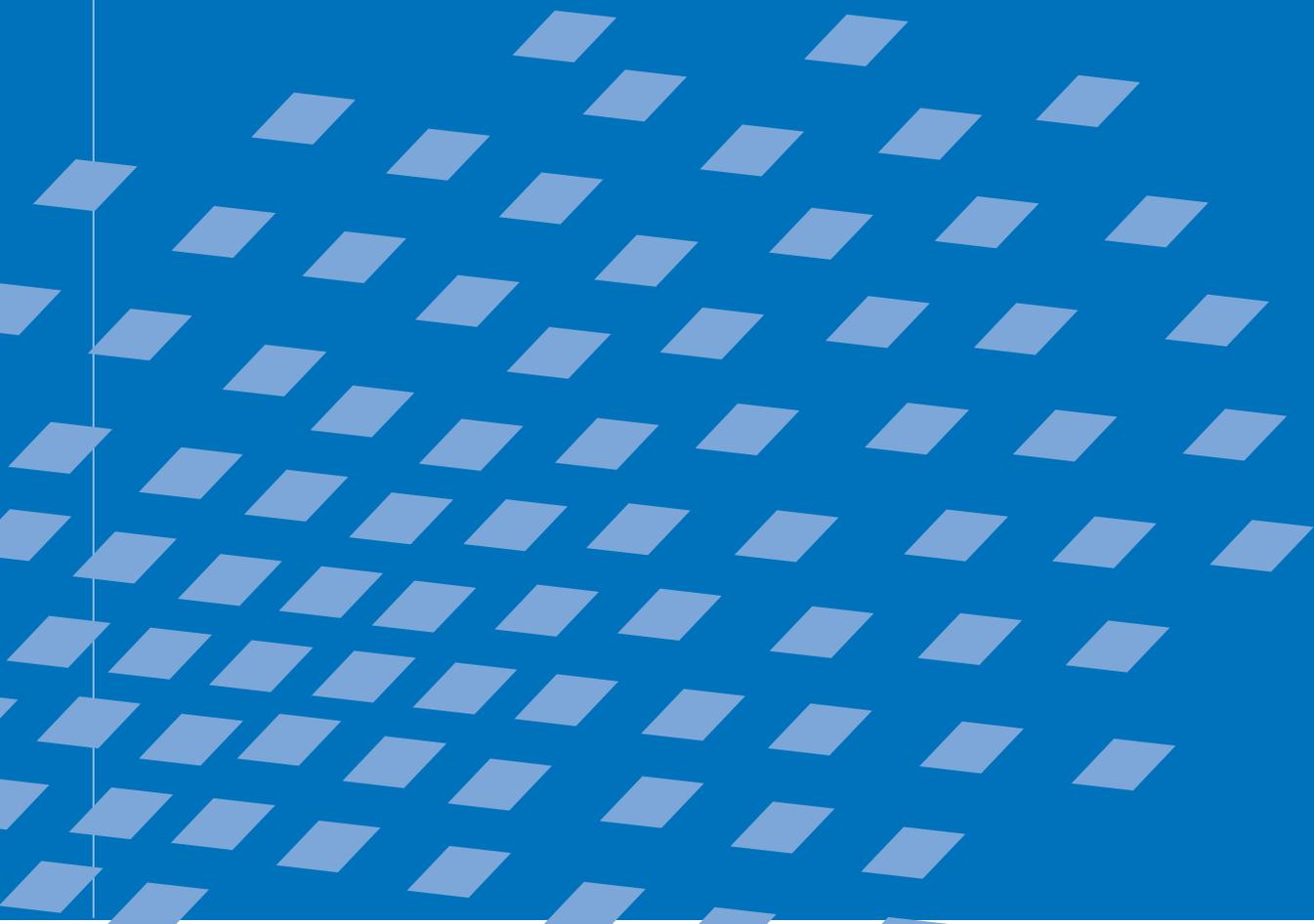




Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

Carl Frédéric Hilchenbach



Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

von

Carl Frédéric Hilchenbach

Bericht Nr. 54

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2010



© Carl Frédéric Hilchenbach

Berichte können bezogen werden über:
Institut für Baustatik und Baudynamik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123
Fax: 0711 - 685 66130
E-Mail: sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart
ISBN 978-3-00-033541-9

Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines
Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Carl Frédéric Hilchenbach

aus Stühlingen

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Franz-Joseph Barthold , Dortmund

Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff, Stuttgart

Tag der mündlichen Prüfung: 17.Dezember 2010

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2010

Kurzfassung

In Mehrphasenstrukturen, die durch ein Matrixmaterial mit Einschlüssen aus Fremdmaterial charakterisiert sind, können äußere Belastungen zu lokalem Schädigungsverhalten zwischen den verschiedenen Materialphasen sowie in der Matrix selbst führen. Dies zeigt sich in der Ablösung der Materialphasen voneinander und der Bildung von Rissen in der Matrix. Beide Phänomene werden mit Hilfe kohäsiver Entfestigungsgesetze modelliert. Damit die Strukturanalyse auf einem regelmässigen, kartesischen FE-Netz durchgeführt werden kann, erfolgt die Geometriebeschreibung der Einschlüsse und Risse netzunabhängig durch implizite Level-Set-Funktionen in Kombination mit der erweiterten Finite-Element-Methode (X-FEM). Der Rissfortschritt findet elementweise statt und tritt auf, wenn ein Rissinitiierungskriterium überschritten wird. Um die Integration von finiten Elementen mit lokalen Diskontinuitäten zu ermöglichen, werden die Elementflächen entlang der Diskontinuitäten trianguliert.

Ziel der Arbeit ist es, durch Variation von Form und Lage der Einschlüsse im Matrixmaterial die Duktilität der untersuchten Strukturen mit Hilfe gradientenbasierter Optimierungsverfahren zu maximieren. Die Duktilität wird dabei als das Integral der Verzerrungsenergie über einen vorgegebenen Verschiebungsbereich definiert. Als Optimierungsvariablen kommen bei einer elliptischen Formulierung der Einschlüsse die Halbachsen der Ellipsen, deren Hauptachsendrehwinkel sowie die Koordinaten der Ellipsenmittelpunkte zum Einsatz. Eingeschränkt ist der Variationsbereich dieser Parameter durch einen vorgegebenen Mindestabstand zum Rand des Entwurfsraums, also der vorgegebenen Struktur, sowie durch einen Mindestabstand der Einschlüsse untereinander. In einer Nebenbedingung wird die Masse der Einschlüsse konstant gehalten.

Als Optimierungsalgorithmen werden die „Methode der bewegten Asymptoten“ und das „Optimalitätskriterienverfahren“ eingesetzt. Die für diese Methoden benötigten Gradienten bezüglich der Optimierungsvariablen werden mit Hilfe einer Sensitivitätsanalyse ermittelt. Mit den Gradienten der Zielfunktion und der Nebenbedingung erfolgt die automatisierte, iterative Anpassung des Entwurfs.

Die Berechnung der Sensitivitäten bildet im Wesentlichen den Kern dieser Arbeit. Um das Zielkriterium „Maximierung der Duktilität“ ableiten zu können, muss die Sensitivität der Zustandsvariablen, die hier durch die Knotenverschiebungen abgebildet werden, vorab ermittelt werden. Diese Notwendigkeit ergibt sich aus der impliziten Abhängigkeit des Verschiebungsfeldes von den Optimierungsvariablen. Um die Gradienten der Knotenverschiebungen zu ermitteln, wird die Gleichgewichtsbeziehung unter Beachtung der geometrischen und materiellen Abhängigkeiten nach den Optimierungsvariablen abgeleitet. Dabei muss der Einfluss der materiellen Grenzflächen, der damit verbundenen Anreicherungsfunktionen der X-FEM, ebenso wie der kinematischen und konstitutiven Beziehungen berücksichtigt werden.

Anhand von verschiedenen numerischen Beispielen wird das Potential gradientenbasierter Optimierungsverfahren für lokal geschädigte Mehrphasenstrukturen aufgezeigt.

Abstract

The present work addresses two-dimensional structures with stiff inclusions embedded in a soft matrix. An isotropic damage model has been chosen for the interface and matrix softening failure whereas inclusions have been assumed to be elastic for the time being. Interface and matrix failure are described by an eXtended Finite Element Method (X-FEM) applying a cohesive zone concept and levelsets for the description of the inclusion geometry as well as the enrichment functions. After reaching a crack initiation criterion the cracks propagate element by element. To enable the integration of finite elements with local discontinuities a triangulation is applied that incorporates cracks and interface contours.

The aim of this work is maximizing the overall structural ductility by variation of the local geometrical layout of the inclusions for a prescribed inclusion mass. The ductility is defined as the integral of the strain energies over a specified displacement range. In the gradient based structural optimization process shape and location parameters of the inclusions are taken as design variables. If the inclusions are specified as ellipses the design variables are the semi-axes, the angle and the coordinates of the ellipses center. The variation of these parameters is restricted by a prescribed minimum distance to the boundaries of the design space and a minimum distance of the inclusions with respect to each other. Although the geometry of the inclusions in the matrix is permanently changing during optimization, a fixed structural mesh is used to avoid continuous adaptation to a material conforming mesh.

The Optimality Criteria (OC) method or the Method of Moving Asymptotes (MMA) is used as optimization algorithm. Necessary gradients with respect to a variation of the optimization parameters are determined by an analytical sensitivity analysis. Using gradients of the objective function „maximization of ductility“ and of the constraint „constant inclusion mass“ the design of the inclusions is changed automatically in an iterative process.

The calculation of sensitivities is an important issue of this work. In order to derive the sensitivities of the objective „maximization of ductility“ the gradients of the state variables, i.e. the nodal displacements, have to be determined in advance. This is necessary because of the implicit dependence of the displacement field on the optimization variables. In order to determine the gradients of the nodal displacements, the derivatives of the equilibrium equations with respect to the optimization variables are computed. Here, the influence of the material interfaces, the related enrichment functions of the X-FEM, as well as the kinematic and constitutive relations have to be taken into account.

The potential of the gradient based structural optimization with respect to the maximization of the overall structural ductility is demonstrated by various numerical examples.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart im Rahmen des deutsch-holländischen Forschungsvorhabens „Multiscale Methods in Computational Mechanics“. In diesem Zusammenhang sei der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung gedankt. Für eine zwischenzeitliche Übergangsfinanzierung durch das Stuttgarter Research Centre for Simulation Technology (SRC SimTech) möchte ich mich ebenfalls bedanken.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Professor Ekkehard Ramm für die Anregung zu dieser Arbeit, für die konstruktiven wissenschaftlichen Gespräche und die Übernahme des Hauptberichts. Neben der fachlichen Unterstützung hat mich insbesondere seine freundliche persönliche Art über schwierige Phasen hinweggetragen. Vielen Dank für die Möglichkeit in der Lehre tätig gewesen zu sein, sowie an internationalen Konferenzen teilnehmen zu können.

Für das Interesse an meiner Arbeit sowie die Übernahme der Mitberichte möchte ich mich bei Herrn Professor Franz-Joseph Barthold und Herrn Professor Manfred Bischoff bedanken. Bei letztgenanntem möchte ich mich außerdem für die anregenden wissenschaftlichen Diskussionen und das freundschaftliche Verhältnis bedanken.

Mein Dank gilt auch meinen Kolleginnen und Kollegen am Institut für Baustatik und Baudynamik. Neben dem wissenschaftlichen Diskurs kamen die vielen Freizeitaktivitäten nie zu kurz. Durch dieses freundschaftliche und hilfsbereite Miteinander entstand ein unbeschreiblich gutes Arbeitsklima, dass ich nie vergessen werde.

Meinen Eltern, Bertold[†] und Ursula Hilchenbach, danke ich für die jahrelange Unterstützung und die Möglichkeit meinen eigenen Weg zu finden. Ebenso bedanke ich mich bei meinen Schwiegereltern Michael und Margarete Schieber für den geschaffenen Freiraum, der diese Arbeit ermöglicht hat.

Meiner lieben Frau Kathrin Hilchenbach möchte ich ein besonderes Dankeschön für die Unterstützung und ihr Verständnis aussprechen. Hätte sie die Arbeit nicht voll mitgetragen, wäre sie vermutlich nie erfolgreich beendet worden.

Stuttgart, im Dezember 2010

Frédéric Hilchenbach



Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xiii
Abkürzungen und Bezeichnungen	xv
1. Einleitung	1
1.1. Schwerpunkte der Arbeit	2
1.2. Gliederung der Arbeit	4
2. Grundlagen der Strukturoptimierung	5
2.1. Strukturanalyse / Analysemodell	8
2.2. Optimierungsmodell	9
2.2.1. Mathematische Definition der Optimierungsaufgabe	10
2.2.2. Entwurfsmodell	12
2.2.3. Sensitivitätsanalyse	18
2.3. Optimierungsalgorithmus	19
2.3.1. Optimalitätskriterienverfahren (OC)	20
2.3.2. Methode der bewegten Asymptoten (MMA)	23
3. Analyse von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten	27
3.1. Grundlagen der Kontinuumsmechanik	28
3.1.1. Verschiebungsvektor und Deformationsgradient	28
3.1.2. Besonderheiten bei Mehrphasenstrukturen	29
3.1.3. Verzerrungsmaß	32

3.1.4.	Spannungen	32
3.1.5.	Randwertproblem	33
3.1.6.	Materialgleichungen	34
3.1.7.	Versagenskriterien und Rissrichtung	39
3.2.	Geometriebeschreibung von materiellen Grenzflächen und Rissen	43
3.2.1.	Level-Set-Methode	43
3.2.2.	Vektor-Level-Set-Methode	46
3.3.	Finite Elemente (X-FEM)	47
3.3.1.	Variationsformulierung	48
3.3.2.	Diskretisierung	49
3.3.3.	Numerische Integration	52
3.3.4.	Linearisierung	57
3.3.5.	Bemerkung zum Rissfortschrittsalgorithmus	59
4.	Grundlagen der Sensitivitätsanalyse	61
4.1.	Einleitung	61
4.2.	Verfahren zur Sensitivitätsanalyse	63
4.2.1.	Numerische Verfahren	64
4.2.2.	Analytische Verfahren	65
4.3.	Vergleich zwischen den Verfahren der Sensitivitätsanalyse	69
5.	Zielkriterium - Sensitivitätsanalyse bei X-FEM	73
5.1.	Zielkriterium Duktilität	74
5.1.1.	Ableitung der Gleichgewichtsbedingung	76
5.1.2.	Sensitivität der materiellen Grenzfläche	78
5.1.3.	Ableitung der Anreicherungsfunktionen	80
5.1.4.	Ableitung der kinematischen Beziehungen	82
5.1.5.	Ableitung der konstitutiven Gleichungen	83
5.2.	Einfluss des Algorithmus auf die Sensitivitäten	87
5.3.	Nebenbedingung Gewicht (Volumen)	88
5.4.	Mindestabstand zwischen Matrixeinschlüssen	90
6.	Numerische Beispiele	95
6.1.	L-förmige Scheibe: linear elastisch	95
6.2.	Zugstab: Grenzschichtversagen	99
6.3.	Kombiniertes Matrix- und Grenzschichtversagen	102
6.4.	L-förmige Scheibe: geschädigt	105
7.	Fazit und Ausblick	111
7.1.	Fazit	111
7.2.	Ausblick	112

A. XFEM - Parallelen zu hierarchischen Elementen	115
Literaturverzeichnis	119

Abbildungsverzeichnis

1.1. Schnitt durch Faserbeton senkrecht zur Bewehrungsrichtung	3
2.1. Teildisziplinen der Strukturoptimierung, aus RAMM u. A. (1998)	6
2.2. Optimierungsschleife	8
2.3. Dichte-Steifigkeitsfunktion im SIMP-Ansatz	13
2.4. Formänderung auf Basis einer FE-Knotenvariation bzw. mithilfe von natürlichen Entwurfsgeschwindigkeitsfeldern	15
2.5. Strukturbeschreibung mittels impliziter Levelsetfunktion	16
2.6. Formoptimierung eines Mehrphasenmaterials	18
3.1. Referenz- und Momentankonfiguration des materiellen Körpers \mathcal{B}	29
3.2. Randwertproblem des materiellen Körpers \mathcal{B}	33
3.3. Schädigungsflächen für unterschiedliche Risstypen	37
3.4. Versagensflächen für unterschiedliche Risstypen	40
3.5. Beispiel Zugstab: Geometrie, Materialdaten und Entfestigungsgesetz	41
3.6. Oben: Last-Verschiebungskurven für $\ell = 500/1000/1500$ mm Unten: Rissöffnungs-Verschiebungsdiagramm für $\ell = 1000$ mm	42
3.7. Veranschaulichung der Level-Set-Methode	44
3.8. Veranschaulichung der diskretisierten Funktion $\chi_{m,i}$	45
3.9. Aktualisierungsbereich bei Rissfortschritt in der Matrix	46
3.10. Abstandsvektoren $\Phi_{c,1}$	47
3.11. Diskretisierung und Knotenanreicherung	50
3.12. Knotenanreicherung bei Risswachstum	51
3.13. Triangulierung angereicherter Elemente	53

3.14. Koordinatentransformation zwischen globalem, lokalem und Teilgebietskoordinatensystem	54
3.15. Einfluss der Netzverzerrung auf die Gauß-Integration	55
3.16. Verschiedene Phasengeometrien zur Verdeutlichung des Integrationsfehlers, siehe Tabelle 3.1	56
3.17. Algorithmus zur Analyse des Risswachstums	60
4.1. Gradientengenauigkeit glatter und nichtglatter Antwortfunktionen	69
5.1. Einfluss des Algorithmus auf die Sensitivitäten	87
5.2. Einschränkung des zulässigen Parameterraums	90
5.3. Abstand d zwischen zwei Einschlüssen	91
5.4. Notwendige Abstandsüberprüfungen bei elliptischen Einschlüssen	93
6.1. L-förmige Scheibe im ebenen Verzerrungszustand	96
6.2. Lageänderung der Bewehrungseinschlüsse im Optimierungsprozess	97
6.3. Vergleich zwischen der Levelsetoptimierung und einer Topologieoptimierung nach dem SIMP-Ansatz	98
6.4. Last-Verschiebungsdiagramm und Duktilitätszuwachs	98
6.5. Zugversuch mit unterschiedlichen Ausgangskonfigurationen	99
6.6. Level Set Funktion ϕ_m	100
6.7. Vergleich zwischen OC-Verfahren und MMA-Algorithmus; Risseöffnung in Normalenrichtung 10-fach überhöht dargestellt; $\hat{u} = 0.02$ mm	101
6.8. Last-Verschiebungsdiagramm und Zuwachs der Zielfunktion Duktilität	101
6.9. Last-Verschiebungsdiagramm bei kombiniertem Matrix- und Interfaceversagen	102
6.10. Risszustand bei unterschiedlicher Zugfestigkeit für $\hat{u} = 0.15$ mm	103
6.11. Risszustand; 150-fach überhöht dargestellt; $\hat{u} = 0.15$ mm	104
6.12. L-förmige Scheibe mit lokalem Schädigungsverhalten	105
6.13. Änderungen im Last-Verschiebungsdiagramm während der Optimierungsschleife	106
6.14. Lageänderung des Einschluss im Optimierungsverlauf; Risseöffnung rechts 50-fach überhöht dargestellt; $\hat{u} = 0.35$ mm	107
A.1. Vergleich zwischen 16 bilinearen Verschiebungselementen und einem hierarchischen, biquadratischen Element	115
A.2. Vergleich zwischen einem bilinearem Standardelement (<i>links</i>) und einem erweitertem X-FEM-Element mit vertikaler Grenzfläche (<i>rechts</i>)	116
A.3. Vergleich zwischen <i>links</i> : zwei Standardelementen und <i>rechts</i> : einem erweitertem X-FEM-Element mit horizontaler Grenzfläche	117

A.4. Lagerung und konsistente Knotenkräfte der erweiterten Verschiebungs-
freiheitsgrade 117

Tabellenverzeichnis

2.1. Zielfunktionen und Nebenbedingungen, aus SCHWARZ (2001)	11
3.1. Integrationsfehler bei numerischer Integration	56
4.1. Verfahren zur Sensitivitätsanalyse	63

Abkürzungen und Bezeichnungen

Abkürzungen

CCARAT	Computer Aided Research and Analysis Tool - FEM Programmsystem in C
CFK	Kohlenstofffaserverstärkter Kunststoff (C für Carbon = Kohlenstoff)
CONLIN	Konvexe Linearisierungsmethode
ES	Evolutionstrategie
FEM	Finite Element Methode
GA	Genetischer Algorithmus
GFK	Glasfaserverstärkter Kunststoff (Fiberglas)
GLARE	Glasfasserverstärktes Aluminium (glass fibre reinforced aluminium)
LSM	Level-Set-Methode
MMA	Methode der bewegten Asymptoten
MP	Verfahren der Mathematischen Programmierung
OC	Optimalitätskriterienverfahren
SIMP	Solid Isotropic Microstructure with Penalty for intermediate density
X-FEM	eXtended Finite Element Methode

Mathematische Notationen

$\langle \cdot \rangle$	Macauly-Klammer $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{2}[(\cdot) + (\cdot)]$
$\llbracket \cdot \rrbracket$	Sprungoperator $\llbracket \cdot \rrbracket = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$
\bigcup	Assemblierungssymbol
$\forall(\cdot)$	für alle (\cdot)
$ \cdot $	Betrag

$\mathbf{1}$	zweistufiger Einheitstensor
\otimes	dyadisches, bzw. tensorielles Produkt
\emptyset	Durchmesser
div	Divergenz bezüglich räumlichem Koordinatensystem
exp	Exponentialfunktion
<i>HOT</i>	Higher Order Terms / Terme höherer Ordnung
$\Delta(\cdot)$	inkrementelle Größe
$\in(\cdot)$	Element der Menge (\cdot)
$\notin(\cdot)$	kein Element der Menge (\cdot)
∇^s	Symmetrischer Anteil des Gradienten $\nabla^s = \frac{1}{2}(\nabla + \nabla^T)$
∇_X	Ableitung nach den Koordinaten der Referenzkonfiguration
lim	Limes oder Grenzwert
min	Minimum
∇_s	Ableitung nach den Entwurfsparametern
∇_s^{ex}	explizite Ableitung nach den Entwurfsparametern
∇_η	Ableitung nach dem Lagrange-Multiplikator
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^3	Dreidimensionaler Euklidischer Raum
sign (\cdot)	Vorzeichenfunktion $\text{sign}(\cdot) = \begin{cases} +1 & (\cdot) > 0 \\ 0 & (\cdot) = 0 \\ -1 & (\cdot) < 0 \end{cases}$
Σ	Summe

Lateinische Buchstaben

<i>A</i>	Querschnittsfläche
a_i	Ellipsenhalbachse
a	diskrete Knotenfreiwerte
b_i	Ellipsenhalbachse
B	B-Operator (Kinematik)
b	diskrete Knotenfreiwerte der materiellen Grenzflächen
c_t	Druckfestigkeit der materiellen Grenzfläche
c_n	Zugfestigkeit der materiellen Grenzfläche
c	diskrete Knotenfreiwerte der Risse
\bar{d}	Mindestabstand
d	aktueller Abstand
d_T	Anfangsschubsteifigkeit
d_n	elastische Steifigkeit
$d\mathbf{X}$	differentielles Linienelement der Referenzkonfiguration

$d\mathbf{x}$	differentielles Linienelement der Momentankonfiguration
\mathbf{D}	Knotenverschiebungen
d_c	Kontrollfreiheitsgrad
E	Elastizitätsmodul
e	Eulerschen Zahl $e \approx 2,718281$
E_{eff}	effektiver Elastizitätsmodul des porösen Materials
\mathbf{E}	Green-Lagrange-Verzerrungstensor
\mathbf{e}_i	orthonormierte, kartesische Ortsvektoren
\mathbf{F}	Deformationsgradient
f	Zielfunktion
F^κ	Belastungsfunktion / „loading function“
f_t	Zugfestigkeit des Matrixmaterials
\mathbf{F}_{ext}	externen Kräfte
\mathbf{F}_{int}	innere Knotenkräfte
f	beliebige Funktion
f_D	Duktilität
G	Gewicht
G_{zul}	zulässiges Gewicht
G_f	Bruchenergie
\mathbf{g}	Vektor der Ungleichheitsnebenbedingungen
g_d	Nebenbedingung Mindestabstand
h_T	Parameter zur Beschreibung des Schubsteifigkeitsverlustes
\mathbf{h}	Vektor der Gleichheitsnebenbedingungen
h_G	Nebenbedingung 'konstantes Gesamtgewicht'
h_V	Nebenbedingung konstantes Volumen
\mathbf{I}	vierstufiger Einheitstensor
$\mathbf{J}, \bar{\mathbf{J}}$	Jacobi-Matrix
K_T	tangentiale Steifigkeitskomponente
K_n	normale Steifigkeitskomponente
\mathbf{k}	Elementsteifigkeitsmatrix
\mathbf{k}_{el}	elastische Elementssteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_T	globale Tangentensteifigkeitsmatrix
\mathbf{k}_T	lokale Tangentensteifigkeitsmatrix
ℓ	Länge
L	Lagrange-Funktion
\mathbf{L}	Differentialoperator
L	untere Asymptote des MMA-Algorithmus
\mathbf{n}	Normalenvektor
N_I	Ansatzfunktionen
n_s	Anzahl der Entwurfs-, bzw. Optimierungsvariablen

n_c	Anzahl unabhängiger Risse
n_f	Anzahl der Entwurfskriterien
n_g	Anzahl der Ungleichheitsnebenbedingungen
n_h	Anzahl der Gleichheitsnebenbedingungen
n_m	Anzahl unabhängiger materieller Grenzflächen
n_{ele}	Anzahl finiter Elemente
n_{nod}	Anzahl Elementknoten
\mathbf{N}	bilineare Formfunktionen
\mathbf{n}_c	Normalenvektor auf Rissfläche, Zeitpunkt t
\mathbf{n}_m	Normalenvektor auf materieller Grenzfläche, Zeitpunkt t
$\mathbf{N}_{c,j}$	Normalenvektor auf Rissfläche, Zeitpunkt t_0
\mathbf{n}_{t^*}	Normalenvektor auf Γ_{t^*}
p_{ij}	Konvexifizierungsfaktoren des MMA-Algorithmus
\mathbf{P}	konstanter Lastanteil
\mathbf{P}^{pseudo}	Pseudo-Lastvektor
p	Schrittweitenparameter des OC-Algorithmus
q	äußere Last
q_{ij}	Konvexifizierungsfaktoren des MMA-Algorithmus
R	Radius
r	untere, horizontale Asymptote des MMA-Algorithmus
r, s	Teilbereichskordinaten
R_{nl}	Radius des Rissspitzennahgebiets Ω_w
\mathbf{R}	globales Residuum $\mathbf{R} := \mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}$
\mathbf{r}	Elementresiduen
\mathbf{S}	Piola-Kirchhoff Spannungstensor 2.Art
\mathbf{s}	Vektor der Entwurfparameter
\mathbf{s}^*	Optimum der Entwurfparameter
\mathbf{s}_L	untere Restriktionswerte der Entwurfparameter
\mathbf{s}_U	obere Restriktionswerte der Entwurfparameter
\mathbf{t}	Spannungsvektor
t	Zeit
t^u	Entlastungszeitpunkt
t^*	effektive Spannung
t_{sf}^*	effektive Spannung nach Smith und Ferrante
t_0	Ausgangszeitpunkt
t_n	Normalanteil des Spannungsvektors
\mathbf{T}	zweistufiger Projektionstensor
\mathbf{t}^*	vorgegebener Spannungsvektor auf Γ_{t^*}
\mathbf{t}_T	Resultierender Tangentialvektor des Spannungsvektors im Raum
\mathbf{T}_{sec}	Sekantentensor spannungsübertragender Risse

\mathbf{T}_{tan}	Materialtangente spannungsübertragender Risse
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
$\hat{\mathbf{u}}$	Anteil des Verschiebungsvektors ohne Erweiterung
$[[\mathbf{u}]]$	Verschiebungssprung
$[[\mathbf{u}]]_T$	Tangentialvektor des Verschiebungssprungs
$[[\mathbf{u}]]_n$	skalarwertiger Normalanteil des Verschiebungssprungs
$\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-$	Verschiebungsvektor des positiven, negativen Rissufers
\mathbf{u}^h	approximierter Verschiebungsvektor
\mathbf{u}^*	vorgegebener Verschiebungsvektor auf Γ_{u^*}
U	obere Asymptote des MMA-Algorithmus
$\tilde{\mathbf{u}}_i$	Anteil des Verschiebungsvektors, der mit der materiellen Grenzfläche verbunden ist
$\tilde{\mathbf{u}}_j$	Anteil des Verschiebungsvektors, der mit Rissen verknüpft ist
V	Volumen
V_{zul}	zulässiges Volumen
\mathbf{v}_c	Vektor
\mathbf{v}_m	Vektor
w	Gauß'sche Verteilungsfunktion / Gewichtungsfunktion
\bar{x}_1, \bar{x}_2	Ellipsenursprung
\mathbf{X}	Ortsvektor der Referenzkonfiguration
\mathbf{x}	Ortsvektor der Momentankonfiguration
x_i	Komponenten des Ortsvektors der Momentankonfiguration
\mathbf{x}_p	Schnittpunkte zwischen den Kanten eines FE-Elementes und der materiellen Grenzfläche
\mathbf{x}_{TIP}	Ortsvektor der Rissspitze
$\bar{\mathbf{x}}_i$	Ursprung der einzelnen Ellipsen i
$\hat{\mathbf{x}}$	Ortsvektor im transformierten Koordinatensystem
\mathbf{z}^b	gemittelte Rissrichtung aus \mathbf{z}^n und \mathbf{z}^{n-1}
\mathbf{z}^{n-1}	vorherige Rissrichtung
\mathbf{z}^n	aktuelle Rissrichtung
\mathbf{z}_\perp^n	Vektor senkrecht zur aktuellen Rissrichtung
$\hat{\mathbf{z}}_\perp^n$	normierter Vektor \mathbf{z}_\perp^n

Griechische Buchstaben

α_i	Ellipsendrehwinkel
$\bar{\alpha}$	Schrittweite OC-Algorithmus
$\bar{\beta}$	Strafparameter beim SIMP-Ansatz
β	Verhältnis von Schub- zu Zugfestigkeit $\beta = \frac{c_t}{c_n}$
Γ	Rand

Γ_{t^*}	Neumann-Rand
Γ_{u^*}	Dirichlet-Rand
γ	Lagrange-Multiplikatoren für die Ungleichheitsnebenbedingungen
Γ_c^+, Γ_c^-	positives, negatives Rissufer der Rissfläche
Γ_c	Rissfläche
Γ_m	materielle Grenzfläche, ungeschädigt
$\delta_{c,j}$	Dirac-Delta Funktion
$\bar{\epsilon}$	Abbruchkriterium
ϵ	linearisierter Green-Lagrange Verzerrungstensor
ϵ	Toleranzwert
η	äquivalenter Verschiebungssprung
$\boldsymbol{\eta}$	Lagrange-Multiplikatoren für die Gleichheitsnebenbedingungen
κ	Geschichtsvariable
κ^*	mittlere Krümmung
κ_c	charakteristische Rissöffnung
$\bar{\lambda}$	Laststeigerungsfaktor
λ	Lamékonstante
μ	Lamékonstante
$\boldsymbol{\mu}$	adjungierte Variable, bzw. Lagrange-Multiplikator
ν	Querdehnzahl
ξ, η	lokale Koordinaten
π	Kreiszahl $\pi \approx 3,141593$
ρ	Dichte, Porosität
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$	„nicht-lokaler“ Cauchy'scher Spannungstensor
σ_v	Zugfestigkeit des Matrixmaterials oder der materiellen Grenzfläche
σ_I, σ_{II}	Hauptspannungen
τ	Abstand zur Rissspitze
τ	aktueller Zeitpunkt
$\Phi_{c,j}$	Abstandsvektor zur Rissfläche
ϕ_m	implizite Beschreibung von Grenzflächen und Grenzflächenrissen
$\phi_{c,j}$	implizite Beschreibung von Matrixrissen
φ	Abbildungsvorschrift
$\bar{\chi}$	kontinuierliche Verteilungsfunktion
χ	Indikatorfunktion diskreter Größen
$\chi_{c,j}$	Vorzeichenfunktion
$\chi_{m,i}$	Anreicherungsfunktion
ψ	Energiefunktional
ψ^*	regulärer Anteil des Energiefunktionals
$\tilde{\psi}$	singulärer Anteil des Energiefunktionals

Ω	Gebiet
Ω_w	Rissspitzennahgebiet

Kalligraphische Symbole

\mathcal{B}	materieller Körper
\mathcal{B}^α	Festkörperphase α
\mathcal{B}^β	Festkörperphase β
\mathcal{C}^{el}	vierstufiger Materialtensor des Hookeschen Gesetzes
\mathcal{C}_{tan}	Materialtangente des Hookeschen Gesetzes
\mathcal{H}	Heaviside-Funktion

1

Einleitung

*Was wir wissen, ist ein Tropfen;
was wir nicht wissen, ein Ozean.*

Isaac Newton

Das Prinzip der in der Natur vorkommenden Verbund- bzw. Kompositwerkstoffe, die aus mindestens zwei verschiedenen Phasen oder Komponenten bestehen, wird in der Technik intensiv genutzt. Verbundwerkstoffe besitzen von den Einzelkomponenten abweichende Eigenschaften, die bei der Entwicklung von künstlichen Verbundwerkstoffen gezielt ausgearbeitet werden. Dies geschieht, indem die Geometrie der Komponenten sowie die Verbundeigenschaften verändert werden. Es wird je nach Anwendung versucht, die unterschiedlichen Vorteile der Einzelkomponenten zu kombinieren und deren Nachteile zu unterdrücken. Die einzelnen Komponenten können dabei selbst aus Verbundwerkstoffen bestehen.

Zu den natürlichen Verbundwerkstoffen zählen beispielsweise Holz und Granit. Holz besteht aus langen Zellulosefasern in einer Matrix aus Zellulose bzw. Lignin. Granit ist ein Gemisch aus Feldspat, Quarz und meist dunklen Mineralien wie Glimmer, Hornblende oder Pyroxen. Grob gesprochen können auch Wirbeltiere als ein natürlicher Verbund aus harten Knochen und weichem Gewebe bezeichnet werden.

Künstliche Verbundwerkstoffe gibt es bereits seit der Antike. Zu ihnen gehören beispielsweise der von den Kelten zur Perfektion gebrachte Damaszenerstahl, einem Gemisch aus weichem und hartem Eisen, oder der sogenannte *Opus Caementitium*. Dieser wird auch als „römischer Beton“ oder „Kalkbeton“ bezeichnet. Er enthält größere Kieselsteine in einer Zementmatrix, die aus gebranntem Kalk, Wasser und Sand besteht. Aus ihm wur-

de beispielsweise die Kuppel des Pantheon in Rom erbaut, die mit ihrem Durchmesser von 43 Metern bis heute zu den größten Gewölben der Welt zählt.

Wird Beton als einzelner Werkstoff angewendet, kann er aufgrund seiner geringen Zugfestigkeit nur auf Druck beansprucht werden. Diesem Manko begegnen moderne Betone durch die Einbringung zusätzlicher Komponenten, die die zugbeanspruchten Bereiche eines Bauteils verstärken bzw. bewehren sollen. Wird für die Bewehrung von Beton auf Stahl zurückgegriffen, spricht man von Stahlbeton, bzw. bei seiner mechanischen Vorspannung von Spannbeton. Alternativ werden inzwischen aber auch Glasfaser-, Carbonfaser- und Kunstfasergewebe eingesetzt, um die Eigenschaften von Faserbeton gezielt zu beeinflussen.

In der Luft- und Raumfahrt finden Kompositwerkstoffe ihre Hightech-Anwendung. Es werden inzwischen viele Bauteile aus Faser-Verbund-Kunststoffen hergestellt, bei denen Glas- oder Carbonfasern in Kunststoff eingebettet werden. Die genannten Materialien sind auch bekannt unter ihren Abkürzungen „GFK“ und „CFK“. Als weiterer Verbundwerkstoff im Flugzeugbau kann glasfaserverstärktes Aluminium (GLARE) genannt werden. Das Ziel beim Einsatz dieser Verbundwerkstoffe ist es, eine hohe Festigkeit und Steifigkeit bei gleichzeitig niedriger Materialdichte zu erreichen.

Aus diesen Beispielen wird ersichtlich, dass es praktisch keine homogenen Strukturen in unserer Umwelt gibt. Wir sind ständig bemüht, durch die Kombination verschiedenster Grundstoffe Mehrphasenstrukturen zu erzeugen, die vorgegebene Eigenschaften optimal erfüllen. Dabei wird es immer wichtiger, das Strukturverhalten der Einzelkomponenten sowie des Verbundes zwischen ihnen numerisch zu erfassen, um nach Möglichkeit automatisiert einen optimalen Verbundwerkstoff zu entwickeln.

1.1. Schwerpunkte der Arbeit

In dieser Arbeit sollen Mehrphasenstrukturen untersucht werden, die je nach äußerer Belastung ein lokalisiertes Schädigungsverhalten aufweisen. Als Modellmaterial kommt zu diesem Zweck faserverstärkter Beton zum Einsatz, dessen Matrix nach der Überschreitung einer materialspezifischen Zugfestigkeit zu reißen beginnt. Des Weiteren wird eine mögliche Delamination an der Schnittstelle zwischen der Betonmatrix und den Bewehrungsfasern berücksichtigt. Das nichtlineare Materialverhalten wird durch diskrete, spannungsübertragende, d.h. kohäsive Risse modelliert, die mit einem exponentiellen Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz beschrieben werden. Die Untersuchungen werden dabei immer an zweidimensionalen Querschnitten vorgenommen, die senkrecht zur Faserrichtung verlaufen (siehe Abbildung 1.1).

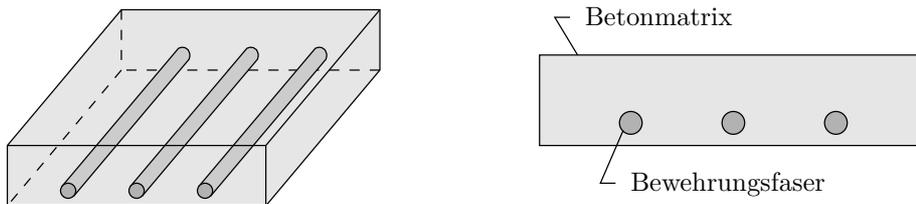


Abbildung 1.1.: Schnitt durch Faserbeton senkrecht zur Bewehrungsrichtung

Es soll untersucht werden, ob es mithilfe gradientenbasierter Optimierungsverfahren möglich ist, bei schädigendem Materialverhalten eine Struktur an das Zielkriterium „Maximierung der Duktilität“ anzupassen. Die Entwurfsparameter verändern in diesem Zusammenhang die Lage, sowie die Form der Bewehrungseinschlüsse, die durch implizite Level-Set-Gleichungen beschrieben werden.

Die indirekte, nicht parametrisierte Beschreibung der Grenzflächengeometrie bietet die Möglichkeit, bei Verwendung der erweiterten Finite-Elemente-Methode (X-FEM) eine von der Kontur unabhängige Diskretisierung vorzunehmen, d.h. ein gleichmäßiges, kartesisches FE-Netz zu verwenden. Zum einen müssen aus diesem Grund zusätzliche Verschiebungsfreiheitsgrade ins System eingebracht werden, um die lokalen Diskontinuitäten zu beschreiben. Andererseits entfällt die wiederholte, aufwändige Neuvernetzung, die bei Formoptimierungsproblemen für gewöhnlich erforderlich ist.

Der Fokus der Arbeit liegt auf der Ermittlung der Gradienten, die vom Optimierungsalgorithmus zur Modifikation des Ausgangsentwurfs benötigt werden. Dieser Vorgang wird im Allgemeinen auch als Sensitivitäts- bzw. Sensibilitätsanalyse bezeichnet. Unter den Gradienten versteht man die Ableitungen der Entwurfskriterien nach den Optimierungsvariablen, die die Veränderungen aufgrund einer Modifikation des Entwurfs beschreiben. Eine herausragende Rolle spielt in diesem Zusammenhang die implizite Abhängigkeit des Entwurfskriteriums „Maximierung der Duktilität“ von der Strukturantwort. Aufgrund der Anwendung numerischer Berechnungsverfahren (FE-Methode) zur Ermittlung der Zustandsvariablen können die Gradienten der Entwurfskriterien nicht auf direktem Wege ermittelt werden, sondern bedürfen des Einsatzes spezieller Verfahren zur Sensitivitätsanalyse.

Die Umsetzung des Optimierungsalgorithmus, inklusive der Struktur- und Sensitivitätsanalyse, erfolgt im Finite-Elemente-Programm *CCARAT*, dem Forschungsprogramm am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart. Es werden die vorgestellten Optimierungsalgorithmen eingebunden sowie die Sensitivitätsanalyse an die erweiterte Finite-Elemente-Methode angepasst.

1.2. Gliederung der Arbeit

In *Kapitel 2* werden aufbauend auf dem „Drei-Säulen-Konzept“ nach ESCHENAUER (1985) die Schwerpunkte eines Optimierungsprozesses dargestellt. Diese umfassen die Strukturanalyse, das Optimierungsmodell sowie den Optimierungsalgorithmus.

Kapitel 3 befasst sich mit den kontinuumsmechanischen Grundlagen der verwendeten Mehrphasenstrukturen, inklusive der verwendeten lokalen Schädigungsmodelle. Es werden die impliziten Geometriebeschreibungen von schwachen und starken Diskontinuitäten, d.h. materiellen Grenzflächen und Rissen, vorgestellt und die numerische Umsetzung im Rahmen der X-FEM erläutert. In diesem Kontext wird besonders auf die speziellen Integrationsvorschriften von Elementen mit Diskontinuitäten eingegangen.

Mit den Grundlagen der Sensitivitätsanalyse beschäftigt sich *Kapitel 4*. Dort werden numerische und analytische Verfahren der Sensitivitätsanalyse vorgestellt und untereinander verglichen.

In *Kapitel 5* wird das Entwurfskriterium „Maximierung der Duktilität“ vorgestellt. Ferner werden dessen Gradienten im Zusammenhang mit lokal geschädigten Mehrphasenstrukturen gebildet. Dabei müssen die materiellen und geometrischen Abhängigkeiten, die sich aus Kapitel 3 ergeben, berücksichtigt werden. Es wird auf den Einfluß des Berechnungsalgorithmus der Strukturanalyse auf die Sensitivitätsanalyse eingegangen, sowie die Nebenbedingung „konstante Bewehrungsmasse“ eingeführt. Da ein Zusammenwachsen von einzelnen Bewehrungsfasern im Optimierungsprozess ausgeschlossen werden soll, wird ein Kontrollmechanismus zur Einhaltung eines Mindestabstands zwischen den einzelnen Einschlüssen eingeführt.

Anhand von Beispielen soll in *Kapitel 6* gezeigt werden, dass mit den ermittelten Gradienten eine Verbesserung der Ausgangsentwürfe bezüglich der Entwurfskriterien automatisiert durchgeführt werden kann. Dabei steigert sich die Komplexität der Struktur- und Sensitivitätsanalyse, ausgehend von linear-elastischen Materialien mit perfektem Verbund, über Beispiele mit Delaminationsversagen an den materiellen Grenzflächen bis hin zum Modellmaterial Faserbeton mit einem kombinierten Versagen von Matrix und Interface.

Abschließend werden in *Kapitel 7* einige Schlussfolgerungen zusammengestellt und ein Ausblick auf mögliche Erweiterungen und Verbesserungen der vorgestellten Methoden gegeben.

2

Grundlagen der Strukturoptimierung

Das Grundlagenkapitel zur Strukturoptimierung befasst sich mit den drei Teilaufgaben einer Optimierungsprozedur. Diese sind nach ESCHENAUER (1985) die Strukturanalyse, das Optimierungsmodell und der Optimierungsalgorithmus. Nach einer Einleitung in die Thematik der Optimierung werden die einzelnen Teilaufgaben beschrieben und die verwendeten Methoden und Algorithmen eingeführt.

In einem konstruktiven Entwicklungsprozess werden wirtschaftliche Entwürfe von Tragwerken gesucht, die bestimmte Anforderungen an Funktionalität und Gestaltung erfüllen. Dabei spielen in der Regel geometrische und mechanische Größen die tragende Rolle. Sollen zusätzlich die Gesamtkosten eines Tragwerks minimiert werden, sind die spezifischen Kosten für Material und Herstellung zu berücksichtigen (BUTENWEG UND THIERAUF 1999).

Ziel der Strukturoptimierung ist es, für ein oder mehrere ausgewählte Entwurfs- bzw. Zielkriterien die Form und Topologie eines Tragwerks durch die Variation bestimmter Entwurfsparameter zum bestmöglichen Strukturverhalten hin (automatisiert) zu verbessern bzw. zu verändern. Entwurfskriterien, die auch als Zielfunktionen bezeichnet werden, sind beispielsweise die Minimierung des Strukturvolumens bzw. des Gewichts, die Maximierung der Steifigkeit oder der Duktilität (KATO U. A. 2009, KATO UND RAMM 2010, KATO 2010), die Verbesserung des Stabilitätsverhaltens von beulgefährdeten Bauteilen (REITINGER UND RAMM 1995, NEVES U. A. 2002, KEMMLER U. A. 2005), oder des Energieabsorptionsverhaltens bei Stoßvorgängen (CHEN U. A. 2001, PEDERSEN 2004, SOTO 2004).

Werden zwei oder mehr sich zum Teil widersprechende Entwurfskriterien gleichzeitig behandelt, spricht man von einer Mehrkriterienoptimierung, oder auch Vektoroptimierung (ESCHENAUER U. A. 1990). Bei dem Versuch, die Werte einiger Kriterien zu minimie-

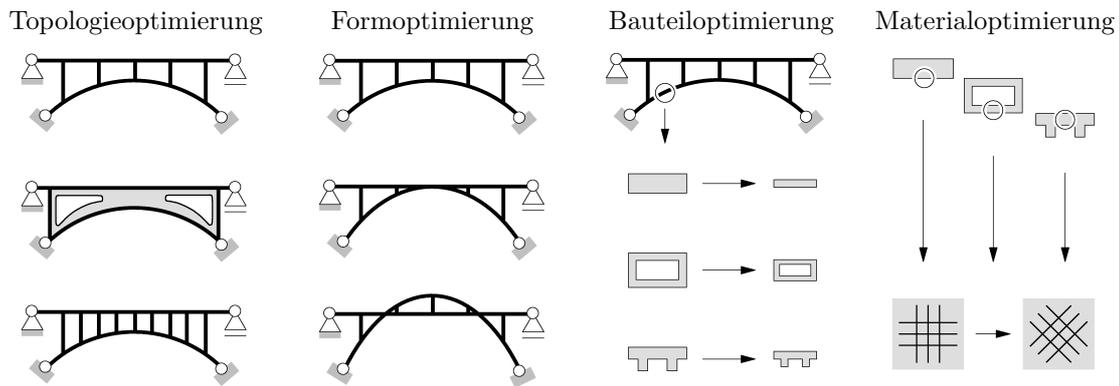


Abbildung 2.1.: Teildisziplinen der Strukturoptimierung, aus RAMM U. A. (1998)

ren, können sich die Werte anderer Kriterien vergrößern. Somit gibt es keine eindeutige Lösung, sondern eine Pareto-optimale Lösungsmenge (STEUER 1986, LIPKA 2007).

Entwurfskriterien müssen zusätzlich vorgegebene Nebenbedingungen und Restriktionen einhalten. Darunter versteht man beispielsweise die Begrenzung auf maximale Spannungen (DUYSINX UND BENDSØE 1997) oder Verschiebungen, die Abstimmung von Eigenfrequenzen oder die Begrenzung auf einen kritischen Lastfaktor.

Für eine umfassende und nach Themen sortierte Zusammenstellung von Büchern und (anderen) Veröffentlichungen, Publikationen zu verschiedenen Sachgebieten der Strukturoptimierung wird an dieser Stelle auf BENDSØE UND SIGMUND (2003) verwiesen. Um sich speziell die Grundlagen der Strukturoptimierung anzueignen, wird das Buch von HARZHEIM (2008) empfohlen.

Je nach Art der Freiheitsgrade bzw. Optimierungsvariablen wird zwischen Topologie-, Form-, Bauteil- und Materialoptimierung unterschieden (siehe Abbildung 2.1). Bei der Topologieoptimierung wird innerhalb eines festgelegten Entwurfsraums eine vorgegebene Masse an Material optimal verteilt, um den konzeptionellen Aufbau bzw. das prinzipielle Layout einer Struktur zu finden. Im Gegensatz dazu startet die Formoptimierung von einer bereits bekannten Topologie und verändert nur die äußeren und inneren Begrenzungskanten bzw. -flächen eines Tragwerks. Dies erfolgt beispielsweise durch die Variation der Koordinaten von Randpunkten, um die Konturen an ein bestimmtes Entwurfskriterium anzupassen. Ein typisches Beispiel stellt in diesem Zusammenhang die Bestimmung von Krümmungsradien in Maschinenbauteilen dar, um Kerbspannungsspitzen zu vermindern und die Dauerstandfestigkeit zu erhöhen. Die Bauteiloptimierung, die auch als Bemessungs- oder Querschnittsoptimierung bezeichnet wird, kann als Sonderfall der Formoptimierung betrachtet werden.

Wenn die Topologie sowie die Form und Querschnitte definiert sind, kann zusätzlich das verwendete Material, bzw. dessen Aufbau optimiert werden. Verstärkte Materialien werden in der Regel über die Orientierung der Bewehrungsfasern angepasst. Alternativ ist aber auch die Suche nach einem Materialaufbau auf kleiner Skala zur Erzielung definierter, makroskopischer Materialeigenschaften möglich.

Durch die gegenseitige Beeinflussung der verschiedenen Optimierungsarten ist eine Kombination von Topologie-, Form- und Materialoptimierung in einem iterativen, hierarchischen Optimierungsprozess denkbar. Als Beispiel für eine solche Multilevel-Optimierung wurde in der Arbeit von LIPKA (2007) für den Femur (Oberschenkelknochen) sowohl die makroskopische Dichteverteilung als auch der mikroskopische Materialaufbau an das Entwurfskriterium der maximierten Steifigkeit angepasst. Der optimale Zielfunktionswert wurde durch eine Iteration zwischen der makroskopischen und der materiell mikroskopischen Optimierungsschleife gefunden.

