

**Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale  
und ihre Anwendung bei der  
Methode der finiten Plattenelemente**

von

Werner Riehle



Bericht Nr. 74 - 4

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: o. Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Stuttgart 1974



Berichte können durch das Institut für Baustatik der Universität  
Stuttgart, 7 Stuttgart 1, Keplerstraße 11, Postfach 560, bezogen  
werden.

Dieser Bericht wurde unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation von Herrn Werner Riehle dem Fachbereich 11 "Konstruktiver Ingenieurbau" der Universität Stuttgart am 31. Januar 1974 vorgelegt. Die mündliche Doktorprüfung fand am 8. November 1974 statt.

Berichter waren:

Professor Dr. -Ing. H. Bufler

Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Professor Dr. -Ing. E. Stein

### Zusammenfassung

Am Beispiel der Platte wird die Anwendung verallgemeinerter Variationsfunktionale in der Elementmethode behandelt. Zuerst werden einige für die Praxis wichtige Funktionale unter Berücksichtigung der Querkraftverformungen hergeleitet. Allgemeine Hinweise auf ihre Anwendung in der Elementmethode folgen. Danach werden konkrete Ansätze gemacht und an einfachen Beispielen erprobt. Die Untersuchungen beschränken sich dabei auf gemischte Modelle und nicht voll verträgliche Verschiebungsmodelle. Für letztere werden weitere, leichter anwendbare Funktionale und ein einfaches Verfahren zur nachträglichen Berechnung der Momente angegeben.

### Summary

The application of generalized variational principles is considered within the scope of the finite element method. The problem of plate bending is taken as an example for which some functionals of practical interest are derived including the transverse shear deformation terms. The application of these functionals in the finite element method is discussed. Then some specific trial functions are introduced and tested by simple examples. This investigation is restricted to mixed models and not fully compatible displacement models. For the latter one additional functionals are presented which are easier to handle. A simplified procedure for the subsequent calculation of the bending moments is given.

### Résumé

L'emploi de fonctionnelles variationnelles généralisées dans la méthode des éléments finis est étudié en choisissant les plaques pour exemple. Dans un premier temps quelques fonctionnelles importantes dans la pratique sont établies en tenant compte des déformations d'effort tranchant. Puis des indications générales concernant leur emploi dans la méthode des éléments finis sont données. Des fonctions d'interpolation sont introduites et sont éprouvées en choisissant des exemples simples. Les études se limitent au cas des modèles mixtes et des modèles de déplacements ne respectant pas totalement les conditions de compatibilité. Pour ces derniers d'autres fonctionnelles d'emploi plus facile sont établies et une méthode simple de calcul a posteriori des moments est donnée.

Inhaltsverzeichnis

Schriftumsverzeichnis	Seite	7
Bezeichnungen		14
1. Einleitung		17
2. Die Grundgleichungen der Platte		20
2.1 Geometrie, Belastung, Definitionen		20
2.2 Die wichtigsten Formeln der Plattentheorie bei Berücksichtigung der Querkraftverformungen		23
2.3 Zusammenstellung der kinematischen und statischen Gleichungen und der Elastizitätsgleichungen		27
2.4 Vereinfachungen in der Schreibweise		28
2.5 Wichtige Identitäten		30
3. Die Variationsfunktionale der Platte		32
3.1 Die Minimalprinzipie		32
3.2 Das Variationsfunktional der Platte für drei unabhängige Funktionengruppen		34
3.2.1 Herleitung des Funktionals $F_3$ mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie		36
3.2.2 Herleitung des Funktionals $\tilde{F}_3$ mit Hilfe des Prinzips vom Minimum der Ergänzungsenergie		40
3.3 Die Variationsfunktionale der Platte für zwei unabhängige Funktionengruppen		40
3.3.1 Das Funktional $F_{2A}$		42
3.3.2 Das Funktional $F_{2B}$		46
3.3.3 Vergleich der beiden Funktionale		51
3.4 Das Variationsfunktional für die Verschiebungsgrößen		51

3.5	Veränderung der Funktionale bei Vernachlässigung der Querkraftverformungen	53
3.6	Vereinfachungen in der Berücksichtigung der Querkraftverformungen	55
3.7	Vergleiche mit Funktionalen, die im Schrifttum genannt werden	58
4.	Allgemeine Untersuchungen zur Anwendung der Variationsfunktionale in der Elementmethode	61
4.1	Einteilung der verschiedenen Verfahren der Elementmethode	61
4.2	Kriterien bei der Wahl der Ansätze	62
4.3	Organisationsfragen bei der praktischen Rechnung	62
4.4	Die Struktur der entstehenden Gleichungssysteme	64
4.4.1	Allgemeines	64
4.4.2	Die Variationsgleichungen des Funktionals $F_{2A}$	66
4.4.3	Die Variationsgleichungen des Funktionals $F_{2B}$	69
4.4.4	Zusammenfassung	71
4.5	Konvergenz	72
4.6	Maße für die Fehler an einzelnen Punkten	73
5.	Gemischte Ansätze	74
5.1	Die Abschätzung der Zahl der Unbekannten	74
5.2	Ansätze für das Funktional $F_{2A}$	75
5.2.1	Erstes Modell: Das Herrmannsche Modell	75
5.2.2	Zweites Modell: Lineare Ansätze für $w$ und $m_{ij}$	78
5.2.3	Einige Vergleiche zwischen den beiden Modellen	80
5.2.4	Weitere Untersuchungen des kinematischen Teils der Variationsgleichung $\delta F_{2A} = 0$	81

5.3	Ansätze für das Funktional $F_{2B}$	87
5.3.1	Ansätze für $m_{ij}$ und $w$	88
5.3.2	Die Berücksichtigung der Querkraftverformungen	89
5.3.3	Das Funktional $F_{2B}$	90
5.3.4	Untersuchung des Gleichungssystems für die Parameter	91
5.3.5	Allgemeine Angaben von Ergebnissen	95
5.3.6	Untersuchungen zur Bewertung der Ergebnisse	96
5.3.7	Änderung des Momentenansatzes	98
5.3.8	Nebenbetrachtung: Fehlerquadratminimum	99
5.4	Modifizierte Ansätze	100
5.4.1	Allgemeines	100
5.4.2	Drei mögliche Zusatzansätze	101
5.4.3	Die Methode A*	102
5.4.4	Die Methode B*	104
5.4.5	Zusammenfassung zu Abschnitt 5.4	105
6.	Verschiebungsansätze	107
6.1	Das Funktional $F_1$ und seine Näherungen	107
6.2	Die nachträgliche Berechnung der Momente	113
6.3	Der quadratische Verschiebungsansatz für Dreieckelemente	115
6.4	Der kubische Verschiebungsansatz für Dreieckelemente	116
6.4.1	Darstellung des Ansatzes	116
6.4.2	Erfahrungen aus Beispielrechnungen	118
6.4.3	Die Berechnung der Momente	121
6.4.4	Abschließende Bemerkungen zum kubischen Verschiebungsansatz	122
6.5	Ein Ansatz vierten Grades	123
6.6	Zusammenfassung der Erfahrungen mit dem Funktional $F_1$	124

7.	Zahlenbeispiele	125
7.1	Allgemeines zu den Beispielen	125
7.2	Probleme beim Vergleichen von Ergebnissen	128
7.2.1	Der Genauigkeitsvergleich	128
7.2.2	Der Vergleich des Aufwands	130
7.3	Beispiele zu den gemischten Methoden	130
7.3.1	Allgemeines	130
7.3.2	Beispiele ohne Querkraftverformungen	132
7.3.3	Beispiele mit Querkraftverformungen	132
7.4	Beispiele zur Verschiebungsmethode	135
7.4.1	Allgemeines	135
7.4.2	Die Ergebnisse für den Ansatz 1	136
7.4.3	Beispiele für die Ansätze 2 und 3	136
7.5	Schlußbemerkungen zu den Beispielen	138
8.	Vergleich zwischen den verschiedenen Elementmethoden	160
8.1	Die Verschiebungsmethode bei vollverträglichen Ansätzen	160
8.2	Die Verschiebungsmethode bei nicht voll verträglichen Ansätzen	161
8.3	Die Spannungsmethode (Gleichgewichtsmethode)	162
8.4	Gemischte Methoden	162
8.5	Wertung der Methoden	164
9.	Zusammenfassung	165
Anhang:	Dreieckskoordinaten	167

Schrifttumsverzeichnis

- [1] Argyris, J.H.: Die Matrizen­theorie der Statik.  
Ingenieur-Archiv XXV (1957) S. 174 - 192.
- [2] Hrennikoff, A.P.: Plane Stress and Bending of Plates by  
Method of Articulated Framework.  
Sc. D. Thesis, Dpt. of Civil and Sanitary  
Eng., M.I.T., Boston, USA, May 1940.
- [3] Spierig, S.: Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten-  
und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitter-  
rostmodellen.  
Dissertation, Fakultät für Maschinenwe-  
sen, TH Hannover, Juli 1963. Vgl. auch:  
Abh. d. Braunsch. wiss. Ges. XV, 1963.
- [4] Turner, M.J., Clough, R.W.,  
Martin, H.C., Topp, L.J.:  
Stiffness and Deflection Analysis of Com-  
plex Structures.  
J. Aeronautic Sci, 23 (1956) S. 805 - 825.
- [5] Argyris, J.H.: Energy Theorems and Structural Analysis.  
Butterworth Scientific Pub., London, 1960.
- [6] Riehle, W., Stein, E.: Die Berechnung von Zustands- und Ein-  
flußflächen für die Schnittgrößenbeliebiger  
Platten mit Hilfe der Methode der finiten  
Elemente.  
VDI-Fortschritt-Bericht, Reihe 4, Nr. 14,  
1969.
- [7] Schaefer, H.: Eine einfache Konstruktion von Koordina-  
tenfunktionen für die numerische Lösung  
zweidimensionaler Randwertprobleme  
nach Rayleigh-Ritz.  
Ingenieur-Archiv 35 (1966) S. 73 - 81.

- [8] Reissner, E.: On a Variational Theorem in Elasticity. J. of Math. and Physics 29 (1950) S. 90 - 95.
- [9] Reissner, E.: On a Variational Theorem for Finite Elastic Deformations. J. of Math. and Physics 32 (1953) S. 129.
- [10] Herrmann, L.R.: Finite Element Bending Analysis for Plates. Proc. of the ASCE, J. of the Eng. Mech. Div., Okt. 1967, S. 13 - 26.
- [11] Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamon Press, Oxford 1968.
- [12] Prager, W.: Variational Principles for Elastic Plates with Relaxed Continuity Requirements. Int. J. of Solids and Structures 4 (1968) S. 837 - 844.
- [13] Bufler, H.: Die verallgemeinerten Variationsgleichungen der dünnen Platte bei Zulassung diskontinuierlicher Schnittkräfte und Verschiebungsgrößen. Ingenieur-Archiv 39 (1970) S. 330 - 340.
- [14] Johnson, M.W.,  
McLay, R.W.: Convergence of the Finite Element Method in the Theory of Elasticity. J. of Appl. Mech. 35 (1968) E, 2, S. 274 - 278.
- [15] Ženišek, M.,  
Zlamal, M.: Convergence of a Finite Element Procedure for Solving Boundary Value Problems of the Fourth Order. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 2 (1970) S. 307 - 310.

- [16] Lynn, P. P.,  
Boresi, A. P.: Kinds of Convergence and Improved Convergence of Conforming Finite Element Solutions in Plate Bending. Nuclear Eng. and Design 11 (1970) S. 159 - 176.
- [17] Aziz, A.K.: The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations. Academic Press, New York and London 1972. (Herausgeber)
- [18] Pin Tong,  
Pian, T.H.H.: On The Convergence of the Finite Element Method for Problems with Singularity. Int. J. of Solids and Structures 9 (1973) S. 313 - 321.
- [19] Argyris, J. H.,  
Williams, K.: Some Considerations for the Evaluation of Finite Element Models. ISD - Bericht Nr. 147, Universität Stuttgart, Dez. 1973.
- [20] Reissner, E.: On Bending of Elastic Plates. Quarterly of Appl. Math. 5 (1947) S. 55 - 68.
- [21] Courant, R.,  
Hilbert, D.: Methoden der mathematischen Physik, Band I und II, 2. Auflage, Springer Verlag, Berlin 1968.
- [22] Wunderlich, W.: Grundlagen und Anwendung eines verallgemeinerten Variationsverfahrens. Beitrag in 'Finite Elemente in der Statik', S. 126 - 144. Herausgegeben von K. E. Buck, D. W. Scharpf, E. Stein und W. Wunderlich, Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1973.

- [23] Sandhu, R.S., Pister, K.S.: Variational Principles for Plate Bending - A Unified Approach. Beitrag in 'Variational Methods in Engineering'. Proceedings of an Int. Conference, University of Southampton, Sept. 1972.
- [24] Michlin, S.G.: Variationsmethoden der mathematischen Physik. Akademie Verlag, Berlin 1962.
- [25] Pin Tong, Pian, T.H.H.: A Variational Principle and the Convergence of a Finite Element Method Based on Assumed Stress Distributions. Int. J. of Solids and Structures, Vol.5 (1969) S. 463 - 472.
- [26] Anderheggen, E.: Finite Plate Bending Equilibrium Analysis. J. of the Eng. Mech. Div., ASCE, Aug. 1969, S. 841 - 857.
- [27] de Veubeke, B.F., Sander, G.: An Equilibrium Model for Plate Bending. Int. J. of Solids and Structures, Vol. 4 (1968) S. 447 - 468.
- [28] Riehle, W.: Der Zusammenbau von Elementen unter Verwendung von Makroelementen. Beitrag in 'Finite Elemente in der Statik', S. 321 - 344. Herausgegeben von K. E. Buck, D. W. Scharpf, E. Stein und W. Wunderlich. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1973.
- [29] Szabo, B.A., Chung - Ta Tsai: The Quadratic Programming Approach to the Finite Element Method. Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 5 (1973) S. 375 - 381.

- [30] Visser, W.: A Refined Mixed - Type Plate Bending Element.  
AIAA Journal, Vol. 7 (1969) S. 1801 - 1803.
- [31] Herrmann, L.R.: A Bending Analysis for Plates.  
Proceedings, Conf. on Matrix Methods in Struct. Mechanics. Wright Patterson Air Force Base, Ohio, 1965, S. 577 - 604.
- [32] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.  
McGraw - Hill Publishing Comp. Ltd., London 1967.
- [33] Bufler, H.,  
Stein, E.: Zur Plattenberechnung mittels finiter Elemente.  
Ingenieur-Archiv 39(1970) 4, S. 248 - 260.
- [34] Riehle, W.,  
Stein, E.: Die Berechnung von kombinierten Platten- und Scheibenspannungszuständen in Anwendung auf Brückenkonstruktionen.  
Unveröffentlichter Forschungsbericht für die Deutsche Forschungsgemeinschaft, 1971.
- [35] Clough, R.W.,  
Tocher, J.L.: Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending.  
Proc., Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics. Wright-Patterson Airforce Base, Dayton, Ohio, Oct. 1965.
- [36] Bosshard, W.: Ein neues vollverträgliches endliches Element für Plattenbiegung.  
Abhandlungen IVBH, Zürich, 28 (1968) S. 27 - 40.

- [37] Butlin, G. A.,  
Ford, R.: A Compatible Triangular Plate Bending  
Finite Element,  
Report 68 - 15, University of Leicester,  
England, Eng. Dep., Okt. 1968.
- [38] Bell, K.: A Refined Triangular Plate Bending Finite  
Element,  
Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol. 1  
(1969) S. 101 - 122.
- [39] Czerny, F.: Tafeln für vierseitig gelagerte Rechteck-  
platten.  
Beton - Kalender 1969, S. 162 ff. Verlag  
W. Ernst & Sohn, Berlin - München.
- [40] Salerno, V. L.,  
Goldberg, M. A.: Effect of Shear Deformations on the Bending  
of Rectangular Plates.  
J. of Appl. Mechanics, Transactions of  
the ASME, März 1960, S. 54 - 58.
- [41] Pryor, C. W.,  
Barker, R. M.,  
Frederick, D.: Finite Element Bending Analysis for  
Reissner Plates.  
Proceedings of the ASCE, Eng. Mech. Div.,  
Dez. 1970, S. 967 - 983.
- [42] Stein, E.,  
Wunderlich, W.: Finite-Element-Methode als direkte Va-  
riationsverfahren der Elastostatik.  
Beitrag in 'Finite Elemente in der Statik',  
S. 71 - 125. Herausgegeben von K. E.  
Buck, D. W. Scharpf, E. Stein und W.  
Wunderlich. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn,  
Berlin 1973.
- [43] Argyris, J. H.,  
Fried, I.,  
Scharpf, D. W.: The TUBA Family of Elements for the  
Matrix Displacement Method.  
The Aer. J. of the Royal Aer. Society  
72 (1968) S. 701 - 709.

- [44] Johnson, C. : On the Convergence of a Mixed Finite-Element Method for Plate Bending Problems.  
Num. Math. 21 (1973) S. 43 - 62.
- [45] Strang, G. , An Analysis of the Finite Element Method.  
Fix, G. J. : Prentice - Hall Inc. , Englewood Cliffs,  
N. J. , 1973.
- [46] Chatterjee, A. , A Mixed Finite Element Formulation for  
Setlur, A. V. : Plate Problems.  
Int. J. for Num. Meth. in Eng. 4 (1972)  
S. 67 - 84.
- [47] Oden, J. T. , On the Calculation of Consistent Stress  
Brauchli, H. J. : Distributions in Finite Element Approximations.  
Int. J. for Num. Meth. in Eng. 3 (1971)  
S. 317 - 325.

Bezeichnungen

Die wichtigsten Formelzeichen

E	$[\frac{Mp}{m^2}]$	Elastizitätsmodul.	
$\mu$	[1]	Querkontraktionszahl.	
F	$[m^2]$	Gesamtfläche der Platte.	
h	[m]	Plattendicke.	
K	$[Mpm]$	Plattensteifigkeit $K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$	
$x_i$	[m]	Koordinaten des globalen kartesischen Koordinatensystems. $i = 1, 2, 3$ . $x_1$ und $x_2$ liegen in der Plattenmittelfläche.	
n, t	[m]	Rechtwinkliges Koordinatensystem an einem Elementrand.	
$\sigma_{ij}$	$[\frac{Mp}{m^2}]$	Spannungstensor	} $i, j = 1, 2, 3$
$\epsilon_{ij}$	[1]	Verzerrungstensor	
$k_i$	$[\frac{Mp}{m^3}]$	Volumenkraft in Richtung $x_i$	
$m_{ij}$	$[\frac{Mpm}{m}]$	Momententensor	} $i, j = 1, 2$
$q_i$	$[\frac{Mp}{m}]$	Querkraftvektor	
p	$[\frac{Mp}{m^2}]$	Flächenlast normal zur Plattenebene (in Richtung $x_3$ ).	
M	$[\frac{Mpm}{m}]$	Biegemoment $M \equiv m_{nn}$	} an einem Elementrand
T	$[\frac{Mpm}{m}]$	Torsionsmoment $T \equiv m_{nt}$	
Q	$[\frac{Mp}{m}]$	Querkraft $Q \equiv q_n$	
V	$[\frac{Mp}{m}]$	Ersatzscherkraft $V \equiv q_n + m_{nt, t}$	
$u_i$	[m]	Verschiebung in Richtung $x_i$ .	
w	[m]	Mittlere Verschiebung in Richtung $x_3$ :	

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} u_3 [1 - (\frac{x_3}{h/2})^2] dx_3$$

$\beta_i$	[1]	Mittlere Neigung der ursprünglichen Flächennormalen:	
			$\beta_i = \frac{6}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} u_i \frac{x_3}{h/2} dx_3 \quad i = 1, 2$
$\kappa_{ij}$	$[\frac{1}{m}]$	Krümmungstensor.	$\kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) \quad i, j = 1, 2$
$\gamma_i$	[1]	Gleitung.	$\gamma_i = w_{,i} + \beta_i \quad i = 1, 2$
$\varphi$	[1]	Querneigung des Elementrandes:	$\varphi = w_{,n} - \gamma_n = -\beta_n$
$\psi$	[1]	Längsneigung des Elementrandes:	$\psi = w_{,t} - \gamma_t = -\beta_t$
$s$		Randlinie der Platte.	
$s_\alpha$		Teil des Plattenrandes, auf dem eine Größe $\alpha$ vorgegeben ist.	
$\sigma$		Innenkanten der Platte.	
$t$		Gesamtheit aller Bereichsränder (Innengrenzen $\sigma$ sind in $t$ doppelt enthalten).	
$\Delta$		Laplace - Operator:	$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = ( \quad ),_{kk}$
$\delta_{ik}$		Kronecker - Symbol	$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}$
$\Pi^{(i)}, \Pi^{(a)}$	[Mpm]	Inneres bzw. äußeres Potential.	
$\Pi$	[Mpm]	Gesamtpotential	$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(a)}$
$\tilde{\Pi}^{(i)}, \tilde{\Pi}^{(a)}$	[Mpm]	Inneres bzw. äußeres Ergänzungspotential.	
$\tilde{\Pi}$	[Mpm]	Gesamtes Ergänzungspotential	$\tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}^{(i)} + \tilde{\Pi}^{(a)}$
$F_3, F_{2A}, F_{2B},$ $F_1, \bar{F}_1, \tilde{F}_1$		Variationsfunktionale.	

### Allgemeine Vereinbarungen

Matrizen werden mit fettgedruckten Großbuchstaben, Spaltenvektoren mit fettgedruckten Kleinbuchstaben bezeichnet.

Ein hochgestelltes T bedeutet eine Transposition.

Hochgestellte Indizes in Klammern bezeichnen i. a. die Zuordnung einer Größe zu einem Knotenpunkt.

Hochgestellte Indizes ohne Klammern werden im Abschnitt 2.4 erläutert.

Vorgegebene Größen werden mit einem Dach ( ^ ) gekennzeichnet.

Partielle Ableitungen werden neben der üblichen Schreibweise durch Komma und Indizierung bezeichnet. Es gilt z. B.

$$w_{,ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \quad ; \quad w_{,n} = \frac{\partial w}{\partial n}$$

### Abkürzungen im Text

P. v. M. d. p. E.      Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie.

P. v. M. d. E. E.      Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie.

### Begriffe

Der Begriff "Gruppe" wird in der vorliegenden Arbeit nur zur Zusammenfassung gleichartiger Größen benutzt und ist somit nicht mit dem in der Mengenlehre definierten gleichlautenden Begriff identisch.

## 1. Einleitung

Die Methode der finiten Elemente, kurz Elementmethode genannt, entstand als Weiterentwicklung der Matrizenmethode der Baustatik (siehe hierzu [1]). Komplizierte Tragwerke werden in Teilbereiche zerlegt und deren statischer und kinematischer Zustand in vereinfachter Weise durch eine endliche Zahl von Parametern beschrieben. Beim Zusammenbau der Elemente können die statischen und kinematischen Bedingungen in diesen Parametern ausgedrückt werden.

Anfangs wurden überwiegend die kinematischen Größen eines Elements als unbekannte Parameter gewählt und die zugehörigen statischen Größen daraus berechnet. Den erforderlichen Zusammenhang zwischen beiden Größengruppen stellen die Steifigkeitsmatrizen her, die man nach verschiedenen Methoden ermitteln kann.

Elemente von Flächentragwerken behandelte man zunächst nach rein ingenieurmäßigen Gesichtspunkten. So haben Hrennikoff [2] und später Spierig [3] sie als Stabwerke idealisiert und für diese Modelle Steifigkeitsmatrizen entwickelt.

Mit der Einführung einfacher Verschiebungsansätze für die Elemente begann dann die Entwicklung der eigentlichen Elementmethode. Turner, Clough, Martin und Topp [4] gaben 1956 Ansätze für Scheibenelemente an. Im folgenden wurde eine große Zahl von Scheiben- und Plattenelementen entwickelt, wobei man die Steifigkeitsmatrizen zu meist, wie in [5], unter Benutzung des zweiten Castiglianoschen Satzes ermittelte. Diese Methode und die Berechnung der Steifigkeitsmatrizen mit Hilfe von Gleichgewichtsbetrachtungen der Schnittgrößen an den Elementrändern sind ausführlich in [6] dargestellt.

Schaefer behandelte in [7] das Ritzsche Verfahren für Plattenprobleme unter Verwendung bereichsweiser Ansätze, wobei er deren erforderliche Kontinuität durch die Anwendung Hermitescher Interpolationspolynome erzielte. Auf diese Weise war bei der Plattenberechnung eine Verbindung hergestellt zwischen der Anwendung des Prinzips vom Minimum

der potentiellen Energie und jenen Elementmethoden, die den Castiglianoschen Satz im Zusammenhang mit Ansätzen benutzten, welche die Kontinuität der Verschiebungen und ihrer ersten Ableitungen gewährleisten. Damit eröffnete sich die Möglichkeit, rein mathematische Verfahren bei der Elementmethode anzuwenden. Erst jetzt wurde es z. B. möglich, auch höhere Ableitungen des Verschiebungsansatzes als Parameter zu verwenden.

Vom Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie war es nur noch ein kleiner Schritt bis zur Anwendung verallgemeinerter Variationsprinzipie, wie sie Reissner [8], [9], Herrmann [10], Washizu [11], Prager [12], Bufler [13] u. a. angegeben haben. Diese Prinzipie ermöglichten die Entwicklung gemischter Methoden auf der Grundlage der Variationsrechnung. Damit wurde jedoch die ursprüngliche ingenieurmäßige Anschaulichkeit der Elementmethode verlassen. Die nunmehr benutzten mathematischen Methoden regten einige Autoren dazu an, Konvergenzuntersuchungen zu machen. Johnson und Mc Lay [14] wiesen für ein bestimmtes Verschiebungsmodell (rechteckiges Scheibenelement) die Konvergenz der Ergebnisse nach. Sie betonten, daß die Benutzung von Ansätzen, die im Sinne der Variationsrechnung zulässig sind, noch keine Garantie für Konvergenz bedeutet. Ženišek und Zlamal [15] sowie Lynn und Borelli [16] führten Konvergenzuntersuchungen ebenfalls an vollverträglichen Verschiebungsmodellen durch, wobei letztere einige notwendige Kriterien angaben. Mit Konvergenzuntersuchungen für die Anwendung verallgemeinerter Variationsprinzipie in der Elementmethode hat sich Babuška in [17] ausführlich beschäftigt. An neueren Arbeiten zum Thema Konvergenz seien die Veröffentlichungen von Pin Tong und Pian [18], Argyris und Williams [19], C. Johnson [44] und von Strang und Fix [45] genannt.

In der vorliegenden Arbeit werden vor allem die praktische Anwendung der verallgemeinerten Variationsprinzipie in der Elementmethode und die dabei auftretenden Probleme behandelt.

Der Herleitung einiger wichtiger Variationsfunktionale für die elastische Platte unter Berücksichtigung der Querkraftverformungen folgen

Hinweise zu ihrer Anwendung in der Elementmethode. Diese betreffen programm - organisatorische Fragen, die Struktur der entstehenden Gleichungssysteme und die Wahl der Ansätze.

Sodann werden für verschiedene Funktionale mit Hilfe mehrerer Ansätze praktische Konvergenzuntersuchungen durchgeführt. Es zeigt sich, daß nicht alle vom Funktional her zulässigen Ansätze zu brauchbaren Ergebnissen führen. Ein unbefriedigendes gemischtes Modell wird näher untersucht und durch Modifizierung des Verschiebungsansatzes verbessert.

Für das bei nicht voll verträglichen Verschiebungsansätzen benutzte Funktional werden Näherungsfunktionale angegeben, mit denen die Bildung von Kantenmatrizen vermieden werden kann, die sonst zusätzlich zur Bildung von Elementmatrizen erforderlich ist. Außerdem wird ein einfaches Verfahren entwickelt, das es ermöglicht, Biege- und Drillmomente aus Verschiebungsfunktionen ohne die üblichen Ableitungen und Mittelungen zu berechnen.

Den Schluß der Arbeit bilden Vergleiche zwischen den verschiedenen, von Variationsfunktionalen ableitbaren Verfahren innerhalb der Elementmethode.

## 2. Die Grundgleichungen der Platte

In diesem Kapitel sind die Differentialgleichungen zusammengestellt, die den statischen und kinematischen Zustand der Platte und die Verknüpfung beider Zustände über das Stoffgesetz beschreiben. Um eine Anwendung der Formeln in den späteren Beispielen zu erleichtern, wird dabei von vornherein ein lineares Elastizitätsgesetz angenommen. Da eine Aufteilung der Platte in Teilbereiche vorgesehen ist, sind neben Feldgleichungen und Randbedingungen auch Übergangsbedingungen erforderlich. Weiterhin werden die Querkraftverformungen der Platte in allen Gleichungen berücksichtigt.

Am Ende des Kapitels sind Identitäten angegeben, die für Umformungen in den weiteren Kapiteln benötigt werden.

### 2.1 Geometrie, Belastung, Definitionen

Den Berechnungen wird ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$  (Rechtssystem) zugrunde gelegt, wobei die Plattenmittelfläche in der  $x_1, x_2$ -Ebene liegt. Die Gesamtfläche  $F$  der Platte ist in mehrere Teilbereiche unterteilt. Ihre Außengrenzen werden mit  $s$ , ihre Innengrenzen mit  $\sigma$  bezeichnet,  $t$  sei die Gesamtheit aller Bereichsränder. Die Grenzlinien haben eine stückweise stetige Tangente. Unstetigkeitsstellen werden Knotenpunkte  $k$  genannt.

Der Platte sind richtungstreue statische und geometrische Größen vorgegeben. Sie werden mit einem Dach ( $\hat{\quad}$ ) gekennzeichnet.

$\hat{p}$	Flächenkraft [Mp/m <sup>2</sup> ] in Richtung $x_3$
$\hat{P}_k$	Einzelkraft [Mp] in Richtung $x_3$ am Knotenpunkt $k$
$\hat{Q}$	Randquerkraft [Mp/m] längs des Teilrandes $s_Q$
$\hat{M}$	Randnormalmoment [Mpm/m] längs des Teilrandes $s_M$
$\hat{T}$	Randdrillmoment [Mpm/m] längs des Teilrandes $s_T$

Linienkräfte und -momente im Innern des Tragwerks sind nicht vorgesehen, damit der Umfang der Gleichgewichtsbedingungen nicht unnötig groß wird.

Folgende Verschiebungsgrößen können vorgegeben werden:

$\hat{w}$	Durchsenkungen längs des Teilrandes	$s_w = s - s_Q$
$\hat{\varphi}$	Verdrehungen normal zum Rand längs	$s_\varphi = s - s_M$
$\hat{\psi}$	Verdrehungen in Richtung der Randtangente längs	$s_\psi = s - s_T$

Der Zustand der Platte nach der Belastung wird durch die Verschiebungen  $w(x_1, x_2)$  (Durchsenkungen in Richtung  $x_3$ ), die Verdrehungen  $\beta_i(x_1, x_2)$  der ursprünglichen Flächennormalen, die Verzerrungsgrößen  $\kappa_{ij}(x_1, x_2)$  und  $\gamma_i(x_1, x_2)$  und durch die Plattenschnittgrößen  $m_{ij}(x_1, x_2)$  und  $q_i(x_1, x_2)$  beschrieben. Genauere Erläuterungen zu diesen Größen folgen. Die Momente  $m_{ij}$  und die Querkräfte  $q_i$  sind in Bild 2.1 für das globale Koordinatensystem  $x_1, x_2, x_3$  definiert. In jedem anderen rechtwinkligen Koordinatensystem gelten entsprechende Definitionen.

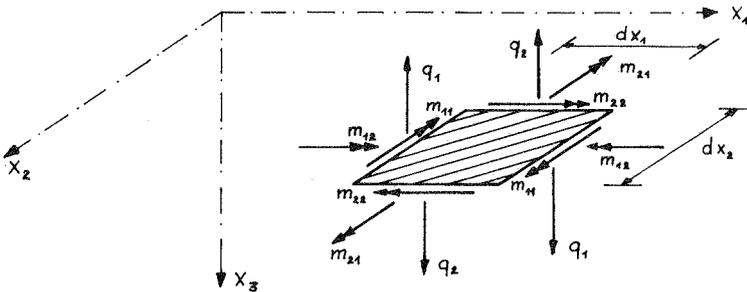


Bild 2.1: Definition der Plattenschnittgrößen

An den Rändern eines Teilbereiches bildet die Außennormale  $n$ , die Tangentenrichtung  $t$  und die Richtung  $x_3$  wiederum ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $n, t, x_3$  (Rechtssystem), in dem die Schnittgrößen  $m_{nn} \equiv M, m_{nt} \equiv T, q_n \equiv Q$  definiert sind (siehe Bild 2.2). Die Neigung der ursprünglichen Flächennormalen an den Rändern eines Bereiches wird durch die Verdrehungen  $\varphi$  (um die  $t$ -Achse) und  $\psi$  (um die  $n$ -Achse) beschrieben, deren positive Richtungen den positiven Richtungen der zugehörigen Randmomente  $M$  und  $T$  entgegengesetzt sind (siehe Bild 2.2).

Im Sonderfall vernachlässigter Querkraftverformungen wird damit  $\varphi \equiv \frac{\partial w}{\partial n}$  und  $\psi \equiv \frac{\partial w}{\partial t}$ .

Bei den Innenrändern  $\sigma$  sind zwei Schnittufer zu unterscheiden. Koordinatensysteme und Zustandsgrößen dieser Schnittufer werden durch ein hochgestelltes Plus- bzw. Minuszeichen gekennzeichnet. In Bild 2.2 sind sie für zwei geradlinig berandete Teilbereiche dargestellt, wobei die Schnittufer der gemeinsamen Kante in  $x_1$ -Richtung auseinandergezogen sind.

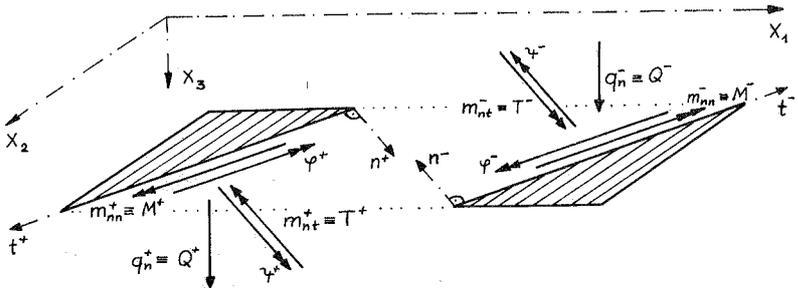


Bild 2.2: Zustandsgrößen an Innenrändern der Platte

In den folgenden Formeln und Gleichungen gilt die Summenkonvention: über gleiche Indizes soll jeweils summiert werden. Ein Komma bedeutet partielle Differentiation.  $\delta_{ik}$  ist das Kronecker-Symbol:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k \end{cases}$$

$E$  ist der als konstant angenommene Elastizitätsmodul,  $\mu$  ist die Querkontraktionszahl und  $h$  die Plattendicke. Die Steifigkeit der isotropen Platte ist

$$K = \frac{E h^3}{12 (1 - \mu^2)}$$

2.2 Die wichtigsten Formeln der Plattentheorie  
bei Berücksichtigung der Querkraftverformungen

Die folgende Plattentheorie entspricht zum größten Teil der verschärf-  
 ten Theorie von Reissner, wie sie in [20] dargestellt ist. Der ein-  
 zige Unterschied besteht in der Annahme, daß die vorgegebene Last  $\hat{\beta}$   
 nicht an der Plattenoberfläche, sondern derart als über die Platten-  
 dicke veränderliche Volumenkraft  $\hat{k}_3$  angreift, daß die Spannungen  $\sigma_{33}$   
 identisch verschwinden.

Zunächst wird vom dreidimensionalen Verschiebungs-, Spannungs- und  
 Verzerrungszustand ausgegangen. Es gelten die Beziehungen

$$\Pi^{(i)} = \tilde{\Pi}^{(i)} = \frac{1}{2} \iint_F \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dx_3 dx_1 dx_2 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

mit

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1+\mu}{E} \left[ \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{1+\mu} \sigma_{kk} \right] \quad ; \quad i, j, k = 1, 2, 3$$

$\Pi^{(i)}$  stellt das innere Potential,  $\tilde{\Pi}^{(i)}$  das innere Ergänzungspotential dar.  
 $u_i(x_1, x_2, x_3)$  ist die Verschiebung in Richtung  $x_i$ ,  $\sigma_{ij}$  und  $\epsilon_{ij}$  sind der  
 Spannungs- bzw. Verzerrungstensor der dreidimensionalen Theorie.

Im folgenden sollen die Indizes  $i, j$  und  $k$  nur noch die Werte 1 und 2  
 annehmen, falls nicht ausdrücklich etwas anderes vereinbart wird.

Die Definitionen der Plattenschnittgrößen lauten

$$m_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{ij} x_3 dx_3$$

$$q_i = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_{i3} dx_3$$

Für sie gelten die Gleichgewichtsbedingungen

$$q_i - m_{j,i,j} = 0$$

$$q_{i,i} + \hat{\beta} = 0$$

Zur Elimination der dritten Dimension  $x_3$  ist es erforderlich, für den Verlauf der Spannungen über die Plattendicke Annahmen zu treffen. Nur dann lassen sich die Spannungen in den Schnittgrößen ausdrücken.

Bei Annahme eines linearen Verlaufs für  $\sigma_{ij}$  und eines quadratischen Verlaufs für  $\sigma_{i3}$  (jeweils  $i, j = 1, 2$ ) erhält man

$$\sigma_{ij} = \frac{m_{ij}}{h^2/6} \frac{x_3}{h/2} \quad (2.1 a)$$

und

$$\sigma_{i3} = \frac{q_i}{2h/3} \left[ 1 - \left( \frac{x_3}{h/2} \right)^2 \right] \quad (2.1 b)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen des dreidimensionalen Spannungszustandes lauten

$$\sigma_{ji,j} + \hat{k}_i = 0 \quad ; \quad i, j = 1, 2, 3$$

wobei  $\hat{k}_i$  eingeprägte Volumenkräfte in Richtung  $x_i$  darstellen.

$\sigma_{ij}$  und  $\sigma_{i3}$  gemäß (2.1 a) und (2.1 b) erfüllen diese Bedingungen für  $i = 1, 2$ , falls  $m_{ij}$  und  $q_i$  der ersten Gleichgewichtsbedingung für die Schnittgrößen genügen.

Die dritte Gleichgewichtsbedingung des dreidimensionalen Spannungszustandes wird nun dazu benutzt,  $\hat{k}_3$  so festzulegen, daß  $\sigma_{33}$  überall identisch verschwindet. Mit dieser Maßnahme soll verhindert werden, daß über  $\sigma_{33}$  ein  $\hat{\rho}$  enthaltender Term ins innere Potential  $\pi^{(i)}$  gelangt, wie dies bei Reissner [20] der Fall ist.

$$\begin{aligned} \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \cancel{\sigma_{33,3}} + \hat{k}_3 &= 0 \\ \rightarrow \hat{k}_3 &= - \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{x_3}{h/2} \right)^2 \right] \underbrace{(q_{1,1} + q_{2,2})}_{-\hat{\rho}} \\ \hat{k}_3 &= \frac{3\hat{\rho}}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{x_3}{h/2} \right)^2 \right] \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \hat{k}_3 dx_3 &= \hat{\rho} \end{aligned}$$

Da die Volumenkraft  $\hat{k}_3$  die Oberflächenlast  $\beta$  ersetzt, erfüllt

$$\sigma_{33} = \text{const} = 0$$

nicht nur die Gleichgewichtsbedingungen im Innern der Platte (laut Herleitung), sondern auch die Randbedingungen an der Plattenoberfläche.

Benutzt man die Spannungsverläufe von  $\sigma_{ij}$  und  $\sigma_{i3}$  als Gewichtungsfunktionen zur Definition der mittleren Verdrehungen  $\beta_i$  und der mittleren Verschiebungen  $w$ , so erhält man (siehe auch [20]):

$$\beta_i = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} u_i \frac{x_3}{h/2} dx_3$$

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} u_3 \left[ 1 - \left( \frac{x_3}{h/2} \right)^2 \right] dx_3$$

Mit den bisher genannten Annahmen und Definitionen läßt sich

$$\Pi^{(i)} = \tilde{\Pi}^{(i)} = \frac{1}{2} \iint \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + \sigma_{i3} \epsilon_{i3} + \sigma_{3i} \epsilon_{3i} + \sigma_{33} \epsilon_{33}] dx_3 dx_1 dx_2$$

nach einigen Zwischenrechnungen auf folgende Form bringen:

$$\Pi^{(i)} = \tilde{\Pi}^{(i)} = \frac{1}{2} \iint_F [m_{ij} \kappa_{ij} + q_i \gamma_i] dx_1 dx_2 \quad (2.2)$$

$$\text{mit} \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i})$$

$$\gamma_i = w_{,i} + \beta_i$$

Wird die Last  $\beta$  in Form von  $\hat{k}_3$  aufgebracht, so lautet das entsprechende äußere Potential

$$\Pi^{(a)} = - \iint_F \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \hat{k}_3 u_3 dx_3 dx_1 dx_2 = - \iint_F \beta \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{x_3}{h/2} \right)^2 \right] u_3 dx_3 dx_1 dx_2$$

$$\Pi^{(a)} = - \iint_F \beta w dx_1 dx_2$$

Anmerkung:

Alle in Richtung  $x_3$  wirkenden Kraftgrößen müssen einen parabolischen Verlauf über die Plattendicke haben, ähnlich  $\hat{k}_3$ , damit ihre Arbeit mit Hilfe der Verschiebungsgröße  $w$  ausgedrückt werden kann!

Aus den Elastizitätsgleichungen oder über das von Reissner in [20] angewandte Verfahren erhält man die Beziehungen zwischen den Schnittgrößen und den Verzerrungsgrößen:

$$m_{ij} = K(1 - \mu) \left[ \kappa_{ij} + \delta_{ij} \frac{\mu}{1 - \mu} \kappa_{kk} \right]$$
$$q_i = \frac{Eh}{2,4(1 + \mu)} \gamma_i = K(1 - \mu) \frac{5}{h^2} \gamma_i$$

Die Umkehrung dieser Gleichungen lautet:

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{K(1 - \mu)} \left[ m_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{1 + \mu} m_{kk} \right]$$
$$\gamma_i = \frac{2,4(1 + \mu)}{Eh} q_i = \frac{h^2}{5K(1 - \mu)} q_i$$

Aus den Definitionen für  $w$ ,  $\beta_i$  und  $\gamma_i$  ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen diesen Größen und den Randneigungen  $\varphi$  und  $\psi$  (siehe Bild 2.2):

$$\varphi \equiv -\beta_n = w_{,n} - \gamma_n \quad (2.3)$$

$$\psi \equiv -\beta_t = w_{,t} - \gamma_t \quad (2.4)$$

Bei Berücksichtigung der Querkraftverformungen stellen  $\varphi$  und  $\psi$  mittlere Neigungen eines Elementrandes dar.

2.3 Zusammenstellung der kinematischen und statischen Gleichungen und der Elastizitätsgleichungen

Die kinematischen Gleichungen der Platte sind:

$$\begin{aligned} \text{Feldgleichungen:} \quad \kappa_{ij} - \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) &= 0 & i, j = 1, 2 & \quad (2.5) \\ \gamma_i - (w_{,i} + \beta_i) &= 0 & & \quad (2.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Randbedingungen:} \quad \varphi - \hat{\varphi} &= 0 & \text{auf } s_\varphi & \\ \psi - \hat{\psi} &= 0 & \text{auf } s_\psi & \\ w - \hat{w} &= 0 & \text{auf } s_w & \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \varphi - \hat{\varphi} \\ \psi - \hat{\psi} \\ w - \hat{w} \end{aligned}} \right\} (2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{Übergangsbedingungen:} \quad \varphi^+ + \varphi^- &= 0 & \text{auf } \sigma & \\ \psi^+ + \psi^- &= 0 & \text{auf } \sigma & \\ w^+ - w^- &= 0 & \text{auf } \sigma & \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \varphi^+ + \varphi^- \\ \psi^+ + \psi^- \\ w^+ - w^- \end{aligned}} \right\} (2.8)$$

Die statischen Gleichungen (Gleichgewichtsbedingungen) der Platte sind:

$$\text{Feldgleichungen:} \quad m_{,j}^{i,j} - q_i = 0 \quad (2.9)$$

$$q_{i,i} + \beta = 0 \quad (2.10)$$

$$\text{Knotengleichungen:} \quad \hat{P}_k = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \text{Randbedingungen:} \quad M - \hat{M} &= 0 & \text{auf } s_M & \\ T - \hat{T} &= 0 & \text{auf } s_T & \\ Q - \hat{Q} &= 0 & \text{auf } s_Q & \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M - \hat{M} \\ T - \hat{T} \\ Q - \hat{Q} \end{aligned}} \right\} (2.12)$$

$$\begin{aligned} \text{Übergangsbedingungen:} \quad M^+ - M^- &= 0 & \text{auf } \sigma & \\ T^+ - T^- &= 0 & \text{auf } \sigma & \\ Q^+ + Q^- &= 0 & \text{auf } \sigma & \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M^+ - M^- \\ T^+ - T^- \\ Q^+ + Q^- \end{aligned}} \right\} (2.13)$$

Die Gleichung (2.11) sagt aus, daß nach der Reissnerschen Theorie eine Einzellast  $\hat{P}_k$  von der Platte nicht aufgenommen werden kann. Bei der Kirchhoffschen Plattentheorie gilt eine andere Gleichung, siehe z. B. [13].

