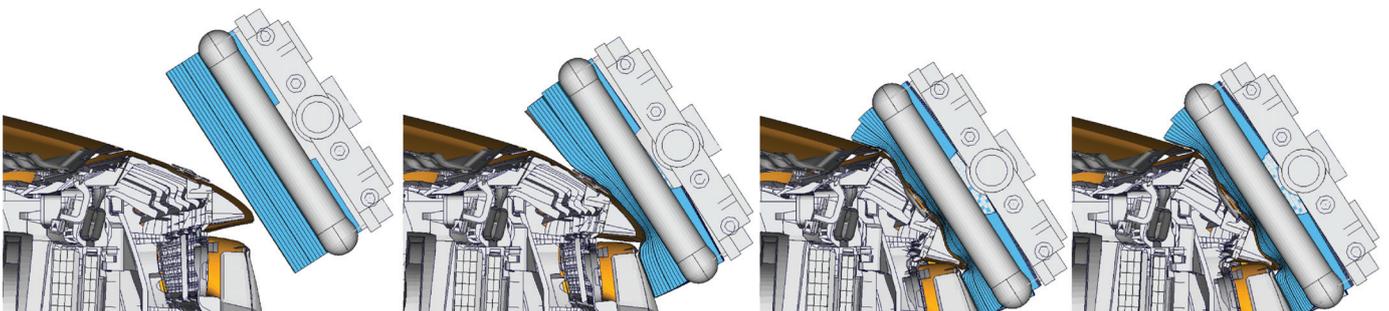


Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymerschäume

Veronika Effinger



Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymerschäume

von

Veronika Maria Effinger

Bericht Nr. 65

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2016



© Veronika Maria Effinger

Berichte können bezogen werden über:
Institut für Baustatik und Baudynamik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123
Fax: 0711 - 685 66130
E-Mail: sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart
ISBN 978-3-00-054033-2

Finite nichtlinear viskoelastische Modellierung offenzelliger Polymerschäume

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Veronika Maria Effinger

aus Rottweil

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr. Achim Schädle, Düsseldorf

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. Holger Steeb, Stuttgart

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juli 2016

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2016

Kurzfassung

Um im europäischen Straßenverkehr zugelassen zu werden, müssen Personenkraftwagen die gesetzlichen Anforderungen des Fußgängerschutzes erfüllen. Dabei wird die Nachgiebigkeit der Fahrzeugfront beim Primäraufprall eines Fußgängers bewertet, indem ein Hüftprüfkörper auf die Fronthaubenvorderkante geschossen wird. Um diesen Lastfall in der Crashsimulation prognosefähig abzubilden, spielt die Modellierung des Materialverhaltens von Confor[®] CF-45, einem offenzelligen Polyurethanschaum, als Bestandteil des Hüftprüfkörpers eine wichtige Rolle. Die adäquate Modellierung der Energieabsorption sowie der Kontaktfläche zwischen dem Hüftprüfkörper und der Fronthaube ist dabei für die Simulation der Lasteinleitung von entscheidender Bedeutung.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Modellierung offenzelliger Polymerschäume für die Anwendung des Fußgängerschutzes zu entwickeln, welche insbesondere die nichtlinear viskoelastischen Eigenschaften dieser Werkstoffe berücksichtigt und in Finite-Elemente-Simulationen mit expliziter Zeitintegration einsetzbar ist.

Die Modellierung folgt der klassischen Kontinuumsmechanik mit einer phänomenologischen Vorgehensweise, bei der sich die isotrope Spannungsantwort additiv aus einer Gleichgewichtsspannung und aus einer Überspannung zusammensetzt. Während das MFCF-Modell (KOLLING U. A. (2007a), HALLQUIST (2016)) des FEM-Berechnungsprogrammes LS-DYNA als gutes Beispiel für eine vereinfachte Gleichgewichtsantwort (GG) übernommen wird, steht die Beschreibung der Überspannung im Rahmen der Theorie der finiten nichtlinearen Viskoelastizität im Mittelpunkt dieser Arbeit.

Ein möglicher Spannungsbeitrag durch die Behinderung der Ein- und Ausströmung einer Fluidphase aufgrund der Zellstruktur kann zu dieser Modellierung additiv hinzugefügt werden. Dieser Spannungsanteil wird in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht betrachtet, da keine verwertbaren Messungen des Lufteinflusses an Confor CF-45 zur Verfügung standen.

Um die Materialmodelle dieser Arbeit verstehen und einordnen zu können, führt die Theorie der linearen Viskoelastizität zunächst verschiedene Darstellungsformen der Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper ein, welche die Spannung als Funktion der gesamten Dehnungs- bzw. Dehnratengeschichte beschreiben. Rheologische Feder- und Dämpfermodelle dienen dabei als Hilfsmittel, um die zugrunde liegenden Differentialgleichungen, Differentialgleichungssysteme und Integralgleichungen zu veranschaulichen und die Zusammenhänge zwischen ihnen aufzuzeigen. Die Integraldarstellung bildet den Ausgangspunkt für die Konstitutivgleichungen der Überspannung in dieser Arbeit und diese Wahl erfordert die Auseinandersetzung mit der numerischen Berechnung von Faltungintegralen.

Zeitabhängige Materialfunktionen enthalten als Faltungskerne die Materialeigenschaften und ihre Form bestimmt, wie die Faltungsgintegrale numerisch berechnet werden können. Der naive Faltungsalgorithmus (naiv) mit einer stückweise linearen Materialfunktion speichert die vollständige Dehnungsgeschichte, liest diese bei jedem Aufruf neu aus und verarbeitet alle Werte für die aktuelle Spannungsantwort. Der rekursive Faltungsalgorithmus (rekursiv) mit einer Prony-Reihe als Materialfunktion hingegen nutzt

die Eigenschaften der Exponentialfunktion, um die vergangene Dehnungsgeschichte zusammenzufassen und mithilfe eines Relaxationsvorfaktors in jedem Zeitschritt wiederzuverwenden. Der lokale Faltungsalgorithmus (lokal) basiert auf den Arbeiten von LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008) und erfordert mehrere Prony-Reihen, die auf bestimmten, sich überlappenden Intervallen gültig und damit lokal definiert sind. Dadurch können die Eigenschaften der Exponentialfunktion ebenfalls ausgenutzt werden. Zudem kann die Anzahl an Prony-Termen der einzelnen Prony-Reihen im Vergleich zum rekursiven Faltungsalgorithmus reduziert werden.

Um den Zeitaufwand einer computergestützten Simulation zu verringern, werden in dieser Arbeit die Faltungsalgorithmen mit einem Dehnratentensor statt einem Dehnungstensor als Eingangsgröße numerisch umgesetzt. Die Modellgröße des Hüftimpaktors sowie die Anzahl an Zeitschritten in den Lastfällen des Fußgängerschutzes erfordern darüber hinaus die Verwendung des rekursiven oder des lokalen Faltungsalgorithmus.

Um Faltungsintegrale sinnvoll in einer Konstitutivgleichung für offenzellige Polymer-schäume kombinieren zu können, muss das Materialverhalten dieser Werkstoffe analysiert und mit geeigneten Annahmen vereinfacht werden. Offenzellige Polymerschäume stellen aufgrund ihrer Zellstruktur besondere Anforderungen an die Konstitutivgleichung. Durch die unterschiedlichen Deformationsmechanismen zeigen sie nicht nur eine ausgeprägte Zug-Druck-Asymmetrie im Bezug auf den Verlauf und die Höhe der Spannungs-Dehnungs-Kurve, sondern auch hinsichtlich des Querdehnungsverhaltens. Den Konstitutivgleichungen dieser Arbeit liegt die kinematische Einschränkung zugrunde, dass Längs-, Quer- und Dickendehnung entkoppelt sind, welche aus der Beobachtung einer verschwindenden Querkontraktion bei uniaxialer Druckbelastung resultiert.

Diese Arbeit schlägt verschiedene Konstitutivgleichungen für die Überspannung vor, die sich neben dem Faltungsalgorithmus im Spannungs- und Dehnratenmaß sowie in der Form der materiellen Nichtlinearität unterscheiden. Die Nomenklatur der Konstitutivgleichungen setzt sich dabei additiv aus der zugrundeliegenden Theorie der Konstitutivgleichung, der finiten linearen bzw. nichtlinearen Viskoelastizität (FLVE bzw. FNLVE), und aus den einzelnen Bestandteilen wie dem Spannungs- und Dehnratenmaß, der Nichtlinearität und dem Faltungsalgorithmus jeweils in abgekürzter Form zusammen. Beispielsweise steht FLVE-TBU-rekursiv für eine finite linear viskoelastische Konstitutivgleichung, die in der Biot-Spannung und dem rechten Strecktensor formuliert ist und deren Faltungsintegral mit dem rekursiven Faltungsalgorithmus berechnet wird. Als Spannungs- und Dehnratenmaße werden zwei Paare dualer Größen verwendet: der zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und der Green-Lagrangesche Dehnratentensor (SE) sowie der Biot-Spannungstensor und die Rate des rechten Strecktensors (TBU). Durch ihren Bezug zur Referenzkonfiguration können alle Spannungsbeiträge der Faltung aufsummiert und gemeinsam in den Cauchy-Spannungstensor mit Bezug zur Momentankonfiguration umgerechnet werden.

Die materielle Nichtlinearität der betrachteten Modelle basiert auf zwei Ansätzen. Entweder werden die Ergebnisse von mehreren Faltungsintegralen unterschiedlicher Potenz addiert oder die Materialfunktion innerhalb eines Faltungsintegrals wird um eine Abhängigkeit von einer oder mehreren Funktionen ergänzt. Die Summe aus Faltungsintegralen unterschiedlicher Potenz resultiert aus einer Vereinfachung des Green-Rivlin-Modells

(GR) für Schäume, welche die Mehrfachintegrale bis zur fünften Ordnung durch die Produktform der Materialfunktion in Einfachintegrale bis zur fünften Potenz überführt. Materiell nichtlineare Konstitutivgleichungen auf Basis eines Faltungsintegrals entstehen in dieser Arbeit durch drei Varianten ratenabhängiger Koeffizienten der Prony-Reihen. In der ersten Variante wird eine Vergleichsdehnrates (EQV) definiert, die bei uniaxialen Versuchen dem Betrag der Anregungsdehnrates entspricht. In der zweiten und dritten Variante wird die Konstitutivgleichung in das Hauptachsensystem (HS) des Dehnratesensors transformiert und die Materialfunktion wird für jede Hauptrichtung mit der zugehörigen Hauptdehnrates ausgewertet. Die dritte Variante unterscheidet sich von der zweiten Variante dadurch, dass die Auswertung in jeder Hauptrichtung zusätzlich um einen Schalter ergänzt wird (HS⁺), der zwischen Be- und Entlastung unterscheidet. Auf diese Weise entsteht eine modulare Materialroutine, die eine Vielzahl an Konstitutivgleichungen bereitstellt.

Welche der ausgewählten Konstitutivgleichungen in der Lage sind, die Versuchsdaten offenzelliger Polymerschäume abzubilden, wird anhand der Spannungsantworten auf Standardanregungen überprüft. Dabei wird die Strategie favorisiert, mithilfe eines materiell linearen Modells die Parameter für einen uniaxialen Versuch einer Nenndehnrate zu bestimmen und die nichtlineare Erweiterung zu nutzen, um die Parameter der einzelnen Versuche in einem Parametersatz zu vereinigen.

Diese Vorgehensweise ist nur für die Konstitutivgleichung FLVE-TBU möglich, die mit verschiedenen Parametersätzen jeden Zug- und jeden Druckversuch einzeln abbilden kann und anschließend mit den drei Varianten der erweiterten Materialfunktionen zu FNLVE-TBU-EQV, FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺ kombiniert wird. Die Spannungsantworten dieser Modelle werden für Zug- und Druckversuche unterschiedlicher Dehnrates, für mehrachsige Versuche wie den biaxialen Zugversuch, den biaxialen Zug-Druck-Versuch und den Schubversuch sowie für zyklische uniaxiale Zug-, Zug-Druck- und Druckversuche ausgewertet. Von den drei materiell nichtlinearen Konstitutivgleichungen ist nur das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ in der Lage, sowohl die einzelnen Versuche unterschiedlicher Nenndehnrates als auch Zug- und Druckanregung zu unterscheiden und zu verhindern, dass eine Lastumkehr automatisch zu einem Wechsel zwischen Zug- und Druckparametern führt.

Um die Parameter für die Konstitutivgleichung identifizieren zu können, wurde ein umfassendes Versuchsprogramm an Confor CF-45 durchgeführt. Die experimentelle Charakterisierung deckt verschiedene Einflussfaktoren auf das mechanische Verhalten des offenzelligen PU-Schaumes auf. Neben dem Einfluss des Luftstroms, der eine Abhängigkeit von der Probengröße bewirkt, reagiert das Material am Glasübergang bei Raumtemperatur sehr empfindlich auf Temperatur- und Feuchtigkeitsänderungen. Dadurch können die Messungen unter Normalbedingungen und in Vakuum nicht herangezogen werden, um den Lufteinfluss zu bestimmen.

Die Zug- und Druckversuche unter Normalbedingungen an 50x50x30 mm³ großen Probekörpern zeigen bei Nenndehnrates $|\dot{\epsilon}^{\text{eng}}|$ zwischen 1e-6 1/ms und 2e-1 1/ms eine ausgeprägte Dehnratesabhängigkeit und Besonderheiten im Vergleich zu anderen PU-Schäumen. Bei den Druckversuchen zeigt sich zwischen der Anfangssteigung und der Plateauspannung eine Spannungsspitze und der Spannungsanstieg, der üblicherweise

mit der Verdichtung des Materials in Verbindung gebracht wird, erfolgt bereits bei geringen Kompressionen.

Aufgrund dieser Besonderheiten weicht die Parameteridentifikation von der definitionsgemäßen Zerlegung der Spannung in die Gleichgewichtsantwort auf Basis quasistatischer Versuche und in die Überspannung als Differenz der quasistatischen und dynamischen Versuchen bei den Druckversuchen ab. Mit einer modifizierten Aufteilung können die Druckversuche mit dem Modell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv, das sich additiv aus der Gleichgewichtsantwort GG und der Überspannung FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv zusammensetzt, in guter Übereinstimmung und die Zugversuche in sehr guter Übereinstimmung abgebildet werden.

In den Simulationen der Elementarproben, des Hüftprüfkörpers aus dem Fußgängerschutz und zweier Komponentenversuchen erweist sich die Modellierung mit der Konstitutivgleichung GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv und dem gewählten Parametersatz als robust. Durch die Zusammensetzung der Spannungsantwort aus Gleichgewichts- und Überspannung stellt sich eine instantane und zeitverzögerte Erholung des Schaumes ein und der elastische Anteil der inneren Energie kann wieder zurückgewonnen werden. Indem die Modellierung diese viskoelastischen Effekte abbildet, übertrifft sie den Stand der Technik bei Weitem.

Eine abschließende Validierung des Modells an einem Komponentenversuch liegt jedoch nicht vor, da Confor CF-45 nicht mehr produziert wird und sowohl die Komponentenversuche selbst als auch die Versuche zur Modellierung des Lufteinflusses nicht durchgeführt werden konnten.

Die Modellierung ist jedoch auf andere offenzellige Polymerschäume und insbesondere die Nachfolgeprodukte von Confor CF-45 als Bestandteile des Hüftprüfkörpers übertragbar, welche im Vergleich der Datenblätter ähnliche mechanische Eigenschaften aufweisen. Darüber hinaus steht mit der modularen Materialroutine eine solide Ausgangsbasis zur Verfügung, um die nichtlinear viskoelastische Überspannung anderer Werkstoffe bei finiten Deformationen zu modellieren. Insbesondere können Werkstoffe ohne verschwindende Querkontraktion betrachtet werden.

Abstract

To be approved for European public roads passenger cars must meet the legal requirements concerning pedestrian safety. One legal impact test, assessing the compliance of the car front in the event of a collision with a pedestrian, consists in shooting the upper legform impactor onto the bonnet leading edge. In order to replicate this load case in a crash simulation with predictive capability, the material behavior of Confor[®] CF-45, an open-cell polyurethane foam, and one of the constituents of the upper legform impactor is of major importance. Hereby, an adequate modeling of the energy absorption in the foam and of the contact area between impactor and bonnet is important for capturing the load transfer in the simulation.

The objective of this thesis is to develop a material model of open-cell polymer foams for application in pedestrian protection, which in particular considers the nonlinear viscoelastic properties of these materials and which can be used in finite element simulations with explicit time integration. In the framework of classical continuum mechanics the material modeling follows a phenomenological approach within which the isotropic stress response is additively decomposed into an equilibrium and an over stress response. While the MFCF model (KOLLING U. A. (2007a), HALLQUIST (2016)) is adopted as a good example of a simplified model for the equilibrium response from the finite element analysis software program LS-DYNA, the focus of this thesis is the description of the over stress in the context of finite nonlinear viscoelasticity.

A possible stress contribution created by the interference of the inlet and outlet of a fluid phase due to cellular structure of the foam can be added to the modeling. However, this stress contribution is not considered in this thesis as there were no usable measurements of the air flow in Confor CF-45 available.

For the understanding and classification of the material models considered in this thesis the theory of linear viscoelasticity introduces different representations of constitutive equations of viscoelastic solids which express the stress as a functional of the complete strain or strain rate history. Rheological elements are used to illustrate the differential equations, the systems of differential equations and the integral equations as well as the relations between them. The integral representation serves as a starting point for the over stress constitutive equations in this thesis and this will require the examination of numerical convolution algorithms.

Time-dependent material functions included as convolution kernels contain the material properties and their shape determines how the convolution integrals can be calculated numerically. The naïve convolution algorithm with a piecewise linear material function requires to save the complete strain history, reads it from storage during each time step and reprocesses all past values to obtain the current stress response. In contrast, the recursive convolution algorithm with a Prony series as material functions exploits the characteristics of the exponential functions in order to summarize the past strain history and to reuse it in each time step with the help of a relaxation prefactor. The local convolution algorithm is based on the work of LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008) and requires multiple Prony series which are valid for discrete and overlapping intervals

and consequently are locally defined. Thus, the characteristics of the exponential functions can be used as well and the number of terms of the individual Prony series can be reduced in comparison to the recursive convolution algorithm.

In order to reduce the simulation time this work uses the strain rate instead of the strain as input for the convolution algorithm. Furthermore, the model size of the upper legform impactor and the number of timesteps in a pedestrian impact simulation require the use of the recursive or the local convolution algorithm.

In order to combine convolution integrals in a constitutive equation for open-cell polymer foams in a meaningful way it is necessary to analyze the behavior of these materials and to simplify it with appropriate assumptions. Due to their cellular structure open-cell polymer foams put special demands on the constitutive equation. As a result of the different deformation mechanisms involved, they do not only show a distinct tension-compression asymmetry with regard to the shape and magnitude of the stress-strain curve but also with respect to the transverse strain behavior. The constitutive equations of this work are based on the assumption that longitudinal, transverse and thickness strains are uncoupled which follows from the observation of a diminishing Poisson's ratio under uniaxial compression loading.

This thesis proposes different constitutive equations for the over stress which differ besides the convolution algorithm in the material nonlinearity and the choice of stress and strain rate measures. The nomenclature of the constitutive equation is additively composed by the underlying theory, the finite linear respectively nonlinear viscoelasticity (FLVE respectively FNLVE), and the individual elements such as the stress and strain rate measures, the material nonlinearity and the convolution algorithm, each in abbreviated form. For example, FLVE-TBU-recursive represents a finite linear viscoelastic constitutive equation which uses the Biot stress and the right stretch tensor as well as the recursive convolution algorithm.

Two pairs of dual stress and strain tensors are used: the second Piola-Kirchhoff stress tensor and the Green-Lagrange strain rate tensor (SE) as well as the Biot stress tensor and the rate of the right stretch tensor (TBU). Due to their definition with respect to the reference configuration all stress contributions can be summed up and converted in the same way to the Cauchy stress tensor with reference to the current configuration.

The material nonlinearity of the examined models is based on two approaches. Either the results of multiple convolution integrals of different powers are summed up or the material function within one convolution integral is complemented by an additional dependency upon one or multiple functions. The sum of multiple convolution integrals results from the simplification of the Green-Rivlin model (GR) for foams which transforms the multiple integrals of fifth order into single integrals of fifth power using the product form of the material function. Materially nonlinear constitutive equations on the basis of one convolution are created with three types of rate dependent coefficients for the Prony series. The first type uses an equivalent strain rate (EQV) which corresponds to the absolute value of the excitation strain rate in an uniaxial test. The second and third type transform the constitutive equation into the principal coordinate system (HS) of the strain rate tensor and the material function is evaluated for each principal direction with the corresponding principal strain rate. The third type differs from the

second type as the assessment in each principal direction is complemented by a switch which distinguishes between loading and unloading (HS^+). As a result a modular material routine is established which provides a multitude of constitutive equations.

In order to determine which constitutive equations are able to reproduce the test data of open-cell polymer foams the stress responses to standard excitations are examined. Hereby, the preferred strategy is to identify the parameters for a uniaxial test at one nominal strain rate with the help of a linear material model and to use the extended nonlinear material model in order to unify the parameters of the individual tests into one single parameter set. This procedure can only be applied to the constitutive equation FLVE-TBU which is able to replicate every individual tension and compression test with different parameters and which can afterwards be combined with the three different types of extended material functions into FNLVE-TBU-EQV, FNLVE-TBU-HS or FNLVE-TBU- HS^+ . The stress response of these models is then evaluated for tension and compression tests at different strain rates, for multiaxial tests such as the biaxial tension test, the biaxial tension compression test and shear tests as well as for cyclic uniaxial tension, tension-compression and uniaxial compression tests. Out of the three materially nonlinear constitutive equations only the model FNLVE-TBU- HS^+ is able to differentiate the uniaxial tests at different strain rates, to distinguish between tensile and compressive loading and to prevent that a load reversal automatically generates a switch from tension to compression parameters.

To identify the parameters of the constitutive equation a comprehensive test program was conducted for Confor CF-45. The experimental characterization reveals different influence factors on the mechanical behavior of the open-cell PU foam. Besides the influence of the air flow which induces a dependency upon the specimen size the material shows a high sensitivity in the neighborhood of the glass transition temperature upon any changes of temperature or moisture. Hence, a comparison of measurements conducted under atmospheric conditions and in vacuum cannot be used to determine the air flow. The tension and compression tests under normal conditions and at specimen size of $50 \times 50 \times 30 \text{ mm}^3$ show a distinct strain rate dependency in the range of strain rates $|\dot{\epsilon}^{\text{eng}}|$ between $1e-6 \text{ 1/ms}$ and $2e-1 \text{ 1/ms}$ and anomalies in comparison to other PU foams. Compression tests reveal a stress peak between the initial slope and the plateau stress and the increase of the absolute stress which is usually associated with the densification of the foam material already occurs for low compression values.

In order to consider these peculiarities the parameter identification deviates from the defined stress decomposition into equilibrium stress on the basis of quasistatic tests and in the over stress as the difference between dynamic and quasistatic testing for the compression tests. With this modification it is possible to reproduce the compression tests with the model GG+FNLVE-TBU- $HS^{(+)}$ -recursive with high conformity and the tension tests with very high conformity. Thereby, the stress answer of the model GG+FNLVE-TBU- $HS^{(+)}$ -recursive is additively composed by the equilibrium response GG and the viscoelastic overstress FNLVE-TBU- $HS^{(+)}$ -recursive.

The modeling with GG+FNLVE-TBU- HS^+ -recursive and the selected parameter set prove to be robust in the simulation of the material tests, of the upper legform impact test in pedestrian protection and of two component tests. Due to the decomposition of

the stress response into equilibrium and over stress an instantaneous and time-delayed recovery of the foam material takes place and the elastic part of the internal energy can be recaptured. By capturing these viscoelastic effects the new modeling exceeds by far the current state of the art.

A final validation of the model with a component test is not available as Confor CF-45 is not produced anymore and hence the component test as well as the test to model the influence of the air flow could not be conducted. However, the modeling can be transferred to other open-cell polymer foams and in particular to the succession products of Confor CF-45 as part of the upper legform impactor which possess similar mechanical properties according to their specifications.

Furthermore, the modular material routine represents a solid starting point to model nonlinear viscoelastic over stress for other materials at finite deformations. In particular materials with a non-zero Poisson's ratio could be considered.

Danksagung

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Berechnungsingenieurin bei der DYNAmore GmbH und während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart. Für die Möglichkeit, Projektarbeiten in der Industrie mit angewandter Forschung an der Universität zu kombinieren und mich so in vielfältiger Weise weiterzuentwickeln, bedanke ich mich bei den Gesellschaftern von DYNAmore, insbesondere bei Dr. Thomas Münz und Dr.-Ing. André Haufe.

Bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff möchte ich mich herzlich für sein Vertrauen bedanken, das er mir während der gesamten Zeit auf dem Weg zur selbstständig arbeitenden Wissenschaftlerin entgegengebracht hat. Für seine Bereitschaft, sich in die Theorie der nichtlinearen Viskoelastizität einzuarbeiten, und für seine Förderung wissenschaftlicher Diskussionen über die Institutsgrenzen hinweg bedanke ich mich besonders.

Bedanken möchte ich mich außerdem bei Herrn Prof. Dr. Achim Schädle, der sowohl durch die Übernahme des Mitberichts als auch durch seine persönliche Hilfestellung zur numerischen Faltung zu dieser Arbeit beigetragen hat. Herrn Prof. Dr.-Ing. Holger Steeb danke ich für sein Interesse an meiner Arbeit und die kurzfristige Übernahme des Mitberichts.

Für die finanzielle, fachliche und persönliche Unterstützung bedanke ich mich bei den Mitarbeitern der Daimler AG im Bereich der passiven Sicherheit, insbesondere bei Axel Fedeler, Dr.-Ing. Markus Feucht, Andreas Hirth und Dr.-Ing. Johannes Irslinger.

Mein herzlicher Dank gilt Paul Dubois, der das Thema dieser Arbeit vorgeschlagen hat und der mir wie ein akademischer Lehrer war. Seine Förderung, seine Ideen und sein fortwährendes Interesse haben diese Arbeit ermöglicht und zum Erfolg geführt.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Hartwig Nahme vom Ernst-Mach-Institut der Fraunhofer-Gesellschaft. Sein Erfahrungsschatz und seine Kreativität waren für die Versuche dieser Arbeit unerlässlich. Für die Durchsicht einzelner Kapitel bedanke ich mich bei ihm ebenso wie bei Anne Schäuble, Dr.-Ing. Anton Tkachuk und Dr. Daniel Tscharnuter.

Bei meinen ehemaligen und aktuellen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik und Baudynamik sowie bei DYNAmore bedanke ich mich für die freundschaftliche Atmosphäre, die gute Zusammenarbeit und die angenehmen Stunden abseits der Wissenschaft und Arbeit.

Bei meinen Freundinnen und Freunden bedanke ich mich für ihr Verständnis und ihre Ablenkung in dieser arbeitsreichen Zeit.

Meiner Familie, meinen Geschwistern und meinen Eltern danke ich für ihre Liebe und ihren bedingungslosen Rückhalt, den sie mir immer gewährt haben.

Von ganzem Herzen danke ich meinem Mann Julian. Seine Ermutigung, sein Verständnis und seine Unterstützung haben meinen Weg möglich und leichter gemacht.

Stuttgart, im Juli 2016

Veronika Effinger



Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xv
Tabellenverzeichnis	xix
Abkürzungen und Bezeichnungen	xxi
1. Einleitung	1
1.1. Motivation	1
1.2. Modellierung von Schäumen	4
1.3. Zielsetzung	5
1.4. Gliederung der Arbeit	7
2. Grundlagen	9
2.1. Nichtlineare Festkörpermechanik	9
2.1.1. Kinematik	10
2.1.2. Kinetik	12
2.1.3. Anfangsrandwertproblem der Strukturmechanik	13
2.2. Finite-Elemente-Methode und Zeitdiskretisierung	16
2.2.1. Schwache Form des Anfangsrandwertproblems	16
2.2.2. Räumliche Diskretisierung	16
2.2.3. Zeitliche Diskretisierung	18
2.3. Materialtheorie und konstitutive Annahmen	19
3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper	23
3.1. Materialklassen	25

3.2.	Lineare Viskoelastizität für kleine Deformationen	27
3.2.1.	Differentialdarstellung	28
3.2.2.	Integraldarstellung	33
3.2.3.	Freie Energie und Dissipationspotential	36
3.2.4.	Materialfunktion und schwindendes Gedächtnis	38
3.2.5.	Aufspaltung in Gleichgewichts- und Überspannung	40
3.2.6.	Dreidimensionale lineare Viskoelastizität	42
3.2.7.	Grenzen der linearen Viskoelastizität	44
3.3.	Finite Viskoelastizität	47
3.3.1.	Generalisiertes Maxwell-Element bei finiten Deformationen	48
3.4.	Finite nichtlineare Viskoelastizität	51
3.4.1.	Pipkin-Rogers-Modell – Modifiziertes Superpositionsprinzip	51
3.4.2.	Green-Rivlin-Modell	53
4.	Materialfunktion und numerische Faltung	57
4.1.	Materialfunktion als stückweise lineare Kurve – naiver Faltungsalgorithmus	58
4.2.	Materialfunktion als Prony-Reihe – rekursiver Faltungsalgorithmus	60
4.3.	Materialfunktion als Überlappung lokaler Prony-Reihen – lokaler Fal- tungsalgorithmus	62
4.4.	Dehnratenabhängige Prony-Reihen	71
4.5.	Vergleich der Faltungsalgorithmen	73
5.	Modellierung der viskoelastischen Überspannung offenzelliger Polymerschäu- me	77
5.1.	Kinematische Einschränkung offenzelliger Polymerschäume	78
5.2.	Beispiel einer Gleichgewichtsantwort	79
5.3.	Finite lineare Viskoelastizität in \mathbf{S} und \mathbf{E}	80
5.4.	Green-Rivlin-Modell für Schäume	81
5.5.	Finite lineare Viskoelastizität in \mathbf{T}_B und \mathbf{U}	83
5.6.	Finite nichtlineare Viskoelastizität in \mathbf{T}_B und \mathbf{U}	84
5.6.1.	Abhängigkeit von einer Vergleichsdehnrates	84
5.6.2.	Abhängigkeit von den Hauptdehnrates	85
5.6.3.	Abhängigkeit von den Hauptdehnrates und Unterscheidung zwi- schen Be- und Entlastungsvorgängen	87
5.6.4.	Materialfunktion der nichtlinearen Modelle FNLVE-TBU	88
5.7.	Struktur der Materialroutine	90
6.	Numerische Beispiele und Modellantworten auf Standardanregungen	93
6.1.	Relaxationsversuche	94
6.2.	Zugversuche	104

6.3. Druckversuche	112
6.4. Mehrachsige Belastungszustände	114
6.4.1. Biaxiale Versuche mit konstantem Hauptachsensystem	115
6.4.2. Schubversuche	118
6.5. Zyklische Versuche	123
6.6. Zusammenfassung	127
7. Modellierung des Polyurethan-Schaumes Confor CF-45	129
7.1. Experimentelle Charakterisierung	129
7.1.1. Porenstruktur	130
7.1.2. Einflussfaktoren auf das mechanische Verhalten	130
7.1.3. Uniaxiale Zug- und Druckversuche und kinematische Einschränkung	134
7.1.4. Dehnratenabhängigkeit bei uniaxialen Zug- und Druckversuchen .	135
7.2. Modellierung und Parameteridentifikation	137
7.2.1. Gleichgewichtsantwort	138
7.2.2. Viskoelastische Überspannung	139
7.3. Numerische Beispiele: Robustheit und viskoelastische Effekte	144
7.3.1. Fußgängerschutz: Hüftprüfkörper gegen Fronthaubenvorderkante .	145
7.3.2. Komponentenversuche: Zylinder auf Schaumproben	147
7.4. Zusammenfassung	157
8. Zusammenfassung und Ausblick	161
8.1. Zusammenfassung	161
8.2. Ausblick	162
A. Anhang	165
A.1. Berechnung von \mathbf{S} aus \mathbf{T}_B	165
Literaturverzeichnis	167

Abbildungsverzeichnis

1.1.	Beispiele viskoelastischer Materialien und ihrer Einsatzgebiete	1
1.2.	Fußgängerschutz: Abbildung des Primäraufpralls mithilfe des Hüftprüfkörpers	3
1.3.	Druckbelastung einer mikromechanischen und einer makroskopischen Modellierung	5
1.4.	Spannungs-Dehnungs-Diagramm offenzelliger Polymerschäume unter Druck- und Zugbelastung: Schematische Darstellung der Deformationsvorgänge am kubischen Modell nach ASHBY (2006) und HILYARD UND CUNNINGHAM (2012)	6
2.1.	Geometrische Beschreibung eines Körpers in der Referenz- und Momentankonfiguration	10
3.1.	Einteilung des Materialverhaltens in vier Kategorien nach HAUPT (1993), Spannungs-Dehnungs-Diagramme für zyklische Dehnungsanregung	25
3.2.	Charakteristiken viskoelastischer Festkörper	27
3.3.	Rheologische Modelle der linearen Viskoelastizität	29
3.4.	Drei-Parameter-Festkörper: Grundgleichungen und Herleitung der Differentialgleichung	30
3.5.	Generalisiertes Maxwell-Element	32
3.6.	Drei-Parameter-Festkörper: Herleitung der Integralgleichung mithilfe der Differentialgleichung des Gesamtsystems	35
3.7.	Materialfunktion eines generalisierten Maxwell-Elementes	39

3.8. Relaxation der Gesamtspannung der linearen Viskoelastizität bei Stufenanregung: Relaxation auf die Gleichgewichtsspannung	44
3.9. Relaxation der linear viskoelastischen Überspannung bei Stufenanregung: Relaxation auf null	44
3.10. Linear viskoelastische Gesamtspannung des Drei-Parameter-Festkörpers bei konstanter Ratenanregung	46
3.11. Linear viskoelastische Überspannung des Drei-Parameter-Festkörpers bei konstanter Ratenanregung	46
4.1. Intervalleinteilung I_l mit $B = 3$ und $h^* = 0,25$ und zugehörige Prony-Reihen $f^l(t)$	65
4.2. Zerlegung des Faltungsintegrals in Integrationsbereiche y_i bei einer Intervalleinteilung mit $B = 3$ und $h^* = 0,25$	67
4.3. Zusammensetzung des Faltungsintegrals bei $t = 22$ (links) und $t = 35$ (rechts) für $t_i = \{0; 0,1; 3,2; 5,1; 7,0; 8,2; 9,3; 9,9; 11,2; 22; 35\}$	68
5.1. Struktur der Materialroutine zur Berechnung der Überspannung	91
6.1. Uniaxiale Beanspruchung eines Hexaederelementes	95
6.2. Überprüfung der kinematische Einschränkung: Relaxationsversuch mit einer Rampe konstanter Geschwindigkeit und dem Materialmodell FLVE-TBU-rekursiv (Bildreihe mit zehnfach überhöhter Verschiebung)	96
6.3. Isotropes Materialmodell: Spannungsantwort beim Relaxationsversuch in \mathbf{e}_1 - und \mathbf{e}_3 -Richtung	97
6.4. Objektives Materialmodell: Spannungsantwort beim Relaxationsversuch mit überlagerter Rotation	98
6.5. FLVE-TBU: Skalierbarkeit der T_{B33} - t -Antworten mit Rampe konstanter Geschwindigkeit $v = l_0 \dot{U}_{33}$ und damit konstanter Dehnrates \dot{U}_{33}	99
6.6. FLVE-SE: Skalierbarkeit der S_{33} - t -Antworten mit Rampe abnehmender Geschwindigkeit $v = l_0 \dot{E}_{33} / \sqrt{4 + 4\dot{E}_{33}t}$ bei konstanter Dehnrates \dot{E}_{33}	100
6.7. Vergleich der Modelle FLVE-TBU-rekursiv und FLVE-TBU-lokal mit den Randbedingungen des Relaxationsversuches aus Abbildung 6.2a	102
6.8. Lokaler Faltungsalgorithmus: Einfluss der Integrationsbereiche auf die Spannungsantwort	103
6.9. Vergleich der Modelle FLVE-TBU-rekursiv und FLVE-SE-rekursiv am Zugversuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$	105
6.10. FLVE-SE-lokal und FLVE-TBU-lokal mit Steifigkeitsabfall bei $\hat{t} = 3,5 \text{ ms}$: Spannungsanstieg vs. konstante Spannung beim Zugversuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$	106
6.11. Spannungsantworten des Green-Rivlin-Modells dritter Ordnung FNLVE-SE-GR-rekursiv für den Zugversuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$	109

6.12. Spannungsantworten der dynamischen Zugversuche $\dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}}$ mit der Geschwindigkeitsrandbedingung nach Abbildung 6.9 (skaliert): Der Parametersatz für FNLVE-TBU-HS und -EQV umfasst alle vier Prony-Reihen und bildet aufgrund seiner Dehnratenabhängigkeit alle Zugversuche richtig ab.	111
6.13. Spannungsantworten der dynamischen Druckversuche	113
6.14. Biaxiale Beanspruchung eines Hexaederelementes	115
6.15. Äquibiaxialer Zugversuch $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$	116
6.16. Biaxialer Zug-Druck-Versuch $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ mit $v_1(t) = -v_3(t)$ und dem Parametersatz nach Abbildung 6.13b	117
6.17. Schubversuch an einem Hexaederelement	119
6.18. Randbedingungen des Schubversuches und Spannungsantworten für das Modell der Gleichgewichtsantwort mit der Eingabekurve aus Abbildung 6.18e	120
6.19. Cauchy-Spannung und Kraftverlauf für das Modell der Gleichgewichtsantwort beim Schubversuch aus Abbildung 6.18	121
6.20. Schubversuch nach Abbildung 6.18 mit den Materialmodellen FNLVE-TBU-HS-rekursiv und FNLVE-TBU-EQV-rekursiv und dem Parametersatz aus Abbildung 6.13b	122
6.21. Zyklische uniaxiale Zugbelastung mit den Materialmodellen FNLVE-TBU-HS-rekursiv und -EQV-rekursiv und dem Parametersatz aus Abbildung 6.13b	124
6.22. Zwei Parametersätze für die Be- und Entlastung des Modells FNLVE-TBU-HS ⁺ -rekursiv	125
6.23. Zyklische uniaxiale Zug-, Zug-Druck- und Druckbelastung mit den Materialmodellen FNLVE-TBU-HS-rekursiv und -EQV-rekursiv und dem Parametersatz aus Abbildung 6.13b und mit dem Materialmodell FNLVE-TBU-HS ⁺ -rekursiv und den Parametersätzen aus Abbildung 6.22	126
7.1. Offenzellige Porenstruktur von Confor CF-45 im Lichtmikroskop	130
7.2. Druckversuche $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 1\text{e-}4 \text{ 1/ms}$ bei unterschiedlicher Probengröße	131
7.3. Schematischer Versuchsaufbau der Zugversuche (links) und Druckversuche (rechts) in der Vakuumkammer	132
7.4. Versuche unter Normalbedingungen und in Vakuum an Probekörpern der Größe $50\text{x}50\text{x}30 \text{ mm}^3$	132
7.5. Dynamisch-mechanische Analyse einer um $\varepsilon^{\text{eng}} = -0,3$ vorkomprimierten Probe der Größe $50\text{x}50\text{x}30 \text{ mm}^3$ mit Verschiebungsanregung der Amplitude $\hat{s} = 0,1 \text{ mm}$ und Frequenz $f = 10 \text{ 1/s}$ bei $p = 100 \text{ kPa}$	134
7.6. Verformung bei uniaxialen Druck- und Zugversuchen	135
7.7. Druck- und Zugversuche an Probekörpern der Größe $50\text{x}50\text{x}30 \text{ mm}^3$ unter Normalbedingungen	136

7.8. Zerlegung der Versuchskurven in Gleichgewichts- und Überspannungsantwort	138
7.9. Zielverläufe der viskoelastischen Überspannung unter Druckbelastung	139
7.10. Ergebnis der Parameteridentifikation für das Modell FNLVE-TBU-HS-rekursiv	140
7.11. Simulation von Zug- und Druckversuchen an 50x50x30 mm ³ großen Schaumproben mit dem Materialmodell GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv	142
7.12. Homogene Dehnungsverteilung bei uniaxialen Zug- und Druckversuchen mit dem Material GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv	142
7.13. Zug- und Druckversuche an 50x50x30 mm ³ großen Schaumproben: Vergleich der Versuchs- und Simulationsergebnisse mit dem Modell GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv und der Elementkantenlänge $l_0 = 5$ mm	143
7.14. Überspannung bei Zug- und Druckversuchen mit dem Modell FNLVE-TBU-HS-lokal	144
7.15. Fußgängerschutz: Hüftprüfkörper gegen Fronthaubenvorderkante	146
7.16. Längsschnitt durch die Mitte der Fronthaubenvorderkante: Nachgiebigkeit der Fahrzeugstruktur und Kompression des Confor-Schaumes (hellblaue Farbe)	146
7.17. Schaumverhalten: Anpassung an die Fahrzeugkontur mit hohen lokalen Kompressionen und hoher elastischer Energiedichte	147
7.18. Lastfall: Zylinder auf Schaumwürfel	148
7.19. Zylinder auf Schaumwürfel: Position der Verschiebungsauswertung	149
7.20. Netzkonvergenz am Beispiel des Modells GG+FNLVE-TBU-HS ⁺ -rekursiv	150
7.21. Inhomogene Dehnungsverteilung $\varepsilon_{11}^{\text{true}}$ während der Belastungs- und Erholungsphase im Querschnitt nach Abbildung 7.19 mit dem Modell GG+FNLVE-TBU-HS ⁺ -rekursiv: hohe Kompression um die Kontaktzone des Impaktors und Zugdehnung an Probenrand	151
7.22. Zylinder auf Schaumproben: Vergleich der Ergebnisse für die Modelle GG+FNLVE-TBU-HS und GG+FNLVE-TBU-HS ⁺	152
7.23. Zylinder auf Schaumproben: Einfluss der Gleichgewichtsantwort auf die Erholungsgeschwindigkeit	153
7.24. Zylinder auf Schaumproben: Vergleich des Modells GG+FNLVE-TBU-HS ⁺ mit drei Simulationen des MFCF-Modells für die Schaumproben: Stand der Technik (SdT), reduzierte Dämpfung (D) und hohe Hourglass-Energie (HG)	154
7.25. Rückprall des Zylinders: Vergleich des Stands der Technik (SdT) mit den drei Modellen GG+, GG5+ und GG10+FNLVE-TBU-HS ⁺	156

Tabellenverzeichnis

4.1. Vergleich der Faltungsalgorithmen	73
7.1. Quadratischer Fehler $\sum_{k=1}^{N_K} \left(\frac{\sigma_k - \bar{\sigma}_k}{\bar{\sigma}_k}\right)^2$ zwischen der gemessenen Gesamtspannung $\bar{\sigma}_k(\Delta h_k/h_0)$ und der berechneten Gesamtspannung $\sigma_k(\Delta h_k/h_0)$	143

Abkürzungen und Bezeichnungen

Die folgende Übersicht stellt die Nomenklatur und Notation dieser Arbeit vor. Skalare Größen werden in kursiver Schrift, Vektoren in fettgedruckten Kleinbuchstaben und Tensoren zweiter oder höherer Stufe als fettgedruckte Großbuchstaben dargestellt. In Komponentenschreibweise gilt die Einsteinsche Summenkonvention.

Indizes werden als kursive Kleinbuchstaben an die jeweilige Größe z. B. $(\bullet)_k$ angehängt und laufen, falls eine Angabe erforderlich ist, bis zur Anzahl N_K mit dem zugehörigen Großbuchstaben in Standardschrift als Index. Die Bedeutung der Anzahl erschließt sich dabei aus dem Zusammenhang. Hiervon bilden die Indizes i, j, l, n, I und J eine Ausnahme, deren Bedeutung im Folgenden definiert wird.

Darüber hinaus dienen Akzentgrößen mit Ausnahme der Tilde alleine zur Unterscheidung der mathematischen Symbole.

Abkürzungen

D	Dämpfung
DGL	Differentialgleichung
DMA	Dynamisch-mechanische Analyse
Euro NCAP	Europäisches Neuwagen-Bewertungsprogramm (engl. European New Car Assessment Program)
•-EQV	Konstitutivgleichung • mit Abhängigkeit von der Vergleichsdehnrates
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FLVE-SE	Finite linear viskoelastische Konstitutivgleichung in \mathbf{S} und \mathbf{E}
FLVE-TBU	Finite linear viskoelastische Konstitutivgleichung in \mathbf{T}_B und \mathbf{U}
FNLVE-SE	Finite nichtlinear viskoelastische Konstitutivgleichung in \mathbf{S} und \mathbf{E}

FNLVE-TBU	Finite nichtlinear viskoelastische Konstitutivgleichung in \mathbf{T}_B und \mathbf{U}
•-GR	Konstitutivgleichung • mit materieller Nichtlinearität durch eine Summe aus Faltungsintegralen nach dem Green-Rivlin-Modell
GG	Gleichgewichtsantwort
Gl.	Gleichung
gr.	griechisch
HG	Hourglass
HS	Hauptachsensystem
•-HS	Konstitutivgleichung • mit Ratenabhängigkeit im Hauptachsensystem
•-HS ⁺	Konstitutivgleichung • mit Ratenabhängigkeit im Hauptachsensystem und Unterscheidung von Be- und Entlastung
i. d. R.	in der Regel
KOS	Koordinatensystem
•-lokal	Berechnung der Konstitutivgleichung • mithilfe des lokalen Faltungsalgorithmus
lat.	lateinisch
MFCF	Materialmodell „MAT_FU_CHANG_FOAM“ (MAT_083) des FEM-Berechnungsprogrammes LS-DYNA (HALLQUIST 2016)
NASA	Nationale Aeronautik- und Raumfahrtbehörde der USA (engl. National Aviation and Space Authority)
PU	Polyurethan
•-rekursiv	Berechnung der Konstitutivgleichung • mithilfe des rekursiven Faltungsalgorithmus
SdT	Stand der Technik
ULF	Materielle Beschreibung mit Bezug zur Momentankonfiguration (engl. Updated Lagrangian Formulation)
zw.	zwischen

Mathematische Notationen

$(\bullet) : (\bullet)$	Doppelte Verjüngung
$(\bullet) \cdot (\bullet)$	Einfache Verjüngung, Skalarprodukt zweier Vektoren
$(\bullet) \otimes (\bullet)$	Dyadisches Produkt
\approx	Approximativ
$ (\bullet) $	Betrag der skalaren Größe (\bullet)
$\frac{d(\bullet)}{dt}$	Ableitung
D^κ	Fraktionaler Differentialoperator
$(\dot{\bullet})$	(Materielle) Zeitableitung der Größe (\bullet)
$(\ddot{\bullet})$	Zweite (materielle) Zeitableitung der Größe (\bullet)

$\delta(\bullet)$	Variation der Größe (\bullet)
$\text{div}(\bullet)$	Räumliche Divergenz der Größe (\bullet)
$\Delta(\bullet)$	Inkrementelle Änderung der Größe (\bullet)
$\det(\bullet)$	Determinante der Größe (\bullet)
$(\bullet)^D$	Deviator der Größe (\bullet) , $(\bullet)^D = (\bullet) - \frac{1}{3} \text{tr}(\bullet)\mathbf{I}$
$\frac{D(\bullet)}{Dt}$	Materielle Zeitableitung der Größe (\bullet) , $\frac{D(\bullet)(\mathbf{x},t)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t} + \text{grad}(\bullet) \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$, $\frac{D(\bullet)(\mathbf{X},t)}{Dt} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$
$d(\bullet)$	Differential der Größe (\bullet)
\in	Element von
\forall	Für alle
$\text{Grad}(\bullet)$	Materieller Gradient der Größe (\bullet) , $\text{Grad}(\bullet) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}(\bullet)$
$\text{grad}(\bullet)$	Räumlicher Gradient der Größe (\bullet) , $\text{grad}(\bullet) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\bullet)$
$(\bullet)^{-1}$	Inverse der Größe (\bullet)
i	Imaginäre Einheit
$\lim(\bullet)$	Grenzwert der Größe (\bullet)
$\ln(\bullet)$	Natürlicher Logarithmus der Größe (\bullet)
$\Lambda(\bullet)$	Tensor (\bullet) im Hauptachsensystem
$\lambda(\bullet)$	Eigenwert der Größe (\bullet)
$\max(\bullet)$	Maximum der Größe (\bullet)
$\min(\bullet)$	Minimum der Größe (\bullet)
$(\bullet)_0$	Größe (\bullet) zum Zeitpunkt $t_0 = 0$
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathcal{O}(\bullet)$	Ordnung von der Größe (\bullet)
\emptyset	Leere Menge
$\frac{\partial(\bullet)}{\partial(\bullet)}$	Partielle Ableitung
$(\bullet)^\Delta$	Cotter-Rivlin-Rate des Tensors (\bullet) , $(\bullet)^\Delta = \dot{(\bullet)} + (\bullet) \cdot \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \cdot (\bullet)$
$\overset{\circ}{(\bullet)}$	Jaumann-Rate des Tensors (\bullet) , $\overset{\circ}{(\bullet)} = \dot{(\bullet)} + (\bullet) \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot (\bullet)$
$(\bullet)^\nabla$	Oldroyd-Rate des Tensors (\bullet) , $(\bullet)^\nabla = \dot{(\bullet)} - \mathbf{L} \cdot (\bullet) - (\bullet) \cdot \mathbf{L}^T$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$\text{signum}(\bullet)$	Signum der Größe (\bullet)
$\sin(\bullet)$	Sinus der Größe (\bullet)
$(\bullet)^T$	Transponierte der Größe (\bullet)
$\tan(\bullet)$	Tangens der Größe (\bullet)
$\tilde{(\bullet)}$	Größe ohne Gleichgewichtsanteil $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{(\bullet)}(t) = 0$
$\text{tr}(\bullet)$	Spur der Größe (\bullet) (engl. trace)
∞	Unendlich
\cap	Schnittmenge
\cup	Vereinigung
$\{\bullet\}$	Größe (\bullet) in Voigt-Notation

Lateinische Buchstaben

A	Matrix zur Berechnung von $\{\mathbf{S}\}$ aus $\{\mathbf{T}_B\}$
a	Beschleunigungsvektor
A	Fläche
A^D	Fläche mit Dirichlet-Randbedingungen
A^N	Fläche mit Neumann-Randbedingungen
B	Linker Cauchy-Green Deformationstensor
b	Volumenkräfte
B	Basis der Intervalleinteilung des lokalen Faltungsalgorithmus
b	Stufe im lokalen Faltungsalgorithmus
C	Rechter Cauchy-Green Deformationstensor
c	Proportionalitätskonstante eines fraktionalen Dämpferelementes
D	Deformationsgeschwindigkeitstensor
$\mathbf{E}^{(m)}$	Generalisierter Dehnungstensor
E	Green-Lagrangescher Dehnungstensor
e	Einheitsvektor des kartesischen Koordinatensystems
$\bar{\mathbf{e}}$	Einheitsvektor eines gedrehten kartesischen Koordinatensystems
$\mathbf{e}_{(\bullet)}$	Normierter Eigenvektor der Größe (\bullet)
E_{storage}	Speichermodul (engl. storage)
E_{loss}	Verlustmodul (engl. loss)
$E, E(t)$	Elastizitätsmodul, zeitabhängiger Elastizitätsmodul
\tilde{E}_j	j -ter Koeffizient der Prony-Reihe $\tilde{E}(t) = \sum_{j=1}^{N_J} \tilde{E}_j e^{-\beta_j t}$
e	Eulersche Zahl $e \approx 2,72$, Basis der Exponentialfunktion
F	Materieller Deformationsgradient
f	Kraftvektor
F	Kraft
\hat{F}	Kraftamplitude
f	Frequenz
$f(t)$	Materialfunktion, Faltungskern des Faltungsintegrals
$f^{I_l}(t)$	Prony-Reihe des l -ten Intervalls
$f_j^{I_l}$	j -ter Koeffizient der Prony-Reihe des l -ten Intervalls
f_j	j -ter Koeffizient der Prony-Reihe $f(t) = \sum_{j=1}^{N_J} f_j e^{-\beta_j t}$
$\mathbf{G}_{(\bullet)_2}^{(\bullet)_1}$	Tensor $(\bullet)_1$ im Hauptachsensystem, wobei die Eigenwerte $\lambda_{(\bullet)_1}$ mit der Materialfunktion des Modells $(\bullet)_2 = \{\text{EQV}, \text{HS}, \text{HS}^+\}$ gewichtet werden
G	Schubmodul
g	Eingangsgröße des Faltungsintegrals
$g_{\dot{\epsilon}}$	Dehnratengröße als Eingangsgröße des Faltungsintegrals

g_ε	Dehnungsgröße als Eingangsgröße des Faltungsintegrals
H	Biot-Dehnungstensor
$H(u)$	Kontinuierliches Relaxationsfrequenzspektrum
h^*	Zeiteinheit der Intervalleinteilung des lokalen Faltungsalgorithmus
h	Probenhöhe
I	Einheitstensor
I	Intervall
$\bar{J}(t)$	Kriechfunktion
J	Jacobi-Determinante
K (t)	Faltungskern, Tensor vierter Stufe
K $_n(t_1, \dots, t_n)$	Faltungskern, Tensor der Stufe $2(n + 1)$
$\bar{K}, \bar{K}(t)$	Kompressionsmodul, zeitabhängiger Kompressionsmodul
$\tilde{K}(t)$	Relaxationsfunktion mit $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{K}(t) = 0$
K, K_j	Federsteifigkeit in rheologischen Modellen
$K(t)$	Relaxationsfunktion mit $\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = K_{\text{eq}}$
k_1, k_2	Konstanten zur Berechnung des Speicherbedarfs im lokalen Faltungsalgorithmus
L	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient
l	Länge, Elementkantenlänge
M	Massenmatrix
m	Masse
$M(t)$	Materialfunktion des Green-Rivlin-Modells in Produktform
n	Einheitsnormalenvektor eines Flächenelementes
n^{H}	Konstitutiver Parameter
N^{el}	Anzahl an Elementen
N^{vol}	Anzahl an Integrationspunkten der Volumenintegration (Gauss-Punkte)
N^{his}	Anzahl an Geschichtsvariablen pro Integrationspunkt
\bar{N}_I, \bar{N}_J	Ansatzfunktionen der Knoten I und J
N_I^t	Anzahl an Zeitschritten
\bar{N}_I^{nd}	Anzahl an Knoten
N_J	Anzahl an Maxwell-Elementen / Prony-Termen
N_L	Anzahl an Intervallen im lokalen Faltungsalgorithmus
\hat{N}_L	Anzahl an Intervallen, die zur Faltung beitragen
N_N	Ordnung der Konstitutivgleichung
P	Erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
P ^T	Nominalspannungstensor, technischer Spannungstensor
p	Druck
p^x	Abzissenwert eines Kurvenpunktes
p^y	Ordinatenwert eines Kurvenpunktes
Q	Orthogonaler Rotationstensor

$\mathbf{Q}_{(\bullet)}$	Orthogonaler Rotationstensor mit den Eigenvektoren $\mathbf{e}_{(\bullet)}$
$\bar{\mathbf{R}}$	Materialtensor des Pipkin-Rogers-Modells
\mathbf{R}	Orthogonaler Rotationstensor
$R_n(t_1, \dots, t_n)$	Materialfunktion des Green-Rivlin-Modells
\mathbf{S}	Zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\bar{\mathbf{S}}$	Spannungstensor des Pipkin-Rogers-Modells
s	Weg, Verschiebungsrandbedingung
\bar{s}	Skalarer Schalter der Konstitutivgleichungen \bullet -HS ⁺
\hat{s}	Verschiebungsamplitude
\mathbf{T}	Cauchy-Spannungstensor, wahrer Spannungstensor
\mathbf{T}_B	Biot-Spannungstensor
\mathbf{t}	Cauchy-Spannungsvektor
$\hat{\mathbf{t}}$	Vorgeschriebener Cauchy-Spannungsvektor als Neumann-Randbedingung
T	Temperatur
\bar{T}	Abkürzung zur Berechnung der Spur verschiedener Dehnungstensen im Green-Rivlin-Modell
t	Zeit
\bar{t}	Zeitpunkt eines Dehnungssprungs
\hat{t}	Zeitpunkt, ab dem $\tilde{E}(t) = 0$ gilt.
t_{end}	Simulationsdauer
t_{lb}	Untere Intervallgrenze (engl. lower bound)
t_{max}	Maximale Integrationsgrenze
t_{min}	Minimale Integrationsgrenze
t_{m}	Mittelwert der Integrationsgrenzen $t_{\text{m}} = \frac{1}{2}(t^+ - t^-)$
t_{ub}	Obere Intervallgrenze (engl. upper bound)
t^+	Obere Integrationsgrenze
t^-	Untere Integrationsgrenze
$\bar{\mathbf{U}}$	Rechter Strecktensor im Hauptachsensystem von $\dot{\mathbf{U}}$
\mathbf{U}	Rechter Strecktensor
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
\dot{u}_k	Knotengeschwindigkeit in \mathbf{e}_k -Richtung
u	Integrationsvariable des Faltungsintegrals, historische Zeit
u_k	Knotenverschiebung in \mathbf{e}_k -Richtung, Integrationsvariable im Green-Rivlin-Modell
\mathbf{V}	Linker Strecktensor
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
$\hat{\mathbf{v}}$	Vorgeschriebener Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt $t_0 = 0$
v	Geschwindigkeit
v_1	Rückprallgeschwindigkeit
V	Volumen

W	Drehgeschwindigkeitstensor
W	Arbeit
\dot{w}^{int}	Spezifische Spannungsleistung
\bar{w}	Energiedichte
w	Spezifische Arbeit, spezifische Energie
X	Ortsvektor in der Referenzkonfiguration
x	Ortsvektor in der Momentankonfiguration
$\hat{\mathbf{x}}$	Vorgeschriebener Ortsvektor als Dirichlet-Randbedingung
\bar{y}	Spannungswertige Ersatzgröße für die Dehnraten- bzw. Dehnungsgeschichte
y	Ersatzgröße für die Dehnraten- bzw. Dehnungsgeschichte

Griechische Buchstaben

α	Spannungstensor
α	Skalierungsfaktor, Gewichtungskoeffizient
α^{H}	Konstitutiver Parameter
β	Relaxationsrate
$\beta_j^{I_l}$	j -te Relaxationsrate der Prony-Reihe des l -ten Intervalls
$\bar{\beta}$	Relaxationsrate in $\bar{K}(t)$
Γ	Komplexer Integrationspfad
$\Gamma(t)$	Eulersche Gammafunktion
γ	Dehnungstensor
$\bar{\gamma}$	Dehnungstensor im Hauptachsensystem von $\dot{\gamma}$
$\dot{\gamma}$	Dehnratenstensor
$\dot{\gamma}$	Dehnratenrate
δ	Phasenverschiebung
ε	Dehnungstensor
ε^{eng}	Technischer Dehnungstensor (engl. engineering)
$\varepsilon^{\text{true}}$	Wahrer Dehnungstensor (engl. true)
$\dot{\varepsilon}$	Dehnratenrate
$\dot{\varepsilon}^{\text{eng}}$	Nenndehnratenrate der uniaxialen Versuche
ε	Dehnung
ε^e	Elastische Dehnung
ε^v	Inelastische oder viskose Dehnung
η	Dynamische Viskosität in $[F/s^2t]$
η_{impact}	Maß für die Energierückgewinnung im Komponentenversuch
η_{25}	Maß für die Erholung im Komponentenversuch
κ	Ordnung der Ableitung eines fraktionalen Dämpferelementes
λ	Komplexer Frequenzparameter der Laplace-Transformation

$\bar{\lambda}$	Erste Lamé-Konstante
μ	Zweite Lamé-Konstante, $\mu = G$
μ^H	Konstitutiver Parameter
ν	Querkontraktion(szahl)
Π	Kreiszahl $\Pi \approx 3,14$
ξ	Eingangsgröße der Materialfunktion
ψ	Freie Energiedichtefunktion
ρ	Dichte
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor
$\bar{\sigma}$	Gemessene Spannung zur Unterscheidung in der Fehlerberechnung
σ	Spannung
τ	Relaxationszeitkonstante
ϕ^*	Duales Dissipationspotential, spezifische Dissipationsleistung
ω	Gewichtungskoeffizient

Kalligraphische Buchstaben

$\mathcal{F}(\lambda)$	Laplace-Transformierte der Funktion $f(t)$
$\mathcal{H}(t)$	Heaviside-Funktion
\mathcal{K}	Punktmenge eines Körpers
\mathcal{L}	Lineares Funktional
\mathcal{N}	Knoten (engl. node)
\mathcal{P}	Materieller Punkt

Bezeichnungen und besondere Indizes

$(\bullet)_{\text{eqv}}$	Vergleichsgröße (engl. equivalent)
$(\bullet)_{\text{eq}}$	Größe (\bullet) im Gleichgewicht (lat. equilibrium)
$(\bullet)^{\text{ext}}$	Äußerer Anteil der Größe (\bullet)
$(\bullet)^{\text{int}}$	Innerer Anteil der Größe (\bullet)
$(\bullet)_i$	Größe des i -ten Zeitschritts
$(\bullet)_{\text{iso}}$	Isochorer Anteil der Größe (\bullet)
$(\bullet)_I$	Größe des I -ten Knotens
$(\bullet)_j$	Größe des j -ten Maxwell-Elementes / Prony-Termes
$(\bullet)_J$	Größe des J -ten Knotens
$(\bullet)^{\text{kin}}$	Kinetischer Anteil der Größe (\bullet)
$(\bullet)_{l, (\bullet)^{I_l}}$	Größe des l -ten Intervalls
$(\bullet)_n$	Größe (\bullet) der Ordnung n
$(\bullet)_{\text{ov}}$	Übergröße, i. d. R. Überspannung (engl. overstress)
$(\bullet)_{\text{vol}}$	Volumetrischer Anteil der Größe (\bullet)

Einheiten

°C	Grad Celsius
GPa	Gigapascal
h	Stunde
J	Joule
kg	Kilogramm
km	Kilometer
kPa	Kilopascal
mm	Millimeter
ms	Millisekunde
%	Prozent
rad	Radian
s	Sekunde

1

Einleitung

1.1. Motivation

Viskoelastische Materialien sind in Natur und Technik überall dort zu finden, wo Stöße und Schwingungen gedämpft werden sollen. Als Elemente des menschlichen Bewegungsapparates reduzieren sie die Belastung auf das Knochengestüt, als Verpackungsmaterialien schützen sie das Transportgut und als Dämmmatten im Automobil- und Hausbau vermeiden sie unerwünschte Vibrationen und Geräusche (vgl. Abbildung 1.1). Sie tragen wesentlich dazu bei, Materialermüdung und Materialversagen zu verhindern und den Komfort durch geringere Schallemission und Vibrationen zu erhöhen.

Die dämpfende Wirkung viskoelastischer Materialien beruht auf ihrem zeit- und frequenzabhängigen Materialverhalten. Viskoelastische Materialien vereinigen die mechanischen Eigenschaften von elastischen Festkörpern (gr. *elastós* - dehnbar, biegsam) und viskosen Flüssigkeiten (lat. *viscōsus* - zähflüssig). Wie elastische Festkörper verformen sie sich spontan und reversibel bei äußerer Belastung. Bei konstanter Last steigt ihre

Verpackungs-
material



Polsterung



Gebrauchs-
gegenstände



Dämmmatten



Abbildung 1.1.: Beispiele viskoelastischer Materialien und ihrer Einsatzgebiete

1. Einleitung

Verformung wie bei viskosen Flüssigkeiten weiter an, bleibt jedoch wie bei Festkörpern begrenzt. Bei Entlastung kehren viskoelastische Materialien sowohl spontan als auch zeitverzögert in ihre Ausgangsform zurück. Dadurch zeigen sie eine Hystereskurve und dissipieren Energie.

Viskoelastisches Materialverhalten ist charakteristisch für makromolekulare Werkstoffe wie Polymere. Im unbelasteten Zustand liegen die Polymerketten als Knäuel vor. Bei ausreichender Beweglichkeit und Rotationsfreiheit der Kettensegmente können die Polymerketten der äußeren Last folgen und eine ausgerichtete Konformation annehmen, ohne dass Bindungen getrennt werden. Dabei handelt es sich um thermisch aktivierte, zeitabhängige Vorgänge, die das viskose Verhalten erklären (FERRY 1980).

Polymerwerkstoffe besitzen ein nahezu uneingeschränktes Anwendungsgebiet. Ihr mechanisches Verhalten prognosefähig zu berechnen, ist daher von besonderem wirtschaftlichem Interesse. Mithilfe von Simulationen können dann Kunststoffbauteile optimiert, die Anzahl von Versuchen und die Entwicklungszeit reduziert sowie Ressourcen geschont werden.

In der Automobilindustrie werden immer mehr Kunststoffe eingesetzt, um das Fahrzeuggewicht und damit den Treibstoffverbrauch und die Kohlenstoffdioxidemission zu verringern (SHANKAR 2014). Dieser Trend wirkt sich auch auf die Fahrzeugentwicklung aus, in der Finite-Elemente-Simulationen mit expliziten Zeitintegrationsverfahren eine entscheidende Rolle zur Erfüllung der Crashesicherheit übernehmen (KÖHLER U. A. 2006). Die Crashesimulationen helfen dabei, verschiedene Entwicklungsziele wie die Zulassung im Straßenverkehr und eine vorteilhafte Einstufung eines Fahrzeuges in Verbrauchertests zu erreichen (KRAMER 2013). Dazu ist es einerseits notwendig, dass die Kunststoffbauteile im Fahrzeug prognosefähig modelliert werden, andererseits ist auch die Modellierungsgüte der Testbedingungen durch geeignete Barrieren-, Dummy- und Impaktormodelle für eine verlässliche Auslegung maßgebend.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das nichtlinear viskoelastische Materialverhalten des Polyurethan-Schaumstoffes Confor[®] CF-45 (Confor blue) des Herstellers E-A-R Specialty Composites¹ modelliert. Als Bestandteil des in Abbildung 1.2c dargestellten Hüftprüfkörpers² sind Confor CF-45 oder ein Schaumwerkstoff mit zu Confor CF-45 vergleichbaren Eigenschaften im Verbraucherschutztest Euro NCAP verankert. Mithilfe des Hüftprüfkörpers werden Versuche durchgeführt, die die Verletzungsgefahr eines Fußgängers im Falle einer Frontalkollision mit einem Fahrzeug bewerten. Um das Ausmaß an Verletzungen im Oberschenkel- und Hüftbereich während des Primäraufpralls beurteilen zu können, wird der Hüftprüfkörper, wie in Abbildung 1.2b, dargestellt auf die Vorderkante der Fronthaube geschossen (EURO NCAP 2015). Gemäß des Prüfkörperaufbaus stellt der Schaum das menschliche Fleisch dar, ohne dabei biofidele Eigenschaften aufzuweisen. Aufgrund seiner erhöhten Dichte und ausgeprägten Energieabsorption bildet

¹Geschäftseinheit der Firma Aearo Technologies in Indianapolis (Indiana, USA)

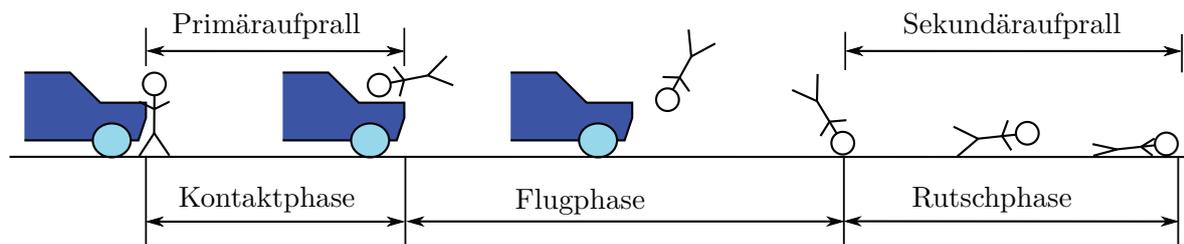
²auch Oberschenkelprüfkörper genannt: engl. upper leg(form) impactor

er das menschliche Weichgewebe jedoch besser ab als andere Schäume (LAWRENCE UND HARDY 1998).

Die Entwicklung des Confor-Schaumes geht auf die Nationale Aeronautik- und Raumfahrtbehörde (NASA) der USA zurück und ist ein viel zitiertes Beispiel dafür, wie erfolgreich der Technologietransfer der Luft- und Raumfahrtforschung in andere Industriezweige sein kann (NASA 1976, 1981, 1988, 2005).

Ursprünglich hatte die NASA im Jahr 1966 sich zur Aufgabe gemacht, den Sitzkomfort und die Crashesicherheit von Flugzeugsitzen zu verbessern. Im Ames Forschungszentrum wurde daraufhin ein offenzelliger Polyurethan-Schaum mit außergewöhnlichen Eigenschaften entwickelt. Ohne dass Druckpunkte entstehen, passt sich der Schaum unter Belastung vollständig den Konturen der Kontaktfläche an und kehrt auch nach einer Kompression von über 90% wieder in seine Ausgangsform zurück. Bei Stoßvorgängen kann durch die gleichmäßige Druckverteilung und große Kontaktfläche sehr viel Energie absorbiert werden.

a) Ablauf der Frontalkollision eines Fußgängers mit einem Fahrzeug (KÜHN U. A. 2007)



b) Primäraufprall im Euro NCAP

Beispiel eines Prüfpunktes in der Mitte der Fronthaubenvorderkante



c) Aufbau des Hüftprüfkörpers

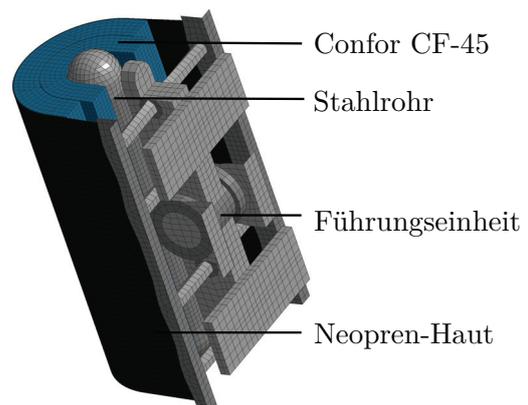


Abbildung 1.2.: Fußgängerschutz: Abbildung des Primäraufpralls mithilfe des Hüftprüfkörpers

Mittlerweile werden aus dieser Art von PU-Schaumstoffen zahlreiche Gebrauchsgegenstände und Polsterungen³ hergestellt (NASA 2005). Die Schaumstoffe tragen dabei verschiedene Handelsnamen⁴ oder werden unter englischen Bezeichnungen⁵ geführt.

1.2. Modellierung von Schäumen

Um die Vorgehensweise dieser Arbeit einzuordnen, werden im Folgenden verschiedene Möglichkeiten zur Modellierung eines Schaumes skizziert. Eine Übersicht ist beispielsweise in ROMERO U. A. (2008) und GOGA UND HUČKO (2015) enthalten.

Da die Schaumporen üblicherweise mit einem Gas, einem Gasgemisch oder einer Flüssigkeit gefüllt sind, bildet ein offenzelliger Schaum unter Standardbedingungen ein mehrphasiges System. Im allgemeinsten Fall erfordert die Berechnung des mechanischen Systemverhaltens die Modellierung der Struktur und der Eigenschaften aller Einzelphasen sowie die Kopplung der Fluid- und Festkörperphasen durch geeignete Kontakt- und Übergangsbeziehungen.

Neben der Entscheidung, ob die ganzheitliche Beachtung aller Phasen notwendig ist, muss die Skala der Modellierung festgelegt werden. Mikromechanische Modelle dienen u. a. dazu, die Deformationsmechanismen eines Werkstoffes zu verstehen und die physikalischen Einflussfaktoren auf das mechanische Verhalten zu ermitteln. In der Literatur wurden verschiedene periodische und statistische Ersatzmodelle der Zellstruktur analytisch untersucht (GENT UND THOMAS (1959), GIBSON UND ASHBY (1997), MILLS UND GILCHRIST (2000a)). Inzwischen sind mikromechanische Modelle jedoch nicht mehr auf idealisierte Strukturen und analytische Untersuchungen beschränkt. Wie in Abbildung 1.3 dargestellt kann die reale Zellstruktur durch die Verarbeitung dreidimensionaler Bilddaten in ein Berechnungsmodell übertragen und das Strukturverhalten dieses Ausschnitts in einer FE-Simulation berechnet werden (YOUNG U. A. 2008). Trotz der gestiegenen Rechnerleistung können praxisrelevante Probleme noch nicht auf diese Weise gelöst werden.

Mesoskopische Modellierungen bereiten den Übergang von der Mikro- auf die Makroebene, indem sie repräsentative Einheitszellen der Mikrostruktur zusammen mit Homogenisierungsmethoden einsetzen und so makroskopische Berechnungen erlauben (ROMERO U. A. 2008).

Ist ausschließlich das resultierende Verhalten des Schaumes von Interesse, so bietet sich der Einsatz phänomenologischer Modelle auf makroskopischer Ebene an. Sie idealisieren

³z. B. orthopädische Sitzkissen, Schuheinlagen, Matratzen, Operationstische, Verpackungsauskleidungen, Ohrstöpsel, Football-Helme und Polstermöbel sowie Motorrad- und Flugzeugsitze

⁴Temper[®], Tempur[®], Tempur-Pedic[®], Confor[®], SunMate[®], Pudgee[®], Laminar[®]

⁵engl. memory foam, viscoelastic foam, visco foam, slow-recovery foam, low-resilience polyurethane, slow spring back foam

Mikromechanische Modellierung (mit freundlicher Genehmigung von YOUNG U. A. (2008))

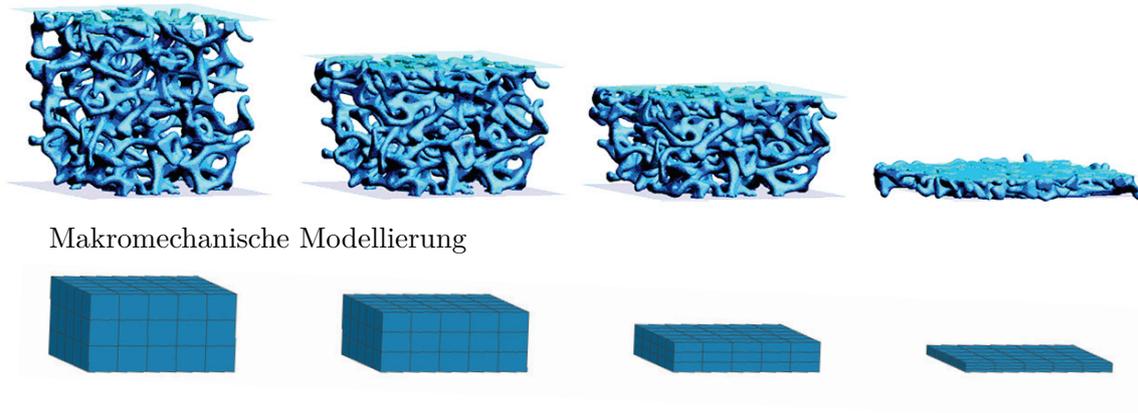


Abbildung 1.3.: Druckbelastung einer mikromechanischen und einer makroskopischen Modellierung

den Schaum als homogenes Kontinuum und können so die bekannten Vorgehensweisen der Materialtheorie nutzen. Beispielsweise modellieren PAMPOLINI UND RAOUS (2014) und GOGA UND HUČKO (2015) offenzellige Schäume mithilfe eindimensionaler rheologischer Modelle.

Das dreidimensionale, dehnratenabhängige Modell „MAT_FU_CHANG_FOAM“ (MFCF) des FEM-Berechnungsprogrammes LS-DYNA (HALLQUIST 2016) zählt ebenfalls zu den phänomenologischen Modellen und wird aktuell im Hüftimpaktor des Fußgängerschutzes zur Modellierung von Confor-Schaum eingesetzt. Wie in EFFINGER U. A. (2014) dargestellt besitzt dieses Modell Defizite bezüglich des Entlastungsverhaltens und kann zu Oszillationen führen.

Im Gegensatz zur klassischen Kontinuumsmechanik kann die Theorie Poröser Medien alle Einzelphasen und ihre Wechselwirkungen auf makroskopischer Ebene berücksichtigen (EHLERS 1995). Dabei wird der Schaum als heterogener Werkstoff auf Basis des Konzepts der Volumenanteile homogenisiert und bildet auf diese Weise ein Mehrphasenkontinuum. Die Beiträge aller Phasen und ihre Interaktion werden mithilfe der Theorie der Mischungen in den Bilanzgleichungen zusammengeführt. Mit Bezug zu offenzelligen Polymerschäumen wurde die Theorie Poröser Medien beispielsweise in MARKERT (2005) eingesetzt.

1.3. Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Modellierung offenzelliger Polymerschäume bereitzustellen, welche insbesondere die nichtlinear viskoelastischen Charakteristiken dieser Werkstoffe im Rahmen einer Crashsimulation abbilden kann.

1. Einleitung

Von den vielfältigen Möglichkeiten des letzten Abschnitts kommt nur eine phänomenologische Modellierung in Frage, die die dreidimensionalen Spannungszustände bei finiten Deformationen und Rotationen beschreiben kann. Diese Auswahl trägt den Anforderungen des Fußgängerschutzes Rechnung: Größe der Schaumlagen des Hüftprüfkörpers, Diskretisierung mit Volumenelementen, hohe lokale Kompressionen und Rotationen der Volumenelemente.

Um das Rahmenwerk der klassischen Kontinuumsmechanik beizubehalten, findet die Theorie Poröser Medien keine Anwendung. Stattdessen wird für die Konstitutivgleichung eine additive Zusammensetzung der Spannungsbeiträge aus Gleichgewichts- und Überspannungsantwort und aus der Fluidphase verfolgt. Die Gleichgewichtsantwort beschreibt das Materialverhalten bei quasistatischer Anregung, die Überspannung erfasst die Spannungsdifferenz zwischen quasistatischer und dynamischer Anregung und die Fluidphase liefert einen Spannungsbeitrag, wenn sich die Fluidphase den äußeren Randbedingungen durch Aus- oder Einströmung nicht schnell genug anpassen kann. Da keine verwertbaren Versuche zur Bestimmung des Lufteinflusses zur Verfügung standen, wird eine Modellierung des Spannungsbeitrags der Fluidphase in dieser Arbeit nicht betrachtet.

Im Vergleich zu Polymerwerkstoffen stellen offenzellige Polymerschäume durch das Verhalten der Mikrostruktur besondere Anforderungen an die Konstitutivgleichung. Mithilfe eines Ausschnitts des kubischen Zellmodells nach ASHBY (2006) lassen sich die charak-

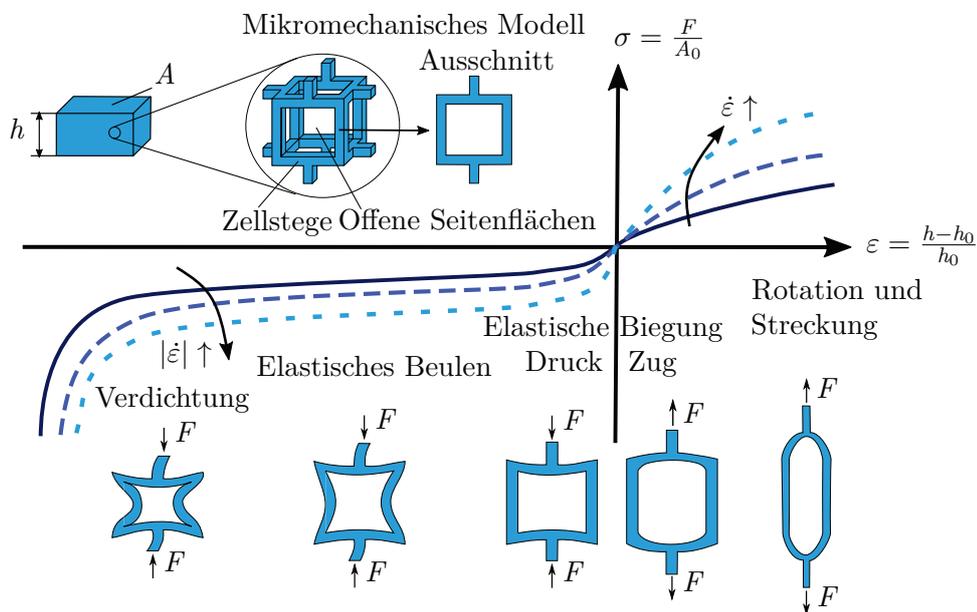


Abbildung 1.4.: Spannungs-Dehnungs-Diagramm offenzelliger Polymerschäume unter Druck- und Zugbelastung: Schematische Darstellung der Deformationsvorgänge am kubischen Modell nach ASHBY (2006) und HILYARD UND CUNNINGHAM (2012)

teristischen Spannungs-Dehnungs-Kurven der Abbildung 1.4 erklären.

