

Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen

von

Norbert Büchter



8

29.7.94

Bericht Nr. 14 (1992)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.-Ing. E. Ramm
Stuttgart 1992

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, Postfach 80 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität Stuttgart
zur Erlangung der Würde eines Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.)
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Norbert Büchter

aus Emsdetten

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. H. Bufler

Prof. Dr.-Ing. Y. Başar

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Februar 1992

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1992

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß finite Schalenelemente, die durch Degeneration 3-dimensionalen Körpererelemente entstehen, gleichwertig sind mit finiten Elementen, die auf einer Schalentheorie basieren. Diese Schalentheorie benutzt als einzige Annahme ein linear über die Schalendicke veränderliches Verschiebungsfeld und ist für große Deformationen gültig. Verschiedene Versionen vorab (explizit) in Dickenrichtung integrierter, degenerierter Elemente werden hinsichtlich der Schalentheorie eingeordnet. Es kann festgestellt werden, daß der prinzipielle Unterschied der beiden Methoden in der Art der Interpolation des Differenzvektors zwischen den Schalendirektoren der verformten und der unverformten Konfiguration liegt.

Diese Interpolation hat zur Folge, daß sich die Verwendung von Biot-Spannungen und Ingenieurverzerrungen im Vergleich zu den üblicherweise gewählten Piola-Kirchhoff-Spannungen 2. Art und Green-Lagrange-Verzerrungen für "degenerierte" Elemente nicht empfiehlt.

Unterschiedliche Möglichkeiten, um endliche Rotationen zu beschreiben, werden diskutiert und ein aus der Literatur bekannter singularitätenfreier Algorithmus auf alternative Weise hergeleitet.

Zur Berechnung von Schalen mit Knicken – also Faltenwerken oder Schalen mit Verzweigungen – wird ein finites "degeneriertes" Schalenelement vorgestellt, das wahlweise mit 2 oder 3 Rotationsfreiheitsgraden arbeiten kann.

Den Schluß der Arbeit bilden Traglast- und Stabilitätsberechnungen mit "degenerierten" Elementen an Zylinder- und Kegelschalen unter konzentrierter Beanspruchung. Sie dienen der Überprüfung der Richtlinien zur Bemessung im Hinblick auf Sicherheit und Wirtschaftlichkeit.

Abstract

It is shown that finite shell elements derived directly from a 3-dimensional continuum element are equivalent to elements based on a shell theory. This shell theory uses only the assumption of a linearly varying displacement field in thickness direction and is valid for arbitrarily large deformations. Different versions of pre-integrated (explicitly integrated) degenerated elements are classified with respect to the related shell theory. It can be stated that the two methods differ in the kind of interpolation of the difference-vector between the shell directors of the deformed and undeformed configuration.

Due to this interpolation it is advantageous for degenerated elements to use Green-Lagrange strains and Piola-Kirchhoff stresses rather than engineering strains and Biot stresses.

Different possibilities to describe finite rotations are discussed and an alternative way is shown to derive a singularity free algorithm.

A degenerated finite element with 2 or 3 rotational degrees of freedom is presented which is suited for shells with intersections and folded shells.

Finally buckling and ultimate load analyses are carried out for cylindrical and conical shells under concentrated loading. The purpose of the parametric study is to check codes with respect to reliability and efficiency.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart. Sie ist wesentlich gefördert worden durch Herrn Professor Ramm. Über sein und über das Interesse der Mitberichter – Herrn Professor Bufler und Herrn Professor Başar – an der Arbeit habe ich mich sehr gefreut. Ihnen, den Institutsmitgliedern und allen, die mir in den letzten Jahren menschlich und fachlich zur Seite gestanden haben, möchte ich an dieser Stelle besonders danken.

Norbert Büchter

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung	17
1.1 Motivation – Stand der Forschung	17
1.2 Ziele dieser Arbeit	20
1.3 Übersicht	21
2 Grundgleichungen des dreidimensionalen, nicht polaren Kontinuums ...	22
2.1 Geometrie und Kinematik	22
2.2 Spannungstensoren	24
2.3 Massenerhaltung	26
2.4 Impulssatz	26
2.5 Drallsatz	27
2.6 Energiesatz	27
2.7 Energetisch konjugierte Spannungs- und Verzerrungstensoren	28
2.8 Prinzip der virtuellen Verschiebungen	29
2.9 Materialgleichungen	30
2.9.1 Hyperelastizität	30
2.9.2 Lineare, isotrope Materialgesetze	31
3 Grundgleichungen nichtlinearer Schalentheorien	32
3.1 Geometrie und Kinematik der Schale	33
3.2 Schnittgrößen der Schale	38
3.2.1 Cauchy-Schnittgrößen	38
3.2.2 Piola-Kirchhoff-Schnittgrößen 1. Art	39
3.2.3 Piola-Kirchhoff-Schnittgrößen 2. Art	40
3.2.4 Biot-Schnittgrößen	41
3.3 Verzerrungsmaße der Schale	42
3.3.1 Verzerrungsmaße basierend auf Green-Lagrange-Verzerrungen	42
3.3.2 Verzerrungsmaße basierend auf Ingenieurverzerrungen	43
3.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für die Schale	44
3.4.1 Innere virtuelle Arbeit	44
3.4.2 Äußere virtuelle Arbeit der Flächen- und Randlasten	46
3.5 Das linearisierte Werkstoffgesetz der Schale	48
3.6 Anmerkungen zur Parametrisierung	49

3.7	Auswirkungen zusätzlicher Annahmen zur Vereinfachung der Schalengleichungen	50
3.7.1	Theorie basierend auf Green–Lagrange–Verzerrungsmaßen ...	50
3.7.2	Theorie basierend auf Ingenieurverzerrungsmaßen	55
4	Das Degenerationskonzept und dessen Vergleich mit der Schalentheorie	59
4.1	Entstehung des Konzeptes	59
4.2	Degenerierte Elemente mit kontinuumstypischer (impliziter) Dickenintegration	60
4.2.1	Grundsätzliche Vorgehensweise	60
4.2.2	Auswirkungen der Wahl des Verzerrungsmaßes	62
4.3	Degenerierte Elemente mit expliziter Integration basierend auf Green–Lagrange–Verzerrungen	63
4.3.1	Gründe für die Entwicklung der expliziten Integration	63
4.3.2	Explizite Integration nach Zienkiewicz, Taylor und Too	65
4.3.3	Explizite Integration nach Milford und Schnobrich	68
4.3.4	Explizite Integration nach Irons	69
4.3.5	Explizite Integration nach Stanley	69
4.3.6	Schlußfolgerungen	70
4.4	Vergleich der Diskretisierung	70
4.4.1	Schalentheorie	70
4.4.2	Degenerationskonzept	71
4.4.3	Schlußfolgerungen	72
4.5	Degenerierte Elemente mit expliziter Integration basierend auf Ingenieurverzerrungen	72
4.6	Numerische Beispiele	74
4.6.1	Einleitende Bemerkungen	74
4.6.2	Kragarm mit Endmoment	75
4.6.3	Einhäufiger Rahmen ("Lee–Frame")	77
4.6.4	Unsymmetrisch gelagerter Bogen	79
4.6.5	"Twisted Beam"	80
4.6.6	Viertelbogen mit Einzellast	80
4.7	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	81
5	Möglichkeiten zur Wahl unabhängiger Rotationsparameter	83
5.1	Rotationstensor und Rotationsvektoren	83

5.1.1	Allgemeine Anmerkungen	83
5.1.2	Formulierungen basierend auf einem Rotationsvektor	85
5.1.3	Berechnung zweier aufeinander folgender Rotationen	86
5.2	Elementarrotationen	88
5.2.1	Rotation um feste und um mitrotierende Achsen	88
5.2.2	Formulierungen basierend auf Elementarrotationen	89
5.3	Große Rotationen bei Schalen und Balken – Singularitäten	90
5.4	Behandlung endlicher Rotationen im Newton–Verfahren	93
5.4.1	Allgemeine Bemerkungen	93
5.4.2	Herleitung eines numerisch stabilen Algorithmus nach Simo & Vu Quoc	94
5.4.3	Herleitung desselben Algorithmus auf anderem Weg	96
6	Ein degeneriertes Schalenelement mit 2 oder 3 Rotationsfreiheitsgraden	100
6.1	Grundgleichungen des Elementes	101
6.1.1	Verzerrungsgleichungen	101
6.1.2	Lineares Materialgesetz und Kondensation	101
6.1.3	Schnittgrößen und deren konstitutive Beziehungen	102
6.1.4	Prinzip der virtuellen Verschiebungen	103
6.2	Diskretisierung und Linearisierung	103
6.3	„Assumed strain“-Methode	107
6.3.1	4-Knoten-Element	108
6.3.2	9-Knoten-Element	108
6.4	Möglichkeiten zur Berechnung von Schalen mit Knicken	110
6.4.1	Knickstellen mit unterschiedlichen Schalendirektoren	111
6.4.2	Knickstelle mit einem gemeinsamen Schalendirektor	112
6.5	Behandlung des dritten Rotationsfreiheitsgrads an Stellen ohne Knick	113
6.6	Besonderheiten für 2 Rotationsfreiheitsgrade am Knoten beim multiplikativen Rotations-„update“	115
6.7	Numerische Beispiele	116
6.7.1	Kragarm mit Endmoment	116
6.7.2	Kragscheibe	118
6.7.3	Halbkugel-Schale mit 18° Loch unter Einzellasten	121
6.7.4	Hyparschale von Ding und Başar	127
6.7.5	Ringplatte von Basar und Ding	129

7 Stabilitäts- und Traglastberechnungen von Zylinder- und Kegelschalen bei konzentrierten Beanspruchungen	131
7.1 Allgemeine Bemerkungen zur Berechnung	131
7.2 Kreiszyylinder unter lokalen Belastungen	132
7.2.1 Einleitende Bemerkungen	132
7.2.2 Kreiszyylinder unter lokalen, axialen Randlasten	132
7.2.3 Kreiszyylinder unter radialem, rotationssymmetrischem Ringaußendruck	135
7.2.4 Kreiszyylinder unter Teilaußendruck	137
7.2.5 Zusammenfassung	141
7.3 Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen an Kegelschalen	141
7.3.1 Parameterstudie an flüssigkeitgefüllten Kegelschalen	141
7.3.2 Versuchsnachrechnung der quecksilbergefüllten Kegelschalen von Vandepitte	146
8 Zusammenfassung und Ausblick	152
8.1 Zusammenfassung	152
8.2 Ausblick	154
9 Anhang 1	155
9.1 Größenordnungsabschätzungen bei Schalen	155
9.1.1 Abschätzungen für geometrische Größen der undefor mierten Schale	155
9.1.2 Abschätzung für geometrische Größen der deformierten Schale	156
9.1.3 Abschätzungen für kinematische Größen	157
9.2 Definition einer mathematischen Gruppe	160
9.3 Beweis der Gleichung (5.25)	161
9.4 Ableitungen von "Rotationsgrößen" nach einem Parameter	162
10 Anhang 2: Schreibweise und einige Rechenregeln	165
10.1 Symbole	165
10.2 Multiplikationen	165
10.3 Ableitungen	167
10.4 Einige Formeln zur Vektor-, Matrizen- und Tensorrechnung	168
11 Literatur	170

Symbolverzeichnis

Symbolverzeichnis für Kapitel 1 – 6 und den Anhang

- $\overline{(\cdot)}$ Größe der verformten Schalengeometrie
- $(\cdot)_{,i}$ partielle Ableitung nach θ^i
- $(\cdot)_{|i}$ kovariante Ableitung nach θ^i bzgl. \mathbf{a}_i
- $(\cdot)_{,x}$ Ableitung nach dem Vektor \mathbf{x}
- $(\cdot)_{;r}$ $(\cdot)_{;r} = (\cdot)_{,x} \mathbf{Z}$
- $(\dot{\cdot})$ Zeitableitung
- $(\cdot)'$ Ableitung nach den Knotenvariablen \mathbf{a}
- $(\cdot)|_{s=0}$ Auswertung von (\cdot) an der Stelle $s=0$
- $\|(\cdot)\|$ spektrale Norm von (\cdot)
- $\hat{(\cdot)}$ "Dach" auf einem Vektor entspricht der schiefsymmetrischen Matrix mit diesem Vektor als axialem Vektor. Bei anderen Größen hat das "Dach" keine besondere Bedeutung, es dient dann lediglich zur Unterscheidung von anderen Größen

- \mathbf{a} Vektor der Knotenvariablen
- \mathbf{a}_i zu den krummlinigen Koordinaten gehörige, kovariante Vektorbasis des unverformten bzw. verformten Schalenraums
- \mathbf{a}^i zu den krummlinigen Koordinaten gehörige, kontravariante Vektorbasis an der Stelle $\theta^3 = 0$ oder Vektor der Knotenvariablen im Iterationsschritt i .
- $\tilde{\mathbf{a}}_i$ $\tilde{\mathbf{a}}_i = \mathbf{R}_C \mathbf{a}_i$
- A Fläche, Schalenmittelfläche
- A_R Fläche eines Schnitts durch die Schalen sowie des Schalenrand selbst
- α Skalar mit unterschiedlicher Bedeutung
- α_{ij} Komponenten von $\hat{\mathbf{E}}_C$ bzgl. $\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$

- \mathbf{b} Volumenkraftdichte
- B Körper, Kontinuum
- \mathbf{B} linear in θ^3 veränderlicher Anteil von \mathbf{Z}
- \mathbf{B} kinematische Operatormatrix
- \mathbf{B}^0 Krümmungstensor der Schalenmittelfläche der Ausgangsgeometrie

\mathbf{B}^*	Krümmungstensor der Schalenmittelfläche der verformten Geometrie
$b_{\alpha\beta}$	Komponenten von \mathbf{B} bzgl. $\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta$
β_{ij}	Komponenten von $\hat{\mathbf{E}}_L$ bzgl. $\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$
C	vierstufiger Werkstofftensor
\mathbf{C}	rechter Cauchy–Green–Tensor
\mathbf{C}	Werkstoffmatrix
χ	Dickenänderungsparameter $\chi = \bar{h}/h$
\mathbf{d}	normierter Direktor der unverformten Schale
\mathbf{D}^K	$\mathbf{D}^K = \mathbf{a}_3^{\hat{K}} = (\mathbf{a}_3 \times)$
D	vierstufiger konstitutiver Tensor
dA	Flächenelement
dA_R	Flächenelement des Schalenrandes in Höhe der Schalenmittelfläche
dA_R^*	Flächenelement des Schalenrandes, ober- oder unterhalb der Schalenmittelfläche
dV	Volumenelement
dx	Linielement
δ_j^i	Kronecker–Delta
δW^{ext}	äußere virtuelle Arbeit
δW^{int}	innere virtuelle Arbeit
$\Delta \mathbf{k}$	Kraft auf der Fläche ΔA
e	spezifische innere Energie
\mathbf{e}	Einheitsnormalenvektor
E	Gesamtenergie eines Körpers (Kapitel 2.6)
	Elastizitätsmodul (Kapitel 2.9.2)
\mathbf{E}	Green–Lagrange–Verzerrungstensor
$\hat{\mathbf{E}}$	Green–Lagrange–Verzerrungstensor, bezogen auf die Schalenmittelfläche
\mathbf{E}^{\approx}	Green–Lagrange–Verzerrungstensor, bezogen auf die Schalenmittelfläche, nach Zienkiewicz et al.
$\mathbf{E}^{\approx \approx}$	Green–Lagrange–Verzerrungstensor, bezogen auf die Schalenmittelfläche, nach Milford und Schnobrich
$\hat{\mathbf{E}}_C$	bezüglich θ^3 konstanter Teil von $\hat{\mathbf{E}}$

$\hat{\mathbf{E}}_L$	bezüglich θ^3 linearer Teil von $\hat{\mathbf{E}}$
$\hat{\mathbf{E}}_Q$	bezüglich θ^3 quadratischer Teil von $\hat{\mathbf{E}}$
$\hat{\epsilon}_{ij}$	Komponenten von $\hat{\mathbf{E}}$ bzgl. $\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$
ϵ_{ij}	Komponenten von \mathbf{E} bzgl. $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$, $\epsilon_{ij} = \hat{\epsilon}_{ij}$
η	maximale Hauptdehnung von \mathbf{H}
η_E	Abschätzung der maximalen Hauptdehnung von $\hat{\mathbf{E}}$
\mathbf{f}	resultierende Kraft auf einen Körper
\mathbf{F}	Deformationsgradient
$\hat{\mathbf{F}}$	Deformationsgradient, bezogen auf die Schalenmittelfläche
\mathbf{F}_C	bezüglich θ^3 konstanter Teil von $\hat{\mathbf{F}}$
\mathbf{F}_L	bezüglich θ^3 linearer Teil von $\hat{\mathbf{F}}$
\mathbf{g}_i	zu den krummlinigen Koordinaten gehörige, kovariante Vektorbasis des Schalenraums
\mathbf{g}_i^*	$\mathbf{g}_i^* = \mathbf{U}\mathbf{g}_i$
$\tilde{\mathbf{g}}_i$	$\tilde{\mathbf{g}}_i = \mathbf{R}\mathbf{g}_i$
\mathbf{g}^i	zu den krummlinigen Koordinaten gehörige, kontravariante Vektorbasis des unverformten bzw. verformten Schalenraums
$\boldsymbol{\gamma}$	Schubverformung
γ_a	Schubverzerrungskomponenten bzgl. \mathbf{a}^a
h	Dicke der Schale
h_0	positiver Bezugswert, z.B. mittlere Schalendicke
h_{ij}	Komponenten von \mathbf{H}_C bzgl. \mathbf{a}^i
\mathbf{H}	Ingenieurverzerrungstensor
\mathbf{H}_C	Ingenieurverzerrungstensor an der Stelle $\theta^3 = 0$
\mathbf{H}_L	Ingenieurverkrümmungstensor der Schale
k_{ij}	Komponenten von \mathbf{H}_L bzgl. \mathbf{a}^i
κ	bezogene Dicke der Schale $\kappa = \frac{h(\theta^1, \theta^2)}{h_0}$

i_i	orthonormale, globale Basisvektoren, zu x^i gehörig
\mathbf{I}	Einheitstensor 2. Stufe
I_i	Invarianten einer Matrix bzw. eines Tensors 2. Stufe
j	Impuls eines Körpers
\mathbf{J}	Jacobi-Matrix $\mathbf{J} = \mathbf{x}, \boldsymbol{\theta}$
\mathbf{J}_C	Jacobi-Matrix $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}^3 = 0)$ an Stelle $\boldsymbol{\theta}^3 = 0$
\mathbf{J}_L	bzgl. $\boldsymbol{\theta}^3$ linearer Teil von \mathbf{J}
l	Drall eines Körpers
λ_1, λ_2	Lamé-Konstanten
m	Masse des Körpers B
\mathbf{m}	resultierendes Moment auf einen Körper (Kapitel 2)
\mathbf{M}_B	Momententensor, basierend auf Biot-Spannungen
\mathbf{M}_r	Momententensor, basierend auf Cauchy-Spannungen
\mathbf{M}_I	Momententensor, basierend auf Piola-Kirchhoff-Spannungen 1. Art
$\mathbf{M}_{II}^{(1)}$	Momententensor, basierend auf Piola-Kirchhoff-Spannungen 2. Art
$\mathbf{M}_{II}^{(2)}$	höherer Momententensor, basierend auf Piola-Kirchhoff-Spannungen 2. Art
μ	$\mu \, d\boldsymbol{\theta}^3 = \frac{dV}{dA} = \det \mathbf{Z} \, \mathbf{a}_3 \cos \beta \, d\boldsymbol{\theta}^3$, siehe Formel (3.33), (3.37)
NN	Anzahl der Elementknoten
\mathbf{N}_B	Schnittkrafttensor, basierend auf Biot-Spannungen
\mathbf{N}_r	Schnittkrafttensor, basierend auf Cauchy-Spannungen
\mathbf{N}_I	Schnittkrafttensor, basierend auf Piola-Kirchhoff-Spannungen 1. Art
\mathbf{N}_{II}	Schnittkrafttensor, basierend auf Piola-Kirchhoff-Spannungen 2. Art
N^K	Formfunktion am Knoten K
ν	Querkontraktionszahl
$O(\cdot)$	Größenordnung von (\cdot)
$\boldsymbol{\omega}$	virtuelle Rotation
$\boldsymbol{\Omega}$	$\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega} \times \cdot)$

\mathbf{p}	auf die Schalenmittelfläche bezogene Kraftdichte
P	Punkt des Schalenraums
\mathbf{P}	Piola–Kirchhoff–Spannungstensor 1. Art
ϕ	Drehwinkel
\bar{q}	Energiestrom (Kapitel 2)
Q	von außen zugeführte Energie (Kapitel 2.6)
\mathbf{Q}	Rotationstensor, beliebig.
\mathbf{r}	Ortsvektor zu einem Punkt der Schalenmittelfläche $\mathbf{r} = \mathbf{x}(\theta^3 = 0)$
R	Hauptkrümmungsradius
\mathbf{R}	Rotationstensor (polare Zerlegung : $\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}$)
\mathbf{R}_C	Rotationstensor in Höhe der Schalenmittelfläche (polare Zerlegung: $\mathbf{F}_C = \mathbf{R}_C\mathbf{U}_C$)
\mathbf{R}_d	Rotationstensor des Schalendirektors
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
ρ	Massendichte
q_{ij}	Komponenten von $\hat{\mathbf{E}}_Q$ bzgl. $\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$
\mathbf{s}	Rotationsvektoren
\mathbf{s}^+	inkrementeller Rotationsvektoren $\mathbf{s}^+ = D\mathbf{s}$
\mathbf{s}^*	virtueller Rotationsvektor $\mathbf{s}^* = \delta\mathbf{s}$
\mathbf{S}	Piola–Kirchhoff–Spannungstensor 2. Art
\mathbf{S}^+	$\mathbf{S}^+ = (\mathbf{s}^+ \times)$
\mathbf{S}^*	$\mathbf{S}^* = (\mathbf{s}^* \times)$
t	Zeitparameter
t_0	Referenzzeit
\mathbf{t}	Flächenkraftdichte
\mathbf{T}	Cauchy–Spannungstensor
\mathbf{T}_B	Biot–Spannungstensor
τ^{ij}	Komponenten von \mathbf{T} bzgl. $\bar{\mathbf{g}}_i$
θ^i	rechtshändiges, beliebiges krummliniges, konvektives Koordinatensystem
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor eines Punktes des Schalenraums
\mathbf{U}	rechter Strecktensor (polare Zerlegung : $\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U}$)

U_C	rechter Strecktensor (polare Zerlegung : $F_C = R_C U_C$)
U_{Cij}	Komponenten von U_C bzgl. a^i
v	Verschiebungsvektor eines Punkts der Schalenmittelfläche
V	Volumen des Körpers B zum Zeitpunkt t_0
V	linker Strecktensor (polare Zerlegung: $F=VR$)
W	Arbeit, der von außen auf einen Körper wirkenden Kräfte (Kapitel 2.6)
w	Differenzvektor zwischen dem Direktor der verformten Schale und dem der unverformten Schale
x^i	rechtshändiges, orthogonal kartesisches Koordinatensystem
x	Ortsvektor zum Punkt P des Schalenraums
ξ^i	rechtshändiges, krummliniges konvexives Koordinatensystem, normiert $-1 \leq \xi^i \leq 1$.
Z	Schalenshifter
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen

Symbolverzeichnis für Kapitel 7

E	Elastizitätsmodul
γ	Spezifisches Gewicht der Flüssigkeit (Laststeigerungsfaktor)
λ	Schlankheitsparameter
ν	Querkontraktionszahl
R	Radius des Zylinders oder des Kegels
σ_F	Fließspannung
σ_ϕ	Ringspannung
σ_x	Meridianspannung
σ_v	Vergleichspannung
t	Schalendicke

1 Einleitung

1.1 Motivation – Stand der Forschung

Die Berechnung von Flächentragwerken im Bauingenieurwesen sowie im Maschinen-, Flugzeug- oder Schiffbau war und ist eine der wichtigsten Herausforderungen in der Strukturmechanik. Seit der rasanten Entwicklung der Computertechnologie und der finiten Element-Methode ab Mitte der sechziger Jahre, stehen sich hierfür zwei auf den ersten Blick unterschiedliche finite Schalenelement-Konzepte gegenüber.

Das eine Konzept diskretisiert die Gleichungen einer der zahlreichen Schalentheorien. Das Wort "zahlreich" weist schon darauf hin, daß der Begriff Schalentheorie nicht eindeutig ist. Anfänge der Herleitung von Schalentheorien gehen auf Aron (1874) und Love (1888) zurück. Seit der Zeit sind viele Theorien unterschiedlicher Approximationsgüte entwickelt worden. Wesentliche Arbeiten stammen von Green/Zerna, Koiter, Naghdi, Reissner u.a. Einen Überblick über klassische Kirchhoff-Love- und Schubverzerrungstheorien, die einen linearen Ansatz für das Verschiebungsfeld in Dickenrichtung der Schale verwenden, aber auch über verfeinerte Theorien findet man in [11] und [62]. 1968 veröffentlichen Argyris und Scharpf [6] ein isoparametrisches Schalentheorie-Element. Andere finite Schalentheorie-Elemente, entwickelt von z. B. Harbord (1973) [42], Harte (1982) [43] oder Talaslidis (1978) [106], sind, wie auch ihre zugehörigen Grundgleichungen, in krummlinigen konvektiven Koordinaten formuliert, weshalb ihre Programmierung profunde Kenntnisse der Differentialgeometrie und Tensorrechnung voraussetzt. In der Regel interpolieren sie ihre Verschiebungs- und Rotationsparameter bezüglich dieser Koordinaten, was zu Schwierigkeiten bei der verzerrungsfreien Darstellung von Starrkörperbewegungen führt. Oft wird für Schalentheorie-Elemente eine analytische Beschreibung der Ausgangsgeometrie benötigt, wodurch ihre allgemeine Einsetzbarkeit eingeschränkt ist.

Die andere Vorgehensweise, Konzept der Degeneration genannt, ist von Ahmad [2], [3] 1968 eingeführt worden. Es diskretisiert die Grundgleichungen des 3D-Kontinuums und führt gleichzeitig an diskreten Stellen physikalische Annahmen in Analogie zur Schalentheorie ein. Typisch für dieses Verfahren ist die gleiche Interpolation von Ausgangsgeometrie und verformter Geometrie. Die Spannungen und Verzerrungen werden i.a. auf lokale oder globale kartesische Koordinaten bezogen. Konzeptionelle Einfachheit und flexible Einsetzbarkeit sind die wesentlichen Gründe dafür, daß sich diese Methode gegenüber den geometrisch nichtlinearen Schalentheorie-Elementen bis jetzt durchgesetzt hat.

Die Erweiterungen des Degenerationskonzepts für beliebig große Rotationen gehen auf Ramm (1976) [74] zurück. Elasto-plastische Probleme mit kleinen Verzerrungen löste

Sätze 1980 [84], und eine allgemeine Formulierung des Degenerationskonzepts für große Verzerrungen stammt von Hughes und Liu (1981) [46]. Schon bald nach Einführung des Degenerationskonzepts haben sich dessen Nachteile herausgestellt, deren Behebung Tendenzen zur Annäherung an die Schalentheorie-Elemente erkennen lassen.

Einer der Nachteile ist die numerische Integration analog zum Kontinuumselement in Richtung der Schalendicke. Sie verschlingt gegenüber Flächenmodellen, insbesondere für plastisches oder über die Dicke inhomogenes Material viel Rechenzeit. Zienkiewicz, Taylor und Too [113] haben 1971 als erste versucht, analog zu Schalentheorien die Verzerrungen bzw. die kinematischen Operatoren in konstante, lineare und quadratische Teile bezüglich der Dickenkoordinate aufzuspalten, um dann mit Spannungsresultierenden arbeiten zu können und um vorab numerisch oder gar analytisch die Dickenintegration durchzuführen. Dazu haben sie die Annahme einer über die Schalendicke konstanten inversen Jacobi-Matrix getroffen. Parisch (1981) [66], Stegmüller (1985) [102] und ebenso Liu (1986) [57], aber auch viele andere benutzen diese Näherung für ihre vorabintegrierten (explizit integrierten) degenerierten Schalenelemente. Milford und Schnobrich [61] weisen 1986 daraufhin, daß diese Annahme sehr restriktiv ist und als Konsequenz Starrkörperbewegungen nicht mehr verzerrungsfrei dargestellt werden können. Belytschko et al. [16] stellten fest, daß je nach Problemstellung Fehler in der Berechnung bis zu 70 % auftreten können. Als Abhilfe schlugen Milford und Schnobrich eine Reihenentwicklung der inversen Jacobi-Matrix bis zum linearen Glied vor. In ihrer Arbeit [61] sind erste Ansätze eines Vergleichs des Degenerationskonzepts mit klassischen Schalentheorien auf theoretischer Basis zu finden. Stanley [100] hat 1985 ein vorabintegriertes degeneriertes Element vorgestellt, das die inverse Jacobi-Matrix exakt berücksichtigt und dadurch zu denselben Resultaten führt wie das numerisch über die Dicke integrierte degenerierte Schalenelement.

Ein anderer Nachteil, der zunächst an degenerierten Elementen festgestellt und fälschlicherweise deren Herleitungskonzept angelastet worden ist, tritt genauso bei entsprechenden Schalentheorie-Elementen auf. Gemeint ist das schlechte Konvergenzverhalten von Weggrößenelementen, hervorgerufen durch künstliche Versteifungseffekte – sogenannte "locking"-Phänomene – infolge parasitärer Querschub- und Membranverzerrungen, insbesondere bei niedrig interpolierten Elementen. Zur Vermeidung dieser Defekte schlugen Pawsey (1970) [68] und Zienkiewicz et al. (1971) [113] statt einer exakten numerischen Flächenintegration eine Unterintegration vor, die allerdings energiefreie Mechanismen, auch innere Kinematiken oder "zero energy modes" genannt, verursachen kann. Mit der "assumed strain"-Methode, populär geworden durch eine Veröffentlichung von Dvorkin und Bathe (1984) [33], ist es möglich, nahezu "locking"-freie Elemente zu gewinnen. Diese Methode interpoliert Verzerrungen bezüglich krummliniger,

konvektiver Elementkoordinaten – ein weiterer Schritt in Richtung Schalentheorie-Elementen.

Die in jüngster Zeit veröffentlichten Schalentheorie-Elemente basieren im allgemeinen auf Schubverzerrungstheorien (z. B. Recke (1986) [80], Ding (1990) [32], Gruttmann (1988) [39], Sansour und Bufler (1990) [85]), denn diese können aufgrund schwächerer Kompatibilitätsanforderungen Ansatzpolynome niedrigerer Ordnung verwenden als Elemente nach der Kirchhoff-Love-Theorie. Zur Vermeidung der auch hier vorhandenen "locking"-Phänomene werden gemischte Elementformulierungen bevorzugt, basierend auf dem Funktional von Hellinger-Reissner.

Wie sich in dieser Arbeit herausstellen wird, sind das gemischte Schalenelement von Simo (1989) [94]–[97] und das "assumed strain"-Element von Parisch (1991)[67], obgleich sie von den Verzerrungsgleichungen der Schalentheorie bezüglich krummliniger Koordinaten ausgehen, dem Degenerationskonzept zuzuordnen. Sie stellen den Punkt dar, an dem sich die Konzepte am ähnlichsten sind.

Die Schalentheorie-Elemente von Recke [80], Gruttmann [39] und Sansour und Bufler [85] benutzen anstelle der Green-Lagrange-Verzerrungen Ingenieurverzerrungsmaße. Inwieweit diese Verzerrungen für degenerierte Elemente vorteilhaft zu verwenden sind, ist bisher nicht beantwortet worden.

Um allgemeine Flächentragwerke berechnen zu können, müssen auch Knickstellen, die z. B. in Faltwerken oder bei Schalenverzweigungen vorkommen, modellierbar sein. Vu Quoc und Mora (1989) [108] benutzen mit ihren degenerierten Schalenelementen in der Knickstelle einen einzigen Schalendirektor und kommen so mit 2 unabhängigen Rotationsparametern aus (s.a. [3], [75]). Den Einfluß des Winkels zwischen Schalendirektor und Schalenmittelfläche in diesen Knickstellen untersucht Gebhardt (1990) [37]. Hughes und Liu (1981) [46] führen 3 Rotationsparameter ein und unterdrücken die Rotation um den Direktor an Stellen ohne Knick oder Balkenanschluß, da für diese Rotation in ihrer Formulierung keine Steifigkeit vorhanden ist. Künstliche Steifigkeiten dafür werden z. B. von Zienkiewicz [114] eingeführt. Eine andere Möglichkeit besteht in der Erweiterung des Funktionals um die Symmetriebedingung der Spannungen oder der Ingenieurverzerrungen mittels Lagrange-Parameter oder Penalty-Faktor [1], [21], [47], [49], [85]. Diese Methode ist bisher an Scheiben- bzw. Schalentheorie-Elementen untersucht worden; die Übertragung auf degenerierte Elemente steht noch aus.

1.2 Ziele dieser Arbeit

Ein wesentliches Ziel dieser Arbeit ist, soweit möglich, die *Zusammenführung der verschiedenen Versionen des Degenerationskonzepts und der Schalentheorien*, damit insbesondere die vorab integrierten (explizit integrierten) degenerierten Schalenelemente theoretisch genauso abgesichert werden wie Schalentheorie-Elemente.

Ein weiteres Anliegen dieser Arbeit besteht darin, zu klären, inwieweit *Ingenieur-Verzerrungsmaße im Degenerationskonzept* vorteilhaft eingesetzt werden können.

Im Hinblick auf eine *singularitätenfreie Rotationsformulierung* wird versucht, den Algorithmus von Simo und Vu Quoc [92], besonders dessen symmetrische Variante, auf anderem Wege herzuleiten.

Zur Modellierung von *Flächentragwerken mit Knicken* sollen für degenerierte Schalenelemente mit 3 Rotationsparametern je Elementknoten die überzähligen Rotationsfreiheitsgrade stabilisiert werden, indem das Prinzip der virtuellen Arbeit über eine diskrete Penalty-Formulierung erweitert wird.

Die in der Arbeit vorgestellten *Stabilitäts- und Traglastberechnungen* mit degenerierten Elementen an Zylinder- und Kegelschalen sollen Aufschluß über das Tragverhalten bei konzentrierter Beanspruchung geben, insbesondere wenn geometrische und materielle Nichtlinearität gemeinsam zum Versagen führen. Sie dienen gleichzeitig zur Überprüfung von Bemessungsrichtlinien im Hinblick auf Wirtschaftlichkeit und Zuverlässigkeit. Versuchsnachrechnungen geben nicht nur zusätzlichen Einblick in das Tragverhalten, sondern verifizieren ebenso das Rechenmodell.

1.3 Übersicht

Im **Kapitel 2** werden die Gleichungen des 3D-Kontinuums bereitgestellt.

Im **Kapitel 3** werden aus ihnen die *Schalentheorie-Gleichungen* unter Verwendung von *Green-Lagrange-* und *Ingenieur-Verzerrungsmaßen* hergeleitet. Als einzige Annahme wird ein *linear über die Schalendicke veränderliches Verschiebungsfeld* benutzt. Die angegebenen Gleichungen sind für beliebig *große Rotationen* und *große Verzerrungen* gültig. In der Ausgangskonfiguration müssen die *Direktoren nicht senkrecht* zur Schalenmittelfläche stehen, und die *Schalendicke darf veränderlich* sein.

Kapitel 4 befaßt sich mit dem Konzept der Degeneration von Kontinuums- zu Schalenelementen. Nachdem die Grundgleichungen der wesentlichen *Versionen der Vorabintegration* hinsichtlich der vorgestellten Schalentheorie *eingeordnet* worden sind, werden unterschiedliche Diskretisierungsmöglichkeiten vorgestellt. Auch die Frage, inwieweit *Ingenieurverzerrungsmaße* vorteilhaft eingesetzt werden können, wird hier diskutiert.

Kapitel 5 gibt zunächst eine Übersicht der bekanntesten Möglichkeiten zur Beschreibung endlicher Rotationen. Dann wird der in [92] und [100] vorgestellte *Newton-Algorithmus* mit *singularitätenfreier* Aktualisierung der Rotationsparameter *aus anderer Sicht* wie in [92] hergeleitet und gezeigt, auf welche Weise eine symmetrische bzw. unsymmetrische Tangentenmatrix zu erhalten ist.

In **Kapitel 6** wird ein degeneriertes Schalenelement entwickelt, das wahlweise 2 oder 3 Rotationsfreiheitsgrade besitzen kann. Anhand numerischer Beispiele werden Schwächen und Stärken des Elements und dessen Rotationsformulierung aufgezeigt. Zur Berechnung von *Schalen mit Knicken* werden mehrere Möglichkeiten besprochen. Um an jedem Knoten mit 3 globalen Rotationsfreiheitsgraden arbeiten zu können, besteht für das Element die Option, über eine *Penalty-Methode* je Elementknoten eine "Pseudo"-Drillsteifigkeit für den überzähligen Rotationsparameter einzuführen.

Kapitel 7 enthält Stabilitäts- und Traglastberechnungen mit degenerierten Schalenelementen an Zylinder- und Kegelschalen bei konzentrierten Beanspruchungen.

2 Grundgleichungen des dreidimensionalen, nicht polaren Kontinuums

In diesem Kapitel werden diejenigen Begriffe und Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik vorgestellt, auf die in den nachfolgenden Kapiteln zurückgegriffen wird. Die Zusammenstellung orientiert sich an den Werken von Green und Zerna [38], Becker und Bürger [15], Gurtin [40], Bufler [19] und Ogden [63]. Auf eine ausführliche Herleitung aller Beziehungen wird hier verzichtet.

2.1 Geometrie und Kinematik

In der materiellen Betrachtungsweise wird die Bewegung eines Körpers B durch die Änderung der Ortsvektoren zu seinen materiellen Punkten P beschrieben. Als Referenzzustand dient die Konfiguration zur Zeit t_0 , in der der Körper die Teilmenge V des dreidimensionalen euklidischen Raums \mathbf{R}^3 einnimmt. Zur Zeit t beansprucht er die Teilmenge \bar{V} .

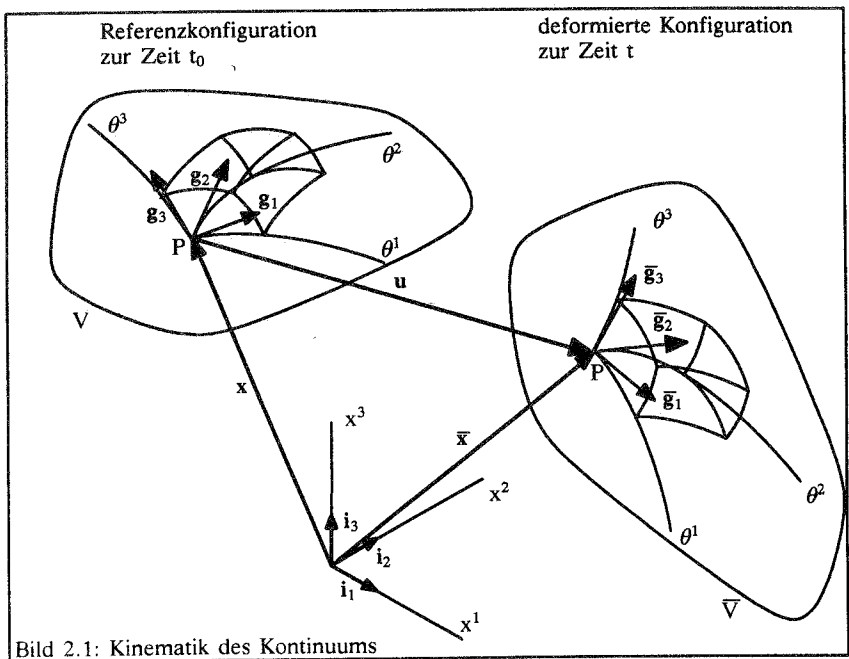


Bild 2.1: Kinematik des Kontinuums

Neben dem festen, rechtshändigen, orthogonalen, kartesischen Koordinatensystem x^i mit den normierten Basisvektoren $i_i = i^i$ wird ein krummliniges konvexes, d. h. körper-

festes Koordinatensystem θ^i mit den Basisvektoren \mathbf{g}_i für die Referenzkonfiguration bzw. $\bar{\mathbf{g}}_i$ für die deformierte Konfiguration eingeführt. Diese konvektiven Parameter kennzeichnen jeden Punkt P des Körpers B zu jedem Zeitpunkt durch dasselbe Koordinaten-triplet $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$. Die kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_i bzw. $\bar{\mathbf{g}}_i$ sind die Spaltenvektoren der Jacobi-Matrizen \mathbf{J} bzw. $\bar{\mathbf{J}}$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{x}_{,\theta} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i} \otimes \mathbf{i}^i = \left[\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^1}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^3} \right]_{i^i} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]_{i^i} \quad (2.1)$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{x}}_{,\theta} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^i} \otimes \mathbf{i}^i = \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^1}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^2}, \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta^3} \right]_{i^i} = [\bar{\mathbf{g}}_1, \bar{\mathbf{g}}_2, \bar{\mathbf{g}}_3]_{i^i} \quad (2.2)$$

Die Spalten von \mathbf{J}^{-T} bzw. $\bar{\mathbf{J}}^{-T}$ stellen die zugehörigen kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^i bzw. $\bar{\mathbf{g}}^i$ dar:

$$\mathbf{g}^{iT} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}}, \quad \bar{\mathbf{g}}^{iT} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \quad (2.3)$$

Als Differenz der Ortsvektoren zu einem Punkt P mit den Koordinaten $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ erhält man die Verschiebung \mathbf{u} :

$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) = \bar{\mathbf{x}}(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t) - \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3, t_0) \quad (2.4)$$

Der Gradient des Ortsvektors $\bar{\mathbf{x}}$ wird als Deformationsgradient \mathbf{F} bezeichnet:

$$\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{x}} = \text{GRAD } \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}}_{,x} = \mathbf{I} + \mathbf{u}_{,x} \quad (2.5)$$

Er transformiert differentielle Größen der Ausgangsgeometrie in die aktuelle Lage. Es gilt für die kovarianten Basisvektoren:

$$\bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{x}}_{,\theta} = \bar{\mathbf{x}}_{,x} \mathbf{x}_{,\theta} = \mathbf{F} \mathbf{J} \quad (2.6)$$

für ein Linienelement:

$$d\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{F} d\mathbf{x} \quad (2.7)$$

für ein Flächenelement mit den Einheitsnormalenvektoren \mathbf{e} und $\bar{\mathbf{e}}$

$$\bar{\mathbf{e}} d\bar{\mathbf{A}} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-T} \mathbf{e} d\mathbf{A} \quad (2.8)$$

und für ein Volumenelement:

$$d\bar{\mathbf{V}} = \det \mathbf{F} d\mathbf{V} \quad (2.9)$$

Zulässige Deformationen müssen die Bedingung $\det \mathbf{F} > 0$ erfüllen, damit $d\bar{\mathbf{V}}$ stets größer als Null ist und Selbstdurchdringungen somit ausgeschlossen werden.

Der Deformationsgradient \mathbf{F} läßt sich eindeutig polar zerlegen in:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2.10)$$

mit \mathbf{R} als orthogonalem Rotationstensor ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$) und \mathbf{U} als symmetrischem rechten Strecktensor bzw. \mathbf{V} als symmetrischem linken Strecktensor. \mathbf{R} beschreibt die Rotation eines infinitesimalen Elementes, \mathbf{U} und \mathbf{V} dessen Formänderung. Mit \mathbf{U} werden der objektive, das heißt durch eine Starrkörperbewegung unbeeinflusste, Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}^T \mathbf{U} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.11)$$

und der symmetrische Ingenieurverzerrungstensor \mathbf{H} definiert:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U} - \mathbf{I} \quad (2.12)$$

\mathbf{I} bezeichnet den zweistufigen Identitätstensor, $\mathbf{C} = \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ den rechten Cauchy-Green-Tensor. Mit (s. Bild 2.2):

$$\mathbf{g}_i^* = \mathbf{U} \mathbf{g}_i \quad , \quad \mathbf{U} = \mathbf{g}_j^* \otimes \mathbf{g}^j = (\mathbf{g}_j^* \mathbf{g}_i) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.13)$$

$$\tilde{\mathbf{g}}_i = \mathbf{R} \mathbf{g}_i \quad , \quad \mathbf{R} = \tilde{\mathbf{g}}_j \otimes \mathbf{g}^j = (\tilde{\mathbf{g}}_j \mathbf{g}_i) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.14)$$

erhält man in Komponentenschreibweise bezüglich der krummlinigen, konvektiven Koordinaten θ^i :

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i \quad (2.15)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad ; \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j \quad (2.16)$$

$$\mathbf{C} = \bar{g}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad ; \quad \bar{g}_{ij} = \bar{\mathbf{g}}_i \bar{\mathbf{g}}_j \quad (2.17)$$

$$\mathbf{E} = \epsilon_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \frac{1}{2}(\bar{g}_{ij} - g_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H} = h_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = (\mathbf{g}^i \otimes \tilde{\mathbf{g}}_i)(\bar{\mathbf{g}}_j \otimes \mathbf{g}^j) - g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = ((\tilde{\mathbf{g}}_i \bar{\mathbf{g}}_j) - g_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad (2.19)$$

2.2 Spannungstensoren

Der (wahre) Spannungsvektor $\bar{\mathbf{t}}$ in einem Punkt des deformierten Körpers ist definiert durch:

$$\lim_{\Delta \bar{A} \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{k}}{\Delta \bar{A}} = \bar{\mathbf{t}} \quad ; \quad d\mathbf{k} = \bar{\mathbf{t}} d\bar{A} \quad (2.20)$$

mit $\Delta \mathbf{k}$ als Kraft auf dem verformten Flächenelement $\Delta \bar{A}$. Bezieht man $\Delta \mathbf{k}$ auf das Flächenelement des Referenzzustands, so kann der "Pseudo"-Spannungsvektor \mathbf{t} definiert werden durch:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{k}}{\Delta A} = \mathbf{t} \quad ; \quad d\mathbf{k} = \mathbf{t} dA \quad (2.21)$$

Unter Verwendung des Cauchy-Theorems:

$$\bar{\mathbf{t}} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{e}} \quad (2.22)$$

mit $\mathbf{T} = r^{ij} \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \bar{\mathbf{g}}_j$ als Cauchy-Spannungstensor und dem Einheitsnormalenvektor $\bar{\mathbf{e}}$ des verformten infinitesimalen Flächenelementes $d\bar{\mathbf{A}}$ errechnet sich die zugehörige Kraft zu:

$$d\mathbf{k} = \bar{\mathbf{t}} d\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{e}} d\bar{\mathbf{A}} \quad (2.23)$$

Benutzt man die geometrischen Größen des Referenzzustands, so gilt unter Verwendung von (2.8):

$$d\mathbf{k} = \det \mathbf{F} \mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} \mathbf{e} d\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{e} d\mathbf{A} = \mathbf{t} d\mathbf{A} \quad (2.24)$$

mit:

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = P^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.25)$$

als Piola-Kirchhoff-Spannungstensor 1. Art \mathbf{P} (kurz: PK1-Spannungen). Vormultiplizieren mit dem inversen Deformationsgradienten, transformiert \mathbf{P} in den objektiven Piola-Kirchhoff-Spannungstensor 2. Art \mathbf{S} (kurz: PK2-Spannungen):

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{F}^{-T} = S^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.26)$$

Als weiteres Spannungsmaß wird der ebenfalls objektive Biot-Spannungstensor \mathbf{T}_B eingeführt, der oft auch mit dem Namen Jaumann in Verbindung gebracht wird.

$$\mathbf{T}_B = \mathbf{R}^T \mathbf{P} \leftarrow \mathbf{U} \mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{R}^T \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = T_B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad (2.27)$$

Für den ebenen Fall sind die Komponenten von \mathbf{T}_B in Bild 2.2 veranschaulicht worden. Zu beachten ist, daß in der hier gewählten Schreibweise nicht der erste Index der Komponenten der Spannungstensoren das Schnittufer kennzeichnet, sondern der zweite.

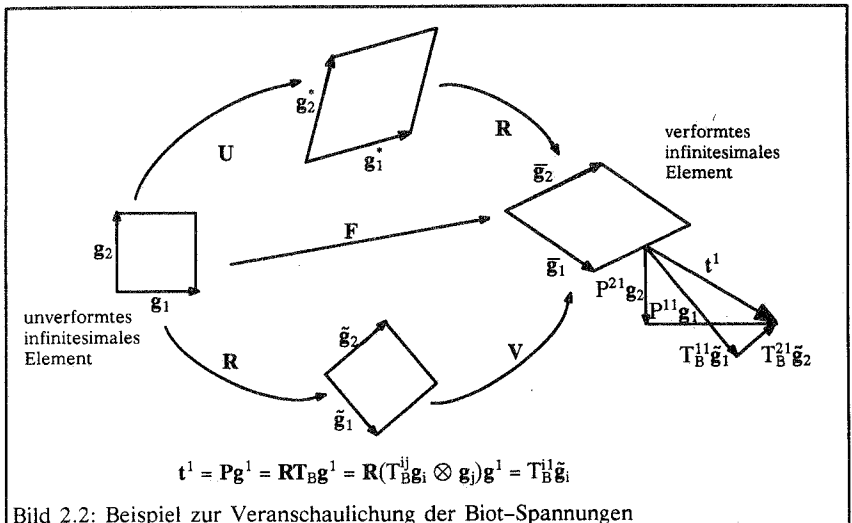


Bild 2.2: Beispiel zur Veranschaulichung der Biot-Spannungen

2.3 Massenerhaltung

Aus der Forderung, daß die Masse eines Körpers konstant bleiben soll,

$$m(t) = \iiint_{\bar{V}} \bar{\rho} \, d\bar{V} = \text{konstant} \quad (2.28)$$

läßt sich bei bekannter Massendichte ρ des Referenzzustands die Massendichte $\bar{\rho}$ der deformierten Lage bestimmen. Aus:

$$m = \iiint_{\bar{V}} \bar{\rho} \, d\bar{V} = \iiint_{V} \bar{\rho} \det \mathbf{F} \, dV = \iiint_{V} \rho \, dV \quad (2.29)$$

folgt:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\det \mathbf{F}} \quad (2.30)$$

denn (2.29) muß für einen beliebigen Integrationsbereich gelten.

2.4 Impulssatz

Die auf einen Körper B wirkende, resultierende Kraft \mathbf{f} lasse sich folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{f} = \iiint_{\bar{V}} \bar{\mathbf{b}} \, d\bar{V} + \iint_{\bar{A}} \bar{\mathbf{t}} \, d\bar{A} \quad (2.31)$$

Die Volumenkraftdichte $\bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ sei ein von Ort und Zeit abhängiges Feld. Die Oberflächenkraftdichte $\bar{\mathbf{t}}(\bar{\mathbf{e}}(\bar{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{x}}, t)$ sei zudem noch abhängig von der nach außen weisenden Normalen $\bar{\mathbf{e}}(\bar{\mathbf{x}})$. Bezogen auf die Referenzkonfiguration gilt:

$$\mathbf{f} = \iiint_{V} \mathbf{b} \, dV + \iint_{A} \mathbf{t} \, dA \quad \text{mit} \quad \mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} \det \mathbf{F} \quad (2.32)$$

Der Impuls \mathbf{j} des Körpers sei definiert durch:

$$\mathbf{j} = \iiint_{\bar{V}} \bar{\rho} \, \bar{\mathbf{x}} \, d\bar{V} \quad , \quad (\dot{}) = \frac{d}{dt}() \quad (2.33)$$

Aus dem Impulssatz:

$$\dot{\mathbf{j}} = \mathbf{f} \quad (2.34)$$

folgt mittels des Gaußschen Integralsatzes (10.15) und des Cauchy-Theorems (2.22):

$$\bar{\rho} \, \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \text{div } \mathbf{T} + \bar{\mathbf{b}} \quad (2.35)$$

als lokaler Impulssatz. Analog erhält man mit den Größen ϱ , \mathbf{P} , \mathbf{b} der Referenzkonfiguration:

$$\varrho \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \text{DIV } \mathbf{P} + \mathbf{b} \quad (2.36)$$

2.5 Drallsatz

Der Drall \mathbf{l} bezogen auf den Ursprung des Koordinatensystems \mathbf{x}^i lautet:

$$\mathbf{l} = \iiint_{\bar{V}} \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\varrho} \dot{\bar{\mathbf{x}}} \, d\bar{V} \quad (2.37)$$

Das auf den Körper wirkende, resultierende Moment \mathbf{m} der Volumen- und Oberflächenkräfte:

$$\mathbf{m} = \iiint_{\bar{V}} \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{b}} \, d\bar{V} + \iint_{\bar{A}} \bar{\mathbf{x}} \times \bar{\mathbf{t}} \, d\bar{A} \quad (2.38)$$

soll der zeitlichen Änderung des Dralls entsprechen:

$$\dot{\mathbf{l}} = \mathbf{m} \quad (2.39)$$

Umformung mit dem Gaußschen Satz sowie Berücksichtigung des lokalen Impulssatzes (2.35) führt zu:

$$\iiint_{\bar{V}} \bar{\mathbf{g}}_i \times \bar{\mathbf{t}}^i \, d\bar{V} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{t}}^i = \mathbf{T} \bar{\mathbf{g}}^i \quad (2.40)$$

was äquivalent zur Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ ist. In Größen der Referenzkonfiguration ausgedrückt, reduziert sich der lokale Drallsatz für nicht polare Kontinua auf:

$$\iiint_{\bar{V}} \bar{\mathbf{g}}_i \times \bar{\mathbf{t}}^i \, d\bar{V} = \mathbf{0} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{P}^T \quad (2.41)$$

2.6 Energiesatz

Letztendlich soll noch der Energiesatz angegeben werden. Die Gesamtenergie E des bewegten Körpers B setzt sich zusammen aus der inneren Energie und der kinetischen Energie:

$$E = \iiint_{\bar{V}} \bar{\varrho} \left(e + \frac{(\dot{\bar{\mathbf{x}}})^2}{2} \right) \, d\bar{V} \quad (2.42)$$

e bezeichnet die innere spezifische Energie. Für die zeitliche Änderung von E wird gefordert, daß

$$\dot{E} = \dot{W} + \dot{Q} \quad (2.43)$$

mit der Leistung der auf den Körper wirkenden äußeren Kräfte:

$$\dot{W} = \iint_{\bar{A}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}} \, d\bar{A} + \iiint_{\bar{V}} \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}} \, d\bar{V} \quad (2.44)$$

und der von außen pro Zeiteinheit zugeführten Energie:

$$\dot{Q} = - \iint_{\bar{A}} \bar{\mathbf{q}} \cdot \bar{\mathbf{e}} \, d\bar{A}. \quad (2.45)$$

$\bar{\mathbf{q}}$ wird Energiestrom genannt. Unter Berücksichtigung des Gaußschen Satzes (10.15) und aufgrund des beliebigen Integrationsbereichs folgt nach einigen Umformungen die lokale Form der Energiegleichung in Größen der Momentankonfiguration.

$$\bar{\rho} \dot{e} = \mathbf{T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{,\bar{\mathbf{x}}} - \text{div} \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} - \text{div} \bar{\mathbf{q}} \quad (2.46)$$

Mit den Größen der Referenzkonfiguration lautet der lokale Energiesatz:

$$\rho \dot{e} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} - \text{DIV} \mathbf{q} \quad \text{mit} \quad \mathbf{q} = \det \mathbf{F} (\mathbf{F}^{-1} \bar{\mathbf{q}}) \quad (2.47)$$

Im folgenden soll keine von außen zugeführte Energie berücksichtigt werden, es gelten also $\dot{Q} = 0$ und $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Die zeitliche Änderung der spezifischen inneren Energie \dot{e} bezogen auf die Referenzkonfiguration vereinfacht sich somit zu:

$$\rho \dot{e} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad (2.48)$$

2.7 Energetisch konjugierte Spannungs- und Verzerrungstensoren

Die zu den PK2-Spannungen \mathbf{S} energetisch konjugierten Verzerrungen sind die Green-Lagrange-Verzerrungen \mathbf{E} . Mit (2.26) und der Symmetrie von \mathbf{S} , die gegeben ist, wenn die Cauchy-Spannungen \mathbf{T} symmetrisch sind, folgt für (2.48):

$$\rho \dot{e} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}) = \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (2.49)$$

Zu den Biot-Spannungen \mathbf{T}_B bilden die Ingenieurverzerrungen \mathbf{H} das energetische Gegenstück. Das Einsetzen von (2.27) in (2.48) führt auf:

$$\rho \dot{e} = \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{R} \mathbf{T}_B \cdot (\dot{\mathbf{R}} \mathbf{U} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{U}}) = \mathbf{T}_B \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{T}_B \cdot \dot{\mathbf{U}} \quad (2.50)$$

Das skalare Produkt $\mathbf{T}_B \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$ verschwindet, denn $\mathbf{T}_B \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^T$ ist symmetrisch, falls $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$; $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$ ist ein antimetrischer Tensor, da:

$$(\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}})^T = \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{0} = \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} + \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}. \quad (2.51)$$

2.8 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Um das Prinzip der virtuellen Verschiebungen herzuleiten, geht man von dem Impulssatz aus und berücksichtigt den Drallsatz sowie die Kräfte- und Verschiebungsrandbedingungen als Nebenbedingungen.

<p>Impulssatz: $\text{DIV } \mathbf{P} + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{x}} = 0$ ($\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{u}}$)</p> <p>Nebenbedingungen:</p> <p style="padding-left: 40px;">Drallsatz: $\mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{P}^T$</p> <p style="padding-left: 40px;">Randbedingungen der Oberfläche: $A = A_u \cup A_r$ ($A_u \cap A_r = \emptyset$)</p> <p style="padding-left: 80px;">Verschiebungsrandbedingungen: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_R$ auf A_u</p> <p style="padding-left: 80px;">Kräfte randbedingungen: $\mathbf{P}\mathbf{e} = \mathbf{t}$ auf A_r</p> <p style="padding-left: 40px;">Kinematische Gleichungen: $\mathbf{F} = \bar{\mathbf{x}}_{,x}$; $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{u}$</p> <p style="padding-left: 40px;">Werkstoff (z.B.: hyperelastisch): $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F})$</p>
--

Mit einer zulässigen virtuellen Verschiebung (= Testfunktion $\mathbf{u}^* = 1$. Variation von \mathbf{u}), die auf A_u verschwindet:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^* = \frac{d}{d\epsilon} (\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{u}^*) \Big|_{\epsilon=0}, \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } A_u \quad (\delta \mathbf{u} = \delta \bar{\mathbf{x}}, \delta \mathbf{u}_{,x} = \delta \mathbf{F}) \quad (2.52)$$

und dem Gaußschen Integralsatz (10.15) sowie der Produktregel (10.16) erhält man das Prinzip der virtuellen Verschiebung oder die "schwache Form" des Impulssatzes:

$\begin{aligned} & \int_V \int \delta \mathbf{u}^T (\text{DIV } \mathbf{P} + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) dV \\ &= \int_V \int \left(\text{DIV} (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{P}) - \delta \mathbf{u}_{,x} \cdot \mathbf{P} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} - \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \right) dV \\ &= \int_{A_r} \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA + \int_V \int \left(-\delta \mathbf{u}_{,x} \cdot \mathbf{P} + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} - \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} \right) dV \\ &= \int_{A_r} \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} dA + \int_V \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_V \int \delta \mathbf{u}^T \rho \ddot{\mathbf{u}} dV - \int_V \int \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} dV = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$

2.9 Materialgleichungen

2.9.1 Hyperelastizität

Ein Material wird elastisch genannt, wenn der Cauchy–Spannungstensor \mathbf{T} nur vom Deformationsgradienten \mathbf{F} abhängt:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{F}) \quad (2.54)$$

Objektivität dieses Materialgesetzes bedeutet, daß zwei Bewegungsvorgänge, $(\cdot)_I$ und $(\cdot)_{II}$, die sich nur um eine beliebige Starrkörperverdrehung \mathbf{Q} unterscheiden, denselben Spannungszustand hervorrufen müssen:

$$\bar{\mathbf{t}}_{II} = \mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{F})\bar{\mathbf{e}}_{II} = \mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{F})\mathbf{Q}\bar{\mathbf{e}}_I = \mathbf{Q}\bar{\mathbf{t}}_I = \mathbf{Q}\mathbf{T}(\mathbf{F})\bar{\mathbf{e}}_I \Rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{F}) = \mathbf{Q}^T\mathbf{T}(\mathbf{Q}\mathbf{F})\mathbf{Q} \quad (2.55)$$

Wird insbesondere $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ gewählt, sieht man direkt die Abhängigkeit der Cauchy–Spannungen \mathbf{T} vom rechten Strecktensor \mathbf{U} bzw. dem rechten Cauchy–Green–Tensor \mathbf{C} :

$$\mathbf{T}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\mathbf{T}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\bar{\mathbf{T}}(\mathbf{C})\mathbf{R}^T \quad (2.56)$$

Hyperelastische Materialgesetze für \mathbf{S} und \mathbf{T}_B können als Funktionen ihrer konjugierten Verzerrungen dargestellt werden:

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \bar{\mathbf{T}}(\mathbf{C}) \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} = \bar{\mathbf{S}}(\mathbf{C}) = \mathbf{S}(\mathbf{E}) \quad (2.57)$$

$$\mathbf{T}_B = \det \mathbf{F} \mathbf{R}^T \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T} = \det \mathbf{U} \mathbf{T}(\mathbf{U}) \mathbf{U}^{-1} = \bar{\mathbf{T}}_B(\mathbf{U}) = \mathbf{T}_B(\mathbf{H}) \quad (2.58)$$

Ergeben sich die Spannungen durch Ableiten der spezifischen inneren Energie e , wird das Material Green–elastisch genannt:

$$\mathbf{P} = \rho \frac{\partial e}{\partial \mathbf{F}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{S} = \rho \frac{\partial e}{\partial \mathbf{E}} \quad \text{oder} \quad \mathbf{T}_B^{\text{sym}} = \rho \frac{\partial e}{\partial \mathbf{H}} \quad (2.59)$$

Im Fall der Isotropie hängt e nur von den 3 Invarianten $I_i(\mathbf{U})$ bzw. $I_i(\mathbf{C})$ von \mathbf{U} bzw. \mathbf{C} ab oder von $I_i(\mathbf{H})$ bzw. $I_i(\mathbf{E})$. Die allgemeine Materialgleichung lautet dann für \mathbf{S} bzw.

