

BERECHNUNG LANGER DÜNNWANDIGER  
DREIZELLIGER TRÄGER  
UNTER  
BERÜCKSICHTIGUNG DER PROFILVERFORMUNG

von

Elkin A. Castrillón O.



Bericht Nr. 75 - 3

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: o. Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer

Stuttgart 1975



Dieser Bericht wurde unter dem Titel  
"Beitrag zur Berechnung langer dünnwan-  
diger dreizelliger Trager unter Berück-  
sichtigung der Profilverformung" als  
Dissertation von Herrn Elkin A. Castrillón O.  
dem Fachbereich 11, Konstruktiver Ingenieur-  
bau, der Universität Stuttgart am 22. 8. 75  
vorgelegt.

Die mündliche Doktorprüfung fand am 8. 12. 75  
statt.

Berichter waren:

Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer

Professor Dr.-Ing. G. Hees

Die Abfassung der Arbeit war nur möglich  
dank der finanziellen Unterstützung des  
Verfassers durch den Deutschen Akademischen  
Austauschdienst.

### ZUSAMMENFASSUNG

Ziel der Arbeit ist die statische Untersuchung des elastischen Tragverhaltens von Trägern des Brückenbaus mit mehrzelligem Hohlkastenquerschnitt (vierseitige Innenzelle mit zwei auskragenden Dreieckkästen).

Verschiedene Verfahren der Faltwerksberechnung werden diskutiert, insbesondere die Theorie von Wlassow.

Es wird auf die Bedeutung der Profilverformung und der zugehörigen Querbiegung der Wände bei langen Trägern hingewiesen.

Für lange Träger mit symmetrischem Querschnitt wird ein Näherungsverfahren vorgeschlagen, das ohne Benutzung von großen elektronischen Rechnern angewendet werden kann. Die Brauchbarkeit der Methode wird durch zahlreiche Vergleichsrechnungen mit den vollständigen Faltwerkstheorien überprüft.

### SUMMARY

The elasto static response of box girder bridges with a special cross section (quadrilateral interior cell with two additional triangular boxes) is analysed.

Different methods of folded plate analysis are discussed especially the theory of Vlasov.

The importance is pointed out the cross section distortion and the corresponding lateral bending of the plates are having on large spans.

For long box girders with symmetrical cross section an approximate method is proposed which can be applied without using a big computer. The efficiency of the method is also shown by comparison with various numerical examples analysed by more exact theories.

## RESUMEN

Fin del trabajo es la investigación del comportamiento elastostático de vigas con sección cajón multicelular (una celda interior cuadrilateral y dos celdas exteriores triangulares).

Son discutidos diferentes métodos para el cálculo de vigas plegadas, especialmente la teoría de Vlášov.

Se señala la importancia de la deformación del perfil y de la correspondiente flexión transversal de las paredes en vigas largas.

Para vigas largas con sección transversal simétrica se propone un método de cálculo aproximado que puede ser aplicado sin utilizar grandes computadoras electrónicas. La utilidad del método es comprobada mediante numerosos cálculos comparativos con las teorías mas exactas.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<u>Schrifttum</u>	8
<u>Bezeichnungen</u>	16
<u>1. Einleitung</u>	21
1.1 Allgemeines	21
1.2 Ziel dieser Arbeit	21
<u>2. Verfahren für die Berechnung prismatischer dünnwan-</u> <u>diger Faltwerke</u>	27
2.1 Allgemeines	27
2.2 Theorie des geraden Stabes	29
2.3 Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen	32
2.4 Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen bei Berücksichtigung der Schubverzerrungen	33
2.4.1 Verfahren für die Berechnung von ein- zelligen Trägern	34
2.5 Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Scheibenzuständen	47
2.6 Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Platten- und Scheibenzuständen	47
<u>3. Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und</u> <u>Scheibenzuständen</u>	51
3.1 Allgemeines	51
3.2 Verschiebungs- und Spannungszustände	51
3.3 Verallgemeinerte Schnittkräfte am gesamten Querschnitt	58
3.4 Variationsaussagen	61
3.4.1 Virtuelle Verschiebungen in der quer- schnittsebene	62
3.4.1.1 Innere Arbeit	62
3.4.1.2 Äußere Arbeit	64

	Seite
3.4.2 Virtuelle Verschiebungen in der Längsrichtung	67
3.4.2.1 Innere Arbeit	67
3.4.2.2 Äußere Arbeit	69
3.4.3 Gleichgewichtsbedingungen infolge des gesamten virtuellen Verschiebungszustandes	71
3.5 Allgemeine Ansätze für die Verschiebungen	72
3.5.1 Verschiebungen in Querschnittsebene	72
3.5.2 Verschiebungen in Längsrichtung	73
3.6 Vereinfachende Annahmen	73
3.6.1 Vernachlässigung der Querdehnungszahl	73
3.6.2 Vernachlässigung der Dehnungen -Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen bei Berücksichtigung der Schubverzerrungen-	74
3.7 Integration der Differentialgleichungen	75
3.7.1 Integration mit Hilfe von Fourierreihen	76
3.7.2 Integration eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung	77
<u>4. Anwendung der Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen bei Berücksichtigung der Schubverzerrungen</u>	80
4.1 Allgemeines	80
4.2 Träger mit starrem Querschnitt	81
4.3 Träger mit verformbarem Querschnitt	84
4.4 Allgemeine Berücksichtigung von Verkehrslasten	91
<u>5. Aufstellung von Näherungsverfahren für Träger mit einfach symmetrischem Querschnitt</u>	97
5.1 Einleitung	97
5.2 Ansätze für den Längsverschiebungsverlauf beim antimetrischen Lastfall	98
5.3 Symmetrischer Verschiebungszustand	113
5.4 Antimetrische Verschiebungs- und Verformungszustände	116
5.4.1 Integration des Differentialgleichungs-	

	Seite
systems	122
5.4.2 Integration der Differentialgleichung $\alpha V'' - b V'' + c V = 0$	131
5.4.3 Randbedingungen	132
<u>6. Beispiele</u>	134
6.1 Einleitung	134
6.2 Träger mit verformbarem Querschnitt	139
6.2.1 Querbiegemomente	139
6.2.2 Normalspannungen in der Längsrichtung	153
6.2.3 Schubspannungen	173
6.2.4 Berücksichtigung eines starren Schotts in der Feldmitte	185
6.3 Allgemeine Diskussion der Ergebnisse	188
<u>7. Zusammenfassung</u>	193

Anhang

A. Integration der Differentialgleichung

$$\alpha V(z)'' - b V(z)'' + c V(z) = 0$$

mit den konstanten Koeffizienten  $\alpha$ ,  $b$  und  $c$ . 194



SCHRIFTTUM

- [ 1 ] Abdel-Samad, S. R., Wright, R. and Robinson, A.R.:  
Analysis of Box Girders with Diaphragms. J. of the  
Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST 10, Okt. 1968,  
S. 2231-2256.  
Errata: Vol. 95, No. ST9, Sept. 1969, S. 1981.
- [ 2 ] Bažant, Z.P.: Pièces longues à voiles épais et calcul  
des poutres à section déformable. Annales des Ponts et  
Chaussées 138 (1968), No. 3, S. 155-169.
- [ 3 ] Bechert, H.: Massivbrücken. Beton Kalender 1975, Wilhelm  
Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf.
- [ 4 ] Benscoter, S.U.: A Theory of Torsion Bending for Multi-  
cell Beams. J. of Applied Mechanics, März 1954, S. 25-34.
- [ 5 ] Bornscheuer, F.W.: Systematische Darstellung des Biege-  
und Verdrehungsvorganges unter besonderer Berücksichtigung  
der Wölbkrafttorsion. Der Stahlbau 21 (1952), H. 1,  
S. 1-9.
- [ 6 ] Campbell-Allen, D. and Wedgwood, R.J.L.: Need for Dia-  
phragms in Concrete Box Girders. J. of the Structural Di-  
vision, ASCE, Vol. 97, No. ST3, März 1971, S. 825-842.  
Diskussion: Vol. 97, No. ST12, Dez. 1971, S. 2911-2920.  
Abschließende Bemerkungen: Vol. 98, No. ST7, Jul. 1972,  
S. 1658-1659.
- [ 7 ] Chapman, J.C., Dowling, I.J., Lim, P.T.K., Billington, C.J.:  
The structural behaviour of steel and concrete box girder  
bridges. The Structural Engineer, Vol. 49, No. 3, März  
1971, S. 111-120.  
Diskussion: Vol. 50, No. 1, Jan. 1972, S. 21-28.
- [ 8 ] Cheung, Y.K.: Folded Plates by Finite Strip Method. J. of  
the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST12, Dez.  
1969, S. 2963-2979.  
Diskussion: Vol. 96, No. ST7, Jul. 1970, S. 1622-1624,  
Vol. 96, No. ST8, Aug. 1970, S. 1848-1851.  
Abschließende Bemerkungen: Vol. 97, No. ST4, Apr. 1971,  
S. 1354-1355.
- [ 9 ] Chu, K.H. and Pinjarkar, S.G.: Multiple Folded Plates.  
J. of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, No. ST2,  
Apr. 1966, S. 297-321.

- Diskussion: Vol. 92, No. ST4, Aug. 1966, S. 391-392,  
Vol. 93, No. ST1, Feb. 1967, S. 578-584.  
Abschließende Bemerkungen: Vol. 93, No. ST4, Aug. 1967,  
S. 301-302.
- [10] Cusens, A.R. and Loo, Y.C.: Applications of the finite strip method in the analysis of concrete box bridges. Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2, Research and Theory, Vol. 57, Jun. 1974, S. 251-273.
- [11] Czerwenka, G. and Schnell, W.: Einführung in die Rechenmethoden des Leichtbaus I. B.I. Hochschultaschenbücher, No. 124/124a, Mannheim, 1967.
- [12] Dabrowski, R.: Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion der Lastenträger mit verformbarem biegesteifem Profil. Der Bauingenieur 40 (1965), H. 11, S. 444-449.
- [13] Das, F.C.: Analysis of box-type structures. Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2, Research and Theory, Vol. 53, Jun. 1972, S. 19-40.  
Diskussion: Vol. 53, Dez. 1972, S. 629-630.
- [14] Dauner, H.G.: Zur Berechnung des dünnwandigen Trapezkastenprofils ohne Querschotte als biegesteifes Falzwerk. Dissertation, Univ. Stuttgart, 1967.
- [15] Davies, J.D., Sommerville, I.J. and Zienkiewicz, O.C.: Analysis of Various Types of Bridges by the Finite Element Method. Developments in Bridge Design and Construction, Crosby Lockwood & Son Ltd., London, 1971, S. 217-236.
- [16] De Boer, R.: Die näherungsweise Ermittlung der mittragenden Breite bei geraden prismatischen Stäben mit geschlossenen dünnwandigen Profilen. Der Stahlbau 39 (1970), H. 1, S. 16-20.
- [17] De Fries-Skene, A. and Scordelis, A.C.: Direct Stiffness Solution for Folded Plates. J. of the Structural Division, ASCE, Vol. 90, No. ST4, Aug. 1964, S. 15-47.  
Diskussion: Vol. 91, No. ST2, Apr. 1965, S. 158-171.  
Abschließende Bemerkungen: Vol. 91, No. ST4, Aug. 1965, S. 199-200.
- [18] Dobovišek, B.: Berechnung prismatischer Schalen. Der Bauingenieur 47 (1972), H. 11, S. 393-400.

- [19] Dobovišek, B.: Berechnung des statischen Zustandes der Rotationsschalen und deren Sektoren. Der Bauingenieur 43 (1973), H. 4, S. 109-115.
- [20] Du Ireez, R.J.: Die Berechnung allgemeiner Flächentragwerke mit Hilfe finiter Streifenelemente. Dissertation, Univ. Stuttgart, 1972.
- [21] Goldberg, J.E. and Leve, H.J.: Theory of Prismatic Folded Plate Structures. Abh. IVBH, Band 17, 1957, S. 59-86.
- [22] Goschy, B.: Der Fastenträger ohne Zwischenschotte, Berechnung auf Torsion. Die Bautechnik 43 (1966), H. 5, S. 159-163.
- [23] Goschy, B.: The torsion of skew-cable suspension bridges. Space Structures, Blackwell Scientific Publications, Großbritannien, 1967, S. 213-220.
- [24] Gruber, E.: Die Berechnung äusserlich statisch unbestimmter prismatischer Scheibenwerke. Abh. IVBH, Band 3, 1935, S. 134-159.
- [25] Gruber, E.: Hohlträger als Faltwerke. Abh. IVBH, Band 7, 1943-1944, S. 139-177.
- [26] Hees, G.: Die Berechnung der Normalkräfte in Tragwerken mit unendlich dehnsteifen Stäben mit Hilfe der Inzidenzmatrizen. Der Stahlbau 36 (1967), H. 5, S. 10-15.
- [27] Hees, G.: Querschnittsverformung des einzelligen Kastenträgers mit vier Wänden in einer zur Wölbkrafttorsion analogen Darstellung. Die Bautechnik 48 (1971), H. 11, S. 370-377 und Die Bautechnik 49 (1972), H. 1, S. 21-28.
- [28] Hees, G.: Lastverzerrungsmomente bei symmetrischen Rechteckkästen. Die Bautechnik 49 (1972), H. 10, S. 335-337.
- [29] Hees, G.: Schriftliche Mitteilung, März 1975.
- [30] Heilig, R.: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. Der Stahlbau 30 (1961), H. 11, S. 333-349.
- [31] Hook, M.A. and Richmond, B.: Precast Box Beams in

- Cellular Bridge Decks. The Structural Engineer, Vol. 48, No. 3, März 1970, S. 120-128.
- Diskussion: Vol. 48, No. 11, Nov. 1970, S. 439-449,  
Vol. 49, No. 3, März 1971, S. 157-164.
- [32] Janssen, J.D. und Veldpaus, F.E.: Über die Stärke und Steifigkeit von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt. Abh. IVBH, Band 32-II, 1972, S. 85-106.
- [33] Janssen, J.D. und Veldpaus, F.E.: Der Einfluss von Querschotten auf das Verhalten von Kastenträgern mit Rechteckquerschnitt. Abh. IVBH, Band 33-I, 1973, S. 66-88.
- [34] Knittel, G.: Zur Berechnung des dünnwandigen Kastenträgers mit gleichbleibendem symmetrischem Querschnitt. Beton und Stahlbetonbau 60 (1965), H. 9, S. 205-211.
- [35] Kollbrunner, C.F. und Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe, Band I. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [36] Kollbrunner, C.F. und Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe, Band II. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
- [37] Krístek, V.: Tapered Box Girders of Deformable Cross Section. J. of the Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST8, Aug. 1970, S. 1761-1793.
- Abschließende Bemerkungen: Vol. 97, No. ST7, Jul. 1971, S. 2021-2023.
- [38] Krístek, V.: Irregular Supports and Skew Diaphragms of Box Girders. J. of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST5, Mai 1974, S. 917-931.
- [39] Kupfer, H.: Kastenträger mit elastisch ausgesteiftem Querschnitt unter Linien- und Einzellasten. Stahlbetonbau, Berichte aus Forschung und Praxis, W. Ernst & Sohn, Berlin-München, 1969, S. 251-263.
- [40] Lacher, G.: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische oder starre Querschotte versteiften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querlast. Der Stahlbau 31 (1962), H. 10, S. 299-308 und H. 11, S. 325-335.

- [41] Lee, D.J.: Western Avenue Extension - the design of section five. The Structural Engineer, Vol. 48, No. 3, März 1970, S. 109-120.
- Diskussion: s. [31] .
- [42] Leonhardt, F.: Neue Tendenzen in Berechnung und Konstruktion von weitgespannten Brücken und Viadukten (schiefe Brücken, Plattenbrücken, Kastenträger). Vorbericht, Achter Kongreß IVBH, New York, 1968, S. 369-411.
- [43] Lin, C.S. and Scordelis, A.C.: Computer program for bridges on flexible bents. Report No. UC SESM 71-24, Univ. of California, Berkeley, Dez. 1971.
- [44] Lippoth, W.: Zur Beanspruchung mehrzelliger Hohlkastenquerschnitte quer zur Längsachse aus Umlenkkräften der Längsvorspannung. Beton und Stahlbetonbau 65 (1970), H. 12, S. 279-285.
- [45] Loo, Y.C.: Local Strains in a Beam and Slab Bridge Modell Under Concentrated Load. Abh. IVBH, Band 33-I, 1973, S. 167-189.
- [46] Maisel, B.I., Rowe, R.E. and Swann, R.A.: Concrete box-girder bridges. The Structural Engineer, Vol. 51, No. 10, Okt. 1973, S. 363-376.
- [47] Maisel, B.I. and Roll, F.: Methods of analysis and design of concrete box beams with side cantilevers. Technical Report, Cement and Concrete Association, London, 1974.
- [48] Mrotzek, M.: Berechnung von Hohlkastenträgern ohne Querschotte. Beton und Stahlbetonbau 66 (1971), H. 12, S. 281-285.
- [49] Müller, P.: Torsion von Kastenträgern mit elastisch verformbarem symmetrischem Querschnitt. Schweizerische Bauzeitung, Band 71, No. 46, Nov. 1953, S. 673-676.
- [50] Richmond, B.: Twisting of thin-walled box girders. Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 33, Apr. 1966, S. 659-675.
- [51] Richmond, B.: Trapezoidal boxes with continuous diaphragms. Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 43, Aug. 1969, S. 641-650.

- [52] Sakai, F. and Okumura, T.: Influence of Diaphragms on Behaviour of Box Girders with Deformable Cross Section. Vorbericht, Neunter Kongreß IVBH, Amsterdam, 1972, S. 285-298.
- [53] Schmitz, H.: Querschnitte ausgeführter breiter Spannbetonbrücken. Beton und Stahlbetonbau 64 (1969), H. 2, S. 31-38.
- [54] Scordelis, A.C.: Analysis of simply supported box girder bridges. Report No. SESM 66-17, Univ. of California, Berkeley, Okt. 1966.
- [55] Scordelis, A.C., Bowkamp, J.G. and Wasti, S.T.: Structural Response of Concrete Box Girder Bridge. J. of the Structural Division, ASCE, Vol. 99, No. ST 10, Okt. 1973, S. 2031-2048.
- Diskussion: Vol. 100, No. ST8, Aug. 1974, S. 1737-1738,  
Vol. 100, No. ST9, Sept. 1974, S. 1962-1963.  
Abschließende Bemerkungen: Vol. 101, No. ST5, Mai 1975,  
S. 1141-1145.
- [56] Sedlacek, G.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Irofilverformung. Fortschr. Ber. VDI-Z, Reihe 4, No. 8, 1968.
- [57] Sedlacek, G.: Die Anwendung der erweiterten Biege- und Verdrehtheorie auf die Berechnung von Kastenträgern mit verformbarem Querschnitt. Strasse Brücke Tunnel 23 (1971), H. 9, S. 241-244 und H. 12, S. 329-335.
- [58] Sisodiya, R.G., Ghali, A. and Cheung, Y.K.: Diaphragms in Single- and Double- Cell Box Girder Bridges with Varying Angle of Skew. Proc. American Concrete Institute, Vol. 69, Jul. 1972, S. 415-419.
- [59] Sisodiya, R.G. and Ghali, A.: Analysis of Box Girder Bridges of Arbitrary Shape. Abh. IVBH, Band 33-I, 1973, S. 203-218.
- [60] Sokolnikoff, I.S.: Mathematical Theory of Elasticity. Mc Graw-Hill, New York-Toronto-London, 1956.
- [61] Smyth, W.J.R. and Srinivasan: Gateshead Viaduct: the Analysis of a Complex Multicellular Box Structure. Developments in Bridge Design and Construction, Crosby Lockwood & Son Ltd., London, 1971, S. 441-453.

- [62] Stampf, W.: Längs- und Querbeanspruchung des Zweisteg-trägers bei exzentrischer Belastung. Strasse Brücke Tunnel 25 (1973), H. 3, S. 57-67.
- [63] Stein, E.: Beiträge zu den direkten Variationsverfahren in der Elastostatik der Balken und Flächentragwerke. Dissertation, Univ. Stuttgart, 1965.
- [64] Steinle, A.: Torsion und Profilverformung. Dissertation, Univ. Stuttgart, 1967.
- [65] Steinle, A.: Torsion und Profilverformung beim einzelligen Kastenträger. Beton und Stahlbetonbau 65 (1970), H. 9, S. 215-222.  
Ergänzung: Beton und Stahlbetonbau 67 (1972), H. 6, S. 143-144.
- [66] Steinle, A.: Praktische Berechnung eines durch Verkehrs-lasten unsymmetrisch belasteten Kastenträgers am Beispiel der Henschbachtalbrücke. Beton und Stahlbetonbau 65 (1970), H. 10, S. 249-253.  
Ergänzung: s. [65] .
- [67] Tung, D.H.H.: Torsional Analysis of Single Thin-Walled Trapezoidal Concrete Box-Girder Bridges. Publication SP-23, American Concrete Institute, 1969, S. 205-220.
- [68] Veldpaus, F.E.: Numeriek gereedschap ten behoeve van dunnwandige balkkonstrukties. Dissertation, Technische Hochschule Eindhoven, 1973.
- [69] Vlasov, V.Z. and Leont'ev, U.N. : Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966.
- [70] West, R.: C&CA/CIRIA Recommendations on the use of a grillage analysis for slab and pseudo-slab bridge decks. Cement and Concrete Association, London, 1973.
- [71] West, R.: The use of a grillage analogy for the analysis of slab and pseudo-slab bridge decks. Research Report 21, Cement and Concrete Association, London, 1973.
- [72] Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik. Akademie-Verlag, Berlin, 1958.

- [73] Wlassow, W.S.: Dünnwandige elastische Stäbe, Band I.  
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1964.

Vlasov, V.Z.: Thin-walled Elastic Beams. Israel Program  
for Scientific Translations, Jerusalem, 1961.

- [74] Wright, R.N., Abdel-Samad, S.R. and Robinson, A.R.:  
BEP Analogy for Analysis of Box Girders. J. of the  
Structural Division, ASCE, Vol. 94, No. ST7, Jul. 1968,  
S. 1719-1743.

Abschließende Bemerkungen: Vol. 95, No. ST5, Mai 1969,  
S. 1016-1017.



BEZEICHNUNGEN

Koordinaten

$x, y, z$	Lokales Koordinatensystem
$X, Y, Z$	Globales Koordinatensystem
$\rho$	Winkel zwischen den globalen und lokalen Koordinatensystemen

Geometrische Größen

$L$	Länge eines Trägerabschnittes
$H$	Höhe des Querschnitts
$D$	Wanddicke
$h$	Breite der einzelnen Wände
$I$	Trägheitsmoment der Wände in Querrichtung
$Y_0, Y_0$	Abstand zwischen dem Schwerpunkt und den oberen und unteren Wänden des Querschnitts
$r_0, r_u, r_s$	Abstand zwischen dem Ruhepunkt und den Wänden der inneren Zelle

Verschiebungs- und Verformungszustände

$v_x, v_y, v_z$	Verschiebungen im lokalen Koordinatensystem
$U_x, U_y, U_z$	Verschiebungen im globalen Koordinatensystem
$\kappa_x, \kappa_z, \kappa_{xz}$	Krümmungen und Verwindung der Wandmittelfläche
$\epsilon_x, \epsilon_z, \epsilon_{xz}$	Dehnungen und Schubverzerrungen der Wandmittelfläche
$f_{xi}(x), f_{yi}(x)$	Verlauf der Verschiebungen in der Querschnittsebene entlang der Querschnittskontur. $i$ -ter Verformungszustand
$f_{zj}(x)$	Verlauf der Verschiebungen in der Längsrichtung entlang der Querschnittskontur. $j$ -ter Verformungszustand
$v_j(z)$	Verlauf der Verschiebungen in der Querschnittsebene als Funktion der Längskoordinate. $i$ -ter Verformungszustand

$W_j(z)$	Verlauf der Verschiebungen in der Längsrichtung als Funktion der Längskoordinate. $j$ -ter Verformungszustand
$V(z)$	Spaltenvektor mit den Elementen $V_i(z)$
$W(z)$	Spaltenvektor mit den Elementen $W_j(z)$
$U(z)$	Spaltenvektor $U^T(z) = [V(z)^T \ W(z)^T]$
$\theta$	Verdrehung des Querschnitts
$\omega$	Profilverformung des Querschnitts

Werkstoffangaben

$E_x$	Elastizitätsmodul der einzelnen Wände
$G_x$	Schubmodul der einzelnen Wände
$\mu_x$	Querdehnungszahl der einzelnen Wände
$E_x'$	Modifizierter Elastizitätsmodul
$E$	Als Bezugsgröße angenommener Elastizitätsmodul
$G$	Als Bezugsgröße angenommener Schubmodul
$\mu$	Als Bezugsgröße angenommene Querdehnungszahl
$E'$	Modifizierter Elastizitätsmodul $E' = E/(1-\mu^2)$
$\gamma$	Verhältnis $E/G$
$\alpha_E, \alpha_G, \alpha_\mu$	Verhältnis der tatsächlichen Elastizitätskonstanten $E_x, G_x, \mu_x$ zu den als Bezugsgrößen angenommenen Werten $E, G$ und $\mu$

Spannungen, Schnittkräfte und Querschnittskräfte

$\sigma_z$	Normalspannungen in der Längsrichtung
$\tau$	Schubspannungen
$n_x, n_z, n_{xz}$	Schnittkräfte des Scheibenzustandes
$m_x, m_z, m_{xz}, n_{xy}, n_{yz}$	Schnittkräfte des Plattenzustandes
$\bar{Q}_x$	Querkraft am als Rahmen betrachteten Querschnitt der Breite eins
$\bar{m}_x$	Biegemoment am als Rahmen betrachteten Querschnitt der Breite eins
$Q^1, Q^2, \dots, Q^r$	Festhaltekräfte (Auflagerkräfte) des Querschnitts
$m_r$	Drehmoment

$\delta_9$	Allgemeine Schnittgröße an der Stelle $9$ des Querschnitts
$Q_V(Z)$	Verallgemeinerte Querkraft am Schnitt $Z = \text{const.}$ dem $i$ -ten Verformungszustand in der Querschnittsebene entsprechend
$P_{W_j}(Z)$	Verallgemeinerte Längskraft am Schnitt $Z = \text{const.}$ dem $j$ -ten Verformungszustand in der Längsrichtung entsprechend
$Q_V(Z)$	Spaltenvektor mit den Elementen $Q_{V_i}$
$P_W(Z)$	Spaltenvektor mit den Elementen $P_{W_j}$
$Q(Z)$	Spaltenvektor $Q(Z)^T = [Q_V(Z)^T P_W(Z)^T]$
$F_0, F_1$	Matrizen in der Definition der verallgemeinerten Schnittkräfte

Lasten

$\bar{q}_x, \bar{q}_y$	Quergerichtete Flächenlasten
$\bar{p}$	Längsgerichtete Flächenlasten
$\hat{q}_x, \hat{q}_y$	quergerichtete Linienlasten
$\hat{p}$	Längsgerichtete Linienlasten
$q_{xR}, q_{yR}$	Quergerichtete Lasten an den Rändern eines Abschnittes
$p_R$	Längsgerichtete Lasten an den Rändern eines Abschnittes
$m_T$	Torsionslast

Zur Abkürzung in Abschnitt 3 eingeführte Größen

$A, B, C, R, S, T, E$	} Matrizen in den Ausdrücken für die Gleichgewichtsbedingungen
$M_1, M_2, M_0$	
$q_i$	Äußere Arbeit infolge der quergerichteten Lasten, dem $i$ -ten Verformungszustand in der Querschnittsebene entsprechend
$p_j$	Äußere Arbeit infolge der längsgerichteten Lasten, dem $j$ -ten Verformungszustand in der Längsrichtung entsprechend
$q$	Spaltenvektor mit den Elementen $q_i$
$p$	Spaltenvektor mit den Elementen $p_j$
$q_0$	Spaltenvektor $q_0^T = [q^T p^T]$

$Z_V$  Spaltenvektor  $Z_V^T = [V^T W^T Q_V^T P_W^T]$   
 $A_0$  Matrix der Koeffizienten des Systems von  
 Differentialgleichungen erster Ordnung  
 $Z_V' = A_0 Z_V - q_0^*$

Einflußlinien

„ $S_9$ “ Einflußlinie der Schnittgröße  $S_9$  infolge  
 einer auf der Fahrbahn in Querrichtung  
 wandernden Last, z.B. einer Einzellast in  
 der Feldmitte oder einer konstanten Linien-  
 last in Längsrichtung  
 „ $Q_1^*$ “, „ $Q_2^*$ “, ..., „ $Q_r^*$ “ Einflußlinie der Festhaltekräfte (Auflager-  
 kräfte)

Zur Abkürzung in Abschnitt 5 eingeführte Größen

$\alpha_1, \dots, \alpha_4$	Unbekannte bei der Ermittlung der Profil- verwölbung
$k_1, L_1, k_2, L_2, q_1^*, q_2^*$ $B^*, C^*, D^*, R^*, \rho^*, q^*$ $A^{**}, B^{**}, C^{**}, q_1^{**}, q_2^{**}, q_3^{**}, q_4^{**}$	} Hilfwerte bei der Ableitung des Näherungs- verfahrens
$a, b, c$ bzw. $A$ und $r$	
$d_1, e_1$	Koeffizienten der Differentialgleichung der Profilverformung
$d_2, e_2$	Koeffizienten der Differentialgleichung der Verschiebung des Querschnitts parallel zur $X$ -Achse
$d_3, e_3$	Koeffizienten der Differentialgleichung der Verdrehung des Querschnitts
$d_4, e_4$	Koeffizienten der Differentialgleichung der Verwölbung des Querschnitts
$\phi_1(z), \dots, \phi_4(z)$	Funktionen bei der Lösung der Differential- gleichung $aV^{IV} - bV'' + cV = 0$
$k_1, \dots, k_8$	Integrationskonstanten
$A_r(z)$	Matrix bei der Ermittlung der Integrations- konstanten $Z_V = A_r k + Z_{VP}$
$Z_{VP}$	Spaltenvektor der partikulären Lösung des Differentialgleichungssystems
$A_u(z)$	Übertragungsmatrix
$A_{ru}(z), A_{rg}(z)$	Untermatrizen der Matrix

$Q_E$	Verallgemeinerte Schnittkräfte an den Enden eines Bereichs
$U_E$	Verallgemeinerte Verschiebungen an den Enden eines Bereichs
$K$	Steifigkeitsmatrix ( $Q_E = K U_E$ )

## 1. EINLEITUNG

### 1.1 Allgemeines

Der Verschiebungszustand aller Punkte eines Tragwerks wird mit den Verschiebungen  $u_x$ ,  $u_y$  und  $u_z$  in Richtung der drei Koordinatenachsen beschrieben. Nach der Theorie der dünnwandigen Schalen wird die Zahl der Freiheitsgrade wesentlich vermindert, wenn man sich auf den Verformungszustand der Wandmittelfläche beschränkt.

Die Zahl der Freiheitsgrade läßt sich bei den prismatischen Falterwerken weiter herabsetzen, wenn der Querschnitt in gerade Bereiche mit konstanten Eigenschaften unterteilt wird, an deren Enden bestimmte Größen als Unbekannte gewählt werden. Der Verformungszustand in der Querschnittsebene kann dann z.B. mit Hilfe der Verschiebungen und der Verdrehung der Wandmittelfläche an den Enden des Bereiches ermittelt werden. Wählt man dazu an diesen Punkten die Verschiebungen in der Längsrichtung als Freiheitsgrade, so beschränkt sich die allgemeine Berechnung von prismatischen Falterwerken nach dem Formänderungsgrößenverfahren auf die Ermittlung von vier Unbekannten für jeden gewählten Knoten.

Der Verformungszustand kann entweder unter genauerer Betrachtung des zweidimensionalen Kontinuums -als Summe von Platten- und Scheibenzuständen- oder mit Hilfe von gewählten Ansätzen für den Verlauf der Verschiebungen -z.B. als Summe von Balken- und Rahmenezuständen- bestimmt werden.

Für Träger mit bestimmten Querschnittsformen oder für bestimmte Abmessungen des Tragwerks sind verschiedene Rechenverfahren aufgestellt worden, mit denen die Berechnung vereinfacht oder die Zahl der Freiheitsgrade vermindert wird. So beschränkt sich z.B. die allgemeine Berechnung von Stäben auf die Ermittlung von nur vier Unbekannten: die Verschiebungen des Querschnitts entlang den Koordinatenachsen und die Verdrehung des Querschnitts. Dabei werden die Schubverzerrungen in der Profilmittellinie bei

den Stäben mit offenem Querschnitt vernachlässigt und bei den Stäben mit geschlossenem Querschnitt berücksichtigt.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nach verschiedenen analytischen Verfahren hauptsächlich Träger einer bestimmten Querschnittsform untersucht. Dieser Querschnitt, aus einer trapezförmigen und zwei dreieckigen Zellen bestehend -Bild 1.1-, scheint für die Ausführung von Brücken und Hochstraßen besonders geeignet zu sein. Leonhardt weist in [42] darauf hin, daß Tragwerke der hier untersuchten Querschnittsform sehr schlank ausgeführt und die für die Auflagerung dieser Träger nötigen Pfeiler sehr schmal gehalten werden können. Im Hinblick auf das Tragverhalten zeigt dieser Querschnitt gegenüber dem aus drei rechteckigen Zellen bestehenden Querschnitt folgenden Vorteil: Wenn die Dehnungen der Wandmittelfläche in der Querrichtung vernachlässigt werden, tritt unter symmetrischer Belastung keine Verformung des Querschnitts auf, bei antimetrischer Belastung hingegen tritt, neben einer Verdrehung des gesamten Querschnitts, nur eine Verformung der mittleren Zelle auf. Es handelt sich also um einen Querschnitt mit einem Freiheitsgrad im Hinblick auf die Profilverformung. Hees [29] definiert die Profilverformung folgendermaßen: Die Lage der Eckpunkte des Querschnitts ändert sich relativ zueinander. Mit der Profilverformung können große Querbiegebeanspruchungen verbunden sein, die bei Trägern mit starrem Querschnitt nicht vorkommen.

Allgemein wird die Zahl der Freiheitsgrade für eine Profilverformung folgendermaßen bestimmt: Man betrachtet den Querschnitt ersatzweise als ein ebenes Gelenkwerk. Sieht man von den drei möglichen Starrkörperverschiebungen in der Querschnittsebene (zwei Translationen, eine Rotation) ab, so ist die Zahl der Freiheitsgrade gleich der Anzahl der noch verbleibenden unabhängigen Verschiebungsmöglichkeiten des Querschnitts.

Lee [41] berichtet über eine Hochstraße, die mit einem Querschnitt der hier untersuchten Form -Typ III- ausgeführt worden ist. Es handelt sich um eine 17-feldrige, 1178 m lange Brücke, die nur über den Stützen -innerhalb der mittleren Zelle- mit

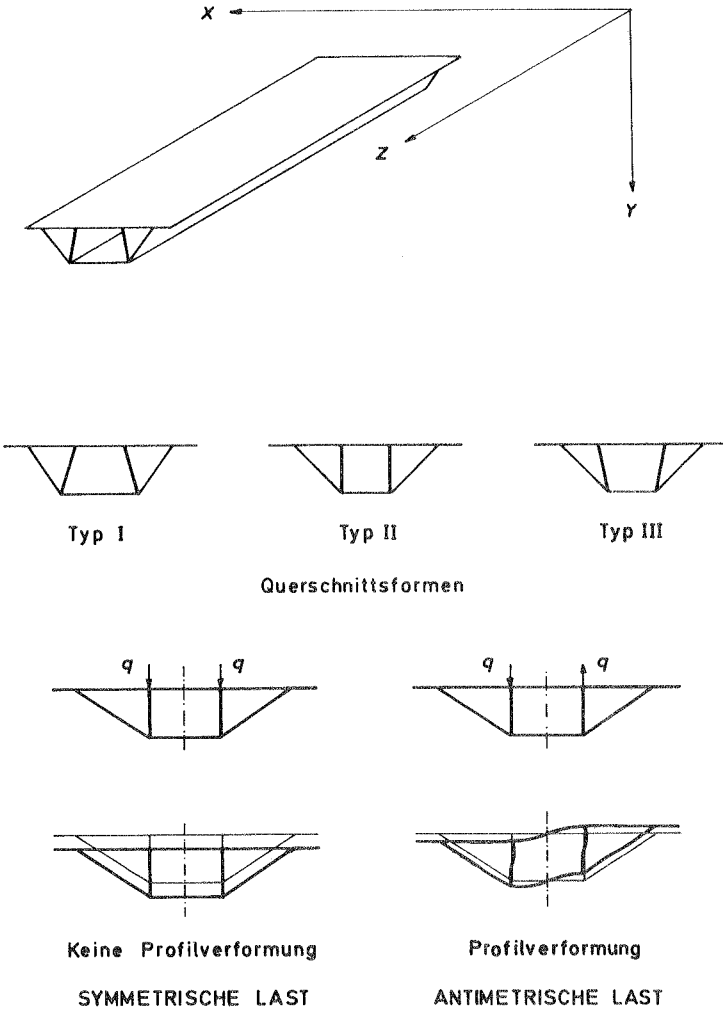


Bild 1.1 Träger, Querschnittsformen, Profilverformung



Schotten ausgesteift ist. Die beiden dreieckigen Zellen sind nicht ausgesteift. Die Berechnung dieses Trägers wurde modellstatisch mit Hilfe von Microbeton- und Perspexmodellen überprüft. Bei einer Gesamtquerschnittsbreite von 28,65 m und Feldlängen von 62,08 m und 43,28 m (für die zwei Endabschnitte) ist die Berechnung mit Hilfe der Annahmen der Stabstatik durchgeführt worden. Die Querbiegebeanspruchung infolge Eigengewicht, Verkehrslasten und Quervorspannung ist am unverschiebbaren Rahmen ermittelt worden. Für die Ermittlung der Schubflüsse infolge Biegung und Torsion ist man von der Annahme ausgegangen, daß der Querschnitt dünnwandig sei. Mit dem Perspex-Modell -einem auf der Symmetrieachse eingespannten Rahmen- ist nur die Verteilung der Querbiegemomente infolge Quervorspannung untersucht worden. Es stellte sich dabei heraus, daß die an dem unverschiebbaren Rahmen erzielten Rechenergebnisse für diesen Fall mit den Messungen gut übereinstimmten. Das Microbeton-Modell war ein einfach gelagerter Träger mit Kragträgern an den beiden Auflagern; an Hand dieses Modells ist die Biegebeanspruchung des Trägers infolge Eigengewicht, Vorspannung und Verkehrslasten untersucht worden. Angestrebt war eine genauere Ermittlung des Verlaufes der Normalspannungen infolge Biegung. Die mit Hilfe der Hypothese von Navier erzielten Ergebnisse stimmten mit den Messungen an dem Modell und auch am ausgeführten Tragwerk gut überein. Aufgetretene Abweichungen infolge Eigengewicht und Verkehrslasten einerseits und Vorspannung andererseits glichen sich zum größten Teil aus. Da lediglich symmetrische Lastzustände untersucht wurden, konnte keine Profilverformung auftreten.

## 1.2 Ziel dieser Arbeit

Die Beanspruchung infolge der Profilverformung macht nur einen Teil der gesamten Beanspruchung aus. Campbell-Allen und Wedgwood [6] haben an Hand des aus einer rechteckigen Zelle bestehenden Trägers nach den in Australien gültigen Vorschriften untersucht, wie hoch der Anteil der der Profilverformung zugehörigen Querbiegebeanspruchung an der gesamten Beanspruchung ist (Dazu siehe auch Maisel, Rowe und Swann [46], Maisel und Roll [47] und Steinle [66]).

In dieser Arbeit wird die bei der Profilverformung von Trägern mit den im Bild 1.1 dargestellten Querschnittsformen verursachte Beanspruchung untersucht. Da eine genaue Untersuchung der Profilverformung umfangreich ist und nur mit Hilfe von großen elektronischen Rechnern durchzuführen ist (s. De Fries-Skene und Scordelis [17] und Scordelis [54] ), wird eine möglichst einfache und für die Praxis ausreichende Lösung des Problems angestrebt.

Die Anwendung der angestrebten Näherung beschränkt sich auf den Anwendungsbereich der Navierschen Hypothese für stabartige Tragwerke, da nur so die Biegung und die Torsion als entkoppelte Zustände betrachtet werden können.

Im folgenden Abschnitt wird über die verschiedenen Verfahren berichtet, mit deren Hilfe die Profilverformung untersucht werden kann. Es sei aber zunächst auf die Arbeit von Maisel, Rowe und Swann [46] hingewiesen, in der verschiedene Verfahren für die Berechnung von Faltenwerken zusammengestellt sind. In [46] ist eine Literaturübersicht von etwa fünfhundert Arbeiten enthalten.

Im Abschnitt 3 wird eine erweiterte Formulierung der von Wlassow [72,73] vorgeschlagenen Faltenwerkstheorie abgeleitet. Im Gegensatz zur Arbeit von Du Preez [20] , in der die Gleichgewichtsbedingungen von Streifenelementen abgeleitet werden, werden diese hier für den gesamten Querschnitt aufgestellt. Dies erleichtert die Formulierung vereinfachender Annahmen. Die Anwendung der von Wlassow aufgestellten Faltenwerkstheorie wird an Hand des hier untersuchten Trägers im Abschnitt 4 erläutert.

Unter Berücksichtigung vereinfachender Annahmen läßt sich für den Träger mit einfach symmetrischem Querschnitt ein Näherungsverfahren aufstellen -Abschnitt 5-, mit dem die für die Bemessung wichtigen Schnittkräfte ermittelt werden können. Für dieses Näherungsverfahren wird eine geschlossene Lösung angegeben.

Die Genauigkeit des so aufgestellten Näherungsverfahrens wird mit Hilfe der genaueren Faltwerkstheorien an Hand von zahlenmäßig durchgerechneten Beispielen im Abschnitt 6 überprüft.

## 2. VERFAHREN FÜR DIE BERECHNUNG PRISMATISCHER DÜNNWANDIGER FALTWERKE

### 2.1 Allgemeines

Die Verfahren zur Berechnung dünnwandiger Falwerke, über die anschließend berichtet wird, beruhen alle auf folgenden Annahmen:

- a) Die Wanddicke ist klein gegenüber den anderen Abmessungen des Trägers.
- b) Kleine Verformungen: Diese Annahme erlaubt eine Berechnung nach der Theorie erster Ordnung; die Gleichgewichtsbedingungen werden am unverformten Träger angesetzt.
- c) Normalenhypothese: Die Normalen zur Wandmittelfläche bleiben nach der Verformung unverzerrt und normal zur Mittelfläche.
- d) Die Normalspannungen senkrecht zur Wandmittelfläche sind vernachlässigbar klein.
- e) Linear-elastisches Werkstoffgesetz (Hookesches Werkstoffgesetz).
- f) Die Wände bestehen aus einem homogenen und isotropen Werkstoff.

Je nachdem wie die Wände eines Falwerks für die statische Untersuchung idealisiert werden, können die Rechenverfahren in zwei Gruppen eingeordnet werden.

Zur ersten Gruppe gehören die Verfahren, in denen die Wände eines Falwerks durch Stabwerke mit gleichen elastischen Eigenschaften ersetzt werden (s. z.B. Hock u. Richmond [31] und Smyth u. Srinivasan [61]). Übliche Modelle sind das räumliche Stabwerk und der Trägerrost. Maisel, Rowe und Swann [46] berichten, daß das Trägerrostmodell erst, wenn die Zellenzahl größer als vier ist, zuverlässige Ergebnisse liefert. Wichtiger als die Zellenzahl sind die Abmessungen des Tragwerks (Höhe, Breite und Länge), an denen festgestellt werden kann, ob die Lastabtragung hauptsächlich durch Platten- oder Stabwirkung erfolgt. Für weitere Angaben über den Anwendungsbereich und die

praktische Durchführung der Rechnungen wird auf [72] und [73] verwiesen. Im weiteren soll auf diese Verfahren nicht näher eingegangen werden.

Zur zweiten Gruppe gehören alle Verfahren, in denen die Wände eines Falterwerks als zweidimensionales Kontinuum betrachtet werden. Die Ermittlung der Verschiebungs- und Spannungszustände läßt sich bei den Falterwerken gegenüber der allgemeinen Schalentheorie vereinfachen, da sie als Superposition von Flatten- und Scheibenzuständen dargestellt werden können; die Genauigkeit der erzielten Ergebnisse hängt dann nur von der Vollständigkeit ab, mit der diese beiden Zustände berücksichtigt werden. Die Schnittgrößen des Flatten- bzw. des Scheibenzustandes sind im Bild 2.1 dargestellt.

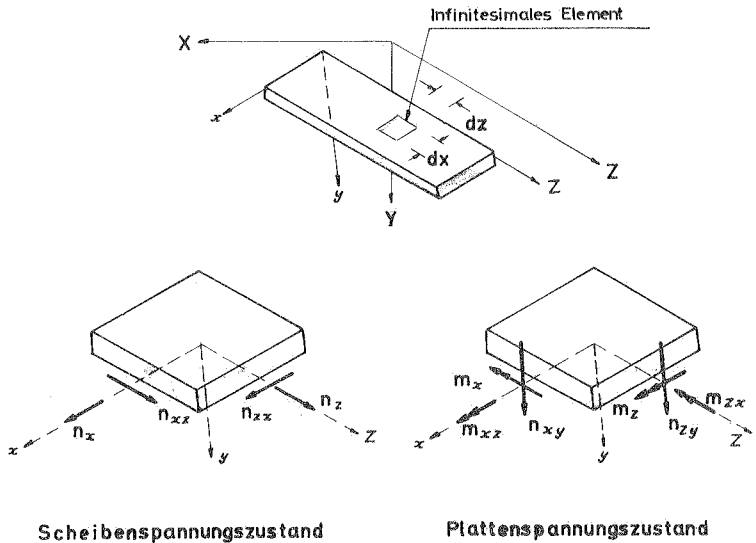


Bild 2.1 Schnittkräfte

Folgende Verzerrungen der Wandmittelfläche werden bei der vollständigen Betrachtung des zweidimensionalen Kontinuums berücksichtigt: Die Dehnungen in der  $x$  - bzw.  $Z$  -Richtung ( $\epsilon_x$  und  $\epsilon_z$ ) und die Schubverzerrungen ( $\gamma_{xz}$ ) beim Scheibenzustand, sowie die Krümmungen in der  $x$  - bzw.  $Z$ -Richtung ( $\chi_x$  und  $\chi_z$ ) und die Verwindung ( $\chi_{xz}$ ) beim Flattenzustand.

Das mit der Berechnung von prismatischen Faltenwerken verbundene zweidimensionale Problem des elastischen Kontinuums kann nach den in der Tabelle 2.1 angegebenen Verfahren erfaßt werden. Die Verfahren I und II bauen auf der Methode der Trennung der Variablen auf. Nicht eingetragen in der Tabelle ist die Methode der finiten Differenzen.