Die meisten Optimierungsprobleme in der Strukturmechanik lassen sich nicht analytisch geschlossen lösen. Als bekannteste Ausnahme wird jedoch auf die Michellstrukturen hingewiesen (MICHELL 1904, ROZVANY 1996, GRACZYKOWSKI UND LEWIŃSKI 2006). Sind die zu untersuchenden Probleme, z.B. aufgrund einer hochgradig nichtlinearen Aufgabenstellung, nicht mehr analytisch lösbar, wird auf numerische Verfahren zurückgegriffen.

Der Aufbau der Optimierungsprozedur kann nach ESCHENAUER (1985) in die folgenden Teilaufgaben („Drei-Säulen-Konzept“) aufgliedert werden:

Strukturanalyse Diese ermöglicht es mithilfe des Analysemodells Verformungen, Spannungen, Eigenfrequenzen usw. zu berechnen, um daraus Zielfunktionen und/oder Restriktionen zu ermitteln.

Optimierungsmodell Hierunter versteht man das Festlegen von Struktur- und Entwurfsvariablen sowie das Aufstellen von Zielfunktionen, Nebenbedingungen und Restriktionen. Das Entwurfsmodell, als Teil des Optimierungsmodells, stellt die Verbindung zwischen der Strukturanalyse und dem Optimierungsalgorithmus her; die Sensitivitätsanalyse liefert die für ein gradientenbasiertes Verfahren notwendigen Gradienten der Entwurfskriterien.

Optimierungsalgorithmus Dieser löst das Optimierungsproblem und liefert einen Satz modifizierter, meist verbesserter Entwurfsvariablen.

Zu Beginn des Iterationsprozesses erfolgt eine Strukturanalyse des Ausgangsentwurfs, um die Entwurfskriterien (Zielfunktion und Nebenbedingung) und je nach Optimierungsalgorithmus auch deren Gradienten bezüglich der Entwurfsvariablen im Optimierungsmodell zu bestimmen bzw. auszuwerten. Mit diesen Informationen kann mithilfe des

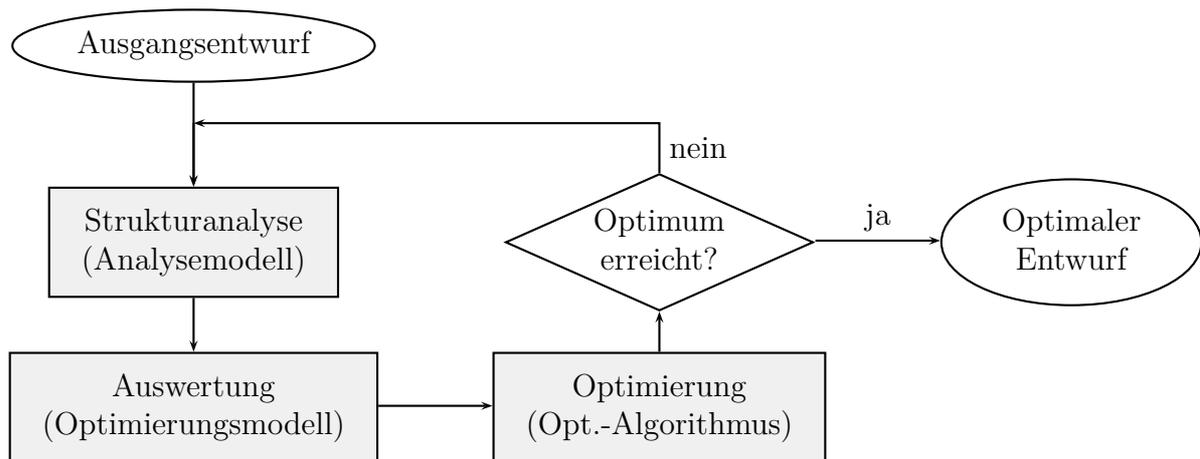


Abbildung 2.2.: Optimierungsschleife

Optimierungsalgorithmus ein modifizierter Satz von Entwurfsvariablen bestimmt werden. Der verbesserte Entwurf wird wiederum analysiert und ausgewertet, um über das Fortführen oder Abbrechen der Optimierungsprozedur zu entscheiden (siehe Abb. 2.2).

Im folgenden werden die drei Teilaufgaben der Optimierungsprozedur genauer erläutert. Dies soll unter anderem den modularen Aufbau verdeutlichen. Je nach gegebener Aufgabenstellung können die einzelnen Teilaufgaben, Strukturanalyse, Optimierungsmodell und Optimierungsalgorithmus, mit unterschiedlichen Verfahren gelöst werden.

2.1. Strukturanalyse / Analysemodell

Grundvoraussetzung einer jeden Strukturoptimierung ist die Erfassung des physikalischen Strukturverhaltens. Darunter versteht man bei mechanischen Systemen die Antworten auf statische und dynamische Belastungen. Dies sind zum Beispiel Verformungen, Spannungen und Eigenwerte, aber auch Aussagen über das Stabilitätsverhalten. Ebenso können dissipative Vorgänge wie die Plastizierung und Schädigung von Teilbereichen einer Struktur von Interesse sein.

Um eine Strukturanalyse durchführen zu können, müssen Informationen über die Geometrie, Lagerung und Belastung der Struktur vorliegen. Zudem sind die Materialeigenschaften sowie die physikalischen Effekte, die berücksichtigt werden sollen (z.B. linear oder nichtlinear, statisch oder dynamisch) zu definieren. Je nach Optimierungsproblem wird ein bestimmter Teil der Strukturparameter direkt vom Entwurfsmodell bereitgestellt (siehe Abschnitt 2.2.2).

Mit diesen Eingangsdaten wird ein angepasstes mechanisches Modell (z.B. Balken, Scheiben, Volumenmodell) entwickelt. Die darin enthaltenen Abhängigkeiten zwischen der Kinematik, dem Gleichgewicht und dem Konstitutivgesetz sind anschaulich vom italienischen Ingenieur und Mathematiker Enzo Tonti im sogenannten Tonti-Diagramm aufbereitet worden (TONTI 1972, TONTI 1976). Um das mechanische Modell auszuwerten, kann auf verschiedene Analyseverfahren zurückgegriffen werden. Diese liefern ein Analysemodell zur Ermittlung der Systemantwort.

In den Ingenieurwissenschaften werden meist numerische Berechnungsverfahren verwendet, um das Randwertproblem (Abschnitt 3.1.5) approximativ zu lösen. Analytische Methoden kommen hingegen selten zum Einsatz, da diese auf sehr einfache Beispiele beschränkt sind und somit nicht praxisrelevant sind. Als am weitesten verbreitet gilt die Finite-Elemente-Methode (FEM), die in Kapitel 3 in Form der erweiterten Finite-Elemente-Methode (XFEM) eingeführt wird. Sie dient in dieser Arbeit zur Ermittlung des Strukturverhaltens, d.h. der Zustandsvariablen von Matrixstrukturen mit Einschlüssen aus Fremdmaterial. Darunter versteht man beispielsweise Mehrphasenmaterialien, wie faserverstärkten Beton.

Mit den aus der Antwort des Analysemodells ermittelten Zustandsvariablen können dann die Zielfunktions- und Restriktionsformulierungen des Optimierungsmodells ausgewertet werden. Dies erfolgt je nach Problemstellung simultan oder im Nachlauf zur Strukturanalyse.

2.2. Optimierungsmodell

Im Optimierungsmodell sind alle problemspezifischen Informationen zusammengefasst. Die Optimierungsaufgabe wird definiert und mithilfe des Entwurfsmodells die Verbindung zwischen den Entwurfs-, bzw. Optimierungsvariablen und den Strukturdaten des zu optimierenden Tragwerks hergestellt. Wird ein gradientenbasierter Optimierungsalgorithmus verwendet, werden zusätzlich Gradienteninformationen durch eine Sensitivitätsanalyse ermittelt.

2.2.1. Mathematische Definition der Optimierungsaufgabe

Zur Ermittlung einer optimalen Lösung der Entwurfsaufgabe wird die folgende abstrakte, mathematische Formulierung verwendet:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) & ; f(\mathbf{s}) \in \mathbb{R} \\ \mathbf{h}(\mathbf{s}) &= \mathbf{0} ; \mathbf{h}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_h} \\ \mathbf{g}(\mathbf{s}) &\leq \mathbf{0} ; \mathbf{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_g} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Darin soll die Zielfunktion f durch Anpassung der Entwurfsvariablen \mathbf{s} minimiert werden. Nebenbedingungen treten bei der Minimierungsaufgabe, die durch Multiplikation mit dem Faktor '-1' in eine Maximierungsaufgabe überführt werden kann, in Form von n_h Gleichheits- und n_g Ungleichheitsnebenbedingungen auf. Durch diese Nebenbedingungen wird aus dem unbeschränkten, ein beschränktes Optimierungsproblem.

Außer durch die Nebenbedingungen kann der Wertebereich der Entwurfsvariablen \mathbf{s} durch obere und untere Restriktionen, \mathbf{s}_U und \mathbf{s}_L , beschränkt sein. Dies hat den Hintergrund, dass sich die Werte immer im physikalisch zulässigen und herstellungsbedingten Bereich bewegen müssen. Wird zum Beispiel die Abmessung eines Bauteils variiert, so sind negative Maßangaben auszuschließen. In Gleichung (2.2) bezeichnen \mathbf{s}_L und \mathbf{s}_U die unteren („lower“) und oberen („upper“) Grenzen des zulässigen Bereichs.

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{n_s} \end{bmatrix} ; \mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U \quad (2.2)$$

Bei beschränkten Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen erfolgt die Überführung in ein quasi-unbeschränktes Problem mithilfe der Lagrange-Funktion:

$$L(\mathbf{s}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{h}(\mathbf{s}) + \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{g}(\mathbf{s}) \rightarrow \text{stat.} \quad (2.3)$$

Die zugehörige Lösung $(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*)$ entspricht einem Sattelpunkt, der sich aus der Minimierung der Lagrange-Funktion bezüglich der primalen Variablen \mathbf{s} und Maximierung bezüglich der dualen Variablen, den Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{n_h}$ und $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{n_g}$ ergibt.

$$L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\gamma}) \leq L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) \leq L(\mathbf{s}, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) \quad (2.4)$$

Die notwendigen Bedingungen für einen Sattelpunkt erster Ordnung ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der Lagrange-Funktion nach den primalen und dualen Variablen,

Zielfunktion	Nebenbedingung
Gewicht (Volumen)	Gewicht (Volumen)
$f_G(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} \rho \, d\Omega$	$h_G(\mathbf{s}) = \frac{G}{G_{zul}} - 1 = 0$
Formänderungsenergie	Verschiebungen
$f_E(\mathbf{s}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega$	$g_u(\mathbf{s}) = \frac{u}{u_{zul}} - 1 \leq 0$
Duktilität	
$f_D(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega} \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma} \, d\boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega$	$g_u(\mathbf{s}) = \frac{\ \mathbf{u}\ }{\ \mathbf{u}\ _{zul}} - 1 \leq 0$
Spannungsausgleich	Spannungen
$f_{\sigma}(\mathbf{s}) = \int_{\Omega} (\sigma - \sigma_m)^2 \, d\Omega$	$g_{\sigma}(\mathbf{s}) = \frac{\sigma}{\sigma_{zul}} - 1 \leq 0$
Eigenfrequenz	Eigenfrequenz
$f_{\omega}(\mathbf{s}) = -\omega_j$	$g_{\omega}(\mathbf{s}) = \frac{\omega_j}{\omega_{zul}} - 1 \leq 0$
Kritischer Lastfaktor	Kritischer Lastfaktor
$f_{\lambda}(\mathbf{s}) = -\lambda_c$	$g_{\lambda}(\mathbf{s}) = \frac{\lambda_j}{\lambda_{zul}} - 1 \leq 0$

Tabelle 2.1.: Zielfunktionen und Nebenbedingungen, aus SCHWARZ (2001)

siehe KARUSH (1939) und KUHN UND TUCKER (1951).

$$\begin{aligned}
 \nabla_{\mathbf{s}} L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) &= \nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}^*) + \boldsymbol{\eta}^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{h}(\mathbf{s}^*) + \boldsymbol{\gamma}^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{g}(\mathbf{s}^*) &= \mathbf{0} \\
 \nabla_{\boldsymbol{\eta}} L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) &= \mathbf{h}(\mathbf{s}^*) &= \mathbf{0} \\
 \gamma_i^* \nabla_{\gamma_i} L(\mathbf{s}^*, \boldsymbol{\eta}^*, \boldsymbol{\gamma}^*) &= \gamma_i^* g_i(\mathbf{s}^*) &= 0 \quad \text{mit } \gamma_i^* \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Die Optimierungsaufgabe wird durch die Wahl der Zielfunktion und der Nebenbedingungen, die sogenannten Entwurfskriterien, spezifiziert. Diese können sowohl vom mechanischen Strukturverhalten als auch von geometrischen Größen abhängig sein. In der Regel muss eine Strukturanalyse durchgeführt werden, um die entsprechenden Funktionswerte zu ermitteln.

Ein Überblick über gängige Zielfunktionen und Nebenbedingungen wurde aus der Arbeit von SCHWARZ (2001) entnommen (Tabelle 2.1). Diese lassen sich in globale, lokale und integrale Kriterien einteilen, d.h. sie berücksichtigen entweder das gesamte (globale) Strukturverhalten, beziehen sich auf bestimmte Stellen im Tragwerk (Punktinformation) oder werten lokale Größen über einem bestimmten (integralen) Bereich aus.

In der vorliegenden Arbeit wird als Zielkriterium die „Maximierung der Duktilität“ verwendet. Die Duktilität wird durch das Integral der Verzerrungsenergie über eine vorgegebene Verschiebung eines Kontrollpunktes definiert. Bedingt durch die integrale Form wird sie nach jedem Inkrement (Gleichgewichtszustand) bestimmt. Entsprechendes gilt bei der Ermittlung ihrer Gradienten bezüglich der primalen Variablen \mathbf{s} .

2.2.2. Entwurfsmodell

Das Entwurfsmodell ist Teil des Optimierungsmodells und stellt die Verbindung zwischen dem mathematisch abstrakten Optimierungsproblem (2.1) und dem zu optimierenden Tragwerk her. Es beschreibt die mathematische Beziehung zwischen den Entwurfs-, bzw. Optimierungsvariablen und den Strukturdaten. Die Entwurfsvariablen \mathbf{s} sind häufig ein Teil der Strukturparameter, die zur Ermittlung des Strukturverhaltens benötigt werden (siehe Abschnitt 2.1).

Die Gesamtheit aller Strukturparameter legt die Geometrie bzw. Topologie aller Tragwerkskomponenten fest sowie deren Form und ihren materiellen Aufbau. In Strukturoptimierungsproblemen beschreiben die Entwurfsvariablen, die den Strukturparametern zugeordnet werden, üblicherweise Bauteilparameter (z.B. Materialdicken oder Querschnittsprofile), geometrische Abmessungen, die Form einer Struktur oder deren Materialeigenschaften. Dies wird im Folgenden anhand der verschiedenen Teildisziplinen der Strukturoptimierung näher erläutert. Die Strukturanalyse erfolgt hierbei mittels FEM.

In den Fällen, in denen als Entwurfsvariablen nicht direkt Strukturparameter verwendet werden, muss das Entwurfsmodell einen expliziten Zusammenhang zwischen den Entwurfsvariablen und den zugehörigen Strukturparametern herstellen. Beispielsweise können in der Formoptimierung die Entwurfsgeschwindigkeitsfelder durch fiktive, äußere Lasten definiert sein. Die Variation der Strukturform wird somit von den einzelnen Lasten als Entwurfparameter gesteuert und nicht direkt von den geometriebeschreibenden Strukturparametern. Diese werden aus den Entwurfsgeschwindigkeitsfeldern abgeleitet, siehe Abschnitt „Formoptimierung (Bauteiloptimierung)“.

Nachdem im Folgenden zuerst die Topologieoptimierung, und anschließend die Formoptimierung eingeführt werden, wird abschließend die Strukturoptimierung mithilfe von Levelsetverfahren beschrieben. Diese Verfahren bieten bei entsprechend allgemeiner Formulierung der geometriebeschreibenden Levelsetgleichungen die Möglichkeit, die Topologieoptimierung mit der Formoptimierung in einem Schritt zu kombinieren (siehe z.B. ALLAIRE U. A. 2004). Levelsetansätze können jedoch auch im Nachlauf zu einer klassischen Topologieoptimierung allein zur lokalen Formfindung verwendet werden. In diesen Fällen sind die aus der Topologieoptimierung gefundenen Nachbarschaftsbeziehungen in eine adäquate Levelsetbeschreibung zu überführen (ROTTHAUS UND BARTHOLD 2008).

Unabhängig vom Optimierungsproblem wird die in dieser Arbeit verwendete Levelsetbeschreibung in Abschnitt 3.2 vorgestellt.

Topologieoptimierung

Als bekanntester Vertreter der Topologieoptimierung wird an dieser Stelle kurz der SIMP-Ansatz vorgestellt (BENDSØE UND KIKUCHI 1988). Die Abkürzung steht für den englischen Ausdruck „Solid Isotropic Microstructure with Penalty for intermediate density“. Die Idee der materiell kontinuierlichen Topologieoptimierung besteht darin, das Layout eines kontinuierlichen Tragwerks durch die Materialverteilung im Entwurfsraum mithilfe einer Indikatorfunktion zu beschreiben. Dabei wird jedem Punkt \mathbf{x} im Entwurfsraum Material zugewiesen, oder nicht.

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \rightarrow \text{kein Material} \\ 1 & \rightarrow \text{Material} \end{cases} \quad ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.6)$$

Der SIMP-Ansatz regularisiert bzw. relaxiert dieses mathematisch schlecht gestellte Optimierungsproblem durch die Überführung der Parameterfunktion χ in eine kontinuierliche Verteilungsfunktion $\bar{\chi}(\mathbf{x}) : 0 \leq \bar{\chi}(\mathbf{x}) \leq 1$. Diese stellt den Indikator für ein poröses Material dar, das als Vollmaterial die Dichte ρ_0 aufweist.

$$\bar{\chi}(\mathbf{x}) = \frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \rho(\mathbf{x}) \leq \rho_0 \quad (2.7)$$

Im kontinuierlichen Entwurfsraum sind somit unendlich viele Optimierungsvariablen $\rho(\mathbf{x})$ vorhanden. Deren Anzahl wird jedoch bei Verwendung der Finite-Elemente-Methode meistens dadurch reduziert, dass nicht den Materiepunkten, sondern den einzelnen finiten Elementen dasselbe poröse Material ρ_i zugewiesen wird. Das Werkstoffmodell des SIMP-Ansatzes verbindet nun den Elastizitätsmodul der einzelnen finiten Elemente

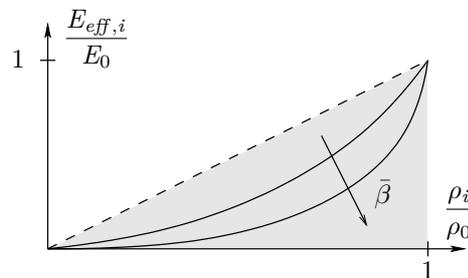


Abbildung 2.3.: Dichte-Steifigkeitsfunktion im SIMP-Ansatz

direkt mit der relativen Dichte ρ_i/ρ_0 .

$$E_{eff,i} = E_0 \left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^{\bar{\beta}} \quad \text{mit} \quad \bar{\beta} \geq 1 \quad (2.8)$$

Der Parameter $\bar{\beta}$ bestraft den effektiven Elastizitätsmodul von Zwischenzuständen, um eine möglichst klare '0-1'-Verteilung für das optimierte Tragwerk zu erzielen.

Formoptimierung (Bauteiloptimierung)

In der Formoptimierung oder Gestaltsoptimierung wird die Ausgangstopologie, die zum Beispiel aus einer Topologieoptimierung gewonnen wurde, beibehalten. Bei gegebener Topologie wird die Form der Strukturberandung variiert, um die Struktureigenschaften in der gewünschten Weise zu verbessern. Wie bereits erwähnt kann dies zum Beispiel die Reduktion von Spannungsspitzen zur Erhöhung der Lebensdauer eines Bauteils sein. Unter der Strukturberandung versteht man im Zweidimensionalen die Bauteilkanten und im Dreidimensionalen deren Oberflächen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Variation der Strukturberandung zu definieren. Entweder werden die Entwurfsvariablen an die CAD-Parameter eines parametrisierten CAD-Modells gekoppelt. Dafür werden die mathematischen Grundlagen vom „Computer Aided Geometric Design“, kurz CAGD, bereitgestellt. Oder es werden direkt die Knoten des FEM-Netzes, das ebenfalls eine geometrische Beschreibung darstellt, verschoben. Als weitere Möglichkeit kommt die Geometriebeschreibung mittels impliziter Levelset-Ansätze in Betracht. Auf diese Alternative wird im Abschnitt „Levelsetoptimierungsverfahren“ eingegangen.

Bei einer FEM-Netz-basierten Formoptimierung ist der einfachste Ansatz, als Entwurfsparameter direkt die Lage der einzelnen FE-Randknoten zu verwenden (ZIENKIEWICZ UND CAMPBELL 1973). Dadurch kann die größtmögliche Vielfalt an Formen erzeugt werden und es entfällt die Notwendigkeit, eine Auswahl an möglichen Formvariationen selbst zu definieren.

Die wesentlichen Nachteile dieser Methode sind aber zum Einen, dass durch die Verschiebung einzelner Knoten große Netzverzerrungen entstehen können. Diese führen in der Regel zu Diskretisierungsfehlern, welche die Strukturantworten wie Steifigkeit und Spannungen verfälschen und die Zielfunktion für größere Verzerrungen verbessern. In diesem Fall maximiert der Optimierungsalgorithmus den Diskretisierungsfehler statt das physikalische Problem zu optimieren. Als typisches Beispiel findet sich dazu in KIKUCHI U. A. (1986) die Bildung eines Zick-Zack-Randes bei der Steifigkeitsoptimierung von Scheibenproblemen aufgrund der Schubversteifung verzerrter Elemente. Des Weiteren müssen bei

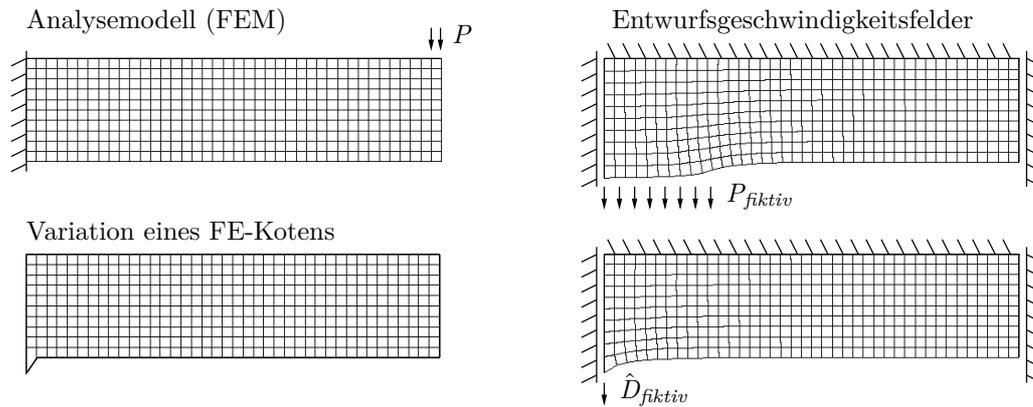


Abbildung 2.4.: Formänderung auf Basis einer FE-Knotenvariation bzw. mithilfe von natürlichen Entwurfsgeschwindigkeitsfeldern

größeren Formveränderungen auch Knoten innerhalb der Struktur verschoben werden, wodurch das Zick-Zack-Problem ins Innere derselben weitergegeben werden kann.

Um diesem Problem zu begegnen, kann eine Kopplung der einzelnen Knotenverschiebungen erfolgen, um eine strukturübergreifende Formänderung zu erhalten (BLETZINGER U. A. 2005, BLETZINGER U. A. 2010). Dazu muss die Änderung der Koordinaten aller FE-Knoten infolge einer Variation eines Entwurfsparmeters ermittelt werden. Das Feld dieser Änderungen wird als Entwurfsgeschwindigkeitsfeld bezeichnet und ist die zentrale geometrische Größe in der Formoptimierung. Die Formvariation ergibt sich aus der Linearkombination aller Entwurfsgeschwindigkeitsfelder, die mithilfe der einzelnen Entwurfsvariablen gewonnen werden.

Zur Ermittlung der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder bietet sich eine mechanische Deformation des für die Strukturanalyse verwendeten FE-Netzes an. Dieser Ansatz liefert sogenannte deformationsbasierende oder 'natürliche' Entwurfsgeschwindigkeitsfelder. Die Struktur wird dafür linear elastisch angenommen und die Randbedingungen werden an den Entwurfsprozess angepasst. Nicht variable Berandungen werden mit zusätzlichen Dirichlet-Randbedingungen fixiert, beziehungsweise die zu variierenden Ränder von eventuell vorhandenen Lagerbedingungen befreit. Somit ist ein sich von der Strukturanalyse unterscheidendes Randwertproblem zu lösen (siehe Abbildung 2.4).

Die Deformation entsteht nun zum Beispiel durch fiktive, äußere Lasten (siehe BELEGUNDU UND RAJAN 1988 und ZHANG UND BELEGUNDU 1992). In diesem Fall dienen die Lastgrößen der einzelnen Lastfälle als Entwurfsvariablen. Alternativ können fiktive Verschiebungslastfälle verwendet werden, um direkt die Beträge der Verschiebungen zu Entwurfsvariablen zu machen (CHOI UND CHANG 2001). Ebenso sind (fiktive) Temperaturlastfälle möglich, um ein Entwurfsverschiebungsfeld zu ermitteln

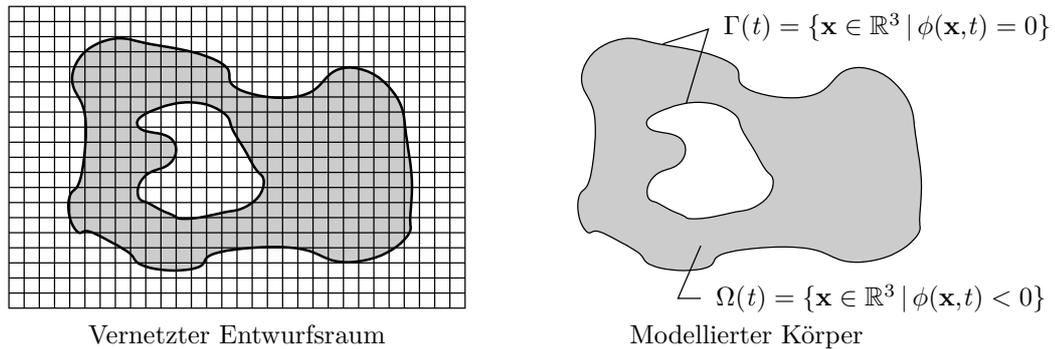


Abbildung 2.5.: Strukturbeschreibung mittels impliziter Levelsetfunktion

(siehe TORTORELLI 1993). Analog zu den vorherigen Lastarten stellen hier die Temperaturen die Entwurfsvariablen dar.

Somit liegen nun Entwurfsgeschwindigkeitsfelder vor, die geringe Elementverzerrungen aufweisen. In Bezug auf eine Produktion von Bauteilen mit NC-Maschinen (numerical control) bleibt jedoch das Problem der FE-Netz-basierten Formoptimierung, dass die Geometrie der optimierten Struktur nicht in Form von CAD-Daten vorliegen und erst in ein CAD-Modell überführt werden müssen. Daher bietet sich in diesen Fällen an, direkt die CAD-Parameter zur Optimierung heranzuziehen.

Mithilfe einer einheitlichen Betrachtungsweise von Strukturanalyse und Strukturoptimierung wird die Trennung zwischen der Geometriebeschreibung und der Deformation eines Körpers aufgehoben (BARTHOLD 2002). Identische mathematische Strukturen von Geometrie und Deformation ermöglichen die Erweiterung der klassischen Kontinuumsmechanik zu einem Design-Raum-Zeit-Kontinuum. Dieses integriert eine mögliche Formänderung des Ausgangsentwurfs bereits in die Theorie.

Levelsetoptimierungsverfahren

Wie im vorhergehenden Kapitel zur Formoptimierung deutlich wurde, bereitet die Abhängigkeit der Entwurfsgeschwindigkeitsfelder von den verwendeten FE-Netzen und die daraus resultierende Notwendigkeit einer Neuvernetzung im Optimierungsprozess einige Schwierigkeiten. Diese versucht man mithilfe der impliziten Geometriebeschreibung von Rand- und Grenzflächen zu überwinden. Die Level-Set-Methode (Abschnitt 3.2.1) hat den Vorteil, die Geometrie unabhängig vom FEM-Netz mithilfe einer Abstandsfunktion $\phi(\mathbf{x}, t)$ abzubilden (siehe Abbildung 2.5). Die Änderungen der Strukturberandung sind somit im Variationsprozess vom Netz des Entwurfsraums unabhängig.

Gewöhnlich werden elastische Probleme betrachtet, bei denen skalarwertige Level-Set-Gleichungen mit allgemeinen Funktionen vorliegen. Dies können z.B. Funktionen höhe-

rer Ordnung sein, mit denen sich zusätzlich zur Randbeschreibung auch topologische Änderungen während des Optimierungsprozesses verfolgen lassen. Somit kann simultan die optimale Topologie mit der bestmöglichen Form der Strukturberandung gefunden werden. Dies bedeutet zum Beispiel für den Strukturkörper aus Abbildung 2.5, dass die darin enthaltene Öffnung sich vergrößern oder verkleinern bzw. sogar verschwinden kann. Ebenso ist das Auftauchen weiterer Hohlräume möglich.

Alle Entwurfsparameter sind bei der Level-Set-Methode in der impliziten Beschreibungsfunktion enthalten. Stellt man sich die Level-Set-Gleichung als dreidimensionales Höhenprofil vor, das von der Entwurfsebene durchschnitten wird, so geben die Optimierungsvariablen die Form der Hügellandschaft vor. Beispiele zu diesen in ihrer Topologiefindung wenig eingeschränkten Optimierungsproblemen finden sich unter anderem bei ALLAIRE U. A. (2004), LIU U. A. (2005), DUYSINX U. A. (2006) und LUO U. A. (2008). In diesen Arbeiten werden beispielsweise aus einem regulär mit Hohlräumen versehenen Entwurfsraum die optimalen Nachbarschaftsbeziehungen des Entwurfsmaterials für einen Kragträger, beziehungsweise einen Biegebalken ermittelt. Dieser Vorgang gleicht der Topologieoptimierung nach dem SIMP-Ansatz.

Die in dieser Arbeit untersuchten Mehrphasenmaterialien haben einige abweichende Eigenschaften, die sich von den vorgestellten elastischen Problemen mit allgemeinen Level-Set-Gleichungen unterscheiden. Bei den numerischen Beispielen in Kapitel 6 wird die Grundform der Körper stets als nicht variabel angesehen, d.h. die äußere Berandung der Struktur ändert sich im Optimierungsprozess nicht. Eine Formoptimierung im klassischen Sinne ist somit nicht gegeben. Die im Matrixmaterial enthaltenen Einschlüsse liefern letztendlich die Entwurfsparameter für den Optimierungsprozess, der die globalen Eigenschaften durch lokale Änderungen verbessern soll. Dies erfolgt, indem die Form und Lage der Matrix-Einschlüsse während der Optimierung variiert wird. Dabei dürfen die Einschlüsse weder den aus dem Grundkörper bestehenden Entwurfsraum verlassen, noch wird ein Zusammenwachsen der Einschlüsse zugelassen. Die topologischen Änderungen der Struktur ergeben sich im Laufe des Optimierungsprozesses aufgrund der Lageänderung der Einschlüsse. Die Formoptimierung ist in der Gestaltsänderung der Einschlüsse wiederzufinden.

Ein ähnliches Beispiel mit einem einzigen Einschluss findet sich bei ROTTHAUS UND BARTHOLD (2008). Dort wird ein im Vergleich zum Matrixmaterial steiferer Einschluss in Tropfenform in einen Zugstab eingebracht. Bei linear elastischem Materialverhalten verändert sich dieser für das Zielkriterium „Minimierung der elastischen Nachgiebigkeit“ in eine Ellipse. In Abbildung 2.6 wird dieser Vorgang nachskizziert.

Durch die Möglichkeit einer diskreten Rissbildung im Matrixmaterial sowie eines Ablöseprozesses zwischen den einzelnen Phasen ergibt sich ein weiterer Unterschied zu den allgemein gehaltenen Formulierungen. Im Gegensatz zu den dort verwendeten elastischen

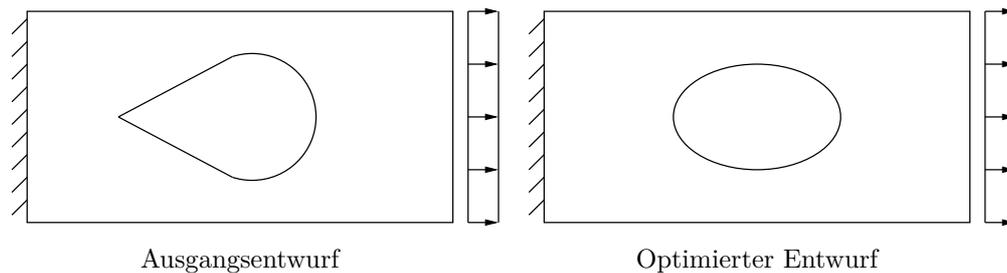


Abbildung 2.6.: Formoptimierung eines Mehrphasenmaterials

Materialmodellen, wird in dieser Arbeit ein Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz zur Modellierung von spannungsübertragenden Rissen verwendet. Die verwendeten kohäsiven Materialgesetze werden in Abschnitt 3.1.6 vorgestellt.

2.2.3. Sensitivitätsanalyse

Die Sensitivitätsanalyse liefert als Teil des Optimierungsmodells die Empfindlichkeit der Strukturantwort sowie der Entwurfskriterien auf eine Parametervariation. In der Regel sind die Sensitivitäten der Zielfunktion und der Nebenbedingungen von der Ableitung der Strukturantwort nach den Optimierungsvariablen abhängig. Alternativ wird die Sensitivitätsanalyse auch als „Empfindlichkeitsanalyse“ bezeichnet.

Ein Ziel der Sensitivitätsanalyse kann es sein, die Entwurfskomplexität zu reduzieren, indem Parameter mit geringem oder keinem Einfluß auf das Systemverhalten aus dem Optimierungsprozess entfernt werden. Diese Reduktion der Optimierungsvariablenanzahl beschleunigt den Optimierungsfortschritt, ohne dass relevante Informationen verloren gehen. Von den verbleibenden Optimierungsvariablen wird der Einfluß auf das System sowie zwischen den einzelnen Variablen ermittelt. Somit erlaubt die Sensitivitätsanalyse eine quantitative und qualitative Aussage über die Änderungen im Strukturverhalten, die infolge von Parametervariationen auftreten. Die partiellen Ableitungen, die während der Sensitivitätsanalyse gebildet werden, können als lokale Sensitivitäten bezeichnet werden. Sie stellen einen linearisierten Zusammenhang zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen her.

Neben der Auswahl der relevanten Optimierungsparameter stellt die Sensitivitätsanalyse eine entscheidende Komponente bei der numerischen Lösung von Optimierungsproblemen mithilfe von Gradientenverfahren dar. Die Qualität der berechneten Gradienten entscheidet mit über die Konvergenz des Optimierungsprozesses und die Erreichbarkeit des Optimums. Als zwei Vertreter gradientenbehafteter Optimierungsalgorithmen werden im Abschnitt 2.3 das Optimalitätskriterienverfahren und die Methode der bewegten Asymptoten vorgestellt.

Da die Sensitivitätsanalyse im Rahmen dieser Arbeit einen hohen Stellenwert einnimmt, wird sie zuerst in allgemeiner Form in Kapitel 4 eingeführt und im folgenden Kapitel 5 auf die genutzte *eXtended Finite Element Method* angewendet.

2.3. Optimierungsalgorithmus

Zur Lösung der mathematisch formulierten Optimierungsaufgabe (2.1) stehen zahlreiche iterative Optimierungsalgorithmen zur Verfügung. Deren Auswahl muss wegen einer starken Problemabhängigkeit besondere Beachtung geschenkt werden. So sind zum Beispiel bei der Topologieoptimierung viele Entwurfparameter zu verarbeiten, wohingegen bei der Formoptimierung nur eine sehr geringen Anzahl von Parametern zur Anwendung kommt. Eine ausführliche Darstellung der unterschiedlichen iterativen Verfahren ist unter anderem in den Arbeiten von BLETZINGER (1990), SCHUMACHER (2004) und HARZHEIM (2008) zu finden.

Die Optimierungsalgorithmen lassen sich in die zwei Verfahrengruppen mit und ohne Gradienteninformationen einteilen. Bei gradientenbehafteten Optimierungsverfahren wird neben den Funktionswerten auch deren Gradient benötigt. Gradientenfreie Verfahren nutzen hingegen nur die Zielfunktionswerte. Sie stellen somit einen geringeren Anspruch an die Zielfunktion, da diese nicht ableitbar sein muss, haben jedoch eine geringere Konvergenzgeschwindigkeit als die gradientenbasierten Optimierungsverfahren.

Zu den Verfahren, die Gradienten verwenden, zählen die Verfahren der Mathematischen Programmierung (MP), die Optimalitätskriterienverfahren (OC) und die Approximationsmethoden. Ohne Gradienten kommen zum Beispiel stochastische Optimierungsverfahren, wie die Evolutionsstrategien (ES), die genetische Algorithmen (GA) oder das Monte-Carlo Verfahren aus.

Beim Einsatz eines Gradientenverfahrens werden die Gradienten der Zielfunktion und der Restriktionen berechnet. Diese werden zum Beispiel benötigt, um die KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen aus Gleichung (2.5) auswerten zu können:

$$\nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) = \left(\frac{\partial f}{\partial s_1}, \frac{\partial f}{\partial s_2}, \frac{\partial f}{\partial s_3}, \dots, \frac{\partial f}{\partial s_n} \right) \quad (2.9)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}} h_i(\mathbf{s}) = \left(\frac{\partial h_i}{\partial s_1}, \frac{\partial h_i}{\partial s_2}, \frac{\partial h_i}{\partial s_3}, \dots, \frac{\partial h_i}{\partial s_n} \right) \quad i = 1, \dots, n_h \quad (2.10)$$

$$\nabla_{\mathbf{s}} g_j(\mathbf{s}) = \left(\frac{\partial g_j}{\partial s_1}, \frac{\partial g_j}{\partial s_2}, \frac{\partial g_j}{\partial s_3}, \dots, \frac{\partial g_j}{\partial s_n} \right) \quad j = 1, \dots, n_g \quad (2.11)$$

Die Sensitivitätsanalyse, in der die Gradienten bestimmt werden, spielt in der Optimierung eine entscheidende Rolle. Zum Einen, weil sie, abhängig vom verwendeten Optimierungsalgorithmus, den Großteil der Rechenzeit beanspruchen kann. Somit entscheidet sie, wie schnell und effektiv die Optimierung mit einem Gradientenverfahren durchgeführt wird. Zum Anderen entscheidet die Qualität der Sensitivitäten über den Erfolg der Optimierung.

Der Hauptgrund zur Verwendung von gradientenfreien Verfahren liegt entweder in einer nichtglatten Problemstellung mit diskontinuierlichen bzw. ganzzahligen Entwurfparametern oder in der Eigenschaft, lokale Minima zu überspringen und das globale Optimum mit größerer Wahrscheinlichkeit zu finden. Des Weiteren fällt die Einschränkung auf konvexe Probleme bei den stochastischen Suchstrategien weg. Die Verfahren werden ebenfalls interessant, wenn es Schwierigkeiten bei der analytischen Ermittlung der Sensitivitäten gibt.

Im Folgenden werden die in dieser Arbeit angewendeten Optimalitätskriterienverfahren sowie die Methode der bewegten Asymptoten als Vertreter der Approximationsmethoden vorgestellt.

2.3.1. Optimalitätskriterienverfahren (OC)

Die Idee der Optimalitätskriterienverfahren beruht auf der Annahme, dass ein problemangepasstes Kriterium bei Erreichen der optimalen Lösung erfüllt wird. Dies ist beim bekanntesten Vertreter, dem 'Fully Stressed Design' (FSD), die physikalische Überlegung, dass die gewichtsminimale Struktur vorliegt, wenn jedes Element in mindestens einem der auftretenden Lastfälle maximal zulässig ausgenutzt wird. Das voll beanspruchte Tragwerk kann dann nicht weiter verbessert werden, ohne dass die zulässigen Spannungen überschritten werden. Die Richtigkeit dieser Annahme kann für statisch bestimmte Tragwerke problemlos nachgewiesen werden (siehe z.B. BAIER U. A. 1994). Anders sieht es bei statisch unbestimmten Tragwerken minimalen Gewichts aus, die gewöhnlich nicht voll beansprucht werden. Der Optimierungsprozess liefert dennoch einen signifikant verbesserten Entwurf im Vergleich zum Ausgangsentwurf, ohne jedoch das Optimum zu erreichen (HÖRNLEIN 2004).

Im Gegensatz zum ursprünglichen Ansatz einer physikalischen Herleitung der Optimalitätskriterien beruhen die heutigen, mathematisch orientierten Optimalitätskriterienverfahren auf den für ein Optimum notwendigen KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen aus Gleichung (2.5). Diese sind bei einer konvexen Optimierungsaufgabe ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, dass der Vektor der Optimierungsvariablen \mathbf{s}^* im Sinne der Aufgabe tatsächlich optimal ist. Für nichtkonvexe Probleme stellen die

KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen notwendige, aber nicht hinreichende Optimalitätsbedingungen dar.

Das in dieser Arbeit verwendete OC-Verfahren basiert auf dem von MAUTE (1998) modifizierten Optimierungsalgorithmus. Dieser ist in der angegebenen Dissertation in ausführlicher Form beschrieben. Auf eine wiederholte Darstellung wird an dieser Stelle verzichtet. Vielmehr soll in vereinfachter Form das mathematisch orientierte OC-Verfahren vorgestellt werden. Im Anschluss daran wird kurz auf die Modifikationen von MAUTE (1998) eingegangen.

Ausgangspunkt soll ein einfaches Minimierungsproblem mit nur einer einzigen Gleichheitsnebenbedingung und Variablenrestriktionen der Form $\mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U$ sein.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) & \quad ; \quad f(\mathbf{s}) \in \mathbb{R} \\ h(\mathbf{s}) & = 0 \quad ; \quad h(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_h=1} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Gesucht ist eine Iterationsvorschrift, welche die Entwurfsvariablen so modifiziert, dass der Zielfunktionswert abnimmt und schließlich ein Minimum erreicht. Die Lösung \mathbf{s}^* wird dabei im $(n_s + n_h)$ -dimensionalen Raum gesucht. Die notwendigen KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen hierzu lauten:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}} L(\mathbf{s}^*, \eta^*) & = \nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}^*) + \eta^T \nabla_{\mathbf{s}} h(\mathbf{s}^*) = \mathbf{0} \\ \nabla_{\eta} L(\mathbf{s}^*, \eta^*) & = h(\mathbf{s}^*) = 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die Iterationsvorschrift für die Optimierungsvariablen wird aus der ersten Gleichung in (2.13) gewonnen. Im Optimum gilt:

$$\frac{\nabla_{\mathbf{s}} f}{\eta^T \nabla_{\mathbf{s}} h} = -1 \quad \text{mit} \quad \eta^T \nabla_{\mathbf{s}} h \neq 0 \tag{2.14}$$

Mithilfe dieses Ausdrucks lässt sich z.B. folgende exponentielle Rekursionsformel ableiten:

$$s_i^{(k+1)} = s_i^{(k)} \left[\left(-\frac{\nabla_{s_i} f}{\eta^T \nabla_{s_i} h} \right)^{(k)} \right]^p \tag{2.15}$$

Der Parameter p dient darin zur Steuerung der Schrittweite sowie des Konvergenzverhaltens des Verfahrens. Neben einem exponentiellen Ansatz lässt sich über eine Reihenentwicklung auch eine lineare Iterationsvorschrift generieren (MAUTE 1998). Sollte der Wertebereich der Optimierungsvariablen durch obere und untere Schranken oder eine maximal zulässige Schrittweite $\bar{\alpha}$ beschränkt sein, so muss das Iterationsschema entsprechend modifiziert werden. Am einfachsten ist es, dabei eine Skalierung der Ite-

2. Grundlagen der Strukturoptimierung

rationsergebnisse zurück in den zulässigen Bereich zu realisieren.

$$\mathbf{s}_L \leq \mathbf{s}^{(k)} (1 - \bar{\alpha}) \leq \mathbf{s}^{(k+1)} \leq \mathbf{s}^{(k)} (1 + \bar{\alpha}) \leq \mathbf{s}_U \quad (2.16)$$

Die Abschätzung des Lagrange-Parameters erfolgt über die zweite Gleichung in (2.13). In den meisten Fällen lassen sich Nebenbedingungen in einen konstanten Anteil \bar{h} sowie einen von den Optimierungsvariablen abhängigen Anteil \tilde{h} zerlegen, siehe Tabelle 2.1.

$$\mathbf{h}(\mathbf{s}) = \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{s}) - \bar{\mathbf{h}} = 0 \quad (2.17)$$

Somit folgt analog zur Gleichung (2.15) eine exponentielle Abschätzungsvorschrift für den Lagrange-Parameter. Wiederum sind Linearisierungen dieses Ausdrucks denkbar.

$$\eta^{(k+1)} = \eta^{(k)} \left[\left(\begin{array}{c} \tilde{\mathbf{h}} \\ -\bar{\mathbf{h}} \end{array} \right)^{(k)} \right]^p \quad (2.18)$$

Die Iteration wird abgebrochen, sobald ein kritischer Wert $\bar{\epsilon}$ von den vorgegebenen Abbruchkriterien unterschritten wird. Diese sind einerseits die Norm der Gradienten der Lagrange-Funktion oder die Veränderung der Zielfunktion, sowie die Differenz zwischen der Lagrange- und der Zielfunktion.

$$\left\{ \|\nabla_{\mathbf{s}} L^{(k)}\| \leq \bar{\epsilon} \quad \text{oder} \quad \left| \frac{f^k - f^{k-1}}{f^k} \right| \leq \bar{\epsilon} \right\} \quad \text{und} \quad |L^{(k)}| - |f^k| \leq \bar{\epsilon} \quad (2.19)$$

Die Modifikationen, die MAUTE (1998) oder auch MA U. A. (1995) an diesem vereinfachten Algorithmus vornehmen, betreffen verschiedene Wichtungsfaktoren, um das Verfahren stabiler zu machen. Probleme treten insbesondere auf, wenn die Gradienten der Zielfunktion und der Nebenbedingung nichtmonotone Funktionen sind und Vorzeichenwechsel aufweisen. Für einen vertieften Einblick in diese Problematik wird auf die angegebenen Publikationen verwiesen.

Wie an der Rekursionsformel (2.15) zu sehen ist, kann der OC-Algorithmus mit einer Gleichheitsnebenbedingung nur für bestimmte Probleme angewendet werden. Unzulässig wird er für den Fall, dass die Optimierungsvariablen von der Nebenbedingung unabhängig sind. Als Beispiel kann hier die Lage einer Bewehrungsfaser genannt werden, deren Variation keinen Einfluss auf die Nebenbedingung „konstante Bewehrungsmasse“ hat. Aus diesem Grund wird im nächsten Abschnitt die Methode der bewegten Asymptoten vorgestellt, um die Anzahl der möglichen Optimierungsvariablen zu erhöhen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass der OC-Algorithmus sehr gute Ergebnisse für alle Fälle liefert, in denen der Gradient der Nebenbedingung stets ungleich null ist.

2.3.2. Methode der bewegten Asymptoten (MMA)

Die Methode der bewegten Asymptoten (*Method of Moving Asymptotes* / MMA) wird den Approximationsmethoden zugeordnet. Dabei verwendet sie, im Gegensatz zu globalen Approximationsmethoden, wie z.B. dem Multi-Point-Verfahren, eine lokale, gradientenorientierte Approximationstechnik. Vorgestellt wurde die Urfassung der MMA von SVANBERG (1987), als Verallgemeinerung der Methode von FLEURY UND BRAIBANT (1986), die in späteren Veröffentlichungen als konvexe Linearisierungsmethode (CONLIN) bezeichnet wurde (FLEURY 1989).

In den letzten zwanzig Jahren sind immer wieder kleinere Anpassungen an der MMA vorgenommen worden. Daher wird auf die Anmerkungen zur aktuellsten Version auf der Homepage von SVANBERG (2010) hingewiesen. Im folgenden wird ähnlich zum vorhergehenden Kapitel die MMA nur in ihren Grundzügen vorgestellt, ohne jedoch auf die Modifikationen einzugehen. Details dazu finden sich in den genannten Veröffentlichungen. Wie bereits im Kapitel zu den OC-Verfahren dargestellt, dient als Ausgangspunkt ein einfaches Minimierungsproblem mit dem Unterschied, dass an dieser Stelle eine Ungleichheitsnebenbedingung Verwendung findet. Die Variablenrestriktionen werden wieder mit $\mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U$ angegeben.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) & ; f(\mathbf{s}) \in \mathbb{R} \\ g(\mathbf{s}) & \leq 0 ; g(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_g=1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Ein approximiertes Unterproblem wird nun erzeugt, indem die Funktionen $f(\mathbf{s})$ und $g(\mathbf{s})$ durch konvexe Funktionen $\tilde{f}(\mathbf{s})$ und $\tilde{g}(\mathbf{s})$ ersetzt werden. Zur Vereinheitlichung der Schreibweise gilt im Folgenden $f(\mathbf{s}) = g_0(\mathbf{s})$ und $g(\mathbf{s}) = g_1(\mathbf{s})$.