Zu Beginn einer quasistatischen Zug- oder Druckbelastung steigt der Betrag der Spannung zunächst stark an. Dieser Anstieg wird durch die elastische Biegung der senkrecht zur Lastrichtung ausgerichteten Zellstege hervorgerufen.

Unter Zugbelastung werden die parallel zur Lastrichtung stehenden Zellstege anschließend gestreckt und die ursprünglich senkrecht zur Lastrichtung ausgerichteten Zellstege drehen sich in Lastrichtung, sodass sich der Querschnitt der Zugprobe reduziert.

Unter Druckbelastung hingegen fangen die Zellstege parallel zur Lastrichtung ab einem gewissen Spannungswert an auszuknicken. Solange der Beulvorgang die gesamte Struktur erfasst, verändert sich die Druckspannung nicht oder ihr Betrag steigt ebenso wie der Querschnitt der Schaumprobe nur geringfügig an. An dieses Spannungsplateau schließt sich die Verdichtungsphase an, in der die Zellstruktur kollabiert und gegenüberliegende Zellwände aufeinander gedrückt werden. Bei Entlastung kehrt die Schaumprobe wieder vollständig in ihre Ausgangskonfiguration zurück.

Während sich die unterschiedlichen Deformationsphasen in den mikromechanischen Modellen aus Abbildung 1.3 und 1.4 von sich aus einstellen, können diese anhand des makroskopischen Modells aus Volumenelementen nicht aufgelöst werden. Zum Ziel dieser Arbeit gehört folglich auch, die ausgeprägte Zug-Druck-Asymmetrie in der Gleichgewichts- und Überspannungsantwort abzubilden. Dabei liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der isotropen Modellierung der Überspannung im Rahmen der Theorie der finiten nicht-linearen Viskoelastizität. Durch die Abhängigkeit von der vollständigen Dehnungsgeschichte sollen im Vergleich zum Stand der Technik Oszillationen, die durch eine einfache Abhängigkeit von der Dehnrates entstehen können, vermieden und das Entlastungsverhalten verbessert werden.

1.4. Gliederung der Arbeit

In Kapitel 2 werden die Grundlagen der Crashsimulation und Materialtheorie bereitgestellt sowie die Annahmen bezüglich der Konstitutivgleichungen dieser Arbeit zusammengefasst.

Kapitel 3 führt in die Theorie der linearen Viskoelastizität ein, erweitert diese auf finite Deformationen und materielle Nichtlinearität und bildet so das Rahmenwerk für die Konstitutivgleichungen der Überspannung in Kapitel 5.

Die Integraldarstellung der viskoelastischen Konstitutivgleichungen führt zu Faltungsintegralen. Die Faltungsalgorithmen zur numerischen Berechnung dieser Integrale in Abhängigkeit der Form der Materialfunktion sind Gegenstand des 4. Kapitels.

Die Konstitutivgleichungen, die zur Beschreibung der Überspannung für offenzellige Polymerschäume entwickelt wurden, werden in Kapitel 5 vorgestellt. Zudem beinhaltet

1. Einleitung

dieses Kapitel die kinematische Einschränkung und ein Beispiel einer Gleichgewichtsantwort.

Die Eignung der Konstitutivgleichungen aus Kapitel 5, das Verhalten offenzelliger Polymerschäume abzubilden, wird in Kapitel 6 mithilfe von Standardanregungen überprüft. Kapitel 7 beginnt mit der experimentellen Charakterisierung von Confor-Schaum, stellt die Parameteridentifikation für die Gleichgewichtsantwort und die Überspannung vor und zeigt die Robustheit sowie die viskoelastischen Effekte anhand eines Lastfalls aus dem Fußgängerschutz und anhand zweier Komponentenversuche.

Abschließend fasst Kapitel 8 die Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere Forschungsarbeiten.

Grundlagen

Crashsimulationen dienen dazu, das mechanische Verhalten einer Struktur unter dynamischer, kurzzeitiger Belastung vorherzusagen. Die Grundzüge der Finite-Elemente-Methode mit expliziter Zeitintegration, die Berechnungen zu diesem Zweck ermöglicht und im Rahmen dieser Arbeit durch den Einsatz des FEM-Berechnungsprogrammes LS-DYNA verwendet wird, werden im vorliegenden Kapitel zusammengefasst. Darüber hinaus werden die Prinzipien der Materialtheorie und die konstitutiven Annahmen dieser Arbeit vorgestellt.

Zahlreiche Lehrbücher behandeln die hier folgenden Grundlagen. Beispielsweise sei an dieser Stelle zur Vertiefung der Kontinuumsmechanik und der Materialtheorie auf ALTENBACH UND ALTENBACH (1994), HOLZAPFEL (2000), BASAR U. A. (2001), OGDEN (1984) und HAUPT (2000), zum Studium der FEM auf BELYTSCHKO U. A. (2000) und zur numerischen Umsetzung in LS-DYNA auf HALLQUIST (2016) verwiesen. Einen Überblick rund um das Themengebiet der Crashsimulation bietet darüber hinaus HIERMAIER (2007).

2.1. Nichtlineare Festkörpermechanik

Im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik wird ein Körper als zusammenhängende, kompakte Punktmenge \mathcal{K} im euklidischen Raum \mathbb{R}^3 beschrieben. Jeder Punkt des Körpers $P \in \mathcal{K}$ kann einem Raumpunkt zugeordnet werden und repräsentiert einen materiellen Punkt.

Wie in Abbildung 2.1 dargestellt kann ein Körper im Laufe der Zeit t unterschiedliche Konfigurationen einnehmen. Treten zwischen den Konfigurationen wie in der Crashsimulation finite Deformationen auf, so müssen geometrische Nichtlinearitäten berücksichtigt

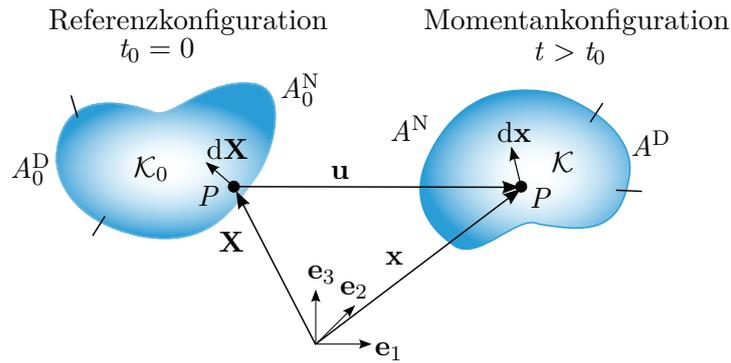


Abbildung 2.1.: Geometrische Beschreibung eines Körpers in der Referenz- und Momentankonfiguration

und Referenz- und Momentankonfiguration unterschieden werden. Die Konfiguration zum Zeitpunkt $t = 0$ wird als Ausgangskonfiguration \mathcal{K}_0 bezeichnet und in dieser Arbeit als Referenzkonfiguration benutzt. Die Konfiguration zum aktuellen Zeitpunkt t heißt Momentankonfiguration.

2.1.1. Kinematik

Welche geometrischen Konfigurationen ein Körper einnimmt, wird durch die Gesamtheit der Bewegungen aller materiellen Punkte festgelegt, die mithilfe kinematischer Größen beschrieben werden. Im ortsfesten, kartesischen Koordinatensystem mit den Basisvektoren \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3 führt der Ortsvektor \mathbf{X} in der Referenzkonfiguration zu einem materiellen Punkt P . Seine Lage in der Momentankonfiguration wird durch den Ortsvektor \mathbf{x} beschrieben.

Wie in der Festkörpermechanik üblich wird in dieser Arbeit die Lagrangesche Betrachtungsweise benutzt, in der alle Größen, ohne dass dies explizit ausgeschrieben wird, in Abhängigkeit von \mathbf{X} ausgedrückt werden (materielle Darstellung, mitbewegter Beobachter). Die Differenz der Ortsvektoren

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.1)$$

wird als Verschiebung \mathbf{u} bezeichnet. Ihre materielle Zeitableitung führt auf die Geschwindigkeit \mathbf{v} und deren materielle Ableitung wiederum auf die Beschleunigung \mathbf{a} :

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \ddot{\mathbf{x}}. \quad (2.2)$$

Die Veränderung eines Linienelementes zwischen der Referenz- und Momentankonfiguration wird durch den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad } \mathbf{x} = \frac{\partial x_k}{\partial X_m} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \quad (2.3)$$

beschrieben und seine Determinante als Jacobi-Determinante $J = \det \mathbf{F}$ abgekürzt. Die polare Zerlegung von \mathbf{F} in den eigentlich orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} und den rechten Strecktensor \mathbf{U}

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (2.4)$$

ermöglicht die Aufspaltung der Deformation in eine Starrkörperrotation und eine Streckung. Eine Starrkörperverschiebung entfällt bereits durch die Gradientenbildung in Gl. (2.3). Mithilfe von \mathbf{U} können die generalisierten Verzerrungsmaße

$$\mathbf{E}^{(m)} = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{I}) & \text{falls } m \neq 0, \\ \ln \mathbf{U} & \text{falls } m = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

ohne Starrkörperbewegungen berechnet werden. Die Potenz \mathbf{U}^m kürzt dabei die $m - 1$ aufeinanderfolgenden einfachen Verjüngungen der m Tensoren \mathbf{U} ab

$$\mathbf{U}^m = \underbrace{\mathbf{U} \cdot \dots \cdot \mathbf{U}}_{m \text{ Tensoren}}. \quad (2.6)$$

In den Konstitutivgleichungen dieser Arbeit werden die Biot-Dehnung $\mathbf{H} = \mathbf{E}^{(1)}$ und der Green-Lagrangesche-Dehnungstensor

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.7)$$

mit dem rechten Cauchy-Green-Deformationstensor $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ und dem Einheitstensor \mathbf{I} verwendet. Darüber hinaus werden zur Auswertung der Simulationen die wahre Dehnung $\boldsymbol{\epsilon}^{\text{true}} = \mathbf{E}^{(0)}$ und zur Beschreibung der Versuche das linearisierte Verzerrungsmaß

$$\boldsymbol{\epsilon}^{\text{eng}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F} + \mathbf{F}^T) - \mathbf{I}, \quad (2.8)$$

das auch als Ingenieurdehnung oder technische Dehnung bezeichnet wird, genutzt. Neben den Dehnungstensoren werden auch deren materiellen Zeitableitungen $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{U}}$ und $\dot{\mathbf{E}}$ benötigt. Mithilfe des Deformationsgeschwindigkeitstensors \mathbf{D} kann $\dot{\mathbf{E}}$ über die

Pull-Back-Operation

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} \quad (2.9)$$

berechnet werden. \mathbf{D} wird als symmetrischer Anteil $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$ des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} ermittelt

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad} \mathbf{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_m} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T). \quad (2.10)$$

Der antisymmetrische Anteil $\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T$ heißt Drehgeschwindigkeits- oder Spintensor.

2.1.2. Kinetik

Eine äußere Belastung führt bei deformierbaren Körpern zu einer inneren Beanspruchung, die mithilfe von Spannungsvektoren und -tensoren bewertet werden kann.

Spannungsvektoren beziehen den aktuellen differentiellen Kraftvektor $d\mathbf{f}$ unter weiteren möglichen Operationen auf ein differentielles Flächenelement. Spannungstensoren transformieren dann die Einheitsnormale des zugehörigen Flächenelementes und auf den entsprechenden Spannungsvektor. Auf diese Weise führt der Cauchy-Spannungsvektor

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}}{dA} \quad (2.11)$$

zur Definition des Cauchy-Spannungstensors \mathbf{T} , welcher den Einheitsnormalenvektor \mathbf{n} des Flächenelementes dA in der Momentankonfiguration in den Cauchy-Spannungsvektor überführt

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.12)$$

\mathbf{T} wird auch als wahre Spannung bezeichnet, da \mathbf{t} das deformierte Flächenelement der Momentankonfiguration als Bezugsgröße verwendet. Unter Einsatz des undeformierten Flächenelementes der Referenzkonfiguration dA_0 erhält man die erste Piola-Kirchhoff-Spannung \mathbf{P}

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}_0, \quad (2.13)$$

deren Transponierte \mathbf{P}^T auch als Nominalspannung oder technische Spannung bezeichnet wird. Verändert man den Spannungsvektor \mathbf{t}_0 um \mathbf{F}^{-1} , so folgt die Definition der zweiten Piola-Kirchhoff-Spannung \mathbf{S} als

$$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{t}_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_0. \quad (2.14)$$

Rotiert man den Spannungsvektor \mathbf{t}_0 um \mathbf{R}^T , so erhält man das Spannungsmaß $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}$

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{t}_0 = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_0. \quad (2.15)$$

Der symmetrische Anteil dieses Spannungsmaßes definiert in dieser Arbeit die Biot-Spannung

$$\mathbf{T}_B = \frac{1}{2} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{S}), \quad (2.16)$$

für die keine Interpretation mit einem Spannungsvektor existiert (OGDEN 1984). Obwohl die beiden Tensoren \mathbf{S} und \mathbf{U} symmetrisch sind, ist deren Produkt nur symmetrisch, wenn sie dieselben Hauptrichtungen besitzen. Diese Bedingung der Koaxialität ist im Allgemeinen nicht erfüllt.

Mithilfe der kinematischen Größen aus Abschnitt 2.1.1 und dem Zusammenhang der differentiellen Flächenelemente

$$\mathbf{n} dA = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 dA_0 \quad (2.17)$$

können die Transformationsbeziehungen zwischen den Spannungstensoren hergeleitet werden. Die Beziehung zwischen \mathbf{S} und \mathbf{T} wird als Push-Forward-Operation

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.18)$$

bezeichnet.

2.1.3. Anfangsrandwertproblem der Strukturmechanik

In den letzten beiden Abschnitten wurden wichtige Größen zur Beschreibung des mechanischen Feldproblems eingeführt. Die physikalischen Gesetzmäßigkeiten der klassischen Mechanik und die Konstitutivgleichung, die das Gleichungssystem zur Lösung des mechanischen Feldproblems liefern, sind Gegenstand dieses Abschnitts.

Die materialunabhängigen Gleichungen werden an dieser Stelle als Bilanzgleichungen in ihrer lokalen Form und in materieller Darstellung mit Bezug zur Momentankonfiguration eingeführt. Die hier gewählte Darstellung bildet unter der Bezeichnung „Updated Lagrangian Formulation“ (ULF) die Grundlage der meisten Hydrocodes (BENSON 1992) und so auch die Grundlage für den Einsatz des FEM-Berechnungsprogrammes LS-DYNA im Rahmen dieser Arbeit (HALLQUIST 2016). Kontaktvorgänge werden an dieser Stelle nicht betrachtet.

Massenerhaltung

In materieller Darstellung wird die Massenbilanz zu einer algebraischen Gleichung, mit der die Dichte der Momentankonfiguration ρ aus der Dichte der Referenzkonfiguration ρ_0 und dem relativen Volumen J berechnet werden kann

$$\rho(\mathbf{X}, t) J(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X}) J(\mathbf{X}, t_0 = 0) = \rho_0(\mathbf{X}). \quad (2.19)$$

In dieser Form ist die Massenbilanz nur auf materielle Punkte anwendbar.

Drehimpulserhaltung (Drallbilanz)

Die Drehimpulserhaltung resultiert in der Symmetriebedingung der Cauchy-Spannung

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.20)$$

und reduziert damit die unbekanntenen Spannungskomponenten auf drei Normalspannungen und drei Schubspannungen.

Impulserhaltung

Die Impulserhaltung spielt eine zentrale Rolle in der Strukturmechanik. Mit den äußeren spezifischen Volumenkräften \mathbf{b} führt sie auf die Bewegungsgleichung

$$\rho \frac{D\dot{\mathbf{x}}}{Dt} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}, \quad (2.21)$$

die die Trägheitskräfte mit den inneren und äußeren Kräften verbindet.

Konstitutivgleichung

Die Konstitutivgleichung verknüpft die kinematischen und kinetischen Größen und definiert die Materialeigenschaften des Körpers. Der Bezug zur Momentankonfiguration erfordert die Verwendung der Cauchy-Spannung in den Bilanzgleichungen. Um den Rechenaufwand der Konstitutivgleichung gering zu halten, wird deshalb häufig eine Rateformulierung in \mathbf{T} eingesetzt. Als objektive Spannungsrate bietet sich beispielsweise die Jaumann-Rate

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \overset{\circ}{\mathbf{T}}(\mathbf{D}, \mathbf{T}, \dots) \quad (2.22)$$

an. Trotzdem kann die Konstitutivgleichung auch in anderen Spannungs- und Verzerrungsmaßen formuliert und deren Resultat im Anschluss in die Cauchy-Spannung transformiert werden.

Kinematik

Die Konstitutivgleichung (2.22) favorisiert durch ihre Argumente die kinematische Beschreibung

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\text{grad } \dot{\mathbf{x}} + \text{grad}^T \dot{\mathbf{x}}) . \quad (2.23)$$

Die kinematische Beschreibung ist in der ULF jedoch nicht festgelegt, sondern kann an die Konstitutivgleichung angepasst werden.

Anfangs- und Randbedingungen

Die Anfangsbedingungen für den gesamten Körper \mathcal{K}_0 und die zeitabhängigen Randbedingungen auf der Oberfläche des Körpers $A = A^D \cup A^N$

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t_0 = 0) = \mathbf{X} \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{K}_0 , \quad (2.24)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t_0 = 0) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{K}_0 , \quad (2.25)$$

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad \forall \mathbf{X} \in A^D , \quad (2.26)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{X}, t) \quad \forall \mathbf{X} \in A^N \quad \text{mit} \quad A^N \cap A^D = \emptyset \quad (2.27)$$

vervollständigen das Strukturproblem in seiner starken Form, das durch die Gl. (2.19) bis (2.23) als System partieller Differentialgleichungen vorliegt. Eine punktweise Lösung des Gleichungssystems ist im Allgemeinen nicht in geschlossener Form bekannt. Um eine Näherungslösung zu bestimmen, können jedoch verschiedene numerische Methoden eingesetzt werden. Die Grundzüge der FEM, wie sie hier verwendet wird, werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

Das Anfangsrandwertproblem in dieser Form berücksichtigt keine Temperatureinflüsse und kann ohne die thermodynamischen Hauptsätze gelöst werden. Ohne thermische Beiträge stellt die Energiebilanz eine Äquivalenzumformung der lokalen Impulsbilanz dar und ist deshalb nicht aufgeführt. Die Energiebilanz definiert jedoch durch

$$\rho \frac{Dw^{\text{int}}}{Dt} = \mathbf{T} : \mathbf{D} \quad (2.28)$$

eine für die Konstitutivgleichungen wichtige Größe, die spezifische Spannungsleistung \dot{w}^{int} . Spannungs- und Dehnratentensoren, die wie \mathbf{T} und \mathbf{D} zur Spannungsleistung führen, werden als energetisch konjugierte Größen bezeichnet.

2.2. Finite-Elemente-Methode und Zeitdiskretisierung

2.2.1. Schwache Form des Anfangsrandwertproblems

Um das Strukturproblem des vorherigen Abschnitts 2.1.3 mit einem Näherungsverfahren lösen zu können, muss die starke Form der Impulsbilanz Gl. (2.21) in ein Integral über das Lösungsgebiet, die sogenannte schwache Form, überführt werden. Das Prinzip der virtuellen Arbeit führt mit der Testfunktion $\delta \mathbf{x}$ und der Lösung \mathbf{x} auf die Integralform

$$\int_{\mathcal{K}} \left(\rho \frac{D\dot{\mathbf{x}}}{Dt} - \text{div } \mathbf{T} - \rho \mathbf{b} \right) \cdot \delta \mathbf{x} \, dV + \int_{A^N} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} - \hat{\mathbf{t}}) \cdot \delta \mathbf{x} \, dA = 0, \quad (2.29)$$

die neben der Impulsbilanz die Neumann-Randbedingungen enthält. Die Einhaltung der Dirichlet-Randbedingungen wird durch die Einschränkungen für $\delta \mathbf{x}$ und \mathbf{x}

$$\delta \mathbf{x} \in \left\{ \delta \mathbf{x} : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \delta \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X} \in A^D \right\}, \quad (2.30)$$

$$\mathbf{x} \in \left\{ \mathbf{x} : \mathcal{K}_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad \forall \mathbf{X} \in A^D \right\} \quad (2.31)$$

sichergestellt. Gl. (2.29) kann mithilfe des Gaußschen Integralsatzes und partieller Integration zu

$$\delta W = \underbrace{\int_{\mathcal{K}} \rho \frac{D\dot{\mathbf{x}}}{Dt} \cdot \delta \mathbf{x} \, dV}_{\delta W^{\text{kin}}} + \underbrace{\int_{\mathcal{K}} \mathbf{T} : \text{Grad } \delta \mathbf{x} \, dV}_{\delta W^{\text{int}}} - \underbrace{\int_{\mathcal{K}} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{x} \, dV - \int_{A^N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{x} \, dA}_{\delta W^{\text{ext}}} = 0 \quad (2.32)$$

vereinfacht werden und stellt die schwache Form des Strukturproblems dar. Die virtuelle Arbeit δW setzt sich aus kinetischer, innerer und äußerer Arbeit δW^{kin} , δW^{int} und δW^{ext} zusammen.

2.2.2. Räumliche Diskretisierung

Zur räumlichen Diskretisierung zerlegt die Finite-Elemente-Methode das Lösungsgebiet in eine endliche Anzahl disjunkter Teilgebiete, die finiten Elemente. In der Lagrange-schen Betrachtungsweise definieren ausgewählte Punkte des Körpers, die Knoten, die Begrenzung der Elemente und bilden das Netz der Berechnung. Die Verschiebungen der Knoten stellen die Freiheitsgrade des Systems dar. Zwischen den Knoten interpolieren die zeitunabhängigen Ansatzfunktionen \bar{N}_I die diskreten Werte \mathbf{X}_I und \mathbf{u}_I der einzelnen Knoten I .

Werden für die Geometrie und die Freiheitsgrade gemäß des isoparametrischen Konzepts dieselben Ansatzfunktionen verwendet, so kann die Approximation der Geometrie und des Verschiebungsfeldes in den Ortsvektoren der Momentankonfiguration zusammengefasst werden

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \sum_I^{\bar{N}_I^{\text{nd}}} \bar{N}_I \mathbf{x}_I(t). \quad (2.33)$$

Gemäß der Bubnov-Galerkin-Methode wird $\delta \mathbf{x}$ auf dieselbe Weise diskretisiert

$$\delta \mathbf{x}(\mathbf{X}) = \sum_I^{\bar{N}_I^{\text{nd}}} \bar{N}_I \delta \mathbf{x}_I. \quad (2.34)$$

Setzt man die Näherungslösung (2.33) und die Testfunktion (2.34) in die schwache Form (2.32) ein, so erhält man die Bewegungsgleichung in Komponentendarstellung

$$\left(\underbrace{\int_{\mathcal{K}} \rho \bar{N}_I \bar{N}_J dV}_{M_{kI}} \ddot{x}_{kJ} + \underbrace{\int_{\mathcal{K}} T_{km} \frac{\partial \bar{N}_I}{\partial x_m} dV}_{f_{kI}^{\text{int}}} - \underbrace{\left(\int_{\mathcal{K}} \rho b_k \bar{N}_I dV + \int_{A^N} \hat{t}_k \bar{N}_I dA \right)}_{f_{kI}^{\text{ext}}} \right) \delta x_{kI} = 0. \quad (2.35)$$

Da die δx_{kI} beliebig gewählt werden können, muss der Klammerausdruck in Gl. (2.35) null ergeben. In Matrixdarstellung führt dies zu dem Kräftegleichgewicht

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{f}^{\text{int}} - \mathbf{f}^{\text{ext}} = 0. \quad (2.36)$$

Bei einer invertierbaren Massenmatrix \mathbf{M} können die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{x}}$ aus der Differenz der äußeren Kräfte \mathbf{f}^{ext} und der inneren Kräfte \mathbf{f}^{int} berechnet werden

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}}). \quad (2.37)$$

Die algebraische Gleichung (2.36) wird auch als semi-diskrete Bewegungsgleichung bezeichnet, da sie zwar im Raum nicht aber in der Zeit diskretisiert ist. Die Zeitdiskretisierung wird im nächsten Abschnitt erläutert.

Die räumliche Diskretisierung wirkt sich auch auf die Auswahl der Konstitutivgleichung aus, da die Anzahl der finiten Elemente N^{el} und die Anzahl der Integrationspunkte der Volumenintegration N^{vol} den Berechnungsaufwand und den Speicherbedarf der Konstitutivgleichung vervielfachen. Im Rahmen dieser Arbeit werden achtknotige, reduziert integrierte Volumenelemente eingesetzt, sodass die Konstitutivgleichung einen dreidimensionalen Spannungszustand abbilden muss und nur einmal pro Element ausgewertet wird. Die Ansatzfunktionen, die Volumenintegration sowie die steifigkeits- und viskositätsbasierte Hourglass-Stabilisierungen sind in HALLQUIST (2016) dokumentiert. Darüber hinaus wird eine invertierbare Diagonalmassenmatrix eingesetzt.

2.2.3. Zeitliche Diskretisierung

Bei der zeitlichen Diskretisierung der Bewegungsgleichung (2.36) werden grundsätzlich zwei Zeitintegrationsverfahren unterschieden. Implizite Verfahren nutzen zur Berechnung der Lösung zum Zeitpunkt t_i nicht nur die bekannten Größen der vergangenen Zeitpunkte, sondern auch die unbekanntes Größen des aktuellen Zeitpunktes t_i . Dies erfordert im Allgemeinen die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems für jeden Zeitschritt, erlaubt im Gegenzug jedoch größere Zeitschrittweiten $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ als bei expliziten Zeitintegrationsverfahren.

Das FEM-Berechnungsprogramm LS-DYNA nutzt die Zentrale-Differenzen-Methode als Beispiel eines expliziten Zeitintegrationsverfahrens. Diese Methode basiert auf einer Taylor-Reihenentwicklung zum Zeitpunkt $t_{i-1/2}$

$$\mathbf{x}_{i-1} = \mathbf{x}_{i-1/2} - \dot{\mathbf{x}}_{i-1/2} \left(\frac{\Delta t_{i-1/2}}{2} \right) + \ddot{\mathbf{x}}_{i-1/2} \left(\frac{\Delta t_{i-1/2}}{2} \right)^2 \dots, \quad (2.38)$$

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1/2} + \dot{\mathbf{x}}_{i-1/2} \left(\frac{\Delta t_{i-1/2}}{2} \right) + \ddot{\mathbf{x}}_{i-1/2} \left(\frac{\Delta t_{i-1/2}}{2} \right)^2 \dots. \quad (2.39)$$

Durch die Differenz der beiden Gleichungen (2.39) und (2.38) folgt für die gesuchte Größe \mathbf{x}_i der explizite Ausdruck

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i-1} + \dot{\mathbf{x}}_{i-1/2} \Delta t_{i-1/2} + \mathcal{O} \left(\left(\Delta t_{i-1/2} \right)^3 \right), \quad (2.40)$$

der ausschließlich die bekannten Größen der vergangenen Zeitpunkte benötigt und eine Genauigkeit zweiter Ordnung besitzt. Mit der nach Gl. (2.37) bekannten Beschleunigung

kann die Geschwindigkeit nach Vorbild des Schemas aus Gl. (2.40) berechnet werden

$$\dot{\mathbf{x}}_{i-1/2} = \dot{\mathbf{x}}_{i-1-1/2} + \ddot{\mathbf{x}}_{i-1} \Delta t_{i-1}. \quad (2.41)$$

Bezüglich der Berechnung der variablen kritischen Zeitschrittweite und des Ablaufes der expliziten FE-Simulation sei auf HALLQUIST (2016) und BELYTSCHKO U. A. (2000) verwiesen.

Die zeitliche Diskretisierung mit einem expliziten Integrationsverfahren bietet für die Konstitutivgleichung den Vorteil, dass keine Materialtangente berechnet werden muss, wie sie üblicherweise bei der Linearisierung impliziter Gleichungen erforderlich ist.

2.3. Materialtheorie und konstitutive Annahmen

Um eine Konstitutivgleichung für offenzellige Polymerschäume zu bestimmen, werden in dieser Arbeit sowohl Elemente der deduktiven als auch Elemente der induktiven Vorgehensweisen der Materialtheorie verwendet. Die deduktive Vorgehensweise beinhaltet fundamentale Ideen und Prinzipien, die sich als nützlich, logisch oder absolut notwendig zur systematischen Konstruktion von Konstitutivgleichungen erwiesen haben (HAUPT 2000). Zentrale Veröffentlichungen auf diesem Gebiet stellen die Arbeiten von NOLL (1958), TRUESDELL UND NOLL (2004) und NOLL (1972) dar. Die Ableitung der Materialgleichungen auf Basis konstitutiver Prinzipien gewährleistet, dass die so bestimmten Gleichungen im Rahmen der gewählten Prinzipien mathematisch und physikalisch widerspruchsfrei formuliert sind. Die Prinzipien dieser Arbeit, denen insbesondere die Konstitutivgleichungen des Kapitels 5 gehorchen, werden an dieser Stelle kurz erläutert und gelten im Rahmen der Kontinuumsmechanik für homogene Körper. Induktive Elemente kommen bei der nichtlinearen Erweiterung der Konstitutivgleichungen in Kapitel 5 und bei deren Auswahl in Kapitel 6 zum Einsatz.

Kausalitätsprinzip

Das Kausalitätsprinzip besagt, dass die gesuchten Größen in abhängige und unabhängige Variablen unterteilt werden müssen. In den Konstitutivgleichungen dieser Arbeit sind die kinematischen Größen die unabhängigen Variablen und die Spannungen die abhängigen. Eine Abhängigkeit von der Temperatur wird nicht betrachtet. Außerdem besitzen die konstitutiven Parameter keine explizite Zeitabhängigkeit, um eine Alterung der Materialeigenschaften zu berücksichtigen.

Prinzip des Determinismus

Das Prinzip des Determinismus besagt, dass der aktuelle Zustand eines Körpers nur durch die aktuelle Beanspruchung und ihre Vorgeschichte bestimmt wird. Folglich werden aus den abhängigen Größen Zeitfunktionale der unabhängigen Größen aller materieller Punkte eines Körpers.

Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass die Beanspruchung erst zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ einsetzt und das Material zuvor in Ruhe war. Folglich ist die Referenzkonfiguration spannungsfrei und die Spannungen zum Zeitpunkt t hängen ausschließlich von der Dehnungsgeschichte ab, die sich zwischen t_0 und t ereignet hat.

Prinzip der lokalen Wirkung – einfache Materialien

Das Prinzip der lokalen Wirkung schränkt das Prinzip des Determinismus ein. Es besagt, dass die abhängigen Größen eines materiellen Punktes nur Zeitfunktionale der unabhängigen Größen in der differentiellen Umgebung des materiellen Punktes sind. Damit entsteht eine rein lokale Theorie ohne höhere räumliche Gradienten.

Entwickelt man die unabhängigen Größen in einer Taylorreihe und bricht die Entwicklung nach der ersten Ableitung ab, so erhält man ein einfaches Material. Die kinematische Beschreibung dieser Materialien erfolgt ausschließlich mit dem materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F} erster Ordnung (vgl. Abschnitt 2.1.1).

Prinzip der Objektivität

Das Prinzip der Objektivität besagt, dass eine Konstitutivgleichung unabhängig vom Bezugssystem des Beobachters gültig sein muss, und wird deshalb auch als Prinzip der Beobachterinvarianz bezeichnet. Für die passive Interpretation dieses Prinzips als Koordinatentransformation und die aktive Interpretation als koordinatenfreie Abbildung sei auf HAUPT (2000) verwiesen.

Translationen und Rotationen verändern die relative Lage zwischen ortsfesten und mitbewegten Koordinatensystemen. Die Elimination dieser Bewegungen aus der Konstitutivgleichung entspricht der Entfernung von Starrkörpertranslationen und Starrkörperrotationen. Dies gelingt, wenn die kinematischen und kinetischen Größen objektiv oder invariant beim Wechsel zwischen Koordinatensystemen sind.

Tensoren zweiter Stufe heißen objektiv, wenn der Übergang von einem Koordinatensystem $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ und \mathbf{e}_3 in ein anderes Koordinatensystem $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ und $\bar{\mathbf{e}}_3$ wie bei der Cauchy-Spannung \mathbf{T} einer Drehung mit dem orthogonalen Rotationstensor \mathbf{Q} entspricht

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (2.42)$$

Sie heißen körperbezogen objektiv (ALTENBACH UND ALTENBACH 1994), wenn wie beim Green-Lagrangeschen-Dehnungstensor \mathbf{E}

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E} \quad (2.43)$$

erfüllt ist. Größen, die Gl. (2.42) oder Gl. (2.43) erfüllen, können folglich zur Formulierung einer Konstitutivgleichung herangezogen werden.

Die Konstitutivgleichungen in Ratenform müssen dem Kriterium der Objektivität ebenfalls genügen. Um die Cauchy-Spannung in einer Ratenformulierung zu nutzen, obwohl $\dot{\mathbf{T}}$ keine objektive Größe ist, stehen verschiedene objektive Spannungsraten wie die Jaumann-Rate $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$, die Oldroyd-Rate \mathbf{T}^∇ oder die Cotter-Rivlin-Rate \mathbf{T}^Δ zur Verfügung.

Konzept der dualen Variablen

Als Konsequenz der Beobachterinvarianz folgt das Konzept der dualen Variablen. Wenn als abhängige und unabhängige Größen der Konstitutivgleichung duale Variablen verwendet werden, ist sichergestellt, dass das Prinzip der Objektivität automatisch erfüllt wird. Darüber hinaus sind duale Größen energetisch konjugiert und die Spannungsleistung kann nach Vorbild der Gl. (2.28) berechnet werden.

In Kapitel 5 kommen die dualen Größen \mathbf{S} und $\dot{\mathbf{E}}$ sowie \mathbf{T}_B und $\dot{\mathbf{U}}$ zum Einsatz. Durch ihren Bezug zur Referenzkonfiguration erfüllen sie Gl. (2.43) und bieten darüber hinaus den Vorteil eines konstanten Bezugssystems für die gesamte Dehnungsgeschichte.

Prinzip des schwindenden Gedächtnisses

Das Prinzip des schwindenden Gedächtnisses besagt, dass unmittelbar zurückliegende Ereignisse größeren Einfluss auf die Materialantwort besitzen als weiter zurückliegende Ereignisse. Dieses Prinzip schränkt die viskoelastischen Materialfunktionen ein.

Symmetrieeigenschaften: Isotropie

Offenzellige Polymerschäume werden in dieser Arbeit als isotrope Materialien behandelt. Besitzt ein Körper keine richtungsabhängigen Eigenschaften, so darf sich eine Drehung des Koordinatensystems mit dem beliebigen orthogonalen, zeitlich konstanten Rotationsensor \mathbf{Q} nicht auf die Spannungsantwort auswirken. Die mathematische Formulierung dieser Forderung lautet am Beispiel der dualen Größen \mathbf{T}_B und $\dot{\mathbf{U}}$

$$\mathbf{T}_B(\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{U}}(t) \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_B(\dot{\mathbf{U}}(t)) \cdot \mathbf{Q}^T. \quad (2.44)$$

Kinematische Einschränkung

Dass bei uniaxialer Druckbelastung offenzelliger Polymerschäume nahezu keine Querdehnung auftritt, bildet die Grundlage der kinematischen Einschränkung dieser Arbeit. Sie resultiert für materiell linear viskoelastisches Materialverhalten in einer verschwindenden Querkontraktion und wird in Abschnitt 5.1 genauer erläutert.

3

Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

Die Anfänge der Theorie der Viskoelastizität reichen bis in die letzten Jahrzehnte des 19. Jahrhunderts zurück. In dieser Zeit wurden in den Arbeiten von MAXWELL (1867), MEYER (1874), VOIGT (1892) und WIECHERT (1893) elementare Konstitutivgleichungen einfacher rheologischer Modelle aufgestellt, die die Grundlage für zahlreiche Modelle der linearen Viskoelastizität bilden und noch heute die Namen der Physiker tragen. Auf Basis dieser Modelle formulierte Boltzmann das nach ihm benannte Superpositionsprinzip (BOLTZMANN 1876), das eine wesentliche Eigenschaft der linearen Viskoelastizitätstheorie darstellt.

Seither hat sich die mathematische Beschreibung des viskoelastischen Materialverhaltens stark weiterentwickelt und schließt auch nichtlineare Modelle ein. Ein vollständiger Überblick über die fundamentale Theorie der Viskoelastizität kann an dieser Stelle nicht gegeben werden. Dies ist zum einen der Vielzahl an Konstitutivgleichungen geschuldet, zum anderen sind die Modelle teilweise nur für bestimmte Werkstoffgruppen, einen beschränkten Temperaturbereich oder spezifische Lastfälle gültig. Konstitutivgleichungen, die durch molekulare Deformationsmechanismen und damit durch die Struktur des viskoelastischen Werkstoffes motiviert sind, werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Auch wenn sie eine adäquate Beschreibung des Grundmaterials des Schaumes lieferten, wären sie für die makroskopische Modellierung des Polymerschaumes als Kontinuum ungeeignet, da sie inkompatibel mit der Annahme einer verschwindenden Querkontraktion sind (vgl. Abschnitt 2.3 und 5.1). Hinsichtlich mikromechanisch motivierter Modelle für Polymerwerkstoffe sei der interessierte Leser jedoch auf die Veröffentlichungen viskoelastischer Modelle mit Bezug zur Theorie des freien Volumens und zu Polymernetzwerken verwiesen (KNAUSS UND EMRI (1981), DROZDOV (1998), MIEHE UND GÖKTEPE

(2005), LINDER U. A. (2011), BILLON (2012)).

Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt auf Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper, die überwiegend phänomenologischen Ursprungs sind und auf mathematischen Annahmen beruhen. Es stellt somit das Rahmenwerk bereit, in das die Konstitutivgleichungen für Polymerschäume in Kapitel 5 eingebettet werden. Darüber hinaus soll der Unterschied zwischen linearen und nichtlinearen Modellen der Viskoelastizität verdeutlicht werden.

Zuerst werden die Charakteristiken viskoelastischer Festkörper erläutert und gegenüber anderen Materialklassen abgegrenzt. Um viskoelastisches Materialverhalten mathematisch zu beschreiben, gibt es verschiedene Darstellungsformen. Diese werden zunächst für die Konstitutivgleichungen der linearen Viskoelastizität im Bereich kleiner Deformationen eingeführt. Ausgehend von einer allgemeinen Darstellung eines Funktionals werden die Differential- und Integralformen für ausgewählte rheologische Modelle hergeleitet. Dabei wird die Spannung in Abhängigkeit der Dehnungsgeschichte berechnet. Eine Darstellung der Dehnung in Abhängigkeit der Spannungsgeschichte ist ebenfalls möglich, findet in dieser Arbeit jedoch keine Anwendung. Im Anschluss wird für das generalisierte Maxwell-Element gezeigt, dass die Konstitutivgleichungen auch deduktiv von der freien Energiefunktion abgeleitet werden können. Außerdem wird anhand dieses Beispiels auch das Konzept der Aufspaltung der Spannung in Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsanteile erläutert.

Um die fundamentalen Eigenschaften in einfacher Notation aufzuzeigen, bleiben die Gleichungen an dieser Stelle auf eine Dimension beschränkt und werden schließlich in Abschnitt 3.2.6 auf drei Dimensionen erweitert. Eine umfassende Darstellung der Theorie der linearen Viskoelastizität gibt TSCHOEGL (1989), einen Einstieg ermöglichen WINE-MAN UND RAJAGOPAL (2000) und GUTIERREZ-LEMINI (2014).

Warum Versuchsdaten mithilfe linear viskoelastischer Konstitutivgleichungen nur in eingeschränkten Bereichen abgebildet werden können, erklärt der letzte Abschnitt der linearen Viskoelastizitätstheorie anhand zweier Standardanregungen und motiviert damit das Studium nichtlinear viskoelastischer Konstitutivgleichungen.

Mit dem Übergang auf finite Deformationen befindet man sich in der Theorie der nichtlinearen Viskoelastizität. Wie die Modelle der linearen Viskoelastizitätstheorie auf finite Deformations- und Spannungsmaße erweitert werden können, wird als erstes vorgestellt. Anhand des generalisierten Maxwell-Elementes wird das Vorgehen anschließend mit unterschiedlichen Spannungs- und Dehnungsmaßen veranschaulicht.

Den Abschluss dieses Kapitels bildet die Theorie der finiten nichtlinearen Viskoelastizität, die neben geometrischer auch materielle Nichtlinearität berücksichtigt. Mathematische Annahmen bezüglich des Spannungsfunktionals führen zu Mehrfach- oder nichtlinearen Einfachintegralen. Die Einführung des Pipkin-Roger-Modells und des Green-Rivlin-Modells bildet die Grundlage für das Kapitel 5 über die viskoelastische Über-spannung von Schäumen.

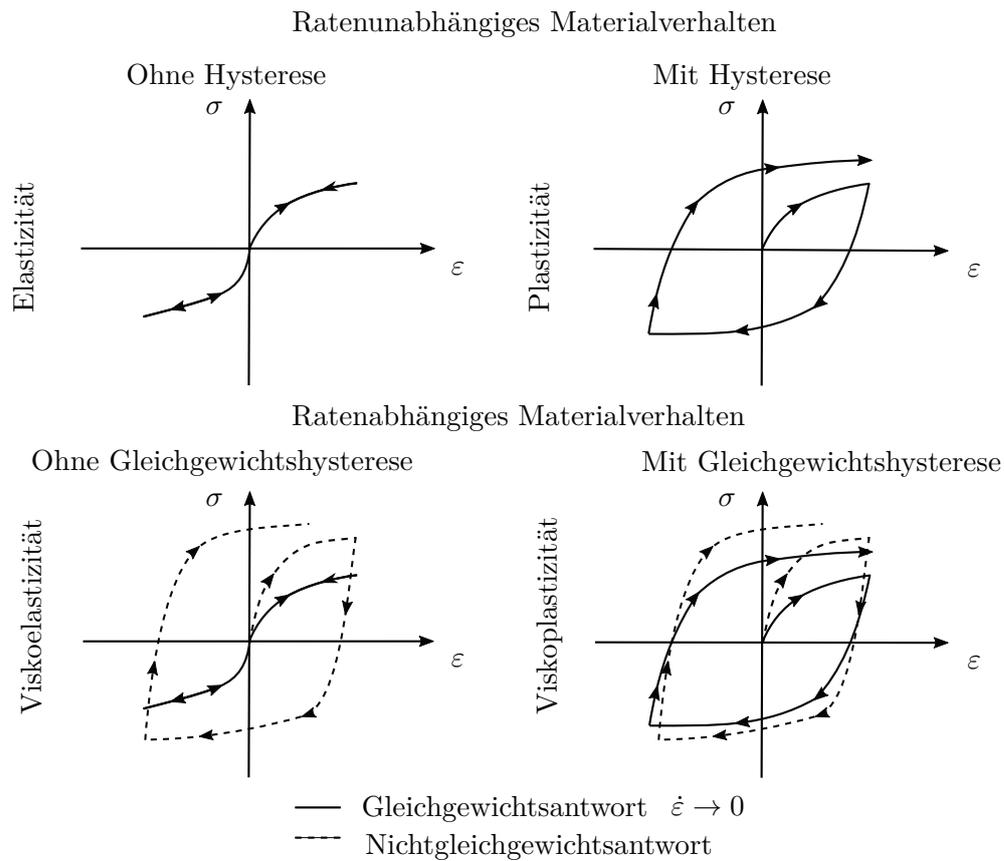


Abbildung 3.1.: Einteilung des Materialverhaltens in vier Kategorien nach HAUPT (1993), Spannungs-Dehnungs-Diagramme für zyklische Dehnungsanregung

3.1. Materialklassen

HAUPT (1993) unterscheidet vier Klassen von Materialverhalten und ordnet jeder Klasse eine eigene Materialtheorie zu. Dabei stützt er sich auf experimentelle Beobachtungen und teilt die Materialien nach Ratenabhängigkeit und Hystereseverhalten ein. In Abbildung 3.1 ist das Materialverhalten anhand eines Spannungs-Dehnungs-Diagrammes für zyklische Dehnungsanregung exemplarisch für die vier Materialtheorien Elastizität, Plastizität, Viskoelastizität und Viskoplastizität dargestellt.

Plastische und viskoplastische Materialien zeichnen sich durch eine Gleichgewichtshysterese aus. Bei diesen Werkstoffen führen statische und dynamische Belastungsprozesse zu bleibenden Veränderungen in der Materialstruktur, sodass Be- und Entlastungspfad voneinander abweichen. Zeigt ein Material keine Gleichgewichtshysterese, d. h. Be- und Entlastungspfad stimmen für statische Prozesse überein, so handelt es sich um elastisches Materialverhalten. Weicht das Material für dynamische Prozesse von diesem Pfad ab,

3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

so gehört es zur Klasse viskoelastischer Materialien.

Vergleicht man die Antworten viskoelastischer und viskoplastischer Materialien in Abbildung 3.1, so ist der Unterschied zwischen den Materialklassen für die zyklische Dehnungsanregung nicht unmittelbar ersichtlich. Werden die beiden Materialien jedoch entlastet, wird das viskoplastische Material bleibende Deformationen aufweisen, während das viskoelastische Material im Grenzfall für unendliche Zeiten in seine ursprüngliche Form zurückkehren wird. Dieser Vorgang, der auch Erholung genannt wird, ist charakteristisch für viskoelastische Festkörper und zeigt, dass die Antwort viskoelastischer Materialien zeitabhängig ist.

Diese Eigenschaft wird besonders unter Standardanregungen deutlich, wie sie in Abbildung 3.2 für viskoelastische Festkörper dargestellt sind. Wie ein elastisches Material reagiert ein viskoelastischer Festkörper auf eine Sprunganregung der Spannung unmittelbar mit einem Sprung der Dehnung. Ebenso führt ein Dehnungssprung auf eine Sprungantwort der Spannung. Wird die Dehnung sprunghaft aufgebracht und dann konstant gehalten, so nimmt die Spannung nach dem anfänglichen Spannungssprung monoton ab und nähert sich asymptotisch der Gleichgewichtsspannung an. Dieses Verhalten wird als Spannungsrelaxation bezeichnet. Der aktuelle Spannungswert lässt somit nicht auf einen Dehnungszustand schließen. Vielmehr hängt die Spannung von der gesamten Dehnungsgeschichte ab, die dem aktuellen Zeitpunkt vorausgegangen ist.

Wird der viskoelastische Festkörper mit einer Stufenfunktion der Spannung angeregt, so nimmt die Dehnung stetig zu und nähert sich in der Modellvorstellung asymptotisch der Gleichgewichtsdehnung an. Dieses Verhalten wird als Kriechen bezeichnet. In Realität kann die konstante Spannungsanregung auch zu sekundärem und tertiärem Kriechen und schließlich zum Versagen des Werkstoffes führen, das mit der Viskoelastizitätstheorie alleine nicht beschrieben werden kann. Kriechversuche werden in dieser Arbeit nicht betrachtet, sodass auch die Darstellung der Dehnung in Abhängigkeit der Spannungsgeschichte nicht behandelt wird.

Mithilfe der Theorie der Viskoelastizität können nicht nur viskoelastische Festkörper, sondern auch viskoelastische Fluide beschrieben werden. Das Verhalten von Fluiden ist ebenfalls durch Spannungsrelaxation bei konstanter Dehnung und Kriechverhalten unter konstanter Spannung gekennzeichnet, unterscheidet sich jedoch im Grenzfall für unendliche Zeiten. Während sich bei konstanter Dehnung die Spannung bei Festkörpern asymptotisch der Gleichgewichtsspannung annähert, relaxiert die Spannung bei Flüssigkeiten auf null. Unter konstanter Spannung ist die Dehnung bei Festkörpern beschränkt, während Flüssigkeiten immer weiter kriechen. Die Möglichkeit einen stationären Fließzustand einzunehmen, ist charakteristisch für viskoelastische Fluide. Eine ausführliche Diskussion der Eigenschaften viskoelastischer Materialien ist in GUTIERREZ-LEMINI (2014) und TSCHOEGL (1989) enthalten. Im Weiteren beschränken sich die Ausführungen auf viskoelastische Festkörper.

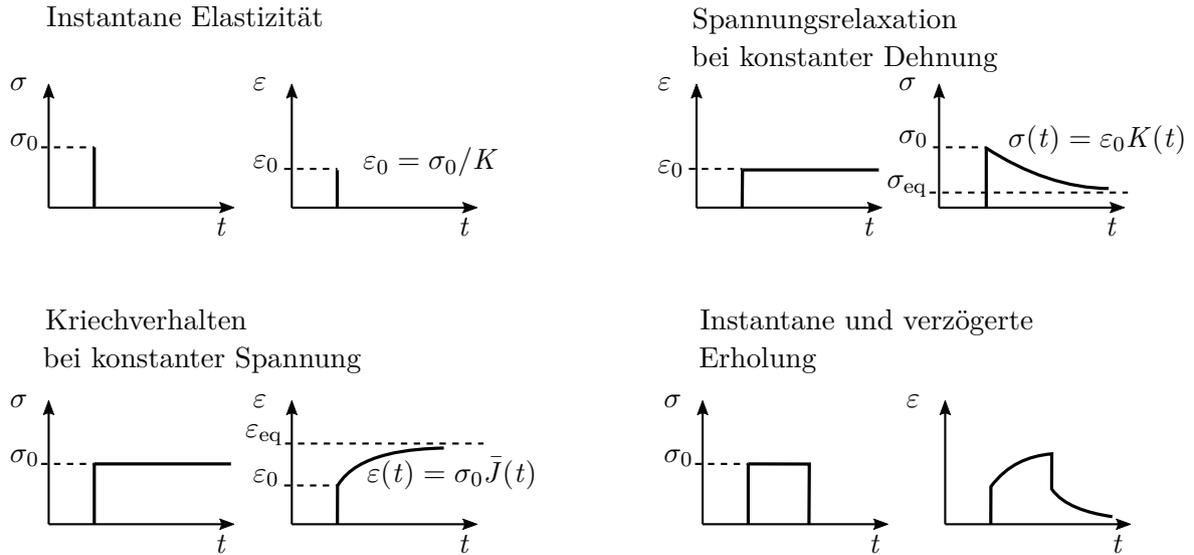


Abbildung 3.2.: Charakteristiken viskoelastischer Festkörper

3.2. Lineare Viskoelastizität für kleine Deformationen

Die Konstitutivgleichungen der linearen Viskoelastizität werden in diesem Abschnitt als eindimensionale Zusammenhänge zwischen der Spannung σ und der Verzerrung ε dargestellt. Aufgrund der kleinen Deformationen können σ und ε beliebige zueinander gehörige Komponenten eines Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und eines Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ sein, beispielsweise die Normalspannung σ_{11} und Normalverzerrung ε_{11} oder die Schubspannung σ_{12} und die Schubverzerrung ε_{12} .

Wie im vorherigen Abschnitt 3.1 ausgeführt wird die Spannung σ zum Zeitpunkt t für viskoelastische Materialien durch die gesamte vergangene Dehnungsgeschichte $\varepsilon(u)|_{u=-\infty}^t$ verursacht. Dieser Zusammenhang kann allgemein mithilfe eines Funktionals \mathcal{L} formuliert werden

$$\sigma(t) = \mathcal{L} \left(\varepsilon(u)|_{u=-\infty}^t \right). \quad (3.1)$$

Mit der Annahme, dass die Anregung zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt und das Material zuvor in Ruhe war, entfällt der negative Zeitbereich der Dehnungsgeschichte innerhalb des Funktionals

$$\sigma(t) = \mathcal{L} \left(\varepsilon(u)|_{u=0}^t \right). \quad (3.2)$$

Die Variable u läuft dann über alle vergangenen Zeiten seit Belastungsbeginn $t = 0$ bis zum aktuellen Zeitpunkt t und wird auch als historische Zeit bezeichnet.

Im Rahmen der Theorie der linearen Viskoelastizität muss das Funktional \mathcal{L} zwei Be-

3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

dingungen erfüllen (TSCHOEGL 1989). Die erste Bedingung besagt, dass die Skalierung der Anregung um einen Faktor α eine Skalierung der Antwort um denselben Faktor zur Folge hat

$$\mathcal{L}(\alpha \varepsilon(u)|_{u=0}^t) = \alpha \mathcal{L}(\varepsilon(u)|_{u=0}^t) = \alpha \sigma(t). \quad (3.3)$$

Zudem muss eine Anregung in Einzelanregungen $\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(t)$ zerlegt werden können, ohne dass sich die Antwort ändert

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(u)|_{u=0}^t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(\varepsilon_k(u)|_{u=0}^t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k(t) = \sigma(t). \quad (3.4)$$

Gleichung (3.4) bedeutet, dass die Anregungen unabhängig voneinander betrachtet werden können und es keine Interaktion zwischen ihnen gibt. Dabei können die einzelnen Stimuli auch zu unterschiedlichen Zeiten einsetzen. Wird eine Anregung $\varepsilon_k(t)$ beispielsweise um eine gewisse Zeitspanne Δt verschoben, wird auch deren Antwort $\sigma_k(t)$ um dieselbe Zeitspanne verschoben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varepsilon_k(u)|_{u=0}^t) &= \sigma_k(t), \\ \mathcal{L}(\varepsilon_k(u - \Delta t)|_{u=0}^t) &= \sigma_k(t - \Delta t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Dabei verändert sich die Spannungsantwort nicht. Diese Bedingung macht deutlich, warum alternde Materialien nicht Teil der linearen Viskoelastizität sein können.

Für die lineare Viskoelastizität werden die Möglichkeiten, ein Funktional entweder implizit als Differentialgleichung bzw. als System von Differentialgleichungen oder explizit als Integralgleichung darzustellen, im Folgenden aufgezeigt.

3.2.1. Differentialdarstellung

Lineare Differentialgleichungen erfüllen die beiden Grundgleichungen (3.3) und (3.4) und sind mit geeigneten Anfangsbedingungen in der Lage, viskoelastisches Materialverhalten abzubilden. Sie verknüpfen die zeitlichen Ableitungen der Spannung mit den zeitlichen Ableitungen der Dehnung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \frac{d^k \sigma(t)}{dt^k} = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m \frac{d^m \varepsilon(t)}{dt^m} \quad k, m \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

wobei die Summation an geeigneter Stelle abgebrochen werden kann. Die Ableitungen können von beliebiger natürlicher Ordnung sein und mit zeitabhängigen oder konstanten Koeffizienten $\alpha_k(t)$ und $\omega_m(t)$ unterschiedlich gewichtet werden.

a) Hookesche Feder

b) Newtonscher Dämpfer

c) Fraktionales Dämpferelement

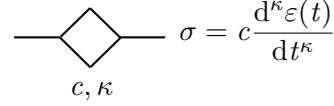
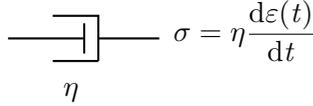
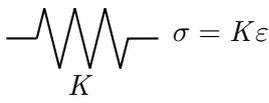


Abbildung 3.3.: Rheologische Modelle der linearen Viskoelastizität

Differentialgleichungen können mithilfe von rheologischen Modellen motiviert werden. Die Grundmodelle für viskoelastisches Materialverhalten sind Feder- und Dämpferelemente (vgl. Abbildung 3.3). Genügen die Modelle linearen Konstitutivgleichungen, d. h. es werden Hookesche Federn und Newtonsche Dämpfer verwendet, so erhält man lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Bei der Hookeschen Feder steigt die Spannung σ linear mit der Dehnung ε an

$$\sigma = K\varepsilon. \quad (3.7)$$

Je nach Art der Spannung und Verzerrung entspricht die Proportionalitätskonstante dem Elastizitätsmodul E oder dem Schubmodul G . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit wird im Weiteren die Federsteifigkeit K als Modul verwendet.

Die Energiedichte $\bar{w} = \rho w$ einer Feder hängt von der Proportionalitätskonstanten und der Dehnung der Feder ab. Wird die Feder aus der undeformierten Lage $\varepsilon_1 = 0$ auf die Dehnung ε_2 gestreckt, so nimmt die Energiedichte nach

$$\bar{w} = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma \, d\varepsilon = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} K\varepsilon \, d\varepsilon = \frac{1}{2}K (\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2) \quad (3.8)$$

zu. Kehrt die Feder wieder in ihre Ausgangslage zurück, so nimmt die Energiedichte um denselben Betrag ab. Federelemente sind folglich in der Lage, Energie zu speichern und wieder freizugeben.

Beim Newtonschen Dämpfer steigt die Spannung σ linear mit der Dehnrates $\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon}$ an

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}. \quad (3.9)$$

Die Proportionalitätskonstante entspricht der dynamischen Viskosität η . Unabhängig davon, ob der Dämpfer gestreckt oder gestaucht wird, nimmt die Energiedichte eines Dämpfers

$$\bar{w} = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma \, d\varepsilon = \int_{t_1}^{t_2} \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \frac{d\varepsilon}{dt} \, dt = \eta \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)^2 \, dt \geq 0 \quad (3.10)$$

3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

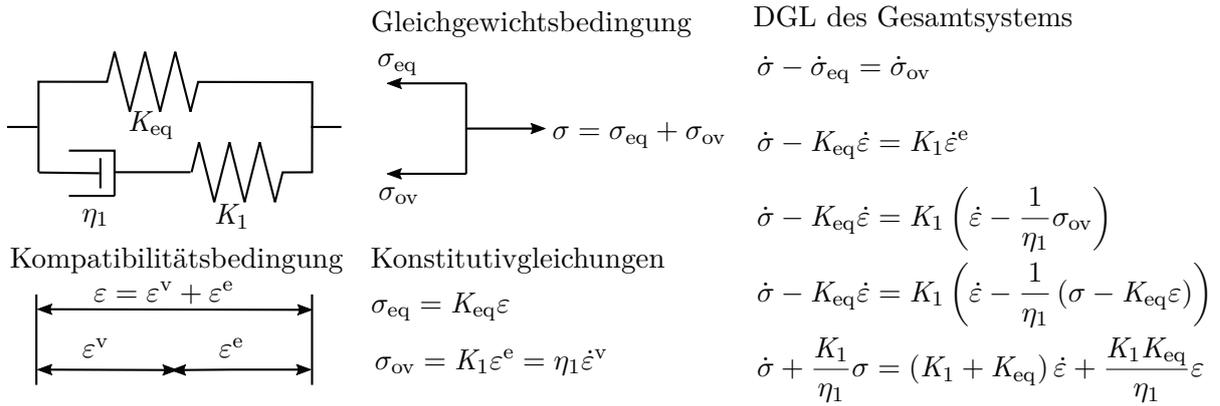


Abbildung 3.4.: Drei-Parameter-Festkörper: Grundgleichungen und Herleitung der Differentialgleichung

immer positive Werte an, sodass die Energie des Dämpfers nicht zurückgewonnen werden kann und vollständig dissipiert.

Die Möglichkeiten, Feder- und Dämpferelemente in Reihen- und Parallelschaltungen anzuordnen, sind unbegrenzt. Jedoch sind nicht alle Kombinationen geeignet, das Verhalten eines viskoelastischen Festkörpers abzubilden. In TSCHOEGL (1989) werden verschiedene Standardmodelle diskutiert, die auf eine physikalisch sinnvolle Antwort führen. Das einfachste Modell, das instantane Elastizität, Spannungsrelaxation, Kriechverhalten und instantane und verzögerte Erholung abbilden kann, ist der Drei-Parameter-Festkörper der linearen Viskoelastizität. In Abbildung 3.4 ist der Drei-Parameter-Festkörper als Parallelschaltung einer Feder der Steifigkeit K_{eq} und einer Maxwell-Einheit abgebildet, die aus der Serienschaltung einer Feder der Steifigkeit K_1 und eines Dämpferelementes der Viskosität η_1 besteht. Für die Serienschaltung gilt, dass jedes Element dieselbe Spannung erfährt und sich die Gesamtdehnung additiv aus den Dehnungen der einzelnen Elemente zusammensetzt. Für die Parallelschaltung gilt, dass die Dehnung für jedes Element gleich ist und sich die Spannung additiv aus den Beiträgen jedes Elementes zusammensetzt.

Ausgehend von der zeitlichen Ableitung der Gleichgewichtsbedingung, den Konstitutivgleichungen für die einzelnen Elemente und der Kompatibilitätsbedingung der Dehnungen aus Abbildung 3.4 können alle vier Gleichungen zu einer Differentialgleichung in der Gesamtspannung $\sigma(t)$ und Gesamtdehnung $\varepsilon(t)$ kombiniert werden

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} + \frac{K_1}{\eta_1}\sigma(t) = (K_{\text{eq}} + K_1)\frac{d\varepsilon(t)}{dt} + \frac{K_{\text{eq}}K_1}{\eta_1}\varepsilon(t). \quad (3.11)$$

Als dritte Größe neben den beiden Steifigkeiten K_{eq} und K_1 wird statt der Viskosität η_1 oft die Relaxationszeitkonstante $\tau_1 = \frac{\eta_1}{K_1}$ oder deren Kehrwert, die Relaxationsrate $\beta_1 = \frac{K_1}{\eta_1}$, als Eingabeparameter in FEM-Berechnungsprogrammen gefordert (HALL-

QUIST 2016). Je höher die Relaxationsrate ist, desto schneller klingt die Spannung des Maxwell-Elementes ab.

Bei der Abbildung von Versuchsdaten sind drei Parameter häufig nicht ausreichend, da in realen Materialien Vorgänge unterschiedlicher Relaxationsraten auftreten. Zusätzliche Maxwell-Elemente in Parallelschaltung zum Federelement können dabei durch Relaxationsraten mit beispielsweise dekadischen Abständen den unterschiedlichen Zeitskalen Rechnung tragen. Eine solche Anordnung wird als generalisiertes Maxwell-Element oder als Wiechert-Element bezeichnet und ist in Abbildung 3.5 dargestellt.

Zur impliziten Beschreibung des generalisierten Maxwell-Elementes wird statt einer Differentialgleichung (vgl. Gl. (3.6)) meist ein System aus Differentialgleichungen verwendet. Die Gesamtspannung setzt sich additiv aus den Einzelspannungen der parallel geschalteten Elemente, also der Spannung des Federelementes $\sigma_{\text{eq}}(t)$ und aus den Spannungen der einzelnen Maxwell-Elemente $\sigma_j(t)$, zusammen

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \sigma_{\text{eq}} + \sum_{j=1}^{N_J} \sigma_j(t) \\ &= K_{\text{eq}}\varepsilon(t) + \sum_{j=1}^{N_J} K_j \left(\varepsilon(t) - \varepsilon_j^v(t) \right).\end{aligned}\tag{3.12}$$

Um die Spannung des j -ten Maxwell-Elementes berechnen zu können, muss bekannt sein, wie sich die Gesamtdehnung $\varepsilon(t)$ auf die elastische Dehnung der Feder $\varepsilon_j^e(t)$ und auf die viskose Dehnung des Dämpfers $\varepsilon_j^v(t)$ aufteilt. Der Zusammenhang zwischen äußerer Anregung $\varepsilon(t)$ und den inneren Variablen $\varepsilon_j^v(t)$ ist durch das System aus N_J Evolutionsgleichungen der Form

$$\varepsilon_j^v(t) + \frac{1}{\beta_j} \frac{d\varepsilon_j^v(t)}{dt} = \varepsilon(t) \quad (\text{ohne Summation})\tag{3.13}$$

gegeben, die aus der Kompatibilitätsbedingung der Dehnung und der Spannungsgleichung für jedes Maxwell-Element hervorgehen (vgl. Abbildung 3.5). Welche Größen als innere Variable gesetzt werden, ist im Konzept innerer Variablen (COLEMAN UND GURTIN 1967) freigestellt. Wählt man die elastischen Dehnungen der Federn $\varepsilon_j^e(t)$ als innere Variable aus, so erhält man mit den zugehörigen Evolutionsgleichungen dieselbe Systemantwort. Dies gilt auch, wenn die Spannungen der einzelnen Maxwell-Elemente $\sigma_j(t)$ als innere Variable gewählt werden. Die Evolutionsgleichung für das j -te Maxwell-Element lautet dann

$$\frac{d\sigma_j(t)}{dt} + \beta_j \sigma_j(t) = K_j \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (\text{ohne Summation}).\tag{3.14}$$

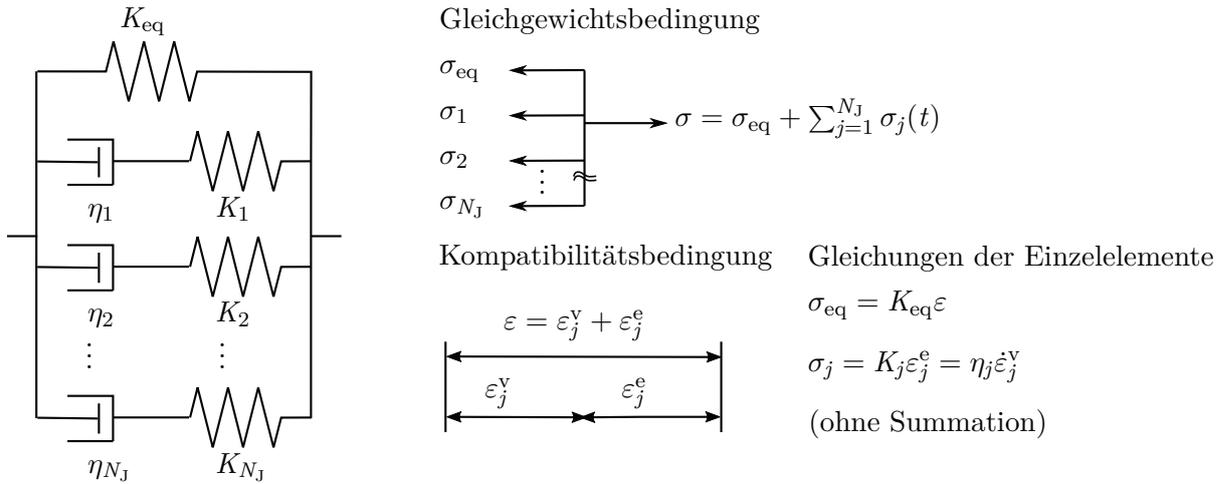


Abbildung 3.5.: Generalisiertes Maxwell-Element

Fraktionale Zeitableitungen

Rheologische Modelle, die neben Hookeschen Federn und Newtonschen Dämpfern auch Elemente mit fraktionalen Ableitungen

$$\sigma(t) = c \frac{d^\kappa \varepsilon(t)}{dt^\kappa} = c D^\kappa \varepsilon(t) \quad \text{mit } \kappa \in \mathbb{R} \cap 0 < \kappa < 1 \quad (3.15)$$

enthalten, gehören ebenfalls zur linearen Viskoelastizität (vgl. Abbildung 3.3). Durch die Erweiterung der Ordnung der Ableitung κ auf reelle Zahlen im Intervall $(0,1)$ bewegen sich diese Modelle zwischen rein elastischem ($\kappa = 0$) und rein viskosem Verhalten ($\kappa = 1$) (LION 2007). Neben der Ordnung der Ableitung bietet ein fraktionales Dämpferelement einen zweiten Parameter zur Anpassung, die Proportionalitätskonstante c . Der Vorteil fraktionaler Ableitungen gegenüber klassischen Modellen liegt darin, dass Versuchsdaten mit wenigen Parametern angepasst werden können (BAGLEY UND TORVIK 1983). TORVIK UND BAGLEY (1984) zeigten zudem, dass fraktionale Ableitungen auf natürliche Weise bei der Lösung mechanischer Probleme mit viskosen Fluiden auftreten. Darüber hinaus stehen fraktionale Ableitungen in Zusammenhang mit der Molekulartheorie (siehe SCHMIDT U. A. (2000) und die darin enthaltenen Referenzen). Gemäß der Riemann-Liouville-Definition der fraktionalen Ableitung (vgl. ADOLFSSON U. A. (2004), LI U. A. (2011)) kann der fraktionale Ableitungsoperator D^κ für die lineare Viskoelastizität mit der Anfangsbedingung $\varepsilon(0) = 0$ und der Eulerschen Gammafunktion $\Gamma(t)$ in der Form

$$\sigma(t) = \frac{c}{\Gamma(1 - \kappa)} \frac{d}{dt} \left[\int_0^t \frac{1}{(t - u)^\kappa} \varepsilon(u) du \right] \quad (3.16)$$

oder mit der Definition der fraktionalen Ableitung nach Caputo

$$\sigma(t) = \frac{c}{\Gamma(1 - \kappa)} \int_0^t \frac{1}{(t - u)^\kappa} \frac{d\varepsilon(u)}{du} du \quad (3.17)$$

in Integralform dargestellt werden. Bei dem Integral in Gl. (3.17) handelt es sich um eine Faltung zwischen dem gebrochenrationalen Faltungskern $1/t^\kappa$ mit einer Singularität an der Stelle $t = 0$ und der Dehnrate $\dot{\varepsilon}$. Rheologische Modelle mit Elementen natürlicher Ordnung können ebenfalls mittels Integralgleichungen charakterisiert werden. Dies wird im nächsten Abschnitt aufgezeigt.

3.2.2. Integraldarstellung

Die erste Möglichkeit, die Integraldarstellung sichtbar zu machen, besteht darin, von der allgemeinen Darstellung eines Funktionals auszugehen. Wenn die Dehnung $\varepsilon(t)$ wie angenommen eine kontinuierliche Funktion der Zeit ist, kann das lineare Funktional $\mathcal{L}(\varepsilon(u)|_{u=-\infty}^t)$ gemäß des Rieszschen Darstellungssatzes (RIESZ UND SZÓKEFALVI-NAGY (1955)) als Stieltjes-Faltungsintegral

$$\sigma(t) = \mathcal{L}(\varepsilon(u)|_{u=-\infty}^t) = \int_{-\infty}^t K(t - u) d\varepsilon(u) \quad (3.18)$$

zwischen der Materialfunktion $K(t)$ und der Dehnung $\varepsilon(t)$ geschrieben werden. Die Materialfunktion $K(t)$ hängt von dem betrachteten Material ab und muss durch Experimente bestimmt werden.

Das Faltungsintegral besagt, dass sich die Spannung zum aktuellen Zeitpunkt $\sigma(t)$ aus allen Dehnungen der vergangenen Zeiten $\varepsilon(u)$ zusammensetzt, die mit der zugehörigen Steifigkeit $K(t - u)$ gewichtet werden. Die Differenz $t - u$ misst dabei die Dauer, wie lange die Dehnungsanregung $\varepsilon(u)$ bereits in der Vergangenheit liegt, und bestimmt alleine die Gewichtung der Dehnungsanregung unabhängig davon, welche Dehnungsgeschichte das Material bisher erfahren hat. Gleichung (3.18) verdeutlicht somit die zweite Bedingung der Linearität (vgl. Gl. (3.4)), dass die einzelnen Dehnungsanregungen unabhängig voneinander überlagert werden, und ist auch als Boltzmannsches Superpositionsprinzip bekannt.

Wenn weiterhin angenommen wird, dass keine Dehnung $\varepsilon(t)$ für Zeiten kleiner als null vorliegt, so verschwindet das uneigentliche Integral und Gl. (3.18) wird zu

$$\sigma(t) = \varepsilon(0)K(t) + \int_{0^+}^t K(t - u) \frac{d\varepsilon(u)}{du} du, \quad \varepsilon(t) = 0 \quad \forall t < 0. \quad (3.19)$$

3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

Der erste Summand trägt dabei der Diskontinuität für den Fall Rechnung, dass die Dehnung bei $t = 0$ von null auf $\varepsilon(0)$ springt, und entfällt für $\varepsilon(0) = 0$. Mithilfe partieller Integration und der Kommutativität des Faltungsintegrals können weitere Darstellungen hergeleitet werden (WINEMAN UND RAJAGOPAL 2000). Steht im Faltungsintegral statt der Dehnrates die Dehnung, so berechnet sich die Spannung immer als Summe

$$\sigma(t) = K(0)\varepsilon(t) + \int_{0^+}^t \dot{K}(t-u)\varepsilon(u) \, du. \quad (3.20)$$

Die Integrationsgrenze 0^+ in Gl. (3.19) und Gl. (3.20) verdeutlicht an dieser Stelle, dass die Integration ab null beginnt und null nicht einschließt. Auf diese besondere Kennzeichnung wird im Folgenden verzichtet.

Die zweite Möglichkeit, die zu einer Integraldarstellung führt, besteht darin, eine lineare Differentialgleichung mit geeigneten Anfangsbedingungen zu lösen. Dies soll am Beispiel des Drei-Parameter-Festkörpers und des generalisierten Maxwell-Elementes aus Abschnitt 3.2.1 im Zeitbereich erfolgen. Alternativ besteht auch die Möglichkeit, diese Gleichungen mithilfe der Laplace-Transformation zu lösen. Diese Vorgehensweise wird beispielsweise in TSCHOEGL (1989) gezeigt.

Die Lösung der Differentialgleichung eines rheologischen Modells führt im Gegensatz zur allgemeinen Darstellung (3.18) auf eine konkrete Form der Materialfunktion, deren Parameter aus Experimenten bestimmt werden müssen. Der Vergleich zwischen Experiment und Modellierung zeigt dann, ob das rheologische Modell in der Lage ist, das Materialverhalten adäquat abzubilden.

Mit den Substitutionen $\beta_1 = K_1/\eta_1$ und $g(t) = (K_{\text{eq}} + K_1) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K_{\text{eq}}\beta_1\varepsilon(t)$ wird die Differentialgleichung des Drei-Parameter-Festkörpers (3.11) zunächst vereinfacht

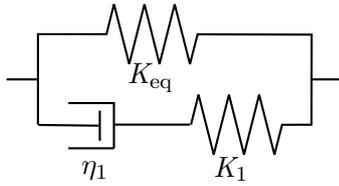
$$\frac{d\sigma}{dt} + \beta_1\sigma(t) = g(t) \quad (3.21)$$

und dann mit den Anfangsbedingungen $\sigma(0) = 0$ und $\varepsilon(0) = 0$ in Integraldarstellung

$$\sigma(t) = \int_0^t g(u) e^{-\beta_1(t-u)} \, du \quad (3.22)$$

überführt. Die einzelnen Schritte der Herleitung sind in Abbildung 3.6 dargestellt.

In dieser vereinfachten Notation ist die Herleitung der Integralgleichung auf alle Differentialgleichungen erster Ordnung der Form (3.21) mit konstanten Koeffizienten und zeitabhängiger Anregung $g(t)$ unmittelbar übertragbar. Vergleicht man das Ergebnis



Differentialgleichung des Gesamtsystems $\frac{d\sigma(t)}{dt} + \beta_1\sigma(t) = g(t)$

mit $\beta_1 = K_1/\eta_1$ und $g(t) = (K_{\text{eq}} + K_1) \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K_{\text{eq}}\beta_1\varepsilon(t)$

Lösung im Zeitbereich mit den Anfangsbedingungen $\sigma(0) = 0$ und $\varepsilon(0) = 0$

Herleitung der Integralgleichung Rücksubstitution von $g(t)$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} e^{\beta_1 t} + \beta_1 \sigma(t) e^{\beta_1 t} = g(t) e^{\beta_1 t} \quad \sigma(t) = \int_0^t \left((K_{\text{eq}} + K_1) \frac{d\varepsilon(u)}{du} + K_{\text{eq}}\beta_1\varepsilon(u) \right) e^{-\beta_1(t-u)} du$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sigma(t) e^{\beta_1 t} \right) = g(t) e^{\beta_1 t} \quad \sigma(t) = \int_0^t K_{\text{eq}} \frac{d}{du} \left(\varepsilon(u) e^{-\beta_1(t-u)} \right) du + \int_0^t K_1 e^{-\beta_1(t-u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} du$$

$$\sigma(t) e^{\beta_1 t} = \int_0^t g(u) e^{\beta_1 u} du \quad \sigma(t) = K_{\text{eq}}\varepsilon(t) + \int_0^t K_1 e^{-\beta_1(t-u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} du$$

$$\sigma(t) = \int_0^t g(u) e^{-\beta_1(t-u)} du \quad \sigma(t) = \int_0^t \left(K_{\text{eq}} + K_1 e^{-\beta_1(t-u)} \right) \frac{d\varepsilon(u)}{du} du$$

Abbildung 3.6.: Drei-Parameter-Festkörper: Herleitung der Integralgleichung mithilfe der Differentialgleichung des Gesamtsystems

nach der Rücksubstitution von $g(t)$ in Abbildung 3.6

$$\sigma(t) = \int_0^t \left(K_{\text{eq}} + K_1 e^{-\beta_1(t-u)} \right) \frac{d\varepsilon(u)}{du} du \quad (3.23)$$

mit Gl. (3.19), so kann die Materialfunktion $K(t)$ als

$$K(t) = K_{\text{eq}} + K_1 e^{-\beta_1 t} \quad (3.24)$$

identifiziert werden.

Die Vorgehensweise zur Herleitung der Integralgleichung für das generalisierte Maxwell-Element entspricht dem Drei-Parameter-Festkörper. Statt der Differentialgleichung des Gesamtsystems werden jedoch die Evolutionsgleichungen (3.14) der Maxwell-Elemente in Spannungsform mit den Anfangsbedingungen $\sigma_j(0) = 0$ und $\varepsilon(0) = 0$ gelöst. Mit $\beta_j = K_j/\eta_j$ und $g_j(t) = K_j \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ liefert die Rücksubstitution

$$\sigma_j(t) = \int_0^t g_j(u) e^{-\beta_j(t-u)} du = \int_0^t K_j e^{-\beta_j(t-u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} du. \quad (3.25)$$

Gemäß Gl. (3.12) addiert sich die Gesamtspannung dann zu

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= K_{\text{eq}}\varepsilon(t) + \sum_{j=1}^{N_J} \int_0^t K_j e^{-\beta_j(t-u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} du \\ &= \int_0^t \left(K_{\text{eq}} + \sum_{j=1}^{N_J} K_j e^{-\beta_j(t-u)} \right) \frac{d\varepsilon(u)}{du} du.\end{aligned}\tag{3.26}$$

Im Vergleich mit der allgemeinen Integraldarstellung (3.19) zeigt sich, dass sich die Materialfunktion für das generalisierte Maxwell-Element aus einem konstanten Anteil K_{eq} und aus einer Summe gewichteter Exponentialfunktionen zusammensetzt

$$K(t) = K_{\text{eq}} + \sum_{j=1}^{N_J} K_j e^{-\beta_j t}.\tag{3.27}$$

Die Summe gewichteter Exponentialfunktionen wird auch als Prony-Reihe bezeichnet. Eine Prony-Reihe stellt ein diskretes Spektrum dar, das jeder Relaxationsrate β_j eine Steifigkeit K_j zuordnet. Die Einschränkung von $K(t)$ auf eine Prony-Reihe ist jedoch durch das Rieszsche Darstellungstheorem nicht gefordert. Trotzdem hat diese Wahl numerische Vorteile, die in Kapitel 4 erläutert werden.

Die obige Herleitung hat gezeigt, dass für den Drei-Parameter-Festkörper und das generalisierte Maxwell-Element gleichwertige Differential- und Integraldarstellungen existieren. Die Überführung der einen Darstellung in die andere ist jedoch für den allgemeinen Fall nicht möglich (GURTIN UND STERNBERG (1962), DROZDOV (1996)). Unter der Prämisse, dass im Wesentlichen alle Differential- und Ratenmodelle in der Theorie als Spezial- oder Grenzfälle von Integralmodellen erhalten werden können, legt MORMAN (1985) den Schwerpunkt seiner Übersicht über viskoelastische Modelle jedoch auf die Integraldarstellung. Darüber hinaus sieht FINDLEY U. A. (1976) die Integraldarstellung gegenüber der Differentialdarstellung im Vorteil, die tatsächlich gemessenen viskoelastischen Materialeigenschaften flexibel darzustellen und ohne Weiteres Alterung oder Temperaturabhängigkeit zu berücksichtigen.

3.2.3. Freie Energie und Dissipationspotential

Bisher wurde vorausgesetzt, dass die Konstitutivgleichungen für die Feder- und Dämpferelemente als Beziehung zwischen Spannung und Dehnung bzw. Dehnrate direkt bekannt waren. Rheologische Modelle können jedoch auch über ihre Energie- und Dissipationspotentiale definiert werden. Dadurch vereinfacht sich die Beurteilung der thermodynamischen Konsistenz und die Konstitutivgleichungen werden deduktiv ermittelt. In SIMO UND HUGHES (1998), HOLZAPFEL (2000) und JIRÁSEK UND BAŽANT (2002) wird diese

Vorgehensweise ausführlich erläutert. Im Folgenden wird das prinzipielle Vorgehen kurz zusammengefasst.