$\mathbf{T}_B^{\text{sym}}$:

$$\mathbf{S} = \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial e}{\partial I_i(\mathbf{E})} \frac{\partial I_i(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad ; \quad \mathbf{T}_B^{\text{sym}} = \rho \sum_{i=1}^3 \frac{\partial e}{\partial I_i(\mathbf{H})} \frac{\partial I_i(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{H}} \quad (2.60)$$

Anmerkung: Im Gegensatz zu \mathbf{T} , und wie aus (2.26) sofort ersichtlich auch \mathbf{S} , ist \mathbf{P} nicht symmetrisch. Der Biot–Spannungstensor $\mathbf{T}_B = \mathbf{U}\mathbf{S}$ ist im allgemeinen ebenfalls unsymmetrisch. Für den Sonderfall eines isotropen elastischen Materials läßt sich zeigen, daß die Unsymmetrie von \mathbf{T}_B verschwindet (s. a. [19]), denn dann läßt sich \mathbf{T}_B als Tensorpolynom des symmetrischen rechten Strecktensors \mathbf{U} schreiben:

$$\mathbf{T}_B = \mathbf{T}_B^{\text{sym}} = \alpha \mathbf{I} + \beta \mathbf{U} + \gamma \mathbf{U}\mathbf{U} \quad (2.61)$$

2.9.2 Lineare, isotrope Materialgesetze

Den linearen, isotropen Materialgesetzen (verallgemeinertes Hookesches Gesetz) liegt als spezifische innere Energie e eine Funktion der Invarianten $I_1(\mathbf{E})$ und $I_2(\mathbf{E})$ bzw. $I_1(\mathbf{H})$ und $I_2(\mathbf{H})$ zugrunde:

$$\rho e_{\mathbf{E}} = \alpha I_1(\mathbf{E})^2 + \beta I_2(\mathbf{E}) \quad (\text{St. Venant - Kirchhoff}) \quad (2.62)$$

$$\rho e_{\mathbf{H}} = \alpha I_1(\mathbf{H})^2 + \beta I_2(\mathbf{H}) \quad (\text{semi-linear}) \quad (2.63)$$

Mit (2.60) und den Gleichungen (10.22), (10.23) des Anhangs folgt:

$$\mathbf{S} = 2\alpha I_1 \mathbf{I} + \beta(I_1 \mathbf{I} - \mathbf{E}) = (2\alpha + \beta)I_1 \mathbf{I} - \beta \mathbf{E} \quad (2.64)$$

bzw.

$$\mathbf{T}_B = (2\alpha + \beta)I_1 \mathbf{I} - \beta \mathbf{H} \quad (2.65)$$

Nochmaliges Ableiten nach den Verzerrungen führt auf den vierstufigen Werkstofftensor C :

$$C_{\mathbf{E}} = \frac{\partial^2 e_{\mathbf{E}}}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = (2\alpha + \beta) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \beta I \quad (2.66)$$

bzw.

$$C_{\mathbf{H}} = \frac{\partial^2 e_{\mathbf{H}}}{\partial \mathbf{H} \otimes \partial \mathbf{H}} = (2\alpha + \beta) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \beta I = C_{\mathbf{E}} = C \quad (2.67)$$

Die Beziehung der Konstanten α und β zu den Lamé-Konstanten λ_1 und λ_2 lautet:

$$\lambda_1 = 2\alpha + \beta = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \lambda_2 = -\frac{\beta}{2} = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.68)$$

E bezeichnet hierin den Elastizitätsmodul und ν die Querkontraktionszahl. Wird zwischen den PK2-Spannungen \mathbf{S} und den Green-Lagrange-Verzerrungen \mathbf{E} sowie zwischen den Biot-Spannungen \mathbf{T}_B und den Ingenieurverzerrungen \mathbf{H} eine lineare Beziehung angesetzt, so liegt, wie aus (2.62)/(2.63) ersichtlich, eine andere Funktion für die spezifische innere Energie vor. Da diese Gesetze nicht sämtliche Wachstumsbedingungen ([63], [111]) erfüllen, sind sie nur für kleine Verzerrungen gültig.

3 Grundgleichungen nichtlinearer Schalentheorien

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen der nichtlinearen Schalentheorien unter Verwendung von Green–Lagrange–Verzerrungen bzw. Ingenieurverzerrungen aus der 3-dimensionalen Kontinuumsmechanik hergeleitet. Als einzige Annahme dient zunächst ein linear über die Dicke veränderliches Verschiebungsfeld. Es wird bezüglich der Ausgangsgeometrie weder eine, wie oft üblich, konstante oder schwach veränderliche Schalendicke noch ein senkrecht zur Schalenmittelfläche stehender Schalendirektor vorausgesetzt. Erst für Größenordnungsabschätzungen einiger Vereinfachungen werden die beiden Einschränkungen verwendet. Die Verzerrungsgleichungen berücksichtigen die sich während der Verformung ändernde Schalendicke und sind für große Verzerrungen gültig. Um die entstehenden Beziehungen später mit den verschiedenen Versionen des Degenerationskonzepts, bei dem die mechanischen Variablen im allgemeinen auf lokale oder globale kartesische Koordinatensysteme und nicht auf krummlinige Schalenkoordinaten bezogen werden, in übersichtlicher Form vergleichen zu können, wird hier eine absolute Schreibweise bevorzugt eingesetzt, wie sie z.B. in [109], [18], [23], [85] benutzt wird. Koordinatensystem-Transformationen zwischen lokalen oder globalen kartesischen und krummlinigen Koordinaten entfallen dadurch.

Auswirkungen zusätzlicher Annahmen zur Vereinfachung der Gleichungen werden in Kapitel 3.7 diskutiert. Unter anderem wird eine Größenordnungsabschätzung für den Fehler gegeben, der durch Streichen des Anteils der Green–Lagrange–Verzerrungen entsteht, welcher bezüglich der Dickenkoordinate quadratisch ist. Ausgedrückt in Komponentenform bezüglich krummliniger Koordinaten entstehen dann die von Simo et al. (1990) [97] angegebenen Green–Lagrange–Verzerrungsgleichungen.

In [97] wird auf Werke von Green und Zerna (1950), Hildebrand et al. (1949), Naghdi (1972) [62], Reissner (1989), Hughes und Carnoy [48] u. a. verwiesen, die sich ebenfalls mit Schalen veränderlicher Dicke in der Ausgangs- und der verformten Geometrie beschäftigt haben. Erwähnt werden sollen in diesem Zusammenhang auch noch die Arbeiten von Schoop [88], [89].

3.1 Geometrie und Kinematik der Schale

Eine Schale ist ein dünnwandiges Flächentragwerk, dessen Variablen auf eine Referenzfläche bezogen werden, die in dieser Arbeit die Schalenmittelfläche sein soll. Der Ortsvektor $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \xi^3)$ zu einem Punkt des Schalenraums zur Zeit t_0 wird durch den Ortsvektor $\mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) = \mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, 0)$ zum Bezugspunkt der Schalenmittelfläche und den Schalendirektor $\mathbf{d}(\theta^1, \theta^2)$ an dieser Stelle ausgedrückt. \mathbf{d} ist ein Einheitsvektor, der nicht zwingend senkrecht auf der Schalenmittelfläche steht.

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \xi^3 \frac{h}{2} \mathbf{d} \quad ; \quad -1 \leq \xi^3 \leq 1 \quad (3.1)$$

$$|\mathbf{d}| = 1$$

Eine veränderliche Schalendicke h sei zugelassen:

$$h = h(\theta^1, \theta^2) \quad (3.2)$$

Beachtet werden muß, daß die Dicke in Richtung des Direktors zu messen ist. Das Direktorfeld und die Schalenmittelfläche seien stetig und bis auf Stellen, an denen die Schalengeometrie Knicke hat, nach den krummlinigen Koordinaten differenzierbar. An den Knickstellen sollen die links- und rechtsseitigen Ableitungen existieren. Die Berücksichtigung von Knicken hat den Vorteil, daß nicht nur Schalen mit "echten" Knicken berechnet werden können, sondern auch Diskretisierungsknicke korrekt behandelt werden, die durch eine nur C^0 -kontinuierliche Geometrieinterpolation bei z. B. isoparametrischen finiten Elementen auftreten (vgl. Kapitel 6.4).

Um den Sonderfall einer Schale mit konstanter Dicke auf einfache Weise abspalten zu können und um die Schreibweise zu vereinfachen, wird eine auf einen konstanten, positiven Wert h_0 bezogene Dicke κ eingeführt:

$$\kappa = \frac{h}{h_0} \quad (3.3)$$

Mit ihr läßt sich (3.1) umschreiben zu:

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + \xi^3 \frac{h_0}{2} \frac{h}{h_0} \mathbf{d} = \mathbf{r} + \theta^3 \kappa \mathbf{d} = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3 \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_3 = \kappa \mathbf{d}, \quad |\mathbf{a}_3| = \kappa = \frac{h}{h_0}$$

$$\theta^3 = \xi^3 \frac{h_0}{2} \quad (3.4)$$

Um die dreidimensionale Kontinuumstheorie auf eine 2-dimensionale Schalentheorie zu reduzieren, wird üblicherweise eine Annahme für das Verschiebungsfeld in Dickenrichtung der Schale getroffen. Kleine Schubverzerrungen und über die Dicke nur schwach veränderliche Materialeigenschaften rechtfertigen einen linearen Ansatz (s. Bild 3.1).

Annahme A1:
$$\mathbf{u}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \mathbf{v}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \mathbf{w}(\theta^1, \theta^2) \quad (3.5)$$

Der Ortsvektor \bar{x} zu einem Punkt des Schalenraums der deformierten Konfiguration ergibt sich dann zu:

$$\bar{x} = r + v + \theta^3(a_3 + w) = \bar{r} + \theta^3\bar{a}_3 = \bar{r} + \theta^3\bar{\kappa}\bar{d} \quad , \quad \bar{\kappa} = \frac{\bar{h}}{h_0} \quad (3.6)$$

Eine Schalentheorie, in der sich die Direktorlänge während der Deformation ändern kann, wird Schalentheorie mit extensilem Direktor genannt.

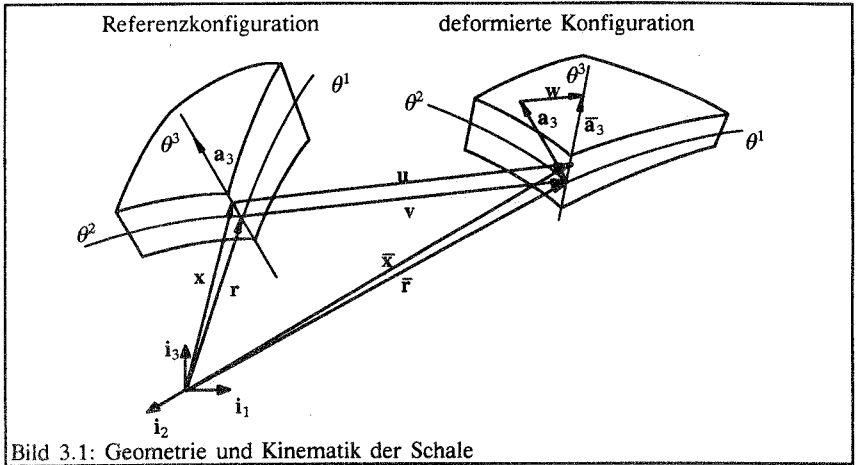


Bild 3.1: Geometrie und Kinematik der Schale

Größen des Schalenraums werden mit dem Shifter Z auf die Schalenmittelfläche bezogen.

$$Z = J J_C^{-1} = g_i \otimes a^i = x_{,r} \quad (3.7)$$

Hierin stellt J die Jacobi-Matrix des Schalenraums analog zu (2.1) dar und J_C die Jacobi-Matrix der Referenzfläche mit den kovarianten Basisvektoren a_i .

$$J = \frac{\partial x}{\partial \theta} = g_i \otimes i^i = [g_1, g_2, g_3]_{,i} \quad ; \quad \theta = [\theta^1, \theta^2, \theta^3] \quad (3.8)$$

$$J_C = J(\theta^3 = 0) = a_i \otimes i^i = [a_1, a_2, a_3]_{,i} \quad (3.9)$$

Die kontravarianten Basisvektoren g^i bzw. a^i sind die Spalten der inversen, transponierten Jacobi-Matrizen:

$$J^{-T} = g^i \otimes i_i = [g^1, g^2, g^3]_{,i} = \left[\frac{\partial \theta^j}{\partial x^i} \right]_{i, \otimes j}^T \quad (3.10)$$

$$J_C^{-T} = a^i \otimes i_i = [a^1, a^2, a^3]_{,i} \quad (3.11)$$

Z und J sind lineare Funktionen der geradlinigen konvektiven Koordinate θ^3 .

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{i}^i + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{i}^\alpha = \mathbf{J}_C + \theta^3 \mathbf{J}_L \quad ; \quad \mathbf{J}_C = \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{i}^i \quad , \quad \mathbf{J}_L = \mathbf{a}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{i}^\alpha \quad (3.12)$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{x}_{;r} = (\mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3)_{;r} = \mathbf{r}_{;r} + \mathbf{a}_3 \otimes \theta^3_{;r} + \theta^3 \mathbf{a}_{3;r} = \mathbf{I} - \theta^3 \mathbf{B} \quad (3.13)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß kleine lateinische Indizes in dieser Arbeit von 1 bis 3 laufen; griechische nehmen nur die Werte 1 und 2 an.

Die Abkürzung $(\)_{;r}$ sei folgendermaßen definiert:

$$(\)_{;r} = (\)_{;x} \mathbf{Z} = \left((\)_{,i} \otimes \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{Z} = ((\)_{,i} \otimes \mathbf{g}^i)(\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{a}^j) = (\)_{,i} \otimes \mathbf{a}^i$$

$$\text{mit} \quad (\)_{,i} = \frac{\partial (\)}{\partial \theta^i}$$

Also gilt:

$$\theta^3_{;r} = \theta^3_{;x} \mathbf{Z} = \mathbf{g}^{3T}(\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{a}^i) = \mathbf{a}^{3T}$$

$$\mathbf{r}_{;r} = (\mathbf{r}_{,\alpha} \otimes \mathbf{g}^\alpha) \mathbf{Z} = \mathbf{r}_{,\alpha} \otimes \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{I} - \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}^3 \neq \mathbf{I}$$

Ferner sei auf die Größe \mathbf{B} in (3.13) aufmerksam gemacht:

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_{3;r} = -(\kappa \mathbf{d})_{;r} = -(\mathbf{d} \otimes \kappa_{;r} + \kappa \mathbf{d}_{;r}) \quad (3.14)$$

Für den Sonderfall einer Schale mit konstanter Dicke ($\kappa = 1$) und einem senkrecht auf der Schalenmittelfläche stehenden Direktor \mathbf{d} entspricht \mathbf{B} dem symmetrischen Krümmungstensor \mathbf{B}^0 einer Fläche.

$$\mathbf{B}^0 = -\mathbf{d}_{;r} = -\mathbf{d}_{,\alpha} \otimes \mathbf{a}^\alpha = b_{\beta\alpha}^0 \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta \quad \text{mit} \quad b_{\beta\alpha}^0 = -\mathbf{d}_{,\alpha} \mathbf{a}^\beta = -\mathbf{d}_{,\beta} \mathbf{a}^\alpha$$

Auf die gleiche Weise wie für die Ausgangsgeometrie können die Jacobi-Matrizen $\bar{\mathbf{J}}$ und $\bar{\mathbf{J}}_C$ sowie der Schalenshifter $\bar{\mathbf{Z}}$ der verformten Schalen geometrie eingeführt werden. Als Folge der Annahme A1 sind $\bar{\mathbf{J}}$ und $\bar{\mathbf{Z}}$ ebenfalls linear von θ^3 abhängig:

$$\bar{\mathbf{J}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta} = \bar{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{i}^i = \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{i}^i + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \otimes \mathbf{i}^\alpha = \bar{\mathbf{J}}_C + \theta^3 \bar{\mathbf{J}}_L \quad (3.15)$$

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{x}}_{;\bar{r}} = \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{J}}_C^{-1} = \mathbf{I} + \theta^3 \bar{\mathbf{J}}_L \bar{\mathbf{J}}_C^{-1} = \mathbf{I} - \theta^3 \bar{\mathbf{B}} \quad (3.16)$$

bzw:

$$\bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{x}}_{;\bar{r}} = (\bar{\mathbf{r}} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_3)_{;\bar{r}} = \bar{\mathbf{r}}_{;\bar{r}} + \bar{\mathbf{a}}_3 \otimes \theta^3_{;\bar{r}} + \theta^3 \bar{\mathbf{a}}_{3;\bar{r}} = \mathbf{I} - \theta^3 \bar{\mathbf{B}} \quad (3.17)$$

Den Zusammenhang zwischen den Metrikgrößen der verformten und unverformten Geometrie erhält man über den Deformationsgradienten \mathbf{F} . Dieser kann mit dem Shifter \mathbf{Z} auf die Schalenmittelfläche bezogen werden:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \mathbf{Z} = \bar{\mathbf{x}}_{;x} \mathbf{x}_{;r} \quad (3.18)$$

$\hat{\mathbf{F}}$ besteht aus einem konstanten und einem linearen Term:

$$\hat{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{x}}_{;r} = \mathbf{x}_{;r} + \mathbf{u}_{;r} = \mathbf{I} - \theta^3 \mathbf{B} + \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \theta^3_{;r} + \theta^3 \mathbf{w}_{;r} = \mathbf{F}_C + \theta^3 \mathbf{F}_L \quad (3.19)$$

mit:

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{I} + \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3 \quad (3.20)$$

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{w}_{;r} - \mathbf{B} = \bar{\mathbf{a}}_{3;r} \quad (3.21)$$

Eine andere Form, die Teile des Deformationsgradienten darzustellen, bekommt man mit Hilfe der Gleichungen (2.6), (3.7), (3.12) und (3.18):

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{FZ} = \bar{\mathbf{J}}\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}\mathbf{J}_C^{-1} = \bar{\mathbf{J}}\mathbf{J}_C^{-1} = \bar{\mathbf{J}}_C\mathbf{J}_C^{-1} + \theta^3\bar{\mathbf{J}}_L\mathbf{J}_C^{-1} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{F}_C = \bar{\mathbf{J}}_C\mathbf{J}_C^{-1} = \bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{a}^i \quad (3.23)$$

$$\mathbf{F}_L = \bar{\mathbf{J}}_L\mathbf{J}_C^{-1} = \bar{\mathbf{a}}_{3;a} \otimes \mathbf{a}^a \quad (3.24)$$

Über die Gleichungen (3.22), (3.23) und (3.16) läßt sich $\bar{\mathbf{J}}$ auf zwei Arten ausdrücken:

$$\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{F} \mathbf{J} = \hat{\mathbf{F}} \mathbf{J}_C = \mathbf{FZJ}_C \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{J}} = \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{J}}_C = \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{F}_C \mathbf{J}_C \quad (3.25)$$

Hieraus erhält man direkt die Beziehung zwischen den Shiftern $\bar{\mathbf{Z}}$ und \mathbf{Z} und den Deformationsgradienten:

$$\mathbf{FZ} = \bar{\mathbf{Z}}\mathbf{F}_C \Leftrightarrow \bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{F} \mathbf{Z} \mathbf{F}_C^{-1} = \hat{\mathbf{F}} \mathbf{F}_C^{-1} = \mathbf{I} + \theta^3 \mathbf{F}_L \mathbf{F}_C^{-1} \quad (3.26)$$

Der letzte Term der Gleichungskette (3.26) liefert mit (3.16) für $\bar{\mathbf{B}}$:

$$\bar{\mathbf{B}} = -\mathbf{F}_L \mathbf{F}_C^{-1} \quad (3.27)$$

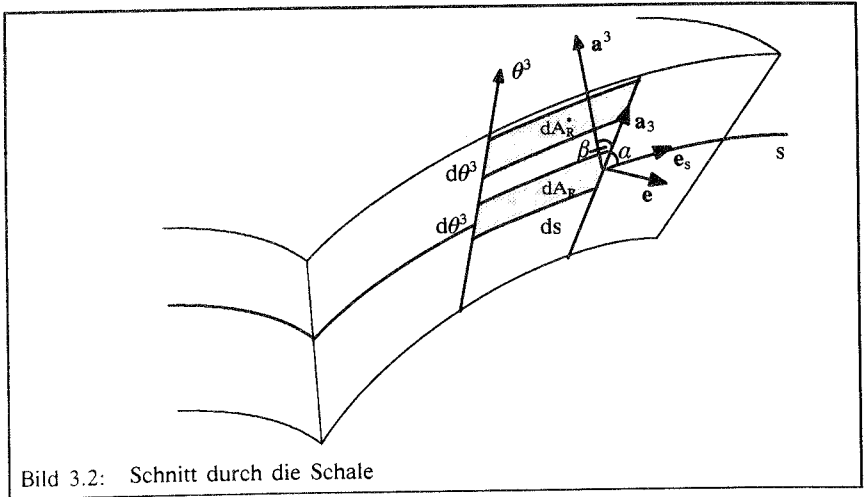


Bild 3.2: Schnitt durch die Schale

Schließlich sollen noch einige Formeln für Volumen-, Flächen- und Linienelemente angegeben werden (s. Bild 3.2). Für ein Volumenelement des Schalenraums gilt:

$$dV = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \mathbf{g}_3 \, d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 = \det \mathbf{J} \, d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 \quad (3.28)$$

Der Zusammenhang eines Flächenelementes des Schalenraums dA^* mit dem zugehörigen in der Höhe $\theta^3 = 0$ ist formal identisch mit (2.8); \mathbf{F} muß nur durch \mathbf{Z} ersetzt werden:

$$\mathbf{e}^* \, dA^* = \det \mathbf{Z} \, \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{e} \, dA \quad (3.29)$$

Ein Flächenelement der Schalenmittelfläche errechnet sich über:

$$dA = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| \, d\theta^1 d\theta^2 \quad (3.30)$$

Mit:

$$\det \mathbf{J}_C = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \mathbf{a}_3 = |\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2| |\mathbf{a}_3| \cos \beta \quad , \quad \beta = \angle(\mathbf{a}_3, \mathbf{a}^3) \quad (3.31)$$

kann (3.30) umgeformt werden zu:

$$dA = \frac{\det \mathbf{J}_C}{\kappa \cos \beta} \, d\theta^1 d\theta^2 \quad (3.32)$$

Für den im folgenden häufig benutzten Quotienten dV/dA gilt mit (3.28) bis (3.30) und $\det \mathbf{J} = \det \mathbf{Z} \det \mathbf{J}_C$:

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\det \mathbf{J}}{\det \mathbf{J}_C} \kappa \cos \beta \, d\theta^3 = \det \mathbf{Z} \, \kappa \cos \beta \, d\theta^3 = \mu \, d\theta^3 \quad (3.33)$$

Ein Flächenelement des Schalenrandes dA_R in Höhe der Mittelfläche (s. Bild 3.2) hat die Größe:

$$dA_R = |\mathbf{r}_{,s} \times \mathbf{a}_3| \, d\theta^3 \, ds = |\mathbf{e}_s \times \mathbf{a}_3| \, d\theta^3 \, ds = \kappa \sin \alpha \, d\theta^3 \, ds \quad , \quad |\mathbf{e}_s| = 1 \quad (3.34)$$

Die Beziehungen für die verformte Schalengeometrie ergeben sich entsprechend. Insbesondere gilt:

$$d\bar{V} = (\bar{\mathbf{g}}_1 \times \bar{\mathbf{g}}_2) \bar{\mathbf{g}}_3 \, d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 = \det \bar{\mathbf{J}} \, d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1 \quad (3.35)$$

$$\bar{\mathbf{e}}^* \, d\bar{A}^* = \det \bar{\mathbf{Z}} \, \bar{\mathbf{Z}}^{-T} \bar{\mathbf{e}} \, d\bar{A} \quad (3.36)$$

$$\bar{\mu} \, d\theta^3 = \frac{d\bar{V}}{d\bar{A}} = \det \bar{\mathbf{Z}} \, |\bar{\mathbf{a}}_3| \cos \bar{\beta} \, d\theta^3 \quad (3.37)$$

$$d\bar{A}_R = |\bar{\mathbf{r}}_{,s} \times \bar{\mathbf{a}}_3| \, d\theta^3 \, d\bar{s} = |\bar{\mathbf{e}}_s \times \bar{\mathbf{a}}_3| \, d\theta^3 \, d\bar{s} = \bar{\kappa} \sin \bar{\alpha} \, d\theta^3 \, d\bar{s} \quad , \quad |\bar{\mathbf{e}}_s| = 1 \quad (3.38)$$

3.2 Schnittgrößen der Schale

3.2.1 Cauchy-Schnittgrößen

Zur Herleitung der "wahren" Schalenschnittgrößen aus den Cauchy-Spannungen des dreidimensionalen Kontinuums wird ein nicht zur Schalenmittelfläche tangentialer, aber sonst beliebiger Schnitt durch die deformierte Schale betrachtet. Das Integral der Schnittkraft $\bar{\mathbf{n}}$ längs der Schnittlinie der Schalenmittelfläche mit der Schnittfläche \bar{A}_R muß mit dem über die Schnittfläche aufintegrierten Spannungsvektor $\bar{\mathbf{t}}$ identisch sein.

$$\int_{\bar{s}} \bar{\mathbf{n}} \, d\bar{s} = \iint_{\bar{A}_R} \bar{\mathbf{t}} \, d\bar{A}_R \quad (3.39)$$

Für das resultierende Moment gilt analog:

$$\int_{\bar{s}} \bar{\mathbf{m}} \, d\bar{s} = \iint_{\bar{A}_R} (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{r}}) \times \bar{\mathbf{t}} \, d\bar{A}_R \quad (3.40)$$

Nach Einführung der Annahme A1 – die Dickenkoordinate θ^3 bleibt stets geradlinig – bietet sich eine Schnittführung parallel zu θ^3 an. Mit (3.36), (3.38) und dem Cauchy-Theorem (2.22) kann (3.39) umgeformt werden zu:

$$\int_{\bar{s}} \bar{\mathbf{n}} \, d\bar{s} = \int_{\bar{s}} [\bar{\kappa} \sin \bar{\alpha} \left(\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \det \bar{\mathbf{Z}} \, \mathbf{T} \, \bar{\mathbf{Z}}^{-T} \, d\theta^3 \right) \bar{\mathbf{e}}] \, d\bar{s} \quad (3.41)$$

Mit der Formel (3.36) $\bar{\mu} = \bar{\kappa} \cos \bar{\beta} \det \bar{\mathbf{Z}}$ soll der Cauchy-Schnittkrafttensor \mathbf{N}_r definiert werden als:

$$\mathbf{N}_r = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \bar{\mu} \, \mathbf{T} \, \bar{\mathbf{Z}}^{-T} \, d\theta^3 \quad ; \quad \bar{\mathbf{n}} = \frac{\sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\beta}} \mathbf{N}_r \bar{\mathbf{e}} \quad (3.42)$$

Die gleiche Vorgehensweise unter zusätzlicher Beachtung von (3.6) führt zum Cauchy-Momententensor \mathbf{M}_r :

$$\int_{\bar{s}} \bar{\mathbf{m}} \, d\bar{s} = \int_{\bar{s}} [\bar{\mathbf{a}}_3 \times \frac{\sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\beta}} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \bar{\mu} \, \mathbf{T} \, \bar{\mathbf{Z}}^{-T} \, d\theta^3 \, \bar{\mathbf{e}}] \, d\bar{s} = \int_{\bar{s}} \bar{\mathbf{a}}_3 \times \frac{\sin \bar{\alpha}}{\cos \bar{\beta}} (\mathbf{M}_r \, \bar{\mathbf{e}}) \, d\bar{s} \quad (3.43)$$

mit:

$$\mathbf{M}_r = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \bar{\mu} \mathbf{T} \bar{\mathbf{Z}}^{-T} d\theta^3 \quad (3.44)$$

Im Gegensatz zu den Cauchy-Spannungen sind die Cauchy-Schnittgrößen im allgemeinen Fall einer gekrümmten Schale nicht symmetrisch.

3.2.2 Piola-Kirchhoff-Schnittgrößen 1. Art

Für die (totale) Lagrangesche Betrachtungsweise werden auf den Referenzzustand bezogene "Pseudo"-Schnittgrößen benutzt. Die resultierende Kraft einer Schnittfläche A_R wird damit analog zum vorangegangenen Abschnitt ermittelt zu:

$$\int_s \mathbf{n} ds = \iint_{A_R} \mathbf{t} dA^* = \iint_{A_R} \mathbf{P} \mathbf{e}^* dA^* = \int_s \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{P} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \mathbf{e} ds \quad (3.45)$$

mit $\mu = \kappa \cos \beta \det \mathbf{Z}$ nach Formel (3.33).

Zweckmäßigerweise definiert man den PK1-Schnittkrafttensor 1. Art \mathbf{N}_I als:

$$\mathbf{N}_I = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{P} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \quad (3.46)$$

und analog dazu den PK1-Momententensor \mathbf{M}_I als

$$\mathbf{M}_I = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \mu \mathbf{P} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \quad (3.47)$$

Das resultierende Moment einer Schnittfläche ist damit:

$$\int_s \mathbf{m} ds = \int_s \bar{\mathbf{a}}_3 \times \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} (\mathbf{M}_I \mathbf{e}) ds \quad (3.48)$$

Die Beziehung zu den wahren (Cauchy-)Schnittgrößen erhält man durch Einsetzen von (2.25) unter Berücksichtigung von (3.26) in (3.46) bzw. (3.47):

$$\mathbf{N}_I = \frac{\cos \beta}{\chi \cos \beta} \det \mathbf{F}_C \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \bar{\mu} \mathbf{T} \bar{\mathbf{Z}}^{-T} d\theta^3 \mathbf{F}_C^{-T} = \frac{\cos \beta}{\chi \cos \beta} \det \mathbf{F}_C \mathbf{N}_r \mathbf{F}_C^{-T} ; \quad \chi = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} \quad (3.49)$$

bzw.:

$$\mathbf{M}_I = \frac{\cos \beta}{\chi \cos \bar{\beta}} \det \mathbf{F}_C \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \bar{\mu} \mathbf{T} \bar{\mathbf{Z}}^{-T} d\theta^3 \mathbf{F}_C^{-T} = \frac{\cos \beta}{\chi \cos \bar{\beta}} \det \mathbf{F}_C \mathbf{M}_C \mathbf{F}_C^{-T} \quad (3.50)$$

3.2.3 Piola-Kirchhoff-Schnittgrößen 2. Art

Setzt man in (3.46) $\mathbf{P}=\mathbf{F}\mathbf{S}$ ein, so ergibt sich mit (3.18) für den Schnittkrafttensor \mathbf{N}_I :

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_I &= \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu (\mathbf{F}_C + \theta^3 \mathbf{F}_L) \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \\ &= \mathbf{F}_C \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 + \mathbf{F}_L \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \mu \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \\ &= \mathbf{F}_C \mathbf{N}_{II} + \mathbf{F}_L \mathbf{M}_{II}^{(1)} \end{aligned} \quad (3.51)$$

und für den Momententensor \mathbf{M}_I :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_I &= \mathbf{F}_C \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \mu \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 + \mathbf{F}_L \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} (\theta^3)^2 \mu \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \\ &= \mathbf{F}_C \mathbf{M}_{II}^{(1)} + \mathbf{F}_L \mathbf{M}_{II}^{(2)} \end{aligned} \quad (3.52)$$

mit den naheliegenden Definitionen der symmetrischen PK2-Schnittgrößen:

$$\mathbf{N}_{II} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \quad (3.53)$$

$$\mathbf{M}_{II}^{(1)} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \mu \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \quad (3.54)$$

$$\mathbf{M}_{II}^{(2)} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} (\theta^3)^2 \mu \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \quad (3.55)$$

3.2.4 Biot-Schnittgrößen

Um Schnittgrößen basierend auf Biot-Spannungen zu definieren, wird zunächst \mathbf{P} in (3.46) bzw. (3.47) durch $\mathbf{P} = \mathbf{R}\mathbf{T}_B$ ersetzt.

$$\mathbf{N}_I = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{R}\mathbf{T}_B \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{M}_I = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \mu \mathbf{R}\mathbf{T}_B \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 \quad (3.56)$$

\mathbf{R} , entstanden aus der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} , ist in der Regel nichtlinear abhängig von der Koordinate θ^3 . Deshalb ist eine zweckmäßige Schnittgrößenherleitung als Integral einer Funktion, die nur von den Spannungen und dem Schalenhifter abhängt, nicht möglich. Erst durch die Annahme

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{R}_C = \mathbf{F}_C \mathbf{U}_C^{-1} \quad (3.57)$$

daß der Rotationstensor \mathbf{R} des Schalenraums durch den Rotationstensor \mathbf{R}_C der Schalenmittelfläche approximiert werden kann, ist es möglich, \mathbf{R} vor das Integral zu ziehen:

$$\mathbf{N}_I \approx \mathbf{R}_C \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{T}_B \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 = \mathbf{R}_C \mathbf{N}_B \quad (3.58)$$

$$\mathbf{M}_I \approx \mathbf{R}_C \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \mu \mathbf{T}_B \mathbf{Z}^{-T} d\theta^3 = \mathbf{R}_C \mathbf{M}_B \quad (3.59)$$

Mit den so gewählten Schnittgrößen \mathbf{N}_B und \mathbf{M}_B sind die "wahren" Schnittgrößen \mathbf{N}_r und \mathbf{M}_r wegen der Näherung nie exakt zu berechnen. Nachfolgende Betrachtung zeigt, daß eine derartige Vorgehensweise nur für kleine Verzerrungen und dünne, schwach gekrümmte Schalen ($\mathbf{Z}=\mathbf{I}$) zulässig ist, denn soll \mathbf{R}_C eine gute Näherung für \mathbf{R} sein, muß das Produkt $\mathbf{R}_C^T \mathbf{F} \approx \mathbf{R}^T \mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{U}^T$ nahezu symmetrisch werden:

$$\mathbf{R}_C^T \mathbf{F} = \mathbf{R}_C^T \hat{\mathbf{F}} \mathbf{Z}^{-1} \approx \mathbf{R}_C^T \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U}_C + \theta^3 \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_L = \mathbf{U}_C - \theta^3 \mathbf{R}_C^T \bar{\mathbf{B}} \mathbf{R}_C \mathbf{U}_C = \mathbf{R}_C^T \bar{\mathbf{Z}} \mathbf{R}_C \mathbf{U}_C \quad (3.60)$$

Diese unter Verwendung von (3.27) erhaltene Gleichung ist dann fast symmetrisch, falls $\mathbf{U}_C \approx \mathbf{I}$ gilt und $\bar{\mathbf{B}}$ symmetrisch ist, was nach Anhang 9.1.2 verschwindend kleine Schubgradienten $\gamma_{i,F}$ und Dickenänderungsgradienten $\bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\kappa}_{,F}$ der verformten Schale voraussetzt. Symmetrisch wird (3.60) auch, falls $\bar{\mathbf{Z}} \approx \mathbf{I}$, also $\bar{\mathbf{B}} \approx \mathbf{0}$.

3.3 Verzerrungsmaße der Schale

Hier sollen Verzerrungsmaße betrachtet werden, die mit den Green–Lagrange–Verzerrungen \mathbf{E} (kurz: GL–Verzerrungen) oder den Ingenieurverzerrungen \mathbf{H} verwandt sind. Der Verzerrungszustand der Schale wird durch die Verzerrungen und Verkrümmungen der Schalenmittelfläche beschrieben. Diese sind, abgesehen von Größen der Schalengeometrie des Ausgangszustands, nur noch von \mathbf{F}_C und \mathbf{F}_L abhängig, denn $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_C + \theta^3 \mathbf{F}_L$ erfaßt vollständig den Deformationszustand der Schale.

3.3.1 Verzerrungsmaße basierend auf Green–Lagrange–Verzerrungen

Die in der Kontinuumsmechanik am häufigsten benutzten Green–Lagrange–Verzerrungen dienen in der Regel als Basis zur Definition der Verzerrungen und Verkrümmungen der Schale. Ausgehend von:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad \text{und} \quad \mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}} \mathbf{Z}^{-1}$$

erhält man:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{Z}^{-T} \hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} \mathbf{Z}^{-1} - \mathbf{I}) = \mathbf{Z}^{-T} \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{F}}^T \hat{\mathbf{F}} - \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}) \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}^{-T} \hat{\mathbf{E}} \mathbf{Z}^{-1} \quad (3.61)$$

Einsetzen von (3.19) – an dieser Stelle wird Annahme A1 benutzt – und Einfügen der Gleichungen (3.20) und (3.21) in die auf die Schalenmittelfläche bezogenen Verzerrungen $\hat{\mathbf{E}}$ führt zu einem in θ^3 quadratischen Ausdruck:

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_C + \theta^3 \hat{\mathbf{E}}_L + (\theta^3)^2 \hat{\mathbf{E}}_Q \quad (3.62)$$

mit:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_C &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_C^T \mathbf{F}_C - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{;r}^T + \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w} \\ &\quad + \underline{\mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{v}_{;r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{v}_{;r} + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w})(\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)}) \end{aligned} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_L &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_C^T \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_C + \mathbf{B}^T + \mathbf{B}) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{w}_{;r}^T + \mathbf{w}_{;r} - \mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{v}_{;r} - \mathbf{B}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) - (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{B} \\ &\quad + \underline{\mathbf{w}_{;r}^T \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{w}_{;r} + \mathbf{w}_{;r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{w}_{;r}}) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\hat{\mathbf{E}}_Q = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_L - \mathbf{B}^T \mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\underline{-\mathbf{w}_{;r}^T \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{w}_{;r}} + \underline{\mathbf{w}_{;r}^T \mathbf{w}_{;r}}) \quad (3.65)$$

Streichen der unterstrichenen Terme ergibt die Gleichungen der linearen Theorie.

Die Objektivität der Verzerrungsmaße $\hat{\mathbf{E}}_C$, $\hat{\mathbf{E}}_L$ und $\hat{\mathbf{E}}_Q$ ist leicht nachzuweisen. Eine Starrkörperrotation \mathbf{Q} , die auf eine Deformation \mathbf{F}^I folgt, führt zu $\mathbf{F}^{II} = \mathbf{Q}\mathbf{F}^I$. Dann gilt:

$$\mathbf{F}^{II} = \hat{\mathbf{F}}^{II}\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{F}}^I\mathbf{Z}^{-1} \rightarrow \hat{\mathbf{F}}^{II} = \mathbf{F}_C^{II} + \theta^3\mathbf{F}_L^{II} = \mathbf{Q}\mathbf{F}_C^I + \theta^3\mathbf{Q}\mathbf{F}_L^I \quad (3.66)$$

So läßt sich beispielsweise für $\hat{\mathbf{E}}_L$ zeigen:

$$\hat{\mathbf{E}}_L^{II} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_C^{II\top}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}_L^I + \mathbf{F}_L^{II\top}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}_C^I + \mathbf{B}^T + \mathbf{B}) = \hat{\mathbf{E}}_L^I, \quad \text{denn} \quad \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I} \quad (3.67)$$

Die drei Verzerrungstensoren $\hat{\mathbf{E}}_C$, $\hat{\mathbf{E}}_L$ und $\hat{\mathbf{E}}_Q$ sind jedoch nicht unabhängig von einander (s. Anhang 9.1.3).

3.3.2 Verzerrungsmaße basierend auf Ingenieurverzerrungen

Schalentheorien, die von einer polaren Zerlegung des Deformationsgradienten starten und dann Ingenieurverzerrungen benutzen, begegnet man selten. Erste Überlegungen gehen auf Reissner zurück, doch gerade in den letzten Jahren sind Veröffentlichungen von Pietraszkiewicz [70], Recke [80], Gruttmann [39] zu diesem Thema erschienen. Eine exakte Herleitung und vergleichende Betrachtungen dieser Arbeiten haben Sansour und Bufler [85] vorgestellt. Wie schon in Abschnitt 3.2.4 bei der Definition der Biot-Schnittgrößen erwähnt, hängt der Rotationstensor $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ des Schalenraums nichtlinear von der Koordinate θ^3 ab. Eine einfache Zerlegung der Ingenieurverzerrung \mathbf{H} in Verzerrungs- und Verkrümmungsgrößen der Schalenmittelfläche gelingt deshalb nicht. Jedoch können mit dem Rotationstensor $\mathbf{R}_C = \mathbf{F}_C\mathbf{U}_C^{-1}$ objektive Verzerrungsmaße definiert werden [85]. Der Verzerrungstensor der Schalenmittelfläche sei definiert zu:

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{R}_C^T\mathbf{F}_C - \mathbf{I} = \mathbf{U}_C - \mathbf{I} \quad (3.68)$$

und der Verkrümmungstensor zu:

$$\mathbf{H}_L = \mathbf{R}_C^T\mathbf{F}_L + \mathbf{B} \quad (3.69)$$

Zum Nachweis der Objektivität von \mathbf{H}_C bzw. \mathbf{H}_L wird von (3.66) ausgegangen. Die polare Zerlegung von $\mathbf{F}_C^{II} = \mathbf{R}_C^{II}\mathbf{U}_C^{II} = \mathbf{Q}\mathbf{F}_C^I = \mathbf{Q}\mathbf{R}_C^I\mathbf{U}_C^I$ führt aufgrund ihrer Eindeutigkeit auf:

$$\mathbf{R}_C^{II} = \mathbf{Q}\mathbf{R}_C^I \quad \text{und} \quad \mathbf{U}_C^{II} = \mathbf{U}_C^I \quad (3.70)$$

Damit ist $\mathbf{H}_C^{II} = \mathbf{H}_C^I$ und auch:

$$\mathbf{H}_L^{II} = \mathbf{R}_C^{II\top}\mathbf{F}_L^I + \mathbf{B} = \mathbf{R}_C^{I\top}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{F}_L^I + \mathbf{B} = \mathbf{H}_L^I \quad (3.71)$$

\mathbf{H}_L ist im allgemeinen unsymmetrisch und kann mit der gleichen Begründung wie in Gleichung (3.60) nur unter Beachtung einer Reihe von Einschränkungen symmetrisch angesetzt werden.

3.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für die Schale

In diesem Abschnitt wird die virtuelle Arbeitsgleichung des dreidimensionalen Kontinuums (2.53):

$$\delta W^{\text{int}} + \delta W^{\text{ext}} = 0 \quad (3.72)$$

für zeitunabhängige Probleme durch Dickenintegration so umgeformt, daß sie in Schnittgrößen- und Verzerrungstensoren der Schale ausgedrückt werden kann.

3.4.1 Innere virtuelle Arbeit

3.4.1.1 Innere virtuelle Arbeit, formuliert mit dem Deformationsgradienten der Schale

Die innere virtuelle Arbeit des Kontinuums, ausgedrückt in PK1-Spannungen \mathbf{P} und dem Deformationsgradienten \mathbf{F} :

$$-\delta W^{\text{int}} = \iiint_V \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{F} \, dV \quad (3.73)$$

wird unter Verwendung von (3.18) und:

$$dV = \mu \, d\theta^3 \, dA \quad (3.74)$$

überführt in:

$$\begin{aligned} -\delta W^{\text{int}} &= \iint_A \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{PZ}^{-T} \cdot \delta \hat{\mathbf{F}} \, d\theta^3 dA \\ &= \iint_A \left[\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{PZ}^{-T} d\theta^3 \right] \cdot \delta \mathbf{F}_C + \left[\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \theta^3 \mathbf{PZ}^{-T} d\theta^3 \right] \cdot \delta \mathbf{F}_L \, dA \\ &= \iint_A [\mathbf{N}_I \cdot \delta \mathbf{F}_C + \mathbf{M}_I \cdot \delta \mathbf{F}_L] \, dA \end{aligned} \quad (3.75)$$

3.4.1.2 Innere virtuelle Arbeit, formuliert mit Green-Lagrange-Verzerrungstensoren der Schale

Mittels (3.51) und (3.52) kann die innere virtuelle Arbeit in PK2-Schnittgrößen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
-\delta W^{\text{int}} &= \iint_A \left((\mathbf{F}_C \mathbf{N}_{\text{II}} + \mathbf{F}_L \mathbf{M}_{\text{II}}^{(1)}) \cdot \delta \mathbf{F}_C + (\mathbf{F}_C \mathbf{M}_{\text{II}}^{(1)} + \mathbf{F}_L \mathbf{M}_{\text{II}}^{(2)}) \cdot \delta \mathbf{F}_L \right) dA \\
&= \iint_A \left(\mathbf{N}_{\text{II}} \cdot \mathbf{F}_C^T \delta \mathbf{F}_C + \mathbf{M}_{\text{II}}^{(1)} \cdot (\mathbf{F}_L^T \delta \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_C^T \delta \mathbf{F}_L) + \mathbf{M}_{\text{II}}^{(2)} \cdot \mathbf{F}_L^T \delta \mathbf{F}_L \right) dA \quad (3.76)
\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie dieser Schnittgrößen ist Gleichung (3.76) identisch mit:

$$\begin{aligned}
-\delta W^{\text{int}} &= \iint_A \left[\mathbf{N}_{\text{II}} \cdot \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}_C^T \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_C^T \delta \mathbf{F}_C) \right. \\
&\quad + \mathbf{M}_{\text{II}}^{(1)} \cdot \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_C + \delta \mathbf{F}_C^T \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_L^T \delta \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_C^T \delta \mathbf{F}_L) \\
&\quad \left. + \mathbf{M}_{\text{II}}^{(2)} \cdot \frac{1}{2} (\delta \mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_L^T \delta \mathbf{F}_L) \right] dA \quad (3.77)
\end{aligned}$$

Hierin erkennt man die Variationen der Verzerrungstensoren $\hat{\mathbf{E}}_C$, $\hat{\mathbf{E}}_L$ und $\hat{\mathbf{E}}_Q$ (s. Gleichungen (3.63), (3.64) und (3.65)), so daß schließlich gilt:

$$-\delta W^{\text{int}} = \iint_A \left[\mathbf{N}_{\text{II}} \cdot \delta \hat{\mathbf{E}}_C + \mathbf{M}_{\text{II}}^{(1)} \cdot \delta \hat{\mathbf{E}}_L + \mathbf{M}_{\text{II}}^{(2)} \cdot \delta \hat{\mathbf{E}}_Q \right] dA \quad (3.78)$$

3.4.1.3 Innere virtuelle Arbeit, formuliert mit Ingenieurverzerrungstensoren der Schale

Zunächst wird (3.75) umgeformt in:

$$-\delta W^{\text{int}} = \iint_A \left[\mathbf{R}_C^T \mathbf{N}_I \cdot \mathbf{R}_C^T \delta \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_C^T \mathbf{M}_I \cdot \mathbf{R}_C^T \delta \mathbf{F}_L \right] dA \quad (3.79)$$

Mit den Variationen von \mathbf{H}_C und \mathbf{H}_L

$$\delta \mathbf{H}_C = \delta \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_C^T \delta \mathbf{F}_C \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{H}_L = \delta \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_L + \mathbf{R}_C^T \delta \mathbf{F}_L \quad (3.80)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
-\delta W^{\text{int}} &= \iint_A \left[\mathbf{R}_C^T \mathbf{N}_I \cdot \delta \mathbf{H}_C + \mathbf{R}_C^T \mathbf{M}_I \cdot \delta \mathbf{H}_L \right] dA \\
&\quad - \iint_A \left[\mathbf{R}_C^T \mathbf{N}_I \cdot \delta \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_C^T \mathbf{M}_I \cdot \delta \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_L \right] dA \quad (3.81)
\end{aligned}$$

Der zweite Teil dieser Gleichung verschwindet, da unter Berücksichtigung von (3.51) und (3.52) der Term so umgeformt werden kann, daß ein skalares Produkt eines symmetrischen mit dem antisymmetrischen Tensor $\mathbf{R}_C \delta \mathbf{R}_C^T$ ersichtlich wird:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{R}_C^T \mathbf{N}_I \cdot \delta \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_C^T \mathbf{M}_I \cdot \delta \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_L \\
& = (\mathbf{N}_I \mathbf{F}_C^T + \mathbf{M}_I \mathbf{F}_L^T) \cdot \mathbf{R}_C \delta \mathbf{R}_C^T \\
& = (\mathbf{F}_C \mathbf{N}_{II} \mathbf{F}_C^T + \mathbf{F}_L \mathbf{M}_{II}^{(1)} \mathbf{F}_C^T + \mathbf{F}_C \mathbf{M}_{II}^{(1)} \mathbf{F}_L^T + \mathbf{F}_L \mathbf{M}_{II}^{(2)} \mathbf{F}_L^T) \cdot (\mathbf{R}_C \delta \mathbf{R}_C^T) = 0 \quad (3.82)
\end{aligned}$$

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß zur Herleitung des Arbeitsausdrucks:

$$-\delta W^{\text{int}} = \int_A \left[\mathbf{R}_C^T \mathbf{N}_I \cdot \delta \mathbf{H}_C + \mathbf{R}_C^T \mathbf{M}_I \cdot \delta \mathbf{H}_L \right] dA \quad (3.83)$$

wie auch der Gleichungen (3.75), (3.76) ausschließlich Annahme A1 benutzt worden ist. Unter dieser Einschränkung sind sie für große Verzerrungen gültig. Erst wenn in (3.83) die Approximation $\mathbf{N}_B \approx \mathbf{R}_C^T \mathbf{N}_I$ und $\mathbf{M}_B \approx \mathbf{R}_C^T \mathbf{M}_I$ benutzt wird, beschränkt sich deren Gültigkeitsbereich auf kleine Verzerrungen. Um dieses zu vermeiden, ermitteln Sansour und Bufler [85] die zu \mathbf{H}_C und \mathbf{H}_L konjugierten Schnittgrößen über die PK2-Schnittgrößen:

$$\mathbf{N}_B^* = \mathbf{R}_C^T (\mathbf{F}_C \mathbf{N}_{II} + \mathbf{F}_L \mathbf{M}_{II}^{(1)}) \quad ; \quad \mathbf{M}_B^* = \mathbf{R}_C^T (\mathbf{F}_C \mathbf{M}_{II}^{(1)} + \mathbf{F}_L \mathbf{M}_{II}^{(2)}) \quad (3.84)$$

3.4.2 Äußere virtuelle Arbeit der Flächen- und Randlasten

Ausgangspunkt der Betrachtung sei wiederum das dreidimensionale Kontinuum, bei dessen Gleichung für die äußere virtuelle Arbeit:

$$\begin{aligned}
\delta W^{\text{ext}} = \iiint_V \mathbf{b} \delta \mathbf{u} \, dV + \iint_{A^*} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} \, dA^* \quad \text{mit} \quad A^* = A_{\text{ob}} \cup A_{\text{un}} \cup A_R \quad (3.85) \\
A_R \text{ - Schalenrand} \\
A_{\text{ob}} \text{ - Schalenoberseite} \\
A_{\text{un}} \text{ - Schalenunterseite}
\end{aligned}$$

die Integration über die Dicke ausgeführt wird, nachdem sämtliche Größen auf die Schalenmittelfläche A bezogen worden sind. Für das Volumenintegral in (3.85) ergibt sich mit $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w}$:

$$\iiint_V \mathbf{b} \delta \mathbf{u} \, dV = \iint_A \left[\left(\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{b} \, d\theta^3 \right) \delta \mathbf{v} + \left(\int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \theta^3 \mu \mathbf{b} \, d\theta^3 \right) \delta \mathbf{w} \right] dA \quad (3.86)$$

Das Integral über die Oberfläche in (3.85) wird mit (3.29) und (3.34) aufgespalten in einen Teil für die Schalenober-, einen für die Schalenunterseite und einen für den Schalenrand:

$$\int_{\mathbf{A}^*} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} \, d\mathbf{A}^* = \int_{\mathbf{A}} \det \mathbf{Z}_{\text{ob}} \left(\delta \mathbf{v} + \frac{h_0}{2} \delta \mathbf{w} \right) \mathbf{t}_{\text{ob}}^{<3>} \, d\mathbf{A} + \int_{\mathbf{A}} \det \mathbf{Z}_{\text{un}} \left(\delta \mathbf{v} - \frac{h_0}{2} \delta \mathbf{w} \right) (-\mathbf{t}^{<3>})_{\text{un}} \, d\mathbf{A} \\ + \int_s [\kappa \sin \alpha \int_{\frac{-h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} (\det \mathbf{Z}(\delta \mathbf{v} + \theta^3 \delta \mathbf{w}) \mathbf{P} \mathbf{Z}^{-\text{T}} \mathbf{e}) \, d\theta^3] \, ds$$

mit den Oberflächenkräften: $\mathbf{t}^{<3>} = \mathbf{T} \frac{\mathbf{a}^3}{|\mathbf{a}^3|}$

$$\int_{\mathbf{A}^*} \mathbf{t} \delta \mathbf{u} \, d\mathbf{A}^* = \int_{\mathbf{A}} \int_{\frac{-h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} [\delta \mathbf{v} (\det \mathbf{Z}_{\text{ob}} \mathbf{t}_{\text{ob}}^{<3>} - \det \mathbf{Z}_{\text{un}} \mathbf{t}_{\text{un}}^{<3>}) \\ + \delta \mathbf{w} (\det \mathbf{Z}_{\text{ob}} \mathbf{t}_{\text{ob}}^{<3>} + \det \mathbf{Z}_{\text{un}} \mathbf{t}_{\text{un}}^{<3>}) \frac{h_0}{2}] \, d\mathbf{A} \\ + \int_s \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} (\delta \mathbf{v} \mathbf{N}_I + \delta \mathbf{w} \mathbf{M}_I) \mathbf{e} \, ds$$

Mit den Abkürzungen:

$$\mathbf{p} = \det \mathbf{Z}_{\text{ob}} \mathbf{t}_{\text{ob}}^{<3>} - \det \mathbf{Z}_{\text{un}} \mathbf{t}_{\text{un}}^{<3>} + \int_{\frac{-h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{b} \, d\theta^3 \quad ; \quad \mathbf{n} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \mathbf{N}_I \mathbf{e} \\ \tilde{\mathbf{c}} = \frac{h_0}{2} (\det \mathbf{Z}_{\text{ob}} \mathbf{t}_{\text{ob}}^{<3>} + \det \mathbf{Z}_{\text{un}} \mathbf{t}_{\text{un}}^{<3>}) + \int_{\frac{-h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \theta^3 \mathbf{b} \, d\theta^3 \quad ; \quad \tilde{\mathbf{m}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \mathbf{M}_I \mathbf{e} \quad (3.87)$$

erhält man:

$$\delta W^{\text{ext}} = \int_{\mathbf{A}} (\delta \mathbf{v} \mathbf{p} + \delta \mathbf{w} \tilde{\mathbf{c}}) \, d\mathbf{A} + \int_s (\delta \mathbf{v} \mathbf{n} + \delta \mathbf{w} \tilde{\mathbf{m}}) \, ds \quad (3.88)$$

Die Variation des Differenzvektors $\delta \mathbf{w}$ kann ersetzt werden durch:

$$\delta \mathbf{w} = \delta \bar{\mathbf{a}}_3 = \delta \bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}} + \bar{\kappa} \delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.89)$$

Die oft anzutreffenden Schalentheorien mit *inextensiblen* Schalendirektor benutzen statt der Variation des Differenzvektors $\delta \mathbf{w}$ üblicherweise die virtuelle Verdrehung $\boldsymbol{\omega}$.

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{R}_d \mathbf{a}_3 \rightarrow \delta \mathbf{w} = \delta \bar{\mathbf{a}}_3 = \delta \mathbf{R}_d \mathbf{a}_3 = \delta \mathbf{R}_d \mathbf{R}_d^{\text{T}} \bar{\mathbf{a}}_3 = \boldsymbol{\Omega} \bar{\mathbf{a}}_3 = \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{a}}_3 \quad (3.90)$$

$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(s, \delta s) = \mathbf{T}(s) \delta s$, der axiale Vektor von $\boldsymbol{\Omega}$, ist hierin eine Funktion unabhängiger Rotationsparameter und deren Variation, worauf in Abschnitt 5.4.3 näher eingegangen wird. Da der Rotationstensor zur Beschreibung der Kinematik des Schalendirektors bei einer Schubverzerrungstheorie im allgemeinen nicht mit dem Rotationstensor \mathbf{R}_C , der

aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F}_C gewonnen wird, übereinstimmt, wird er hier mit dem Index d gekennzeichnet. Für die Momentenbeanspruchungen läßt sich nun schreiben:

$$\delta \mathbf{w} \tilde{\mathbf{c}} = \boldsymbol{\omega}(\bar{\mathbf{a}}_3 \times \tilde{\mathbf{c}}) = \boldsymbol{\omega} \mathbf{c} \quad ; \quad \delta \mathbf{w} \tilde{\mathbf{m}} = \boldsymbol{\omega}(\bar{\mathbf{a}}_3 \times \tilde{\mathbf{m}}) = \boldsymbol{\omega} \mathbf{m} \quad (3.91)$$

Damit kann Gleichung (3.88) in folgender Form angegeben werden:

$$\delta W^{\text{ext}} = \iint_A (\delta v \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{c}) \, dA + \int_s (\delta v \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{m}) \, ds \quad (3.92)$$

3.5 Das linearisierte Werkstoffgesetz der Schale

Gewöhnlich werden nichtlineare Gleichungen im Hinblick auf ein iteratives Newton-Lösungsverfahren linearisiert. Dazu wird das Werkstoffgesetz in linearisierter Form benötigt. Ausgehend vom 3D-Kontinuum soll nun ein linearisiertes Werkstoffgesetz für PK2-Schalenschnittgrößen hergeleitet werden. Die Beziehung zwischen den PK2-Spannungen und den Green-Lagrange-Verzerrungen lautet:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}' \quad (3.93)$$

Für die auf die Schalenmittelfläche bezogenen Spannungen und Dehnungen gilt:

$$\hat{\mathbf{S}}' = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{S}' \mathbf{Z}^{-T} = \mathbf{Z}^{-1} (\mathbf{C} \cdot [\mathbf{Z}^{-T} \hat{\mathbf{E}}' \mathbf{Z}^{-1}]) \mathbf{Z}^{-T} \quad (3.94)$$

Eingesetzt in die Definitionsgleichungen (3.53) bis (3.55) der PK2-Schnittgrößen folgt mit (3.62) in matrizieller Schreibweise:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{II}' \\ \mathbf{M}_{II}^{(1)}, \\ \mathbf{M}_{II}^{(2)}, \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_0 \cdot [\dots] & D_1 \cdot [\dots] & D_2 \cdot [\dots] \\ D_1 \cdot [\dots] & D_2 \cdot [\dots] & D_3 \cdot [\dots] \\ D_2 \cdot [\dots] & D_3 \cdot [\dots] & D_4 \cdot [\dots] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{E}}_C' \\ \hat{\mathbf{E}}_L' \\ \hat{\mathbf{E}}_Q' \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

mit:

$$D_i \cdot [\dots] = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{C} \cdot [\mathbf{Z}^{-T} \dots \mathbf{Z}^{-1}] \mathbf{Z}^{-T} (\theta^3)^i \, d\theta^3 \quad (3.96)$$

Die Ausführung dieser Integration wird im allgemeinen numerisch erfolgen müssen. Zwar ist für die Inverse des Shifters \mathbf{Z} mittels des Cayley-Hamilton-Theorems eine geschlossene Formel angebar, doch sollte bedacht werden, daß auch \mathbf{C} von θ^3 abhängig sein kann. Für dünne Schalen darf auf \mathbf{Z} in (3.96) verzichtet werden ($\mathbf{Z}=\mathbf{I}$), wie die Betrachtungen im nächsten Abschnitt zeigen. Wie schon in Abschnitt 3.4 erwähnt, ist diese Vorgehensweise für Werkstoffgesetze, die zwischen den Biot-Spannungen und den Ingenieurverzerrungen definiert sind, nur für kleine Verzerrungen direkt möglich. Sonst kann man sich mit dem Umweg über die PK2-GL-Beziehungen helfen.

