

✓

GEOMETRISCH NICHTLINEARE ELASTOSTABILITÄT

von
BERNHARD BRENDEL



Bericht Nr. 79-1
aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Direktor: Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer
Stuttgart 1979

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation dem Fachbereich 11: Konstruktiver Ingenieurbau der Universität Stuttgart am 4. 10. 78 vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Februar 1979

Hauptberichter:

Professor Dr. -Ing. E. Ramm

Mitberichter:

Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Professor Dr. -Ing. H. Bufler

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Zusammenfassung

Die Arbeit behandelt die numerische Lösung von Stabilitätsproblemen elastischer Tragwerke unter besonderer Berücksichtigung des nichtlinearen Verschiebungsverhaltens und von Imperfektionen. Zur Diskretisierung wird die Methode der finiten Elemente verwendet. Es stehen zwei Ziele im Vordergrund:

1. Eine zusammenfassende Untersuchung von Methoden zur Bestimmung kritischer Lasten für perfekte und imperfekte Systeme unter Berücksichtigung endlicher Vorbeulverschiebungen. Dabei kommen sowohl Verfahren zur vollständigen als auch zur genäherten Auswertung der Stabilitätsgleichungen zum Einsatz.
2. Die Beurteilung von Methoden zur Abschätzung kritischer Lasten realer imperfekter Tragwerke. Zunächst werden zwei Vorgehensweisen (dehnungslose Modelle und Energiekriterien) diskutiert, die versuchen, den Einfluß von Formabweichungen auf das Tragverhalten pauschal, d. h. ohne detaillierte Kenntnis von Imperfektionsformen und Amplitudeneinzugrenzen. Abschließend wird auf die Bewertung des Tragverhaltens durch gezielt vorgegebene Imperfektionen eingegangen.

Summary

This study describes the numerical solution of the nonlinear stability problem of elastic structures. Perfect as well as imperfect systems are investigated using the finite element method. Basically two aims are followed:

1. A summarizing study of methods is given to determine the critical loads of perfect and imperfect structures when large prebuckling deformations are present. Exact as well as approximate solution procedures are utilized to evaluate the stability equations.
2. Methods are reviewed which allow to estimate the critical loads of real imperfect structures. Two procedures, the inextensional model and the energy criteria, are discussed which attempt to find a lower bound of the buckling load without a detailed knowledge of shape and amplitude of the geometric imperfections. Finally the response of structures is valued when certain well defined imperfections are given.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
Literaturverzeichnis	6
Bezeichnungen	19
1. Einleitung	25
2. Geometrisch nichtlineare Elastostatik	27
2.1 Kontinuumsmechanische Formulierung der geometrisch nichtlinearen Elastostatik	27
2.1.1 Bezeichnungen für den inkrementellen Vor- gang	27
2.1.2 Verzerrungen, Spannungen, Werkstoffgesetz	30
2.1.3 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen	33
2.1.4 Linearisierung	34
2.2 Algebraisierung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente	35
2.3 Gleichgewichtsiteration	40
2.4 Zusammenstellung der verwendeten finiten Elemente	44
3. Die Stabilität elastischer Tragwerke	46
3.1 Instabilitäterscheinungen	46
3.2 Stabilitätsuntersuchungen	49
3.2.1 Statische und kinetische Stabilitätsunter- suchungen	49
3.2.2 Dehnungslose Modelle	54
3.2.3 Die Energiekriterien von Tsien	58
3.2.4 Einige weitere Stabilitätskriterien	62
3.3 Methoden zur Untersuchung instabiler Be- reiche	64
4. Ermittlung kritischer Lasten über die vollständige Auswertung der nichtlinearen Stabilitätsgleichungen	66
4.1 Aufbereitung der Stabilitätsgleichungen	67

4. 1. 1	Determinantenkriterium	67
4. 1. 2	Eigenwertprobleme für den Lastparameter	68
4. 2	Begleitende Maßnahmen	73
4. 2. 1	Beobachtung der Determinante	73
4. 2. 2	Eigenwertprobleme für den Lastparameter	82
4. 2. 3	Eigenwertprobleme für die Eigenfrequenz	95
4. 2. 4	Zusammenfassung	98
4. 3	Extrapolation begleitender Maßnahmen	99
4. 3. 1	Extrapolation der Determinante	100
4. 3. 2	Extrapolation der Näherungswerte für die kritische Last	103
4. 3. 3	Extrapolation der Eigenfrequenzen	104
4. 3. 4	Zusammenfassung	106
4. 4	Verfahren zur direkten Ermittlung von Verzweigungslasten	106
4. 4. 1	Automatische Schrittweitenfindung	107
4. 4. 2	Eigenwertgesteuerte Iterationsverfahren	110
4. 4. 3	Zusammenfassung	111
5.	Ermittlung kritischer Lasten über Reihenentwicklungen der nichtlinearen Stabilitätsgleichungen	113
5. 1	Klassische und lineare Anfangsstabilitätsanalysen	114
5. 1. 1	Stabilitätsuntersuchungen	114
5. 1. 2	Nachlaufberechnungen zur Kontrolle	121
5. 2	Nichtlineare Anfangsstabilitätsanalysen	132
5. 2. 1	Reihenentwicklung für die Vorbeulverschiebungen, die Beulform und die potentielle Energie	132
5. 2. 2	Beschränkung der Reihenentwicklung auf die Vorbeulverschiebungen und die Beulform	140
5. 2. 3	Koppelung der Reihenentwicklungen	143
5. 3	Stabilitätsuntersuchung bei unbekanntem Vorbeulverhalten	150

6.	Die Ermittlung kritischer Lasten mit Hilfe dehnungsloser Modelle	153
6.1	Das Konzept der verzerrungsfreien Verbiegungen bei Fritz/Wittek	153
6.1.1	Die Kreiszyinderschale unter Axialbelastung	158
6.1.2	Die Kreiszyinderschale unter Manteldruck	162
6.2	Die Plattenlösung ebener Beulfelder	166
6.2.1	Die Kreiszyinderschale unter Axialbelastung bzw. Manteldruck	168
6.2.2	Die Kugelschale unter Außendruck	169
6.2.3	Auswertung der Plattenlösung	170
6.3	Zusammenfassung	170
7.	Die Ermittlung kritischer Lasten mit Hilfe der modifizierten Energiekriterien nach Tsien	174
7.1	Beispiele	175
7.2	Beurteilung	179
8.	Berücksichtigung von Imperfektionen	180
8.1	Imperfektionsarten	180
8.2	Berechnung imperfekter Systeme	184
8.2.1	Wahl der Imperfektionen	185
8.2.2	Zum Rechenablauf	187
8.2.3	Beispiele	187
9.	Zusammenfassung und Ausblick	194

Literaturverzeichnis

- [1] Allan, T. : The Local Buckling Behaviour of Certain Shell Forms.
IASS - Bulletin 18 (1977) 19/31.
- [2] Almroth, B. O. , Bifurcation Analysis as an Approximation for the Collapse Load for General Shells.
Brogan, F. A. : AIAA Journal 10 (1972) 463/467.
- [3] Arbocz, J. : Berechnung der Beullasten von axialbelasteten, dünnwandigen Kreiszyllindern aus gemessenen Vorbeulen.
Sonderheft der DFVLR anlässlich der Braunschweiger Schalenbeultagung 1975, 267/281.
- [4] Argyris, J. H. : Continua and Discontinua.
Proceedings Conf. on Matrix Meth. Struct. Mech. , Wright - Patterson A. F. Base, Ohio, 1965, 11/189.
- [5] Argyris, J. H. , Geometric Nonlinearity and the Finite Element Displacement Method.
König, M. , Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, ISD-Report Nr. 174 (1974).
Nagy, D. A. ,
Haase, M. ,
Malejannakis, G. :
- [6] Basar, Y. : Zum allgemeinen Begriff der Stabilität und zur Stabilitätstheorie von Schalen.
"Konstruktiver Ingenieurbau", Berichte aus dem Institut für konstr. Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum, Heft 17 (1973) 5/24.
- [7] Basar, Y. , Zur linearen Beuluntersuchung hyperbolischer Rotationsschalen unter Außendruck.
Kreuz, B. : Der Stahlbau, 46 (1977) 80/85.

- [8] Bathe, K. -J. , Finite Element Formulations for Large Dis-
 Ramm, E. , placement and Large Strain Analysis.
 Wilson, E. L. : SESM Report No. 73-14, Department Civil
 Engineering, Uni. of California, Berkeley,
 1973.
- [9] Bathe, K. -J. , Finite Element Formulations for Large De-
 Ramm, E. , formation Dynamic Analysis.
 Wilson, E. L. : Int. J. Num. Meth. Eng. 9 (1975) 353/386.
- [10] Bathe, K. -J. , NONSAP: A Structural Analysis Program
 Wilson, E. L. , for Static and Dynamic Response of Non-
 Iding, R. H. : linear Systems.
 SESM Report No. 74-4, Department Civil
 Engineering, Uni. of California, Berkeley,
 1974.
- [11] Bathe, K. -J. , Numerical Methods in Finite Element Analy-
 Wilson, E. L. : sis.
 Prentice Hall, New Jersey, 1976.
- [12] Besseling, J. F. : Non-Linear Analysis of Structures by the
 Finite Element Method as a Supplement to
 a Linear Analysis.
 Computer Methods in Applied Mechanics
 and Engineering 3 (1974) 173/194.
- [13] Bodner, S. R. : On the Conservativeness of Various Dis-
 tributed Force Systems.
 Journal Aeronautical Sciences 25 (1958) 132.
- [14] Bornscheuer, F. W. : DurchSchweißbeigenspannungen an zylinder-
 förmigen Konstruktionen ausgelöste Beul-
 erscheinungen.
 Schweißen und Schneiden 9 (1957) 492/494.

- [15] Bornscheuer, F. W. : Ausleuchten der Hintergründe verschiedener Beulvorschriften für isotrope Zylinder unter Axiallast.
Sonderheft der DFVLR anlässlich der Meersburger Schalenbeultagung 1976, 154/158.
- [16] Bornscheuer, F. W. : Zur Berechnung und Konstruktion druckbeanspruchter Schalen aus Stahl.
Berichte aus Forschung und Entwicklung des Deutschen Ausschusses für Stahlbau 4 (1977) 3/9.
- [17] Brendel, B.,
Ramm, E. : Stabilitätsuntersuchungen weitgespannter Tragwerke mit der Methode der finiten Elemente.
Int. Symposium "Weitgespannte Flächen-tragwerke", Uni. Stuttgart, 1976, Arbeitsunterlagen 1.
- [18] Brendel, B.,
Häfner, L.,
Ramm, E.,
Sättele, J. M. : Programmdokumentation und Eingabebe-schreibung zum Programmsystem NISA.
Unveröffentlichte Dokumentation des Inst. für Baustatik der Uni. Stuttgart, 1977.
- [19] Britvec, S. J. : The Stability of Elastic Systems.
Pergamon Press, New York, 1973.
- [20] Budiansky, B. : Buckling of Structures.
(Editor) IUTAM - Symposium Cambridge, USA, 1974,
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.
- [21] Bufler, H. : Energiemethoden II.
Vorlesungsreihe konstruktiver Ingenieur-bau, Uni. Stuttgart, Sommersemester 1976.

- [22] Bufler, H. : Zur Variationsformulierung nichtlinearer Randwertprobleme.
Ingenieur-Archiv 45 (1976) 17/39.
- [23] Bufler, H. : Inkrementelle Variationsformulierung gewisser nichtlinearer Randwertprobleme, insbesondere in der Elastizitätstheorie.
Ingenieur-Archiv 45 (1976) 229/242.
- [24] Bufler, H. : Generalized Variational Principles with Relaxed Continuity Requirements for Certain Nonlinear Problems with an Application to Nonlinear Elasticity.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. (1979).
- [25] Bushnell, D. : Analysis of Buckling and Vibration of Ring-Stiffened, Segmented Shells of Revolution.
Int. J. Solids Structures 6 (1970) 157/181.
- [26] Bushnell, D. : Stress, Stability and Vibration of Complex Branched Shells of Revolution: Analysis and User's Manual for BOSOR 4.
NASA CR - 2116 (1972).
- [27] Cohen, G. A. : Computer Analysis of Asymmetric Buckling of Ring-Stiffened Orthotropic Shells of Revolution.
AIAA - Journal 6 (1968) 141/149.
- [28] Connor, J. J. jr., Logcher, R. D., Chan, S. C. : Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures.
Journal Struct. Div. Proc. ASCE 94 (1968) 1525/1545.
- [29] Connor, J., Morin, N. : Perturbation Techniques in the Analysis of Geometrically Nonlinear Shells.
Proceedings IUTAM - Symposium on "High Speed Computing of Elastic Structures", Liège, 1970.

- [30] Croll, J. G. A. : Towards Simple Estimates of Shell Buckling Loads.
Der Stahlbau 44 (1975) 243/248 und 283/285.
- [31] Donnell, L. H. ,
Wan, C. C. : Effect of Imperfections of Buckling of Thin Cylinders and Columns under Axial Compression.
J. Appl. Mech. Transact. ASME 72 (1950) 73/83.
- [32] Dulácska, E. : Experimental Determination of the Critical Load of Shell Structures.
Symposium IASS, Budapest, 1965.
- [33] Dulácska, E. : On the Critical Load of Shells.
Bull. IASS 39 (1969) 31/36.
- [34] Dupuis, G. A. ,
Pfaffinger, D. D. ,
Marcal, P. V. : Effective Use of the Incremental Stiffness Matrices in Nonlinear Geometric Analysis.
Proceedings IUTAM - Symp. on "High Speed Computing of Elastic Structures", Liège, 1970.
- [35] Edlund, B. L. O. : Thin Walled Cylindrical Shells under Axial Compression.
Dissertation, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1974.
- [36] Esslinger, M. : Hochgeschwindigkeitsaufnahmen vom Beulvorgang dünnwandiger Zylinder.
Der Stahlbau 39 (1970) 73/76.
- [37] Esslinger, M. ,
Geier, B. : Gerechnete Nachbeullasten als untere Grenze der experimentellen axialen Beullasten von Kreiszy lindern.
Der Stahlbau 41 (1972) 353/360.

- [38] Esslinger, M., Geier, B.: Unheilträchtige Vorbeulformen bei isotropen Kreiszyklindern.
Sonderheft der DFVLR anlässlich der Meersburger Schalenbeultagung 1976.
- [39] Esslinger, M.: Neues über axialgedrückte Zylinder und Kegel, erarbeitet für die Formulierung von Schalenbeulvorschriften.
Wissenschaftliches Kolloquium zum Gedenken von Professor Ebner.
1. Mitteilung aus dem Institut für Leichtbau der TH Aachen, 1978.
- [40] Flügge, W.: Die Stabilität der Kreiszyklinderschale.
Ingenieur-Archiv 3 (1932) 463/506.
- [41] Fritz, H., Wittek, U.: Zur Stabilität der Flächentragwerke.
Mitteilung Nr. 74-6 des Instituts für konstr. Ingenieurbau, Ruhr-Uni., Bochum, 1974.
- [42] Fritz, H., Wittek, U.: Die Bedeutung dehnungsloser Beulzustände bei der Stabilitätsberechnung von Schalen.
Der Stahlbau 46 (1977) 40/45.
- [43] Fung, Y. C., Kaplan, A.: Buckling of Low Arches or Curved Beam of Small Curvature.
NACA TN-2840 (1952).
- [44] Fung, Y. C., Sechler, E. E.: Instability of Thin Elastic Shells.
First Naval Symposium on Structural Mechanics at Stanford University, 1958.
- [45] Fung, Y. C., Sechler, E. E.: Thin Shell Structures.
Prentice-Hall, New Jersey, 1974.
- [46] Gallagher, R. H., Yang, H. T. Y.: Elastic Instability Predictions for Doubly-Curved Shells.
Proceedings 2nd Conf. Matrix Meth. Struct. Mech., Wright-Patterson A. F. Base, Ohio, 1968, 711/739.

- [47] Gallagher, R. H. , A Method of Limit Point Calculation in
Mau, S. T. : Finite Element Structural Analysis.
NASA CR - 2115 (1972).
- [48] Gjelsvik, A. , The Energy Criterion and Snap Buckling of
Bodner, S. R. : Arches.
J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 88 (1962)
87/134.
- [49] Gjelsvik, A. , Nonsymmetrical Snap Buckling of Spherical
Bodner, S. R. : Caps.
J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 88 (1962)
135/165.
- [50] Glaum, L. W. , Buckling of Structures with Finite Pre-
Belytschko, T. , buckling Deformations - a Perturbation,
Masur, E. F. : Finite Element Analysis.
Int. J. Solids Struct. 11 (1975) 1023/1033.
- [51] Hoff, N. J. : Some Recent Studies of the Buckling of Thin
Shells.
Aeronaut. J. 73 (1969) 1057/1070.
- [52] Hoff, N. J. , Postbuckling Equilibrium of Axially Com-
Madsen, W. A. , pressed Circular Cylindrical Shells.
Mayers, J. : AIAA Journal 4 (1966) 126/133.
- [53] Hutchinson, J. W. , Postbuckling Theory.
Koiter, W. T. : Applied Mech. Reviews 23 (1970) 1353/1366.
- [54] Kaplan, A. , A Nonlinear Theory of Bending and Buckling
Fung, Y. C. : of Thin Elastic Shallow Spherical Shells.
NACA TN - 3212 (1954).
- [55] Kármán, Th. v. , The Buckling of Spherical Shells by Exter-
Tsien, H. S. : nal Pressure.
J. Aeronaut. Sciences 7 (1939) 43/50.
- [56] Keller, H. B. , Spherical Cap Snapping.
Reiss, E. L. : J. Aerospace Sciences 26 (1959) 643/652.