Als elastische Einheit idealisiert ein Federelement die Energie, die im Material gespeichert und wieder freigegeben werden kann. Die freie Energiedichtefunktion ψ einer Hookeschen Feder (vgl. Abbildung 3.3) ist eine quadratische Funktion der Dehnung ε

$$\psi = \frac{1}{2} K \varepsilon^2. \quad (3.28)$$

Als viskose Einheit idealisiert ein Dämpferelement die Energiedissipation. Für ein Newtonsches Dämpferelement lautet das duale Dissipationspotential ϕ^*

$$\phi^* = \frac{1}{2} \frac{1}{\eta} \sigma^2. \quad (3.29)$$

Die quadratische Form der spezifischen Dissipationsleistung aus Gl. (3.29) führt niemals auf negative Werte und ist somit thermodynamisch zulässig.

Die freie Energiedichte ψ zusammengesetzter rheologischer Modelle berechnet sich als Summe der freien Energiedichtefunktionen aller energiespeichernder Bausteine ψ_j und führt für das generalisierte Maxwell-Element aus Abbildung 3.5 auf

$$\psi = \sum_{j=0}^{N_J} \psi_j = \frac{1}{2} K_{\text{eq}} \varepsilon^2 + \sum_{j=1}^{N_J} \frac{1}{2} K_j (\varepsilon - \varepsilon_j^v)^2. \quad (3.30)$$

Das duale Dissipationspotential zusammengesetzter rheologischer Modelle wird ebenfalls als Summe der Dissipationspotentiale der einzelnen Elemente berechnet und lautet für das generalisierte Maxwell-Element

$$\phi^* = \sum_{j=0}^{N_J} \phi_j^* = \sum_{j=1}^{N_J} \frac{1}{2} \frac{1}{\eta_j} \sigma_j^2. \quad (3.31)$$

Ausgehend von der freien Energiedichtefunktion und dem Dissipationspotential können die Gleichungen für die Spannung des rheologischen Gesamtmodells und die inneren Variablen hergeleitet werden. Die Spannung erhält man durch Ableitung der freien Energiedichtefunktion nach der Dehnung

$$\sigma(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = K_{\text{eq}} \varepsilon(t) + \sum_{j=1}^{N_J} K_j (\varepsilon(t) - \varepsilon_j^v(t)). \quad (3.32)$$

Die viskosen Dehnungen ε_j^v stellen in dieser Notation die inneren Variablen dar, die mithilfe der Ableitung des dualen Dissipationspotentials ϕ^* nach der Spannung σ_j und

der Ableitung der freien Energie ψ nach der inneren Variable ε_j^v berechnet werden können

$$\varepsilon_j^v(t) = \frac{\partial \phi^*}{\partial \sigma_j} = \frac{1}{\eta_j} \sigma_j(t), \quad \sigma_j(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_j^v} = K_j(\varepsilon(t) - \varepsilon_j^v(t)). \quad (3.33)$$

Die Kombination dieser beiden Gleichungen führt wiederum auf das System aus N_J Evolutionsgleichungen (3.13) in Dehnungsform. Folglich genügen die zwei skalaren Gleichungen, die freie Energiedichtefunktion (3.30) und das duale Dissipationspotential (3.31), um alle Beziehungen herzuleiten, die zur Berechnung der Spannung des generalisierten Maxwell-Elementes erforderlich sind.

3.2.4. Materialfunktion und schwindendes Gedächtnis

In den vorherigen Abschnitten wurden Konstitutivgleichungen der linearen Viskoelastizitätstheorie eingeführt. Mit geeigneten Anfangsbedingungen, wie sie zur Herleitung gewisser Gleichungen bereits vorgeschrieben wurden, sind diese Gleichungen für beliebige Dehnungsanregungen gültig. Zur Lösung dieser Gleichungen fehlen jedoch die Materialeigenschaften.

In der Integraldarstellung (3.19) enthält die Materialfunktion $K(t)$ diese Informationen vollständig. Für bestimmte Anregungen, die Standardanregungen, ist die genaue Kenntnis der Materialfunktion nicht notwendig, um das Faltungsintegral aufzulösen. Dieses Vorgehen ermöglicht eine einfache Illustration und Interpretation der Materialfunktion. Aus diesem Grund werden die Eigenschaften der Materialfunktion in Integraldarstellung am Beispiel der Spannungsantwort auf eine Stufenanregung im Folgenden diskutiert.

Eine Dehnungsstufe $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \mathcal{H}(t)$ wird durch die Heaviside-Funktion

$$\mathcal{H}(t - t_0) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < t_0, \\ 1 & \text{falls } t \geq t_0 \end{cases} \quad (3.34)$$

und die Stufenhöhe ε_0 definiert. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ springt die Dehnung von null auf ε_0 . Zu allen anderen Zeitpunkten ist die Dehnrage gleich null.

Setzt man diese Anregung in die Integralform der linearen Viskoelastizität (3.19) ein, so erhält man die Spannung in Abhängigkeit der Zeit

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 K(t). \quad (3.35)$$

Die Materialfunktion $K(t)$ legt folglich fest, wie das Material auf eine Stufenanregung reagiert, und wird deshalb auch als Relaxationsfunktion bezeichnet. Wenn $K(t)$ eine positive, stetige und monoton fallende Funktion darstellt, so genügt das Material der Annahme des schwindenden Gedächtnisses (DRAPACA U. A. 2007). Welche mathemati-

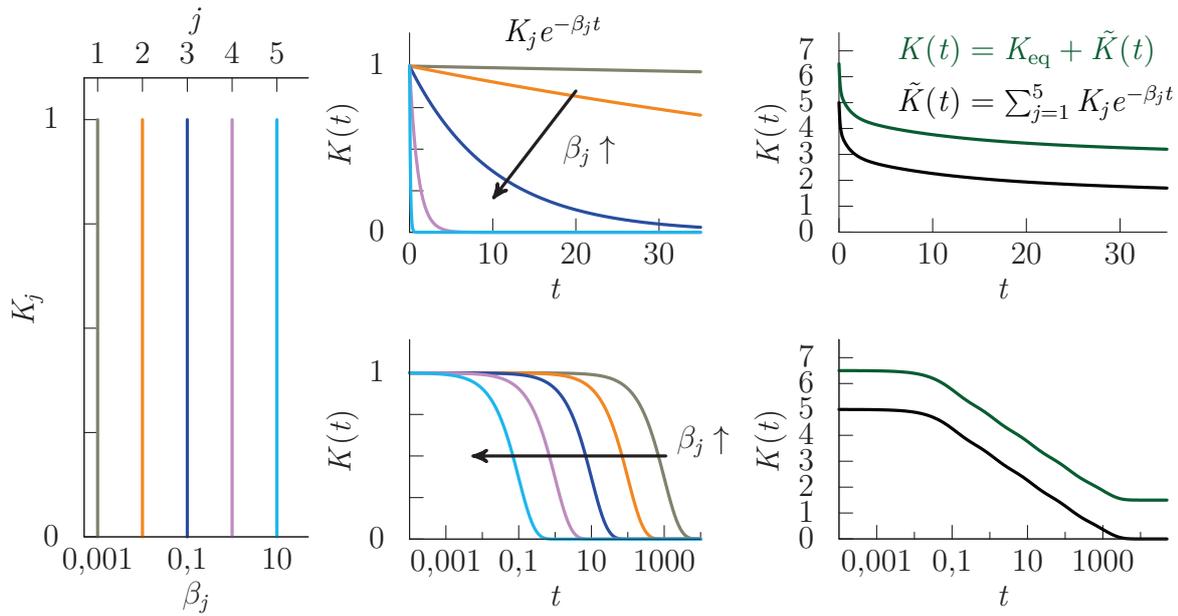


Abbildung 3.7.: Materialfunktion eines generalisierten Maxwell-Elementes: Diskretes Spektrum mit gleichgewichteten Relaxationsraten (links), Steifigkeitsabfall der einzelnen Reihenglieder $K_j e^{-\beta_j t}$ in linearer und logarithmischer Zeitskala (Mitte) und Steifigkeitsabfall der Prony-Reihe mit und ohne Gleichgewichtskonstante (rechts)

sche Form die Relaxationsfunktion besitzt, ist im Rahmen der linearen Viskoelastizität nicht festgelegt. Kontinuierliche Spektren $K(t) = K_{\text{eq}} + \int_{-\infty}^{\infty} H(u) e^{-t/u} \ln u$ und diskrete Spektren $K(t) = K_{\text{eq}} + \sum_{j=1}^{N_j} K_j e^{-\beta_j t}$ sowie Potenzfunktionen $K(t) = K_{\text{eq}} + \alpha_1 t^{-\alpha_2}$ und gestreckte Exponentialfunktionen $K(t) = K_{\text{eq}} + K e^{-(\beta t)^\alpha}$ sind Beispiele für analytische Ansätze der Materialfunktionen.

Als Beispiel eines diskreten Spektrums ist in Abbildung 3.7 die Prony-Reihe eines generalisierten Maxwell-Elementes dargestellt. Die Materialfunktion setzt sich aus einem konstanten Anteil K_{eq} sowie aus monoton fallenden Exponentialfunktionen zusammen. Die Relaxationsrate β_j jeder Exponentialfunktion bestimmt, wie schnell die Anfangssteifigkeit K_j des zugehörigen Maxwell-Elementes abklingt. In logarithmischer Zeitskala ist der Abfall der einzelnen Exponentialfunktion deutlich erkennbar. Ist die Materialfunktion bekannt, so kann die Antwort für alle Standardanregungen wie die Impulsanregung, die konstante Ratenanregung oder die harmonische Anregung aus dieser abgeleitet werden.

Ob die Charakteristiken viskoelastischer Festkörper erfüllt werden, lässt sich ebenfalls anhand der Materialfunktion $K(t)$ überprüfen. Instantane Elastizität liegt vor, wenn die instantane Steifigkeit $K(0)$ nicht verschwindet. Die Fähigkeit zur Relaxation ist vorhanden, wenn die Materialfunktion zeitabhängig und monoton fallend ist. Wenn die

3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

Spannung unter Stufenanregung wie bei einem viskoelastischen Festkörper asymptotisch gegen einen Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = \sigma_{\text{eq}}$ relaxiert (vgl. Abbildung 3.2), so muss sich die Materialfunktion folglich auch einem Grenzwert annähern

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = K_{\text{eq}} \quad \text{mit } K_{\text{eq}} > 0. \quad (3.36)$$

Dieser Grenzwert beschreibt die Steifigkeit im Gleichgewichtszustand, der sich nach unendlich langer Zeit einstellt.

Die Materialfunktion des generalisierten Maxwell-Elementes (3.27) liefert als Grenzwert die Steifigkeit des Federelementes K_{eq} , die deshalb bereits mit dem Index $_{\text{eq}}$ für lat. „equilibrium“ (dt. Gleichgewicht) versehen wurde. Wenn sich nach unendlich langer Zeit die Dämpfer der Maxwell-Elemente vollständig geöffnet haben, so verbleibt als Gleichgewichtsspannung die Spannung des Federelementes $\sigma_{\text{eq}} = K_{\text{eq}} \varepsilon_0$.

Folglich erlaubt es die Gleichungsstruktur (3.26) des generalisierten Maxwell-Elementes, die Spannung σ in eine Gleichgewichtsspannung σ_{eq} und eine viskose Überspannung σ_{ov} aufzuspalten

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \underbrace{K_{\text{eq}} \varepsilon(t)}_{\sigma_{\text{eq}}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{N_j} \int_0^t K_j e^{-\beta_j(t-u)} \frac{d\varepsilon(u)}{du} du}_{\sigma_{\text{ov}}} \\ &= \sigma_{\text{eq}} + \sigma_{\text{ov}} \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.2.5. Aufspaltung in Gleichgewichts- und Überspannung

Die additive Zerlegung der Spannung in Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsanteile ist im Allgemeinen möglich

$$\sigma = \sigma_{\text{eq}} + \sigma_{\text{ov}} \quad (3.38)$$

und findet nicht nur in der Viskoelastizität, sondern auch in der Viskoplastizität Anwendung (HAUPT 2000).

Die Zerlegung spiegelt die konstitutive Annahme wider, dass Gleichgewichts- und Überspannung unabhängig voneinander sind. Dies vereinfacht die Modellanalyse und kann hilfreich sein, wenn quasistatischem und dynamischem Materialverhalten unterschiedliche Deformationsmechanismen zugrunde liegen. Im Bezug auf rheologische Modelle kann die Zerlegung als Parallelschaltung von zwei Einheiten interpretiert werden, wovon die eine die Gleichgewichtsspannung und die andere die Überspannung zur Modellantwort beiträgt.

Die additive Aufspaltung in Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsanteile ist auf die freie Energiedichtefunktion übertragbar und wird beispielsweise in REESE UND GO-

VINDJEE (1998) sowie in GÖKTEPE UND MIEHE (2008) angewandt.

Im Rahmen der Viskoelastizitätstheorie können die Argumente der Gleichgewichts- und der Überspannung präzisiert werden

$$\sigma(t) = \sigma_{\text{eq}}(\varepsilon(t)) + \sigma_{\text{ov}}(\varepsilon(u)|_{u=-\infty}^t). \quad (3.39)$$

Die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} ist eine Funktion des aktuellen Dehnungszustandes $\varepsilon(t)$ und führt zu einer elastischen Spannung. Sie liefert denselben Beitrag unabhängig davon, wie schnell oder auf welchem Weg der Dehnungszustand erreicht wurde.

Die Überspannung σ_{ov} hingegen ist ein Funktional der gesamten Dehnungsgeschichte $\varepsilon(u)|_{u=-\infty}^t$ und stellt somit die eigentlich linear viskoelastische Materialantwort dar. Ohne Gleichgewichtsanteil entspricht das Verhalten einem viskoelastischen Fluid.

Damit im Gleichgewichtszustand tatsächlich nur die Gleichgewichtsspannung σ_{eq} einen Beitrag liefert, muss die Definition der Überspannung zwei Kriterien erfüllen (HAUPT 2000). Für statische Prozesse, d. h. Dehnungsgeschichten mit unendlich langsamer Dehnrate, muss die Überspannung verschwinden. In diesem Zusammenhang spricht man von der Normalisierung des Funktionals.

Darüber hinaus muss die Überspannung ebenfalls verschwinden, wenn eine Dehnungsgeschichte statisch fortgeführt wird. Dies bedeutet, dass die Überspannung auf null relaxieren muss, wenn das Material nach einem beliebigen Dehnungsverlauf seinen Dehnungszustand nicht mehr verändert.

Am Beispiel der Integraldarstellung lassen sich beide Kriterien überprüfen. Mithilfe einer Zerlegung der Materialfunktion $K(t)$ in einen konstanten Anteil K_{eq} und einen zeitabhängigen Anteil $\tilde{K}(t)$

$$K(t) = K_{\text{eq}} + \tilde{K}(t) \quad (3.40)$$

kann die Spannungsantwort bei Integraldarstellung (3.19) in Gleichgewichts- und Überspannung

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \varepsilon(0) \left(K_{\text{eq}} + \tilde{K}(t) \right) + \int_0^t \left(K_{\text{eq}} + \tilde{K}(t-u) \right) \frac{d\varepsilon(u)}{du} du \\ &= \underbrace{K_{\text{eq}} \varepsilon(t)}_{\sigma_{\text{eq}}(t)} + \underbrace{\tilde{K}(t) \varepsilon(0) + \int_0^t \tilde{K}(t-u) \frac{d\varepsilon(u)}{du} du}_{\sigma_{\text{ov}}(t)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

aufgespalten werden. Ohne anfänglichen Dehnungssprung $\varepsilon(0) = 0$ und für unendlich langsame Prozesse $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ liefert das Faltungsintegral in Gl. (3.41) keinen Beitrag und die Überspannung wird null.

Das zweite Kriterium ist nicht unmittelbar durch die Konstitutivgleichung (3.41) erfüllt,

sondern stellt eine Forderung an die Materialfunktion dar. Damit die Überspannung bei statischer Fortführung auf null relaxiert, muss der zeitabhängige Anteil der Materialfunktion für unendliche Zeiten verschwinden

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{K}(t) = 0. \quad (3.42)$$

Im Folgenden dient die Tilde über einer Materialfunktion zur Kennzeichnung des zeitabhängigen Anteils mit einem gemäß Gl. 3.42 verschwindenden Grenzwert für unendliche Zeiten.

3.2.6. Dreidimensionale lineare Viskoelastizität

Linear viskoelastische Konstitutivgleichungen können für dreidimensionales Materialverhalten bei kleinen Deformationen auf dieselbe Weise wie für den eindimensionalen Fall formuliert werden. In diesem Fall ist der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ein lineares tensorwertiges Funktional \mathcal{L} der Geschichte des Dehnungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathcal{L}(\boldsymbol{\varepsilon}(u)|_{u=-\infty}^t). \quad (3.43)$$

In Analogie zu Gl. (3.19) lautet die Integraldarstellung

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \mathbf{K}(t) : \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \int_0^t \mathbf{K}(t-u) : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}(u)}{du} du, \quad (3.44)$$

wobei der Faltungskern $\mathbf{K}(t)$ ein zeitabhängiger Tensor vierter Stufe ist. Bei isotropem Materialverhalten kann $\mathbf{K}(t)$ durch zwei skalare Funktionen $\bar{\lambda}(t)$ und $\mu(t)$ ersetzt werden

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & \left(\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}(0) \bar{\lambda}(t) + \int_0^t \bar{\lambda}(t-u) \text{tr } \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(u) du \right) \mathbf{I} \\ & + 2 \left(\boldsymbol{\varepsilon}(0) \mu(t) + \int_0^t \mu(t-u) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(u) du \right). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Für konstante Materialfunktionen, den Lamé-Konstanten $\bar{\lambda}$ und μ , reduziert sich die Konstitutivgleichung auf das verallgemeinerte Hookesche Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\lambda} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.46)$$

Die Verbindung zwischen dem Hookeschen Gesetz und der dreidimensionalen Konstitutivgleichung der linearen Viskoelastizität kann auch in umgekehrter Reihenfolge herge-

stellt werden. Ersetzt man in Gl. (3.46) die elastischen Konstanten durch Integraloperatoren, so erhält man das viskoelastische Pendant (3.45).

Wie auch für das Hookesche Gesetz gibt es für die linear viskoelastische Konstitutivgleichung unterschiedliche Darstellungsformen. Trennt man in der Konstitutivgleichung (3.45) die Volumen- und Gestaltsänderung voneinander, so stehen in den Faltungsintegralen der zeitabhängige Kompressionsmodul $\bar{K}(t) = \bar{\lambda}(t) + \frac{2}{3}\mu(t)$ und der Schubmodul $G(t) = \mu(t)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & \left(\bar{K}(t) \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \int_0^t \bar{K}(t-u) \operatorname{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(u) \, du \right) \mathbf{I} \\ & + 2 \left(G(t) \boldsymbol{\varepsilon}^D(0) + \int_0^t G(t-u) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^D(u) \, du \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Die Konstitutivgleichung kann auch ohne Deviatorberechnung in $E(t)$ und $\nu(t)$ formuliert werden. Aufgrund der Zeitabhängigkeit der Materialfunktion sind die Zusammenhänge zwischen $\bar{K}(t)$, $G(t)$ und $E(t)$, $\nu(t)$ im Zeitbereich nicht explizit darstellbar. Nach der Carson-Transformation (λ -fache Laplace-Transformation) entstehen jedoch ähnliche Zusammenhänge wie bei den Materialkonstanten des Hookeschen Gesetzes (TSCHOEGL 1989). Die gesuchte Materialfunktion erhält man dann durch Rücktransformation in den Zeitbereich.

Mit der Annahme einer konstanten Querkontraktion gelten jedoch die einfachen Zusammenhänge $\bar{K}(t) = \frac{E(t)}{3(1-2\nu)}$ und $G(t) = \frac{E(t)}{2(1+\nu)}$, sodass die Konstitutivgleichung zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t) = & \left(\frac{E(t)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \int_0^t \frac{E(u)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \operatorname{tr} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t-u) \, du \right) \mathbf{I} \\ & + \frac{E(t)}{1+\nu} \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \int_0^t \frac{E(t-u)}{1+\nu} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(u) \, du \end{aligned} \quad (3.48)$$

folgt. Mit der zusätzlichen Annahme einer verschwindenden Querkontraktion $\nu = 0$ verbleibt nur eine Materialfunktion, der zeitabhängige Elastizitätsmodul $E(t)$, zur Bestimmung aus Versuchsdaten

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = E(t) \boldsymbol{\varepsilon}(0) + \int_0^t E(t-u) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(u) \, du. \quad (3.49)$$

Mit der Aufspaltung der Materialfunktion in Gleichgewichts- und Nichtgleichgewichtsanteile folgt die Definition des Spannungstensors im Gleichgewichtszustand $\boldsymbol{\sigma}_{\text{eq}}$ und der

tensorwertigen Überspannung σ_{ov}

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \underbrace{E_{eq}\varepsilon(t)}_{\sigma_{eq}} + \underbrace{\varepsilon(0)\tilde{E}(t) + \int_0^t \tilde{E}(t-u)\dot{\varepsilon}(u) du}_{\sigma_{ov}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.2.7. Grenzen der linearen Viskoelastizität

Wie in Abschnitt 3.2.4 ausgeführt sind die Konstitutivgleichungen bis auf ihre Materialfunktionen festgelegt. Die Möglichkeiten, dafür eine Prony-Reihe, ein kontinuierliches Spektrum oder ein Potenzgesetz zu wählen, erscheinen zunächst vielfältig. Trotzdem schränkt die Linearität die Anwendung dieser viskoelastischen Konstitutivgleichungen stark ein. Dies wird im Folgenden anhand zweier Standardanregungen, der Stufen- und der konstanten Ratenanregung, illustriert.

Im Beispiel der Stufenanregung wird angenommen, dass die Versuchsdaten aus einem Relaxationsversuch der Stufe ε_1 mit einer Materialfunktion $K(t)$ beliebiger Form gut approximiert werden können. Dann ist die Konstitutivgleichung vollständig bestimmt.

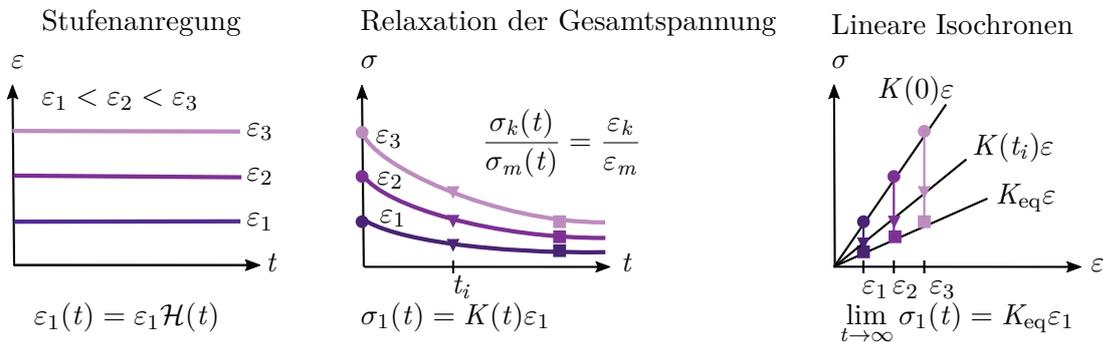


Abbildung 3.8.: Relaxation der Gesamtspannung der linearen Viskoelastizität bei Stufenanregung: Relaxation auf die Gleichgewichtsspannung

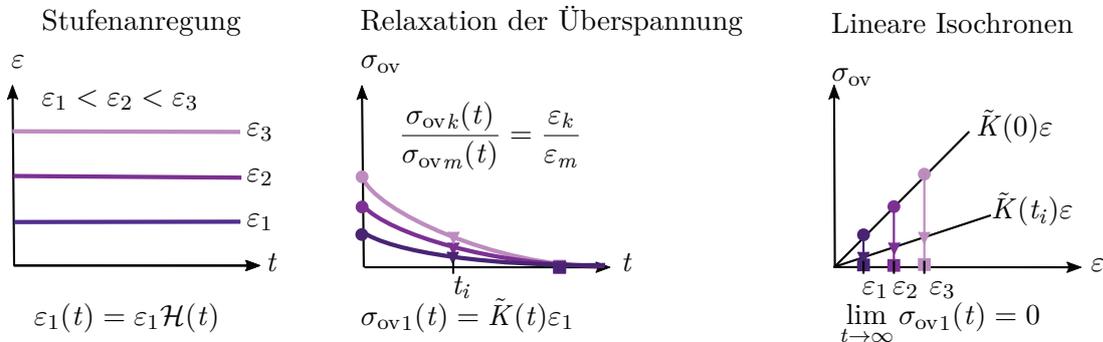


Abbildung 3.9.: Relaxation der linear viskoelastischen Überspannung bei Stufenanregung: Relaxation auf null

Werden jetzt Relaxationsversuche der Stufen ε_2 und ε_3 durchgeführt, so sind die Spannungsantworten bereits festgelegt. Sie können durch Skalierung der Spannungsantwort $\sigma_1(t)$ um den Faktor $\varepsilon_2/\varepsilon_1$ bzw. $\varepsilon_3/\varepsilon_1$ im Spannungs-Zeit-Diagramm gewonnen werden. Diese Skalierung entspricht der Gleichung (3.3) der Linearität.

In Abbildung 3.8 sind die drei Stufenanregungen sowie die zugehörigen Spannungsantworten in Abhängigkeit der Zeit und der Dehnung dargestellt. In dieser Darstellung erfüllt die Materialfunktion $K(t)$ die Annahme des schwindenden Gedächtnisses und nähert sich für unendliche Zeiten asymptotisch dem Gleichgewichtsmodul K_{eq} an. Wie schnell die Spannung relaxiert, wird durch die tatsächliche Form der Materialfunktion festgelegt. Verbindet man im Spannungs-Dehnungs-Diagramm die Punkte der einzelnen Versuche miteinander, die zu demselben Zeitpunkt t_i gehören, so erhält man die sogenannten Isochronen. Im Falle der linearen Viskoelastizität sind die Isochronen im Spannungs-Dehnungs-Diagramm Geraden mit der Steigung $K(t_i)$. Für unendliche Zeiten relaxiert die Spannung auf die Gleichgewichtsspannung, die durch die Gerade $K_{\text{eq}}\varepsilon$ gekennzeichnet ist.

Zum Vergleich sind in Abbildung 3.9 die Überspannungsantworten für die drei Stufenanregungen in Abhängigkeit der Zeit und der Dehnung dargestellt. Hierfür wurde nur der zeitabhängige Teil der Materialfunktion $\tilde{K}(t)$ zur Spannungsberechnung berücksichtigt. Die Skalierbarkeit im Spannungs-Zeit-Diagramm gilt hier ebenfalls. Außerdem relaxiert die Überspannung wie in Gl. (3.42) gefordert auf null.

Im Beispiel der konstanten Ratenanregung $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_1 t$ sind die Gesamtspannung in Abbildung 3.10 und die Überspannung in Abbildung 3.11 dargestellt. In diesem Fall wird als Materialfunktion die Form des Drei-Parameter-Festkörpers $K(t) = K_{\text{eq}} + K_1 e^{-\beta_1 t}$ eingesetzt, da für die konstante Ratenanregung das Integral der Materialfunktion $\sigma_1(t) = \dot{\varepsilon}_1 \int_0^t K(t-u) du$ ausgewertet und die Grenzwerte direkt angegeben werden können. Abgesehen von der Skalierbarkeit im Spannungs-Zeit-Diagramm ist zu bemerken, dass die Anfangssteigung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm unabhängig von der Anregungsrate ist und, falls existent, $K(0)$ bzw. $\tilde{K}(0)$ entspricht.

Außerdem ist die Überspannung bei konstanter Ratenanregung begrenzt. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm zeigt sich dies daran, dass sich die Gesamtspannung asymptotisch einer Parallelen zur Gleichgewichtsantwort annähert. Der Abstand zwischen der Asymptoten und der Gleichgewichtsspannung entspricht dem Grenzwert der Überspannung.

Die Diskussion der Stufen- und konstanten Ratenanregung verdeutlicht die Annahme der linearen Viskoelastizitätstheorie, dass bei einer Skalierung der Anregung die Antwort um denselben Faktor skaliert werden muss. Ist eine Skalierbarkeit realer Versuchsdaten im Spannungs-Zeit-Diagramm nicht näherungsweise möglich, so wird eine Anpassung im Rahmen der linearen Viskoelastizitätstheorie keine zufriedenstellenden Ergebnisse für alle Versuche liefern. Um solche zu erreichen, müssen nichtlineare Konstitutivgleichungen in Betracht gezogen werden.

Die Nichtlinearität kann sowohl geometrischen als auch materiellen Ursprungs sein. Geo-

3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

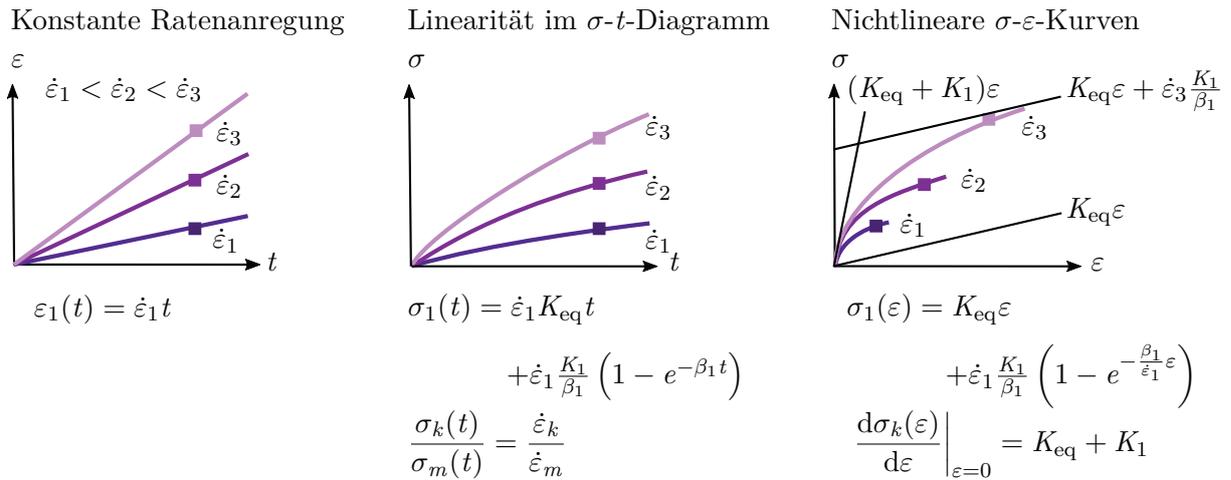


Abbildung 3.10.: Linear viskoelastische Gesamtspannung des Drei-Parameter-Festkörpers bei konstanter Ratenanregung: Konstantes Verhältnis der Spannungs-Zeit-Kurven und ratenunabhängige Anfangssteigung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm

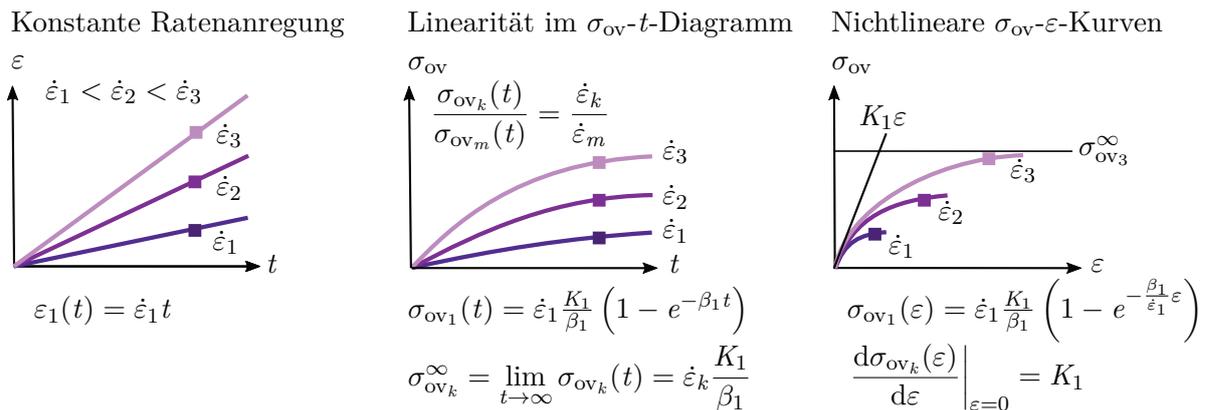


Abbildung 3.11.: Linear viskoelastische Überspannung des Drei-Parameter-Festkörpers bei konstanter Ratenanregung: Konstantes Verhältnis der Spannungs-Zeit-Kurven, Grenzwert der Überspannung und ratenunabhängige Anfangssteigung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm

metrische Nichtlinearität tritt bei großen Verzerrungen und Streckungen auf. Materielle Nichtlinearität kann unabhängig vom Deformationsmodus und Dehnungsbereich und insbesondere bei großen Dehnraten auftreten.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Konstitutivgleichung für Schäume in der Crashsimulation mit finiten Deformationen bereitzustellen. Die Theorie der finiten Viskoelastizität ist deshalb Gegenstand der nächsten Abschnitte. Formulierungen für kleine Deformationen mit materieller Nichtlinearität werden nicht gesondert behandelt, können aber als Grenzfall der finiten materiell nichtlinearen Konstitutivgleichungen abgeleitet werden.

3.3. Finite Viskoelastizität

Um ohne Einschränkung für finite Deformationen und Rotationen anwendbar zu sein, müssen Konstitutivgleichungen das Prinzip der Objektivität (vgl. Abschnitt 2.3) erfüllen. Aufbauend auf den Konstitutivgleichungen der linearen Viskoelastizitätstheorie kann dies erreicht werden, indem $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ durch objektive finite Spannungs- und Dehnungsmaße und deren Ableitungen durch geeignete Raten ersetzt werden (DROZDOV 1996). Diese erste Strategie lässt sich auf die in Abschnitt 3.2 vorgestellten Möglichkeiten, Konstitutivgleichungen herzuleiten, anwenden. Im Folgenden werden dazu einzelne Beispiele aus der Literatur angeführt.

Beispiele für die deduktive Ableitung von Konstitutivgleichungen im Rahmen der finiten Viskoelastizität sind die Modelle von SIMO (1987) und HOLZAPFEL (2000). Ausgehend von der Definition der freien Energiedichtefunktion und des Dissipationspotentials werden die zweite Piola-Kirchhoff-Spannung berechnet und lineare Evolutionsgleichungen für die inneren Variablen aufgestellt. In diesen Modellen wird der Deformationsgradient in volumetrische und isochore Anteile aufgespalten. Dies schränkt das prinzipielle Vorgehen im Bezug auf die Erweiterung auf finite Deformationen jedoch nicht ein.

In der Differentialdarstellung kann das Gegenstück zur allgemeinen Operatorgleichung (3.6) in den Rivlin-Ericksen-Materialien (RIVLIN UND ERICKSEN 1955) gesehen werden. Differentialgleichungen rheologischer Modelle werden in der Literatur auf verschiedene Arten auf finite Deformationen erweitert. Da sowohl beliebig viele Spannungsmaße als auch objektive Spannungsraten zur Verfügung stehen, obliegt die Auswahl einer zweckdienlichen Kombination dem Wissenschaftler und Ingenieur. Für das Maxwell-Element wurden beispielsweise die Jaumann-Rate $\dot{\mathbf{T}}$, die Oldroyd-Rate \mathbf{T}^∇ und die Cotter-Rivlin-Rate \mathbf{T}^Δ der Cauchy-Spannung in Kombination mit dem Dehnratentensor \mathbf{D} verwendet (vgl. DROZDOV (1996) und die darin enthaltenen Referenzen). Als eines der wichtigsten rheologischen Modelle wird das generalisierte Maxwell-Element der finiten Viskoelastizität im nächsten Abschnitt ausführlich behandelt.

Die zweite Strategie, die Konstitutivgleichungen der linearen Viskoelastizitätstheorie auf finite Deformationen erweitert, richtet sich an rheologische Modelle. Feder- und Dämpferelemente können für sich genommen bereits durch Konstitutivgleichungen mit finiten Deformationen beschrieben werden. Um diese auswerten zu können, ist die Kenntnis der Dehnung bzw. Dehnrate des jeweiligen Elementes notwendig. In der linearen Theorie können die Dehnung und Dehnrate für Elemente in Serienschaltung additiv zerlegt werden. Für finite Deformationen ist dies nicht direkt möglich, sondern erfordert die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in elastische und inelastische Anteile und die Einführung einer spannungsfreien Zwischenkonfiguration. Dieses Vorgehen stammt aus der Plastizitätstheorie (LEE 1969) und wird auch in der Thermoelastizität eingesetzt (LUBARDA (2004), HARTMANN (2012).) In der Viskoelastizitätstheorie findet

dieses Vorgehen u. a. in SIDOROFF (1974), STICKFORTH (1986), LION (1997b), LION (1997a) und REESE UND GOVINDJEE (1998) Anwendung und wird üblicherweise mit der deduktiven Ableitung von Materialgleichungen kombiniert. Da im Gegensatz zu plastischem Materialverhalten mit reversiblen und irreversiblen Dehnungen elastische und viskose Dehnungen nicht beobachtbar sind (MARKOVIĆ U. A. 2014), kann die multiplikative Zerlegung in elastische und viskose Anteile als konstitutive Annahme angesehen werden. REESE UND WRIGGERS (1999) zeigen jedoch, dass das Konzept transienter Netzwerke (GREEN UND TOBOLSKY 1946) auf die multiplikative Zerlegung führt.

Dass die multiplikative Zerlegung auf eine spannungsfreie Zwischenkonfiguration führen soll, macht sie noch nicht eindeutig, da Rotationen die Zwischenkonfiguration spannungsfrei erhalten. Die Zerlegung muss um eine kinematische Annahme ergänzt werden (LUBARDA 2004). MIEHE UND KECK (2000) kommen ohne diese Annahme aus, indem sie viskose metrische Tensoren verwenden.

Die bisher beschriebenen Methoden zur Konstruktion eines Modells der finiten Viskoelastizität stehen in Zusammenhang mit der linearen Viskoelastizitätstheorie. Darüber hinaus bietet sich die finite Elastizitätstheorie als Basis an. Einerseits kann die Beschreibung der Federelemente auch im Rahmen der beiden bereits genannten Strategien der finiten Elastizitätstheorie entnommen werden, andererseits können in den Gleichungen der Hyperelastizität die elastischen Materialkonstanten durch Faltungsoperatoren ersetzt werden (DROZDOV 1996). Diese Methode schließt die Modelle vom K-BKZ-Typ (KAYE (1962), BERNSTEIN U. A. (1963)) ein.

Aufgrund der finiten Spannungs- und Dehnungsmaße handelt es sich bei den hier genannten Konstitutivgleichungen immer um nichtlineare Gleichungen. Ob die Nichtlinearität nur geometrischen Ursprungs ist, muss für die Veröffentlichungen im Einzelfall geprüft werden.

3.3.1. Generalisiertes Maxwell-Element bei finiten Deformationen

Das generalisierte Maxwell-Element (vgl. Abbildung 3.5) wird in der Wissenschaft häufig eingesetzt und ist in kommerziellen FEM-Berechnungsprogrammen ebenfalls weit verbreitet. Die Modelle der viskoelastischen Überspannung in Kapitel 5 stehen z. T. in enger Beziehung zum generalisierten Maxwell-Element. Aus diesem Grund werden die fundamentalen Gleichungen für zwei Möglichkeiten, wie das Modell in finiten Deformationen formuliert werden kann, an dieser Stelle vorgestellt. Die numerische Umsetzung dieser Modelle wird in Kapitel 4 diskutiert.

Generalisiertes Maxwell-Element in \mathbf{S} und \mathbf{E}

In SIMO (1987), KALISKE UND ROTHERT (1997) und HOLZAPFEL (2000) wird das generalisierte Maxwell-Element in der zweiten Piola-Kirchhoffspannung \mathbf{S} und der Green-Lagrangeschen-Dehnung \mathbf{E} für isotrope Materialien formuliert. Da diese Größen und deren zeitliche Ableitungen invariant unter Starrkörperrotation sind, können sie direkt in die Gleichungen für kleine Deformationen eingesetzt werden.

In Anlehnung an die Gleichungen kleiner Deformationen (3.12), (3.38) und (3.41) lauten die Gleichgewichts- und Überspannung

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{eq}} + \mathbf{S}_{\text{ov}} = \mathbf{S}_{\text{eq}} + \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{S}_j, \quad (3.51)$$

wobei sich die Überspannung \mathbf{S}_{ov} aus den Spannungen \mathbf{S}_j der einzelnen Maxwell-Elemente zusammensetzt. Darüber hinaus wird in den genannten Veröffentlichungen die Spannung in volumetrische und isochore Anteile getrennt

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_{\text{eq}} + \mathbf{S}_{\text{ov}} = \mathbf{S}_{\text{eq}_{\text{vol}}} + \mathbf{S}_{\text{eq}_{\text{iso}}} + \mathbf{S}_{\text{ov}_{\text{vol}}} + \mathbf{S}_{\text{ov}_{\text{iso}}} \quad (3.52)$$

und die Überspannung auf den isochoren Anteil reduziert, $\mathbf{S}_{\text{ov}_{\text{vol}}} = 0$. Eine Volumenänderung führt dann ausschließlich in der Gleichgewichtsantwort zu einem Spannungsbeitrag. Für isotrope Materialien sind die Spannungen der Maxwell-Elemente folglich deviatorisch und die Federsteifigkeit K_j des j -ten Maxwell-Elementes wird zum zweifachen Schubmodul $2G_j$ (vgl. Gl. (3.47)). Die N_j Evolutionsgleichungen in Spannungsform (3.14) lauten schließlich

$$\dot{\mathbf{S}}_j^{\text{D}}(t) + \beta_j \mathbf{S}_j^{\text{D}}(t) = 2G_j \dot{\mathbf{E}}^{\text{D}}(t) \quad (\text{ohne Summation}). \quad (3.53)$$

Wie in Abschnitt 3.2.2 beschrieben können diese Gleichungen in Integraldarstellung überführt und anschließend zusammengefasst werden

$$\mathbf{S}_{\text{ov}}(t) = \sum_{j=1}^{N_j} \mathbf{S}_j^{\text{D}}(t) = \sum_{j=1}^{N_j} \int_0^t 2G_j e^{-\beta_j(t-u)} \dot{\mathbf{E}}^{\text{D}}(u) du. \quad (3.54)$$

Generalisiertes Maxwell-Element in \mathbf{T} und \mathbf{D}

Das FEM-Berechnungsprogramm LS-DYNA stellt das generalisierte Maxwell-Element für isotrope Materialien mit Bezug zur Momentankonfiguration zur Verfügung (HALLQUIST 2016). Die Cauchy-Spannung \mathbf{T} wird in volumetrische und isochore Anteile auf-

3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

gespalten

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_{\text{vol}} + \mathbf{T}_{\text{iso}}, \quad (3.55)$$

wobei $\mathbf{T}_{\text{vol}} = \text{tr}(\mathbf{T}) \mathbf{I}$ durch die Parameter $\bar{\beta}_k$ und \bar{K}_k und $\mathbf{T}_{\text{iso}} = \mathbf{T}^{\text{D}}$ durch die Parameter β_j und G_j der Materialfunktionen

$$\bar{K}(t) = \sum_{k=0}^{N_K} \bar{K}_k e^{-\bar{\beta}_k t} \quad \text{und} \quad G(t) = \sum_{j=0}^{N_J} G_j e^{-\beta_j t} \quad (3.56)$$

bestimmt werden. Eine Gleichgewichtsantwort ist enthalten, wenn bei mindestens einer Steifigkeit G_j oder \bar{K}_k die zugehörige Relaxationsrate null gesetzt wird.

Da die materielle Zeitableitung der Cauchy-Spannung $\dot{\mathbf{T}}$ keine objektive Größe ist, wird die Jaumann-Rate der Cauchy-Spannung $\overset{\circ}{\mathbf{T}}$

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{T} \quad (3.57)$$

in die Evolutionsgleichung eingesetzt. Dabei wird zwischen dem System aus N_K volumetrischen

$$\text{tr} \overset{\circ}{\mathbf{T}}_k(t) + \bar{\beta}_k \text{tr} \mathbf{T}_k(t) = \bar{K}_k \text{tr} \mathbf{D}(t) \quad (\text{ohne Summation}) \quad (3.58)$$

und N_J deviatorischen Spannungsanteilen unterschieden

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}}_j^{\text{D}}(t) + \beta_j \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) = 2G_j \mathbf{D}^{\text{D}}(t) \quad (\text{ohne Summation}). \quad (3.59)$$

Setzt man in Gl. (3.59) die Jaumann-Rate ein, so kann \mathbf{T}_j^{D} nicht mehr unmittelbar berechnet werden

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\mathbf{T}}_j^{\text{D}}(t) + \beta_j \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) &= 2G_j \mathbf{D}^{\text{D}}(t) \\ \dot{\mathbf{T}}_j^{\text{D}}(t) + \beta_j \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) &= 2G_j \mathbf{D}^{\text{D}}(t) - \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) \cdot \mathbf{W}(t) + \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) \\ \frac{d}{dt} \left(e^{\beta_j t} \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) \right) &= e^{\beta_j t} 2G_j \mathbf{D}^{\text{D}}(t) - e^{\beta_j t} \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) \cdot \mathbf{W}(t) + e^{\beta_j t} \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) \\ \mathbf{T}_j^{\text{D}}(t) &= 2 \int_0^t G_j e^{-\beta_j(t-u)} \mathbf{D}^{\text{D}}(u) du \\ &\quad - \int_0^t e^{-\beta_j(t-u)} \left(\mathbf{T}_j^{\text{D}}(u) \cdot \mathbf{W}(u) - \mathbf{W}(u) \cdot \mathbf{T}_j^{\text{D}}(u) \right) du, \end{aligned} \quad (3.60)$$

sondern erfordert die fortlaufende Drehung der Geschichtsvariablen mit \mathbf{W} in die aktuelle Konfiguration.

3.4. Finite nichtlineare Viskoelastizität

Modelle der finiten Viskoelastizität, die auf der linearen Viskoelastizitätstheorie beruhen, werden für kleine Deformationen auf lineare Antworten führen. Soll die Modellantwort auch bei kleinen Deformationen nichtlinear sein, so darf die Nichtlinearität nicht alleine den finiten Spannungs- und Dehnungsmaßen entstammen.

Finite nichtlinear viskoelastische Modelle phänomenologischen Ursprungs werden in zahlreichen Lehrbüchern (LOCKETT (1972), FINDLEY U. A. (1976), CHRISTENSEN (1982), DROZDOV (1996)) und Übersichtsartikeln (MORMAN (1985), DRAPACA U. A. (2007), WINEMAN (2009), BANKS U. A. (2011), MARKOVIĆ U. A. (2014)) behandelt. Die darin enthaltenen Konstitutivgleichungen sind meist Mehrfach- oder nichtlineare Einfachintegrale und basieren auf unterschiedlichen Annahmen bezüglich des Spannungsfunktionals, die ihre Anwendbarkeit auf verschiedene Dehnungsgeschichten einschränken.

Um Dehnungsgeschichten vergleichen zu können, führten COLEMAN UND NOLL (1961) in ihrer wegweisenden Veröffentlichung zur finiten linearen Viskoelastizität mithilfe einer Norm eine Topologie für Dehnungsgeschichten ein. Damit können zwei mathematische Kriterien formuliert werden, die die Dehnungsgeschichte und die Eigenschaften des Funktionals verknüpfen und so die Glattheit der Abhängigkeit der Spannung von der Dehnung charakterisieren. Während das starke Prinzip des schwindenden Gedächtnisses auf ein Fréchet-differenzierbares Funktional führt, ist das Funktional bei Gültigkeit des schwachen Prinzips des schwindenden Gedächtnisses lediglich stetig. DRAPACA U. A. (2007) verglichen die nichtlinearen Modelle im Bezug auf die beiden Kriterien. Sie kamen zu dem Schluss, dass das Pipkin-Rogers-Modell aus mathematischer Sicht das allgemeinste Modell zu sein schien, von dem sich alle anderen Modelle unter gewissen Bedingungen ableiten ließen (DRAPACA U. A. 2007). Aus diesem Grund wird das Pipkin-Rogers-Modell im nächsten Abschnitt vorgestellt und bereitet damit die Diskussion der Modelle aus Kapitel 5 vor. Im Anschluss daran wird das Green-Rivlin-Modell eingeführt, auf dem das in Abschnitt 5.4 folgende Modell basiert.

3.4.1. Pipkin-Rogers-Modell – Modifiziertes Superpositionsprinzip

Das Pipkin-Rogers-Modell (PIPKIN UND ROGERS 1968) basiert auf einer Summe von zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensoren $\bar{\mathbf{S}}_k(t)$, die selbst aus mehreren Ein- oder

Mehrfachintegralen zusammengesetzt sein können

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mathbf{S}}_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^t \cdots \int_0^t d_{\mathbf{E}(u_1)} \cdots d_{\mathbf{E}(u_k)} \bar{\mathbf{R}}_k(\mathbf{E}(u_1), t - u_1; \dots; \mathbf{E}(u_k), t - u_k) . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Die Operation $\int d_{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{R}}$ ist als zeitliche Integration des Produkts der partiellen Ableitung des Tensors zweiter Stufe $\bar{\mathbf{R}}$ nach dem Green-Lagrangeschen-Dehnungstensor \mathbf{E} mit dem Green-Lagrangeschen-Dehnratentensor $\dot{\mathbf{E}}$ definiert

$$\int d_{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(u), t - u) = \int \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(u), t - u)}{\partial \mathbf{E}(u)} : \dot{\mathbf{E}}(u) du . \quad (3.62)$$

Das Pipkin-Rogers-Modell dient in erster Linie zur Beschreibung von Stufenanregungen. Bei einem Dehnungssprung zum Zeitpunkt \bar{t}_1 von $\mathbf{E}(\bar{t}_1^-)$ auf $\mathbf{E}(\bar{t}_1^+)$ ist $d_{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{R}}$ durch

$$\int_{\bar{t}_1^-}^{\bar{t}_1^+} d_{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(u), t - u) = \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(\bar{t}_1^+), t - \bar{t}_1) - \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(\bar{t}_1^-), t - \bar{t}_1) \quad (3.63)$$

gegeben. Die Komponenten $\bar{R}_{1,km}(\mathbf{E}, t)$ des zweistufigen Tensors $\bar{\mathbf{R}}_1$ stellen die Relaxationsfunktionen dar, die die Antwort bei einer einstufigen Anregung $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_1 \mathcal{H}(t - \bar{t}_1)$ aus der Ruhelage heraus bestimmen. Die weiteren Tensoren $\bar{\mathbf{R}}_k$ für $k > 1$ korrigieren die Antwort für mehrstufige Anregungen $\mathbf{E}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_k \mathcal{H}(t - \bar{t}_k)$ und tragen die Besonderheit, dass sie erst einen Beitrag ab der k -ten Stufe liefern. Die Stufen können folglich nicht unabhängig voneinander betrachtet werden. Dies erklärt, warum das Pipkin-Rogers-Modell auch als „modifiziertes Superpositionsprinzip“ bezeichnet wird (FINDLEY UND LAI (1967), SMART UND WILLIAMS (1972b)).

In dieser Arbeit wird kein Gebrauch von den Korrekturtermen für mehrfache Stufenanregungen gemacht und $\bar{\mathbf{R}}_k = \mathbf{0}$ für $k > 1$ gesetzt. Damit reduziert sich das Pipkin-Rogers-Modell auf

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) &= \bar{\mathbf{R}}_1(\mathbf{E}(0), t) + \int_0^t d_{\mathbf{E}(u)} \bar{\mathbf{R}}_1(\mathbf{E}(u), t - u) \\ &= \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(0), t) + \int_0^t \frac{\partial \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(u), t - u)}{\partial \mathbf{E}(u)} : \dot{\mathbf{E}}(u) du \\ &= \bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(0), t) + \int_0^t \mathbf{K}(\mathbf{E}(u), t - u) : \dot{\mathbf{E}}(u) du , \end{aligned} \quad (3.64)$$

wobei der erste Term einen möglichen Dehnungssprung zum Zeitpunkt $t = 0$ abbildet und \mathbf{K} ein Tensor vierter Stufe ist. Im Gegensatz zu den bisherigen Materialfunktionen der linearen Viskoelastizität und der finiten linearen Viskoelastizität hängt der Faltungskern $\mathbf{K}(\mathbf{E}(t), t)$ nicht nur von der Zeit (vgl. Gl. (3.44) und (3.56)), sondern auch von der Dehnung ab und führt dadurch auch im Grenzfall für kleine Deformationen auf eine nichtlineare Materialantwort.

Für isotrope Materialien kann das Integral aus Gl. (3.64) in zwei Faltungsintegrale mit je einer skalaren zeit- und dehnungsabhängigen Materialfunktion umgeformt werden (vgl. Abschnitt 3.2.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) = & \left(\text{tr } \mathbf{E}(0) \bar{\lambda}(\mathbf{E}(0), t) + \int_0^t \bar{\lambda}(\mathbf{E}(u), t - u) \text{tr } \dot{\mathbf{E}}(u) \, du \right) \mathbf{I} \\ & + 2 \left(\mathbf{E}(0) \mu(\mathbf{E}(0), t) + \int_0^t \mu(\mathbf{E}(u), t - u) \dot{\mathbf{E}}(u) \, du \right). \end{aligned} \quad (3.65)$$

Aufgrund der freien Form von $\bar{\mathbf{R}}$ kann das Pipkin-Rogers-Modell in andere viskoelastische Modelle überführt werden. Wählt man $\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}(t), t) = \mathbf{K}(t) : \mathbf{E}(t)$, so findet man beispielsweise die Gleichung der finiten linearen Viskoelastizität wieder

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) = & \mathbf{K}(t) : \mathbf{E}(0) + \int_0^t \frac{\partial (\mathbf{K}(t - u) : \mathbf{E}(u))}{\partial \mathbf{E}(u)} : \dot{\mathbf{E}}(u) \, du \\ = & \mathbf{K}(t) : \mathbf{E}(0) + \int_0^t \mathbf{K}(t - u) : \dot{\mathbf{E}}(u) \, du. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Für isotrope Festkörper kann diese mit zwei skalaren Materialfunktionen formuliert werden

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) = & \left(\text{tr } \mathbf{E}(0) \bar{\lambda}(t) + \int_0^t \bar{\lambda}(t - u) \text{tr } \dot{\mathbf{E}}(u) \, du \right) \mathbf{I} \\ & + 2 \left(\mathbf{E}(0) \mu(t) + \int_0^t \mu(t - u) \dot{\mathbf{E}}(u) \, du \right) \end{aligned} \quad (3.67)$$

und stellt damit eine Erweiterung der linear viskoelastischen Konstitutivgleichung (3.45) auf finite Deformationen dar.

Mit der Wahl $\bar{\mathbf{R}}(\mathbf{E}, t) = \mathbf{K}(t) \mathbf{S}_{\text{eq}}(\mathbf{E})$ kann gezeigt werden, dass das Modell der quasi-linearen Viskoelastizität (FUNG 1981) ebenfalls im Pipkin-Rogers-Modell enthalten ist (DRAPACA U. A. 2007). Dabei stellt $\mathbf{S}_{\text{eq}}(\mathbf{E})$ die elastische Gleichgewichtsantwort dar.

3.4.2. Green-Rivlin-Modell

Die Herleitung des Green-Rivlin-Modells (GREEN UND RIVLIN 1957) basiert auf dem schwachen Prinzip des schwindenden Gedächtnisses. Die daraus resultierende Kontinuität des Spannungsfunktional erlaubt es, das Funktional mithilfe des Stone-Weierstrass-Theorems durch Polynome anzunähern. Überführt man die Polynomialkoeffizienten anschließend in die Fourierdarstellung, so berechnet sich die Spannung ausgehend von einer spannungsfreien Referenzkonfiguration als unendliche Summe mehrfacher Faltungsintegrale

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}(t) &= \int_0^t \mathbf{K}_1(t - u_1) : \mathbf{E}(u_1) \, du_1 \\
 &+ \int_0^t \int_0^t \mathbf{K}_2(t - u_1, t - u_2) : \mathbf{E}(u_1) : \mathbf{E}(u_2) \, du_1 \, du_2 \\
 &+ \dots \\
 &+ \int_0^t \dots \int_0^t \mathbf{K}_n(t - u_1, \dots, t - u_n) : \mathbf{E}(u_1) : \dots : \mathbf{E}(u_n) \, du_1 \dots \, du_n,
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

wobei die Faltungskerne $\mathbf{K}_n(t - u_1, \dots, t - u_n)$ höherwertige Tensoren der Stufe $2(n + 1)$ sind. In der Anwendung kann die Summe nach einer geeigneten Anzahl von N_N Summanden abgebrochen werden und definiert dann ein Green-Rivlin-Modell N_N -ter Ordnung. Das Green-Rivlin-Modell erster Ordnung gehört zur finiten linearen Viskoelastizität. Bei Modellen höherer Ordnung beruht die Nichtlinearität auf zwei Umständen. Zum einen setzt sich die Spannung aus Mehrfachintegralen zusammen, die nichtlinear in der Dehnungsgeschichte sind. Zum anderen treten in den Mehrfachintegralen voneinander unabhängige Integrationsvariable auf, die eine zeitliche Interaktion bewirken können. Für isotrope Materialien kann die Konstitutivgleichung mit skalaren Materialfunktionen

$$R_k = \begin{cases} R_k(t - u_1) & \text{falls } k \in \{1, 2\}, \\ R_k(t - u_1, t - u_2) & \text{falls } k \in \{3, 4, 5, 6\}, \\ R_k(t - u_1, t - u_2, t - u_3) & \text{falls } k \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \end{cases} \tag{3.69}$$

dargestellt werden. Dazu werden die Integranden aus Gl. (3.68) durch symmetrische, isotrope Matrix-Polynome zugehöriger Ordnung ersetzt, die linear in den Dehnungsgeschichten der einzelnen Integrationsvariablen $\mathbf{E}(u_1), \dots, \mathbf{E}(u_n)$ sind. Mit den Abkürzungen $\bar{T}_k = \text{tr}(\mathbf{E}(u_k))$, $\bar{T}_{kl} = \text{tr}(\mathbf{E}(u_k) \cdot \mathbf{E}(u_l))$, $\bar{T}_{klm} = \text{tr}(\mathbf{E}(u_k) \cdot \mathbf{E}(u_l) \cdot \mathbf{E}(u_m))$ und

$\mathbf{E}(u_k) = \mathbf{E}_k$ folgt das isotrope Green-Rivlin-Modell dritter Ordnung

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(t) = & \int_0^t [R_1 \bar{T}_1 \mathbf{I} + R_2 \mathbf{E}_1] du_1 + \int_0^t \int_0^t [R_3 \bar{T}_1 \bar{T}_2 \mathbf{I} + R_4 \bar{T}_{12} \mathbf{I} + R_5 \mathbf{E}_1 \bar{T}_2 + \\ & R_6 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2] du_1 du_2 + \int_0^t \int_0^t \int_0^t [R_7 \bar{T}_{123} \mathbf{I} + R_8 \bar{T}_1 \bar{T}_{23} \mathbf{I} + R_9 \bar{T}_1 \bar{T}_2 \mathbf{E}_3 + \\ & R_{10} \bar{T}_{12} \mathbf{E}_3 + R_{11} \bar{T}_1 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_3 + R_{12} \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{E}_3] du_1 du_2 du_3 . \end{aligned} \quad (3.70)$$

Das Einfachintegral wird wie bei der linearen Viskoelastizität in zwei Faltungsintegrale überführt. Das Doppelintegral erfordert bereits vier Faltungsintegrale und für das Dreifachintegral sind insgesamt sechs Faltungsintegrale notwendig. Infolge der Eigenschaften der Matrix-Polynome (FINDLEY U. A. (1976), SPENCER UND RIVLIN (1959)) ist die Ordnung des Green-Rivlin-Modells für isotrope Materialien auf fünf beschränkt. Trotzdem verbleibt eine Vielzahl an unbekanntem Materialfunktionen. Aus diesem Grund haben FINDLEY U. A. (1976) und LOCKETT (1972) die Konstitutivgleichung (3.70) für linear kompressible und inkompressible Materialien weiter vereinfacht und Versuchsprogramme zur Ermittlung der Materialfunktionen ausgearbeitet.

Im Allgemeinen bleibt jedoch offen, welche Ordnung notwendig ist, um reale Versuchsdaten abbilden zu können und welche Form die Materialfunktionen annehmen müssen. Um für eine Schubbelastung eine nichtlineare Materialantwort zu erhalten, muss das Green-Rivlin-Modell mindestens dritter Ordnung sein.

Was die Materialfunktionen anbelangt, so erfordert das Green-Rivlin-Modell nicht nur die Definition einer einfachen Zeitabhängigkeit wie bei Einfachintegralen, sondern mehrfache Abhängigkeiten. In diesem Zusammenhang hat LOCKETT (1972) gezeigt, dass ohne Einschränkung der Allgemeinheit für bestimmte Materialfunktionen Symmetrien in den Argumenten angenommen werden können und die Argumente wie beispielsweise bei einer Materialfunktion der zweiten Ordnung

$$R_k(u_1, u_2) = R_k(u_2, u_1) \quad (3.71)$$

vertauscht werden können. Auf ähnliche Weise schränken Annahmen wie physikalische Linearität, Superposition oder die Produktnichtlinearität (siehe Vergleich in STAFFORD (1969)) die Materialfunktion ein. In der Produktnichtlinearität ist die Produktform

$$R_k = \begin{cases} M_k(t - u_1) & \text{falls } k \in \{1, 2\}, \\ M_k(t - u_1) M_k(t - u_2) & \text{falls } k \in \{3, 4, 5, 6\} \quad (\text{ohne Summation}), \\ M_k(t - u_1) M_k(t - u_2) M_k(t - u_3) & \text{falls } k \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12\} \end{cases} \quad (3.72)$$

3. Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper

enthalten, die bereits in früheren Veröffentlichungen (NAKADA (1961), LEADERMAN U. A. (1963), FINDLEY UND ONARAN (1968)) angewandt wurde. Dies reduziert die Möglichkeiten der Materialfunktion, legt jedoch ebenso wie bei der linearen Viskoelastizität noch keine mathematische Form fest.

Während die Einschränkungen dieser Art auch aus Veröffentlichungen übernommen werden können, die die Dehnung in Abhängigkeit der Spannung formulieren und damit Kriechversuche beschreiben, ist dies für analytische Ansätze nicht möglich. Als analytische Materialfunktionen für das Green-Rivlin-Modell in Spannungsform bieten sich beispielsweise Potenzfunktionen an (SMART UND WILLIAMS 1972a).

Darüber hinaus ist nicht klar, welchen Wertebereich die Materialfunktionen abdecken dürfen. In LIFSHITZ UND KOLSKY (1967) nehmen die Materialfunktionen sowohl positive als auch negative Werte an.

Eine ausführliche Diskussion der hier genannten Punkte findet sich in LOCKETT (1972) und FINDLEY U. A. (1976). Das Green-Rivlin-Modell wird in Abschnitt 5.4 für Schäume modifiziert.

Materialfunktion und numerische Faltung

In diesem Kapitel wird die numerische Berechnung von Faltungsintegralen diskutiert, wie sie die in Kapitel 3 vorgestellten Konstitutivgleichungen in Integralform und die in Kapitel 5 folgenden Konstitutivgleichungen erfordern. Zunächst werden die Besonderheiten und Anforderungen an die numerische Faltung im Rahmen dieser Arbeit erläutert. Welcher Algorithmus für die numerische Faltung eingesetzt werden kann, bestimmt u. a. die Materialfunktion. Es werden die Fälle betrachtet, in denen die Materialfunktion als stückweise lineare Kurve, als Prony-Reihe oder als Überlappung von Prony-Reihen vorliegt. Diese Materialfunktionen ergeben den naiven, rekursiven oder lokalen Faltungsalgorithmus. Im Anschluss daran werden die Algorithmen auf Materialfunktionen erweitert, die außer von der Zeit auch noch von weiteren skalaren Größen abhängen. Die Konstitutivgleichungen der linearen Viskoelastizitätstheorie enthalten kontinuierliche Faltungsintegrale¹ der Form

$$\int_0^t f(u)g(t-u) du \quad \text{mit } t > 0, \quad (4.1)$$

wobei im Falle der Viskoelastizitätstheorie $f(t)$ die Materialfunktion und $g(t)$ eine Komponente oder eine skalare Funktion mehrerer Komponenten des Dehnratentensors oder des Dehnungstensors darstellen. Die Unterscheidung zwischen $g(t)$ als Dehnratengröße $g_{\dot{\epsilon}}(t)$ oder Dehnungsgröße $g_{\epsilon}(t)$ ist notwendig, da die Dehnrate innerhalb eines Zeitschritts von t_{i-1} auf t_i als konstante $g_{\dot{\epsilon}}(t_{i-1/2})$ und die Dehnung als sich linear entwickelnde Größe $g_{\epsilon}(t_{i-1}) + \frac{g_{\dot{\epsilon}}(t_i) - g_{\dot{\epsilon}}(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1})$ approximiert werden. Das Ergebnis der

¹engl. convolution integral, hereditary integral

Faltung (4.1) ist in beiden Fällen eine Spannung.

Während für eine explizite FE-Simulation die Materialfunktion a priori bekannt sein muss, stellt $g(t)$ eine gesuchte Größe dar, die nur an diskreten Zeitpunkten t_i berechnet wird und als Eingangsgröße für das Faltungsintegral dient. Um kompatibel mit der expliziten FE-Zeitdiskretisierung zu sein, muss das kontinuierliche Faltungsintegral aus Gl. (4.1) folglich ebenfalls zeitlich diskretisiert werden und in der Lage sein, eine variable Zeitschrittweite zu berücksichtigen. Im Allgemeinen führt der Faltungsalgorithmus zu einer gewichteten Summe der diskreten Dehnungs- bzw. Dehnratenwerte

$$\sum_{i=0}^{N_1^t} \omega_i g(t - t_i) \quad \text{mit } t_i = t_{i-1} + \Delta t_i, t_0 = 0 \text{ und } t_{N_1^t} = t. \quad (4.2)$$

Die Gewichte ω_i enthalten dabei den Einfluss der Funktion $f(t)$ und der zeitlichen Diskretisierung.

Ein Faltungsalgorithmus, der aus einer gewichteten Summe der Werte $g(t - t_i)$ gemäß Gl. (4.2) besteht, stellt hohe Ansprüche an die Rechenarchitektur für die Crashesimulation des Fußgängerschutzes. Wenn für jede der sechs Komponenten des Dehnungs- bzw. Dehnratenensors ein Faltungsintegral ausgewertet werden muss und die Anzahl an Zeitschritten mit N_1^t , die Anzahl an Volumenintegrationspunkten pro Element mit N^{vol} und die Anzahl an Elementen mit N^{el} bezeichnet wird, so liegt der Speicherbedarf alleine für die Modellierung des Confor-Schaums mit reduziert integrierten Volumenelementen als Bestandteil des Hüftimpaktors im Bereich von über $6N_1^t N^{\text{vol}} N^{\text{el}} \approx 13$ Milliarden Zahlenwerten. Bei Gleitkommazahlen mit doppelter Genauigkeit entspricht dies einem Speicherbedarf von über 104 Gigabyte.

Darüber hinaus müssen die Werte nicht nur gespeichert, sondern für jeden Lösungszeitpunkt von Beginn der Simulation an bis zum aktuellen Zeitpunkt neu gewichtet und aufsummiert werden. Die Anforderungen an Speicherplatz und Rechenzeit machen deutlich, warum sich eine Auseinandersetzung und Verbesserung der numerischen Faltung lohnt. Im Rahmen der Viskoelastizitätstheorie kann ausgenutzt werden, dass die Materialfunktion die Annahme des schwindenden Gedächtnisses zwar erfüllen muss, die mathematische Form jedoch nicht festgelegt ist. In Abhängigkeit von der Form der Materialfunktion werden im Folgenden drei Faltungsalgorithmen vorgestellt.

4.1. Materialfunktion als stückweise lineare Kurve – naiver Faltungsalgorithmus

Eine Materialfunktion ist als stückweise lineare Kurve durch N_K Punkte (p_k^x/p_k^y) definiert, die in aufsteigender Reihenfolge von p_k^x sortiert sind. Diese Kurve wird folgender-

maßen ausgewertet:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{p_2^y - p_1^y}{p_2^x - p_1^x} (t - p_1^x) + p_1^y & \text{falls } t < p_1^x, \\ \frac{p_{k+1}^y - p_k^y}{p_{k+1}^x - p_k^x} (t - p_k^x) + p_k^y & \text{falls } p_k^x \leq t < p_{k+1}^x, \\ \frac{p_{N_K}^y - p_{N_K-1}^y}{p_{N_K}^x - p_{N_K-1}^x} (t - p_{N_K}^x) + p_{N_K}^y & \text{falls } t > p_{N_K}^x. \end{cases} \quad (4.3)$$

Bei einer Übereinstimmung zwischen t und einem der Punkte p_k^x wird der Wert p_k^y zurückgegeben. Liegt t zwischen zwei Punkten p_k^x und p_{k+1}^x , so wird zwischen den Punkten linear interpoliert. Bei Unterschreitung von p_1^x oder Überschreitung von $p_{N_K}^x$ wird mit der Steigung der ersten bzw. letzten beiden Punkte extrapoliert.

Aus dieser Art der Beschreibung der Materialfunktion ergeben sich mehrere Vorteile. Einerseits können Kurven beliebige Funktionen approximieren (vgl. Abschnitt 3.2.4 für analytische Ansätze der Materialfunktionen). Unabhängig davon, wie diese Materialfunktion und deren Parameter bestimmt werden, können die Ergebnisse mithilfe des folgenden Faltungsalgorithmus in die FE-Simulation übernommen werden.

Andererseits kann die FE-Simulation direkt genutzt werden, um die Materialfunktion zu bestimmen. Der Kurvenverlauf wird dabei durch keinen analytischen Ansatz eingeschränkt, sondern durch jede einzelne Stützstelle bestimmt. Im Rahmen einer Optimierung kann beispielsweise jeder Kurvenpunkt als Entwurfsvariable dienen.

Da durch den freien Kurvenverlauf keine Eigenschaften der Materialfunktion bekannt sind, wird für die stückweise lineare Kurve eine Standardintegration verwendet, die für beliebige Materialfunktionen gültig ist. Die hier angewandte Integration basiert auf der Trapezregel, bei der der Integrand an den Rändern t_{i-1} und t_i ausgewertet wird. Für $g_\varepsilon(t)$ lautet diese

$$\int_0^t f(t-u) g_\varepsilon(u) du \approx \sum_{i=1}^{N_I^t} \frac{1}{2} (f(t-t_i) g_\varepsilon(t_i) + f(t-t_{i-1}) g_\varepsilon(t_{i-1})) (t_i - t_{i-1}) \quad (4.4)$$

und für $g_\varepsilon(t)$

$$\int_0^t f(t-u) g_\varepsilon(u) du \approx \sum_{i=1}^{N_I^t} \frac{1}{2} (f(t-t_i) + f(t-t_{i-1})) g_\varepsilon(t_{i+1/2}) (t_i - t_{i-1}). \quad (4.5)$$

Zur Berechnung dieser Summen müssen $\mathcal{O}(N_I^t)$ Werte von $g(t)$ gespeichert, $\mathcal{O}(N_I^t)$ arithmetische Grundoperationen sowie $\mathcal{O}(N_I^t)$ Auswertungen von $f(t)$ pro Zeitschritt und insgesamt $\mathcal{O}(N_I^{t^2})$ Operationen in einer Simulation durchgeführt werden. Aufgrund des hohen Speicherbedarfs und der Vielzahl an Operationen ist der naive Faltungsalgorithmus für die Modelle des Fußgängerschutzes nicht geeignet. Im Rahmen dieser Arbeit

scheidet die stückweise lineare Kurve als Materialfunktion somit aus und wird außerhalb dieses Kapitels nicht weiter betrachtet.

4.2. Materialfunktion als Prony-Reihe – rekursiver Faltungsalgorithmus

Eine Möglichkeit, den Rechenaufwand eines Faltungsalgorithmus zu reduzieren, besteht in einer rekursiven Implementierung. Dabei werden die Ergebnisse des letzten Zeitschritts als Geschichtsvariablen gespeichert und zur Berechnung der Ergebnisse des aktuellen Zeitschritts wiederverwendet.

Um die Faltung auf diese Art zu berechnen, muss es möglich sein, das Faltungsintegral in zwei Integrale nach

$$\int_0^{t_i} f(t_i - u)g(u) du = \int_0^{t_{i-1}} f(t_i - u)g(u) du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t_i - u)g(u) du \quad (4.6)$$

zu zerlegen und das erste Integral über die vergangene Zeit bis zum Zeitpunkt t_{i-1} in Abhängigkeit vom letzten Ergebnis $\int_0^{t_{i-1}} f(t_{i-1} - u)g(u) du$ darzustellen. Besitzt die Materialfunktion die Eigenschaft

$$f(t_1 + t_2) = f(t_1)f(t_2), \quad (4.7)$$

so kann das erste Integral aus Gl. (4.6) in

$$\int_0^{t_{i-1}} f(t_i - t_{i-1} + t_{i-1} - u)g(u) du = f(t_i - t_{i-1}) \int_0^{t_{i-1}} f(t_{i-1} - u)g(u) du \quad (4.8)$$

umgeformt werden und schafft damit die Voraussetzung für den rekursiven Algorithmus. Das generalisierte Maxwell-Element aus Abschnitt 3.2.2 führt zu einer Prony-Reihe

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N_j} f_j e^{-\beta_j t} \quad (4.9)$$

als Materialfunktion. Die Exponentialfunktion erfüllt die Eigenschaft nach Gl. (4.7), die Auswertung an der Stelle $t_i - u$ in ein Produkt aus der Auswertung bei $t_i - t_{i-1}$ und der Auswertung bei $t_{i-1} - u$ überführen zu können

$$e^{-\beta_j(t_i - u)} = e^{-\beta_j(t_i - t_{i-1})} e^{-\beta_j(t_{i-1} - u)}, \quad (4.10)$$

und erlaubt folglich eine rekursive Formulierung für jeden einzelnen Term der Prony-Reihe. Die Berechnung der aktuellen Spannung $\sigma_j(t_i)$, die zum j -ten Prony-Term und damit zum j -ten Maxwell-Element gehört, kann gemäß Gl. (4.8) umgeformt werden

$$\begin{aligned}
 \sigma_j(t_i) &= \int_0^{t_i} f_j e^{-\beta_j(t_i-u)} g(u) \, du \\
 &= \int_0^{t_{i-1}} f_j e^{-\beta_j(t_i-u)} g(u) \, du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j e^{-\beta_j(t_i-u)} g(u) \, du \\
 &= e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \int_0^{t_{i-1}} f_j e^{-\beta_j(t_{i-1}-u)} g(u) \, du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j e^{-\beta_j(t_i-u)} g(u) \, du \\
 &= e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \sigma_j(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j e^{-\beta_j(t_i-u)} g(u) \, du.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Die aktuelle Spannung $\sigma_j(t_i)$ besteht somit aus der vorherigen Spannung $\sigma_j(t_{i-1})$, die um den Faktor $e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}$ relaxiert wird, und aus einem neuen Spannungsbeitrag, der aus der Dehnungsgeschichte des letzten Zeitschritts stammt. Für jeden Term der Prony-Reihe muss folglich die aktuelle Spannung zur Berechnung der Spannung im nächsten Zeitschritt gespeichert werden. In dieser Form sind die Geschichtsvariablen $\sigma_j(t_{i-1})$ von der Dimension einer Spannung. Die Anzahl an Geschichtsvariablen pro Integrationspunkt N^{his} bestimmt dabei den Speicherbedarf und setzt sich für die generalisierten Maxwell-Elemente aus Abschnitt 3.3.1 aus der Anzahl der Prony-Terme N_j multipliziert mit den sechs Komponenten von \mathbf{S}^{D} bzw. \mathbf{T}^{D} und aus den N_{K} Maxwell-Elementen für die Komponente $\text{tr } \mathbf{T}$ zusammen.

Für $g_{\dot{\varepsilon}}(t)$ kann Gl. (4.11) auch mit Geschichtsvariablen von der Dimension einer Dehnung formuliert werden

$$\begin{aligned}
 \sigma_j(t_i) &= e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \int_0^{t_{i-1}} f_j e^{-\beta_j(t_{i-1}-u)} g_{\dot{\varepsilon}}(u) \, du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j e^{-\beta_j(t_i-u)} g_{\dot{\varepsilon}}(u) \, du \\
 &= f_j \left(e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \int_0^{t_{i-1}} e^{-\beta_j(t_{i-1}-u)} g_{\dot{\varepsilon}}(u) \, du + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\beta_j(t_i-u)} g_{\dot{\varepsilon}}(u) \, du \right) \\
 &= f_j \underbrace{\left(e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \varepsilon_j(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\beta_j(t_i-u)} g_{\dot{\varepsilon}}(u) \, du \right)}_{=\varepsilon_j(t_i)}.
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

N^{his} bleibt dabei unverändert bei $6N_J$ bzw. $6N_J + N_K$.

Das Integral über den aktuellen Zeitschritt in den Rekursionsformeln (4.11) und (4.12) kann auf verschiedene Arten berechnet werden. Im Rahmen dieser Arbeit wird das Integral in Abhängigkeit der Eingabefunktion analytisch berechnet und dann ausgewertet. Für $g_\varepsilon(t)$ mit linearem Verlauf innerhalb eines Zeitschritts lautet dieses

$$\begin{aligned} & \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j e^{-\beta_j(t_i-u)} g_\varepsilon(u) \, du \\ & \approx f_j \frac{g_\varepsilon(t_i) - g_\varepsilon(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \left(\frac{t_i - t_{i-1} e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}}{\beta_j} - \frac{1 - e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}}{\beta_j^2} \right) \\ & + f_j \left(g_\varepsilon(t_{i-1}) - \frac{g_\varepsilon(t_i) - g_\varepsilon(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} t_{i-1} \right) \frac{1 - e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}}{\beta_j} \end{aligned} \quad (4.13)$$

und für $g_{\hat{\varepsilon}}(t)$

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j e^{-\beta_j(t_i-u)} g_{\hat{\varepsilon}}(u) \, du \approx f_j g_{\hat{\varepsilon}}(t_{i-1/2}) \frac{1 - e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}}{\beta_j}. \quad (4.14)$$

Gleichung (4.14) geht auf TAYLOR U. A. (1970) zurück und hat eine Genauigkeit zweiter Ordnung. Die Gesamtspannung setzt sich schließlich aus den Beiträgen aller Prony-Terme zusammen

$$\sigma(t_i) = \sum_{j=1}^{N_J} \sigma_j(t_i). \quad (4.15)$$

4.3. Materialfunktion als Überlappung lokaler Prony-Reihen – lokaler Faltungsalgorithmus

Aus numerischer Sicht eignen sich Prony-Reihen aufgrund der rekursiven Faltungsbe-
rechnung und des geringen Speichbedarfs sehr gut als Materialfunktionen. Jedoch las-
sen sich nicht alle Materialfunktionen unmittelbar durch eine Summe aus gewichteten
Exponentialfunktionen annähern. Dazu zählen beispielsweise Materialfunktionen mit
Singularitäten wie bei fraktionalen Dämpferelementen. Eine Möglichkeit, beliebige Ma-
terialfunktionen mit schwindendem Gedächtnis zu verwenden und dabei Speicherplatz
und Rechenzeit effizient einzusetzen, wird im Folgenden vorgestellt.

Dabei wird das Faltungsintegral aus Gl. (4.1) zum Zeitpunkt t_i in eine Summe aus

Integralen über einzelne Teilbereiche zerlegt

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_i} f(t_i - u)g(u) \, du \\
 = & \int_0^{t_1} f(t_i - u)g(u) \, du + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} f(t_i - u)g(u) \, du + \cdots + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t_i - u)g(u) \, du}_{\int_{t^-}^{t^+} f(t_i - u)g(u) \, du}. \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

Ohne die Integrationsbereiche näher zu spezifizieren, dient $\int_{t^-}^{t^+} f(t_i - u)g(u) \, du$ mit den Integrationsgrenzen $0 \leq t^-$, $t^- < t^+$ und $t^+ \leq t_i$ als Platzhalter für einen Summanden des Faltungsintegrals.