Für die Berechnung von prismatischen Faltenwerken sind verschiedene Theorien aufgestellt worden, bei denen die Flatten- und Scheibenzustände mit unterschiedlicher Näherung berücksichtigt werden. Als einfachste Näherung für den Scheibenzustand der einzelnen Wände eines Tragwerks wird der Balkenzustand betrachtet, für den Flattenzustand hingegen ist die einfachste Näherung der Rahmenzustand, d.h. es werden nur die Krümmungen in der Querrichtung berücksichtigt. In der Tabelle 2.2 sind zusammenfassend die im Rahmen der verschiedenen Rechenverfahren von prismatischen Faltenwerken berücksichtigten Verzerrungen der Wandmittelfläche eingetragen.

## 2.2 Theorie des geraden Stabes

Die Berechnungsverfahren der Stabstatik sind über Jahrzehnte für die Berechnung von Trägern mit polygonalem Querschnitt angewendet worden. Bei Trägern mit starrem Querschnitt haben diese Verfahren folgende Vorteile: eine einfache Theorie, eine leichte Anwendung und die Tatsache, daß die erzielten Ergebnisse in den meisten Fällen für die Bemessung ausreichen. Für die Ermittlung der Spannungs- und Verformungszustände werden nur die Dehnungen der Wandmittelfläche in der Längsrichtung -für die Normalkraft und die Biegung um zwei Querschnittsachsen-, bzw. die Schubverzerrungen und/oder die Verwindung der Wandmittelfläche -für die Torsion- berücksichtigt.

VERFAHREN	ART DER ANSÄTZE	GLEICHUNGSSYSTEM LÖSUNGSVERFAHREN	VORTEILE	NACHTEILE	SCHRIFTTUM
I	Fourierreihen für die Verformungen, Schnittkräfte und Lasten in Längsrichtung	Gewöhnliche Differentialgleichungen in Querrichtung Kraftgrößenverfahren, Verschiebungsgrößenverfahren, Übertragungsverfahren	Für einfache Probleme leichte Lösung des Problems. Die „exakte“ Lösung des Platten-Scheibens-Problems kann so ermittelt werden.	An den Enden eines Trägers können nur bestimmte Randbedingungen berücksichtigt werden. Die Berücksichtigung von Zwischenstützen oder Schotten erfordert einen großen Rechenaufwand	Gruber [24, 25] De Fries-Skene u. Scordelis [17] Scordelis [54] Lin u. Scordelis [43] Das [13] Dobovišek [18]
II	Abschnittsweise Polynomansätze für den Verlauf der Verschiebungen in Querrichtung	Gewöhnliche Differentialgleichungen in Längsrichtung Übertragungsverfahren, eindimensionale finite Elemente, Fourierreihen	Allgemeinere Anwendung des Verfahrens. Annahmen können leichter formuliert werden. Anschauliche Methode	Es können Schwierigkeiten bei der numerischen Integration auftreten	Wlassow [72, 73] Sedlacek [56] Du Preez [20] Veldpaus [68] Kolbrunner u. Hajdin [36] Bažant [2] Cheung [8] Sakai u. Okumura [52]
III	Bereichsweise zweidimensionale Ansätze für die Verschiebungen und/oder die Spannungen (Methode der finiten Elemente)	Linear algebraisches Gleichungssystem Lösung des linearen algebraischen Gleichungssystems mit den üblichen Methoden	Weitreichendste Anwendung.	Aufwendige Dateneingabe und große Rechenzeiten	Davies u.a. [15] Chapman u.a. [7] Sisodiya u. Ghali [59]

Tabelle 2.1 Verfahrensweise bei der Berechnung von prismatischen Faltenwerken

Theorien für die Berechnung dünnwandiger, prismatischer Faltwerke	Abschnitt	SCHEIBENZUSTAND			PLATTENZUSTAND		
		Dehnungen in der Längsrichtung $\epsilon_z$	Dehnungen in der Querrichtung $\epsilon_x$	Schubverzerrungen $\gamma_{xz}$	Krümmung in der Längsrichtung $\chi_z$	Krümmung in der Querrichtung $\chi_x$	Verwindung $\chi_{xz}$
Theorie des geraden Stabes	2.2	Ja	Nein	Unvollständig (Nur bei der Torsion)	Nein	Nein	Unvollständig (Nur bei der Torsion)
Faltwerktheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen	2.3	Ja	Nein	Nein	Nein	Ja	Nein
Faltwerktheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen bei Berücksichtigung der Schubverzerrungen	2.4	Ja	Nein	Ja	Nein	Ja	Nein
Faltwerktheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Scheibenzuständen	2.5	Ja	Ja	Ja	Nein	Ja	Nein
Faltwerktheorie mit Betrachtung von Platten- und Scheibenzuständen	2.6	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja

Tabelle 2.2 im Rahmen der verschiedenen Theorien berücksichtigte Verzerrungen der Wandmittelfläche



Wie Knittel [34] gezeigt hat, läßt sich der für die Bemessung maßgebende Spannungszustand von Trägern mit verformbarem bzw. nicht ausgesteiftem Querschnitt näherungsweise unter Berücksichtigung der eben erwähnten Verzerrungen ermitteln.

Die dem Scheibenzustand entsprechende Querbeanspruchung einiger Querschnittsformen infolge Eigengewicht und Vorspannung ist von Lippoth [44] mit Hilfe der Methoden der Stabstatik untersucht worden, wobei für den hier behandelten Querschnitt Hinweise für eine zweckmäßige Vorspannung gegeben werden.

Die Verfahren der Stabstatik sind im allgemeinen nur für lange Träger mit unverformbarem Querschnitt anwendbar. Wendet man diese Verfahren für die Berechnung von Trägern mit verformbarem Querschnitt an, so können Unstimmigkeiten mit den vorausgesetzten Annahmen festgestellt werden. Kupfer [39] zeigt z.B., daß der einzellige Träger mit rechteckigem Querschnitt die üblichen Voraussetzungen der Bredtschen Torsion nicht mehr erfüllt: die Verschiebungen der einzelnen Wände entsprechen nicht mehr einer reinen Verdrehung des Querschnitts, sondern auch einer Profilverformung (s. auch Chapman, Dowling, Lim u. Billington [7] und Stampf [62]).

### 2.3 Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen

Im Rahmen dieser Theorie werden vom Scheibenzustand nur die Dehnungen in der Längsrichtung berücksichtigt. Vom Plattenzustand wird nur die Krümmung der Wandmittelfläche in der Querrichtung in die Berechnung einbezogen.

Da die Schubverzerrungen der Wandmittelfläche nicht berücksichtigt werden, eignet sich diese Theorie im allgemeinen nicht für die Berechnung von Tragwerken mit geschlossenem Querschnitt. Jedoch ist schon vor Jahren (s. z.B. Müller [49]) erkannt worden, daß -bei dem aus einer rechteckigen, einfach symmetrischen Zelle bestehenden Träger- die von einer antimetrischen Last verursachte Beanspruchung zum größten Teil von der Verformung des Querschnitts bestimmt wird; die Verdrehung des Quer-

schnitts ist demzufolge vernachlässigt worden. Deshalb konnte man mit dieser Theorie für diesen Träger recht gute Ergebnisse erzielen. Über einige Verfahren für die Berechnung von einzelnen Trägern wird im nächsten Abschnitt berichtet.

#### 2.4 Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen bei Berücksichtigung der Schubverzerrungen

Außer den Dehnungen der Wandmittelfläche in der Längsrichtung werden in dieser Theorie die Schubverzerrungen berücksichtigt. Wlassow [72,73] und Sedlacek [56] haben für diesen Fall allgemeine Rechenverfahren entwickelt. Da im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit mehrmals auf die von Wlassow aufgestellte Faltwerkstheorie eingegangen wird, erübrigt sich an dieser Stelle eine diesbezügliche Erläuterung. Es wird nun auf das von Sedlacek vorgeschlagene Verfahren kurz eingegangen.

Für Träger mit geschlossenem Querschnitt schlägt Sedlacek [56] ein Rechenverfahren vor, bei dem die gesamte Zahl der Freiheitsgrade aus der Zahl der Starrkörperverschiebungen des Querschnitts und aus der Zahl der unabhängigen Freiheitsgrade im Hinblick auf die Profilverformung des Querschnitts zusammengesetzt wird. Mittels Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen werden, den Freiheitsgraden entsprechend, die Verläufe der Verschiebungen in der Längsrichtung abgeleitet. Dabei werden bei einigen Freiheitsgraden die Schubverzerrungen der Wandmittelfläche vernachlässigt und für andere nur zum Teil berücksichtigt. Mit dieser Verfahrensweise wird gegenüber den genaueren Verfahren die Zahl der Freiheitsgrade bedeutend herabgesetzt. Allerdings können die Verläufe der Verschiebungen in der Längsrichtung infolge der Verdrehungs- und Profilverformungseinheitszustände, besonders bei mehrzelligen Querschnitten, nur mit einem erheblichen Rechenaufwand bestimmt werden (s. z.B. [57]).

Für den aus einer vierwandigen Zelle bestehenden Träger läßt sich das Problem besonders vereinfachen, und für die Ermittlung der Profilverformung kann eine geschlossene Lösung angegeben werden. Man erhält dann eine gewöhnliche Differential-

gleichung vierter Ordnung, die dieselbe Form wie die Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens oder der Kreis-  
zylinderschale unter Radialbelastung hat. Da in dieser Arbeit  
ein ähnliches Ziel angestrebt wird, nämlich die Ermittlung eines  
einfachen und für die Praxis ausreichenden Rechenverfahrens  
von Trägern mit dem hier untersuchten dreizeiligen Querschnitt,  
werden zunächst die verschiedenen Verfahren für die Berechnung  
einzelliger Träger erläutert. Über einige dieser Verfahren be-  
richten Maisel und Roll in [47].

#### 2.4.1 Verfahren für die Berechnung von einzelligen Trägern

In der Tabelle 2.3 sind die im Schrifttum angegebenen Verfahren  
eingetragen, nach denen eine einfache -in den meisten Fällen  
eine geschlossene- Lösung des Problems möglich ist. Zu dieser  
Tabelle sei vorweg folgendes bemerkt:

In Spalte 3 ist der Anwendungsbereich der Verfahren eingetra-  
gen. Alle Träger haben konstante Höhe.

In den Fällen, in denen die Berechnung für den antimetrischen  
Lastfall (5. und 6. Spalte) verschiedene Schritte erfordert,  
ist deren Reihenfolge angegeben (Erster Schritt: ①, zweiter  
Schritt: ②).

Betrachtet man die Theorien, die den verschiedenen Verfahren  
zu Grunde liegen, so können die vorgeschlagenen Verfahren in  
die folgenden drei Gruppen eingeordnet werden:

- I Faltwerkstheorie ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen
- II Theorie der Bredtschen Torsion und Faltwerkstheorie mit  
oder ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen
- III Faltwerkstheorie mit Berücksichtigung der Schubverzerrun-  
gen.

Über die erste Gruppe ist im Abschnitt 2.3 bereits berichtet  
worden.

Die meisten der in die zweite Gruppe eingeordneten Verfahren  
bauen auf der reinen Bredtschen Torsion auf, über die anschlie-

1	2	3	4	5	6
VERFASSER	JAHR	GEOMETRIE DES QUERSCHNITTS	ALLGEMEINE QUERBELASTUNG		
			Symmetrischer Lastenteil	Antimetrischer Lastenteil	Verdrehung des Querschnitts
MÜLLER [49]	1953	Einfach symm. Rechteckig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	Vernachlässigt	Ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen
WLASSOW * [72, 73]	1958	Zweifach symm. Rechteckig Ohne Kragträger	Mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen		
DABROWSKY [12]	1965	Einfach symm. Rechteckig Ohne Kragträger	Balkenbiegelehre	Wölbkrafttorsion ①	Mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen ②
GOSCHY [22, 23]	1966	Einfach symm. Trapezförmig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	Wölbkrafttorsion ①	Ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen ②
RICHMOND [50]	1966	Einfach symm. Rechteckig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	Vernachlässigt	Ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen

\* Das Buch „Tonkostennye urprugie sterzhni“ ist 1940 in der SU veröffentlicht worden  
Tabelle 2.3 Verfahren für die Berechnung einzelliger Träger

1	2	3	4	5	6
VERFASSER	JAHR	GEOMETRIE DES QUERSCHNITTS	ALLGEMEINE QUERBELASTUNG		
			Symmetrischer Lastanteil	Antimetrischer Lastanteil	Verdrehung des Querschnitts
CZERWENKA [11]	1967	Einfach symm. Rechteckig Ohne Kragträger	Nicht ausdrücklich angegeben	Mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen	
DAUNER [14]	1967	Einfach symm. Trapezförmig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	Vernachlässigt	Ohne Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
STEINLE [64]	1967	Einfach symm. Rechteckig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	① Wölbkrafttorsion	② Mit Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
WRIGHT [74]	1968	Einfach symm. Trapezförmig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	① Breitsche Torsion	② Ohne Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
TUNG [67]	1968	Einfach symm. Trapezförmig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	① Breitsche Torsion	② Ohne Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen

Tabelle 2.3 Verfahren für die Berechnung einzelliger Träger

1	2	3	4		5	6
VERFASSER	JAHR	GEOMETRIE DES QUERSCHNITTS	ALLGEMEINE QUERBELASTUNG		Antimetrischer Lastanteil	Profilverformung des Querschnitts
			Symmetrischer Lastanteil			
RICHMOND [51]	1969	Einfach symm. Trapezförmig Ohne Kragträger	Balkenbiegelehre		① Bredtsche Torsion	② Mit Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
KUPFER [39]	1969	Einfach symm. Trapezförmig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre		① Bredtsche Torsion	② Ohne Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
KRISTEK [37]	1970	Einfach symm. Rechteckig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre		① Wölbkrafttorsion	② Mit Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
CAMPBELL - ALLEN [6]	1971	Einfach symm. Rechteckig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre		Vernachlässigt	Ohne Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
HEES [27]	1971	Keine Symmetrie Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre		Wölbkrafttorsion	Ohne Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen

Tabelle 2.3 Verfahren für die Berechnung einzelliger Träger

1	2	3	4	5	6
VERFASSER	JAHR	GEOMETRIE DES QUERSCHNITTS	ALLGEMEINE QUERBELASTUNG		
			Symmetrischer Lastanteil	Antimetrischer Lastanteil	
MROTZEK [46]	1971	Einfach symm. Rechteckig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	Verdrehung des Querschnitts  ①  Breditsche Torsion	Profilverformung des Querschnitts  ②  Ohne Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
JANSSEN [32, 33]	1973	Zweifach symm. Rechteckig Ohne Kragträger	Nicht ausdrücklich angegeben	Mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen	
STAMPF * [62]	1973	Einfach symm. Rechteckig Mit Kragträgern	Balkenbiegelehre	① *  Breditsche Torsion	②  Ohne Berücksichti- gung der Schub- verzerrungen
KRISTEK [38]	1974	Zweifach symm. Rechteckig Ohne Kragträger	Mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen		

\* Stampf untersuchte auch die von der verdrehenden Lastgruppe verursachte Profilverformung des Querschnitts

Tabella 2.3 Verfahren für die Berechnung einzelliger Träger

Bend kurz berichtet wird.

Im Bild 2.2 ist ein Träger unter antimetrischen Linienlasten  $(+q, -q)$  dargestellt. Die Lasten werden an den Eckpunkten der oberen Platte eingeleitet. Der Träger wird von einem Drehmoment  $m_r$  beansprucht, das durch folgende Gleichung ausgedrückt wird

$$m_r = q \alpha \quad , \quad (2.3.1)$$

in der der Hebelarm mit  $\alpha$  bezeichnet wird.

Aus der Gleichgewichtsbedingung wird folgender Ausdruck für die Schnittkraft  $M_r$  abgeleitet

$$\frac{dM_r}{dz} = - m_r \quad . \quad (2.3.2)$$

Die Schubflüsse  $T$ , bzw. die Schubflüsse je Einheitslänge  $T'$  können mit Hilfe der Bredtschen Formel

$$T = - \frac{M_r}{2 F_B} \quad (2.3.3)$$

bzw.

$$T' = \frac{1}{2 F_B} \frac{dM_r}{dz} \quad (2.3.4)$$

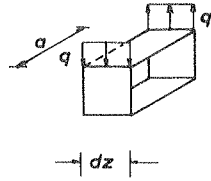
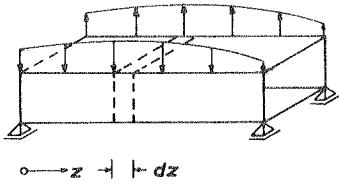
ermittelt werden. Mit  $F_B$  wird die von der Wandmittellinie eingeschlossene Fläche ausgedrückt.

Das weitere Vorgehen wird an Hand des quadratischen Querschnitts mit der Seitenlänge  $a$  erläutert. Beachtet man, daß für diesen Querschnitt

$$F_B = a^2 \quad (2.3.5)$$

ist, so kann  $T'$  mit Hilfe von (2.3.2) und (2.3.1) folgender-





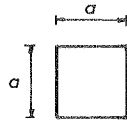
$$m_r = qa$$

$$m_r \rightarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \rightarrow \text{---} \rightarrow$$

$$\frac{dM_T}{dz} = -m_r = -qa$$

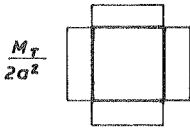


$$T = \frac{M_T}{2F_B}$$

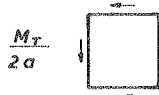


$$F_B = a^2$$

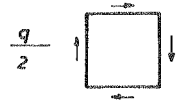
Querschnitt



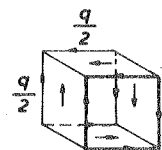
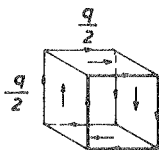
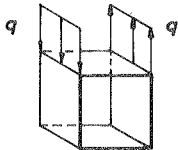
Schubflüsse



Schubkräfte



Schubkräfte je  
Einheitslänge



Torsionslastgruppe Gleichgewichtslastgruppe

Bild 2.2 Ermittlung der Beanspruchung eines einzelligen Trägers infolge Torsion mit Hilfe der Bredtschen Formel

maßen ausgedrückt werden

$$T' = \frac{q}{2a} . \quad (2.3.6)$$

Mit dem Produkt  $T'a$  werden die Schubkräfte je Einheitslänge dargestellt, d.h. die Resultierenden der Schubflüsse entlang der Wände. Für alle Wände haben diese Schubkräfte dieselbe Größe. Um an den Einleitungsstellen das Gleichgewicht mit den äußeren Lasten zu gewährleisten, muß zu den so ermittelten Schubkräften eine im Gleichgewicht befindliche Lastgruppe hinzugefügt werden. Durch die Superposition beider Gruppen müssen also die Schubkräfte entlang der oberen und unteren Platten gleich Null werden und an den Stegen gleich den eingeleiteten Kräften sein (s. Bild 2.2).

Die im Gleichgewicht befindliche Lastgruppe wird bei den Trägern mit unverformbarem Querschnitt von den Schotten aufgenommen, bei den unausgesteiften Querschnitten hingegen verursacht sie eine Profilverformung des Querschnitts.

Diesen zwei Lastgruppen entsprechend kann also die äußere Last aufgeteilt werden: Eine Torsions- und eine Gleichgewichtslastgruppe. Diese Lastgruppen verursachen nur bei den Trägern mit quadratischem, zweifach symmetrischem, geschlossenem Querschnitt mit konstanter Wanddicke eine Verdrehung bzw. eine Profilverformung des Querschnitts. Besitzen die untersuchten Querschnitte diese Eigenschaften nicht, so kommt neben der Verdrehung durch die Torsionslastgruppe nach der Bredtschen Torsion eine Profilverformung hinzu (s. Kupfer [39], und Stampf [62]).

Außer für den Träger mit quadratischem Querschnitt sind mit Hilfe dieser Lastaufteilung für Träger mit rechteckigen, trapezförmigen, einfach symmetrischen Querschnitten mit oder ohne Kragträger Näherungsverfahren vorgeschlagen worden, ohne daß dabei die Grenzen der aufgestellten Verfahren genauer überprüft wurden (s. Bild 2.3a).

Die von der Torsionslastgruppe verursachte Beanspruchung ist nach der Bredtschen Torsion oder nach der Wölbkrafttorsion ermittelt worden. Mit Hilfe der Falwerkstheorie mit oder ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen wurde die von der Gleichgewichtslastgruppe verursachte Beanspruchung bestimmt. Es folgt nun eine kurze Beschreibung der genauesten Verfahren dieser Gruppe (s. Bild 2.3b).

Bei der Untersuchung des einzelligen Trägers mit einfach symmetrischem, rechteckigem Querschnitt gingen Dabrowski [12], Steinle [64] und Křístek [37] von dem Träger mit ausgesteiftem Querschnitt aus. Křístek leitete allgemeine Ausdrücke für Träger veränderlicher Höhe ab, aus denen er als Sonderfall die Gleichungen für den Träger konstanter Höhe angibt.

Die Beanspruchung des Trägers mit ausgesteiftem Querschnitt unter der Torsionslastgruppe ist nach der Wölbkrafttorsion ermittelt worden; diese Beanspruchung läßt sich ihrerseits in zwei Teile zerlegen: ein Teil befindet sich mit der Torsionslast im Gleichgewicht, und der andere entspricht einem Eigen Spannungszustand.

Anschließend ist die Verformbarkeit des Querschnitts wieder hergestellt worden. Der Träger wird nun von der Gleichgewichtslastgruppe und von dem nach der Wölbkrafttorsion ermittelten Eigen Spannungszustand beansprucht; dabei wird der Träger als biegesteifes Falwerk betrachtet, in dem die Schubverzerrungen näherungsweise -wie in der Balkenbiegelehre- berücksichtigt werden. Die zusätzliche Querschnittsverdrehung, die sich beim Aufheben der Bedingung der Unverformbarkeit des Querschnitts ergibt (s. Dabrowski [12], S. 446 und Steinle [64], S. 65), ist vernachlässigt worden.

Aus den von ihm untersuchten Trägern folgerte Steinle [64-66], daß für die Bedürfnisse der Baupraxis die Tragwerksberechnung nach der Bredtschen Torsion und der Falwerkstheorie ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen durchgeführt werden könnten. Allerdings weist Richmond [51] darauf hin, daß für Quer-

schnitte, die im Hinblick auf die Profilverformung steif sind, die Tragwerksberechnung unter Berücksichtigung der Schubverzerrungen erfolgen sollte: Nur so wird nämlich der Übergang zum Träger mit unverformbarem Querschnitt gewährleistet.

An Hand des rechteckigen Querschnitts sind im Bild 2.3 die im Rahmen der verschiedenen Theorien erfaßten Verdrehungen und Verformungen des Querschnitts dargestellt.

Aus dieser kurzen Erläuterung der üblichen Verfahrensweise ist ersichtlich, daß im allgemeinen die Torsionslastgruppe neben der Verdrehung eine Profilverformung und die Gleichgewichtslastgruppe neben der Profilverformung eine Verdrehung des Querschnitts verursachen. Die Verdrehung und die Profilverformung eines Querschnitts sind also gekoppelte Zustände, deren unabhängige Betrachtung nur in Sonderfällen zu guten Ergebnissen führt. Demzufolge sollte die Berechnung von Tragwerken, für die keine Erfahrungen vorliegen, mit Verfahren, die den vollständigen Verschiebungs- und Verformungszustand des Querschnitts berücksichtigen, durchgeführt werden.

Von der vorher beschriebenen Verfahrensweise weicht das von Goschy [22] vorgeschlagene Verfahren ab, nachdem zuerst die Profilverformung und dann die Verdrehung des Querschnitts betrachtet werden.

Mit Hilfe einer vorgegebenen Verzerrung des Querschnitts gibt Hees [27] für den einzelligen Träger mit nicht symmetrischem Querschnitt ein Rechenverfahren an, mit dem auch die profilverformende Beanspruchung des Trägers infolge der Wölbkrafttorsion berücksichtigt werden kann.

Die in die dritte Gruppe eingeordneten Verfahren gehen auf die von Wlassow [72,73] vorgeschlagene Theorie zurück. Mit diesen Verfahren können die Verschiebungen, die Verdrehung und die Profilverformung eines Querschnitts genau erfaßt werden, d.h. für den im Bild 2.3 dargestellten Querschnitt werden die gesamte Verdrehung und die gesamte Profilverformung ermittelt.



Torsionslastgruppe



Gleichgewichtslastgruppe



Verdrehung

Bredtsche Torsion



Profilverformung

Faltwerkstheorie ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen

1<sup>e</sup> Näherung (Tung)



Verdrehung



Profilverformung

Faltwerkstheorie, in der nur die Schubverzerrungen berücksichtigt werden



Profilverformung

Faltwerkstheorie ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen

2<sup>e</sup> Näherung (Kupfer, Stampf)

a) Berechnungsverfahren nach Kupfer [39], Stampf [62] und Tung [67]



Torsionslastgruppe



Gleichgewichtslastgruppe



Torsionslastgruppe

Eigenstress-zustand



Verdrehung



Profilverformung  
(Vernachlässigt)

Wölbkrafttorsion



Profilverformung



Verdrehung  
(Vernachlässigt)

Faltwerkstheorie mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen

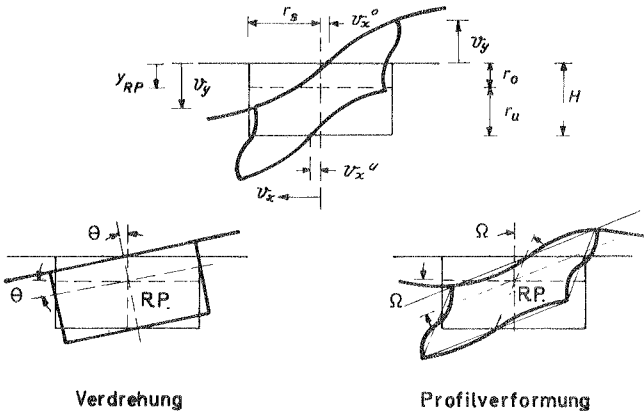
b) Berechnungsverfahren nach Dabrowski [12], Steinle [64] und Křistek [37]

**Bild 2.3** Verdrehung und Profilverformung nach den verschiedenen Berechnungsverfahren

Für einzellige Träger mit zweifach symmetrischem Querschnitt ohne Kragträger sind geschlossene Lösungen angegeben worden. Auch für Träger mit einfach symmetrischem Querschnitt können geschlossene Lösungen angegeben werden, die im Rahmen dieser Theorie genau sind. Das in dieser Arbeit abgeleitete Näherungsverfahren baut auf dieser Theorie auf.

Die Verdrehung und die Profilverformung eines Querschnitts können aus den ermittelten Verschiebungen in folgender Form ausgedrückt werden. Im Bild 2.4 ist ein einfach symmetrischer Querschnitt dargestellt, an dem rückwirkend die Lage des Ruhepunktes mit folgender Beziehung bestimmt wird

$$y_{RP} = - \frac{v_x^o}{v_x^u - v_x^o} H \quad (2.3.7)$$



**Bild 2.4** Verdrehung und Profilverformung infolge antim. Last

Der Verschiebungszustand kann mit Hilfe der im Bild 2.4 dargestellten Winkel  $\theta$  und  $\Omega$  folgendermaßen ausgedrückt werden

$$v_x^o = r_o (\theta - \Omega) \quad (2.3.8)$$

$$v_x^u = r_u (\theta - \Omega) \quad (2.3.9)$$

$$v_y = r_s (\theta + \Omega), \quad (2.3.10)$$

wobei  $r_o$ ,  $r_u$  und  $r_s$  die Abstände vom Ruhepunkt zu den Wänden des Querschnitts darstellen. Die Winkel  $\theta$  und  $\Omega$  werden so gewählt, daß keine Verformung bzw. keine Verdrehung auftritt.

Aus den Gleichungen (2.3.8) und (2.3.9) erhält man

$$\theta - \Omega = \frac{v_x^o}{r_o} = \frac{v_x^u}{r_u} = \frac{v_x^o + v_x^u}{H} \quad (2.3.11)$$

und aus Gleichung (2.3.10)

$$\theta + \Omega = \frac{v_y}{r_s} \quad (2.3.12)$$

Aus der Lösung des Gleichungssystems (2.3.11) und (2.3.12) erhält man

$$\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{v_y}{r_s} + \frac{v_x^o + v_x^u}{H} \right) \quad (2.3.13)$$

$$\Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{v_y}{r_s} - \frac{v_x^o + v_x^u}{H} \right) \quad (2.3.14)$$

Mit den zwei letzten Gleichungen können die Verdrehung  $\theta$  und die Profilverformung  $\Omega$  des Querschnitts ermittelt werden.

## 2.5 Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Scheibenzuständen

Es sind Verfahren entwickelt worden, mit denen alle Verzerrungen des Scheibenzustandes berücksichtigt werden können. Vom Plattenzustand wird -wie in den zwei letzten Theorien- nur die Krümmung in der Querrichtung betrachtet. Ausdrücke für die Berechnung von Faltwerken nach dem Formänderungsgrößenverfahren sind von De Fries-Skene und Scordelis [17] und von Chu und Pinjarkar [9] angegeben worden.

## 2.6 Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Platten- und Scheibenzuständen

In diesem Abschnitt wird auf die drei in der Tab. 2.1 angegebenen Verfahren näher eingegangen, mit deren Hilfe das zweidimensionale Problem gelöst werden kann.

### Fourierreihen in Längsrichtung

Für ein ebenes Kontinuum läßt sich der gesamte Spannungs- und Verformungszustand als Summe von einem Platten- und einem Scheibenzustand ermitteln. Die partiellen Differentialgleichungen der Scheibe und der Platte sind bekannt; mit ihrer Hilfe kann das Problem wie folgt gelöst werden.

Goldberg und Leve [21] schlugen die Anwendung von Fourierreihen für die Lösung des Problems vor. Die Fourierreihen können nur beschränkt angewendet werden, da mit ihrer Hilfe nur einfach gelagerte Träger berechnet werden können, die an den Enden mit Schotten -in der Querschnittsebene unendlich steif und senkrecht zur Querschnittsebene unendlich weich-  
ausgesteift sind. Mit dem Kraftgrößenverfahren lassen sich auch Zwischenstützen und Schotte im Feld berücksichtigen.

Die Verschiebungen, Schnittkräfte und Lasten werden in Fourierreihen dargestellt. Die partiellen Differentialgleichungen werden hierdurch auf gewöhnliche Differentialgleichungen in der Querrichtung reduziert.

Erfolgt die weitere Berechnung nach dem Formänderungsgrößen-



verfahren, so werden die gewöhnlichen Differentialgleichungen für die jeweiligen Einheitsverformungszustände gelöst. Dies war die Grundlage des von De Fries-Skene und Scordelis [17] angegebenen Verfahrens. Für die Wände des Faltwerks werden die Steifigkeitsmatrizen aufgestellt, die dann zur gesamten Steifigkeitsmatrix des Tragwerks zusammengebaut werden.

Dobovišek [18] hat auch den Flatten-Scheibenzustand vollständig berücksichtigt. Anstatt die Steifigkeitsmatrix des gesamten Trägers aufzustellen, hat er das Übertragungsverfahren angewendet. Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt nur von der Zahl der berücksichtigten Reihenglieder ab. Es sei noch ein anderes Verfahren besprochen, mit dem auch diese Zustände berücksichtigt werden können.

Ausgehend von den partiellen Differentialgleichungen der Platte und der Scheibe und auch unter Anwendung von Fourierreihen in der Längsrichtung schlägt Das [13] für die weitere Berechnung folgendes Verfahren vor: Die nach Einsetzen der Fourierreihen erhaltenen gewöhnlichen Differentialgleichungen werden jeweils für die Platte und die Scheibe als Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung dargestellt. Mittels der Reihenentwicklung der Matrizenfunktion  $e^{Ax}$  werden diese Systeme für einen Bereich integriert. Aus den so ermittelten Zustandsvektoren an den Enden eines Bereiches werden die Steifigkeitsmatrizen hergeleitet, mit denen die weitere Rechnung nach dem Formänderungsgrößenverfahren durchgeführt wird. Als besonderen Vorteil dieses Verfahrens nennt Das seine mögliche Anwendung für die Berechnung von Tragwerken, die aus orthotropen Wänden zusammengesetzt sind.

Es sind Rechenverfahren entwickelt worden, mit denen an den Enden eines Trägers andere Randbedingungen als die mit den Fourierreihen möglichen berücksichtigt werden können. Im Gegensatz zur genaueren Betrachtung der Platten- und Scheibenzustände erhält man mit den anschließend erläuterten Verfahren keine exakte Lösung des zweidimensionalen Problems: es handelt sich um Näherungslösungen, deren Genauigkeit im allgemeinen sehr gut

ist.

### Abchnittsweise Polynomansätze in der Querrichtung

Mit Hilfe von gewählten Ansätzen für die Verschiebungsverläufe in der Querrichtung läßt sich das zweidimensionale Problem in ein eindimensionales Problem reduzieren. Man erhält dann ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Längsrichtung, deren Lösung mit dem Übertragungsverfahren, dem verallgemeinerten Verschiebungsgrößenverfahren oder auch mit Hilfe von Fourierreihen ermittelt wird. Für die Anwendung von Fourierreihen wird auf die Arbeiten von Cheung [8] und Cusens und Loo [10] hingewiesen.

Mit der Verwendung des Funktionalns nach Hellinger-Reissner leitete Veldpaus [68] für aus rechtwinkligen Wänden bestehende **Faltwerke** allgemeine Ausdrücke ab, mit denen die Platten- und Scheibenzustände mit Näherungsansätzen vollständig erfaßt werden können. Außer dem allgemeinen Problem behandelte er die folgenden beiden:

- a) **Faltwerke**, deren Länge etwas größer als eine charakteristische Querschnittsabmessung (Breite, Höhe) ist und bei denen demzufolge die dem Plattenzustand zugehörige Biegung der einzelnen Wände in der Längsrichtung vernachlässigt werden kann (s.a. Du Preez [20] )
- b) **Lange Falwerke**, in denen außer der dem Plattenzustand zugehörigen Biegung in der Längsrichtung auch die dem Scheibenzustand zugehörige Dehnung in der Querrichtung vernachlässigt wird

Im Band II des Buches: "Dünnwandige Stäbe" leiten Kollbrunner und Hajdin [36], ebenfalls mit Hilfe von Ansätzen für die Verschiebungsverläufe in der Querrichtung, ein Rechenverfahren ab, mit dem der vollständige Plattenzustand berücksichtigt wird. Beim Scheibenzustand werden die Dehnungen der Wandmittelfläche in der Querrichtung vernachlässigt.

Bereichweise zweidimensionale Ansätze - Methode der finiten Elemente

Diese Methode ist mehrmals benutzt worden, insbesondere, um die Spannungs- und Verformungszustände schiefgelagerter Träger zu ermitteln. Über allgemeine Platten- und Scheibenelemente berichten Davies, Sommerville und Zienkiewicz [15]. Sisodiya und Ghali [59] berichten über Scheibenelemente, die für die Berechnung von mehrzelligen Trägern geeignet sind.

Über die Schottenauswirkungen in ein- und zweizelligen Trägern aus Beton berichten Sisodiya, Ghali und Cheung in [58]. Chapman, Dowling, Lim und Billington [7] führten eine systematische Untersuchung verschiedener Querschnittsformen und Randbedingungen durch.

### 3. FALTWERKSTHEORIE MIT BETRACHTUNG VON RAHMEN- UND SCHEIBEN- ZUSTÄNDEN

#### 3.1 Allgemeines

Wie schon in der Einleitung dieser Arbeit erwähnt worden ist, läßt sich die Aufgabe des zweidimensionalen Scheiben- bzw. Plattenproblems auf die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen zurückführen, wenn die zu bestimmenden Funktionen mit Hilfe von Produktansätzen der Form

$$u(x,z) = f(x) V(z) \quad (3.1.1)$$

dargestellt werden.

Für die Lösung von Variationsaufgaben ist dieses Verfahren von Kantorowitsch vorgeschlagen worden (für Hinweise über das Verfahren s. Sokolnikoff [60] und Stein [63]). Die Funktion  $f(x)$ , mit der der Verlauf der Verschiebungen entlang der Querschnittskontur beschrieben wird, kann unter verschiedenen Gesichtspunkten frei gewählt werden. Die Funktion  $V(z)$  wird mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen ermittelt.

Es werden zunächst zwei Koordinatensysteme eingeführt: ein globales Koordinatensystem  $(X-Y-Z)$  und ein lokales Koordinatensystem  $(x-y-z)$ . Die  $X-Y$  Ebene bzw. die  $x-y$  Ebene liegt in der Querschnittsebene. Im lokalen Koordinatensystem hat die  $x$ - Achse bzw. die  $y$ - Achse die Richtung der Tangente bzw. der Normalen zur Wandmittelfläche. Die  $Z$ - Achse verläuft parallel zur Trägerachse (s. Bild 3.1).

#### 3.2 Verschiebungs- und Spannungszustände

Die Verschiebungen der Wandmittelfläche werden als Summe einer endlichen Reihe von unabhängigen Zuständen dargestellt, in der  $m$  bzw.  $n$  die Zahl der berücksichtigten Freiheitsgrade bei der Ermittlung des Verschiebungszustandes in der Querschnittsebene

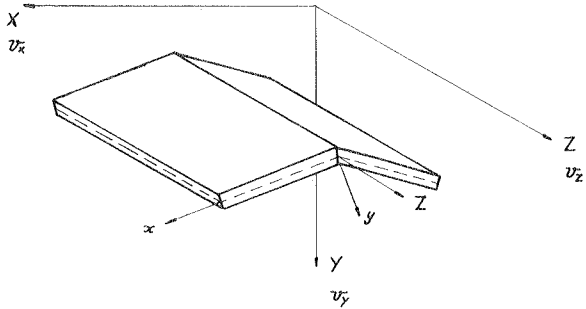


Bild 3.1 Globales und lokales Koordinatensystem

bzw. senkrecht zur Querschnittsebene sind:

$$\begin{aligned}
 v_x(x, Z) &= \sum_{i=1}^m v_{x_i}(x, Z) \\
 v_y(x, Z) &= \sum_{i=1}^m v_{y_i}(x, Z) \\
 v_z(x, Z) &= \sum_{j=1}^n v_{z_j}(x, Z) .
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

Die Zustände  $v_{x_i}(x, Z)$  ,  $v_{y_i}(x, Z)$  und  $v_{z_j}(x, Z)$  werden ihrerseits mit folgenden Produktansätzen dargestellt:

$$\begin{aligned}
 v_{x_i}(x, Z) &= f_{x_i}(x) v_i(Z) \\
 v_{y_i}(x, Z) &= f_{y_i}(x) v_i(Z) \\
 v_{z_j}(x, Z) &= f_{z_j}(x) w_j(Z) .
 \end{aligned}
 \tag{3.2.2}$$

Die Funktionen  $f_x(x)$  ,  $f_y(x)$  , bzw.  $f_z(x)$  beschreiben den Verlauf entlang der Querschnittskontur der Verschiebungen in der Querschnittsebene bzw. senkrecht zur Querschnittsebene. Der Verlauf dieser Verschiebungen in der Längsrichtung wird mit den Funktionen  $V_i(z)$  bzw.  $W_j(z)$  dargestellt. Die Verschiebungen in der Querschnittsebene  $v_x$  und  $v_y$  müssen in der Längsrichtung aus Gründen der Verträglichkeit einen affinen Verlauf aufweisen; deshalb muß sich ihr Verlauf in der Längsrichtung beidesmal durch eine Funktion  $W$  darstellen lassen.

Die Richtung der Verschiebungen, die mit den Funktionen  $f_x$ ,  $f_y$  und  $f_z$  beschrieben werden, sowie der allgemeine Verlauf dieser Funktionen entlang eines Abschnittes wird im Bild 3.2 dargestellt. Über die Ansätze für die Funktionen  $f_x$ ,  $f_y$  und  $f_z$  wird später berichtet. Entlang den verschiedenen Abschnitten wird ein stetiger Verlauf dieser Funktionen vorausgesetzt.

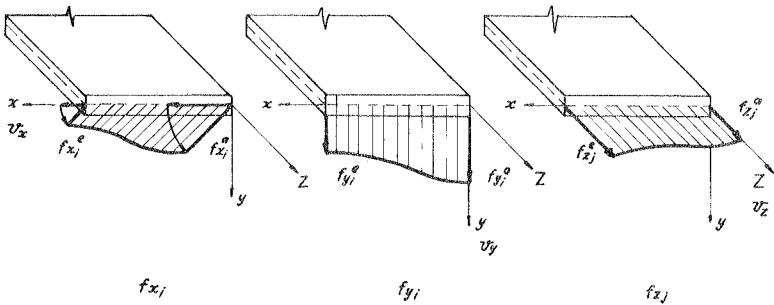
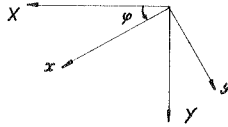


Bild 3.2 Richtung der Verschiebungen  $v_x$ ,  $v_y$  und  $v_z$  und allgemeiner Verlauf der Funktionen  $f_x$ ,  $f_y$  und  $f_z$

Mittels folgender Transformation können die Verschiebungen im lokalen Koordinatensystem in Verschiebungen, die sich auf ein globales Koordinatensystem beziehen, überführt werden:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

wobei  $\varphi$  der Winkel zwischen den globalen und lokalen Koordinatensystemen ist (s. Bild 3.3).



**Bild 3.3** Winkel zwischen den globalen und lokalen Koordinatensystemen

Die Verschiebungen  $v_x$  und  $v_y$  im globalen Koordinatensystem können auch folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} v_x &= \sum_{i=1}^m f_{x_i} v_i \\ v_y &= \sum_{i=1}^m f_{y_i} v_i \end{aligned}, \quad (3.2.4)$$

wobei  $f_{x_i}$  und  $f_{y_i}$  aus (3.2.3) folgen

$$\begin{bmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_i} \end{bmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Für die weiteren Ableitungen werden zunächst folgende Vereinbarungen getroffen:

$$\frac{\partial(\quad)}{\partial x} = (\quad)' \quad \frac{\partial(\quad)}{\partial z} = (\quad)'$$

Die Verzerrungen des Scheibenzustandes sind:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= v_x' \\ \epsilon_z &= v_z' \\ \gamma_{zx} &= v_z' + v_x' \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Im Bild 3.4 sind die Schubverzerrungen dargestellt.

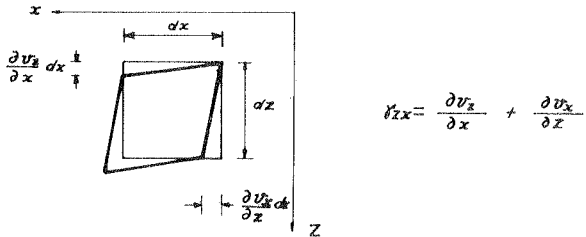
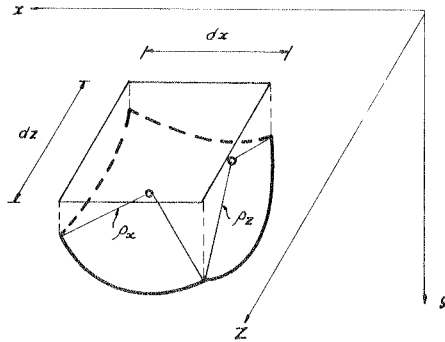


Bild 3.4 Schubverzerrungen

Setzt man die Gleichungen (3.2.1) und (3.2.2) in (3.2.6) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \sum_{i=1}^m f_{x_i}' V_i \\ \epsilon_z &= \sum_{j=1}^n f_{z_j}' W_j' \\ \gamma_{zx} &= \sum_{i=1}^m f_{z_j}' V_i' + \sum_{j=1}^n f_{z_j}' W_j' \end{aligned} \quad (3.2.7)$$





$$\kappa_x = \frac{1}{\rho_x} = - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$$

$$\kappa_z = \frac{1}{\rho_z} = - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}$$

Bild 3.5 Krümmung der Wandmittelfläche

Im Bild 3.5 sind an Hand eines verformten Plattenelementes die Krümmungsradien  $\rho_x$  und  $\rho_z$  der Schnittkurven der Mittelfläche mit den Ebenen  $x=\text{constant}$  und  $Z=\text{constant}$  dargestellt. Die Krümmungen und die Verwindung werden mit Hilfe von (3.2.1) und (3.2.2) wie folgt ausgedrückt:

$$\kappa_x = - \sum_{i=1}^m f_{y_i}'' V_i$$

$$\kappa_z = - \sum_{i=1}^m f_{y_i} V_i'' \quad (3.2.8)$$

$$\kappa_{xz} = - \sum_{i=1}^m f_{y_i}' V_i'$$

Wie im Abschnitt 2.4 erwähnt worden ist, wird in dem hier aufgestellten Verfahren nur der Arbeitsanteil der Krümmung  $\kappa_x$  berücksichtigt.

Die Schnittkräfte, die in dem hier behandelten Scheiben- und Plattenzustand betrachtet werden, sind im Bild 3.6 dargestellt.

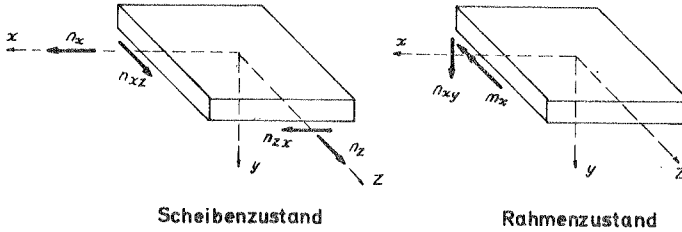


Bild 3.6 Schnittkräfte

Für die Schnittkräfte des Scheibenzustandes gelten folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}n_x &= E'(\epsilon_x + \mu\epsilon_z)D \\n_z &= E'(\mu\epsilon_x + \epsilon_z)D \\n_{zx} &= G\gamma_{zx}D\end{aligned}\quad (3.2.9)$$

In diesen Gleichungen ist  $G$  der Schubmodul und  $D$  die Wanddicke. Für  $E'$  gilt

$$E' = \frac{E}{1 - \mu^2}, \quad (3.2.10)$$

wobei  $E$  der Elastizitätsmodul und  $\mu$  die Querdehnungszahl sind.