- [57] Kerr, A. D. ,
Soifer, M. T. : The Linearization of the Prebuckling State
and its Effect on the Determined Instability
Loads.
J. Appl. Mech. Transactions of the ASME
91 (1969) 775/783.
- [58] Kiciman, Ö. K. : Postbuckling Analysis of Shells with Appli-
cations to Cylindrical Segments.
Ph. D. Dissertation, University of California,
Berkeley, 1975.
- [59] Kirste, L. : Abwickelbare Verformungen dünnwandiger
Kreiszyylinder.
Österr. Ingenieur-Archiv 8 (1954) 149/151.
- [60] König, M. ,
Nagy, D. ,
Streiner, P. : Buckling Analysis with the ASKA Program-
system.
Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 16 (1978)
185/212.
- [61] Koiter, W. T. : The Effect of Axisymmetric Imperfections
on the Buckling of Cylindrical Shells under
Axial Compression.
Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. B 66 (1963) 265/279.
- [62] Koiter, W. T. : On the Stability of Elastic Equilibrium.
NASA TT F - 10 - 833 (1967).
- [63] Kollár, L. ,
Dulácska, E. : Schalenbeulung.
Werner-Verlag, Düsseldorf, 1975.
- [64] Krätzig, W. B. ,
Wittek, U. : Über den Einfluß der Membranenergie, der
Krümmung und der geometrischen Imper-
fektionen auf das Stabilitätsverhalten der
Schalen.
Sonderheft der DFVLR anlässlich der Braun-
schweiger Schalenbeultagung 1975, 294/298.

- [65] Law, V. J. : Solution of Systems of Nonlinear Equations.
NASA CR - 102 245 (1971).
- [66] Leipholz, H. : Die direkte Methode der Variationsrechnung
und Eigenwertprobleme der Technik.
Verlag G. Braun, Karlsruhe, 1975.
- [67] Lo, Hsu.,
Crate, H.,
Schwartz, E. B. : Buckling of Thin-Walled Cylinder under Axial
Compression and Internal Pressure.
NACA TN - 1027 (1951).
- [68] Mallet, R. H.,
Marcal, P. V. : Finite Element Analysis of Nonlinear Structures.
J. Struct. Div. Proc. ASCE 94 (1968) 2081/
2105.
- [69] Malvern, L. E. : Introduction to the Mechanics of a Continuous
Medium.
Prentice Hall, New Jersey, 1969.
- [70] Masur, E. F.,
Schreyer, H. L. : A Second Approximation to the Problem of
Elastic Instability.
Proc. Symposium on the Theory of Shells,
Donnel Anniversary Volume, University of
Texas, Houston (1967) 231/249.
- [71] El Naschie, S. : Abschätzung der unteren Stabilitätsgrenze
einer örtlich ausgebeulten zylindrischen
Schale unter Axialdruck.
Die Bautechnik 53 (1976) 163/164.
- [72] Nemat-Nasser, S.,
Shatoff, H. D. : Numerical Analysis of Pre- and Post-Critical
Response of Elastic Continua at Finite
Strains.
Computers & Structures 3 (1973) 983/999.
- [73] Neufville, R. de,
Connor, J. J. jr. : Postbuckling Behaviour of Thin Cylinders.
J. Eng. Mech. Div. Proc. ACSE 94 (1968)
585/602.

- [74] Otto, F. : Gitterschalen.
Eigenverlag Institut für leichte Flächentragwerke, Universität Stuttgart, erschienen als IL 10, 1975.
- [75] Pearson, C. E. : General Theory of Elastic Stability.
Quart. Appl. Math. 14 (1956) 133/144.
- [76] Pflüger, A. : Zur praktischen Berechnung der axialgedrückten Kreiszyinderschale.
Der Stahlbau 32 (1963) 161/165.
- [77] Pflüger, A. : Zur praktischen Berechnung der Kreiszyinderschale unter Manteldruck.
Der Stahlbau 35 (1966) 243/252.
- [78] Pflüger, A. : Stabilitätsprobleme der Elastostatik.
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York, 1975, 3. Auflage.
- [79] Pogorelov, A. V. : Shells of Positive Gaussian Curvature under Postcritical Deformations.
NASA TTF - 444 (1967).
- [80] Raju, I. J.,
Rao, V. G.,
Murthy, T. V. G. K. : Eigenvalues and Eigenvectors of Large Order Banded Matrices.
Computers & Structures 4 (1974) 549/558.
- [81] Ramm, E. : Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
Habilitationsschrift, Universität Stuttgart, 1976.
- [82] Ramm, E. : Zum gegenwärtigen Stand der Stabilität von Kugelschalen unter Einbeziehung von Versuchsergebnissen.
Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich der Mechanik der Technischen Uni. Hannover, Bericht Nr. S. 77/1 (1977).

- [83] Rao, S. K. ,
Amba-Rao, C. L. : Lateral Vibration and Stability Relationship
of Elastically Restrained Circular Plates.
AIAA J. 10 (1972) 1689/1691, 11 (1973) 1056,
1599/1600.
- [84] Roberts, T. M. ,
Ashwell, D. G. : The Use of Finite Element Mid - Increment
Stiffness Matrices in the Postbuckling Analy-
sis of Imperfect Structures.
Int. J. Solids Structures 7 (1971) 805/823.
- [85] Rosen, A. ,
Singer, J. : Vibrations and Buckling of Axially Loaded
Stiffened Cylindrical Shells with Elastic
Restraints.
Int. J. Solids Structures 12 (1976) 577/588.
- [86] Schock, H. -J. : Untersuchungen zur Tragfähigkeit von seil-
verspannten Druckstäben.
Dissertation, Universität Stuttgart, 1976.
- [87] Sharifi, P. ,
Popov, E. P. : Nonlinear Buckling Analysis of Sandwich
Arches.
J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 97 (1971)
1397/1412.
- [88] Söreide, T. H. : Collapse Behaviour of Stiffened Plates Using
Alternative Finite Element Formulations.
Report No. 77 - 3, Division of Structural
Mechanics, The Norwegian Inst. of Techn. ,
The University of Trondheim, 1977.
- [89] Stein, E. ,
Kessel, M. H. : Numerische Methoden und deren Konver-
genz zur statischen Berechnung geometrisch
nichtlinearer Stabwerke im unter- und über-
kritischen Bereich.
Ingenieur-Archiv 46 (1977) 323/335.

- [90] Stricklin, J. A. , Static Geometric and Material Nonlinear
Rieseemann, W. A. v. , Analysis.
Tillerson, J. R. , Advances in Computational Methods in
Haisler, W. E. : Structural Mechanics and Design, 2nd US -
Japan Seminar on Matrix Meth. of Struct.
Analysis and Design, University of Alabama
Press, 1972, 301/324.
- [91] Svalbanos, V. , Buckling and Vibration Analysis for Stiff-
Balderes, T. : ened Orthotropic Shells of Revolution.
AIAA J. 10 (1972) 944/946.
- [92] Thompson, J. M. T. , A General Theory of Elastic Stability.
Hunt, G. W. : J. Wiley & Sons, 1973.
- [93] Tsien, H. S. : A Theory for the Buckling of Thin Shells.
J. Aeronautical Sciences 9 (1942) 373/384.
- [94] Tsien, H. S. : Lower Buckling Load in the Non-Linear
Buckling Theory for Thin Shells.
Quart. Appl. Math. 5 (1947) 236/237.
- [95] Uemura, M. : Axisymmetrical Buckling of an Initially
Deformed Shallow Spherical Shell under
External Pressure.
Int. J. Non-Linear Mech. 6 (1971) 177/192.
- [96] Walker, A. C. : A Non-Linear Finite Element Analysis of
Shallow Circular Arches.
Int. J. Solids Structures 5 (1969) 97/107.
- [97] Wessels, M. : Das statische und dynamische Durchschlag-
problem der imperfekten flachen Kugel-
schale bei elastischer rotationssymmetri-
scher Vorverformung.
Mitteilungen des Instituts für Statik der
Technischen Universität Hannover, Mit-
teilung 23, 1977.

- [98] Whitman, E. , Analysis of Unbraced Multi-Story Steel Rigid
Gaylord, E. H. : Frames.
J. Struct. Div. Proc. ASCE 94 (1968) 1143/
1163.
- [99] Wissmann, J. W. : Nonlinear Structural Analysis; Tensor For-
mulation.
Proc. Conf. on Matrix Meth. Struct. Mech. ,
Wright-Patterson A. F. Base, Ohio, 1965,
679/696.
- [100] Wittek, U. , Ein Maßstab für die Beurteilung der Imper-
Krätzig, W. B. : fektionsempfindlichkeit allgemeiner Schalen.
Sonderheft der DFVLR anlässlich der Meers-
burger Schalenbeultagung 1976, 170/182.
- [101] Wittek, U. : Privates Fachgespräch.
Bad Honnef, 13. 10. 1977.
- [102] Wolmir, A. S. : Biegsame Platten und Schalen.
Verlag für Bauwesen, Berlin, 1962.
- [103] Yang, T. H. , Buckling of Axially Loaded Open Shells.
Guralnick, S. A. : J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 105 (1976)
199/211.
- [104] Yoshimura, Y. : On the Mechanism of Buckling of a Circular
Cylindrical Shell under End Compression.
NACA TM - 1390 (1955).
- [105] Zarghamee, M. S. , Stability of Spaceframes.
Shah, J. M. : J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE 94 (1968)
371/384.
- [106] Zurmühl, R. : Matrizen.
Springer-Verlag, Berlin, 1964.

Bezeichnungen, Abkürzungen, Symbole

Geometrie

${}^m x_i$	kartesische Koordinate eines materiellen Punktes im Zustand m ($i = 1, 2, 3$)
${}^m A, {}^m V$	Fläche und Volumen des Körpers im Zustand m
$d({}^m a), d({}^m v)$	infinitesimales Flächen- und Volumenelement im Zustand m
${}^m n_i$	Flächennormalenvektor im Zustand m

Statische Größen

${}^m n_i$	Oberflächenkraft im Zustand m , bezogen auf den Zustand n
${}^m q_i$	Volumenkraft im Zustand m , bezogen auf den Zustand n (pro Masseneinheit)
${}^m \rho$	spezifische Masse (Dichte) des Körpers im Zustand m
${}^m F_i$	verallgemeinerte innere Knotenkraft im Zustand m
${}^m R_i$	verallgemeinerte äußere Knotenkraft im Zustand m
${}^m T_{ij}$	Cauchy Spannungstensor im Zustand m
${}^m S_{ij}$	Piola-Kirchhoff Spannungstensor 2. Art im Zustand m , bezogen auf den Zustand n
${}^n S_{ij}$	Inkrement des Piola-Kirchhoff Spannungstensors 2. Art

Kinematische Größen

${}^m x_{i,j} = \frac{\partial ({}^m x_i)}{\partial ({}^n x_j)}$	Deformationsgradient
${}^m u_i$	Verschiebungsvektor vom Ausgangszustand zum Zustand m
u_i	Verschiebungsinkrement $u_i = {}^2 u_i - {}^1 u_i$

$\Delta u_i^{(m)}$	Verschiebungskorrektur des Inkrements u_i im Iterationszyklus (m)
δu_i	virtuelle Verschiebung
$\frac{m}{n} \epsilon_{ij}$	Green-Lagrange Verzerrungstensor im Zustand m, bezogen auf den Zustand n
$\frac{m}{n} e_{ij}$	Euler-Almansi Verzerrungstensor im Zustand m
n^e_{ij}	Green-Lagrange Verzerrungstensor
n^e_{ij}	linearer Anteil des Inkrementes n^e_{ij}
n^n_{ij}	nichtlinearer Anteil des Inkrementes n^e_{ij}

Konstitutive Größen

$\frac{m}{n} C_{ijrs}$	konstitutiver Tensor im Zustand m, bezogen auf den Zustand n
n^C_{ijrs}	inkrementeller konstitutiver Tensor
$\frac{m}{n} E$	Elastizitätsmodul
$\frac{m}{n} \nu$	Querdehnzahl

Arbeits- und Energieausdrücke

$\frac{m}{n} \delta W_{(i)}, \frac{m}{n} \delta W_{(a)}$	virtuelle innere und äußere Arbeit im Zustand m
$\frac{m}{n} \pi_{(i)}, \frac{m}{n} \pi_{(a)}$	inneres und äußeres Potential im Zustand m
$\frac{m}{n} \pi$	Gesamtpotential im Zustand m

Obere Indizes

links

m	Wirkungszustand einer Größe	
0	Ausgangszustand	} geometrisch nichtlineare Analyse
1	Zustand vor dem Inkrement	
2	Zustand nach dem Inkrement	
G	Grundzustand	} Stabilitäts- analyse
K	kritischer Grundzustand	
N	Nachbarzustand	

rechts

t transponierte Matrix (transponierter Vektor)

Mitte

- (i) Glied der Reihenentwicklung von \mathbf{u} , \mathbf{v} und q
(0) konstanter Anteil
(1) lineares Glied
(2) quadratisches Glied

Untere Indizes

links

$n = 0, 1, 2, G$ Bezugszustand einer Größe

rechts

i, j, k, \dots Indizierung von Komponenten im kartesischen Koordinatensystem (1, 2, 3)

klass klassische Näherungsstufe

lin lineare Näherung

quad quadratische Näherung

Kopp Koppelung linearer und quadratischer Näherungen

Matrizen und Spaltenvektoren

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \hat{\mathbf{B}}$ Verbindungsmatrix zwischen Verschiebungsableitungen und Knotenpunktverschiebungen im Zustand m (bezogen auf Zustand n)

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{B}$ lineare Verzerrungs - Verschiebungsmatrix im Zustand m (bezogen auf den Zustand n)

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{C} , \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{C}$ Matrix der Werkstoffkennwerte $\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} C_{ijkl}$, $\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} C_{ijkl}$ (bezogen auf den Zustand n)

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{d} , \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{d}$ Vektor der Verschiebungsgradienten $\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} u_{i,j}$, $\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} u_{i,j}$

$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{\epsilon} , \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{\epsilon}$ Vektor der Verzerrungen $\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \epsilon_{ij}$, $\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \epsilon_{ij}$

${}_n \mathbf{e}, {}_n \boldsymbol{\eta}$	linearer und nichtlinearer Anteil von ${}_n \boldsymbol{\varepsilon}$
${}_n^m \mathbf{F}$	Vektor der verallgemeinerten inneren Knotenkräfte im Zustand m (bezogen auf den Zustand n)
${}_n^m \mathbf{K}$	inkrementelle Gesamtsteifigkeitsmatrix im Zustand m (bezogen auf den Zustand n)
${}_n^m \mathbf{K}_e$	inkrementelle elastische Steifigkeitsmatrix ($n = 0: {}_0^0 \mathbf{K}_e$ lineare elastische Steifigkeitsmatrix)
${}_n^m \mathbf{K}_g$	geometrische Steifigkeitsmatrix, Stabilitätsmatrix oder Anfangsspannungsmatrix
${}_0^m \mathbf{K}_u$	Matrix der Anfangsverschiebungen
${}_0^m \mathbf{K}_u^L, {}_n^m \mathbf{K}_g^L$	die in den Anfangsverschiebungen linearen Anteile von ${}_0^m \mathbf{K}_u$ und ${}_n^m \mathbf{K}_g$
${}_0^m \mathbf{K}_u^{NL}, {}_n^m \mathbf{K}_g^{NL}$	die in den Anfangsverschiebungen quadratischen Anteile von ${}_0^m \mathbf{K}_u$ und ${}_n^m \mathbf{K}_g$
\mathbf{M}	Massenmatrix (Diagonal- oder Bandmatrix)
${}_m \mathbf{R}$	Vektor der verallgemeinerten äußeren Knotenkräfte im Zustand m
${}_0^m \mathbf{s}, {}_0^0 \mathbf{s}$	Vektor der Piola - Kirchhoff Spannungen 2. Art ${}_0^m S_{ij}, {}_0^0 S_{ij}$
${}_0^m \mathbf{S}$	Matrix der Piola - Kirchhoff Spannungen 2. Art ${}_0^m S_{ij}$
${}_m^m \boldsymbol{\tau}$	Vektor der Cauchy Spannungen ${}_m^m \tau_{ij}$
${}_m^m \mathbf{T}$	Matrix der Cauchy Spannungen ${}_m^m \tau_{ij}$
${}_m \mathbf{u}, \mathbf{u}$	Vektor der Knotenpunktverschiebungen
${}_m \ddot{\mathbf{u}}$	Vektor der Knotenpunktbeschleunigungen
${}_m \mathbf{v}$	Eigenvektor (statische bzw. kinetische Stabilitätsuntersuchungen im Zustand m)
${}^K \mathbf{R}$	Vektor der kritischen äußeren Knotenkräfte