Statt die Materialfunktion f selbst zu nutzen, bildet deren Laplace-Transformierte \mathcal{F} den Ausgangspunkt für die Faltungsalgorithmen von LUBICH (2004), SCHÄDLE U. A. (2006) und LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008). Setzt man die Rücktransformation von \mathcal{F} in das Faltungsintegral ein und nutzt die numerische Diskretisierung der Inversionsformel

$$f(t) = \frac{1}{2\Pi i} \int_{\Gamma} e^{t\lambda} \mathcal{F}(\lambda) \, d\lambda \approx \sum_{m=-N_M}^{N_M} \omega_m e^{t\lambda_m} \mathcal{F}(\lambda_m), \quad (4.17)$$

so führt dies unabhängig von der tatsächlichen Form der Materialfunktion auf eine Summe von gewichteten Exponentialfunktionen

$$\begin{aligned}
 \int_{t^-}^{t^+} f(t_i - u)g(u) \, du & \approx \int_{t^-}^{t^+} \sum_{m=-N_M}^{N_M} \omega_m e^{(t_i-u)\lambda_m} \mathcal{F}(\lambda_m) g(u) \, du \\
 & = \sum_{m=-N_M}^{N_M} \omega_m \mathcal{F}(\lambda_m) e^{(t_i-t^+)\lambda_m} \underbrace{\int_{t^-}^{t^+} e^{(t^+-u)\lambda_m} g(u) \, du}_{y(t^+, t^-, \lambda_m)} \\
 & = \sum_{m=-N_M}^{N_M} e^{\lambda_m(t_i-t^+)} \omega_m \mathcal{F}(\lambda_m) \quad y(t^+, t^-, \lambda_m). \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Gleichung (4.18) schafft die Grundlage zur Reduktion des Speicherbedarfs und zur Schnelligkeit des Faltungsalgorithmus. Zum einen fasst $y(t^+, t^-, \lambda_m)$ die Geschichte $g(t)$, die sich zwischen t^- und t^+ ereignet hat, zusammen. Zum anderen kann die Spannung $\omega_m \mathcal{F}(\lambda_m) y(t^+, t^-, \lambda_m)$ bei fortschreitender Zeit t_i immer wieder verwendet werden, indem sie durch einen exponentiellen Vorfaktor relaxiert wird. $y(t^+, t^-, \lambda_m)$ wird im Folgenden als Ersatzgröße für die Dehnraten- bzw. Dehnungsgeschichte bezeichnet und durch

$y_\varepsilon(t^+, t^-, \lambda_m)$ und $y_\varepsilon(t^+, t^-, \lambda_m)$ unterschieden. Aufgrund der kompakteren Ausdrücke beschränkt sich die Darstellung der Gleichungen für die numerischen Integrationen in diesem Abschnitt auf die Dehnratengeschichte als Eingangsfunktion.

Im Rahmen dieser Arbeit wird der adaptive, schnelle und vergessliche Faltungsalgorithmus nach LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008) für die Materialroutinen viskoelastischer Materialien in der Crashsimulation angepasst. Die Idee dieses Faltungsalgorithmus besteht darin, die Materialfunktion $f(t)$ lokal auf einzelnen Intervallen durch eine Summe aus gewichteten Exponentialfunktionen zu approximieren und die fortschreitende Geschichte mithilfe aller lokalen Prony-Reihen direkt in Ersatzgrößen umzurechnen. Die Ersatzgrößen werden z. T. erst zu einem späteren Zeitpunkt zur Auswertung des gesamten Faltungsintegrals benötigt. Durch die unmittelbare Berechnung der Ersatzgrößen muss die Geschichte $g(t)$ jedoch nur zu wenigen Zeitpunkten gespeichert werden.

Die Modifikationen des Faltungsalgorithmus für die Crashsimulation beschränken sich auf drei Punkte. Als erstes wird die Berechnung von ω_m , $\mathcal{F}(\lambda_m)$ und λ_m mithilfe eines geeigneten Integrationspfades Γ an dieser Stelle nicht betrachtet. Stattdessen wird vorausgesetzt, dass diese als Konstanten f_j und β_j bereits vorliegen

$$\int_{t^-}^{t^+} f(t_i - u)g(u) du \approx \sum_{j=1}^{N_J} f_j e^{-\beta_j(t_i - t^+)} y(t^+, t^-, -\beta_j) \quad (4.19)$$

und eine Prony-Reihe $f(t) = \sum_{j=1}^{N_J} f_j e^{-\beta_j t}$ mit N_J Termen bilden, die die Annahme des schwindenden Gedächtnisses erfüllt. Dies ersetzt die Einschränkungen, die der Faltungsalgorithmus nach LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008) für \mathcal{F} aufstellt. Die Integrationsgrenzen t^- und t^+ einer Ersatzgröße hängen von der Intervalleinteilung und der Abfolge an Lösungszeitpunkten der FE-Simulation ab. Dieser Zusammenhang wird nach der Aufzählung der Unterschiede zum ursprünglichen Faltungsalgorithmus genauer erläutert.

Als zweites werden alle Intervalle mit einer Prony-Reihe approximiert. Besondere Integrationsregeln wie für eine Singularität der Materialfunktion bei $t_0 = 0$ werden nicht verwendet, können aber ohne Weiteres hinzugefügt werden.

Als drittes bleibt die Adaptivität der Zeitschrittweite wie im Faltungsalgorithmus nach LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008) erhalten. Im Gegensatz zum ursprünglichen Faltungsalgorithmus müssen die Gültigkeitsbereiche der lokalen Prony-Reihen jedoch kein Vielfaches der minimalen Zeitschrittweite $\min(\Delta t_i)$ der FE-Simulation sein, sondern können ein Vielfaches der beliebigen Zeiteinheit $h^* \geq \min(\Delta t_i)$ sein.

Die Intervalleinteilung ist der Schlüssel zur Reduktion des Speicherbedarfs. Sie bestimmt, in welche Intervalle die Materialfunktion zerlegt wird und ob und wie lange die Ersatzgrößen wiederverwendet werden können. Die Anzahl an Intervallen N_L hat maßgeblichen Einfluss auf den Speicherbedarf.

Zur Speicherreduktion trägt außerdem die Annahme des schwindenden Gedächtnisses

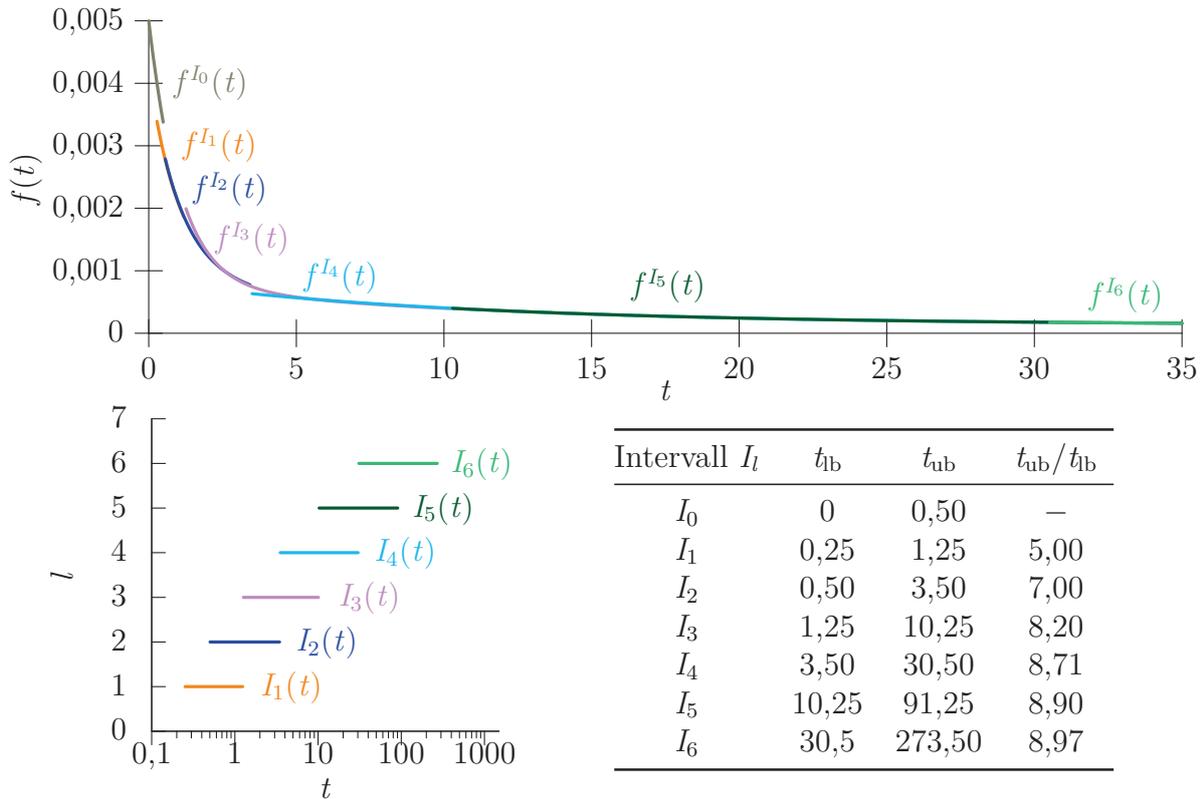


Abbildung 4.1.: Intervalleinteilung I_l mit $B = 3$ und $h^* = 0,25$ und zugehörige Prony-Reihen $f^{I_l}(t)$. Die Materialfunktion $f(t)$ resultiert aus den überlappenden Prony-Reihen $f^{I_l}(t)$.

bei. Sie ermöglicht es, bei der Intervalleinteilung ein ähnliches Verhältnis von Anfangs- und Endzeitpunkt beizubehalten und folglich mit immer größer werdenden Intervallen zu arbeiten. Wie im Pseudocode von LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008) werden die Intervallgrenzen $I_l = [t_{lb_l}, t_{ub_l}]$ durch die Zeiteinheit h^* und die Basis $B \in \mathbb{N}$ bestimmt

$$\begin{aligned}
 I_0 &= [0, 2h^*], \\
 I_l &= \left[h^* \left(1 + \sum_{k=0}^{l-2} B^k \right), h^* \left(1 + \sum_{k=0}^l B^k \right) \right] \quad \text{mit } 1 \leq l \leq N_L.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Diese Intervalleinteilung führt auf überlappende Intervalle und das Verhältnis zwischen End- und Anfangszeitpunkt eines Intervalls nähert sich dem Grenzwert $\lim_{l \rightarrow \infty} t_{ub_l}/t_{lb_l} = B^2$ an. Für $B = 3$ und $h^* = 0,25$ sind die Intervallgrenzen in Abbildung 4.1 aufgeführt und die Materialfunktion ist als Gesamtheit der überlappenden Prony-Reihen abgebildet.

So wie sich die Materialfunktion aus mehreren Intervallen zusammensetzt, spaltet sich das Faltungsintegral in verschiedene Integrationsbereiche auf. Zu jedem Integrationsbereich $[t_{min_l}, t_{max_l}]$ gehören eine Prony-Reihe $f^{I_l}(t)$ und eine Ersatzgröße y_l . Die Zerle-

4. Materialfunktion und numerische Faltung

gung des Faltungsintegrals in Integrationsbereiche der Ersatzgrößen folgt hier ebenfalls LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008):

$$t_{\min l} = \sum_{k=l+1}^{\hat{N}_L} b_k B^{k-1} \quad \text{und} \quad t_{\max l} = \sum_{k=l}^{\hat{N}_L} b_k B^{k-1}. \quad (4.21)$$

Die Anzahl \hat{N}_L an Integrationsbereichen, die zum Zeitpunkt t_i zur Faltung beitragen, soll dabei so klein wie möglich sein. Zur Minimierung von \hat{N}_L können die Stufen $b_l \in 1, 2, \dots, B$ der Integrationsbereiche erhöht werden, bis sie die Basis B erreichen.

Zur graphischen Darstellung der Integration nutzt man Diagramme, auf deren Abszisse die Zeit t und auf deren Ordinate die Integrationsvariable u des Faltungsintegrals aufgetragen sind. Die Zerlegung nach Gl. (4.21) führt wie in Abbildung 4.2 dargestellt zu treppenförmigen Integrationsbereichen, deren Farben die Gültigkeitsbereiche der einzelnen Prony-Reihen (vgl. Farbschema in Abbildung 4.1) und damit auch die Integrationsbereiche der Ersatzgrößen markieren. In dieser Darstellung wird klar, warum sich die Intervalle überlappen müssen. Während die Länge der horizontalen Grenzlinien zweier Farbbereiche parallel zur t -Achse aufzeigt, wie lange eine Ersatzgröße wiederverwendet werden kann, markieren die vertikalen Grenzlinien parallel zur u -Achse den Übergang zwischen zwei Ersatzgrößen y_l und y_{l+1} und damit den Wechsel zwischen den Intervallen I_l und I_{l+1} der Materialfunktion. Dieser Übergang ist nur möglich, wenn sich die beiden Intervalle die Grenzlinie teilen. Folglich müssen sie z. T. denselben Zeitbereich abdecken und überlappen. Trotzdem trägt wie in Gl. (4.16) dargestellt immer nur eine der beiden Ersatzgrößen zur Spannungsberechnung bei.

Bei den Integrationsgrenzen ist zu beachten, dass die zeitliche Abfolge umgekehrt zur Zerlegung der Materialfunktion erfolgt. Die Integration der Prony-Reihe des \hat{N}_L -ten Bereiches beginnt bei $t = 0$, die Integration des nullten Bereiches endet beim aktuellen Lösungszeitpunkt t_i . Für die Faltung im Bereich des aktuellen Lösungszeitpunktes $[t_i - 2h^*, t_i]$ wurde im ursprünglichen Faltungsalgorithmus ein direkter Berechnungsschritt eingesetzt. Für die Faltung mit $\Delta t \leq h^*$ wird dieser Integrationsbereich nicht gesondert behandelt, sondern stellt einen regulären Integrationsbereich dar.

In Abbildung 4.2 sind die maximalen Integrationsbereiche der Ersatzgrößen für $B = 3$ und $h^* = 0,25$ zum Zeitpunkt $t = 11,2$ aufgeführt und für alle anderen Zeiten graphisch dargestellt. Die Anordnung der Materialfunktion mit dem Ursprung in $(11,2/11,2)$ veranschaulicht die Umkehrung der zeitlichen Abfolge zwischen der Intervalleinteilung und den Integrationsbereichen.

Die tatsächlichen Integrationsgrenzen, die die symbolischen Integrationsgrenzen t^- und t^+ in den vorherigen Gleichungen ersetzen, hängen von der Folge der Lösungszeitpunkte der FE-Simulation ab und können im u - t -Diagrammen ebenfalls abgelesen werden. Der aktuelle Lösungszeitpunkt t_i der FE-Simulation wird als Punkt (t_i/t_i) eingetragen, alle vorherigen Lösungszeitpunkte als $(t_i/t_{i-k}), 1 \leq k \leq i$. Die Verbindungslinie zwischen

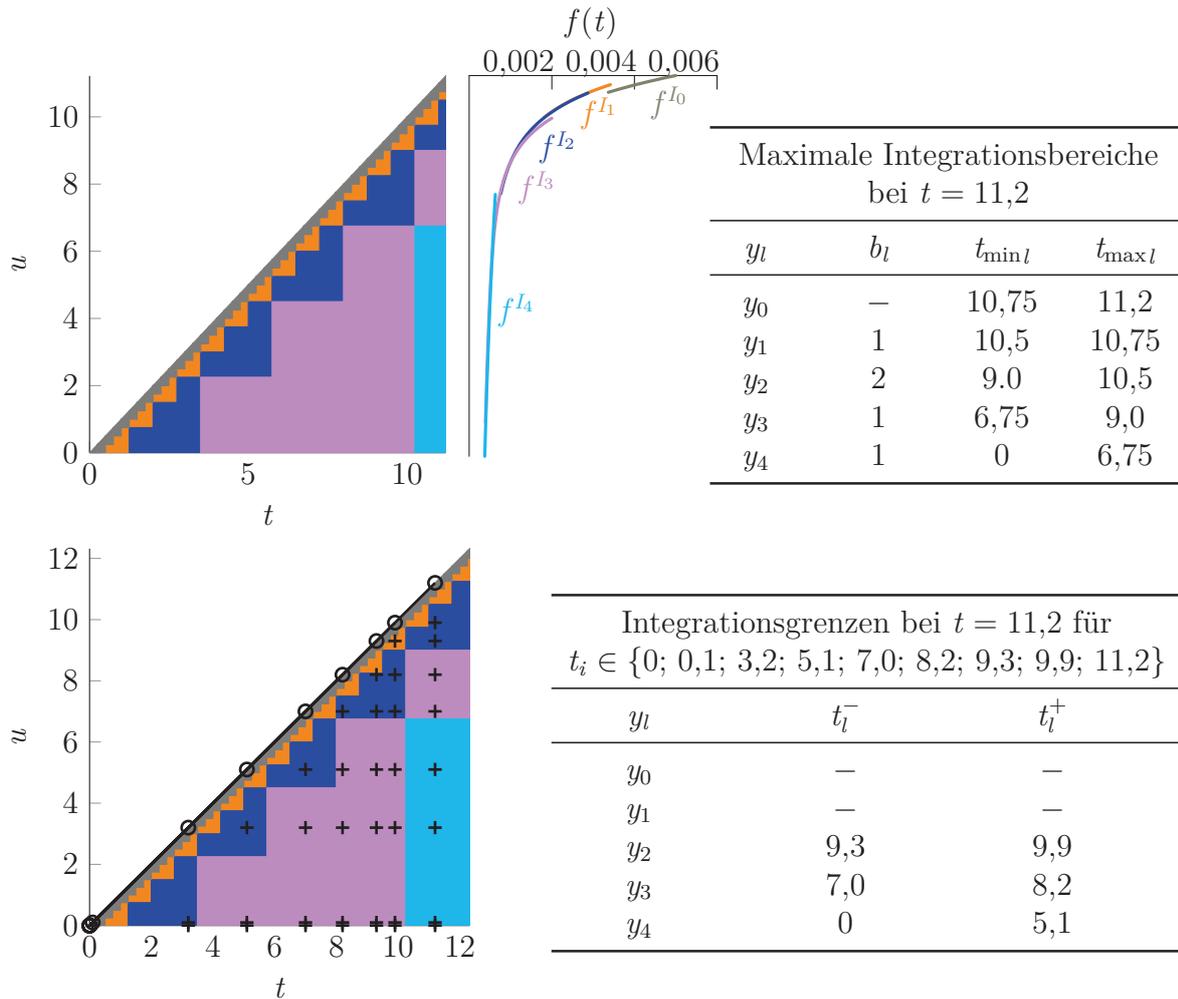


Abbildung 4.2.: Zerlegung des Faltungsintegrals in Integrationsbereiche y_l bei einer Intervalleinteilung mit $B = 3$ und $h^* = 0,25$: Zusammensetzung des Faltungsintegrals bei $t = 11,2$ mit maximalen Integrationsbereichen (oben) und für eine Abfolge an Lösungszeitpunkten (unten)

den Punkten $(t_i/0)$ und (t_i/t_i) zeigt auf, welche Prony-Reihen zur Spannungsberechnung beitragen können. Sobald zwei Lösungszeitpunkte der FE-Simulation innerhalb eines farbigen Bereiches auf der Verbindungslinie liegen, liefert die zugehörige Prony-Reihe durch ihre Ersatzgröße einen Beitrag. Falls nicht, wird das Gebiet mit direkten Schritten überbrückt. Direkte Schritte verbinden unterschiedliche Integrationsbereiche und können deshalb nicht einer Prony-Reihe allein zugeordnet werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden diese durch

$$\int_{t^-}^{t^+} f(t_i - u)g_\varepsilon(u) du \approx \frac{f^+(t_i - t^+) + f^-(t_i - t^-)}{2} g_\varepsilon\left(\frac{t^+ + t^-}{2}\right) (t^+ - t^-) \quad (4.22)$$

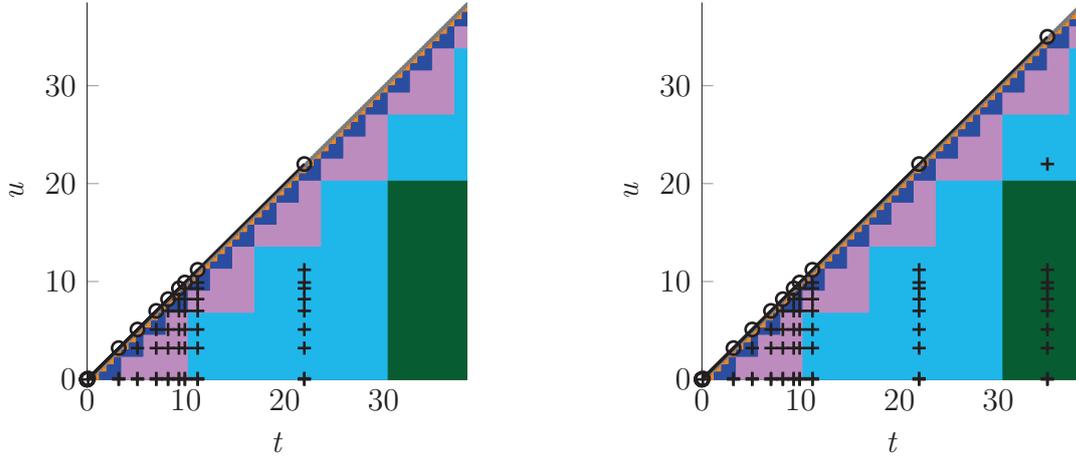


Abbildung 4.3.: Zusammensetzung des Faltungsintegrals bei $t = 22$ (links) und $t = 35$ (rechts) für $t_i = \{0; 0,1; 3,2; 5,1; 7,0; 8,2; 9,3; 9,9; 11,2; 22; 35\}$

angenähert. Dabei sind $f^-(t)$ und $f^+(t)$ die Prony-Reihen der Integrationsbereiche, in denen t^- und t^+ liegen. Diese Bereiche müssen nicht benachbart sein.

In der Crashsimulation wird die Zeitschrittweite Δt_i üblicherweise sehr viel kleiner als h^* sein, sodass alle Bereiche einen Beitrag zur Spannung liefern und die direkten Schritte eine untergeordnete Rolle spielen. In diesem Fall setzt sich die Spannung zum Zeitpunkt t_i aus den Ersatzgrößen aller \hat{N}_L Intervalle und aus den direkten Schritten zwischen den Integrationsbereichen zusammen

$$\begin{aligned} \sigma(t_i) = & \sum_{l=0}^{\hat{N}_L} \sum_{j=1}^{N_j} f_j^{I_l} e^{-\beta_j^{I_l}(t_i - t_l^+)} y_{\dot{\varepsilon}l}(t_l^+, t_l^-, -\beta_j^{I_l}) \\ & + \sum_{l=1}^{\hat{N}_L} \frac{f^{I_{l-1}}(t_i - t_{l-1}^-) + f^{I_l}(t_i - t_l^+)}{2} g_{\dot{\varepsilon}} \left(\frac{t_{l-1}^- + t_l^+}{2} \right) (t_{l-1}^- - t_l^+). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Dabei ist $f^{I_l}(t)$ die Prony-Reihe, t_l^- die Integrationsuntergrenze und t_l^+ die Integrationsobergrenze des l -ten Integrationsbereiches. Die numerische Integration der Ersatzgrößen y_l aus Gl. (4.18) erfolgt in Analogie zu den Spannungen und Dehnungen der einzelnen Maxwell-Elemente des rekursiven Faltungsalgorithmus (vgl. Gl. (4.12), (4.13) und (4.14)). Für den Fortschritt der oberen Integrationsgrenze von t_{i-1} auf t_i mit der Dehnratengeschichte als Eingangsgröße lautet diese

$$\begin{aligned} y_{\dot{\varepsilon}}(t_i, t^-, -\beta_j) = & e^{-\beta_j(t_i - t_{i-1})} y_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1}, t^-, -\beta_j) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\beta_j(t_i - u)} g_{\dot{\varepsilon}}(u) du \\ = & e^{-\beta_j(t_i - t_{i-1})} y_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1}, t^-, -\beta_j) + g_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1/2}) \frac{1 - e^{-\beta_j(t_i - t_{i-1})}}{\beta_j}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Zur graphischen Darstellung sind die Lösungszeitpunkte einer Crashsimulation mit $\Delta t \ll h^*$ nicht geeignet. Für eine Simulation mit den exemplarischen Lösungszeitpunkten $t_i = \{0; 0,1; 3,2; 5,1; 7,0; 8,2; 9,3; 9,9; 11,2\}$ sind die tatsächlichen Integrationsgrenzen in Abbildung 4.2 aufgeführt. Die Spannung zum Zeitpunkt $t = 11,2$ setzt sich aus den Ersatzgrößen y_2, y_3 und y_4 und direkten Schritten zusammen

$$\begin{aligned}
 \sigma(11,2) &= \sum_{j=1}^{N_J} f_j^{I_2} e^{-\beta_j^{I_2}(11,2-9,9)} y_{\dot{\varepsilon}_2}(9,9; 9,3; -\beta_j^{I_2}) + \sum_{j=1}^{N_J} f_j^{I_3} e^{-\beta_j^{I_3}(11,2-8,2)} y_{\dot{\varepsilon}_3}(8,2; 7; -\beta_j^{I_3}) \\
 &+ \sum_{j=1}^{N_J} f_j^{I_4} e^{-\beta_j^{I_4}(11,2-5,1)} y_{\dot{\varepsilon}_4}(5,1; 0; -\beta_j^{I_4}) \\
 &+ \frac{f^{I_0}(11,2-11,2) + f^{I_2}(11,2-9,9)}{2} g_{\dot{\varepsilon}} \left(\frac{11,2+9,9}{2} \right) (11,2-9,9) \\
 &+ \frac{f^{I_2}(11,2-9,3) + f^{I_3}(11,2-8,2)}{2} g_{\dot{\varepsilon}} \left(\frac{9,3+8,2}{2} \right) (9,3-8,2) \\
 &+ \frac{f^{I_3}(11,2-7) + f^{I_4}(11,2-5,1)}{2} g_{\dot{\varepsilon}} \left(\frac{7+5,1}{2} \right) (7-5,1) .
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Damit die Prony-Reihe des Intervalls I_4 zu diesem Zeitpunkt jedoch erstmalig zur Spannung beitragen kann, müssen die Ersatzgrößen y_4 bereits von Berechnungsbeginn bei $t = 0$ bis zum Zeitpunkt $t = 5,1$, dem letzten Zeitpunkt innerhalb von y_4 mit $b_4 = 1$, integriert worden sein. Die darauffolgenden Abschnitte von y_4 mit $b_4 = 2$ oder für y_5 mit $b_5 = 1$ müssen ebenso fortlaufend berechnet werden und haben zum Zeitpunkt $t = 11,2$ die gesamte Geschichte integriert. Nur dann können sie bei den weiteren Lösungszeitpunkten $t = 22$ und $t = 35$ zur Spannung beitragen (vgl. Abbildung 4.3), die sich gemäß

$$\begin{aligned}
 \sigma(22) &= \sum_{j=1}^{N_J} f_j^{I_4} e^{-\beta_j^{I_4}(22-11,2)} y_{\dot{\varepsilon}_4}(11,2; 0; -\beta_j^{I_4}) \\
 &+ \frac{f^{I_0}(22-22) + f^{I_4}(22-11,2)}{2} g_{\dot{\varepsilon}} \left(\frac{22+11,2}{2} \right) (22-11,2)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

und

$$\begin{aligned}
 \sigma(35) &= \sum_{j=1}^{N_J} f_j^{I_5} e^{-\beta_j^{I_5}(35-11,2)} y_{\dot{\varepsilon}_5}(11,2; 0; -\beta_j^{I_5}) \\
 &+ \frac{f^{I_0}(35-35) + f^{I_4}(35-22)}{2} g_{\dot{\varepsilon}} \left(\frac{35+22}{2} \right) (35-22) \\
 &+ \frac{f^{I_5}(35-22) + f^{I_4}(35-11,2)}{2} g_{\dot{\varepsilon}} \left(\frac{22+11,2}{2} \right) (22-11,2)
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

4. Materialfunktion und numerische Faltung

berechnet. Dieses Beispiel zeigt zum einen, dass mehrere Kopien der Ersatzgrößen y_l berechnet, gespeichert und ggf. fortlaufend relaxiert sowie in der Zeit vorangebracht werden müssen. Zum anderen muss die Simulationsdauer t_{end} zu Beginn der Simulation bekannt sein. Nur dann stehen alle Ersatzgrößen bei einer unbekanntem Zeitschrittfolge zur Verfügung.

Die Simulationsdauer t_{end} beeinflusst nach

$$\begin{aligned} t_{\text{end}} &\leq t_{\text{ub}N_L} = h^* \left(1 + \sum_{k=0}^l B^k \right) \\ t_{\text{end}} &\leq h^* \left(1 + \frac{1 - B^{N_L+1}}{1 - B} \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\log_B \left(\left(\frac{t_{\text{end}}}{h^*} - 1 \right) (B - 1) + 1 \right) - 1 \leq N_L$$

die Anzahl N_L an erforderlichen Intervallen und damit den Speicherbedarf des Faltungsalgorithmus. Gemäß Gl. (4.28) steigt N_L logarithmisch mit der Simulationsdauer an, $N_L = \mathcal{O}(\log \frac{t_{\text{end}}}{h^*})$. In wie viele Zeitschritte die Simulationsdauer jedoch unterteilt wird, spielt für den Speicherbedarf keine Rolle.

Außerdem werden insgesamt vier Kopien der Ersatzgrößen y_l benötigt: eine Kopie Y_l , auf der die aktuelle Geschichte verarbeitet wird, eine Kopie YT_l , die zur Faltung beiträgt, eine Kopie YM_l , die als Zwischenspeicher dient, und eine Kopie YA_l für den Fall, dass ein Lösungszeitpunkt mit einer Intervallgrenze zusammenfällt.

Der Speicherbedarf für die Ersatzgrößen des Faltungsalgorithmus mit k_1 -fachen Eingangsgrößen $g(t)$ und einer skalaren Materialfunktion berechnet sich gemäß des Pseudocodes in LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. (2008) mithilfe der Formel

$$N^{\text{his}} = N_L \left(\underbrace{4(k_1 N_J + 2(k_2 + 1 + 1) + 1)}_{\text{Speicherbedarf einer Kopie}} + 5 \right). \quad (4.29)$$

Für die einzelnen Kopien werden neben den $k_1 N_J$ Geschichtsvariablen, die auch für eine Prony-Reihe alleine benötigt werden (vgl. Abschnitt 4.2), zusätzlich die $2k_2$ Anfangs- und Endwerte der Eingangsgröße sowie die minimal und maximal möglichen und tatsächlichen Integrationsgrenzen und die Stufe b_l abgelegt. Bei der Faltung eines symmetrischen Tensors zweiter Stufe gilt $k_1 = k_2 = 6$.

Nach Gl. (4.29) wird der Speicherbedarf im Wesentlichen durch die Anzahl an Intervallen N_L und an Prony-Termen N_J je Intervall bestimmt. Abgesehen von der Simulationsdauer wird N_L durch die Wahl von B und h^* vorgegeben. Je größer B und h^* sind, desto länger sind die Intervalle und desto weniger Speicherplatz und Rechenzeit werden benötigt. Bei kürzeren Intervallen kann der Kurvenverlauf einer Materialfunktion jedoch genauer beschrieben werden. Demzufolge gilt es, einen Mittelweg zwischen Berechnungsaufwand

und Genauigkeit zu finden. Für analytische Materialfunktionen kann der Fehler in Abhängigkeit der Intervalllänge und der Eigenschaften der Materialfunktion berechnet und die Intervalleinteilung optimiert werden (LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. 2006).

Die Genauigkeit kann auch mit der Anzahl an Prony-Termen N_j je Intervall verbessert werden. Im Vergleich zum Faltungsalgorithmus mit einer Prony-Reihe für den gesamten Zeitbereich (vgl. Abschnitt 4.2) werden im Allgemeinen jedoch deutlich weniger Prony-Terme benötigt, da die lokale Prony-Reihe nur einen Ausschnitt des Materialverhaltens abdecken muss.

Darüber hinaus gilt, dass lange Intervalle für gewöhnlich mehr Prony-Terme erfordern als kurze Intervalle. Wie in Abbildung 3.7 dargestellt gibt es für jeden Prony-Term einen Bereich, in dem dessen Wert stark abnimmt. Außerhalb dieses Bereiches ist der Funktionswert näherungsweise konstant oder vernachlässigbar. Üblicherweise zeigen die Relaxationsraten einer Prony-Reihe $f_i(t)$ innerhalb des zugehörigen Intervalls I_l diesen Spannungsabfall. Daraus folgt, dass die Relaxationsraten für kleine Zeiten große und für lange Zeiten kleine Werte annehmen. Gegebenenfalls ist noch ein Prony-Term vorhanden, der einen nahezu konstanten Beitrag liefert. Im Grenzfall, dass für alle Intervalle dieselbe Prony-Reihe verwendet wird, unterscheidet sich der lokale Faltungsalgorithmus nur durch die direkten Schritte vom rekursiven Faltungsalgorithmus. Da bei der Crashsimulation die direkten Schritte durch die kurze Zeitschrittweite jedoch eine untergeordnete Rolle spielen, ist die Abweichung vernachlässigbar.

4.4. Dehnratenabhängige Prony-Reihen

In den vorherigen Abschnitten wurden Materialfunktionen $f(t)$ betrachtet, die ausschließlich von der Zeit t abhängen. In diesem Abschnitt wird die Faltung einer Materialfunktion $f(t, \xi_1, \xi_2, \dots)$ vorgestellt, die neben der Zeit t auch von weiteren skalaren Größen ξ_k abhängt. Diese Form der Materialfunktion wird beispielsweise im Pipkin-Rogers-Modell mit $\xi_1 = g_\varepsilon(t)$ (vgl. Gl. (3.64)) eingesetzt und wird im Abschnitt 5.6 für eine skalare Größe $\xi_1 = g_\varepsilon(t)$ und zwei skalare Größen $\xi_1 = g_\varepsilon(t)$ und $\xi_2 = \bar{s}(t)$ eingeführt.

An dieser Stelle wird der Spezialfall

$$\int_0^t f(t-u, \xi_1(u), \xi_2(u)) g_\varepsilon(u) du = \int_0^t \sum_{j=1}^{N_j} f_j(\xi_1(u), \xi_2(u)) e^{-\beta_j(t-u)} g_\varepsilon(u) du \quad (4.30)$$

behandelt, bei dem ausschließlich die Gewichtungskoeffizienten f_j der Prony-Reihe die zusätzlichen Abhängigkeiten von ξ_1 und ξ_2 berücksichtigen. Mit dieser Erweiterung können die Faltungsalgorithmen aus Abschnitt 4.2 und 4.3 mit geringen Modifikationen

4. Materialfunktion und numerische Faltung

weiterhin eingesetzt werden. Wichtig dabei ist, dass spannungswertige Geschichtsvariablen verwendet werden, die die Abhängigkeiten der einzelnen Koeffizienten f_j direkt einbeziehen.

Die Darstellung der modifizierten Gleichungen aus Abschnitt 4.2 und 4.3 beschränkt sich hier auf die Abhängigkeit von der Dehnrate $\xi_1 = g_{\dot{\varepsilon}}(t)$. Für

$$f(t, g_{\dot{\varepsilon}}(t)) = \sum_{j=1}^{N_J} f_j(g_{\dot{\varepsilon}}(t)) e^{-\beta_j t} \quad (4.31)$$

wird beim rekursiven Faltungsalgorithmus mit einer Prony-Reihe für den gesamten Zeitbereich nur das Intervall über den letzten Zeitschritt (vgl. Gl. (4.14)) um eine Auswertung des Koeffizienten f_j in Abhängigkeit der Dehnrate ergänzt. Es wird angenommen, dass f_j wie die Dehnrate innerhalb eines Zeitschritts konstant ist

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j(g_{\dot{\varepsilon}}(u)) e^{-\beta_j(t_i-u)} g_{\dot{\varepsilon}}(u) du = f_j(g_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1/2})) g_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1/2}) \frac{1 - e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}}{\beta_j}. \quad (4.32)$$

Das rekursive Integrationsschema (vgl. Gl. (4.11)) bleibt erhalten

$$\sigma_j(t_i) = e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \sigma_j(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} f_j(g_{\dot{\varepsilon}}(u)) e^{-\beta_j(t_i-u)} g_{\dot{\varepsilon}}(u) du. \quad (4.33)$$

Beim lokalen Faltungsalgorithmus mit einer Materialfunktion, die als Überlappung von Prony-Reihen aufgebaut ist, werden ausgehend von Gl. (4.19) spannungswertige Ersatzgrößen \bar{y} eingeführt

$$\int_{t^-}^{t^+} f(t_i - u, g_{\dot{\varepsilon}}(u)) g_{\dot{\varepsilon}}(u) du \approx \sum_{j=1}^{N_J} e^{-\beta_j(t_i-t^+)} \bar{y}_{\dot{\varepsilon}}(t^+, t^-, -\beta_j). \quad (4.34)$$

Der Gewichtungskoeffizient der Prony-Reihe ist somit kein Vorfaktor mehr, sondern geht mit seinem aktuellen Wert direkt in die Ersatzgröße ein. Für eine Dehnrate als Eingangsgröße werden die spannungswertigen Ersatzgrößen gemäß

$$\begin{aligned} & \bar{y}_{\dot{\varepsilon}}(t_i, t^-, -\beta_j) \\ &= e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \bar{y}_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1}, t^-, -\beta_j) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} e^{-\beta_j(t_i-u)} f_j(g_{\dot{\varepsilon}}(u)) g_{\dot{\varepsilon}}(u) du \\ &= e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \bar{y}_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1}, t^-, -\beta_j) + f_j(g_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1/2})) g_{\dot{\varepsilon}}(t_{i-1/2}) \frac{1 - e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}}{\beta_j} \end{aligned} \quad (4.35)$$

beim Fortschritt der Obergrenze von t_{i-1} auf t_i berechnet. Die direkten Schritte (vgl. Gl. (4.22)) werden ebenfalls um die Auswertung der Steifigkeit ergänzt.

Mit $t_m = \frac{1}{2}(t^+ - t^-)$ lauten diese

$$\begin{aligned}
 & \int_{t^-}^{t^+} f(t_i - u, g_{\dot{\varepsilon}}(u)) g_{\dot{\varepsilon}}(u) \, du \\
 &= \frac{1}{2} \left(f^+(t_i - t^+, g_{\dot{\varepsilon}}(t_m)) + f^-(t_i - t^-, g_{\dot{\varepsilon}}(t_m)) \right) g_{\dot{\varepsilon}}(t_m) (t^+ - t^-) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N_J} f_j^+(g_{\dot{\varepsilon}}(t_m)) e^{-\beta_j^+(t_i - t^+)} + \sum_{j=1}^{N_J} f_j^-(g_{\dot{\varepsilon}}(t_m)) e^{-\beta_j^-(t_i - t^-)} \right) g_{\dot{\varepsilon}}(t_m) (t^+ - t^-) .
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

4.5. Vergleich der Faltungsalgorithmen

Der Vergleich der Faltungsalgorithmen erfolgt in diesem Abschnitt bezüglich ihrer Komplexität, der Form ihrer Materialfunktion und ihres Anwendungsgebietes.

Vergleicht man die Komplexität der naiven, rekursiven und lokalen Faltungsalgorithmen in Tabelle 4.1, so geht der rekursive Faltungsalgorithmus eindeutig als Sieger hervor. Unabhängig von der Simulationsdauer t_{end} und der Anzahl an Zeitschritten N_I^t bleiben der Speicherbedarf sowie die Anzahl an Operationen pro Zeitschritt konstant und hängen ausschließlich von der Anzahl der Prony-Terme $\mathcal{O}(N_J)$ ab. Damit steigt die Gesamtzahl an Operationen $\mathcal{O}(N_I^t N_J)$ linear mit der Anzahl an Zeitschritten an.

Beim lokalen Faltungsalgorithmus bleibt der Speicherbedarf und die Anzahl an Operationen pro Zeitschritt ebenfalls für alle Zeitschritte gleich. Da jedoch die Anzahl an Intervallen N_L an die Simulationsdauer gekoppelt ist, geht t_{end} logarithmisch in die Anzahl an Operationen pro Zeitschritt $\mathcal{O}(N_L N_J) = \mathcal{O}(\log(t_{\text{end}}/h^*) N_J)$ ein. Damit unterschreitet der Berechnungsaufwand mit $\mathcal{O}(N_I^t N_L N_J)$ Operationen den Berechnungsaufwand

Faltungsalgorithmus (Abschnitt)	Komplexität		Flexibilität	
	Speicherbedarf N^{his}	Operationen	Kurvenverlauf	Anpassung
Naiver \sim (4.1)	$\mathcal{O}(N_I^t)$	$\mathcal{O}(N_I^{t^2})$	+++	+++
Rekursiver \sim (4.2)	$\mathcal{O}(N_J)$	$\mathcal{O}(N_I^t N_J)$	–	–
Lokaler \sim (4.3)	$\mathcal{O}(N_L N_J)$	$\mathcal{O}(N_I^t N_L N_J)$	+ ^(*)	+

Tabelle 4.1.: Vergleich der Faltungsalgorithmen mit N_I^t Anzahl der Zeitschritte, N_J Anzahl der Prony-Terme und N_L Anzahl der Intervalle

(*) Die Integration einer Singularität ist möglich. Diese Eigenschaft wird im Rahmen dieser Arbeit aber nicht genutzt.

$\mathcal{O}(N_t^2)$ des naiven Faltungsalgorithmus immer noch deutlich, dessen Speicherbedarf zudem mit der Anzahl an Zeitschritten $\mathcal{O}(N_t^t)$ wächst.

Neben der Komplexität ist für den Ingenieur auch die Bestimmung der Materialfunktion oder die Variation der Materialeigenschaften von Interesse, um beispielsweise den Einfluss von Streuungen der Materialeigenschaften zu überprüfen.

Als effizientester Faltungsalgorithmus verlangt der rekursive Faltungsalgorithmus eine Parametrisierung der Materialfunktion als Prony-Reihe für die gesamte Simulationsdauer. In dieser Form beeinflussen alle Koeffizienten und Relaxationsraten den Verlauf der Materialfunktion gleichzeitig und müssen folglich zusammen bestimmt werden. Dabei ist jedoch nicht unmittelbar ersichtlich, wie die Relaxationsraten gewählt werden müssen. Der Beitrag eines Prony-Terms kann wie in Abbildung 3.7 dargestellt zwischen einem nahezu konstanten und vernachlässigbaren Wert variieren. Liefern mehrere Terme für die Zeitspanne der Anpassung einen nahezu konstanten Wert, so können diese zu einem Term zusammengefasst werden. Geschieht dies nicht, so suggerieren die geringen Relaxationsraten einen langen Gültigkeitsbereich der Prony-Reihe.

Durch die Parametrisierung ist zudem nicht mehr erkennbar, wie lange die Prony-Reihe gültig ist. Dadurch besteht die Gefahr, dass die Zeitspanne der Anpassung in der FE-Simulation überschritten wird und Materialeigenschaften genutzt werden, die bei der Parameteridentifikation keine Rolle spielten.

Ein weiterer Nachteil einer einzigen Prony-Reihe besteht darin, dass die Anfangssteifigkeit und die Grenzwerte der Überspannung bei Versuchen konstanter Rate gekoppelt sind (vgl. Abschnitt 3.2.7 und Abbildung 3.11). Soll nur die Anfangssteifigkeit variiert werden, muss eine erneute Anpassung erfolgen. Eine Verlängerung des Gültigkeitsbereiches einer Prony-Reihe erfordert ebenfalls eine vollständig neue Parameteridentifikation, um den Anfangsbereich trotz zusätzlicher Prony-Terme richtig abzubilden.

Beim lokalen Faltungsalgorithmus mit mehreren Prony-Reihen, die auf einzelnen Intervallen definiert sind, entfällt die Mehrzahl der Nachteile der Parametrisierung mit nur einer Prony-Reihe. Die einzelnen Prony-Reihen müssen zum Verlauf ihrer Nachbarn passen, sodass lediglich bei einer Änderung im Anfangsbereich u. U. alle Prony-Terme nochmals angepasst werden müssen. Durch die einzelnen Intervalle vereinfacht sich zudem die Auswahl der Relaxationsraten und der Gültigkeitsbereich einer Anpassung ist durch die maximale obere Intervallgrenze bekannt.

Noch mehr Flexibilität im Kurvenverlauf und bei der Anpassung der Materialfunktion ermöglicht der naive Faltungsalgorithmus, da die Punkte der stückweise linearen Kurve einzeln verschoben werden können. Ein weiterer Vorteil der naiven Faltung besteht darin, dass der Verlauf der Materialfunktion sowie wichtige Größen wie die Anfangssteifigkeit oder der Gültigkeitsbereich in einer Kurve direkt zugänglich sind.

Die Vor- und Nachteile der Faltungsalgorithmen im Bezug auf ihre Komplexität und ihre Materialfunktion führen unmittelbar zu ihren Anwendungsgebieten. Aufgrund des hohen Speicherbedarfs und der hohen Anzahl an Rechenoperationen ist der naive Faltungsal-

gorithmus auf kleine Modellgrößen und Berechnungen mit kurzer Simulationsdauer beschränkt, kann jedoch bei der Bestimmung der Materialfunktion oder bei der gezielten Variation der Materialeigenschaften hilfreich sein. Dafür ist auch der lokale Faltungsalgorithmus geeignet, der für alle FE-Modellgrößen und Simulationszeiten einsetzbar ist. Wie sich der Verlust der Glattheit der Materialfunktion durch die Zerlegung in einzelne Intervalle beim lokalen Faltungsalgorithmus auswirkt, wird anhand der Spannungsantwort eines Relaxationsversuches in Abschnitt 6.1 analysiert. Ein Beispiel für die gezielte Variation der Materialfunktion in Kombination mit dem lokalen Faltungsalgorithmus ist zudem in Abschnitt 6.2 enthalten.

Ist die Materialfunktion erst einmal bekannt und kann mit einer Prony-Reihe für die gesamte Simulationsdauer gefittet werden, so empfiehlt sich der Einsatz des rekursiven Faltungsalgorithmus. Aufgrund seines geringen Speicherbedarfs und seiner Effizienz kann er große FE-Simulationsmodelle und lange Simulationszeiten ohne Schwierigkeiten bewältigen und führt zu einer glatten Spannungsantwort.

Modellierung der viskoelastischen Überspannung offenzelliger Polymerschäume

Das vorliegende Kapitel baut auf den Konstitutivgleichungen der finiten Viskoelastizitätstheorie aus Kapitel 3 auf und beschreibt das mechanische Verhalten offenzelliger Polymerschäume als Summe aus Gleichgewichtsspannung und Überspannung. Einerseits ermöglicht die Beschränkung auf diese Werkstoffe eine kinematische Annahme, die die Konstitutivgleichungen viskoelastischer Festkörper vereinfacht und die Anzahl an Materialfunktionen reduziert. Andererseits muss die Gleichgewichtsantwort auf eine hyperelastische Formulierung erweitert werden, um die charakteristische Antwort eines offenzelligen Polymerschäumens abzubilden. Die kinematische Einschränkung und die Gleichgewichtsantwort entstammen der Literatur und werden zu Beginn erläutert. Den Schwerpunkt dieses Kapitels bilden sechs Formulierungen der viskoelastischen Überspannung. Bei den ersten beiden handelt es sich um bestehende Modelle aus der Literatur, die für offenzellige Schäume vereinfacht werden. Die weiteren vier Modelle werden eigens für diesen Zweck aufgestellt. Die Materialfunktionen dieser Modelle schließen zur Berechnung einer Überspannung nur den zeitabhängigen Anteil ein (Kennzeichnung durch eine Tilde \sim , vgl. Gl. (3.40)) und können verschiedene Darstellungsformen annehmen, die die numerische Faltung bestimmen (vgl. Kapitel 4).

Zur Kennzeichnung der Konstitutivgleichungen werden die einzelnen Bestandteile wie die Spannungs- und Dehnungsmaße sowie die Form der Nichtlinearität und der Faltungsalgorithmus abgekürzt und an die Bezeichnungen für die Theorien der finiten linearen Viskoelastizität (FLVE) und der finiten nichtlinearen Viskoelastizität (FNLVE) angehängt. Werden diese Konstitutivgleichungen der Überspannung zusammen mit der

Gleichgewichtsantwort GG nach Abschnitt 5.2 verwendet, so beginnt die Kurzform der Konstitutivgleichung mit GG+ und schließt dann die Abkürzung der viskoelastischen Überspannung an. Ob die Konstitutivgleichungen zusammen mit den unterschiedlichen Materialfunktionen in der Lage sind, die Versuche des Polyurethanschaumes abzubilden, wird anhand der Modellantworten auf Standardanregungen im nächsten Kapitel diskutiert.

Die Konstitutivgleichungen wurden als benutzerdefinierte Materialroutine an das FEM-Berechnungsprogramm LS-DYNA angebunden und getestet. Die Programmstruktur der Materialroutine wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels vorgestellt.

5.1. Kinematische Einschränkung offenzelliger Polymerschäume

Die Kinematik der Verformung eines Materials kann durch materielle Zwangsbedingungen eingeschränkt werden. Hierfür ist die Annahme der Inkompressibilität ein bekanntes Beispiel, welche besagt, dass alle Verformungen bei konstantem Volumen erfolgen. Wird ein inkompressibles Material in Längsrichtung gedehnt, so wird die Längsdehnung durch Einschnürung der Probe in Quer- und Dickenrichtung ausgeglichen. In der Konstitutivgleichung wird die Inkompressibilität durch eine Querkontraktion von (nahezu) 0,5 sichergestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird für offenzellige Polymerschäume die konstitutive Annahme getroffen, dass Quer-, Längs- und Dickendehnung in erster Näherung nicht miteinander verknüpft sind. Dies bedeutet, dass ein Schaumkörper in einer Richtung gestreckt oder gestaucht werden kann, ohne dass eine Spannung oder Dehnung in den dazu orthogonalen Raumrichtungen entsteht oder diese beeinflusst. Diese Annahme gilt im aktuellen Hauptachsensystem der Dehnung.

Für die Konstitutivgleichung eines Schaumes bedeutet diese Annahme, dass alle Terme, die zu einer Kopplung von Längs-, Quer- oder Dickendehnung führen, entfallen. Für linear viskoelastische Festkörper mit der Konstitutivgleichung (3.48) sind dies die Terme, die von der Spur des Dehnungs- oder Dehnratentensors abhängen und sich auf alle drei Normalspannungen auswirken. Bei kleinen Deformationen entfallen diese Terme bei einer verschwindenden Querkontraktion $\nu(t) = 0$ (vgl. Gl. (3.48)).

Dieses Verhalten ist an die Schaumstruktur gebunden und für offenzellige, isotrope Schäume unter Druckbelastung eine zulässige Approximation (MILLS UND GILCHRIST (2000b), MILLS (2007)). Diese Annahme wird zudem in WIDDLE U. A. (2008) und YANG UND SHIM (2004) für die viskoelastische Überspannung von Schäumen sowie im Materialmodell MFCF des FEM-Berechnungsprogrammes LS-DYNA für alle Belastungsarten

getroffen (KOLLING U. A. (2007a), HALLQUIST (2016)).

5.2. Beispiel einer Gleichgewichtsantwort

Die Gleichgewichtsantwort dieser Arbeit basiert auf der Veröffentlichung KOLLING U. A. (2007a) und deren Implementierung als MFCCF im FEM-Berechnungsprogramm LSDYNA (HALLQUIST 2016). Ausgangspunkt dieses hyperelastischen Materialgesetzes ist die freie Energiedichtefunktion nach HILL (1978)

$$\psi = \sum_{k=1}^3 \sum_{m=1}^{N_M} \frac{\mu_m^H}{\alpha_m^H} \left(\lambda_{\mathbf{U}_k}^{\alpha_m^H} - 1 \right) + \frac{1}{n^H} \sum_{m=1}^{N_M} \frac{\mu_m^H}{\alpha_m^H} \left(J^{-n^H \alpha_m^H} - 1 \right), \quad (5.1)$$

die in den Hauptstreckungen $\lambda_{\mathbf{U}_k}$ und der Jacobi-Determinante $J = \det \mathbf{F} = \lambda_{\mathbf{U}_1} \lambda_{\mathbf{U}_2} \lambda_{\mathbf{U}_3}$ formuliert ist und die konstitutiven Parameter μ_m^H , α_m^H und n^H verwendet.

Die kinematische Einschränkung für offenzellige Polymerschäume entspricht dem Grenzübergang $n^H \rightarrow 0$ (KOLLING U. A. 2007a), der eine Entkopplung der Spannungen bewirkt. Die Eigenwerte der Nominalspannung $\lambda_{\mathbf{P}^T k}$ hängen dann ausschließlich von der zugehörigen Hauptstreckung $\lambda_{\mathbf{U}_k}$ ab

$$\lambda_{\mathbf{P}^T k} = \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_{\mathbf{U}_k}} = \sum_{m=1}^{N_M} \frac{\mu_m^H}{\lambda_{\mathbf{U}_k}} \left(\lambda_{\mathbf{U}_k}^{\alpha_m^H} - 1 \right). \quad (5.2)$$

Die Verallgemeinerung aus KOLLING U. A. (2007a) besteht darin, die polynomiale Abhängigkeit von der Hauptstreckung des Hill-Funktional durch die Auswertung einer tabulierten Eingabe in Abhängigkeit einer Dehnung und Dehnrate zu ersetzen.

Die Gleichgewichtsantwort besitzt jedoch keine Dehnratenabhängigkeit, sodass hier die Auswertung einer stückweise linearen Kurve (vgl. Gleichung (4.3)) der Definition

$$\lambda_{\mathbf{P}^T k} = \lambda_{\mathbf{P}^T k} (\lambda_{\mathbf{U}_k} - 1) \quad (5.3)$$

genügt. Für einen uniaxialen Zug- oder Druckversuch kann die Kurve unmittelbar aus der Kraft- und Wegmessung gewonnen werden (KOLLING U. A. 2007b) und die charakteristische Form für Polymerschäume abbilden (vgl. Abbildung 1.4). Zur Ausgabe der Cauchy-Spannung im globalen Koordinatensystem werden die Hauptspannungen der Nominalspannung $\lambda_{\mathbf{P}^T k}$ in die Hauptspannungen der Cauchy-Spannung $\lambda_{\mathbf{T}_k}$ umgerechnet

$$\lambda_{\mathbf{T}_1} = \frac{\lambda_{\mathbf{P}^T 1}}{\lambda_{\mathbf{U}_2} \lambda_{\mathbf{U}_3}}, \quad \lambda_{\mathbf{T}_2} = \frac{\lambda_{\mathbf{P}^T 2}}{\lambda_{\mathbf{U}_1} \lambda_{\mathbf{U}_3}}, \quad \lambda_{\mathbf{T}_3} = \frac{\lambda_{\mathbf{P}^T 3}}{\lambda_{\mathbf{U}_1} \lambda_{\mathbf{U}_2}} \quad (5.4)$$

und dann mithilfe der normierten Eigenvektoren $\mathbf{e}_{\mathbf{U}k}$ in das globale Koordinatensystem transformiert

$$\mathbf{T}_{\text{eq}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{T}}^{\text{T}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}^{\text{T}}. \quad (5.5)$$

In dieser Gleichung steht die Größe $\mathbf{Q}_{(\bullet)}$ für den Rotationstensor, der die Basisvektoren \mathbf{e}_k in die Eigenvektoren $\mathbf{e}_{(\bullet)k}$ des Tensors (\bullet) überführt

$$\mathbf{e}_{(\bullet)k} = \mathbf{Q}_{(\bullet)} \cdot \mathbf{e}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{Q}_{(\bullet)} = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{(\bullet)m}) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m, \quad (5.6)$$

und die Größe $\mathbf{\Lambda}_{(\bullet)}$ repräsentiert den Tensor (\bullet) in seiner Hauptachsendarstellung

$$\mathbf{\Lambda}_{(\bullet)} = \sum_{k=1}^3 \lambda_{(\bullet)k} \mathbf{e}_{(\bullet)k} \otimes \mathbf{e}_{(\bullet)k}. \quad (5.7)$$

Diese Berechnung von \mathbf{T}_{eq} ist ein Beispiel für eine mögliche Gleichgewichtsantwort offenzelliger Polymerschäume, welche wie auch die folgenden Formulierungen der Überspannung die kinematische Einschränkung erfüllt. Dies ist jedoch keine Bedingung. Möglich ist auch, die entkoppelte Überspannung zu einer Gleichgewichtsantwort ohne Entkoppelung zu addieren. Dann entstehen bei uniaxialer Belastung Quer- und Dickendehnungen, die alleine aus der elastischen Gleichgewichtsantwort stammen.

5.3. Finite lineare Viskoelastizität in \mathbf{S} und \mathbf{E}

Die Idealisierung eines Schaumes als Festkörper mit einer verschwindenden Querkontraktion lässt sich auch auf die viskoelastische Überspannung aus Abschnitt 3.4.1 anwenden. Die finite linear viskoelastische Konstitutivgleichung (3.67) in \mathbf{S} und \mathbf{E} (FLVE-SE) vereinfacht sich damit zu

$$\mathbf{S}_{\text{ov}}(t) = \tilde{E}(t) \mathbf{E}(0) + \int_0^t \tilde{E}(t-u) \dot{\mathbf{E}}(u) \, du. \quad (5.8)$$

Dieses Vorgehen entspricht dem Übergang von Gl. (3.45) auf Gl. (3.50). Die kinematische Einschränkung isotroper Schäume führt dazu, dass sich die unbekanntes Materialfunktionen für die finite linear viskoelastische Überspannung auf den zeitabhängigen E-Modul $\tilde{E}(t)$ reduzieren.

Gleichung (5.8) lässt die Form der Materialfunktion offen, sodass die Konstitutivgleichung sowohl mit einer Prony-Reihe für den gesamten Zeitbereich als auch mit einer Überlappung von Prony-Reihen kombiniert werden kann. Aufgrund der zugehörigen Faltungsalgorithmen wird das resultierende Materialmodell als FLVE-SE-rekursiv oder

FLVE-SE-lokal bezeichnet. Das Modell FLVE-SE-rekursiv entspricht einem generalisierten Maxwell-Element mit der Zwangsbedingung eines Schaumes und ist mit dem generalisierten Maxwell-Element aus Abschnitt 3.3.1 verwandt.

Aufgrund der materiellen Linearität gelten die Einschränkungen hinsichtlich der Skalierbarkeit der Modellantwort aus Abschnitt 3.2.7 für dieses Modell bezüglich $\dot{\mathbf{E}}$ und \mathbf{S} sowie für kleine Deformationen.

Darüber hinaus führen Dehnratengeschichten, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, zu betragsmäßig denselben Spannungsantworten. Das Modell FLVE-SE kann folglich abweichende Steifigkeiten unter Zug- und Druckbelastung nicht unterscheiden. Zug- und Druckversuche werden im Folgenden als Synonym für Versuche mit positiver bzw. negativer Dehnratengeschichte verwendet.

5.4. Green-Rivlin-Modell für Schäume

Das Green-Rivlin-Modell (vgl. Abschnitt 3.4.2) ist wie das Modell FLVE-SE in \mathbf{S} und \mathbf{E} formuliert. Im Gegensatz dazu ist es jedoch materiell nichtlinear und erfordert durch seine besondere Form der Nichtlinearität die Bestimmung zahlreicher Materialfunktionen. Dem Aufwand der Parameteridentifikation wirkt die kinematische Einschränkung für Schäume entgegen, die das Green-Rivlin-Modell für isotrope Materialien maßgeblich vereinfacht. In EFFINGER U. A. (2014) ist die Vereinfachung bereits aufgeführt und wird an dieser Stelle wiederholt. Durch die Elimination aller Terme, die die Spur von \mathbf{E} enthalten, reduziert sich das Modell auf einen Term pro Ordnung. Für das Green-Rivlin-Modell isotroper Materialien der fünften Ordnung verbleiben somit fünf Faltungsintegrale. Nummeriert man die Materialfunktionen entsprechend ihrer Ordnung und beschränkt sich auf den zeitabhängigen Anteil der Materialfunktion $\tilde{R}(t)$, so lautet die Konstitutivgleichung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\text{ov}}(t) &= \int_0^t \tilde{R}_1(t - u_1) \mathbf{E}(u_1) \, du_1 + \int_0^t \int_0^t \tilde{R}_2(t - u_1, t - u_2) \mathbf{E}(u_1) \cdot \mathbf{E}(u_2) \, du_1 \, du_2 \\
 &+ \int_0^t \int_0^t \int_0^t \tilde{R}_3(t - u_1, t - u_2, t - u_3) \mathbf{E}(u_1) \cdot \mathbf{E}(u_2) \cdot \mathbf{E}(u_3) \, du_1 \, du_2 \, du_3 \\
 &+ \int_0^t \dots \int_0^t \tilde{R}_4(t - u_1, \dots, t - u_4) \mathbf{E}(u_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{E}(u_4) \, du_1 \dots \, du_4 \\
 &+ \int_0^t \dots \int_0^t \tilde{R}_5(t - u_1, \dots, t - u_5) \mathbf{E}(u_1) \cdot \dots \cdot \mathbf{E}(u_5) \, du_1 \dots \, du_5.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Der Spannungsbeitrag der n -ten Ordnung wird durch die Materialfunktion \tilde{R}_n bestimmt. Im Rahmen dieser Arbeit werden die Materialfunktionen \tilde{R}_n entsprechend der Anzahl ihrer Argumente in ein n -faches Produkt der Funktion \tilde{M}_n zerlegt

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_1(u_1) &= \tilde{M}_1(u_1), \\
 \tilde{R}_2(u_1, u_2) &= \tilde{M}_2(u_1)\tilde{M}_2(u_2), \\
 \tilde{R}_3(u_1, u_2, u_3) &= \tilde{M}_3(u_1)\tilde{M}_3(u_2)\tilde{M}_3(u_3), \\
 \tilde{R}_4(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \tilde{M}_4(u_1)\tilde{M}_4(u_2)\tilde{M}_4(u_3)\tilde{M}_4(u_4), \\
 \tilde{R}_5(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) &= \tilde{M}_5(u_1)\tilde{M}_5(u_2)\tilde{M}_5(u_3)\tilde{M}_5(u_4)\tilde{M}_5(u_5).
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Diese Produktform (vgl. Gl. (3.72)) bietet den Vorteil, dass sich die Mehrfachintegrale in Gl. (5.9) auf lineare Einfachintegrale reduzieren, die mit den Algorithmen aus Kapitel 4 berechnet werden können

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_{\text{ov}}(t) &= \int_0^t \tilde{M}_1(t-u)\mathbf{E}(u) \, du + \left(\int_0^t \tilde{M}_2(t-u)\mathbf{E}(u) \, du \right)^2 + \left(\int_0^t \tilde{M}_3(t-u)\mathbf{E}(u) \, du \right)^3 \\
 &\quad + \left(\int_0^t \tilde{M}_4(t-u)\mathbf{E}(u) \, du \right)^4 + \left(\int_0^t \tilde{M}_5(t-u)\mathbf{E}(u) \, du \right)^5 \\
 &= \sum_{n=1}^{N_N} \left(\int_0^t \tilde{M}_n(t-u)\mathbf{E}(u) \, du \right)^n.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

In Abhängigkeit von der Ordnung jedes Terms wird das Ergebnis des Einfachintegrals mehrfach mit sich selbst einfach verjüngt.

Die Konstitutivgleichung (5.11) kann statt in \mathbf{E} und den Materialfunktionen $\tilde{M}_n(t)$ auch in $\dot{\mathbf{E}}$ mit den Materialfunktionen $\tilde{E}_n(t)$ formuliert werden. Das Green-Rivlin Modell für isotrope Schäume (FNLVE-SE-GR) lautet in dieser Form

$$\mathbf{S}_{\text{ov}}(t) = \sum_{n=1}^{N_N} \left(\tilde{E}_n(0)\mathbf{E}(0) + \int_0^t \tilde{E}_n(t-u)\dot{\mathbf{E}}(u) \, du \right)^n. \tag{5.12}$$

Für $N_N = 1$ erhält man den materiell linearen Grenzfall des Green-Rivlin-Modells für Schäume, der in Abschnitt 5.3 als Modell FLVE-SE bereits eingeführt wurde (vgl. Gl. (5.8)).

Infolge seiner Polynomstruktur aus Einfachintegralen unterscheidet das Green-Rivlin-Modell für Schäume Zug- und Druckbelastung auf natürliche Weise. Während die Summanden gerader Ordnung stets einen positiven Beitrag liefern, wechseln die Summanden ungerader Ordnung abhängig von der Eingangsgröße ihr Vorzeichen. Eine symmetrische

Antwort ist nur möglich, wenn die Summanden der Ordnung $n = 2$ und $n = 4$ entfallen.

5.5. Finite lineare Viskoelastizität in \mathbf{T}_B und \mathbf{U}

Die Erweiterung der linearen Viskoelastizitätstheorie auf finite Spannungs- und Dehnungsmaße ist auf vielfältige Weise umsetzbar (vgl. Abschnitt 3.3). Eine Möglichkeit besteht darin, den Spannungs- und Dehnratentensor für kleine Deformationen durch die Biot-Spannung \mathbf{T}_B und die Rate des rechten Strecktensors $\dot{\mathbf{U}}$ zu ersetzen. Aus der Überspannung der Gl. (3.50) geht dann die Konstitutivgleichung

$$\mathbf{T}_{Bov}(t) = \tilde{E}(t)\mathbf{U}(0) + \int_0^t \tilde{E}(t-u)\dot{\mathbf{U}}(u) du \quad (5.13)$$

hervor, die bereits die Annahme einer verschwindenden Querkontraktion enthält. Die finite linear viskoelastische Konstitutivgleichung (5.13) in \mathbf{T}_B und \mathbf{U} (FLVE-TBU) steht dabei in enger Beziehung zum Modell FLVE-SE (vgl. Abschnitt 5.3). Die beiden Konstitutivgleichungen sind in unterschiedlichen Spannungs- und Dehnungsmaßen formuliert. Sie besitzen jedoch dieselbe Gleichungsstruktur, sodass die Ausführungen zur materiellen Linearität, Materialfunktion und Symmetrie unter Zug- und Druckbelastung für FLVE-SE auf FLVE-TBU übertragbar sind.

Eine Besonderheit der Biot-Spannung besteht darin, dass \mathbf{S} und damit auch \mathbf{T} nicht explizit aus \mathbf{T}_B berechnet werden können. Die Biot-Spannung ist als symmetrischer Anteil von $\mathbf{U} \cdot \mathbf{S}$ definiert

$$\mathbf{T}_B = \frac{1}{2} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}) . \quad (5.14)$$

Zur Lösung nach \mathbf{S} wird Gl. (5.14) als lineares Gleichungssystem umgeschrieben

$$\{\mathbf{T}_B\} = \mathbf{A}(\mathbf{U}) \{\mathbf{S}\} , \quad (5.15)$$

wobei die 6x6 Matrix $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ die Spannungstensoren $\{\mathbf{T}_B\}$ und $\{\mathbf{S}\}$ in Voigt-Notation verknüpft. Die Lösbarkeit des Gleichungssystems (5.15) nach \mathbf{S}

$$\{\mathbf{S}\} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{U}) \{\mathbf{T}_B\} \quad (5.16)$$

wird durch die Eigenschaften des rechten Strecktensors bestimmt, aus dessen Komponenten die Matrix \mathbf{A} aufgebaut ist. Aufgrund der positiven Definitheit von \mathbf{U} folgt die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems (5.16) (vgl. Anhang A.1).

Die Verwendung der Biot-Spannung und des rechten Strecktensors ist neu und aufwendig, weist jedoch bei der Lösung des Faltungsintegrals gewisse Vorzüge auf, die in Kapitel 6 aufgezeigt werden.

5.6. Finite nichtlineare Viskoelastizität in \mathbf{T}_B und \mathbf{U}

In Analogie zum Übergang von FLVE-SE auf FNLVE-SE-GR wird in diesem Abschnitt das Modell FLVE-TBU des letzten Abschnitts auf eine materiell nichtlineare Formulierung erweitert. In diesem Fall werden jedoch keine Mehrfachintegrale verwendet, sondern die Materialfunktion des Einfachintegrals wird um eine oder mehrere Abhängigkeiten von Dehnrates und Dehnung ergänzt.

Bei den finiten nichtlinear viskoelastischen Modellen in \mathbf{T}_B und \mathbf{U} (FNLVE-TBU) handelt es sich daher um ein Einfachintegral mit einer dehnratenabhängigen Materialfunktion $\tilde{E}(t, \dot{\mathbf{U}}(t))$

$$\mathbf{T}_{\text{Bov}}(t) = \tilde{E}(t, \dot{\mathbf{U}}(0))\mathbf{U}(0) + \int_0^t \tilde{E}(t-u, \dot{\mathbf{U}}(u))\dot{\mathbf{U}}(u) du \quad (5.17)$$

oder um ein Einfachintegral mit einer dehnraten- und dehnungsabhängigen Materialfunktion $\tilde{E}(t, \dot{\mathbf{U}}(t), \mathbf{U}(t))$

$$\mathbf{T}_{\text{Bov}}(t) = \tilde{E}(t, \dot{\mathbf{U}}(0), \mathbf{U}(0))\mathbf{U}(0) + \int_0^t \tilde{E}(t-u, \dot{\mathbf{U}}(u), \mathbf{U}(u))\dot{\mathbf{U}}(u) du. \quad (5.18)$$

Das Modell (5.17) ist vergleichbar mit der abgeleiteten Konstitutivgleichung (3.65) des Pipkin-Rogers-Modells (vgl. Abschnitt 3.4.1), in der die Materialfunktionen von \mathbf{E} abhängen.

Das Modell (5.18) wird in dieser allgemeinen Form nicht betrachtet, sondern auf eine Unterscheidung von Be- und Entlastungsvorgängen eingegrenzt.

5.6.1. Abhängigkeit von einer Vergleichsdehnrates

In Gl. (5.17) ist die Ratenabhängigkeit der Materialfunktion nicht festgelegt. Für eine isotrope Materialantwort muss die Materialfunktion jedoch in Abhängigkeit der Invarianten von $\dot{\mathbf{U}}$ formuliert werden. Die erste Möglichkeit besteht darin, die Abhängigkeit von $\dot{\mathbf{U}}$ durch die Abhängigkeit von einer skalaren invarianten Größe zu ersetzen und

diese als Vergleichsdehnrate zu bezeichnen. Im Rahmen dieser Arbeit definiert

$$\dot{U}_{\text{eqv}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left((\dot{U}_{11} - \dot{U}_{22})^2 + (\dot{U}_{22} - \dot{U}_{33})^2 + (\dot{U}_{33} - \dot{U}_{11})^2 + 6(\dot{U}_{12}^2 + \dot{U}_{13}^2 + \dot{U}_{23}^2) \right)} \quad (5.19)$$

in Anlehnung an die Von-Mises-Spannung die Vergleichsdehnrate \dot{U}_{eqv} und bezieht damit alle Komponenten von $\dot{\mathbf{U}}$ ein. Diese Definition wurde gewählt, da die Vergleichsdehnrate auf diese Weise bei uniaxialer Belastung mit der Anregungsrate übereinstimmt. Damit lautet die Konstitutivgleichung des Modells FNLVE-TBU-EQV (EQV für engl. equivalent strain rate)

$$\mathbf{T}_{\text{Bov}}(t) = \tilde{E}(t, \dot{U}_{\text{eqv}}(0)) \mathbf{U}(0) + \int_0^t \tilde{E}(t-u, \dot{U}_{\text{eqv}}(u)) \dot{\mathbf{U}}(u) du. \quad (5.20)$$

Durch die Abhängigkeit von der Vergleichsdehnrate unterscheidet die Materialfunktion langsame und schnelle Anregungsraten und gewichtet diese unterschiedlich stark, sodass keine Skalierbarkeit der Modellantwort wie in der linearen Viskoelastizität mehr vorliegt.

Die zweite und dritte Möglichkeit bestehen darin, die Materialfunktion in Abhängigkeit von zwei bzw. drei skalaren Invarianten von $\dot{\mathbf{U}}$ zu definieren. Neben der Höhe der Dehnrate kann damit auch zwischen der Art der Belastung unterschieden werden. Diese Möglichkeiten werden im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht. Stattdessen erfolgt eine Formulierung der Überspannung im Hauptachsensystem, die im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

5.6.2. Abhängigkeit von den Hauptdehnraten

Das folgende Modell der Überspannung FNLVE-TBU-HS wird im Hauptachsensystem (HS) von $\dot{\mathbf{U}}$ formuliert und ist eng mit der Gleichgewichtsantwort aus Abschnitt 5.2 verwandt.

Um die Unterschiede zum Modell FLVE-TBU-EQV aufzuzeigen, wird $\dot{\mathbf{U}}$ zunächst in der Konstitutivgleichung (5.20) in seiner Hauptachsendarstellung

$$\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\dot{\mathbf{U}}} \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^T \quad (5.21)$$

eingesetzt. Mit der Abkürzung

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_{\text{eqv}}^{(\bullet)}(t_1, t_2) &= \tilde{E}(t_1, \dot{U}_{\text{eqv}}(t_2)) \mathbf{\Lambda}_{(\bullet)}(t_2) \\ &= \sum_{k=1}^3 \tilde{E}(t_1, \dot{U}_{\text{eqv}}(t_2)) \lambda_{(\bullet)_k}(t_2) \mathbf{e}_{(\bullet)_k}(t_2) \otimes \mathbf{e}_{(\bullet)_k}(t_2)\end{aligned}\quad (5.22)$$

erhält man die Konstitutivgleichung FNLVE-TBU-EQV in veränderter Darstellung

$$\mathbf{T}_{\text{Bov}}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}(0) \cdot \mathbf{G}_{\text{eqv}}^{\mathbf{U}}(t, 0) \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{T}}(0) + \int_0^t \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(u) \cdot \mathbf{G}_{\text{eqv}}^{\dot{\mathbf{U}}}(t - u, u) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^{\mathbf{T}}(u) \, du. \quad (5.23)$$

Aufgrund der Äquivalenzumformung besitzt diese Gleichung dieselben Eigenschaften wie die ursprüngliche Konstitutivgleichung (5.20).

Um eine Unterscheidung zwischen Zug- und Druckbelastung zu ermöglichen, wird im nächsten Schritt die Abhängigkeit von der Vergleichsdehnrate durch die zugehörige Hauptdehnrate ersetzt

$$\mathbf{G}_{\text{HS}}^{(\bullet)}(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^3 \tilde{E}(t_1, \lambda_{(\bullet)_k}(t_2)) \lambda_{(\bullet)_k}(t_2) \mathbf{e}_{(\bullet)_k}(t_2) \otimes \mathbf{e}_{(\bullet)_k}(t_2). \quad (5.24)$$

Damit erhält man das Modell FNLVE-TBU-HS

$$\mathbf{T}_{\text{Bov}}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}(0) \cdot \mathbf{G}_{\text{HS}}^{\mathbf{U}}(t, 0) \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}^{\mathbf{T}}(0) + \int_0^t \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(u) \cdot \mathbf{G}_{\text{HS}}^{\dot{\mathbf{U}}}(t - u, u) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^{\mathbf{T}}(u) \, du. \quad (5.25)$$

Obwohl dieselbe Materialfunktion in die Berechnung der Spannungsänderung jedes Zeitpunkts eingeht, ist Gl. (5.25) nicht mehr aus Gl. (5.17) ableitbar, da die Auswertung der Materialfunktion in Abhängigkeit der Hauptdehnraten die Komponenten von $\dot{\mathbf{U}}$ unterschiedlich gewichtet.

Das Modell FNLVE-TBU-HS wird an dieser Stelle postuliert und seine Eigenschaften können folglich nicht abgeleitet werden. Es erfüllt die kinematische Einschränkung offenzelliger Polymerschäume, da die Hauptdehnrate $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k}(u)$ weiterhin nur ihren zugehörigen Eigenwert der Spannungsrate $\tilde{E}(t - u, \lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k}(u)) \lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k}(u)$ im aktuellen Hauptachsensystem beeinflusst.

Zudem erfüllt die Konstitutivgleichung (5.25) die Bedingung (2.44) für isotrope Materialgesetze. Eine Drehung des Koordinatensystems um \mathbf{Q} überführt $\dot{\mathbf{U}}$ in $\bar{\dot{\mathbf{U}}}$

$$\bar{\dot{\mathbf{U}}} = \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Q}^{\mathbf{T}} \quad (5.26)$$

und wirkt sich lediglich auf die Transformation $\mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}}$ ins Hauptachsensystem

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{U}} &= \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}} \cdot \mathbf{\Lambda}_{\bar{\mathbf{U}}} \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}}^T \\ &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(t) \cdot \mathbf{\Lambda}_{\dot{\mathbf{U}}}(t) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(t)^T \cdot \mathbf{Q}^T\end{aligned}\quad (5.27)$$

aus, da die Eigenwerte als basisunabhängige Invarianten unverändert bleiben. Daraus folgt die Zerlegung der orthogonalen Transformation $\mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}}(t)$ in \mathbf{Q} und $\mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(t)$

$$\mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}}(t) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(t), \quad (5.28)$$

die es erlaubt, die zeitlich konstante Drehung \mathbf{Q} nach der Faltung durchzuführen

$$\begin{aligned}& \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}}(0) \cdot \mathbf{G}^{\bar{\mathbf{U}}}(t,0) \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}}^T + \int_0^t \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}}(u) \cdot \mathbf{G}^{\bar{\mathbf{U}}}(t-u,u) \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{U}}}^T du \\ &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(0) \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{U}}(t,0) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(0)^T \cdot \mathbf{Q}^T + \int_0^t \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(u) \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{U}}(t-u,u) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(u)^T \cdot \mathbf{Q}^T du \\ &= \mathbf{Q} \cdot \left(\mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(0) \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{U}}(t,0) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(0)^T + \int_0^t \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(u) \cdot \mathbf{G}^{\mathbf{U}}(t-u,u) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(u)^T du \right) \cdot \mathbf{Q}^T.\end{aligned}\quad (5.29)$$

Damit gilt $\mathbf{T}_B(\mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}_B(\dot{\mathbf{U}}) \cdot \mathbf{Q}^T$.

Für uniaxiale Zugbelastung liefert FNLVE-TBU-HS dieselben Ergebnisse wie das Modell FNLVE-TBU-EQV. Während die Vergleichsdehnraten jedoch immer positive Werte annimmt, unterscheidet $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k}(t)$, ob das Material in der Hauptrichtung $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{U}}_k}$ gestreckt oder gestaucht wird. Auf diese Weise werden uniaxiale Zug- und Druckversuche konstanter Ratenanregung unabhängig voneinander behandelt und können einzeln abgebildet werden. Das Modell FNLVE-TBU-HS kann somit ebenso wie die Gleichgewichtsantwort in Abschnitt 5.2 als dreidimensionale Erweiterung der uniaxialen Versuchsbasis verstanden werden.

5.6.3. Abhängigkeit von den Hauptdehnraten und Unterscheidung zwischen Be- und Entlastungsvorgängen

Während sich die materielle Nichtlinearität der Modelle FNLVE-TBU-EQV und FNLVE-TBU-HS ausschließlich auf den Dehnratenensor stützt, wird im Folgenden das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ vorgestellt, das nicht nur berücksichtigt, wie sich der Dehnungszustand verändert, sondern auch welcher Dehnungszustand aktuell vorliegt.

Dabei richtet sich der Fokus jedoch nicht auf eine allgemeine Form der Materialfunktion $\tilde{E}(t, \dot{\mathbf{U}}(t), \mathbf{U}(t))$, sondern auf die Unterscheidung zwischen Be- und Entlastungsvorgängen. Während die Dehnrates und die Dehnung in der Belastungsphase dasselbe Vorzeichen besitzen, unterscheiden sich ihre Vorzeichen in der Entlastungsphase. Folglich können die beiden Vorgänge mithilfe eines Schalters $\bar{s} \in \{-1, 1\}$ separiert werden.