Bemerkung: Zum Verständnis der Formel (2.22) sei darauf hingewiesen, dass bei einer reziproken Approximation einer Funktion $f(\mathbf{s})$ an der Stelle $\mathbf{s}^{(k)}$ die Taylor-Reihe nicht nach den Designvariablen \mathbf{s} , sondern nach deren Kehrwert $1/\mathbf{s}$ entwickelt wird. Die zugehörige Formel lautet:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\mathbf{s}) & = f(\mathbf{s}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n_s} \left[\frac{\partial f}{\partial \left(\frac{1}{s_j}\right)} \Big|_{\mathbf{s}^{(k)}} \left(\frac{1}{s_j} - \frac{1}{s_j^{(k)}} \right) \right] \\ & = f(\mathbf{s}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n_s} \left[- \left(s_j^{(k)} \right)^2 \frac{\partial f}{\partial s_j} \Big|_{\mathbf{s}^{(k)}} \frac{s_j^{(k)} - s_j}{s_j^{(k)} s_j} \right] \\ & = f(\mathbf{s}^{(k)}) + \sum_{j=1}^{n_s} \left[\frac{\partial f}{\partial s_j} \Big|_{\mathbf{s}^{(k)}} \frac{s_j^{(k)}}{s_j} (s_j - s_j^{(k)}) \right] \end{aligned} \quad (2.21)$$

2. Grundlagen der Strukturoptimierung

Durch die Einführung einer oberen und unteren Asymptote, $L_j^{(k)} < s_j^{(k)} < U_j^{(k)}$, sowie einer Fallunterscheidung mithilfe der ermittelten Gradienten ergibt sich die MMA-Approximation nach SVANBERG (1987) zu:

$$\tilde{g}_i^{(k)}(\mathbf{s}) = r_i^{(k)} + \sum_{j=1}^{n_s} \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - s_j} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{s_j - L_j^{(k)}} \right) \quad i = 0,1 \quad (2.22)$$

mit den Konvexifizierungsfaktoren

$$p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} (U_j^{(k)} - s_j^{(k)})^2 \partial g_i / \partial s_j & , \text{wenn } \partial g_i / \partial s_j > 0 \\ 0 & , \text{wenn } \partial g_i / \partial s_j \leq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

und

$$q_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & , \text{wenn } \partial g_i / \partial s_j \geq 0 \\ -(s_j^{(k)} - L_j^{(k)})^2 \partial g_i / \partial s_j & , \text{wenn } \partial g_i / \partial s_j < 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

sowie der unteren, horizontalen Asymptote von $\tilde{g}_i(\mathbf{s})$

$$r_i^{(k)} = g_i(\mathbf{s}^{(k)}) - \sum_{j=1}^{n_s} \left(\frac{p_{ij}^{(k)}}{U_j^{(k)} - s_j^{(k)}} + \frac{q_{ij}^{(k)}}{s_j^{(k)} - L_j^{(k)}} \right) \quad (2.25)$$

Dieser Approximationsansatz stellt, wie bereits erwähnt, eine Verallgemeinerung der konvexen Linearisierungsmethode (CONLIN) dar. Diese lässt sich, durch die entsprechende Wahl der oberen und unteren Asymptoten, aus Gleichung (2.22) herleiten ($L_j^{(k)} = 0; U_j^{(k)} \rightarrow \infty$). Als weiterer Spezialfall können die Approximationsfunktionen des SLP-Verfahrens (Sequential Linear Programming), mit den Grenzwerten $L_j^{(k)} \rightarrow \infty$ und $U_j^{(k)} \rightarrow \infty$, ermittelt werden.

In der MMA stellen die Asymptoten stets endliche Werte dar, die sich zwischen den Iterationsschritten 'bewegen' dürfen. Dies ermöglicht eine Anpassung der Approximation während der Optimierung. Nachdem für die ersten Iterationsschritte eine obere und untere Asymptote mithilfe der Variablenrestriktionen \mathbf{s}_L und \mathbf{s}_U aufgestellt wurde, ändern sich die Grenzen in Abhängigkeit des Verlaufs der Werte der Entwurfsvariablen \mathbf{s} . Kommt es zu einer Oszillation der Variablen, dann müssen die Asymptoten näher an den Wert von $\mathbf{s}^{(k)}$ herangezogen werden. Dies schränkt den Lösungsraum ein und wirkt stabilisierend. Im Falle einer monotonen Entwicklung der Variablen wird der Iterationsprozess beschleunigt, indem der Lösungsraum aufgeweitet wird.

Als Beispiel für eine heuristische Update-Formel wird die aktuellste Version der MMA herangezogen, siehe SVANBERG (2010). Für die ersten beiden Iterationen $k = 1$ und

$k = 2$ gilt:

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= s_j^{(k)} - 0.5 (s_{U,j} - s_{L,j}) \\ U_j^{(k)} &= s_j^{(k)} + 0.5 (s_{U,j} - s_{L,j}) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Für spätere Iterationen mit $k \geq 3$ lautet die Formel:

$$\begin{aligned} L_j^{(k)} &= s_j^{(k)} - \gamma_j^{(k)} (s_j^{(k-1)} - L_j^{(k-1)}) \\ U_j^{(k)} &= s_j^{(k)} + \gamma_j^{(k)} (U_j^{(k-1)} - s_j^{(k-1)}) \end{aligned} \quad (2.27)$$

mit

$$\gamma_j^{(k)} = \begin{cases} 0.7 & \text{wenn } (s_j^{(k)} - s_j^{(k-1)}) (s_j^{(k-1)} - s_j^{(k-2)}) < 0 \\ 1.2 & \text{wenn } (s_j^{(k)} - s_j^{(k-1)}) (s_j^{(k-1)} - s_j^{(k-2)}) > 0 \\ 1 & \text{wenn } (s_j^{(k)} - s_j^{(k-1)}) (s_j^{(k-1)} - s_j^{(k-2)}) = 0 \end{cases} \quad (2.28)$$

Somit ergibt sich das zu lösende Ersatzproblem:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{s}} \tilde{f}(\mathbf{s}) & \quad ; \quad \tilde{f}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R} \\ \tilde{g}(\mathbf{s}) \leq 0 & \quad ; \quad \tilde{g}(\mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{n_g=1} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Dieses kann mithilfe der dualen Methode gelöst werden. Dazu wird aus den KARUSH-KUHN-TUCKER-Bedingungen der Lagrange-Funktion eine Beziehung der primalen Variablen in Abhängigkeit des Lagrange-Multiplikators ermittelt ($\mathbf{s} = \mathbf{s}(\gamma)$). Rückeinsetzen in die Lagrange-Funktion liefert eine Funktion, die nur duale Variablen enthält, deren Maximierung die optimalen Multiplikatoren am Sattelpunkt liefert und somit die Optimierungsvariablen $\mathbf{s}^{(k+1)}$ für die nächste Iteration.

3

Analyse von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

Nachdem im vorhergehenden Kapitel das „Drei-Säulen-Konzept“ nach ESCHENAUER (1985) vorgestellt wurde, widmet sich dieses Kapitel der Strukturanalyse, die eine wichtige Teilaufgabe des Optimierungsprozesses darstellt. Der Zugang zu den verwendeten Mehrphasenstrukturen erfolgt schrittweise in den folgenden drei Unterkapiteln.

Zuerst werden in Kapitel 3.1 die kontinuumsmechanischen Grundlagen erläutert, die das physikalische Verhalten der untersuchten Strukturen beschreiben. In diesem Zusammenhang wird auf die Besonderheiten von Mehrphasenstrukturen mit lokalen Diskontinuitäten eingegangen sowie die verwendeten Materialgesetze für lokales Schädigungsverhalten vorgestellt. Als Modellmaterial mit mehreren Festkörperphasen kommt textilverstärkter Beton zum Einsatz, der exemplarisch das Verhalten bei kohäsiven Delaminations- und Rissprozessen wiedergibt.

Im Anschluss daran erfolgt in Kapitel 3.2 die geometrische Beschreibung von schwachen und starken Diskontinuitäten mithilfe impliziter Level-Set-Gleichungen. Diese ermöglichen im Verlauf des Optimierungsprozesses eine Variation von Form und Lage der Bewehrungseinschlüsse, ohne eine Neuvernetzung des diskretisierten Strukturkörpers zu benötigen. In den impliziten Gleichungen sind die verwendeten Entwurfparameter enthalten, deren Einfluss auf das Zielkriterium Duktilität in den Kapiteln zur Sensitivitätsanalyse untersucht wird (Kapitel 4 und 5).

Die analytische Auswertung des mechanischen Modells erfolgt mithilfe der erweiterten Finite-Element-Methode, die in Kapitel 3.3 beschrieben wird. Diese ermöglicht, in Kombination mit den vorgestellten Level-Set-Methoden, die Ermittlung der Systemantwort auf einem regulären Elementnetz, das nicht an die Geometrie der Bewehrungsberandung

gen angepasst sein muss. Allerdings ist eine besondere Integrationsvorschrift notwendig, um die Integration über starke und schwache Diskontinuitäten hinweg zu ermöglichen. Die zusätzlichen Freiheitsgrade, die mit den Diskontinuitäten zusammenhängen sind entweder bereits zu Beginn der Berechnung vorhanden oder werden in Abhängigkeit des Rissfortschrittsalgorithmus aus Kapitel 3.3.5 sukzessive in das globale System eingeführt.

3.1. Grundlagen der Kontinuumsmechanik

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik unter Berücksichtigung der in dieser Arbeit verwendeten Mehrphasenstrukturen kurz beschrieben. Zunächst wird auf die Bewegung eines Körpers im Raum eingegangen, um danach die Besonderheiten infolge von materiellen Grenzflächen zwischen verschiedenen Phasen als auch das mögliche Auftreten von Rissen zu erläutern. Anschließend werden Verzerrungs- und Spannungsmaße beschrieben, sowie das Randwertproblem formuliert. Abschließend werden die verwendeten Materialgesetze eingeführt.

Für einen vertiefenden Einblick in die Thematik der Kontinuumsmechanik wird auf Standardwerke, wie ALTENBACH UND ALTENBACH (1994), BETTEN (2001), HAUPT (2002), HOLZAPFEL (2000), MALVERN (1977), MARSDEN UND HUGHES (1994) und STEIN UND BARTHOLD (1996) verwiesen. Literatur, welche für Mehrphasenkörper relevant ist, wird an entsprechender Stelle erwähnt.

3.1.1. Verschiebungsvektor und Deformationsgradient

Die Bewegung eines materiellen Körpers \mathcal{B} als Teilgebiet des Euklidischen Raumes $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$ lässt sich durch die Bewegung seiner materiellen Punkte beschreiben (Abbildung 3.1). Die Lage der einzelnen Punkte zu einem beliebigen Zeitpunkt t wird dabei durch den Ortsvektor \mathbf{x} der Momentankonfiguration relativ zum Koordinatenursprung angegeben:

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \tag{3.1}$$

In dieser Gleichung bezeichnen x_i die Komponenten des Ortsvektors bezüglich des raumfesten, orthonormierten, kartesischen Koordinatensystems mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i . Zum Zeitpunkt t_0 spricht man von der Referenzkonfiguration und der Ortsvektor \mathbf{x} wird durch den Großbuchstaben \mathbf{X} ersetzt. Die Deformation eines Punktes zwischen der Referenzkonfiguration und der Momentankonfiguration wird durch die folgende

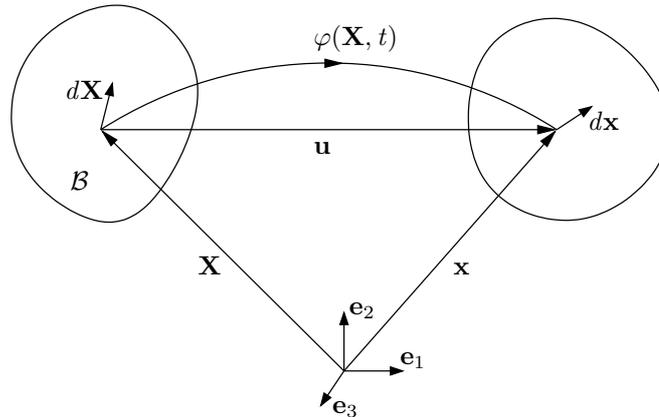


Abbildung 3.1.: Referenz- und Momentankonfiguration des materiellen Körpers \mathcal{B}

Abbildungsvorschriften definiert:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

Die Differenz zwischen der Lage eines Punktes in der Momentankonfiguration und in der Referenzkonfiguration ergibt den Verschiebungsvektor:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \varphi(\mathbf{X}, t) - \varphi(\mathbf{X}, t_0). \quad (3.3)$$

Obwohl in dieser Arbeit eine lineare Kinematik angenommen wird, wird zunächst auf die Definition für große Deformationen zurückgegriffen.

Der unsymmetrische, materielle Deformationsgradient \mathbf{F} ist definiert als die lineare Abbildung des differentiellen Linienelements $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration auf ein differentiell Linienelement der Momentankonfiguration:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad \text{mit} \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x} \quad (3.4)$$

Der Index am Gradienten- oder Nabla-Operator $\nabla_{\mathbf{X}}$ bezieht sich hier auf die partielle Ableitung nach der Referenzkonfiguration.

3.1.2. Besonderheiten bei Mehrphasenstrukturen

Die in dieser Arbeit betrachteten Körper \mathcal{B} bestehen aus zwei verschiedenen Festkörperphasen \mathcal{B}^α und \mathcal{B}^β (siehe Abbildung 3.2). Diese sind durch ungeschädigte Grenzflächen Γ_m perfekt miteinander verbunden oder können durch diskrete Grenzflächen- oder

3. Analyse von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

Matrixrisse Γ_c geschädigt sein. Die sich daraus ergebenden kinematischen Erfordernisse werden nachfolgend kurz beschrieben.

Zum einen muss das Verschiebungsfeld \mathbf{u} über eine ungeschädigte Grenzfläche Γ_m hinweg kontinuierlich sein. Dabei erfordern unterschiedliche Materialeigenschaften in den zwei Phasen \mathcal{B}^α und \mathcal{B}^β die Diskontinuität des Deformationsgradienten \mathbf{F} .

Die Hadamard-Bedingung

$$\llbracket \mathbf{F} \rrbracket_m := \mathbf{F}^\beta - \mathbf{F}^\alpha = \mathbf{v}_m \otimes \mathbf{n}_m \quad \text{auf} \quad \Gamma_m \quad (3.5)$$

beschreibt den Sprung zwischen den Deformationsgradienten \mathbf{F}^α und \mathbf{F}^β und garantiert, dass dieser tangential zur ungeschädigten Grenzfläche verschwindet. Der Vektor \mathbf{n}_m stellt die Normale auf die Verbundfläche dar, und \mathbf{v}_m repräsentiert einen beliebigen Vektor (siehe KRONGAUZ UND BELYTSCHKO (1998)).

Des weiteren erzeugen Risse Diskontinuitäten im Verschiebungsfeld \mathbf{u} , welche die Abbildungsvorschrift (3.2) beinhalten muss. Ein materieller Punkt, welcher auf einem Riss liegt, wird auf zwei assoziierte Punkte auf den Rissufer Γ_c^+ und Γ_c^- projiziert. Aus der Differenz der Verschiebungen \mathbf{u}^+ und \mathbf{u}^- ergibt sich die Beschreibung des Verschiebungssprungs:

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_c := \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = \mathbf{v}_c \quad \text{auf} \quad \Gamma_c \quad (3.6)$$

Um die kurz umrissenen kinematischen Erfordernisse mit dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} erfüllen zu können, wird dieser wie folgt erweitert:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \underbrace{\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t)}_{kont.} + \sum_{i=1}^{n_m} \underbrace{\chi_{m,i}(\mathbf{X}) \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{X}, t)}_{kont.} + \sum_{j=1}^{n_c} \underbrace{\chi_{c,j}(\mathbf{X}) \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j(\mathbf{X}, t)}_{diskont.} \quad (3.7)$$

Die Variablen n_m und n_c geben die Anzahl der unabhängigen, materiellen Grenzflächen und die Anzahl der Risse an. Der Verschiebungsvektor besteht somit aus dem gewöhnlichen Anteil des Verschiebungsfeldes $\hat{\mathbf{u}}$, den Vektoren $\tilde{\mathbf{u}}_i$, die mit den materiellen Grenzflächen $\Gamma_{m,i}$ assoziiert sind, und den zu den Rissen $\Gamma_{0,c,j}$ gehörenden Anteilen $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$. Dabei stellen die Verschiebungskomponenten $\hat{\mathbf{u}}$, $\tilde{\mathbf{u}}_i$ und $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$, sowie deren Ableitungen, kontinuierliche Größen dar. Die Anreicherungsfunktionen $\chi_{m,i}$ und die Vorzeichenfunktionen $\chi_{c,j}$ werden nachfolgend beschrieben.

Setzt man das angegebene Verschiebungsfeld in die Gleichungen (3.3) und (3.4) ein, ergibt sich der Deformationsgradient zu:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla_X \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} [\tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \nabla_X \chi_{m,i} + \chi_{m,i} \nabla_X \tilde{\mathbf{u}}_i] + \sum_{j=1}^{n_c} [\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j \otimes \nabla_X \chi_{c,j} + \chi_{c,j} \nabla_X \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j] \quad (3.8)$$

Der zweistufige Einheitstensor ist mit $\mathbf{1}$ angegeben.

Um die Kontinuität des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} über eine materielle Grenzfläche $\Gamma_{m,i}$ hinweg zu gewährleisten, muss die zugehörige Anreicherungsfunktion $\chi_{m,i}$ kontinuierlich sein. Ihre Ableitung $\nabla_X \chi_{m,i}$ sorgt für die Diskontinuität im Deformationsgradienten \mathbf{F} . Die Anreicherungsfunktion $\chi_{m,i}$ wird in dieser Arbeit über die mathematische Beschreibung der Grenzfläche $\Gamma_{m,i}$ hergeleitet (siehe Kapitel 3.2).

Wertet man die Hadamard-Bedingung (3.5) an der Grenzfläche $\Gamma_{m,i}$ aus, so erhält man:

$$\llbracket \mathbf{F} \rrbracket_{m,i} := \mathbf{F}^\beta - \mathbf{F}^\alpha = \tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \llbracket \nabla_X \chi_{m,i} \rrbracket \quad \text{auf} \quad \Gamma_{m,i} \quad (3.9)$$

Der Sprung zwischen den Ableitungen $\nabla_X \chi_{m,i}^\alpha$ und $\nabla_X \chi_{m,i}^\beta$ muss tangential zur materiellen Grenzfläche verschwinden, um der Hadamard-Bedingung gerecht zu werden.

Bei der Umsetzung eines Risses im Verschiebungsfeld wird auf die folgende Vorzeichenfunktion zurückgegriffen:

$$\chi_{c,j} = 2 \mathcal{H}_{c,j} - 1 = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{X} \in \Omega_0^+ \\ -1 & \forall \mathbf{X} \in \Omega_0^- \end{cases} \quad (3.10)$$

Hierin stellt $\mathcal{H}_{c,j}$ die Heavyside-Funktion dar, welche die Werte 0 und 1 auf beiden Seiten des Risses annimmt. Ihre Ableitung ergibt sich zu $\nabla \mathcal{H}_{c,j} = \delta_{c,j} \mathbf{N}_{c,j}$, wobei $\delta_{c,j}$ die Dirac-Delta-Verteilung und $\mathbf{N}_{c,j}$ den Normalenvektor der Rissfläche $\Gamma_{0,c,j}$ in der Referenzkonfiguration wiedergibt. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass in dieser Arbeit der Normalenvektor immer auf die Referenzkonfiguration der Rissfläche bezogen wird, da bei den untersuchten Problemstellungen lediglich kleine Deformationen auftreten und sich speziell in den Rissbereichen keine großen Rotationen einstellen (siehe auch HETTICH (2007)). Aus diesem Grund kann die Normale $\mathbf{n}_{c,j}$ der gedachten Rissmitelfläche $\Gamma_{c,j}$ mit der Einheitsnormalen $\mathbf{N}_{c,j}$ in der Referenzkonfiguration gleichgesetzt werden. Sollten die gemachten Annahmen nicht mehr zutreffen, muss mit der Formel von Nanson eine Beziehung zwischen der Rissnormalen in der aktuellen und der Referenzkonfiguration hergestellt werden.

Die Auswertung des Verschiebungssprungs (3.6) unter Verwendung des erweiterten Verschiebungsfeldes (3.7) und der Vorzeichenfunktion (3.10) liefert:

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{c,j} := \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- = 2\tilde{\mathbf{u}}_j \quad \text{auf} \quad \Gamma_{c,j} \quad (3.11)$$

3.1.3. Verzerrungsmaß

Da im Deformationsgradienten \mathbf{F} die gesamte Deformation, also auch Starrkörperbewegungen, enthalten sind, ist dieser als Maß für die lokale Änderung der Körpergeometrie ungeeignet. Daher wird an dieser Stelle der symmetrische Green-Lagrange Verzerrungstensor \mathbf{E} eingeführt.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\nabla_X \mathbf{u} + \nabla_X^T \mathbf{u} + \nabla_X \mathbf{u} \nabla_X^T \mathbf{u}) \quad (3.12)$$

Mit der Annahme einer linearen Kinematik mit kleinen Deformationen kann \mathbf{E} zum linearisierten Green-Lagrange Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla_X \mathbf{u} + \nabla_X^T \mathbf{u}) = \nabla_X^s \mathbf{u}$ vereinfacht werden. Das Einsetzen des erweiterten Verschiebungsfeldes (3.7) liefert:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\nabla_X^s \hat{\mathbf{u}}}_{\text{kont.}} + \sum_{i=1}^{n_m} \left[\underbrace{(\tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \nabla_X \chi_{m,i})^s}_{\text{diskont.}} + \underbrace{\chi_{m,i} \nabla_X^s \tilde{\mathbf{u}}_i}_{\text{kont.}} \right] + \sum_{j=1}^{n_c} \left[\underbrace{2 \delta_{c,j} (\tilde{\mathbf{u}}_j \otimes \mathbf{N}_{c,j})^s}_{\text{unbegr.}} + \underbrace{\chi_{c,j} \nabla_X^s \tilde{\mathbf{u}}_j}_{\text{diskont.}} \right] \quad (3.13)$$

Man erkennt, dass für Punkte, die auf einem Riss liegen, die Verzerrungen unendlich groß werden. Für Punkte neben dem Riss liefert die Dirac-Delta-Verteilung keinen Beitrag zum Verzerrungstensor.

3.1.4. Spannungen

Betrachtet man eine Schnittfläche mit der Normalen \mathbf{n} durch einen durch äußere Belastungen beanspruchten Körper \mathcal{B} , so wird die dort im Punkt \mathbf{x} herrschende Beanspruchung mithilfe des Spannungsvektors \mathbf{t} angegeben. Dieser wird mithilfe des Cauchy-Theorems (3.14) aus dem Cauchy'schen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ermittelt.

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad (3.14)$$

Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ wird aufgrund seiner Beziehung zur Momentankonfiguration oder deformierten Konfiguration als physikalisch wahrer Spannungstensor bezeichnet. Neben den Cauchyspannungen existieren noch weitere Spannungsmaße, wie beispielsweise die nominalen Spannungen \mathbf{P} oder der zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{S} , die jedoch alle ineinander transformiert werden können und für den Fall der in dieser Arbeit verwendeten geometrisch linearen Theorie identisch sind.

3.1.5. Randwertproblem

Bei den numerischen Berechnungen in dieser Arbeit wird als Ausgangsgleichung die lokale Impulsbilanz verwendet. Diese besagt, dass der Gesamtimpuls in einem abgeschlossenen System konstant ist. Für die vorliegenden quasi-statischen beziehungsweise zeitunabhängigen Probleme werden die Trägheitsterme vernachlässigt. Die über Volumenkräfte wirkenden Beschleunigungen werden ebenfalls zu Null angenommen.

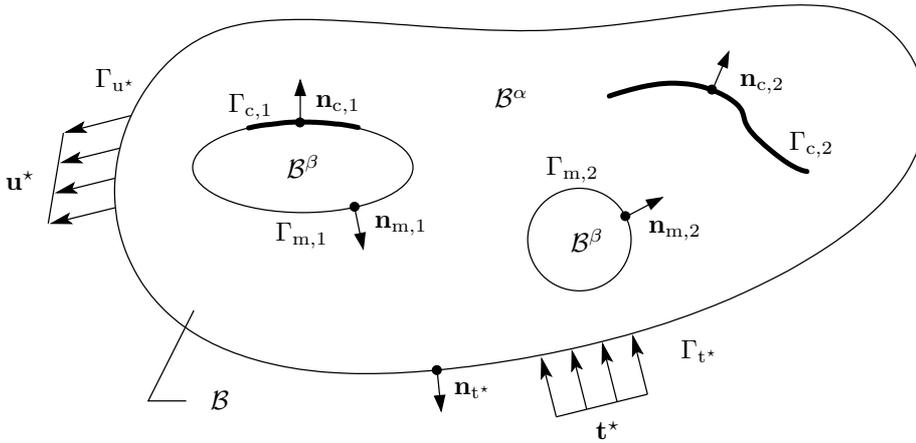


Abbildung 3.2.: Randwertproblem des materiellen Körpers \mathcal{B}

Die lokale Gleichgewichtsbedingung für einen Materiepunkt in starker Form lautet somit:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

Zur Vervollständigung des Randwertproblems werden auf dem Rand Γ des Gebietes Ω die Rand- und Übergangsbedingungen definiert. Der gesamte Rand Γ besteht aus der Oberfläche des Körpers, sowie den materiellen Grenzflächen und Rissen. Desweiteren teilt sich der Oberflächenrand in den sogenannten Dirichlet-Rand Γ_{u^*} , an dem die Lösung des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} bekannt ist, sowie den Neumann-Rand Γ_{t^*} mit dem vorgegebenen Spannungsvektor \mathbf{t}^* .

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \text{auf } \Gamma_{u^*} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{t^*} &= \mathbf{t}^* & \text{auf } \Gamma_{t^*} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Neben dem Oberflächenrand existieren die materiellen Grenzflächen $\Gamma_m = \cup_i \Gamma_{m,i}$, an denen die Kontinuität des Spannungsvektors erfüllt sein muss,

$$[[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{m,i}]] = \mathbf{0} \quad \text{auf } \Gamma_{m,i} \quad (3.17)$$

und die sukzessiv entstehenden Rissflächen $\Gamma_c = \cup_j \Gamma_{c,j}$.

Aufgrund der verwendeten Kohäsivzonentheorie in dieser Arbeit (siehe Abschnitt 3.1.6) ist die Rissfläche $\Gamma_c = \cup_j \Gamma_{c,j}$, die sich aus den einzelnen Rissen $\Gamma_{c,j}$ zusammensetzt, in der Lage, bei Rissbeginn noch Spannungen $\mathbf{t}_{c,j}$ über den Riss hinweg zu übertragen. Die verwendeten materialspezifischen Traktions-Verschiebungssprunggesetze geben das Verhältnis zwischen den zu übertragenden Spannungen in Bezug zur Rissöffnung wieder.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{c,j} = \mathbf{t}_{c,j} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{c,j} \quad (3.18)$$

Der gesamte Rand des Gebietes $\Gamma = \Gamma_{u^*} \cup \Gamma_{t^*} \cup \Gamma_m \cup \Gamma_c$ besteht somit aus der Menge aller Teilränder. Es treten keine Schnittmengen zwischen unterschiedlichen Randarten auf.

3.1.6. Materialgleichungen

In dieser Arbeit wird exemplarisch für ein Zweiphasenmaterial auf textilverstärkten Beton zurückgegriffen. Für die textile Faser wird die Annahme getroffen, dass sie sich im gesamten Belastungsverlauf linear elastisch und isotrop verhält. Eine mögliche Schädigung der Faser wird vollständig ausgeschlossen. Der Beton als zweite Komponente des Verbundes gehört zu den kohäsiven Reibungsmaterialien. Dieser verhält sich bei makroskopischer Betrachtungsweise bis zu einem materialspezifischen Belastungszustand ebenfalls linear elastisch und isotrop, wird danach aber aufgrund von komplexen Versagensmechanismen hochgradig nichtlinear und anisotrop. Eine weitere Versagensmöglichkeit besteht in der Ablösung der verschiedenen Materialphasen an den materiellen Grenzflächen zwischen Betonmatrix und Bewehrungsfaser.

In der vorliegenden Arbeit wird angenommen, dass sich inelastische Dehnungen ausschließlich durch die Einführung von Rissen ergeben. Die ungeschädigten kontinuierlichen Bereiche neben den Rissen verhalten sich stets linear elastisch und werden durch ein klassisches kontinuumsmechanisches Materialgesetz (*Hookesche Gesetz*) modelliert. Sobald der kritische Belastungszustand in der Betonmatrix oder an der materiellen Schnittstelle zwischen Beton und Faser erreicht ist, wird ein Riss initiiert. Auf diesem wird das Materialgesetz durch ein Konstitutivmodell vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ ersetzt. Der Rissfortschritt erfolgt elementweise, so dass die Risspitze stets auf einer Elementkante zum liegen kommt.

Lineare Elastizität

Bei der Verwendung von linearer Elastizität werden zwei Annahmen getroffen. Zum einen soll die Verformung eines Körpers bei einer Vervielfachung der äußeren Last um das gleiche Maß wie die Last zunehmen und beim Entfernen dieser Last vollständig verschwinden (reversibel linear-elastisch). Zum anderen wird von kleinen Verschiebungen und Verdrehungen ausgegangen, die eine Betrachtung am unverformten Bauteil ermöglichen.

Das kontinuumsmechanische Stoffgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}^{el} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}^{el} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad (3.19)$$

beschreibt die linear-elastische Spannungs-Dehnungsbeziehung. $\mathbf{1}$ bezeichnet den zwei-stufigen, \mathbf{I} den vierstufigen Einheitstensor. $\lambda = E\nu/((1+\nu)(1-2\nu))$ und $\mu = E/(2(1+\nu))$ sind die Lamékonstanten mit dem darin enthaltenen Elastizitätsmodul E sowie der Querdehnzahl ν .

Konstitutives Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz

Es wird angenommen, dass das nichtlineare Materialverhalten von textilverstärktem Beton rein auf das Wachstum von Rissen zurückgeführt werden kann. Diese entstehen sowohl in der Betonmatrix, als auch durch das sukzessive Versagen des adhäsiven Verbundes zwischen der textilen Faser und dem Beton. Für die spannungsübertragenden Risse werden Materialmodelle vom Traktions-Verschiebungssprung-Typ verwendet.

$$\mathbf{t} = f(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \kappa) \quad \text{mit der Geschichtsvariable } \kappa \quad (3.20)$$

Durch die Annahme eines gekoppelten Versagensverhaltens bei Matrixrissen und Faserablösungen in Normal- und Tangentialrichtung reicht die Verwendung einer einzigen Geschichtsvariable κ mit $\kappa \in [0, \infty)$ aus. Eine Schädigung in die eine Richtung hat somit immer auch eine Schädigung des Materials in die andere Richtung zur Folge. Unbeantwortet bleibt an dieser Stelle die Frage nach dem Entstehungszeitpunkt und der Wachstumsrichtung einzelner Risse, was im folgenden Unterkapitel erklärt wird.

Die Entstehung und das Wachstum von Rissen entspricht einer Schädigung des Materials, welche einen irreversiblen Prozess darstellt. Das Konstitutivgesetz muss diesen dissipativen Vorgang modellieren können. Dabei unterscheidet sich bei Rissen das Bruchverhalten in Normal- und Tangentialrichtung. Dies wird durch die Aufteilung des Verschiebungssprungs $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ in den skalarwertigen Normalanteil $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n$ und den Tangentialvektor $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T$ berücksichtigt (3.21). Unter der Annahme eines isotropen Verhaltens in der

Tangentialebene wird dieser zweite Anteil nicht weiter aufgesplittet.

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n \mathbf{n} + \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T = \underbrace{(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n})}_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n} \mathbf{n} + \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \underbrace{(\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})}_{\mathbf{T}} \quad (3.21)$$

Für die Herleitung des Traktions-Verschiebungssprung-Gesetzes wird an dieser Stelle ein thermodynamischer Ansatz gewählt. Dieser basiert auf dem Postulat eines singular verteiltten Energiefunktionals ψ nach ARMERO (1999) und MOSLER (2002).

$$\psi = \psi^* + \sum_{j=1}^{n_c} \delta_{c,j} \tilde{\psi}_{c,j} \quad \text{mit} \quad \tilde{\psi}_{c,j} = \tilde{\psi}_{c,j}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T, \kappa) \quad (3.22)$$

Man erkennt die Aufteilung der freien Energie ψ in den regulären Anteil ψ^* neben der Rissfläche und den singulären Anteil $\tilde{\psi}_{c,j}$ auf dem Riss $\Gamma_{c,j}$. Der singuläre Anteil wird in Abhängigkeit des Verschiebungssprungs und der internen Variablen κ formuliert (siehe ORTIZ UND PANDOLFI (1999)). Die Verwendung der Methode von COLEMAN UND NOLL (1963) sowie COLEMAN UND GURTIN (1967) führt auf den kohäsiven Spannungsvektor \mathbf{t} als thermodynamisch konjugierte Größe zum Verschiebungssprung.

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \underbrace{K_n \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n}_{\mathbf{t}_n} \mathbf{n} + \underbrace{K_T \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T}_{\mathbf{t}_T} = \mathbf{T}_{sec} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_{sec} = K_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + K_T \mathbf{T} \quad (3.23)$$

Die normalen und tangentialen Steifigkeiten K_n und K_T hängen von der internen Variable κ ab und sind immer größer oder gleich Null. Sie werden im Sekantentensor \mathbf{T}_{sec} zusammengefasst und etwas später spezifiziert.

Durch die im Folgenden angegebene Belastungsfunktion F^κ wird entschieden, ob sich ein Riss in einem Belastungs-, Entlastungs- oder Wiederbelastungszustand befindet. Sie beschreibt die Differenz zwischen dem äquivalenten Verschiebungssprung η und der Geschichtsvariablen κ . Der Geschichtsparameter κ ist als der im Belastungsverlauf maximal erreichte äquivalente Verschiebungssprung η definiert.

$$F^\kappa = \eta - \kappa \leq 0 \quad \text{mit} \quad \kappa = \max_{0 \leq t < \tau} (\eta(t)) \quad (3.24)$$

Für einen Riss in der quasi-spröden Betonmatrix ist der äquivalente Verschiebungssprung über den Normalenanteil der Rissöffnung definiert (siehe WELLS UND SLUYS (2001b)). Dies ist durch die Annahme eines zugdominanten Versagens vom Typ Mode-I im Material begründet. Bei den Grenzflächenrissen mit angenommenem Zug-Schub bzw. Mixed Mode Versagen wird für den äquivalenten Verschiebungssprung auf eine Kombination aus normaler und tangentialer Rissöffnung zurückgegriffen, siehe CAMACHO UND

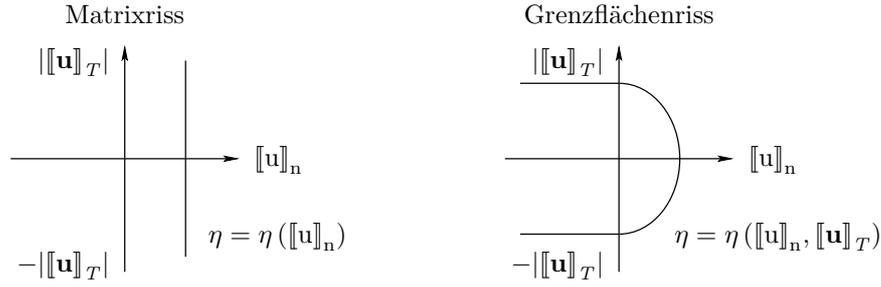


Abbildung 3.3.: Schädigungsflächen für unterschiedliche Risstypen

ORTIZ (1996) und ORTIZ UND PANDOLFI (1999).

$$\text{äquivalenter Verschiebungssprung} \quad \eta = \begin{cases} [[\mathbf{u}]]_n & \text{für Matrixrisse} \\ \sqrt{\langle [[\mathbf{u}]]_n \rangle^2 + \beta^2 [[\mathbf{u}]]_T^2} & \text{für Grenzflächenrisse} \end{cases} \quad (3.25)$$

Die Macauly-Klammern $\langle \cdot \rangle$ filtern nur positive Anteile aus dem Verschiebungssprung $[[\mathbf{u}]]_n$ heraus und setzen den Klammerausdruck für den Fall einer negativen Rissöffnung zu Null. Der Parameter $\beta = \frac{c_t}{c_n}$ beschreibt das Verhältnis von Schub- zu Zugfestigkeit an der materiellen Grenzfläche. Schematisch lassen sich die Schädigungsflächen für die beiden verschiedenen Risstypen, wie in Abbildung 3.3 gezeigt, veranschaulichen.

Zur vollständigen Definition des kohäsiven Spannungsvektors \mathbf{t} werden ferner die Steifigkeitsfunktionen K_n und K_T in Abhängigkeit der Geschichtsvariablen κ benötigt. Diese sind für Matrix- und Grenzflächenrisse wie folgt definiert:

$$\begin{array}{lll} \text{Matrixriss} & K_n = t^*/\kappa & K_T = d_T \exp(h_T \kappa) \\ \text{Grenzflächenriss} & \begin{cases} K_n = t^*/\kappa & \text{wenn } [[\mathbf{u}]]_n \geq 0 \\ K_n = d_n & \text{wenn } [[\mathbf{u}]]_n < 0 \end{cases} & K_T = \beta^2 t^*/\kappa \end{array} \quad (3.26)$$

Für die Steifigkeitsfunktion K_n ist der Ausdruck im Zugbereich bei den verschiedenen Risstypen formal identisch. Ein Unterschied ergibt sich erst durch die Verwendung unterschiedlicher Zugfestigkeiten f_t und c_n für die Matrix bzw. Grenzfläche. Dieser Wert wird neben der Bruchenergie G_f bei der Ermittlung der effektiven Spannung t^* benötigt, welche durch ein exponentielles Entfestigungsgesetz gegeben ist:

$$t^* = \sigma_v \exp\left(-\frac{\sigma_v}{G_f} \kappa\right) \quad \text{mit} \quad \sigma_v = \{f_t, c_n\} \quad (3.27)$$

3. Analyse von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

Durch Einsetzen der Steifigkeitsfunktion K_n sowie der effektiven Spannung t^* in Gleichung 3.23 ergibt sich der Normalanteil des Spannungsvektors \mathbf{t} zu:

$$t_n = K_n \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n = \frac{t^*}{\kappa} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n = \frac{\sigma_v}{\kappa} \exp\left(-\frac{\sigma_v}{G_f} \kappa\right) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n \quad (3.28)$$

Im Gegensatz zu Matrixrissen können Grenzflächenrisse auch unter Druckbelastung entstehen, sofern die Schubbeanspruchung entsprechend hoch ist. Daher müssen die Kontaktspannungen zwischen den beiden Rissufern in Normalenrichtung ermittelt werden. Dies erfolgt über die elastische Steifigkeit d_n , welche in der Regel im Sinne eines Penaltyfaktors relativ hoch gewählt wird, um die künstliche Penetration der Rissufer zu minimieren.

In Tangentialrichtung wird die Steifigkeit K_T für Matrixrisse durch den Parameter d_T und eine Exponentialfunktion definiert. Dabei stellt d_T die Anfangsschubsteifigkeit dar und h_T beschreibt die Abnahme dieser Steifigkeit in Abhängigkeit der normalen Rissöffnung $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_n$ (siehe WELLS (2001)).

Für Grenzflächenrisse ist die tangentielle Steifigkeit K_T durch den konstanten Parameter β direkt mit der Steifigkeit in Normalenrichtung gekoppelt. Auch hier handelt es sich bei β wie bereits zuvor beschrieben um das Verhältnis von Schub- zu Zugfestigkeit an der materiellen Grenzfläche.

Eine alternative Formulierung zur Ermittlung der effektiven Spannung bei Grenzflächenrissen wird von ORTIZ UND PANDOLFI (1999) aus dem universellen Verbundgesetz von Smith und Ferrante hergeleitet (siehe ROSE U. A. (1981)). Dies wird durch den Index $(\cdot)_{sf}$ in Gleichung (3.29) angezeigt:

$$t_{sf}^* = e c_n \frac{\kappa}{\kappa_c} \exp\left(-\frac{\kappa}{\kappa_c}\right) \quad (3.29)$$

Neben der Eulerschen Zahl $e \approx 2,718281$ und der Zugfestigkeit c_n wird die charakteristische Rissöffnung κ_c zur Ermittlung der effektiven Spannung t_{sf}^* benötigt. Diese lässt sich wie folgt aus der Zugfestigkeit c_n und der Bruchenergie G_f berechnen:

$$\kappa_c = \frac{G_f}{e c_n} \quad (3.30)$$

Die Unterschiede zur ersten Formulierung (3.27) liegen zum einen im Umstand, dass beim Ansatz nach Smith und Ferrante die materiellen Grenzflächen bereits vom Beginn der Berechnung an mit dem Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz beaufschlagt werden und zum anderen in der Formulierung des Kontaktfalls.

Durch die Definition von t_{sf}^* ist das Versagenskriterium implizit im Materialgesetz enthalten und muss nicht mehr gesondert abgeprüft werden. Die Entfestigung wird von der charakteristischen Rissöffnung κ_c und der Zugfestigkeit c_n an der materiellen Grenzfläche direkt gesteuert.

Im Kontaktfall wird anstelle der ursprünglichen Steifigkeitsformulierung $K_n = d_n$ als Steifigkeit K_n folgender Grenzwert verwendet:

$$K_n = \lim_{\kappa \rightarrow 0} t_{sf}^*/\kappa = \frac{e c_n}{\kappa_c} \quad \text{wenn} \quad [[\mathbf{u}]]_n < 0 \quad (3.31)$$

Nachstehend werden die Versagenskriterien für die zuerst vorgestellten Formulierungen erläutert. Dies ist, wie bereits erwähnt, für das Modell nach Smith und Ferrante nicht notwendig.

3.1.7. Versagenskriterien und Rissrichtung

Nach der Beschreibung der Schädigungsmodelle für Matrix- und Grenzflächenrisse erfolgt an dieser Stelle die Beschreibung der Rissentstehung bzw. der zugehörigen Versagenskriterien. Anschließend wird für Matrixrisse die Ermittlung der Rissrichtung vorgestellt. Dies ist für Grenzflächenrisse mit der bereits vorgegebenen Geometrie des materiellen Interface nicht notwendig.

Zur Bestimmung des Entstehungszeitpunkts von Matrixrissen wird auf das Hauptspannungskriterium bzw. Rankine-Kriterium zurückgegriffen, welches das Reißen von Beton sehr gut beschreibt. Es besagt, dass die Schädigung einsetzt, wenn die größte Hauptspannung die Zugfestigkeit des Materials erreicht. Grenzflächenrisse werden eingeführt, sobald das von BREWER UND LAGACE (1988) vorgeschlagene quadratische Delaminationskriterium erreicht wird. Dabei werden nur die Spannungskomponenten verwendet, welche für die Initiierung der Delamination maßgeblich sind (siehe HÖRMANN (2002)).

$$\begin{array}{ll} \text{Versagen von Matrixmaterial} & \{\sigma_I, \sigma_{II}\} = f_t \\ \text{Versagen von Grenzflächen} & \sqrt{\langle t_n \rangle^2 + \beta^{-2} \mathbf{t}_T^2} = c_n, \end{array} \quad (3.32)$$

Die Versagensflächen können ebenso wie die Schädigungsflächen schematisch dargestellt werden (Abbildung 3.4).

Neben dem Versagenszeitpunkt ist bei Matrixrissen die Rissrichtung von entscheidender Bedeutung. Es wird in der Regel bei ihrer Ermittlung dieselbe Methode wie bei der Herleitung des Versagenskriteriums verwendet. Für das Rankine-Kriterium wäre somit die Rissnormale entsprechend der Richtung der maximalen Hauptspannung zu wählen.

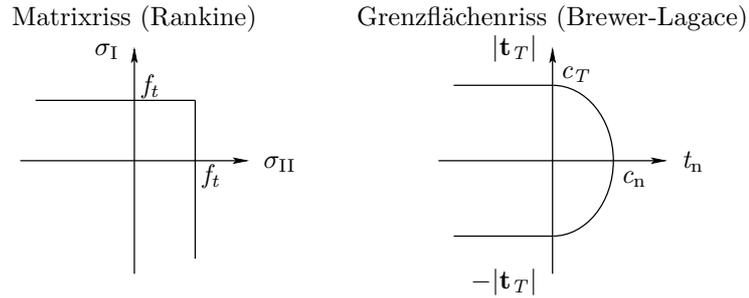


Abbildung 3.4.: Versagensflächen für unterschiedliche Risstypen

Es kann jedoch gezeigt werden, dass die Richtung der maximalen Hauptspannung des „nicht-lokalen“ Cauchy’schen Spannungstensors $\bar{\sigma}$ genauere Ergebnisse liefert (siehe WELLS UND SLUYS (2001a)). Der Hauptgrund hierfür liegt darin begründet, dass die Risspitze, an der die Rissrichtung ermittelt wird, nicht an einem Punkt liegt, an dem die Spannungen exakt vorliegen. Die genauesten Ergebnisse für die Spannungen erhält man an den Gaußpunkten, die sich aus der Polynomordnung des Lösungsansatzes ergeben. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Superkonvergenz.

Der „nicht-lokale“ Spannungstensor $\bar{\sigma}$ wird an der Risspitze \mathbf{x}_{TIP} aus der Multiplikation des lokalen Spannungsfeldes σ mit einer Gauß’schen Verteilungsfunktion w und der anschließenden Mittelwertbildung über das Rissspitzennahgebiet Ω_w ermittelt:

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}_{\text{TIP}}) = \int_{\Omega_w} w(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_{\text{TIP}} + \boldsymbol{\tau}) \, d\Omega \quad \text{mit} \quad w(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R_{nl}^3} \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\tau}^2}{2R_{nl}^2}\right) \quad (3.33)$$

In einem kreisförmigen Rissspitzengebiet mit dem Einflussradius R_{nl} beschreibt die Gewichtungsfunktion w den abklingenden Einfluss der lokalen Spannungen auf die „nicht-lokalen“ Spannungen mit wachsendem Abstand $\boldsymbol{\tau}$ zur Risspitze. Die numerische Berechnung der „nicht-lokalen“ Spannungen im Rahmen einer Finite-Element-Methode ist unter anderem in MERGHEIM U. A. (2005) beschrieben.

Bilden sich im Verlauf der Strukturanalyse mehrere Risse, so schlagen OLIVER U. A. (2004) im Rahmen einer CSDA-Formulierung vor, diese gegeneinander abzuschirmen (*Continuum Strong Discontinuity Approach*). Dies verhindert die Entstehung von Rissen in der Nachbarschaft bestehender Risse und erhöht die numerische Robustheit, indem die globale Strukturantwort leichter zu verfolgen ist. Bei HETTICH (2007) sind die notwendigen Modifikationen im Rahmen einer X-FEM Formulierung zu finden. Der physikalische Abstand zwischen zwei Rissen hängt im Fall von bewehrtem Beton von den Eigenschaften der Betonmatrix, der Bewehrung und dem Verbund zwischen diesen Komponenten ab. Dies hat zur Folge, dass der Abschirmradius in der Regel nur abgeschätzt werden kann bzw. an die vorliegende Konfiguration angepasst werden muss. Er

sollte nach OLIVER U. A. (2004) jedoch mindestens so groß gewählt werden, dass nicht zwei Risse im selben finiten Element auftreten.

Beispiel: Zugstab

Zur Veranschaulichung des entfestigenden Materialgesetzes, beschrieben durch die Gleichungen (3.26) und (3.27), betrachten wir an dieser Stelle einen einseitig eingespannten Zugstab aus Beton, welcher an seinem freien Ende mit einer Flächenlast q versehen wird (siehe Abbildung 3.5) und als einaxialer Fall modelliert wird.

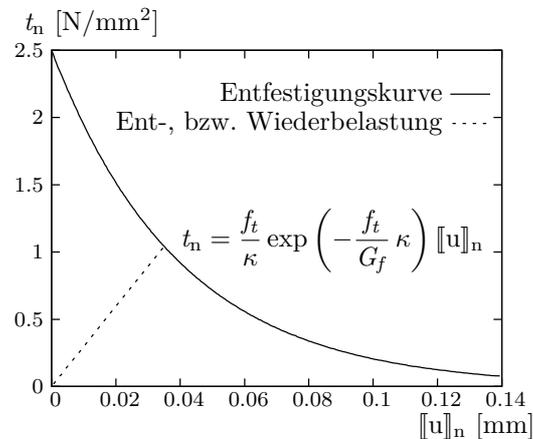
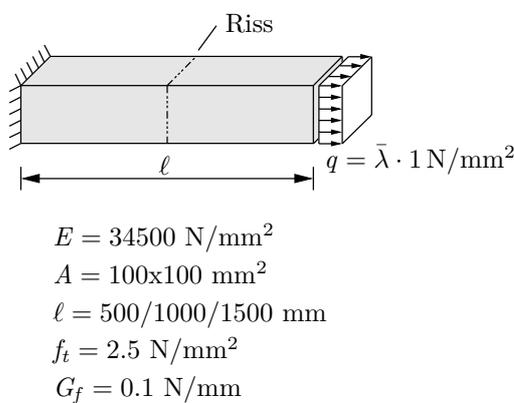


Abbildung 3.5.: Beispiel Zugstab: Geometrie, Materialdaten und Entfestigungsgesetz

Die Querschnittsfläche des Zugstabs beträgt $100 \times 100 \text{ mm}^2$ und dessen Länge wird zwischen 500 mm und 1500 mm variiert. Als Elastizitätsmodul wird ein mittlerer Wert von 34500 N/mm^2 angenommen. Dies entspricht einem C 40/50 (siehe SCHNEIDER (2008)). Die Zugfestigkeit dieses Beton wird auf der sicheren Seite liegend mit $f_t = 2.5 \text{ N/mm}^2$ angegeben. Die Bruchenergie beträgt $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$.