K_{R_o}	obere Indifferenzlast	}	Indifferenzkriterium
K_{R_u}	untere Indifferenzlast		
K_{R_E}	kritische Last nach den Energiekriterien (T sien)		
K_{R_B}	verzerrungsfreie Verbiegungen	}	kritische Lasten der dehnungslosen Modelle
K_{R_p}	"Plattenlösung"		
K_{R_T}	"Tangentenmodulverfahren"		
S_R	Schätzlasten aus begleitender Maßnahme		
$K_{R_{klass}}, K_{v_{klass}}$	klassische	}	kritische Lasten und Eigenvektoren der Anfangsstabilitäts- untersuchung
$K_{R_{lin}}, K_{v_{lin}}$	lineare		
$K_{R_{quad}}, K_{v_{quad}}$	quadratische		

Stabilitätsanalysen

EW - ...	Eigenwert - ...
m_λ, m_κ	Lastparameter (Lastvergrößerungsfaktor) im Zustand m
m_{ω_1}	Eigenkreisfrequenz (ω_1 natürliche Eigenfrequenz)
det	Determinante der inkrementellen Gesamtsteifigkeitsmatrix
m_Δ	bezogene Determinante im Zustand m

Zylinder- und Kugelschalen (isotrope Schalen)

l	Zylinderlänge
l_x	Länge einer Halbwelle in Längs- bzw. Meridianrichtung
l_y	Länge einer Halbwelle in Umfangs- bzw. Ringrichtung
m	Anzahl der Vollwellen in Umfangs- bzw. Ringrichtung

n	Anzahl der Halbwellen in Längs- bzw. Meridianrichtung
p	Längsbelastung der Kreiszyinderschale
q	Außendruck bei Zylinder- bzw. Kugelschale
r	Zylinder- bzw. Kugelradius
S	Steifigkeitsparameter
t	Schalendicke
D	Dehnsteifigkeit der Schale
K	Biegesteifigkeit der Schale
α	Beulwellenverhältnis

Weitere Bezeichnungen, Abkürzungen und Symbole werden im Text erläutert.

1. Einleitung

Die Notwendigkeit von Stabilitätsuntersuchungen druckbeanspruchter Konstruktionen ist seit langem bekannt. Erste Arbeiten auf dem Gebiet des Stabknickens gehen auf Euler (1774) zurück. Entsprechende Untersuchungen an Platten und Schalen wurden in umfangreichem Maße zu Anfang dieses Jahrhunderts begonnen. Als Meilensteine auf diesem Gebiet können die Arbeiten von Zoelly (1915) für die Kugelschale bzw. von Timoshenko (1910) und Flügele (1932) für das Beulen der Kreiszyinderschale angesehen werden. Die Versagensgrenzen wurden dabei über die Verzweigungslasten der "klassischen" Stabilitätstheorie bestimmt. Experimente zeigten jedoch bald, daß die realen Versagenslasten häufig nur bei einem Bruchteil der theoretisch ermittelten Werte lagen. Um diese Diskrepanz zu klären, haben v. Kármán/Tsien (1939, 1941) die Untersuchung des Nachbeulbereiches mit in die Stabilitätsanalyse einbezogen und die untere Indifferenzlast als maßgebliche Versagensgrenze festgelegt. Der nächste Versuch zur Aufhellung tatsächlicher Beulvorgänge kam von Tsien (1942, 1947), der äußere energetische Störungen (z. B. aus dynamischen Einflüssen) als Ursache für die frühzeitige Einleitung des Beulvorganges ansah. Eine weitere Entwicklung, die vor allem in neuerer Zeit eine größere Anzahl von Anhängern gefunden hat, leiteten Yoshimura (1947) und Kirste (1952) durch die Annahme dehnungsloser Zustände im Nachbeulbereich ein.

Ein anderer richtungsweisender Vorstoß zur realistischen Beurteilung des Tragverhaltens tatsächlicher Systeme ging von Koiter (1945) und Donnell (1950) aus. Sie untersuchten den Einfluß geometrischer Formabweichungen auf das Stabilitätsverhalten und zeigten, daß bereits sehr kleine Imperfektionsamplituden zu deutlichen Abminderungen in den Versagenslasten führen können. In der Folgezeit wurden diese Untersuchungen durch andere Imperfektionsarten wie Abweichungen in den Lasten, im Material u. a. erweitert. Mit dieser Problematik direkt verbunden ist die Erfassung des (geometrisch) nichtlinearen Verhaltens im Vorbeulbereich, eine Fragestellung, die auch durch die Tendenz zu schlanken und weitgespannten Tragwerken immer mehr in den Vordergrund gerückt ist.

Die analytische Erfassung der nichtlinearen Effekte war wegen des Rechenaufwandes zunächst auf Sonderfälle beschränkt. Mit der Methode der finiten

Elemente (bzw. der finiten Differenzen) und dem Einsatz von Großrechenanlagen ist es heute möglich, auch komplexe Tragwerksgeometrien zu untersuchen. Dennoch stellen nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen in Finite-Element-Programmen weiterhin Ausnahmen dar.

Hauptziel dieser Arbeit ist eine zusammenfassende Beurteilung von Verfahren zur Bestimmung kritischer Lasten bei geometrisch nichtlinearem Verhalten in Verbindung mit der Methode der finiten Elemente. Dazu werden vorab kurz die Grundlagen der geometrisch nichtlinearen Analyse und ihre Verwirklichung in der Methode der finiten Elemente dargestellt (Kapitel 2). Anschließend werden Begriffe zur Stabilität erläutert, Stabilitätskriterien beschrieben und die Gleichungen der nichtlinearen Stabilitätstheorie abgeleitet (Kapitel 3). Die beiden folgenden Hauptabschnitte befassen sich mit der vollständigen und näherungsweise Auswertung der nichtlinearen Stabilitätsgleichungen (Kapitel 4, 5). Dabei werden einerseits verschiedene Vorgehensweisen untersucht und ihre Ziele und Möglichkeiten aufgezeigt, andererseits wird über eine anfängliche Abschätzung der Systemeigenschaften nach einem Kriterium gesucht, um für ein zu untersuchendes Tragwerk den Lösungsweg mit dem geringsten numerischen Aufwand auszuwählen.

Das zweite Ziel der Arbeit ist die Abschätzung des Tragverhaltens imperfektionsbehafteter Systeme. In diesem Zusammenhang wird die globale Erfassung von Formabweichungen mit Hilfe der dehnungslosen Modelle (Kapitel 6) und der Energiekriterien (Kapitel 7) untersucht und diskutiert. Im abschließenden Teil der Arbeit (Kapitel 8) wird der Einfluß gezielt vorgegebener Imperfektionen und ihre Berücksichtigung bei der Berechnung kritischer Lasten dargelegt.

Die Beurteilung der verschiedenen Verfahren erfolgt jeweils anhand ausgewählter Beispiele. Numerische Rechnungen wurden mit den Programmsystemen NONSAP [10] und NISA [18] durchgeführt. Beide Systeme eignen sich zur Berechnung von Strukturen mit geometrisch und physikalisch nichtlinearem Verhalten. Sie wurden im Rahmen der vorliegenden Arbeit um die Lösung nichtlinearer Stabilitätsprobleme erweitert und erlauben neben der hier behandelten Erfassung des geometrisch nichtlinearen Verhaltens auch Stabilitätsuntersuchungen unter Einschluß physikalischer Nichtlinearitäten.

2. Geometrisch nichtlineare Elastostatik

2.1 Kontinuumsmechanische Formulierung der geometrisch nichtlinearen Elastostatik

Zur Beschreibung des Verschiebungszustandes eines elastischen Kontinuums werden die Gleichgewichtsbedingungen zunächst für einen vorgegebenen äußeren Lastzustand formuliert. Im Hinblick auf die numerische Ermittlung des nichtlinearen Verschiebungsverhaltens werden anschließend die Last- bzw. Verschiebungszustände inkrementiert. In diskretisierter Form ergeben sich dann nichtlineare algebraische Gleichungen für die Verschiebungsinkremente.

Die Darstellung hier folgt im wesentlichen dem Buch von Malvern [69] und der Arbeit von Ramm [81]. Zur Existenz des bei der Herleitung eingesetzten Prinzips der virtuellen Verschiebungen sei auf Bufler [22], [23] verwiesen.

2.1.1 Bezeichnungen für den inkrementellen Vorgang

Für die Beschreibung der Bewegung eines Körpers im dreidimensionalen Raum werden raumfeste kartesische Koordinatensysteme herangezogen. Ein inkrementeller Bewegungsvorgang ist in Bild 2.1 dargestellt. Zwischen dem Ausgangszustand 0 und der Endlage sind die Zwischenzustände 1 und 2 definiert, die sich um ein endliches Inkrement unterscheiden. Dieser Aufteilung liegt die Voraussetzung zugrunde, daß der Zwischenzustand 1 bereits ermittelt ist und nun ausgehend von diesem der Zustand 2 ermittelt werden soll.

Die einzelnen Zustände sind durch linksstehende Indizes gekennzeichnet. Der obere Index zeigt dabei die Lage (den "Wirkungszustand"), der untere den Bezugszustand an.

Zum Beispiel:

m	n	S_{ij}	m	Lage, Wirkungszustand
	n		n	Bezugszustand

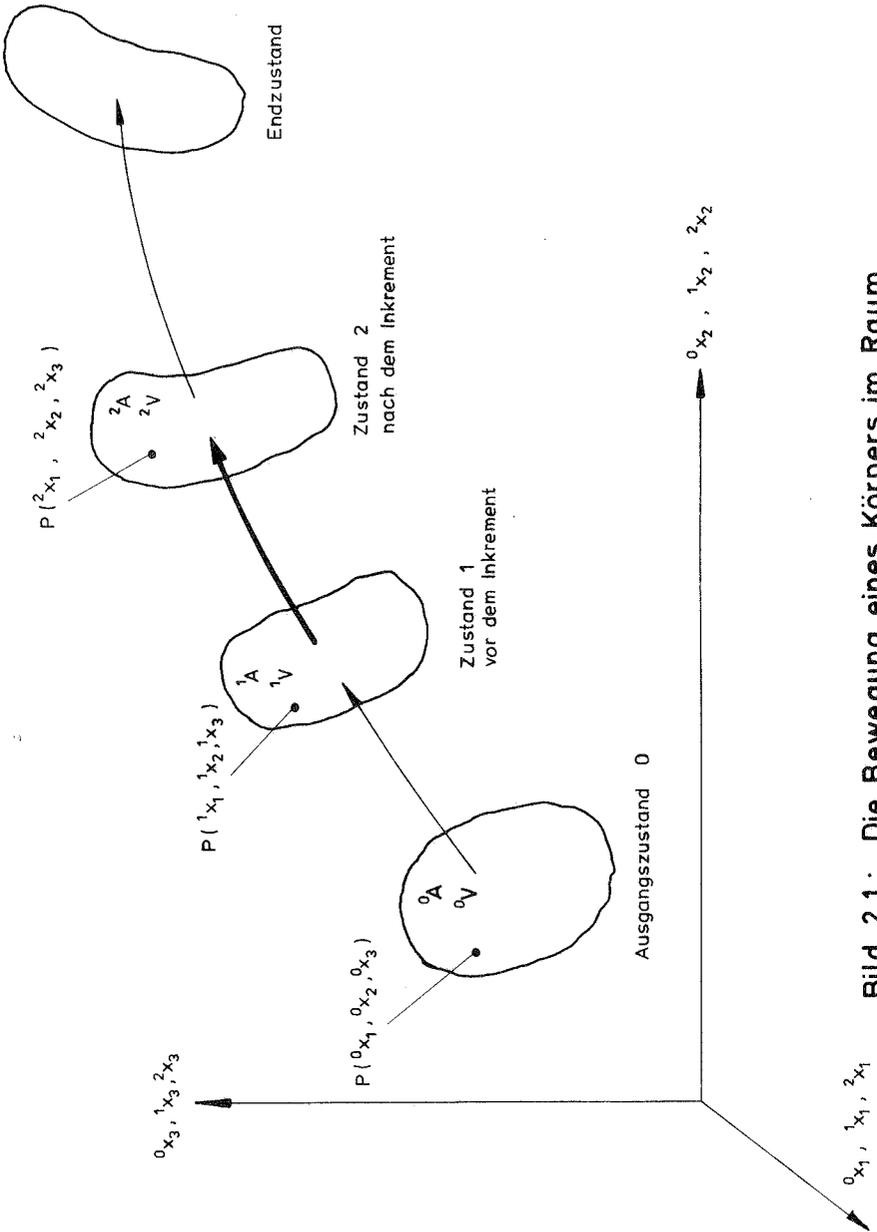


Bild 2.1: Die Bewegung eines Körpers im Raum

Inkrementelle Größen besitzen keinen linken oberen Index. Die Einführung eines Verschiebungsfeldes gemäß Bild 2.2 ergibt (mit $i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} {}^2x_i &= {}^1x_i + u_i \\ &= {}^0x_i + {}^1u_i + u_i \\ &= {}^0x_i + {}^2u_i \end{aligned} \quad (2.1)$$

mit: ${}^0x_i, {}^1x_i, {}^2x_i$ Koordinaten des betrachteten Punktes
 ${}^1u_i, {}^2u_i$ Gesamtverschiebungen im Zustand 1
bzw. 2
 u_i inkrementelle Verschiebungen

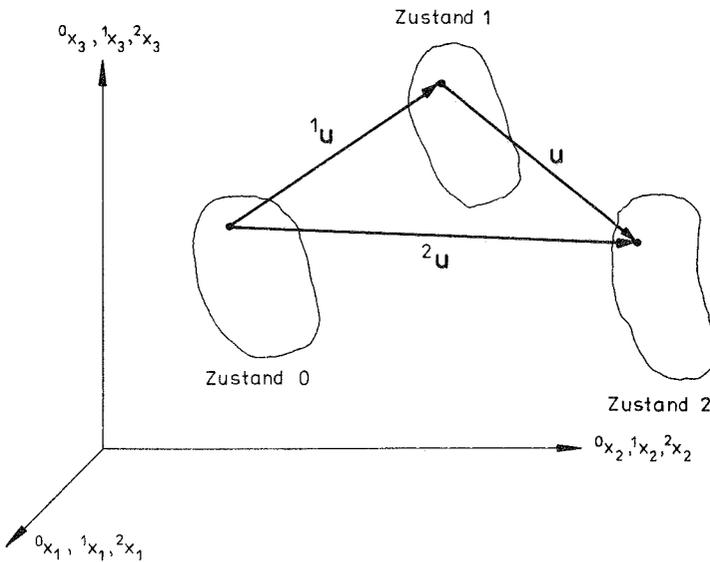


Bild 2.2: Verschiebungszustand

2.1.2 Verzerrungen, Spannungen, Werkstoffgesetz

1. Verzerrungsmaße

In der Lagrange-Formulierung wird der Verformungsvorgang als Funktion der Koordinaten des unverformten Ausgangszustandes dargestellt.

$$m_{x_i} = m_{x_i} ({}^0 x_i) \quad (2.2)$$

Der Deformationsgradient wird definiert zu

$$m_{x_i, j} = \frac{\partial m_{x_i}}{\partial {}^0 x_i} \quad (2.3)$$

und der Green - Lagrange - Verzerrungstensor zu

$$m_{e_{ij}} = \frac{1}{2} \cdot [m_{u_{i,j}} + m_{u_{j,i}} + m_{u_{k,i}} \cdot m_{u_{k,j}}] \quad (2.4)$$

Für den Zustand 1 ($m = 1$) folgt daraus

$${}^1 e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [{}^1 u_{i,j} + {}^1 u_{j,i} + {}^1 u_{k,i} \cdot {}^1 u_{k,j}] \quad (2.5)$$

und für den Zustand 2 mit ${}^2 u_i = {}^1 u_i + u_i$

$${}^2 e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [{}^1 u_{i,j} + {}^0 u_{i,j} + {}^1 u_{j,i} + {}^0 u_{j,i} + {}^1 u_{k,i} \cdot {}^1 u_{k,j} + {}^0 u_{k,i} \cdot {}^0 u_{k,j} + {}^1 u_{k,i} \cdot {}^0 u_{k,j} + {}^0 u_{k,i} \cdot {}^1 u_{k,j}] \quad (2.6)$$

