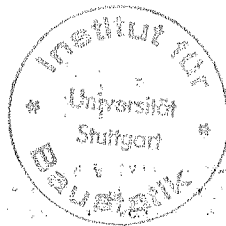


✓

# NICHTLINEARE BERECHNUNG VON TRAGWERKEN UNTER VERFORMUNGSABHÄNGIGER BELASTUNG MIT FINITEN ELEMENTEN

von

KARL SCHWEIZERHOF



Bericht Nr. 82-2

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Stuttgart 1982

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel  
als Dissertation der Fakultät 2: Bauingenieur- und Vermessungs-  
wesen der Universität Stuttgart am 25. 1. 82 vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Juli 1982

Hauptberichter: Professor Dr. -Ing. E. Ramm  
Mitberichter: Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer  
Professor Dr. -Ing. H. Bufler

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität  
Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80,  
bezogen werden.

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird der Einfluß der Verformungsabhängigkeit der Belastung auf Versagenslasten von Tragwerken untersucht. Dabei werden nur Belastungen betrachtet, die in Richtung der Normalen der belasteten Fläche der Tragwerke wirken. Als Rechenverfahren wird die Methode der finiten Elemente eingesetzt. Es werden dabei vorwiegend statische Untersuchungen bei unbegrenzt elastischem Materialverhalten unter Einschluß geometrischer Nichtlinearitäten vorgenommen.

Es wird gezeigt, daß, abhängig von Belastungsart und Randbedingungen, konservative bzw. nichtkonservative Probleme entstehen, die durch symmetrische bzw. unsymmetrische Gesamtsteifigkeitsmatrizen gekennzeichnet sind. Bei nichtkonservativen Problemen wird die Verwendung genäherter, symmetrisierter Steifigkeitsmatrizen bei linearen Stabilitätsuntersuchungen und nichtlinearen Berechnungen diskutiert.

Die Auswirkungen unterschiedlicher Lastdefinitionen werden zuerst an einfachen Beispielen dargestellt. Für die außendruckbelastete Kreiszylinderschale mit verschiedenen Randbedingungen und unterschiedlichen Belastungen werden ausführliche lineare und nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen durchgeführt.

## Summary

In this study the influence of displacement dependent loading on the stability and collapse loads of structures is investigated. Only pressure loads perpendicular to the surface of the deforming structures are analysed using the finite element method. The investigation is restricted to static problems with unbounded elastic material properties including geometrical nonlinearities.

Depending on the kind of load definition and boundary condition conservative or nonconservative problems arise resulting in symmetric or nonsymmetric structural stiffness matrices. In addition, for nonconservative problems the influence of approximate symmetrical stiffness matrices on linear and nonlinear stability loads is discussed.

Using simple examples the influence of different load definitions is shown. For the pressure loaded cylindrical shell with different kinds of loading and boundary conditions extensive linear and nonlinear stability analyses were performed.

Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungs-  
=====  
abhaengiger Belastung mit finiten Elementen  
=====

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	8
1. Einleitung und Ziel der Arbeit	12
2. Die nichtlinearen statischen Gleichungen des Kontinuums	17
2.1 Allgemeine Vorbemerkungen	17
2.2 Bezeichnungen fuer den inkrementellen Vorgang	17
2.3 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in inkrementeller Form	21
3. Verformungsabhaengige Belastungen	27
3.1 Vorbemerkungen	27
3.1.1 Definitionen	27
3.1.2 Die verformungsabhaengige Flaechenbelastung	30
3.2 Herleitung der Anteile der inkrementellen Gleichgewichtsbeziehungen fuer Flaechenbe- lastungen in Normalenrichtung	34
3.2.1 Ebener Fall	35
3.2.1.1 Raumbeste Belastung	37
3.2.1.2 Koerperfeste Belastung	41
3.2.2 Raeumlicher Fall	44
3.2.2.1 Raumbeste Belastung	46
3.2.2.2 Koerperfeste Belastung	53
3.3 Diskussion der Ergebnisse	56

3.3.1	Zur Konservativitaet bzw. Nichtkonservativitaet von elastischen Systemen	56
3.3.2	Verformungsabhaengige Flaechenbelastungen Diskussion des Schrifttums	63
3.3.3	Zur physikalischen Wirklichkeit nichtkonservativer Probleme infolge statischer verformungsabhaengiger Belastungen	66
3.4	Diskretisierung durch finite Elemente	69
3.4.1	Verwendung finiter Elemente bei nichtkonservativen Problemen	69
3.4.2	Entwicklung der Elementlaststeifigkeitsmatrizen	71
3.4.2.1	Beruecksichtigung der Verformungsabhaengigkeit der Belastung	73
3.4.2.2	Darstellung der verwendeten Elementtypen	76
3.4.2.3	Struktur der Elementlaststeifigkeitsmatrizen und der Gesamtsteifigkeitsmatrix	86
3.4.2.4	Zwangssymmetrisierung von Laststeifigkeitsmatrizen fuer nichtlineare Berechnungen	87
4.	Stabilitaet bei verformungsabhaengiger Normalendruckbelastung	91
4.1	Stabilitaetsarten	91
4.2	Methoden zur Stabilitaetsuntersuchung bei konservativen Problemen	93
4.3	Nichtkonservative Stabilitaetsprobleme	96
4.3.1	Rein nichtkonservative Systeme	99
4.3.2	Hybride nichtkonservative Systeme / Stabilitaetsuntersuchungen mit zwangssymmetrisierten Matrizen	100
5.	Rechentechnik	110
5.1	Gleichgewichtssiteration	110
5.1.1	Iterationsverfahren mit Laststeuerung	111
5.1.2	Iterationsverfahren mit Verschiebungssteuerung	113

5.1.3	Iterationsverfahren mit Steuerung ueber Bedingungen aus Lasten und Verschiebungen/ Automatische Schrittweitenfindung	115
5.1.4	Weitere Iterationsverbesserungen	120
5.2	Der Steifigkeitsparameter nach Bergan	121
5.3	Konvergenzkriterien	123
6.	Klassische Beispiele	126
6.1	Kreisring unter Aussendruckbelastung	126
6.1.1	Der beidseits gelenkig gelagerte Halbkreisbogen	127
6.1.2	Der geschlossene Kreisring	128
6.1.3	Der geschlossene Kreisring unter nicht-rotationssymmetrischer Belastung	132
6.2	Der Kragarm unter konstanter Gleichlast	136
6.3	Der Beckische Knickstab	139
7.	Stabilitaet von Kreiszyinderschalen unter Aussendruck	143
7.1	Rotationssymmetrische Belastung	145
7.1.1	Die beidseits gestuetzte Kreiszyinderschale	145
7.1.2	Die Kragchale	157
7.2	Nichtrotationssymmetrische Belastung	163
7.2.1	Allgemeine Belastung	163
7.2.2	Windbelastung	173
7.2.2.1	Erfassung der Windbelastung	173
7.2.2.2	Vereinfachte Berechnungskonzepte	176
7.2.2.3	Die beidseits gestuetzte Kreiszyinderschale	178
7.2.2.4	Die Kragchale	183
8.	Schlussfolgerungen	196
	Schrifttum	199
	Anhang	221

Bezeichnungen, Abkuerzungen, Symbole

=====

Indizierung

links	oben	m	Wirkungszustand
			0,1,2 geometrisch nichtlineare Analyse
		D	Differentialoperator wird auf vorgestellten Vektor angewendet
		G	Grundzustand bei Stabilitaetsanalyse
		(n)	im Zustand n
	unten	n	Bezugszustand
rechts	oben	T	transponierte Matrix
		D	Differentialoperator wird auf nachfolgenden Vektor angewendet
		(n)	im Zustand n
		unten	i, j, k
		, j	Ableitung nach der j-ten Koordinate
Mitte	oben	D	Bezeichnung fuer Matrizen, die Differentialoperatoren enthalten

Geometrie

${}^m x_i$	kartesische Koordinate eines materiellen Punktes im Zustand m (i = 1, 2, 3)
${}^m A, {}^m V$	Flaeche, Volumen des Koerpers im Zustand m
$d({}^m a), d({}^m v)$	infinitesimales Flaechen- und Volumenelement im Zustand m
${}^m n_i$	Flaechennormalenvektor im Zustand m



Statische Groessen:

${}^m t_i$	Oberflaechenkraftkomponente	} im Zustand m, } bezogen auf n
${}^m q_i$	Volumenkraftkomponente	
${}^m \rho$	spezifische Masse	im Zustand m
${}^m R_i$	verallgemeinerte aeussere Knotenkraft	} im Zu- } stand m
${}^m F_i$	verallgemeinerte innere Knotenkraft	
${}^m \tau_{ij}$	Cauchy Spannungstensor	im Zustand m
${}^m s_{ij}$	Piola-Kirchhoff Spannungstensor 2.Art	im Zu- stand m, bezogen auf den Zustand n
${}^n s_{ij}$	Inkrement des Piola-Kirchhoff Spannungstensors 2.Art	
${}^m p_i$	Drucklastkomponente	im Zustand m

Kinematische Groessen:

${}^m X_{i,j} = \frac{\partial^m x_i}{\partial^m x_j}$	Deformationsgradient
${}^m u_i$	Verschiebungsvektor vom Ausgangszustand zum Zustand m
$u_i$	Verschiebungsinkrement
$\Delta u_i^m$	Verschiebungszuwachs des Inkrements $u_i$ im Iterationszyklus m
$\delta u_i$	virtuelle Verschiebung
${}^m \epsilon_{ij}$	Green-Lagrange Verzerrungstensor im Zustand m, bezogen auf den Zustand 0
${}^m \epsilon_{ij}$	Green-Lagrange Verzerrungstensor im Zustand m

Konstitutive Groessen:

${}^m C_{ijrs}$	konstitutiver Tensor im Zustand m, bezogen auf n
${}^n C_{ijrs}$	inkrementeller konstitutiver Tensor

Arbeitsausdrücke:

${}^m \delta W_{(i)}, {}^m \delta W_{(a)}$  virtuelle innere und äussere Arbeit im Zustand  $m$

Sonstige Größen

$e_{ij}, e_{ijk}$  Permutationssymbol  
 $\Phi$  Interpolationsfunktionen  
 ${}^m \lambda$  Proportionalitätsfaktor in der Lage  $m$   
 $\Delta \lambda^n$  Zuwachs des Proportionalitätsfaktors in der Lage ( $n$ )  
 ${}^m \omega$  Eigenkreisfrequenz  
 $Sp$  Current-stiffness Parameter  
 $K$  Beulfaktor fuer Kreisringe  
 $p_{kr}$  Stabilitätslast  $p_{kr} = K * EJ / R^3$

Zylinderschalen (isotrope Schalen)

siehe hierzu Kapitel 7.

Matrizen und Spaltenvektoren

${}^m \mathbf{u}, \mathbf{u}$  Vektor der Knotenpunktverschiebungen  
 ${}^m \ddot{\mathbf{u}}$  Vektor der Knotenpunktbeschleunigungen  
 ${}^m \mathbf{v}$  Eigenvektor (statische bzw. kinetische Stabilitätsuntersuchungen im Zustand  $m$ )  
 $\mathbf{B}_{NL}^D, \mathbf{B}_L^D$  Verbindungsoperatormatrizen zwischen Verschiebungsableitungen und Knotenpunktverschiebungen im Zustand 1 bezogen auf den Zustand 0  
 $\mathbf{D}$  Vektor der Verschiebungsableitungen  
 ${}^m_0 \mathbf{\epsilon}, \mathbf{\epsilon}$  Vektor der Verzerrungen  ${}^m_0 \epsilon_{ij}, {}_0 \epsilon_{ij}$ , bezogen auf den Zustand 0  
 $\mathbf{e}$  linearer Anteil von  $\mathbf{\epsilon}$   
 ${}^1_0 \mathbf{s}, \mathbf{s}$  Vektor der Komponenten der Piola-Kirchhoff Spannungen 2. Art  ${}^m_0 S_{ij}, {}_0 S_{ij}$   
 ${}^m_0 \mathbf{S}$  Matrix der Piola-Kirchhoff Spannungen 2. Art  ${}^m_0 S_{ij}$

${}^m C, C$	Matrix der Werkstoffkennwerte (bezogen auf den Zustand 0)
${}^m_0 K$	inkrementelle Gesamtsteifigkeitsmatrix im Zustand m (bezogen auf den Zustand 0)
${}^m_0 K_e$	inkrementelle elastische Steifigkeitsmatrix
${}^m_0 K_g$	geometrische Steifigkeitsmatrix, auch Anfangsspannungsmatrix
${}^m_0 K_u$	Matrix der Anfangsverschiebungen
${}^m_0 K_L$	Laststeifigkeitsmatrix
${}^m_0 \tilde{K}_L$	symmetrisierte Laststeifigkeitsmatrizen
${}^m_0 D_r, D_s$	Operatormatrizen
$M$	Massenmatrix
${}^m_0 F$	Vektor der verallgemeinerten inneren Knotenkraefte im Zustand m (bez. auf den Zustand 0)
${}^k R$	Vektor der aeusseren Knotenkraefte in der Lage k , bezogen auf den Zustand 0
$R^k$	normierter Lastvektor in der Lage k
$\Phi$	Matrix der Interpolationsfunktionen

Weitere Bezeichnungen, Abkuerzungen und Symbole werden im Text erlaeutert.

## 1. Einleitung und Ziel der Arbeit

=====

Mit der Entwicklung der Grossrechenanlagen sind die Moeglichkeiten im Ingenieurwesen gewachsen, das Trag- und Verformungsverhalten allgemeiner Strukturen auch unter grossen Verformungen bis hin zu den Versagenszuständen rechnerisch zu verfolgen. Die dabei entwickelten numerischen Verfahren und Rechenmodelle erlauben die Beruecksichtigung geometrischer und stofflicher Nichtlinearitaeten der Struktur.

Die genauere Erfassung der Seite der Struktur erfordert naturgemaess auch eine genauere Erfassung der Lastseite. Das uebliche Vorgehen besteht darin, dass statische Lasten in Richtung und Groesse und dynamische Lasten in Richtungs- und Groessenaenderung als verformungsunabhaengig betrachtet werden. Lasten, die durch den Kontakt der Struktur mit Medien anderer Aggregatzustaende wie Gas oder Fluessigkeiten entstehen, sind bei flexibler Struktur aber in Groesse und Richtung von der aktuellen Form der Kontaktflaeche (=Oberflaeche) der Struktur abhaengig. Dies fuehrt zur Bezeichnung verformungsabhaengige Lasten. Sie besitzen meist Komponenten tangential und normal zur verformten Oberflaeche. Tangentiale Lasten entstehen durch die Reibung des vorbeistromenden Mediums an der Struktur, waehrend normale Lasten den Druck oder Sog des umgebenden Mediums wiedergeben. Treten derartige Lasten auf, so muss das Rechenmodell um die dabei entstehenden -haeufig nicht-linearen- Terme bezueglich der Last erweitert werden.

Tangentiale Lasten sind ein Kennzeichen stroemungsmechanischer und aerodynamischer Probleme. Auf ihre Betrachtung soll im Rahmen dieser Arbeit weitgehend verzichtet werden.

Die praktischen Probleme mit verformungsabhaengigen Lasten in Normalenrichtung lassen sich in zwei Gruppen unterteilen, die durch ihre Versagensart gekennzeichnet sind.

1. Strukturen, die infolge grosser Verformungen unbrauchbar werden. (Spannungsprobleme, evtl. nichtlineares Materialverhalten)
2. Strukturen, die ein ploetzliches Versagen aufweisen. (Stabilitaetsprobleme)

Als Beispiel fuer den ersten Problemkreis laesst sich das unrunde zylindrische Rohr unter konstantem Innen- oder Aussendruck nennen, das mit steigender Druckhoehe die urspruengliche Form verliert und eine ovale Querschnittsform

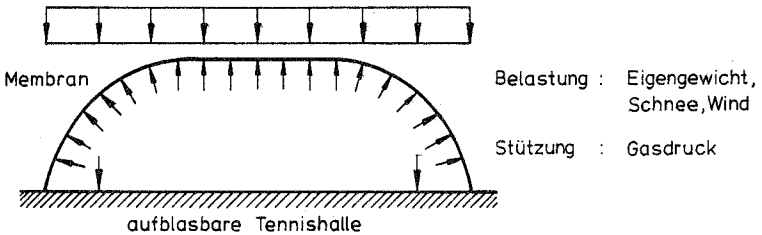
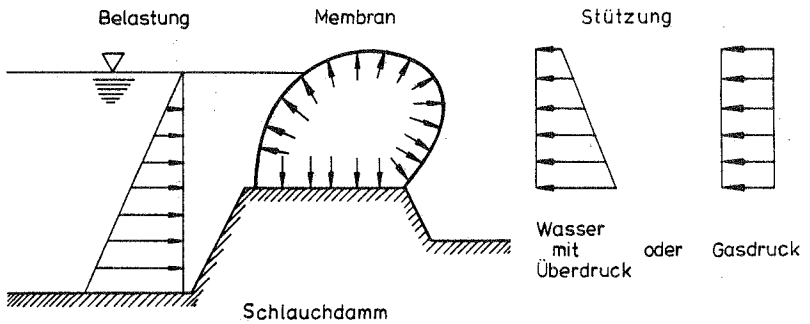


Bild 1.1 Probleme mit grossen Verformungen

annimmt. Zu dieser Gruppe gehoeren auch die aufgeblasenen Membrankonstruktionen, bei denen die verformungsabhaengige Druckbelastung eine starre Stuetzkonstruktion ersetzt. Neueste Entwicklungen, wie Wasserabsperungen aus ebenfalls mit Wasser gefuellten Schlaechen (Membranen), weisen sogar sowohl als Last wie als Stuetzkonstruktion verformungsabhaengige Kraefte auf (Bild 1.1).

Fuer einfache, meist symmetrische Strukturen liegen analytische Loesungen vor [59] [143]. Numerische Loesungen (meistens nach der Methode der finiten Elemente) wurden zuerst fuer ebene achsensymmetrische Strukturen ermittelt [114],[31] und dann auf beliebig gestaltete Membrankonstruktionen unter ungleichmaessiger Druckverteilung [105], [57] und auf Schalen [13],[70] ausgeweitet. Dabei findet die Nichtlinearitaet bezueglich der Belastung meist nur im Lastvektor Beruecksichtigung. Nur wenige Loesungen [4] enthalten im Falle grosser Verformungen die Veraenderung der tangentiellen Elementsteifigkeitsmatrizen infolge der Verformungsabhaengigkeit der Last. Meistens handelt es sich dabei um Balkenelemente oder ebene Elemente. Alle Loesungen beruecksichtigen nur die Normalentreue der Belastung (Follower force effect) und nicht die z.B. bei Wasserbelastung vorhandene Magnitudenaenderung.

Das bekannteste Stabilitaetsproblem unter verformungsabhaengiger Last ist der perfekt runde Kreisring unter konstantem Aussendruck. Praktisch interessierende Stabilitaetsprobleme, bei denen verformungsabhaengige Lasten vorliegen, sind Kugel-, Kegel- und hauptsaechlich Kreiszyklinderschalen bei Unterwasserkonstruktionen oder auch zylindrische Silo- und Tankbauwerke sowie Kuehltuerme unter Windbelastung (Bild 1.2). Die im Schrifttum vorliegenden Loesungen beschraenken sich fast ausschliesslich auf die Loesung linearer Beulprobleme ueber Eigenwertanalysen. Eine umfassende Eroerterung des Schrifttums erfolgt im Abschnitt 3.3.2. Da einige der angefuehrten Konstruktionen z.B. unter Windbelastung ein ausgepraegtes nichtlineares

Vorbeulverhalten aufweisen, fuehrt eine lineare Stabilitaetsanalyse zu einer starken Ueberschaetzung der tatsaechlichen kritischen Lasten. Nichtlineare Stabilitaetsuntersuchungen mit numerischen Rechenmethoden (finite Elemente oder finite Differenzen) stellen neben Experimenten eine gute Hilfe zur Bestimmung wirklichkeitsnaher kritischer Lasten insbesondere bei komplexer Tragwerksgeometrie und Belastung dar.

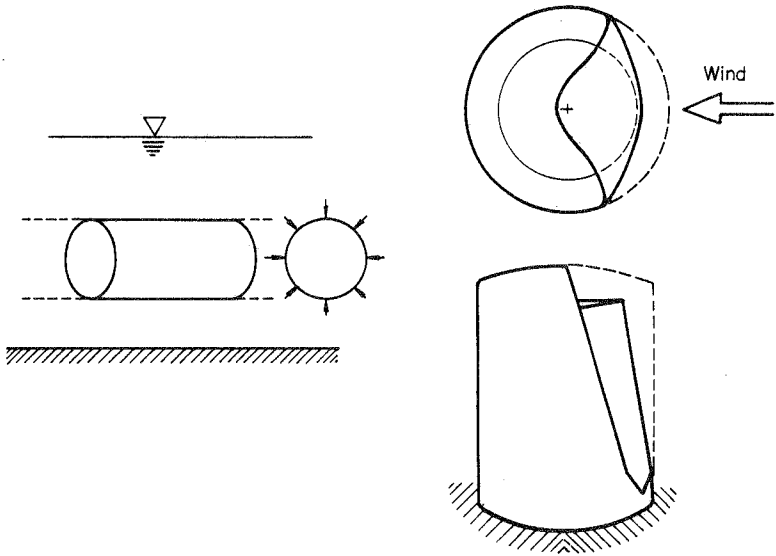


Bild 1.2 Stabilitaetsprobleme (Kreiszyylinder unter Wasser- und Winddruck)

Hauptziel dieser Arbeit ist eine Beurteilung des Einflusses verformungsabhaengiger Belastungen in Normalenrichtung auf kritische Lasten. Als Rechenverfahren wird die Methode der finiten Elemente eingesetzt. Es werden dazu vorwiegend statische Untersuchungen bei unbegrenzt elastischem Materialverhalten vorgenommen. Insbesondere

werden die teilweise entstehenden nichtkonservativen Probleme und die Moeglichkeit statischer Stabilitaetsuntersuchungen diskutiert. Hierzu werden zuerst die Grundlagen der nichtlinearen Berechnung im Hinblick auf die Verwendung der Methode der finiten Elemente vorgestellt (Abschnitt 2). Es folgt die Darstellung verschiedener verformungsabhaengiger Belastungen, ihre Verwirklichung in den nichtlinearen Gleichungen sowie die Umsetzung in die finite Element-Methode (Abschnitt 3). Der anschliessende Abschnitt 4 enthaelt die oben angefuehrte Diskussion der Stabilitaetsuntersuchungen. Die fuer nichtlineare Berechnungen gebrauchliche Rechentechnik wird danach unter dem Blickpunkt der automatischen Steuerung eroertert (Abschnitt 5). Die Anwendung der entwickelten Loesungen auf klassische Beispiele ist in Abschnitt 6 dargestellt, wobei insbesondere die Auswirkungen unterschiedlicher Lastformulierungen gezeigt werden. Den Abschluss der Arbeit bilden Stabilitaetsuntersuchungen an aussendruckbelasteten Kreiszyklindern (Abschnitt 7). Ein wesentliches Ziel ist die Abschaeztung des Einflusses der Nichtlinearitaet der Last auf die kritische Windbelastung von Kreiszyklinderschalen.

Die Durchfuehrung der numerischen Rechnung erfolgte mit dem Programmsystem NISA [20], das sich zur Berechnung von Strukturen mit geometrisch und physikalisch nichtlinearem Verhalten eignet. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das Programm bezueglich der Verformungsabhaengigkeit der Belastung und der numerischen Rechentechnik erweitert. Neben der hier beruecksichtigten Erfassung geometrischer Nichtlinearitaeten ist auch die Kombination mit physikalischen Nichtlinearitaeten moeglich.



## 2. Die nichtlinearen statischen Gleichungen. des Kontinuums

=====

### 2.1. Allgemeine Vorbemerkungen

=====

Um das nichtlineare Verschiebungsverhalten eines elastischen Kontinuums unter einer auesseren Last zu bestimmen, muss das Gleichgewicht zu verschiedenen Zeitpunkten  $t_0, t_1, \dots, t_n$  aufgestellt werden. Ausgehend von einem bekannten Gleichgewichtszustand zur Zeit  $t_1$ , wird eine Inkrementierung des Last- und Verschiebungszustandes vorgenommen, um den Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt  $t_2$  zu erreichen. Die Gleichgewichtsbeziehungen des gesuchten Zustandes 2 werden im Hinblick auf die spaeter verwendete Methode der finiten Elemente (Verschiebungsverfahren) ueber das Prinzip der virtuellen Verschiebungen formuliert. Die entstehenden nichtlinearen Gleichungen werden bezueglich der inkrementellen verallgemeinerten Verschiebungen linearisiert, und der Fehler wird iterativ beseitigt. Zur Herleitung sei auf die Arbeiten von Bathe / Ramm / Wilson [10], Ramm [114] und Brendel [21], Hibbit / Marcal / Rice [63] sowie fuer weitergehende Grundlagen der Kontinuumsmechanik auf das Buch von Malvern [95] verwiesen. Auf umfangreichere Herleitungen wird deshalb verzichtet.

### 2.2. Bezeichnungen fuer den inkrementellen Vorgang

=====

Zur Beschreibung der Bewegungen eines Koerpers werden raumfeste kartesische Koordinaten verwendet. Bei der Formulierung von Oberflaechenbelastungen wird allerdings auf eine Parameterdarstellung uebergangen, die einer Formulierung in krummlinigen Koordinaten entspricht. Der in-

krementelle Bewegungsvorgang (Bild 2.1) wird durch drei Zustände definiert. Dies sind: Ausgangszustand 0, Zustand 1 vor dem Inkrement und Zustand 2 nach dem Inkrement.

Die Zustände vor dem Inkrement werden als bekannt vorausgesetzt. Neben den drei Zuständen muss noch ein Bezugszustand eingeführt werden. Durch diese Bezugskonfiguration sind die Vektoren und Tensoren der Wirkungszustände festgelegt.

Als Bezugszustände werden alternativ die bekannten Zustände 0 und 1 gewählt; dies entspricht einer "Lagrange Darstellung". Um zwischen beiden zu unterscheiden, wird bei Bezug auf die Ausgangskonfiguration von der "Totalen Lagrange-Darstellung" und bei Bezug auf den Zustand vor dem Inkrement von der "mitgehenden (updated) Lagrange-Darstellung" gesprochen.

Zur Kennzeichnung werden links oben und links unten stehende Indizes eingeführt, wobei der obere Index den Wirkungszustand und der untere Index den Bezugszustand kennzeichnet.

Inkrementelle Größen werden nur durch den Bezugszustand bezeichnet.

Beispiel:

m: Wirkungszustand

${}^m S_{ij}$

n: Bezugszustand

Es sei noch darauf hingewiesen, dass im weiteren die Summationskonvention gelten soll.

Da die wesentlichen Unterschiede der beiden Formulierungen in den Arbeiten von Ramm [114], Brendel [21] und Saettele [136] umfassend erläutert wurden, und insbesondere bei den hier vorgenommenen Untersuchungen ohne grundsätzliche Bedeutung sind, wird hier nur auf die totale Lagrange-Darstellung eingegangen.

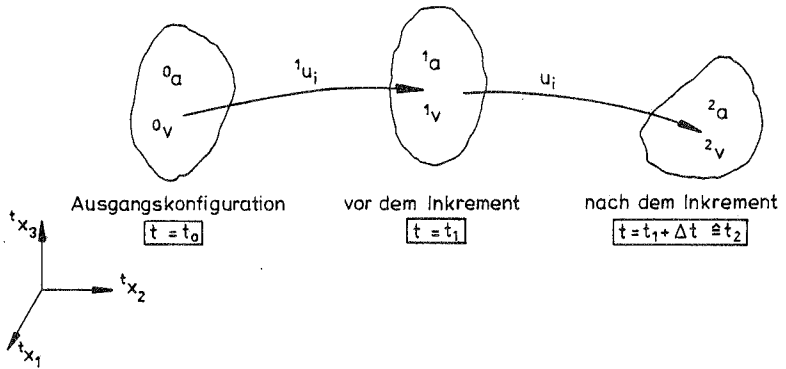


Bild 2.1 Der inkrementelle Vorgang

Deformationen

Fuer die Koordinaten im Zustand  $m$  gilt:

$${}^m x_i = {}^0 x_i + {}^m u_i \quad m=0, 1, 2 \quad (2.1)$$

Mit den Verschiebungen des Zustandes  $t_2 = t_1 + \Delta t$

$${}^2 u_i = {}^1 u_i + u_i \quad (2.2)$$

Fuer ein Linienelement gilt:

$$d^m x_i = {}^m x_{i,j} \cdot d^0 x_j \quad (2.3)$$

mit dem Deformationsgradienten

$${}^m x_{i,j} = \frac{\partial {}^m x_i}{\partial {}^0 x_j} \quad (2.4)$$

Verzerrungen

Fuer die totale Lagrange-Darstellung wird der Green-Lagrange-Verzerrungstensor verwendet, der aus den Verschiebungsableitungen entwickelt wird :

$${}^m_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ {}^m_0u_{i,j} + {}^m_0u_{j,i} + {}^m_0u_{k,i} \cdot {}^m_0u_{k,j} \right] \quad (2.5)$$

Die inkrementellen Verzerrungen  ${}^0\epsilon_{ij}$  ergeben sich als Differenz der Verzerrungen in den Wirkungszuständen 1 und 2.

$${}^0\epsilon_{ij} = {}^2_0\epsilon_{ij} - {}^1_0\epsilon_{ij} \quad (2.6)$$

Die in den Verschiebungsinkrementen linearen Terme werden zu  ${}^0e_{ij}$  und die quadratischen Terme zu  ${}^0\eta_{ij}$  zusammengefasst.

$${}^0\epsilon_{ij} = {}^0e_{ij} + {}^0\eta_{ij} \quad (2.7)$$

Mit:

$${}^1_0\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ {}^1_0u_{i,j} + {}^1_0u_{j,i} + {}^1_0u_{k,i} \cdot {}^1_0u_{k,j} \right] \quad (2.8)$$

$${}^0e_{ij} = \frac{1}{2} \left[ {}^0u_{i,j} + {}^0u_{j,i} + {}^0u_{k,i} \cdot {}^0u_{k,j} + {}^0u_{k,j} \cdot {}^0u_{k,i} \right] \quad (2.9)$$

$${}^0\eta_{ij} = {}^0u_{k,i} \cdot {}^0u_{k,j} \quad (2.10)$$

Spannungen

Fuer die totale Lagrange-Darstellung wird der symmetrische (2.) Kirchhoff (-Piola) Spannungstensor verwendet, der ueber den Cauchy - Spannungstensor durch folgende Transformation definiert ist :

$${}^m_0S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^m\rho} \cdot {}^0x_{i,k} \cdot {}^0x_{j,l} \cdot {}^m\tau_{kl} \quad (2.11)$$

Fuer die Spannungen im Zustand 2 gilt mit dem Spannungsincrement  ${}^0s_{ij}$  :

$${}^2s_{ij} = {}^1s_{ij} + {}^0s_{ij} \quad (2.12)$$

Werkstoffgesetz

Die konstitutiven Gleichungen ergeben sich bei hyperelastischem Werkstoff unter Annahme linearer Beziehungen zwischen Spannungs- und Verzerrungsgrößen zu:

$${}^m s_{ij} = {}^m c_{ijkl} \cdot {}^m \epsilon_{kl} \quad (2.13)$$

und fuer das Spannungsincrement - auch fuer nichtelastischen Werkstoff - :

$${}^0 s_{ij} = {}^0 c_{ijkl} \cdot {}^m \epsilon_{kl} \quad (2.14)$$

Die Gueltigkeit der Gleichung (2.13) entfaellt bei nichtelastischem Werkstoff. (siehe z.B. [95])

2.3. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in inkrementeller Form

=====

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen fuer den Zustand  $m=2$  lautet :

$${}^2\delta W_{(i)} + {}^2\delta W_{(a)} = 0 \quad (2.15)$$

virtuelle innere Arbeit      virtuelle aeuussere Arbeit

Dabei muessen die virtuellen Verschiebungen zulaessig sein, d.h. den geometrischen Randbedingungen genuegen und die kinematischen Gleichungen befriedigen.

Mit dieser Voraussetzung gilt fuer die beiden Arbeitsanteile :

$${}^2\delta W_{(i)} = - \int_{2V} {}^2t_{ij} \cdot \delta {}_2u_{j,i} \cdot d({}^2v) = - \int_{0V} {}^2S_{ij} \cdot \delta {}^2_0\varepsilon_{ij} \cdot d({}^0v) \quad (2.16)$$

$${}^2\delta W_{(a)} = + \int_A {}^2t_i \cdot \delta u_i \cdot d({}^2a) + \int_{2V} {}^2p \cdot {}^2q_i \cdot \delta u_i \cdot d({}^2v) \quad (2.17)$$

wobei sich die aeussere Arbeit aus den Anteilen der Oberflaechenkraefte  ${}^2t_i$  und der Volumenkraefte  ${}^2q_i$  zusammensetzt. Geht man zur totalen Lagrange-Darstellung ueber (Transformation aller Groessen auf den Ausgangszustand) und setzt die vorab definierten inkrementellen Beziehungen fuer Spannungen und Verschiebungen ein, so erhaelt man das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in inkrementeller Form (geometrische Nebenbedingungen ebenfalls erfuehlt):

$$\int_{0V} {}^0S_{ij} \cdot \delta {}^0\varepsilon_{ij} \cdot d({}^0v) + \int_{0V} {}^1S_{ij} \cdot \delta {}^0\eta_{ij} \cdot d({}^0v) = {}^2\delta W_{(a)} - \int_{0V} {}^1S_{ij} \cdot \delta {}^0\varepsilon_{ij} \cdot d({}^0v) \quad (2.18)$$

mit den ebenfalls auf den Ausgangszustand bezogenen virtuellen aeusseren Arbeiten :

$${}^2\delta W_{(a)} = \int_A {}^2t_i \cdot \delta u_i \cdot d({}^0a) + \int_{0V} {}^0p \cdot {}^2q_i \cdot \delta u_i \cdot d({}^0v) \quad (2.19)$$

Zur Loesung des nichtlinearen Gleichungssystems in den unbekanntem Verschiebungsinkrementen  $u_i$  wird ein Vorgehen gewaehlt, wobei das Gleichungssystem zuerst linearisiert und der Linearisierungsfehler dann iterativ beseitigt wird. Diese Linearisierung wird durch den Uebergang  ${}^0\varepsilon_{ij} \longrightarrow {}^0e_{ij}$  erreicht.

$$\int_{0V} {}^0C_{ijkl} \cdot {}^0e_{kl} \cdot \delta {}^0e_{ij} \cdot d({}^0v) + \int_{0V} {}^1S_{ij} \cdot \delta {}^0\eta_{ij} \cdot d({}^0v) = {}^2\delta W_{(a)} - \int_{0V} {}^1S_{ij} \cdot \delta {}^0\varepsilon_{ij} \cdot d({}^0v) \quad (2.20)$$

Auf die Form der aeusseren Arbeiten wird spaeter noch ausfuehrlich eingegangen.

Gleichung (2.20) ist die Ausgangsbeziehung fuer ein sogenanntes inkrementell/ iteratives Vorgehen.

Nach Wunderlich [163] und Ramm [117] soll die linearisierte Form der Gleichung (2.20) noch in einer Schreibweise mit Operatoren dargestellt werden. Diese Darstellung erlaubt schon vor der Algebraisierung der Gleichungen einige Aussagen ueber die Form und die einzelnen Bestandteile der Gleichgewichtsbeziehungen.

Dazu wird ein Differentialoperator  $\partial_i$  bzw.  ${}_i\partial$  eingefuehrt, wobei durch die Stellung des Fusszeigers (links oder rechts) angegeben wird, ob der Operator auf Werte der ihm vorgestellten oder nachgestellten Matrix Anwendung findet. Entsprechend werden die bei dieser Schreibweise entstehenden Operatormatrizen mit einem linken oder rechten Kopfzeiger D versehen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} \delta u^T \cdot {}^D A &= [\delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3] \begin{bmatrix} {}_1\partial & 0 & {}_2\partial \\ 0 & {}_2\partial & {}_3\partial \\ {}_2\partial & {}_3\partial & {}_3\partial \end{bmatrix} \\ &= [\delta u_{1,1} + \delta u_{3,2} \mid \delta u_{2,2} + \delta u_{3,3} \mid \delta u_{1,2} + \delta u_{2,3} + \delta u_{3,3}] \end{aligned}$$

In Tafel 2.1 sind die fuer die Formulierung notwendigen Groessen in der Schreibweise mit Operatormatrizen zusammengefasst.

	Definition ( übliche Schreibweise )	Operatorenschreibweise
Inkrementelle Verschiebungen	$u_i \hat{=} \mathbf{u}^T = [ u_1 \quad u_2 \quad u_3 ]^T$	( 2.21 )
Virtuelle Verschiebungen	$\delta u \hat{=} \delta \mathbf{u}^T = [ \delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3 ]^T$	( 2.22 )
Inkrementelle Verschiebungs-ableitungen	$\mathbf{D}^T = [ u_{1,1} \quad u_{1,2} \quad u_{1,3} \quad u_{2,1} \quad u_{2,2} \quad u_{2,3} \quad u_{3,1} \quad u_{3,2} \quad u_{3,3} ]$	$\mathbf{D} = \mathbf{B}_{NL}^D \cdot \mathbf{u}$ ( 2.23 )
Lineare inkrementelle Verzerrungen	$\boldsymbol{\epsilon}^T = [ e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad 2e_{12} \quad 2e_{13} \quad 2e_{23} ]$	$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{B}_L^D \cdot \mathbf{u}$ ( 2.24 )
Vektor der Spannungs-komponenten	${}^1_0\mathbf{s}^T = [ {}^1_0s_{11} \quad {}^1_0s_{22} \quad {}^1_0s_{33} \quad {}^1_0s_{12} \quad {}^1_0s_{13} \quad {}^1_0s_{23} ]^T$	
Spannungsmatrix	${}^1_0\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^1_0s_{11} & {}^1_0s_{12} & {}^1_0s_{13} & & & \\ {}^1_0s_{21} & {}^1_0s_{22} & {}^1_0s_{23} & & & \\ {}^1_0s_{31} & {}^1_0s_{32} & {}^1_0s_{33} & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix}$	( 2.25 )
inkrementelles Werkstoffgesetz	${}^0\mathbf{s}_{ij} = {}^0\mathbf{C}_{ijkl} \cdot {}^0\mathbf{e}_{kl}$	$\mathbf{s} = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ ( 2.26 )

Tafel 2.1 Matrizenformulierung (1. Teil)



<p>Operatormatrizen</p> <p><math>B_{NL}^D</math></p>	<p><math>B_{NL}^D</math></p>	$\begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ \partial_2 & 0 & 0 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_2 \\ 0 & 0 & \partial_3 \end{bmatrix}$	<p>(2.27)</p>
<p><math>B_L^D = B_{L0}^D + B_{L1}^D</math></p>	<p><math>B_{L0}^D</math></p>	$\begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & 0 \\ \partial_1 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & \partial_3 \end{bmatrix}$	<p>(2.28)</p>
		$B_{L1}^D = \begin{bmatrix} {}^1u_{1,1} \partial_1 & {}^1u_{2,1} \partial_1 & {}^1u_{3,1} \partial_1 \\ {}^1u_{1,2} \partial_2 & {}^1u_{2,2} \partial_2 & {}^1u_{3,2} \partial_2 \\ {}^1u_{1,3} \partial_3 & {}^1u_{2,3} \partial_3 & {}^1u_{3,3} \partial_3 \\ {}^1u_{1,1} \partial_2 + {}^1u_{1,2} \partial_1 & {}^1u_{2,1} \partial_2 + {}^1u_{2,2} \partial_1 & {}^1u_{3,1} \partial_2 + {}^1u_{3,2} \partial_1 \\ {}^1u_{1,1} \partial_3 + {}^1u_{1,3} \partial_1 & {}^1u_{2,1} \partial_3 + {}^1u_{2,3} \partial_1 & {}^1u_{3,1} \partial_3 + {}^1u_{3,3} \partial_1 \\ {}^1u_{1,2} \partial_3 + {}^1u_{1,3} \partial_2 & {}^1u_{2,2} \partial_3 + {}^1u_{2,3} \partial_2 & {}^1u_{3,2} \partial_3 + {}^1u_{3,3} \partial_2 \end{bmatrix}$	

Tafel 2.1 Matrizenformulierung (2. Teil)

Werden die Matrizenausdrücke nach Tafel 2.1 in die linearisierte Form des Prinzips der virtuellen Arbeiten Gleichung (2.20) eingeführt, so ergibt sich die folgende Matrixgleichung :

$$\int_{0V} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K}_e^D \cdot \mathbf{u} \cdot d(0V) + \int_{0V} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K}_g^D \cdot \mathbf{u} \cdot d(0V) = {}^2\delta W_{(a)} - \int_{0V} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{F}^D \cdot d(0V) \quad (2.29)$$

Dabei soll der mittig gestellte Kopfzeiger darauf hinweisen, dass die entsprechende Matrix Differentialoperatoren<sub>D</sub> enthält.

$K_e^D$  entspricht der inkrementellen elastischen Steifigkeitsmatrix, während  $K_g^D$  zur geometrischen Steifigkeitsmatrix bzw. zur Anfangsspannungsmatrix führt.  $F^D$  kann als Vektor der verallgemeinerten inneren Kräfte gedeutet werden. Die elastische Steifigkeitsmatrix  $K_e^D$  lässt sich wieder in die gewöhnliche, lineare elastische Steifigkeitsmatrix  $K_{el}^D$  und die Anfangsverschiebungsmatrix  $K_u^D$  zerlegen. In Tafel 2.2 sind die Matrizen zusammengestellt.

Diese Operatormatrizen führen auf :

Elastische Steifigkeitsmatrix :	$K_e^D = (B_L^D)^T \cdot C \cdot B_L^D = K_{el}^D + K_u^D$	(2.30)
Lin. elast. Steifigkeitsmatrix :	$K_{el}^D = (B_{L0}^D)^T \cdot C \cdot B_{L0}^D$	(2.31)
Anfangsverschiebungsmatrix :	$K_u^D = (B_{L0}^D)^T \cdot C \cdot B_{L1}^D + (B_{L1}^D)^T \cdot C \cdot B_{L0}^D + (B_{L1}^D)^T \cdot C \cdot B_{L1}^D$	(2.32)
Anfangsspannungsmatrix :	$K_g^D = (B_{NL}^D)^T \cdot S \cdot B_{NL}^D$	(2.33)
Innere Kräfte :	$F^D = (B_L^D)^T \cdot 1 \cdot S$	(2.34)

Tafel 2.2 Operatormatrizen des virtuellen Arbeitsausdrucks

Durch die fruehe Einfuehrung einer Matrizenschreibweise lässt sich schon die Struktur der inkrementellen Gleichgewichtsbeziehungen, die nach einer Diskretisierung erscheinen, erkennen. Vergleicht man die Operatormatrizen mit den Steifigkeitsmatrizen nach der Diskretisierung mit finiten Elementen [114], so sind einige Eigenschaften der Elementmatrizen wie Symmetrie und Kopplung in den Operatormatrizen erkennbar. Ausserdem stellt diese Darstellung fuer die Diskretisierung mit finiten Elementen einen klaren Vorteil bezueglich der Herleitung der Matrizen dar. Im weiteren folgt daher im Anschluss an die Herleitung der virtuellen Arbeitsterme in der ueblichen Schreibweise die Darstellung mit Hilfe von Operatormatrizen.

### 3. Verformungsabhaengige Belastungen

=====

#### 3.1 Vorbemerkungen

=====

##### 3.1.1 Definitionen

=====

Um eine Einordnung der in dieser Arbeit behandelten Probleme vornehmen zu koennen, wird eine Definition der Natur der Belastungen vorangestellt.

Es werden zwei Arten von Kraefte unterschieden:  
(siehe Ziegler [168], Lanczos [72], Bufler [26])

Kraefte, die aus einer skalaren Funktion (Arbeitsfunktion) entwickelt werden koennen -monogenetische Kraefte- und Kraefte, die nicht aus einer skalaren Funktion entwickelt werden koennen -polygenetische Kraefte.

Monogenetische Kraefte, die aus einer allgemeinen von den Verschiebungen, Geschwindigkeiten und von der Zeit abhaengenden (rheonomen) Arbeitsfunktion entwickelt werden, sowie alle polygenetischen Kraefte werden als nichtkonservative Kraefte bezeichnet. Die nichtkonservativen Kraefte werden weiter unterschieden in zeitabhaengige (instationaere) Kraefte sowie in zeitunabhaengige (stationaere) Kraefte. Stationaere polygenetische Kraefte, die rein verformungsabhaengig sind, werden als zirkulatorische Kraefte bezeichnet, die keine Arbeit verrichten, waehrend rein geschwindigkeitsabhaengige polygenetische als dissipative Kraefte gekennzeichnet werden, die negative Arbeit verrichten.

Sind die Arbeitsfunktion und die kinetische Energie zeitunabhaengig (skleronom), so gilt der Energieerhaltungssatz im beschriebenen System, und alle Kraefte im System sind konservativ. Die skleronome Arbeitsfunktion

entspricht dann der potentiellen Energie. Monogenetische konservative Kraefte, die rein geschwindigkeitsabhaengig sind, werden als gyroskopische (Kreisel-) Kraefte bezeichnet.

Eine anschaulichere Definition gibt Ziegler in [168] fuer eine Einzelkraft:

Eine Kraft ist konservativ, wenn die Arbeit entlang einer Verschiebung des Systems, auf das sie wirkt, ausschliesslich von der Anfangs- und Endkonfiguration des Systems abhaengt. Eine Kraft, die diese Bedingung nicht erfuehlt, wird als nichtkonservativ bezeichnet.

Diese Definition muss fuer Flaechenbelastungen entsprechend erweitert werden. (siehe dazu Abschnitt 3.3.1)

Einem Schema von Ziegler [168] und Leipholz [82] folgend sind die Belastungen in Bild 3.1 klassifiziert.

Einige Beispiele fuer die angezeigten Kraefte sind:

- Instationaere Kraefte: Kraefte, die zeitlich veraenderlich sind
- Gyroskopische Kraefte: Coriolis Kraefte
- Dissipative Kraefte : Fluessigkeits- und Luftreibung
- Nichtzirkulatorische  
Kraefte : konstante Kraefte, Schneelast
- Zirkulatorische            Tangentiale oder normale  
Kraefte : Einzelkraft auf einen Stab

Die Beispiele fuer die in der vorliegenden Arbeit behandelten Belastungen entstammen dem doppelt umrandeten Problemkreis.

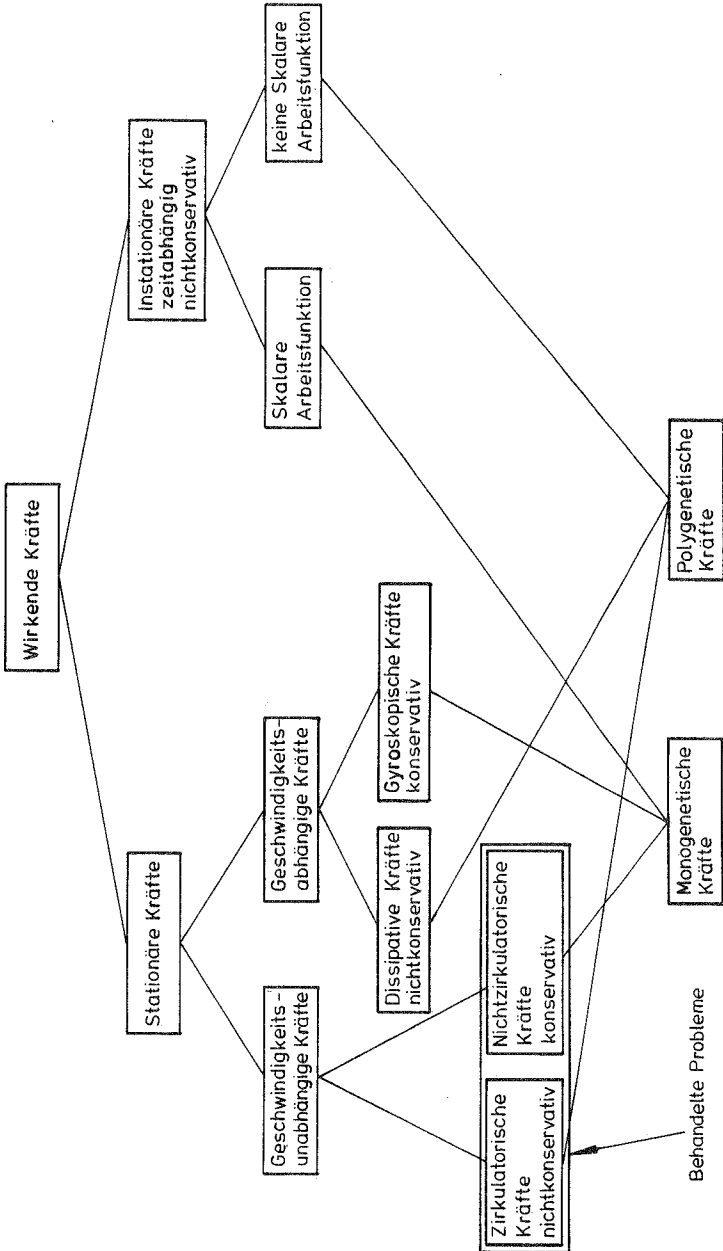


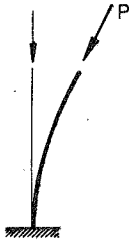
Bild 3.1 Klassifizierung der Kräfte

### 3.1.2. Die verformungsabhaengige Flaechenbelastung

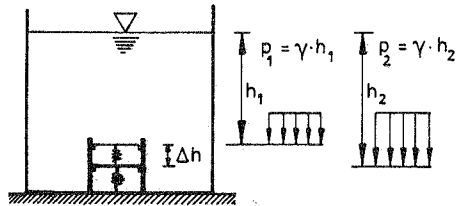
=====

Von der Vielzahl der moeglichen verformungsabhaengigen Belastungen werden in dieser Arbeit verformungsabhaengige Flaechenbelastungen in Normalenrichtung behandelt. Verformungsabhaengige Flaechenbelastungen in tangentialer Richtung koennen voellig analog betrachtet werden.

Die Verformungsabhaengigkeit einer Belastung kann in drei Anteile aufgespalten werden. Der erste Anteil besteht in der Richtungsabhaengigkeit der Belastung (Beispiel: Beckscher Stab [14] ), waehrend der zweite Anteil



Nur richtungsabhaengig



Abhaengigkeit der Belastungsmagnitudo

Bild 3.2 Anteile der Verformungsabhaengigkeit der Belastung

in der Abhaengigkeit der Magnitudo der Belastung begruen- det ist. Man denke dabei an einen elastischen Koerper unter Wasserdruck, der mit zunehmender Verformung des Koerper einer sich aendernden Druckhoehe unterliegt.

Beim zweiten Beispiel sei vorausgesetzt, dass das Volumen  $\Delta V$ , um das der Koerper zusammengedruickt wird, gegenueber dem druckerzeugenden Gesamtwasservolumen klein ist.

Der dritte Anteil besteht in der Aenderung der Belastung infolge der Flaechenaenderung der belasteten Flaechе.

Im Fall einer allgemein verteilten Belastung gilt fuer die beiden ersten Anteile - der dritte Anteil wird bei der Integration ueber die Flaechе (Linie) beruecksichtigt-:

Richtungsabhaengige Belastung

$${}^m p_i = {}^m \lambda \cdot {}^0 f \cdot {}^m n_i \quad (3.1)$$

mit

${}^m p_i$  Druckkomponente im Zustand m

${}^m \lambda \cdot {}^0 f$  Magnitude der Belastung

${}^m \lambda$  Proportionalitaetsfaktor der Belastung im Zustand m

${}^0 f = f({}^0 x_j)$  Verteilung der Belastungsmagnitude, hier nur abhaengig von der Ausgangskonfiguration

${}^m n_i$  Normale auf der belasteten Flaechе im Zustand m (Tangente bei tangentialen Lasten)

Abhaengigkeit der Belastungsmagnitude von der Verformung

$${}^m p_i = {}^m \lambda \cdot {}^m f \cdot {}^0 n_i \quad (3.2)$$

mit

${}^m \lambda$  Proportionalitaetsfaktor wie vor

${}^m f = f({}^m x_j)$  Verteilung der Belastungsmagnitude, abhaengig von der Konfiguration im Zustand m

${}^0 n_i$  Normale auf der belasteten Flaechе im Zustand o

Damit lassen sich rein richtungsabhaengige Flaechenbelastungen gedanklich durch viele Einzellasten ersetzen, deren Groesse an einem festen Koerper(Material)punkt im Zustand  $o$  definiert ist, und deren Richtung sich waehrend des Bewegungsvorganges aendert. Eine Aenderung der Lastmagnituden wird zwischen den Zustaenden nur ueber den Proportionalitaetsfaktor  ${}^m\lambda$  vorgenommen. Diese Belastungsart wird daher im weiteren als koerperfeste Belastung bezeichnet.

Der zweite Fall - reine Abhaengigkeit der Belastungsmagnitudo von der aktuellen Lage des Punktes - entspricht der Verschiebung von starren Flaechen im Raum ohne Rotation. Dabei koennen sich die Groesse der Belastung und die Lastverteilung waehrend des Bewegungsvorgangs aendern. Damit aendern sich die Relationen der Lastmagnituden zwischen einzelnen Koerper(Material)punkten. Mit Hilfe des Proportionalitaetsfaktor  ${}^m\lambda$  wird eine globale Lastveraenderung bewirkt. Dies entspricht der Belastung durch ein stationaeres Gravitationsfeld, das fest im Raum vorgeschrieben ist.