Die Gleichungen (2.9) und (2.10) lassen sich unter Voraussetzung der Differenzierbarkeit von  $m_{ji,j}$  zusammenfassen:

$$m_{ij,ij} + \hat{p} = 0 \quad (2.14)$$

Die dritte Gleichungsgruppe wird von den Elastizitätsgleichungen gebildet:

$$m_{ij} = K(1-\mu) \left[ \kappa_{ij} + \delta_{ij} \frac{\mu}{1-\mu} \kappa_{kk} \right] \quad (2.15)$$

$$q_i = \frac{Eh}{2,4(1+\mu)} \gamma_i = K(1-\mu) \frac{5}{h^2} \gamma_i \quad (2.16)$$

Ihre Umkehrung lautet:

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{K(1-\mu)} \left[ m_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{1+\mu} m_{kk} \right] \quad (2.17)$$

$$\gamma_i = \frac{2,4(1+\mu)}{Eh} q_i = \frac{h^2}{5K(1-\mu)} q_i \quad (2.18)$$

#### 2.4 Vereinfachung in der Schreibweise

In den folgenden Abschnitten treten die Verschiebungsgrößen ( $w$  und  $\beta_i$ ), die Verzerrungsgrößen ( $\kappa_{ij}$  und  $\gamma_i$ ) und die Kraftgrößen ( $m_{ij}$  und  $q_i$ ) teils unabhängig, teils abhängig voneinander auf. Um das exakte Anschreiben des Ausdrucks zu vermeiden, der die Beziehung zur unabhängigen Größe herstellt, wird eine abhängige Größe mit einem oben angebrachten Index versehen, der anzeigen soll, von welcher Größenart sie abgeleitet ist. Auf diese Weise wird der Charakter (z. B. Moment) und die Herkunft einer Größe in der kürzest möglichen Form dargestellt. Der Index  $w$  kennzeichnet hierbei die Abhängigkeit von den Verschiebungsgrößen  $w$  und  $\beta_i$ ; die Indizes  $\kappa$  bzw.  $m$  beziehen sich analog dazu auf die Größen  $\kappa_{ij}$  und  $\gamma_i$  bzw.  $m_{ij}$  und  $q_i$ . Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei betont, daß mit den gewählten Indizes die Abhängigkeit von Größenarten bezeichnet wird, die hier jeweils aus zwei Größen bestehen.

Beispiele:  $\gamma_i^w \equiv w_{,i} + \beta_i$  ;  $\kappa_{ij}^w \equiv \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i})$

$$q_i^\kappa \equiv K (1 - \mu) \frac{5}{h^2} \gamma_i$$

$$q_i^w \equiv K (1 - \mu) \frac{5}{h^2} \gamma_i^w \equiv K (1 - \mu) \frac{5}{h^2} (w_{,i} + \beta_i)$$

$$\gamma_i^m \equiv \frac{h^2}{5K (1 - \mu)} q_i$$

Erst bei Vernachlässigung der Querkraftverformungen entfällt die Un-  
abhängigkeit der jeweils zweitgenannten Größe einer bestimmten Art  
(siehe Abschnitt 3.5). Unter gewissen Voraussetzungen ist es auch bei  
Berücksichtigung der Querkraftverformungen möglich,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  und  $q_i$  in  
den Größen  $w$ ,  $\kappa_{ij}$  und  $m_{ij}$  auszudrücken (siehe Abschnitt 3.6). In allen  
diesen Fällen werden dann  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  und  $q_i$  ebenfalls mit einem hochgestell-  
ten Index versehen, der sich jetzt allerdings nur noch auf eine der Grö-  
ßen  $w$ ,  $\kappa_{ij}$  oder  $m_{ij}$  bezieht.

Beispiel:  $q_i^m \equiv m_{ji,j}$

Weitere Beispiele sind im Abschnitt 3.6 genannt.

Ergänzend dazu wird folgendes vereinbart:

Nicht näher durch einen Index gekennzeichnete Verschiebungs-Rand-  
größen sind von  $w$  bzw.  $\beta_i$  und nicht näher gekennzeichnete statische  
Randgrößen sind von  $m_{ij}$  bzw.  $q_i$  abhängig. Mit den Komponenten des  
Normalen- und des Tangenten-Einheitsvektors eines Elementrandes

$$n_i = \cos(n, x_i) \quad ; \quad t_i = \cos(t, x_i)$$

gelten für die Randgrößen folgende Beziehungen:

$$\varphi \equiv \varphi^w \equiv -\beta_n = -\beta_i n_i$$

$$\psi \equiv \psi^w \equiv -\beta_t = -\beta_i t_i$$

$$M \equiv M^m \equiv M(m_{ij}) \equiv m_{nn} = m_{ij} n_i n_j$$

$$T \equiv T^m \equiv T(m_{ij}) \equiv m_{nt} = m_{ij} n_i t_j$$

$$Q \equiv Q^m \equiv Q(q_i) \equiv q_n = q_i n_i$$

Vonden Index-Kennzeichnungen unberührt bleiben Fälle, in denen Verwechslungen unmöglich sind, weil z. B. nur eine einzige unabhängige Größenart vorhanden ist, von der alle auftretenden Größen abhängen.

Die Gesamtheit aller Größen einer bestimmten Art (Verschiebungsgrößen, Verzerrungsgrößen, Kraftgrößen) wird im folgenden 'Größengruppe' oder - wenn ihre Darstellung durch Funktionen gemeint ist - 'Funktionsgruppe' genannt. Die Bezeichnung 'Gruppe' entspricht dabei nicht dem in der Mengenlehre definierten gleichnamigen Begriff.

## 2.5 Wichtige Identitäten

Durch Teilintegrationen mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes lassen sich folgende Identitäten herleiten:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{F}} m_{ij} \kappa_{ij}^w dF &\equiv \iint_{\mathbb{F}} m_{ij} \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) dF \\
 &= \int_t [M(m_{ij}) \beta_n + T(m_{ij}) \beta_t] dt - \iint_{\mathbb{F}} m_{ji,j} \beta_i dF \\
 &= - \iint_{\mathbb{F}} m_{ji,j} \beta_i dF - \int_t [M(m_{ij}) \varphi + T(m_{ij}) \psi] dt \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{F}} q_i \gamma_i^w dF &\equiv \iint_{\mathbb{F}} q_i (w_i + \beta_i) dF \\
 &= \iint_{\mathbb{F}} q_i \beta_i dF - \iint_{\mathbb{F}} q_{i,i} w dF + \int_t Q(q_i) w dt \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Für spätere Anwendungen werden in diesen Identitäten die Integrale über  $t$  durch Integrale über  $s$  und  $\sigma$  ersetzt und letztere in eine besondere Form gebracht.

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{F}} m_{ij} \kappa_{ij}^w dF &= - \iint_{\mathbb{F}} m_{ji,j} \beta_i dF - \int_s M(m_{ij}) \varphi ds - \int_\sigma T(m_{ij}) \psi ds \\
 &- \int_\sigma \left\{ \frac{1}{2} [M^+(m_{ij}) + M^-(m_{ij})] [\varphi^+ + \varphi^-] + \right. \\
 &\quad \left. [M^+(m_{ij}) - M^-(m_{ij})] \frac{1}{2} [\varphi^+ - \varphi^-] \right\} d\sigma \\
 &- \int_\sigma \left\{ \frac{1}{2} [T^+(m_{ij}) + T^-(m_{ij})] [\psi^+ + \psi^-] + \right. \\
 &\quad \left. [T^+(m_{ij}) - T^-(m_{ij})] \frac{1}{2} [\psi^+ - \psi^-] \right\} d\sigma \quad (2.21)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{F}} q_i \gamma_i^W d\mathbb{F} &= \iint_{\mathbb{F}} q_i \beta_i d\mathbb{F} - \iint_{\mathbb{F}} q_{i,i} w d\mathbb{F} + \int_{\mathbb{S}} Q(q_i) w ds \\
 &+ \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} [Q^+(q_i) - Q^-(q_i)] [w^+ - w^-] + \right. \\
 &\quad \left. [Q^+(q_i) + Q^-(q_i)] \frac{1}{2} [w^+ + w^-] \right\} d\sigma \quad (2.22)
 \end{aligned}$$

Für den Sonderfall, daß  $q_i$  und  $m_{ij}$  die Gleichung (2.9) exakt erfüllen, erhält man aus (2.19) und (2.20) folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{F}} m_{ij} \kappa_{ij}^W d\mathbb{F} + \iint_{\mathbb{F}} q_i^m \gamma_i^W d\mathbb{F} \\
 = - \iint_{\mathbb{F}} m_{ij,ij} w d\mathbb{F} + \int_{\mathbb{t}} [-M(m_{ij}) \varphi - T(m_{ij}) \psi + Q(m_{ij}) w] dt \quad (2.23)
 \end{aligned}$$

Auch diese Gleichung kann wie (2.21) und (2.22) in ausführlicherer Form dargestellt werden:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{F}} m_{ij} \kappa_{ij}^W d\mathbb{F} + \iint_{\mathbb{F}} q_i^m \gamma_i^W d\mathbb{F} \\
 = - \iint_{\mathbb{F}} m_{ij,ij} w d\mathbb{F} - \int_{\mathbb{S}} M(m_{ij}) \varphi ds - \int_{\mathbb{S}} T(m_{ij}) \psi ds + \int_{\mathbb{S}} Q(m_{ij}) w ds \\
 - \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} [M^+(m_{ij}) + M^-(m_{ij})] [\varphi^+ + \varphi^-] + \right. \\
 \quad \left. [M^+(m_{ij}) - M^-(m_{ij})] \frac{1}{2} [\varphi^+ - \varphi^-] \right\} d\sigma \\
 - \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} [T^+(m_{ij}) + T^-(m_{ij})] [\psi^+ + \psi^-] + \right. \\
 \quad \left. [T^+(m_{ij}) - T^-(m_{ij})] \frac{1}{2} [\psi^+ - \psi^-] \right\} d\sigma \\
 + \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} [Q^+(m_{ij}) - Q^-(m_{ij})] [w^+ - w^-] + \right. \\
 \quad \left. [Q^+(m_{ij}) + Q^-(m_{ij})] \frac{1}{2} [w^+ + w^-] \right\} d\sigma \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

### 3. Die Variationsfunktionale der Platte

In diesem Kapitel werden mehrere Variationsfunktionale für die Platte unter Berücksichtigung der Querkraftverformungen hergeleitet. Um die Formelndirekt in den Ansätzen und Beispielen der weiteren Kapitel benutzen zu können, wird von vornherein ein lineares Elastizitätsgesetz und das Vorhandensein eines Gesamtpotentials vorausgesetzt.

Die Herleitungen stützen sich zu einem großen Teil auf den Aufsatz [13] von Bufler. Bei den genannten Voraussetzungen wird jedoch einer direkten Herleitung der Funktionale aus dem elastischen Potential bzw. dem Ergänzungspotential der Vorzug gegeben. Auch die Bezeichnungen der Funktionale werden geändert. Indizes geben die Zahl der vorkommenden unabhängigen Größengruppen an (siehe Abschnitt 2.4). Ist diese Zahl gleich zwei, so wird eine weitere Unterscheidung durch die Buchstaben A und B erforderlich.

Die Funktionale und die zugehörigen Variationsgleichungen werden unter Benutzung von Identitäten, die im Abschnitt 2.5 angegeben sind, in verschiedenen Formen dargestellt. Jede dieser Formen läßt andere Eigenschaften erkennen, was besonders bei der praktischen Anwendung von Bedeutung ist.

Am Ende des Kapitels werden kurz die Beziehungen der hergeleiteten Funktionale zu den in der Literatur genannten aufgezeigt.

#### 3.1 Die Minimalprinzipie

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie (P.v.M.d.p.E.) lautet:

$$\Pi(w, \beta_i) = \text{Min} \quad (3.1)$$

Dabei hat  $\Pi$  bei Berücksichtigung der Querkraftverformungen unter Beachtung der Gleichung (2.2) folgende Form:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^{\kappa} \kappa_{ij} \, dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i^{\kappa} \gamma_i \, dF \\ & - \iint_F \hat{p} w \, dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{S_M} \hat{M} \varphi \, ds + \int_{S_T} \hat{T} \psi \, ds - \int_{S_Q} \hat{Q} w \, ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

Das Potential enthält in der Formulierung (3.2) sowohl Verschiebungs- als auch Verzerrungsgrößen. Die Größen  $m_{ij}^\kappa$  und  $q_i^\kappa$  stellen keine unabhängige dritte Gruppe dar, sondern Abkürzungen arithmetischer Ausdrücke, da sie über das Stoffgesetz fest mit den Verzerrungen verknüpft sind.

Das Prinzip setzt voraus, daß sämtliche kinematischen Gleichungen (2.5) bis (2.8) erfüllt sind, so daß auch die Verzerrungen von den Verschiebungen abhängen. Die Anwendung des Prinzips liefert die statischen Gleichungen (2.9) bis (2.13) als Euler-Lagrangesche Gleichungen und als natürliche Rand- und Übergangsbedingungen.

Das zum P. v. M. d. p. E. duale Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie (P. v. M. d. E. E.) lautet:

$$\tilde{\Pi}(m_{ij}, q_i) = \text{Min.} \quad (3.3)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi} = & \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^\kappa \kappa_{ij} dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i^\kappa \gamma_i dF \\ & + \int_{S_\varphi} \hat{\varphi} M^m ds + \int_{S_\psi} \hat{\psi} T^m ds - \int_{S_w} \hat{w} Q^m ds \end{aligned} \quad (3.4)$$

In dieser Gleichung sind die Randgrößen  $M^m$ ,  $T^m$  und  $Q^m$  von den Schnittgrößen  $m_{ij}$  und  $q_i$  abhängig, während  $m_{ij}^\kappa$  und  $q_i^\kappa$  eine zweite zunächst unabhängige Schnittgrößengruppe darstellen, aus der die innere Komplementärenergie berechnet wird.  $\kappa_{ij}$  und  $\gamma_i$  hängen von ihnen über das Stoffgesetz ab und stellen die Abkürzung arithmetischer Ausdrücke dar. Die Indizierung soll hier ausnahmsweise nur eine gegenseitige Abhängigkeit anzeigen, jedoch nichts darüber aussagen, welche der beiden Gruppen die unabhängige ist. Diese Inkonsequenz wurde in Kauf genommen, um eine eigene Bezeichnung für das zu den Verzerrungen duale vierte Größenpaar zu vermeiden, das über das Stoffgesetz immer fest mit den Verzerrungen verknüpft ist. Beim Auftreten dieser beiden gekoppelten Größengruppen muß allerdings jeweils angegeben werden, welches die unabhängige ist, da dies bei der Variation von Bedeutung ist (siehe hierzu Abschnitt 3.2.2).

Damit enthält auch das Komplementärpotential  $\tilde{\Pi}$  in der Formulierung (3. 4) zunächst zwei formal voneinander unabhängige Größengruppen. Die Anwendung des Prinzips setzt voraus, daß die Schnittgrößen  $m_{ij}$  und  $q_i$  den Gleichgewichtsbedingungen (2.9) bis (2.13) genügen. Darüber hinaus müssen noch folgende Gleichungen erfüllt sein:

$$m_{ij}^{\kappa} - m_{ij} = 0 \quad (3. 5)$$

$$q_i^{\kappa} - q_i = 0 \quad (3. 6)$$

Die Gleichungen (3. 5) und (3. 6) ergänzen die statischen Nebenbedingungen und entsprechen den kinematischen Gleichungen (2. 5) und (2. 6) beim P. v. M. d. p. E.

Genügen alle Größen den genannten Bedingungen, so liefert die Anwendung des Prinzips die kinematischen Gleichungen (2. 5) bis (2. 8).

Die beiden Prinzipie sind völlig dual zueinander. In beiden ist das Stoffgesetz enthalten. Statische und kinematische Gleichungen sind jeweils entweder Nebenbedingungen oder entstehen als Euler-Lagrange-Gleichungen und als natürliche Bedingungen. Die zusätzliche Einführung von  $\kappa_{ij}$  und  $\gamma_i$  (neben  $w$  und  $\beta_i$  bei  $\Pi$ ) und von  $m_{ij}^{\kappa}$  und  $q_i^{\kappa}$  (neben  $m_{ij}$  und  $q_i$  bei  $\tilde{\Pi}$ ) ist für die folgende Herleitung der verallgemeinerten Variationsfunktionale erforderlich. Beide Größengruppen treten ausschließlich in den Termen für die inneren Potentiale auf.

### 3. 2 Das Variationsfunktional der Platte für drei unabhängige Funktionengruppen

Die Voraussetzungen zu den beiden genannten dualen Minimalprinzipien stellen im Sinne der Variationsrechnung Nebenbedingungen dar. Man kann sich von ihnen durch die Hinzufügung zusätzlicher Terme zum Potential befreien, wobei i. a. nur noch ein stationärer Wert des Funktionals erreicht werden kann. Diese sogenannte Lagrangesche Multiplikatorenmethode ist u. a. in [21] dargestellt. Sie führt zu den verallgemeinerten Variationsfunktionalen.

Die Formulierungen der Minimalprinzipie, (3.2) und (3.4), enthielten bisher jeweils zwei unabhängige Größengruppen. Fügt man die jeweiligen Nebenbedingungen - multipliziert mit Lagrange-Parametern und integriert über die Definitionsbereiche der Nebenbedingungen - den Potentialen hinzu, so stellen die Lagrange-Parameter eine dritte unabhängige Gruppe dar, so daß im allgemeinsten Fall ein Variationsfunktional mit drei unabhängigen Funktionengruppen entsteht. Im folgenden wird gezeigt, daß beide Prinzipie auf dasselbe Funktional führen.

In den Herleitungen werden die Lagrange-Parameter mit einem Stern versehen und mit Symbolen bezeichnet, die ihre später feststellbare Bedeutung vorwegnehmen. Die einzige von vornherein zu erfüllende Bedingung ist, daß die Plattendurchbiegung  $w$  an allen Knotenpunkten stetig ist. Auch auf diese Forderung könnte verzichtet werden. Ihre Erfüllung macht jedoch keine Schwierigkeiten und vereinfacht die Funktionale im Sonderfall vernachlässigter Querkraftverformungen sehr wesentlich (siehe Abschnitt 3.5).

Verallgemeinerte Variationsfunktionale werden im Schrifttum auch auf andere Weise konstruiert. So geht Wunderlich [22] allein von den Grundgleichungen des elastischen Kontinuums aus (ohne Übergangsbedingungen an Bereichsgrenzen), die er mit kleinen Störungen  $\delta u_i$  (Variation der Verschiebungen) bzw.  $\delta \sigma_{ij}$  (Variation der Spannungen) multipliziert und anschließend addiert. Eventuelle Diskontinuitäten an den Bereichsgrenzen müssen nachträglich in die so entstehenden Variationsgleichungen eingearbeitet werden. Bei Vorhandensein eines Potentials können die zugehörigen Funktionale durch Integration ermittelt werden. Sandhu und Pister [23] stellen ebenfalls zuerst die Grundgleichungen der Platte auf, mit deren Hilfe sie anschließend in Anlehnung an Michlin [24], Paragraph 11, sofort das zugehörige Funktional konstruieren. An den Bereichsgrenzen eventuell vorhandene Diskontinuitäten, die jedoch den von Prager [12] genannten Einschränkungen genügen müssen, werden auch hier erst nachträglich mit Hilfe von Zusatztermen zum Funktional berücksichtigt.

3.2.1 Herleitung des Funktionals  $F_3$  mit Hilfe des  
Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie

Führt man in  $\Pi$  nach (3.2) die kinematischen Nebenbedingungen (2.5) bis (2.8) multipliziert mit Lagrange-Faktoren ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 F_3 = & \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^{\kappa} \kappa_{ij} \, dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i^{\kappa} \gamma_i \, dF \\
 & - \iint_F \hat{\beta} w \, dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{S_M} \hat{M} \varphi \, ds + \int_{S_T} \hat{T} \psi \, ds - \int_{S_Q} \hat{Q} w \, ds \\
 & - \iint_F (\kappa_{ij} - \kappa_{ij}^W) m_{ij}^* \, dF - \iint_F (\gamma_i - \gamma_i^W) q_i^* \, dF \\
 & + \int_{S_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M^* \, ds + \int_{S_\psi} (\psi - \hat{\psi}) T^* \, ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) Q^* \, ds \\
 & + \int_\sigma (\varphi^+ + \varphi^-) m^* \, d\sigma + \int_\sigma (\psi^+ + \psi^-) t^* \, d\sigma - \int_\sigma (w^+ - w^-) q^* \, d\sigma \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurden u. a. folgende Abkürzungen benutzt (entsprechend Abschnitt 2.4):

$$\left. \begin{aligned}
 \kappa_{ij}^W & \equiv \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) \\
 \gamma_i^W & \equiv w_{,i} + \beta_i
 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Variiert man  $F_3$  und ersetzt die Terme mit  $\delta \kappa_{ij}^W$  und  $\delta \gamma_i^W$  mit Hilfe der Identitäten (2.21) und (2.22), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \delta F_3 \equiv & - \iint_F (m_{ji, j}^* - q_i^*) \delta \beta_i dF - \iint_F (q_{i, i}^* + \beta) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\
 & - \int_{S_M} [M(m_{ij}^*) - \hat{M}] \delta \varphi ds - \int_{S_T} [T(m_{ij}^*) - \hat{T}] \delta \psi ds + \int_{S_Q} [Q(q_i^*) - \hat{Q}] \delta w ds \\
 & - \int_{\sigma} [M^+(m_{ij}^*) - M^-(m_{ij}^*)] \delta \frac{1}{2} [\varphi^+ - \varphi^-] d\sigma \\
 & - \int_{\sigma} [T^+(m_{ij}^*) - T^-(m_{ij}^*)] \delta \frac{1}{2} [\psi^+ - \psi^-] d\sigma \\
 & + \int_{\sigma} [Q^+(q_i^*) + Q^-(q_i^*)] \delta \frac{1}{2} [w^+ + w^-] d\sigma \\
 & - \iint_F (\kappa_{ij} - \kappa_{ij}^W) \delta m_{ij}^* dF - \iint_F (\gamma_i - \gamma_i^W) \delta q_i^* dF \\
 & + \int_{S_{\varphi}} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M^* ds + \int_{S_{\psi}} (\psi - \hat{\psi}) \delta T^* ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) \delta Q^* ds \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta m^* d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \delta t^* d\sigma - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \delta q^* d\sigma \\
 & + \iint_F (m_{ij}^{\kappa} - m_{ij}^*) \delta \kappa_{ij} dF + \iint_F (q_i^{\kappa} - q_i^*) \delta \gamma_i dF \\
 & - \int_{S_{\varphi}} [M(m_{ij}^*) - M^*] \delta \varphi ds - \int_{S_{\psi}} [T(m_{ij}^*) - T^*] \delta \psi ds + \int_{S_w} [Q(q_i^*) - Q^*] \delta w ds \\
 & - \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} [M^+(m_{ij}^*) + M^-(m_{ij}^*)] - m^* \right\} \delta (\varphi^+ + \varphi^-) d\sigma \\
 & - \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} [T^+(m_{ij}^*) + T^-(m_{ij}^*)] - t^* \right\} \delta (\psi^+ + \psi^-) d\sigma \\
 & + \int_{\sigma} \left\{ \frac{1}{2} [Q^+(q_i^*) - Q^-(q_i^*)] - q^* \right\} \delta (w^+ - w^-) d\sigma = 0
 \end{aligned}$$

(3.9)

Setzt man die Integranden der letzten vier Zeilen für von Null verschiedene Variationsgrößen gleich Null, so erhält man Verknüpfungsgleichungen für die Lagrange-Parameter. Sie sind alle von  $m_{ij}^*$  bzw.  $q_i^*$  ableitbar, die mit Hilfe der fünftletzten Zeile als Momenten- bzw. Querkrafttensor identifiziert werden können.

Berücksichtigt man die gewonnenen Beziehungen zwischen den Lagrange-Parametern und läßt bei  $m_{ij}^*$  und  $q_i^*$  den Stern weg, so lautet  $F_3$  nach (3.7):

$$\begin{aligned}
 F_3(w, \beta_i, \kappa_{ij}, \gamma_i, m_{ij}, q_i) = & \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^\kappa \kappa_{ij} dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i^\kappa \gamma_i dF \\
 & - \iint_F \hat{\beta} w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{s_M} \hat{M} \varphi ds + \int_{s_T} \hat{T} \psi ds - \int_{s_Q} \hat{Q} w ds \\
 & - \iint_F (\kappa_{ij} - \kappa_{ij}^W) m_{ij} dF - \iint_F (\gamma_i - \gamma_i^W) q_i dF \\
 & + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M^m ds + \int_{s_\psi} (\psi - \hat{\psi}) T^m ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) Q^m ds \\
 & + \int_\sigma (\varphi^+ + \varphi^-) \frac{1}{2} (M^{m+} + M^{m-}) d\sigma + \int_\sigma (\psi^+ + \psi^-) \frac{1}{2} (T^{m+} + T^{m-}) d\sigma \\
 & - \int_\sigma (w^+ - w^-) \frac{1}{2} (Q^{m+} - Q^{m-}) d\sigma \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Ersetzt man die Terme

$$+ \iint_F \kappa_{ij}^W m_{ij} dF \quad \text{und} \quad \iint_F \gamma_i^W q_i dF$$

mit Hilfe der Identitäten (2.21) und (2.22), so erhält man eine andere, äquivalente Form von  $F_3$ :

$$\begin{aligned}
 F_3 = & - \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^\kappa \kappa_{ij} dF - \frac{1}{2} \iint_F q_i^\kappa \gamma_i dF \\
 & - \int_{s_\varphi} \hat{\varphi} M^m ds - \int_{s_\psi} \hat{\psi} T^m ds + \int_{s_w} \hat{w} Q^m ds \\
 & + \iint_F (m_{ij}^\kappa - m_{ij}) \kappa_{ij} dF + \iint_F (q_i^\kappa - q_i) \gamma_i dF \\
 & - \iint_F (m_{ji, j} - q_i) \beta_i dF - \iint_F (q_i, i + \hat{\beta}) w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k \\
 & - \iint_{s_M} (M^m - \hat{M}) \varphi ds - \int_{s_T} (T^m - \hat{T}) \psi ds + \int_{s_Q} (Q^m - \hat{Q}) w ds \\
 & - \int_\sigma (M^{m+} - M^{m-}) \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_\sigma (T^{m+} - T^{m-}) \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & + \int_\sigma (Q^{m+} + Q^{m-}) \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

Für beide Formen gilt die Variationsgleichung:

$$\begin{aligned}
 \delta F_3 \equiv & - \iint_F (m_{ji,j} - q_i) \delta \beta_i dF - \iint_F (q_{i,i} + \hat{p}) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\
 & - \int_{S_M} (M^m - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{S_T} (T^m - \hat{T}) \delta \psi ds + \int_{S_Q} (Q^m - \hat{Q}) \delta w ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^{m+} - M^{m-}) \delta \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^{m+} - T^{m-}) \delta \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_{\sigma} (Q^{m+} + Q^{m-}) \delta \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \\
 & + \iint_F (m_{ij}^{\kappa} - m_{ij}) \delta \kappa_{ij} dF + \iint_F (q_i^{\kappa} - q_i) \delta \gamma_i dF \\
 & - \iint_F (\kappa_{ij} - \kappa_{ij}^w) \delta m_{ij} dF - \iint_F (\gamma_i - \gamma_i^w) \delta q_i dF \\
 & + \int_{S_{\varphi}} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M^m ds + \int_{S_{\psi}} (\psi - \hat{\psi}) \delta T^m ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) \delta Q^m ds \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta \frac{1}{2} (M^{m+} + M^{m-}) d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \delta \frac{1}{2} (T^{m+} + T^{m-}) d\sigma \\
 & \quad - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \delta \frac{1}{2} (Q^{m+} - Q^{m-}) d\sigma = 0 \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Die Größen  $w$ ,  $\beta_i$ ,  $\kappa_{ij}$ ,  $\gamma_i$ ,  $m_{ij}$  und  $q_i$  seien bereichsweise definiert, innerhalb dieser Bereiche frei variierbar und voneinander unabhängig. Für derartige Funktionen gilt, daß ihre Variationen längs der Bereichsränder und die Variationen ihrer Ableitungen normal zum Rand untereinander und von den Variationen der Funktion innerhalb des Bereichs unabhängig sind.

Unter diesen Voraussetzungen fallen in der Variationsgleichung (3.12) nach dem Lemma der Variationsrechnung die statischen Gleichungen (2.9) bis (2.13), die Elastizitätsgleichungen (2.15) und (2.16) und die kinematischen Gleichungen (2.5) bis (2.8) als Euler-Lagrangesche Gleichungen und als natürliche Rand- und Übergangsbedingungen an.

Es ist auch eine etwas geänderte Deutung von (3.12) möglich; Da im Potential (3.2) die Elastizitätsgleichungen (2.15) und (2.16) verwendet

und damit enthalten sind, erscheint es konsequenter und mit den bisherigen Aussagen besser zu vereinbaren, wenn die Euler-Lagrange'schen Gleichungen der 4. Zeile von (3.12) nicht als die Elastizitätsgleichungen, sondern als die statischen Gleichungen (3.5) und (3.6) gedeutet werden.

### 3.2.2 Herleitung des Funktionals $\tilde{F}_3$ mit Hilfe des

#### Prinzips vom Minimum der Ergänzungsenergie

Führt man in  $\tilde{\Pi}$ , wie es in Gleichung (3.4) dargestellt ist, die statischen Nebenbedingungen (2.9) bis (2.13) und (3.5) bis (3.6) mit Lagrange-Faktoren ein und bestimmt letztere analog zum Vorgehen in Abschnitt 3.2.1, wobei nicht  $\kappa_{ij}$  und  $\gamma_i$ , sondern  $m_{ij}^\kappa$  und  $q_i^\kappa$  als unabhängige Größen zu variieren sind, so erhält man das Funktional  $\tilde{F}_3$ . Beim Vergleich mit  $F_3$ , Formel (3.11), ist sofort zu erkennen, daß

$$\tilde{F}_3 = - F_3 \quad (3.13)$$

gilt.

Es muß betont werden, daß die Herleitung von  $\tilde{F}_3$  nur gelingt, wenn die den kinematischen Feldgleichungen (2.5) und (2.6) entsprechenden Gleichungen (3.5) und (3.6) als Nebenbedingungen berücksichtigt werden. Geschieht dies nicht, werden also die beiden Schnittgrößengruppen von vornherein gleichgesetzt, so entsteht sofort das im folgenden hergeleitete Funktional -  $F_{2A}$  mit nur zwei unabhängigen Funktionsgruppen.

Bei der Herleitung der folgenden Variationsfunktionale wird nur noch vom P. v. M. d. p. E. ausgegangen.

### 3.3 Die Variationsfunktionale der Platte für zwei unabhängige Funktionsgruppen

Die Verzerrungsgrößen  $\kappa_{ij}$  und  $\gamma_i$  nehmen eine Zwischenstellung zwischen den Spannungen und den Verschiebungen ein. Entfernt man sie aus dem Variationsfunktional  $F_3$ , indem man sie einer der beiden

Nachbargruppen exakt zuordnet, so verbleiben nur noch zwei unabhängige Funktionsgruppen.

Entsprechend der Zwischenstellung der Verzerrungen gibt es zwei Möglichkeiten der Elimination:

1. Sie werden mit Hilfe der Gleichungen (3.5) und (3.6) exakt den Schnittgrößen zugeordnet. Dies führt zum Funktional  $F_{2A}$ .
2. Sie werden mit Hilfe der kinematischen Gleichungen (2.5) und (2.6) exakt den Verschiebungsgrößen zugeordnet. Es entsteht das Funktional  $F_{2B}$ .

Auf diese Weise erhält man zwei verschiedene Variationsfunktionale für die beiden unabhängigen Gruppen der Verschiebungs- und der Schnittgrößen.  $F_{2A}$  ist eine allgemeinere Form des Funktionals von Hellinger-Reissner ([8] und [9]), das im Schrifttum sehr häufig zur Aufstellung von Elementmatrizen für gemischte Ansätze benutzt wird.  $F_{2B}$  ist die allgemeinere Form des von Prager [12] angegebenen Funktionals  $J_3$ .

Die exakte Herleitung der Funktionale erfolgt analog zur Herleitung von  $F_3$ , nur daß jetzt die genannten Nebenbedingungen von vornherein erfüllt sind und im Ansatz der Funktionale entfallen. Allein bei der Darstellung von  $F_{2B}$  ergeben sich größere Änderungen gegenüber  $F_3$ , da z. B. die Gleichsetzung von  $\kappa_{ij}$  und  $\kappa_{ij}^W$  auf die Variation  $\delta \kappa_{ij}^W$  führt, die mit Hilfe von (2.21) umgewandelt werden muß.

Die erzielten Endergebnisse kann man auch dadurch erhalten, daß man bei  $F_3$  in den Formeln (3.10) bzw. (3.11) diejenigen Terme streicht, die von vornherein Null sein sollen.

Im folgenden werden die endgültigen Formeln angegeben. Wegen der Bedeutung der Funktionale in der Elementmethode werden verschiedene Formen sowohl der Funktionale als auch ihrer Variationsgleichungen angegeben. Alle Umformungen werden mit den Identitäten (2.21) und (2.22) durchgeführt.

### 3.3.1 Das Funktional $F_{2A}$

Werden die Verzerrungen  $\kappa_{ij}$  und  $\gamma_i$  nicht unabhängig gewählt, sondern von vornherein den Schnittgrößen  $m_{ij}$  und  $q_i$  zugeordnet, so sind die Gleichungen (3.5) und (3.6) vorweg erfüllt, und man erhält das Funktional  $F_{2A}$ :

$$\begin{aligned}
 F_{2A} = & -\frac{1}{2} \iint_F m_{ij} \kappa_{ij}^m dF - \frac{1}{2} \iint_F q_i \gamma_i^m dF \\
 & - \int_{s_\varphi} \hat{\varphi} M^m ds - \int_{s_\psi} \hat{\psi} T^m ds + \int_{s_w} \hat{w} Q^m ds \\
 & - \iint_F (m_{ji, j} - q_i) \beta_i dF - \iint_F (q_{i, i} + \hat{\beta}) w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k \\
 & - \int_{s_M} (M^m - \hat{M}) \varphi ds - \int_{s_T} (T^m - \hat{T}) \psi ds + \int_{s_Q} (Q^m - \hat{Q}) w ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^{m+} - M^{m-}) \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^{m+} - T^{m-}) \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & + \int_{\sigma} (Q^{m+} + Q^{m-}) \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Mit Hilfe von (2.21) und (2.22) ergibt sich eine zweite, äquivalente Form von  $F_{2A}$ :

$$\begin{aligned}
 F_{2A} = & +\frac{1}{2} \iint_F m_{ij} \kappa_{ij}^m dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i \gamma_i^m dF \\
 & - \iint_F \hat{\beta} w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{s_M} \hat{M} \varphi ds + \int_{s_T} \hat{T} \psi ds - \int_{s_Q} \hat{Q} w ds \\
 & - \iint_F (\kappa_{ij}^m - \kappa_{ij}^w) m_{ij} dF - \iint_F (\gamma_i^m - \gamma_i^w) q_i dF \\
 & + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M^m ds + \int_{s_\psi} (\psi - \hat{\psi}) T^m ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) Q^m ds \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \frac{1}{2} (M^{m+} + M^{m-}) d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \frac{1}{2} (T^{m+} + T^{m-}) d\sigma \\
 & - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \frac{1}{2} (Q^{m+} - Q^{m-}) d\sigma
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

An den zwei Formen von  $F_{2A}$  erkennt man die beiden möglichen Ausgangspotentiale  $-\tilde{\Pi}$  und  $\Pi$  und die jeweiligen Nebenbedingungen samt den als Verschiebungs- bzw. Spannungsgrößen identifizierten Lagrange-Parametern. Zur Verdeutlichung des Anteils von  $\Pi$  in (3.15) kann man  $\kappa_{ij}^m$  und  $\gamma_i^m$  als primäre unabhängige Größen und  $m_{ij}$  und  $q_i$  als die davon abhängigen Größen auffassen und die Schreibweise entsprechend umstellen.

Die Variationsgleichung von  $F_{2A}$  lautet:

$$\begin{aligned}
 \delta F_{2A} \equiv & - \iint_F (m_{ji,j} - q_i) \delta \beta_i dF - \iint_F (q_{i,i} + \hat{p}) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\
 & - \int_{S_M} (M^m - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{S_T} (T^m - \hat{T}) \delta \psi ds + \int_{S_Q} (Q^m - \hat{Q}) \delta w ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^{m+} - M^{m-}) \delta \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^{m+} - T^{m-}) \delta \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_{\sigma} (Q^{m+} + Q^{m-}) \delta \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \\
 & - \iint_F (\kappa_{ij}^m - \kappa_{ij}^w) \delta m_{ij} dF - \iint_F (\gamma_i^m - \gamma_i^w) \delta q_i dF \\
 & + \int_{S_{\varphi}} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M^m ds + \int_{S_{\psi}} (\psi - \hat{\psi}) \delta T^m ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) \delta Q^m ds \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta \frac{1}{2} (M^{m+} + M^{m-}) d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \delta \frac{1}{2} (T^{m+} + T^{m-}) d\sigma \\
 & \quad - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \delta \frac{1}{2} (Q^{m+} - Q^{m-}) d\sigma = 0 \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

In (3.16) sind alle Variationen mit Hilfe von (2.21) und (2.22) so umgeformt, daß sie voneinander unabhängig sind. Die nicht von vornherein erfüllten statischen und kinematischen Gleichungen der Platte sind als Euler-Lagrangesche Gleichungen und als natürliche Rand- und Übergangsbedingungen des Variationsproblems zu erkennen. Die Symmetrie der Variationsgleichung ist jedoch nicht mehr sichtbar.

Unter 'symmetrischen' Variationsgleichungen sollen hier solche verstanden werden, die bei Benutzung Ritzscher Ansätze für die unbekannt Funktionen auf Gleichungssysteme mit symmetrischen Koeffizientenmatrizen führen,

Jede durch Nullsetzung der ersten Variation eines Funktionals entstehende Gleichung ist symmetrisch. Ihre Symmetrie ist daran zu erkennen, daß neben einem Term der Form  $\int_{\Gamma} f \delta g d\Gamma$  auch ein Term  $\int_{\Gamma} g \delta f d\Gamma$  in der Gleichung auftritt, vorausgesetzt, daß  $f$  eine variierbare, nicht vorgegebene Funktion ist. Wird nur eine der beiden genannten Terme mit Hilfe von Identitäten umgeformt, so ändert dies zwar nichts an der Symmetrieeigenschaft der Variationsgleichung, doch ist diese nun nicht mehr unmittelbar zu erkennen.

Werden Variationsgleichungen in der Elementmethode verwendet, so kann ihre Symmetrieeigenschaft als Rechenkontrolle dienen.

Variiert man  $F_{2A}$  unter Benutzung von (3.14) und (3.15), ohne (2.21) und (2.22) anzuwenden, dann erhält man zwei symmetrische Formen von  $\delta F_{2A}$ , die als Grundlagen für praktische Rechnungen besser geeignet sind.

Sie lauten, wenn man zur Vereinfachung der Schreibweise bei den Größen  $M^m$ ,  $T^m$  und  $Q^m$  den Index  $m$  wegläßt:

$$\begin{aligned}
 \delta F_{2A} \equiv & - \iint_F (m_{ji,j} - q_i) \delta \beta_i dF - \iint_F (q_{i,i} + \hat{\rho}) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\
 & - \int_{s_M} (M - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{s_T} (T - \hat{T}) \delta \psi ds + \int_{s_Q} (Q - \hat{Q}) \delta w ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^+ - M^-) \delta \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^+ - T^-) \delta \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_{\sigma} (Q^+ + Q^-) \delta \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \\
 & - \iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF - \iint_F (\gamma_i^m - \beta_i) \delta q_i dF - \iint_F \beta_i \delta m_{ji,j} dF - \iint_F w \delta q_{i,i} dF \\
 & - \int_{s_\varphi} \hat{\varphi} \delta M ds - \int_{s_\psi} \hat{\psi} \delta T ds + \int_{s_w} \hat{w} \delta Q ds \\
 & - \int_{s_M} \varphi \delta M ds - \int_{s_T} \psi \delta T ds + \int_{s_Q} w \delta Q ds \\
 & - \int_{\sigma} \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) \delta (M^+ - M^-) d\sigma - \int_{\sigma} \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) \delta (T^+ - T^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_{\sigma} \frac{1}{2} (w^+ + w^-) \delta (Q^+ + Q^-) d\sigma = 0 \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \delta F_{2A} \equiv & + \iint_F m_{ij} \delta \kappa_{ij}^W dF + \iint_F q_i \delta \gamma_i^W dF \\
 & - \iint_F \hat{\rho} \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k + \int_{s_M} \hat{M} \delta \varphi ds + \int_{s_T} \hat{T} \delta \psi ds - \int_{s_Q} \hat{Q} \delta w ds \\
 & + \int_{s_\varphi} M \delta \varphi ds + \int_{s_\psi} T \delta \psi ds - \int_{s_w} Q \delta w ds \\
 & + \int_{\sigma} \frac{1}{2} (M^+ + M^-) \delta (\varphi^+ + \varphi^-) d\sigma + \int_{\sigma} \frac{1}{2} (T^+ + T^-) \delta (\psi^+ + \psi^-) d\sigma \\
 & \quad - \int_{\sigma} \frac{1}{2} (Q^+ - Q^-) \delta (w^+ - w^-) d\sigma \\
 & - \iint_F (\kappa_{ij}^m - \kappa_{ij}^W) \delta m_{ij} dF - \iint_F (\gamma_i^m - \gamma_i^W) \delta q_i dF \\
 & + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M ds + \int_{s_\psi} (\psi - \hat{\psi}) \delta T ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) \delta Q ds \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta \frac{1}{2} (M^+ + M^-) d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \delta \frac{1}{2} (T^+ + T^-) d\sigma \\
 & \quad - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \delta \frac{1}{2} (Q^+ - Q^-) d\sigma = 0 \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

### 3.3.2 Das Funktional $F_{2B}$

Werden die Verzerrungsgrößen  $\kappa_{ij}$  und  $\gamma_i$  über die kinematischen Feldgleichungen (2.5) und (2.6) mit den Verschiebungsgrößen  $w$  und  $\beta_i$  verknüpft, so erhält man das Funktional  $F_{2B}$ .

$$\begin{aligned}
 F_{2B} = & + \iint_F m_{ij}^w \kappa_{ij}^w dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i^w \gamma_i^w dF \\
 & - \iint_F \hat{\rho} w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{S_M} \hat{M} \varphi ds + \int_{S_T} \hat{T} \psi ds - \int_{S_Q} \hat{Q} w ds \\
 & - \int_{S_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M^* ds + \int_{S_\psi} (\psi - \hat{\psi}) T^* ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) Q^* ds \\
 & + \int_\sigma (\varphi^+ + \varphi^-) m^* d\sigma + \int_\sigma (\psi^+ + \psi^-) t^* d\sigma - \int_\sigma (w^+ - w^-) q^* d\sigma \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Seine Variationsgleichung lautet unter Verwendung von (2.21) und (2.22):

$$\begin{aligned}
 \delta F_{2B} = & - \iint_F (m_{ji,j}^w - q_i^w) \delta \beta_i dF - \iint_F (q_{i,i}^w + \hat{\rho}) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\
 & - \int_{S_M} (M^w - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{S_T} (T^w - \hat{T}) \delta \psi ds + \int_{S_Q} (Q^w - \hat{Q}) \delta w ds \\
 & - \int_\sigma (M^{w^+} - M^{w^-}) \delta \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_\sigma (T^{w^+} - T^{w^-}) \delta \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_\sigma (Q^{w^+} + Q^{w^-}) \delta \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \\
 & - \int_{S_\varphi} (M^w - M^*) \delta \varphi ds - \int_{S_\psi} (T^w - T^*) \delta \psi ds + \int_{S_w} (Q^w - Q^*) \delta w ds \\
 & - \int_\sigma \left[ \frac{1}{2} (M^{w^+} + M^{w^-}) - m^* \right] \delta (\varphi^+ + \varphi^-) d\sigma \\
 & \quad - \int_\sigma \left[ \frac{1}{2} (T^{w^+} + T^{w^-}) - t^* \right] \delta (\psi^+ + \psi^-) d\sigma \\
 & + \int_\sigma \left[ \frac{1}{2} (Q^{w^+} - Q^{w^-}) - q^* \right] \delta (w^+ - w^-) d\sigma \\
 & + \int_{S_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M^* ds + \int_{S_\psi} (\psi - \hat{\psi}) \delta T^* ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) \delta Q^* ds \\
 & + \int_\sigma (\varphi^+ + \varphi^-) \delta m^* d\sigma + \int_\sigma (\psi^+ + \psi^-) \delta t^* d\sigma \\
 & \quad - \int_\sigma (w^+ - w^-) \delta q^* d\sigma = 0 \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

An diesen Gleichungen ist zu beachten, daß die Lagrange-Faktoren ausschließlich an den Bereichsgrenzen definiert sind. Aus (3.20) ist ihre statische Bedeutung zu ersehen.