3.6 Anmerkungen zur Parametrisierung

In den vorangegangenen Abschnitten sind sämtliche kinematischen Beziehungen durch die jeweils 3 Komponenten von \mathbf{v} und \mathbf{w} ausdrückbar. Über die Gleichung der Annahme A1: $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w}$ beschreiben sie vollständig das gesamte Verschiebungsfeld einer Schale, bei der Verformungen in Dickenrichtung zugelassen sind. Über:

$$\mathbf{w} = \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_3 = \bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}} - \kappa \mathbf{d} = \kappa (\chi \mathbf{R}_d(s_1, s_2) \mathbf{d} - \mathbf{d}) \quad , \quad \chi = \frac{\bar{\kappa}}{\kappa} = \frac{\bar{h}}{h} \quad (3.97)$$

können die Parameter w_i durch χ, s_1, s_2 ersetzt werden. Eine derartige Parameterisierung für Schalen mit Verformungen in Dickenrichtung scheint nach der Diskretisierung auf numerisch stabilere Gleichungssysteme zu führen [97]. Die Kinematik des Direktors wird durch die zwei Rotationsparameter s_1, s_2 vollständig erfaßt. Eine Drehung um den Schalendirektor ist in den Herleitungen bis jetzt nicht berücksichtigt worden. Würde für diesen Zweck ein dritter Rotationsparameter s_3 eingeführt, wäre eine zusätzliche Zwangsbedingung nötig, um mehrdeutige Lösungen, die in der Numerik zu singulären Gleichungssystemen führen, zu vermeiden. Einzelheiten zur expliziten Gestalt von \mathbf{R}_d und zur Wahl von s_1, s_2 bzw. s_1, s_2, s_3 finden sich in Kapitel 5. Für den Fall einer in Dickenrichtung inextensiblen Schalentheorie entfällt der Parameter χ .

3.7 Auswirkungen zusätzlicher Annahmen zur Vereinfachung der Schalengleichungen

In diesem Abschnitt werden die allgemeinen Verzerrungsgleichungen (3.63) bis (3.65) für einige Sonderfälle in Komponentenform angegeben. Die verwendeten Einschränkungen werden jeweils explizit genannt. Nur für die Größenordnungsabschätzungen der getroffenen Vereinfachungen wird eine schwach veränderliche Schalendicke und ein lotrecht zur Schalenmittelfläche der Ausgangsgeometrie stehendes Direktorfeld vorausgesetzt.

3.7.1 Theorie basierend auf Green–Lagrange–Verzerrungsmaßen

3.7.1.1 Annahmen

Die in den vorausgegangenen Abschnitten aufgestellten Schalengleichungen können erheblich vereinfacht werden, falls ein relativer Fehler in der Größenordnung $h_0 \| \mathbf{B} \|$ bzw. $h_0 \| \bar{\mathbf{B}} \|$ toleriert wird. Für Schalen, deren Dicken- und Schubgradient vernachlässigbar klein ist und deren Direktor \mathbf{a}_3 senkrecht zur unverformten Schalenmittelfläche steht, entspricht $h_0 \| \mathbf{B} \|$ dem Verhältnis Schalendicke zu Hauptkrümmungsradius der Ausgangsgeometrie h/R bzw. analog $h_0 \| \bar{\mathbf{B}} \|$ dem der verformten Geometrie \bar{h}/\bar{R} . Im Anhang Abschnitt 9.1 wird auf die Abschätzungen ausführlich eingegangen.

Die Annahmen zusätzlich zu Annahme A1 sind:

$$\text{Annahme A2: } \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}^{-T} \approx \mathbf{I} \quad ; \quad \det \mathbf{Z} \approx 1 \quad \text{im Werkstoffgesetz} \quad (3.98)$$

Im *Werkstoffgesetz* (3.96) wird der (inverse) Shifter zur Einheitsmatrix und die Determinante des Shifters zu 1. Dadurch entsteht wegen (s. Anhang, Abschnitt 9.1):

$$O(\| \mathbf{Z} \|) = O(\| \mathbf{Z}^{-1} \|) = 1 + \frac{h_0}{2} \| \mathbf{B} \| \quad (3.99)$$

ein Fehler in der Größenordnung h/R . Deutliche Vereinfachungen treten in der linearisierten Form (3.95)/(3.96) des Werkstoffgesetzes auf, insbesondere für einen von θ^3 unabhängigen Materialtensor C , denn dann verschwinden D_1 und D_3 .

Annahme A3:

$$\text{A3a: } \tau_3^3 = \bar{\mathbf{g}}_3 \mathbf{T} \bar{\mathbf{g}}^3 \approx 0 \quad (3.100)$$

Die Annahme, daß die Cauchy–Normalspannungen in Dickenrichtung τ_3^3 vernachlässigbar klein sind, trifft für dünne Schalen in den Berei-

chen sehr gut zu, in denen keine konzentrierten Beanspruchungen – im Extremfall Einzellasten – auftreten. Ebenso müssen sehr große, einander entgegengerichtete Belastungen an der Schalenunter- und der Schalenoberseite ausgeschlossen werden. Wenn die Basisvektoren $\bar{\mathbf{g}}_3$ und $\bar{\mathbf{g}}^3$ bzw. $\bar{\mathbf{a}}_3$ und $\bar{\mathbf{a}}^3$ in die gleiche Richtung zeigen, also senkrecht auf der verformten Schalenmittelfläche stehen, gilt: $\tau^{33} = 0$. Diese Bedingung kann für kleine Schubverzerrungen und nahezu senkrecht zur unverformten Schalenmittelfläche stehendem Direktor $\bar{\mathbf{a}}_3$ Annahme A3a ersetzen. Das hat zur Folge, daß die auf die Schalenmittelfläche bezogenen PK2-Normalspannungen in Dickenrichtung verschwinden:

$$\tau^{33} = \bar{\mathbf{g}}^{3T} \mathbf{T} \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{a}^{3T} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{a}^3 = \hat{S}^{33} = 0 \quad (3.101)$$

und dadurch der Energieanteil $\hat{S}^{33} \delta \hat{\epsilon}_{33}$ unberücksichtigt bleibt. Mit Bedingung (3.101) kann die Dehnung in Dickenrichtung für hyperelastische Materialien über das Werkstoffgesetz in Abhängigkeit der übrigen Verzerrungen bestimmt werden. Hierdurch reduziert sich die Zahl der unbekannt Parameter um einen, denn χ kann nun direkt ermittelt werden. Zur Einhaltung der Annahme (3.101) muß das Werkstoffgesetz des dreidimensionalen Kontinuums in finiter und in linearisierter Form kondensiert werden.

Kleine Verzerrungen erlauben, den Einfluß der Dehnungen in Dickenrichtung auf die anderen Verzerrungsmaße der Schale zu vernachlässigen. Dann ist es möglich, auf die Berechnung von χ zu verzichten:

$$\mathbf{A3b}: \chi = \frac{\bar{h}}{h} = 1 \quad ; \quad |\bar{\mathbf{a}}_3| = \kappa \quad (3.102)$$

Für kleine Verzerrungen und das Materialgesetz von Hooke geben für diese Vorgehensweise Başar und Krätzig [11], die sich wiederum auf Arbeiten von Koiter und John stützen, einen relativen Fehler der Größenordnung $\nu h/R$ an, mit ν als Querkontraktionszahl.

$$\mathbf{Annahme A4:} \quad \hat{\mathbf{E}}_Q \approx \mathbf{0} \quad (3.103)$$

In Anhang 9.1 wird gezeigt, daß die in θ^3 quadratischen Terme gestrichen werden können, wenn ein relativer Fehler der Größenordnung

$$\max \left(\frac{h}{2R}, (1 + 2\eta_E) \frac{\bar{h}}{2R} \right); \quad \eta_E - \text{größte Hauptdehnung von } \hat{\mathbf{E}}$$

akzeptiert wird und die Größenordnung des Schubgradienten $\boldsymbol{\gamma}_{,r}$ sowie des Quotienten $\bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\boldsymbol{\kappa}}_r / \bar{\boldsymbol{\kappa}}$ der Dickenänderung kleiner als die kleinste Hauptkrümmung $1/\bar{R}$ ist. Die auf die Schalenmittelfläche bezogenen Green-Lagrange-Verzerrungen ergeben sich somit linear in θ^3 :

$$\hat{\mathbf{E}} \approx \hat{\mathbf{E}}_C + \theta^3 \hat{\mathbf{E}}_L. \quad (3.104)$$

3.7.1.2 Verzerrungsgleichungen für große Verzerrungen

Mit der Annahme A1 lauten die für große Verzerrungen gültigen Verzerrungsgleichungen der Schalenmittelfläche in krummlinigen konvektiven Schalenkoordinaten θ^i in vektorieller Form:

$$\hat{\mathbf{E}}_C = \frac{1}{2} (\mathbf{F}_C^T \mathbf{F}_C - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} [(\mathbf{a}^i \otimes \bar{\mathbf{a}}_i)(\bar{\mathbf{a}}_j \otimes \mathbf{a}^j) - (\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}_i)(\bar{\mathbf{a}}_j \otimes \mathbf{a}^j)] = a_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$$

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta) \quad (3.105)$$

$$a_{\alpha 3} = a_{3\alpha} = \frac{1}{2} \gamma_\alpha = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_3) \quad (3.106)$$

$$a_{33} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_3 \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3) \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_L &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_L + \mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_C + \mathbf{B} + \mathbf{B}^T) = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{a}^i \otimes \bar{\mathbf{a}}_i)(\bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \otimes \mathbf{a}^\beta) + (\mathbf{a}^\alpha \otimes \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha})(\bar{\mathbf{a}}_i \otimes \mathbf{a}^i) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_{3,\beta} \otimes \mathbf{a}^\beta) - (\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_{3,\alpha})(\mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}^i) \right] \\ &= \beta_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j \end{aligned}$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \mathbf{a}_\beta) \quad (3.108)$$

$$\beta_{\alpha 3} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_{3,\alpha} \mathbf{a}_3) \quad (3.109)$$

$$\beta_{33} = 0 \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_Q &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_L - \mathbf{B}^T \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \left[(\mathbf{a}^\alpha \otimes \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha})(\bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \otimes \mathbf{a}^\beta) - (\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_{3,\alpha})(\mathbf{a}_{3,\beta} \otimes \mathbf{a}^\beta) \right] \\ &= Q_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j \end{aligned}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \mathbf{a}_{3,\beta}) \quad (3.111)$$

$$Q_{\alpha 3} = 0 \quad (3.112)$$

$$Q_{33} = 0 \quad (3.113)$$

Unter Berücksichtigung von Annahme A4, d.h. Vernachlässigung von $\hat{\mathbf{E}}_Q$, stimmen diese Gleichungen mit den in [97] angegebenen überein. Wird $\bar{\mathbf{a}}_3 = \bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}} = \chi \kappa \bar{\mathbf{d}}$ darin eingesetzt und berücksichtigt, daß $\bar{\mathbf{d}} \bar{\mathbf{d}} = 1$ und $\bar{\mathbf{d}}_{,a} \bar{\mathbf{d}} = 0$, stellen sich die Gleichungen folgendermaßen dar:

$$\alpha_{a\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{a}_\beta) \quad (3.114)$$

$$\alpha_{a3} = \frac{1}{2} (\bar{\kappa} \bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{d}} - \kappa \mathbf{a}_a \mathbf{d}) \quad (3.115)$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{2} (\bar{\kappa}^2 - \kappa^2) = \frac{1}{2} \kappa^2 (\chi^2 - 1) \quad (3.116)$$

$$\begin{aligned} \beta_{a\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\kappa}_{,\beta} \bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{d}} + \bar{\kappa}_{,\alpha} \bar{\mathbf{d}} \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\kappa} \bar{\mathbf{a}}_{a,\beta} \bar{\mathbf{d}} + \bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}}_{,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_\beta \\ - \kappa_{,\beta} \mathbf{a}_a \mathbf{d} - \kappa_{,\alpha} \mathbf{d} \mathbf{a}_\beta - \kappa \mathbf{a}_{a,\beta} \mathbf{d} - \kappa \mathbf{d}_{,\alpha} \mathbf{a}_\beta) \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$\beta_{a3} = \frac{1}{2} (\bar{\kappa}_{,\alpha} \bar{\kappa} - \kappa_{,\alpha} \kappa) \quad (3.118)$$

$$\beta_{33} = 0 \quad (3.119)$$

Für den Spezialfall einer *konstanten Schalendicke* und eines *orthogonal* auf der undefor-mierten Schalenmittelfläche stehenden Direktorfeldes lauten die Verzerrungsgleichungen:

$$\alpha_{a\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{a}_\beta) \quad (3.120)$$

$$\alpha_{a3} = \frac{1}{2} \chi \bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{d}} \quad (3.121)$$

$$\alpha_{33} = \frac{1}{2} (\chi^2 - 1) \quad (3.122)$$

$$\beta_{a\beta} = \frac{\chi_{,\beta}}{\chi} \alpha_{a3} + \frac{\chi_{,\alpha}}{\chi} \alpha_{\beta 3} + \frac{1}{2} (\chi \bar{\mathbf{a}}_{a,\beta} \bar{\mathbf{d}} + \chi \bar{\mathbf{d}}_{,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{d}_{,\alpha} \mathbf{a}_\beta) \quad (3.123)$$

$$\beta_{a3} = \frac{1}{2} \chi_{,\alpha} \chi \quad (3.124)$$

$$\beta_{33} = 0 \quad (3.125)$$

Für *kleine Schubverzerrungen*, sonst aber endliche Verzerrungen, können die Verkrümmungsgleichungen weiter vereinfacht werden:

$$\beta_{a\beta} = \frac{1}{2} (\chi \bar{\mathbf{a}}_{a,\beta} \bar{\mathbf{d}} + \chi \bar{\mathbf{d}}_{,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \mathbf{a}_\beta) \quad (3.126)$$

$$\beta_{a3} = 0, \quad \beta_{33} = 0$$

Daß β_{a3} nur durch Schubverzerrungen hervorgerufen wird, erkennt man über:

$$\hat{\epsilon}_{a3} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{g}}_a \bar{\mathbf{g}}_3 - \mathbf{g}_a \mathbf{g}_3) = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{g}}_a \bar{\mathbf{a}}_3 = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{a}}_3 + \theta^3 \frac{1}{2} \bar{\mathbf{a}}_{3,a} \bar{\mathbf{a}}_3 = \alpha_{a3} + \theta^3 \beta_{a3} \quad (3.127)$$

In [86] wird $\hat{\epsilon}_{a3} = 0$ als modifizierte Kirchhoff-Love-Hypothese eingeführt. Die Verkrümmungsgleichungen der Schalentheorie in [86] und die hier angegebenen Gleichungen (3.126) stimmen bis auf Größen der Ordnung $\|\hat{\mathbf{E}}\|/R$ überein.

3.7.1.3 Verzerrungsgleichungen für kleine Verzerrungen

Die Annahmen A1, A3b und A4 führen auf die sogenannte erste "beste" Approximation einer geometrisch nichtlinearen Schalen-Schubverzerrungstheorie für kleine Verzerrungen ([8],[9],[72],[94] et al.). Ihre Verzerrungsgleichungen lauten:

$$\alpha_{a\beta} = \alpha_{\beta a} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{a}_\beta) \quad (3.128)$$

$$\alpha_{a3} = \alpha_{3a} = \frac{1}{2} \gamma_a = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_a \mathbf{a}_3) = \frac{1}{2} \kappa(\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{d}} - \mathbf{a}_a \mathbf{d}) \quad (3.129)$$

$$\alpha_{33} = 0 \quad (3.130)$$

$$\begin{aligned} \beta_{a\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,a} \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,a} \mathbf{a}_\beta) \\ &= \frac{\kappa,\beta}{\kappa} \alpha_{a3} + \frac{\kappa,a}{\kappa} \alpha_{\beta 3} + \frac{1}{2} \kappa(\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{d}}_{,\beta} + \bar{\mathbf{d}}_{,a} \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{d}_{,a} \mathbf{a}_\beta) \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\beta_{a3} = 0 \quad (3.132)$$

$$\beta_{33} = 0 \quad (3.133)$$

Für Schalen konstanter Dicke reduzieren sich die Gleichungen zu:

$$\begin{aligned} \alpha_{a\beta} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{a}_\beta) \\ \alpha_{a3} &= \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{d}} - \mathbf{a}_a \mathbf{d}) \end{aligned} \quad (3.134)$$

$$\alpha_{33} = 0$$

$$\beta_{a\beta} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_a \bar{\mathbf{d}}_{,\beta} + \bar{\mathbf{d}}_{,a} \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_a \mathbf{d}_{,\beta} - \mathbf{d}_{,a} \mathbf{a}_\beta) \quad (3.135)$$

$$\beta_{a3} = 0$$

$$\beta_{33} = 0$$

3.7.2 Theorie basierend auf Ingenieurverzerrungsmaßen

3.7.2.1 Annahmen

Es verwundert nicht, daß die vereinfachenden Annahmen mit denen des Abschnitts 3.7.1.1 weitgehend übereinstimmen, wobei Annahme A4 naturgemäß nicht benötigt wird. Um effektive, das heißt für die Numerik besonders geeignete Gleichungsstrukturen zu bekommen, wird eine weitere Approximation eingeführt.

Der Vollständigkeit halber sollen die Annahmen A2 und A3 nochmals aufgeführt werden:

$$\text{Annahme A2: } \mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{Z}^{-T} \approx \mathbf{I}; \det \mathbf{Z} \approx 1 \quad \text{im Werkstoffgesetz} \quad (3.136)$$

$$\text{Annahme A3a: } \tau_3^3 = 0 \quad (3.137)$$

Für kleine Querschubverzerrungen und nahezu lotrecht zur unverformten Schalenmittelfläche stehendem Direktorfeld kann geschrieben werden:

$$\tau_3^3 = \tau^{33} = 0 = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \bar{\mathbf{g}}^{3T} \mathbf{R} \mathbf{T}_B \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{g}}^3 = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{g}^{3T} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{T}_B \bar{\mathbf{g}}^3 \quad (3.138)$$

$\mathbf{T}_B^{33} = 0$ kann die Annahme $\tau^{33} = 0$ nur ersetzen, wenn sämtliche Verzerrungen klein sind, da dann $\mathbf{U} \approx \mathbf{I}$ gilt.

$$\text{Annahme A3b: } \chi = 1 \quad (\text{s. (3.102)}) \quad (3.139)$$

Eine neu hinzukommende Annahme hängt mit der noch offenen Frage nach der Berechnung von \mathbf{R}_C zusammen, die wiederum mit der Wahl der unabhängigen Parameter verknüpft ist. Werden als Parameter $v_i, s_1, s_2, (\chi)$ gewählt, so muß \mathbf{R}_C über die polare Zerlegung von \mathbf{F}_C berechnet werden und ist somit genauso wie \mathbf{F}_C von allen Parametern abhängig. Neben der aufwendigen, nicht trivialen polaren Zerlegung einer 3×3 -Matrix wird die in diesem Fall notwendige Linearisierung von \mathbf{R}_C nach sämtlichen Parametern umfangreiche Gleichungen zur Folge haben. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, führt Recke [80] zusätzlich 3 unabhängige Rotationsparameter ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 und die zu erfüllenden drei Symmetrie-Zwangsbedingungen $\mathbf{R}_C^T(\phi_i) \mathbf{F}_C(v_i, s_a) = \mathbf{F}_C^T(v_i, s_a) \mathbf{R}_C(\phi_i)$ ein. In seiner FE-Diskretisierung wird diese Bedingung auf Elementebene iterativ erfüllt. Einen eleganten Weg beschreiten Sansour und Bufler [85], indem sie eine Beziehung zwischen \mathbf{R}_C und der Rotation \mathbf{R}_d des Schalendirektors herstellen:

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{R}_d \mathbf{d} = \mathbf{R}_C \mathbf{Q} \mathbf{d} \quad (3.140)$$

\mathbf{Q} ist ein nur von den Querschubverformungen $\boldsymbol{\gamma}$ abhängiger Rotationstensor. In einer Schalentheorie vom Kirchhoff-Love-Typ wird \mathbf{Q} zur Identität \mathbf{I} . Werden kleine Schubverzerrungen $\boldsymbol{\gamma}$ vorausgesetzt, kann \mathbf{Q} näherungsweise vernachlässigt werden. Diese Vor-

gehensweise führt auf sehr einfache Beziehungen für die innere Kinematik [85]. Die Parameter s_1, s_2 werden nicht mehr benötigt. Für den einen überzähligen Rotationsparameter führen Sansour und Bufler die Symmetriebedingung für eine polare Zerlegung der 2×2 -Matrix $[U_{\alpha\beta}]$:

$$U_{C12} = \mathbf{a}_1^T \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_C \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1^T \mathbf{F}_C^T \mathbf{R}_C \mathbf{a}_2 = U_{C21} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 - \tilde{\mathbf{a}}_2 \bar{\mathbf{a}}_1) = 0 \quad (3.141)$$

mit $\tilde{\mathbf{a}}_a = \mathbf{R}_C \mathbf{a}_a$

über eine Penalty-Methode in ein Funktional ein.

Der Penalty-Faktor kann als eine Art Drillsteifigkeit um den Schalendirektor aufgefaßt werden. Gruttmann [39], [112] identifiziert ebenfalls die Rotation des Direktors \mathbf{R}_d mit \mathbf{R}_C , löst die Gleichung (3.141) analytisch und eliminiert so den dritten Rotationsparameter. Dadurch wird \mathbf{R}_C , wie oben beschrieben, wieder eine Funktion der fünf Parameter v_i, s_1, s_2 , was zu etwas aufwendigeren Beziehungen für die Linearisierung führt. Dafür benötigt er aber einen unbekannt Parameter (s_3) weniger. Zur Berechnung von Schalen mit Knicken (z.B. Falwerke), aber auch bei der Kopplung von finiten Schalen- mit Balkenelementen kann es jedoch vorteilhaft sein, drei Rotationsparameter zu verwenden (s. Abschnitt 6.4).

Als zusätzliche Annahme soll nun gelten:

$$\text{Annahme A4}^*: \quad \bar{\mathbf{d}} \approx \tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{R}_C \mathbf{d} \quad (3.142)$$

Damit gilt:

$$\tilde{\mathbf{a}}_3 = \mathbf{R}_C \mathbf{a}_3 = \kappa \mathbf{R}_C \mathbf{d} = \kappa \tilde{\mathbf{d}} \quad (3.143)$$

und:

$$\bar{\mathbf{a}}_3 = \bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}} = \bar{\kappa} \mathbf{R}_C \mathbf{d} = \chi \kappa \mathbf{R}_C \mathbf{d} = \chi \kappa \tilde{\mathbf{d}} = \chi \tilde{\mathbf{a}}_3 \quad (3.144)$$

Zur weiteren Vereinfachung, die, wie in Abschnitt 3.3.2 erwähnt, nur für kleine Verzerrungen und symmetrisches \mathbf{B} zulässig ist, soll noch der Verkrümmungstensor \mathbf{H}_L symmetrisiert werden.

$$\text{Annahme A5:} \quad \mathbf{H}_L \approx \mathbf{H}_L^T \quad (3.145)$$

3.7.2.2 Verzerrungsgleichungen für große Verzerrungen

Die nachfolgenden Gleichungen sind für große Verzerrungen gültig. Lediglich die Querschubverzerrungen müssen klein sein, da neben *Annahme A1* noch *Annahme A4** vorausgesetzt wird. Unter Berücksichtigung von (3.143), (3.144) ergibt sich:

$$\mathbf{H}_C = \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_C - \mathbf{I} = (\mathbf{a}^i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i)(\bar{\mathbf{a}}_j \otimes \mathbf{a}^j) - (\bar{\mathbf{a}}^i \otimes \mathbf{a}_i)(\mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}^j) = (\tilde{\mathbf{a}}_i \bar{\mathbf{a}}_j - \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j) \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j = h_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$$

$$h_{\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta = h_{\alpha\beta}^s + h_{\alpha\beta}^a \quad (3.146)$$

$$h_{\alpha\beta}^s = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta + \tilde{\mathbf{a}}_\beta \bar{\mathbf{a}}_\alpha) - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \quad (3.147)$$

$$h_{\alpha\beta}^a = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta - \tilde{\mathbf{a}}_\beta \bar{\mathbf{a}}_\alpha) \rightarrow \begin{bmatrix} h_{\alpha\beta}^a \\ \phantom{h_{\alpha\beta}^a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 - \tilde{\mathbf{a}}_2 \bar{\mathbf{a}}_1) \quad (3.148)$$

$$h_{\alpha 3} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_3 - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_3 = \bar{\kappa} \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{d}} - \kappa \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d} = (\bar{\kappa} - \kappa) \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d} \quad (3.149)$$

$$h_{3\alpha} = \kappa (\bar{\mathbf{d}} \bar{\mathbf{a}}_\alpha - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d}) \quad (3.150)$$

$$h_{33} = \bar{\kappa} \kappa - \kappa^2 = \kappa^2 (\chi - 1) \quad (3.151)$$

wegen A4*

$$\mathbf{H}_L = \mathbf{R}_L^T \mathbf{F}_L + \mathbf{B} = (\mathbf{a}^i \otimes \tilde{\mathbf{a}}_i)(\bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} \otimes \mathbf{a}^\beta) - \mathbf{a}_{3,\beta} \otimes \mathbf{a}^\beta = k_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j$$

$$k_{\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_{3,\beta} = \bar{\kappa}_{,\beta} \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{d}} - \kappa_{,\beta} \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d} + \bar{\kappa} \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{d}}_{,\beta} - \kappa \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d}_{,\beta} = (\bar{\kappa}_{,\beta} - \kappa_{,\beta}) \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d} + \bar{\kappa} \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{d}}_{,\beta} - \kappa \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d}_{,\beta} \quad (3.152)$$

$$k_{3\beta} = \tilde{\mathbf{a}}_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} - \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_{3,\beta} = \kappa (\bar{\kappa}_{,\beta} - \kappa_{,\beta}) \quad (3.153)$$

$$k_{\beta 3} = \tilde{\mathbf{a}}_\beta \bar{\mathbf{a}}_{3,3} - \mathbf{a}_\beta \mathbf{a}_{3,3} = 0 \quad (3.154)$$

$$k_{33} = \tilde{\mathbf{a}}_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,3} - \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_{3,3} = 0 \quad (3.155)$$

3.7.2.3 Verzerrungsgleichungen für kleine Verzerrungen

Unter zusätzlicher Verwendung der *Annahmen A3b und A5* ergeben sich die für kleine Verzerrungen gültigen Gleichungen. Ferner wird für die Schale eine *konstante Dicke* und ein *orthogonal* auf der unverformten Schalenmittelfläche stehendes Direktorfeld vorausgesetzt:

$$h_{\alpha\beta}^s = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta + \tilde{\mathbf{a}}_\beta \bar{\mathbf{a}}_\alpha) - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \quad (3.156)$$

$$\alpha = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 - \tilde{\mathbf{a}}_2 \bar{\mathbf{a}}_1) \quad (3.157)$$

$$h_{\alpha 3} = 0 \quad (3.158)$$

$$h_{3\alpha} = \tilde{\mathbf{d}} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad (3.159)$$

$$h_{33} = 0 \quad (3.160)$$

$$k_{\alpha\beta} = \tilde{\mathbf{a}}_\alpha \tilde{\mathbf{d}}_{,\beta} - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d}_{,\beta} = k_{\alpha\beta}^s + k_{\alpha\beta}^a \quad (3.161)$$

$$k_{\alpha\beta}^s = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \tilde{\mathbf{d}}_{,\beta} + \tilde{\mathbf{d}}_{,\alpha} \tilde{\mathbf{a}}_\beta) - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d}_{,\beta}$$

$$k_{\alpha\beta}^a = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \tilde{\mathbf{d}}_{,\beta} - \tilde{\mathbf{d}}_{,\alpha} \tilde{\mathbf{a}}_\beta) \approx 0$$

$$k_{3\beta} = \tilde{\mathbf{a}}_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} - \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_{3,\beta} = \kappa(\bar{\kappa}, \beta - \kappa, \beta) = 0 \quad (3.162)$$

$$k_{\beta 3} = \tilde{\mathbf{a}}_\beta \bar{\mathbf{a}}_{3,3} - \mathbf{a}_\beta \mathbf{a}_{3,3} = 0 \quad (3.163)$$

$$k_{33} = \tilde{\mathbf{a}}_3 \bar{\mathbf{a}}_{3,3} - \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_{3,3} = 0 \quad (3.164)$$

4 Das Degenerationskonzept und dessen Vergleich mit der Schalentheorie

4.1 Entstehung des Konzeptes

Mit dem Wort Degenerationskonzept will man zum Ausdruck bringen, daß diese Methode keine Theorie im Sinne einer Schalen- oder Balkentheorie ist, deren Gleichungen mit einem beliebigen numerischen Verfahren – z. B. finiten Differenzen- oder Kollokations-Verfahren oder der finiten Elementmethode – gelöst werden können. Das Konzept ist ein Verfahren, um dreidimensionale finite Körperelemente so zu verbessern, daß sie zur Berechnung dünnwandiger Strukturen wirtschaftlich eingesetzt werden können. Ein Grund, Schalen mit Kontinuumsselementen und nicht mit finiten Elementen aus einer Schalentheorie zu berechnen, war sicherlich die Vielzahl unterschiedlicher Schalentheorien, deren komplexe Gleichungen und unterschiedliche Genauigkeitsstufen sowie deren Beschränkung auf analytisch vorzugebende Ausgangsgeometrien. Diesen mittlerweile gut beherrschbaren Schwierigkeiten standen die theoretisch sehr einfachen und unproblematisch zu programmierenden Kontinuumsselemente entgegen. Da stark unterschiedliche Elementkantenlängen zu schlecht konditionierten Steifigkeitsmatrizen führen und weil in dynamischen Berechnungen die zulässige Schrittweite des Zeitintegrationsverfahrens proportional zum kleinsten Knotenabstand ist [60], sind dem Einsatz dieser Elemente wirtschaftliche Grenzen gesetzt. Zur Beseitigung dieser Nachteile führte Ahmad 1968 [2] die Annahmen der Schalentheorie "eine Gerade durch die Schale bleibt stets geradlinig" je Knoten ein und begründete somit das Degenerationskonzept. Diese Annahme ermöglichte es, Rotationsfreiheitsgrade einzuführen, statt mit zwei Knoten in Dickenrichtung zu arbeiten. Ramm [74] entwickelte 1976 mit diesem Konzept ein für endliche Verschiebungen und endliche Rotationen gültiges degeneriertes Schalenelement.

4.2 Degenerierte Elemente mit kontinuumstypischer (impliziter) Dickenintegration

4.2.1 Grundsätzliche Vorgehensweise

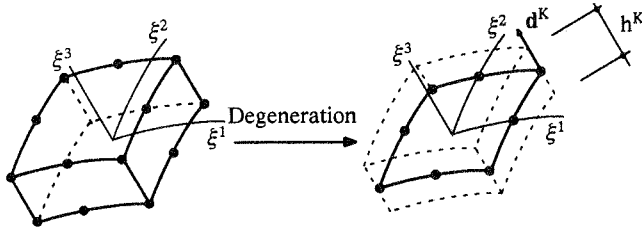


Bild 4.1: Degeneration vom Kontinuum- zum Schalelement

Ausgangspunkt des Degenerationskonzepts ist das Prinzip der virtuellen Verschiebungen des Kontinuums:

$$\iiint_V \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} \, dV = \delta W^{\text{ext}} \quad (4.1)$$

das sogleich diskretisiert wird. Die isoparametrische Interpolation der Geometrie des deformierten Zustands und des Referenzzustands mit den Formfunktionen N^K für ein Körperelement mit 2 Knoten über die Dicke (s. Bild 4.1) lautet:

$$\bar{\mathbf{x}} \approx \bar{\mathbf{x}}_h = \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \left(\frac{(1 + \xi^3)}{2} \bar{\mathbf{x}}_{\text{ob}}^K + \frac{(1 - \xi^3)}{2} \bar{\mathbf{x}}_{\text{un}}^K \right); \quad \xi^1, \xi^2, \xi^3 \in [-1, 1] \quad (4.2)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_h = \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \left(\frac{(1 + \xi^3)}{2} \mathbf{x}_{\text{ob}}^K + \frac{(1 - \xi^3)}{2} \mathbf{x}_{\text{un}}^K \right) \quad (4.3)$$

Für die Verschiebungen als Differenz von (4.2) und (4.3) resultiert:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \left(\frac{(1 + \xi^3)}{2} \mathbf{u}_{\text{ob}}^K + \frac{(1 - \xi^3)}{2} \mathbf{u}_{\text{un}}^K \right) \quad (4.4)$$

als Funktion der Knotenvariablen \mathbf{u}_{un}^K und \mathbf{u}_{ob}^K .

Mit

$$\bar{\mathbf{r}}^K = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{x}}_{\text{ob}}^K + \bar{\mathbf{x}}_{\text{un}}^K) \quad ; \quad \bar{\mathbf{h}}^K \bar{\mathbf{d}}^K = \bar{\mathbf{x}}_{\text{ob}}^K - \bar{\mathbf{x}}_{\text{un}}^K \quad ; \quad |\bar{\mathbf{d}}^K| = 1 \quad (4.5)$$

und

$$\mathbf{r}^K = \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{\text{ob}}^K + \mathbf{x}_{\text{un}}^K) \quad ; \quad \mathbf{h}^K \mathbf{d}^K = \mathbf{x}_{\text{ob}}^K - \mathbf{x}_{\text{un}}^K \quad ; \quad |\mathbf{d}^K| = 1 \quad (4.6)$$

können (4.2) und (4.3) folgendermaßen umgeschrieben werden:

$$\bar{\mathbf{x}} \approx \bar{\mathbf{x}}_h = \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \left(\bar{\mathbf{r}}^K + \xi^3 \frac{\bar{h}^K}{2} \bar{\mathbf{d}}^K \right) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}_h = \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \left(\mathbf{r}^K + \xi^3 \frac{h^K}{2} \mathbf{d}^K \right) \quad (4.8)$$

Für die Verschiebung gilt dann mit $\mathbf{v}^K = \bar{\mathbf{r}}^K - \mathbf{r}^K$:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \left(\mathbf{v}^K + \xi^3 \frac{h_0}{2} (\bar{\kappa}^K \bar{\mathbf{d}}^K - \kappa^K \mathbf{d}^K) \right); \quad \bar{\kappa}^K = \frac{\bar{h}^K}{h_0}; \quad \kappa^K = \frac{h^K}{h_0} \quad (4.9)$$

Mit $\theta^3 = \xi^3 \frac{h_0}{2}$ und $\bar{\mathbf{a}}_3^K = \bar{\kappa}^K \bar{\mathbf{d}}^K$ bzw. $\mathbf{a}_3^K = \kappa^K \mathbf{d}^K$ kann (4.9) als eine diskretisierte Form der Schalenannahme A1 (Gl. (3.5)) identifiziert werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h &= \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \mathbf{v}^K + \theta^3 \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) (\bar{\mathbf{a}}_3^K - \mathbf{a}_3^K) \\ &= \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \mathbf{v}^K + \theta^3 \sum_K N^K(\xi^1, \xi^2) \mathbf{w}^K \\ &= \mathbf{v}_h + \theta^3 \mathbf{w}_h \end{aligned} \quad (4.10)$$

Für finite Elemente, basierend auf einer Schalentheorie, gilt dieselbe Gleichung als Approximation für das Verschiebungsfeld, wobei auf die Art der Diskretisierung in Abschnitt 4.4 eingegangen wird.

Über (4.4), (4.10) und analog zu (3.97) werden die Knotenvariablen \mathbf{u}_{un}^K und \mathbf{u}_{ob}^K ersetzt durch die Knotenverschiebungen der Mittelflächen \mathbf{v}^K und z. B. die Knotenvariablen χ^K, s_1^K, s_2^K , die mit dem Differenzvektor \mathbf{w}^K am Knoten K in folgender Beziehung stehen:

$$\mathbf{w}^K = \kappa^K (\chi^K \mathbf{R}_d^K - \mathbf{d}^K) = \kappa^K (\chi^K \mathbf{R}_d(s_1^K, s_2^K) \mathbf{d}^K - \mathbf{d}^K) \quad (4.11)$$

Strenggenommen ist das Degenerationskonzept nichts anderes als eine Knotenvariablen-substitution, vorgenommen an einem Kontinuumselement mit linearem Verschiebungsansatz in Dickenrichtung. Für den Fall, daß die Variablen χ^K nicht berücksichtigt werden, muß die Schalenannahme A3a " $\tau_3^3 \approx 0$ " durch Kondensation des Werkstoffgesetzes so, wie in Kapitel 3.7.1 erwähnt, sichergestellt werden, um einen tolerierbaren Fehler zu erhalten. Die numerische Integration des Elementes über die Dicke kann in beliebiger Genauigkeit durchgeführt werden. Die Integration des Volumenintegrals erfolgt genauso wie beim Kontinuumselement in allen drei Richtungen (s. Abschnitt 4.3.1). Da außer Annahme A1 und oft auch Annahme A3a/b keine weiteren Näherungen getroffen werden, sind die kontinuumstypisch integrierten, degenerierten Elemente vom

theoretischen Standpunkt aus gesehen mindestens so genau wie Elemente, die auf den im vorigen Kapitel beschriebenen Schalentheorien beruhen.

4.2.2 Auswirkungen der Wahl des Verzerrungsmaßes

Die Berechnung nichtlinearer Kontinuumsprobleme mit finiten Weggrößenelementen geschieht gewöhnlich nach folgendem Schema, ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen:

$$-\delta W^{\text{int}} = \iiint_V \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} dV = \delta W^{\text{ext}} \quad (4.12)$$

An dieser Stelle soll eine Beschränkung auf Green-elastiche Probleme erfolgen, deren äußere virtuelle Arbeit unabhängig von der Deformation ist. Für dieses Material sind die PK1-Spannungen \mathbf{P} eine Funktion des Deformationsgradienten \mathbf{F} :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}) \quad (4.13)$$

der bekanntlich von den Verschiebungen \mathbf{u} abhängt:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{u}_{,x} \quad ; \quad \delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{u}_{,x} \quad (4.14)$$

Nach der Diskretisierung von \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h(\mathbf{N}^K(\xi^i), \mathbf{a}^K) \quad \begin{array}{l} \mathbf{a}^K \text{ - Knotenparameter} \\ \xi^i \text{ - Elementkoordinaten} \\ \mathbf{N}^K \text{ - Formfunktionen} \end{array} \quad (4.15)$$

wird (4.12) linearisiert, falls das dadurch entstandene nichtlineare Gleichungssystem mit dem Newton-Verfahren gelöst werden soll:

$$\text{mit:} \quad \delta(\) = (\)_{,a} \delta \mathbf{a} = (\)' \delta \mathbf{a} \quad ; \quad (\)' = (\)_{,a} \quad ; \quad (\)'' = (\)_{,a \otimes a} \quad (4.16)$$

$$L(-\delta W^{\text{int}}) = \delta \mathbf{a} \iiint_V \mathbf{F}'_h \cdot \mathbf{P}_h dV + \delta \mathbf{a} \iiint_V (\mathbf{F}_h'' \cdot \mathbf{P}_h + \mathbf{F}_h' \cdot \mathbf{P}_h') dV \quad \text{Da} \quad (4.17)$$

$\delta \mathbf{a}$ - virtuelle Knotenparameter

Da - inkrementelle, linear. Knotenparameter

Das zweite Integral ist die tangentielle Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K}_T = \iiint_V (\mathbf{F}_h'' \cdot \mathbf{P}_h + \mathbf{F}_h' \cdot \mathbf{P}_h') dV \quad (4.18)$$

Möchte man ein Werkstoffgesetz in Abhängigkeit der Green-Lagrange-Verzerrungen benutzen, so gilt mit:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S} \quad ; \quad \mathbf{S} = \varrho \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{E}} \quad ; \quad \mathbf{C}_E = \varrho \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} \quad (4.19)$$

aufgrund der Symmetrie von \mathbf{C}_E :

$$\mathbf{P}_h' = \mathbf{F}_h' \mathbf{S}_h + \mathbf{F}_h \frac{\rho}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{E}} \cdot \mathbf{E}_h' = \mathbf{F}_h' \mathbf{S}_h + \mathbf{F}_h \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}_h^T \mathbf{F}_h \quad (4.20)$$

Werden Ingenieurverzerrungen gewählt, so ergibt für isotropes Material:

$$\mathbf{P} = \mathbf{R} \mathbf{T}_B \quad ; \quad \mathbf{T}_B = \mathbf{T}_B^{\text{sym}} = \rho \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{H}} \quad ; \quad \mathbf{C}_H = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{H} \otimes \partial \mathbf{H}} \quad (4.21)$$

die im Vergleich mit (4.20) aufwendigere Formel:

$$\mathbf{P}_h' = \mathbf{R}_h' \mathbf{T}_{Bh} + \mathbf{R}_h \frac{\rho}{\partial \mathbf{H} \otimes \partial \mathbf{H}} \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial \mathbf{H}} \cdot \mathbf{H}_h' = \mathbf{R}_h' \mathbf{T}_{Bh} + \mathbf{R}_h \mathbf{C}_H \cdot (\mathbf{R}_h^T \mathbf{F}_h + \mathbf{R}_h^T \mathbf{F}_h') \quad (4.22)$$

Selbst wenn zur Bestimmung der Rotationen wie in der Schalentheorie mit Ingenieurverzerrungen (s. Abschnitt 3.7.2) vorgegangen, das heißt mit Annahme $\mathbf{A4}^* \bar{\mathbf{d}} \approx \mathbf{R}_c \mathbf{d}$ gearbeitet wird, empfehlen sich die Ingenieurverzerrungen für das Degenerationskonzept mit kontinuumstypischer Dickenintegration *nicht*, weil in (4.22) mehr Terme als in (4.20) zu berücksichtigen sind (s.a. [22]).

4.3 Degenerierte Elemente mit expliziter Integration basierend auf Green-Lagrange-Verzerrungen

4.3.1 Gründe für die Entwicklung der expliziten Integration

Ahmad benutzt für das von ihm vorgestellte Degenerationskonzept eine numerische Integration über das Volumen, wie sie von den Kontinuumselementen bekannt ist. Um die geringere numerische Effizienz dieser Vorgehensweise gegenüber Flächenmodellen zeigen zu können, sollen die zur Erstellung der geometrisch linearen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e erforderlichen Multiplikationen grob abgeschätzt werden.

$$\mathbf{K}_e = \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV \approx \sum_{i=1}^{n_1 n_2 n_3} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \, f_i$$

\mathbf{B} – kinematische Operatormatrix f_i – Wichtungsfaktor

\mathbf{C} – Matrix mit Werkstoffdaten n_i – Anzahl der GP in Richtung ξ^i

An jedem der $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ (Gauß-)Integrationspunkte (GP) muß das Produkt $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ berechnet werden. Hierfür wird die meiste Rechenzeit verbraucht.

Näherungsweise ausgehend von vollbesetzten Matrizen und unter Ausnutzung der Symmetrie der Werkstoffmatrix \mathbf{C} werden:

$$n_\xi^2 n_F + \frac{n_F(n_F + 1)}{2} n_\xi \quad (4.23)$$

Multiplikationen für das Produkt

$$\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \quad \text{mit} \quad \mathbf{B} \quad \text{als } n_\epsilon \times n_F \text{ Matrix} \quad (4.24)$$

$$\mathbf{C} \quad \text{als } n_\epsilon \times n_\epsilon \text{ Matrix}$$

n_ϵ = Anzahl der Verzerrungskomponenten

n_F = Anzahl der Elementfreiheitsgrade

benötigt. Für Ahmads Degenerationskonzept beinhaltet $\mathbf{B} := [\mathbf{E}'_h]$ die Ableitungen der $n_\epsilon = 5$ Verzerrungskomponenten $\epsilon'_{11}, \epsilon'_{12}, \epsilon'_{13}, \epsilon'_{22}, \epsilon'_{23}$ nach den Knotenfreiheitsgraden in computerorientierter 2-dimensionalen Form (Matrizendarstellung), was hier durch die eckige Klammer ausgedrückt werden soll. In $\mathbf{C} := [\mathbf{C}]$ stehen die entsprechenden Komponenten des Werkstoffensors. Bei linear elastischem Werkstoff reichen $n_3 = 2$ (Gauß-)Integrationspunkte in Dickenrichtung aus; plastisches Material erfordert erfahrungsgemäß $n_3 = 5$ bis 7 Stützstellen. Geschichtete Materialien ("Laminat") benötigen je Schicht mindestens eine Stützstelle.

Für die Schalentheorien des Abschnitts 3.7.1.3 enthält $\mathbf{B} := [\hat{\mathbf{E}}'_{C_h}, \hat{\mathbf{E}}'_{L_h}]$ die $n_\epsilon = 8$ Ableitungen der Verzerrungskomponenten $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, \gamma'_{11}, \gamma'_{12}, \beta'_{11}, \beta'_{12}, \beta'_{22}$. Die Werkstoffmatrix \mathbf{C} wird zwischen den Spannungsergebnissen und diesen Verzerrungen angesetzt. Sie besteht aus Größen, die vor Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrix numerisch oder auch in Sonderfällen analytisch ermittelt werden können:

$$\mathbf{C} := \begin{bmatrix} D_0 & D_1 \\ D_1 & D_2 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Hierin enthält \mathbf{C} Koeffizienten aus den Tensoren:

$$D_i = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} (\theta^3)^i \mathbf{C} \, d\theta^3 \quad (\text{vgl. Gl. (3.95)}) \quad (4.26)$$

Zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix genügt nun eine Flächenintegration:

$$\mathbf{K}_e = \iint_A \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dA \approx \sum_{i=1}^{n_1 n_2} \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \, f_i$$

Das Produkt $\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}$ muß nur noch $n_1 \cdot n_2$ -mal ausgeführt werden, allerdings mit größeren Matrizen.

Diese Vorgehensweise soll als "explizite Dickenintegration" oder auch "Vorabintegration" bezeichnet werden. Im Gegensatz dazu wird die zuvor beschriebene kontinuumstypische Integration im folgenden "implizite Dickenintegration" genannt.

Der relative Mehraufwand der impliziten Dickenintegration gegenüber der expliziten Integration beträgt ungefähr:

$$\left(\frac{(25n_F + 0.5(5n_F(n_F + 1)))n_D}{(64n_F + 0.5(8n_F(n_F + 1)))} - 1 \right) \cdot 100\% \quad (4.27)$$

Für ein 4-knotiges, isoparametrisches Element mit $n_F = 8 \times 5 = 40$ Freiheitsgraden und $n_D = 2$ Integrationspunkten über die Schalendicke werden ca. 12 % mehr Multiplikationen benötigt, für $n_D = 7$ jedoch 291%. Numerische Untersuchungen von Stegmüller [102] ergaben (unter Ausschluß von Nulloperationen) für $n_D = 2$ 50% mehr Rechenzeit zur Erstellung der allerdings geometrisch nichtlinearen Steifigkeitsmatrix und 300% für $n_D = 7$.

4.3.2 Explizite Integration nach Zienkiewicz, Taylor und Too (Z&T&T)

Als erste versuchten Zienkiewicz, Taylor und Too 1971 [113] unter Umgehung einer Schalentheorie, die Matrix $\mathbf{B} = [\mathbf{E}'_h]$ aus Ahmads Konzept bezüglich θ^3 in konstante und lineare Terme aufzuspalten, um ein Flächenmodell zu erhalten.

Anmerkung: Ausgangspunkt für Z&T&T waren die Gleichungen des Kontinuums in Bezug auf lokale kartesische Koordinaten in diskretisierter Form. Nachfolgende Arbeiten, z.B. [102], benutzten die diskretisierten Gleichungen aber auch bezüglich globaler kartesischer Koordinaten. Die frühzeitige Diskretisierung und die unterschiedlichen Koordinatensysteme sowie einige eingeführte Annahmen verschleiern die tatsächliche Approximationsgüte der Formulierungen. Verwandtschaften und Identitäten sind nur schwer zu erkennen. Deshalb wird in dieser Arbeit, deren Ziel eine Zusammenführung der unterschiedlichen Formulierungen ist, eine vom Koordinatensystem unabhängige Schreibweise gewählt. Drückt man ferner die 3D-Kontinuumsgleichungen in Abhängigkeit von $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w}$ aus, kann über Gleichung (4.10) die Diskretisierung berücksichtigt werden. Die Struktur der Beziehungen wird dadurch formal unabhängig von der Diskretisierung, das heißt, es kommt nicht darauf an, ob zunächst diskretisiert und dann in konstante, lineare und quadratische Teile aufgespalten oder die andere Reihenfolge gewählt wird.

Um zu einem Flächenmodell zu gelangen, trafen Z&T&T die Annahme:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_C \quad (4.28)$$

die über (3.7) äquivalent ist mit $\mathbf{Z} = \mathbf{I}$. Die Green-Lagrange-Verzerrungen (2.11) des Schalenraums werden dadurch mit Hilfe der Gleichungen (2.5) und (3.7) approximiert zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,x}^T + \mathbf{u}_{,x} + \mathbf{u}_{,x}^T \mathbf{u}_{,x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{Z}^{-T} \mathbf{u}_{,r}^T + \mathbf{u}_{,r} \mathbf{Z}^{-1} + \mathbf{Z}^{-T} \mathbf{u}_{,r}^T \mathbf{u}_{,r} \mathbf{Z}^{-1}) \\ &\approx \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{,r}^T + \mathbf{u}_{,r} + \mathbf{u}_{,r}^T \mathbf{u}_{,r}) = \mathbf{E}^* \end{aligned} \quad (4.29)$$

Nach Aufspaltung von $\mathbf{u}_{;r} = \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3 + \theta^3 \mathbf{w}_{;r}$ in hinsichtlich θ^3 konstante und lineare Terme, erhält man den konstanten Teil \mathbf{E}_C^{\approx} von \mathbf{E}^{\approx} , der mit dem Schalentheorie-Verzerrungsmaß $\hat{\mathbf{E}}_C$ des Abschnitts 3.3.1 identisch ist:

$$\mathbf{E}_C^{\approx} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_{;r}^T + \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w} \right. \\ \left. + \underline{\mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{v}_{;r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{v}_{;r} + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)} \right) \quad (4.30)$$

Dem in θ^3 linearen Teil, also der Verkrümmung, fehlt im Vergleich mit $\hat{\mathbf{E}}_L$ des Abschnitts 3.3.1 sämtliche Terme, die mit dem verallgemeinerten Krümmungstensor \mathbf{B} behaftet sind:

$$\mathbf{E}_L^{\approx} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{w}_{;r}^T + \mathbf{w}_{;r} + \underline{\mathbf{w}_{;r}^T \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{w}_{;r} + \mathbf{w}_{;r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{w}_{;r}} \right) \quad (4.31)$$

Bemerkenswerter Weise gehören diese Ausdrücke schon einer geometrisch linearen Theorie an:

$$\hat{\mathbf{E}}_L - \mathbf{E}_L^{\approx} = \frac{1}{2} \left(-\mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{v}_{;r} - \mathbf{B}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) - (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{B} \right) \quad (4.32)$$

Ihr Fehlen kann zu untolerierbar großen Fehlern bei Starrkörperbewegungen führen, was Belytschko et al. [16] am bekannten Testbeispiel "twisted beam" demonstrieren (s. Abschnitt 4.6.5). Um auf die Auswirkungen der "krümmungs"-behafteten Ausdrücke $-\mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{B} - \mathbf{B}^T \mathbf{v}_{;r} - \mathbf{B}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) - (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{B}$ einzugehen, soll der spezielle Fall der geometrisch linearen Theorie betrachtet werden, der durch Eliminieren der unterstrichenen Terme in (4.30) und (4.31) sowie (3.63) und (3.64) entsteht. Für ihn gilt:

$$\hat{\mathbf{E}}_C^{\text{lin}} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_{;r}^T + \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w} \right) = (\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{sym}} \quad (4.33)$$

$\hat{\mathbf{E}}_L^{\text{lin}}$ kann nun geschrieben werden als:

$$\hat{\mathbf{E}}_L^{\text{lin}} = \mathbf{E}_L^{\approx \text{lin}} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{E}}_C^{\text{lin}} + \hat{\mathbf{E}}_C^{\text{lin}} \mathbf{B} \right) \\ - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}^T (\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{skew}} - (\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{skew}} \mathbf{B} \right) \\ \approx \mathbf{E}_L^{\approx \text{lin}} - \frac{1}{2} \left(\mathbf{B}^T (\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{skew}} - (\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{skew}} \mathbf{B} \right) \quad (4.34)$$

Diese Näherung verursacht im Hinblick auf $\hat{\mathbf{E}}_L^{\text{lin}}$ für symmetrisches \mathbf{B} einen Fehler der Größenordnung $\theta^3 \|\hat{\mathbf{E}}_L^{\text{lin}}\| \|\mathbf{B}\| \leq h_0/2\eta_E^{\text{lin}} \|\mathbf{B}\|$; für den Fall einer Schale mit konstanter Dicke und orthogonalem Direktorfeld: $\eta_E^{\text{lin}} h/2R$ (s. a. Anhang, Abschnitt 9.1). Der schiefssymmetrische Teil $(\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{skew}}$ entspricht in der linearen Theorie der Starr-

körperrotation. Sein Fehlen erklärt das schlechte Resultat des "twisted beam". Für Flächentragwerke, bei denen der Ausdruck

$$-\frac{1}{2}(\mathbf{B}^T(\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{skew}} - (\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{skew}}\mathbf{B})$$

verschwindet, z. B. bei ebenen Strukturen, aber auch bei Kugelschalen [16] oder falls Starrkörperbewegungen durch die Restriktion:

$$\|(\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)^{\text{skew}}\| < \eta_E \quad (4.35)$$

nahezu ausgeschlossen sind, liefert die Vorgehensweise von Z&T&T gute Resultate.

Um speziell die Bedeutung der Terme $-\mathbf{B}^T(\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) - (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w})\mathbf{B}$ in $\hat{\mathbf{E}}_L$ zu erläutern, werden die Komponenten von \mathbf{E}_L^{\approx} in einer lokalen Basis untersucht:

$$\beta_{\alpha\beta}^{\approx} = \mathbf{a}_\alpha \mathbf{E}_L^{\approx} \mathbf{a}_\beta = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_{;\alpha} \mathbf{a}_\beta + \mathbf{w}_{;\beta} \mathbf{a}_\alpha + \mathbf{w}_{;\alpha} \mathbf{v}_{;\beta} + \mathbf{w}_{;\beta} \mathbf{v}_{;\alpha}) \quad (4.36)$$

$$\beta_{\alpha 3}^{\approx} = \mathbf{a}_\alpha \mathbf{E}_L^{\approx} \mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_\alpha \frac{1}{2}(\mathbf{w}_{;r}^T \mathbf{a}_3 + \mathbf{w}_{;r}^T \mathbf{w}) = \mathbf{a}_\alpha \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{a}}_{3;r}^T - \mathbf{a}_{3;r}^T) \bar{\mathbf{a}}_3 \quad (4.37)$$

Auch mit der Annahme A3b eines inextensiblen Direktors sowie konstanter Schalendicke und orthogonalem Direktorfeld verschwindet $\beta_{\alpha 3}^{\approx}$ im Gegensatz zu $\beta_{\alpha 3}$ nicht (s. Abschnitt 3.7.1.3).

$$\beta_{\alpha 3}^{\approx} = \mathbf{a}_\alpha \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{d}}_{;r}^T - \mathbf{d}_{;r}^T) \bar{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_\alpha \mathbf{B}^0 \bar{\mathbf{d}} = \frac{1}{2} \mathbf{a}_\alpha \mathbf{B}^0 \mathbf{w} \quad (4.38)$$

In einer lokalen Formulierung für kleine Verzerrungen wird $\beta_{\alpha 3}^{\approx}$ zumeist a priori nicht berücksichtigt, was automatisch zu korrekten Resultaten führt. In einer globalen Formulierung, in der Spannungen und Verzerrungen auf das globale, kartesische Koordinatensystem bezogen werden, kann $\beta_{\alpha 3}^{\approx}$ nicht isoliert werden. Deshalb ist

$$-\mathbf{B}^T(\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) - (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w})\mathbf{B}$$

in $\hat{\mathbf{E}}_L$ unbedingt zu berücksichtigen, was Beispiel 4.6.6 eindrucksvoll unterstreicht.

In θ^3 quadratische Terme werden in diesem Abschnitt vernachlässigt.

Ein Blick auf die geometrisch linearen Komponenten des Verzerrungstensors \mathbf{E}_L^{\approx} bezüglich der krummlinigen Schalenkoordinaten zeigt, daß sie einer Art *Theorie flacher Schalen* [11] – genauer der 1. Love'schen Näherung in der Fassung von Reissner unter Einschluß von Schubverzerrungen [12] – entsprechen. (Anmerkung: $w_3 = \mathbf{w} \mathbf{a}_3 = 0$ in der linearen Theorie).

$$\mathbf{E}_L^{\approx \text{lin}} = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_{;r} + \mathbf{w}_{;r}^T) = \frac{1}{2}((w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha}) \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + b_{\beta}^{\lambda} w_{\lambda} \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}^\beta + b_{\alpha}^{\lambda} w_{\lambda} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^3)$$

$$\text{mit } \mathbf{w} = w_\alpha \mathbf{a}^\alpha \quad \text{und} \quad \mathbf{w}_{;r} = \mathbf{w}_{;\beta} \otimes \mathbf{a}^\beta = w_{\alpha|\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta + b_{\beta}^{\lambda} w_{\lambda} \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{a}^\beta \quad (4.39)$$

(vgl.: (10.1), (10.3)). Für die Komponenten $\beta_{\alpha\beta}^{\approx\text{lin}}$ ergibt sich dann:

$$\beta_{\alpha\beta}^{\approx\text{lin}} = \frac{1}{2} (w_{\alpha|\beta} + w_{\beta|\alpha}) \quad (4.40)$$

4.3.3 Explizite Integration nach Milford und Schnobrich (M&S)

Milford und Schnobrich wiesen 1986 [61] darauf hin, daß eine bezüglich θ^3 konstante Jacobi-Matrix nicht ausreicht und schlugen eine Taylor-Reihenentwicklung der inversen Jacobi-Matrix bis zum linearen Glied vor, was äquivalent ist mit der Approximation:

$$\mathbf{Z}^{-1} \approx \mathbf{I} + \theta^3 \mathbf{B} \quad (4.41)$$

In ihrer Veröffentlichung sind die ersten Ansätze eines Vergleichs des Degenerationskonzepts mit Schalentheorien zu finden. Belytschko et al. [16] betonten 1989 ebenfalls die Bedeutung der Terme mit \mathbf{B} und demonstrierten, wie schon erwähnt, an dem bekannten Testbeispiel "twisted beam", daß deren Nichtbeachtung einen Fehler bis zu 70% verursachen kann (s. Beispiel 4.6.5). Mit der Approximation (4.41) werden die Green-Lagrange-Verzerrungen des Schalenraums angenähert durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &\approx \frac{1}{2} \left((\mathbf{I} + \theta^3 \mathbf{B})^T \mathbf{u}_{,r}^T + \mathbf{u}_{,r} (\mathbf{I} + \theta^3 \mathbf{B}) + (\mathbf{I} + \theta^3 \mathbf{B})^T \mathbf{u}_{,r}^T \mathbf{u}_{,r} (\mathbf{I} + \theta^3 \mathbf{B}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_{,r}^T + \mathbf{u}_{,r} + \mathbf{u}_{,r}^T \mathbf{u}_{,r} + \theta^3 (\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{,r}^T + \mathbf{u}_{,r} \mathbf{B}) \right. \\ &\quad \left. + \theta^3 (\mathbf{B}^T \mathbf{u}_{,r}^T \mathbf{u}_{,r} + \mathbf{u}_{,r}^T \mathbf{u}_{,r} \mathbf{B}) + (\theta^3)^2 \mathbf{B}^T \mathbf{u}_{,r}^T \mathbf{u}_{,r} \mathbf{B} \right) = \mathbf{E}^{\approx\approx} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Benutzen von $\mathbf{u}_{,r} = \mathbf{v}_{,r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3 + \theta^3 \mathbf{w}_{,r}$ und streichen der in θ^3 quadratischen Terme führt auf:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{C+L}}^{\approx\approx} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_{,r}^T + \mathbf{v}_{,r} + \mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3 + \mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{v}_{,r}^T \mathbf{v}_{,r} + \mathbf{v}_{,r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{v}_{,r} + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) \right. \\ &\quad \left. + \theta^3 (\mathbf{w}_{,r}^T + \mathbf{w}_{,r} + \mathbf{w}_{,r}^T \mathbf{v}_{,r} + \mathbf{v}_{,r}^T \mathbf{w}_{,r} + \mathbf{w}_{,r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{w}_{,r}) \right. \\ &\quad \left. + \theta^3 \mathbf{B}^T (\mathbf{v}_{,r}^T + \mathbf{v}_{,r}^T \mathbf{v}_{,r} + \mathbf{v}_{,r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{v}_{,r} + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)) \right. \\ &\quad \left. + \theta^3 (\mathbf{v}_{,r} + \mathbf{v}_{,r}^T \mathbf{v}_{,r} + \mathbf{v}_{,r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{v}_{,r} + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)) \mathbf{B} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

Da $\mathbf{E}^{\approx\approx}$ ebenso wie \mathbf{E}^{\approx} in den konstanten Termen identisch mit $\hat{\mathbf{E}}$ sind, sollen die in θ^3 linearen Glieder näher betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_L^{\approx} &= \mathbf{E}_L^{\approx} + \frac{1}{2} \mathbf{B}^T (\mathbf{v}_{;r}^T + \mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{v}_{;r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \\
&\quad + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{v}_{;r} + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{;r} + \mathbf{v}_{;r}^T \mathbf{v}_{;r} + \mathbf{v}_{;r}^T (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) + (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) \\
&\quad + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) \mathbf{v}_{;r} + (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w}) (\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3)) \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Mit (4.30) und (4.32) gilt für (4.44):

$$\mathbf{E}_L^{\approx} \approx \hat{\mathbf{E}}_L + \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{E}}_C + \hat{\mathbf{E}}_C \mathbf{B} \tag{4.45}$$

$\hat{\mathbf{E}}_L$ und \mathbf{E}_L^{\approx} weichen nur wenig voneinander ab, denn die Größenordnung ihrer Differenz kann abgeschätzt werden zu:

$$\| \mathbf{E}_L^{\approx} - \hat{\mathbf{E}}_L \| = \| \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{E}}_C + \hat{\mathbf{E}}_C \mathbf{B} \| \leq (\| \mathbf{B}^T \| + \| \mathbf{B} \|) \eta_E \text{ mit } \| \hat{\mathbf{E}}_C \| \leq \| \hat{\mathbf{E}} \| = \eta_E \tag{4.46}$$

Daher ist die relative Abweichung zwischen $\hat{\mathbf{E}}_{C+L}$ und $\mathbf{E}_{C+L}^{\approx}$ in einer Theorie für Schalen mit konstanter Dicke und orthogonalem Direktorfeld von der tolerierbaren Ordnung $\theta^3/2/R \leq h/R$ und somit den Verzerrungsgleichungen $\hat{\mathbf{E}}_{C+L}$ der Schalentheorie gleichwertig. Allerdings enthalten die Verkrümmungen \mathbf{E}_L^{\approx} deutlich mehr Terme. Der Index $c+l$ in $\hat{\mathbf{E}}_{C+L}$ deutet an, daß in θ^3 quadratische Terme nicht berücksichtigt worden sind. Weitere Erläuterungen zur Fehlerabschätzung sind im Anhang 9.1 zu finden.