Da keine Beschraenkung auf starre Koerper vorgenommen werden soll, sondern flexible Strukturen berechnet werden sollen, wird der zweite Fall um die Richtungsabhaengigkeit erweitert, d.h. es wird ein raumfestes Druckfeld eingefuehrt.

Bei Abhaengigkeit der Belastungsmagnitudo und Belastungsrichtung von der Verformung gilt:

$${}^m p = {}^m \lambda \cdot {}^m f \cdot {}^m n_i \quad (3.3)$$

${}^m \lambda \cdot {}^m f$  stellt die Belastungsmagnitudo im Zustand  $m$  dar. Aus Gruenden der Vereinfachung wird im weiteren  ${}^m f$  bzw.  ${}^o f$  alleine als Belastungsmagnitudo bezeichnet.

In Bild 3.3 sind die moeglichen Arten verformungsabhaengiger Belastungen, die hier behandelt werden, im Vergleich zur ueblichen Gewichtslast, die keine Verformungsabhaengigkeit beinhaltet, an einem einfachen Modell dargestellt.



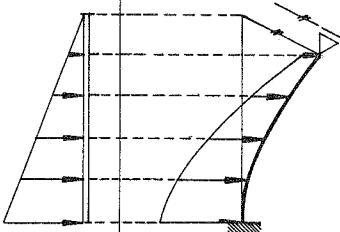
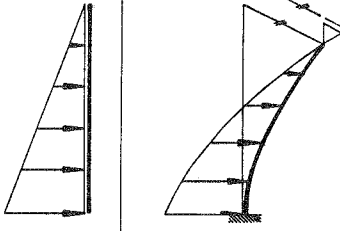
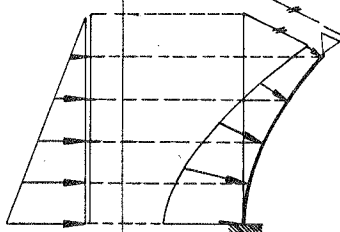
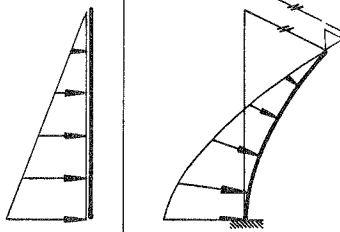
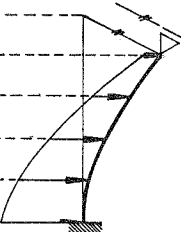
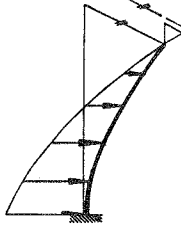
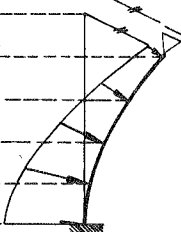
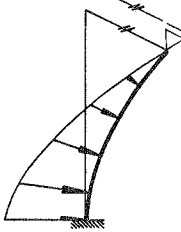
	Richtungstreue Belastung		Normalentreue Belastung	
	Raumfest	Körperfest (Gewichtslast)	Raumfest	Körperfest
Belastung	${}^m p_i = {}^m \lambda \cdot {}^m f \cdot \sigma_i \quad (3.4)$	${}^m p_i = {}^m \lambda \cdot \sigma_i \cdot \sigma_f \quad (3.5)$	${}^m p_i = {}^m \lambda \cdot f \cdot {}^m n \quad (3.6)$	${}^m p_i = {}^m \lambda \cdot \sigma_f \cdot {}^m n \quad (3.7)$
Belastungsdefinition Zustand $m$ ${}^m \lambda \cdot \sigma_f$				
Belastung des Körpers im Zustand $m$				

Bild 3.3 Definition der Belastungsarten

Da in der Belastung durch ein raumfestes Druckfeld (3.3) der Fall des raumfesten Gravitationsfeldes Gl.(3.2) als Sonderfall eingeschlossen ist, wird im weiteren nur der allgemeine Fall nach Gleichung (3.3) unter der Bezeichnung raumfeste Last betrachtet. Ihm gegenueberge- stellt wird stets der Fall der koerperfesten Belastung nach Gleichung (3.1).

Eine weitere Unterscheidung zwischen beiden Bela- stungsarten besteht bezueglich ihrer Konservativitaet bzw. Nichtkonservativitaet.

Das Becksche Problem der tangentialen einzelnen Fol- gelast ist bekanntlich nichtkonservativ. Da im Fall der koerperfesten Flaechenbelastung eine Anhaeufung einzelner Folgelasten vorliegt, ist dieser Lastfall auch nichtkon- servativ. Bei raumfester Belastung hingegen ist die Kon- servativitaet eines Problems von der Erfuellung bestimm- ter Randbedingungen abhaengig. Eine umfassende Diskussion dieses Gesichtspunktes wird in Abschnitt 3.3.1 gefuehrt.

### 3.2. Herleitung der Anteile der inkrementellen Gleichge- wichtsbeziehungen fuer Flaechenbelastungen in Nor- malenrichtung

=====

Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gilt fuer die inkrementelle Arbeit einer Last, die - ueber die Flaechen verteilt - in Normalenrichtung wirkt:

$$\delta W_{(a)} = \int_A p_i \cdot \delta u_i \cdot d\alpha \quad (3.8)$$

$p_i$  wird fuer Zugbelastung d.h. in Normalenrichtung posi- tiv definiert.

Es werden sowohl der ebene Fall mit einer durch Streckenlast belasteten Kurve als auch der raeumliche Fall einer Flaechenbelastung getrennt dargestellt, da sich gerade beim ebenen Fall einige Beziehungen wie z.B. die Randterme ueberschaubarer zeigen lassen.

### 3.2.1. Ebener Fall

Die Belastung wirke entlang einer Kurve, die sowohl als Randkurve als auch als Mittelkurve zwischen zwei Raendern eines Elements angesehen werden kann.

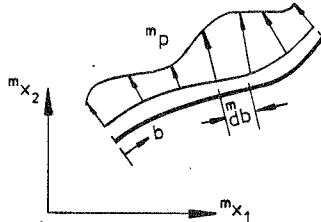


Bild 3.4 Normalenbelastung einer ebenen Kurve

Fuer die Kurve gilt in Parameterdarstellung:

$${}^m x_i = {}^m x_i (r) \quad (3.9)$$

$${}^2 x_i = {}^1 x_i (r) + u_i (r) \quad (3.10)$$

$u$  : inkrementelle Verschiebung

Dabei entspricht der Parameter  $r$  einer normierten konvektiven Koordinate. Damit gilt fuer ein Kurvenelement der Laenge  $db$ :

$$d^m b = \sqrt{\left(\frac{\partial {}^m x_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial {}^m x_2}{\partial r}\right)^2} \cdot dr \quad (3.11)$$

Fuer die Normale in einem beliebigen Kurvenpunkt gilt:

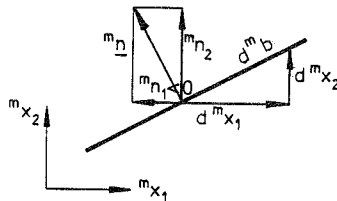


Bild 3.5 Normalendefinition

$${}^m n_i = -e_{ij} \frac{\frac{\partial^m x_j}{\partial r}}{\sqrt{\left(\frac{\partial^m x_1}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial^m x_2}{\partial r}\right)^2}} \quad (3.12)$$

mit dem Permutationssymbol:

$$e_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ +1 & i < j \\ -1 & i > j \end{cases}$$

Die Belastungskomponenten in Normalenrichtung lauten:

$${}^m p_l = {}^m \lambda \cdot {}^l f \cdot {}^m n_i \quad l = 0, m \quad (3.13)$$

Damit wird die inkrementelle virtuelle Arbeit im Zustand 2 zu:

$$\begin{aligned} {}^2 \delta W_{(a)} &= \int_b {}^2 \lambda \cdot {}^l f \cdot {}^2 n_i \cdot \delta u_i \cdot d {}^2 b \\ &= -e_{ij} {}^2 \lambda \int_r {}^l f \cdot \frac{\partial^2 x_j}{\partial r} \cdot \delta u_i \cdot dr \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit (3.10) folgt:

$$\begin{aligned} {}^2 \delta W_{(a)} &= -e_{ij} {}^2 \lambda \int_r {}^l f \cdot \frac{\partial^1 x_j}{\partial r} \cdot \delta u_i \cdot dr \\ &\quad - e_{ij} {}^2 \lambda \int_r {}^l f \cdot \frac{\partial u_j}{\partial r} \cdot \delta u_i \cdot dr \end{aligned} \quad (3.15)$$

3.2.1.1. Raufeste Belastung

=====

Fuer raufeste Belastung ist die Belastungsmagnitudo eines Punktes eine Funktion der kartesischen Koordinaten des Kurvenpunktes und damit auch von den Verschiebungen abhaengig. (1=2)

$${}^1f = f({}^2x_1, {}^2x_2) \quad (3.16)$$

Mit Gl.(3.10) laesst sich diese Funktion in Form einer Taylor-Reihe entwickeln:

$${}^2f = {}^1f + \frac{\partial {}^1f}{\partial {}^1x_n} \cdot u_n + \dots \text{Glieder hoe. Ordnung} \quad (3.17)$$

$n = 1, 2$

Wird Gl.(3.17) in (3.15) eingefuehrt, so stellt auch die virtuelle aeussere Arbeit eine nichtlineare Beziehung in den Verschiebungsinkrementen u dar, deren Ordnung von der Funktion der Belastungsmagnitudo abhaengig ist. Im Hinblick auf das erwaehnte inkrementell/iterative Vorgehen wird auch der Ausdruck fuer die aeussere Arbeit linearisiert.

$$\delta W_{(a)} = -e_{ij} \cdot \lambda \int_r {}^1f \frac{\partial {}^1x_j}{\partial r} \cdot \delta u_i \cdot dr \quad (1)$$

$$-e_{ij} \cdot \lambda \int_r {}^1f \frac{\partial u_j}{\partial r} \cdot \delta u_i \cdot dr \quad (2)$$

$$-e_{ij} \cdot \lambda \int_r \frac{\partial {}^1f}{\partial {}^1x_n} \cdot u_n \cdot \frac{\partial {}^1x_j}{\partial r} \delta u_i \cdot dr \quad (3)$$

(3.18)

Betrachtet man die einzelnen Terme, so stellt man fest, dass Term (1) in den Belastungsvektor eingeht, der aber

im Unterschied zur sonstigen gerichteten Belastung sowohl bezueglich der Belastungsmagnitudo als auch der Richtung von den Koordinaten des bereits ermittelten Zustandes 1 abhaengig ist. Die Terme ② und ③ stellen einen Beitrag zur Koeffizientenmatrix der Verschiebungsinkremente dar, der im Schrifttum als Laststeifigkeitsmatrix bezeichnet wird. Der hier in Gleichung (3.18) dargestellte Arbeitsausdruck ist nur bezueglich der verallgemeinerten Verschiebungsinkremente linearisiert. Eine Linearisierung bezueglich aller inkrementellen Groessen erfordert noch eine Linearisierung bezueglich des Lastparameters  $\Delta\lambda = {}^2\lambda - {}^1\lambda$ . D.h. in den Laststeifigkeitstermen ② und ③ ist  ${}^2\lambda$  durch  ${}^1\lambda$  zu ersetzen.

Der Lastparameter ist aber nur fuer die Gleichgewichtszustaende am Anfang ( ${}^1\lambda$ ) und am Ende ( ${}^2\lambda$ ) eines Lastinkrements bekannt und wird in den Zwischenzustaenden nicht ermittelt. Fuer diese Zwischenzustaende hat es sich wegen schnellerer Konvergenz des iterativen Rechenprozesses als sinnvoll erwiesen, als Lastparameter bereits  ${}^2\lambda$  zu verwenden, da damit schon von der Laststeifigkeitsmatrix her die Tangentensteifigkeitsmatrix des Zustandes 2 angenaehert wird. Damit verliert die Gesamtsteifigkeitsmatrix den Charakter einer Tangentensteifigkeitsmatrix und wird zu einer Sekantensteifigkeitsmatrix (siehe auch Abschnitt 5.1). Im weiteren wird daher als Lastparameter fuer die Laststeifigkeitsanteile stets  ${}^2\lambda$  angeschrieben. In diesem Fall wird der Anteil der Matrix zu einer Anfangslaststeifigkeitsmatrix (initial-load-stiffness matrix), da ueber die Belastung von Anbeginn an eine Steifigkeit vorhanden ist.

Im weiteren soll nur die Laststeifigkeitsmatrix (Anteile ② und ③) betrachtet werden. Im Hinblick auf spaetere Betrachtungen bezueglich der Symmetrie der algebraischen Matrizen sowie der Randterme wird Term ② mittels partieller Integration so umgeformt, dass - wie spaeter gezeigt wird - eventuelle Unsymmetrie nur im Randterm auftritt:

$$\begin{aligned}
 e_{ij} \cdot {}^2\lambda \int_r^1 f \frac{\partial u_j}{\partial r} \cdot \delta u_i \cdot dr &= \frac{1}{2} e_{ij} {}^2\lambda \int_r^1 f \frac{\partial u_j}{\partial r} \delta u_i \cdot dr - \\
 &- \frac{1}{2} e_{ij} {}^2\lambda \int \left( \frac{\partial^1 f}{\partial r} \cdot u_j \delta u_i + {}^1f \cdot u_j \cdot \frac{\partial \delta u_i}{\partial r} \right) dr \\
 &+ \frac{1}{2} e_{ij} {}^2\lambda {}^1f \cdot u_j \cdot \delta u_i \Big|_{r_1}^{r_2} \\
 &= \frac{1}{2} e_{ij} {}^2\lambda \int_r^1 f \left( \frac{\partial u_j}{\partial r} \delta u_i - u_j \cdot \frac{\partial \delta u_i}{\partial r} \right) dr \\
 &- \frac{1}{2} e_{ij} {}^2\lambda \int_r^1 \frac{\partial^1 f}{\partial r} \cdot u_j \delta u_i \cdot dr + \frac{1}{2} e_{ij} {}^2\lambda {}^1f u_j \cdot \delta u_i \Big|_{r_1}^{r_2}
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

Damit lautet der gesamte Laststeifigkeitsanteil (Anteile 2 und 3) mit dem Vorzeichen der linken Gleichungsseite:

$$\begin{aligned}
 {}^2\delta W_{(a)}^L &= \frac{1}{2} e_{ij} {}^2\lambda \left[ \int_r^1 f \left( \frac{\partial u_j}{\partial r} \cdot \delta u_i - u_j \frac{\partial \delta u_i}{\partial r} \right) dr + 2 \int_r^1 \frac{\partial^1 f}{\partial x_n} \cdot u_n \frac{\partial^1 x_j}{\partial r} \delta u_i \cdot dr \right. \\
 &\quad \left. - \int_r^1 \frac{\partial^1 f}{\partial r} \cdot u_j \delta u_i \cdot dr + {}^1f \cdot u_j \cdot \delta u_i \Big|_{r_1}^{r_2} \right]
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Verwendet man die in Abschnitt 2 eingefuehrte Schreibweise mit Operatormatrizen, so fuehrt dies zu:

$${}^2\delta W_{(a)}^L = \int_r^1 \delta \mathbf{u}^T \left( \overset{D}{\mathbf{K}}_{L \textcircled{I}} + \overset{D}{\mathbf{K}}_{L \textcircled{II}} \textcircled{III} \right) \mathbf{u} dr + \delta \mathbf{u}^T \overset{D}{\mathbf{K}}_{L \textcircled{IV}} \mathbf{u} \Big|_{r_1}^{r_2}
 \tag{3.21}$$

Die einzelnen Matrizen lauten:

$$\overset{D}{\mathbf{K}}_{L \textcircled{I}} = \frac{1}{2} {}^2\lambda \cdot {}^1f \overset{D}{\mathbf{D}}_{\textcircled{I}} = \frac{1}{2} {}^2\lambda {}^1f \begin{bmatrix} 0 & \overset{D}{\mathbf{D}}_{\textcircled{I}} \\ r\partial + \partial_r & -r\partial + \partial_r \\ r\partial - \partial_r & 0 \end{bmatrix}
 \tag{3.22}$$

Hinweis:  $\overset{D}{\mathbf{D}}_{\textcircled{I}} = \overset{D}{\mathbf{D}}_{\textcircled{I}}^T$

mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_I^D &= \mathbf{D}_{I1}^D + \mathbf{D}_{I2}^D = \begin{bmatrix} 0 & -\partial_r \\ \partial_r & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \partial_r \\ -\partial_r & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{I2}^T &= \mathbf{D}_{I1}^D \end{aligned}$$

Darstellung des Anteils (I) der virtuellen äusseren Arbeit durch nur einseitig wirkende Operatoren:

$$-\delta W_{(a)I}^L = \frac{1}{2} \lambda \int \delta \mathbf{u}^T \mathbf{D}_{I1}^D \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{D}_{I1}^D \cdot \delta \mathbf{u} \cdot dr \quad (3.23)$$

$$\text{mit: } \frac{\partial^1 f}{\partial r} = \frac{\partial^1 f}{\partial^1 x_1} \cdot \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} + \frac{\partial^1 f}{\partial^1 x_2} \cdot \frac{\partial^1 x_2}{\partial r}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{L(II)(III)}^D &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1_{f,1}} \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} & \frac{1}{1_{f,2}} \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} \\ -\frac{1}{1_{f,1}} \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} & -\frac{1}{1_{f,2}} \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1_{f,1}} \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} + \frac{1}{1_{f,2}} \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1_{f,1}} \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} + \frac{1}{1_{f,2}} \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} \right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{1_{f,1}} \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} & -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1_{f,1}} \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} - \frac{1}{1_{f,2}} \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} \right) \\ -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{1_{f,1}} \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} - \frac{1}{1_{f,2}} \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} \right) & -\frac{1}{1_{f,2}} \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Randterm:} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{K}_{L(IV)}^D = \frac{1}{2} \lambda \cdot \frac{1}{f} \mathbf{D}_R^D = \frac{1}{2} \lambda \cdot \frac{1}{f} \begin{bmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Die Operatormatrizen  $\mathbf{K}_{L(I)}$  und  $\mathbf{K}_{L(II)(III)}$  sind selbstadjungiert. Fuer  $\mathbf{K}_{L(II)(III)}$  wird dies aus der Symmetrie der Matrix ersichtlich. Bei  $\mathbf{K}_{L(IV)}$  zeigt die Umformung nach Gl.(3.23) die Selbstadjungiertheit an. Diese Operatormatrizen fuehren auf symmetrische Laststeifigkeitsmatrizen, vorausgesetzt, dass fuer die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$



dieselben Ansatzfunktionen wie fuer die Verschiebungen  $u$  gewaehlt werden.

Der Randterm  $K_L^{(IV)}$  fuehrt hingegen auf eine schiefsymmetrische Steifigkeitsmatrix, die einen deutlichen Hinweis auf die Nichtkonservativitaet eines Problems darstellt. Dieser Gesichtspunkt wird in Abschnitt 3.3.1 umfassend eruertert. Hier soll nur auf die Bedingungen eingegangen werden, unter denen der Randterm verschwindet. Diese werden als Symmetriebedingungen bezeichnet, da mit dem Verschwinden des Randterms die Selbstadjungiertheit des inkrementellen linearisierten Lastoperators und die Symmetrie in den Steifigkeitsmatrizen gesichert sind.

Symmetriebedingungen: ( Randbedingungen )

$$1. \quad \left. \begin{matrix} 1 \\ f \end{matrix} \right|_{r_1} = \left. \begin{matrix} 1 \\ f \end{matrix} \right|_{r_2} = 0 \quad (3.26)$$

$$2. \quad a_{ij} u_j \cdot \delta u_i \Big|_{r_2} = a_{ij} u_j \cdot \delta u_i \Big|_{r_1} = 0 \quad (3.27)$$

Bei Erfuellung einer der Randbedingungen Gl.(3.26)(3.27) ist die Symmetrie vorhanden. Randbedingung 1 fordert, dass waehrend des gesamten Belastungsvorgangs keine Lastbelegung eines der beiden Raender vorliegen darf. Randbedingung 2 hingegen ist nur erfuehlt, wenn jeweils eine Verschiebung jedes Randes entweder vorgeschrieben oder behindert ist.

#### 3.2.1.2. Koerperfeste Belastung

=====

Bei koerperfester Belastung ist die Belastungsmagnitudo eines Punktes nur von den Lagrangeschen Koordinaten des Kurvenpunktes und damit von seinen Ausgangskoordinaten abhaengig. ( $l=0$ )

$$l_f = f(0x_1, 0x_2) \quad (3.28)$$

Es ist keine Verschiebungsabhaengigkeit der Belastungsmagnitudo vorhanden. (3.28) in (3.15) eingesetzt, ergibt fuer die aussere virtuelle Arbeit:

$${}^2\delta W_{(a)} = -e_{ij} \cdot \lambda \left[ \int_0^f \overset{\textcircled{1}}{\frac{\partial 1x_j}{\partial r}} \cdot \delta u_i \, dr + \int_0^f \overset{\textcircled{2}}{\frac{\partial u_j}{\partial r}} \delta u_i \, dr \right] \quad (3.29)$$

Im Gegensatz zur raumfesten Belastung ist dieser Arbeitsausdruck (3.29) schon vorab - gleichgueltig welche Belastungsfunktion vorliegt - linear in den Verschiebungsincrementen. Eine Linearisierung ist nicht erforderlich. Der weitere Vergleich mit den Beziehungen fuer raumfeste Belastung (3.18) zeigt, dass bei koerperfester Belastung ein Term  $\textcircled{3}$  voellig entfaellt. Die beiden anderen Terme sind bis auf die unterschiedliche Definition der Belastungsmagnitudo identisch.

Der Laststeifigkeitsanteil fuer koerperfeste Belastung lautet damit:

$$\begin{aligned} {}^2\delta W_{(a)}^L &= \frac{1}{2} e_{ij} \cdot \lambda \left[ \int_0^f \left( \frac{\partial u_j}{\partial r} \delta u_i - u_j \cdot \frac{\partial \delta u_i}{\partial r} \right) dr \right] && \textcircled{I} \\ & && (3.30) \\ & - \int \frac{\partial^0 f}{\partial r} u_j \cdot \delta u_i \cdot dr && \textcircled{II} \\ & + {}^0 f \cdot u_j \cdot \delta u_i \Big|_{r_1}^{r_2} && \textcircled{IV} \end{aligned}$$

In der Schreibweise mit Operatormatrizen fuehrt dies auf:

$${}^2\delta W_{(a)}^L = \int_r \delta u^T \left[ K_{L\textcircled{I}}^D + K_{L\textcircled{II}}^D \right] u \, dr + \delta u^T K_{L\textcircled{IV}}^D u \Big|_{r_1}^{r_2} \quad (3.31)$$

Die einzelnen Operatormatrizen lauten analog zu den Gleichungen (3.22) bis (3.25);

$${}^0 K_{L(I)} = \frac{1}{2} {}^2 \lambda {}^0 f {}^D D_{(I)} \quad (3.32)$$

$${}^D K_{L(III)} = \frac{1}{2} \left( {}^0_{f,1} \frac{\partial^0 x_1}{\partial r} + {}^0_{f,2} \frac{\partial^0 x_2}{\partial r} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Randterm:

$${}^D K_{L(IV)} = \frac{1}{2} {}^2 \lambda {}^0 f {}^D D_R \quad (3.34)$$

Die Operatormatrix  ${}^D K_{L(I)}$  ist wieder symmetrisch (selbstadjungiert) und fuehrt demnach wieder unter den vorgenannten Voraussetzungen auf eine symmetrische Laststeifigkeitsmatrix. Zusaetzlich zur unsymmetrischen Operatormatrix  ${}^D K_{L(IV)}$  fuer den Randterm fuehrt die Herleitung diesmal auch im Gebiet auf eine schiefsymmetrische Operatormatrix  ${}^D K_{L(III)}$ . Diese Unsymmetrie in den Matrizen ist wieder ein Hinweis auf die Nichtkonservativitaet des Problems, die in diesem Fall nicht nur vom Randterm, sondern auch von der Belastungsart im Gebiet abhaengt. Die weitere Eroerterung dieses Punktes erfolgt in Abschnitt 3.3.1.

Von Interesse sind die Faelle, in denen die Unsymmetrie in den Operatormatrizen verschwindet. Die Symmetriebedingungen fuer raumfeste Belastung Gl.(3.27) werden um eine Bedingung erweitert, wobei ansonsten  ${}^1 f$  durch  ${}^0 f$  zu ersetzen ist.

Zusaetzliche Symmetriebedingung :

$${}^0_{f,n} = 0 \hat{=} {}^0 f = \text{konst} \quad (3.35)$$

Symmetrie (Selbstadjungiertheit) in den Operatormatrizen liegt demnach nur vor, wenn die Belastungsmagnitudo unabhaengig vom Ort eines Punktes ist, d.h. wenn konstante Strecken-(Flaechen-)last vorliegt. Gleichzeitig mit dieser Symmetriebedingung kann jedoch die Randbedingung nach Gl. (3.26) - Belastungsmagnitudo am Rand gleich Null - nicht erfuehrt werden. Um zu symmetrischen Matrizen zu gelangen, muss also fuer jeden der beiden Raender eine Verschiebung vorgeschrieben oder behindert sein (3.27).

### 3.2.2. Raeumlicher Fall

=====

Analog zum ebenen Fall werden die Beziehungen fuer die aessere virtuelle Arbeit im raeumlichen Fall aufgestellt. Daher werden die Herleitungen nur verkuerzt wiedergegeben.

Die Belastung wirkt auf eine beliebige Flaechie im Raum.

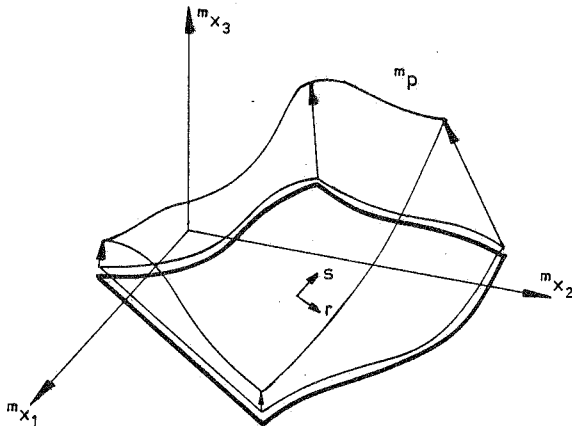


Bild 3.6 Belastung einer Flaechie in Normalenrichtung

Im räumlichen Fall bringt die Beschreibung der Fläche in Parametern Vorteile, auf die in Abschnitt 3.3.2 noch einmal eingegangen wird.

Für die Fläche gilt:

$${}^m x_i = {}^m x_i (r, s) \quad (3.36)$$

$${}^2 x_i = {}^1 x_i (r, s) + u_i (r, s) \quad (3.37)$$

Für ein Flächenelement der Größe  $d({}^m a)$  gilt:

$$d({}^m a) = \sqrt{EG - F^2} \cdot dr ds \quad (3.38)$$

mit den Koeffizienten der ersten quadratischen Fundamentform einer Fläche

$$E = \left( \frac{\partial {}^m x_1}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial {}^m x_2}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial {}^m x_3}{\partial r} \right)^2$$

$$G = \left( \frac{\partial {}^m x_1}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial {}^m x_2}{\partial s} \right)^2 + \left( \frac{\partial {}^m x_3}{\partial s} \right)^2$$

$$F = \frac{\partial {}^m x_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^m x_1}{\partial s} + \frac{\partial {}^m x_2}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^m x_2}{\partial s} + \frac{\partial {}^m x_3}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^m x_3}{\partial s}$$

Die Normale in einem beliebigen Flächenpunkt ist:

$${}^m n_i = -e_{ijk} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial {}^m x_k}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^m x_j}{\partial s} = e_{ijk} \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial {}^m x_j}{\partial r} \frac{\partial {}^m x_k}{\partial s} \quad (3.39)$$

Mit dem Permutationssymbol:

$$e_{ijk} = \begin{cases} & ijk: \\ 0 & i = j, j = k, i = k \\ 1 & 123, 231, 312 \\ -1 & 132, 213, 321 \end{cases}$$

Die Belastungskomponenten in Normalenrichtung lauten:

$${}^m p_i = {}^m \lambda \cdot {}^l f \cdot {}^m n_i \quad i = 0, m \quad (3.40)$$

Die inkrementelle virtuelle Arbeit im Zustand 2 wird damit:

$$\begin{aligned} {}^2 \delta W_{(a)} &= \int_{{}^2 A} {}^2 \lambda \cdot {}^l f \cdot {}^2 n_i \cdot \delta u_i \cdot d({}^2 a) \\ &= e_{ijk} \cdot {}^2 \lambda \iint_{rs} {}^l f \cdot \frac{\partial {}^2 x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^2 x_k}{\partial s} \delta u_i \cdot dr \cdot ds \end{aligned} \quad (3.41)$$

Mit Gleichung (3.37) gilt:

$$\begin{aligned} {}^2 \delta W_{(a)} &= e_{ijk} \cdot {}^2 \lambda \iint_{rs} {}^l f \cdot \frac{\partial {}^1 x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^1 x_k}{\partial s} \delta u_i \cdot dr \cdot ds \\ &+ e_{ijk} \cdot {}^2 \lambda \iint_{rs} {}^l f \left( \frac{\partial u_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^1 x_k}{\partial s} + \frac{\partial {}^1 x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial s} \right) \delta u_i \cdot dr \cdot ds \end{aligned} \quad (3.42)$$

wobei der Ausdruck bereits im Hinblick auf spaeter verwendete Iterationsverfahren in den Verschiebungsinkrementen linearisiert wurde. Je nach Art der Belastung muessen eventuell weitere Linearisierungen erfolgen.

### 3.2.2.1 Raumbeste Belastung

=====

Analog zum ebenen Fall gilt fuer die Verteilung der Belastungsmagnitude (1=2):

$${}^l f = f({}^2 x_1, {}^2 x_2, {}^2 x_3) \quad (3.43)$$

Mit (3.37) laesst sich diese Funktion durch eine Taylor-Reihe darstellen:

$$f = f + \frac{\partial f}{\partial {}^1 x_n} \cdot u_n + \dots \text{ Glieder hoe.h. Ordnung} \quad (3.44)$$

n=1,2,3

Damit lautet der linearisierte Arbeitsausdruck :

$${}^2\delta W_{(a)} = e_{ijk} {}^2\lambda \iint_{rs} {}^1f \frac{\partial {}^1x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^1x_k}{\partial s} \cdot \delta u_i \cdot dr \cdot ds \quad \textcircled{1}$$

$$+ e_{ijk} {}^2\lambda \iint_{rs} {}^1f \left( \frac{\partial u_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^1x_k}{\partial s} + \frac{\partial {}^1x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial s} \right) \delta u_i \cdot dr \cdot ds \quad \textcircled{2}$$

$$+ e_{ijk} {}^2\lambda \iint_{rs} {}^1f_{,n} u_n \cdot \frac{\partial {}^1x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^1x_k}{\partial s} \cdot \delta u_i \cdot dr \cdot ds \quad \textcircled{3}$$

(3.45)

Term  $\textcircled{1}$  geht in den Belastungsvektor ein, waehrend die Terme  $\textcircled{2}$  und  $\textcircled{3}$  in die Laststeifigkeitsmatrix uebergehen. Die Umformung mit Hilfe teilweiser partieller Integration erbringt fuer den Laststeifigkeitsanteil :

$$-{}^2\delta W_{(a)}^L = -\frac{1}{2} e_{ijk} {}^2\lambda \left\{ \iint_{rs} {}^1f \left[ \frac{\partial {}^1x_j}{\partial r} \left( u_i \cdot \frac{\partial \delta u_k}{\partial s} + \delta u_i \frac{\partial u_k}{\partial s} \right) \right. \right. \quad \textcircled{I}$$

$$\left. \left. + \frac{\partial {}^1x_k}{\partial s} \left( u_i \cdot \frac{\partial \delta u_j}{\partial r} + \delta u_i \frac{\partial u_j}{\partial r} \right) \right] \right\} dr \cdot ds$$

$$+ 2 \iint_{rs} {}^1f_{,n} \frac{\partial {}^1x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^1x_k}{\partial s} \cdot u_n \cdot \delta u_i \cdot dr \cdot ds \quad \textcircled{II}$$

$$+ \iint_{rs} {}^1f_{,n} \left( \frac{\partial {}^1x_n}{\partial r} \cdot \frac{\partial {}^1x_j}{\partial s} - \frac{\partial {}^1x_n}{\partial s} \cdot \frac{\partial {}^1x_j}{\partial r} \right) u_k \delta u_i \cdot dr \cdot ds \quad \textcircled{III}$$

$$- \int_b {}^1f u_j \frac{\partial {}^1x_k}{\partial s} \delta u_i \cdot ds \quad \textcircled{IV}$$

(3.46)

$$\left. - \int_b {}^1f \cdot \frac{\partial {}^1x_i}{\partial r} u_k \cdot \delta u_i \cdot dr \right\} \quad \textcircled{V}$$

Damit zerfaellt der Arbeitsausdruck in Gebietsintegrale ueber das Gebiet A und Randintegrale ueber den Rand b.

Die Terme (II) und (III) lassen sich weiter umformen zu :

$$\begin{aligned}
 -\delta W_{(a)II,III}^L &= -\frac{1}{2} \cdot e_{nj k} \cdot 2 \lambda \iint_{r,s}^1 f_{,n} \left( \frac{\partial^1 x_n}{\partial r} \cdot \frac{\partial^1 x_j}{\partial s} - \frac{\partial^1 x_n}{\partial s} \cdot \frac{\partial^1 x_j}{\partial r} \right) \cdot \\
 &\quad \cdot (u_k \cdot \delta u_n + u_n \cdot \delta u_k) \cdot dr \cdot ds \quad (3.47) \\
 &= -e_{nj k} \cdot 2 \lambda \iint_{r,s}^1 f_{,n} \frac{\partial^1 x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial^1 x_k}{\partial s} \cdot u_n \cdot \delta u_n \cdot dr \cdot ds
 \end{aligned}$$

Die Gebietsintegrale des Laststeifigkeitsanteils bestehen wie beim ebenen Fall aus einem Term (I), in den die Lastmagnitude voll eingeht, und einem Term (II) (III), in dem die Lastmagnitude nach den aktuellen Koordinaten differenziert wird. Durch Indexvertauschung laesst sich die Symmetrie beider Terme bezueglich der wirklichen und virtuellen Verschiebungen feststellen. Die Randintegrale lassen sich mit Hilfe der Randnormalen  $v$  in Tangentenebene an die Flaechе und ihren Komponenten  $v_s$  und  $v_r$  zu einem Integral zusammenfassen :

$$\begin{aligned}
 \partial s &= v_r \cdot db \\
 \partial r &= -v_s \cdot db \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

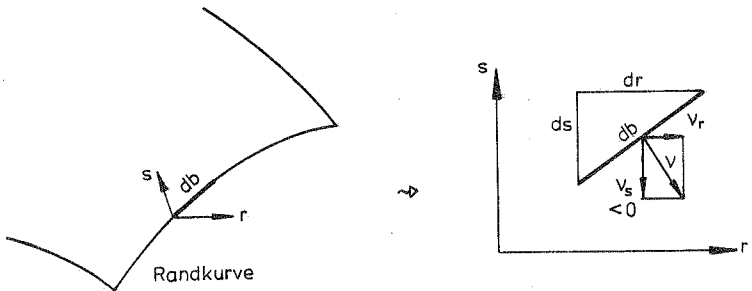


Bild 3.7 Betrachtungen an der Randkurve



Randintegral :

$${}^2\delta W_{(a)}^{LR} = \frac{1}{2} e_{ijk} {}^2\lambda \int_b^1 f \left( \frac{\partial {}^1x_k}{\partial s} v_r + \frac{\partial {}^1x_k}{\partial r} \cdot v_r \right) u_j \cdot \delta u_i \cdot db \quad (3.49)$$

Die in Abschnitt 2 eingefuehrte Schreibweise fuehrt auch im raeumlichen Fall auf leicht ueberschaubare Operatormatrizen.

$$\begin{aligned} {}^2\delta W_{(a)}^L &= \iint_{r,s} \delta u^T \left( K_{L(I)}^D + K_{L(II)(III)}^D \right) u \cdot dr \cdot ds \\ &\quad + \int_b \delta u^T K_{L(IV)}^D \cdot u \, ds \\ &\quad + \int_b \delta u^T K_{L(V)}^D \cdot u \, dr \end{aligned} \quad (3.50)$$

Die Operatormatrizen lauten :

$$K_{L(I)}^D = \frac{1}{2} {}^2\lambda \cdot {}^1f \left( D_r - D_s \right) \quad (3.51)$$

$$D_r = \begin{bmatrix} 0 & {}^1x_{3,s} (r\partial - \partial_r) & {}^1x_{2,s} (\partial_r - r\partial) \\ {}^1x_{3,s} (\partial_r - r\partial) & 0 & {}^1x_{1,s} (r\partial - \partial_r) \\ {}^1x_{2,s} (r\partial - \partial_r) & {}^1x_{1,s} (\partial_r - r\partial) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$D_s = \begin{bmatrix} 0 & {}^1x_{3,r} (s\partial - \partial_s) & {}^1x_{2,r} (\partial_s - s\partial) \\ {}^1x_{3,r} (\partial_s - s\partial) & 0 & {}^1x_{1,r} (s\partial - \partial_s) \\ {}^1x_{2,r} (s\partial - \partial_s) & {}^1x_{1,r} (\partial_s - s\partial) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit :} \quad \mathbf{K}_L^D \textcircled{\text{II}} \textcircled{\text{III}} &= \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \begin{bmatrix} 2 \cdot {}^1_{1,1} f \cdot AC & - {}^1_{1,1} f \cdot AB & {}^1_{1,1} f \cdot AA \\ & + {}^1_{1,2} f \cdot AC & + {}^1_{1,3} f \cdot AC \\ - {}^1_{1,1} f \cdot AB & & {}^1_{1,2} f \cdot AA \\ + {}^1_{1,2} f \cdot AC & - 2 \cdot {}^1_{1,2} f \cdot AB & - {}^1_{1,3} f \cdot AB \\ {}^1_{1,1} f \cdot AA & {}^1_{1,2} f \cdot AA & \\ + {}^1_{1,3} f \cdot AC & - {}^1_{1,3} f \cdot AB & 2 \cdot {}^1_{1,3} f \cdot AA \end{bmatrix} \\
 & \hspace{15em} (3.54)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{mit :} \quad AA &= {}^1_{x_{1,s}} \cdot {}^1_{x_{2,r}} - {}^1_{x_{1,r}} \cdot {}^1_{x_{2,s}} \\
 AB &= {}^1_{x_{1,s}} \cdot {}^1_{x_{3,r}} - {}^1_{x_{1,r}} \cdot {}^1_{x_{3,s}} \\
 AC &= {}^1_{x_{2,s}} \cdot {}^1_{x_{3,r}} - {}^1_{x_{2,r}} \cdot {}^1_{x_{3,s}}
 \end{aligned}$$

Randterme : (alle Werte auf der Randkurve b)

$$\mathbf{K}_L^D \textcircled{\text{IV}} = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \cdot {}^1_f \begin{bmatrix} 0 & {}^1_{x_{3,s}} & - {}^1_{x_{2,s}} \\ - {}^1_{x_{3,s}} & 0 & {}^1_{x_{1,s}} \\ {}^1_{x_{2,s}} & - {}^1_{x_{1,s}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \cdot {}^1_f \cdot \mathbf{D}_{R1}^D \hspace{10em} (3.55)$$

$$\mathbf{K}_L^D \textcircled{\text{V}} = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \cdot {}^1_f \begin{bmatrix} 0 & - {}^1_{x_{3,r}} & {}^1_{x_{2,r}} \\ {}^1_{x_{3,r}} & 0 & - {}^1_{x_{1,r}} \\ - {}^1_{x_{2,r}} & {}^1_{x_{1,r}} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \cdot {}^1_f \cdot \mathbf{D}_{R2}^D \hspace{10em} (3.56)$$

Die Randintegrale fuhren auf schiefsymmetrische Operatormatrizen analog zum ebenen Fall. Symmetrie in allen

Operatormatrizen ist dann vorhanden, wenn das Randintegral zu Null wird.

Symmetriebedingungen

1.  $\int_b f = 0$  Belastungsmagnitudo am Rand gleich Null (3.57)

oder:

2.  $u_i = u_j = 0 \Big|_b$  und  $\delta u_i = \delta u_j = 0 \Big|_b$  (3.58)

Mindestens zwei Verschiebungsmoeglichkeiten des Randes muessen vorgeschrieben oder behindert sein. (siehe auch Gleichung (3.49))

oder:

3.  $u \cdot n = 0$  (3.59)

Die Verschiebung des Randes in Normalenrichtung muss behindert sein. ( Beweis siehe Anhang )

oder

4. Das Randintegral kann in der Summe zu Null werden.

Eine der vier Randbedingungen muss erfuehlt sein, wobei die integrale 4. Randbedingung nur selten erfuehllbar ist. Die Erfuehllung der drei weiteren Randbedingungen kann vorab einfach ueberprueft oder gefordert werden. Allerdings ist bei Randbedingung 1 darauf zu achten, dass sie waehrend des gesamten Belastungsvorgangs Gueltigkeit besitzt.

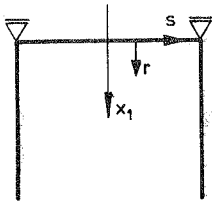
Bemerkung zur Symmetriebedingung 3 :

Diese Randbedingung besagt, dass fuer den im Zustand 1 linearisierten Ausdruck die Verschiebung senkrecht zur Schale behindert sein muss. Die Verschiebungsrandbeding-

ungen aendern sich jedoch fuer allgemein gebraeuchliche Tragwerke waehrend der Belastung nicht. Daher ist diese Randbedingung fuer grosse Verschiebungen nicht erfuellbar!

Beispiele :

- ① Kreiszyylinder mit ebener Endscheibe  $\hat{=}$  Festhalterung in  $x_1$ -Richtung.



Das Randintegral ergibt mit den angegebenen Randbedingungen :

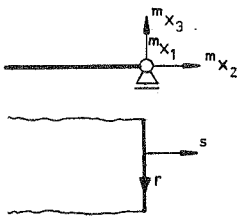
$$\frac{2\lambda}{2} \int_f^f \left[ \frac{\partial^1 x_1}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} \right] (u_3 \delta u_2 - u_2 \delta u_3) db = 0$$

Randbedingungen :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = 0 \\ \frac{\partial^1 x_1}{\partial s} = 0 \\ \text{nur am Anfang!} \left\{ \begin{array}{l} v_r = 1 \\ v_s = 0 \end{array} \right. \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{\partial^1 x_1}{\partial s} \cdot v_r + \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} v_s = 0 \\ 0 \cdot 1 + \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} 0 = 0 \end{array}$$

Die Symmetriebedingung ist nur im Ausgangszustand erfuellbar, da  $v_r$  und  $v_s$  sich fuer grosse Deformationen veraendern. Dieser Fall laesst sich auf alle Schalen mit entsprechenden Randbedingungen uebertragen.

- ② Platten mit geradlinigen Raendern, die normal zur Ausgangslage gestuetzt sind.



Randbedingungen :

$$v_s = 1, \quad v_r = 0 \quad \leftarrow \text{nur am Anfang!}$$

$$u_3 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^1 x_3}{\partial r} = 0$$

Randintegral :

$$J = \frac{2\lambda}{2} \int_b^b \left[ \frac{\partial^1 x_3}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_3}{\partial r} v_s \right] (u_2 \delta u_1 - u_1 \delta u_2) db$$

$\downarrow = 0$                        $\downarrow = 0$

$\rightarrow J = 0$

### 3.2.2.2 Koerperfeste Belastung

=====

Bei koerperfester Belastung wird die Belastungsmagnitudo eines Punktes wie beim ebenen Fall zu einer Funktion seiner Lagrangeschen Koordinaten. Sie ist damit nur noch von den Ausgangskoordinaten abhaengig. (l=0)

$$l_f = f(0x_1, 0x_2, 0x_3) \quad (3.60)$$

(3.60) eingefuehrt in Gleichung (3.42) gibt :

$$\begin{aligned} {}^2\delta W_{(a)} &= e_{ijk} \int_{rs} \int_0^1 f \frac{\partial 1x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial 1x_k}{\partial s} \cdot \delta u_i \cdot dr \cdot ds \quad \textcircled{1} \\ &+ e_{ijk} \int_{rs} \int_0^1 f \left( \frac{\partial u_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial 1x_k}{\partial s} + \frac{\partial 1x_j}{\partial r} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial s} \right) \delta u_i \cdot dr \cdot ds \quad \textcircled{2} \end{aligned} \quad (3.61)$$

Term  $\textcircled{1}$  geht in den Belastungsvektor ein, waehrend Term  $\textcircled{2}$  den Laststeifigkeitsanteil bildet. Es sei festgestellt, dass ueber Gleichung (3.42) hinaus keine weitere Linearisierung erfolgt ist. Der Vergleich mit den Termen infolge raumfester Belastung zeigt, dass bei koerperfester Belastung die Terme  $\textcircled{1}$  und  $\textcircled{2}$  den Termen  $\textcircled{1}$  und  $\textcircled{2}$  aus Gleichung (3.45) entsprechen, waehrend Term  $\textcircled{3}$  aus Gleichung (3.45) naturgemaess hier nicht vorhanden ist. Mittels partieller Integration ergibt sich fuer den Laststeifigkeitsanteil :

$${}^2\delta W_{(a)}^L = - \frac{1}{2} e_{ijk} {}^2\lambda \left\{ \iint_{rs} {}^0f \left[ \frac{\partial^1 x_j}{\partial r} (u_i \cdot \frac{\partial \delta u_k}{\partial s} + \delta u_i \frac{\partial u_k}{\partial s}) \right. \right. \quad (\text{I})$$

$$\left. \left. + \frac{\partial^1 x_k}{\partial s} (u_i \cdot \frac{\partial \delta u_j}{\partial r} + \delta u_i \frac{\partial \delta u_j}{\partial r}) \right] \right\} dr \cdot ds$$

$$+ \iint_{rs} {}^0f_{,n} \left( \frac{\partial^0 x_n}{\partial r} \cdot \frac{\partial^1 x_j}{\partial s} - \frac{\partial^0 x_n}{\partial s} \cdot \frac{\partial^1 x_j}{\partial r} \right) u_k \delta u_i \cdot dr \cdot ds \quad (\text{II})$$

$$\left. - \int_b {}^0f_{,j} \frac{\partial^1 x_k}{\partial s} \delta u_i \cdot ds \quad - \int_b {}^0f_{,i} \frac{\partial^1 x_j}{\partial r} u_k \cdot \delta u_i \cdot dr \right\}$$

(III)

(IV)

(3.62)

Das Randintegral analog zu (3.49) lautet :

$${}^2\delta W_{(a)}^{LR} = \frac{1}{2} e_{ijk} {}^2\lambda \int_b {}^0f \left( \frac{\partial^1 x_k}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_k}{\partial r} v_s \right) u_j \cdot \delta u_i \cdot db \quad (3.63)$$

Die Schreibweise mit Operatormatrizen liefert :

$${}^2\delta W_{(a)}^L = \iint_{rs} \delta \mathbf{u}^T \left( \overset{D}{\mathbf{K}}_{L\textcircled{I}} + \overset{D}{\mathbf{K}}_{L\textcircled{II}} \right) \mathbf{u} \cdot dr \cdot ds \quad (3.64)$$

$$+ \int_b \delta \mathbf{u}^T \overset{D}{\mathbf{K}}_{L\textcircled{III}}^b \cdot \mathbf{u} \cdot ds + \int_b \delta \mathbf{u}^T \overset{D}{\mathbf{K}}_{L\textcircled{IV}} \cdot \mathbf{u} \cdot dr$$

Die Operatormatrizen lauten :

$$\overset{D}{\mathbf{K}}_{L\textcircled{I}} = \frac{1}{2} {}^2\lambda \cdot {}^0f \left( \overset{D}{\mathbf{D}}_r - \overset{D}{\mathbf{D}}_s \right) \quad (3.65)$$

Matrizen  $\overset{D}{\mathbf{D}}_r$ ,  $\overset{D}{\mathbf{D}}_s$  siehe (3.52), (3.53).

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{K}_L^D \textcircled{II} = \frac{1}{2} z^2 \lambda \begin{bmatrix}
 \begin{matrix}
 0 \\
 +0f_{,2} \\
 +0f_{,3}
 \end{matrix} \begin{matrix}
 ({}^0x_{1,s} & {}^1x_{3,r} & -{}^0x_{1,r} & {}^1x_{3,s}) \\
 ({}^0x_{2,s} & {}^1x_{3,r} & -{}^0x_{2,r} & {}^1x_{3,s}) \\
 ({}^0x_{3,s} & {}^1x_{3,r} & -{}^0x_{3,r} & {}^1x_{3,s})
 \end{matrix} & \begin{matrix}
 -0f_{,1} \\
 -0f_{,2} \\
 -0f_{,3}
 \end{matrix} \begin{matrix}
 ({}^0x_{1,s} & {}^1x_{2,r} & -{}^0x_{1,r} & {}^1x_{2,s}) \\
 ({}^0x_{2,s} & {}^1x_{2,r} & -{}^0x_{2,r} & {}^1x_{2,s}) \\
 ({}^0x_{3,s} & {}^1x_{2,r} & -{}^0x_{3,r} & {}^1x_{2,s})
 \end{matrix} \\
 \text{anti-} & \quad \quad \quad 0 & \begin{matrix}
 0 \\
 +0f_{,2} \\
 +0f_{,3}
 \end{matrix} \begin{matrix}
 ({}^0x_{1,s} & {}^1x_{1,r} & -{}^0x_{1,r} & {}^1x_{1,s}) \\
 ({}^0x_{2,s} & {}^1x_{1,r} & -{}^0x_{2,r} & {}^1x_{1,s}) \\
 ({}^0x_{3,s} & {}^1x_{1,r} & -{}^0x_{3,r} & {}^1x_{1,s})
 \end{matrix} \\
 \text{symmetrisch} & & & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.66}$$

Randterme : (alle Werte auf der Randkurve b)

$$\mathbf{K}_L^D \textcircled{III} = \frac{1}{2} z^2 \lambda \begin{matrix} 0 \\ f \end{matrix} \cdot \mathbf{D}_{R1}
 \tag{3.67}$$

$$\mathbf{K}_L^D \textcircled{IV} = \frac{1}{2} z^2 \lambda \begin{matrix} 0 \\ f \end{matrix} \cdot \mathbf{D}_{R2}
 \tag{3.68}$$

Die Operatormatrix  $\mathbf{K}_L^D \textcircled{II}$  ist analog zum ebenen Fall schiefssymmetrisch zur Hauptdiagonalen und zeigt damit auch die Nichtkonservativitaet der koerperfesten Belastung an. Symmetrische Operatormatrizen ergeben sich fuer koerperfeste Belastung unter den Randbedingungen fuer raumfeste Belastung nach Gl.(3.58),(3.59) sowie zusaetzlich unter der folgenden Symmetriebedingung fuer die Matrix  $\mathbf{K}_L^D \textcircled{II}$

Zusaetzliche Symmetriebedingung

$${}^0f_{,n} = 0 \cong {}^0f = \text{konst.}
 \tag{3.69}$$

Symmetrie in den Operatormatrizen liegt demnach nur fuer in Flaechenrichtung konstante Belastung vor. Da mit konstanter Belastung eine Randbedingung nach (3.57) - Belastungsmagnitudo am Rand gleich Null - nicht erfuehrt werden kann, muss eine Lagerung des Randes nach (3.58) bzw. (3.59) vorliegen, um Symmetrie in allen Operatormatrizen zu gewaehrleisten.

Es sei bemerkt, dass fuer diesen Sonderfall konstanter Flaechenbelastung die Faelle der raumfesten bzw. koerperfesten Belastung ineinander uebergehen, da damit die Belastungsmagnitudo unabhhaengig von den Verschiebungen eines Punktes ist.

### 3.3. Diskussion der Ergebnisse

=====

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse und Ueberlegungen fuer die beiden verschiedenen Belastungen in Richtung der Flaechennormalen unter dem Blickpunkt der Konservativitaet bzw. Nichtkonservativitaet diskutiert werden. Da im Schrifttum vielfach differierende Ergebnisse vorliegen, wird das Schrifttum unter den entwickelten Gesichtspunkten bezueglich der Belastungen untersucht und geordnet. Zum Abschluss folgen dann Ueberlegungen zur physikalischen Realitaet moeglicher Belastungen, insbesondere im Hinblick auf nichtkonservative Belastungen.

#### 3.3.1 Zur Konservativitaet bzw. Nichtkonservativitaet der betrachteten Probleme

=====

Bei den Betrachtungen zur Konservativitaet wird unterschieden zwischen Problemen, die den Werkstoff und Problemen, die die Belastung betreffen. Auf den ersteren Problembereich - Nichtkonservativitaet bei plastischem Werk-



stoffverhalten - wird hier nicht eingegangen. Die Frage der Konservativitaet soll ausschliesslich an der Belastung eruertert werden. In Ergaenzung zu Abschnitt 3.1.1 werden noch einige Definitionen vorangestellt.

