{aligned} \tau_{yx} &= \text{const.} \\ \sigma_x &= \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Abb.3.3

Für die Ecke A ergeben sich unter der Festsetzung, daß $u_A^{(1)}$ die horizontale Verschiebung von A infolge Z_1 , $u_A^{(2)}$ diejenige infolge Z_2 sei, die folgenden Beziehungen für $u_A^{(1)}$ und $u_A^{(2)}$ in Abhängigkeit der horizontalen Eckpunktverschiebungen infolge Z_1 und Z_2 .

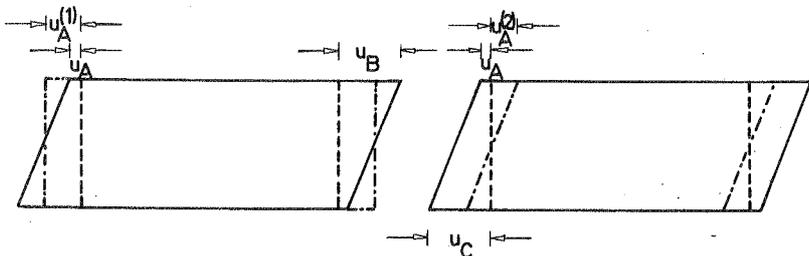


Abb.3.4

$$(3.22) \quad u_A^{(1)} = \frac{1}{2}(u_A - u_B)$$

$$(3.23) \quad u_A^{(2)} = \frac{1}{2}(u_A - u_C)$$

Entsprechende Gleichungen erhält man für die übrigen Eckpunkte.

$$(3.24) \quad u_B^{(1)} = \frac{1}{2}(u_B - u_A)$$

$$(3.24) \quad u_C^{(1)} = \frac{1}{2}(u_C - u_D)$$

$$u_D^{(1)} = \frac{1}{2}(u_D - u_C)$$

Für Z_2 lauten die Gleichungen:

$$(3.25) \quad \begin{aligned} u_B^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_B - u_D) \\ u_C^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_C - u_A) \\ u_D^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_D - u_B) \end{aligned}$$

In derselben Weise kann man die Beziehungen für die Vertikalverschiebungen der Eckpunkte aufstellen, indem man einmal die Normalspannung σ_y in einem Zustand Z_3 , das andere Mal die Schubspannung τ_{xy} in einem Zustand Z_4 erfaßt und an dem Element von außen angreifen läßt.

$$(3.26) \quad \begin{aligned} v_A^{(3)} &= \frac{1}{2}(v_A - v_C) \\ v_B^{(3)} &= \frac{1}{2}(v_B - v_D) \\ v_C^{(3)} &= \frac{1}{2}(v_C - v_A) \\ v_D^{(3)} &= \frac{1}{2}(v_D - v_B) \end{aligned}$$

$$(3.27) \quad \begin{aligned} v_A^{(4)} &= \frac{1}{2}(v_A - v_B) \\ v_B^{(4)} &= \frac{1}{2}(v_B - v_A) \\ v_C^{(4)} &= \frac{1}{2}(v_C - v_D) \\ v_D^{(4)} &= \frac{1}{2}(v_D - v_C) \end{aligned}$$

Eine Möglichkeit, die gewonnenen Ergebnisse auf ihre Richtigkeit zu kontrollieren besteht darin, daß die von den an den Eckpunkten angreifenden Ersatzlasten geleistete Arbeit gleich derjenigen der aus den Einzelzuständen Z_i ($i=1, \dots, 4$) resultierenden Kräfte S_i ($i=1, \dots, 4$) ist. Mit den in Kapitel 3 eingeführten Bezeichnungen lautet die Arbeitsgleichung:

$$(3.28) \quad d'f = d_1'f_1 + d_2'f_2$$

Betrachtet man die linke Seite von (3.28), so ergibt sich nach

Einsetzen der in (2.2) angegebenen Ersatzlasten mit den Abkürzungen

$$(3.29) \quad \begin{aligned} S_1 &= \frac{ah}{2} \sigma_x & S_2 &= \frac{ah}{2} \tan \delta \tau \\ S_3 &= \frac{ah}{2} \tan \delta \sigma_y & S_4 &= \frac{ah}{2} \tau \end{aligned}$$

der nachfolgende Ausdruck:

$$\begin{aligned} d^1 f &= (u_A, v_A, \dots, u_D, v_D) \begin{bmatrix} -S_1 + S_2 \\ S_3 - S_4 \\ S_1 + S_2 \\ S_3 + S_4 \\ -S_1 - S_2 \\ -S_3 - S_4 \\ S_1 - S_2 \\ -S_3 + S_4 \end{bmatrix} \\ &= S_1(-u_A + u_B - u_C + u_D) + S_2(u_A + u_B - u_C - u_D) + \\ &\quad + S_3(v_A + v_B - v_C - v_D) + S_4(-v_A + v_B - v_C + v_D) \end{aligned}$$

Aus der rechten Seite von (3.28) erhält man unter Beachtung der in den Gleichungen (3.22), ..., (3.27) gewonnenen Ergebnisse die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} d_1^1 f_1 + d_2^1 f_2 &= \\ &= (u_A^{(1)}, v_A^{(1)}, \dots, u_D^{(1)}, v_D^{(1)}) \begin{bmatrix} -S_1 \\ S_3 \\ S_1 \\ S_3 \\ -S_1 \\ -S_3 \\ S_1 \\ -S_3 \end{bmatrix} + (u_A^{(2)}, v_A^{(2)}, \dots, u_D^{(2)}, v_D^{(2)}) \begin{bmatrix} S_2 \\ -S_4 \\ S_2 \\ S_4 \\ -S_2 \\ -S_4 \\ -S_2 \\ S_4 \end{bmatrix} \\ &= S_1(-u_A + u_B - u_C + u_D) + S_2(u_A + u_B - u_C - u_D) + S_3(v_A + v_B - v_C - v_D) + S_4(-v_A + v_B - v_C + v_D) \end{aligned}$$

Wie man sieht, stimmen die Ausdrücke der linken und der rechten Seite von (3.28) überein, womit gezeigt ist, daß die Arbeitsgleichung für die in den Einzelzuständen zugrunde liegenden Ersatzlasten und den daraus resultierenden Eckpunktverschiebungen gültig ist.

Die in den Gleichungen (3.22), (3.24) und (3.26) aufgestellten Beziehungen werden in der Transformationsmatrix $[a_1]$, die in (3.23), (3.25) und (3.27) stehenden Ausdrücke in der Transformationsmatrix $[a_2]$ zusammengefaßt.

$$(3.30) \quad [a_1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3.31) \quad [a_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix [K] folgt dann mit (3.20), (3.21), (3.30) und (3.31) aus (3.17) und ist im Anhang in Gleichung (I) angegeben. Es wurden folgende dimensionslose Größen eingeführt:

$$(3.32) \quad \bar{N} = \frac{Na}{Eh^3} \quad \bar{u} = \frac{u}{a} \quad \bar{v} = \frac{v}{a}$$

Ferner gilt die Abkürzung:

$$(3.33) \quad \omega = \frac{a}{h} = p$$

Die Steifigkeitsmatrix [K] stimmt für den Spezialfall $v = \frac{1}{3}$ mit der von SPIERIG angegebenen Matrix überein.

3.1.2 Gleichschenkliges Dreieckelement

In entsprechender Weise wie im vorhergehenden Abschnitt wird die Steifigkeitsmatrix für das gleichschenklige Dreieckelement aufgestellt. Dabei beschränke ich mich nunmehr auf die Angabe der wichtigsten Zwischenergebnisse.

Die Matrix [A] gewinnt man spaltenweise unter Beachtung der in Abb.3.5 gezeichneten Verformungsbilder bei einer Einheitsauslenkung der Modelleckpunkte in x- und y-Richtung. Aufgrund der eingeführten Getriebe verursacht der bei D an den Stab 1 angelenkte Stab 4 (man betrachte dazu Abb.2.7) keine Schwierigkeit, da sich der Punkt D nach der Verformung der betroffenen Stäbe stets als Mittelpunkt des Stabes 1 einstellt. Dies ist neben der in Kapitel 2 bereits benutzten Vereinfachung bei der Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen ein weiterer wesentlicher Vorzug der Getriebemechanismen. SPIERIG weist in seiner Dissertation [4] auf diesen Punkt mit Nachdruck hin.

Für das gleichschenklige Dreieckelement ist [A] eine (4x6)-Matrix; sie lautet:

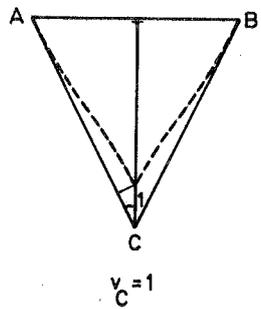
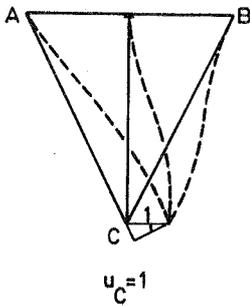
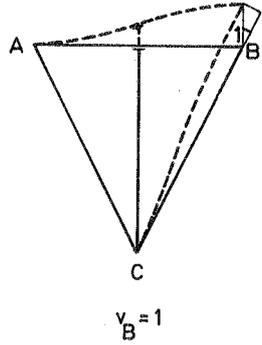
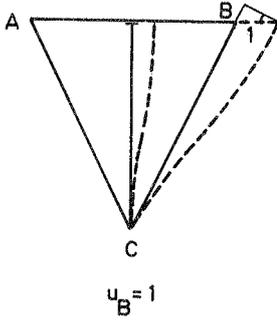
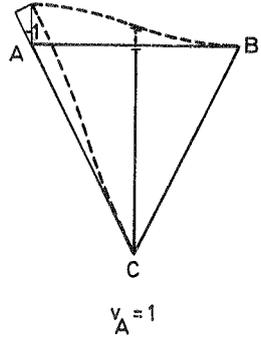
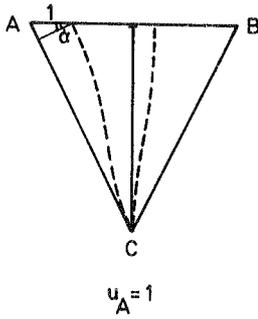


Abb. 3.5

$$(3.34) \quad [A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\alpha & -\cos\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & \sin\alpha & -\cos\alpha \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Die Matrix $[K_D^S]$ erhält man aus (3.19), wenn man dort die Querschnittflächen des gleichschenkligen Dreiecks aus den Gleichungen (2.17) bzw. (2.19) einsetzt. Die aus (3.8) resultierenden zwei Einzelsteifigkeitsmatrizen $[K_1]$, $[K_2]$ lassen sich dann sofort bilden; sie sind auf der nächsten Seite angegeben.

Zu den Transformationsmatrizen $[a_1]$ und $[a_2]$ gelangt man wieder durch die superponierten Horizontal- und Vertikalverschiebungen der Ecken A,B,C infolge von Normal- und Schubspannungen.

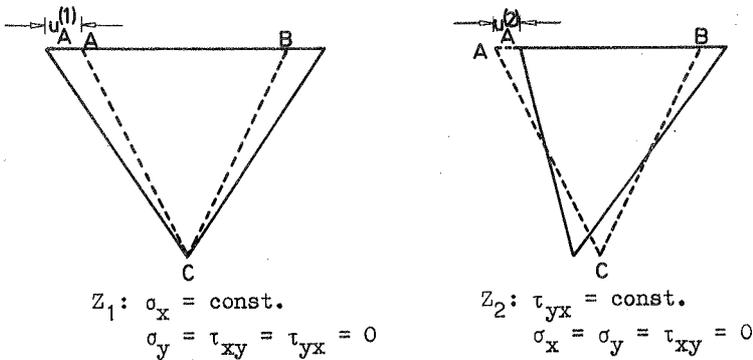


Abb.3.6

Aus Abb.3.6 und Abb.3.7 liest man ab:

$$(3.35) \quad \begin{aligned} u_A^{(1)} &= \frac{1}{2}(u_A - u_B) \\ u_A^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_A + u_B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t &= \tanh \alpha \\
 c &= \cosh \alpha \\
 \lambda &= 1 - v
 \end{aligned}$$

$c+vt$	$t+vc$	symmetrisch				$4t$
$-2v$	0	$c+vt$	$t+vc$	$4vt$	0	$4t$
$vt-c$	0	$2v$	$t+vc$	$-2v$	$4vt$	0
0	$t-vc$	$2v$	$-2vt$	$-2v$	$-2t$	0
$-2vt$	$2v$	$-2vt$	$-2v$	$-2t$	0	$4t$
$2v$	$-2t$	$-2v$	$-2t$	0	0	$4t$

$$[K_1] = \frac{Eh}{4(1-v^2)}$$

(3.43)

λt	λc	symmetrisch				$2\lambda c$
$-\lambda$	0	λt	λc	$2\lambda t$	0	$2\lambda c$
0	0	λ	λc	$-\lambda$	$-\lambda c$	0
0	0	λ	$-\lambda t$	$-\lambda$	$-\lambda c$	0
$-\lambda t$	λ	$-\lambda t$	$-\lambda$	$-\lambda c$	0	$2\lambda c$
λ	$-\lambda c$	$-\lambda$	$-\lambda c$	0	0	$2\lambda c$

$$[K_2] = \frac{Eh}{4(1-v^2)}$$

(3.44)

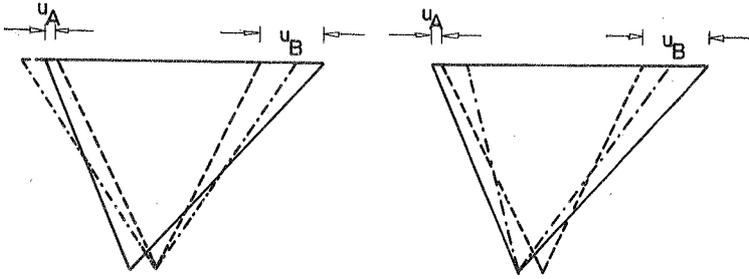


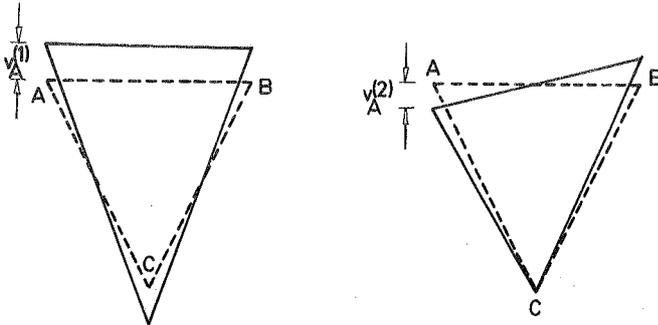
Abb. 3.7

$$(3.36) \quad \begin{aligned} u_B^{(1)} &= \frac{1}{2}(u_B - u_A) \\ u_B^{(2)} &= \frac{1}{2}(u_B + u_A) \end{aligned}$$

Weiterhin erkennt man aus Abb. 3.7 die Gültigkeit von

$$(3.37) \quad \begin{aligned} u_C^{(1)} &= 0 \\ u_C^{(2)} &= u_C \end{aligned}$$

Für die Vertikalverschiebungen infolge der Zustände Z_3 und Z_4 ergibt sich der Zusammenhang mit den Verschiebungen der Ecken aus Abb. 3.8 und Abb. 3.9.



$$Z_3: \begin{aligned} \sigma_y &= \text{const.} \\ \sigma_x &= \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \end{aligned}$$

$$Z_4: \begin{aligned} \tau_{xy} &= \text{const.} \\ \sigma_x &= \sigma_y = \tau_{yx} = 0 \end{aligned}$$

Abb. 3.8

$$(3.38) \quad v_A^{(3)} = v_B^{(3)} = \frac{1}{2}(v_A + v_B)$$

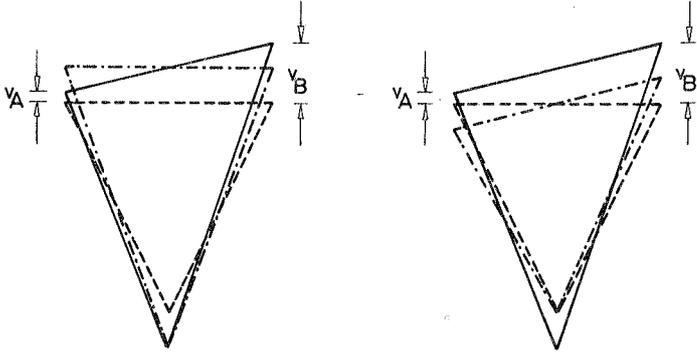


Abb. 3.9

$$(3.39) \quad v_A^{(4)} = \frac{1}{2}(v_A - v_B)$$

$$v_B^{(4)} = \frac{1}{2}(v_B - v_A)$$

$$(3.40) \quad v_C^{(3)} = v_C$$

$$v_C^{(4)} = 0$$

Die Arbeitsgleichung (3.28) ist wiederum, wie sich ohne weiteres nachweisen läßt, erfüllt.

Die in (3.35), ..., (3.40) aufgestellten Beziehungen werden in den zwei Transformationsmatrizen $[a_1]$, $[a_2]$ zusammengefaßt.

$$(3.41) \quad [a_1] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(3.42) \quad [a_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix [K] wird aus (3.17) mit (3.41) bis (3.44) berechnet und ist im Anhang in dimensionsfreier Form in Gleichung (II) angegeben. Es gelten auch hier die in (3.32) und (3.33) eingeführten Abkürzungen. Ein Vergleich der Steifigkeitsmatrix (II) für den speziellen Wert $\nu = \frac{1}{5}$ zeigt auch in diesem Fall die Übereinstimmung mit der von SPIERIG angegebenen Matrix.

3.2 Herleitung der Steifigkeitsmatrizen für das Scheibenproblem nach der 2. Methode

Bei der Herleitung der Steifigkeitsmatrizen zur Behandlung von Scheibenproblemen geht man von dem Zusammenhang der von außen an den Eckpunkten angreifenden Kräfte, zusammengefaßt im Kraftvektor

$$(3.45) \quad \mathbf{f} = (N_{xA}, N_{yA}; N_{xB}, N_{yB}; \dots)^T$$

und den an den Ecken resultierenden Verschiebungen, zusammengefaßt im Verschiebungsvektor

$$(3.46) \quad \mathbf{d} = (u_A, v_A; u_B, v_B; \dots)$$

7) Spaltenvektoren werden aus Gründen der Platzersparnis als Zeilenvektoren geschrieben und in runde Klammern eingeschlossen.

aus. Es gilt die in (3.1) angegebene Beziehung zwischen f und d . Die Verschiebungen der Eckpunkte im Verschiebungsvektor d hängen von den Stabverzerrungen der Modelle ab. Die Gesamtverzerrung in irgendeiner Richtung mit mehreren Stabquerschnitten ist gleich der Summe der Verzerrungen in diesen Stäben, die durch die verschiedenen Grundspannungen σ_x , σ_y und τ hervorgerufen werden.

So hängt die Gesamtverzerrung in der diagonalen Richtung des Modells in Abb.3.10 von zwei Verzerrungen ab; die eine rührt von den Normal-, die andere von den Schubspannungen her.