Zunächst wird die äußere Last q linear gesteigert, bis beim Erreichen des Laststeigerungsfaktors $\bar{\lambda} = 2.5$ das Versagenkriterium für das Matrixmaterial aus Gleichung (3.32) erfüllt ist. Zu diesem Zeitpunkt wird das Entfestigungsgesetz aus Abbildung 3.5 an der Rissfläche eingefügt. Die Lage dieser Rissfläche soll an dieser Stelle keine Rolle spielen und wird im Bereich der Stabmitte angenommen. Der weitere Verlauf der Last-Verschiebungskurven wird anschließend über die Rissöffnung $\llbracket u \rrbracket_n$ gesteuert (siehe Abbildung 3.6). In derselben Darstellung wird unten ersichtlich, dass sich die Stabverlängerung $\Delta \ell$ nach Einführung des Risses aus der elastischen Stabverlängerung $\Delta \ell_{\text{elast.}}$ und der Rissöffnung $\llbracket u \rrbracket_n$ zusammensetzt.

An diesem einfachen Beispiel ist gut ersichtlich, wie die beiden Komponenten *elastische Matrix* und *Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz* miteinander interagieren. Je nach

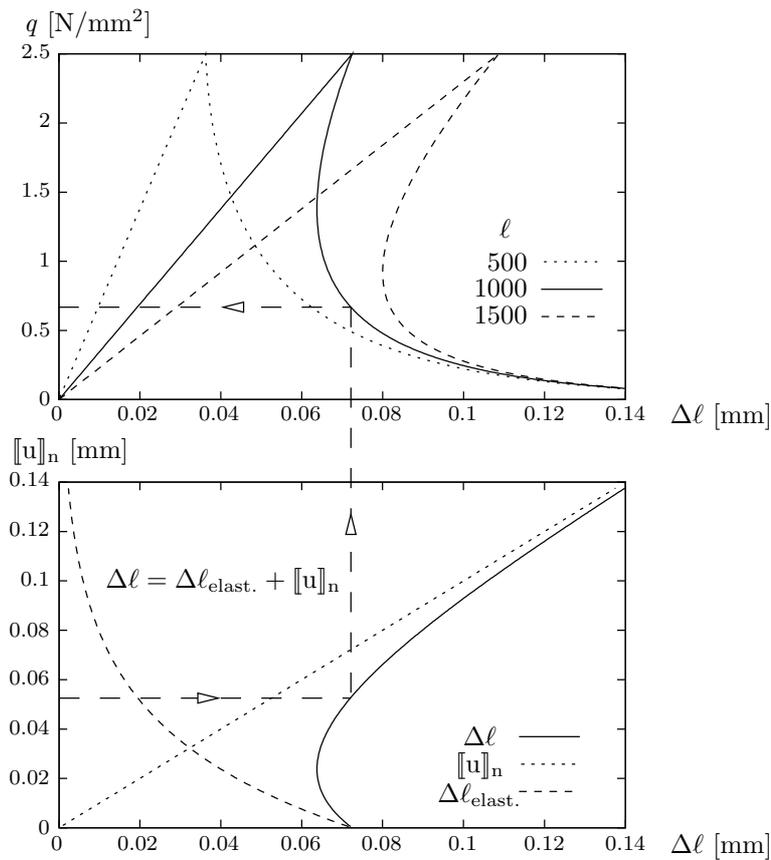


Abbildung 3.6.: Oben: Last-Verschiebungskurven für $\ell = 500/1000/1500$ mm
 Unten: Rissöffnungs-Verschiebungsdiagramm für $\ell = 1000$ mm

Geometrie- oder Materialdaten kann es auch zum sogenannten snap-back-Phänomen im Sinne einer Verschiebungssteuerung durch $\Delta\ell$ kommen. Dieser Effekt wird hier durch die Verlängerung des Stabes erreicht, kann aber auch durch die Änderung anderer Werte, wie zum Beispiel des Elastizitätsmoduls oder der Zugfestigkeit, hervorgerufen werden. In verschiebungsgesteuerten Berechnungen sieht man an diesen Stellen ein senkrechtes Durchschlagen nach unten auf der Last-Verschiebungskurve.

Das snap-back-Verhalten ist bereits lange bekannt und ist unter anderem bei CARPINTERI (1989) und CRISFIELD (1986) für kohäsive Risse ausführlich beschrieben. Eine Untersuchung dieses Phänomens am 3-Punkt-Biegebalken unter Verwendung der X-FEM wurde von MOËS UND BELYTSCHKO (2002) durchgeführt. Analysiert wurde in diesem Fall der Einfluß der Sprödigkeits- bzw. Duktilitätszahl (CARPINTERI 1989) auf das snap-back Verhalten.

3.2. Geometriebeschreibung von materiellen Grenzflächen und Rissen

Nach der Einführung der kontinuumsmechanischen Grundlagen im vorhergehenden Kapitel 3.1 beschäftigt sich dieser Abschnitt mit der geometrischen Beschreibung von materiellen Grenzflächen und diskreten Rissen. Es erfolgt in diesem Zusammenhang eine Beschränkung auf die verwendeten Methoden, obwohl eine Vielzahl weiterer Möglichkeiten zur Geometriebeschreibung von materiellen Grenzflächen und diskreten Rissen existiert.

3.2.1. Level-Set-Methode

Für die Beschreibung von materiellen Grenzflächen und Grenzflächenrissen wird im Rahmen dieser Arbeit auf die sogenannte *Level-Set-Methode* (LSM) zurückgeriffen. Sie wurde in den achtziger Jahren von den amerikanischen Mathematikern OSHER UND SETHIAN (1988) entwickelt und erfreut sich in vielen Anwendungsgebieten einiger Beliebtheit. Einen allgemeinen Einblick bezüglich der Beschreibung von Oberflächen mithilfe der Level-Set-Methode erhält man z.B. in BLOOMENTHAL U. A. (1997).

Der Vorteil dieser Methode liegt in der Möglichkeit, Kurven und Oberflächen auf einem fixierten, kartesischen Koordinatensystem einzubringen, ohne diese parametrisieren zu müssen. Die Geometriebeschreibung erfolgt über eine implizite Gleichung, die es ermöglicht, einer Gestaltsänderung dieser Objekte problemlos zu folgen. Dies ist für die in dieser Arbeit behandelten Optimierungsprobleme von besonderem Vorteil und Interesse, da sowohl die Lage, als auch die Form von Bewehrungseinschlüssen in einem Matrixmaterial variiert werden.

Die zu beschreibenden Grenzflächen $\Gamma_{m,i} \in \mathbb{R}^3$ werden als Iso-Kurven mithilfe der Abstandsfunktion $\phi_{m,i} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dargestellt.

$$\Gamma_{m,i}(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \phi_{m,i}(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (3.34)$$

Durch die Annahme kleiner Deformationen werden die Grenzflächen zum Zeitpunkt t_0 initiiert und verändern sich während der Strukturanalyse nicht. Ansonsten müsste eine räumliche Zeitableitung der Funktion $\phi_{m,i}$ erfolgen, um die Bewegung der Grenzflächen $\Gamma_{m,i}$ zu beschreiben. Somit gilt, dass $\Gamma_{m,i}(t) = \Gamma_{m,i}(t_0)$ ist. Neben der Lokalisierung der Grenzflächen im Raum lassen sich als weitere geometrische Eigenschaften von $\phi_{m,i}$ die

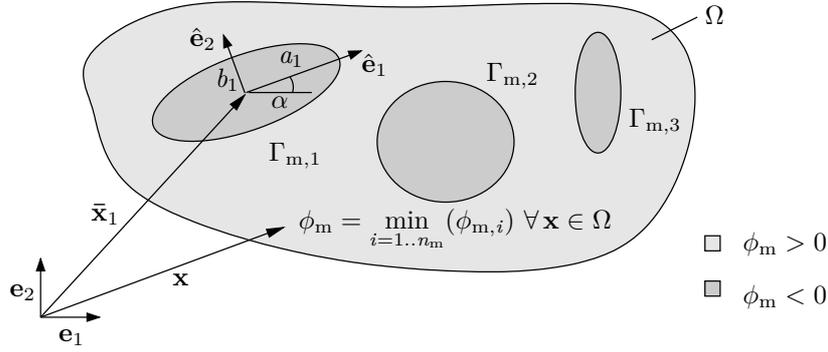


Abbildung 3.7.: Veranschaulichung der Level-Set-Methode

Flächennormale \mathbf{n} und die mittlere Krümmung κ^* der Grenzflächen $\Gamma_{m,i}$ ermitteln.

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla_X (\phi_{m,i})}{|\nabla_X (\phi_{m,i})|} \quad \text{und} \quad \kappa^* = \text{div} \left(\frac{\nabla_X (\phi_{m,i})}{|\nabla_X (\phi_{m,i})|} \right) \quad (3.35)$$

Da sich im vorliegenden 2D-Fall die zu beschreibenden Grenzflächen auf den Querschnitt von textilen Fasern in einer Betonmatrix beziehen, wird $\phi_{m,i}$ an dieser Stelle als Ellipse eingeführt. Dies hat den Hintergrund, dass die Bewehrungsfasern nicht in ihrer Längsrichtung, sondern in ihrem Querschnitt untersucht werden sollen.

$$\phi_{m,i}(\mathbf{x}, \mathbf{s}_i) = \sqrt{\frac{\hat{x}_1^2}{(a_i)^2} + \frac{\hat{x}_2^2}{(b_i)^2}} - 1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{s}_i = [a_i, b_i, \alpha_i, \bar{\mathbf{x}}_i = (\bar{x}_{1,i}, \bar{x}_{2,i})] \quad (3.36)$$

Alternativ ist eine superelliptische Formulierung denkbar, wie sie von PEDERSEN (2000) für Hohlräume bzw. Löcher verwendet wurde.

Das verwendete $\hat{\mathbf{x}}$ -Koordinatensystem liegt jeweils im Ursprung der einzelnen Ellipsen und ist in deren Hauptrichtungen orientiert. Die Transformation ins globale Koordinatensystem erfolgt mithilfe der Vorschrift aus Gleichung (3.37). Diese beinhaltet sowohl die Translation, sowie die Rotation zwischen den einzelnen $\hat{\mathbf{x}}$ -Koordinatensystemen zum globalen Koordinatensystem.

$$\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_{1,i} \\ x_2 - \bar{x}_{2,i} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Die im Optimierungsprozess verwendeten Entwurfparameter sind im Vektor $\mathbf{s} = \cup_i \mathbf{s}_i$ zusammengefasst. Es handelt sich um die Halbachsen a_i und b_i , den Hauptachseneckwinkel α_i , sowie den Ursprung $\bar{\mathbf{x}}_i$ der einzelnen Ellipsen i .

Einsetzen von Gleichung (3.37) in (3.36) liefert bei Vernachlässigung des Index i von α_i :

$$\phi_{m,i} = \sqrt{\frac{[\cos \alpha(x_1 - \bar{x}_{1,i}) + \sin \alpha(x_2 - \bar{x}_{2,i})]^2}{(a_i)^2} + \frac{[-\sin \alpha(x_1 - \bar{x}_{1,i}) + \cos \alpha(x_2 - \bar{x}_{2,i})]^2}{(b_i)^2}} - 1 \quad (3.38)$$

Eine eindeutige Level-Set-Funktion ϕ_m lässt sich für alle Punkte \mathbf{x} aus dem jeweiligen Minimalwert aller Funktionen $\phi_{m,i}$ herleiten (siehe SUKUMAR U. A. (2001)). Ihr Vorzeichen definiert im gesamten Gebiet für negative Werte das Matrixmaterial und für positive Werte die Fasern, sowie mit $\phi_m = 0$ die Grenzflächen (Abbildung 3.7). Zur Veranschaulichung werden jedoch weiterhin die einzelnen Grenzflächen gesondert bezeichnet, um die Übersichtlichkeit zu wahren.

Wie in Kapitel 3.1.2 bereits angedeutet, kann die Anreicherungsfunktion $\chi_{m,i}$ aus der Geometriebeschreibung hergeleitet werden (Abbildung 3.8). Im Rahmen einer Finite-Element-Formulierung wird sie in knotenbasierter Form wie folgt angegeben (MOËS U. A. 2003):

$$\chi_{m,i} = \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I |\phi_{m,i,I}| - \left| \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I \phi_{m,i,I} \right| \quad (3.39)$$

Darin enthält $\phi_{m,i,I}$ den Wert der Funktion $\phi_{m,i}$ am Knoten I und n_{nod} gibt die Anzahl der Elementknoten wieder. Die Diskretisierung mit den Formfunktionen N_I beschreibt die Approximation der materiellen Grenzfläche, die bei Verwendung von bilinearen, vierknotigen Finiten Elementen durch stückweise lineare Segmente dargestellt wird.

Ebenso kann die Sprungfunktion $\chi_{c,j}$ für Grenzflächenrisse aus der Funktion $\phi_{m,i}$ gebildet werden. Dabei wird ein Vorzeichenwechsel zwischen verschiedenen Materialien ausgenutzt.

$$\chi_{c,j} = \text{sign}(\phi_{m,i}) \quad \text{mit} \quad \phi_{m,i} = \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I \phi_{m,i,I} \quad (3.40)$$

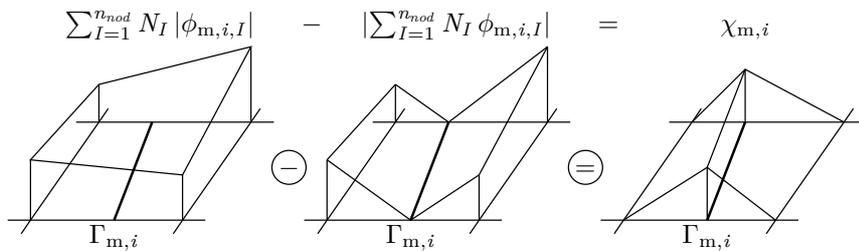


Abbildung 3.8.: Veranschaulichung der diskretisierten Funktion $\chi_{m,i}$

3.2.2. Vektor-Level-Set-Methode

Die Beschreibung von Matrixrissen, die im Gegensatz zu materiellen Grenzflächen nicht a priori in ihrer Form und Lage bekannt sind, erfolgt in dieser Arbeit mithilfe der Vektor-Level-Set-Methode. Diese wurde von VENTURA U. A. (2003) an die Finite-Element-Methode angepasst.

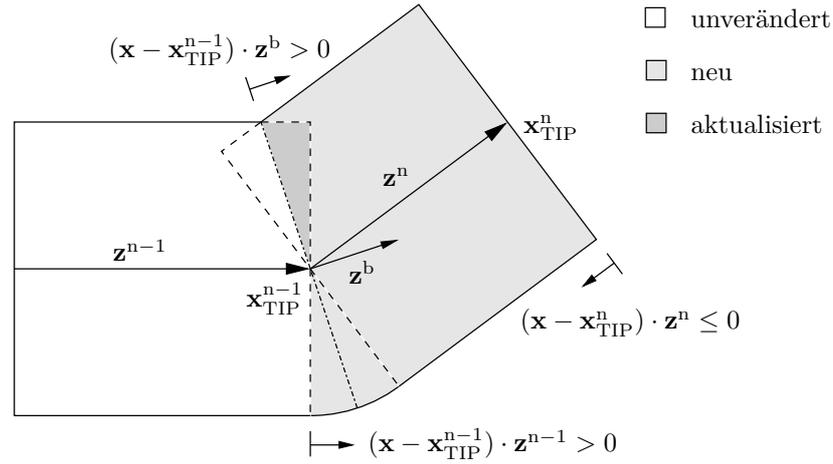


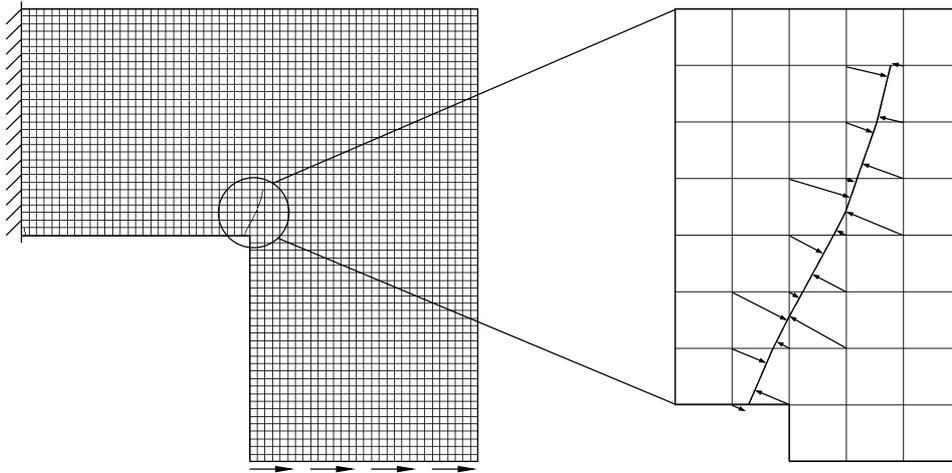
Abbildung 3.9.: Aktualisierungsbereich bei Rissfortschritt in der Matrix

Zur vollständigen Beschreibung der Rissgeometrie reichen bei zweidimensionalen Problemen die beiden Einträge des Abstandsvektors $\Phi_{c,j}$, der vom Punkt \mathbf{x} auf den nächstgelegenen Punkt auf dem Riss $\Gamma_{c,j}$ zeigt, sowie die Vorzeichenfunktion $\chi_{c,j}$. Sobald diese Komponenten ermittelt wurden, ergibt sich die skalarwertige Level-Set-Funktion aus der Vorzeichenfunktion multipliziert mit der Norm des Abstandsvektors:

$$\phi_{c,j} = \chi_{c,j} |\Phi_{c,j}| \quad (3.41)$$

Die Level-Set-Funktion wird nur in einem schmalen Bereich um den Riss definiert und bleibt bei weiterem Risswachstum in den bereits gerissenen Elementen unverändert. Eine Ausnahme bildet ein kleiner Bereich, der bei Rissfortschritt von der alten Risspitze \mathbf{x}_{TIP}^{n-1} zur neuen Risspitze \mathbf{x}_{TIP}^n aktualisiert werden muss. Die Konturen in Abbildung 3.9 beschreiben das schmale Band in dem die Level-Set-Funktion berechnet werden muss. Die alte und neue Rissrichtung des fortschreitenden Risses wird mit den Vektoren \mathbf{z}^{n-1} und \mathbf{z}^n angegeben. Im zu aktualisierenden Bereich gibt der Vektor \mathbf{z}^b die mittlere Rissrichtung wieder.

Die Berechnung der Vorzeichenfunktion $\chi_{c,j}$ und des Abstandsvektors $\Phi_{c,j}$ wird in der folgenden Gleichung beschrieben. Darin bezeichnet $\hat{\mathbf{z}}_{\perp}^n$ den normierten Vektor \mathbf{z}_{\perp}^n , wel-

Abbildung 3.10.: Abstandsvektoren $\Phi_{c,1}$

cher einer Drehung der Rissrichtung \mathbf{z}^n im Gegenuhrzeigersinn um 90° entspricht.

$$\chi_{c,j} = \text{sign} \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{TIP}}^{n-1}) \cdot \mathbf{z}_\perp^n \right]$$

$$\Phi_{c,j} = \begin{cases} -\hat{\mathbf{z}}_\perp^n \left[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{TIP}}^{n-1}) \cdot \hat{\mathbf{z}}_\perp^n \right] & \text{wenn } (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{TIP}}^{n-1}) \cdot \mathbf{z}^n \geq 0 \\ -(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{TIP}}^{n-1}) & \text{wenn } (\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{TIP}}^{n-1}) \cdot \mathbf{z}^n < 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

Im Rahmen einer Finiten-Element-Methode wird Gleichung (3.41) an den Elementknoten von gerissenen Elemente ausgewertet und mithilfe von Ansatzfunktionen innerhalb der Elemente interpoliert. Dies erfolgt analog zum Vorgehen in Gleichung (3.40). Zur Berechnung der Knotenwerte im Rissspitzenelement wird die Rissfront künstlich verlängert, damit sich alle Knoten im zu aktualisierenden Bereich befinden, siehe Abbildung 3.9 und 3.10. Bei Verwendung von bilinearen, vierknotige Elementen ergibt sich aus der Vektor-Level-Set-Funktion ein polygonzugartiger Rissverlauf.

3.3. Finite Elemente (X-FEM)

Die Idee der Finite-Element-Methode (FEM) besteht darin, das Randwertproblem aus Kapitel 3.1.5 durch Unterteilung des kontinuierlichen Gebiets in Teilgebiete zu lösen. Die Tatsache, dass es sich bei den Teilgebieten um endlich große Elemente, sprich finite Elemente handelt, gibt der Methode ihren Namen. Detailliert beschrieben findet man die FE-Methode beispielsweise in Büchern von BATHE (2002), BELYTSCHKO U. A. (2000), HUGHES (2000) und ZIENKIEWICZ U. A. (2005).

Wird bei einer Verschiebungsformulierung für die Primärvariable \mathbf{u} das erweiterte Verschiebungsfeld (3.7) verwendet, so spricht man von der *eXtended Finite Element Method* (X-FEM); (siehe u.a. BELYTSCHKO UND BLACK (1999), DOLBOW (1999) und MOËS U. A. (1999)).

3.3.1. Variationsformulierung

Zur Bestimmung des gesuchten Verschiebungsfeldes \mathbf{u} , welches das Randwertproblem aus Kapitel 3.1.5 erfüllt, werden die Differentialgleichung der lokalen Impulsbilanz (3.15) und die statischen Randbedingungen aus Gleichung (3.16) mit einer Testfunktion $\delta \mathbf{u}$ multipliziert, d.h. gewichtet und über das Gebiet Ω integriert. Daraus geht nach einigen Umformungen unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes, im Englischen auch „divergence theorem“ genannt, die schwache Form des Gleichgewichts hervor (siehe Gleichung (3.43)). Der Lösungsvektor \mathbf{u} muss dabei die kinematischen Randbedingungen, welche sich an den Rändern $\Gamma \setminus \Gamma_{t^*}$ ergeben, erfüllen. Dies wird unter anderem durch die Verwendung des erweiterten Verschiebungsfeldes aus Gleichung (3.7) für Γ_m und Γ_c erreicht. Am Dirichlet-Rand Γ_{u^*} werden die vorgeschriebenen Verschiebungen \mathbf{u}^* dem gewöhnlichen Anteil der Verschiebungsfunktion $\hat{\mathbf{u}}$ zugewiesen, um die Dirichlet-Randbedingung in der üblichen Weise realisieren zu können.

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.43)$$

Im Sinne einer Bubnov-Galerkin-Methode werden die Testfunktionen identisch zum erweiterten Verschiebungsfeld gewählt. Dies erlaubt nach dem Einsetzen der erweiterten Testfunktion $\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \delta \tilde{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \delta \tilde{\mathbf{u}}_j$ in die schwache Form des Gleichgewichts die Aufteilung in $1 + n_m + n_c$ Gleichungen. Dabei wird unter Ausnutzung der Eigenschaft der Dirac-Delta Verteilung $\delta_{c,j}$ ein Teil der Gleichungen in ein begrenztes Oberflächenintegral überführt:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\chi_{m,1} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_1) + (\delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \otimes \nabla \chi_{m,1})^s] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega &= \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{m,1} \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\int_{\Omega} [(\chi_{m,n_m} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_m}) + (\delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_m} \otimes \nabla \chi_{m,n_m})^s] : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega = \int_{\Gamma_{t^*}} \chi_{m,n_m} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_m} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \chi_{c,1} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,1}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}_{c,1} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_{\mathbf{t}^*}} \chi_{c,1} \delta \tilde{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\
 &\vdots \\
 \int_{\Omega} \chi_{c,n_c} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,n_c}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} \cdot \mathbf{t}_{c,n_c} \, d\Gamma &= \int_{\Gamma_{\mathbf{t}^*}} \chi_{c,n_c} \delta \tilde{\mathbf{u}}_{n_c} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Gleichung (3.44) gibt die übliche Gleichgewichtsaussage in schwacher bzw. integraler Form wieder. Die folgenden Gleichungen (3.45) und (3.46) fordern die Spannungscontinuität in schwacher Form an materiellen Grenzflächen $\Gamma_{m,i}$ und Rissen $\Gamma_{c,j}$. Über den Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ sind die Gleichungen (3.44) - (3.46) miteinander gekoppelt.

3.3.2. Diskretisierung

Der Übergang zu den finiten Elementen erfolgt durch die Aufteilung des Körpers \mathcal{B} in n_{ele} finite Elemente. Die Integrale des Randwertproblems werden dabei durch die Summe über die einzelnen Integrale der finiten Elemente ersetzt, die durch eine numerische Integration näherungsweise ausgeführt werden. Es gilt $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Omega^e$, wobei $\bigcup_{e=1}^{n_{ele}}$ den Zusammenbau aller Finiten Elemente symbolisiert. Der Verschiebungsverlauf innerhalb der einzelnen vierknotigen Elemente wird über diskrete Knotenfreiwerte $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ und dazugehörige bilineare Formfunktionen \mathbf{N} , die die *Partition of Unity* erfüllen, approximiert.

In den einzelnen finiten Elementen ergibt sich das approximierte Verschiebungsfeld \mathbf{u}^h in Abhängigkeit der anzureichernden Knotenfreiheitsgrade in Matrixschreibweise zu:

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N}_a \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \mathbf{N}_c \mathbf{c}_j \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_a \mathbf{a} \\ \tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{N}_b \mathbf{b}_i \\ \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j = \mathbf{N}_c \mathbf{c}_j \end{cases} \tag{3.47}$$

Für jeden Knoten wird geprüft, ob sein ‘‘Support‘‘, also das Gebiet der direkt an den Knoten angrenzenden Elemente, durch eine materielle Grenzfläche, einen Riss oder beides vollständig durchtrennt wird. Ist dies nicht der Fall, enthält der entsprechende Knoten nur die gewöhnlichen Freiheitsgrade \mathbf{a} . Im Fall einer materiellen Grenzfläche $\Gamma_{m,i}$ kommen die Freiheitsgrade \mathbf{b}_i , oder für Risse $\Gamma_{c,j}$ die zugehörigen Knotenwerte \mathbf{c}_j hinzu. Fällt ein Riss mit der materiellen Grenzfläche zusammen (Delamination), muss sowohl mit \mathbf{b}_i als auch \mathbf{c}_j erweitert werden.

In Abbildung 3.11 ist links oben die Anreicherung nach HETTICH (2007) zu sehen. Dort werden im Fall einer Delamination die Freiheitsgrade \mathbf{b}_i durch \mathbf{c}_j ersetzt, was sich als

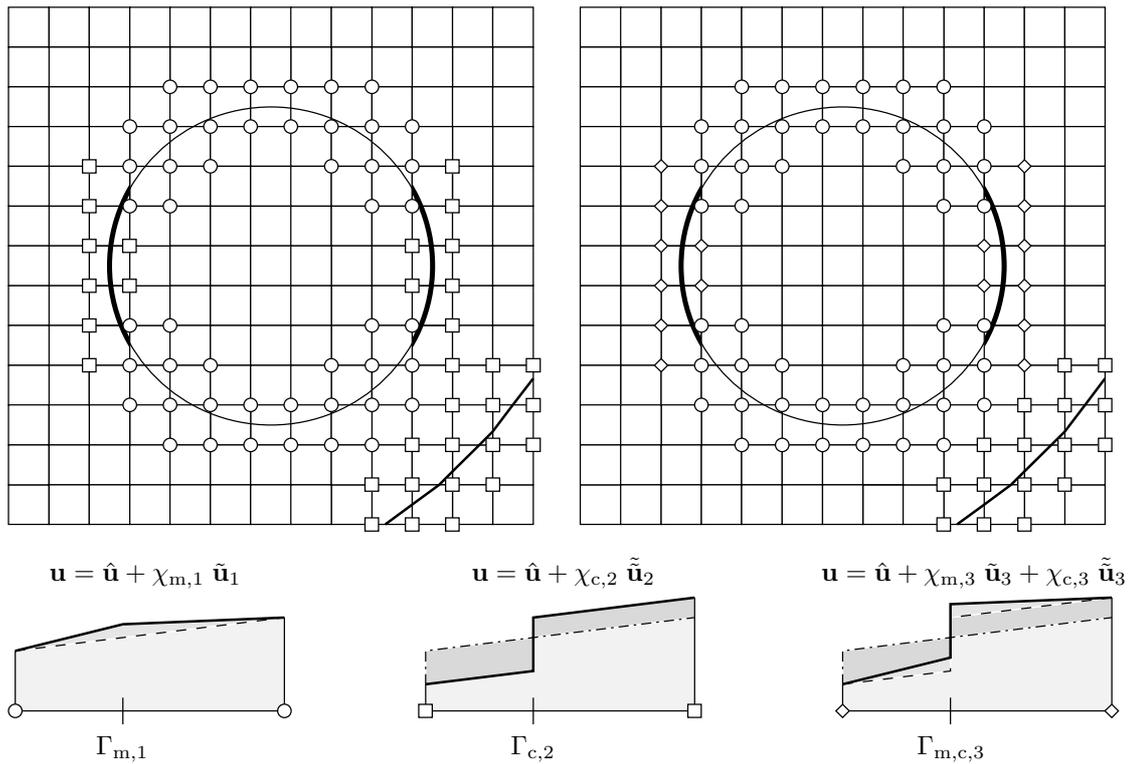


Abbildung 3.11.: Diskretisierung und Knotenanreicherung

unzureichend herausstellte. Rechts oben in der Abbildung ist die korrigierte Version zu sehen. Dort kommen die Freiheitsgrade, die mit dem Riss, bzw. der Delamination assoziiert sind, additiv zum Verschiebungsfeld hinzu.

Im Verlauf einer Strukturanalyse kommen durch Risswachstum immer weitere Freiheitsgrade hinzu. Diese werden eingeführt, sobald der “Support“ eines Knotens vollständig in zwei Bereiche geteilt wird (siehe Abbildung 3.12). Sollte einer dieser Bereiche sehr klein ausfallen, kann auf eine Erweiterung des entsprechenden Knotens verzichtet werden. Dies verhindert eine nahezu konstante Anreicherung durch die Heaviside-Funktion, woraus sich schlecht konditionierte Systemsteifigkeitsmatrizen ergeben können. Die Multiplikation einer fast vollständig konstanten Funktion mit dem Verschiebungsanteil $\tilde{\mathbf{u}}$ ergibt eine Erweiterung, die dem gewöhnlichen Verschiebungsanteil $\hat{\mathbf{u}}$ gleicht. Es entstehen somit linear abhängigen Funktionen, die zu numerischen Problemen führen. Ob auf die Anreicherung verzichtet werden kann, entscheidet das Flächenkriterium aus Gleichung (3.48). Die darin enthaltene Toleranzgrenze ϵ wird sowohl von DOLBOW (1999) als auch von SUKUMAR UND PRÉVOST (2003) mit einem Wert von 10^{-4} beziehungsweise 0,01 % an-

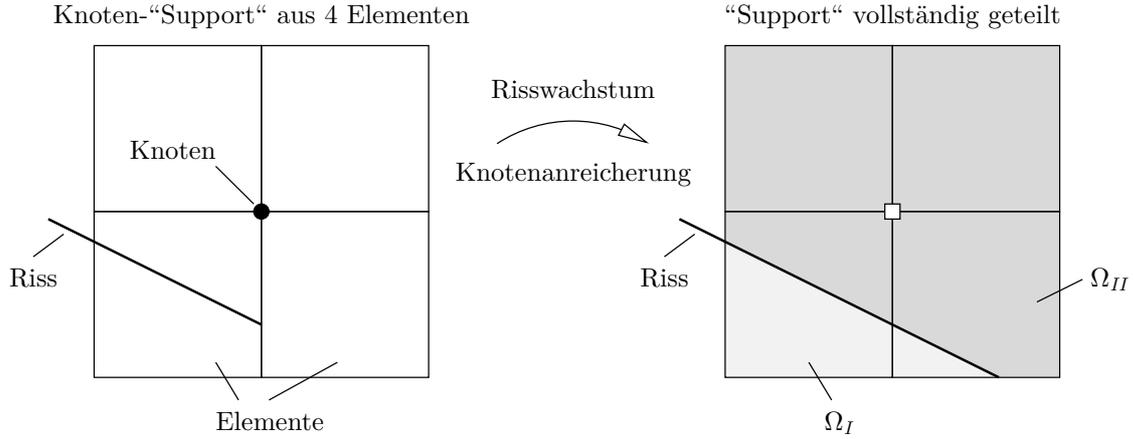


Abbildung 3.12.: Knotenanreicherung bei Risswachstum

gegeben.

$$\frac{\min\{\Omega_I, \Omega_{II}\}}{\Omega_I + \Omega_{II}} < \epsilon \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \Omega_I, \Omega_{II} & \hat{=} \text{Teilgebiete des Support} \\ \epsilon & \hat{=} \text{Toleranzwert} \end{cases} \quad (3.48)$$

Durch Einsetzen des diskretisierten Verschiebungsfeldes aus Gleichung (3.47) in die Definition des Verschiebungssprungs (3.11) ergibt sich dessen approximierte Form zu:

$$[[\mathbf{u}]]_{c,j} = 2 \mathbf{N}_c \mathbf{c}_j \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{c,j} \quad (3.49)$$

Der Deformationszustand neben den Rissen ist durch den linearisierten Green-Lagrange Verzerrungstensor (3.13) gegeben. Durch Einsetzen des Verschiebungsfeldes (3.47) in die Gleichung (3.13) ergibt sich mithilfe des bekannten Differentialoperators \mathbf{L} der diskretisierte Verzerrungstensor (3.50). Es gilt $\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}$, beziehungsweise $\nabla^s \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{B}_a \mathbf{a}$, $\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{B}_b \mathbf{b}_i$ und $\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_j = \mathbf{B}_c \mathbf{c}_j$.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_a \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n_m} \underbrace{[\mathbf{L} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b + \chi_{m,i} \mathbf{B}_b]}_{\tilde{\mathbf{B}}_{b,i}} \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \underbrace{[\chi_{c,j} \mathbf{B}_c]}_{\tilde{\mathbf{B}}_{c,j}} \mathbf{c}_j \quad \forall \mathbf{x} \notin \Gamma_c \quad (3.50)$$

Unter Ausnutzung des Fundamentalsatzes der Variationsrechnung, wonach die Gleichgewichtsbeziehungen für beliebige Variationen der Knotenverschiebungen $\delta \mathbf{a}$, $\delta \mathbf{b}_i$ und $\delta \mathbf{c}_j$ gelten müssen, ergibt sich das globale Gleichungssystem des diskretisierten Randwertproblems zu:

$$\bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Gamma_{t^*}^e} \mathbf{N}_a^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,1}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{m,1} \mathbf{N}_b^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \\ &\vdots \\ \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,n_m}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \right] &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{m,n_m} \mathbf{N}_b^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,1}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,1}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,1} \, d\Gamma \right] &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{c,1} \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \\ &\vdots \\ \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,n_c}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,n_c}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,n_c} \, d\Gamma \right] &= \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{c,n_c} \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Darin ergeben die Ausdrücke vor den Gleichheitszeichen den Vektor der inneren Knotenkräfte \mathbf{F}_{int} und die Einträge danach den Knotenkraftvektor \mathbf{F}_{ext} aus äußerer Randbelastung.

Bemerkung: Die Unterschiede und Gemeinsamkeiten, die sich zwischen den nach der XFEM erweiterten Elementen und hierarchisch aufgebauten finiten Elementen ergeben, werden in Anhang A erläutert.

3.3.3. Numerische Integration

Bei der numerischen Integration muss an dieser Stelle zwischen den klassischen Elementen mit bilinearem Ansatz und den mit zusätzlichen Freiheitsgraden angereicherten Elementen unterschieden werden. Die vierknotigen Standardelemente werden in bekannter Weise mithilfe einer 2x2 Gaußquadratur integriert. Elemente, die durch eine materielle Grenzfläche oder einen Riss in zwei getrennte Gebiete geteilt werden, müssen zu Integrationszwecken mit einem Triangulierungs-Algorithmus partitioniert werden. Diese Elemente werden in Dreiecke unterteilt, deren Kanten mit den Diskontinuitäten übereinstimmen. Dies ist notwendig, um die Integration über schwache, beziehungsweise starke Diskontinuitäten hinweg zu ermöglichen (siehe Abbildung 3.13). Die Partitionierung der Elemente verursacht keine zusätzlichen Freiheitsgrade und die Form der Dreiecke ist

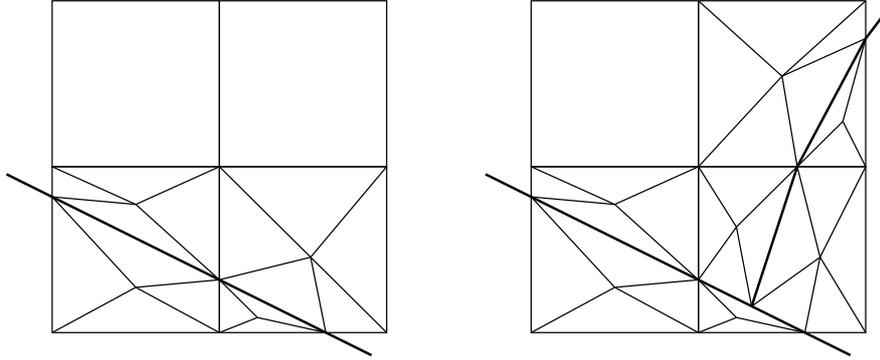


Abbildung 3.13.: Triangulierung angereicherter Elemente

nicht beschränkt, da die Formfunktionen (klassische und angereicherte) sich weiterhin auf die Knoten der Grundelemente beziehen.

Anhand der Integration eines bereichsweise linear elastischen Elementes soll hier kurz auf das Prinzip der Teilbereichsintegration eingegangen werden. Als Ausgangspunkt wird zu diesem Zweck die Steifigkeitsmatrix eines Elementes \mathbf{k}_{el} mit den Standardverschiebungsfreiheitsgraden u_x und u_y an den vier Elementknoten herangezogen.

$$\mathbf{k}_{el} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathcal{C}^{el} \mathbf{B}(\xi, \eta) \, dx dy \quad (3.54)$$

Unter der Annahme einer bereichsweise konstanten, jedoch über das Element hinweg diskontinuierlichen Materialeigenschaftsfunktion $\mathcal{C}^{el}(\xi, \eta)$ lässt sich die entsprechende Elementsteifigkeitsmatrix als Summe über die Teilbereiche n_t wie folgt angeben:

$$\mathbf{k}_{el} = \sum_{i=1}^{n_t} \left[\int_{\Omega_i} \mathbf{B}^T \mathcal{C}_i^{el} \mathbf{B} \, dx dy \right] = \sum_{i=1}^{n_t} \mathbf{k}_{el}^i \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{n_t} \Omega_i = \Omega^e \quad (3.55)$$

Da der Integrand in lokalen Koordinaten ξ und η formuliert ist, muss der Integrationsbereich mithilfe der Jacobi-Determinante in das lokale Elementkoordinatensystem überführt werden.

$$dx dy = |\mathbf{J}| \, d\xi d\eta \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \quad (3.56)$$

WOO UND WHITCOMB (1993) führen neben dem globalen (x, y) und lokalen (ξ, η) Koordinatensystem in jedem Teilgebiet ein weiteres Koordinatensystem (r, s) ein. Zum einen muss deshalb der Integrationsbereich erneut transformiert werden

$$d\xi d\eta = |\bar{\mathbf{J}}| \, dr ds \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{J}} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(r, s)} \quad (3.57)$$

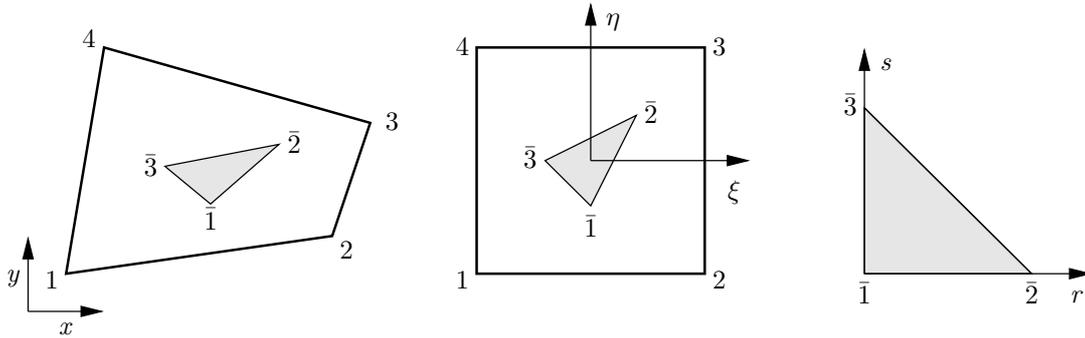


Abbildung 3.14.: Koordinatentransformation zwischen globalem, lokalem und Teilgebietskoordinatensystem

und zum anderen ist der Integrand in den Teilbereichskordinaten r und s zu formulieren. Die notwendige Zuordnung der Teilbereichskordinaten r und s zu den lokalen Koordinaten ξ und η , in denen der Integrand formuliert ist, wird dabei wie folgt parametrisiert:

$$\begin{aligned}\xi &= \bar{N}_{\bar{j}}(r, s) \xi_{\bar{j}} \\ \eta &= \bar{N}_{\bar{j}}(r, s) \eta_{\bar{j}}\end{aligned}\tag{3.58}$$

In dieser Gleichung stellen $\xi_{\bar{j}}$ und $\eta_{\bar{j}}$ die Koordinaten der Knoten \bar{j} der Teilbereiche, $\bar{N}_{\bar{j}}$ die zugehörigen Ansatzfunktionen, dar. Somit ergibt sich für die dreieckigen Teilbereiche folgender Integrationsausdruck:

$$\mathbf{k}_{el}^i = \int_0^1 \int_0^{1-s} \mathbf{B}^T(\xi(r, s), \eta(r, s)) \mathbf{C}_i^{el} \mathbf{B}(\xi(r, s), \eta(r, s)) |\mathbf{J}| |\bar{\mathbf{J}}| dr ds\tag{3.59}$$

Mithilfe der Gaußquadratur lässt sich dieser Ausdruck wie folgt numerisch auswerten:

$$\mathbf{k}_{el}^i = \int_0^1 \int_0^{1-s} f(r, s) dr ds \quad \rightarrow \quad \tilde{\mathbf{K}}_{el}^i = \sum_{k=1}^{n_g} w_k f(r_k, s_k)\tag{3.60}$$

Die Integration der Steifigkeitsmatrix liefert bei drei Gaußpunkten in den dreieckigen Teilgebieten jedoch nur dann das exakte Ergebnis, wenn keine unzulässigen Netzverzerrungen des Gesamtelementes vorliegen (siehe Abbildung 3.15). In diesen Fällen ist der Integrand eine Polynomfunktion 2. Grades, die vollständig integriert wird. Sobald die Jacobimatrix \mathbf{J} infolge einer allgemeinen Verzerrung des Elementes nicht mehr konstant ist, entstehen gebrochen rationale Funktionen im Integranden, die mit der Gaußquadratur nicht exakt integriert werden können. Die zweite Jacobitransformation $\bar{\mathbf{J}}$ ist immer konstant und der Ausdruck $|\mathbf{J}| |\bar{\mathbf{J}}|$ kann als die doppelte Fläche des Teilgebietes Ω_i identifiziert werden.

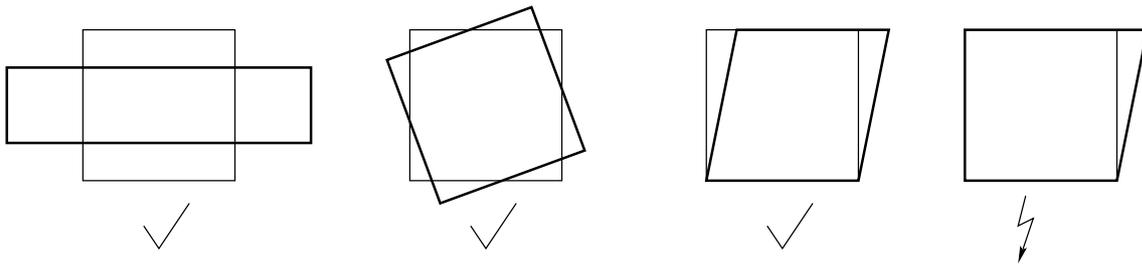


Abbildung 3.15.: Einfluss der Netzverzerrung auf die Gauß-Integration

Ersetzt man den gewöhnlichen Verschiebungsansatz mit der erweiterten Form des Verschiebungsfeldes aus Gleichung (3.7), so erhöht sich der Grad des Polynoms im Integranden. Dies betrifft jedoch nur die Anteile, die mit einer materiellen Grenzfläche assoziiert sind. Die regulären Freiheitsgrade $\hat{\mathbf{u}}$ sind weiterhin bilinear approximiert und liefern einen B-Operator mit Polynomen ersten Grades. Ebenso die mit dem Riss verbundenen Freiheitsgrade $\tilde{\mathbf{u}}_j$, da die Anreicherungsfunktion $\chi_{c,j}$ in den einzelnen Teilbereichen konstant ist. Somit reicht weiterhin eine 3-Punkt Gaußquadratur in den Teilgebieten zur exakten Integration dieser Terme aus, da in dieser Arbeit nur reguläre, unverzerrte Elementnetze zum Einsatz kommen. Der Ausdruck „exakt“ ist natürlich im Rahmen der numerischen Rechengenauigkeit einzuschränken.

Anders sieht es bei den Freiheitsgraden $\tilde{\mathbf{u}}_i$ aus. Der Term $\bar{\mathbf{B}}_{b,i} = [\mathbf{L}\chi_{m,i} \mathbf{N}_b + \chi_{m,i} \mathbf{B}_b]$ ist nicht mehr ein Polynom 1. Grades, sondern kann Terme bis zur Polynomordnung 3. Grades enthalten. Somit entstehen im Integranden der Steifigkeitsmatrix Polynome 6. Grades. Da die 3-Punkt Gaußquadratur in den Teilgebieten nur Polynome der Ordnung 2 exakt integrieren kann, ergeben sich in Abhängigkeit der Lage der materiellen Grenzfläche im Element zum Teil erhebliche Fehler bei der Integration der Elementsteifigkeitsmatrix.

Zur Quantifizierung dieser Fehler, die zwischen numerischer und analytischer Integration auftreten, wird folgende Norm definiert:

$$\text{FEHLER} = \frac{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n \left(k_{ij}^{\text{analytisch}} - k_{ij}^{\text{numerisch}} \right)^2}}{\sum_{i,j=1}^n \left| k_{ij}^{\text{analytisch}} \right|} \quad (3.61)$$

In Abbildung 3.16 und der dazugehörigen Tabelle 3.1 sind die Ergebnisse einiger Berechnungen mit unterschiedlicher Lage der materiellen Grenzfläche zusammengefasst. Die Abmessung der Elemente wurde zu $20 \times 20 \text{ mm}^2$ gewählt, bei einer Dicke von 1 mm. Das Verhältnis der Steifigkeiten zwischen den beiden Materialien beträgt $E_1/E_2 = 1/2$. Es wurde ein ebener Spannungszustand angenommen bei einer Querdehnzahl von $\nu = 0.2$.

3. Analyse von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

□ Abmessung: 20x20x1 mm³

□ E-Modul: E_1 Querdehnzahl: $\nu = 0.2$

□ E-Modul: $E_2 = 2 * E_1$ Querdehnzahl: $\nu = 0.2$

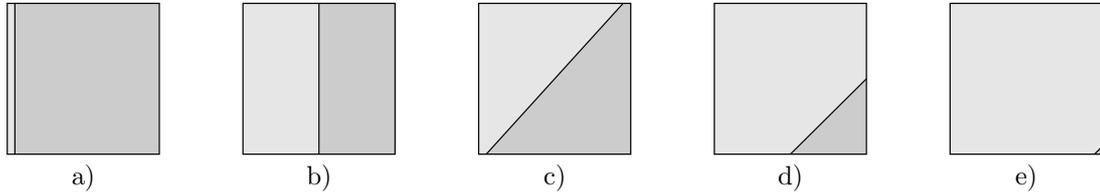


Abbildung 3.16.: Verschiedene Phasengeometrien zur Verdeutlichung des Integrationsfehlers, siehe Tabelle 3.1

Tabelle 3.1 gibt den Integrationsfehler der Beispiele aus Abbildung 3.16 bei einer 3-Punkt, 7-Punkt und 13-Punkt Gauß-Integration in den dreieckigen Teilbereichen der Triangulierung (Abbildung 3.13) wieder. Da in der Fehlernorm aus Gleichung (3.61) ein Großteil der Einträge, welche mit $\hat{\mathbf{u}}$ und $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$ assoziiert sind, mit der 3-Punkt Integration exakt wiedergegeben werden, erscheinen die angegebenen Fehler in den meisten Fällen relativ klein. Daher ist in Klammern der Integrationsfehler für den Eintrag K_{ij} angegeben, welcher die größte Abweichung aufweist, ohne die Summe über alle Einträge zu bilden. Dabei werden jedoch Steifigkeitseinträge, deren Betrag kleiner als 10^{-4} ist vernachlässigt, da diese durch die Rechnergenauigkeit einen größeren Fehler aufweisen können.

Es zeigt sich, dass bei entsprechender Lage der materiellen Grenzfläche eine Erhöhung der Integrationsordnung sinnvoll ist. Ob dabei auf sieben oder sogar auf dreizehn Gaußpunkte erweitert wird, hängt von der geforderten Genauigkeit des Ergebnisses ab. Liegt der Fokus auf dem lokalen Bereich um die materielle Grenzfläche, dann sollte auf jeden Fall die Integrationsordnung erhöht werden. Bei Problemen mit im Verhältnis zur Gesamtzahl wenigen Grenzflächenelementen kann der Einfluss auf das Gesamtverschiebungsfeld hingegen so gering sein, dass mit der 3-Punkt Integration bereits gute Ergeb-

	a)	b)	c)	d)	e)
3-Gauß-Punkte	0.007 % (6.73 %)	0.174 % (1.866 %)	6.562 % (40.21 %)	0.368 % (36.6 %)	0.045 % (57.2 %)
7-Gauß-Punkte	≈ 0.0 % (≈ 0.0 %)	≈ 0.0 % (≈ 0.0 %)	0.830 % (12.94 %)	0.008 % (0.186 %)	0.0002 % (0.414 %)
13-Gauß-Punkte			≈ 0.0 % (≈ 0.0 %)	≈ 0.0 % (≈ 0.0 %)	≈ 0.0 % (0.0018 %)

Tabelle 3.1.: Integrationsfehler bei numerischer Integration

nisse erzielt werden. In diesen Fällen verbraucht eine Erhöhung der Integrationsordnung nur unnötig Rechenleistung.