Leipholz [83] unterscheidet konservative und nicht-konservative Kraefte folgendermassen :

Kraefte sind dann konservativ, wenn sie rein ortsabhaengig und ihre Komponenten die negativen partiellen Ableitungen einer Skalarfunktion  $\pi_{(x_i)}$  des Ortes (Potentials) sind.

$$F_i = - \frac{\partial \pi}{\partial x_i}$$

Von der Zeit und Geschwindigkeit unabhangige Kraefte sind dann nichtkonservativ, wenn die Kraftkomponenten von den raeumlichen Koordinaten, den Verschiebungen  $u$  und den Neigungen  $u_{,i}$  abhaengen.

$$F_i = F_i ( \mathbf{X}, u, u_{,i} ) ; \quad \mathbf{X} = ( x_i ) \quad i = 1, 2, 3$$

Nach dieser Definition sind alle Kraefte, die den Verschiebungen und/oder den Neigungen eines Systems folgen also alle Folgelasten - nichtkonservativ. Trotzdem ist in vielen Faellen bei einer nach dieser Definition lokalen nichtkonservativen Belastung eine globale Konservativitaet des Problems vorhanden.

Eine solche globale Konservativitaet einer hydrostatisch mit konstantem Normalendruck belasteten Platte weist Bolotin [18] unter bestimmten Randbedingungen nach. Cohen [33] hat das Bolotinsche Potential auf Schalen unter nicht konstanter kontinuierlicher Flaechenbelastung erweitert. Dieses wurde wiederum von Sheinman/Tene [145] modifiziert. Alle drei Potentiale gelten jedoch nur fuer kleine Verschiebungen, da bei der Herleitung Linearisierungen vorgenommen wurden. Ihre Aussagen bezueglich der Randbedingungen entsprechen den oben beschriebenen Symmetriebedingungen fuer die Randterme sowohl bei raumfester als auch bei

koerperfester Belastung. Dabei entspricht die Formulierung von Sheinman/Tene dem Ausdruck (3.49), sofern anstelle der aktuellen Normalen am Rand  $n$  die urspruengliche Normale  $n^0$  eingesetzt wird.

Bolotin	$p \int_{\Gamma} u^3 \delta u^\alpha n \, d\Gamma = 0$	(p = konst.) (3.70)
Cohen	$\int_{\Gamma} p \cdot u^3 \cdot \delta u^\alpha \cdot n_\alpha \cdot d\Gamma = 0$	(3.71)
Sheinman/ Tene	$\frac{1}{2} \int_{\Gamma} p (u^3 \delta u^\alpha - u^\alpha \delta u^3) n_\alpha \cdot d\Gamma = 0$	
		} p = p(x_\alpha)
Bezeichnungen nach [18]		(3.72)

Tafel 3.1 Randbedingungen bei verformungsabhaengigen Lasten fuer Konservativitaet (bei kleinen Verschiebungen !).

Die Verletzung dieser Randbedingungen und die damit vorhandene Nichtkonservativitaet haben zur Folge, dass antisymmetrische Steifigkeitsmatrizen auftreten, die ausschliesslich den Rand betreffen. Dieses Resultat erhaelt auch Ziegler in [168], wo er fuer lineare Systeme feststellt, dass zirkulatorische (nichtkonservative) Kraefte antisymmetrische Koinzidenzmatrizen nach sich ziehen, waehrend nichtzirkulatorische (konservative) Kraefte auf symmetrische Matrizen fuehren.

Die physikalische Bedeutung der Randbedingungen Gl. (3.57)ff bzw. (3.69) laesst sich an einem einfachen Beispiel erlaeuern (Bild 3.8).

Das Bild 3.8 a) stellt ein klar nichtkonservatives Problem dar, bei dem das Druckfeld (Wasserdruck) auf das Tragwerk - man denke dabei an ein ueberstroemtes Wehr -

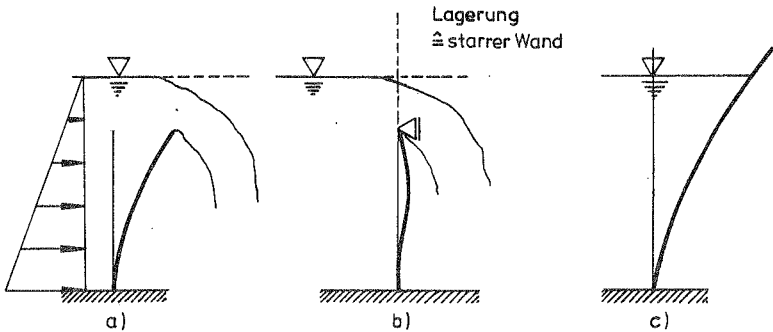


Bild 3.8 Nichtkonservativitaet bzw. Konservativitaet infolge von Randbedingungen

nur durch einen Stroemungsvorgang (staendige Zufuhr von Energie) erhalten bleibt. Durch den Einbau des Lagers in Bild 3.8 b), das einer starren Wand entspricht, kann das Druckfeld auf das Tragwerk ohne Zufuhr von Energie (statisch) erhalten bleiben. Wird dagegen der freie Rand des Tragwerks nicht belastet (Bild 3.8c)), so wird durch das Tragwerk selbst die Erhaltung des Druckfelds gesichert, und keine weitere Randbedingung ist erforderlich. Allerdings muss dies waehrend des gesamten Belastungsvorgangs gesichert sein.

Die antisymmetrischen Operatormatrizen, die beim Fall der koerperfester Belastung auch bei Einhaltung der Randbedingungen auftreten, sind ein Hinweis auf nichtkonservative Kraefte. Wie bei der Definition in Abschnitt 3.1 erlaeutert, beruht die Nichtkonservativitaet bei koerperfester Belastung auch auf dem Fehler, der entsteht, wenn Energieanteile der Belastung, die sich durch die Veraenderung der Belastungsmagnitudo eines Punktes im Druckfeld waehrend der Belastung ergeben, vernachlaessigt werden. Damit waere die Energieerhaltung im System nicht mehr gesichert.

Konservativitaet im System mit koerperfester Belastung ist demnach nur vorhanden, wenn die Verteilung der

Belastungsmagnitudo konstant ist. Dies ist nur bei konstanter Druckbelastung der Fall. Fuer diesen Sonderfall gehen die beiden Faelle der koerper- bzw. raumfesten Belastung ineinander ueber. Es ergeben sich fuer die Gebietsterme immer symmetrische (selbstadjungierte) Operatormatrizen.

Die bislang in diesem Abschnitt angestellten Ueberlegungen koennten nun zu dem Schluss verleiten, aus der Symmetrie (Selbstadjungiertheit) oder Unsymmetrie der hergeleiteten Operatormatrizen auf die Existenz bzw. Nichtexistenz eines inkrementellen Potentials der betrachteten aeusseren Kraefte zu schliessen. Dies ist nur im letzteren Fall der Unsymmetrie moeglich. Der Grund hierfuer liegt in der vorgenommenen Linearisierung des Problems. Denn die bei der Linearisierung entfallenden Lastanteile hoeherer Ordnung in den Verschiebungen koennen gerade den nichtkonservativen Anteil einer Belastung enthalten und sind nicht notwendigerweise selbstadjungiert. Im anderen Fall, wenn sich die Nichtkonservativitaet bereits in der Unsymmetrie der linearen Glieder bemerkbar macht, kann diese nicht durch Glieder hoeherer Ordnung "aufgehoben" werden. Die Selbstadjungiertheit der Operatoren bei konservativen Problemen, die normalerweise zur Symmetrie in den Operatormatrizen fuehrt [27] [28], muss in den Gliedern gleicher Ordnung gewaehrleistet sein.

Somit ist nur in den Faellen, in denen das linearisierte Problem dem exakten Problem entspricht, die oben angesprochene Folgerung fuer die Existenz eines inkrementellen Potentials gueltig. Sewell [144] hat in seiner umfassenden Arbeit bei globalen Potentialen besonders auf diesen Gesichtspunkt hingewiesen und fuer alle moeglichen Belastungsarten - insbesondere fuer konfigurationsabhaengige Lasten - ein globales Wegunabhaengigkeitskriterium zum Nachweis der Konservativitaet angegeben, das dem Nachweis der Existenz eines globalen Potentials entspricht. Innerhalb der vorliegenden Arbeit wurde dieses

Vorgehen nicht weiter verfolgt, daher soll nur auf einige seiner Ergebnisse eingegangen werden.

Die Randbedingungen (3.57)ff bzw. (3.69) sind vergleichbar dem Randintegral, das Sewell [144] (Gl.59, Seite 339) fuer solche Belastungen angibt. Fuer konstante Druckbelastung werden die Randbedingungen Gl.(3.57)ff bestaetigt. Ausserdem zeigt er, dass Folgelasten, die Bolutin [18] (Gl.138) angibt und die der koerperfesten Belastung entsprechen, nichtkonservative Belastungen darstellen. Diese Folgerung kann auch aus der Unsymmetrie (Nichtselbstadjungiertheit) der Operatormatrizen des ebenen Falls gezogen werden, da in diesem Fall keine Linearisierungen vorgenommen wurden.

Fuer konstante Flaechendruckbelastung weist Romano in [129] die Existenz eines Potentials bei endlichen Verschiebungen nach; allerdings ist dabei die Randkurve des belasteten Gebiets unverschieblich gelagert.

Die Existenz eines Potentials fuer verschiebungsabhaengige Belastung kann auch mit Hilfe einer globalen Betrachtungsweise nachgewiesen werden. Dies ist fuer zwei Belastungsarten einfach durchfuehrbar :

1. konstanter (Gas-) Druck
2. linear veraenderlicher Fluessigkeitsdruck infolge einer ruhenden Fluessigkeit

In beiden Faellen kann dem Verschiebungsvolumen des betrachteten Koerpers eine definierte aeuessere Arbeit zugewiesen werden. (Bild 3.9)

In den meisten anderen Faellen verformungsabhaengiger Belastungen kann das raumfeste oder koerperfeste Druckfeld nur durch Zufuhr von Energie erhalten bleiben.

Bemerkung: Wird das Wasservolumen und die Wasseroberflaeche gegenueber dem Verschiebungsvolumen des Koerpers als sehr gross angesehen, so kann das Absinken der hydrostatischen Hoehe des Wassers fuer die Berechnung des Wasserdrucks auf das Tragwerk vernachlaessigt werden.

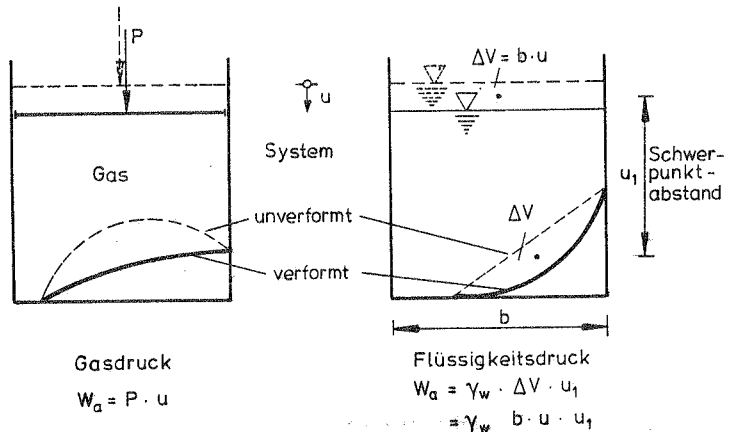


Bild 3.9 Konservative verformungsabhaengige Belastungen

Zusammenfassung

Beueglich der Konservivitaet der hier betrachteten Belastungen kann abschliessend gesagt werden, dass koerperfeste Belastung mit Ausnahme des Lastfalls konstanter Druck immer auf ein nichtkonservatives Problem und damit auf unsymmetrische Laststeifigkeitsmatrizen fuehrt. Bei raumfester Belastung haengt die Konservivitaet von den Randbedingungen und der Existenz eines Potentials fuer die jeweilige Belastungsfunktion ab. Dies fuehrt bei entsprechenden Randbedingungen immer zu symmetrischen Laststeifigkeitskeitsmatrizen. Fuer konstanten Druck sowie linear veraenderlichen Druck (Wasser) ist die Existenz von Potentialen gesichert.

Die meisten anderen Belastungen haben ihren Ursprung in instationaeren Kraefte, die durch stationaere Kraefte nur unvollstaendig modelliert werden. Sie stellen nicht-konservative Probleme dar. Ihre Erfassung als raumfeste Belastung fuehrt im linearisierten Fall auf symmetrische Matrizen. Fuer kleine Verschiebungen kann die Existenz eines Potentials angenommen werden [33].

### 3.3.2. Verformungsabhaengige Flaechenbelastungen - Diskussion des Schrifttums

=====

In diesem Abschnitt soll ein kurzer Vergleich der bisher abgeleiteten Ergebnisse mit den Herleitungen im Schrifttum erfolgen. Im Hinblick auf nichtkonservative Probleme interessieren hierbei besonders die Arbeiten, die sich mit Stabilitaetsuntersuchungen befassen.

Die Beruecksichtigung des Einflusses der Verformungsabhaengigkeit der Belastung auf die Stabilitaetslast bei mit konstantem Aussendruck belasteten Kreisringen und Kreiszyklindern war das Ziel vieler analytischer Untersuchungen [135][48][6][32][73]. Fuer normalentreue Belastung wird bei den betrachteten beidseitig gelagerten Schalen stets ein Potential vorausgesetzt [29]. Auch Almroth [1], der Kreiszyklinder unter nichtrotationssymmetrischem Aussendruck (Wasserbelastung) untersucht, setzt bei seinen Ableitungen ein genaehertes Potential kleiner Verschiebungen voraus. Er behandelt auch Kreiszyklinder, bei denen die nichtrotationssymmetrische Belastung in Laengsrichtung nur abschnittsweise vorhanden ist. Nach der Ableitung von Cohen in [33] bedeutet dies, dass in [1] der Einfluss der Randterme, der auch bei Voraussetzung kleiner Verschiebungen auf ein nichtkonservatives Problem gefuehrt haette, vernachlaessigt wird. Auch in den Arbeiten ueber windbelastete Zylinderschalen [112][154] wird fuer einseitig eingespannte, einseitig freie Kreiszyklinder dieselbe Vernachlaessigung bezueglich der Randterme getroffen. Somit wird in allen genannten analytischen Arbeiten davon ausgegangen, dass mit Hilfe des statischen Stabilitaetskriteriums lineare Stabilitaetslasten bestimmbar sind (siehe auch Abschnitt 4).

Die meisten Untersuchungen neueren Datums verwenden numerische Verfahren mit diskreten Modellen wie finiten Elementen oder finiten Differenzen (siehe auch Abschnitt 3.4.2). Dies fuehrt auf Koeffizientenmatrizen der in Abschnitt 3.2 mit Operatormatrizen dargestellten Form. Fuer

finite Elemente unter konstanter Linienbelastung werden in [152] Laststeifigkeitsmatrizen entwickelt, bei denen der Einfluss der Laengverschiebung in den Laststeifigkeitsmatrizen vernachlaessigt bleibt. Dabei entstehen unsymmetrische Elementmatrizen, die nur bei Verwendung von Elementen gleicher Laenge, die keinen Knick miteinander bilden duerfen, symmetrische Gesamtsteifigkeitsmatrizen ergeben. Auch in [49], wo Laststeifigkeitsmatrizen fuer zweidimensionale Kontinuumelemente hergeleitet werden, ergeben sich infolge eines Linearisierungsfehlers - Vernachlaessigung der Dichteaenderung  ${}^2\rho \approx {}^1\rho$  im Anteil des Lastvektors - unsymmetrische Gesamtsteifigkeitsmatrizen auch fuer Faelle, in denen ein Potential existiert und sich demzufolge symmetrische Matrizen einstellen sollten. Sowohl in [152] als auch in [49] werden lineare Beuluntersuchungen mit Hilfe des statischen Stabilitaetskriteriums vorgenommen, wobei in [49] verschiedene zwangssymmetrisierte Matrizen Verwendung finden (siehe auch Abschnitt 4.3.2). Ein weiterer Linearisierungsfehler fuehrt dazu, dass Cescotto [31] fuer inkompressible Materialien andere Laststeifigkeitsmatrizen erhaelt als fuer kompressibles Material. Wie in Abschnitt 3.3.1 gezeigt, ist die Form der Laststeifigkeitsmatrizen aber nur vom aeusseren Potential der Belastung und nicht von den Werkstoffeigenschaften abhaengig.

Fuer eine Belastung, die der koerperfesten Belastung entspricht, leitet Hibbitt [64] Laststeifigkeitsmatrizen her und weist besonders auf die Unsymmetrien hin, die bei nicht konstanter Belastung und bei Nichteinhaltung der Randbedingungen nach (3.58), (3.59) auch bei konstantem Druck entstehen.

Der umfassende Aufsatz von Argyris/Symeonidis [4] beschaeftigt sich vor allem mit nichtkonservativen richtungsabhaengigen (koerperfesten) Einzellasten und verteilter Druckbelastung von Balkentragwerken. Da die Verschiebungsabhaengigkeit der Belastungsmagnitudo unberuecksichtigt bleibt, entstehen in [4] in allen Faellen



ausser konstanter Druckbelastung unter den erwaehnten Randbedingungen unsymmetrische Steifigkeitsmatrizen. Dies gilt auch fuer die Faelle, bei denen globale Konservativitaet festgestellt wird. In diesem Sinne folgerichtig wird das konservative Problem des beidseits eingespannten druckbelasteten Kreisbogens als zirkulatorisch belastetes System behandelt. Mit dieser Formulierung ist es nur moeglich, Systeme unter Belastungen, deren Belastungsmagnitudo nicht verschiebungsabhaengig ist (Gas- evtl. Winddruck), zu berechnen, da auch im Lastvektor die Verschiebungsabhaengigkeit der Lastmagnitudo nicht enthalten ist.

In den Arbeiten von Sheinman/Tene [146] sowie Floegl/Mang [47], Loganathan etal [88] wird die Verschiebungsabhaengigkeit der Lastmagnitudo auch nur teilweise beruecksichtigt. Alle benutzen ein von Cohen [33] entwickeltes Lastpotential, das nur fuer kleine Verschiebungen gueltig ist, wobei fuer die in ihren Arbeiten behandelten Rotationsschalen die Abhaengigkeit in radialer Richtung gegenueber der Herleitung von Cohen voellig vernachlaessigt wird. In [146] wird fuer Stabilitaetsuntersuchungen ausgehend von einem linearen Vorbeulverhalten ein quadratisches Eigenwertproblem fuer den Lastparameter aufgestellt. Dies stellt eine nichtlineare Anfangsstabilitaetsanalyse (nach [21]) dar, wobei die quadratischen Terme nicht konsequent beruecksichtigt werden. Wegen des hohen Rechenaufwandes werden allerdings in [146] nur lineare Anfangsstabilitaetsanalysen durchgefuehrt. Die Rechnungen beschraenken sich auf Probleme, die ein fast lineares Vorbeulverhalten besitzen, so dass eine lineare Anfangsstabilitaetsanalyse genuegt. Auch Floegl/Mang [47] sowie Loganathan [88] fuehren eine lineare Anfangsstabilitaetsanalyse im klassischen Sinn mit einer linearisierten Tangentensteifigkeitsmatrix durch. Dies entspricht dem Vorgehen in Abschnitt 3.2, wenn in den inkrementellen Laststeifigkeitsmatrizen die Koordinaten des Zustandes vor dem Inkrement durch die Koordinaten des Ausgangszustands ersetzt werden. Es erscheint jedoch zweifelhaft,

ob diese Laststeifigkeitsmatrizen, die aus einem Potential fuer kleine Verschiebungen entwickelt wurden, fuer nichtlineare Berechnungen mit grossen Verformungen einsetzbar sind. Es sei noch erwaehnt, dass in [47] [96/97] die Entstehung nichtkonservativer Probleme unter gewissen Randbedingungen und ihre Folgen fuer Stabilitaetsuntersuchungen ausfuehrlich diskutiert werden (siehe 4.3.2).

Zusammenfassend laesst sich sagen, dass im Schrifttum - bei Untersuchungen mit analytischen und numerischen Methoden- fast ausschliesslich Herleitungen vorliegen, die nur fuer lineare Stabilitaetsberechnungen verwendet werden koennen. Nur wenige Autoren [4] [47] beruecksichtigen eventuell entstehende nichtkonservative Probleme. Fuer koerperfeste Belastung liegen finite Elementlaststeifigkeitsmatrizen einiger Autoren [4] [49] vor, mit denen nichtlineare Berechnungen mit grossen Verformungen moeglich sind. Die vorhandenen Laststeifigkeitsmatrizen [47] [88] fuer raumfeste Belastung sind ausser bei konstanter Druckbelastung nur fuer quasi lineare Untersuchungen geeignet. Die in der vorliegenden Arbeit dargestellten Laststeifigkeitsmatrizen fuer raumfeste Belastung erlauben hingegen nichtlineare Berechnungen mit Tangentensteifigkeitsmatrizen - auch ueber Durchschlagspunkte hinweg (siehe dazu Abschnitt 5). Mit Hilfe der jeweiligen Tangentensteifigkeitsmatrizen sind auch begleitende Eigenwertuntersuchungen nach [21] an jedem Punkt der Last-Verschiebungskurve moeglich. Weitere Angaben hierzu folgen in Abschnitt 4.

### 3.3.3. Zur physikalischen Wirklichkeit nichtkonservativer Probleme infolge statischer verformungsabhaengiger Belastungen

=====

Nichtkonservative Probleme entstehen beim Aufeinandertreffen von sich bewegenden Medien wie Gas, Wasser und Luft auf starre oder flexible Strukturen. Die Belastung

kann nur durch fortlaufende Energiezufuhr aufrecht erhalten werden [132]. Dies sind im wesentlichen Probleme der

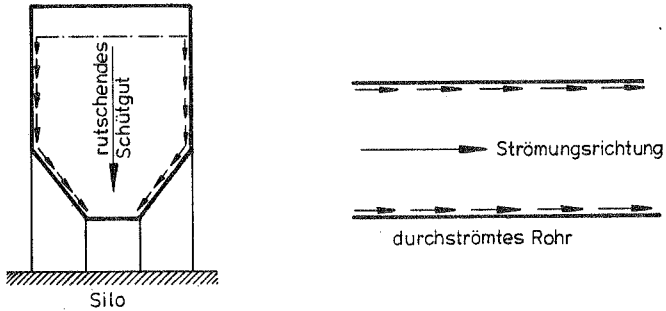


Bild 3.10 Beispiele nichtkonservativer Belastungen [132]  
Kopplung nicht konservativer Reibungskraefte  
und konservativer Druckkraefte

Hydrodynamik [161] und Aeroelastizitaet, wobei konservative (arbeitsfaehige) Energie in gebundene, nicht arbeitsfaehige Arbeit umgewandelt wird. Im allgemeinen ist das Auftreten nichtkonservativer Kraefte mit dem Auftreten konservativer Kraefte gekoppelt (siehe Bild 3.10). Untersucht man die Vielzahl mathematisch entwickelter nichtkonservativer Belastungsmodelle auf ihre physikalische Realitaet, so liegt die Feststellung von Herrmann [60] nahe, dass vielen Arbeiten auf diesem Gebiet mehr daran gelegen zu sein scheint, das "Kuriosum" des manchmal unerwarteten Verhaltens eines Gedankenmodells zu beschreiben als ein beobachtetes Phaenomen zu erklaren. Aehnliche Aussagen liegen in [153] und von Sewell in [144] vor, der das Fehlen gegluецkter Experimente zu vielen Phaenomenen bemaengelt. Die Ursache des Mangels an physikalischer Realitaet ist meist die unvollstaendige Abbildung der angreifenden dynamischen Kraefte durch ausschliesslich statische "nachfolgende" Lasten. Die dabei

nicht beruecksichtigte dynamische Eigenschaft der Last kann haeufig einen weit groesseren Einfluss z.B. auf Stabilitaetslasten ausueben als die auf nichtkonservative statische Probleme fuehrende Nachfolgeeigenschaft [133]. Gelungene Versuche, die das erwartete kinetische Instabilitaetsverhalten zeigen, sind fast nur fuer durchstroemte Rohre zu finden [161].

Vielfach entstehen nichtkonservative Probleme auch bei unvollstaendiger Umsetzung realer physikalischer Phaenome in mathematische Modelle [106] [108]. Dabei werden innerhalb konservativ belasteter Systeme mit grossen Verformungen Teilsysteme herausgegriffen -wie zum Beispiel Staebe, Randglieder von Membranschalen, Randstiele von Wandscheiben-, die losgeloest fuer sich -nicht richtungstreu belastet- als nichtkonservative Systeme betrachtet werden (siehe Bild 3.11).

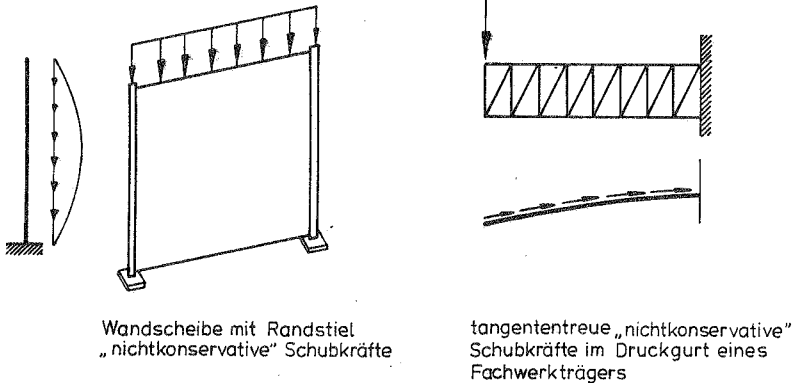


Bild 3.11 Falsche nichtkonservativ belastete Teilsysteme konservativ belasteter Tragwerke nach [106]

Bei der vollstaendigen Betrachtung solcher Probleme laesst sich aber feststellen, dass die Belastung der Teilsysteme immer derart vom Gesamtsystem abhaengt, dass wiederum ein Potential der als aeussere Kraefte angebrachten Schnittgrossen des Teilsystems vorliegt. Innerhalb eines

konservativ belasteten Systems koennen keine nichtkonservativen Teilsysteme auftreten, da durch Anwendung des Schnittprinzips konservative Lasten nicht in nichtkonservative Lasten umgewandelt werden koennen ( siehe auch [118] ). Der Energieerhaltungssatz waere verletzt, da dabei konservative (arbeitsfaehige) Energie in gebundene nichtkonservative Arbeit umgewandelt wuerde [130].

Bei manchen Belastungen ist die Frage nach dem zutreffenden Lastmodell offen. Die Windbelastung -ohne Reibungskraefte- einer Struktur kann zum Beispiel sowohl durch ein koerperfestes Druckfeld als auch durch ein raumfestes Druckfeld dargestellt werden, ohne der wirklichen Verformungsabhaengigkeit, die einer Mischung aus beidem entspricht, gerecht zu werden. Jedes der beiden Lastmodelle kann zur Folge haben, dass gewisse physikalische Effekte verloren gehen. So besteht bei raumfester Belastung bei entsprechenden Randbedingungen nicht mehr die Moeglichkeit der kinetischen Instabilitaet (Flattern), waehrend bei koerperfester Belastung die Aenderung der Belastungsmagnitudo infolge grosser Verschiebungen ausser Betracht bleibt. Zur Betrachtung der Auswirkung unterschiedlicher Lastmodelle wird auf die Beispiele in Abschnitt 6 und 7 verwiesen.

### 3.4. Diskretisierung durch finite Elemente

=====

#### 3.4.1 Verwendung finiter Elemente bei nichtkonservativen Problemen

=====

Bezuglich der Anwendung der Methode der finiten Elemente auf geometrisch nichtlineare Probleme soll hier auf die klassischen Buecher ueber diese Methode [169] sowie auf die Vorlaefer der vorliegenden Arbeit [114],[136] verwiesen werden, die zur Anwendung der Methode unter den hier dargestellten Aspekten Stellung nehmen.

An dieser Stelle wird nur auf die Punkte eingegangen, die im Zusammenhang mit den verformungsabhaengigen Lasten eine Rolle spielen.

Die Methode der finiten Elemente als bereichsweise Ritz-Verfahren wird fuer konservative Probleme mit Erfolg eingesetzt. Da diese Stationaritaets- bzw. Extremumsprobleme darstellen, die im linearisierten Fall selbstadjungiert und meist positiv definit sind, ist die Konvergenz der Naehungsloesungen mit Hilfe des Ritz'schen Verfahrens gesichert.

Fuer nicht selbstadjungierte Probleme, die bei linearen nichtkonservativen Problemen entstehen, hat Leipholz die Konvergenz bei Anwendung Galerkinscher Verfahren nachgewiesen [75] [82]. Da aber die Anwendung Galerkinscher Verfahren bezueglich der Erfuellung der Randbedingungen zu einigen Schwierigkeiten fuehrt, und daher ein grosses Interesse daran bestand, die einfacher zu handhabenden geometrischen Ansatzfunktionen der Ritz-Verfahren auch fuer nichtselbstadjungierte Probleme einzusetzen, haben sich einige Autoren bemueht, deren Einsatzbereich zu erweitern. Insbesondere, wenn - wie in der vorliegenden Arbeit - vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen ausgegangen wird, gewinnt die Moeglichkeit der Verwendung Ritz'scher Verfahren auch bei nichtkonservativen Problemen an Bedeutung.

Levinson [85],[86] hat als erster durch eine Erweiterung des Hamilton'schen Prinzips nachgewiesen, dass das Ritz'sche Verfahren auch auf nichtkonservative Probleme angewendet werden darf. Fuer die praktische Rechnung hat dies bekanntermassen zur Folge, dass nur noch solche geometrische Funktionen (zulaessige Funktionen nach Collatz) gewaehlt werden duerfen, die die geometrischen Randbedingungen erfuellen. Auf die zusaetzliche Erfuellung der natuerlichen Randbedingungen, wie es beim Galerkin'sche Verfahren erforderlich ist, kann dann verzichtet werden. (siehe auch die Anwendung in [30])

Leipholz [76] bestaetigte die Levinson'sche Erfahrung

durch Erweiterung der Ritz'schen Gleichungen um einen Randterm, der durch die nichtkonservativen Kraefte verursacht wird. Den Konvergenzbeweis erbrachte er am Beispiel eines Kragarms unter verteilten Folgelasten und einer einzelnen Folgelast [78]. (siehe auch [81])

Finite Elemente mit reinen Verschiebungsansatzen wurden von Mote [100], Barsoum [7] sowie Mote/Matsumoto [101] bei Stabilitaetsuntersuchungen von Balken unter verschiedenen Folgelasten eingesetzt. Diese linearen Stabilitaetsuntersuchungen mit linearem Vorbeulverhalten wurden in [4] auf Probleme mit nichtlinearem Verhalten erweitert. Konvergenzbeweise fuer den Einsatz des Ritz'schen Verfahrens fuer die nichtlinearen Faelle wurden nicht erbracht. Die Ergebnisse zeigten jedoch gute Uebereinstimmung mit analytischen Loesungen.

Auch in der vorliegenden Arbeit soll auf Konvergenzbeweise verzichtet werden. Eine -allerdings schwache- Rechtfertigung des Einsatzes finiter Elemente fuer nichtlineare nichtkonservative Probleme besteht in der erfolgreichen Verwendung finiter Elemente bei nichtlinearen konservativen Schalenproblemen.

### 3.4.2 Entwicklung der Elementlaststeifigkeitsmatrizen

=====

In der vorliegenden Arbeit werden Laststeifigkeitsmatrizen sowie Folgelasten fuer ebene bzw. achsensymmetrische Elemente sowie Platten/Schalenelemente aufgestellt. Auf die Ermittlung der lastunabhaengigen Steifigkeitsmatrix der verwendeten Elemente soll hier nicht eingegangen werden. Diese sind ausfuehrlich in [114] und [136] beschrieben.

Die Elemente basieren auf einem isoparametrischen Verschiebungskonzept [169], bei dem Geometrie und Verschiebungsfeld mit den gleichen Ansatzen interpoliert werden:

$$\text{Geometrie: } m_{x_i} = \sum_{K=1}^M \phi^K \cdot m_{x_i}^K \quad (3.73)$$

Gesamtverschiebungen: 
$${}^m u_i = \sum_{K=1}^M \phi^K \cdot {}^m u_i^K \quad (3.74)$$

Verschiebungsinkrement: 
$$u_i = \sum_{K=1}^M \phi^K \cdot u_i^K \quad (3.75)$$

Hierbei bezeichnet:

- M die Gesamtzahl der Knoten pro Element
- ${}^m x_i^K$  die Koordinate des Knotenpunktes K im Zustand m
- ${}^m u_i^K, u_i^K$  die Verschiebungen des Punktes K
- $\phi^K(r,s)$  die Interpolationsfunktion in lokalen Elementkoordinaten r,s
- $-1 \leq r,s \leq 1$  lokale Elementkoordinaten

Die Elemente sind kompatibel, d.h. es besteht Verträglichkeit in den Verschiebungen der Mittellinie bzw. -fläche und den Rotationen an den Elementgrenzen.

Bei der Ermittlung der Laststeifigkeitsmatrizen fuer die einzelnen Elemente zeigt sich deutlich der Vorteil der Parameterdarstellung und der Operatormatrizen. Dabei wird jedes Element als einzelnes Gebiet aufgefasst, in dem die Parameter r,s von Rand zu Rand (-1/+1) laufen. Damit koennen die Elementmatrizen direkt angeschrieben werden.

Bei allen Elementen wird vorausgesetzt, dass die virtuellen Verschiebungen  $\delta u$  mit denselben Interpolationsfunktionen ermittelt werden wie die wirklichen Verschiebungen. Nur damit ergeben sich auch die fuer die Rechen-technik so vorteilhaften symmetrischen Matrizen.



3.4.2.1. Beruecksichtigung der Verformungsabhaengigkeit  
der Belastung

=====

Der Folgeeffekt der Belastung bezueglich der Richtungs-  
aenderung laesst sich bei Einzellasten auf zwei Arten  
erfassen: Entweder durch Anpassung an die Normale (oder  
Tangente) eines Punktes, die aus der Geometrie inter-  
poliert wird, oder durch Anpassung an den Drehwinkel  
eines Querschnitts, sofern dieser als unabhaengige Un-  
bekannte definiert wird. Bei Einzellasten empfiehlt sich  
das letztere Vorgehen, da die Anpassung an den Winkel zu  
wesentlich weniger Termen in der Laststeifigkeitsmatrix  
fuehrt als bei der Anpassung an die Normale (Tangente),  
deren Interpolation aus der Gesamtgeometrie des Elements  
zur Kopplung der meisten Glieder der Laststeifigkeits-  
matrix fuehrt. Allerdings ist bei den spaeter beschrie-  
benen Elementen zu beachten, dass im Drehwinkel auch  
Anteile aus Schubverformungen enthalten sind, die keine  
Verformung der Mittellinie bzw. -flaeche zur Folge haben.

Bei verteilter Belastung -Flaechen oder Linienlasten-  
ist nur die Anpassung an die Normale (Tangente) sinnvoll,  
da der gesamte Verformungsverlauf miterfasst werden muss.

Da die Normalen im Zustand 2 noch unbekannt sind,  
muessen sie durch die Normalen des Zustandes 1 ange-  
naehert werden. Dies gilt auch fuer die Belastungsmagni-  
tude, sofern sie vom Verschiebungszustand abhaengig ist.  
Dies stellt eine Linearisierung im Lastvektor dar, die  
auf iterativem Weg wieder beseitigt wird.

Fuer koerperfeste Belastung gilt :

Einzellast :

$${}^2p_j^K = {}^2\lambda \cdot {}^0F^K \cdot {}^1n_j^K \quad \text{Anpassung an die Normale} \quad (3.76)$$

$${}^2p_j^K = {}^2\lambda \cdot {}^0F^K \cdot g({}^1\phi^K) \quad \text{Anpassung an den Drehwin-} \quad (3.77)$$

kel

Hierbei ist :

${}^2\lambda \cdot {}^0F^K$  Belastungsmagnitudo

${}^2\lambda$  Proportionalitaetsfaktor der Belastung

${}^0F^K$  Belastungsgroesse am Punkt K, konstant waehrend der Belastung

${}^1n_j^K$  Normale im Punkt K, Anteil in Richtung j

${}^1\varphi^K$  Drehwinkel des Punktes K

$g({}^1\varphi^K)$  beliebige Funktion, im allgemeinen Richtungskosinus

Flaechen- oder Linienlasten

$p = {}^2\lambda \cdot {}^0f \cdot {}^1n_j$  Anpassung an die Normale (3.78)

${}^0f = \sum_{K=1}^{M1} \phi^K \cdot {}^0f^K$  Verteilung der Belastungsmagnitudo (3.79)  
(unabhaengig von der jeweiligen Lage)

Hierbei ist :

$M_1$  Anzahl der Stuetzstellen zur Lastinterpolation

${}^0f^K$  Lastmagnitudo im Punkt K (unabhaengig von der jeweiligen Lage)

Fuer raumfeste Belastung gilt :

Einzellast

${}^2P_j^K = {}^2\lambda \cdot {}^1F^K \cdot {}^1n_j^K$  Anpassung an die Normale (3.80)

$${}^2P_j^K = {}^2\lambda \cdot {}^1F^K \cdot g({}^1\varphi^K) \quad \text{Anpassung an den Drehwinkel} \quad (3.81)$$

$${}^1F^K = F({}^1x_i^K) \quad \text{Belastungsmagnitudo als Funktion von } {}^1x_i^K \quad (3.82)$$

Flaechen- oder Linienlasten

$${}^2P_j = {}^2\lambda \cdot {}^1f \cdot n_j \quad \text{Anpassung an die Normale} \quad (3.83)$$

$${}^1f = f({}^1x_i) \quad \text{Belastungsmagnitudo als Funktion von } {}^1x_i \quad (3.84)$$

Wird bei der raumfesten Belastung die Belastungsmagnitudo als Funktion der Koordinaten des Ausgangszustandes 0 angenommen, so geht die raumfeste Belastung in die koerperfeste Belastung ueber. Auch fuer die koerperfeste Belastung wird daher die Beschreibung nach Gleichung (3.84) gewaehlt, da der zusaetzliche Programmieraufwand bei Vorhandensein der Algorithmen fuer raumfeste Belastung gering ist. Allerdings ist der Rechenaufwand etwas hoeher, da die Belastungsmagnitudo in jedem Lastschritt neu ermittelt werden muss. Damit wird der Lastvektor fuer die beiden Faelle zu: (m=0,1)

Einzellasten :

$${}^2R_j^K = {}^2p_j^K = {}^2\lambda \cdot m \cdot F^K \cdot {}^1n_j \quad (3.85)$$

Flaechenlasten :

$${}^2R_j^K = \iint_{r,s} \phi^K \cdot {}^2p_j \cdot dr \cdot ds = {}^2\lambda \iint_{r,s} m \cdot f \cdot \phi^K \cdot {}^1n_j \cdot dr \cdot ds \quad (3.86)$$

3.4.2.2. Darstellung der verwendeten Elementtypen  
=====

Laststeifigkeitsmatrizen wurden fuer folgende Elementtypen ermittelt :

1. Zweidimensionales, ebenes bzw. achsensymmetrisches Kontinuum-Element in der  ${}^m x_2$ - ${}^m x_3$  -Ebene  
=====

Das Element ist zur Berechnung ebener Spannungszustaeude, ebener Verzerrungszustaeude sowie fuer achsensymmetrische Probleme verwendbar. Es liegen Elemente mit linearer ( $M=4$ ) und quadratischer ( $M=8$ ) Interpolation vor. Bei diesen Elementen laesst sich prinzipiell fuer jeden Rand des Elements eine unterschiedliche Belastungsfunktion definieren. Diese Allgemeinheit ist jedoch bei den gaengigen Lastfaellen nicht erforderlich. Nur in Sonderfaellen wie aufblasbaren Konstruktionen unter Wasser sind zwei unterschiedliche Belastungsfunktionen pro Element denkbar. Bei diesem Kontinuum-Element ist die Anpassung von Folgelasten an Drehwinkel nicht moeglich, da nur Verschiebungen als Unbekannte definiert sind.

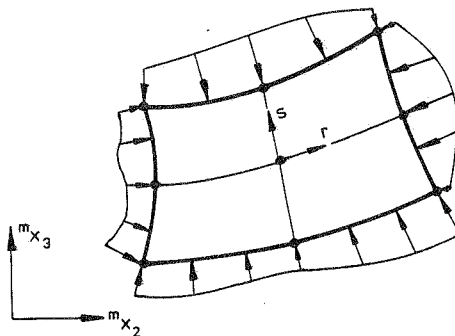


Bild 3.12 Zweidimensionales Element unter allseitiger, beliebig verteilter Normalendruckbelastung

Im Anhang sind Laststeifigkeitsmatrizen fuer ein Element mit linearem Ansatz unter linear veraenderlicher Belastung eines Randes (koerperfest und raumfest) dargestellt.

Fuer die Laststeifigkeitsmatrix eines belasteten Randes gilt :

Raumfeste Last :

-----

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\phi}^T = [\phi^1 \phi^2 \dots \phi^M] \tag{3.87}$$

$$\mathbf{u}_i^T = [u_i^1 u_i^2 \dots u_i^M]$$

Mit Verwendung der Operatormatrizen gilt fuer die jeweiligen Terme :

$$\text{Randterm : } \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{LR}^D \mathbf{u} \Big|_{-1}^{+1} = [\delta u_1 \ \delta u_2] \mathbf{K}_{LR}^D \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Big|_{-1}^{+1} \tag{3.88}$$

$$\text{Gebietsterm : } \int_{-1}^{+1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_L^D \mathbf{u} \, dr = \tag{3.89}$$

$$\int_{-1}^{+1} [\delta \mathbf{u}_1^T \ \delta \mathbf{u}_2^T] \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi} \end{bmatrix} \mathbf{K}_L^D \begin{bmatrix} \boldsymbol{\phi}^T & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\phi}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_L} \, dr$$

Im weiteren werden nur die Matrizen  $\mathbf{K}_L$  dargestellt.

Randterme :  $K_{LR} \hat{=} K_{LR}^D$

$$K_{LR}^{(-1)} = \frac{1}{2} \cdot z_\lambda \cdot 1_f^{(-1)} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

$$K_{LR}^{(+1)} = \frac{1}{2} \cdot z_\lambda \cdot 1_f^{(+1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

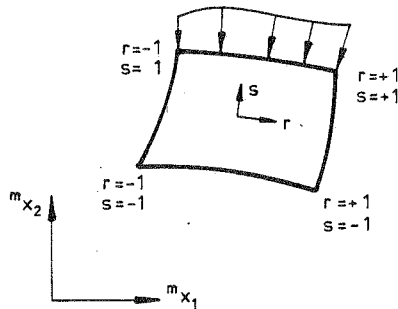


Bild 3.13 Belastung einer Elementrandkurve

Es sei darauf hingewiesen, dass beim Zusammenbau zweier Elemente der Randterm des gemeinsamen, belasteten Punktes entfaellt (Addition von +1 und -1), sofern die Belastungsmagnitude gleich ist.

Gebietsterm 1 nach Gleichung (3.22)

$$\int_{-1}^{+1} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{K}_{L1} \cdot \mathbf{u} \, dr \quad (3.92)$$

$$\mathbf{K}_{L1} = \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -r\partial + \partial_r \\ +r\partial & -\partial_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T & 0 \\ 0 & \Phi^T \end{bmatrix} dr$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\lambda \int_{-1}^{+1} \hat{\Phi} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} dr$$

$$\hat{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{,r} & \Phi^T - \Phi \cdot \Phi_{,r} & 0 \\ 0 & \Phi_{,r} & \Phi^T - \Phi \cdot \Phi_{,r} \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

Gebietsterm 2 nach Gleichung (3.24)

$$\int_{-1}^{+1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{L23} \mathbf{u} \, dr$$

$$\mathbf{K}_{L23} = 2\lambda \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \Phi & 0 \\ 0 & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} f_{,1} \cdot x_{2,r} & \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} f_{,1} \cdot x_{1,r} + \frac{1}{2} f_{,2} \cdot x_{2,r}) \\ \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} f_{,1} \cdot x_{1,r} + \frac{1}{2} f_{,2} \cdot x_{2,r}) & -\frac{1}{2} f_{,2} \cdot x_{1,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^T & 0 \\ 0 & \Phi^T \end{bmatrix} dr$$

$$= 2\lambda \int_{-1}^{+1} \bar{\Phi} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} f_{,1} \cdot x_{2,r} & \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} f_{,1} \cdot x_{1,r} + \frac{1}{2} f_{,2} \cdot x_{2,r}) \\ \frac{1}{2} (-\frac{1}{2} f_{,1} \cdot x_{1,r} + \frac{1}{2} f_{,2} \cdot x_{2,r}) & -\frac{1}{2} f_{,2} \cdot x_{1,r} \end{bmatrix} dr$$

(3.94)

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi^T \Phi & 0 \\ 0 & \Phi^T \Phi \end{bmatrix}$$

Bei koerperfester Belastung ist  ${}^m p_i$  nur richtungsabhängig: Damit wird beim Randterm und Gebietsterm 1  ${}^1 f$  zu  ${}^0 f$ , und der Gebietsterm 2 nach Gleichung (3.33) zu:

$$K_{L23} = \frac{2\lambda}{2} \int_{-1}^{+1} ({}^0 f_{,1} \cdot {}^0 x_{4,r} + {}^0 f_{,2} \cdot {}^0 x_{2,r}) \underline{\Phi} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} dr \quad (3.95)$$

2. Zweidimensionales, degeneriertes ebenes bzw. achsensymmetrisches Element in der  ${}^m x_2$ - ${}^m x_3$ -Ebene

=====

Dieses Element geht durch Degeneration aus dem vorigen zweidimensionalen Kontinuum-Element hervor. Zum Konzept der hier verwandten, degenerierten Elemente wird auf [114] und [136] verwiesen. Die dabei entstehenden, gekrümmten eindimensionalen Elemente liegen in Versionen mit linearer (M=2) bis quartischer (M=5) Interpolation vor. Als Unbekannte werden die Verschiebungen  $u_2^K$  und  $u_3^K$  sowie der Winkel  $\varphi^K$  an den Knotenpunkten verwendet. Dabei entspricht der Drehwinkel  $\varphi^K$  nicht mehr dem Winkel der

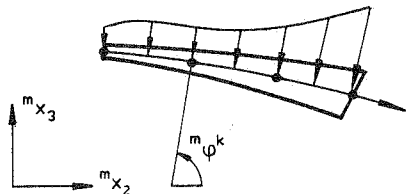


Bild 3.14 Zweidimensionales degeneriertes Element (M=4) unter beliebig verteilter Normalendruckbelastung

Normalen auf der Mittellinie im Zustand  ${}^m$ , da Schubverformungen mit erfasst werden.



Die Belastung wird auf die Mittellinie des Elements angesetzt, und die Normalen werden aus den aktuellen Koordinaten der Knoten ermittelt. Der Fehler, der bei der Vernachlässigung des Rotationsanteils -dieser müsste bei einer Randbelastung berücksichtigt werden- entsteht, ist für dünne Elemente gering.

Die Laststeifigkeitsmatrix des Elements entspricht exakt der Laststeifigkeitsmatrix eines Elementrandes des zweidimensionalen Kontinuum-Elements, vorausgesetzt der Rand besitzt dieselbe Knotenanzahl wie das degenerierte Element.

### 3. Dreidimensionales, degeneriertes Platten/Schalenelement =====

Durch Degeneration aus dem dreidimensionalen Kontinuum-Element entsteht das gekrümmte Platten/Schalenelement, das in linearer ( $M=4$ ), biquadratischer ( $M=9$ ) und bikubischer ( $M=16$ ) Version vorliegt. Eine umfassende Beschreibung des Elements liefert [114] und [136].

Als Unbekannte werden die Verschiebungen  $u_1, u_2, u_3$  sowie die beiden Drehwinkel der Normalen  $\psi$  und  $\varphi$  verwendet. Die Normalen werden aus den aktuellen Koordinaten der Elementknoten berechnet. Die Belastung wird auf die Mittelfläche des Elements bezogen. Bezüglich des Fehlers, der beim Ansatz der Belastung auf der Mittelfläche anstelle der Oberfläche gemacht wird, gelten dieselben Aussagen wie beim zweidimensionalen, degenerierten Element.

Zur Anpassung der Folgelasten an die Drehwinkel auch dieses degenerierten Elementes ist zu erwähnen, dass wegen der Berücksichtigung der Schubdeformationen die Drehwinkel  $\psi$  und  $\varphi$  nicht mehr den Winkeln der Normalen auf der Mittelfläche/Mittellinie entsprechen. Bei Problemen mit größeren Schubdeformationen ist daher von einer Anpassung an die Drehwinkel abzusehen.

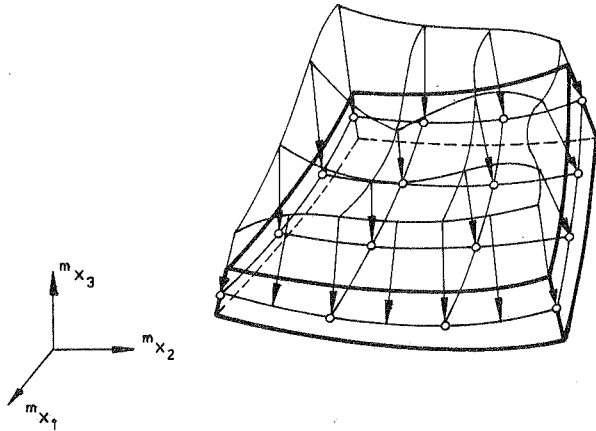


Bild 3.15 Degeneriertes Platten/Schalenelement unter Normalendruckbelastung ( $M=16$ )

Die Laststeifigkeitsmatrizen ergeben sich zu :  
( Es werden nur die Matrizenanteile fuer Verschiebungen  
angeschrieben, da keine die Rotationen betreffenden Terme  
vorhanden sind )

Raumfeste Belastung

Analog zu den Beziehungen des zweidimensionalen Elementes  
gilt :

Verschiebungen:

$$\mathbf{u} = \Phi^T \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Hypermatrix der Interpolationsfunktionen:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 & 0 \\ 0 & \phi & 0 \\ 0 & 0 & \phi \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

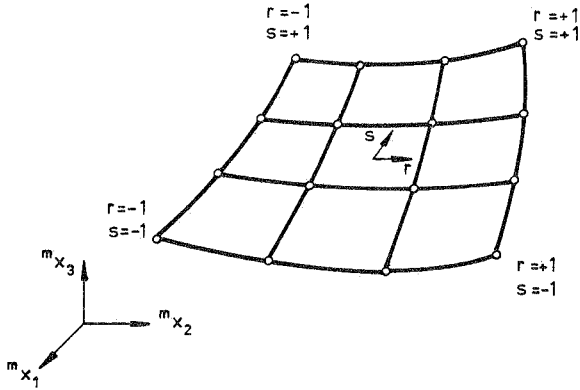


Bild 3.16 Mittelflaeche des Platten/Schalenelements (M=16), (lokale Koordinaten)

Randterme : nach Gleichung (3.55), (3.56)

Randterm 1 an den Raendern  $r=+1/-1$  mit Vorzeichen  $-/+$  :

$$K_{LR1} = \frac{1}{2} \lambda^2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f \Phi \begin{bmatrix} 0 & +^1x_{3,s} & -^1x_{2,s} \\ -^1x_{3,s} & 0 & +^1x_{1,s} \\ +^1x_{2,s} & -^1x_{1,s} & 0 \end{bmatrix} ds \quad (3.98)$$

mit:

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi^T \Phi & 0 & 0 \\ 0 & \Phi^T \Phi & 0 \\ 0 & 0 & \Phi^T \Phi \end{bmatrix}$$

Randterm 2 an den Raendern  $s=+1/-1$  mit Vorzeichen  $-/+ :$

$$K_{LR2} = \frac{1}{2} 2\lambda \int_{-1}^{+1} 1_f \underline{\Phi} \begin{bmatrix} 0 & -^1x_{3,r} & +^1x_{2,r} \\ +^1x_{3,r} & 0 & -^1x_{1,r} \\ -^1x_{2,r} & +^1x_{1,r} & 0 \end{bmatrix} dr \quad (3.99)$$

Gebietsterme

Gebietsterm 1 nach Gleichungen (3.51), (3.52), (3.53)

mit:

$$\hat{\Phi}_r = \Phi_{,r} \cdot \Phi^T - \Phi \cdot \Phi_{,r}^T$$

$$\hat{\Phi}_s = \Phi_{,s} \cdot \Phi^T - \Phi \cdot \Phi_{,s}^T$$

$$K_{Li} = \frac{1}{2} 2\lambda \iint_{-1}^{+1} 1_f \begin{bmatrix} 0 & ^1x_{3,s} \hat{\Phi}_r & -^1x_{2,s} \hat{\Phi}_r \\ -^1x_{3,r} \hat{\Phi}_s & 0 & +^1x_{2,r} \hat{\Phi}_s \\ ^1x_{3,r} \hat{\Phi}_s & 0 & ^1x_{1,s} \hat{\Phi}_r \\ ^1x_{2,s} \hat{\Phi}_r & -^1x_{1,s} \Phi_r & -^1x_{1,r} \hat{\Phi}_s \\ -^1x_{2,r} \hat{\Phi}_s & +^1x_{1,r} \Phi_s & 0 \end{bmatrix} dr ds \quad (3.100)$$

Gebietsterm 2 und 3 nach Gleichung (3.54):

$$K_{L2} = \frac{\lambda^2}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi \left[ \begin{array}{ccc} 2 \begin{matrix} 1 \\ f_{,1} \end{matrix} \cdot AC & \begin{matrix} -1 \\ f_{,1} \end{matrix} \cdot AB & \begin{matrix} 1 \\ f_{,1} \end{matrix} \cdot AA \\ & + \begin{matrix} 1 \\ f_{,2} \end{matrix} \cdot AC & + \begin{matrix} 1 \\ f_{,3} \end{matrix} \cdot AC \\ - \begin{matrix} 1 \\ f_{,1} \end{matrix} \cdot AB & & \begin{matrix} 1 \\ f_{,2} \end{matrix} \cdot AA \\ + \begin{matrix} 1 \\ f_{,2} \end{matrix} \cdot AC & - 2 \begin{matrix} 1 \\ f_{,2} \end{matrix} \cdot AB & - \begin{matrix} 1 \\ f_{,3} \end{matrix} \cdot AB \\ \begin{matrix} 1 \\ f_{,1} \end{matrix} \cdot AA & \begin{matrix} 1 \\ f_{,2} \end{matrix} \cdot AA & \\ + \begin{matrix} 1 \\ f_{,3} \end{matrix} \cdot AC & - \begin{matrix} 1 \\ f_{,3} \end{matrix} \cdot AB & 2 \begin{matrix} 1 \\ f_{,3} \end{matrix} \cdot AA \end{array} \right] dr ds$$

mit:  $AA = {}^1x_{1,s} \quad {}^1x_{2,r} - {}^1x_{1,r} \quad {}^1x_{2,s} \quad (3.101)$

$AB = {}^1x_{1,s} \quad {}^1x_{3,r} - {}^1x_{1,r} \quad {}^1x_{3,s}$

$AC = {}^1x_{2,s} \quad {}^1x_{3,r} - {}^1x_{2,r} \quad {}^1x_{3,s}$

Koerperfeste Belastung

Durch den Uebergang  ${}^1f \rightarrow {}^0f$  koennen die Matrizen fuer die Randterme sowie den Gebietsterm 1 aus der raumfesten Belastung gewonnen werden. Der Gebietsterm 2 unterscheidet sich jedoch nach seiner Struktur.