Das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ ist wie FNLVE-TBU-HS im Hauptachsensystem von $\dot{\mathbf{U}}$ formuliert. Da \mathbf{U} und $\dot{\mathbf{U}}$ im Allgemeinen nicht dasselbe Hauptachsensystem besitzen, kann die Entscheidung über einen Be- oder Entlastungsvorgang nicht mithilfe der Eigenwerte $\lambda_{\mathbf{U}}$ und $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}}$ sondern nur mithilfe einer Näherung getroffen werden. Dazu wird \mathbf{U} im Hauptachsensystem von $\dot{\mathbf{U}}$ berechnet

$$\mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^T \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}} = \bar{\mathbf{U}} \quad (5.30)$$

und die Diagonalwerte von $\bar{\mathbf{U}}$ werden mit den Hauptdehnrates $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}}$ für jede Hauptrichtung verglichen

$$\bar{s}_k = \text{signum}(\bar{U}_{kk} \lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k}, 1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \bar{U}_{kk} \lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k} > 0, \\ -1 & \text{falls } \bar{U}_{kk} \lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k} < 0. \end{cases} \quad (5.31)$$

Um eine Unterscheidung zwischen Be- und Entlastung zu ermöglichen, wird die Materialfunktion \tilde{E} in der Abkürzung $\mathbf{G}_{\text{HS}}^{\dot{\mathbf{U}}}(t_1, t_2)$ des Modells FNLVE-TBU-HS um die Abhängigkeit des Schalters \bar{s}_k auf jeder Hauptachse ergänzt und definiert $\mathbf{G}_{\text{HS}^+}^{\dot{\mathbf{U}}}(t_1, t_2)$

$$\mathbf{G}_{\text{HS}^+}^{(\bullet)}(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^3 \tilde{E}(t_1, \lambda_{(\bullet)_k}(t_2), \bar{s}_k(t_2)) \lambda_{(\bullet)_k}(t_2) \mathbf{e}_{(\bullet)_k}(t_2) \otimes \mathbf{e}_{(\bullet)_k}(t_2). \quad (5.32)$$

Damit erhält man das Modell FNLVE-TBU-HS⁺

$$\mathbf{T}_{\text{Bov}}(t) = \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}(0) \cdot \mathbf{G}_{\text{HS}^+}^{\mathbf{U}}(t, 0) \cdot \mathbf{Q}_{\mathbf{U}}^T(0) + \int_0^t \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(u) \cdot \mathbf{G}_{\text{HS}^+}^{\dot{\mathbf{U}}}(t - u, u) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^T(u) du. \quad (5.33)$$

Bei monotoner Belastung liefert FNLVE-TBU-HS⁺ dieselben Ergebnisse wie FNLVE-TBU-HS. In diesem Zusammenhang wird keine Unterscheidung zwischen den Modellen vorgenommen, sondern die Ergebnisse werden für beide Modelle unter der Abkürzung FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ zusammengefasst.

5.6.4. Materialfunktion der nichtlinearen Modelle FNLVE-TBU

In den drei Modellen FNLVE-TBU-EQV, FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺ ist die Materialfunktion nicht nur von der Zeit, sondern auch von weiteren skalaren Größen abhängig. Wie in Abschnitt 4.4 eingeführt wird für diese Modelle die Materialfunktion als Prony-Reihe festgeschrieben

$$\tilde{E}(t, \xi_1(t), \xi_2(t)) = \sum_{j=1}^{N_J} \tilde{E}_j(\xi_1(t), \xi_2(t)) e^{-\beta_j t}, \quad (5.34)$$

in der die einzelnen Gewichtungskoeffizienten \tilde{E}_j die zusätzliche Abhängigkeit von skalaren Größen berücksichtigen. Zur klaren Trennung von $\tilde{E}(t)$ und der Dehnung \mathbf{E} wird an dieser Stelle die Tilde auch für die Koeffizienten der Prony-Reihe verwendet.

Die Prony-Reihe kann sowohl über den gesamten Zeitbereich als auch für einzelne Intervalle gültig sein. Damit lassen sich die Faltungsintegrale in Gl. (5.20) und Gl. (5.25) mit den Algorithmen nach Abschnitt 4.4 numerisch lösen.

Für den j -ten Prony-Term des Modells FNLVE-TBU-EQV lauten die Gl. (4.32) und Gl. (4.33) in Tensornotation

$$\mathbf{T}_{Bj}(t_i) = e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \mathbf{T}_{Bj}(t_{i-1}) + \tilde{E}_j(\dot{U}_{\text{eqv}}(t_{i-1/2})) \dot{\mathbf{U}}(t_{i-1/2}) \frac{1 - e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}}{\beta_j}. \quad (5.35)$$

Das Modell FNLVE-TBU-HS nutzt aus, dass die Eigenvektoren in $\mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}$ wie $\dot{\mathbf{U}}$ selbst innerhalb eines Zeitschrittes als konstant angenommen werden können. Damit erfolgt die Berechnung der Spannungsänderung $\Delta \mathbf{T}_B$ aufgrund des letzten Zeitschrittes im Hauptachsensystem von $\dot{\mathbf{U}}$ und wird dann unmittelbar in das globale Koordinatensystem transformiert. Für den Spannungsbeitrag des j -ten Prony-Terms gilt damit

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{Bj}(t_i) &= e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \mathbf{T}_{Bj}(t_{i-1}) + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(u) \cdot \mathbf{G}_{\text{HS}}^{\dot{\mathbf{U}}}(t-u, u) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^T(u) du \\ &= e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \mathbf{T}_{Bj}(t_{i-1}) + \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(t_{i-1/2}) \cdot \Delta \mathbf{T}_{Bj} \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^T(t_{i-1/2}), \end{aligned} \quad (5.36)$$

wobei sich die Spannungsänderung $\Delta \mathbf{T}_{Bj}$ gemäß

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{T}_{Bj} &= \sum_{k=1}^3 \lambda_{\Delta \mathbf{T}_{Bj k}} \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{U}}_k} \otimes \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{U}}_k} \\ &= \sum_{k=1}^3 \frac{1 - e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})}}{\beta_j} \tilde{E}_j(\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k}(t_{i-1/2})) \lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k}(t_{i-1/2}) \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{U}}_k}(t_{i-1/2}) \otimes \mathbf{e}_{\dot{\mathbf{U}}_k}(t_{i-1/2}) \end{aligned} \quad (5.37)$$

berechnet. Diese Vorgehensweise wird auch für das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ angewandt. In diesem Fall ergänzt die Abhängigkeit von $\bar{s}_k(t)$ die Materialfunktion in Gl. (5.37). Für beide Modelle erhält man die Gesamtspannung durch Summation über alle Prony-Terme

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\text{Bov}}(t_i) &= \sum_{j=1}^{N_J} e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \mathbf{T}_{\text{Bj}}(t_{i-1}) + \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(t_{i-1/2}) \cdot \left(\sum_{j=1}^{N_J} \Delta \mathbf{T}_{\text{Bj}} \right) \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^{\text{T}}(t_{i-1/2}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_J} e^{-\beta_j(t_i-t_{i-1})} \mathbf{T}_{\text{Bj}}(t_{i-1}) + \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}(t_{i-1/2}) \cdot \Delta \mathbf{T}_{\text{B}} \cdot \mathbf{Q}_{\dot{\mathbf{U}}}^{\text{T}}(t_{i-1/2}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Beim lokalen Faltungsalgorithmus ergibt sich für das Modell FNLVE-TBU-HS die Besonderheit, dass statt der sechs Komponenten des Dehnratentensors dessen drei Hauptinvarianten und die zugehörigen Eigenvektoren an den Integrationsgrenzen gespeichert werden müssen. Mit $k_2 = 12$ erhöht sich folglich der Speicherbedarf in Gl.(4.29). Für FNLVE-TBU-HS⁺ müssen zusätzlich die drei Werte der Schalter \bar{s}_k abgelegt werden, sodass sich k_2 auf 15 erhöht.

5.7. Struktur der Materialroutine

Wie die Gesamtspannung besteht die Materialroutine aus zwei Bestandteilen. Auf den ersten Block zur Berechnung der Gleichgewichtsspannung wird an dieser Stelle nicht eingegangen, da die numerische Umsetzung der Gleichgewichtsantwort aus Abschnitt 5.2 in KOLLING U. A. (2007b) enthalten ist. Der zweite Block dient der Berechnung der viskoelastischen Überspannung und enthält die numerische Umsetzung der Konstitutivgleichungen FLVE-SE, FNLVE-SE-GR, FLVE-TBU, FNLVE-TBU-EQV, FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺ ohne Dehnungssprung zum Zeitpunkt $t = 0$. Obwohl sich die Modelle in wichtigen Punkten unterscheiden, gleicht sich der Ablauf ihrer numerischen Umsetzung. Aus diesem Grund ist die Materialroutine modular aufgebaut.

Die Struktur des zweiten Blocks ist in Abbildung 5.1 als Ratenformulierung dargestellt. An erster Stelle steht die Berechnung der Dehnrate. Hier dient der Dehnratentensor $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ als Platzhalter für einen der beiden Dehnratentensoren $\dot{\mathbf{E}}$ oder $\dot{\mathbf{U}}$. An zweiter Stelle entscheidet die Materialfunktion \tilde{E}_n über die weitere Berechnung. Besitzt diese neben der Zeit noch weitere Abhängigkeiten, so werden aus $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ die erforderlichen Invarianten $\dot{\gamma}_{\text{eqv}}$ und $\mathbf{\Lambda}_{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}$ berechnet und die Dehnung $\bar{\boldsymbol{\gamma}}$ ins Hauptachsensystem der Rate $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ gedreht. Zusammen mit \tilde{E}_n und $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ bilden sie die Eingangsgröße für den ratenabhängigen Faltungsalgorithmus. Ist die Materialfunktion nicht dehnratenabhängig, so liegen bereits alle Eingangsgrößen \tilde{E}_n und $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ für die ratenunabhängige Faltung vor.

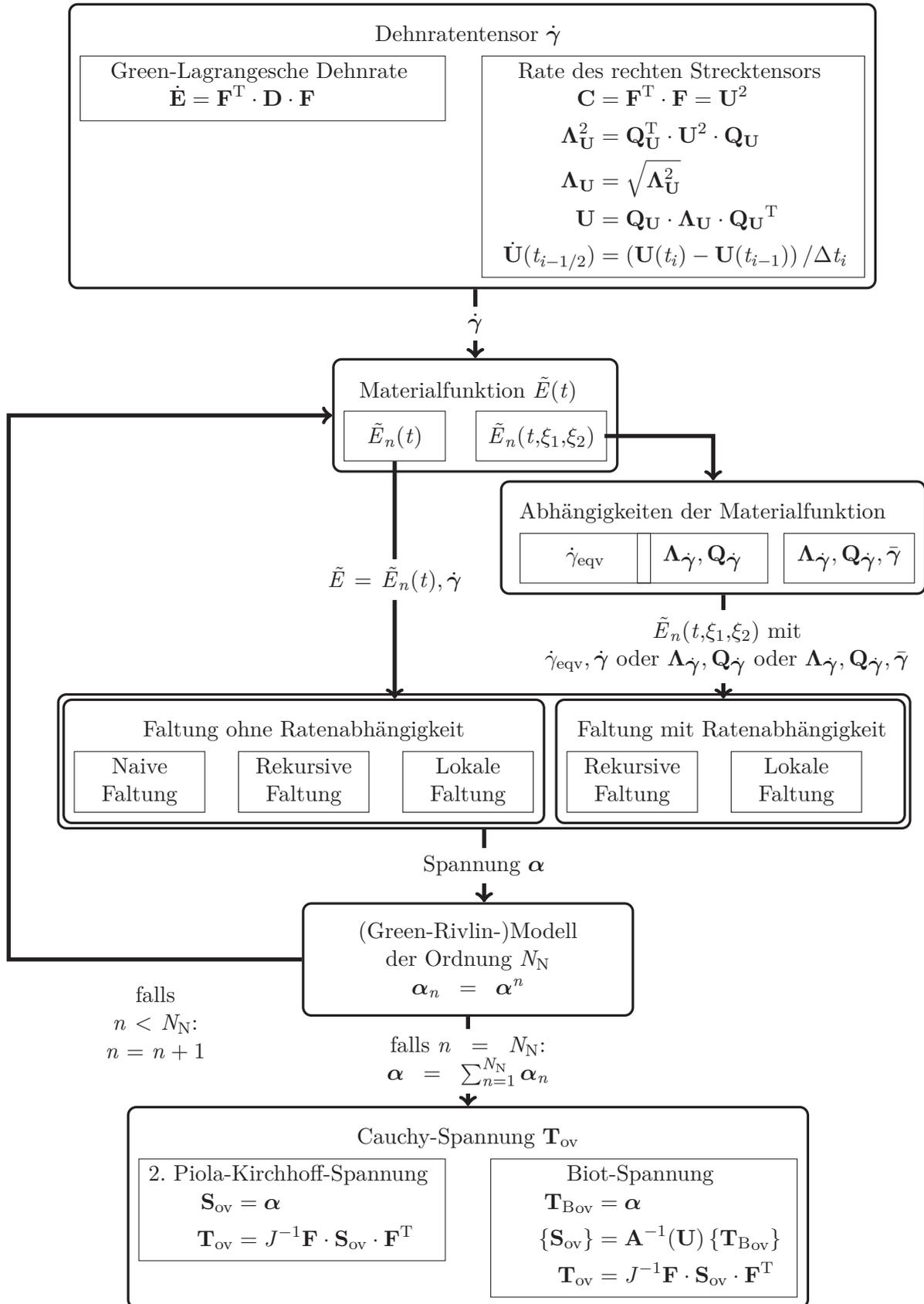


Abbildung 5.1.: Struktur der Materialroutine zur Berechnung der Überspannung

Bei einer ratenunabhängigen Materialfunktion können die Faltungsalgorithmen aus Abschnitt 4.1, 4.2 und 4.3 eingesetzt werden. Für die ratenabhängige Materialfunktion stehen der modifizierte rekursive oder der modifizierte lokale Algorithmus aus Abschnitt 4.4 zur Verfügung. Das Ergebnis der Faltungsalgorithmen ist der Spannungstensor $\boldsymbol{\alpha}$. Für ein Modell höherer Ordnung $N_N > 1$ wird der Spannungstensor gemäß der aktuellen Ordnung n -fach mit sich selbst einfach verjüngt und als $\boldsymbol{\alpha}_n$ gespeichert. Danach wird der Faltungsprozess für die nächsthöhere Ordnung mit der Materialfunktion \tilde{E}_{n+1} wiederholt. Ist $n = N_N$ erreicht, so werden die Spannungstensoren $\boldsymbol{\alpha}_n$ aufsummiert und als Eingangsgröße $\boldsymbol{\alpha}$ an die Routine zur Umrechnung in die Cauchy-Spannung übergeben. Modelle, die wie FLVE-SE, FLVE-TBU, FNLVE-TBU-EQV und FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ aus einem Einfachintegral bestehen, sind Modelle erster Ordnung. Für $N_N = 1$ wird der Spannungstensor $\boldsymbol{\alpha}$ direkt an die nächste Routine zur Umrechnung in die Cauchy-Spannung weitergegeben.

Unabhängig davon, in welchen Maßen das Materialgesetz formuliert ist, muss aufgrund der ULF als Ergebnis der Materialroutine im FEM-Berechnungsprogramm LS-DYNA die Überspannung als Cauchy-Spannung \mathbf{T}_{ov} ausgegeben werden. Unter der Prämisse dualer Größen führt die Faltung mit $\dot{\mathbf{E}}$ auf \mathbf{S}_{ov} , die Faltung mit $\dot{\mathbf{U}}$ auf \mathbf{T}_{Bov} .

Während die Dehnrates $\dot{\mathbf{E}}$ aus \mathbf{D} und die Spannung \mathbf{T}_{ov} aus \mathbf{S}_{ov} mithilfe von Pull-Back- und Push-Forward-Operationen unmittelbar bestimmt werden können, sind die Berechnung von $\dot{\mathbf{U}}$ und die Berechnung von \mathbf{T}_{ov} aus \mathbf{T}_{Bov} numerisch aufwendig. Um $\dot{\mathbf{U}}$ zu bestimmen, muss \mathbf{U} an den Lösungszeitpunkten t_i und t_{i-1} der FE-Simulation bekannt sein. Dazu ist die iterative Berechnung der Eigenwerte und -vektoren von \mathbf{U}^2 zu jedem Zeitschritt erforderlich. Für die Umwandlung von \mathbf{T}_{Bov} in \mathbf{T}_{ov} muss zunächst ein lineares Gleichungssystem nach \mathbf{S}_{ov} gelöst werden. Aus \mathbf{S}_{ov} kann dann \mathbf{T}_{ov} durch eine Push-Forward-Operation berechnet werden.

Neben dem Ablauf und dem numerischen Aufwand zur Berechnung der Dehnraten- und Spannungsmaße zeigt Abbildung 5.1 auch, wie dank des modularen Aufbaus neue Materialmodelle erzeugt werden können. Beispielsweise lässt sich die Erweiterung der Materialfunktion um eine Ratenabhängigkeit auch mit einem Materialgesetz in $\dot{\mathbf{E}}$ und \mathbf{S}_{ov} umsetzen (FNLVE-SE-EQV oder FNLVE-SE-HS⁽⁺⁾). Des Weiteren kann das Green-Rivlin-Modell in $\dot{\mathbf{U}}$ und \mathbf{T}_{Bov} formuliert werden (FNLVE-TBU-GR) und jedes Einfachintegral um die Abhängigkeit von der Vergleichsdehnrates ergänzt werden (FNLVE-TBU-GR-EQV). Darüber hinaus ist jedes dieser Modelle mit den unterschiedlichen Faltungsalgorithmen aus Kapitel 4 kombinierbar. So entsteht eine Vielzahl an Modellen, deren Eignung zur Abbildung offenzelliger Polymerschäume am Beispiel der ausgewählten Modelle FLVE-SE, FNLVE-SE-GR, FLVE-TBU, FNLVE-TBU-EQV, FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺ im nächsten Kapitel untersucht wird.

Numerische Beispiele und Modellantworten auf Standardanregungen

Nach der Einführung der Konstitutivgleichungen FLVE-SE, FNLVE-SE-GR, FLVE-TBU, FNLVE-TBU-EQV, FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺ im vorherigen Kapitel 5 werden diese nun für definierte Randbedingungen numerisch gelöst. Zum einen veranschaulichen die numerischen Beispiele die charakteristischen Eigenschaften der Modelle aus Kapitel 5. Zum anderen werden die Modellantworten anhand von Standardanregungen unter verschiedenen Belastungszuständen verglichen und die Fähigkeit der Modelle überprüft, offenzellige Polymerschäume abzubilden. Dazu wird das Spannungs-Dehnungs-Diagramm nach Abbildung 1.4 zugrunde gelegt. Um jedoch die Wiederholung zu vermeiden, die numerischen Beispiele mit den in Kapitel 7 folgenden Materialfunktionen und Parametersätzen für Confor-Schaum nochmals zu zeigen, werden diese und die viskoelastischen Überspannungsverläufe von Confor-Schaum z. T. bereits in diesem Kapitel eingesetzt. Darüber hinaus werden die Ergebnisse mit dem in der Crashesimulation gebräuchlichen Einheitensystem aus kg, mm und ms für die Angaben der Masse, Länge und Zeit und den daraus ableitbaren Einheiten dargestellt. Damit die Dehnungsanregung und die Spannungsantwort in direktem Zusammenhang stehen, werden in diesem Kapitel außerdem einzelne reduziert integrierte Hexaederelemente verwendet.

Aufgrund ihrer Zeitabhängigkeit eignen sich Relaxationsversuche besonders, um die Eigenschaften viskoelastischer Festkörper zu illustrieren. Die uniaxialen Relaxationsversuche des Abschnitts 6.1 unterstreichen die Annahme der Isotropie, die kinematische Einschränkung und das Prinzip der Objektivität und zeigen die materielle Linearität sowie den Einfluss der rekursiven und lokalen Faltungsalgorithmen. Die Simulation der

Relaxationsversuche wird ausschließlich mit den materiell linearen Modellen FLVE-TBU und FLVE-SE durchgeführt.

Aufgrund ihrer weiten Verbreitung bildet die Simulation von uniaxialen Zugversuchen den Schwerpunkt dieses Kapitels. Im Abschnitt 6.2 wird zuerst der Unterschied zwischen den Spannungs- und Dehnungsmaßen der Modelle FLVE-SE und FLVE-TBU diskutiert und die Spannungsantwort des Modells FNLVE-SE-GR für diese Standardversuche untersucht. Im Anschluss zeigen die Zugversuche unterschiedlicher Abzugsgeschwindigkeiten die Vorzüge der materiell nichtlinearen Modelle FNLVE-TBU-EQV, FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺. Ihre einfache Parameteridentifikation begründet, warum sich die weitere Untersuchung der uniaxialen Druckversuche, der mehrachsigen und der zyklischen Versuche auf diese Modelle beschränkt. Da die Modelle FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺ sich erst bei einem Lastwechsel unterscheiden, werden diese als FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ für die Abschnitte 6.1, 6.2, 6.3 und 6.4 zusammengefasst und die Simulationsergebnisse jeweils nur für FNLVE-TBU-HS dargestellt.

Die Beispiele der uniaxialen Druckversuche in Abschnitt 6.3 zeigen anschließend, dass nur das Modell FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ eine von den Zugversuchen unabhängige Parameteridentifikation für die Druckversuche erlaubt und die Zug-Druck-Asymmetrie berücksichtigen kann.

Für die darauffolgenden Beispiele der mehrachsigen Belastungsgeschichten in Abschnitt 6.4 liegen keine Versuchsdaten vor. Die biaxialen Versuche mit konstantem und veränderlichem Hauptachsensystem erweitern jedoch das Verständnis der Materialmodelle und zeigen auf, welche Kraftverläufe für Schubversuche in den Materialmodellen enthalten sind.

Abschnitt 6.5 stellt die Spannungsantworten auf zyklische Anregungen vor. Die Lastumkehr dieser Anregungen vermischt für das Modell FNLVE-TBU-HS die Parameter, die eigentlich die Spannungsantwort bei Zug- und Druckversuchen beschreiben. Dieses Defizit wird durch das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ behoben.

Der letzte Abschnitt dieses Kapitels fasst die Möglichkeiten zusammen, die Eigenschaften offenzelliger Polymerschäume mithilfe der Materialmodelle aus Kapitel 5 zu erfassen.

6.1. Relaxationsversuche

Insgesamt fünf numerische Beispiele stellen die charakteristischen Merkmale der Materialmodelle in diesem Abschnitt vor. Die ersten drei Beispiele veranschaulichen die Eigenschaften, die sich alle Modelle aus Kapitel 5 teilen. Dazu zählen die kinematische Einschränkung, die Annahme der Isotropie und das Prinzip der Objektivität. Das vierte Beispiel verdeutlicht den Unterschied zwischen der materiellen Linearität der Modelle FLVE-TBU und FLVE-SE. Im fünften Beispiel werden die Spannungsantworten des

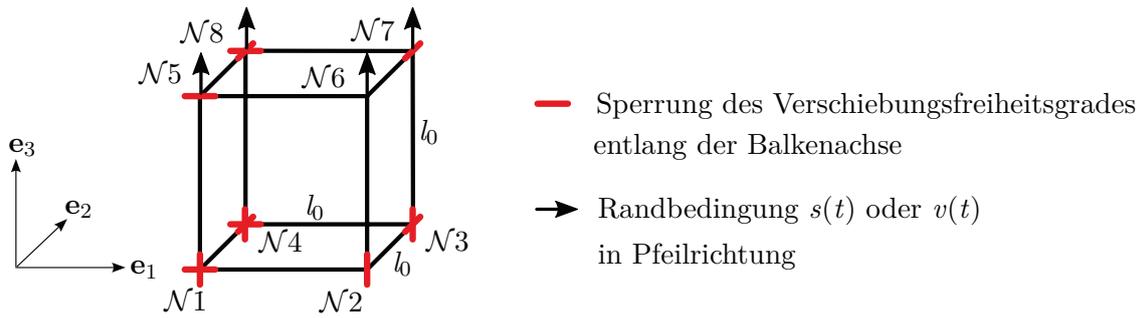


Abbildung 6.1.: Uniaxiale Beanspruchung eines Hexaederelementes

rekursiven und lokalen Faltungsalgorithmus des Modells FLVE-TBU für Relaxationsversuche gegenübergestellt und analysiert.

Bei Relaxationsversuchen wird ein Probekörper einem bestimmten Dehnungszustand ausgesetzt und es wird die Kraft gemessen, die notwendig ist, um diesen Dehnungszustand aufrechtzuerhalten. Der zeitliche Verlauf der Kraftmessung macht auf diese Weise sichtbar, wie schnell die Steifigkeit des Werkstoffes abnimmt.

Für die Beispiele dieses Abschnitts wird ein uniaxialer Zugdehnungszustand gewählt. Eine Stufenanregung führt dabei unmittelbar auf die Materialfunktion (vgl. Abschnitt 3.2.4). In der Realität ist eine Versuchsführung jedoch nur mit endlicher Dehnrage möglich, sodass der Dehnungszustand auch in den Simulationen dieser Arbeit in endlicher Zeit aufgebracht wird und die Konstitutivgleichungen ohne Dehnungssprünge umgesetzt wurden. Durch die endliche Dehnrage bestimmt nicht nur die Materialfunktion, sondern auch die vorangegangene Dehnungsgeschichte, wie schnell die Spannung abklingt.

Abbildung 6.1 zeigt die Randbedingungen eines uniaxialen Versuches an einem einzelnen Hexaederelement und die Nummerierung der Knoten. Während die Knoten der Unterseite, der linken Seite und der Rückseite in der Ebene der jeweiligen Elementseite fixiert sind, folgen die Knoten der Oberseite der vorgegebenen Verschiebung $s(t)$ oder Geschwindigkeit $v(t)$ in \mathbf{e}_3 -Richtung. Die Knoten der rechten Seite und der Vorderseite können sich in \mathbf{e}_1 - bzw. in \mathbf{e}_2 -Richtung frei bewegen und ermöglichen die Entwicklung einer Quer- und Dickendehnung gemäß der Konstitutivgleichung.

Unter der Annahme, dass nur eine Knotenverschiebung in \mathbf{e}_3 -Richtung erfolgt, erhält man in Abhängigkeit von der vorgeschriebenen Verschiebung s und Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ die Komponenten der verschiedenen Dehnraten- und Dehnungsmaße:

$$\begin{aligned}
 F_{33} &= 1 + \frac{s}{l_0} = U_{33} = \varepsilon_{33}^{\text{eng}}, & \dot{U}_{33} &= \frac{1}{l_0} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{l_0}, \\
 L_{33} &= \frac{v}{l_0 + s} = D_{33}, & & \\
 E_{33} &= \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{s}{l_0} \right)^2 - 1 \right), & \dot{E}_{33} &= \left(1 + \frac{s}{l_0} \right) \frac{1}{l_0} \frac{ds}{dt} = \left(\frac{v}{l_0} + \frac{vs}{l_0^2} \right).
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

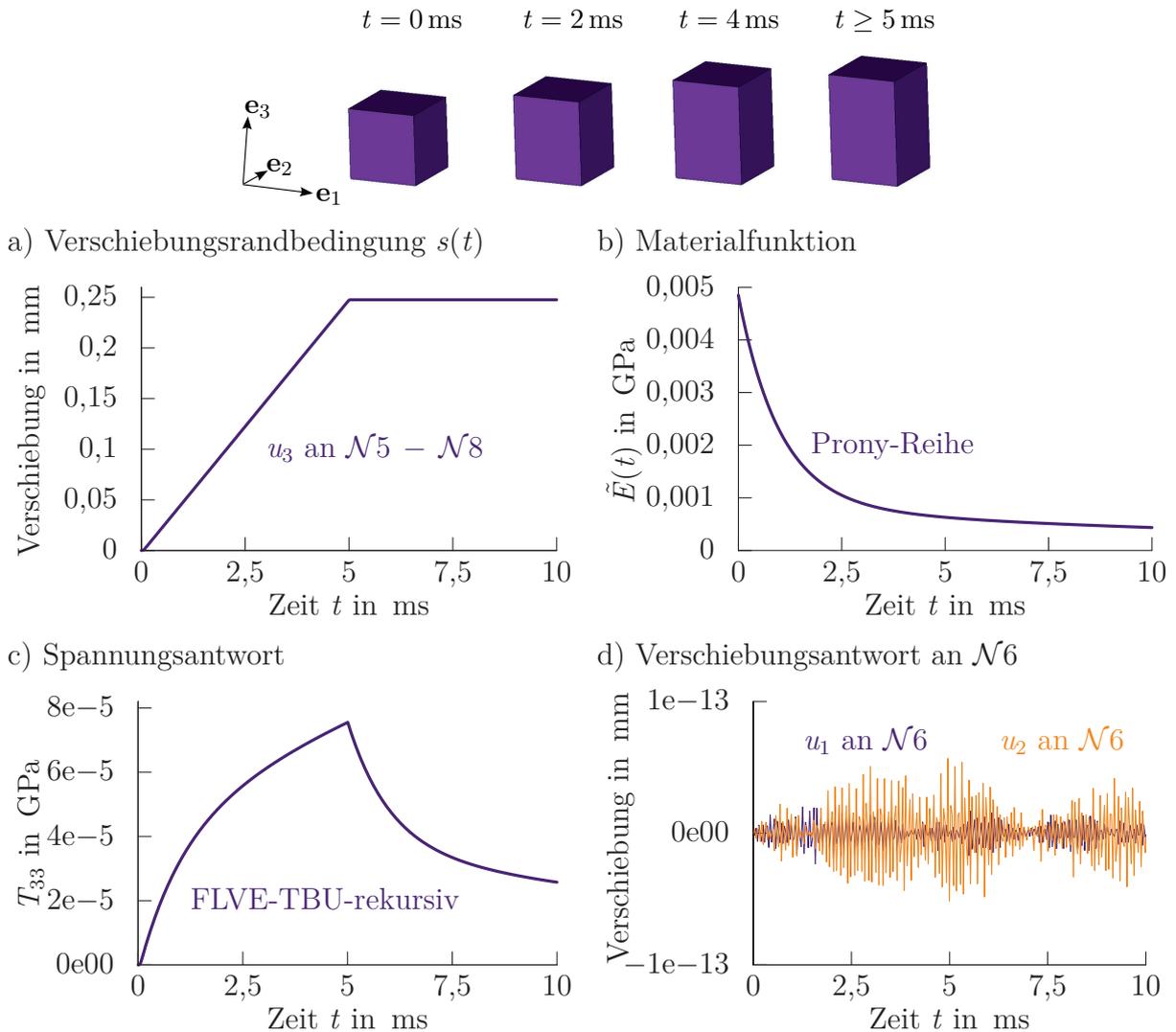


Abbildung 6.2.: Überprüfung der kinematische Einschränkung: Relaxationsversuch mit einer Rampe konstanter Geschwindigkeit und dem Materialmodell FLVE-TBU-rekursiv (Bildreihe mit zehnfach überhöhter Verschiebung)

Im ersten Beispiel zur Untersuchung der kinematischen Einschränkung aus Abbildung 6.2 folgt die Verschiebungsvorgabe $s(t)$ einer Rampenfunktion. Wie bei einem uniaxialen Zugversuch steigt $s(t)$ zunächst mit konstanter Geschwindigkeit an und wird ab $t = 5$ ms festgehalten. Als Materialmodell wird in diesem Beispiel die Konstitutivgleichung FLVE-TBU mit einer Prony-Reihe als Materialfunktion kombiniert und aufgrund des rekursiven Faltungsalgorithmus als FLVE-TBU-rekursiv bezeichnet. Für die Prony-Reihe $\tilde{E}(t)$ aus Abbildung 6.2b ist die wahre Normalspannung $T_{33}(t)$ in Zugrichtung in Abbildung 6.2c dargestellt. Die Spannung steigt so lange an, wie die Verschiebung

zunimmt, und nimmt dann kontinuierlich ab. Diese Spannungsrelaxation bestätigt, dass es sich bei FLVE-TBU um ein viskoelastisches Materialmodell handelt.

Die Bildreihe und die Verschiebungsantwort des Knotens $\mathcal{N}6$ in Abbildung 6.2 zeigen, dass das Modell FLVE-TBU keine Quer- oder Dickendehnung verursacht und die Querschnittsfläche unverändert bleibt. Die kinematische Einschränkung für offenzellige Polymerschäume wird folglich erfüllt. Unter dieser Voraussetzung und für den Sonderfall eines uniaxialen Dehnungszustandes stimmen Biot-, Nominal- und Cauchy-Spannung $T_{B33} = P_{33}^T = T_{33}$ überein. Darüber hinaus führt die kinematische Einschränkung bei einer uniaxialer Zugbelastung zu einer Volumenzunahme des Probekörpers und einem einfachen Zusammenhang zwischen relativem Volumen und der Streckung $\lambda_{\mathbf{U}_1}$ mit $\mathbf{e}_{\mathbf{U}_1} = \mathbf{e}_3$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{Al}{A_0 l_0} = \frac{A_0 l}{A_0 l_0} = \lambda_{\mathbf{U}_1}. \quad (6.2)$$

Für das Modell FLVE-TBU-rekursiv gilt, dass die Eingangsgröße der Materialroutine \dot{U}_{33} während der Rampe konstanter Geschwindigkeit v ebenfalls konstant und proportional zu v ist (vgl. Gl. (6.1)). Darüber hinaus liefert die Cauchy-Spannung T_{33} durch die Übereinstimmung der drei Spannungsmaße $T_{B33} = P_{33}^T = T_{33}$ als gewöhnliche Ausgabegröße direkt das Ergebnis des Faltungsintegrals. Aus diesen Gründen eignet sich das Modell FLVE-TBU-rekursiv sehr gut, um die Eigenschaften der Materialmodelle aus Kapitel 5 darzustellen und wird zusammen mit der Prony-Reihe $\tilde{E}(t)$ aus Abbildung

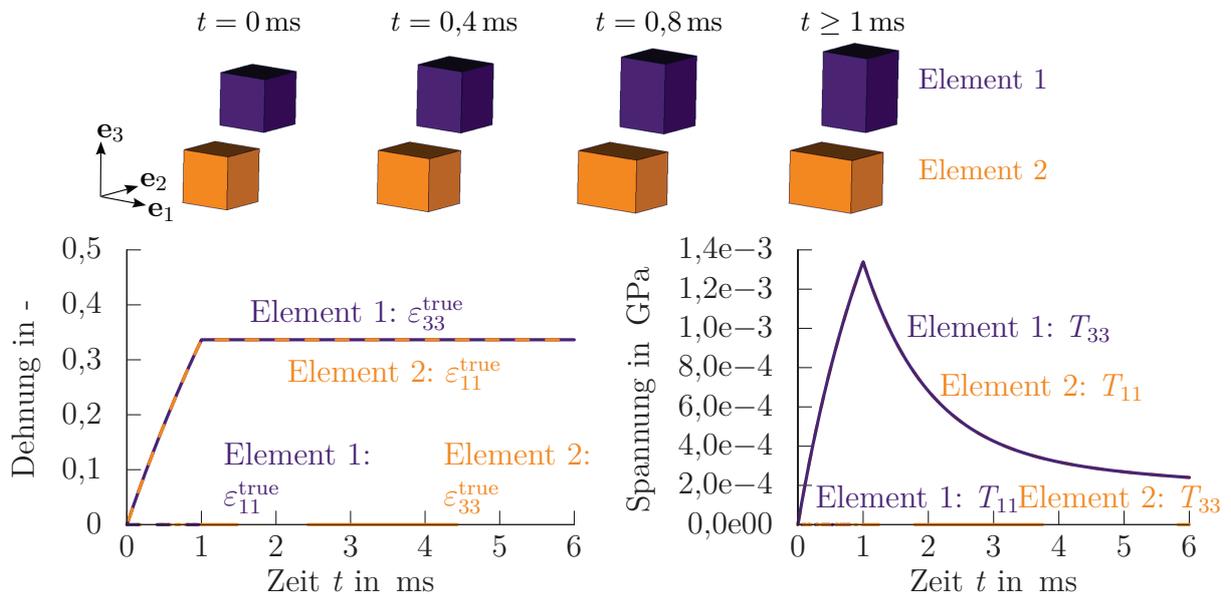


Abbildung 6.3.: Isotropes Materialmodell: Spannungsantwort beim Relaxationsversuch in \mathbf{e}_1 - und \mathbf{e}_3 -Richtung

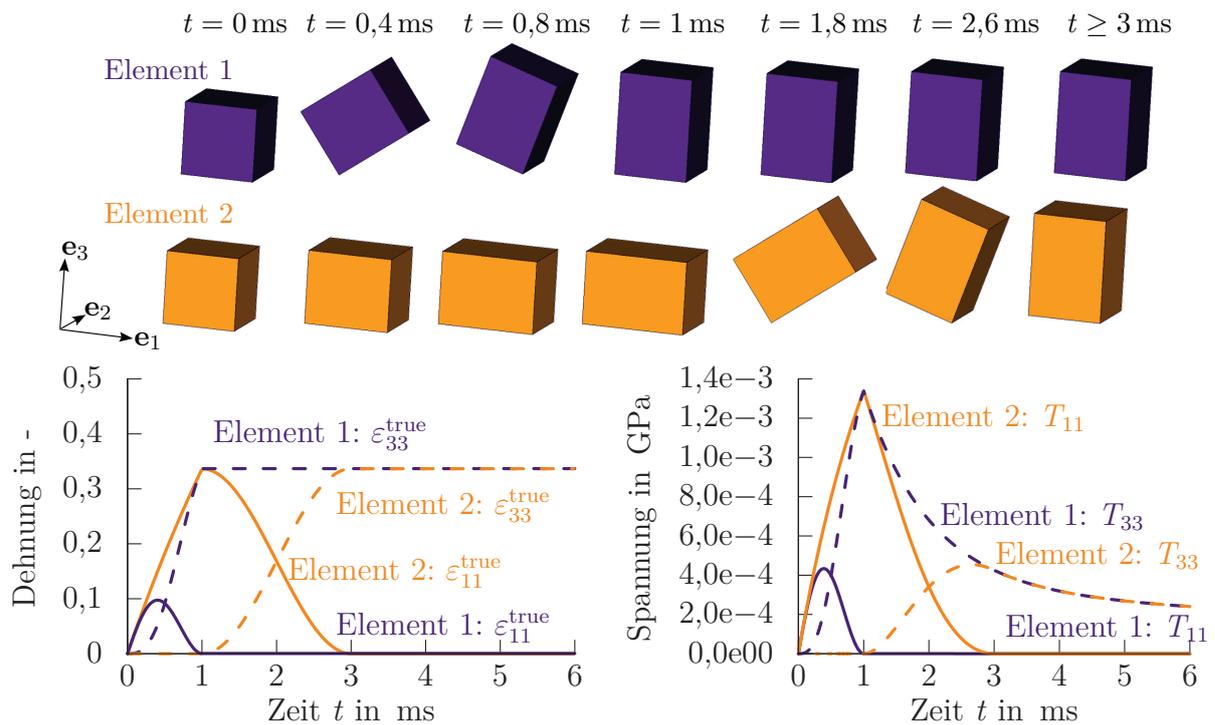


Abbildung 6.4.: Objektives Materialmodell: Spannungsantwort beim Relaxationsversuch mit überlagerter Rotation

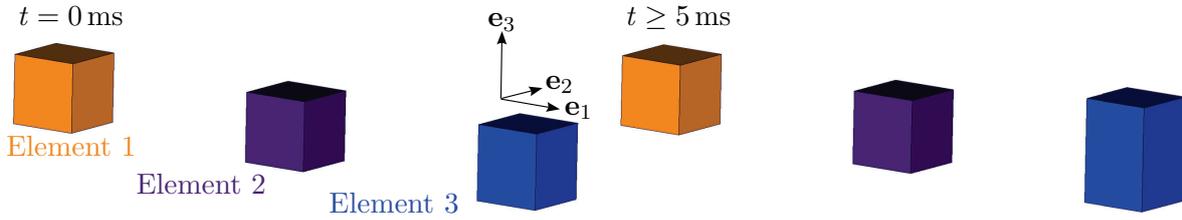
6.2b für die folgenden Beispiele dieses Abschnitts verwendet.

Für isotrope Materialien ist die Spannungsantwort unabhängig von der Belastungsrichtung. Das zweite Beispiel in Abbildung 6.3 zeigt zwei Hexaederelemente, an denen ein Relaxationsversuch einmal in e_3 - und einmal in e_1 -Richtung mit derselben vorgegebenen Verschiebungsfunktion $s(t)$ simuliert wird. Beide Elemente zeigen somit denselben zeitlichen Verlauf der wahren Normaldehnung in Belastungsrichtung. Ebenso stimmen der zeitliche Verlauf und die Höhe der Spannungsantworten $T_{33}(t)$ von Element 1 und $T_{11}(t)$ von Element 2 überein. Dies bestätigt, dass es sich bei FLVE-TBU um ein isotropes Materialmodell handelt.

Die Überlagerung des Relaxationsversuches mit einer Rotation wirkt sich ebenso wenig wie die Belastungsrichtung auf die Spannungshöhe aus. In Abbildung 6.4 rotiert das Element 1 während der Zugbelastung und das Element 2 nach der Zugbelastung um die e_2 -Achse. Nach der Rotation von Element 2 stimmt der Spannungsverlauf $T_{33}(t)$ ab $t \geq 3 \text{ ms}$ beider Elemente überein. Dieses Beispiel zeigt, dass nicht nur die Konstitutivgleichung FLVE-TBU-rekursiv, sondern auch deren numerische Umsetzung objektiv sind.

Dass die anderen Modelle des Kapitels 5 diese Eigenschaften ebenfalls teilen, wird an dieser Stelle nicht explizit dargestellt. Die kinematische Einschränkung, Isotropie und

a) Relaxationsversuch an drei Elementen mit dem Materialmodell FLVE-TBU-rekursiv



b) Verschiebungsrandbedingung $s(t) = u_3(t)$ c) Spannungsantwort $T_{B33}(t) = T_{33}(t)$

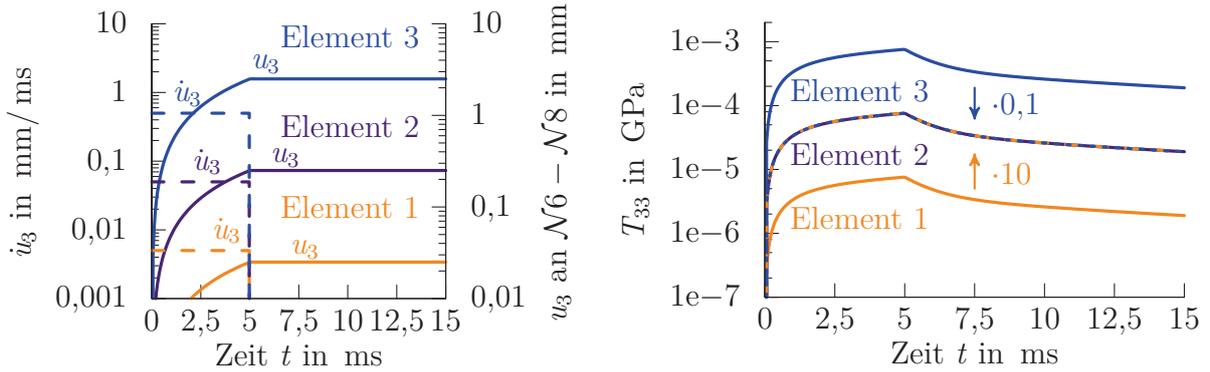
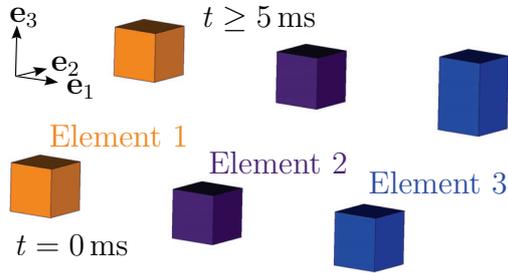


Abbildung 6.5.: FLVE-TBU: Skalierbarkeit der T_{B33} - t -Antworten mit Rampe konstanter Geschwindigkeit $v = l_0 \dot{U}_{33}$ und damit konstanter Dehnrates \dot{U}_{33}

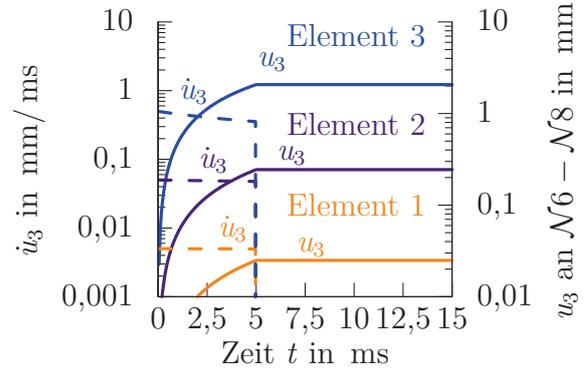
Objektivität bleiben durch die materiell nichtlinearen Erweiterungen zu FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-EQV oder durch die Formulierung in \mathbf{S} und $\dot{\mathbf{E}}$ wie bei FLVE-SE und FNLVE-SE-GR unberührt, da sie auf der Gleichungsstruktur und der Objektivität bzw. Unveränderlichkeit der Spannungs- und Dehnungsmaße bei Starrkörperrotationen beruhen. Namentlich reduzieren sich die Modelle FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-EQV für die genannten Randbedingungen mit konstanter Dehnrates \dot{U}_{33} auf das Modell FLVE-TBU. Wie sich die Formulierung in unterschiedlichen Spannungs- und Dehnungsmaßen auswirkt, wird im nächsten Beispiel deutlich.

Das vierte Beispiel veranschaulicht die Bedeutung der materiellen Linearität für große Deformationen bei den Materialmodellen FLVE-TBU und FLVE-SE. Bei Relaxationsversuchen an einzelnen Elementen können die Randbedingungen so gewählt werden, dass die Eingangsgrößen der Faltungsintegrale für unterschiedliche Elemente in einem konstanten Verhältnis zueinanderstehen. Für die Simulationen in Abbildung 6.5 und 6.6 mit den Materialmodellen FLVE-TBU und FLVE-SE liegt jeweils der Faktor 10 zwischen den Eingangsgrößen des Faltungsintegrals \dot{U}_{33} bzw. \dot{E}_{33} von Element 1 und Element 2 sowie zwischen den Elementen 2 und 3. Dieser Faktor motiviert die logarithmische Darstellung und findet sich auch im Ergebnis des Faltungsintegrals, dem zugehörigen Spannungsmaß, wieder. Für das Materialmodell FLVE-TBU heißt dies, dass ausgehend vom

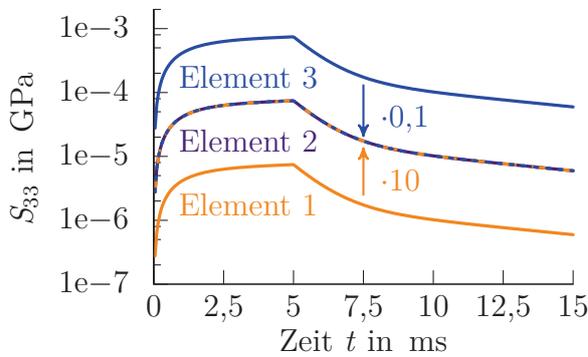
a) Relaxationsversuch an drei Elementen mit dem Materialmodell FLVE-SE-rekursiv



b) Verschiebungsrandbedingung $s(t) = u_3(t)$



c) Spannungsantwort $S_{33}(t)$



d) Spannungsantwort $T_{33}(t)$

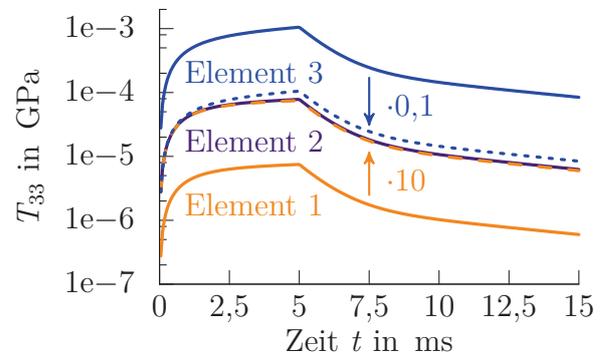


Abbildung 6.6.: FLVE-SE: Skalierbarkeit der S_{33} - t -Antworten mit Rampe abnehmender Geschwindigkeit $v = l_0 \dot{E}_{33} / \sqrt{4 + 4\dot{E}_{33}t}$ bei konstanter Dehnrade \dot{E}_{33}

zeitlichen Verlauf der Biot-Spannung $T_{B33}(t)$ eines Elementes die Spannungsantworten der beiden anderen Elemente festgelegt sind und über das Verhältnis der Eingangsgrößen berechnet werden können (vgl. Abbildung 6.5c). Für das Materialmodell FLVE-SE gilt diese Skalierbarkeit für die Spannungsantwort $S_{33}(t)$ (vgl. Abbildung 6.6c). Die materielle Linearität wird auf diese Weise für beliebige Dehnungsgeschichten sichtbar, bei denen ein konstanter Faktor zwischen den Eingangsgrößen des Faltungsintegrals vorliegt.

In den Simulationen aus Abbildung 6.5 und 6.6 stehen die Eingangsgrößen nicht nur in einem konstanten Verhältnis zueinander, sondern sind auch in der Zeit bis $t = 5$ ms konstant und für die Eingangsgrößen beider Materialmodelle $\dot{U}_{33}(t) = \dot{E}_{33}(t)$ identisch. Während dies gemäß Gl. (6.1) für das Materialmodell FLVE-TBU durch eine konstante Geschwindigkeit

$$v(t) = l_0 \dot{U}_{33} \quad (6.3)$$

erzielt wird, muss die Geschwindigkeit für das Modell FLVE-SE für eine konstante Dehnrate \dot{E}_{33} abnehmen

$$v(t) = l_0 \frac{\dot{E}_{33}}{\sqrt{4 + 4\dot{E}_{33}t}}. \quad (6.4)$$

Durch die Wurzelfunktion im Nenner muss für eine Skalierung der Dehnrate \dot{E}_{33} nicht nur die Höhe, sondern auch der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit angepasst werden (vgl. Abbildung 6.6b).

Nur für sehr kleine Dehnraten und kurze Simulationszeiten kann die Wurzelfunktion als Konstante angenähert werden. Unter der weiteren Annahme kleiner Deformationen führen die Modelle FLVE-TBU und FLVE-SE auf näherungsweise gleiche Spannungsantworten. In diesen Fällen ist auch die Unterscheidung der Spannungsmaße hinfällig. Von Abbildung 6.6c auf Abbildung 6.6d verändert die Umrechnung von $S_{33}(t)$ in $T_{33}(t)$ der Elemente 1 und 2 die Spannungsantwort nur geringfügig. Erst bei höheren Dehnraten und daraus resultierenden größeren Deformationen wie bei Element 3 wird die Umrechnung sichtbar. Die Wahl des Spannungs- und Dehnungsmaßes wird im nächsten Abschnitt über die Modellantworten bei Zugversuchen weiter vertieft.

Als letztes Beispiel dieses Abschnitts beleuchtet der Relaxationsversuch in Abbildung 6.7 die Unterschiede zwischen dem rekursiven und lokalen Faltungsalgorithmus. Nach dem Vergleich ihrer Komplexität in Abschnitt 4.5 stehen hier die Ergebnisse der Faltungsalgorithmen, ihre Spannungsantworten, im Vordergrund.

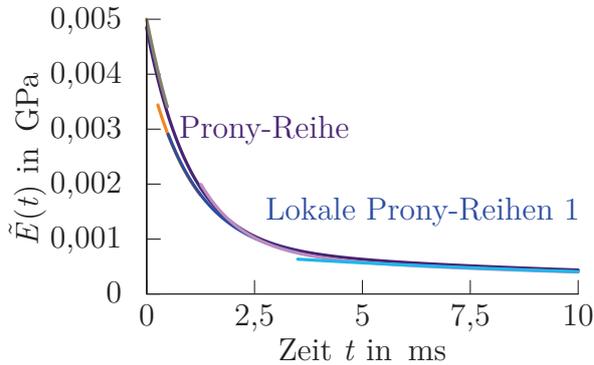
Dazu wird der Relaxationsversuch des ersten Beispiels (vgl. Abbildung 6.2) mit den Materialmodellen FLVE-TBU-lokal 1 und 2 simuliert. Die Spannungsantworten der beiden Modelle stehen dem Ergebnis für FLVE-TBU-rekursiv in Abbildung 6.7b und 6.7d gegenüber. Bei allen drei Modellen steigt die Spannung zunächst an und beginnt zu relaxieren, sobald der Dehnungszustand ab $t \geq 5$ ms konstant gehalten wird.

Während die Spannungsantwort des Modells FLVE-TBU-rekursiv mit Ausnahme des Zeitpunkts $t = 5$ ms einen glatten Verlauf aufweist, überlagern Oszillationen die Spannungsantworten der Modelle FLVE-TBU-lokal. Bei FLVE-TBU-lokal 1 fällt die Spannung zwischen $t = 0,5$ ms und $t = 5$ ms alle 0,25 ms und bei FLVE-TBU-lokal 2 zwischen $t = 1,25$ ms und $t = 5$ ms alle 0,75 ms geringfügig ab. Dieser Spannungsabfall steht in Zusammenhang mit der Intervalleinteilung und der Wahl der lokalen Prony-Reihen.

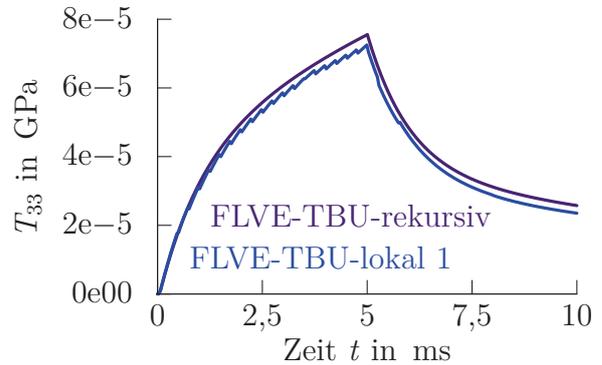
Die Intervalleinteilung beider Modelle FLVE-TBU-lokal beruht auf den Parametern $B = 3$ und $h^* = 0,25$ ms (vgl. Abbildung 6.8), die bereits in Abschnitt 4.3 vorgestellt wurde. Der Zeitschritt liegt bei allen Beispielen bei $\Delta t_i \approx 0,012$ ms und ist damit deutlich kleiner als h^* , sodass bei der Spannungsberechnung keine Integrationsbereiche ausgelassen werden und die direkten Schritte vernachlässigbar sind.

In der Spannungsantwort können Sprünge auftreten, wenn für einen Lösungszeitpunkt t_i in Abbildung 6.8 ein Farbwechsel in horizontaler Richtung parallel zur t -Achse auf

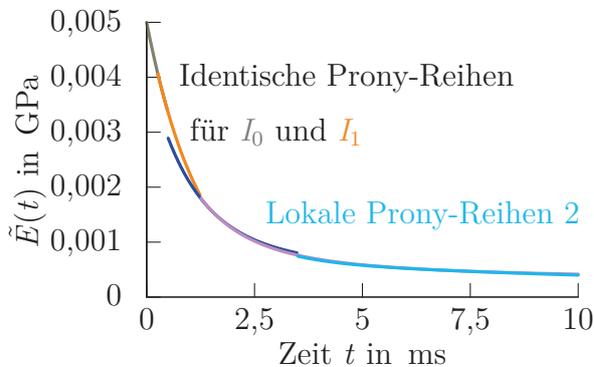
a) Materialfunktion



b) Spannungsantwort



c) Materialfunktion: Lokale Prony-Reihen 2 mit verbesserten Übergängen



d) Spannungsantwort

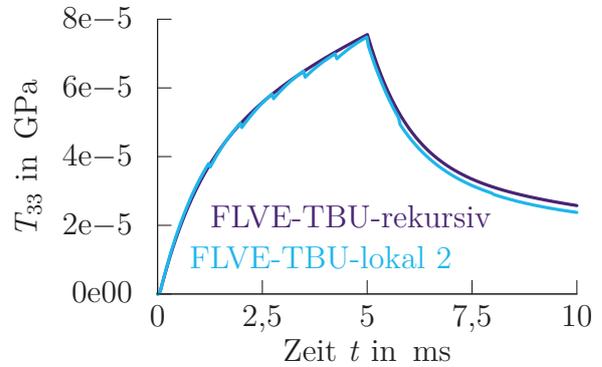


Abbildung 6.7.: Vergleich der Modelle FLVE-TBU-rekursiv und FLVE-TBU-lokal mit den Randbedingungen des Relaxationsversuches aus Abbildung 6.2a

einer beliebigen Höhe u im Vergleich zum letzten Berechnungszeitpunkt t_{i-1} stattfindet. Dann wird die Dehnungsgeschichte des betroffenen Bereiches mit einer anderen Prony-Reihe gefaltet. Beispielsweise trägt die Dehnungsgeschichte zwischen $0 \leq t \leq 0,25$ ms zum Berechnungszeitpunkt $t = 0,504$ ms erstmals nicht mehr durch die Faltung mit der grauen Prony-Reihe des Intervalls I_0 , sondern durch die Faltung mit der orangefarbenen Prony-Reihe des Intervalls I_1 zur Spannung bei, da bei $t = 0,5$ ms ein Farbwechsel vorliegt. Unterscheiden sich die Ergebnisse der Faltung zwischen der aktuellen und vorherigen Prony-Reihe, so wird dies als Sprung in der Spannungsantwort zwischen t_{i-1} und t_i sichtbar.

Für die Intervalleinteilung in Abbildung 6.8 tritt zwischen den orangefarbenen und grauen Integrationsbereichen alle $0,25$ ms, zwischen den orangefarbenen und blauen Bereichen alle $0,75$ ms und zwischen den blauen und violetten Bereichen alle $2,25$ ms ein Farbwechsel auf. Für das Modell FLVE-TBU-lokal 1 wird der Wechsel zwischen grauen und orangefarbenen Integrationsbereichen durch einen Spannungsabfall in Abbildung 6.7b

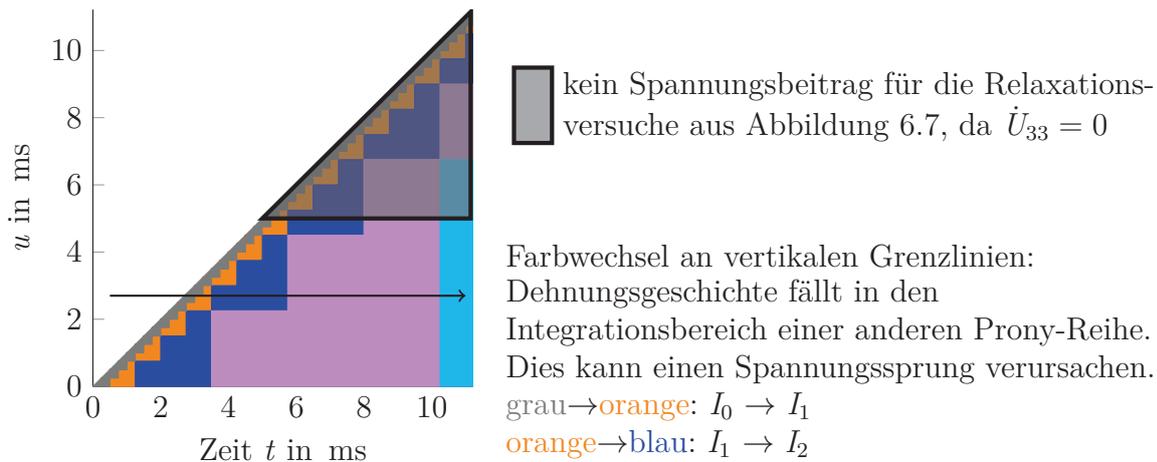


Abbildung 6.8.: Lokaler Faltungsalgorithmus: Einfluss der Integrationsbereiche auf die Spannungsantwort

sichtbar, da die orangefarbene Prony-Reihe des Intervalls I_1 in Abbildung 6.7a unter der grauen Prony-Reihe des Intervalls I_0 liegt und damit zu einem geringeren Spannungsbeitrag führt. Fällt dieser Übergang wie zum Zeitpunkt $t = 3,504$ ms mit weiteren Farbwechseln zusammen, so wird dieser Spannungsabfall zum Teil ausgeglichen.

Die Akkumulation von Sprungdifferenzen, die beliebige Dehnungsgeschichte und die Schnittpunkte von lokalen Prony-Reihen erschweren allgemeine Aussagen darüber, wie stark die Oszillation der Spannungsantwort ausfällt. Für die Zeit $t \geq 5$ ms liefern die grau überlagerten Integrationsbereiche in Abbildung 6.8 aufgrund des konstanten Dehnungszustandes beispielsweise keinen Spannungsbeitrag. Dann werden alleine die Übergänge zwischen den Prony-Reihen der Intervalle I_2 , I_3 und I_4 sichtbar.

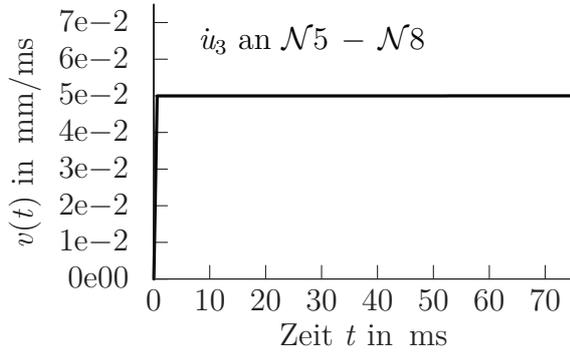
Trotzdem bestimmt die Wahl der lokalen Prony-Reihen in erster Linie die Oszillationen. Die Sprunghöhen können reduziert werden, indem die Übergänge zwischen benachbarten Prony-Reihen so glatt wie möglich gestaltet werden. Neben geringen Sprüngen in der Materialfunktion selbst heißt dies auch, dass die lokalen Prony-Reihen einen gleichartigen Kurvenverlauf im Überlappungsbereich aufweisen sollten. Im Grenzfall handelt es sich um dieselbe Prony-Reihe. Dies wurde für das Modell FLVE-TBU-lokal 2 umgesetzt. Für die Intervalle I_0 und I_1 wird derselbe Parametersatz der Prony-Reihen verwendet, sodass ein deckungsgleicher Übergang zwischen diesen Intervallen entsteht (vgl. Abbildung 6.7c). Dementsprechend sind in der Spannungsantwort in Abbildung 6.7d nur noch alle 0,75 ms Sprünge sichtbar, die auf den Übergängen zwischen orangefarbenen und blauen Integrationsbereichen beruhen.

Abgesehen von den Oszillationen, die durch die Wahl der lokalen Prony-Reihen entstehen, verändert der lokale Faltungsalgorithmus die Eigenschaften der Konstitutiv-

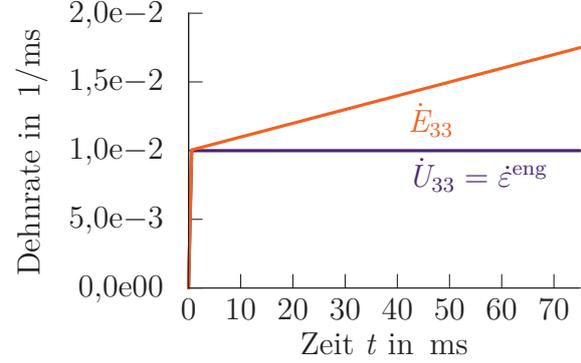
gleichung nicht. Die am Beispiel der Relaxationsversuche gezeigten Merkmale wie die kinematische Einschränkung, die Isotropie und Objektivität bleiben weiterhin erhalten.

6.2. Zugversuche

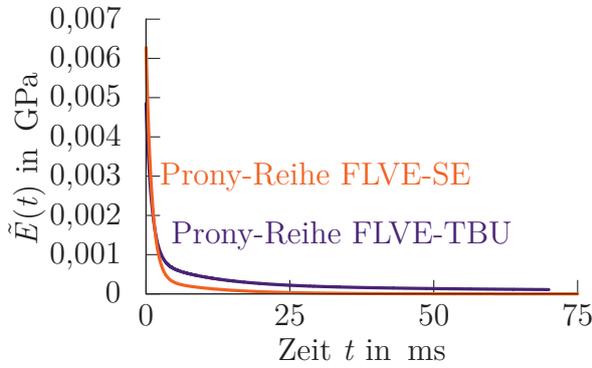
Anhand uniaxialer Zugversuche werden in diesem Abschnitt der Einfluss der Spannungs- und Dehnungsmaße sowie die Nichtlinearität der Konstitutivgleichungen aufgezeigt. Im vorherigen Abschnitt 6.1 wurden die Randbedingungen eines uniaxialen Zugversuches an einem Hexaederelement bereits vorgestellt. Der einzige Unterschied zwischen den dortigen Relaxationsversuchen und den folgenden Zugversuchen besteht darin, dass die Knotenverschiebungen der Elementoberseite für Zugversuche kontinuierlich ansteigen. Das vierte Beispiel des letzten Abschnitts hat bereits gezeigt, dass die Modelle FLVE-TBU und FLVE-SE bei großen Deformationen zu unterschiedlichen Spannungsantworten führen und unterschiedliche Randbedingungen notwendig sind, um eine Skalierbarkeit der Spannungsantwort zu erzielen. Hier wird ausschließlich der Fall betrachtet, bei dem die Abzugsgeschwindigkeit $v(t)$ nach einer vernachlässigbaren Anfangsphase konstant gehalten wird. Für langsame oder moderat dynamische Zug-, Druck- und Schubversuche ist dies die gewöhnliche Versuchsdurchführung und wird auch für die Versuche an Confor-Schaum angewandt. In Abbildung 6.9d ist die Überspannungsantwort des Confor-Schaumes für einen Zugversuch der konstanten Dehnrates $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ dargestellt. Zur Unterscheidung der uniaxialen Versuche wird im Folgenden die Nenndehnrate $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}}$ als Verhältnis der Abzugsgeschwindigkeit v bezogen auf die anfängliche Probenhöhe h_0 in Belastungsrichtung angegeben, ohne diese auf ein Koordinatensystem zu beziehen. Um die Nenndehnrate $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ bei einem Hexaederelement der Kantenlänge $l_0 = 5 \text{ mm}$ zu erhalten, müssen die Knoten der Elementoberseite der Geschwindigkeitsrandbedingung $v(t)$ aus Abbildung 6.9a folgen. Als Materialfunktion der Modelle FLVE-SE und FLVE-TBU wurden für das Beispiel die Prony-Reihen in Abbildung 6.9c ausgewählt, die für den Versuch an Confor-Schaum die beste Übereinstimmung zeigen. Aufgrund des unterschiedlichen Verlaufs der Eingangsgröße (vgl. Abbildung 6.9b) sind für die beiden Modelle andere Materialfunktionen notwendig, um eine ähnliche T_{33} -Spannungsantwort zu erhalten. Während der beste Fit des Modells FLVE-TBU-rekursiv jedoch nahezu vollständig auf der Versuchskurve liegt, weicht der Fit für FLVE-SE-rekursiv insbesondere für Dehnungen $\varepsilon_{33}^{\text{eng}} > 0,25$ von der Versuchskurve ab. Dass das Modell FLVE-SE-rekursiv keine bessere Übereinstimmung liefert, ist dem Umstand geschuldet, dass der Verlauf der Versuchskurve nicht in der Modellantwort enthalten ist. Dazu tragen zwei Dinge bei. Zum einen erfordert die Formulierung in \mathbf{S} und

a) Geschwindigkeitsrandbedingung $v(t)$ 

b) Eingangsgröße des Faltungsintegrals



c) Materialfunktion



d) Spannungsantwort

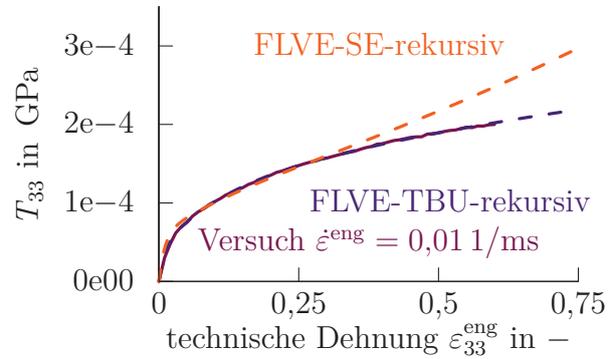


Abbildung 6.9.: Vergleich der Modelle FLVE-TBU-rekursiv und FLVE-SE-rekursiv am Zugversuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$

$\dot{\mathbf{E}}$ eine zusätzliche Transformation, die für die hier geltenden Randbedingungen

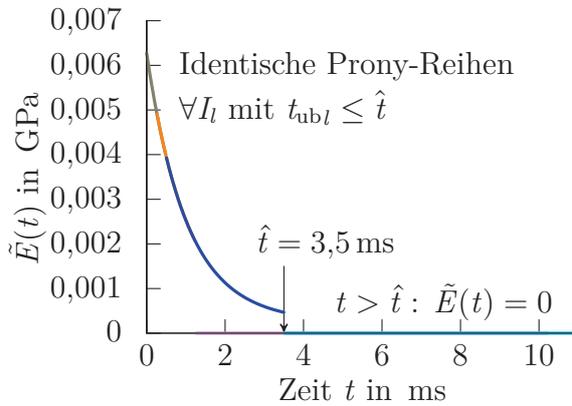
$$T_{33}(t) = S_{33}(t)F_{33}(t) = S_{33}(t)(1 + \dot{U}_{33}t) \quad (6.5)$$

lautet und bereits unter der Annahme $S_{33}(t) = \text{const.}$ auf einen linearen Anstieg der Cauchy-Spannung in der Zeit führen würde. Zum anderen steigt die Spannungsantwort $S_{33}(t)$ jedoch für sich genommen für große Zeiten $t \rightarrow \infty$ bereits linear an. Wie die analytische Lösung des Modells FLVE-SE-rekursiv für $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = \dot{U}_{33}$ zeigt, nähert sich $S_{33}(t)$ einer schiefen Asymptote an

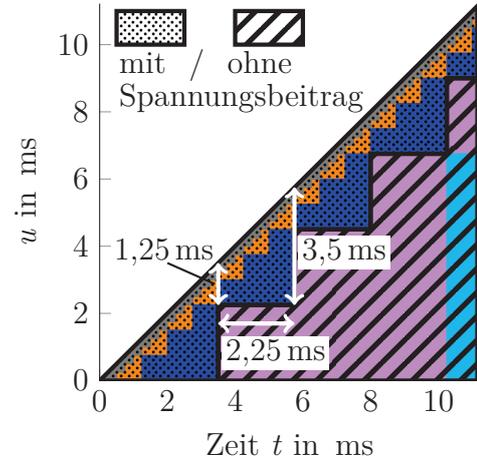
$$S_{33}(t) = \dot{U}_{33} \left(\sum_{j=1}^{N_J} \frac{\tilde{E}_j}{\beta_j} (1 - e^{-\beta_j t}) - \dot{U}_{33} \sum_{j=1}^{N_J} \frac{\tilde{E}_j}{\beta_j^2} (1 - e^{-\beta_j t} - \beta_j t) \right), \quad (6.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} S_{33}(t) = \sum_{j=1}^{N_J} \left(\dot{U}_{33} \frac{\tilde{E}_j}{\beta_j} - \dot{U}_{33}^2 \frac{\tilde{E}_j}{\beta_j^2} \right) + \dot{U}_{33}^2 \sum_{j=1}^{N_J} \frac{\tilde{E}_j}{\beta_j} t.$$

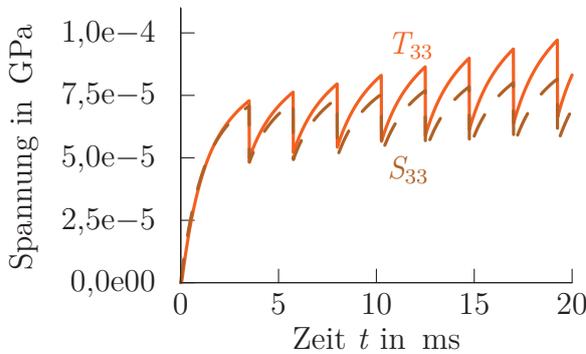
a) Lokale Prony-Reihen



b) Integrationsbereiche für $\hat{t} = 3,5$ ms



c) Spannungsantwort FLVE-SE-lokal



d) Spannungsantwort FLVE-TBU-lokal

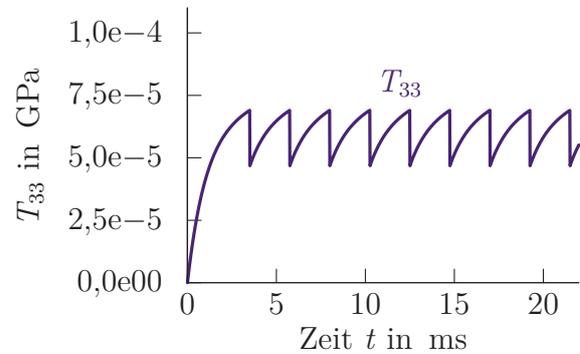


Abbildung 6.10.: FLVE-SE-lokal und FLVE-TBU-lokal mit Steifigkeitsabfall bei $\hat{t} = 3,5$ ms: Spannungsanstieg vs. konstante Spannung beim Zugversuch $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 0,01$ 1/ms

Versuchskurven mit abnehmender Steigung wie in Abbildung 6.9d können folglich nicht durch das Modell FLVE-SE-rekursiv abgebildet werden.

An dieser Stelle stellt sich die Frage, ob die Formulierung FLVE-SE für die Modellierung von Polymerschäumen ausscheidet oder ob die Kombination von \mathbf{S} und $\dot{\mathbf{E}}$ mit einer Prony-Reihe in FLVE-SE-rekursiv ungünstig gewählt ist. Wenn eine andere Form der Materialfunktion den Spannungsanstieg in $S_{33}(t)$ und damit in $T_{33}(t)$ herabsetzen und zu einer besseren Übereinstimmung mit der Versuchskurve führen kann, dann scheidet lediglich der rekursive Faltungsalgorithmus für FLVE-SE aus.

Um die Spannung für $\varepsilon_{33}^{\text{eng}} > 0,25$ des Zugversuches aus Abbildung 6.9 zu reduzieren, liegt es nahe, den Abfall der Materialfunktion zu beschleunigen. Dazu können verschiedene Ansätze für die Materialfunktion untersucht und das Faltungsintegral analytisch gelöst werden. Im Folgenden veranschaulicht die Simulation mit dem Modell FLVE-SE-lokal die wesentlichen Erkenntnisse.

Mithilfe des lokalen Faltungsalgorithmus kann der Verlauf einer beliebigen, monoton fallenden Materialfunktion approximiert werden, in dem die Prony-Reihen der einzelnen Intervalle die Materialfunktion stückweise abbilden. Der schnellst mögliche Steifigkeitsabfall besteht darin, die Materialfunktion ab einem bestimmten Zeitpunkt auf null zu setzen. Für den lokalen Faltungsalgorithmus kann dies einfach umgesetzt werden, indem die Prony-Koeffizienten ab einem bestimmten Intervall zu null gewählt werden. In Abbildung 6.10a verschwinden die Prony-Koeffizienten aller Prony-Reihen für $t > \hat{t} = 3,5$ ms und es gilt $\tilde{E}(t) = 0$. Die Intervalle zuvor teilen sich dieselben Prony-Koeffizienten, um den schlagartigen Abfall bei \hat{t} nicht mit Oszillationen durch Übergänge anderer Integrationsbereiche zu überlagern. Die lokalen Prony-Reihen nähern dabei den Beginn der Materialfunktion aus Abbildung 6.9c mit wenigen Prony-Termen an und führen somit auf die korrekte Anfangssteifigkeit des Zugversuches $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01$ 1/ms.

Da es sich bei \hat{t} um eine reguläre Intervallgrenze für $B = 3$ und $h^* = 0,25$ ms handelt, entfallen die Intervalle mit $t_{\text{ubl}} > \hat{t}$ vollständig bei der Spannungsberechnung. In Abbildung 6.10b kennzeichnet die Schraffierung die Integrationsbereiche ohne Spannungsbeitrag. Die Integrationsbereiche mit Spannungsbeitrag liegen unmittelbar unterhalb der Winkelhalbierenden und sind durch Punkte hervorgehoben.

Kombiniert man die lokalen Prony-Reihen aus Abbildung 6.10a mit den Modellen FLVE-SE-lokal und FLVE-TBU-lokal, so erhält man für den Zugversuch mit $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01$ 1/ms die Spannungsantworten der Abbildungen 6.10c und 6.10d. Alle Spannungsantworten oszillieren ab $t > \hat{t}$ mit der Länge des letzten Intervalls, das eine nicht verschwindende Prony-Reihe besitzt und damit einen Spannungsbeitrag liefert, als Periodendauer. Für dieses Beispiel ist dies das Intervall I_2 mit der dunkelblauen Prony-Reihe in Abbildung 6.10a (vgl. Abbildung 4.1 zur Intervalleinteilung). Die Periodendauer kann ebenfalls in Abbildung 6.10b als Länge des dunkelblauen Integrationsbereiches abgelesen werden. Sie ist gleichzeitig die Stufenbreite des schraffierten Integrationsbereiches und beträgt für das Beispiel 2,25 ms.

Da in diesem Beispiel alle Prony-Reihen entweder dieselben oder verschwindende Prony-Koeffizienten besitzen, resultiert die Sprunghöhe alleine aus dem Unterschied, ob für die Spannungsberechnung nur die letzten 1,25 ms oder die letzten 3,5 ms der Dehnungsgeschichte ausgehend vom aktuellen Lösungszeitpunkt berücksichtigt werden. Diese Zeiten sind in Abbildung 6.10b als Minimal- und Maximalabstand des Integrationsbereiches ohne Spannungsbeitrag zur Diagonalen ablesbar. Ohne die Intervalleinteilung würden immer die letzten 3,5 ms der Dehnungsgeschichte zur Spannung beitragen, da für diese Zeitspanne $\tilde{E}(t) > 0$ gilt. Folglich geben die lokalen Spannungsmaxima an, wie die Spannungsantwort ohne Intervalleinteilung verlaufen würde.

Für $S_{33}(t)$ ist in Abbildung 6.10c ersichtlich, dass diese Spannungsmaxima ansteigen und der beschleunigte Abfall der Materialfunktion die Spannungszunahme nicht verhindert. Die Ursache hierfür liegt in der Eingangsgröße des Faltungsintegrals des Modells FLVE-SE. Für eine konstante Geschwindigkeit steigt $\dot{E}_{33}(t)$ gemäß Gl. (6.1) und wie in

Abbildung 6.9b dargestellt linear in der Zeit an. Dies hat zur Folge, dass die Faltung mit einer immer größeren Dehnrage erfolgt. Da die Materialfunktion unverändert bleibt, liefert die Faltung folglich eine immer größere Spannung. Die Umrechnung in T_{33} verstärkt den Spannungsanstieg zusätzlich. Als Konsequenz kann das Modell FLVE-SE nur Zugversuche mit zunehmender Spannungsrate $\dot{T}_{33}(t)$ abbilden, was dem Verhalten von Confor-Schaum widerspricht. Ähnliche Widersprüche, die auf der Verwendung von \mathbf{E} und \mathbf{S} beruhen, sind in BATRA (1998) und BATRA UND YU (1999) aufgeführt.

Mit der Erkenntnis, dass die Eingangsgröße des Faltungsintegrals maßgeblichen Einfluss auf den Spannungsverlauf nimmt und die ausschließlich zeitabhängige Materialfunktion dies nicht ausgleichen kann, wurden verschiedene Kombinationen von dualen Spannungs- und Dehnungsmaßen untersucht. Die Konstitutivgleichung aus Abschnitt 3.3.1 in $\mathring{\mathbf{T}}$ und \mathbf{D} scheidet ebenfalls aus, da bei Zugversuchen konstanter Geschwindigkeit $D_{33}(t)$ immer geringer wird (vgl. Gl. (6.1)) und folglich auch $T_{33}(t)$ ab einem gewissen Zeitpunkt abnimmt. Die Zugversuche an Confor-Schaum zeigen einen Spannungsabfall nur in Zusammenhang mit einem Riss der Schaumprobe, sodass nicht die viskoelastische Überspannung, sondern ein Schädigungs- oder Versagensmodell den Spannungsabfall verursachen sollte.

Im Gegensatz zu $\dot{E}_{33}(t)$ und $D_{33}(t)$ bleibt \dot{U}_{33} während des Zugversuches konstanter Geschwindigkeit unverändert. Die Faltung mit einer konstanten Eingangsgröße führt in Abbildung 6.9d auf lokale Maximalwerte konstanter Spannung. Ein Spannungsanstieg kann durch eine Fortführung der Materialfunktion über \hat{t} hinaus erzeugt werden, wobei die Spannungsrate immer geringer wird. Die einzelnen Versuchsdaten des Confor-Schaumes mit einem konstanten oder ansteigenden Spannungsverlauf können folglich mit dem materiell linearen Modell FLVE-TBU abgebildet werden. Aus diesem Grund beschränken sich die weiteren Untersuchungen materiell linearer Modelle auf FLVE-TBU.