Durch Abspaltung der inkrementellen Verzerrungen ${}^0 e_{ij}$ ergibt sich

$${}^2 e_{ij} = {}^1 e_{ij} + {}^0 e_{ij} \quad (2.7)$$

Faßt man die in den Verschiebungsinkrementen linearen Terme zu ${}^0 e_{ij}$ und die quadratischen Terme zu ${}^0 \eta_{ij}$ zusammen, so folgt

$${}^0 e_{ij} = {}^0 e_{ij} + {}^0 \eta_{ij} \quad (2.8)$$

mit:

$$0^e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [0^u_{i,j} + 0^u_{j,i} + 0^u_{k,i} \cdot 0^u_{k,j} + 0^u_{k,j} \cdot 0^u_{k,i}] \quad (2.9)$$

$$0^n_{ij} = 0^u_{k,i} \cdot 0^u_{k,j} \quad (2.10)$$

In der Euler-Formulierung dagegen wird die Verformung in Abhängigkeit der Koordinaten des verformten Zustandes beschrieben. Als Verzerrungsmaß dient dann der Euler - Almansi - Tensor:

$$m^e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [m^u_{i,j} + m^u_{j,i} - m^u_{k,i} \cdot m^u_{k,j}] \quad (2.11)$$

Die Abtrennung der inkrementellen Verzerrungen und deren analoge Aufteilung führt hier zu:

$$1^e_{ij} = 1^e_{ij} + 1^n_{ij} \quad (2.12)$$

$$1^n_{ij} = \frac{1}{2} \cdot 1^u_{k,i} \cdot 1^u_{k,j} \quad (2.13)$$

$$1^e_{ij} = \frac{1}{2} \cdot [1^u_{i,j} + 1^u_{j,i}] \quad (2.14)$$

2. Definition der Spannungen

Über die Gleichgewichtsbedingungen am Cauchy - Tetraeder in der verformten Konfiguration m erhält man:

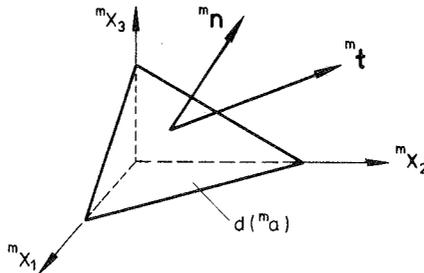


Bild 2.3 : Cauchy - Tetraeder

$$\frac{m_t}{m_i} = \frac{m_\tau}{m_{ij}} \cdot m_{n_j} \quad (2.15)$$

Dabei bedeutet:

$\frac{m_t}{m_i}$ Komponenten des Spannungsvektors

$\frac{m_\tau}{m_{ij}}$ Komponenten des symmetrischen Euler-Cauchy Spannungstensors

m_{n_j} Komponenten der Normalen auf das verformte Flächenelement $d(\overset{m}{a})$

Der Piola - Kirchhoff Spannungstensor 2. Art ist definiert zu:

$$\frac{m_S}{n_{ij}} = \frac{n_\rho}{m_\rho} \cdot n_{x_{i,k}} \cdot n_{x_{j,\ell}} \cdot m_{\tau_{k\ell}} \quad (2.16)$$

Er ist symmetrisch.

Entsprechend der Inkrementierung der Verschiebungen (Gleichung (2.1)) können auch inkrementelle Spannungen gebildet werden:

$$\begin{aligned} \text{allgemein:} \quad \frac{2}{n} S_{ij} &= \frac{1}{n} S_{ij} + n S_{ij} \\ n = 0: \quad \frac{2}{0} S_{ij} &= \frac{1}{0} S_{ij} + 0 S_{ij} \\ n = 1: \quad \frac{2}{1} S_{ij} &= \frac{1}{1} S_{ij} + 1 S_{ij} \end{aligned} \quad (2.17)$$

3. Werkstoffgesetz

Bei elastischem Verhalten ergeben sich unter Voraussetzung linearer Beziehungen zwischen den Spannungs- und Verzerrungsgrößen die konstitutiven Gleichungen zu:

$$\begin{aligned} \frac{m_S}{0 S_{ij}} &= \frac{m_C}{0 C_{ijkl}} \cdot \frac{m_\epsilon}{0 \epsilon_{kl}} \\ \frac{m_\tau}{m_{ij}} &= \frac{m_C}{m_{ijkl}} \cdot \frac{m_\epsilon}{m_{kl}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

und in inkrementeller Form:

$$\begin{aligned} \frac{0}{0} S_{ij} &= \frac{0}{0} C_{ijkl} \cdot \frac{0}{0} \epsilon_{kl} \\ \frac{1}{1} S_{ij} &= \frac{1}{1} C_{ijkl} \cdot \frac{1}{1} \epsilon_{kl} \end{aligned} \quad (2.19)$$

d. h. die Piola - Kirchhoff Spannungen 2. Art sind über den symmetrischen Elastizitätstensor mit den Green - Lagrange Verzerrungen und die Cauchy - Green Spannungen mit den Euler - Almansi Verzerrungen verknüpft.

Die beiden Elastizitätstensoren ${}^m_0 C_{ijkl}$ und ${}^m_m C_{ijkl}$ können mit Hilfe der Deformationsgradienten ineinander überführt werden. Bei Voraussetzung konstanter Werkstoffkennwerte in ${}^m_0 C_{ijkl}$ hängen daher die Elemente ${}^m_m C_{ijkl}$ nichtlinear von den Deformationen ab.

2.1.3 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Die Gleichgewichtsbedingungen des gesuchten Zustandes 2 werden über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen formuliert. Es lautet:

$${}^2_\delta W_{(i)} + {}^2_\delta W_{(a)} = 0 \quad (2.20)$$

${}^2_\delta W_{(i)}$ virtuelle innere Arbeit (Arbeit der Spannungen im Zustand 2 an den virtuellen Verzerrungen)

${}^2_\delta W_{(a)}$ virtuelle äußere Arbeit (Arbeit der äußeren Kräfte im Zustand 2 mit den virtuellen Verschiebungen)

Nach [69] lautet Gleichung (2.20) ausführlich:

$$\underbrace{-\int_V {}^2_\tau_{ij} \cdot \delta u_{j,i} \cdot d({}^2_v)}_{{}^2_\delta W_{(i)}} + \underbrace{\int_A {}^2_t_i \cdot \delta u_i \cdot d({}^2_a) + \int_V {}^2_\rho \cdot {}^2_q_i \cdot \delta u_i \cdot d({}^2_v)}_{{}^2_\delta W_{(a)}} = 0 \quad (2.21)$$

Die virtuellen Verschiebungen δu_i müssen zulässig sein, d. h. den geometrischen Randbedingungen genügen und die kinematischen Gleichungen befriedigen.

Da sämtliche Größen der Gleichung (2.21) auf den noch unbekanntem Zustand 2 bezogen sind, können die Integrale nicht direkt ausgewertet werden. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, transformiert man alle Größen auf einen bereits berechneten Gleichgewichtszustand n (Vorgehensweise nach Lagrange). Durch Einsetzen der Spannungen und Verschiebungen nach Gl. (2.1) und (2.17) erhält man schließlich das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in inkrementeller Form.

Jenach Wahl des Bezugszustandes n unterscheidet man zwei wesentliche Darstellungen des Prinzips.

n = 0: Der Bezugszustand ist der Ausgangszustand, d. h. sämtliche Größen werden auf die unverformte Konfiguration bezogen.

Totale Lagrange (T. L.) - Formulierung

$$\int_{0V} {}_0S_{ij} \cdot \delta {}_0e_{ij} \cdot d({}^0v) + \int_{0V} {}_1S_{ij} \cdot \delta {}_0\eta_{ij} \cdot d({}^0v) = \delta W_{(a)} - \int_{0V} {}_1S_{ij} \cdot \delta {}_0e_{ij} \cdot d({}^0v) \quad (2.22 a)$$

n = 1: Die Zustandsgrößen werden auf die Lage 1 vor dem Inkrement bezogen, d. h. auf einen mitgehenden Verschiebungszustand.

Mitgehende ("updated") Lagrange (U. L.) - Formulierung

$$\int_{1V} {}_1S_{ij} \cdot \delta {}_1e_{ij} \cdot d({}^1v) + \int_{1V} {}_1\tau_{ij} \cdot \delta {}_1\eta_{ij} \cdot d({}^1v) = \delta W_{(a)} - \int_{1V} {}_1\tau_{ij} \cdot \delta {}_1e_{ij} \cdot d({}^1v) \quad (2.22 b)$$

Die virtuellen Arbeitsausdrücke der T. L. - und U. L. -Formulierung stellen nichtlineare Beziehungen für die unbekanntenen Verschiebungsinkremente dar. Eine Algebraisierung (FEM, FDM) liefert bei Verwendung von linearen konstitutiven Gleichungen (Gleichungen (2.18) und (2.19)) ein System kubischer Gleichungen für die gesuchten Verschiebungsinkremente u_1 .

2.1.4 Linearisierung

Auf die gebräuchlichsten Methoden zur Lösung nichtlinearer Gleichungen wird in [65] eingegangen. Man kann dabei zwei prinzipielle Möglichkeiten unterscheiden:

- Die iterative Bearbeitung der nichtlinearen Gleichungen.
- Linearisierung des Gleichungssystems mit iterativer Beseitigung des Linearisierungsfehlers.

Wird auf die in der Literatur häufig angewandte Linearisierung zurückgegriffen, so erfordert dies eine Linearisierung der virtuellen Arbeitsausdrücke (Gleichungen (2.22)). Mit ${}^0e_{ij} \rightarrow {}^0e_{ij}$ und ${}^1e_{ij} \rightarrow {}^1e_{ij}$ erhält man Näherungsaussagen für die Gleichgewichtsbedingungen, die nach der Diskretisierung die inkrementellen Verschiebungen in linearer Form enthalten,

Für die T, L, - Formulierung ergibt sich:

$$\int_{0V} {}^0C_{ijkl} \cdot {}^0e_{kl} \cdot \delta {}^0e_{ij} \cdot d({}^0v) + \int_{0V} {}^1S_{ij} \cdot \delta {}^0\eta_{ij} \cdot d({}^0v) = 2\delta W_{(a)} - \int_{0V} {}^1S_{ij} \cdot \delta {}^0e_{ij} \cdot d({}^0v) \quad (2.23 a)$$

und für die U, L, -Formulierung:

$$\int_{1V} {}^1C_{ijkl} \cdot {}^1e_{kl} \cdot \delta {}^1e_{ij} \cdot d({}^1v) + \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \cdot \delta {}^1\eta_{ij} \cdot d({}^1v) = 2\delta W_{(a)} - \int_{1V} {}^1\tau_{ij} \cdot \delta {}^1e_{ij} \cdot d({}^1v) \quad (2.23 b)$$

Da der Zustand nach dem Inkrement wieder ein Gleichgewichtszustand sein soll, spricht man bei der iterativen Beseitigung des Linearisierungsfehlers auch von einer Gleichgewichtiteration (Abschnitt 2.3).

2.2 Algebraisierung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (Diskretisierung)

Die Diskretisierung der Arbeitsausdrücke erfolgt bei der Methode der finiten Elemente über bereichsweise Ritz - Ansätze. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in Form von Gleichung (2.21) ist dabei nur gültig, wenn die bereichsweisen Ansätze differenzierbar und stückweise stetig sind sowie die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen erfüllen. Genügen die Ansatzfunktionen dieser Forderung nicht, so ist der Ableitung ein erweiterter Arbeitsausdruck zugrunde zu legen [24].

Im weiteren wird die Diskretisierung mit Hilfe von isoparametrischen Verschiebungsmodellen durchgeführt. Ein Konzept, bei dem Geometrie und

Verschiebungen mit den gleichen Interpolationsfunktionen approximiert werden und das die Übergangsbedingungen stets erfüllt. Für einen Elementbereich führt dieses Vorgehen zu Ansatzfunktionen der Form:

$$\begin{aligned}
 \text{Geometrie:} \quad m_{x_i} &= \sum_{K=1}^M \phi^K \cdot m_{x_i}^K \\
 \text{Gesamtverschiebungen:} \quad m_{u_i} &= \sum_{K=1}^M \phi^K \cdot m_{u_i}^K \quad (2.24) \\
 \text{Inkrementelle Verschiebungen:} \quad u_i &= \sum_{K=1}^M \phi^K \cdot m_{u_i}^K
 \end{aligned}$$

Dabei sind:

- $m_{x_i}^K$ die Koordinaten des Knotenpunktes K im Zustand m
- $m_{u_i}^K, u_i^K$ die Verschiebungen bzw. Verschiebungsinkremente die-
ses Punktes
- ϕ^K die Interpolationsfunktionen
- M die Gesamtzahl der Knotenpunkte an einem Element

Zur Diskretisierung der Gleichgewichtsbedingungen werden die konstitutiven Beziehungen und die kinematischen Gleichungen mit Hilfe der Definitionen nach Tafel 2.1 in Matrizenform dargestellt.

1. Die konstitutiven Beziehungen (nach Gleichung (2.18))

$$\begin{aligned}
 m_0 \mathbf{s} &= m_0 \mathbf{C} \cdot m_0 \boldsymbol{\epsilon} \\
 m_1 \boldsymbol{\tau} &= m_1 \mathbf{C} \cdot m_1 \boldsymbol{\epsilon}
 \end{aligned} \quad (2.25)$$

bzw. in inkrementeller Form (nach Gleichung (2.19))

$$\begin{aligned}
 0 \mathbf{s} &= 0 \mathbf{C} \cdot 0 \boldsymbol{\epsilon} \\
 1 \mathbf{s} &= 1 \mathbf{C} \cdot 1 \boldsymbol{\epsilon}
 \end{aligned} \quad (2.26)$$

und nach Linearisierung

$$\begin{aligned}
 0 \mathbf{s} &= 0 \mathbf{C} \cdot 0 \mathbf{e} \\
 1 \mathbf{s} &= 1 \mathbf{C} \cdot 1 \mathbf{e}
 \end{aligned} \quad (2.27)$$

		totale Lagrange Darstellung	mitgehende Lagrange Darstellung
Knoten - Verschiebungen	Gesamt	${}^m \mathbf{U}^T = [{}^m u_1 \quad {}^m u_2 \quad {}^m u_3 \quad {}^m u_1^2 \quad {}^m u_2^2 \quad {}^m u_3^2 \quad {}^m u_1^3 \quad {}^m u_2^3 \quad {}^m u_3^3]$	${}^m \mathbf{U}_1^T \quad {}^m \mathbf{U}_2^T \quad {}^m \mathbf{U}_3^T$
	Inkrement	$\mathbf{U}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_3^3]$	$\mathbf{U}_1^T \quad \mathbf{U}_2^T \quad \mathbf{U}_3^T$
Verschiebungen - gradient	Gesamt	${}^m \mathbf{d}^T = [{}^m d_{1,1} \quad {}^m d_{1,2} \quad {}^m d_{1,3} \quad {}^m d_{2,1} \quad {}^m d_{2,2} \quad {}^m d_{2,3} \quad {}^m d_{3,1} \quad {}^m d_{3,2} \quad {}^m d_{3,3}]$	${}^m \mathbf{d}^T = [{}^m d_{1,1} \quad {}^m d_{1,2} \quad {}^m d_{1,3} \quad {}^m d_{2,1} \quad {}^m d_{2,2} \quad {}^m d_{2,3} \quad {}^m d_{3,1} \quad {}^m d_{3,2} \quad {}^m d_{3,3}]$
	Inkrement	${}^m \mathbf{d}^T = [{}^m d_{1,1} \quad {}^m d_{1,2} \quad {}^m d_{1,3} \quad {}^m d_{2,1} \quad {}^m d_{2,2} \quad {}^m d_{2,3} \quad {}^m d_{3,1} \quad {}^m d_{3,2} \quad {}^m d_{3,3}]$	$\mathbf{d}^T = [d_{1,1} \quad d_{1,2} \quad d_{1,3} \quad d_{2,1} \quad d_{2,2} \quad d_{2,3} \quad d_{3,1} \quad d_{3,2} \quad d_{3,3}]$
	Gesamt	${}^m \mathbf{E}^T = [{}^m \epsilon_{11} \quad {}^m \epsilon_{22} \quad {}^m \epsilon_{33} \quad 2 \cdot {}^m \epsilon_{12} \quad 2 \cdot {}^m \epsilon_{13} \quad 2 \cdot {}^m \epsilon_{23}]$	${}^m \mathbf{E}^T = [{}^m \epsilon_{11} \quad {}^m \epsilon_{22} \quad {}^m \epsilon_{33} \quad 2 \cdot {}^m \epsilon_{12} \quad 2 \cdot {}^m \epsilon_{13} \quad 2 \cdot {}^m \epsilon_{23}]$
Verzerrungen	Inkrement	$\mathbf{E}^T = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad 2 \cdot \epsilon_{12} \quad 2 \cdot \epsilon_{13} \quad 2 \cdot \epsilon_{23}]$	$\mathbf{E}^T = [\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad 2 \cdot \epsilon_{12} \quad 2 \cdot \epsilon_{13} \quad 2 \cdot \epsilon_{23}]$
	Lin. Anteil	${}^m \mathbf{e}^T = [{}^m e_{11} \quad {}^m e_{22} \quad {}^m e_{33} \quad 2 \cdot {}^m e_{12} \quad 2 \cdot {}^m e_{13} \quad 2 \cdot {}^m e_{23}]$	$\mathbf{e}^T = [e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad 2 \cdot e_{12} \quad 2 \cdot e_{13} \quad 2 \cdot e_{23}]$
	nicht-Anteil	${}^m \mathbf{e}^T = [{}^m e_{11} \quad {}^m e_{22} \quad {}^m e_{33} \quad 2 \cdot {}^m e_{12} \quad 2 \cdot {}^m e_{13} \quad 2 \cdot {}^m e_{23}]$	$\mathbf{e}^T = [e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad 2 \cdot e_{12} \quad 2 \cdot e_{13} \quad 2 \cdot e_{23}]$
Spannungen	Gesamt	${}^m \mathbf{S}^T = [{}^m s_{11} \quad {}^m s_{22} \quad {}^m s_{33} \quad {}^m s_{12} \quad {}^m s_{13} \quad {}^m s_{23}]$	${}^m \mathbf{S}^T = [{}^m s_{11} \quad {}^m s_{22} \quad {}^m s_{33} \quad {}^m s_{12} \quad {}^m s_{13} \quad {}^m s_{23}]$
	Inkrement	$\mathbf{S}^T = [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{33} \quad s_{12} \quad s_{13} \quad s_{23}]$	$\mathbf{S}^T = [s_{11} \quad s_{22} \quad s_{33} \quad s_{12} \quad s_{13} \quad s_{23}]$
	Gesamtspannungsmatrix	${}^m \mathbf{S} = [{}^m s_{11} \quad {}^m s_{12} \quad {}^m s_{13} \quad {}^m s_{22} \quad {}^m s_{23} \quad {}^m s_{33}]$	${}^m \mathbf{T} = [{}^m t_{11} \quad {}^m t_{12} \quad {}^m t_{13} \quad {}^m t_{22} \quad {}^m t_{23} \quad {}^m t_{33}]$