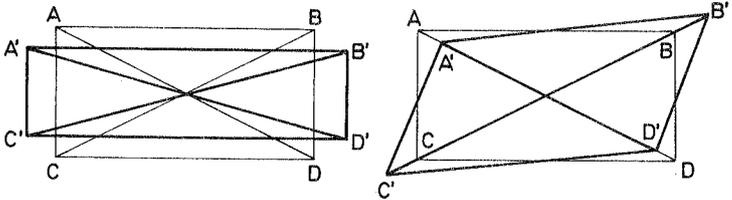


Abb.3.10

Wir betrachten die Diagonalstäbe AD und BC. Bei reiner Normalspannungsbeanspruchung wird aus dem Rechteck ABCD nach der dadurch bedingten Dehnung wieder ein Rechteck A'B'C'D'. Die zwei Diagonalen AD und BC haben Verzerrungen, die dem Betrage und dem Vorzeichen nach gleich sind. Unterwirft man jedoch das Rechteck ABCD einer Schubspannungsbeanspruchung, so hat es nach der Verzerrung die Form eines Parallelogrammes und die zwei Diagonalen AD und BC haben Verzerrungen, die dem Betrage nach gleich, doch dem Vorzeichen nach verschieden sind. Man kann daher für die in dem Diagonalstab aus zwei verschiedenen Spannungszuständen herührenden Verzerrungen ϵ_{AD}^n und ϵ_{AD}^s den folgenden Ansatz machen:

$$(3.47) \quad \begin{aligned} \epsilon_{AD}^n &= \frac{1}{2}(\epsilon_{AD} + \epsilon_{BC}) \\ \epsilon_{AD}^s &= \frac{1}{2}(\epsilon_{AD} - \epsilon_{BC}) \end{aligned}$$

Dabei bedeutet ϵ_{PQ} die Verzerrung im Stab PQ, ϵ_{PQ}^n die Verzerrung im Stab PQ infolge Normalspannungsbeanspruchung und ϵ_{PQ}^s die Verzerrung im Stab PQ infolge Schubspannungsbeanspruchung am Ele-

ment. Die Stabkraft N_{AD} im Diagonalstab AD lässt sich dann durch die Gleichung

$$(3.48) \quad N_{AD} = E (\epsilon_{AD}^n F_{AD}^n + \epsilon_{AD}^s F_{AD}^s)$$

angeben. Setzt man (3.47) in (3.48) ein, so folgt die wichtige Beziehung

$$(3.49) \quad N_{AD} = E \left[\epsilon_{AD} \frac{1}{2} (F_{AD}^n + F_{AD}^s) + \epsilon_{BC} \frac{1}{2} (F_{AD}^n - F_{AD}^s) \right]$$

Drückt man in dieser Beziehung die Verzerrungen durch die zugehörigen Verschiebungen der Eckpunkte aus und betrachtet die Gleichgewichtsbedingungen an den einzelnen Ecken, so erhält man unmittelbar die Gleichung (3.1) und hat damit die Steifigkeitsmatrix $[K]$ gewonnen.

3.2.1 Rechteckelement

Die in Abb.3.11 gestrichelt eingezeichneten Kräfte resultieren aus der Beanspruchung der Diagonalstäbe S_5 und S_6 infolge Dehnungen und Schubverzerrungen, die verbleibenden Kräfte infolge Dehnungen der Randstäbe S_1, \dots, S_4 des Stabmodells.

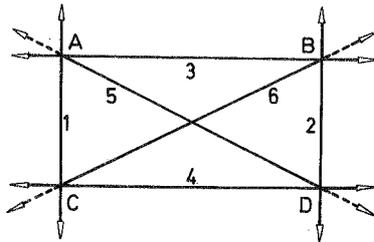


Abb.3.11

Um die Gleichgewichtsbedingung an der Ecke A aufstellen zu können, benötigt man die Stabkräfte der dort angreifenden zwei Randstäbe 1 und 3, sowie des Diagonalstabes 5. Da die Randstäbe nur Kräfte infolge von Dehnungen in der x - und y -Richtung aufnehmen und diese Dehnungen durch die Normalspan-

nungen hervorgerufen werden, erhält man für die Stabkraft N_{AB}

$$(3.50) \quad N_{AB} = F_{AB}^n E \epsilon_{AB}$$

Die Dehnung ϵ_{AB} läßt sich durch die Verschiebungen der Eckpunkte A und B angeben und lautet:

$$(3.51) \quad \epsilon_{AB} = \frac{u_B - u_A}{a \tan \delta}$$

Damit ergibt sich aus (3.50) mit (3.51) unter Berücksichtigung von $F_{AB}^n = F_3^n$ (Gleichung (2.9)):

$$(3.52) \quad N_{AB} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\cot \delta - \nu \tan \delta) (u_B - u_A)$$

Auf dieselbe Weise folgt:

$$(3.53) \quad N_{AC} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\tan \delta - \nu \cot \delta) (v_A - v_C)$$

Für die Kraft N_{AD} im Diagonalstab 5 gilt die in Abschnitt 3.2 hergeleitete Beziehung (3.49). Drückt man in dieser die Verzerrenungen ϵ_{AD} und ϵ_{BC} durch die Verschiebungen der Eckpunkte A, B, C und D aus, so erhält man:

$$(3.54) \quad \begin{aligned} \epsilon_{AD} &= (u_D - u_A) \frac{1}{a} \sin \delta \cos \delta + (v_A - v_D) \frac{1}{a} \cos^2 \delta \\ \epsilon_{BC} &= (u_B - u_C) \frac{1}{a} \sin \delta \cos \delta + (v_B - v_C) \frac{1}{a} \cos^2 \delta \end{aligned}$$

Die Summe der Stabquerschnitte F_{AD}^n und F_{AD}^s ist aus Gleichung (2.13) zu entnehmen. Die Differenz der beiden Werte ergibt:

$$(3.55) \quad \frac{1}{2} (F_{AD}^n - F_{AD}^s) = \frac{ah}{8(1-\nu^2)} \frac{3\nu - 1}{\sin \delta \cos^2 \delta}$$

Damit läßt sich auch die in Abschnitt 2.1.1 angedeutete Erklärung für die Querschnittfläche des Diagonalstabes 5 (dasselbe gilt entsprechend für den Stab 6) geben. Für den speziellen Wert $\nu = \frac{1}{3}$ wird die Differenz der Querschnittflächen F_{AD}^n und F_{AD}^s null. Das bedeutet, daß sich in diesem Fall die Querschnittflä-

che des Diagonalstabes als arithmetisches Mittel aus F_{AD}^n und F_{AD}^s ergibt und dieser Wert stimmt dann mit dem von SPIERIG angegebenen überein.

Diesen Sachverhalt kann man auch dahingehend deuten, daß für alle Querdehnungen $\nu \neq \frac{1}{3}$ in den Diagonalstäben 5, 6 und damit auch in der Steifigkeitsmatrix [K] infolge der Verzerrung ϵ_{BC} und den daraus sich ergebenden Verschiebungen der Eckpunkte B und C weitere von null verschiedene Elemente hinzukommen. Es besteht damit in der Steifigkeitsmatrix eine engere Verknüpfung aller vier Eckpunkte untereinander und der Einfluß der Querdehnung ν bei Abweichung von dem Wert $\frac{1}{3}$ kann daher nicht ohne weiteres vernachlässigt werden.

Für das gleichschenklige Dreieckelement gilt diese Erklärung in entsprechender Weise für die Stäbe 2 und 3.

Mit (3.54), (3.55) und (2.13) folgt aus (3.49) die Kraft im Diagonalstab 5 in Abhängigkeit der Eckpunktverschiebungen.

$$(3.56) \quad N_{AD} = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{\cos\delta} \left[(\nu+1)(u_D - u_A) + (3\nu-1)(u_B - u_C) \right] + \frac{1}{\sin\delta} \left[(\nu+1)(v_A - v_D) + (3\nu-1)(v_B - v_C) \right] \right\}$$

Somit läßt sich nun das Gleichgewicht am Eckpunkt A formulieren und damit die erste Zeile der Steifigkeitsmatrix [K] angeben.

$$(3.57) \quad N_{xA} = -N_{AB} - N_{AD} \sin\delta$$

Mit den in den Gleichungen (3.52) und (3.56) hergeleiteten Stabkräften folgt aus (3.57) schließlich:

$$(3.58) \quad N_{xA} = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)} \left\{ \begin{aligned} & [4\cot\delta - (3\nu-1)\tan\delta] u_A - (\nu+1)v_A + \\ & + [-4\cot\delta + (\nu+1)\tan\delta] u_B - (3\nu-1)v_B + \\ & + (3\nu-1)\tan\delta u_C + (3\nu-1)v_C - \\ & - (\nu+1)\tan\delta u_D + (\nu+1)v_D \end{aligned} \right\}$$

Analoge Beziehungen wie (3.58) ergeben sich aus der Betrachtung der drei anderen Eckpunkte des Rechtecks. Die Steifigkeitsmatrix stimmt mit der in Abschnitt 3.1.1 abgeleiteten überein.

3.2.2 Gleichschenkliges Dreieckelement

Im Falle des gleichschenkligen Dreieckelementes können dieselben Überlegungen wie beim Rechteckelement angestellt werden. Für die Kraft im Stab 1 gilt:

$$(3.59) \quad N_{AB} = \frac{Eh}{4(1-\nu^2)} (\cot\alpha - \nu \tan\alpha) (u_B - u_A)$$

Die entsprechende Gleichung für den Diagonalstab 3 folgt aus (3.49), indem man die Verzerrungen der beiden Stäbe 2 und 3 betrachtet.

$$(3.60) \quad N_{AC} = E \left[\epsilon_{CA} \frac{1}{2} (F_3^n + F_3^s) + \epsilon_{CB} \frac{1}{2} (F_3^n - F_3^s) \right]$$

Drückt man die Verzerrungen durch die Verschiebungen der Eckpunkte aus und setzt für die Querschnittflächen die Beziehungen (2.17) und (2.19) ein, so wird

$$(3.61) \quad N_{AC} = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)} \left\{ \frac{1}{\cos\alpha} [-u_A(1+\nu) - u_B(1-3\nu) + 2u_C(1-\nu)] + \frac{1}{\sin\alpha} [v_A(1+\nu) - v_B(1-3\nu) - 4\nu v_C] \right\}$$

Mit $v_D = \frac{1}{2}(v_A + v_B)$ erhält man die noch fehlende Stabkraft des angelenkten Stabes 4.

$$(3.62) \quad N_{DC} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} (\tan\alpha - \nu \cot\alpha) (v_A + v_B - 2v_C)$$

Die Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung an der Ecke A heißt

$$(3.63) \quad N_{xA} = -N_{AB} - N_{AC} \sin\alpha$$

Die erste Zeile der gesuchten Steifigkeitsmatrix [K] erhält man, wenn (3.59) und (3.61) in (3.63) eingesetzt werden

$$(3.64) \quad N_{xA} = \frac{Eh}{8(1-\nu^2)} \left\{ [(1-\nu)\tan\alpha + 2\cot\alpha] u_A - (1+\nu)v_A + [(1-\nu)\tan\alpha - 2\cot\alpha] u_B + (1-3\nu)v_B - 2(1-\nu)\tan\alpha u_C + 4\nu v_C \right\}$$

Für die Gleichgewichtsbedingung in y -Richtung an der Ecke A gilt:

$$(3.65) \quad N_{yA} = N_{AC} \cos \alpha + \frac{1}{2} N_{DC}$$

Mit (3.61) und (3.62) folgt daraus:

$$(3.66) \quad N_{yA} = \frac{Bh}{8(1-\nu^2)} \{ -(1+\nu)u_A + [(1-\nu)\cot \alpha + 2\tan \alpha]v_A + \\ + (3\nu-1)u_B + [(\nu-1)\cot \alpha + 2\tan \alpha]v_B + \\ + 2(1-\nu)u_C - 4\tan \alpha v_C \}$$

Dies ist die zweite Zeile der Steifigkeitsmatrix [K]. Mit den Gleichgewichtsbedingungen für die Eckpunkte B und C lassen sich auf diese Art und Weise vollends die restlichen vier Zeilen der Matrix [K] angeben. Es sei auch hier vermerkt, daß die so direkt gewonnene Steifigkeitsmatrix mit der in Abschnitt 3.1.2 aufgestellten Matrix (1.Methode) übereinstimmt.

3.3 Herleitung der Steifigkeitsmatrizen für das Plattenproblem nach der 2. Methode

Im Falle des Plattenproblems faßt man die von außen angreifenden Momente und Querkräfte im Lastvektor

$$(3.67) \quad \mathbf{f} = (M_{xA}, M_{yA}, Q_A; M_{xB}, M_{yB}, Q_B; \dots)$$

und die daraus resultierenden Verschiebungen der Eckpunkte im Verschiebungsvektor

$$(3.68) \quad \mathbf{d} = (\varphi_A, \psi_A, w_A; \varphi_B, \psi_B, w_B; \dots)$$

zusammen, die miteinander durch die Steifigkeitsmatrix [K] in Gleichung (3.1) verknüpft sind.

Die Verschiebungen der Eckpunkte im Verschiebungsvektor \mathbf{d} hängen ihrerseits von den Stabkrümmungen der Modellelemente ab.

Beim Plattenproblem treten demzufolge die Krümmungen der einzelnen Stäbe an die Stelle der Stabverzerrungen beim Scheibenproblem. Es gilt hier für die Krümmungen, was dort für die Verzerrungen gesagt wurde. Insbesondere gilt für diejenigen Stäbe, die Krümmungen infolge verschiedener Momentenzustände aufzunehmen haben der im nächsten Abschnitt 3.3.1 ausführlich beschriebene Sachverhalt.

Für einen Stab i-k der Länge l, dem Elastizitätsmodul E und dem Flächenträgheitsmoment J gelten für die Stabmomente und Stabquerkräfte - ausgedrückt in den Stabendverschiebungen an den Enden i und k - die Gleichungen (3.69). Bezüglich Bezeichnungen und Vorzeichen sei auf die Seiten 34 und 35, insbesondere auch auf die Abb.2.13 und 2.14, hingewiesen. (Vgl. dazu [12])

$$\begin{aligned}
 M_{ik} &= \frac{EJ}{l} \left(-6 \frac{w_i}{l} + 4\vartheta_i + 6 \frac{w_k}{l} + 2\vartheta_k \right) \\
 M_{ki} &= \frac{EJ}{l} \left(6 \frac{w_i}{l} - 2\vartheta_i - 6 \frac{w_k}{l} - 4\vartheta_k \right) \\
 Q_{ik} &= \frac{EJ}{l^2} \left(12 \frac{w_i}{l} - 6\vartheta_i - 12 \frac{w_k}{l} - 6\vartheta_k \right) = Q_{ki}
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

$w_i, w_k, \vartheta_i, \vartheta_k$ seien kleine Stabauslenkungen.

3.3.1 Rechteckelement

Es wird das Gleichgewicht an einem Eckpunkt des Rechteckmodells - ausgedrückt in den Eckpunktverschiebungen - betrachtet. Sodann gilt für den Stab 1 (Abb.2.12), der nur eine Krümmung infolge Biegemomentenbeanspruchung erfährt, der Zusammenhang nach der ersten und dritten Gleichung von (3.69):

$$\begin{aligned}
 M_{AC} &= \frac{EJ^m}{l_1} \left(-6 \frac{w_A}{l_1} + 4\varphi_A + 6 \frac{w_C}{l_1} + 2\varphi_C \right) \\
 Q_{AC} &= \frac{EJ^m}{l_1^2} \left(12 \frac{w_A}{l_1} - 6\varphi_A - 12 \frac{w_C}{l_1} - 6\varphi_C \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.70}$$

Setzt man J_1^m aus (2.53) ein, so erhält man mit $l_1 = a$:

$$M_{AC} = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}(\tan\delta - \nu\cot\delta)\left(-6\frac{w_A}{a} + 4\psi_A + 6\frac{w_C}{a} + 2\psi_C\right) \quad (3.71)$$

$$M_{AB} = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}(\cot\delta - \nu\tan\delta)\left(\frac{-6w_A}{a\tan\delta} + 4\psi_A + \frac{6w_B}{a\tan\delta} + 2\psi_B\right)$$

Auf entsprechende Weise erhält man Q_{AC} und Q_{AB} .

$$Q_{AC} = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)a}(\tan\delta - \nu\cot\delta)\left(12\frac{w_A}{a} - 6\psi_A - 12\frac{w_C}{a} - 6\psi_C\right) \quad (3.72)$$

$$Q_{AB} = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)a}(\cot^2\delta - \nu)\left(\frac{12w_A}{a\tan\delta} - 6\psi_A - \frac{12w_B}{a\tan\delta} - 6\psi_B\right)$$

Zur Betrachtung des Gleichgewichts am Eckpunkt A fehlt nun noch das innere Moment und die innere Querkraft in der Diagonalrichtung A-D. Nach der Modellvorstellung von Seite 19 sind demzufolge die EJ-fachen Krümmungen aus beiden Momentenbeanspruchungen zu superponieren.

$$M_{AD} = E(\kappa_{AD}^m J_5^m + \kappa_{AD}^t J_5^t) \quad (3.73)$$

Nun gilt für die Krümmungen aus den beiden Belastungen

$$\kappa_{AD}^m = \frac{1}{2}(\kappa_{AD} + \kappa_{CB}) \quad (3.74)$$

$$\kappa_{AD}^t = \frac{1}{2}(\kappa_{AD} - \kappa_{CB})$$

und für die in (3.74) enthaltenen Stabkrümmungen

$$\kappa_{AD} = \frac{M_{AD}}{EJ_5} = \frac{1}{15}\left(-\frac{6}{15}w_A + 4\psi_A + \frac{6}{15}w_D + 2\psi_D\right) \quad (3.75)$$

$$\kappa_{CB} = \frac{M_{CB}}{EJ_6} = \frac{1}{16}\left(-\frac{6}{16}w_C + 4\psi_C + \frac{6}{16}w_B + 2\psi_B\right)$$

Für die in (3.75) auftretenden Stabdrehwinkel ergibt sich bei

einer Zerlegung in x- und y-Richtung

$$\begin{aligned}
 \vartheta_A &= \psi_A \sin \delta + \varphi_A \cos \delta \\
 \vartheta_B &= \psi_B \sin \delta - \varphi_B \cos \delta \\
 \vartheta_C &= \psi_C \sin \delta - \varphi_C \cos \delta \\
 \vartheta_D &= \psi_D \sin \delta + \varphi_D \cos \delta
 \end{aligned}
 \tag{3.76}$$

Setzt man (3.76), (3.75) und (3.74) in (3.73) ein und berücksichtigt die auf Seite 36 bestimmten Flächenträgheitsmomente $J_5^m = J_6^m$ und $J_5^t = J_6^t$, so erhält man mit $l_5 = l_6 = \frac{a}{\cos \delta}$ das noch fehlende Moment des Diagonalstabes A-D.

$$\begin{aligned}
 (3.77a) \quad M_{AD} &= \frac{Eh^3}{96(1-\nu^2)} \frac{1}{\sin \delta \cos \delta} \cdot \\
 &\cdot \left[(\nu+1) \left(-\frac{6}{a} \cos \delta w_A + 4\varphi_A \cos \delta + 4\psi_A \sin \delta + \frac{6}{a} \cos \delta w_D + 2\varphi_D \cos \delta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\psi_D \sin \delta \right) + (3\nu-1) \left(-\frac{6}{a} \cos \delta w_C - 4\varphi_C \cos \delta + 4\psi_C \sin \delta + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{6}{a} \cos \delta w_B - 2\varphi_B \cos \delta + 2\psi_B \sin \delta \right) \right]
 \end{aligned}$$

Für die Querkraft bekommt man ebenso

$$\begin{aligned}
 (3.77b) \quad Q_{AD} &= \frac{Eh^3}{96(1-\nu^2)a} \frac{1}{\sin \delta} \cdot \\
 &\cdot \left[(\nu+1) \left(\frac{12}{a} \cos \delta w_A - 6\varphi_A \cos \delta - 6\psi_A \sin \delta - \frac{12}{a} \cos \delta w_D - 6\varphi_D \cos \delta - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - 6\psi_D \sin \delta \right) + (3\nu-1) \left(\frac{12}{a} \cos \delta w_C + 6\varphi_C \cos \delta - 6\psi_C \sin \delta - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{12}{a} \cos \delta w_B + 6\varphi_B \cos \delta - 6\psi_B \sin \delta \right) \right]
 \end{aligned}$$

indem man jetzt für die Krümmungen an Stelle von (3.75) aufgrund der dritten Gleichung von (3.69) setzt:

$$\begin{aligned}
 (3.78) \quad \kappa_{AD} &= \frac{Q_{AD} l_5^3}{EJ_5} = \frac{1}{l_5} \left(\frac{12}{l_5} w_A - 6\vartheta_A - \frac{12}{l_5} w_D - 6\vartheta_D \right) \\
 \kappa_{CB} &= \frac{Q_{CB} l_6^3}{EJ_6} = \frac{1}{l_6} \left(\frac{12}{l_6} w_C - 6\vartheta_C - \frac{12}{l_6} w_B - 6\vartheta_B \right)
 \end{aligned}$$