Abgesehen von dem Wechsel auf ein anderes Spannungs- und Dehnungsmaß besteht auch die Möglichkeit, den Anstieg der Eingangsgröße durch eine materiell nichtlineare Konstitutivgleichung zu kompensieren. Wenn negative Materialfunktionen zulässig sind, kann das Green-Rivlin-Modell FNLVE-SE-GR den Spannungsanstieg ausgleichen. In Abbildung 6.11 genügt ein Modell FNLVE-SE-GR-rekursiv dritter Ordnung mit den Materialfunktion $\tilde{E}_1(t) > 0$, $\tilde{E}_2(t) = 0$ und $\tilde{E}_3(t) < 0$, um den Zugversuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ abzubilden. Allerdings resultiert die Nichtlinearität beim Modell FNLVE-SE-GR-rekursiv darin, dass das Ergebnis des linearen Faltungsintegrals gemäß der Ordnung der Materialfunktion potenziert wird. Folglich bleibt der Anstieg des Faltungsintegrals aufgrund der zunehmenden Dehnrage weiterhin bestehen. Im Unterschied zu FLVE-SE wirkt jedoch die negative Spannung S_{33} der dritten Ordnung dem Spannungsanstieg von S_{33} der ersten Ordnung entgegen und führt zu einer sehr guten Übereinstimmung zwischen Simulations- und Versuchskurve des Zugversuches $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$. Für den Dehnungsbereich außerhalb der Zielgrößenberechnung der Anpassung wächst S_{33} der dritten Ord-

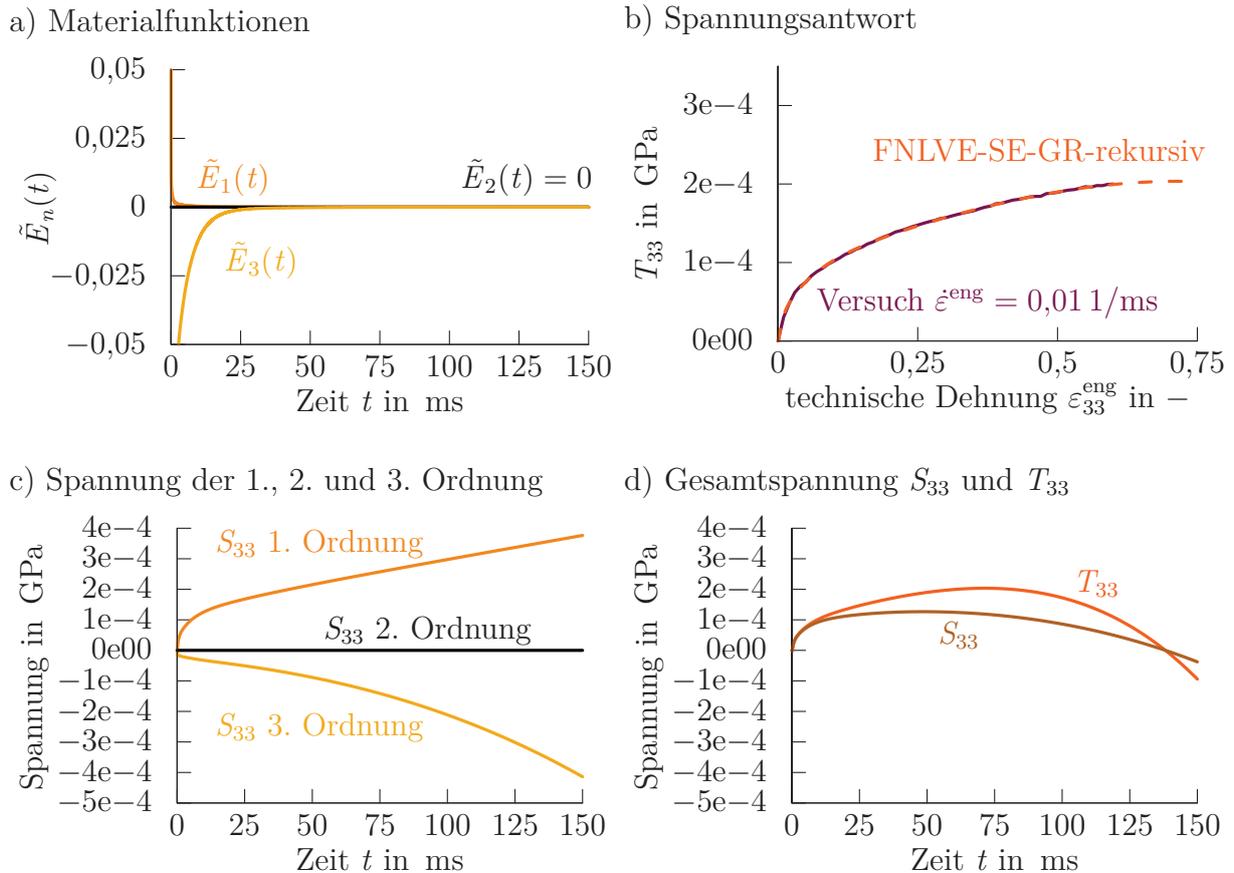


Abbildung 6.11.: Spannungsantworten des Green-Rivlin-Modells dritter Ordnung FNLVE-SE-GR-rekursiv für den Zugversuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$

nung betragsmäßig jedoch schneller an als S_{33} der ersten Ordnung und lässt die Gesamtspannung abnehmen, bis diese schließlich sogar in den negativen Wertebereich abfällt. Dieses Verhalten, dass unter Zugbelastung eine Druckspannung entsteht, widerspricht dem Materialverhalten von Confor-Schaum.

Durch eine Erweiterung der Zielgrößenberechnung oder eine Erhöhung der Modellordnung ist es möglich, den Spannungsabfall aus dem Zielbereich zu entfernen. Die Parameterbestimmung für beliebige Dehnungsgeschichten auf physikalische Verläufe generell einzuschränken und materielle Stabilität zu gewährleisten, ist jedoch aufgrund der Polynomstruktur für das Modell FNLVE-SE-GR sehr schwierig.

Erstens beeinflussen alle Terme bis zur fünften Ordnung die Spannungsantwort zu allen Zeiten. Dadurch müssen alle Materialfunktionen gleichzeitig variiert werden, um eine Übereinstimmung aller Versuchsdaten zu erzielen.

Zweitens legen nicht nur die Materialfunktionen, sondern auch die Dehnungsgeschichten fest, wann welche Ordnung die Spannungsantwort dominiert. Die Parameteridentifikati-

on kann dabei nur eine endliche Anzahl an Dehnungsgeschichten berücksichtigen. Wie in LOCKETT (1972) dargelegt, kann das Green-Rivlin-Modell als polynomiale Annäherung keine Vorhersage über Dehnungsbereiche oder Belastungszustände treffen, die nicht Teil der Parameteridentifikation sind.

Um darüber hinaus materielle Stabilität zu gewährleisten, kann die Parameteridentifikation mit Nebenbedingungen eingeschränkt werden. Diese Nebenbedingungen müssen drittens jedoch sehr allgemein gewählt werden, da die Gefahr materieller Instabilitäten nicht nur besteht, indem die Spannungsverläufe in unphysikalische Wertebereiche führen, sondern auch, wenn sich lokale Spannungsmaxima und -minima bilden, wie sie Polynome fünfter Ordnung zulassen.

In EFFINGER U. A. (2014) ist das Modell FNLVE-SE-GR-rekursiv fünfter Ordnung für einen eingeschränkten Dehnungsbereich angepasst worden. Eine Bestimmung der Materialparameter außerhalb dieses Dehnungs- und Dehnratenbereiches ist nicht gelungen. Aus diesen Gründen wird das Green-Rivlin-Modell im Folgenden nicht weiter betrachtet.

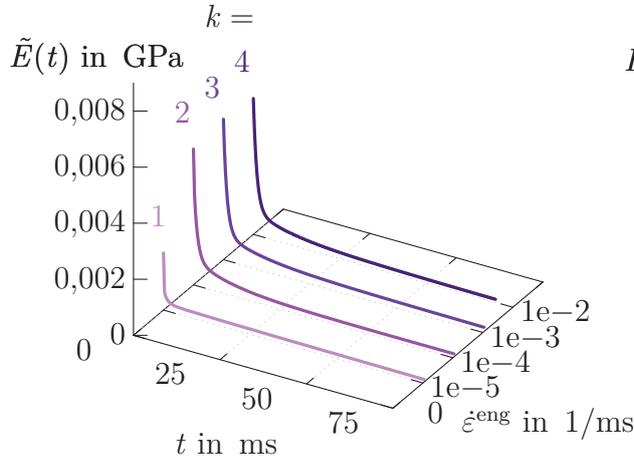
Um eine materiell nichtlineare Konstitutivgleichung zu erhalten, sind die in Kapitel 5 vorgestellten Erweiterungen der Materialfunktion auf eine Abhängigkeit von einer Vergleichsdehnrate oder den Hauptdehnraten auch in der Formulierung mit \mathbf{S} und \mathbf{E} denkbar und durch den modularen Aufbau der Materialroutine einfach umzusetzen. Muss diese Möglichkeit jedoch genutzt werden, um einen einzelnen Zugversuch anzupassen, so erhöht sich die Anzahl an Unbekannten signifikant. Neben der Steifigkeit \tilde{E}_j jedes Prony-Terms muss zusätzlich dessen Dehnratenabhängigkeit ermittelt werden. Deshalb wird hier der Weg gewählt, mit dem Modell FLVE-TBU weiterzuarbeiten und eine nichtlineare Erweiterung erst durchzuführen, um Versuche unterschiedlicher Dehnrate abzubilden.

Zunächst werden die Zugversuche einzeln betrachtet. Abbildung 6.9 zeigte bereits die Übereinstimmung des Modells FLVE-TBU-rekursiv mit dem Zugversuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$. Für die Dehnraten $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 1\text{e-}5, 1\text{e-}4, \text{ und } 1\text{e-}3 \text{ 1/ms}$ wurde ebenfalls jeweils eine Anpassung mit diesem Modell durchgeführt, deren Ergebnisse als Spannungs-Zeit-Antworten in Abbildung 6.12c dargestellt sind. In Abbildung 6.12a sind die zugehörigen Prony-Reihen in Abhängigkeit der Zeit und der Nenndehnrate des Zugversuches aufgetragen und Abbildung 6.12b zeigt ihre Spektren (β_j/\tilde{E}_j) ebenfalls in Abhängigkeit der Nenndehnrate. Dass für jeden Zugversuch $\dot{\epsilon}_k^{\text{eng}}$ eine andere Prony-Reihe erforderlich ist, bestätigt, dass es sich um nichtlinear viskoelastisches Materialverhalten handelt. Wäre das Materialverhalten linear viskoelastisch, so würden sich die Spannungs-Zeit-Kurven des Modells FLVE-TBU-rekursiv in Abbildung 6.12c durch einen konstanten Faktor unterscheiden.

Um alle Zugversuche mit nur einem Parametersatz abzubilden, wird das Modell FLVE-TBU-rekursiv um eine Dehnratenabhängigkeit ergänzt. Dazu werden die Moduln \tilde{E}_j nicht mehr als Konstanten, sondern als Kurven $\tilde{E}_j(\dot{\gamma})$ bereitgestellt. Im Gegensatz zur

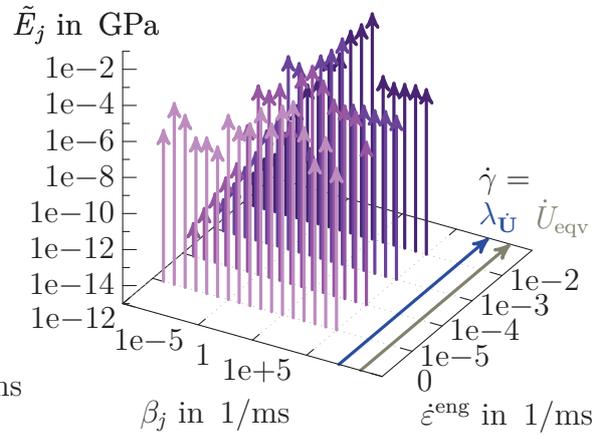
a) Materialfunktionen für FLVE-TBU

Jeder Zugversuch $\dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}}$ erfordert eine eigene Prony-Reihe.

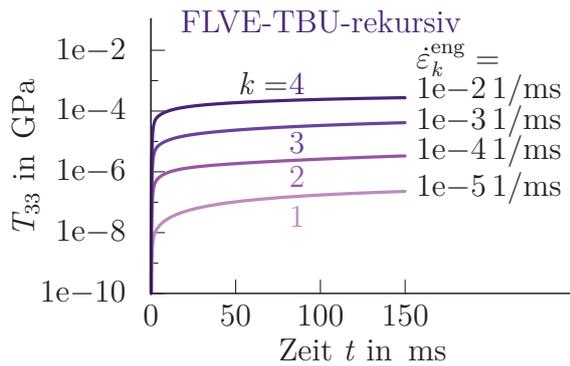


b) Eingabe der Prony-Reihen als Spektren

FLVE-TBU-rekursiv: (β_j/\tilde{E}_j) je $\dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}}$
 FNLVE-TBU-HS-rekursiv: $(\beta_j/\tilde{E}_j(\lambda\dot{u}))$
 FNLVE-TBU-EQV-rekursiv: $(\beta_j/\tilde{E}_j(\dot{u}_{\text{eqv}}))$



c) Vier konstante Parametersätze



d) Ein dehnratenabhängiger Parametersatz

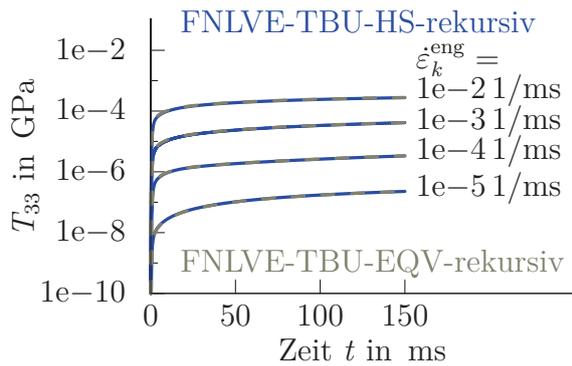


Abbildung 6.12.: Spannungsantworten der dynamischen Zugversuche $\dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}}$ mit der Geschwindigkeitsrandbedingung nach Abbildung 6.9 (skaliert): Der Parametersatz für FNLVE-TBU-HS und -EQV umfasst alle vier Prony-Reihen und bildet aufgrund seiner Dehnratenabhängigkeit alle Zugversuche richtig ab.

Kurvendefinition nach Gl. (4.3) erfolgt für diese Kurven keine Extrapolation über den Eingabebereich der Dehnrate hinaus

$$\tilde{E}_j(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \tilde{E}_{j1} & \text{falls } \dot{\gamma} \leq \dot{\varepsilon}_1^{\text{eng}}, \\ \frac{\tilde{E}_{jk+1} - \tilde{E}_{jk}}{\dot{\varepsilon}_{k+1}^{\text{eng}} - \dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}}} (\dot{\gamma} - \dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}}) + \tilde{E}_{jk} & \text{falls } \dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}} \leq \dot{\gamma} < \dot{\varepsilon}_{k+1}^{\text{eng}}, \\ \tilde{E}_{jN_K} & \text{falls } \dot{\gamma} \geq \dot{\varepsilon}_{N_K}^{\text{eng}}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Während für das Modell FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾-rekursiv die Kurven mit den Dehnraten $\dot{\gamma} = \lambda_{\dot{U}_1}, \lambda_{\dot{U}_2}$ und $\lambda_{\dot{U}_3}$ ausgewertet werden, genügt für das Modell FNLVE-TBU-EQV-rekursiv die Vergleichsdehnrates $\dot{\gamma} = \dot{U}_{\text{eqv}}$. In Abbildung 6.12b ist die Auswertung durch einen blauen und einen grauen Pfeil gekennzeichnet. Der Parametersatz der Modelle FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾-rekursiv und FNLVE-TBU-EQV-rekursiv setzt sich folglich aus allen Spektren der vier Prony-Reihen zusammen.

In Abbildung 6.12d sind die Spannungs-Zeit-Antworten für die dynamischen Zugversuche der beiden materiell nichtlinearen Modelle dargestellt. Wie zu erkennen, ist es durch diese Erweiterung möglich, mit einem Parametersatz dieselben Spannungsantworten wie für das Modell FLVE-TBU-rekursiv mit vier Parametersätzen zu erzeugen. Da für die uniaxiale Belastung ein konstantes Hauptachsensystem vorliegt und $\dot{U}_{33}(t) = \dot{U}_{\text{eqv}}(t) = \lambda_{\dot{U}_1}(t)$ sowie $\lambda_{\dot{U}_2}(t) = \lambda_{\dot{U}_3}(t) = 0$ gilt, führen zudem die beiden materiell nichtlinearen Modelle auf dieselben Ergebnisse.

6.3. Druckversuche

Uniaxiale Druckversuche werden mit denselben Modellen wie bereits die Relaxations- und die uniaxialen Zugversuche simuliert (vgl. Abbildung 6.1). Für Druckversuche konstanter Geschwindigkeit muss allein das Vorzeichen der Geschwindigkeitsrandbedingung nach Abbildung 6.9a umgekehrt werden.

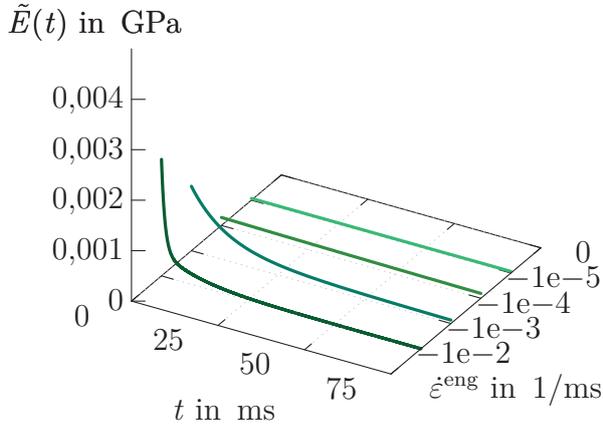
Die Schwierigkeiten der Anpassung uniaxialer Druckversuche stimmen im Wesentlichen mit den Schwierigkeiten bei der Anpassung uniaxialer Zugversuche überein. Während \dot{U}_{33} wie beim Zugversuch konstant bleibt, nimmt der Betrag $|\dot{E}_{33}(t)|$ kontinuierlich ab und verursacht damit eine betragsmäßige Abnahme der Druckspannung $|\dot{T}_{33}(t)|$. Bei betragsmäßig konstanter oder monoton wachsender Druckspannung $|\dot{T}_{33}(t)|$ im Versuch ist die Anpassung mit einer Prony-Reihe folglich nur mit dem Modell FLVE-TBU möglich.

In Abbildung 6.13a sind die Prony-Reihen als Ergebnisse der Anpassung für die dynamischen Druckversuche $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = -1\text{e-}5$, $-1\text{e-}4$ und $-1\text{e-}3$ 1/ms mit dem Modell FLVE-TBU-rekursiv zu sehen. In Abbildung 6.13b erweitern die Spektren dieser Prony-Reihen die Darstellung aus Abbildung 6.12b auf negative Dehnratenwerte. Während die Hauptdehnraten $\lambda_{\dot{U}_k}$ Werte aus dem ganzen Dehnratenbereich annehmen können, ist die Vergleichsdehnrates \dot{U}_{eqv} auf den positiven Wertebereich beschränkt. Dieser Unterschied wird durch die unterschiedlichen Pfeillängen und -positionen verdeutlicht.

Wie die Darstellung der Eingangsgrößen des uniaxialen Druckversuches der Nenndehnrates $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = -0,01$ 1/ms in Abbildung 6.13c zeigt, verschwinden alle Komponenten von \dot{U} mit Ausnahme von $\dot{U}_{33}(t) < 0$ und es gilt $\dot{U}_{\text{eqv}}(t) = |\dot{U}_{33}(t)|$. Zudem führt diese Belastung auf ein konstantes Hauptachsensystem, wobei eine Achse parallel zur Belas-

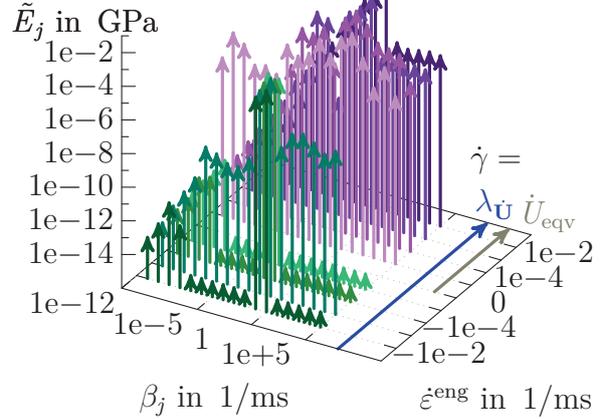
a) Materialfunktionen für FLVE-TBU

Jeder Druckversuch $\dot{\epsilon}_k^{\text{eng}}$ erfordert eine eigene Prony-Reihe.

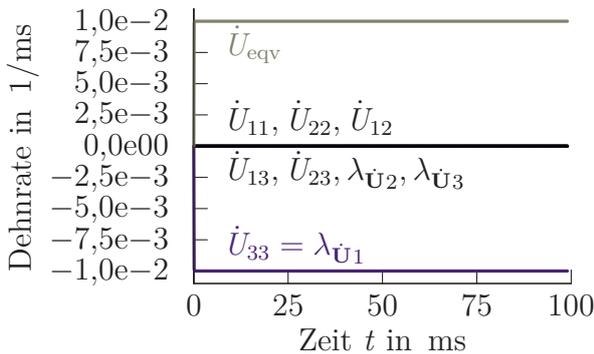


b) Eingabe der Prony-Reihen als Spektren

FNLVE-TBU-HS-rekursiv: $(\beta_j / \tilde{E}_j(\lambda_{\dot{U}}))$
 FNLVE-TBU-EQV-rekursiv: $(\beta_j / E_j(U_{\text{eqv}}))$
 Zugparameter $\dot{\epsilon}_k^{\text{eng}} > 0$
 Druckparameter $\dot{\epsilon}_k^{\text{eng}} < 0$



c) $\dot{U}(t)$ für $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -0,01 \text{ 1/ms}$



d) Ein dehnratenabhängiger Parametersatz

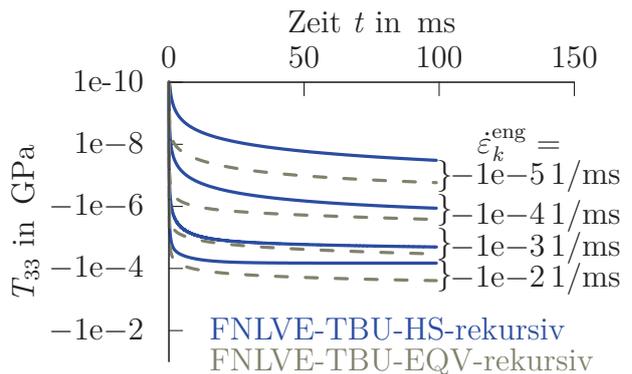


Abbildung 6.13.: Spannungsantworten der dynamischen Druckversuche $\dot{\epsilon}_k^{\text{eng}}$ mit der Geschwindigkeitsrandbedingung nach Abbildung 6.9 (negativ skaliert): FNLVE-TBU-HS unterscheidet Zug- und Druckzustände, FNLVE-TBU-EQV mit symmetrischer Zug-Druck-Antwort

tungsrichtung \mathbf{e}_3 ist. Damit kann der einzige Eigenwert $\lambda_{\dot{U}_1} \neq 0$ mit \dot{U}_{33} gleichgesetzt werden. Für die Modelle FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾-rekursiv und FNLVE-TBU-EQV-rekursiv bedeutet dies, dass sich die Eingangsgrößen für die Kurvenauswertung im Vorzeichen unterscheiden. Während FNLVE-TBU-HS-rekursiv das Spektrum im negativen Wertebereich auswertet und damit die Steifigkeiten aus den Druckversuchen bereitstellt, werden für FNLVE-TBU-EQV-rekursiv durch eine stets positive Vergleichsdehnrate immer Zugparameter herangezogen. Folglich unterscheiden sich die Spannungsantworten

der beiden Modelle in Abbildung 6.13d. Die Verwendung der Zugparameter führt für diesen Parametersatz auf eine betragsmäßige Überschätzung der Druckspannung. Die Differenz beider Modelle wird umso größer, je ausgeprägter die Zug-Druck-Asymmetrie ist.

6.4. Mehrachsige Belastungszustände

In den vorherigen Abschnitten wurden die Materialmodelle ausschließlich unter uniaxialen Belastungszuständen getestet, um deren Charakteristiken unter möglichst einfachen Bedingungen herauszuarbeiten und um die Spannungsantworten mit Versuchsdaten uniaxialer Zug- und Druckversuche zu vergleichen. Mit dem Bezug zu diesen uniaxialen Spannungsantworten werden im Folgenden drei Beispiele mehrachsiger Belastungszustände für die Modelle FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und FNLVE-TBU-EQV vorgestellt und erläutert. Die Eingabegrößen dieser Modelle basieren auf uniaxialen Versuchen und erzeugen daraus die Spannungsantworten auch für mehrachsige Belastungen. Ohne Versuchsdaten können diese Spannungsantworten der beiden Modelle nicht widerlegt oder bestätigt werden. Trotzdem ist es wichtig, die Spannungsantworten der mehrachsigen Belastungszustände zu untersuchen, da diese in größeren Modellen wie in den Beispielen des folgenden Kapitels 7 auftreten.

Das Beispiel des uniaxialen Druckversuches in Abbildung 6.13 macht deutlich, dass unterschiedliche Spannungsantworten für FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und FNLVE-TBU-EQV entstehen, sobald sich die Hauptdehnraten von der Vergleichsdehnratenrate, $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_k} \neq \dot{U}_{\text{eqv}}$, unterscheiden. Für einen uniaxialen Druckversuch besteht der Unterschied im Vorzeichen der Kurvenauswertung lediglich für einen Eigenwert und ist als Ursache für die unterschiedliche Spannungsantwort schnell zu erkennen. Bei mehrachsigen Belastungszuständen verursacht jedoch die Abweichung von bis zu drei Hauptdehnraten von der Vergleichsdehnratenrate die Verwendung anderer Parameter. Für das Modell FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ bedeuten drei unterschiedliche Hauptdehnraten zudem, dass Zug- und Druckparameter unterschiedlicher Dehnraten gleichzeitig zur Spannungsantwort beitragen können. Um diesen Effekt sichtbar machen zu können, ist auch wichtig, ob die Eingangsgröße des Faltungsintegrals $\dot{\mathbf{U}}$ ein konstantes oder veränderliches Hauptachsensystem aufweist. Zusammen mit den dehnratenabhängigen Moduln und der Erinnerung an die gesamte Dehnungsgeschichte erschwert ein veränderliches Hauptachsensystem die Interpretation der Spannungsantworten maßgeblich.

Sobald es sich nicht mehr um einen uniaxialen Belastungszustand handelt, geht darüber hinaus die Besonderheit der konstitutiven Annahmen für offenzellige Polymerschäume verloren, dass die Spannungsmaße \mathbf{T}_B , \mathbf{T} und \mathbf{P}^T übereinstimmen. Bei biaxialen Zug-

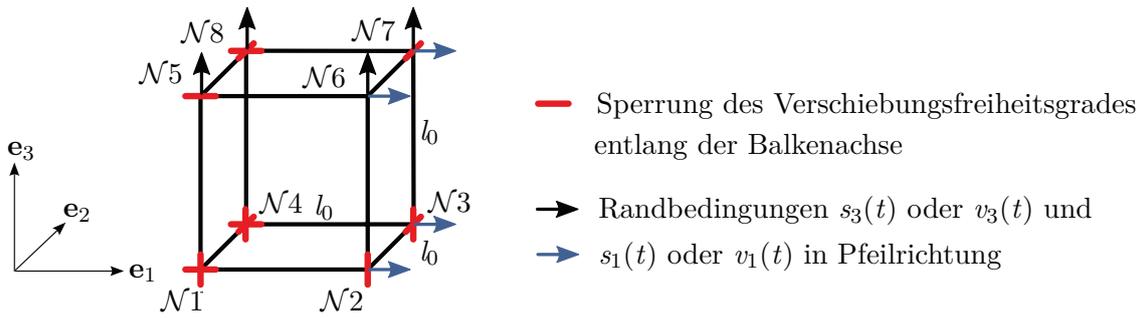


Abbildung 6.14.: Biaxiale Beanspruchung eines Hexaederelementes

und Druckversuchen beispielsweise wachsen bzw. schrumpfen die Querschnittsflächen, sodass sich die Cauchy-Spannung von der Nominalspannung unterscheidet.

6.4.1. Biaxiale Versuche mit konstantem Hauptachsensystem

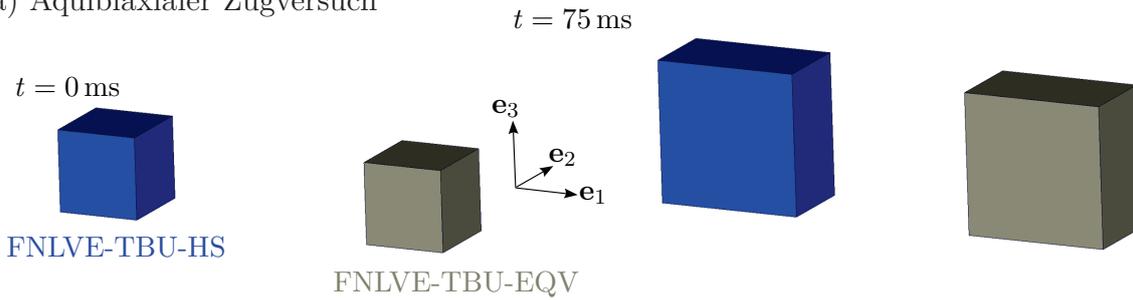
In Abbildung 6.14 sind die Randbedingungen für die biaxiale Beanspruchung eines Hexaederelementes dargestellt. Es können zwei Randbedingungen $s_1(t)$ oder $v_1(t)$ und $s_3(t)$ oder $v_3(t)$ unabhängig voneinander aufgebracht werden. Im Beispiel der Abbildung 6.15 folgen beide Geschwindigkeitsrandbedingungen der Anregung des uniaxialen Zugversuches aus Abbildung 6.9a. Als Konsequenz stimmen die beiden Diagonalelemente \dot{U}_{11} und \dot{U}_{33} als Eingangsgrößen des Faltungsintegrals ebenfalls mit dem uniaxialen Zugversuch überein und führen für beide Normalspannungen T_{B11} und T_{B33} auf dieselbe Biot-Spannungsantwort wie im Zugversuch $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ (vgl. Abbildungen 6.9b und 6.15c sowie 6.9d und 6.15e).

Abgesehen von \dot{U}_{11} und \dot{U}_{33} sind alle anderen Komponenten von $\dot{\mathbf{U}}$ gleich null, sodass ein konstantes Hauptachsensystem mit den Eigenvektoren $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{U}}_1} = \mathbf{e}_3$ und $\mathbf{e}_{\dot{\mathbf{U}}_2} = \mathbf{e}_2$ vorliegt. Da die Vergleichsdehnrate \dot{U}_{eqv} mit den beiden Diagonalelementen als Hauptdehnraten $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_1} = \dot{U}_{33}$ und $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_2} = \dot{U}_{11}$ übereinstimmt und die Kurvenauswertung $\tilde{E}_j(\dot{\gamma})$ somit dieselben Moduln liefert, unterscheiden sich die Spannungsantworten der Modelle FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und FNLVE-TBU-EQV für einen äquibiaxialen Zugversuch nicht. Im Gegensatz zum uniaxialen Zugversuch weicht die Cauchy-Spannung für den äquibiaxialen Zugversuch jedoch von der Biot- und Nominalspannung ab, da die Querschnittsflächen wie in Abbildung 6.15a dargestellt anwachsen. Bei einer übereinstimmenden Biot-Spannung fällt die Cauchy-Spannung folglich geringer aus als bei der uniaxialen Spannungsantwort. Die Spannungsmaße $\mathbf{T}_B = \mathbf{P}^T$ sind jedoch weiterhin identisch, da für den äquibiaxialen Zugversuch keine Rotation vorliegt, $\mathbf{R} = \mathbf{I}$.

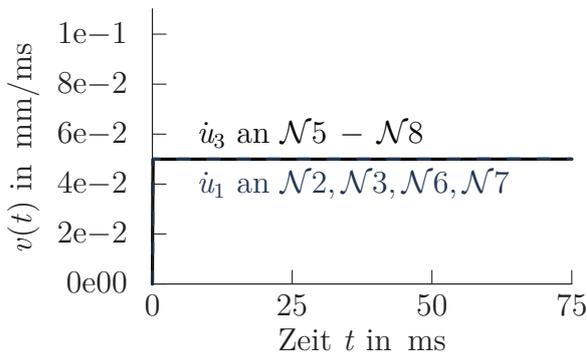
Ein konstantes Hauptachsensystem entlang der Koordinatenachsen sowie die Abweichung der Cauchy-Spannung von der Biot- und Nominalspannung kennzeichnen alle biaxialen Versuche nach Abbildung 6.14. In Abhängigkeit von den Randbedingun-

6. Numerische Beispiele und Modellantworten auf Standardanregungen

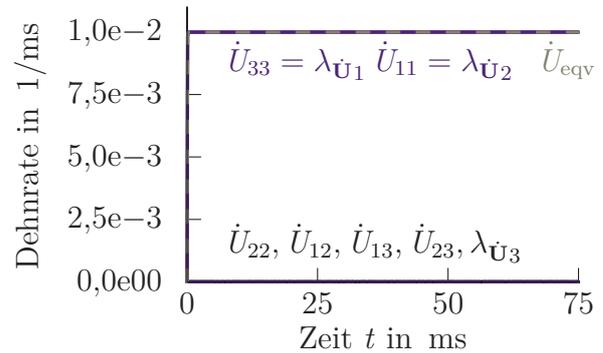
a) Äquibiaxialer Zugversuch



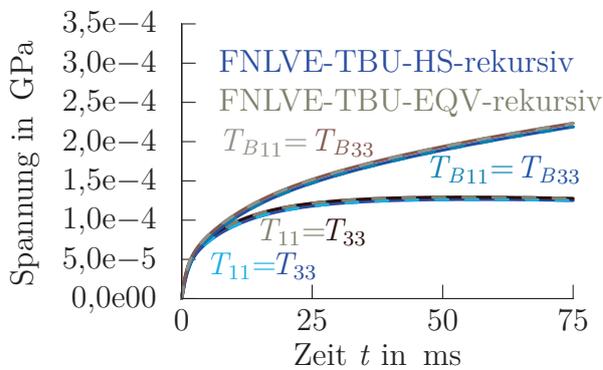
b) Geschwindigkeitsrandbedingungen



c) $\dot{\mathbf{U}}$ und $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}}$ bei konstantem HS



d) Spannungsantworten \mathbf{T}_B und \mathbf{T}



e) Spannungsantwort $\mathbf{P}^T = \mathbf{T}_B$

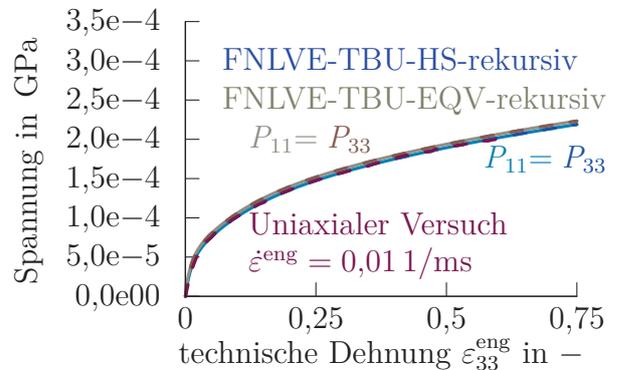
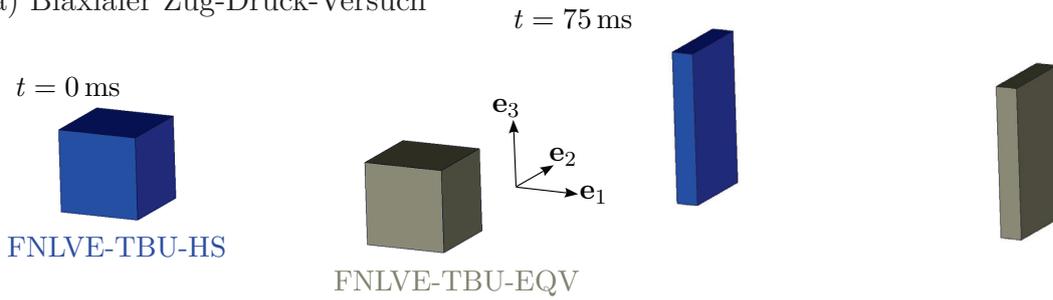


Abbildung 6.15.: Äquibiaxialer Zugversuch $\varepsilon^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ mit dem Parametersatz nach Abbildung 6.13b: Übereinstimmende Spannungsantworten für FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und FNLVE-TBU-EQV

gen entsteht jedoch eine Abweichung zwischen der Vergleichsdehnrates und den beiden Hauptdehnrates, sodass die beiden Materialmodelle FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und FNLVE-TBU-EQV unterschiedliche Spannungsantworten aufweisen.

Als Beispiel hierfür zeigt Abbildung 6.16 die Ergebnisse eines biaxialen Zug-Druck-Versuchs. Anstatt wie beim äquibiaxialen Zugversuch in \mathbf{e}_1 -Richtung zu ziehen, wird

a) Biaxialer Zug-Druck-Versuch



b) Geschwindigkeitsrandbedingungen

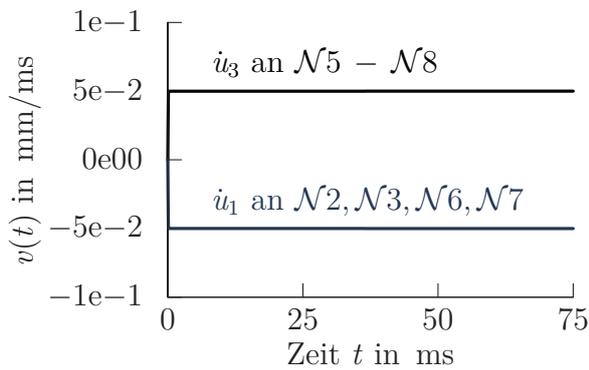
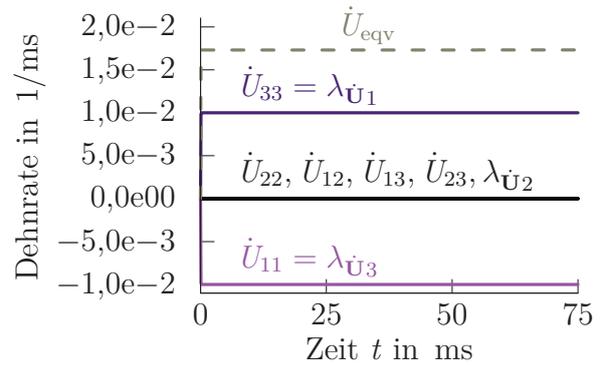
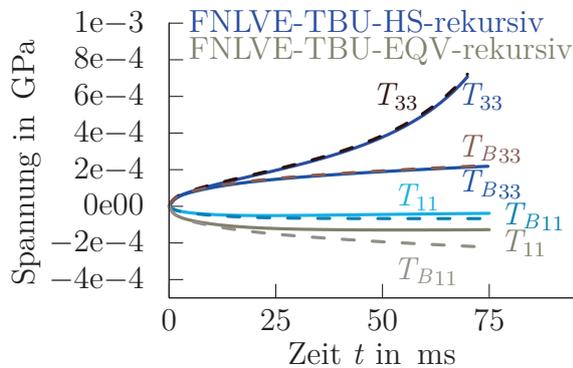
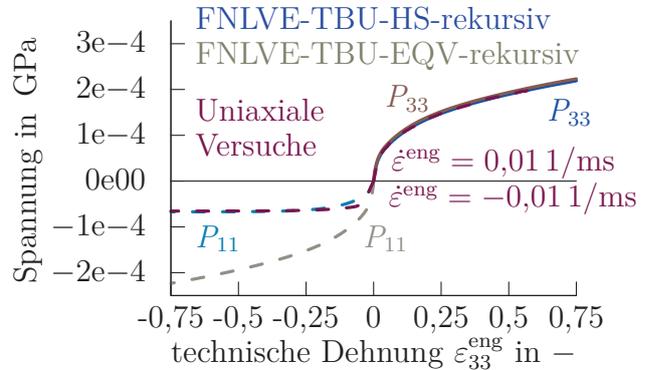

 c) $\dot{\mathbf{U}}$ und $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}}$ bei konstantem HS

 d) Spannungsantworten \mathbf{T}_B und \mathbf{T}

 e) Spannungsantwort $\mathbf{P}^T = \mathbf{T}_B$


Abbildung 6.16.: Biaxialer Zug-Druck-Versuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ mit $v_1(t) = -v_3(t)$ und dem Parametersatz nach Abbildung 6.13b: Übereinstimmende Spannungsantwort für FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ mit den uniaxialen Versuchen und symmetrische Zug-Druck-Spannungsantwort für FNLVE-TBU-EQV

die Probe in dieser Achse nun mit $v_1(t) = -v_3(t)$ gestaucht. Dadurch unterscheiden sich die Hauptdehnraten $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_1} = -\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_3}$ im Vorzeichen. Für das Modell FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ wird zur Berechnung der Spannung T_{B33} folglich das Spektrum des Zugversuches

$\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ und für T_{B11} das Spektrum des Druckversuches $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -0,01 \text{ 1/ms}$ herangezogen. Daraus resultiert eine asymmetrische Zug-Druck-Antwort der blauen Kurven in Abbildung 6.16d und 6.16e. Da die beiden Hauptachsen unabhängig voneinander betrachtet werden, entstehen dieselben Antworten wie beim uniaxialen Zugversuch und wie beim uniaxialen Druckversuch (vgl. Abbildung 6.16e).

Für das Modell FNLVE-TBU-EQV hingegen führt die Kurvenauswertung in Abhängigkeit von \dot{U}_{eqv} auf nur ein Spektrum. Die Vergleichsdehnrate \dot{U}_{eqv} übersteigt zwar die Hauptdehnrate λ_{U_1} für das Modell FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾, da jedoch keine Extrapolation der Moduln außerhalb des Definitionsbereiches der Eingabe erfolgt (vgl. Gl. (4.3)) und der Parametersatz nach Abbildung 6.13b bei $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ endet, verwendet das Modell FNLVE-TBU-EQV exakt den Parametersatz des Zugversuches $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$. Damit stimmt die Zugspannung $P_{33}(t)$ mit der Spannungsantwort des Modells FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und dem uniaxialen Zugversuch überein (vgl. Abbildung 6.16e). Für die Druckspannung $P_{11}(t)$ führt die Verwendung dieses Spektrums dagegen auf eine Abweichung von der uniaxialen Spannungsantwort des Druckversuches und des Modells FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾. Es liegt eine symmetrische Zug-Druck-Antwort $|P_{11}(t)| = |P_{33}(t)|$ vor.

Nach dem uniaxialen Druckversuch ist der biaxiale Zug-Druck-Versuch ein weiteres Beispiel dafür, dass sich die beiden Modelle FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und FNLVE-TBU-EQV unterscheiden. Ob eine dieser biaxialen Spannungsantworten dem realen Werkstoffverhalten jedoch nahe kommt, kann an dieser Stelle nicht beurteilt werden, da keine geeigneten Versuchsergebnisse vorliegen.

6.4.2. Schubversuche

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Spannungsberechnung der biaxialen Belastung mit konstantem Hauptachsensystem aufgezeigt wurde, folgt jetzt eine Belastung, die ebenfalls zwei von null verschiedene Hauptdehnraten aufweist. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen kennzeichnen jedoch ein zeitlich veränderliches Hauptachsensystem sowie zeitlich veränderliche Hauptdehnraten den Schubversuch aus Abbildung 6.17. Durch die Verschiebung der Elementoberseite in \mathbf{e}_1 -Richtung bei konstanter \mathbf{e}_3 -Koordinate überlagert eine Starrkörperrotation die reine Schubbelastung.

In Abbildung 6.18a ist der Schubversuch an drei Elementen mit den Materialmodellen FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾, FNLVE-TBU-EQV und mit der Gleichgewichtsantwort nach Abschnitt 5.2 abgebildet. Die Knoten der Elementoberseite folgen der Geschwindigkeitsrandbedingung nach Abbildung 6.18b.

Bevor die Schubversuche mit den Modellen der viskoelastischen Überspannung vorgestellt werden, werden die Ergebnisse der Gleichgewichtsantwort diskutiert, die die Formulierung FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ im Hauptachsensystem motivierte. Abweichend von der

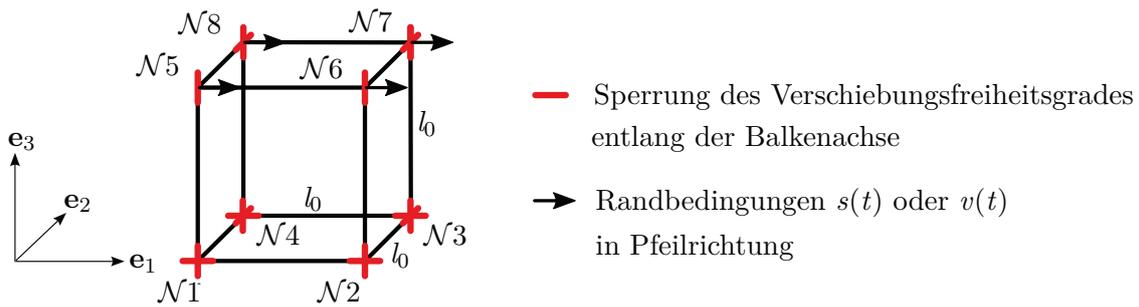


Abbildung 6.17.: Schubversuch an einem Hexaederelement

viskoelastischen Überspannung stützt sich die hyperelastische Gleichgewichtsantwort nur auf den aktuellen Dehnungszustand. Aus diesem Grund sind die Hauptstreckungen $\lambda_{\mathbf{U}}$ in Abbildung 6.18c dargestellt, mit denen die Eingabekurve nach Abbildung 6.18e der Gleichgewichtsantwort ausgewertet wird. Trägt man die Hauptspannungen $\lambda_{\mathbf{P}^T k}$ aus Abbildung 6.18d über $\lambda_{\mathbf{U} k} - 1$ auf, so gewinnt man exakt die Eingabekurve des Materialmodells. Wie bereits beim biaxialen Zug-Druck-Versuch zeigt sich, dass hier die Materialeigenschaften sowohl aus der Druck- als auch aus der Zugprüfung die Spannungsantworten bestimmen.

Für dieses Modell teilen sich \mathbf{U} und \mathbf{T} dasselbe Hauptachsensystem und die Umwandlung $\Lambda_{\mathbf{P}^T}$ in $\Lambda_{\mathbf{T}}$ genügt, um mithilfe der Eigenvektoren in $\mathbf{Q}_{\mathbf{U}}$ die Cauchy-Spannung der Gleichgewichtsantwort zu bestimmen.

Die Hauptspannungen $\lambda_{\mathbf{T} k}$ sind in Abbildung 6.18f dargestellt. Das zugehörige Hauptachsensystem dreht mit dem Schubwinkel ϕ aus Abbildung 6.18a um die \mathbf{e}_2 -Achse, sodass sich nur vier Komponenten der Cauchy-Spannung im globalen Koordinatensystem in Abbildung 6.19a von null unterscheiden: die Normalspannungen T_{11} und T_{33} und die Schubspannungen $T_{13} = T_{31}$.

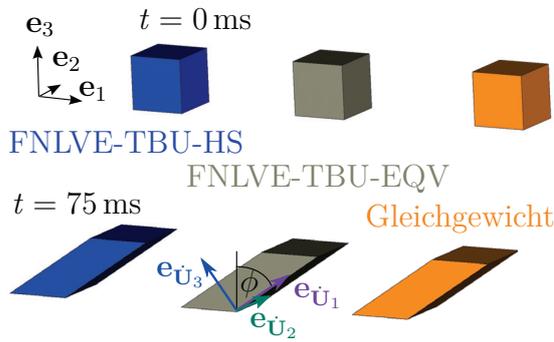
Zum Abgleich mit Versuchsdaten ist der aus den Spannungen resultierende Kraftverlauf von Interesse. Abbildung 6.19 zeigt die Summe der vier Knotenkräfte der Elementoberseite für alle drei Raumrichtungen. Wie bei anderen biaxialen Versuchen müssen folglich zwei Kraftsensoren für $F_1(t)$ und $F_3(t)$ zur Verfügung stehen. Zusätzlich zur Gleichgewichtsantwort messen diese auch den geschwindigkeitsabhängigen Kraftbeitrag aus der viskoelastischen Überspannung.

Anstatt auf dem Dehnungszustand \mathbf{U} wie bei der Gleichgewichtsantwort basiert die Berechnung der viskoelastischen Überspannung auf dessen Änderung $\dot{\mathbf{U}}$ und ihrer Vergangenheit. Aus diesem Grund sind die Komponenten und Eigenwerte von $\dot{\mathbf{U}}$ in den Abbildungen 6.20a und 6.20b dargestellt.

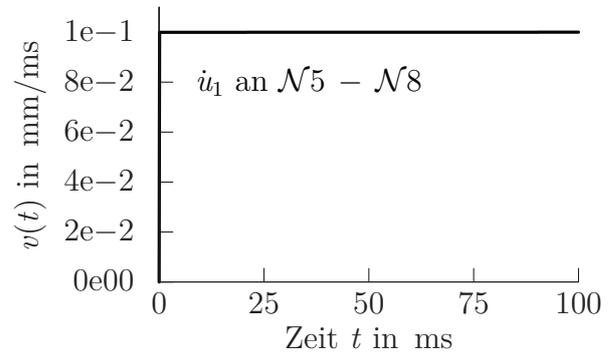
Für das Modell FNLVE-TBU-EQV-rekursiv erfolgt die Faltung unmittelbar mit den Komponenten von $\dot{\mathbf{U}}$ und liefert die Biot-Spannung in Abbildung 6.20c im globalen Koordinatensystem. Da die Vergleichsdehnrate die maximale Eingabedehnrate von Anfang an überschreitet, wird das Spektrum des Zugversuches $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ zu allen

6. Numerische Beispiele und Modellantworten auf Standardanregungen

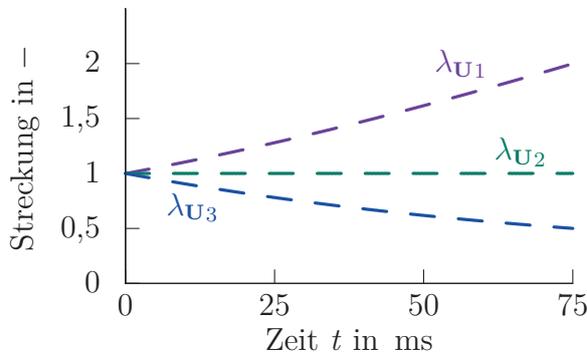
a) Schubversuch



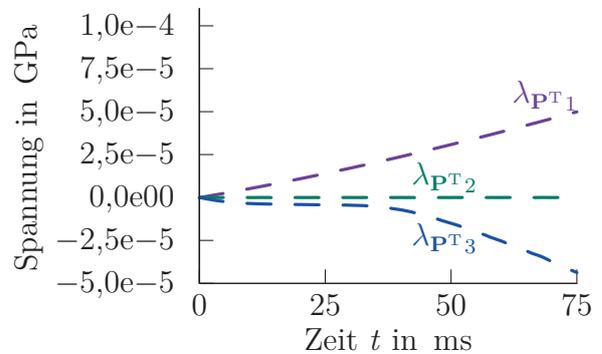
b) Geschwindigkeitsrandbedingung $v(t)$



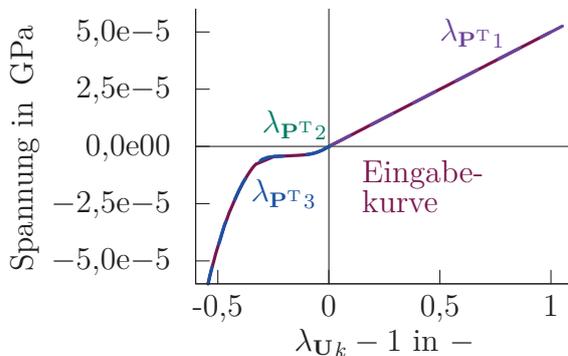
c) λ_U bei veränderlichem HS



d) λ_{PT} bei veränderlichem HS



e) λ_{PT_k} - λ_{U_k} -Diagramm



f) λ_T bei veränderlichem HS

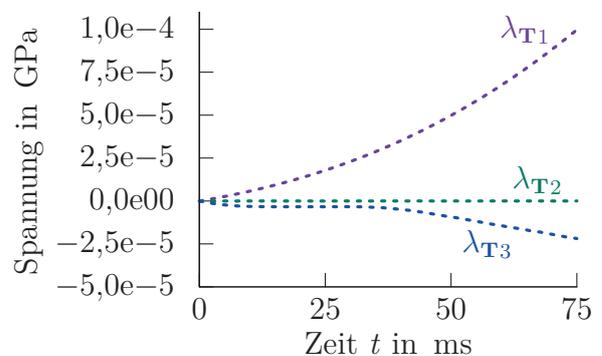


Abbildung 6.18.: Randbedingungen des Schubversuches und Spannungsantworten für das Modell der Gleichgewichtsantwort mit der Eingabekurve aus Abbildung 6.18e

Zeitpunkten verwendet. Wie bei der Gleichgewichtsantwort zeigt die zugehörige Cauchy-Spannung im globalen Koordinatensystem in Abbildung 6.20e drei von null verschiedene Komponenten, die in Abbildung 6.20g zwei positive Kräfte F_1 und F_3 als Summe der

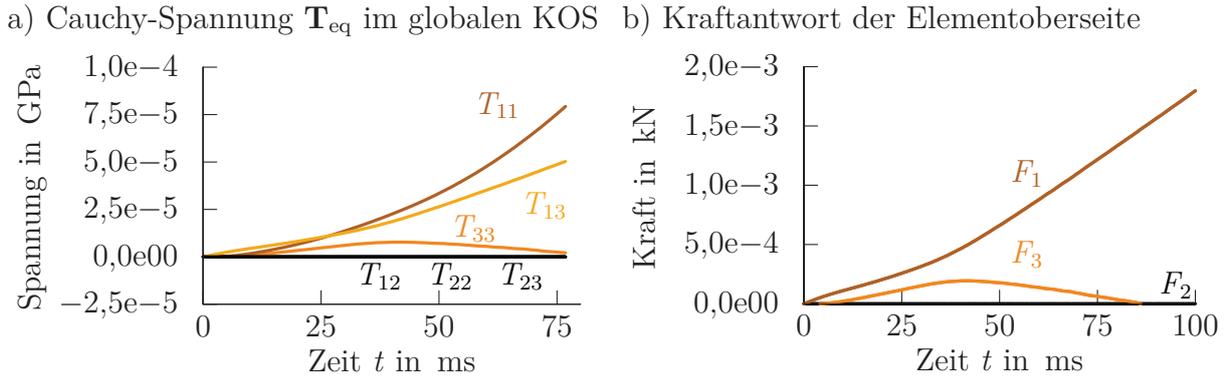


Abbildung 6.19.: Cauchy-Spannung und Kraftverlauf für das Modell der Gleichgewichtsantwort beim Schubversuch aus Abbildung 6.18

Knotenkräfte der Elementoberseite verursachen.

Für das Modell FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾-rekursiv spielt das Hauptachsensystem eine wichtige Rolle. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen ist für den Schubversuch jedoch eine Unterscheidung zwischen den Hauptachsensystemen von $\dot{\mathbf{U}}$ und \mathbf{T}_B notwendig. Während sich $\dot{\mathbf{U}}$ alleine aus der Änderung des letzten Zeitschritts berechnet, geht in die Biot-Spannung die vollständige Dehnungsgeschichte ein. Verändert sich das Hauptachsensystem von $\dot{\mathbf{U}}$ in der Zeit, so erinnert sich die Biot-Spannung an diese vergangenen Zustände und besitzt folglich ein anderes Hauptachsensystem als die aktuelle Dehnrate $\dot{\mathbf{U}}$.

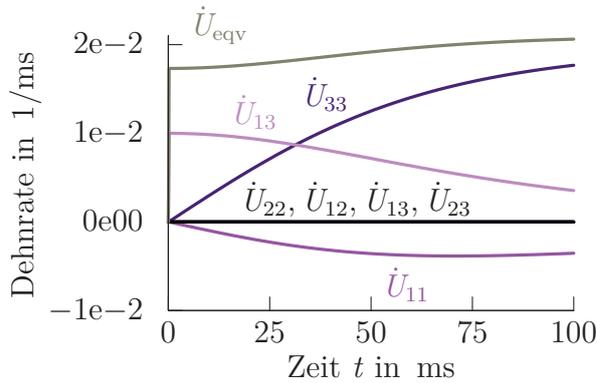
Die Änderung der Biot-Spannung $\Delta \mathbf{T}_B$ aufgrund des letzten Zeitschritts wird im Hauptachsensystem von $\dot{\mathbf{U}}$ berechnet und dann in das globale Koordinatensystem transformiert, um zu den relaxierten Spannungsbeiträgen der vorangegangenen Zustände addiert werden zu können.

Im Schubversuch aus Abbildung 6.18a dreht sich das Hauptachsensystem von $\dot{\mathbf{U}}$ in jedem Zeitschritt. Ein Vergleich mit den Ergebnissen für Zug- und Druckversuche ist deshalb nicht möglich. Obwohl sich die Biot-Spannung auf Dehnungszustände stützt, die für sich genommen in Zug- und Druckrichtung zerlegt werden können, verhindert die Drehung dieser Zustände eine Zuordnung in Druck- und Zugrichtung in globalen Koordinaten. Betrachtet man die Änderung der Biot-Spannung $\Delta \mathbf{T}_B$ aus dem letzten Zeitschritt für alle drei Hauptrichtungen in Abbildung 6.20b, so fehlen zur Übereinstimmung mit den Zug- und Druckversuchen die Beiträge der vergangenen Zeitschritte.

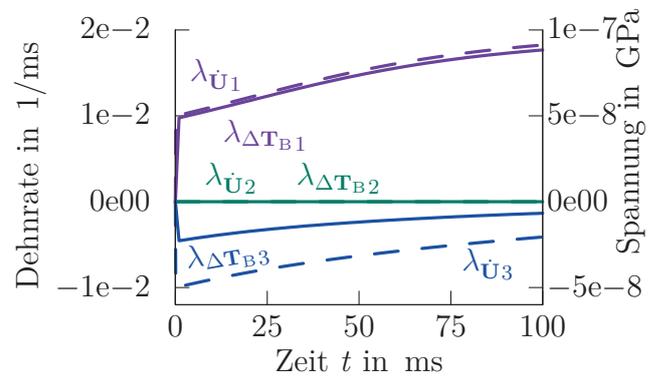
Im Vergleich mit dem Zug-Druck-Versuch aus Abbildung 6.16 zeigt sich, dass der Schubversuch bei denselben Werten der Hauptdehnraten in Abbildung 6.20b beginnt. Während die Hauptdehnraten dort jedoch konstant bleiben, steigt hier die Hauptdehnrate $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_1}$ monoton an und $|\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_3}|$ nimmt kontinuierlich ab. Da $\lambda_{\dot{\mathbf{U}}_1}$ die höchste Eingabedehnrate des Parametersatzes $\varepsilon^{\text{eng}} = 0,01 \text{ 1/ms}$ ebenfalls überschreitet, wird zur Berechnung

6. Numerische Beispiele und Modellantworten auf Standardanregungen

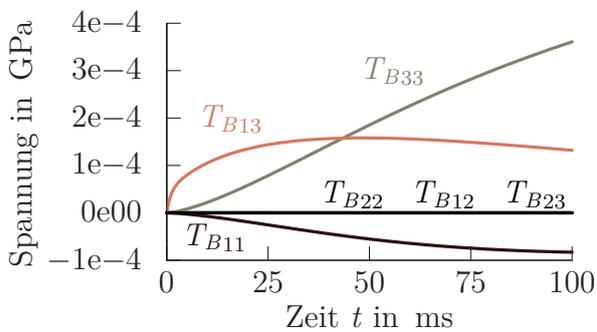
a) Dehnraten \dot{U} und \dot{U}_{eqv}



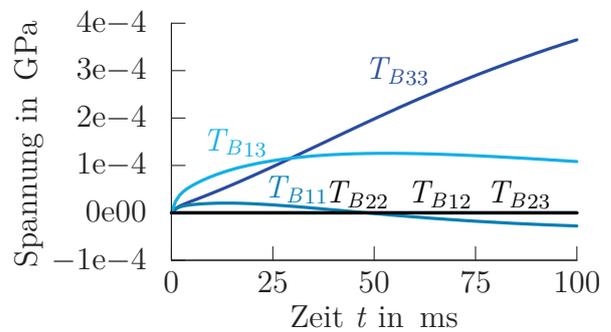
b) $\lambda_{\dot{U}}$ und $\lambda_{\Delta T_B}$ bei veränderlichem HS



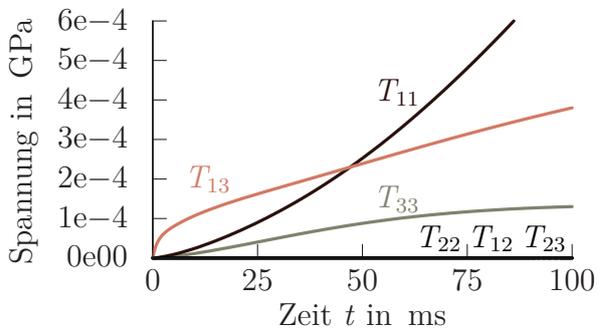
c) FNLVE-TBU-EQV-rekursiv $\mathbf{T}_B(t)$



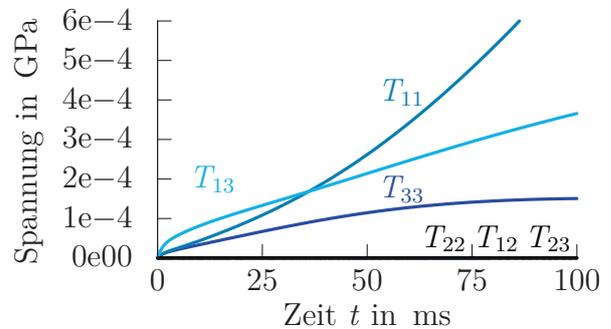
d) FNLVE-TBU-HS-rekursiv $\mathbf{T}_B(t)$



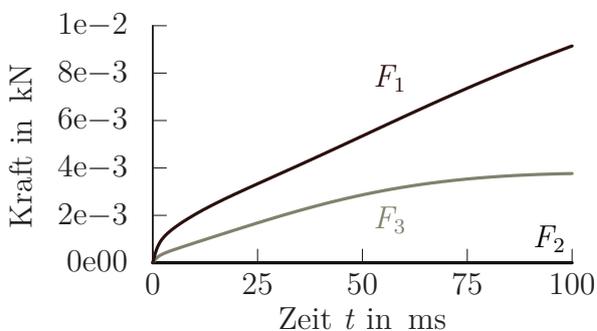
e) FNLVE-TBU-EQV-rekursiv $\mathbf{T}(t)$



f) FNLVE-TBU-HS-rekursiv $\mathbf{T}(t)$



g) FNLVE-TBU-EQV-rekursiv



h) FNLVE-TBU-HS-rekursiv

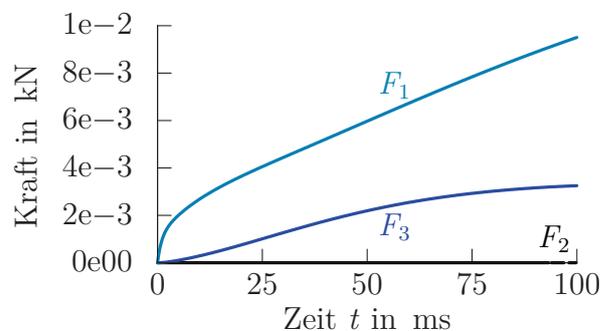


Abbildung 6.20.: Schubversuch nach Abbildung 6.18 mit den Materialmodellen FNLVE-TBU-HS-rekursiv und FNLVE-TBU-EQV-rekursiv und dem Parametersatz aus Abbildung 6.13b

von $\lambda_{\Delta T_{B1}}$ dasselbe Spektrum wie für das Modell FNLVE-TBU-EQV verwendet. Dass keine Interpolation innerhalb des Parametersatzes stattfindet, belegt der konstante Faktor zwischen $\lambda_{\dot{U}_1}$ und $\lambda_{\Delta T_{B1}}$ in Abbildung 6.20b. Für die Druckrichtung hingegen bewegt sich $\lambda_{\dot{U}_3}$ innerhalb des Parametersatzes und durch die Interpolation zwischen den Druckspektren variiert das Verhältnis zwischen den zwei Kurven $\lambda_{\dot{U}_3}$ und $\lambda_{\Delta T_{B3}}$.

Da $|\lambda_{\dot{U}_3}|$ abnimmt und einen immer geringeren Spannungsbeitrag $|\lambda_{\Delta T_{B3}}|$ erzeugt, steigt die Bedeutung der Zugbelastung. Da die beiden Modelle FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und -EQV für die Zugbelastung dieselben Parameter verwenden, werden sich die Spannungsantworten und Kraftantworten beider Modelle immer ähnlicher (vgl. Abbildung 6.20e und f sowie 6.20g und h). Ohne Versuchsdaten kann kein Urteil über die Gültigkeit dieser Spannungsantworten gefällt werden.

Sowohl die Spannungsverläufe der Gleichgewichtsantwort als auch der viskoelastischen Überspannung zeigen keinerlei Oszillationen. Dies unterscheidet diese Modelle von Konstitutivgleichungen, die in der Jaumann-Rate der Cauchy-Spannung formuliert sind.

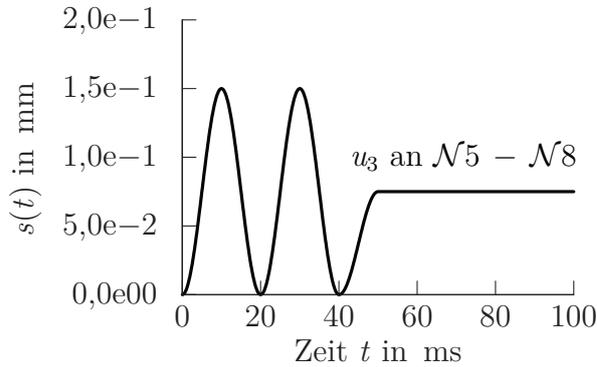
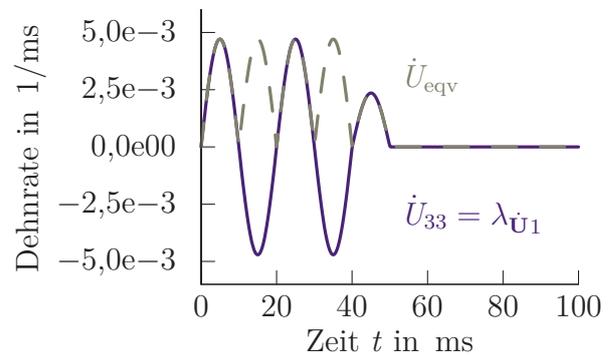
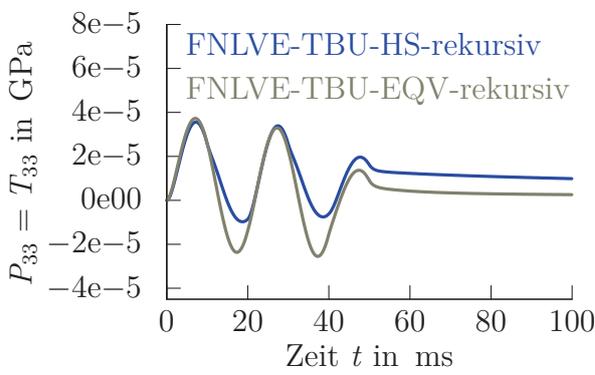
6.5. Zyklische Versuche

Die numerischen Beispiele der letzten Abschnitte zeigen ausschließlich monoton ansteigende oder monoton abnehmende Dehnungszustände. Zyklische Versuche hingegen zeichnen sich durch eine mehrfache Lastumkehr aus, sodass die Dehnraten ihr Vorzeichen im Gegensatz zu den bisherigen Beispielen mehrfach wechseln. Da viskoelastische Materialien häufig zur Dämpfung eingesetzt werden, ist dies im Allgemeinen eine wichtige Anregung. Obwohl sich der Lastfall des Fußgängerschutzes bezüglich der Impaktorbewegung in nur eine Belastungs- und eine Entlastungsphase einteilen lässt, können lokal durchaus mehrfache Lastwechsel erfolgen. Wie sich eine Lastumkehr auf die Spannungsantwort der Modelle FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ und -EQV auswirkt, wird im folgenden Beispiel eines uniaxialen Belastungszustandes erläutert. In diesem Abschnitt ist eine Unterscheidung der Modelle FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺ erforderlich.

Eine Lastumkehr teilt einen Versuchsablauf in Be- und Entlastungsphasen ein. Während in der Belastungsphase Dehnung und Dehnrate dasselbe Vorzeichen aufweisen, kennzeichnet ein Vorzeichenunterschied die Entlastungsphase. Wird ein Material in der Belastungsphase beispielsweise zunächst gestreckt, nimmt die Dehnung zu und das Vorzeichen der Dehnrate ist positiv. Lässt die Zugbelastung nach und die Dehnung nimmt ab, so ist das Vorzeichen der Dehnrate in der Entlastungsphase negativ, obwohl das Material bis zum Erreichen der Ausgangslage stets eine positive Dehnung aufweist.

Abbildung 6.21 zeigt einen solchen Wechsel der Dehnrate. In diesem Beispiel folgt die Elementoberseite des Hexaederelementes aus Abbildung 6.1 der Verschiebungsrandbedingung aus 6.21a und das Element wird somit einer uniaxialen Zugbelastung in \mathbf{e}_3 -

a) Verschiebungsrandbedingungen


 b) Dehnraten \dot{U}_{33} und \dot{U}_{eqv}

 c) Spannungsantwort \mathbf{T}


d) Spannungs-Dehnungs-Diagramm

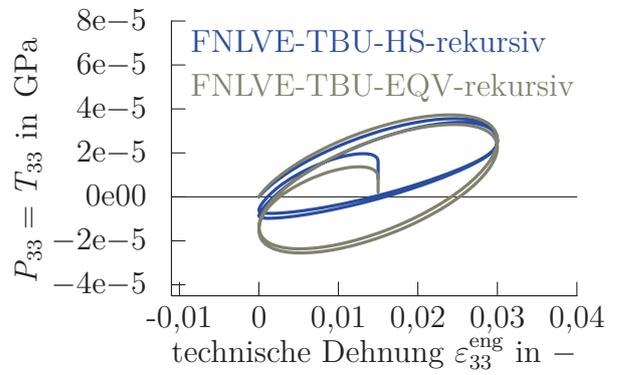


Abbildung 6.21.: Zyklische uniaxiale Zugbelastung mit den Materialmodellen FNLVE-TBU-HS-rekursiv und -EQV-rekursiv und dem Parametersatz aus Abbildung 6.13b

Richtung ausgesetzt. Zunächst wird das Element wie beschrieben in zwei Zyklen zwischen der Ausgangslage und 0,15 mm sinusförmig gestreckt und dann ab $t = 50$ ms bei 0,075 mm gehalten. Sowohl in den Be- als auch in den Entlastungsphasen weist das Element ausschließlich eine positive Dehnung auf.

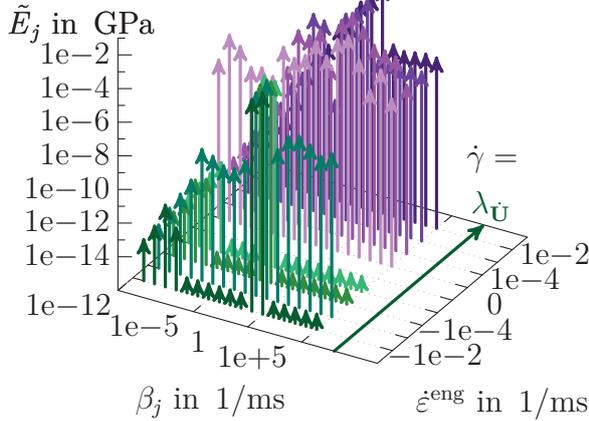
Die Dehnrates $\dot{U}_{33} = \lambda \dot{U}_1$ mit $\mathbf{e}_{\dot{U}_1} = \mathbf{e}_3$ in Abbildung 6.21b wechselt hingegen bei jeder Lastumkehr zu den Zeitpunkten $t = 10, 20, 30$ und 40 ms ihr Vorzeichen. Gleichzeitig ist die Vergleichsdehnrates stets positiv und für die uniaxiale Belastung gilt $\dot{U}_{eqv} = |\dot{U}_{33}|$. Während der Parametersatz des Materialmodells FNLVE-TBU-EQV folglich die Spektren der Zugversuche durchläuft, ist jeder Vorzeichenwechsel von $\lambda \dot{U}_1$ für das Materialmodell FNLVE-TBU-HS-rekursiv mit der Umstellung von Zugparametern auf Druckparameter verbunden. Da sich Zug- und Druckspektren für den Parametersatz aus Abbildung 6.13b stark unterscheiden, macht sich dies auch in der Spannungsantwort aus Abbildung 6.21c bemerkbar. Die Spannungsabnahme der Entlastungsphasen ist gegenüber dem Modell FNLVE-TBU-EQV mit reinen Zugspektren verlangsamt und fällt insgesamt

a) Belastung $\bar{s}_k = 1$ b) Entlastung $\bar{s}_k = -1$ FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv:

$$(\beta_j / \tilde{E}_j(\lambda_{\dot{U}}, \bar{s} = 1))$$

$$(\beta_j / \tilde{E}_j(\lambda_{\dot{U}}, \bar{s} = -1))$$

Zugparameter $\dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}} > 0$
 Druckparameter $\dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}} < 0$



Zugparameter $\dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}} < 0$
 Druckparameter $\dot{\varepsilon}_k^{\text{eng}} > 0$

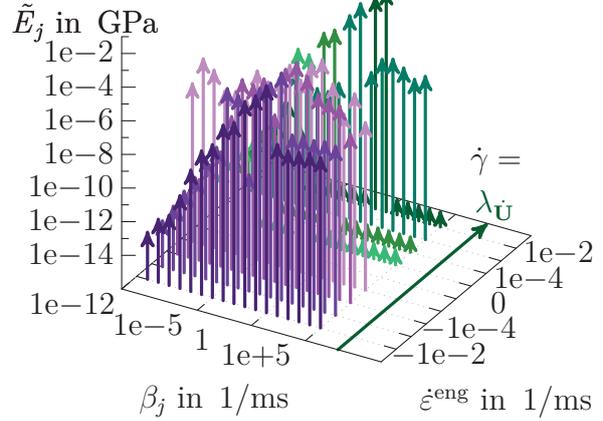


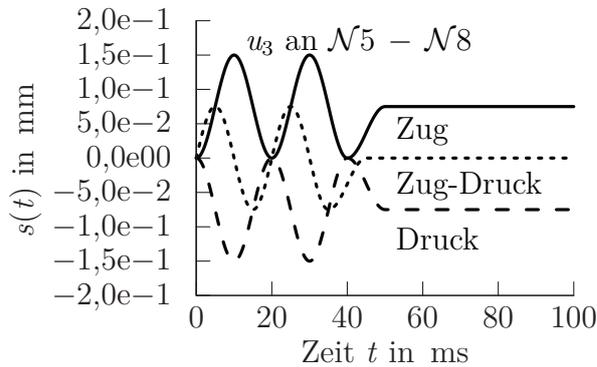
Abbildung 6.22.: Zwei Parametersätze für die Be- und Entlastung des Modells FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv: Hier werden Be- und Entlastung symmetrisch, aber Zug und Druck asymmetrisch behandelt.

geringer aus. Im Spannungs-Dehnungs-Diagramm aus Abbildung 6.21d ist der Einfluss der Druckparameter als Abweichung von der ellipsenförmigen Spannungsantwort des Modells FNLVE-TBU-EQV und an einem höheren Startwert der Spannungsrelaxation erkennbar. Ohne den Ausgleich durch eine äquivalente Druckspannung relaxiert die Spannung innerhalb der Simulationsdauer von 100 ms nicht gegen null. Für $t \rightarrow \infty$ wird dieser Fall jedoch eintreten, da es sich ausschließlich um die Überspannungsantwort handelt.

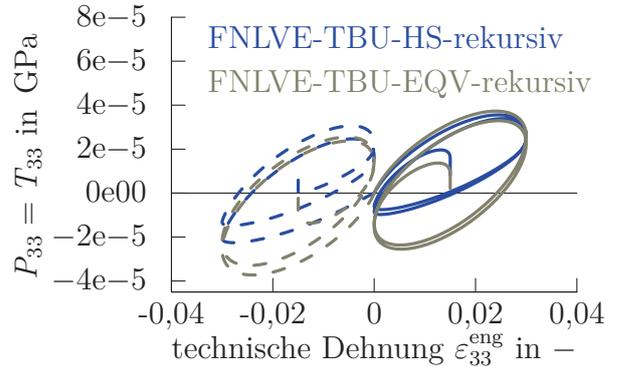
Bei den Beispielen des Zug-Druck-Versuches und des Schubversuches in Abbildung 6.16 und 6.20 haben Zug- und Druckparameter für das Modell FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ ebenfalls gleichzeitig zur Spannungsantwort beigetragen. Während die Zug- und Druckparameter in diesen Beispielen jedoch auf zwei unterschiedliche Hauptrichtungen verteilt waren, werden die Parameter bei der zyklischen, uniaxialen Belastung in einer Hauptrichtung gemischt. Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass beim Zug-Druck-Versuch und beim Schubversuch die jeweiligen Hauptdehnraten über die gesamte Versuchsdauer dasselbe Vorzeichen aufweisen. Bei einer Lastumkehr wie im Beispiel 6.21 ist dies jedoch nicht mehr gegeben. Es ist zweifelhaft, ob die Druckspektren, die die besonderen Deformationsmechanismen offenzelliger Polymerschäume bei Druckbelastung beschreiben, auf die Entlastungsphase einer Zugdehnung übertragbar sind.

Abhilfe hierfür schafft das Modell FNLVE-TBU-HS⁺. Der Schalter \bar{s}_k für jede Hauptrich-

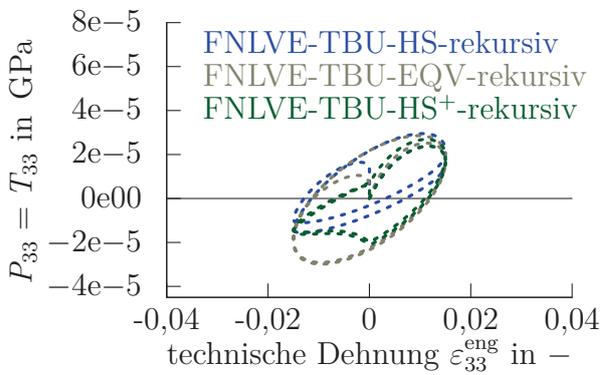
a) Verschiebungsrandbedingungen



b) Anregung auf Druck und auf Zug



c) Anregung auf Zug-Druck



d) Anregung auf Druck und auf Zug

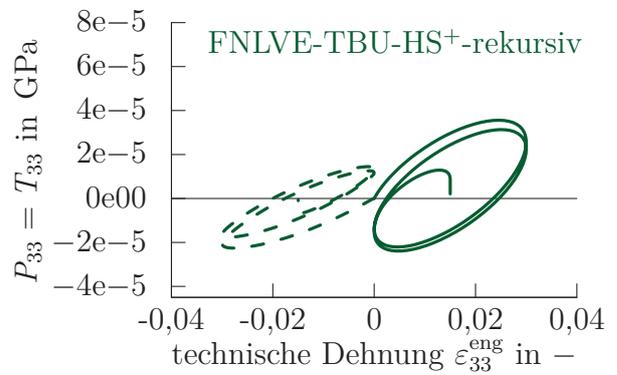


Abbildung 6.23.: Zyklische uniaxiale Zug-, Zug-Druck- und Druckbelastung mit den Materialmodellen FNLVE-TBU-HS-rekursiv und -EQV-rekursiv und dem Parametersatz aus Abbildung 6.13b und mit dem Materialmodell FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv und den Parametersätzen aus Abbildung 6.22

tung ermöglicht, dass für Belastung und für Entlastung ein anderer Parametersatz verwendet wird. Dieser Parametersatz wird weiterhin mit der zugehörigen Hauptdehnrate ausgewertet.

Der bisher verwendete Parametersatz aus Abbildung 6.13b beruht auf uniaxialen Zug- und Druckversuchen und schließt daher nur das Materialverhalten der Belastungsphase ein. Die Spektren positiver Dehnraten gehören zu den Zugversuchen und die Spektren negativer Dehnraten zu den Druckversuchen. Für den Parametersatz der Entlastung ist die Zuordnung umgekehrt. Eine negative Dehnrates verringert eine bestehende Zugdehnung, eine positive Dehnrates erhöht eine bestehende Druckdehnung. Aus Mangel an Entlastungsversuchen wurden der Parametersatz der Belastung für die Entlastung übernommen und die Reihenfolge der Spektren zwischen den Parametersätzen $\bar{s} = 1$ und $\bar{s} = -1$ in den Abbildungen 6.22a und 6.22b entsprechend umgekehrt. Durch die

symmetrische Behandlung der Be- und Entlastungsphase führen die reine Zugbelastung und die reine Druckbelastung aus Abbildung 6.23a für das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ in Abbildung 6.23d auf ellipsenförmige Spannungs-Dehnungs-Antworten. Unter Zugbelastung stimmt die Spannungs-Dehnungs-Antwort mit dem Modell FNLVE-TBU-EQV überein (vgl. Abbildung 6.23b).