Obwohl im Gegensatz zu Gleichung (3.9) in der Gleichung (3.20) Zuordnungen der Lagrange-Faktoren zu Tensoren  $m_{ij}^*$  und  $q_i^*$  fehlen, werden im folgenden derartige Beziehungen benützt, um Vergleiche mit den bisher hergeleiteten Funktionalen zu erleichtern. Dieses Vorgehen erscheint zunächst willkürlich, ist jedoch zulässig, da es die vorausgesetzte Unabhängigkeit der Lagrange-Parameter untereinander nicht verletzt.

Unter Berücksichtigung der genannten Zuordnungen, wie sie sich aus den letzten 4 Zeilen von (3.9) ergeben, lautet bei Weglassung der Sterne (\*) das Funktional  $F_{2B}$ :

$$\begin{aligned}
 F_{2B} &= + \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^w \kappa_{ij}^w dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i^w \gamma_i^w dF \\
 &- \iint_F \hat{\beta} w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{s_M} \hat{M} \varphi ds + \int_{s_T} \hat{T} \psi ds - \int_{s_Q} \hat{Q} w ds \\
 &+ \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M^m ds + \int_{s_\psi} (\psi - \hat{\psi}) T^m ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) Q^m ds \\
 &+ \int_\sigma (\varphi^+ + \varphi^-) \frac{1}{2} (M^{m+} + M^{m-}) d\sigma + \int_\sigma (\psi^+ + \psi^-) \frac{1}{2} (T^{m+} + T^{m-}) d\sigma \\
 &- \int_\sigma (w^+ - w^-) \frac{1}{2} (Q^{m+} - Q^{m-}) d\sigma
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Wandelt man (3.21) mit Hilfe von (2.21) und (2.22) um, so erhält man eine äquivalente Form von  $F_{2B}$ , in der nun auch die ursprünglich nicht vorhandenen Tensoren  $m_{ij}$  und  $q_i$  explizit auftreten:

$$\begin{aligned}
 F_{2B} = & -\frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^W \kappa_{ij}^W dF - \frac{1}{2} \iint_F q_i^W \gamma_i^W dF \\
 & - \int_{s_\varphi} \hat{\varphi} M^m ds - \int_{s_\psi} \hat{\psi} T^m ds + \int_{s_w} \hat{w} Q^m ds \\
 & + \iint_F (m_{ij}^W - m_{ij}^W) \kappa_{ij}^W dF + \iint_F (q_i^W - q_i^W) \gamma_i^W dF \\
 & - \iint_F (m_{ji, j} - q_i) \beta_i dF - \iint_F (q_{i, i} + \hat{p}) w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k \\
 & - \int_{s_M} (M^m - \hat{M}) \varphi ds - \int_{s_T} (T^m - \hat{T}) \psi ds + \int_{s_Q} (Q^m - \hat{Q}) w ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^{m+} - M^{m-}) \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^{m+} - T^{m-}) \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & + \int_{\sigma} (Q^{m+} + Q^{m-}) \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \tag{3.22}
 \end{aligned}$$

Die Dualität zum Funktional  $F_{2A}$  wird nach der Einführung von  $m_{ij}$  und  $q_i$  ins Funktional  $F_{2B}$  sichtbar. Seine zwei Formen (3.21) und (3.22) lassen die beiden möglichen Ausgangspotentiale und die zugehörigen Nebenbedingungen erkennen. Dabei (3.22) das negative innere Ergänzungspotential  $-\tilde{\Pi}^{(i)}$  in Verschiebungs- statt in Spannungstermen ausgedrückt ist, müssen dort auch die Gleichungen (3.5) und (3.6) als Nebenbedingungen erscheinen, während bei (3.21) die entsprechenden kinematischen Gleichungen (2.5) und (2.6) von vornherein erfüllt sind.

Die Einführung der Feldgrößen  $m_{ij}$  und  $q_i$  wirkt sich bei praktischen Anwendungen von  $F_{2B}$  in der Elementmethode insofern günstig aus, als die Gesamtzahl der auftretenden Unbekannten bei kantenweise definierten Größen schneller anwächst als bei Feldgrößen, die durch Knotenparameter festlegbar sind (siehe Abschnitt 5.1).

Einen Nachteil stellt jedoch die Tatsache dar, daß bei bestimmten Elementanordnungen linear abhängige Gleichungen auftreten, die sonst nicht entstehen würden (siehe Abschnitt 5.3.7).

Die Variationsgleichung zu  $F_{2B}$  lautet nach Umformung der Terme mit den abhängigen Variationsgrößen  $\delta \kappa_{ij}^W$  und  $\delta \gamma_i^W$ :

$$\begin{aligned}
 \delta F_{2B} \equiv & - \iint_F (m_{j,i,j}^W - q_i^W) \delta \beta_i dF - \iint_F (q_{i,i}^W + \hat{\beta}) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\
 & - \int_{S_M} (M^W - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{S_T} (T^W - \hat{T}) \delta \psi ds + \int_{S_Q} (Q^W - \hat{Q}) \delta w ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^{W+} - M^{W-}) \delta \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^{W+} - T^{W-}) \delta \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_{\sigma} (Q^{W+} + Q^{W-}) \delta \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \\
 & - \int_{S_{\varphi}} (M^W - M^m) \delta \varphi ds - \int_{S_{\psi}} (T^W - T^m) \delta \psi ds + \int_{S_w} (Q^W - Q^m) \delta w ds \\
 & - \int_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} (M^{W+} + M^{W-}) - \frac{1}{2} (M^{m+} + M^{m-}) \right] \delta (\varphi^+ + \varphi^-) d\sigma \\
 & - \int_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} (T^{W+} + T^{W-}) - \frac{1}{2} (T^{m+} + T^{m-}) \right] \delta (\psi^+ + \psi^-) d\sigma \\
 & + \int_{\sigma} \left[ \frac{1}{2} (Q^{W+} - Q^{W-}) - \frac{1}{2} (Q^{m+} - Q^{m-}) \right] \delta (w^+ - w^-) d\sigma \\
 & + \int_{S_{\varphi}} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M^m ds + \int_{S_{\psi}} (\psi - \hat{\psi}) \delta T^m ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) \delta Q^m ds \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta \frac{1}{2} (M^{m+} + M^{m-}) d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \delta \frac{1}{2} (T^{m+} + T^{m-}) d\sigma \\
 & - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \delta \frac{1}{2} (Q^{m+} - Q^{m-}) d\sigma = 0
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

In (3.23) kommen die Tensoren  $m_{ij}$  und  $q_i$  nicht explizit vor. Dementsprechend treten auch die Gleichungen (3.5) und (3.6) nicht direkt als Euler-Lagrangesche Gleichungen auf. Sie werden durch Gleichungen (Zeile 4 bis 7) ersetzt, in denen die Randschnittgrößen, die aus den Verschiebungsgrößen errechnet werden können, mit den Randschnittgrößen gleichgesetzt werden, die sich aus den Kraftgrößen ergeben und die ursprünglich als Lagrange-Parameter eingeführt worden sind. Alle übrigen, nicht von vornherein erfüllten statischen und kinematischen Gleichungen erhält man aus (3.23) als Euler-Lagrangesche Gleichungen bzw. als natürliche Rand- und Übergangsbedingungen.

Die beiden symmetrischen Formen von  $\delta F_{2B}$  lauten unter der Voraussetzung, daß die Randgrößen  $M$ ,  $T$  und  $Q$  von Feldgrößen  $m_{ij}$  und  $q_i$  ableitbar sind:

$$\begin{aligned}
 \delta F_{2B} \equiv & - \iint_F (m_{ji,j} - q_i) \delta \beta_i dF - \iint_F (q_{1,i} + \hat{\rho}) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\
 & - \int_{sM} (M - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{sT} (T - \hat{T}) \delta \psi ds + \int_{sQ} (Q - \hat{Q}) \delta w ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^+ - M^-) \delta \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^+ - T^-) \delta \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_{\sigma} (Q^+ + Q^-) \delta \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \\
 & + \iint_F (m_{ij}^W - m_{ij}) \delta \kappa_{ij}^W dF + \iint_F (q_i^W - q_i) \delta \gamma_i^W dF \\
 & - \iint_F \kappa_{ij}^W \delta m_{ij} dF - \iint_F \beta_i \delta m_{ji,j} dF - \iint_F \underbrace{(\gamma_i^W - \beta_i)}_{w,i} \delta q_i dF - \iint_F w \delta q_{i,i} dF \\
 & - \int_{s\varphi} \hat{\varphi} \delta M ds - \int_{s\psi} \hat{\psi} \delta T ds + \int_{s_w} \hat{w} \delta Q ds \\
 & - \int_{sM} \varphi \delta M ds - \int_{sT} \psi \delta T ds + \int_{sQ} w \delta Q ds \\
 & - \int_{\sigma} \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) \delta (M^+ - M^-) d\sigma - \int_{\sigma} \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) \delta (T^+ - T^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_{\sigma} \frac{1}{2} (w^+ + w^-) \delta (Q^+ + Q^-) d\sigma = 0
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

und

$$\begin{aligned}
 \delta F_{2B} \equiv & + \iint_F m_{ij}^W \delta \kappa_{ij}^W dF + \iint_F q_i^W \delta \gamma_i^W dF \\
 & - \iint_F \hat{\rho} \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k + \int_{sM} \hat{M} \delta \varphi ds + \int_{sT} \hat{T} \delta \psi ds - \int_{sQ} \hat{Q} \delta w ds \\
 & + \int_{s\varphi} M \delta \varphi ds + \int_{s\psi} T \delta \psi ds - \int_{s_w} Q \delta w ds \\
 & + \int_{\sigma} \frac{1}{2} (M^+ + M^-) \delta (\varphi^+ + \varphi^-) d\sigma + \int_{\sigma} \frac{1}{2} (T^+ + T^-) \delta (\psi^+ + \psi^-) d\sigma \\
 & \quad - \int_{\sigma} \frac{1}{2} (Q^+ - Q^-) \delta (w^+ - w^-) d\sigma \\
 & + \int_{s\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M ds + \int_{s\psi} (\psi - \hat{\psi}) \delta T ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) \delta Q ds \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta \frac{1}{2} (M^+ + M^-) d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \delta \frac{1}{2} (T^+ + T^-) d\sigma \\
 & \quad - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \delta \frac{1}{2} (Q^+ - Q^-) d\sigma = 0
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

### 3.3.3 Vergleich der beiden Funktionale

Unter der Voraussetzung, daß auch beim Funktional  $F_{2B}$  die Feldgrößen  $m_{ij}$  und  $q_i$  die unabhängigen statischen Größen darstellen, sind beide Funktionale dual zueinander. Die für jedes Funktional angegebenen zwei Formulierungen lassen die beiden möglichen Ausgangspotentiale, vor allem an den äußeren Potentialen, erkennen. Dabei ist der Anteil des inneren Potentials bei  $F_{2A}$  jeweils in Spannungsgrößen, bei  $F_{2B}$  jeweils in Verschiebungsgrößen ausgedrückt. Deshalb müssen bei  $F_{2A}$  in der Formulierung, die das Potential  $\Pi$  erkennen läßt (Gleichung (3.15)), bei  $F_{2B}$  in der Formulierung, in der das negative Ergänzungspotential  $\tilde{\Pi}$  zu erkennen ist (Gleichung (3.22)), die Verschiebungsgrößen und die Spannungsgrößen über Nebenbedingungen miteinander verknüpft werden. Dies geschieht bei  $F_{2A}$  durch die kinematischen Gleichungen (2.5) und (2.6), bei  $F_{2B}$  durch die Gleichungen (3.5) und (3.6).

### 3.4 Das Variationsfunktional für die Verschiebungsgrößen

Werden sowohl die Verzerrungen als auch die Schnittgrößen durch Erfüllung der Gleichungen (2.5), (2.6), (3.5) und (3.6) von vornherein fest mit den Verschiebungen verknüpft, so erhält man über eine Herleitung, die der von  $F_3$  entspricht, das Funktional  $F_1$ . Seine beiden wichtigsten Formulierungen lauten:

$$\begin{aligned}
 F_1 = & + \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^w \kappa_{ij}^w dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i^w \gamma_i^w dF \\
 & - \iint_F \hat{p} w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{s_M} \hat{M} \varphi ds + \int_{s_T} \hat{T} \psi ds - \int_{s_Q} \hat{Q} w ds \\
 & + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M^W ds + \int_{s_\psi} (\psi - \hat{\psi}) T^W ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) Q^W ds \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \frac{1}{2} (M^{W+} + M^{W-}) d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \frac{1}{2} (T^{W+} + T^{W-}) d\sigma \\
 & - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \frac{1}{2} (Q^{W+} - Q^{W-}) d\sigma
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

und

$$\begin{aligned}
 F_1 = & -\frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^W \kappa_{ij}^W - \frac{1}{2} \iint_F q_i^W \gamma_i^W dF \\
 & - \int_{s_\varphi} \hat{\varphi} M^W ds - \int_{s_\psi} \hat{\psi} T^W ds + \int_{s_w} \hat{w} Q^W ds \\
 & - \iint_F (m_{ji}^W - q_i^W) \beta_i dF - \iint_F (q_{i,i}^W + \hat{p}) w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k \\
 & - \int_{s_M} (M^W - \hat{M}) \varphi ds - \int_{s_T} (T^W - \hat{T}) \psi ds + \int_{s_Q} (Q^W - \hat{Q}) w ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^{W+} - M^{W-}) \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^{W+} - T^{W-}) \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & + \int_{\sigma} (Q^{W+} + Q^{W-}) \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Formal erhält man diese Gleichungen bei Berücksichtigung der oben genannten Zuordnungen auch aus den Funktionalen  $F_3$ ,  $F_{2A}$  und  $F_{2B}$ . Außer den exakt zu erfüllenden Feldgleichungen hat sich an den schon bei der Herleitung von  $F_3$  angegebenen Voraussetzungen nichts geändert. In den beiden Formulierungen von  $F_1$  sind die Nebenbedingungen deutlich zu erkennen.

Addiert man die Gleichungen (3.26) und (3.27), so erhält man:

$$\begin{aligned}
 2 F_1 = & - \iint_F (m_{ji}^W - q_i^W) \beta_i dF - \iint_F (q_{i,i}^W + 2 \hat{p}) w dF - \sum_k 2 \hat{P}_k w_k \\
 & - \int_{s_M} (M^W - 2 \hat{M}) \varphi ds - \int_{s_T} (T^W - 2 \hat{T}) \psi ds + \int_{s_Q} (Q^W - 2 \hat{Q}) w ds \\
 & + \int_{s_\varphi} (\varphi - 2 \hat{\varphi}) M^W ds + \int_{s_\psi} (\psi - 2 \hat{\psi}) T^W ds - \int_{s_w} (w - 2 \hat{w}) Q^W ds \\
 & - \int_{\sigma} (M^{W+} - M^{W-}) \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^{W+} - T^{W-}) \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) d\sigma \\
 & + \int_{\sigma} (Q^{W+} + Q^{W-}) \frac{1}{2} (w^+ + w^-) d\sigma \\
 & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \frac{1}{2} (M^{W+} + M^{W-}) d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \frac{1}{2} (T^{W+} + T^{W-}) d\sigma \\
 & - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \frac{1}{2} (Q^{W+} + Q^{W-}) d\sigma
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Diese Form wird nur angegeben, weil sie einen Vergleich mit dem von Prager in [12] genannten Funktional K ermöglicht.

### 3.5 Veränderung der Funktionale bei Vernachlässigung der Querkraftverformungen

Werden die Querkraftverformungen der Platte vernachlässigt, so ergeben sich folgende Änderungen in den bisherigen Herleitungen und Gleichungen:

Die Gleitungen  $\gamma_i$  verschwinden:

$$\gamma_i \equiv 0 \quad (3.29)$$

Es ist nun sinnvoll, jedoch nicht unbedingt notwendig, den Größen  $\beta_i$  und  $q_i$  den Charakter der Unabhängigkeit zu nehmen und sie über die kinematische Gleichung (2.6) bzw. die statische Gleichung (2.9) exakt mit den restlichen Verschiebungs- bzw. Schnittgrößen zu verknüpfen:

$$\beta_i = -w_{,i} \quad (3.30)$$

$$q_i = m_{ji,j} \quad (3.31)$$

Für die Variationsfunktionale ergeben sich daraus folgende Konsequenzen:

Die Randneigungen  $\varphi$  und  $\psi$  sind gleich den Randableitungen von  $w$ :

$$\varphi = -\beta_n = +w_{,n} \quad (3.32)$$

$$\psi = -\beta_t = +w_{,t}$$

Die kinematische Feldgleichung (2.6) ist erfüllt und entfällt als Nebenbedingung, (2.5) wird wegen (3.30) wie folgt ersetzt:

$$\kappa_{ij} + w_{,ij} = 0 \quad (3.33)$$

Ebenso entfällt die statische Nebenbedingung (2.9), und anstelle von (2.10) tritt (2.14):

$$m_{ij,i} + \hat{p} = 0 \quad (3.34)$$

Von den statischen Gleichungen (3.5) und (3.6) verbleibt nur noch die erste:

$$m_{ij,i}^{\kappa} - m_{ij} = 0$$

Nach diesen Vereinfachungen muß festgestellt werden, daß die Randneigung  $\psi$  bei der Variation nicht mehr als unabhängige Größe angesehen werden kann, da sie als Ableitung fest mit der Randdurchbiegung  $w$  verknüpft ist. Damit ist es nicht mehr möglich, die Drillmomente  $T$  an den Bereichsgrenzen für sich ins Gleichgewicht zu bringen. Die Einführung der Kirchhoffschen Ersatzscherkraft  $V$  wird erforderlich. Ihre Definition lautet:

$$V = Q + \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.35)$$

Das Drillmoment  $T$  kann i. a. nur längs der Kanten auf diese Weise eliminiert werden. An den Knotenpunkten bleiben Größen  $T$  übrig, die als Einzelkräfte gedeutet werden können. Mit (3.35) und (3.32) erhält man:

$$-\int_{t_1}^{t_2} T \psi \, dt = -\int_{t_1}^{t_2} T \frac{\partial w}{\partial t} \, dt = -[T w]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial t} w \, dt \quad (3.36)$$

$t_1$  und  $t_2$  sind hier die Koordinaten von Anfangs- und Endpunkt einer Elementkante. Zusammen mit dem entsprechenden Arbeitsausdruck der Querkraft ergibt sich:

$$+\int_{t_1}^{t_2} (Q w - T \psi) \, dt = \int_{t_1}^{t_2} (Q + \frac{\partial T}{\partial t}) w \, dt - [T w]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} V w \, dt - [T w]_{t_1}^{t_2} \quad (3.37)$$

Die Summe aller Terme  $[T w]_{t_1}^{t_2}$  wird bei Prager [12] einfach im Term  $[T w]$  zusammengefaßt, während Bufler [13] sie detaillierter mit  $\sum_k \sum_r T_k^{(r)} w_k$  bezeichnet und damit die erforderliche Summierung über die Knoten und die Schnittufer der Kantenenden ausdrückt.

Mit den Gleichungen (3.35) bis (3.37) erhält man bei der vorausgesetzten Kontinuität von  $w$  an den Knoten folgende wichtige Gleichung:

$$-\frac{1}{2} \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) (T^+ + T^-) \, d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\sigma} (w^+ - w^-) (Q^+ - Q^-) \, d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\sigma} (w^+ - w^-) (V^+ - V^-) \, d\sigma \quad (3.38)$$

Man beachte, daß wegen der getroffenen Voraussetzung die Knotenterme  $[T w]$  verschwinden!

Bei der Umrechnung der vorgegebenen Größen  $\hat{\psi}$ ,  $\hat{T}$  und  $\hat{Q}$  müssen verschiedene Bedingungen erfüllt sein:

$$s_{\psi} = s_w \quad ; \quad \hat{\psi} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial s}$$

$$s_T = s_Q = s_V \quad ; \quad s_V = s - s_w \quad ; \quad \hat{V} = \hat{Q} + \frac{\partial \hat{T}}{\partial t}$$

Zur Erzielung einfacher Formeln ohne Terme  $[T w]$  wird im folgenden vorausgesetzt, daß  $w$  an den Endpunkten von  $s_w$  mit  $\hat{w}$  übereinstimmt und daß  $\hat{T}$  innerhalb von  $s_V$  stetig ist und an den Endpunkten von  $s_V$  verschwindet. Man erhält dann:

$$-\int_{s_w}^{\hat{\psi}} \hat{T} ds + \int_{s_w}^{\hat{w}} \hat{Q} ds - \int_{s_V} (T - \hat{T}) \psi ds + \int_{s_V} (Q - \hat{Q}) w ds = \int_{s_w}^{\hat{w}} \hat{V} ds + \int_{s_V} (V - \hat{V}) w ds \quad (3.39)$$

$$\int_{s_w} (\psi - \hat{\psi}) T ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) Q ds + \int_{s_V} \hat{T} \psi ds - \int_{s_V} \hat{Q} w ds = - \int_{s_w} (w - \hat{w}) V ds - \int_{s_V} \hat{V} w ds \quad (3.40)$$

Die Elimination von  $\psi$  und  $T$  ist nur bei der Darstellung der Euler-Lagrangeschen Gleichungen von Bedeutung. Für praktische Rechnungen ist sie nicht erforderlich. In vielen Fällen wird deshalb auf sie verzichtet, da der auftretende Term  $[T w]$  die Auswertung der Formeln, z. B. bei der Programmierung, erschwert. In den folgenden Kapiteln werden  $\psi$  und  $T$  nur dann eliminiert, wenn infolge der Kontinuität der Drillmomente oder anderer Ursachen der Term  $[T w]$  verschwindet. In diesem Fall vereinfachen sich sowohl die Gleichungen als auch deren praktische Auswertung.

### 3.6 Vereinfachungen in der Berücksichtigung der Querkraftverformungen

Die in den Abschnitten 3.2 bis 3.4 hergeleiteten Variationsprinzipien setzen voraus, daß nicht nur die Funktionen  $w$ ,  $\kappa_{ij}$  und  $m_{ij}$ , sondern auch  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  und  $q_i$  unabhängig sind. Bei der Anwendung der Funktionale

in der Elementmethode wird dadurch die Zahl der erforderlichen Parameter gegenüber Rechnungen ohne Berücksichtigung der Querkraftverformungen wesentlich größer. Um dies zu vermeiden, werden im folgenden Formeln hergeleitet, die es ermöglichen,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  und  $q_i$  in den übrigen Größen auszudrücken und somit als unabhängige Größen zu eliminieren.

In den Herleitungen wird zunächst nur vorausgesetzt, daß die Plattendicke  $h$  bereichsweise konstant ist.

Mit den Gleichungen (2.5), (2.6), (2.9), (2.15) bis (2.18) und der Abkürzung

$$\lambda = \frac{h^2}{5 K (1 - \mu)} = \frac{12 (1 + \mu)}{5 E h}$$

lassen sich folgende Beziehungen anschreiben:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \lambda q_i \\ \beta_i &= -w_{,i} + \gamma_i = -w_{,i} + \lambda q_i \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{2} (\beta_{i,j} + \beta_{j,i}) = -w_{,ij} + \frac{\lambda}{2} (q_{i,j} + q_{j,i}) \\ \kappa_{kk} &= -w_{,kk} + \lambda q_{k,k} = -\Delta w + \lambda q_{k,k} \\ m_{ij} &= K (1 - \mu) \left[ -w_{,ij} + \frac{\lambda}{2} (q_{i,j} + q_{j,i}) + \delta_{ij} \frac{\mu}{1 - \mu} (-\Delta w + \lambda q_{k,k}) \right] \\ q_i &= -K \Delta w_{,i} + \frac{h^2}{10} \left[ \Delta q_i + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} q_{k,ki} \right] \end{aligned}$$

Bei der Aufstellung dieser Formeln wurde die statische Gleichung (2.10) nicht benutzt! Weitere Unterschiede zu den Formeln von Reissner [20] resultieren aus der anderen Aufbringung der Flächenlast  $\hat{p}$ .

In den folgenden Formeln dieses Abschnitts beziehen sich die hochgestellten Indizes  $w$ ,  $\kappa$  und  $m$  ausschließlich auf die Größen  $w$ ,  $\kappa_{ij}$  und  $m_{ij}$ , also nicht mehr gleichzeitig auch auf  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  und  $q_i$ !

Unter der vereinfachenden Annahme, daß die vierten Ableitungen von  $q_i$  und die zweiten Ableitungen von  $\Delta w$  verschwinden, lassen sich  $\beta_i$ ,  $\kappa_{ij}$ ,  $\gamma_i$ ,  $m_{ij}$  und  $q_i$  in den Verschiebungen  $w$  ausdrücken. Die genannten

Voraussetzungen treffen meist für die Ansatzfunktionen der Elementmethode zu (z. B. für alle Polynome für  $w$ , deren Grad nicht höher als fünf ist).

$$q_i^w = -K \left[ \Delta w + \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta \Delta w \right]_{,i} = -K \Delta \left[ w + \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta w \right]_{,i} \quad (3.41)$$

$$m_{ij}^w = -K(1-\mu) \left[ \left( w + \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta w \right)_{,ij} + \delta_{ij} \frac{\mu}{1-\mu} \Delta \left( w + \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta w \right) \right] \quad (3.42)$$

$$\kappa_{ij}^w = - \left( w + \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta w \right)_{,ij} \quad (3.43)$$

$$\gamma_i^w = - \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta \left( w + \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta w \right)_{,i} = + \frac{h^2}{5(1-\mu)} \kappa_{kk,i}^w \quad (3.44)$$

$$\beta_i^w = - \left[ w + \frac{h^2}{5(1-\mu)} \Delta w + \left( \frac{h^2}{5(1-\mu)} \right)^2 \Delta \Delta w \right]_{,i} \quad (3.45)$$

Ist ein Krümmungszustand  $\kappa_{ij}^\kappa$  vorgegeben, so erhält man  $m_{ij}^\kappa$ ,  $q_i^\kappa$  und  $\gamma_i^\kappa$  mit Hilfe der Gleichungen (2.15), (2.9) und (2.18):

$$m_{ij}^\kappa = K(1-\mu) \left[ \kappa_{ij}^\kappa + \delta_{ij} \frac{\mu}{1-\mu} \kappa_{kk}^\kappa \right] \quad (3.46)$$

$$q_i^\kappa = m_{ji,i}^\kappa \quad (3.47)$$

$$\gamma_i^\kappa = \lambda q_i^\kappa \quad (3.48)$$

Für einen vorgegebenen Momentenzustand  $m_{ij}$  lassen sich die Größen  $q_i^m$ ,  $\kappa_{ij}^m$  und  $\gamma_i^m$  ebenso einfach mit den Gleichungen (2.9), (2.17) und (2.18) ermitteln:

$$q_i^m = m_{ji,j} \quad (3.49)$$

$$\kappa_{ij}^m = \frac{1}{K(1-\mu)} \left[ m_{ij} - \delta_{ij} \frac{\mu}{1+\mu} m_{kk} \right] \quad (3.50)$$

$$\gamma_i^m = \lambda q_i^m \quad (3.51)$$

Sollen diese Beziehungen in die Funktionale eingeführt werden, um deren Anwendung in der Praxis zu vereinfachen, so müssen in den betreffenden Gleichungen überall  $\beta_i$  durch  $\beta_i^w$ ,  $\gamma_i$  durch  $\gamma_i^\kappa$  und  $q_i$  durch  $q_i^m$

ersetzt werden. Außerdem entfällt die statische Nebenbedingung (2. 9), und die Nebenbedingung (2. 10) wird durch (2. 14) ersetzt. Bei Umformungen der Funktionale und ihrer Variationsgleichungen kann nun die Identität (2. 24) benutzt werden.

### 3. 7 Vergleiche mit Funktionalen, die im Schrifttum genannt werden

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der Querkraftverformungen nicht berücksichtigt, da die zum Vergleich herangezogenen Funktionale ihn vernachlässigen.

Auf die Beziehungen zwischen den hier gezeigten Herleitungen und der Arbeit [13] von Bufler wurde schon zu Beginn dieses Kapitels hingewiesen. Zum ersten Mal sind dort die Funktionale in allgemeiner Form dargestellt. Für spezielle Rand- und Übergangsbedingungen wurden sie jedoch, meist ohne Herleitung, schon in früheren Veröffentlichungen angegeben.

So entspricht das Funktional von Reissner [8] dem Funktional  $F_{2A}$ , wobei Reissner in der ursprünglichen Fassung voraussetzt, daß die Verschiebungen die kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen. Erst in [9] werden diese Bedingungen gelockert.

Herrmann gibt in [10] ein Funktional an, das nach einigen Umformungen in das von Prager [12] angegebene Funktional  $J_1$  übergeführt werden kann und damit einen Sonderfall von  $F_{2A}$  darstellt.

Washizu leitet in [11] ein Funktional für die unabhängigen Größen  $w$ ,  $\kappa_{ij}$  und  $m_{ij}$  her, berücksichtigt jedoch keine Diskontinuitäten dieser Größen. Mit dieser Einschränkung entspricht sein Funktional dem Funktional  $F_3$ .

Ohne Herleitungen gibt Prager [12] eine Reihe von Funktionalen an. Sie stellen Sonderfälle der oben hergeleiteten Funktionale dar. Es gelten folgende Beziehungen:

$$I_1 \hat{=} F_3 \quad ; \quad J_1 \hat{=} F_{2A} \quad ; \quad J_3 \hat{=} F_{2B} \quad ; \quad K \hat{=} 2F_1$$

Pin Tong und Pian begründen in [25] nachträglich Pians hybride Methode mit einem Variationsfunktional. Es läßt sich zeigen, daß dieses Funktional dem Funktional  $F_{2A}$  in der Form (3.14) entspricht. Weiterhin ist leicht zu erkennen, daß die Variationsgleichung (3.17) sehr gut als Ausgangsgleichung für die hybride Methode benutzt werden kann, deren wesentliche Merkmale darin bestehen, daß die Schnittgrößen elementweise ohne jegliche Kontinuitätseigenschaften angesetzt werden, die Flächenlast  $\beta$  durch eine Partikularlösung abgetragen wird, und die Verschiebungen nur an den Elementrändern, und zwar für beide Schnittufer gleich, definiert sind. Diese Eigenschaften ermöglichen es, an jedem einzelnen Element die Schnittgrößen zu eliminieren und Steifigkeitsmatrizen zu bilden, während i. a. bei den gemischten Methoden derartige Eliminationen erst nach dem Zusammenbau aller Elemente durchgeführt werden können.

Wegen der formalen Ähnlichkeit der benutzten Gleichungen zu denen des Funktionals  $F_{2A}$  seien zum Schluß noch die sogenannten Gleichgewichtsmodelle genannt, wie sie Anderheggen [26], Veubeke [27] u. a. benutzen. Ihnen liegt das Prinzip vom Minimum der Ergänzungsenergie (3.3) zugrunde.

Da hierbei vorausgesetzt wird, daß die Spannungen die statischen Gleichungen erfüllen (im Unterschied zu Pians hybrider Methode einschließlich der statischen Rand- und Übergangsbedingungen) und derartige Spannungszustände i. a. nur schwer direkt anzugeben sind, werden die nicht von vornherein erfüllten Gleichgewichtsbedingungen als Nebenbedingungen eingeführt. Im Gegensatz zum Funktional  $F_{2A}$  werden dabei nicht Funktionen, sondern ganz bestimmte Funktionsordinaten gleichgesetzt, deren Zahl von den benutzten Spannungsansätzen abhängt und die so gewählt werden, daß nach Erfüllung dieser Bedingungen die Spannungen mit den vorgegebenen Lasten unabhängig von der Elementaufteilung ein exaktes Gleichgewichtssystem bilden. Wird das Problem mit der Lagrange - Methode gelöst, so treten Lagrange - Parameter als Hilfsgrößen auf, die als gewichtete Integrale von Verschiebungsgrößen gedeutet werden können. Die damit entstehende Ähnlichkeit mit dem

Funktional  $F_{2A}$  täuscht jedoch. Die Lagrange-Parameter sind hier automatisch anfallende Einzelgrößen, für die kein Ansatz gemacht werden muß und deren Auftreten bei einem anderen Lösungsverfahren (z. B. der Eliminationsmethode) verhindert werden könnte. Die Gleichgewichtsmodelle gehören somit zu den Spannungsmethoden. Da ihre Lösungen die statischen Bedingungen exakt erfüllen, bilden sie Gegenstücke zu den reinen Verschiebungsmodellen mit vollverträglichen Ansätzen.

#### 4. Allgemeine Untersuchungen zu Anwendung der Variationsfunktionale in der Elementmethode

In diesem Kapitel werden Fragen behandelt, die sich bei der Anwendung der Variationsfunktionale in der Elementmethode ergeben. Darunter fallen die Klassifizierung der verschiedenen Verfahren, Organisationsprobleme bei der Berechnung der erforderlichen Matrizen und Strukturuntersuchungen der anfallenden Gleichungssysteme. Letztere führen bei den gemischten Methoden zu Aussagen über das zahlenmäßige Verhältnis zwischen den Parametern der beiden Funktionsgruppen.

Das wichtige Thema der theoretischen Konvergenzuntersuchungen wird nur kurz gestreift, da es im Rahmen dieser Arbeit nicht behandelt wird.

##### 4.1 Einteilung der verschiedenen Verfahren der Elementmethode

Die Bedeutung, welche die Elementmethode in den letzten Jahren erlangt hat, führte zu einer Fülle verschiedener Verfahren. In der vorliegenden Arbeit werden diejenigen unter ihnen, die sich von Variationsfunktionalen herleiten lassen, in drei große Gruppen eingeordnet. Innerhalb dieser sind weitere Unterteilungen möglich. Die Einteilung in die folgenden drei Hauptgruppen geschieht nach dem Kriterium, für welche Größen ursprünglich ein Ansatz gemacht wird

###### 1. Verschiebungsmethoden

Ansätze werden ausschließlich für die Verschiebungen gemacht. Dabei können voll verträgliche und nicht voll verträgliche Verschiebungsansätze unterschieden werden.

###### 2. Spannungsmethoden (Gleichgewichtsmethoden)

Ansätze werden ausschließlich für die Spannungsgrößen gemacht. Im Laufe der Rechnung eventuell auftretende Verschiebungsparameter sind reine Hilfsgrößen und benötigen keinen Ansatz.

###### 3. Gemischte Methoden

Ansätze werden gleichzeitig für Spannungen und Verschiebungen gemacht. I. a. werden die Parameter beider Ansätze bis zum Schluß der Rechnung mitgeführt. Bei den Sonderformen der hybriden Methoden wird jedoch eine Parametergruppe schon im Bereich der Elemente eliminiert.

#### 4.2 Kriterien bei der Wahl der Ansätze

Bei der Wahl der Ansätze für ein bestimmtes Funktional müssen folgende Kriterien beachtet werden:

1. Die Ansätze müssen "zulässig" sein, d. h. sie müssen die vom Variationsprinzip vorausgesetzten Eigenschaften bezüglich der Erfüllung von Rand- und Übergangsbedingungen (Zwangsbedingungen) sowie der Stetigkeit und Differenzierbarkeit aufweisen.
2. Die Einheitszustände der Ansätze müssen untereinander linear unabhängig sein.
3. Die Ansätze müssen "vollständig" sein, d. h. sie müssen in der Lage sein, bei Vermehrung der Elemente die wahre Lösung beliebig genau anzunähern.

Die Ansätze können auch weitere Bedingungen des zu lösenden Problems erfüllen, sollten jedoch keine vom Problem her nicht gerechtfertigte Zwänge beinhalten. Willkürliche Nullsetzungen von Ableitungen an Knotenpunkten zur Erzielung gewünschter Kontinuitätseigenschaften stellen z. B. derartige Zwänge dar.

In der vorliegenden Arbeit wird vorausgesetzt, daß die Ansätze diese Bedingungen erfüllen. Abweichende Eigenschaften werden ausdrücklich angegeben. Außerdem wird angenommen, daß die Zahl der Ansatzparameter je Element nur endlich groß ist.

#### 4.3 Organisationsfragen bei der praktischen Rechnung

In der Elementmethode ist es üblich, die Beiträge der einzelnen Elemente zur Variationsgleichung eines Tragwerks in Form von Elementmatrizen zu berechnen. In einem zweiten Schritt wird dann durch Zusammenbau dieser Matrizen das vollständige System der Variationsgleichungen gebildet.

Bei den in Kapitel 3 hergeleiteten Variationsgleichungen muß dieses Vorgehen im allgemeinen Fall wegen der dort zugelassenen Diskontinuitäten ergänzt werden. Die an den Innenkanten  $\sigma$  auftretenden Terme

der Form

$$J = \frac{1}{2} \int_{\sigma} (\alpha^+ + \alpha^-) \delta (\beta^+ + \beta^-) d\sigma$$

erlauben die Bildung reiner Elementmatrizen nur dann, wenn eine der beiden Größen  $\alpha$  und  $\beta$  über die Kanten hinweg kontinuierlich ist. Gilt z. B.

$$\beta^+ = \beta^- = \beta$$

so ergibt sich

$$J = \int_{\sigma} (\alpha^+ + \alpha^-) \delta \frac{1}{2} (\beta^+ + \beta^-) d\sigma = \int_{\sigma} (\alpha^+ + \alpha^-) \delta \beta d\sigma = \int_{\sigma^+} \alpha^+ \delta \beta^+ d\sigma + \int_{\sigma^-} \alpha^- \delta \beta^- d\sigma$$

Zur Berechnung von J können die beiden Schnitrufer für sich betrachtet werden. Dies ermöglicht die Bildung von Elementmatrizen. Die genannten Bedingungen besagen, daß die Ansätze so gewählt werden müssen, daß jeweils eine von zwei einander zugeordneten Größen ( $\varphi$  oder M,  $\psi$  oder T, w oder Q) an den Elementrändern stetig ist (Pragersche Einschränkungen, siehe [12]).

Im allgemeinen Fall müssen jedoch die beiden Schnitrufer gemeinsam betrachtet werden. Es empfiehlt sich, den Beitrag der Kantenintegrale zur Variationsgleichung in besonderen Matrizen darzustellen. Für jede bei der Aufteilung der Platte in Elemente entstehende Kante wird dabei eine eigene Matrix berechnet, die im folgenden 'Kantenmatrix' genannt wird. Dazu ist in den Programmen für elektronische Rechenanlagen eine besondere Organisation erforderlich.

Die Einzelschritte der Rechnung sehen wie folgt aus:

1. Elementmatrizen. Für jedes Element wird eine Elementmatrix berechnet. Weiterhin werden für die Ränder des Elements in Matrizenform alle Werte zusammengestellt, die zur Beschreibung der Funktionen für die Randgrößen  $\varphi$ ,  $\psi$ , w, M, T und Q erforderlich sind.
2. Kantenmatrizen. Bei jeder Innenkante wird zunächst festgestellt, welchen Elementen ihre Schnitrufer angehören. Sodann werden die schon berechneten Randgrößen dieser Schnitrufer gesucht

und die Kantenintegrale nach Vorschrift der Variationsgleichung gebildet. Außenkanten mit nur einem Ufer werden analog behandelt. Das Ergebnis ist jeweils eine Kantenmatrix.

3. Zusammenbau aller Element- und Kantenmatrizen, wobei beide Arten im Prinzip gleich behandelt werden, da sie sich nur in ihrer Größe unterscheiden. Es entsteht das endgültige Gleichungssystem.
4. Berechnung der unbekannt Parameter durch Auflösung des Gleichungssystems.
5. Berechnung weiterer Ergebnisse mit Hilfe der Parameter.

Die Einzelschritte werden jeweils für sich abgeschlossen. Die für die weiteren Schritte benötigten Werte und Ergebnisse werden i. a. extern (Platte, Band) abgespeichert und bei Bedarf eingelesen.

Es empfiehlt sich, in diesen Rechnungen die auftretenden unbekannt Parameter mit Nummern zu kennzeichnen und beim Zusammenbau in ähnlicher Weise vorzugehen, wie dies in [28] beschrieben ist, wobei jedoch wegen der Kantenmatrizen die Berechnung von Makroelementen schwieriger wird und deshalb nicht mehr ratsam ist.

#### 4.4 Die Struktur der entstehenden Gleichungssysteme

##### 4.4.1 Allgemeines

Die praktische Anwendung der verallgemeinerten Variationsprinzipie in der Elementmethode führt jeweils auf ein Gleichungssystem für die unbekannt Parameter der Ansatzfunktionen. Zu seiner Aufstellung wird am besten eine Variationsgleichung des betreffenden Funktionals benutzt, da bei ihr die vorgeschriebene Variation schon durchgeführt ist. Es ist jedoch auch möglich, das Funktional mit Hilfe der gewählten Ansatzfunktionen zuerst in den Parametern auszudrücken und erst danach zu variieren.

Im folgenden wird ganz allgemein, ohne Betrachtung spezieller Ansätze, die Struktur der bei den gemischten Methoden entstehenden Gleichungssysteme untersucht. Da das Funktional  $F_3$  mit unabhängigen Verzerrungen

praktisch keine Bedeutung hat, werden nur die beiden Funktionale  $F_{2A}$  und  $F_{2B}$  bzw. ihre Variationsgleichungen betrachtet.

Bei der Aufstellung der Matrizengleichungen ist es vorteilhaft, die Parameter der verschiedenen Größen zu trennen und die Verschiebungsparameter in einem Vektor  $\mathbf{d}$ , die Schnittgrößenparameter in einem Vektor  $\mathbf{m}$  zusammenzufassen, wobei beide Vektoren nur wirklich unbekannte und veränderbare Komponenten enthalten, also keinerlei Anteile von Partikularlösungen.  $z_d$  bzw.  $z_m$  sei die Zahl der Komponenten in den genannten Vektoren.

Mit  $\mathbf{0}$  wird eine Nullmatrix, mit  $\mathbf{o}$  ein Nullvektor bezeichnet. Ihre Größenergebnisse jeweils aus dem Zusammenhang. Die übrigen Matrizen erhalten einen willkürlichen Buchstaben. Kennzeichnet man variierte Vektorgrößen mit einem Querstrich, z. B.

$$\delta \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}}$$

so haben die Variationsgleichungen von  $F_{2A}$  und  $F_{2B}$  folgende allgemeine Form

$$\bar{\mathbf{m}}^T (\mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{B} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{v}}) + \bar{\mathbf{d}}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{m} + \mathbf{C} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{p}}) = \sigma \quad (4.1)$$

Da diese Gleichung für jede beliebige Variation von  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{d}$  gelten muß, führt sie auf das folgende symmetrische Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{B} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{o} \\ \mathbf{B}^T \mathbf{m} + \mathbf{C} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{p}} &= \mathbf{o} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Die erste Zeile von (4.2) entsteht aus der Variation der Schnittgrößenparameter  $\mathbf{m}$ , enthält  $z_m$  Gleichungen und kann als Verträglichkeitsbedingung aufgefaßt werden. Die zweite Zeile von (4.2) entsteht aus der Variation der Verschiebungsparameter  $\mathbf{d}$ , enthält  $z_d$  Einzelgleichungen und kann als statische bzw. Gleichgewichtsbedingung gedeutet werden.

$\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  sind quadratische, symmetrische Matrizen,  $\hat{\mathbf{v}}$  und  $\hat{\mathbf{p}}$  sind Spaltenvektoren, die den Einfluß der vorgegebenen Verschiebungen bzw. Lasten und von Partikularanteilen der Verschiebungs- bzw. Spannungsansätze beinhalten.

Für die weiteren Betrachtungen ist die Einführung einer Zahl  $z_g$  erforderlich. Sie entspricht der Zahl der Gleichgewichtsbedingungen, welche die  $z_m$  Momentenparameter erfüllen müssen, falls durch den Momentenansatz ein exaktes Gleichgewichtssystem beschrieben werden soll. Derartige Bedingungen werden i. a. nur bei Gleichgewichtsmodellen aufgestellt, doch ist ihre Zahl auch bei den gemischten Modellen ein wichtiger Vergleichswert.

Analog hierzu ist  $z_v$  die Zahl der Verträglichkeitsbedingungen, welche die  $z_d$  Verschiebungsparameter erfüllen müssen, damit ein vollverträglicher (alle geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllender) Verschiebungszustand entsteht. Bei von vornherein verträglichen Verschiebungsansätzen ist somit  $z_v$  gleich Null.