Damit stehen für das Gleichgewicht am Eckpunkt A sämtliche Beziehungen bereit und aus (2.49) erhält man unter Berücksichtigung von $M_1 = M_{AC}$, $M_5 = M_{AD}$, $M_3 = M_{AB}$ die gesuchten Momente in der x- und y-Richtung an der Ecke A in Abhängigkeit der Eckpunktverschiebungen. Es sind dies gleichzeitig die ersten zwei Zeilen der Steifigkeitsmatrix [K].

$$M_{xA} = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)} \left\{ [8\tan\delta - 2(3\nu-1)\cot\delta] \varphi_A + 2(\nu+1)\psi_A + [-12\tan\delta + 3(3\nu-1)\cot\delta] \frac{w_A}{a} + (1-3\nu)\cot\delta\varphi_B + (3\nu-1)\psi_B + 3(3\nu-1)\cot\delta \frac{w_B}{a} + [4\tan\delta - 2(5\nu-1)\cot\delta] \varphi_C + 2(3\nu-1)\psi_C + [12\tan\delta - 3(7\nu-1)\cot\delta] \frac{w_C}{a} + (\nu+1)\cot\delta\varphi_D + (\nu+1)\psi_D + 3(\nu+1)\cot\delta \frac{w_D}{a} \right\}$$

$$M_{yA} = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)} \left\{ 2(\nu+1)\varphi_A + [8\cot\delta - 2(3\nu-1)\tan\delta] \psi_A + [-12\cot^2\delta + 3(3\nu-1)] \frac{w_A}{a} + (1-3\nu)\varphi_B + [4\cot\delta - (\nu+1)\tan\delta] \psi_B + [12\cot^2\delta - 3(\nu+1)] \frac{w_B}{a} + 2(1-3\nu)\varphi_C + 2(3\nu-1)\tan\delta\psi_C + 3(1-3\nu) \frac{w_C}{a} + (\nu+1)\varphi_D + (\nu+1)\tan\delta\psi_D + 3(\nu+1) \frac{w_D}{a} \right\}$$

Für Q_A erhält man mit $Q_A = Q_{AB} + Q_{AC} + Q_{AD}$:

$$Q_A = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)a} \left\{ [-12\tan\delta + 3(3\nu-1)\cot\delta] \varphi_A + [-12\cot^2\delta + 3(3\nu-1)] \psi_A + [24\tan\delta + 24\cot^3\delta - 6(7\nu-1)\cot\delta] \frac{w_A}{a} + 3(3\nu-1)\cot\delta\varphi_B + [-12\cot^2\delta + 3(\nu+1)] \psi_B + [-24\cot^3\delta + 6(\nu+1)\cot\delta] \frac{w_B}{a} + [-12\tan\delta + 3(7\nu-1)\cot\delta] \varphi_C - 3(3\nu-1)\psi_C + [-24\tan\delta + 6(7\nu-1)\cot\delta] \frac{w_C}{a} - 3(\nu+1)\cot\delta\varphi_D - 3(\nu+1)\psi_D - 6(\nu+1)\cot\delta \frac{w_D}{a} \right\}$$

Analog sind die restlichen neun Beziehungen für die drei Eckpunkte B,C,D aufzustellen. Mit den folgenden dimensionslosen Größen

$$\bar{M} = \frac{M}{Eh^3} \quad \bar{Q} = \frac{Qa}{Eh^3} \quad \bar{w} = \frac{w}{a}$$

ist die Steifigkeitsmatrix für das Rechteck im Anhang unter (III) angegeben; für $\nu = \frac{1}{3}$ ist sie mit der von SPIERIG aufgestellten Matrix identisch.

3.3.2 Gleichschenkliges Dreieckelement

Der Grundgedanke zur Aufstellung der Steifigkeitsmatrix ist hier derselbe wie beim Rechteck. Es tritt lediglich eine Abweichung gegenüber den Erörterungen im vorigen Abschnitt infolge des beim Dreieck verwendeten 'Getriebemechanismus' im Punkte D auf (Abb.2.7). Dies wirkt sich in einer Änderung der Stabkrümmungen und damit wiederum der Momente und Querkräfte aus. Maßgebend sind dabei die Sehnentangentenwinkel ϑ_{PQ} . Die Abhängigkeit dieser Winkel von den Deformationen der Eckpunkte hat SPIERIG untersucht und in der Matrix $[A^P]$ angegeben. Mit den in Abb.2.7 eingeführten Bezeichnungen stellen sich diese Winkel folgendermaßen dar:

$$\begin{aligned} \vartheta_{AB} &= \psi_A - \frac{1}{2} \cot \alpha \left(\frac{w_A}{a} - \frac{w_B}{a} \right) \\ \vartheta_{BA} &= \psi_B - \frac{1}{2} \cot \alpha \left(\frac{w_A}{a} - \frac{w_B}{a} \right) \\ \vartheta_{BC} &= \cos \alpha \psi_B - \sin \alpha \psi_B - \cos \alpha \frac{w_B}{a} + \cos \alpha \frac{w_C}{a} \\ \vartheta_{CB} &= -\cos \alpha \frac{w_B}{a} + \cos \alpha \psi_C - \sin \alpha \psi_C + \cos \alpha \frac{w_C}{a} \\ \vartheta_{AC} &= \cos \alpha \psi_A + \sin \alpha \psi_A - \cos \alpha \frac{w_A}{a} + \cos \alpha \frac{w_C}{a} \\ \vartheta_{CA} &= -\cos \alpha \frac{w_A}{a} + \cos \alpha \psi_C + \sin \alpha \psi_C + \cos \alpha \frac{w_C}{a} \\ \vartheta_{DC} &= \frac{1}{2} (\psi_A + \psi_B) + \frac{1}{4} \tan \alpha (\psi_A - \psi_B) - \frac{1}{2} \left(\frac{w_A}{a} + \frac{w_B}{a} - 2 \frac{w_C}{a} \right) \\ \vartheta_{CD} &= \varphi_C + \frac{1}{4} \tan \alpha (\psi_A - \psi_B) - \frac{1}{2} \left(\frac{w_A}{a} + \frac{w_B}{a} - 2 \frac{w_C}{a} \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Nun lassen sich wieder die Stabendmomente und die Querkräfte angeben. Für die Stäbe 1 und 4, die nur Trägheitsmomente J_1^m bzw. J_4^m besitzen, lauten sie; (die Stäbe sind gegen Verdrehung schlaff)

$$(3.79a) \quad M_{DC} = \frac{EJ_4}{I_4}(4\vartheta_{DC} + 2\vartheta_{CD})$$

$$= \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)}(\tan\alpha - \nu\cot\alpha) \left[8(\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C) + 6\tan\alpha(\psi_A - \psi_B) - 12\left(\frac{w_A}{a} + \frac{w_B}{a} - 2\frac{w_C}{a}\right) \right]$$

$$(3.79b) \quad Q_{DC} = -\frac{6EJ_4}{I_4^2}(\vartheta_{DC} + \vartheta_{CD})$$

$$= \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)a}(\nu\cot\alpha - \tan\alpha) \left[12(\varphi_A + \varphi_B + 2\varphi_C) + 12\tan\alpha(\psi_A - \psi_B) - 24\left(\frac{w_A}{a} + \frac{w_B}{a} - 2\frac{w_C}{a}\right) \right]$$

$$(3.79c) \quad Q_{AB} = -\frac{6EJ_1}{I_1^2}(\vartheta_{AB} + \vartheta_{BA})$$

$$= \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)a}(\nu - \cot^2\alpha) \left[3(\psi_A + \psi_B) - 3\cot\alpha\left(\frac{w_A}{a} - \frac{w_B}{a}\right) \right]$$

Für den Stab 3 erhält man das Moment M_{AC} , indem man die Krümmungen

$$(3.80) \quad \kappa_{AC} = \frac{1}{I_3}(4\vartheta_{AC} + 2\vartheta_{CA})$$

$$\kappa_{CB} = \frac{1}{I_2}(4\vartheta_{CB} + 2\vartheta_{BC})$$

in die Gleichung (3.81) einsetzt.

$$(3.81) \quad M_{AC} = E \left[\frac{1}{2}(\kappa_{AC} + \kappa_{CB})J_3^m + \frac{1}{2}(\kappa_{AC} - \kappa_{CB})J_3^t \right]$$

Daraus resultiert für M_{AC} :

$$(3.82) M_{AC} = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)} \frac{1}{\cos\alpha} \left\{ (\nu+1) \left[\cot\alpha(2\varphi_A + \varphi_C - 3\frac{w_A}{a} + 3\frac{w_C}{a}) + 2\psi_A + \psi_C \right] + \right. \\ \left. + (3\nu-1) \left[\cot\alpha(\varphi_B + 2\varphi_C - 3\frac{w_B}{a} + 3\frac{w_C}{a}) - \psi_B - 2\psi_C \right] \right\}$$

Bei der Querkraft für den Stab 3 sind an Stelle von (3.80) die Gleichungen (3.83)

$$(3.83) \quad \kappa_{AC} = -\frac{6}{l_3} (\vartheta_{AC} + \vartheta_{CA}) \\ \kappa_{CB} = -\frac{6}{l_2} (\vartheta_{CB} + \vartheta_{BC})$$

in die Gleichung (3.84) einzusetzen.

$$(3.84) \quad Q_{AC} = \frac{E}{l_3} \left[\frac{1}{2} (\kappa_{AC} + \kappa_{CB}) J_{\frac{3}{3}}^m + \frac{1}{2} (\kappa_{AC} - \kappa_{CB}) J_{\frac{3}{3}}^t \right]$$

Daraus folgt:

$$(3.85) \quad Q_{AC} = \frac{Eh^3}{16(1-\nu^2)_a} \left\{ (\nu+1) \left[\cot\alpha(-\varphi_A - \varphi_C + 2\frac{w_A}{a} - 2\frac{w_C}{a}) - \psi_A - \psi_C \right] + \right. \\ \left. + (3\nu-1) \left[\cot\alpha(-\varphi_B - \varphi_C + 2\frac{w_B}{a} - 2\frac{w_C}{a}) + \psi_B + \psi_C \right] \right\}$$

Damit ist beispielsweise das Moment M_{xA} aus dem Gleichgewicht am Punkt A bestimmbar: $M_{xA} = M_{AC} \cos\alpha + \frac{1}{2} M_{DC}$. Das Moment M_{DC} wurde dabei je zur Hälfte dem Moment im Punkt A und B zugewiesen. Für die Querkraft Q_A gilt: $Q_A = Q_{AC} + Q_{AB} + \frac{1}{2} Q_{DC}$. Mit den Gleichungen (3.79a), (3.82), sowie (3.79b), (3.79c) und (3.85) lassen sich die gesuchten Momente und Querkräfte M_{xA} und Q_A in Abhängigkeit der Eckpunktdeformationen angeben.

$$M_{xA} = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)} \left\{ \left[4\tan\alpha + 2(1-\nu)\cot\alpha \right] \varphi_A + (3\tan^2\alpha + 2-\nu) \psi_A + \right. \\ \left. + [-6\tan\alpha + 3(\nu-1)\cot\alpha] \frac{w_A}{a} + [4\tan\alpha - (1+\nu)\cot\alpha] \varphi_B + \right. \\ \left. + (1-3\tan^2\alpha) \psi_B + [-6\tan\alpha + 3(1-\nu)\cot\alpha] \frac{w_B}{a} + \right. \\ \left. + [4\tan\alpha + (3\nu-1)\cot\alpha] \varphi_C + (3-5\nu) \psi_C + 12\tan\alpha \frac{w_C}{a} \right\}$$

$$Q_A = \frac{Eh^3}{48(1-\nu^2)a} \left\{ \begin{aligned} & [-6\tan\alpha - 3(1-\nu)\cot\alpha] \varphi_A + [-6\tan^2\alpha - 3(1-2\nu) - 3\cot^2\alpha] \psi_A + \\ & + [12\tan\alpha + 3(2-3\nu)\cot\alpha + 3\cot^3\alpha] \frac{w_A}{a} + \\ & + [-6\tan\alpha + 3(1-\nu)\cot\alpha] \varphi_B + [6\tan^2\alpha + 3(2\nu-1) - 3\cot^2\alpha] \psi_B + \\ & + [12\tan\alpha + 3(3\nu-2)\cot\alpha - 3\cot^3\alpha] \frac{w_B}{a} - \\ & - 12\tan\alpha \varphi_C + 6(\nu-1) \psi_C - 24\tan\alpha \frac{w_C}{a} \end{aligned} \right\}$$

Die vollständige Steifigkeitsmatrix für das gleichschenklige Dreieck ist im Anhang unter (IV) angegeben und stimmt für die spezielle Querdehnung $\nu = \frac{1}{3}$ mit der von SPIERIG gefundenen Matrix überein.

4. Anwendungsbeispiele

In diesem Kapitel sollen die hergeleiteten Steifigkeitsmatrizen zur Lösung von Plattenproblemen eingesetzt werden. Um die auf diese Weise gewonnenen Ergebnisse mit den entsprechenden Resultaten aus der KIRCHHOFFSchen Plattentheorie vergleichen zu können, wird die an allen vier Rändern frei drehbar gelagerte und die an allen vier Rändern starr eingespannte Quadratplatte konstanter Dicke unter gleichmäßiger Vollbelastung und unter Herausstellung des Einflusses der Querdehnungszahl

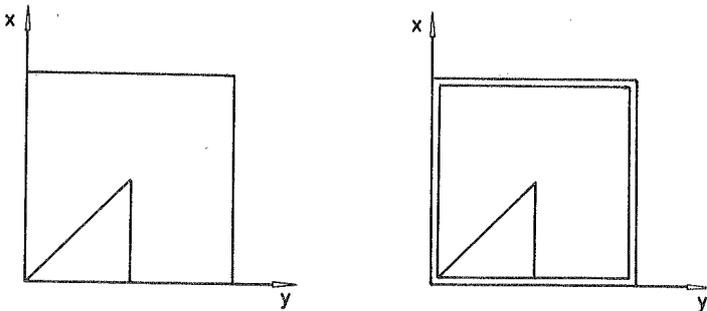


Abb.4.1 — frei drehbar gelagerter Rand
== starr eingespannter Rand

untersucht. Vom Plattenwerkstoff wird gefordert, daß er homogen und isotrop sei und dem HOOKEschen Gesetz gehorche; damit sind auch die Voraussetzungen für das Modellelement erfüllt, worauf an dieser Stelle nochmals hingewiesen sei.

Die numerische Rechnung wurde auf der Rechenanlage TR 4 im Recheninstitut der Universität Stuttgart durchgeführt.

4.1 Rastereinteilung, Ersatzlasten, Konvergenz

Aus Symmetriegründen genügt es, den in Abb.4.1 hervorgehobenen dreieckigen Teil der Quadratplatte zu betrachten. Die nächste Überlegung geht sodann dahin, diesen Plattenteil in dreieckige Einzelelemente zu zerlegen. Die Abbildung 4.2 zeigt zwei mögliche Zerlegungen.

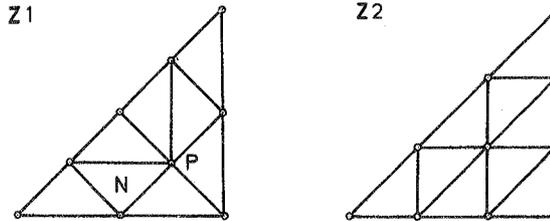


Abb.4.2

Im weiteren Verlauf der Rechnung wurde die erste Zerlegung gewählt und eine Verfeinerung des Rasters vorgenommen.

Die nächste Aufgabe ist die Berechnung der in den Knotenpunkten angreifenden Ersatzlasten. Infolge einer über die ganze Platte senkrecht zur Plattenebene von außen wirkenden Gleichlast sind die Ersatzmomente in x- und y-Richtung beide null und es tritt lediglich eine vertikale Last auf, die auf nachfolgend beschriebene Weise bestimmt wurde. Man denkt sich die auf das Element N (Abb.4.2) wirkende äußere Gleichlast im Schwerpunkt des Elements konzentriert angreifend und verteilt diese Einzellast zu gleichen Teilen in drei Lasten K_N der drei Eckpunkte des Elements. Die vertikale Last K_P ist dann gleich der Summe der einzelnen Lasten aller im Punkt P zusammenstoßender Elemente; für den herausgegriffenen Punkt P gilt somit:

$$(4.1) \quad K_P = \sum_{N=1}^6 K_N$$

Als nächster Schritt folgt nun der Aufbau der Steifigkeitsmatrix [K] für den aus den Einzelementen gebildeten Plattenteil, indem man in jedem Punkt die Lastvektoren aller in diesem Punkt zusammenlaufenden Elemente aufsummiert. Die Komponenten der Lastvektoren sind gleich den von außen angreifenden Lastkomponenten, im vorliegenden Fall also gleich den vertikalen Lasten K_p . Somit gelangt man zu der Beziehung

$$(4.2) \quad \mathbf{f} = [\mathbf{K}] \mathbf{d}$$

wobei mit \mathbf{f} der Lastvektor der äußeren Belastung für sämtliche Punkte P, mit [K] die Steifigkeitsmatrix der Platte und mit \mathbf{d} die Verschiebungsmatrix⁸⁾ bezeichnet seien. In \mathbf{d} sind die Durchbiegungen und Verdrehungen aller Punkte P enthalten. Nach Berücksichtigung der Randbedingungen kann die Inverse von [K] gebildet und Gleichung (4.2) nach der gesuchten Verschiebungsmatrix \mathbf{d} aufgelöst werden.

Zu den Schnittgrößen der einzelnen Elemente gelangt man mit Hilfe der nun ausgerechneten Verschiebungsmatrix \mathbf{d} . Die auf diese Weise bestimmten Schnittgrößen werden im allgemeinen in Punkten, in denen mehrere Elemente zusammenstoßen, verschieden sein. Die endgültigen Schnittgrößen in diesen Punkten erhält man schließlich aus dem arithmetischen Mittel der Schnittgrößen aller in diesem Punkt zusammenlaufenden Elemente. Die Diskrepanz der so berechneten Schnittgrößen in Punkten mit mehreren anschließenden Elementen war auf Grund des elementweisen Vorgehens zu erwarten. Die Mittelwertbildung liegt in solchen Fällen auf der Hand und liefert auch hier durchaus brauchbare Ergebnisse.

Eine für die praktische Anwendung solcher Verfahren entscheidende Frage ist die der Konvergenz. Für die Querdehnungszahl $\nu = 0.166$ und NAVIERSche Randbedingungen soll das Diagramm 1 für die Durchbiegungen der Platte Aufschluß geben. Zugrunde liegen die drei Rastereinteilungen von Seite 76.

Man erkennt in Diagramm 1, daß mit einer Verfeinerung der Raster die Durchbiegungen gegen die Werte aus der KIRCHHOFFSchen Theorie konvergieren.