Tafel 2.1: Statische und Kinematische Größen Vektor und Matrixdarstellung

2. Die kinematischen Gleichungen

$${}^n \mathbf{e} = {}^1_n \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (2.28 a)$$

$${}^n \mathbf{d} = {}^1_n \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u} \quad (n = 0, 1) \quad (2.28 b)$$

\mathbf{u} Vektor der inkrementellen Knotenverschiebungen
 ${}^n \mathbf{e}$ linearisierte Verzerrungsinkremente
 ${}^n \mathbf{d}$ Inkrement des Verschiebungsgradienten
 ${}^1_n \mathbf{B}, {}^1_n \hat{\mathbf{B}}$ Operatormatrizen

Mit den Integralausdrücken nach Tafel 2. 2 erhält man aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen eine genäherte Gleichgewichtsaussage in linearer Form zu:

$$\left[{}^1_n \mathbf{K}_e + {}^1_n \mathbf{K}_g \right] \cdot \mathbf{u} = {}^2 \mathbf{R} - {}^1_n \mathbf{F} \quad (2.29)$$

Hierin ist:

${}^1_n \mathbf{K}_e$ die inkrementelle elastische Steifigkeitsmatrix

${}^1_n \mathbf{K}_g$ die geometrische Steifigkeitsmatrix
 (Anfangsspannungsmatrix, Stabilitätsmatrix)

${}^2 \mathbf{R}$ Vektor der verallgemeinerten Knotenkräfte

${}^1_n \mathbf{F}$ Vektor der verallgemeinerten inneren Kräfte

Die inkrementelle Gesamtsteifigkeitsmatrix

$${}^1_0 \mathbf{K}_e + {}^1_0 \mathbf{K}_g = {}^1_0 \mathbf{K} \quad (2.30)$$

wird auch als Tangentensteifigkeitsmatrix bezeichnet.

In der totalen Lagrange - Formulierung kann die inkrementelle elastische Steifigkeitsmatrix weiter aufgeteilt werden in die gewöhnliche lineare elastische Steifigkeitsmatrix ${}^0_0 \mathbf{K}_e$ und die Anfangsverschiebungsmatrix ${}^1_0 \mathbf{K}_u$.

$${}^1_0 \mathbf{K}_e = {}^0_0 \mathbf{K}_e + {}^1_0 \mathbf{K}_u \quad (2.31)$$

	totale Lagrange-Darstellung		mitgehende Lagrange-Darstellung	
	Gleichgewichts- ausdruck	entsprechender Ausdruck im P.d.v.V. (Gl. 2.23 a)	Gleichgewichts- ausdruck	entsprechender Ausdruck im P.d.v.V. (Gl. 2.23 b)
inkrementelle elastische Steifigkeits- matrix ${}^1\mathbf{K}_e$	$\int_{0V} {}^1\mathbf{B}_0^T \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_0 d(0V)$	$\int_{0V} \rho^0 c_{ijrs}^0 \delta^0 u_{i,r} \cdot \delta^0 u_{k,j} \delta_0 u_{k,j} d(0V)$ oder $\int_{0V} \rho^0 c_{ijrs}^0 \delta_0^2 \epsilon_{rs} \delta_0 \epsilon_{ij} d(0V)$	$\int_{1V} {}^1\mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d(1V)$	$\int_{1V} {}^1 c_{ijrs} u_{i,r} \delta_1 u_{k,j} d(1V)$ oder $\int_{1V} {}^1 c_{ijrs} \epsilon_{rs} \delta_1 \epsilon_{ij} d(1V)$
geometrische Steifigkeits- matrix ${}^1\mathbf{K}_g$	$\int_{0V} {}^1\hat{\mathbf{B}}_0^T \mathbf{S}_0 \hat{\mathbf{B}}_0 d(0V)$	$\int_{0V} {}^1 S_{ij} \delta^0 u_{k,j} \delta_0 u_{k,j} d(0V)$ oder $\int_{0V} {}^1 S_{ij} \delta_0 \pi_{ij} d(0V)$	$\int_{1V} {}^1\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{T} \hat{\mathbf{B}} d(1V)$	$\int_{1V} {}^1 T_{ij} u_{k,j} \delta_1 u_{k,i} d(1V)$ oder $\int_{1V} {}^1 T_{ij} \delta_1 \pi_{ij} d(1V)$
verallgemeinerte innere Kräfte ${}^1\mathbf{F}_n$	$\int_{0V} {}^1\mathbf{B}_0^T \mathbf{s}_0 d(0V)$	$\int_{0V} {}^1 S_{ij} \delta^0 u_{k,j} \delta_0 u_{k,j} d(0V)$ oder $\int_{0V} {}^1 S_{ij} \delta_0 \epsilon_{ij} d(0V)$	$\int_{1V} {}^1\mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau} d(1V)$	$\int_{1V} {}^1 T_{ij} \delta_1 u_{j,i} d(1V)$ oder $\int_{1V} {}^1 T_{ij} \delta_1 \epsilon_{ij} d(1V)$

Tafel 2.2 : Steifigkeitsausdrücke

Die beiden Teilmatrizen ergeben sich über die Aufspaltung der Operatormatrix

$${}^1_0 \mathbf{B} = {}^1_0 \mathbf{B}_1 + {}^1_0 \mathbf{B}_2 \quad ({}^1 \mathbf{u})$$

wobei ${}^1_0 \mathbf{B}_1$ unabhängig und ${}^1_0 \mathbf{B}_2$ (linear) abhängig von den Anfangsverschiebungen ${}^1 \mathbf{u}$ ist.

$${}^1_0 \mathbf{K}_u = \int_V {}^1_0 \mathbf{B}_1^t \cdot {}_0 \mathbf{C} \cdot {}^1_0 \mathbf{B}_2 \cdot d({}^0 v) + \int_V {}^1_0 \mathbf{B}_2^t \cdot {}_0 \mathbf{C} \cdot {}^1_0 \mathbf{B}_1 \cdot d({}^0 v) + \int_V {}^1_0 \mathbf{B}_2^t \cdot {}_0 \mathbf{C} \cdot {}^1_0 \mathbf{B}_2 \cdot d({}^0 v) \quad (2.32)$$

$${}^0_0 \mathbf{K}_e = \int_V {}^1_0 \mathbf{B}_1^t \cdot {}_0 \mathbf{C} \cdot {}^1_0 \mathbf{B}_1 \cdot d({}^0 v) \quad (2.33)$$

2.3 Gleichgewichtsiteration

1. Iterationsverfahren

Um mit der linearisierten Gleichung (2.29) vom Gleichgewichtszustand 1 zur gesuchten Lage 2 zu gelangen, muß der Linearisierungsfehler iterativ beseitigt werden.

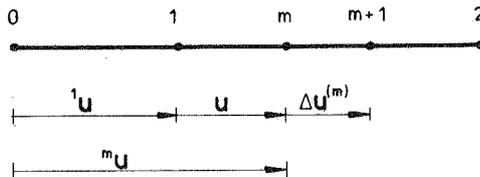


Bild 2.4 : Gleichgewichtsiteration

Mit den Beziehungen von Bild 2.4 ergibt sich aus Gleichung (2.29) die Iterationsvorschrift:

$$\left[{}^m_n \mathbf{K}_e + {}^m_n \mathbf{K}_g \right] \cdot \Delta \mathbf{u}^{(m)} = {}^2 \mathbf{R} - {}^m_n \mathbf{F} \quad (2.34)$$

Das ist eine Gleichung für den Verschiebungszuwachs $\Delta \mathbf{u}^{(m)}$, gemessen von einem bereits (iterativ) erreichten Zwischenzustand m . Die rechte Seite der Gleichung stellt die in diesem Zustand noch vorhandenen Ungleichgewichtskräfte dar (für $m = 0$, d. h. den Iterationsbeginn gilt: $\mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{(0)}$).

Das Vorgehen nach Gleichung (2.30) entspricht exakt dem Standarditerationsverfahren nach Newton - Raphson. Es wird ausgehend vom Zustand 1 so lange durchgeführt, bis für die Last ${}^2 \mathbf{R}$ der Gleichgewichtszustand erreicht ist. Dabei ist in jedem Iterationsschritt die Steifigkeitsmatrix für den aktuell erreichten Verschiebungszustand neu zu berechnen. Diese Anpassung wird umgangen, wenn während der Iteration die Matrizen des Zustandes 1 beibehalten werden. Man erhält so das modifizierte Newton - Raphson - Verfahren.

$$\left[\begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_e + \begin{matrix} 1 \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_g \right] \cdot \Delta \mathbf{u}^{(m)} = {}^2 \mathbf{R} - \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{F} \quad (2.35)$$

Die Verwendung konstanter Matrizen während der Iteration hat in der Regel eine Verschlechterung des Konvergenzverhaltens zur Folge. Während das Standard Newton - Raphson - Verfahren mindestens quadratisch konvergiert, besitzt die modifizierte Version nur noch lineare Konvergenz [89]. Das Belassen der Steifigkeitsmatrix führt damit zu einer erhöhten Anzahl von Iterationen. Welches Verfahren insgesamt die günstigere Rechenzeit ergibt, hängt von verschiedenen Faktoren ab (z. B. Algorithmus der Gleichungslösung, Art der Abspeicherung der Gesamtsteifigkeitsmatrix, Nichtlinearität der Verschiebungen innerhalb eines Lastinkrementes). Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit ergaben, daß bei vollständiger Abspeicherung der Steifigkeitsmatrix im Kernspeicher beide Verfahren zu etwa gleichen Rechenzeiten führen. Bei blockstrukturierter Abspeicherung verschiebt sich dagegen das Verhältnis zugunsten der modifizierten Newton-Raphson-Iteration.

Unabhängig von diesem allgemeinen Verhalten ist dem Standard-Verfahren wegen seiner stärkeren Konvergenzkraft beim Auftreten folgender Konvergenzschwierigkeiten der Vorzug zu geben:

- a) Schwierigkeiten durch Spannungumlagerungen.
Sie sind zu beobachten, wenn bei Belastungsbeginn zunächst im wesentlichen Biegezustände auftreten und die Membrananteile erst bei fortgeschrittenen Lastzuständen aktiviert werden (und umgekehrt).
- b) Konvergenzprobleme durch ausgeprägtes nichtlineares Verschiebungsverhalten innerhalb eines Lastinkrementes (z. B. Übergang zu flachen Bereichen und Überwindung flacher Bereiche im Last-Verschiebungsverhalten). Bei gleicher Lastinkrementierung führt das Standard-Verfahren näher an Durchschlagspunkte heran und ermöglicht so eine sicherere Extrapolation zum kritischen Zustand (Abschnitt 4.3).

Bild 2.5 enthält neben den beiden Iterationsverfahren nach Gl. (2.34) und (2.35) die Iteration mit der sogenannten Mittelpunktsteifigkeit [84]. Dabei erfolgt die Iteration zwar mit konstanter Steifigkeitsmatrix wie beim modifizierten Newton-Raphson-Verfahren, die Matrix wird jedoch nicht für die Verschiebungen $^1 \mathbf{u}$, sondern für einen linear extrapolierten Zwischenzustand erstellt. Bei gleichem Aufwand für das Erstellen und Triangularisieren der Gesamtsteifigkeitsmatrix erhält man so ein verbessertes Iterationsverfahren, das dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren i. a. deutlich überlegen ist. Eigene numerische Rechnungen haben dies eindeutig bestätigt.

2. Abbruchkriterien

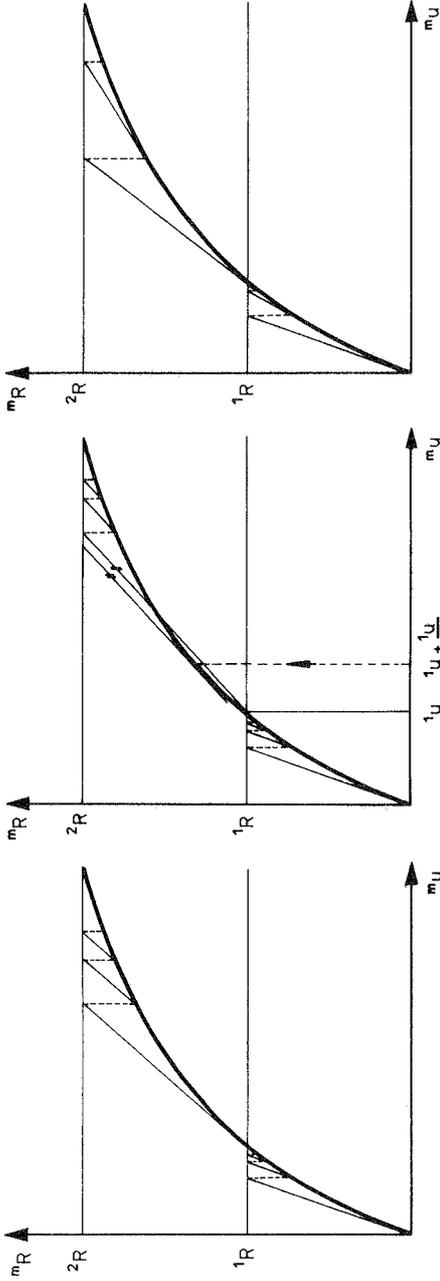
Die iterative Ermittlung inkrementeller Verschiebungen erfordert ein Abbruchkriterium für den Iterationsprozeß.

a) Konvergenzkriterien

Sie unterscheiden sich im wesentlichen in der Wahl der auf Konvergenz zu prüfenden Größe:

- Ungleichgewichtskräfte $^2 \mathbf{R} - \mathbf{m}_n \mathbf{F}$
(rechte Seiten der Gleichungen (2.34) bzw. (2.35))
- Zuwachs $\Delta \mathbf{u}^{(m)}$ der inkrementellen Verschiebungen

Die Konvergenz dieser Größen kann entweder lokal oder global gefordert werden:



a) modifiziertes Newton - Raphson
Verfahren (Gl. 2.35)

b) Mittelpunktssteifigkeit

c) Standard Newton - Raphson
Verfahren (Gl. 2.34)

Bild 2.5 : Inkrementell- iterative Lösungsverfahren

- lokal (Konvergenz einer Komponente)

$$\max | {}^2R_i - \frac{m}{n} F_i |, \quad \max | \Delta u_i^{(m)} |$$

- global (Konvergenz der euklidischen Norm)

$$\| {}^2R - \frac{m}{n} F \|, \quad \| \Delta u^{(m)} \|^2$$

Neben diesen absoluten Größen werden häufig auch bezogene Werte verwendet.

b) Divergenzkriterien

Ist das gewählte Konvergenzkriterium nach einer Reihe von Iterationen nicht erfüllt, so ist es sinnvoll zu prüfen, ob der Iterationsprozeß nicht divergiert. Zur Festlegung eines Divergenzkriteriums können die gleichen Größen herangezogen werden wie vorher bei den Konvergenzkriterien.