#### 4.4.2 Die Variationsgleichungen des Funktionals $F_{2A}$

Bringt man die symmetrischen Variationsgleichungen (3.17) bzw. (3.18) auf die Form (4.1), so erkennt man, daß die Matrix **C** verschwindet. Das resultierende Gleichungssystem lautet

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A} \mathbf{m} + \mathbf{B} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (\text{a}) \\ \mathbf{B}^T \mathbf{m} \quad \quad - \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (\text{b}) \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

Dieses System hat nur dann eine Lösung, wenn gilt

$$z_d \leq z_m \quad (4.4)$$

Andernfalls entstehen in der Matrix  $\mathbf{B}^T (z_d, z_m)$  linear abhängige Zeilen, und das gesamte Gleichungssystem (4.3) wird singulär. Eine nähere Betrachtung von (4.3) ergibt, daß die Differenz  $(z_m - z_d)$  den Grad der "statischen Unbestimmtheit" der Platte bei den gewählten Ansätzen darstellt, d. h. die Zahl der Verträglichkeitsbedingungen, die neben den Gleichgewichtsbedingungen zur Ermittlung der Spannungsgrößen erforderlich sind. Da die Platte als statisch unbestimmtes Tragwerk angesehen werden kann, bei dem die Schnittgrößen nicht nur von den gegebenen Lasten, sondern auch von den Verschiebungen abhängen, muß dies im Wert  $(z_m - z_d)$  der Ansätze zum Ausdruck kommen. Dieser Wert muß immer größer als Null sein. Somit ist das Gleichheitszeichen

in (4.4) zu streichen, und es gilt

$$z_d < z_m \quad (4.5)$$

Außerdem muß bei Vermehrung der Elemente die Differenz ( $z_m - z_d$ ) etwa im selben Maß wie die Gesamtzahl der Parameter größer werden, damit der Grad der statischen Unbestimmtheit in jedem Aufteilungs-  
zustand der Platte relativ gleich groß bleibt. Da bei der Verfeinerung des Elementrasters die Zahl der Randpunkte weniger rasch ansteigt als die der Innenpunkte, wird damit auch die Möglichkeit geringer, daß Randbedingungen, die ja die Zahlen  $z_d$  und  $z_m$  der frei variierbaren Parameter beeinflussen, bei der Bilanz (4.5) maßgebend werden.

Eine weitere Einschränkung von  $z_d$  bringt die Forderung, daß zur Vermeidung linear abhängiger Gleichungen nicht mehr Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden dürfen, als zur exakten Erfüllung der homogenen Gleichgewichts-Differentialgleichungen erforderlich sind. Es muß also gelten

$$z_d \leq z_g \quad (4.6)$$

Die beiden Gleichungen (4.5) und (4.6) sind notwendige Bedingungen dafür, daß die Matrix  $\mathbf{B}^T$  keine linear abhängigen Zeilen aufweist, die das ganze System (4.3) singulär machen würden. Sie gelten auch dann, wenn das Funktional  $F_{2A}$  für hybride Ansätze nach Pian benutzt wird (siehe Abschnitt 3.7).

Im Anschluß an diese allgemeinen Untersuchungen werden einige Sonderfälle betrachtet:

Sind die Ansätze so beschaffen, daß in (4.6) das Gleichheitszeichen gilt, und werden zur Lastabtragung geeignete Partikularansätze gemacht, dann wird ein exaktes Gleichgewicht erzielt, und das Gleichungssystem (4.3) stellt die Anwendung des Prinzips vom Minimum der Ergänzungsenergie

$$\delta \tilde{\Pi} = 0$$

dar (in der Formulierung mit Nebenbedingungen, wie bei den Gleichgewichtsmodellen, siehe z. B. [26] und [27]).

Besteht jedoch von vornherein Gleichgewicht zwischen den äußeren Lasten und dem gewählten Momentenansatz, dann verschwinden die Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\hat{\mathbf{p}}$ , und zwar unabhängig vom Verschiebungsansatz. Das Gleichungssystem (4.3) reduziert sich auf die Gleichung

$$\mathbf{A} \mathbf{m} - \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

Dies ist die Formulierung des P. v. M. d. E. E. unter der Voraussetzung, daß alle Nebenbedingungen erfüllt sind. Man beachte, daß in diesem Fall das Funktional  $F_{2A}$  nur noch Schnittgrößen liefert, also keine Verschiebungsgrößen! Da die vorausgesetzten Gleichgewichtszustände nur schwer zu konstruieren sind, hat diese Formulierung keine praktische Bedeutung.

Die Betrachtung der Sonderfälle macht deutlich, daß das Funktional  $F_{2A}$  das Ergänzungspotential  $\tilde{\Pi}$  in den Fällen ersetzt, in denen die Momentenansätze das Gleichgewicht nicht exakt erfüllen können. Der Verschiebungsansatz kann als Hilfsansatz zur Formulierung der Gleichgewichtsbedingung (4.3 b) gedeutet werden. Mit ihm ist es möglich, formal in ähnlicher Weise vorzugehen wie bei den Gleichgewichtsmodellen, obwohl wegen der nur näherungsweise Erfüllung der Nebenbedingungen (Gleichgewichtsbedingungen) nun kein Extremalproblem mehr vorliegt. Der Wert  $(z_m - z_d)$  ist die Zahl der nach Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen noch freien Momentenparameter.

Die Matrix  $\mathbf{A}$  ist bei linear unabhängigen Spannungsansätzen nicht singular und deshalb invertierbar. Damit kann (4.3 a) nach  $\mathbf{m}$  aufgelöst werden

$$\mathbf{m} = -\mathbf{A}^{-1} (\mathbf{B} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{v}}) \quad (4.7)$$

Diese Gleichung kann dazu benutzt werden, aus vorgegebenen Verschiebungen die zugehörigen Schnittgrößen auszurechnen. Tut man dies bei bekannten Lösungen, so kann man damit unabhängig vom statischen Teil des Gleichungssystems (4.3) die Brauchbarkeit der Verträglichkeitsbedingungen (4.3 a) in Anwendung auf bestimmte Ansätze überprüfen.

Setzt man  $\mathbf{m}$  in (4.3 b) ein, so ergibt sich

$$-\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{d} + \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Bringt man diese Gleichgewichtsbedingung auf eine Form, wie sie in der Verschiebungsmethode üblich ist, so erhält man

$$\mathbf{K} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

mit  $\mathbf{K} = -\mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  ;  $\hat{\mathbf{f}} = -\mathbf{B}^T \hat{\mathbf{v}} - \hat{\mathbf{p}}$  (4.10)

Im Falle von Pians hybriden Modellen besteht  $\mathbf{A}$  aus diagonal angeordneten unabhängigen Untermatrizen, die jeweils für sich invertierbar sind. So können Steifigkeitsmatrizen schon an den Einzelementen gebildet werden und nicht erst, wie im allgemeinen Fall, am Gesamtsystem.

#### 4.4.3 Die Variationsgleichungen des Funktionals $F_{2B}$

Bringt man die symmetrischen Variationsgleichungen (3.24) bzw. (3.25) auf die Form (4.1), so erkennt man, daß die Matrix  $\mathbf{A}$  verschwindet. Das resultierende Gleichungssystem lautet

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{B} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (a) \\ \mathbf{B}^T \mathbf{m} + \mathbf{C} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (b) \end{array} \right\} \quad (4.11)$$

Die Untersuchungen dieses Systems verlaufen zum großen Teil analog zu denen des Systems (4.3). Nach der offensichtlich notwendigen Bedingung

$$z_m \leq z_d$$

ergeben sich sofort die weiteren Einschränkungen von  $z_m$

$$z_m < z_d \quad (4.12)$$

$$z_m \leq z_v \quad (4.13)$$

(4.12) sagt aus, daß der Verschiebungsansatz so gewählt werden muß, daß nach Erfüllung der Verträglichkeitsbedingung (4.11 a) noch

$(z_d - z_m)$  freie Verschiebungsparameter bei der Erfüllung der statischen Gleichungen (4.11 b) zur Verfügung stehen. Die Differenz  $(z_d - z_m)$  muß auch hier in der Größenordnung von  $z_d$  und  $z_m$  liegen und bei Vermehrung der Elemente mit diesen größer werden.

Die Gleichung (4.13) stellt eine weitere Bedingung zur Vermeidung linear abhängiger Zeilen in der Matrix  $\mathbf{B}$  dar. Sie sagt aus, daß nicht mehr Verträglichkeitsbedingungen an die Verschiebungsansätze gestellt werden dürfen, als zur Erzielung der exakten Verträglichkeit erforderlich sind.

Werden Ansätze gewählt, bei denen in (4.13) das Gleichheitszeichen gilt, und dazu geeignete partikuläre Verschiebungsansätze benutzt, so wird eine exakte Verträglichkeit erreicht, und das Gleichungssystem (4.11) stellt praktisch die Anwendung des P.v.M.d.p.E. dar, allerdings in der ungewöhnlichen Form mit nicht von vornherein erfüllten Nebenbedingungen. In [29] wird ein entsprechendes Verfahren dargestellt, jedoch unter Benutzung der Eliminations- anstelle der Lagrange-Methode.

Sind diese Nebenbedingungen jedoch schon vom Verschiebungsansatz erfüllt, dann verschwinden die Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\hat{\mathbf{V}}$ , und zwar unabhängig vom Schnittgrößenansatz. Die Gleichung (4.11 a) entfällt, und von (4.11 b) bleibt übrig

$$\mathbf{C} \mathbf{d} - \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

Dies ist die Gleichgewichtsbedingung für verträgliche Verschiebungsansätze.  $\mathbf{C}$  ist dabei die Steifigkeitsmatrix der Gesamtplatte. Das Funktional  $F_{2B}$  liefert in diesem Sonderfall keine direkten Ergebnisse für die Schnittgrößen!

Es gibt nun nichtverträgliche Verschiebungsansätze, für die man Schnittgrößenansätze angeben kann, die  $\mathbf{B}$  und  $\hat{\mathbf{V}}$  ebenfalls zum Verschwinden bringen, so daß nur noch eine Gleichung der Form (4.14) übrigbleibt. Dies führt zu folgender Aussage: Ein nichtverträglicher Verschiebungsansatz, für den sich ein Spannungsansatz angeben läßt, dessen Schnittgrößen an den zugehörigen Diskontinuitäten der Verschiebungen keine

Arbeit leisten, kann bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrizen wie ein verträglicher Ansatz behandelt werden!

Dies erklärt den Erfolg mancher derartiger Ansätze. Im Abschnitt 6.3 wird ein Beispiel hierzu gebracht.

Nach diesen Untersuchungen wird deutlich, daß das Funktional  $F_{2B}$  das Potential  $\Pi$  in den Fällen ersetzt, in denen der Verschiebungsansatz nicht voll verträglich ist. Die Momentenansätze sind dabei Hilfsansätze zur Erzeugung einer genäherten Verträglichkeit mit Hilfe von (4.11 a). Der Wert  $(z_d - z_m)$  ist die Zahl der nach Erfüllung der Verträglichkeitsbedingungen noch freien Verschiebungsparameter. Im Abschnitt 5.3 werden diese Zusammenhänge an einem Beispiel noch klarer herausgestellt.

Zum Abschluß wird nochmals das Gesamtsystem (4.11) betrachtet. Die statische Teilgleichung (4.11 b) verknüpft die Größen  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{d}$ . Die quadratische Matrix  $\mathbf{C}$  ist nur in besonderen Fällen nichtsingulär, z. B. bei verträglichen Verschiebungsansätzen und stabiler Lagerung der Platte. Singulär wird sie für alle Ansätze, die Starrkörperverschiebungen als Einheitszustände enthalten, da hierbei Nullzeilen in  $\mathbf{C}$  auftreten (siehe Abschnitt 5.3.4, Gleichungssystem (5.17)). Eine Auflösung von (4.11 b) nach  $\mathbf{d}$  ist demnach i. a. nicht möglich. Ein derartiger, als Integration deutbarer Vorgang kann nur unter Einhaltung eines gewissen Minimums an Rand- und Übergangsbedingungen eindeutig durchgeführt werden. Demgegenüber ist ein Vorgang wie die Auflösung von (4.3 a) nach  $\mathbf{m}$ , der als Differentiation aufgefaßt werden kann, auch ohne die Erfüllung weiterer Bedingungen möglich. Daraus wird ersichtlich, daß die Dualität zwischen  $F_{2A}$  und  $F_{2B}$  ähnlich der zwischen  $\Pi$  und  $\tilde{\Pi}$  nicht völlig lückenlos ist.

#### 4.4.4 Zusammenfassung

Die Gleichungssysteme für die beiden gemischten Methoden weisen jeweils Nullmatrizen in den Hauptdiagonalen auf. Ihre Position kennzeichnet einen wesentlichen Unterschied zwischen den Methoden. Die Untersuchungen brachten einen ersten Einblick in das Zusammenspiel der

Ansatzfunktionen und ermöglichten die Festlegung wichtiger Kriterien für das zahlenmäßige Verhältnis der Ansatzparameter. Deren Einhaltung bildet die Voraussetzung dafür, daß die Gleichungssysteme überhaupt eine Lösung haben.

#### 4.5 Konvergenz

Ein wichtiges Problem bei allen Näherungsmethoden stellt die Frage dar, ob und wie eine Näherungslösung  $\tilde{f}(x_1, x_2)$  die gesuchte exakte Lösung  $f(x_1, x_2)$  annähert. Man unterscheidet hierbei zwischen "gleichmäßiger Konvergenz" und "Konvergenz im Mittel".

Bei gleichmäßiger Konvergenz gilt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\tilde{f} - f) = 0 \quad \text{für beliebige Koordinaten } (x_1, x_2)$$

wobei  $m$  die Zahl der Ansatzparameter darstellt.

Die Konvergenz im Mittel ist definiert durch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_F (\tilde{f} - f)^2 dF = 0$$

Das Verschwinden des Integrals über das Fehlerquadrat ermöglicht i. a. keine Aussage über die Genauigkeit der Lösung an einem bestimmten Punkt.

Bei der Benutzung der Elementmethode in der Baupraxis wird meist stillschweigend vorausgesetzt, daß die Lösungen gleichmäßig konvergieren, ohne daß die Berechtigung dieser Annahme geprüft wird.

Die von Parametern dargestellten Einzelordinaten der Lösung  $\tilde{f}$  werden ohne Ansehen des Gesamtverlaufs der Funktion als endgültige Ergebnisse der Rechnung entnommen. Aus diesem Grund wird in den folgenden Kapiteln die praktische Brauchbarkeit eines Ansatzes oder einer Methode danach beurteilt, ob die Ergebnisse von Beispielrechnungen an allen Knotenpunkten eine gleichmäßige Konvergenz erkennen lassen. Theoretische Konvergenzuntersuchungen werden im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt.

#### 4.6 Maße für die Fehler an einzelnen Punkten

Als Maß für die Größe eines Fehlers an einem Punkt  $P(x_1, x_2)$  wird der 'relative Fehler'  $\beta(x_1, x_2)$  gewählt nach der Definition

$$\beta(x_1, x_2) = \frac{\tilde{f}(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{f(x_1, x_2)} \quad (4.15)$$

Dieses Maß versagt an den Punkten, an denen  $f(x_1, x_2)$  verschwindet.

Wird der Fehler auf eine maximale Ordinate  $|f|_{\max}$  des betrachteten Bereichs bezogen, so lautet die Definition

$$\beta^*(x_1, x_2) = \frac{\tilde{f}(x_1, x_2) - f(x_1, x_2)}{|f|_{\max}} \quad (4.16)$$

Aus (4.15) erhält man

$$\tilde{f} = f(1 + \beta)$$

Für eine Ableitung von  $\tilde{f}$  gilt

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} (1 + \beta) + f \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \quad (4.17)$$

Der relative Fehler der Ableitung einer Funktion  $\tilde{f}$  ist i. a. nicht gleich dem relativen Fehler der Funktion selbst.

Im Sonderfall, daß  $\beta(x_1, x_2)$  konstant ist, ergibt sich

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} (1 + \beta) \quad \text{für } \beta = \text{const.} \quad (4.18)$$

Bei konstantem relativem Fehler  $\beta$  der Funktion  $\tilde{f}$  weisen alle Ableitungen von  $\tilde{f}$  diesen Fehler auf.

Weist der relative Fehler einer Lösung innerhalb des betrachteten Bereichs nur geringe Schwankungen auf, so wird im folgenden von einer 'gleichmäßigen Genauigkeit' der Lösung gesprochen.

## 5. Gemischte Ansätze

In diesem Kapitel wird die Anwendung der Variationsfunktionale  $F_{2A}$  und  $F_{2B}$  in der Elementmethode an verschiedenen gemischten Ansätzen erprobt, wobei nur für die Verschiebungen  $w$  und die Momente  $m_{1j}$ , nicht aber für die Neigungen  $\beta_i$  und die Querkräfte  $q_1$ , unabhängige Ansätze gemacht werden. Für  $F_{2A}$  wird auch ein unbrauchbarer Ansatz dargestellt und diskutiert. In Ausnutzung der dabei gewonnenen Erfahrungen werden modifizierte Ansätze und Methoden eingeführt, die zu einer Verbesserung der Ergebnisse bzw. einer Verminderung des notwendigen Aufwandes führen. Alle dargestellten Ansätze gelten für dreieckige Plattenelemente. Querkraftverformungen werden, wenn überhaupt, nur unter Verwendung der im Abschnitt 3.6 angegebenen Beziehungen und weiterer Vereinfachungen berücksichtigt.

Im Gegensatz zu den im folgenden dargestellten Ansätzen machen Chatterjee und Setlur [46] für alle 4 Größen ( $w$ ,  $\beta_1$ ,  $m_{1j}$ ,  $q_1$ ) unabhängige Ansätze, und zwar lineare. Die daraus resultierende Erhöhung der Zahl der unbekanntem Ansatzparameter führt jedoch, wie ein Vergleich mit dem Herrmannschen Modell [10] anhand von Beispielrechnungen zeigt, nicht zu einer entsprechenden Verbesserung der Ergebnisse.

### 5.1 Die Abschätzung der Zahl der Unbekannten

Bei den gemischten Ansätzen ist das Zahlenverhältnis zwischen unbekanntem Verschiebungsparametern und unbekanntem Schnittgrößenparametern von großer Wichtigkeit. Treten alle Unbekannten an den Knoten auf, so ist eine Abschätzung einfach. Sind jedoch sowohl Knotenunbekannte als auch Kantenunbekannte vorhanden, so ist zu beachten, daß bei der Aufteilung einer Fläche in Dreiecke die Zahl der Kanten etwa dreimal so groß ist wie die Zahl der Knoten und daß deshalb eine Kantenunbekannte mit dem dreifachen Gewicht einer Knotenunbekannten in die Gesamtbilanz der Unbekannten eingerechnet. Der Faktor 3 stellt eine Näherung dar, die jedoch bei einer großen Elementanzahl recht gut gilt. Für ein Quadrat mit  $n$  Unterteilungen einer Seite, wie es in Bild 7.2 dargestellt ist, lautet dieser Faktor  $\lambda$  z. B. :

$$\lambda = \frac{3n^2 + 2n}{(n+1)^2} = 3 - \frac{4n+3}{(n+1)^2} \quad (5.1)$$

Damit ist es möglich, eine Vergleichszahl  $z^V$  zu berechnen, die angibt, wieviel reine Knotenunbekannte vorhanden sein müßten, um am Gesamtsystem etwa dieselbe Zahl von Unbekannten zu erzeugen wie die wirklich vorhandenen verschiedenartigen Unbekannten. Ist  $k$  die Zahl der Unbekannten je Knoten und  $s$  die Zahl der Unbekannten je Kante, dann erhält man:

$$z^V = k + \lambda s \approx k + 3s \quad (5.2)$$

Die Zahl  $z^V$  ist ein Maß für die am Gesamtsystem zu erwartenden Unbekannten. Elementmodelle mit verschiedenen Unbekanntenarten können mit ihr verglichen werden. Sie ist dazu weit besser geeignet als z. B. die Zahl der Parameter je Element!

Im folgenden dient  $z^V$  dazu, das Verhältnis von Verschiebungs- und Momentenparametern bei den Ansätzen für die gemischten Methoden abzuschätzen.

## 5.2 Ansätze für das Funktional $F_{2A}$

Die Benutzung des Funktionals  $F_{2A}$  in der Elementmethode wird im folgenden kurz "Methode A" genannt. Eine wichtige Bedingung für die Ansätze dieser Methode lautet nach (4.5)

$$z_m^V > z_d^V \quad (5.3)$$

Zwei Modelle werden dargestellt und diskutiert. Das zweite erweist sich als unbrauchbar. Mögliche Ursachen hierfür werden erörtert. Vor allem wird der kinematische Teil der Variationsgleichung näher untersucht, auch mit Hilfe einfacher, handgerechneter Beispiele.

Bei beiden Modellen werden die Querkraftverformungen vernachlässigt.

### 5.2.1 Erstes Modell: das Herrmannsche Modell

Die einfachste und bekannteste Anwendung der Methode A ist das sogenannte "Herrmannsche Modell".

In [10] gibt Herrmann ein Funktional an für die variablen Funktionen  $w(x_1, x_2)$  und  $m_{ij}(x_1, x_2)$  unter der Voraussetzung, daß  $w$  und  $M(m_{ij})$  an den Elementrändern kontinuierlich sind und am Plattenrand die Randbedingungen erfüllen. Läßt man bei seinem Funktional den

Temperatureinfluß weg und führt man im Funktional  $F_{2A}$  die Herrmannschen Voraussetzungen ein (unter Weglassung des Querkrafteinflusses und der Kräfte  $\hat{p}$ ), so lassen sich beide Funktionale durch Teilintegrationen mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes leicht ineinander überführen. Man erhält schließlich in der Schreibweise der vorliegenden Arbeit:

$$\begin{aligned}
 F_{2A} = & + \frac{1}{2} \iint_F m_{ij} \kappa_{ij}^m dF - \iint_F \hat{p} w dF + \int_{s_M} \hat{M} \varphi ds - \int_{s_V} \hat{V} w ds \\
 & - \iint_F (\kappa_{ij}^m - \kappa_{ij}^w) m_{ij} dF + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M ds + \int_\sigma (\varphi^+ + \varphi^-) M d\sigma
 \end{aligned}
 \tag{5.4}$$

In [10] wird folgender Ansatz gemacht: Die Verschiebungen  $w(x_1, x_2)$  sind elementweise linear, wobei die Knotenverschiebungen  $w_k$  als Parameter dienen. Die Momente  $m_{11}$ ,  $m_{12}$  und  $m_{22}$  sind elementweise konstant. Unbekannte Parameter sind hierbei die kontinuierlichen Kantenmomente  $M_s$ . Dies ist der einfachste denkbare gemischte Ansatz. Er hat insgesamt 6 unbekannte Parameter je Element. Da gleichzeitig Knoten- und Kantenparameter auftreten, kann mit (5.2) die Vergleichszahl  $z^v$  berechnet werden:

$$z^v = 1 + 3 \cdot 1 = 4$$

Ermittelt man  $z^v$  getrennt für Verschiebungen und Momente, so erhält man:

$$z_d^v = 1 \quad ; \quad z_m^v = 3 \quad ; \quad z_m^v > z_d^v$$

Die Bedingung für die Ansätze der Methode A ist erfüllt, wenigstens für den Innenbereich einer Platte.

In Kapitel 7 sind Ergebnisse von Beispielen für das Herrmannsche Modell angegeben. Sie konvergieren jeweils gegen die richtigen Werte. Bei ihrer Beurteilung ist jedoch der grobe Verlauf von  $w$  und  $m_{ij}$  innerhalb der Elemente zu berücksichtigen. Die Verschiebungsordinaten an den Knoten sind meist zu groß. Beim Momentenzustand sind nur die mittleren Normalmomente  $M$  an den Kanten recht genau. Eindeutige

Knotenmomente existieren nicht. Werden sie durch Mittelung gewonnen, so sind die Ergebnisse schlechter als die der Kantenmomente. Dies ist ein Nachteil des Herrmannschen Modells.

Visser [30] benutzt das Funktional von Herrmann für einen erweiterten Ansatz: Ein quadratisches Polynom für  $w(x_1, x_2)$ , bei dem die Ordinaten in den Knoten und Seitenmitten als Parameter dienen, garantiert die Kontinuität der Verschiebungen. Für  $z_d^v$  ergibt sich:

$$z_d^v = 1 + 3 \cdot 1 = 4$$

Bei den Momenten  $m_{ij}$  werden drei lineare Ansätze mit zusammen  $3 \cdot 3 = 9$  Knotenparametern so umgeformt, daß  $3 \cdot 2 = 6$  Kantenparameter übrigbleiben, die einen linearen, kontinuierlichen Verlauf von  $M$  an den Elementkanten festlegen. Für  $z_m^v$  erhält man:

$$z_m^v = 0 + 3 \cdot 2 = 6$$

Gleichung (5.3) ist erfüllt. An der Summe

$$z^v = z_d^v + z_m^v = 10$$

erkennt man, daß im Gesamtsystem eine relativ große Zahl von Unbekannten anfallen wird. Wenn man bedenkt, daß der einfachste vollverträgliche Verschiebungsansatz mit Kontinuität der Krümmungen bzw. Momente an den Knoten nur 6 Unbekannte je Knoten aufweist, dann erscheint der von Visser vorgeschlagene Ansatz nicht mehr sinnvoll, zumal auch mit ihm keine eindeutigen Knotenmomente ermittelt werden können.

Aufschlußreich ist noch folgende Beobachtung: Auch die ursprünglichen linearen Ansätze für  $m_{ij}$  garantieren die Kontinuität der Normalmomente  $M$ . Außerdem sind die Knotenordinaten  $m_{ij}^{(k)}$  eindeutig definiert. Der Ansatz ist jedoch zusammen mit dem quadratischen Verschiebungsansatz bei Methode A nicht anwendbar, da er mit

$$z_m^v = 3 + 0 = 3$$

die Gleichung (5.3) nicht erfüllt, obwohl er mehr Parameter je Element aufweist als der von Visser schließlich gewählte Momentenansatz.

5.2.2 Zweites Modell: lineare Ansätze für w und m<sub>ij</sub>

Lineare Ansätze für w und m<sub>ij</sub> werden von Herrmann in [31] benutzt und von Prager in [12] erwähnt. Von allen gemischten Ansätzen ist dieser der naheliegendste.

Die Funktionen für w und m<sub>ij</sub> werden durch Knotenparameter festgelegt. Für die Zahlen z<sup>v</sup> ergibt sich:

$$z_d^v = 1 \quad ; \quad z_m^v = 3 \quad ; \quad z^v = z_d^v + z_m^v = 4$$

Diese Vergleichszahlen stimmen mit denen des Herrmannschen Modells überein. Gleichung (5.3) ist erfüllt.

Vernachlässigt man die Querkraftverformungen, so erhält man bei Berücksichtigung der Kontinuität von w, M und T an den Elementkanten und unter der Annahme, daß w die Randbedingungen  $\hat{w}$  und  $\hat{\psi}$  erfüllen kann, aus (3.15) das Funktional:

$$\begin{aligned} F_{2A} = & \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^m \kappa_{ij}^m dF - \iint_F \beta w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{S_M} \hat{M} \varphi ds + \int_{S_T} \hat{T} \psi ds - \int_{S_Q} \hat{Q} w ds \\ & - \iint_F (\kappa_{ij}^m - \kappa_{ij}^w) m_{ij}^w dF + \int_{S_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M ds + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) M d\sigma \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Größen  $\kappa_{ij}^w$  und m<sub>ij,ij</sub><sup>w</sup> verschwinden identisch bei den gewählten linearen Ansätzen. In der folgenden Variationsgleichung werden sie dennoch mitgeführt:

$$\begin{aligned} \delta F_{2A} = & - \iint_F (m_{ij,ij}^m + \beta) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k - \int_{S_M} (M - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{S_T} (T - \hat{T}) \delta \psi ds \\ & + \int_{S_Q} (Q - \hat{Q}) \delta w ds + \int_{\sigma} (Q^+ + Q^-) \delta w d\sigma \\ & - \iint_F (\kappa_{ij}^m - \kappa_{ij}^w) \delta m_{ij} dF \\ & + \int_{S_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M ds + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M d\sigma \end{aligned} \quad (5.6)$$

Symmetrische Formen sind leicht mit Hilfe von (2.24) oder direkt aus den Gleichungen (3.17) und (3.18) herleitbar. Alle diese Variationsgleichungen führen auf das symmetrische Gleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} -\mathbf{M} \mathbf{x}^m + \mathbf{C}_2 \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2^T \mathbf{x}^m - \hat{\mathbf{p}}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

In diesem Gleichungssystem wurden die unabhängigen Parameter  $\mathbf{m}$  des Momentenansatzes mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen auf Krümmungsparameter umgerechnet, die im Vektor  $\mathbf{x}^m$  zusammengefaßt sind. Diese Umrechnung ermöglicht später Vergleiche mit Krümmungen, die in Ansätzen für das Funktional  $F_{2B}$  auftreten. Die Knotenverschiebungen sind im Vektor  $\mathbf{w}$  dargestellt.

Die Matrizen des Gleichungssystems sind für die linearen Ansätze wie folgt definiert:

$$\left. \begin{aligned} \iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF &= \bar{\mathbf{x}}^{mT} \mathbf{M} \mathbf{x}^m ; \mathbf{M}^T = \mathbf{M} \\ \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M ds + \int_\sigma (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M d\sigma &= \bar{\mathbf{x}}^{mT} (\mathbf{C}_2 \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}}) \\ - \int_{s_M} (M - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{s_T} (T - \hat{T}) \delta \psi ds + \int_{s_Q} (Q - \hat{Q}) \delta w ds \\ + \int_\sigma (Q^+ + Q^-) \delta w d\sigma - \iint_F \beta \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\ = \int_{s_\varphi} M \delta \varphi ds + \int_\sigma M \delta (\varphi^+ + \varphi^-) d\sigma - \iint_F \beta \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\ + \int_{s_M} \hat{M} \delta \varphi ds + \int_{s_T} \hat{T} \delta \psi ds - \int_{s_Q} \hat{Q} \delta w ds &= \bar{\mathbf{w}}^T (\mathbf{C}_2^T \mathbf{x}^m - \hat{\mathbf{p}}_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Beispielrechnungen mit diesem Modell ergeben bei einer quadratischen Platte mit frei aufliegenden Rändern folgende Ergebnisse (siehe Kapitel 7):

Die Durchbiegungen  $w$  sind recht ordentlich und scheinen bei weiterer Verdichtung des Elementrasters gegen die exakten Werte zu streben.

Die Momente jedoch sind völlig unbefriedigend, vor allem an bestimmten Punkten. So strebt das Moment  $m_{11} = m_{22}$  in Plattenmitte sichtlich gegen das etwa 0,8-fache des richtigen Werts, während das Eckdrillmoment  $m_{12}$  den etwa zweifachen exakten Wert anzustreben scheint.

Die genannten Ergebnisse gelten für die Elementaufteilung E 1 (siehe Bild 7.2). Rechnungen mit anderen Elementaufteilungen lassen eine große Abhängigkeit der Resultate von der Wahl des Elementrasters erkennen.

Aufgrund der Ergebnisse für dieses einfache Beispiel muß festgestellt werden, daß das gewählte Modell für Anwendungen in der Praxis unbrauchbar ist, obwohl seine Ansätze den Zwangsbedingungen des Variationsfunktionals  $F_{2A}$  genügen.

Bei der Suche nach den Ursachen für das Versagen des Modells konnte eindeutig festgestellt werden, daß sie im kinematischen Teil der Variationsgleichung liegen. Gibt man z. B. die exakten Knotenverschiebungen vor und rechnet mit dem kinematischen (oberen) Teil der Gleichung (5.7) die Momente aus, so erhält man völlig falsche Ergebnisse. Andererseits führt eine Modifizierung des Verschiebungsansatzes (siehe Abschnitt 5.4), die nur den kinematischen Gleichungsteil ändert, zu guten Ergebnissen für Verschiebungen und Momente.

### 5.2.3 Einige Vergleiche zwischen den beiden Modellen

Für beide Modelle ergeben sich dieselben Vergleichszahlen  $z_d^v$  und  $z_m^v$ , sodaß sie bei einer bestimmten Elementanordnung zu etwa gleich vielen Unbekannten führen. Der einzige Unterschied besteht im Grad der Ansätze für die Momente. Zwei wesentliche Punkte können dazu betrachtet werden:

1. Der Unterschied zwischen den identisch verschwindenden Momenten  $m_{ij}^w$  des Verschiebungsansatzes und den Momenten  $m_{ij}$  ist beim konstanten Momentenansatz geringer als beim linearen.
2. Betrachtet man die einzelnen kinematischen Gleichungen, so erkennt man, daß beim Herrmannschen Modell zu jeder Kante s

ein eigener Momentenparameter  $M_s$  und damit auch eine eigene unabhängige Variationsgröße  $\delta M_s$  gehört. Jede Gleichung setzt den Knick  $\Delta\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$  einer einzigen Kante in Beziehung zu den Krümmungen  $\kappa_{ij}^m$  der beiden angrenzenden Elemente. Sie entspricht damit einer Elastizitätsgleichung der Kraftgrößenmethode beim Balken. Im Gegensatz dazu beeinflusst beim zweiten Modell die Variation einer Knotenordinate  $m_{ij}^{(k)}$  mehrere Kanten und mehrere Elemente, wobei die Zahl der Kanten und Elemente von der Elementaufteilung abhängt. Dadurch kommt es zu einer größeren gegenseitigen Beeinflussung der einzelnen Unbekannten. Theoretisch könnte dies ein Vorteil sein, praktisch führt es jedoch dazu, daß sich positive und negative Fehler innerhalb einer Gleichung gegenseitig aufheben können. Knotenpunkte, an denen überdurchschnittlich viele Elemente zusammenstoßen, sind deshalb besonders kritisch. Die Beispielrechnungen bestätigen dies.

Das Versagen des zweiten Modells beruht vermutlich darauf, daß es unter beiden Gesichtspunkten schlechter abschneidet. Im Abschnitt 5.4. wird gezeigt, daß schon Verbesserungen, die allein den Punkt 1 betreffen, zu guten Ergebnissen führen.

#### 5.2.4 Weitere Untersuchungen des kinematischen Teils der Variationsgleichung $\delta F_{2A} = 0$

Nach den bisherigen Untersuchungen liegen die Ursachen von Schwierigkeiten bei der Benutzung des Funktionals  $F_{2A}$  im kinematischen Teil seiner Variationsgleichung. Im folgenden werden am einfachen Beispiel einer frei aufliegenden Plattenecke, die durch ein konstantes Drillmoment verformt wird, verschiedene Elementansätze numerisch erprobt, um daraus weitere Einblicke in das Zusammenspiel von Verschiebungs- und Momentenansätzen zu gewinnen. Dabei werden alle Parameter des Verschiebungsansatzes dem bekannten wirklichen Zustand der Platte entnommen. Mit Hilfe der kinematischen Gleichung, die sich für die

jeweilige Ansatzkombination ergibt, wird versucht, das unbekannte Drillmoment zu errechnen. Die Vorwegnahme von Ergebnissen vereinfacht das Beispiel, so daß es leicht von Hand gerechnet werden kann. Dadurch wird ein möglicher Einwand entkräftet, Fehler im Programm oder in der Eingabe beeinflussen die Ergebnisse.

1. Wirklicher Zustand der Platte

Gegeben ist eine quadratische Platte mit zwei benachbarten frei aufliegenden ( $M = 0$ ;  $w = 0$ ;  $T \neq 0$ ) und zwei benachbarten freien Rändern ( $M = T - \hat{T} = Q = 0$ ), siehe Bild 7.1, System 3. Ihre Plattensteifigkeit ist  $K = 1$ , ihre Querkontraktionszahl  $\mu = 0$ . An den freien Rändern wird sie durch Randdrillmomente  $\hat{T} = c$  (bei  $x_1 = \ell$ ) und  $\hat{T} = -c$  (bei  $x_2 = \ell$ ) belastet, so daß in der gesamten Platte folgender Zustand entsteht:

$$m_{12} = c \rightarrow \kappa_{12} = c$$

$$m_{11} = m_{22} = 0 \rightarrow \kappa_{11} = \kappa_{22} = 0$$

Betrachtet wird im folgenden der Bereich um die frei aufliegende Plattenecke E, siehe Bild 5.1.

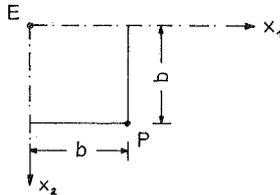


Bild 5.1: Plattenecke E und benachbarter Punkt P

Mit der Randbedingung  $w = 0$  für  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  und der Definition (3.33) bei Vernachlässigung der Querkraftverformungen

$$\kappa_{ij} = -w_{,ij}$$

erhält man aus den angegebenen Krümmungen die exakte Verschiebungsfunktion der Platte:

$$w(x_1, x_2) = -\kappa_{12} x_1 x_2 = -c x_1 x_2$$

Für den Punkt P (b, b) (siehe Bild 5. 1) ergibt sich

$$w_P = - c b^2$$

Ist c unbekannt und  $w_P$  gegeben, so erhält man

$$c = - \frac{w_P}{b^2} \quad (5. 9)$$

## 2. Benötigte Gleichungen der Elementmethode

Unter der Voraussetzung, daß bei den benutzten Elementansätzen die Größen  $w$  und  $M$  an den Innenkanten kontinuierlich sind und an den Außenkanten die Randbedingungen erfüllen, lautet nach (5. 6) der kinematische Teil der Variationsgleichung von  $F_{2A}$

$$- \iint_F (\kappa_{ij}^m + w_{,ij}) \delta m_{ij} dF + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M d\sigma = 0$$

Da die Parameter des Verschiebungszustandes als bekannt vorausgesetzt werden, wird diese Gleichung umgestellt:

$$\iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF = - \iint_F w_{,ij} \delta m_{ij} dF + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M d\sigma \quad (5. 10)$$

Gleichung (5.10) ermöglicht es, mit Hilfe eines Momentenansatzes aus einem vorgegebenen Verschiebungszustand den Momentenzustand zu berechnen. Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt vom Momentenansatz und von der Genauigkeit der Beschreibung des Verschiebungszustandes ab.

## 3. Rechenbeispiele mit verschiedenen Elementansätzen

Gegeben sind die exakten Werte der Parameter für den jeweiligen Verschiebungsansatz, also nicht der exakte Verlauf der Verschiebungen.

Gesucht werden die Momente  $m_{ij}$  bzw. der Krümmungszustand  $\kappa_{ij}^m$ .

Um die Handrechnung zu vereinfachen, werden alle Ergebnisse bis auf die Größe der Krümmung  $\kappa_{12}^m$  als bekannt vorausgesetzt.

$$\kappa_{11}^m(x_1, x_2) = \kappa_{22}^m(x_1, x_2) = \text{const} = 0$$

$$\kappa_{12}^m(x_1, x_2) = \text{const} = c$$

Diese Annahmen ermöglichen es, alle Parameter des Momentenansatzes in der unbekannten Konstanten  $c$  auszudrücken. Zu ihrer Bestimmung genügt eine einzige Gleichung. Sie wird so gewählt, daß nur die beiden in Bild 5.2 dargestellten Elemente I und II im Bereich der frei aufliegenden Plattenecke E betrachtet werden müssen. Die Rechnungen werden für mehrere Elementmodelle durchgeführt. Wegen der genannten

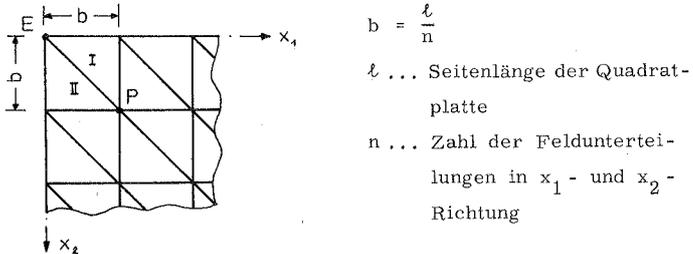


Bild 5.2: Eckbereich der Platte mit den Elementen I und II

Voraussetzungen wirkt sich die Verschiedenheit der Momentenansätze nur in den Variationsgrößen  $\delta m_{ij}$  und  $\delta M$  aus. Stimmen die Ergebnisse für  $c$  mit (5.9) überein, so ist damit die Brauchbarkeit der Ansätze nicht bewiesen, da das Ergebnis zufällig oder z. B. wegen der Vorgabe der vielen exakten Werte entstanden sein kann. Erhält man jedoch ein falsches Ergebnis, so ist dies ein Beweis für die praktische Unbrauchbarkeit des Ansatzes, da die getroffenen Vereinfachungen die Erzielung eines richtigen Ergebnisses eher fördern als behindern. Zu beachten ist bei diesen Untersuchungen, daß die Kantenlänge  $b$  bei Vermehrung der Elemente beliebig klein werden kann.

a) Herrmannsches Modell

Linearer Ansatz für  $w$ , konstanter Ansatz für die Momente. Als virtueller Momentenzustand wird gewählt:  $\delta M = 1$  auf der Kante EP,  $\delta M = 0$  auf allen übrigen Kanten.

Man erhält somit:  $\delta m_{11} = \delta m_{22} = 0$ ;  $\delta m_{12} = -1$  in den Elementen I und II,  $\delta m_{ij} = 0$  in allen übrigen Elementen. Außerdem gilt überall:  $w_{,ij} = 0$ .

Der Knick an der Kante EP ist:  $\varphi^+ + \varphi^- = 2 \frac{w_P}{b\sqrt{2}} = \frac{w_P}{b} \sqrt{2}$ .  
 Die Länge der Kante ist  $\overline{EP} = b\sqrt{2}$ .

Für die einzelnen Terme der Gleichung (5.10) ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF &= \iint_F (\cancel{\kappa_{11}^m \delta m_{11}} + \cancel{\kappa_{22}^m \delta m_{22}} + 2\kappa_{12} \delta m_{12}) dF \\ &= 2c(-1)b^2 = -2cb^2 \end{aligned}$$

$$\iint_F w_{,ij} \delta m_{ij} dF \equiv 0$$

$$\int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M d\sigma = \frac{w_P}{b} \sqrt{2} \cdot 1 \cdot b \sqrt{2} = 2w_P$$

Setzt man die Terme in (5.10) ein, so erhält man

$$c = -\frac{w_P}{b^2}$$

Bei Vorgabe der richtigen Verschiebung  $w_P$  liefert diese Ansatzkombination die richtige Krümmung  $\kappa_{12}^m = c$ , obwohl die Verschiebungen durch den elementweise linearen Ansatz recht grob dargestellt sind.

b) Modell 2 nach Abschnitt 5.2.2

Linearer Ansatz für  $w$  ( $w_{,ij} \equiv 0$ ); lineare Ansätze für  $m_{ij}$ . Als virtueller Momentenzustand wird gewählt:  $\delta m_{12}^{(E)} = 1$ , alle übrigen  $\delta m_{ij}^{(k)} = 0$ . Damit erhält man:  $\delta m_{11} = \delta m_{22} = 0$ ;  $\delta m_{12} \neq 0$  in den Elementen I und II,  $\delta m_{ij} = 0$  in allen übrigen Elementen. Linearer Verlauf von  $\delta M$  auf der Kante EP:  $\delta M^{(E)} = -1$ ;  $\delta M^{(P)} = 0$ .  $\delta M = 0$  auf allen übrigen Innenkanten. Außenkanten gehen wegen  $s_{\varphi} \equiv 0$  in die Rechnung nicht ein. Damit ergibt sich für die einzelnen Terme der Gleichung (5.10):

$$\iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF = 2 \iint_F c \delta m_{12} dF = 2 \cdot c \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot b^2 = \frac{2}{3} c b^2$$

$$\int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M d\sigma = \frac{w_P}{b} \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1) \cdot b \sqrt{2} = -w_P$$

Mit (5.10) erhält man:

$$c = -\frac{3}{2} \frac{w_P}{b^2}$$

Dieses Ergebnis stimmt mit (5.9) nicht überein! Für  $c$  ergibt sich der 1,5-fache exakte Wert.

Zu beachten ist, daß sich andere Lösungen für  $\kappa_{ij}^m$  ergeben, falls alle Ordinaten für sich berechnet werden, die Konstanz der Momente also nicht mehr vorausgesetzt wird.

- c) Versuch mit Verschiebungsansätzen für die Elemente I und II, bei denen die Verschiebung längs der Linie EP exakt ist.

$$\text{Element I: } w = \frac{w_P}{b^2} x_2^2 ; w_{,11} = w_{,12} = 0 ; w_{,22} = \frac{2 w_P}{b^2}$$

$$\text{Element II: } w = \frac{w_P}{b^2} x_1^2 ; w_{,22} = w_{,12} = 0 ; w_{,11} = \frac{2 w_P}{b^2}$$

Lineare Ansätze für die Momente wie bei b).

Für  $(\varphi^+ + \varphi^-)$  ergibt sich ein linearer Verlauf längs EP.

$$\text{Punkt E: } \varphi^+ + \varphi^- = 0 ; \text{ Punkt P: } \varphi^+ + \varphi^- = 2\sqrt{2} \frac{w_P}{b} .$$

Damit erhält man:

$$\iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF = \frac{2}{3} c b^2 ; \text{ unverändert gegenüber b)}$$

$$\iint_F w_{,ij} \delta m_{ij} dF = 0 \quad (\text{obwohl } w_{,ij} \text{ nicht überall gleich } 0!)$$

$$\int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M d\sigma = \frac{1}{6} 2\sqrt{2} \frac{w_P}{b} (-1) b\sqrt{2} = -\frac{2}{3} w_P$$

Es ergibt sich das mit (5.9) übereinstimmende Ergebnis:

$$c = -\frac{w_P}{b^2}$$

Wesentlich ist bei diesem Versuch vermutlich der lineare Verlauf von  $(\varphi^+ + \varphi^-)$ !

#### 4. Zusammenfassung

Beispiel b zeigt nochmals auf leicht kontrollierbare Weise, daß es Ansätze gibt, für die der kinematische Teil der Variationsgleichungen falsche Ergebnisse liefert. Die übrigen Beispiele legen die Schlußfolgerung nahe, die Ansätze für  $w$  und  $m_{ij}$  sollten so gewählt werden, daß längs einer Elementkante die Größe  $M$  nicht mehr Freiheitsgrade aufweist als die Größe  $\varphi$ . Beim Herrmannschen Modell und seiner Erweiterung durch V i s s e r [30] ist diese Bedingung erfüllt. Die Polynome für  $M$  und  $\varphi$  haben dort denselben Grad. Aus den Forderungen, daß die Zahl der Momentenparameter größer sein muß als die der Verschiebungsparameter, andererseits der Grad des Momentenansatzes nicht zu hoch werden darf, ergibt sich bei diesen Modellen die Notwendigkeit, den Momentenzustand durch Kantenparameter zu beschreiben.