Während für das Modell FNLVE-TBU-HS Zug- und Druckspektren für jede zyklische Anregung gemischt werden, erfolgt dies für das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ ausschließlich, wenn tatsächlich ein Wechsel zwischen Zug- und Druckdehnung stattfindet. In Abbildung 6.23a ist dies beispielsweise bei der zyklischen Zug-Druck-Anregung um die Ausgangslage herum der Fall. Die zugehörige Spannungs-Dehnungs-Antwort für FNLVE-TBU-HS⁺ in Abbildung 6.23c zeigt daher bei $\varepsilon^{\text{eng}} = 0$ mehrfach einen Übergang zwischen einer Zugantwort großer Spannungsamplitude und einer Druckantwort kleiner Spannungsamplitude.

6.6. Zusammenfassung

Die Beispiele des vorliegenden Kapitels zeigen, dass trotz der freien Form der Materialfunktion nicht alle Konstitutivgleichungen des letzten Kapitels 5 in der Lage sind, das Materialverhalten offenzelliger Polymerschäume abzubilden. Für diese Werkstoffe muss die Konstitutivgleichung der Überspannung drei Kriterien erfüllen, die aus den Versuchsdaten resultieren. Die Konstitutivgleichung muss in der Lage sein, bei uniaxialen Zug- und Druckversuchen mit konstanter Anregungsgeschwindigkeit eine konstante Kraftantwort zu erzeugen sowie eine Dehnratenabhängigkeit der Versuchsdaten und eine Zug-Druck-Asymmetrie zu berücksichtigen.

Darüber hinaus wird die Strategie favorisiert, die Versuche unterschiedlicher Nenndehnraten einzeln anzupassen und eine materiell nichtlineare Erweiterung zu nutzen, um die Parameter der einzelnen Anpassungen zu vereinigen.

Bezüglich des ersten Kriteriums der konstanten Kraftantwort scheidet das Modell FLVE-SE aus, da der zeitlich veränderliche Verlauf der Dehnrates $\dot{\mathbf{E}}$ im Rahmen eines materiell linearen Modells nicht kompensiert werden kann, um einen uniaxialen Versuch zufriedenstellend abzubilden. Dass eine materiell nichtlineare Erweiterung den Verlauf der Green-Lagrangeschen Dehnrates prinzipiell ausgleichen kann, zeigt das Beispiel eines Zugversuches mit dem Modell FNLVE-SE-GR-rekursiv. Da jedoch eine unabhängige Anpassung der einzelnen Versuche auf diese Weise nicht möglich ist und die Summe aus Faltungsintegralen noch weitere Nachteile besitzt, werden Formulierungen in \mathbf{S} und $\dot{\mathbf{E}}$ sowie die materiell nichtlineare Erweiterung GR nicht weiterverfolgt.

Bezüglich des zweiten Kriteriums der Dehnratenabhängigkeit ist gemäß der favorisierten Strategie eine materiell nichtlineare Erweiterung erforderlich. Während das Modell

FLVE-TBU folglich ausscheidet, sind die Konstitutivgleichungen FNLVE-TBU-EQV und FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾ in der Lage, die dynamischen Zugversuche mit einem Parametersatz abzubilden.

Bezüglich des dritten Kriteriums der Zug-Druck-Asymmetrie scheidet das Modell FNLVE-TBU-EQV aus, da die Vergleichsdehnrate nur positive Werte annimmt und Zug- und Druckbelastung daher nicht unterscheiden kann.

Die Anforderungen aller vorliegenden Versuchsdaten und die favorisierte Strategie der Parameteridentifikation erfüllen folglich die Modelle FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺. Sie sind in der Lage, bei uniaxialen Zug- und Druckversuchen mit konstanter Anregungsgeschwindigkeit eine konstante Kraftantwort zu erzeugen sowie die ausgeprägte Dehnratenabhängigkeit der Versuchsdaten und die Zug-Druck-Asymmetrie zu berücksichtigen.

Die gewählten Parametersätze beider Modelle setzen sich aus den uniaxialen Zug- und Druckversuchen zusammen. Ob deren Spannungsantworten für mehrachsige Belastung sowie unter zyklischer Anregung das reale Materialverhalten widerspiegeln, kann ohne Versuchsdaten nicht beurteilt werden. Sollten sich Abweichungen zwischen Versuch und Simulation bei Entlastung zeigen, so besteht für das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ die Möglichkeit, den Parametersatz der Entlastung unabhängig von der Belastung zu verändern. Die Anpassung der uniaxialen Zug- und Druckversuche bleibt dann weiterhin erhalten.

Modellierung des Polyurethan-Schaumes Confor CF-45

Die Modellierung des Polyurethan-Schaumes Confor CF-45 bildet den Abschluss dieser Arbeit und demonstriert, welche Effekte die in Kapitel 6 ausgewählten Konstitutivgleichungen zur Modellierung der Überspannung in Kombination mit einer Gleichgewichtsantwort abbilden können.

In diesem Kapitel wird als erstes die experimentelle Charakterisierung vorgestellt, auf deren Basis als nächstes die Eingabe der Gleichgewichtsantwort und die Parameter der Überspannung für die Modelle FNLVE-TBU-HS und FNLVE-TBU-HS⁺ bestimmt werden.

Im Anschluss daran zeigt ein Lastfall des Fußgängerschutzes, bei dem der Hüftimpaktor auf die Fronthaubenvorderkante aufschlägt, dass die Materialroutine und die Parametersätze robust funktionieren. Aus diesem Lastfall werden zwei Komponentenversuche abgeleitet, die insbesondere die viskoelastischen Effekte der neuen Modellierung und die Unterschiede zur bestehenden Modellierung des Confor-Schaumes aufzeigen.

7.1. Experimentelle Charakterisierung

Confor CF-45 ist ein offenzelliger Polyurethan-Schaumstoff und wird in verschiedenen Größen gefertigt. Die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Probekörper wurden dankenswerterweise von der Firma Trelleborg Applied Technology (GB) in Form von 30 mm dicken Schaummatten zur Verfügung gestellt. Die Belastung erfolgte senkrecht zur Oberfläche der ursprünglichen Schaummatte und die Proben wurden vor der Prüfung für mindestens vier Stunden bei einer Temperatur von 21 °C und bei einer relativen Luft-

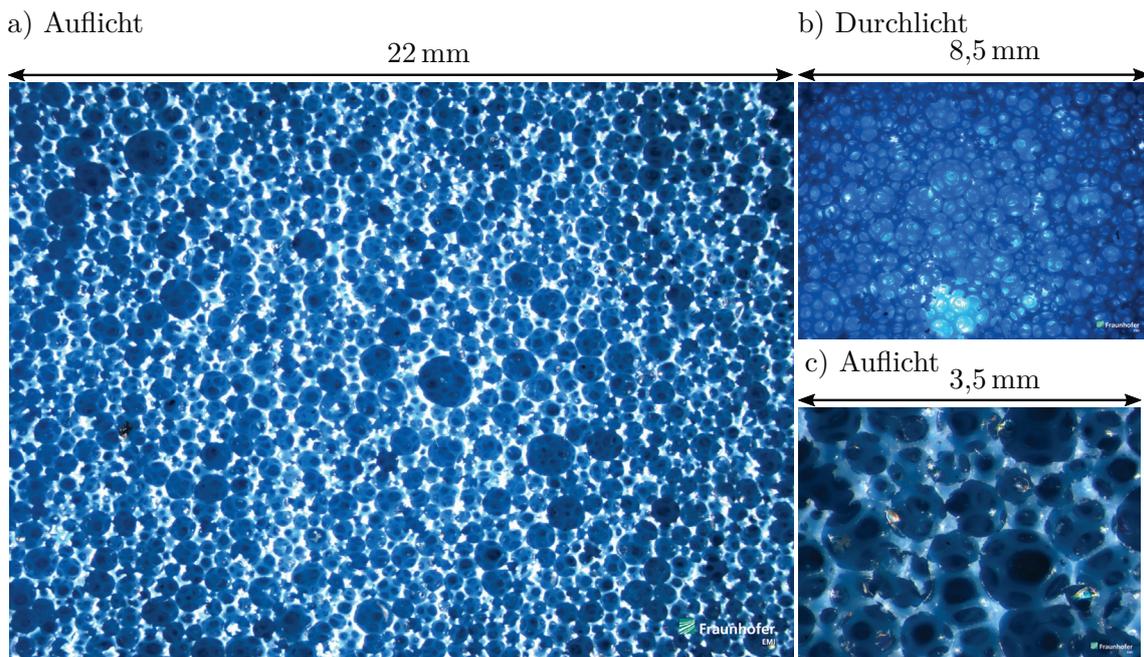


Abbildung 7.1.: Offenzellige Porenstruktur von Confor CF-45 im Lichtmikroskop

feuchtigkeit von 35% vorkonditioniert. Alle Versuche zur Charakterisierung des Confor CF-45 wurden am Ernst-Mach-Institut der Fraunhofer-Gesellschaft in Freiburg durchgeführt.

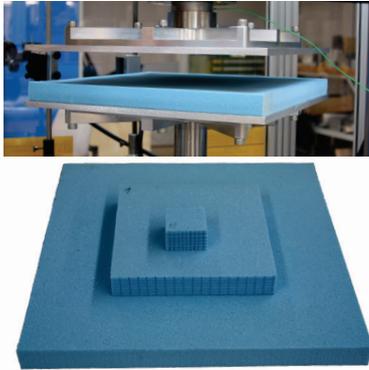
7.1.1. Porenstruktur

Die Fotos in Abbildung 7.1 zeigen die Porenstruktur von Confor CF-45. In DAVIES U. A. (2000) wurde diese quantitativ bewertet. Wie im Durchlicht der Abbildung 7.1b zu erkennen, konzentriert sich das Polymervolumen (> 90%) auf die Zellstege. Die Zellwände sind sehr dünn und z. T. durchsichtig, was sich an den Farberscheinungen durch Brechung und Reflexion des Aufflichts der Aufnahme 7.1c zeigt. Zudem weisen etwa 75 % der Zellwände Löcher auf, die eine durchschnittliche Größe von $0,022 \text{ mm}^2$ besitzen. Im Vergleich zu anderen PU-Weichschäumen ist der Luftstrom durch diese Zellstruktur stark behindert.

7.1.2. Einflussfaktoren auf das mechanische Verhalten

LANDERS U. A. (2008) führen das mechanische Verhalten von Schäumen mit geringer Rückstellkraft auf vier Effekte zurück. Neben dem Netzwerk- und Relaxationsverhalten des Polymerwerkstoffes beschreiben sie einen Adhäsionseffekt, der bei abnehmender

a) Versuchsaufbau für Druckversuche an 400x400 großen Prüfkörpern der Höhe $h_0 = 30$ mm



b) Spannungs-Dehnungs-Diagramm

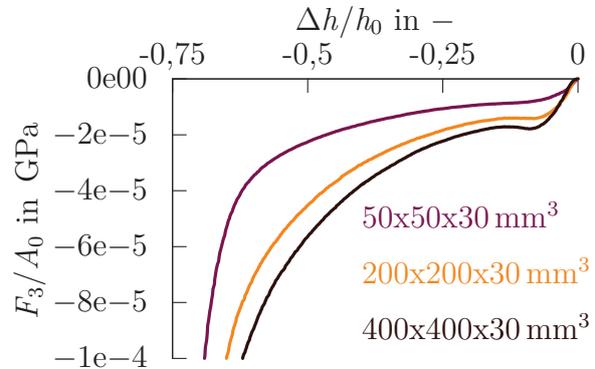


Abbildung 7.2.: Druckversuche $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 1e-4$ 1/ms bei unterschiedlicher Probengröße

Verdichtung die gegenüberliegenden Zellwände zusammenhält, und einen pneumatischen Effekt, den der Luftstrom durch die Zellstruktur bewirkt.

Während das resultierende Verhalten einer Kombination aus Werkstoff und Struktur bei festgelegten Prüfbedingungen in ein Kontinuumsmodell übertragbar ist, hängt die Luft-Festkörper-Interaktion auch von äußeren Randbedingungen ab. Dazu zählt die Zugänglichkeit des Schaumkörpers für den Luftaustausch sowie die Probengröße.

In Abbildung 7.2 sind Druckversuche unterschiedlicher Probengrößen dargestellt. Das Foto des Versuchsaufbaus zeigt, dass jeweils die komplette Ober- und Unterseite für den Luftaustausch gesperrt waren. Je größer die Probe in diesem Versuchsaufbau ist, desto länger wird die Strecke, die die Luft unter Kompression überwinden muss. Wenn die Kompression schneller erfolgt, als die Luft aus der Probe ausströmen kann, dann entsteht für die Kompression ein zusätzlicher Widerstand, der als Anstieg der Spannungsantwort sichtbar wird. Dies bestätigen die Spannung-Dehnung-Kurven der Dehnrates $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = -1e-4$ 1/ms in Abbildung 7.2b. Um zu kennzeichnen, dass es sich hierbei um die Umrechnung der Messgrößen handelt, sind die Achsen mit F_3/A_0 statt P_{33} und mit $\Delta h/h_0$ statt $\varepsilon_{33}^{\text{eng}}$ beschriftet.

Mit dem Ziel, den pneumatischen Effekt zu isolieren, wurden Versuche in Vakuum und unter Normalbedingungen an $50 \times 50 \times 30$ mm³ großen Schaumproben durchgeführt. Abbildung 7.3 zeigt den schematischen Versuchsaufbau der Zug- und Druckversuche in der Vakuumkammer. Die Zugprüfung in der Vakuumkammer erforderte eine Vorrichtung, die die Abwärtsbewegung des Querhauptes in eine Zugprüfung umwandelte (vgl. Abbildung 7.6). Für die Versuche unter Normalbedingungen wurde dieselbe Versuchseinrichtung benutzt, jedoch ohne dass die Kammer evakuiert wurde.

In Abbildung 7.4 sind die Spannungs-Dehnungs-Diagramme von Druck- und Zugversu-

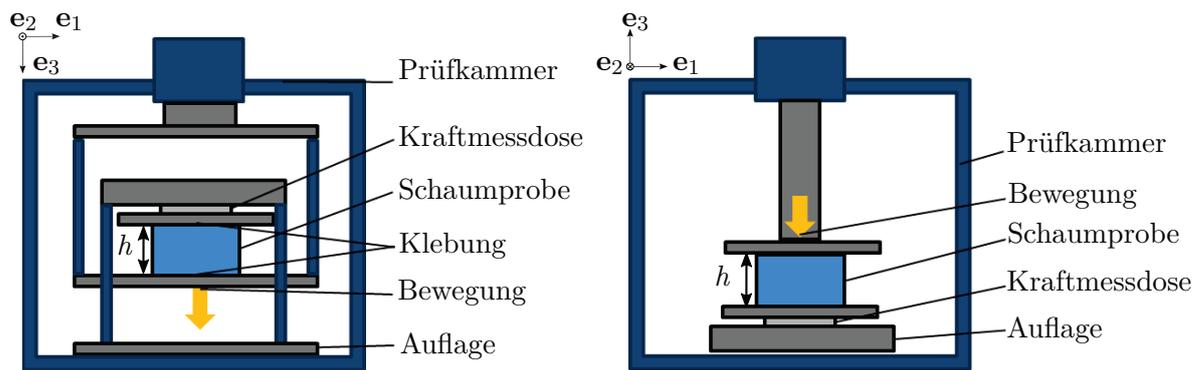
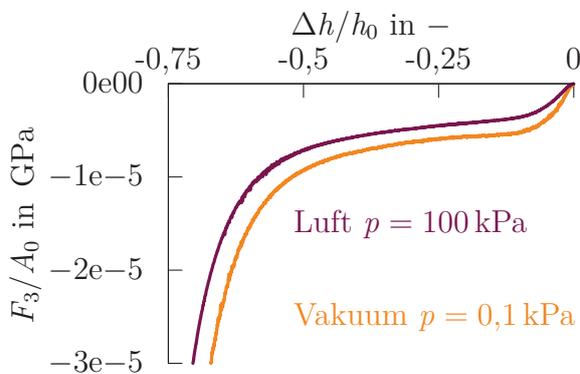


Abbildung 7.3.: Schematischer Versuchsaufbau der Zugversuche (links) und Druckversuche (rechts) in der Vakuumkammer

a) Druckversuche $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -1\text{e-}6\text{ 1/ms}$



b) Zugversuche $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 1\text{e-}3\text{ 1/ms}$ mit Versagen

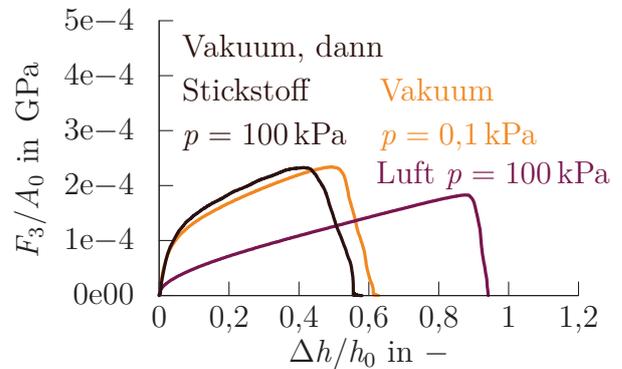


Abbildung 7.4.: Versuche unter Normalbedingungen und in Vakuum an Probekörpern der Größe $50 \times 50 \times 30\text{ mm}^3$

chen an $50 \times 50 \times 30\text{ mm}^3$ großen Schaumproben für verschiedene Atmosphären dargestellt. Ohne Einfluss des Luftstroms wäre eine Steifigkeitsabnahme für dynamische Versuche und identische Ergebnisse für quasistatische Versuche zwischen der Prüfung unter Normalbedingungen bei $p = 100\text{ kPa}$ und der Prüfung in Vakuum bei $p = 0,1\text{ kPa}$ zu erwarten. Stattdessen steigt der Betrag der Spannungsantwort für die Prüfung in Vakuum jedoch unabhängig von der Belastungsart und der Geschwindigkeit an. An einer Modellprobe mit Druckfedern aus Stahl wurde nachgewiesen, dass der zur Kraftmessung verwendete piezoelektrische Sensor unabhängig vom Umgebungsdruck und damit auch in Vakuum korrekt funktionierte.

Verschiedene Erklärungsmöglichkeiten als Struktureffekt, als Temperatur- oder Feuchtigkeitsabhängigkeit wurden in Betracht gezogen. Erklärungen, die eine Existenz geschlossener Poren annehmen und die Ausdehnung dieser Poren bei Reduktion des Umgebungsdrucks als Ursache ausmachen, sagen eine Abhängigkeit von der Belastungsart

voraus: eine betragsmäßige Erhöhung der Kraft für Druckbelastung und eine Abnahme unter Zugbelastung. Dies widerspricht den Messergebnissen aus Abbildung 7.4. Zudem widerlegt der Versuch unter Stickstoffatmosphäre, dass der Umgebungsdruck die abweichenden Spannungsantworten verursacht.

Die Temperaturabnahme innerhalb des Prüfbehälters aufgrund der Evakuierung wird nachweislich innerhalb von 15 Minuten wieder ausgeglichen, sodass eine geringere Prüftemperatur aufgrund der längeren Wartezeit nach der Evakuierung als Ursache für die abweichenden Spannungsantworten ausgeschlossen werden kann.

Ein möglicher Feuchtigkeitsverlust durch die Evakuierung bleibt jedoch erhalten. Dass dies die Ursache der Steifigkeitszunahme sein kann, bestätigt der Versuch unter Stickstoffatmosphäre. Dazu wurde die Prüfkammer mit Probekörper zunächst evakuiert und dann mit Stickstoff gefüllt. Die Spannungsantwort zeigt unter diesen Bedingungen dasselbe Spannungsniveau wie die Prüfung in Vakuum. Wurde die Prüfkammer nach einer Evakuierung wieder mit Luft gefüllt, so fiel die Spannung auf das Niveau der ursprünglichen Prüfung unter Normalbedingungen ab.

Dass die Feuchtigkeit die mechanischen Eigenschaften von Confor-Schaum stark beeinflusst, beweisen darüber hinaus die Untersuchungen von MATSUI UND TAKABAYASHI (2004). In Abhängigkeit der Feuchtigkeit variieren die Dämpfungseigenschaften des Schaumes sehr stark und die maximale Beschleunigung, die ein Impaktor bei einem Falltest auf eine Schaumprobe erfährt, verdoppelt sich zwischen trockenen und feuchten Prüfbedingungen der relativen Feuchtigkeit von 35% und 80% bei $T = 21\text{ °C}$. Zudem offenbart die zeitabhängige Messung der Massenzunahme, dass eine Probe bereits innerhalb von 50 Minuten von der relativen Luftfeuchtigkeit 35,7% auf 42% oder 60% konditioniert werden kann und die Feuchtigkeitsaufnahme folglich in einem für die mechanische Charakterisierung relevanten Zeitbereich stattfindet.

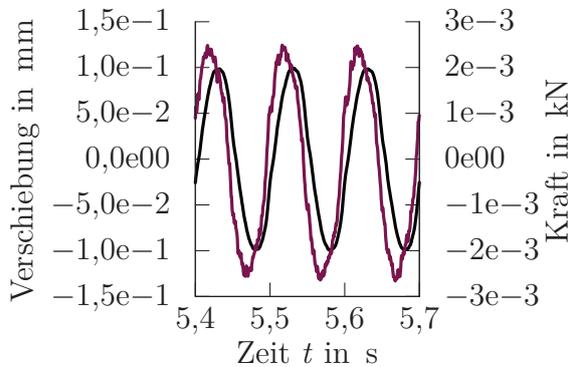
Dass Confor-Schaum bei einer Prüftemperatur von 21 °C und unter Normaldruck bei $p = 100\text{ kPa}$ sehr empfindlich auf jede Störung der Prüfbedingungen reagiert, belegt eine weitere Untersuchung. In Abbildung 7.5 sind die bei einer dynamisch-mechanischen Analyse (DMA) ermittelten viskoelastischen Eigenschaften von Confor-Schaum in Abhängigkeit der Temperatur aufgetragen. Dazu wurde eine vorkomprimierte Probe einer sinusförmigen Verschiebungsanregung ausgesetzt und die resultierende Kraftantwort gemessen. Aus dem Fit der Kraftamplitude \hat{F} und der Phasenverschiebung δ zur Anregung können der Speicher- und der Verlustmodul E_{storage} und E_{loss} sowie der Verlustfaktor $\tan(\delta)$ berechnet werden. Je höher der Verlustmodul oder der Verlustfaktor sind, desto mehr Energie wird dissipiert.

Dass der Verlustfaktor im Bereich der Raumtemperatur maximal wird, ist ein Zeichen für den Glasübergang des Werkstoffes in diesem Temperaturbereich und erklärt die ausgezeichneten Dämpfungseigenschaften des Confor-Schaumes. Dieser Phasenübergang zwischen energie- und entropieelastischem Materialverhalten sorgt zudem dafür, dass kleine Änderungen der Prüfbedingungen zu großen Abweichungen der mechanischen Ei-

a) Spannungsantwort bei $T = 23\text{ °C}$

$$s(t) = \hat{s} \sin(2\Pi f t)$$

$$F(t) = \hat{F} \sin(2\Pi f t + \delta)$$



b) Temperaturabhängige Eigenschaften

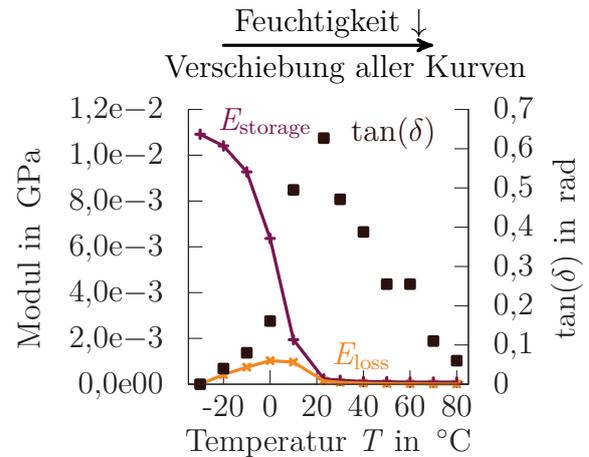


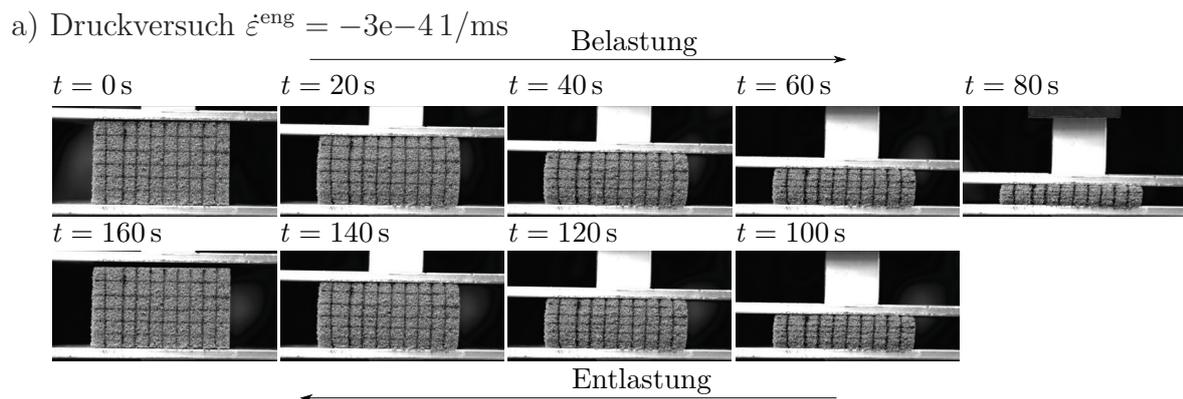
Abbildung 7.5.: Dynamisch-mechanische Analyse einer um $\varepsilon^{\text{eng}} = -0,3$ vorkomprimierten Probe der Größe $50 \times 50 \times 30\text{ mm}^3$ mit Verschiebungsanregung der Amplitude $\hat{s} = 0,1\text{ mm}$ und Frequenz $f = 10\text{ 1/s}$ bei $p = 100\text{ kPa}$

enschaften führen. Ein Feuchtigkeitsverlust verschiebt die Glasübergangstemperatur in der Regel zu höheren Temperaturen. Bei gleicher Prüftemperatur im Bereich des Glasübergangs und geringerer Probenfeuchtigkeit ist daher ein energieelastisches und damit steiferes Verhalten zu erwarten.

Dass sich Confor-Schaum in Vakuum steifer als unter Normalbedingungen verhält, verhindert die Aufspaltung der mechanischen Antwort in einen Beitrag aus Material und Struktur und einen Beitrag aus der Luft-Festkörper-Interaktion auf Basis der Versuchsdaten. Die Versuche in Vakuum konnten folglich nicht verwendet werden. Stattdessen beschränken sich die weiteren Untersuchungen auf Probekörper der Abmessungen $50 \times 50 \times 30\text{ mm}^3$ und auf die Messungen unter Normalbedingungen.

7.1.3. Uniaxiale Zug- und Druckversuche und kinematische Einschränkung

Die Modellierung der Überspannung in Kapitel 5 setzt voraus, dass bei uniaxialer Belastung keine Querdehnungen entstehen (vgl. Abschnitt 5.1). Die Kameraaufnahmen eines uniaxialen Druckversuchs der Dehnrates $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = -3\text{e-}4\text{ 1/ms}$ in Abbildung 7.6a zeigen die Be- und Entlastung und bestätigen diese Annahme für Druckversuche an Confor-Schaum qualitativ. Zwar baucht die Probe in Richtung der freien Probenseiten aus, aber die anfänglich zur Belastungsrichtung parallelen Linien wölben sich nur geringfügig. Die maximale Zunahme der Probenbreite in Probenmitte ist mit weniger als 8% zwischen



b) Zugversuch mit Lastumlenkung in der Vakuumkammer



Abbildung 7.6.: Verformung bei uniaxialen Druck- und Zugversuchen

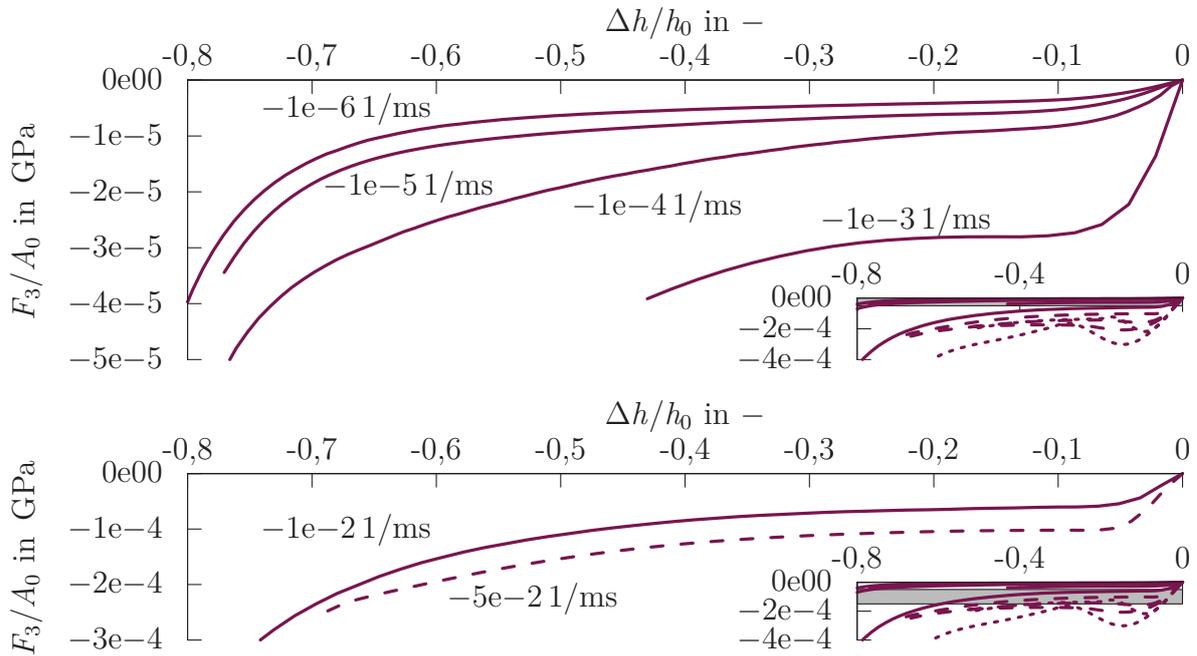
Anfangszustand $t = 0\text{ s}$ und maximaler Kompression bei $t = 80\text{ s}$ sehr gering und die Querkontraktion für diesen Zeitpunkt bezogen auf die anfänglichen Probenabmessungen unterschreitet den Wert von 0,1.

Für die Zugversuche liegen keine Kameraaufnahmen der Frontalansicht vor. Die seitliche Ansicht in Abbildung 7.6b zeigt jedoch, dass sich die Schaumprobe unter Zug einschnürt. Die Abweichung von der kinematischen Einschränkung kann für Zugversuche an dieser Stelle nicht quantitativ bewertet werden.

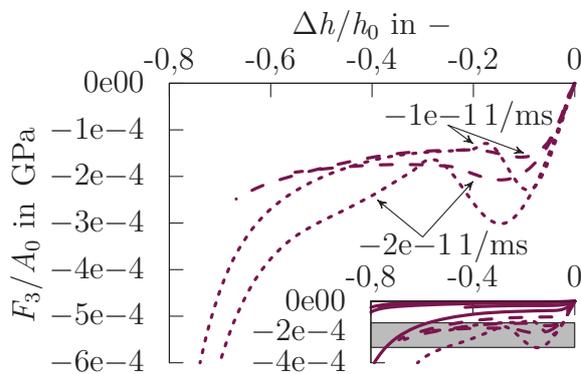
7.1.4. Dehnratenabhängigkeit bei uniaxialen Zug- und Druckversuchen

Das mechanische Verhalten von Confor-Schaum zeigt eine ausgeprägte Dehnratenabhängigkeit. In Abbildung 7.7 sind Druckversuche mit Nenndehnraten zwischen $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -1\text{e-}6\text{1/ms}$ und $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -0,2\text{1/ms}$ und Zugversuche mit Nenndehnraten zwischen $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 1\text{e-}6\text{1/ms}$ und $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 0,01\text{1/ms}$ dargestellt. Bei den Zugversuchen wurden

a) Druckversuche $1e-6 \text{ 1/ms} \leq |\dot{\epsilon}^{\text{eng}}| \leq 5e-2 \text{ 1/ms}$



b) Druckversuche
 $1e-2 \text{ 1/ms} \leq |\dot{\epsilon}^{\text{eng}}| \leq 2e-1 \text{ 1/ms}$



c) Zugversuche
 $1e-5 \text{ 1/ms} \leq \dot{\epsilon}^{\text{eng}} \leq 1e-2 \text{ 1/ms}$

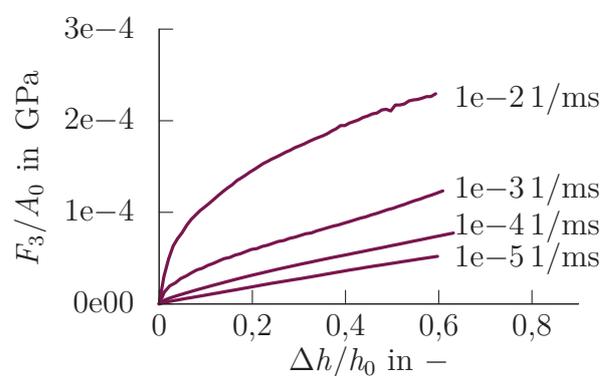


Abbildung 7.7.: Druck- und Zugversuche an Probekörpern der Größe $50 \times 50 \times 30 \text{ mm}^3$ unter Normalbedingungen (Messung der durchgezogenen Kurven mit dem Prüfaufbau nach Abbildung 7.3, Messung der gestrichelten Kurven mit einer Schnellzerreißmaschine, Messung der gepunkteten Kurven mit einem Fallgewichtsaufbau; Gruppierung der Druckversuche anhand ihrer Plateauspannung)

die Proben bis zum Versagen gezogen und die Spannungs-Dehnungs-Kurve in Abbildung 7.7b bei Spannungsabfall abgeschnitten. Für die Zugversuche und die langsamen Druckversuche mit $|\dot{\epsilon}^{\text{eng}}| < 0,05 \text{ 1/ms}$ wurde die Prüfeinrichtung nach Abbildung 7.3

verwendet. Mit Ausnahme des Druckversuches $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -1e-3$ 1/ms (vorzeitige Stempe-
lumkehr) wurde eine Kompression von mehr als 0,75 erreicht.

Um betragsmäßig höhere Dehnraten in den Druckversuchen zu erreichen, wurden sowohl
Versuche an einer Schnellzerreißmaschine als auch Versuche mit einem Fallgewichtsauf-
bau durchgeführt. Bei der Verwendung einer Schnellzerreißmaschine im Druckmodus ist
es nicht möglich, hohe Kompressionen bei konstanter Prüfgeschwindigkeit zu erreichen,
da die bewegliche Masse des Prüfaufbaus abgebremst werden muss. Die Druckversuche
aus Abbildung wurden deshalb mithilfe einer Kraftumlenkung an einer Schnellzerreißma-
schine im Zugmodus durchgeführt. Trotzdem musste die Geschwindigkeit vor Erreichen
der maximalen Kompressionen reduziert werden.

Beim Fallgewichtsaufbau hingegen bremst der Schaum das Fallgewicht kontinuierlich ab
und die maximale Kompression wird durch das Vermögen des Schaumes bestimmt, die
kinetische Energie des Impaktors zu absorbieren. Confor-Schaum bremst das Fallgewicht
schneller ab als andere PU-Weichschäume. Trotzdem beginnt eine nennenswerte Abnah-
me der Geschwindigkeit bei den Versuchen $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -1e-1$ 1/ms und $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -2e-1$ 1/ms
erst nach einer Kompression von 0,75 bzw. 0,8.

Vergleicht man die Druckversuche untereinander, so verändert sich die Spannungs-
Dehnungs-Kurve in Abhängigkeit der Dehnrates. Je höher der Betrag der Dehnrates
ist, desto höher fällt der Betrag der Spannungsantwort aus. Während die langsamen
Druckversuche dem bekannten Spannungs-Dehnungs-Verlauf eines offenzelligen Poly-
merschaumes (vgl. Abbildung 1.4) mit elastischer Biegung, Plateauspannung und Ver-
dichtung folgen, weichen die Druckversuche höherer Dehnrates in zwei Aspekten von
diesem Verlauf ab. Zum einen zeigen die dynamischen Druckversuche zwischen elasti-
schem Anstieg und Plateauspannung eine Spannungsspitze. Zum anderen erfolgt der
betragsliche Spannungsanstieg, der üblicherweise mit der Verdichtung des Schaumes in
Verbindung gebracht wird, bei immer geringeren Kompressionen.

Eine Erklärung für diese Abweichungen ist nicht bekannt. Da die Versuche in Vakuum
jedoch ebenfalls Spannungsspitzen und einen verfrühten Spannungsanstieg aufweisen,
scheidet der pneumatische Effekt als Ursache aus.

7.2. Modellierung und Parameteridentifikation

Wie in Kapitel 5 dargestellt besitzen die Konstitutivgleichungen FNLVE-TBU-HS und
FNLVE-TBU-HS⁺ dehnratenabhängige Eigenschaften, unterscheiden Zug- und Druck-
belastung und erzeugen in Kombination mit einer geeigneten Materialfunktion bei uni-
axialen Zug- und Druckversuchen eine konstante Kraftantwort. Dadurch können sie die
Überspannung offenzelliger Polymerschäume prinzipiell abbilden, die aus den ersten bei-
den Einflussfaktoren auf das mechanische Verhalten, dem Struktur- und dem Relaxa-

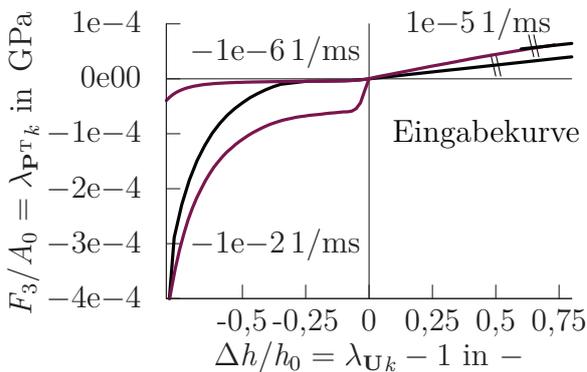
tionsverhalten des Polymerwerkstoffes, resultiert. Mit der Unterscheidung zwischen Be- und Entlastung ist das Modell FNLVE-TBU-HS⁺ zudem in der Lage, den dritten Einflussfaktor, einen Adhäsionseffekt unter Druckbelastung, zu modellieren. Im Rahmen dieser Arbeit wird angenommen, dass der pneumatische Effekt als vierter Einflussfaktor für kleine Probengrößen vernachlässigbar ist und die Modellierung der 50x50x30 mm³ großen Proben ohne Berücksichtigung der Luftströmung erfolgen kann.

Die Modellierung aus Kapitel 5 setzt eine Zerlegung in Gleichgewichtsspannung und Überspannung voraus. Die Gleichgewichtsantwort ist definitionsgemäß die Spannungsantwort für Belastungen mit verschwindender Dehnrates $\dot{\epsilon} \rightarrow 0$. In der folgenden Modellierung von Confor CF-45 wird von diesem Vorgehen unter Druckbelastung abgewichen, um den beiden Besonderheiten des Confor-Schaumes, den Spannungsspitzen und dem verfrühten Spannungsanstieg (vgl. Abschnitt 7.1.4), gegenüber anderen offenzelligen Polymerschäumen Rechnung zu tragen. Die Modifikationen erfolgen im Hinblick auf den Anwendungsbereich der Modellierung für Impaktvorgänge hoher Dehnraten.

7.2.1. Gleichgewichtsantwort

Für die Gleichgewichtsantwort wird das Materialmodell nach Abschnitt 5.2 eingesetzt. Als Eingabe erfordert es eine technische Spannungs-Dehnungs-Kurve, die sowohl Druck- als auch Zugbelastung abdeckt. In Abbildung 7.8a sind einerseits die Druckversuche der Dehnraten $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -1\text{e-}6\text{ 1/ms}$ und $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -1\text{e-}21\text{ 1/ms}$ und der Zugversuch der Dehnrates $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 1\text{e-}5\text{ 1/ms}$ dargestellt. Andererseits beinhaltet die Abbildung die daraus abgeleitete Eingabekurve für die Gleichgewichtsantwort der Simulation.

a) Gleichgewichtsantwort



b) Zielverläufe der viskoelastischen Überspannung unter Zugbelastung

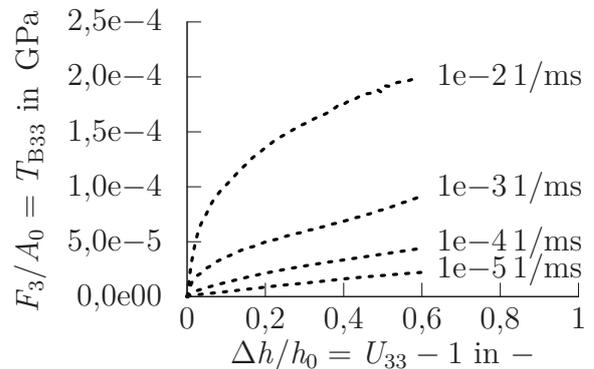


Abbildung 7.8.: Zerlegung der Versuchskurven in Gleichgewichts- und Überspannungsantwort

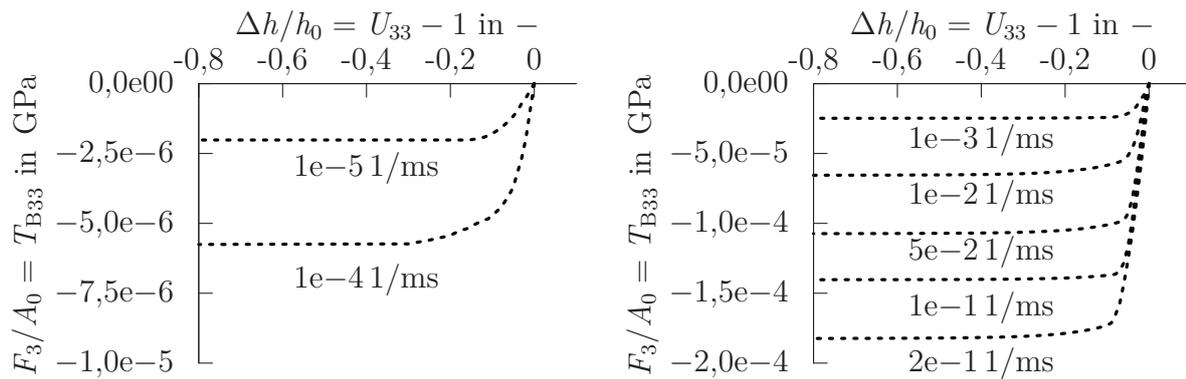


Abbildung 7.9.: Zielverläufe der viskoelastischen Überspannung unter Druckbelastung

Für die Zugbelastung wird ein linearer Spannungsverlauf mit der letzten Steigung des Zugversuches der Dehnrate $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = 1e-5 \text{ 1/ms}$ als Gleichgewichtsantwort vorgegeben. Die Gleichgewichtsantwort für die Druckbelastung folgt dem anfänglichen Verlauf des Druckversuches $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = -1e-6 \text{ 1/ms}$ und nimmt dann ab $\varepsilon^{\text{eng}} < -0,3$ den Druckversuch $\dot{\varepsilon}^{\text{eng}} = -0,01 \text{ 1/ms}$ als Vorbild.

Dass die Versuchskurven direkt als Eingabekurven verwendet werden können, erfordert zum einen, dass die Messgrößen Kraft und Weg direkt in die Größen des Materialmodells Spannung und Dehnung umgerechnet werden können. Dies wird durch die kinematische Einschränkung vereinfacht. Zum anderen muss auch eine homogene Verformung der Probe vorliegen, um aus der Veränderung der Gesamthöhe auf die Veränderung einzelner Teilstrecken schließen zu können.

Die Gleichgewichtsantwort wird im Folgenden mit GG abgekürzt und in Kombination mit einer viskoelastischen Überspannung der Kurzform vorangestellt, z. B. GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv.

7.2.2. Viskoelastische Überspannung

Die viskoelastische Überspannung berechnet sich als Differenz der Versuchsdaten abzüglich der Gleichgewichtsantwort. Die resultierenden Überspannungsverläufe der Zugversuche aus Abbildung 7.7c sind in Abbildung 7.8b dargestellt. Für die Druckversuche aus Abbildung 7.7 wurden zusätzlich die Spannungsspitzen entfernt und die viskoelastische Überspannung für hohe Kompressionen in Abbildung 7.9 auf dem Niveau der viskoelastischen Plateauspannung fortgeführt.

Da bei uniaxialer Belastung und bei Gültigkeit der kinematischen Einschränkung die Biot-Spannung mit der Nominalspannung und der wahren Spannung übereinstimmt, legt die viskoelastische Überspannung aus Abbildung 7.9 den Kurvenverlauf ohne eine

a) Zeitabhängige Materialfunktion:
 Prony-Reihen

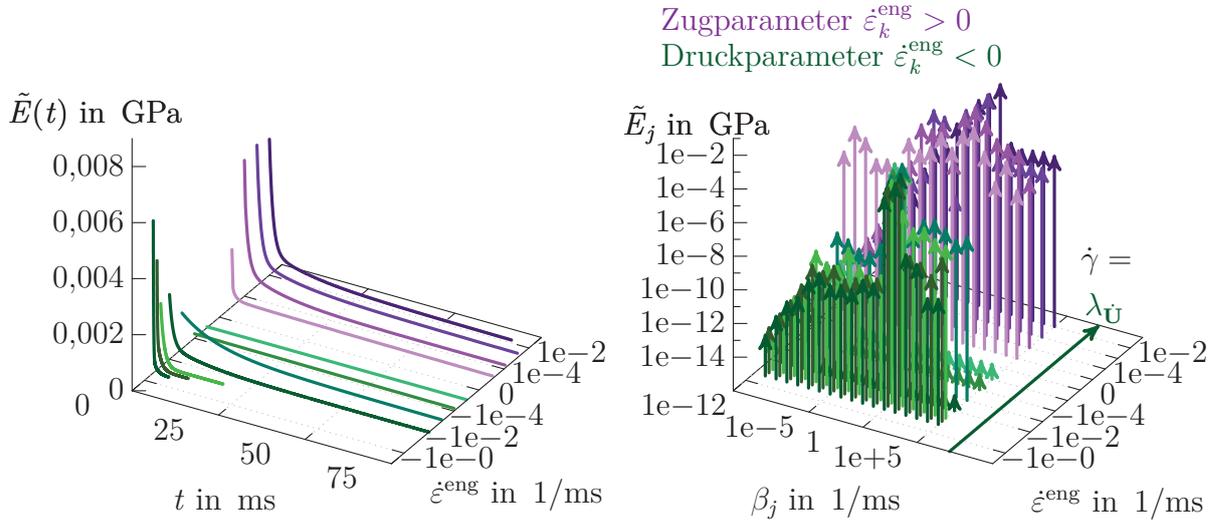
 b) Dehnratenabhängiger Parametersatz:
 Spektren der Prony-Reihen


Abbildung 7.10.: Ergebnis der Parameteridentifikation für das Modell FNLVE-TBU-HS-rekursiv

weitere Umrechnung fest, den die Konstitutivgleichung FNLVE-TBU-HS unter Annahme einer homogenen Dehnungsverteilung beschreiben muss.

Für die Parameteridentifikation des Modells FNLVE-TBU-HS-rekursiv wurde die analytische Lösung mit der Randbedingung einer konstanten Belastungsgeschwindigkeit $v = \dot{U}_{33}l_0$ in Abhängigkeit von t und $U_{33} - 1 = \varepsilon_{33}^{\text{eng}} = \Delta h/h_0$ aufgestellt

$$T_{B33}(t) = \dot{U}_{33} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{\tilde{E}_j}{\beta_j} \left(1 - e^{-\beta_j t}\right), \tag{7.1}$$

$$T_{B33}(U_{33} - 1) = \dot{U}_{33} \sum_{j=1}^{N_j} \frac{\tilde{E}_j}{\beta_j} \left(1 - e^{-\beta_j \frac{U_{33}-1}{\dot{U}_{33}}}\right).$$

Die Parameter der Prony-Reihe wurden anschließend mithilfe von Optimierungen zur Minimierung des Fehlerquadrates zwischen Versuchskurve und analytischer Lösung bestimmt. Um eine Relaxationsrate β_j mit einer ratenabhängigen Steifigkeit $\tilde{E}_j(\lambda_{\dot{U}})$ gemäß Gl. (5.36) und (5.38) kombinieren zu können, mussten die Relaxationsraten bei allen Versuchen identisch sein und wurden deshalb in dekadischen Abständen zwischen $\beta_1 = 1e-11$ 1/ms und $\beta_{17} = 1e+5$ 1/ms festgehalten.

Die resultierenden Materialfunktionen sowie die zugehörigen Spektren der Prony-Reihen sind in Abbildung 7.10 für alle Zug- und Druckversuche dargestellt. Die Materialfunktio-

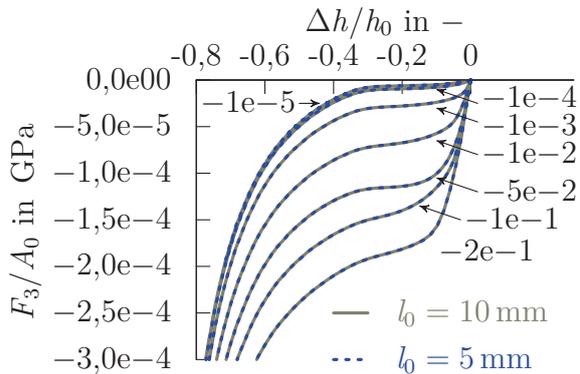
nen der Druckversuche $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -0,05, -0,1$ und $-0,2$ 1/ms ergänzen die bereits bekannten Parametersätze aus Kapitel 6 (vgl. Abbildungen 6.12 und 6.13). Für das Materialmodell FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv wird der Parametersatz aus Abbildung 7.10b sowohl für die Belastungsphase als auch, mit umgekehrtem Vorzeichen der Dehnrates, in der Entlastungsphase (vgl. Parametersätze in Abbildung 6.22) für die folgenden Beispiele ebenfalls verwendet.

Der Parametersatz aus Abbildung 7.10 illustriert zwei Merkmale der Parameteridentifikation viskoelastischer Materialien. Zum einen kann anhand der Verläufe der Materialfunktionen beurteilt werden, ob es sich um ein linear oder nichtlinear viskoelastisches Materialverhalten handelt. Nichtlinear viskoelastisches Materialverhalten erfordert unterschiedliche Materialfunktionen, wie sie in Abbildung 7.10a zu sehen sind. Durch die unterschiedlichen Anfangswerte bei $t = 0$ stellen sich unterschiedliche und geringe Anfangssteifigkeiten ($\tilde{E}(0) < 0,009$ GPa) im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ein. Der Verlauf der Materialfunktion wirkt sich auf den weiteren Verlauf der Spannungsantwort aus. Zum anderen zeigt die Darstellung der Materialfunktionen in Abbildung 7.10a, dass die Parameteridentifikation auf die zugrunde liegende Versuchsdauer beschränkt ist. Für Confor-Schaum ist diese entweder durch das Materialversagen bei den Zugversuchen oder durch den Zeitpunkt bei der maximal möglichen Kompression vorgegeben. Obwohl die Simulationszeit für Crashlastfälle üblicherweise $t_{\text{end}} = 200$ ms nicht überschreitet, wurde die Parameteridentifikation für das Modell FNLVE-TBU-HS-rekursiv für die gesamte Versuchsdauer der langsamen Versuche und die vollständigen Spannungs-Dehnungs-Kurven aus Abbildung 7.9 durchgeführt.

Aufgrund der umfassenden Parameteridentifikation decken die FE-Simulationen der Zug- und Druckversuche in Abbildung 7.11 den gesamten Dehnungsbereich ab. Als Materialmodell wurde die Kombination GG+FLNVE-TBU-HS-rekursiv verwendet, die den Parametersatz der viskoelastischen Überspannung aus Abbildung 7.10 zusammen mit der Gleichgewichtsantwort aus Abbildung 7.8a verbindet.

Die Simulation der $50 \times 50 \times 30$ mm³ großen Schaumproben mit Hexaederelementen der Elementkantenlängen $l_0 = 5$ mm und $l_0 = 10$ mm führt in Abbildung 7.12 zu einer homogenen Dehnungsverteilung und damit zu identischen Spannungs-Dehnungs-Verläufen beider Diskretisierungen in Abbildung 7.11. Während in Abbildung 7.13 die Gesamtspannungsverläufe der Zugversuche die Versuchsdaten mit durchschnittlichen quadratischen Fehlern $\leq 0,002$ (vgl. Tabelle 7.1) sehr gut abbilden, verursacht die Gleichgewichtsantwort der Druckbelastung für langsame Druckversuche einen zu schnellen betraglichen Anstieg der Spannungsantwort. Für den Druckversuch $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -1e-5$ 1/ms führt der Anstieg der Gleichgewichtsantwort beispielsweise auf einen durchschnittlichen quadratischen Fehler von 15,5755. Da die hohen Abweichungen jedoch erst bei $\Delta h/h_0 < -0,4$ und damit bei deutlicher Überschreitung der Simulationsdauer von $t_{\text{end}} > 200$ ms für die langsamen Versuche auftreten, spielt diese Abweichung für die Crashlastfälle keine Rolle. Dass der Anfangsbereich zufriedenstellende Ergebnisse liefert, zeigt die zweite

a) Druckversuche $[\dot{\epsilon}^{\text{eng}}] = 1/\text{ms}$



b) Zugversuche

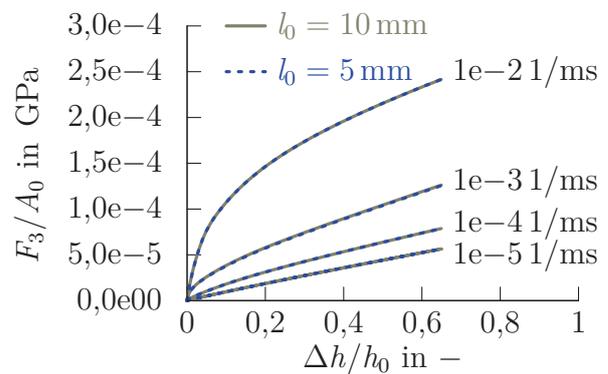


Abbildung 7.11.: Simulation von Zug- und Druckversuchen an $50 \times 50 \times 30 \text{ mm}^3$ großen Schaumproben mit dem Materialmodell GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv: Übereinstimmende Spannungsantworten für die Elementkantenlängen $l_0 = 5 \text{ mm}$ und $l_0 = 10 \text{ mm}$

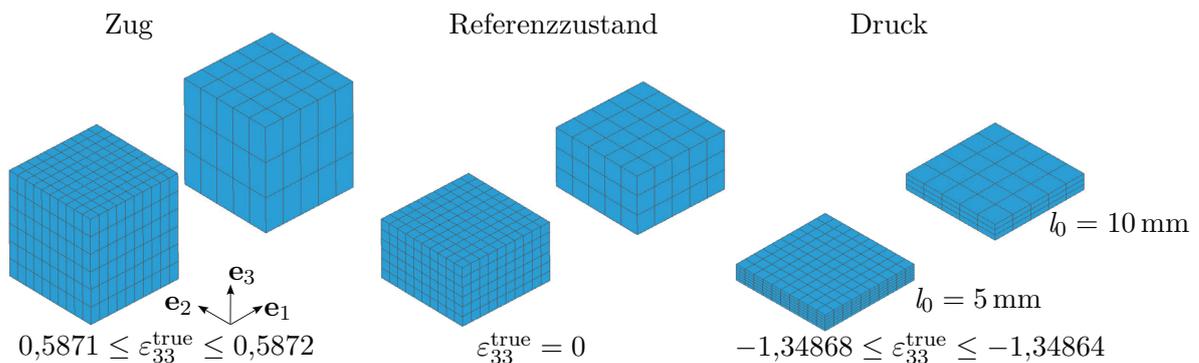


Abbildung 7.12.: Homogene Dehnungsverteilung bei uniaxialen Zug- und Druckversuchen mit dem Material GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv: Die Ober- und Untergrenzen der Elementdehnungen $\epsilon_{33}^{\text{true}}$ bei den Elementkantenlängen $l_0 = 5 \text{ mm}$ und $l_0 = 10 \text{ mm}$ liegen sehr eng beieinander.

Fehlerberechnung der Druckversuche für den Bereich $-0,4 \leq \Delta h/h_0 \leq 0$ in Tabelle 7.1. Neben dem rekursiven Faltungsalgorithmus kann die Konstitutivgleichung FNLVE-TBU-HS auch mithilfe des lokalen Faltungsalgorithmus berechnet werden. Hierzu wurde die Intervalleinteilung mit $B = 3$ und $h^* = 0,25 \text{ ms}$ verwendet. Aufgrund der Beschränkung der maximalen Anzahl an Intervallen in der Materialroutine war die Simulationsdauer auf $t_{\text{end}} \leq 273,5 \text{ ms}$ festgelegt und nur für diese Zeitspanne wurden die Parameter der lokalen Prony-Reihen bestimmt.

Während bis zu vier Relaxationsraten β_j für jedes Intervall einzeln wählbar waren, konnten die Steifigkeiten \tilde{E}_j sowohl in Abhängigkeit des Intervalls als auch in Abhängigkeit der Dehnrates variieren. In Abbildung 7.14 sind die Überspannungs-Dehnungs-Kurven für die $50 \times 50 \times 30 \text{ mm}^3$ großen Schaumproben mit einer Elementkantenlänge von

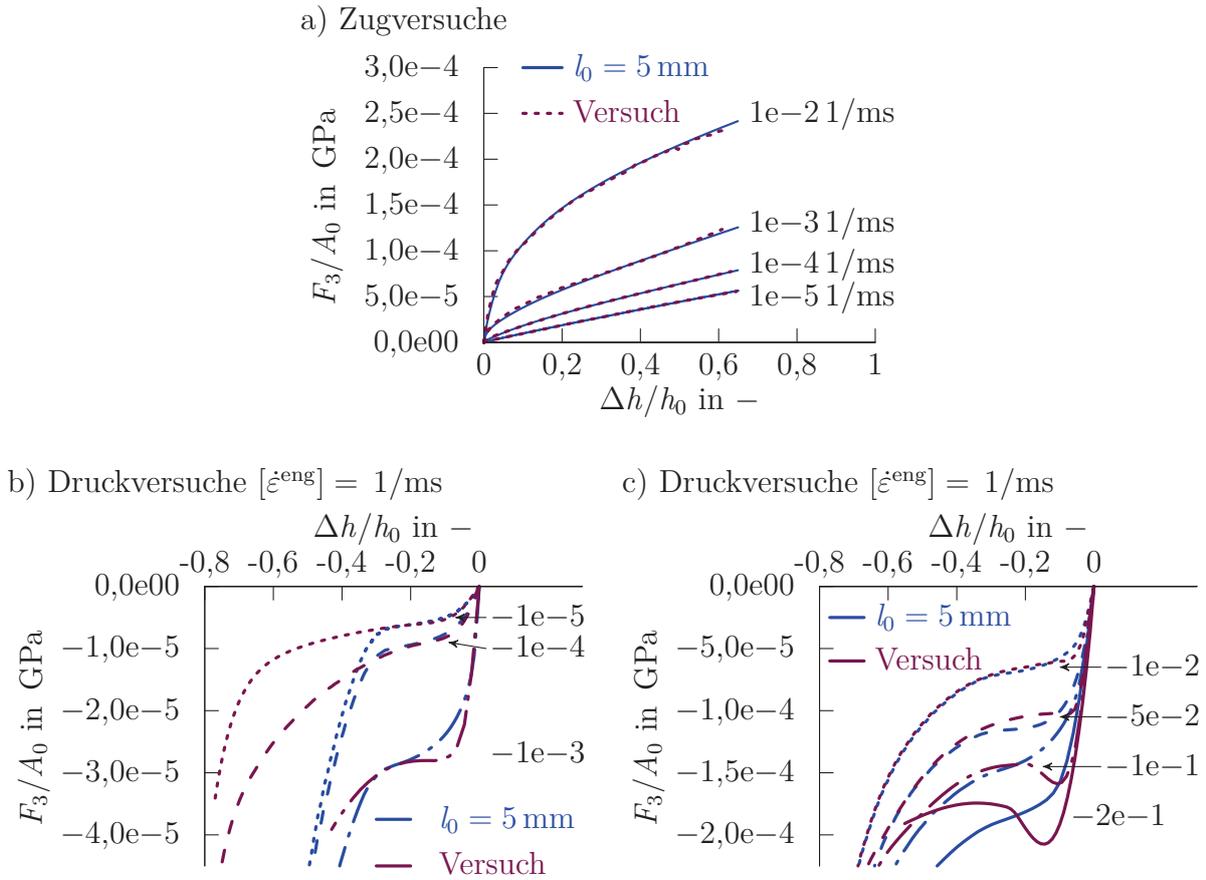
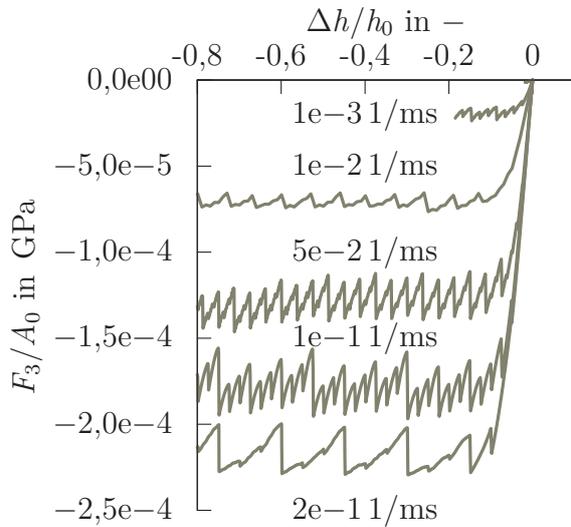


Abbildung 7.13.: Zug- und Druckversuche an $50 \times 50 \times 30 \text{ mm}^3$ großen Schaumproben: Vergleich der Versuchs- und Simulationsergebnisse mit dem Modell GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv und der Elementkantenlänge $l_0 = 5 \text{ mm}$

Dehnrates $ \dot{\epsilon}^{\text{eng}} $ in 1/ms	Druckversuche		Zugversuche
	$-0,8 \leq \Delta h/h_0 \leq 0$	$-0,4 \leq \Delta h/h_0 \leq 0$	$0 \leq \Delta h/h_0 \leq 0,6$
1e-5	15,5755	0,2020	0,0005
1e-4	6,7872	0,0707	0,0010
1e-3	0,0256	0,0230	0,0018
1e-2	0,0243	0,0335	0,0020
5e-2	0,0078	0,0125	—
1e-1	0,0178	0,0248	—
2e-1	0,0418	0,0288	—

Tabelle 7.1.: Quadratischer Fehler $\sum_{k=1}^{N_K} \left(\frac{\sigma_k - \bar{\sigma}_k}{\bar{\sigma}_k} \right)^2$ zwischen der gemessenen Gesamtspannung $\bar{\sigma}_k(\Delta h_k/h_0)$ und der berechneten Gesamtspannung $\sigma_k(\Delta h_k/h_0)$ mit dem Modell GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv und der Elementkantenlänge $l_0 = 5 \text{ mm}$ (vgl. Abbildung 7.13)

a) Druckversuche



b) Zugversuche

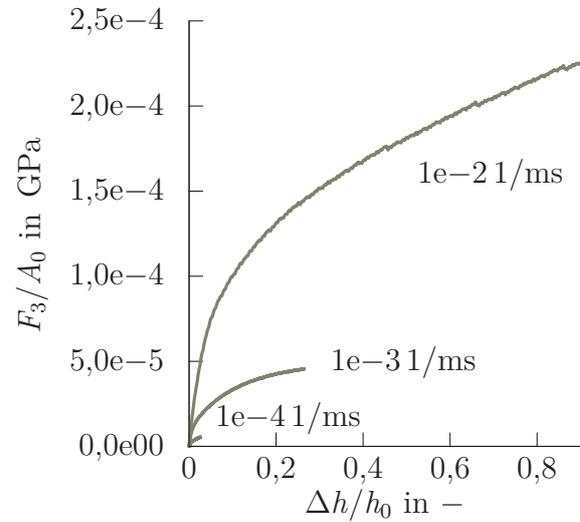


Abbildung 7.14.: Überspannung der $50 \times 50 \times 30 \text{ mm}^3$ großen Schaumproben mit dem Materialmodell FNLVE-TBU-HS-lokal für die Elementkantenlänge $l_0 = 5 \text{ mm}$: Der Parametersatz endet bei $t_{\text{ub6}} = 273,5 \text{ ms}$ und verursacht unter Druckbelastung starke Oszillationen.

$l_0 = 5 \text{ mm}$ für einen manuell bestimmten Parametersatz dargestellt. Für diesen Parametersatz wurden die Relaxationsraten anhand der Zugversuche festgelegt und ermöglichen für die Zugbelastung zufriedenstellende Übergänge zwischen den lokalen Prony-Reihen der einzelnen Intervalle, sodass die Spannungs-Antworten für Zugbelastung in Abbildung 7.14 nur geringe Sprünge aufweisen. Für die Druckversuche hingegen sind die Relaxationsraten nicht geeignet und führen zu starken Oszillationen der Spannungs-Dehnungs-Antworten. Die großen Sprünge unter Druckbelastung verhindern den Einsatz des Modells FNLVE-TBU-HS-lokal mit diesem Parametersatz für die folgenden Komponentenversuche. Da glatte Spannungs-Dehnungs-Antworten mit dem rekursiven Algorithmus bereits vorlagen, wurde darauf verzichtet, eine Optimierung der lokalen Prony-Reihen für eine gute Übereinstimmung der Zug- und Druckversuche durchzuführen. Die folgenden Beispiele werden ausschließlich mit den Modellen FNLVE-TBU-HS-rekursiv und FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv berechnet.

7.3. Numerische Beispiele: Robustheit und viskoelastische Effekte

Die Modellierung von Confor-Schaum im letzten Abschnitt hat gezeigt, dass das Materialverhalten von $50 \times 50 \times 30 \text{ mm}^3$ großen Schaumproben durch die Materialmodelle FNLVE-TBU-HS-rekursiv und FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv wiedergegeben werden kann. Eine abschließende Validierung der Modellierung anhand von Komponentenversuchen ist an dieser Stelle jedoch nicht möglich, da die Produktion des Confor-Schaumes CF-45 eingestellt wurde¹ und sowohl die Komponentenversuche selbst als auch die Versuche zur Modellierung des pneumatischen Effekts nicht durchgeführt werden konnten. Die vorliegenden Messungen an Proben unterschiedlicher Größe reichen nicht aus, um die Interaktion zwischen Luft und Schaumstruktur verlässlich zu bestimmen und die Empfindlichkeit des Werkstoffes bei Raumtemperatur verhinderte, den Lufteinfluss mithilfe von Versuchen in Vakuum zu modellieren.

Die wichtigen viskoelastischen Effekte, die aus der Schaumstruktur und dem mechanischen Verhalten des Polymerwerkstoffes resultieren, können jedoch mit der Modellierung FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾-rekursiv in den folgenden Beispielen aufgezeigt werden. Die Ergebnisse können anschließend zur Auslegung eines Komponentenversuches herangezogen werden.

Um eine ähnliche Schaumbelastung wie beim Aufprall des Hüftimpaktors auf die Fahrzeugfront zu erzielen, wird zunächst der Lastfall des Fußgängerschutzes vorgestellt. Mit dieser Grundlage werden im Anschluss zwei Ausführungen eines Komponentenversuches präsentiert. Diese werden einerseits genutzt, um das Zusammenspiel von Gleichgewichtsantwort und viskoelastischer Überspannung zu illustrieren und um andererseits die neue Modellierung mit der bestehenden zu vergleichen.

7.3.1. Fußgängerschutz: Hüftprüfkörper gegen Fronthaubenvorderkante

In Abbildung 7.15 ist ein Simulationsmodell der Daimler AG für den Lastfall des Fußgängerschutzes im Euro NCAP dargestellt, bei dem der Hüftprüfkörper in einem festen Winkel und einer Anfangsgeschwindigkeit von $40 \text{ km/h} \approx 11,11 \text{ m/s}$ auf die Mitte der Fronthaubenvorderkante trifft und durch die Fahrzeugstruktur abgebremst wird. Dabei werden die Kräfte und Biegemomente des Prüfkörpers erfasst. Die Beschränkung der Maximalkraft im Euro NCAP bei reduzierter Anfangsgeschwindigkeit dient dazu, die Konstruktion einer nachgiebigen Fahrzeugstruktur und damit eine Energieaufnahme

¹Die Nachfolgeprodukte heißen u. a. Confor CF-45 AC, Confor CF-45 M und Polyform ET PF203.

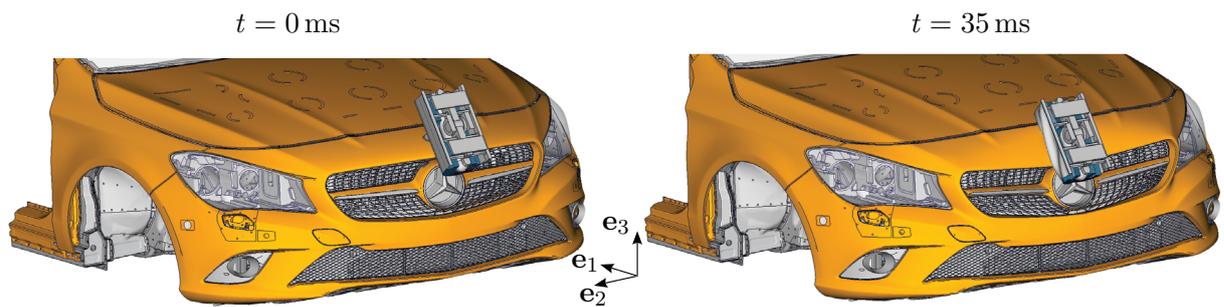


Abbildung 7.15.: Fußgängerschutz: Hüftprüfkörper gegen Fronthaubenvorderkante

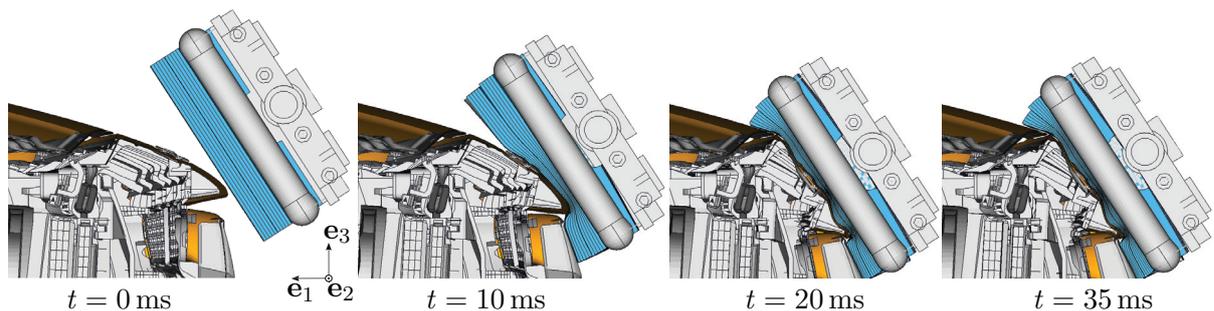


Abbildung 7.16.: Längsschnitt durch die Mitte der Fronthaubenvorderkante: Nachgiebigkeit der Fahrzeugstruktur und Kompression des Confor-Schaumes (hellblaue Farbe)

im Aufprallbereich des Fußgängers zu bewirken. Die Begrenzung der Biegemomente soll zudem Fahrzeugfronten mit kleinen Radien verhindern. (KÜHN U. A. 2007)

Das Interesse an dieser Stelle gilt dem Verhalten des Confor-Schaumes als Bestandteil des Hüftprüfkörpers. Wie in Abbildung 1.2c und im Längsschnitt in Abbildung 7.16 zu sehen, besteht der Prüfkörper aus einer starren Führungseinheit und einem 350 mm langen Stahlrohr mit einem Durchmesser von 50 mm. Das Stahlrohr wird von zwei je 25 mm dicken Schaumlagen aus Confor CF-45 eingeschlossen, die wiederum von einer Neopren-Haut eingehüllt werden.

Während des Aufpralls passt sich der Schaum durch seine geringe Steifigkeit vollständig der Fahrzeugkontur an, sodass zwischen dem Impaktor und der Fahrzeugfront eine große Kontaktfläche entsteht und Spannungsspitzen in der Fahrzeugfront vermieden werden. Die Eindrückung der Fahrzeugfront in den Schaum ruft lokal hohe Kompressionen des Schaumes beispielsweise an der Fronthaubenvorderkante oder unterhalb des Markenemblems hervor. In Abbildung 7.17 sind die beiden Schaumlagen des Hüftprüfkörpers bei maximaler Kompression zum Zeitpunkt $t = 31$ ms dargestellt. Bei einer Elementkantenlänge von etwa 5 mm in diesem Bereich wird eine minimale wahre Elementdehnung von $\lambda_{\epsilon^{\text{true}}} = -2,02$ erreicht, die einer Kompression von 87% entspricht.

Durch den betragsmäßigen Anstieg der Gleichgewichtsspannung für negative Dehnungen (vgl. Abbildung 7.8) wird die Energie bei hohen Kompressionen hauptsächlich durch

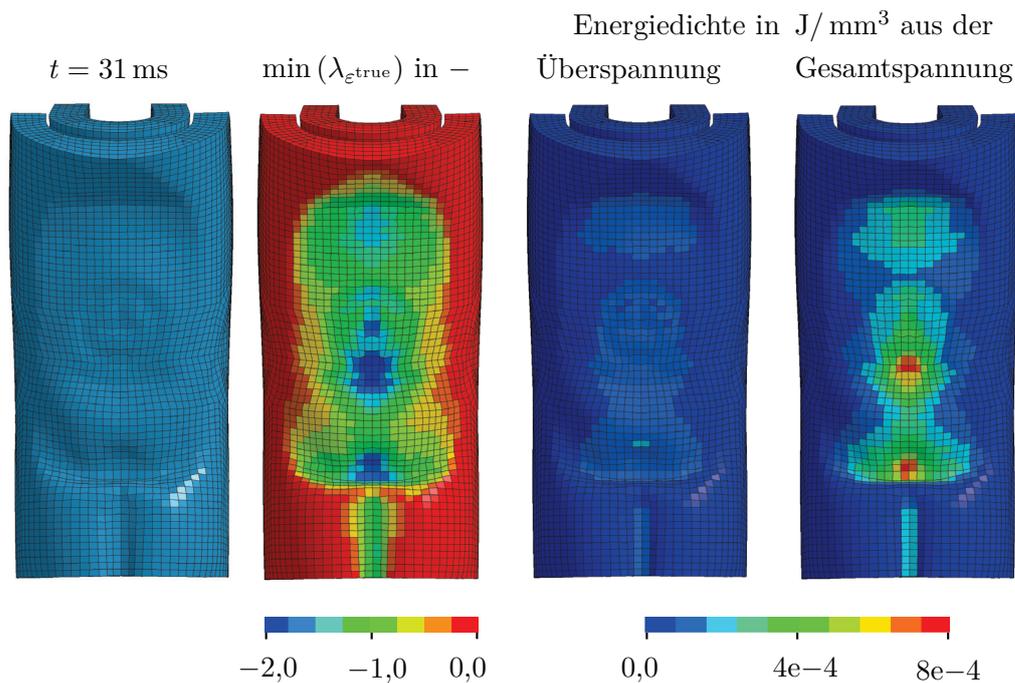


Abbildung 7.17.: Schaumverhalten: Anpassung an die Fahrzeugkontur mit hohen lokalen Kompressionen und hoher elastischer Energiedichte

die elastische Gleichgewichtsantwort abgebaut. In Abbildung 7.17 zeigt sich dies an den Unterschieden zwischen der Energiedichte aus dem Beitrag der viskoelastischen Überspannung und der Energiedichte des Gesamtmodells. Die Gesamtenergiedichte ist in den Bereichen hoher Kompression mehr als viermal so groß wie die Energiedichte der Überspannung.

Für die Modellierung des Luftstroms muss beachtet werden, dass sich die beiden Schaumlagen in der Randzone voneinander lösen und ihre unabhängige Bewegung zu einem Versatz der Schaumkanten führt (vgl. Abbildung 7.16). Um den zeitlich veränderlichen Widerstand für den Luftstrom zu berücksichtigen, ist es folglich wichtig, beide Schaumlagen einzeln abzubilden.

Der Lastfall des Fußgängerschutzes beweist, dass das Materialmodell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv in einem breiten Spektrum an Dehnungszuständen und Dehnraten robust funktioniert.

7.3.2. Komponentenversuche: Zylinder auf Schaumproben

Aus dem Lastfall des Fußgängerschutzes wurde der Aufprall eines zylinderförmigen Impaktors auf zwei Schaumproben in Abbildung 7.18 abgeleitet. Der Komponentenversuch vereinfacht dabei die Randbedingungen der Schaumbelastung.

Erstens ersetzt der zylinderförmige Impaktor die konturreiche Fahrzeugfront und be-

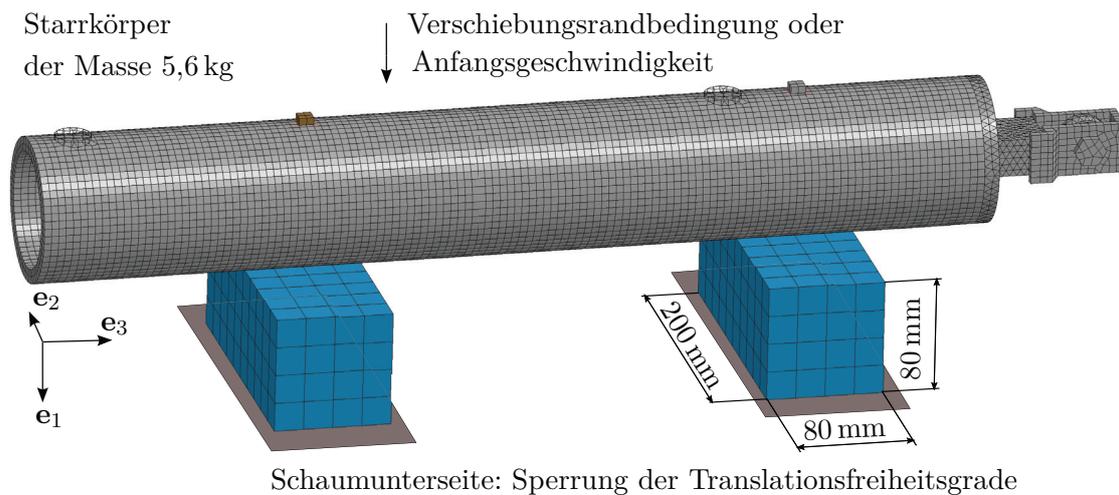


Abbildung 7.18.: Lastfall: Zylinder auf Schaumwürfel

wirkt durch seine Krümmung trotzdem unterschiedliche Dehnungszustände und Dehnraten. Der Impaktor wird als Starrkörper der Masse 5,6 kg modelliert und kann sowohl durch eine Verschiebungsrandbedingung geführt als auch mit einer Anfangsgeschwindigkeit beaufschlagt werden.

Zweitens wird der Schaum als rechteckiger Block eingesetzt und weist daher wie bei der experimentellen Charakterisierung (vgl. Abschnitt 7.1) keine Vorbelastung auf. Dies steht im Gegensatz zur Biegung der Schaumlagen um das Stahlrohr des Hüftprüfkörpers, die bereits in der Ausgangslage zu einer lokalen Zug- und Druckbelastung des Schaummaterials führt.

Drittens wird für die Darstellung der viskoelastischen Effekte angenommen, dass der Schaum in den Maßen $200 \times 80 \times 80 \text{ mm}^3$ vorliegt. Eine Spaltbildung und Verschiebung einzelner Schaumlagen ist durch diese Vereinfachung nicht möglich. Zudem werden die Schaumblöcke im Versuch an der Unterseite festgeklebt, sodass die Translationsfreiheitsgrade der Schaumunterseite im Modell gesperrt sind.