8) Spaltenmatrix

K.Th	0	4.848	8.775	11.278	12.133
K.Th	0	6.292	10.620	12.133	
R3	0	4.760	8.657	11.165	12.028
R2	0	6.078	10.313	11.842	
R1	0	-----	8.178	-----	11.457

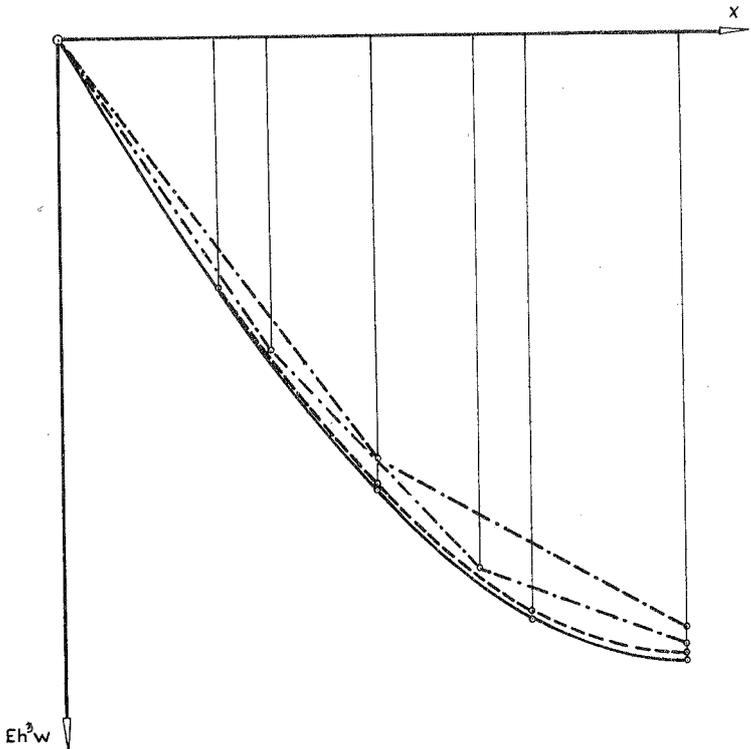
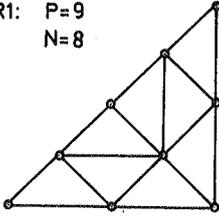


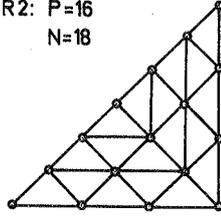
Diagramm 1: Eh^3 -fache Biegelinien w ($\nu = 0.166$)

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- Lösung mit Raster R3
- Lösung mit Raster R2
- Lösung mit Raster R1

R1: $P=9$
 $N=8$



R2: $P=16$
 $N=18$



R3: $P=25$
 $N=32$

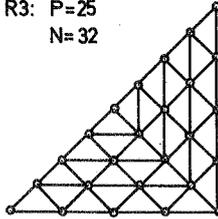


Abb.4.3

Bedeutend schlechter ist die Konvergenz der Durchbiegungswerte bei Verwendung derselben Raster für die allseitig starr eingespannte Platte. Dies dürfte seinen Grund darin haben, daß den Steifigkeitsmatrizen bei der Herleitung konstante Biegemomentenzustände zugrunde lagen, was in diesem Lagerungsfall nur dann hinreichend genau realisierbar ist, wenn die Rastereinteilung infolge des starken Momentenanstiegs - insbesondere am Rand - verfeinert wird.

4.2 Die frei drehbar gelagerte Quadratplatte

In diesem Abschnitt wird die in Abb.4.1 dargestellte Platte untersucht. Bezüglich Geometrie und Belastung sei vorausgesetzt:

Seitenlänge $a = 4$ [m]
Gleichlast $p = 1$ [kp/cm²]
Elastizitätsmodul ... E [kp/cm²]
konstante Dicke h [cm]

Die Eh^3 -fache Biegelinie ist in der Dimension [kpc²] anzugeben. Das Biege-, Drillmoment und die Querkraft sind auf die Längeneinheit bezogen.

In den folgenden Diagrammen sind die Eh^3 -fachen Biegelinien und die Schnittgrößen für die Querdehnungszahlen $\nu = 0,0.166$ und 0.333 unter Verwendung des Rasters R3 eingezeichnet und mit den entsprechenden Lösungen aus der KIRCHHOFFschen Plattentheorie (abgekürzt mit K.Th.) verglichen worden. In den über den Schaubildern angegebenen Tabellen enthält die erste Zeile die Werte aus der KIRCHHOFFschen Theorie, die zweite die Werte unter Zugrundelegung des Rasters R3 und die dritte den prozentualen Fehler der Näherungswerte der zweiten Zeile. Alle Zahlenangaben beziehen sich auf die Achtelpunkte der Mitten- bzw. der Randschnitte.⁹⁾

⁹⁾ Die Lösungen nach der KIRCHHOFFschen Plattentheorie wurden aus den Ansätzen in [14] berechnet.

0	4.987	9.026	11.600	12.480
0	4.884	8.892	11.496	12.396
0%	2.1%	1.5%	0.9%	0.7%

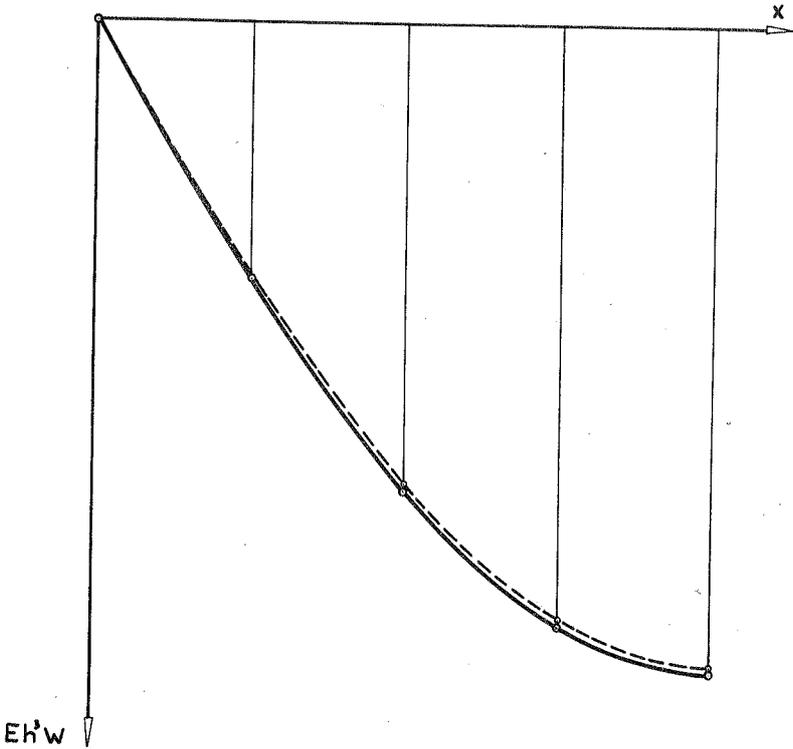


Diagramm 2: Eh^3 -fache Biegelinie w ($\nu = 0$)

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- Lösung mit Raster R3

0	4.848	8.775	11.278	12.133
0	4.760	8.657	11.165	12.028
0%	1.8%	1.3%	1.0%	0.9%

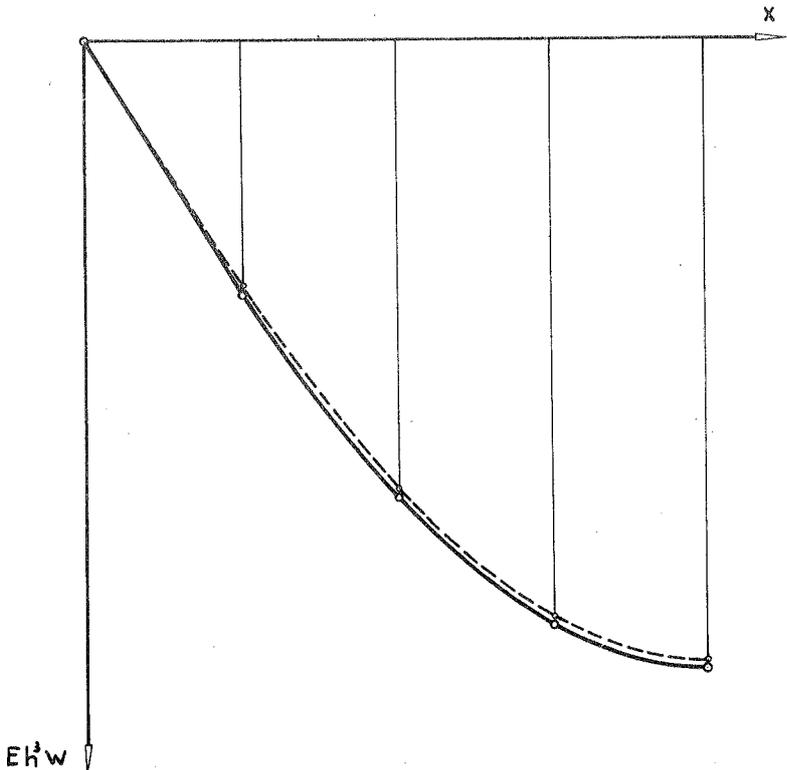


Diagramm 3: Eh^3 -fache Biegelinie w ($\nu = 0.166$)

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- Lösung mit Raster R3

0	4.433	8.023	10.311	11.093
0	4.373	7.925	10.197	10.987
0%	1.3%	1.2%	1.1%	1.0%

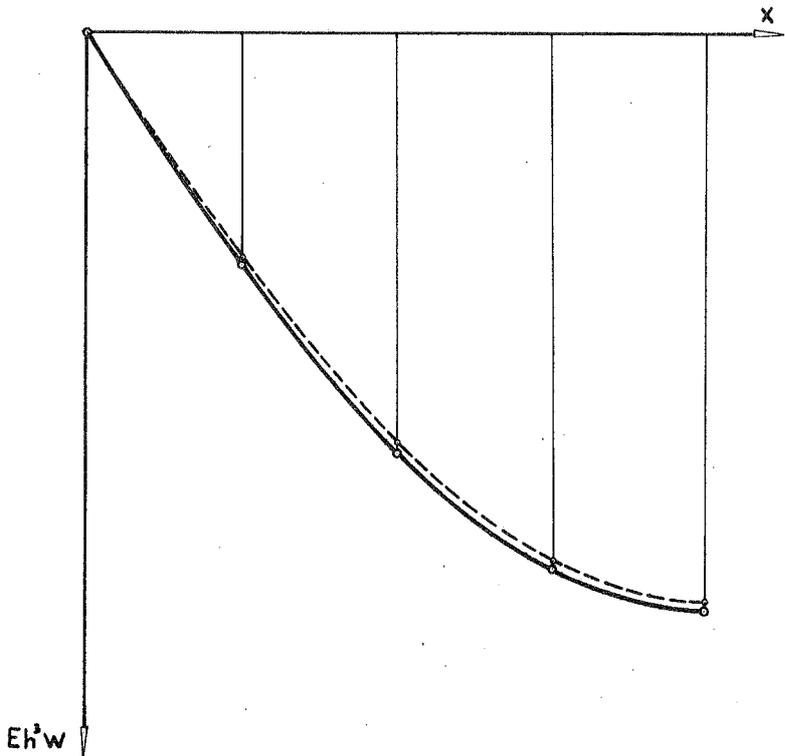


Diagramm 4: Eh^3 -fache Biegelinie w ($\nu = 0.333$)
— Lösung nach der KIRCHHOFF'schen Theorie
--- Lösung mit Raster R_5

0	0.329	0.496	0.569	0.589
-0.011	0.306	0.477	0.568	0.609
---	7.0%	3.8%	0.2%	3.4%

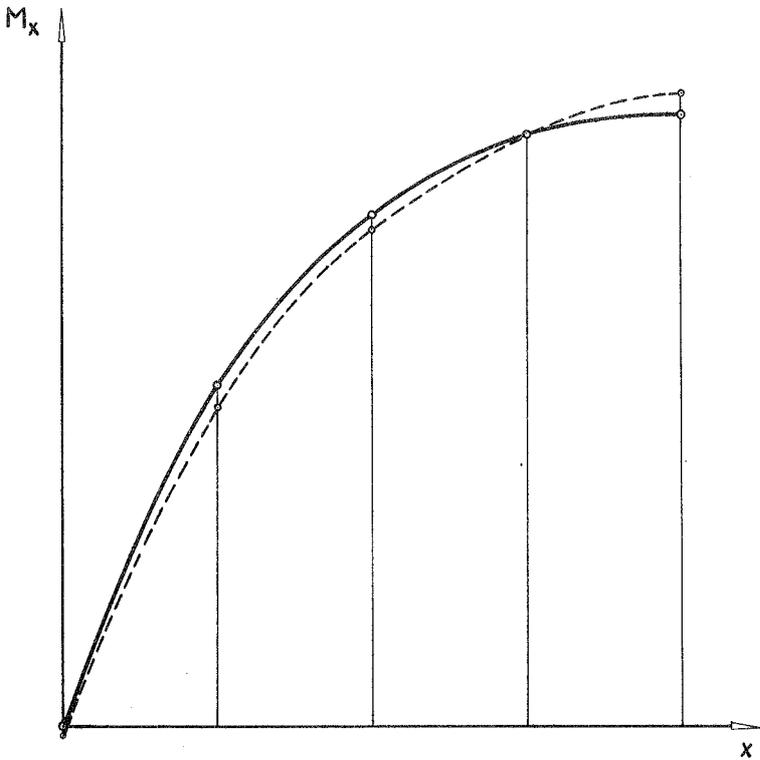


Diagramm 5: Momentenlinie M_x ($\nu = 0$)

- Lösung nach der KIRCHHOFF'schen Theorie
- Lösung mit Raster R3

0	0.367	0.566	0.660	0.688
-0.013	0.353	0.552	0.658	0.708
---	3.8%	2.5%	0.3%	2.9%

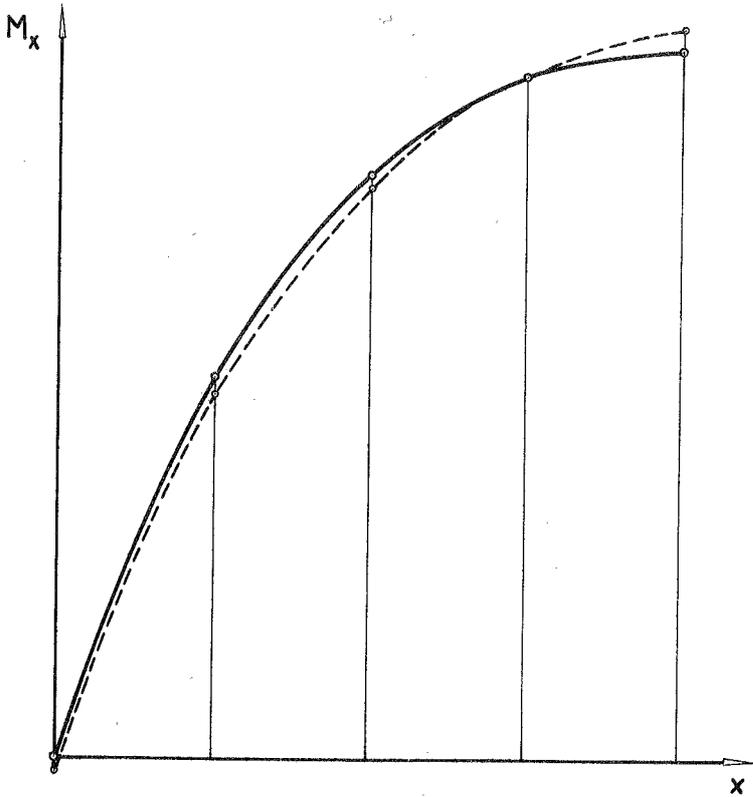


Diagramm 6: Momentenlinie M_x ($\nu = 0.166$)

— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
--- Lösung mit Raster R3

0	0.406	0.637	0.751	0.786
-0.018	0.402	0.628	0.746	0.806
---	1.0%	1.4%	0.7%	2.5%

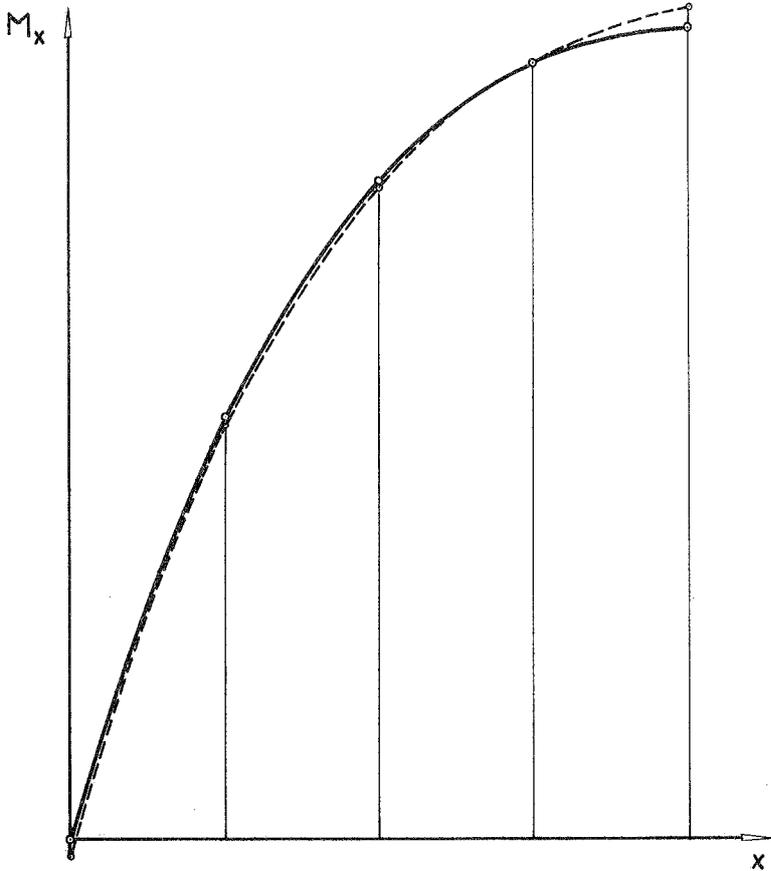


Diagramm 7: Momentenlinie M_x ($\nu = 0.333$)

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- - - Lösung mit Raster R3

-0.740	-0.644	-0.458	-0.234	0
-0.691	-0.622	-0.450	-0.236	0
6.6%	3.4%	1.7%	0.9%	0%

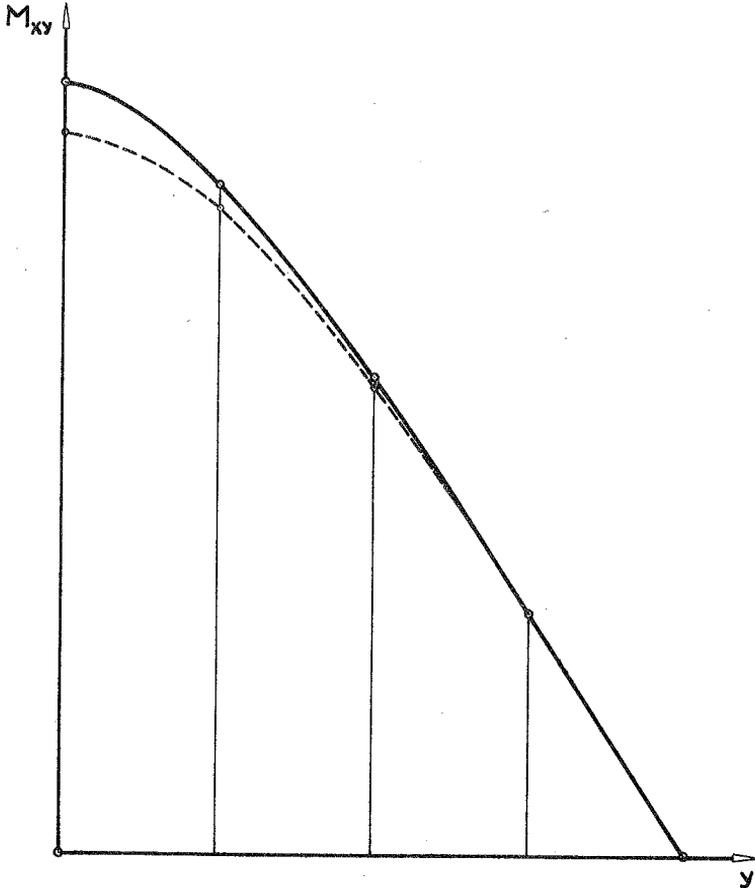


Diagramm 8: Drillmomentenlinie M_{xy} ($\nu = 0$)