4.3.4 Explizite Integration nach Irons

Irons leitete 1973 [50] die Verkrümmungen seines "Semi-Loof" – Schalenelementes in lokalen kartesischen Koordinaten aus den Dehnungen der Schalenober- und Schalenunterseite her. Wenn von der schon gleich zu Anfang der Herleitung eingeführten Diskretisierung abgesehen wird, stimmen die Verkrümmungen exakt mit $\hat{\mathbf{E}}_L$ überein. Inwieweit Irons sich der Bedeutung der zusätzlichen Terme damals im klaren war, ist fraglich, schreibt er doch selbst: "In the solution to a real problem it is probably an order of magnitude smaller than the orthodox bending terms. It is questionable therefore whether it should be included..." Hinsichtlich seiner Herleitung erwähnt er: "There is more engineering intuition than mathematics in this step."

4.3.5 Explizite Integration nach Stanley

Als letzte der dem Autor bekannten wesentlichen Arbeiten sei die von Stanley [100] genannt. Er berücksichtigt den inversen Shifter \mathbf{Z}^{-1} exakt und vernachlässigt die in θ^3 quadratischen Terme nicht, wodurch seine Ergebnisse mit denen der implizit über die Dicke integrierten, degenerierten Schalenelemente identisch sind. Wird jedoch ein

Fehler in der Größenordnung von h/R toleriert, könnten seine Gleichungen durch Streichen dann überflüssiger Terme deutlich vereinfacht werden.

4.3.6 Schlußfolgerungen

Es wurde gezeigt, in welchem Verhältnis die unterschiedlichen Formen der expliziten Dickenintegration degenerierter Schalenelemente zur geometrisch nichtlinearen Schalentheorie mit Schubverzerrungen stehen.

Wird der Verzerrungstensor $\hat{\mathbf{E}}$ benutzt, sind "explizite Integration" und Schalentheorie identisch. Eine Reihenentwicklung von \mathbf{J}^{-1} bzw. \mathbf{Z}^{-1} ist dann unnötig. Die Herleitung ist mathematisch konsistent und überflüssige Terme werden nicht mitgeschleppt.

Der einzige Unterschied zwischen dem Degenerationskonzept und Schalenelementen, basierend auf einer Schalentheorie, kann nur noch in der Art der Diskretisierung liegen.

4.4 Vergleich der Diskretisierung

4.4.1 Schalentheorie

Üblicherweise liegt für finite Elemente, die von einer Schalentheorie ausgehen, die Ausgangsgeometrie in analytischer Form vor. Jede andere Beschreibung der Geometrie ist jedoch möglich, so zum Beispiel die isoparametrische Interpolation. Das oft zu hörende Argument, daß Stabilitätsanalysen imperfektionsempfindlicher Schalen dadurch stark beeinflusst werden, kann hier nicht geteilt werden. Der Fehler durch die Approximation der Referenzgeometrie und der verformten Konfiguration ist im allgemeinen von derselben Größenordnung. Die verformte Geometrie wird indirekt über das Verschiebungsfeld interpoliert.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w} = \mathbf{v} + \theta^3 \kappa (\chi \mathbf{R}(s^1, s^2) - \mathbf{I}) \mathbf{d} \quad (4.47)$$

Auf die Wahl der Rotationsparameter s^i wird in Kapitel 5 näher eingegangen werden. Für die Betrachtungen an dieser Stelle sollen s^i die Komponenten eines Rotationsvektors sein. Gewöhnlich werden die Komponenten von \mathbf{v} und \mathbf{s} bezüglich der lokalen Basis \mathbf{a}_i diskretisiert:

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_h = \left(\sum_{K=1}^{NN} N^K (v^i)^K \right) \mathbf{a}_i \quad ; \quad \mathbf{s} \approx \mathbf{s}_h = \left(\sum_{K=1}^{NN} N^K (s^i)^K \right) \mathbf{a}_i \quad (4.48)$$

Im allgemeinen verursacht diese Art der Interpolation Schwierigkeiten bei der korrekten Darstellung von Starrkörperbewegungen gekrümmter Strukturen (s. z.B. [11], [4]), die jedoch mit feinerer Diskretisierung verschwinden. Alternative Arten der Interpolation sind denkbar, insbesondere für andere Basisvektoren.

Wird χ nicht über die Bedingung A3a $\tau_3^3 \approx 0$ eliminiert, muß χ als unabhängiger Parameter ebenfalls diskretisiert werden:

$$\chi \approx \chi_h = \sum_{K=1}^{NN} N^K \chi^K \quad (4.49)$$

4.4.2 Degenerationskonzept

Der in Abschnitt 4.2.1 beschriebene Degenerationsvorgang vom isoparametrischen Kontinuums- zum Schalenelement führt direkt auf die auch für explizit dickenintegrierten Elemente typische Interpolation bezüglich globaler, orthogonal kartesischer Koordinaten:

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_h = \sum_{K=1}^{NN} N^K \mathbf{r}^K \quad ; \quad \mathbf{a}_3 \approx \mathbf{a}_{3h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K \mathbf{a}_3^K \quad (4.50)$$

$$\bar{\mathbf{r}} \approx \bar{\mathbf{r}}_h = \sum_{K=1}^{NN} N^K \bar{\mathbf{r}}^K \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}}_3 \approx \bar{\mathbf{a}}_{3h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K \bar{\mathbf{a}}_3^K \quad (4.51)$$

Daraus folgt für das Verschiebungsfeld:

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_h = \left(\sum_{K=1}^{NN} N^K (v^j)^K \right) \mathbf{i}_j \quad ; \quad \mathbf{w} \approx \mathbf{w}_h = \left(\sum_{K=1}^{NN} N^K (w^j)^K \right) \mathbf{i}_j \quad (4.52)$$

als Interpolation der Verschiebungen. Diese Art der Interpolation bewirkt, daß z.B. im Sonderfall einer Formulierung mit inextensiblen Direktor und konstanter Schalendicke die Bedingung $|\bar{\mathbf{d}}| = 1$ nur an den Knoten exakt erfüllt ist, an den (Gauß-)Integrationspunkten im Element jedoch verletzt wird. Dies hat zur Folge, daß insbesondere in geometrisch nichtlinearen Analysen niedrig interpolierte Elemente zu "weich" reagieren.

Abhilfe wird geschaffen, wenn, wie in der Schalentheorie, \mathbf{s} (und damit auch χ) statt $\mathbf{w} = \kappa(\chi \mathbf{R}(\mathbf{s}) - \mathbf{I})\mathbf{d}$ interpoliert wird (siehe [22], [96] und Beispiel 4.6.2), was hier aber in kartesischen Koordinaten geschehen soll:

$$\mathbf{s} \approx \mathbf{s}_h = \left(\sum_{K=1}^{NN} N^K (s^j)^K \right) \mathbf{i}_j \quad (4.53)$$

In [22] stellt sich heraus, daß dadurch die Berechnung der tangentialen Steifigkeitsmatrix aufwendiger wird. Zudem gilt für Schalen mit nur 2 Rotationsfreiheitsgraden die Aussage "s hat keine Komponente in Richtung von \mathbf{a}_3 " am Gauß-Punkt nicht mehr. Sollte dadurch ein "Defekt" entstehen, verschwindet er ebenfalls mit zunehmender Diskretisierung.

Eine andere Möglichkeit wird in [95] vorgestellt, in der $\bar{\mathbf{d}}_h$ durch die Bedingung $|\bar{\mathbf{d}}_h| = 1$ an jedem Integrationspunkt normiert wird.

4.4.3 Schlußfolgerungen

Obleich für Schalentheorie–Elemente unüblich, ist eine Interpolation der unbekannt Parameter in kartesischen Koordinaten und ebenso eine isoparametrische Geometriediskretisierung möglich. Ein solches Schalentheorie–Element ist dann vollkommen *identisch* mit einem explizit dickenintegrierten, degenerierten Element, bei dem s (und χ) statt \mathbf{a}_3 und $\bar{\mathbf{a}}_3$ interpoliert werden. Zur Trennung der Begriffe sollen nur die isoparametrischen Schalenelemente, die die aus dem Kontinuum hergeleitete *Interpolation der Direktoren* \mathbf{a}_3 und $\bar{\mathbf{a}}_3$ (bzw. des Differenzvektors \mathbf{w}) verwenden, als "degeneriert" oder wie im angelsächsischen Sprachraum üblich als "continuum based" bezeichnet werden.

Für diese Elemente bietet sich an, von den Verzerrungsgleichungen des Abschnitts 3.7.1 in vektorieller Form auszugehen, da $\bar{\mathbf{a}}_{3h}$ und \mathbf{a}_{3h} direkt vorliegen und die kovarianten Basisvektoren \mathbf{a}_{ah} und $\bar{\mathbf{a}}_{ah}$ über \mathbf{r}_h und $\bar{\mathbf{r}}_h$ einfach zu bestimmen sind. Zudem werden keine differentialgeometrischen Größen gebraucht, die zweite Ableitungen der Ausgangsgeometrie benötigen; es treten also keine Christoffel–Symbole auf. Eine derartige Vorgehensweise wurde in Simo et al. [94]–[97] und Parisch [67] gewählt und wird für die Elementformulierung des Kapitels 6 ebenfalls verwendet.

4.5 Degenerierte Elemente mit expliziter Integration basierend auf Ingenieurverzerrungen

In diesem Abschnitt soll die Frage beantwortet werden, ob die für das Degenerationskonzept typische Interpolation zur Diskretisierung der Schalengleichungen basierend auf Ingenieurverzerrungen sinnvoll eingesetzt werden kann. Ausgangspunkt der Betrachtung sind die kinematischen Gleichungen (3.156), (3.157) und (3.161) in vektorieller Form:

$$h_{\alpha\beta}^s = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta + \tilde{\mathbf{a}}_\beta \bar{\mathbf{a}}_\alpha) - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta \quad ; \quad \alpha = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 - \tilde{\mathbf{a}}_2 \bar{\mathbf{a}}_1)$$

$$k_{\alpha\beta}^s = \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \tilde{\mathbf{d}}_{,\beta} + \tilde{\mathbf{d}}_{,\alpha} \tilde{\mathbf{a}}_\beta) - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{d}_{,\beta}$$

Wird s nicht interpoliert, ist es nötig, neben $\tilde{\mathbf{d}}$ und \mathbf{d} auch noch $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha$ von den Elementknoten zu interpolieren, um die rotierten Basisvektoren an den Integrationspunkten zur Verfügung zu haben.

$$\tilde{\mathbf{a}}_\alpha \approx \tilde{\mathbf{a}}_{\alpha h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^K = \sum_{K=1}^{NN} N^K \mathbf{R}_C(\mathbf{s}^K) \mathbf{a}_\alpha^K \quad (4.54)$$

Es ist effizienter, die drei Komponenten des Rotationsvektors \mathbf{s} – oder 3 andere Rotationsparameter – statt der 9 Komponenten der 3 Vektoren $\tilde{\mathbf{a}}_\alpha, \tilde{\mathbf{d}}$ zu interpolieren. Für

die gesamte Rechenzeit einer FE-Berechnung spielt die Art der Interpolation jedoch eine untergeordnete Rolle.

Ein Problem, das durch die Interpolation der rotierten Basisvektoren entsteht, kann an einem Sonderfall verdeutlicht werden. Bei z.B. Platten und Scheiben mit kartesischen Koordinatensystem sind die Vektoren $\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{d}$ konstant. Dann dürfen die Basisvektoren der Ausgangsgeometrie in (4.54) aus der Summe herausgezogen werden.

$$\tilde{\mathbf{a}}_{\alpha h} = \left(\sum_K N^K \mathbf{R}_C(\mathbf{s}^K) \right) \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{R}_{C_h} \mathbf{a}_\alpha \quad (4.55)$$

Der so interpolierte Rotationstensor verliert seine Orthogonalität und wird infolge dessen parasitäre Verzerrungen hervorrufen. Aus diesem Grund verspricht die direkte Interpolation von \mathbf{s} mehr Erfolg als die für das Degenerationskonzept typische Vorgehensweise.

Anmerkung: Es sei darauf hingewiesen, daß die Schalentheorie-Elemente und die degenerierten Elemente dieselben Knotenvariablen haben und somit gleich dimensionierte Elementmatrizen besitzen. Allerdings werden im Degenerationskonzept die unbekannteren Rotationsvariablen nicht direkt interpoliert.

4.6 Numerische Beispiele

4.6.1 Einleitende Bemerkungen

Wie sich die Wahl des Verzerrungsmaßes und die unterschiedliche Interpolation des Differenzvektors auswirken, verdeutlichen die drei einfachen Testbeispiele

1. Kragarm mit Endmoment
2. einhüftiger Rahmen ("Lee-Frame")
3. unsymmetrisch gelagerter Bogen

Die Resultate der Tests

4. verwundener Balken ("Twisted Beam")
5. Viertelbogen unter Einzellast

unterstreichen die Bedeutung der krümmungsbehafteten Terme bei der expliziten Dickenintegration degenerierter Elemente. Zur Berechnung der ersten 3 Beispiele werden (2-dimensionale) isoparametrische Elemente [22] mit den folgenden Eigenschaften eingesetzt:

E-w-i	Verzerrungstensor: Annahmen: Interpolation: Dickenintegration:	Green-Lagrange-Verzerrungen \mathbf{E} A1 und A3a/b Interpolation der Direktoren (\mathbf{w}) implizit
E-s-i	Verzerrungstensor: Annahmen: Interpolation: Dickenintegration:	Green-Lagrange-Verzerrungen \mathbf{E} A1 und A3a/b Interpolation der Rotationen \mathbf{s} implizit
H-s-i	Verzerrungstensor: Annahmen: Interpolation: Dickenintegration:	Ingenieurverzerrungen \mathbf{H} A1, A3a/b und A4* Interpolation der Rotationen \mathbf{s} implizit

Mit den Elemente E-s-i und H-s-i erzielt man aufgrund ihrer Annahmen und der Interpolation des Rotationsvektors \mathbf{s} Ergebnisse, die mit isoparametrischen Schalentheorie-Elementen identisch sind, die den Shifter \mathbf{Z} in der konstitutiven Beziehung nicht vernachlässigen und für den Fall des Elemente E-s-i die in θ^3 quadratischen Terme berücksichtigen. Die Studien an den Beispielen 4 und 5 erfolgen mit den (3-dimensionalen) isoparametrischen Elementen:

E-w-e	Verzerrungstensor: Annahmen: Interpolation: Dickenintegration:	Green-Lagrange-Verzerrungen $\hat{\mathbf{E}}_{C+L}$ A1, A2, A3a/b und A4 Interpolation der Direktoren (\mathbf{w}) explizit
-------	---	---

E-w-e-Z	Verzerrungstensor:	Green-Lagrange-Verzerrungen $E_{C+L}^{\tilde{}}$ in lokalem bzw. globalem Bezugssystem
	Annahmen:	nach Zienkiewicz/Taylor/Too
	Interpolation:	Interpolation der Direktoren (w)
	Dickenintegration:	explizit

Auf das Element E-w-e wird in Kapitel 6 näher eingegangen.

4.6.2 Kragarm mit Endmoment

Der Kragbalken mit einem am freien Ende angreifenden Einzelmoment, das ihn zum Vollkreis biegen soll, ist einer der am häufigsten verwendeten Tests zur Beurteilung des Konvergenzverhaltens nichtlinearer Formulierungen. Leider handelt es sich dabei um ein äußerst sensibles Beispiel, weil der Iterationsverlauf stark von den gewählten Systemdaten abhängt. Aus diesem Grund kann der Balken nur dann als Test dienen, wenn dieselben Ausgangsdaten verwendet werden.

Elastizitätsmodul $E=21000 \text{ kN/cm}^2$
 Querkontraktionszahl $\nu = 0.0$
 Länge $l=100 \text{ cm}$
 Breite $b=1.0 \text{ cm}$
 Dicke $h=2.0 \text{ cm}$
 Moment $M=879.6456 \text{ kNcm}$




Bild 4.2: Kragarm unter Endmoment

Zur Berechnung mit 10 linearen 1-Punkt Gauß-integrierten Elementen wird die Gesamtlast in 10 Schritten aufgebracht. Als Abbruchkriterium dient:

$$\text{Tol} = \frac{\| \mathbf{Da}^i - \mathbf{Da}^{i-1} \|}{\| \sum_i \mathbf{Da}^i \|} < 10^{-10}$$

Schritte	Element H-s-i	Element E-s-i	Element E-w-i
10	10/10/10/10/10	9/9/9/9/9	9/9/9/9/9
	10/10/10/10/10	9/9/9/9/9	10/10/10/11/11
Enddrehwinkel	360.00°	361.94°	392.07°

Tafel 4.1: Anzahl der Iterationen und Endverdrehung für den Kragarm

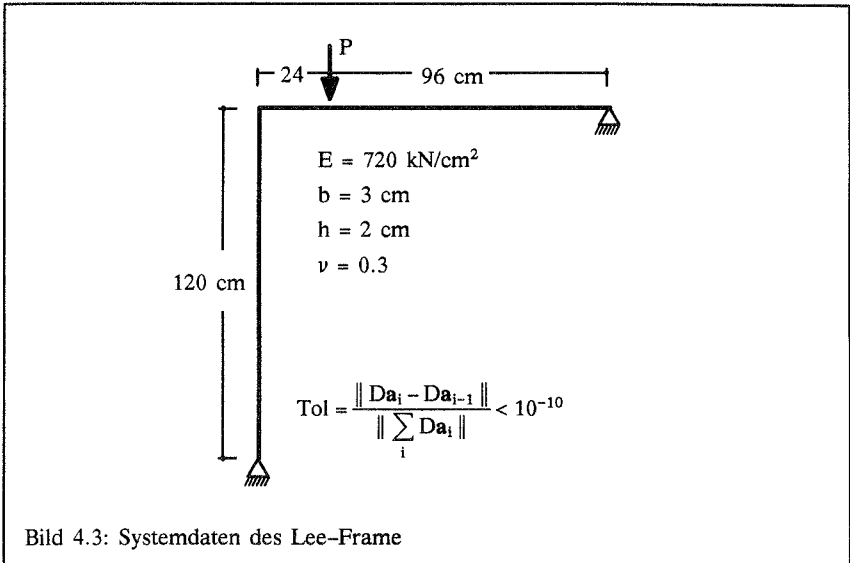
Das Element H-s-i führt auf das exakte Ergebnis für den Enddrehwinkel $\phi = 360^\circ$. Das Resultat des Elementes E-s-i ist nicht schlechter zu bewerten, weil den beiden For-

mulierungen strenggenommen nicht dasselbe Werkstoffgesetz zugrunde liegt (s. Abschnitt 2.9.2). Die zahlenmäßig identische Werkstoffmatrix wurde nämlich einmal zwischen den Ingenieurverzerrungen und den Biot-Spannungen (entspricht der exakten analytischen Lösung), das andere Mal zwischen Piola-Kirchhoff-Spannungen und Green-Lagrange-Verzerrungen angesetzt.

Das Element E-w-i weicht mit $\phi = 392.07^\circ$ deutlich von der Vollkreislösung ab. Für zunehmende relative Verdrehungen, also "Verkrümmungen" und nicht Starrkörperrotationen, wird das Element immer weicher. Dieser Effekt ist diskretisierungsabhängig und verkleinert sich durch feinere Netzeinteilung. Bei 20 linearen E-w-i-Elementen ergibt sich mit einem Iterationsverlauf von 9/9/9/9/9/9/9/9/9/10 ein Enddrehwinkel von 368.30° . Das sich ändernde Verhalten dieses Elementes in einer nichtlinearen Rechnung wird vermutlich der Grund für die in diesem Beispiel nicht konstant bleibende Iterationszahl pro Laststufe sein. Die Zahl der notwendigen Iterationen für das Element H-s-i liegt in derselben Größenordnung wie die des Elements E-s-i, was nicht verwundert, denn bei der Wahl derselben Knotenvariablen und nur unbedeutender Unterschiede in den Annahmen und im Werkstoffgesetz muß auch die tangentielle Steifigkeitsmatrix nahezu gleich sein.

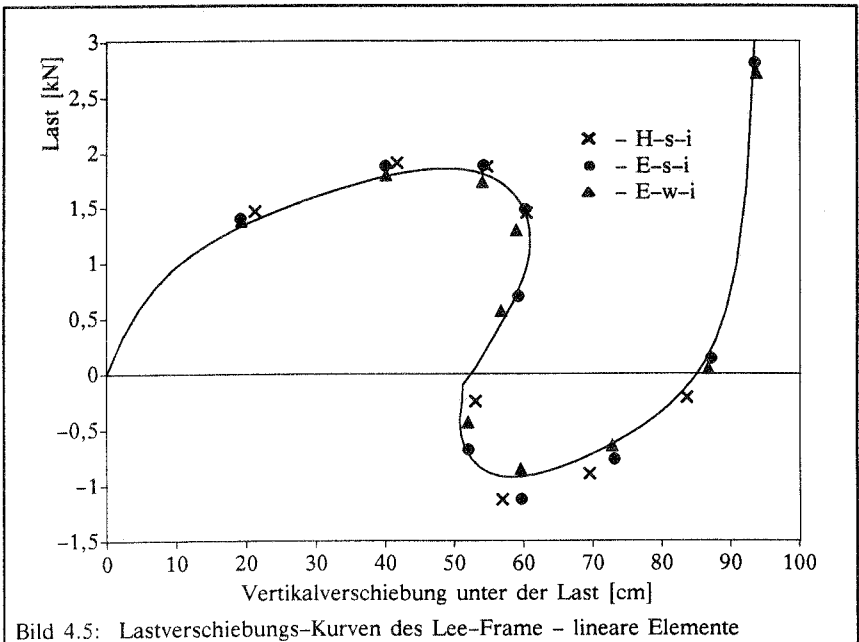
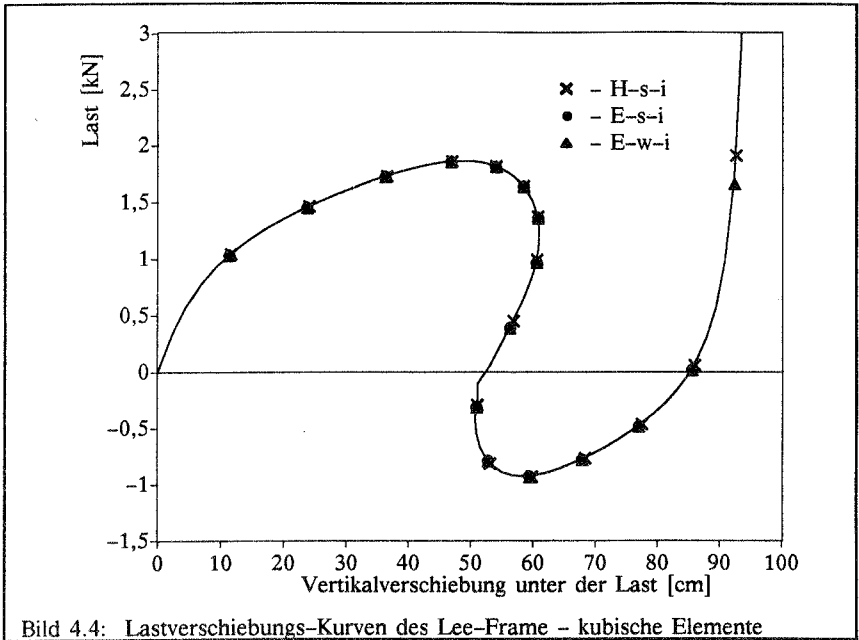
Anmerkung: Den Enddrehwinkel $\phi = 361.94^\circ$ des Elementes E-s-i erhält man für eine 2-Gauß-Punkt-Integration längs der Koordinate θ^3 . 4 Integrationspunkte führen auf $\phi = 361.71^\circ$. Wird \hat{E}_Q vernachlässigt, so ist der "exakte" Enddrehwinkel $\phi = 360.96^\circ$. Anstelle des Wertes $\phi = 392.07^\circ$ in Tafel 4.1, ergibt sich ohne die in θ^3 quadratischen Verzerrungsanteile \hat{E}_Q $\phi = 390.64^\circ$.

4.6.3 Einhäufiger Rahmen ("Lee-Frame")



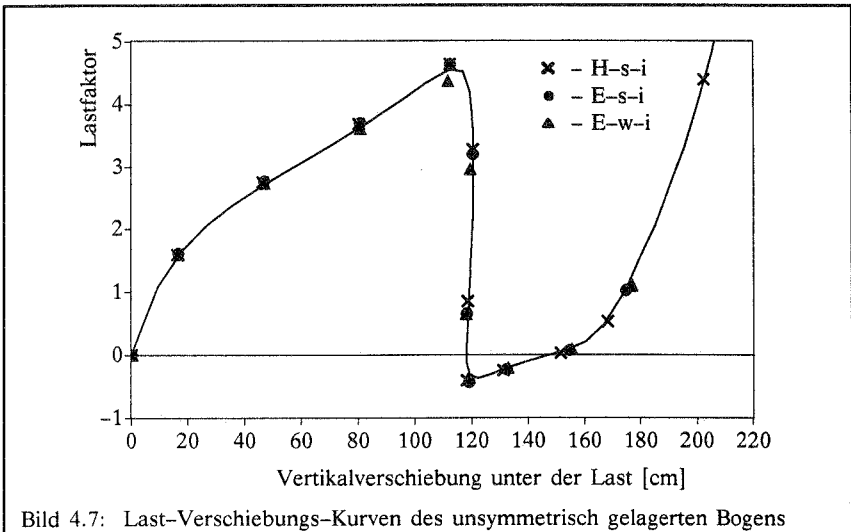
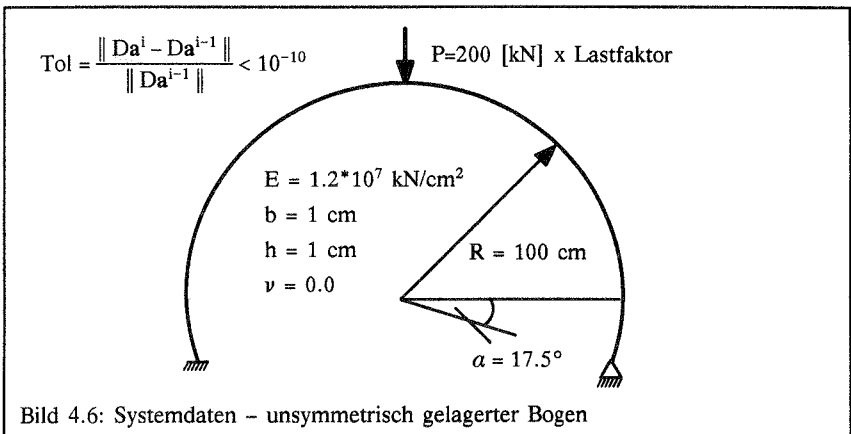
Zur Berechnung des einhäufigen Rahmens von Lee sind lineare und kubische H-s-i-, E-s-i- und E-w-i-Elemente eingesetzt worden. Die Untersuchungen sind mit dem Bogenlängen-Verfahren [51], [76], [83] in Verbindung mit einer echten Newton-Iteration durchgeführt worden. Als Referenzlösung dient eine Rechnung in 75 Inkrementen mit 20 kubischen Elementen des Typs E-s-i. Die Last-Verschiebungs-Kurven im Bild 4.4 – berechnet in 16 Schritten und mit 10 kubischen Elementen – zeigen nahezu identisches Verhalten der kubischen Elemente.

Für die sehr grobe Idealisierung mit 10 linearen Elementen (s. Bild 4.5) liegt das Ergebnis des Elementes E-w-i näher zur Referenzlösung als die der beiden anderen. Ursache hierfür ist das tendenziell zu "weiche" Verhalten dieser Elementformulierung, das in diesem Fall den Fehler infolge grober Diskretisierung mildert. Die Zahl der Iterationen je Inkrement weicht für die unterschiedlichen Elementtypen praktisch nicht voneinander ab.



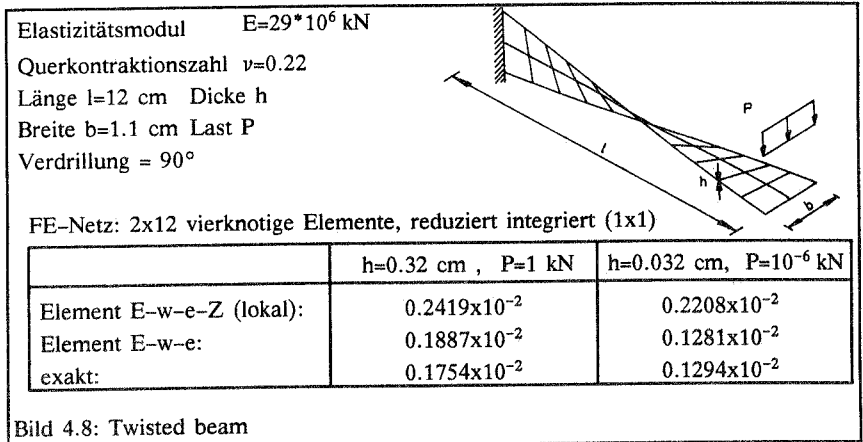
4.6.4 Unsymmetrisch gelagerter Bogen

Als weiteres, sehr bekanntes Testbeispiel wird hier der unsymmetrisch gelagerte Kreisbogen präsentiert, weil er im Gegensatz zu den ersten beiden Beispielen im Ausgangszustand gekrümmt ist. Berechnet wurde er mit 20 linearen Elementen, deren Ergebnisse im Bild 4.7 dargestellt sind. Die Referenzlösung, an der durchgezogenen Linie in diesem Bild zu erkennen, ist mit 20 kubischen Elementen des Typs E-s-i ermittelt worden. Es stellt sich wiederum heraus, daß die Resultate und das Iterationsverhalten nahezu identisch sind.



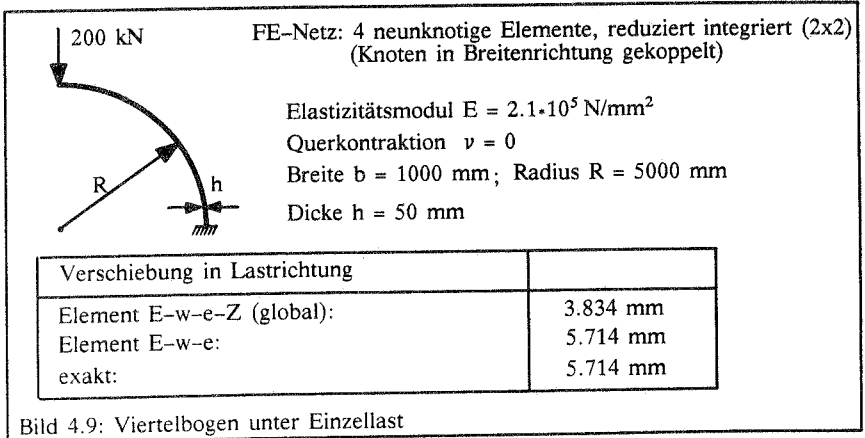
4.6.5 "Twisted Beam"

Dieser oft beschriebene, geometrisch lineare Elementtest ist von Belytschko et al. in [16] berechnet worden und wird hier wieder aufgegriffen, um den bemerkenswerten Fehler aufzuzeigen, der entsteht, wenn die Terme $-v_{,r}^T \mathbf{B} - \mathbf{B}^T v_{,r}$ in $\hat{\mathbf{E}}_L$ vernachlässigt werden.



4.6.6 Viertelbogen mit Einzellast [110]

Dieses Beispiel zeigt den Fehler, der in einer geometrisch linearen Rechnung entsteht, wenn die Terme $-\mathbf{B}^T(\mathbf{w} \otimes \mathbf{a}^3) - (\mathbf{a}^3 \otimes \mathbf{w})\mathbf{B}$ fehlen. Wie schon in Abschnitt 4.3.2 erwähnt, wird dieser Defekt in den meisten lokalen Formulierungen automatisch korrigiert. Wenn jedoch Spannungen und Verzerrungen auf globale kartesische Koordinaten bezogen werden, kann er nicht verschwinden.



4.7 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

In diesem Kapitel ist das Degenerationskonzept mit impliziter und mit expliziter Integration über die Schalendicke vorgestellt worden. Es ist gezeigt worden, daß das Kontinuums-element mit linearen Ansatzfunktionen in Dickenrichtung durch eine andere Wahl der Knotenvariablen in ein implizit dickenintegriertes degeneriertes Element übergeht, das eine variable Dicke in der Ausgangsgeometrie und eine Dickenveränderung durch die Deformation zuläßt. Ein solches Element ist identisch mit einem isoparametrischen Element, das auf der allgemeinsten der im Kapitel 3 vorgestellten Schalentheorien basiert, wenn der Differenzvektor w kontinuums-typisch interpoliert wird. Diese Schalentheorie benutzt nur Annahme A1, setzt weder ein orthogonal zur Schalenmittelfläche gerichtetes Direktorfeld noch eine konstant bleibende Schalendicke voraus und ist für große Verzerrungen gültig. Degenerierte und isoparametrische Schalentheorie-Elemente unterscheiden sich nur hinsichtlich der Diskretisierung von w (bzw. der Diskretisierung der Direktoren). Als "degeneriert" sind folglich die Elemente zu bezeichnen, die die "Kontinuums"-Interpolation für w bzw. die Direktoren benutzen.

Aus Gründen der numerischen Effizienz haben Zienkiewicz, Taylor und Too [113] eine Vorabintegration (explizite Integration) für degenerierte Elemente eingeführt. Hierfür haben sie die Annahme einer über die Schalendicke konstanten (inversen) Jacobi-Matrix getroffen. Als Konsequenz verschwinden die mit den "Krümmungen" B behafteten Terme. Dadurch entstehen schon in der linearen Theorie beachtliche Fehler bei gekrümmten Elementen, die Starrkörperbewegungen unterworfen sind. Es läßt sich zeigen, daß die Verzerrungsgleichungen denen einer Theorie flacher Schalen entsprechen.

Milford und Schnobrich [61] haben zur Beseitigung dieser Schwierigkeiten die inverse Jacobi-Matrix des Schalenraums bis zum in θ^3 linearen Glied in Reihe entwickelt. Es wurde demonstriert, daß diese Vorgehensweise zu Verzerrungsgleichungen führt, die mit denen der Schalentheorie des Kapitels 3 bis auf Terme der Größenordnung $h_0(\|B^T\| + \|B\|)/2$ übereinstimmen. Da jedoch die Verkrümmungsgleichungen in der nichtlinearen Theorie deutlich umfangreicher als in der vergleichbaren Schalentheorie sind, sollte letztere bevorzugt werden.

Diesen Weg beschreiten Simo et al. in [94]–[97]. Sie starten mit den Verzerrungsgleichungen der Schalentheorie in vektorieller Form (s. auch Parisch [67]) und benutzen dann die kontinuums-typische Interpolation. Mit der hier vertretenen Auffassung gehören ihre Elemente zu denen des Degenerationskonzepts.

Ferner kann festgestellt werden, daß es sich empfiehlt, für degenerierte Elemente von Greenschen Verzerrungen statt von Ingenieurverzerrungen auszugehen. Bei implizit dickenintegrierten degenerierten Elementen sind dann weniger Terme zur Erstellung der Tangentensteifigkeitsmatrix nötig. Und bei explizit integrierten Elementen ist es vorteil-

haft, die Verdrehungen s zu interpolieren. Dann liegen nach obiger Definition aber Schalentheorie-Elemente anstelle degenerierter Elemente vor (s. [85]).

Die numerischen Beispiele verdeutlichen, daß degenerierte (bi-)lineare Elemente "weicher" reagieren als Schalentheorie-Elemente. Diese Auswirkungen verschwinden mit feiner werdender Diskretisierung. Bei höherwertig interpolierten degenerierten Elementen ist dieser Effekt unwesentlich. Obgleich eigentlich selbstverständlich, soll angemerkt werden, daß die Wahl des Verzerrungsmaßes weder Einfluß auf die Ergebnisse noch auf das Iterationsverhalten hat. Erst unterschiedliche Approximationsstufen der theoretischen Grundgleichungen können sich diesbezüglich bemerkbar machen. Bei gleicher Approximationsgüte sind jedoch nur geringe Auswirkungen zu erwarten, was durch die berechneten Beispiele bestätigt wird. Für den numerischen Vergleich müssen Diskretisierung und Knotenvariablen der unterschiedlichen Vorgehensweisen identisch sein.

5 Möglichkeiten zur Wahl unabhängiger Rotationsparameter

Ziel dieses Kapitels ist, das bisher zurückgestellte Thema der geeigneten Wahl unabhängiger Parameter zur Beschreibung endlicher Rotationen zu diskutieren. Dem kurzen Überblick über die am häufigsten benutzten Parameter folgt eine Betrachtung zur Linearisierung und zur Aktualisierung der Rotationen im Newton-Verfahren. Ferner wird eine Möglichkeit vorgestellt, wie die in [92], [98] beschriebenen Algorithmen mit unsymmetrischem und symmetrischem Tangentenoperator auf anderem Weg hergeleitet werden können.

5.1 Rotationstensor und Rotationsvektoren

5.1.1 Allgemeine Anmerkungen

Die wesentlichen Eigenschaften einer endlichen Drehung sollen hier kurz vorgestellt werden. Ausführlichere Informationen sind in zahlreichen Lehrbüchern zu finden.

Es seien drei beliebige, linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ des dreidimensionalen euklidischen Raums \mathbb{R}^3 gegeben. Für eine Rotation der Basis $\mathbf{A}=(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ in die neue Basis:

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3^*) = \mathbf{R}\mathbf{A} \tag{5.1}$$

ist charakteristisch, daß sich weder die Länge der Vektoren noch der Winkel zwischen ihnen durch diesen Vorgang ändert. Folglich muß \mathbf{R} orthogonal sein, denn:

$$\mathbf{a}_i^* \mathbf{T} \mathbf{a}_j^* = \mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{A}^* \mathbf{T} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \Leftrightarrow \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \tag{5.2}$$

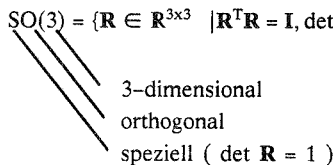
Gleichung (5.2) bedeutet, daß die 9 Komponenten von \mathbf{R} 6 unabhängige Bedingungen zu erfüllen haben. Daher ist jede Rotation durch 3 Parameter bestimmbar.

An dieser Stelle sollen einige mathematische Begriffe vorgestellt werden, die in der Ingenieur-Literatur in jüngster Zeit im Zusammenhang mit Rotationen häufig auftauchen. Mathematisch ausgedrückt, ist eine Rotation eine lineare Abbildung:

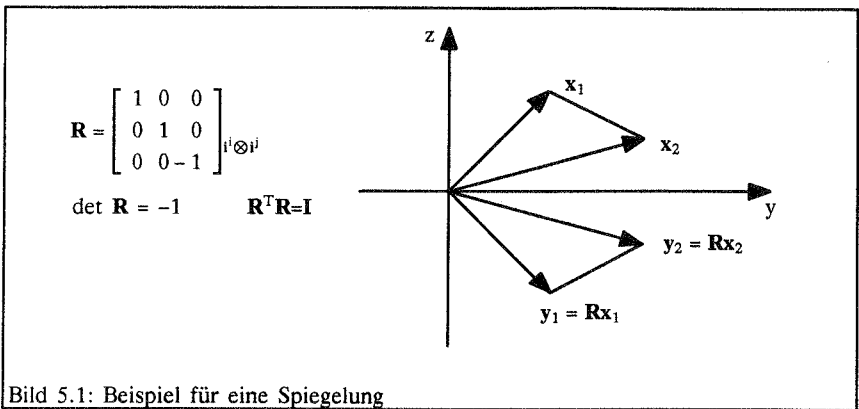
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{R}\mathbf{x}, \quad \mathbf{R} \in \text{SO}(3) \subset \mathbb{R}^{3 \times 3} \tag{5.3}$$

mit:

$$\text{SO}(3) = \{ \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}, \det \mathbf{R} = 1 \} \tag{5.4}$$



Die Bedingung $\det \mathbf{R} = 1$ schließt Spiegelungen aus, die für einen Körper eine nicht zulässige Selbstdurchdringung bedeuten.



Mit dem aus der Matrizenrechnung bekannten Produkt (einstufig verjüngende Multiplikation der Tensorrechnung) als Verknüpfung bildet die Menge $SO(3)$ eine nichtkommutative (nicht abelsche) Gruppe (s. Anhang Abschnitt 9.2).

Infinitesimal kleine Rotationen $\mathbf{I} + \hat{\mathbf{s}}$ lassen sich durch einen schiefsymmetrischen Tensor $\hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ darstellen, dessen Anwendung auf einen Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ wie ein Kreuzprodukt des axialen Vektors \mathbf{s} von $\hat{\mathbf{s}}$ mit \mathbf{a} wirkt. In orthogonaler kartesischer Basis und in Matrixschreibweise gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= s_i \mathbf{i}^i & \hat{\mathbf{s}} &= \hat{s}_{ij} \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{j}^j = (\mathbf{s} \times) \\ \left[\hat{s}_{ij} \right]_{\mathbf{i}^i \otimes \mathbf{j}^j} &= \begin{bmatrix} s_1 & & \\ s_2 & -s_3 & s_2 \\ s_3 & s_3 & -s_1 \end{bmatrix} \mathbf{i}^i \otimes \mathbf{j}^j & (5.5) \\ \hat{\mathbf{s}} \mathbf{a} &= \mathbf{s} \times \mathbf{a} \end{aligned}$$

Die schiefsymmetrischen Matrizen sind Elemente der Menge:

$$\mathfrak{so}(3) = \{ \hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \hat{\mathbf{s}}^T + \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \} \quad (5.6)$$

$\mathfrak{so}(3)$ bildet mit der üblichen Addition $+$ eine Abelsche Gruppe. Zulässige Variationen von \mathbf{R} sind Elemente des Tangentenraums $T_{\mathbf{R}}SO(3) = \{ \hat{\mathbf{s}} \mathbf{R} \mid \hat{\mathbf{s}} \in \mathfrak{so}(3) \}$ an $SO(3)$ an der Stelle \mathbf{R} .

Im folgenden werden einige der vielen Möglichkeiten diskutiert, mit 3 unabhängigen Parametern eine endlichen Rotation zu beschreiben. Die meisten von ihnen basieren auf einer Folge von Elementarrotationen oder auf einer Rotation um eine Achse, die durch einen Rotationsvektor bestimmt wird.

5.1.2 Formulierungen basierend auf einem Rotationsvektor

Rotationsvektoren sind stark verwandt mit den Euler-Parametern und den Quaternionen. Beide Formulierungen benutzen vier Parameter, die natürlich einer Zwangsbedingung unterliegen, um endliche Rotationen zu beschreiben. Euler-Parameter gehen von dem Gedanken aus, daß jede Rotation durch eine Achse und einen Drehwinkel ϕ erfaßbar ist. Ein Vektor \mathbf{e} parallel zu dieser Achse ändert sich während der Drehung nicht und ist daher ein Eigenvektor von \mathbf{R} mit dem Eigenwert $\lambda = 1$.

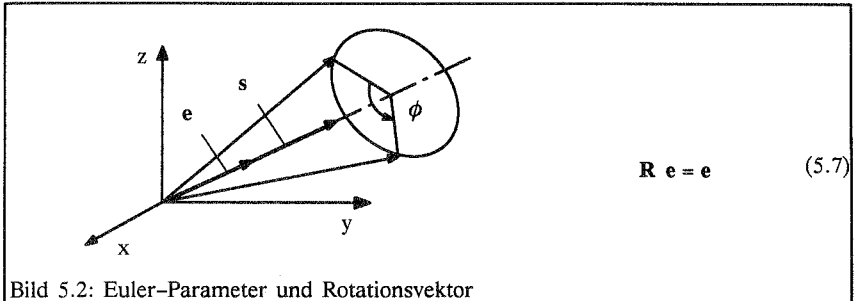


Bild 5.2: Euler-Parameter und Rotationsvektor

Die drei Komponenten des Vektors \mathbf{e} und der Winkel ϕ definieren die Euler-Parameter. Die zusätzliche Zwangsbedingung lautet:

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} = 1 \quad (5.8)$$

Durch diese Parameter kann der Rotationstensor \mathbf{R} eindeutig und ohne Singularitäten bestimmt werden:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi \hat{\mathbf{e}} + (1 - \cos \phi) \hat{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{e}} \quad (5.9)$$

Wird in einer numerischen Analyse die Zwangsbedingung (5.8) benutzt, um beispielsweise $e_3 = \sqrt{1 - e_1^2 - e_2^2}$ zu eliminieren, so daß ϕ , e_1 , e_2 als primäre Variablen übrigbleiben, können bei der Berechnung des Wurzelausdrucks numerische Instabilitäten auftreten.

Die vier Quaternionenparameter q_0 , \mathbf{q} sind nahe verwandt zu den Euler-Parametern:

$$q_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad \mathbf{q} = \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \quad (5.10)$$

Sie führen direkt auf den Rotationstensor \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + 2q_0 \hat{\mathbf{q}} + 2 \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}} \quad (5.11)$$

Z. B. können in einer finite Elementberechnung die Komponenten von \mathbf{q} als primäre Variablen verwendet werden. q_0 wird dann durch die Zwangsbedingung:

$$q_0 = \sqrt{1 - \mathbf{q}^T \mathbf{q}} \quad (5.12)$$

bestimmt. Auch hier können numerische Schwierigkeiten auftreten.

Im Gegensatz zu den Euler-Parametern und den Quaternionen benutzen die Rotationsvektoren \mathbf{s} nur drei Parameter, und zwar ihre Komponenten. Die folgenden Alternativen unterscheiden sich nur in der Länge von \mathbf{s} [71]:

$$1. \quad \mathbf{s} = 2 \tan \frac{\phi}{2} \mathbf{e} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{1}{1 + \mathbf{s}^T \mathbf{s}} (\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}}) \quad (5.13)$$

$$2. \quad \mathbf{s} = \tan \frac{\phi}{2} \mathbf{e} = \frac{\mathbf{q}}{q_0} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{2}{1 + \mathbf{s}^T \mathbf{s}} (\hat{\mathbf{s}} + \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}}) \quad (5.14)$$

$$3. \quad \mathbf{s} = \sin \phi \mathbf{e} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} + \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}} \quad (5.15)$$

$$4. \quad \mathbf{s} = \phi \mathbf{e} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R} = \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}} = \exp(\hat{\mathbf{s}}) \quad (5.16)$$

Jeder dieser Fälle hat mehr oder weniger bedeutende Vor- und Nachteile. Beispielsweise führen die Fälle 1 und 2 zu einfachen Formeln für den Rotationsvektor, der die endgültige Rotation infolge zweier aufeinander folgender Rotationen beschreibt. Von Nachteil erweist sich aber die unendliche Länge des Rotationsvektors an den Stellen $\phi = (2k - 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. An dieser Stelle wird auch der dritte Term des Rotationstensors in (5.15) numerisch instabil. Der Fall 4 ist der einzige ohne Singularitäten für $\phi \in [0, 2\pi[$, weil:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{\phi} = 1 \quad ; \quad \lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} = \frac{1}{2} \quad (5.17)$$

5.1.3 Berechnung zweier aufeinander folgender Rotationen

Der Rotationstensor, der aus zwei aufeinander folgenden Rotationen resultiert, kann aus dem Produkt zweier Rotationstensen berechnet werden:

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \quad (5.18)$$

Diese Operation ist nicht kommutativ:

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \quad (5.19)$$

Daher kann auch eine einfache Addition der Rotationsvektoren, die zu \mathbf{R}_1 und \mathbf{R}_2 gehören, nicht den Rotationsvektor von \mathbf{R}_3 ergeben, was auch das hinlänglich bekannte Würfelexperiment beweist [7]:

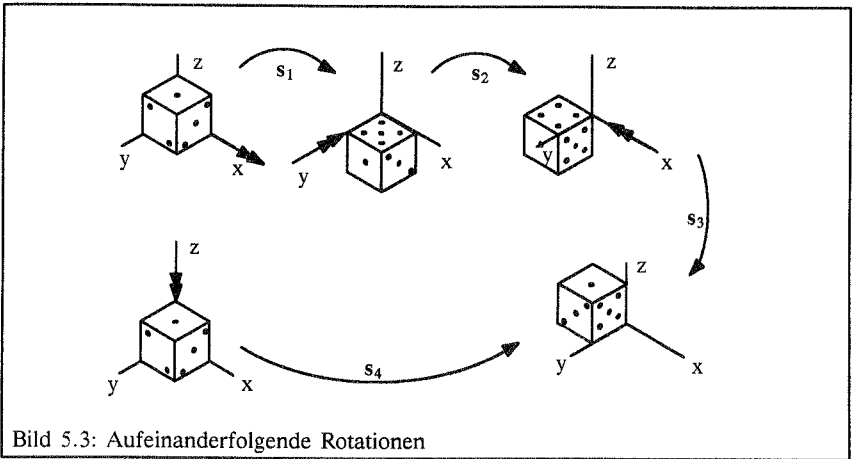


Bild 5.3: Aufeinanderfolgende Rotationen

$$s_1 = \begin{bmatrix} +\frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{|i}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\pi}{2} \\ 0 \end{bmatrix}_{|i}, \quad s_3 = \begin{bmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{|i}, \quad s_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\pi}{2} \end{bmatrix}_{|i}$$

$$s_4 \neq s_1 + s_2 + s_3$$

Aktualisierungsformeln ("update"-Formeln) für Rotationsvektoren können über ihre Verwandtschaft zu den Quaternionenparametern gefunden werden. Für Quaternionen gilt [41]:

$$q_{03} = q_{02}q_{01} - \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2 \quad (5.20)$$

$$\mathbf{q}_3 = q_{01}\mathbf{q}_2 + q_{02}\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_1 \times \mathbf{q}_2$$

Daraus folgt für die Euler-Parameter:

$$\begin{aligned} \phi_3 &= 2 \arccos q_{03} & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{q}_3}{\sin \frac{\phi_3}{2}} \\ \left(\begin{aligned} \phi_3 &= 2 \arcsin \sqrt{\mathbf{q}_3^T \mathbf{q}_3} & \text{falls } |q_{03}| > 0.984 \ (\phi < 20^\circ), \\ & \text{führt diese Formel auf genauere Ergebnisse} \end{aligned} \right) \quad (5.21) \end{aligned}$$

mit:

$$q_{03} = \cos \frac{\phi_3}{2} = \cos \frac{\phi_2}{2} \cos \frac{\phi_1}{2} - \sin \frac{\phi_1}{2} \sin \frac{\phi_2}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{q}_3 = \sin \frac{\phi_3}{2} \mathbf{e}_3 = \cos \frac{\phi_1}{2} \sin \frac{\phi_2}{2} \mathbf{e}_2 + \cos \frac{\phi_2}{2} \sin \frac{\phi_1}{2} \mathbf{e}_1 - \sin \frac{\phi_1}{2} \sin \frac{\phi_2}{2} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$$

Für den Rodrigues-Rotationsvektor $\mathbf{s} = \phi \mathbf{e}$ erhält man:

$$s_3 = \frac{\mathbf{q}_3}{\sqrt{\mathbf{q}_3^T \mathbf{q}_3}} \begin{cases} \text{entweder} & 2 \arccos \frac{q_{03}}{\sqrt{\mathbf{q}_3^T \mathbf{q}_3}} \\ \text{oder} & 2 \arcsin \sqrt{\mathbf{q}_3^T \mathbf{q}_3} \end{cases} \quad (5.22)$$

und für den Rotationsvektor $\mathbf{s} = 2 \tan \frac{\phi}{2} \mathbf{e}$ ergibt sich:

$$\mathbf{s}_3 = \frac{\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \frac{1}{2} \mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2}{1 - \frac{1}{4} \mathbf{s}_1^T \mathbf{s}_2} \quad (5.23)$$

Auf die Angabe der Formeln für andere Rotationsvektoren wird hier verzichtet.

5.2 Elementarrotationen

Eine andere Möglichkeit zur Beschreibung großer Rotationen bieten Kombinationen von Elementarrotationen. Die bekanntesten von ihnen sind die Euler- und die Cardan-Winkel [87]. Bevor auf diese eingegangen wird, sollen zunächst Rotationen um feste und um mitrotierende Achsen besprochen werden.

5.2.1 Rotation um feste und um mitrotierende Achsen

Es sei \mathbf{R}_1 die Rotation um die feste Achse parallel zu \mathbf{e}_1 mit dem Winkel ϕ_1 und \mathbf{R}_2 die Rotation um die feste Achse parallel zu \mathbf{e}_2 mit dem Winkel ϕ_2 . Die endgültige Rotation ist $\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$. Nun soll der Fall betrachtet werden, daß die zweite Achse sich mit \mathbf{R}_1 nach $\mathbf{e}_2^* = \mathbf{R}_1 \mathbf{e}_2$ gedreht hat. Die Gesamttrotation errechnet sich dann z.B. mit dem Rodrigues-Rotationsvektor zu:

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}_2^* = \mathbf{R}(\mathbf{s}_2^*) = \mathbf{R}(\mathbf{R}_1 \mathbf{s}_2) \quad (5.24)$$

Anmerkung: $\mathbf{R}(\mathbf{R}_1 \mathbf{s}_2)$ bedeutet, daß \mathbf{R} eine Funktion von $\mathbf{R}_1 \mathbf{s}_2$ ist.

Mit der Beziehung:

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}\mathbf{s}) = \mathbf{Q} \mathbf{R}(\mathbf{s}) \mathbf{Q}^T \quad ; \quad \mathbf{Q} \in \text{SO}(3) \quad (5.25)$$

die im Anhang, Abschnitt 9.3, bewiesen wird, kann man schreiben:

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \quad (5.26)$$

Gleichung (5.26) sagt aus, daß identische Resultate erhalten werden, gleichgültig ob zunächst mit ϕ_1 um die feste Achse parallel zu \mathbf{e}_1 gedreht wird und dann mit ϕ_2 um die mitrotierte Achse parallel zu $\mathbf{e}_2^* = \mathbf{R}_1 \mathbf{e}_2$ oder ob zuerst um die feste Achse parallel zu \mathbf{e}_2 mit ϕ_2 gedreht wird und dann mit ϕ_1 um die feste Achse parallel zu \mathbf{e}_1 .

Für die Gesamttrotation dreier aufeinander folgender Drehungen gilt dann:

$$\mathbf{R}_4 = \mathbf{R}_3^* \mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1 = (\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1) \mathbf{R}_3 (\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1)^T (\mathbf{R}_2^* \mathbf{R}_1) = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2) \mathbf{R}_1^T \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_3 \quad (5.27)$$

Der zweifache Stern steht dafür, daß die zugehörige Drehachse zunächst die Drehung \mathbf{R}_1 und dann die Drehung \mathbf{R}_2^* mitgemacht hat.

5.2.2 Formulierungen basierend auf Elementarrotationen

Als Elementarrotationen werden Rotationen um eine Achse des orthogonal kartesischen Koordinatensystems bezeichnet.

$$\mathbf{R}_x(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos a & -\sin a \\ 0 & \sin a & \cos a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

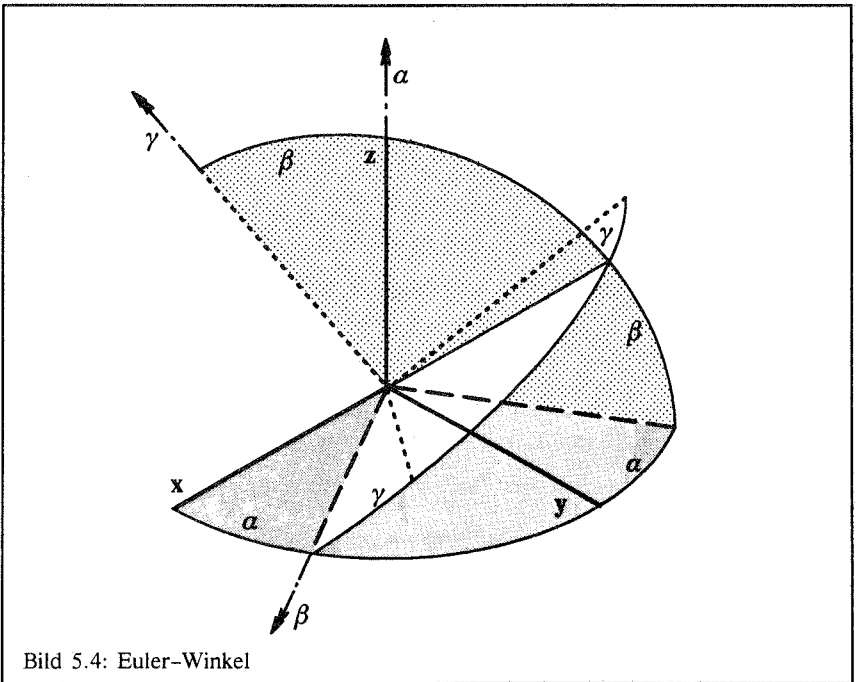
Mit ihnen errechnen sich die Euler-Winkel zu:

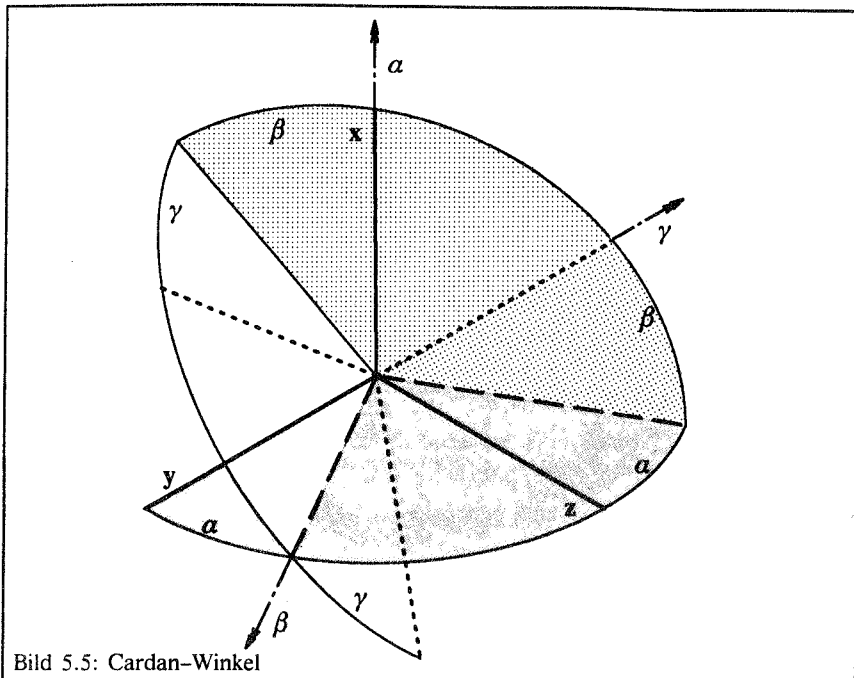
$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z(a) \mathbf{R}_x(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma) = \mathbf{R}_z^{**}(\gamma) \mathbf{R}_x^*(\beta) \mathbf{R}_z(a) \quad (5.29)$$

und die Cardan-Winkel zu:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_x(a) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\gamma) = \mathbf{R}_z^*(\gamma) \mathbf{R}_y^*(\beta) \mathbf{R}_x(a) \quad (5.30)$$

Bild 5.4 und Bild 5.5 enthalten die Deutung dieser Beziehungen als aufeinander folgende Rotationen um mitrotierende Achsen.