#### 5.3 Ansätze für das Funktional $F_{2B}$

Die Benutzung des Funktionals  $F_{2B}$  in der Elementmethode wird im folgenden kurz 'Methode B' genannt. Eine wichtige Bedingung für die Ansätze dieser Methode lautet nach (4.12):

$$z_d^v > z_m^v \quad (5.11)$$

Im wesentlichen wird nur eine Ansatzkombination beschrieben und diskutiert. Erst am Schluß des Abschnitts wird ein etwas veränderter Momentenansatz dargestellt, der jedoch zu keinen guten Ergebnissen führt.

Die Methode B wurde bisher, soweit bekannt, nicht angewandt. Das ihr zugrunde liegende Funktional tritt gegenüber dem von Hellinger-Reissner (Methode A) völlig in den Hintergrund. Das liegt wohl daran, daß diese Methode relativ viele Parameter je Element erfordert, da die Zahl der Parameter des Verschiebungsansatzes größer sein muß als die der drei Momentenansätze zusammen. Ohne Ausnutzung der besonderen Gleichungsstruktur, die im folgenden dargestellt wird, ist die Methode deshalb für Rechnungen nach der Kirchhoffschen Theorie nicht zu empfehlen, trotz sehr guten Verschiebungsergebnissen. Für Beispiele, bei

denen Querkraftverformungen berücksichtigt werden sollen, kann die Methode B jedoch mit gutem Erfolg benutzt werden.

### 5.3.1 Die Ansätze für $m_{ij}$ und $w$

Für die Momente  $m_{ij}$  werden lineare Ansätze gewählt, die durch ihre Knotenordinaten festgelegt sind. Es gilt damit:

$$z_m^v = 3$$

Wegender Bedingung (5.11) ist es erforderlich, einen wesentlich höheren Verschiebungsansatz als bisher zu wählen. Der lineare Ansatz wird um 9 Terme erweitert, welche die drei Ableitungen ( $-w,_{ij}$ ) an den einzelnen Elementecken als Parameter benutzen. Die Vergleichszahl  $z_d^v$  ergibt sich zu:

$$z_d^v = 1 + 3 = 4$$

so daß die Bedingung (5.11) erfüllt ist.

Für die Funktion  $w(x_1, x_2)$  erhält man ein Polynom vierten Grades mit 12 Parametern, die von den Größen  $w, -w,_{11}, -w,_{12}$  und  $-w,_{22}$  der drei Elementecken gebildet werden. Ein drehinvariantes Polynom vierten Grades hat jedoch 15 Freiwerte. Die drei überzähligen werden so festgelegt, daß die Biegelinien der Elementkanten von Polynomen nur dritten Grades dargestellt werden und deshalb durch die Verschiebungen und zweiten Ableitungen der Kantenendpunkte festgelegt sind. Dadurch wird beim Zusammenbau der Elemente die Kontinuität der Durchbiegungen gewährleistet. Die Kontinuität der Querneigungen ist allerdings sowohl an den Elementkanten als auch an den Knotenpunkten verletzt.

Werden die Querkraftverformungen vernachlässigt, dann sind die Ableitungen  $-w,_{ij}$  mit den Krümmungen  $\kappa_{ij}^w$  identisch. Verläuft weiterhin die Plattensteifigkeit elementweise linear und an den Kanten kontinuierlich, dann sind an den Knotenpunkten neben den Krümmungen  $\kappa_{ij}^w$  auch die Momente  $m_{ij}^w$  kontinuierlich.

Der endgültige 12-parametrische Ansatz für  $w$  lautet in den Dreieckskoordinaten  $\lambda_i$  (siehe Anhang):

$$\begin{aligned}
 w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_1^2 \lambda_2 + a_3 \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3 + a_4 \lambda_1^2 \lambda_3 \\
 & + a_5 \lambda_2 + a_6 \lambda_2^2 \lambda_3 + a_7 \lambda_2^2 \lambda_3 \lambda_1 + a_8 \lambda_2^2 \lambda_1 \\
 & + a_9 \lambda_3 + a_{10} \lambda_3^2 \lambda_1 + a_{11} \lambda_3^2 \lambda_1 \lambda_2 + a_{12} \lambda_3^2 \lambda_2
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Dieser Ansatz wurde aus dem dreihinvarianten Polynom dritten Grades mit 10 Parametern entwickelt. Die Terme mit  $\lambda_i$  ersetzen die Terme mit  $\lambda_i^3$  (siehe Anhang). Als Erweiterung wurden die drei Terme vierten Grades hinzugefügt, die an den Elementkanten die Durchbiegung  $w$  nicht verändern. Sie enthalten den Term  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ , so daß dieser gestrichen werden konnte.

Die Ansatzkonstanten  $a_i$  müssen nun in den gewünschten Knotenparametern ausgedrückt werden, was bei Benutzung von Dreieckskoordinaten meist direkt und ohne Verwendung von Kehrmatrizen möglich ist. Es empfiehlt sich, diese Umrechnungen erst am Schluß einer Elementberechnung durchzuführen.

### 5.3.2 Die Berücksichtigung der Querkraftverformungen

Werden beim gewählten Ansatz die Querkraftverformungen mit den Vereinfachungen des Abschnitts 3.6 berücksichtigt, dann ergeben sich Momente  $m_{ij}^w$ , die nicht mehr allein von den zweiten Ableitungen der Verschiebungen abhängen (siehe Formeln (3.41) bis (3.43)) und deshalb auch an den Knotenpunkten diskontinuierlich sind. Um dies zu vermeiden, wird angenommen, daß die Querkräfte  $q_1^w$  innerhalb der einzelnen Elemente näherungsweise konstant sind und daß Flächenlasten  $\hat{p}$  indirekt als Linienlasten an den Bereichsgrenzen eingeleitet werden. Bei der Berechnung der Krümmungen  $\kappa_{ij}^w$  und Momente  $m_{ij}^w$  mit Hilfe der Gleichungen (3.42) und (3.43) entfallen dann alle Terme, die vom Einfluß der Querkraftverformungen herrühren. Dieser Einfluß wird praktisch auf Knicke der Biegefläche an den Bereichsgrenzen konzentriert, die

von den Querkraftsprüngen verursacht werden. Zur Veranschaulichung kann der Balken unter Einzellasten herangezogen werden, der ebenfalls bereichsweise konstante Querkräfte aufweist und bei dem die Biegelinie infolge Querkrafteinfluß die Form eine Polygons hat.

Zur Realisierung der genannten Näherung wird zwischen den Knotenordinaten  $m_{ij}^{w(k)}$  anstelle des exakten quadratischen Verlaufs ein elementweise linearer Momentenverlauf angenommen. Die daraus berechenbaren konstanten Querkräfte werden ausschließlich zur Ermittlung des Querkrafteinflusses auf die Verschiebungen benutzt.

Dieses Vorgehen stellt eine Näherung dar, für deren Zulässigkeit keine Beweise erbracht werden, die sich jedoch bei praktischen Rechnungen als sehr brauchbar erweist.

### 5.3.3 Das Funktional $F_{2B}$

Im Funktional  $F_{2B}$  können folgende Kontinuitätseigenschaften der Ansätze berücksichtigt werden:

$$\left. \begin{aligned} w^+ &= w^- = w \\ M^+ &= M^- = M \\ T^+ &= T^- = T \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Damit ergibt sich nach Gleichung (3.21):

$$\begin{aligned} F_{2B} = & + \frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^w \kappa_{ij}^w dF + \frac{1}{2} \iint_F q_i^w \gamma_i^w dF \\ & - \iint_F \hat{\beta} w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{s_M} \hat{M} \varphi ds + \int_{s_T} \hat{T} \psi ds - \int_{s_Q} \hat{Q} w ds \\ & + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M ds + \int_{s_\psi} (\psi - \hat{\psi}) T ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) Q ds \\ & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) M d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) T d\sigma \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die zugehörige Variationsgleichung in ihren verschiedenen Formen erhält man aus den Gleichungen (3.23), (3.24) und (3.25). Dabei gilt für den linearen Momentenansatz

$$m_{ij, ij} \equiv 0$$

Vernachlässigt man die Querkraftverformungen, so ergibt sich mit den Formeln des Abschnitts 3.5 unter der Voraussetzung, daß  $\hat{w}$  an den Endpunkten von  $s_w$  mit  $w$  übereinstimmt und  $\hat{T}$  stetig und an den Endpunkten von  $s_V$  gleich Null ist, folgende Formel für das Funktional  $F_{2B}$ :

$$\begin{aligned} F_{2B} = & -\frac{1}{2} \iint_F m_{ij}^w w_{, ij} dF \\ & - \iint_F \hat{p} w dF - \sum_k \hat{P}_k w_k + \int_{s_M} \hat{M} \varphi ds - \int_{s_V} \hat{V} w ds \\ & + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) V ds + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) M d\sigma \end{aligned} \quad (5.15)$$

#### 5.3.4 Untersuchung des Gleichungssystems für die Parameter

Das mit Hilfe der Variationsgleichung für die unbekanntenen Parameter aufstellbare Gleichungssystem ist sehr schwach besetzt. Bei der Betrachtung seiner Struktur empfiehlt es sich, den Vektor  $\mathbf{d}$  der Verschiebungsparameter in einen Vektor  $\mathbf{w}$  der Knotenverschiebungen und einen Vektor  $\mathbf{z}$  der Knotenkrümmungen aufzuteilen.

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

Diese Aufteilung ist nur sinnvoll, weil bei dem gewählten Ansatz infolge des Fehlens von Parametern, die Plattenneigungen darstellen, Starrkörperverschiebungen und Verschiebungszustände mit Krümmungen getrennt werden können.

Weiterhin werden wie im Abschnitt 5.2.2 die Momentenparameter  $m$  mit Hilfe der Elastizitätsgleichungen auf Krümmungsparameter  $z^m$  umgerechnet. Damit wird ein Vergleich zwischen  $\kappa_{ij}^w$  und  $\kappa_{ij}^m$  erleichtert.

Das Gleichungssystem für die unbekannt Parameter hat mit diesen Vereinbarungen folgendes Aussehen:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{C}_1 \mathbf{z} + \mathbf{C}_2 \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{0} & \text{(a) aus Variation von } \mathbf{z}^m \\ \mathbf{C}_1^T \mathbf{z}^m + \mathbf{H} \mathbf{z} &= -\hat{\mathbf{p}}_1 - \mathbf{0} & \text{(b) aus Variation von } \mathbf{z} \\ \mathbf{C}_2^T \mathbf{z}^m &= -\hat{\mathbf{p}}_2 - \mathbf{0} & \text{(c) aus Variation von } \mathbf{w} \end{aligned} \right\} (5.17)$$

Die auftretenden Matrizen sind wie folgt definiert (vergleiche mit  $\delta F_{2B}$  nach (3.25)):

$$+ \iint_F m_{ij}^W \delta \kappa_{ij}^W dF + \iint_F q_i^W \delta \gamma_i^W dF = \bar{\mathbf{z}}^T \mathbf{H} \mathbf{z} ; \quad \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M ds + \int_{S_\psi} (\psi - \hat{\psi}) \delta T ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) \delta Q ds \\ & + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M d\sigma + \int_{\sigma} (\psi^+ + \psi^-) \delta T d\sigma = \bar{\mathbf{z}}^m T (\mathbf{C}_1 \mathbf{z} + \mathbf{C}_2 \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}}) \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} & \int_{S_\varphi} M \delta \varphi ds + \int_{S_\psi} T \delta \psi ds - \int_{S_w} Q \delta w ds + \int_{\sigma} M \delta (\varphi^+ + \varphi^-) d\sigma + \int_{\sigma} T \delta (\psi^+ + \psi^-) d\sigma \\ & - \iint_F \hat{\mathbf{p}} \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k + \int_{S_M} \hat{M} \delta \varphi ds + \int_{S_T} \hat{T} \delta \psi ds - \int_{S_Q} \hat{Q} \delta w ds \\ & = \bar{\mathbf{z}}^T (\mathbf{C}_1^T \mathbf{z}^m - \hat{\mathbf{p}}_1) + \bar{\mathbf{w}}^T (\mathbf{C}_2^T \mathbf{z}^m - \hat{\mathbf{p}}_2) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Die Kontinuitätseigenschaften der Ansätze ermöglichen es, das Gleichungssystem (5.17) aus reinen Elementmatrizen aufzubauen. Eine Berechnung von Kantenmatrizen ist nicht erforderlich. Das System ist symmetrisch und sehr schwach besetzt. Zu beachten ist, daß  $\mathbf{w}$  nur etwa ein Drittel der Komponenten von  $\mathbf{z}$  oder  $\mathbf{z}^m$  enthält. Die Zahl der Komponenten in  $\mathbf{z}$  und  $\mathbf{z}^m$  ist gleich, da bei den vorausgesetzten Vereinfachungen für den Querkraftverlauf überall dort, wo unbekannte Krümmungen auftreten, auch unbekannte Momente vorhanden sind, und

umgekehrt. Damit ist  $\mathbf{C}_1$  eine quadratische Matrix, und die Verträglichkeitsgleichung (a) kann dazu benutzt werden, den mit den Knotenverschiebungen  $w_k$  verträglichen Krümmungszustand  $\kappa_{ij}$  zu berechnen. Man erhält:

$$\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{C}_2 \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}}) \quad (\text{a}')$$

Multipliziert man (b) mit  $-\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T}$  vor und addiert die Gleichung zu (c), so entfällt  $\boldsymbol{\kappa}^m$ , und es ergibt sich:

$$-\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \mathbf{H} \boldsymbol{\kappa} - (-\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2) = \mathbf{0} \quad (\text{c}')$$

Setzt man nun (a') in (c') ein, so entsteht eine Gleichung für  $\mathbf{w}$  :

$$\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \mathbf{H} \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{w} - (-\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \mathbf{H} \mathbf{C}_1^{-1} \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{0} \quad (\text{c}'')$$

Diese Gleichung läßt sich auf eine Form bringen, wie sie bei der Verschiebungsmethode üblich ist:

$$\mathbf{K} \mathbf{w} - \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

mit

$$\mathbf{K} = \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \mathbf{H} \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2 ; \quad \mathbf{K}^T = \mathbf{K} ; \quad \hat{\mathbf{p}} = -\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2 + \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \mathbf{H} \mathbf{C}_1^{-1} \hat{\mathbf{v}} \quad (5.22)$$

$\mathbf{K}$  ist hierbei die Steifigkeitsmatrix der Platte.

Man kann also die Lösung des gesamten Gleichungssystems dadurch erhalten, daß man hintereinander die Gleichungen (c''), (a) und (b) löst. Infolge seiner besonderen Struktur läßt sich damit das Gleichungssystem sehr leicht in kleinere Systeme aufteilen. Die einzelnen Lösungen lauten:

$$\mathbf{w} = \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} \quad (5.23)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = -\mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{C}_2 \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}}) = -\mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{C}_2 \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{v}}) \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}^m &= -\mathbf{C}_1^{-1T} (\mathbf{H} \boldsymbol{\kappa} - \hat{\mathbf{p}}_1) \\ &= +\mathbf{C}_1^{-1T} \mathbf{H} \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{C}_2 \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{C}_1^{-1T} \hat{\mathbf{p}}_1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Gleichung (c'') bzw. (5.21) stellt die Gleichgewichtsbedingungen für einen im Sinne von Gleichung (a) verträglichen Verschiebungsansatz mit den Parametern  $\mathbf{w}$  dar. Um dies zu zeigen, schreibt man zunächst (b) und (c), die den Gleichgewichtsteil des Gleichungssystems (5.17) darstellen, unter Einschluß der Variationsgrößen an

$$\bar{\mathbf{z}}^T \left( \mathbf{C}_1^T \mathbf{z}^m + \mathbf{H} \mathbf{z} - \hat{\mathbf{p}}_1 \right) + \bar{\mathbf{w}}^T \left( \mathbf{C}_2^T \mathbf{z}^m - \hat{\mathbf{p}}_2 \right) = \sigma$$

$\bar{\mathbf{z}}$  ist nicht unabhängig, sondern hängt von  $\bar{\mathbf{w}}$  nach Gleichung (a') ab (Verträglichkeitsbedingung!).

$$\bar{\mathbf{z}} = -\mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{C}_2 \bar{\mathbf{w}} \quad \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{z}}^T = -\bar{\mathbf{w}}^T \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T}$$

Damit erhält man

$$\bar{\mathbf{w}}^T \left( -\cancel{\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \mathbf{C}_1^T} \mathbf{z}^m - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \mathbf{H} \mathbf{z} + \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^{-1T} \hat{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{C}_2^T \mathbf{z}^m - \hat{\mathbf{p}}_2 \right) = \sigma$$

Für beliebiges  $\bar{\mathbf{w}}$  entspricht diese Gleichung der Gleichung (c') und nach Einsetzung von (a') der Gleichung (c'').

An diesem Beispiel wird deutlich, daß bei Methode B praktisch aus einem unverträglichen Verschiebungsansatz näherungsweise ein verträglicher Ansatz gewonnen wird, für den dann in der üblichen Weise die Steifigkeitsmatrix berechnet wird. Offensichtlich ist die Güte der Verträglichkeitsbedingung hierbei von großer Bedeutung.

Auf eine wichtige Besonderheit muß noch hingewiesen werden: Für eine bestimmte Elementaufteilung wird das Gleichungssystem singulär! Im kinematischen Teil des Systems entstehen linear abhängige Gleichungen. Betrachtet man diesen, z. B. in der Form (3.25), so erkennt man, daß bei Einführung der vorhandenen Kontinuitäten des Ansatzes und bei Vernachlässigung der Querkraftverformungen die Variation von  $m_{ij}$  an einem Innenknoten  $k$  sich nur im Term

$$\int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta M \, d\sigma$$

auswirkt. Stoßen nun in  $k$  nur 4 Elemente zusammen, wobei jeweils zwei ihrer gemeinsamen Kanten eine Gerade bilden, dann erzeugt jeder

der drei Zustände  $\delta m_{ij}^{(k)} = 1$  einen Zustand  $\delta M$ , der durch 2 Ordinaten in  $k$ , eine je durchlaufende Kante, festgelegt ist. Dies bedeutet aber, daß der  $\delta M$ -Verlauf des dritten Zustandes  $\delta m_{ij}^{(k)} = 1$  durch Linearkombination der  $\delta M$ -Verläufe der beiden andern Einheitszustände erzeugt werden kann, was zu einer linear abhängigen Gleichung im Gleichungssystem führt. Ursache für diese unschöne Möglichkeit ist die Tatsache, daß bei der Herleitung des Funktionals  $F_{2B}$  die Kantengrößen  $M$  und  $T$  aus verschiedenen, jedoch nicht zwingenden Gründen (siehe Abschnitt 3. 3. 2) nicht für sich belassen, sondern einem im Funktional selbst nicht explizit vorkommenden Momententensor  $m_{ij}$  zugeordnet werden. In der Variationsrechnung ist dies unbedenklich, bei der Anwendung in der Elementmethode kann es jedoch zur genannten Singularität führen. Da im Durchschnitt 6 Dreieckelemente an einem Knoten zusammenstoßen, sind die möglichen Schwierigkeiten leicht zu umgehen.

### 5. 3. 5 Allgemeine Angabe von Ergebnissen

Numerische Angaben über die Ergebnisse von Beispielrechnungen erfolgen in Kapitel 7. In diesem Abschnitt folgen allgemeine Erläuterungen zu Beispielen, die ohne Berücksichtigung von Querkraftverformungen gerechnet wurden.

Gleichung (a) erweist sich als gut geeignet, aus vorgegebenen Knotenverschiebungen die zugehörigen Krümmungen zu berechnen. Benutzt man die Gleichungen (a) und (c') zur Berechnung eines Plattensystems unter äußeren Lasten, so erhält man gute Krümmungen und sehr gute Knotendurchsenkungen. Da man aus den Krümmungen mit Hilfe des Stoffgesetzes Momente berechnen kann, ist die Berechnung der eigentlichen Momente  $m_{ij}$  mit Hilfe von (b) nicht unbedingt erforderlich. Es zeigt sich außerdem, daß diese Momente weniger gut sind als die übrigen Ergebnisse. Zwar konvergieren auch sie gegen die richtigen Werte, doch ist die Güte der Konvergenz sehr stark von der Elementaufteilung abhängig. Man beachte, daß Gleichung (b) von der Variation der Krümmungen  $\kappa_{ij}^W$  herrührt, die nur bezüglich  $\kappa_{tt}^W$  kontinuierlich sind. Ihr Verlauf ist nicht linear und sehr stark von den Elementformen abhängig,

da sie im Gegensatz zu  $\kappa_{ij}^m$  untereinander die bei Kirchhoff-Platten gültige Verträglichkeitsbedingung

$$\kappa_{ij, k} = \kappa_{ik, j} = \kappa_{kj, i}$$

erfüllen.

### 5.3.6 Untersuchungen zur Bewertung der Ergebnisse

Bei der Näherungsberechnung von Funktionen werden Ansätze gemacht, die aus Koordinatenfunktionen und zunächst unbekanntem Parametern bestehen. Dadurch wird die Berechnung von Funktionen auf die Ermittlung von Parametern reduziert.

In der Elementmethode sind diese Parameter keine rein mathematischen Hilfsgrößen, sondern haben eine geometrische oder statische Bedeutung und sind in den meisten Fällen auch örtlich genau festgelegt.

Im vorliegenden Ansatz treten z. B. Knotenverschiebungen, Knotenkrümmungen und Knotenmomente auf. Es fragt sich nun, ob diese direkt ermittelten Größen genauer werden als die aus ihnen mit Hilfe der Ansatzfunktionen berechneten Ordinaten innerhalb der Elemente. Bei den nach Methode B ermittelten Verschiebungen trifft dies offensichtlich zu. Ihre relativen Fehler sind an allen Knotenpunkten gleichmäßig klein, während sie an den übrigen Punkten innerhalb wesentlich größerer Grenzwerte schwanken.

Untersuchungen hierüber führten zu folgender Feststellung:

Die Berechnung der Parameter beider Ansätze kann als Auswertung von Einflußflächen für die von ihnen dargestellten Größen gedeutet werden. Zwar werden auch die Einflußflächen mit Hilfe der unvollkommenen Verschiebungsansätze erzeugt, doch gleichen sich deren Fehler im Falle von Flächenlasten bei der Integration weitgehend aus. Die Parameter gewählten Ordinaten weisen deshalb eine höhere und gleichmäßigere Genauigkeit auf als die übrigen Funktionsordinaten, die durch die gewählten Interpolationsfunktionen (Ansatzfunktionen) festgelegt sind. Damit scheint die Methode - Flächenlasten vorausgesetzt - mehr

die Genauigkeit von bestimmten Einzelordinaten als die von Funktionsverläufen anzustreben. Aus diesen Überlegungen ergibt sich weiterhin, daß die Ergebnisse für Verschiebungen genauer werden müssen als jene für Krümmungen oder Momente, da die zugehörigen Einflußflächen einfacher und vom Verschiebungsansatz besser darstellbar sind.

Diese Feststellungen werden zunächst nur für den betrachteten Ansatz gemacht, doch können sie mit gewissen Einschränkungen auf alle Ansätze für das Funktional  $F_{2B}$  übertragen werden. Sie gelten jedoch nicht beim Funktional  $F_{2A}$ , da bei diesem die Deutung der Ergebnisse als Einflußflächenauswertungen nicht möglich ist. Beim Herrmannschen Modell werden z. B. die Knotenverschiebungen keineswegs besonders genau!

Das Potential  $\Pi$  mit seinen reinen, verträglichen Verschiebungsansätzen stellt einen Sonderfall des Funktionals  $F_{2B}$  dar. Die Genauigkeit der sich bei Beispielen mit Flächenlasten ergebenden Verschiebungsparameter stellt auch hier kein Maß für die Genauigkeit der gesamten Biegefläche dar. Diese wird deshalb leicht überschätzt. Demzufolge fällt die Genauigkeit von Schnittgrößen, die durch Ableitung der Verschiebungsfunktion gewonnen werden, sehr stark ab, da sich hier gemäß Gleichung (4.17) die Fehlerschwankungen bei der Biegefläche auch an den Knotenpunkten auswirken. In diesem Zusammenhang sei nochmals darauf hingewiesen, daß bei einer Biegefläche mit konstantem relativem Fehler  $\beta$  auch die Ableitungen diesen Fehler, und keinen größeren, aufweisen (siehe Abschnitt 4.6, Gleichung (4.18)).

Die Berechnung der erwähnten Einflußflächen und ihre Auswertung soll nun kurz dargestellt werden.

Die Einflußflächen für die Knotenverschiebungen  $w_k$  gewinnt man, indem man auf den Knoten  $k$  jeweils die Last 1 aufbringt. Bei  $z_w$  unbekanntem Knotenverschiebungen müssen also  $z_w$  Einheitslastfälle berechnet werden. Im Gleichungssystem (5.17) ist deshalb  $\hat{p}_2$  durch die Einheitsmatrix  $E$  der Ordnung  $z_w$  zu ersetzen,  $\hat{p}_1$  und  $\hat{v}$  werden zu Nullmatrizen mit

$z_w$  Spalten. Damit erhält man mit den Gleichungen (5.22) bis (5.24)

$$\mathbf{w}_E = \mathbf{K}^{-1}$$

$$\mathbf{z}_E = -\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_2 \mathbf{K}^{-1}$$

Die Lösungsvektoren haben  $z_w$  Spalten. Der Index E soll darauf hinweisen, daß sie Einflußflächen beschreiben. Für die Auswertung der Einflußfläche  $w_E^{(j)}$  der Verschiebung des Punktes j gilt:

$$w_j = \iint_F \hat{\beta} w_E^{(j)} dF + \sum_k \hat{P}_k w_{kE}^{(j)} - \int_{s_M} \hat{M} \varphi_E^{(j)} ds - \int_{s_T} \hat{T} \psi_E^{(j)} ds + \int_{s_Q} \hat{Q} w_E^{(j)} ds$$

Mit (5.20) erhält man daraus den Vektor  $\mathbf{w}_A$  aller Verschiebungen  $w_j$ :

$$\mathbf{w}_A = + \mathbf{z}_E^T \hat{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{w}_E^T \hat{\mathbf{p}}_2 = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_1^T \hat{\mathbf{p}}_1 + \mathbf{K}^{-1} \hat{\mathbf{p}}_2$$

Durch Vergleich mit der Lösung  $\mathbf{w}$  des Gleichungssystems (5.17), wie sie sich mit (5.23) und (5.22) ergibt, erhält man:

$$\mathbf{w}_A = \mathbf{w}$$

Die Berechnung der Knotenverschiebungen  $\mathbf{w}$  entspricht also einer Einflußflächenauswertung. In ähnlicher Weise kann man dies auch für die Berechnung von  $\mathbf{z}_E$  und  $\mathbf{z}_E^m$  zeigen. Im System (5.17) brauchen dafür nur die Vektoren  $\hat{\mathbf{p}}_1$  bzw.  $\hat{\mathbf{V}}$  durch Einheitsmatrizen der Ordnung  $z_m$  ersetzt zu werden. Dieses Vorgehen bei  $\mathbf{z}_E^m$  kann mit dem Satz von Land begründet werden, der jedoch für die Plattenberechnung und die Elementmethode etwas umformuliert werden muß. Auf eine ausführliche Darstellung wird hier verzichtet.

### 5.3.7 Änderung des Momentenansatzes

Der Krümmungsanteil des Verschiebungsansatzes kann theoretisch als Grundlage für einen weiteren Momentenansatz dienen. Dieser Ansatz ist nicht mehr linear, benutzt jedoch dieselben Parameter wie der lineare Ansatz. Bezüglich M und T ist er an den Kanten außerhalb der Knotenpunkte nicht kontinuierlich. Außerdem gilt i.a.

$$m_{ij, ij} \neq 0$$

Die Verträglichkeit der Krümmungen  $\kappa_{ij}^m$  untereinander

$$\kappa_{ij, k}^m = \kappa_{ik, j}^m$$

innerhalb der Elemente verursacht ihren nichtlinearen Verlauf und eine starke Abhängigkeit von der Form des jeweiligen Elements. Bei der Benutzung dieses Ansatzes muß man auf die ursprüngliche Variationsgleichung (3.24) bzw. (3.25) zurückgehen. Die Berechnung von Kantenmatrizen wird erforderlich (siehe Abschnitt 4.3). Im Gleichungssystem (5.17) bleibt die Struktur erhalten, doch ändern sich die Matrizen  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$  und  $\hat{\mathbf{v}}$ .

Die Ergebnisse von Rechenbeispielen fallen sehr schlecht aus. Benutzt man die entsprechend abgeänderte Gleichung (5.17 a) zur Berechnung der Krümmungen für vorgegebene Knotenverschiebungen, so erhält man auch hierbei völlig falsche Ergebnisse.

### 5.3.8 Nebenbetrachtung: Fehlerquadratminimum

Ein - mißlungener - Versuch, Verträglichkeitsgleichungen für den Verschiebungsansatz (5.12) mit Hilfe der Methode des Fehlerquadratminimums herzuleiten, soll hier noch kurz erwähnt werden.

Bei Vernachlässigung der Querkraftverformungen treten Verträglichkeitsfehler im genannten Ansatz nur in den Querneigungen  $\varphi$  auf. Das Fehlerquadrat lautet:

$$E(\mathbf{w}, \mathbf{\kappa}) = \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi})^2 ds + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-)^2 d\sigma$$

Minimiert man E bezüglich der Krümmungen  $\mathbf{\kappa}$ , so ergibt sich:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{\kappa}} = \mathbf{L} \mathbf{\kappa} + \mathbf{N} \mathbf{w} - \hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie (5.17 a). Im Gegensatz zu (5.17 a) führt sie jedoch bei Vorgabe eines bekannten Verschiebungszustandes  $\mathbf{w}$  zu völlig falschen Krümmungen  $\mathbf{\kappa}$ . Im vorliegenden Fall versagt also die Methode des Fehlerquadratminimums. Demgegenüber konvergiert der mit Hilfe von (5.17 a) ermittelte Krümmungszustand

gegen den exakten Zustand, obwohl das zugehörige Quadrat der Querneigungsdifferenzen nicht dem jeweiligen Minimum entspricht. Der einzige, offenbar wesentliche Unterschied zwischen den beiden benutzten kinematischen Gleichungen besteht in der Gewichtung der Querneigungsfehler.

#### 5. 4 Modifizierte Ansätze

##### 5. 4. 1 Allgemeines

Das im Abschnitt 5. 2. 2 beschriebene Modell 2 erwies sich ebenso wie der im Abschnitt 5. 3. 7 angegebene Ansatz als unbrauchbar, obwohl beide die Nebenbedingungen des jeweiligen Variationsprinzips erfüllten.

Für das Modell 2 werden im folgenden mögliche Verbesserungen des Ansatzes gezeigt. Das Modell lieferte bisher nur sehr schlechte Ergebnisse. Als Ursache hierfür wurde die Diskrepanz zwischen dem groben Verschiebungsansatz und den relativ hohen Momentenansätzen angesehen, die sich vor allem in den kinematischen Gleichungen nachteilig auswirkte. Sie ist daran erkennbar, daß einem überall verschwindenden  $\kappa_{ij}^w$  ein  $\kappa_{ij}^m$  mit elementweise linearem Verlauf gegenübersteht (bei konstanter Plattensteifigkeit).

Folgende Überlegungen werden nun angestellt: Der lineare ursprüngliche Verschiebungsansatz  $w^u$ , dessen Krümmungen Null sind, wird durch einen Zusatzansatz  $w^z$  ergänzt, der so beschaffen ist, daß er die Differentialgleichung

$$\kappa_{ij}^z - \kappa_{ij}^m = 0 \quad (5. 26)$$

an einzelnen Punkten oder im Mittel erfüllt.  $w^z$  enthält deshalb ausschließlich Parameter des Momentenansatzes, und der Gesamtansatz

$$w = w^u + w^z \quad (5. 27)$$

erfüllt nun von vornherein einen Teil der Verträglichkeitsbedingungen, so daß die erwähnte Diskrepanz zwischen den Ansätzen wesentlich gemildert ist. Die Gesamtzahl der unbekannt Parameter wird dabei nicht erhöht, da in  $w^z$  nur bisher schon vorhandene Parameter benutzt werden.

Wesentlich an der vorgeschlagenen Methode ist nun, daß  $w^z$  zwar zur besseren Beschreibung der Verschiebungen selbst benutzt wird, nicht

jedoch bei deren Variation. Es wird festgelegt:

$$\delta w^z \equiv 0 \text{ bzw. } \delta w \equiv \delta w^u \quad (5.28)$$

Die Beschränkung von  $\delta w$  auf  $\delta w^u$  ist erforderlich, da die Variation von  $w^z$  eine unerwünschte Vermischung von kinematischen und statischen Gleichungen verursachen würde. Als Folge dieser Festlegung wird das Gesamtsystem unsymmetrisch, und das Funktional hat an der Stelle der so berechneten Lösung keinen Stationärwert. Trotzdem sind die Ergebnisse bei den gewählten Beispielen sehr gut.

Das hier beschriebene Verfahren wurde ursprünglich als Verbesserung des Modells 2 konzipiert, also in Anwendung auf die Variationsgleichung  $\delta F_{2A} = 0$ . Es ist jedoch auch auf die Variationsgleichung  $\delta F_{2B} = 0$  anwendbar, da die im allgemeinen Schema (4.2) auftretende Matrix wegen  $w^z$  nicht mehr identisch verschwindet und damit das Kriterium (5.11) entfällt. Beide Anwendungen werden im folgenden dargestellt und in Anlehnung an die bisherigen Bezeichnungen Methode A\* bzw. Methode B\* genannt.

Bei Berücksichtigung der Querkraftverformungen werden für  $w^z$  dieselben Näherungen wie im Abschnitt 5.3.2 eingeführt, so daß die Krümmungen  $\kappa_{ij}^z$  immer gleich den Ableitungen ( $-w_{,ij}^z$ ) sind.

#### 5.4.2 Drei mögliche Zusatzansätze

Im folgenden werden drei Ansätze  $w^{zi}$  genannt, deren Knotenordinaten Null sind und die die Differentialgleichung (5.26) zusammen mit den linearen Momentenansätzen auf verschiedene Weise, jedoch nie vollständig, erfüllen. Zu beachten ist, daß nur im Sonderfall konstanter Plattendicke auch die Krümmungen  $\kappa_{ij}^m$  elementweise linear verlaufen. Für den ersten Ansatz,  $w^{z1}$ , wird der Krümmungsanteil des Ansatzes (5.12) gewählt. Mit ihm kann (5.26) an den Knotenpunkten erfüllt werden. Er enthält zwar Glieder vierten Grades, doch verläuft  $w_{,tt}$  längs der Kanten linear, so daß dort im Sonderfall konstanter Plattendicke zusätzlich die Gleichung

$$w_{,tt}^z + \kappa_{tt}^m = 0 \quad (5.29)$$

erfüllt ist.

Als zweiter Ansatz,  $w^{z2}$ , wird ein kubisches Polynom gewählt. Es erfüllt (5.29) an den Kantenenden und bei konstanter Plattendicke auch längs aller Elementkanten.

Der dritte Ansatz,  $w^{z3}$ , ist ein quadratisches Polynom. Seine Krümmungen sind innerhalb eines Elements konstant. Sie werden so gewählt, daß  $-w_{,tt}^{z3}$  in Kantenmitte jeweils gleich dem Mittel aus den Krümmungen  $\kappa_{tt}^m$  der beiden Kantenenden ist.

Alle drei Ansätze garantieren wie die bisher verwendeten Verschiebungsansätze die Kontinuität von  $w$  an den Elementgrenzen.

#### 5.4.3 Die Methode A\*

Die Variationsgleichung zu Methode A\* erhält man aus der Variationsgleichung für das Funktional  $F_{2A}$ , indem man die Gleichung (5.28) und die erweiterten Kontinuitätseigenschaften der Ansätze berücksichtigt. Nimmt man an, daß die kontinuierlichen Größen  $M$ ,  $T$  und  $w$  auch die Randbedingungen befriedigen können, und vernachlässigt man die Querkraftverformungen, so erhält man aus (3.17) und (3.18):

$$\begin{aligned}
 & - \iint_F m_{ij} \delta w_{,ij}^u dF - \iint_F \hat{p} \delta w^u dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k + \int_{s_M} \hat{M} \delta \varphi^u ds - \int_{s_V} \hat{V} \delta w^u ds \\
 & + \int_{s_\varphi} M \delta \varphi^u ds + \int_\sigma M \delta (\varphi^{u+} + \varphi^{u-}) d\sigma \\
 & - \iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF - \int_{s_\varphi} \hat{\varphi} \delta M ds + \int_{s_w} \hat{w} \delta V ds \\
 & - \iint_F w \delta m_{ij,ij} dF + \int_{s_V} w \delta V ds + \int_\sigma w \delta (V^+ + V^-) d\sigma = 0
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Bezeichnet man in der Variationsgleichung (5.6) für Modell 2 die lineare Verschiebungsfunktion ebenfalls mit  $w^u$  und bringt sie mit Hilfe von (2.24) auf eine der Gleichung (5.30) entsprechende Form, so erkennt man, daß die statischen Teile der Gleichung identisch sind, während im kinematischen Teil von (5.30) der Zusatzansatz  $w^z$  wirksam wird.

Mit (5.27) lautet die Differenz  $D$  der linken Seiten beider Gleichungen bei verschwindendem  $m_{ij, ij}$ :

$D \equiv$  linke Seite von (5.30) - linke Seite von (5.6)

$$= \int_{s_V} w^Z \delta V ds + \int_{\sigma} w^Z \delta (V^+ + V^-) d\sigma \quad (5.31)$$

Die Zusatzansätze  $w^{z1}$  und  $w^{z2}$  haben denselben Verschiebungsverlauf längs der Kanten, während  $w^{z3}$  mit ihnen nur im Integral  $\int_{\text{Anfang}}^{\text{Ende}} w^Z dt$  an jeder Kante übereinstimmt. Da bei linearen Momentenansätzen die Ersatzerkraft  $V$  kantenweise konstant ist, genügt jedoch diese Übereinstimmung, um für alle drei Ansätze dasselbe  $D$  und damit auch dieselben Resultate für das Gesamtsystem (5.30) zu erzeugen. In Matrixschreibweise lautet dieses Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} (-\mathbf{M} + \mathbf{D}) \mathbf{z}^m + \mathbf{C}_2 \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2^T \mathbf{z}^m - \hat{\mathbf{p}}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Die Matrizen  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\hat{\mathbf{v}}$  und  $\hat{\mathbf{p}}_2$  haben dieselbe Bedeutung wie bisher und sind in (5.8) dargestellt. Die Matrix  $\mathbf{D}$  entsteht aus der Differenz  $D$  und ist damit wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} D &= \int_{s_V} w^Z \delta V ds + \int_{\sigma} w^Z \delta (V^+ + V^-) d\sigma = \iint_{\Gamma} w^Z_{ij} \delta m_{ij} d\Gamma + \int_{s_{\varphi}} \varphi^Z \delta M ds \\ &+ \int_{\sigma} (\varphi^{z+} + \varphi^{z-}) \delta M d\sigma = \bar{\mathbf{z}}^m{}^T \mathbf{D} \mathbf{z}^m \end{aligned} \quad (5.33)$$

Die Asymmetrie von  $\mathbf{D}$  verursacht die Asymmetrie des gesamten Gleichungssystems.

Ergebnisse von Beispielrechnungen für das verbesserte Modell 2 (Methode A\*) sind im Kapitel 7 angegeben. Sie zeigen bei allen betrachteten Größen eine praktische Konvergenz gegen die exakten Werte und sind auch absolut gesehen recht gut. Die Knotenverschiebungen sind wesentlich besser als beim Herrmannschen Modell, die Momente etwa ebenso gut. Ein Vergleich ist bei ihnen wegen der Verschiedenheit der gewählten Parameter schwierig. Die Ausgabe von Knotenordinaten auch bei den Momenten stellt jedoch einen beachtlichen Vorteil des Modells 2 dar.

Es ist somit gelungen, ohne Mehraufwand und vor allem ohne Erhöhung der Zahl der Unbekannten, durch Modifizierung des Verschiebungsansatzes bei unveränderten Variationszuständen die Berechnungen für das Modell 2 so wesentlich zu verbessern, daß sich gute Konvergenztendenzen zeigen.

#### 5.4.4 Die Methode B\*

Für die Kontinuitätseigenschaften der vorgesehenen Ansätze (M, T und w sind an den Elementrändern kontinuierlich) und die weitere Annahme, daß die vorgegebenen Randgrößen  $\hat{M}$ ,  $\hat{T}$  und  $\hat{w}$  durch die Ansätze exakt dargestellt werden können, ergibt sich aus den Gleichungen (3.24) und (3.25) bei Vernachlässigung der Querkraftverformungen folgende Gleichung nach Methode B\*:

$$\begin{aligned}
 & - \iint_F m_{ij}^w \delta w_{,ij}^u dF - \iint_F \hat{p} \delta w^u dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k + \int_{s_M} \hat{M} \delta \varphi^u ds - \int_{s_V} \hat{V} \delta w^u ds \\
 & + \int_{s_\varphi} M \delta \varphi^u ds + \int_{\sigma} M \delta (\varphi^{u+} + \varphi^{u-}) d\sigma \\
 & + \iint_F w_{,ij} \delta m_{ij} dF - \int_{s_\varphi} \hat{\varphi} \delta M ds + \int_{s_w} \hat{w} \delta V ds \\
 & - \iint_F w \delta m_{ij,ij} dF + \int_{s_V} w \delta V ds + \int_{\sigma} w \delta (V^+ + V^-) d\sigma = 0
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

Da für den gewählten Ansatz die Ableitung  $w_{,ij}^u$  identisch verschwindet, entfällt im statischen Teil der Gleichung die Verknüpfung zwischen den Verschiebungen w und den Momenten  $m_{ij}$ . Dafür tritt diese Verknüpfung jetzt infolge  $w^z$  im kinematischen Teil der Gleichung auf. Sie ist dort jedoch rein formal und ersetzt nicht die Erfüllung der Gleichung (3.5), die bei Methode B durch den statischen Teil der Variationsgleichungen angenähert wird. Die Erfüllung von (3.5) hängt nun allein von der Wahl der Zusatzansätze  $w^z$  ab. Es ist deshalb nicht verwunderlich, daß die Ansätze  $w^{z2}$  und  $w^{z3}$  im Vergleich mit  $w^{z1}$  zunehmend schlechtere Ergebnisse erzielen. In diese Tendenz fügt sich auch die Tatsache ein, daß

bei  $w^Z = 0$ , also bei Anwendung des Modells 2 auf Methode B, das Gleichungssystem singular wird. Im Gegensatz zu Methode A\* ist also bei Methode B\* auf die Wahl von  $w^Z$  besondere Sorgfalt zu verwenden.

Benutzt man den Zusatzansatz  $w^{Z1}$ , so entsteht mit den in (5.19) und (5.20) definierten Matrizen das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 \mathbf{x}^m + \mathbf{C}_2 \mathbf{w} - \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_2^T \mathbf{x}^m - \hat{\mathbf{p}}_2 &= \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.35}$$

Auch dieses System ist wegen der Asymmetrie von  $\mathbf{C}_1$  nicht symmetrisch. Die mit ihm erzielten Ergebnisse sind gut und entsprechen in ihrer Genauigkeit etwa den Ergebnissen des Ansatzes bei Methode A\* (siehe Kapitel 7).

Ein Vergleich mit dem nicht modifizierten Ansatz (Modell 2) ist nicht möglich, da dieser bei Methode B auf ein singuläres Gleichungssystem führt.

Dagegen bietet sich ein Vergleich mit dem in Abschnitt 5.3 für Methode B benutzten Ansatz an, dem ja  $w^{Z1}$  entlehnt ist. Das Gleichungssystem (5.35) kann als Näherung des Systems (5.17) angesehen werden, die dadurch entsteht, daß man dort  $\mathbf{x}$  gleich  $\mathbf{x}^m$  setzt und demzufolge die aus der Variation von  $\mathbf{x}$  entstehende Gleichung (5.17 b) streicht. Dieser Vorgang verringert die Zahl der Unbekannten je Knoten um drei. Zwar geht in den Ergebnissen die Genauigkeit der Verschiebungen wesentlich zurück, doch ist bei den Momenten kaum ein Unterschied festzustellen. Für den benutzten Gesamtansatz stellt die Methode B\* eine brauchbare Näherung von Methode B dar.

#### 5.4.5 Zusammenfassung zu Abschnitt 5.4

Die modifizierten Ansätze ermöglichen es, bessere Verschiebungsansätze zu benutzen, ohne die Gesamtzahl der Parameter zu erhöhen. Mit der Verwendung von Momentenparametern in den zusätzlichen Verschiebungsansätzen werden schon von vornherein die Differentialbeziehungen zwischen den Momenten und den Verschiebungen wenigstens teilweise

erfüllt. Methode A\* erzielt dadurch bei gegenüber Methode A gleichbleibender Zahl von Unbekannten eine entscheidende Verbesserung der Ergebnisse. Methode B\* ermöglicht es, die Zahl der Unbekannten gegenüber Methode B herabzusetzen, wobei nur die Genauigkeit der Verschiebungen, nicht aber die der Momente beeinträchtigt wird. Für beide Methoden erhält man auch bei Berücksichtigung der Querkraftverformungen gute Ergebnisse.