Gebietsterm 2 nach (3.66):

$$K_{L2} = \frac{\lambda^2}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \Phi \left[ \begin{array}{ccc} \begin{matrix} 0 \\ f_{,1} \end{matrix} ({}^0x_{1,s} \quad {}^1x_{3,r} - {}^0x_{1,r} \quad {}^1x_{3,s}) & - \begin{matrix} 0 \\ f_{,1} \end{matrix} ({}^0x_{1,s} \quad {}^1x_{2,r} - {}^0x_{1,r} \quad {}^1x_{2,s}) \\ 0 + \begin{matrix} 0 \\ f_{,2} \end{matrix} ({}^0x_{2,s} \quad {}^1x_{3,r} - {}^0x_{2,r} \quad {}^1x_{3,s}) & - \begin{matrix} 0 \\ f_{,2} \end{matrix} ({}^0x_{2,s} \quad {}^1x_{2,r} - {}^0x_{2,r} \quad {}^1x_{2,s}) \\ + \begin{matrix} 0 \\ f_{,3} \end{matrix} ({}^0x_{3,s} \quad {}^1x_{3,r} - {}^0x_{3,r} \quad {}^1x_{3,s}) & - \begin{matrix} 0 \\ f_{,3} \end{matrix} ({}^0x_{3,s} \quad {}^1x_{2,r} - {}^0x_{3,r} \quad {}^1x_{2,s}) \\ \text{anti-} & & \begin{matrix} 0 \\ f_{,1} \end{matrix} ({}^0x_{1,s} \quad {}^1x_{1,r} - {}^0x_{1,r} \quad {}^1x_{1,s}) \\ \text{symmetrisch} & 0 & + \begin{matrix} 0 \\ f_{,2} \end{matrix} ({}^0x_{2,s} \quad {}^1x_{1,r} - {}^0x_{2,r} \quad {}^1x_{1,s}) \\ & & + \begin{matrix} 0 \\ f_{,3} \end{matrix} ({}^0x_{3,s} \quad {}^1x_{1,r} - {}^0x_{3,r} \quad {}^1x_{1,s}) \\ & & 0 \end{array} \right] dr ds$$

(3.102)

### 3.4.2.3 Struktur der Elementlaststeifigkeitsmatrizen und der Gesamtsteifigkeitsmatrix

=====

Wird ein Element als Gebiet fuer sich betrachtet, so stellt man fest, dass mit Ausnahme gewisser Randbedingungen die Elementlaststeifigkeitsmatrix Unsymmetrien besitzt, die ausschliesslich aus den Randtermen herruehren. Bei koerperfester Belastung, die nicht aus konstanter Druck- oder Zugbelastung herruehrt, kommen noch Unsymmetrien in den Gebietstermen hinzu.

Beim Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix verschwinden die Unsymmetrien infolge der Randterme zwischen den Elementen, sofern an der Stelle des Zusammenbaus kein Belastungssprung auftritt, und bleiben nur an den Raendern der Gesamtstruktur bestehen. Werden die Raender der Struktur entsprechend den Randbedingungen nach Gl. (3.57) ff gelagert, so existieren keine Randterme mehr, und die Gesamtsteifigkeitsmatrix wird symmetrisch, wie dies bei konservativen Problemen ueblich ist. Tritt dagegen nicht gleichfoermig verteilte, koerperfeste Belastung auf, so ist die Unsymmetrie in den Steifigkeitsmatrizen nicht durch spezielle Randbedingungen zu eliminieren. Da die Abmessungen der Elemente nicht in die Laststeifigkeitsmatrizen eingehen, kann die Unsymmetrie auch nicht durch die Wahl groesserer oder kleinerer Elemente vermindert werden. Diesbezugliche Versuche [64] koennen zu einer Verfaelschung des Problems fuehren, denn in der Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix spiegelt sich die Nichtkonservativitaet des Problems wieder, die bei einer Symmetrisierung nicht mehr vorhanden waere. Bei Symmetrisierungen muss daher beachtet werden, dass die symmetrisierte Matrix das urspruengliche Problem nicht mehr vollstaendig beinhaltet.

Nichtkonservative Probleme

$$({}^1K_e + {}^1K_G + {}^1K_{LG} + {}^1K_{LR}) \cdot u = {}^2R - {}^1F \quad (3.103)$$

${}^1K_{LG}$ : Gebietsterme der Laststeifigkeitsmatrix,  
symmetrisch oder unsymmetrisch

${}^1K_{LR}$ : Randterme unsymmetrisch

$$({}^1K_e + {}^1K_G + {}^1K_{LG}) u = {}^2R - {}^1F$$

${}^1K_{LG}$ : Gebietsterme unsymmetrisch (3.104)

Konservative und scheinbar konservative Probleme:

(siehe Abschnitt 3.3.1)

$$({}^1K_e + {}^1K_G + {}^1K_{LG}) u = {}^2R - {}^1F \quad (3.105)$$

${}^1K_{LG}$ : Gebietsterme symmetrisch

Tafel 3.2 Aufbau der Steifigkeitsmatrizen

#### 3.4.2.4. Zwangssymmetrisierung von Laststeifigkeitsmatrizen fuer nichtlineare Berechnungen

=====

Da die Rechentechnik der meisten F.E.-Programmsysteme auf symmetrischen Matrizen beruht, ist es von grossem Interesse, diese auch fuer nichtkonservative Probleme zu verwenden. Rechnungen mit unsymmetrischen Matrizen koennen im Extremfall -sofern nicht spezielle Speichertechniken nur fuer die unsymmetrischen Terme vorhanden sind- zu einer Verdoppelung der benoetigten Speicherkapazitaeten fuehren. Durch das begrenzte Kernspeichervolumen hat dies

zur Folge, dass entweder die Groesse der behandelten Probleme weiter beschraenkt wird oder dass die Rechenzeiten um einen beträchtlichen Faktor ansteigen.

Mang [97],[47] sowie Frey/Cescotto [49] haben sich mit der Zwangssymmetrisierung von Laststeifigkeitsmatrizen beschaeftigt, letztere unnoetigerweise an Problemen, deren vollstaendige Matrizen symmetrisch sind. In [97] werden unter dem Gesichtspunkt der Stabilitaet, auf die im folgenden Abschnitt eingegangen wird, verschiedene Arten der Symmetrisierung vorgeschlagen.

Laststeifigkeitsmatrix  $K_L$

$$K_L = K_{LSYM} + K_{LSchief}$$
$$K_{LSchief} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{K} \\ -\hat{K} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Ersatzmatrix:} \quad K_{LERSATZ} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{K} \\ \hat{K} & 0 \end{bmatrix}$$

Alternativen:

1.  $\tilde{K}_L = K_{LSYM}$
2.  $\tilde{K}_L = K_{LSYM} + \frac{1}{2} K_{LERSATZ}$
3.  $\tilde{K}_L = K_{LSYM} - \frac{1}{2} K_{LERSATZ}$

Tafel 3.3      Symmetrisierung von Laststeifigkeitsmatrizen

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden nichtlineare Rechnungen mit symmetrisierten und unsymmetrischen Matrizen durchgefuehrt (siehe Tafel 3.3). Dabei wird die Verformungsabhaengigkeit der Last im Lastvektor iterativ beruecksichtigt. Bei der nichtlinearen Rechnung wirkt sich die Symmetrisierung entsprechend der Naehung an die



Tangentensteifigkeitsmatrix in der Zahl der Iterationen aus. Stellt die symmetrisierte Matrix eine nicht ausreichende Naehierung an die vollstaendige Steifigkeitsmatrix dar, so wird sich innerhalb eines Iterationsvorgangs (Abschnitt 5) keine Konvergenz ergeben.

In Tafel 3.3 sind 3 Alternativen der Symmetrisierung von Laststeifigkeitsmatrizen aufgefuehrt, die im folgenden diskutiert werden.

Am Kragarm (s. Abschnitt 6) zeigte die nichtlineare Rechnung mit grossen Verformungen, dass die Vernachlaessigung der unsymmetrischen Terme (dort ausschliesslich Randterme) waehrend des Rechenprozesses zu den geringsten Abweichungen gegenueber Berechnungen mit vollstaendigen Laststeifigkeitsmatrizen fuehrte. Im Sinne des modifizierten Newton/Raphson Verfahrens (Abschnitt 5) wird haeufig auch vorgeschlagen, zur Vermeidung der Aufstellung von Laststeifigkeitsmatrizen oder um die Loesung des unsymmetrischen Gleichungssystems zu umgehen, auf die Mitnahme dieser Lastterme auf der linken Gleichungsseite zu verzichten und die Folgelasten nur im Lastvektor zu beruecksichtigen [13] [70] [105][114]. Dieses Vorgehen zeigte am Beispiel des Kragarms nach dem Vorgehen mit den ausschliesslich symmetrischen Termen der Laststeifigkeitsmatrix die geringsten Abweichungen waehrend des Rechenprozesses.

Schwierigkeiten bei der nichtlinearen Rechnung mit symmetrisierten Matrizen bzw. ohne Laststeifigkeitsmatrix treten dann auf, wenn die Tangentensteifigkeitsmatrix des symmetrisierten Problems dort singulaer wird, wo das urspruengliche Problem noch kein Versagen aufweist. (siehe auch [5]). Damit kann festgestellt werden, dass fuer nichtlineare Berechnungen symmetrisierte Matrizen so lange verwendet werden koennen, wie die kritische Last (Singularitaetsstelle) des zu den symmetrisierten Matrizen gehoerigen Systems oberhalb einer kritischen Last des urspruenglichen Systems liegt. Wesentlich schwieriger gestaltet sich die Frage der Symmetrisierung beim Eigen-

wertproblem, das sich bei linearen Stabilitätsuntersuchungen ergibt. Darauf wird im folgenden Abschnitt eingegangen.

#### 4. Stabilitaet bei verformungsabhaengeriger Belastung

Die Bestimmung der kritischen Lasten und damit der Stabilitaet eines Systems unter verformungsabhaengeriger Belastung kann auf verschiedenen Wegen erfolgen (s.z.B.[21]). In der vorliegenden Arbeit wird die kritische Last vorwiegend ueber die Loesung von Eigenwertproblemen fuer den Last- und/oder den Frequenzparameter ermittelt. Andere Vorgehensweisen werden nur am Rande beruehrt. Diese Eigenwertprobleme erfordern die genaue Betrachtung der Steifigkeitsmatrix des Systems. Wie schon in Abschnitt 3.3.2 erwaeht, fuehrt die Konservativitaet eines Systems auf ein selbstadjungiertes Randwertproblem und in einer F.E.-Formulierung auf symmetrische Tangentensteifigkeitsmatrizen. Selbstadjungierte Probleme besitzen nur reelle Eigenwerte. Nichtkonservative Systeme hingegen fuehren auf nicht selbstadjungierte Probleme und damit auf nicht-symmetrische Tangentensteifigkeitsmatrizen. In diesem Fall koennen neben reellen auch komplexe oder ausschliesslich komplexe Eigenwaerte auftreten.

##### 4.1. Stabilitaetsarten

Es werden zwei Versagensformen festgestellt:

statische Instabilitaet und kinetische Instabilitaet

Statische Instabilitaet wird in einem Last-Verschiebungsdiagramm dadurch angezeigt, dass zu gewissen Lastzustanden mehrere Gleichgewichtslagen gehoeren. Die Mehrdeutigkeit (Divergenz) kann auf verschiedene Arten vorliegen. Tritt in der Last-Verschiebungskurve ein absolutes oder relatives Maximum auf, so wird dies als Durch-

schlagproblem bezeichnet. Sind Ueberschneidungen verschiedener Gleichgewichtsaeste vorhanden, so liegt ein Verzweigungsproblem vor.

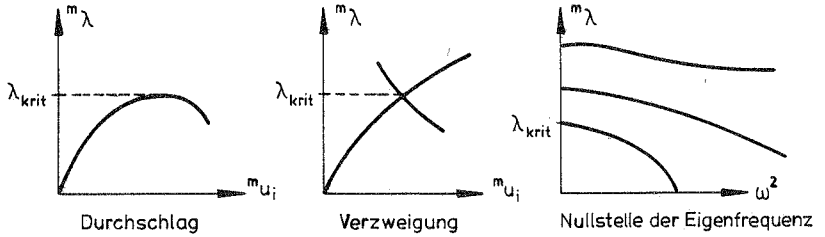


Bild 4.1 Statische Instabilitaetsformen

Betrachtet man die Eigenfrequenzen eines Systems unter verschiedenen Lastzustanden, so wird der statische Instabilitaetsfall im Frequenzdiagramm durch eine Eigenfrequenz der Groesse Null angezeigt.

Bei kinetischer Instabilitaet wird das Versagen durch Schwingungen mit wachsender Amplitude angezeigt. Dies wird als Flattern bezeichnet. Als Versagensbeginn wird im Frequenzdiagramm das Auftreten der ersten komplexen Eigenfrequenz definiert [77], d.h. wenn bei zunehmender Belastung zwei aufeinanderfolgende Eigenfrequenzen zusammenfallen.

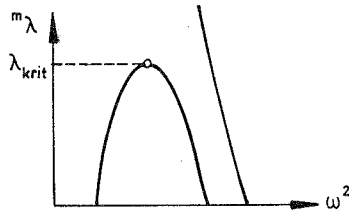


Bild 4.2 Kinetische Instabilitaet (Flattern)

#### 4.2. Methoden zur Stabilitaetsuntersuchung bei konservativen Problemen

=====  
Methoden zur Untersuchung der Stabilitaet werden in vielen Buechern und Aufsuetzen vorgestellt: Ziegler [167], Pflueger [108], Bolotin [18], siehe auch die Arbeit von Brendel [21].

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird daher darauf nur kurz eingegangen. Die Stabilitaet eines Gleichgewichtszustandes kann sowohl mit statischen als auch mit kinetischen Methoden untersucht werden. Bei konservativen (selbstadjungierten) Problemen koennen beide alternativ verwendet werden.

Die statische Stabilitaetsuntersuchung fuehrt nach der direkten Methode nach Euler auf das Kriterium fuer indifferentes Gleichgewicht [26][21]:

$${}^G_n\mathbf{K} \cdot {}^G\mathbf{V} = 0 \quad (4.1)$$

Der Vektor  ${}^G\mathbf{V}$  stellt dabei die infinitesimalen Verschiebungen vom urspruenglichen Gleichgewichtszustand (Grundzustand) zum infinitesimal benachbarten Gleichgewichtszustand dar.  ${}^G\mathbf{K}$  ist die Tangentensteifigkeitsmatrix im urspruenglichen Gleichgewichtszustand. In ihr ist auch die Laststeifigkeitsmatrix enthalten.

Die Auswertung der Stabilitaetsbedingung (4.1), die ein System homogener, linearer, algebraischer Gleichungen darstellt, fuehrt auf die kritischen Lasten und die zugehoerige Beulform. Brendel [21] hat fuer richtungstreue Belastungen eine ausfuehrliche Diskussion ueber die Auswertung der Bedingung (4.1) mit Eigenwertproblemen vorgenommen. Danach koennen unter anderem folgende Eigenwertprobleme definiert werden.

Totale Lagrange - Darstellung

Klassisches

Vorgehen 
$$\left[ {}^m_0\mathbf{K}_e + {}^m\lambda \left( {}^m_0\mathbf{K}_G + {}^m_0\mathbf{K}_L \right) \right] {}^m\mathbf{v} = 0 \quad (4.2)$$

(Anfangsverschiebungen in  ${}^m_0\mathbf{K}_e$ )

Beruecksichtigung

der Anfangs- 
$$\left[ {}^0_0\mathbf{K}_e + {}^m\lambda \left( {}^m_0\mathbf{K}_u + {}^m_0\mathbf{K}_G + {}^m_0\mathbf{K}_L \right) \right] {}^m\mathbf{v} = 0 \quad (4.3)$$
  
verschiebungen

Die linearen Eigenwertprobleme (4.2), (4.3) fuehren bei Systemen mit linearem Vorbeulverhalten direkt auf die kritischen Lasten und die zugehoerigen Beulformen. Bei nichtlinearen Problemen koennen lineare Eigenwertanalysen als begleitende Massnahmen der statischen Rechnung vorgenommen werden [21]. Dabei wird der Eigenwert durch eine lineare Veraenderung des jeweilig erreichten Grundzustandes ermittelt und stellt einen Naeherungswert fuer die kritischen Lasten dar. Wird die nichtlineare Rechnung bis zum Versagenspunkt gefuehrt, so ist der Eigenwert an diesem Punkt ein Indiz fuer die gefundene kritische Last. Ist die Berechnung nicht bis zum kritischen Zustand moeglich, so kann haeufig durch Extrapolation des Verlaufs der Eigenwerte die kritische Last bestimmt werden. In der vorliegenden Arbeit werden als begleitende Massnahmen einer nichtlinearen Rechnung lineare Eigenwertuntersuchungen durchgefuehrt, sowie die Determinante und der Current-Stiffness-Parameter nach Bergan [16] beobachtet, der an Durchschlagpunkten den Wert Null annimmt (siehe Abschnitt 5.2). Die Loesung des Eigenwertproblems erfolgt nach Bathe [11] mit Hilfe einer Kombination aus Determinantensuchtechnik und Vektoriteration.

Die kinetische Stabilitaetsuntersuchung fuehrt mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen, erweitert um die d'Alembert'schen Traegheitskraefte, auf die

inkrementellen Bewegungsgleichungen fuer den sich im statischen Gleichgewicht befindlichen Grundzustand:

$${}^m_n\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} = {}^m\mathbf{R} - {}^m\mathbf{F} ; \quad {}^m\mathbf{R} - {}^m\mathbf{F} = 0 \quad (4.4)$$

$${}^m_n\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} = 0 \quad (4.5)$$

Fuer die Stoerbewegung wird eine harmonische Schwingung angenommen.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \sin^m \omega t \quad (4.6)$$

Herrscht Stabilitaet, so bleibt die Stoerbewegung klein. Im Instabilitaetsfall waechst die Stoerbewegung unbegrenzt an. Eingesetzt in (4.5) ergibt sich:

$$[ {}^m_n\mathbf{K} - {}^m\omega^2 \mathbf{M} ] {}^m\mathbf{v} = 0 \quad (4.7)$$

Dies ist ein lineares Eigenwertproblem fuer das Quadrat der Eigenfrequenz  ${}^m\omega$ .

Eine Vergroesserung der Stoerbewegung und somit instabiles Verhalten ergibt sich nur im Falle imaginaerer Eigenfrequenzen, d.h. fuer negative Werte von  ${}^m\omega^2$ . Fuer alle positiven Werte von  ${}^m\omega^2$  bleibt die Stoerbewegung in der Groesse der Anfangsstoerung. Dann liegt stabiles Gleichgewicht vor. Die Stabilitaetsgrenze ist damit fuer den Fall

$${}^m\omega^2 \equiv 0 \quad (4.8)$$

gegeben. Die zugehoerige Last wird als die kritische Last bezeichnet.

Fuer konservative Probleme sind die Matrizen  ${}^m_n\mathbf{K}$  und  $\mathbf{M}$  stets reell und symmetrisch; damit bleiben die Eigenwerte  ${}^m\omega^2$  auch immer reell. Fuer Lasten unterhalb der kritischen Last ergeben sich nur positive Eigenwerte, waehrend

fuer Lasten oberhalb der kritischen Last der erste Eigenwert  ${}^m\omega^2$  negativ wird. Dies gilt fuer staendig ansteigende Lasten (Verzweigungsprobleme). Wird aber z.B. bei Durchschlagproblemen ueber Durchschlagpunkte hinweg mit fallender und wieder steigender Last gerechnet, so wird auch der Eigenwert  ${}^m\omega^2$  wieder einen positiven Wert annehmen.

Ob die Stabilitaetsuntersuchung eines nichtlinearen konservativen Problems mit der statischen oder der kinetischen Methode erfolgt, ist nur eine Frage des Rechenaufwandes, sonst sind beide Methoden als gleichwertig zu betrachten. Der Nachteil der kinetischen Methode besteht im groesseren Aufwand, da zusaetzlich zu den Steifigkeitsmatrizen noch die Massenmatrix erstellt werden muss. Eine Vorhersage der kritischen Last kann zwar durch Extrapolation des Frequenzverlaufs erfolgen, jedoch muss selbst bei linearem Verhalten das Eigenwertproblem mehrmals geloeset werden, um genuegend Stuetzstellen fuer den Frequenzverlauf zu ermitteln. In der vorliegenden Arbeit wird das kinetische Kriterium daher nur bei nichtkonservativen Problemen verwendet.

#### 4.3. Nichtkonservative Stabilitaetsprobleme

=====

Die Art des Stabilitaetsversagens nichtkonservativer Probleme muss fuer jeden Fall gesondert bestimmt werden.

Moeglich sind :

- statisches Instabilitaetsversagen (indifferentes Gleichgewicht, Divergenz)
- kinetisches Instabilitaetsversagen (Flattern)

Lange Zeit sind auch bei nichtkonservativen Stabilitaetsproblemen ausschliesslich statische Stabilitaetsuntersuchungen vorgenommen worden. Teilweise wurden dabei



die Stabilitaetsfaelle durch das statische Kriterium nicht angezeigt ("unbegrenzt hohe kritische Lasten); in vielen Faellen ergaben sich aber auch realistisch erscheinende Lasten. Diese scheinbar unbegrenzte Stabilitaet mancher Systeme z.B. des Beckschen Stabes fuehrte zur Verwendung kinetischer Methoden (Ziegler [166][167]), da das Versagen statischer Methoden hier offensichtlich wurde. Abhaengig von der Versagensart koennen in manchen Faellen alternativ zu den kinetischen Methoden auch statische Methoden zur Bestimmung der Stabilitaetslast herangezogen werden. Dazu wird eine Unterscheidung der Systeme nach ihrer Versagensart getroffen (Tafel 4.1):

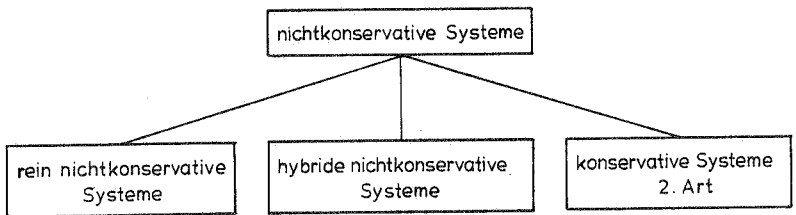
Systeme, fuer die statische Stabilitaetsuntersuchungen auf unbegrenzte Stabilitaet fuehren, versagen - wenn ueberhaupt - ausschliesslich durch kinetische Instabilitaet (Flattern). Sie werden als rein nichtkonservative Probleme bezeichnet.

Systeme, bei denen die statische Methode auf reelle Eigenwerte fuehrt, koennen sowohl durch Indifferenz als auch durch Flattern versagen. Sie koennen nach zwei Arten unterschieden werden: Die eine, die ausschliessliches Versagen in der Form statischer Instabilitaet (indifferentes Gleichgewicht/Divergenz) zeigt, und die andere, bei der sowohl ein Versagen infolge kinetischer als auch statischer Instabilitaet auftritt.

Erstere Systeme werden als konservative Systeme zweiter Art (nach Leipholz [79], [83]) bezeichnet. Fuer sie bleibt nicht die potentielle Gesamtenergie konservativ, sondern ein anderes Funktional. Diese Probleme koennen mit statischen Methoden geloest werden. Sie werden aber im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter behandelt.

Letztere Systeme, die beide Versagensarten zeigen, werden in der vorliegenden Arbeit als hybride nichtkonservative Systeme bezeichnet. (siehe auch [80])

Sowohl rein als auch hybride nichtkonservative Systeme muessen im allgemeinen mit der kinetischen Methode untersucht werden. Darauf hat Ziegler [168] als erster hingewiesen. Das Flatterversagen wird dabei so angezeigt, dass bei der Eigenwertanalyse mit wachsender Last zwei aufeinanderfolgende Eigenwerte zusammenfallen, und sich dann bei weiter steigender Last komplexe Eigenwerte ergeben. Die Last, bei der die Eigenwerte zusammenfallen, wird kritische Last oder Flatterlast genannt.



Tafel 4.1. Klassifizierung nichtkonservativer Systeme

Bei Flaechendruckbelastung ergeben sich folgende Moeglichkeiten der Nichtkonservativitaet :

1. Nichtkonservativitaet infolge der Randbedingungen
2. Nichtkonservativitaet infolge der Belastungseigenschaften
  - 2.1 Koerperfeste Belastung (ausser konstantem Druck)
  - 2.2 Belastungen, bei denen durch Linearisierung nichtkonservative Anteile entfallen. (scheinbar konservative raumfeste Belastungen)

Bemerkung:

Bei nichtkonservativen Problemen, bei denen die Beschraenkung auf lineare Terme (Gl.3.45) zu symmetrischen Matrizen fuehrt (raumfeste Belastungen), ergeben sich bei der kinetischen Stabilitaetsuntersuchung nach Gl.(4.7)

immer reelle Eigenwerte. Daraus zu folgern, unter keiner Laststufe koennte kinetische Instabilitaet auftreten, ist fragwuerdig. Hier scheint das linearisierte kinetische Stabilitaetskriterium in der dargestellten Form nicht mehr ausreichend zu sein.

#### 4.3.1. Rein nichtkonservative Systeme

=====

Rein nichtkonservative Systeme sind in manchen Faellen durch Untersuchung der Arbeit auf verschiedenen Belastungswegen leicht zu erkennen. Die meisten nichtkonservativen Systeme unter Einzellasten gehoeren zu ihnen sowie alle Systeme, bei denen ein Stabilitaetsversagen erst durch die Nichtkonservativitaet der Belastung bewirkt wird. Dies sind die Systeme, die unter konservativer Belastung als Spannungsprobleme gekennzeichnet werden (z.B. Kragarm Bild 4.3).

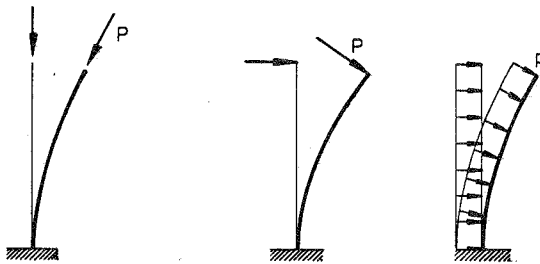


Bild 4.3 Rein nichtkonservative Systeme

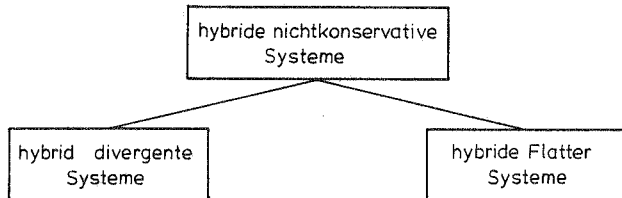
Der Aufbau der Matrizen des algebraischen Eigenwertproblems Gl.(4.7) kann zur Unterscheidung herangezogen werden. Die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  ist immer symmetrisch und positiv definit, meist eine Diagonalmatrix. Damit wird der Charakter des Problems ausschliesslich von der Form der Steifigkeitsmatrix  ${}^m_n\mathbf{K}$  bestimmt. Die lineare Steifigkeitsmatrix  ${}^m_n\mathbf{K}$  ist fuer  $P=0$  symmetrisch. Fuer  $P \neq 0$  wird  ${}^m_n\mathbf{K}$  die

Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix. Fuer rein nichtkonservative Systeme ist  ${}^m_n\mathbf{K}$  nach einer Definition von Leipholz [77] stark unsymmetrisch und alle Wurzeln  ${}^m\omega^2$  der charakteristischen Gleichung werden mit steigender Last nacheinander komplex. Traegt man die Kurven der Wurzeln  ${}^m\omega^2$  ueber dem Lastparameter  ${}^m\lambda$  auf, so stellt man fest, dass keine Kurve die Lastachse schneidet. In allen Stabilitaetsfaellen ergibt sich ein Versagen durch kinetische Instabilitaet.

4.3.2. Hybride nichtkonservative Systeme / Stabilitaets-  
untersuchungen mit zwangssymmetrisierten Matrizen  
=====

Hybride Systeme werden nach der Versagensform, zu der die niedrigste kritische Last gehoert, weiter unterteilt. (Tafel 4.2)

Tritt das erste Versagen durch das Durchlaufen nicht-trivialer Gleichgewichtslagen auf, so kann man diese Systeme als hybrid divergente Systeme kennzeichnen. Versagt ein System zuerst durch kinetische Instabilitaet, so kennzeichnet man es als hybrides Flattersystem. Fuer hybride Flattersysteme ist die Matrix  ${}^m_n\mathbf{K}$  fuer genuegend grosse Last so unsymmetrisch, dass mindestens der erste komplexe Eigenwert auftritt, bevor ein anderer Eigenwert zu Null geworden ist. Auch dann wird die Matrix  ${}^m_n\mathbf{K}$  als stark unsymmetrisch bezeichnet.



Tafel 4.2 Unterteilung hybrider nichtkonservativer Systeme

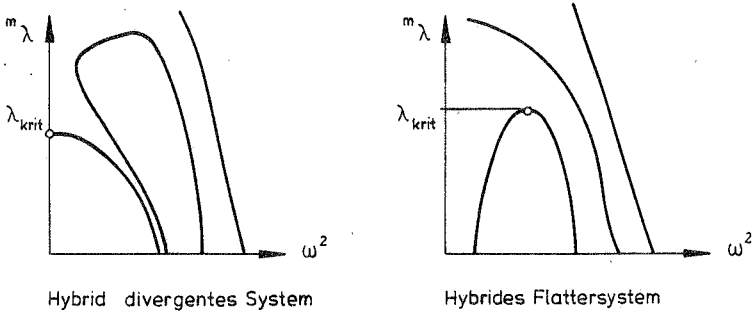


Bild 4.4 Hybride nichtkonservative Probleme

Von wesentlich groesserem Interesse in der Elastostatik sind die hybrid divergenten Systeme, die meist so aufgebaut sind, dass sie neben grossen konservativen Lastanteilen auch geringe nichtkonservative Lastanteile besitzen. Man denke z.B. an Staumauern, die am oberen Rand mit geringer Wasserhoehe ueberstroemt werden, oder auch an Kuehlturmschalen im Wind, wo sicher die Belastung des Randes nur einen geringen Anteil gegenueber der Belastung der Schalenflaechen darstellt - sofern Wind als konservative Belastung gesehen wird - (siehe Abschnitt 3.3). Auch Systeme unter koerperfester Belastung, bei denen der nichtkonservative Randterm entfaellt, und deren Belastungsgradien in allen Richtungen klein ist, gehoeren zu dieser Gruppe. Da bei diesen Systemen die konservative Belastung mit dem symmetrischen Teil der Steifigkeitsmatrix ueberwiegt, wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix schwach unsymmetrisch, und bei einer kinetischen Stabilitaetsuntersuchung ergibt sich zumindest ein Null-Eigenwert  $m \omega^2 = 0$  bevor komplexe Eigenwerte auftreten. Dies hat zur Folge, dass fuer solche Systeme statische Stabilitaetsuntersuchungen durchgefuehrt werden koennen (nach [77]), sofern nur der erste Eigenwert gesucht ist.

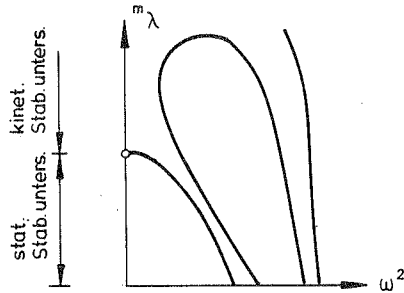


Bild 4.5 Stabilitätsuntersuchungen an hybrid divergenten Systemen

Als Maß für die Unsymmetrie können Werte genommen werden, die z.B. auch Mang [97] als typisch für Schalenrechnungen angibt. Dort ist das Verhältnis des maximalen unsymmetrischen Wertes zum maximalen Wert der symmetrischen Anteile aus Last- und Steifigkeitsmatrix etwa 1/100. Die Bezeichnung schwach unsymmetrisch ist hier gerechtfertigt, stellt man dem die entsprechenden Werte eines stark unsymmetrischen Systems z.B. dem Beckschen Knickstab (Abschnitt 6.3) gegenüber. Das Verhältnis beträgt hier 1/1. Eine allgemein gültige Norm für den Grad der Unsymmetrie kann hier nicht vorgestellt werden. Die angeführten numerischen Beispiele mögen genügen.

Die Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrizen führt bei Eigenwertproblemen noch mehr als bei der Gleichungslösung (Abschnitt 3.4.2.3) zu stark vergrößertem Rechenaufwand. Bei Stabsystemen mit wenigen Freiheitsgraden stellt dies kein Problem dar, jedoch bei Schalenberechnungen mit einer Vielzahl an Unbekannten sind gerade interessante Fälle wie offene Kreiszyinderschalen unter Winddruck, die zu unsymmetrischen Steifigkeitsmatrizen führen, mit kaum vertretbarem Rechenaufwand verbunden. Plaut [109] gibt für einen Stab unter teilweise konservativer, teilweise nichtkonservativer Belastung Kriterien

an, bei welchem Verhaeltnis konservativer/nichtkonservativer Belastung zuerst kinetische Instabilitaet oder statische Instabilitaet zu erwarten ist. Dies erfordert jedoch die Loesung des Eigenwertproblems mit unsymmetrischen Matrizen und stellt damit fuer groessere Probleme einen kaum gaengbaren Weg dar.

Nach Mang [97]

$$K_L = \overset{\circ}{K}_{LSYM} + K_{LUNSYM}$$

$$\overset{\circ}{K}_{LSYM} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{K}_{11} & \overset{\circ}{K}_{12} \\ \overset{\circ}{K}_{21} & \overset{\circ}{K}_{22} \end{bmatrix} \quad K_{LUNSYM} = \begin{bmatrix} 0 & \overset{*}{K} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{LUNSYM} = \frac{1}{2} K_{LSchief} + \frac{1}{2} K_{LUE}$$

$$K_{LSchief} = \begin{bmatrix} 0 & \overset{*}{K} \\ -\overset{*}{K} & 0 \end{bmatrix} \quad K_{LUE} = \begin{bmatrix} 0 & \overset{*}{K} \\ \overset{*}{K} & 0 \end{bmatrix}$$

Symmetrisierung : 1.  $\tilde{K}_L = \overset{\circ}{K}_{LSYM} + \frac{1}{2} K_{LUE} \quad (4.9)$

2.  $\tilde{K}_L = \overset{\circ}{K}_{LSYM} \quad (4.10)$

Vorschlag:  $K_L = K_{LSYM} + K_{LSchief}$

Symmetrisierung: (Matrizen siehe Tafel 3.3)

1.  $\tilde{K}_L = K_{LSYM} \quad (4.11)$

2.  $\tilde{K}_L = K_{LSYM} + K_{LERSATZ} \quad (4.12)$

3.  $\tilde{K}_L = K_{LSYM} - K_{LERSATZ} \quad (4.13)$

Tafel 4.3 Zwangssymmetrisierung von Laststeifigkeitsmatrizen

Wie bei der nichtlinearen Berechnung (siehe Abschnitt 3.4.2.4) stellt sich die Frage nach Ersatzmatrizen, die das Problem weitgehend erhalten. Mang [97] schlägt dazu vor, die Eigenwerte zweier auf verschiedene Arten symmetrisierter Steifigkeitsmatrizen miteinander zu vergleichen (s. Tafel 4.3).

Die Laststeifigkeitsmatrizen von [97] setzen sich aus einem symmetrischen Gebietsterm  $K_{LSYM}$  und einem unsymmetrischen Randterm  $K_{LUNSYM}$  zusammen. Mang's erste Ersatzmatrix  $\tilde{K}_L$  entspricht der Vernachlässigung der Arbeitsanteile, die die schiefsymmetrischen Anteile der Laststeifigkeitsmatrix hervorrufen. Dies kann auch als Zwangsbedingung gedeutet werden, die in der physikalischen Wirklichkeit nicht vorhanden ist. Um dennoch eine Abschätzung über den Einfluss der unsymmetrischen Randglieder vornehmen zu können, wird für die zweite Ersatzmatrix der Arbeitsanteil der Randglieder völlig entfernt. Dies entspricht einer festen Lagerung bzw. einer Null-Belastung des Randes (Abschnitt 3.3.1) bei der Betrachtung der Laststeifigkeitsmatrix.

Obwohl die Zwangssymmetrisierung nur ein unvollständiges Ersatzmodell darstellt, spricht numerisch einiges für dieses Vorgehen, wie die Rechenergebnisse zeigen. Mit Hilfe einer Störungsrechnung weisen Mang/Gallagher in [98] zudem nach, dass die Eigenwerte symmetrisierter Matrizen Näherungen für die Eigenwerte der unsymmetrischen Matrizen darstellen. Durch den Vergleich der Ergebnisse von Eigenwertanalysen mit beiden Zwangssymmetrisierungsarten kann auf starke oder schwache Unsymmetrie der Matrizen geschlossen werden.

Beim Problem einer einseitig gelenkig gelagerten, offenen Kreiszylinderschale unter konstantem Aussendruck erhält Mang [47] einen Unterschied zwischen den beiden Beulwerten von 0.18% - ein deutlicher Hinweis auf die schwache Unsymmetrie des Problems. Beim Beckschen Knickstab (Abschnitt 6.3) ergaben Berechnungen mit verschie-



denen Ersatzmatrizen Unterschiede in den Knicklasten bis zu 75%. Dies weist auf die starke Unsymmetrie der Matrizen hin. Der mit dem kinetischen Kriterium ermittelte Wert der kritischen Last lag entsprechend um 100% ueber der kritischen Last, die mit der Symmetrisierung nach Methode 1 Gl.(4.9) in Tafel 4.3 (Mang) ermittelt wurde.

Eine weitere aufwendige Ueberpruefung der Guete der Ersatzmatrizen kann ueber eine Berechnung des vollstaendigen Last-Verschiebungsdiagramms erfolgen (s. Abschnitt 3.4.2.3), bei der im Sinn eines modifizierten Newton/Raphson Verfahrens auf der Lastseite das System vollstaendig erfasst wird. Mit Hilfe von begleitenden Eigenwertuntersuchungen in der Naehе der Durchschlag- oder Verzweigungspunkte kann die Guete der Ersatzmatrix beurteilt werden. Als beste Naehерung bei schwach unsymmetrischen Systemen erwies sich das Vorgehen nach Gl.(4.12) Tafel 4.3, bei dem die schiefsymmetrischen Anteile entfallen. Der physikalische Hintergrund ist die Beibehaltung des groessten Anteils der Arbeit der Randbelastung. Die vollstaendige Nichtberuecksichtigung aller Anteile aus der Randbelastung - Methode 2 nach Mang Gl.(4.10) - stellt keine gute Naehерung dar, und ist nur zur Abschaetzung der Groesse der Unsymmetrie geeignet.

Die Herleitung in Abschnitt 3 fuehrte sowohl fuer Gebietsterme als auch fuer Randterme zu symmetrischen und schiefsymmetrischen Matrizen. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit die Zwangssymmetrisierung auf Gebietsterme ausgeweitet, die bei ungleichfoermig verteilter Belastung entstehen. Da eine Aufteilung nach Gleichung (4.9) bzw. (4.10) zu unnoetigem Arbeitsaufwand fuehrt, - z.B. alle Anteile der Laststeifigkeitsmatrizen, die mit Randverschiebungen gekoppelt sind, muessten abgespalten werden-, wird zur Beurteilung der Unsymmetrie eines Systems ein Vorgehen nach den Gleichungen (4.11) bis (4.13) vorgeschlagen. Dabei kann (4.12) alternativ zu (4.13) verwendet werden. Die symmetrische Matrix nach Gleichung (4.11) entspricht der Mang'schen Matrix nach Gleichung (4.9).

Euler-Stab zum Vergleich	$p = 0.250 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$	
Beckscher Knickstab :		
	$K_{krit} = p \cdot \frac{l^2}{\pi^2 EJ}$	Differenz gegen Gl. (4.11)
Symmetr. nach Gl.(4.11)	1.0026	-
Symmetr. nach Gl.(4.12)	0.7955	-20.7 %
Symmetr. nach Gl.(4.13)	0.2502	-75.0 %
unsymmetr. Matrizen (kinetische Untersuchung)	2.060	-
Kragchale unter konst. Druck $L/R = 6$ ; $R/t = 100$		
	$K_{krit} = p \frac{12(1-\nu^2)}{E} \frac{R^3}{t^3}$	Differenz gegen Gl. (4.11)
Symmetr. nach Gl.(4.11)	8.1047	-
Symmetr. nach Gl.(4.12)	8.1235	0.232 %
Symmetr. nach Gl.(4.13)	8.0858	-0.232 %
Kreiszyylinder (klass. Lagerung) koerperfeste Last (Wasser) $p = \lambda(1+\cos\varphi)$ ; $L/R = \pi$ ; $R/t = 100$		
	$K_{krit} = p \cdot \frac{R}{Et} \cdot 10^6$	Differenz gegen Gl. (4.11)
Symmetr. nach Gl.(4.11)	370.40	-
Symmetr. (Gebietsterme) nach Gl.(4.13)	370.35	~ 0 %
Kragchale unter Windlast (koerperfest) $L/R = 3$ ; $R/t = 376$		
	$K_{krit} = p_0 \cdot \frac{R}{Et} \cdot 10^6$	Differenz gegen Gl. (4.11)
Symmetr. nach Gl.(4.11)	57.50	-
Symmetr. (nur Randterme) nach Gl.(4.13)	57.41	-0.2 %
Symmetr. alle Terme nach Gl.(4.13)	57.49	~ 0 %

Tafel 4.4 Vergleich der Ergebnisse der Stabilitaets-  
untersuchungen mit zwangssymmetrisierten  
Steifigkeitsmatrizen.

In Tafel 4.4 sind einige Ergebnisse zusammengestellt, die numerisch die Moeglichkeiten der Zwangssymmetrisierung aufzeigen. Bemerkenswert ist hierbei, dass beim Beckschen Knickstab die starke Unsymmetrie des urspruenglichen Problems in den Ergebnissen der Rechnungen mit symmetrisierten Matrizen deutlich sichtbar wird. Fuer die Rechnung mit Gleichung (4.13) ergibt sich sogar die Knicklast des Eulerstabes als Stabilitaetslast. Bei den anderen angegebenen Beispielen zeigen die nur wenig differierenden Stabilitaetslasten die geringe Unsymmetrie der Probleme an.

#### Diskussion der Zulaessigkeit der Symmetrisierung

Im streng mathematischen Sinn kann auch eine sehr schwache Unsymmetrie in der Steifigkeitsmatrix bei Anwendung des kinetischen Stabilitaetskriteriums zu komplexen Eigenwerten fuehren, und nur durch Ermittlung der Eigenwerte (kinetisches Kriterium) ist es moeglich festzustellen, ob ein Tragwerk durch Flattern oder durch das Durchlaufen indifferenter Gleichgewichtslagen versagt. In [110] (Satz 13) wird diese strenge Forderung fuer lineare Systeme etwas eingeschaenkt. Das statische Kriterium ist demnach fuer die Beurteilung der Stabilitaet stationaerer Systeme auch in nichtkonservativen Faellen hinreichend, wenn bei positiv definiten Teilsteifigkeitsmatrix (sonstige Steifigkeitsmatrix und symmetrischer Teil der Laststeifigkeitsmatrix) die zirkulatorischen Kraefte im Vergleich zu den konservativen Kraeften klein sind. Ausserdem darf die Daempfung des Systems nicht zugleich schwach sein. Ersteres trifft auf die meisten der in der vorliegenden Arbeit untersuchten Probleme zu, allerdings kann die Daempfung der Systeme -fast ausschliesslich Materialdaempfung- nicht als stark bezeichnet werden.

Die Beobachtung von Versagensfaellen in der Praxis und von Versuchen aussendruckbelasteter flaechenhafter Tragwerke z.B. Schalen unter Windbelastung sprechen aber nicht dafuer, dass ein kinetisches Versagen infolge der

nichtkonservativen Anteile der statischen Belastung erfolgt, was auch angesichts der geringen Grösse dieser Terme ueberraschend waere. Das Versagen erfolgt nach dem Auftreten deutlicher Schwingungen [103], d.h. die entscheidende Rolle bei diesem kinetischen Versagen spielen instationaere (pulsierende) Kraefte, die in diesem Fall gleichzeitig mit den statischen Kraeften auftreten (z.B. Gl.4.15). Solche Schwingungen werden als parametererregte Schwingungen bezeichnet.

Echte instationaere Windbelastung

$$p_w = p_0(\varphi) + p(\varphi) \cdot \cos \omega t \quad (4.15)$$

Mit:  $\varphi$  Umfangskoordinate eines Zylinders

$p_0(\varphi)$  stationaerer Lastanteil

Die Belastung wird in Zylinderlaengsrichtung als konstant angenommen.

Liegen die Eigenfrequenzen der Konstruktion so niedrig, dass infolge der Belastung groessere Schwingungen auftreten koennen, so kann ab einer bestimmten Grösse der Druecke  $p_0$  und  $p_1$  die Eigenfrequenz in den Bereich der Erregerfrequenz gelangen, was zum Versagen des Tragwerks fuehrt. Solche Effekte (Ovalling) wurden bei sehr biegeweichen Schalen mit freiem Rand (z.B. Kaminen) unter Windbeanspruchung beobachtet [69] [103].

Abschliessend sei bezueglich dieser Frage der Hinweis [131] erwaehnt, dass aufgrund von Forschungsergebnissen der Luft- und Raumfahrttechnik im Unterschallbereich selbsterregte Flatterschwingungen bei Platten und Schalen im Gegensatz zu parametererregten Schwingungen grundsaeztlich auszuschliessen sind.

Die durchgefuehrten Eigenwertuntersuchungen nach Tafel 4.4 zeigen, dass bei Flaechendruckbelastungen, deren Gradienten sich nicht extrem aendert, die nichtkonservativen Anteile der Belastung gegenueber den konservativen Anteilen klein sind, und auf die Verschiebung einer

Struktur nur einen geringen Einfluss ausueben. Letzteres wird durch die Berechnung der nichtlinearen Last-Ver-schiebungskurve aussendruckbelasteter Zylinder (siehe Ab-schnitt 7.2) bestaetigt.

Zusammenfassend laesst sich folgende Aussage ableiten:

Sind bei verteilten Druckbelastungen die nichtkonser-vativen Anteile der Belastung klein gegenueber den konser-vativen Belastungsanteilen (Beurteilung durch Eigen-wertuntersuchungen mit unterschiedlichen Matrizen), so wird bei ueblichen Abmessungen das Tragwerk durch stati-sche Instabilitaet versagen, und das statische Stabili-taetskriterium mit symmetrisierten Matrizen zur Beurtei-lung genuegen. Dies ist allerdings nicht mehr gueltig, sofern neben den stationaeren Kraeften auch grosse in-stationaere Kraefte vorhanden sind, die eine deutliche Schwingung des Tragwerks bewirken, wie dies bei biegewei-chen langen Schalen haeufig der Fall ist.

## 5. Rechentechnik

=====

Zur numerischen Loesung des nichtlinearen Problems wird inkrementell-iterativ vorgegangen. In der inkrementellen Formulierung der virtuellen Arbeitsgleichung wurden dazu Linearisierungen vorgenommen. Die in den unbekanntem Verschiebungsincrementen linearisierte Gleichung wurde anschliessend durch die Diskretisierung in ein System algebraischer Gleichungen ueberfuehrt. Folgende Linearisierungsfehler sollen durch die Iteration beseitigt werden.

1. Linearisierung zwischen dem Uebergang von der exakten (Gl.2.18) auf die linearisierte Form (Gl. 2.20) der Arbeitsgleichung.
2. Annaeherung der Stoffmatrix des unbekanntem Zustandes 2 durch die Stoffmatrix einer bekannten Lage 1. (Bei Plastizitaet)
3. Annaeherung des Lastvektors fuer verformungsabhengige Belastung  ${}^2R = {}^2\lambda^{(2)}R$  durch die Lastverteilung nach dem Lastvektor des Zustandes 1  
 ${}^2R' = {}^2\lambda^{(1)}R$
4. Linearisierung der Laststeifigkeitsmatrizen des Zustandes 2 nach Abschnitt 3.

### 5.1. Gleichgewichtsiteration

=====

Iteriert wird innerhalb des Inkrements  $1 \rightarrow 2$ . Fuer den Iterationszyklus  $k$  gilt auf Grund der Gleichgewichtsbeziehungen fuer den Zustand 2

$${}^i_0K \cdot \Delta u^k = {}^kR - {}^k_0F \quad (5.1)$$

mit  $\Delta u^k$  Verschiebungszuwachs im  $k$ -ten Zyklus  
 ${}^i_0K$  Steifigkeitsmatrix in der Lage  $i$ ,  
z.B. Tangentensteifigkeit. ( $1 = i = k$ )

${}^k R = {}^2 \lambda \cdot ({}^k) R$  Lastvektor in der Lage  $k$   
( $k=0$  bei nicht verformungsabhaengigen Lasten.)

Fuer die Durchfuehrung der Iteration nach Gleichung (5.1) stehen drei wesentliche Iterationsmethoden zur Verfuegung.

### 5.1.1. Iterationsverfahren mit Laststeuerung

=====

Bei den Iterationsverfahren mit Laststeuerung wird fuer einen vorgegebenen Lastzustand der zugehoerige Verschiebungszustand iterativ ermittelt. Zu diesen Verfahren zaehlen die Euler-Verfahren, das Runge-Kutta-Verfahren, das Verfahren mit Mittelpunktsteifigkeit, sowie das Standard und das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren. In [114] werden diese Verfahren diskutiert; als derzeit gaengigste Verfahren gelten die letzten drei der vorher genannten Verfahren. Die in dieser Arbeit verwendeten Newton-Raphson-Verfahren sollen kurz vorgestellt werden.

Beim Standard-Newton-Raphson-Verfahren wird in jedem Iterationsschritt die Steifigkeitsmatrix fuer den eben erreichten Verschiebungszustand neu berechnet. Bei der hier betrachteten proportionalen Belastung erfolgt die Laststeuerung ueber den Last-(Proportionalitaets-)faktor  ${}^m \lambda$ .

$${}^k_0 K \cdot \Delta u^k = {}^2 \lambda \cdot ({}^k) R - {}^k_0 F \quad (5.2)$$

Ueblicherweise ist  ${}^k_0 K$  eine Tangentensteifigkeitsmatrix. Fuer verformungsabhaengige Lasten gilt:

$${}^k_0 K = {}^k_0 K_e + {}^k_0 K_u + {}^k_0 K_G + {}^k_0 K_L \quad (5.3)$$

Es ist:  ${}^k_0 K_L = i \lambda \cdot ({}^k) K$  (5.4)

mit  ${}^i\lambda$  als Proportionalitätsfaktor der Last in der Lage  $i$ . ( $i$  zwischen 1 und 2)

Für  $i=k$  ist  ${}^i_0\mathbf{K}$  eine Tangentensteifigkeitsmatrix. Da jedoch die Größe des Proportionalitätsfaktors nur im Zustand 1 und 2 bekannt ist, in den Zwischenzuständen aber nicht ermittelt wird, stellt  ${}^i_0\mathbf{K}$  eine Sekantensteifigkeitsmatrix dar, die nur für  $i=1$  bzw. 2 zur Tangentensteifigkeitsmatrix wird. Sinnvollerweise wird der endgültige Proportionalitätsfaktor  ${}^2\lambda$  beim Standard-Newton-Raphson Verfahren verwendet. Beim modifizierten Newton-Raphson-Verfahren wird während der Iteration innerhalb eines Lastinkrements die Steifigkeitsmatrix des Zustandes 1 (Tangentensteifigkeit zu Beginn des Lastschritts) beibehalten.

$${}^1_0\mathbf{K} \Delta \mathbf{u}^k = {}^2\lambda \cdot {}^{(k)}\mathbf{R} - {}^k_0\mathbf{F} \quad (5.5)$$

Für den Proportionalitätsfaktor  ${}^i\lambda$  auf der Seite der Laststeifigkeitsmatrix wird dann der Faktor  ${}^1\lambda$  vom Beginn des Lastschritts verwendet. Im Sinne des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens kann aber auch ein anderer Faktor  $\lambda$  eingesetzt werden. Dies hat die oben erwähnten Auswirkungen auf die Steifigkeitsmatrix zur Folge.