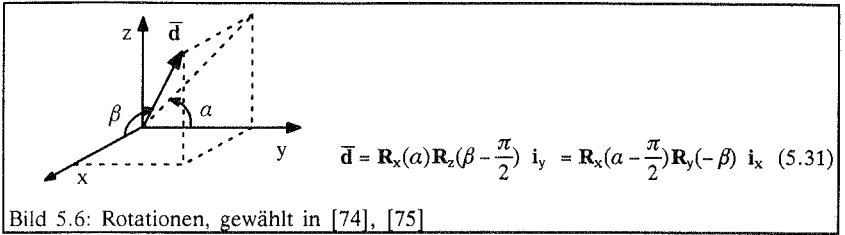




Unglücklicherweise sind diese Formulierungen nicht frei von Singularitäten. Die Eindeutigkeit der Euler-Winkel geht verloren für $\beta = (k - 1)\pi$ und die der Cardan-Winkel für $\beta = (2k - 1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. In diesen Fällen findet die erste und die dritte Rotation um dieselbe Achse statt. Daher gibt es unendlich viele Kombinationen für α und γ , die zum selben Rotationstensor \mathbf{R} führen.

5.3 Große Rotationen bei Schalen und Balken – Singularitäten

Die Betrachtungen in den vorausgegangenen Abschnitten zur Wahl geeigneter Rotationsparameter sind unabhängig von der Art des strukturmechanischen Problems angestellt worden. Sie sind gültig für dreidimensionale Balken und auch für Schalen mit drei Rotationsfreiheitsgraden. Der häufig vorkommende Sonderfall, daß bei Schalen die Rotation um die Schalennormale nicht berücksichtigt wird, ist enthalten. Für ihn sind nur noch zwei unabhängige Rotationsparameter nötig. Für Rotationsvektoren folgt daraus, daß sie keine Komponente mehr in Richtung des Schalendirektors \mathbf{d} besitzen. Verwendet man Elementarrotationen zur Beschreibung der Rotation des Schalendirektors, so benötigt man nur zwei von ihnen. Ramm benutzt in [74], [75] die beiden folgenden Winkel:



Mit diesen Winkeln kann die Lage des Schalendirektors $\bar{\mathbf{d}}$ bezüglich der Basisvektoren \mathbf{i}_y oder \mathbf{i}_x auf verschiedene Weise bestimmt werden. Eine Singularität tritt für $\beta = (k - 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ auf. Dort ist der Schalendirektor parallel zur x -Achse und der Winkel α nicht bestimmbar.

Werden Rotationsvektoren verwendet, haben Schalen mit nur 2 Rotationsfreiheitsgraden eine *Singularität*, wenn die Drehung zwischen dem Referenzvektor und der aktuellen Lage des Direktors $180^\circ + k \cdot 360^\circ$ beträgt, denn diese Bewegung ist z. B. für jeden orthogonal zu \mathbf{d} stehenden Rodrigues-Rotationsvektor der Länge π beschreibbar. Diese Mehrdeutigkeit verursacht in der Numerik singuläre oder bei Rotationen in der Nähe von $180^\circ + k \cdot 360^\circ$ schlecht konditionierte Gleichungssysteme. Abhilfe kann eine Änderung des Referenzvektors schaffen.

Zur Erläuterung soll der Einfachheit halber ein Funktional $\Pi(\bar{\mathbf{d}})$ betrachtet werden, das nur vom Direktor $\bar{\mathbf{d}}$ abhängt. Angenommen, zwischen $\bar{\mathbf{d}}$ und $\Pi(\bar{\mathbf{d}})$ aber auch zwischen $\bar{\mathbf{d}}$ und $\delta\Pi(\bar{\mathbf{d}})$ existiert eine eindeutige Beziehung:

$$\bar{\mathbf{d}} \rightarrow \Pi(\bar{\mathbf{d}}) \quad , \quad \bar{\mathbf{d}} \rightarrow \delta\Pi(\bar{\mathbf{d}}) \quad (\text{bijektiv}) \quad (5.32)$$

Mechanische Instabilitäten seien somit ausgeschlossen. Beispielsweise durch die Einführung des Rodrigues-Rotationsvektors

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{R}(\mathbf{s})\mathbf{d} \quad , \quad \mathbf{s} \rightarrow \Pi(\mathbf{R}(\mathbf{s})\mathbf{d}) \quad (5.33)$$

entsteht bezüglich \mathbf{s} eine Mehrdeutigkeit. Jeder senkrecht auf dem Direktor stehende Vektor \mathbf{s} der Länge π hat denselben Funktionswert Π und auch $\Pi_{,s}$ (s. Bild 5.7).

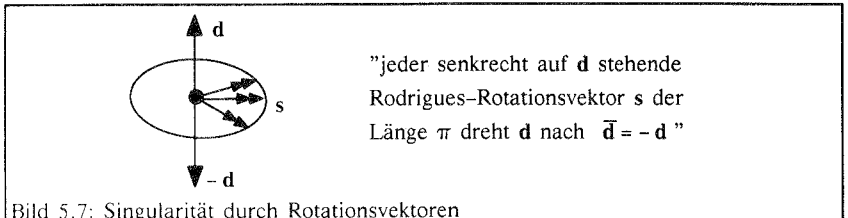
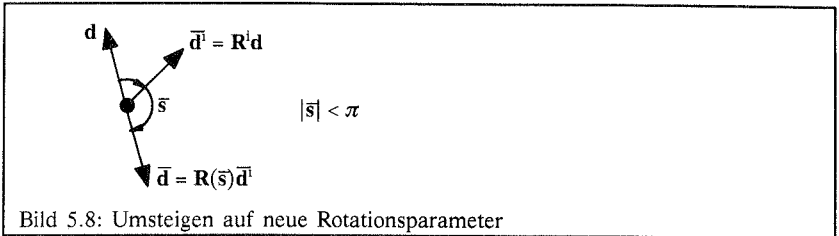


Bild 5.7: Singularität durch Rotationsvektoren

Die Tangentensteifigkeitsmatrix $\Pi(\mathbf{R}(s)\mathbf{d})_{,ss}$ wird folglich für diese Rotationsvektoren s singular. Die Singularität ist ausschließlich eine Folge der Parameterisierung und nicht des mechanischen Strukturverhaltens. Umgangen werden kann das Problem, wenn der Referenzvektor \mathbf{d} rechtzeitig aktualisiert wird, also das Ersatzproblem:

$$\Pi(\mathbf{R}(s)\mathbf{d}) = \tilde{\Pi}(\mathbf{R}(\bar{s})\mathbf{R}^t\mathbf{d}) = \tilde{\Pi}(\mathbf{R}(\bar{s})\bar{\mathbf{d}}^i) \quad (5.34)$$

gelöst wird (s. Bild 5.8).



In der nichtlinearen Rechnung könnte diese Aktualisierung des Referenzdirektors von Inkrement zu Inkrement erfolgen [26]. Damit wäre eine Rotation bis zu 180° von Gleichgewichtszustand zu Gleichgewichtszustand, also innerhalb eines Inkrementes, zulässig. Wird jedoch der "Direktor-Update" von Iterationsschritt zu Iterationsschritt vollzogen [92], [100], die Steifigkeitsmatrix im Schritt i , also stets an der Stelle $\bar{s} = \mathbf{0}$, aufgestellt, so kann diese Art der Singularität nie auftreten. Die Konsequenzen für das Newton-Verfahren erkennt man durch den Vergleich von Bild 5.9 und Bild 5.10.

$$\delta\Pi(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{d}}) = \delta\Pi(\mathbf{v}, \mathbf{R}(s)\mathbf{d}) = 0 = [\delta\mathbf{v}, \delta s] \begin{bmatrix} \Pi_{,v} \\ \Pi_{,s} \end{bmatrix}$$

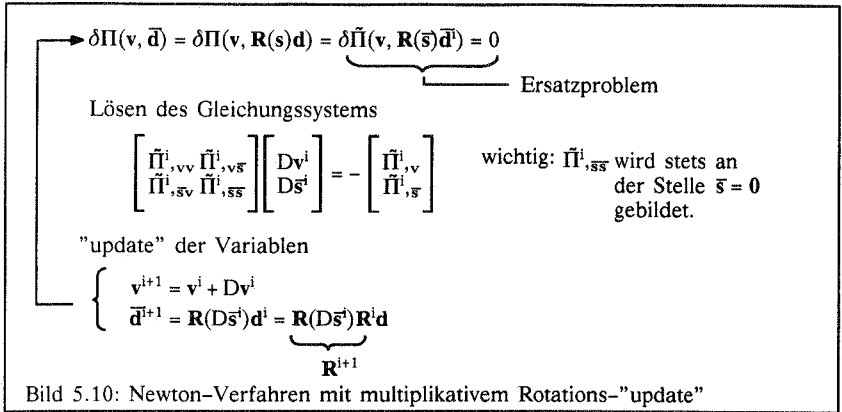
→ Lösen des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \Pi^i_{,vv} & \Pi^i_{,vs} \\ \Pi^i_{,sv} & \Pi^i_{,ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D\mathbf{v}^i \\ Ds^i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Pi^i_{,v} \\ \Pi^i_{,s} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Pi^i = \Pi(\mathbf{v}^i, \mathbf{R}(s^i)\mathbf{d}) = \tilde{\Pi}(\mathbf{v}^i, \bar{\mathbf{d}}^i)$$

"update" der Variablen

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{i+1} = \mathbf{v}^i + D\mathbf{v}^i \\ s^{i+1} = s^i + Ds^i \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mathbf{d}}^{i+1} = \mathbf{R}(s^i + Ds^i)\mathbf{d} \end{cases}$$

Bild 5.9: Newton-Verfahren mit additivem Rotations-"update"



Die in Bild 5.10 je Iterationsschritt nötige Aktualisierung des Direktors $\bar{\mathbf{d}}^{i+1} = \mathbf{R}(D\bar{\mathbf{s}})\bar{\mathbf{d}}^i$ oder äquivalent des Rotationstensors:

$$\bar{\mathbf{d}}^{i+1} = \mathbf{R}(D\bar{\mathbf{s}})\bar{\mathbf{d}}^i = \mathbf{R}(D\bar{\mathbf{s}})\mathbf{R}^i\mathbf{d} = \mathbf{R}^{i+1}\mathbf{d}$$

geschieht multiplikativ im Gegensatz zum additiven "update" des Rotationsvektors \mathbf{s} , bei dem nicht mit Ersatzproblemen gearbeitet wird.

Das Problem der Singularitäten durch die Parameterisierung tritt analog auch auf bei Strukturen mit 3 Rotationsparametern, und zwar für Drehungen von $360^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

In Schalen- oder Balkenelementen, in denen der Rotationsvektor \mathbf{s} kontinuierlich interpoliert wird, wirken sich diese Schwierigkeiten nicht so drastisch aus wie bei degenerierten Elementen, die die Direktoren interpolieren.

In dem folgenden Abschnitt werden die Konsequenzen der permanenten Aktualisierung der Referenzgrößen mittels eines multiplikativen "updates" auf die Tangentenmatrix besprochen.

5.4 Behandlung endlicher Rotationen im Newton-Verfahren

5.4.1 Allgemeine Bemerkungen

Die unterschiedlichen Möglichkeiten zur Beschreibung großer Rotationen werfen die Frage nach der für die Numerik geeignetsten Formulierung auf. Die Antwort wird nicht für alle Fälle dieselbe sein, da sie von der Klasse der Problemstellungen abhängt. Eine Formulierung kann als geeignet bezeichnet werden, wenn sie numerisch stabil und effizient arbeitet. Beispielsweise kann der Rotationsvektor $\mathbf{s} = 2 \tan \phi/2 \mathbf{e}$ der Gleichung (5.13) für 3-dimensionale Balken, deren Drehungen auf $|\phi| < 180^\circ$ beschränkt sind, vor-

teilhaft eingesetzt werden. Drehungen darüber hinaus, die jedoch kleiner als 360° sind, werden mit dem Rotationsvektor $\mathbf{s} = \phi \mathbf{e}$ (s. (5.16)) singularitätenfrei erfaßt. Rotationen über 360° kommen in der Statik im Gegensatz zur Dynamik selten vor. Wenn nun Probleme mit beliebig großen Rotationen vorliegen, sollen natürlich zu den mechanischen Instabilitäten nicht noch numerische eingeführt werden. In der nichtlinearen Analyse ist es möglich, die Bezugsconfiguration, wie im vorausgegangenen Abschnitt beschrieben, permanent je Iterationsschritt zu aktualisieren. Das hat den Vorteil, daß auch im Inkrement, also zwischen den Gleichgewichtszuständen, die Drehungen nicht beschränkt werden müssen. Der Algorithmus von Simo/Vu Quoc [92] – sie benutzen den Rotationstensor selbst als unbekannte Größe – kann als eine solche Vorgehensweise gedeutet werden. Sie leiten selbst bei Potentialproblemen eine unsymmetrische Tangentenmatrix (2. Gâteaux–Ableitung) her. In [98] zeigt Simo, daß die symmetrisierte Tangentenmatrix mit der Hesse–Matrix des Potentials unter Berücksichtigung einer Riemannschen Metrik identisch ist. In Abschnitt 5.4.3 wird eine andere Herleitung vorgestellt, mit der man zu denselben Algorithmen mit symmetrischer und unsymmetrischer Tangentenmatrix gelangt.

5.4.2 Herleitung eines numerisch stabilen Algorithmus nach Simo & Vu Quoc [92]

Zur Vereinfachung soll von einem Potential:

$$\Pi(\mathbf{R}) = \int_{\mathbf{B}} \pi(\mathbf{R}) d\mathbf{B}$$

ausgegangen werden, das nur vom Rotationstensor \mathbf{R} abhängt.

Eine willkürliche Variation von \mathbf{R} ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\epsilon} \mathbf{R}_\epsilon|_{\epsilon=0} &= \mathbf{S}^* \mathbf{R} \quad \text{mit } \mathbf{S}^* \mathbf{R} \in T_{\mathbf{R}}\text{SO}(3) \\ &\text{und } \mathbf{R}_\epsilon = \exp(\epsilon \mathbf{S}^*) \mathbf{R} \in \text{SO}(3) \\ \mathbf{S}^* &= \hat{\mathbf{s}}^* = (\mathbf{s}^* \times) \in \text{so}(3) \end{aligned} \quad (5.35)$$

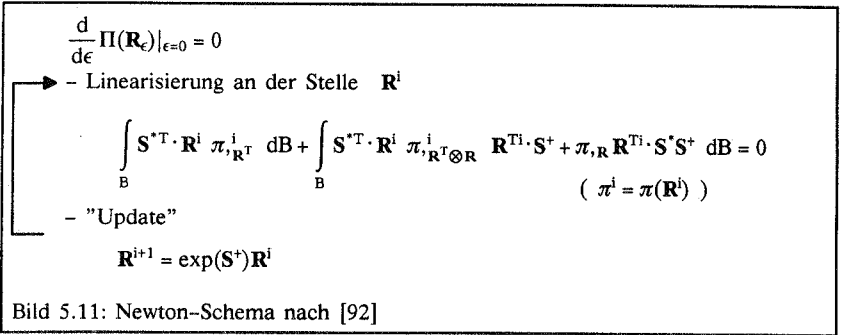
Statt der exponentiellen Darstellung $\exp(\epsilon \mathbf{S}^*)$, äquivalent mit der Rodrigues–Formel (5.16), wäre auch eine andere Beziehung, z.B. (5.13) zulässig. $\Pi(\mathbf{R})$ wird stationär, wenn die erste Gâteaux–Ableitung (1. Variation) verschwindet.

$$\frac{d}{d\epsilon} \left[\int_{\mathbf{B}} \pi(\mathbf{R}_\epsilon) d\mathbf{B} \right]_{\epsilon=0} = \int_{\mathbf{B}} \pi_{,\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{R} d\mathbf{B} = \int_{\mathbf{B}} \pi_{,\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S}^* d\mathbf{B} = 0 \quad (5.36)$$

Für das Newton–Iterationsverfahren wird die 2. Gâteaux–Ableitung verwendet:

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} (\pi_{,R}(\mathbf{R}_\epsilon) \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{R}_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} = (\pi_{,R \otimes R} \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{R}) \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{R} + \pi_{,R} \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{S}^* \mathbf{R} \\ = \mathbf{S}^{*T} \cdot \mathbf{R} \pi_{,R^T \otimes R} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S}^* + \pi_{,R} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{S}^* \quad (5.37)$$

Sie ist wegen $\mathbf{S}^* \mathbf{S}^* \neq \mathbf{S}^* \mathbf{S}^*$ unsymmetrisch bezüglich \mathbf{S}^* und \mathbf{S}^* . Im Gleichgewichtszustand verschwindet die Unsymmetrie wegen (5.36). \mathbf{S}^* bezeichnet die Lösung des linearisierten Gleichungssystems im Newton-Algorithmus. Mit der zur $SO(3)$ -Gruppe gehörenden multiplikativen Verknüpfung ergibt sich folgendes Iterationsschema:



Anmerkung: Daß das Inkrement \mathbf{S}^* sich ständig ändert, ist selbstverständlich, weshalb auf einen Index zu Kennzeichnung verzichtet wird.

Dem gravierenden Nachteil einer unsymmetrischen Matrix bei Potentialproblemen begegnen Simo und Vu Quoc [92] durch Symmetrisierung des Tangentenoperators (5.37), wobei, wie numerische Beispiele zeigen, die für das Newton-Verfahren typische quadratische Konvergenz nicht verloren geht.

$$\text{sym} \left[\left. \frac{d}{d\epsilon} (\pi_{,R}(\mathbf{R}_\epsilon) \cdot \mathbf{S}^* \mathbf{R}_\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \right] = \mathbf{S}^{*T} \cdot \mathbf{R} \pi_{,R^T \otimes R} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S}^* + \pi_{,R} \mathbf{R}^T \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{S}^* \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^* \mathbf{S}^*) \quad (5.38)$$

Auf die Unsymmetrie und die Symmetrisierung der zweiten Gâteaux-Ableitung geht Simo in [98] näher ein.

Die Aussagen seiner Arbeit sind:

In gekrümmten Räumen (z. B. $SO(3)$) im Gegensatz zu flachen Räumen (z.B. \mathbf{R}^3) ist die zweite Gâteaux-Ableitung einer skalaren Funktion (Π) im allgemeinen nicht symmetrisch.

Zur Bildung der symmetrischen Hesse-Matrix von Π bedarf es der Einführung einer Metrik. Mit der Wahl einer geeigneten bi-invarianten Metrik ist die Hesse-Matrix identisch mit der symmetrisierten zweiten Gâteaux-Ableitung.

5.4.3 Herleitung desselben Algorithmus auf anderem Weg

Der übersichtlicheren Schreibweise wegen wird wieder angenommen, daß das Potential $\Pi(\mathbf{R}(\mathbf{s}))$ nur von Rotationen abhängt; in diesem Fall allerdings explizit von einem Rotationsvektor \mathbf{s} aus dem euklidischen Raum \mathbf{R}^3 , z. B. dem Rodrigues–Rotationsvektor (5.16). Somit ist klar, daß die zweite Richtungsableitung symmetrisch sein muß. Es sollen folgende Abkürzungen für die Richtungsableitungen benutzt werden:

$$\delta f = \left. \frac{d}{d\epsilon} f(\mathbf{s} + \epsilon \mathbf{s}^*) \right|_{\epsilon=0} \quad ; \quad Df = \left. \frac{d}{d\epsilon} f(\mathbf{s} + \epsilon \mathbf{s}^*) \right|_{\epsilon=0} \quad (5.39)$$

Damit gilt:

$$\delta \mathbf{s} = \mathbf{s}^* \quad , \quad D\mathbf{s} = \mathbf{s}^* \quad (5.40)$$

Das Potential wird stationär, wenn:

$$\delta \Pi = \int_B \delta \pi \, dB = \int_B \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R} \, dB = \int_B \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*) \mathbf{R} \, dB = 0 \quad (5.41)$$

Hierin ist $\boldsymbol{\Omega}$ ein schiefsymmetrischer Tensor:

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I} \rightarrow \delta \mathbf{R}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\delta \mathbf{R}^T = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\Omega}^T = \mathbf{O} \rightarrow \delta \mathbf{R} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*) \mathbf{R} \quad (5.42)$$

Den axialen Vektor $\boldsymbol{\omega}$ von $\boldsymbol{\Omega}$ erhält man über:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*) = \hat{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{\omega} \times) \quad ; \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}(\mathbf{s}) \mathbf{s}^* \quad (5.43)$$

Für die Rodrigues Formel (5.16) folgt (s. Anhang, Abschnitt 9.4):

$$\mathbf{T}(\mathbf{s}) = \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{1}{\phi^2} - \frac{\sin \phi}{\phi^3} \right) \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \quad (5.44)$$

Für den Tangentensteifigkeitsoperator muß (5.41) bezüglich \mathbf{s} linearisiert werden.

$$D\delta \Pi = \int_B D\delta \pi \, dB = \int_B [\delta \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\pi}_{,\mathbf{R} \otimes \mathbf{R}} \cdot D\mathbf{R} + \boldsymbol{\pi}_{,\mathbf{R}} \cdot D\delta \mathbf{R}] \, dB \quad (5.45)$$

Der Ausdruck $D\delta \mathbf{R}$ errechnet sich zu:

$$D\delta \mathbf{R} = (D\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*) \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*)) \mathbf{R}(\mathbf{s}) \quad (5.46)$$

Wegen $D\boldsymbol{\omega} = D\mathbf{T}(\mathbf{s}) \mathbf{s}^*$, wird für die Richtungsableitung $D\boldsymbol{\Omega} = D\hat{\boldsymbol{\omega}}$ die sehr aufwendige Ableitung $D\mathbf{T}$ benötigt:

$$\begin{aligned}
DT = & \left(\frac{\phi \cos \phi - \sin \phi}{\phi^3} \mathbf{I} + \frac{-2 + \phi \sin \phi + 2 \cos \phi}{\phi^4} \hat{\mathbf{s}} \right. \\
& \left. + \frac{(-2 - \cos \phi) \phi + 3 \sin \phi}{\phi^5} \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \right) \mathbf{s}^T \mathbf{s}^+ \\
& + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\mathbf{s}}^+ + \left(\frac{1}{\phi^2} - \frac{\sin \phi}{\phi^3} \right) (\mathbf{s}^+ \otimes \mathbf{s} + \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}^+) \quad (5.47)
\end{aligned}$$

Nach einigem Umordnen und unter Verwendung von (5.42) und (5.46) ergibt sich die zweite Richtungsableitung zu:

$$D\delta\Pi = \int_B [\boldsymbol{\Omega}^{*T} \cdot \mathbf{R}\boldsymbol{\pi}_{\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R}} \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}^+ + \boldsymbol{\pi}_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \cdot (D\boldsymbol{\Omega}^* + \boldsymbol{\Omega}^* \boldsymbol{\Omega}^+)] d\mathbf{B} \quad (5.48)$$

$$\text{mit: } \boldsymbol{\Omega}^* = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^*) \quad ; \quad \boldsymbol{\Omega}^+ = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{s}^+)$$

Diese Gleichungen benötigt man für das übliche Newton-Schema mit dem additiven "update" der Unbekannten aus dem euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . Die Ausdrücke für $\boldsymbol{\Omega}$ und $D\boldsymbol{\Omega}$ vereinfachen sich an der Stelle $\mathbf{s}=\mathbf{0}$ deutlich, weil $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$ und $D\mathbf{T}(\mathbf{0}) = 1/2 \hat{\mathbf{s}}^+$ (s. Anhang 9.4):

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{0}, \mathbf{s}^+) = \mathbf{s}^+ \quad , \quad D\boldsymbol{\omega}(\mathbf{0}, \mathbf{s}^+) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{s}}^+ \mathbf{s}^+ = \frac{1}{2} \mathbf{S}^+ \mathbf{s}^+ \quad (5.49)$$

Dann ist $D\delta\mathbf{R}$:

$$D\delta\mathbf{R}|_{\mathbf{s}=\mathbf{0}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{s}}^+ \mathbf{s}^+) + \mathbf{s}^+ \hat{\mathbf{s}}^+ = \frac{1}{2} \left(\hat{\mathbf{s}}^+ \mathbf{s}^+ + \mathbf{s}^+ \hat{\mathbf{s}}^+ \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^+ \mathbf{S}^+ + \mathbf{S}^* \mathbf{S}^+) \quad (5.50)$$

Um von dieser Vereinfachung zu profitieren, aber insbesondere um zu einem numerisch stabilen Algorithmus zu gelangen, wird das Newton-Verfahren leicht modifiziert, indem die additive Aktualisierung der Unbekannten $\mathbf{s}^{i+1} = \mathbf{s}^i + \mathbf{s}^+$ ersetzt wird durch eine andere Vorschrift $\mathbf{s}^{i+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}^i, \mathbf{s}^+)$, z. B. Gleichung (5.22), die ihrerseits mit dem multiplikativen "Update" $\mathbf{R}(\mathbf{s}^{i+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{s}^i)\mathbf{R}(\mathbf{s}^+)$ identisch ist. Die Linearisierung der Gleichung $\delta\Pi(\mathbf{R}(\mathbf{s})) = \delta\tilde{\Pi}(\mathbf{R}(\bar{\mathbf{s}})\mathbf{R}(\mathbf{s}^i)) = 0$ im i -ten Iterationsschritt erfolgt nun für $\bar{\mathbf{s}}$ an der Stelle $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$. So entsteht mit:

$$\delta(\mathbf{R}(\bar{\mathbf{s}})\mathbf{R}^i) = \delta\mathbf{R}(\bar{\mathbf{s}})\mathbf{R}^i \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \\ = \mathbf{S}^* \mathbf{R}^i \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$D\delta(\mathbf{R}(\bar{\mathbf{s}})\mathbf{R}^i) = D\delta\mathbf{R}(\bar{\mathbf{s}})\mathbf{R}^i \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{0} \\ = \frac{1}{2} (\mathbf{S}^* \mathbf{S}^+ + \mathbf{S}^* \mathbf{S}^*) \mathbf{R}^i \end{aligned} \quad (5.52)$$

folgender Algorithmus:

$\rightarrow \delta\Pi(\mathbf{R}(s)) = \delta\tilde{\Pi}(\mathbf{R}(\bar{s})\mathbf{R}(s^i)) = 0$

- Linearisierung an der Stelle: $\bar{s} = \mathbf{0}$

$$\int_B \mathbf{S}^{*T} \cdot \mathbf{R}^i \tilde{\pi}_{\mathbf{R}^T}^i dB + \int_B \underbrace{\mathbf{S}^{*T} \cdot \mathbf{R}^i \tilde{\pi}_{\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R}}^i \mathbf{R}^{Ti} \cdot \mathbf{S}^* + \tilde{\pi}_{\mathbf{R}}^i \mathbf{R}^{Ti}}_{\text{symmetrisch}} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{S}^* \mathbf{S}^* + \mathbf{S}^* \mathbf{S}^*) dB = 0$$

- Update

$$\mathbf{R}(s^{i+1}) = \mathbf{R}(s^i)\mathbf{R}(s^i)$$

Der auf diese Weise erhaltene Tangentenoperator ist symmetrisch und identisch mit dem symmetrisierten von Simo und Vu Quoc [92]. Bei allen bisher durchgeführten numerischen Beispielen konnte trotz des modifizierten "updates" im Newton-Verfahren quadratische Konvergenz in der Nähe des Lösungspunkts festgestellt werden.

Die unsymmetrische Tangente des Abschnitts 5.4.2 kann durch folgende Betrachtung erhalten werden:

$$\delta\Pi = \int_B \pi_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}^* dB = \int_B \hat{\mathbf{m}} \cdot \boldsymbol{\Omega}^* dB = \int_B 2\mathbf{m}^T \boldsymbol{\omega}^* dB = 0 \quad (5.53)$$

mit:

$$\hat{\mathbf{m}} = \text{skew}(\pi_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T) \quad (5.54)$$

denn der symmetrische Teil von $\pi_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$ liefert bei der totalen Überschiebung keinen Beitrag. Mit Gleichung (5.43) und der Annahme, daß \mathbf{T}^{-1} existiert, gilt:

$$\int_B \mathbf{m}^T \boldsymbol{\omega}^* dB = \int_B \mathbf{m}^T \mathbf{T} \mathbf{s}^* dB = 0 \rightarrow \mathbf{m}^T \mathbf{T} = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (5.55)$$

Für $\mathbf{m}=\mathbf{0}$ wird das Potential Π stationär. Daher kann:

$$\int_B 2\mathbf{m}^T \mathbf{s}^* dB = \int_B \pi_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S}^* dB = 0 \quad (5.56)$$

geschrieben und \mathbf{s}^* darin als Testfunktion betrachtet werden. Die Linearisierung dieser Gleichung führt auf:

$$\int_B D(\pi_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{S}^*) dB = \int_B [\mathbf{S}^{*T} \cdot \mathbf{R} \pi_{\mathbf{R}^T \otimes \mathbf{R}} \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\Omega}^* + \pi_{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T \cdot (\mathbf{S}^* \boldsymbol{\Omega}^*)] dB \quad (5.57)$$

Wird wie oben der multiplikative "update" der Rotationen angewandt, erhält man die unsymmetrische Tangente von Simo und Vu Quoc:

$$\int_B D(\tilde{\pi}^i_{,R} \mathbf{R}^{iT} \cdot \mathbf{S}^*) \, dB = \int_B [\mathbf{S}^{*T} \cdot \mathbf{R}^i \tilde{\pi}^i_{,R^T \otimes R} \mathbf{R}^{iT} \cdot \mathbf{S}^* + \tilde{\pi}^i_{,R} \mathbf{R}^{iT} \cdot (\mathbf{S}^* \mathbf{S}^*)] \, dB \quad (5.58)$$

Für Schalen, bei denen die Rotation um die Schalennormale nicht berücksichtigt wird, stimmen beide Formulierungen überein und besitzen eine symmetrische Tangente. Ausgehend vom Potential $\Pi(\mathbf{R}(\mathbf{s})\mathbf{d}) = \Pi(\bar{\mathbf{d}})$, lautet die Stationaritätsbedingung:

$$\delta\Pi = \int_B \pi_{, \bar{\mathbf{d}}} \delta \bar{\mathbf{d}} \, dB = \int_B (\pi_{, \bar{\mathbf{d}}} \otimes \mathbf{d}) \cdot \delta \mathbf{R} \, dB = \int_B (\pi_{, \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}) \cdot \boldsymbol{\Omega}^* \, dB = 0 \quad (5.59)$$

Dieselbe Argumentation wie bei den Gleichungen (5.53) bis (5.56) führt zu:

$$\int_B (\pi_{, \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}) \cdot \mathbf{S}^* \, dB = 0 \quad (5.60)$$

Diese Gleichung wird wiederum linearisiert:

$$\int_B D((\pi_{, \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}) \cdot \mathbf{S}^*) \, dB = \int_B [\mathbf{S}^{*T} \cdot (\bar{\mathbf{d}} \otimes \pi_{, \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}) \cdot \boldsymbol{\Omega}^* + (\pi_{, \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}) \cdot (\mathbf{S}^* \boldsymbol{\Omega}^*)] \, dB \quad (5.61)$$

Mit dem multiplikativen "update" der Rotationen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_B D((\tilde{\pi}^i_{, \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}) \cdot \mathbf{S}^*) \, dB &= \int_B [\mathbf{S}^{*T} \cdot (\bar{\mathbf{d}}^i \otimes \tilde{\pi}^i_{, \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}^i) \cdot \mathbf{S}^* + (\tilde{\pi}^i_{, \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}^i) \cdot (\mathbf{S}^* \mathbf{S}^*)] \, dB \\ &= \int_B [\mathbf{S}^{*T} \cdot (\bar{\mathbf{d}}^i \otimes \tilde{\pi}^i_{, \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\mathbf{d}}} \otimes \bar{\mathbf{d}}^i) \cdot \mathbf{S}^* + \tilde{\pi}^i_{, \bar{\mathbf{d}}} \mathbb{I} (\mathbf{S}^* \mathbf{S}^*) \bar{\mathbf{d}}^i] \, dB \end{aligned} \quad (5.62)$$

Wird die Beziehung:

$$\mathbf{S}^* \mathbf{S}^* = \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}}^T = \mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* - (\mathbf{s}^* \mathbf{s}^*) \mathbf{I} \quad (5.63)$$

benutzt und beachtet, daß der inkrementelle Rotationsvektor orthogonal zum aktuellen Schalendirektor liegt, $\mathbf{s}^* \bar{\mathbf{d}}^i = 0$, so ist:

$$\mathbf{S}^* \mathbf{S}^* \bar{\mathbf{d}}^i = (\mathbf{s}^* \otimes \mathbf{s}^* - (\mathbf{s}^* \mathbf{s}^*) \mathbf{I}) \bar{\mathbf{d}}^i = -(\mathbf{s}^* \mathbf{s}^*) \bar{\mathbf{d}}^i = -(\mathbf{s}^* \mathbf{s}^*) \bar{\mathbf{d}}^i \quad (5.64)$$

und Gleichung (5.62) wird symmetrisch bezüglich \mathbf{s}^* und \mathbf{s}^* .

6 Ein degeneriertes Schalenelement mit 2 oder 3 Rotationsfreiheitsgraden

In diesem Kapitel werden degenerierte Schalenelemente vorgestellt, die auf die Ergebnisse der Kapitel 3 bis 5 zurückgreifen. Numerische Beispiele mit ihnen unterstreichen die dort getroffenen Aussagen. Die Elemente basieren auf den Green-Lagrange-Verzerrungen $\hat{\mathbf{E}}_{C+L}$ und berücksichtigen die Annahmen A1 bis A4 (s. Abschnitt 3.7.1). In Kapitel 4 erhielt dieser Elementtyp die Kennzeichnung E-w-e. Das Schalenelement verwendet eine isoparametrische Interpolation mit Lagrange- bzw. Serendipity-Formfunktionen für 3,6,8,9,10 oder 16 Knoten. Im Vordergrund dieses Kapitels sollen nicht diverse Elementformulierungen, also z. B. gemischt/hybride-, "assumed strain"- oder Weggrößenmodelle stehen. Um jedoch die bei Weggrößenmodellen auftretenden "locking"-Phänomene zu umgehen, werden die Elementeigenschaften des 4-knotigen, isoparametrischen Schalenelements mit der "assumed strain"-Methode nach Dvorkin und Bathe [14] verbessert. Das 9-knotige Element verwendet die Verzerrungsansätze von Pinsky und Jang [73]. Die hier vorgestellten Elemente zeichnen sich durch eine singularitätenfreie Beschreibung großer Rotationen durch multiplikativen Rotations-"update" aus (s. Abschnitt 5.4).

Ein Ziel des Kapitels ist, einige Möglichkeiten zur Berechnung von Schalen mit Knicken aufzuzeigen. Knicke in der Schalengeometrie treten z. B. bei Faltenwerken, aber auch bei Schalenverzweigungen auf. Natürlich ist der komplexe Spannungszustand in einem Knick nur mit finiten 3-D Kontinuums-elementen zu berechnen, nicht aber mit Schalenelementen. Um jedoch das globale Tragverhalten der Schale richtig zu erfassen, bedarf es an Knickstellen besonderer Überlegungen.

Eine Schalenformulierung, in der im Ausgangszustand die Direktoren nicht senkrecht zur Schalenmittelfläche stehen müssen, kann an den Knickstellen einen gemeinsamen Direktor verwenden, zu dessen Lageänderung zwei Rotationsparameter ausreichen [3],[75],[108],[37].

Sobald jedoch nicht mit einem Direktor am Knick gearbeitet wird, wäre ein Schalenelement mit 3 Rotationsfreiheitsgraden je Knoten wünschenswert, die auf das globale Koordinatensystem bezogen sind, weil eine Modellierung von Knicken oder ein Anschluß von Balkenelementen an die Schale dann trivial ist. Da aber üblicherweise für Schalen die Drehung um den Schalendirektor nicht berücksichtigt wird, ist an Stellen ohne Knick oder Balkenanschluß ein Drehfreiheitsgrad überzählig. Dieser Freiheitsgrad kann dann, nachdem er in einem lokalen Koordinatensystem identifiziert worden ist, genauso wie z.B. Freiheitsgrade an Auflagern unterdrückt werden [46], [67], [37].

Eine andere Möglichkeit besteht darin, diesen Freiheitsgraden künstliche "Steifigkeiten" zuzuordnen [13], [114], [56]. Sie soll jedoch bei nichtlinearen Berechnungen für große Rotationen innerhalb eines Inkrementes unzulässig sein [56] und erscheint mechanisch nicht fundiert.

Deshalb wird in diesem Kapitel, neben den erstgenannten Varianten zur Berechnung von Schalen mit Knicken, noch eine weitere untersucht. Wie in der Schalentheorie mit Ingenieurverzerrungen [85] (s. a. Abschnitt 3.7.2) wird die Symmetriebedingung der polaren Zerlegung der Membranverzerrungen, hier jedoch je Knoten, über eine Penalty-Methode berücksichtigt.

6.1 Grundgleichungen des Elementes

6.1.1 Verzerrungsgleichungen

Es wird der in Abschnitt 4.7 vorgeschlagene Weg beschritten, auch für degenerierte Schalenelemente von den Verzerrungsgleichungen der Schalentheorie auszugehen (s.a. [94]–[97], [67]). Für kleine Verzerrungen lauten die Beziehungen (s. Abschnitt 3.7.1.3) in Komponentenform bezüglich der normierten, krummlinigen konvektiven Elementkoordinaten ξ^a :

$$\hat{\epsilon}_{\alpha\beta} = \alpha_{\alpha\beta} + \theta^3 \beta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \hat{\epsilon}_{a3} = \alpha_{a3} \quad ; \quad \hat{\epsilon}_{33} = \alpha_{33} = 0$$

$$\alpha_{\alpha\beta} = \alpha_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_\beta) \quad (6.1)$$

$$\alpha_{a3} = \frac{1}{2} \gamma_a = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_{3,\beta}) \quad (6.2)$$

$$\beta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_{3,\beta} + \bar{\mathbf{a}}_{3,\alpha} \bar{\mathbf{a}}_\beta - \mathbf{a}_\alpha \mathbf{a}_{3,\beta} - \mathbf{a}_{3,\alpha} \mathbf{a}_\beta) \quad (6.3)$$

Auf Elementebene brauchen die Koordinaten ξ^a formal nicht von den Koordinaten θ^a unterschieden werden.

6.1.2 Lineares Materialgesetz und Kondensation

Mit den Werkstoffgleichungen in Ratenform des Abschnitts 3.5, die für linear elastische Materialgesetze auch in finiter Form gelten und mit Annahme A2 und A4 des Abschnitts 3.7.1.1 errechnen sich die auf die Schalenmittelfläche bezogenen Piola–Kirchhoff–Spannungen 2. Art $\hat{\mathbf{S}}$ zu:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} \xrightarrow{A2, A4} \mu \hat{\mathbf{S}} \approx \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{E}}_{C+L} \quad (6.4)$$

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{S}^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \quad ; \quad \hat{\mathbf{E}}_{C+L} = \hat{\epsilon}_{ij} \mathbf{a}^i \otimes \mathbf{a}^j \quad ; \quad C = C^{ijkl} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{a}_l$$

Um mit Annahme A3a/b des Abschnitts 3.7.1.1 die Zahl der unabhängigen Parameter zu reduzieren, wird das Materialgesetz kondensiert:

$$\hat{S}^{33} = 0 = C^{33kl} \hat{\epsilon}_{kl} + C^{3333} \hat{\epsilon}^{33} \quad \Rightarrow \quad \hat{\epsilon}^{33} = -\frac{C^{33kl}}{C^{3333}} \hat{\epsilon}_{kl} \quad ; \quad (k,l) \neq (3,3) \quad (6.5)$$

$$\mu \hat{S}^{ij} = \left(C^{ijkl} - C^{ij33} \frac{C^{33kl}}{C^{3333}} \right) \hat{\epsilon}_{kl} = C^*{}^{ijkl} \hat{\epsilon}_{kl} \quad (6.6)$$

Für den Sonderfall einer Schalentheorie mit orthogonalem Direktorfeld und konstanter Dicke ändert der vierstufige Werkstofftensor (s. 2.9.2):

$$C = (\lambda_1 a^{ij} a^{kl} + \lambda_2 (a^{ik} a^{jl} + a^{il} a^{jk})) \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{a}_l \quad (6.7)$$

seine Gestalt durch die Kondensation kaum, denn mit $a^{33} = 0$ und $a^{33} = 1$ gilt (z.B. [11]):

$$C^* = (\lambda_1^* a^{ij} a^{kl} + \lambda_2 (a^{ik} a^{jl} + a^{il} a^{jk})) \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \otimes \mathbf{a}_k \otimes \mathbf{a}_l \quad (k,l) \neq (3,3)$$

$$\lambda_1^* = \lambda_1 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 + 2\lambda_2} = \frac{E\nu}{1-\nu^2} \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.8)$$

6.1.3 Schnittgrößen und deren konstitutive Beziehungen

Die Piola-Kirchhoff-Schnittgrößen 2. Art (s. Abschnitt 3.2.3):

$$\mathbf{N}_{II} = n^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \quad ; \quad \mathbf{M}_{II}^{(1)} = m^{ij} \mathbf{a}_i \otimes \mathbf{a}_j \quad (6.9)$$

errechnen sich bei über die Dicke homogenem linearen Materialgesetz mit Annahme A2 aus Abschnitt 3.7.1 zu:

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \hat{S}^{\alpha\beta} d\theta^3 \approx \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} C^*{}^{\alpha\beta ij} (a_{ij} + \theta^3 \beta_{ij}) d\theta^3 = h_0 C^*{}^{\alpha\beta ij} a_{ij} = D_0^*{}^{\alpha\beta ij} a_{ij} \quad (6.10)$$

$$n^{\alpha 3} = q^\alpha = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \hat{S}^{\alpha 3} d\theta^3 \approx \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} C^*{}^{\alpha 3 ij} (a_{ij} + \theta^3 \beta_{ij}) d\theta^3 = D_0^*{}^{\alpha 3 ij} a_{ij} \quad (6.11)$$

$$n^{33} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \hat{S}^{33} d\theta^3 = 0 \quad (6.12)$$

$$m^{a\beta} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \theta^3 \hat{S}^{a\beta} d\theta^3 \approx \frac{h_0^3}{12} C^{*a\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} = D_2^{*a\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} \quad (6.13)$$

$$m^{a3} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \theta^3 \hat{S}^{a3} d\theta^3 \approx \frac{h_0^3}{12} C^{*a3\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} = D_2^{*a3\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} \quad (6.14)$$

$$m^{33} = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \mu \theta^3 \hat{S}^{33} d\theta^3 = 0 \quad (6.15)$$

Für den Sonderfall einer Schalentheorie mit orthogonalem Direktorfeld und konstanter Dicke läßt sich unter Beachtung von $a^{a3} = 0$ und $a^{33} = 1$ leicht nachweisen, daß:

$$n^{a\beta} = D_0^{*a\beta\gamma\delta} \alpha_{\gamma\delta} \quad (6.16)$$

$$n^{a3} = h_0 \lambda_2 a^{a\delta} \gamma_\delta \quad (6.17)$$

$$m^{a\beta} = D_2^{*a\beta\gamma\delta} \beta_{\gamma\delta} \quad (6.18)$$

$$m^{a3} = m^{33} = n^{33} = 0 \quad (6.19)$$

6.1.4 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (siehe Abschnitt 3.4) dient nach Berücksichtigung der oben angeführten Annahmen als Ausgangsgleichung für die Diskretisierung:

$$-\delta W = -\delta W^{\text{int}} - \delta W^{\text{ext}} = 0 \quad (6.20)$$

$$\text{mit: } -\delta W^{\text{int}} = \iint_A \left(n^{a\beta} \delta \alpha_{a\beta} + q^a \delta \gamma_a + m^{a\beta} \delta \beta_{a\beta} \right) dA$$

$$\delta W^{\text{ext}} = \iint_A (\delta v \mathbf{p} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{c}) dA + \int_s (\delta v \mathbf{n} + \boldsymbol{\omega} \mathbf{m}) ds$$

6.2 Diskretisierung und Linearisierung

Zur Diskretisierung werden zweidimensionale Lagrange- bzw. Serendipity-Formfunktionen $N^K(\xi^1, \xi^2)$ gewählt, die sich z. B. in [14] oder [114] nachschlagen lassen.

Mit der für das Degenerationskonzept typischen isoparametrischen Interpolation der Ortsvektoren zur Schalenmittelfläche und der Schalendirektoren (s. Abschnitt 4.4.2):

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_h = \sum_{K=1}^{NN} N^K \mathbf{r}^K \quad ; \quad \mathbf{a}_3 \approx \mathbf{a}_{3h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K \mathbf{a}_3^K \quad (6.21)$$

$$\bar{\mathbf{r}} \approx \bar{\mathbf{r}}_h = \sum_{K=1}^{NN} N^K \bar{\mathbf{r}}^K = \sum_{k=1}^{NN} N^K (\mathbf{r}^K + \mathbf{v}^K); \quad \bar{\mathbf{a}}_3 \approx \bar{\mathbf{a}}_{3h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K \bar{\mathbf{a}}_3^K \quad (6.22)$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{a}}_3^K = \mathbf{R}_d(\bar{\mathbf{s}}^K) \mathbf{R}^i \mathbf{a}_3^K$$

werden die weiteren, zur Berechnung der Verzerrungen notwendigen Vektoren folgendermaßen approximiert:

$$\mathbf{a}_a \approx \mathbf{a}_{a_h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K_{,a} \mathbf{r}^K \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}}_a \approx \bar{\mathbf{a}}_{a_h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K_{,a} (\mathbf{r}^K + \mathbf{v}^K) \quad (6.23)$$

$$\mathbf{a}_{3,a} \approx \mathbf{a}_{3,a_h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K_{,a} \mathbf{a}_3^K \quad ; \quad \bar{\mathbf{a}}_{3,a} \approx \bar{\mathbf{a}}_{3,a_h} = \sum_{K=1}^{NN} N^K_{,a} \bar{\mathbf{a}}_3^K \quad (6.24)$$

Durch die Diskretisierung entsteht aus (6.20) ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem für \mathbf{a} (vergleiche Abschnitt 4.2.2):

$$-\delta W^{\text{int}} = \delta \mathbf{a}^T \int_{\Lambda} \left(\alpha_{a\beta}' n^{\alpha\beta} + \gamma_{a'} q^a + \beta_{a\beta}' m^{\alpha\beta} \right) dA = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{F}(\mathbf{a})^{\text{int}} \quad (6.25)$$

$$\delta W^{\text{ext}} = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{F}^{\text{ext}}$$

→ nichtlineares Gleichungssystem

$$\mathbf{F}^{\text{int}}(\mathbf{a}) - \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (6.26)$$

mit den Knotenvariablen:

$$\mathbf{a}^T = [\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^{K^T}, \dots, \mathbf{a}^{NN^T}] \quad , \quad \mathbf{a}^{K^T} = [\mathbf{v}^{K^T}, \bar{\mathbf{s}}^{K^T}]$$

Für diese Arbeit soll angenommen werden, daß \mathbf{F}^{ext} von den Unbekannten \mathbf{a} unabhängig ist. Um die Schreibweise zu vereinfachen, wird in (6.25) und im folgenden auf den Index $_h$ für approximierten Größen verzichtet. Zur Berechnung der tangentialen Steifigkeitsmatrix muß (6.26) bezüglich der Knotenvariablen linearisiert werden:

$$-D\delta W^{\text{int}} = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{F}^{\text{int}'} \quad D\mathbf{a} = \delta \mathbf{a}^T \int_{\Lambda} \left(\alpha_{a\beta}'' n^{\alpha\beta} + \gamma_{a'} q^a + \beta_{a\beta}'' m^{\alpha\beta} + \alpha_{a\beta}' n^{\alpha\beta'} + \gamma_{a'} q^{a'} + \beta_{a\beta}' m^{\alpha\beta'} \right) dA \quad D\mathbf{a} \quad (6.27)$$

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{e+u} + \mathbf{K}_g = \mathbf{F}^{int}$$

$$\text{mit } \mathbf{K}_{e+u} = \iint_A \left(\alpha_{\alpha\beta}' n^{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha'} q^{\alpha'} + \beta_{\alpha\beta}' m^{\alpha\beta} \right) dA$$

$$\mathbf{K}_g = \iint_A \left(\alpha_{\alpha\beta}'' n^{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha}'' q^{\alpha} + \beta_{\alpha\beta}'' m^{\alpha\beta} \right) dA \quad (6.28)$$

Um die 1. und 2. Ableitung der Verzerrungen zu erhalten, werden die Richtungsableitungen der Basisvektoren $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$ und des Schalendirektors $\bar{\mathbf{a}}_3^K$ am Knoten K gebraucht:

$$\delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \sum_{K=1}^{NN} \mathbf{N}^{K, \alpha} \delta \mathbf{v}^K ; \quad D\delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{0} \quad (6.29)$$

Wendet man für die Rotationen den *multiplikativen "update"* aus Abschnitt 5.3 und 5.4 an, so gilt für die 1. und 2. Variation des Schalendirektors $\bar{\mathbf{a}}_3^K$ am Knoten K mit den Formeln (5.51)/(5.52):

$$\bar{\mathbf{a}}_3^K = \mathbf{R}_d(\bar{\mathbf{s}}^K) \mathbf{R}_d^{K^i} \mathbf{a}_3^K \quad (6.30)$$

$$\delta \bar{\mathbf{a}}_3^K = \boldsymbol{\Omega}(\bar{\mathbf{s}}^K, \delta \bar{\mathbf{s}}^K) \mathbf{R}_d(\bar{\mathbf{s}}^K) \mathbf{R}_d^{K^i} \mathbf{a}_3^K \stackrel{\bar{\mathbf{s}}^K = \mathbf{0}}{=} \delta \bar{\mathbf{s}}^K \mathbf{R}_d^{K^i} \mathbf{a}_3^K = \delta \bar{\mathbf{s}}^K \bar{\mathbf{a}}_3^K = \delta \bar{\mathbf{s}}^K \times \bar{\mathbf{a}}_3^K \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} D\delta \bar{\mathbf{a}}_3^K &= \frac{1}{2} (\delta \bar{\mathbf{s}}^K D\bar{\mathbf{s}}^K + D\bar{\mathbf{s}}^K \delta \bar{\mathbf{s}}^K) \mathbf{R}^{K^i} \mathbf{a}_3^K \\ &= \frac{1}{2} (\delta \bar{\mathbf{s}}^K \times (D\bar{\mathbf{s}}^K \times \bar{\mathbf{a}}_3^K) + D\bar{\mathbf{s}}^K \times (\delta \bar{\mathbf{s}}^K \times \bar{\mathbf{a}}_3^K)) \end{aligned} \quad (6.32)$$

Unter Verwendung der Abkürzung:

$$\bar{\mathbf{D}}^K = \hat{\bar{\mathbf{a}}}_3^K = (\bar{\mathbf{a}}_3^K \times) \quad (6.33)$$

und der Formel:

$$\bar{\mathbf{a}}_\alpha \delta \bar{\mathbf{a}}_3^K = \bar{\mathbf{a}}_\alpha (\delta \bar{\mathbf{s}}^K \times \bar{\mathbf{a}}_3^K) = \delta \bar{\mathbf{s}}^K \bar{\mathbf{D}}^K \bar{\mathbf{a}}_\alpha \quad (6.34)$$

für die Gleichungen (6.36), (6.37) berechnen sich die Richtungsableitungen (virtuellen Verzerrungen) zu:

$$\delta a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \delta \bar{\mathbf{a}}_\beta) = \sum_{K=1}^{NN} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_\beta \mathbf{N}^{K, \alpha} + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \mathbf{N}^{K, \beta}) \delta \mathbf{v}^K = \alpha_{\alpha\beta}' \delta \mathbf{a} \quad (6.35)$$

$$\delta \gamma_\alpha = \bar{\mathbf{a}}_3 \delta \bar{\mathbf{a}}_\alpha + \bar{\mathbf{a}}_\alpha \delta \bar{\mathbf{a}}_3 = \sum_{K=1}^{NN} (\bar{\mathbf{a}}_3 \mathbf{N}^{K, \alpha} \delta \mathbf{v}^K - \mathbf{N}^{K, \alpha} \bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{D}}^K \delta \bar{\mathbf{s}}^K) = \gamma_\alpha' \delta \mathbf{a} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned}
\delta\beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\bar{a}_{3,\beta} \delta\bar{a}_\alpha + \bar{a}_\beta \delta\bar{a}_{3,\alpha} + \bar{a}_{3,\alpha} \delta\bar{a}_\beta + \bar{a}_\alpha \delta\bar{a}_{3,\beta}) \\
&= \sum_{K=1}^{NN} \left(\frac{1}{2} (\bar{a}_{3,\beta} N^K_{,\alpha} + \bar{a}_{3,\alpha} N^K_{,\beta}) \delta v^K - \frac{1}{2} (\bar{a}_\alpha N^K_{,\beta} + \bar{a}_\beta N^K_{,\alpha}) \bar{D}^K \delta \bar{s}^K \right) = \beta_{\alpha\beta}' \delta a
\end{aligned} \tag{6.37}$$

Als zweite Richtungsableitungen erhält man für die Membranverzerrungen:

$$\begin{aligned}
D\delta a_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\delta\bar{a}_\beta D\bar{a}_\alpha + \delta\bar{a}_\alpha D\bar{a}_\beta) \\
&= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \delta v^K \frac{1}{2} (N^K_{,\beta} N^M_{,\alpha} + N^K_{,\alpha} N^M_{,\beta}) \mathbf{I} Dv^M \quad \text{wg.: } D\delta\bar{a}_\alpha = \mathbf{0} \\
&= \delta a \alpha_{\alpha\beta}'' Da
\end{aligned} \tag{6.38}$$

für die Schubverzerrungen über Gleichung (6.32), (6.36) und (10.13):

$$\begin{aligned}
D\delta\gamma_\alpha &= D\delta\bar{a}_3 \bar{a}_\alpha + \delta\bar{a}_3 D\bar{a}_\alpha + D\bar{a}_3 \delta\bar{a}_\alpha \\
&= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \delta v^K (\bar{D}^{K^T} N^K_{,\alpha} N^M) D\bar{s}^M + \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \delta \bar{s}^K (\bar{D}^K N^K N^M_{,\alpha}) Dv^M \\
&\quad + \sum_{K=1}^{NN} \delta \bar{s}^K N^K A_\alpha^K D\bar{s}^K = \delta a^T \gamma_\alpha'' Da \\
&\quad \text{mit } A_\alpha^K = \frac{1}{2} ((\bar{a}_3^K \otimes \bar{a}_\alpha) + (\bar{a}_\alpha \otimes \bar{a}_3^K) - 2(\bar{a}_\alpha \bar{a}_3^K) \mathbf{I})
\end{aligned} \tag{6.39}$$

und schließlich analog zu (6.39) für die Biegeverkrümmungen:

$$\begin{aligned}
D\delta\beta_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\delta\bar{a}_{3,\beta} D\bar{a}_\alpha + \delta\bar{a}_{3,\alpha} D\bar{a}_\beta + \delta\bar{a}_\beta D\bar{a}_{3,\alpha} + \delta\bar{a}_\alpha D\bar{a}_{3,\beta}) \\
&\quad + \bar{a}_\beta D\delta\bar{a}_{3,\alpha} + \bar{a}_\alpha D\delta\bar{a}_{3,\beta}) \\
&= \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \delta v^K \bar{D}^{M^T} \frac{1}{2} (N^K_{,\beta} N^M_{,\alpha} + N^K_{,\alpha} N^M_{,\beta}) D\bar{s}^M \\
&\quad + \sum_{K=1}^{NN} \sum_{M=1}^{NN} \delta \bar{s}^K \bar{D}^K \frac{1}{2} (N^K_{,\alpha} N^M_{,\beta} + N^K_{,\beta} N^M_{,\alpha}) Dv^M \\
&\quad + \sum_{K=1}^{NN} \delta \bar{s}^K \frac{1}{2} (A_\alpha^K N^K_{,\beta} + A_\beta^K N^K_{,\alpha}) D\bar{s}^K = \delta a \beta_{\alpha\beta}'' Da
\end{aligned} \tag{6.40}$$

6.3 "Assumed strain"-Methode

Niedrig interpolierte, also bilineare oder biquadratische Schalenelemente, die auf den Gleichungen des Abschnitts 6.1 und 6.2 beruhen, weisen als reine Weggrößenmodelle die als "locking"-Phänomene bekannten künstlichen Versteifungseffekte auf, die die Konvergenz zur exakten Lösung eines Problems stark verlangsamen. Die Tatsache, daß ein Element nicht in der Lage ist, konstante Biegebeanspruchung darzustellen, ohne Schubverzerrungen hervorzurufen, führt zum "shear-locking". Kann ein gekrümmtes Element konstante Verkrümmungen nicht ohne Membranverzerrungen darstellen, verursacht es "membrane locking". Begegnen kann man diesen Defekten durch reduzierte/ selektive Integration ([113], [65] und viele andere), die sich ihrerseits als problematisch erweist, da durch sie energiefreie Mechanismen ("zero energy modes") auftreten können. Weitere Möglichkeiten, die "locking"-Probleme zu meistern, bieten gemischt/hybride und "assumed strain"-Elemente.

Auf die Verwandtschaft und in Sonderfällen die Identität dieser Verbesserungsmöglichkeiten wird vielfach hingewiesen [5]. Hier wird die "assumed strain"-Methode nach Dvorkin und Bathe [33] für das vierknotige Element und nach Pinsky und Jang [73] für das neunknotige Element gewählt. Sie zeigt z. B. für das vierknotige Element das beste Verhalten hinsichtlich Querschub-Versteifungen [5]. Zunächst werden bei dieser Methode die "locking" verursachenden Verzerrungen bzw. deren Ableitungen wie bisher im Weggrößenmodell an speziell gewählten Stellen ("sampling point") bestimmt und dann über das gesamte Element interpoliert. Diese geglätteten Verzerrungsverläufe ersetzen diejenigen, die zu Versteifungen führen, so daß die innere virtuelle Arbeit darstellbar ist als:

$$\begin{aligned}
 -\delta W^{\text{int}} &= \iint_A \left(n^{\alpha\beta} \delta \alpha_{\alpha\beta} + q_{\alpha} \delta \gamma_{\alpha} + m^{\alpha\beta} \delta \beta_{\alpha\beta} \right) dA \\
 &\approx \iint_A \left(n^{\alpha\beta(\text{ass})} \delta \alpha_{\alpha\beta}^{(\text{ass})} + q^{\alpha(\text{ass})} \delta \gamma_{\alpha}^{(\text{ass})} + m^{\alpha\beta(\text{ass})} \delta \beta_{\alpha\beta}^{(\text{ass})} \right) dA \quad (6.41)
 \end{aligned}$$

Die Schnittgrößen errechnen sich dabei direkt aus den angenommenen Verzerrungen. Geschickte Wahl der Stützstellen und der Interpolationsfunktionen können auf stabile, (fast) "locking"-freie Elemente führen. Stimmen die Verzerrungsverläufe des Weggrößenmodells und die geglätteten Verzerrungen mindestens in den konstanten Anteilen überein, ist bei Netzverfeinerung die Konvergenz zur korrekten Lösung gegeben. Inwieweit "assumed strain"-Elemente variationell begründbar sind, wird in [91] diskutiert.