Die beiden Gleichungssysteme (5.32) und (5.35) unterscheiden sich nur in den Untermatrizen  $(-\mathbf{M} + \mathbf{D})$  und  $\mathbf{C}_1$ .

Die Differenz der linken Seiten der zugehörigen Gleichungen (5.30) und (5.34) lautet:

$$J = - \iint_F (\kappa_{ij}^m + w_{,ij}) \delta m_{ij} dF$$

J ist umso kleiner, je besser mit  $w^Z$  die Differentialgleichung (5.26) erfüllt werden kann!

Einen gewissen Nachteil der Methoden bedeutet die teilweise Asymmetrie der Gleichungssysteme. Die Variation von  $w^Z$  würde diesen Umstand beseitigen, jedoch zur Vermischung statischer und kinematischer Terme führen. Entsprechende Versuche an Beispielen schlugen erwartungsgemäß völlig fehl.

## 6. Verschiebungsansätze

Indiesem Kapitel werden einige nicht voll verträgliche Verschiebungsansätze für Dreieckelemente untersucht. Dabei wird nicht nur das Funktional  $F_1$  benutzt, sondern auch, wie im Schrifttum üblich (siehe z. B. [32]), das streng genommen für derartige Ansätze nicht anwendbare Potential  $\Pi$ . (In der Literatur wird zur Berechnung einer Steifigkeitsmatrix anstelle des Potentials  $\Pi$  häufig der zweite Castiglianosche Satz benutzt. Beide Methoden unterscheiden sich nur in der Ermittlung der Lastspalten.)

Den Untersuchungen vorangestellt werden Herleitungen von Näherungen des Funktionals  $F_1$ , die keine Berechnung von Kantenmatrizen erfordern, und die Angabe einer einfachen Methode zur nachträglichen Ermittlung von Momenten aus Verschiebungen.

In allen Gleichungen dieses Kapitels werden die Querkraftverformungen vernachlässigt.

### 6.1 Das Funktional $F_1$ und seine Näherungen

Bei geometrisch nicht voll verträglichen Verschiebungsansätzen ist streng genommen die Benutzung des Potentials  $\Pi$  nicht zulässig. An die Stelle von  $\Pi$  muß das Funktional  $F_1$  treten, das die Diskontinuitäten der Ansätze berücksichtigt. Es lautet mit (3.2) und (3.26) unter Vernachlässigung der Querkraftverformungen:

$$F_1 = \Pi + \int_{S_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M \, ds - \int_{S_w} (w - \hat{w}) V \, ds \\ + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \frac{1}{2} (M^+ + M^-) \, d\sigma - \int_{\sigma} (w^+ - w^-) \frac{1}{2} (V^+ - V^-) \, d\sigma \quad (6.1)$$

Da alle Größen in (6.1) von der Verschiebungsfunktion  $w(x_1, x_2)$  abhängen und somit keine Mißverständnisse möglich sind, wurde der Index  $w$  weggelassen. Gleichung (6.1) hebt die wegen der zugelassenen geometrischen Diskontinuitäten zum Potential  $\Pi$  hinzukommenden Terme deutlich hervor.

Bei den meisten Verschiebungsansätzen ist die Verschiebung  $w$  an den Elementkanten stetig. Ist auch  $w$  auf  $s_w$  gleich  $\hat{w}$ , so lautet das vereinfachte Funktional:

$$F_1 = \Pi + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) M ds + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \frac{1}{2} (M^+ + M^-) d\sigma \quad (6.2)$$

Im Normalfall ist  $M$  nicht stetig. Dies bedeutet, daß zur Berechnung von  $F_1$  neben Elementmatrizen auch Kantenmatrizen aufgestellt und mit diesen zu einer Gesamtmatrix zusammengebaut werden müssen (siehe Abschnitt 4.3). Dadurch entsteht ein organisatorischer und rechenzeitlicher Mehraufwand. Die bisher üblichen Rahmenprogramme sind auf die Berechnung von Kantenmatrizen nicht eingestellt. Um sie zu vermeiden, wird ein Näherungsfunktional  $\bar{F}_1$  gebildet. Dazu muß der Term

$$J = \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \frac{1}{2} (M^+ + M^-) d\sigma \quad (6.3)$$

mit Hilfe von Näherungen so umgebildet werden, daß er durch Elementmatrizen dargestellt werden kann.  $J$  stellt die negative Arbeit des mittleren Momentes  $\frac{1}{2} (M^+ + M^-)$  an der Querneigungsdifferenz  $(\varphi^+ + \varphi^-)$  dar. Zu beachten ist hierbei, daß  $\varphi$  und  $M$  entgegengesetzt positive Drehrichtungen haben. Wird nun angenommen, daß die gegenseitige Verdrehung der beiden Schnittufer von einer gemeinsamen Querneigung  $\tilde{\varphi}$  aus stattgefunden hat, dann kann die dabei geleistete Arbeit  $J_1$  der Momente  $M^+$  und  $M^-$  an den zugehörigen Schnittuferverdrehungen  $(\varphi^+ - \tilde{\varphi}^+)$  bzw.  $(\varphi^- - \tilde{\varphi}^-)$  unmittelbar angeschrieben und als Näherung von  $J$  betrachtet werden:

$$J_1 = \int_{\sigma} [(\varphi^+ - \tilde{\varphi}^+) M^+ + (\varphi^- - \tilde{\varphi}^-) M^-] d\sigma \quad (6.4)$$

Die Querneigung  $\tilde{\varphi}$  wird hier in verschiedenen Systemen gemessen. Es gilt:

$$\tilde{\varphi}^+ + \tilde{\varphi}^- = 0 \quad (6.5)$$

Die Differenz zwischen  $J_1$  und  $J$  lautet:

$$J_1 - J = - \int_{\sigma} [M^+ - M^-] [\tilde{\varphi}^+ - \frac{1}{2}(\varphi^+ - \varphi^-)] d\sigma$$

Sie verschwindet bei kontinuierlichem Normalmoment  $M$  ( $M = M^+ = M^-$ ) sowie dann, wenn  $\tilde{\varphi}$  gleich der mittleren Querneigung der beiden Schnittufer ist ( $\tilde{\varphi}^+ = \frac{1}{2}[\varphi^+ - \varphi^-]$ ).

Die angenäherte Querneigung  $\tilde{\varphi}$  einer Innenkante wird für einen gewählten Ansatz durch Parameter festgelegt, die beiden Schnittufern, d. h. beiden benachbarten Elementen, gemeinsam sind und die, nach Transformationen vom globalen Koordinatensystem ins lokale  $n, t$ -System, Stützwerte der Querneigungsfunktionen  $\varphi^+$  und  $\varphi^-$  darstellen. Die Zahl dieser gemeinsamen Stützwerte entscheidet über die Art der Funktion von  $\tilde{\varphi}$ . Ist z. B. die Querneigung einer Kante an ihren Enden durch jeweils einen Parameter festgelegt, so hat  $\tilde{\varphi}$  längs dieser Kante einen linearen Verlauf.

In diesem Zusammenhang sei auf Folgendes hingewiesen: Bezüglich der Querneigungen verträgliche Verschiebungsansätze sind daran zu erkennen, daß die Funktionen für  $\varphi^+$  und  $\varphi^-$  ebensoviele gemeinsame Stützwerte wie Freiwerte aufweisen und aus diesem Grund miteinander und mit  $\tilde{\varphi}$  übereinstimmen, wenn sie auf ein gemeinsames Koordinatensystem transformiert werden.

Mit der genannten Definition von  $\tilde{\varphi}$  können die Anteile von  $J_1$  an allen Schnittufern für sich berechnet werden, ohne Kenntnis von Werten des anderen Ufers. Damit entfällt die Notwendigkeit der Bildung von Kantenmatrizen.

Ersetzt man in (6.2) den Term  $J$  durch  $J_1$ , so erhält man das Näherungsfunktional  $\bar{F}_1$ :

$$\bar{F}_1 = \Pi + \int_{\sigma} (\varphi - \hat{\varphi}) M ds + \int_{\sigma} [(\varphi^+ - \tilde{\varphi}^+) M^+ + (\varphi^- - \tilde{\varphi}^-) M^-] d\sigma \quad (6.6)$$

Bei der Bildung von Elementmatrizen für  $\bar{F}_1$  ist darauf zu achten, daß nur an Innenkanten  $\sigma$  der Term  $\int_{\sigma} (\varphi - \tilde{\varphi}) M d\sigma$  zu bilden ist. Eine weitere Näherung, welche die Programmierung vereinfacht, vor allem im Falle homogener Randbedingungen für  $\varphi$  und  $M$ , stellt die Addition eines Terms  $J_2$  zu  $\bar{F}_1$  dar:

$$J_2 = \int_{s_M} (\varphi - \tilde{\varphi}) (M - \hat{M}) ds \quad (6.7)$$

Dieser Term verschwindet für  $\varphi = \tilde{\varphi}$  oder  $M = \hat{M}$  auf  $s_M$ . Das nunmehr entstehende Näherungsfunktional  $\tilde{F}_1$  lautet:

$$\tilde{F}_1 = \bar{F}_1 + J_2 = \Pi - \int_{s_M} (\varphi - \tilde{\varphi}) \hat{M} ds + \int_{s_{\varphi}} (\tilde{\varphi} - \hat{\varphi}) M ds + \int_t (\varphi - \tilde{\varphi}) M dt \quad (6.8)$$

Beim letzten Term von (6.8) soll über die Ränder aller Einzelemente integriert werden!

Setzt man noch voraus, daß  $\tilde{\varphi}$  auf  $s_{\varphi}$  gleich  $\hat{\varphi}$  ist, so erhält man:

$$\tilde{F}_1 = \Pi - \int_{s_M} (\varphi - \tilde{\varphi}) \hat{M} ds + \int_t (\varphi - \tilde{\varphi}) M dt \quad (6.9)$$

Nimmt man das Integral über  $s_M$  ins Potential  $\Pi$  hinein, so muß man dort nur das Integral  $\int_{s_M} \hat{M} \varphi ds$  durch das Integral  $\int_{s_M} \hat{M} \tilde{\varphi} ds$  ersetzen.

Die Variationsgleichungen von  $F_1$  und seinen Näherungen lauten:

$$\begin{aligned} \delta F_1 \equiv & - \iint_F (m_{ij, ij} + \beta) \delta w dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k \\ & - \int_{s_M} (M - \hat{M}) \delta \varphi ds - \int_{s_T} (T - \hat{T}) \delta \psi ds + \int_{s_Q} (Q - \hat{Q}) \delta w ds \\ & - \int_{\sigma} (M^+ - M^-) \delta \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) d\sigma - \int_{\sigma} (T^+ - T^-) \delta \psi d\sigma + \int_{\sigma} (Q^+ + Q^-) \delta w d\sigma \\ & + \int_{s_{\varphi}} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M ds + \int_{\sigma} (\varphi^+ + \varphi^-) \delta \frac{1}{2} (M^+ + M^-) d\sigma = 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die Variationsgleichungen der Näherungsfunktionale unterscheiden sich nur in den unterstrichenen Termen von dieser Variationsgleichung:

$$\delta \bar{F}_1 \equiv \dots - \int_{s_M} (M - \hat{M}) \delta \varphi \, ds - \int_{\sigma} (M^+ - M^-) \delta \tilde{\varphi}^+ \, d\sigma$$

$$+ \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M \, ds + \int_{\sigma} [(\varphi^+ - \tilde{\varphi}^+) \delta M^+ + (\varphi^- - \tilde{\varphi}^-) \delta M^-] \, d\sigma = 0$$

$$\delta \tilde{F}_1 \equiv \dots - \int_{s_M} (M - \hat{M}) \delta \tilde{\varphi} \, ds - \int_{\sigma} (M^+ - M^-) \delta \tilde{\varphi}^+ \, d\sigma$$

$$+ \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M \, ds + \int_{s_M} (\varphi - \tilde{\varphi}) \delta M \, ds$$

$$+ \int_{\sigma} [(\varphi^+ - \tilde{\varphi}^+) \delta M^+ + (\varphi^- - \tilde{\varphi}^-) \delta M^-] \, d\sigma = 0$$

Die natürlichen Rand- und Übergangsbedingungen der Näherungsfunktionale sind identisch mit denen von  $F_1$  bzw. lassen sich leicht in diese überführen. So erhält man aus den Gleichungen

$$\varphi^+ - \tilde{\varphi}^+ = 0$$

$$\varphi^- - \tilde{\varphi}^- = 0$$

durch Addition und unter Benutzung von (6.5) die bei  $\delta F_1$  entstehende Übergangsbedingung

$$\varphi^+ + \varphi^- = 0$$

Die Funktionale  $\bar{F}_1$  und  $\tilde{F}_1$  sind somit nicht nur Näherungen von  $F_1$ , sondern je für sich weitere zum gegebenen Differentialgleichungsproblem gehörende Variationsfunktionale.

$\bar{F}_1$  und  $\tilde{F}_1$  sind mehr als  $F_1$  auf die Belange der Elementmethode zugeschnitten. Bei beiden Funktionalen brauchen die mit Hilfe von  $\Pi$  errechneten Steifigkeitsmatrizen nur um - symmetrische - Elementmatrizen ergänzt zu werden, die aus Arbeiten der Normalmomente an den Elementrändern ermittelt werden. Während bei  $\tilde{F}_1$  jedoch im Falle homogener Randbedingungen für  $\varphi$  und  $M$  alle Elementränder gleich behandelt

werden, sind bei  $\bar{F}_1$  Unterscheidungen erforderlich, je nachdem, ob die Ränder zu den Bereichen  $s_M$ ,  $s_\varphi$  oder  $\sigma$  gehören.

Das Näherungsfunktional  $\tilde{F}_1$  läßt sich zur Untersuchung eines Verfahrens heranziehen, das in [6] zur Ermittlung von Steifigkeitsmatrizen benutzt wird. Dort wird im Abschnitt 3.2 als nicht voll verträglicher Verschiebungsansatz ein kubisches Polynom verwendet, ähnlich dem hier in Abschnitt 6.4.1 angegebenen Ansatz. Knotenparameter sind die Größen  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial w}{\partial x_2}$ . Zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix eines Elements werden die fiktiven Knotenkräfte nicht, wie sonst üblich, nach dem zweiten Castiglianoschen Satz ermittelt, sondern nach statischen Gesichtspunkten aus den Randschnittgrößen gewonnen. Die dabei verwendeten Gleichgewichtsbedingungen entsprechen der Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen, wobei jedoch bei der Behandlung der Normalmomente  $M$  ein linearer Verlauf von  $\delta\varphi$  angenommen wird und nicht einer, der sich aus dem Ansatz ergibt.

Zur Darstellung der diesem Verfahren zugrunde liegenden Gleichung wird zunächst unter Vernachlässigung der Querkraftverformungen aus (3.2)  $\delta\Pi$  gebildet und mit Hilfe von (2.23) in den Randschnittgrößen ausgedrückt. Man erhält mit den vorausgesetzten Kontinuitätseigenschaften von  $w$ :

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & - \iint_F \hat{p} \delta w \, dF - \sum_k \hat{P}_k \delta w_k + \int_{s_M} \hat{M} \delta\varphi \, ds - \int_{s_V} \hat{V} \delta w \, ds \\ & - \iint_F m_{ij,ij} \delta w \, dF - \int_t M \delta\varphi \, dt - \int_t T \delta\psi \, dt + \int_t Q \delta w \, dt \quad (6.11) \end{aligned}$$

Das erwähnte Verfahren setzt nun nicht das exakte  $\delta\Pi$  gleich Null, sondern ersetzt in diesem vorher alle  $\delta\varphi$  durch spezielle virtuelle Querneigungen  $\delta\tilde{\varphi}$ , die zwischen zwei Knoten linear verlaufen und jeweils beiden Schnitтуfern gemeinsam sind.  $\delta\tilde{\varphi}$  entspricht also den bisherigen Definitionen für ein genähertes  $\tilde{\varphi}$ . Die entstehende Gleichung lautet:

$$\delta V \equiv \delta\Pi - \int_{s_M} \hat{M} \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) \, ds + \int_t M \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) \, dt = 0 \quad (6.12)$$

Diese Gleichung führt auf keine symmetrische Steifigkeitsmatrix. Vergleicht man sie mit der Gleichung

$$\delta \tilde{F}_1 = 0 \quad (6.13)$$

nach (6.9), so erkennt man, daß in (6.12) die Glieder mit  $\delta M$  fehlen.  $\delta V$  enthält nur die statischen, nicht aber die kinematischen Ergänzungsterme zu  $\delta \Pi$ . Das Fehlen der letzteren verursacht den Verlust der Symmetrie bei der zugehörigen Steifigkeitsmatrix.

$\delta V$  stellt somit eine im Vergleich zu  $\delta \tilde{F}_1$  unvollständige Erweiterung von  $\delta \Pi$  dar. Beispielrechnungen zeigen jedoch, daß schon diese Ergänzung des Potentials eine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse erzielen kann. Mit den hier aufgezeigten Zusammenhängen können die relativ guten Resultate für die in [6] beschriebene Methode wenigstens teilweise erklärt werden.

## 6.2 Die nachträgliche Berechnung der Momente

Bei Benutzung der Verschiebungsmethode werden die Schnittgrößen meist durch Ableitung der Verschiebungsfunktionen gewonnen. Dies führt zu Diskontinuitäten an den Elementgrenzen, die vor allem an den Knotenpunkten unangenehm sind, da sie durch mehr oder weniger willkürliche Mittelung aller an einem Punkt vorhandenen Einzelergebnisse ausgeglichen werden müssen.

Im Abschnitt 5.3.6 wurde darauf hingewiesen, daß die Genauigkeit der direkt errechneten Verschiebungsunbekannten kein Maß ist für die Genauigkeit des gesamten Verschiebungsverlaufes. Aus diesem Grund können auch die aus Ableitungen an einzelnen Punkten gewonnenen Schnittgrößen relativ ungenau werden.

Es ist deshalb naheliegend, die Schnittgrößen, vor allem die Momente, über eine Gesamtbetrachtung der Platte zu berechnen, unter Berücksichtigung ihrer Randbedingungen und Kontinuitätseigenschaften. Für den speziellen Fall von Randschnittgrößen haben Bufler und Stein in [33] eine Rechenmethode entwickelt, während Oden und Brauchli [47] eine etwas kompliziertere Spannungsberechnung für den Gesamtbereich der Platte angeben. Einfacher ist es, zur Nachlaufberechnung der

Momente bei beliebiger Elementform den Verträglichkeitsteil der Variationsgleichung des Funktionals  $F_{2A}$  heranzuziehen und dazu einen Momentenansatz zu machen. Aus vorgegebenen Verschiebungen können damit die zugehörigen Momente berechnet werden. Da  $m_{ij}$  variiert wird, erhält man ebensoviele Gleichungen, wie unbekannte Momentenparameter vorhanden sind.

Die beiden äquivalenten Gleichungen lauten, bei Benutzung von (3. 17) und (6. 18), unter Vernachlässigung der Querkraftverformungen:

$$\begin{aligned}
 & - \iint_F w \delta m_{ij, ij} dF - \iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF \\
 & - \int_{s_\varphi} \hat{\varphi} \delta M ds - \int_{s_\psi} \hat{\psi} \delta T ds + \int_{s_w} \hat{w} \delta Q ds \\
 & - \int_{s_M} \varphi \delta M ds - \int_{s_T} \psi \delta T ds + \int_{s_Q} w \delta Q ds \\
 & - \int_\sigma \frac{1}{2} (\varphi^+ - \varphi^-) \delta (M^+ - M^-) d\sigma - \int_\sigma \frac{1}{2} (\psi^+ - \psi^-) \delta (T^+ - T^-) d\sigma \\
 & \quad + \int_\sigma \frac{1}{2} (w^+ + w^-) \delta (Q^+ + Q^-) d\sigma = 0 \tag{6. 14}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \iint_F (\kappa_{ij}^m + w_{, ij}) \delta m_{ij} dF + \int_{s_\varphi} (\varphi - \hat{\varphi}) \delta M ds + \int_{s_\psi} (\psi - \hat{\psi}) \delta T ds - \int_{s_w} (w - \hat{w}) \delta Q ds \\
 & + \int_\sigma (\varphi^+ + \varphi^-) \delta \frac{1}{2} (M^+ + M^-) d\sigma + \int_\sigma (\psi^+ + \psi^-) \delta \frac{1}{2} (T^+ + T^-) d\sigma \\
 & \quad - \int_\sigma (w^+ - w^-) \delta \frac{1}{2} (Q^+ - Q^-) d\sigma = 0 \tag{6. 15}
 \end{aligned}$$

In diesen Gleichungen werden die Verschiebungen nun als vorgegeben betrachtet. (6. 15) zeigt deutlich, daß die ursprünglichen Krümmungen  $-w_{, ij}$  in die Krümmungen  $\kappa_{ij}^m$  der gewünschten Form umgerechnet werden, unter Berücksichtigung eventuell auftretender Diskontinuitäten in der Verschiebungsfunktion. (6. 14) sagt dasselbe aus, wobei jedoch

die innere Arbeit der virtuellen Schnittgrößen an den wirklichen Krümmungen  $w_{,ij}$  auf äußere Arbeiten umgerechnet ist. Diese Gleichung läßt sich stark vereinfachen, wenn man voraussetzt, daß  $m_{ij}$  kontinuierlich ist und die Randbedingungen  $\hat{M}$  und  $\hat{T}$  erfüllen kann, und wenn man weiterhin annimmt, daß die Verschiebungsfunktion wenigstens bezüglich  $w$  an den Elementkanten kontinuierlich ist. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} \iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF = & - \iint_F w \delta m_{ij,ij} dF - \int_S \hat{\varphi} \delta M ds - \int_{S_\psi} \hat{\psi} \delta T ds + \int_{S_w} \hat{w} \delta Q ds \\ & + \int_{S_Q} w \delta Q ds + \int_\sigma w \delta (Q^+ + Q^-) d\sigma \end{aligned} \quad (6.16)$$

Wählt man z. B. einen linearen Momentenansatz und sind  $\hat{\varphi}$ ,  $\hat{\psi}$  und  $\hat{w}$  jeweils gleich Null, so verbleibt:

$$\iint_F \kappa_{ij}^m \delta m_{ij} dF = \int_{S_Q} w \delta Q ds + \int_\sigma w \delta (Q^+ + Q^-) d\sigma \quad (6.17)$$

Der Vorteil der beiden letzten Gleichungen besteht darin, daß in ihnen der Einfluß der Diskontinuitäten in den Querneigungen nicht mehr sichtbar ist. Die virtuellen Schnittgrößen leisten ihre Arbeit nur noch an den Kantenverschiebungen und, bei  $m_{ij,ij} \neq 0$ , an den Verschiebungen im Feld.

Bei der praktischen Anwendung dieser Methode der Momentenermittlung müssen für jedes Element neben der Steifigkeitsmatrix zwei weitere Matrizen aufgestellt werden. Nach dem Ende der Verschiebungsberechnung wird jeweils eine davon mit den zugehörigen Verschiebungsparametern multipliziert. Das Ergebnis wird als Lastspalte der zweiten Matrix angehängt. Danach werden alle derartigen Matrizen in der üblichen Weise zusammengebaut. Das entstehende Gleichungssystem wird nach den Momentenparametern aufgelöst.

### 6.3 Der quadratische Verschiebungsansatz für Dreieckelemente

Der einfachste reine Verschiebungsansatz für Dreieckelemente ist der quadratische Ansatz. Als Parameter für die 6 Freiwerte des dreihinvarianten Polynoms zweiten Grades wählt man die drei Knotenverschiebungen

und die drei Querneigungen in Seitenmitte. Der so entstehende Gesamtansatz ist an den Elementkanten weder bezüglich der Verschiebungen noch bezüglich der Querneigungen überall kontinuierlich. Dennoch werden mit ihm bei der Anwendung des Potentials II gute Ergebnisse erzielt. Für reine Knotenlasten entsprechen sie exakt den Ergebnissen des Herrmannschen Modells. Untersuchungen über die Zusammenhänge sind in [34] durchgeführt. Der quadratische Verschiebungsansatz ist also eines jener Beispiele, bei denen die an sich unzulässige Benutzung des Potentials als Variationsfunktional gute und anscheinend gegen exakte Werte konvergierende Ergebnisse liefert.

Versucht man Funktionale für den Ansatz zu benutzen, welche die Diskontinuitäten berücksichtigen, so ist sofort zu erkennen, daß alle Terme, die zum Potential hinzukommen, verschwinden. Dies gilt sowohl für das Funktional  $F_1$  als auch für  $F_{2B}$  im Zusammenhang mit einem konstanten Momentenansatz wie demjenigen des Herrmannschen Modells. Die Benutzung dieser Funktionale führt also auf dieselben Gleichungen wie die Anwendung des Potentials II. Das zunächst unzulässige Vorgehen wird damit nachträglich gerechtfertigt. Siehe hierzu auch Strang und Fix [45], wo der sogenannte Patch-Test für derartige Untersuchungen herangezogen wird.

#### 6.4 Der kubische Verschiebungsansatz für Dreieckelemente

##### 6.4.1 Darstellung des Ansatzes

Das dreihinvariante kubische Polynom mit 10 Konstanten lautet in Dreieckskoordinaten:

$$\begin{aligned} w(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & c_1 \lambda_1 + c_2 \lambda_1^2 \lambda_2 + c_3 \lambda_1^2 \lambda_3 \\ & + c_4 \lambda_2 + c_5 \lambda_2^2 \lambda_3 + c_6 \lambda_2^2 \lambda_1 \\ & + c_7 \lambda_3 + c_8 \lambda_3^2 \lambda_1 + c_9 \lambda_3^2 \lambda_2 \\ & + c_{10} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \end{aligned} \quad (6.18)$$

Wählt man die Größen  $w$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial w}{\partial x_2}$  als Knotenparameter, so werden für das Dreieckelement insgesamt nur 9 Freiwerte benötigt. Im Ansatz (6.18) muß also eine Konstante eliminiert werden. Die Darstellung in

Dreieckskoordinaten zeigt nun sehr deutlich, daß die zu  $c_{10}$  gehörende Koordinatenfunktion

$$f_{10} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \tag{6.19}$$

auf dem gesamten Elementrand keine Verschiebung erzeugt und deshalb auch keinen der gewählten Parameter beeinflußt. Während somit die Konstante  $c_{10}$  frei gewählt bzw. nach bestimmten Kriterien berechnet werden kann, lassen sich die 9 Konstanten  $c_1$  bis  $c_9$  unabhängig davon in den 9 gewählten Verschiebungsparametern ausdrücken, was bei Dreieckskoordinaten sehr leicht ohne numerische Inversion möglich ist.

Die so entstehenden Verschiebungsansätze sind an den Elementgrenzen bezüglich der Verschiebungen überall, bezüglich der Querneigungen nur an den Knotenpunkten kontinuierlich.

Die Wahl der Konstanten  $c_{10}$  kann nach verschiedenen Gesichtspunkten erfolgen.

Eine erste Möglichkeit besteht darin, die Konstante nullzusetzen:

$$c_{10}^{(1)} = 0 \tag{6.20}$$

Diese einfachste Festlegung erweist sich als die schlechteste!

Vorteilhafter ist es, mit Hilfe von  $c_{10}$  die Eigenschaften des Ansatzes zu verbessern. Eine mögliche Bedingung für  $c_{10}$  lautet z. B., den Verlauf der Querneigungen  $\varphi$  an den Elementrändern dem durch die Parameter festlegbaren linearen Verlauf  $\varphi_\ell$  ( $\approx \tilde{\varphi}$ !) möglichst anzunähern.

Soll dies im Mittel geschehen, so erhält man:

$$\oint (\varphi - \varphi_\ell) ds = 0 \tag{6.21}$$

Bei einer Minimierung des Fehlerquadrats ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial c_{10}} \oint (\varphi - \varphi_\ell)^2 ds = 0$$

und nach Ausführung der Differentiation:

$$\oint (\varphi - \varphi_\ell) \frac{\partial \varphi}{\partial c_{10}} ds = 0 \tag{6.22}$$

Die Gleichungen (6.21) und (6.22) lassen sich nach  $c_{10}$  auflösen. Da  $\frac{\partial \varphi}{\partial c_{10}}$  an jeder Seite  $k$  eine Parabel mit dem Stich

$$f_k = \frac{\iota_k}{8F}$$

darstellt, unterscheiden sich die beiden Gleichungen nur in der Gewichtung der Abweichungen  $(\varphi - \varphi_k)$  an den einzelnen Elementkanten.

Eine dritte Möglichkeit,  $c_{10}$  zu bestimmen, erhält man aus der Forderung, daß mit dem Ansatz  $w$  ein konstanter Spannungszustand erzielbar sein muß. Nach Zienkiewicz [32] ist dies eine Voraussetzung dafür, daß die Lösungen gegen exakte Werte konvergieren. Die Bedingung führt nach längeren Umformungen auf die einfache Gleichung:

$$c_{10}^{(3)} = \frac{1}{2} (c_2 + c_3 + c_5 + c_6 + c_8 + c_9) \quad (6.23)$$

#### 6.4.2 Erfahrungen aus Beispielrechnungen

Für den kubischen Verschiebungsansatz wurden zahlreiche Proberechnungen durchgeführt, wobei sowohl die verschiedenen Möglichkeiten von  $c_{10}$  als auch folgende Variationsgleichungen getestet wurden:

$$\delta \Pi = 0$$

Dies ist die übliche Gleichung, auch bei nicht voll verträglichen Ansätzen.

$$\delta V = 0$$

Diese Gleichung ist durch (6.12) definiert und wird in [6] benutzt.

$$\delta \tilde{F}_1 = 0$$

$$\delta \bar{F}_1 = 0$$

$$\delta F_1 = 0$$

Das Funktional  $F_1$  und seine Näherungen  $\bar{F}_1$  und  $\tilde{F}_1$  sind im Abschnitt 6.1 angegeben.

Kapitel 7 enthält einige numerische Ergebnisse der Beispielrechnungen. Die wichtigsten Erkenntnisse werden im folgenden dargelegt, wobei vor allem die Verschiebungsergebnisse berücksichtigt sind. Zur Vereinfachung

der Formulierungen wird jeweils nur angegeben, welche von den Variationen  $\delta \Pi, \delta V, \delta \tilde{F}_1, \delta \bar{F}_1$  oder  $\delta F_1$  nullgesetzt wurde.

Ansatz 1 (A 1):

kubischer Verschiebungsansatz mit  $c_{10}^{(1)} = 0$

Der Ansatz wurde am Beispiel einer quadratischen, allseitig frei aufliegenden Platte unter Gleichlast getestet. Bei Benutzung von  $\delta \Pi$  scheinen die Mittendurchbiegungen zunächst zu konvergieren, doch unter-schreiten sie bei Verfeinerung des Elementrasters immer mehr den exakten Wert. Die Fehler bei den übrigen Rasterpunkten sind noch weit größer. Diese Uneinheitlichkeit spiegelt sich in den völlig falschen Momenten wider.

Beider Anwendung der übrigen Variationsgleichungen erhält man dann völlig unbrauchbare Ergebnisse. Je nach der Dichte des Rasters ergeben sich einmal negative, dann wieder positive, immer jedoch extrem falsche Verschiebungsflächen. An diesen Ergebnissen ist folgendes zu erkennen:

1. Auch ein weitgehend verträglicher Ansatz (Kontinuität bei den Verschiebungen überall, bei den Randquerneigungen nur an den Knotenpunkten gewährleistet) führt bei der Benutzung von  $\Pi$  nicht unbedingt zu konvergenten Ergebnissen. Die Annahme, daß bei Verdichtung des Rasters und dem damit verbundenen Zusammenrücken der vollkontinuierlichen Knotenpunkte die Diskontinuitäten automatisch minimiert werden, erwies sich als falsch. Da bei Rasterverdichtungen auch die Länge der eventuell fehlerbehafteten Elementkanten zunimmt, kann auch bei kleiner werdenden Fehlerordinaten das Integral über alle Fehler zunehmen.
2. Ein Ansatz, der bei Benutzung von  $\Pi$  keine Konvergenz der Ergebnisse erkennen läßt, kann bei Anwendung 'genauerer' Funktionale sogar noch größere Mißerfolge haben. Die Vermischung von statischen und kinematischen Gleichungen, wie sie in  $\delta F_1 = 0$  praktisch vorhanden ist, wirkt sich bei schlecht verträglichen Ansätzen nachteilig aus. Es scheint, als gewannen ab einem

gewissen Grad kinematischer Unverträglichkeit des Ansatzes die eigentlich nur als Korrektur gedachten Terme in der Variationsgleichung die Oberhand. Die negativen Verschiebungen und Momente einiger Beispiele weisen darauf hin. Die Ergebnisse zeigen, wie gering in Wirklichkeit der Spielraum der zulässigen Diskontinuitäten des Ansatzes selbst beim Funktional  $F_1$  ist.

Ansatz 2 (A 2):

kubischer Verschiebungsansatz mit  $c_{10}^{(2)}$  nach Gleichung (6. 21)

Der Ansatz wurde am Beispiel der quadratischen Platte unter Gleichlast sowohl für allseitige freie Auflagerung als auch für allseitige Einspannung getestet. Bei allen Variationsgleichungen erhält man brauchbare Verschiebungen. Werden die Variationen  $\delta \Pi$ ,  $\delta V$ ,  $\delta \bar{F}_1$  und  $\delta F_1$  in dieser Reihenfolge benutzt, so nimmt die Genauigkeit bei jedem Wechsel der Variation zu, wobei dieser Zuwachs anfangs am größten ist und dann abnimmt. So wird bei der frei aufliegenden Platte der relative Fehler der Mittenverschiebung beim Übergang von  $\delta \Pi$  auf  $\delta V$  schon halbiert, beim weiteren Übergang auf  $\delta \bar{F}_1$  wird der verbliebene Fehler sogar auf etwa ein Drittel reduziert. Die Ergebnisse für  $\delta F_1$  schließlich sind ausgezeichnet und nur mit denen höherer Ansätze vergleichbar. Die Variation  $\delta \tilde{F}_1$  wurde in der genannten Folge ausgelassen, da sie sich nur bei der frei aufliegenden Platte von  $\delta \bar{F}_1$  unterscheidet. Auch hier wirken sich die zusätzlichen Näherungen nur bei grober Rastereinteilung in erkennbar schlechteren Ergebnissen aus.

Ansatz 3 (A 3):

kubischer Verschiebungsansatz mit  $c_{10}^{(3)}$  nach Gleichung (6. 23)

Der Ansatz wurde an denselben Beispielen wie A 2 getestet. Die Ergebnisse für  $\delta \Pi$  sind nicht ganz befriedigend. Zwar scheinen die Verschiebungen gegen die exakten Werte zu konvergieren, doch ist in Plattenmitte der Fehler bei den Nachbarpunkten jeweils so viel größer als der Fehler im Mittelpunkt, daß das errechnete Mittenmoment gegen einen falschen, etwa 14 % zu kleinen Wert strebt.

Bei der Benutzung der übrigen Variationen werden ähnliche Ergebnisse erzielt wie mit A 2, so daß die Entscheidung, welcher der beiden Ansätze besser ist, kaum getroffen werden kann.

#### 6. 4. 3 Die Berechnung der Momente

Ermittelt man die Momente durch Ableitung der berechneten Verschiebungsfunktionen, so erhält man elementweise linear veränderliche, an den Kanten nicht kontinuierliche Momentenflächen. Zur Vermeidung dieser Diskontinuitäten benutzt das Programm die im Abschnitt 6. 2 beschriebene Methode einer Nachlaufrechnung. Für die Momente werden lineare Ansätze gemacht. Sie gestatten die Anwendung der einfachen Formel (6. 17), da auch die Beispiele deren Voraussetzungen erfüllen.

Damit ergeben sich bei allen Beispielen, die überall und nicht nur an ausgesuchten Punkten gute Verschiebungsergebnisse aufweisen, auch gute Momentenergebnisse. Bei ihrer Beurteilung muß jedoch der elementweise lineare und damit relativ grobe Verlauf der Momente berücksichtigt werden.

Aufschlußreich ist in diesem Zusammenhang folgendes Experiment: Man gibt für ein bestimmtes Elementraster die exakten Verschiebungsgrößen vor, z. B. die mit einer Reihenlösung errechneten Verschiebungen und Neigungen einer frei aufliegenden Platte unter Gleichlast, und errechnet dafür die Momente. Es zeigt sich, daß die Ergebnismomentenflächen die exakten Flächen sehr gut annähern. Der elementweise lineare Verlauf der ersteren bedingt dabei ein dauerndes gegenseitiges Durchdringen von exakten und errechneten Flächen. Es ist sofort zu erkennen, daß gerade die Knotenordinaten am weitesten von den zugehörigen exakten Ordinaten abweichen. Nicht die Knotenordinaten, sondern der Gesamtverlauf ist somit für die Beurteilung der errechneten Momente maßgebend. Bei der frei aufliegenden Platte können z. B. zu kleine Verschiebungen exaktere Momentenordinaten in den Knoten ergeben als die richtigen Verschiebungen. Aus diesem Grund werden im Abschnitt 7. 4 auch die für die exakten Verschiebungen ermittelten Momentenordinaten angegeben.

Auf die Frage der Beurteilung von Ergebnissen wird im Abschnitt 7.2.1 nochmals eingegangen.

Interessant wäre ein Versuch mit höheren Momentenansätzen, z. B. mit solchen, die dem Verschiebungsansatz entsprechen. Einerseits könnten damit theoretisch die exakten Momentenflächen sehr viel besser angenähert werden, andererseits ist zu befürchten, daß die Momentenflächen wegen der, relativ zu ihnen, groben Verschiebungsflächen und wegen örtlich verschiedener Konvergenzgeschwindigkeit der Verschiebungen sehr unruhig ausfallen. Die Einflüsse der letztgenannten Erscheinung sind schon bei den linearen Momentenansätzen deutlich zu erkennen.

Da ein Erfolg derartiger Versuche somit sehr in Frage gestellt ist, wurde auf eine Programmierung und Erprobung höherer Momentenansätze verzichtet.

#### 6.4.4 Abschließende Bemerkungen zum kubischen Verschiebungsansatz

Die willkürliche Nullsetzung von  $c_{10}$  führte zum unbrauchbaren Ansatz A 1. Dagegen erzielt die Ansätze A 2 und A 3 gute, bei Benutzung der Variationsfunktionale  $\bar{F}_1$  und  $F_1$  sogar sehr gute Ergebnisse. Verwendet man  $F_1$ , so sind die Resultate besser als die aller anderen in dieser Arbeit untersuchten Ansätze und Methoden, wenn man die Zahl der gleichzeitig auftretenden Unbekannten als Maß für den Aufwand der Rechnung betrachtet. Sie sind auch bedeutend besser als die Ergebnisse, die Clough und Tocher in [35] für ihr verträgliches Element HCT angeben, das dieselben Parameter benutzt wie die hier besprochenen Ansätze. Es sei hier nur auf das Beispiel der frei aufliegenden Quadratplatte unter Gleichlast hingewiesen mit einem Element raster, bei dem die Seite einer Viertelsplatte in 2 Abschnitte ( $n = 2$ ) unterteilt ist. Bei der Berechnung dieser Viertelsplatte treten 12 Unbekannte auf, darunter 4 Verschiebungen  $w^{(i)}$ , deren Fehler zwischen - 0,11 % und + 0,09 % schwankt (Ansatz A 3)! Damit kommt die hier beschriebene Methode (Ansätze A 2 bzw. A 3, Funktional  $F_1$ ) denjenigen Verfahren

sehr nahe, die vollverträgliche höhere Verschiebungsansätze für Dreieckelemente benutzen (siehe [36], [37], [38]). Sie hat diesen gegenüber jedoch mehrere Vorteile:

1. Bei gleicher Unbekanntenzahl können mehr Elemente verwendet werden. Unregelmäßig geformte Platten können damit besser dargestellt werden.
2. Nur wirklich vorhandene geometrische Verträglichkeitsbedingungen werden erfüllt, und zwar bei den Durchbiegungen exakt, bei den Querneigungen nur näherungsweise. Höhere Ansätze erzwingen demgegenüber, zumindest in einzelnen Punkten, auch die Kontinuität in höheren Ableitungen. Bei bestimmten Lasten, z. B. vorgegebenen Linienmomenten, führt dies zu Widersprüchen, da die entstehenden Momentensprünge vom Ansatz nicht dargestellt werden können.
3. Die nachträgliche Berechnung der Momente ermöglicht es, unabhängig von der Verschiebungsrechnung Rand- und Zwischenbedingungen für die Momentenflächen zu berücksichtigen. So können z. B. für Momentenlasten Sprünge in den Momentenflächen vorgesehen werden.

Damit hat die Methode genügend Vorteile, um neben den vollverträglichen höheren Verschiebungsansätzen bestehen zu können.

#### 6.5 Ein Ansatz vierten Grades

Der im Abschnitt 5.3 für das Funktional  $F_{2B}$  gewählte Verschiebungsansatz (5.12) mit den Knotenparametern  $w$ ,  $-w_{11}$ ,  $-w_{12}$  und  $-w_{22}$  ist theoretisch auch beim Funktional  $F_1$  anwendbar. Er garantiert überall die Kontinuität der Verschiebungen und ermöglicht spannungsfreie Starrkörperverschiebungen sowie die Erzeugung konstanter Momentenzustände. An den Elementrändern gewährleistet er jedoch nirgends die Kontinuität der Querneigungen, so daß die Benutzung des Potentials  $\Pi$  auch näherungsweise von vornherein ausscheidet.

Die Anwendung dieses Ansatzes beim Funktional  $F_1$  ergab auch am einfachen Beispiel der frei aufliegenden Quadratplatte Ergebnisse, die keinerlei Konvergenzen erkennen ließen. Mit dem Funktional  $F_1$  gelang es sichtlich nicht, gleichzeitig einen Gleichgewichtszustand zu erzielen und die gravierenden Diskontinuitäten in den Querneigungen zu minimieren.

#### 6.6 Zusammenfassung der Erfahrungen mit dem Funktional $F_1$

Die Beispielrechnungen lassen erkennen, daß die vom Funktional  $F_1$  zugelassenen Diskontinuitäten von den Ansätzen der Elementmethode nicht voll ausgenützt werden dürfen. Nur mit weitgehend verträglichen Ansätzen können konvergierende Lösungen erzielt werden. Die Grenze zwischen brauchbaren und unbrauchbaren Ansätzen ist dabei sehr scharf gezogen, wie die verschiedenen kubischen Ansätze zeigen. Exakte Kriterien hierfür wurden nicht gefunden. Die Beispiele legen jedoch einige Vermutungen nahe: Nur diejenigen der nicht vollständig verträglichen Verschiebungsansätze sind für  $F_1$  brauchbar, die auch schon bei Benutzung von  $\Pi$  zu konvergenten Ergebnissen führen. Bei diesen Ansätzen scheinen die Diskontinuitäten trotz ihrer Ignorierung durch das Potential  $\Pi$  im Grenzfall 'von selbst' gegen Null zu streben. Die über  $\Pi$  hinausgehenden Terme von  $F_1$  ermöglichen es demnach nicht, Konvergenz zu erzwingen, sie bewirken jedoch eine wesentliche Verbesserung der Konvergenz dort, wo sie schon vorhanden ist.

Es ist somit zu empfehlen, bei 'brauchbaren' Ansätzen auf jeden Fall das Potential  $\Pi$  durch das Funktional  $F_1$  oder eine seiner Näherungen zu ersetzen. Während die Benutzung der Näherungsfunktionale praktisch keinen Mehraufwand erfordert, beschränkt sich bei  $F_1$  der programm - organisatorische Mehraufwand im wesentlichen auf die Bildung der Kantenmatrizen, da der zusätzliche Zusammenbau bei Vorhandensein eines entsprechenden Unterprogramms (siehe etwa [28]) mit wenigen Programmzeilen veranlaßt werden kann. Die Beispielrechnungen zeigen, daß diese Maßnahmen die Rechenzeit im Verhältnis zur Zeit, die zur Auflösung des in seiner Größe unveränderten Gleichungssystems benötigt wird, nur unwesentlich erhöhen.

## 7. Beispiele

### 7.1 Allgemeines zu den Beispielen

In diesem Kapitel werden Zahlenergebnisse von Beispielen angegeben, die für die verschiedenen, in den Kapiteln 5 und 6 dargestellten Methoden und Ansätze durchgerechnet wurden. Sie sollen Vergleiche der Methoden untereinander sowie Genauigkeitsabschätzungen ermöglichen. Deshalb wurden einfache Standardbeispiele gewählt, deren exakte Lösungen meist bekannt bzw. leicht zu berechnen sind.