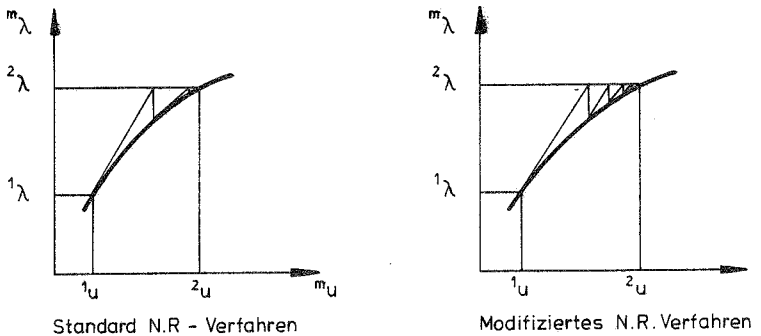


Bild 5.1. Lastgesteuerte Iterationsverfahren  
Schema für Systeme mit einem Freiheitsgrad



Die Beibehaltung der Steifigkeitsmatrix beim modifizierten N.R.-Verfahren stellt einen Vorteil bezüglich der Rechenzeit dar, der bei Problemen mit wenigen Freiheitsgraden kaum sichtbar ist, sich bei Problemen mit vielen Freiheitsgraden, die eine Abspeicherung der Steifigkeitsmatrix in Blöcken erfordern, aber deutlich bemerkbar macht. Die Vorteile des Standard Newton-Raphson Verfahrens liegen in seinen besseren Konvergenzeigenschaften, die sich besonders bei stark nichtlinearem Verschiebungsverhalten sowie bei Spannungsumlagerungen -Biegezustände auf Membranzustände- auswirken.

Die Schwächen aller Verfahren mit Laststeuerung liegen im Unvermögen bei der Ueberwindung von Durchschlagpunkten, wenn nämlich Singularitäten in den Steifigkeitsmatrizen auftreten. Die Behebung dieser Schwächen ist nur durch Sondereingriffe möglich, z.B. Anbringen von Federn (z.B.[114]) oder der Verzicht auf Iterationen (Bergan [16]) in der Nähe des Durchschlagpunktes.

### 5.1.2. Iterationsverfahren mit Verschiebungssteuerung

Die Schwächen der Iterationsverfahren mit Laststeuerung beim Auftreten von Singularitäten führten zu den Iterationsverfahren mit Verschiebungssteuerung. Anstelle der jeweils proportionalen Steigerung des Lastvektors wird eine einzelne Verschiebungskomponente als unabhängige Variable gewählt und der Proportionalitätsfaktor der Last -das Lastniveau- als Unbekannte eingeführt. Das ursprüngliche Gleichungssystem wird aufgeteilt:

$$\begin{bmatrix} {}^i_0K_{11} & {}^i_0K_{12} \\ {}^i_0K_{21} & {}^i_0K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^k \\ \Delta u_2^k \end{bmatrix} = {}^2\lambda \begin{bmatrix} {}^{(k)}R_1 \\ {}^{(k)}R_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^k_0F_1 \\ {}^k_0F_2 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Der Verschiebungsvektor  $\Delta \mathbf{u}^k$  wird aufgespalten in den Vektor der unbekannt Verschiebungen  $\Delta \mathbf{u}_1^k$  und die Verschiebung  $\Delta u_2^k$ , die als unabhängige Variable verwendet wird.  ${}^{(k)}R_2$  und  ${}^k_0F_2$  sind die zu dieser Variablen gehörenden, äusseren bzw. inneren Kräfte. Die Steifigkeitsmatrix zerfällt entsprechend in vier Teile. Mit  $\Delta u_2^k = \hat{u}_2$  wird das Gleichungssystem umgeformt zu:

$$\begin{bmatrix} {}^i_0K_{11} & -{}^{(k)}R_1 \\ {}^i_0K_{21} & -{}^{(k)}R_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_1^k \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} {}^i_0K_{12} \\ {}^i_0K_{22} \end{bmatrix} \cdot \hat{u}_2 - \begin{bmatrix} {}^k_0F_1 \\ {}^k_0F_2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

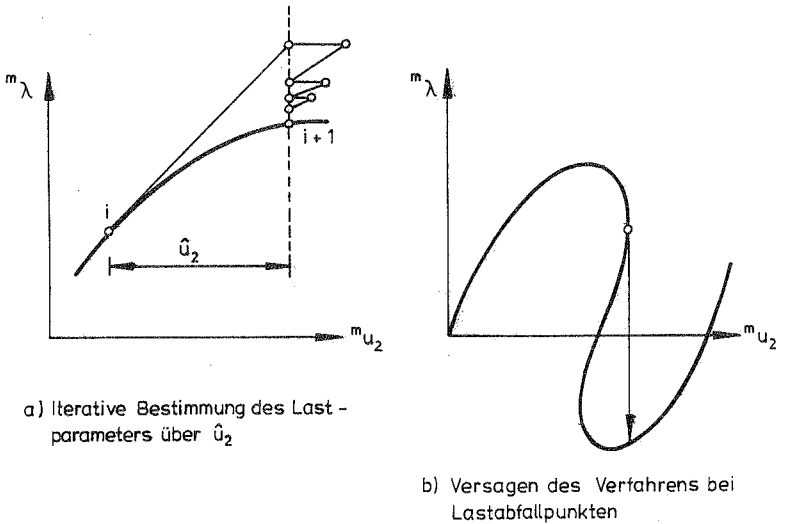


Bild 5.2. Verschiebungsgesteuertes Iterationsverfahren

Der Verlust der Symmetrie der neuen "Steifigkeitsmatrix" sowie der Verlust der Bandstruktur scheinen die Anwendung dieses Verfahrens stark einzuschränken. Diese Schwierig-

keit kann dadurch umgangen werden, dass das Gleichungssystem (5.7) in zwei Schritten gelöst wird. Das detaillierte Vorgehen ist in [116] beschrieben, wo noch weitere Vereinfachungen angegeben werden. In Kombination mit den Newton-Raphson-Verfahren stellen die verschiebungsgesteuerten Verfahren ein gutes Mittel zur Ueberwindung von Durchschlagspunkten dar.

Die Schwächen der Verfahren mit Verschiebungssteuerung sind analog zu denen der lastgesteuerten Verfahren. Weist die gewählte unabhängige Verschiebungskomponente die in Bild 5.2.b) gezeigte Charakteristik auf -keine Eindeutigkeit bezüglich des Lastparameters  $\lambda^m$ -, so versagt hier dieses Verfahren. Der Lastabfall entspricht dem Durchschlag bei Laststeuerung. Damit ist der Anwendungsbereich dieser Verfahren auf Probleme eingeschränkt, fuer die der monotone Verlauf mindestens der als unabhängiger Variablen gewählten Verschiebungskomponente gesichert sein muss. Dies stellt bei Systemen mit Einzellasten keine Schwierigkeit dar. Bei mehreren Einzellasten oder bei Flaechenlasten kann die Wahl der "richtigen" Variablen nur bei uebersichtlichen Problemen mit der notwendigen Gewaehr erfolgen.

5.1.3. Iterationsverfahren mit Steuerung ueber Bedingungen aus Lasten und Verschiebungen /  
Automatische Schrittweitenfindung

=====

Die Schwierigkeiten der beiden vorigen Verfahrensarten umgehen Riks [125],[126] und Wempner [156] fuer proportionale Belastungen mit einer gemischten Iterationsmethode, die Wessels [157] geometrisch dargestellt hat. Dabei wird die Laenge der Tangente im Punkt  $i$  -Bild 5.3- auf einen bestimmten Wert  $d_s$  vorab festgelegt (constant-arc-length-method).  $d_s$  errechnet sich als Norm aus der folgenden Gleichung:

$$\Delta \mathbf{u}^T \cdot \Delta \mathbf{u}^1 + (\Delta \lambda^1)^2 = ds^2 \quad (5.8)$$

$\Delta \mathbf{u}^1$  ist dabei der Zuwachs des Verschiebungsvektors fuer ein zugehoeriges Lastinkrement  $\Delta \lambda^1$ .

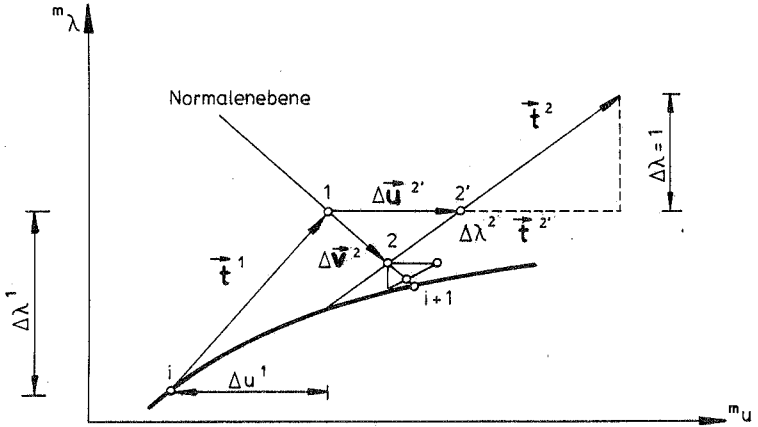


Bild 5.3 Verfahren mit Last-/ Verschiebungssteuerung

Als Iterationsebene wird die Ebene gewaehlt, auf der die Tangente senkrecht steht. Punkt 1 ist der Aufpunkt. Die Gleichung der Normalebene fuehrt zur Iterationsbedingung. (skalares Produkt von Vektoren)

$$\begin{aligned} \vec{t}^1 \cdot \Delta \vec{v}^j &= 0 & (5.9) \\ \text{mit: } \vec{t}^k &= f(\Delta \mathbf{u}^k, \Delta \lambda^k) \\ \Delta \vec{v}^j &= g(\Delta \mathbf{u}^j, \Delta \lambda^j) \end{aligned}$$

Zerlegt in Verschiebungskomponenten und Lastparameter lautet Gleichung (5.9) in matrizieller Form

$$\Delta \mathbf{u}^{iT} \cdot \Delta \mathbf{u}^j + \Delta \lambda^1 \cdot \Delta \lambda^j = 0 \quad (5.10)$$

mit  $j=2,3,\dots$

Die Iterationsbedingung nach (5.9) stellt nur eine der Möglichkeiten fuer Iterationsflaechen dar. Wie Crisfield [34] und Ramm [116] zeigen, kann auch auf Kugel- flaechen sowie innerhalb des Iterationszyklus staendig neu angeglichenen Normalenebenen iteriert werden. Hier wird im weiteren nur auf die sehr effektive Normalen- bedingung eingegangen.

Um den Verlust der Symmetrie und Bandstruktur der Ma- trix bei Einfuehrung der Normalenbedingung zu umgehen, wird das unsymmetrische Gleichungssystem in zwei Schrit- ten geloest. (siehe Wessels [157])

Fuer den unbekanntten Vektor  $\Delta \vec{v}$  gilt bei proportionaler Belastung:

$$\Delta \vec{v}^j = \Delta \lambda^j \cdot \vec{t}^i + \Delta \vec{u}^{j'} \quad (5.11)$$

Mit  $\Delta \vec{v}^j$  als Summe der Verschiebungen  $\Delta \vec{u}^{j'}$  infolge der Un- gleichgewichtskraefte und einer  $\Delta \lambda$ -fachen des Tangen- tenvektors  $\vec{t}^j$ . Fuer die Summe der Verschiebungskomponenten gilt:

$$\Delta u^j = \Delta \lambda^j \cdot \Delta u^{jT} + \Delta u^{j'} \quad (5.12)$$

Mit

$$\begin{aligned} {}_0^j K \cdot \Delta u^{jT} &= 1 \cdot {}^{(j)}R \\ {}_0^j K \cdot \Delta u^{j'} &= \lambda \cdot {}^{(j)}R - {}_0^j F \end{aligned} \quad (5.13)$$

Wird die Gleichung (5.12) in die Normalengleichung (5.10) eingefuehrt, kann das unbekanntte Lastinkrement  $\Delta \lambda^j$  daraus bestimmt werden:

$$\Delta \lambda^j = - \frac{\Delta u^{jT} \cdot \Delta u^{j'}}{\Delta u^{jT} \cdot \Delta u^{jT} + \Delta \lambda^j} \quad (5.14)$$

Damit ist das Lastniveau nach diesem Iterationszyklus be- kannt, und der Verschiebungsvektor kann nach Gl.(5.12) be- rechnet werden.

Gleichung (5.14) beruht auf dem Standard-Newton-Raphson-Verfahren. Wird das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren eingefuehrt, so eruebrigt sich die Berechnung von  $\mathbf{u}^{jI}$  fuer verformungsunabhaengige Lasten. Bei verformungsabhaengigen Lasten aendert sich aber der Lastvektor  ${}^{(j)}\mathbf{R}$ , so dass hierfuer  $\Delta \mathbf{u}^{jI}$  in jedem Iterationszyklus neu zu berechnen ist.

Mit

$$\Delta \mathbf{u}^{II} = \Delta \lambda^I \cdot \Delta \mathbf{u}^{jI} \quad (\Delta \mathbf{u}^{II} = \Delta \mathbf{u}^I \text{ bei Verformungsunabhaengeriger Last})$$

$$\text{gilt} \quad \alpha = \frac{\Delta \lambda^j}{\Delta \lambda^I} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{II} \cdot \Delta \mathbf{u}^{jI}}{\Delta \mathbf{u}^{II} \cdot \Delta \mathbf{u}^{II} + (\Delta \lambda^I)^2} \quad (5.15)$$

Der Rechenzeitvorteil des modifizierten Verfahrens wird noch dadurch vergroessert, dass neben der wiederholten Aufstellung der Steifigkeitsmatrix im Iterationszyklus die zweimalige Gleichungsaefloesung vermieden wird, da  $\Delta \mathbf{u}^I$  vom ersten Iterationsschritt vorliegt. Gegenueber einer lastgesteuerten Iteration wird nur zusaetzlicher Speicherplatz fuer den Vektor  $\Delta \mathbf{u}^I$  benoetigt. Bei der Standard Iteration muss zusaetzlich  $\Delta \mathbf{u}^{jI}$  gespeichert werden. Bei verformungsabhaengigen Lasten entfallen allerdings die hier erwaehnten weiteren Vorteile.

Wie sowohl Crisfield [34] als auch Ramm [116] vorschlagen kann der Lastwert  $(\Delta \lambda^I)^2$  ohne numerische Schwierigkeiten bei Systemen mit vielen Freiheitsgraden vernachlaessigt werden.

Lastumkehrpunkte bei Durchschlagsproblemen werden innerhalb der Berechnung durch Untersuchung der dreieckszerlegten Steifigkeitsmatrix auf negative Elemente auf der Hauptdiagonalen festgestellt. Jeweils beim Vorzeichenwechsel wird eine Lastumkehr vollzogen.

Die Abkehr von der Methode mit konstanter Tangentenlaenge bringt im Bereich starker Nichtlinearitaeten eine weitere Einsparung an Rechenzeit. Crisfield [34] veraendert die Tangentenlaenge im Verhaeltnis  $n_i/n$ , wobei  $n$

die Zahl der Iterationen im vorigen Schritt und  $n$  eine gewünschte Iterationszahl darstellt. Da dieses Vorgehen zu sehr starken Schwankungen in der Iterationszahl in aufeinanderfolgenden Schritten führt, wurde in der vorliegenden Arbeit der Faktor  $\sqrt{n_i/n}$  verwendet, was sich sowohl bei der Vergrößerung als auch Verkleinerung der Tangentenlänge gut bewährt hat.

Ein besseres Mittel zur Wahl einer sinnvollen Tangentenlänge stellt der Current-stiffness-Parameter nach Bergan [16] dar, der in Abschnitt 5.2. genauer beschrieben wird. Er beinhaltet mehr Information über die Steifigkeitsänderung des Tragwerks als die Iterationszahlen. Der Rechenaufwand spricht aber für das einfachere Verfahren der Steuerung mit Hilfe der Iterationszahl.

Der automatische Änderung der Tangentenlänge sind zudem Grenzen gesetzt. Bei Systemen mit teilweise fast linearem Verhalten kann die selbständige Schrittweitenfindung grosse Tangentenlängen ergeben, die zum Teil dazu führen, dass über Durchschlags- oder Verzweigungspunkte hinweg auf sekundäre Gleichgewichtsaeste oder physikalisch nicht realisierbare Gleichgewichtslagen hin iteriert wird. Um dies zu umgehen, muss die maximale Tangentenlänge eingeschränkt werden. Hierfür ein allgemeingültiges Mass anzugeben, ist wegen der starken Systemabhängigkeit dieser Grösse kaum möglich. Bergan [16] schlägt zwar im Zusammenhang mit reinen Last- oder Verschiebungsgesteuerten Verfahren vor, die Änderung der Verschiebungen so zu begrenzen, dass sich der Current-Stiffness-Parameter maximal um den Betrag 0,1 ändert. Eigene Rechnungen haben aber gezeigt, dass diese Massnahme nicht allgemeingültig ist. Bei Systemen mit abruptem Übergang von fast linearem in stark nichtlineares Verhalten -siehe Beispiel Kreiszyinderschale unter Wasserdruck (Abschnitt 7.2.1)- sind zur sinnvollen Schrittweitenfindung mehrere Schrittweitenvariationen erforderlich. Rechenerfahrung mit ähnlichen Systemen ist dann unumgänglich.

#### 5.1.4. Weitere Iterationsverbesserungen

=====

Eine einfache aber dennoch effektive Methode zur Reduzierung der Rechenzeit wird von Hinton et al. [65] vorgeschlagen. Dabei wird nach der ersten oder zweiten Iteration mit dem Standard-Newton-Raphson-Verfahren auf das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren uebergegangen. ( KT1 bzw. KT2 Methode nach [65] ). Die vom Verfasser im Programm NISA [20] implementierte KT2 Methode hat sich bei verschiedenen Berechnungen als sehr wirkungsvoll und rechenzeitsparend erwiesen.

Zur Iterationsverbesserung wird haeufig von der Tangentensteifigkeitsmatrix abgegangen und versucht, die Iteration durch Verwendung von Sekantensteifigkeitsmatrizen zu beschleunigen. Diese Verfahren, zu denen das Mittelpunktsteifigkeitsverfahren [21] und die Quasi-Newton-Methoden [34] gehoeren, zeigten bei der reinen Laststeuerung deutliche Verbesserungen gegenueber den Standard und modifizierten Newton-Raphson-Verfahren. Crisfield verbindet in [34] ein solches Sekantenverfahren mit der modifizierten Methode von Riks/Wempner und stellt fest, dass das Verfahren nur in manchen Bereichen sehr starker Nichtlinearitaeten eine Verringerung der Iterationszahl zur Folge hat. Dieser Unterschied ist jedoch bei weitem nicht so deutlich wie bei den rein lastgesteuerten Standard oder modifizierten Newton-Raphson-Verfahren. Da der Rechenaufwand fuer die Erweiterung auf Sekantensteifigkeitsmatrizen nicht unbedeutend ist, wird daher empfohlen eine Beschleunigung der modifizierten Methode nach Riks/Riks/Wempner nur im Bereich starker Nichtlinearitaeten vorzunehmen.



5.2. Der Steifigkeitsparameter nach Bergan [16]

Der von Bergan/Soreide eingefuehrte Steifigkeitsparameter (current-stiffness parameter)  $S_p$  stellt ein sinnvolles Mass zur Beurteilung der aktuellen "Nichtlinearitaet" eines Problems dar. Er kann bei der Ermittlung von Durchschlagpunkten sowie bei der automatischen Schrittweitenfindung verwendet werden.

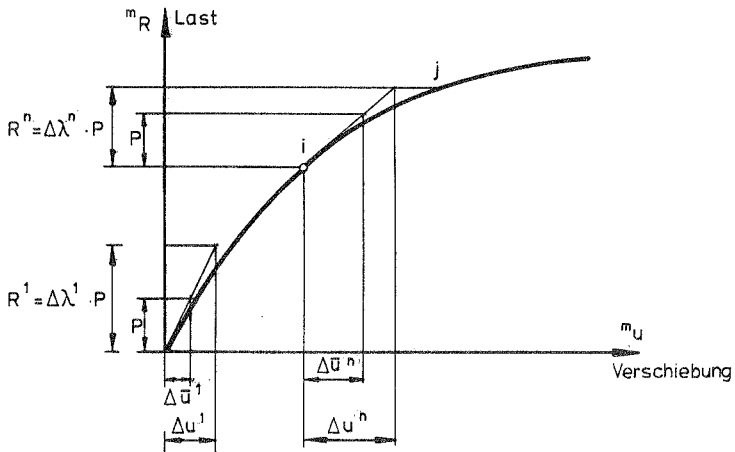


Bild 5.4 Groessen fuer den Current-stiffness Parameter

Der Parameter ist folgendermassen definiert:

$$S_p = \frac{\Delta \bar{u}^{1T} \cdot P}{\Delta \bar{u}^{nT} \cdot P} \quad (5.16)$$

- Mit  $P$  Einheitslastvektor  
 $\Delta \bar{u}^1$  Verschiebungsvektor in der Laststufe 1 infolge  $P$   
 $\Delta \bar{u}^n$  Verschiebungsvektor in der Laststufe n infolge  $P$

Wird mit unterschiedlicher Lastschrittgrösse vorgegangen, so gilt:

$$\begin{aligned} R^1 &= \Delta\lambda^1 P & R^n &= \Delta\lambda^n P \\ \Delta u^1 &= \Delta\lambda^1 \Delta \bar{u}^1 & \Delta u^n &= \Delta\lambda^n \Delta \bar{u}^n \end{aligned} \quad (5.17)$$

Damit wird der Current-Stiffness-Parameter zu:

$$Sp_1 = \left( \frac{\Delta\lambda^n}{\Delta\lambda^1} \right)^2 \cdot \frac{\Delta u^1 R^1}{\Delta u^n R^n} \quad (5.18)$$

Fuer  $R^1$  bzw.  $R^n$  wird der Lastvektor zu Beginn des ersten Lastschritts bzw. naeherungsweise die Ungleichgewichtskraefte zu Beginn des n-ten Lastinkrements verwendet. Alternativ kann ein ausschliesslich auf die Verschiebungen bezogener Steifigkeitsparameter eingefuehrt werden:

$$Sp_2 = \frac{\|\Delta \bar{u}^1\|}{\|\Delta \bar{u}^n\|} = \frac{\Delta\lambda^n}{\Delta\lambda^1} \cdot \frac{\|\Delta u^1\|}{\|\Delta u^n\|} \quad (5.19)$$

Mit der euklidischen Vektornorm  $\|\Delta u^n\|$  der inkrementellen Verschiebungen.

Beide Formulierungen fuehren zu Werten, die nahe beieinander liegen. Bei Problemen mit vielen Unbekannten bietet der zweite Parameter  $Sp_2$  einen Vorteil bezueglich des Speicherplatzes, da hierfuer nur der aktuelle inkrementelle Verschiebungsvektor benoetigt wird, waehrend beim ersten Parameter  $Sp_1$  jeweils Speicherplatz fuer die rechte Seite des Gleichungssystems vorgehalten werden muss. Dieser Vorteil macht sich dann bemerkbar, wenn fuer den Verschiebungsvektor  $\Delta u^n$  die Gesamtverschiebungen des Inkrements nach jeder Iteration eingefuehrt werden, und damit die Veraenderung des Parameters waehrend der Iteration beobachtet werden kann.

Wird der Current-Stiffness-Parameter am Anfang eines Lastinkrements gebildet, so stellt er einen Steifigkeitswert am Punkt  $i$  dar, waehrend er nach dem Ausiterieren eines Lastinkrementes einen Steifigkeitsmittelwert zwischen den Punkten  $i$  und  $j$  der Lastverschiebungskurve bedeutet.

Eine wesentliche Eigenschaft der beiden Parameter besteht darin, dass sie bei Durchschlagpunkten exakt zu Null werden. Werden die  $S_p$  Parameter ueber dem Lastwert aufgetragen, so besitzen die Kurven im Nullpunkt eine Tangente lotrecht zur Lastachse. Nach dem Erreichen eines Durchschlagpunktes besitzen sie solange negative Werte, bis wieder eine Umkehr der Lastverschiebungskurve einsetzt.

### 5.3 Konvergenzkriterien

=====

Fuer inkrementell-iterative Prozesse sind zwei grundsatzlich verschiedene Kriterien gebraeuchlich. Dies sind zum einen Normen in den Kraeften (Ungleichgewichtskraefte) und zum anderen Normen in den Verschiebungen (Verschiebungszuwachs). Diese koennen wiederum in globale und lokale Kriterien unterteilt werden. Bei lokalen Kriterien wird der Zuwachs der einzelnen Kraft- und Verschiebungskomponenten im Iterationszyklus mit einer Referenzkomponente skaliert und dann eine Norm bestimmt. In [15] wird fuer Verschiebungskomponenten gezeigt, dass sowohl Absolut- als auch euklidische oder Maximumnormen gleichwertig anwendbar sind. Das Problem besteht bei lokalen Kriterien in der Bestimmung der jeweiligen Referenzkomponente, wobei sowohl ein Maximalwert als auch ein Mittelwert verwendet werden kann. Wird fuer jede Komponente - gleichgueltig ob gross oder klein- dieselbe Genauigkeitsschranke verwendet, so ist das Kriterium bezueglich der kleinen Groessen schaefer. Globale Kriterien verwenden den Zu-

wachs aller Kraft- bzw. Verschiebungskomponenten im Iterationszyklus. Als Bezugsgrösse wird eine Norm aus allen Kraft- bzw. Verschiebungsgrössen benutzt. Damit ist ein durchschnittliches Konvergenzkriterium fuer alle Grössen gegeben.

Lokales Konvergenzkriterium :

(Konvergenz einer Komponente) z.B. nach [15]

$$\varepsilon > \left[ \frac{1}{N} \sum \left| \frac{\Delta u_{i, re}^m}{u_{i, re}^m} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.20)$$

(  $\varepsilon$  zwischen  $10^{-2}$  +  $10^{-6}$  )

globales Konvergenzkriterium :

(Beispiel im Programm NONSAP [9])

$$\varepsilon > \frac{\|\Delta u^m\|}{\|u + \Delta u^m\|} \quad (5.21)$$

Die Schwaeche dieses globalen Kriteriums - fuer wachsende Gesamtverschiebung wird das Kriterium bei konstantem  $\varepsilon$  immer weniger scharf- kann dadurch ausgeglichen werden, dass als Bezugsgrösse die Verschiebungen  $u$  innerhalb eines Lastinkrements herangezogen werden.

Verbessertes globales Konvergenzkriterium :

siehe Programmsystem NISA [20]

Verschiebungskriterium: verwendete Schranken  
zwischen

$$\varepsilon > \frac{\|\Delta u^m\|}{\|u + \Delta u^m\|} \quad \varepsilon = 10^{-2} + 10^{-3} \quad (5.22)$$

Kraeftekriterium :

$$\epsilon > \frac{\|{}^2R - {}^m_nF\|}{\|{}^2R - {}^1R\|} \quad (5.23)$$

Die Frage, ob Kriterien in den Kraefften oder in den Verschiebungen verwendet werden, wird haeufig zugunsten der letzteren beantwortet. Kriterien in den Kraefften vergleichen den Zuwachs in den Ungleichgewichtskraefften mit den aeusseren Lasten. Da auch dort Ungleichgewichtskraefte vorhanden sein koennen, wo keine Lasten auftreten, kann ein lokales Kriterium nur eingeschraenkt angewandt werden. Auch globale Kriterien in den Kraefften koennen versagen oder zu sehr vielen Iterationen fuehren, z.B. bei Systemen die mit nur einer Last belastet sind. (Kragplatte unter Einzellast). Diese Schwaeche des globalen Kraeftekriteriums liegt darin begruendet, dass im Fall der Einzellast viele Ungleichgewichtskraefte mit einer aeusseren Kraft in Beziehung gesetzt werden. Bei Systemen mit vielen belasteten Freiheitsgraden ergibt dagegen dieses Kriterium zufriedenstellende Ergebnisse. In diesem Fall stehen der grossen Anzahl der Ungleichgewichtskraefte eine ausreichende Zahl an aeusseren Kraefften gegenueber. Es wurden daher Verbesserungen der Kriterien in den Kraefften durch Skalierung der Ungleichgewichtskraefte mit Steifigkeitswerten z.B. den Diagonalelementen der Steifigkeitsmatrix [34] vorgeschlagen. Dies entspricht aber wieder dem Einsatz von Verschiebungswerten, so dass die direkte Anwendung von Verschiebungskriterien sinnvoller erscheint.

## 6. Klassische Beispiele

=====

Alle Beispiele wurden mit der bezüglich der vorigen Abschnitte erweiterten Version des Programmsystems NISA [20] auf CDC Computer CD 6600 bzw. CYBER 174 berechnet.

### 6.1 Kreisring unter Aussendruckbelastung

=====

Der Kreisring oder das lange Rohr unter Aussendruck stellt bei der Berücksichtigung der Verformungsabhängigkeit einer Belastung den klassischen, am meisten untersuchten Fall dar. Da unter konstantem Aussendruck die Lastabtragung weitgehend - bei geschlossenen Ringen sogar ausschliesslich - über Membrankräfte erfolgt, ergibt sich hierfür ein lineares Stabilitätsproblem, während nicht konstanter Aussendruck zu grossen Biegemomenten und somit auf ein Problem mit grossen (Biege-) Verformungen führt.

Die beiden folgenden Beispiele werden unter drei verschiedenen konstanten Aussendruckbelastungen untersucht, die alle am perfekten System auf Stabilitätsprobleme führen.

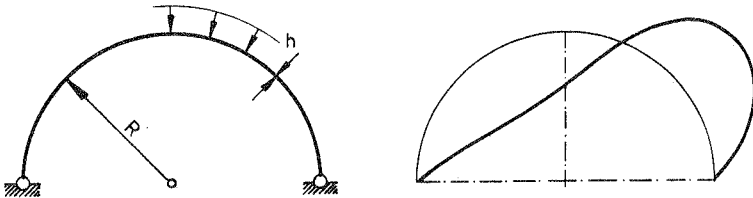
Diese Lastfälle sind :

1. konstanter, hydrostatischer Aussendruck (normalentreu)
2. konstanter, linientreuer (richtungstreuer) Aussendruck
3. konstanter, poltreuer Aussendruck mit Kreismittelpunkt als Pol

Alle drei Fälle stellen für geschlossene Systeme konservative Belastungen [17] mit in der Folge symmetrischen Steifigkeitsmatrizen dar, die mit den statischen Stabilitätskriterien untersucht werden können. Bei nichtkonstantem Aussendruck können je nach Art der Belastung nichtkonservative Probleme entstehen, für die zur Aufindung der Stabilitätslast das kinetische Kriterium zu verwenden ist.

6.1.1 Der beidseits gelenkig gelagerte Halbkreisbogen  
=====

Die Dimensionen des Bogens entstammen einer Arbeit von Batoz [13] und wurden von Loganathan et al. [88] sowie Floegl/Mang [47] uebernommen.



$$R = 120\text{cm}; h = b = 1\text{cm}; EJ = 45880 \text{ Ncm}^2$$

Bild 6.1. Halbkreisbogen unter Aussendruck, Beulfigur

Bei der Berechnung wurden alle drei in Abschnitt 3.4.2.2 gezeigten Elemente verwendet. Fuer alle drei Belastungsfaelle ergeben sich wegen der Konservativitaet der Belastung symmetrische Laststeifigkeitsmatrizen und eine aehnliche Beulfigur. Die Ergebnisse in Tafel 6.1. sind das Resultat klassischer Anfangsstabilitaetsanalysen.

Vergleicht man die Ergebnisse mit analytischen Loesungen nach Levy [87], Chwalla/Kollbrunner [32] oder Timoshenko [153], so zeigt sich sehr gute Uebereinstimmung. Die etwas groessere Abweichung bei poltreuen Lasten ruehrt daher, dass bei der Realisierung im Rechenprogramm aus Gruenden des Rechenaufwandes die aus der Flaechenaenderung herruehrenden Anteile der Laststeifigkeitsmatrix vernachlaessigt wurden.

Belastung	K			
	2 dim. Kontinuum	Elementtypen		analytische Lösungen
hydrostatisch	3.0186	2.9999 (1)	3.0045	3.000
	-	3.00382 (2)	-	-
linientreu	3.2667	3.271	3.276	3.265
poltreu	-	-	4.282	4.500

Elementnetze : jeweils gleichmaessiges Elementnetz

- 60 2-dim. Kontinuumelemente 8 knotig
- (1) 60 2-dim., degenerierte Elemente 3 knotig
- (2) 18 2-dim., degenerierte Elemente 4 knotig
- 24 16-knot., degenerierte Platten/Schalen-elemente

Tafel 6.1 Beulfaktoren K des gelenkig gelagerten Halbkreisbogens

Den analytischen Loesungen liegt dehnungsloses Beulen zugrunde. Diese Annahmen wurden durch die Eigenwertanalysen nach Tafel 6.1, bei denen Dehnungsanteile beruecksichtigt werden, gerechtfertigt. Der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Last bewirkt einen Abfall der kritischen Last zwischen linientreuer und hydrostatischer Belastung um 9%.

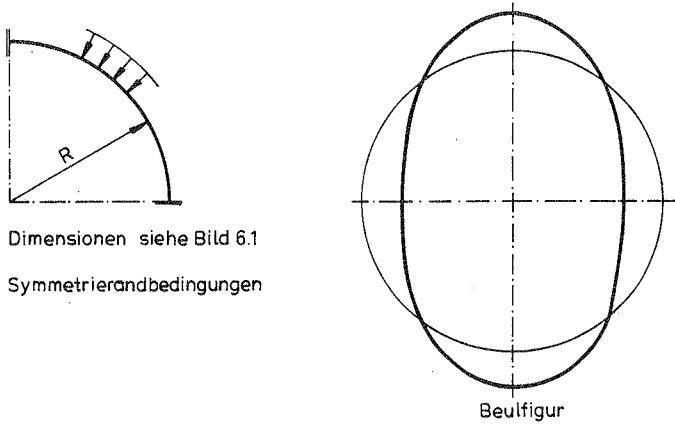
#### 6.1.2 Der geschlossene Kreisring

=====

Der geschlossene Kreisring stellt das signifikanteste Beispiel fuer den Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung dar. Aus analytischen Loesungen ist bekannt, dass der Kreisring - mit dem Kreismittelpunkt als Fixpunkt - unter allen drei Belastungsarten in vier Halbwellen ausbeult. Daher genuegt zur Idealisierung mit fi-



niten Elementen ein Viertel des Rings. Bei der Berechnung kam das 16-knotige, degenerierte Platten/Schalenelement zur Verwendung.



Dimensionen siehe Bild 6.1

Symmetrierandbedingungen

Beulfigur

Bild 6.2 Kreisring unter gleichförmigem Aussendruck

Die Untersuchung beschränkte sich wegen des hier vorliegenden, weitgehend linearen Verhaltens auf eine Anfangsstabilitätsanalyse über eine Eigenwertberechnung.

$P_{kr} = K \cdot \frac{EJ}{R^3}$	K	
	FE-Lösung, 12 P./S. EL./7,5°	analyt. Lösung Pflüger [108]
hydrostatisch	3.003	3.000
linientreu	4.004	4.000
politreu	4.428	4.500

Tafel 6.2 : Beulfaktoren K des Kreisrings unter gleichförmigem Aussendruck

Die Ergebnisse in Tafel 6.2 zeigen die sehr gute Uebereinstimmung mit den analytischen Loesungen. Die zu kleine, poltreue kritische Last erklart sich wieder aus der vorne erwachten Vernachlaessigung im Rechenprogramm. Besonders bemerkenswert ist der Abfall der kritischen Last infolge der Verformungsabhaengigkeit um 33%.

An dieser Stelle sei eine Diskussion der Beullast des Halbkreisbogens im Vergleich zum Kreisring beigefuegt :

Fuer hydrostatischen sowie poltreuen Aussendruck ergeben sich fuer den Kreisring sowie fuer den Halbkreisbogen dieselben kritischen Lasten. Nur fuer linientreuen Aussendruck zeigt sich ein betraechtlicher Unterschied. Dieser scheint unbegrundet, denn vergleicht man die Beulfiguren beider Probleme miteinander, so laesst sich die Beulfigur des Halbkreisbogens durch eine Drehung der Beulfigur des Kreisrings erzeugen, bzw. umgekehrt aus der Beulfigur zweier aneinander gehefteter, gelenkig gelagerter Halbkreisbogen laesst sich die Beulfigur des Kreisrings erzeugen; vorausgesetzt man dreht diese Figur. Diese Ueberlegung findet sich auch im Schrifttum wieder, so dass neben dem Beulfaktor  $K = 4,0$  auch der Wert 3.265 fuer den Kreisring existiert [32],[139],[140],[147]. El Naschie [44] hat diese Differenz mit Hilfe eines einfachen Modells zu klaeren versucht :

Der Kreisring besitzt zwei Symmetrieachsen, die die Verschiebungsrichtungen an 4 Punkten vorschreiben. Der Halbkreisbogen hingegen wird an zwei Punkten voellig festgehalten.

Fuer die Verschiebungsfelder gilt :

- w - radiale Verschiebung
- u - tangentielle Verschiebung

"freier" Kreisring

$$w = - R \cdot \cos 2\vartheta$$
$$u = 0.5 R \sin 2\vartheta$$

festgehaltener Kreisring

$$w = - R \cdot \cos 2\vartheta$$
$$u = 0.5 R (\sin \vartheta - 1)$$

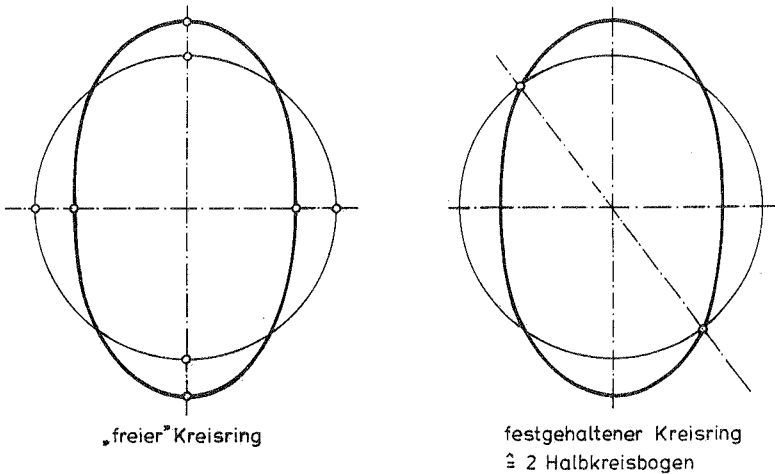


Bild 6.3 Beulfiguren bei konstantem Aussendruck,  
Vergleich Kreisring/Halbkreisbogen

Es handelt sich also um zwei physikalisch verschiedene Probleme, deren Verschiebungsfelder sich in tangentialer Richtung um  $u = -0.5 R$  unterscheiden. Um die Figur nach Bild 6.3 b) einzunehmen, muesste der Kreisring mit zwei festen Punkten in einer unsymmetrischen Figur ausbeulen, was wegen des Kraeftegleichgewichts am freien Kreisring nicht moeglich ist. Der Unterschied in den Beullasten resultiert aus der Arbeit, die der richtungstreue Aussendruck bei der anschliessenden Starrkoerperdrehung um den Kreismittelpunkt mit  $u = -0.5 R$  verrichtet. Bei den beiden anderen Belastungsfaellen ergibt die Starrkoerperdrehung keinen Arbeitsbetrag. Bei poltreuen Lasten verrichtet keine Last Arbeit, waehrend bei hydrostatischer Belastung sich die positiven und negativen Arbeitsanteile aufheben.

Die umfassende Untersuchung dieses Beispiels in [147] zeigt, dass nur unter den Zwangsbedingungen nach Bild 6.3

- a) keine Starrkoerperrotation
- b) Festhalterung in zwei Punkten

die Beulfaktoren  $K$  zu a) 4,0 bzw. b) 3.265 zutreffen. Werden beliebige Starrkoerperrotationen zugelassen, so kann keine klar definierte Beullast angegeben werden. Eine Verifizierung der Beullasten durch Experimente ist wegen des rein akademischen Charakters dieser Belastung nicht moeglich.

### 6.1.3 Der geschlossene Kreisring unter nichtrotations-symmetrischer Belastung

=====

Nichtrotationssymmetrische Belastung fuehrt bei einem geschlossenen Kreisring auf ein Problem grosser Verformungen im Gegensatz zu den vorher gezeigten, linearen Stabilitaetsproblemen. Als Belastungsform wird der Lastfall  $p = p_0 \cdot (1 + \cos 2\vartheta)$  gewaehlt, den Seide/Jamjoom [143] als Normalendruckbelastung berechnet haben, siehe auch [114],[4].

Der Einfluss der Verschiebungsabhaengigkeit der Last wird an drei Belastungsfunktionen gezeigt.

#### Belastungsfunktionen

$$p = p_0 \cdot (1 + \cos 2\vartheta) \quad (6.1)$$

mit kartesischen Koordinaten gilt :

$$\begin{aligned} \cos 2\vartheta &= \cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta \\ &= \frac{x_1^2}{R^2} - \frac{x_2^2}{R^2} = 1 - 2 \cdot \frac{x_2^2}{R^2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

koerperfeste Belastung :

$$p = p_0 \cdot \left( 1 + \frac{{}^0x_1^2}{R^2} - \frac{{}^0x_2^2}{R^2} \right) \quad (6.3)$$

raumfeste Belastungen :

$$\textcircled{1} \quad p = p_0 \cdot \left( 1 + \frac{x_1^2}{R^2} - \frac{x_2^2}{R^2} \right) \quad (6.4)$$

$$\textcircled{2} \quad p = 2 p_0 \cdot \left( 1 - \frac{x_2^2}{R^2} \right) \quad (6.5)$$

Die an dieser Stelle nur exemplarisch angenommenen Formulierungen der Belastung nach den Gleichungen (6.4) und (6.5) lassen sich als bezueglich der Achsen  $x_1$  bzw.  $x_2$  feste Druckfelder erklaren. Die Belastungsmagnitude ist von den aktuellen Koordinaten  $x_1, x_2$ , bzw. nur  $x_2$  in diesen Druckfeldern abhaengig. Beide Druckfelder koennen als unbegrenzt ausgedehnt angesehen werden.

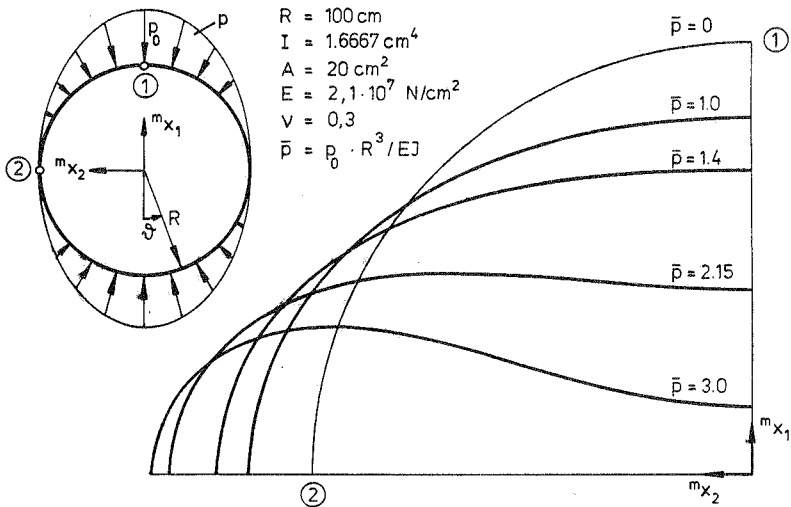


Bild 6.4 Kreisring unter verformungsabhaengiger Druckbelastung nach Gleichung (6.3)

Aus Symmetriegrunden wurde nur ein Viertel des Kreisrings durch 9·ebene, degenerierte Elemente mit kubischem Verschiebungsansatz simuliert. Bild 6.4 zeigt die Verformungsfigur des Ringviertels unter einer Belastung nach Gleichung (6.3). Die Vergleichswerte der Loesungen nach [4],[114],[143] stimmen mit den jeweils angegebenen Kurvenwerten ueberein und werden daher nicht gesondert gekennzeichnet.

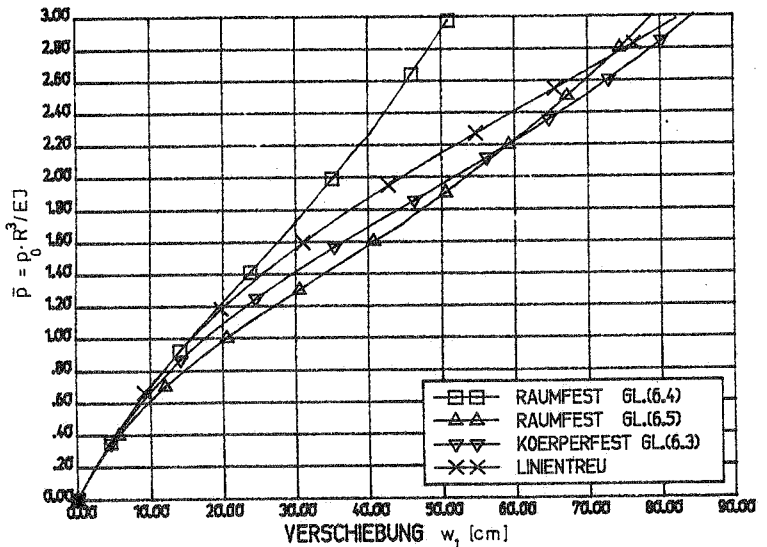


Bild 6.5 Vergleich der Last-Verschiebungskurven fuer unterschiedliche Belastungsformulierungen Radialverschiebung Punkt 1

Die Last-Verschiebungskurven aller drei Formulierungen zeigen ein anfaenglich "weicher" werdendes System, das sich mit zunehmender Belastung wieder versteift. Die bei der Berechnung ermittelte Determinante unterstreicht diese Beobachtung. Sie faellt anfangs ab, um dann etwa ab den Wendepunkten der dargestellten Kurven wieder groesere Werte anzunehmen. Die kleineren Verschiebungen unter

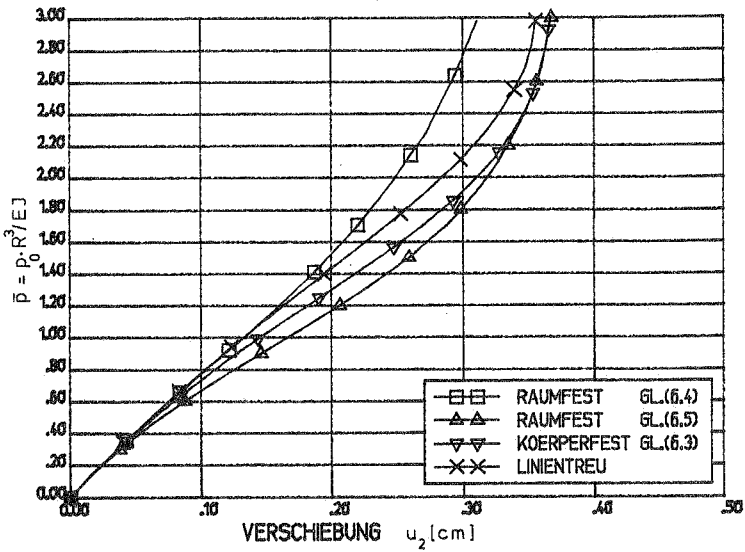


Bild 6.6 Vergleich der Last-Verschiebungskurven fuer unterschiedliche Belastungsformulierungen; Radialverschiebung Punkt 2

der raumfesten Belastung nach Gl.(6.4) im Vergleich zur koerperfesten Belastung nach Gl.(6.3) erklaren sich infolge der quadratischen Abnahme der grossten Druckordinaten mit schwindenden  $^2x_1$ -Ordinaten. Auch der Aufbau eines Zugbereichs infolge Zunahme der  $^2x_2$ -Ordinaten gleicht diese Belastungsabnahme nicht aus.

Bei raumfester Belastung nach Gleichung (6.5) werden die Maximal-Verschiebungen bis  $\bar{p} = 2,2$  grosser als bei koerperfester Last, da der Druckbereich in  $x_1$ -Richtung fast voellig erhalten bleibt, und die Verformung in  $x_2$ -Richtung eine Vergruesserung des Zugbereichs und der Zugordinaten zur Folge hat. Das staerker versteifende Verhalten bei hoeheren Lasten erklart sich durch den weiteren Aufbau des Zugfeldes und die dadurch erfolgende Zugversteifung.

Die Kurven fuer Belastungen nach Gleichung(6.4),(6.5) sowie fuer linientreue Belastung wurden mit dem modifizierten Newton/Raphson -Verfahren kombiniert mit dem Verfahren nach Riks/Wempner berechnet. Die hierbei verwendete automatische Schrittweitenfindung ueber die Iterationszahl zeigte sich wegen der gleichmaessigen Nichtlinearitaet des Problems als wirkungsvoll. Bei koerperfester Belastung wurde ab  $\bar{p} = 1.9$  wegen Konvergenzschwierigkeiten vom modifizierten N/R-Riks/Wempner-Verfahren auf Laststeuerung mit dem echten N/R - Verfahren uebergegangen. Eine Erklaerung fuer die Konvergenzschwierigkeiten bietet die unvollstaendige Annaeherung der Steifigkeitsmatrix durch eine zwangssymmetrisierte Matrix nach Abschnitt 3.4.2.4.

Abschliessend sei hinzugefuegt, dass der Kreisring wegen der Nichtkonservativitaet bei koerperfester Belastung Gl.(6.5) vermutlich auch durch kinetische Instabilitaet versagen kann, worauf auch die Unsymmetrie in den Steifigkeitsmatrizen hindeutet.

## 6.2. Der Kragarm unter konstanter Gleichlast

=====

Der Kragarm, nach Bild 6.6 unter konstanter Gleichlast in Normalenrichtung (hydrostatischer Druckbelastung), fuehrt wegen des Randglieds nach Gl.(3.26),(3.27) auf ein nicht-konservatives Problem. Die Unsymmetrie tritt in den Termen der Laststeifigkeitsmatrix fuer die Verschiebungen des Randpunktes  $i$  auf. Die Groesse des schiefsymmetrischen Anteils betraegt nach Gleichung (3.25)  $\pm p/2$ .

Der Kragarm wurde durch 5 kubische, degenerierte, zweidimensionale Elemente diskretisiert und sowohl fuer "hydrostatische" als auch linientreue Belastung berechnet. Die Dimensionen entstammen der Arbeit von Argyris/Symeonidis [4].



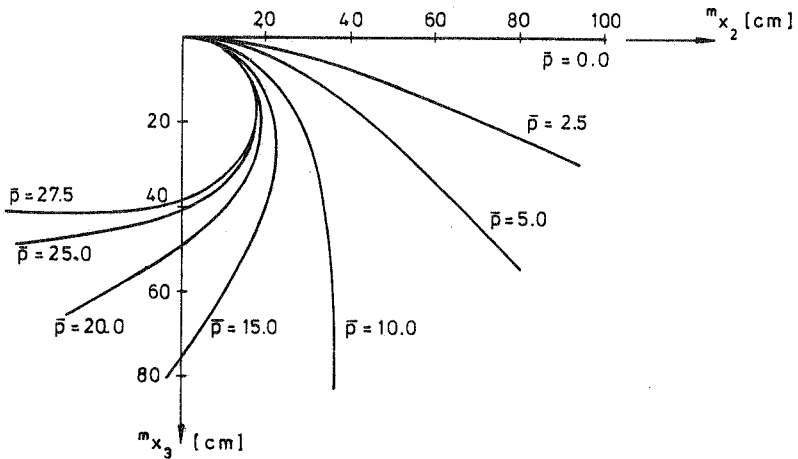
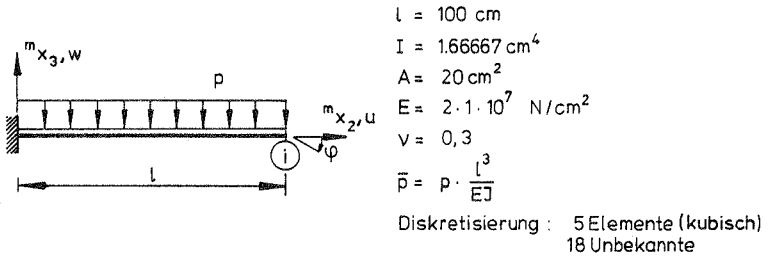


Bild 6.7 Durchbiegung eines Kragarms unter hydrostatischer Druckbelastung

Die Last-Verschiebungsdiagramme und das Verschiebungsbild 6.7 zeigen, dass die normalentree Belastung den Kragarm in eine kreisaehnliche Form zwingt. Fuer linientreue Belastung ergibt sich im Extremzustand ein vertikaler Stab, der fast ausschliesslich in Laengsrichtung (zug-)belastet wird. Die Berechnungen wurden im letzteren Fall aber nicht bis zu diesem Zustand durchgefuehrt. Waehrend bei linientreuer Belastung ein Problem mit grossen Verformungen vorliegt, fuehrt die nichtkonservative Belastung

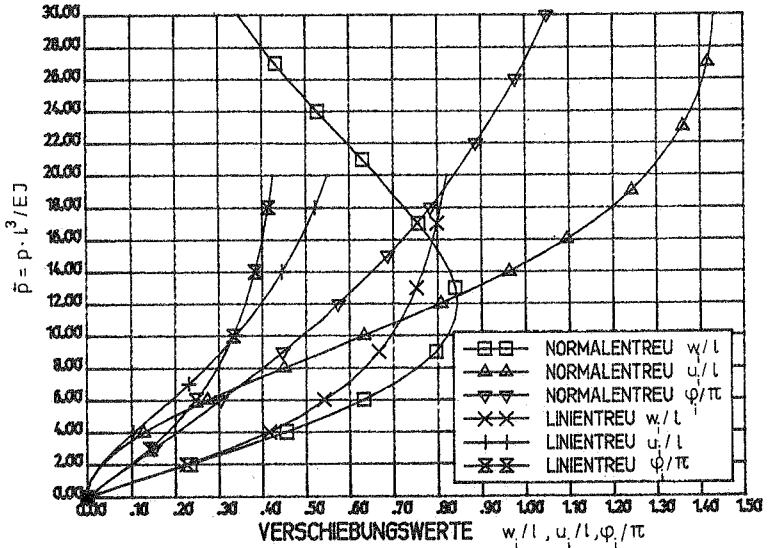


Bild 6.8 Last-Verschiebungsdiagramme fuer Verschiebungen des Punktes 1 unter linientreuer und hydrostatischer Druckbelastung (Vergleichswerte nach [66],[10],[4] liegen auf den Kurven)

neben grossen Verformungen auf ein kinetisches Instabilitaetsproblem. Zur Bestimmung der Flutterlast muessen die unsymmetrischen Laststeifigkeitsmatrizen verwendet werden. Auf ihre Berechnung wurde im Rahmen dieser Arbeit verzichtet. Es sollte aber gezeigt werden, dass zur Berechnung des nichtlinearen Verhaltens des Tragwerks trotz seiner Nichtkonservativitaet unsymmetrische Steifigkeitsmatrizen nicht erforderlich sind.