Bemerkung: Die Integration entlang der Rissflächen bzw. -linien erfolgt mithilfe einer 2-Punkt Gaußquadratur. Diese liefert für die vorliegenden Integranden eine exakte Integrationsvorschrift.

3.3.4. Linearisierung

In der vorliegenden Arbeit wird durch die Verwendung des nichtlinearen Traktions-Verschiebungssprung-Gesetzes aus Kapitel 3.1.6 eine materielle Nichtlinearität in das System eingebracht. Somit sind die inneren Knotenkräfte $\mathbf{F}_{int}(\mathbf{D})$ eine nichtlineare Funktion der Knotenverschiebungen $\mathbf{D} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Die externen Kräfte \mathbf{F}_{ext} werden als verschiebungsunabhängig angesehen. Somit ergibt sich die Notwendigkeit, die Lösung des globalen Gleichungssystems inkrementell iterativ zu bestimmen.

Zur iterativen Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems für ein bestimmtes Lastniveau \mathbf{F}_{ext} wird das Residuum $\mathbf{R} := \mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$ eingeführt. Dieses wird als Ungleichgewichtskraft angesehen, welche im Laufe der Iteration verschwinden muss. Das Residuum wird im Rahmen einer Newton-Raphson-Iteration mithilfe einer Taylorreihe um die aktuelle Iterierte \mathbf{D}_k des Iterationsschritts $k \rightarrow k+1$ entwickelt. Unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung ergibt sich das linearisierte Residuum zu:

$$\mathbf{R}_{lin}(\mathbf{D}_{k+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{D}_k) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_k} \Delta \mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \Delta \mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_{k+1} - \mathbf{D}_k \quad (3.62)$$

Nach Umformung des Residuums und Definition der Tangentensteifigkeit $\mathbf{K}_{T,k}$ erhält man das linearisierte Gleichungssystem zur Ermittlung der residuellen Änderung der Systemfreiheitsgrade $\Delta \mathbf{D}_{k+1}$ zu:

$$\mathbf{K}_{T,k} \Delta \mathbf{D}_{k+1} = - \underbrace{[\mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}_k) - \mathbf{F}_{ext}]_{\mathbf{R}(\mathbf{D}_k)}}_{\mathbf{R}(\mathbf{D}_k)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}_{T,k} := \left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_k} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}_k} \quad (3.63)$$

Die Tangentensteifigkeit $\mathbf{K}_{T,k}$ sowie das Residuum $\mathbf{R}(\mathbf{D}_k)$ werden dabei aus den Elementsteifigkeiten $\mathbf{k}_{T,k}^e$ und den Elementresiduen \mathbf{r}_k^e zusammengesetzt bzw. assembliert. Aus dem Lösungsvektor $\Delta \mathbf{D}_{k+1}$ ergeben sich die Änderung der Elementfreiheitsgradvektoren $\Delta \mathbf{d}_{k+1}^e$, welche die Änderung der Knotenfreiheitsgrade \mathbf{a}, \mathbf{b}_i und \mathbf{c}_j enthalten.

$$\mathbf{K}_{T,k} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{k}_{T,k}^e \quad \mathbf{R}(\mathbf{D}_k) = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \mathbf{r}_k^e \quad \Delta \mathbf{D}_{k+1} = \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \Delta \mathbf{d}_{k+1}^e \quad (3.64)$$

3. Analyse von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

Auf Elementebene hängt die Größe sowohl der Steifigkeitsmatrix \mathbf{k}_k^e als auch des Residuenvektors \mathbf{r}_k^e von der Anzahl der Knotenfreiheitsgrade beziehungsweise deren Erweiterung ab. Die folgende Zusammenstellung kann in dieser Form also nie auftreten, da nie alle materiellen Grenzflächen und Risse gleichzeitig durch ein Element laufen. Sie gibt aber einen guten Überblick über den Aufbau aller Elementsteifigkeitsmatrizen und Elementresiduen.

$$\mathbf{k}_{T,k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab_1} & \cdots & \mathbf{k}_{ab_{n_m}} & \mathbf{k}_{ac_1} & \cdots & \mathbf{k}_{ac_{n_c}} \\ \mathbf{k}_{b_1a} & \mathbf{k}_{b_1b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_1b_{n_m}} & \mathbf{k}_{b_1c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_1c_{n_c}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{k}_{b_{n_m}a} & \mathbf{k}_{b_{n_m}b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_{n_m}b_{n_m}} & \mathbf{k}_{b_{n_m}c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_{n_m}c_{n_c}} \\ \mathbf{k}_{c_1a} & \mathbf{k}_{c_1b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_1b_{n_m}} & \mathbf{k}_{c_1c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_1c_{n_c}} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \mathbf{k}_{c_{n_c}a} & \mathbf{k}_{c_{n_c}b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_{n_c}b_{n_m}} & \mathbf{k}_{c_{n_c}c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_{n_c}c_{n_c}} \end{bmatrix}_k^e \quad \mathbf{r}_k^e = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_a \\ \mathbf{r}_{b_1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{b_{n_m}} \\ \mathbf{r}_{c_1} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{c_{n_c}} \end{bmatrix}_k^e \quad (3.65)$$

Die einzelnen Einträge der Elementsteifigkeitsmatrix bestehen in dieser Gleichung aus den folgenden Integralausdrücken:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{aa,k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathcal{C}_{tan}^k \mathbf{B}_a \, d\Omega & \mathbf{k}_{ab_i,k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathcal{C}_{tan}^k \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{ac_j,k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathcal{C}_{tan}^k \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, d\Omega & \mathbf{k}_{b_i a,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathcal{C}_{tan}^k \mathbf{B}_a \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{b_i b_r,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathcal{C}_{tan}^k \bar{\mathbf{B}}_{b,r} \, d\Omega & \mathbf{k}_{b_i c_j,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathcal{C}_{tan}^k \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{c_j a,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathcal{C}_{tan}^k \mathbf{B}_a \, d\Omega & \mathbf{k}_{c_j b_i,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathcal{C}_{tan}^k \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \, d\Omega \\ \mathbf{k}_{c_j c_j,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathcal{C}_{tan}^k \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,j}^e} \mathbf{N}_c^T \mathbf{T}_{tan}^k \mathbf{N}_c \, d\Gamma \\ \mathbf{k}_{c_j c_s,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathcal{C}_{tan}^k \bar{\mathbf{B}}_{c,s} \, d\Omega & & \text{wenn } j \neq s \end{aligned} \quad (3.66)$$

Die Materialmatrix $\mathcal{C}_{tan}^k = \partial \boldsymbol{\sigma}^k / \partial \boldsymbol{\varepsilon}^k$ ist für ein linear elastisches Stoffgesetz identisch mit der Elastizitätsmatrix \mathcal{C}^{el} . Die Materialmatrix \mathbf{T}_{tan}^k für spannungsübertragende Risse folgt aus der Ableitung des Spannungsvektors \mathbf{t} aus Kapitel 3.1.6 nach dem

Verschiebungssprung $[[\mathbf{u}]]$.

$$\mathbf{T}_{tan} = \underbrace{\mathbf{T}_{sec}}_{\text{Gl. (3.23)}} + \left[\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [[\mathbf{u}]]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [[\mathbf{u}]]_T \right] \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \left[\frac{\partial \eta}{\partial [[\mathbf{u}]]_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \eta}{\partial [[\mathbf{u}]]_T} \cdot \mathbf{T} \right] \quad (3.67)$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \kappa}{\partial \eta}$ nimmt bei Ent- und Wiederbelastungszuständen den Wert Null an. Da die interne Variable in diesen Fällen eine Konstante darstellt, verschwindet die partielle Ableitung, und der Tangententensor ist gleich dem Sekantentensor. Nur bei fortschreitender Rissöffnung ist die interne Variable vom aktuellen äquivalenten Verschiebungssprung abhängig, und die partielle Ableitung nimmt den Wert Eins an.

Abschließend werden noch die Ausdrücke der Elementresiduen spezifiziert:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{a,k}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma}_k \, d\Omega - \int_{\Gamma_{t^*}^e} \mathbf{N}_a^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\ \mathbf{r}_{b,i,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \boldsymbol{\sigma}_k \, d\Omega - \int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \\ \mathbf{r}_{c,j,k}^e &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \boldsymbol{\sigma}_k \, d\Omega + \int_{\Gamma_{c,j}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,j,k} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_{t^*}^e} \chi_{c,j} \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}^* \, d\Gamma \end{aligned} \quad (3.68)$$

3.3.5. Bemerkung zum Rissfortschrittsalgorithmus

Die Initiierung und der Rissfortschritt werden in dieser Arbeit nach dem Schema von DUMSTORFF UND MESCHKE (2007) durchgeführt (siehe Abbildung 3.17). Nach jedem konvergierten Lastschritt werden die Versagenskriterien aus Gleichung (3.32) überprüft. Kommt es zu keinem Risswachstum, wird die aktuelle Konfiguration beibehalten und mit dem nächsten Lastschritt fortgefahren. Ist das Versagenskriterium hingegen verletzt, wird die Rissrichtung ermittelt und es werden die erweiterten Freiheitsgrade in den neu gerissenen Elementen eingeführt. Nachdem das Gleichgewicht für die neue Konfiguration im gleichen Lastschritt erneut ermittelt wurde, erfolgt wiederum die Prüfung der Versagenskriterien. Es werden so lange neue Freiheitsgrade eingeführt, bis kein Risswachstum mehr festzustellen ist. Erst danach wird mit dem nächsten Lastschritt fortgefahren.

Die vorgestellte Iterationsschleife kommt in der Regel zum Einsatz, wenn das Verhältnis zwischen Elementgröße und Lastschrittweite nicht zusammenpasst. Bei großen Lastschritten, in Verbindung mit kleinen Elementen, kann das sukzessive Reißen der einzelnen Elemente nicht in einem Schritt erfolgen und macht einen iterativen Prozess notwendig, um den vollständigen Rissfortschritt zu gewährleisten. Kleine Lastschritte in Kombination mit großen Elementen stellen hingegen kein Problem dar. In diesen Fällen treten jedoch große Sprünge im Last- Verschiebungsdiagramm auf und es kann zu Konvergenzproblemen kommen. Desweiteren ist ein zu steifes Strukturverhalten zu beobach-

3. Analyse von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten

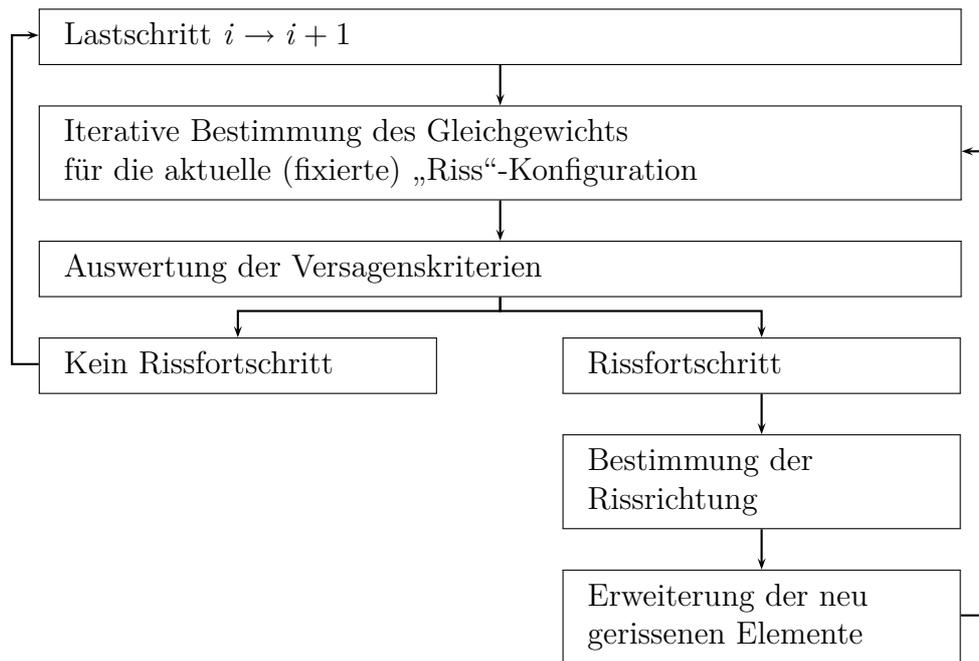


Abbildung 3.17.: Algorithmus zur Analyse des Risswachstums

ten, da ein großes Element erst reißt, wenn es vollständig das Rissinitiiierungskriterium erfüllt. Wählt man hingegen kleinere Elemente, erfolgt die Schädigung kontinuierlicher.

4

Grundlagen der Sensitivitätsanalyse

Die Aufgabe der Sensitivitätsanalyse ist, die Parameterempfindlichkeit der Entwurfskriterien zu ermitteln. Damit ist die Suche nach den Ableitungen bzw. Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen bezüglich der Optimierungsvariablen gemeint. Diese Werte werden vom Optimierungsalgorithmus zur Suche nach einer verbesserten Lösung und letztlich zum Auffinden eines Optimums verwendet.

Nach einer Einleitung in die Thematik werden die verschiedenen Verfahren der Sensitivitätsanalyse vorgestellt und im Anschluß untereinander verglichen. Nach der Auswahl eines für die X-FEM geeigneten Verfahrens werden die zugehörigen Sensitivitäten im anschließenden Kapitel 5 ermittelt.

4.1. Einleitung

Solange zwischen den Entwurfskriterien und den Optimierungsvariablen ein expliziter Zusammenhang besteht, stellt die Herleitung der Gradienten kein Problem dar. Beispielsweise kann die Parameterempfindlichkeit für die Nebenbedingung 'konstantes Gesamtgewicht' eines Stabtragwerkes direkt aus der zugehörigen Formel

$$h_G(\mathbf{s}) = G/G_{zul} - 1 = 0 \quad \text{mit} \quad G = \sum G_i \quad (4.1)$$

abgeleitet werden. Wird für einen einzelnen Rundstab das Gewicht mit $G_i = \rho \pi R_i^2 \ell_i$ angegeben, folgen daraus die Gradienten

$$\nabla_{\ell_i} h_G = (\rho \pi R_i^2)/G_{zul} \quad \text{und} \quad \nabla_{R_i} h_G = (2 \rho \pi R_i \ell_i)/G_{zul} \quad (4.2)$$

für die Entwurfparameter Stablänge ℓ_i und Querschnittsradius R_i .

In der Regel ist ein expliziter Zusammenhang jedoch nicht vorhanden. Enthält eines der Entwurfskriterien zum Beispiel die Spannungsantwort eines Körpers auf äußere Belastungen, so existiert keine einfache Möglichkeit, die Gradienten direkt in Abhängigkeit der Entwurfparameter zu formulieren. Dies ergibt sich aus der impliziten Abhängigkeit der Zustandsvariablen von den Entwurfsvariablen. Beispielsweise werden im linear elastischen Fall die Spannungen mithilfe des entsprechenden Stoffgesetzes aus den Verzerrungen bzw. Verschiebungen ermittelt, die als Lösung einer FE-Berechnung vorliegen. Somit ergeben sich die Sensitivitäten der Spannungen aus der Bildung des totalen Differentials zu

$$\nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{s}} + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}} \quad (4.3)$$

Die Schwierigkeit besteht in der Ermittlung des Terms $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{s}}$, der die Sensitivität der Zustandsvariablen \mathbf{u} zu den Entwurfsvariablen \mathbf{s} wiedergibt. Analog zu Gleichung (4.3) kann für eine beliebige Funktion f das Problem der Sensitivitätsermittlung wie folgt aufgesplittet werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} f = \nabla_{\mathbf{s}}^{\text{ex}} f + \nabla_{\mathbf{u}} f \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u} \quad (4.4)$$

Es erfolgt die Ermittlung des expliziten Anteils, der direkt von den Entwurfsvariablen abhängt, sowie die des nicht mehr trivial ableitbaren impliziten Anteils. Die implizite Abhängigkeit der Zustandsvariablen hat zur Folge, dass die Sensitivitätsanalyse einen Großteil der Rechenzeit bei der Bearbeitung von Strukturoptimierungsproblemen benötigt. Es kann gezeigt werden, dass je komplexer und aufwendiger die Strukturanalyse ist, desto größer ist der numerische Aufwand für die Sensitivitätsanalyse insgesamt bzw. die Ermittlung des darin enthaltenen impliziten Anteils. Im linear elastischen Fall ist der Aufwand somit deutlich geringer als zum Beispiel bei einer Crash-Untersuchung mit materieller und geometrischer Nichtlinearität sowie Kontakt und Dynamik. Der numerische Aufwand wird im Vergleich zur gesamten Rechenzeit, bestehend aus Strukturanalyse, Sensitivitätsanalyse und Optimierungsalgorithmus, mit etwa dreißig bis neunzig Prozent angegeben.

Da für die verschiedenen Problemstellungen der Strukturmechanik unterschiedliche Verfahren zur Sensitivitätsermittlung notwendig sind, hat sich die Sensitivitätsanalyse als eigenständige Teildisziplin der Strukturoptimierung etabliert. Sie liefert die Möglichkeit, auch bei materiell oder geometrisch nichtlinearem Strukturverhalten mithilfe gradientenbasierter Optimierungsverfahren eine hohe Konvergenzgeschwindigkeit bei gleichzeitig geringer Anzahl an Strukturanalysen zu erreichen. Liegen kontinuierlich veränderliche Entwurfparameter und kontinuierliche Entwurfskriterien vor, liefern Gradientenverfah-

ren gute Ergebnisse (siehe beispielsweise MAUTE 1998, SCHWARZ 2001, KEMMLER 2004, LIPKA 2007 und KATO 2010).

Ein ausführlicher Überblick zu den grundsätzlichen Methoden der Sensitivitätsanalyse, sowie deren Entwicklung ist unter anderem in den Arbeiten von HAUG U. A. (1986), KIMMICH (1990), HAFTKA UND GÜRDAL (1991), TORTORELLI UND MICHALERIS (1994), KLEIBER U. A. (1997) und CHOI UND KIM (2005) zu finden.

Auf eine Aufzählung der speziellen Methoden zur Sensitivitätsanalyse, die für die verschiedenen nichtlinearen Problemstellungen im Laufe der Jahre entwickelt wurden, wird an dieser Stelle verzichtet. Eine entsprechende Auflistung ist zum Beispiel in der zuletzt genannten Literatur zu finden. An dieser Stelle wird jedoch auf die Anfänge der nichtlinearen Sensitivitätsanalyse hingewiesen. Ausgehend von den Arbeiten von RYU U. A. (1985), TSAY UND ARORA (1989) und TSAY UND ARORA (1990), die sich erstmals eingehend mit geometrischer und materieller Nichtlinearität im Zusammenhang mit der Sensitivitätsanalyse beschäftigt haben, hat sich letztendlich die eigenständige Teildisziplin der Sensitivitätsanalyse entwickelt, die bis heute Gegenstand der Forschung ist.

4.2. Verfahren zur Sensitivitätsanalyse

Eine Übersicht zu den einzelnen numerischen und analytischen Verfahren der Gradientenermittlung ist in Tabelle 4.1 zu finden. Diese sollen nachfolgend kurz vorgestellt und verglichen werden.

Numerische Verfahren	Analytische Verfahren	
Finite Differenzen	Diskrete Sensitivitätsanalyse	Variationelle Sensitivitätsanalyse
· vorwärts	· direkt	· direkt
· rückwärts	· adjungiert	· adjungiert
· zentral	· hybrid	· hybrid

Tabelle 4.1.: Verfahren zur Sensitivitätsanalyse

Neben den in Tabelle 4.1 aufgeführten Verfahren existieren zusätzlich semi-analytische Verfahren, die in der vorliegenden Arbeit nicht explizit beschrieben werden. Sie sind zwischen den analytischen und numerischen Verfahren angesiedelt. In den semi-analytischen Verfahren werden bestimmte Anteile der Sensitivitätsanalyse, wie zum Beispiel die Gra-

dienten der Steifigkeitsmatrix, mittels Finite-Differenzen-Methoden ermittelt und als Ersatz für die analytisch bestimmten Gradienten in analytischen Verfahren eingesetzt.

4.2.1. Numerische Verfahren

Die einfachste Möglichkeit an Sensitivitätsinformationen zu gelangen ist die Bildung numerischer Differenzen aus einer Taylorreihenentwicklung.

$$f(\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}) + \nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s})(\Delta\mathbf{s}) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^2 f(\mathbf{s}) (\Delta\mathbf{s})^2 + HOT \quad (4.5)$$

$$f(\mathbf{s} - \Delta\mathbf{s}) = f(\mathbf{s}) - \nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s})(\Delta\mathbf{s}) + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{s}}^2 f(\mathbf{s}) (\Delta\mathbf{s})^2 + HOT \quad (4.6)$$

Hieraus lassen sich die Näherungsverfahren des Vorwärts-, Rückwärts- und Zentralen Differenzenverfahrens ableiten. Durch den Abbruch nach dem linearen Term entstehen Verfahren mit der Genauigkeit erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) &\approx \frac{f(\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) - f(\mathbf{s})}{\|\Delta\mathbf{s}\|} && \text{Vorwärtsdifferenzenverfahren} \\ \nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) &\approx \frac{f(\mathbf{s}) - f(\mathbf{s} - \Delta\mathbf{s})}{\|\Delta\mathbf{s}\|} && \text{Rückwärtsdifferenzenverfahren} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Bei Berücksichtigung der quadratischen Terme und Subtraktion der beiden Gleichungen (4.5) und (4.6) voneinander erhöht sich die Genauigkeit auf die zweite Ordnung:

$$\nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s}) \approx \frac{f(\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) - f(\mathbf{s} - \Delta\mathbf{s})}{\|2 \cdot \Delta\mathbf{s}\|} \quad \text{Zentrales Differenzenverfahren} \quad (4.8)$$

Der offensichtliche Vorteil der finiten Differenzenverfahren liegt in der einfachen Implementierbarkeit. Die Gradienten werden rein aus den Ergebnissen der Strukturanalyse gewonnen, wobei die Art des Strukturproblems keine Rolle spielt. Je nach Problemstellung kann es die einzige Möglichkeit sein, an eine Gradienteninformation zu gelangen.

Bei einer hohen Anzahl an Entwurfsvariablen $n_{\mathbf{s}}$ und/oder einer aufwendigen Strukturanalyse zeigt sich jedoch schnell, dass der Aufwand für die verschiedenen, vollständigen Strukturanalysen im gestörten und ungestörten Zustand recht hoch ist. Für die Verfahren erster Ordnung sind $n_{\mathbf{s}} + 1$ Strukturanalysen sowie bei Verfahren zweiter Ordnung $2n_{\mathbf{s}} + 1$ Auswertungen notwendig. Als weiteres Problem tritt die Ermittlung einer geeigneten Variationsgröße $\Delta\mathbf{s}$ auf. Wird die Störung zu groß angenommen, nimmt die Qualität der Sensitivitäten stetig ab. Sollten jedoch zu kleine Werte eingesetzt werden, treten Probleme durch die numerische Rechnergenauigkeit auf. Durch den Abbruch der Taylorreihe wird der Fehler bei der Sensitivitätsermittlung ebenfalls erhöht.

Trotz dieser Schwächen werden Differenzenverfahren zum Beispiel in semi-analytischen Verfahren angewendet, um nicht differenzierbare Anteile zu approximieren. In dieser Arbeit werden sie als Kontrollmittel zur Überprüfung der analytisch ermittelten Sensitivitäten herangezogen. Bei der Verfügbarkeit alternativer Verfahren wird in der Regel jedoch auf die Anwendung der finiten Differenzen verzichtet, da deren Nachteile meist überwiegen.

4.2.2. Analytische Verfahren

Zur Überwindung der Probleme numerischer Verfahren und zur Reduktion des numerischen Aufwands kommen vorwiegend analytische Verfahren zum Einsatz. Der Schwerpunkt liegt dabei in der Ermittlung des impliziten Anteils aus Gleichung (4.4). Dieser ist eng mit dem verwendeten Strukturanalyseverfahren verbunden und macht einen Eingriff in den Programmcode notwendig. Sollte dies bei der Anwendung kommerzieller Programme nicht möglich sein, kommt die finite Differenzenmethode als einzige Alternative zur analytischen Gradientenermittlung zum Einsatz.

Die Herleitung der Sensitivitäten für die Zustandsvariablen $\nabla_{\mathbf{s}}\mathbf{u}$ kann auf zwei verschiedene Arten erfolgen. Die Unterscheidung erfolgt dabei aufgrund der gewählten, kontinuierlichen oder der bereits diskretisierten Ausgangsgleichungen in die diskrete oder variationelle Vorgehensweise.

Diskrete Sensitivitätsanalyse

Ausgangspunkt der diskreten Sensitivitätsanalyse ist die bereits diskretisierte Gleichgewichtsaussage aus Kapitel 3.3:

$$\mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{ext}(\bar{\lambda}) = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Diese wird zuerst gelöst und anschließend nach den Optimierungsvariablen \mathbf{s} abgeleitet. Dabei wird der Vektor der externen Kräfte in den Laststeigerungsfaktor $\bar{\lambda}$, sowie den konstanten Anteil \mathbf{P} der Last aufgesplittet. Nach Umstellung der differenzierten Gleichung ergibt sich diese zu:

$$\nabla_{\mathbf{D}}\mathbf{F}_{int}\nabla_{\mathbf{s}}\mathbf{D} = \nabla_{\mathbf{s}}\bar{\lambda}\mathbf{P} + \bar{\lambda}\nabla_{\mathbf{s}}^{\text{ex}}\mathbf{P} - \nabla_{\mathbf{s}}^{\text{ex}}\mathbf{F}_{int} \quad (4.10)$$

Berücksichtigt man, dass $\nabla_{\mathbf{D}}\mathbf{F}_{int}$ der Tangentensteifigkeit \mathbf{K}_T aus der FE-Berechnung nach dem erreichten Verschiebungszustand entspricht, und fasst die rechte Seite zu einem Pseudo-Lastvektor \mathbf{P}^{pseudo} zusammen, so erhält man ein lineares Gleichungssystem,

4. Grundlagen der Sensitivitätsanalyse

welches n_s mal gelöst werden muss, um die Sensitivität der Strukturantwort zu erhalten.

$$\mathbf{K}_T \nabla_s \mathbf{D} = \mathbf{P}^{pseudo} \quad (4.11)$$

Hierfür wird die bereits faktorisierte Steifigkeitsmatrix beibehalten und die rechte Seite für die einzelnen Entwurfsvariablen wiederholt aufgestellt. Der Berechnungsaufwand hängt somit direkt mit der Anzahl der Optimierungsvariablen zusammen.

Nachdem die Sensitivitäten für die Strukturantwort auf diesem Wege ermittelt wurden, kann zusammen mit dem expliziten Anteil der Sensitivitäten aus Gleichung (4.4) der entgeltige Sensitivitätswert in diskretisierter Form berechnet werden.

$$\nabla_s f = \nabla_s^{\text{ex}} f + \nabla_{\mathbf{D}} f \left[\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}^{pseudo} \right] \quad (4.12)$$

Aufgrund dieser direkten Vorgehensweise in einem einzigen Lösungsschritt wird diese Form der Sensitivitätsanalyse als „diskrete direkte Sensitivitätsanalyse“ bezeichnet.

Bemerkung: Berücksichtigt die Sensitivität der Strukturantwort materielle Nichtlinearität bzw. liegt generell ein pfadabhängiges Problem vor, dann sind die beschriebenen Ableitungen nach jedem Lastschritt zu berechnen und zur approximierten Lösung aufzaddieren (siehe z.B. LIPKA 2007).

Um die numerisch aufwendige Sensitivitätsanalyse der Strukturantwort zu umgehen, kann ein alternativer Ansatz gewählt werden. Die „diskrete adjungierte Sensitivitätsanalyse“ modifiziert das ursprüngliche Entwurfskriterium wie folgt:

$$\tilde{f} = f - \boldsymbol{\mu}^T \left[\underbrace{\mathbf{F}_{int}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{ext}(\bar{\lambda})}_{=\mathbf{0}} \right] \quad (4.13)$$

Die adjungierten Variablen $\boldsymbol{\mu}$, die auch als Lagrange-Multiplikatoren bezeichnet werden, verjüngen den Nullvektor des Gleichgewichts zu einer skalarwertigen Größe, die vom ursprünglichen Entwurfskriterium abgezogen wird. Dies verändert die anfängliche Aussage des Kriteriums nicht.

Leitet man diesen Ausdruck unter Berücksichtigung der expliziten und impliziten Anteile nach den Optimierungsvariablen ab und sortiert das Ergebnis neu, erhält man:

$$\nabla_s \tilde{f} = \nabla_s^{\text{ex}} f + \boldsymbol{\mu}^T \left(\underbrace{\bar{\lambda} \nabla_s^{\text{ex}} \mathbf{P} - \nabla_s^{\text{ex}} \mathbf{F}_{int}}_{\mathbf{P}^{pseudo}} \right) + \left(\nabla_{\mathbf{D}} f - \boldsymbol{\mu}^T \underbrace{\nabla_{\mathbf{D}} \mathbf{F}_{int}}_{\mathbf{K}_T} \right) \nabla_s \mathbf{D} \quad (4.14)$$

Obwohl die adjungierten Variablen ebenfalls von den Optimierungsvariablen abhängen, entfällt der Term mit ihren Ableitungen aufgrund der Multiplikation mit dem Nullterm des Gleichgewichts. Durch die sinnvolle Wahl der Lagrange-Multiplikatoren entfällt zu-

sätzlich die Sensitivität der Strukturantwort. Einsetzen des Ausdrucks

$$\boldsymbol{\mu}^T = \nabla_{\mathbf{D}} f \mathbf{K}_T^{-1} \quad (4.15)$$

unter Ausnutzung der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix in Gleichung (4.14) reduziert die Sensitivitätsanalyse auf rein explizite Terme.

$$\nabla_{\mathbf{s}} \tilde{f} = \nabla_{\mathbf{s}}^{\text{ex}} f + \boldsymbol{\mu}^T \underbrace{(\bar{\lambda} \nabla_{\mathbf{s}}^{\text{ex}} \mathbf{P} - \nabla_{\mathbf{s}}^{\text{ex}} \mathbf{F}_{\text{int}})}_{\mathbf{P}^{\text{pseudo}}} = \nabla_{\mathbf{s}}^{\text{ex}} f + \nabla_{\mathbf{D}} f \left[\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}^{\text{pseudo}} \right] \quad (4.16)$$

Bei der adjungierten Vorgehensweise muss also für alle Entwurfskriterien die Gleichung (4.15) gelöst und in Gleichung (4.14) eingesetzt werden.

Vergleicht man die „diskrete direkte Sensitivitätsanalyse“ aus Gleichung (4.12) mit der „diskreten adjungierten Sensitivitätsanalyse“ aus Gleichung (4.16) sieht man, dass sich diese entsprechen und nur durch die Reihenfolge der Matrixoperationen unterscheiden.

In beiden Fällen muss der Pseudolastvektor für jede einzelne Optimierungsvariable aufgestellt werden. Ebenso häufig ist bei der direkten Vorgehensweise die Matrixoperation $\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}^{\text{pseudo}}$ durchzuführen. Bei der adjungierten Methode ist hingegen das Produkt $\nabla_{\mathbf{D}} f \mathbf{K}_T^{-1}$ für alle Entwurfskriterien auszuwerten. Aus diesem Grund ist die direkte Sensitivitätsanalyse bei einer kleineren Anzahl an Optimierungsvariablen im Vergleich zur Anzahl der Entwurfskriterien zu bevorzugen. Dreht sich dieses Verhältnis um, wird die adjungierte Vorgehensweise favorisiert.

$$\frac{n_{\mathbf{s}}}{n_{\mathbf{f}} + n_{\mathbf{g}} + n_{\mathbf{h}}} \quad \begin{cases} < 1 & \rightarrow \text{direkte Sensitivitätsanalyse} \\ > 1 & \rightarrow \text{adjungierte Sensitivitätsanalyse} \end{cases} \quad (4.17)$$

Als Beispiel für den ersten Fall kann die Formoptimierung genannt werden, da sie in der Regel viele Nebenbedingungen und nur wenige Optimierungsvariablen aufweist. Anders sieht es bei der Topologieoptimierung aus, die viele Entwurfparameter und nur einige Nebenbedingungen verwendet. Sie wird als Beispiel für den zweiten Fall genannt.

Bemerkung: Zur Lösung geschichtsabhängiger Probleme wie der Plastizität, die eine inkrementelle Vorgehensweise notwendig machen, ist die adjungierte Vorgehensweise ungeeignet. Die Sensitivitäten der Spannungen erfordern die Lösung eines adjungierten Problems für jeden Freiheitsgrad, wodurch das Verfahren sehr rechenintensiv wird (MAUTE (1998)). Aus diesem Grund wird in der Literatur für solche Probleme die direkte Methode zur Bestimmung der Sensitivitäten vorgeschlagen.

Die in Tabelle 4.1 aufgeführte hybride Vorgehensweise bezieht sich auf Fälle, in denen die zweiten Ableitungen der Entwurfskriterien benötigt werden. Bei der Ermittlung

der Struktursensitivität kommt für die Ableitungen erster Ordnung die diskrete direkte Sensitivitätsanalyse zum Einsatz, wohingegen die zweiten Ableitungen mithilfe der adjungierten Sensitivitätsanalyse berechnet werden. HAFTKA (1982) vereinfacht die von HAUG (1981) eingeführte hybride Methode in der Form, dass der im Vergleich zur rein adjungierten Vorgehensweise bereits reduzierte Berechnungsaufwand um einen weiteren Faktor zwei verkleinert wird (siehe HAUG 1984).

Variationelle Sensitivitätsanalyse

Der Vollständigkeit halber wird an dieser Stelle zusätzlich die variationelle Sensitivitätsanalyse kurz eingeführt, obwohl sie in dieser Arbeit nicht verwendet wird. Der Hauptgrund diesbezüglich liegt in der Tatsache begründet, dass die Anreicherungsfunktionen des erweiterten Verschiebungsfeldes, die aus den geometriebeschreibenden Level Set Funktionen aus Kapitel 3.2 gebildet werden, nur in diskretisierter, knotenbasierter Form und nicht in variationeller Schreibweise vorliegen.

Es erfolgt bei der variationellen Sensitivitätsanalyse die gleiche Unterteilung in direkte, adjungierte und hybride Vorgehensweise wie bei der diskreten Sensitivitätsanalyse. Bei der variationellen direkten Sensitivitätsanalyse wird als Ausgangspunkt für die analytische Herleitung der Gradienteninformationen die schwache Form des Gleichgewichts vor der Diskretisierung verwendet, siehe Gleichung (3.43):

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma = 0 \quad (4.18)$$

Ebenso erfolgt die Modifikation der Entwurfskriterien für die adjungierte Vorgehensweise durch die Erweiterung mit dem strukturellen Gleichgewicht:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \boldsymbol{\mu}^T \left[\int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Gamma_{t^*}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^* \, d\Gamma \right] \quad (4.19)$$

Die Vorgehensweise der einzelnen Verfahren bei der Ermittlung der Sensitivitäten entsprechen denen der diskreten Sensitivitätsanalyse. Beim direkter Verfahren werden zunächst die Sensitivitäten der Strukturantwort ermittelt und in den impliziten Anteil der Ableitung der Entwurfskriterien eingesetzt, um die entgeltigen Werte der Gradienten zu erhalten. Im adjungierten Fall werden hingegen zuerst die Lagrange-Multiplikatoren ermittelt und entsprechend eingesetzt. Dabei erfolgt die Diskretisierung der variationell hergeleiteten Gleichungen nach dem Differenzieren. Bei gleicher Wahl der Diskretisierung, sowie der identischen numerischen Integration führen sowohl die diskrete, als auch die variationelle Sensitivitätsanalyse zum selben Ergebnis.

4.3. Vergleich zwischen den Verfahren der Sensitivitätsanalyse

Nach der Einteilung in die drei Verfahren Finite Differenzen, Diskrete Sensitivitätsanalyse und Variationelle Sensitivitätsanalyse, mit einer entsprechenden direkten oder adjungierten Vorgehensweise, stellt sich die Frage nach der Wahl des geeigneten Ermittlungsverfahrens für die Gradienten. Unabhängig von den Einschränkungen, die bereits erwähnt wurden, spielen dabei drei Gesichtspunkte eine entscheidende Rolle. Nach VAN KEULEN U. A. (2005) sind dies die Genauigkeit eines Verfahrens, dessen Berechnungsaufwand sowie die Schwierigkeiten bei dessen Implementierung.

Die Genauigkeit der berechneten Sensitivitäten kann das Optimierungsergebnis, sowie die Anzahl der notwendigen Optimierungsschritte beeinflussen. Ebenso kann eine vorzeitige Stagnation des Optimierungsprozesses eintreten. Die Genauigkeit wird als die Differenz zwischen den ermittelten Gradienten und den durch eine exakte Ableitung der kontinuierlichen Gleichungen unter Verwendung der genauen Lösung erhaltenen Sensitivitäten angegeben. Bedingt durch die Tatsache, dass exakte analytische Lösungen nicht existieren, führen VAN KEULEN U. A. (2005) den Begriff der Konsistenz ein. Dieser beschreibt den Unterschied zwischen den berechneten Ableitungen und den zwar unbekannt, aber exakten Werten des numerischen Modells.

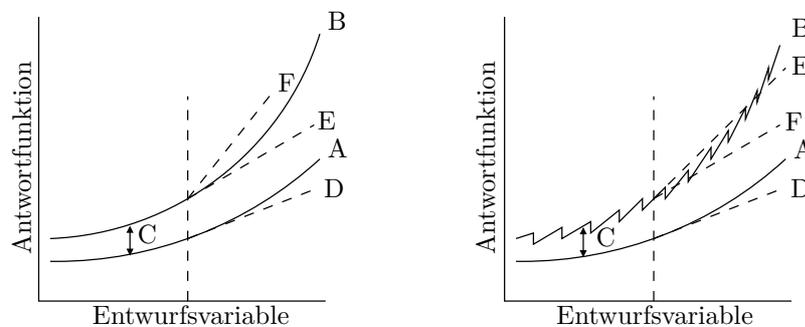


Abbildung 4.1.: Gradientengenauigkeit glatter und nichtglatter Antwortfunktionen

Anhand von Abbildung 4.1 können die zuvor beschriebenen Begriffe anschaulich erläutert werden. Die mit „A“ gekennzeichneten Kurven stellen die exakte Lösung der kontinuierlichen Gleichungen dar. Die zugehörigen numerischen Lösungen sind mit einem „B“ versehen, wobei links im Bild eine glatte Lösung und auf der rechten Seite eine nichtglatte Lösung dargestellt wird. Diese entsteht in der vorliegenden Arbeit aufgrund des Rissfortschritts, der immer elementweise und nicht kontinuierlich erfolgt. Der Fehler des numerischen Modells wird mit „C“ angegeben.

Die exakten Ableitungen der kontinuierlichen Gleichungen sind mit einem „D“ markiert. „E“ gibt die genauen Gradienten des numerischen Modells wieder und „F“ die tatsächlich berechneten Werte. Dabei beschreibt der Unterschied zwischen den letztgenannten Werten „E“ und „F“ die Konsistenz. Die Differenz zwischen „D“ und „F“ gibt die Genauigkeit der Gradienten wieder.

Neben der Genauigkeit eines Verfahrens spielt der Berechnungsaufwand eine entscheidende Rolle. Wie in Kapitel 4.2.2 bereits beschrieben, kann zum Beispiel das Verhältnis zwischen der Anzahl der OptimierungsvARIABLEN und der Entwurfskriterien den Ausschlag geben, ob mit einem direkten oder adjungierten Verfahren gearbeitet wird. Die Wahl zwischen einem diskreten oder variationellen Verfahren wird hingegen nur vom vorliegenden Strukturproblem beeinflusst.

Beim Berechnungsaufwand kommt als weitere Komponente hinzu, ob die zu berechnenden Sensitivitäten auf der Ebene der diskretisierten Finiten Elemente erfolgen kann oder eine Lösung auf dem globalen Gebiet erforderlich ist. Zum Beispiel erfordert die Berechnung der Sensitivität der Zustandsvariablen $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{u}$ in der Regel das Lösen eines linearen Gleichungssystems mit den vollständig assemblierten Systemmatrizen. Bei bekannten Gradienten des Verschiebungsfeldes sind hingegen die Sensitivitäten der Duktilität auf Elementebene zu ermitteln.

Die Schwierigkeiten bei der Implementierung sind maßgeblich vom vorhandenen Programmcode abhängig. Numerische Differenzenverfahren sind in diesem Zusammenhang am einfachsten umzusetzen, da sie keinen direkten Zugang zum Quellcode benötigen. Analytische Verfahren sind hingegen ohne einen direkten Zugang zur Software nicht realisierbar. Bei den semi-analytischen Verfahren reduziert sich ein Teil des Implementierungsaufwands durch die Approximation von Sensitivitätsanteilen in Form von numerischen Differenzen. Soll auf jegliche Art von Approximation verzichtet werden, ist ein erheblicher Programmieraufwand auf Elementebene notwendig, um die Sensitivitätsanalyse umzusetzen. Dieser Aufwand ist bei den diskreten Sensitivitätsanalyseverfahren in der Regel höher als bei den variationellen Verfahren.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, genaue Gradienteninformationen bei möglichst geringem Berechnungsaufwand zu erhalten. Da die numerischen Differenzenverfahren bezüglich der Genauigkeit ihrer Ergebnisse eine große Unsicherheit aufweisen und zudem einen erheblichen numerischen Berechnungsaufwand erfordern, scheiden diese Verfahren zur Gradientenermittlung aus. Sie werden jedoch mangels Alternativen zur Verifizierung der analytisch ermittelten Sensitivitäten herangezogen.

Bei den variationellen Methoden hat man den Vorteil, dass die Diskretisierung erst nach der Gradientenbildung erfolgt. Somit sind die ermittelten Sensitivitäten in der Regel genauer als dies bei der Ableitung bereits diskretisierter Gleichungen der Fall ist.

Da die topologie- und formgebenden Level Set Funktionen jedoch, wie bereits zuvor beschrieben, nur in diskretisierter Form vorliegen, scheidet die variationelle Vorgehensweise ebenfalls aus.

Von den verbleibenden diskreten Verfahren muss die adjungierte Sensitivitätsanalyse aufgrund des geschichtsabhängigen Traktions-Verschiebungssprung-Gesetzes ebenfalls ausgeschlossen werden. Da es sich bei den vorliegenden Optimierungsproblemen um Aufgabenstellungen mit wenigen Entwurfsvariablen handelt, ist dies jedoch irrelevant. Die adjungierte Sensitivitätsanalyse spielt ihre Vorteile erst bei vielen Optimierungsvariablen aus.

Somit verbleibt die diskrete, direkte Sensitivitätsanalyse zur Ermittlung der Gradienten von Zielfunktion und Nebenbedingungen. Die Genauigkeit dieses Verfahrens kann durch den Vergleich mit den Ergebnissen eines numerischen Differenzenverfahrens nachgewiesen werden. Lediglich im Bereich von Matrixrissen ergeben sich Schwierigkeiten, die jedoch nichts mit dem eigentlichen Verfahren zu tun haben. Dieser Sachverhalt wird ausführlich im folgenden Kapitel 5 erläutert.

Der Berechnungsaufwand ist im Vergleich zu einem numerischen Verfahren deutlich reduziert. Durch das Zielkriterium „Maximierung der Duktilität“ sind jedoch nach jedem Verschiebungsinkrement die Gradienten bezüglich der Entwurfsparameter zu ermitteln und zur Gesamtsensitivität aufzuaddieren. Dies bedeutet einen erheblichen Mehraufwand im Vergleich zu einer Sensitivitätsanalyse, die im Nachlauf zur Strukturanalyse erfolgen kann.

Die Implementierung der diskreten, direkten Sensitivitätsanalyse ist zwar sehr aufwendig, jedoch aufgrund des vollständig institutseigenen FEM-Forschungsprogramms CCA-RAT problemlos in den vorhandenen Programmcode einzubinden. Dabei ist eine große Anzahl an Routinen auf Elementebene umzusetzen. Die Einzelheiten dazu werden unter anderem im Zusammenhang mit der X-FEM im nächsten Kapitel erklärt.

Zielkriterium - Sensitivitätsanalyse bei X-FEM

Nachdem im vorhergehenden Kapitel 4 die Grundlagen der Sensitivitätsanalyse erläutert wurden, sollen diese nun konkret auf die behandelten Problemstellungen aus Kapitel 3 angewendet werden. Zunächst wird das pfadabhängige Zielkriterium „Maximierung der Duktilität“ eingeführt, um im Anschluss die für den Optimierungsalgorithmus notwendigen Gradienten zu bestimmen.

Um das Zielkriterium selbst ableiten zu können, muss zunächst bei Verwendung der diskreten Sensitivitätsanalyse die Empfindlichkeit der Zustandsvariablen auf eine Änderung der Entwurfparameter ermittelt werden. Dies erfolgt durch die Ableitung der Gleichgewichtsbeziehung nach den Optimierungsvariablen unter Einbeziehung der geometrischen und materiellen Abhängigkeiten. Es wird die Sensitivität der materiellen Grenzflächen, der damit verbundenen Anreicherungsfunktionen ebenso wie die Sensitivität der kinematischen und konstitutiven Beziehungen ermittelt. Anschließend wird auf die Abhängigkeit der Sensitivitäten vom Berechnungsalgorithmus (Last-, Verschiebungskontrolle) eingegangen.

Abgeschlossen wird das Kapitel mit der Erläuterung der Nebenbedingung „Konstantes Gewicht“ bzw. „Konstantes Volumen“ und der Einführung von Kontrollmechanismen zur Einhaltung eines Mindestabstands zwischen den einzelnen Einschlüssen.

5.1. Zielkriterium Duktilität

Als Ausgangspunkt wird die Berechnung der Duktilität im Zusammenhang mit der X-FEM vorgestellt. Erst im Anschluss daran werden deren Sensitivitäten bezüglich der Optimierungsvariablen ermittelt. Ausgangspunkt ist dabei die Formulierung der Duktilität aus Tabelle 2.1, in der diese als Integral der Verzerrungsenergie definiert ist.

$$f_D(\mathbf{s}) = - \int_{\Omega} \int_{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} d\varepsilon d\Omega \quad (5.1)$$

Zur Bildung des darin enthaltenen Verzerrungssinkrements $d\varepsilon$ greift man auf die linearisierten Green-Lagrange Verzerrungen $\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla_X \mathbf{u} + \nabla_X^T \mathbf{u}) = \nabla_X^s \mathbf{u}$ aus Kapitel 3.1.3 zurück.

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{u}} d\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \underbrace{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right) \right]}_{\varepsilon = \nabla_X^s \mathbf{u}} d\mathbf{u} = \nabla_X^s d\mathbf{u} \quad (5.2)$$

Das Einsetzen des erweiterten Verschiebungsfeldes aus Gleichung 3.7 zusammen mit der Vorzeichenfunktion $\chi_{c,j}$ aus Gleichung 3.10 liefert somit:

$$d\varepsilon = \nabla_X^s d\hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} [(d\tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \nabla_X \chi_{m,i})^s + \chi_{m,i} \nabla_X^s d\tilde{\mathbf{u}}_i] + \sum_{j=1}^{n_c} [2 \delta_{c,j} (d\tilde{\mathbf{u}}_j \otimes \mathbf{N}_{c,j})^s + \chi_{c,j} \nabla_X^s d\tilde{\mathbf{u}}_j] \quad (5.3)$$

Setzt man diese Formulierung in Gleichung 5.1 ein, ist es möglich, die Anteile, die mit den diskreten Rissen zusammenhängen, von der Gleichung abzuspalten. Bei diesem Vorgang verwendet man sowohl die Eigenschaft der Dirac-Delta Verteilung, ein Volumenintegral in ein Flächenintegral zu überführen,

$$\int_{\Omega} \delta_{c,j}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\Omega = \int_{\Gamma_{c,j}} f(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (5.4)$$

als auch die Definition des Verschiebungssprungs $[\mathbf{u}]$ aus Gleichung 3.11 ($[\mathbf{u}]_{c,j} := 2\tilde{\mathbf{u}}_j$) sowie des kohäsiven Spannungsvektors \mathbf{t} aus Gleichung 3.18 ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{c,j} = \mathbf{t}_{c,j}$). Man erhält mit diesen Voraussetzungen die Duktilität als Summe aus den Anteilen auf den Rissen, sowie denen neben den Rissen über beide Phasen.

$$f_D(\mathbf{s}) = - \underbrace{\int_{\Omega} \int_{\varepsilon} \boldsymbol{\sigma} d\varepsilon d\Omega}_{\text{neben den Rissen}} - \sum_{j=1}^{n_c} \underbrace{\int_{\Gamma} \int_{[\mathbf{u}]} \mathbf{t}_{c,j} d[\mathbf{u}]_{c,j} d\Gamma}_{\text{Risse}} \quad (5.5)$$

Im ersten Teil der Formel werden die Spannungen über die Verzerrungen integriert, die sich neben den Rissen befinden. Der zweite Ausdruck gibt die Integration des Spannungsvektors über die Rissöffnung wieder. Die Integrationen werden dabei mithilfe der Trapezregel numerisch approximiert. Dazu werden die Werte zwischen den einzelnen Lastschritten näherungsweise durch eine Sehne zwischen den Funktionswerten an den Intervallgrenzen ersetzt. Dies entspricht der Sehnentrapezregel, die als Summe über alle Lastschritte k ausgeführt wird. Die Integration über das Gebiet, beziehungsweise die Rissfläche wird nach den Regeln aus Kapitel 3.3.3 ausgeführt.