Die drei Standardbeispiele sind:

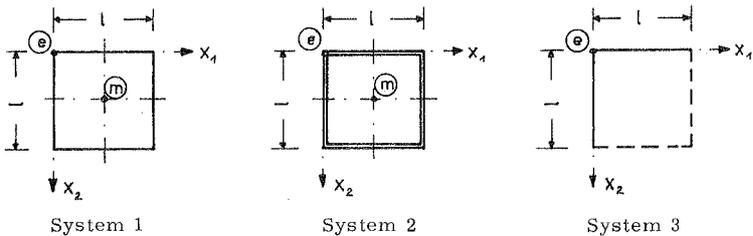
System 1: quadratische, frei aufliegende Platte,

System 2: quadratische, eingespannte Platte,

System 3: quadratische Platte mit zwei benachbarten frei aufliegenden und zwei benachbarten freien Rändern.

Alle Systeme haben eine konstante Plattendicke. Sie werden für die Lastfälle Gleichlast  $\hat{p}$  und teilweise auch für den Lastfall Einzellast  $\hat{P}$  in Plattenmitte berechnet. In allen Beispielen ist die Querkontraktionszahl  $\mu$  gleich Null.

Bild 7. 1 zeigt die drei Plattensysteme und die zugehörigen Koordinatensysteme.



- frei aufliegender Rand
- == eingespannter Rand
- - - - freier Rand

Bild 7. 1: Die drei berechneten Plattensysteme

Vonden Systemen 1 und 2 braucht aus Symmetriegründen nur ein Viertel der Platte gerechnet zu werden. Wenn die Elementaufteilung es gestattet, genügt auch ein Achtel der Platte.

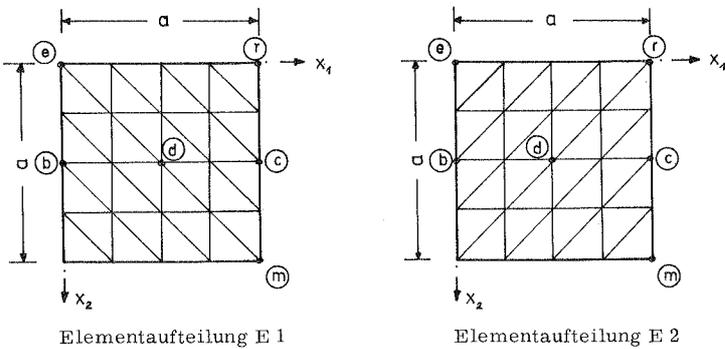


Bild 7. 2: Zwei mögliche Elementaufteilungen E 1 und E 2 im Plattenviertel

In Bild 7. 2 sind die beiden wichtigsten möglichen Elementaufteilungen des effektiv berechneten Plattenteils dargestellt. Bei den Systemen 1 und 2 gilt  $a = \ell/2$ , bei System 3 ist  $a = \ell$ . Die Zahl der Feldunterteilungen in  $x_1$ - und  $x_2$ -Richtung soll mit  $n$  bezeichnet werden. Bei den Beispielen in Bild 7. 2 ist  $n$  jeweils gleich 4. Für die mit Buchstaben gekennzeichneten Knoten werden später Ergebnisse angegeben.

Die Elementaufteilung E 2 wird nur bei Beispielen benutzt, die aus der Literatur übernommen worden sind. Das Eckelement führt zu einer Versteifung der Platte. Im Falle der Volleinspannung kann es bei vielen Ansätzen praktisch zum eingespannten Rand geschlagen werden.

Beide Elementaufteilungen weisen eine über das Plattenviertel unveränderte Richtung der schräg verlaufenden Elementkante auf. Dies stellt eine gewisse Willkür dar. Um sie auszuschalten, wurde eine Elementaufteilung E 3 entwickelt. Sie entsteht dadurch, daß man die beiden Elementlagen E 1 und E 2 übereinanderlegt und ihnen jeweils die halbe Plattensteifigkeit zuordnet. Unbekannte Knotenparameter gelten für

beide Elementlagen. Sind ausschließlich Knotenparameter vorhanden, so wird bei diesem Vorgehen die Zahl der Elemente zwar verdoppelt, die Zahl der Unbekannten bleibt jedoch gleich. Die Kontinuität der Elementlagen ist normalerweise nicht vollkommen gewährleistet, ohne daß dies irgendwo berücksichtigt wird. Die Elementaufteilung E 3 stellt nur einen Notbehelf dar, der jedoch bei Ansätzen und Modellen, die an der Grenze der Brauchbarkeit liegen, zu erstaunlich guten Ergebnissen führt.

Die Ergebnisse der Beispielrechnungen werden in dimensionsloser Form angegeben. Dabei sind 2 Arten zu unterscheiden:

1. In allen Fällen, wo ein Einzelwert  $\tilde{f}$  berechnet wird, dessen exakte Größe  $f$  bekannt ist, wird der relative Fehler  $\beta$  des Ergebnisses nach Formel (4.15) angegeben.

$$\beta = \frac{\tilde{f} - f}{f} \quad (7.1)$$

Bei gleichmäßig konvergenten Lösungen strebt  $\beta$  gegen null.

2. In allen übrigen Fällen werden dimensionslose Beiwerte berechnet, wie sie in der Literatur meist benutzt werden. Die Beiwerte  $\lambda$  und  $\lambda^*$  für die Verschiebungen  $w$  und  $\alpha_{ij}$  für die Momente  $m_{ij}$  sind dabei wie folgt definiert:

$$w = \lambda \frac{\hat{p} \ell^4}{E h^3} \quad (7.2)$$

$$m_{ij} = \alpha_{ij} \hat{p} \ell^2 \quad (7.3)$$

$$w = \lambda^* \frac{\hat{p}}{E h^3} \ell^2 \quad (7.4)$$

Die Darstellung der Ergebnisse erfolgt in Tafeln und Diagrammen. Erläuterungen wurden zum Teil schon in den entsprechenden Kapiteln (5 und 6) gegeben.

Bekannte Lösungen sind mit Hilfe der oben definierten dimensionslosen Beiwerte in den Tafeln 1 und 2 für die im Bild 7.2 mit einem Buchstaben bezeichneten Knotenpunkte zusammengestellt. Die Werte der Tafel 1 und der ersten Zeile der Tafel 2 wurden mit Doppelreihenlösungen errechnet, die übrigen den Tafeln [39] von Czerny entnommen.

## 7.2 Probleme beim Vergleichen von Ergebnissen

Werden Näherungslösungen miteinander und mit der exakten Lösung verglichen, so kann dies unter verschiedenen Gesichtspunkten und nach verschiedenen Methoden geschehen. Die folgenden Erläuterungen sollen zeigen, daß allgemeingültige Maßstäbe nur schwer zu finden sind.

### 7.2.1 Der Genauigkeitsvergleich

Bei der Elementmethode erhält man als primäre Ergebnisse meist Einzelordinaten der gesuchten Funktionen. Diese werden dann im allgemeinen mit den exakten Ordinaten verglichen. Genauer, aber aufwendiger ist ein Vergleich der Funktionsverläufe. Zu welchem unterschiedlichen Ergebnissen die beiden Vergleichsarten führen können, zeigt folgendes einfache Beispiel: Eine überall positiv gekrümmte Kurve wird durch elementweise lineare Funktionen angenähert. Werden nur Knotenordinaten betrachtet, so ist diejenige Lösung die beste, welche exakte Knotenordinaten aufweist, wo also der entstehende Polygonzug ausschließlich auf der konkaven Kurvenseite verläuft. Wird jedoch eine Minimierung des Fehlers über den gesamten Verlauf des Polygonzugs als Optimum angesehen, etwa nach der Forderung

$$\int_s (\tilde{f} - f)^2 ds = \text{Min.}$$

so schneidet die erstgenannte Lösung wesentlich schlechter ab als Polygonzüge, die innerhalb der Elemente zweimal die exakte Kurve schneiden, deren Ecken aber immer außerhalb dieser Kurve liegen.

Hat man sich entschieden, mehrere Methoden anhand einiger weniger Ordinaten zu vergleichen, so ist noch festzulegen, welche Größen und welche Ordinaten dazu herangezogen werden sollen. Im allgemeinen wird man sowohl Verschiebungen als auch Spannungen wählen. Im Falle vierseitig gestützter Rechteckplatten ist es üblich, Ordinaten im Mittelpunkt zu vergleichen.

Bei Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften weist dieser Punkt jedoch Besonderheiten auf: Während an alle übrigen Innenpunkte 6 Elemente anschließen, sind es bei E 1 am Mittelpunkt 8 Elemente, bei E 2 nur 4 Elemente.

Am Beispiel der frei aufliegenden Platte unter Gleichlast, deren Ergebnisse für jeden beliebigen Punkt exakt ermittelt werden können, ergab sich für E 1 bei einigen Methoden, daß die große Zahl der an den Mittelpunkt anschließenden Kanten anscheinend eine Versteifung in diesem Bereich erzeugte, so daß die Verschiebung des Mittelpunktes relativ klein wurde. Dies hatte zur Folge, daß auch die Momente dort relativ klein ausfielen. Bei Lösungen, die die Größen von oben her annäherten, waren damit die Mittelpunktsergebnisse besser als die der übrigen Punkte, bei denen, die sie von unten her annäherten, war es umgekehrt.

Beim Genauigkeitsvergleich spielt weiterhin die Wahl der Beispiele eine große Rolle. Es ist nicht ausreichend, 2 Lösungsmethoden an nur 1 Beispiel zu vergleichen. Randbedingungen, Elementaufteilung, Lasten und die bei manchen Methoden schon vor der Eingabe erforderliche Umrechnung von Flächenlasten in Knotenlasten beeinflussen die Ergebnisse verschiedener Methoden in jeweils anderer Weise.

Ein sehr einfacher Effekt soll an einem Beispiel erläutert werden:

Wird bei einer frei aufliegenden quadratischen Platte (System 1) die Gleichlast  $\beta$  'von Hand' in Knotenlasten umgerechnet, so werden im allgemeinen bei gleichmäßiger Elementaufteilung alle Knotenlasten gleich groß gewählt. Eine exakte Knotenlastbestimmung mit Hilfe virtueller Verrückungszustände ergäbe jedoch in Randnähe deutlich größere Knotenlasten. Wird nun eine Verschiebungsmethode, die wegen mangelnder Verträglichkeit des Ansatzes dazu neigt, zu große Verschiebungen zu erzielen, mit den gewählten zu kleinen Lasten getestet, so heben sich die beiden Fehlertendenzen gegenseitig etwa auf, und es entstehen gute Verschiebungsergebnisse. Wird jedoch dieselbe Platte für volleingespannte Ränder berechnet, so unterscheiden sich gewählte und exakte Knotenlasten nur wenig, und die Tendenz der Methode, zu große Verschiebungen zu erzeugen, kommt in den Ergebnissen deutlich zum Vorschein.

### 7.2.2 Der Vergleich des Aufwands

Neben dem Genauigkeitsvergleich verschiedener Lösungen ist der Vergleich des erforderlichen Aufwands von Wichtigkeit. Bei den Elementarmethoden wird dazu im allgemeinen die Zahl der vorhandenen Unbekannten herangezogen, da die Lösung des Gleichungssystems den Hauptanteil der Gesamtrechenzeit benötigt. Es ist jedoch zu beachten, daß bei den gemischten Methoden ganz besondere Gleichungsstrukturen auftreten, die die Lösung des Gleichungssystems erleichtern, so daß die Zahl der Unbekannten nun kein gutes Maß für den Aufwand mehr darstellt. Weitere Kriterien sind der gesamte Rechenzeitbedarf und der Speicherplatzbedarf. Diese Kriterien sind aber abhängig von der elektronischen Rechenanlage und der Güte des Programms. Es ist demnach nicht möglich, absolute Maßstäbe für den bei einer Lösungsmethode erforderlichen Aufwand anzugeben.

In der Tafel 3 sind für verschiedene Ansätze und die Plattensysteme 1 und 2 nach Bild 7.1 die Unbekanntenzahlen  $u$  in Abhängigkeit von der Kennzahl  $n$  der Elementaufteilung zusammengestellt. Die Zahlen und Formeln beziehen sich auf ein Plattenviertel, das in der Art von E 1 oder E 2 in Elemente unterteilt ist (siehe Bild 7.2), und Randbedingungen, wie sie bei Vernachlässigung der Querkraftverformungen gelten. Ergänzend ist die Zahl der Knotenpunkte und der Kanten für jedes  $n$  angegeben.

### 7.3 Beispiele zu den gemischten Methoden

#### 7.3.1 Allgemeines

In den Beispielen werden 5 Modelle berücksichtigt. Zur Vereinfachung der Kennzeichnung werden ihnen Nummern zugewiesen.

Modell 1: Herrmannsches Modell, linearer Ansatz für  $w$ , konstante Ansätze für  $m_{ij}$ , Methode A, siehe Abschnitt 5.2.1.

Modell 2: lineare Ansätze für  $w$  und  $m_{ij}$ , Methode A, siehe Abschnitt 5.2.2.

Modell 3: Ansatz vierter Ordnung für  $w$ , lineare Ansätze für  $m_{ij}$ , Methode B, siehe Abschnitt 5.3.

Modell 4: Modell 2 mit Zusatzansätzen  $w^{z1}$ ,  $w^{z2}$  oder  $w^{z3}$ , Methode A\*, siehe Abschnitt 5.4.3.

Modell 5: Modell 2 mit Zusatzansatz  $w^{z1}$ , Methode B\*, siehe Abschnitt 5.4.4.

In den Diagrammen werden die Modellnummern mit einer kreisförmigen Umrahmung gekennzeichnet.

Zu den Momentenergebnissen müssen noch einige Anmerkungen gemacht werden:

Beim Modell 1 (Herrmann) erhält man keine Knotenmomente, sondern nur Element- bzw. Kantenmomente. Mittelungen an den Knoten ergeben die mit 1 a bezeichnete Lösung. Bessere Ergebnisse erhält man, wenn man die dem betrachteten Knoten benachbarten, dem gesuchten Moment entsprechenden Kantenmomente direkt benutzt.

Für ein Moment  $m_x$  betrachtet man dafür eine Kante, die in y-Richtung zeigt, für  $m_{xy}$  eine Kante, die in Diagonalrichtung weist. Hierbei ist eine Umrechnung nötig, die bei der Plattenecke dadurch erleichtert wird, daß man  $m_x = m_y = 0$  setzen kann. Es gilt dort:  $m_{xy} = -M_{diag}$ . Die so entstandenen Werte ergeben die Lösung 1 b.

Beim Modell 3 erhält man zunächst 2 verschiedene Knotenmomente. Sie sind wie folgt definiert:

Lösung 3 a  $\hat{=}$  Moment  $m_{ij}$

Lösung 3 b  $\hat{=}$  Moment  $m_{ij}^w$

Errechnet man außerdem noch nach Abschnitt 6.2 aus den Verschiebungen die Momente mit einem linearen Momentenansatz, dann erhält man eine Lösung 3 c.

Bei den übrigen Modellen müssen keine Unterscheidungen getroffen werden.

### 7.3.2 Beispiele ohne Berücksichtigung der Querkraftverformungen

#### Beispiel 1: System 1 unter Gleichlast $\hat{p}$

Die Platte wurde mit der Elementaufteilung E 1 berechnet. Für die einzelnen Modelle und Rasterdichten wird der relative Fehler  $\beta$  nach Formel (7.1) in den Tafeln 4 bis 7 und in Bild 7.3 angegeben.

Aus Tafel 4 und Bild 7.3 ist zu ersehen, daß mit dem Modell 3 das weit-aus beste Ergebnis für die Durchsenkung der Plattenmitte erzielt wird. Diese Tendenz gilt auch für andere Knotenpunkte. Die schlechtesten Knotenverschiebungen erhält man mit dem Herrmannschen Modell 1.

Bei den Momenten in den Tafeln 5 und 6 ist von der Überlegenheit des Modells 3 nichts mehr zu spüren. - Modell 2 fällt hier deutlich ab. Seine Ergebnisse streben sichtlich gegen falsche Werte.

Damit erweist sich Modell 2 für die praktische Anwendung als unbrauchbar. Die Gründe hierfür werden in Kapitel 5 ausführlich diskutiert.

Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß bei der Doppelementlage E 3 auch das Modell 2 brauchbare Ergebnisse liefert, wie die Tafel 7 zeigt.

#### Beispiel 2: System 2 unter Gleichlast $\hat{p}$

Die Platte wurde mit der Elementaufteilung E 1 berechnet. Für verschiedene Größen werden in den Tafeln 8 bis 10 die Werte  $\beta$  nach Formel (7.1) angegeben. Modell 2 wird dabei weggelassen, da das erste Beispiel seine Unbrauchbarkeit gezeigt hat.

### 7.3.3 Beispiele mit Berücksichtigung der Querkraftverformungen

In diesem Abschnitt werden die Systeme 1 und 3 (siehe Bild 7.1) behandelt. Am frei aufliegenden Rand sind dabei zwei verschiedene Randbedingungen denkbar. Ihre Beschreibung am Beispiel des Randes  $x_2 = 0$  lautet (Definition von  $\varphi$  und  $\psi$  siehe Gleichungen (2.3) und (2.4)):

$$\text{RB 1: } w = 0; \psi = 0; m_{22} = 0$$

Daraus folgt:  $\varphi \neq 0; m_{12} \neq 0, m_{11} = 0$  (mit (2.4), (2.5) und (2.15))

Diese Randbedingung wird normalerweise bei Rechnungen ohne Querkraftverformungen benutzt. Wird die Querkraftverformung

berücksichtigt, so setzt RB 1 eine Drilleinspannung ( $\psi = 0$ ) des Randes voraus.

$$\text{RB 2: } w = 0; m_{12} = 0; m_{22} = 0$$

$$\text{Daraus folgt: } \varphi \neq 0; \psi \neq 0 (\psi = w, t - \gamma_t); m_{11} \neq 0$$

Bei RB 2 entfällt gegenüber RB 1 die Drilleinspannung des Randes. Diese Randbedingung ist die "natürliche" Randbedingung der frei aufliegenden Platte. Sie kann jedoch nur dann gefordert werden, wenn die Querkraftverformungen berücksichtigt werden.

Auch bei den folgenden Rechenbeispielen ist die Querkontraktionszahl  $\mu$  gleich Null gesetzt. Der Quotient Plattendicke  $h$  : Plattenlänge  $\ell$  wird jeweils angegeben.

Beispiel 3: System 1, RB 1, Gleichlast  $\hat{p}$ ,  $h/\ell = 0,15$

Für dieses Beispiel gibt es eine exakte Lösung von Salerno und Goldberg [40].

Mit

$$w^{(m)} = \lambda \frac{\hat{p} \ell^4}{E h^3}$$

ergibt sich bei  $h/\ell = 0,15$  und  $\mu = 0$  aus den dort angegebenen Formeln

$$\lambda = 0,05273$$

Das Beispiel wurde mit der Elementaufteilung E 1 durchgerechnet. In der Tafel 11 werden die auf den oben genannten Wert  $\lambda$  bezogenen Fehler  $\beta$  für die Modelle 3, 4 und 5 angegeben.

Der Einfluß der Querkraftverformung auf die Schnittgrößen ist bei diesem Beispiel sehr gering ( $\approx 1\%$ ). Dies zeigen auch die Rechenergebnisse. Auf ihre Darstellung wird verzichtet.

Beispiel 4: System 1, RB 2, Gleichlast  $\hat{p}$ ,  $h/\ell = 0,15$

Für dieses Beispiel war eine exakte Lösung in der Literatur nicht zu finden. Pryor, Barker und Frederick [41] benutzen zwar ebenfalls die Elementmethode zur Berechnung von Platten mit beiden Arten von frei aufliegenden Rändern, setzen jedoch im theoretischen

Teil ihrer Arbeit eine Konstante  $k$  gleich 1, 0, die bei Reissner [20], Salerno [40] und den meisten Literaturstellen gleich 1, 2 gesetzt wird. Trotz diesen unterschiedlichen Annahmen ergaben sich für RB 1 fast dieselben Ergebnisse wie in [40]. Wegen dieses Widerspruchs konnten die Ergebnisse für RB 2 nur in ihrer Tendenz, nicht aber in ihren Zahlenwerten zu Vergleichen herangezogen werden.

Die realistischen Randbedingungen RB 2 erzeugen bei den Querkräften im Bereich der Ecken und bei den Drillmomenten im gesamten Randbereich sehr starke Steigungen. Dies führt bei den größeren Werten für den Quotienten  $h/l$  zu einer gewissen Unruhe in den Schnittgrößen, vor allem in den Randbereichen. Diese Unruhe konnte durch die Benutzung der Elementaufteilung E 3 wesentlich herabgesetzt werden. Bei dem hier gewählten Quotienten erhält man jedoch auch mit E 1 befriedigende Ergebnisse. Von den Ergebnissen wird neben der Mittendurchbiegung und dem Mittenmoment der Verlauf des hier vor allem interessierenden Drillmoments dargestellt. Da ein Vergleich mit exakten Lösungen nicht möglich ist, werden in den Tafeln 12 bis 14 und im Bild 7.4 die dimensionslosen Beiwerte  $\lambda$  und  $\alpha_{ij}$  angegeben.

Da das Drillmoment  $m_{12}$  am Rand sehr steil ansteigt und sich die Ergebnisse für die Randbedingungen RB 1 und RB 2 hierin wesentlich unterscheiden, sind in der Tafel 14 die Werte  $\alpha_{12}$  des Drillmoments im Schnitt  $x_2 = \frac{l}{4}$  an den Knotenpunkten, die sich für  $n = 6$  ergeben, für die verschiedenen Methoden zusammengestellt. Der Tabelle ist eine Zeile mit den Werten  $\alpha_{12}$  der exakten Drillmomente angefügt, die unter Vernachlässigung der Querkraftverformungen (QV) errechnet wurden.

Die einzelnen Lösungen weichen nur wenig voneinander ab. In Bild 7.4 wird die Lösung 4 bei der Elementaufteilung E 1 mit der exakten Lösung verglichen, wie sie sich ohne Berücksichtigung der Querkraftverformungen ergibt. Das Diagramm zeigt sehr deutlich, wie die großen Unterschiede am Rand sich gegen die Plattenmitte zu langsam ausgleichen.

----- Beispiel 5: System 3, Gleichlast  $\hat{p}$ ,  $\frac{h}{l} = 0,30$  -----

Freie Plattenränder sind mit der Kirchhoffschen Plattentheorie nicht

exakt zu erfassen, da die beiden Randbedingungen

$$Q = 0 ; T = 0$$

nur näherungsweise in der Form

$$V = 0$$

erfüllt werden können.

Benutzt man die Elementmethode, so ist es zwar formal möglich, auch bei Verwendung der Kirchhoffschen Theorie die Randrillmomente für sich Null zu setzen, die Folge davon ist jedoch ein singulärer Anstieg der Drillmomente vom Plattenrand aus und ein unruhiger Verlauf bis weit ins Platteninnere hinein. Die Lösung ist bei genauerer Betrachtung des Verlaufs unbefriedigend. Erst die Berücksichtigung der Querkraftverformungen liefert gute und in ihrem gesamten Verlauf plausible Ergebnisse.

Die Platte wurde für die Elementaufteilung E 1 mit den Modellen 3, 4 und 5 berechnet, wobei am frei aufliegenden Rand die einfachere Randbedingung RB 1 gewählt wurde. Da die Maße des effektiv berechneten Plattenteils unverändert bleiben, die Abmessung  $a$  jedoch bei System 3 der Gesamtlänge  $l$  entspricht, ist der Quotient  $h/l$  hier gleich 0,30.

Die Ergebnisse sind in den Tafeln 15 bis 17 und den Bildern 7.5 und 7.6 dargestellt.

#### 7.4 Beispiele zur Verschiebungsmethode

##### 7.4.1 Allgemeines

Als Beispiele wurden die Systeme 1 und 2 unter Gleichlast  $\hat{p}$  und mittlerer Einzellast  $\hat{P}$  mit verschiedenen Methoden und Ansätzen berechnet. Die Querkraftverformungen werden vernachlässigt. Da die exakten Lösungen in allen Fällen bekannt sind, werden nach Gleichung (7.1) jeweils nur die relativen Fehler  $\beta$  angegeben.

Verwendet wurden Methoden, die im Kapitel 6 dargestellt sind. Die Ansätze gehen alle von der Gleichung (6.18) aus und unterscheiden sich nur in der Konstanten  $c_{10}$ . Nach Abschnitt 6.4 werden sie wie folgt bezeichnet:

- A 1 ... Ansatz 1,  $c_{10} = 0$
- A 2 ... Ansatz 2,  $c_{10} = c_{10}^{(2)}$  nach Gleichung (6. 21)
- A 3 ... Ansatz 3,  $c_{10} = c_{10}^{(3)}$  nach Gleichung (6. 23)

Alle Ansätze sind nicht voll verträglich. Sie wurden in folgende Gleichungen eingesetzt:

$$\begin{aligned}\delta \Pi &= 0 \\ \delta V &= 0 \\ \delta \bar{F}_1 &= 0 \\ \delta F_1 &= 0\end{aligned}$$

#### 7. 4. 2 Die Ergebnisse für den Ansatz 1

Die Unbrauchbarkeit des Ansatzes 1 wird am System 1 unter Gleichlast gezeigt. Bei Benutzung von  $\Pi$  scheinen die Verschiebungen zu konvergieren, jedoch nicht gegen den richtigen Wert. Bei Benutzung von  $F_1$  ist dann nicht einmal mehr eine Konvergenz zu falschen Werten festzustellen.

Für die Größen  $w^{(m)}$ ,  $m_{11}^{(m)} = m_{22}^{(m)}$  und  $m_{12}^{(e)}$  sind in der Tafel 18 die Werte  $\beta$  angegeben.

#### 7. 4. 3 Beispiele für die Ansätze 2 und 3

Die folgenden drei Beispiele wurden mit der Elementaufteilung E 1 berechnet. Zur Ergänzung werden weitere Ergebnisse von Clough [35] übernommen, und zwar für die Rechteckelemente ACM und M und das Dreieckelement HCT. Bei letzterem wurde die Elementaufteilung E 2 benutzt. Alle Elemente verwenden dieselben Knotenparameter. Die aus [35] entnommenen Werte mußten aus Diagrammen abgelesen werden; die Genauigkeit ihrer Wiedergabe ist somit beschränkt.

#### Beispiel 6: System 1, mittige Einzellast $\hat{P}$

Ergebnisse für die Mittendurchsenkung  $w^{(m)}$  werden in der Tafel 19 angegeben.

Das Beispiel wurde gewählt, weil bei ihm eine Aussage über die Art der Annäherung bei vollverträglichen Ansätzen möglich ist:  $w^{(m)}$  muß in

diesem Fall von unten her angenähert werden ( $\beta$ -Werte negativ!).

Die Ergebnisse des HCT-Elements entsprechen dieser Aussage, während die nicht voll verträglichen Ansätze A 2 und A 3 für  $\delta \Pi = 0$  erwartungsgemäß  $w^{(m)}$  von oben her annähern. Schon bei  $\delta V = 0$  und erst recht bei den übrigen Gleichungen wird  $w^{(m)}$  jedoch ebenfalls von unten angenähert. Dies ist allerdings theoretisch nicht begründbar.

Das ausgesprochen gute Ergebnis für  $\delta V = 0$  ist Zufall und nur damit zu erklären, daß sich hier 2 Annäherungstendenzen (die von oben und die von unten) so überlagern, daß sie in dem speziellen Fall eine sehr große Konvergenzgeschwindigkeit erzielen. Die Ergebnisse für andere Knotenpunkte sind nicht mehr so gut.

#### Beispiel 7: System 1 unter Gleichlast $\hat{p}$

Dieses Beispiel wird sehr ausführlich behandelt (Tafel 20 bis 28 und Bild 7. 7). Neben den Ergebnissen für den Mittelpunkt  $m$  und den Eckpunkt  $e$  werden auch solche für die Zwischenpunkte  $d$  und  $c$  angegeben, um mehr Vergleichsmöglichkeiten zu erhalten und weil die Ergebnisse für  $m$  wegen dessen Sonderlage im Schnittpunkt aller Symmetrieachsen keine allgemeingültigen Schlüsse zulassen.

Bei den Momenten werden auch die Ordinaten angegeben, die sich für die einzelnen Rasterdichten dadurch ergeben, daß die jeweiligen Verschiebungsparameter exakt eingegeben werden. Nach Abschnitt 7. 2. 1 stellen diese Ordinaten die für eine Polyederdarstellung der Momente optimalen Werte dar. Streng genommen ist also für jedes  $n$  nicht das Ergebnis das beste, das die exakte Momentenordinate annähert, sondern dasjenige, das den genannten Polyederordinaten am nächsten kommt.

Bei den Verschiebungsergebnissen sind sehr deutliche Genauigkeitsunterschiede zwischen den einzelnen Verfahren zu erkennen. So sind die Ergebnisse für die genaueren Funktionale sehr viel besser als diejenigen für das Funktional II. Andererseits ist an den drei gewählten Innenpunkten zu erkennen, daß sich die einzelnen Verfahren in den Fehler-schwankungen von Punkt zu Punkt weit weniger unterscheiden als im

absoluten Fehler. Dies führt dazu, daß die Verfahren bei den Momenten kleinere Unterschiede aufweisen als bei den Verschiebungen. Da die Momente aus den Verschiebungen berechnet werden, würde ein konstanter relativer Fehler bei den Verschiebungen zu einem konstanten, gleich großen Fehler bei den Momenten führen (siehe Abschnitt 4.6). Erst die Fehlerschwankungen bei den Verschiebungen führen zu den größeren Momentenfehlern. Diese können deshalb als Maß für die Ungleichmäßigkeit der Genauigkeit bei den Verschiebungen herangezogen werden. Wird die Ungleichmäßigkeit örtlich zu groß, so führt dies zu nicht konvergenten Momentenergebnissen, wie aus Tafel 23, Zeile 2 zu ersehen ist. Dies ist ein weiteres Beispiel für die Tatsache, daß die Konvergenz einer Funktion nicht auch gleichzeitig die Konvergenz ihrer Ableitungen garantiert. Am Beispiel des Balkens lassen sich sehr leicht Kriterien herleiten, die auch für Abschätzungen bei der Platte benutzt werden können.

Hinzuweisen ist in diesem Zusammenhang auf die erstaunlich guten Momente für die Gleichung  $\delta V = 0$ , z. B. auf das anscheinend etwas schwierige Moment  $m_{11}^{(c)}$  (Tafel 27). Untersuchungen der Verschiebungen bei  $\delta V = 0$  ergaben eine sehr geringe Schwankung des Fehlers  $\beta$ . Eventuell erklärbar ist dies mit der Tatsache, daß bei  $\delta V$  gegenüber  $\delta \bar{F}_1$  der Verträglichkeitsteil der über  $\delta \Pi$  hinausgehenden Terme vernachlässigt ist. Es ist denkbar, daß die bei  $\delta \bar{F}_1$  und  $\delta F_1$  auftretende Verquickung von Gleichgewichts- und Verträglichkeitsgleichungen die Gleichmäßigkeit der Genauigkeit der Verschiebungen vermindert bzw. die Abhängigkeit von der Art der Elementaufteilung erhöht.

#### Beispiel 8: System 2 unter Gleichlast $\hat{p}$

Ergebnisse für dieses Beispiel sind in den Tafeln 29 bis 31 dargestellt.

### 7.5 Schlußbemerkungen zu den Beispielen

Die Beispiele dienen dazu, einzelne Verfahren miteinander zu vergleichen und auf ihre Brauchbarkeit zu untersuchen. Da bei den benutzten Methoden theoretische Konvergenzbeweise nicht vorliegen, wurde versucht, wenigstens praktische Konvergenzhinweise zu erhalten. Hierbei

ist jedoch eine gewisse Vorsicht geboten. Bild 7.8 zeigt den häufig auftretenden Fall, daß eine Lösung bei zunehmender Rasterdichte den exakten Wert erst nach einem Wechsel des Fehlervorzeichens endgültig annähert. Wird nun die dargestellte Kurve schon bei  $n_2$  oder etwas davor abgebrochen, so sind zwei falsche Schlüsse denkbar: Ist der exakte Wert bekannt, so entsteht der Eindruck, daß die Lösung gegen einen falschen Wert konvergiert, ist er unbekannt, so wird vielleicht der Wert mit dem Fehler  $\beta_2$  als exakte Lösung angesehen. Im ersten Fall wird also eine in Wirklichkeit zu konvergenten Lösungen führende Methode eventuell verworfen. Dies ist vom praktischen Standpunkt aus dann vertretbar, wenn der Fehler  $\beta_2$  relativ groß, die Konvergenz also schlecht ist. Der zweite Fall zeigt andererseits, daß auch dann, wenn die Konvergenz einer Methode gesichert ist, ein falsches Ergebnis erzielt werden kann, wenn diese Konvergenz nicht monoton ist und die Lösungsfolge zu früh abgebrochen wird.

Ohne Schwierigkeiten sind jedoch die durch Beispielrechnungen ebenfalls untersuchten Methoden zu beurteilen, deren Ergebnisse sich sprunghaft ändern und keinerlei Konvergenz erkennen lassen.

Tafel 1: Beiwerte  $\lambda$  und  $\alpha_{ij}$  für verschiedene Punkte des Systems 1 unter Gleichlast  $\hat{p}$  (Kirchhoff-Theorie)

Punkt Beiwert	e	d	c	m
$\lambda$	0	0,025586	0,035258	0,048748
$\alpha_{11}$	0	0,022643	0,026328	0,036836
$\alpha_{12}$	-0,046393	-0,019071	0	0
$\alpha_{22}$	0	0,022643	0,031006	0,036836

Tafel 2: Beiwerte  $\lambda^*$ ,  $\lambda$  und  $\alpha_{ij}$  für den Plattenmittelpunkt m und den Randpunkt r (Kirchhoff-Theorie)

System und Last	Art des Beiwerts	Größe des Beiwerts
System 1, Einzellast $\hat{P}$ in Plattenmitte	$\lambda^{*(m)}$	+ 0,139200
System 2 Gleichlast $\hat{p}$	$\lambda^{(m)}$	+ 0,0152
	$\alpha_{11}^{(m)} = \alpha_{22}^{(m)}$	+ 0,0176
	$\alpha_{22}^{(r)}$	- 0,0518

Tafel 3: Zusammenstellung der Anzahl von Knotenpunkten (k), Kanten (s) und Unbekannten (u) in einem Plattenviertel

System	$n$	1	2	4	6	8	allg. Formel	Zeile $Z_i$
1 oder 2	Zahl k der Knoten	4	9	25	49	81	$(n + 1)^2$	1
1 oder 2	Zahl s der Kanten	5	16	56	120	208	$3n^2 + 2n$	2
1	u bei konst. Ansatz für $m_{ij}$	3	12	48	108	192	$3n^2$	3
	u bei lin. Ansatz für $m_{ij}$	3	12	48	108	192	$3n^2$	4
	u bei lin. Ansatz für w	1	4	16	36	64	$n^2$	5
	u bei kub. Ansatz für w lt. (6.18)	3	12	48	108	192	$3n^2$	6
	u bei gemischtem Modell 1	4	16	64	144	256	$z_3 + z_5 = 4n^2$	7
	u bei gemischtem Modell 2	4	16	64	144	256	$z_4 + z_5 = 4n^2$	8
	u bei gem. Ansatz für $F_{2B}$	7	28	112	252	448	$2z_4 + z_5 = 7n^2$	9
	u bei konst. Ansatz für $m_{ij}$	5	16	56	120	208	$3n^2 + 2n$	10
	u bei lin. Ansatz für $m_{ij}$	4	13	49	109	193	$3n^2 + 1$	11
	u bei lin. Ansatz für w	1	4	16	36	64	$n^2$	12
2	u bei kub. Ansatz für w lt. (6.18)	1	8	40	96	176	$3n^2 - 2n$	13
	u bei gemischtem Modell 1	6	20	72	156	272	$z_{10} + z_{12} = 4n^2 + 2n$	14
	u bei gemischtem Modell 2	5	17	65	145	257	$z_{11} + z_{12} = 4n^2 + 1$	15
	u bei gem. Ansatz für $F_{2B}$	9	30	114	254	450	$2z_{11} + z_{12} = 7n^2 + 2$	16

Tafel 4: Werte  $\beta$  für die Mittendurchbiegung  $w^{(m)}$  - Beispiel 1

$\begin{matrix} n \\ \text{Lösung} \end{matrix}$	1	2	4	6
1	+ 0,7094	+ 0,1466	+ 0,0352	+ 0,0153
2	- 0,1453	- 0,0891	- 0,0177	- 0,0062
3	+ 0,0256	+ 0,0138	+ 0,0013	+ 0,0003
4	- 0,1453	- 0,0439	- 0,0113	- 0,0051
5	- 0,1453	- 0,0262	- 0,0087	- 0,0039

Tafel 5: Werte  $\beta$  für das Mittensmoment  $m_{11}^{(m)} = m_{22}^{(m)}$  - Beispiel 1

$\begin{matrix} n \\ \text{Lösung} \end{matrix}$	1	2	4	6
1 a	- 0,6230	- 0,1617	- 0,0394	- 0,0168
1 b	- 0,2460	- 0,0667	- 0,0190	- 0,0080
2	+ 0,1312	- 0,1045	- 0,2070	- 0,2095
3 a	+ 0,1722	- 0,1237	- 0,0287	- 0,0127
3 b	+ 0,3573	+ 0,1037	+ 0,0370	+ 0,0168
3 c	+ 0,3573	+ 0,1147	+ 0,0334	+ 0,0149
4	+ 0,1312	- 0,0251	- 0,0159	- 0,0081
5	+ 0,1312	- 0,0127	+ 0,0081	+ 0,0063

Tafel 6: Werte  $\beta$  für das Eckdrillmoment  $m_{12}^{(e)}$  - Beispiel 1

$\begin{matrix} n \\ \text{Lösung} \end{matrix}$	1	2	4	6
1 a	- 0,4013	- 0,1346	- 0,0307	- 0,0120
1 b	- 0,1018	- 0,0186	+ 0,0105	+ 0,0101
2	- 0,1018	+ 0,4855	+ 0,7869	+ 0,8470
3 a	- 0,1346	- 0,0531	- 0,0245	- 0,0147
3 b	+ 0,0777	+ 0,1885	+ 0,0803	+ 0,0430
3 c	+ 0,0777	+ 0,1458	+ 0,0640	+ 0,0346
4	- 0,1018	+ 0,0775	+ 0,0377	+ 0,0228
5	- 0,1018	+ 0,1569	+ 0,0353	+ 0,0178

Tafel 7: Werte  $\beta$  für die Größen  $w^{(m)}$ ,  $m_{11}^{(m)} = m_{22}^{(m)}$  und  $m_{12}^{(e)}$  bei Modell 2 und Elementaufteilung E 3 - Beispiel 1

n \	1	2	4	6
$w^{(m)}$	- 0, 2308	- 0, 0481	- 0, 0113	- 0, 0065
$m_{11}^{(m)}$	+ 0, 3573	+ 0, 0955	+ 0, 0244	+ 0, 0114
$m_{12}^{(e)}$	- 0, 4611	- 0, 1446	- 0, 0449	- 0, 0207

Tafel 8: Werte  $\beta$  für die Mittendurchbiegung  $w^{(m)}$  - Beispiel 2

n \ Lösung	1	2	4	6
1	+ 3, 1151	+ 0, 8364	+ 0, 2330	+ 0, 1077
3	- 0, 9664	- 0, 0985	- 0, 0059	- 0, 0012
4	- 0, 8284	+ 0, 0040	+ 0, 0151	+ 0, 0074
5	- 0, 8630	+ 0, 1818	+ 0, 0265	+ 0, 0105

Tafel 9: Werte  $\beta$  für das Mittelmoment  $m_{11}^{(m)} = m_{22}^{(m)}$  - Beispiel 2

n \ Lösung	1	2	4	6
1 a	- 1, 000	- 0, 227	- 0, 052	- 0, 012
1 b	+ 0, 182	+ 0, 062	+ 0, 003	+ 0, 002
3 a	+ 0, 323	+ 0, 071	- 0, 035	- 0, 019
3 b	- 0, 421	+ 0, 257	+ 0, 065	+ 0, 031
3 c	- 0, 454	+ 0, 365	+ 0, 066	+ 0, 029
4	+ 0, 773	+ 0, 254	+ 0, 034	+ 0, 012
5	+ 1, 364	+ 0, 127	+ 0, 066	+ 0, 032

Tafel 10: Werte  $\beta$  für das Einspannmoment  $m_{22}^{(r)}$  - Beispiel 2

$\begin{matrix} n \\ \text{Lösung} \end{matrix}$	1	2	4	6
1 a	- 0,596	- 0,307	- 0,120	- 0,066
1 b	- 0,596	- 0,307	- 0,120	- 0,066
3 a	+ 0,164	+ 0,120	+ 0,066	+ 0,040
3 b	- 0,802	- 0,342	- 0,088	- 0,038
3 c	- 0,689	- 0,253	- 0,055	- 0,021
4	+ 0,010	+ 0,156	+ 0,067	+ 0,031
5	- 0,192	+ 0,126	+ 0,052	+ 0,022

Tafel 11: Werte  $\beta$  für die Mittendurchsenkung  $w^{(m)}$  bei Berücksichtigung der Querkraftverformungen - Beispiel 3

$\begin{matrix} n \\ \text{Lösung} \end{matrix}$	2	4	6
3	+ 0,0228	+ 0,0034	+ 0,0012
4	- 0,0360	- 0,0094	- 0,0043
5	- 0,0154	- 0,0062	- 0,0028

Tafel 12: Werte  $\lambda^{(m)}$  für die Mittendurchbiegung  $w^{(m)}$  - Beispiel 4

$\begin{matrix} n \\ \text{Lösung} \end{matrix}$	Elementaufteilung E 1		Elementaufteilung E 3	
	4	6	4	6
3	0,06086	0,06168	0,06201	0,06218
4	0,06436	0,06335	0,06505	0,06360
5	0,06331	0,06272	0,06413	0,06299

Tafel 13: Werte  $\alpha_{11}^{(m)} = \alpha_{22}^{(m)}$  für das Mittenmoment  $m_{11}^{(m)} = m_{22}^{(m)}$  -  
Beispiel 4

n Lösung		Elementaufteilung E 1		Elementaufteilung E 3	
		4	6	4	6
3 a		0, 03964	0, 04038	0, 04233	0, 04245
3 b		0, 04173	0, 04144	0, 04259	0, 04233
3 c		0, 04138	0, 04132	0, 04304	0, 04256
4		0, 04251	0, 04203	0, 04474	0, 04343
5		0, 04269	0, 04200	0, 04363	0, 04282

Tafel 14: Werte  $\alpha_{12}$  des Drillmoments  $m_{12}$  längs  $x_2 = \frac{l}{4}$  für n = 6 -  
Beispiel 4

Element- aufteilung	Lösung	$\frac{x_1}{l/2}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
		E 1	3 a	0	-0, 0328	-0, 0269	-0, 0235	-0, 0131	-0, 0071
3 b	0		-0, 0314	-0, 0286	-0, 0214	-0, 0141	-0, 0069	0	
3 c	0		-0, 0296	-0, 0281	-0, 0218	-0, 0144	-0, 0073	0	
4	0		-0, 0306	-0, 0287	-0, 0221	-0, 0146	-0, 0073	0	
5	0		-0, 0323	-0, 0288	-0, 0216	-0, 0141	-0, 0068	0	
E 3	3 a	0	-0, 0312	-0, 0284	-0, 0213	-0, 0146	-0, 0074	0	
	3 b	0	-0, 0303	-0, 0282	-0, 0218	-0, 0149	-0, 0076	0	
	3 c	0	-0, 0289	-0, 0278	-0, 0216	-0, 0148	-0, 0075	0	
	4	0	-0, 0296	-0, 0284	-0, 0221	-0, 0151	-0, 0076	0	
	5	0	-0, 0307	-0, 0286	-0, 0221	-0, 0151	-0, 0077	0	
$\alpha_{12}$ exakt bei RB 1, ohne QV			-0, 0286	-0, 0274	-0, 0240	-0, 0191	-0, 0132	-0, 0067	0

Tafel 15: Werte  $\lambda^{(m)}$  für die Eckdurchbiegung  $w^{(m)}$  - Beispiel 5

Lösung \ n	n		
	2	4	6
3	1,656	1,703	1,722
4	1,970	1,809	1,772
5	1,866	1,774	1,755

Tafel 16: Werte  $\alpha_{ij}$  der Größen  $m_{11}$  und  $m_{12}$  im Schnitt  $x_2 = \frac{l}{2}$  für  $n = 6$  - Beispiel 5

Mo- ment	Lösung \ $\frac{x_1}{l}$	$\frac{x_2}{l}$						1
		0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	
$m_{11}$	3 a	0	0,0374	0,0559	0,0521	0,0422	0,0133	0
	3 b	0	0,0393	0,0562	0,0563	0,0426	0,0205	0
	3 c	0	0,0390	0,0560	0,0559	0,0420	0,0184	0
	4	0	0,0377	0,0537	0,0530	0,0387	0,0130	0
	5	0	0,0380	0,0540	0,0538	0,0397	0,0133	0
$m_{12}$	3 a	-0,1736	-0,1716	-0,1584	-0,1469	-0,1254	-0,1154	0
	3 b	-0,1741	-0,1706	-0,1586	-0,1432	-0,1261	-0,1042	0
	3 c	-0,1734	-0,1704	-0,1585	-0,1431	-0,1254	-0,1013	0
	4	-0,1768	-0,1738	-0,1622	-0,1473	-0,1306	-0,1057	0
	5	-0,1760	-0,1727	-0,1610	-0,1462	-0,1301	-0,1074	0