Vergleichsberechnungen mit der echten unsymmetrischen und zwangssymmetrisierten Matrizen zeigten, dass die symmetrisierte Matrix nach Abschnitt 3.4.2.4 ohne Beruecksichtigung der schief-symmetrischen Terme zu den gleichen Iterationszahlen fuehrten wie die unsymmetrische Matrix. Dieser Vergleich wurde mit dem echten N/R-Verfahren bis  $\bar{p} = 14.0$  durchgefuehrt. Das Problem fuehrt auf grosse

Rotationen und durch die Linearisierung zu Membrankraef-  
ten, die durch den Iterationsvorgang beseitigt werden  
muessen. Es sind deshalb sehr kleine Schrittweiten oder  
hohe Iterationszahlen erforderlich, so dass die weitere  
Berechnung mit einem Newton-Raphson-Verfahren ohne Itera-  
tion im Inkrement (Euler mit Rueckwaertseinsetzen) durch-  
gefuehrt wurde. Bis zum Wert  $\bar{p} = 30.0$  waren noch 160  
Schritte erforderlich. Trotz des bei diesem Verfahren  
staerkeren Einflusses einer nicht vollstaendigen Steifig-  
keitsmatrix zeigt sich kein Unterschied zu den in [4] mit  
der unsymmetrischen Matrix ermittelten Werten.

### 6.3 Der Becksche Knickstab

=====

Der einseitig eingespannte, gerade Stab unter einer tan-  
gentialen Folgelast am freien Ende fuehrt auf ein kineti-  
sches Stabilitaetsproblem, das nach dem Schweizer Beck  
benannt wurde, der dieses 1952 als erster geloest hat .  
[14]

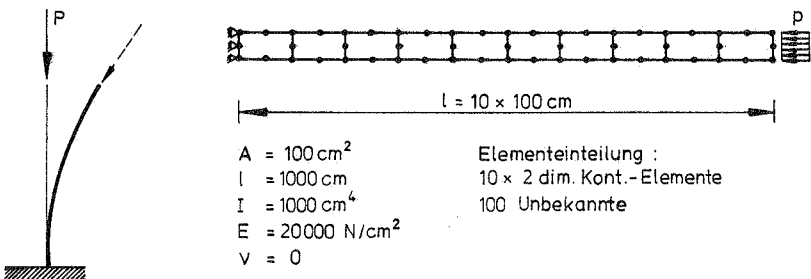


Bild 6.9 Der Becksche Knickstab, Finite Element - Ideali-  
sierung

Die Anwendung statischer Stabilitaetskriterien (Euler) ergibt das irrefuehrende Resultat, dass keine Nullstelle der Knickdeterminante auftritt, und somit das Problem unbegrenzt stabil scheint [18] [108]. Statische Stabilitaetskriterien sind aber nur dann verwendbar, wenn keine nichtkonservativen Kraefte im System vorhanden sind, und damit ein Potential der aeusseren Kraefte gegeben ist. [167] (Ausnahmen siehe Abschnitt 4.3.2.) Beim Auftreten nichtkonservativer Kraefte muss daher das kinetische Stabilitaetskriterium zum Einsatz kommen.

Beim kinetischen Kriterium ist neben der Steifigkeitsverteilung auch die Massenverteilung auf der Stabachse fuer die Stabilitaetslast von Bedeutung. (siehe Tafel 6.3)

konstante Massenverteilung	$P = 2.031 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$	Beck [14]
	$P = 2.003 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$	Deineko/ Leonov [18]
Einzelmasse am Stabende	$P = 2.046 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$	Pflueger [108]
2 gleiche Massen in Stabmitte und Stabende	$P = 1.48 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$	Deineko/ Leonov [18]

Tafel 6.3 Einfluss der Massenverteilung auf die kinetische Instabilitaetslast

Fuer die Berechnung mit finiten Elementen wurde der Stab durch 10 zweidimensionale Kontinuum-Elemente diskretisiert. Diese Masse wurde sowohl konstant verteilt (consistent mass) als auch in den Elementknoten zusammengefasst (lumped mass) angenommen. Die Einzellast am Stabende wird durch eine verformungsabhaengige, konstant ver-

teilte Normalendruckbelastung an der Stirnflaeche des letzten Elements dargestellt. Infolge der Randterme der Laststeifigkeitsmatrix wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix unsymmetrisch.

Mit steigender Belastung ergibt sich der in Bild 6.10 dargestellte Eigenfrequenzverlauf der beiden niedrigsten Eigenfrequenzen. Die kritische Last (Instabilitaetslast) ist durch das Zusammenfallen der beiden Eigenfrequenzen gegeben (vertikale Tangente).

Die Abweichung des Ergebnisses der Idealisierung fuer zusammengefasste Massen ( $P_{kr} = 2.060 \pi^2 EJ / l^2$ ) sowie fuer verteilte Massen ( $P_{kr} = 2.078 \pi^2 EJ / l^2$ ) ist mit 1,5% bzw 2,0% des exakten Wertes gering. Die Konzentration der Massen im ersteren Fall wirkt der zu "steifen" Idealisierung entgegen und ergibt daher den guenstigeren Wert.

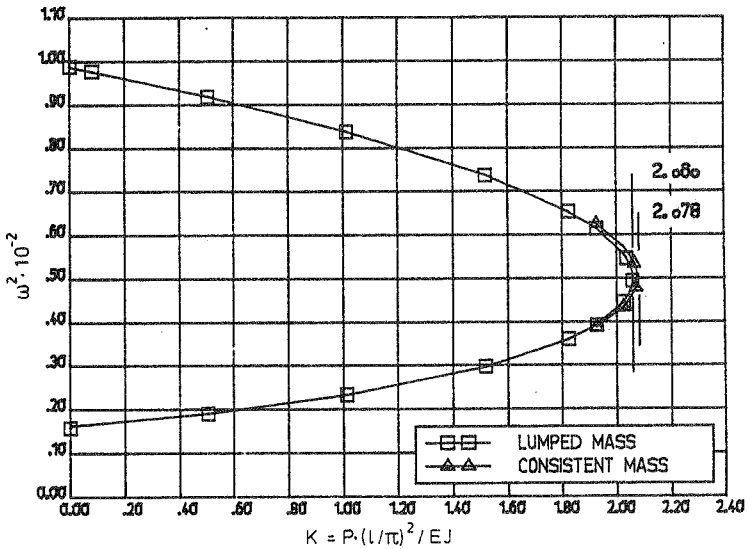


Bild 6.10 Frequenzverlauf der beiden ersten Eigenkreisfrequenzen, aufgetragen ueber dem Lastfaktor K

Der hohe numerische Aufwand bei kinetischen Stabilitätsuntersuchungen wird bei Betrachtung der Kurve offensichtlich. Neben der zusätzlichen Erstellung und Speicherung der Massenmatrix ist die Lösung des Eigenwertproblems in vielen Laststufen erforderlich. Insbesondere in der Nähe der kritischen Last muss zur Erzielung der gewünschten Genauigkeit das Eigenwertproblem mehrfach gelöst werden. Aus diesem Grund ist stets die Möglichkeit des Einsatzes statischer Stabilitätskriterien zu prüfen. In Abschnitt 4.3.2 (Tafel 4.4) wurden bei der Frage der Zwangssymmetrisierung von Steifigkeitsmatrizen statische Stabilitätskriterien mit Ersatzmatrizen für den Beckschen Stab eingesetzt. Hier sei auf die dort geführte Diskussion über die in diesem Fall unzureichenden Ergebnisse verwiesen.

7. Stabilitaet von Kreiszyinderschalen unter Aussendruck

=====

In diesen Abschnitt soll das Verhalten von Kreiszyindern unter Aussendruck insbesondere unter dem Gesichtspunkt der Stabilitaet betrachtet werden. Fuer den Werkstoff wird stets unbegrenzt elastisches Verhalten vorausgesetzt.

Definitionen

- L Zylinderlaenge
- t Wanddicke eines Zylinders
- R Zylinderradius
- $p_{kr}$  Stabilitaetslast
- $p_{kt}$  klassische Beullast
- $\nu$  Poisson'sche Zahl
- E Elastizitaetsmodul
- n Beulwellenzahl in Umfangsrichtung (Vollwellen)
- m Beulwellenzahl in Laengsrichtung (Halbwellen)

$$K = p \cdot \frac{12(1-\nu^2)}{E} \cdot \frac{R^3}{t^3} \quad \text{Beulwert (-faktor)}$$

$K_L$  Beulfaktor fuer linien(richtungs)treuen Aussendruck

$K_N$  Beulfaktor fuer normalentreuen Aussendruck

Diff. =  $\frac{K_L - K_N}{K_N} * 100$  Prozentualer Unterschied in den Beulfaktoren

u Verschiebung in Laengsachse

v Verschiebung in Umfangsrichtung

w Verschiebung in radialer Richtung

$N_x, N_y$  Membrankraefte

$Q_x, Q_y$  Querkraefte

$M_x, M_y$  Biegemomente

Z Batdorf-Parameter  $Z = \frac{L^2}{R \cdot t} \sqrt{(1-\nu^2)}$

$\eta$  Imperfektionsamplitude

Einteilung der Zylinder nach DAST-Richtlinie 013 [35]:

$$\text{kurze Zylinder : } \frac{L}{R} < \frac{20}{\sqrt{R/t}}$$

$$\text{Zylinder mittlerer Laenge : } \frac{20}{\sqrt{R/t}} \cong \frac{L}{R} \cong 1.63 C \sqrt{R/t}$$

$$\text{lange Zylinder : } \frac{L}{R} > 1.63 C \sqrt{R/t}$$

$C = 0.6 - 1.4$  je nach Randbedingung (siehe dazu DAST-Richtlinie 013 [35])

### Belastungen

Die ueblichen Druckbelastungen auf Kreiszyylinder resultieren aus :

- Unterdruck (bei Tankentleerungen)
- Wasserdruck
- Erddruck
- Winddruck
- Druck infolge Explosion

Unterdruck sowie Wasserdruck auf liegende Zylinder in grosserer Wassertiefe kann als rundum konstanter Aussen-  
druck betrachtet werden. Wasser- sowie Erddruck bei ste-  
henden Zylindern stellen rotationssymmetrische Belastun-  
gen dar, deren Magnitude sich in Richtung der Zylinder-  
laengsachse aendert. Winddruck, Erddruck bei liegenden  
Zylindern sowie Wasserdruck auf liegende Zylinder in  
flachem Wasser und Explosionsdruecke stellen nichtrota-  
tionssymmetrische Belastungen dar. Alle Belastungen sind  
bezuglich ihrer Wirkung auf den Zylinder von der aktuel-  
len Zylindergeometrie und damit auch von den Verformungen  
abhaengig. Dies fuehrt im wesentlichen auf Stabilitaets-  
probleme.

Hier sei noch darauf hingewiesen, dass im Schrift-  
tum unter der Bezeichnung "hydrostatischer Druck" viel-



fach nicht der normalentreue, sondern allseitiger linien- (richtungs-)treuer Druck - d.h. auch auf die Deckel der Zylinder - verstanden wird.

Am Kreisring (Abschnitt 6.1) wurde gezeigt, dass die Verformungsabhaengigkeit der Belastung die massgebende Last beeinflusst. Inwieweit dies bei den verschiedenen Kreiszyklindern der Fall ist, wird eines der Hauptziele der Betrachtungen dieses Abschnitts sein. Die in dieser Arbeit durchgefuehrten Rechnungen werden dabei in die Betrachtungen des Schrifttums eingeordnet.

## 7.1 Rotationssymmetrische Belastungen

=====

### 7.1.1 Die beidseits gestuetzte Kreiszyklinderschale

=====

Praktisch auftretende, rotationssymmetrische Belastungen sind konstanter sowie in Zylinderlaengsrichtung linear veraenderlicher Aussendruck bzw. Innendruck, der aber hier nicht weiter betrachtet wird.

Da infolge der grossen Dehnsteifigkeit der Schalen in Laengsrichtung die Verformungen in Laengsrichtung gering sind, und sich dies bei der Aenderung der Belastungsmagnitudo eines Punktes bei in Laengsrichtung veraenderlicher Belastung kaum bemerkbar macht, wird auf die Betrachtung dieses Falles verzichtet. Fuer Stabilitaetslasten unter linientreuer, verformungsunabhaengiger, linear veraenderlicher Belastung sei auf die Arbeiten von Weingarten [155] sowie Pflueger [108] verwiesen. Die Betrachtungen bezueglich der Verformungsabhaengigkeit dieser Belastung koennen analog von dem hier im weiteren verfolgten Lastfall konstanter Druckbelastungen uebernommen werden.

Die Gegenueberstellung wird auf die Faelle des linientreuen und des normalentreuen, konstanten Aussendruckes beschraenkt. Die jeweiligen Beulfaktoren werden mit dem rechten Fusszeiger L bzw. N gekennzeichnet.

Es werden nur Zylinder mit konstanter Wanddicke betrachtet. Fuer Zylinder mit abgestufter Wanddicke unter konstantem Aussendruck sei auf die Arbeiten von Ebner [42][43] und Greiner [53] sowie auf [119],[61],[62],[158] verwiesen.

### Geschichtliche Entwicklung

Schon 1884 hat Levy fuer das Beulen von Kreisringen unter normalentreuem Aussendruck die kritische Last zu  $p_{kr} = 3 EJ/l^3$  bestimmt. Bryan (1880) erweiterte die Theorie auf die Stabilitaetslast langer Zylinder, waehrend Lorenz (1911) sowie Southwell (1913-15) auch Zylinder mit kleineren Laengen/Durchmesser - Verhaeltnissen untersuchten, bei denen die Lagerung eine Versteifung des Zylinders und damit ein Anheben der Beullast zur Folge hat.

Zur selben Zeit entwickelte von Mises (1914) Berechnungsformeln fuer an beiden Enden gelenkig gelagerte Zylinder unter radialem sowie allseitigem, normalentreuem Druck, wobei insbesondere das Verhaeltnis Laenge/Radius (L/R) Beruecksichtigung fand. Windenburg und Trilling [160] stellten 1934 die zur damaligen Zeit gueltigen Formeln fuer aussendruckbelastete Zylinder einer Reihe von Versuchen gegenueber (allseitiger Druck), wobei die Formeln von Mises mit kleinen Berichtigungen die geringste Abweichung von den Versuchslasten zeigten. Die von Fluegge [48] 1932/1934 dargestellten, genaueren Formeln zeigten auch die Guete der einfachen Mises'schen Formeln. Die gegenueber der Fluegge'schen Theorie wesentlich einfacher zu handhabende Donnell'sche Theorie verwendete Batdorf 1947 [8], um mit Hilfe eines Parameters  $Z = \sqrt{1-\nu^2} \cdot L^2/Rt$  kritische Spannungen fuer Zylinder mit unterschiedlichen Abmessungen unter Manteldruck und allseitigem Druck darzustellen. Seine Resultate gelten allerdings nur fuer linientreue Lasten. Ausserdem sind die Einschraenkungen der Donnell'schen Theorie bei laengeren Zylindern mit kleinen Beulwellenzahlen zu beachten.

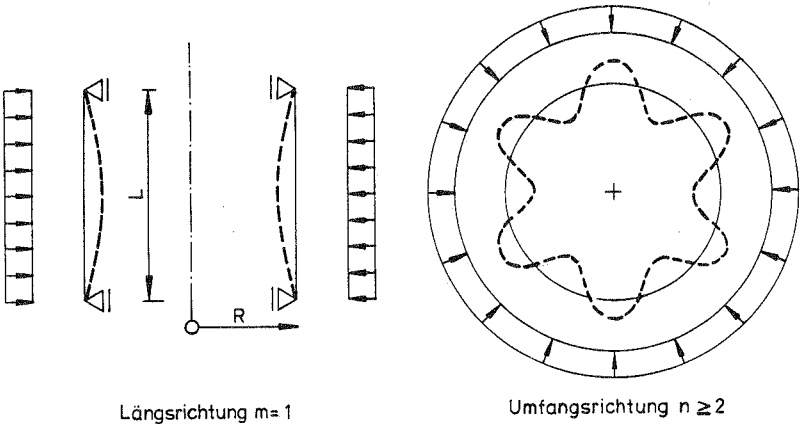
Einfluss der geometrischen Schalenparameter auf die Beul-  
lasten

Die Beulformen zeigen sich bei allen Untersuchungen fuer beidseits gelagerte Zylinder als einwellige Beule in Zylinderlaengsrichtung und als vielwelliges ganzzahliges Wellenmuster in Umfangsrichtung (siehe Bild 7.1).

Die haeufige Verwendung linientreuer Lasten auch fuer Fluessigkeitsbelastung bewegte Armenakas/Herrmann [6] zu einer Gegenueberstellung der kritischen Lasten fuer beide Formulierungen nach der exakten Biegetheorie [142].

Fuer lange, dicke Schalen ist der Unterschied gravierend, fuer den Grenzfall unendlich langer Zylinder ergeben sich die Werte des Kreisrings (s. Abschnitt 6.1.2), also eine Differenz um 33%. Fuer maessig lange Zylinder ist der Unterschied geringer (beispielsweise betraegt er fuer  $L/R = \pi^2$ ,  $R/t = 476$  noch 16%), waehrend bei kurzen Zylindern mit kleinem Batdorf-Parameter die Werte fuer beide Belastungsarten ineinander uebergehen.

Fuer drei verschiedene  $R/t$  Verhaeltnisse ist das Ergebnis in Bild 7.1 aufgezeichnet. Die Darstellung wurde von Brush/Almroth [24] uebernommen.



Beulmuster : Kreiszyylinder unter konstantem Aussendruck (klassische Lagerung)  $p_{kt}$

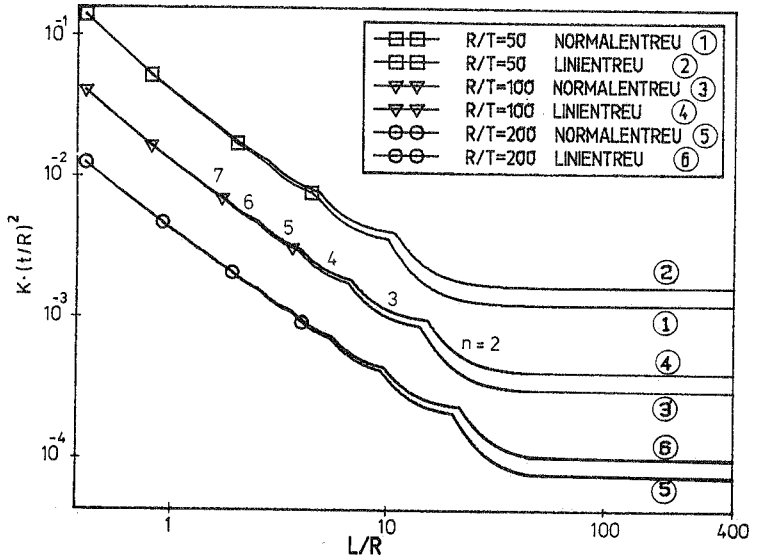


Bild 7.1 Gegeneüberstellung der kritischen Lasten bei linientreuem und normalentreuem Aussendruck nach [6], Beulform

Mit dem FE-Programm NISA wurden drei Schalen mit den klassischen Randbedingungen (Bild 7.2) untersucht, wobei das dritte Beispiel aus [22] entnommen wurde. Da die Beulwellenzahl aus analytischen Berechnungen bekannt war, wurde jeweils ein Zylinderausschnitt mit dem Öffnungswinkel einer Beulhalbwellen in Umfangsrichtung untersucht. Auch in Laengsrichtung wurde die Symmetrie beruecksichtigt.

Das Elementnetz bestand in Umfangsrichtung aus 12 gleichmaessig verteilten Elementen und in Laengsrichtung aus zwei Elementen gleicher Laenge. Zum Einsatz kam das 16-knotige bikubische Platten/Schalenelement.

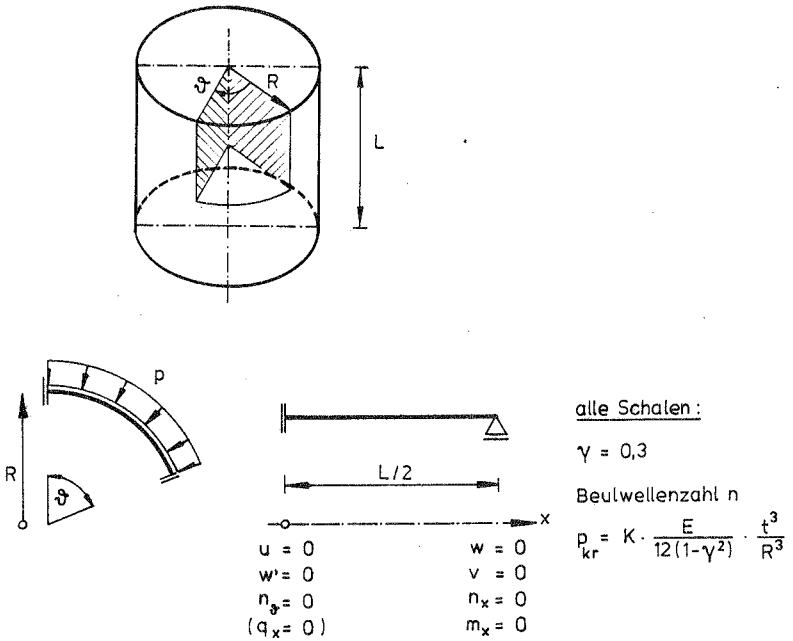


Bild 7.2 FE Idealisierung Kreiszyylinder

L/R	R/t	n	$\alpha$	$K_L$ linientreu	$K_N$ normalentreu	Berechnungsmeth.	Diff. %
60	100	2	90°	4,029 4,028	3,023 3,022	FE analytisch [6]	33
6	100	4	30°	18,75 18,76	17,61 17,62	FE analytisch [6]	6,5
2	2095	13	6,923	231,48 231,00	230,14 232,00	FE analytisch [108][6]	~0

Tafel 7.1 FE Berechnung von kritischen Lasten (Beulfaktor K) unter konstantem Aussendruck

In allen drei Faellen wurden lineare Anfangsstabilitaetsanalysen durchgefuehrt. Die FE Loesung zeigt in allen Faellen gute Uebereinstimmung mit den analytischen Loesungen (Tafel 7.1). Besonders bemerkenswert ist das Ergebnis fuer die lange Schale, das mit einem Seitenverhaeltnis der Elemente von 1/111 berechnet wurde. Dies ist allerdings nur deswegen sinnvoll, weil die Lastabtragung in Laengsrichtung vernachlaessigbar ist.

Bild 7.1 zeigt, dass der Unterschied in den kritischen Lasten ab einer Beulwellenzahl von  $n=5$  vernachlaessigbar klein wird. Die Frage des Einflusses der beiden Belastungsformen bei unterschiedlichen Randbedingungen braucht demzufolge nur an langen Zylindern eroertert zu werden.

Einfluss der Randbedingungen auf die Beullast

Die Untersuchungen von Sobel [148] sowie Thielemann/Esslinger [150] oder Schnell [141] zeigen mit Hilfe klassischer, linearer Beulberechnungen den grundsuetzlichen Einfluss der Randbedingungen. Fuer die in Tafel 7.2 definierten Randbedingungen sind in Bild 7.3 die Ergebnisse von Sobel dargestellt:

Nr.	Randbedingungen			
1	$u = 0$	$w = 0$	$v = 0$	$w_{,xx} = 0$
2	$n_x = 0$	$w = 0$	$v = 0$	$w_{,xx} = 0$
3	$u = 0$	$w = 0$	$n_y = 0$	$w_{,xx} = 0$
4	$u = 0$	$w = 0$	$v = 0$	$w_{,x} = 0$

Tafel 7.2 Variation der Randbedingungen

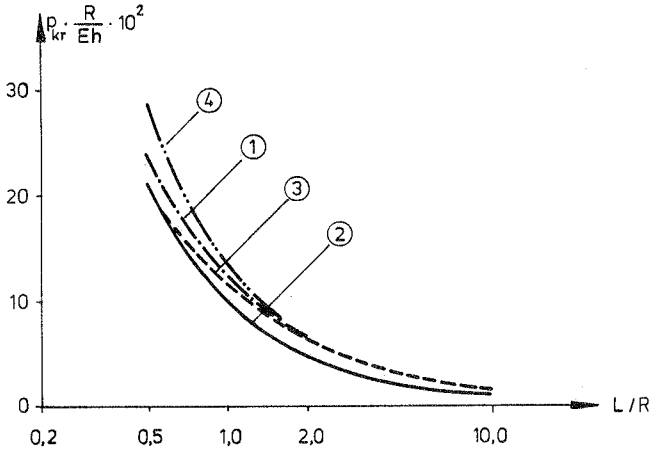


Bild 7.3 Einfluss der Randbedingungen auf Beullasten ausserdruckbelasteter Zylinder ( $R/t = 100$ ) nach [148] (normalentreue Belastung)

Bild 7.3 zeigt deutlich, dass fuer Zylinder mit einem  $L/R$ -Verhaeltnis  $>2$  nur noch die Woelbbehinderung einen nennenswerten Einfluss auf die Beullasten besitzt. Alle anderen Randbedingungen sind nur im Bereich kurzer Zylinder von Interesse. Dabei ist festzustellen, dass eine Einspannung der Raender bei kurzen Zylindern die gresste Anhebung der Beullast zur Folge hat und dass auch die tangentielle Lagerung den Beuldruck betraechtlich erhoegt.

Brush [25] gibt fuer die kurzen Zylinder den Hinweis, dass die Annahme eines Membranvorbeulzustandes in den klassischen Stabilitaetsuntersuchungen zu einem Fehler gegenueber einer Berechnung mit Beruecksichtigung der Randstoerung bis zu 17% fuehren kann (bei  $L/R \cong 0,3$ ).

Auch Yamaki [164] beruecksichtigt den Einfluss der Vorbeulrotationen und zeigt, dass sehr kurze Zylinder ( $Z < 10$ ) dann kein Stabilitaetsversagen mehr aufweisen, sondern in diesem Bereich das Versagen durch grosse Verformungen gegeben ist.

L/R	R/t	Rand- beding.	$K_L$ linientreu	$K_N$ normalentreu	Berechnungsmethode	Diff. %
60	100	①	4.12	3.09	FE	33
		②	4.03	3.02	FE	33
		Differenz $\frac{①-②}{②} \%$	2,3	2,3		
6	100	①	26.20	24.61	FE	6,4
		①	-	24.53	[148]	
		②	18,75	17.61	FE	6,5
		②	-	18.30	[148]	
		Differenz $\frac{①-②}{②} \%$	39,7	39,8		

$$\text{Diff.} = \frac{K_L - K_N}{K_N} \cdot 100$$

Tafel 7.3 Einfluss der Belastungsart bei verschiedenen Randbedingungen

Betrachtet man Bild 7.3 im Zusammenhang mit Bild 7.1, so wird klar, dass bei kurzen, in vielen Wellen beulenden Zylindern der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Last sehr gering ist und damit nur die Woelbbehinderung der Raender bei der Diskussion der beiden Belastungsarten zu beachten ist.

Fuer die in Tafel 7.1 dargestellten, laengeren Zylinder wurden daher die Beullasten unter den beiden Randbedingungen ① und ② nach Tafel 7.2 berechnet. Es zeigt sich, dass sich die Beullast sowohl bei linientreuer als auch normalentreuer Belastung infolge der Randbedingungen im selben Mass aendert. (Tafel 7.3)

#### Einfluss der Imperfektionen auf die Beullast

Die teilweise grosse Differenz zwischen rechnerischen Beullasten nach der linearen Beultheorie und Versagenslasten aus Versuchen fuehrten zur nichtlinearen Beultheorie und Untersuchungen des Nachbeulbereichs. Dabei er-



wiesen sich die geometrischen Imperfektionen als im wesentlichen verantwortlich fuer den Abfall.

Zwar zeigten erste Untersuchungen von Donnell [40], [41] sowie Kempner et al. [71] nur eine geringe Imperfektionsempfindlichkeit von Zylindern unter Aussendruck an. Eine Uebereinstimmung mit Versuchen wurde in [40], [71] erst nach Einbeziehung der Nichtlinearitaet des Materials erzielt. Nash [102] sowie Thielemann/Esslinger [151] ermittelten jedoch groessere Imperfektionsempfindlichkeiten. Insbesondere in [151] wird gezeigt, welchen Einfluss Imperfektionen mit unterschiedlicher Form in Umfangsrichtung besitzen. Imperfektionen derselben Form und Wellenzahl wie die Beulform, die sich bei der linearen Beultheorie ergibt, fuehren bei gleicher Amplitude wie andere Imperfektionsformen zur groessten Abminderung der Beullast. Daraus wird eine untere Grenze der Beullast von Zylindern unter Aussendruck abgeleitet, die durch das Minimum des zur ersten Beulform gehoerigen Astes der Nachbeulkurve des idealen Zylinders bestimmt ist. Wird die Beulform im Nachbeulbereich noch variiert, so ergeben sich rechnerisch fuer die zu diesen Beulformen gehoerigen Kurvenaeste weitere, haeufig tiefer liegende Minima. Das absolute Minimum kann sogar einen negativen Wert aufweisen [88]. Die Versuche in [151] zeigen aber, dass diese absoluten Minima nachfolgender Beulmuster ohne Bedeutung fuer realistische kritische Lasten sind. Weiterhin zeigte sich die besondere Empfindlichkeit kurzer, duennwandiger Zylinder gegenueber Imperfektionen. Das erste rechnerische Minimum der Nachbeulkurven - das Beulmuster entspricht dem Durchschlagsbeulmuster - liegt fuer Zylinder mittlerer Laenge bei 60% der idealen Beullast, fuer kurze und lange Zylinder aber darueber. Versuchswerte, die in diesem Bereich bei 50% der theoretischen Beullast lagen, unterstreichen dieses Ergebnis.

Auf Werte, die bei 70% der idealen Beullast liegen, fuehrt die "Hypothese der kleinsten Stoerverformung" von Pflueger [107], der ausgehend von einem Ansatz fuer die

Beulform mit drei Reihengliedern sekundäre Gleichgewichtsachse ermittelt. Als Beullast wird der Lastwert angenommen, der beim imperfekten System zur selben Verschiebung (Stoerverformung) führt, wie sie der sekundäre Gleichgewichtsast aufweist. Auf die Schwächen dieses Vorgehens wird in [21] hingewiesen.

Alle bisher erwähnten Untersuchungen im Nachbeulbereich gehen von den nichtlinearen Donnell'schen Gleichungen aus und berücksichtigen nur linientreue Belastungen. Dies liegt am Gültigkeitsbereich der Donnell'schen Theorie. Diese geht von folgenden Voraussetzungen aus: 1. Wellenlänge der Verschiebungsfigur klein gegenüber dem Krümmungsradius, d.h. sich in Umfangsrichtung rasch ändernde Verschiebungskomponenten. 2. Kleine tangentielle Verschiebungen gegenüber den radialen Verschiebungen. Damit ist der Einfluss der nichtlinearen Verschiebungsterme im Ausdruck der potentiellen Energie der aufgebrachten Lasten vernachlässigbar klein [24].

In [38] wird durch einen Vergleich der linearen Beultheorien nach Donnell und Flügge auf den relativen Fehler der nichtlinearen Beultheorie nach Donnell geschlossen. Der wesentliche Fehler zeigt sich dabei in der Vernachlässigung der Normalentreue der Belastung. Dies bestätigt sich beim Vergleich der Ergebnisse mit Werten, die mit modifizierten Donnell'schen Gleichungen für steile Schalen ermittelt wurden [24].

Auch die Untersuchung der Imperfektionsanfälligkeit von aussendruckbelasteten Zylindern mit Hilfe der Koiter'schen (Nach-)Beul-Theorie in [29] beruht auf den Donnell'schen Gleichungen und berücksichtigt nur linientreue Belastung. Dennoch kann aus den Ergebnissen auch auf die Imperfektionsanfälligkeit bei normalentremen Lasten geschlossen werden.

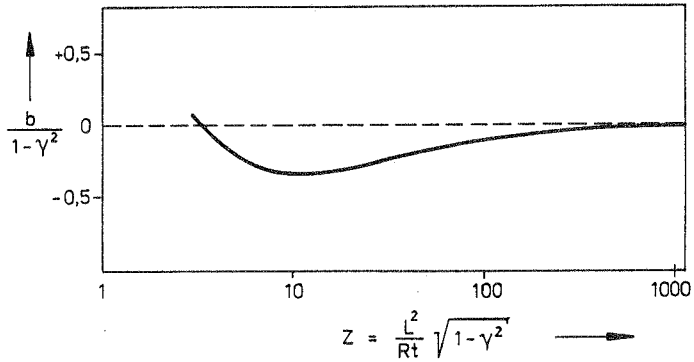


Bild 7.4 Imperfektionsempfindlichkeit von Zylindern unter linientreuer Belastung nach [29]

Fuer die Aenderung des Drucks im Anfangsnachbeulbereich gilt:

$$p / p_{kr} = 1 + b \cdot (\delta / t)^2 \quad (7.1)$$

mit der maximale Amplitude  $\delta$  der Beulform  
 $p_{kr}$  Beullast des perfekten Systems

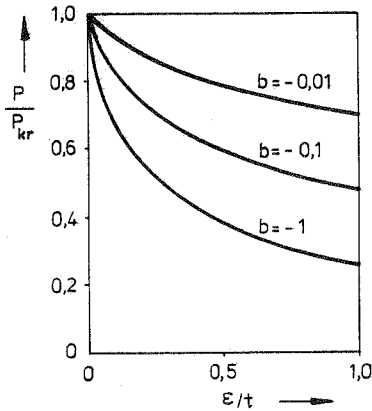


Bild 7.5 Abfall der Beullast  $p$  infolge von Imperfektionen nach [29]

In Bild 7.5 ist der Zusammenhang zwischen der Beullast des imperfekten Systems bezogen auf die des perfekten Systems ueber dem Imperfektionswert  $\epsilon/t$  aufgetragen mit der maximalen Amplitude  $\epsilon$  der beulförmaffinen Imperfektion.

Mit dem Vorzeichen und der Groesse des Parameters  $b$  ist die Imperfektionsempfindlichkeit bestimmbar. Negative Werte von  $b$ , d.h. Abfall der kritischen Last, ergeben ein imperfektionsanfaelliges Problem.

Das Tragverhalten laesst sich anhand Bild 7.4 folgendermassen beschreiben :

Fuer kleine  $Z$ -Werte besitzt die Schale im ueberkritischen Bereich steigende Tragfaehigkeit; sie ist nicht imperfektionsempfindlich. Bei mittleren  $Z$ -Werten faellt die Beullast auch fuer kleine Imperfektionen stark ab (siehe Bild 7.5); die Schale besitzt ein ausgepraegtes Durchschlagverhalten. Grosse  $Z$ -Werte kennzeichnen Schalen, deren Tragverhalten dem eines Kreisrings aehneln, d.h. dass deren Anfangsnachbeulkurve einen nahezu konstanten Verlauf aufweist. Diese Schalen sind kaum imperfektionsempfindlich. Zylinder, bei denen die Verformungsabhaengigkeit der Belastung von Bedeutung ist, gehoeren meist in den Bereich grosser  $Z$ -Werte. Bei dickwandigen Zylindern mit kleinem  $R/t$  Verhaeltnis, die im Bereich mittlerer  $Z$ -Werte liegen; sind die auftretenden Imperfektionen wegen der grossen Wanddicke  $t$  meist sehr gering, so dass auch hier keine echte Imperfektionsanfaelligkeit besteht.

Die Form der geometrischen Imperfektion wirkt sich nur auf die Groesse des Abfalls der kritischen Last aus. Dieser ist im Fall einer kerbfoermigen Einzelbeule linear, im Fall einer sinusfoermigen (modalen) Imperfektion mit dem Exponenten  $2/3$  und bei Zufallsimperfektionen mit dem Exponenten  $4/5$  von der Imperfektionsamplitude  $\epsilon$  abhaengig [2],[3]. Der Bereich  $Z$ , ueber den sich die Imperfektionsempfindlichkeit erstreckt, ist fuer alle Imperfektionsformen gleich.

Die Voraussagen von Budiansky/Amazigo [29] wurden auch durch Experimente [165] bestaetigt. Der dort festgestellte Unterschied in den kritischen Lasten zwischen Experiment und Rechnung von etwa 30% fuer lange Schalen ( $Z > 200$ ) entspricht gerade dem Einfluss der Normalentreue der hydrostatischen Belastung.

Zusammenfassung :

Aus den vorigen Betrachtungen kann gesagt werden, dass der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit auf die Beul-last von Zylindern umso groesser ist, je weniger Beulwellen und damit tiefere Beulverformungen zu erwarten sind. Die ueber Membrankraefte aufnehmbare Last sinkt mit abnehmender Beulwellenzahl, im Extremfall geht das Zylinderbeulen in das Kreisringbeulen ueber, bei dem nach dem Ueberschreiten der kritischen Last fast ausschliesslich Biegemomente die Lastabtragung uebernehmen.

Die niedrigsten Beulwellenzahlen besitzen lange Zylinder mit kleinem  $R/t$  Verhaeltnis, bei denen kaum Lastabtragung in Zylinderlaengsrichtung erfolgt.

Imperfektionen beeinflussen die Beullast nur bei kurzen und mittleren duennwandigen Zylindern, bei denen die Verformungsabhaengigkeit der Belastung bedeutungslos ist. Bezueglich des Einflusses der Randbedingungen kann diese Aussage etwas abgeschwaecht uebernommen werden.

7.1.2 Die Kragsschale

=====

Mit der Bezeichnung Kragsschale werden in der vorliegenden Arbeit Kreiszyinderschalen versehen, deren Raender an einem Ende gelagert und am anderen Ende frei sind. Als Belastung wird hier nur der Lastfall konstanter Aussen-druck betrachtet. Dieser Lastfall ist physikalisch zwar nicht realisierbar, aber im Zusammenhang mit der Zerle-

gung der Windbelastung in einzelne Fourierterme von qualitativer Bedeutung (siehe dazu auch Abschnitt 7.2.2).

Ziel dieses Abschnitts ist, neben dem Einfluss der Normalentreue einer Belastung auf die Stabilitaetslast auch die Guete der bezueglich der Randterme zwangssymmetrisierten Steifigkeitsmatrizen zu untersuchen.

Da die Tragwirkung in Laengsrichtung nur zu einem Rand hin erfolgt, sind bei kuerzeren Zylindern kleinere Beulwellenzahlen und groessere Empfindlichkeit gegenueber der Verformungsabhaengigkeit der Belastung zu erwarten als bei entsprechenden, beidseits gestuetzten Kreiszyklindern.

Es wurden Anfangsstabilitaetsanalysen fuer drei Krag-schalen unterschiedlicher Geometrie vorgenommen und zwar:

- ①  $L/R = 6$ ;  $R/t = 100$ ;    ②  $L/R = 3$ ;  $R/t = 100$ ;    und  
 ③  $L/R = 3$ ;  $R/t = 500$ .

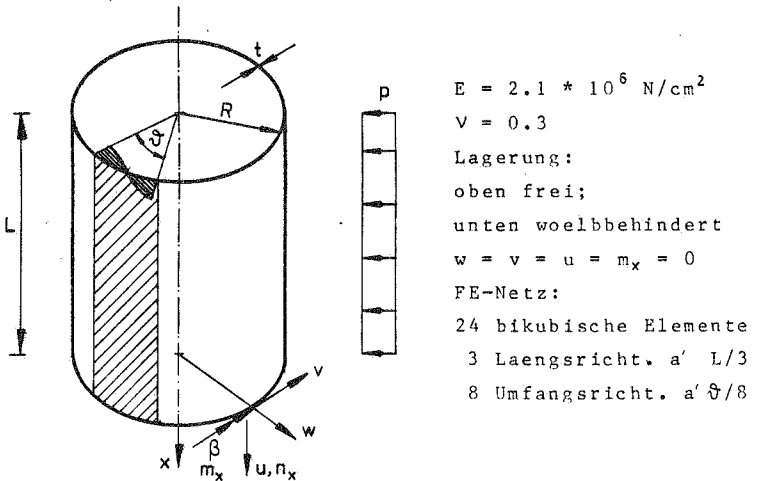


Bild 7.6 Geometrie und finite Element-Idealisierung

Da sich in Umfangsrichtung ein gleichmaessiges Beulmuster einstellt, genuegt zur Berechnung ein Zylinderausschnitt mit dem Oeffnungswinkel  $\vartheta$  entsprechend einer halben Beulwellenlaenge. In Laengsrichtung wurde der gesamte Zylinder diskretisiert.

Der Rand wurde gelenkig gelagert; dabei wurde teilweise und volle Woelbbehinderung angenommen. Fuer die teilweise Woelbbehinderung wurde ein Randpunkt des Zylinderausschnitts in Zylinderlaengsrichtung festgehalten.

Sowohl fuer die lange Schale  $L/R = 6$ ;  $R/t = 100$  als auch eine kuerzere Schale  $L/R = 3$ ;  $R/t = 500$  wurden Netzverfeinerungen untersucht. Eine Erhoehung der Elementanzahl sowohl in Laengs- als auch in Umfangsrichtung ueber 3 bzw. 8 Elemente hinaus, erbrachte eine Veraenderung der kritischen Last um weniger als 1%. Fuer die hier vorgenommenen Studien wurde daher das Netz mit 24 Elementen als ausreichend betrachtet.

Wegen der unbekanntenen Wellenzahl in Umfangsrichtung war es erforderlich, in allen drei Faellen Netze mit unterschiedlichem Oeffnungswinkel zu untersuchen. Fuer die teilweise Woelbbehinderung wurden die Oeffnungswinkel des Falls mit voller Woelbbehinderung beibehalten.

Fuer die drei Kragsschalen ergaben sich bei folgenden Oeffnungswinkeln die niedrigsten Beullasten :

1	$L/R = 6$	$R/t = 100$	$\vartheta = 60^\circ$	$\rightarrow n = 3$
2	$L/R = 3$	$R/t = 100$	$\vartheta = 45^\circ$	$\rightarrow n = 4$
3	$L/R = 3$	$R/t = 500$	$\vartheta = 30^\circ$	$\rightarrow n = 6$

Die Beulwellenzahlen fuer die Faelle ① und ② entsprechen den in [154] fuer eingespannte Kragsschalen angegebenen Werten. Fuer den Fall ③ liegt kein Vergleichsergebnis vor.

Die in Tafel 7.4 aufgezeichneten Ergebnisse zeigen deutlich den Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung bei den hier berechneten Kragsschalen mittlerer

Laenge, der mehr als doppelt so gross ist wie bei beidseits gestuetzten Schalen gleicher Laenge.

Der Vergleich mit vorliegenden Ergebnissen von Wang/Billington [154] fuer eingespannte Kragsschalen, die mit Hilfe einer Theorie in Umfangsrichtung dehnungsloser Verformungen ermittelt wurden, zeigt gute Uebereinstimmung. Wird der Einfluss der Einspannung auf die Beullast in den Vergleich einbezogen, so wird der noch bestehende Unterschied weiter verringert.

Die in [47] berechneten Beulfaktoren fuer eine Schale der Laenge  $L/R = 2\pi$  ( $R/t = 100$ ) mit  $K_N = 9.598$  und  $K_L = 10.80$  liegen wegen der etwas groesseren Laenge ein wenig niedriger als die in Tafel 7.4 eingetragenen Werte, zeigen aber denselben Abfall um 12,5% zwischen den beiden Belastungsarten.

Erwaehenswert ist, dass der in der DAST-Richtlinie 013 [35] fuer diesen Lagerungsfall vorgesehene Abminderungsfaktor  $C = 0.6$  gute Naehierungswerte fuer alle drei Kragsschalen liefert.

Liegt eine Lagerung vor, die die Schale in der Verwoelbung nicht mehr vollstaendig behindert, so faellt die Beullast beträchtlich ab. Fuer die voellig woelbfrei gelagerte Schale ergibt sich wegen der entfallenden Membrantragwirkung in Laengsrichtung die Beullast des Kreisrings als kritische Last [54].

An den Ergebnissen in Tafel 7.4 fuer beide Lagerungsarten wird wieder deutlich, dass der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung nur mit der Zahl der Beulwellen gekoppelt ist.

Der Vergleich der Stabilitaetsanalysen mit verschiedenen zwangssymmetrisierten Laststeifigkeitsmatrizen zeigt den geringen Einfluss der Randglieder auf die Beullast bei allen drei Schalen. Dies laesst die Aussage zu, dass fuer kuerzere bzw. duennere Schalen mit steigender Beulwellenzahl der Einfluss des Randterms mit dem schwindenden Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung weiter abnimmt. Bei laengeren Schalen wird die



L/R		R/t	Kragsschale, gelenkig gelagert						Beidseits gestützte KZS (Klassische Randbedingungen)			
n	Lagerung	K <sub>L</sub>	K <sub>N</sub> symmetrisiert nach	$\frac{K_L - K_N}{K_N} \%$	eingespannt		n	K <sub>L</sub>	K <sub>N</sub>	$\frac{K_L - K_N}{K_N} \%$		
					[154] K <sub>N</sub>	[35] K <sub>L</sub>						
6	100	teilweise wölbbehindert (F)	9,11	8,10 (4,11)	12,5		4	18,76	17,62	6,5		
				8,09 (4,13)	12,6							
				8,12 (4,12)	12,2							
		(w) voll wölbbehindert	10,89	9,70 (4,11)	12,3		5	35,25	34,28	2,8		
				$\frac{K_w - K_F}{K_w} \%$								
			16,4	16,5								
3	100	teilweise wölbbehindert (F)	16,43	15,42 (4,11)	6,5		7(8)	78,55	77,48	1,4		
				15,38 (4,13)	6,8							
				15,46 (4,12)	6,3							
		(w) voll wölbbehindert	20,85	19,58 (4,11)	6,5		7(8)	78,55	77,48	1,4		
				$\frac{K_w - K_F}{K_w} \%$								
			21,2	21,3		19,97 21,01						
3	500	(w) voll wölbbehindert	36,48	35,48 (4,11)	2,8		7(8)	78,55	77,48	1,4		
				35,46 (4,13)	2,9							
				35,50 (4,12)	2,8							
		(w) voll wölbbehindert	45,83	—	—		7(8)	78,55	77,48	1,4		
				$\frac{K_w - K_F}{K_w} \%$								
			20,4	—	—	46,98						

Tafel 7.4 Einfluss der Verformungsabhängigkeit der Belastung auf den Beulfaktor K bei Kragsschalen

Beullast von der Belastung im "Feld" bestimmt, die gegenüber dem Randgebiet dominiert. Die Güte der zwangssymmetrisierten Matrizen wurde zudem noch mit einer (nicht-linearen) Berechnung der Last-Verschiebungskurve einer imperfekten Kragsschale überprüft. Hierzu wurde der teilweise wölbbehinderten Kragsschale mit  $L/R=6$ ,  $R/t=100$  die erste Eigenform mit der maximalen Amplitude  $\eta = 0.01t$  als geometrische Imperfektion angenommen. Für den zur Schale gehörenden Batdorfparameter  $Z = 8100 \sqrt{1-\nu^2}$  und die Imperfektionsamplitude  $\eta = 0.01t$  ist die Imperfektionsempfindlichkeit nach Bild 7.4 und 7.5 sehr gering. (Bei der Berechnung des Parameters  $Z$  wurde die 1.5-fache Länge der Kragsschale eingesetzt.)

Die Lastverschiebungskurve (Bild 7.7) für den Punkt mit der maximalen radialen Verschiebung  $w_{10}$  nähert sich asymptotisch dem Beulwert der perfekten Kragsschale. Ein Durchschlagverhalten mit abfallendem Ast ist nicht zu erkennen. Die Schale zeigt ein stabähnliches Verhalten, darauf weist auch der Verlauf des Sp-Parameters hin, für den sich bei  $K = 8.10$  ein Minimum ergibt, und der danach wieder grösser wird. Die Determinante der zwangssymmetrisierten Steifigkeitsmatrix hatte schon bei  $K = 8.065$  ein Minimum im positiven Bereich erreicht und zeigte die anschliessende Versteifung des Systems etwas früher an.

Die Eignung der zwangssymmetrisierten Matrizen für Stabilitätsuntersuchungen wurde auch in diesem Fall bestätigt. Die Differenz der quasi kritischen Last mit  $K_{kr} = 8.100$  und der Beullast der perfekten Schale mit  $K_{kr} = 8.1047$  ist denkbar gering.

Abschliessend kann gesagt werden, dass sich die Aussagen für den beidseits gelagerten Zylinder auf die Kragsschale erweitern lassen. Da wegen der einseitigen Lagerung die Membrantragfähigkeit gegenüber der beidseits gelagerten Schale reduziert ist, liegen die Beulwellenzahlen bei gleichem  $L/R$  Verhältnis niedriger als bei beidseits gelagerten Schalen. Entsprechend der Abminderung der Beulwellenzahlen steigt der Einfluss der Verformungsabhängigkeit der Belastung an.

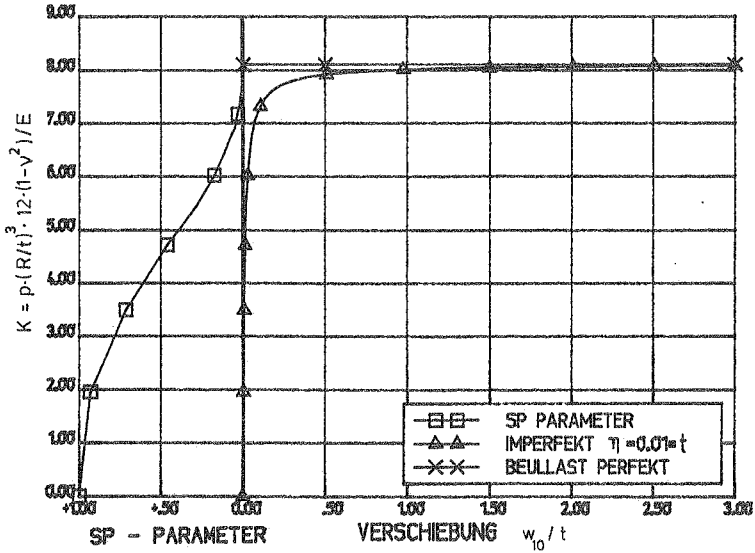


Bild 7.7 Imperfekte Kragsschale ( $\eta = 0.01t$ ); Verlauf des Sp-Parameters und Last-Verschiebungskurve

Stabilitätsuntersuchungen mit zwangssymmetrisierten Steifigkeitsmatrizen zeigen, dass der Einfluss der nicht-konservativen Randglieder auf die Stabilitätslast fuer kurze, mittellange und lange Zylinder gleichermassen gering ist.

## 7.2. Nichtrotationssymmetrische Belastung

### 7.2.1. Allgemeine Belastungen

In den vorigen Abschnitten wurde gezeigt, dass der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit von der Groesse der Verformung (Beulverformung) abhaengt. Bei nichtrotations-symmetrischer Belastung sind die Vorbeulverformungen

groesser als bei rotationssymmetrischer Belastung, da ein Teil der Last in Umfangsrichtung ueber Biegemomente abgetragen wird. Zerlegt man eine allgemeine Belastung in eine Fourierreihe in Umfangsrichtung, so laesst sich aus Tafeln von Dischinger [39], die in [92] weiter aufbereitet wurden, entnehmen, dass der Anteil der Biegetragwirkung an der Lastabtragung in Umfangsrichtung mit den hoeheren Reihengliedern waechst.

Die Groesstwerte der Belastung sind jedoch im allgemeinen den niederen Reihengliedern zugeordnet; bei denen eine wesentliche Biegetragwirkung nur bei langen (dicken) Schalen zu bemerken ist. Damit ist ein Einfluss der Belastungsart auf die Stabilitaetslast wie bei rotationssymmetrischer Belastung auch nur bei laengeren Zylindern zu erwarten.

In der vorliegenden Arbeit wurden aus der Fuelle der Moeglichkeiten zwei der meist auftretenden Belastungen untersucht: Wasser- und Windbelastung. Letztere wird gesondert in den folgenden Abschnitten (7.2.2ff) behandelt.

Bei den ueblichen Stabilitaetsuntersuchungen wasserbelasteter Schalen (horizontal liegende Zylinder) wird konstante Druckverteilung in Umfangsrichtung angenommen (siehe auch [19], [89]). Auch in [99] werden die Formeln fuer rotationssymmetrischen Aussendruck bei einem Ersatzmodell fuer nichtrotationssymmetrische Wasserlasten herangezogen.