Beispiel: Programmsystem NONSAP [10]

$$\text{Konvergenzkriterium} \quad \frac{\| \Delta u^{(m)} \|}{\| {}^m u + \Delta u^{(m)} \|} < \epsilon \quad (\epsilon \text{ z. B. } 10^{-3})$$

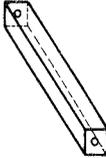
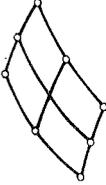
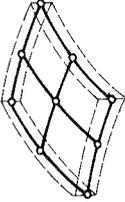
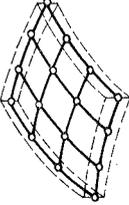
(Nachteil:

Mit größer werdendem ${}^m u$ wird das Kriterium bei konstantem ϵ immer schwächer.)

$$\text{Divergenzkriterium} \quad \frac{\| {}^2R - \frac{m}{n} F \|}{\| {}^2R \|} > 1$$

2.4 Zusammenstellung der verwendeten finiten Elemente

In Tafel 2.3 sind die für Beispielrechnungen eingesetzten Elemente zusammengefaßt und ihre charakteristischen Eigenschaften angegeben.

Element	räumliches Balkenelement	2 - dimensionales Element	degenerierte Schalenelemente	
			biquadratisch (S9)	bikubisch (S16)
Form				
Ansätze für Verschiebungs- größen	Biegung : kubisch Längsverschiebung + Torsion : linear	biquadratisch für Verschiebungen	biquadratisch für Verschiebungen und Rotationen	bikubisch für Verschiebungen und Rotationen
Freiheitsgrade (je Knoten)	3 Verschiebungen 3 Rotationen	2 Verschiebungen	3 Verschiebungen 2 Rotationen	3 Verschiebungen 2 Rotationen
Eigenschaften	kompatibel	isoparametrisch kompatibel	isoparametrisch kompatibel	isoparametrisch kompatibel
Literatur	[18] , [86]	[8] , [9]	[81]	[81]

Tafel 2.3 : Elemente für Beispielrechnungen aus NISA [18]

3. Die Stabilität elastischer Tragwerke

3.1 Instabilitätserscheinungen

Die Beurteilung des Tragverhaltens eines elastischen Systems erfolgt in der Regel über Last - Verschiebungsdiagramme. Dabei wird als Ergebnis der geometrisch nichtlinearen Rechnung ein Lastwert (oder Lastparameter) über eine ausgewählte Verschiebungsgröße aufgetragen. Die sich so ergebenden Kurvenzüge stellen Gleichgewichtslagen des belasteten Systems dar. Je nach Verhalten der Last - Verschiebungskurven spricht man

- a) von einem Spannungsproblem, wenn jedem Lastniveau eindeutig ein Verschiebungszustand zugeordnet ist,
- b) von einem Stabilitätsproblem, wenn Lastzustände vorhanden sind, zu denen mehrere Gleichgewichtslagen gehören (Mehrdeutigkeitsproblem).

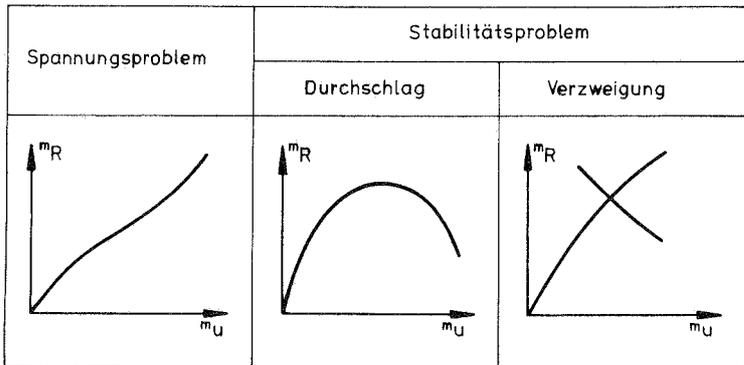
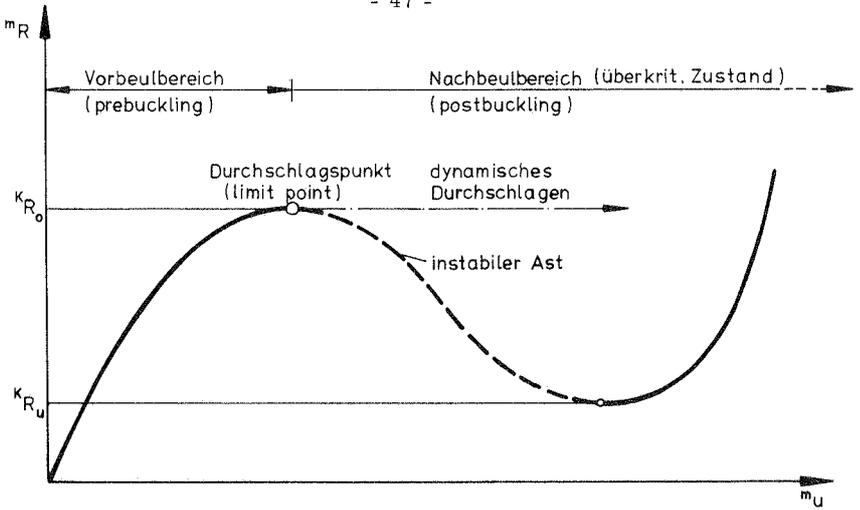
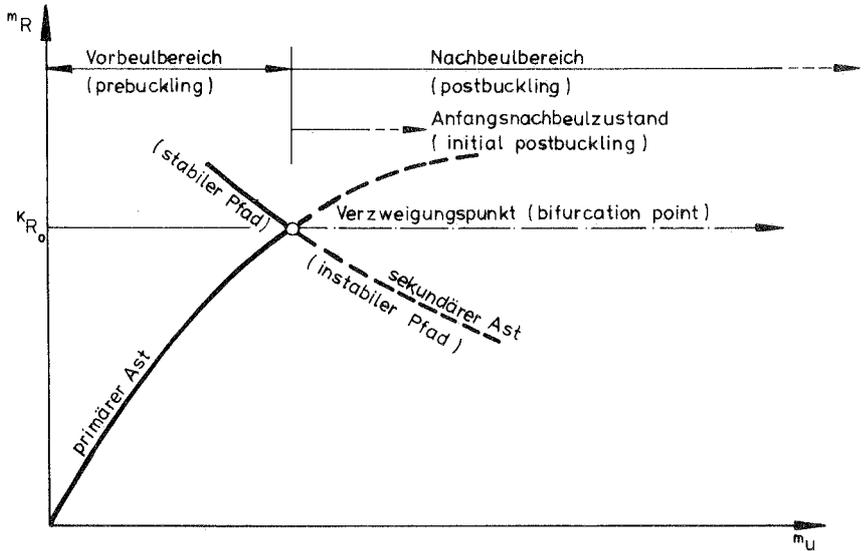


Bild 3.1.: Charakteristische Last-Verschiebungskurven



Durchschlagsproblem (snap - through problem)



Verzweigungsproblem (bifurcation problem)

Bild 3.2 : Instabilitäterscheinungen

Bei den Stabilitätsproblemen kann weiter unterschieden werden zwischen Durchschlags- und Verzweigungsproblemen. Während bei den Durchschlagsproblemen die Mehrdeutigkeit durch ein relatives Maximum in der Lastverschiebungskurve zustande kommt, folgt sie bei Verzweigungsproblemen durch Überschneidungen von primären und sekundären Gleichgewichtsästen. Die wichtigsten Bezeichnungen für diese zwei grundsätzlichen Instabilitätsphänomene sind in Bild 3.2 eingetragen.

Eine weitere Klassifizierung der Verzweigungsprobleme geht auf Koiter [62] zurück. Er unterscheidet zwischen asymmetrischen, symmetrisch stabilen und symmetrisch instabilen Verzweigungen. Der Symmetriebegriff bezieht sich dabei auf das Vorzeichen der ertragbaren Last für die beiden Pfade des sekundären Astes im Verzweigungspunkt.

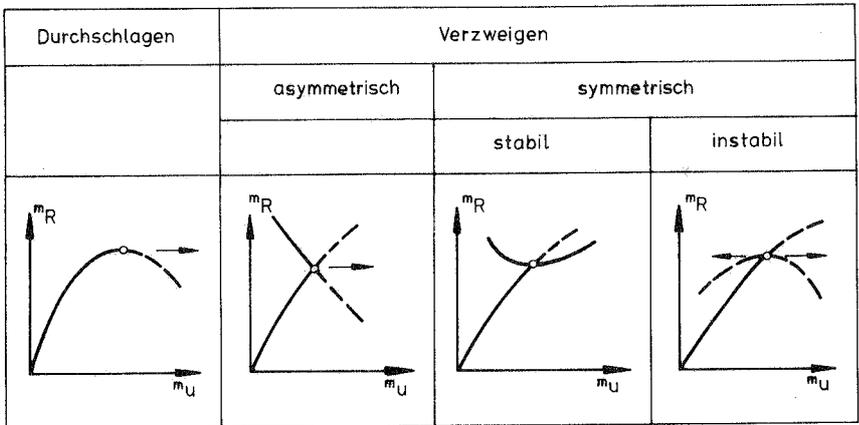


Bild 3.3: Klassifizierung der Instabilitätserscheinungen nach KOITER

3.2 Stabilitätsuntersuchungen

Das Ziel einer Stabilitätsuntersuchung ist die Ermittlung kritischer Lasten. Grundlage der Untersuchung ist die Wahl einer Stabilitätsdefinition, die festlegt, welches Systemverhalten (i. a. als Folge einer bewußt aufgebrachten Störung) als stabil oder instabil angesehen wird.

Aufbauend auf die Stabilitätsdefinition sind die Methoden zur Feststellung der Stabilität von Bedeutung. Das sind Verfahren zur Auswertung der Stabilitätsdefinitionen. Mit diesem Problemkreis direkt verbunden ist die Frage nach notwendigen und hinreichenden Stabilitätskriterien für die Art des zu untersuchenden Gleichgewichts.

Eine Stabilitätstheorie umfaßt schließlich neben der Festlegung einer Stabilitätsdefinition und der Wahl einer Methode zur Feststellung der Stabilität häufig zusätzliche Voraussetzungen über Art und Größe der Spannungen und Verschiebungen der auf Stabilität zu untersuchenden Zustände. Ziel ist, eine Stabilitätstheorie derart zu finden, daß die aus ihr resultierenden kritischen Lasten mit den Versagenslasten realer Systeme in brauchbarer Übereinstimmung stehen.

3.2.1 Statische und kinetische Stabilitätsuntersuchungen

Die Stabilität bzw. Instabilität eines Gleichgewichtszustandes wird über die Auswirkungen von statischen oder kinetischen Störungen des zu untersuchenden Zustandes beurteilt. Die verschiedenen Vorgehensweisen sind - einer Einteilung von Bufler [21] folgend - in Tafel 3.1 zusammengefaßt.

1. Definition der Zustände

Zur Formulierung der Stabilitätsgleichungen ist die Definition folgender Verschiebungszustände erforderlich:

- I: Der Ausgangszustand (Index 0)
Das ist der unbelastete, unverformte und spannungsfreie Zustand.
- II: Der Grundzustand (Index $G = m$)
Er geht durch Belastung aus dem Ausgangszustand hervor. Der Grundzustand ist ein Gleichgewichtszustand, der auf die Art seines Gleichgewichtes hin untersucht werden soll.

Stabuntersuch.	Art		Statische	Kinetische	
	Störung		Stabilitätsuntersuchung	Stabilitätsuntersuchung	
Methoden zur Feststellung der Stabilität	Direkte Methode		Euler	Ziegler, Ljapunow	
			Gleichgewichtslage des Nachbarzustandes	Erste Methode von Ljapunow : Integration der Bewegungsgleichungen.	
		Zweite Methode von Ljapunow : Auffinden von Ljapunow-funktionen.			
	Energimethode	Indifferenzkriterien $\delta^G \delta^G \pi = 0$	Dirichlet, Lagrange		Hamilton
				Timoshenko : $N\pi = 0$ (${}^G\pi = 0$)	Hamilton - Prinzip
				Bryan : ${}^G\delta^2 \delta^G \pi = 0$	
			P.d.v.V : $N\delta N\pi = 0$	P.d.v.V. + d'Alembert - Trägheitskräfte	
	Trefftz : $N\delta {}^G\delta^2 \delta^G \pi = 0$				
Anwendung	Stets anwendbar, wenn alle inneren und äußeren Kräfte Potentialeigenschaft besitzen (konservative Systeme)		Bei nicht konservativen Systemen ist i. a. die kinetische Stabuntersuchung erforderlich. Bei konservativen Systemen sind statische und kinetische Stabilitätsuntersuchungen gleichwertig.		

Tafel 3.1: Statische und kinetische Stabilitätsuntersuchungen

III : Der Nachbarzustand (Index N)

Der Nachbarzustand entsteht durch eine (kleine) Störung des Grundzustandes.

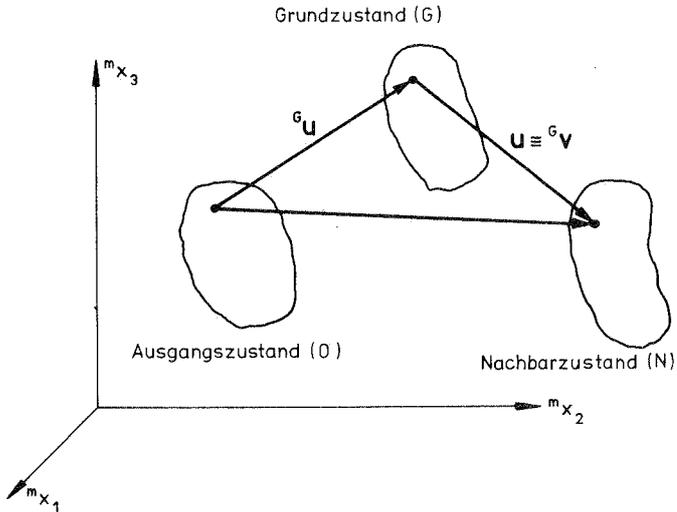


Bild 3.4 : Verformungszustände

2. Statische Stabilitätsuntersuchung mit der Methode der finiten Elemente

Bei Verwendung der direkten statischen Methode (Tafel 3.1, Methode nach Euler) gilt für die Festlegung der Stabilitätsgrenze:

"Die Stabilitätsgrenze ist dann erreicht, wenn neben der ursprünglichen Gleichgewichtslage (Grundzustand) mindestens eine infinitesimal benachbarte Gleichgewichtslage (Nachbarzustand) bei gleicher Belastung existiert." [21]

Identifiziert man in Bild 2, 2

Zustand 1 mit dem Grundzustand G und

Zustand 2 mit dem Nachbarzustand N,

so entsprechen die inkrementellen Verschiebungszustände den Verformungszuständen der Stabilitätsuntersuchung.

Damit ergibt sich aus Gleichung (2, 29) die linearisierte Gleichgewichtsbeziehung

$${}^G_n \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = {}^N \mathbf{R} - {}^G_n \mathbf{F} \quad (3.1)$$

Bei infinitesimal benachbarten Verschiebungszuständen ist dies eine exakte Gleichgewichtsbedingung für den Nachbarzustand. Aus der Gleichheit der äußeren Lasten in den Zuständen G und N ergibt sich ${}^G \mathbf{R} = {}^N \mathbf{R}$. Die zusätzliche Forderung, daß sich der Grundzustand im Gleichgewicht befindet, liefert damit ${}^G \mathbf{R} - {}^G_n \mathbf{F} = \mathbf{0}$, d. h. die Ungleichgewichtskräfte des Grundzustandes verschwinden. Damit folgt aus Gleichung (3. 1) als Kriterium für indifferentes Gleichgewicht (Indifferenzkriterium) nach der Umbenennung ${}^G \mathbf{v} \equiv \mathbf{u}$

$$\boxed{{}^G_n \mathbf{K} \cdot {}^G \mathbf{v} = \mathbf{0}} \quad (3.2)$$

Der Vektor ${}^G \mathbf{v}$ stellt die infinitesimalen Verschiebungen vom Grundzustand zum Nachbarzustand dar. Er gibt die Beulform bei Beginn des Anfangsnachbeulbereiches an.

3. Kinetische Stabilitätsuntersuchung mit Hilfe finiter Elemente

Zur Ableitung der Stabilitätsbedingungen wird die erste Methode von Ljapunow (Tafel 3.1) herangezogen. Ihr liegt die Stabilitätsdefinition nach Ljapunow/Ziegler zugrunde.