Setzt man in das letzte Gleichungssystem die Gleichungen (3.2.7) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 n_x &= E' \left( \sum_{i=1}^m f \dot{x}_i V_i + \mu \sum_{j=1}^n f z_j W_j' \right) D \\
 n_z &= E' \left( \mu \sum_{i=1}^m f \dot{x}_i V_i + \sum_{j=1}^n f z_j W_j' \right) D \\
 n_{xx} &= 6 \left( \sum_{i=1}^m f x_i V_i' + \sum_{j=1}^n f z_j W_j \right) D \quad .
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

Die Schnittkräfte des Flatten- bzw. des Rahmenzustandes sind  $m_x$  und  $n_{xy}$ . Sie werden mit Hilfe der zweiten Gleichung des Gleichungssystems (3.2.8) folgendermaßen ausgedrückt:

$$\begin{aligned}
 m_x &= -E' I \sum_{i=1}^m f y_i'' V_i \\
 n_{xy} &= -EI \sum_{i=1}^m f y_i''' V_i
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

oder

$$\begin{aligned}
 m_x &= \sum_{i=1}^m \bar{m}_{x_i} V_i \\
 n_{xy} &= \sum_{i=1}^m \bar{q}_{x_i} V_i \quad ,
 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

wenn folgende Identitäten berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_{x_i} &= -E' I f y_i'' \\
 \bar{q}_{x_i} &= -E' I f y_i''' \quad .
 \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

$I$  ist das Trägheitsmoment entlang der Querschnittskontur je Einheitslänge des Tragwerks.

### 3.3 Verallgemeinerte Schnittkräfte am gesamten Querschnitt

Den Verschiebungszuständen entsprechend werden im Sinne der Stabstatik die verallgemeinerten Längs- und Querkkräfte im

Schnitt  $Z = \text{constant}$  definiert. Sie werden aus der virtuellen Arbeit der Schnittkräfte  $n_z$  und  $n_{zx}$  jeweils an den Verschiebungen  $j$  -in der Längsrichtung- und  $i$  -in der Querrichtung- folgendermaßen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} Q_{V_i} &= \int f_{x_i} n_{zx} dx & i &= 1, \dots, m \\ P_{W_j} &= \int f_{z_j} n_z dx & j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

Wlassow [72,73] betrachtet diese Größen als innere Kräfte des Falterwerks.

Setzt man die Ausdrücke für  $n_{zx}$  und  $n_z$  aus (3.2.9) in die letzten Gleichungen ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_{V_i} &= 6 \sum_{l=1}^n \int f_{x_i} f_{z_l} \alpha_0 dFW_l + 6 \sum_{k=1}^m \int f_{x_i} f_{x_k} \alpha_0 dFW_k & i &= 1, \dots, m \\ P_{W_j} &= E' \mu \sum_{k=1}^m \int f_{z_j} f_{x_k} \alpha_E \alpha_\mu dFW_k + E' \sum_{l=1}^n \int f_{z_j} f_{z_l} \alpha_E dFW_l & j &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

wobei

$$dF = D dx$$

ist.

Mit  $\alpha_E$ ,  $\alpha_0$  und  $\alpha_\mu$  werden die verschiedenen Werte von  $E'$ ,  $6$  und  $\mu$  entlang der Querschnittskonturen berücksichtigt. Sie stellen das Verhältnis der tatsächlichen Werte zu den als Bezugsgrößen angenommenen Werten  $E'$ ,  $6$  und  $\mu$  dar. Bezeichnet man mit  $E_x$ ,  $6_x$  und  $\mu_x$  die Elastizitätskonstanten entlang der Querschnittskonturen, so gelten folgende Ausdrücke:

$$\alpha_E = \frac{E'x'}{E'}$$

$$\alpha_G = \frac{Gx}{G} \quad (3.3.3)$$

$$\alpha_\mu = \frac{\mu x}{\mu}$$

Um jedes Mißverständnis auszuschließen, sei noch einmal erwähnt, daß hier kein anisotropes Kontinuum zu Grunde liegt, und daß  $E'x'$ ,  $Gx$  und  $\mu x$  die elastischen Eigenschaften der einzelnen Wände in Längs- und Querrichtung ausdrücken.

Die in (3.3.2) dargestellten Integrale erstrecken sich über alle Elemente des polygonalen Querschnitts. Für konstante, linear veränderliche und parabolische Verläufe der Funktionen  $fx$ ,  $fz$  (oder deren Ableitungen) entlang eines Abschnittes sind diese Integrale in Handbüchern angegeben.

Mit den Spaltenvektoren  $V$ ,  $W$ ,  $Q_V$  und  $P_W$ , deren Elemente  $V_k$ ,  $W_l$ ,  $Q_{V_i}$  und  $P_{W_j}$  sind, und den Matrizen  $A$ ,  $C^T$ ,  $R$  und  $T_2$ , deren Elemente folgendermaßen ausgedrückt werden

$$(a_{ij}) = \int f_{z_j} f_{z_i} \alpha_E dF \quad (3.3.4)$$

$$(c_{ij}) = \int f_{x_i} f_{x_j} \alpha_G dF \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m \\ j = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.3.5)$$

$$(r_{ik}) = \int f_{x_i} f_{x_k} \alpha_G dF \quad \begin{matrix} k = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (3.3.6)$$

$$(t_{2jk}) = \int f_{z_j} f_{x_k} \alpha_E \alpha_\mu dF, \quad (3.3.7)$$

erhält man für die verallgemeinerten Schnittkräfte am gesamten

Querschnitt folgenden Ausdruck

$$\begin{bmatrix} Q_v \\ P_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G C^T \\ E \mu T_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G R & 0 \\ 0 & E' A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V' \\ W' \end{bmatrix} ,$$

bzw.

$$Q = F_0 U + F_1 U' \quad (3.3.8)$$

mit folgenden Zusammenfassungen

$$Q^T = \begin{bmatrix} Q_v^T & P_w^T \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

$$U^T = \begin{bmatrix} V^T & W^T \end{bmatrix} \quad (3.3.10)$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & G C^T \\ E \mu T & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.11)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} G R & 0 \\ 0 & E' A \end{bmatrix} . \quad (3.3.12)$$

Die Matrizen  $A$  und  $R$  stellen quadratische Formen dar; hieraus folgt, daß  $F_1$  eine symmetrische und positiv definite Matrix ist.

#### 3.4 Variationsaussagen

Mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen werden zunächst die Gleichgewichtsbedingungen formuliert. Die virtuellen Verschiebungen in der Querschnittsebene und in der Längsrichtung werden getrennt betrachtet. Für eine allgemeinere Darstellung des Verfahrens wird auf die Arbeiten von Bazant [2], Du Preez [20], Veldpaus [68] und Kollbrunner und Hajdin [36] hingewiesen.

### 3.4.1 Virtuelle Verschiebungen in der Querschnittsebene

Der gesamte virtuelle Verschiebungszustand in der Querschnittsebene wird mit den Funktionen  $v_x$  und  $v_y$  des wirklichen Zustandes ausgedrückt. Nach (3.2.1) und (3.2.2) erhält man für die virtuellen Verschiebungen:

$$\begin{aligned}\delta v_x &= \sum_{i=1}^m \delta v_{x_i} \\ \delta v_y &= \sum_{i=1}^m \delta v_{y_i} \quad ,\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

wobei

$$\delta v_{x_i} = f_{x_i} \delta V_i$$

und

$$\tag{3.4.2}$$

$$\delta v_{y_i} = f_{y_i} \delta V_i$$

sind.

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen soll an einem Glied von (3.4.1) stellvertretend für alle angewendet werden.

#### 3.4.1.1 Innere Arbeit

Die innere Arbeit, die von den Schnittkräften bei der  $i$ -ten virtuellen Verschiebung in der Querschnittsebene geleistet wird, beträgt:

$$-\delta A_i = \iint \delta \epsilon_x n_x dx dz + \iint \delta \gamma_{zx} n_{zx} dx dz + \iint \delta \kappa_x m_x dx dz \tag{3.4.3}$$

Setzt man aus (3.2.5) die Ausdrücke für  $\epsilon_x$  und  $\gamma_{zx}$  und aus (3.2.8) den Ausdruck für  $\kappa_x$  in (3.4.3) ein, unter Berücksichtigung, daß für die virtuelle Verschiebung in der Querschnittsebene

$$\delta y''_{zx} = \delta v_{x_i}$$

ist, so erhält man

$$-\delta A_i = \iint \delta v_{x_i} n_x dx dz + \iint \delta v_{x_i} n_{zx} dx dz - \iint \delta v_{y_i} m_x dx dz. \quad (3.4.4)$$

Die partielle Integration liefert:

$$\iint \delta v_{x_i} n_{zx} dx dz = \int_{\mathcal{R}} \delta v_{x_i} n_{zx} dx - \iint \delta v_{x_i} n'_{zx} dx dz,$$

wobei die Integration über den Rand  $\mathcal{R}$  an den Stellen  $z = 0$  und  $z = L$  durchgeführt wird. Mit dem letzten Ausdruck kann die Gleichung (3.4.4) folgendermaßen geschrieben werden:

$$-\delta A_i = \iint \delta v_{x_i} n_x dx dz - \iint \delta v_{x_i} n'_{zx} dx dz - \iint \delta v_{y_i} m_x dx dz + \int_{\mathcal{R}} \delta v_{x_i} n_{zx} dx. \quad (3.4.5)$$

In diese letztere Gleichung werden die Ausdrücke für  $\delta v_{x_i}$  und  $\delta v_{y_i}$  aus (3.4.1) und für  $n_x$ ,  $n_{zx}$  und  $m_x$  aus (3.2.11) und (3.2.12) eingesetzt, unter Berücksichtigung von

$$f_{y_i}'' = \frac{\bar{m}_x}{E'I}.$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} -\delta A_i = \int \delta v_i \left[ E' \sum_{k=1}^m \int f_{x_i}^* f_{x_k}^* \alpha_E dF V_k + E' \mu \sum_{l=1}^n \int f_{x_i}^* f_{z_l} \alpha_E \alpha_{\mu} dF W'_l - G \sum_{k=1}^m \int f_{x_i} f_{x_k} \alpha_G dF V_k'' \right. \\ \left. - G \sum_{l=1}^n \int f_{x_i} f_{z_l} \alpha_G dF W'_l + \frac{1}{E'I} \sum_{k=1}^m \int \frac{\bar{m}_{x_i} \bar{m}_{x_k}}{\alpha_E I} dx V_k \right] dz + \delta v_i \int_{\mathcal{R}} f_{x_i} n_{zx} dx. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$



### 3.4.1.2 Äußere Arbeit

Bei der virtuellen Verschiebung in der Querschnittsebene leisten die äußeren Flächenlasten  $\bar{q}_x(x,z)$ ,  $\bar{q}_y(x,z)$ , die Knotenlasten  $\hat{q}_x$ ,  $\hat{q}_y$  und die an den Rändern  $Z=0$  und  $Z=L$  wirkenden Kräfte  $q_{xR}$  äußere Arbeit (s. Bild 3.7). Wegen der Unvollständigkeit des hier betrachteten Plattenzustandes (Rahmen) kann kein Gleichgewicht mit quergerichteten Randkräften  $q_{yR}$  entlang der Wandmittelfläche gewährleistet werden, und deshalb werden sie in die weitere Betrachtung nicht einbezogen.

Alle Lasten müssen für jeden Rechnungsgang einen affinen Verlauf in der Längsrichtung aufweisen. Andere Belastungsfälle können mittels Superposition unabhängiger Rechnungen berücksichtigt werden. Die allgemeine Belastung in der Querschnittsebene wird im Bild 3.7 -auf das lokale Koordinatensystem bezogen- dargestellt.

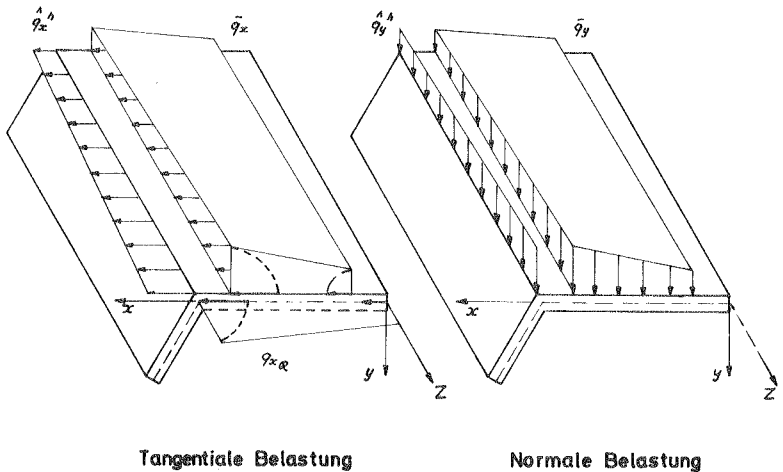


Bild 3.7 Belastung in Querrichtung

Für die äußere Arbeit ergibt sich

$$\delta A a_i = \iint \delta v_{x_i} \bar{q}_x dx dz + \iint \delta v_{y_i} \bar{q}_y dx dz + \sum_h \int \delta v_{x_i}^h \hat{q}_x^h dz + \sum_h \int \delta v_{y_i}^h \hat{q}_y^h dz + \int_R \delta v_{x_i} q_{xR} dx \quad (3.4.7)$$

Die Summationen haben so viele Glieder, wie der Querschnitt belastete Knoten hat (h).

Unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.4.2) kann die Gleichung (3.4.7) folgendermaßen geschrieben werden

$$\delta A a_i = \int \delta v_i \left[ \int f_{x_i} \bar{q}_x dx + \int f_{y_i} \bar{q}_y dx + \sum_h (f_{x_i}(h) \hat{q}_x^h + f_{y_i}(h) \hat{q}_y^h) \right] dz + \delta v_i \int_R f_{x_i} q_{xR} dx \quad (3.4.8)$$

bzw.

$$\delta A a_i = \int \delta v_i q_i(z) dz + \delta v_i \int_R f_{x_i} q_{xR} dx \quad (3.4.9)$$

wobei

$$q_i(z) = \int f_{x_i} \bar{q}_x dx + \int f_{y_i} \bar{q}_y dx + \sum_h (f_{x_i}(h) \hat{q}_x^h + f_{y_i}(h) \hat{q}_y^h) \quad (3.4.10)$$

ist.

Da  $\delta A a_i + \delta A i_j = 0$  ist, kann die gesamte Variationsaussage für den  $i$ -ten virtuellen Verformungszustand mit Hilfe der Gleichungen (3.4.6) und (3.4.10) wie folgt geschrieben werden:

$$\int \delta v_i \left[ G \sum_{k=1}^m \int f_{x_i} f_{x_k} \alpha_G dF V_k + G \sum_{l=1}^n \int f_{x_i} f_{z_l} \alpha_G dF W_l' - E' \mu \sum_{l=1}^n \int f_{x_i} f_{z_l} \alpha_E \alpha_\mu dF W_l' - \frac{1}{E'} \sum_{k=1}^m \int \frac{\bar{m}_{x_i} \bar{m}_{x_k}}{\alpha_E J} dx V_k - E' \sum_{k=1}^m \int f_{x_i} f_{x_k} \alpha_E dF V_k + q_i \right] dz +$$

$$+ \delta V_i \int_{\Omega} f_{x_i} (q_{x_R} - n_{z_x}) dx = 0$$

Da die Variationsaussagen für alle Variationen gültig sind, müssen die Ausdrücke innerhalb der eckigen Klammern gleich Null sein. Man erhält:

$$\begin{aligned} & 6 \sum_{k=1}^m \int f_{x_i} f_{x_k} \alpha_6 dF V_k'' + 6 \sum_{i=1}^n \int f_{x_i} f_{z_i} \alpha_6 dF W_i' - E' \mu \sum_{E=1}^n \int f_{x_i} f_{z_i} \alpha_E \alpha_{\mu} dF W_i' \\ & - \frac{1}{E'} \sum_{k=1}^m \int \frac{\bar{m}_{x_i} \bar{m}_{z_k}}{\alpha_{E-1}} dx V_k - E' \sum_{k=1}^m \int f_{z_i} f_{x_k} \alpha_E dF V_k + q_i = 0 \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

$$\int_{\Omega} f_{x_i} (q_{x_R} - n_{z_x}) dx = 0 \quad (3.4.12)$$

Die Gleichungen (3.4.11) und (3.4.12) sind die Gleichgewichtsbedingungen in Querrichtung und die statischen Randbedingungen an den Enden eines Trägerabschnittes bei der virtuellen Verschiebung  $i$  in der Querschnittsebene.

Für alle  $m$  Freiheitsgrade in der Querschnittsebene können Gleichungen der Form (3.4.11) und (3.4.12) aufgestellt werden.

Mit den schon definierten Matrizen

$$\begin{aligned} (c_{ij}) &= \int f_{x_i} f_{z_j} \alpha_6 dF \\ (r_{ik}) &= \int f_{x_i} f_{x_k} \alpha_6 dF \\ (t_{2ij}) &= \int f_{x_i} f_{z_j} \alpha_E \alpha_{\mu} dF \end{aligned} \quad ,$$

mit dem Spaltenvektor  $q$ , dessen Elemente  $q_i$  sind, und den Matrizen  $S$  und  $T$ , deren Elemente folgende Form haben

$$(s_{ik}) = \frac{1}{E^2} \int \frac{\bar{m}_{xi} \bar{m}_{xk}}{dE \cdot I} dx \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4.13)$$

$$(t_{ik}) = \int f_{xi} f_{xk} dE dF \quad k = 1, \dots, m \quad , \quad (3.4.14)$$

können die  $m$  Gleichgewichtsbedingungen folgendermaßen ausgedrückt werden

$$GRV'' + (GC^T - E'_{,\mu} T_2^T)W' - E'(S + T_1)V + q = 0 \quad (3.4.15)$$

$$\int_{\mathcal{R}} f_{xi} (q_{xR} - n_{xx}) dx = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad . \quad (3.4.16)$$

### 3.4.2 Virtuelle Verschiebung in der Längsrichtung

Der gesamte virtuelle Verformungszustand wird mit folgender Summation ausgedrückt

$$\delta v_z = \sum_{j=1}^n \delta v_{zj} \quad , \quad (3.4.17)$$

wobei

$$\delta v_{zj} = f_{zj} \delta W_j \quad . \quad (3.4.18)$$

ist.

Wie bei den Verschiebungen in der Querschnittsebene wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen an den Gliedern der Summation (3.4.17) angewendet.

#### 3.4.2.1 Innere Arbeit

Für den  $j$ -ten virtuellen Verschiebungszustand ist die innere Arbeit

$$-\delta A_{ij} = \iint \delta \varepsilon_{zj} n_z dx dz + \iint \delta \gamma_{zxj} n_{zx} dx dz \quad . \quad (3.4.19)$$

Setzt man in diese letzte Gleichung die Ausdrücke für  $\epsilon_{zj}$  und  $\gamma_{zxj}$  aus (3.2.6) ein, so erhält man

$$-\delta A_{ij} = \iint \delta v'_{zj} n_z dx dz + \iint \delta v_{zj} n_{zx} dx dz \quad . \quad (3.4.20)$$

Dabei ist berücksichtigt worden, daß in diesem Fall

$$\delta \gamma_{zxj} = \delta v'_{zj}$$

ist.

Nach partieller Integration und unter Berücksichtigung des Greenschen Integralsatzes erhält man für das erste Glied der rechten Seite folgenden Ausdruck

$$\iint \delta v'_{zj} n_z dx dz = \int_{\alpha} \delta v_{zj} n_z dx - \iint \delta v_{zj} n'_z dx dz \quad .$$

Mit ihm erhält die Gleichung (3.4.20) die folgende Form

$$-\delta A_{ij} = - \iint \delta v_{zj} n'_z dx dz + \iint \delta v'_{zj} n_{zx} dx dz + \int_{\alpha} \delta v_{zj} n_z dx \quad . \quad (3.4.21)$$

Setzt man die Ausdrücke für den wirklichen Spannungszustand aus (3.2.11) ein, unter Berücksichtigung, daß

$$\delta v_{zj} = f_{zj} \delta W_j$$

ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} -\delta A_{ij} = & \int \delta W_j \left[ -E' \sum_{i=7}^n \int f_{zj} f_{zi} \alpha_E dF W_i'' - E' \mu \sum_{k=7}^m \int f_{zj} f_{zk} \alpha_E \alpha_{\mu} dF V_k' \right. \\ & \left. + G \sum_{k=7}^m \int f_{zj} f_{zk} \alpha_G dF V_k' + G \sum_{i=7}^n \int f_{zj} f_{zi} \alpha_G dF W_i \right] dz - \delta W_j \int_{\alpha} f_{zj} n_z dx \quad (3.4.22) \end{aligned}$$

### 3.4.2.2 Äußere Arbeit

Die äußere Arbeit bei der  $j$ -ten virtuellen Verschiebung in der Längsrichtung wird von den Flächenlasten  $\bar{p}(x,z)$ , den Linienlasten an den Knoten  $\hat{p}(z)$  und, an den Rändern  $z=0$  und  $z=L$ , von den Kräften  $p_R$  geleistet (Bild 3.8).

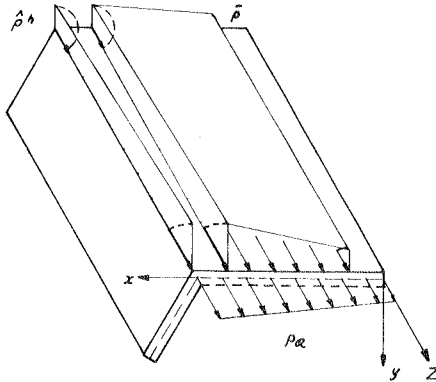


Bild 3.8 Belastung in Längsrichtung

Für die äußere Arbeit gilt

$$\delta A_{a_j} = \iint \delta v_{z_j} \bar{p} dx dz + \sum_n \int \delta v_{z_j}(h) \hat{p}^h dz + \int_R \delta v_{z_j} p_R dx \quad (3.4.23)$$

bzw.

$$\delta A_{a_j} = \int \delta W_j p_j(z) dz + \delta W_j \int_R f_{z_j} p_R dx, \quad (3.4.24)$$

wobei

$$p_j(z) = \int f_{z_j} \bar{p} dx + \sum_n f_{z_j}(h) \hat{p}^h \quad (3.4.25)$$

ist.

In Anbetracht dessen, daß

$$\delta A \sigma_j + \delta A_{ij} = 0$$

ist, erhält man folgende Gleichungen für den  $j$ -ten virtuellen Verschiebungszustand

$$\begin{aligned} & E' \sum_{i=1}^n \int f_{zj} f_{zi} \alpha_E dF W_i'' + E' \mu \sum_{k=1}^m \int f_{zj} f_{zk} \alpha_E \alpha_\mu dF V_k' - \\ & - G \sum_{k=1}^m \int f_{zj} f_{zk} \alpha_G dF V_k' - G \sum_{i=1}^n \int f_{zj} f_{zi} \alpha_G dF W_i + p_j = 0 \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

und

$$\int_R f_{zj} (p_R - n_z) dx = 0 \quad . \quad (3.4.26)$$

Die Gleichungen (3.4.25) und (3.4.26) sind jeweils die Gleichgewichtsbedingungen und die statischen Randbedingungen in der Längsrichtung.

Mit den schon definierten Matrizen  $\mathbf{A}$  -Gleichung (3.3.3)-,  $\mathbf{G}$  -Gleichung (3.3.4)-,  $\mathbf{T}_z$  -Gleichung (3.3.7)-, dem Spaltenvektor  $\mathbf{p}$ , dessen Elemente  $p_j$  sind, und der Matrix  $\mathbf{B}$ , deren Elemente

$$(b_{jl}) = \int f_{zj} f_{zl} \alpha_G dF \quad j = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, n \quad (3.4.27)$$

sind, lassen sich die  $n$  Gleichgewichtsbedingungen, den Verformungszuständen in der Längsrichtung entsprechend, mit Hilfe folgender Gleichungen ausdrücken

$$E' \mathbf{A} \mathbf{W}'' + (E' \mu \mathbf{T}_z - \mathbf{G} \mathbf{C}) \mathbf{V}' - \mathbf{G} \mathbf{B} \mathbf{W} + \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (3.4.28)$$

$$\int_R f_{zj} (p_R - n_z) dx = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad . \quad (3.4.29)$$

3.4.3 Gleichgewichtsbedingungen infolge des gesamten virtuellen Verschiebungszustandes

Die Gleichungen (3.4.15) und (3.4.28)

$$GRV'' + (GC^T - E'\mu T_2^T)W' - E'(S + T_1)V + q = 0 \quad (3.4.15)$$

$$E'AW'' + (E'\mu T_2 - GC)V' - GBW + p = 0 \quad (3.4.28)$$

stellen die  $m+n$  Gleichgewichtsbedingungen dar. Die Gleichungen (3.4.16) und (3.4.29)

$$\int f_{xi} (q_{xR} - n_{xx}) dx = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (3.4.16)$$

$$\int f_{zj} (p_R - n_z) dx = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4.29)$$

sind die Bedingungen, die an den Rändern eines Abschnittes erfüllt werden müssen.

Die Gleichungen (3.4.15) und (3.4.28) können zusammenfassend geschrieben werden

$$M_2 U'' + M_1 U' + M_0 U + q_e = 0 \quad (3.4.30)$$

mit

$$M_2 = \begin{bmatrix} GR & 0 \\ 0 & EA \end{bmatrix} \quad (3.4.31)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & GC^T - E'\mu T_2^T \\ E'\mu T_2 - GC & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4.32)$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} -E'(S + T_1) & 0 \\ 0 & -GB \end{bmatrix} \quad (3.4.33)$$



$$q_0^r = \begin{bmatrix} q^r & p^r \end{bmatrix} \quad (3.4.34)$$

$$U^r = \begin{bmatrix} v^r & w^r \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

In der hier dargestellten Form haben Vlasov und Leont'ev [69] bei der Behandlung von Scheibenproblemen den vollständigen Scheibenzustand berücksichtigt.

Es soll zunächst auf die Identität der Matrizen  $F_1$  und  $M_2$  hingewiesen werden; wegen des verschiedenen Ursprungs wird jedoch mit beiden Bezeichnungen gearbeitet.

### 3.5 Allgemeine Ansätze für die Verschiebungen

#### 3.5.1 Verschiebungen in Querschnittsebene

Die Verschiebungsverläufe  $f_x$  und  $f_y$  können im allgemeinen Fall aus der Berechnung des als Rahmen betrachteten Querschnitts der Breite eins bestimmt werden. Dabei geht man vom geometrisch bestimmten Rahmen aus, in dem -den Freiheitsgraden entsprechend- die Verformungen infolge der Einheitsverformungszustände errechnet werden. Es kann eine beliebige Zahl von Knoten so gewählt werden, daß die geometrischen und elastischen Eigenschaften entlang der geraden Abschnitte näherungsweise konstant angenommen werden können.

Nimmt man außerdem an, daß die äußeren Lasten nur an den gewählten Knoten wirken, so erhält man nach Gleichung (3.2.7), wenn die Dehnungen der Wandmittelfläche in der Querrichtung berücksichtigt werden ( $\epsilon_x \neq 0$ ), einen linearen, wenn sie vernachlässigt werden ( $\epsilon_x = 0$ ), einen konstanten Verlauf für  $f_x$ . Für  $f_y$  erhält man Verläufe, die den jeweiligen Querverbiegungen des Rahmens gleichen.

Aus der Rahmenberechnung können die Elemente der Matrix  $S$  sowie  $T$  (für  $\epsilon_x \neq 0$ ) infolge der Einheitsverformungszustände entweder mittels der geleisteten inneren Arbeit oder durch

die Gleichgewichtsbedingungen ermittelt werden (s. Wlassow [72] ).

### 3.5.2 Verschiebungen in Längsrichtung

Für die Verschiebungen in der Längsrichtung können Ansätze verschiedener Form gewählt werden. Wlassow hat lineare Verläufe zwischen den Knoten angenommen. Für genauere Berechnungen und bei bestimmten Problemen (z.B. die Untersuchung der mittragenden Breite von de Boer [16] ) dürfte die zusätzliche Annahme von parabolischen Verläufen zwischen den Knoten von Vorteil sein. Durch diese Erhöhung der Anzahl der Freiheitsgrade wird das Gleichungssystem größer, womit im allgemeinen aber auch die Genauigkeit der Ergebnisse erhöht wird. In der vorliegenden Arbeit wird nur mit linearen Ansätzen gearbeitet.

### 3.6 Vereinfachende Annahmen

Wenn man die Querdehnungszahl  $\mu$  oder die Dehnungen  $\epsilon_x$  oder beide vernachlässigt, ergeben sich einfachere Ausdrücke für die verallgemeinerten Querschnittskräfte (3.3.8) und für die Gleichgewichtsbedingungen (3.4.30). Nachfolgend werden die Formeln für die Fälle der Vernachlässigung der Querdehnungszahl  $\mu$  und der Dehnungen  $\epsilon_x$  getrennt angegeben.

#### 3.6.1 Vernachlässigung der Querdehnungszahl

Wenn  $\mu = 0$  ist, dann sind

$$E' = E \quad (3.6.1)$$

$$G = \frac{E}{2} \quad (3.6.2)$$

In der Gleichung (3.3.8), mit der die verallgemeinerten Schnittkräfte am gesamten Querschnitt ausgedrückt werden, erhält die Matrix  $F_0$  folgende Form

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & G C^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.3)$$

Im Ausdruck für die Gleichgewichtsbedingungen

$$M_2 U'' + M_1 U' + M_0 U + q_0 = 0 \quad (3.4.30)$$

ergibt sich für  $M_1$  folgende Gleichung :

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6C^T \\ -6C & 0 \end{bmatrix} . \quad (3.6.4)$$

### 3.6.2 Vernachlässigung der Dehnungen $\epsilon_x$ - Faltwerkstheorie mit Betrachtung von Rahmen- und Balkenzuständen bei Berücksichtigung der Schubverzerrungen -

Da die Dehnungen  $\epsilon_x$  vernachlässigt werden, folgt aus dem Ausdruck für  $\epsilon_x$  in (3.2.7), daß

$$f_{x_i} = 0$$

ist. Demzufolge sind die nach (3.3.7) und (3.4.14) definierten Matrizen  $T_1$  und  $T_2$  gleich Null. Weil  $T_2 = 0$  ist, bleibt die Form der im vorigen Abschnitt dargestellten Matrizen  $F_0$  und  $M_1$  erhalten, und weil  $T_1 = 0$  ist, erhält die Matrix  $M_0$  folgende Form

$$M_0 = \begin{bmatrix} E'S & 0 \\ 0 & -6B \end{bmatrix} . \quad (3.6.5)$$

Im Rahmen dieser Arbeit wird weiterhin vor allem mit dieser Faltwerkstheorie gearbeitet. Die Gleichgewichtsbedingungen (3.4.30) können folgendermaßen ausgedrückt werden

$$GRV'' - E'SV + 6C^T W' + q = 0 \quad (3.6.6)$$

$$E'AW'' - 6BW - 6CV' + p = 0 . \quad (3.6.7)$$

In dieser Form ist das Verfahren von Wlassow in [72,73] angegeben worden. Dieselbe Form haben auch Lacher [40] und Abdel-Samad, Wright und Robinson [1] angewendet.

Werden abschnittsweise lineare Ansätze für die Funktionen  $f_{z_j}$  angenommen, so erhalten die Schubspannungen -im Rahmen dieser Theorie- für die einzelnen Abschnitte einen konstanten Wert. Dieses wird aus der Betrachtung der Gleichung für die Schubverzerrungen

$$\delta_{zx} = \sum_{i=1}^m f_{x_i} v_i' + \sum_{j=1}^n f_{z_j} w_j \quad (3.2.7)$$

ersichtlich:  $f_{x_i}$  bzw.  $f_{z_j}$  haben konstante Werte entlang der Abschnitte, wenn  $f_{x_i}$  gleich Null ist, bzw. wenn  $f_{z_j}$  einen linearen Verlauf hat.

### 3.7 Integration der Differentialgleichungen

Wlassow [72] und Lacher [40] haben das Gleichungssystem direkt mit Hilfe von Fourierreihen gelöst (s. dazu auch Cheung [8] und Cusens und Loo [10]). Dieses Verfahren ist nur beschränkt anwendbar, da damit im allgemeinen nur der frei gelagerte Träger, der an den Enden mit Schotten ausgesteift ist, berechnet werden kann. Mit Hilfe des kraftgrößenverfahrens lassen sich beliebig viele Stützen und Schotte zwischen den freiliegenden Enden berücksichtigen. Andererseits bietet diese Fourierreihenlösung den folgenden Vorteil: da mit den Fourierreihen die Verläufe der unbekannt Funktionen bestimmt werden, wird in der weiteren Rechnung nur die Amplitude dieser Funktionen ermittelt, d.h. die Zahl der Unbekannten ist gleich der Zahl der Freiheitsgrade.

Bei der Integration der  $(m+n)$  gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung (3.4.30), mit denen die Gleichgewichtsbedingungen ausgedrückt werden, können verschiedene Verfahren gewählt werden. Im Abschnitt 5.4 z.B. werden diese Gleichungen so umgeformt, daß für die vier berücksichtigten Freiheitsgrade eine Differentialgleichung vierter Ordnung und

zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufgestellt werden. Die verbreitetste Methode ist jedoch die Integration von  $2(m+n)$  Differentialgleichungen erster Ordnung, die aus den Gleichungen (3.4.30) abgeleitet werden. Die Zahl der Randbedingungen ist unabhängig von der gewählten Integrationsmethode und gleich  $2(m+n)$ , was gegenüber der Anwendung von Fourierreihen die Lösung eines linearen algebraischen Gleichungssystems mit doppelt so vielen Unbekannten bedeutet.

Auf beide Verfahren wird zunächst näher eingegangen.

### 3.7.1 Integration mit Hilfe von Fourierreihen

Hier wird die Anwendung der Fourierreihen an Hand des Gleichungssystems (3.6.6) und (3.6.7) vorgeführt. Das Verfahren läßt sich auch bei der allgemeineren Form (3.4.30) anwenden. Das Vorgehen wird nur für symmetrische Belastung -bezogen auf die Feldmitte- eines Trägers dargestellt.

Die Verformungen werden durch folgende Reihen ausgedrückt

$$V = \sum_n V_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right), \quad (3.7.1)$$

$$n = 1, 3, \dots, 5$$

$$W = \sum_n W_n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right). \quad (3.7.2)$$

Dementsprechend gilt für die Belastung

$$p = \sum_n p_n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad (3.7.3)$$

$$n = 1, 3, \dots, 5$$

$$q = \sum_n q_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right). \quad (3.7.4)$$

In diesen Ausdrücken wird die Länge des Trägers mit  $L$  bezeichnet.

Diese Ansätze und die dazugehörigen Ableitungen werden jeweils für ein Reihenglied  $n$  in (3.6.6) und (3.6.7) eingesetzt. Man erhält dann ein lineares algebraisches System der Form

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 R + \gamma S & \left(\frac{n\pi}{L}\right) C^T \\ \left(\frac{n\pi}{L}\right) C & \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 A + B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_n \\ W_n \end{bmatrix} - \frac{\gamma}{6} \begin{bmatrix} q_n \\ p_n \end{bmatrix} = 0, \quad (3.7.5)$$

wobei

$$\gamma = \frac{E'}{6} \quad (3.7.6)$$

ist.

Dieses lineare algebraische Gleichungssystem wird für jedes Glied der Fourierreihe gelöst, und die dazugehörigen Ergebnisse werden addiert. Die Konvergenz ist häufig so gut, daß wenige Reihenglieder für die Berechnung ausreichen.

### 3.7.2 Integration eines Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung

Für die verallgemeinerten Querschnittskräfte gilt der Ausdruck

$$Q = F_0 U + F_1 U' \quad (3.3.8)$$

Nach der Variationsaussage sollen die Gleichgewichtsbedingungen

$$M_2 U'' + M_1 U' + M_0 U + q_0 = 0 \quad (3.4.30)$$

erfüllt werden.

Aus (3.3.8) wird ein Ausdruck für  $U'$  ermittelt

$$U' = F_1^{-1} Q - F_1^{-1} F_0 U, \quad (3.7.7)$$

der, einmal nach  $Z$  abgeleitet und in (3.4.30) eingesetzt, zur folgenden Gleichung führt

$$M_2 (F_1^{-1} Q' - F_1^{-1} F_0 U') + M_1 U' + M_0 U + q_6 = 0 \quad .$$

In diese Gleichung wird die Gleichung (3.7.7) noch einmal eingesetzt. Man erhält unter Berücksichtigung der Tatsache, daß  $M_2$  und  $F_1$  identisch sind,

$$Q' + (M_1 - F_0)(F_1^{-1} Q - F_1^{-1} F_0 U) + M_0 U + q_6 = 0$$

oder

$$Q' = -(M_1 - F_0) F_1^{-1} Q + [(M_1 - F_0) F_1^{-1} F_0 - M_0] U - q_6 \quad . \quad (3.7.8)$$

Die Gleichungen (3.7.7) und (3.7.8) werden zusammengefaßt

$$\begin{bmatrix} U' \\ Q' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1^{-1} F_0 & F_1^{-1} \\ (M_1 - F_0) F_1^{-1} F_0 - M_0 & -(M_1 - F_0) F_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ q_6 \end{bmatrix}$$

und mit Hilfe folgender Matrizen

$$Z_V^T = \begin{bmatrix} U^T & Q^T \end{bmatrix} \quad (3.7.9)$$

$$q_6^{*T} = \begin{bmatrix} 0^T & q_6^T \end{bmatrix} \quad (3.7.10)$$

und

$$A_0 = \begin{bmatrix} -F_1^{-1} F_0 & F_1^{-1} \\ (M_1 - F_0) F_1^{-1} F_0 - M_0 & -(M_1 - F_0) F_1^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.7.11)$$

abgekürzt dargestellt

$$\boxed{Z_V' = A_0 Z_V - q_6^*} \quad . \quad (3.7.12)$$

Es handelt sich also um ein System von Differentialgleichungen erster Ordnung. Du Prez [20] hat das Problem in folgenden Einzelschritten gelöst: Lösung des Eigenwertproblems, Ermittlung der Eigenvektoren, Aufstellung der Übertragungsmatrix, Ermittlung der Zustandsvektoren an den Enden eines Bereiches (eines Elementes) und Ableitung der Steifigkeitsmatrix. In dieser Form können mit Hilfe der Methode der finiten Elemente Durchlaufträger unter Berücksichtigung verschiedener Randbedingungen berechnet werden.

Eine andere Methode ist von Veldpaus [68] vorgeschlagen worden, nach der abschnittsweise Polynomansätze für den Verlauf der unbekannt Funktionen  $v_1, \dots, v_m$  und  $w_1, \dots, w_n$  gewählt werden. Mit Hilfe dieser Ansätze lassen sich die Steifigkeitsmatrizen der Elemente ableiten.



4. ANWENDUNG DER FALTWERKSTHEORIE MIT BETRACHTUNG VON RAHMEN- UND BALKENZUSTÄNDEN BEI BERÜCKSICHTIGUNG DER SCHUBVERZERKUNGEN

4.1 Allgemeines

Hier wird die im Abschnitt 3.6.2 abgeleitete Faltwerkstheorie auf den dreiwelligen Querschnitt nach Bild 1.1 angewendet. Im folgenden wird zwischen den Verschiebungen des starren Querschnitts und den Verschiebungen und Verformungen des verformbaren Querschnitts unterschieden.

Für diese Faltwerkstheorie gilt also

$$q = F_0 U + F_1 U' \quad (3.3.8)$$

$$M_2 U'' + M_1 U' + M_0 U + q_0 = 0 \quad (3.4.30)$$

mit

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 6C^T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.3)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} 6R & 0 \\ 0 & E'A \end{bmatrix} \quad (3.3.12)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 6R & 0 \\ 0 & E'A \end{bmatrix} \quad (3.4.31)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 6C^T \\ -6C & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6.4)$$

$$M_0 = \begin{bmatrix} -E'S & 0 \\ 0 & 6B \end{bmatrix} \quad (3.6.5)$$

$$U^T = \begin{bmatrix} V^T & W^T \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} Q_V^T & P_W^T \end{bmatrix} \quad (3.3.3)$$

$$q_0^T = \begin{bmatrix} q^T & p^T \end{bmatrix} . \quad (3.3.4)$$

#### 4.2 Träger mit starrem Querschnitt

In der Querschnittsebene sind folgende Starrkörperverschiebungen des Gesamtquerschnitts zu berücksichtigen: eine Verschiebung parallel zur  $X$ -Achse, eine Verschiebung parallel zur  $Y$ -Achse und eine Rotation um einen beliebigen Punkt. Die entsprechenden Einheitsverformungszustände sowie der Verlauf der dazugehörigen Funktionen  $f_x$  sind im Bild 4.1 dargestellt.

In der Längsrichtung sind bei linearen Ansätzen zwischen den Knoten so viele Freiheitsgrade wie Knoten zu berücksichtigen. Wählt man z.B. die Schnittpunkte der verschiedenen Rinde, bzw. die freien Enden in der Querschnittsebene als Knoten des Querschnitts, dann sind die im Bild 4.2 dargestellten Freiheitsgrade zu berücksichtigen.

Für die Verschiebungszustände können die Gleichgewichtsbedingungen nach (3.6.6) und (3.6.7) aufgestellt werden. Dabei muß aber berücksichtigt werden, daß  $\delta = 0$  ist (s. Gleichung (3.4.13)), weil keine Profilverformung und demzufolge keine Querbiegebeanspruchung betrachtet worden ist.

$$GAV' + GC'W' + q = 0 \quad (4.2.1)$$

$$EAW'' - GBW - GC'V' + p = 0$$

Kollbrunner und Hajdin [35] haben dieses Rechenverfahren für die Berechnung von Trägern mit unverformbarem Querschnitt vorgeschlagen.

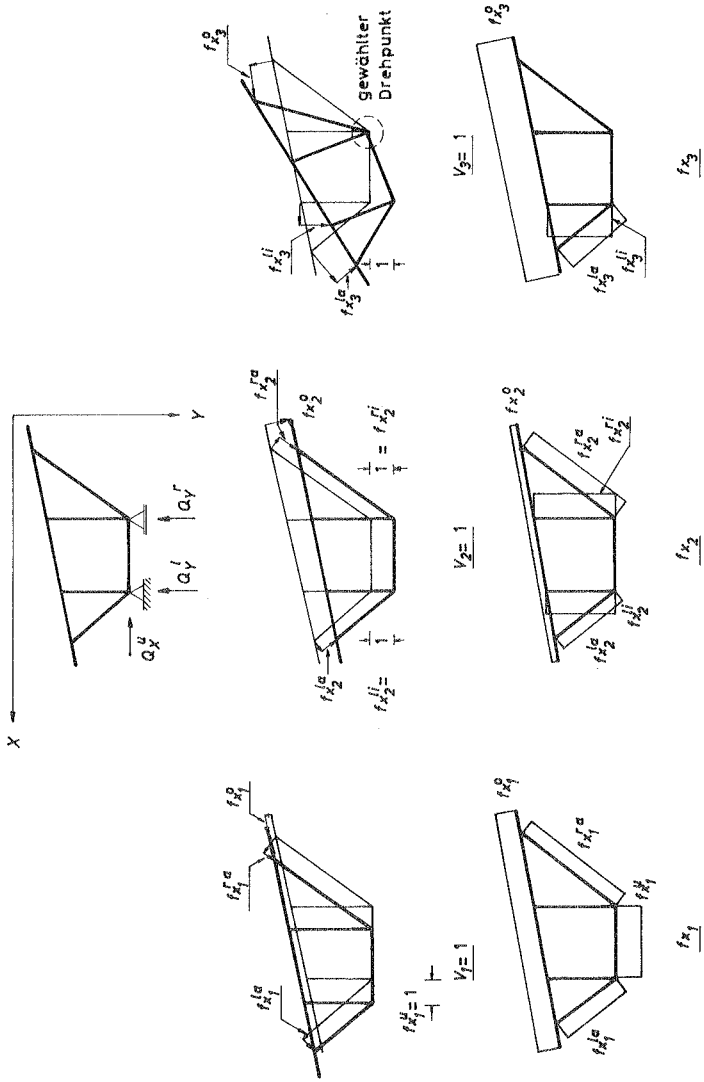


Bild 4.1 Verschiebungen des starren Querschnitts

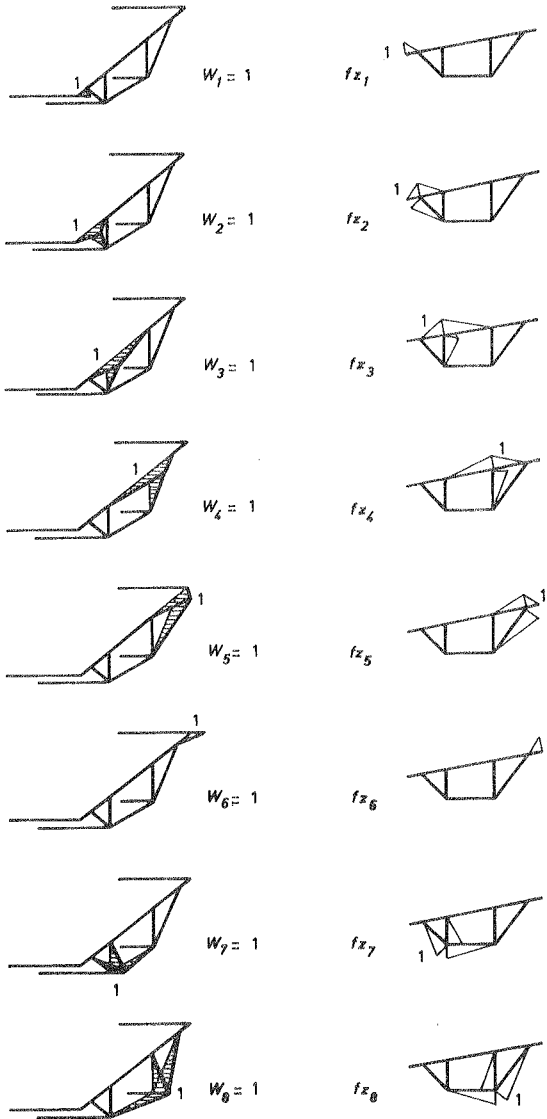


Bild 4.2 Freiheitsgrade und Verläufe der Verschiebungen in Längsrichtung

### 4.3 Träger mit verformbarem Querschnitt

Zunächst wird der Querschnitt als Rahmen (s. Bild 4.3) betrachtet, der so gelagert ist, daß die Profilverformung und die Starrkörperverschiebungen ausgeschaltet sind.

Bei einer Belastung des Tragwerks entstehen Festhaltekräfte an den angebrachten Lagern, die beim wirklichen Träger nicht vorkommen. Der Querschnitt besitzt entsprechend der Lageranzahl 4 Freiheitsgrade. Hierfür gibt es vier Einheitsverformungszustände in Querrichtung.

Im Bild 4.3 sind die den Einheitsverformungszuständen zugehörigen Verformungsfiguren dargestellt; diese Verformungsfiguren können in einfacher Weise mit Hilfe der Gelenkfiguren bestimmt werden. Ähnlich wie im Bild 4.1 dargestellt ist, können die Verläufe der Funktionen  $f_x$  ermittelt werden.