6.3.1 4-Knoten-Element

Zur Vermeidung des "shear locking" und energiefreier Mechanismen werden die Querschubverläufe konstant in der einen und linear in der anderen Richtung des krummlinigen konvektiven (natürlichen) Koordinatensystems angesetzt [33], [99] (s. Bild 6.1):

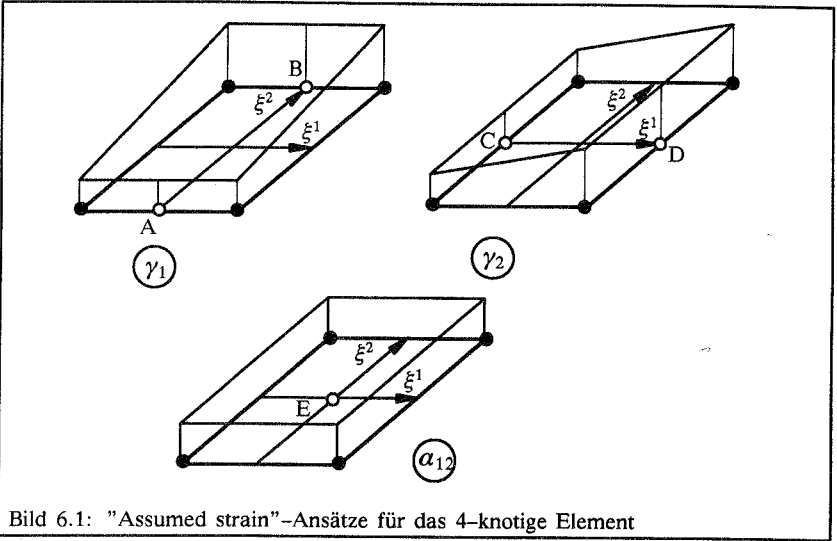


Bild 6.1: "Assumed strain"-Ansätze für das 4-knotige Element

$$\gamma_1^{\text{ass}}(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)\gamma_1^A + \frac{1}{2}(1 + \xi^2)\gamma_1^B \quad (6.42)$$

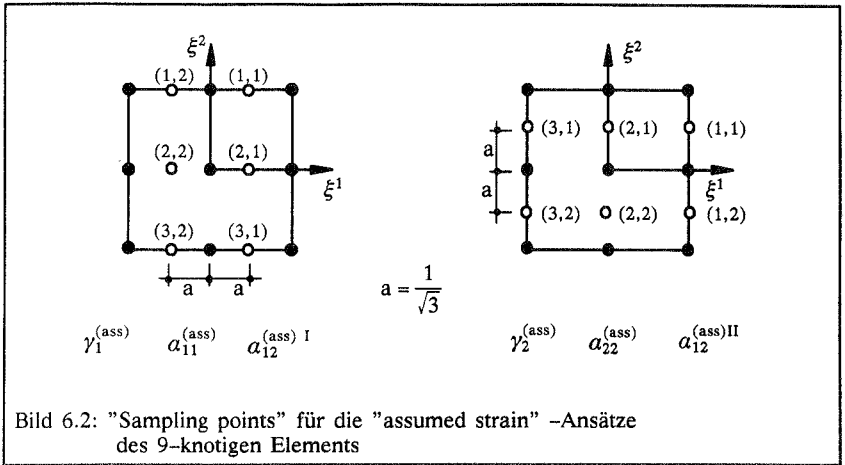
$$\gamma_2^{\text{ass}}(\xi^1, \xi^2) = \frac{1}{2}(1 - \xi^1)\gamma_2^C + \frac{1}{2}(1 + \xi^1)\gamma_2^D \quad (6.43)$$

Für balkenartige Schalen ist es vorteilhaft, zusätzlich die Membranschubverzerrungen konstant zu approximieren:

$$\alpha_{12}^{\text{ass}}(\xi^1, \xi^2) = \alpha_{12}^E \quad (6.44)$$

6.3.2 9-Knoten-Element

Zur Verbesserung des "shear locking" und des "membrane locking" werden die folgenden linear-quadratischen bzw. für α_{12}^{ass} bilinearen Interpolationen nach Pinsky und Jang [73] gewählt:



Ansatzpolynome:

$$P_1(\varrho) = \frac{1}{2}\varrho(1+\varrho) \quad , \quad P_2(\varrho) = \frac{1}{2}(1-\varrho)(1+\varrho) \quad , \quad P_3(\varrho) = -\frac{1}{2}\varrho(1-\varrho)$$

$$Q_1(\varrho) = \frac{1}{2}(1+\varrho) \quad , \quad Q_2(\varrho) = \frac{1}{2}(1-\varrho)$$

$$R_1(\varrho) = \frac{1}{6} + \frac{\varrho}{2} \quad , \quad R_2(\varrho) = \frac{2}{3} \quad , \quad R_3(\varrho) = \frac{1}{6} - \frac{\varrho}{2}$$

für $-1 \leq \varrho \leq 1$

Interpolation für Querschubverzerrungen:

$$\gamma_1^{(ass)}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi^2) Q_j(\xi^1) \gamma_1^{(i,j)} \quad (6.45)$$

$$\gamma_2^{(ass)}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi^1) Q_j(\xi^2) \gamma_2^{(i,j)} \quad (6.46)$$

Interpolation für Membranverzerrungen:

$$\alpha_{11}^{(ass)}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi^2) Q_j(\xi^1) \alpha_{11}^{(i,j)} \quad (6.47)$$

$$\alpha_{22}^{(ass)}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi^1) Q_j(\xi^2) \alpha_{22}^{(i,j)} \quad (6.48)$$

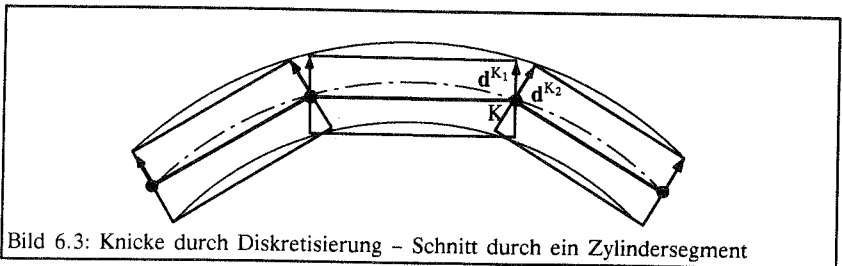
$$\alpha_{12}^{(ass) I}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 R_i(\xi^2) Q_j(\xi^1) \alpha_{12}^{(i,j)} \quad (6.49)$$

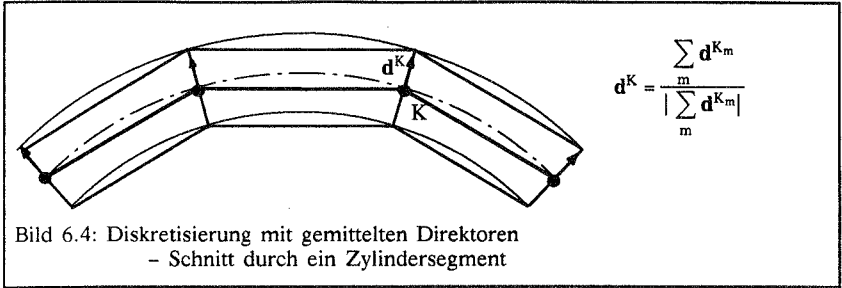
$$\alpha_{12}^{(ass)II}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 R_i(\xi^1) Q_j(\xi^2) \alpha_{12}^{(i,j)} \quad (6.50)$$

$$\alpha_{12}^{(ass)} = \frac{1}{2} (\alpha_{12}^{(ass)I} + \alpha_{12}^{(ass)II}) \quad (6.51)$$

6.4 Möglichkeiten zur Berechnung von Schalen mit Knicken

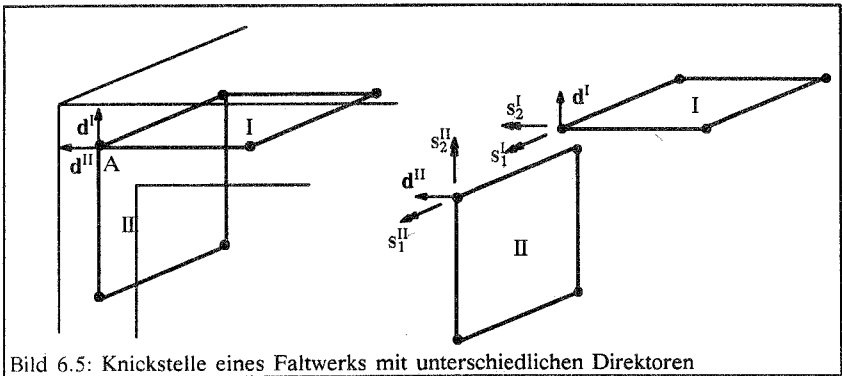
Zur Beschreibung der Rotation eines Vektors werden 2 unabhängige Rotationsparameter benötigt. Um die Drehung zweier und mehr Vektoren, deren Lage zueinander sich nicht ändern soll, zu erfassen, sind 3 Rotationsparameter erforderlich. Diese Aussagen haben Konsequenzen auf die Berechnung von Schalen mit Knicken. Durch die nur C^0 -kontinuierliche Interpolation der Schalengeometrie entstehen bei isoparametrischen Elementen zwangsläufig Knicke, die natürlich mit zunehmender Netzverdichtung kleiner werden (s. Bild 6.3). Für das diskretisierte System macht es keinen Unterschied, ob Diskretisierungsknicke oder systembedingte Knicke vorliegen. Aus diesem Grund ist eine Berechnung von Schalen mit isoparametrischen Elementen, die nur 2 Rotationsfreiheitsgrade je Knoten besitzen, strenggenommen nur dann möglich, wenn je Knoten nur ein Direktor vorhanden ist (s. Bild 6.4). Hieraus folgt, daß ein in der Ausgangsgeometrie zur Schalenmittelfläche senkrecht stehendes Direktorfeld im allgemeinen nicht mehr vorausgesetzt werden kann. Da die Dicke der Schale in Direktorrichtung zu messen ist, kann auch nicht mehr von einer konstanten Direktorlänge ausgegangen werden. Eine Schalentheorie mit veränderlicher Dicke und beliebig stehendem Direktor ist somit eigentlich Voraussetzung für isoparametrische Schalentheorie-Elemente und nicht nur nötig, um Schalen mit systembedingten Knicken mit 2 Rotationsfreiheitsgraden je Knoten berechnen zu können. Wenn Schalen mit Knicken mit Elementen analysiert werden, die ein orthogonales Direktorfeld verwenden, existiert an der Knickstelle mehr als ein Direktor, und es werden drei Rotationsfreiheitsgrade am Knoten zur korrekten Berechnung benötigt.



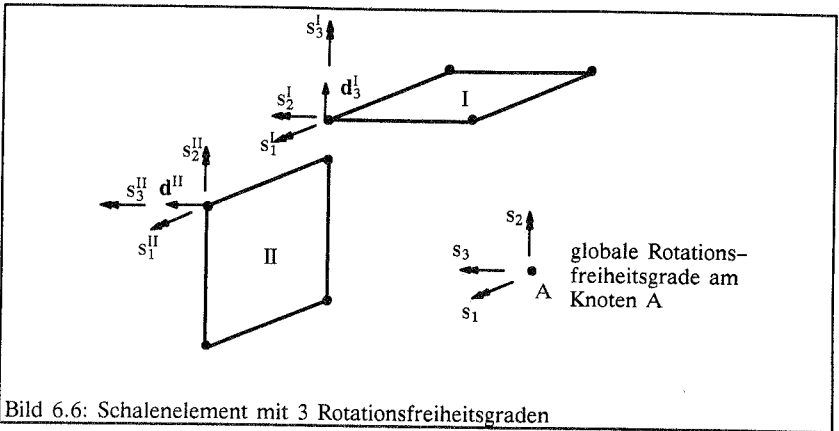


6.4.1 Knickstellen mit unterschiedlichen Schalendirektoren

Die Modellierung von Schalen, deren Geometrie Knicke mit unterschiedlichen Direktoren aufweist, ist insbesondere mit Schalenelementen, die nur 2 Rotationsfreiheitsgrade am Elementknoten aufweisen, nicht trivial. Zur Veranschaulichung der Problematik soll der spezielle Fall eines rechten Winkels in Bild 6.5 betrachtet werden.



Am Knoten A existieren mit $s_1^{\text{II}} = s_1^{\text{I}}$, s_2^{I} und s_2^{II} drei unabhängige Rotationsfreiheitsgrade. Um bei Schalenelementen mit 2 Rotationsfreiheitsgraden am Knoten nicht unzulässigerweise die in unterschiedliche Richtungen weisenden Freiheitsgrade s_2^{I} und s_2^{II} einander gleichzusetzen, müssen zwei Knoten eingeführt werden, von denen die Freiheitsgrade $s_1^{\text{II}} = s_1^{\text{I}}$ miteinander gekoppelt werden. Diese aufwendige Vorgehensweise, Doppelknoten einzuführen und einzelne Freiheitsgrade zu koppeln, kann elegant umgangen werden, wenn an den Elementknoten von vornherein 3 Rotationsfreiheitsgrade existieren.



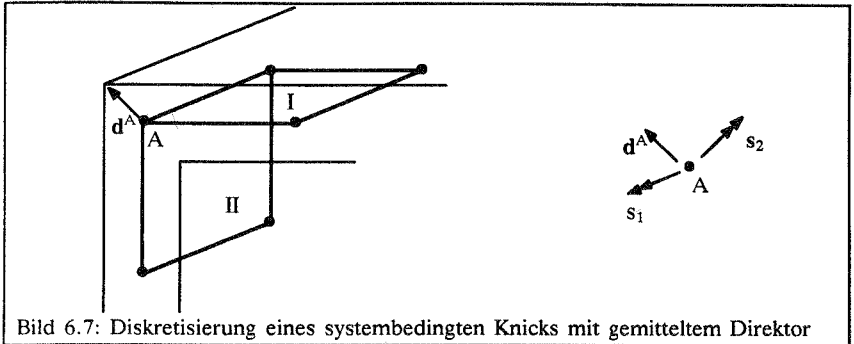
Da die Rotationsparameter um die Schalennormale beliebige Werte annehmen dürfen, ohne das Ergebnis zu beeinträchtigen, kann $s_1 = s_1^I = s_1^II$, $s_2 = s_2^I = s_2^II$ und $s_3 = s_3^I = s_3^II$ gesetzt werden. Der für die FE-Methode typische Zusammenbau der Elementmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix ist daher direkt möglich. Die zu Rotationsfreiheitsgrad s_1 gehörende Steifigkeit erhält im Beispiel von Bild 6.6 Beiträge aus Element I und II, diejenige zu s_2 nur von Element II und die zu s_3 von Element I. Angemerkt werden soll, daß die Knickstelle selbst mit dieser Methode nicht genauer zu berechnen ist. Der einzige Sinn dieser Vorgehensweise liegt in einer einfacheren Eingabe für FE-Programme.

6.4.2 Knickstelle mit einem gemeinsamen Schalendirektor

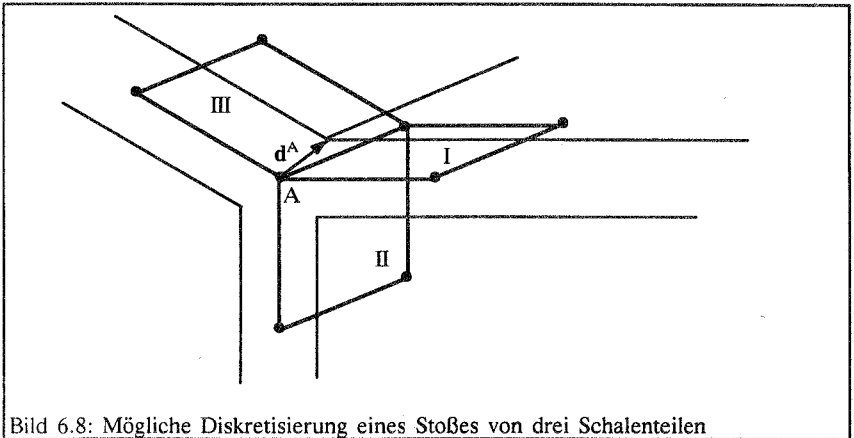
Um mit zwei Rotationsfreiheitsgraden je Knoten arbeiten zu können, darf wie oben erwähnt, nur ein Direktor am Knoten existieren, der prinzipiell beliebig vorgebar ist (z.B. [108]); er darf nur nicht tangential zur Schalenmittelfläche liegen. Im allgemeinen existiert keine analytische Geometriebeschreibung, so daß es sich anbietet, einen gemittelten Direktor (s. Bild 6.4) zu benutzen.

Diese Geometrieinterpolation mit einem Direktor am Knoten entspricht exakt der Kontinuumsinterpolation und wird von den meisten degenerierten Elementen verwendet (s. a. Abschnitt 4.2.1). Sie hat zur Folge, daß der Direktor selbst am Knoten nicht mehr senkrecht auf der Elementfläche steht, was bei den hier benutzten Verzerrungsgleichungen in vektorieller Form aber nur Auswirkungen auf die Schubverzerrungen (6.2) hat, da $\mathbf{a}_{\alpha} \mathbf{a}_3 \neq 0$. Wird die Abweichung des Direktors von der Schalennormalen am Integrationspunkt zu groß, muß die Annahme A3a in der Form $\tau_3^3 = 0$ berücksichtigt werden (s. Abschnitt 3.7.1.1). In der Nähe von Knicken ist diese Annahme jedoch grundsätzlich fragwürdig.

Systembedingte Knicke können auf die gleiche Art behandelt werden wie Diskretisierungsknicke.



Bei Knicken, an denen mehr als zwei Schalenteile zusammenstoßen (s. Bild 6.8), besteht ebenfalls die Möglichkeit, mit nur einem Direktor zu arbeiten.



6.5 Behandlung des dritten Rotationsfreiheitsgrads an Stellen ohne Knick

In FEM-Programmen der Strukturmechanik werden gerne Elemente verwendet, die 6 Freiheitsgrade am Elementknoten besitzen, welche auf ein globales Koordinatensystem bezogen sind, so daß unterschiedliche Strukturelemente einfach aneinander angeschlossen werden können, z.B. für Schalenkonstruktionen mit Balken als Stützen oder Steifen. An Knoten ohne Knick oder z.B. Balkenanschluß wird für Schalen ein Rotations-

freiheitsgrad überzählig, da ihm keine Steifigkeit zuzuordnen ist. Um kein singuläres Gleichungssystem zu bekommen, müssen besondere Überlegungen angestellt werden. Die naheliegendste und automatisch zu guten Ergebnissen führende Möglichkeit ist, diesen Freiheitsgrad an solchen Stellen als geometrische Randbedingung zu eliminieren (s. [46]). Dafür ist an jedem Knoten ein lokales Koordinatensystem nötig, um die Drehung um die Schalennormale auszuschalten. Für die hier vorgestellten Elemente soll eine weitere Möglichkeit diskutiert werden, die es erlaubt, ohne diese Lokalsysteme auszukommen. Das Problem wird ähnlich wie bei der Schalentheorie mit Ingenieurverzerrungen in [85] über die Symmetriebedingung der Membranverzerrungen (s. a. Abschnitt 3.7.2) gelöst. Die Theorie mit Ingenieurverzerrungen bietet sich zwar für degenerierte Elemente nicht an (s. Abschnitt 4.5), aber die Idee, die Symmetriebedingung einzuführen, kann diskret an den Knoten übernommen werden.

Mit:

$$\text{Annahme A4*} \quad \bar{\mathbf{d}} \approx \mathbf{R}_C \mathbf{a}_3$$

aus Abschnitt 3.7.2 kann die Bedingung (Gl. (3.141)):

$$\alpha = \frac{1}{2} (\mathbf{a}_1^T \mathbf{R}_C^T \mathbf{F}_C \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1^T \mathbf{F}_C^T \mathbf{R}_C \mathbf{a}_2) = \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{a}}_1 \bar{\mathbf{a}}_2 - \bar{\mathbf{a}}_2 \bar{\mathbf{a}}_1) = 0 \quad (6.52)$$

über eine Penalty-Methode im Funktional berücksichtigt werden:

$$\Pi + \iint_A k \frac{1}{2} \alpha^2 \, dA \rightarrow \text{stationär} \quad (6.53)$$

Für das Prinzip der virtuellen Verschiebung bedeutet das eine Erweiterung um:

$$-\delta W^{\text{int}} - \delta W^{\text{ext}} + \iint_A k \alpha \, \delta \alpha \, dA = 0 \quad ; \quad k = \text{Penalty-Faktor} \quad (6.54)$$

Weil im Degenerationskonzept die Komponenten des Rotationsvektors \mathbf{s} nur an den Knoten vorliegen, müßte $\bar{\mathbf{a}}_\alpha = \mathbf{R}(\mathbf{s}) \mathbf{a}_\alpha$ von diesen aus interpoliert werden.

$$\bar{\mathbf{a}}_{\alpha n} = \sum_{K=1}^{NN} N^K \mathbf{R}(\mathbf{s}^K) \mathbf{a}_\alpha^K \quad (6.55)$$

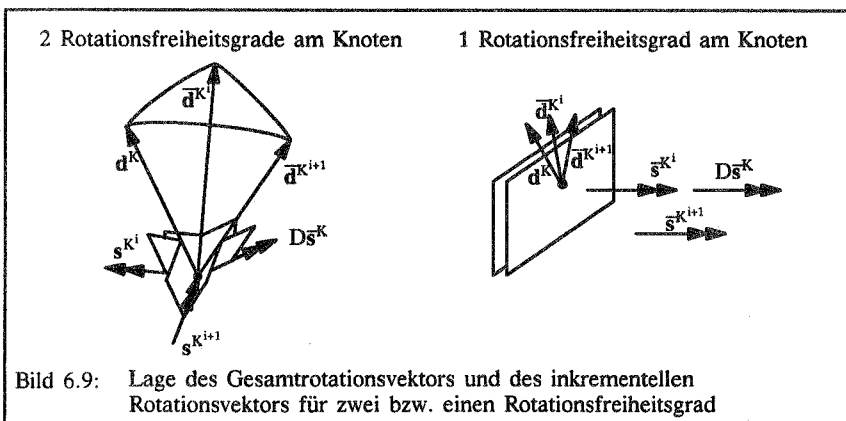
Um das zu umgehen, wird die Bedingung $\alpha = 0$ diskret an jedem Knoten M berücksichtigt, unabhängig davon, ob er an einer Knickstelle liegt oder nicht:

$$-\delta W^{\text{int}} - \delta W^{\text{ext}} + \sum_{K=1}^{NN} k \alpha^K \, \delta \alpha^K = 0 \quad (6.56)$$

Auswirkungen dieser Vorgehensweise auf das Elementverhalten werden an einigen Beispielen des Abschnitts 6.7 untersucht. Da nun am Knoten über den Penalty-Faktor eine Art "Drillsteifigkeit" existiert, kann z. B. ein Balken senkrecht zur Schale angeschlossen werden und Torsionsbeanspruchung übertragen.

6.6 Besonderheiten für 2 Rotationsfreiheitsgrade am Knoten beim multiplikativen Rotations-„update“

Wird der multiplikative Rotations-„update“ in der im Abschnitt 5.4 beschriebenen Weise für Schalen mit nur 2 Rotationsparametern benutzt, ist zu beachten, daß der inkrementelle Rotationsvektor $D\bar{s}^K = s^{+K}$ senkrecht auf $\bar{d}^{K^{i+1}}$ und \bar{d}^{K^i} steht (s. Bild 6.9) und nicht, im Gegensatz zum Gesamtrrotationsvektor, orthogonal zum Direktor d^K der Ausgangsgeometrie ist. Deshalb muß das Lokalsystem am Knoten K , das zu Anfang eine Achse in Richtung von d^K hat, mit dem Direktor \bar{d}^{K^i} rotieren. An Knoten mit nur einem Rotationsfreiheitsgrad, so z. B. an Symmetrierandbedingungen, kann darauf verzichtet werden, weil dann der inkrementelle Rotationsvektor stets parallel zum Gesamtrrotationsvektor bleibt, also senkrecht zu d^K liegt.



6.7 Numerische Beispiele

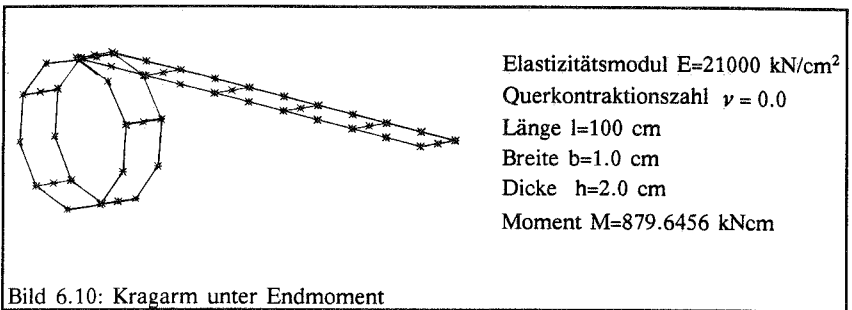
Mit den in den Abschnitten 6.1 bis 6.6 vorgestellten Elementen sollen die in diesem, aber auch in den vorangegangenen Kapiteln getroffenen Aussagen numerisch verifiziert werden. Wesentliche Effekte können schon an sehr einfachen Beispielen demonstriert werden. Untersucht wird das Konvergenzverhalten der beiden Rotations-„updates“, der Einfluß der „Drillsteifigkeit“ für den dritten Rotationsfreiheitsgrad und die Auswirkungen der Mittelung der Direktoren.

Als Abbruchkriterium in den nichtlinearen Rechnungen dient:

$$\text{Tol} = \frac{\| \mathbf{Da}^i - \mathbf{Da}^{i-1} \|}{\| \sum_i \mathbf{Da}^i \|} < 10^{-10}$$

Anmerkung: Diese Toleranzschranke widerspricht strenggenommen dem multiplikativen Rotations-„update“, da die inkrementellen Rotationsvariablen genauso wie die Verschiebungen aufsummiert werden. Sie ist also in der Form nur für den additiven Rotations-„update“ korrekt. Als Abbruchkriterium sollte die Norm der Ungleichgewichtskräfte oder die Energienorm (s. Tafel 6.8) genommen werden. In sämtlichen Beispielen, die in diesem Abschnitt berechnet werden, ist die Energienorm kleiner als 10^{-18} , wenn das obige Abbruchkriterium erfüllt ist, die Konvergenz also gesichert. Natürlich ist eine dergartig kleine Abbruchschranke in praktischen Beispielen nicht nötig. Sie dient hier nur als Nachweis einer fehlerfrei programmierten Tangente, mit der das Newton-Verfahren in der Nähe des Lösungspunktes quadratisch konvergiert.

6.7.1 Kragarm mit Endmoment



Dieses einfache Beispiel, das im Abschnitt 4.6.2 schon mit ebenen Elementen berechnet wurde, wird hier nochmals unter einem anderen Gesichtspunkt betrachtet. Gezeigt werden soll der Vorteil des singularitätenfreien, multiplikativen Rotations-„update“ des Abschnitts 5.4, der bewirkt, daß stets ein aktualisierter Schalendirektor als Referenzvektor für die Beschreibung der Richtungsänderung des Direktors dient. Wird hingegen immer

der Schalendirektor des Ausgangszustands als Referenzvektor gewählt, treten, wie im Abschnitt 5.3 beschrieben, bei Schalen mit 2 Rotationsparametern Mehrdeutigkeiten bei einer Rotation von $180^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z}$ auf, bei Schalen mit 3 Rotationsparametern bei $360^\circ + k \cdot 360^\circ$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$. Ebene Probleme mit nur einem Rotationsparameter bereiten diesbezüglich keine Schwierigkeiten. Der Kragarm wird mit 5 achtknotigen Schalenelementen mit 2 Rotationsparametern pro Knoten diskretisiert und soll in zehn gleichen Lastinkrementen zum Vollkreis gebogen werden. Durch den multiplikativen Rotations-„update“ kann mit nahezu konstanter Iterationszahl die Biegung zum Kreis erreicht werden. Mit der üblichen additiven Vorgehensweise verschlechtert sich ab Lastinkrement 5 die Kondition der Steifigkeitsmatrix, also dann, wenn an den ersten Knoten Drehungen im Bereich von 180° gegenüber dem Ausgangszustand stattfinden, was im achten Lastinkrement zur Divergenz führt (s. Tafel 6.1). Werden jedoch die Rotationsfreiheitsgrade in Längsrichtung (um die „Balkenachse“) je Knoten fixiert, so erhält man je Inkrement die gleiche Iterationszahl wie beim multiplikativen „update“.

Anmerkung: Das degenerierte, achtknotige, quadratische Element zeigt den Effekt des „Weicherwerdens“ mit zunehmender Verkrümmung im Gegensatz zum degenerierten Element (Abschnitt 4.6.2) mit linearen Ansatzfunktionen fast nicht mehr, was am Enddrehwinkel abzulesen ist.

Schritte	2 Rot.-F. mult.	2 Rot.-F. add.	1 Rot.-F. add.
10	9/9/9/9/9	9/9/9/9/9	9/9/9/9/9
	9/9/9/10/10	12/10/divergent	9/9/9/10/10
Enddrehwinkel	362.22°	---	362.22°

Tafel 6.1: Anzahl der Iterationen und Endverdrehung für den Kragarm

6.7.2 Krag­scheibe [27]

Dieses geometrisch lineare Beispiel der vorwiegend auf Schub beanspruchten Scheibe ist ein Test für die Leistungsfähigkeit von verzerrten Scheibenelementen [27]. Es zeigt aber auch in beeindruckender Weise den Einfluß des Penalty-Faktors für den dritten Rotationsfreiheitsgrad je Knoten auf die Resultate des Schalenelementes.

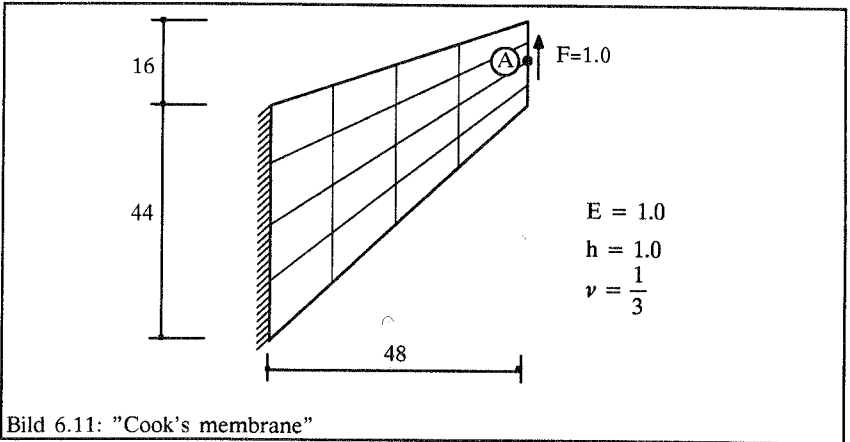


Bild 6.11: "Cook's membrane"

Die in [95] für dieses Problem angegebene vertikale Verschiebung des Punktes A beträgt: $v=23.91$. Hier wird die Scheibe mit dem 4-knotigen "assumed strain"-Element aus Abschnitt 6.3.1 (Kennzeichen: A4) und dem 9-knotigen aus Abschnitt 6.3.2 (Kennzeichen: A9) für verschiedene Penalty-Faktoren berechnet.

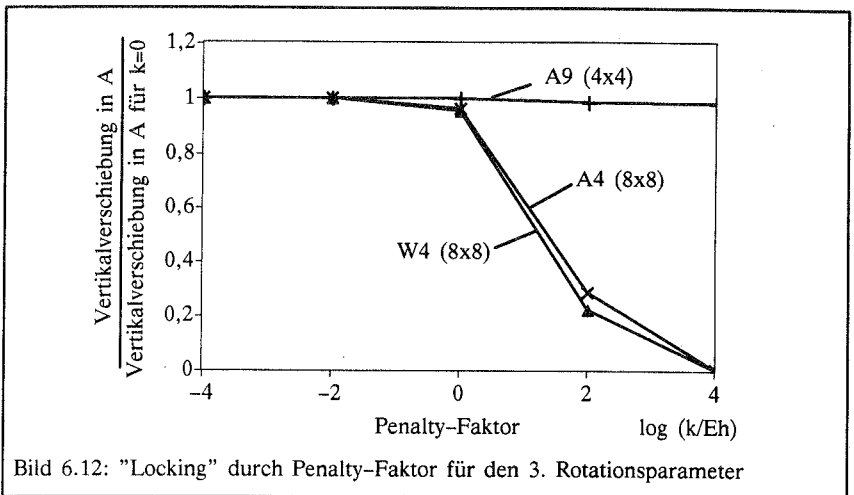


Bild 6.12: "Locking" durch Penalty-Faktor für den 3. Rotationsparameter

Penalty-Faktor k	A4	A4	W4	W4	A9
	4x4-Netz	8x8-Netz	4x4-Netz	8x8-Netz	4x4-Netz
0.0000*Eh	21.684	23.303	18.299	22.079	23.872
0.0001*Eh	21.684	23.303	18.299	22.079	23.872
0.0100*Eh	21.677	23.394	18.274	22.068	23.871
1.0000*Eh	21.017	22.432	16.156	21.065	23.836
100.00*Eh	6.6535	6.6569	1.5389	4.8900	23.529
10000.*Eh	0.1098	0.1072	0.0203	0.0672	23.459

Tafel 6.2: Auswirkungen des Penalty-Faktors

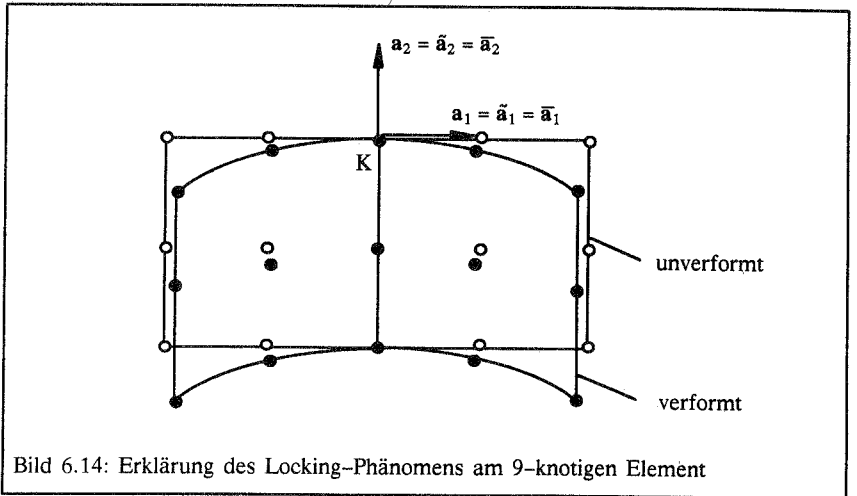
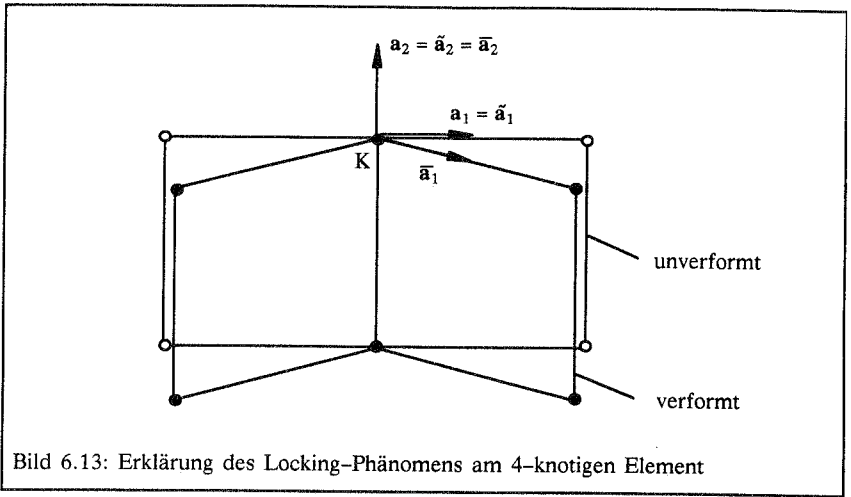
Es stellt sich heraus, daß das 4-knotige Element A4 durch die Erweiterung des Funktions mit der Penalty-Methode für mittlere bis große Penalty-Faktoren k starke Versteifungseffekte hervorruft. Um zu zeigen, daß dieses Problem nicht dadurch entsteht, daß die Symmetriebedingung der Membranverzerrungen nur diskret an den Knoten eingeführt wird, wird mit einem 4-knotigen Element (Kennzeichen: W4) aus [52] gegengerechnet. Dieser Elementtyp interpoliert den Rotationsfreiheitsgrad und berücksichtigt die Symmetriebedingung kontinuierlich, zeigt aber nahezu identische Locking-Phänomene. Für k=0 wird die Rotation um den Schalendirektor fixiert (s. Abschnitt 6.5), man erhält das Schalenelement mit 2 Rotationsfreiheitsgraden am Knoten. Die besseren Ergebnisse des Elementes A4 gegenüber W4, das für den Fall k=0 ein reines Weggrößenmodell ist, sind auf die "assumed strain"-Interpolation der Membranschub-Verzerrungen zurückzuführen.

Die Resultate des 9-knotigen Elementes A9 sind praktisch unabhängig von k.

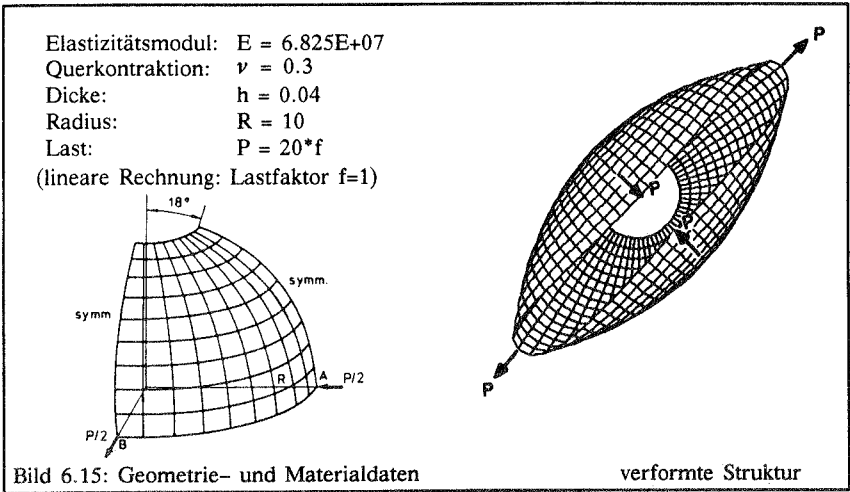
Der Grund für diese Art von "locking" soll an einem einfachen Beispiel erläutert werden. Die Verformung der im Bild 6.13 dargestellten Elemente bewirkt, daß α^K am Knoten K nicht verschwindet:

$$\alpha^K = \bar{a}_1^K \bar{a}_2^K - \bar{a}_1^K \bar{a}_2^K = 0 - \bar{a}_1^K \bar{a}_2^K \neq 0 \quad (6.57)$$

Wird diese Zwangsbedingung noch mit einem großen Penalty-Faktor multipliziert, resultiert daraus ein viel zu steifes Verhalten. Im Gegensatz dazu kann das 9-knotige Element eine derartige Deformation darstellen und gleichzeitig die Bedingung $\alpha^K = 0$ erfüllen, es versteift in diesem Fall nicht (s. Bild 6.14). Natürlich sind auch Situationen denkbar, in denen das 9-knotige Element "locking" infolge der "Drillsteifigkeit" zeigt, wenn auch nicht so deutlich wie das 4-knotige Element.



6.7.3 Halbkugel-Schale mit 18° Loch unter Einzellasten
 ("Pinched Hemisphere" [58])



An diesem sehr bekannten Testbeispiel für Schalelemente werden lineare und nichtlineare Berechnungen mit dem Ziel durchgeführt, den Einfluß des Penalty-Faktors sowie den der Mittelung der Normalen zu untersuchen. Da hier keine Rotationen über 180° auftreten, kann gezeigt werden, daß der additive und der multiplikative Rotations-"update" in diesem Fall gleichwertig sind.

6.7.3.1 Lineare Berechnung

Zunächst wird das Konvergenzverhalten der Elemente A4 und A9 untersucht. Der Zusatz 2R bzw. 3R bei der Kennzeichnung der Elemente steht für 2 bzw. 3 Rotationsfreiheitsgrade je Knoten, der Zusatz M bzw. K für gemittelte (jeweils einen) bzw. nicht gemittelte (jeweils mehrere) Direktoren am Knoten. Für die Verschiebung am Lastangriffspunkt in Richtung der Last geben Simo et al. in [95] einen Wert von 0.93 und MacNeal/Harder in [58] einen von 0.94 an. Eine Rechnung mit 32x32 9-knotigen "assumed strain"-Elementen liefert einen Wert von 0.9358, der hier als Referenzwert dienen soll. Im Bild 6.16 ist das Element A4-2R-M anderen, aus der Literatur bekannten gegenübergestellt worden. Das 9-knotige A9-2R-M wird mit dem gemischten Element SDFR45-C von Ding [32] im Bild 6.17 verglichen.

In Tafel 6.3 sind die Ergebnisse für die 4-knotigen Elemente mit gemitteltem und nicht gemitteltem Direktor festgehalten. An Element A4-2R-K und A4-3R-K wird deutlich, daß bei Diskretisierungsknicken mit mehr als einem Schalendirektor 3 Rotationsfreiheitsgrade benötigt werden. Mit nur einem Knotendirektor und 2 Rotationsfreiheitsgraden

werden hervorragende Ergebnisse erzielt, wie Element A4-2R-M beweist. A4-3R-K konnte nur deswegen wie die anderen Elemente dieser Tabelle ohne Penalty-Faktor eingesetzt werden, weil an jedem Knoten ein Knick vorhanden ist. Dies gilt für das entsprechende 9-knotige Element aufgrund der Mittelknoten nicht. Die Knicke bei einer Diskretisierung mit 9-knotigen Elementen sind so klein, daß die Mittelung des Direktors nicht von Bedeutung ist.

Die Konvergenz des Elementes A4-2R-M von "oben" wird hauptsächlich durch die für das Degenerationskonzept typische Interpolation der Direktoren verursacht. Im Gegensatz zum Element A4-3R-K, dessen Dicke für dieses Beispiel netzunabhängig ist, approximiert A4-2R-M die Schalengeometrie für grobe Diskretisierung zu dünn. Diesen Sachverhalt kann man sich anhand von Bild 6.3 und Bild 6.4 schnell verdeutlichen.

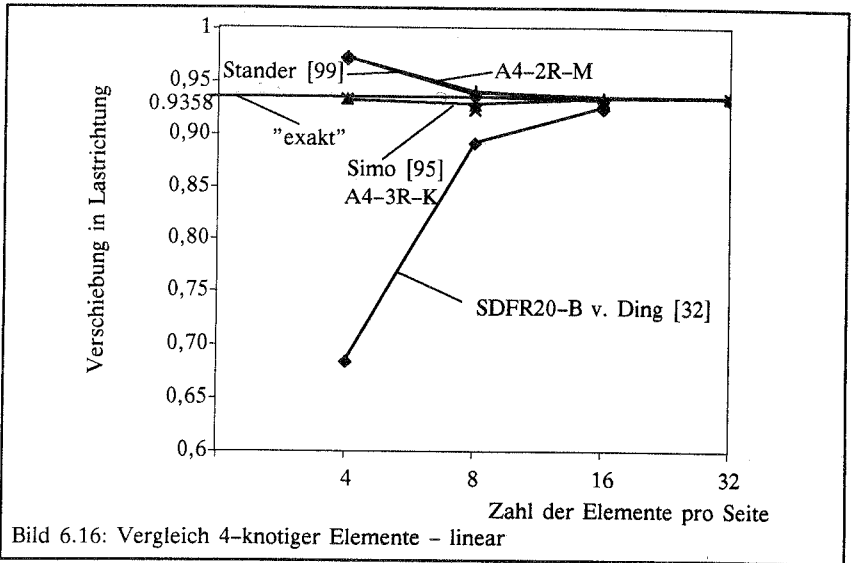


Bild 6.16: Vergleich 4-knotiger Elemente - linear

Element	4x4-Netz	8x8-Netz	16x16-Netz	32x32-Netz
A4-2R-M	0.9721	0.9402	0.9337	0.9345
A4-2R-K	0.0109	0.0456	1.1121	0.2812
A4-3R-K	0.9330	0.9288	0.9309	0.9345
A9-2R-M	0.9244	0.9303	0.9347	0.9358
A9-2R-K	0.9156	0.9299	0.9347	0.9358

Tafel 6.3: Konvergenzstudie mit den Elementen A4 und A9 - linear

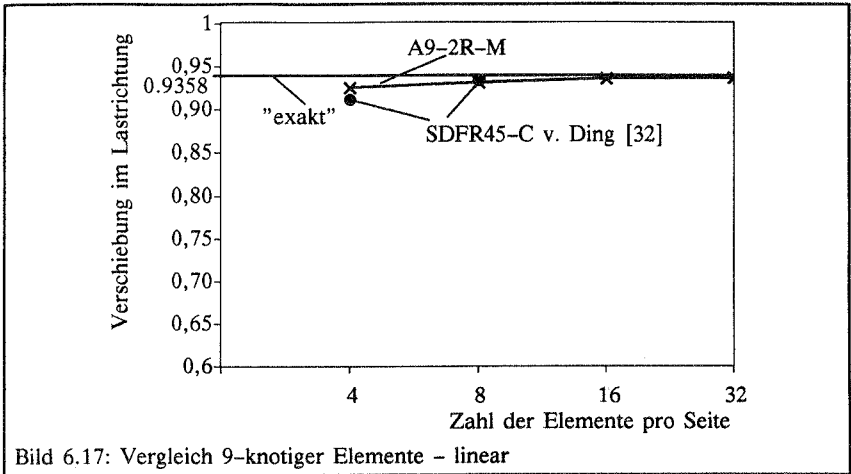


Bild 6.17: Vergleich 9-knotiger Elemente – linear

Um den *Einfluß des Penalty-Faktors* zu quantifizieren, ist dieser wie in Abschnitt 6.7.2 variiert worden. Wieder stellt sich heraus, daß die 4-knotigen Elemente starkes "locking" zeigen, wohingegen das 9-knotige Element durch diesen Faktor nur schwach beeinträchtigt wird (s. Tafel 6.4, Bild 6.18).

Element	0.0001*Eh	0.01*Eh	1.0*Eh	100.0*Eh	10000*Eh
A4-3R-K (16 x 16)	0.9281	0.8082	0.0662	0.0009	0.0001
A9-3R-K (8 x 8)	0.9303	0.9292	0.9234	0.9228	0.9204

Tafel 6.4: Einfluß des Penalty-Faktors

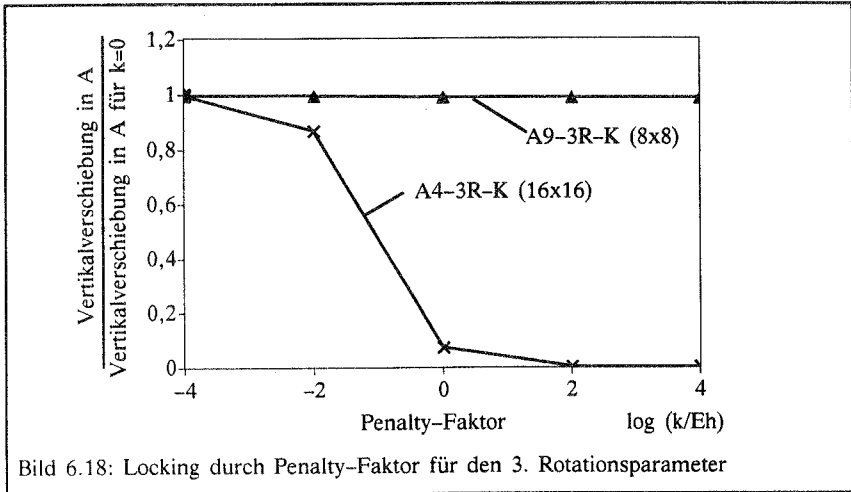


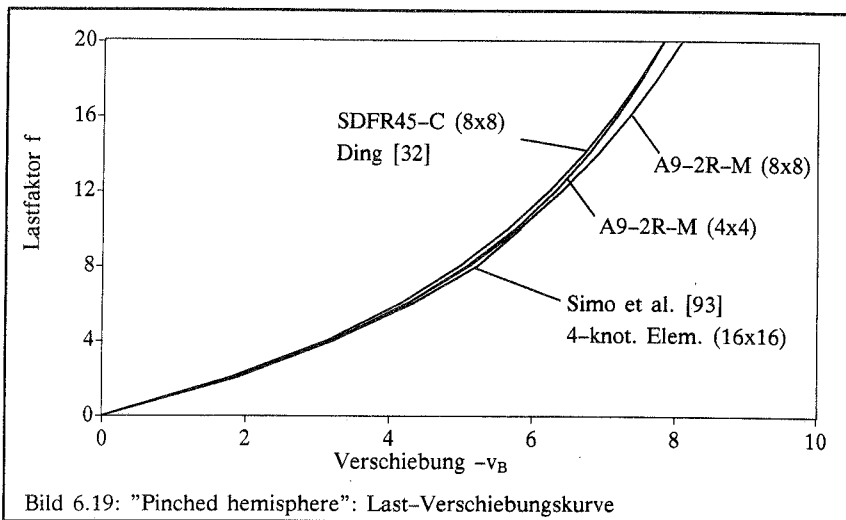
Bild 6.18: Locking durch Penalty-Faktor für den 3. Rotationsparameter

6.7.3.2 Nichtlineare Berechnung

Zum Vergleich mit aus der Literatur bekannten Ergebnissen wird die Halbkugel zunächst mit 8x8 Elementen des Typs A9-2R-M berechnet. Eine gute Übereinstimmung kann festgestellt werden.

Last	A9-2R-M ; k=0		
f	v_A	$-v_B$	It.
2.0	1.493	1.810	12
4.0	2.311	3.203	14
6.0	2.806	4.264	9
8.0	3.144	5.111	8
10.0	3.392	5.810	8
12.0	3.583	6.400	8
14.0	3.736	6.906	8
16.0	3.861	7.345	7
18.0	3.966	7.732	7
20.0	4.055	8.074	7

Tafel 6.5: Nichtlineare Berechnung mit 9-knotigen Elementen – 8x8 Elemente



Einfluß des Penalty-Faktors:

Nichtlineare Rechnungen reagieren empfindlicher auf die Wahl des Penalty-Faktors als lineare. Die in der linearen Rechnung bei 9-knotigen Elementen kaum vorhandenen künstlichen Versteifungen durch diesen Faktor treten in der nichtlinearen Analyse etwas deutlicher in Erscheinung, was den Werten der Tafel 6.6 zu entnehmen ist. Auf die Zahl der Gleichgewichtsiterationen hat der Penalty-Faktor jedoch in den hier dokumentierten Beispielrechnungen keinen Einfluß. Werden aber größere oder kleinere Faktoren gewählt, so divergiert schon die Iteration in der ersten Laststufe; die Schrittweite muß dann, je nach Faktor, erheblich kleiner gewählt werden. Zur Justierung dieser "Pseudo"-Drillsteifigkeit, die offensichtlich großen Einfluß auf die Kondition der Tangentenmatrix hat, werden weitere Untersuchungen nötig sein.

Last	A9-2R-M k=0		A9-3R-M k=0.001*Eh		A9-3R-M k=0.01*Eh	
	v _A	It.	v _A	It.	v _A	It.
2.0	1.478	12	1.472	12	1.428	12
4.0	2.282	13	2.266	13	2.170	13
6.0	2.766	9	2.740	9	2.607	9
8.0	3.094	8	3.060	8	2.904	8
10.0	3.333	8	3.294	8	3.123	8
12.0	3.517	8	3.474	7	3.293	7
14.0	3.664	8	3.618	7	3.430	7
16.0	3.783	8	3.737	7	3.543	7
18.0	3.883	7	3.836	6	3.640	6
20.0	3.968	6	3.921	6	3.723	6

Tafel 6.6: Nichtlineare Berechnung mit 9-knotigen Elementen - 4x4 Elemente

Last	A4-2R-M (16x16) k=0			A4-3R-M k=0.0001*Eh (16x16)		
	v _A	-v _B	It.	v _A	-v _B	It.
2.0	1.493	1.819	12	1.491	1.817	12
4.0	2.309	3.219	13	2.308	3.216	15
6.0	2.804	4.285	9	2.802	4.282	9
8.0	3.141	5.137	8	3.140	5.133	8
10.0	3.389	5.840	8	3.387	5.836	8
12.0	3.579	6.432	8	3.577	6.428	7
14.0	3.730	6.938	7	3.728	6.934	7
16.0	3.853	7.376	7	3.851	7.372	7
18.0	3.955	7.759	7	3.953	7.754	7
20.0	4.041	8.095	7	4.040	8.091	7

Tafel 6.7: Nichtlineare Berechnung mit 4-knotigen Elementen - 16x16 Elemente

Um die *Gleichwertigkeit des additiven und des multiplikativen Rotations-"update"* für Problemstellungen, in denen keine größeren Rotationen als 180° auftreten, numerisch zu unterstreichen, wird die Halbkugel mit 8x8 achtknotigen, reduziert integrierten Elementen V8 berechnet. Nicht nur die Zahl der Iterationen je Laststufe ist (nahezu) gleich (s. Tafel 6.9), auch das Konvergenzverhalten - in beiden Fällen quadratisch - ist fast identisch (s. Tafel 6.8). Die Ergebnisse im Gleichgewichtszustand sind natürlich exakt dieselben.

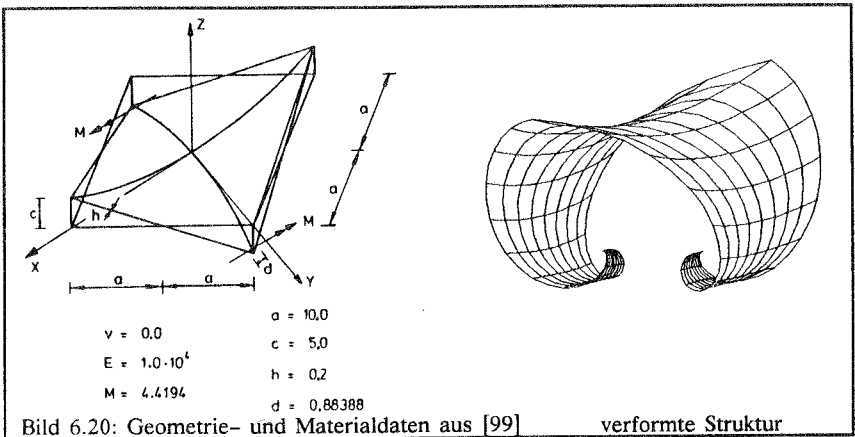
	Iterationsverlauf von Laststufe f=14.0 bis f=16.0			
	mult. Update		add. Update	
	R-Norm	E-Norm	R-Norm	E-Norm
1	4.985E+04	1.116E+03	5.138E+04	1.190E+03
2	2.446E+02	4.590E-02	2.464E+02	4.861E-02
3	5.207E+01	6.615E-03	5.168E+01	6.501E-03
4	2.094E+01	3.377E-04	2.100E+01	3.430E-04
5	7.015E-01	1.094E-06	7.261E-01	1.196E-06
6	4.113E-03	1.284E-11	4.620E-03	1.634E-11
7	1.221E-07	3.361E-21	1.260E-07	4.496E-21
Norm der Ungleichgewichtskräfte: Energienorm:			R - Norm := $\ \mathbf{F}^{int^i} - \mathbf{F}^{ext^i} \ $ E - Norm := $(\mathbf{F}^{int^i} - \mathbf{F}^{ext^i})^T \mathbf{D}_a$	

Tafel 6.8: Iterationsverlauf für multiplikativen und additiven Rotations-"update"

Last	V8-2R-M (8x8)		
	v_A	It. (mult.)	It. (add.)
2.0	1.487	12	12
4.0	2.291	12	14
6.0	2.771	9	10
8.0	3.095	8	8
10.0	3.331	8	8
12.0	3.513	8	8
14.0	3.658	8	8
16.0	3.777	7	7
18.0	3.875	7	7
20.0	3.959	7	7

Tafel 6.9: Iterationsverlauf für multiplikativen und additiven Rotations-„update“

6.7.4 Hyparschale von Ding und Başar [32]



Der in [32] vorgestellte Test für Schalenelemente mit großen Rotationen wird hier mit den Elementen V8-2R (s. Tafel 6.11) und A9-2R (Tafel 6.10) berechnet. Da die Geometrie der Hyparschale mit den isoparametrischen Elementen exakt erfasst wird und demnach keine Diskretisierungsknicke auftreten, wird auf die Kennzeichnung der Elemente mit dem Buchstaben M bzw. K verzichtet. Die Ergebnisse stimmen mit denen in [60] und [37] fast exakt überein. Wie schon am Kragarm des Abschnitts 6.7.1 gezeigt, verhält sich der multiplikative Rotations-„update“ im Gegensatz zum additiven auch für Rotatio-

nen über 180° stabil (s. Tafel 6.11). Daß dieses Beispiel in [60] mit der Rotationsformulierung aus [74] (s. Abschnitt 5.3) überhaupt ohne Konvergenzschwierigkeiten berechnet werden konnte, liegt an der geschickten Wahl des Koordinatensystems und des hauptsächlich in einer Richtung abtragenden Systems. Während des Verformungsvorgangs sind die Schalendirektoren niemals parallel zu ihrem Referenzvektor, der x^1 -Achse.

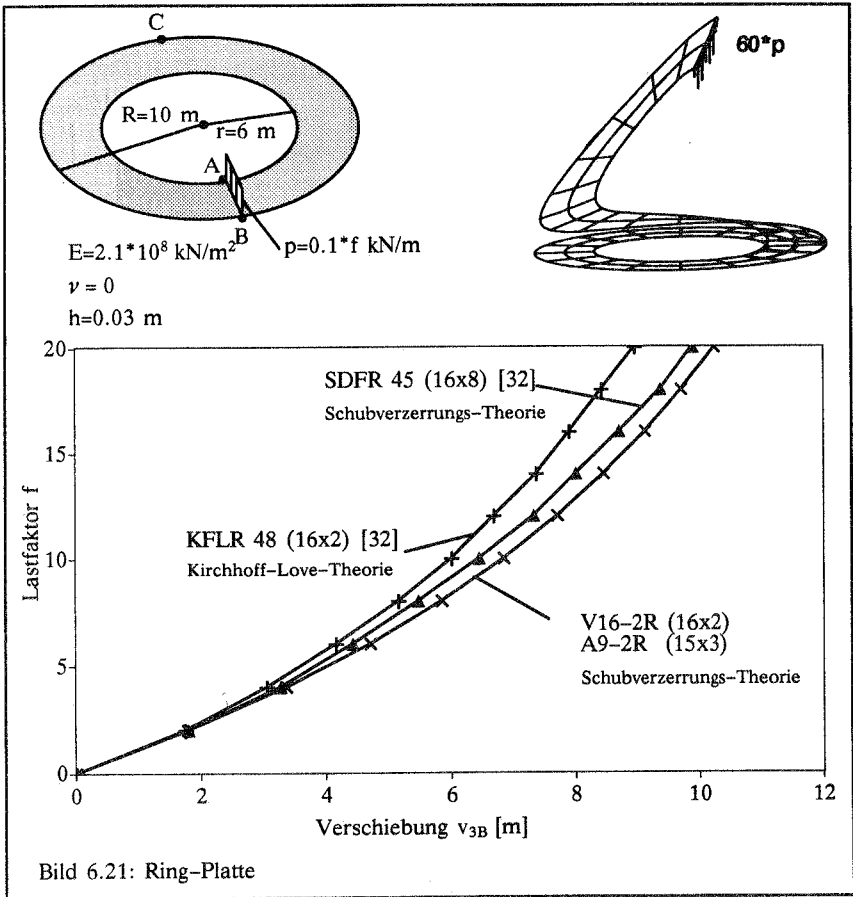
	Last [kNm/m]	Verschiebung [m]	Verdrehung	It. mult.
1	5	2.100	0.638	9
2	10	5.498	1.352	9
3	15	9.372	2.081	9
4	20	13.08	2.841	9
5	25	15.92	3.583	8
6	30	17.84	4.224	9
7	35	19.19	4.933	9
8	40	20.00	5.757	10

Tafel 6.10: Ergebnisse der Berechnung mit Element A9-2R (4x12-Netz)

	Last [kNm/m]	Verschiebung [m]	Verdrehung	It. mult.	It. add.
1	5	2.103	0.634	9	9
2	10	5.515	1.355	9	9
3	15	9.408	2.087	9	9
4	20	13.13	2.851	9	9
5	25	15.97	3.593	8	div.
6	30	17.90	4.239	9	*
7	35	19.24	4.959	9	*
8	40	20.03	5.801	10	*

Tafel 6.11: Ergebnisse der Berechnung mit Element V8-2R (4x12-Netz)

6.7.5 Ringplatte von Bařar und Ding [10]



Dieses von Bařar und Ding vorgeschlagene Beispiel ist ein sehr guter Test für geometrisch nichtlineare Schalelemente, denn hier treten zwischen den unterschiedlichen Elementen deutlichere Unterschiede als in anderen Beispielen auf. Die geschlitzte Ringplatte ist längs AB eingespannt und am freien Ende mit der Linienlast p belastet. Bei den Last-Verschiebungskurven fällt zum einen der Unterschied zwischen den Kirchhoff-Love-Schalentheorie-Elementen und den Schubverzerrungs-Schalentheorie-Elementen von Ding auf, obgleich der Schubverformungseinfluß dieser dünnen Platte vernachlässigbar sein sollte. Aber auch der Unterschied dieser Elemente zu den degenerierten Schalelementen A4-2R, A9-2R und V16-2R ist unübersehbar. Dieser Effekt, daß die hier benutzten Elemente weicher reagieren, kann jedoch nicht auf die

kontinuumstypische Interpolation degenerierter Elemente zurückgeführt werden, da kaum gegenseitige Verdrehungen der Knotendirektoren auftreten. Zudem zeigen 9-, aber insbesondere 16-knotige Elemente diese Schwäche nicht so ausgeprägt. "Defekte" durch die "assumed strain"-Interpolation sind ausgeschlossen, da das 16-Knoten-Element ein reines Weggrößenmodell ist und mit 4x4 Gauß-Punkten voll integriert worden ist.

Lastfaktor f	A4-2R (30x6-Netz)		A9-2R (15x3-Netz)		V16-2R (16x2-Netz)	
	V _{3A}	V _{3B}	V _{3A}	V _{3B}	V _{3A}	V _{3B}
2	1.296	1.780	1.304	1.786	1.304	1.786
4	2.438	3.353	2.449	3.361	2.449	3.361
6	3.410	4.695	3.424	4.705	3.423	4.704
8	4.245	5.845	4.261	5.857	4.260	5.854
10	4.970	6.836	4.989	6.850	4.987	6.846
12	5.606	7.695	5.628	7.712	5.625	7.707
14	6.169	8.446	6.194	8.466	6.190	8.459
16	6.672	9.108	6.700	9.131	6.695	9.123
18	7.125	9.698	7.157	9.723	7.151	9.714
20	7.538	10.23	7.573	10.26	7.566	10.25
24	8.264	11.14	8.305	11.18	8.297	11.16
28	8.887	11.91	8.935	11.95	8.924	11.94
32	9.431	12.57	9.485	12.61	9.470	12.60
36	9.914	13.14	9.973	13.20	9.954	13.17
40	10.35	13.65	10.41	13.71	10.39	13.68
44	10.74	14.11	10.81	14.18	10.79	14.14
48	11.11	14.53	11.19	14.60	11.15	14.56
52	11.46	14.92	11.54	15.00	11.50	14.95
56	11.79	15.29	11.89	15.37	11.83	15.32
60	11.97	15.65	12.22	15.76	12.15	15.67

Tafel 6.12: Nichtlineare Berechnung der Ring-Platte

7 Stabilitäts- und Traglastberechnungen von Zylinder- und Kegelschalen bei konzentrierten Beanspruchungen

In diesem Kapitel werden FE-Berechnungen an Zylinder- und Kegelschalen vorgestellt mit dem Ziel, Aufschluß über das Tragverhalten bei konzentrierter Beanspruchung zu geben, insbesondere wenn geometrische und materielle Nichtlinearität gemeinsam zum Versagen führen.