"Eine Gleichgewichtslage gilt dann als stabil, wenn die durch hinreichend kleine Störung verursachte Störbewegung für alle Zeiten beliebig klein bleibt." [21]

Anstelle der Gleichgewichtsbedingungen des Nachbarzustandes sind hier die inkrementellen Bewegungsgleichungen erforderlich. Sie gehen aus den Gleichgewichtsbedingungen des statischen Falls (Gleichung 2. 29) durch Hinzufügen der d'Alembert - Trägheitskräfte $\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}$ hervor.

$$\mathbf{}^m_n \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{}^2 \mathbf{R} - \frac{1}{n} \mathbf{F} - \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}$$

Befindet sich der untersuchte Grundzustand m im (statischen) Gleichgewicht, so gilt $\mathbf{}^m \mathbf{R}_i = \mathbf{}^m \mathbf{F}_i$, und es folgt:

$$\mathbf{}^m_n \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

Die aus einer Anfangsstörung des Grundzustandes folgenden Störbewegungen werden über den Ansatz

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \cdot \sin \omega \cdot t \quad (3.3)$$

erfaßt. Daraus ergibt sich (wegen $\ddot{\mathbf{u}} = -\mathbf{u} \cdot \omega^2$ und mit $\mathbf{u} \equiv \mathbf{}^m \mathbf{v}$)

$$\boxed{[\mathbf{}^m_n \mathbf{K} - \mathbf{}^m \omega^2 \cdot \mathbf{M}] \cdot \mathbf{}^m \mathbf{v} = \mathbf{0}} \quad (3.4)$$

Da beide Matrizen $\mathbf{}^m_n \mathbf{K}$ und \mathbf{M} reell und symmetrisch sind, bleiben die Eigenwerte $\mathbf{}^m \omega^2$ stets reell.

Sind alle Werte $\mathbf{}^m \omega^2 > 0$, so bleibt nach Gleichung (3. 3) die Störbewegung begrenzt und die Gleichgewichtslage m ist stabil.

Negative Werte von $\mathbf{}^m \omega^2$ (d. h. imaginäre Eigenfrequenzen) führen dagegen zum Anwachsen der Schwingungsamplituden und somit zu instabilem Verhalten.

Die dem Grenzfall

$$\boxed{\mathbf{}^m \omega = 0} \quad (3.5)$$

zugeordnete Laststufe wird als kritische Last angesehen.

Bei konservativen Problemen sind die statische und die kinetische Stabilitätsuntersuchung gleichwertig. Sie führen auf die kritischen Punkte im Last-Verschiebungsdiagramm. Verzweigungs- und Durchschlagspunkte werden dabei gleichermaßen erkannt.

Wegen der teilweise mangelnden Übereinstimmung zwischen den kritischen Lasten, ermittelt nach den beschriebenen Kriterien und den Versagenslasten realer Systeme, wurde schon frühzeitig nach "besseren" Stabilitätsdefinitionen und -kriterien gesucht. Zwei der bedeutendsten Vorgehensweisen werden im weiteren näher behandelt.

3.2.2 Dehnungslose Modelle (für Flächentragwerke)

Die Stabilitätsuntersuchungen dieser Modelle gehen von dehnungslosen Verformungszuständen im Nachbeulbereich aus (keine Dehnung der Mittelfläche). Das Vorgehen orientiert sich am Vergleich des Stabilitätsverhaltens der längsbelasteten Platte und der Kreiszyinderschale unter Axialbelastung (Bild 3.5). Um die in Bild 3.5 dargestellten Unterschiede im Nachbeulverhalten klären zu können, ist es erforderlich die Formänderungsenergie während des Beulvorganges zu beobachten.

Dabei zeigt sich, daß beim Plattenbeulen beim Übergang vom Grund- zum Nachbarzustand nur zusätzliche Biegeenergie aktiviert wird, die sich während des Beulens ständig vergrößert. Da mit zunehmendem Ausbeulen auch Membranenergie geweckt wird, ergibt sich ein deutliches Ansteigen des sekundären Astes im Nachbeulbereich. Die experimentellen Beullasten stehen in guter Übereinstimmung mit der Last am Verzweigungspunkt.

Im Gegensatz zur Platte kann die Kreiszyinderschale, bedingt durch die Flächenkrümmung zunächst nur Beulformen annehmen, die einen erheblichen relativen Anteil an Membranenergie beinhalten. Diese Membranenergie wird jedoch mit fortschreitendem Ausbeulen wieder abgebaut, weil das System vom bereits gebeulten Zustand aus in der Lage ist, Beulformen anzunehmen, die weniger Membranenergie gespeichert haben. Dieser Vorgang, der mit einem starken Abfall der Last-Verschiebungskurven verbunden ist, setzt sich so lange fort, bis schließlich in der Nähe der unteren Indifferenzlast ein Beulmuster zustande kommt, das im wesentlichen nur noch Biegeenergie enthält. Durch die "Bösartigkeit" des Nachbeulverhaltens ist auch die Imperfektionsanfälligkeit bedingt. Sind z. B. geometrische Abweichungen von der Sollform vorhanden, so kann das veränderte System von vornherein Beulformen annehmen, die weniger Membranenergie gespeichert haben als das perfekte System am Indifferenzpunkt. Damit ist

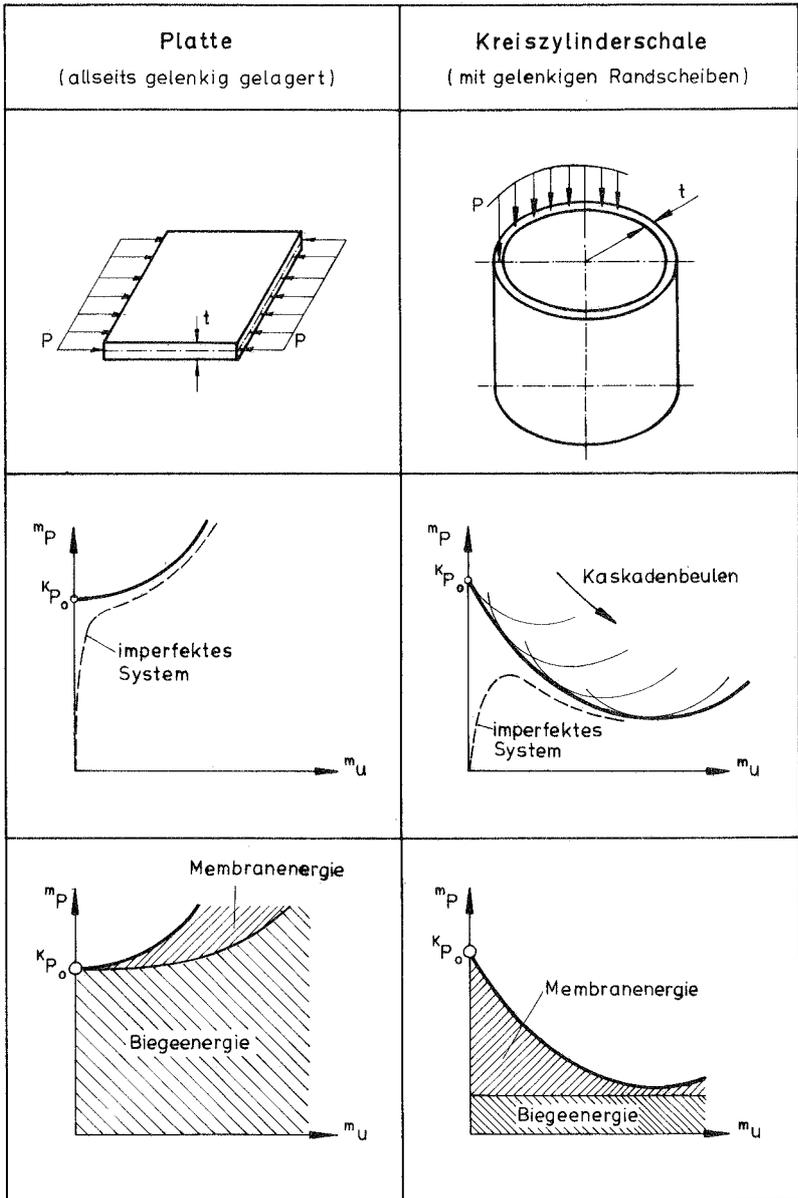


Bild 3.5 : Stabilitätsverhalten Platte - Kreiszyylinder

ein Versagen bereits weit unterhalb der kritischen Last des perfekten Systems möglich. Mit diesem Beulmechanismus finden die erheblichen Unterschiede zwischen experimentellen Versagenslasten und den kritischen Lasten der Indifferenztheorie eine plausible Erklärung.

Der Vergleich von Platte und Kreiszyinderschale führt zu dem Schluß, allein die Membranenergie für das ungünstige Beulverhalten verantwortlich zu machen. Das Membranpotential, das zunächst eine hohe kritische Last vorgibt, entzieht sich bei Erreichen dieser Last der Lastabtragung. Um eine daraus folgende Imperfektionsanfälligkeit abschätzen zu können, liegt es also nahe, den Membranteil a priori zu vernachlässigen, ein Vorgehen, das gleichbedeutend ist mit der Betrachtung dehnungsloser Zustände.

Die verschiedenen Vorgehensweisen in der Literatur können wie folgt geordnet werden:

1. Nach der Art der Ermittlung der kritischen Last

- Mit Hilfe der Stabilitätsgleichungen der Indifferenztheorie unter Voraussetzung dehnungsloser Zustände beim Übergang vom Grund- zum Nachbarzustand.
- Durch die Untersuchung des instabilen Nachbeulzustandes. Die "Dehnungslosigkeit" wird im Ansatz für die Verschiebungen des Nachbeulbereiches verwirklicht (z. B. über Abwickelbarkeitsbedingung).
- Anschauliche Methoden (Abschnitt 6.2).

2. Nach der Verwirklichung dehnungsloser Zustände

- Das energetische Vorgehen durch Streichen der Membranenergie in den Energieausdrücken (direktes Vorgehen).
- Die geometrischen Verfahren: Die Dehnungslosigkeit der Beulzustände wird über differentialgeometrische Betrachtung verwirklicht:
 - a) Die infinitesimale Verbiegung einer Fläche.
In der Schalentheorie werden solche Verbiegungen auch als verzerrungsfreie Verbiegungen bezeichnet. Sie sind gekennzeichnet durch eine unveränderte erste Fundamentalform. Wird beim

Übergang vom Grund- zum endlich benachbarten Nachbeulzustand die Änderung des Fundamentaltensors in eine Reihe entwickelt und nur das Verschwinden des ersten Reihengliedes gefordert, so spricht man auch von quasi-verzerrungsfreien Verbiegungen [41]. In Verbindung mit infinitesimalen Verschiebungen vom Grund- zum Nachbarzustand entsprechen sich die infinitesimalen Verbiegungen der Differentialgeometrie und die quasi-verzerrungsfreien Verbiegungen der Schalentheorie vollständig.

- b) Isometrische Transformationen (Transformationen bei gleichbleibender erster Fundamentalform, d. h. längentreue bzw. metriktreue Transformationen [79], [71]).
- c) Über eine exakte oder genäherte (minimalisierte) Abwickelbarkeitsbedingung bezüglich des Ansatzes für die Beulverschiebungen [104].

		Art der Ermittlung der kritischen Last		
		Indifferenz - kriterium	Untersuchung des Nachbeulbereiches	Anschauliche Methoden
Vorgehen beim Verwirklichen der "Dehnungslosigkeit"	energetisch	Fritz/Wittek [41]	_____	_____
	geometrisch	Fritz/Wittek [41] Pogorelov [79]	Yoshimura [104]	_____
	anschaulich	Kirste [59] El Naschie [71]	_____	Dulácska [33]

Tafel 3.2 : Dehnungslose Modelle

- Die anschaulichen Vorgehensweisen sind gekennzeichnet durch Ersatzbetrachtungen.

So ersetzen Kirste [59] und El Naschie [71] das Beulproblem der Kreiszyinderschale durch das Beulen eines Zylinderschalenstreifens. Dulácska [33] schlägt vor, die gebeulten Schalenfelder durch ebene Plattenanteile zu ersetzen.

In der Zusammenstellung nach Tafel 3.2 fehlt die Arbeit von Croll [30]. Aus dem Aufsatz geht nicht hervor, wie die Dehnungslosigkeit verwirklicht wurde, um zu den dort angegebenen kritischen Lasten zu gelangen.

3.2.3 Die Energiekriterien von Tsien

Um Verwechslungen zu vermeiden, sei vorweg darauf hingewiesen, daß diese Kriterien nicht mit den Energiemethoden der statischen bzw. kinetischen Stabilitätsuntersuchung identisch sind.

Die Diskrepanz zwischen den rechnerischen Versagenslasten am Indifferenzpunkt und den tatsächlichen Versagenslasten wird hier auf energetische Störungen aus dynamischen Einflüssen zurückgeführt. Solche Störungen können im Versuch auftreten durch nichtstatische Lastaufbringung, Schwingungen der Testmaschine und des Mediums, das den Versuchskörper umgibt, in baupraktischen Fällen z. B. durch Fundamentalschwingungen und nichtstatische Belastungen (Entleerungsvorgänge bei Silos etc.). Aufgrund der Annahme, daß diese kinetischen Störungen den Beulvorgang zwar auslösen, die Störenergie jedoch nicht auf das System übergehen kann, postulierte Tsien 1942 in [93] ein Stabilitätskriterium, das im weiteren als einfaches Energiekriterium bezeichnet wird:

Beim Vorhandensein von äußeren Störungen (Störenergie) tritt Versagen (frühestens) bei dem Lastzustand ein, bei dem die gesamte potentielle Energie vor und nach dem Beulen gleich ist.

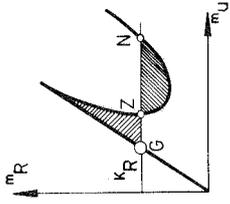
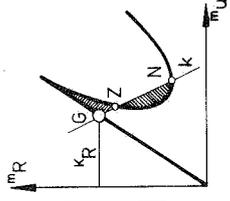
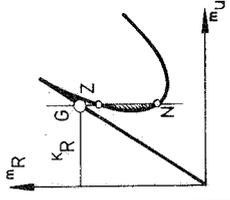
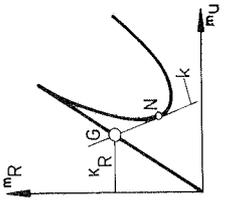
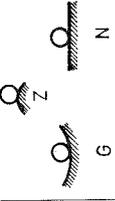
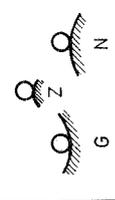
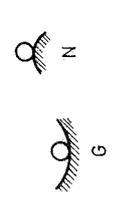
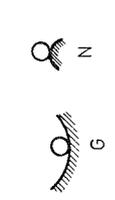
Je nach Art der Belastung können damit die in Tafel 3.3 aufgeführten Fälle unterschieden werden. In den Last-Verschiebungsdiagrammen ergibt sich dabei die kritische Last aus der Gleichheit der schraffierten Flächen zwischen der Belastungscharakteristik und der Last-Verschiebungskurve der

verallgemeinerten Verschiebung. Diese Flächengleichheit ist eine Folge der Gleichheit der gesamten potentiellen Energie vor und nach dem Beulvorgang. Das Energiekriterium in dieser Form kann als eine Erweiterung des energetischen Kriteriums nach Dirichlet (Tafel 3.1) gedeutet werden, das den kritischen Lastzustand so definiert, daß die gesamte potentielle Energie im Grund- und Nachbarzustand gleich sein muß. Bei Dirichlet ist der Nachbarzustand infinitesimal - bei Tsien jedoch endlich weit - entfernt.

Beim einfachen Kriterium wird vorausgesetzt, daß die Störenergie den Beulvorgang zwar auslöst, aber keine Störenergie in das System übergehen kann. Tsien ließ 1947 [94] diese Annahme mit folgender Argumentation fallen: Wenn das System energetisch gestört wird, so gibt es keinen logischen Grund, daß nicht ein Teil der Störenergie in das System übergeht und damit ein Beulvorgang von einem niedrigeren auf einen höheren Energiepegel stattfindet. Das führt zur Formulierung des verschärften Energiekriteriums:

Unter äußeren energetischen Störungen tritt Versagen (frühestens) dann ein, wenn die Belastungscharakteristik in der Lastverschiebungskurve erstmals mehrdeutige Gleichgewichtszustände ergibt.