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_k} \boldsymbol{\sigma} \, d\varepsilon &\approx \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{i-1} + \boldsymbol{\sigma}_i) \cdot \underbrace{(\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1})}_{\Delta\varepsilon} \\ \int_{[\mathbf{u}]_0}^{[\mathbf{u}]_k} \mathbf{t} \, d[\mathbf{u}] &\approx \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} (\mathbf{t}_{i-1} + \mathbf{t}_i) \cdot \underbrace{([\mathbf{u}]_i - [\mathbf{u}]_{i-1})}_{\Delta[\mathbf{u}]} \end{aligned} \quad (5.6)$$

Man erkennt, dass die Sensitivitätsinkremente der Duktilität, wie bereits in Kapitel 4 für pfadabhängige Probleme angemerkt, für jeden Lastschritt zu berechnen und zum Gesamtwert aufzuaddieren sind.

$$\nabla_{\mathbf{s}} f_{\text{D}}(\mathbf{s}) = \sum_{i=1}^k \nabla_{\mathbf{s}} f_{\text{D},i}(\mathbf{s}) \quad (5.7)$$

Bildet man die Ableitungen für einen Lastschritt $i-1 \rightarrow i$, so erhält man bei Vernachlässigung der Summe über die verschiedenen Risse folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}} f_{\text{D},i}(\mathbf{s}) &= - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma}_{i-1} + \nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma}_i) \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{i-1} + \boldsymbol{\sigma}_i) \cdot (\nabla_{\mathbf{s}} \varepsilon_i - \nabla_{\mathbf{s}} \varepsilon_{i-1}) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_{i-1} + \boldsymbol{\sigma}_i) \cdot (\varepsilon_i - \varepsilon_{i-1}) \, \nabla_{\mathbf{s}} d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{t}_{i-1} + \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{t}_i) \cdot ([\mathbf{u}]_i - [\mathbf{u}]_{i-1}) \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (\mathbf{t}_{i-1} + \mathbf{t}_i) \cdot (\nabla_{\mathbf{s}} [\mathbf{u}]_i - \nabla_{\mathbf{s}} [\mathbf{u}]_{i-1}) \, d\Gamma \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{1}{2} (\mathbf{t}_{i-1} + \mathbf{t}_i) \cdot ([\mathbf{u}]_i - [\mathbf{u}]_{i-1}) \, \nabla_{\mathbf{s}} d\Gamma \end{aligned} \quad (5.8)$$

Zur Ermittlung der Gradienten der Duktilität bezüglich der Optimierungsvariablen sind somit neben den Spannungen und Verzerrungen aus der Strukturanalyse deren Sensitivitäten, sowie der Einfluss der Parameter auf die Integrationsgebiete zu ermitteln.

5.1.1. Ableitung der Gleichgewichtsbedingung

Aufgrund der Abhängigkeit der Spannungs-, Verzerrungs- und Rissöffnungssensitivitäten vom Verschiebungsfeld \mathbf{u} sowie dessen Gradienten $\nabla_s \mathbf{u}$, sind die entsprechenden Werte bei Verwendung der direkten Sensitivitätsanalyse vorab zu ermitteln.

In der Regel werden für nichtlineare Strukturprobleme inkrementelle Ansätze zur Lösung des Gleichgewichtsproblems herangezogen. Somit wird im Allgemeinen auch die Sensitivitätsanalyse als Addition von Inkrementen durchgeführt. Insbesondere bei pfadabhängigen Problemen bzw. Abhängigkeiten von Geschichtsvariablen wird dieser Ansatz verwendet, da nicht nur die Zustandsvariablen, sondern auch deren Gradienten von vorherigen Lastschritten beeinflusst werden. Die Ermittlung der Sensitivitätsinkremente erfolgt in diesen Fällen nach jedem Lastschritt aus der Ableitung des inkrementellen Gleichgewichts. Für plastisches Materialverhalten haben VIDAL UND HABER (1993) die entsprechenden Ableitungen in variationeller Form hergeleitet, wohingegen KLEIBER U. A. (1995) von der bereits diskretisierten Gleichgewichtsgleichung ausgegangen sind.

Hauptproblem der inkrementellen Vorgehensweise ist der auftretende Berechnungsfehler in den einzelnen Inkrementen, der je nach gewählter Schrittweite entsprechend groß ausfallen kann und sich über alle Lastschritte hinweg zum Gesamtfehler akkumuliert. Liegt ein Entwurfskriterium vor, das im Gegensatz zur Duktilität pfadunabhängig ist, wird versucht, die Sensitivitätsanalyse nach jedem Lastschritt zu umgehen und diese am Ende der gesamten Strukturanalyse durchzuführen.

Da es sich beim Entwurfskriterium „Maximierung der Duktilität“ um ein pfadabhängiges Problem handelt, muss die Sensitivitätsanalyse der Duktilität in inkrementeller Form durchgeführt werden. Um die Genauigkeit der berechneten Sensitivitätsinkremente zu erhöhen, wird in dieser Arbeit jedoch nicht das inkrementelle Gleichgewicht abgeleitet, sondern eine direkte, nichtinkrementelle Formulierung mithilfe der Gleichgewichtsbedingung (3.51) bis (3.53) zur Sensitivitätsermittlung gewählt. Dieser Ansatz ist nach BUGEDA U. A. (1999) für einige spezielle nichtlineare Materialmodelle möglich, deren Spannungen sich aus den aktuellen Verzerrungen zum Zeitpunkt t , sowie in einigen Fällen aus den Verzerrungen zu einem früheren Zeitpunkt $t^u (t^u < t)$ ermitteln lassen. Dies trifft auf die Elastizität (lineare, ebenso wie nichtlineare), die perfekte Plastizität und Schädigungsmodelle zu. Erstmals ist das direkte Vorgehen bei materiell nichtlinearen Problemen in RYU U. A. (1985) zu finden. SILVA U. A. (1997) wenden es später auf die ratenunabhängige Elastoplastizität an; BUGEDA U. A. (1999) nutzen es unter anderem im Zusammenhang mit der Schädigung.

Nach jedem Lastschritt gilt das diskretisierte Gleichgewicht zwischen den inneren und äußeren Kräften aus den Gleichungen (3.51) bis (3.53) als erfüllt. Zur Ermittlung der Gradienten der Zustandsvariablen \mathbf{u} werden diese Gleichungen nach den Optimierungs-

variablen \mathbf{s} abgeleitet. Dabei wird angenommen, dass die äußeren Lasten, die im Folgenden nur auf nicht erweiterte Elemente aufgebracht werden, von den Entwurfsvariablen unabhängig sind. Dies gilt jedoch nur bei einer lastgesteuerten Systemanalyse. Infolge einer Verschiebungskontrolle treten zusätzliche, nicht vernachlässigbare Anteile auf, welche in Kapitel 5.2 erläutert werden. Auf einen Index zur Markierung des untersuchten Laststufe wird an dieser Stelle verzichtet.

$$\bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma} \nabla_{\mathbf{s}} d\Omega \right] = \mathbf{0} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{B}}_{b,1}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,1}^T \nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,1}^T \boldsymbol{\sigma} \nabla_{\mathbf{s}} d\Omega \right] &= \mathbf{0} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{B}}_{b,n_m}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,n_m}^T \nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,n_m}^T \boldsymbol{\sigma} \nabla_{\mathbf{s}} d\Omega \right] = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{B}}_{c,1}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,1}^T \nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,1}^T \boldsymbol{\sigma} \nabla_{\mathbf{s}} d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_{c,1}^e} 2 \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,1} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{c,1}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{t}_{c,1} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{c,1}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,1} \nabla_{\mathbf{s}} d\Gamma \right] &= \mathbf{0} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{n_{ele}} \left[\int_{\Omega^e} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{B}}_{c,n_c}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,n_c}^T \nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega + \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,n_c}^T \boldsymbol{\sigma} \nabla_{\mathbf{s}} d\Omega + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_{c,n_c}^e} 2 \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,n_c} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{c,n_c}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{t}_{c,n_c} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_{c,n_c}^e} 2 \mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,n_c} \nabla_{\mathbf{s}} d\Gamma \right] &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Nach Auswertung der einzelnen Ausdrücke, auf die in den nächsten Abschnitten ausführlich eingegangen wird, sowie der Umverteilung von einigen Termen auf die rechte Seite der Gleichungen, ergibt sich ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Sensitivitäten des Verschiebungsfeldes in der aktuellen Laststufe:

$$\mathbf{K}_T \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{D} = \mathbf{P}^{pseudo} \quad (5.12)$$

Dies entspricht Gleichung (4.11) aus Kapitel 4.2.2, die für jede einzelne Entwurfsvariable, also n_s mal, auszuwerten ist. Mit den erhaltenen Werten können die Spannungs-, Verzerrungs- und Rissöffnungssensitivitäten ermittelt werden. Die entsprechenden Formeln werden in den nächsten Abschnitten erläutert.

5.1.2. Sensitivität der materiellen Grenzfläche

Alle gewählten Entwurfparameter beziehen sich in dieser Arbeit auf die geometrische Beschreibung von Struktureinschlüssen in einem Matrixmaterial. Diese werden als Ellipsen mithilfe der Level-Set-Funktion aus Gleichung (3.38) beschrieben. Als Entwurfparameter werden die Halbachsen a_i und b_i , der Hauptachseneckwinkel α , sowie der Ursprung $\bar{\mathbf{x}}_i$ der einzelnen Ellipsen gewählt. Die Sensitivitätsanalyse der impliziten Geometriebeschreibung ist somit der Ausgangspunkt zur Ermittlung aller anderen Gradiententerme. Um die entsprechende Gleichung wieder ins Gedächtnis zu rufen, wird sie einfach erneut wiedergegeben.

$$\phi_{m,i} = \sqrt{\frac{[\cos \alpha(x_1 - \bar{x}_{1,i}) + \sin \alpha(x_2 - \bar{x}_{2,i})]^2}{(a_i)^2} + \frac{[-\sin \alpha(x_1 - \bar{x}_{1,i}) + \cos \alpha(x_2 - \bar{x}_{2,i})]^2}{(b_i)^2}} - 1 \quad (5.13)$$

Die Ableitung der Level-Set-Funktion nach den Entwurfparametern stellt für die einzelnen Ellipsen keine Schwierigkeit dar. Fasst man den Ausdruck unter der Wurzel zu einer Funktion $f(\mathbf{s})$ zusammen, so ergeben sich die Gradienten in expliziter Form zu:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \phi_{m,i} = \frac{\nabla_{\mathbf{s}} f(\mathbf{s})}{2 \sqrt{f(\mathbf{s})}} \quad (5.14)$$

Mithilfe dieser Ableitung lässt sich die Sensitivität der Schnittpunkte zwischen den Kanten eines finiten Elementes und der materiellen Grenzfläche angeben. Der Schnittpunkt auf einer Elementkante zwischen den Elementknoten I und J ist dabei wie folgt definiert:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_I - \frac{\phi_{m,i,I}}{\phi_{m,i,J} - \phi_{m,i,I}} [\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I] \quad \text{wenn} \quad \phi_{m,i,I} \phi_{m,i,J} < 0 \quad (5.15)$$

Aus diesem Ausdruck bildet man die Ableitung des Schnittpunktes in globalen Koordinaten zu:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{x}_p = \frac{\phi_{m,i,I} \nabla_{\mathbf{s}} \phi_{m,i,J} - \nabla_{\mathbf{s}} \phi_{m,i,I} \phi_{m,i,J}}{(\phi_{m,i,J} - \phi_{m,i,I})^2} [\mathbf{x}_J - \mathbf{x}_I] \quad (5.16)$$

Mithilfe der ermittelten Schnittpunkte wird die Triangulierung der erweiterten finiten Elemente für die in Kapitel 3.3.3 beschriebene numerische Integration durchgeführt. Eine Variation der impliziten Level-Set-Funktion beeinflusst in diesem Zusammenhang sowohl die Jacobi-Determinanten $|\mathbf{J}|$ und $|\bar{\mathbf{J}}|$ aus Gleichung (3.56) und (3.57) als auch die Lage der Integrationspunkte, die nach Gleichung (3.58) ermittelt wird. Um die Sensitivität der Gaußpunkte angeben zu können, muss nach der Formulierung in Gleichung (3.58)

die Sensitivität der Eckknoten der Teilbereiche in lokalen Koordinaten bekannt sein.

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{s}} \xi &= \bar{N}_{\bar{j}}(r, s) \nabla_{\mathbf{s}} \xi_{\bar{j}} \\ \nabla_{\mathbf{s}} \eta &= \bar{N}_{\bar{j}}(r, s) \nabla_{\mathbf{s}} \eta_{\bar{j}}\end{aligned}\tag{5.17}$$

Die Teilbereichskoordinaten $\xi_{\bar{j}}$ werden dabei analog zu ihrer Ermittlung in globalen Koordinaten bestimmt. Dazu werden die Koordinaten der Schnittpunkte in lokalen Koordinaten aufgestellt, um anschließend die Mittelpunkte der beiden Untergebiete auf beiden Seiten der Diskontinuität zu berechnen (siehe Abbildung 3.13).

$$\xi_p = \xi_I - \frac{\phi_{m,i,I}}{\phi_{m,i,J} - \phi_{m,i,I}} [\xi_J - \xi_I] \quad \text{wenn} \quad \phi_{m,i,I} \phi_{m,i,J} < 0\tag{5.18}$$

Die Gradientenermittlung erfolgt analog zu Gleichung (5.16).

$$\nabla_{\mathbf{s}} \xi_p = \frac{\phi_{m,i,I} \nabla_{\mathbf{s}} \phi_{m,i,J} - \nabla_{\mathbf{s}} \phi_{m,i,I} \phi_{m,i,J}}{(\phi_{m,i,J} - \phi_{m,i,I})^2} [\xi_J - \xi_I]\tag{5.19}$$

Dieses Vorgehen ist notwendig, da bei Kenntnis der Teilbereichsknoten in globalen Koordinaten keine direkte Ermittlung der zugehörigen lokalen Elementkoordinaten möglich ist. Diese müssten über eine inverse, isoparametrische Abbildung bestimmt werden, die wegen ihrer nichtlinearen Terme ein lokales Newton-Verfahren erfordert. Dies ist zwar für die Ermittlung der lokalen Koordinaten möglich, jedoch nicht für die zugehörige Sensitivitätsanalyse umsetzbar.

Der Einfluss der impliziten Level-Set-Funktion auf die Jacobitransformationen leitet sich aus der Interpretation des Ausdrucks $|\mathbf{J}||\bar{\mathbf{J}}|$ als doppelte Fläche der Teilgebietes Ω_i aus Kapitel 3.3.3 ab. Für ein einzelnes zu integrierendes Teilbereichsdreieck mit den Knoten $\bar{1}$ bis $\bar{3}$ berechnet sich die Fläche aus den globalen Koordinaten zu:

$$A = |(x_{\bar{2}} - x_{\bar{1}})(y_{\bar{3}} - y_{\bar{1}}) - (x_{\bar{3}} - x_{\bar{1}})(y_{\bar{2}} - y_{\bar{1}})|/2.0\tag{5.20}$$

Hieraus lässt sich sofort die Sensitivität der Jacobitransformationen ableiten:

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{s}} (|\mathbf{J}||\bar{\mathbf{J}}|) &= \nabla_{\mathbf{s}} (2A) \\ &= \pm [(\nabla_{\mathbf{s}} x_{\bar{2}} - \nabla_{\mathbf{s}} x_{\bar{1}})(y_{\bar{3}} - y_{\bar{1}}) + (x_{\bar{2}} - x_{\bar{1}})(\nabla_{\mathbf{s}} y_{\bar{3}} - \nabla_{\mathbf{s}} y_{\bar{1}}) \\ &\quad - (\nabla_{\mathbf{s}} x_{\bar{3}} - \nabla_{\mathbf{s}} x_{\bar{1}})(y_{\bar{2}} - y_{\bar{1}}) - (x_{\bar{3}} - x_{\bar{1}})(\nabla_{\mathbf{s}} y_{\bar{2}} - \nabla_{\mathbf{s}} y_{\bar{1}})]\end{aligned}\tag{5.21}$$

Zuletzt wird in diesem Abschnitt noch der Gradient der Flächennormalen \mathbf{n} berechnet. Der Normalenvektor wurde in Gleichung (3.35) in Abhängigkeit der Level-Set-Funktion definiert und wird im Zusammenhang mit dem Spannungsvektor \mathbf{t} an den Gaußpunkten

der Rissfläche benötigt. Die Ableitung dieses Ausdrucks liefert:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{n} = \frac{\nabla_{\mathbf{s}} (\nabla_X (\phi_{m,i})) |\nabla_X (\phi_{m,i})| - \nabla_X (\phi_{m,i}) \nabla_{\mathbf{s}} |\nabla_X (\phi_{m,i})|}{|\nabla_X (\phi_{m,i})|^2} \quad (5.22)$$

Diskretisiert man diese Gleichung, so erhält man:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{n} = \frac{\nabla_{\mathbf{s}} \left(\sum_{I=1}^{n_{nod}} (B_I \phi_{m,i,I}) \right) \left| \sum_{I=1}^{n_{nod}} B_I \phi_{m,i,I} \right| - \sum_{I=1}^{n_{nod}} B_I \phi_{m,i,I} \nabla_{\mathbf{s}} \left| \sum_{I=1}^{n_{nod}} B_I \phi_{m,i,I} \right|}{\left| \sum_{I=1}^{n_{nod}} B_I \phi_{m,i,I} \right|^2} \quad (5.23)$$

Bemerkung: Bei der Ableitung einer Betragsfunktion ist zu beachten, dass ein negativer Wert im Betrag zu einem Vorzeichenwechsel der Gradienten führt. Die Ableitung ist nur für Werte ungleich Null definiert; Beispiel: $\nabla_x |x| = \pm 1$ für $x \gtrless 0$.

5.1.3. Ableitung der Anreicherungsfunktionen

Nachdem im vorhergehenden Kapitel die Sensitivität der geometriebeschreibenden Level-Set-Funktion und der Lage der materiellen Grenzfläche mit den zugehörigen Integrationsgebieten ermittelt wurde, ist die nächste abzuleitende Größe die Anreicherungsfunktion $\chi_{m,i}$. Diese wurde in Kapitel 3.1.2 zur Erweiterung des Verschiebungsfeldes bei perfektem Verbund an materiellen Grenzflächen eingeführt und in Kapitel 3.2.1 mithilfe der Level-Set-Funktion im Rahmen einer Finite-Element Formulierung in knotenbasierter Form spezifiziert.

$$\chi_{m,i} = \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I |\phi_{m,i,I}| - \left| \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I \phi_{m,i,I} \right| \quad (5.24)$$

Die Anreicherungsfunktion, die als Wiederholung von Gleichung (3.39) erneut angegeben wurde, enthält ebenso, wie die zuvor behandelte Flächennormalen \mathbf{n} , einige Ausdrücke in normierter Form. Diese bedingen bei ihrer Ableitung eine Fallunterscheidung, die vom Vorzeichen des ursprünglichen Ausdrucks abhängt. Bei positiven Werten kann der Betrag einfach entfallen, ansonsten ist ein Vorzeichenwechsel vorzunehmen.

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}} \chi_{m,i} &= \sum_{I=1}^{n_{nod}} (\nabla_{\mathbf{s}} N_I |\phi_{m,i,I}| + N_I \nabla_{\mathbf{s}} |\phi_{m,i,I}|) - \nabla_{\mathbf{s}} \left| \sum_{I=1}^{n_{nod}} N_I \phi_{m,i,I} \right| \\ &= \sum_{I=1}^{n_{nod}} (\nabla_{\mathbf{s}} N_I |\phi_{m,i,I}| \pm N_I \nabla_{\mathbf{s}} \phi_{m,i,I}) \mp \left(\sum_{I=1}^{n_{nod}} (\nabla_{\mathbf{s}} N_I \phi_{m,i,I} + N_I \nabla_{\mathbf{s}} \phi_{m,i,I}) \right) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Als unbekannte Größe tritt bei der Gradientenermittlung der Anreicherungsfunktion neben der bereits beschriebenen Ableitung der Level Set Funktion die Ableitung der Ansatzfunktionen N_I auf. Diese sind auf Elementebene definiert und verändern sich aufgrund einer Variation der Entwurfparameter nicht. Aus diesem Grund werden deren Ableitung häufig unzulässigerweise vernachlässigt. Man muss jedoch bedenken, dass sich zwar die Funktionen an sich nicht verändern, aber deren Auswertungspunkte sich infolge der Grenzflächenvariation sehr wohl verschieben. Für die Integration über die Teilgebiete ergibt sich somit eine Variation der Formfunktionen aufgrund der veränderten Gaußpunktkoordinaten $\xi(r, s)$.

Betrachtet man die Ansatzfunktionen N_I , so wird die Abhängigkeit vom Auswertungspunkt schnell deutlich.

$$N_I = \frac{1}{4} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) \quad (5.26)$$

Der Vektor $\xi_I = (\xi_I, \eta_I)$ beschreibt in dieser Gleichung die Knotenkoordinaten eines Elementes in lokaler Form, mit $\xi_I, \eta_I = \pm 1, \pm 1$. Die Ableitung der bilinearen Ansatzfunktionen berechnet sich somit zu:

$$\nabla_s N_I = \frac{1}{4} [(\xi_I \nabla_s \xi) (1 + \eta_I \eta) + (1 + \xi_I \xi) (\eta_I \nabla_s \eta)] \quad (5.27)$$

Aufgrund der direkten Herleitung des B-Operators aus den Ansatzfunktionen (siehe Kapitel 3.3.2) wird dessen Ableitung an dieser Stelle unmittelbar angehängt. Der Differentialoperator \mathbf{L} , dessen Ableitung von den Entwurfsvariablen unabhängig ist, liefert den B-Operator als symmetrischen Anteil des Gradienten der Ansatzfunktionen \mathbf{N} . Der Gradient des B-Operators kann somit wie folgt ermittelt werden:

$$\nabla_s \mathbf{B} = \nabla_s \mathbf{L} \mathbf{N} + \mathbf{L} \nabla_s \mathbf{N} = \mathbf{L} \nabla_s \mathbf{N} \quad (5.28)$$

Unter anderem wird dieser Gradient im folgenden Kapitel zur Sensitivitätsermittlung des Verzerrungsvektors benötigt. Er wurde jedoch auch bei der Ableitung der Gleichgewichtsbedingung (5.9-5.11) und der Grenzflächennormalen (5.23) verwendet, ohne in den entsprechenden Kapiteln genauer spezifiziert zu werden.

Zur Erweiterung des Verschiebungsfeldes existieren neben der Anreicherungsfunktion $\chi_{m,i}$ die Sprung- bzw. Vorzeichenfunktionen $\chi_{c,j}$. Diese definieren beim Delaminationsprozess an materiellen Grenzflächen und Matrixrissen die verschiedenen Rissufer. Für die Grenzfläche ist die Sprungfunktion in diskretisierter Form in Gleichung (3.40) angegeben. Die Definition bei Matrixrissen erfolgt mithilfe der Vektor-Level-Set-Methode nach Gleichung (3.42).

Bei der Variation eines Matrixrisses sowie der Verschiebung einer materiellen Grenzfläche ändern sich die Vorzeichenfunktionen nur in einem Nahbereich direkt bei der Diskontinuität. Für die etwas abgerückten Gaußpunkte wird in dieser Arbeit jedoch davon ausgegangen, dass sie sich auch nach einer Modifikation der Diskontinuität auf der gleichen Seite befinden, wie vor der Änderung. Somit verschwinden die Ableitungen der Sprungfunktionen nach den Entwurfsvariablen.

$$\nabla_{\mathbf{s}} \chi_{c,j} = \mathbf{0} \quad \text{mit} \quad \chi_{c,j} = \begin{cases} \text{sign}(\phi_{m,i}) & \text{für Grenzflächenrisse} \\ \text{sign}[(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\text{TIP}}^{n-1}) \cdot \mathbf{z}_{\perp}^n] & \text{für Matrixrisse} \end{cases} \quad (5.29)$$

5.1.4. Ableitung der kinematischen Beziehungen

In diesem Abschnitt werden die Sensitivitäten des diskretisierten Verzerrungstensors (3.50) und des Verschiebungssprungs (3.49) bestimmt. Bei den Ableitungen wird dabei eine Unterscheidung zwischen den explizit und den implizit von den Entwurfsvariablen abhängigen Anteilen gemacht. Dies ist wichtig für die Bestimmung der Ableitungen der Gleichgewichtsbedingung aus Kapitel 5.1.1. Dort müssen die impliziten Anteile auf die linke Seite von Gleichung (5.12) gebracht werden, die explizit abhängigen Teile tauchen als Pseudolasten auf der rechten Gleichungsseite auf. Erst nach der Bestimmung der Gradienten des Verschiebungsfeldes können die Sensitivitäten der kinematischen Beziehungen endgültig ausgewertet werden. Beim Einsetzen in Gleichung (5.12) ist zu beachten, dass weder die Verzerrungen noch die Verschiebungssprünge direkt auftauchen, sondern in der Ermittlung für den Spannungstensor bzw. -vektor enthalten sind (siehe Kapitel 5.1.5).

Zunächst wird der Verschiebungssprung aus Gleichung (3.49) betrachtet, dessen Gradienten wie folgt ermittelt werden:

$$\nabla_{\mathbf{s}} [\mathbf{u}]_{c,j} = \underbrace{2 \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{N}_c \mathbf{c}_j}_{\text{expl.}} + \underbrace{2 \mathbf{N}_c \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{c}_j}_{\text{impl.}} \quad (5.30)$$

Der erste Term lässt sich explizit ableiten, wohingegen der zweite Term den Ausdruck $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{c}_j$ enthält, der mithilfe der Gleichung (5.12) zu ermitteln ist. Dort sind in $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{D}$ die Gradienten der diskreten Knotenfreiwerte ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$) enthalten.

Ebenso muss die Ableitung des diskretisierten Verzerrungstensors (3.50) ermittelt, in Gleichung (5.12) eingesetzt und mit der erhaltenen Ableitung des Verschiebungsfeldes

$\nabla_s \mathbf{D}$ entgültig ausgewertet werden.

$$\nabla_s \boldsymbol{\varepsilon} = \underbrace{\nabla_s \mathbf{B}_a \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n_m} \nabla_s \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \nabla_s \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \mathbf{c}_j}_{\text{expl.}} + \underbrace{\mathbf{B}_a \nabla_s \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n_m} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \nabla_s \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \nabla_s \mathbf{c}_j}_{\text{impl.}} \quad (5.31)$$

Die Auswertung dieser Gleichung erfordert die Gradientenbildung der Operatoren $\bar{\mathbf{B}}_{b,i}$ und $\bar{\mathbf{B}}_{c,j}$, die in Gleichung (3.50) genauer spezifiziert wurden.

$$\nabla_s \bar{\mathbf{B}}_{b,i} = \mathbf{L} \nabla_s \chi_{m,i} \mathbf{N}_b + \mathbf{L} \chi_{m,i} \nabla_s \mathbf{N}_b + \nabla_s \chi_{m,i} \mathbf{B}_b + \chi_{m,i} \nabla_s \mathbf{B}_b \quad (5.32)$$

$$\nabla_s \bar{\mathbf{B}}_{c,j} = \chi_{c,j} \nabla_s \mathbf{B}_c \quad (5.33)$$

Es wird in diesen Gleichungen bereits berücksichtigt, dass sowohl der Differentialoperator \mathbf{L} als auch die Vorzeichenfunktion $\chi_{c,j}$ von den Entwurfsvariablen unabhängig sind.

Problematisch sind sowohl bei der Ableitung des Verschiebungssprungs als auch des Verzerrungsvektors die Terme, die mit einem Matrixriss zusammenhängen. Die Ableitung der Ansatzfunktionen \mathbf{N}_c und des B-Operators \mathbf{B}_c sind zwar in Elementen mit einer materiellen Grenzfläche direkt aus der Lageänderung der Grenzfläche ermittelbar. In reinen Matrixelementen ist über die Änderung der Rissgeometrie bei einer Variation der Entwurfsvariablen jedoch nichts bekannt. An dieser Stelle existiert eine implizite Abhängigkeit, die vom Optimierungsprozess in der vorliegenden Form nicht berücksichtigt wird. Die Frage nach der Sensitivität der Rissrichtung konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden. Sie bleibt somit Gegenstand weiterführender Untersuchungen.

Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen werden die Werte von $\nabla_s \mathbf{N}_c$ und $\nabla_s \mathbf{B}_c$ in Elementen mit Matrixrissen zu Null gesetzt. Ebenso wird die Sensitivität des Normalenvektors \mathbf{n} auf die Rissfläche vernachlässigt. Dies erfolgte im Bewusstsein, an dieser Stelle einen Fehler in die Sensitivitätsanalyse einzubringen, da bisher die Möglichkeit fehlt, diese Werte adäquat zu berechnen.

5.1.5. Ableitung der konstitutiven Gleichungen

Um die Sensitivität des Verschiebungsfeldes und anschließend der Duktilität ermitteln zu können, müssen abschließend die Gradienten der konstitutiven Gleichungen ermittelt werden. Es findet dabei, ebenso wie bei den kinematischen Beziehungen, eine Aufteilung in explizite und implizite Anteile statt. Dieser Split ist – wie bereits erwähnt – notwendig, um zuerst die Gradienten des Verschiebungsfeldes ermitteln zu können und mit diesen die Gradienten der Spannungen endgültig auszuwerten (siehe Kapitel 5.1.1).

Zuerst werden die elastischen Bereiche untersucht. Diese sind das Matrixmaterial selbst, ebenso wie die darin enthaltenen Einschlüsse. Danach wird auf die spannungsübertragenden Risse eingegangen, die mit einem Traktions-Verschiebungssprunggesetz modelliert werden.

Der in Gleichung (3.19) beschriebene Spannungstensor, der für alle Bereiche außer den Rissflächen selbst gilt, wird wie folgt differenziert:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{C}^{el} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathcal{C}^{el} \nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.34)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (3.50) und (5.31) erhält man die diskretisierte Form dieses Ausdrucks:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{s}} \boldsymbol{\sigma} = & \nabla_{\mathbf{s}} \mathcal{C}^{el} \left(\mathbf{B}_a \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n_m} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \mathbf{c}_j \right) \\ & + \mathcal{C}^{el} \left(\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{B}_a \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n_m} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \nabla_{\mathbf{s}} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \mathbf{c}_j \right) \\ & + \mathcal{C}^{el} \left(\mathbf{B}_a \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{a} + \sum_{i=1}^{n_m} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{b}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{c}_j \right) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Die ersten beiden Zeilen entsprechen den expliziten Ausdrücken, welche in Gleichung (5.12) als Pseudolasten auf die rechte Seite geschrieben werden. Nur die letzte Zeile enthält die unbekannt Sensitivitäten der Knotenfreiwerte $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{a}$, $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{b}$ und $\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{c}$.

Als bisher unbekannter Ausdruck taucht in Gleichung (5.35) die Sensitivität des Materialtensors \mathcal{C}^{el} auf. Diese verschwindet jedoch, da die Lamékonstanten in Gleichung (3.19), mit dem darin enthaltenen Elastizitätsmodul E und der Querdehnzahl ν , von den Entwurfsparametern unabhängig sind. Somit kann die erste Zeile von Gleichung (5.35) gestrichen werden und es verbleibt eine Formel für die Sensitivität des Spannungstensors, die rein von der Empfindlichkeit des Verzerrungstensors abhängt.

Nach der Differenzierung des Spannungstensors wird der Spannungsvektor, der an den kohäsiven Rissflächen wirkt, nach den Entwurfsvariablen abgeleitet. In Gleichung (3.23) wurde der Spannungsvektor wie folgt definiert:

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}_{sec} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = (K_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + K_T \mathbf{T}) \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (5.36)$$

Entsprechend dem konstitutiven Traktions-Verschiebungssprung-Gesetz aus Abschnitt 3.1.6 hängt dieser Ausdruck von der Geschichtsvariablen κ , dem Rissnormalenvektor \mathbf{n} und dem Verschiebungssprung $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ ab. Somit ergibt sich die Sensitivität des Spannungs-

vektors \mathbf{t} durch die Ableitung nach den Entwurfparametern zu:

$$\nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \kappa} \nabla_{\mathbf{s}} \kappa + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{n}} \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{n} + \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial [\mathbf{u}]} \nabla_{\mathbf{s}} [\mathbf{u}] \quad (5.37)$$

Bei der Ableitung des Geschichtsparameters κ muss eine Unterscheidung getroffen werden, ob sich die Struktur bezüglich des Rissfortschritts in einem Belastungs- oder Entlastungszustand befindet. Für eine Erweiterung der Rissöffnung ist κ vom aktuellen, äquivalenten Verschiebungssprung η abhängig und die partielle Ableitung $\frac{\partial \kappa}{\partial \eta}$ nimmt den Wert 1 an (siehe Kapitel 3.3.4). Geht die Rissöffnung zurück, verschwindet diese Ableitung, wobei der Geschichtsparameter κ in diesem Fall vom maximal erreichten, äquivalenten Verschiebungssprung κ_u abhängig ist. Dieser gibt den Zeitpunkt der Entlastungsphase wieder. Der Index u steht dabei für den englischen Begriff „unloading“.

$$\kappa = \kappa [\eta([\mathbf{u}], \mathbf{n}), \kappa_u([\mathbf{u}]_u, \mathbf{n})] \quad (5.38)$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \eta} = \begin{cases} 1 & \text{Belastung} \\ 0 & \text{Ent - ,Wiederbelastung} \end{cases} \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} = \begin{cases} 0 & \text{Belastung} \\ 1 & \text{Ent - ,Wiederbelastung} \end{cases} \quad (5.39)$$

Somit ergibt sich die vollständige Ableitung des ersten Ausdrucks in Gleichung (5.37) unter Berücksichtigung der Ableitungen nach dem Verschiebungssprung und dem Normalenvektor zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \kappa} \nabla_{\mathbf{s}} \kappa = & \left[\left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial [\mathbf{u}]_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \eta}{\partial [\mathbf{u}]_T} \cdot \mathbf{T} \right) \right] \nabla_{\mathbf{s}} [\mathbf{u}] \\ & + \left[\left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial [\mathbf{u}]_n} [\mathbf{u}] + \frac{\partial \eta}{\partial [\mathbf{u}]_T} \cdot \frac{\partial [\mathbf{u}]_T}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{n} \\ & + \left[\left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} \left(\frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{n,u}} \mathbf{n} + \frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{T,u}} \cdot \mathbf{T} \right) \right] \nabla_{\mathbf{s}} [\mathbf{u}]_u \\ & + \left[\left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} \left(\frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{n,u}} [\mathbf{u}]_u + \frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{T,u}} \cdot \frac{\partial [\mathbf{u}]_{T,u}}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] \nabla_{\mathbf{s}} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.40)$$

Der Klammerausdruck der ersten Zeile ergibt zusammen mit dem Ausdruck $\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial [\mathbf{u}]}$ aus Gleichung (5.37) den Tangententensor \mathbf{T}_{tan} aus Gleichung (3.67). Dieser wird bei der Ableitung des Gleichgewichts (5.12) mit dem impliziten Anteil der Ableitung des Verschiebungssprungs auf die linke Seite geschrieben. Die restlichen Terme werden als Pseudolasten auf die rechte Seite von Gleichung (5.12) geschoben.

Nachdem der letzte Term in Gleichung (5.37) dem Tangententensor zugeschlagen wurde, muss nur noch der mittlere Ausdruck dieser Gleichung abgeleitet werden, um die Sensitivität des Spannungstensors vollständig anzugeben. Der Gradient bezüglich der Rissnormalen ergibt sich dabei zu:

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \mathbf{n}} \nabla_s \mathbf{n} = \left[(K_n - K_T) \left(\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} \right) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} \right)^T \right)^{\frac{23}{T}} \cdot [\mathbf{u}] \right] \nabla_s \mathbf{n} \quad (5.41)$$

Die partielle Ableitung des Normalenvektors nach sich selbst entspricht der zweistufigen Einheitsmatrix $\mathbf{1}$. Die Transposition $\frac{23}{T}$ tauscht den zweiten und dritten Basisvektor (\mathbf{e}_2 und \mathbf{e}_3) des dreistufigen Tensors zwischen den zugehörigen Klammern.

Berücksichtigt man die Tatsache, dass der Gradient der Rissnormalen für reine Matrixrisse zu Null gesetzt wird, so vereinfacht sich die Sensitivität des Spannungsvektors für reine Matricelemente zu:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{t} = & \underbrace{\left[\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial [\mathbf{u}]} + \left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial [\mathbf{u}]_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \eta}{\partial [\mathbf{u}]_T} \cdot \mathbf{T} \right) \right]}_{\mathbf{T}_{tan}} \nabla_s [\mathbf{u}] \\ & + \left[\left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} \left(\frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{n,u}} \mathbf{n} + \frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{T,u}} \cdot \mathbf{T} \right) \right] \nabla_s [\mathbf{u}]_u \end{aligned} \quad (5.42)$$

Bei Elementen mit materieller Grenzfläche sind die Terme, die mit den Gradienten der Rissnormalen assoziiert sind zu berücksichtigen:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{t} = & \mathbf{T}_{tan} \nabla_s [\mathbf{u}] + \left[(K_n - K_T) \left(\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} \right) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \mathbf{n}} \right)^T \right)^{\frac{23}{T}} \cdot [\mathbf{u}] \right] \nabla_s \mathbf{n} \\ & + \left[\left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial [\mathbf{u}]_n} [\mathbf{u}] + \frac{\partial \eta}{\partial [\mathbf{u}]_T} \cdot \frac{\partial [\mathbf{u}]_T}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] \nabla_s \mathbf{n} \\ & + \left[\left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} \left(\frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{n,u}} \mathbf{n} + \frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{T,u}} \cdot \mathbf{T} \right) \right] \nabla_s [\mathbf{u}]_u \\ & + \left[\left(\frac{\partial K_n}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} [\mathbf{u}]_T \right) \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \kappa_u} \left(\frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{n,u}} [\mathbf{u}]_u + \frac{\partial \kappa_u}{\partial [\mathbf{u}]_{T,u}} \cdot \frac{\partial [\mathbf{u}]_{T,u}}{\partial \mathbf{n}} \right) \right] \nabla_s \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.43)$$

5.2. Einfluss des Algorithmus auf die Sensitivitäten

Bei den bisherigen Gradientenermittlungen wurde von einer lastgesteuerten Strukturanalyse ausgegangen. Dies führte dazu, dass in Abschnitt 5.1.1 die Sensitivität der äußeren Lasten zu Null gesetzt werden konnte und diese nicht bei der Sensitivitätsanalyse des strukturellen Gleichgewichts berücksichtigt wurde. Bei einem verschiebungsgesteuerten Berechnungsverfahren ergibt sich jedoch eine Abhängigkeit der Lasten von den Entwurfsparametern, die im folgenden erklärt wird.

Analog zu Kapitel 4.2.2 erfolgt ein Split der äußeren Lasten in einen konstanten Anteil \mathbf{P} der Last und den Laststeigerungsfaktor $\bar{\lambda}$. Da die Sensitivität des gleichbleibenden Lastanteils \mathbf{P} in der Regel gleich Null ist, beschränkt sich die Empfindlichkeit der äußeren Lasten bezüglich der Entwurfsparameter auf den Laststeigerungsfaktor $\bar{\lambda}$.

Der Unterschied zwischen den beiden Berechnungsalgorithmen (Last- und Verschiebungssteuerung) kann anschaulich mithilfe von Abbildung 5.1 gezeigt werden. Die Originalversion dieses Bildes, mit einer leicht veränderten Notation, findet sich in der Dissertation von SCHWARZ (2001).

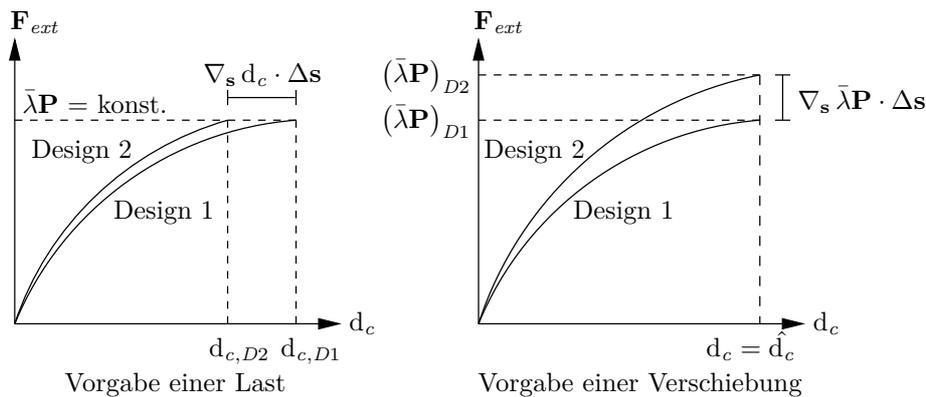


Abbildung 5.1.: Einfluss des Algorithmus auf die Sensitivitäten

Für die beiden Algorithmen ist je ein Last-Verschiebungsdiagramm für den Kontrollfreiheitsgrad d_c aufgetragen ($d_c \in \mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_j)$). Darin sind Graphen für ein Anfangsdesign D1 und ein im Optimierungsprozess entstandenes, (verbessertes) Design D2 zu sehen. Die Modifikation zwischen den Entwürfen ist im Vektor $\Delta \mathbf{s}$ zusammengefasst.

Im linken Diagramm von Abb. 5.1 wird ein konstantes Lastniveau für die beiden Entwürfe D1 und D2 am Ende des Belastungspfades bzw. jedes Inkrements vorgegeben. Da die Differenz der Laststeigerungsfaktoren zwischen den beiden Entwürfen gleich Null ist, verschwindet die Sensitivität der äußeren Lasten bzw. die des Laststeigerungsfaktors. Die Sensitivität der Kontrollverschiebung gibt den Unterschied in der Systemantwort wieder, der bei der Modifikation der Entwürfe um $\Delta \mathbf{s}$ entsteht.

Das rechte Diagramm von Abb. 5.1 geht von einem konstanten Verschiebungsniveau für den Kontrollfreiheitsgrad d_c aus. In diesem Fall verschwindet die Sensitivität der Verschiebung $\nabla_s d_c$, nicht aber die des Laststeigerungsfaktors $\nabla_s \bar{\lambda}$. Die Ermittlung dieses Ausdrucks wird im Folgenden knapp vorgestellt und kann in ausführlicher Form bei SCHWARZ (2001) nachvollzogen werden.

Zunächst wird die Ableitung der Gleichgewichtsaussage aus Gleichung (5.12) aufgesplittet, um die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors zu isolieren.

$$\nabla_s \mathbf{D} = \mathbf{K}_T^{-1} (\nabla_s \bar{\lambda} \mathbf{P} + \tilde{\mathbf{P}}^{pseudo}) = \nabla_s \bar{\lambda} (\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P}) + \mathbf{K}_T^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{pseudo} \quad (5.44)$$

Danach ersetzt man den Klammerausdruck $(\mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P})$ mithilfe der Nebenrechnung:

$$\mathbf{K}_T \check{\mathbf{D}} = \bar{\lambda} \mathbf{P} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}_T^{-1} \mathbf{P} = \frac{1}{\bar{\lambda}} \check{\mathbf{D}} \quad (5.45)$$

Schließlich kann die Sensitivität des Laststeigerungsfaktors unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Sensitivität der Kontrollverschiebung $\nabla_s \hat{d}_c$ gleich Null ist, berechnet werden.

$$\nabla_s \bar{\lambda} = -\bar{\lambda} \frac{\nabla_s \hat{d}_c}{\check{d}_c} \quad \text{mit} \quad \nabla_s \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{K}_T^{-1} \tilde{\mathbf{P}}^{pseudo} \quad (5.46)$$

Durch Rückeinsetzen dieses Ausdrucks in Gleichung (5.44) erhält man die Sensitivität des Verschiebungsfeldes.

$$\nabla_s \mathbf{D} = -\frac{\nabla_s \hat{d}_c}{\check{d}_c} \check{\mathbf{D}} + \nabla_s \hat{\mathbf{D}} \quad (5.47)$$

Der erste Term entspricht den zusätzlichen Anteilen, die für ein verschiebungsgesteuertes Problem zu berechnen sind. Der letzte Term stimmt mit der Gesamtlösung lastgesteuerter Probleme überein.

Wird ein Bogenlängenverfahren verwendet, so kann auf ähnliche Weise die Sensitivität des Laststeigerungsfaktor und der Kontrollverschiebung ermittelt werden. Ausführlich wurde dies ebenfalls in der Arbeit von SCHWARZ (2001) behandelt.

5.3. Nebenbedingung Gewicht (Volumen)

Als Nebenbedingung wird sowohl bei Verwendung des Optimalitätskriterienverfahrens als auch bei der Methode der bewegten Asymptoten ein konstantes Bewehrungsvolumen bzw. die konstante Masse der Einschlüsse verwendet. Nach Tabelle 2.1 lauten die

zugehörigen Gleichungen:

$$h_G(\mathbf{s}) = \frac{G}{G_{zul}} - 1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad h_V(\mathbf{s}) = \frac{V}{V_{zul}} - 1 = 0 \quad (5.48)$$

Da sich die Materialdichten der verschiedenen Einschlüsse in der Matrix nicht unterscheiden, gehen die beiden Formulierungen ineinander über. Der zulässige Wert entspricht dem Volumen der Einschlüsse, das zu Beginn der Strukturanalyse vorgegeben wird. Aus der Summe über die einzelnen Ellipsenflächen ergibt sich das aktuelle Volumen:

$$V = \sum_{i=1}^{n_m} \pi a_i b_i \quad (5.49)$$

Leitet man die Formel (5.48) nach den Entwurfsvariablen \mathbf{s} ab, so erhält man nur für eine Ableitung nach den Halbachsen a_i und b_i einen Wert ungleich Null. Eine Veränderung des Hauptachseneckwinkels und des Ursprungs der einzelnen Ellipsen beeinflusst die Nebenbedingung konstantes Volumen nicht.

$$\nabla_{\mathbf{s}} h_V(\mathbf{s}) = \frac{\nabla_{\mathbf{s}} V}{V_{zul}} \quad (5.50)$$

Der OC-Algorithmus aus Kapitel 2.3.1 kann nur für Gradienten ungleich Null angewendet werden. Verschwindet die Ableitung der Nebenbedingung bezüglich eines beliebigen Entwurfsparameters, so entsteht in der Rekursionsformel (2.15) eine unzulässige Division durch Null. Somit können nur die Halbachsen a_i und b_i als Optimierungsvariablen beim OC-Verfahren verwendet werden.

Möchte man die Entwurfsvariablen auch auf solche Parameter ausdehnen, die die Nebenbedingung nicht beeinflussen, greift man auf das MMA-Verfahren zurück. Dort wird die Nebenbedingung in Form einer Ungleichheitsbedingung eingebracht. Gradientenwerte gleich Null bereiten dem MMA-Algorithmus keine Schwierigkeiten.

Die Ungleichheitsbedingung reicht bei einem „klassischen“ Topologieoptimierungsproblem, bei dem die vorgegebene Bewehrungsmasse als konstant angenommen wird, als Ersatz für die Gleichheitsnebenbedingung aus, da ein Plus an Bewehrung in der Regel auch einen Vorteil für die Steifigkeit, bzw. Duktilität bedeutet. Somit muss der Algorithmus stets die Vergrößerung der Bewehrungsmasse verhindern. Dies kann die Ungleichheitsbedingung ohne Schwierigkeiten leisten.

Bei den vorliegenden Problemen kann jedoch auch eine Verkleinerung der Einschlüsse sinnvoll sein, da eine Delamination an der Grenzschicht zwischen Einschluss und Matrix eine Schwächung der Struktur bedeuten kann. Somit versucht der Algorithmus diese

Schwachstelle abzubauen; die Ungleichheitsbedingung verhindert in diesem Fall nicht die Reduktion der Bewehrungsmasse.

Stellt man im Laufe des Optimierungsprozesses fest, dass die Ungleichheitsnebenbedingung nicht mehr aktiv ist, d.h. die Masse der Einschlüsse zurück geht, kann die obere Grenze durch eine untere Grenze der Gesamtmasse ersetzt werden.

$$g_V^{\text{unten}}(\mathbf{s}) = 1 - \frac{V}{V_{\text{zul}}} \leq 0 \quad ; \quad g_V^{\text{oben}}(\mathbf{s}) = \frac{V}{V_{\text{zul}}} - 1 \leq 0 \quad (5.51)$$

Alternativ besteht die Möglichkeit, den MMA-Algorithmus um eine Gleichheitsnebenbedingung zu erweitern. Dies ist unter anderem bei BLETZINGER (1993) und ZHANG U. A. (1996) beschrieben.

5.4. Mindestabstand zwischen Matrixeinschlüssen

Damit die einzelnen Matrixeinschlüsse im Laufe des Optimierungsprozesses nicht zusammenwachsen, muss zwischen ihnen ein Mindestabstand etabliert werden. Zu diesem Zweck wird entweder der Wertebereich der Entwurfsvariablen während des Variationsprozesses eingeschränkt (Abbildung 5.2) oder es wird für alle Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Einschlüssen je eine Ungleichheitsnebenbedingung eingeführt (Abbildung 5.3). Beide Methoden werden anhand von kreisförmigen Einschlüssen erklärt, um im Anschluss auf die Schwierigkeiten bei elliptischen Einschlüssen einzugehen.

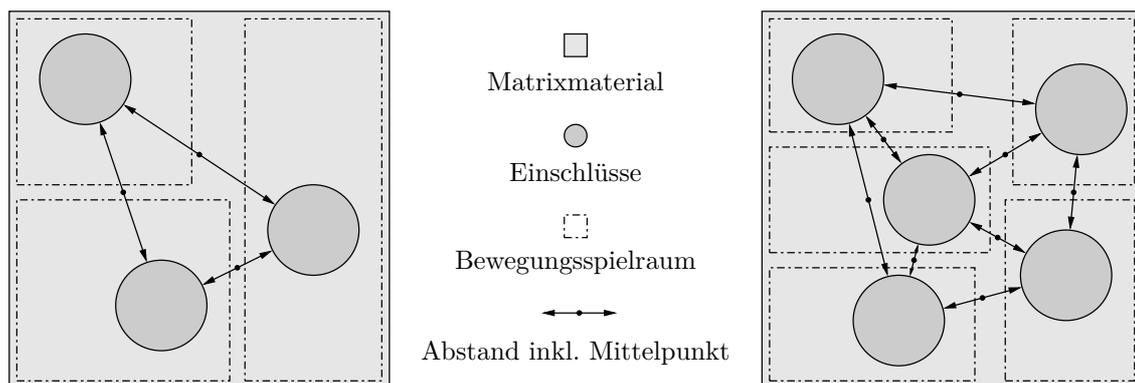


Abbildung 5.2.: Einschränkung des zulässigen Parameterraums

In Abbildung 5.2 erkennt man, dass durch die Beschränkung des Bewegungsspielraums der einzelnen Einschlüsse im Optimierungsprozess ein Mindestabstand zwischen diesen sichergestellt werden kann. Der Mindestabstand wird jeweils ausgehend vom aktuellen Abstandsmittelpunkt zwischen den Einschlüssen vorgegeben und definiert die Grenzen

der zugehörigen Bewegungsspielräume. Sind wie in Abbildung 5.2 mehrere Nachbarschaftsbeziehungen zu berücksichtigen, wird der am weitesten einschränkende Grenzwert verwendet.