Untersuchungen an Zylinderschalen unter axialen Teilrandlasten, unter Teilaußendruck und unter rotationssymmetrischen Ringlasten dienen der Überprüfung der einschlägigen Richtlinien hinsichtlich Zuverlässigkeit und Wirtschaftlichkeit (Abschnitt 7.2).

Studien an flüssigkeitsgefüllten Kegelschalen sollen die Bedeutung der Interaktion geometrischer und materieller Nichtlinearität aufzeigen (Abschnitt 7.3).

Versuchsnachrechnungen geben nicht nur zusätzlichen Einblick in das Tragverhalten, sondern verifizieren ebenso das Rechenmodell (Abschnitt 7.3.2).

7.1 Allgemeine Bemerkungen zur Berechnung

Den Berechnungen dieses Kapitels liegen degenerierte finite Schalenelemente zugrunde, die in der Lage sind, beliebig große Verschiebungen und Rotationen zu erfassen, was zur Berechnung der hier untersuchten Schalen, bei denen nur kleine bis mäßig große Rotationen auftreten, jedoch nicht von wesentlicher Bedeutung ist.

Die stoffliche Nichtlinearität wird unter Verwendung der klassischen Plastizitätstheorie mit der von Mises-Fließbedingung über ein Schichtenmodell berücksichtigt (siehe z.B. [84],[78],[60]). Es wird keine Verfestigung berücksichtigt, sondern linear-elastisch/ideal-plastisches Materialverhalten unterstellt.

Bei den Berechnungen mit den Programmen CARAT [104] bzw. NISA 80 [103] kamen 8-knotige Schalenelemente zum Einsatz, die vollständig reduziert integriert worden sind, um Locking-Phänomene weitgehend zu unterdrücken.

In den Programmen werden Piola-Kirchhoff-Spannungen 2. Art und Green-Lagrange-Verzerrungen benutzt. Da hier nur Probleme mit kleinen Verzerrungen untersucht werden, sind Transformationen auf die in den Richtlinien verwendeten Spannungsmaße unnötig.

Mit Grenzlast einer nichtlinearen Rechnung ist im folgenden immer der erste Maximalwert einer Lastverschiebungskurve gemeint.

7.2 Kreiszyylinder unter lokalen Belastungen

7.2.1 Einleitende Bemerkungen

7.2.1.1 Ziel der Studie

Ziel der Parameterstudie ist die Überprüfung der DASt-Richtlinie 013 [30] / DIN 18800 Teil 4 [31] im Hinblick auf eine zulässige und wirtschaftliche Bemessung lokal beanspruchter Stahlzyylinder.

Das Nachweisverfahren für teilbelastete Zylinder geht von einem rotationssymmetrischen Ersatzlastfall aus, der dieselbe Intensität wie die Teillast hat und sich bei Außen- druck über die ganze Höhe erstreckt. Dieses Vorgehen ist für elastisches Verhalten entwickelt worden und durch Rechnungen und Versuche abgesichert. Wird das Systemverhalten aber zusätzlich von der Plastifizierung des Materials beeinflusst, kann dieses Vorgehen zu veränderten rechnerischen Sicherheiten führen, da der durch das Ersatzlastbemessungskonzept vorgetäuschte, großflächige Membranzustand in Wirklichkeit nicht vorliegt.

7.2.1.2 Umfang der Studie

Untersucht werden mittellange bis kurze, klassisch, d.h. gelenkig, gelagerte Zylinder unter lokalen, axialen Randlasten, unter Ringlasten sowie unter einem über die Höhe konstanten Teilaußendruck. Besonderer Augenmerk wird auf Zylinder gelegt, deren Schlankheiten eine starke Interaktion zwischen geometrischem und materiellem Versagen erwarten lassen, denn bei ihnen ist die Traglast am schwierigsten vorauszusagen. Um möglichst realistische Versagenslasten zu ermitteln, werden zur 1. Eigenform affine Imperfektionen mit einer maximalen Amplitude entsprechend der einfachen Vorbeultiefe t_v nach DASt-Richtlinie 013/DIN 18800 Teil 4 ([30], [31]) angesetzt.

7.2.2 Kreiszyylinder unter lokalen, axialen Randlasten

7.2.2.1 Geometrie- und Materialdaten, statisches System

Den folgenden Rechnungen liegt ein klassisch gelagerter Kreiszyylinder (Randbedingungen RB3 nach DASt-Ri. 013) mittlerer Länge zugrunde. Die Art der Belastung sowie Material- und Geometriedaten sind in Tafel 7.1 zu sehen. Die bezogene Schlankheit des Zylinders befindet sich knapp über der Grenzschlankheit $\bar{\lambda}_s=1.58$ des elastischen Bereichs nach DASt-Ri. 013. Die nichtlinearen Berechnungen sind am 45°-Ausschnitt durchgeführt worden.

Belastung:

Lastfall 1: $a=1/4 \cdot U$ (100.0%)

Lastfall 2: $a=1/8 \cdot U$ (50.0%)

Lastfall 3: $a=1/16 \cdot U$ (25.0%)

Lastfall 4: $a=1/32 \cdot U$ (12.5%)

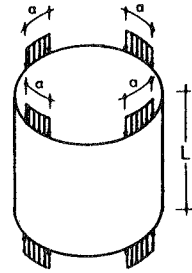
Material:

$E=210000 \text{ N/mm}^2$

$\nu=0.3$

$\sigma_F=240 \text{ N/mm}^2$

Geometrie: $t=8 \text{ mm}$ $t_v=6.4 \text{ mm}$ $L=360 \text{ mm}$ $R/t=400$



Tafel 7.1: Geometrie-, Material- und Belastungsdaten

7.2.2.2 Ergebnisse

Die Studie zeigt, daß der Zylinder lokal in einem Bereich nur wenig breiter als die Randlast (LF2-LF4) versagt. Bis zum linken Rand des 45°-Ausschnitts klingen die Verformungen ab (siehe Bild 7.2), weshalb die Ergebnisse auch auf Zylinder übertragbar sind, die mit weniger als 4 Teilrandlasten beansprucht werden.

Die Resultate der Untersuchung sind im Diagramm Bild 7.1 zu sehen. Auf der Abszisse ist die Randlast in Prozent der Ersatzlast, auf der Ordinate die Grenzlast bezogen auf die klassische Beullast angegeben. Folgende Feststellungen lassen sich treffen:

- Das Konzept der DASt-Ri. 013/DIN 18800 Teil 4, beim Nachweis rotationssymmetrische Ersatzlasten zu benutzen, ist geeignet für Teilrandlasten, die breiter als ca. $1/16$ des Zylinderumfangs sind (LF3).
- Wird die Lastbreite jedoch kleiner, steigt die Ordinate der aufnehmbaren Last rasch an. Bei diesem Zylinder mittlerer Schlankheit ist die Traglast mit der Breite $1/32$ des Umfangs 1.67 mal größer als beim zugehörigen, rotationssymmetrischen Randlastfall.
- Die durch Teilrandlasten hervorgerufenen Biegebeanspruchungen, die durch den rotationssymmetrischen Ersatzlastfall nicht erfaßt werden, spielen bei einem derartigen Zylinder auch in Hinblick auf Materialversagen eine untergeordnete Rolle.

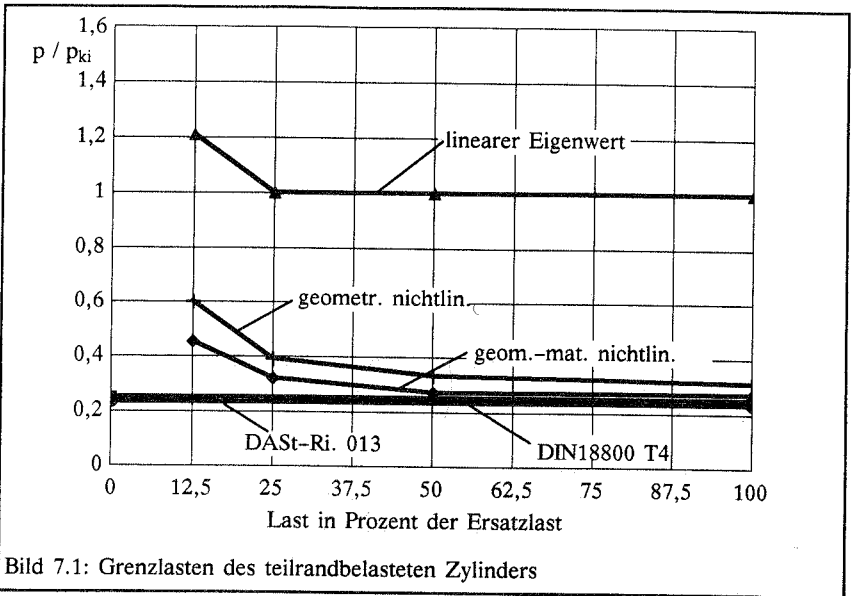


Bild 7.1: Grenzlaster des teilrandbelasteten Zylinders

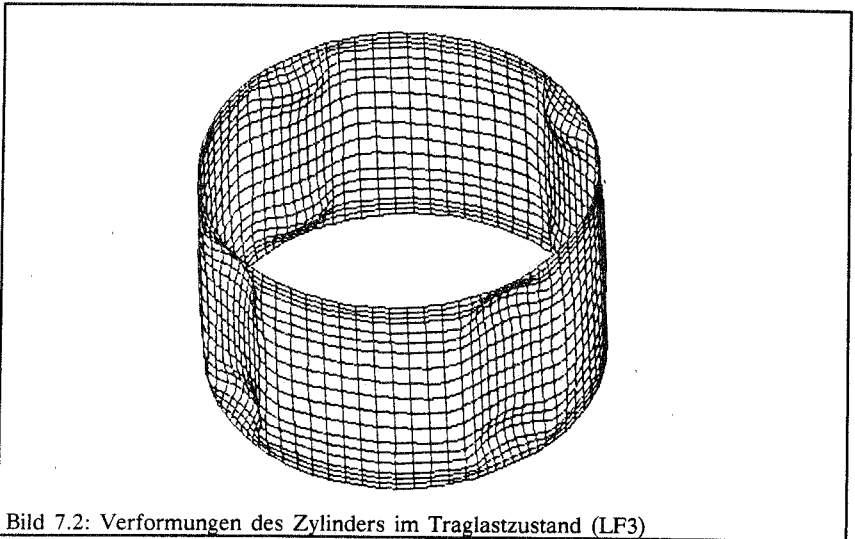
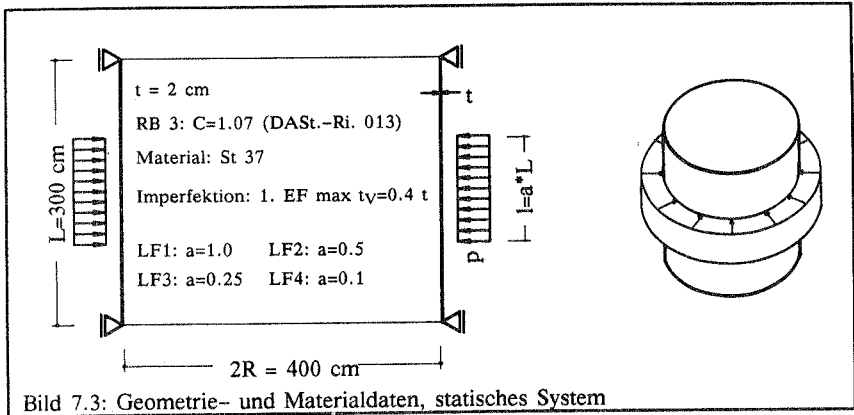


Bild 7.2: Verformungen des Zylinders im Traglastzustand (LF3)

7.2.3 Kreiszyylinder unter radialem, rotationssymmetrischem Ringaußendruck

7.2.3.1 Geometrie- und Materialdaten, statisches System

Mit den Geometriedaten von Bild 7.3 gehört der hier untersuchte Zylinder in die Kategorie der kurzen Zylinder, was durch die DASt-Ri. 013/DIN 18800 Teil 4 mit einem Beiwert $C=1.07$ zur Bestimmung der klassischen Beullast berücksichtigt wird. Die Schlankheit $\bar{\lambda}_s = \sqrt{\sigma_E/a} \sigma_{ki}$ entspricht mit 1.58 genau der Grenzschlankheit des elastischen Bereichs nach DASt-Ri. 013.



7.2.3.2 Imperfektion

Als Imperfektion dient die 1. Eigenform mit einer Amplitude von max $t_v=0.4 t$ entsprechend der einfachen Vorbeultiefe der Richtlinien.

7.2.3.3 Diskretisierung

Nach Flüge ergibt sich für den niedrigsten Eigenwert unter vollständiger, rotationssymmetrischer Belastung ein Beulmuster mit 7 Umfangsvollwellen und einer Längshalbwelle. Unter der Annahme, daß sich die Versagensfigur auch unter Ringlast nicht wesentlich ändert, sind alle Rechnungen am 180/7-Grad-Ausschnitt durchgeführt worden. Der Zylinder ist mit 4 Elementen in Umfangsrichtung und 12 über die Höhe diskretisiert worden.

7.2.3.4 Ergebnisse

Zunächst ist festzustellen, daß die Grenzlaster der geometrisch und materiell nichtlinearen Rechnung unterhalb der Werte des vollbelasteten Zylinders aus der DASt-Ri. 013 ($\alpha=0.7$) und der DIN 18800 Teil 4 ($\lambda_{s\phi}=1.32$, $\kappa_1=0.373$ entspricht $\alpha=0.65$) liegen (s. Bild 7.4).

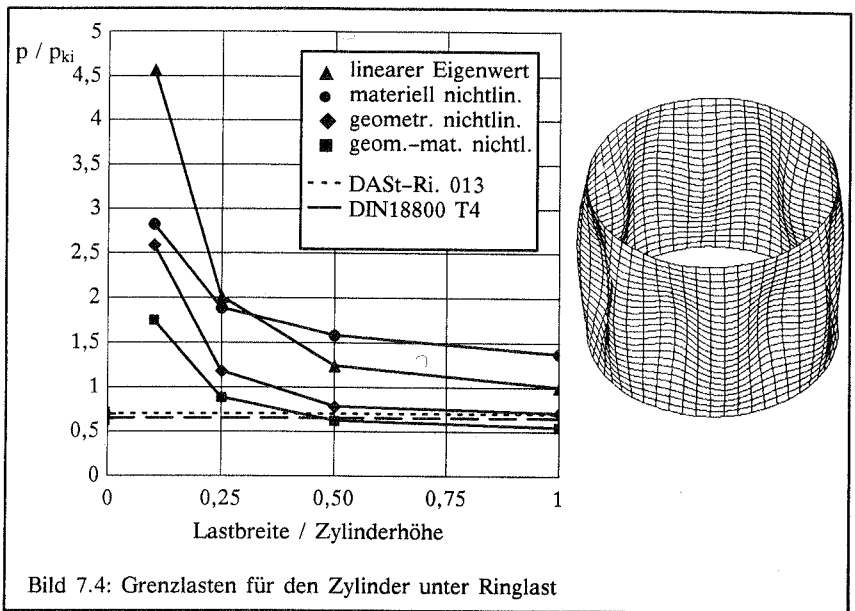


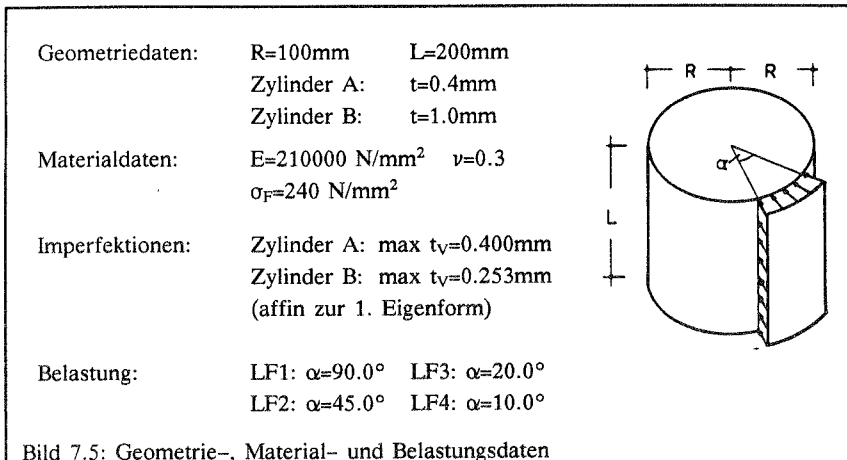
Bild 7.4: Grenzlaster für den Zylinder unter Ringlast

Ursächlich hierfür sind eintretende Plastifizierungen, die von der DAST-Ri. 013 bzw. der DIN18800 T4 bei diesem Schlankheitsgrad noch nicht berücksichtigt werden. Wird die Lastbreite reduziert, wächst die Differenz zwischen der geometrisch und der geometrisch-materiell nichtlinearen Rechnung, was auf den zunehmenden Einfluß des plastifizierenden Werkstoffs hinweist. Dennoch steigt die Intensität der Tragringlast an. Ein über die ganze Höhe angesetzter Ersatzlastfall unterschätzt bei schmalen Ringlasten die Tragfähigkeit des Systems deutlich.

7.2.4 Kreiszyylinder unter Teilaußendruck

7.2.4.1 Geometrie- und Materialdaten, statisches System

Betrachtet werden in dieser Studie zwei Zylinder mittlerer Länge mit R/t-Verhältnissen von 250 bei Zylinder A und 100 bei Zylinder B (s. Bild 7.5) unter vier Lastfällen. Die Rechnungen sind am 180°-Ausschnitt durchgeführt worden.



7.2.4.2 Ergebnisse

An beiden Zylindern sind geometrisch nichtlineare sowie geometrisch und materiell nichtlineare Rechnungen für die perfekte und imperfekte Geometrie durchgeführt worden. Exemplarisch werden hier Lastverformungskurven für die Lastfälle LF1 und LF4 der beiden Zylinder gezeigt (s. Bild 7.6 bis Bild 7.9). Die Traglasten für die imperfekte und die perfekte Schale sind in den Diagrammen von Bild 7.10 und Bild 7.11 dargestellt. Die Versagenslast wird auf die klassische Beullast für rotationssymmetrische Beanspruchung (Ersatzlast) bezogen. Wie auch bei den Untersuchungen in 7.2.2 und 7.2.3 kann für schmale Lastbreiten eine deutliche Zunahme der Traglasten festgestellt werden. Zur Erfassung breiterer Teillasten erweist sich das Ersatzlastbemessungskonzept jedoch als gut geeignet. Für den gedregungenen Zylinder B mit einem Verhältnis $R/t=100$ wird, wie auch schon in 7.2.3, deutlich, daß die DASt-Ri. 013 sowie die DIN 18800 T4 oberhalb der rechnerischen Traglasten liegen.

Die Imperfektionsempfindlichkeit ist unter derartigem Teilaußendruck, insbesondere für den dickeren Zylinder B, relativ gering und sinkt mit abnehmender Lastbreite. Die Lastverformungskurven für Zylinder A zeigen, daß Materialversagen erst für die Lastfälle LF3 ($\alpha=20^\circ$) und LF4 ($\alpha=10^\circ$) Einfluß auf die Höhe der Traglast hat. Bei Zylinder B liegt schon für LF1 ($\alpha=90^\circ$) eine Interaktion geometrischer und materieller Nichtlineari-

tät vor. Wie zu erwarten, verstärkt sich der traglastmindernde Einfluß des plastifizierenden Materials mit abnehmender Lastbreite.

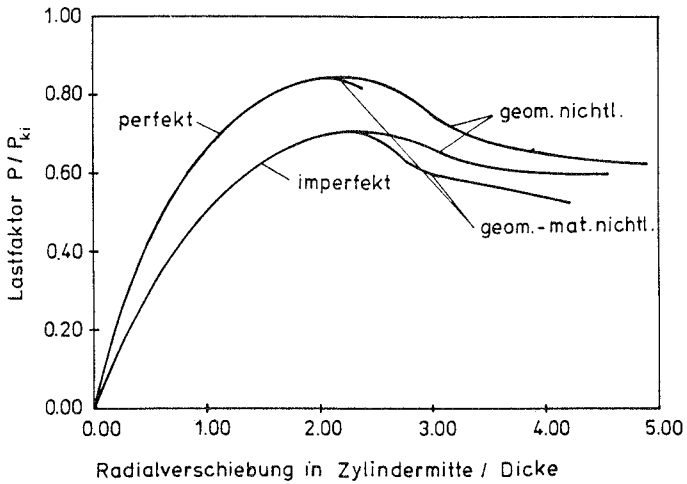


Bild 7.6: Zylinder A – Lastfall 1

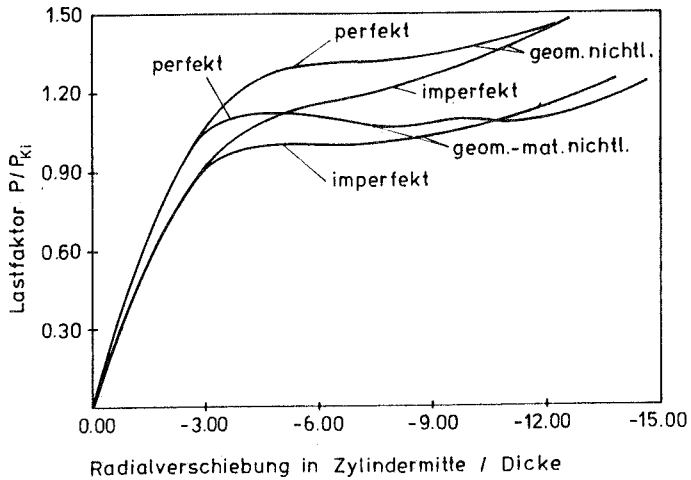


Bild 7.7: Zylinder A – Lastfall 4

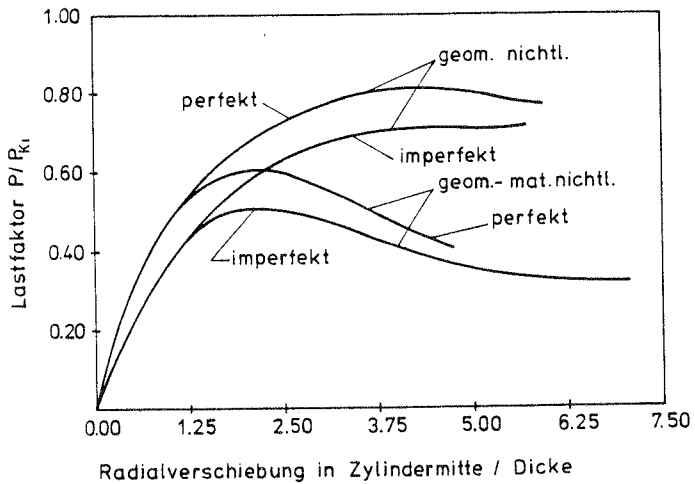


Bild 7.8: Zylinder B – Lastfall 1

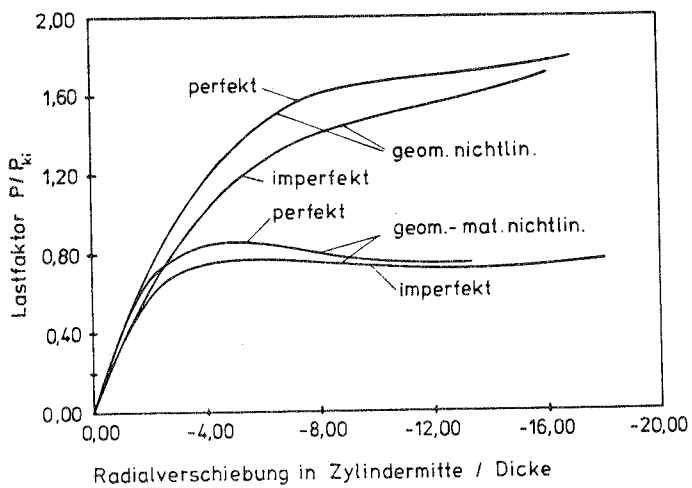
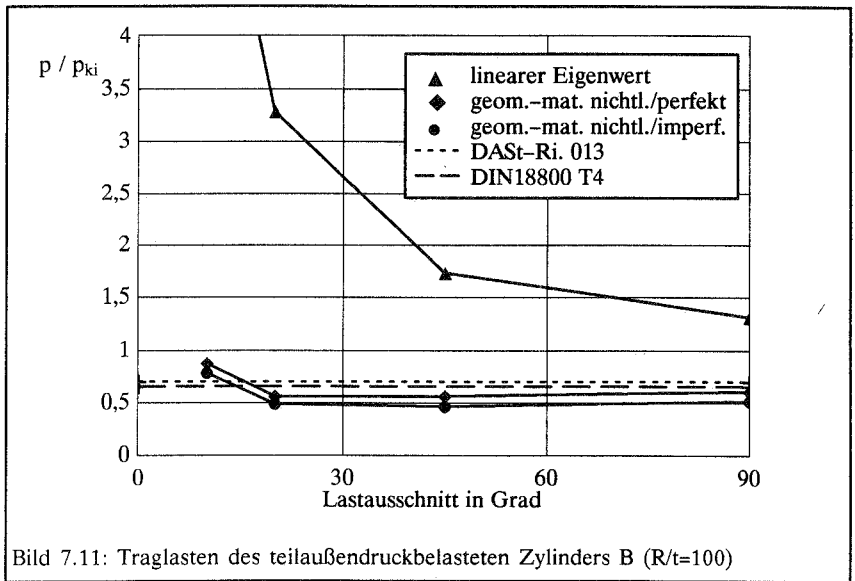
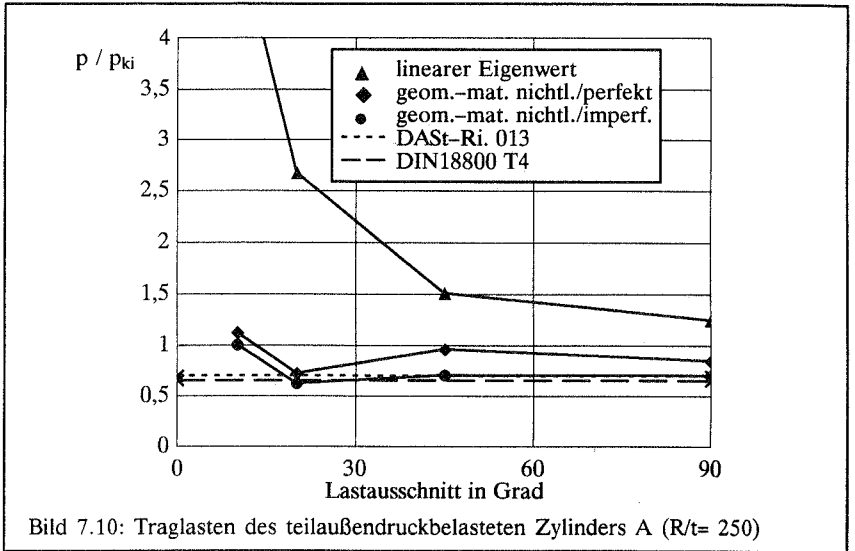


Bild 7.9: Zylinder B – Lastfall 4



7.2.5 Zusammenfassung

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß das Ersatzlastbemessungskonzept zur Bemessung der hier untersuchten Zylinder geeignet ist, solange die Lastbreiten nicht zu schmal werden, sonst jedoch weit auf der sicheren Seite liegt. Materialversagen im Einflußbereich der lokalen Lasten kann diesen Effekt nicht wesentlich mindern.

Für gedrungene außendruckbelastete Zylinder mit einem Verhältnis $R/t=100$ ist ein Abminderungsfaktor $\alpha=0.7$ gegenüber der klassischen Beullast nicht ausreichend.

7.3 Geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen an Kegelschalen

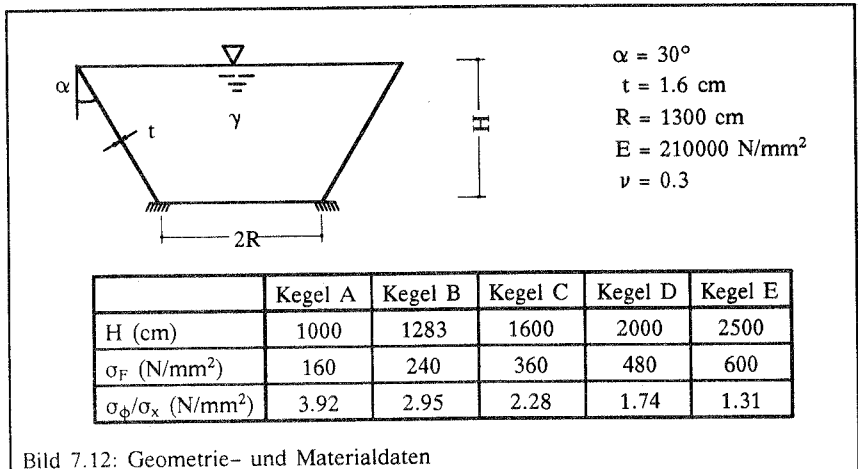
7.3.1 Parameterstudie an flüssigkeitgefüllten Kegelschalen

7.3.1.1 Ziel der Studie

Ziel der Studie ist es, die Größenordnung der Interaktion geometrischer Nichtlinearität, verursacht durch Längsdruckspannungen und materielle Nichtlinearität, hier wesentlich hervorgerufen durch große Ringzugspannungen, an einem Beispiel zu quantifizieren.

7.3.1.2 Geometrie- und Materialdaten, statisches System

Um das Ziel der Studie zu erreichen, werden Füllhöhe und somit das Verhältnis Umfangsspannung σ_ϕ zu Meridianspannung σ_x sowie Fließgrenze variiert. Die übrigen Geometrie- und Materialdaten bleiben konstant (s. Bild 7.12). γ ist die Wichte der Flüssigkeit und gleichzeitig der Lastfaktor, der während der nichtlinearen Rechnung gesteigert wird.



7.3.1.3 Diskretisierung

In [53] wird beschrieben, daß bei Zylindern unter Axiallast und Innendruck die axialsymmetrische Versagensfigur (Ringbeulen) bei zunehmenden Verschiebungen in einen unsymmetrischen Rautenbeulmodus umspringt, verbunden mit einem Lastabfall im Nachbeulbereich. Dieses Phänomen hat Stegmüller in [102] auch bei flüssigkeitsgefüllten Kegelschalen festgestellt. Auf die Höhe der elastischen Grenzlast und insbesondere der elasto-plastischen Traglast hat dieser Vorgang jedoch kaum Einfluß. Steigt das Verhältnis Ringspannung zu Meridianspannung, wird der Effekt unwesentlich bzw. tritt gar nicht mehr auf. Da es in dieser Studie nicht in erster Linie um das Verhalten der Kegel im Nachbeulbereich geht, sind nur rotationsymmetrische Versagensformen zugelassen worden. Über die Höhe werden zwölf Elemente (quadratische Ansatzfunktionen) benutzt, davon acht im unteren Viertel.

7.3.1.4 Imperfektionen

Den Kegeln wird eine rotationsymmetrische, zur ersten Eigenform affine Imperfektion mit einer Amplitude entsprechend der einfachen Wandstärke aufgebracht. Diese Imperfektionsform erweist sich in [102] von den dort untersuchten als maßgeblich.

7.3.1.5 Ergebnisse

Zur Aufbereitung der Resultate, um die Interaktion der Nichtlinearitäten sichtbar zu machen, aber auch um die hier erhaltenen Ergebnisse auf andere, ähnlich beanspruchte Kegel übertragen zu können, sind die Grenzlasten in Diagrammen aufbereitet worden, die im eindimensionalen Fall den κ - λ Kurven für Stäbe entsprechen (s.a. ECCS [34]).

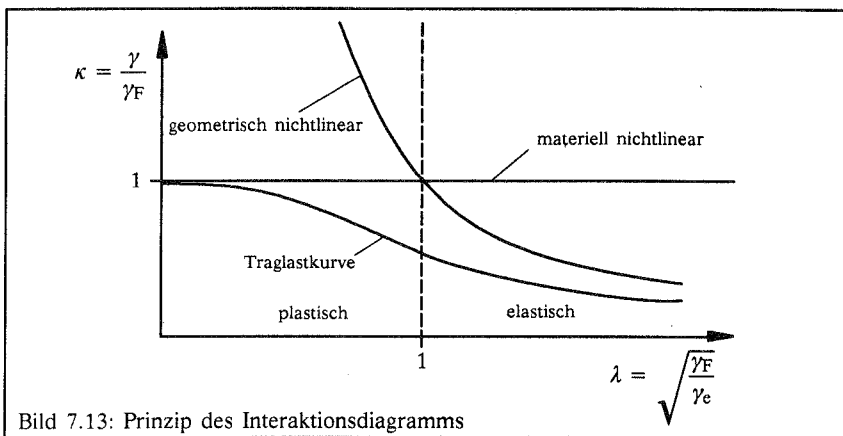


Bild 7.13: Prinzip des Interaktionsdiagramms

Der "Schlankheitsparameter" λ auf der Abszisse ist abhängig vom Quotienten γ_F / γ_e , worin γ_F die plastische und γ_e die elastische Grenzlast ist. Auf der Ordinate werden

die maximalen Lasten der nichtlinearen Rechnung bezogen auf γ_F aufgetragen. Eine prinzipielle Darstellung des Diagramms ist in Bild 7.13 zu sehen. Am Schnittpunkt der Kurven von geometrischer und materieller Nichtlinearität ist die größte Interaktion zu erwarten. Rechts davon nähert sich die Traglastkurve asymptotisch der Hyperbel für elastisches Versagen und links davon der konstanten Funktion für plastisches Versagen. Der Vorteil dieses Diagramms liegt darin, daß es das Tragverhalten mehrdimensional berücksichtigt. Dies ist gerade für die hier berechneten Kegel wichtig, da das elastische Versagen vom Längsdruck und das plastische durch Ringzugspannungen dominiert wird. Ein Diagramm, das nur Längsspannungen berücksichtigt, ist in diesem Fall nicht geeignet. Um aus derartigen Diagrammen für die Handrechnung geeignete Bemessungskurven zu entwickeln, kann analog zur ECCS γ_F näherungsweise aus dem Quotienten σ_F/σ_v berechnet werden, mit σ_F als Fließgrenze und σ_v als von Mises-Vergleichspannung, ermittelt aus Schnittgrößen nach der Membrantheorie an der am höchsten beanspruchten Stelle (Fußpunkt). Die Grenzlast γ_e für elastisches Versagen kann aus empirisch gewonnenen Formeln oder aber auch aus der klassischen Beullast, abgemindert um einen Faktor zur Berücksichtigung von Imperfektionen, berechnet werden. Dieser Faktor ist wiederum abhängig vom Verhältnis Umfangsspannung zu Meridianspannung. Die in dieser Studie erhaltenen Resultate sind in den Diagrammen von Bild 7.14 und Bild 7.15 zu sehen. γ_F ist hierin aus den Membranspannungen berechnet worden, γ_e jedoch aus einer nichtlinearen, elastischen Rechnung als erstem Maximalwert im Last-Verschiebungsdiagramm. Für die imperfekte Kegelgeometrie erhält man einen maximalen Abfall der Traglast zu einer rein geometrisch bzw. materiell nichtlinearen Rechnung von ca. 42%, für die perfekte Schale von ca. 32%. Als interessant erweist sich, daß die Kurve für die geometrisch nichtlineare Berechnung nahezu parallel zur Kurve des niedrigsten linearen Eigenwertes verläuft. Es ist naheliegend, daraus eine Beziehung für die Imperfektions-Abminderungs-Faktoren herzuleiten, doch bedarf es dazu noch weiterer Studien mit anderen Kegelgeometrien und Imperfektionsformen. Im folgenden sollen die Ergebnisse der FE-Rechnung den Tragfähigkeitsschätzungen der ECCS [34] und der DIN 18800 Teil 4 [31] gegenübergestellt werden (ohne Berücksichtigung von Sicherheitsfaktoren).

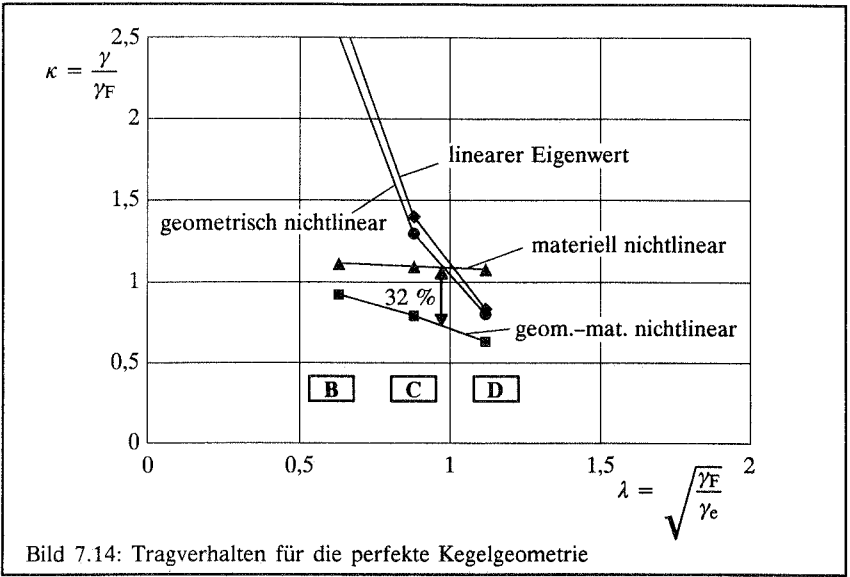


Bild 7.14: Tragverhalten für die perfekte Kegelgeometrie

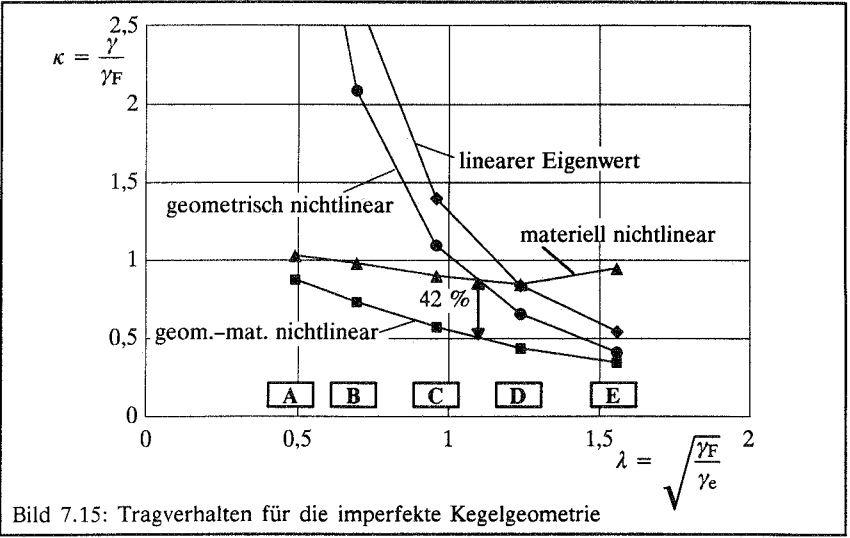
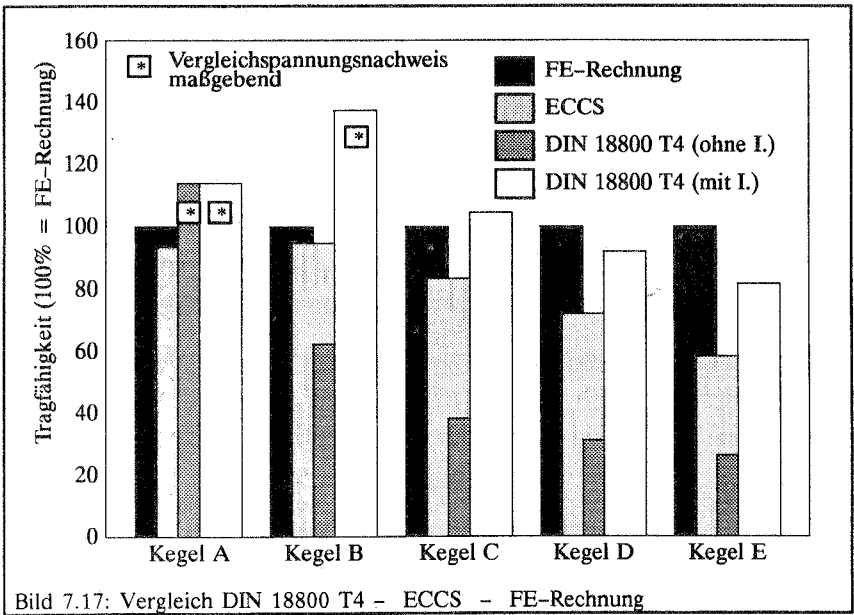
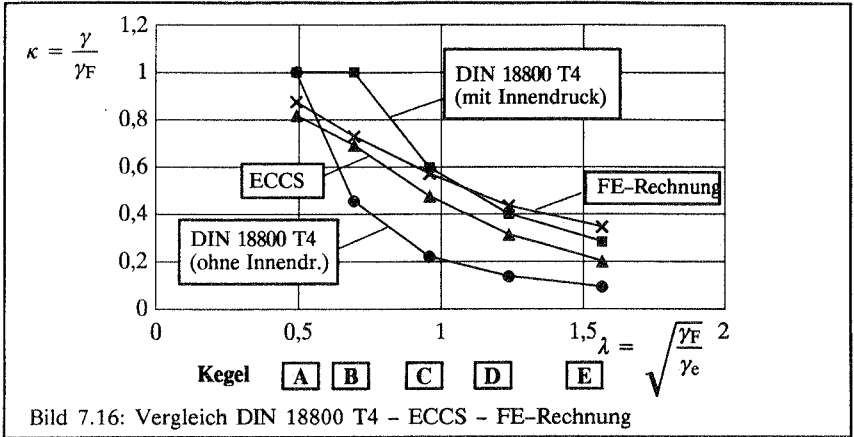


Bild 7.15: Tragverhalten für die imperfekte Kegelgeometrie



Im Bild 7.16 und Bild 7.17 ist deutlich zu sehen, daß die ECCS die Tragfähigkeit der Kegel, insbesondere der Kegel A bis C (hohe Ringzugspannungen), am besten erfaßt. Zurückzuführen ist dieses sicherlich auf die Berücksichtigung des mehrdimensionalen Beanspruchungszustands in der Richtlinie von Anfang an. Die DIN 18800 T4 beschreitet einen anderen Weg, indem für den Beulnachweis die Ringzugspannungen zunächst ver-

nachlässigt werden. Am Schluß des Nachweises können sie unter gewissen Voraussetzungen zu einer Steigerung des κ -Faktors führen, allerdings nicht für die hier gewählten Kegel, die "ringwulstartig, elasto-plastisch" beulen. Die Folge ist, daß das Tragverhalten der Kegel B bis E deutlich unterschätzt, das des Kegels A jedoch überschätzt wird. Werden die Ringzugspannungen dennoch berücksichtigt, nähert man sich zwar der Traglast der Kegel D und E, überschreitet sie jedoch für die Kegel A bis C mehr oder weniger stark.

Ein Nachweis nach der ECCS ist zu favorisieren, weil er nicht nur quantitativ die Traglast besser erfaßt, sondern die Art der Nachweisführung dem physikalischen Verhalten eher gerecht wird.

7.3.2 Versuchsnachrechnung der quecksilbergefüllten Kegelschalen von Vandepitte

7.3.2.1 Einleitende Bemerkungen

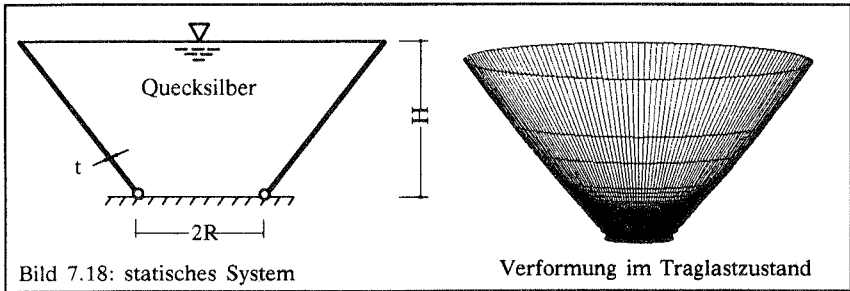
Mittels einer Quecksilberfüllung ist es Vandepitte [55] gelungen, Experimente an Stahlkegeln im elastoplastischen Bereich durchzuführen. Im Gegensatz zur Parameterstudie in 7.3.1 sind die Werkstoff- und Geometriedaten jedoch so gewählt, daß das Versagen in erster Linie von hohen Längsdruckspannungen verursacht wird. Von den zahlreichen Versuchen sind drei für die numerische Analyse ausgewählt worden. Um Aufschluß über den Versagensmechanismus zu erhalten, wurden am imperfekten sowie am perfekten System geometrisch nichtlineare, materiell nichtlineare und geometrisch und materiell nichtlineare Berechnungen durchgeführt.

7.3.2.2 Statisches System, Geometrie- und Materialdaten

Das statische System ist in Bild 7.18 dargestellt. Geometrie- und Materialdaten sind in Tafel 7.2 zu finden.

	F275SAD	F278SAD	F281SAD
R (mm)	100.60	100.00	99.92
t (mm)	0.5166	0.5843	0.6902
α (°)	39.9932	39.8981	39.8612
H (mm)	601.6	737.1	621.9
E (N/mm ²)	174590.9	191245.3	199010.8
σ_F (N/mm ²)	217.31	333.10	154.08
γ (N/mm ³ * 10 ⁻⁶)	132.916	132.945	132.896
IMP (%) *	0.38	0.22	0.35

Tafel 7.2: Geometrie- und Materialdaten, Belastung (s. [55])



Wie auch schon in 7.3.1 ist für die Rechnung rotationssymmetrisches Versagen unterstellt worden, obgleich im Traglast- und insbesondere im Nachbeulbereich ein Umspringen vom rotationssymmetrischen in einen asymmetrischen Verschiebungszustand wahrscheinlich ist.

7.3.2.3 Imperfektionen

Die maximale Vorbeultiefe war aus den Versuchsdaten bekannt. Mangels Aussagen über die Verteilung der Geometrieabweichung wird eine zur 1. Eigenform affine Imperfektion gewählt. Hierzu wurde das lineare Eigenwertproblem $(K_e + \lambda K_g) a = 0$ gelöst.

7.3.2.4 Ergebnisse

Die Ergebnisse der geometrisch und materiell nichtlinearen Rechnung mit Berücksichtigung der Imperfektionen an den Kegeln F278SAD und F281SAD weichen nicht einmal um 1% von den Versuchsergebnissen ab (s. Lastverformungskurven auf Bild 7.19 bis Bild 7.21). Eine derartig hohe Genauigkeit kann bei Versuchsnachrechnungen natürlich nur zufällig erzielt werden. Dennoch ist sie Indiz für gute numerische Simulation, aber ebenso für hervorragende Versuchsdurchführung und ausgezeichnete Meßergebnisse. Die Rechnung für den Kegel F275SAD liefert eine 5% niedrigere Traglast als die tatsächliche Versagenslast. Diese immer noch kleine Abweichung läßt sich möglicherweise dadurch erklären, daß im Versuch eine nicht so traglastmindernde Imperfektionsform vorhanden war, wie in der FE-Analyse unterstellt. Um den Einfluß der Imperfektionen zu quantifizieren, sind die nichtlinearen Rechnungen am perfekten sowie am imperfekten System durchgeführt worden. Die drei berechneten Kegel erweisen sich als relativ imperfektionsunempfindlich. Die höchsten Abminderungen zeigt Kegel F275SAD, der auch die größte, auf die Wanddicke bezogene Imperfektionsamplitude hat (s. Tafel 7.4). Die geometrisch nichtlineare Grenzlast des imperfekten Kegels F275SAD ist um 12% geringer als die des perfekten Kegels, die materiell nichtlineare um 17%. Mit 28% macht sich der Einfluß der Imperfektionen bei der geometrisch und materiell nichtlinearen Analyse am stärksten bemerkbar.

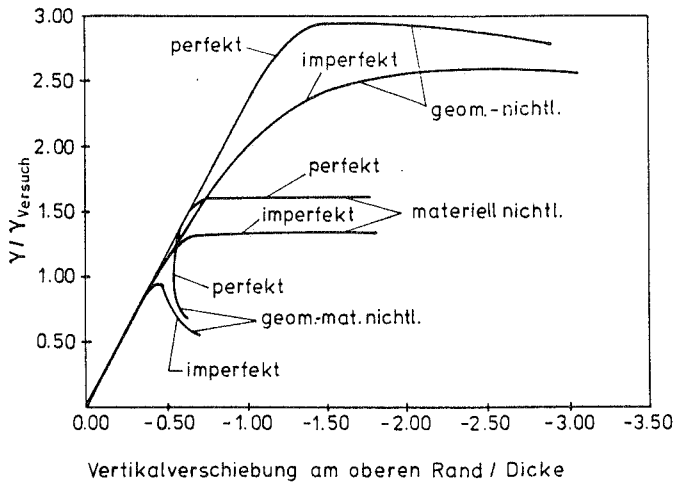


Bild 7.19: Last-Verformungs-Kurven des Kegels F275SAD

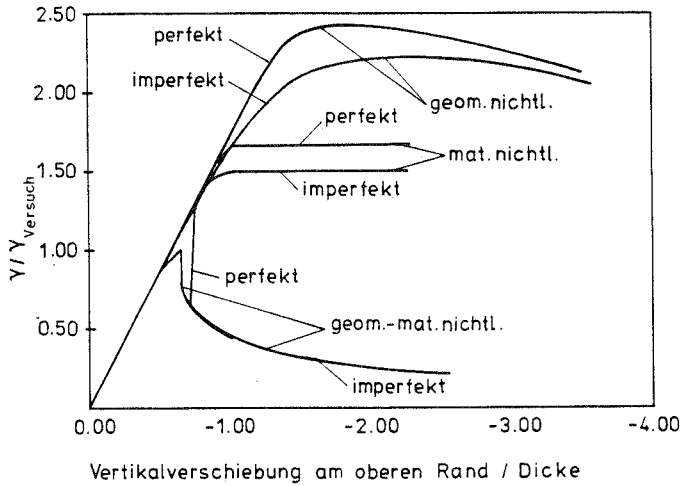


Bild 7.20: Last-Verformungs-Kurven des Kegels F278SAD

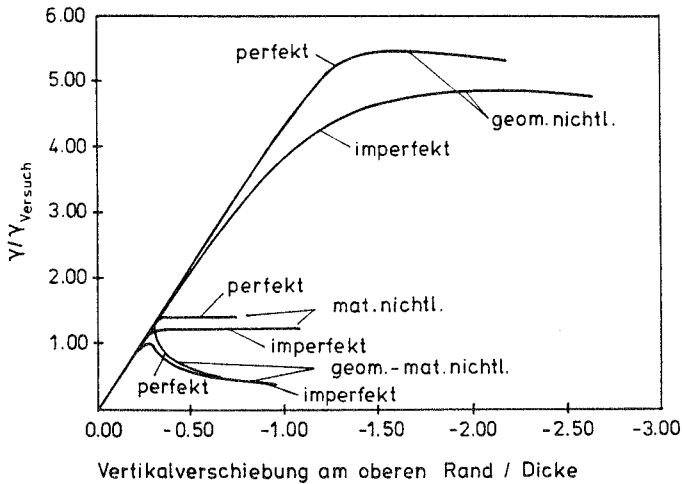


Bild 7.21: Last-Verformungs-Kurven des Kegels F281SAD

Zur Verdeutlichung der Interaktion sind die Ergebnisse in die Diagramme der Studie aus Abschnitt 7.3.1 (durchgezogenen Linien) eingetragen worden (s. Bild 7.22, Bild 7.23). Trotz anderer Geometrieverhältnisse und Randbedingungen liegen die Ergebnisse der FE-Rechnung der perfekten Schale fast exakt auf den zugehörigen Kurven der Parameterstudie. Etwas abgeschwächt, trifft diese Aussage auch auf die Resultate der imperfekten Kegel zu. Die größte Interaktion tritt für Kegel F278SAD auf (s. Tafel 7.3). Durch den Einfluß der geometrischen Nichtlinearität wird die rein plastische Grenzlast um immerhin 33% abgemindert.

Kegel	F275SAD	F278SAD	F281SAD
γ_{gm}^i/γ_m^i	0.71	0.67	0.82
γ_{gm}^p/γ_m^p	0.83	0.78	0.90

Tafel 7.3: Interaktion der Nichtlinearitäten

Kegel	F275SAD	F278SAD	F281SAD
t_v/t	0.22	0.12	0.17
γ_g^i/γ_g^p	0.88	0.92	0.89
γ_m^i/γ_m^p	0.83	0.90	0.87
$\gamma_{gm}^i/\gamma_{gm}^p$	0.72	0.77	0.79

- γ - Laststeigerungsfaktor
- p - perfektes System
- i - imperfektes System
- m - materiell nichtlineare Rechnung
- g - geometrisch nichtlineare Rechnung
- gm - geometrisch und materiell nichtlineare Rechnung

Tafel 7.4: Imperfektionsempfindlichkeit

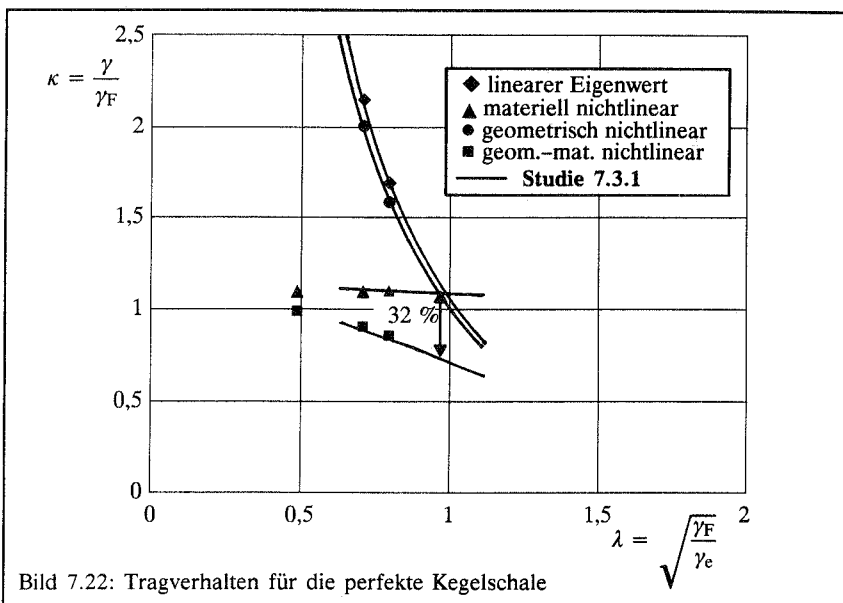


Bild 7.22: Tragverhalten für die perfekte Kegelschale

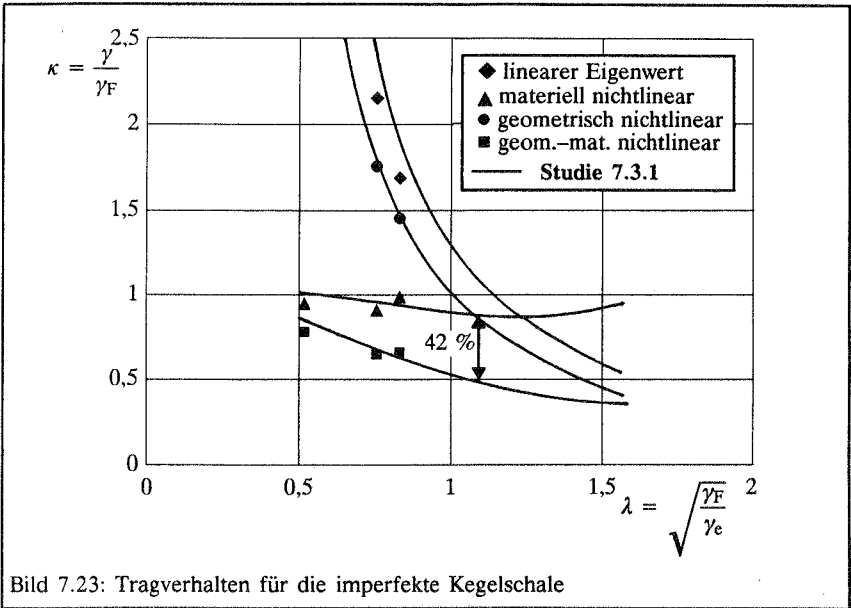


Bild 7.23: Tragverhalten für die imperfekte Kegelschale

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit sind Schalentheoriegleichungen hergeleitet worden, die von einem über die Schalendicke linear veränderlichen Verschiebungsfeld ausgehen. Sie basieren sowohl auf Green–Lagrange–Verzerrungsmaßen als auch auf Ingenieurverzerrungsmaßen. Die Gleichungen sind für große Rotationen und mit Ausnahme der Querschubverzerrungen für große Verzerrungen gültig. Für das Streichen der im Hinblick auf die Dickenkoordinate quadratischen Green–Lagrange–Verzerrungsanteile $\hat{\mathbf{E}}_Q$ wird eine Fehlerabschätzung angegeben.

Anschließend wird gezeigt, daß durch Degeneration von Körperelementen entstehende Schalenelemente mit den Elementen gleichwertig sein können, denen die vorgestellte Schalentheorie zugrunde liegt. Verschiedene Versionen der explizit in Dickenrichtung integrierten, degenerierten Elemente werden hinsichtlich der Schalentheorie eingeordnet. Die von Zienkiewicz et al. für explizit integrierte Elemente getroffene Annahme einer in Dickenrichtung konstanten, inversen Jacobi–Matrix des Schalenraums erweist sich als zu restriktiv. Die linear veränderliche, inverse Jacobi–Matrix bei Milford und Schnobrich führt auf Gleichungen, die nur unwesentlich von denen der Schalentheorie abweichen, aber aus mehr Termen bestehen. Es stellt sich heraus, daß der prinzipiell einzige Unterschied zwischen degenerierten Schalenelementen und finiten Schalentheorie–Elementen in der Art der Interpolation des Differenzvektors \mathbf{w} zwischen dem Schalendirektor der verformten und unverformten Konfiguration liegt. "Degeneriert" sind demnach Schalenelemente, die die kontinuumstypische Interpolation von \mathbf{w} verwenden. Als Schlußfolgerung kann festgestellt werden, daß es sich auch für degenerierte Elemente anbietet, von den Verzerrungsgleichungen der Schalentheorie in vektorieller Form auszugehen, wie z. B. in [94]–[97] und [67].

Ingenieurverzerrungen für "degenerierte" Schalenelemente zu benutzen, bietet sich für vorabintegrierte (explizit integrierte) Elemente nicht an, da sie nicht, wie entsprechende Schalentheorie–Elemente, die drei Komponenten des Rotationsvektors \mathbf{s} , sondern die neun Komponenten der rotierten, kovarianten Basisvektoren $\tilde{\mathbf{a}}_i$ interpolieren. Auch bei implizit in Dickenrichtung integrierten, degenerierten Elemente sind Ingenieurverzerrungen nicht vorteilhaft einsetzbar, da zur Bildung der tangentialen Steifigkeitsmatrix mehr Terme berücksichtigt werden müssen als bei Formulierungen mit Green–Lagrange–Verzerrungen.

Im Anschluß daran wird die bis dahin zurückgestellte Frage nach einer zur Beschreibung großer Rotationen geeigneten Wahl von Rotationsparametern diskutiert.

Die Tatsache, daß die Drehung eines Vektors um 180° z.B. durch alle Rodrigues–Rotationsvektoren der Länge π beschrieben wird, verursacht singuläre Steifigkeitsmatrizen bei degenerierten Elementen. Ein analoges Problem tritt bei einem Dreibein für Rotationen von 360° auf. Um einen stabilen (Newton–)Algorithmus zu erhalten, werden, wie z. B. in [92], [94]–[97], die Direktoren bzw. die Rotationsmatrizen kontinuierlich aktualisiert. Auf anderem Weg wie in [92] und [98] wird für dieses Verfahren eine symmetrische, tangentielle Steifigkeitsmatrix hergeleitet. Die Vorteile dieses Algorithmus zeigen numerische Beispiele mit degenerierten Schalenelementen.

Explizit vorgestellt wird ein degeneriertes Schalenelement mit Verbesserungen nach der "assumed strain"–Methode. Dieses Element besitzt die Option, mit 2 oder 3 Rotationsvariablen und mit einem gemittelten Knotendirektor oder mit mehreren zu arbeiten, und kann somit auf verschiedene Arten Knicke in Schalen berücksichtigen.