Diesen Einheitszuständen entsprechend werden, wenn die Querbiegesteifigkeit berücksichtigt wird, die Knotendrehwinkel und die Schnittkräfte mittels unabhängiger Rahmenberechnungen bestimmt, d.h. aus der weiteren Faltwerksberechnung werden in der Querschnittsebene nur die vier unbekanntes Verschiebungen der Knoten ermittelt, an denen der Querschnitt festgehalten wird. Die wirklichen Knotendrehwinkel und Schnittkräfte erhält man durch Multiplikation der errechneten Verschiebungen mit den entsprechenden Drehwinkeln und Schnittkräften infolge der Einheitszustände und Addition der Teilergebnisse.

Zweckmäßiger ist aber eine andere Darstellung der Freiheitsgrade in der Querschnittsebene, nämlich mittels der drei im Abschnitt 4.2 erläuterten Querschnittsverschiebungen und eines Verformungsfalles, der der Profilverformung entspricht. In dieser Form wird, um die Querbiegemomente des Querschnitts ermitteln zu können, nur eine Berechnung des als Rahmen betrachteten Querschnitts erforderlich (s. Bild 4.4). So wird der Verformungszustand des hier untersuchten Trägers in der Querschnittsebene als Summe von zwei Verschiebungen, sowie einer Verdrehung

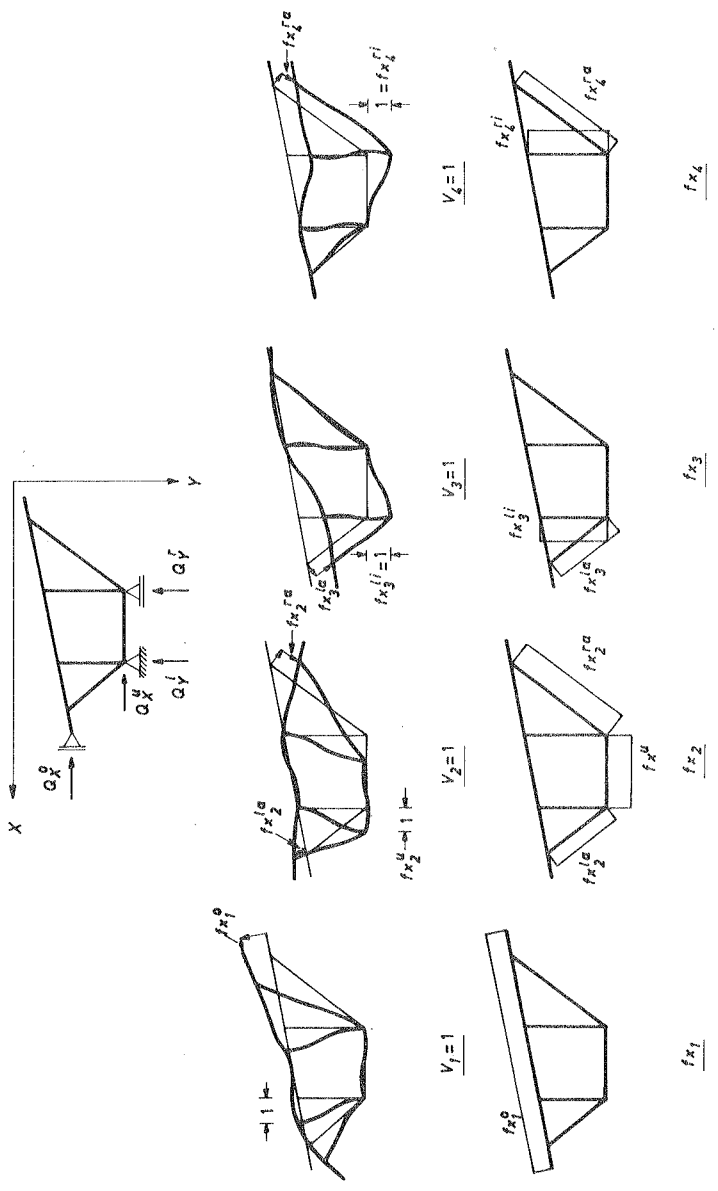


Bild 4.3 Allgemeine Verformungen des verformbaren Querschnitts

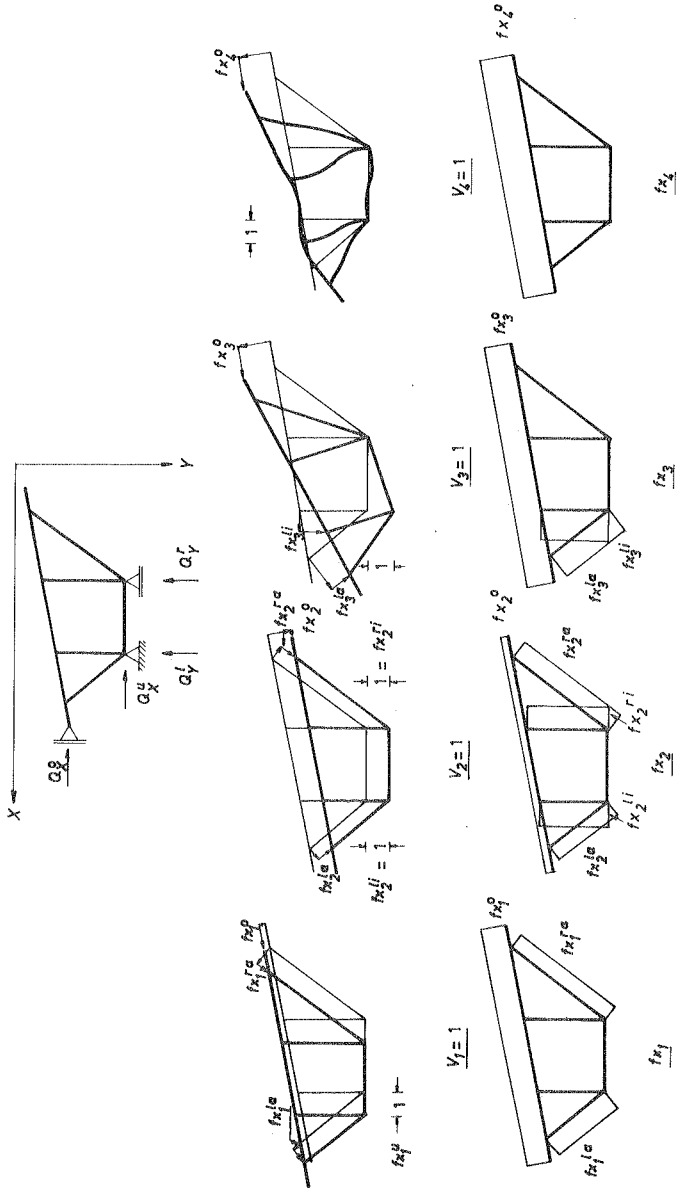
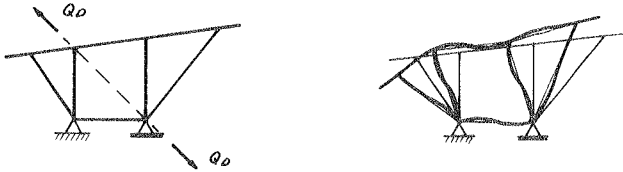


Bild 4.4 Verschiebungen und Verformung des verformbaren Querschnitts

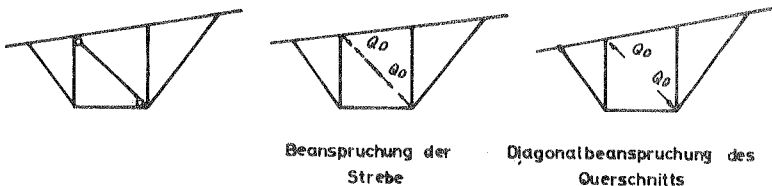
und einer Profilverformung des Querschnitts dargestellt.

Die Profilverformung wird mit einer Relativverschiebung der Knoten der oberen Platte in Querrichtung gemäß  $V_4$  im Bild 4.4 berücksichtigt. Für den Ansatz kann man aber auch die Verformungsfigur des Rahmens wählen, die infolge der im Bild 4.5 dargestellten Kräfte entsteht.



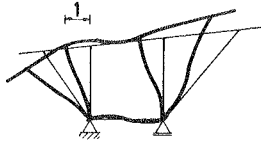
**Bild 4.5 Diagonalbeanspruchung des Querschnitts für die Berücksichtigung der Profilverformung**

Bei Vernachlässigung der Dehnungen der Wandmittelfläche in der Querrichtung kann die Unverformbarkeit des Querschnitts mit Hilfe einer oder mehrerer Streben gewährleistet werden, die man als unendlich dehnsteif annimmt. Im Bild 4.6 ist eine gelenkig angeschlossene Strebe dargestellt. Diese wird bei belastetem Träger durch eine Kraft  $Q_0$  beansprucht. Beseitigt man im folgenden Schritt die gedachte Strebe, so hat man die Kraft als äußere Last auf den nun verformbaren Querschnitt (Rahmen) anzusetzen.

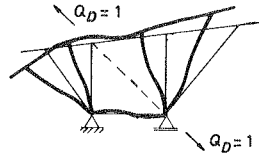


**Bild 4.6 Ausgesteifter und ungesteifter Querschnitt (In der Querrichtung unendlich große Dehnsteifigkeit)**



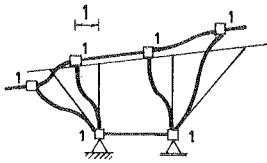


Vorgegebene Verformung  
der inneren Zelle

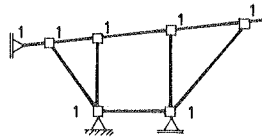


Diagonalbeanspruchung  
der inneren Zelle

a)  $V_4 = 1$

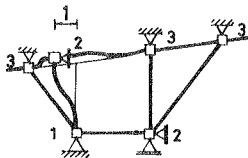


6 unbekannte Knotendrehwinkel

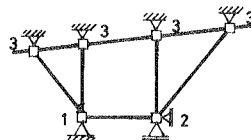


6 unbekannte Knotendrehwinkel  
1 unbekannter Stabdrehwinkel

**b) Verschiebungsgrößenverfahren**  
(Unendlich große Dehnsteifigkeit)



14 Unbekannte



15 Unbekannte

**c) Verallgemeinertes Verschiebungsgrößenverfahren**  
(Endlich große Dehnsteifigkeit)

Bild 4.7 Rahmenberechnung nach den verschiedenen Verfahren

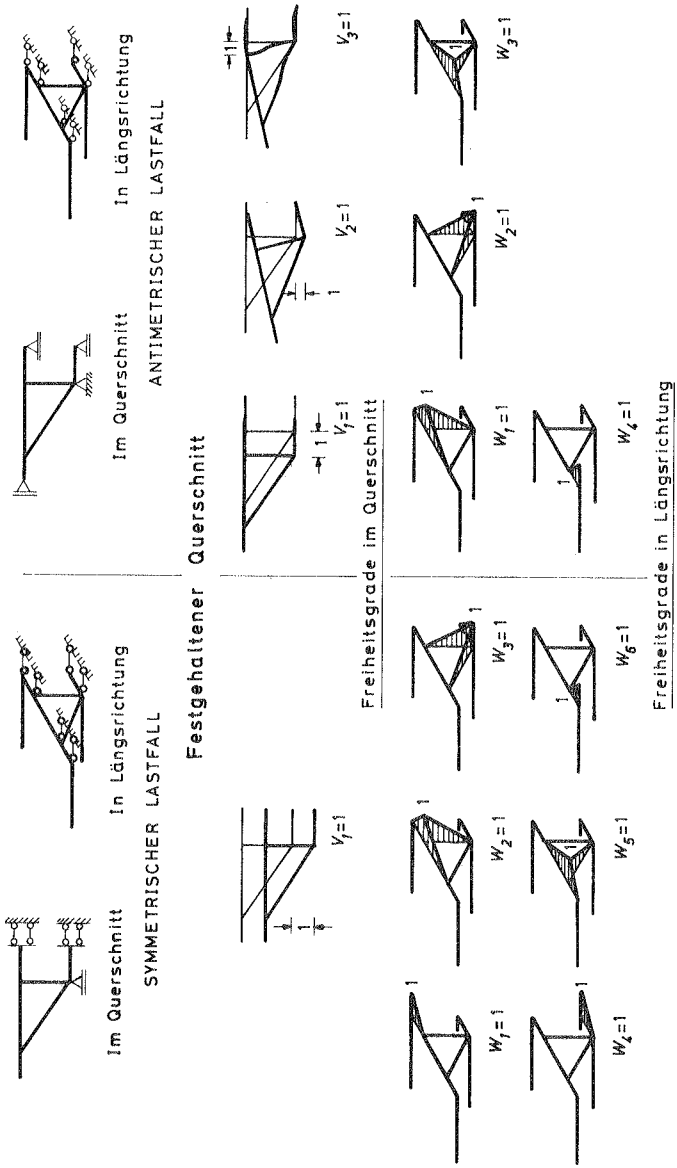
Infolge einer Diagonalbeanspruchung (s. Bild 4.7a) sind bei der Rahmenberechnung nach dem Verschiebungsgrößenverfahren ( $\epsilon_x = 0$ ) sieben (6 Knotendrehwinkel und 1 Stabdrehwinkel) Unbekannte (s. Bild 4.7b) und nach dem verallgemeinerten Verschiebungsgrößenverfahren ( $\epsilon_x \neq 0$ ) fünfzehn Unbekannte (s. Bild 4.7c) zu bestimmen.

Andererseits werden bei einer vorgegebenen Verformung des Querschnitts (s. Bild 4.7a) nach dem Verschiebungsgrößenverfahren ( $\epsilon_x = 0$ ) sechs (6 Knotendrehwinkel) Unbekannte (s. Bild 4.7b) und nach dem verallgemeinerten Verschiebungsgrößenverfahren ( $\epsilon_x \neq 0$ ) vierzehn Unbekannte bestimmt (s. Bild 4.7c).

Bei der Entwicklung allgemeiner Computer-Programme zur Rahmenberechnung ist eine Anwendung des Verschiebungsgrößenverfahrens mit  $\epsilon_x = 0$  ungleich aufwendiger als eine Berücksichtigung von  $\epsilon_x \neq 0$  (s. z.B. Veldpaus [68]). Im ersten Fall ergeben sich gemäß der Gelenkfigur lineare Abhängigkeiten bei den Knotenverschiebungen, die erst mit Sonderbetrachtungen eliminiert werden können (s. z.B. Hees [26]). In den meisten Fällen weichen die nach dem Verschiebungsgrößenverfahren ( $\epsilon_x = 0$ ) und dem verallgemeinerten Verschiebungsgrößenverfahren ( $\epsilon_x \neq 0$ ) erzielten Ergebnisse nur geringfügig voneinander ab, da der Einfluß der Dehnungen gegenüber dem Krümmungseinfluß klein ist.

Die zu berücksichtigenden Freiheitsgrade in Längsrichtung sind im Bild 4.2 dargestellt. Somit sind nach Bild 4.2 und Bild 4.4 für den Träger mit verformbarem Querschnitt insgesamt 12 Freiheitsgrade zu berücksichtigen.

Bei der Untersuchung des dreizelligen Trägers mit symmetrischem Querschnitt ging man in der vorliegenden Arbeit vom halben System aus. Dabei wurden die Schnittpunkte der oberen und unteren Platte mit der Symmetrieachse als zusätzliche Knoten gewählt, so daß abweichend von Bild 4.2 an diesen Punkten ein Knick in den Längsverschiebungen zugelassen wird. Wie im Bild 4.8 dargestellt ist, sind für den symmetrischen und antisymmetrischen Lastfall jeweils sieben Freiheitsgrade zu berücksichtigen.



7 Freiheitsgrade

7 Freiheitsgrade

Bild 4.8 Freiheitsgrade beim Träger mit symmetrischem Querschnitt

Bei der genauen Betrachtung der Flatten- und Scheibenzustände (s. Abschnitt 2.6), nach denen an jedem Knoten die Verschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen und die Drehung um die Z-Achse als unabhängige Freiheitsgrade auftreten, sind für die acht Knoten  $4 \times 8 = 32$  Freiheitsgrade zu berücksichtigen. Wenn man bei den symmetrischen Querschnitten vom halben System ausgeht, werden beim symmetrischen Lastfall 20 und beim antisymmetrischen Lastfall 22 Freiheitsgrade betrachtet.

#### 4.4 Allgemeine Berücksichtigung von Verkehrslasten

Die gesamte Beanspruchung infolge einer auf der Fahrbahn in Querrichtung wandernden Last, z.B. einer Einzellast in der Feldmitte oder einer konstanten Linienlast in Längsrichtung, setzt sich aus der am festgehaltenen Querschnitt ermittelten Beanspruchung und aus der Faltwerksbeanspruchung zusammen.

Bezeichnet man mit  $s_g$  die an der Stelle  $g$  des Querschnitts untersuchte Schnittgröße und mit  $Q^1, Q^2, \dots, Q^r$  die von einer Last an einer beliebigen Stelle des Querschnitts verursachten Festhaltekräfte (Auflagerkräfte), so erhält man die gesamte Beanspruchung durch Superposition:

$$s_g = s_g^0 + Q^1 s_g^1 + Q^2 s_g^2 + \dots + Q^r s_g^r$$

wobei  $r$  die Zahl der zu berücksichtigenden Festhaltekräfte ist. In dieser Gleichung ist  $s_g^0$  die Beanspruchung am festgehaltenen Querschnitt.  $s_g^1, s_g^2, \dots, s_g^r$  bezeichnen die bei der jeweiligen Faltwerksberechnung infolge der Kräfte  $-Q^1, -Q^2, \dots, -Q^r$  ermittelten Schnittgrößen. Dieses Vorgehen wiederholt sich für alle Stellen, an denen die Last angesetzt werden soll.

Wenn viele Laststellungen untersucht werden müssen, wie das bei Verkehrslasten oft der Fall ist, so kann der erforderliche Rechenaufwand mit Hilfe von Einflußlinien vermindert werden. Die Einflußlinie der hier betrachteten Schnittgröße „ $s_g$ “ infolge einer in Querrichtung wandernden Last, z.B. einer Einzellast in der Feldmitte oder einer konstanten Linienlast

in Längsrichtung, kann nach folgendem Schema ermittelt werden

$${}_n S_q = {}_n S_q^{00} + {}_n Q^1 S_q^1 + {}_n Q^2 S_q^2 + \dots + {}_n Q^n S_q^n ,$$

in dem „ $S_q^{00}$ “ die Einflußlinie der Schnittgröße am festgehaltenen Querschnitt und „ $Q^1$ “, „ $Q^2$ “, ..., „ $Q^n$ “ die Einflußlinien der Festhaltekräfte (Auflagerkräfte) sind. Den Festhaltekräften (Einheitszuständen) entsprechend werden die nach der jeweiligen Faltwerksberechnung ermittelten Schnittgrößen mit  $S_q^1$ ,  $S_q^2$ , ...,  $S_q^n$  bezeichnet. Der Rechenablauf läßt sich folgendermaßen untergliedern:

1. Ermittlung der Einflußlinie der Schnittgröße am festgehaltenen Querschnitt.
2. Ermittlung der Einflußlinien der Festhaltekräfte.
3. Unabhängige Faltwerksberechnung für die Festhaltekräfte (Einheitszustände) und jeweilige Ermittlung der Schnittgröße, deren Einflußlinie gesucht wird.
4. Multiplikation der in 2. ermittelten Ordinaten mit den unter 3. errechneten Schnittgrößen und Addition zu den im 1. Schritt bestimmten Ordinaten der Einflußlinie.

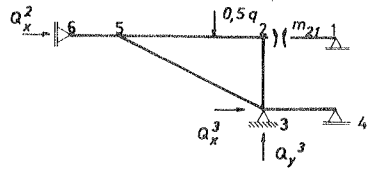
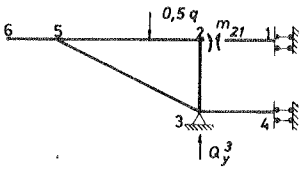
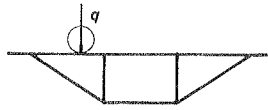
Wie man im einzelnen verfährt, wird zunächst an Hand des Querbiegemomentes  $m_{21}$  vorgeführt.

1.

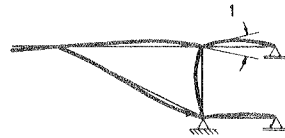
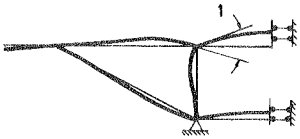
Im Bild 4.9 sind für den symmetrischen Querschnitt die Verläufe der Einflußlinien am festgehaltenen Querschnitt dargestellt. Dabei ist die Symmetrie des Querschnitts ausgenutzt worden („ $m_{21}^s$ “ bzw. „ $m_{21}^A$ “ für den symmetrischen bzw. für den antisymmetrischen Lastfall). Die Einflußlinien können mit Hilfe des Satzes von Land bestimmt werden.

2.

Die Faltwerksberechnung beschränkt sich auf den antisymmetrischen



Statische Systeme



Anwendung des Satzes von Land für die Bestimmung der Verformungsfiguren



„ $m_{21}^S$ “

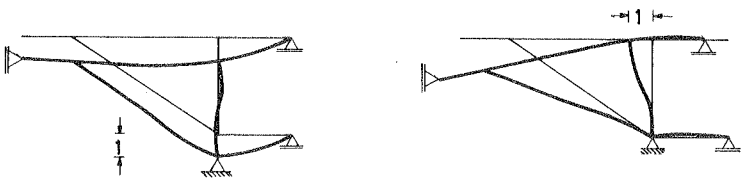
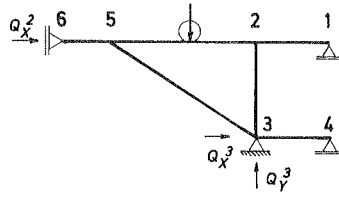


Verlauf der Einflußlinien für das Biegemoment  $m_{21}$

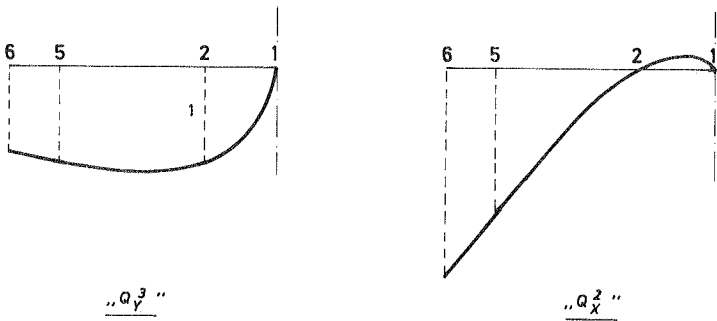
Symmetrischer Lastanteil

Antisymmetrischer Lastanteil

Bild 4.9 Einflußlinien für das Querbiegemoment  $m_{21}$  am unverschiebbaren Querschnitt



Anwendung des Satzes von Land für die Bestimmung der  
Verformungsfiguren



Verlauf der Einflußlinien für die Festhaltekräfte

Bild 4.10 Einflußlinien für die Festhaltekräfte

Lastfall, da nur dieser eine Profilverformung des Querschnitts verursacht. Die Verläufe der Einflußlinie der Festhaltekräfte „ $Q_x^2$ “ und „ $Q_y^3$ “ sind im Bild 4.10 dargestellt. Aus Gleichgewichtsgründen sind die Festhaltekräfte  $Q_x^2$  und  $Q_x^3$  gleich groß, wirken aber in entgegengesetzter Richtung.

3.

Für eine gleichmäßig verteilte Last und für eine konzentrierte Last in der Feldmitte sind die zu berücksichtigenden Einheitslastzustände  $Q_x^2 = -Q_x^3 = 1$  und  $Q_y^3 = 1$  im Bild 4.11 eingetragen. Die bei diesen zwei Lastfällen verursachten Querbiegemomente werden mit  $m_{21}^x$  und  $m_{21}^y$  bezeichnet.

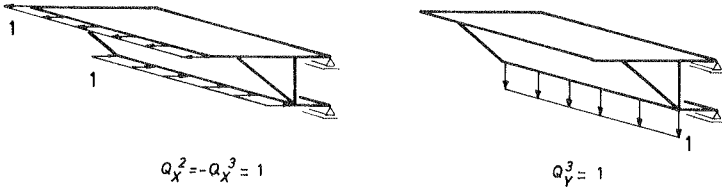
4.

Die Ordinaten der Einflußlinie „ $m_{21}''$ “ werden mit Hilfe des folgenden Schemas ermittelt

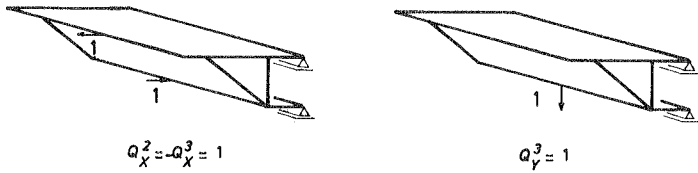
Einflußlinie am festgehaltenen Querschnitt		Faltwerksberechnung
Symmetrischer Lastfall	Antimetrischer Lastfall	
$''m_{21}'' = 0,5( ''m_{21}^s'' + ''m_{21}^A'' + ''Q_x^2''m_{21}^x + ''Q_y^3''m_{21}^y )$		

Der Faktor 0,5 berücksichtigt die Zerlegung einer zur Symmetrieachse parallelen Last in den symmetrischen und antimetrischen Anteil.





Gleichmäßig verteilte Linienlast



Einzellast in der Feldmitte



Querbiegemomente infolge der Faltwerksberechnung

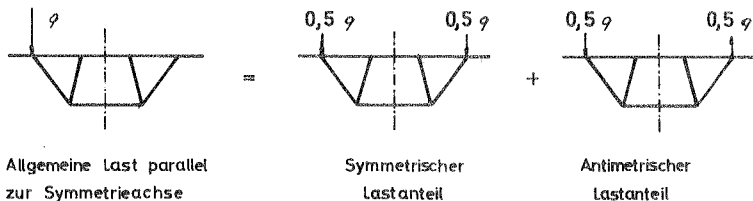
Bild 4.11 Schnittgrößen am Faltwerk (Randbedingungen an den Enden des Abschnitts nicht eingetragen)

## 5. AUFSTELLUNG VON NÄHERUNGSVERFAHREN FÜR TRÄGER MIT EINFACH SYMMETRISCHEM QUERSCHNITT

### 5.1 Einleitung

Mit Hilfe der im Abschnitt 3.6.2 abgeleiteten Faltwerkstheorie werden in diesem Abschnitt für den Träger mit einfach symmetrischer Querschnittsform unter quergerichteten Lasten angenäherte Rechenverfahren angegeben.

Es wird von dem Belastungs - Umordnungsverfahren Gebrauch gemacht: eine allgemeine Last parallel zur Symmetrieachse wird in symmetrische und antimetrische Lastanteile zerlegt. Im Bild 5.1 sind eine allgemeine Last parallel zur Symmetrieachse und die zugehörigen symmetrischen und antimetrischen Lastanteile dargestellt.



**Bild 5.1 Allgemeine Last, symmetrische und antimetrische Lastanteile**

Beim symmetrischen sowie beim antimetrischen Belastungsfall werden alle Freiheitsgrade des Querschnitts - bei Voraussetzung unendlicher Dehnsteifigkeit der Wände in der Querrichtung - in Querrichtung berücksichtigt. Für die Verschiebungen in Längsrichtung werden dem behandelten Problem entsprechend verschiedene Annahmen getroffen. Über diese Annahmen und ihre Begründung wird nachstehend berichtet.

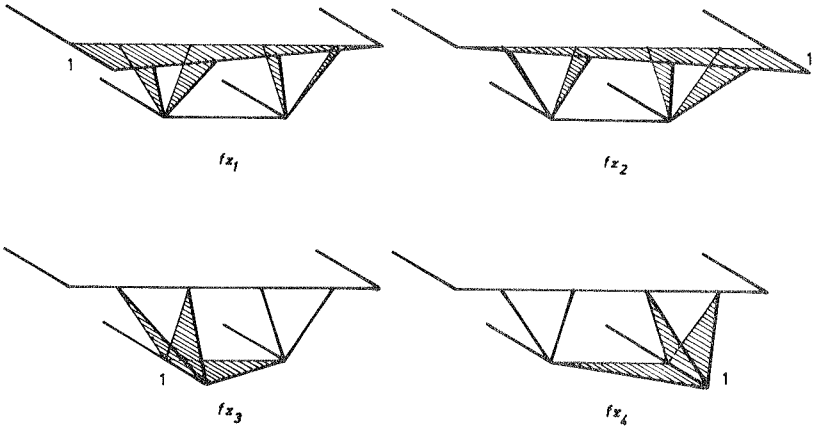
## 5.2 Ansätze für den Längsverschiebungsverlauf beim antimetrischen Lastfall

Bei der Berechnung dünnwandiger Stäbe auf Biegung oder Wölbkrafttorsion werden für die Punkte eines Querschnitts Einheitsverschiebungszustände in Längsrichtung angesetzt, die den Koordinaten der Wandmittelfläche bezogen auf den Schwerpunkt oder der Einheitsverwölbung entsprechen. Damit vereinfacht sich die weitere Berechnung erheblich, z.B. gegenüber den Einzelansätzen gemäß Wlassow. Entsprechend soll beim Träger mit der hier untersuchten Querschnittsform unter antimetrischer Last ein einziger Einheitsverwölbungsverlauf angesetzt werden, der dem Tragverhalten möglichst gut entspricht.

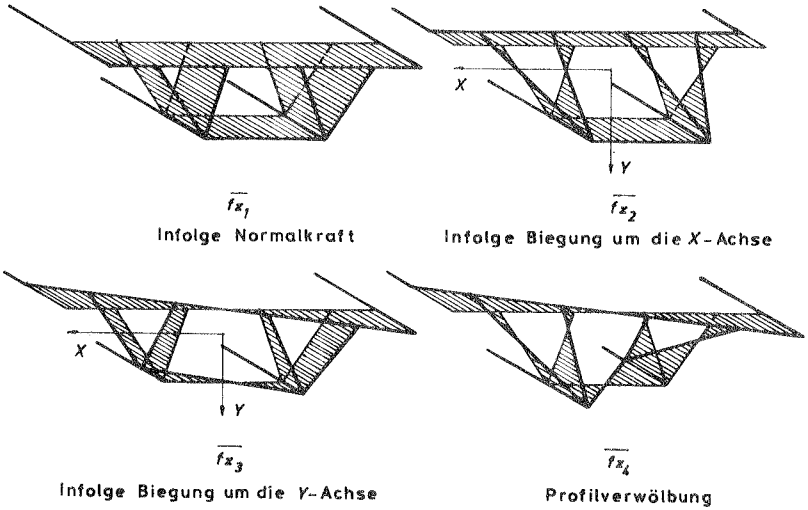
Im Abschnitt 3.5.2 wurde bereits erwähnt, daß in dieser Arbeit die wirklichen Verläufe der Verschiebungen in Längsrichtung abschnittsweise durch lineare Verläufe angenähert werden, d.h. also, daß in dem betrachteten Bereich Gültigkeit der Navierschen Hypothese vorausgesetzt wird. Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf Faltwerke, in denen der Einfluß der Schubverzerrungen beim Verlauf der Verschiebungen in Längsrichtung vernachlässigt wird.

Bei geschlossenen Querschnitten des Brückenbaus, bei denen die obere und untere Platte als durchgehende Wand betrachtet werden, haben die Verschiebungen -wenn die Schubverzerrungen vernachlässigt werden- einen linearen Verlauf; an den Anschlußstellen der anderen Wände muß die Verträglichkeit der Verschiebungen gewährleistet sein. Es sind also vier unabhängige Verschiebungsverläufe in Längsrichtung zu berücksichtigen; diese Verläufe sind im Bild 5.2a dargestellt.

Aus der Stabstatik sind die Verschiebungen in Längsrichtung bekannt, die durch die Normalkraft und die Biegemomente um die Hauptachsen des Querschnitts verursacht werden, d.h. daß aus den im Bild 5.2a dargestellten Verschiebungsverläufen drei ermittelt werden können, die diesen Querschnittskräften entsprechen. Wenn die Lage der Hauptachsen bekannt ist, läßt sich der

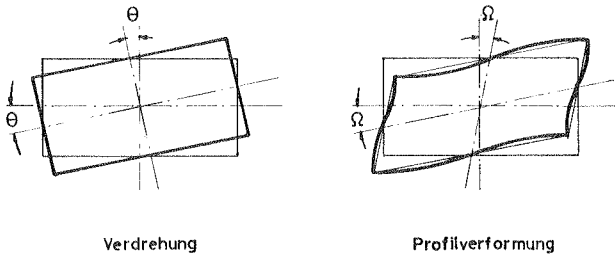


**a) Allgemeine Verschiebungsverläufe in der Längsrichtung**

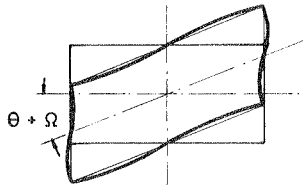


**b) Hauptverschiebungsverläufe in Längsrichtung**

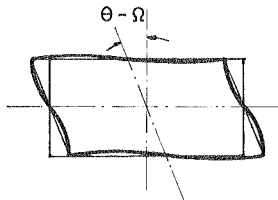
**Bild 5.2** Verlauf der Verschiebungen in Längsrichtung



a) Verdrehung und Profilverformung des Querschnitts



b) Verformungsfigur, wenn  $\theta = \Omega$  ist.



c) Verformungsfigur, wenn  $\theta = -\Omega$  ist.

Bild 5.3 Verdrehung, Profilverformung und Verformungsfiguren

Verlauf der Verschiebungen infolge Normalkraft und Biegemomenten um die zwei Hauptachsen ermitteln, da für diese Fälle angenommen wird, daß die Querschnitte eben bleiben.

Aus den vier allgemeinen Verschiebungsverläufen können folglich drei abgeleitet werden, die den folgenden Verschiebungen des starren Querschnitts entsprechen: Eine Verschiebung parallel zur Trägerachse (Normalkraft) und zwei Verschiebungen parallel zu den Hauptachsen des Querschnitts (Biegemomente um die zwei Hauptachsen). Diese Verschiebungsverläufe sind im Bild 5.2b dargestellt.

Außer diesen drei Verschiebungsverläufen kann ein vierter Verlauf, die Profilverwölbung (s. Bild 5.2b), abgespalten werden, der den Verschiebungen eines *Faltwerks* unter antimetrischer Last entspricht. Da in dieser Betrachtung der Einfluß der Schubverzerrungen vernachlässigt wird, kann man diesen Verschiebungsverlauf nicht der *Bredtschen- bzw. der Wölbkrafttorsion* zuordnen. Beim einzelligen Träger unter antimetrischer Last, dessen Tragverhalten entweder zum größten Teil von der Profilverformung bestimmt wird (s. z.B. Müller [48] und Dauner [14]), oder dessen Torsionsverwölbung vernachlässigt werden kann (s. z.B. Steinle [64, 65] und Tung [67]), ist ein entsprechender Verlauf wie bei  $\bar{f}_{z_0}$  (Bild 5.2b) für die Verschiebungen in Längsrichtung angenommen worden.

Die im folgenden behandelten Beispiele sollen nähere Auskunft über das Tragverhalten geben.

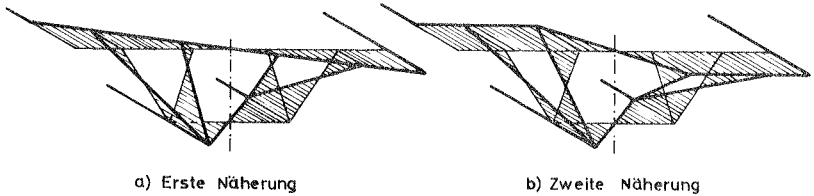
Im Bild 5.4 sind die Verdrehung  $-\theta-$  und die Profilverformung  $-\eta-$  (s. Bild 5.3a) in der Feldmitte von einzelligen Trägern verschiedener Länge und Querschnittsform infolge konzentrierter Last in der Feldmitte -Bild 5.4a- und gleichmäßig verteilter Last -Bild 5.4b- eingetragen. Es sind zwei zweifach symmetrische Querschnitte konstanter Wanddicke untersucht worden. Diese Werte wurden nach der im Abschnitt 4 behandelten *Faltwerkstheorie* und mit Hilfe der Gleichungen (2.3.13) und (2.3.14) ermittelt. Bei den an den Auflagern ausgesteiften

Trägern mit zweifach symmetrischem Querschnitt fällt der Ruhepunkt mit dem Schwerpunkt zusammen.

Aus den im Bild 5.4 dargestellten Beispielen ist ersichtlich, daß die Verdrehungen des Trägers mit starrem Querschnitt und des Träger mit verformbarem Querschnitt fast gleich groß sind. Es werden nur geringe Unterschiede bei den von Einzellasten beanspruchten Trägern festgestellt. Die Profilverformung  $-\Omega-$  ist bei den kürzeren Trägern wesentlich größer als die Verdrehung  $-\theta-$ . Bei zunehmender Länge nimmt die Verdrehung stets zu, während die Profilverformung auf einen konstanten Wert zustrebt. Beim unendlich langen Träger wird das Tragverhalten von der Verdrehung maßgeblich bestimmt, wobei die Profilverformung den Charakter einer Nebestörung hat (s.a. Schmitz [53]).

In den Bildern 5.5 und 5.6 sind für eine konzentrierte Last in der Feldmitte und für eine gleichmäßig verteilte Last die Verläufe der Verdrehung  $-\theta-$  und der Profilverformung  $-\Omega-$  der ein- und dreizelligen Träger bei verschiedenen Trägerlängen eingetragen.

Bei dem dreizelligen Träger ist die Verdrehung des verformbaren Querschnitts größer als die des starren Querschnitts. Die Abweichungen zwischen beiden Verdrehungen nehmen mit der Trägerlänge ab. In den beiden Lastfällen wird festgestellt, daß bei den Trägern bis zu einer Länge von 300 m die Verdrehung und die Profilverformung in der Größenordnung gleich sind. Wenn die Verdrehung  $-\theta-$  gleich der Profilverformung  $-\Omega-$  ist, werden die obere und untere Platte keinen Verschiebungen unterworfen, die Stege hingegen nur Verschiebungen senkrecht zu den Platten (s. Bild 5.3b). Sind  $\theta$  und  $\Omega$  etwa gleich groß, so stimmen die Ergebnisse besser mit den nach den vollständigeren Faltwerkstheorien erzielten Ergebnissen überein, wenn man den Verlauf der Verschiebungen in Längsrichtung folgendermaßen ansetzt: entlang der oberen Platte im Bereich der inneren Zelle haben die Verschiebungen einen linearen und außerhalb derselben einen konstanten Verlauf (s. Bild 5.7b).



**Bild 5.7** Angenommene Verläufe der Profilverwölbung

Beide so durch verschiedene Vereinfachungen gewonnene Ansatzmöglichkeiten nach Bild 5.2b ( $\bar{f}_z^1$ ) bzw. 5.7a -als 1. Näherung bezeichnet- und nach Bild 5.7b -als 2. Näherung bezeichnet- werden der weiteren Rechnung zugrunde gelegt. Die Ordinaten der Verläufe müssen noch ermittelt werden. Das Vorgehen dabei wird zunächst an Hand der ersten Näherung (linearer Verlauf der Verschiebungen entlang der oberen Flatte) erläutert. Die später abgeleiteten Formeln für symmetrische Querschnitte gelten für beide Näherungen. Um die Ordinaten zu ermitteln, wird die Bedingung aufgestellt, daß die Resultierende der Längskräfte und die statischen Momente derselben um die Hauptachsen gleich Null sind. Gesucht wird dann eine lineare Kombination der im Bild 5.2a dargestellten Verschiebungsverläufe, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\int \bar{n}_{z4} dx = 0 \quad (5.2.1)$$

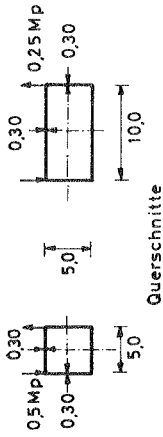
$$\int \chi_6 \bar{n}_{z4} dx = 0 \quad (5.2.2)$$

$$\int \gamma_6 \bar{n}_{z4} dx = 0 \quad , \quad (5.2.3)$$

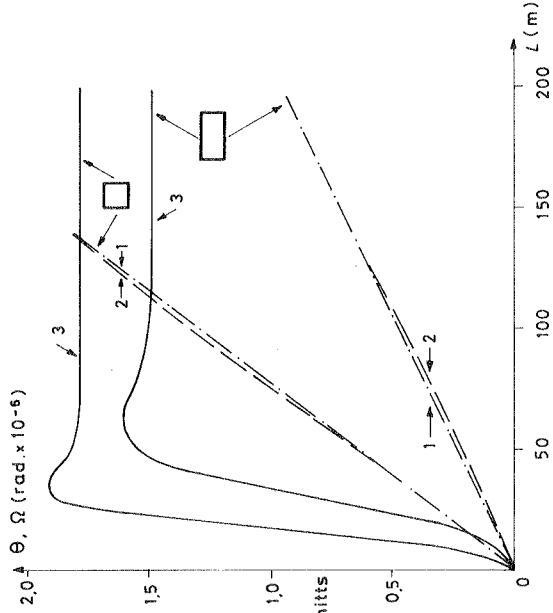
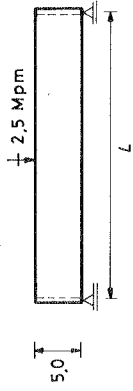
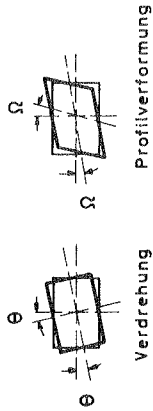
wobei

$$\bar{n}_{z4} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \bar{n}_{z4i} \quad (5.2.3)$$



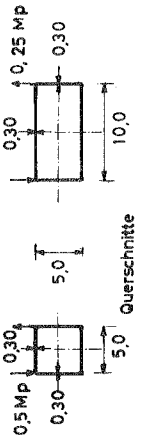
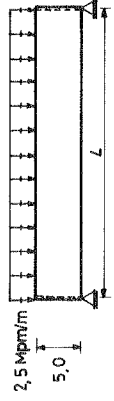


$E = 3\,000\,000,0 \text{ MPa/m}^2, \mu = 0,2$

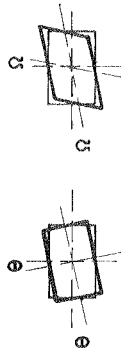


- 1 Verdrehung des starren Querschnitts
- 2 Verdrehung des verformbaren Querschnitts
- 3 Profilverformung

a) Konzentrierte Last in der Feldmitte

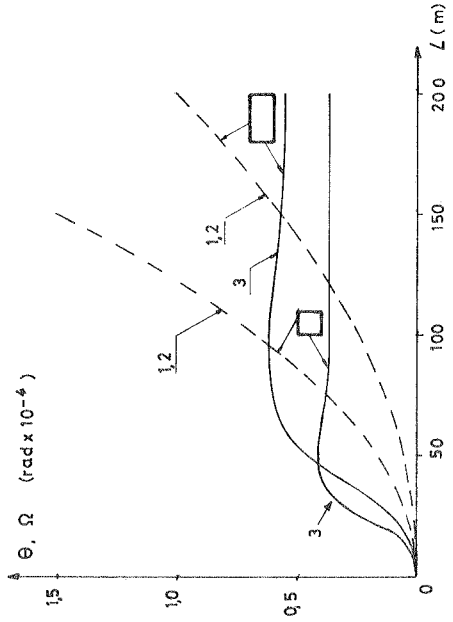


$E = 3000000,0 \text{ MPa/m}^2$     $\mu = 0,2$



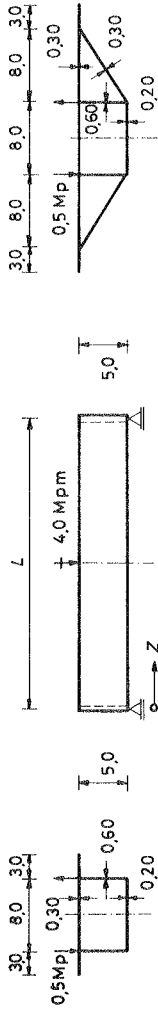
Verdrehung   Profilverformung

- 1 Verdrehung des starren Querschnitts
- 2 Verdrehung des verformbaren Querschnitts
- 3 Profilverformung



b) Gleichmäßig verteilte Last

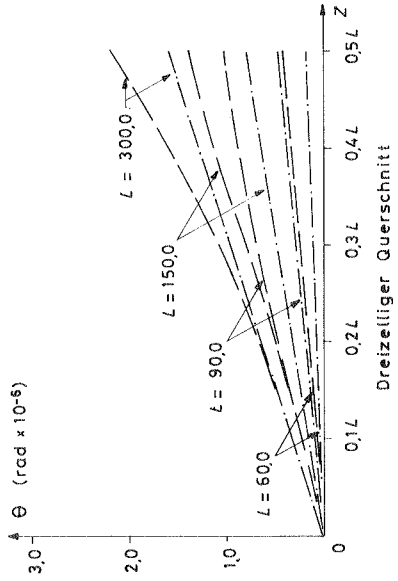
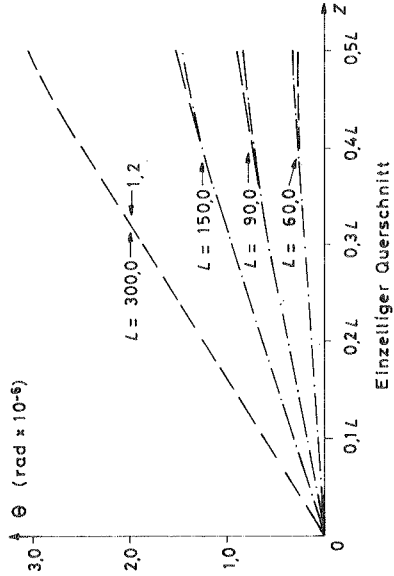
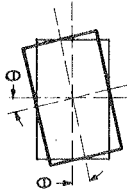
Bild 5.4 Verdrehung und Profilverformung in der Feldmitte einzelliger Träger



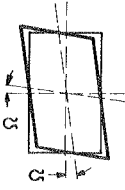
Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 30000000 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0,2$

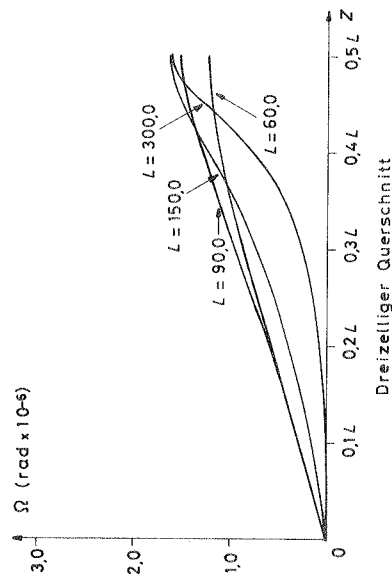
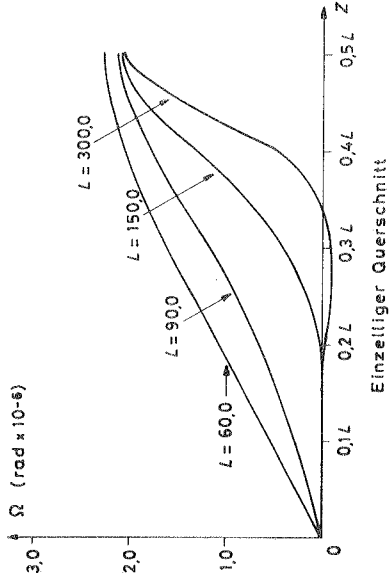
- 1 Verdrehung des starren Querschnitts
- 2 Verdrehung des verformbaren Querschnitts



a) Verdrehung der Querschnitte

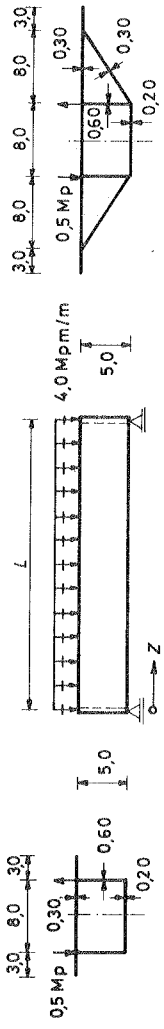


— 3 Profilverformung



b) Profilverformung der Querschnitte

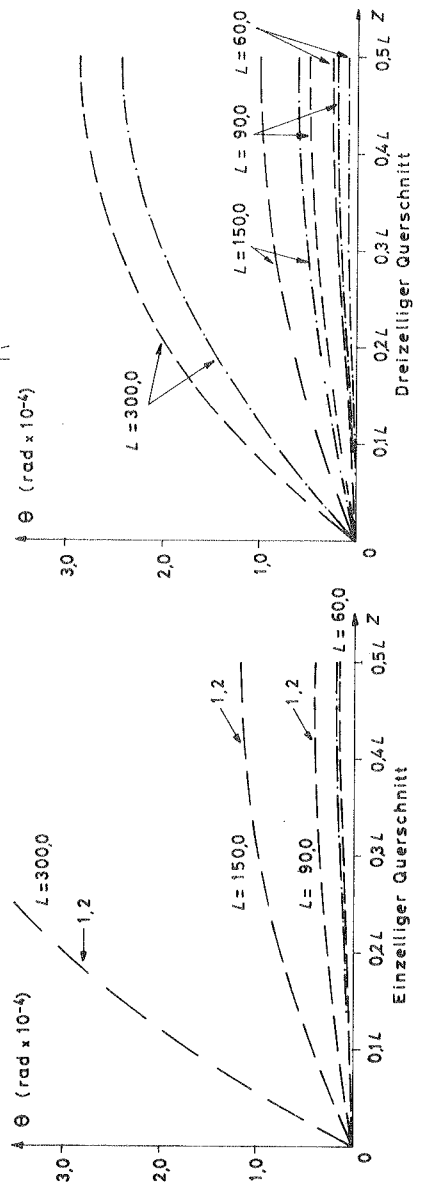
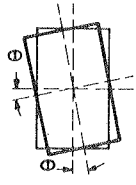
Bild 5.5 Verläufe der Verdrehung und der Profilverformung ein- und dreizelliger Träger infolge konzentrierter Last in der Feldmitte



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

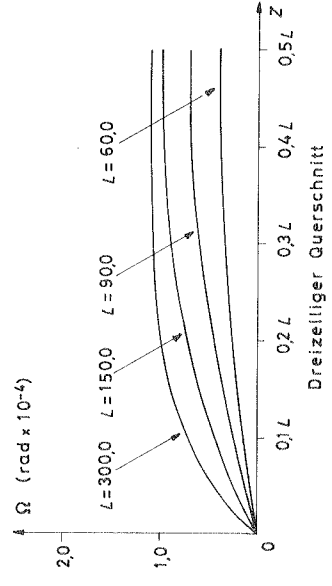
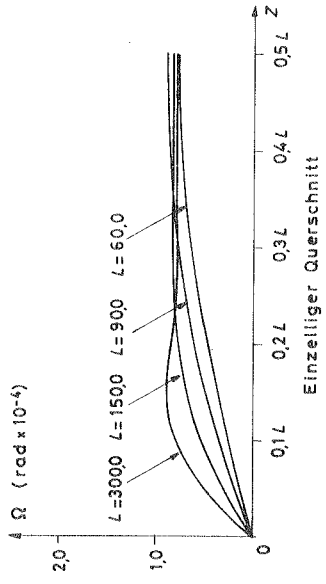
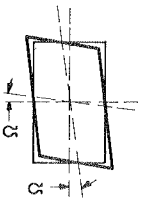
$E = 30000000 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0.2$

- 1 Verdrehung des starren Querschnitts
- - - 2 Verdrehung des verformbaren Querschnitts



a) Verdrehung der Querschnitte

3 Profilverformung



b) Profilverformung der Querschnitte

Bild 5.6 Verläufe der Verdrehung und der Profilverformung ein- und dreizeiliger Träger infolge gleichmäßig verteilter Last

ist und  $X_G$  und  $Y_G$  Funktionen sind, mit denen die Koordinaten der Querschnittskonturen um den Schwerpunkt beschrieben werden. Der Verlauf dieser Funktionen ist im Bild 5.8 dargestellt. Die in der Längsrichtung wirkenden Schnittkräfte werden für den hier untersuchten Fall mit  $\tilde{n}_{z4}$  bezeichnet.  $\alpha_i$  sind Unbekannte, die zu bestimmen sind.