Die Einhaltung der so gefundenen Gebiete erfolgt über die Beschränkung des Parameterraums der Mittelpunktskoordinaten. Die Variation der Radien selbst ist nur im Rahmen der vorgegebenen Eingangsdaten eingeschränkt. Die Radien beeinflussen indes den Mindestabstand zwischen den zulässigen Gebieten. Je größer die mögliche Variation der Radien im Optimierungsprozess ist, um so kleiner wird der Bewegungsspielraum der einzelnen Einschlüsse. Dies behindert den Optimierungsprozess durch eine starke Restriktion der Bewegungsspielräume, wodurch die Methode für große Optimierungsschrittweiten ungeeignet ist. Auf der anderen Seite lässt sich die Beschränkung des Parameterraums problemlos implementieren und ist auch für Verfahren geeignet, die keine Ungleichheitsnebenbedingungen verwenden.

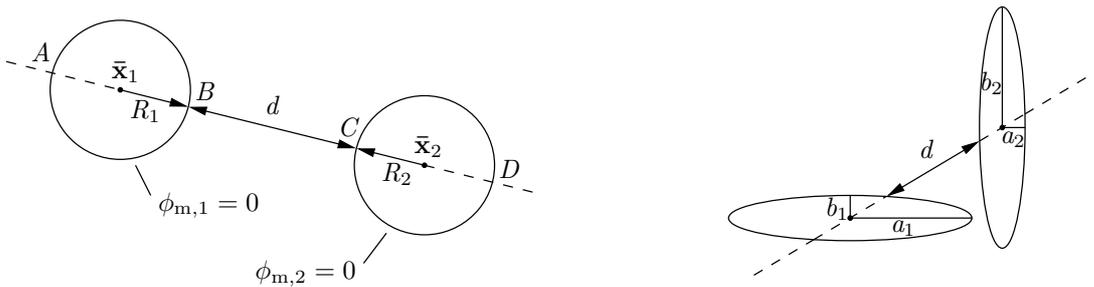


Abbildung 5.3.: Abstand d zwischen zwei Einschlüssen

Eine alternative Vorgehensweise ist die direkte Einhaltung des Mindestabstands \bar{d} in Form einer Ungleichheitsnebenbedingung $d \geq \bar{d}$. Der aktuelle Abstand d zwischen zwei kreisförmigen Einschlüssen ist dabei nach Abbildung 5.3 durch den Abstandsvektor \vec{BC} definiert. Mithilfe der Koordinaten der Schnittpunkte B und C zwischen der Geraden durch die Kreismittelpunkte \bar{x}_1 und \bar{x}_2 und den jeweiligen Einschlussoberflächen lässt sich die Nebenbedingung wie folgt formulieren:

$$g_d(\mathbf{s}) = \underbrace{\sqrt{(x_{1,C} - x_{1,B})^2 + (x_{2,C} - x_{2,B})^2}}_d \geq \bar{d} \quad (5.52)$$

Zur Ermittlung der Schnittpunkte setzt man die Zwei-Punkt-Geradengleichung durch die Kreismittelpunkte \bar{x}_1 und \bar{x}_2

$$x_2 - \bar{x}_{2,1} = \frac{\bar{x}_{2,2} - \bar{x}_{2,1}}{\bar{x}_{1,2} - \bar{x}_{1,1}} (x_1 - \bar{x}_{1,1}) \quad (5.53)$$

in die Koordinatengleichungen der jeweiligen Einschlussoberfläche ein

$$\phi_{m,i} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x}_{1,i})^2 + (x_2 - \bar{x}_{2,i})^2}{R_i^2}} - 1 = 0 \quad (5.54)$$

und erhält, nach einigen Umformungen, quadratische Gleichungen der Form:

$$a x^2 + b x + c = 0 \quad \text{mit} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (5.55)$$

Diese enthalten, neben den gesuchten Schnittpunkten B und C , auch die Durchstoßpunkte A und D auf der jeweils gegenüberliegenden Seite der Kreise. Daher müssen die zur Abstandsermittlung notwendigen Punkte durch eine Fallunterscheidung identifiziert werden.

Die auf diese Weise gefundenen Schnittpunkte werden nach den Optimierungsvariablen abgeleitet, um die Gradienten der Nebenbedingung „Mindestabstand“ zu ermitteln.

$$\nabla_{\mathbf{s}gd}(\mathbf{s}) = \frac{(x_{1,C} - x_{1,B})(\nabla_{\mathbf{s}}x_{1,C} - \nabla_{\mathbf{s}}x_{1,B}) + (x_{2,C} - x_{2,B})(\nabla_{\mathbf{s}}x_{2,C} - \nabla_{\mathbf{s}}x_{2,B})}{\sqrt{(x_{1,C} - x_{1,B})^2 + (x_{2,C} - x_{2,B})^2}} \quad (5.56)$$

Werden anstelle der kreisrunden Einschlüsse elliptische Formen zugelassen, kann mit keiner der vorgestellten Methoden der Mindestabstand in geeigneter Weise sichergestellt werden. In Abbildung 5.3 ist auf der rechten Seite gut zu erkennen, dass selbst bei ausreichend großem Abstand d eine Überschneidung der Einschlüsse möglich ist. Um dies zu verhindern, müssen zusätzliche Abstandsgleichungen zwischen den Ellipsenenden vorgesehen werden.

Da die maßgebenden Nachbarschaftsbeziehungen der Ellipsenenden nur durch einzelne Fallunterscheidungen zu ermitteln sind, erhöht sich die Anzahl der Nebenbedingungen bei zwei Einschlüssen von eins auf siebzehn. Neben dem Mindestabstand auf der Geraden zwischen den Ellipsenmittelpunkten sind die Mindestabstände zwischen den Ellipsenenden, definiert durch die Schnittpunkte der Hauptachsen mit den Oberflächen, einzuhalten. Die Berechnung der zusätzlichen Schnittpunkte erfolgt dabei analog zu den Gleichungen (5.53) bis (5.55). Zur Veranschaulichung der notwendigen Abstandsüberprüfungen sind in Abbildung 5.4 neben der ursprünglichen Abstandsformulierung die vier möglichen Nachbarschaftsbeziehungen für zwei Ellipsenenden beispielhaft aufgetragen. Abstände mit gestrichelten Linien können über eine Fallunterscheidung aussortiert werden, die verbleibenden Abstandsbedingungen müssen jedoch überprüft werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die Methode des eingeschränkten Parameterraums für Ellipsen nicht mehr anwendbar ist. Die notwendigen Beschränkungen der Bewegungsspielräume lässt sich durch ganzzahlige Grenzwerte nicht realisieren, sondern

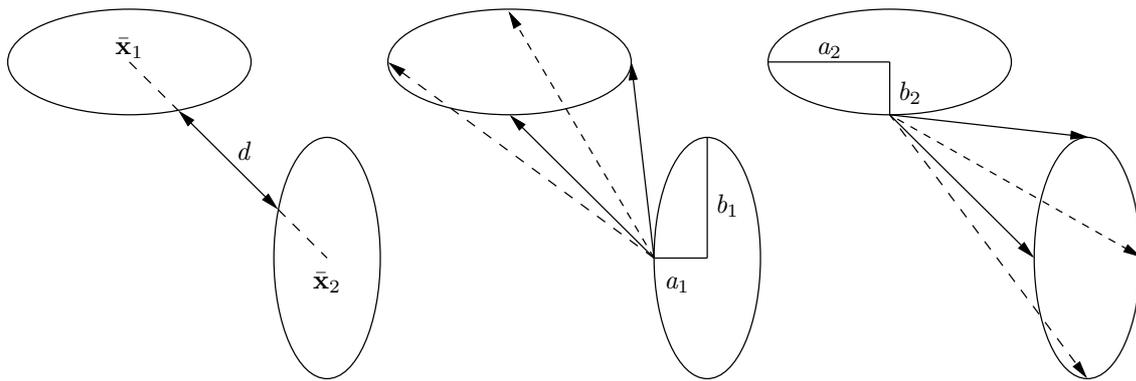


Abbildung 5.4.: Notwendige Abstandsüberprüfungen bei elliptischen Einschlüssen

erfordert die Definition von schrägen Gebietsgrenzen. Somit ist eine Beschränkung in der Form $\mathbf{s}_L \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{s}_U$ nicht zu realisieren.

6

Numerische Beispiele

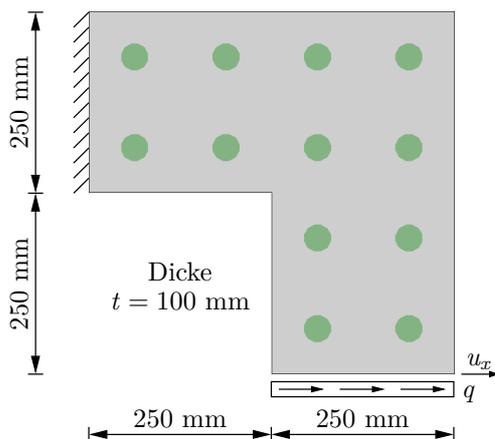
Anhand von numerischen Beispielen soll in diesem Kapitel gezeigt werden, welches Potential gradientenbasierte Optimierungsverfahren für lokal geschädigte Materialien aufweisen. Die Optimierungsalgorithmen aus Kapitel 2.3, d.h. das Optimalitätskriterienverfahren und die Methode der bewegten Asymptoten, werden auf Probleme mit unterschiedlichem Schädigungsverhalten angewendet, wobei die Komplexität der Strukturanalyse (Kapitel 3) sowie der Sensitivitätsanalyse (Kapitel 5) schrittweise gesteigert wird. Ausgehend von der linearen Elastizität über das lokale Grenzschichtversagen bis hin zu kombiniertem Matrix- und Interfaceversagen wird das Materialverhalten variiert.

Geht man bei den Beispielen von faserverstärktem Beton aus, so betrachtet man die Bewehrungsfasern in ihrem Schnittbild und nicht entlang ihrer Hauptbelastungsrichtung (Abbildung 1.1). Da dies eine eher ungewohnte Betrachtungsweise ist, kann man sich alternativ ein Matrixmaterial mit Fremdeinschlüssen vorstellen. Die Materialdaten, d.h. die Steifigkeiten, Zugfestigkeiten und die Entfestigungsparameter sind dem Modellmaterial Faserbeton entnommen.

6.1. L-förmige Scheibe: linear elastisch

Zunächst soll mithilfe einer L-förmigen Scheibe (Abbildung 6.1) im linear elastischen Bereich gezeigt werden, dass die vorgestellten Optimierungsverfahren mit den zugehörigen Sensitivitäten im Rahmen einer X-FEM Formulierung zu einer Verbesserung der Zielfunktion im Optimierungsprozess führen.

Die Zielfunktion dieses Optimierungsbeispiels ist die Maximierung der Duktilität bei vorgegebener anfangs gleichmäßig im Entwurfsraum verteilter Bewehrungsmasse. Die

**Matrix:**

$$E = 35000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0.15$$

Einschlüsse:

$$E = 70000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0.15 \quad \varnothing = 19 \text{ mm}$$

$$\bar{x}_1 = (62.5, 312.5)$$

$$\bar{x}_7 = (312.5, 312.5)$$

$$\bar{x}_2 = (62.5, 437.5)$$

$$\bar{x}_8 = (312.5, 437.5)$$

$$\bar{x}_3 = (187.5, 312.5)$$

$$\bar{x}_9 = (437.5, 62.5)$$

$$\bar{x}_4 = (187.5, 437.5)$$

$$\bar{x}_{10} = (437.5, 187.5)$$

$$\bar{x}_5 = (312.5, 62.5)$$

$$\bar{x}_{11} = (437.5, 312.5)$$

$$\bar{x}_6 = (312.5, 187.5)$$

$$\bar{x}_{12} = (437.5, 437.5)$$

Abbildung 6.1.: L-förmige Scheibe im ebenen Verzerrungszustand

Geometrie sowie die Last- und Lagerbedingungen können Abbildung 6.1 entnommen werden. Die Lage der zwölf kreisrunden Einschlüsse mit einem Durchmesser von jeweils 19 mm ist dort ebenfalls angegeben. Die genannten Koordinaten beziehen sich auf die Kreismittelpunkte der einzelnen Einschlüsse. Die Steifigkeit des eingefügten Materials ist durch einen doppelt so großen Elastizitätsmodul zweimal so hoch wie die des Matrixmaterials. Die Absolutwerte der Materialkennwerte charakterisieren beispielsweise eine Betonmatrix mit Bewehrungsfasern. Es wird von optimalem Verbund ausgegangen.

Bemerkung: Zu der gegebenen L-Form wurden u.a. von WINKLER (2001) experimentelle Untersuchungen an unbewehrten und bewehrten Betonwinkeln durchgeführt. Bei diesen Versuchen wurde jedoch der lineare Bereich verlassen und die Zugfestigkeit der Betonmatrix bzw. des Bewehrungsverbundes überschritten. Numerische Berechnungen der L-förmigen Scheibe wurden beispielsweise von DUMSTORFF UND MESCHKE (2005) durchgeführt.

Die verschiebungsgesteuerte Strukturanalyse erfolgt auf einem regelmäßigen Netz aus 2700 bilinearen finiten Elementen. Von diesen werden 192 mit erweiterten Verschiebungsfreiheitsgraden versehen, um die materiellen Grenzflächen abbilden zu können. Die Berechnung erfolgt nach Abzug der Lagerbedingungen mit 6348 Verschiebungsfreiheitsgraden in einem ebenen Verzerrungszustand. Da es sich um die Optimierung eines linear elastischen Problems handelt, wird die Strukturanalyse auf 20 Verschiebungsinkremente des Kontrollfreiheitsgrades u_x mit einem Wert von $\Delta u_x = 0.0005 \text{ mm}$ beschränkt.

Als Optimierungsvariablen werden die Mittelpunktskoordinaten der Einschlüsse verwendet. Diese haben auf die Nebenbedingung „konstante Bewehrungsmasse“ keinen Einfluss und dementsprechend verschwinden die Gradienten der Nebenbedingung bezüglich der Entwurfsparameter. Somit kommt von den in Kapitel 2.3 vorgestellten Optimierungsverfahren nur die Methode der bewegten Asymptoten (MMA) in Frage. Es wird jedoch

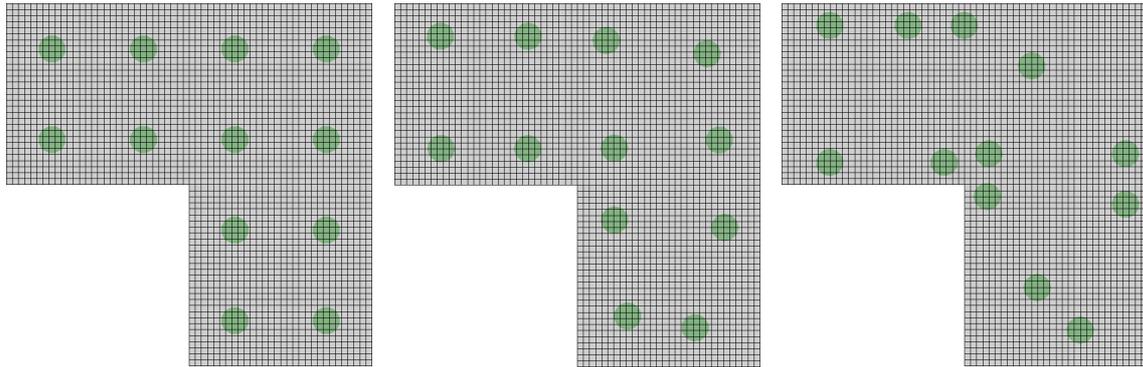


Abbildung 6.2.: Lageänderung der Bewehrungseinschlüsse im Optimierungsprozess

darauf hingewiesen, dass es die folgende Möglichkeit gibt, den OC-Algorithmus dennoch zu verwenden. Erweitert man die Menge der Entwurfsvariablen um die Einschlussradien und schränkt diese gleichzeitig in der Weise ein, dass praktisch keine Änderung der Durchmesser zulässig ist, kann das OC-Verfahren angewendet werden, sofern den Gradienten der Nebenbedingung ein kleiner Pseudowert ungleich Null zugewiesen wird. Gleichzeitig muss die Schrittweite im Optimierungsprozess eingeschränkt werden, da kleine Gradienten der Nebenbedingung zu großen Änderungen der Entwurfsparameter führen. Diese Methode sollte jedoch nicht mehr als eine Notlösung darstellen.

Der Entwurfsraum der Mittelpunktskoordinaten wird in der Form eingeschränkt, dass ein Verlassen der Struktur sowie eine Überschneidung der verschiedenen Einschlüsse ausgeschlossen ist. Der Mindestabstand zwischen den verschiedenen Einschlüssen darf einen Wert von 10 mm nicht unterschreiten.

Die Veränderungen, die im Laufe des Optimierungsprozesses auftreten, sind in Abbildung 6.2 zu sehen. Dort ist die Ausgangslage, eine Zwischen- sowie die Endlage der Einschlüsse wiedergegeben. Da die Zielfunktion „Maximierung der Duktilität“ im linear elastischen Fall bei vorgegebener Verschiebung identisch mit dem Entwurfskriterium „Maximierung der Steifigkeit“ ist, kann das Bemühen der Bewehrungsfasern, in einen Bereich größerer Beanspruchungen zu wandern, nachvollzogen werden. Damit die Fasern im Optimierungsprozess nicht weiter zum Rand hin wandern, wird ein Mindestabstand zum Rand hin festgelegt. Ansonsten wäre eine weitere Steigerung der Duktilität zu erwarten. Am Besten lässt sich das Ergebnis durch den Vergleich mit einer Topologieoptimierung nach dem SIMP-Ansatz veranschaulichen (siehe Kapitel 2.2.2).

In Abbildung 6.3 ist zu diesem Zweck die Lage der Einschlüsse auf das Ergebnis einer Topologieoptimierung projiziert. Die Topologieoptimierung selbst wurde mit einer Vernetzung von 7500 Elementen durchgeführt. Zu Beginn der Optimierung betrug die relative Dichte in jedem Elemente 30%. Diese ist definiert als das Verhältnis zwischen

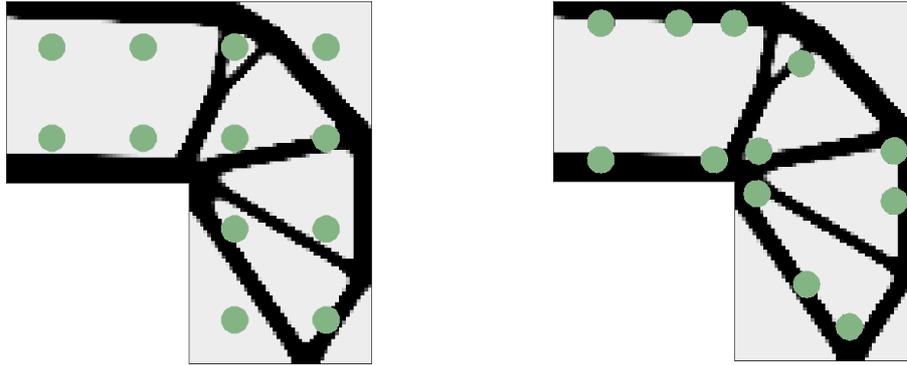


Abbildung 6.3.: Vergleich zwischen der Levelsetoptimierung und einer Topologieoptimierung nach dem SIMP-Ansatz

der Dichte ρ zu ρ_0 . Der Parameter $\bar{\beta} = 2.5$ bestraft den effektiven Elastizitätsmodul von Zwischenzuständen, um eine eindeutige 0-1 Verteilung zu erzielen. Man erkennt, dass sich die Einschlüsse in Bereiche bewegen, in denen sich auch bei der Topologieoptimierung Material ansammelt. Der größere Elastizitätsmodul der Einschlüsse sorgt für eine Vergrößerung der Steifigkeit in diesen Bereichen und führt somit bei vorgeschriebener Verschiebung zu einer Maximierung der Duktilität.

Der Zugewinn bei der Duktilität ist infolge der Lageänderung der Einschlüsse jedoch insgesamt gesehen äußerst gering. In Abbildung 6.4 erkennt man im Last-Verschiebungsdiagramm einen Anstieg der Systemsteifigkeit, der eine Erhöhung der Duktilität um lediglich 4.7% bewirkt. Rechts daneben ist für das alternativ beschriebene OC-Verfahren der Zuwachs der Zielfunktion über die einzelnen Optimierungsschritte aufgetragen. Obwohl der quantitative Zuwachs der Zielfunktion sehr gering ist, bestätigt das qualitative Ergebnis des Optimierungsprozesses, dass die ermittelten Sensitivitäten im linear elastischen Fall zu einem Minimum des Entwurfsproblems führen (siehe Abbildung 6.4 rechts). Der Mindestabstands zwischen den einzelnen Einschlüssen wird eingehalten und der Ver-

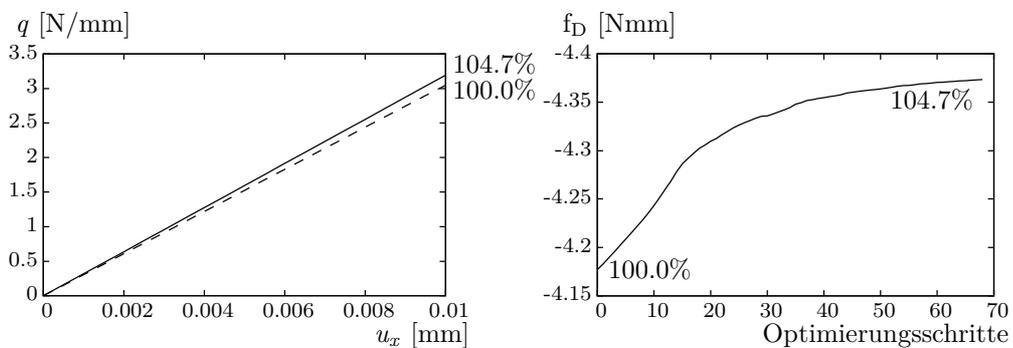


Abbildung 6.4.: Last-Verschiebungsdiagramm und Duktilitätszuwachs

gleich mit der Topologieoptimierung bestätigt das Optimierungsergebnis als physikalisch sinnvoll.

6.2. Zugstab: Grenzschichtversagen

Im folgenden Beispiel (Abbildung 6.5) wird der perfekte Verbund zwischen den verschiedenen Materialphasen durch das Traktions-Verschiebungssprunggesetz nach Smith und Ferrante aus Kapitel 3.1.6 ersetzt. Die Materialien selbst bleiben weiterhin linear elastisch, nur der Verbund weist ein nichtlineares, schädigendes Verhalten auf. Die Materialkennwerte c_n und G_f beschreiben die Zugfestigkeit des Verbundes sowie die Bruchenergie. Aus ihnen wird die charakteristische Rissöffnung κ_c , die den Zeitpunkt der maximal aufnehmbaren Spannung und den Beginn der Entfestigung wiedergibt, nach Gleichung (3.30) ermittelt. Das Verhältnis zwischen Zug- und Schubfestigkeit beträgt $\beta = 2.0$.

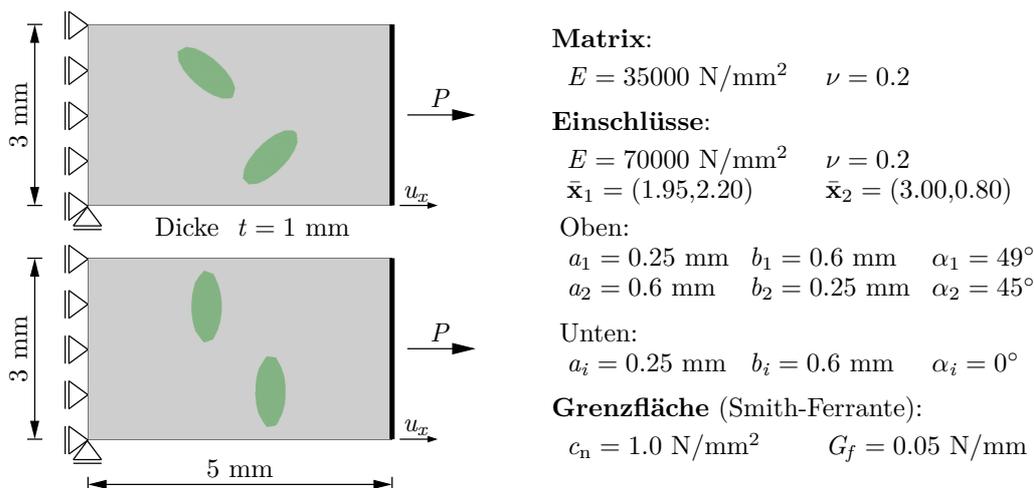


Abbildung 6.5.: Zugversuch mit unterschiedlichen Ausgangskonfigurationen

Es wird eine Scheibe unter Zug mit zwei Einschlüssen untersucht, wobei deren Ausgangskonfiguration variiert wird. Die Größe der Einschlüsse sowie deren Mittelpunkte sind in den gezeigten Fällen identisch. Nur die Ausrichtung der Einschlüsse unterscheidet sich voneinander.

Die eindeutige Level-Set-Funktion ϕ_m , die sich aus dem jeweiligen Minimalwert aller Funktionen $\phi_{m,i}$ ergibt, ist in Abbildung 6.6 zu sehen. Diese soll exemplarisch für alle untersuchten Beispiele stehen, da ansonsten auf eine explizite Darstellung der Level-Set-Funktion verzichtet wird.

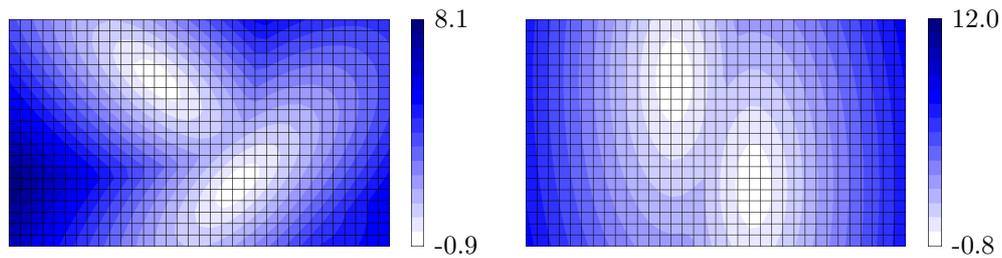


Abbildung 6.6.: Level Set Funktion ϕ_m

Durch die dicke Linie bei der Einzellast P soll eine Kopplung der horizontalen Verschiebungsfreiheitsgrade am Lasteinleitungsende angezeigt werden. Diese Kopplung verteilt die Last P ungleichmäßig über die gesamte Bauteilhöhe hinweg. Die verschiebungsgesteuerte Strukturanalyse erfolgt mit 680 bilinearen finiten Elementen, von denen je nach Orientierung der Einschlüsse eine unterschiedliche Anzahl mit zusätzlichen Freiheitsgraden angereichert werden muss. Es ergeben sich nach Abzug der Lagerungs- und Kopplungsbedingungen für die schrägen bzw. rotierten Einschlüsse aus dem ersten Beispiel 1812 Freiheitsgrade, für die senkrecht ausgerichteten Einschlüsse 1792 unbekannte Verschiebungen. Die Anreicherung sieht sowohl eine Erweiterung im Zusammenhang mit der materiellen Grenzfläche als auch mit dem schädigenden Verbundgesetz vor.

Obwohl zu Beginn noch keine Delamination an der Grenzschicht auftritt, müssen beim Traktions-Verschiebungssprunggesetz nach Smith und Ferrante diese Freiheitsgrade bereits implementiert werden, da das Versagenkriterium im Verbundgesetz von Anbeginn implizit enthalten ist. Wird das Rissinitiierungskriterium gesondert abgeprüft, kommen die zusätzlichen Freiheitsgrade erst im Laufe der Strukturanalyse hinzu. Die Berechnung erfolgt mit 400 Verschiebungskrementen $\Delta u_x = 5 \cdot 10^{-5}$ mm bis zu einer Gesamtverschiebung des Kontrollfreiheitsgrades von $u_x = 0.02$ mm im ebenen Verzerrungszustand.

Als Optimierungsziel wird die Maximierung der Duktilität bei gleichbleibender Masse der Einschlüsse vorgesehen. Die Entwurfsvariablen sind im oberen Fall von Abbildung 6.5 die Verdrehwinkel der Einschlüsse α_1 und α_2 . In der unteren Konfiguration von Abbildung 6.5 werden die Halbachsen a_i und b_i der beiden Einschlüsse variiert. Diese müssen sich, im Gegensatz zu den Verdrehwinkeln, die nicht beschränkt sind, in einem Bereich von $0.25 \text{ mm} \leq a_i, b_i \leq 0.6 \text{ mm}$ bewegen.

In Abbildung 6.7 wird gezeigt, dass sich bei Verwendung des MMA-Algorithmus im ersten Fall und dem OC-Verfahren im zweiten Fall dasselbe Optimierungsergebnis einstellt. Dies wird durch das Last-Verschiebungsdiagramm in Abbildung 6.8 ebenfalls bestätigt. Dort erkennt man an den leicht abweichenden Zielkurven, dass die Einschlüsse im Deformationsfall (Abb.6.7 unten) noch nicht ganz ihre maximale mögliche Ausdehnung erreicht haben. Erst für den maximal zulässigen Grenzfall stimmen die Ergebnisse

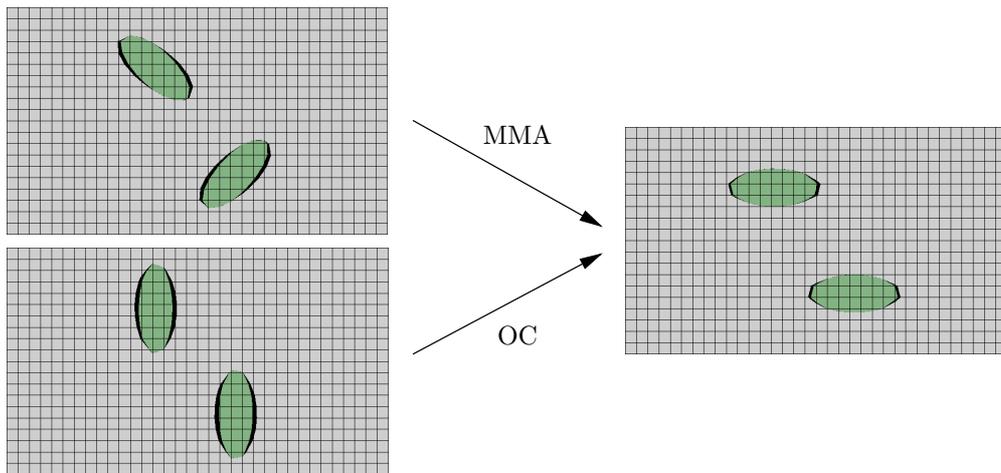


Abbildung 6.7.: Vergleich zwischen OC-Verfahren und MMA-Algorithmus; Risseöffnung in Normalenrichtung 10-fach überhöht dargestellt; $\hat{u} = 0.02$ mm

mit der Winkloptimierung (siehe Abb.6.7 oben) exakt überein. Die Abweichung liegt im Nachkommabereich, so dass die gerundeten Ergebnisse jeweils eine Duktilität von $f_D = -3.9$ Nmm erreichen.

Wäre der Entwurfsraum der Halbachsen nicht in der zuvor genannten Weise eingeschränkt, würden sich die Einschlüsse im zweiten Fallbeispiel noch weiter zusammenziehen und damit die Duktilität über den erreichten Wert hinaus vergrößern. Man erkennt, dass sich infolge des nichtlinearen Strukturverhaltens an den materiellen Grenzflächen das Potential des Optimierungsprozesses erhöht. Die erreichbaren Zuwächse der Zielfunktion sind deutlich größer als dies bei der L-förmigen Scheibe aus Kapitel 6.1 der Fall war. In den Ausgangskonfigurationen der vorgestellten Zugstäbe sind die Strukturquerschnitte in Belastungsrichtung durch große Schädigungs- bzw. Rissbereiche stark geschwächt. Im Laufe der Optimierung entziehen sich diese Delaminationsbereiche der

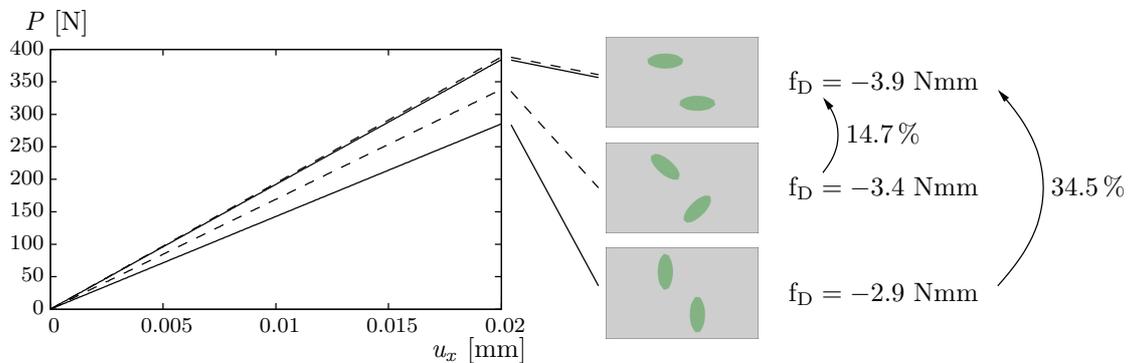


Abbildung 6.8.: Last-Verschiebungsdiagramm und Zuwachs der Zielfunktion Duktilität

Belastung und die Steifigkeit des Restquerschnittes erhöht sich. Dies führt letztendlich zur Maximierung der Duktilität im Rahmen der zulässigen Variationen.

Die gradientenbasierten Optimierungsverfahren liefern somit auch für Strukturen mit lokalem Schädigungsverhalten an den materiellen Grenzflächen sinnvolle Verbesserungen für die vorgegebene Zielfunktion.

Bemerkung: Da ein Großteil der Struktur sich weiterhin linear elastisch verhält und das Versagen nur lokal an den Grenzflächen auftritt, ist die materielle Nichtlinearität in Abbildung 6.8 nicht zu erkennen.

6.3. Kombiniertes Matrix- und Grenzschichtversagen

Nachdem im vorhergehenden Beispiel bei der Strukturanwort nur das reine Delaminationsversagen zwischen den Einschlüssen und der Matrix berücksichtigt wurde, soll im Folgenden zusätzlich das Versagen des Matrixmaterials selbst mit einbezogen werden. Durch die Kombination von Grenzschicht- und Matrixversagen erhöht sich die Komplexität aus numerischer und physikalischer Sicht erheblich. Auf diesen Aspekt wird im Rahmen einer Parameterstudie zur Zugfestigkeit des Matrixmaterials eingegangen, wobei die Optimierung in diesem Zusammenhang keine Rolle spielen soll, d.h. für diese Studie wird die regelmäßige Lage der Einschlüsse nach Abbildung 6.1 beibehalten.

Als Modellbeispiel wird abermals die L-förmige Scheibe aus Kapitel 6.1 verwendet. Die Abmessungen sowie die Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen werden analog übernommen; ebenso die Anzahl und Positionierung der kreisrunden Einschlüsse, die mit den Werten aus diesem Beispiel identisch sind. Die Berechnungen zur Systemantwort erfolgen erneut auf einem Netz aus 2700 quadratischen Elementen, die jedoch weit über

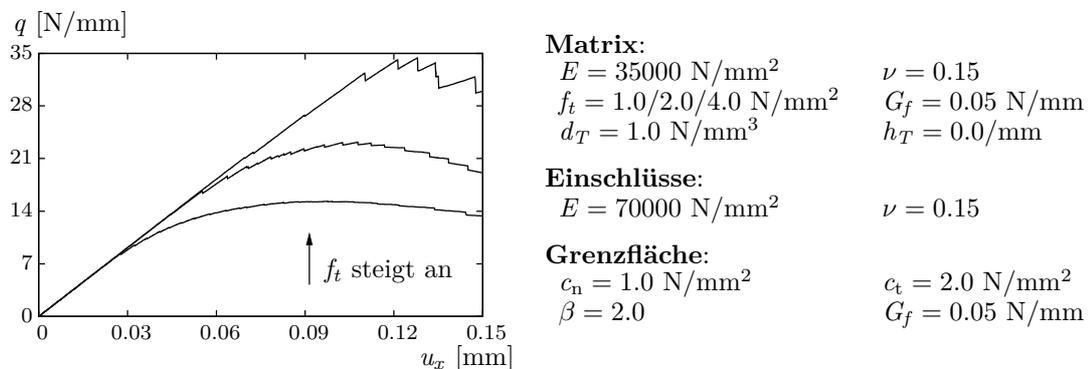


Abbildung 6.9.: Last-Verschiebungsdiagramm bei kombiniertem Matrix- und Interfaceversagen

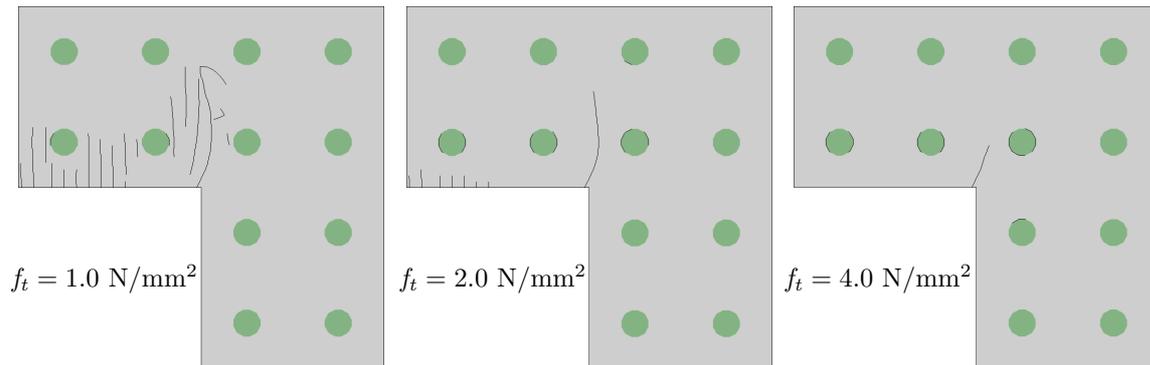


Abbildung 6.10.: Risszustand bei unterschiedlicher Zugfestigkeit für $\hat{u} = 0.15$ mm

die 20 Verschiebungsinkremente des linear elastischen Falls hinaus belastet werden. Der Kontrollfreiheitsgrad u_x wird in 1500 Schritten bis zu einer Gesamtverschiebung von 0.15 mm verschoben. Somit haben die einzelnen Verschiebungsinkremente einen Wert von $\Delta u_x = 0.0001$ mm. Die zugehörigen Last-Verschiebungskurven für den ebenen Verzerrungszustand sind in Abbildung 6.9 dargestellt.

An den materiellen Grenzflächen wird im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel nicht das Verbundgesetz nach Smith und Ferrante, sondern das in Kapitel 3.1.6 beschriebene exponentielle Entfestigungsgesetz verwendet. Somit müssen die erweiterten Rissfreiheitsgrade erst nach der Überschreitung des Rissinitiierungskriteriums aus Gleichung (3.32) in das System eingebracht werden. Als Grenzschichtkennwerte werden die Zugfestigkeit $c_n = 1.0$ N/mm² sowie die Schubfestigkeit $c_t = 2.0$ N/mm² verwendet. Diese ergeben zusammen den Verhältniswert $\beta = 2.0$. Die Bruchenergie wird zu $G_f = 0.05$ N/mm angenommen. Im Falle einer Druckbeanspruchung der gerissenen Grenzfläche wird im entsprechenden Bereich die elastische Steifigkeit zu $d_n = 10^6$ N/mm³ gewählt.

Das Mode-I Versagen im Matrixmaterial ist durch folgende Parameter charakterisiert. Die Zugfestigkeit wird in den drei Stufen $f_t = 1.0$ N/mm², $f_t = 2.0$ N/mm² und $f_t = 4.0$ N/mm² gesteigert. Diese ist somit bis zu 4-mal größer als die Zugfestigkeit der materiellen Grenzflächen. Die am Riss dissipierte Bruchenergie beträgt $G_f = 0.05$ N/mm. Bei Rissinitiierung wird die Steifigkeit in tangentialer Rissrichtung mit dem Wert $d_T = 1.0$ N/mm³ gewählt. Eine Degradation der tangentialen Steifigkeit wird durch den Parameter $h_T = 0.0$ /mm ausgeschlossen. Der Abschirmradius, der eine Rissbildung in der Nachbarschaft bestehender Risse verhindert, wird auf die doppelte Kantenlänge eines finiten Elementes gesetzt ($16\bar{6}$ mm).

In Abbildung 6.10 erkennt man, dass bei einer im Verhältnis zur Grenzfläche geringen Zugfestigkeit des Matrixmaterials große Bereiche gerissen sind. In diesen Fällen steigt die Anzahl der Systemfreiheitsgrade aufgrund der Erweiterung des Verschiebungsfeldes an

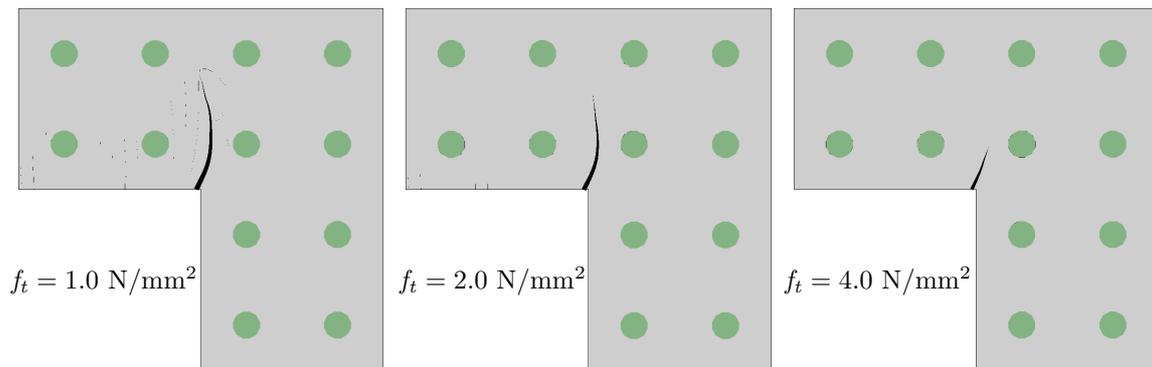


Abbildung 6.11.: Risszustand; 150-fach überhöht dargestellt; $\hat{u} = 0.15$ mm

vielen Systemknoten deutlich an, ebenso wie der Berechnungsaufwand für die im Sinne einer Optimierung notwendigen Gradienten. Dies ist insofern ungünstig, da es sich in den meisten Fällen um Sekundärrisse handelt, die sich im Gegensatz zu Primärrissen während des Belastungsverlaufs nicht wesentlich öffnen bzw. zur Dissipation beitragen.

In Abbildung 6.11 mit qualitativer Rissöffnung sieht man, dass sich unabhängig vom Verhältnis der Zugfestigkeiten untereinander stets der gleiche Primärriss im inneren Winkel der L-förmigen Scheibe einstellt. Angesichts der unterschiedlichen Zugfestigkeiten im Matrixmaterial zwischen den einzelnen Beispielen weichen die Risslängen bei gleichbleibender Kontrollverschiebung voneinander ab. Je höher die Zugfestigkeit des Matrixmaterials gewählt wird, umso weniger weit ist der Primärriss bei gleicher Verschiebungsvorgabe fortgeschritten.

Da es bei einer geringen Zugfestigkeit des Matrixmaterials zur Bildung vieler Risse kommt, erhält man infolge des feinen Rissbildes eine wünschenswert glatte Systemantwort. Betrachtet man das Last-Verschiebungsdiagramm in Abbildung 6.9, erkennt man, dass es bei der Bildung weniger Risse zu einem unstetigen Verlauf im Diagramm kommt, der durch den elementweisen Rissfortschritt begründet ist. Auf der anderen Seite kann es bei einer großen Rissanzahl zu erheblichen Problemen im Gleichgewichtsalgorithmus kommen, da die Verfolgung der einzelnen Risse nicht unproblematisch ist. Je nach Verteilung der Zugfestigkeiten steigt die Anzahl der Matrixrisse von 1 über 8 bis zu 17 zu verfolgenden Rissverläufen an. Bei einer Matrixsteifigkeit von $f_t = 1.0$ N/mm² erhöht sich die Anzahl der Freiheitsgrade im Laufe der Strukturanalyse um 580 auf 6160 unbekannte Verschiebungsfreiheitsgrade, wohingegen beim vierfachen Steifigkeitswert lediglich 184 Freiheitsgrade hinzukommen. Dies entspricht einem Unterschied von 315%. Kommt es aufgrund einer mehrfachen Rissbildung im Berechnungsalgorithmus zu numerischen Schwierigkeiten, kann man die Anzahl der zulässigen Risse beschränken. Auf diese Weise wird es möglich sich auf die Verfolgung der Primärrisse zu beschränken. Von dieser Möglichkeit wird jedoch in dieser Arbeit kein Gebrauch gemacht.

Das abrupte Abknicken des Risses im ersten Beispiel (Abbildung 6.10 links) beruht auf dem Versagen des Rissrichtungskriteriums aus Kapitel 3.1.7. Liegt an der Risspitze ein biaxialer Zugspannungszustand mit etwa gleichgroßen Hauptspannungen vor, ist eine eindeutige Rissrichtungsbestimmung mithilfe des Hauptspannungskriteriums bzw. der „nicht-lokalen“ Cauchy-Spannungen nicht mehr möglich. Die Ermittlung der Richtungsänderung erfolgt zufällig und es ergibt sich ein unphysikalischer Rissverlauf. Daraus folgt, dass auch die numerischen Ergebnisse ab diesem Zeitpunkt unbrauchbar sind. DUMSTORFF (2005) beobachtete in seiner Dissertation ebenfalls die Instabilität des Hauptspannungskriteriums und schlägt zur Bestimmung der Rissrichtung ein Kriterium auf Basis der Minimierung der Gesamtenergie vor. Dieses wurde in der vorliegenden Arbeit nicht umgesetzt, zeigt bei der Anwendung auf die L-förmige Scheibe jedoch gute Ergebnisse (siehe DUMSTORFF UND MESCHKE (2007)). Um die untersuchten Beispiele dennoch mit dem verwendeten Kriterium berechnen zu können, werden die äußeren Belastungen auf den zulässigen, unkritischen Bereich beschränkt. Somit entfällt die Notwendigkeit das Rissrichtungskriterium für die vorliegenden Optimierungsprobleme zu modifizieren.

6.4. L-förmige Scheibe: geschädigt

Die nunmehr bekannte L-förmige Scheibe wird im folgenden Beispiel mit einem einzigen, elliptischen Bewehrungseinschluss, dessen Mittelpunkt bei $\bar{\mathbf{x}} = (372.3, 302.6)$ liegt, versehen (siehe Abbildung 6.12). Die Halbachsen a und b dieser Bewehrungsellipse stehen in einem Längenverhältnis von 1 zu 5.25 und deren Winkel zu den Systemachsen beträgt $\alpha = 1.1$ rad bzw. 63.0° . Es sollen sowohl die Matrix als auch die materielle Grenzfläche schädigendes Materialverhalten aufweisen.

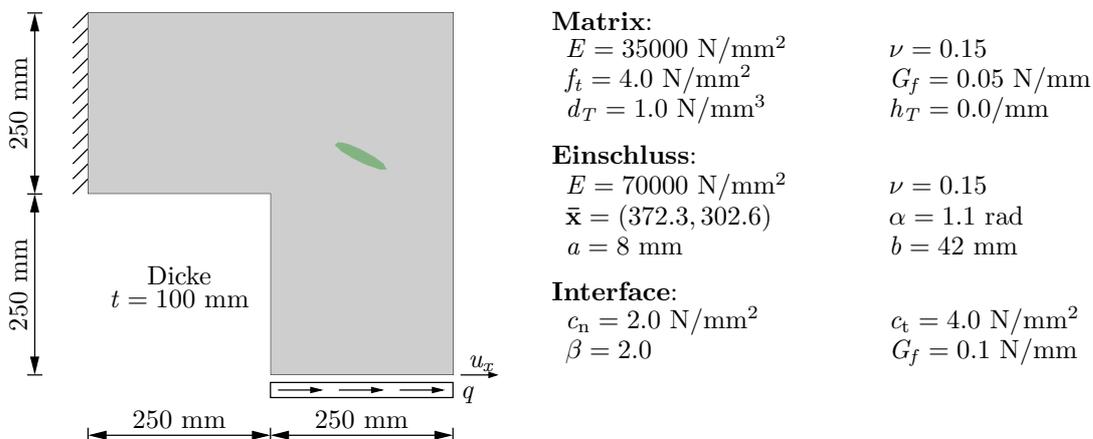


Abbildung 6.12.: L-förmige Scheibe mit lokalem Schädigungsverhalten

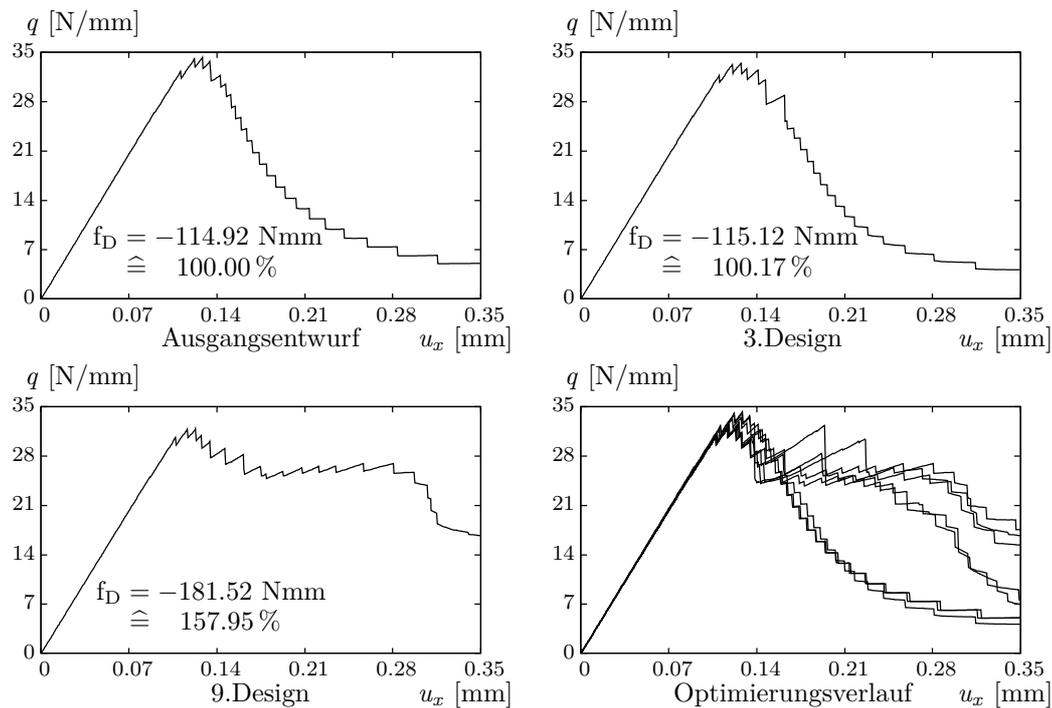


Abbildung 6.13.: Änderungen im Last-Verschiebungsdiagramm während der Optimierungsschleife

Bei Verwendung des Verbundgesetz nach Smith und Ferrante aus Kapitel 3.1.6 muss an der materiellen Grenzfläche von Beginn an mit dem vollständig um schwache und starke Diskontinuitäten erweiterten Verschiebungsfeld gerechnet werden. Die Erweiterung der Knotenfreiheitsgrade in Bezug auf das Versagen des Matrixmaterials erfolgt im Laufe der Strukturanalyse nach Überschreitung der Zugfestigkeit von $f_t = 4.0 \text{ N/mm}^2$. Am Interface wird das Mode-II-Versagen durch die Zug- und Schubfestigkeit $c_n = 2.0 \text{ N/mm}^2$ und $c_t = 4.0 \text{ N/mm}^2$ gesteuert. Die Bruchenergie ist an der Grenzfläche mit dem Wert $G_f = 0.1 \text{ N/mm}$ doppelt so groß wie im Matrixmaterial.