Um stets 3 Rotationsvariablen bezüglich globaler kartesischer Koordinaten verwenden zu können, unabhängig davon, ob eine Knickstelle vorliegt oder nicht, wird über eine Penalty–Formulierung diskret je Knoten die von der Schalentheorie mit Ingenieurverzerrungen bekannte Symmetriebedingung der Membranverzerrungen eingeführt. Anhand numerischer Beispiele, aber auch anschaulich, läßt sich zeigen, daß insbesondere 4–knotige Elemente für größere Penalty–Faktoren "locking"–Phänomene aufweisen.

Die mit degenerierten Elementen durchgeführten Stabilitäts– und Traglastuntersuchungen von Zylinder– und Kegelschalen bei konzentrierten Beanspruchungen dienen dem Zweck, die einschlägigen Bemessungsrichtlinien im Hinblick auf Wirtschaftlichkeit und Zuverlässigkeit zu untersuchen. Die Geometrie– und Materialdaten in den Parameterstudien sind so gewählt worden, daß die Schalen infolge geometrischer und gleichzeitig materieller Nichtlinearität versagen, weil die Grenzlast dieser Tragwerke für diesen Fall am schwierigsten vorauszusagen ist. Als Ergebnis der Studie an den teilbelasteten Zylindern kann festgehalten werden, daß das sogenannte Ersatzlastbemessungskonzept für nicht allzu konzentrierte Belastung gut geeignet ist, sonst jedoch weit auf der sicheren Seite liegt. Bei gedruckten, mit Außendruck belasteten Zylindern ($R/t=100$) ist ein Abminderungsfaktor $\alpha=0.7$ zur ideellen Beullast nicht ausreichend.

Die Studie an flüssigkeitsgefüllten Kegelschalen zeigt den großen Einfluß der Interaktion von geometrischer und materieller Nichtlinearität auf die Grenzlast des Systems. Im Gegensatz zur DIN 18800 T4, erfaßt die ECCS–Richtlinie diese Traglasten sehr gut, da ihre Vorgehensweise das physikalische Geschehen stärker berücksichtigt.

Die mit den Versuchsergebnissen der quecksilbergefüllten Kegelschalen überraschend gut übereinstimmenden numerischen Resultate können als wertvoller Hinweis auf die Güte der numerischen Simulation gewertet werden.

8.2 Ausblick

Die Zusammenführung des Degenerationskonzepts und der Schalentheorie kann aus theoretischer Sicht als abgeschlossen gelten. Aus numerischer Sicht sind jedoch die steiferen Ergebnisse der Schalentheorie-Elemente gegenüber den degenerierten Elementen in den Beispielen 6.7.3 und 6.7.5 noch nicht geklärt. Sie sind vermutlich auf die Interpolation der unbekanntem Weggrößenparameter zurückzuführen, die bei den Schalentheorie-Elementen von Ding [32] bezüglich krummliniger Koordinaten und bei den hier verwendeten degenerierten Elementen bezüglich orthogonal kartesischer Koordinaten durchgeführt wird. Weitere Untersuchungen hierzu sind notwendig.

Im Zusammenhang mit der Schalentheorie für große Verzerrungen stellen sich zwei noch offene Fragen, und zwar:

Wie groß ist der Fehler, der begangen wird, wenn die Hypothese "Normalspannungen in Dickenrichtung sind vernachlässigbar" benutzt wird?

Wie groß ist der Fehler im Vergleich zum 3D-Kontinuum, wenn wie üblich ein in Dickenrichtung linear veränderliches Verschiebungsfeld verwendet wird?

Ebenfalls noch nicht zufriedenstellend gelöst ist das Problem der "Drillsteifigkeit" der hier vorgestellten Schalenelemente. Die Auswirkungen des Penalty-Faktors auf nichtlineare Rechnungen und Eigenwertanalysen sowie die beschriebenen "locking"-Phänomene erfordern zusätzliche Studien.

9 Anhang 1

9.1 Größenordnungsabschätzungen bei Schalen

9.1.1 Abschätzungen für geometrische Größen der undeformierten Schale

Zur Abschätzung werden verwendet:

R – kleinster Hauptkrümmungsradius

h – Schalendicke

$\mathbf{a}_3 = \kappa \mathbf{d}$ – Schalendirektor, \mathbf{d} – Einheitsvektor

$\kappa = \frac{h}{h_0}$ – bezogene Schalendicke

\mathbf{r} – Ortsvektor zur Schalenmittelfläche

Wenn \mathbf{d} senkrecht zur Schalenmittelfläche steht, errechnet sich der (symmetrische) Krümmungstensor der Schalenmittelfläche zu $\mathbf{B}^0 = -\mathbf{d}_{;r}$. Dessen spektrale Norm, also der größte Eigenwert von \mathbf{B}^0 , ist die größte Hauptkrümmung $1/R$ [11].

$$\|\mathbf{B}^0\| = \frac{1}{R} \quad (9.1)$$

Die Größe \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = -\mathbf{a}_{3;r} = -(\kappa \mathbf{d})_{;r} = -\mathbf{d} \otimes \kappa_{;r} - \kappa \mathbf{d}_{;r} = -\mathbf{d} \otimes \kappa_{;r} + \kappa \mathbf{B}^0 \quad (9.2)$$

reduziert sich für den Fall, daß die Schalendicke schwach veränderlich ist, d. h.:

$$\frac{\mathbf{d} \otimes \kappa_{;r}}{\kappa} \ll \frac{1}{R} \quad (9.3)$$

zu:

$$\mathbf{B} \approx \kappa \mathbf{B}^0 = -\kappa \mathbf{d}_{;r} \quad (9.4)$$

Damit gilt für die Größenordnung von \mathbf{B} :

$$O(\|\mathbf{B}\|) = \frac{h}{h_0} \frac{1}{R} \quad (9.5)$$

Hiermit resultiert für die Norm des Schalen-Shifters $\mathbf{Z} = \mathbf{I} - \theta^3 \mathbf{B}$ mit (10.26) und (10.27) die Abschätzung:

$$\|\mathbf{Z}\| \leq 1 + \frac{h}{2R}, \quad \text{da} \quad -\frac{h_0}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h_0}{2} \quad (9.6)$$

Für die Norm des inversen Shifters erhält man mit dem v. Neumann-Lemma [44]:

$$\mathbf{Z}^{-1} = (\mathbf{I} - \theta^3 \mathbf{B})^{-1}, \quad \|\mathbf{Z}^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \frac{h}{2R}} = 1 + \frac{h}{2R} + \left(\frac{h}{2R}\right)^2 \dots \approx 1 + \frac{h}{2R} \quad (9.7)$$

Wenn die Dünne-Hypothese $h/R \ll 1$ gilt, können die Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden:

$$O(\|\mathbf{Z}^{-1}\|) = 1 + \frac{h}{2R} \quad (9.8)$$

Die Reihenentwicklung des inversen Shifters lautet:

$$\mathbf{Z}^{-1} = \mathbf{I} + \theta^3 \mathbf{B} + (\theta^3)^2 \mathbf{B}^2 + (\theta^3)^3 \mathbf{B}^3 + \dots \quad (9.9)$$

Über das Theorem von Cayley-Hamilton kann natürlich auch eine endliche Reihe angegeben werden.

9.1.2 Abschätzung für geometrische Größen der deformierten Schale

Zur Abschätzung werden verwendet:

\bar{R} – Hauptkrümmungsradius der verformten Schale

\bar{h} – Schalendicke der verformten Schale

h – Schalendicke der unverformten Schale

h_0 – Bezugswert, z. B. mittlere Dicke

$\bar{\mathbf{a}}_3$ – Schalendirektor nach der Verformung

$\bar{\kappa} = \chi \kappa$ – Dickenänderungsparameter $\bar{\kappa} = \frac{\bar{h}}{h} \frac{h}{h_0} = \frac{\bar{h}}{h_0}$

$\bar{\mathbf{d}}$ – normierter Direktor $\bar{\mathbf{d}} = \frac{\bar{\mathbf{a}}_3}{|\bar{\mathbf{a}}_3|}$

$\bar{\mathbf{d}}^*$ – Einheitsnormalenvektor auf der verformten Schalenmittelfläche

$\boldsymbol{\gamma}$ – Schubverzerrung $\boldsymbol{\gamma} = \bar{\mathbf{d}} - \bar{\mathbf{d}}^*$

$\bar{\mathbf{r}}$ – Ortsvektor zur verformten Schalenmittelfläche

Über die Zerlegung des Schalendirektors $\bar{\mathbf{a}}_3 = \bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}} = \bar{\kappa} (\bar{\mathbf{d}}^* + \boldsymbol{\gamma})$ kann der Krümmungstensor der verformten Schalenmittelfläche $\bar{\mathbf{B}}^* = -\bar{\mathbf{d}}^*_{;\bar{\mathbf{r}}}$ als Teil der geometrischen Größe $\bar{\mathbf{B}}$ erkannt werden:

$$\bar{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{a}}_{3;\bar{\mathbf{r}}} = (\bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}})_{;\bar{\mathbf{r}}} = \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\kappa}_{;\bar{\mathbf{r}}} + \bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}}_{;\bar{\mathbf{r}}} = \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\kappa}_{;\bar{\mathbf{r}}} + \bar{\kappa} \bar{\mathbf{d}}^*_{;\bar{\mathbf{r}}} + \bar{\kappa} \boldsymbol{\gamma}_{;\bar{\mathbf{r}}} \quad (9.10)$$

Als obere Grenze für die spektrale Norm von $\bar{\mathbf{B}}$ kann dann angegeben werden:

$$\|\bar{\mathbf{B}}\| \leq \|\bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\kappa}_{;F}\| + \bar{\kappa} \frac{1}{R} + \bar{\kappa} \|\boldsymbol{\gamma}_{;F}\| \quad (9.11)$$

Werden für den Schubgradienten $\boldsymbol{\gamma}_{;F}$ und den Dickenänderungsgradienten $\bar{\kappa}_{;F}$ die Ungleichungen:

$$\|\boldsymbol{\gamma}_{;F}\| \ll \frac{1}{R}, \quad \frac{\|\bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\kappa}_{;F}\|}{\bar{\kappa}} \ll \frac{1}{R} \quad (9.12)$$

erfüllt, gilt für die Größenordnung der spektralen Norm von $\bar{\mathbf{B}}$:

$$O(\|\bar{\mathbf{B}}\|) = \frac{\bar{h}}{h_0 R} \quad (9.13)$$

Für den Shifter $\bar{\mathbf{Z}}$ ist analog zu (9.6):

$$\|\bar{\mathbf{Z}}\| = \|\mathbf{I} - \theta^3 \bar{\mathbf{B}}\| \leq 1 + \frac{\bar{h}}{2R} \quad (9.14)$$

Und falls $\bar{h}/R \ll 1$:

$$O(\|\bar{\mathbf{Z}}^{-1}\|) = 1 + \frac{\bar{h}}{2R} \quad (9.15)$$

9.1.3 Abschätzungen für kinematische Größen

Die Norm der Ingenieurverzerrungen des Schalenraums entspricht der größten Hauptdehnung η :

$$\|\mathbf{H}\| = \eta \quad (9.16)$$

Damit können die Green-Lagrange-Verzerrungen über

$$\mathbf{U} = \mathbf{H} + \mathbf{I} \quad (9.17)$$

und

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{U}\mathbf{U} - \mathbf{I}) = \mathbf{H} + \frac{\mathbf{H}\mathbf{H}}{2} \quad (9.18)$$

abgeschätzt werden durch:

$$\|\mathbf{E}\| \leq \eta + \frac{\eta^2}{2} \quad (9.19)$$

Für die auf die Schalenmittelfläche bezogenen Green-Lagrange-Verzerrungen $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{Z}^T \mathbf{E} \mathbf{Z}$ folgt mit (9.6) und (9.19):

$$\|\hat{\mathbf{E}}\| \leq \left(1 + \frac{h}{2R}\right)^2 \|\mathbf{E}\| \leq \left(1 + \frac{h}{2R}\right)^2 \left(\eta + \frac{\eta^2}{2}\right) = \eta_E \quad (9.20)$$

Mit der Aufspaltung in hinsichtlich θ^3 konstante, lineare und quadratische Verzerrungsanteile gilt:

$$\|\hat{\mathbf{E}}\| = \|\hat{\mathbf{E}}_C + \theta^3(\hat{\mathbf{E}}_L + \theta^3\hat{\mathbf{E}}_Q)\| \leq \eta_E \quad (9.21)$$

Da (9.21) an jeder Stelle über die Schalendicke erfüllt sein soll, muß die Norm des konstanten Teils $\hat{\mathbf{E}}_C$ kleiner als η_E sein:

$$\|\hat{\mathbf{E}}_C\| \leq \eta_E \quad (9.22)$$

Die größte Hauptverkrümmung $\|\hat{\mathbf{E}}_L\|$ soll auf:

$$\|\hat{\mathbf{E}}_L\| \leq \frac{2}{h_0} \eta_E \quad (9.23)$$

begrenzt werden. Um die von $\hat{\mathbf{E}}_C$ und $\hat{\mathbf{E}}_L$ abhängige Größe $\hat{\mathbf{E}}_Q$ abschätzen zu können, werden die nachfolgenden Betrachtungen zur Norm des Deformationsgradienten und des Rotationstensors benötigt.

Die spektrale Norm für den Rotationstensor \mathbf{R} erhält man wegen $\mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ direkt über (10.28):

$$\|\mathbf{R}\| = 1 \quad (9.24)$$

Mit (9.16), (9.17) und (9.24) sowie den Rechenregeln für eine Matrizennorm ergibt sich für den Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{R}(\mathbf{H} + \mathbf{I})$:

$$\|\mathbf{F}\| \leq \eta + 1 \quad (9.25)$$

Für $\hat{\mathbf{F}}_C = \mathbf{F}|_{\theta^3=0}$ gilt die gleiche Abschätzung:

$$\|\mathbf{F}_C\| \leq \eta + 1 \quad (9.26)$$

Die obere Grenze der Norm des Ausdrucks $\mathbf{I} - \mathbf{F}_C\mathbf{F}_C^T$ kann ermittelt werden über:

$$\mathbf{I} - \mathbf{F}_C\mathbf{F}_C^T = \mathbf{R}_C(\mathbf{I} - \mathbf{U}_C\mathbf{U}_C)\mathbf{R}_C^T = -\mathbf{R}_C2\mathbf{E}_C\mathbf{R}_C^T \quad (9.27)$$

$$\|\mathbf{I} - \mathbf{F}_C\mathbf{F}_C^T\| = \|\mathbf{R}_C2\mathbf{E}_C\mathbf{R}_C^T\| \leq 2\eta_E \quad (9.28)$$

Unter der Voraussetzung verschwindender Schubgradienten $\boldsymbol{\gamma}_{,F}$ und Dickenänderungsgradienten $\bar{\boldsymbol{\kappa}}_{,F}$ (s. (9.12)) wird

$$\bar{\mathbf{B}} \approx \bar{\boldsymbol{\kappa}}\mathbf{B}^* \quad (9.29)$$

und damit symmetrisch.

Ist auch \mathbf{B} symmetrisch, so gilt für die Verkrümmungen $\hat{\mathbf{E}}_L$ mit $\mathbf{F}_L = -\bar{\mathbf{B}}\mathbf{F}_C$ (s. (3.27)):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{E}}_L &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_C^T\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_L^T\mathbf{F}_C + 2\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(-\mathbf{F}_C^T\bar{\mathbf{B}}\mathbf{F}_C - \mathbf{F}_C^T\bar{\mathbf{B}}^T\mathbf{F}_C + 2\mathbf{B}) \\ &\approx -\mathbf{F}_C^T\bar{\mathbf{B}}\mathbf{F}_C + \mathbf{B} \end{aligned} \quad (9.30)$$

bzw.:

$$\mathbf{B} \approx \hat{\mathbf{E}}_L + \mathbf{F}_C^T\bar{\mathbf{B}}\mathbf{F}_C \quad (9.31)$$

Der bezüglich θ^3 quadratische Verzerrungsanteil ist dann darstellbar als:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{E}}_Q &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_L - \mathbf{B}\mathbf{B}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{B} \mathbf{F}_C - \mathbf{B}\mathbf{B}) \\
 &\approx \frac{1}{2}(\mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{B} \mathbf{F}_C - \hat{\mathbf{E}}_L \hat{\mathbf{E}}_L - \hat{\mathbf{E}}_L \mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}_C - \mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}_C \hat{\mathbf{E}}_L - \mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}_C \mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}_C) \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} (\mathbf{I} - \mathbf{F}_C \mathbf{F}_C^T) \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}_C - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}_L \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}_C \hat{\mathbf{E}}_L \\
 &\text{mit (9.27):} \\
 &= -\mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{R} \hat{\mathbf{E}}_C \mathbf{R}^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}_C - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{E}}_L \mathbf{B} - \frac{1}{2} \mathbf{F}_C^T \overline{\mathbf{B}} \mathbf{F}_C \hat{\mathbf{E}}_L
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

Der Fehler durch das Vernachlässigen von $\hat{\mathbf{E}}_Q$ in $\hat{\mathbf{E}}$ kann abgeschätzt werden durch:

$$\begin{aligned}
 \|(\theta^3)^2 \hat{\mathbf{E}}_Q\| &\leq \frac{h_0^2}{4} \|\hat{\mathbf{E}}_Q\| \leq \frac{h_0^2}{4} \left[(1+\eta)^2 \left(\frac{\bar{h}}{h_0 \bar{R}} \right)^2 \eta_E + \frac{h \eta_E}{h_0^2 \bar{R}} + (1+\eta)^2 \frac{\bar{h}}{h_0 \bar{R}} \frac{\eta_E}{h_0} \right] \\
 &= \left[(1+\eta)^2 \left(\frac{\bar{h}}{\bar{R}} \right)^2 + \frac{h}{\bar{R}} + (1+\eta)^2 \frac{\bar{h}}{\bar{R}} \right] \frac{\eta_E}{4} \\
 &\approx \left(\frac{h}{\bar{R}} + (1+\eta)^2 \frac{\bar{h}}{\bar{R}} \right) \frac{\eta_E}{4} \leq \max \left(\frac{h}{\bar{R}}, (1+\eta)^2 \frac{\bar{h}}{\bar{R}} \right) \frac{\eta_E}{2}
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

Zusammenfassend gilt für den relativen Fehler:

Voraussetzungen:

$$\|\boldsymbol{\gamma}_{\cdot \mathbf{r}}\| \ll \frac{1}{\bar{R}}, \quad \frac{\|\bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\boldsymbol{\kappa}}_{\cdot \mathbf{r}}\|}{\bar{\kappa}} \ll \frac{1}{\bar{R}}$$

relativer Fehler:

$$\begin{aligned}
 \|\hat{\mathbf{E}}_Q\| / \|\hat{\mathbf{E}}\| &\leq \frac{1}{2} \max \left[\frac{h}{\bar{R}}, (1+\eta)^2 \left[\frac{\bar{h}}{\bar{R}} + \left(\frac{\bar{h}}{\bar{R}} \right)^2 \right] \right] \\
 &= \max \left[\frac{h}{2\bar{R}}, \frac{(1+2\eta_E)}{2} \left[\frac{\bar{h}}{\bar{R}} + \left(\frac{\bar{h}}{\bar{R}} \right)^2 \right] \right] \\
 &\approx \max \left(\frac{h}{2\bar{R}}, \frac{(1+2\eta_E)}{2} \frac{\bar{h}}{\bar{R}} \right) \quad \text{für } \frac{\bar{h}}{\bar{R}} \ll 1
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

9.2 Definition einer mathematischen Gruppe

Nach [35] lautet die Definition einer Gruppe: "Eine Gruppe ist ein Paar (G, \oplus) , bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung \oplus auf G , d.h. einer Abbildung

$$\oplus: G \times G \rightarrow G, \quad (a, b) \rightarrow a \oplus b$$

mit folgenden Eigenschaften (man nennt sie Gruppenaxiome):

G1 $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ für alle $a, b, c \in G$ (Assoziativgesetz)

G2 Es gibt ein Element $e \in G$ (neutrales Element von G)

mit folgenden Eigenschaften:

G2a $e \oplus a = a$ für alle $a \in G$

G2b Zu jedem $a \in G$ gibt es ein $\tilde{a} \in G$
(inverses Element zu a) mit $\tilde{a} \oplus a = e$

Eine Gruppe heißt abelsch, falls außerdem noch gilt:

$$a \oplus b = b \oplus a \quad \text{für alle } a, b \in G. "$$

Anwendung auf die Menge $SO(3)$:

$$SO(3) = \{\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \wedge \det \mathbf{R} = 1\}$$

Wie leicht nachzuweisen ist, gilt für die Rotationstensoren:

$$\mathbf{R}_3 = \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \in SO(3) \text{ für alle } \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1 \in SO(3),$$

ebenso das Assoziativgesetz,

und mit \mathbf{I} und $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$ gibt es in $SO(3)$ ein neutrales

und zu jedem \mathbf{R} ein inverses Element.

Allerdings ist im allgemeinen $\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 \neq \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$. Somit ist $SO(3)$ eine nicht kommutative Gruppe.

9.3 Beweis der Gleichung (5.25)

Zunächst wird gezeigt, daß:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{Q}\mathbf{s} \Rightarrow \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{s}}^* \mathbf{Q} = \hat{\mathbf{s}} \quad \text{mit } \mathbf{Q} \in \text{SO}(3), \text{ d.h. } (\det \mathbf{Q} = 1) \quad (9.35)$$

Multipliziert man den Ausdruck $\mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{s}}^* \mathbf{Q}$ von links und rechts mit den Basisvektoren, gilt:

$$\mathbf{i}_i^T \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{s}}^* \mathbf{Q} \mathbf{i}_j = \det(\mathbf{i}_i^*, \mathbf{s}^*, \mathbf{i}_j^*) = \det[\mathbf{Q}(\mathbf{i}_i, \mathbf{s}, \mathbf{i}_j)] = \det \mathbf{Q} \det(\mathbf{i}_i, \mathbf{s}, \mathbf{i}_j) = \mathbf{i}_i^T \hat{\mathbf{s}} \mathbf{i}_j \quad (9.36)$$

Folglich stimmt Gleichung (9.35). Wird die Beziehung :

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\mathbf{a}^T - \mathbf{b}^T\mathbf{a} \mathbf{I} \quad (9.37)$$

benutzt, kann (5.25) verifiziert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{s}^*) &= \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \hat{\mathbf{s}}^* + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\mathbf{s}}^* \hat{\mathbf{s}}^* \\ &= \mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \hat{\mathbf{s}}^* + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\hat{\mathbf{s}}^* \otimes \hat{\mathbf{s}}^* - (\hat{\mathbf{s}}^* \hat{\mathbf{s}}^*) \mathbf{I}) \\ &= \mathbf{Q} \left(\mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{Q}^T \hat{\mathbf{s}}^* \mathbf{Q} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s} - (\mathbf{s}\mathbf{s}) \mathbf{I}) \right) \mathbf{Q}^T \\ &= \mathbf{Q} \left(\mathbf{I} + \frac{\sin \phi}{\phi} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\mathbf{s}} \hat{\mathbf{s}} \right) \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{R}(\mathbf{s})\mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (9.38)$$

9.4 Ableitungen von "Rotationsgrößen" nach einem Parameter

Zur Linearisierung, aber auch um z.B. Winkelgeschwindigkeiten auszurechnen, werden die Ableitungen des Rotationstensors nach einem Parameter benötigt. Zunächst soll der Rotationstensor in Abhängigkeit der Euler-Parameter betrachtet werden:

$$\mathbf{R} = \mathbf{I} + \sin \phi \hat{\mathbf{e}} + (1 - \cos \phi) \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}} \quad (9.39)$$

ϕ und \mathbf{e} seien Funktionen eines Parameters ϵ :

$$\phi = \phi(\epsilon), \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}(\epsilon) \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}\mathbf{e} = 1 \quad (9.40)$$

Die Ableitung von \mathbf{R} nach ϵ führt auf:

$$\mathbf{R}' = \phi' \cos \phi \hat{\mathbf{e}} + \phi' \sin \phi \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}} + \sin \phi \hat{\mathbf{e}}' + (1 - \cos \phi)(\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}') \quad (9.41)$$

mit:

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{d\epsilon} \quad (9.42)$$

Die schiefssymmetrische Größe $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}'\mathbf{R}^T$, deren axialer Vektor $\boldsymbol{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit entspricht, falls ϵ der Zeitparameter ist, errechnet sich mit:

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{I} - \sin \phi \hat{\mathbf{e}} + (1 - \cos \phi) \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}} \quad (9.43)$$

zu:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{R}'\mathbf{R}^T = \phi' \hat{\mathbf{e}} + \sin \phi \hat{\mathbf{e}}' + (1 - \cos \phi)(\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}') \quad (9.44)$$

Um diese Formel zu erhalten, sind folgende Gleichungen benutzt worden:

$$\mathbf{e}\mathbf{e} = 1 \quad (9.45)$$

$$\mathbf{e}'\mathbf{e} = 0 \quad (9.46)$$

$$\hat{\mathbf{e}}\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (9.47)$$

$$\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}} (\mathbf{e} \otimes \mathbf{e} - (\mathbf{e}\mathbf{e})\mathbf{I}) = -\hat{\mathbf{e}} \quad (\text{wg. (10.11)}) \quad (9.48)$$

$$\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}} = -\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}} \quad (9.49)$$

$$\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}' - (\mathbf{e}'\mathbf{e})\mathbf{I}) = \mathbf{0} \quad (\text{wg. (10.11)}) \quad (9.50)$$

$$(\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}') = \hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}' - \hat{\mathbf{e}}'\hat{\mathbf{e}} \quad (\text{wg. (10.14)}) \quad (9.51)$$

Der axiale Vektor $\boldsymbol{\omega}$ ergibt sich aus (9.44) zu:

$$\boldsymbol{\omega} = \phi' \mathbf{e} + \sin \phi \mathbf{e}' + (1 - \cos \phi)\hat{\mathbf{e}}\mathbf{e}' \quad (9.52)$$

Nun soll Gleichung (9.52) durch den Rodrigues-Rotationsvektor ausgedrückt werden. Einsetzen der folgenden Formeln:

$$\mathbf{s} = \phi \mathbf{e} \quad (9.53)$$

$$\phi = \sqrt{\mathbf{s}\mathbf{s}} \quad (9.54)$$

$$\phi' = \frac{\mathbf{ss}'}{\sqrt{\mathbf{ss}}} = \frac{\mathbf{ss}'}{\phi} \quad (9.55)$$

$$\phi' \mathbf{e} = \mathbf{s} \frac{\phi'}{\phi} = \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\mathbf{ss}} \mathbf{s}' = \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\phi^2} \mathbf{s}' \quad (9.56)$$

$$\mathbf{e}' = \left(\frac{\mathbf{s}}{\phi} \right)' = \frac{\mathbf{s}'}{\phi} - \frac{\phi'}{\phi} \mathbf{e} = \left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{ss}}} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{(\mathbf{ss})^{3/2}} \right) \mathbf{s}' = \left(\frac{1}{\phi} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\phi^3} \right) \mathbf{s}' \quad (9.57)$$

führt auf:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\phi^2} \mathbf{s}' + \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{I} - \frac{\sin \phi}{\phi^3} (\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}) \mathbf{s}' + \frac{1 - \cos \phi}{\phi} \hat{\mathbf{s}} \left(\frac{1}{\phi} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\phi^3} \right) \mathbf{s}' \quad (9.58)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \left[\frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{1}{\phi^2} - \frac{\sin \phi}{\phi^3} \right) \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \right] \mathbf{s}' \quad (9.59)$$

Die Beziehung zwischen $\boldsymbol{\omega}$ und \mathbf{s} wird durch die Matrix \mathbf{T} hergestellt:

$$\mathbf{T}(\mathbf{s}) = \frac{\sin \phi}{\phi} \mathbf{I} + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\mathbf{s}} + \left(\frac{1}{\phi^2} - \frac{\sin \phi}{\phi^3} \right) \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \quad (9.60)$$

Die Inverse von \mathbf{T} lautet:

$$\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{s}) = \frac{\phi}{\tan \frac{\phi}{2}} \mathbf{I} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{1}{\phi^2} - \frac{1}{2\phi \tan \frac{\phi}{2}} \right] \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \quad (9.61)$$

was durch Multiplikation mit \mathbf{T} nachgewiesen werden kann.

Als Ableitung von \mathbf{T} erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{s})' &= \left(\frac{\phi \cos \phi - \sin \phi}{\phi^3} \mathbf{I} + \frac{-2 + \phi \sin \phi + 2 \cos \phi}{\phi^4} \hat{\mathbf{s}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-2 - \cos \phi) \phi + 3 \sin \phi}{\phi^5} \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} \right) \mathbf{ss}' \\ &\quad + \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} \hat{\mathbf{s}}' + \left(\frac{1}{\phi^2} - \frac{\sin \phi}{\phi^3} \right) (\mathbf{s}' \otimes \mathbf{s} + \mathbf{s} \otimes \mathbf{s}') \end{aligned} \quad (9.62)$$

An der Stelle $\mathbf{s}=\mathbf{0}$ ($\phi=0$) ist $\mathbf{T}(\mathbf{s})'$ ebenso wie \mathbf{T} endlich:

$$\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{I} \quad (9.63)$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{0})' = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{s}} \quad (9.64)$$

da die Grenzwerte:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{\phi} = 1 \quad (9.65)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} = \frac{1}{2} \quad (9.66)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \phi}{\phi^2} = \frac{1}{2} \quad (9.67)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\phi - \sin \phi}{\phi^3} = \frac{1}{6} \quad (9.68)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\phi \cos \phi - \sin \phi}{\phi^3} = -\frac{1}{3} \quad (9.69)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{-2\phi \sin \phi + 2 \cos \phi}{\phi^4} = -\frac{1}{12} \quad (9.70)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{(-2 - \cos \phi)\phi + 3 \sin \phi}{\phi^5} = -\frac{1}{60} \quad (9.71)$$

existieren (nachweisbar mit den Regeln von de l'Hospital).

10 Anhang 2: Schreibweise und einige Rechenregeln

10.1 Symbole

- Indizes:

griechisch	$a \in [1, 2]$
lateinisch	$i \in [1, 2, 3]$
- Skalar: a
- Vektor: $\mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i = a_i \mathbf{g}^i$ (**)
- Tensor 2. Stufe oder Matrix: $A = A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \dots$ (**)
- Tensor 4. Stufe: $A = A^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = \dots$
- Kronecker-Delta:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$
- Identitätstensor 2. Stufe (Metriktensor):

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \delta_i^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^i \\ &= g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = g^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \end{aligned}$$
- Identitätstensor 4. Stufe:

$$\mathbf{I} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$$
- Permutationssymbol:

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j) \cdot \mathbf{g}_k = \det[\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k]$$

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +\sqrt{g} & \text{für } ijk = 123, 231, 312 \\ -\sqrt{g} & \text{für } ijk = 213, 132, 321 \\ 0 & \text{für } ijk = \text{sonst} \end{cases}$$

$$\sqrt{g} = \det[\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3]$$

10.2 Multiplikationen

- Multiplikation mit einem Skalar:

$$\mathbf{b} = a\mathbf{a} = b^i \mathbf{g}_i = a a^i \mathbf{g}_i$$

$$\mathbf{B} = a\mathbf{A} = B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = a A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$
- Multiplikation mit Summation(**) über den letzten Index des ersten Faktors und den ersten Index des zweiten Faktors:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a}\mathbf{b} \quad (= \mathbf{a}^T \mathbf{b}) = a^i b^j \mathbf{g}_i \mathbf{g}_j = a^i b^j \mathbf{g}_{ij} = a^i b_{i\dots} \quad (***)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}\mathbf{a} = b^i \mathbf{g}_i = (A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j)(a_k \mathbf{g}^k) = A^{ij} a_j \mathbf{g}_i$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C} &= B^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = (A^{ir} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_r)(C^{mjkl} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) \\ &= A^{ir} C^{mjkl} g_{rm} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = A^{ir} C_r^{jkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \end{aligned}$$

- Multiplikation mit Summation über die beiden letzten Indizes des ersten Faktors und den beiden ersten Indizes des zweiten Faktors:

$$\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot (B^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) = A^{ij} B^{kl} \mathbf{g}_{ik} \mathbf{g}_{jl} = A^{ij} B_{ij}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = (C^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) \cdot (A^{rs} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_s) = C^{ijkl} A_{kl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = (A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot (C^{mnrst} \mathbf{g}_m \otimes \mathbf{g}_n \otimes \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_t) = A_{ij} C^{ijrs} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_s = B^{rs} \mathbf{g}_r \otimes \mathbf{g}_s$$

- Spur einer Matrix oder eines Tensors 2. Stufe:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = (A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \cdot (\mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_k) = A^{ij} \delta_i^k \mathbf{g}_{jk} = A^k_k$$

- Multiplikation ohne Summation (tensorielles Produkt):

$$\mathbf{B} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}^T = B^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = (a^i \mathbf{g}_i) \otimes (b^j \mathbf{g}_j) = a^i b^j \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \quad ***)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} &= C^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = (A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j) \otimes (B^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) \\ &= A^{ij} B^{kl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l \end{aligned}$$

- Vektorprodukt:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = c_i \mathbf{g}^i = a^j \mathbf{g}_j \times b^k \mathbf{g}_k = a^j b^k \epsilon_{jki} \mathbf{g}^i$$

$$= \hat{\mathbf{a}} \mathbf{b} = (\epsilon_{jki} a^j \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k) (b^l \mathbf{g}_l) = \epsilon_{jki} a^j b^k \mathbf{g}^i$$

$$\hat{\mathbf{a}} = \hat{a}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \epsilon_{kji} a^k \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = -\epsilon_{ijk} a^k \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \quad ****)$$

Anmerkungen zu Abschnitt 10.1 und 10.2:

- *) Die Punkte ... stehen für die Ausdrücke mit anderen Indexstellungen, natürlich unter Wahrung der Reihenfolge der Indizes.
- ***) Die Summation geschieht grundsätzlich nur über gegenständige, gleiche Indizes (einer oben, einer unten).
- ****) Obgleich nicht erforderlich, wird in der Arbeit manchmal zur übersichtlicheren Darstellung das "Transponiert-Zeichen" T bei Vektoren verwendet.
- *****) Das "Dach" ^ auf einem Vektor symbolisiert eine antisymmetrische Matrix oder einen antimetrischen zweistufigen Tensor. Die Matrix bzw. der Tensor haben diesen Vektor als axialen Vektor. Das Kreuzprodukt ist so als Produkt einer Matrix mit einem Vektor schreibbar. Ein "Dach" auf einer Matrix oder einem Tensor 2. Stufe hat in dieser Arbeit keine besondere Bedeutung, sondern dient nur zur Unterscheidung von anderen Größen.

10.3 Ableitungen

• Partielle Ableitung bezüglich krummliniger Koordinaten $\theta^i : ()_{,i} = \frac{\partial ()}{\partial \theta^i}$

• Kovariante Ableitung bzgl. des Schalenraums im Ausgangszustand: $()_{|i}^*$

$$v_{i|j}^* = v_{i,j} - \Gamma_{ij}^{k*} v_k \quad (10.1)$$

mit dem Christoffel-Symbol: $\Gamma_{mi}^{k*} = g_{m,i} g^{k*} = -g^{k,i} g_m$

• Kovariante Ableitung bzgl. der Schalenmittelfläche im Ausgangszustand: $()_{|i}$

$$v_{i|j} = v_{i,j} - \Gamma_{ij}^k v_k \quad (10.2)$$

Für eine Schale gilt mit $a_{3,3} = 0$ und $a^{3,3} = 0$:

$$\begin{aligned} \text{Christoffel-Symbol:} \quad \Gamma_{mi}^k &= a_{m,i} a^k = -a^{k,i} a_m \\ \Gamma_{33}^k &= \Gamma_{m3}^3 = 0 \quad ; \quad b_{\beta}^{\alpha} = -\Gamma_{3\beta}^{\alpha} \end{aligned} \quad (10.3)$$

• Gradient bzgl. des Ortsvektors $x(\theta^i)$ des Ausgangszustands:

$$\begin{aligned} a_{,x} &= \frac{\partial a}{\partial x^j} \otimes i^j = \frac{\partial a}{\partial \theta^k} \frac{\partial \theta^k}{\partial x^j} \otimes i^j = a_{,k} \otimes g^k = (a_m g^m)_{,k} \otimes g^k \\ &= (a_{m,k} g^m + a_m g^m_{,k}) \otimes g^k = (a_{m,k} - a_n \Gamma_{mk}^n) g^m \otimes g^k \\ &= a_{m|k}^* g^m \otimes g^k = \nabla_x a = \text{GRAD}a \end{aligned} \quad (10.4)$$

• Gradient bzgl. des Ortsvektors $\bar{x}(\theta^i)$ des verformten Zustands:

$$a_{,\bar{x}} = \frac{\partial a}{\partial \bar{x}^j} \otimes i^j = \frac{\partial a}{\partial \theta^k} \frac{\partial \theta^k}{\partial \bar{x}^j} \otimes i^j = a_{,k} \otimes \bar{g}^k = \nabla_{\bar{x}} a = \text{grad}a \quad (10.5)$$

• Divergenz bzgl. $x(\theta^i)$:

$$\begin{aligned} \text{DIV}A &= \text{GRAD}A \cdot I = \left((A^{ij} g_i \otimes g_j)_{,k} \otimes g^k \right) \cdot (g^l \otimes g_l) \\ &= (A^{ij}{}_{,k} g_i \otimes g_j \otimes g^k) \cdot (g^l \otimes g_l) = A^{ij}{}_{|k}{}^* g_i \otimes g_j \otimes g^k = A^{ij|l}{}^* g_i = A_{,i} g^i \end{aligned} \quad (10.6)$$

• Divergenz bzgl. $\bar{x}(\theta^i)$:

$$\text{div}A = \text{grad}A \cdot I = A_{,i} \bar{g}^i \quad (10.7)$$

• 2-fache Ableitung eines Skalars π nach einem Tensor $E = \epsilon_{ij} g^i \otimes g^j$:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial E \otimes \partial E} = \pi_{,E \otimes E} = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} g_i \otimes g_j \otimes g_k \otimes g_l = C^{ijkl} g_i \otimes g_j \otimes g_k \otimes g_l \quad (10.8)$$

10.4 Einige Formeln zur Vektor-, Matrizen- und Tensorrechnung

- Matrizen-Skalarprodukt (vollständige Überschiebung)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{BC} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{AC}^T \cdot \mathbf{B} \quad (10.9)$$

In Indexschreibweise:

$$A_{ij} B^i_k C^{kj} = B_k^i A_{ij} C^{kj} = A_{ij} C^{jk} B^i_k \quad (10.10)$$

Das bedeutet, daß zuerst die Multiplikation ohne Punkt und dann die mit Punkt ausgeführt wird.

- Produkte mehrerer Vektoren

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{ba}) \mathbf{I} \quad (10.11)$$

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - (\mathbf{ba}) \mathbf{c} \quad (10.12)$$

$$\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{c}}\mathbf{d} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})) = (\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{bc})(\mathbf{ad}) = \mathbf{b}(\mathbf{d} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{ad})\mathbf{I}) \mathbf{c} \quad (10.13)$$

$$\hat{\hat{\mathbf{a}}}\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{ba}^T - \mathbf{ab}^T = \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} - \hat{\mathbf{b}}\hat{\mathbf{a}} \quad (10.14)$$

- Gaußscher Integralsatz

$$\iiint_V \text{DIV} \mathbf{A} \, dV = \iint_A \mathbf{Ae} \, dA \quad (10.15)$$

- "Produkt-Regel"

$$\text{DIV}(\mathbf{aA}) = \mathbf{a} \text{DIV} \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \text{GRAD} \mathbf{a} \quad (10.16)$$

- Eigenwerte und Invarianten einer quadratischen Matrix

Dem Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (10.17)$$

ist für reelle 3x3 Matrizen das charakteristische Polynom

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1(\mathbf{A})\lambda^2 - I_2(\mathbf{A})\lambda + I_3(\mathbf{A}) = 0 \quad (10.18)$$

als Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte zugeordnet. Die Koeffizienten des Polynoms sind die Invarianten von \mathbf{A} :

$$I_1(\mathbf{A}) = \text{tr} \mathbf{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad (10.19)$$

$$I_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} ((\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)) = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 \quad (10.20)$$

$$I_3(\mathbf{A}) = \det \mathbf{A} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \quad (10.21)$$

- Ableitung der Invarianten nach ihrer Matrix

$$\frac{\partial I_1(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{I} \quad (10.22)$$

$$\frac{\partial I_2(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{I} - \mathbf{A} \quad (10.23)$$

$$\frac{\partial I_3(\mathbf{A})}{\partial \mathbf{A}} = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} \quad (10.24)$$

- Norm einer Matrix [44]

Die Norm $\| \cdot \|$ einer Matrix muß folgenden Bedingungen genügen:

$$\| \mathbf{A} \| \geq 0 \quad ; \quad \| \mathbf{A} \| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (10.25)$$

$$\| c\mathbf{A} \| = |c| \| \mathbf{A} \| \quad (10.26)$$

$$\| \mathbf{A} + \mathbf{B} \| \leq \| \mathbf{A} \| + \| \mathbf{B} \| \quad (10.27)$$

Für quadratisch Matrizen gilt ferner:

$$\| \mathbf{A}\mathbf{B} \| \leq \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{B} \| \quad (10.28)$$

In dieser Arbeit wird nur die spektrale Norm verwendet:

$$\| \mathbf{A} \| = \sqrt{\lambda^*} \quad ; \quad \lambda^* = \text{maximaler Eigenwert von } \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (10.29)$$

Die zur spektralen Norm gehörige Vektornorm ist:

$$\| \mathbf{v} \| = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = |\mathbf{v}| \quad (10.30)$$

Wichtig in Zusammenhang mit Größenordnungsabschätzungen ist das v. Neumann-Lemma [44]:

$$\frac{1}{1 + \| \mathbf{A} \|} \leq \| (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| \mathbf{A} \|} \quad ; \quad \| \mathbf{A} \| \leq 1 \quad (10.31)$$

11 Literatur

- [1] Abdellah, G. A.-H.: Eine Finite-Element-Methode zur Berechnung beliebiger Faltwerke. Bericht Nr. 73-10 aus dem Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig, Braunschweig (1973).
- [2] Ahmad, S.; Irons, B.M.; Zienkiewicz, O.C.: Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axi-symmetric problems. Proc. 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics. Wright-Patterson A.F. Base, Ohio (1968).
- [3] Ahmad, S.; Irons, B.M.; Zienkiewicz, O.C.: Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 2, 419-451 (1970).
- [4] Ahrens, H.; Dinkler, D.: Finite-Element-Methoden Teil I. Bericht Nr.88-50 des Instituts für Statik der TU Braunschweig (1988).
- [5] Andelfinger, U.: Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke. Bericht 13 des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart (1991).
- [6] Argyris, J. H.; Scharpf, D.W.: The SHEBA family of shell elements for the matrix displacement method. The Aeron. J. of the Royal Aeron. Soc., Vol. 72, 873-883 (1968), Vol. 73, 423-426 (1969).
- [7] Argyris, J. H.; Mlejnek, H.-P.: Die Methode der finiten Elemente. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1987).
- [8] Başar, Y.: Eine konsistente Theorie für Flächentragwerke endlicher Verformungen und deren Operatorarstellung auf variationstheoretischer Grundlage. ZAMM 66, 7, 297-308 (1986).
- [9] Başar, Y.; Ding, Y.: Theory and finite element formulation for shell structures undergoing finite rotations. Advances in the theory of plates and shells. Eds. G.Z. Voyiadjis and D. Karamanlidis, Amsterdam (1990).
- [10] Başar, Y.; Ding, Y.: Finite-rotation shell elements for the analysis of finite rotation shell problems. Extended abstract of lectures. Second World Congress on Computational Mechanics, August 27-31, 1990, Stuttgart, Germany.
- [11] Başar, Y.; Krätzig, W.B.: Mechanik der Flächentragwerke. Vieweg & Sohn, Braunschweig (1985).
- [12] Başar, Y.; Krätzig, W.B.: Vorlesungsskript Flächentragwerke II. Ruhr-Universität Bochum (1986).

- [13] Bathe, K.-J.; Ho, L. W.: A simple and effective element for analysis of general shell structures. *Computers and Structures*, 673–681 (1981).
- [14] Bathe, K.-J.: *Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo (1986).
- [15] Becker, E.; Bürger, W.: *Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher. Stuttgart (1975).
- [16] Belytschko, T.; Wong, B. L., Stolarski, H.: Assumed strain stabilisation procedure for the 9-node Lagrange shell element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, 385–414 (1989).
- [17] de Boer, R.; Prediger, H.: *Tensorrechnung. Grundlagen für Ingenieurwissenschaften*. Forschungsbericht aus dem Fachbereich Bauwesen. Universität-Gesamthochschule Essen (1978).
- [18] de Boer, R.; Walther, W.: Fundamental equations and extremum principles in the theory of thin shells. Finite rotations in structural mechanics. Eds. W. Pietraszkiewicz, *Proceedings of the Euromech Colloquium 197, Jablonna, Poland*, Springer-Verlag (1985).
- [19] Bufler, H.: *Energiemethoden IV – Vorlesungsskript WS 1975/76*. Universität Stuttgart.
- [20] Bufler, H.: On the work theorems for finite and incremental elastic deformations with continuous fields: A unified treatment of different versions. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 36, 95–124 (1983).
- [21] Bufler, H.: The Biot stresses in nonlinear elasticity and the associated generalized variational principles. *Ing. Archiv*, 55, 450–462 (1985).
- [22] Büchter, N.: Ein nichtlineares degeneriertes Balkenelement (2-D) unter Verwendung von Biotspannungen. Mitteilung Nr. 8 des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart (1989).
- [23] Büchter, N.; Ramm, E.: Shell theory versus degeneration – A comparison in large rotation finite element analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.* (1991) (to be published).
- [24] Büchter, N.; Ramm, E.: Large rotations in structural mechanics – overview. *Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements*, Udine, June 24–28, 1991.
- [25] Büchter, N.; Ramm, E.: Stabilitäts- und Traglastberechnungen von Zylinder- und Kegelschalen bei konzentrierten Beanspruchungen. *Schriftenreihe Wissenschaft und Technik der TH Darmstadt*, Band 51, 277 – 297 (1990).

- [26] Cardona, A.; Geradin, M.: A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 2403–2438 (1988).
- [27] Cook, R.D.; Al-Abdulla, J.K.: Some plane quadrilateral "hybrid" finite elements. *AIAA Journal* 7, 2184–2185 (1969).
- [28] Crisfield, M.A.: Explicit integration and the isoparametric arch and shell elements. *Communications in Applied Numerical Methods.*, Vol.2, 181–187 (1986).
- [29] Crisfield, M.A.: Finite elements and solution procedures for structural analysis. Vol. 1.: Linear analysis. Pineridge Press. Swansea, U.K. (1986).
- [30] DAST-Richtlinie 013 "Beulsicherheitsnachweise für Schalen" (1980).
- [31] DIN 18800 Teil 4: Stahlbauten; Stabilitätsfälle, Schalenbeulen. November 1990.
- [32] Ding, Y.: Finite-Rotations-Elemente zur geometrisch nichtlinearen Analyse allgemeiner Flächentragwerke. Mitteilung Nr. 89–6 des Instituts für konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum, Bochum (1989).
- [33] Dvorkin, E. N. and Bathe, K. J., "A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis". *Engineering Computations*, No. 1, 77–88 (1984).
- [34] ECCS-Recommendations R 4.6 "Buckling of shells". 4th edition (1988).
- [35] Fischer, G.: *Lineare Algebra. Grundkurs Mathematik.* Vieweg (1978).
- [36] Fischer, G.: *Analytische Geometrie. Grundkurs Mathematik.* Vieweg (1978).
- [37] Gebhardt, H.: Finite Element Konzepte für Schubelastische Schalen mit endlichen Drehungen. Institut für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe, Schriftenreihe Heft 10 (1990).
- [38] Green, A.E.; Zerna, W.: *Theoretical elasticity.* Clarendon Press, Oxford, first edition (1954), second edition (1968).
- [39] Gruttmann, F.: Theorie und Numerik Schubelastischer Schalen mit endlichen Drehungen unter Verwendung der Biot-Spannungen. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Bericht-Nr. F88/1 (1988).
- [40] Gurtin, M. E.: *Topics in finite elasticity.* CBMS-NSF, Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania (1981).
- [41] Hamel, G.: *Theoretische Mechanik.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967).

- [42] Harbord, R.: Berechnung von Schalen mit endlichen Verschiebungen – Gemischte finite Elemente –. Bericht Nr. 72–7 vom Institut für Statik der Technischen Universität Braunschweig (1973).
- [43] Harte, R.: Doppelt gekrümmte finite Dreieckelemente für die lineare und geometrisch nichtlineare Berechnung allgemeiner Flächentragwerke. Mitteilung des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Bochum (1982).
- [44] Householder, S. H.: The theory of matrices in numerical analysis. Blaisdell Publishing Company. New York, Toronto, London (1964).
- [45] Huang, H.-C.: Static and dynamic analyses of plates and shells. Springer-Verlag. Heidelberg, Berlin (1989).
- [46] Hughes, J.R.; Liu, W.K.: Nonlinear finite element analysis of shells. Part I: Three-dimensional shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 26, 331–362 (1981).
- [47] Hughes, T.R.; Brezzi, F.: On drilling degrees of freedom. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, No. 72, 105–121 (1989).
- [48] Hughes, T.R.; Carnoy, E.: Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strains. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 39, 69–82 (1983).
- [49] Ibrahimbegovic, A.; Taylor, R.L.; Wilson, E.L.: A robust quadrilateral membrane element with drilling degrees of freedom. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 30, 445–457 (1990).
- [50] Irons, B.M.: The semiloof shell element. Lecture notes. *Int. Res. Seminar on Theory and Application of Finite Elements*. Univ. of Calgary, Canada (1973).
- [51] Keller, H.B.: Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems. In: *Application of Bifurcation Theory*, P. Rabinowitz, (ed.), New York, Academic Press, 359–384 (1977).
- [52] Kipf, T.: Entwicklung eines Scheibenelementes mit Drillfreiheitsgraden. Diplomarbeit am Institut für Baustatik. Universität Stuttgart (1991).
- [53] Kollar, L.; Dulacska, E.: Schalenbeulung: Theorie und Ergebnisse der Stabilität gekrümmter Flächentragwerke. Werner-Verlag, Düsseldorf (1975).
- [54] Kosmol, P.: Methoden zur numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen und Optimierungsaufgaben. Teubner Studienbücher, Mathematik, Teubner, Stuttgart (1989).
- [55] Korrespondenz: Vandepitte-Schmidt-Bornscheuer (1987).

- [56] Lambertz, K.-H.: Traglastberechnung von Faltwerken mit elastoplastischen Deformationen. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover. Bericht-Nr. F 89/2 (1989).
- [57] Liu, W.K.; Law, E.S.; Lam, D.; Belytschko, T.: Resultant-stress degenerated shell element. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 259-300 (1986).
- [58] MacNeal, R.H., Harder, R.L.: A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Proc. of AIAA Conf. on Structures and Structural Dynamics*. Palm Springs, California (1984).
- [59] Marsden, J.E.; Hughes, T.J.R.: *Mathematical foundations of elasticity*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1983).
- [60] Matzenmiller, A.: Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen. Dissertation, Bericht Nr. 8, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1988).
- [61] Milford, R.V.; Schnobrich, W.C.: Degenerated isoparametric finite elements using explicit integration. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 23, 133-154 (1986).
- [62] Naghdi, P.M.: *The theory of shells and plates*. *Handbuch der Physik*. Band VI a/2: Festkörpermechanik II. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York (1972).
- [63] Ogden, R.W.: *Non-linear elastic deformations*. Ellis Horwood series in mathematics and its applications. Chichester (1984).
- [64] Parisch, H.: Geometrical nonlinear analysis of shells. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 27, 183-214 (1978)
- [65] Parisch, H.: A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 20, 323-350 (1979).
- [66] Parisch, H.: Large displacements of shells including material nonlinearities. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 27, 183-214 (1981).
- [67] Parisch, H.: An investigation of a finite rotation four node shell element. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 31, 127-150 (1991).
- [68] Pawsey, F.S.: The analysis of moderately thick to thin shells by the finite element method. Report No. UCSESM 70-12, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, California (1970).
- [69] Pawsey, F.S.; Clough, R.W.: Improved numerical integration of thick shell finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 3, 575-586 (1971).
- [70] Pietraszkiewicz, W. (ed.): *Finite rotations in structural mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1986).

- [71] Pietraszkiewicz, W.; Badur, J.: Finite rotations in the description of continuum deformation. *Int. J. Engng. Sci.*, Vol. 21, No. 9, 1097–1115 (1983).
- [72] Pietraszkiewicz, W.: Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells. *Advances in Mechanics*, Vol. 12, No. 1 (1989).
- [73] Pinsky, P.M.; Jang, J.: A C^0 -elastoplastic shell element based on assumed covariant strain interpolations. *Proceedings of the Int. Conference NUMETA 1987*, G.N. Pande, J. Middleton eds., Swansea (1987).
- [74] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. *Habilitation, Bericht Nr. 76–2*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1976).
- [75] Ramm, E.: A plate/shell element for large deflections and rotations. *US – Germany Symp. on "Formulations and computational algorithms in finite element analysis"*, MIT, 1976, MIT-Press (1977).
- [76] Ramm, E.: Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, Wunderlich, Stein, Bathe (eds.), Springer Berlin, Heidelberg, New York, 63–89 (1981).
- [77] Ramm, E.; Matzenmiller, A.: Large deformation shell analyses based on the degeneration concept. *State-of-the-Art Texts on 'Finite Element Methods for Plate and Shells Structures'*, Pineridge Press, Swansea, UK (1986).
- [78] Ramm, E.; Matzenmiller, A.: Computational aspects of elasto-plasticity in shell analysis. *Int. Conference on Computational Plasticity, Barcelona, Spain*. Pineridge Press, Swansea, UK (1987).
- [79] Rathé, J.; Lagae, G.; Van Impe, R.; Van den Steen, A.; Verhegge: Investigation of the elastic and elastic-plastic buckling of liquid-filled conical shells. Influence of the imperfections in the elastic-plastic range. *Proceedings of the IASS Colloquium Madrid 11–15 September 1989*.
- [80] Recke, L.: Behandlung großer Rotationen elastischer Flächentragwerke auf der Basis einer Theorie schubweicher Schalen und eines gemischten Finite Element Konzepts. *Technisch-wissenschaftliche Mitteilungen*, Ruhr-Universität Bochum (1986).
- [81] Reissner, E.: On axisymmetrical deformation of thin shells of revolution. *Proc. of Symposia in Appl. Math.*, 3, 27–52 (1950).
- [82] Reissner, E.: On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem. *ZAMP*, 23 (1972).

- [83] Riks, E.: An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *Int. J. Solids & Structures*, 15, 529–551 (1979).
- [84] Sättele, J.M.: Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität. Dissertation. Bericht 80–3 des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart (1980).
- [85] Sansour, C.; Bufler, H.: An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation, and its finite element implementation. To be published in *Int. J. Num. Meth. Eng.* (1990).
- [86] Schieck, B.: Große elastische Dehnungen in Schalen aus hyperelastischen inkompressiblen Materialien. Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik Nr. 69, Ruhr Universität Bochum (1989).
- [87] Schiehlen, W.: Technische Dynamik. Teubner Studienbücher, Stuttgart (1986).
- [88] Schoop, H.: Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen. *Ingenieur-Archiv*, 56, 427–437 (1986).
- [89] Schoop, H.: Mechanik – Beiträge zu Theorie und Anwendungen. Berlin (1988).
- [90] Seidel, J.: Beitrag zur geometrisch nichtlinearen Theorie dünner Schalen unter Annahme kleiner Verzerrungen und großer Rotationen. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1973).
- [91] Simo, J. C. and Hughes, T. J. R., "On variational foundations of assumed strain methods", *J. Applied Mechanics*, 53, 51–54 (1986).
- [92] Simo, J. C.; Vu Quoc, L.: On the dynamics of 3-d finite-strain rods. Finite element methods for plate and shell structures, 2: Formulations and algorithms. Pineridge Press, Swansea, U.K., 1–30 (1986).
- [93] Simo, J.C.; Fox, D.D.; Rifai, M.S.: Formulation and computational aspects of a stress resultant geometrically exact shell model. *Proceedings of the Int. Conference on Computational Engineering Science*, Atlanta, U.S.A. (1988).
- [94] Simo, J.C.; Fox, D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 72, 267–304, (1989).
- [95] Simo, J.C.; Fox, D.D.; Rifai, M.S.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* Vol. 73, 53–62 (1989).

- [96] Simo, J.C.; Fox, D.D.; Rifai, M.S.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 79, 21–70 (1990)
- [97] Simo, J.C.; Rifai, M.S.; Fox, D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 81, 53–91 (1990).
- [98] Simo, J. C.: The (symmetric) Hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics. Intrinsic definition and geometric interpretation (1989). To be published in *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*.
- [99] Stander, N.; Matzenmiller, A.; Ramm, E.: An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. *Engineering Computations*, Vol. 6, 57–66 (1989).
- [100] Stanley, G.M.: Continuum-based shell elements. PH. D. Thesis, Stanford Univ. (1985).
- [101] Stanley, G.M.; Park, K.C.; Hughes, T.J.R.: Continuum-based resultant shell elements. *Finite element methods for plate and shell structures*. Eds. T.J.R. Hughes et al., Pineridge Press, Swansea, 1–45 (1986).
- [102] Stegmüller, H.: Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen. Dissertation, Bericht Nr. 5 des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart (1985).
- [103] Stegmüller, H.; Häfner, L.; Ramm, E.; Sättele, J. M.: Theoretische Grundlagen zum FE-Programmsystem NISA 80. Mitteilung Nr. 1 des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart (1983).
- [104] Stegmüller, H.; Bletzinger, K. U.; Kimmich, S.: Eingabe- und Programmbeschreibung für das Programmsystem CARAT. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1988).
- [105] Stracke, M.; Düsing, H.; Krysik, R.; Schmidt, H.: Belastungs- und Beulversuche an axialsymmetrisch belasteten Rotationsschalen aus Metall im elastisch-plastischen Bereich zur Überprüfung nichtlinearer Rechenprogramme. *Forschungsarbeiten aus dem Fachbereich Bauwesen, Universität-Gesamthochschule Essen* (1986).
- [106] Talaslidis, D.: Inkrementelle Schalentheorien und numerische Behandlung diskretisierter Eigenwertprobleme der Strukturmechanik auf der Grundlage verallgemeinerter Arbeitsaussagen. *Ruhr-Universität Bochum, Bochum* (1978).

- [107] Vandepitte, D.; Van den Steen, A.; Van Impe, R.; Lagae, G.; Rathé, J.: Elastic and elastic-plastic buckling of liquid-filled conical shells. Buckling of Structures, edited by I. Elishakoff et al. Elsevier Science Publishers B.V.; Amsterdam (1988).
- [108] Vu Quoc, L.; Mora, J.A.: A class of simple and efficient degenerated shell elements – Analysis of global spurious-mode filtering. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 74, 117–175 (1989).
- [109] Wagner, W.: Eine geometrisch nichtlineare Theorie schubelastischer Schalen mit Anwendung auf Finite-Element-Berechnungen von Durchschlag- und Kontaktproblemen. Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover, Bericht-Nr. F 85/2 (1985).
- [110] Weimar, K.: Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder. Bericht Nr. 10 des Instituts für Baustatik, Universität Stuttgart (1989).
- [111] Wriggers, P.: Konsistente Linearisierung in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode. Forschungsbericht F 88/4 aus dem Bereich der Mechanik der Universität Hannover (1988).
- [112] Wriggers, P.; Gruttmann, F.: Thin shells with finite rotations: Theory and finite element formulation. In "Analytical and computational models of shells". Presented at the Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers, San Francisco, California (1989).
- [113] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Too, J.M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3, 275–290, (1971).
- [114] Zienkiewicz, O.C.: Methode der finiten Elemente. 2. Auflage. Carl Hanser Verlag, München (1984).
- [115] Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.: The finite element method. Volume 2, 4th edition, McGraw-Hill Book Company, UK (1991).

Lebenslauf von Norbert Büchter

- 17.6.1960 geboren in Emsdetten
Sohn von Bernhard Büchter
und dessen Ehefrau Emmy, geb. Tappe
- 1966 – 1970 Grundschule in Münster/Westf.
- 1970 – 1976 Erich-Klausener-Realschule in Münster
- 1976 – 1979 Wilhelm-Hittorf-Gymnasium in Münster
- 22.5.1979 Abitur
- 1979 – 1980 15-monatiger Grundwehrdienst bei der Bundeswehr
- 1980 – 1981 zwei Semester Studium im Fach Mathematik
an der Westfälischen Wilhelms-Universität in Münster
- 1981 – 1987 Studium im Fach Bauingenieurwesen
an der Ruhr-Universität in Bochum
- 9.3.1987 Abschluß Diplom-Ingenieur
- seit 1.4.1987 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Baustatik der Universität Stuttgart

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Trag-
verhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Platten-
theorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Be-
rücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller,
J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehr-
zelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahl-
betonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadrati-
schem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragerwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragerwerke unter Berücksich-
tigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten
Elemente.

- 80-3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.

- 13 (1991) U. Andelfinger:
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid – gemischter finiter Elemente für
Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei end-
lichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.