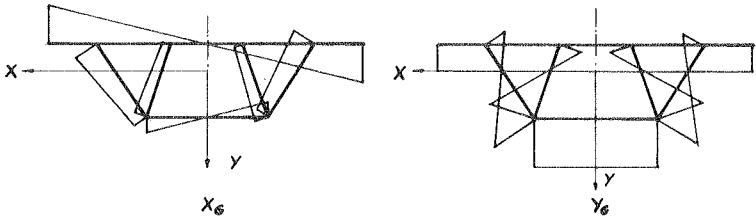


Bild 5.8 Verlauf der Funktionen  $X_G$  und  $Y_G$

$\tilde{n}_{z4}$  läßt sich anschreiben als

$$\tilde{n}_{z4} = E \frac{\partial v_{z4}}{\partial z} \quad (5.2.5)$$

Berücksichtigt man, daß

$$v_{z4} = f_{z4}(x) W(z) \quad (5.2.6)$$

ist, wobei die Funktionen  $f_{z4}$  den im Bild 5.2a dargestellten Verschiebungsverläufen entsprechen, und  $W(z)$  die Funktion ist, die die Intensität des gesuchten Verlaufs entlang des Trägers beschreibt, so kann die Gleichung (5.2.4) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\tilde{n}_{z4} = \sum_{i=1}^4 \alpha_i E D f_{z4}(x) W'(z) \quad (5.2.7)$$

Setzt man die letzte Gleichung in (5.2.1), (5.2.2) und (5.2.3) ein, so ergibt sich

$$E W'(Z) \sum_{i=1,4} \alpha_i \int \alpha_E f_{z_i}(x) dF = 0$$

$$E W'(Z) \sum_{i=1,4} \alpha_i \int \alpha_E X_G(x) f_{z_i}(x) dF = 0$$

$$E W'(Z) \sum_{i=1,4} \alpha_i \int \alpha_E Y_G(x) f_{z_i}(x) dF = 0$$

Da diese Ausdrücke für alle  $Z$ -Werte gültig sein sollen, müssen die oben aufgestellten Summationen gleich Null sein. Diese Bedingungen können folgendermaßen dargestellt werden:

$$\begin{bmatrix} \int \alpha_E f_{z_1} dF & \int \alpha_E f_{z_2} dF & \int \alpha_E f_{z_3} dF & \int \alpha_E f_{z_4} dF \\ \int \alpha_E X_G f_{z_1} dF & \int \alpha_E X_G f_{z_2} dF & \int \alpha_E X_G f_{z_3} dF & \int \alpha_E X_G f_{z_4} dF \\ \int \alpha_E Y_G f_{z_1} dF & \int \alpha_E Y_G f_{z_2} dF & \int \alpha_E Y_G f_{z_3} dF & \int \alpha_E Y_G f_{z_4} dF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = 0$$

Es handelt sich um ein homogenes Gleichungssystem mit drei Gleichungen und vier Unbekannten, das gelöst werden kann, wenn man für eine der Unbekannten einen bestimmten Wert annimmt. Setzt man z.B.  $\alpha_1 = -1$ , so erhält man

$$\begin{bmatrix} \int \alpha_E f_{z_2} dF & \int \alpha_E f_{z_3} dF & \int \alpha_E f_{z_4} dF \\ \int \alpha_E X_G f_{z_2} dF & \int \alpha_E X_G f_{z_3} dF & \int \alpha_E X_G f_{z_4} dF \\ \int \alpha_E Y_G f_{z_2} dF & \int \alpha_E Y_G f_{z_3} dF & \int \alpha_E Y_G f_{z_4} dF \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \alpha_E f_{z_1} dF \\ \int \alpha_E X_G f_{z_1} dF \\ \int \alpha_E Y_G f_{z_1} dF \end{bmatrix}$$

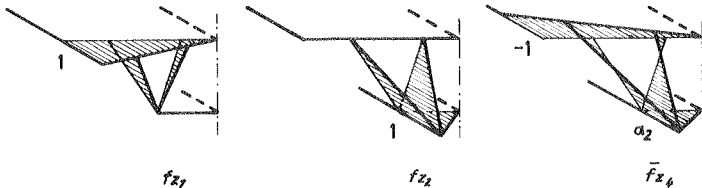
(5.2.8)



Der gesuchte Verschiebungsverlauf ergibt sich damit zu

$$\bar{f}_{z_4} = -f_{z_1} + \alpha_2 f_{z_2} + \alpha_3 f_{z_3} + \alpha_4 f_{z_4} \quad (5.2.9)$$

Infolge in Querrichtung antimetrischer Last sind die Längsverschiebungen im Querschnitt ebenfalls antimetrisch; diese Tatsache kann ausgenutzt werden, um den Verlauf leichter zu ermitteln. Im Bild 5.9 sind die beiden unabhängigen Verschiebungsverläufe hierfür dargestellt.



**Bild 5.9** Verschiebungsverläufe unter Ausnutzung der Symmetrie

Wegen des antimetrischen Verlaufs erfüllen die allgemeinen Verschiebungsverläufe  $f_{z_1}$  und  $f_{z_2}$  die Bedingungen (5.2.1) und (5.2.3). Nur die Bedingung (5.2.2) muß von der linearen Kombination dieser beiden Verläufe erfüllt werden.

Man erhält dann folgende Gleichung

$$\alpha_1 \int a_E X_G f_{z_1} dF + \alpha_2 \int a_E X_G f_{z_2} dF = 0 \quad .$$

Für  $\alpha_1 = -1$  wird  $\alpha_2$  folgendermaßen ausgedrückt

$$\alpha_2 = \frac{\int a_E X_G f_{z_1} dF}{\int a_E X_G f_{z_2} dF} \quad (5.2.10)$$

Der gesuchte Verschiebungsverlauf wird dann wie folgt ermittelt

$$\bar{fz}_4 = -fz_1 + q_2 fz_2 \quad . \quad (1.2.11)$$

### 5.3 Symmetrischer Verschiebungszustand

Der hier betrachtete Träger hat unter symmetrischer Last nur einen Freiheitsgrad in der Querschnittsebene: eine Verschiebung parallel zur Symmetrieachse; im Bild 5.10 ist diese Verschiebung und der dazugehörige Verlauf der Funktion  $f_x$  dargestellt.

Infolge in Querrichtung symmetrischer Last sind die Längsverschiebungen im Querschnitt ebenfalls symmetrisch. Nimmt man außerdem an, daß der Querschnitt eben bleibt, dann ist ebenfalls nur ein Freiheitsgrad für die Verschiebungen in der Längsrichtung zu berücksichtigen. Nach den im Abschnitt 5.2 angestellten Überlegungen haben die Verschiebungen den im Bild 5.10 dargestellten Verlauf, in dem  $y_0$  und  $y_u$  jeweils die Abstände des Schwerpunktes zur oberen und unteren Platte bezeichnen.

Für die Verschiebungen parallel zur Symmetrieachse gilt die Gleichung (3.6.6)

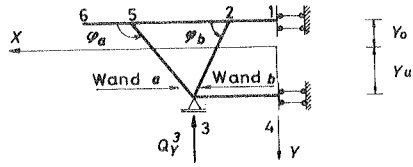
$$6RV'' - ESV + 6C^T W' + q = 0 \quad . \quad (3.6.6)$$

Da in diesem Fall keine Querbiegung auftritt, ist  $\delta = 0$ . Außerdem werden nur die Freiheitsgrade  $v_1 = v = 1$  und  $w_1 = w = 1$  berücksichtigt. Die Gleichung (3.6.6) erhält dann die vereinfachte Form

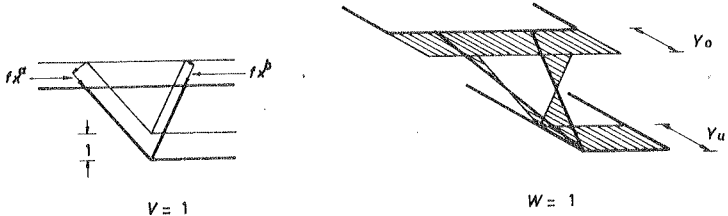
$$6RV'' + 6CW' + q = 0 \quad . \quad (5.3.1)$$

Die Gleichgewichtsbedingung für die Verschiebung in der Längsrichtung wird mittels der Gleichung (3.6.7) ausgedrückt, in der das Lastglied entfällt.

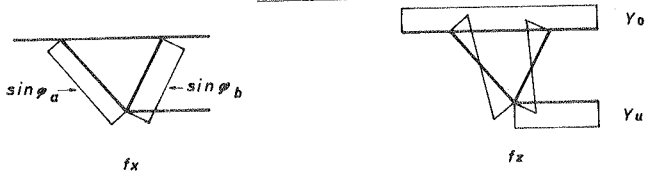
$$EAW'' - 6BW - 6CV' = 0 \quad (5.3.2)$$



**b) Festgehaltener Querschnitt**



**b) Freiheitsgrade**



**c) Verlauf der Funktionen  $f_x$  und  $f_z$**



**d) Verlauf der Funktionen  $f_x$  und  $f_z$**

$$\begin{aligned}
 (3.4.27) \quad B &= \int f_x' f_z' dF = F_a \sin^2 \varphi_a + F_b \sin^2 \varphi_b & F_a &= h_a D_a \\
 (3.3.5) \quad C &= \int f_x f_z dF = F_a \sin^2 \varphi_a + F_b \sin^2 \varphi_b & F_b &= h_b D_b \\
 (3.3.6) \quad R &= \int f_x f_x dF = F_a \sin^2 \varphi_a + F_b \sin^2 \varphi_b
 \end{aligned}$$

**Bild 5.10 Freiheitsgrade und Verläufe der Verschiebungen beim symmetrischen Lastfall**

Aus der Gleichung (5.3.1) wird  $W'$  ermittelt:

$$W' = -\frac{GRV'' + q}{Gc}$$

Diese Gleichung und ihre zweimalige Ableitung nach  $Z$  wird in die einmal nach  $Z$  abgeleitete Gleichung (5.3.2) eingesetzt; so erhält man nach einigen Umformungen

$$EARV^{IV} - G(BR - c^2)V'' = Bq - \frac{EA}{G}q'' \quad . \quad (5.3.3)$$

Bei dem hier untersuchten Lastfall läßt sich zeigen, daß der zweite Ausdruck der Gleichung (5.3.3) wegen  $B = R = c$  verschwindet (s. Bild 5.10). Die Gleichung wird aber in der ursprünglichen Form beibehalten, weil auf sie auch im folgenden Abschnitt zurückgegriffen wird.

Für den Verlauf der Verschiebungen in Längsrichtung ist der Einfluß der Schubverzerrungen vernachlässigt worden. Bei der Aufstellung des Gleichungssystems (5.3.1), (5.3.2) werden gemäß Wlassow (s. Abschnitt 3) dagegen die Schubverzerrungen vereinfacht eingerechnet. Dieses Vorgehen entspricht der technischen Biegelehre unter Berücksichtigung von Schubverzerrungen.

Die Lösung der Gleichung (5.3.3) ist bekannt. Mit dieser Lösung können die Spannungs- und Verformungszustände ermittelt werden; wie man im einzelnen verfährt, wird im nächsten Abschnitt erläutert.

$W$  kann dann aus der Gleichung (5.3.2) unter Berücksichtigung des abgeleiteten Ausdrucks für  $W'$  folgendermaßen ermittelt werden:

$$W = -\frac{EAR}{GBC}V'''' - \frac{C}{B}V' - \frac{EA}{G^2BC}q' \quad (5.3.4)$$

#### 5.4 Antimetrische Verschiebungs- und Verformungszustände

##### Träger mit starrem Querschnitt

Es wird zunächst erläutert, wie der Träger mit unverformbarem Querschnitt unter einer Torsionslast untersucht werden kann.

Man setzt voraus, daß die gegenüber den Verschiebungen in Längsrichtung infolge Normalkraft und Biegung orthogonalisierte Verwölbung -die Hauptverwölbung- eines geschlossenen Querschnitts nach der klassischen Wölbkrafttorsion bekannt ist.

So lassen sich mit Hilfe der hier behandelten Faltwerkstheorie in einfacher Weise Ausdrücke ableiten, mit denen geschlossene Querschnitte nach der Wölbkrafttorsion mit Berücksichtigung der sekundären Schubverzerrungen untersucht werden können. Dieses Verfahren ist auch für offen-geschlossene Querschnitte anwendbar, bei welchen der geschlossene Querschnittsteil verhältnismäßig groß ist.

Es liegt ein Problem mit zwei Freiheitsgraden vor: Die Verdrehung des Querschnitts um den Schubmittelpunkt und der Verlauf der Verschiebungen in der Längsrichtung -die Hauptverwölbung-. Das Verfahren für die Ermittlung der Hauptverwölbung ist z.B. in [ 5 ] und [35] angegeben.

Man kann dann, ähnlich wie im Abschnitt 5.3, für die Verdrehung und für die Hauptverwölbung jeweils Ausdrücke der Form (5.3.1) und (5.3.2) aufstellen, die, wie dort dargestellt, umgeformt werden. Die Ausdrücke für die Verdrehung und für die Verwölbung des Querschnitts erhalten jeweils die Form der Gleichungen (5.3.3) und (5.3.4). Das weitere Vorgehen bei der Lösung dieser Aufgabe wird an Hand des anschließend behandelten Problems dargestellt.

Dieses Verfahren, das dem von Benscoter [ 4 ] vorgeschlagenen entspricht, ist für geschlossene Querschnitte allgemeiner Form unter einer Torsionslast anwendbar.

### Träger mit verformbarem Querschnitt

Nach einer kurzen Erläuterung der Freiheitsgrade in der Querschnittsebene und in Längsrichtung folgen Ableitungen, mit deren Hilfe das Problem gelöst werden kann.

Bei den weiteren Überlegungen wird die Symmetrie des Querschnitts ausgenützt, so daß man sich auf den halben Querschnitt beschränken kann (s. Abschnitt 4.3 und Bild 4.8).

Der Querschnitt des unausgesteiften Trägers unter antimetrischer Last verdreht und verformt sich. Eine Querschnittsverschiebung parallel zur Symmetrieachse tritt nicht auf. Da die Lage des Ruhepunktes auf der Symmetrieachse nicht bekannt ist, muß eine Querschnittsverschiebung parallel zur  $X$ -Achse zur Korrektur des willkürlich angenommenen Bezugspunktes berücksichtigt werden. Im Bild 5.11a sind die bei der weiteren Berechnung des Faltnetzes berücksichtigten Einheitsverformungszustände in der Querschnittsebene dargestellt.

In Längsrichtung wird nur ein Ansatz gewählt, entweder die im Bild 5.7a oder die im Bild 5.7b dargestellte Profilverwölbung. Diese Freiheitsgrade sind im Bild 5.11b dargestellt.

Für die Freiheitsgrade in der Querschnittsebene erhält man unter Berücksichtigung der im Abschnitt 3.6 abgeleiteten Gleichungen (3.6.6)

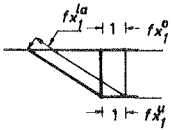
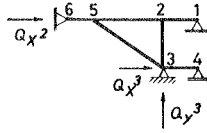
$$G(R_{11} V_1'' + R_{12} V_2'' + R_{13} V_3'') + GC_1 W' + q_1 = 0 \quad (5.4.1)$$

$$G(R_{21} V_1'' + R_{22} V_2'' + R_{23} V_3'') + GC_2 W' + q_2 = 0 \quad (5.4.2)$$

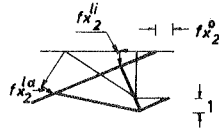
$$G(R_{31} V_1'' + R_{32} V_2'' + R_{33} V_3'') - E' S V_3 + GC_3 W' + q_3 = 0 \quad (5.4.3)$$

Die Gleichgewichtsbedingung in Längsrichtung ist (s. Gleichung (3.6.7))

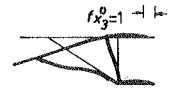
$$E' A W'' - GBW - G(C_1 V_1' + C_2 V_2' + C_3 V_3') + \rho = 0 \quad (5.4.4)$$



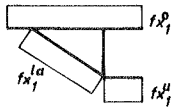
$V_1 = 1$



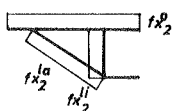
$V_2 = 1$



$V_3 = 1$



$f_{x1}$

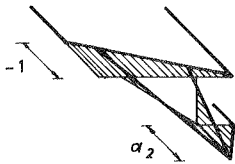


$f_{x2}$

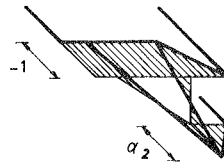


$f_{x3}$

a) Freiheitsgrade in der Querschnittsebene und Verlauf der Funktionen  $f_{x1}$ ,  $f_{x2}$  und  $f_{x3}$

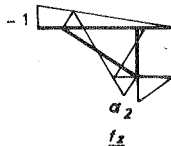


Erste Näherung

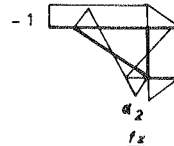


Zweite Näherung

$W = 1$



$f_x$



$f_x$

b) Freiheitsgrad in Längsrichtung und Verlauf der Funktion  $f_x$

Bild 5.11 Freiheitsgrade beim antisymmetrischen Lastfall

Mit den Funktionen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  werden jeweils die Verläufe in Längsrichtung der Verschiebung des Querschnitts parallel zur  $x$ -Achse, der Verdrehung desselben um den festgehaltenen Punkt und der Profilverformung ausgedrückt. Der Verlauf der Profilverwölbung in Längsrichtung wird mit der Funktion  $W$  dargestellt. In diesen Differentialgleichungen sind die Elemente der in (3.3.4)-(3.3.6), (3.4.13) und (3.4.27) definierten Matrizen  $A$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $S$  und  $B$  eingetragen;  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  und  $p$  sind Elemente der in (3.4.10) und (3.4.25) definierten Lastvektoren. Da für die Verschiebungen in Längsrichtung nur ein Freiheitsgrad berücksichtigt wird, verzichtet man hier auf die Subindizes für die Elemente  $A$ ,  $B$  und  $p$ . Aus demselben Grund (es wird nur ein Freiheitsgrad für die Profilverformung berücksichtigt) verzichtet man auf den Subindex des eingetragenen Elementes der Matrix  $S$ .

Anschließend werden die vier Differentialgleichungen zweiter Ordnung (5.4.1)-(5.4.4) so umgeformt, daß sie durch eine Differentialgleichung vierter Ordnung für die Funktion  $V_3$  und zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen  $V_1$  und  $V_2$  dargestellt werden. Die Lösung der Differentialgleichung vierter Ordnung ist bekannt, und mit ihrer Hilfe lassen sich die Funktionen  $V_1$  und  $V_2$  ermitteln. Die Funktion  $W$  wird dann mit Hilfe der Funktionen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $V_3$  und deren Ableitungen aus (5.4.4) berechnet.

Aus den Gleichungen (5.4.1) und (5.4.2) werden  $V_1''$  und  $V_2''$  als Funktionen von  $V_3''$  und  $W'$  ausgedrückt; man erhält dann

$$V_1'' = K_1 W' + L_1 V_3'' + q_1^* \quad (5.4.5)$$

$$V_2'' = K_2 W' + L_2 V_3'' + q_2^* \quad , \quad (5.4.6)$$

wobei

$$K_1 = \frac{C_2 R_{12} - C_7 R_{22}}{\Delta R_{12}} \quad (5.4.7)$$



$$L_1 = \frac{R_{12} R_{23} - R_{13} R_{22}}{\Delta R_{12}} \quad (5.4.8)$$

$$K_2 = \frac{C_1 R_{21} - C_2 R_{11}}{\Delta R_{12}} \quad (5.4.9)$$

$$L_2 = \frac{R_{31} R_{21} - R_{23} R_{11}}{\Delta R_{12}} \quad (5.4.10)$$

$$q_1^* = \frac{R_{12} q_2 - R_{22} q_1}{G \Delta R_{12}} \quad (5.4.11)$$

$$q_2^* = \frac{R_{12} q_1 - R_{11} q_2}{G \Delta R_{12}} \quad (5.4.12)$$

$$\Delta R_{12} = R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21} \quad (5.4.13)$$

sind.

Wenn man die Gleichungen (5.4.5) und (5.4.6) in die nach  $Z$  abgeleitete Gleichung (5.4.4) und in die Gleichung (5.4.3) einsetzt, erhält man ein Differentialgleichungssystem, in dem nur die Funktionen  $V_3$  und  $W$  unbekannt sind:

$$E' A W''' - G(B + C_1 K_1 + C_2 K_2) W' - G(C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3) V_3'' + p' - G(C_1 q_1^* + C_2 q_2^*) = 0 \quad (5.4.14)$$

$$G(C_3 + R_{31} K_1 + R_{32} K_2) W' + G(R_{31} L_1 + R_{32} L_2 + R_{33}) V_3'' - E' S V_3 + q_3 + G(R_{31} q_1^* + R_{32} q_2^*) = 0 \quad (5.4.15)$$

Mit Hilfe folgender Abkürzungen

$$B^* = B + C_1 K_1 + C_2 K_2 \quad (5.4.16)$$

$$C^* = C_1 L_1 + C_2 L_2 + C_3 \quad (5.4.17)$$

$$D^* = C_3 + R_{31} K_1 + R_{32} K_2 \quad (5.4.18)$$

$$R^* = R_{31} L_1 + R_{32} L_2 + R_{33} \quad (5.4.19)$$

$$\rho^* = \rho' - G(G_1 q_1^* + G_2 q_2^*) \quad (5.4.20)$$

$$q_3^* = q_3 + G(R_{31} q_1^* + R_{32} q_2^*) \quad (5.4.21)$$

können die Gleichungen (5.4.14) und (5.4.15) vereinfachend beschrieben werden

$$E'AW''' - GB^*W' - GC^*V_3'' + \rho^* = 0 \quad (5.4.22)$$

$$GR^*V_3'' - E'SV_3 + GD^*W' + q_3^* = 0 \quad (5.4.23)$$

Es läßt sich durch Einsetzen der Gleichungen (5.4.7) bis (5.4.10) in (5.4.17) und (5.4.18) zeigen, daß

$$D^* = C^* \quad (5.4.24)$$

ist. Aus der Gleichung (5.4.23) erhält man

$$W' = -\frac{R^*}{C^*} V_3'' + \frac{E'S}{GC^*} V_3 - \frac{1}{GC^*} q_3^* \quad (5.4.25)$$

Wird diese Gleichung nun zweimal nach  $z$  abgeleitet und in (5.4.22) eingesetzt, so ergibt sich

$$EA \left( -\frac{R^*}{C^*} V_3''' + \frac{E'S}{GC^*} V_3'' - \frac{1}{GC^*} q_3^{*''} \right) - GB^* \left( -\frac{R^*}{C^*} V_3'' + \frac{E'S}{GC^*} V_3 - \frac{1}{GC^*} q_3^* \right) - GC^* V_3'' + \rho^* = 0.$$

Ordnet man diese Gleichung nach der Funktion  $V_3$  und ihren Ableitungen, dann erhält man

$$E'AR^*V_3''' - G \left( \frac{E'^2AS}{G^2} + B^*R^* - C^{*2} \right) V_3'' + E'B^*SV_3 - C^*\rho^* - B^*q_3^* + \frac{E'A}{G} q_3^{*''} = 0 \quad (5.4.26)$$

oder

$$E'A^{**}V_3^{IV} - GB^{**}V_3'' + E'C^{**}V_3 + q_3^{**} = 0, \quad (5.4.27)$$

mit

$$A^{**} = AR^* \quad (5.4.28)$$

$$B^{**} = \gamma^2 AS + B^*R^* - C^{*2} \quad (5.4.29)$$

$$C^{**} = B^*S \quad (5.4.30)$$

$$q_3^{**} = -B^*q_3^* + \frac{E'A}{G}q_3^{*'} - \rho^*C^* \quad (5.4.31)$$

Die Gleichung (5.4.27) hat die gleiche Form wie die Differentialgleichung des elastisch gebetteten Balkens unter Berücksichtigung der Schubverzerrungen (s. Steinle [64]). Die Lösung dieser Differentialgleichung ist bekannt. Mit ihrer Hilfe lassen sich die anderen unbekanntenen Funktionen ermitteln. Dazu wird die Gleichung (5.4.25) in (5.4.5) und (5.4.6) eingesetzt

$$V_1'' = \left(L_1 - \frac{K_1R^*}{C^*}\right)V_3'' + \frac{E'SK_1}{GC^*}V_3 + q_1^* - \frac{K_1}{GC^*}q_3^* \quad (5.4.32)$$

$$V_2'' = \left(L_2 - \frac{K_2R^*}{C^*}\right)V_3'' + \frac{E'SK_2}{GC^*}V_3 + q_2^* - \frac{K_2}{GC^*}q_3^* \quad (5.4.33)$$

#### 5.4.1 Integration des Differentialgleichungssystems

Die im letzten Abschnitt ermittelten Gleichungen

$$E'A^{**}V_3^{IV} - GB^{**}V_3'' + E'C^{**}V_3 + q_3^{**} = 0 \quad (5.4.27)$$

$$V_1'' = \left(L_1 - \frac{K_1R^*}{C^*}\right)V_3'' + \frac{E'SK_1}{GC^*}V_3 + q_1^* - \frac{K_1}{GC^*}q_3^* \quad (5.4.32)$$

$$V_2'' = \left(L_2 - \frac{K_2R^*}{C^*}\right)V_3'' + \frac{E'SK_2}{GC^*}V_3 + q_2^* - \frac{K_2}{GC^*}q_3^* \quad (5.4.33)$$

$$W' = -\frac{R^*}{C^*} V_3'' + \frac{E'S}{G C^*} V_3 - \frac{1}{G C^*} q_3^* \quad (5.4.25)$$

erhalten mit Hilfe folgender Abkürzungen

$$a = E'A^{**} \quad (5.4.34)$$

$$b = G\theta^{**} \quad (5.4.35)$$

$$c = E'C^{**} \quad (5.4.36)$$

$$d_1 = L_1 - \frac{K_1 R^*}{C^*} \quad (5.4.37)$$

$$e_1 = \frac{E'SK_1}{G C^*} \quad (5.4.38)$$

$$d_2 = L_2 - \frac{K_2 R^*}{C^*} \quad (5.4.39)$$

$$e_2 = \frac{E'SK_2}{G C^*} \quad (5.4.40)$$

$$d_4 = -\frac{R^*}{C^*} \quad (5.4.41)$$

$$e_4 = \frac{E'S}{G C^*} \quad (5.4.42)$$

$$q_1^{**} = q_1^* - \frac{K_1}{G C^*} q_3^* \quad (5.4.43)$$

$$q_2^{**} = q_2^* - \frac{K_2}{G C^*} q_3^* \quad (5.4.44)$$

$$q_4^{**} = -\frac{1}{G C^*} q_3^* \quad (5.4.45)$$

die folgende Form

$$\alpha V_3^{IV} - b V_3'' + c V_3 + q_3^{**} = 0 \quad (5.4.46)$$

$$V_3'' = \alpha_1 V_3'' + e_1 V_3 + q_1^{**} \quad (5.4.47)$$

$$V_2'' = \alpha_2 V_3'' + e_2 V_3 + q_2^{**} \quad (5.4.48)$$

$$W' = \alpha_4 V_3'' + e_4 V_3 + q_4^{**} \quad (5.4.49)$$

Wlassow berichtet in [73] über die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.4.46). Man erhält

$$V_3 = k_1 \phi_1 + k_2 \phi_2 + k_3 \phi_3 + k_4 \phi_4, \quad (5.4.50)$$

wobei  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  und  $k_4$  Konstanten sind, die bei Berücksichtigung der Randbedingungen ermittelt werden.  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3$  und  $\phi_4$  sind Funktionen von  $Z$ , deren Form von den Koeffizienten  $\alpha$ ,  $b$  und  $c$  abhängt.  $V_{3p}$  ist die partikuläre Lösung.

Mit den Vektoren

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 & \phi_4 \end{bmatrix} \quad (5.4.51)$$

$$k_0^T = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{bmatrix} \quad (5.4.52)$$

kann die Gleichung (5.4.50) folgendermaßen geschrieben werden

$$V_3 = \phi k_0 + V_{3p} \quad (5.4.53)$$

Setzt man die letzte Gleichung und ihre zweite Ableitung nach  $Z$  in (5.4.47) und (5.4.48) ein, so erhält man

$$V_1'' = (\alpha_1 \phi'' + e_1 \phi) k_0 + \alpha_1 V_{3p}'' + e_1 V_{3p} + q_1^{**} \quad (5.4.54)$$

$$V_2'' = (\alpha_2 \phi'' + e_2 \phi) k_0 + \alpha_2 V_{3p}'' + e_2 V_{3p} + q_2^{**} \quad (5.4.55)$$

Nach zweimaliger Integration der Gleichungen (5.4.54) und (5.4.55) ergibt sich

$$V_1 = (d_1 \phi + e_1 \iint \phi dz dz) k_0 + k_5 z + k_6 + \iint (q_1^{**} + d_1 v_{3\rho}'' + e_1 v_{3\rho}) dz dz \quad (5.4.56)$$

$$V_2 = (d_2 \phi + e_2 \iint \phi dz dz) k_0 + k_7 z + k_8 + \iint (q_2^{**} + d_2 v_{3\rho}'' + e_2 v_{3\rho}) dz dz \quad (5.4.57)$$

Führt man die Integrationskonstanten zum Vektor  $k$ , der folgende Form hat

$$k^T = [k_0^T \quad k_5 \quad k_6 \quad k_7 \quad k_8] , \quad (5.4.58)$$

zusammen und setzt man

$$V_{1\rho} = \iint (q_1^{**} + d_1 v_{3\rho}'' + e_1 v_{3\rho}) dz dz \quad (5.4.59)$$

$$V_{2\rho} = \iint (q_2^{**} + d_2 v_{3\rho}'' + e_2 v_{3\rho}) dz dz , \quad (5.4.60)$$

so können die Gleichungen (5.4.56), (5.4.5) und (5.4.53) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \phi + e_1 \iint \phi dz dz & z & 1 & 0 & 0 \\ d_2 \phi + e_2 \iint \phi dz dz & 0 & 0 & z & 1 \\ \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} V_{1\rho} \\ V_{2\rho} \\ V_{3\rho} \end{bmatrix} \quad (5.4.61)$$

Mit

$$V^T = [V_1 \quad V_2 \quad V_3] \quad (5.4.62)$$

$$V_{\rho}^T = [V_{1\rho} \quad V_{2\rho} \quad V_{3\rho}] \quad (5.4.63)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \phi + e_1 \iint \phi dz dz & z & 1 & 0 & 0 \\ d_2 \phi + e_2 \iint \phi dz dz & 0 & 0 & z & 1 \\ \phi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4.64)$$

und

$$m_o^r = \begin{bmatrix} m_1^r & m_2^r & m_3^r \end{bmatrix} \quad (5.4.65)$$

kann (5.4.61) so geschrieben werden:

$$V = m_o k + V_p \quad (5.4.66)$$

Aus (5.4.4) kann  $w$  in Abhängigkeit von  $w''$  und  $v_1'$ ,  $v_2'$  und  $v_3'$  abgeleitet werden. Setzt man in diese Gleichung die einmal nach  $z$  abgeleitete Gleichung (5.4.49) und (5.6.66) ein, so erhält man

$$w = m_4 k + w_p, \quad (5.4.67)$$

wobei

$$m_4 = \frac{EA(d_4 m_3''' + e_4 m_3') - 6C m_o}{6B} \quad (5.4.68)$$

und

$$w_p = \frac{EA(d_4 v_{3p}''' + e_4 v_{3p}') + p + EA q^{* * *'} - 6C v_p'}{6B} \quad (5.4.69)$$

ist.

Faßt man die Größen  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  und  $w$  zum in (3.3.10) definierten Vektor  $U$  zusammen, und setzt man

$$m^r = \begin{bmatrix} m_1^r & m_2^r & m_3^r & m_4^r \end{bmatrix} \quad (5.4.70)$$

und

$$U_p^T = \begin{bmatrix} V_{1p} & V_{2p} & V_{3p} & W_p \end{bmatrix} \quad , \quad (5.4.71)$$

dann kann folgendes Gleichungssystem geschrieben werden:

$$U = mk + U_p \quad (5.4.72)$$

Die verallgemeinerten Querschnittskräfte werden mit der Gleichung

$$Q = F_0 U + F_1 U' \quad (3.3.8)$$

ermittelt, in die die Gleichung (5.4.72) und ihre Ableitung nach  $z$  eingesetzt werden

$$Q = (F_0 m + F_1 m') k + F_0 U_p + F_1 U_p' \quad ,$$

bzw.

$$Q = nk + Q_p \quad , \quad (5.4.73)$$

wenn folgende Zusammenfassungen

$$n = F_0 m + F_1 m' \quad (5.4.74)$$

und

$$Q_p = F_0 U_p + F_1 U_p' \quad (5.4.75)$$

eingeführt werden.

Der gesamte Zustandsvektor  $Z_v$  kann nach Gleichung (3.7.9) folgendermaßen ermittelt werden

$$Z_v = \begin{bmatrix} U \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} k + \begin{bmatrix} U_p \\ Q_p \end{bmatrix} \quad . \quad (5.4.76)$$



Mit

$$A_r^T = \begin{bmatrix} m^T & n^T \end{bmatrix} \quad (5.4.77)$$

und

$$Z_{vp}^T = \begin{bmatrix} U_p^T & Q_p^T \end{bmatrix} \quad (5.4.78)$$

kann die Gleichung (5.4.76) geschrieben werden als

$$\boxed{Z_v = A_r k + Z_{vp}} \quad (5.4.79)$$

Unter Beachtung der Randbedingungen kann  $k$  ermittelt werden. Für  $Z = 0$  und  $Z = L$  können die Gleichungen für die vorgegebenen kinematischen und statischen Randbedingungen aufgestellt werden.

Im allgemeinen können auch andere Rechenverfahren angewendet werden (s. z.B. Janssen [32] und Du Preez [20]): das Übertragungsverfahren oder das verallgemeinerte Verschiebungsgrößenverfahren als Sonderfall der Methode der finiten Elemente. Nachstehend sind die Formeln zusammengestellt, mit denen die Berechnung nach diesen Verfahren durchgeführt werden kann. Es werden keine Streckenlasten berücksichtigt; deshalb ist der Vektor  $Z_{vp}$  in Gleichung (5.4.79) gleich Null.

#### Übertragungsverfahren

An der Stelle  $Z = 0$  gilt

$$Z_v(0) = A_r(0)k \quad ,$$

bzw.

$$k = A_r(0)^{-1} Z_v(0) \quad . \quad (5.4.80)$$

Setzt man (5.4.80) in (5.4.79) ein, so erhält man

$$Z_V(Z) = A_R(Z) A_R(0)^{-1} Z_V(0)$$

oder

$$\boxed{Z_V(Z) = A_U(Z) Z_V(0)} \quad (5.4.81)$$

mit

$$A_U(Z) = A_R(Z) A_R(0)^{-1} \quad (5.4.82)$$

### Verschiebungsgrößenverfahren (Methode der finiten Elemente)

Berücksichtigt man, daß

$$Z_V^T = \begin{bmatrix} U^T & Q^T \end{bmatrix}$$

ist, und daß die Matrix  $A_R$  in die Matrizen  $A_{RU}$  und  $A_{RQ}$  zerlegt werden kann, so erhält die Gleichung (5.4.79) folgende Form

$$\begin{bmatrix} U \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{RU} \\ A_{RQ} \end{bmatrix} k \quad (5.4.83)$$

Mit Hilfe der Verschiebungszustände an den Enden eines Bereiches ( $Z = 0$  und  $Z = L$ ) wird  $k$  folgendermaßen ermittelt

$$\begin{bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{RU}(0) \\ A_{RU}(L) \end{bmatrix} k \quad ,$$

bzw.

$$k = \begin{bmatrix} A_{RU}(0) \\ A_{RU}(L) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{bmatrix} \quad (5.4.84)$$

Für die verallgemeinerten Schnittkräfte am gesamten Querschnitt an den Stellen  $z = 0$  und  $z = L$  gilt (s. Gleichung (5.4.83))

$$\begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rq}(0) \\ A_{rq}(L) \end{bmatrix} k$$

oder

$$\begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(L) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{rq}(0) \\ A_{rq}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ru}(0) \\ A_{ru}(L) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U(0) \\ U(L) \end{bmatrix}, \quad (5.4.85)$$

wenn der Ausdruck für  $k$  aus (5.4.84) eingesetzt wird. Die Steifigkeitsmatrix  $K$  ergibt sich somit zu

$$K = \begin{bmatrix} A_{rq}(0) \\ A_{rq}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{ru}(0) \\ A_{ru}(L) \end{bmatrix}^{-1}. \quad (5.4.86)$$

Die Gleichung (5.4.85) erhält unter Berücksichtigung von (5.4.86) die Form

$$\boxed{Q_E = K U_E}, \quad (5.4.87)$$

in der

$$Q_E^T = \begin{bmatrix} Q(0)^T & Q(L)^T \end{bmatrix} \quad (5.4.88)$$

und

$$U_E^T = \begin{bmatrix} U(0)^T & U(L)^T \end{bmatrix} \quad (5.4.89)$$

sind.

5.4.2 Integration der Differentialgleichung  $\alpha v_3^{IV} - b v_3'' + c v_3 = 0$

Wlassow untersucht diese Differentialgleichung in [73]. Im Anhang A dieser Arbeit sind die verschiedenen Formen der Lösung dargestellt; die in dieser Arbeit benötigten Ableitungen und Integrale sind ebenfalls dort aufgeführt.

Die Koeffizienten  $\alpha$ ,  $b$  und  $c$  deuten jeweils auf die Anteile der Normalspannungen in der Längsrichtung, der Schubspannungen und der Querbiegespannungen an der Gleichgewichtsbedingung (5.4.27) bzw. (5.4.46) hin.

Die Differentialgleichung

$$\alpha v_3^{IV} - b v_3'' + c v_3 = 0$$

wird in folgender Form weiter behandelt

$$v_3^{IV} - 2r^2 v_3'' + s^4 v_3 = 0, \quad (5.4.90)$$

wobei

$$r^2 = \frac{b}{2\alpha} \quad (5.4.91)$$

und

$$s^4 = \frac{c}{\alpha} \quad (5.4.92)$$

sind. Wenn bei dem untersuchten Problem keine Querbiegung berücksichtigt wird, ist  $s = c = 0$ ; in diesem Fall ist die Form der Lösung eindeutig.

Bei den Problemen, in denen die Querbiegung berücksichtigt wird, ist  $s^4 = c/\alpha \neq 0$ ; wie aus dem Anhang ersichtlich ist, kann die Lösung der Differentialgleichung drei verschiedene Formen haben. Da die Wahrscheinlichkeit für  $s = r$  gering ist,

haben die Lösungen für  $\lambda \neq r$  eine größere Bedeutung.

Wenn  $\lambda$  größer als  $r$  ist, hat die Lösung die Form

$$V_3 = k_1 \cosh(\alpha Z) \sin(\beta Z) + k_2 \cosh(\alpha Z) \cos(\beta Z) + k_3 \sinh(\alpha Z) \cos(\beta Z) + k_4 \sinh(\alpha Z) \sin(\beta Z), \quad (5.4.93)$$

hingegen, wenn  $\lambda$  kleiner als  $r$  ist,

$$V_3 = k_1 \sinh(\alpha Z) + k_2 \cosh(\alpha Z) + k_3 \sinh(\beta Z) + k_4 \cosh(\beta Z) \quad . \quad (5.4.94)$$

In diesen Gleichungen sind  $k_1, k_2, k_3$  und  $k_4$  die Integrationskonstanten und  $\alpha$  und  $\beta$  Parameter, die von  $\lambda$  und  $r$  abhängig sind (s. Anhang A).

Für den einzelligen Träger sind bei der Untersuchung der Profilverformung Rechenverfahren entwickelt worden, in denen die Schubverzerrungen nicht berücksichtigt werden (s. z.B. [49] und [67]). In diesen Fällen ist  $r = b = 0$ , und die Differentialgleichung hat die Lösung (5.4.93) mit  $\alpha = \beta$ .

Dabrowski [12] und Steinle [64] haben den einzelligen Träger unter Berücksichtigung der Schubverzerrungen untersucht und stellten dabei fest, daß der Faktor  $r$  von vernachlässigbarer Bedeutung ist. Bei der Diskussion einiger durchgerechneter Beispiele soll allerdings später gezeigt werden, daß die Vernachlässigung der Schubverzerrungen nicht immer berechtigt ist.

### 5.4.3 Randbedingungen

Die für den antimetrischen Lastfall im Abschnitt 5.4.1 aufgestellten Differentialgleichungen erfordern für jeden betrachteten Abschnitt die Erfüllung von acht Randbedingungen. Es können verschiedene Kombinationen der im Bild 5.12 dargestellten Randbedingungen berücksichtigt werden. Da nur antimetrische Lasten in Betracht gezogen werden, kann keine Resultierende in der  $X$ -Richtung auftreten; deshalb ist die verallgemeinerte Schnittkraft  $Q_{r_1}$  bekannt und in diesem speziellen Fall gleich Null.