— Lösung nach der KIRCHHOFF'schen Theorie
--- Lösung mit Raster R3

-0.617	-0.537	-0.381	-0.195	0
-0.581	-0.522	-0.376	-0.196	0
5.8%	2.8%	1.3%	0.5%	0%

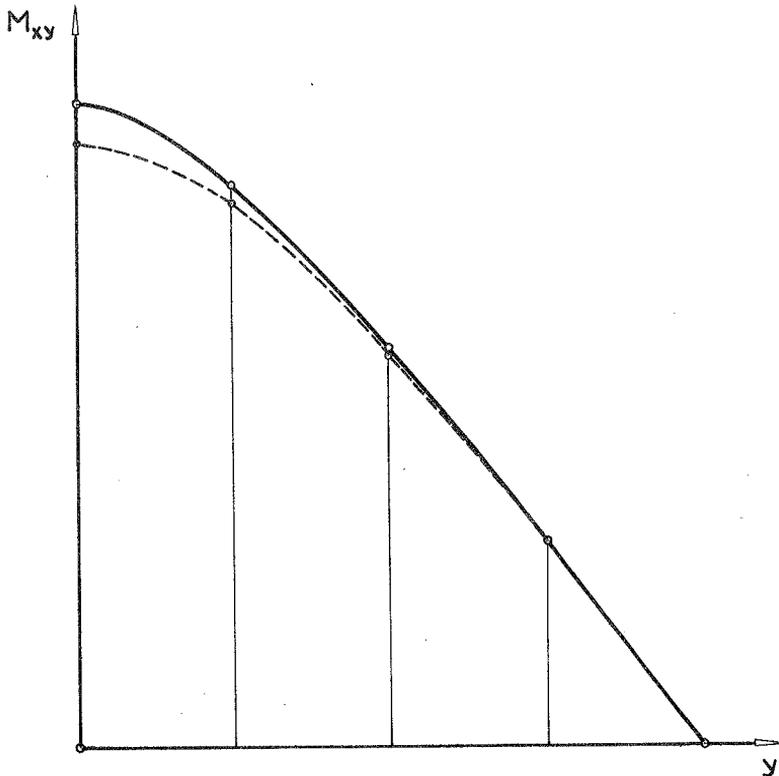


Diagramm 9: Drillmomentenlinie M_{xy} ($\nu = 0.166$)
— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
--- Lösung mit Raster R3

-0.493	-0.429	-0.305	-0.156	0
-0.469	-0.422	-0.302	-0.156	0
4.9%	1.6%	1.0%	0%	0%

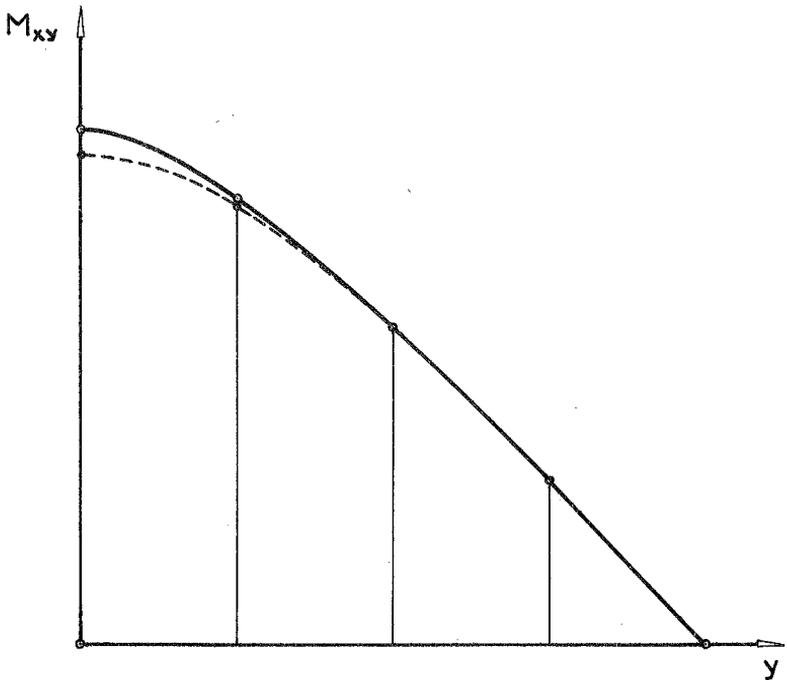


Diagramm 10: Drillmomentenlinie M_{xy} ($\nu = 0.333$)
— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
--- Lösung mit Raster R3

0	0.800	1.124	1.292	1.351
0.173	0.539	0.832	1.023	1.055
---	32.6%	26.0%	20.8%	21.9%

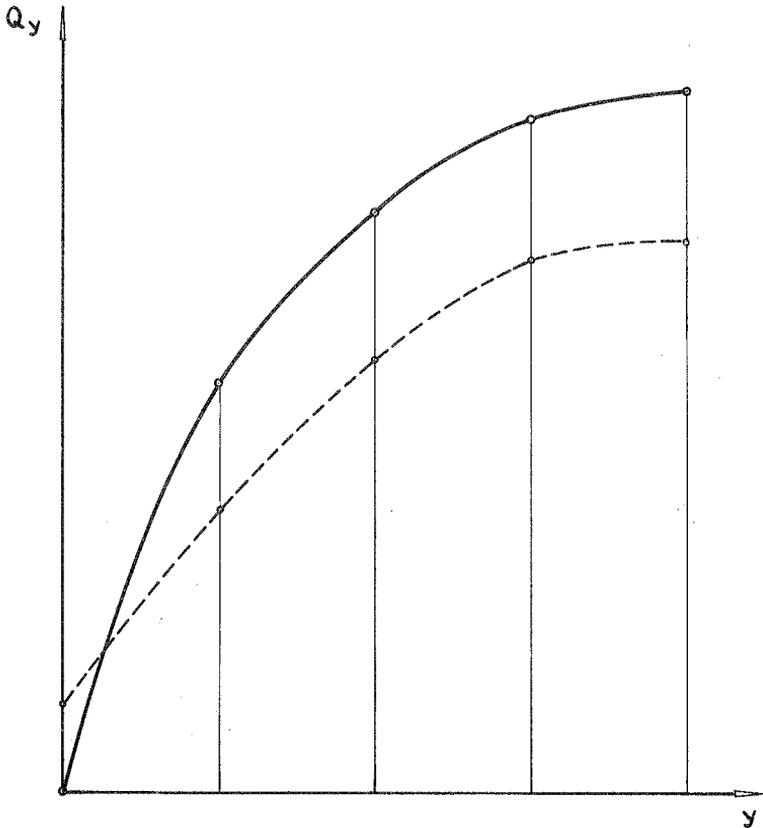


Diagramm 11: Querkraftlinie Q_y

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- Lösung mit Raster R3

1.351	0.902	0.545	0.256	0
1.055	0.816	0.543	0.294	0.086
21.9%	9.5%	0.4%	14.8%	---

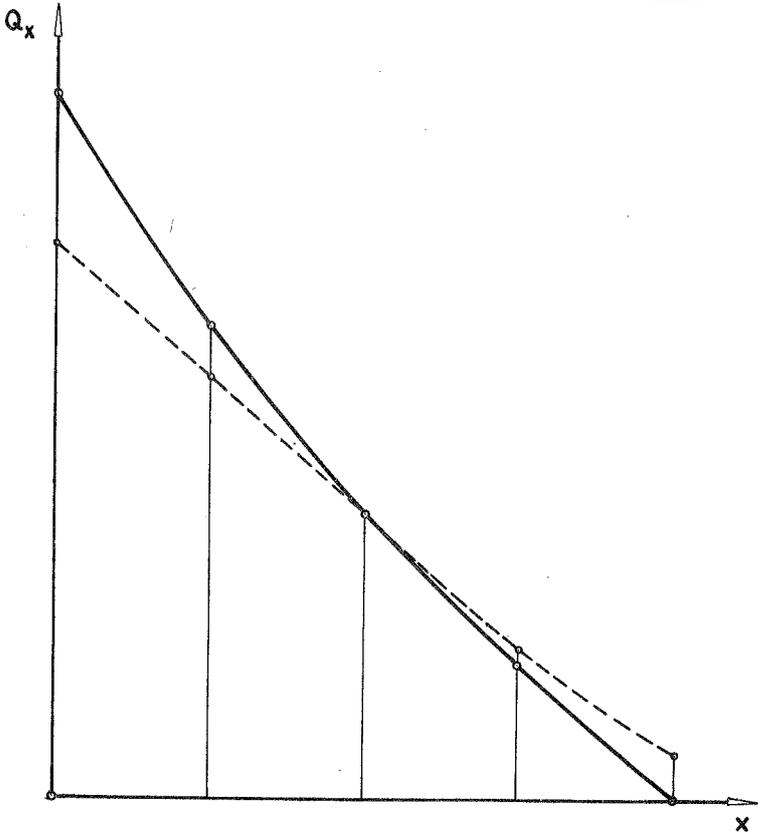


Diagramm 12: Querkraftlinie Q_x

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- Lösung mit Raster R3

4.3 Die starr eingespannte Quadratplatte

Bezüglich Geometrie und Belastung gilt für die starr eingespannte Quadratplatte dasselbe wie im Abschnitt 4.2. Es sind lediglich noch Überlegungen anzustellen, wie die Rastereinteilung zu wählen ist, damit den Ausführungen auf Seite 76 Rechnung getragen wird. Entsprechend dem starken Momentenanstieg am eingespannten Rand und im Mittenschnitt lag eine Verfeinerung in diesen Bereichen nahe. Ausgehend von den Rastern R1, R2 und R3 wurden folgende drei Einteilungen gewählt:

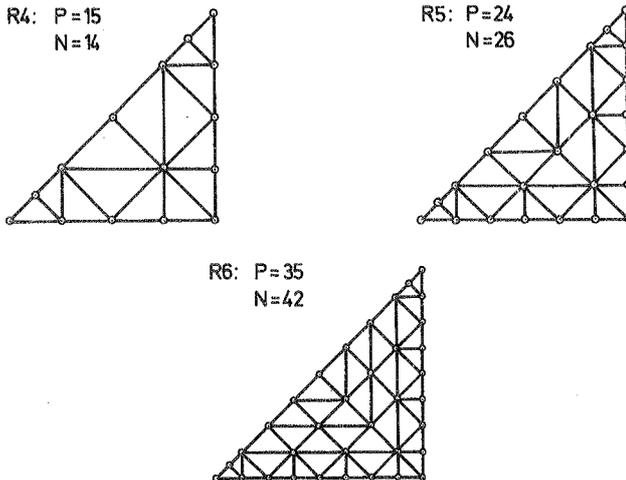


Abb.4.4

In Diagramm 22 sind für diese drei Raster die Eh^3 -fachen Biegelinien im Mittenschnitt für die Querdehnungszahl $\nu = 0.333$ eingezeichnet.

Wie in Abschnitt 4.2 sind in den Diagrammen 13 bis 21 die Eh^3 -fachen Biege-, die Momenten- und Querkraftlinien für $\nu = 0, 0.166$ und 0.333 dargestellt und mit den Lösungen nach der KIRCHHOFFSchen Theorie verglichen worden.

K.Th.	0	0.760	2.071	3.086	3.455
K.Th.	0	1.191	2.809	3.455	
R6	0	0.757	2.059	3.083	3.455
R5	0	1.173	2.795	3.456	
R4	0	0.715	2.016	3.072	3.456

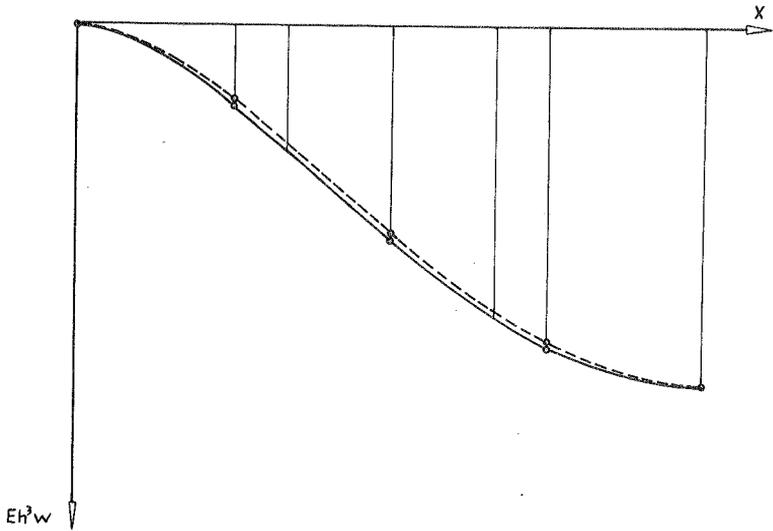


Diagramm 22: Eh^3 -fache Biegelinien w ($\nu = 0.333$)

— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
 --- Lösung mit Raster R4
 Die Lösungen mit den Rastern R5 und R6 liegen zwischen diesen beiden Lösungen.

0	0.855	2.329	3.472	3.887
0	0.768	2.040	3.048	3.420
0%	10.2%	12.4%	12.2%	12.0%

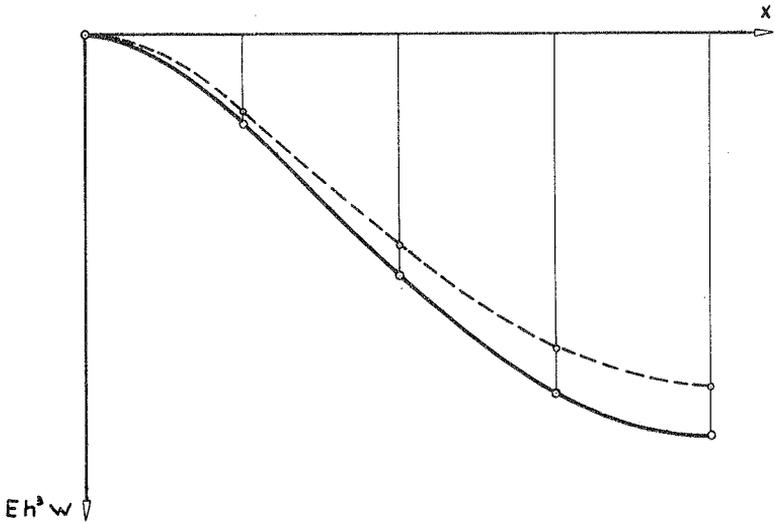


Diagramm 13: Eh^3 -fache Biegelinie 'w' ($\nu = 0$)

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- Lösung mit Raster R6

0	0.831	2.265	3.375	3.779
0	0.782	2.112	3.150	3.535
0%	5.9%	6.8%	6.7%	6.5%

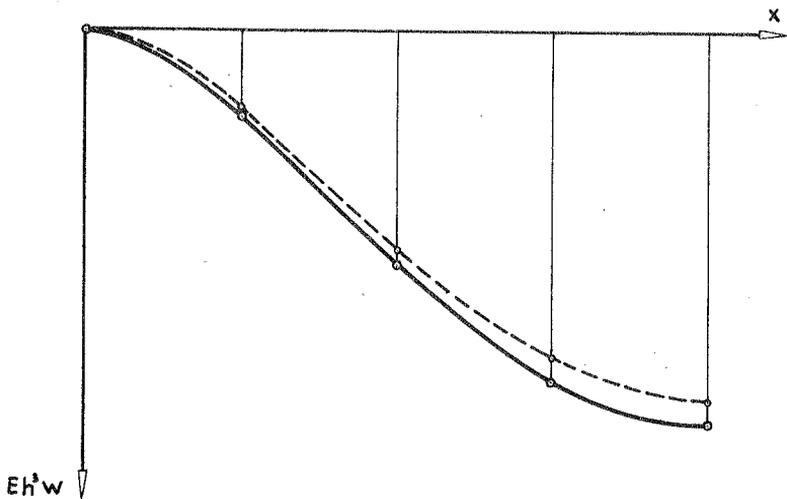


Diagramm 14: Eh^3 -fache Biegelinie w ($\nu = 0.166$)

— Lösung nach der KIRCHHOFF'schen Theorie
--- Lösung mit Raster R6

0	0.760	2.071	3.086	3.455
0	0.757	2.059	3.083	3.456
0%	0.4%	0.6%	0.1%	0.0%

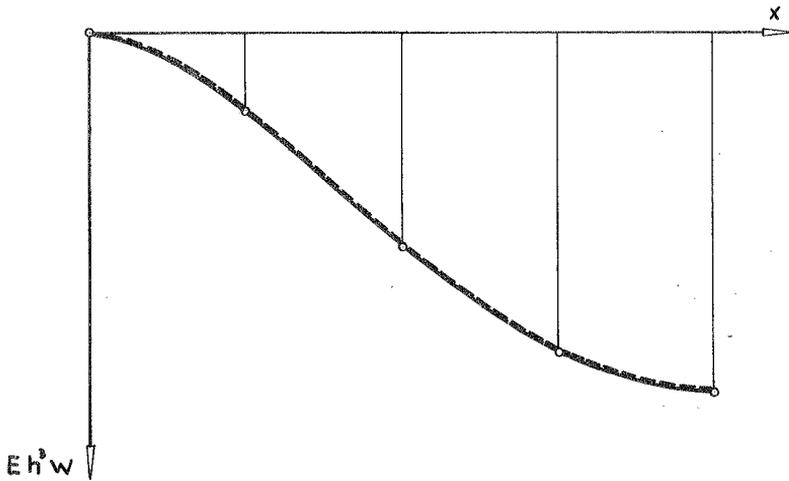


Diagramm 15: Eh^3 -fache Biegelinie w ($\nu = 0.333$)

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- Lösung mit Raster R6

-0.823	-0.179	+0.125	+0.249	+0.281
-0.673	-0.138	+0.098	+0.213	+0.257
18.2%	22.9%	21.6%	14.4%	8.6%

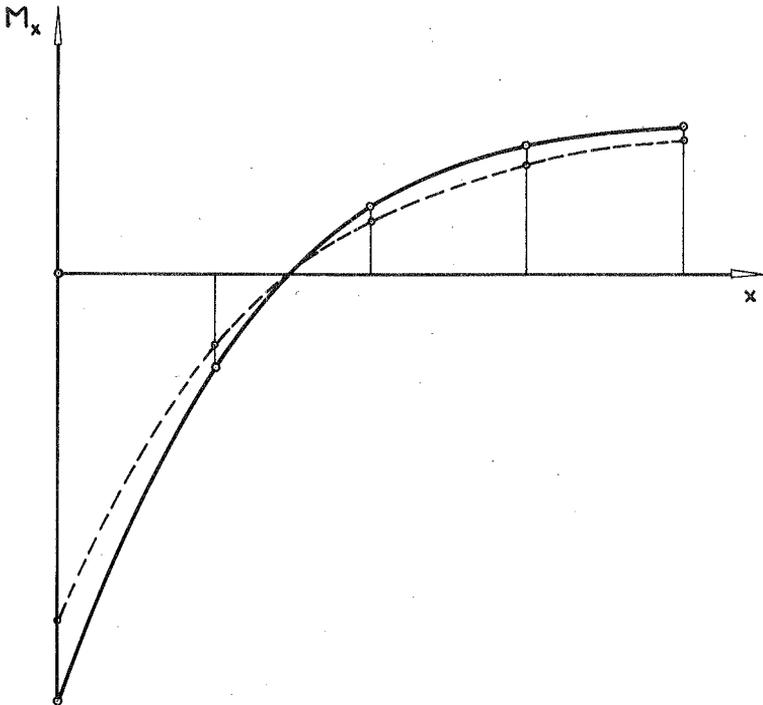


Diagramm 16: Momentenlinie M_x ($\nu = 0$)