Tafel 17: Werte  $\alpha_I$  des Hauptmoments  $m_I$  in Diagonalenrichtung im Schnitt  $x_2 = x_1$  für  $n = 6$  - Beispiel 5

Mo- ment	Lösung \ $\frac{x_2}{l} = \frac{x_1}{l}$	$\frac{x_2}{l}$						1
		0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	
$m_I$	3 a	-0,2281	-0,1960	-0,1417	-0,0948	-0,0542	-0,0902	0
	3 b	-0,2319	-0,1945	-0,1370	-0,0869	-0,0522	-0,0361	0
	3 c	-0,2313	-0,1942	-0,1371	-0,0872	-0,0531	-0,0370	0
	4	-0,2325	-0,1968	-0,1414	-0,0943	-0,0609	-0,0441	0
	5	-0,2316	-0,1961	-0,1399	-0,0874	-0,0584	-0,0409	0

Tafel 18: Werte  $\beta$  für  $w^{(m)}$ ,  $m_{11}^{(m)} = m_{22}^{(m)}$  und  $m_{12}^{(e)}$  bei Ansatz 1.  
System 1, Gleichlast  $\beta$ , Elementaufteilung E 1

benutzte Gleichung	n	1	2	4	6
		$w^{(m)}$	+ 0,966	+ 0,062	- 0,016
$\delta \pi = 0$	$m_{11}^{(m)}$	+ 1,600	+ 0,589	+ 1,551	+ 2,204
	$m_{12}^{(e)}$	+ 1,066	+ 0,400	+ 0,847	+ 1,230
	$w^{(m)}$	+ 0,538	- 1,923	+ 9,065	- 2,426
$\delta F_1 = 0$	$m_{11}^{(m)}$	+ 1,036	- 0,506	+ 10,743	+ 0,578
	$m_{12}^{(e)}$	+ 0,617	- 2,032	+ 22,805	- 3,728

Tafel 19: Werte  $\beta$  für die Mittenverschiebung  $w^{(m)}$  bei verschiedenen Ansätzen, Gleichungen und Rasterdichten - Beispiel 6  
Ergänzend Ergebnisse aus Clough [35]

benutzte Gleichung	n A	1	2	4	6	8
		$\delta \pi = 0$	2	+ 0,2602	+ 0,0620	+ 0,0194
	3	+ 0,1094	+ 0,0140	+ 0,0038	+ 0,0027	+ 0,0027
$\delta V = 0$	2	+ 0,0264	- 0,0048	- 0,0005	+ 0	+ 0
	3	- 0,0205	- 0,0248	- 0,0092	- 0,0048	- 0,0032
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2	- 0,0721	- 0,0388	- 0,0119	- 0,0054	- 0,0032
	3	- 0,0884	- 0,0393	- 0,0119	- 0,0054	- 0,0032
$\delta F_1 = 0$	2	- 0,0721	- 0,0345	- 0,0124	- 0,0059	- 0,0038
	3	- 0,0884	- 0,0356	- 0,0113	- 0,0054	- 0,0032
Elementmodelle aus [35]	HCT <sup>A</sup>	- 0,2490	- 0,0970	- 0,0336	- 0,0168	- 0,0134
	ACM <sup>B</sup>	+ 0,1880	+ 0,0620	+ 0,0202	+ 0,0101	+ 0,0062
	M <sup>C</sup>	+ 0,0470	+ 0,0235	+ 0,0084	+ 0,0040	+ 0,0020

Tafel 20: Werte  $\beta$  für die Mittenverschiebung  $w^{(m)}$  bei verschiedenen Ansätzen, Gleichungen und Rasterdichten - Beispiel 7  
Ergänzend Ergebnisse für das HCT-Element von Clough [35]

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$		2	+ 0,3850	+ 0,0770	+ 0,0187	+ 0,0083	+ 0,0046
		3	+ 0,2440	+ 0,0477	+ 0,0122	+ 0,0065	+ 0,0043
$\delta V = 0$		2	+ 0,1700	+ 0,0317	+ 0,0072	+ 0,0032	+ 0,0017
		3	+ 0,1362	+ 0,0276	+ 0,0065	+ 0,0028	+ 0,0015
$\delta \bar{F}_1 = 0$		2	+ 0,0467	+ 0,0067	+ 0,0016	+ 0,0008	+ 0,0004
		3	+ 0,0355	+ 0,0059	+ 0,0014	+ 0,0007	+ 0,0004
$\delta F_1 = 0$		2	+ 0,0467	- 0,0012	- 0,0016	- 0,0009	- 0,0006
		3	+ 0,0355	+ 0,0002	- 0,0006	- 0,0004	- 0,0002
HCT, Aufteilung E 2			- 0,4580	- 0,1250	- 0,0346	- 0,0115	- 0,0040

Tafel 21: Werte  $\beta$  für die Durchbiegung  $w^{(d)}$  bei verschiedenen Ansätzen, Gleichungen und Rasterdichten - Beispiel 7

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$		2		+ 0,0963	+ 0,0239	+ 0,0107	+ 0,0060
		3		+ 0,0745	+ 0,0199	+ 0,0095	+ 0,0056
$\delta V = 0$		2		+ 0,0368	+ 0,0091	+ 0,0040	+ 0,0023
		3		+ 0,0281	+ 0,0071	+ 0,0032	+ 0,0018
$\delta \bar{F}_1 = 0$		2		+ 0,0146	+ 0,0047	+ 0,0023	+ 0,0014
		3		+ 0,0115	+ 0,0043	+ 0,0021	+ 0,0012
$\delta F_1 = 0$		2		+ 0,0007	0	0	0
		3		+ 0,0010	0	0	0

Tafel 22: Werte  $\beta$  für die Durchbiegung  $w^{(c)}$  bei verschiedenen Ansätzen, Gleichungen und Rasterdichten - Beispiel 7

benutzte Gleichung	n A	1	2	4	6	8
		$\delta \pi = 0$	2		+ 0, 0835	+ 0, 0202
	3		+ 0, 0726	+ 0, 0208	+ 0, 0104	+ 0, 0066
$\delta V = 0$	2		+ 0, 0347	+ 0, 0085	+ 0, 0038	+ 0, 0022
	3		+ 0, 0278	+ 0, 0072	+ 0, 0032	+ 0, 0018
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2		+ 0, 0117	+ 0, 0038	+ 0, 0018	+ 0, 0010
	3		+ 0, 0097	+ 0, 0035	+ 0, 0016	+ 0, 0010
$\delta F_1 = 0$	2		- 0, 0014	- 0, 0008	- 0, 0004	- 0, 0002
	3		- 0, 0009	- 0, 0002	- 0, 0001	- 0, 0001

Tafel 23: Werte  $\beta$  für das Mittelmoment  $m_{11}^{(m)} = m_{22}^{(m)}$  - Beispiel 7

benutzte Gleichung	n A	1	2	4	6	8
		$\delta \pi = 0$	2	+ 0, 8334	+ 0, 0545	+ 0, 0153
	3	+ 0, 6468	- 0, 0743	- 0, 1286	- 0, 1374	- 0, 1398
$\delta V = 0$	2	+ 0, 5492	+ 0, 0487	+ 0, 0087	+ 0, 0023	+ 0, 0007
	3	+ 0, 5039	+ 0, 0626	+ 0, 0109	+ 0, 0037	+ 0, 0015
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2	+ 0, 3853	+ 0, 0404	- 0, 0017	- 0, 0036	- 0, 0032
	3	+ 0, 3704	+ 0, 0485	- 0, 0012	- 0, 0036	- 0, 0032
$\delta F_1 = 0$	2	+ 0, 3853	+ 0, 0385	+ 0, 0044	0	- 0, 0008
	3	+ 0, 3704	+ 0, 0453	+ 0, 0078	+ 0, 0022	+ 0, 0007
Momente bei Eingabe der exakten Verschiebungen		+ 0, 3234	+ 0, 0314	+ 0, 0102	+ 0, 0046	+ 0, 0025

Tafel 24: Werte  $\beta$  für das Eckdrillmoment  $m_{12}^{(e)}$  - Beispiel 7

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$	2		+ 0,4557	+ 0,2886	+ 0,0973	+ 0,0513	+ 0,0322
	3		+ 0,3075	+ 0,2626	+ 0,0834	+ 0,0431	+ 0,0268
$\delta V = 0$	2		+ 0,2301	+ 0,1856	+ 0,0628	+ 0,0330	+ 0,0206
	3		+ 0,1941	+ 0,1706	+ 0,0577	+ 0,0302	+ 0,0189
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2		+ 0,1000	+ 0,1159	+ 0,0330	+ 0,0168	+ 0,0104
	3		+ 0,0881	+ 0,1083	+ 0,0300	+ 0,0152	+ 0,0093
$\delta F_1 = 0$	2		+ 0,1000	+ 0,1347	+ 0,0494	+ 0,0267	+ 0,0170
	3		+ 0,0881	+ 0,1343	+ 0,0496	+ 0,0271	+ 0,0172
Momente bei Eingabe der exakten Verschiebungen			+ 0,0508	+ 0,1446	+ 0,0536	+ 0,0290	+ 0,0185

Tafel 25: Werte  $\beta$  für das Moment  $m_{11}^{(d)} = m_{22}^{(d)}$  - Beispiel 7

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$	2			+ 0,2581	+ 0,0467	+ 0,0232	+ 0,0124
	3			+ 0,1880	+ 0,0304	+ 0,0166	+ 0,0083
$\delta V = 0$	2			+ 0,1248	+ 0,0279	+ 0,0133	+ 0,0075
	3			+ 0,1066	+ 0,0260	+ 0,0119	+ 0,0067
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2			+ 0,1195	+ 0,0262	+ 0,0124	+ 0,0069
	3			+ 0,1099	+ 0,0271	+ 0,0122	+ 0,0069
$\delta F_1 = 0$	2			+ 0,0884	+ 0,0205	+ 0,0094	+ 0,0053
	3			+ 0,0895	+ 0,0205	+ 0,0094	+ 0,0053
Momente bei Eingabe der exakten Verschiebungen				+ 0,0820	+ 0,0207	+ 0,0091	+ 0,0053

Tafel 26: Werte  $\beta$  für das Drillmoment  $m_{12}^{(d)}$  - Beispiel 7

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$	2			+ 0,0881	+ 0,0114	+ 0,0074	+ 0,0042
	3			+ 0,0094	+ 0,0186	+ 0,0074	+ 0,0051
$\delta V = 0$	2			+ 0,0156	+ 0,0068	+ 0,0029	+ 0,0015
	3			+ 0,0212	+ 0,0088	+ 0,0035	+ 0,0019
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2			+ 0,0065	- 0,0014	- 0,0004	0
	3			+ 0,0074	- 0,0004	0	0
$\delta F_1 = 0$	2			- 0,0017	- 0,0030	- 0,0014	- 0,0008
	3			+ 0,0068	+ 0,0025	+ 0,0009	+ 0,0006
Momente bei Eingabe der exakten Verschiebungen				+ 0,0133	+ 0,0025	+ 0,0009	+ 0,0006

Tafel 27: Werte  $\beta$  für das Moment  $m_{11}^{(c)}$  - Beispiel 7

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$	2			+ 0,1103	- 0,0120	- 0,0215	- 0,0210
	3			+ 0,1991	+ 0,0471	+ 0,0236	+ 0,0215
$\delta V = 0$	2			+ 0,1174	+ 0,0179	+ 0,0020	- 0,0018
	3			+ 0,1164	+ 0,0222	+ 0,0058	- 0,0008
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2			+ 0,0597	- 0,0080	- 0,0174	- 0,0172
	3			+ 0,0618	- 0,0063	- 0,0165	- 0,0165
$\delta F_1 = 0$	2			+ 0,0675	+ 0,0039	- 0,0063	- 0,0077
	3			+ 0,0673	+ 0,0053	- 0,0042	- 0,0063
Momente bei Eingabe der exakten Verschiebungen				+ 0,0894	+ 0,0189	+ 0,0082	+ 0,0046

Tafel 28: Werte  $\beta$  für das Moment  $m_{22}^{(c)}$  - Beispiel 7

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$	2			+ 0,3203	+ 0,0419	+ 0,0258	+ 0,0155
	3			+ 0,3997	+ 0,0522	+ 0,0292	+ 0,0177
$\delta V = 0$	2			+ 0,2463	+ 0,0349	+ 0,0181	+ 0,0097
	3			+ 0,2205	+ 0,0363	+ 0,0173	+ 0,0093
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2			+ 0,1937	+ 0,0421	+ 0,0226	+ 0,0095
	3			+ 0,1838	+ 0,0452	+ 0,0149	+ 0,0097
$\delta F_1 = 0$	2			+ 0,1786	+ 0,0242	+ 0,0135	+ 0,0073
	3			+ 0,1715	+ 0,0266	+ 0,0135	+ 0,0073
Momente bei Eingabe der exakten Verschiebungen				+ 0,1802	+ 0,0220	+ 0,0125	+ 0,0067

Tafel 29: Werte  $\beta$  für die Mittendurchbiegung  $w^{(m)}$  - Beispiel 8

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$	2		+ 0,5287	+ 0,1538	+ 0,0408	+ 0,0188	+ 0,0108
	3		+ 0,3720	+ 0,1473	+ 0,0364	+ 0,0167	+ 0,0102
$\delta V = 0$	2		+ 0,0704	+ 0,0722	+ 0,0179	+ 0,0077	+ 0,0043
	3		+ 0,0290	+ 0,0858	+ 0,0216	+ 0,0099	+ 0,0056
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2		- 0,1766	+ 0,0201	+ 0,0046	+ 0,0025	+ 0,0015
	3		- 0,1766	+ 0,0179	+ 0,0037	+ 0,0022	+ 0,0012
$\delta F_1 = 0$	2		- 0,1766	+ 0,0022	+ 0,0009	0	0
	3		- 0,1766	+ 0,0077	+ 0,0012	0	0

Tafel 30: Werte  $\beta$  für das Mittenmoment  $m_{11}^{(m)} = m_{22}^{(m)}$  - Beispiel 8

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$	2		+ 1, 2578	+ 0, 2748	+ 0, 0518	+ 0, 0223	+ 0, 0117
	3		+ 1, 0262	+ 0, 1876	- 0, 0922	- 0, 1206	- 0, 1309
$\delta V = 0$	2		+ 0, 5805	+ 0, 3415	+ 0, 0475	+ 0, 0199	+ 0, 0103
	3		+ 0, 5199	+ 0, 4117	+ 0, 0574	+ 0, 0248	+ 0, 0131
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2		+ 0, 2160	+ 0, 3390	+ 0, 0344	+ 0, 0124	+ 0, 0057
	3		+ 0, 2160	+ 0, 3511	+ 0, 0348	+ 0, 0128	+ 0, 0057
$\delta F_1 = 0$	2		+ 0, 2160	+ 0, 2372	+ 0, 0394	+ 0, 0152	+ 0, 0074
	3		+ 0, 2160	+ 0, 2787	+ 0, 0465	+ 0, 0195	+ 0, 0106

Tafel 31: Werte  $\beta$  für das Randeinspannmoment  $m_{22}^{(r)}$  - Beispiel 8

benutzte Gleichung	n		1	2	4	6	8
	A						
$\delta \pi = 0$	2		+ 0, 2863	+ 0, 1416	+ 0, 0052	- 0, 0360	- 0, 0547
	3		+ 0, 1544	+ 0, 1898	+ 0, 0834	+ 0, 0533	+ 0, 0395
$\delta V = 0$	2		- 0, 0995	+ 0, 0065	- 0, 0286	- 0, 0282	- 0, 0250
	3		- 0, 1342	- 0, 0056	- 0, 0392	- 0, 0364	- 0, 0313
$\delta \bar{F}_1 = 0$	2		- 0, 3074	- 0, 1017	- 0, 0916	- 0, 0716	- 0, 0578
	3		- 0, 3074	- 0, 1078	- 0, 0964	- 0, 0752	- 0, 0605
$\delta F_1 = 0$	2		- 0, 3074	- 0, 0765	- 0, 0461	- 0, 0342	- 0, 0273
	3		- 0, 3074	- 0, 0759	- 0, 0581	- 0, 0453	- 0, 0366

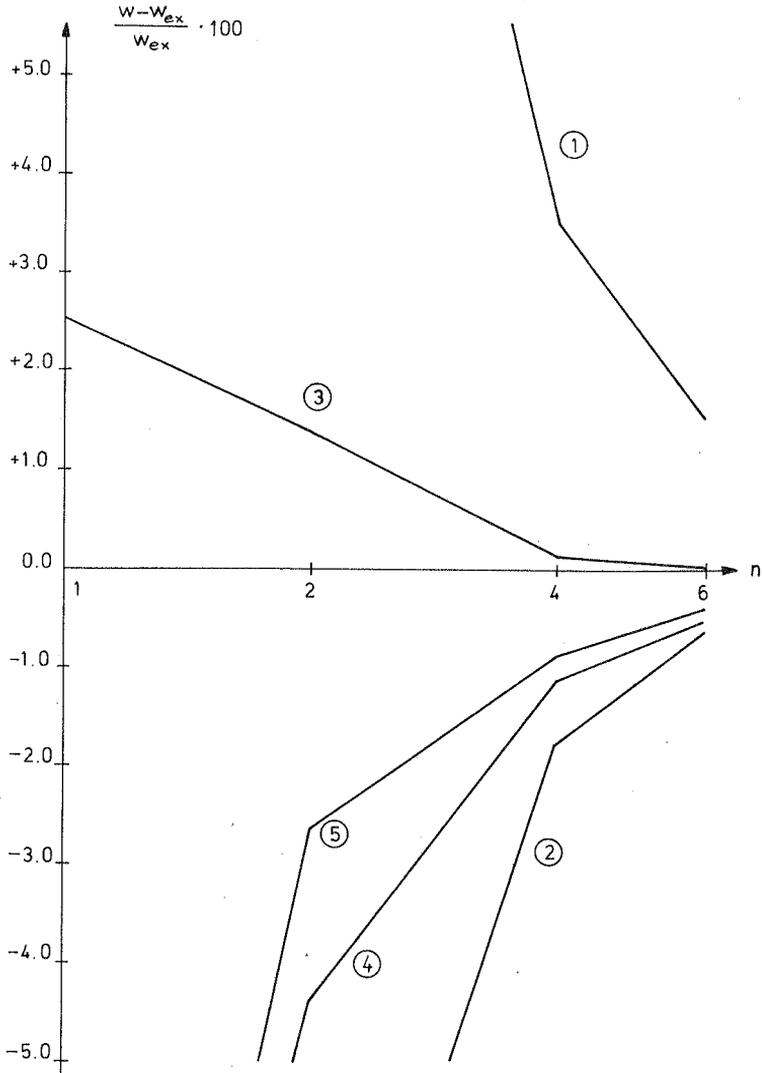
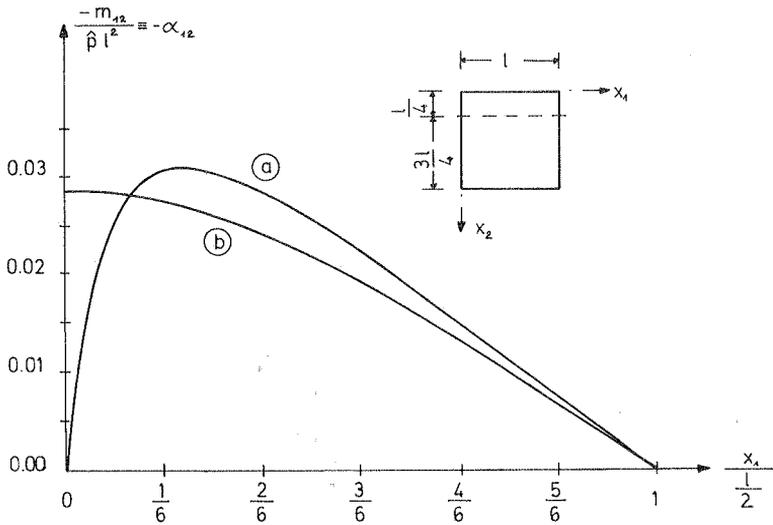


Bild 7.3: Fehler bei der Mittendurchbiegung  $w^{(m)}$  nach Tafel 4. Vergleich der 5 gemischten Modelle.



(a) Lösung 4, Elementaufteilung E 1, Randbedingung RB 2

(b) exakte Lösung ohne Querkraftverformungen, Randbedingung RB 1

Bild 7.4: Drillmomente  $m_{12}$  im Schnitt  $x_2 = \frac{l}{4}$  bei System 1 unter Gleichlast  $\beta$ .

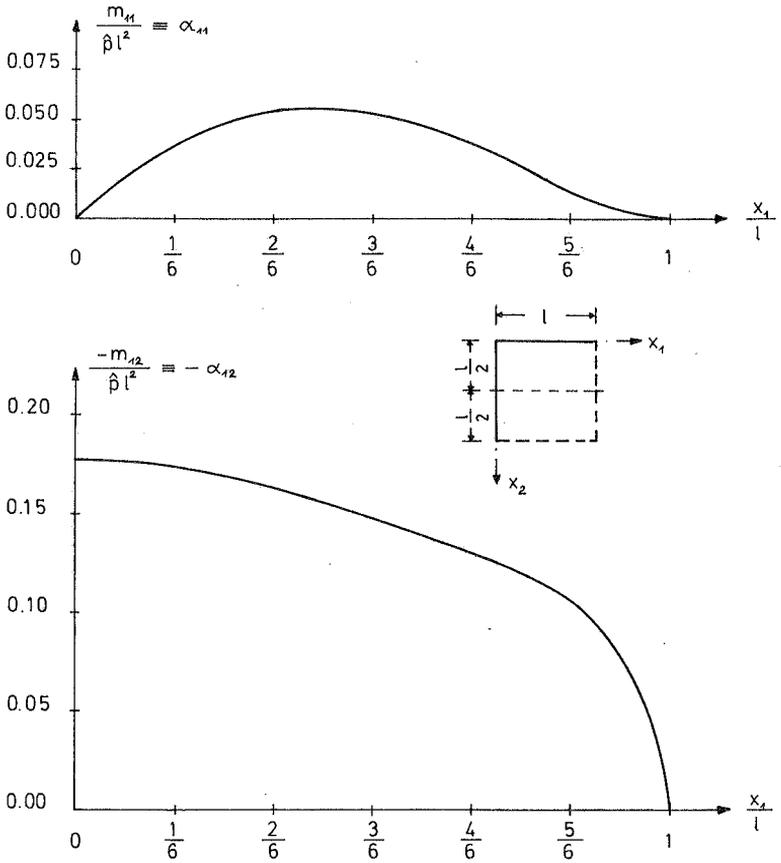


Bild 7, 5: Die Momente  $m_{11}$  und  $m_{12}$  im Schnitt  $x_2 = \frac{l}{2}$ .  
System 3 unter Gleichlast  $\hat{\beta}$ , Elementaufteilung E 1,  
 $n = 6$ , Lösung 4.

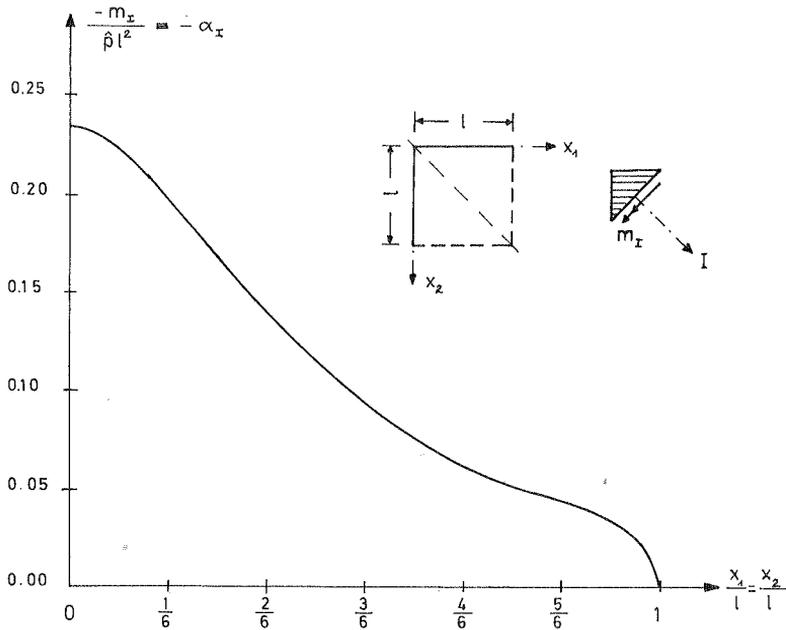


Bild 7. 6: Hauptmoment  $m_I$  längs der Diagonalen  $x_2 = x_1$ .  
System 3 unter Gleichlast  $\beta$ , Elementaufteilung E 1,  
 $n = 6$ , Lösung 4.

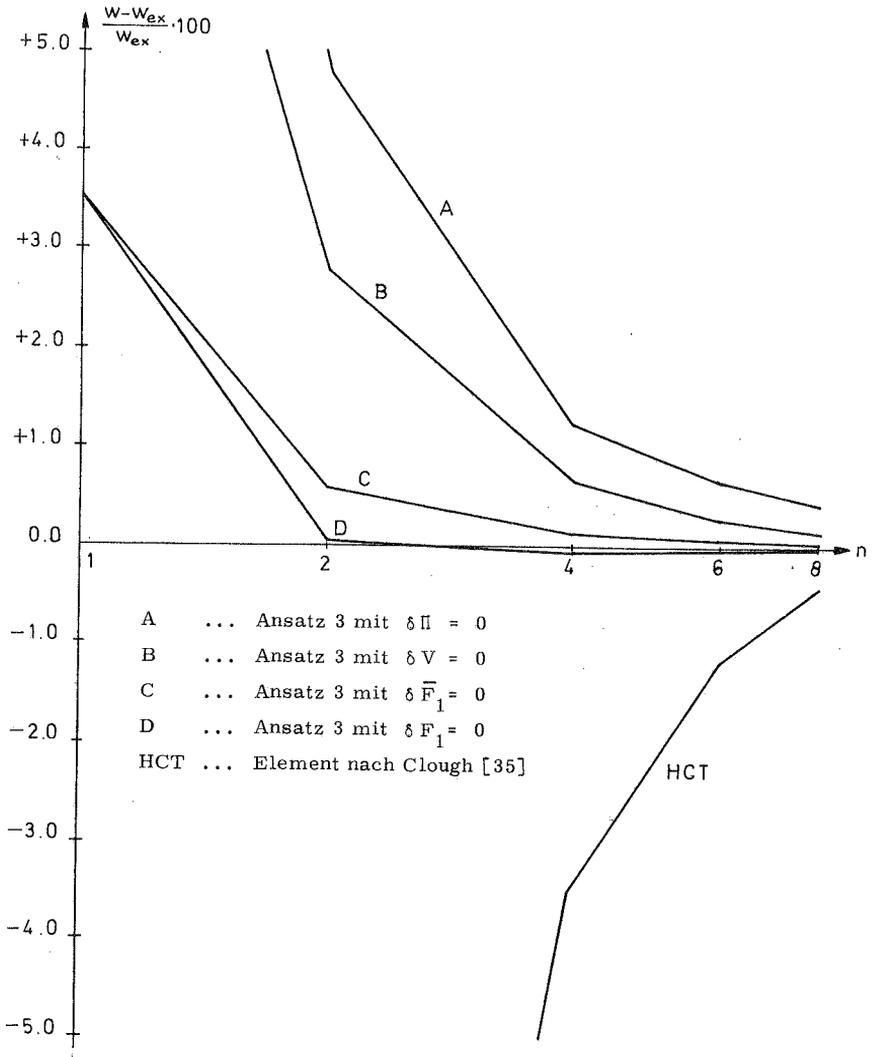


Bild 7.7:

Fehler bei der Mitterverschiebung  $w^{(m)}$  des Systems 1 unter Gleichlast. Vergleich der Methoden für Ansatz 3 mit dem HCT-Element (nach Tafel 20).

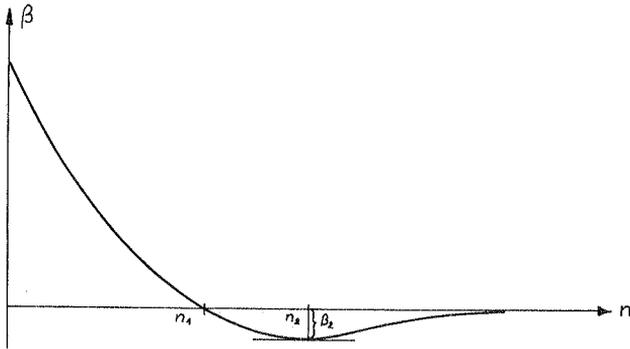


Bild 7.8: Häufig vorkommender Verlauf des Fehlers  $\beta$  in Abhängigkeit von  $n$ .

## 8. Vergleich zwischen den verschiedenen Elementmethoden

Nach Abschluß der verschiedenartigen Untersuchungen erhebt sich die Frage, welchem der von Variationsfunktionalen ableitbaren Verfahren innerhalb der Elementmethode der Vorzug zu geben ist. Während lange Zeit die Verschiebungsmethoden überwogen hatten, gewannen in letzter Zeit die gemischten Methoden und die Spannungsmethoden an Bedeutung und wurden in einigen Literaturstellen auch als den Verschiebungsmethoden überlegen betrachtet.

In diesem Kapitel werden nun die einzelnen Verfahren durch Beschreibung ihrer Vor- und Nachteile miteinander verglichen. Dabei wird die Betrachtung auf die Berechnung von Platten nach der Kirchhoffschen Theorie beschränkt.

### 8.1 Die Verschiebungsmethode bei vollverträglichen Ansätzen

Bei dieser Methode werden die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen in jeder Näherungsstufe exakt erfüllt. Die Schnittgrößen und die tatsächlich aufnehmbaren Lasten können durch Ableitung der errechneten Verschiebungsfunktion gewonnen werden. Dadurch ist es möglich, die Güte des Ergebnisses durch einen Vergleich zwischen vorgegebenen und aufnehmbaren Lasten abzuschätzen. Das Verfahren garantiert, daß beide Lastarten bezüglich ihrer Arbeiten an den benutzten Einheits-Verschiebungszuständen gleichwertig sind. Je größer die Zahl dieser virtuellen Zustände ist, desto besser ist auch die Annäherung. Der wichtigste Vorteil der Methode besteht somit in der einfachen Nachprüfbarkeit ihrer Ergebnisse. Fehler können nur im statischen Bereich der Differentialgleichungen und der Randbedingungen auftreten und dort sehr leicht abgeschätzt werden. Betrachtet man die Verschiebungsfunktion, so können Fehler erst in der zweiten und dritten Ableitung festgestellt werden.

Ein schwieriges Problem stellt die Wahl der Ansätze dar. Sie sollen die vorhandenen kinematischen Bedingungen erfüllen, darüber hinaus jedoch keine weiteren geometrischen Zwänge schaffen. Die bei älteren

Modellen versuchte willkürliche Nullsetzung von  $w$ , <sup>12</sup> ist selbstverständlich unzulässig. I. a. wird es erforderlich, höhere Ableitungen des Verschiebungsansatzes als Parameter heranzuziehen. Die damit verbundene Kontinuität der Momente an den Knoten ist zwar meist erwünscht, macht jedoch eine Zulassung von Momentenlasten an den Elementkanten und an den Knoten unmöglich. Das einfachste vollverträgliche Dreieckelement ohne innere Unterteilung weist mit 6 Parametern je Knoten schon relativ viele Unbekannte auf.

Als weiterer Nachteil der Methode wird i. a. angesehen, daß die Schnittgrößen durch Ableitung der Verschiebungen gewonnen werden und deshalb noch ungenauer werden müssen als diese. Dem kann jedoch entgegengehalten werden, daß bei allen Methoden die Schnittgrößen auch von den Verschiebungen abhängen, da Platten statisch unbestimmte Systeme darstellen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß bei einigen Methoden die Ableitungsbeziehungen in genäherter Form auftreten und deshalb als solche nicht sofort zu erkennen sind.

Die Tatsache, daß die durch Ableitungen gewonnenen Schnittgrößen die Rand- und Übergangsbedingungen nicht exakt erfüllen, hängt mit der Art der tatsächlich aufnehmbaren Lasten zusammen (Linienkräfte, Linienmomente usw.). Einfache Mittelungen bringen schon befriedigende Ergebnisse. Besser ist jedoch eine Glättung nach dem in Abschnitt 6.2 beschriebenen Verfahren, das die Vorteile der gemischten Methoden aufweist.

## 8.2 Die Verschiebungsmethode bei nicht vollverträglichen Ansätzen

Die bei dieser Methode verwendeten Ansätze sind relativ einfach. Die Brauchbarkeit des Verfahrens muß jedoch für jeden einzelnen Ansatz an bekannten Beispielen nachgewiesen werden. Obwohl dabei teilweise hervorragende Ergebnisse erzielt werden, beruht die Anwendung auf andere Beispiele allein auf der Annahme, daß sich diese Erfahrungen auch auf sie übertragen lassen. Eine Nachprüfung der Ergebnisse ist

nur schwer möglich, da der Einfluß der verbleibenden Diskontinuitäten nicht abgeschätzt werden kann. Allgemeine Konvergenzbeweise existieren noch nicht. Siehe hierzu Johnson/Mc Lay [14] und Strang/Fix [45].

### 8.3 Die Spannungsmethode (Gleichgewichtsmethode)

Bei dieser Methode werden die statischen Rand- und Übergangsbedingungen in jeder Näherungsstufe exakt erfüllt. Fehler treten allein im Bereich der geometrischen Bedingungen auf. Die Methode ist also dual zur Verschiebungsmethode mit verträglichen Ansätzen. Der wesentliche Unterschied besteht jedoch darin, daß die Auswirkungen kinematischer Fehler schwerer abzuschätzen sind als die statischen Fehler. Zwar ist die Konvergenz des Verfahrens i. a. theoretisch gesichert, die Güte der jeweiligen Näherungsergebnisse ist jedoch kaum nachprüfbar. Diese sind zu vergleichen mit Verschiebungsfunktionen, die in der nullten und ersten Ableitung Fehler aufweisen, in den höheren Ableitungen jedoch den vorgegebenen Bedingungen genügen. Fehler in den niedrigen Ableitungen sind aber gravierender als solche in höheren.

Die Wahl der Spannungsansätze gestaltet sich sehr schwierig, zumal die vorgegebenen Lasten jeweils neu berücksichtigt werden müssen. I. a. ist die Angabe expliziter Ansätze nicht möglich. Das macht die Einführung von Lagrange-Parametern erforderlich, die jedoch keine Ansatzfunktionen benötigen. Ihre Zahl ist so groß wie die Zahl der noch zu erfüllenden Gleichgewichtsbedingungen. Übersteigt diese die Zahl der Spannungsparameter, dann ist der Ansatz unbrauchbar, da er kein exaktes Gleichgewicht erzielen kann. Ein dennoch aufgestelltes Gleichungssystem wird singulär. Alle diese Schwierigkeiten und Nachteile haben eine weitere Verbreitung des Verfahrens verhindert.

### 8.4 Gemischte Methoden

Bei den gemischten Methoden werden weder die geometrischen noch die statischen Bedingungen von vornherein exakt erfüllt. Dies ermöglicht

eine relativ große Freiheit bei der Wahl der voneinander unabhängigen Verschiebungs- und Momentenansätze. Die Konstruktion von Verschiebungsansätzen ist gegenüber der Verschiebungsmethode wesentlich vereinfacht. Bei den Momentenansätzen kann i. a. ein Teil der statischen Rand- und Übergangsbedingungen sehr leicht von vornherein erfüllt werden. In dieser Arbeit wurde jedoch gezeigt, daß bei der Wahl aller Ansätze praktisch Bedingungen eingehalten werden müssen, die über die Zwangsbedingungen der benutzten Variationsfunktionale hinausgehen. Einige Vorteile der Methode gehen deshalb wieder verloren. So benutzt das Herrmannsche Modell aus Gründen der Konvergenz anstelle der überall kontinuierlichen linearen Momentenansätze einen konstanten Ansatz, bei dem sich nicht einmal eindeutig definierte Knotenmomente ergeben. Erst bei der speziell entwickelten modifizierten Methode können die linearen Ansätze verwendet werden.

Als besonderer Vorteil der gemischten Methoden wird i. a. angesehen, daß die Momente direkt und nicht über Ableitungen der Verschiebungen berechnet werden. Dem muß, wie schon erwähnt, entgegengehalten werden, daß auch die gemischten Methoden Ableitungsbeziehungen enthalten, und zwar in genäherter Form. Es liegt deshalb nahe, anzunehmen, daß es nicht möglich ist, als Ergebnisse nebeneinander relativ schlechte Verschiebungen und relativ gute Momente zu erhalten. Dabei sind, wie im Abschnitt 7.2 erwähnt, nicht einfach die Knotenordinaten, sondern der Gesamtverlauf der gesuchten Funktionen zu beurteilen. Es kann tatsächlich sein, daß bei einfachen Verschiebungsansätzen die Knotenordinaten der Verschiebungen relativ schlecht ausfallen (siehe Herrmannsches Modell).

Ein großer Nachteil der gemischten Methoden ist die Tatsache, daß die Zahl der unbekannt Parameter je Knoten oder Element bei höheren Ansätzen sehr rasch anwächst. Ein weiterer Nachteil ist das noch nicht völlig geklärte Konvergenzproblem und die schwierige Nachprüfbarkeit der Ergebnisse.

### 8.5 Wertung der Methoden

Die Wahl der Methode hängt u. a. davon ab, ob die Einzelelemente relativ viel oder relativ wenig Unbekannte aufweisen sollen. Die ersteren sind i. a. im Verhältnis zum Aufwand genauer, jedoch bei komplizierten Berandungen und Belastungen der Platte und beim Auftreten von Spannungsspitzen weniger flexibel als die letzteren.

Im Bereich einfacher Elemente mit wenigen Unbekannten je Knoten sind die nicht vollverträglichen Verschiebungsmodelle und die gemischten Modelle anzuwenden, da es hier außer dem Cloughschen Element keine vollverträglichen Verschiebungsmodelle gibt. Es ist nicht leicht zu entscheiden, welcher von beiden Gruppen der Vorzug zu geben ist. Die Verschiebungsmodelle liefern, wie in den Beispielen gezeigt, sehr gute Ergebnisse bei Benutzung des Funktionals  $F_1$ , doch ist die Konvergenz dieser Ergebnisse im allgemeinen Fall nicht bewiesen. Für die gemischten Methoden erhält man ebenfalls gute Ergebnisse, doch bestehen auch hier noch Schwierigkeiten beim Konvergenzbeweis.

Im Bereich der Elemente mit mehr Unbekannten je Knoten sind i. a. die vollverträglichen Verschiebungsmodelle zu bevorzugen, da sie gute und leicht nachprüfbare Ergebnisse liefern, an deren Konvergenz i. a. kein Zweifel besteht.

Die Betrachtungen gelten bei Annahme der Kirchhoffschen Plattentheorie. Zur Beurteilung von Methoden, welche die Querkraftverformungen berücksichtigen, sind die Entwicklung und Erprobung weiterer Modelle erforderlich.

## 9. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird am Beispiel der Platte die Anwendung verallgemeinerter Variationsfunktionale in der Elementmethode behandelt.

Zuerst werden einige für die Praxis wichtige Funktionale hergeleitet unter Berücksichtigung der Querkraftverformungen und einer möglichen Unterteilung der Platte in verschiedene Bereiche. An den Rändern dieser Bereiche muß nur noch die Stetigkeit der Verschiebungen in den Knotenpunkten erfüllt sein.

Hinweise auf die Anwendung der Funktionale in der Elementmethode folgen. Sie betreffen Organisationsfragen und Angaben über das notwendige zahlenmäßige Verhältnis der Ansatzparameter bei den sogenannten "gemischten Methoden".

Danach werden konkrete Ansätze für verschiedene Funktionale gemacht und an einfachen Beispielen erprobt. Dabei zeigt sich, daß nicht alle vom Funktional her zulässigen Ansätze brauchbare, d. h. gleichmäßig konvergierende Ergebnisse liefern. Ein gemischtes Modell mit unbefriedigenden Ergebnissen wird näher untersucht und durch Modifizierung des Verschiebungsansatzes entscheidend verbessert.

Nicht vollverträgliche Verschiebungsansätze werden zusammen mit dem zugehörigen Funktional getestet. Da dieses neben Elementmatrizen auch die Bildung von Kantenmatrizen erfordert, werden Näherungsfunktionale angegeben, deren Darstellung allein durch Elementmatrizen möglich ist. Die durchgeführten Vergleiche schließen sie und auch das Potential II ein.

Zur nachträglichen Berechnung von Momenten aus Verschiebungsfunktionen wird mit Hilfe des kinematischen Teils einer Variationsgleichung eine einfache Methode entwickelt, die es ermöglicht, auf die üblichen Ableitungen und die anschließende Mittelung der Ergebnisse an den Knoten zu verzichten.

In einem besonderen Kapitel sind die Zahlenergebnisse der einzelnen Beispielrechnungen zusammengestellt.

Den Schluß der Arbeit bilden Vergleiche zwischen den verschiedenen, von Variationsfunktionalen ableitbaren Spielarten der Elementmethode.

Anhang: Dreieckskoordinaten

Bei der Berechnung dreieckiger Elemente empfiehlt sich die Benutzung von Dreieckskoordinaten. Sie ermöglichen die gleichmäßige Behandlung aller Dreiecksseiten. Bei nicht dreh invarianten Ansätzen entfällt damit die Abhängigkeit von einem willkürlich gewählten Koordinatensystem. Ein weiterer wichtiger Vorteil besteht darin, daß es in den meisten Fällen sehr leicht möglich ist, Ansätze ohne numerische Inversionen in den gewünschten Parametern auszudrücken. - Dreieckskoordinaten sind u. a. in [42] und [43] beschrieben. Im folgenden werden nur einige wichtige Formeln angegeben.

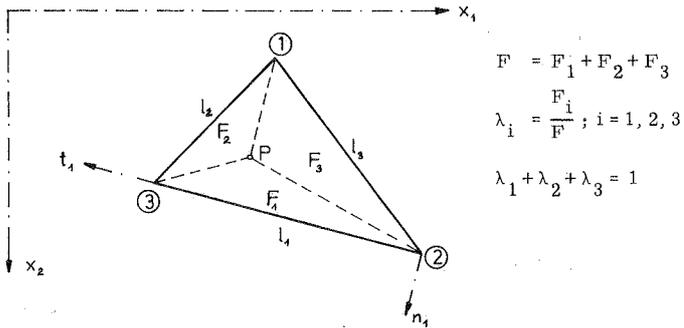


Bild A. 1: Definition der Dreieckskoordinaten  $\lambda_i$

In Bild A. 1 sind die Dreieckskoordinaten  $\lambda_i$  des Punktes P definiert. Ein vollständiges Polynom m-ten Grades hat in derartigen Koordinaten die Form:

$$f_m = \sum_{pqr} c_{pqr} \lambda_1^p \lambda_2^q \lambda_3^r \quad \text{mit } p + q + r = m$$

Dieses Polynom hat  $s = \frac{1}{2} (m + 1) (m + 2)$  Glieder. Die Glieder mit  $\lambda_1^m$  können darin nach folgender Formel durch Glieder ersten Grades ersetzt werden:

$$\lambda_i \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}_1^{m-1} = \lambda_i \rightarrow \lambda_i^m = \lambda_i - \text{gemischte Glieder vom Grad } m$$

Bei Verschiebungsansätzen ermöglicht diese Umformung die Aufteilung in eine Starrkörperverschiebung und einen Verformungsanteil.

Ableitungen:

Sind i, j, k Eckpunktnummern des Dreiecks in aufsteigender Reihenfolge, so gelten mit der Abkürzung

$$\mu_k = \frac{\ell_j^2 - \ell_i^2}{\ell_k^2}$$

folgende Ableitungsformeln für eine Funktion  $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t_k} = \frac{1}{\ell_k} \left[ -\frac{\partial f}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_k} = \frac{\ell_k}{4F} \left[ -2 \frac{\partial f}{\partial \lambda_k} + (1 + \mu_k) \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} + (1 - \mu_k) \frac{\partial f}{\partial \lambda_i} \right]$$

Damit können auch höhere Ableitungen hergeleitet werden.

Bei der Benutzung der Dreieckskoordinaten für diese Arbeit erwies sich die Einführung folgender weiterer Abkürzungen als sehr vorteilhaft:

$$r_i^2 = \ell_j^2 + \ell_k^2 - \ell_i^2$$

Für sie gelten die Zusammenhänge:

$$r_i^2 = \ell_k^2 (1 + \mu_k) = \ell_j^2 (1 - \mu_j)$$

U. a. läßt sich damit der Laplace-Operator  $\Delta$  sehr leicht in Dreieckskoordinaten ausdrücken:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} = \frac{1}{4F^2} \sum_{i=1}^3 \left[ \ell_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} - r_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_{i+1} \partial \lambda_{i+2}} \right]$$

Integrationen:

Sehr einfach ist bei Dreieckskoordinaten auch die Integration einer Funktion über die Fläche des Dreiecks. Es gilt:

$$\iint_{\mathbb{F}} \lambda_1^p \lambda_2^q \lambda_3^r d\mathbb{F} = 2\mathbb{F} \frac{p! q! r!}{(2+p+q+r)!}$$

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,  
K. Papailiou, J. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen  
zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und  
verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elasti-  
scher Unterlage.