Eine der wenigen Arbeiten, die sich mit der Stabilitaet von Kreiszylinderschalen unter wirklich nichtrotationssymmetrischer Last befassen, stammt von Almroth [1]. Fuer eine Belastung

$$p = p_0 + p_1 \cdot \cos \vartheta \quad (7.2)$$

die ueber die Laenge konstant, aber auch abschnittsweise konstant auftreten kann, wurden Beullasten fuer einen beidseits gelenkig und woelfrei gelagerten Zylinder ermittelt. Wie bereits in Abschnitt 3.3.2 erwaeht, beruht die Loesung auf einem genaeherten Potential kleiner Verschiebungen.

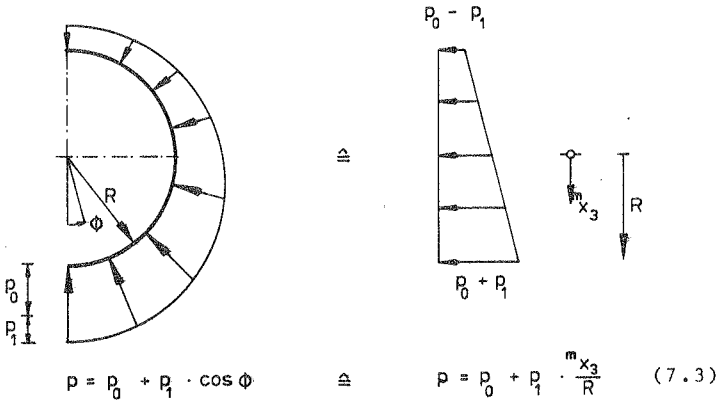


Bild 7.8 Wasserbelastung nach Almroth [1]

Bild 7.8, Gleichung (7.3) stellt eine Wasserbelastung dar ( $p_1 = \gamma_w \cdot R$ ). Fuer  $p_0 = p_1$  reicht der Wasserspiegel gerade bis zum Rand des Zylinders, fuer  $p_0 > p_1$  entspricht die Differenz  $(p_0 - p_1) / \gamma_w$  der Wasserueberdeckung.

Almroth berechnet Beullasten fuer  $p_0 = 0$  und  $p_0 = p_1$ , wobei ersteres einer vergroeberten Windbelastung, repraesentiert durch das erste Reihenglied, entspricht.

Wird der maximale Staudruck als Bezugsgrösse verwendet, so gilt fuer dessen kritischen Wert :

$$p_{kr} = (1 + \beta) p_{kr0} \quad (7.4)$$

mit  $p_{kr0}$  : Beullast des rotationssymmetrisch belasteten Zylinders. Fuer  $p_0 = p_1$  ist  $\beta$  erheblich kleiner als fuer  $p_0 = 0$ . Fuer steigendes  $R/t$  Verhaeltnis sinkt  $\beta$  ab, der Beuldruck naehert sich dem kritischen Druck bei rotationssymmetrischer Belastung (Bild 7.9) mit dem maximalen Staudruck.

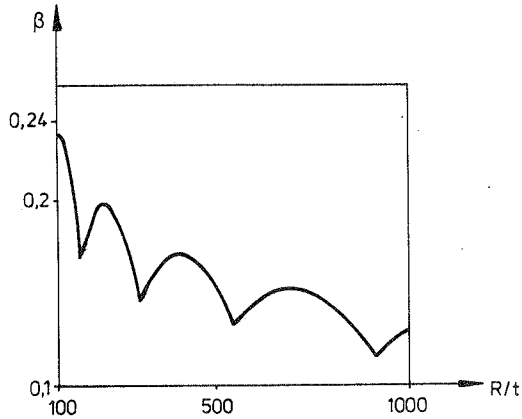


Bild 7.9 Beuldruckparameter  $\beta$  bei Wasserlast nach [1]  
 $L/R = \pi$ ;  $p = p_0 (1 + \cos \vartheta)$

Fuer lange Zylinder waechst der Wert von  $\beta$  weiter an. Die gesamte Last wird ueber Membrantragwirkung abgetragen.

Um den Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung bei Wasserbelastung festzustellen, wurden F.E. Berechnungen an drei unterschiedlich langen Zylindern bei gleichem  $R/t (= 100)$  Verhaeltnis vorgenommen. (Tafel 7.5)

Da die Berechnungen von Almroth sowie Sheinman/Tene [147] fuer normalentreue, koerperfeste Belastungen gelten, wurde auch der Einfluss einer raumfesten ("echten") Wasserlast untersucht. Als Wasserbelastung wurde eine Funktion  $p_w = \gamma_w (1 + x/R)$  (siehe Bild 7.8) gewaehlt. Dies entspricht der Belastung, bei welcher der Wasserstand den oberen Punkt des Zylinders erreicht.

Die an beiden Enden klassisch gelagerten Zylinder koennen fuer die F.E. Berechnung aus Symmetriegrunden durch ein Zylinderviertel dargestellt werden.

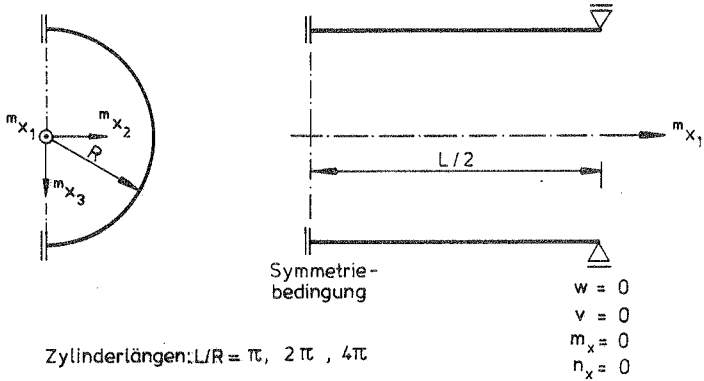


Bild 7.10 Idealisierung des Kreiszylinders fuer Wasserbelastung

Fuer die Zylinder der Laenge  $L/R = 2\pi, 4\pi$  wurde ein Netz mit 18 gleich grossen Elementen gewaehlt, zwei Elemente in Laengs-, 9 in Umfangsrichtung. Fuer den Zylinder der Laenge  $L/R = \pi$  musste eine Netzverfeinerung mit 28 Elementen vorgenommen werden: zwei gleich grosse Elemente in Laengsrichtung sowie 14 Elemente in Umfangsrichtung. ( $4 \times 5^\circ; 6 \times 10^\circ; 2 \times 20^\circ; 2 \times 30^\circ$  Oeffnungswinkel). Die Netzverdichtung erfolgte im Bereich des maximalen Staudrucks.

Die Ergebnisse einer Anfangsstabilitaetsanalyse sind in Tafel 7.5 dargestellt.

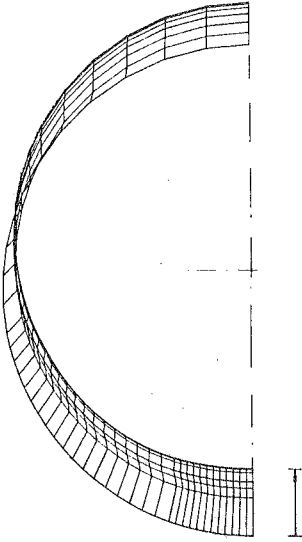
Es sei bemerkt, dass die Beullast in allen Faellen durch die Vergroesserung der Belastung  $p_w = \lambda \cdot \gamma_w \cdot (1 + x/R)$  mit dem Faktor  $\lambda$  bestimmt wurde. Dies entspricht einer Erhoehung der Dichte  $\gamma_w$  des Wassers. Von einer ausschliesslichen Erhoehung des konstanten Druckanteils -Vergroesserung der Hoehe der Wassersaeule- wurde abgesehen.

L/R	Lastart	Beulwellenzahl		$p_{kr} \cdot 10^6 \cdot \frac{R}{Et}$	Berechnungsmeth.	Vergleich p = konst.
		n	$n_{p = konst}$			
4π	Linientreu	≈ 2,5	3	122,78	FE	90,3
	Körperfest			107,32	FE	80,3
	Körperfest			105	[1]	-
Differenz %				12,6		11
2π	Linientreu	≈ 3	4	221,94	FE	167,9
	Körperfest			207,41	FE	157,7
	Körperfest			205	[1]	-
Differenz %				6,55		6,1
π	Linientreu	≈ 4	5	384,03	FE	311,9
	Körperfest			372,14	FE	300,1
	Körperfest			370,6	[1] [146]	-
	Raumfest			378,6	FE	-
Differenz %		$\frac{(L.treu - K.fest)}{L.treu}$		3,1		3,8
		$\frac{(L.treu - Raumfest)}{L.treu}$		1,4		-

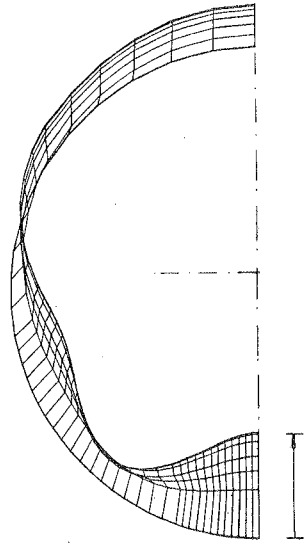
Tafel 7.5 Beullasten fuer Kreiszyylinder unter Wasserlast  
(R/t = 100)

Der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung kommt bei Wasserlast trotz fallender Beulwellenzahl nur geringfuegig staerker zur Geltung als bei konstantem Aussendruck, obgleich eine ausgepraegte tiefere Beule im maximalen Druckbereich auftritt. Der Vergleich der Beullasten mit Almroth sowie [147] zeigt gute Uebereinstimmung, ebenso der Vergleich der Beulfiguren mit [147]. (Bild 7.11/12)

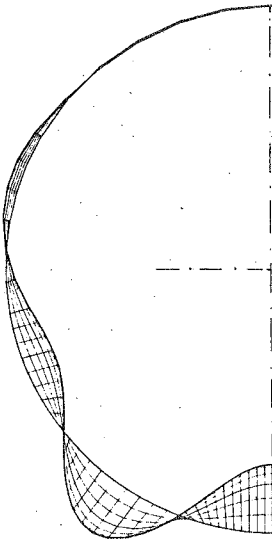




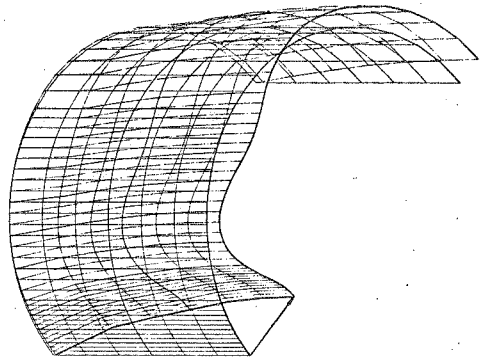
Verschiebungsfigur vor dem Durchschlagen



Verschiebungsfigur am Durchschlagepunkt



Baulfigur: Lineare  
Anfangsbeulanalyse



Verschiebungsfigur am  
Durchschlagepunkt

Die Frage der Symmetrisierung der Laststeifigkeitsmatrizen bei koerperfester, normalentreuer Belastung wurde bereits in Abschnitt 4 diskutiert, die Werte in Tafel 7.5 wurden jeweils mit den ausschliesslich symmetrischen Termen (Gl. 4.12) ermittelt.

Die raumfeste Belastung fuehrt erwartungsgemaess zu grosseren Beullasten, da die Schale infolge der Verschiebung in geringere Wassertiefe kleinere maximale Druckwerte erhaelt. Damit kann gesagt werden, dass bei ausschliesslicher Beruecksichtigung der Normalentreue einer Belastung (koerperfeste Belastung) dies fuer liegende Zylinder, die allseits von Wasser umgeben sind, zu einer auf der sicheren Seite liegenden Stabilitaetslast fuehrt. Dies gilt nicht fuer Strukturen, die infolge Wasserlast eine Verschiebung in grossere Wassertiefen erfahren (Kugelschalen, die am Meeresgrund festsitzen).

Zur Ueberpruefung der Stabilitaetsanalysen mit zwangssymmetrisierten Matrizen im Fall der koerperfesten Belastung wurden nichtlineare Berechnungen fuer den Zylinder mit  $L/R = \pi$  vorgenommen. Erwartungsgemaess zeigt der perfekte Zylinder ein lineares Verhalten; infolge numerischer Ungenauigkeiten oder infolge der "unvollstaendigen" Tangentensteifigkeitsmatrix wird der primaere Gleichgewichtsast des Verzweigungspunktes verlassen und ein sekundaerer Gleichgewichtsast in der Umgebung der Verzweigungslast angenaehert. Die Aufzeichnung des Sp-Parameters ueber einem Lastparameter zeigt dies deutlich. (Bild 7.13) Der Verlauf entspricht fast voellig dem idealen, perfekten System, indem sich zwei Geraden -eine horizontale und eine vertikale- ergeben. Bild 7.13 zeigt auch die Moeglichkeiten der Extrapolation der kritischen Last mit Hilfe des Sp-Parameters durch Verlaengerung der vertikalen Geraden und Bestimmung des Schnittpunktes mit der horizontalen Achse.

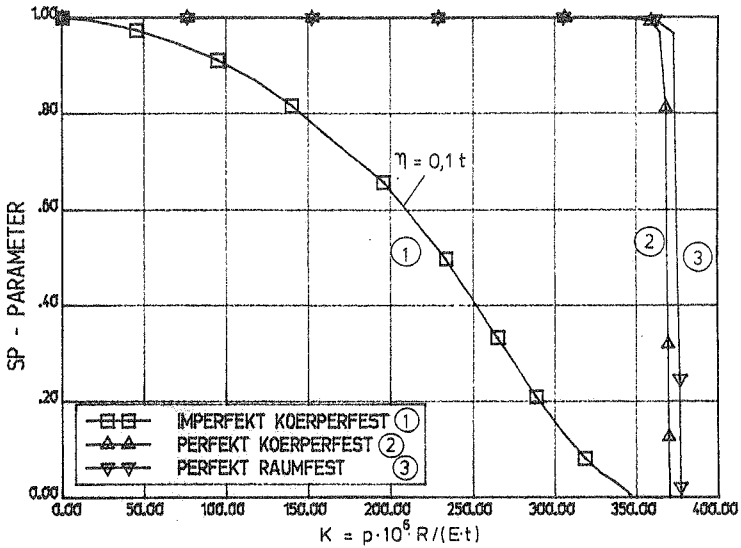


Bild 7.13 Verlauf des Current-Stiffness (Sp)Parameters fuer Zylinder unter der Belastung  
 $p = \lambda \cdot \gamma \cdot (1 + \cos \vartheta)$ ;  $L/R = \pi$ ,  $R/t = 100$

Fuer den vorliegenden Fall wurden auch nichtlineare Berechnungen ueber den Durchschlagpunkt hinweg durchgefuehrt. Die Lastverschiebungskurve verlauft sehr flach. In der Naehة des Durchschlagpunktes wurden Eigenwertanalysen mit der zwangssymmetrisierten Steifigkeitsmatrix nach Gl.(4.3) vorgenommen. Die Ergebnisse sind in Tafel 7.6 dargestellt. Fuer koerperfeste Belastung ergibt die Beuluntersuchung mit zwangssymmetrisierten Matrizen sehr gute Uebereinstimmung mit der nichtlinearen Rechnung. Der Vergleich mit den Ergebnissen in Tafel 7.5 zeigt auch den geringen Einfluss der Nichtlinearitaet des Problems auf die kritische Last.

Die Berechnung fuer einen imperfekten Zylinder mit beulform-affinen Imperfektionen des perfekten Zylinders

Belastung	nichtlineare Berechnung	Eigenwert-analyse	
körperfest	370,21	370,36	$p_{kr} \cdot 10^6 \cdot \frac{R}{Et}$
raumfest	370,82	—	$p_{kr} \cdot 10^6 \cdot \frac{R}{Et}$

Tafel 7.6 Kritische Lasten fuer Zylinder unter  $p = \lambda \cdot \gamma_w \cdot (1 + \cos \vartheta)$ ;  $L/R = \pi$ ,  $R/t = 100$ ; Vergleich mit der Eigenwertanalyse in der Naehة des Durchschlagpunktes (symmetrisierte Matrizen)

ergibt hingegen einen stark nichtlinearen Verlauf der Last-Verschiebungskurve, was sich auch im Verlauf des Sp-Parameters -als Gesamtverschiebungsmass betrachtet- wieder spiegelt (Bild 7.13). Der Einfluss der mittelgrossen Imperfektion mit maximaler Imperfektionsamplitude  $\eta = 0.1t$  auf die kritische Last betraegt immerhin 6,5%. (Tafel 7.7) Die Schwierigkeiten der Extrapolation der kritischen Last mit Hilfe des Sp-Parameters werden in Bild 7.13 am Verlauf fuer den imperfekten Zylinder deutlich, wo die Extrapolation erst in der Naehة des Durchschlagpunktes eine verlaessliche Aussage liefert.

	$p_{kr} \cdot 10^6 \cdot \frac{R}{Et}$
Anfangsstabilitäts-analyse	372,2
nichtlineare Berechnung	346,2
Eigenwertanalyse Naehة Durchschlagpunkt	346,1

Tafel 7.7 Kritische Lasten des imperfekten Zylinders unter  $p = \lambda \cdot \gamma_w \cdot (1 + \cos \vartheta)$ ;  $L/R = \pi$ ;  $R/t = 100$ ;  $\eta = 0.1t$

Die Eigenwertanalyse am Durchschlagpunkt mit Hilfe der zwangssymmetrisierten Matrix nach Gl.(4.3) zeigt, dass der Einfluss der schiefsymmetrischen Terme der Laststeifigkeitsmatrix auf die statische Stabilitaetslast auch im vorliegenden Fall ohne Bedeutung ist.

#### 7.2.2 Windbelastung

=====

Windbelastungen haben bei einigen Schalentragwerken in juengerer Zeit zu Schadensfaellen gefuehrt. Nicht jeder Schadensfall schalenartiger Bauwerke mit Windeinwirkung ist auf ein Stabilitaetsversagen zurueckzufuehren. Zum Beispiel war der Einsturz der Kuehltuerme in Ferrybridge eine Folge grosser Zugspannungen infolge Wind im Sogbereich. Auch der Einsturz von Kaminen erfolgte meist infolge von Rohrquerschwingungen im Luftstrom. Dennoch haben sich bei der Herstellung grosser, duennwandiger Behaelter und Tankbauwerke einige Schadensfaelle infolge Stabilitaetsversagen ereignet [170]. Insbesondere im Montagetagezustand mit oben offenen, gegen Abheben des unteren Randes nur unvollstaendig gesicherten Zylindern, die haeufig noch keine Ringversteifung des oberen Randes besaessen, traten Ungluecksfaelle auf.

##### 7.2.2.1 Erfassung der Windbelastung

=====

Wind stellt die Bewegung von Luftmassen im Raum dar. Die Umstroemung feststehender Koerper erzeugt an diesen Druck- und Sogkraefte, die im Falle bekannter Stroemungsvorgaenge aus den Stroemungsgleichungen bestimmbar sind. Bei den im hohen Masse instationaeren Windbelastungen (Boeigkeit) koennen ausserdem noch Wirbelablosungen auftreten ( z.B. Karmansche Wirbel ), die den umstroemten

Koerper zu Schwingungen anregen koennen. Zudem treten noch Reibungskraefte (Luftreibung) auf, die aber im weiteren nicht mehr betrachtet werden. Eine wesentliche Eigenschaft des Luftdrucks ist die Verformungsabhaengigkeit der erzeugten Belastung, die zuerst darin besteht, dass der Druck oder Sog immer senkrecht zur Flaechе des beanspruchten Koerpers wirkt (normalentreu). Eine zweite -weniger bedeutsame - Art der Verformungsabhaengigkeit besteht in der Veraenderung der Druckverteilung infolge der Verformung der belasteten Struktur.

Statische Berechnungen betrachten die Windbelastung entweder als linien-(richtungs-)treue oder als normalentreu (mitgehende) Belastung. Die Verteilung der Windbelastung resultiert - wie bereits in Abschnitt 3.3.1 erwaeht - aus der Umstroemung des Koerpers, also aus der kinetischen Natur des Windes. Dies wird insbesondere bei freien Raendern deutlich. Zur Erhaltung der Druckverteilung ist staendig Energiezufuhr erforderlich. Damit fuehrt die Beruecksichtigung der Verformungsabhaengigkeit der Belastung auf nichtkonservative Stabilitaetsprobleme, bei denen infolge der Nichtkonservativitaet trotz statischer Betrachtung ein kinetisches Versagen (Flattern) auftreten kann. Es sei aber darauf hingewiesen, dass im Fall eines kinetischen Versagens statische Betrachtungen unzuellaenglich sind, da dann die dynamischen Eigenschaften der Windbelastung - Boeigkeit, Wirbel - nicht ausser acht gelassen werden duerfen.

In der vorliegenden Arbeit werden nur statische Windbelastungen betrachtet. Die Veraenderung der Druckverteilung infolge der Verformung der Struktur wird infolge mangelnder Messergebnisse nur exemplarisch behandelt.

Winddruckverteilungen fuer stehende Zylinder liegen in Vorschriften z.B. DIN 1055, OENORM B4014 sowie als Messergebnisse vor [36],[45],[56],[93],[113],[171]. In Zylinderlaengsrichtung ist der Winddruck fast voellig konstant, nur in sehr kurzen Bereichen in Erdnaehe und auch am oberen Rand nehmen die Druckwerte ab. Die Annahme

einer konstanten Winddruckverteilung ueber die gesamte Zylinderlaenge ist daher fuer Berechnungen gerechtfertigt. In Umfangsrichtung ergeben sich fuer Kreiszyylinder Verteilungen, wie in Bild 7.14 angefuehrt.

Dabei zeigt sich, dass bei offenen Zylindern ein Unterdruck auf die Lastverteilung infolge Wind aufaddiert werden muss, und deshalb die Nullachse um etwa 50% des maximalen Staudrucks verschoben wird. Beim Vergleich der Messergebnisse mit den Normen faellt auf, dass der Staudruckbereich der Normen bei geschlossenen Zylindern (Ne-

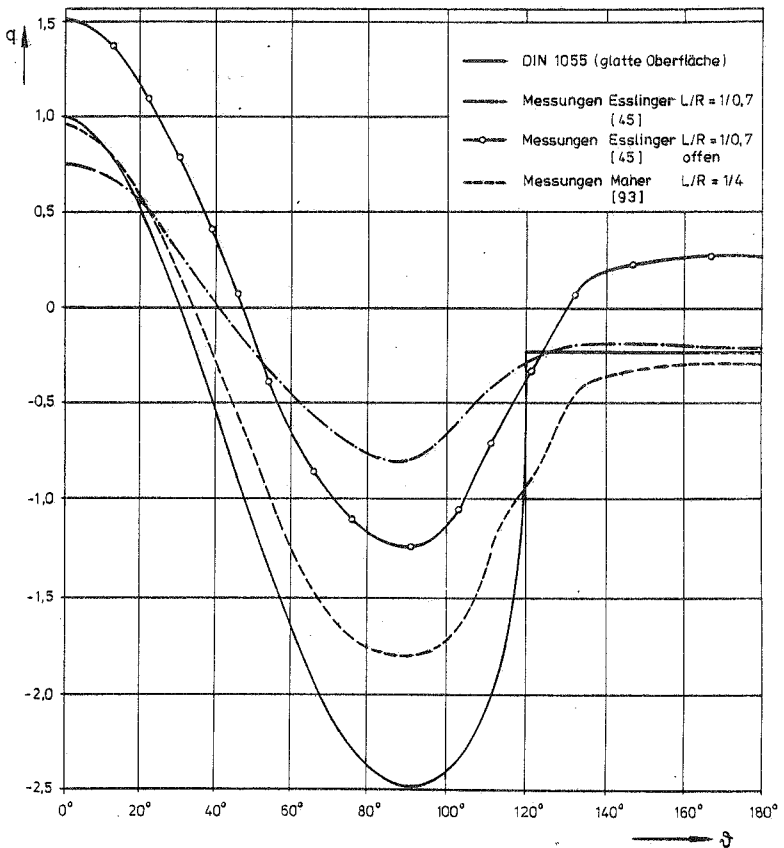


Bild 7.14 Winddruckverteilung an zylindrischen Behaeltern

talloberflaeche) mit  $\vartheta = 30^\circ$  kleiner ist, als bei den Messergebnissen ( $\vartheta = 35^\circ - 40^\circ$ ) [120]. Zudem ist das Sogmaximum der DIN 1055 gegenueber den Messungen stark erhoeht. Den Versuchsergebnissen naeher kommt die in Bild 7.14 nicht dargestellte Windverteilung fuer rauhe Oberflaechen (Mauerwerk), die einen breiteren Staubereich und ein kleineres Sogmaximum aufweist.

Da die Beullast eines Zylinders weitgehend von der Groesse des Druckbereichs abhaengt, wobei der Sogbereich etwas entlastend wirkt, scheinen die Normen fuer die (Metall) Oberflaechen der Zylinder etwas zu guenstige Lastverteilungen anzunehmen.

#### 7.2.2.2 Vereinfachte Berechnungskonzepte

=====

Das Beulproblem fuer nichtrotationssymmetrischen Aussendruck fuehrt zu aufwendigen Stabilitaetsberechnungen; daher werden vereinfachte Berechnungskonzepte angestrebt [124].

Der Vergleich eines Beulmusters unter konstantem Aussendruck mit der Breite des Winddruckbereichs in Umfangsrichtung zeigt, dass fuer Zylinder ueblicher Groesse mehrere Beulwellen im Winddruckbereich liegen. Da die Beanspruchung im Druckbereich zumindest teilweise einer konstanten Aussendruckbelastung entspricht, scheinen Berechnungskonzepte mit konstantem Ersatzaussendruck anstelle der Windbelastung sinnvoll. Versuche [67] fuer kurze Zylinder, bei denen viele Beulwellen im Winddruckbereich auftraten, und der Unterschied zwischen Beullasten infolge Wind und konstantem Aussendruck nur wenig differiert, bestaetigen dieses Konzept. Gaengige Normen (BS 2654, DIN 4119) arbeiten mit solchen konstanten Ersatzdruckwerten. Dabei liegt die in BS 2654 angegebene Annahme eines Ersatzdrucks in der vollen Groesse des maximalen Staudrucks klar auf der sicheren Seite, waehrend die An-



nahme der alten DIN 4119 mit 50% des maximalen Staudrucks zu niedrig liegt, wie einige Schadensfaelle beweisen. Darauf weist auch de Wit [37] hin, der seinerseits das Ersatzdruckkonzept des BS 2654 verwendet und ein einfaches Verfahren zur Berechnung von Versteifungsringen fuer Zylinder auch mit abgestufter Wanddicke angibt. Diese unsichere Lage fuehrte zu einer Forschungsarbeit [123], innerhalb derer experimentelle sowie theoretische Untersuchungen [22],[23],[56] durchgefuehrt wurden. Auf Grund dieser Untersuchungen wurde in [35],[122],[124] ein Berechnungskonzept entwickelt, das die Nachteile der beiden genannten Normen vermeidet. Dabei wird die Groesse des konstanten Ersatzdrucks abhaengig von der Zahl  $m_1$ , der in den Druckbereich fallenden Beulwellen dieses Ersatzdrucks ermittelt.

$$\text{Ersatzunterdruck: } q_{UE} = q_{\max} (0,46 + 0,017 m_1) \quad (7.5)$$

gueltig fuer  $m_1 \cong 10$

Zur Ueberpruefung des vorwiegend aus Versuchsergebnissen entwickelten Ersatzdruckkonzepts wurden in [23],[115] finite Element Analysen fuer beidseits gelagerte geschlossene Kreiszyylinder vorgenommen sowie der Einfluss von Nichtlinearitaeten und geometrischen Imperfektionen auf die kritische Windbelastung untersucht. Eine Erweiterung der Untersuchungen auf Kragsschalen liegt in [22] vor.

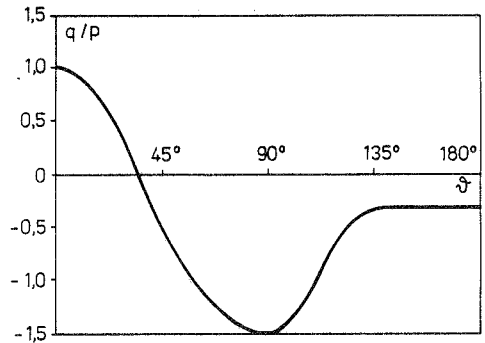
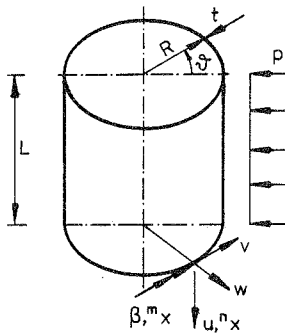
Die folgenden Abschnitte stellen eine Fortfuehrung der genannten Arbeiten dar [22][23], wobei fuer die beidseits gestuetzte Schale Berechnungen im Nachbeulbereich durchgefuehrt wurden. Diese Zylinderschale wurde wegen des geringeren Einflusses der Verformungsabhaengigkeit der Belastung nur unter linientreuer, konservativer Windbelastung berechnet. Bei den Analysen der Kragsschale stand dagegen der erwartete groessere Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung im Vordergrund der Untersuchungen.

7.2.2.3 Die beidseits gestuetzte Kreiszyllinderschale

Fuer beidseits gestuetzte Kreiszyllinder liegen neben der bereits erwaehten Forschungsarbeit [123] weitere theoretische [74],[90],[91],[121],[154] sowie experimentelle [55],[94],[127] Untersuchungen vor. In [154],[74] werden klassische Stabilitaetsanalysen an Schalen konstanter Wanddicke durchgefuehrt, waehrend in [55],[90],[91],[121] [124] Schalen mit in Laengsrichtung abgestufter Wanddicke behandelt werden.

Ziel dieses Abschnitts ist die Gegenueberstellung der Ergebnisse klassischer, linearer Stabilitaetsanalysen mit denen nichtlinearer Stabilitaetsanalysen an nicht abgestuften Schalen.

In [22],[23],[115] wurde der nichtlineare Last-Ver-schiebungsverlauf fuer die geschlossene Modellschale nach Bild 7.15 im Vorbeulbereich bis hin zur kritischen Last berechnet. Zur Stabilitaetsberechnung wurden begleitende Eigenwertanalysen nach Gl.(4.2) bei verschiedenen Verformungszustaenden durchgefuehrt.



Lagerung: beidseits  
 $n_x = m_x = w = v = 0$

$R = 220 \text{ mm}$ ,  $t = 0,105 \text{ mm}$   
 $L = 440 \text{ mm}$   
 $E = 6,87 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\gamma = 0,3$

Bild 7.15 Geometrie mit Windbelastung

FE Idealisierung :

1/4 Zylinder mit Symmetriebedingungen

36 bikubische Elemente; Verdichtung in der Druckzone

2 in Laengsrichtung (150+70mm)

18 in Umfangsrichtung (9 a' 3.5°; 4 a' 5.875°; 5 a' 25°)

$$p_{kl} = \frac{0.918 \cdot E \cdot (t/R)}{L/R \sqrt{R/t} - 0.657} = 15.8 \cdot 10^{-5} \text{ N/mm}^2; m=13 \text{ nach [108]}$$

Der Auftrag der Eigenwerte ueber der aktuellen Last (Bild 7.16) zeigt, dass die nichtlineare Beullast des perfekten Systems trotz eines deutlich nichtlinearen Verhaltens der Struktur nur auf 95% der Beullast einer linearen Anfangsstabilitaetsanalyse abfaellt. Eine lineare Stabilitaetsanalyse haette demnach zur Bestimmung der Beullast genuegt. Im Sinne der Beuluntersuchung mit Hilfe eines konstanten Ersatzdrucks liegt der zu waehlende Ersatzunterdruck bei 75 % des Maximaldrucks im Staubereich. Die

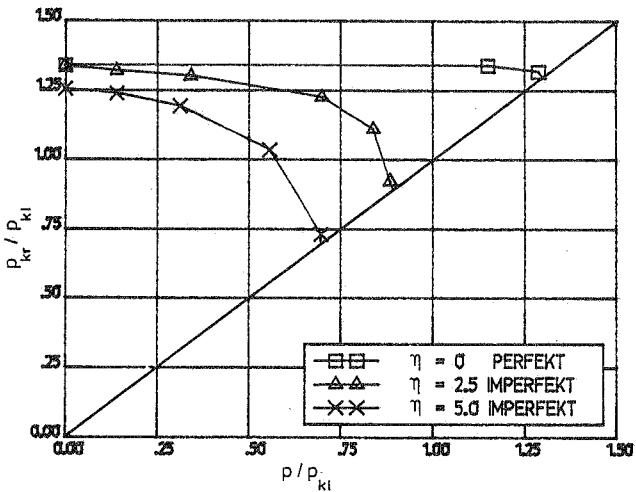


Bild 7.16 Eigenwertverlauf bei beidseits gestuetzten Kreiszyklindern unter Windbelastung (linien-treu)

Schwaeche der DIN 4119, die hier auf 50% gefuehrt haette, wird offenbar. Der neue Ersatzdruck nach DAST 013 liefert mit 68 % einen noch brauchbaren Wert.

Fuer die imperfekten Schalen mit Imperfektionen in der Form der ersten Eigenform der perfekten Schale und maximaler Amplitude  $\eta$  zeigt sich ein ausgepraegtes nichtlineares Tragverhalten. Der Abfall der nichtlinearen Beullast gegenueber der Beullast der perfekten Struktur ist betraechtlich. Die linearen Anfangsstabilitaetsanalysen der imperfekten Schalen besitzen keine Aussagekraft mehr fuer die nichtlineare Beullast.

Um den Abfall der nichtlinearen Beullasten zu klaeren, wurden die nichtlinearen Berechnungen in dieser Arbeit fuer die perfekten und die imperfekten Schalen ueber die kritischen Lastpunkte hinweg fortgesetzt. In Bild 7.17 sind die Last-/Verschiebungsdiagramme fuer die radiale Verschiebung des Staupunkts aufgetragen.

Die Kurve fuer die perfekte Schale zeigt einen starken Abfall der Last bis auf  $\sim 64\%$  der nichtlinearen kritischen Last, der mit Verschiebungen bis zum 17-fachen der Wanddicke verbunden ist. Fuer groessere Verschiebungen wird die Schale wieder wesentlich steifer.

Das physikalisch realistische Verhalten der Schale besteht naturgemaess im Durchschlagen des Punktes bei Erreichen der kritischen Last auf den ansteigenden Kurvenast hin. Dies ist wegen der dabei auftretenden ploetzlichen grossen Verschiebungen ein dynamisches Problem mit fuer das Tragwerk weitreichenden Folgen. Der dargestellte ansteigende Ast ist daher nur von theoretischem Interesse.

Der starke Abfall der Last bringt die Imperfektionsanfaelligkeit der Schale zum Ausdruck. Trotz der grossen Imperfektion mit  $\eta = 2,5t$  ergibt sich auch bei der ersten imperfekten Schale noch ein Abfall der Last im Nachbeulbereich, der allerdings nur 10% der nichtlinearen, kritischen Last betraegt. Die sehr grosse Imperfektion  $\eta = 5.0t$  fuehrt zu keinem abfallenden Ast der Lastverschiebungs-

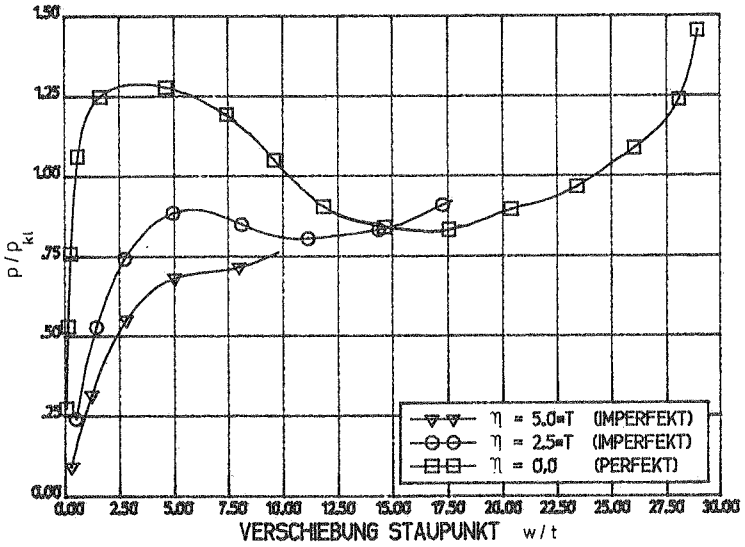


Bild / .17 Kreiszyylinder unter Windlast (beidseits gestuetzt), Last-Verschiebungskurve

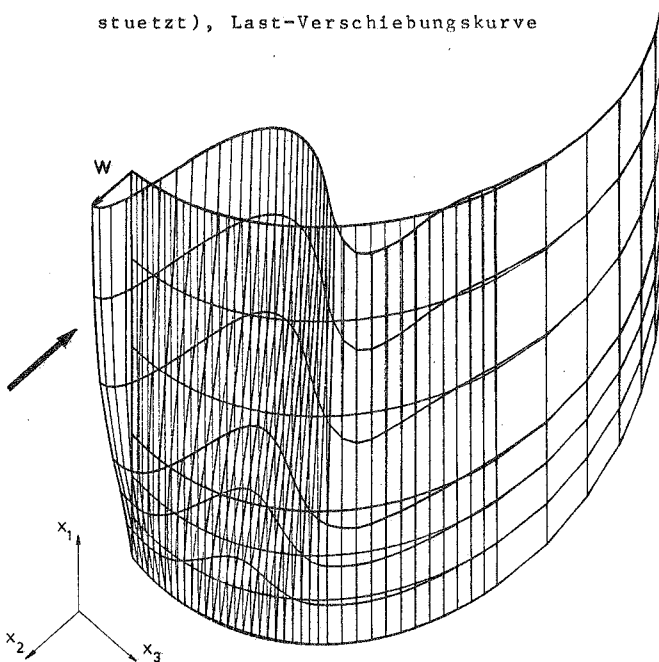


Bild / .18 Kreiszyylinder unter Windlast , Verschiebungsbild; 1/4 Zylinder (Elemente am hinteren Rand nicht gezeichnet)

kurve. Die ermittelte, nichtlineare Kurve zeigt ein durchschlagsähnliches Verhalten an.

Wird die Windbelastung durch eine Fourierreihe in Umfangsrichtung dargestellt, so zeigen die Tafeln von Dirschinger [39],[92], dass die Lastabtragung bei der perfekten Schale wie bei Wasserbelastung weitgehend ueber Membrantragwirkung erfolgt (siehe auch [68]). Die hoeheren Reihenglieder werden zudem nur mit sehr kleinen Koefizienten multipliziert, so dass die hierfuer vorhandene Biegetragwirkung gering ist. Bei der perfekten Schale hat sie dennoch ein deutlich nichtlineares Verhalten im Vorbeulbereich zur Folge; im Nachbeulbereich erfolgt die Lastabtragung weitgehend ueber Biegetragwirkung.

Die numerische Berechnung erfolgte mit dem in Abschnitt 5.1.3 vorgestellten modifizierten Verfahren nach Riks/Wempner, wobei in allen Berechnungen mit automatischer Schrittweitenfindung vorgegangen wurde. In den stark nichtlinearen Bereichen in der Naehue der Maxima bzw. Minima der Kurve und in den abfallenden Aesten ergaben sich dabei sehr kleine Bogenlaengen, waehrend sich groessere Schrittweiten bei den ansteigenden Aesten einstellten. Fuer die stark imperfekte Schale mit  $\eta = 5.0t$  mit fast gleichbleibender "Nichtlinearitaet" wurde nur eine geringe Reduktion der Schrittweiten im abflachenden Kurvenbereich festgestellt.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass die Kenntnis des Nachbeulbereichs der perfekten Schale Aussagen ueber das Tragverhalten der imperfekten Schale erlaubt. Der starke Abfall der kritischen Last infolge von Imperfektionen entspricht den Beobachtungen, die bei einzelnen Versuchen fuer Schalen unter konstantem Aussendruck gemacht wurden.

Die Berechnung bewies die ausgezeichnete Verwendbarkeit des Riks/Wempner'schen Verfahrens fuer Durchschlagprobleme.

#### 7.2.2.4 Die Kragschale

=====

##### 1. Wind als linien(richtungs-)treue und normalentreue koerperfeste) Belastung

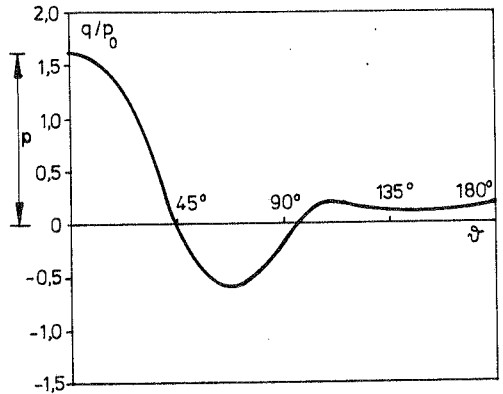
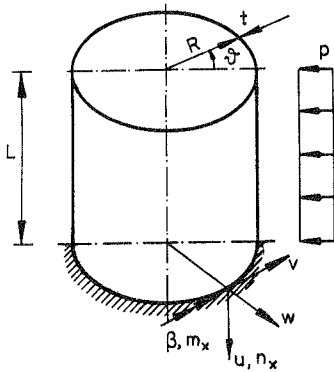
Fuer die Kragschale unter Windbelastung liegen nur wenige Versuche vor [127],[112]. Aus der Beulfigur seiner Versuche entwickelt Rish [127] unter Einbeziehung elastoplastischen Werkstoffverhaltens eine halb empirische Formel fuer die Beullast. Die Ueberlegungen gehen von den Verformungen aus, die bei statischen Lasten benoetigt wuerden, um den Zylinder in die ausgebeulte Lage zu verformen. Da beim Durchschlagen aber die kinetischen Effekte nicht vernachlaessigt werden duerfen, erscheinen diese Formeln unzuellaenglich.

In [74],[112],[154] werden klassische Anfangsstabilitaetsanalysen durchgefuehrt. [74],[154] verwenden dazu eine Theorie, bei der die Dehnungen in Ringrichtung vernachlaessigt werden (semi-inextensible-deformation), wobei fuer den Vorbeulzustand ein Membranzustand angenommen wird. In [154] wird gezeigt, dass die Ergebnisse in [74] starke Maengel aufweisen; vergleicht man jedoch die Ergebnisse von [154] mit denen von [112], wo die Donnell'sche Schalentheorie verwendet wurde, so zeigt sich gute Uebereinstimmung. Der noch bestehende Unterschied resultiert offensichtlich aus der leicht unterschiedlichen Annahme der Winddruckverteilung in Umfangsrichtung.

Die klassischen Stabilitaetsanalysen liefern jedoch keine gute Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, die deutlich unter den theoretischen Werten liegen. Der Unterschied waechst mit zunehmender Zylinderlaenge. Die in [154] und [112] ausgesprochenen Vermutungen, bei Versuchen beobachtete Schwingungseffekte seien fuer die Unterschiede verantwortlich, treffen nicht die eigentliche Ursache. Dies zeigt auch die Untersuchung von Ghobrial/Abdel-Sayed [50], in der die experimentellen Werte

von [112] durch lineare Beulanalysen bei Mitnahme quadratischer Vorbeulverschiebungsterme in den Verzerrungen besser angenaehert werden. Allerdings wird dabei [50] die Querdehnung vernachlaessigt, deren Beruecksichtigung zu einer Anhebung der Beulwerte fuehren wuerde.

Der physikalische Grund liegt in der von Anbeginn an vorhandenen deutlichen Biegetragwirkung der Kragschale unter Windbelastung besonders in Umfangsrichtung.



Lagerung :

oben:  $m_x = n_x = q_x = n_{x\gamma} = 0$   
 unten:  $\beta = u = w = v = 0$

Geometrie :

$R = 40$  in ,  $L = 120$  in ,  $t = 0,1064$  in  
 $E = 3 \cdot 10^7$  psi ,  $\gamma = 0,3$

FE Idealisierung :

-----  
 1/2 Schale in Umfangsrichtung, volle Schale in Laengsrichtung

Elementanzahl: 32 bikubische Elemente

4 in Laengsrichtung je 1/4

8 in Umfangsrichtung (0° - 90°, 5 a' 18°;  
 90° - 180°, 3 a' 30° )

Bild 7.19 Geometrie und Windbelastung; FE-Idealisierung  
 Kragschale



Bei langen Zylindern wird die Biegetragwirkung in Umfangsrichtung noch verstaerkt [39]; das Tragverhalten naehert sich dem eines Kreisringtraegers unter nichtrotationssymmetrischer Belastung. Damit ist vorab schon eine starke Nichtlinearitaet des Problems vorhanden, die die Resultate einer linearen Beulanalyse in Frage stellt. Diese Ueberlegungen wurden durch die nichtlinearen Berechnungen von Brendel/Ramm [22] an der in Bild 7.19 dargestellten Schale bestaetigt. Geometrie und Windbelastung entstammen [111][112], wo fuer diesen Zylinder mittlerer Laenge experimentelle und theoretische Beulwerte ermittelt wurden. Die Windbelastung liegt als Fourier-Reihe vor (siehe auch [128]) :

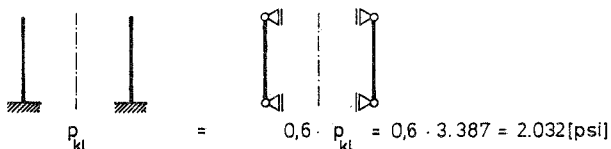
$$q = p_0 \cdot \sum_{n=0}^6 a_n \cdot \cos n \cdot \vartheta \quad (7.6)$$

mit:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0.607 - 0.387 & a_3 &= 0.338 & a_6 &= 0.166 \\ a_1 &= 0.533 & a_4 &= 0.471 & & \\ a_2 &= -0.066 & a_5 &= -0.055 & & \end{aligned}$$

$p_0$  repraesentiert den Staudruck. Wie bereits erwaeht, besteht der wesentliche Unterschied zur Windbelastung des geschlossenen Zylinders im zusaetzlich auftretenden Unterdruck, der durch den ersten Term in  $a_0$  dargestellt wird. Ausserdem ist das Sogmaximum in den Flanken des Zylinders zusaetzlich verkleinert. Als Bezugswert dient im weiteren der maximale Staudruckwert  $p = 1.607 p_0$ .

Der Vergleichswert fuer konstanten Aussendruck (klassische Beullast) wird durch Multiplikation des Beuldrucks des beidseits gelenkig gelagerten Zylinders mit dem Faktor 0.6 ermittelt, der die Randbedingungen der Kragsschale beruecksichtigt.



$$p_{kt} = 0,6 \cdot p_{kt} = 0,6 \cdot 3,387 = 2,032 [\text{psi}]$$

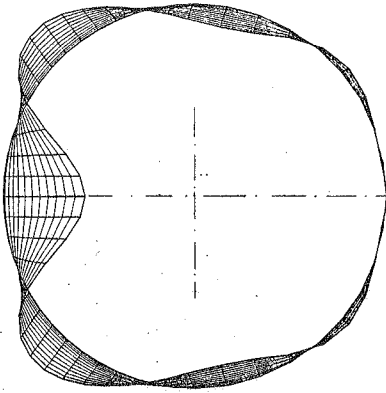
Die nichtlinearen Berechnungen und begleitenden Eigenwertuntersuchungen [22] belegten das ausgepraegte nicht-lineare Verhalten der Struktur unter Windbelastung. Der Vergleich der linearen Verschiebungsfigur mit der Beulform (Bild 7.20) zeigt die von Anbeginn an vorhandenen Biegeverformungen des Systems. Allerdings konzentrieren sich die Beulverformungen in der vorderen Schalenhaelfte.

Wegen der grossen Verformungen und der geringen Beulwellenzahl ( $n$  von etwa 5) bei den Untersuchungen mit linientreuer Belastung wurde eine Reduktion der Beullast bei Beruecksichtigung der Verformungsabhaengigkeit der Belastung erwartet. Fuer die perfekte Kragsschale wurde daher in dieser Arbeit eine nichtlineare Berechnung mit begleitenden Eigenwertanalysen unter normalentreuer(koerperfester) Windbelastung vorgenommen. Ausserdem wurden lineare Beuluntersuchungen zur Bestimmung des Einflusses der unsymmetrischen Laststeifigkeitsterme - Rand- und Gebietsterme - durchgefuehrt.(Tafel 7.8)

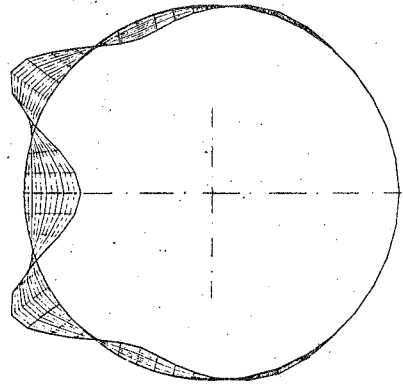
Der Unterschied zwischen den Beullasten, die mit den verschiedenen zwangssymmetrisierten Matrizen ermittelt wurden, ist sehr gering trotz der starken Gradienten der

Belastung	Symmetrisierung nach Gl.	$p_{kr}^L / p_{kl}$
linientreu	-	2.333
koerperfest	(4.11)	2.258
koerperfest	(Randterm)(4.12)	2.254
koerperfest	(Gebietsterm)(4.12)	2.258
koerperfest [112]	-	1.90

Tafel 7.8 Lineare Beuluntersuchungen



Verschiebungsfigur am  
Durchschlagspunkt  
(nichtlineare Rechnung)



Lineare Verschiebungsfigur

Lineare Beulfigur;  
Anfangs stabilitäts-  
analyse

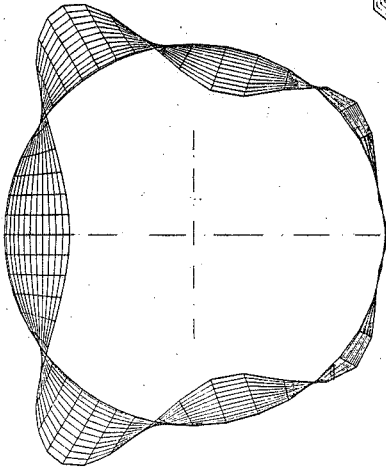


Bild 7.20 Krageschele unter Windlast; Verschiebungs- und Beulfiguren [22]

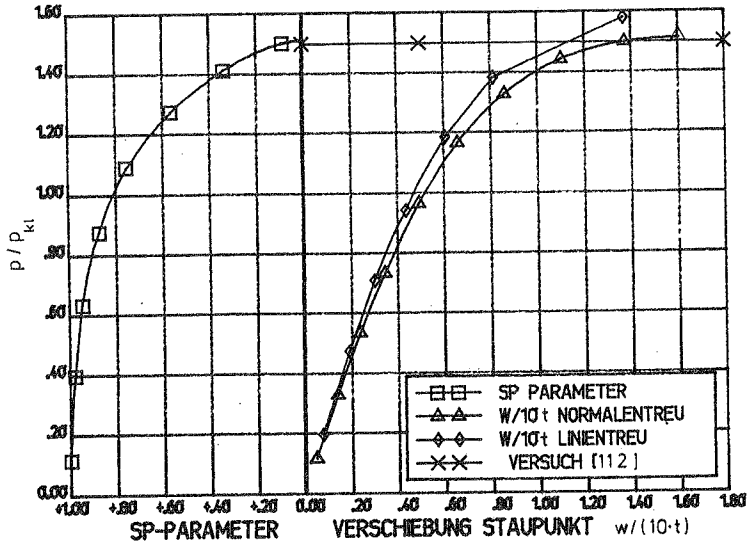


Bild 7.21 Kragsschale unter Windlast; Last-Verschiebungskurve; Verlauf Sp-Parameter (normalentreu)

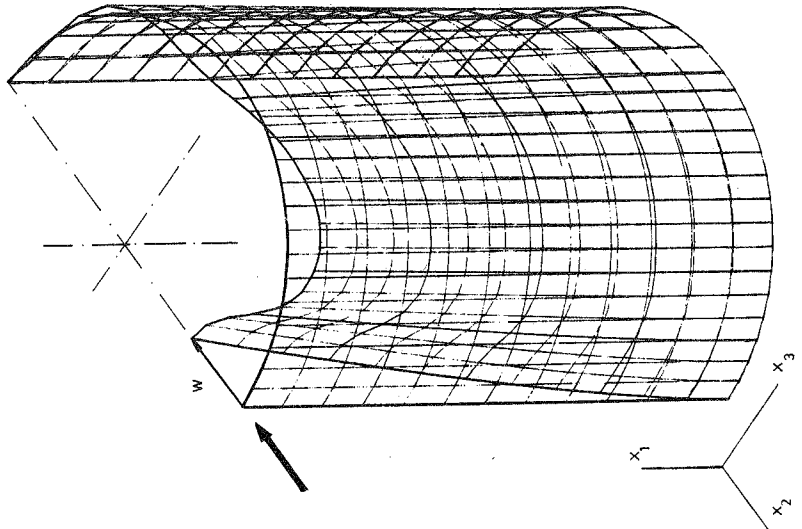


Bild 7.22 Kragsschale unter Windlast; Verschiebungsfigur

Lastfunktion. Die weiteren Stabilitaetsanalysen wurden daher mit der nach Gl.(4.11) symmetrisierten Matrix vorgenommen. Die normalentreue Belastung fuehrte zu einer nur um 3,2% kleineren, linearen Beullast im Vergleich zur linientreuen Belastung.