— Lösung nach der KIRCHHOFF'schen Theorie
--- Lösung mit Raster R6

-0.823	-0.170	+0.153	+0.291	+0.329
-0.701	-0.144	+0.134	+0.267	+0.318
14.8%	15.3%	12.4%	8.2%	5.3%

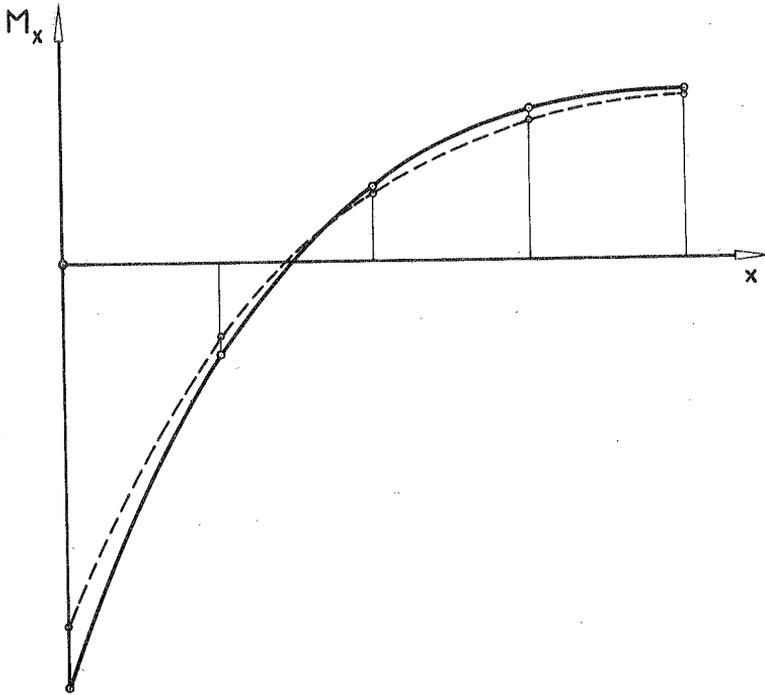


Diagramm 17: Momentenlinie M_x ($\nu = 0.166$)

- Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
- - - Lösung mit Raster R6

-0.823	-0.159	+0.181	+0.333	+0.376
-0.728	-0.155	+0.174	+0.328	+0.386
11.5%	2.5%	3.9%	1.5%	2.7%

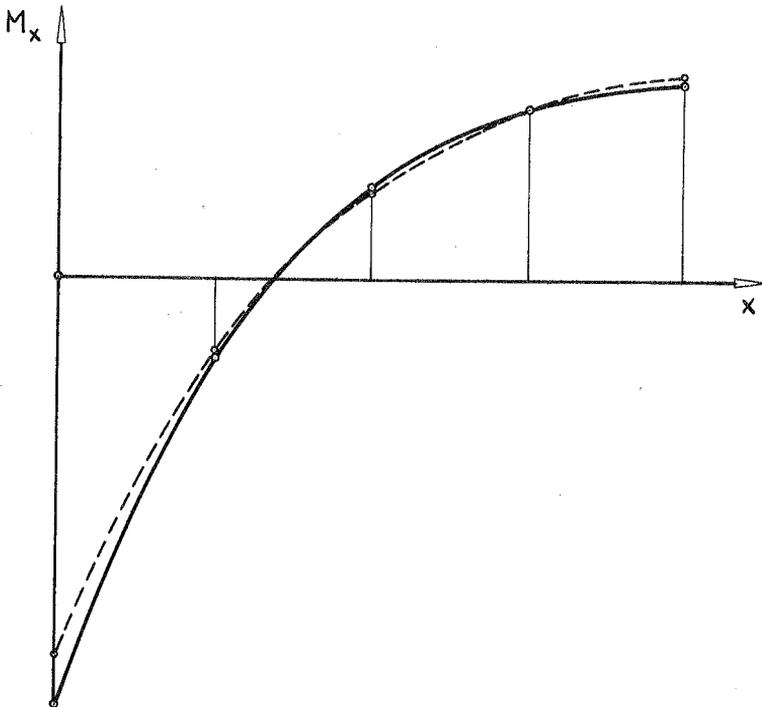


Diagramm 18: Momentenlinie M_x ($\nu = 0.333$)

— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
--- Lösung mit Raster R6

0	-0.190	-0.515	-0.744	-0.823
+0.016	-0.157	-0.437	-0.635	-0.728
---	17.4%	15.1%	14.7%	11.5%

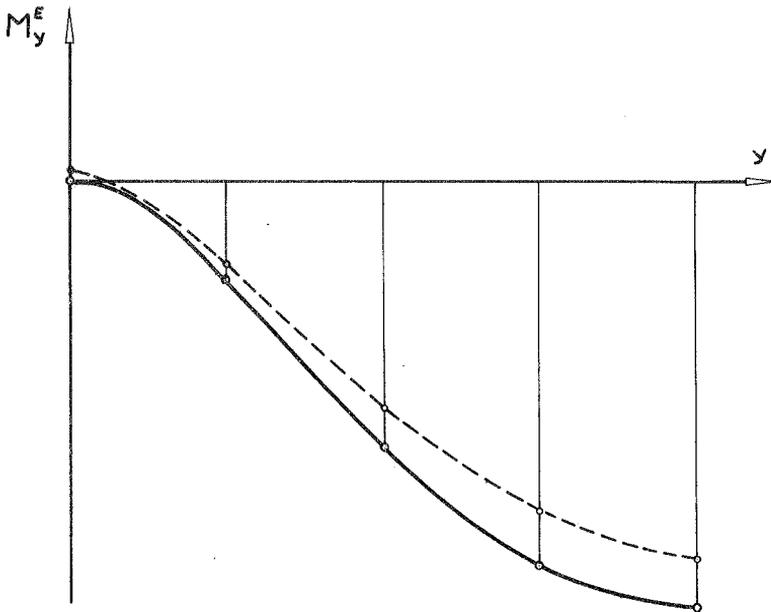


Diagramm 19: Linie für das Einspannmoment M_y^E
— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
--- Lösung mit Raster R6

0	0.398	1.177	1.630	1.785
-0.217	0.257	0.952	1.305	1.477
---	35.4%	19.1%	19.9%	17.3%

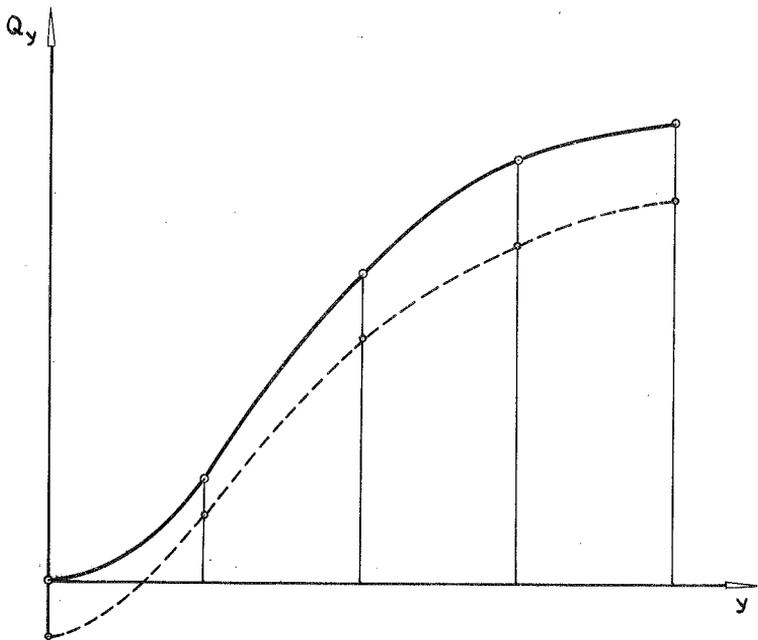


Diagramm 20: Querkraftlinie Q_y

— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
--- Lösung mit Raster R_6

1.785	1.076	0.596	0.262	0
1.477	1.012	0.551	0.255	0.037
17.3%	5.9%	7.6%	2.7%	---

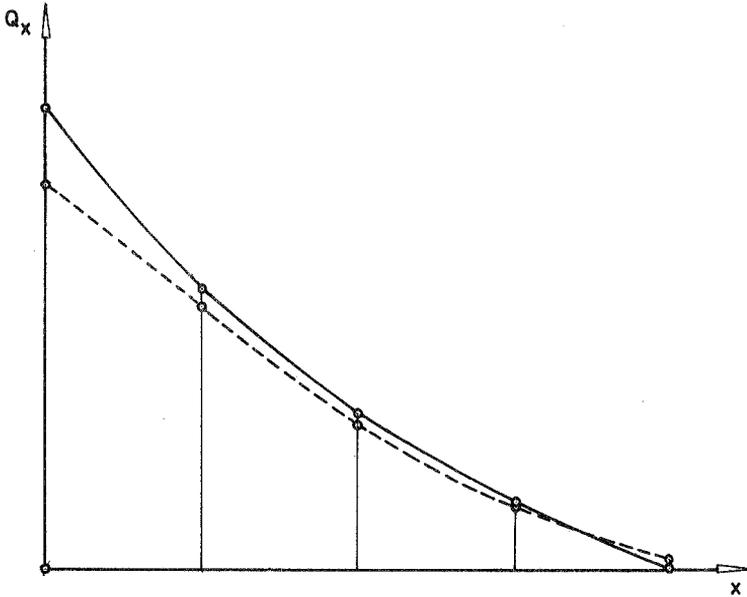


Diagramm 21: Querkraftlinie Q_x

— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
--- Lösung mit Raster R6

ν	0	0.166	0.333	0.4	0.5
K.Th.	12.48	12.13	11.09	10.48	9.36
R3	12.40	12.03	10.99	10.37	9.25
Fehler	0.7%	0.9%	1.0%	1.1%	1.2%

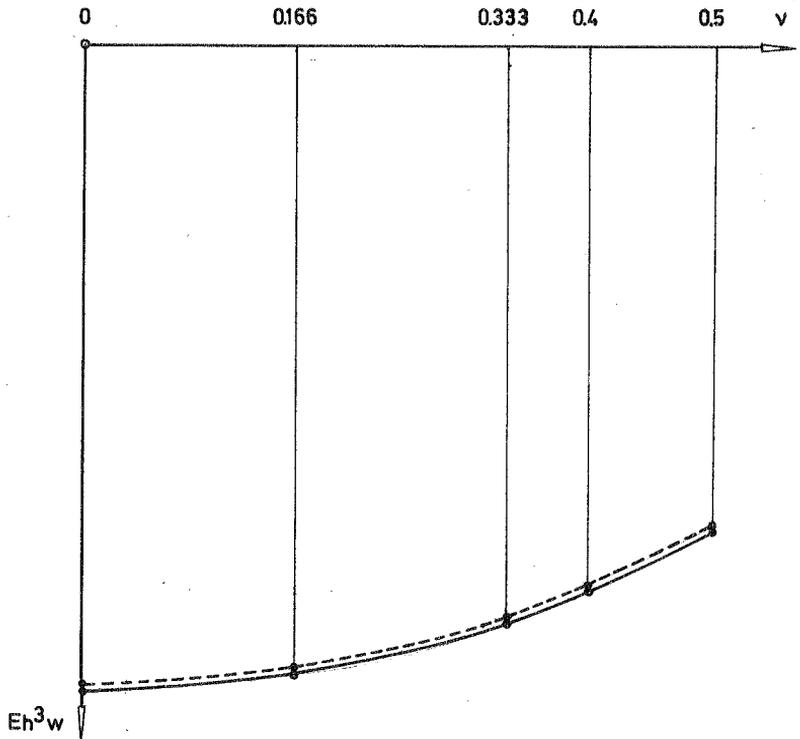


Diagramm 23: Eh^3 -fache Biegewerte w im Mittelpunkt der Quadratplatte in Abhängigkeit von der Querdehnungszahl ν .
(allseitig NAVIER'sche Lagerung)

— Lösung nach der KIRCHHOFF'schen Theorie
 --- Lösung mit Hilfe des Rasters R3

ν	0	0.166	0.333	0.4	0.5
K.Th.	3.887	3.779	3.455	3.265	2.915
R6	3.420	3.535	3.456	3.361	3.150
Fehler	12.0%	6.5%	0.0%	3.1%	8.1%

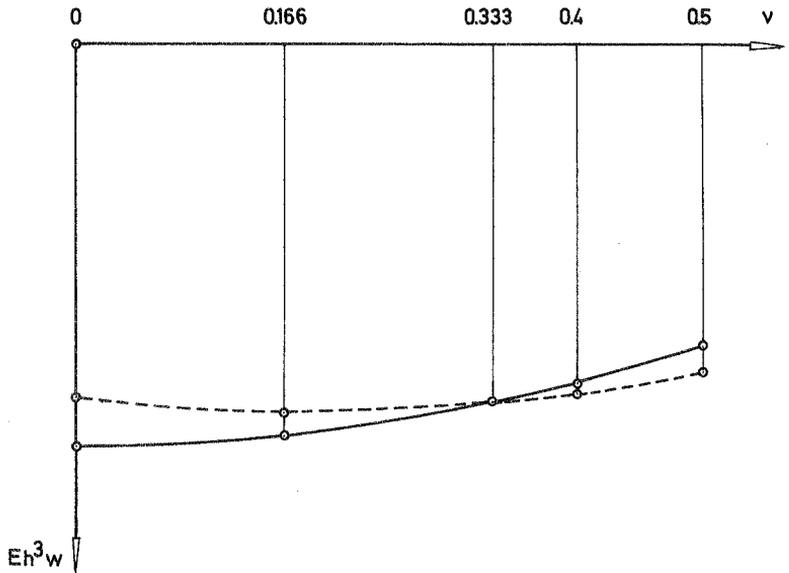


Diagramm 24: Eh^3 -fache Biegewerte w im Mittelpunkt der Quadratplatte in Abhängigkeit von der Querdehnungszahl ν . (allseitig starre Einspannung)

— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
 --- Lösung mit Hilfe des Rasters R6

K.Th.	0.589	0.688	0.786	0.884
R3	0.609	0.708	0.806	0.908
Fehler	3.4%	2.9%	2.5%	2.7%

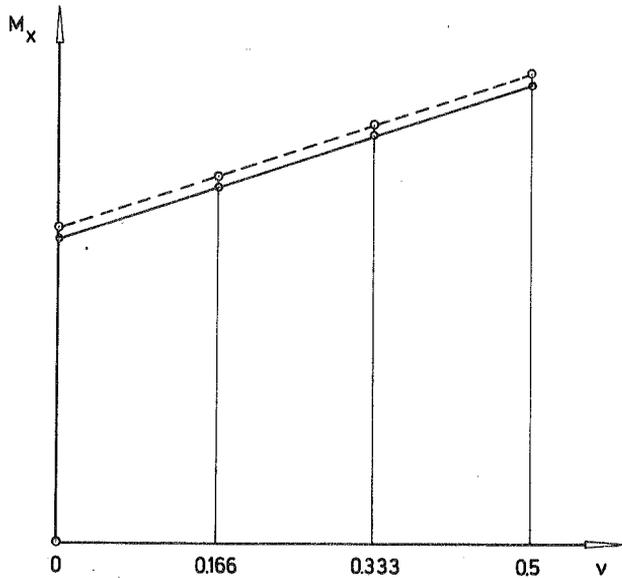


Diagramm 25: Biegemomente M_x im Mittelpunkt der Quadratplatte in Abhängigkeit von der Querdehnungszahl ν . (allseitig NAVIERSche Lagerung)
— Lösung nach der KIRCHHOFFSchen Theorie
--- Lösung mit Hilfe des Rasters R3

K.Th.	0.281	0.329	0.376	0.423
R6	0.257	0.318	0.386	0.463
Fehler	8.6%	3.3%	2.7%	9.5%

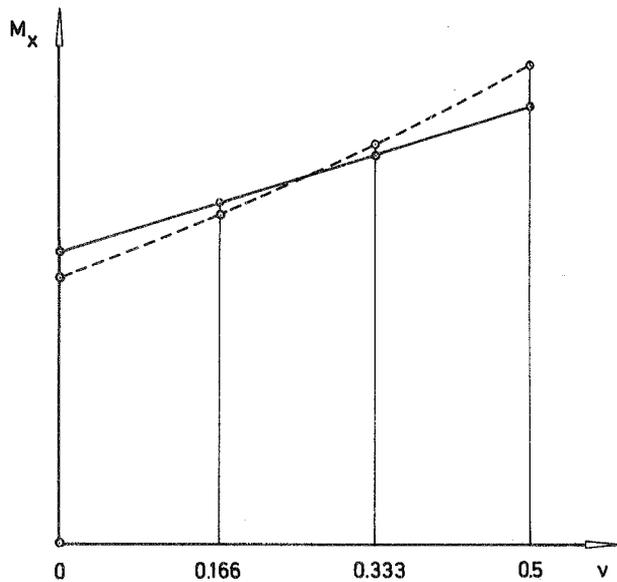


Diagramm 26: Biegemomente M_x im Mittelpunkt der Quadratplatte in Abhängigkeit von der Querdehnungszahl ν . (allseitig starre Einspannung)

— Lösung nach der KIRCHHOFF'schen Theorie
--- Lösung mit Hilfe des Rasters R6

4.4 Diskussion der Ergebnisse

Für die mit Hilfe des Rasters R3 errechneten Durchbiegungen ist die Abweichung gegenüber den aus der KIRCHHOFF'schen Plattentheorie bekannten Werten für die allseitig frei drehbar gelagerte Quadratplatte unter gleichmäßiger Einheitsbelastung nicht größer als 2.1% (Diagramme 2,3,4). Dieser Fehler ergab sich bei der Querdehnungszahl $\nu = 0$. Um die Abhängigkeit von ν herauszustellen, sind in Diagramm 23 die Durchbiegungen im Plattenmittelpunkt in Abhängigkeit von der Querdehnungszahl eingezeichnet. Man sieht, wie der Fehler von 0.7% bei $\nu = 0$ auf 1.2% bei $\nu = 0.5$ geringfügig wächst.

Für die allseitig starr eingespannte Quadratplatte unter gleichmäßiger Einheitsbelastung zeigt Diagramm 24 die Abhängigkeit der Durchbiegungen von der Querdehnungszahl.

Für die Biegemomente M_x im Plattenmittelpunkt veranschaulichen die Diagramme 25 und 26 für die allseitig frei drehbar gelagerte bzw. starr eingespannte Quadratplatte die Abhängigkeit von der Querdehnungszahl. Es ist dasselbe Verhalten wie bei den Durchbiegungen festzustellen. Besonders sei hervorgehoben, daß die Fehler in den Ergebnissen für die Momente lediglich von derselben Größenordnung wie bei den Durchbiegungen sind. Ein Genauigkeitsschwund wie bei der Berechnung der Momente durch Differentiation aus den Durchbiegungen wird bei dieser Methode vermieden, indem man die Momente direkt mit Hilfe der Steifigkeitsmatrizen der Einzelelemente bestimmt (vgl. Seite 74).

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die mit den hier abgeleiteten Steifigkeitsmatrizen errechneten Ergebnisse für die Durchbiegungen und Biegemomente der allseitig frei drehbar gelagerten und der allseitig starr eingespannten Quadratplatte unter gleichmäßiger Einheitsbelastung zufriedenstellend ausfallen.

Vergleichsrechnungen mit anders berandeten Platten wurden nicht durchgeführt. Die Leistungsfähigkeit der Elementmetho-

den ist aber gerade in der Anwendbarkeit auf beliebig berandete und belastete Platten begründet.

Eine wichtige Voraussetzung für die Benutzung der in der vorliegenden Arbeit abgeleiteten Steifigkeitsmatrizen ist, daß der tatsächliche Momentenverlauf stückweise konstant approximierbar ist. Das bedeutet, daß mit der zur Verfügung stehenden Rechenanlage eine Rastereinteilung für eine genügend genaue Approximation möglich ist.