Unverdreht  
Unverformbar

Verdreht  
Unverformbar  
(Freies Ende)

Verdreht  
Verformbar  
(Bodenplatte  
unverdreht)

Verdreht  
Verformbar  
(Freies Ende)

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= 0 \\ V_3 &= 0 \end{aligned}$$

hier  
 $Q_{V1} = 0$

$$Q_{V2} \neq 0$$

$$Q_{V3} \neq 0$$

$$V_1 \neq 0$$

$$V_2 \neq 0$$

$$V_3 = 0$$

hier  
 $Q_{V1} = 0$

$$Q_{V2}: \text{Bekannt}$$

$$Q_{V3} \neq 0$$

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = 0$$

$$V_3 \neq 0$$

hier  
 $Q_{V1} = 0$

$$Q_{V2} \neq 0$$

$$Q_{V3}: \text{Bekannt}$$

$$V_1 \neq 0$$

$$V_2 \neq 0$$

$$V_3 \neq 0$$

hier  
 $Q_{V1} = 0$

$$Q_{V2}: \text{Bekannt}$$

$$Q_{V3}: \text{ "}$$

Fall I

Fall II

Fall III

Fall IV

a) Randbedingungen (umrandet) in der Querschnittsebene

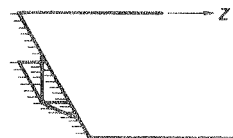


Ohne Wölbbehinderung

$$W \neq 0$$

$$P_w = 0$$

Fall I



Mit Wölbbehinderung

$$W = 0$$

$$P_w \neq 0$$

Fall II

b) Randbedingungen (umrandet) in Längsrichtung

Bild 5.12 Randbedingungen

## 6. BEISPIELE

### 6.1 Einleitung

In diesem Abschnitt wird an Hand des in der vorliegenden Arbeit behandelten Trägers die Genauigkeit verschiedener Rechenverfahren untersucht. Vor einer Erläuterung der bei der Wahl der Beispiele berücksichtigten Kriterien soll zunächst jedoch über die verschiedenen Programme berichtet werden, mit denen die Rechnungen durchgeführt wurden. Alle Beispiele wurden auf der Rechenanlage CDC 6600 des Rechenzentrums der Universität Stuttgart gerechnet.

Als erste werden die beiden im Rahmen dieser Arbeit aufgestellten FORTRAN-Programme beschrieben.

Mit dem Programm FALTWK können die Verschiebungs- und Spannungszustände von Trägern mit symmetrischem Querschnitt nach der im Abschnitt 4 erläuterten Faltwerkstheorie ( $\epsilon_x = \kappa_z = \kappa_{xz} = 0$ ) ermittelt werden. Die Rechnungen werden mit Hilfe von Fourierreihen durchgeführt (s. Abschnitt 3.7.1). Auch für die im Abschnitt 5 aufgestellten Näherungsverfahren können mit diesem Programm Rechnungen durchgeführt werden. Beispiele nach dem im Abschnitt 5.4 abgeleiteten Rechenverfahren werden, je nachdem welcher Verlauf für die Verschiebungen in der Längsrichtung angesetzt wird, unter der Bezeichnung erste oder zweite Näherung dargestellt.

Das Programm FALTWK ist so aufgebaut, daß Träger mit den im Bild 6.1 dargestellten symmetrischen Querschnitten berechnet werden können. Die im Bild 6.1b dargestellten Querschnitte weisen im Hinblick auf die Profilverformung zwei Freiheitsgrade auf, die sich aber wegen der symmetrischen Querschnittsform für symmetrische und antimetrische Lastanteile entkoppeln. Im Bild 6.2a sind die symmetrischen und antimetrischen Profilverformungen des zweizelligen Querschnitts dargestellt. Die festgehaltenen Querschnitte (halbe Systeme) und die zugehörigen Festhaltekräfte für eine unabhängige Berechnung der

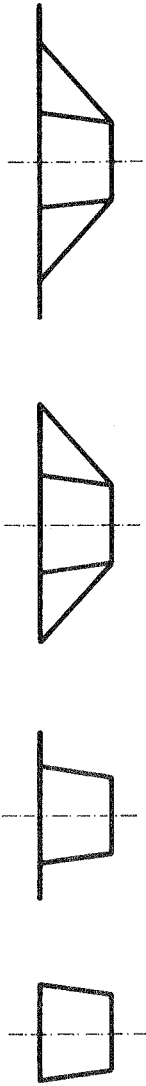
symmetrischen und antimetrischen Lastfälle sind im Bild 6.2c aufgezeichnet. In der Querschnittsebene sind den Festhaltekräften entsprechend für den symmetrischen Lastfall zwei Freiheitsgrade und für den antimetrischen Lastfall drei Freiheitsgrade zu berücksichtigen (s. Bild 6.2d).

Mit dem FORTRAN-Programm BALKEN können Träger mit starrem Querschnitt nach den üblichen Annahmen der Stabstatik berechnet werden. Der symmetrische Lastfall wird nach der Balkenbiegelehre berechnet, und der antimetrische Lastfall wird nach der Bredtschen Torsion oder auch nach der Wölbkrafttorsion mit oder ohne Berücksichtigung der sekundären Schubverzerrungen berechnet. Bei der Berücksichtigung der sekundären Schubverzerrungen wird das von Heilig [30] vorgeschlagene Verfahren zu Grunde gelegt.

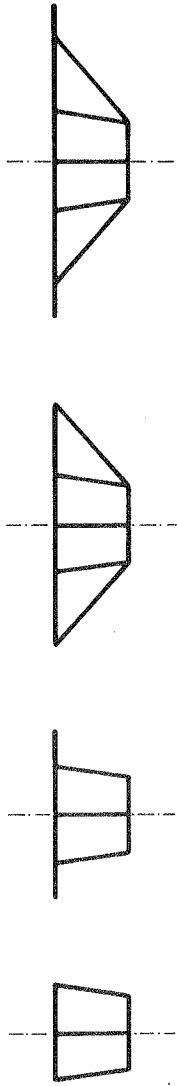
Die erzielten Ergebnisse konnten mit den FORTRAN-Programmen MULTPL [54], MUPDI [54] und MUFDI 3 [43] verglichen werden. Diese Programme sind an der University of California, Berkeley, unter der Leitung von Prof. A.C. Scordelis aufgestellt worden. In diesen Programmen werden die Scheiben- und Plattenzustände gemäß Goldberg und Leve [21] genau erfaßt (s. Abschnitt 2.6 und [17]). Mit dem Programm MULTPL werden frei gelagerte Träger berechnet, die nur an den Auflagern ausgesteift sind. Träger mit starren Schotten zwischen den Auflagern werden mit dem Programm MUFDI berechnet. Zwischen den Auflagern elastisch oder starr gestützte Träger mit oder ohne elastische oder starre Aussteifungen im Feld können mit dem Programm MUFDI 3 berechnet werden.

Bei der Berechnung mit Hilfe von Fourierreihen ist, besonders wenn die Beanspruchung infolge Einzellasten ermittelt werden soll, die Zahl der zu berücksichtigenden Reihenglieder von Bedeutung. Die zweckmäßige Zahl von Reihengliedern hängt dabei von verschiedenen Faktoren ab, auf die z.B. Scordelis, Bowkamp und Wasti in der Schlußbemerkung zu ihrer Arbeit [55] hinweisen. Allgemein zeigt sich bei Verschiebungsgrößen eine schnelle Konvergenz. Bei einzelnen Schnittgrößen nahe der Lasteinleitungsstelle, z.B. den Querbiegemomenten, konvergieren





a) Ein Freiheitsgrad im Hinblick auf die Profilverformung



b) Zwei Freiheitsgrade im Hinblick auf die Profilverformung

Bild 6.1 Querschnitte der Träger, die mit dem Programm FALWK errechnet werden können



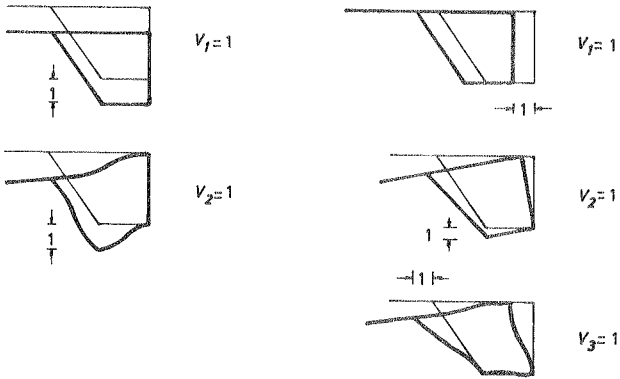
a) Symmetrische und antimetrische Profilverformung



b) Randbedingungen des halben Systems



c) Festgehaltene Querschnitte



d) Freiheitsgrade in der Querschnittsebene

Symmetrischer Lastfall

Antimetrischer Lastfall

Bild 6.2 Querschnitte mit zwei Freiheitsgraden im Hinblick auf die Profilverformung

die Reihen schlecht oder überhaupt nicht (s. Lin u. Scordelis [43]). Die einzelnen Autoren schlagen aus den Erfahrungen ihrer speziellen Untersuchungen eine sehr unterschiedliche Anzahl von Reihengliedern vor. Scordelis [54] empfiehlt z.B. bei der Berücksichtigung von Einzellasten fünfzig Reihenglieder, bei Trägern mit Zwischenschotten oder Zwischenstützungen sogar hundert. Dobovisek [19] berücksichtigt lediglich einunddreißig Reihenglieder. Das [13] hält sogar nur neunzehn für ausreichend und verweist in der Diskussion zu seiner Arbeit auf die Zwecklosigkeit höherer Ansätze, wenn das Rechenverfahren auf der Elastizitätstheorie des zweidimensionalen Kontinuums aufbaut. Nach der zweidimensionalen Plattentheorie wird die örtliche dreidimensionale Beanspruchung bei Einzellasten vernachlässigt. Diese Einleitungsprobleme haben Cusens und Loo in [10] untersucht. Sie wendeten dabei das von Cheung [8] vorgeschlagene Verfahren (s. Abschnitt 2.6) bzw. weitere Entwicklungen desselben an (s. a. Loo [45]). Sie kommen zu der Schlussfolgerung, daß in Querrichtung etwa 45 und in Längsrichtung etwa 95 Reihenglieder zu empfehlen seien.

Für den Einfeldträger mit dreizelligem Querschnitt wird in der vorliegenden Arbeit die Bedeutung der Wahl der Reihengliedanzahl für einige Schnittgrößen kurz aufgezeigt.

Bei der Festlegung der Abmessungen des Querschnitts sind die im Aufsatz von Lee [41] eingetragenen Abmessungen, die von Lippoth [44] berücksichtigten Beziehungen zwischen den Dicken der einzelnen Wände und die von Bechert [3] für die allgemeine Gestaltung von Querschnitten vorgespannter Träger angegebenen Hinweise berücksichtigt worden.

Es sind zwei Lastfälle untersucht worden: Konzentrierte Last in der Feldmitte und gleichmäßig verteilte Last. Diese Lasten werden in symmetrische und antimetrische Lastanteile zerlegt. Für die Darstellung der Torsionslasten, die über Kräftepaare an den Knoten eingeleitet werden, gilt die im Bild 6.3 gezeigte Vereinbarung [5].



**Bild 6.3 Darstellung von Torsionslasten**

Für die Bemessung der hier behandelten Träger sind die Normalspannungen in der Längsrichtung, die Schubspannungen und die Querbiegemomente entlang der Wandmittelfläche von Bedeutung. Deshalb bezieht sich die allgemeine Diskussion der Beispiele auf die Größe und den Verlauf dieser Beanspruchungen. Außerdem erhält man aus der Berechnung mit dem Programm FALTEWK nur diese Spannungen bzw. die Querbiegemomente.

Im Abschnitt 6.2.2, in dem auf die Normalspannungen in der Längsrichtung näher eingegangen wird, wird ferner untersucht, inwieweit die für das Näherungsverfahren gemachten Annahmen mit den nach genaueren Berechnungen erzielten Ergebnissen übereinstimmen.

## 6.2 Träger mit verformbarem Querschnitt

### 6.2.1 Querbiegemomente

Von großer Bedeutung für die Bemessung von ein- und mehrzelligen Trägern ist die richtige Erfassung der Querbiegemomente. Bei der Faltwerksberechnung des hier untersuchten Trägers erhält man Querbiegemomente nur infolge der antisymmetrischen Lastgruppe.

In den Bildern 6.4 und 6.5 sind für zwei Trägerlängen die von einer antisymmetrischen Last in der Feldmitte verursachten Querbiegemomente  $m_{21}$  eingetragen. Diese Werte sind mit den Programmen MULTFL und FALTEWK unter Berücksichtigung von zehn und fünf-

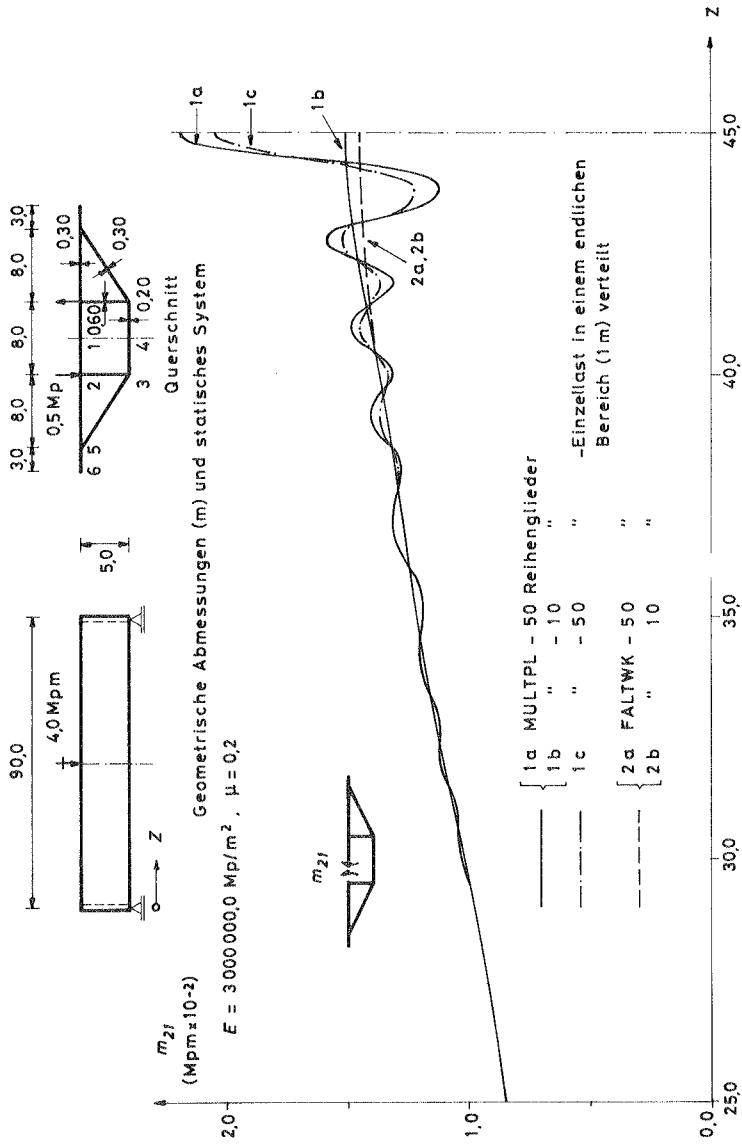
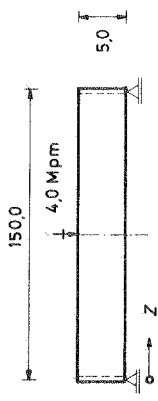
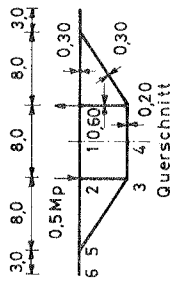
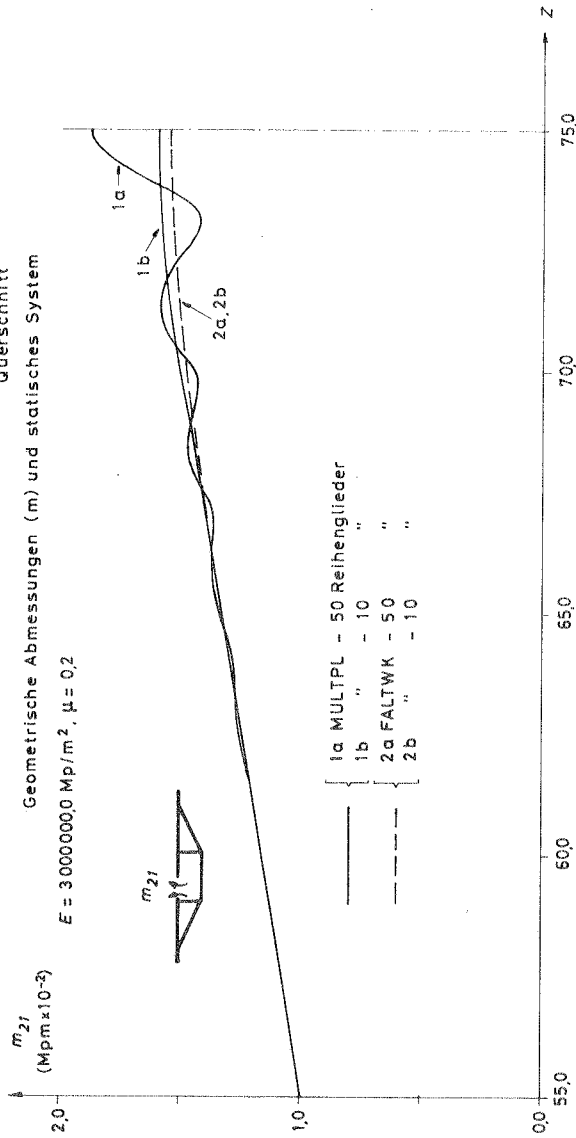


Bild 6.4 Verlauf des Querbiegemomentes  $m_{zl}$  bei unterschiedlicher Zahl der Fourierreihenglieder am 90 m langen Träger



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 30000000 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0.2$



- 1a MULTPL - 50 Reihenglieder
- 1b " - 10 "
- 2a FALTWK - 50 "
- 2b " - 10 "

Bild 65 Verlauf des Querbiegemomentes  $m_{21}$  bei unterschiedlicher Zahl der Fourierreihenglieder am 150 m langen Träger

zig Reihengliedern berechnet worden. Beim Programm MULTFL unter Berücksichtigung von 50 Reihengliedern erhält man einen ausgeprägt welligen Verlauf. Außerhalb des belasteten Bereichs nimmt diese Welligkeit ab, und demzufolge könnte die Berechnung mit wenigen Reihengliedern durchgeführt werden. Auch mit der Verteilung der angesetzten Einzellasten entlang eines endlichen Bereiches kann keine wesentliche Verbesserung der Konvergenz festgestellt werden. Wie aus der Tabelle 6.1, in der die Querbiegemomente  $m_{27}$  in der Feldmitte eingetragen sind, zu ersehen ist, weichen die nach beiden Verfahren erzielten Ergebnisse wenig voneinander ab.

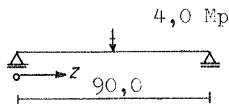
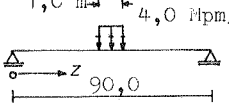
Zahl der Reihenglieder	 4,0 Mpm 90,0 Einzellast in der Feldmitte	 1,0 m → 4,0 Mpm/m 90,0 Verteilte Last
10	+ 1,512	+ 1,511
30	+ 1,762	+ 1,737
50	+ 2,193	+ 2,037

Tabelle 6.1 Werte des Querbiegemomentes  $m_{27}$  (Mpm  $\times 10^{-2}$ ) in der Feldmitte nach zwei Reihenentwicklungen

Der Verlauf des Querbiegemomentes  $m_{27}$ , der für die nach Tabelle 6.1 verteilte Last ermittelt wurde, ist für den 90 m langen Träger unter Berücksichtigung von fünfzig Reihengliedern ebenfalls im Bild 6.4 eingetragen. Man erkennt, daß die nach beiden Rechnungen ermittelten Verläufe durch gleiche Wellenfrequenzen und verschiedene Amplituden ausgezeichnet sind. Für die weiteren Berechnungen wird die Einzellast nicht mittels verteilter Lasten dargestellt.

Mit dem Programm FALTKW erbringt die Berücksichtigung der höheren Gliederzahl keine bedeutende Verbesserung gegenüber der mit zehn Reihengliedern durchgeführten Rechnung. Der erhaltene Verlauf gleicht in etwa die mit MULTPL erzielten Ergebnisse aus. Bei der kleinen Gliederzahl stimmen die mit beiden Programmen erzielten Ergebnisse gut überein. Anschließend werden die mit MULTPL und FALTKW unter Berücksichtigung von zehn Reihengliedern erzielten Ergebnisse mit denen, die nach dem Näherungsverfahren ermittelt wurden, verglichen.

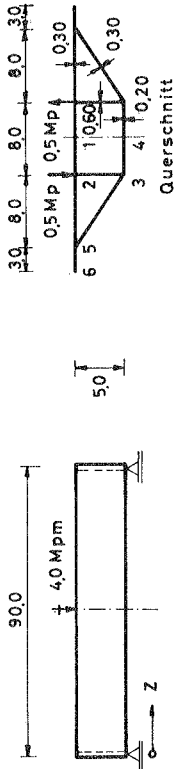
Für eine konzentrierte Last in der Feldmitte sind die Querbiegemomente an der belasteten Stelle sowie die Verläufe der Querbiegemomente  $m_{27}$  und  $m_{34}$  in den Bildern 6.6 -für den 90 m langen Träger- und 6.7 -für den 150 m langen Träger- eingetragen.

Im Gegensatz zum Querbiegemoment  $m_{27}$  -nahe der Lasteinleitungs- stimmen die mit MULTPL und FALTKW ermittelten Ergebnisse für das Querbiegemoment  $m_{34}$  -an einem unbelasteten Knoten- gut überein, dies unabhängig von der gewählten Anzahl der Reihenglieder.

Die Genauigkeit der mit den Näherungsverfahren erzielten Ergebnisse ist bei dem längeren Träger größer. Große Abweichungen kommen nur an der Lasteinleitungsstelle vor. Mit dem zweiten angenäherten Verlauf für die Verschiebungen in der Längsrichtung -zweite Näherung- erhält man sehr gute Ergebnisse. Es sei noch einmal bemerkt, daß für das im Abschnitt 5.4 aufgestellte Näherungsverfahren eine geschlossene Lösung abgeleitet wurde.

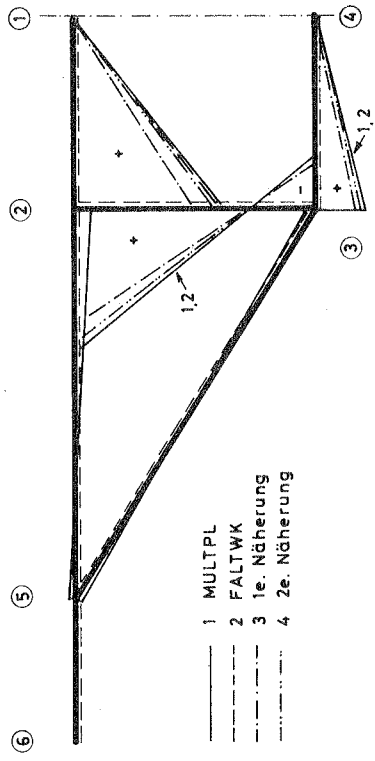
Für gleichmäßig verteilte Last sind die entsprechenden Ergebnisse in den Bildern 6.8 -für den 90 m langen Träger- und 6.9 -für den 150 m langen Träger- dargestellt. Die mit MULTPL und FALTKW erzielten Ergebnisse stimmen vollkommen überein. Das Näherungsverfahren mit dem zweiten angenäherten Verlauf für die Verschiebungen in der Längsrichtung liefert Werte, deren Genauigkeit groß ist.





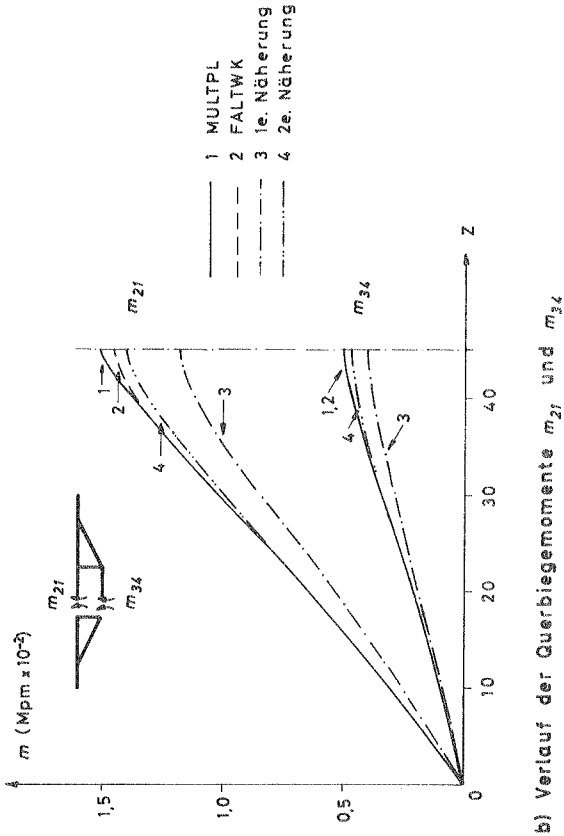
Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3000000,0 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0,2$

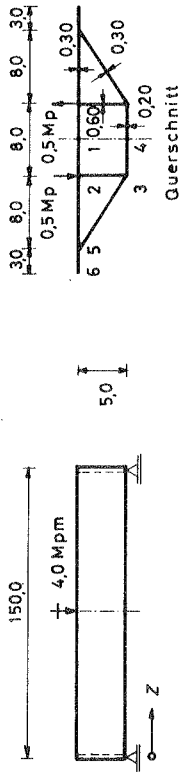


Kno- Stelle	MULTPL		FALTWK		Erste Näherung		Zweite Näherung	
	1	2	3	4	3	4	3	4
1	1-2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	2-1	+1,512	+1,449	+1,195	+1,397			
	2-3	+1,371	+1,349	+1,112	+1,300			
	2-5	+0,141	+0,100	+0,083	+0,097			
3	3-2	-0,513	-0,513	-0,423	-0,495			
	3-4	+0,499	+0,487	+0,402	+0,470			
	3-5	+0,014	+0,026	+0,021	+0,025			
4	4-3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	5-2	-0,039	-0,030	-0,025	-0,029			
	5-3	-0,032	-0,030	-0,025	-0,029			
	5-6	-0,007	0,000	0,000	0,000			
6	6-5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

a) Querbiegemomente ( $\text{Mpm} \times 10^{-2}$ ) in der Feldmitte

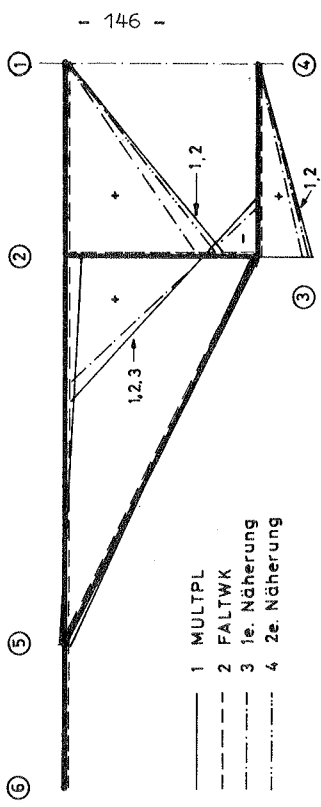


b) Verlauf der Querbiegemomente  $m_{21}$  und  $m_{34}$   
 Bild 6.6 Querbiegemomente am 90m langen Träger infolge konzentrierter Last in der Feldmitte



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

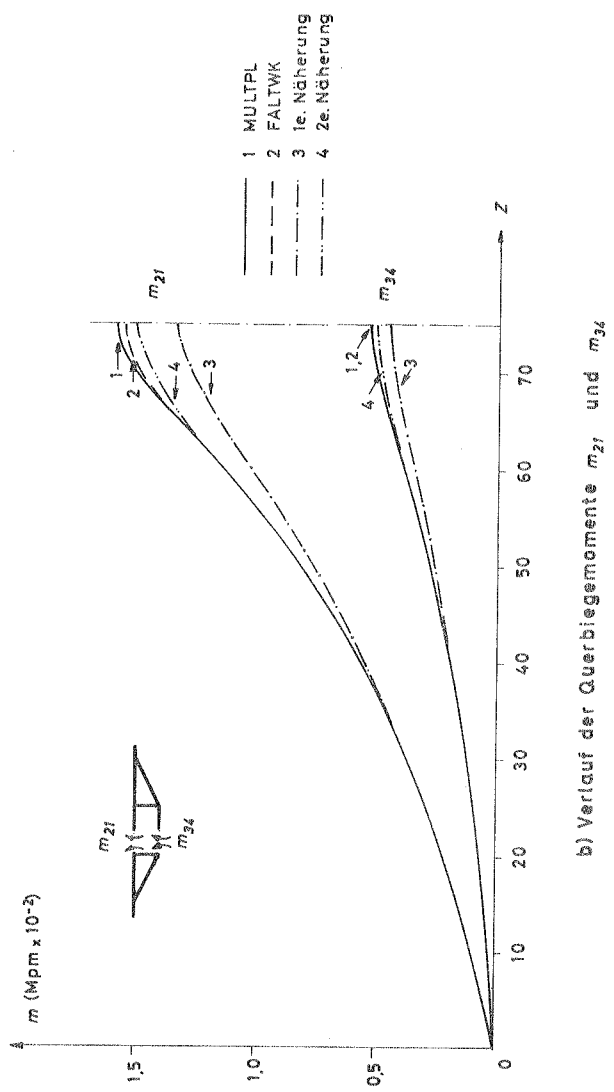
$E = 3000000.0 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0.2$



1 MULTPL  
2 FALTKW  
3 1e. Näherung  
4 2e. Näherung

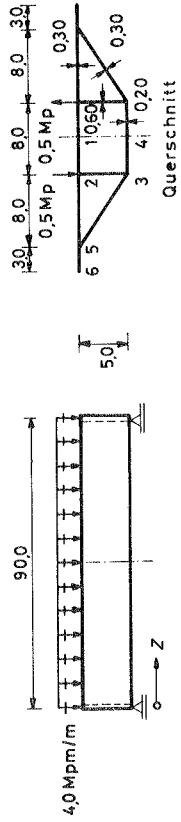
Kno- sten	MULTPL		FALTKW		Erste Näherung		Zweite Näherung	
	1	2	3	4	1	2	3	4
1	1-2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	2-1	+1,593	+1,549	+1,343	+1,343	+1,518		
	2-3	+1,467	+1,442	+1,250	+1,250	+1,413		
	2-5	+0,126	+0,107	+0,093	+0,093	+0,105		
3	3-2	-0,553	-0,548	-0,476	-0,476	-0,538		
	3-4	+0,532	+0,521	+0,452	+0,452	+0,511		
	3-5	+0,021	+0,027	+0,024	+0,024	+0,027		
4	4-3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	5-2	-0,039	-0,032	-0,028	-0,028	-0,031		
	5-3	-0,033	-0,032	-0,028	-0,028	-0,031		
5-6	-0,006	0,000	0,000	0,000	0,000			
6	6-5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

a) Querbiegemomente ( $\text{Mpm} \times 10^{-2}$ ) in der Feldmitte



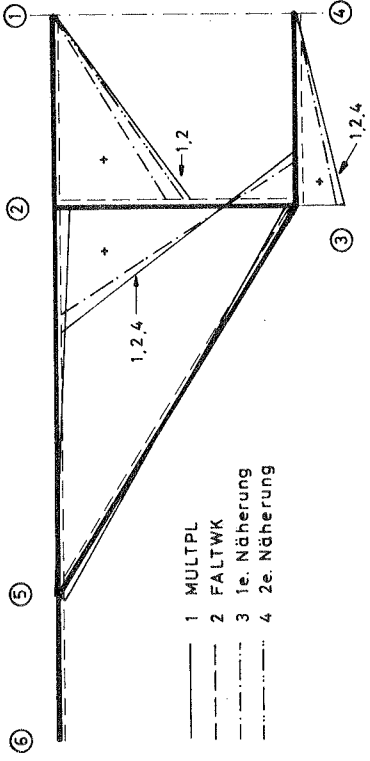
b) Verlauf der Querbiegemomente  $m_{21}$  und  $m_{34}$

Bild 67 Querbiegemomente am 150 m langen Träger infolge konzentrierter Last in der Feldmitte



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

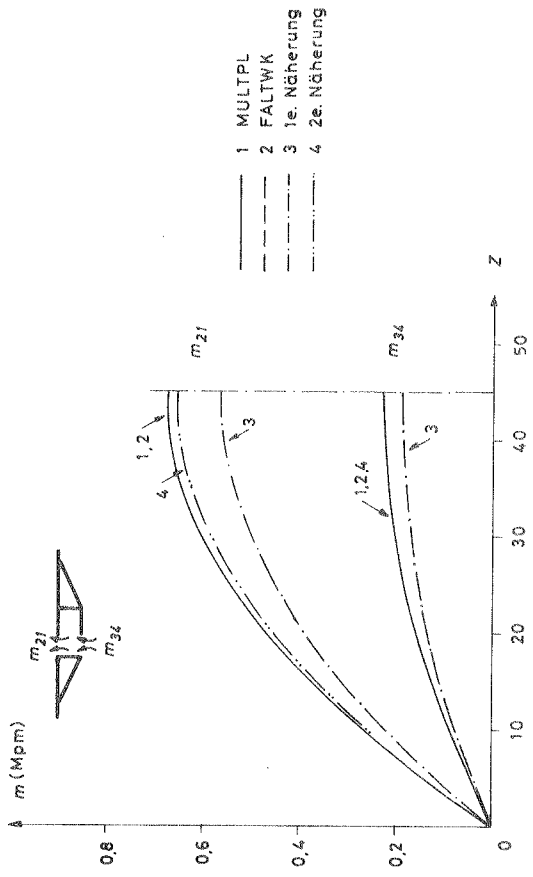
$E = 3000000,0 \text{ Mpm}^2, \mu = 0,2$



- 1 MULTPL
- 2 FALTWK
- 3 1e. Näherung
- 4 2e. Näherung

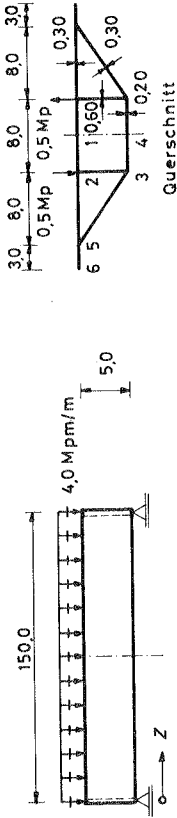
Kno- ten	Stelle	MULTPL FALTWK		Erste Näherung		Zweite Näherung	
		1	2	3	4	3	4
1	1-2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
	2-1	+0,678	+0,679	+0,564	+0,658		
2	2-3	+0,631	+0,632	+0,525	+0,612		
	2-5	+0,047	+0,047	+0,039	+0,046		
	3-2	-0,240	-0,240	-0,200	-0,233		
3	3-4	+0,228	+0,228	+0,190	+0,221		
	3-5	+0,012	+0,012	+0,010	+0,012		
4	4-3	0,000	0,000	0,000	0,000		
	5-2	-0,014	-0,014	-0,012	-0,014		
5	5-3	-0,014	-0,014	-0,012	-0,014		
	5-6	0,000	0,000	0,000	0,000		
6	6-5	0,000	0,000	0,000	0,000		

a) Querbiegemomente (Mpm) in der Feldmitte



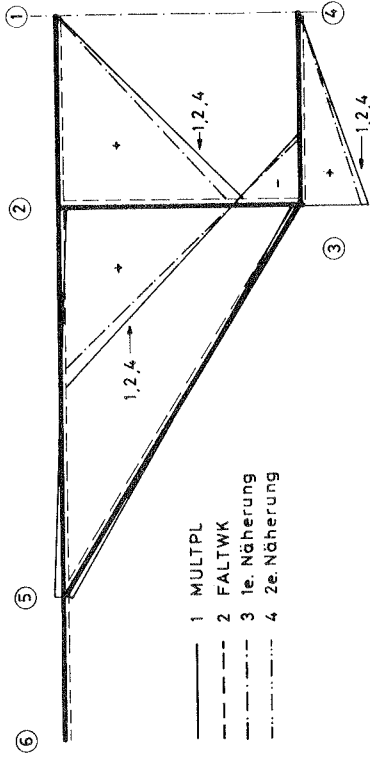
b) Verlauf der Querbiegemomente  $m_{21}$  und  $m_{34}$

Bild 6.6 Querbiegemomente am 80m langen Träger infolge gleichmäßig verteilter Last



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 30000000,0 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0,2$



Kno- ten	MULTPL		FALTWK		Erste Näherung		Zweite Näherung	
	1	2	3	4	3	4	3	4
1	1-2	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	2-1	+ 0,943	+ 0,946	+ 0,861	+ 0,861	+ 0,941		
	2-3	+ 0,877	+ 0,881	+ 0,800	+ 0,800	+ 0,876		
	2-5	+ 0,066	+ 0,066	+ 0,060	+ 0,060	+ 0,065		
3	3-2	- 0,333	- 0,335	- 0,305	- 0,305	- 0,333		
	3-4	+ 0,317	+ 0,318	+ 0,290	+ 0,290	+ 0,316		
	3-5	+ 0,015	+ 0,017	+ 0,015	+ 0,015	+ 0,017		
4	4-3	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	5-2	- 0,020	- 0,020	- 0,018	- 0,018	- 0,019		
	5-3	- 0,020	- 0,020	- 0,018	- 0,018	- 0,019		
	5-6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000		
6	6-5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

a) Querbiegemomente (Mpm) in der Feldmitte

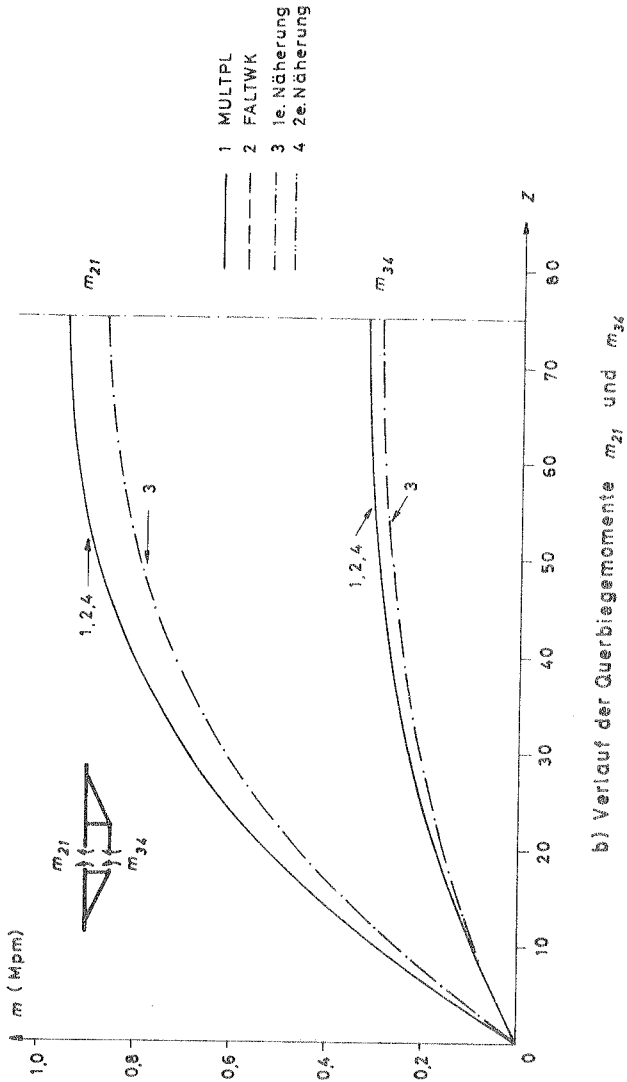


Bild 6.9 Querbiegemomente am 150m langen Träger infolge gleichmäßig verteilter Last



In den Bildern 6.10 -konzentrierte Last in der Feldmitte- und 6.11 -gleichmäßig verteilte Linienlast- sind für Träger unterschiedlicher Höhe und unterschiedlicher Länge die den Festhaltekräften  $Qx^2 = - Qx^3$  und  $Qy^3$  (s. Bild 4.8) entsprechenden Querbiegemomente  $m_{34}$  in der Feldmitte eingetragen. Das Näherungsverfahren -zweite Näherung- liefert im allgemeinen gute Ergebnisse. Mit dem Näherungsverfahren können nur Torsionslasten berücksichtigt werden, und deshalb müssen die Lasten  $Qx^2$  und  $Qx^3$  gleichzeitig angesetzt werden. Lasten an einer beliebigen Stelle auf der Fahrbahn, z.B. Einzellasten in der Feldmitte oder gleichmäßig verteilte Linienlasten, können nach der im Abschnitt 4.4 angegebenen Methode berücksichtigt werden. Die von der symmetrischen Lastgruppe verursachten Biegemomente in der Längsrichtung sind bei den größeren Längen des 2,50 m hohen Trägers nicht mehr vernachlässigbar. Deshalb werden in den Bildern 6.10 und 6.11 die mit dem Programm MULTPL ermittelten Biegemomente in der Feldmitte (Klammerwerte) angegeben.

Die zusätzliche Berücksichtigung einer antimetrischen Last an den äußeren Knoten der dreieckigen Zellen verursacht nur eine geringe Zunahme der Querbiegebeanspruchung. In dieser Hinsicht ist das Verhalten des aus drei rechteckigen Zellen bestehenden Querschnitts wesentlich ungünstiger. Für beide Querschnitte sind in den Bildern 6.12 -für konzentrierte Last in der Feldmitte- und 6.13 -für gleichmäßig verteilte Last- die Verläufe der Biegemomente  $m_{21}$  infolge Lasten an den inneren bzw. an den inneren und äußeren Knoten eingetragen. Bei dem aus drei rechteckigen Zellen bestehenden Querschnitt ist außerdem die Querbiegebeanspruchung infolge der symmetrischen Lastgruppe von nicht zu vernachlässigender Bedeutung.

Um die Größenordnung der Querbiegebeanspruchung bei drei Trägern mit symmetrischen Querschnittsformen anzudeuten, sind im Bild 6.14 die jeweiligen Verläufe der Biegemomente  $m_{34}$  eingetragen. Die Querbiegebeanspruchung dieser Querschnitte infolge antimetrischer Last kann auch nach dem im Abschnitt 5.4 aufgestellten Näherungsverfahren ermittelt werden. Für die Träger mit ein- und zweizelligen Querschnitten stimmen die nach diesem Näherungsverfahren -mit dem ersten angenäherten

Verlauf für die Verschiebungen in der Längsrichtung- errechneten Werte mit den nach den genaueren Faltwerkstheorien erzielten sehr gut überein.

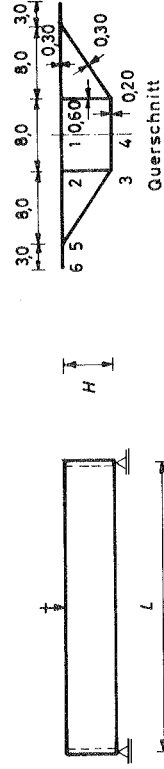
### 6.2.2 Normalspannungen in der Längsrichtung

Für den 150 m langen Träger unter einer antimetrischen Last in der Feldmitte sind im Bild 6.15 die Verläufe der Normalspannungen am Knoten 2 des Steges 2-3 eingetragen. Da nur im Bereich der Feldmitte große Abweichungen zwischen den durchgeführten Rechnungen auftreten, werden in diesem Bild nur die für diesen Bereich ermittelten Ergebnisse eingetragen. Auch für die Normalspannungen erhält man mit dem Programm MULTPL bei Berücksichtigung von fünfzig Reihengliedern einen ausgeprägt welligen Verlauf. Bei Berücksichtigung von zehn Reihengliedern weichen die Ergebnisse nur wenig von den mit dem Programm FALTWK -unter Berücksichtigung von zehn und fünfzig Reihengliedern- ermittelten Werten ab.

Mit dem Programm MULTPL erhält man für die am belasteten Knoten angeschlossenen Wände an der Anschlußstelle unterschiedliche Normalspannungen, was auf den Einfluß der Querdehnungszahl  $\mu$  und der Dehnungen  $\epsilon_x$  zurückgeführt wird. Wenn man z.B. die Querdehnungszahl oder die Dehnungen  $\epsilon_x$  vernachlässigen würde, dann würden die Ergebnisse übereinstimmen. Deshalb erhält man mit dem Programm FALTWK ( $\epsilon_x = 0$ ) für alle angeschlossenen Wände gleiche Längsspannungen.

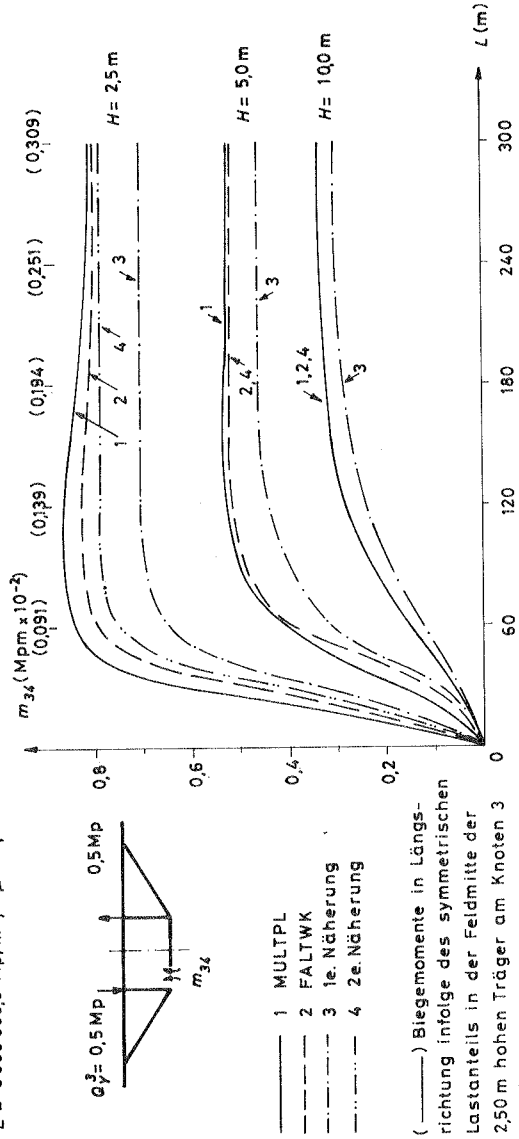
Im Bild 6.16 sind die unter Berücksichtigung verschiedener Reihenglieder ermittelten Spannungen eingetragen. Dort sind auch die Abweichungen der Spannungen  $\sigma_2$  gegenüber dem für die Bemessung maßgebenden Mittelwert der Spannungen  $\sigma_{2l}$  und  $\sigma_{2r}$  in Prozenten angegeben. An diesen Ergebnissen erkennt man, daß die Abweichung zwischen den Spannungen am Steg und an der Platte mit der Zahl der berücksichtigten Reihenglieder zunimmt.