Das Last-Verschiebungsdiagramm (Bild 7.21) zeigt, dass sich an dieser Differenz bis zur nichtlinearen Beullast nur wenig aendert. Der im gleichen Bild aufgetragene Verlauf des Sp-Parameters bietet die Moeglichkeit der Extrapolation der Beullast in der Naehة der kritischen Last. Diesselbe Moeglichkeit jedoch mit weit groesserem Aufwand bieten begleitende Eigenwertanalysen (siehe Bild 7.23). Die Reduktion der nichtlinearen Beullasten infolge normalentreuer Belastung betraegt 4,4%.

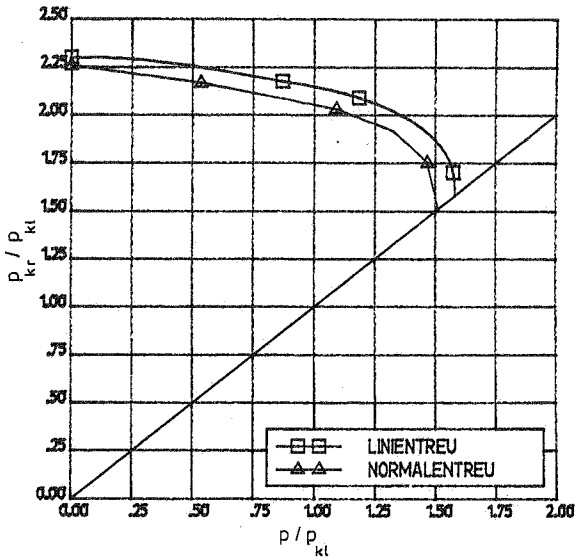


Bild 7.23 Begleitende Eigenwertanalysen

Bemerkenswert ist, dass die fuer normalentreue Belastung ermittelte nichtlineare Beullast fast identisch ist mit der experimentell ermittelten Last [112]. ( $p_{kr}/p_{kl} = 1.50$ )

Die Reduktion der kritischen nichtlinearen Windlast infolge der Verformungsabhaengigkeit der Belastung liegt trotz des ausgepraegten nichtlinearen Verhaltens der Schale in derselben Groessenordnung (3 - 4%) wie bei Kreiszyinderschalen entsprechender Laenge ( $L_0 = 1/0.6 \cdot L$ ) unter konstantem Aussendruck.

Da mit der untersuchten Kragsschale schon ein Fall mit besonders grosser Verformungsabhaengigkeit der Stabilitaetslast ausgewaehlt wurde, der fuer uebliche Schalen in Bezug auf seine Abmessungen (Dicke, Laenge) einen oberen Grenzwert darstellt, wurde von einer Untersuchung mit groesserer Schalendicke und -laenge abgesehen. In diesem Fall schwindet der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung. Damit kann die Aussage getroffen werden, dass fuer Kragsschalen ueblicher Abmessungen der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung auf die kritische nichtlineare Windlast in derselben Groessenordnung liegt wie der Einfluss auf die kritische lineare Windlast und damit insgesamt gering ist.

## 2. Einfluss der Randbedingungen (Waelbbehinderung)

Wie bereits in Abschnitt 7.1.2 erwaehnt, ist der Einfluss der Waelbbehinderung auf die Stabilitaetslast bei Kragsschalen besonders ausgepraegt. Dieser Effekt wird noch durch die ungleichfoermige Windbelastung verstaerkt. Durch Variation der elastischen Bettung der Schale in Laengsrichtung wird in [112] gezeigt, dass die Beullast mit schwindender Waelbbehinderung extrem abfaellt.

Eine lineare F.E.-Berechnung der Kragsschale nach Bild 7.19, bei der die Lagerung in Zylinderlaengsrichtung nur noch in den Fusspunkten bei  $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$  besteht - die anderen Lagerbedingungen bleiben erhalten -, erbrachte eine deutliche Veraenderung des Verformungsbildes gegenueber der vollstaendig gelagerten Schale. Die radiale

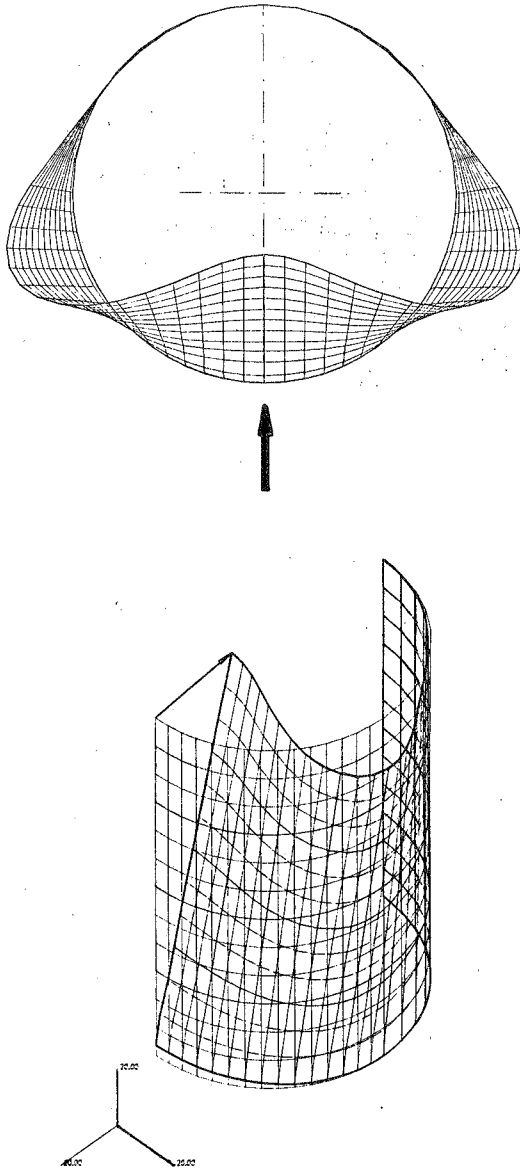


Bild 7.24/25 Kragschale unter Windbelastung , teilweise waelbfrei  
gelagert, lineare Analyse

Verschiebung des vorderen Staupunktes an oberen Rand der Schale waechst auf das 15-fache des Wertes bei voller Woelbbehinderung an. Eine Eigenwertuntersuchung ergab keinen reellen Eigenwert mehr, d.h. es liegt kein Stabilitaetsproblem vor, und es handelt sich um ein Problem mit monoton steigender Last-Verschiebungskurve. Dies wird auch aus der Verschiebungsfigur (Bild 7.24/25) deutlich, die schon weitgehend der Beulfigur der langen Zylinderschale entspricht. Die Schale zeigt eine extreme Neigung zu dehnungslosen Verformungen.

### 3. Wind als raumfestes Druckfeld

In [46] wurde die Vermutung geaeussert, dass die Differenz zwischen theoretisch und experimentell ermittelten Beullasten fuer windbelastete Zylinder zumindest teilweise dadurch entsteht, dass sich die Belastungsmagnitudo infolge der Verschiebungen aendert. So koennte beispielsweise der Staudruck infolge der Formaenderung der Schale zusaetzlich anwachsen.

Alternativ zur Annahme der Windbelastung als koerperfestes Druckfeld wurde daher in dieser Arbeit auch die Formulierung eines raumfesten Druckfeldes fuer den Fall nach Bild 7.19 untersucht. Die Windbelastung nach Gleichung (7.6) wurde bezueglich der Achse  $0x_2$  fest angenommen.

Wind als raumfestes Druckfeld:

$$\begin{aligned} q = p * [ & 0.607 - 0.387 + 0.338^2 x_2/R + 0.533 * (-1. + 2 * (x_2/R)^2) \\ & + 0.471 * (4 * (x_2/R)^3 - 3 * x_2^2/R) + 0.166 * (8 * (x_2/R)^4 - 8 * (x_2/R)^2 + 1) \\ & - 0.066 * (16 * (x_2/R)^5 - 20 * (x_2/R)^3 + 5 * x_2^2/R) \\ & - 0.055 * (32 * (x_2/R)^6 - 48 * (x_2/R)^4 + 18 * (x_2/R)^2 - 1) ] \end{aligned} \quad (7.7)$$



Eine lineare Stabilitätsanalyse erbrachte einen Eigenwert von  $p_{kr}^L / p_{kl} = 2.9795$ . Die Beulform entsprach der bei koerperfester Belastung ermittelten Form.

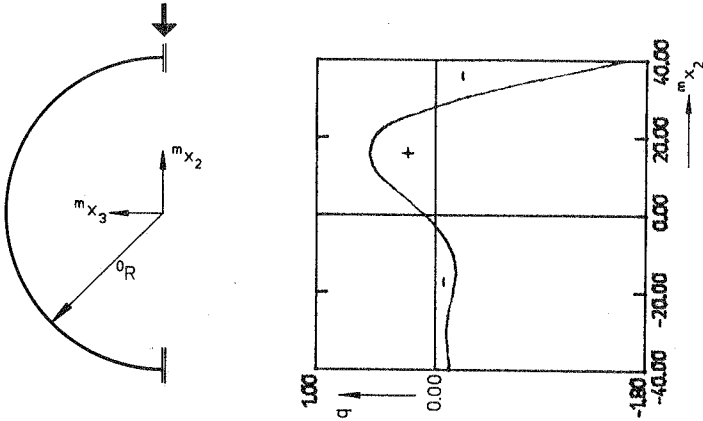


Bild 7.26 Windbelastung als raumfestes Druckfeld

Der ueber dem Beulwert von  $p_{kr}^L / p_{kl} = 2.25$  fuer koerperfeste Last liegende Wert erklart sich aus dem angebrachten, unrealistischen Druckfeld. Verschiebungen in negativer  $m_{x_2}$ -Richtung, wie sie im Staudruckbereich auftreten, haben eine Verkleinerung der Druckamplitude zur Folge. Auch anders definierte Druckfelder fuer die Windbelastung ergeben aehnlich unrealistische Belastungen der Schale.

Eine realistischere Annahme, fuer die aber keine gemessenen Werte vorliegen, stellt die Kombination eines koerperfesten Druckfeldes mit einem raumfesten Druckfeld dar. Hierzu wurde dem koerperfesten Winddruckfeld ein raumfestes Druckfeld ueberlagert, das den Staudruck fuer eine Radialverschiebung des Zylinders nach innen vergroesserte, waehrend eine Verschiebung nach aussen den Druckwert verringerte. Dies entspricht der Vorstellung, dass in Staudruckbereich infolge der in Bild 7.22 dargestellten Verformung ein grosserer Windwiderstand zu er-

warten ist, und damit der Staudruck waechst. Im Sogbereich steigen dann die Sogkraefte infolge der seitlichen Wuelste an.

Fuer die Zusatzbelastung gilt :

$$p_R = A \frac{R^2 - R_0^2}{R_0^2} \quad (7.8)$$

$R^m$  : Zylinderradius im Zustand m

Dies ist ein bezueglich des Kreisquerschnitts raumfestes Druckfeld. Wenn fuer den Vorfaktor A der Wert 4,0 gewaehlt wird, veraendert sich im berechneten Beispiel der Druck um den Wert  $(0,1 \cdot p_0 / \text{in Radialverschiebung})$ . Die Gesamtbelastung wird zu :

$$p_{\text{ges}} = \underbrace{p(x_i)}_{\text{Windbelastung}} + \underbrace{4.0 \cdot \frac{R^2 - R_0^2}{R_0^2}}_{\text{Raumfestes Druckfeld}} \quad (7.9)$$

koerperfest Gl.(7.6)

Eine klassische Anfangsstabilitaetsanalyse ergab eine Beullast von  $p_{kr}^L / p_{kl} = 1.993$ . Dies bedeutet eine weitere Abminderung des Beuldrucks um 11% gegenueber dem bei koerperfester Windbelastung. Ein Einfluss dieser Belastungsart auf die Beullast ist demnach vorhanden. Eine Beurteilung der absoluten Groesse des Einflusses ist aber wegen der angenommenen Faktoren, fuer die keine gemessenen Werte vorliegen, nicht moeglich.

#### 4. Wind als dynamische Belastung

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch darauf hingewiesen werden, dass Kragplatten mit und ohne Randversteifung nicht ausschliesslich statisches Stabilitaetsversagen aufweisen. In [134] und [103] wird darauf hingewiesen, dass der kinetische, pulsierende Teil der Windbe-

lastung bei sehr biegeweichen Schalen ein dynamisches Stabilitaetsversagen (Resonanz) zur Folge haben kann, bei dem die nichtlinearen Verformungen des Tragwerks von Bedeutung sind. Fuer eine Kragschale mittlerer Laenge  $L/R = 4.1$  ;  $R/t = 263$  aus Mylar wurde dabei im Versuch nur eine Versagenslast erreicht, die der einer unendlich langen Kreiszyinderschale bei statischer Betrachtung entspricht. Es wird vermutet [103], dass die beobachteten grossen Schwingungsamplituden aehnliche Folgen fuer die Stabilitaetslast haben wie geometrische Imperfektionen im Vergleich zur perfekten Struktur. Schwingungserregungen infolge Karmanscher Wirbel, die Stabquerschwingungen im Luftstrom hervorrufen, bleiben dabei ausser Betracht.

Fuer die ueblichen dynamischen Untersuchungen werden linientreue Belastungen angenommen. Mit den in der vorliegenden Arbeit angegebenen zwangssymmetrisierten Matrizen laesst sich der Einfluss der Normalentreue der Belastung bei dynamischen Berechnungen mit nur geringem Mehraufwand beruecksichtigen.

## 8. Schlussfolgerungen

=====

In der vorliegenden Arbeit wurde das nichtlineare Verhalten von Tragwerken unter verformungsabhaengigen Belastungen untersucht. Dabei wurden vorwiegend Druckbelastungen behandelt.

Folgende Feststellungen koennen getroffen werden:

- ① Es muessen zwei verformungsabhaengige Belastungsarten unterschieden werden:
  - raumfeste Belastung: (Wasser)  
Sowohl Belastungsrichtung als auch Belastungsmagnitudo eines Punktes sind von der Verschiebung des belasteten Koerpers im raeumlich fest definierten Druckfeld abhaengig.
  - koerperfeste Belastung: (Annahme fuer Windlast)  
Nur die Belastungsrichtung eines Punktes ist von der Verschiebung des belasteten Koerpers abhaengig. Das bezueglich des Koerpers fest definierte Druckfeld bleibt in seiner Verteilung ueber den Koerper in allen Verschiebungszustaenden erhalten.
- ② Die unterschiedlichen Ergebnisse fuer die Beispiele mit verschiedenen Lastformulierungen unterstreichen die Notwendigkeit der wirklichkeitsgetreuen Erfassung der Belastung fuer eine Berechnung - vor allem bei Problemen mit grossen Verformungen und Stabilitaetsproblemen.

③ Abhaengig von den Randbedingungen und von der Lastformulierung ergeben sich konservative Probleme mit symmetrischen Steifigkeitsmatrizen und nichtkonservative Probleme mit unsymmetrischen Steifigkeitsmatrizen.

- Bei nichtlinearen Berechnungen kann im Sinne eines modifizierten Newton/Raphson - Verfahrens auf die Bestimmung der Laststeifigkeitsmatrizen verzichtet werden, sofern die Verformungsabhaengigkeit der Belastung auf der Lastseite beruecksichtigt bleibt. Die genaeherte Steifigkeitsmatrix darf unterhalb der Durchschlag- oder Verzweigungspunkte des urspruenglichen Systems keine Singularitaeten aufweisen. Das Vorzeichen der Determinante ist fuer Lastumkehrpunkte bei der Berechnung von Durchschlagproblemen mit der Methode von Riks/Wempner nur eingeschraenkt verwendbar. Gegebenenfalls koennen die symmetrischen Anteile der Laststeifigkeitsmatrix mitgenommen werden.

- Fuer lineare Stabilitaetsuntersuchungen koennen bei schwacher Unsymmetrie der Steifigkeitsmatrix statische Stabilitaetskriterien zur Ermittlung der Stabilitaetslast verwendet werden. Zur Beurteilung der Unsymmetrie werden Eigenwertanalysen mit verschiedenen zwangssymmetrisierten Steifigkeitsmatrizen durchgefuehrt. Bei schwacher Unsymmetrie empfiehlt es sich, fuer Stabilitaetsuntersuchungen mit Laststeifigkeitsmatrizen ausschliesslich die symmetrischen Anteile der Laststeifigkeitsmatrix zu beruecksichtigen.

④ Bei der Untersuchung aussendruckbelasteter Kreiszyinderschalen wurde folgendes beobachtet:

- Mit der Groesse der Verformung steigt die Bedeutung der Verformungsabhaengigkeit der Belastung. Entspre-

chend waechst der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit auf die Stabilitaetslast von Zylindern mit kleinerer Beulwellenzahl.

- Obgleich eine Windbelastung bei geschlossenen und offenen Kreiszyllindern ein stark nichtlineares Tragverhalten hervorruft, ist der Einfluss der Verformungsabhaengigkeit der Belastung auf die Stabilitaetslast bei gaengigen Schalenabmessungen nur unwesentlich groesser als bei konstantem Aussendruck und insgesamt als gering zu betrachten.

⑤ Fuer die Rechentechnik ergaben sich an den berechneten Beispielen folgende Erfahrungen:

- In Verbindung mit den Verfahren von Riks/Wempner fuehrte die einfache automatische Schrittweitensteuerung mit Hilfe der Iterationszahl zu sinnvollen Schrittweiten.
- Bei Durchschlagproblemen koennen zum Auffinden kritischer Lasten aufwendige Eigenwertuntersuchungen fuer den Lastparameter durch die einfache Beobachtung des Current-stiffness Parameters ersetzt werden.

⑥ Die Beruecksichtigung der Verformungsabhaengigkeit der Belastung fuehrt in vielen Faellen zu einer wirklichkeitsnahen Abbildung der auftretenden Belastung. Die ausschliessliche Beruecksichtigung statischer Anteile der Belastung stellt beim Auftreten grosser dynamischer Lastanteile jedoch nur eine unvollstaendige Abbildung der Wirklichkeit dar. Besonders bei sehr flexiblen Tragwerken sollte in diesem Fall die statische Untersuchung durch eine dynamische Betrachtung ergaenzt werden.

Schrifttum

=====

- [ 1] Almroth, B.O.        Buckling of a Cylindrical Shell Sub-  
                              jected to Nonuniform External Pres-  
                              sure  
                              J. Appl. Mech. Transact. ASME 84 (1962)  
                              675/682
- [ 2] Amazigo, J.C.,        Buckling Under External Pressure of  
      Fraser, W.B.        Cylindrical Shells With Dimple  
                              Initial Imperfections  
                              Int. J. Solids Structures 7 (1971)  
                              883/900
- [ 3] Amazigo, J.C.        Asymptotic Analysis of the Buckling  
                              of Externally Pressurized Cylinders  
                              with Random Imperfections  
                              Quart. J. Appl. Mech. 32 (1974) 429/442
- [ 4] Argyris, J.H.,        Nonlinear Finite Element Analysis of  
      Symeonidis, S.      Elastic Systems Under Nonconservative  
                              Loading - Natural Formulation Part I. Quasi-  
                              static Problems  
                              Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 26 (1981)  
                              75/123
- [ 5] Argyris, J.H.,        A Sequel to Nonlinear Finite Element  
      Symeonidis, S.      Analysis of Elastic Systems Under  
                              Nonconservative Loading - Natural For-  
                              mulation Part I. Quasistatic Problems  
                              Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 26 (1981)  
                              377/383
- [ 6] Armenakas, A.E.      Buckling of Thin Shells Under External  
      Herrmann, G.        Pressure  
                              J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 89 (1963)  
                              131/146

- [ 7] Barsoum, R.S. Finite Element Method Applied to the Problem of Stability of a Non-Conservative System  
Int.J.Num.Meth.Eng. 3 (1971) 63/87
- [ 8] Batdorf, S.B. A Simplified Method of Elastic Stability Analysis for Thin Cylindrical Shells  
NACA Report NR. 874, Washington D.C. 1947
- [ 9] Bathe, K.J.,  
Wilson, E.L.,  
Iding, R.H. NONSAP: A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems  
SESM Report NO. 74-4 Dept. Civil Eng. University of California, Berkeley 1974
- [ 10] Bathe, K.J.,  
Ramm, E.,  
Wilson, E. Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis  
Int.J.Num.Meth.Eng. 9 (1975) 353/386
- [ 11] Bathe, K.J.,  
Wilson, E. Numerical Methods in Finite Element Analysis  
Prentice Hall , New Jersey 1976
- [ 12] Batista, R.C.,  
Croll, J.G. A Design Approach for Unstiffened Cylindrical Shells Under External Pressure  
Int. Conf. on Thin Walled Structures Univ. of Strathclyde, Glasgow 1979  
Crosby-Lockwood Glasgow 1979
- [ 13] Batoz, I.L. Curved Finite Elements and Shell Theories with Particular Reference to the Buckling of a Circular Arch  
Int.J.Num.Meth.Eng. 13 (1979) 774/779



- [ 14] Beck,M. Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedruckten Stabes  
ZAMP 3 (1952)
- [ 15] Bergan,P., Convergence Criteria for Iterative  
Clough,R.W. Processes  
AIAA J. 10 (1972) 1107/1108
- [ 16] Bergan,P. Automated Incremental-Iterative Solution Schemes  
In Numerical Methods for Nonlinear Problems  
Ed.: C. Taylor, E.Hinton, D.R.J.Owen  
Conf. Swansea, 2.-5.September 1980
- [ 17] Bodner,S.R. On the Conservativeness of Various  
Distributed Force Systems  
J.Aeronautical Sciences 25 (1958) 132
- [ 18] Bolotin,V.V. Nonconservative Problems of the Theory  
of Elastic Stability  
Pergamon Press London 1963
- [ 19] Bornscheuer,F.W. General Report: Static and Stability  
Analysis of Hydromechanically Loaded Shells; Hydromechanically Loaded Shells  
Proceedings Symp. IASS, 1971, Honolulu
- [ 20] Brendel,E., Programmdokumentation und Eingabebe-  
Haefner,L., beschreibung zum Programmsystem NISA  
Ramm,E., Unveroeffentlichte Dokumentation des  
Saettele,J.M. Instituts fuer Baustatik  
Universitaet Stuttgart 1977
- [ 21] Brendel,B. Geometrisch Nichtlineare Elastostabi-  
litaet  
Dissertation 1979, Uni. Stuttgart

- [ 22] Brendel, B.,           Linear and Nonlinear Stability Analysis  
      Ramm, E.               Int. Conference Eng. Application of the  
                              F.E. Method 1979 Oslo, Norwegen
- [ 23] Brendel, B.,           Linear and Nonlinear Stability Analysis  
      Ramm, E.,              of Thin Cylindrical Shells Under Wind  
      Fischer, D.F.,        Loads  
      Rammstorfer, F.G. J. Struct. Mech. 9 (1) (1981) 91/113
- [ 24] Brush, D.O.,          Buckling of Bars, Plates and Shells  
      Almroth, B.O.         McGraw-Hill New York 1975
- [ 25] Brush, D.O.          Prebuckling Rotations and Cylinder  
                              Buckling Analysis  
      J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 106 (1980)  
      225/232
- [ 26] Bufler, H.           Energimethoden I-III  
                              Vorlesungsreihe Konstruktiver Ing-  
                              enieurbau Universitaet Stuttgart
- [ 27] Bufler, H.           Inkrementelle Variationsformulierung  
                              gewisser nichtlinearer Randwertprob-  
                              leme insbesondere in der Elastizitaets-  
                              theorie  
      Ing. Archiv 45 (1976) 229/242
- [ 28] Bufler, H.           Bettischer Satz, konservative Lasten  
                              und indifferentes Gleichgewicht  
      GAMM Tagung Graz 1976  
      ZAMM 57 (1977) T 112- T 114
- [ 29] Budiansky, B.,        Initial Postbuckling Behaviour of Cy-  
      Amazigo, J.C.         lindrical Shells Under External Pres-  
                              sure  
      Inst. of Math. Physics 47 (1968)  
      No. 3 223/235
- [ 30] Burgess, I.W.        Ritz Method in Non-Conservative Insta-  
                              bility Problems: A Simple Example  
      Int. J. Mech. Sciences 16 (1974) 651/659



- [ 40] Donnell, L.H.      Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders Under External Pressure  
J. Appl. Mech. Transact. ASME. 23 (1956)  
569/575
- [ 41] Donnell, L.H.      Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders with Fixed Edges Under External Pressure  
Proc. 3rd US Nat. Congress Appl. Mech. ASME New York 1958      305/311
- [ 42] Ebner, H.          Theoretische und experimentelle Untersuchungen ueber das Einbeulen zylindrischer Tanks durch Unterdruck  
Stahlbau 21 (1952) H.9      153/159
- [ 43] Ebner, H.,  
Schnell, W.              Einbeulen von Kreiszyklinderschalen mit abgestufter Wandstaerke unter Aussen-  
druck  
Zeitschrift fuer Flugwissenschaften  
9 (1961) Heft 4/5      143/150
- [ 44] El Naschie, M.S.      Zum Knickmechanismus des idealen Kreisrings  
Stahlbau 45 (1976) H.1      23/24
- [ 45] Esslinger, M.,  
Ahmed, S.R.,  
Schroeder, H.H.          Stationaere Windbelastung offener und geschlossener kreiszyklindrischer Silos  
Stahlbau 40 (1971) H.12      361/368
- [ 46] Ewing, D.I.F.,      Zuschrift zu Wang/Billington [154]  
J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 101 (1975)  
713/717
- [ 47] Floegl, H.,  
Mang, H.                  Zum Einfluss der Verschiebungsabhaengigkeit ungleichfoermigen Hydrostatischen Druckes auf das Ausbeulen duenner Schalen allgemeiner Form  
Ing.-Archiv 50 (1981) 15/30

- [ 48] Fluegge,W. Die Stabilitaet der Kreiszyinderschale  
Ing.-Archiv 3 (1932) 463/506
- [ 49] Frey,F., Some New Aspects of the Incremental To-  
Cescotto,S. tal Lagrangian Description in Nonlinear  
Analysis  
Int. Conf. Finite Elements in Nonlinear  
Mechanics Vol.1  
Geilo, Norway 1977 CO 5.1/5.20
- [ 50] Ghobrial,M., Stability of Orthotropic Cantilever Cy-  
Abdel-Sayed,C. lindrical Shells  
Int.Conf. on Thin Walled Structures  
Univ. of Strathclyde, Glasgow 1979  
Crosby-Lockwood Glasgow 1979
- [ 51] Gopalacharyulu,S.Cantilever Cylindrical Shells Under  
Johns,D.J. Assumed Wind Pressures  
J.Eng.Mech.Div.Proc.ASCE 99 (1973)  
943/956
- [ 52] Gopalacharyulu,S.Closure to [51]  
Johns,D.J. J.Eng.Mech.Div.Proc.ASCE 101 (1975)  
488/489
- [ 53] Greiner,R. Ein baustatisches Loesungsverfahren  
zur Beulberechnung duennwandiger Kreis-  
zyinderschalen unter Manteldruck  
Bauingenieur Praxis Heft 17  
W.Ernst & Sohn 1972
- [ 54] Greiner,R. Beulberechnung von Kreiszyinderschalen  
unter Aussendruck  
Beulen von Schalen ed. Esslinger/Geier  
Tagung Braunschweig 19./20.6. 1975
- [ 55] Greiner,R. Zum Beulnachweis von Zylinderschalen  
unter Winddruck bei abgestuftem Wand-  
dickenverlauf  
Stahlbau 50 (1981) H.6 176/179



- [ 63] Hibbit,H.D.,           A Finite Element Formulation for Prob-  
      Marcal,P.V.,           lems of Large Strain and Large Dis-  
      Rice,J.R.              placement  
                              Int. J. Solids Struct. 6 (1970)  
                              1069/1086
- [ 64] Hibbit,H.D.           Some Follower Forces and Load Stiff-  
                              ness  
                              Computers & Structures 9 (1979)  
                              937/941
- [ 65] Hinton,E.,            Computational Models for Reinforced  
      Abdel Rahman,H.,      Concrete Slab Systems  
      Zienkiewicz,O.C.      Advanced Mechanics of Reinforced Con-  
                              crete    IABSE Colloquium Delft 1981
- [ 66] Holden,J.T.          On Finite Deflections of Thin Beams  
                              Int. J. Solids Struct.    8 (1972)  
                              1051/1055
- [ 67] Holownia,B.P.        Buckling of Cylindrical Shells Under  
                              Wind Loading  
                              Symp. Wind Effects on Building and  
                              Structures  
                              Loughborough University    1968
- [ 68] Jaekle,V.            Kreiszyllindrische Behaelter unter Wind-  
                              belastung  
                              Diplomarbeit 1978, Uni Stuttgart
- [ 69] Johns,D.J.,          Wind-Induced Ovalling Oscillations of  
      Allwood,R.J.          Circular Cylindrical Shell Structures  
                              Symp. Wind Effects on Building and  
                              Structures    Paper 28  
                              Loughborough University    1968
- [ 70] Jones,R.F.,          Buckling of Pressure Loaded Rings and  
      Costello,M.G.,        Shells by the Finite Element Method  
      Reynolds,T.E.         Computers & Structures 7 (1977)  
                              267/274





- [ 80] Leipholz,H. Aspects of Dynamic Stability of Structures  
J. Eng.Mech.Div. Proc.ASCE 101 (1975)  
109/124
- [ 81] Leipholz,H. Die direkte Methode der Variations-  
rechnung und Eigenwertprobleme der  
Technik  
G.Braun Verlag, 1975 Karlsruhe
- [ 82] Leipholz,H. Six Lectures on Stability of Elastic  
Systems  
University of Waterloo/Canada , Dept.  
of Civil Engineering, Solid Mechanics  
Division 3.ed. 1975
- [ 83] Leipholz,H. Stabilitaet Elastischer Systeme  
G. Braun Verlag, 1980 Karlsruhe
- [ 84] Leipholz,H. Stability Analysis of Nonconservative  
Systems via Energy Considerations  
Mechanics Today, 5, Ed.S.Nemat-Nasser  
193/214
- [ 85] Levinson,M. Nonconservative Stability by Finite  
Element  
J. Eng.Mech.Div. Proc.ASCE 97 (1971)  
1756
- [ 86] Levinson,M. Application of the Galerkin and Ritz  
Methods to Non-Conservative Problems  
of Elastic Stability  
ZAMP 17 (1966) 431/442
- [ 87] Levy,M. Memoire sur un Nouveau Cas Integrale  
du Probleme de l'Elastique e l'une de  
ses Applications  
Journal Math.e.Applic. (Liouville)  
Series 3, Vol.10 (1884) 5/42

- [ 88] Loganathan,K.,     Finite Element Representation and Pres-  
      Chang,S.C.,         sure Stiffness in Shell Stability Ana-  
      Gallagher,R.H.,    lysis  
      Abel,J.F.           Int. J. Num.Meth.Eng. 14 (1979)  
                          1413/1425
- [ 89] Mac Donald,J.R.,   Effect of Out of Roundness on the Ela-  
      White,K.R.          stic Stability of Thin Circular Cylin-  
                          drical Shells  
                          Hydromechanically Loaded Shells  
                          Proceedings Symp. IASS, 1971 Honolulu
- [ 90] Maderspach,V.,     Buckling of Cylindrical Shells Due to  
      Gaunt,J.T.,         Wind Loading  
      Sword,J.H.,         Stahlbau 42 (1973) H.9    269/277
- [ 91] Maderspach,V.,     Buckling of Open Cylindrical Tanks Due  
      Kamat,H.           to Wind Loading  
                          Stahlbau 48 (1979) H.2    53/56
- [ 92] Mager,S.           Tragverhaltensstudien an Kreiszyliner-  
                          schalen  
                          Diplomarbeit 1981 Uni Stuttgart
- [ 93] Maher,F.J.         Wind Loads on Dome-Cylinder and Dome-  
                          Cone Shapes  
                          J. Struct.Div. Proc.ASCE 92 (1966)  
                          79/96
- [ 94] Malik,Z.,          An Experimental Investigation into the  
      Morton,J.,         Buckling of Cylindrical Shells of Va-  
      Ruiz,C.             riable Wall Thickness Under Radial Ex-  
                          ternal Pressure  
                          Experimental Mechanics 19 (1979)  
                          124/125
- [ 95] Malvern,L.E.       Introduction to the Mechanics of a  
                          Continuous Medium  
                          Prentice Hall, Englewood Cliffs  
                          New Jersey 1964

- [ 96] Mang,H.A.                    Symmetricability of Pressure Stiffness  
   Matrices in Finite Element Analysis of  
   Thin Shells Subjected to Nonuniform  
   Hydrostatic Pressure  
   Proc. Euromech Conf. Delft 1980
- [ 97] Mang,H.A.                    Symmetricability of Pressure Stiffness  
   Matrices for Shells with Loaded Free  
   Edges  
   Int. J.Num. Meth. Eng. 15 (1980)  
   981/990
- [ 98] Mang,H.A.,                    Finite Element Analysis of Thin Shells  
   Gallagher,R.H.                    of General Form for Displacement De-  
   pendent Loads  
   Nonlinear Finite Element Analysis of  
   Plates and Shells Conf. Washington  
   Proc.ASME/AMD 48 (1981) Nov.
- [ 99] Moss,P.J.                    The Buckling of Pipelines Under Non-  
   uniform External Pressure  
   Hydromechanically Loaded Shells  
   Proceedings Symp. IASS, 1971 Honolulu
- [100] Mote,C.D.                    Non Conservative Stability by Finite  
   Element  
   J. Eng.Mech.Div. Proc.ASCE 97 (1971)  
   645/656
- [101] Mote,C.D.,                    Coupled Non Conservative Stability -  
   Matsumoto,G.Y.                    Finite Element  
   J. Eng.Mech.Div. Proc.ASCE 98 (1972)  
   595/608

- [102] Nash, W.A.                   Effect of Large Deflection and Initial Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells Subject to Hydrostatic Pressure  
J. Aeronautical Sciences 22 (1955)  
264/269
- [103] Nguyen, B.,  
Rosemeier, G.,  
Spierig, S.,  
Stein, E.                         Dynamisches Verhalten von Kuehlturmschalen infolge Windkraefte unter besonderer Beruecksichtigung kinetischer Instabilitaeten  
4. Berichtskolloquium DFG Bauwerke unter aerodynamischer Belastung  
8.10.1979 Goettingen
- [104] Oden, J.T.                   Finite Elements of Nonlinear Continua  
Mc Graw Hill, New York 1972
- [105] Parisch, H.                   Zur Berechnung von Membranschalen unter endlichen Deformationen mit der Methode der finiten Elemente  
Dissertation 1977 Uni Stuttgart
- [106] Petersen, C.                 Einige weitere Loesungen nichtkonservativer Knickprobleme  
Stahlbau 41 (1972) H.7     198/203
- [107] Pflueger, A.                 Zur praktischen Berechnung der Kreiszynderschale unter Manteldruck  
Stahlbau 35 (1966) H.8     249/252
- [108] Pflueger, A.                 Stabilitaetsprobleme der Elastostatik  
3. Auflage , Springer Verlag , 1975
- [109] Plaut, R.H.                 Determining the Nature of Instability in Nonconservative Problems  
AIAA J. 10 (1972)         967/968
- [110] Pozzi, A.                    Einfluss nichtkonservativer Belastungen auf die Stabilitaet von Tragwerken  
Inst. f. Baustatik, ETH Zuerich

- [111] Prabhu, S.K., Cantilever Cylindrical Shells Subjected to Wind Loading  
Gopalacharyulu, S.  
Johns, D.J. J. Appl. Mech. Transact. ASME 97 (1975)  
233/234
- [112] Prabhu, S.K., Stability of Cantilever Shells Under  
Gopalacharyulu, S. Wind Loads  
Johns, D.J. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 101 (1975)  
517/530
- [113] Purdy, D.M., Model Studies of Wind Loads on Flat-  
Maher, F.J., Top Cylinders  
Frederick, D. J. Struct. Div. Proc. ASCE 93 (1967)  
379/395
- [114] Ramm, E. Geometrisch nichtlineare Elastostatik  
und finite Elemente  
Habilitationsschrift 1976 Uni Stuttgart
- [115] Ramm, E., Stabilität windbelasteter dünner  
Rammstorfer, F.G, Kreiszyklinderschalen  
Brendel, B., Schalenbeulung Darmstadt 1979  
Fastner, R.E.
- [116] Ramm, E. Strategies for Tracing Nonlinear Re-  
sponse Near Limit Points  
Europe-U.S.-Workshop "Nonlinear Finite  
Element Analysis in Structural Mecha-  
nics July 1980, Bochum
- [117] Ramm, E. Displacement Based Finite Element Me-  
thod for Large Deflection and Stability  
Analysis in "Large Deflection and Sta-  
bility of Structures" of  
"Handbook of Computational Mechanics"  
ed. K.-J. Bathe, North Holland Publ.  
Comp. In Vorbereitung

- [118] Ramm,W. Beitrag zum Problem der seitlichen Stabilitaet von gedruckten Gurten  
Stahlbau 48 (1979) H.4 120/122
- [119] Resinger,F., Greiner,R. Zum Beulverhalten von Kreiszyinderschalen mit abgestufter Wanddicke Unter Manteldruck  
Stahlbau 43 (1974) H.6 182/187
- [120] Resinger,F. Ueber Beulversuche an duennwandigen Kreiszyinderschalen im Windkanal  
Beulen von Schalen ed. Esslinger/Geier  
Tagung Braunschweig 19./20.6. 1975
- [121] Resinger,F., Greiner,R. Zuschrift zu Maderspach [90]  
Stahlbau 44 (1975) H.1 31/32
- [122] Resinger,F., Greiner,R. Praktische Beulberechnung oberirdischer zylindrischer Tankbauwerke fuer Unterdruck  
Stahlbau 45 (1976) H.1 10/15
- [123] Resinger,F., U.A. Untersuchungen zur Bestimmung der kritischen Beullast oberirdischer zylindrischer Tankbauwerke bei Windeinwirkung in Kombination mit Schneelast und anderen Betriebslasten sowie Traglast- und Stabilitaetsuntersuchungen  
Ausschuss oberirdische Tankbauwerke  
Oest.Stahlbauverband 1978
- [124] Resinger,F., Greiner,R. Kreiszyinderschalen unter Winddruck - Anwendung auf die Beulberechnung oberirdischer Tankbauwerke  
Stahlbau 50 (1981) H.3 65/72
- [125] Riks,E. The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability  
J. Appl. Mech. 39 (1972) 1060/1066

- [126] Riks, E. An Incremental Approach to the Solution of Snapping and Buckling Problems  
Int. J. Solids Structures 15 (1979)  
529/551
- [127] Rish, R. F. Collapse of Cylindrical Elastic Shells Under Wind Loading  
The Engineer 216 (1963) 669/672
- [128] Rish, R. F. Forces in Cylindrical Chimneys Due to Wind  
Proc. Institution Civil Eng. 36 (1967)  
404/442
- [129] Romano, G. Potential Operators and Conservative Systems  
Meccanica 7 (1972) 141/146
- [130] Rosemeier, G. E. Energetische Lösung eines nichtkonservativen Stabilitätsproblems  
Stahlbau 45 (1976) H. 2 54/57
- [131] Rosemeier, G. E. Winddruckprobleme bei Bauwerken  
Springer Berlin-Heidelberg-New York  
1976
- [132] Rosemeier, G. E. Ueber die praktische Bedeutung der kinetischen nichtkonservativen Instabilität  
Stahlbau 47 (1978) H. 12 362
- [133] Rosemeier, G. E.,  
Spierig, S.,  
Stein, E. Dynamisches Verhalten von Kühlturmschalen infolge Windkräften unter besonderer Berücksichtigung kinetischer Instabilitäten  
DFG Koll., Wind, Karlsruhe Okt. 1980
- [134] Rosemeier, G. E. Zum Beulproblem der Kreiszyllinderschale unter rotationssymmetrischer Belastung  
Stahlbau 50 (1981) H. 2 42/44

- [135] Sachs, P. Wind Forces in Engineering  
Pergamon Press London 1972
- [136] Saettele, J.M. Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität  
Dissertation 1980, Uni Stuttgart
- [137] Schmidt, R. Initial Postbuckling Behaviour of Uniformly Compressed Truss-Hinged-Circular Arches  
ZAMM 59 (1979) 473/474
- [138] Schmidt, R. A Critical Study of Postbuckling Analyses of Uniformly Compressed Rings  
ZAMM 59 (1979) 581/582
- [139] Schmidt, R. Buckling of Rings Subjected to Interacting Loads  
J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 107 (1981) 421/424
- [140] Schmidt, R. Buckling of a Clamped-Hinged Circular Arch Under Gas Pressure and Related Problems  
J. Appl. Mech. Transact. ASME 48 (1981) 425/426
- [141] Schnell, W. Einfluss der Randverwoelbung auf die Beulwerte von Zylinderschalen unter Manteldruck  
Stahlbau 34 (1965) H.6 187/190
- [142] Schulz, J.,  
Thielenmann, W. Ueber den Einfluss der Lastrichtung auf die Beullast von Zylindern unter Aus-sendruck  
DFVLR Braunschweig 1968





- [151] Thielemann, W., Beul- und Nachbeulverhalten isotroper  
Esslinger, M. Zylinder unter Aussendruck  
Stahlbau 36 (1967) H.6 161/175
- [152] Thomas, J.M. A Finite Element Approach to the Struc-  
tural Stability of Beam Columns, Frames  
and Arches  
NASA Technical Note NASA TN D-5782  
May 1970
- [153] Timoshenko, S.P., Theory of Elastic Stability  
Cere, J.M. Mc Graw Hill, New York 1961
- [154] Wang Yung-Shih, Buckling of Cylindrical Shells by Wind  
Billington, D.P. Pressure  
J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 100 (1974)  
1005/1023
- [155] Weingarten, I. The Buckling of Cylindrical Shells  
Under Longitudinally Varying Loads  
J. Appl. Mech. Transact. ASME 29 (1962)  
81/85
- [156] Wempner, G.A. Discrete Approximations Related to  
Nonlinear Theories of Solids  
Int. J. Solids Struct. 7 (1971)  
1581/1599
- [157] Wessels, M. Das statische und dynamische Durch-  
schlagsproblem der imperfekten flachen  
Kugelschale bei elastischer rotations-  
symmetrischer Verformung  
Diss. TU Hannover 1977, Mitt. NR.23
- [158] Wieser, H. Ein Vorschlag zur Berechnung des prak-  
tischen Beuldruckes oberirdischer, zy-  
lindrischer Tankbauwerke  
Oesterr. Ingenieur Zeitung 20 (1977)  
50/54

- [159] Wilson, E.L.,        Nonlinear Analysis of Deep Ocean Structures  
      Hsueh, T.M.,        Hydromechanically Loaded Shells  
      Jones, L.R.        Proceedings Symp. IASS, 1971 Honolulu
- [160] Windenburg, D.F.,    Collapse by Instability of Thin Cylindrical  
      Trilling, C.        Shells Under External Pressure  
                          J. Appl. Mech. Transact. ASME 56 (1934)  
                          819/825
- [161] Winzen, W.         Theoretische und experimentelle Untersuchungen ueber den Masseneinfluss bei nichtkonservativen Stabilitaetsproblemen    Dissertation, TU Muenchen 1976
- [162] Wunderlich, W.     Incremental Formulations for Geometrically Nonlinear Problems  
                          Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis  
                          U.S. Germany Symp. 1976
- [163] Wunderlich, W.     Zur computerorientierten Formulierung von Stabilitaetsproblemen  
                          Konstrukt. Ingenieurbau in Forschung und Praxis, Festschrift W. Zerna  
                          Werner Verlag 1976
- [164] Yamaki, N.         Influence of Prebuckling Deformations on the Buckling of Circular Cylindrical Shells Under External Pressure  
                          AIAA J. 7 (1969) 753/755
- [165] Yamaki, N.,         Experiments on the Postbuckling Behavior of Circular Cylindrical Shells Under Hydrostatic Pressure  
      Otomo, K.         Experimental Mechanics 13 (1973)  
                          299/304
- [166] Ziegler, H.         Knickung gerader Staebе unter Torsion  
                          ZAMP III (1952)        595/608

- [167] Ziegler, H. Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik  
Ing.-Archiv XX (1952) 45/56
- [168] Ziegler, H. On the Concept of Elastic Stability  
Advances in Applied Mechanics 4 (1956) 331/403
- [169] Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method in Engineering Science .  
Mc Graw Hill 1977
- [170] Ziolkowski, I. Modelluntersuchungen der Windeinwirkung auf Stahlbehälter mit Schwimmdach  
Stahlbau 47 (1978) H.11 321/329
- [171] Zuranski, J.A. Windbelastung von Bauwerken und Konstruktionen  
Rudolf Mueller Koeln 1969

A N H A N G

① Nachweis der 3. Randbedingung bei Flaechenbelastungen

Die Fragestellung lautet:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{skalares Vektorprodukt}) \quad (\text{A1})$$

$$\rightarrow \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (\text{A2})$$

$$u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 + u_3 \cdot n_3 = 0 \quad (\text{A3})$$

$$\rightarrow \delta u_1 \cdot n_1 + \delta u_2 \cdot n_2 + \delta u_3 \cdot n_3 = 0 \quad (\text{A4})$$

Das Randintegral lautet

$$\begin{aligned} -\delta W_{(a)}^{LR} &= \frac{1}{2} e_{ijk}^2 \lambda \int^m f \left( \frac{\partial^1 x_k}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_k}{\partial r} v_s \right) \cdot u_j \delta u_i \, db \quad (3.49) \\ &= \frac{1}{2} \lambda \int^m f \left[ \left( \frac{\partial^1 x_3}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_3}{\partial r} v_s \right) \cdot (u_2 \delta u_1 - u_1 \delta u_2) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial^1 x_2}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} v_s \right) \cdot (u_1 \delta u_3 - u_3 \delta u_1) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial^1 x_1}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} v_s \right) \cdot (u_3 \delta u_2 - u_2 \delta u_3) \right] db \end{aligned}$$

Gleichung (A3) und (A4) eingefuehrt in Gl. (3.49) ergibt:

$$\begin{aligned} -\delta W_{(a)}^{LR} &= \frac{1}{2} \lambda \int^m \frac{f}{n_1} \left[ \left( \frac{\partial^1 x_3}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_3}{\partial r} v_s \right) \cdot (u_3 \delta u_2 - u_2 \delta u_3) \cdot n_3 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial^1 x_2}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_2}{\partial r} v_s \right) \cdot (u_3 \delta u_2 - u_2 \delta u_3) \cdot n_2 \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial^1 x_1}{\partial s} v_r + \frac{\partial^1 x_1}{\partial r} v_s \right) \cdot (u_3 \delta u_2 - u_2 \delta u_3) \cdot n_1 \right] db \\ &= \frac{1}{2} \lambda \int^m \frac{f}{n_1} (u_3 \delta u_2 - u_2 \delta u_3) (\mathbf{x}_{,s}^1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_r + \mathbf{x}_{,r}^1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s) \, db \end{aligned}$$

$\mathbf{x}_{,s}^1$  und  $\mathbf{x}_{,r}^1$  spannen die Tangentialebene im Zustand I auf.

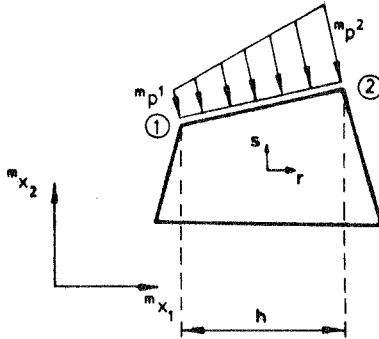
Damit gilt:  $\mathbf{x}_{,s}^1 \mathbf{n} = 0$  ;  $\mathbf{x}_{,r}^1 \mathbf{n} = 0$

$$\rightarrow \delta W_{(a)}^{LR} = 0$$

② Laststeifigkeitsmatrix fuer ein zweidimensionales Kontinuumelement

=====

Betrachtet wird ein 4-knotiges Element mit linearen Verschiebungsansatzten. Es sei nur ein Rand ( $s=+1$ ) mit einer linear veraenderlichen Belastung betrachtet.



Belastung: (Zug positiv)

$m=0 \rightarrow$  koerperfest ;  $m=1 \rightarrow$  raumfest

$$m_p = - ( p_0 + p/h * m_{x_1} ) \quad \text{am Punkt 1 bzw. 2 } m_{p^1}; m_{p^2}$$

Interpolationsfunktionen:

$$\phi^T = [ \phi^1 \cdot \phi^2 ] \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \phi^1 &= 0.5 (1-r) \\ \phi^2 &= 0.5 (1+r) \\ \phi_{,r}^1 &= -0.5 ; \quad \phi_{,r}^2 = +0.5 \end{aligned}$$

Koordinaten:

$$m_{x_i} = \phi^1 \cdot m_{x_i^1} + \phi^2 \cdot m_{x_i^2}$$

Verschiebungsvektor:

$$\mathbf{u}^T = [ u_1^1 \quad u_1^2 \quad u_2^1 \quad u_2^2 ]$$

Laststeifigkeitsmatrizen

Randterm nach Gl. (3.90), (3.91)

$$K_{LR} = -^2\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.5^m p^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5^m p^2 \\ 0.5^m p^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5^m p^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gebietsterm 1 nach Gleichung (3.93)

$$\begin{aligned} \Phi_{,r} \cdot \Phi^T - \Phi \cdot \Phi_{,r}^T &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5^2(1+r) - 0.5^2(1-r) \\ 0.5^2(1-r) + 0.5^2(1+r) & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$K_{L1} = -\frac{^2\lambda}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \int_{-1}^{+1} \left\{ p_0 + \frac{1}{2} \frac{p}{h} \{ (1-r)^m x_1^m + (1+r)^m x_1^2 \} \right\} dr$$

$$= -\frac{^2\lambda}{2} \left[ \right] \left\{ 2p_0 + \frac{p}{h} ({}^m x_1^1 + {}^m x_1^2) \right\}$$

$$= -^2\lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} * \text{ raumfest: } \left\{ p_0 + \frac{p}{2h} ({}^m x_1^1 + {}^m x_1^2) \right\} \\ * \text{ koerperfest: } \left\{ \frac{{}^0 p^1 + {}^0 p^2}{2} \right\} \end{array}$$



Gebietsterm 2

Raumfeste Belastung nach Gleichung (3.94)

$${}^1f_{,1} = -p/h \quad ; \quad m_{x_{i,r}} = -0.5 m_{x_1^1} + 0.5 m_{x_2^2}$$

$$\Phi \cdot \Phi^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1-r)^2 & (1-r^2) \\ (1-r^2) & (1+r)^2 \end{bmatrix} \quad \bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi \Phi^T & 0 \\ 0 & \Phi \Phi^T \end{bmatrix}$$

$$K_{L23} = -^2\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} \bar{\Phi} \begin{bmatrix} 0.5 p/h (m_{x_2^2} - m_{x_1^1}) & -0.25 p/h (m_{x_2^2} - m_{x_1^1}) \\ -0.25 p/h (m_{x_2^2} - m_{x_1^1}) & 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{L23} = -^2\lambda \cdot \frac{p}{3h} \begin{bmatrix} (m_{x_2^2} - m_{x_1^1}) \cdot \frac{(m_{x_2^2} - m_{x_1^1})}{2} - \frac{(m_{x_1^1} - m_{x_1^1})}{2} - \frac{(m_{x_1^1} - m_{x_1^1})}{4} \\ \frac{(m_{x_2^2} - m_{x_1^1})}{2} (m_{x_2^2} - m_{x_1^1}) - \frac{(m_{x_1^1} - m_{x_1^1})}{4} - \frac{(m_{x_1^1} - m_{x_1^1})}{2} \\ -\frac{(m_{x_1^1} - m_{x_1^1})}{2} - \frac{(m_{x_1^1} - m_{x_1^1})}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{(m_{x_1^1} - m_{x_1^1})}{4} - \frac{(m_{x_1^1} - m_{x_1^1})}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Koerperfeste Belastung nach Gleichung (3.95):

$${}^0f_{,1} \quad {}^0x_{i,r} = -0.5 (p/h) ({}^0x_1^2 - {}^0x_1^1) \cong 0.5 ({}^0p_2 - {}^0p_1)$$

$$K_{L23} = -^2\lambda \cdot \frac{({}^0p_2 - {}^0p_1)}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 & -1 \\ 1 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gesamtlaststeifigkeitsmatrix fuer koerperfeste Belastung

$$\mathbf{K}_{L_{Ges}} = -^2\lambda \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(0_p^1/3 + 0_p^2/6) & 0_p^1/3 + 0_p^2/6 \\ 0 & 0 & -(0_p^1/6 + 0_p^2/3) & 0_p^1/6 + 0_p^2/3 \\ 0_p^1/3 + 0_p^2/6 & -(0_p^1/3 + 0_p^2/6) & 0 & 0 \\ 0_p^1/6 + 0_p^2/3 & -(0_p^1/6 + 0_p^2/3) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dies entspricht der von Hibbitt [64] hergeleiteten Matrix.

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74 - 1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,  
K. Papailiou, J. M. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74 - 2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Er-  
mittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruch-  
ter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74 - 3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unter-  
lage.
- 74 - 4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und  
ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenele-  
mente.
- 75 - 1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75 - 2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-  
schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und er-  
weiterten Trefftz-Methode.
- 75 - 3 E. A. Castrillón O. :  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger  
Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76 - 1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,  
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,  
K. H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76 - 2 E. Ramm:  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77 - 1 B. -M. Sulke:  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78 - 1 F. Fujii:  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79 - 1 B. Brendel:  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79 - 2 H. -G. Berg:  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79 - 3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,  
E. Ramm, J. M. Sättele:  
Fallstudien zu Schalentragerwerken (in englischer Sprache).
- 80 - 1 R. I. Del Gaizo:  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80 - 2 R. W. Rembold:  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80 - 3 J. M. Sättele:  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82 - 1 L. Häfner:  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.