5. Programm

In diesem letzten Kapitel ist das Algol-Programm angegeben, das für die elektronische Rechnung verwendet wurde. Es ist für die Benützung von Bändern eingerichtet.

RC - OPERATOR TR 4 MV6 MODE 4

ADIVB WAS PRODUCED. INTERNAL NAME IS 499 501

TEMPORARY LIBRARY OPERATOR TR4, MV3, MODE 1 ,
AN ENTRY WAS MADE FOR ADIVB

ALCOR TR4 (2) MV 9 , JAN 67 , MODE 2

```
'BEGIN'  
'INTEGER' 'PROCEDURE' TIME; 'CODE' ;  
'PROCEDURE' MAMUAT; 'CODE'; 'PROCEDURE' MAMUBT; 'CODE';  
'PROCEDURE' BANINV(A, EPS, SING) ; 'VALUE' EPS; 'REAL' EPS;  
'ARRAY' A; 'LABEL' SING; 'CODE';  
'PROCEDURE' ADIVB(A, B, C, EPS, SING); 'VALUE' EPS; 'REAL' EPS;  
'ARRAY' A, B, C; 'LABEL' SING; 'CODE';  
'PROCEDURE' MAMU(A, B, C); 'ARRAY' A, B, C; 'CODE';  
'INTEGER' I, P, N, ZF, ZR, ZU; 'REAL' MUE;  
OUTPUT(1, '('/'('ZEIT NACH BLOCK 0')'4ZDB('SEC')'')', TIME+0);  
READ(P, N, MUE);  
'COMMENT' BLOCK 2;  
'BEGIN'  
'ARRAY' V, S[1:9×N], E1[1:P, 1:3], E3[1:P, 1:4];  
'INTEGER' 'ARRAY' E2[1:P, 1:2], E4[1:N, 1:3];  
'ARRAY' XY[1:3, 1:2];  
'REAL' 'PROCEDURE' ZYK(I, K); 'VALUE' I, K; 'INTEGER' I, K;  
'BEGIN' 'INTEGER' L;  
'IF' I 'GREATER' 3 'THEN' L := I - 3 'ELSE' L := I;  
ZYK := XY[L, K];  
'END' ZYK;  
'REAL' 'PROCEDURE' DIFF(I, J, P);  
'VALUE' I, J, P; 'INTEGER' I, J, P;
```

```
'BEGIN' 'INTEGER' K,L;
'IF' 'I' 'GREATER' '3' 'THEN' K:=I-3 'ELSE' K:=I;
'IF' 'J' 'GREATER' '3' 'THEN' L:=J-3 'ELSE' L:=J;
DIFF:=XY[K,P]-XY[L,P];
'END' DIFF;
'PROCEDURE' AUS(A,Z,S,G); 'VALUE' Z,S,G; 'INTEGER' Z,S,G;
'ARRAY' A;
'BEGIN' 'INTEGER' I,J,K,L,NZ,R,ZS;
L:=0; ZS:=12; NZ:=ENTIER((S+0.5)/ZS); R:=S-NZ×ZS;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' Z 'DO'
'BEGIN' OUTPUT(1, '('/' '); L:=L+1;
'FOR' J:=0 'STEP' 1 'UNTIL' NZ-1 'DO'
'BEGIN'
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ZS 'DO'
OUTPUT(1, '('+2ZD.DDDBB')', A[I, 10×J+K] );
OUTPUT(1, '('/' ');
'END' K;
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO'
OUTPUT(1, '('+2ZD.DDDBB')', A[I, 10×NZ+K] );
'END' I;
'END' AUS;
'PROCEDURE' VAUS(V,Z,S,G); 'VALUE' Z,S,G; 'INTEGER' Z,S,G;
'ARRAY' V;
'BEGIN' 'INTEGER' I,K,L; L:=0;
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' Z 'DO'
'BEGIN' OUTPUT(1, '('/' '); L:=L+1;
'IF' L'EQUAL' G+1 'THEN'
'BEGIN' OUTPUT(1, '('/' '); L:=1; 'END';
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' S 'DO'
OUTPUT(1, '('+2ZD.DDDBB')', V[(I-1)×S+K] );
'END'; OUTPUT(1, '('/' ');
'END' VAUS;
'PROCEDURE' NULMAT(A,ZA,ZE,SA,SE);
'VALUE' ZA,ZE,SA,SE; 'INTEGER' ZA,ZE,SA,SE; 'ARRAY' A;
'BEGIN' 'INTEGER' I,K;
'FOR' I:=ZA 'STEP' 1 'UNTIL' ZE 'DO'
'FOR' K:=SA 'STEP' 1 'UNTIL' SE 'DO'
A[I,K]:=0;
'END' NULMAT;
```

```
'PROCEDURE' MULT(A,B,C,Z,SZ,S);
'VALUE' Z,SZ,S; 'INTEGER' Z,SZ,S; 'ARRAY' A,B,C;
'BEGIN' 'INTEGER' I,J,K; 'REAL' SUM;
'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'Z'DO' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'S'DO'
'BEGIN' SUM:=0;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'SZ'DO'
SUM:=SUM+A[I,J]×B[J,K]; C[I,K]:=SUM;
'END';
'END' MULT;
'PROCEDURE' MULTV(A,B,C,ZA,SA,NB,NC);
'VALUE'ZA,SA,NB,NC; 'INTEGER'ZA,SA,NB,NC; 'ARRAY'A,B,C;
'BEGIN' 'INTEGER' I,J,K; 'REAL'SUM;
'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'ZA'DO'
'BEGIN' SUM:=0;
'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'SA'DO'
SUM:=SUM+A[I,J]×B[NB-1+J]; C[NC-1+I]:=SUM;
'END' I;
'END' MULTV;
'PROCEDURE' MULATV(A,B,C,Z,SZ,S);
'VALUE' Z,SZ,S; 'INTEGER' Z,SZ,S; 'ARRAY' B,C;
'INTEGER' 'ARRAY' A;
'BEGIN' 'INTEGER' I,K,SP;
NULMAT(C,1,Z,1,S);
'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'SZ'DO'
'BEGIN' SP:=A[I];
'IF' SP'NOT EQUAL'0'THEN' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'S'DO'
C[SP,K]:=C[SP,K]+B[I,K];
'END'
'END' MULATV;
'PROCEDURE' MAMATV(A,AB,B,C,Z,SZ,S);
'VALUE' Z,SZ,S; 'INTEGER' Z,SZ,S; 'ARRAY' AB,B,C;
'INTEGER' 'ARRAY' A;
'BEGIN' 'INTEGER' I,K,SP;
NULMAT(C,1,Z,1,S);
'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'SZ'DO'
'BEGIN' SP:=A[I];
'IF' SP'NOT EQUAL'0'THEN' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'S'DO'
C[SP,K]:=C[SP,K]+B[I,K]×AB[I];
'END'
'END' MAMATV;
```

```
'PROCEDURE' PROKDR(A);
'ARRAY' A;
'BEGIN' 'REAL' X,Y;
'ARRAY' DK,DK1,E[1:10,1:10],WP[1:10,1:9],KD[1:7,1:10];
'INTEGER' I,J,K;
NULMAT(E,1,10,1,10);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'10'DO' E[I,I]:=1;
'COMMENT' VERTRAEGLICHKEIT, KADEL;
NULMAT(DK,1,10,1,10);
'FOR'J:=0,1,2 'DO'
'BEGIN'
X:=XY[J+1,1]; Y:=XY[J+1,2];
DK[3×J+1,1]:=DK[3×J+2,2]:=DK[3×J+3,3]:=1;
DK[3×J+1,2]:=DK[3×J+3,5]:=X;
DK[3×J+1,3]:=DK[3×J+2,5]:=Y;
DK[3×J+1,4]:=DK[3×J+3,8]:=X×X;
DK[3×J+1,5]:=X×Y;
DK[3×J+1,6]:=DK[3×J+2,9]:=Y×Y;
DK[3×J+1,7]:=X×X×X; DK[3×J+1,8]:=X×X×Y;
DK[3×J+1,9]:=X×Y×Y; DK[3×J+1,10]:=Y×Y×Y;
DK[3×J+2,4]:=2×X; DK[3×J+2,7]:=3×X×X;
DK[3×J+2,8]:=DK[3×J+3,9]:=2×X×Y;
DK[3×J+3,6]:=2×Y; DK[3×J+3,10]:=3×Y×Y;
'END';
J:=3; X:=0; Y:=0;
'FOR'K:=1,2,3'DO' 'BEGIN'X:=X+XY[K,1];Y:=Y+XY[K,2];'END';
X:=X/3; Y:=Y/3;
DK[3×J+1,1]:=1; DK[3×J+1,2]:=X; DK[3×J+1,3]:=Y;
DK[3×J+1,4]:=X×X; DK[3×J+1,5]:=X×Y;
DK[3×J+1,6]:=Y×Y; DK[3×J+1,7]:=X×X×X;
DK[3×J+1,8]:=X×X×Y; DK[3×J+1,9]:=X×Y×Y;
DK[3×J+1,10]:=Y×Y×Y;
ADIVB(E,DK,DK1,0.00001,SM1);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'7'DO'
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'10'DO' KD[I,K]:=DK1[I+3,K];
NULMAT(WP,1,9,1,9);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO' WP[I,I]:=1;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO'
'BEGIN'
```

```
K:=3*(I-1);
WP[10,K+1]:= 1/3;
WP[10,K+2]:= ( ZYK(I+1,1)+ZYK(I+2,1)-2*ZYK(I,1) )/18;
WP[10,K+3]:= ( ZYK(I+1,2)+ZYK(I+2,2)-2*ZYK(I,2) )/18;
'END';
MAMU(KD,WP,A);
'END' PROKDR;
READ(E1,E2,E3,E4);
ZF:=ZR:=0;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'P'DO'
'BEGIN'
'IF'E2[I,1]'EQUAL'1'THEN' ZR:=ZR+1;
'IF'E2[I,1]'EQUAL'-1'THEN' ZF:=ZF+1;
'IF'E2[I,2]'EQUAL'-1'THEN' ZF:=ZF+1;
'IF'E2[I,2]'EQUAL'1'THEN' 'BEGIN'ZF:=ZF+1;ZR:=ZR+1;'END';
'IF'E2[I,2]'EQUAL'-2'THEN' ZF:=ZF+2;
'IF'E2[I,2]'EQUAL'2'THEN' ZR:=ZR+2;
'END';
ZU:=3*P-ZF-ZR;
'COMMENT' BLOCK 3A;
'BEGIN'
'ARRAY' R,RR[1:ZR],KN[1:9,1:9],A[1:9,1:ZR];
'ARRAY' KDR[1:7,1:9]; 'ARRAY' BF,BR,BU[1:9*N];
'INTEGER' 'ARRAY' AF,AR,AU[1:9*N];
'INTEGER' I,J,K,L,Z,SP,SPF,SPR,SPU,BD2,ZB;
'REAL' Q,Q1,Q2;
'PROCEDURE' ARFU(A,B,SP,Q,Z);
'VALUE'Q,Z;'INTEGER'SP,Z;'REAL'Q;'INTEGER' 'ARRAY'A;'ARRAY'B;
'BEGIN'
'INTEGER' K,L,M; SP:=SP+1;
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO' 'FOR'L:=1,2,3'DO'
'IF'E4[K,L]'EQUAL'I'THEN'
'BEGIN'M:=( (K-1)*3+L-1 )*3+Z; A[M]:=SP; B[M]:=Q; 'END';
'END';
BD2:=2; ZB:=0;
OUTPUT(1,('( '/' ));
PRINT('('EINGABEWERTE'));
OUTPUT(1,('( '/'('P=')'ZZD,5B('N=')'ZZD,5B('MUE=')'D.3D)'),
P,N,MUE);
```

```
PRINT('('E1)');
AUS(E1,P,3,5);
PRINT('('E2)');
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'P'DO'
OUTPUT(1,'(/+5ZD,+5ZD)',E2[I,1],E2[I,2]);
PRINT('('E3)');
AUS(E3,P,4,5);
PRINT('('E4)');
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
OUTPUT(1,'(/5ZD,5ZD,5ZD)',E4[I,1],E4[I,2],E4[I,3]);
'COMMENT' BERECHNUNG VON AF,AR,AU,BF,BR,BU,RR ;
SPF:=SPR:=SPU:=0;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9xN'DO'
'BEGIN'
AF[I]:=AR[I]:=AU[I]:=BF[I]:=BR[I]:=BU[I]:=0;
'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'P'DO'
'BEGIN'
'IF' E2[I,1]'EQUAL'-1'THEN' ARFU(AF,BF,SPF,1,1)
'ELSE' 'IF' E2[I,1] 'EQUAL'1'THEN'
'BEGIN' ARFU(AR,BR,SPR,1,1); RR[SPR]:=E3[I,1] 'END'
'ELSE' ARFU(AU,BU,SPU,1,1); Z:=E2[I,2];
'IF' Z 'NOT EQUAL' -2 'AND' Z 'NOT EQUAL' 0 'THEN'
'BEGIN'
Q:=SQRT(E3[I,2]x E3[I,2]+E3[I,3]x E3[I,3]);
Q1:=E3[I,2]/Q; Q2:=E3[I,3]/Q;
'END';
'IF' ABS(Z) 'EQUAL' 1 'THEN'
'BEGIN'
ARFU(AF,BF,SPF,Q1,2); SPF:=SPF-1; ARFU(AF,BF,SPF,Q2,3);
'IF' Z 'EQUAL' -1 'THEN'
'BEGIN'
ARFU(AU,BU,SPU,-Q2,2); SPU:=SPU-1; ARFU(AU,BU,SPU,Q1,3);
'END'
'ELSE'
'BEGIN'
ARFU(AR,BR,SPR,-Q2,2); SPR:=SPR-1; ARFU(AR,BR,SPR,Q1,3);
RR[SPR]:=E3[I,4];
'END';
'END';
```

```
' IF 'Z' EQUAL '-2' THEN '  
' BEGIN '  
ARFU(AF,BF,SPF,1,2); ARFU(AF,BF,SPF,1,3);  
' END';  
' IF 'Z' EQUAL '2' THEN '  
' BEGIN '  
ARFU(AR,BR,SPR,1,2); RR [SPR ]:=E3 [I,2];  
ARFU(AR,BR,SPR,1,3); RR [SPR ]:=E3 [I,3];  
' END';  
' IF 'Z' EQUAL '0' THEN '  
' BEGIN '  
ARFU(AU,BU,SPU,1,2); ARFU(AU,BU,SPU,1,3);  
' END';  
' END';  
' COMMENT' BLOCK 4A BERECHNUNG VON KN;  
' BEGIN '  
' ARRAY' SM[1:9,1:9], H[1:3]; 'REAL' PST,E;  
' PROCEDURE' STEMAT(S);  
' ARRAY' S;  
' BEGIN '  
' INTEGER' I,J;  
' REAL' X1,X2,X3,X4,Y1,Y2,Y3,Y4,A,B,C,D,F,G,R,T,FAKT,SINB,COSB;  
' ARRAY' KT,TR,H[1:9,1:9];  
' FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 9 'DO' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 9 'DO'  
' BEGIN' S [I,J]:=0 'END';  
X1:=XY [1,1]; X2:=XY [2,1]; X3:=XY [3,1];  
Y1:=XY [1,2]; Y2:=XY [2,2]; Y3:=XY [3,2];  
X4:=(X2+X3)/2; Y4:=(Y2+Y3)/2;  
A:=SQRT((X2-X4)×(X2-X4)+(Y2-Y4)×(Y2-Y4));  
B:=SQRT((X1-X4)×(X1-X4)+(Y1-Y4)×(Y1-Y4));  
C:=3-5×MUE; D:=1-MUE; F:=2-5×MUE; G:=2-3×MUE;  
R:=1-2×MUE; T:=A/B; FAKT:=1/(4×B);  
S [1,1]:=4,8×T/B; S [2,2]:=B×(16×T+2×(1-3×MUE)/T);  
S [3,3]:=2×B×(3-MUE)×T;  
S [4,4]:=S [7,7]:=(12×T+(3×G)/T+3/(T×T×T))/B;  
S [5,5]:=S [8,8]:=B×(4×T+2×D/T);  
S [6,6]:=S [9,9]:=B×(3×T×T×T+F×T+4/T); S [2,1]:=24×T;  
S [4,1]:=S [7,1]:=-24×T/B; S [5,1]:=S [8,1]:=12×T;
```

```
S[6,1]:=-12×T×T; S[4,2]:=S[7,2]:=-12×T;
S[9,1]:=12×T×T; S[5,2]:=S[8,2]:=B×(4×T-(1-3×MUE)/T);
S[6,2]:=B×(-6×T×T+D); S[9,2]:=B×(6×T×T-D);
S[4,3]:=6×D; S[5,3]:=-B×C; S[6,3]:=S[9,3]:=B×C×T;
S[7,3]:=-6×D; S[8,3]:=B×C; S[5,4]:=S[8,7]:=-6×T-3×D/T;
S[6,4]:=6×T×T+3/(T×T)+3×R; S[8,4]:=S[7,5]:=-6×T+3×D/T;
S[7,4]:= (12×T-3×G/T-3/(T×T×T))/B; S[6,5]:=B×(-3×T×T+MUE-2);
S[9,4]:=-6×T×T+3×R+3/(T×T); S[8,5]:=B×(4×T-(1+MUE)/T);
S[9,5]:=B×(3×T×T-1); S[7,6]:=-6×T×T-3/(T×T)-3×R;
S[8,6]:=B×(1-3×T×T); S[9,6]:=B×(-3×T×T+T×R+2/T);
S[9,7]:=-6×T×T-3×R-3/(T×T); S[9,8]:=B×(3×T×T+2-MUE);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'8'DO' 'FOR'J:=I+1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
'BEGIN' S[I,J]:=S[J,I] 'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO' 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
'BEGIN' S[I,J]:=S[I,J]×FAKT 'END';
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO' 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
'BEGIN' KT[I,J]:=0 'END';
KT[1,1]:=KT[4,4]:=KT[7,7]:=KT[2,3]:=KT[5,6]:=KT[8,9]:=1;
KT[3,2]:=KT[6,5]:=KT[9,8]:=-1;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO' 'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
'BEGIN' TR[I,J]:=0 'END';
SINB:=(X1-X4)/B; COSB:=(Y4-Y1)/B;
TR[1,1]:=TR[4,4]:=TR[7,7]:=1;
TR[3,2]:=TR[6,5]:=TR[9,8]:=SINB;
TR[2,3]:=TR[5,6]:=TR[8,9]:=-SINB;
TR[2,2]:=TR[3,3]:=TR[5,5]:=
TR[6,6]:=TR[8,8]:=TR[9,9]:=COSB;
MAMU(S,KT,H); MAMUAT(KT,H,S); MAMU(TR,S,H); MAMUBT(H,TR,S);
'END' STEMAT;
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
'FOR'I:=1,2,3'DO'
'BEGIN'
'FOR'K:=1,2'DO' XY[I,K]:=E1[E4[L,I],K];
H[I]:=E1[E4[L,I],3];
'END';
PST:=0;
'FOR'I:=1,2,3'DO'PST:=PST+H[I]×H[I]×H[I]/3;
E:=12×(1-MUE×MUE); PST:=PST×E/(12×(1-MUE×MUE));
```

```
STEMAT(SM);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
KN[I,K]:=SM[I,K]xPST;
PUT(1,L,KN);
'END';
'END' BLOCK 4A;
OUTPUT(1,('/'('ZEIT NACH BLOCK 4A')'4ZDB'('SEC')'),' ,TIME+0);
'COMMENT' BLOCK 4B BERECHNUNG VON A ;
'BEGIN'
'ARRAY' C[1:ZU,1:ZU], MAT3[1:ZU,1:ZR];
'COMMENT' BLOCK 5A ;
'BEGIN'
'ARRAY' MAT2[1:ZU,1:9];
NULMAT(C,1,ZU,1,ZU); NULMAT(MAT3,1,ZU,1,ZR);
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
GET(1,L,KN); NULMAT(MAT2,1,ZU,1,9);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
'BEGIN'
Z:=AU[(L-1)x9+I] ;
'IF'Z'NOT EQUAL'0'THEN' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
MAT2[Z,K]:=MAT2[Z,K]+KN[I,K]xBU[(L-1)x9+I] ;
'END' I;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
'BEGIN'
SP:=AU[(L-1)x9+I] ;
'IF'SP'NOT EQUAL'0'THEN' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'ZU'DO'
C[K,SP]:=C[K,SP]+MAT2[K,I]xBU[(L-1)x9+I] ;
SP:=AR[(L-1)x9+I] ;
'IF'SP'NOT EQUAL'0'THEN' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'ZU'DO'
MAT3[K,SP]:=MAT3[K,SP]+MAT2[K,I]xBR[(L-1)x9+I] ;
'END' I;
'END' L;
PRINT(('C'));
AUS(C,ZU,ZU,ZU);
BANINV(C,0.001,SM2);
PRINT(('C'));
AUS(C,ZU,ZU,ZU);
```

```
'END' BLOCK 5A ;
'COMMENT' BLOCK 5B ;
'BEGIN'
'ARRAY' MAT4[1:ZU,1:ZR];
NOTAPE(M2);
MULT(C,MAT3,MAT4,ZU,ZU,ZR);
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
NULMAT(A,1,9,1,ZR);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
'BEGIN'
Z:=AU[(L-1)×9+I];
'IF'Z'NOT EQUAL'O'THEN' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'ZR'DO'
A[I,K]:=-BU[(L-1)×9+I]×MAT4[Z,K]; Z:=AR[(L-1)×9+I];
'IF'Z'NOT EQUAL'O'THEN'A[I,Z]:=A[I,Z]+BR[(L-1)×9+I];
'END' I;
'GO TO' M3;
M2: BD2:=1; ZB:=N; PRINT('('BAND 2 NICHT VERFUEGBAR')');
M3:
PUT(BD2,L+ZB,A);
'END' L;
'END' BLOCK 5B ;
'END' BLOCK 4B ;
'COMMENT' BLOCK 4C BERECHNUNG VON KSR,KR,V,S ;
'BEGIN'
'ARRAY' KSR[1:9,1:ZR], KR[1:ZR,1:ZR];
PREPARE(1,1);
PREPARE(BD2,1);
NULMAT(KR,1,ZR,1,ZR);
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
GET(1,L,KN); GET(BD2,L+ZB,A);
MULT(KN,A,KSR,9,9,ZR);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO'
'BEGIN'
SP:=AR[(L-1)×9+I];
'IF'SP'NOT EQUAL'O'THEN' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'ZR'DO'
KR[SP,K]:=KR[SP,K]+BR[(L-1)×9+I]×KSR[I,K];
'END' I;
'END' L;
```

```
PRINT('('KR')');
AUS(KR,ZR,ZR,ZR);
PREPARE(1,1); PREPARE(BD2,1);
BANINV(KR,0.001,SM3);
MULTV(KR,RR,R,ZR,ZR,1,1);
PRINT('('LASTVERSCHIEBUNGEN R')');
VAUS(R,ZR,1,5);
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
GET(1,L,KN); GET(BD2,L+ZB,A);
MULTV(A,R,V,9,ZR,1,(L-1)×9+1);
MULTV(KN,V,S,9,9,(L-1)×9+1,(L-1)×9+1);
'END' L;
PRINT('('VERSCHIEBUNGEN V')');
VAUS(V,N,9,N);
PRINT('('ECKGROESSEN S')');
VAUS(S,N,9,5);
'END' BLOCK 4C ;
'END' BLOCK 3A ;
'COMMENT' BLOCK 3B ;
'BEGIN'
'ARRAY' MQ[1:3×N,1:5], MQP[1:P,1:5];
'ARRAY' KDR[1:7,1:9];
'INTEGER' I,J,K,L,Z,SP,ZSL,SPMAX; 'REAL' Q,Q1,Q2;
'COMMENT' BLOCK 4D BERECHNUNG VON MQ ;
'BEGIN'
'ARRAY' VE[1:9,1:1], MQE[1:15,1:1],
      MC[1:15,1:7], MD[1:15,1:9];
'REAL' X,Y;
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'9'DO' VE[K,1]:=V[(L-1)×9+K];
'FOR'I:=1,2,3'DO' 'FOR'K:=1,2'DO'XY[I,K]:=E1[E4[L,I],K];
NULMAT(MC,1,15,1,7);
'FOR'I:=1,2,3'DO'
'BEGIN'
K:=5×(I-1); X:=ZYK(I,1); Y:=ZYK(I,2);
MC[K+1,4]:=MC[K+2,7]:=-6; MC[K+1,6]:=MC[K+2,5]:=-2;
MC[K+3,1]:=MC[K+4,3]:=-2;
```

```
MC[K+3,3]:=MC[K+4,1]:=-2×MUE;
MC[K+3,4]:=-6×X; MC[K+3,5]:=-2×Y; MC[K+3,6]:=-2×MUE×X;
MC[K+3,7]:=-6×MUE×Y; MC[K+4,4]:=-6×MUE×X;
MC[K+4,6]:=-2×X; MC[K+4,5]:=-2×MUE×Y; MC[K+4,7]:=-6×Y;
MC[K+5,2]:=-1+MUE; MC[K+5,5]:=-2×(1-MUE)×X;
MC[K+5,6]:=-2×(1-MUE)×Y;
'END' ;
PROKDR(KDR);
MAMU(MC,KDR,MD); MAMU(MD,VE,MQE);
'FOR'I:=1,2,3'DO' 'FOR'K:=1,2,3,4,5'DO'
MQ[(L-1)×3+I,K]:=MQE[(I-1)×5+K,1];
'END' ;
'END' BLOCK 4D ;
'COMMENT' BLOCK 4E BERECHNUNG VON MQP ;
'COMMENT' BERECHNUNG DER DURCHSCHNITTMATRIX DUM ;
'BEGIN'
'INTEGER' 'ARRAY' DUM[1:3×N]; 'ARRAY' DUMQ[1:3×N];
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO' 'FOR'K:=1,2,3'DO'
DUM[(I-1)×3+K]:=E4[I,K];
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'P'DO'
'BEGIN'
Q:=0;
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'3×N'DO' 'IF'DUM[K]'EQUAL'I'THEN'Q:=Q+1;
Q:=1/Q;
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'3×N'DO' 'IF'DUM[K]'EQUAL'I'THEN'
DUMQ[K]:=Q;
'END' ;
MAMATV(DUM,DUMQ,MQ,MQP,P,3×N,5);
'END' BLOCK 4E ;
'COMMENT' BERUECKSICHTIGUNG DER SYMMETRIE ;
READ(ZSL,SPMAX);
PRINT('('EINGABE DER SYMMETRIEEIGENSCHAFTEN)');
PRINT('(' ZSL SPMAX ')');
PRINT(ZSL,SPMAX);
'COMMENT' BLOCK 4F BERUECKSICHTIGUNG DER SYMMETRIE - MQPM ;
'IF'ZSL'NOT EQUAL'0'THEN'
'BEGIN'
'ARRAY' SAX[1:ZSL,1:2], MQPM[1:P,1:5];
'ARRAY' VN,VT[1:5], TR[1:5,1:5];
```

```
'INTEGER' 'ARRAY' ZSP[1:ZSL,1:2], NSP[1:ZSL,1:SPMAX];
'REAL' X,Y,L2,S2,C2,A,SC;
READ(ZSP);
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ZSL 'DO'
'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ZSP[I,1] 'DO'
READ(NSP[I,K]); READ(SAX);
PRINT('('ZSP)'); PRINT(ZSP);
PRINT('('NSP)'); PRINT(NSP);
PRINT('('SAX)'); AUS(SAX,ZSL,2,5);
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' P 'DO' 'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 5 'DO'
MQPM[I,K]:=MQP[I,K];
'FOR' L:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ZSL 'DO'
'BEGIN'
X:=SAX[L,1]; Y:=SAX[L,2]; L2:=X×X+Y×Y;
C2:=X×X/L2; S2:=Y×Y/L2; SC:=X×Y/L2; A:=SC×(C2-S2);
NULMAT(TR,1,5,1,5);
TR[1,2]:=TR[2,1]:=SC; TR[1,1]:=C2; TR[2,2]:=S2;
TR[3,3]:=TR[4,4]:=C2×C2+S2×S2;
TR[3,4]:=TR[4,3]:=2×SC×SC; TR[3,5]:=2×A;
TR[5,3]:=A; TR[4,5]:=-2×A;
TR[5,4]:=-A; TR[5,5]:=4×SC×SC;
'IF' ZSP[L,2] 'EQUAL' 2 'THEN'
'BEGIN'
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 5 'DO' 'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 5 'DO'
TR[I,K]:=-TR[I,K];
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 5 'DO'
TR[I,I]:=TR[I,I]+1;
'END' ;
'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' ZSP[L,1] 'DO'
'BEGIN'
Z:=NSP[L,J];
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 5 'DO' VN[I]:=MQPM[Z,I];
MULTV(TR,VN,VT,5,5,1,1);
'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 5 'DO' MQPM[Z,I]:=VT[I];
'END' ;
'END' ;
PRINT('('MQPM AUS SYMMETRIEGRUENDEN GEMITTELTE M-Q-GROESSEN)');
PRINT('(' QX QY MX MY MXY ')');
AUS(MQPM,P,5,5);
'END' BLOCK 4F ;
```

```
'COMMENT' BLOCK 4G VERSCHIEBUNGEN DER EINZELPUNKTE ;
'BEGIN'
'ARRAY' VP[1:P,1:3];
'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'P'DO'
'BEGIN'
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO'
'IF'E4[I,K]'EQUAL'L'THEN'
'BEGIN'
'FOR'J:=1,2,3'DO' VP[L,J]:=V[(I-1)×9+(K-1)×3+J];
'GO TO' M1;
'END' ;
M1: 'END' ;
PRINT('('VP VERSCHIEBUNGEN DER PUNKTE ')');
PRINT('(' W PHI-X PHI-Y ')');
AUS(VP,P,3,5);
'END' BLOCK 4G ;
PRINT('(' MQ SCHNITTGROESSEN IN DEN ELEMENTECKEN ')');
PRINT('(' QX QY MX MY MXY ')');
AUS(MQ,3×N,5,3);
PRINT('('MQP SCHNITTGROESSEN IN DEN PUNKTEN ')');
PRINT('(' QX QY MX MY MXY')');
AUS(MQP,P,5,5);
'COMMENT' VORLAEUFIGES ENDE ;
'END' BLOCK 3B ;
'END' BLOCK 2 ;
'GO TO' ENDE ;
SM1: PRINT('('DK IST SINGULAER')'); 'GO TO' ENDE;
SM2: PRINT('('C IST SINGULAER')'); 'GO TO' ENDE;
SM3: PRINT('('KR IST SINGULAER')'); 'GO TO' ENDE;
ENDE: 'END' ;
```