Um die Dehnungs- und Dehnratenbereiche des Hüftprüfkörpers zu erzielen, können die Impaktorgeschwindigkeit, die Impaktormasse oder die Dimensionen der Schaumproben ohne Weiteres angepasst werden. Die Untersuchung der viskoelastischen Effekte bei zwei unterschiedlichen Randbedingungen steht hier jedoch im Vordergrund.

In Anlehnung an die Schaumprüfungen nach ASTM D3574-11 (2011) folgt der Impaktor im ersten Beispiel einer Verschiebungsrandbedingung in e_1 -Richtung. Damit kann sowohl die Kraft bei einer vorgegebenen Kompression bestimmt als auch die Erholungsgeschwindigkeit nach einer vorgegebenen Kompression beurteilt werden.

Im zweiten Beispiel dient die Bestimmung der Rückparallelizität nach DIN EN ISO 8307 (2008) als Vorlage. Statt einer Kugel wird der Impaktor mit einer Anfangsgeschwindigkeit in e_1 -Richtung versehen und der Verlust seiner kinetischen Energie beim Stoß mit den beiden Schaumkörpern beurteilt. Die Bewegung des Impaktors in e_2 -Richtung

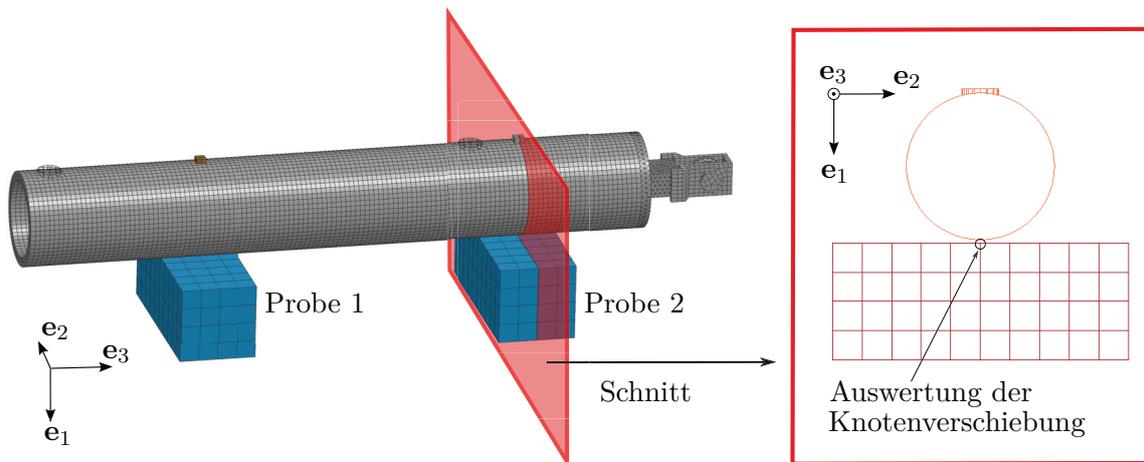


Abbildung 7.19.: Zylinder auf Schaumwürfel: Position der Verschiebungsauswertung

und e_3 -Richtung ist für diese beiden Beispiele gesperrt. Anhand dieser Komponentenversuche können die Steifigkeit, Erholungsgeschwindigkeit und Energiedissipation eines weich-elastischen Polymerschaumes bewertet werden.

Zylinder auf Schaumproben: Netzkonvergenz und Erholung

Wie in Abschnitt 7.2 erläutert ist die Materialmodellierung nicht auf eine bestimmte Netzgröße festgelegt. Aus diesem Grund wird als erstes die notwendige Netzfeinheit für den Aufprall des Zylinders auf die beiden Schaumproben am Beispiel des Materialmodells GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv ermittelt. Im Anschluss daran werden die Modelle der Überspannung FNLVE-TBU-HS-rekursiv und FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv in Kombination mit verschiedenen Gleichgewichtsantworten verglichen. Zuletzt wird der Komponentenversuch mit der bestehenden Modellierung des Confor-Schaumes simuliert und der neuen Modellierung gegenübergestellt.

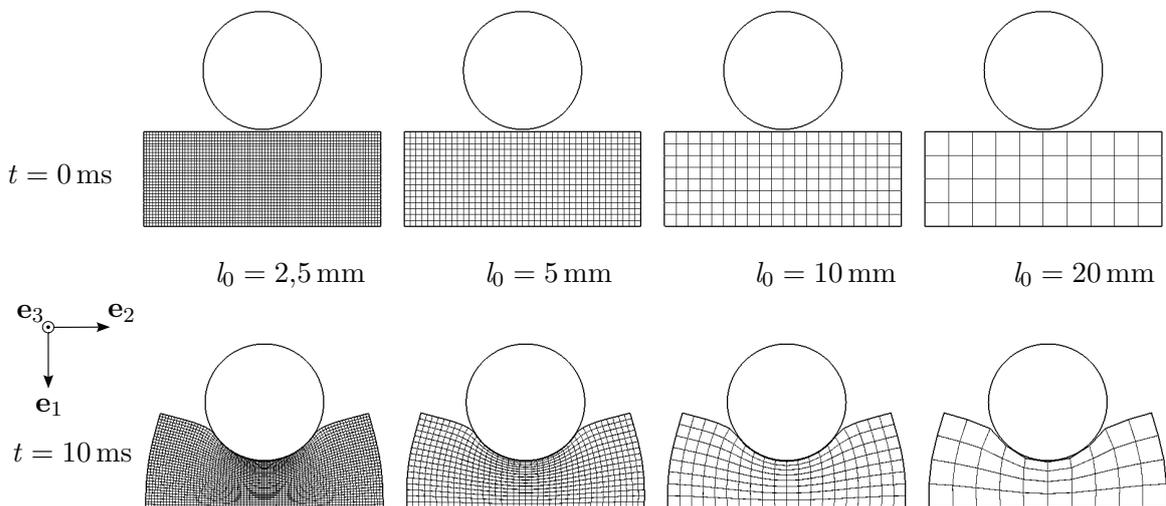
Aufgrund des symmetrischen Aufbaus reicht es aus, zur Auswertung des Komponentenversuches das Verhalten der Probe 2 in Abbildung 7.19 zu betrachten. Wie im Querschnitt dargestellt wird die Verschiebung in der Mitte der Probenoberseite ausgewertet. Bei allen Schaumproben mit den Elementkantenlängen $l_0 \in \{2,5; 5; 10; 20 \text{ mm}\}$ in Abbildung 7.20a befindet sich an dieser Stelle ein Knoten zur Auswertung.

Im ersten Beispiel folgt der Impaktor der Weg-Zeit-Kurve in Abbildung 7.20b, sodass die Knoten zur Auswertung in der Belastungsphase unabhängig von der Elementkantenlänge in Abbildung 7.20c ebenfalls dieser Vorgabe gehorchen, sobald die beiden Körper in Kontakt stehen. Mit der Umkehr des Impaktors bei $t = 10 \text{ ms}$ beginnt die Erholungsphase des Schaumes. Die langsame Rückkehr des Impaktors bremst jedoch die instantane Erholung des Schaumes und erst ab $t > 11,5 \text{ ms}$ verlieren die beiden Körper den Kontakt. Der Schaum kehrt daraufhin langsamer als der Impaktor in Richtung

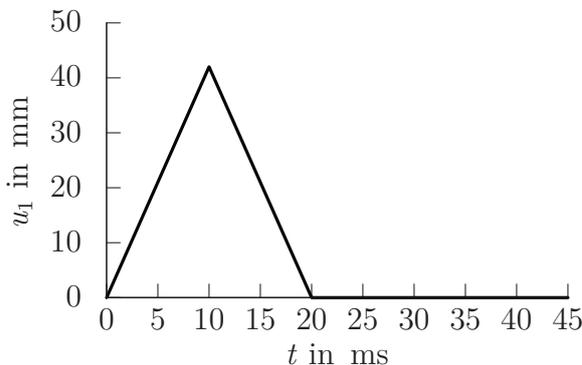
seiner Ausgangslage zurück. Die verzögerte Erholung offenbart schließlich Unterschiede zwischen den Elementkantenlängen. Während die Modelle mit $2,5 \text{ mm} \leq l_0 \leq 10 \text{ mm}$ dieselbe Knotenverschiebung aufweisen, weicht das Modell mit $l_0 = 20 \text{ mm}$ davon ab. Netzkonvergenz ist folglich für $l_0 \leq 10 \text{ mm}$ erreicht und die weiteren Untersuchungen werden wie bereits die Beispiele aus Kapitel 6 und wie der Hüftkörper des Fußgänger-schutzes mit der Elementkantenlänge $l_0 = 5 \text{ mm}$ durchgeführt.

Wie bei der Untersuchung der Netzkonvergenz festgestellt wurde, kehrt der Schaum bei der Simulationsdauer von $t_{\text{end}} = 45 \text{ ms}$ nicht in seine Ausgangslage zurück. Statt einer Erholungszeit nach ASTM D3574-11 (2011) wird deshalb die Knotenverschiebung u_1 zum Zeitpunkt $t = 25 \text{ ms}$ für den folgenden Vergleich der Materialmodelle ausgewertet

a) Querschnitt nach Abbildung 7.19 für verschiedene Elementkantenlängen



b) Verschiebungsrandbedingung des Impaktors



c) Knotenverschiebung

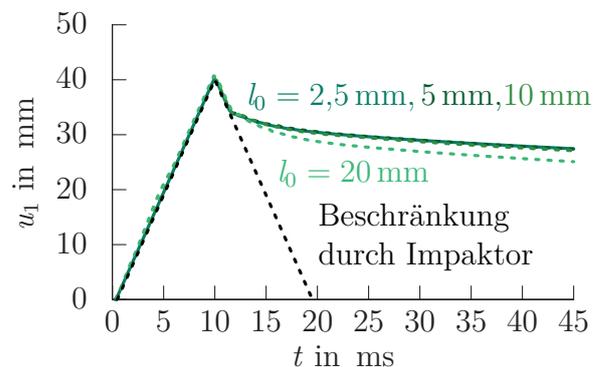


Abbildung 7.20.: Netzkonvergenz am Beispiel des Modells GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv

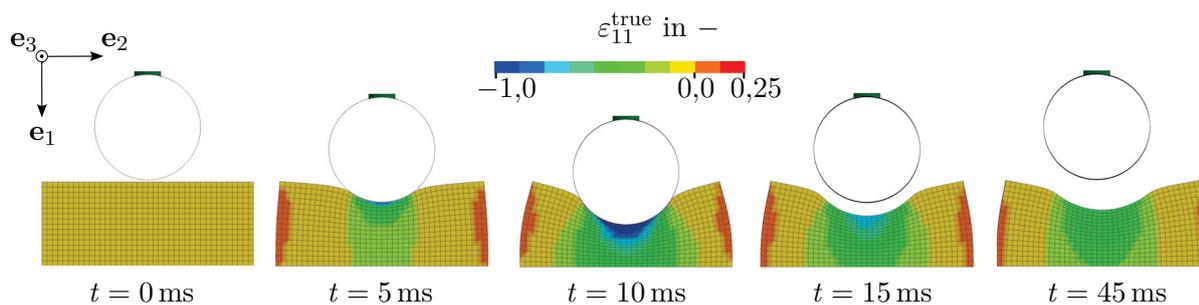


Abbildung 7.21.: Inhomogene Dehnungsverteilung $\varepsilon_{11}^{\text{true}}$ während der Belastungs- und Erholungsphase im Querschnitt nach Abbildung 7.19 mit dem Modell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv: hohe Kompression um die Kontaktzone des Impaktors und Zugdehnung an Probenrand

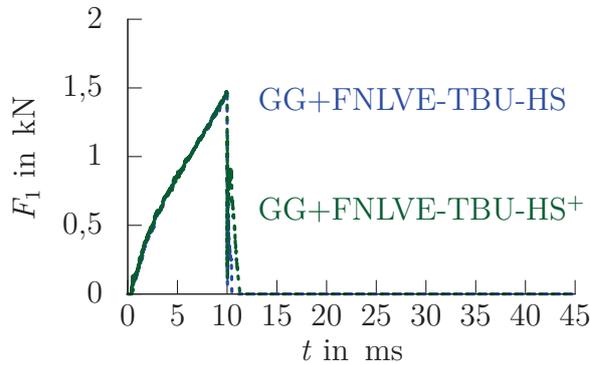
und zur maximalen Knotenverschiebung $u_1 = 40$ mm ins Verhältnis $\eta_{25} = \frac{40 \text{ mm} - u_1(25 \text{ ms})}{40 \text{ mm}}$ gesetzt. Dieses Maß beurteilt die Erholung zum Zeitpunkt $t = 25$ ms und charakterisiert das Materialverhalten folglich innerhalb der für den Lastfall des Fußgängerschutzes relevanten Zeitspanne.

Der Komponentenversuch ruft lokal und zeitlich inhomogene Belastungszustände in der Schaumprobe hervor. In Abbildung 7.21 ist die Dehnung $\varepsilon_{11}^{\text{true}}$ für das Materialmodell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv zu ausgewählten Zeitpunkten dargestellt. Während $\varepsilon_{11}^{\text{true}}$ am Rand der Schaumprobe positive Werte annimmt, sind diese in der Kontaktzone zwischen Impaktor und Schaum negativ und stimmen für diesen Bereich näherungsweise mit den minimalen Eigenwerten $\min(\lambda_{\varepsilon^{\text{true}}})$ überein. Die Kompression ist in der Probenmitte und unmittelbar unterhalb des Impaktors am höchsten.

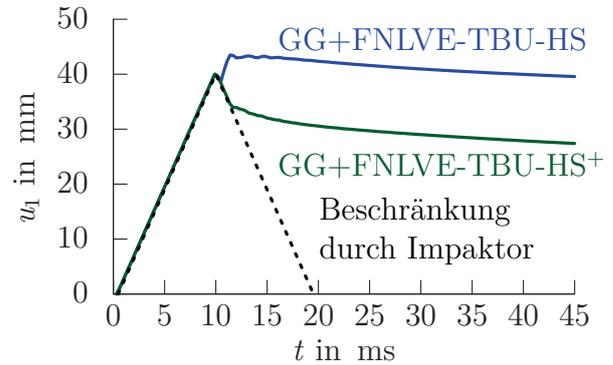
In Abbildung 7.22 ist der Vergleich zwischen den Materialmodellen GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv und GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv dargestellt. Die Kontaktkraft zwischen Impaktor und Probe 2 in Abbildung 7.22a ist für beide Modelle bis $t = 10$ ms vergleichbar und fällt dann durch die abrupte Umkehr des Impaktors ab. Daraufhin zeigt der Schaum bei beiden Modellen eine instantane Erholung, folgt dem Impaktor und die Kontaktkraft steigt wieder an. Während der Schaum für das Modell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv jedoch bis 11,7 ms mit der Geschwindigkeit des Impaktors und dann langsamer in Richtung der Ausgangslage zurückkehrt, zieht sich die Probe für das Modell GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv nach der instantanen Erholung ab 10,4 ms zusammen. In Abbildung 7.22b zeigt sich die Kontraktion durch einen Anstieg der Knotenverschiebung. Während η_{25} für das Modell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv bei 25,8% liegt, erhöht sich die Knotenverschiebung für GG+FNLVE-TBU-HS-rekursiv auf 41,6 mm und führt damit auf einen negativen und unzulässigen Erholungswert $\eta_{25} = -4,0\%$. Dieses Verhalten widerspricht der physikalischen Erwartung und ist durch den Wechsel zwischen Be- und Entlastung und durch die großen Differenzen zwischen Zug- und Druckparametern erklärbar.

Nachdem in der Belastungsphase des Komponentenversuches überwiegend die Druckpa-

a) Kontaktkraft zw. Impaktor und Probe 2



b) Knotenverschiebung



c) Spannungsverteilung T_{11}

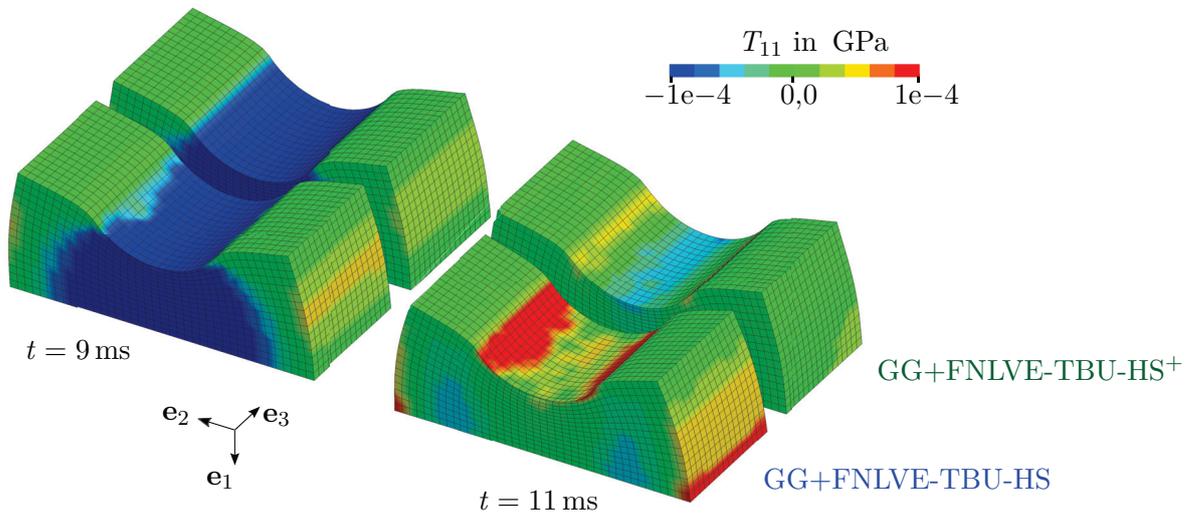


Abbildung 7.22.: Zylinder auf Schaumproben: Vergleich der Ergebnisse für die Modelle GG+FNLVE-TBU-HS und GG+FNLVE-TBU-HS⁺

parameter zur Faltung benutzt wurden, bewirkt die instantane Erholung mit einer positiven Dehnrates nun die Verwendung der Zugparameter im Faltungsintegral des Modells FNLVE-TBU-HS-rekursiv. Die daraus resultierenden hohen positiven Spannungsbeiträge kompensieren nicht nur die Druckspannung aus der vorangegangenen Dehnungsgeschichte und aus der Gleichgewichtsantwort, sondern übersteigen diese sogar und führen in Abbildung 7.22c zum Zeitpunkt $t = 11$ ms in der Zone höchster Kompression, die in der Mitte der Probenoberseite liegt, auf Zugspannungen. Um die Zugspannungen auszugleichen, reagiert der Schaum trotz der bestehenden Druckdehnungen mit einer weiteren Kontraktion.

Dass eine Zugspannung ohne äußeren Zwang unter Druckdehnung auftritt, hängt auch mit dem Verhältnis der Überspannung zur Gleichgewichtsantwort zusammen. Um dies aufzuzeigen, werden die beiden Überspannungsmodelle FNLVE-TBU-HS-rekursiv und

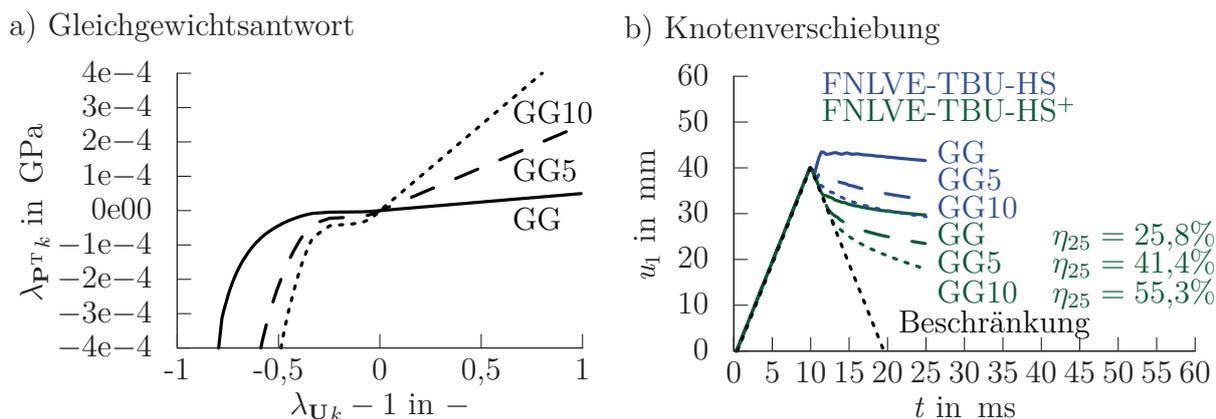


Abbildung 7.23.: Zylinder auf Schaumproben: Einfluss der Gleichgewichtsantwort auf die Erholungsgeschwindigkeit

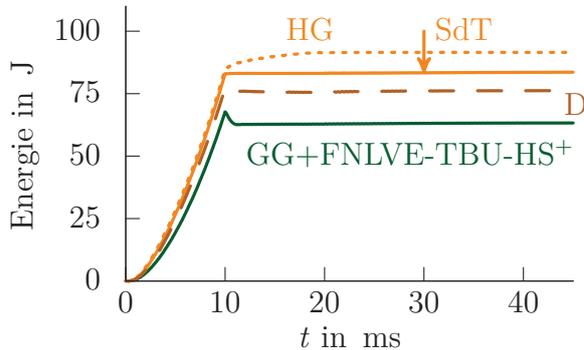
FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv mit drei unterschiedlichen Gleichgewichtsantworten kombiniert. In Abbildung 7.23a sind die drei Eingabekurven GG, GG5 und GG10 für die Gleichgewichtsspannung dargestellt, wobei die Kurve GG der bereits bekannten Eingabekurve aus Abbildung 7.8 entspricht und die Kurven GG5 und GG10 durch Skalierung mit dem Faktor 5 bzw. 10 aus dieser hervorgehen. Je höher die Gleichgewichtsspannung ist, desto höher sind die Kräfte und Beschleunigungen zur Rückstellung und desto schneller kehrt der Schaum in seine Ausgangslage zurück. Dies belegen die Knotenverschiebungen der drei Modelle GG+, GG5+ und GG10+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv in Abbildung 7.23b und deren Erholungswerte, die bei $\eta_{25} = 25,8\%$, $41,4\%$ bzw. $55,3\%$ liegen.

Bei der viskoelastischen Überspannung FNLVE-TBU-HS-rekursiv kommt die Besonderheit hinzu, dass die Gleichgewichtsspannung ab einer gewissen Höhe den Wechsel von Druck- auf Zugspannung verhindert und somit auch ein physikalisch plausibler Verschiebungsverlauf entstehen kann. Dies erfüllt die Kombination GG10+FNLVE-TBU-HS-rekursiv, bei der die Knotenverschiebung ab $t > 10$ ms kontinuierlich abnimmt.

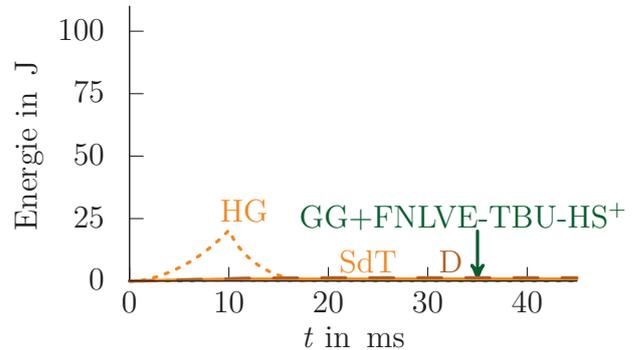
Die Simulationen mit den beiden Überspannungsmodellen haben gezeigt, dass in Kombination mit der Gleichgewichtsantwort GG aus Abschnitt 7.2.1 nur das Modell FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv zu physikalischem Verhalten führt. Aus diesem Grund werden nur die Ergebnisse dieses Modells mit dem Stand der Technik verglichen.

Die bestehende Modellierung des Confor-Schaumes im Hüftimpaktor nutzt das MFCF-Materialmodell des FEM-Berechnungsprogrammes LS-DYNA (HALLQUIST 2016). Die Spannungsantwort setzt sich aus der Eingabe einer dehnraten- und dehnungsabhängigen Spannungsfläche $\lambda_{P_{T_k}}(\lambda_{U_k}, \lambda_{U_k} - 1)$ (vgl. Abschnitt 5.2) und aus der Eingabe des hydrostatischen Drucks in Abhängigkeit von der Volumendehnung zusammen. Die Spannungsfläche der bestehenden Modellierung basiert auf der Belastungsphase eines

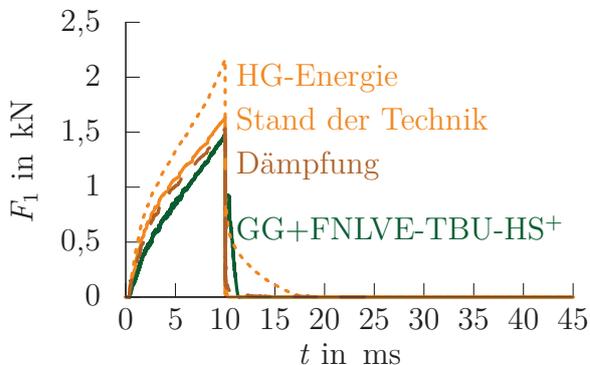
a) Innere Energie



b) Hourglass-Energie



c) Kontaktkraft zw. Impaktor und Probe 2



d) Knotenverschiebung

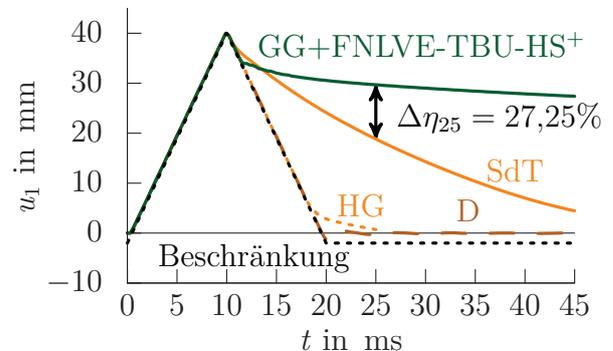


Abbildung 7.24.: Zylinder auf Schaumproben: Vergleich des Modells GG+FNLVE-TBU-HS⁺ mit drei Simulationen des MFCF-Modells für die Schaumproben: Stand der Technik (SdT), reduzierte Dämpfung (D) und hohe Hourglass-Energie (HG)

Zugversuches, aus der Be- und Entlastungsphase eines quasistatischen Druckversuches und aus der Belastungsphase von dynamischen Druckversuchen unterschiedlicher Dehnraten. Folglich ist nur die Belastungsphase der Druckversuche dehnratenabhängig. Darüber hinaus wird die Spannungsantwort stärker gedämpft, als es die Standardeinstellung des Materialmodells vorsieht.

Tauscht man die Materialbeschreibung im Modell des Komponentenversuches gegen MFCF aus, so erhält man die mit „HG“ gekennzeichneten Antworten in Abbildung 7.24. Auffällig ist, dass dieser Tausch zu einem signifikanten Anstieg der Hourglass-Energie von mehr als 23% der inneren Energie zum Zeitpunkt $t = 10$ ms führt. Die Modellierung „HG“ ist folglich empfindlicher für Hourglass-Modes als GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv.

Durch den Wechsel von einer steifigkeits- auf eine viskositätsbasierte Hourglass-Kontrolle kann die Hourglass-Energie jedoch auch für diese Modellierung reduziert werden und ist

für die mit „SdT“ beschrifteten Ergebnisse vernachlässigbar. Im Vergleich mit dem Modell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv zeigt der Stand der Technik eine erhöhte Kontaktkraft. Das Kraftmaximum liegt bei 1,63 kN und damit um $\approx 14\%$ höher als bei der neuen Modellierung. Die Abweichungen aufgrund einer anderen Versuchsgrundlage der beiden Modellierungen liegen im Rahmen der Erwartung.

Größere Unterschiede zeigen sich in der Erholungsphase. Während beim Modell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv der Schaum bis $t = 11,7$ ms in Kontakt zum Impaktor steht und mit dessen Geschwindigkeit in die Ausgangslage zurückkehrt, fällt die Kontaktkraft zwischen dem Schaum und der Probe 2 beim Stand der Technik bereits nach $t = 10,03$ ms auf null ab. Die instantane Erholung ist für den Stand der Technik folglich geringer ausgeprägt als beim Modell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv.

Bei der verzögerten Erholung zeigt der Stand der Technik jedoch eine deutlich höhere Geschwindigkeit und hat sich bei $t = 25$ ms bereits um $\eta_{25} = 53\%$ erholt. Damit ist der Schaum um 27,25% näher an die Ausgangslage zurückgekehrt als bei der neuen Modellierung. Reduziert man die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung, die der Bewegung entgegenwirkt, so kehrt der Schaum noch schneller zurück. Setzt man die Dämpfung auf ein Fünftel des Standardwertes herab, so erhält man die in Abbildung 7.24 mit einem „D“ gekennzeichneten Ergebnisse. In diesem Fall folgt der Schaum unmittelbar dem Impaktor und oszilliert ab $t = 20$ ms mit abnehmender Amplitude um die Ausgangslage. Bei $t = 25$ ms betragen die Knotenverschiebung $u_1 = -0,28$ mm und die Erholung $\eta_{25} = 100,7\%$.

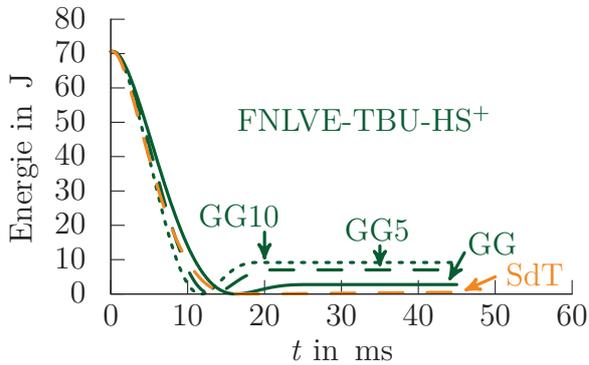
Die Dämpfung des MFCF-Modells wird zur Stabilisierung der Routine eingesetzt und beruht nicht auf physikalischen Messungen. Sie verzerrt das eigentliche Materialverhalten des MFCF-Modells im Stand der Technik als dehnratenabhängige Feder mit sofortiger Rückstellung.

Das Modell GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv hingegen erzeugt eine instantane und verzögerte Erholung, welche durch die Zusammensetzung der Modellantwort aus Gleichgewichtsspannung und Überspannung und aus der Abhängigkeit der Überspannung von der gesamten Dehnungsgeschichte resultiert. Dieses Verhalten ist charakteristisch für viskoelastische Werkstoffe und wird durch den Stand der Technik nicht erfasst.

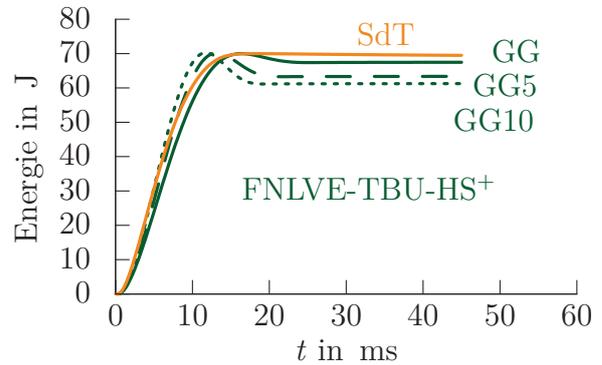
Zylinder auf Schaumproben: Rückprall und Energiedissipation

Im zweiten Komponentenversuch trifft der Impaktor mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 5$ mm/ms auf die beiden Schaumproben, wird durch diese abgebremst und kehrt mit einer Rückprallgeschwindigkeit $v_1 < 0$ zurück. Da die Simulation des Komponentenversuches ohne Erdbeschleunigung durchgeführt wird, ersetzt das Verhältnis der Rück- zur Aufprallgeschwindigkeit $\eta_{\text{impact}} = -v_1/v_0$ bei Simulationende die Auswertung der Anfangs- und Endhöhe der Kugel aus DIN EN ISO 8307 (2008). Als Maß für die

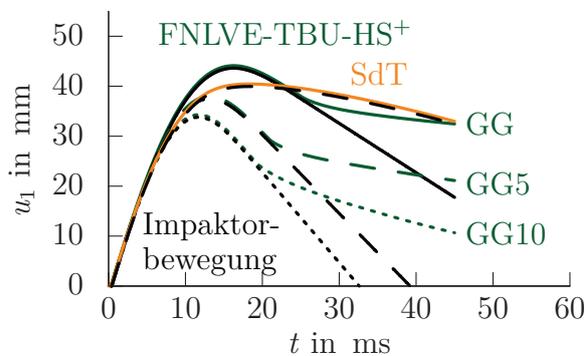
a) Kinetische Energie



b) Innere Energie



b) Knotenverschiebung



c) Impaktorgeschwindigkeit

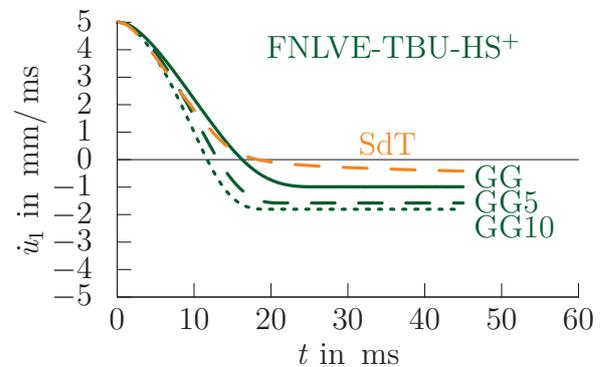


Abbildung 7.25.: Rückprall des Zylinders: Vergleich des Stands der Technik (SdT) mit den drei Modellen GG+, GG5+ und GG10+FNLVE-TBU-HS⁺ aus Abbildung 7.23a bei einer Anfangsgeschwindigkeit des Zylinders von $v_0 = 5$ mm/ms

Energieverteilung beschreibt $\eta_{\text{impact}} = 100\%$ einen Stoß, bei dem die kinetische Energie zu Beginn vollständig zurückgewonnen wird, und $\eta_{\text{impact}} = 0\%$ einen Stoß, bei dem die kinetische Energie ausschließlich dissipiert.

Ein geringer Anteil der Energie ($< 0,02\%$ der Gesamtenergie) dissipiert in diesem Komponentenversuch durch Reibung beim Kontakt der Körper. Durch die Modellierung des Impaktors als Starrkörper, hängt die Rückprallgeschwindigkeit jedoch maßgeblich von der Modellierung des Schaumes ab.

In Abbildung 7.25 sind die Verläufe der kinetischen und inneren Energie sowie die Positionen der Schaumoberfläche und des Impaktors und die Impaktorgeschwindigkeit für vier Modellierungen gegenübergestellt, die bereits im letzten Komponentenversuch verwendet wurden. „SdT“ kürzt den Stand der Technik ab und die nichtlinear viskoelastischen Modelle GG+, GG5+ und GG10+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv unterscheiden sich in der Höhe der Gleichgewichtsantwort (vgl. Abbildung 7.23).

Die Steifigkeit des Werkstoffes bestimmt die Eindringtiefe und den Umkehrzeitpunkt des Impaktors. Je höher die Steifigkeit des Schaumes ist, desto mehr Energie absorbiert der Schaum bei gleicher Wegstrecke und desto früher kehrt der Impaktor zurück. Während das Modell GG10+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv die vorgegebene Anfangsenergie von 70 J bereits nach 11,8 ms bei einer Eindringtiefe von 34,3 mm absorbiert hat, brauchen die Modelle GG5+ und GG+FNVLE-TBU-HS⁺-rekursiv 13,2 ms und 38,0 mm bzw. 16,3 ms und 44,1 mm. Der Stand der Technik zeigt zunächst die höchste Steifigkeit, dann verlangsamt sich jedoch die Aufnahme der inneren Energie und erst bei 18,3 ms und einer Eindringtiefe von 40,4 mm ändert der Impaktor seine Bewegungsrichtung. Damit liegt der Umkehrzeitpunkt und die Eindringtiefe beim Stand der Technik zwischen den Modellen GG+ und GG5+FNLVE-TBU-HS-rekursiv.

Am Umkehrpunkt des Impaktors sind die kinetische Energie und die Impaktorgeschwindigkeit null und die innere Energie maximal. Die elastische Energie drängt den Schaum in Richtung seiner Ausgangslage zurück, beschleunigt so den Impaktor und lässt die kinetische Energie wieder ansteigen, während die innere Energie entsprechend abnimmt. Als Triebkraft der Rückstellung wirkt die gespeicherte Energie der Federelemente. Je höher die Gleichgewichtsantwort ist, desto mehr innere Energie kann zurückgewonnen werden und desto höher ist der Betrag der Rückprallgeschwindigkeit. Daher steigt η_{impact} für GG+, GG5+ und GG10+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv von 19,7% auf 31,5% und 36,0% an und die innere Energie zum Zeitpunkt $t_{\text{end}} = 45$ ms fällt von 67,5 J auf 63,4 J und 61,3 J ab.

Beim Stand der Technik ist der Anteil der Energie, die zurückgewonnen werden kann, mit $\eta_{\text{impact}} = 8,3\%$ und einer verbleibenden inneren Energie von 69,5 J am Simulationseende sehr gering. Da in der Entlastungsphase eines Druckzustandes unabhängig von der Dehnrates immer die Entlastungsantwort des quasistatischen Druckversuches ausgewertet wird, fällt der Betrag der Druckspannung in der Schaumprobe nach Erreichen der maximalen Eindringtiefe des Impaktors stark ab und bewirkt eine langsame Rückkehr des Schaumes in seine Ausgangslage. Dadurch wird der Impaktor nur geringfügig beschleunigt und bleibt bis $t_{\text{end}} = 45$ ms in Kontakt mit der Schaumprobe. Im Vergleich zu den nichtlinear viskoelastischen Modellen GG+, GG5+ und GG10+FNVLE-TBU-HS-rekursiv dissipiert der Schaum bei der Modellierung des Stands der Technik mehr Energie.

7.4. Zusammenfassung

Die experimentelle Charakterisierung von Confor CF-45 umfasst Druckversuche unterschiedlicher Probengrößen, zyklische Druckversuche bei unterschiedlichen Temperaturen sowie Zug- und Druckversuche unterschiedlicher Nenndehnraten unter Normalbedingun-

gen und in Vakuum. Die Versuche zeigen den Einfluss der Fluidphase und die Empfindlichkeit der mechanischen Eigenschaften im Bereich des Glasübergangs bei Raumtemperatur, welche die Verwendung der Vakuumversuche zur Bestimmung des Lufteinflusses verhindert. Darüber hinaus belegen die Versuche die ausgeprägte Zug-Druck-Asymmetrie offenzelliger Polymerschäume und die stark nichtlinear viskoelastischen Eigenschaften von Confor CF-45.

Die Druckversuche an Confor CF-45 zeigen im Vergleich zu anderen PU-Schäumen zwei Besonderheiten. Zum einen weisen die Versuche zwischen Anfangssteigung und Plateauspannung eine Spannungsspitze auf, deren Betrag zusammen mit der Nenndehnrate ansteigt. Zum anderen verschiebt sich der betragliche Anstieg der Spannung, der bei langsamen Versuchen mit der Verdichtung der Zellstruktur in Verbindung gebracht wird, mit steigender Nenndehnrate zu geringeren Kompressionen.

Um der Anwendung des Modells im Fußgängerschutz gerecht zu werden, erfordern die zwei Besonderheiten eine Abweichung von der definitionsgemäßen Aufspaltung der Spannungsantwort in Gleichgewichts- und Überspannung im Druckbereich. Für die Gleichgewichtsantwort wird das vereinfachte MFCF-Modell ohne Dehnratenabhängigkeit verwendet. Die Eingabe für den Druckbereich folgt im Spannungs-Dehnungs-Diagramm zunächst dem quasistatischen Druckversuch der Dehnrate $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -1\text{e-}6$ 1/ms und dann dem Versuch der Dehnrate $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = -0,01$ 1/ms. Damit zeigen die Zielverläufe der viskoelastischen Überspannung ohne Berücksichtigung der Spannungsspitzen zunächst einen betraglichen Spannungsanstieg und dann eine konstante Druckspannung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Für den Zugbereich wird die letzte Steigung des Versuches der Dehnrate $\dot{\epsilon}^{\text{eng}} = 1\text{e-}5$ 1/ms im Spannungs-Dehnungs-Diagramm als konstante Gleichgewichtssteifigkeit verwendet. Die Gleichgewichtsantwort wurde dann definitionsgemäß von den Versuchsdaten für die Zielverläufe der viskoelastischen Überspannung abgezogen.

Die viskoelastischen Überspannungsverläufe unterschiedlicher Nenndehnraten wurden einzeln mit dem Modell FLVE-TBU angepasst. Die Gesamtspannungsverläufe zeigen in der Kombination GG+FNLVE-TBU-HS⁽⁺⁾-rekursiv eine gute Übereinstimmung mit den Druckversuchen und eine sehr gute Übereinstimmung mit den Zugversuchen. Damit erfasst die Modellierung die Eigenschaften der beiden Einflussfaktoren Schaumstruktur und Polymerwerkstoff. Dazu zählen nicht nur die ausgeprägte Dehnratenabhängigkeit der Belastung sowie die Zug-Druck-Asymmetrie des Schaumes, sondern auch die viskoelastischen Effekte, die sich bei Entlastung zeigen.

Um diese zu veranschaulichen wurden in Anlehnung an einen Lastfall aus dem Fußgängerschutz zwei Komponentenversuche entworfen und die neue Modellierung dem Stand der Technik gegenübergestellt. In den Simulationen der Zug- und Druckversuche, des Lastfalls des Fußgängerschutzes und der beiden Komponentenversuche erweist sich die Modellierung mit der Konstitutivgleichung GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv und dem gewählten Parametersatz als robust.

In den Komponentenversuchen weist der Stand der Technik eine höhere Empfindlichkeit gegenüber Hourglass-Moden auf und führt zu vergleichbaren Ergebnissen in der Belastungsphase. In der Entlastungsphase hingegen zeigen die Modellierungen deutliche Unterschiede. Während der Stand der Technik entweder unmittelbar oder durch eine künstliche Dämpfung ohne physikalische Grundlage verlangsamt in seine Ausgangslage zurückkehrt, kann die Modellierung GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv eine instantane und zeitverzögerte Erholung abbilden, was charakteristisch für viskoelastische Werkstoffe ist.

Dabei zeigt sich auch der Vorteil der Aufspaltung in Gleichgewichtsantwort und Überspannung, um das Schaumverhalten zu steuern. Je größer der Betrag der Gleichgewichtsspannung ist, desto größer ist die Rückstellkraft und desto schneller kehrt der Schaum in seine Ausgangslage zurück.

Dass der elastische Anteil der inneren Energie physikalisch fundiert zurückgewonnen werden kann, ist ebenfalls ein viskoelastischer Effekt, der dem Stand der Technik fehlt. Je höher die Gleichgewichtsantwort ist, desto höher ist der Anteil der elastischen an der inneren Energie, welcher wieder zurückgewonnen werden kann. Die Energieabsorption der neuen Modellierung fällt geringer aus als beim Stand der Technik.

Zusammenfassung und Ausblick

8.1. Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, eine phänomenologische, isotrope Modellierung offenzelliger Polymerschäume für die Crashsimulation bereitzustellen und eine Konstitutivgleichung der Überspannung im Rahmen der Theorie der nichtlinearen Viskoelastizität zu entwickeln.

Zu diesem Zweck wurde eine modulare Materialroutine entworfen, welche die Gleichgewichtsantwort in Anlehnung an das MFCF-Modell (KOLLING U. A. 2007a) des FEM-Berechnungsprogrammes LS-DYNA (HALLQUIST 2016) mit verschiedenen Konstitutivgleichungen der Überspannung kombiniert. In dieser Kombination erfüllen sowohl die Gleichgewichtsantwort als auch die Überspannung die kinematische Einschränkung offenzelliger Polymerschäume, die aus der Beobachtung einer vernachlässigbaren Querkontraktion bei uniaxialer Druckbelastung stammt und eine Entkopplung der (Haupt-) Dehnungen bewirkt.

Aufgrund ihrer vielfältigen Erweiterungsmöglichkeiten wurde die Integralform als Ausgangsbasis für die viskoelastischen Konstitutivgleichungen der Überspannung ausgewählt. Ein Dehnratentensor stellt dabei die Eingangsgröße der Faltungsintegrale aller Konstitutivgleichungen dar.

Die Konstitutivgleichungen der Überspannung unterscheiden sich in der Form der Materialfunktion, in den finiten Dehnraten- und Spannungsmaßen sowie darin, ob materielle Linearität oder Nichtlinearität vorliegt. Die Form der Materialfunktion bestimmt, wie ein Faltungsintegral numerisch berechnet werden kann. Sowohl der rekursive Faltungsalgorithmus als auch der lokale Faltungsalgorithmus haben sich als zielführend erwiesen, da sie Speicherplatz und Rechenzeit effizient einsetzen und damit die angestrebten Modellgrößen abdecken. Beide Algorithmen basieren auf der Parametrisierung der Material-

funktion als Prony-Reihe, sodass die resultierenden Konstitutivgleichungen das Prinzip des schwindenden Gedächtnisses erfüllen. Für materiell lineare Modelle ist aufgrund der kinematischen Einschränkung nur eine Materialfunktion zu bestimmen.

Die Gegenüberstellung der Spannungsantworten bei konstanter Anregungsgeschwindigkeit hat gezeigt, dass der zeitliche Verlauf der Eingangsgröße des Faltungsintegrals der Schlüssel zur Abbildung der Überspannung offenzelliger Polymerschäume ist. Mit der spezifischen Wahl der Rate des rechten Streckensors und der Biot-Spannung konnte die Überspannung jedes Zugversuches und jedes Druckversuches einer Nenndehnrate sehr gut abgebildet werden. Dazu war jeweils ein eigener Parametersatz des materiell linearen Modells FLVE-TBU pro Versuch notwendig.

Um diese Parametersätze zu vereinigen, wurden verschiedene nichtlineare Erweiterungen getestet. Dabei hat sich die Formulierung FNLVE-TBU- HS^+ -rekursiv als geeignet erwiesen, da sie nicht nur eine Abhängigkeit von der Dehnrate enthält, sondern auch zwischen Zug- und Druckerregung sowie zwischen Be- und Entlastung unterscheidet. In diesem Modell wird die Materialfunktion im Hauptachsensystem des Dehnratentensors für jede Hauptrichtung mit der zugehörigen Hauptdehnrate und einem Schalter für Be- und Entlastung ausgewertet.

Zusammen mit der Gleichgewichtsantwort bildet das Modell GG+FNLVE-TBU- HS^+ -rekursiv die Zugversuchsdaten des Confor-Schaumes in sehr guter Übereinstimmung und die Druckversuche mit gewissen Einschränkungen in guter Übereinstimmung ab. Die Einschränkungen resultieren aus dem besonderen Verhalten von Confor-Schaum unter Druckbelastung, das zu einer Abweichung vom charakteristischen Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kurven anderer offenzelliger Polymerschäume führt.

Die numerischen Beispiele der Elementarproben und des Fußgängerschutzes zeigen, dass das Modell GG+FNLVE-TBU- HS^+ -rekursiv robust funktioniert. Die Modellierung ist nicht nur in der Lage, die ausgeprägte Dehnratenabhängigkeit der Belastungsphase abzubilden, sondern führt auch unter Entlastung zu einer instantanen und verzögerten Erholung des Schaumes, wie sie charakteristisch für viskoelastische Werkstoffe ist. Mit der Abbildung dieser viskoelastischen Effekten wird der Stand der Technik weit übertroffen.

Eine abschließende Validierung des Modells an einem Komponentenversuch liegt jedoch nicht vor, da Confor CF-45 nicht mehr produziert wird und sowohl die Komponentenversuche selbst als auch die Versuche zur Modellierung des Lufteinflusses als pneumatischer Effekt in der Konstitutivgleichung nicht durchgeführt werden konnten.

8.2. Ausblick

Die Untersuchungen dieser Arbeit können in zwei Richtungen fortgeführt werden. Zum einen steht eine umfassende Validierung des Materialmodells noch aus. Um diese zu ermöglichen, kann die Modellierung GG+FNLVE-TBU-HS⁺-rekursiv auf einen Nachfolgewerkstoff von Confor CF-45 übertragen und um den Spannungsbeitrag der Fluidphase ergänzt werden. Der Einfluss des Luftstroms kann beispielsweise mit dem Gesetz von Darcy modelliert werden, welches bereits in LS-DYNA implementiert ist¹. Dazu sind Zug- und Druckversuche unterschiedlicher Probengrößen und Geschwindigkeiten notwendig. Zur Parameteridentifikation unter Entlastung sollte das Versuchsprogramm zudem um zyklische Versuche ergänzt werden.

Für eine weitere Verbesserung der Modellierung ist es darüber hinaus unerlässlich, die Ursachen der Spannungsspitzen zu Beginn der Druckbelastung und des verfrühten Spannungsanstiegs bei hohen Kompressionsraten zu ermitteln, falls diese beim Nachfolgewerkstoff ebenfalls auftreten. Neben rechnergestützten Untersuchungen mit der vollständigen Beschreibung durch GG+FNLVE-TBU-HS⁺ und dem Gesetz von Darcy kann dazu auch die optische Auswertung der Versuche mit einem Bildkorrelationssystem beitragen, das die Dehnungsverteilung auf der Oberfläche der Schaumprobe ermittelt.

Zum anderen steht mit der modularen Materialroutine eine solide Ausgangsbasis zur Verfügung, um die nichtlinear viskoelastische Überspannung anderer Werkstoffe bei finiten Deformationen zu modellieren. Die Materialroutine stellt unterschiedliche Spannungs- und Dehnungsmaße, materiell nichtlineare Erweiterungen und Faltungsalgorithmen zur Verfügung, die zu einer Vielzahl an Konstitutivgleichungen kombiniert werden können. Wenn die kinematische Einschränkung offenzelliger Polymerschäume fallengelassen wird, müssen zwei Materialfunktionen bestimmt und zwei Faltungsintegrale ausgewertet werden. Hierfür muss die Materialroutine lediglich um einen zweiten Durchlauf ergänzt werden.

¹Keyword „MAT_ADD_PORE_AIR“

A

Anhang

A.1. Berechnung von \mathbf{S} aus \mathbf{T}_B

Die Biot-Spannung ist in dieser Arbeit als symmetrisches Spannungsmaß

$$\mathbf{T}_B = \frac{1}{2} (\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \mathbf{U}) \quad (\text{A.1})$$

definiert. Um \mathbf{S} aus \mathbf{T}_B berechnen zu können, wird Gl. (A.1) als Matrixgleichung umgeschrieben

$$\{\mathbf{T}_B\} = \mathbf{A}(\mathbf{U}) \{\mathbf{S}\}, \quad (\text{A.2})$$

wobei die 6x6-Matrix \mathbf{A} ausschließlich von \mathbf{U} abhängt und $\{\mathbf{T}_B\}$ und $\{\mathbf{S}\}$ als einspaltige Matrizen in Voigt-Notation vorliegen. Das lineare Gleichungssystem ist nach \mathbf{S} lösbar, wenn \mathbf{A} invertierbar ist. Um die Lösbarkeit von

$$\{\mathbf{S}\} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{U}) \{\mathbf{T}_B\} \quad (\text{A.3})$$

zu beweisen, werden \mathbf{U} , \mathbf{S} und \mathbf{T}_B ohne Einschränkung der Allgemeinheit in das Hauptachsensystem von \mathbf{U} mit den Hauptachsen $\bar{\mathbf{e}}_k = \mathbf{e}_{U_k}$ transformiert

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^3 \lambda_{U_k} \bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}_k, \quad \mathbf{S} = \bar{S}_{km} \bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}_m, \quad \mathbf{T}_B = \bar{T}_{Bkm} \bar{\mathbf{e}}_k \otimes \bar{\mathbf{e}}_m. \quad (\text{A.4})$$

Damit folgt unter Ausnutzung von $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 2\lambda_{\mathbf{U}_1} \bar{S}_{11} & (\lambda_{\mathbf{U}_1} + \lambda_{\mathbf{U}_2}) \bar{S}_{12} & (\lambda_{\mathbf{U}_1} + \lambda_{\mathbf{U}_3}) \bar{S}_{13} \\ (\lambda_{\mathbf{U}_1} + \lambda_{\mathbf{U}_2}) \bar{S}_{12} & 2\lambda_{\mathbf{U}_2} \bar{S}_{22} & (\lambda_{\mathbf{U}_2} + \lambda_{\mathbf{U}_3}) \bar{S}_{23} \\ (\lambda_{\mathbf{U}_1} + \lambda_{\mathbf{U}_3}) \bar{S}_{13} & (\lambda_{\mathbf{U}_2} + \lambda_{\mathbf{U}_3}) \bar{S}_{23} & 2\lambda_{\mathbf{U}_3} \bar{S}_{33} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_l \otimes \bar{\mathbf{e}}_m \quad (\text{A.5})$$

und in Voigt-Notation

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{B11} \\ \bar{T}_{B22} \\ \bar{T}_{B33} \\ \bar{T}_{B12} \\ \bar{T}_{B23} \\ \bar{T}_{B13} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{\mathbf{U}_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\mathbf{U}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\mathbf{U}_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_{\mathbf{U}_1} + \lambda_{\mathbf{U}_2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_{\mathbf{U}_2} + \lambda_{\mathbf{U}_3}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(\lambda_{\mathbf{U}_1} + \lambda_{\mathbf{U}_3}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(\mathbf{U})} \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} \\ \bar{S}_{22} \\ \bar{S}_{33} \\ \bar{S}_{12} \\ \bar{S}_{23} \\ \bar{S}_{13} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Aufgrund der positiven Definitheit von \mathbf{U} gilt $\lambda_{\mathbf{U}_k} > 0$ und damit $\det \mathbf{A}(\mathbf{U}) > 0$, sodass \mathbf{A} invertierbar und Gl. (A.3) lösbar ist.

Literaturverzeichnis

ADOLFSSON U. A. 2004

Adolfsson, K.; Enelund, M.; Larsson, S.: Adaptive discretization of fractional order viscoelasticity using sparse time history. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), Nr. 42–44, S. 4567–4590

ALTENBACH UND ALTENBACH 1994

Altenbach, J.; Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994

ASHBY 2006

Ashby, M. F.: The properties of foams and lattices. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 364 (2006), Nr. 1838, S. 15–30

ASTM D3574-11 2011

ASTM International: *ASTM D3574–11: Standard test methods for flexible cellular materials - slab, bonded, and molded urethane foams*. 2011

BAGLEY UND TORVIK 1983

Bagley, R. L.; Torvik, J.: Fractional calculus - a different approach to the analysis of viscoelastically damped structures. In: *AIAA Journal* 21 (1983), Nr. 5, S. 741–748

BANKS U. A. 2011

Banks, H. T.; Hu, S.; Kenz, Z. R.: A brief review of elasticity and viscoelasticity for solids. In: *Advances in Applied Mathematics and Mechanics* 3 (2011), S. 1–51

BASAR U. A. 2001

Basar, Y.; Weichert, D.; Petrolito, J.: *Nonlinear continuum mechanics of solids: Fundamental mathematical and physical concepts*. Bd. 54. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001

BATRA 1998

Batra, R. C.: Linear constitutive relations in isotropic finite elasticity. In: *Journal of Elasticity* 51 (1998), Nr. 3, S. 243–245

BATRA UND YU 1999

Batra, R. C.; Yu, J.-H.: Linear constitutive relations in isotropic finite viscoelasticity. In: *Journal of Elasticity* 55 (1999), Nr. 1, S. 73–77

BELYTSCHKO U. A. 2000

Belytschko, T.; Liu, W. K.; Moran, B.: *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, Chicester (GB), 2000

BENSON 1992

Benson, D. J.: Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. In: *Computer methods in Applied mechanics and Engineering* 99 (1992), Nr. 2, S. 235–394

BERNSTEIN U. A. 1963

Bernstein, B.; Kearsley, E. A.; Zapas, L. J.: A study of stress relaxation with finite strain. In: *Transactions of the Society of Rheology* 7 (1963), Nr. 1, S. 391–410

BILLON 2012

Billon, N.: New constitutive modeling for time-dependent mechanical behavior of polymers close to glass transition: Fundamentals and experimental validation. In: *Journal of Applied Polymer Science* 125 (2012), Nr. 6, S. 4390–4401

BOLTZMANN 1876

Boltzmann, L.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung. In: *Annalen der Physik* 7 (1876), S. 624–654

CHRISTENSEN 1982

Christensen, R. M.: *Theory of viscoelasticity*. Academic Press, New York (USA), 1982

COLEMAN UND GURTIN 1967

Coleman, B. D.; Gurtin, M. E.: Thermodynamics with internal state variables. In: *The Journal of Chemical Physics* 47 (1967), Nr. 2, S. 597–613

COLEMAN UND NOLL 1961

Coleman, B. D.; Noll, W.: Foundations of linear viscoelasticity. In: *Reviews of Modern Physics* 33 (1961), Nr. 2, S. 239–249

DAVIES U. A. 2000

Davies, O.; Gilchrist, A.; Mills, N. J.: Seating pressure distribution using slow-recovery polyurethane foams. In: *Cellular Polymers* 19 (2000), Nr. 1, S. 1–24

DIN EN ISO 8307 2008

Deutsches Institut für Normung e. V.: *DIN EN ISO 8307: Weich-elastische polymere Schaumstoffe – Bestimmung der Kugel-Rückprallelastizität*. 2008

DRAPACA U. A. 2007

Drapaca, C. S.; Sivaloganathan, S.; Tenti, G.: Nonlinear constitutive laws in viscoelasticity. In: *Mathematics and Mechanics of Solids* 12 (2007), Nr. 5, S. 475–501

DROZDOV 1996

Drozdov, A. D.: *Finite elasticity and viscoelasticity: a course in the nonlinear mechanics of solids*. World Scientific, Singapore, 1996

DROZDOV 1998

Drozdov, A. D.: *Viscoelastic structures: Mechanics of growth and aging*. Academic Press, San Diego (USA), 1998

EFFINGER U. A. 2014

Effinger, V. M.; DuBois, P. A.; Feucht, M.; Haufe, A.; Bischoff, M.: Nonlinear viscoelastic modeling for foams. In: *13th International LS-DYNA Conference, Detroit (MI, USA)*, 2014

EHLERS 1995

Ehlers, W.: Grundlegende Konzepte in der Theorie Poröser Medien. In: *Technische Mechanik* 16 (1995), Nr. 1, S. 63–76

EURO NCAP 2015

Euro NCAP: Pedestrian safety protocol 8.2 / Euro NCAP. 2015. – Forschungsbericht

FERRY 1980

Ferry, J. D.: *Viscoelastic properties of polymers*. Wiley, Chichester (UK), 1980

FINDLEY U. A. 1976

Findley, W. N.; Lai, J. S.; Onaran, K.: *Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials: With an introduction to linear viscoelasticity*. North Holland Publishing Company, Amsterdam (Niederlande), 1976

FINDLEY UND LAI 1967

Findley, W. N.; Lai, J. S. Y.: A modified superposition principle applied to creep

- of nonlinear viscoelastic material under abrupt changes in state of combined stress. In: *Transactions of the Society of Rheology* 11 (1967), Nr. 3, S. 361–380
- FINDLEY UND ONARAN 1968
Findley, W. N.; Onaran, K.: Product form of kernel functions for nonlinear viscoelasticity of PVC under constant rate stressing. In: *Transactions of the Society of Rheology* 12 (1968), Nr. 2, S. 217–242
- FUNG 1981
Fung, Y.-C.: *Biomechanics: mechanical properties of living tissues*. Springer, New York (USA), 1981
- GENT UND THOMAS 1959
Gent, A. N.; Thomas, A. G.: The deformation of foamed elastic materials. In: *Journal of Applied Polymer Science* 1 (1959), Nr. 1, S. 107–113
- GIBSON UND ASHBY 1997
Gibson, L. J.; Ashby, M. F.: *Cellular solids: structure and properties*. Cambridge University Press, Cambridge (GB), 1997
- GOGA UND HUČKO 2015
Goga, V.; Hučko, B.: Phenomenological material model of foam solids. In: *Journal of Mechanical Engineering* 65 (2015), Nr. 1, S. 5–20
- GÖKTEPE UND MIEHE 2008
Göktepe, S.; Miehe, C.: Efficient two-scale modeling of finite rubber viscoelasticity. In: *Technische Mechanik* 28 (2008), Nr. 1, S. 22–31
- GREEN UND RIVLIN 1957
Green, A. E.; Rivlin, R. S.: The mechanics of non-linear materials with memory - Part I. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 1 (1957), Nr. 1, S. 1–21
- GREEN UND TOBOLSKY 1946
Green, M. S.; Tobolsky, A. V.: A new approach to the theory of relaxing polymeric media. In: *The Journal of Chemical Physics* 14 (1946), Nr. 2, S. 80–92
- GURTIN UND STERNBERG 1962
Gurtin, M. E.; Sternberg, E.: On the linear theory of viscoelasticity. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 11 (1962), S. 291–356
- GUTIERREZ-LEMINE 2014
Gutierrez-Lemini, D.: *Engineering viscoelasticity*. Springer, New York (USA), 2014
- HALLQUIST 2016
Hallquist, J. O.: *LS-DYNA Theory Manual*. Livermore CA (USA): Livermore Software Technology Corporation, 2016

HARTMANN 2012

Hartmann, S.: Comparison of the multiplicative decompositions $\mathbf{F} = \mathbf{F}_\theta \mathbf{F}_M$ and $\mathbf{F} = \mathbf{F}_M \mathbf{F}_\theta$ in finite strain thermo-elasticity / Technical Report Series Fac3-12-01, Faculty of Mathematics/Computer Sciences and Mechanical Engineering, Clausthal University of Technology (Germany). 2012. – Forschungsbericht

HAUPT 1993

Haupt, P.: On the mathematical modelling of material behavior in continuum mechanics. In: *Acta Mechanica* 100 (1993), S. 129–154

HAUPT 2000

Haupt, P.: *Continuum mechanics and theory of materials*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2000

HIERMAIER 2007

Hiermaier, S.: *Structures under crash and impact: Continuum mechanics, discretization and experimental characterization*. Springer, New York (USA), 2007

HILL 1978

Hill, R.: Aspects of invariance in solid mechanics. In: *Advances in Applied Mechanics* 18 (1978), Nr. C, S. 1–75

HILYARD UND CUNNINGHAM 2012

Hilyard, N. C.; Cunningham, A.: *Low density cellular plastics: physical basis of behaviour*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2012

HOLZAPFEL 2000

Holzappel, G. A.: *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Wiley, Chichester (GB), 2000

JIRÁSEK UND BAŽANT 2002

Jirásek, M.; Bažant, Z. P.: *Inelastic analysis of structures*. Wiley, Chichester (GB), 2002

KALISKE UND ROTHERT 1997

Kaliske, M.; Rothert, H.: Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. In: *Computational Mechanics* 19 (1997), Nr. 3, S. 228–239

KAYE 1962

Kaye, A.: Non-Newtonian flow in incompressible fluids / College of Aeronautics Cranfield. 1962. – Forschungsbericht

KNAUSS UND EMRI 1981

Knauss, W. G.; Emri, I.: Non-linear viscoelasticity based on free volume consideration. In: *Computers & Structures* 13 (1981), Nr. 1, S. 123–128

KOHLER U. A. 2006

Kohler, J.; Frank, T.; Feucht, M.; Kolling, S.: Methodenentwicklung in der Crashsimulation zur Absicherung des Fahrzeugentwicklungsprozesses. In: *5. LS-DYNA Anwenderforum, Ulm*, 2006

KOLLING U. A. 2007A

Kolling, S.; DuBois, P. A.; Benson, D. J.; Feng, W. W.: A tabulated formulation of hyperelasticity with rate effects and damage. In: *Computational Mechanics* 40 (2007), Nr. 5, S. 885–899

KOLLING U. A. 2007B

Kolling, S.; Werner., A.; Erhart, T.; DuBois, P. A.: An elastic damage model for the simulation of recoverable polymeric foams. In: *6th German LS-DYNA Forum, Frankenthal*, 2007

KRAMER 2013

Kramer, F.: *Integrale Sicherheit von Kraftfahrzeugen: Biomechanik - Simulation - Sicherheit im Entwicklungsprozess*. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 2013

KÜHN U. A. 2007

Kühn, M.; Frömig, R.; Schindler, V.: *Fußgängerschutz: Unfallgeschehen, Fahrzeuggestaltung, Testverfahren*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007

LANDERS U. A. 2008

Landers, R.; Hubel, R.; Borgogelli, R.: The importance of cell structure for viscoelastic foams. In: *PU Magazine International* 1 (2008)

LAWRENCE UND HARDY 1998

Lawrence, G. J. L.; Hardy, B. J.: Pedestrian safety testing using the EEVC pedestrian impactors. In: *16th ESV Conference*, 1998

LEADERMAN U. A. 1963

Leaderman, H.; McCrackin, F.; Nakada, O.: Large longitudinal retarded elastic deformation of rubberlike network polymers. II. Application of a general formulation of nonlinear response. In: *Transactions of the Society of Rheology* 7 (1963), Nr. 1, S. 111–123

LEE 1969

Lee, E. H.: Elastic-plastic deformation at finite strains. In: *Journal of Applied Mechanics* 36 (1969), Nr. 1, S. 1–66

LI U. A. 2011

Li, C.; Qian, D.; Chen, Y.: On Riemann-Liouville and Caputo derivatives. In: *Discrete Dynamics in Nature and Society* 2011 (2011)

LIFSHITZ UND KOLSKY 1967

Lifshitz, J. M.; Kolsky, H.: Non-linear viscoelastic behavior of polyethylene. In: *International Journal of Solids and Structures* 3 (1967), Nr. 3, S. 383–397

LINDER U. A. 2011

Linder, C.; Tkachuk, M.; Miehe, C.: A micromechanically motivated diffusion-based transient network model and its incorporation into finite rubber viscoelasticity. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59 (2011), Nr. 10, S. 2134–2156

LION 1997A

Lion, A.: On the large deformation behaviour of reinforced rubber at different temperatures. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (1997), Nr. 11–12, S. 1805–1834

LION 1997B

Lion, A.: A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers. In: *Acta Mechanica* 123 (1997), Nr. 1-4, S. 1–25

LION 2007

Lion, A.: *Einführung in die lineare Viskoelastizität*. Universität der Bundeswehr München, 2007 (Beiträge zur Materialtheorie)

LOCKETT 1972

Lockett, F. J.: *Nonlinear viscoelastic solids*. Academic Press, London, 1972. – XI 195 S

LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. 2008

López-Fernández, M.; Lubich, C.; Schädle, A.: Adaptive, fast, and oblivious convolution in evolution equations with memory. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 30 (2008), Nr. 2, S. 1015–1037

LÓPEZ-FERNÁNDEZ U. A. 2006

López-Fernández, M.; Palencia, C.; Schädle, A.: A spectral order method for inverting sectorial Laplace transforms. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 44 (2006), Nr. 3, S. 1332–1350

LUBARDA 2004

Lubarda, A. V.: Constitutive theories based on the multiplicative decomposition of deformation gradient: Thermoelasticity, elastoplasticity, and biomechanics. In: *Applied Mechanics Reviews* 57 (2004), Nr. 2, S. 95–108

LUBICH 2004

Lubich, C.: Convolution quadrature revisited. In: *BIT Numerical Mathematics* 44 (2004), Nr. 3, S. 503–514

MARKERT 2005

Markert, B.: *Porous media viscoelasticity with application to polymeric foams*. Stuttgart, Dissertation, 2005

MARKOVIĆ U. A. 2014

Marković, G.; Marinović-Cincović, M.; Jovanović, V.; Samaržija-Jovanović, S.; Budinski-Simendić, J.: Modeling of non-linear viscoelastic behavior of filled rubbers. In: *Non-linear viscoelasticity of rubber composites and nanocomposites* Bd. 264. Springer International Publishing, Schweiz, 2014, S. 193–271

MATSUI UND TAKABAYASHI 2004

Matsui, Y.; Takabayashi, M.: Factor causing scatter in dynamic certification test results for compliance with EEVC WG17 legform impactor standard. In: *International journal of crashworthiness* 9 (2004), Nr. 1, S. 5–13

MAXWELL 1867

Maxwell, J. C.: On the dynamical theory of gases. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* (1867), S. 49–88

MEYER 1874

Meyer, O. E.: Zur Theorie der inneren Reibung. In: *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 78 (1874), S. 130–135

MIEHE UND GÖKTEPE 2005

Miehe, C.; Göktepe, S.: A micro–macro approach to rubber-like materials. Part II: The micro-sphere model of finite rubber viscoelasticity. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 53 (2005), Nr. 10, S. 2231–2258

MIEHE UND KECK 2000

Miehe, C.; Keck, J.: Superimposed finite elastic–viscoelastic–plastoelastic stress response with damage in filled rubbery polymers. Experiments, modelling and algorithmic implementation. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 48 (2000), Nr. 2, S. 323–365

MILLS 2007

Mills, N. J.: *Polymer foams handbook: Engineering and biomechanics applications and design guide*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2007

MILLS UND GILCHRIST 2000A

Mills, N. J.; Gilchrist, A.: High strain extension of open-cell foams. In: *Journal of Engineering Materials and Technology-Transactions of the ASME* 122 (2000)

MILLS UND GILCHRIST 2000B

Mills, N. J.; Gilchrist, A.: Modelling the indentation of low density polymer foams. In: *Cellular polymers* 19 (2000), Nr. 6, S. 389–412

MORMAN 1985

Morman, K. N.: *Rubber viscoelasticity: A review of current understanding*. Ford Motor Company, 1985

NAKADA 1961

Nakada, O.: Theory of non-linear viscoelasticity II—Analysis of non-linear creep of plastics / Research Group of Polymer Physics in Japan. 1961 (IV). – Forschungsbericht

NASA 1976

NASA: Spinoff 1976. Washington, DC (USA), 1976. – Broschüre

NASA 1981

NASA: Spinoff 1981. Washington, DC (USA), 1981. – Broschüre

NASA 1988

NASA: Spinoff 1988. Washington, DC (USA), 1988. – Broschüre

NASA 2005

NASA: Spinoff 2005. Washington, DC (USA), 2005. – Broschüre

NOLL 1958

Noll, W.: A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 2 (1958), S. 197–226

NOLL 1972

Noll, W.: A new mathematical theory of simple materials. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 48 (1972), Nr. 1, S. 1–50

OGDEN 1984

Ogden, R. W.: *Non-linear elastic deformations*. Dover Publications, New York (USA), 1984

PAMPOLINI UND RAOUS 2014

Pampolini, G.; Raous, M.: Nonlinear elasticity, viscosity and damage in open-cell polymeric foams. In: *Archive of Applied Mechanics* 84 (2014), Nr. 12, S. 1861–1881

PIPKIN UND ROGERS 1968

Pipkin, A. C.; Rogers, T. G.: A non-linear integral representation for viscoelastic behaviour. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 16 (1968), Nr. 1, S. 59–72

REESE UND GOVINDJEE 1998

Reese, S.; Govindjee, S.: A theory of finite viscoelasticity and numerical aspects. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 26-27, S. 3455–3482

REESE UND WRIGGERS 1999

Reese, S.; Wriggers, P.: Modelling of the thermo-mechanical material behaviour of rubber-like polymers - Micromechanical motivation and numerical simulation. In: *Constitutive Models for Rubber* 1 (1999), S. 13

RIESZ UND SZÓKEFALVI-NAGY 1955

Riesz, F.; Szókefalvi-Nagy, B.: *Functional analysis*. Frederick Ungar Publication Company, New York (USA), 1955

RIVLIN UND ERICKSEN 1955

Rivlin, R.; Ericksen, J.: Stress-deformation relations for isotropic materials. In: *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 4 (1955), S. 323–425

ROMERO U. A. 2008

Romero, P. A.; Zheng, S. F.; Cuitiño, A. M.: Modeling the dynamic response of visco-elastic open-cell foams. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56 (2008), Nr. 5, S. 1916–1943

SCHÄDLE U. A. 2006

Schädle, A.; López-Fernández, M.; Lubich, C.: Fast and oblivious convolution quadrature. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 28 (2006), Nr. 2, S. 421–438

SCHMIDT U. A. 2000

Schmidt, A.; Oexl, S.; Gaul, L.: Modellierung des viskoelastischen Materialverhaltens von Kunststoffen mit fraktionalen Zeitableitungen. In: *18. CAD-FEM User's Meeting 2000 – Internationale FEM-Technologietage, Friedrichshafen, 2000*

SHANKAR 2014

Shankar, S.: Light-weighting role of performance plastics in the European automotive market / Frost & Sullivan, Mountain View CA (USA). 2014 (M9B2-01). – Forschungsbericht

SIDOROFF 1974

Sidoroff, F.: Un modèle viscoélastique non linéaire avec configuration intermédiaire. In: *Journal de Mécanique* 13 (1974), Nr. 4, S. 679–713

SIMO 1987

Simo, J. C.: On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: Formulation and computational aspects. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 60 (1987), Nr. 2, S. 153–173

SIMO UND HUGHES 1998

Simo, J. C.; Hughes, T. J. R.: *Computational inelasticity*. New York : Springer, New York (USA), 1998

SMART UND WILLIAMS 1972A

Smart, J.; Williams, J. G.: A power-law model for the multiple-integral theory of non-linear viscoelasticity. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 20 (1972), Nr. 5, S. 325–335

SMART UND WILLIAMS 1972B

Smart, J.; Williams, J.G.: A comparison of single-integral non-linear viscoelasticity theories. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 20 (1972), Nr. 5, S. 313–324

SPENCER UND RIVLIN 1959

Spencer, A.; Rivlin, R.: Further results in the theory of matrix polynomials. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 4 (1959), S. 214–230

STAFFORD 1969

Stafford, R. O.: On mathematical forms for the material functions in nonlinear viscoelasticity. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 17 (1969), Nr. 5, S. 339–358

STICKFORTH 1986

Stickforth, J.: The rational mechanics and thermodynamics of polymeric fluids based upon the concept of a variable relaxed state. In: *Rheologica Acta* 25 (1986), Nr. 5, S. 447–458

TAYLOR U. A. 1970

Taylor, R. L.; Pister, K. S.; Goudreau, G. L.: Thermomechanical analysis of viscoelastic solids. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2 (1970), Nr. 1, S. 45–59

TORVIK UND BAGLEY 1984

Torvik, P. J.; Bagley, R. L.: On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials. In: *Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME* 51 (1984), Nr. 2, S. 294–298

TRUESDELL UND NOLL 2004

Truesdell, C.; Noll, W.: *The non-linear field theories of mechanics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2004

TSCHOEGL 1989

Tschoegl, N. W.: *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1989

VOIGT 1892

Voigt, W.: Ueber innere Reibung fester Körper, insbesondere der Metalle. In: *Annalen der Physik* 283 (1892), Nr. 12, S. 671–693

WIDDLE U. A. 2008

Widdle, R. D. J.; Bajaj, A. K.; Davies, P.: Measurement of the Poisson's ratio of flexible polyurethane foam and its influence on a uniaxial compression model. In: *International Journal of Engineering Science* 46 (2008), Nr. 1, S. 31–49

WIECHERT 1893

Wiechert, E.: Gesetze der elastischen Nachwirkung für constante Temperatur. In: *Annalen der Physik* 286 (1893), Nr. 10, S. 335–348

WINEMAN 2009

Wineman, A.: Nonlinear viscoelastic solids - a review. In: *Mathematics and Mechanics of Solids* 14 (2009), Nr. 3, S. 300–366

WINEMAN UND RAJAGOPAL 2000

Wineman, A. S.; Rajagopal, K. R.: *Mechanical response of polymers*. Cambridge University Press, Cambridge (GB), 2000

YANG UND SHIM 2004

Yang, L. M.; Shim, V. P. W.: A visco-hyperelastic constitutive description of elastomeric foam. In: *International journal of impact engineering* 30 (2004), Nr. 8, S. 1099–1110

YOUNG U. A. 2008

Young, P. G.; Beresford-West, T. B. H.; Coward, S. R. L.; Notarberardino, B.; Walker, B.; Abdul-Aziz, A.: An efficient approach to converting three-dimensional image data into highly accurate computational models. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 366 (2008), Nr. 1878, S. 3155–3173

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name: Veronika Maria Effinger
Geburtsort: Rottweil
Familienstand: Verheiratet

Schulische Ausbildung

1995 - 2004 Droste-Hülshoff-Gymnasium, Rottweil
2004 Allgemeine Hochschulreife

Universitäre Ausbildung

2004 - 2010 Studium der Werkstofftechnik an der Universität des Saarlandes in Saarbrücken und an der Ecole Européenne d'Ingénieurs en Génie des Matériaux in Nancy (Frankreich), gefördert durch das Cusanuswerk (Bonn) und den VDEh (Düsseldorf)
05/2010 Deutsch-Französisches Doppeldiplom der Werkstofftechnik
07/2012 - 12/2015 Akademische Mitarbeiterin am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Berufserfahrung

seit 06/2010 Berechnungsingenieurin bei DYNAmore GmbH, Stuttgart

Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T.A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.

- 9 (1989) **D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K.M. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axial-belasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T.J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R.L.M. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.

- 20 (1996) **N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) **C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) **D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) **H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) **H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) **K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) **B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) **F. Cirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) **M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) **H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) **M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.

- 31 (1999) **W.A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) **E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) **A. Maute:**
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Struktur-
dynamik.
- 34 (2001) **S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Struktur-
verhalten.
- 35 (2001) **A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit
der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) **D.P. Mok:**
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturmechanik und der Fluid-
Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) **H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) **K. Krausz:**
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) **M. Hörmann:**
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) **V. Gravemeier:**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incom-
pressible Flow.
- 41 (2004) **R. Kemmler:**
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Form-
optimierung.

- 42 (2004) **G.A. D’Addetta:**
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) **M. Gee:**
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) **T. Erhart:**
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A.S. Hund:**
Hierarchische Mehrskalmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T.M. Hettich:**
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.

- 53 (2010) J. Kato:**
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.
- 54 (2010) C.F. Hilchenbach:**
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B. J. Schneider:**
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.
- 58 (2012) T. Cichosz:**
Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit.
- 59 (2013) R. Echter:**
Isogeometric analysis of shells.
- 60 (2013) A. Tkachuk:**
Variational methods for consistent singular and scaled mass matrices.
- 61 (2013) J. Irslinger:**
Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente.
- 62 (2014) T. E. Pohl:**
Adaptive Methoden zur Pfadverfolgung bei Entfestigung.
- 63 (2014) A. Sorg:**
Adaptive diskret-kontinuierliche Modellierung von Materialien mit Mikrostruktur.

64 (2015) M. Matzen:
Isogeometrische Modellierung und Diskretisierung von
Kontaktproblemen.



Veronika Effinger

Die moderne Fahrzeugentwicklung nutzt digitale Prototypen und stellt dadurch hohe Anforderungen an die Simulationsmethoden, die zur virtuellen Bewertung und Optimierung der Fahrzeugeigenschaften eingesetzt werden. Um den Fußgängerschutz als Teil der Fahrzeugfunktion Crashesicherheit zu gewährleisten, ist eine adäquate Beschreibung des mechanischen Verhaltens offenzelliger Polymerschäume als Bestandteile des Hüftimpaktors erforderlich.

Im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik wird in dieser Arbeit eine verbesserte Modellierung offenzelliger Polymerschäume vorgeschlagen, bei der nicht nur die Zug-Druck-Asymmetrie und die ausgeprägte Dehnratenabhängigkeit dieser Werkstoffe sondern auch deren Relaxations-, Erholungs- und Hystereseverhalten erfasst werden.

Ausgehend von der Annahme, dass sich die Gesamtspannung additiv aus Gleichgewichts- und Überspannung zusammensetzt, liegt der Schwerpunkt auf der Beschreibung der Überspannung im Rahmen der Theorie der finiten nichtlinearen Viskoelastizität in Integraldarstellung. Nach der Einführung in die Theorie der linearen und nichtlinearen Viskoelastizität werden verschiedene Faltungsalgorithmen, Spannungs- und Dehnratenmaße sowie nichtlinear viskoelastische Erweiterungen des Faltungsintegrals vorgestellt und zu einer modularen Materialroutine kombiniert.

Um die Versuche des Polyurethanschaumes Confor CF-45 abzubilden, hat sich eine Formulierung in der Biot-Spannung und der Rate des rechten Strecktensors mit einer nichtlinear viskoelastischen Erweiterung im Hauptachsensystem des Dehnratentensors als geeignet erwiesen. Mit den für diesen Werkstoff ermittelten Parametersätzen werden die viskoelastischen Effekte anhand numerischer Beispiele veranschaulicht und die Simulationsergebnisse mit dem Stand der Technik verglichen.