Aus den gewählten Materialparametern ergibt sich bei der vorgegebenen Verschiebung von 0.35 mm nach Abbildung 6.13 ein Rissbild mit einem einzigen primären Matrixriss sowie Delaminationsverhalten an der materiellen Grenzfläche des Einschlusses. Dies hat, wie in Abschnitt 6.3 beschrieben, den Vorteil, dass nur der Rissfortschritt dieses einen Risses verfolgt werden muss, allerdings auf Kosten eines diskontinuierlichen Last-Verschiebungsverlaufs.

Die einzelnen Strukturanalysen erfolgen auf einem Netz aus 2700 quadratischen Elementen, von denen einige durch die materielle Grenzfläche des Einschlusses in zwei Gebiete geteilt werden. Für den Ausgangsentwurf ergeben sich nach Abzug der Lagerbedingungen 5804 unbekannte Verschiebungsfreiheitsgrade im System. Aufgrund der Bildung des

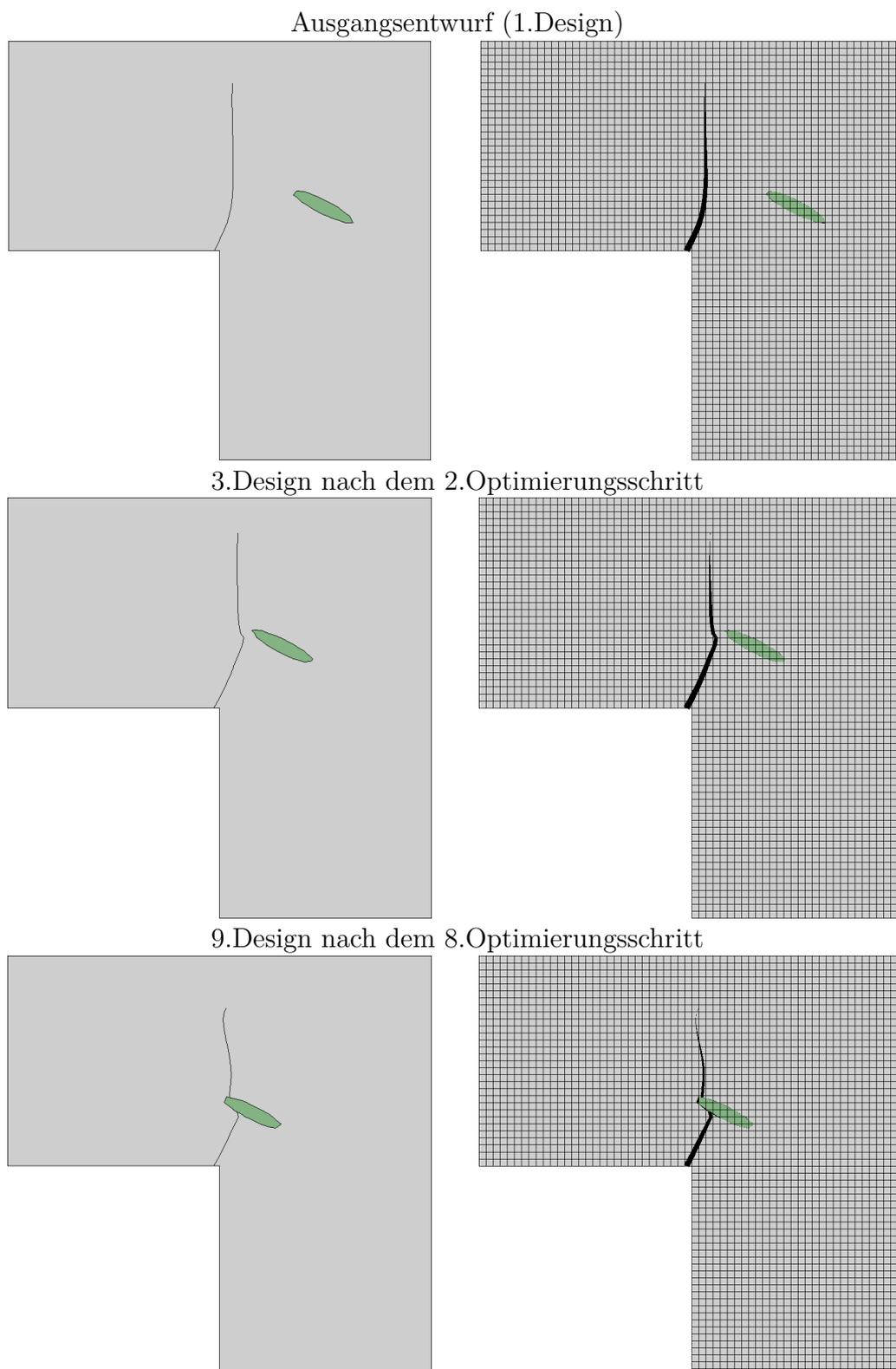


Abbildung 6.14.: Lageänderung des Einschluss im Optimierungsverlauf; Rissöffnung rechts 50-fach überhöht dargestellt; $\hat{u} = 0.35$ mm

Matrixrisses an der einspringenden Ecke der L-förmigen Scheibe erhöht sich diese Anzahl stetig während der Strukturanalyse, bis für den Ausgangsentwurf am Ende des Belastungspfades 5908 Verschiebungsfreiheitsgrade vorliegen. Der Kontrollfreiheitsgrad u_x wird in 700 Verschiebungsinkrementen $\Delta u_x = 0.0005$ mm auf eine Gesamtverschiebung von 0.35 mm verschoben.

Für das Optimierungsziel „Maximierung der Duktilität“ soll die Lage des Ellipsenursprungs mithilfe des MMA-Algorithmus aus Kapitel 2.3.2 variiert werden. Die Optimierungsvariablen \bar{x}_1 und \bar{x}_2 garantieren in diesem Zusammenhang die automatische Einhaltung der Nebenbedingung „konstante Bewehrungsmasse“, da sie das Volumen des Einschlusses nicht verändern. Der Wertebereich der Entwurfsvariablen wird in der Form eingeschränkt, so dass der Bewehrungseinschluss einen Mindestabstand von 10 mm zum Rand der L-förmigen Scheibe hin einhält. Das Ergebnis des Optimierungsprozesses soll anhand der Last-Verschiebungsdiagramme in Abbildung 6.13 sowie der Lageänderung des Bewehrungseinschlusses nach Abbildung 6.14 erläutert werden. Dort sind die Ergebnisse der Strukturanalyse sowohl für den Ausgangsentwurf als auch die geänderten Designs nach dem 2. und 8. Optimierungsschritt aufgetragen.

Für den Ausgangsentwurf ergibt sich die Duktilität nach Gleichung (5.5) zu $f_D = -114.92$ Nmm. Dieser Wert steigert sich auf $f_D = -115.12$ Nmm, sobald nach dem 2. Optimierungsschritt der bisherige Rissverlauf in der Matrix gestört bzw. abgelenkt wird. Dies erkennt man zum einen am Risschaubild in Abbildung 6.13 als auch am Verlauf des Last-Verschiebungsdiagramms in Abbildung 6.14 (3.Design). Der Riss versucht in der Bewehrungsfaser zu münden, ohne dies zu diesem Zeitpunkt bzw. bei dem vorgegebenen 3.Design zu erreichen. Sobald der Bewehrungseinschluss vom Optimierungsalgorithmus weit genug in den Risspfad verschoben wurde, mündet der Riss im Einschluss und muss auf der gegenüberliegenden Seite neu entstehen, um einen Rissfortschritt zu ermöglichen.

Am Beispiel des 9.Designs, dass sich nach dem 8. Optimierungsschritt einstellt, ist die Wirkung des Bewehrungseinschlusses auf den Rissverlauf gut ersichtlich. Der Matrixriss selbst kann nicht verhindert werden, aber der Rissfortschritt wird deutlich behindert. Es stellt sich im Last-Verschiebungsverlauf ein Plateau ein, dass die Duktilität auf einen Wert von $f_D = -181.52$ Nmm anwachsen lässt. Im Vergleich zum Ausgangsentwurf entspricht dies einem Zuwachs von 57.95 %. Da der Einschluss die Übertragung der Zugspannungen im Rissbereich aufgrund seiner höheren Steifigkeit weitgehend übernimmt, wird das Matrixmaterial in diesem Bereich soweit entlastet, dass es zu einer Verzögerung im Rissfortschritt kommt. Erst wenn die Matrix auf der gegenüberliegenden Seite des Einschlusses das Rissinitiiierungskriterium überschreitet und der Riss weiterwächst, fällt das Lastniveau im Last-Verschiebungsdiagramm ab. Mithilfe des MMA-Algorithmus ist es somit möglich, eine erhebliche Duktilitätssteigerung zu erreichen.

Nachdem der Einschluss in den Risspfad verschoben wurde, schafft es der Algorithmus jedoch nicht, diesen noch weiter nach links zu verschieben. In Abbildung 6.14 erkennt man, dass durch eine weitere Verschiebung in diese Richtung die Rissinizierung hinter dem Einschluss hinausgezögert würde. Dies lässt sich anhand einer gesonderten Strukturanalyse bestätigen. Es wird vermutet, dass die Veränderungen, die sich im Rissverlauf der Matrix aufgrund einer weiteren Verschiebung des Einschlusses ergeben würden, von den ermittelten Sensitivitäten nur unzureichend erfasst werden. Auf die fehlenden Sensitivitätsanteile, die eine Lageänderung von Matrixrissen betrifft, wurde bereits in Kapitel 5.1.4 eingegangen. Ungeachtet dieser Schwäche in der Sensitivitätsermittlung wird ein gutes Optimierungsergebnis erzielt.

Fazit und Ausblick

7.1. Fazit

Durch die Kombination gradientenbasierter Optimierungsverfahren, wie dem Optimalitätskriterienverfahren oder der Methode der bewegten Asymptoten, mit der erweiterten Finite-Element-Methode können gute Ergebnisse bei der Maximierung der Duktilität von lokal geschädigten Verbundmaterialien erzielt werden. Durch die implizite Geometriebeschreibung von Matrixeinschlüssen und Rissen bietet die X-FEM die Möglichkeit, den Optimierungsprozess zur Strukturfindung unabhängig von einer Neuvernetzung bei Designänderungen voranzutreiben. Dies erfordert auf der anderen Seite eine ständige Anpassung der Systemfreiheitsgrade zwischen den einzelnen Optimierungsentwürfen, sowie während der Sensitivitätsanalyse die Ermittlung zusätzlicher Terme, die die Lageänderung materieller Grenzflächen betreffen.

Als Hauptproblem der Strukturanalyse stellt sich die Verfolgung des Rissfortschritts bei der Bildung mehrerer Risse im Matrixmaterial dar. Die Last-Verschiebungsdiagramme geben zwar für ein ausgedehntes Rissbild im Vergleich zur Einzelrissbildung eine glattere Strukturantwort wieder. In den einzelnen Lastinkrementen sind dagegen viele Iterationen notwendig, um die Gleichgewichtsbedingung zu erfüllen. In einigen Fällen kann überhaupt keine Konvergenz im Strukturalgorithmus erreicht werden. Um die Ermittlung der Rissrichtung zu stabilisieren, sollte das Rissrichtungskriterium modifiziert werden.

Das kombinierte Zug-Schub-Versagen an den materiellen Grenzflächen ist ebenfalls problematisch. Werden die zusätzlichen Freiheitsgrade erst im Laufe der Delamination eingeführt, kann die Diskontinuität in der normalen Steifigkeitsfunktion K_n zwischen einem sich öffnenden Riss und sich überschneidenden Rissufern zu Beginn der Gleichgewichts-

iteration zu Problemen führen. Das Entfestigungsgesetz nach Smith und Ferrante überwindet dieses Problem.

Die Sensitivitätsanalyse bildet das Rückgrat gradientenbasierter Optimierungsverfahren. Wie in Kapitel 5 beschrieben, muss eine Vielzahl von Ableitungen berücksichtigt werden, um alle Abhängigkeiten bezüglich der Entwurfsvariablen zu erfassen. Wesentlich hierfür sind u.a. die geometriebeschreibenden Level-Set-Funktionen, bei denen besonders bei der Integration von Elementen mit zusätzlichen Freiheitsgraden die Lageänderung der Gaußpunkte nicht vernachlässigt werden darf. Einen weiteren Schwerpunkt bilden die Materialgleichungen zur Beschreibung des lokalen Schädigungsverhaltens von Verbundmaterialien. Hinsichtlich der Ableitung der Traktions-Verschiebungssprungesetze muss auf die Unterscheidung zwischen einem Belastungszustand und einem Entlastungszustand geachtet werden.

Von den Optimierungsalgorithmen ist das OC-Verfahren durch seine Abhängigkeit von den Gradienten der Gleichheitsnebenbedingung im Nenner der Iterationsvorschrift nur eingeschränkt anwendbar. Im Rahmen seiner Zulässigkeit liefert es jedoch gute Ergebnisse. Unproblematisch ist in diesem Zusammenhang hingegen der MMA-Algorithmus, wobei stets die Ungleichheitsnebenbedingung überwacht werden muss. Je nach Optimierungsverlauf muss die Ungleichheitsnebenbedingung invertiert werden, um die Nebenbedingung „Konstantes Einschlussvolumen“ zu gewährleisten. Die Einhaltung eines Mindestabstands zwischen verschiedenen Einschlüssen wird vom vorgestellten Kontrollmechanismus garantiert. Da es sich bei beiden Optimierungsalgorithmen um lokale Gradientenverfahren handelt, kann eine Abhängigkeit des Optimierungsergebnisses vom Ausgangsentwurf beobachtet werden. Speziell bei Problemen mit kombiniertem Matrix- und Interfaceversagen ist das in Beispiel 6.4 gezeigte gute Ergebnis nicht für alle Ausgangsentwürfe zu erzielen.

7.2. Ausblick

Wie in der Beschreibung zu Beispiel 6.4 bereits angesprochen, stellt die Unkenntnis über die Lageänderung von Matrixrissen infolge einer Variation der Entwurfsparameter einen entscheidenden Nachteil für die gradientenbasierte Optimierung dar. Die unvollständigen Sensitivitätsinformationen in finiten Elementen mit Matrixrissen behindern den automatisierten Optimierungsprozess oder verhindern ihn unter Umständen vollständig. Somit stellt die Suche nach Berechnungsmöglichkeiten bezüglich der fehlenden Gradienteninformationen der rissbeschreibenden Vektor-Level-Set-Gleichungen einen wichtigen Aspekt weiterführender Untersuchungen dar.

Um die unstete Systemantwort infolge des elementweisen Rissfortschritts zu verbessern, können die vorgestellten Anreicherungsfunktionen um Rissspitzenfunktionen ergänzt werden. Diese ermöglichen einen Rissfortschritt, der unabhängig von den finiten Elementen erfolgt. Eine Stabilisierung der Strukturanalyse bei vielfacher Rissbildung ist für die genaue Ermittlung der Sensitivitäten ebenfalls von Bedeutung.

Bei den vorgestellten Beispielen konnte stets ein gutes, physikalisch sinnvolles Optimierungsergebnis erzielt werden. Erhöht man die Anzahl der Einschlüsse bei nichtlinearem Materialverhalten, zeigen sich jedoch die Grenzen der verwendeten Gradientenverfahren. Insbesondere bei der Notwendigkeit großer Strukturanpassungen auf dem Weg zum optimalen Design scheitern lokale Gradientenverfahren. In diesen Fällen kann versucht werden, sich mithilfe globaler Suchalgorithmen dem Optimum zu nähern, um im Anschluss daran mit den vorgestellten Gradientenverfahren die gefundene Lösung zu verbessern. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, da z.B. stochastische Optimierungsverfahren den Lösungsraum schnell eingrenzen können, den optimalen Entwurf jedoch erst nach einer überproportional großen Anzahl an Iterationen finden.

A

XFEM - Parallelen zu hierarchischen Elementen

Die Genauigkeit einer FE-Berechnung kann verbessert werden, indem die Anzahl der Elemente erhöht oder die Polynomordnung in den einzelnen Elementen heraufgesetzt wird. Im ersten Fall spricht man von einer h-Adaption, bei der die Netzweite h verringert wird. Bei der p-Adaption verändert man hingegen die Ordnung der Verschiebungsansätze der Elemente. In der Literatur finden sich darüber hinaus Beispiele, in denen die beiden Verfahren in sinnvoller Weise gekoppelt werden (hp-Adaption) (siehe z.B. HOUSTON UND SÜLI 2005).

In Abbildung A.1 kann man gut erkennen, dass beide Verfahren zum gleichen, verfeinerten Ergebnis führen. Die Erhöhung der Polynomordnung erfordert dabei in der Regel eine vollständige Neuberechnung der Elementmatrizen, da die Formfunktionen durch die erhöhte Knotenanzahl neu konstruiert werden müssen. Sind diese hingegen hierarchisch aufgebaut, entfällt dieser Schritt.

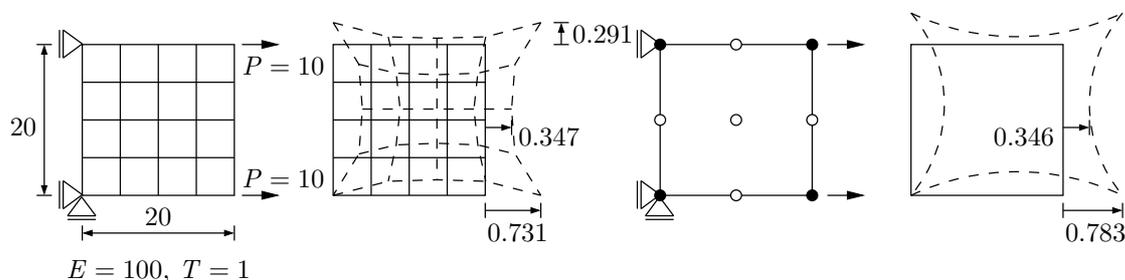


Abbildung A.1.: Vergleich zwischen 16 bilinearen Verschiebungselementen und einem hierarchischen, biquadratischen Element

Im folgenden soll gezeigt werden, dass es sich bei den erweiterten Finiten Elementen aus Kapitel 3 ebenfalls um hierarchisch aufgebaute Elemente handelt, die alternativ durch eine erhöhte Elementanzahl ersetzt werden könnten.

In Abbildung A.2 ist links ein bilineares Element unter einer Streckenlast zusammen mit dessen Verformung dargestellt. Erweitert man dieses Element um eine materielle Grenzfläche mit vertikaler Ausrichtung, ändert sich am Verformungsverhalten zunächst nichts. Geht man jedoch von unterschiedlichen Elastizitätsmoduli links und rechts der Diskontinuität aus, ist das erweiterte Element in der Lage den diskontinuierlichen Verschiebungsverlauf abzubilden, wohingegen ein einzelnes bilineares Element einen linearen Verlauf der horizontalen Verschiebungen unter Verwendung einer gemittelten Steifigkeit darstellen würde. Die X-FEM bildet somit die unterschiedlichen Dehnungen aufgrund verschiedener Materialeigenschaften im selben Element ab.

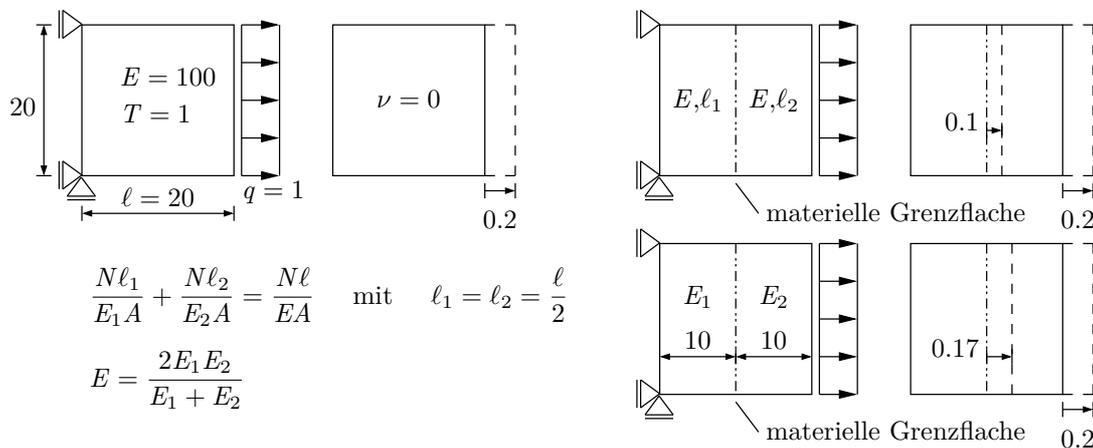


Abbildung A.2.: Vergleich zwischen einem bilinearem Standardelement (*links*) und einem erweitertem X-FEM-Element mit vertikaler Grenzfläche (*rechts*)

Im gezeigten Beispiel werden für die modifizierten Steifigkeiten die Werte $E_1 = 60$ und $E_2 = 300$ gewählt. Diese wurden, unter Zuhilfenahme des vereinfachten Ansatzes aus Abbildung A.2, an die durchschnittliche Elementsteifigkeit $E = 100$ angepasst.

Eine deutliche Änderung ergibt sich, wenn man mithilfe der X-FEM eine horizontale Grenzfläche in das bilineare Element einbringt. Die entstehende Verformungsfigur kann von einem einzelnen Element nicht mehr adäquat abgebildet werden, wohingegen eine Netzverfeinerung auf zwei Elemente bereits dasselbe Ergebnis liefert (siehe Abbildung A.3).

Vergleicht man das Ergebnis aus Abbildung A.3 mit dem aus Abbildung A.1 so erkennt man, dass die Erweiterung des Verschiebungsfeldes im Rahmen der X-FEM nur in eine der beiden Raumrichtungen eine Auswirkung hat. In der zweiten, vertikalen Richtung

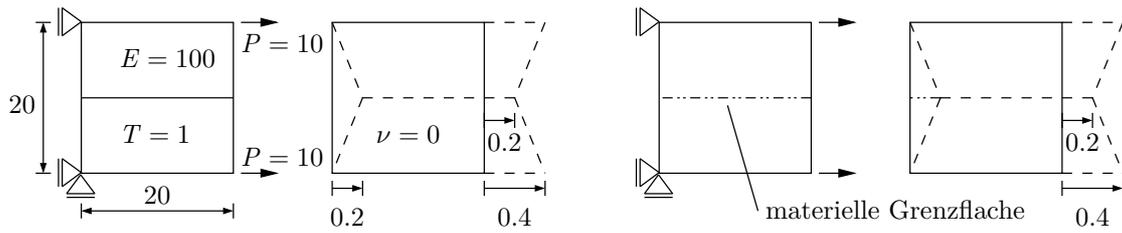


Abbildung A.3.: Vergleich zwischen *links*: zwei Standardelementen und *rechts*: einem erweiterten X-FEM-Element mit horizontaler Grenzfläche

wird die Lösung nicht weiter verfeinert. Aus dieser Feststellung heraus lässt sich jedoch nicht schließen, dass die eine Vorgehensweise besser ist als die andere, da die Grundidee hinter den Verfahren eine unterschiedliche ist. Während bei der p-Adaption die Reduktion des Approximationsfehlers im Vordergrund steht, versucht man mit der X-FEM schwache und starke Diskontinuitäten in einem finiten Element abzubilden.

Abschließend soll auf den Umgang der X-FEM mit zusätzlichen Lagerbedingungen und Streckenlasten eingegangen werden. Dies soll aufzeigen, welchen Einfluss die erweiterten Freiheitsgrade auf das Ergebnis des Verschiebungsfeldes haben. Wie in Abbildung A.4 zu sehen ist, kann das zusätzliche Auflager in der Mitte, das bei zwei Elementen leicht umzusetzen ist, nicht direkt an der entsprechenden Stelle mit einem erweiterten Element verbunden werden. Die zugehörigen Freiheitsgrade sind mit den Elementknoten assoziiert und müssen auch dort festgehalten werden. Ebenso verhält es sich mit den zusätzlichen, konsistenten Knotenkräften, welche bei den zwei Elementen in der Mitte, beim erweiterten Element oben und unten angesiedelt sind.

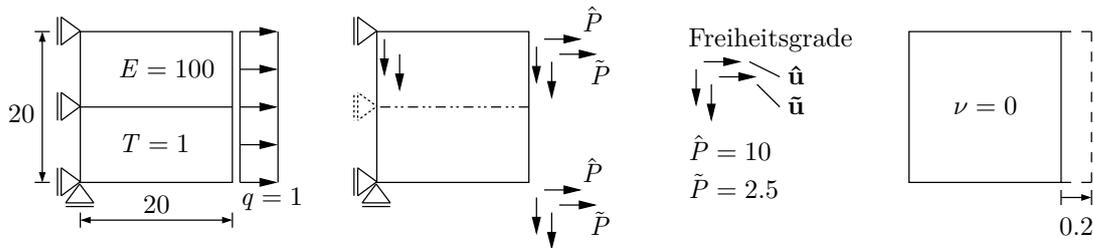


Abbildung A.4.: Lagerung und konsistente Knotenkräfte der erweiterten Verschiebungsfreiheitsgrade

Im Gegensatz zum Beispiel in Abbildung A.3 mit Einzellasten erhält man unter den letztgenannten Voraussetzungen wieder das Ergebnis eines einzelnen bilinearen Elements unter Streckenbelastung (Abbildung A.2). Somit kann gezeigt werden, dass der Umgang mit erweiterten finiten Elementen im Randbereich einer Struktur, insbesondere in der Nähe von Auflagern und Lasten, einer gewissen Vorsicht bedarf, um die Umsetzung der Randbedingung in der gewünschten Weise sicherzustellen.

Literaturverzeichnis

ALLAIRE U. A. 2004

Allaire, G.; Jouve, F.; Toader, A.-M.: Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. In: *Journal of Computational Physics* 194 (2004), S. 363–393

ALTENBACH UND ALTENBACH 1994

Altenbach, J.; Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, Stuttgart, 1994

ARMERO 1999

Armero, F.: Large-scale modeling of localized dissipative mechanisms in a local continuum: applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids. In: *Mech. Coh.-Frict. Mat.* 4 (1999), S. 101–131

BAIER U. A. 1994

Baier, H.; Seeßelberg, C.; Specht, B.: *Optimierung in der Strukturmechanik*. Vieweg Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1994

BARTHOLD 2002

Barthold, F.-J.: *Zur Kontinuumsmechanik inverser Geometrieprobleme*. 2002. – Habilitation, Technische Universität Braunschweig

BATHE 2002

Bathe, K.J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002

BELEGUNDU UND RAJAN 1988

Belegundu, A.D.; Rajan, S.D.: A shape optimization approach based on natural

design variables and shape functions. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 66 (1988), S. 87–106

BELYTSCHKO UND BLACK 1999

Belytschko, T.; Black, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 45 (1999), S. 601–620

BELYTSCHKO U. A. 2000

Belytschko, T.; Liu, W.K.; Moran, B.: *Nonlinear Finite Element Analysis for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, Chichester, England, UK, 2000

BENDSØE UND KIKUCHI 1988

Bendsøe, M.P.; Kikuchi, N.: Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 71 (1988), S. 197–224

BENDSØE UND SIGMUND 2003

Bendsøe, M.P.; Sigmund, O.: *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003

BETTEN 2001

Betten, J.: *Kontinuumsmechanik – Elastisches und inelastisches Verhalten isotroper und anisotroper Stoffe*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001

BLETZINGER 1990

Bletzinger, K.-U.: *Formoptimierung von Flächentragwerken*, Bericht Nr. 11, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1990

BLETZINGER 1993

Bletzinger, K.-U.: Extended method of moving asymptotes based on second-order information. In: *Structural Optimization* 5 (1993), S. 175–183

BLETZINGER U. A. 2010

Bletzinger, K.-U.; Firl, M.; Linhard, J.; Wüchner, R.: Optimal shapes of mechanically motivated surfaces. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 199 (2010), S. 324–333

BLETZINGER U. A. 2005

Bletzinger, K.-U.; Wüchner, R.; Daoud, F.; Camprubí, N.: Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005), S. 3438–3452

BLOOMENTHAL U. A. 1997

Bloomenthal, J.; Bajaj, C.; Blinn, J.; Cani-Gascuel, M.-P.; Rockwood, A.; Wyvill,

B.; Wyvill, G.: *Introduction to Implicit Surfaces*. Kaufmann Publisher Inc., San Francisco, 1997

BREWER UND LAGACE 1988

Brewer, J.C.; Lagace, P.A.: Quadratic stress criterion for initiation of delamination. In: *Journal of Composite Materials* 22 (1988), S. 1141–1155

BUGEDA U. A. 1999

Bugeda, G.; Gil, L.; Oñate, E.: Structural shape sensitivity analysis for nonlinear material models with strain softening. In: *Structural Optimization* 17 (1999), S. 162–171

BUTENWEG UND THIERAUF 1999

Butenweg, C.; Thierauf, G.: Bemessung und Kostenoptimierung von Stahlbetontragwerken. In: *7. Fachtagung Baustatik-Baupraxis*. edited by K.Meskouris; RWTH Aachen, Deutschland, 1999, S. 213–220

CAMACHO UND ORTIZ 1996

Camacho, G.T.; Ortiz, M.: Computational modelling of impact damage in brittle materials. In: *Int. J. Solids & Structures* 33 (1996), S. 2899–2938

CARPINTERI 1989

Carpinteri, A.: Softening and snap-back instability in cohesive solids. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 28 (1989), S. 1521–1537

CHEN U. A. 2001

Chen, C.; Harte, A.M.; N.A., Fleck: The plastic collapse of sandwich beams with a metallic foam core. In: *Int. J. Mech. Sci.* 43 (2001), S. 1483–1506

CHOI UND CHANG 2001

Choi, K.K.; Chang, K.-H.: A study of design velocity field computation for shape optimal design. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 15 (2001), S. 317–341

CHOI UND KIM 2005

Choi, K.K.; Kim, N.H.: *Structural sensitivity analysis and optimization 1/2*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005

COLEMAN UND GURTIN 1967

Coleman, B.D.; Gurtin, M.E.: Thermodynamics with Internal State Variables. In: *J. Chem. Phys.* 47 (1967), S. 597–613

COLEMAN UND NOLL 1963

Coleman, B.D.; Noll, W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 13 (1963), S. 167–178

CRISFIELD 1986

Crisfield, M.A.: Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under-integration. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 22 (1986), S. 751–767

DOLBOW 1999

Dolbow, J.E.: *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*, Northwestern University, Dissertation, 1999

DUMSTORFF 2005

Dumstorff, P.: *Modellierung und numerische Simulation von Rissfortschritt in spröden und quasi-spröden Materialien auf Basis der Extended Finite Element Method*, Lehrstuhl für Statik und Dynamik, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Dissertation, 2005

DUMSTORFF UND MESCHKE 2005

Dumstorff, P.; Meschke, G.: Modelling of cohesive and non-cohesive cracks via X-FEM based on global energy criteria. In: *Proceedings of the 8th International Conference on Computational Plasticity*. edited by D.R.J. Owen, E. Oñate; CIMNE, Barcelona, 2005, S. 565–568

DUMSTORFF UND MESCHKE 2007

Dumstorff, P.; Meschke, G.: Crack propagation in the framework of X-FEM-based structural analyses. In: *Int.J.Numer.Anal.Meth.Geomech.* 31 (2007), S. 239–259

DUYSINX UND BENDSØE 1997

Duysinx, P.; Bendsøe, M.P.: Topology optimization of continuum structures with stress constraints. In: *Proceedings of the 2nd World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization*. edited by W. Gutkowski & Z. Mróz; Institute of Fundamental Technological Research, Warsaw, Poland, 1997, S. 527–532

DUYSINX U. A. 2006

Duysinx, P.; Van Miegroet, L.; Jacobs, T.; Fleury, C.: Generalized shape optimization using X-FEM and Level Set Methods. In: *IUTAM Symposium on Topological Design Optimization of Structures, Machines and Materials*. edited by M.P. Bendsøe, N.Olhoff & O.Sigmund; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg : Solid Mechanics and its applications Vol 137, 2006, S. 23–32

ESCHENAUER 1985

Eschenauer, H.: *Rechnerische und experimentelle Untersuchungen zur Strukturoptimierung von Bauteilen*. Ein Forschungsvorhaben der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) 1980-1984, Forschungslaboratorium für Angewandte Strukturoptimierung am Inst. für Mechanik u. Regelungstechnik, Univ.-Gesamthochsch. Siegen, 1985

ESCHENAUER U. A. 1990

Eschenauer, H.; Koski, J.; Osyczka, A.: *Multicriteria design optimization*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1990

FLEURY 1989

Fleury, C.: CONLIN: an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts. In: *Structural Optimization* 1 (1989), S. 81–89

FLEURY UND BRAIBANT 1986

Fleury, C.; Braibant, V.: Structural optimization: a new dual method using mixed variables. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 23 (1986), S. 409–428

GRACZYKOWSKI UND LEWIŃSKI 2006

Graczykowski, C.; Lewiński, T.: Michell cantilevers constructed within trapezoidal domains-Part I: geometry of Hencky nets. In: *Arch. Rat. Mech. Anal.* 32 (2006), S. 347–368

HAFTKA 1982

Haftka, R.T.: Second-order sensitivity derivatives in structural analysis. In: *AIAA Journal* 20 (1982), S. 1765–1766

HAFTKA UND GÜRDAL 1991

Haftka, R.T.; Gürdal, Z.: *Elements of Structural Optimization, 3rd rev. and expanded edition*. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1991

HARZHEIM 2008

Harzheim, L.: *Strukturoptimierung: Grundlagen und Anwendungen*. Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, Frankfurt am Main, 2008

HAUG 1981

Haug, E.J.: Second-order design sensitivity analysis of structural system. In: *AIAA Journal* 19 (1981), S. 1087–1088

HAUG 1984

Haug, E.J.: Structural design sensitivity analysis with generalized global stiffness and mass matrices. In: *AIAA Journal* 22 (1984), S. 1299–1303

HAUG U. A. 1986

Haug, E.J.; Choi, K.K.; Komkov, V.: *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Bd. 177. Academic Press, Orlando, New York, 1986. – Mathematics in Science and Engineering

HAUPT 2002

Haupt, P.: *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2002

HETTICH 2007

Hettich, T.M.: *Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien*, Bericht Nr. 50, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2007

HOLZAPFEL 2000

Holzapfel, G.A.: *Nonlinear Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, Chichester, 2000

HÖRMANN 2002

Hörmann, M.: *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen*, Bericht Nr. 39, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2002

HÖRNLEIN 2004

Hörnlein, H.R.E.M.: *Optimalitätskriterien in der Strukturoptimierung*. 2004. – Seminar: Optimierungsprozesse bei der Entwicklung von Leichtbaustrukturen, Universität der Bundeswehr München

HOUSTON UND SÜLI 2005

Houston, P.; Süli, E.: A note on the design of hp-adaptive finite element methods for elliptic partial differential equations. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005), S. 229–243

HUGHES 2000

Hughes, T.J.R.: *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Mineola, NY, 2000

KARUSH 1939

Karush, W.: *Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions*, Univ. of Chicago, Dissertation, 1939

KATO 2010

Kato, J.: *Material optimization for fiber reinforced composites applying a damage formulation*, Bericht Nr. 53, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2010

KATO U. A. 2009

Kato, J.; Lipka, A.; Ramm, E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 39 (2009), S. 63–81

KATO UND RAMM 2010

Kato, J.; Ramm, E.: Optimization of fiber geometry for fiber reinforced composites considering damage. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 46 (2010), S. 401–415

KEMMLER 2004

Kemmler, R.: *Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung*, Bericht Nr. 41, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2004

KEMMLER U. A. 2005

Kemmler, R.; Lipka, A.; Ramm, E.: Large deformations and stability in topology optimization. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 30 (2005), S. 459–476

VAN KEULEN U. A. 2005

Keulen, F. van; Haftka, R.T.; Kim, N.H.: Review of options for structural design sensitivity analysis. Part 1: Linear systems. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005), S. 3213–3243

KIKUCHI U. A. 1986

Kikuchi, N.; Chung, K.Y.; Torigaki, T.; Taylor, J.E.: Adaptive finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 57 (1986), S. 67–89

KIMMICH 1990

Kimmich, S.: *Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen*, Bericht Nr. 12, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1990

KLEIBER U. A. 1997

Kleiber, M.; Antúnez, H.; Hien, T.D.; Kowalczyk, P.: *Parameter Sensitivity in Non-linear Mechanics*. John Wiley & Sons, Chichester, England, 1997

KLEIBER U. A. 1995

Kleiber, M.; Hien, T.D.; Antúnez, H.; Kowalczyk, P.: Parameter sensitivity of elastoplastic response. In: *Engrg. Computations* 12 (1995), S. 263–280

KRONGAUZ UND BELYTSCHKO 1998

Krongauz, Y.; Belytschko, T.: EFG approximation with discontinuous derivatives. In: *Int. J. Numer. Meth. Engrng.* 41 (1998), S. 1215–1233

KUHN UND TUCKER 1951

Kuhn, H.W.; Tucker, A.W.: Nonlinear Programming. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Univ. of California Press, Berkeley, 1951, S. 481–492

LIPKA 2007

Lipka, A.: *Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologie-*

optimierung, Bericht Nr. 47, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2007

LIU U. A. 2005

Liu, Z.; Korvink, J.G.; Huang, R.: Structure topology optimization: fully coupled level set method via FEMLAB. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 29 (2005), S. 407–417

LUO U. A. 2008

Luo, Z.; Wang, M.Y.; Wang, S.; Wei, P.: A level set-based parameterization method for structural shape and topology optimization. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 76 (2008), S. 1–26

MA U. A. 1995

Ma, Z.-D.; Kikuchi, N.; Chenkg, H.-C.; Hagiwara, I.: Topological optimization technique for free vibration problems. In: *J.Appl.Mech.* 62 (1995), S. 200–207

MALVERN 1977

Malvern, L.E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1977

MARSDEN UND HUGHES 1994

Marsden, E.M.; Hughes, T.J.R.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover Publications, Mineola, NY, 1994

MAUTE 1998

Maute, K.: *Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken*, Bericht Nr. 25, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1998

MERGHEIM U. A. 2005

Mergheim, J.; Kuhl, E.; Steinmann, P.: A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 63 (2005), S. 276–289

MICHELL 1904

Michell, A.G.M.: LVIII. The limits of economy of material in frame-structures. In: *Philosophical Magazine Series 6* 8 (1904), S. 589–597

MOËS UND BELYTSCHKO 2002

Moës, N.; Belytschko, T.: Extended finite element method for cohesive crack growth. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), S. 813–833

MOËS U. A. 2003

Moës, N.; Cloirec, M.; Cartraud, P.; Remacle, J.-F.: A computational approach to handle complex microstructure geometries. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 192 (2003), S. 3163–3177

MOËS U. A. 1999

Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T.: A finite element method for crack growth without remeshing. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 46 (1999), S. 131–150

MOSLER 2002

Mosler, J.: *Finite Elemente mit sprungstetigen Abbildungen des Verschiebungsfeldes für numerische Analysen lokalisierter Versagenszustände in Tragwerken*, Mitteilung Nr. 130, Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum, Dissertation, 2002

NEVES U. A. 2002

Neves, M.M.; Sigmund, O.; Bendsøe, M.P.: Topology optimization of periodic microstructures with a penalization of highly localized buckling modes. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 54 (2002), S. 809–834

OLIVER U. A. 2004

Oliver, J.; Huespe, A.E.; Samaniego, E.; Chaves, E.W.V.: Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. In: *Int.J.Numer.Anal.Meth.Geomech.* 28 (2004), S. 609–632

ORTIZ UND PANDOLFI 1999

Ortiz, M.; Pandolfi, A.: Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 44 (1999), S. 1267–1282

OSHER UND SETHIAN 1988

Osher, S.; Sethian, J.A.: Fronts Propagating with Curvature-Dependent Speed: Algorithms Based on Hamilton-Jacobi Formulations. In: *Journal of Computational Physics* 79 (1988), S. 12–49

PEDERSEN 2004

Pedersen, C.B.W.: Crashworthiness design of transient frame structures using topology optimization. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193 (2004), S. 653–678

PEDERSEN 2000

Pedersen, P.: On optimal shapes in materials and structures. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 19 (2000), S. 169–182

RAMM U. A. 1998

Ramm, E.; Maute, K.; Schwarz, S.: Conceptual design by structural optimization. In: *Proceedings of EURO-C Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*. edited by R. de Borst, N. Bićanić, H. Mang & G.Meschke; A.A. Balkema, Rotterdam, Badgastein, Austria, 1998, S. 879–896

REITINGER UND RAMM 1995

Reitinger, R.; Ramm, E.: Buckling and imperfection sensitivity in the optimization of shell structures. In: *Thin-Walled Structures* 23 (1995), S. 159–177

ROSE U. A. 1981

Rose, J.H.; Smith, J.; Ferrante, J.: Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces. In: *Physical Review Letters* 47 (1981), S. 675–678

ROTHHAUS UND BARTHOLD 2008

Rotthaus, M.; Barthold, F.-J.: Structural optimization of multi-material structures. In: *Proceedings of the 7th ASMO UK Conference on Engineering Design Optimization*. edited by Toropov, V.V., Querin, O.M., Kim, H.A., Butler, R. & Sienz, J., 2008, S. 354–367

ROZVANY 1996

Rozvany, G.I.N.: Some shortcomings in Michell's truss theory. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 12 (1996), S. 244–250

RYU U. A. 1985

Ryu, Y.S.; Haririan, M.; Wu, C.C.; Arora, J.S.: Structural design sensitivity analysis of nonlinear response. In: *Computers & Structures* 21 (1985), S. 245–255

SCHNEIDER 2008

Schneider, K.J.: *Bautabellen für Ingenieure*. Werner Verlag, Düsseldorf, 2008

SCHUMACHER 2004

Schumacher, A.: *Optimierung mechanischer Strukturen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2004

SCHWARZ 2001

Schwarz, S.: *Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten*, Bericht Nr. 34, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2001

SILVA U. A. 1997

Silva, C.E.K.; Hinton, E.; Vaz, L.E.; Sienz, J.: 2D shape optimization with rate-independent elastoplasticity. In: *Proceedings of the 5th International Conference on Computational Plasticity*. edited by D.R.J. Owen, E. Oñate, E. Hinton; CIMNE, Barcelona, 1997, S. 836–852

SOTO 2004

Soto, C.A.: Structural topology optimization for crashworthiness. In: *International Journal of Crashworthiness* 9 (2004), S. 277–283

STEIN UND BARTHOLD 1996

Stein, E.; Barthold, F.-J.: Elastizitätstheorie. In: *Der Ingenieurbau, Grundwissen: Werkstoffe, Elastizitätstheorie*. edited by G. Mehlhorn; Ernst & Sohn, Berlin, 1996, S. 165–428

STEUER 1986

Steuer, R.E.: *Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation, and Application*. John Wiley & Sons, New York, 1986

SUKUMAR U. A. 2001

Sukumar, N.; Chopp, D.L.; Moës, N.; Belytschko, T.: Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001), S. 6183–6200

SUKUMAR UND PRÉVOST 2003

Sukumar, N.; Prévost, J.-H.: Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation. In: *Int. J. Solids & Structures* 40 (2003), S. 7513–7537

SVANBERG 1987

Svanberg, K.: The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 24 (1987), S. 359–373

SVANBERG 2010

Svanberg, K.: *MMA and GCMMA, versions September 2007*. 2010. – URL <http://www.math.kth.se/~krille/>

TONTI 1972

Tonti, E.: On the mathematical structure of a large class of physical theories. In: *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei* 52 (1972), S. 48–56

TONTI 1976

Tonti, E.: The reason for analogies between physical theories. In: *Appl. Math. Modelling* 1 (1976), S. 37–50

TORTORELLI 1993

Tortorelli, D.A.: A geometric representation scheme suitable for shape optimization. In: *Mech. Struct. & Mach.* 21 (1993), S. 95–121

TORTORELLI UND MICHALERIS 1994

Tortorelli, D.A.; Michaleris, P.: Design sensitivity analysis: Overview and review. In: *Inverse Problems in Science and Engineering* 1 (1994), S. 71–105

TSAY UND ARORA 1989

Tsay, J.J.; Arora, J.S.: Optimum design of nonlinear structures with path dependent response. In: *Structural Optimization* 1 (1989), S. 203–213

TSAY UND ARORA 1990

Tsay, J.J.; Arora, J.S.: Nonlinear structural design sensitivity analysis for path dependent problems. Part 1: General theory. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 81 (1990), S. 183–208

VENTURA U. A. 2003

Ventura, G.; Budyn, E.; Belytschko, T.: Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 58 (2003), S. 1571–1592

VIDAL UND HABER 1993

Vidal, C.A.; Haber, R.B.: Design sensitivity analysis for rate-independent elastoplasticity. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 107 (1993), S. 393–431

WELLS 2001

Wells, G.N.: *Discontinuous modelling of strain localisation and failure*, Delft University of Technology, Dissertation, 2001

WELLS UND SLUYS 2001A

Wells, G.N.; Sluys, L.J.: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. In: *Int.J.Numer.Meth.Engng.* 50 (2001), S. 2667–2682

WELLS UND SLUYS 2001B

Wells, G.N.; Sluys, L.J.: Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture. In: *Int. J. Solids & Structures* 38 (2001), S. 897–913

WINKLER 2001

Winkler, B.J.: *Traglastuntersuchungen von unbewehrten und bewehrten Betonstrukturen auf der Grundlage eines objektiven Werkstoffgesetzes für Beton*, Leopold-Franzens-Universität Innsbruck, Dissertation, 2001

WOO UND WHITCOMB 1993

Woo, K.; Whitcomb, J.D.: Macro finite element using subdomain integration. In: *Commun.Numer.Meth.Engng.* 9 (1993), S. 937–949

ZHANG UND BELEGUNDU 1992

Zhang, S.; Belegundu, A.D.: A systematic approach for generating velocity fields in shape optimization. In: *Structural Optimization* 5 (1992), S. 84–94

ZHANG U. A. 1996

Zhang, W.H.; Fleury, C.; Duysinx, P.: A generalized method of moving asymptotes

(GMMMA) including equality constraints. In: *Structural Optimization* 12 (1996), S. 143–146

ZIENKIEWICZ UND CAMPBELL 1973

Zienkiewicz, O.C.; Campbell, J.S.: Shape optimization and sequential linear programming. In: *Optimum Structural Design, Theory and Applications*. edited by R.H. Gallagher, O.C. Zienkiewicz; John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973, S. 109–126

ZIENKIEWICZ U. A. 2005

Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z.: *The Finite Element Method*. Bd. I-II. Elsevier Butterworth Heinemann, Oxford, 2005

Lebenslauf

Persönliche Angaben:

Name: Carl Frédéric Hilchenbach
Geburtsdatum: 21. Juni 1979 in Stühlingen
Eltern: Bertold[†] und Ursula Hilchenbach, geb. Leonhardt
Familienstand: verheiratet, zwei Kinder
Konfession: katholisch

Schulbildung:

1985 - 1989 Grundschule, Horheim-Schwerzen
1989 - 1995 Hochrheingymnasium, Tiengen
1995 - 1998 Technisches-Gymnasium, Waldshut
06/1998 Allgemeine Hochschulreife (Abitur)

Grundwehrdienst:

1998 - 1999 Grundwehrdienst im Gebirgspionierbataillon 8, Brannenburg

Studium:

1999 - 2004 Studium des Bauingenieurwesen an der Universität Stuttgart
04/2004 Abschluss als Diplom-Ingenieur

Beruflicher Werdegang:

04/2004 - 02/2010 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T.A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.

- 9 (1989) **D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K.M. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axial-belasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T.J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.

-
- 20 (1996) **N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) **C. Haüßer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) **D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) **H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhausstragwerken.
- 24 (1998) **H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) **K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) **B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) **F. Cirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) **M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) **H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) **M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.

- 31 (1999) W.A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D.P. Mok:**
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.

- 42 (2004) **G.A. D’Addetta:**
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) **M. Gee:**
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) **T. Erhart:**
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A.S. Hund:**
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T.M. Hettich:**
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.

53 (2010) J. Kato:

Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.



Universität Stuttgart

ISBN 978-3-00-033541-9