Der Datensatz muß in der angegebenen Reihenfolge nachstehende Angaben enthalten.

1.Karte:

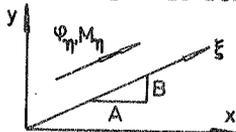
Anzahl der Punkte, Anzahl der Elemente, Querdehnungszahl MUE

weitere Karten:

Daten der Eingabematrizen E1, E2, E3, E4, Symmetrieeigenschaften.

- E1[1:P,1:3] jede Zeile enthält X_i, Y_i, H_i
 X_i, Y_i Koordinaten des Punktes i
 H_i Plattendicke im Punkt i
- E2[1:P,1:2] jede Zeile enthält α_i, β_i
 α_i Vertikalziffer für den Punkt i
 $\alpha_i=0$ keine Belastung oder Festhaltung
 $\alpha_i=-1$ Festhaltung
 $\alpha_i=+1$ vertikale Belastung
 β_i Drehziffer für den Punkt i
 $\beta_i=0$ keine Belastung oder Festhaltung
 $\beta_i=-1$ Festhaltung in einer Richtung, keine Belastung um die festgehaltene Achsrichtung
 $\beta_i=+1$ Festhaltung in einer Richtung, Belastung um die festgehaltene Achse
 $\beta_i=-2$ Festhaltung in zwei beliebigen Richtungen
 $\beta_i=+2$ Belastung in zwei Richtungen, M_x und M_y
- E3[1:P,1:4] jede Zeile enthält P, A, B, C
P Vertikalbelastung, ignoriert bei $\alpha=0$ und $\alpha=-1$
A, B sind die x- bzw. y-Komponenten des festgehaltenen Achsvektors
C Momentenbelastung um die durch A, B festgehaltene Achse
Es gilt:
 $\beta=0, \beta=-2$: A, B werden ignoriert
 $\beta=\pm 1$: A, B sind die x- bzw. y-Komponenten des festgehaltenen Achsvektors
 $\beta=+2$: $A = M_x, B = M_y$
 $\beta=0, -1, \pm 2$: C wird ignoriert
 $\beta=+1$: $C = M_\eta$ Momentenbelastung um die durch A, B festgelegte Achse

Anmerkung: Die festgehaltene Achse sei mit ξ bezeichnet, dann sind die zugehörigen Verdrehungen φ_η und M_η ; sie zeigen in die ξ -Achsenrichtung.



EL[1:N,1:3] jede Zeile enthält P_1, P_2, P_3
 P_1, P_2, P_3 sind die Nummern der Eckpunkte eines
Elements in mathematisch positiver Reihenfolge

ZSL Zahl der Symmetrielinien

SPMAX Maximalzahl von Punkten auf einer der Symmetrie-
linien

ZSP[1:ZSL,1:2] jede Zeile enthält γ_i, ε_i
 γ_i Zahl der Punkte auf der Symmetrieli-
nie i
 ε_i Symmetrieziffer
 $\varepsilon_i = 1$ Symmetrie
 $\varepsilon_i = 2$ Antimetrie

NSP[1:ZSL,1:SPMAX] Diese Matrix gibt die Nummern der Punkte
auf den einzelnen Symmetrielinien an. Sie
ist eventuell nicht voll besetzt, da nicht
jede Zeile SPMAX erreicht.

SAX[1:ZSL,1:2] jede Zeile enthält A,B
A ist die x-Komponente des Symmetrievektors
B ist die y-Komponente des Symmetrievektors

Das Programm liest mit Hilfe von γ_i aus ZSP
ein.

Anhang

Es werden die im 3. Kapitel aufgestellten vier Steifigkeitsmatrizen für das Rechteck- und das gleichschenklige Dreieckelement für das Scheiben- und das Plattenproblem explizit angegeben. Es ist natürlich ohne weiteres möglich, die Steifigkeitsmatrizen für das Scheiben- und Plattenproblem zu einer Matrix zusammenzufassen. Das ist für die Berechnung von Schalen angebracht, jedoch für das behandelte Anwendungsbeispiel ungeeignet. Daher sind hier die Matrizen für beide Probleme getrennt angegeben.

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß die für eine ausgezeichnete Lage des Modells aufgestellten Steifigkeitsmatrizen mit Hilfe einer Matrix [T] transformiert werden können, sodaß sie für jede in der Ebene beliebig gedrehte Lage angewend-

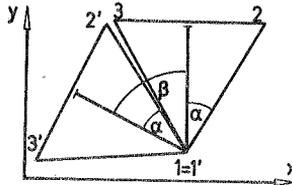


Abb. I

bar sind. Die Transformationsmatrix [T] gibt dabei die Drehung des Elements in der Ebene um den Winkel β an (Abb. I). Für das Dreieck lautet sie:

$$[T] = \begin{bmatrix} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ \hline 0 & \sin\beta & \cos\beta \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ \hline 0 & \sin\beta & \cos\beta \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ \hline 0 & \sin\beta & \cos\beta \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ \hline 0 & \sin\beta & \cos\beta \\ \hline \end{array} \end{bmatrix}$$

Zu der gesuchten Steifigkeitsmatrix für die gedrehte Lage kommt

man durch folgende Überlegung (Abb.II) :

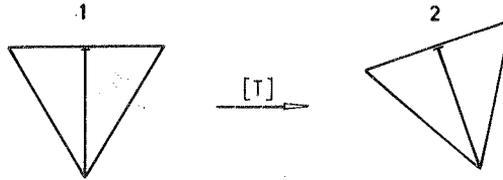


Abb.II

Für die Lage 1 gilt:

$$(1a) \quad \mathbf{f}_1 = [K_1] \mathbf{d}_1$$

Für die Lage 2 gilt:

$$(1b) \quad \mathbf{f}_2 = [K_2] \mathbf{d}_2$$

Bei der Drehung werden die Last- und Deformationsvektoren \mathbf{f}_1 und \mathbf{d}_1 in

$$(2) \quad \mathbf{f}_2 = [T] \mathbf{f}_1$$

$$(3) \quad \mathbf{d}_2 = [T] \mathbf{d}_1$$

transformiert. Setzt man in Gleichung (2) die Gleichung (1a) und (3) ein, so ergibt sich:

$$(4) \quad \mathbf{f}_2 = [T][K_1][T^{-1}] \mathbf{d}_2$$

Da $[T]$ eine Orthogonalmatrix ist, gilt $[T^{-1}] = [T]^t$, wobei $[T]^t$ die Transponierte zu $[T]$ ist. Aus dem Vergleich mit (1b) folgt damit die Steifigkeitsmatrix $[K_2]$ für das gedrehte Dreieckelement:

$$(5) \quad [K_2] = [T][K_1][T]^t$$

(II) STEIFIGKEITSMATRIX für das gleichschenkelige Dreieckelement (SCHEIBENPROBLEM)

\bar{N}_{xA}	$rt + 2c$	$rc + 2t$	$rt + 2c$	$rc + 2t$	$4rt$	$8t$	\bar{u}_A
\bar{N}_{yA}	$-s$	$rc + 2t$	$rc + 2t$	$rc + 2t$	$4rt$	0	\bar{v}_A
\bar{N}_{xB}	$rt - 2c$	$-q$	$rt + 2c$	$rc + 2t$	$4rt$	0	\bar{u}_B
\bar{N}_{yB}	q	$-c + 2t$	s	$rc + 2t$	$4rt$	0	\bar{v}_B
\bar{N}_{xC}	$-2rt$	$2r$	$-2rt$	$-2r$	$4rt$	0	\bar{u}_C
\bar{N}_{yC}	$4v$	$-4t$	$-4v$	$-4t$	0	$8t$	\bar{v}_C

$\frac{p}{8(1-\nu^2)}$

symmetrisch

$$p = \frac{a}{h}$$

$$\bar{N} = \frac{Na}{Eh^3}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{a}$$

$$\bar{v} = \frac{v}{a}$$

$$t = \tan \alpha$$

$$c = \cot \alpha$$

$$q = 1 - 3\nu$$

$$r = 1 - \nu$$

$$s = 1 + \nu$$

Lebenslauf

- 1.5.1938 geboren in Trautenau/Sudeten als Sohn des Landwirts Franz Flegel und seiner Ehefrau Hilda geb.Exner
- 1946 - 1951 Besuch der Volksschule in Roth, Kreis Biedenkopf
- 1951 - 1958 Besuch des Hohenstaufen-Gymnasiums in Göppingen
- 1.3.1958 Abitur
- 1958 - 1964 Studium der Mathematik an der Technischen Hochschule Stuttgart
- 17.12.1963 Diplom-Hauptprüfung in Mathematik
- seit 1964 Wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut A der TH Stuttgart (Lehrstuhl von Prof. Dr.F.Lösch)
- seit Juni 1965 verheiratet mit Margarete geb.Wagner
- Akademische Lehrer O.Baier, E.Beck, F.W.Bornscheuer, H.Brauner, U.Dehlinger, H.Ehrmann, D.Gaier, E.Henze, H.Kneser, W.Knödel, F.Leonhardt, F.Lösch, K.Magnus, W.Meyer-König, W.Pelikan, F.Pfeiffer, E.Pflanz, G.Schulz, E.Stein, H.Wagner, A.Vogel