Im allgemeinen deuten (bei  $\mu$  und  $\epsilon_x$  ungleich Null) große Abweichungen der an denselben Knoten ermittelten Normalspannungen



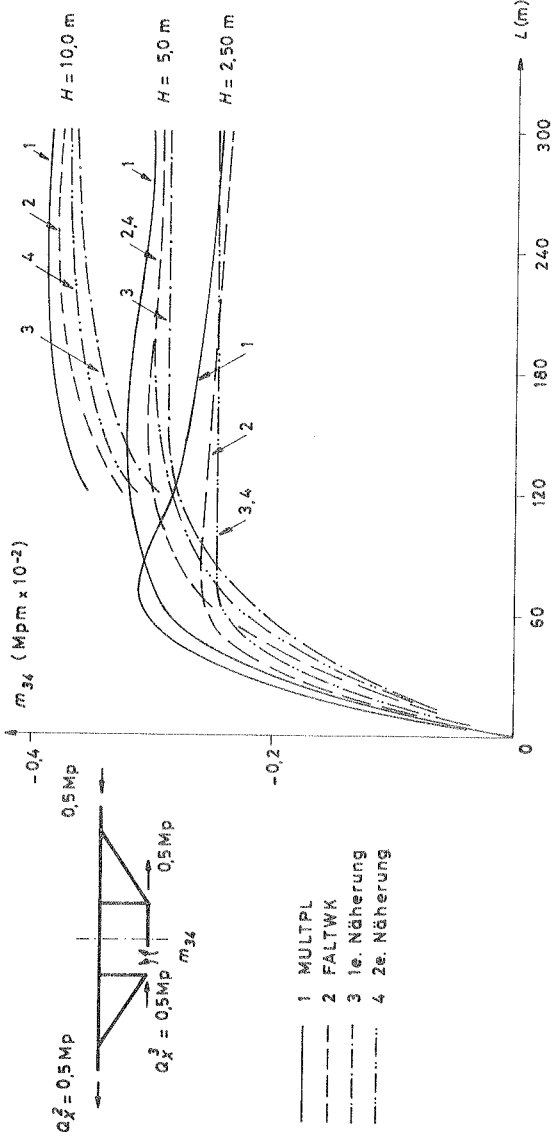
Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3000000,0 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0,2$



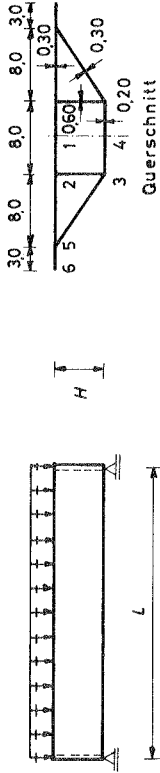
(—) Biegemomente in Längsrichtung infolge des symmetrischen Lastanteils in der Feldmitte der 2,50 m hohen Träger am Knoten 3 der Wand 34

a)  $m_{34}$  infolge vertikaler Festhaltekräfte



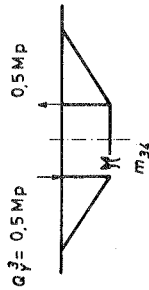
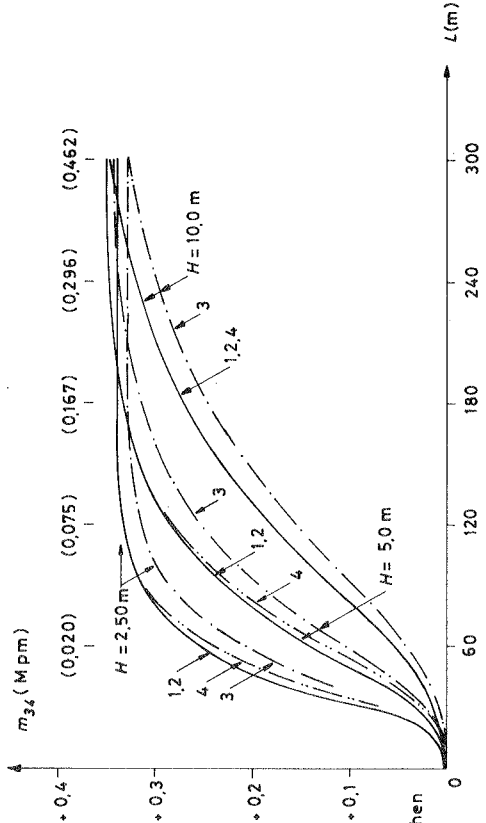
b)  $m_{34}$  infolge horizontaler Festhaltekräfte

Bild 610 Querbiegemomente  $m_{34}$  in der Feldmitte von Trägern unterschiedlicher Höhe und unterschiedlicher Länge - Konzentrierte Last in der Feldmitte



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

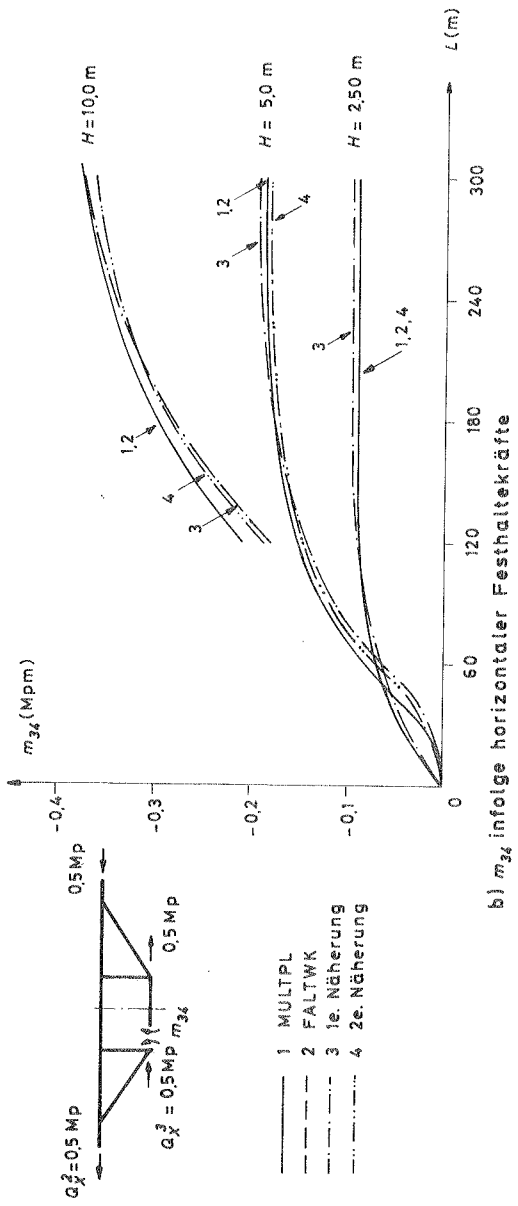
$E = 3000000,0 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0,2$



- 1 MULTPL
- 2 FALTKR
- 3 1e. Näherung
- 4 2e. Näherung

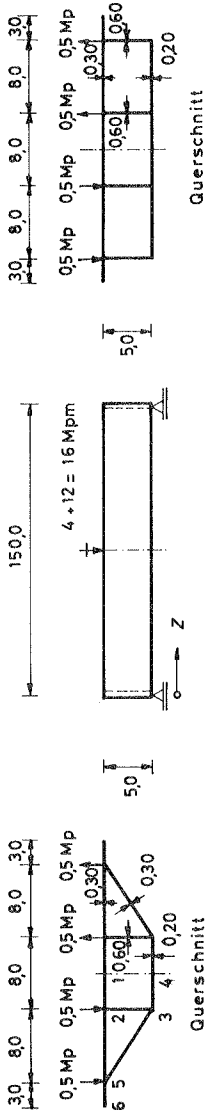
(—) Biegemomente in Längsrichtung infolge des symmetrischen Lastanteils in der Feldmitte der 2,50 m hohen Träger am Knoten 3 der Wand 3,4

a)  $m_{34}$  infolge vertikaler Festhaltekräfte



b)  $m_{34}$  infolge horizontaler Festhaltekräfte

Bild 6.11 Querbiegemomente  $m_{34}$  in der Feldmitte von Trägern unterschiedlicher Höhe und unterschiedlicher Länge - Gleichmäßig verteilte Last



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 30000000,0 \text{ Mpm/m}^2, \mu = 0,2$

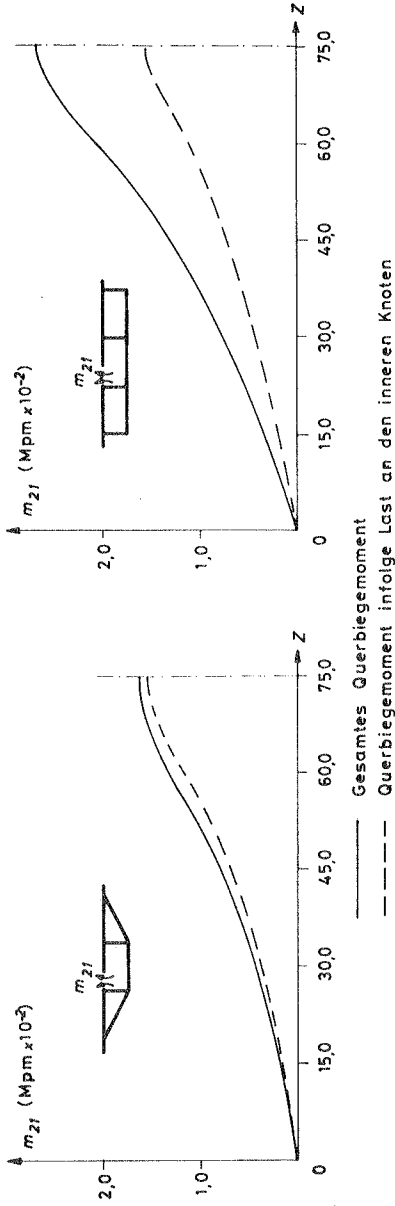
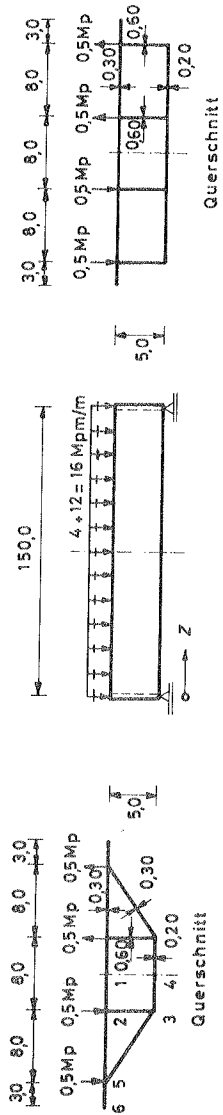


Bild 6.12 Verlauf des Querbiegemomentes  $m_{zI}$  in zwei Trägern verschiedener Querschnittsform - Konzentrierte Last in der Feldmitte -



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000.0 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0.2$

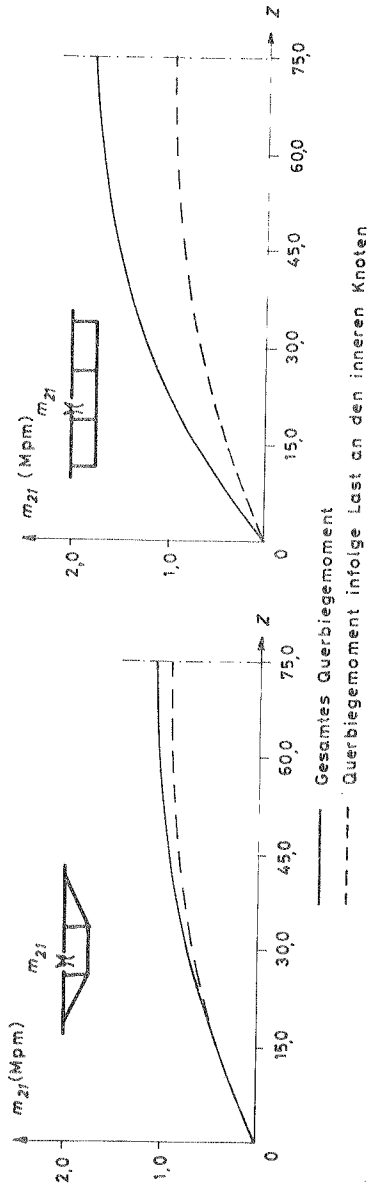
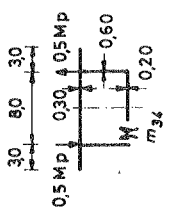
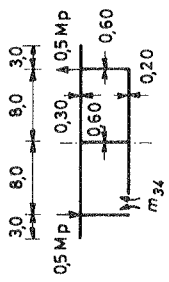


Bild 6.13 Verlauf des Querbiegemoments  $m_{zI}$  in zwei Trägern verschiedener Querschnittsform -Gleichmäßig verteilte Last-

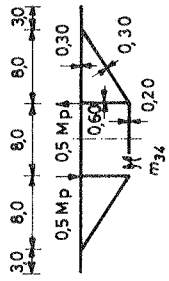




Einzelliger Querschnitt (I)



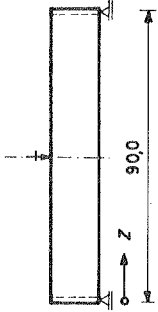
Zweizelliger Querschnitt (II)



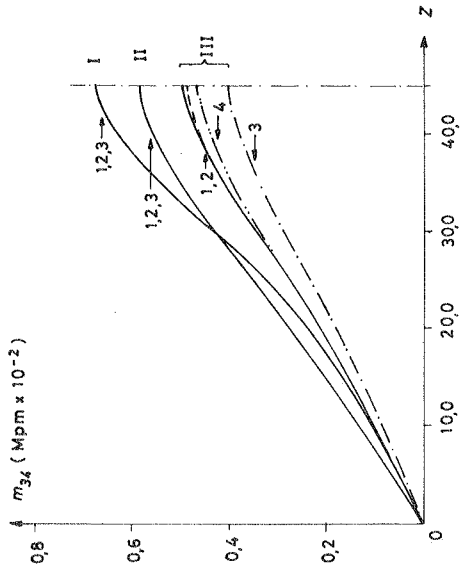
Dreizelliger Querschnitt (III)

$E = 30000000 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0.2$

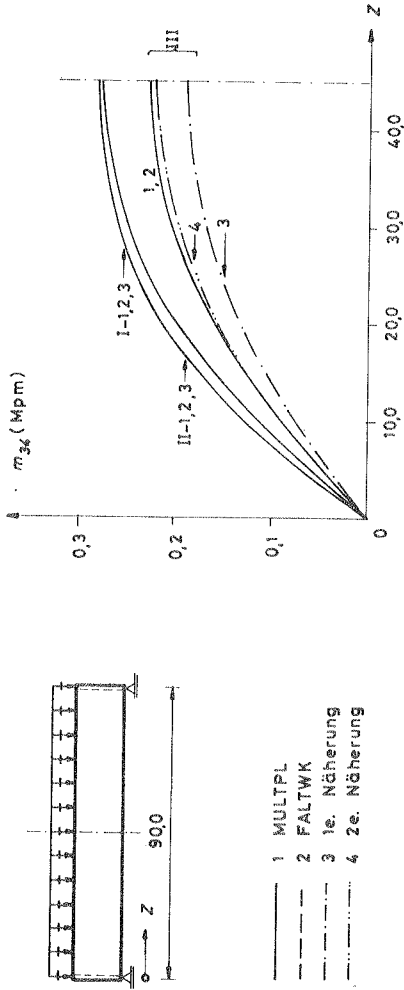
$m_{34} \text{ (Mpm} \times 10^{-2}\text{)}$



- 1 MULTPL
- 2 FALTWK
- 3 1e. Näherung
- 4 2e. Näherung

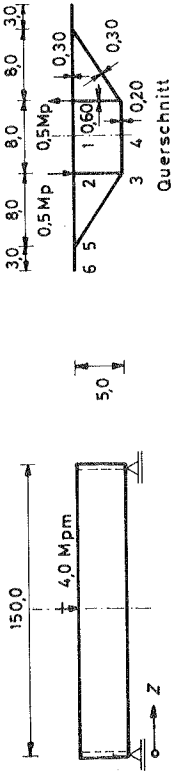


a) Konzentrierte Last in der Feldmitte



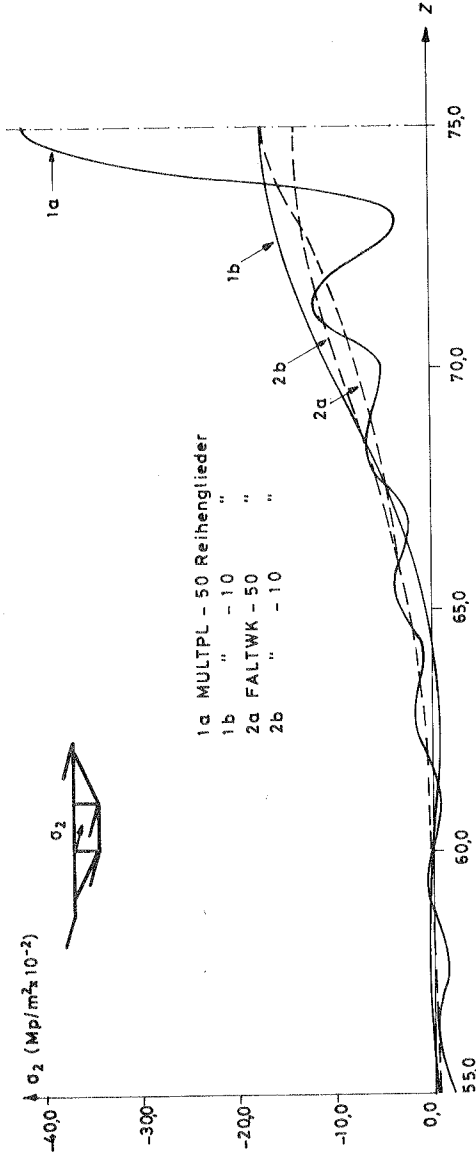
b) Gleichmäßig verteilte Last

Bild 6.14 Verlauf des Querbiegemoments  $m_x$  in drei Trägern mit verschiedenen Querschnittsformen



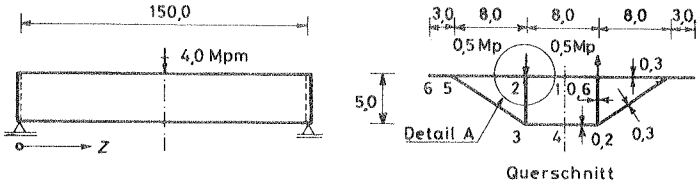
Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$



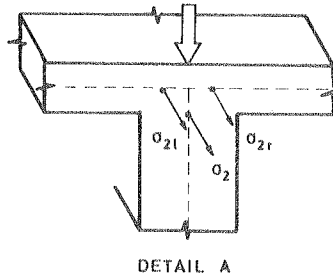
- 1a MULTPL - 50 Reihenglieder
- 1b " - 10 "
- 2a FALTKW - 50 "
- 2b " - 10 "

Bild 6.15 Verlauf der Normalspannungen  $\sigma_2$  (Steg 2-3) bei unterschiedlicher Zahl der Fourierreihenglieder am 150 m langen Träger



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0,2$



$\mu$	Zahl der Reihenglieder	MULTPL				FALTWK
		$\sigma_{21}$	$\sigma_2$	$\sigma_{2r}$	$\Delta \sigma_2$	$\sigma_2$
0,2	10	-14,42	-17,30	-14,14	20 %	-13,88
	30	-22,63	-30,25	-22,23	35 %	-16,57
	50	-29,78	-41,87	-29,48	41 %	-17,13
0,0	50	-33,10	-33,10	-33,10	0	-15,85

$$\Delta \sigma_2 = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_{21} + \sigma_{2r})}{\sigma_{21} + \sigma_{2r}} \times 100$$

Bild 6.16 Einfluß der Querdehnungszahl  $\mu$  auf die Normalspannungen ( $\text{Mp/m}^2 \times 10^2$ )

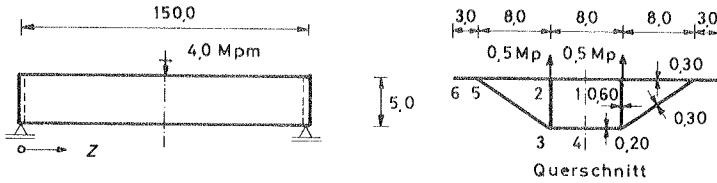
gen, besonders an den unbelasteten Knoten, auf nicht zu vernachlässigende Normalspannungen in der Querrichtung hin. Die Bedeutung der Querdehnungszahl  $\mu$  oder die der Dehnungen  $\epsilon_x$  wird in diesem Fall aus der Betrachtung der Ausdrücke für  $n_x$  und  $n_z$  in Gleichung (3.2.9) ersichtlich.

Diese unterschiedlichen Ergebnisse, deren Bedeutung bei der Anwendung von Fourierreihen nur stärker zum Ausdruck kommen kann, weisen auf eine nachteilige Erscheinung bei der Berechnung von zusammengesetzten Flächentragwerken hin, wenn diese mittels der zweidimensionalen Platten- und Scheibentheorie durchgeführt wird: An den Stellen, wo Scheiben und Platten zusammentreffen, tritt -senkrecht zu den Mittelflächen- eine Unverträglichkeit zwischen den Dehnungen der Scheiben und der Platten auf; diese Dehnungen werden nämlich im Rahmen der zweidimensionalen Theorien, in denen nur die Verträglichkeit entlang der Wandmittelfläche gewährleistet wird, nicht berücksichtigt. Um eine Übereinstimmung bei den Ergebnissen zu erzielen, müßte im allgemeinen die Berechnung unter Betrachtung des dreidimensionalen Kontinuums durchgeführt werden.

Die weiteren Untersuchungen werden unter Berücksichtigung von zehn Reihengliedern durchgeführt.

Für den 150 m langen Träger unter einer antimetrischen Last in der Feldmitte sind im Bild 6.17 die Normalspannungen in der Feldmitte und die Verläufe der Spannungen an den Knoten 2 und 3 des Steges 2-3 eingetragen. Man kann eine gute Übereinstimmung zwischen den mit MULTIL und FALTRK ermittelten Ergebnissen feststellen. Das Näherungsverfahren erbringt an einigen Stellen der oberen Platte keine zuverlässigen Ergebnisse, was auf die vereinfachenden Annahmen über den Verlauf der Verschiebungen in der Längsrichtung zurückgeführt wird; doch entspricht der zweite angenäherte Verschiebungsverlauf dem wirklichen Spannungszustand besser.

Wie im Bild 6.18 dargestellt ist, kann ähnliches für denselben Träger unter einer gleichmäßig verteilten antimetrischen Last

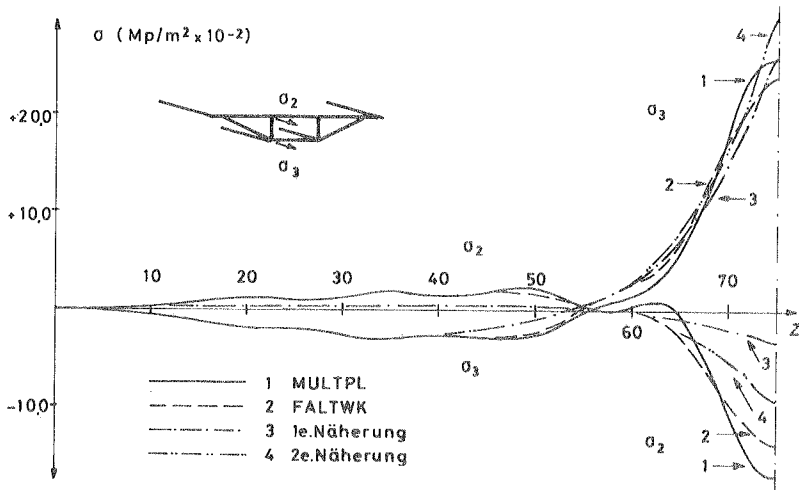


Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

Kno- ten	MULTPL	FALTKW	Erste Zweite Näherung	
	1	2	3	4
1	0,00	0,00	0,00	0,00
2	-17,30 *	-13,88	-3,28	-9,42
3	+26,04 *	+24,11	+25,88	+29,78
4	0,00	0,00	0,00	0,00
5	-4,70	-5,07	-9,85	-9,42
6	-3,43	-4,42	-12,32	-9,42

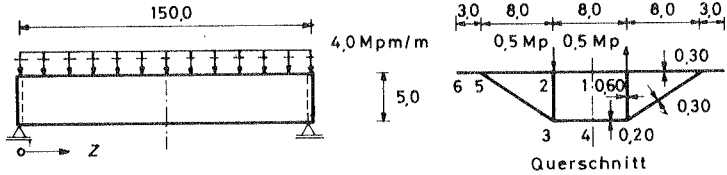
Normalspannungen ( $\text{Mp/m}^2 \times 10^{-2}$ ) in der Feldmitte



Verlauf der Normalspannungen an den Knoten 2 und 3 \*

\* s.a. Bild 6.16.  $\sigma_{2l} = -14,42$ ,  $\sigma_{2r} = -14,13$ ,  $\sigma_{3l} = +25,81$ ,  $\sigma_{3r} = +25,31$

Bild 6.17 Normalspannungen infolge konzentrierter Last in der Feldmitte — Antimetrischer Lastfall

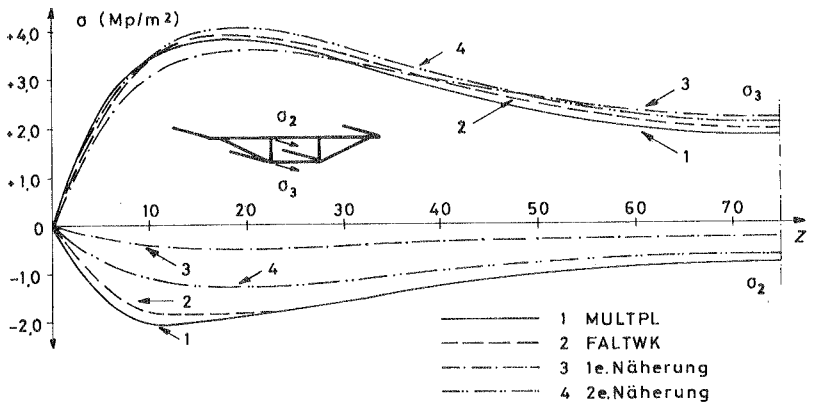


Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3000000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

Kno- ten	MULTPL	FALTWK	Erste Näherung	
	1	2	3	4
1	0,000	0,000	0,000	0,000
2	-0,798 *	-0,768	-0,270	-0,641
3	+1,752 *	+1,886	+2,124	+2,027
4	0,000	0,000	0,000	0,000
5	-0,535	-0,587	-0,809	-0,641
6	-0,019	-0,217	-1,011	-0,641

Normalspannungen ( $\text{Mp/m}^2$ ) in der Feldmitte



Verlauf der Normalspannungen an den Knoten 2 und 3 \*

\* s.a. Bild 6.16.  $\sigma_{21} = -0,779$ ,  $\sigma_{27} = -0,618$ ,  $\sigma_{31} = +1,857$ ,  $\sigma_{37} = +1,635$

Bild 6.18 Normalspannungen infolge gleichmäßig verteilter Last  
-Antimetrischer Lastfall-

festgestellt werden. Interessant sind die Verläufe der Normalspannungen, die nahe am Auflager die höchsten Werte aufweisen.

Die antimetrische Lastgruppe verursacht am hier untersuchten langen Träger Normalspannungen in der Längsrichtung, die im Vergleich zu den von der symmetrischen Lastgruppe verursachten von geringer Bedeutung sind. In den Bildern 6.19 -für konzentrierte Last in der Feldmitte- und 6.20 -für gleichmäßig verteilte Last- sind die Verläufe der Gesamtspannungen und der Spannungen infolge der symmetrischen Lastgruppe an den Knoten 2 und 3 dargestellt.

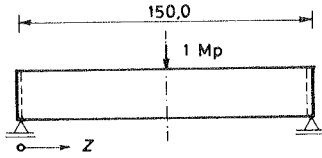
Beim antimetrischen Lastfall sind die Lasten an den inneren bzw. an den äußeren Knoten des geschlossenen Querschnitts aufgebracht worden. Nach den in den Bildern 6.19 und 6.20 angegebenen Tabellen, in denen die Normalspannungen in der Feldmitte eingetragen sind, stellt man fest, daß in beiden Fällen der Anteil der antimetrischen Lastgruppe die gleiche Größenordnung hat.

Für den symmetrischen Lastfall sind in den Tabellen (s. Bild 6.19 und Bild 6.20) die von den Lasten an den inneren Knoten verursachten Spannungen eingetragen. Nach der Balkenbiegelehre -Programm BALKEN- erhält man Ergebnisse, die mit den nach den Plattwerkstheorien erzielten sehr gut übereinstimmen.

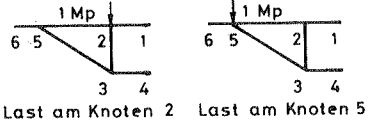
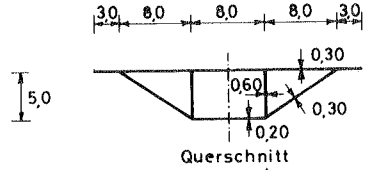
In den Bildern 6.21 -für konzentrierte Last in der Feldmitte- und 6.22 -für gleichmäßig verteilte Last- sind die Normalspannungen in der Feldmitte von Trägern unterschiedlicher Länge angegeben. Bei zunehmender Länge nehmen die von der antimetrischen Lastgruppe verursachten Spannungen ab.

Um die Berechtigung der im Abschnitt 5.4 gemachten Annahmen zu untersuchen, soll zunächst überprüft werden, inwieweit infolge einer antimetrischen Last die Normalspannungen entlang der oberen Platte einen linearen Verlauf aufweisen.





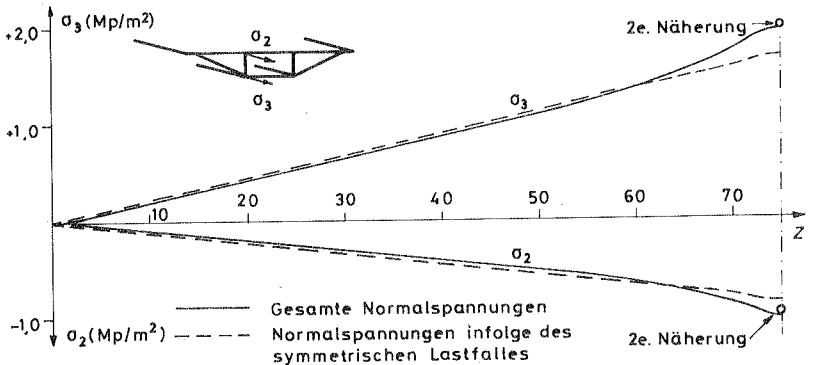
$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

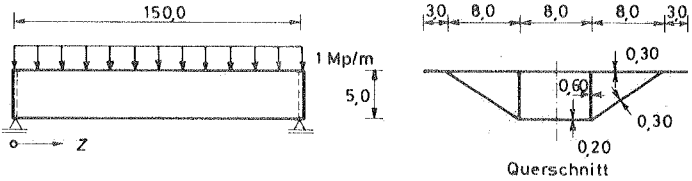
Kno- ten	Symm. Lastanteil			Antim. Lastanteil MULTPL	
	MULTPL	FALTKW	BALKEN	Last am Knoten 2	Last am Knoten 5
1	-0,822	-0,802	-0,833	0,000	0,000
2	-0,874	-0,854	-0,833	-0,141	-0,062
3	+1,682	+1,643	+1,662	+0,253	+0,129
4	+1,586	+1,560	+1,662	0,000	0,000
5	-0,782	-0,791	-0,833	-0,047	-0,032
6	-0,752	-0,771	-0,833	-0,034	+0,173

Normalspannungen (Mp/m<sup>2</sup>) in der Feldmitte

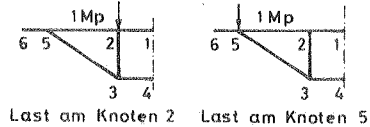


Verlauf der Normalspannungen an den Knoten 2 und 3

Bild 6.19 Anteil des symmetrischen Lastfalles an den gesamten Normalspannungen - Konzentrierte Last in der Feldmitte



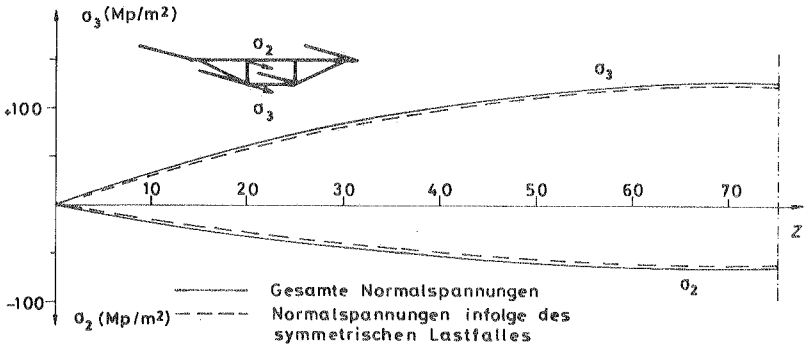
$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

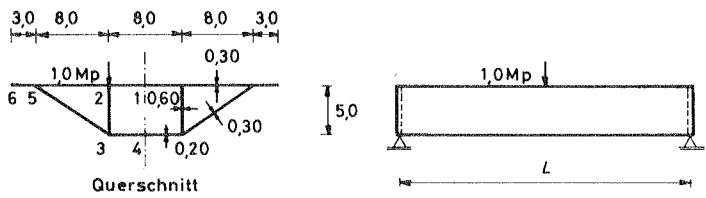
Kno- ten	Symm. Lastanteil			Antim. Lastanteil MULTPL	
	MULTPL	FALTWK	BALKEN	Last am Knoten 2	Last am Knoten 5
1	- 62,57	- 62,57	- 62,45	0,00	0,00
2	- 62,91	- 63,01	- 62,45	- 0,62	- 0,75
3	+ 124,95	+ 124,78	+ 124,64	+ 1,63	+ 2,17
4	+ 124,26	+ 123,90	+ 124,64	0,00	0,00
5	- 62,00	- 61,98	- 62,45	- 0,53	- 0,36
6	- 61,60	- 61,73	- 62,45	- 0,19	+ 0,48

Normalspannungen (Mp/m<sup>2</sup>) in der Feldmitte



Verlauf der Normalspannungen an den Knoten 2 und 3

**Bild 6.20** Anteil des symmetrischen Lastfalles an den gesamten Normalspannungen - Gleichmäßig verteilte Last



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

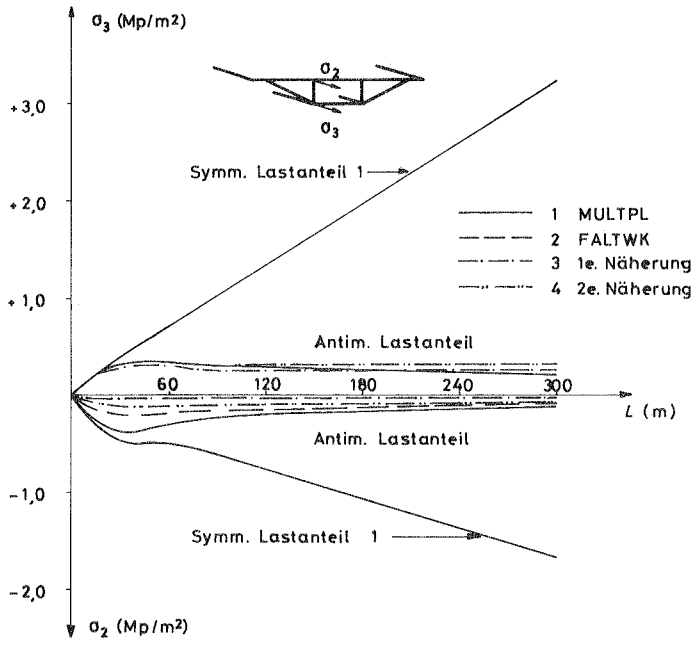
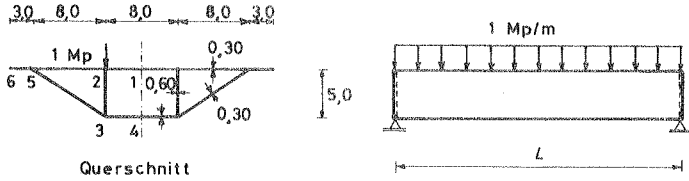


Bild 6.21 Normalspannungen in der Feldmitte von Trägern unterschiedlicher Länge - Konzentrierte Last in der Feldmitte



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

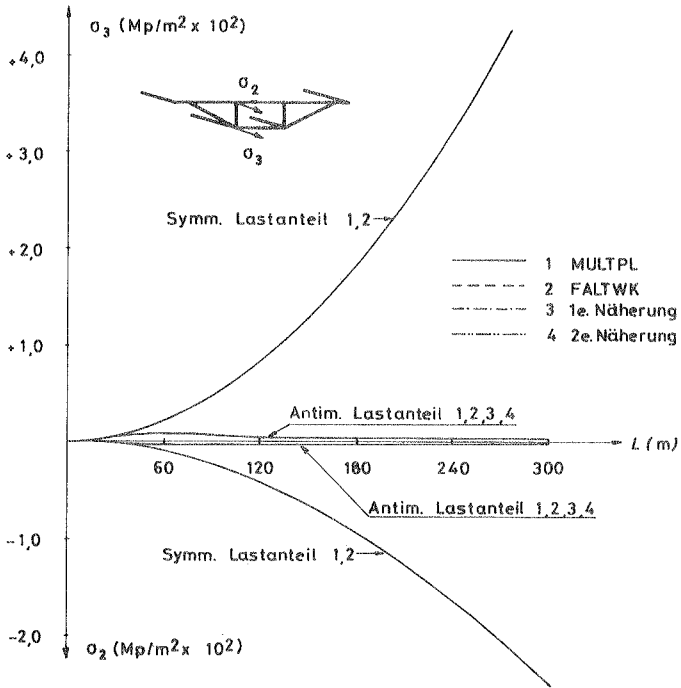


Bild 6.22 Normalspannungen in der Feldmitte von Trägern unterschiedlicher Länge - Gleichmäßig verteilte Last

Es werden außer unterschiedlichen Trägerlängen und unterschiedlichen Belastungen Träger mit zwei verschiedenen symmetrischen Querschnitten betrachtet: der in dieser Arbeit untersuchte Querschnitt und der aus drei rechteckigen Zellen bestehende Querschnitt.

Um das Tragverhalten beider Querschnitte -besonders im Hinblick auf die Verformung der inneren Zelle- vergleichen zu können, werden nur Lasten an den inneren Knoten der oberen Platte berücksichtigt.

In den Bildern 6.23 -Bild 6.23a für konzentrierte Last in der Feldmitte, Bild 6.23b für gleichmäßig verteilte Last- und 6.24 -Bild 6.24a für konzentrierte Last in der Feldmitte, Bild 6.24b für gleichmäßig verteilte Last- sind, für den 90 m und den 150 m langen Träger, an zwei Stellen entlang der Trägerachse jeweils die Verformungsfiguren in der Querschnittsebene dargestellt. Mit Ausnahme der am geschlossenen Querschnittsteil angeschlossenen Kragträger wird die Verformungsfigur von den Knotendrehungen wenig beeinflusst. Letztere werden deshalb in diesen Bildern nicht angegeben. Die Verschiebungen sind mit den Programmen MULTIL und FALTKW ermittelt worden: die Ergebnisse stimmen sehr gut überein.

Mittels der untersuchten Fälle erkennt man, daß die Vernachlässigung der Dehnungen -wenigstens für den antisymmetrischen Lastfall- berechtigt ist, da die Verschiebungen in Richtung der einzelnen Wände nahezu konstant bleiben.

In allen Fällen wird festgestellt, daß die Knotenverschiebungen parallel zur Symmetrieachse größer als die Verschiebungen senkrecht dazu sind.

Bei dem aus drei rechteckigen Zellen bestehenden Querschnitt sind die Verschiebungen der äußeren Knoten parallel zur Symmetrieachse fast so groß wie die Verschiebungen der inneren Knoten, obwohl die äußeren Stege nicht belastet und die äußeren Zellen verformbar sind. Die Profilverformung der äußeren

Zellen ist bei den hier untersuchten Lastfällen wesentlich kleiner als die der inneren Zelle. Die äußeren Stege tragen bei den hier betrachteten Trägerlängen fast so viel wie die inneren zur Lastabtragung bei.

Für die zuletzt untersuchten Fälle sind in den Bildern 6.25 -für die 90 m langen Träger- und 6.26 -für die 150 m langen Träger- die Verläufe der Normalspannungen entlang der oberen und unteren Platte dargestellt. An den Knoten, an denen die Abweichungen der für die angeschlossenen Wände ermittelten Normalspannungen von Bedeutung sind, werden beide Werte eingetragen.

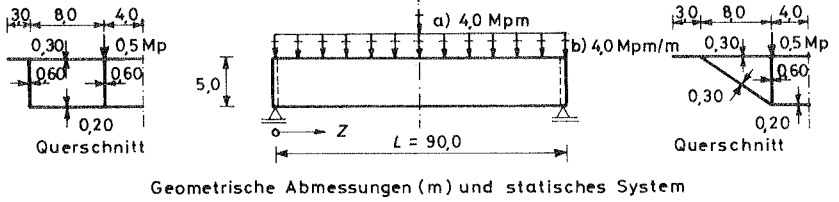
In diesen Fällen kann eine volle Beteiligung der oberen und unteren Platte an der Lastabtragung festgestellt werden, d.h. das Problem der mittragenden Breite braucht nicht berücksichtigt zu werden. Die Verläufe der Normalspannungen entlang der oberen und unteren Platte weichen vom linearen Verlauf stark ab.

Anschließend werden am in dieser Arbeit untersuchten Träger die nach den verschiedenen Verfahren ermittelten Normalspannungen entlang der oberen Platte betrachtet. Es soll untersucht werden, inwieweit die nach den Näherungsverfahren erzielten Ergebnisse mit den genaueren übereinstimmen.

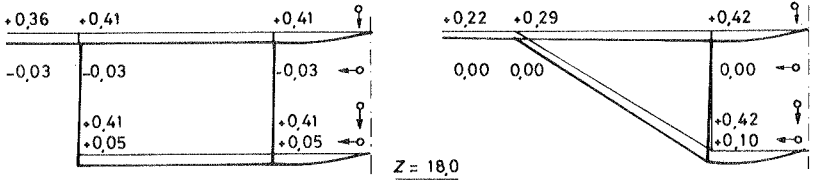
In den Bildern 6.27 -für den 90 m langen Träger- und 6.28 -für den 150 m langen Träger- sind die Verläufe der Normalspannungen an fünf Stellen entlang der Trägerachse dargestellt. An Hand dieser Verläufe wird festgestellt, daß mit der zweiten Näherung bessere Ergebnisse als mit der ersten erzielt werden.

### 6.2.3 Schubspannungen

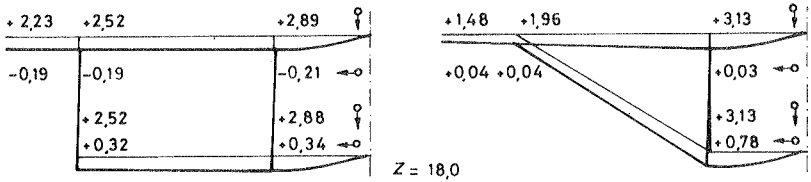
Anders als bei den Normalspannungen haben die Schubspannungen infolge einer antimetrischen Lastgruppe dieselbe Größenordnung wie die Schubspannungen infolge einer symmetrischen Lastgruppe. In den Tabellen 6.2 und 6.3 sind einmal für konzentrierte Last



$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

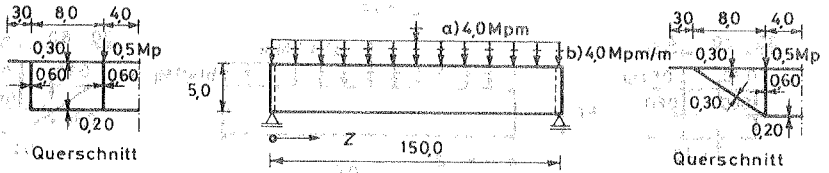


a) Knotenverschiebungen ( $m \times 10^{-5}$ ) infolge konzentrierter Last in der Feldmitte



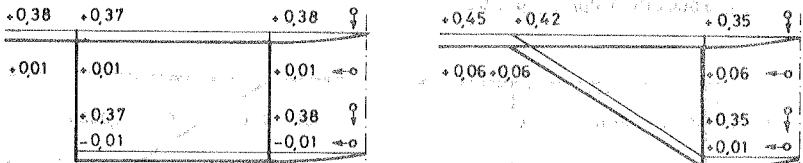
b) Knotenverschiebungen ( $m \times 10^{-4}$ ) infolge gleichmäßig verteilter Last

Bild 6 23 Knotenverschiebungen an den 90m langen Trägern

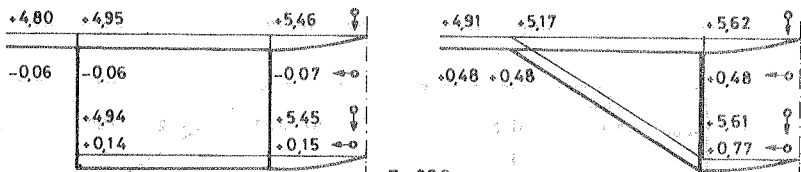


Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}$  ,  $\mu = 0,2$



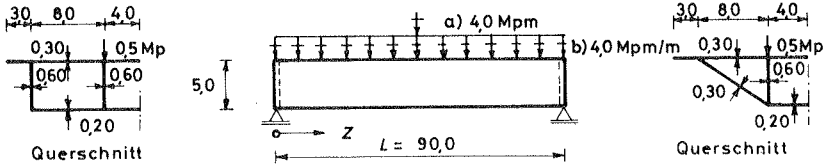
a) Knotenverschiebungen ( $m \times 10^{-5}$ ) infolge konzentrierter Last in der Feldmitte



b) Knotenverschiebungen ( $m \times 10^{-5}$ ) infolge gleichmäßig verteilter Last

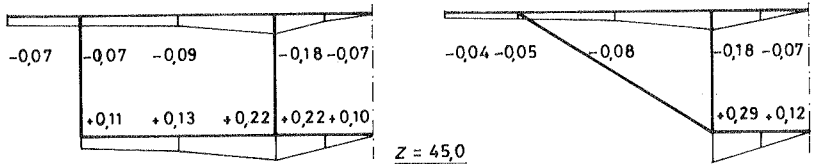
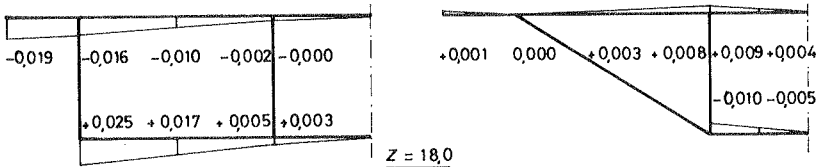
Bild 6.24 Knotenverschiebungen an den 150m langen Trägern



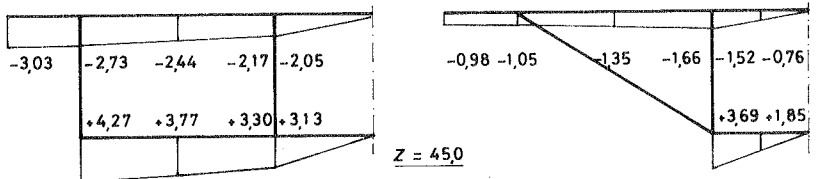
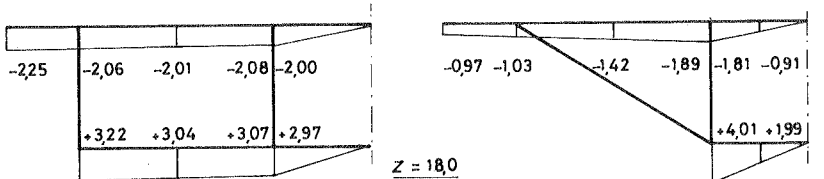


Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2, \mu = 0,2$

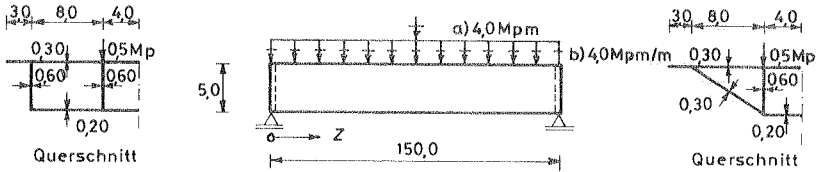


a) Normalspannungen infolge konzentrierter Last in der Feldmitte



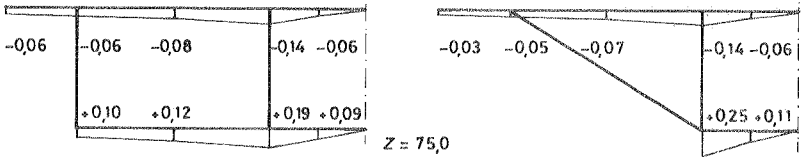
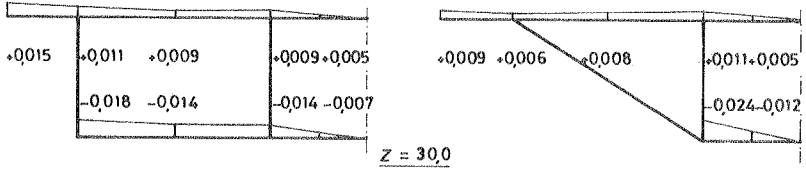
b) Normalspannungen infolge gleichmäßig verteilter Last

Bild 6.25 Normalspannungen in Längsrichtung (Mp/m<sup>2</sup>) entlang der oberen und unteren Platten an den 90m langen Trägern

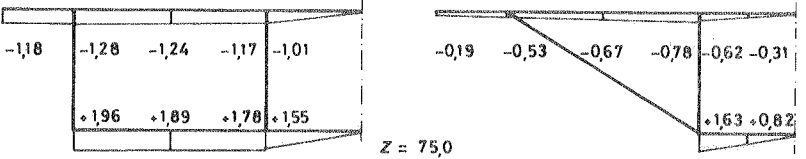
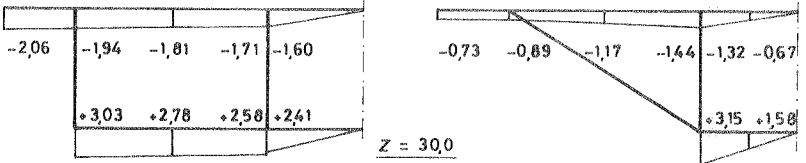


Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

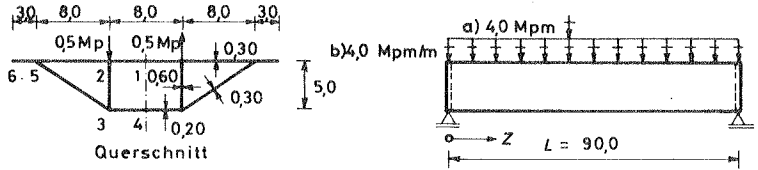


a) Normalspannungen infolge konzentrierter Last in der Feldmitte



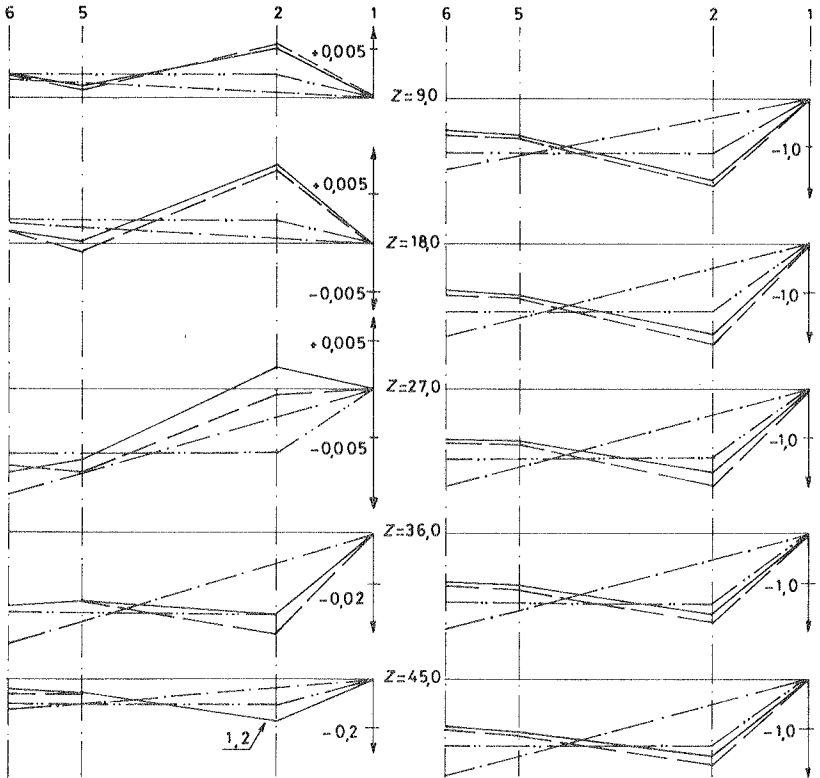
b) Normalspannungen infolge gleichmäßig verteilter Last

Bild 6.26 Normalspannungen in Längsrichtung (Mp/m<sup>2</sup>) entlang der oberen und unteren Platten an den 150m langen Trägern



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$



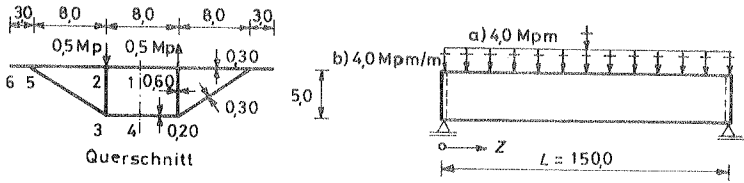
a) Konzentrierte Last in der Feldmitte

b) Gleichmäßig verteilte Last

————— 1 MULTPL  
 - - - - - 3 1e. Näherung

- - - - - 2 FALTWK  
 - - - - - 4 2e. Näherung

Bild 6.27 Normalspannungen in Längsrichtung entlang der oberen Platte am 90m langen Träger (Mp/m<sup>2</sup>)



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3000000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

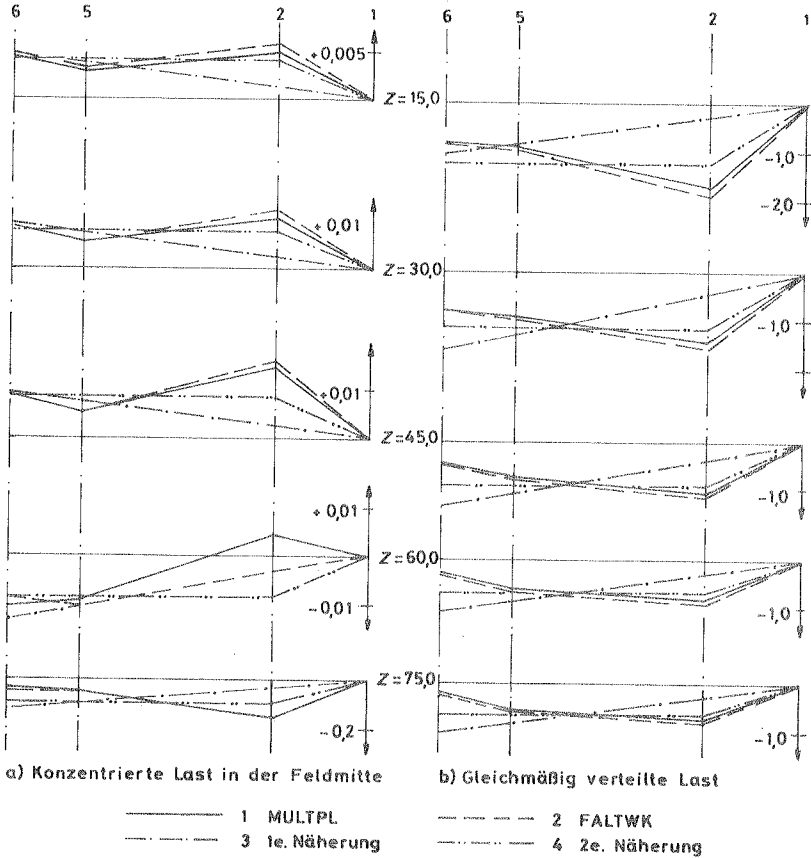
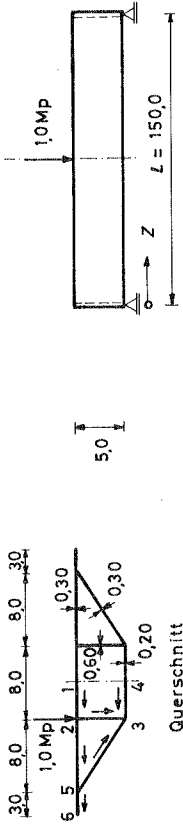


Bild 6.20 Normalspannungen in Längsrichtung entlang der oberen Platte am 150m langen Träger ( $\text{Mp/m}^2$ )



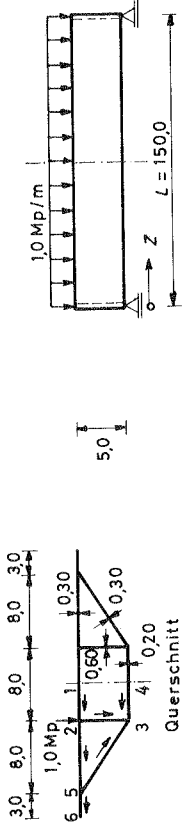
WAND Stelle	MULTPL		FALWK		BALKEN		1eNäherung		2eNäherung	
	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.
1	0,0000	+ 0,0640			0,0000					
1-2 Mitte	+ 0,0217	+ 0,0635	+ 0,0219	+ 0,0636	+ 0,0222	+ 0,0256	+ 0,0222	+ 0,0256	+ 0,0515	
2	+ 0,0425	+ 0,0616			+ 0,0444					
2	+ 0,0517	+ 0,0192			+ 0,0572					
2-3 Mitte	+ 0,0574	+ 0,0178	+ 0,0552	+ 0,0185	+ 0,0642	+ 0,0302	+ 0,0642	+ 0,0302	+ 0,0225	
3	+ 0,0246	+ 0,0209			+ 0,0296					
3	- 0,0868	- 0,0370			- 0,0886					
3-4 Mitte	- 0,0440	- 0,0998	- 0,0438	- 0,1008	- 0,0443	- 0,1129	- 0,0443	- 0,1129	- 0,1070	
4	- 0,0000	- 0,1005			0,0000					
2	- 0,0609	+ 0,0232			- 0,0701					
2-5 Mitte	- 0,0183	+ 0,0202	- 0,0255	+ 0,0207	- 0,0257	+ 0,0256	- 0,0257	+ 0,0256	+ 0,0194	
5	+ 0,0259	+ 0,0191			+ 0,0187					
5	+ 0,0592	+ 0,0184			+ 0,0520					
5-3 Mitte	+ 0,0721	+ 0,0185	+ 0,0509	+ 0,0191	+ 0,0647	+ 0,0103	+ 0,0647	+ 0,0103	+ 0,0168	
3	+ 0,0087	+ 0,0228			- 0,0001					
5	- 0,0333	+ 0,0007			- 0,0333					
5-6 Mitte	- 0,0167	+ 0,0004	- 0,0165	+ 0,0004	- 0,0165	+ 0,0256	- 0,0165	+ 0,0256	+ 0,0194	
6	0,0000	0,0000			0,0000					

Schubspannungen am Auflager (Z = 0,0)

WAND Stelle	MULTPL		FALTKW		BALKEN		2 <sup>o</sup> Näherung	
	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.
1	0,0000	+ 0,0936			0,0000			
1-2 Mitte	+ 0,0220	+ 0,0942	+ 0,0222	+ 0,0938	+ 0,0222	+ 0,0107	+ 0,0222	+ 0,0575
2	+ 0,0406	+ 0,0936			+ 0,0444			
2	+ 0,0484	+ 0,0612			+ 0,0572			
2-3 Mitte	+ 0,0526	+ 0,0584	+ 0,0518	+ 0,0589	+ 0,0542	+ 0,0740	+ 0,0542	+ 0,0707
3	+ 0,0250	+ 0,0527			+ 0,0296			
3	- 0,0649	- 0,1150			- 0,0686			
3-4 Mitte	- 0,0448	- 0,1097	- 0,0424	- 0,1117	- 0,0443	- 0,1242	- 0,0443	- 0,1280
4	0,0000	- 0,1071			- 0,0000			
2	- 0,0563	- 0,0282			- 0,0701			
2-5 Mitte	- 0,0169	- 0,0220	- 0,0226	- 0,0226	- 0,0257	+ 0,0107	- 0,0257	+ 0,0045
5	+ 0,0263	- 0,0126			+ 0,0187			
5	+ 0,0578	- 0,0062			+ 0,0520			
5-3 Mitte	+ 0,0681	- 0,0097	+ 0,0466	- 0,0140	+ 0,0647	- 0,0214	+ 0,0647	- 0,0200
3	+ 0,0066	- 0,0287			- 0,0001			
5	- 0,0316	- 0,0085			- 0,0333			
5-6 Mitte	- 0,0157	- 0,0035	- 0,0152	- 0,0030	- 0,0155	+ 0,0107	- 0,0155	- 0,0045
6	0,0000	0,0000			0,0000			

Schubspannungen an der Stelle Z = 60,0

Tabelle 5.2 Schubspannungen (Mp/m<sup>2</sup>) infolge konzentrierter Last in der Feldmitte



WAND Stelle	MULTIPL		FALTWK		BALKEN		1eNäherung		2eNäherung	
	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.
1-2 Mitte	0,00	+ 11,13	+ 3,28	+ 11,31	0,00	+ 2,70	+ 3,33	+ 2,70	+ 7,97	+ 7,97
2	+ 3,30	+ 11,25			+ 3,33		+ 6,66			
2	+ 6,71	+ 11,65								
2-3 Mitte	+ 7,90	+ 6,16	+ 8,51	+ 6,31	+ 8,59	+ 7,78	+ 9,63	+ 7,78	+ 6,95	+ 6,95
3	+ 9,17	+ 6,44			+ 4,07		+ 5,69			
3-4 Mitte	- 12,93	- 16,09	- 6,35	- 15,35	- 13,30	- 17,23	- 6,65	- 17,23	- 17,05	- 17,05
4	- 6,37	- 15,37			0,00		0,00			
2	- 9,09	- 0,66								
2-5 Mitte	+ 2,50	+ 0,15	- 3,51	+ 0,06	- 10,51	+ 2,70	+ 3,85	+ 2,70	+ 1,17	+ 1,17
5	+ 3,76	+ 0,60					+ 2,81			
5-3 Mitte	+ 8,35	+ 0,84	+ 7,48	+ 0,55	+ 7,81	+ 0,68	+ 8,90	+ 0,68	- 0,08	- 0,08
3	+ 10,14	+ 0,76					- 0,02			
5-6 Mitte	+ 4,59	- 0,24	- 2,33	- 0,14	- 5,00	+ 2,70	- 2,50	+ 2,70	+ 1,17	+ 1,17
6	- 2,27	- 0,11			0,00		0,00			
	0,00	0,00								

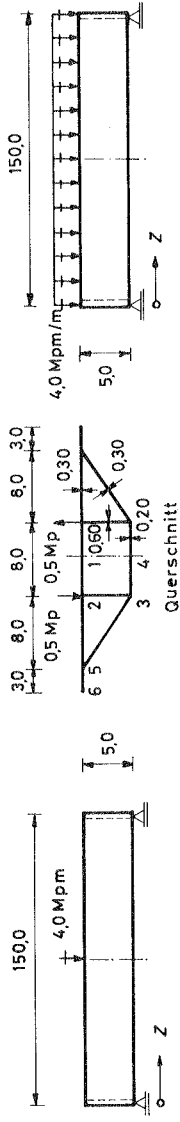
Schubspannungen am Auflager (Z = 0.0)

WAND Stelle	MULTIPL		FALTKW		BALKEN		1 <sup>te</sup> Näherung		2 <sup>te</sup> Näherung	
	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.	Symm.	Antim.
1	0,00	+ 1,95			0,00					
1-2	+ 0,67	+ 1,94	+ 0,67	+ 1,95	+ 0,67	+ 0,76				+ 1,56
2	+ 1,33	+ 1,93			+ 1,33					
2-3	+ 1,60	+ 0,66	+ 1,72	+ 0,65	+ 1,72	+ 0,93				+ 0,70
3	+ 1,81	+ 0,65			+ 1,93					
3-4	+ 0,78	+ 0,69			+ 0,89					
3	- 2,66	- 2,99			- 2,66					
3-4	- 1,33	- 3,02	- 1,33	- 3,04	- 1,33	- 3,43				- 3,26
4	0,00	- 3,03			0,00					
2	- 1,88	+ 0,62			- 2,10					
2-5	- 0,55	+ 0,58	- 0,77	+ 0,59	- 0,77	+ 0,76				+ 0,57
5	+ 0,78	+ 0,55			+ 0,56					
5	+ 1,78	+ 0,61			+ 1,56					
5-3	+ 2,18	+ 0,54	+ 1,56	+ 0,56	+ 1,96	+ 0,28				+ 0,47
3	+ 0,22	+ 0,53			0,00					
5	- 1,00	+ 0,02			- 1,00					
5-6	- 0,50	+ 0,01	- 0,50	+ 0,01	- 0,50	+ 0,76				+ 0,57
6	0,00	0,00			0,00					

Schubspannungen an der Stelle Z = 60,0

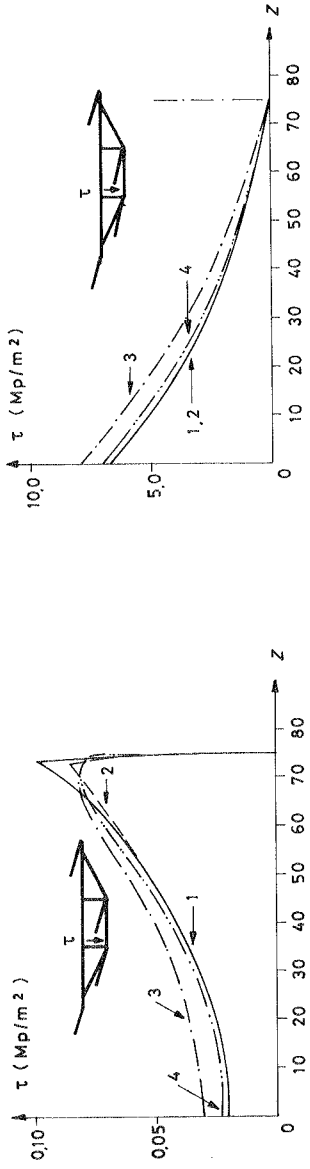
Tabella 53 Schubspannungen (Mp/m<sup>2</sup>) infolge gleichmäßig verteilter Last





Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 30000000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$



a) Konzentrierte Last in der Feldmitte

b) Gleichmäßig verteilte Last

- 1 MULTPL
- 2 FALTWK
- 3 1e. Näherung
- 4 2e. Näherung

Bild 6.29 Nach den verschiedenen Verfahren ermittelte Verläufe der Schubspannungen auf halber Höhe des Steges 2-3 — Antimetrischer Lastfall

in der Feldmitte und einmal für gleichmäßig verteilte Last, jeweils an den Stellen  $Z = 0$  und  $Z = 60$ , die Schubspannungen für den 150 m langen Träger angegeben.

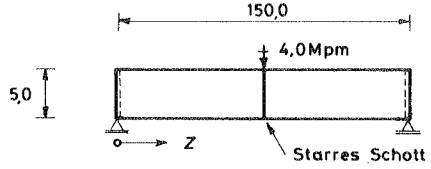
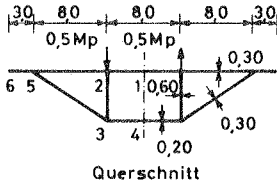
Für den symmetrischen Lastfall zeigen die mit dem Programm MULDIG errechneten Schubspannungen einen ungleichmäßigen Verlauf entlang der Querschnittswände. Mit dem Programm MULD erhält man, wie im Abschnitt 3.2 erläutert wurde, für die zwischen den Knoten liegenden Abschnitte einen konstanten Spannungsverlauf, der dem Mittelwert der Schubspannungen entspricht. Nach der Balkenbiegelehre -Programm BALKEN- erzielt man gute Ergebnisse.

Für den antisymmetrischen Lastfall ergibt das Programm MULD einen fast konstanten Verlauf der Schubspannungen zwischen den Knoten. Die mit dem Programm BALKEN erzielten Ergebnisse entsprechen den mit MULD errechneten Werten ziemlich genau. Die Näherungsverfahren liefern für einige Wände gute Ergebnisse; für die anderen Wände sind die Abweichungen sehr groß. Allerdings ist die Genauigkeit der mit der zweiten Näherung erzielten Ergebnisse größer als die mit der ersten Näherung erzielten.

Im Bild 6.29 sind die Verläufe der Schubspannungen in halber Höhe des Steges 2-3 für die antisymmetrische Belastungskomponente eingetragen. Im Fall a) wirkt eine Einzellast, im Fall b) eine gleichmäßig verteilte Last auf die beiden Innenstege des Trägers.

#### 6.2.4 Berücksichtigung eines starren Schotts in der Feldmitte

Gegenüber den Programmen MULD oder MULD 3, bei denen zuerst der unausgesteifte Träger berechnet wird und erst dann die Verträglichkeit zwischen Schott und Träger mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens gewährleistet wird, erfordert die Berücksichtigung eines starren Schotts in der Feldmitte mit dem Näherungsverfahren wenig Rechenaufwand: Man stellt für das starre Schott die Randbedingung  $V_3 = 0$  in der Feldmitte auf. Darüber



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

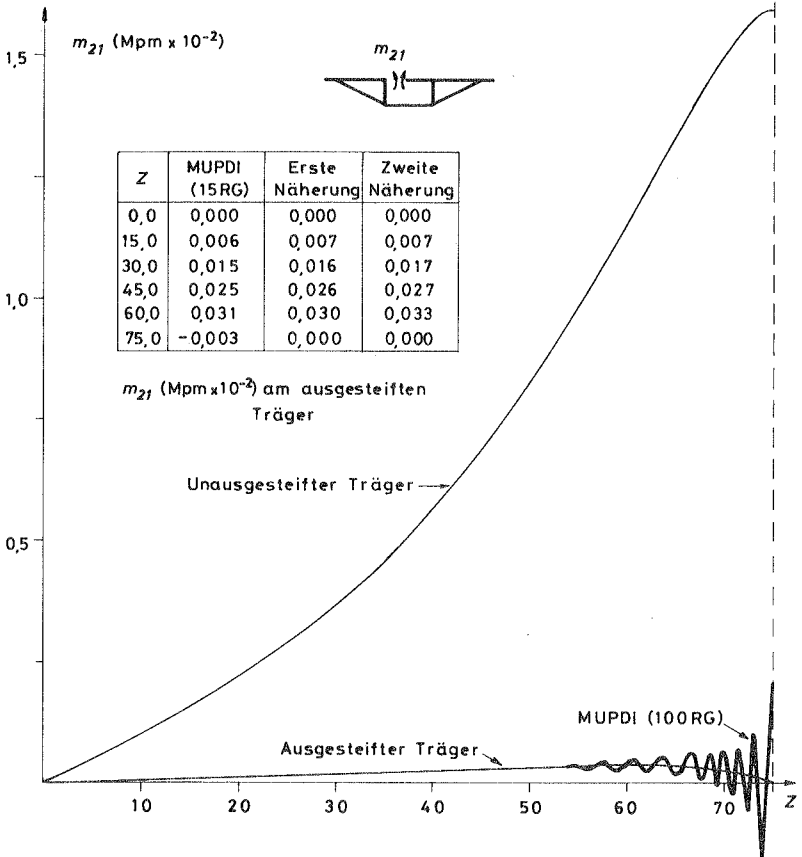
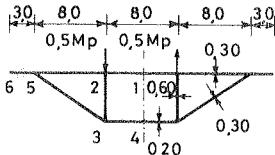
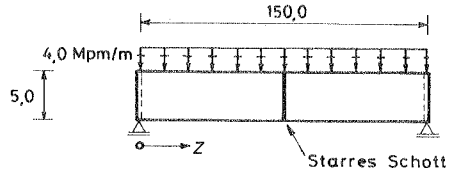


Bild 6.30 Verläufe der Querbiegemomente  $m_{21}$  am unausgesteiften und am in der Feldmitte starr ausgesteiften Träger -Konzentrierte Last in der Feldmitte-

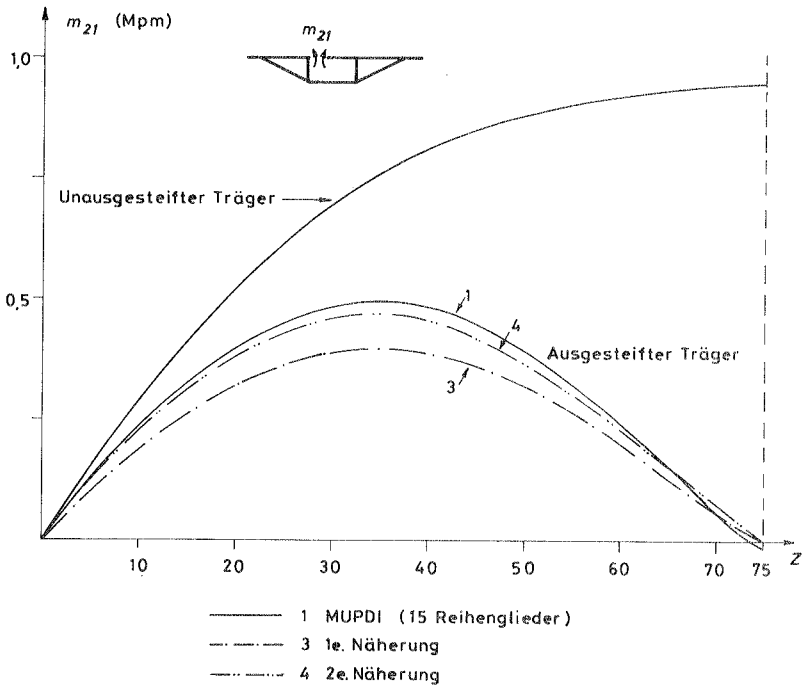


Querschnitt



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$



**Bild 6.31** Verläufe der Querbiegemomente  $m_{21}$  am ungesteiften und am in der Feldmitte starr ausgesteiften Träger - Gleichmäßig verteilte Last -

hinaus wird für die Berechnung mit den Programmen MUPDI [54] oder MUDI 3 [43] die Berücksichtigung von hundert Reihengliedern empfohlen.

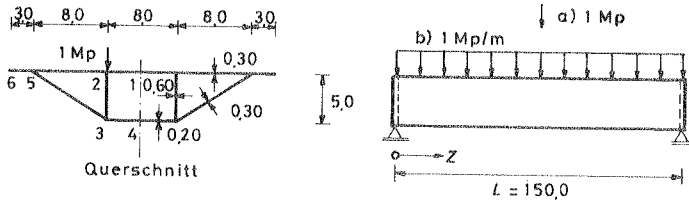
Wegen der Unverformbarkeit des Querschnitts an der starr ausgesteiften Stelle können hier keine Querbiegemomente auftreten. Bei der Berechnung mit hundert Reihengliedern erhält man mit dem Programm MUPDI für die Querbiegemomente einen ausgeprägt welligen Verlauf, der an der ausgesteiften Stelle die betragsgrößten Werte aufweist. Hingegen erhält man bei der Berücksichtigung von fünfzehn Reihengliedern einen nicht welligen Verlauf, der folgende Merkmale aufweist: an den unausgesteiften Stellen gleicht er die mit hundert Reihengliedern erzielten Ergebnisse aus, und an der ausgesteiften Stelle zeigt er abnehmende Werte.

In den Bildern 6.30 -für konzentrierte Last in der Feldmitte- und 6.31 -für gleichmäßig verteilte Last- sind die Verläufe des Querbiegemomentes  $m_y$  eingetragen. Für den Fall: konzentrierte Last in der Feldmitte entsprechen die Verformungs- und Spannungszustände des in der Feldmitte ausgesteiften Trägers denen des Trägers mit starrem Querschnitt. Eine gleichmäßig verteilte Last verursacht im Bereich zwischen Auflager und Schott Querbiegemomente, die etwa halb so groß wie die maximalen Querbiegemomente im unausgesteiften Träger sind.

### 6.3 Allgemeine Diskussion der Ergebnisse

In der Tabelle 6.4 sind für den 150 m langen, 5 m hohen Träger die Normal- Schub- und Querbiegespannungen am Knoten 3 der Wand 3-4 infolge gleichmäßig verteilter Last und konzentrierter Last in der Feldmitte angegeben. An dieser Stelle tritt in diesen Fällen die größte Beanspruchung auf. Die eingetragenen Werte sind mit dem Programm MULTPL unter Berücksichtigung von zehn Reihengliedern ermittelt worden.

Die für die Bemessung wichtigen Beanspruchungen sind die Normalspannungen beim symmetrischen Lastfall und die Querbiegespannungen beim antimetrischen Lastfall. Wie an Hand der ver-



Geometrische Abmessungen (m) und statisches System

$E = 3000000,0 \text{ Mp/m}^2$ ,  $\mu = 0,2$

Z (m)	$\sigma$		$\tau$		Querbiege- spannungen	
	Symm. Lastanteil	Antim. Lastanteil	Symm. Lastanteil	Antim. Lastanteil	Symm. Lastanteil	Antim. Lastanteil
0,0	0,000	0,000	-0,087	-0,097	0,000	0,000
75,0	+1,682	+0,261	-0,097 *	-0,096 *	0,000	$\pm 0,798$

\* Z = 67,50

a) Konzentrierte Last in der Feldmitte

Z (m)	$\sigma$		$\tau$		Querbiege- spannungen	
	Symm. Lastanteil	Antim. Lastanteil	Symm. Lastanteil	Antim. Lastanteil	Symm. Lastanteil	Antim. Lastanteil
0,0	0,000	0,000	-12,930	-16,094	0,000	0,000
75,0	+124950	+1,635	0,000	0,000	0,000	$\pm 47,555$

b) Gleichmäßig verteilte Last

Tabelle 6.4 Spannungen ( $\text{Mp/m}^2$ ) an der Wand 3-4 am Knoten 3

schiedenen Beispiele gezeigt wurde, kann bei langen Trägern der symmetrische Lastfall also mit Hilfe der Balkenbiegelehre, der antimetrische Lastfall hingegen mit dem hier aufgestellten Näherungsverfahren untersucht werden.

Mit der ersten Näherung für den Verlauf der Verschiebungen in der Längsrichtung erhält man für die ein- und zweizelligen Querschnitte sehr gute Ergebnisse (s. z.B. Bild 6.14). Für den hier untersuchten dreizelligen Querschnitt hingegen waren die Ergebnisse mit dem für die zweite Näherung angenommenen Verschiebungsverlauf besser.

Nach dem in dieser Arbeit angegebenen Näherungsverfahren erhält man für die Profilverformung die Gleichgewichtsbedingung

$$E'A^{**}V_3^{IV} - 6B^{**}V_3'' + E'C^{**}V_3 + q_3^{**} = 0 \quad , \quad (5.4.27)$$

in der die Glieder  $E'A^{**}V_3^{IV}$ ,  $6B^{**}V_3''$  und  $E'C^{**}V_3$  jeweils auf die Anteile der Normal-, Schub- und Querbiegespannungen an der Gleichgewichtsbedingung hindeuten. Nach (5.4.90) gilt

$$V_3^{IV} - 2r^2V_3'' + s^4V_3 = 0$$

mit

$$r^2 = \frac{6B^{**}}{2E'A^{**}} \quad (5.4.91) \quad \text{und} \quad s^4 = \frac{E'C^{**}}{E'A^{**}} \quad . \quad (5.4.92)$$

In der Tabelle 6.5 sind für die dort dargestellten Querschnitte die zugehörigen  $s$  und  $r$  Werte für verschiedene Querdehnungszahlen und Querschnittshöhen angegeben. Der Wert  $\mu = 0,4$ , der für Bauwerke aus Beton zu hoch ist, wurde hier gewählt, um seine Auswirkungen auf die Parameter  $s$  und  $r$  zu untersuchen.

Allgemein ist zu erkennen, daß bei dem hier untersuchten dreizelligen Querschnitt die Schubverzerrungen zu berücksichtigen sind ( $s \approx r$ ). Aus der Gleichung (5.4.92) kann entnommen werden, daß bei konstanter Höhe der Wert  $s$  für alle  $\mu$ -Werte

H (m)	30 60 30			30 60 30			30 60 30			30 60 30			
	$\mu$	$\delta$	$r$	$\delta/r$	$\delta$	$r$	$\delta/r$	$\delta$	$r$	$\delta/r$	$\delta$	$r$	$\delta/r$
2,5	0,0	0,1136	0,0258	4,4	0,0897	0,0255	3,5	0,0788	0,0843	0,9	0,0823	0,0807	1,0*
0,2	"	"	0,0288	3,9	"	0,0285	3,1	"	0,0754	1,0*	"	0,0732	1,1
0,4	"	"	0,0333	3,4	"	0,0329	2,7	"	0,0680	1,2	"	0,0653	1,3
5,0	0,0	0,0734	0,0134	5,5	0,0550	0,0128	4,6	0,0540	0,0700	0,8	0,0567	0,0680	0,8
0,2	"	"	0,0150	4,9	"	0,0143	4,1	"	0,0630	0,9	"	0,0612	0,9
0,4	"	"	0,0173	4,2	"	0,0165	3,6	"	0,0554	1,0-	"	0,0538	1,0-
10,0	0,0	0,465	0,0072	6,5	0,0377	0,0065	5,8	0,0363	0,0530	0,7	0,0383	0,0534	0,7
0,2	"	"	0,0080	5,8	"	0,0072	5,2	"	0,0476	0,8	"	0,0480	0,8
0,4	"	"	0,0093	5,0	"	0,0083	4,5	"	0,0416	0,9	"	0,0419	0,9

$E = 3\,000\,000,0 \text{ Mp/m}^2$

$$(5.4.27) \quad E' A^{**} v_3^{IV} - G B^{**} v_3^{III} + E' C^{**} v_3^{II} + q_3^{**} v_3 = 0$$

$$(5.4.46) \quad a v_3^{IV} - b v_3^{III} + c v_3^{II} + d v_3 + q_3^{**} = 0$$

$$\Delta^4 = \frac{E' C^{**}}{E' A^{**}} = \frac{c}{a}, \quad r^2 = \frac{G B^{**}}{2 E' A^{**}} = \frac{b}{2 a}$$

Tabelle 65  $\delta, r$  und  $\delta/r$ -Werte für verschiedene Querschnittshöhen und Querdrehungszahlen (Antimetrischer Lastfall)



konstant bleibt. Eine Gesetzmäßigkeit für  $r$  läßt sich nicht leicht aufstellen, weil im Ausdruck (5.4.29) für den Faktor  $\beta^{2n}$  der Koeffizient  $\nu$  ( $\nu = E/\sigma$ ) vorkommt, der von der Querdehnungszahl abhängt. Immerhin wird für den dreizeiligen Querschnitt festgestellt, daß bei zunehmenden  $\mu$ -Werten und dementsprechend kleineren Werten des Schubmoduls  $r$  abnimmt.

Die Differentialgleichung (5.4.90) hat (für  $s > r$ ) die Lösung

$$V_3 = k_1 \cosh(\alpha Z) \sin(\beta Z) + k_2 \cosh(\alpha Z) \cos(\beta Z) + k_3 \sinh(\alpha Z) \cos(\beta Z) + k_4 \sinh(\alpha Z) \sin(\beta Z) \quad (5.4.92)$$

in der

$$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}$$

und

$$\beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}$$

sind.

Für zwei Werte von  $r$  sind in der Tabelle 6.6 die Parameter  $\alpha$  und  $\beta$  der Lösung angegeben. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß die Vernachlässigung des Gliedes  $2r^2 V_3''$  der Gleichung (5.4.90) für den einzelligen Träger berechtigt ist ( $s/r > 4$ ), da die so erhaltenen Werte von den exakten nur geringfügig abweichen; auch für den zweizeiligen Träger dürfte dies laut Tabelle 6.6 in vielen Fällen zutreffen. Bei dem dreizeiligen Träger hingegen wäre diese Vernachlässigung nicht mehr berechtigt.

$r =$	Mit Schub $s/4$	Ohne Schub $0$
$\alpha =$	0,729 $s$	0,707 $s$
$\beta =$	0,685 $s$	0,707 $s$

Tabelle 6.6  $\alpha$  und  $\beta$  Werte für  $r = s/4$  und  $r = 0$

## 7. ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird eine einfache Berechnung eines langen, dünnwandigen, prismatischen Trägers mit symmetrischem dreizelligem Querschnitt angestrebt, der im Hinblick auf die Profilverformung nur einen Freiheitsgrad aufweist.

Ausgangspunkt für die Herleitung ist die Faltwerkstheorie auf der Grundlage von Rahmen- und Scheibenzuständen. Durch die zusätzliche Annahme unendlich großer Dehnsteifigkeit in der Querrichtung wird die Theorie in die von Wlassow vorgeschlagene Form überführt (Rahmen- und Balkenzustände bei Berücksichtigung der Schubverzerrungen).

Für den Verlauf der Verschiebungen in der Längsrichtung werden je nach Belastung (symmetrischer bzw. antimetrischer Lastfall) unterschiedliche Ansätze gemacht. Dieser für lange Träger vorgeschlagene Weg ermöglicht die Ableitung geschlossener Lösungen, wodurch sich der Rechenaufwand wesentlich verringert.

Anhand zahlreicher Beispiele werden die ermittelten Ergebnisse mit Berechnungen nach genaueren Theorien (Platten- und Scheiben-Idealisierung der Wandmittelfläche des Faltwerks) verglichen. Es wird festgestellt, daß dieses auch für Tischrechner geeignete Näherungsverfahren für die Baupraxis genügend genau ist.

Die in dieser Arbeit vorgenommenen Untersuchungen lassen erkennen, daß die Anwendung der Theorie nach Wlassow in Verbindung mit aufbereiteten Lösungsmethoden (z.B. Übertragungsverfahren oder das verallgemeinerte Verschiebungsgrößenverfahren) sinnvoll erscheint, bevor auf weitere verfeinerte Verfahren zurückgegriffen wird.

ANHANG

A. Integration der Differentialgleichung

$$aV(z)^{IV} - bV(z)'' + cV(z) = 0$$

mit den konstanten Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

Die Differentialgleichung kann folgendermaßen geschrieben werden

$$V(z)^{IV} - 2r^2V(z)'' + s^4V(z) = 0,$$

wobei

$$r^2 = \frac{b}{2a} \quad \text{und} \quad s^4 = \frac{c}{a} \quad \text{sind.}$$

Die Differentialgleichung hat eine allgemeine Lösung der Form

$$V(z) = k_1\phi_1(z) + k_2\phi_2(z) + k_3\phi_3(z) + k_4\phi_4(z),$$

wobei  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  und  $k_4$  die Integrationskonstanten sind.

Die Funktionen  $\phi_1(z)$ ,  $\phi_2(z)$ ,  $\phi_3(z)$  und  $\phi_4(z)$  hängen von  $s$  und  $r$  ab. Sie, sowie die in dieser Arbeit benötigten Ableitungen und Integrale, werden in der folgenden Tabelle angegeben.

**FUNKTIONEN, ABLEITUNGEN UND INTEGRALE**

		$s > r$ *	$s = r$	$s < r$	$s = 0$
		$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}$ $\beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}$		$\alpha = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}$ $\beta = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}$	$\alpha = \sqrt{2} \quad r$
Funktionen	$\phi_1$	$\cosh(\alpha z) \cdot \sin(\beta z)$	$\sinh(rz)$	$\sinh(\alpha z)$	$z$
	$\phi_2$	$\cosh(\alpha z) \cdot \cos(\beta z)$	$\cosh(rz)$	$\cosh(\alpha z)$	$1$
	$\phi_3$	$\sinh(\alpha z) \cdot \cos(\beta z)$	$z \cdot \cosh(rz)$	$\sinh(\alpha z)$	$\sinh(\alpha z)$
	$\phi_4$	$\sinh(\alpha z) \cdot \sin(\beta z)$	$z \cdot \sinh(rz)$	$\cosh(\beta z)$	$\cosh(\alpha z)$

\*Für  $r=0$  ist  $\alpha=\beta$

	$s > r$ *	$s = r$	$s < r$	$s = 0$	
	$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}$ $\beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}$		$\alpha = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}$ $\beta = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}$	$\alpha = \sqrt{2} \quad r$	
1. Ableitung	$\phi_1'$	$A = \alpha, B = \beta$ $A \phi_4 + B \phi_2$	$r \phi_2$	$\alpha \phi_2$	1
	$\phi_2'$	$A \phi_3 - B \phi_1$	$r \phi_1$	$\alpha \phi_1$	0
	$\phi_3'$	$A \phi_2 - B \phi_4$	$\phi_2 + r \phi_4$	$\beta \phi_4$	$\alpha \phi_4$
	$\phi_4'$	$A \phi_1 + B \phi_3$	$\phi_1 + r \phi_3$	$\beta \phi_3$	$\alpha \phi_3$
2. Ableitung	$\phi_1''$	$A = \alpha^2 - \beta^2, B = 2\alpha\beta$ $A \phi_1 + B \phi_3$	$r^2 \phi_1$	$\alpha^2 \phi_1$	0
	$\phi_2''$	$A \phi_2 - B \phi_4$	$r^2 \phi_2$	$\alpha^2 \phi_2$	0
	$\phi_3''$	$A \phi_3 - B \phi_1$	$2r \phi_1 + r^2 \phi_3$	$\beta^2 \phi_3$	$\alpha^2 \phi_3$
	$\phi_4''$	$A \phi_4 + B \phi_2$	$2r \phi_2 + r^2 \phi_4$	$\beta^2 \phi_4$	$\alpha^2 \phi_4$
3. Ableitung	$\phi_1'''$	$A = \alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)$ $B = \beta(3\alpha^2 - \beta^2)$ $A \phi_4 + B \phi_2$	$r^3 \phi_2$	$\alpha^3 \phi_2$	0
	$\phi_2'''$	$A \phi_3 - B \phi_1$	$r^3 \phi_1$	$\alpha^3 \phi_1$	0
	$\phi_3'''$	$A \phi_2 - B \phi_4$	$3r^2 \phi_2 + r^3 \phi_4$	$\beta^3 \phi_4$	$\alpha^3 \phi_4$
	$\phi_4'''$	$A \phi_1 + B \phi_3$	$3r^2 \phi_1 + r^3 \phi_3$	$\beta^3 \phi_3$	$\alpha^3 \phi_3$
1. Integrale	$\int \phi_1 dz$	$A = \alpha/(\alpha^2 + \beta^2)$ $B = \beta/(\alpha^2 + \beta^2)$ $A \phi_4 - B \phi_2$	$\phi_2 / r$	$\phi_2 / \alpha$	$z^2 / 2$
	$\int \phi_2 dz$	$A \phi_3 + B \phi_1$	$\phi_1 / r$	$\phi_1 / \alpha$	$z$
	$\int \phi_3 dz$	$A \phi_2 + B \phi_4$	$\phi_4 / r - \phi_2 / r^2$	$\phi_4 / \beta$	$\phi_4 / \alpha$
	$\int \phi_4 dz$	$A \phi_1 - B \phi_3$	$\phi_3 / r - \phi_1 / r^2$	$\phi_3 / \beta$	$\phi_3 / \alpha$

\* Für  $r=0$  ist  $\alpha=\beta$

		$s > r$ *	$s = r$	$s < r$	$s = 0$
		$\alpha = \sqrt{\frac{s^2 + r^2}{2}}$ $\beta = \sqrt{\frac{s^2 - r^2}{2}}$		$\alpha = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}$ $\beta = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}$	$\alpha = \sqrt{2} r$
2e Integrale		$C = (\alpha^2 - \beta^2)^2$ $A = (\alpha^2 - \beta^2)/C$ $B = 2\alpha\beta/C$			
	$\iint \phi_1 dz dz$	$A \phi_1 - B \phi_3$	$\phi_1 / r^2$	$\phi_1 / \alpha^2$	$z^3 / 6$
	$\iint \phi_2 dz dz$	$A \phi_2 + B \phi_4$	$\phi_2 / r^2$	$\phi_2 / \alpha^2$	$z^2 / 2$
	$\iint \phi_3 dz dz$	$A \phi_3 + B \phi_1$	$\phi_3 / r^2 - 2\phi_1 / r^3$	$\phi_3 / \beta^2$	$\phi_3 / \alpha^2$
	$\iint \phi_4 dz dz$	$A \phi_4 - B \phi_2$	$\phi_4 / r^2 - 2\phi_2 / r^3$	$\phi_4 / \beta^2$	$\phi_4 / \alpha^2$

\* Für  $r=0$  ist  $\alpha=\beta$

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,  
K. Papailiou, J. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen  
zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und  
verdrehbeanspruchter Stäbe mit I - Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer  
Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktio-  
nale und ihre Anwendung bei der Methode der fi-  
niten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R.W. Rembold, J. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75-2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und  
Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskre-  
tisierten und erweiterten Trefftz-Methode.