Die kritischen Lasten nach diesem verschärften Kriterium sind in Tafel 3.3 dem einfachen Kriterium gegenübergestellt. Für Beulen bei konstanter Last erfolgt das Versagen bei der unteren Indifferenzlast. Eine Definition dieser Art wurde von Karman/Tsien bereits 1939 zur Berechnung der Versagenslasten von Kugelschalen [55] verwandt. Das entsprechende Versagenskriterium bei konstanter Stauchung wird von Esslinger [37] auch als Kriterium der minimalen Nachbeulstauchung bezeichnet. Zur Veranschaulichung der Energiezustände während des Beulvorganges wurde in Tafel 3.3 das Kugelbeispiel herangezogen. Der Anwendung dieser energetischen Kriterien zur Eingrenzung experimenteller Versagenslasten war allerdings nur beschränkter Erfolg beschieden [93], [94], [104], [43], [54], [67], [56]. Parallele Untersuchungen anderer Forscher (z. B. [62], [31]) ergaben jedoch, daß geometrische Imperfektionen wesentlich für die Abminderung kritischer Lasten verantwortlich sind und demnach energetischen Störungen eine untergeordnete Bedeutung zukommt. Damit waren einerseits die teilweise unbrauchbaren Ergebnisse erklärt, andererseits war aber den Energiekriterien von Tsien ihre Grundlage entzogen [44].

Einfaches Energiekriterium		Verschärftes Energiekriterium		
Beulen bei konstanter Last (Eigengewicht, Lastgesteuerter Versuch)		Beulen bei konstanter Stauchung	Beulen bei elastischer Testmaschine (k: Masch.steifigkeit)	Beulen bei konstanter Stauchung
Belastung in elastischer Testmaschine (k: Masch.steifigkeit)		Beulen bei konstanter Last		
				
[93]	[93], [104]	[55], [94]	[94]	[94], [37]

Tafel 3.3: Energiekriterien

Neben der ursprünglichen Anwendung der Kriterien zur Abschätzung des Einflusses äußerer energetischer Störungen kommt der kritischen Last des Energiekriteriums beim "Beulen unter konstanter Last" auch eine Bedeutung im Zusammenhang mit geometrischen Imperfektionen zu (Bild 3.6).

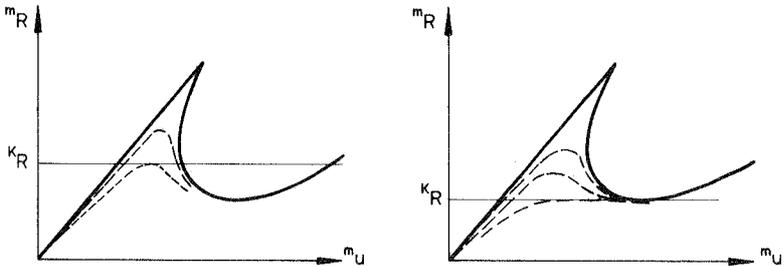


Bild 3.6: Verhalten geometrisch imperfekter Systeme

Während die Energielast des verschärften Kriteriums (untere Durchschlagslast) von der Anschauung her als untere Versagensgrenze geometrisch imperfekter Systeme angesehen werden kann, ist es Bodner/Gjelsvik [48], [49] gelungen, nachzuweisen, daß bereits die kritische Last des einfachen Energiekriteriums diese untere Schranke darstellt. Der Nachweis gelingt allerdings nur bei Systemen, deren Membranspannungen bezüglich des verallgemeinerten Verschiebungsparameters symmetrisch sind und bei geometrischen Imperfektionen, welche die Symmetrie dieser Spannungen nicht stören. Die genannten Voraussetzungen treffen allerdings nur in Sonderfällen zu. Bodner/Gjelsvik gehen jedoch davon aus, daß auch das Stabilitätsverhalten allgemeiner Systeme bei beliebigen geometrischen Imperfektionen auf diese Weise brauchbar abgeschätzt werden kann.

3.2.4 Einige weitere Stabilitätskriterien

1. Das Kriterium der kleinsten Störverformung nach Pflüger

[76], [77], [78]

"Für den Übergang vom Grundzustand zum endlich benachbarten Zustand der ausgebeulten Schale ist die kleinste Störverformung w_m maßgebend."

Nach dieser Hypothese wird angenommen, daß der Übergang vom Grundzustand zum endlich benachbarten ausgebeulten Zustand dann eintritt, wenn bei wachsender Belastung des imperfekten Systems die "Störverformung" die Größe erreicht hat, die das perfekte System (bei gleicher Belastung) im ausgebeulten Zustand besitzt (Bild 3.7).

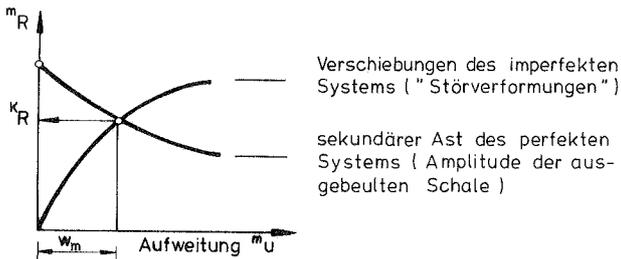


Bild 3.7 : Versagenslast nach Pflüger

Pflüger konnte mit diesem Kriterium Übereinstimmung mit experimentellen Versagenslasten axial- und manteldruckbelasteter Kreiszyinderschalen erzielen. Neben dem eigentlichen Versagenskriterium erhalten die Rechnungen jedoch zusätzliche Annahmen über Form, Amplitude und Größe der Imperfektionen. Zur Ermittlung der Verschiebungen des imperfekten Systems überträgt Pflüger zudem Überlegungen der Theorie 2. Ordnung der Stabstatik auf Schalen. Die Berechnung des sekundären Astes des perfekten Systems erfolgt über einen Fourier-Ansatz mit 3 Reihengliedern. Eine genauere Erfassung dieser Verschiebungszustände [52] ergibt wesentlich

veränderte Versagenslasten, so daß die Ergebnisse sehr stark von den Rechenannahmen beeinflusst sind und nur teilweise eine Folge des Stabilitätskriteriums selbst darstellen.

2. Das Kriterium nach Esslinger/Garkisch

Als Versagenslast wird diejenige Last definiert, bei der bei Entlastung des gebeulenen Systems die letzte Beule herausspringt (Bild 3. 8). Dieses Kriterium wird in [37] zur Stabilitätsuntersuchung verschiebungsgesteuerter Kreiszyylinder unter Axialbelastung benutzt.

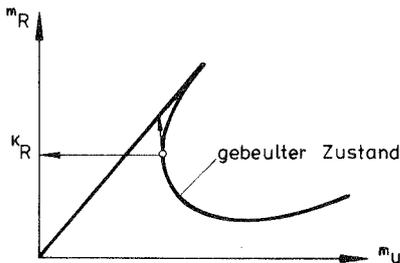


Bild 3.8 : Versagenslast nach Esslinger / Garkisch

Analoge Definitionen können auch bei Beulen unter konstanter Last bzw. in einer elastischen Testmaschine herangezogen werden. Die zugehörigen Versagenslasten entsprechen dann den Punkten N in Tafel 3. 3 des verschärften Energiekriteriums.

3. Das Kriterium der lokalen Beulspannungen

Dieses von Esslinger [37] formulierte Kriterium sieht als Versagenslast die Last an, bei der im (imperfekten) System lokal eine charakteristische Spannung des perfekten Systems erreicht wird.

4. Kriterien lokaler Krümmungen

Diesen Kriterien liegt die Vorstellung zugrunde, daß lokale Krümmungseffekte ursächlich an der Einleitung des Beulvorgangs beteiligt sind ([1], [35]).

5. Verformungskriterien

Sie beruhen auf der Festlegung der kritischen Last durch Verformungsbegrenzungen. Demnach ist die Grenze der Tragfähigkeit dann erreicht, wenn ausgewählte Verformungen einen vorgegebenen Grenzwert überschreiten (z. B. "geometrische Grenzlast" bei Schock [86]).

3.3 Methoden zur Untersuchung instabiler Nachbeulbereiche

Zur Untersuchung instabiler Nachbeulzustände reicht die übliche Lastinkrementierung wegen des Absinkens der ertragbaren Last alleine nicht aus. In der Literatur werden zur Erfassung solcher Bereiche verschiedene Verfahren vorgeschlagen:

1. Methode der Vorzeichenumkehr [99]

Nach Erreichen des kritischen Zustandes wird durch Änderung des Vorzeichens der Lastinkremente das Niveau der äußeren Lasten schrittweise so weit abgesenkt, bis die untere Indifferenzlast erreicht ist. Zur weiteren Ermittlung des Nachbeulpfades ist die äußere Last anschließend wieder (inkrementell) zu erhöhen.

Der Nachteil des Verfahrens liegt darin, daß die kritischen Lastzustände und damit die Orte der Vorzeichenwechsel i. a. nicht vorab bekannt sind. Dies veranlaßte Söreide [88], die Vorzeichenumkehr mit Hilfe eines Steifigkeitsparameters (siehe begleitende Maßnahmen Abschnitt 4.2.4) zu steuern.

2. Verschiebungskontrollierte Verfahren [4]

Anstelle der Lastinkrementierung tritt in der Nähe der kritischen Last eine Inkrementierung der Verschiebungen, die bis zum Ende des instabilen Bereiches beibehalten wird.

In seiner ursprünglichen Anwendung führt das Verfahren zu unsymmetrischen Steifigkeitsmatrizen ohne Bandstruktur. Damit unmittelbar verbunden war der Verlust der Proportionalität der äußeren Last.

Neuere Verfahren vermeiden diesen Nachteil. In [72] werden in der Nähe der kritischen Last die zum zuletzt aufgebrachten Lastinkrement gehörenden

inkrementellen Verschiebungen bezüglich eines charakteristischen Verschiebungswertes normiert. Über eine entsprechende Normierung des Lastinkrementes und der Forderung nach Proportionalität der äußeren Last (bzw. des Lastinkrementes) wird eine Iterationsvorschrift aufgebaut, die es erlaubt, Gleichgewichtszustände des Nachbeulbereiches iterativ zu ermitteln.

3. Methode der fortgesetzten Reihenentwicklung [96]

Der instabile Nachbeulbereich wird über die Berücksichtigung hinreichend vieler Glieder einer Reihenentwicklung (z. B. bezüglich des Lastparameters) erfaßt. In Zusammenhang mit der Methode der finiten Elemente besteht die Problematik in der aufwendigen Bereitstellung der Elementmatrizen, aus denen die Reihenglieder zu bestimmen sind.

4. Addition von linearen Federelementen

Durch die Addition von Federn soll das zu untersuchende System so versteift werden, daß dessen abfallenden Äste des Nachbeulbereiches übergehen in Gleichgewichtswege mit positiver Steigung (monoton steigend). Das versteifte System wird mit Hilfe der gewöhnlichen Lastinkrementierung inkrementell - iterativ berechnet und anschließend durch Abspaltung der Federanteile das Last - Verschiebungsverhalten des Ausgangssystems gewonnen. Das Verfahren geht auf Whitman/Gaylord [98] zurück, die seinen Einsatz an ebenen Rahmen demonstrierten. Das Verfahren hat in der Form, wie es dort vorgeschlagen wurde, den Nachteil, daß die Steifigkeitsmatrix der Federelemente i. a. keine Bandstruktur besitzt. Dadurch ergeben sich bei großen Systemen neben hohen Rechenzeiten auch Speicherplatzprobleme während der Gleichungsauflösung. Da die maßgebende Beziehung zur Bestimmung des Gleichgewichtes ohnehin eine Iterationsvorschrift darstellt, ist es möglich, den Bereich der Federmatrix auf die Bandform zu beschränken und den dadurch entstehenden Fehler im Zuge der Iteration mit zu beheben [81].

In dieser modifizierten Version wurde das Verfahren für Beispielrechnungen (Abschnitte 4, 5, 7 und 8) eingesetzt.

4. Ermittlung kritischer Lasten über die vollständige Auswertung der nichtlinearen Stabilitätsgleichungen

Ziel des Kapitels ist die vollständige Auswertung der Stabilitätstheorie zur Ermittlung kritischer Punkte in Last - Verschiebungskurven. Wegen der Berücksichtigung des nichtlinearen Verschiebungsverhaltens liegt mit der Bezeichnungswise für die Näherungsstufen nach Tafel 4.1 eine nichtlineare Stabilitätsaufgabe vor.

Ausgangspunkt der Untersuchung sind die beiden Grundgleichungen (3.2) und (3.4) der statischen und kinetischen Stabilitätsuntersuchung. Diese Gleichungen werden in Form des Determinantenkriteriums bzw. von Eigenwertproblemen für den Lastparameter und die Eigenfrequenz weiter aufbereitet. Anschließend werden sie in Verbindung mit der geometrisch nichtlinearen Analyse zur exakten Ermittlung kritischer Lastzustände eingesetzt. Als Konzept der Koppelung werden dabei "begleitende Maßnahmen" und "Verfahren zur direkten Ermittlung von Verzweigungslasten" untersucht und diskutiert.

Stabilitätsproblem	Annahmen bez. des Grundzustandes			Last-Verschiebungsdiagramm
	Spannungen	Ver-schiebungen	kinematische Gleichungen	
klassisch	Membran	vernachlässigt	—	
klassisch erweitert	Membran + Biegung			
linear	Membran + Biegung	infinitesimal klein	linear	
nichtlinear	Membran + Biegung	endlich	nichtlinear	

Tafel 4.1 : Näherungsstufen der Stabilitätstheorie

4.1 Aufbereiten der Stabilitätsgleichungen

Die Bedingung für die Existenz eines indifferenten Gleichgewichtszustandes im Sinne der statischen Stabilitätsuntersuchung ergibt sich nach Gl. (3.2) zu

$$\boxed{\begin{matrix} \text{K} \\ \text{n} \end{matrix} \mathbf{K} \cdot \text{K} \mathbf{v} = \mathbf{0}} \quad (4.1)$$

Hierin bedeutet $\text{K} \mathbf{v}$ die (kritische) Verschiebung vom Grund- zum Nachbarzustand bei ungeänderter Belastung. Gesucht ist derjenige (kritische) Lastparameter, für den Gleichung (4.1) erfüllt ist sowie die zugehörige Beulform.

Die Auswertung der Gleichung (4.1) kann entweder über die Determinante oder über Eigenwertprobleme für den Lastparameter erfolgen. Das entsprechende Kriterium der kinetischen Stabilitätsuntersuchung (Gl. (3.5)) erfordert dagegen die wiederholte Lösung der Eigenwertgleichung (3.4) (für verschiedene Lastwerte ${}^m \mathbf{R}$)

$$\boxed{\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} - \omega^2 \cdot \mathbf{M} \right] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}} \quad (4.2)$$

d. h. eines Eigenwertproblems für den Frequenzparameter ω^2 zur Bestimmung der Nullstellen des Frequenzverlaufes ($\text{K}_\omega = 0$).

4.1.1 Determinantenkriterium

Bedingung (4.1) stellt ein System von homogenen, linearen, algebraischen Gleichungen dar. Es besitzt nur dann eine nichttriviale Lösung für $\text{K} \mathbf{v}$, wenn die vom Lastparameter abhängige Determinante der Tangentensteifigkeitsmatrix verschwindet, d. h. wenn

$$\boxed{\det \begin{matrix} \text{K} \\ \text{n} \end{matrix} \mathbf{K} = \mathbf{0}} \quad (4.3)$$

erfüllt ist.

In dieser Schreibweise wird das Indifferenzkriterium auch als Determinantenkriterium bezeichnet.

4.1.2 Eigenwertprobleme für den Lastparameter

Zur Umformung von Gleichung (4.1) in ein Eigenwertproblem für den Lastparameter wird zunächst die Tangentensteifigkeitsmatrix des kritischen Grundzustandes entsprechend Gleichung (2.30) bzw. (2.31) aufgespalten in

$${}^K_n \mathbf{K} = {}^K_n \mathbf{K}_e + {}^K_n \mathbf{K}_g \quad (4.4)$$

wobei für

$${}^K_n \mathbf{K}_e = \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_e + \begin{matrix} \mathbf{K} \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_u \quad (4.5)$$

gilt.

Die geometrische Matrix stellt dabei nach Tafel 2.2 eine lineare Funktion der Spannungen ${}^K_n \mathbf{S}$ des Grundzustandes

$${}^K_n \mathbf{K}_g = {}^K_n \mathbf{K}_g ({}^K_n \mathbf{S}) \quad (4.6)$$

bzw. nach Transformation eine quadratische Funktion der Verschiebungen des Grundzustandes dar.

$${}^K_n \mathbf{K}_g = {}^K_n \mathbf{K}_g ({}^K_u, {}^K_u^2) = {}^K_n \mathbf{K}_g^L ({}^K_u) + {}^K_n \mathbf{K}_g^{NL} ({}^K_u^2) \quad (4.7)$$

In gleicher Weise läßt sich nach Gleichung (2.32) die Anfangsverschiebungsmatrix ${}^K_n \mathbf{K}_u$ aufspalten zu

$${}^K_0 \mathbf{K}_u = {}^K_0 \mathbf{K}_u ({}^K_u, {}^K_u^2) = {}^K_0 \mathbf{K}_u^L ({}^K_u) + {}^K_0 \mathbf{K}_u^{NL} ({}^K_u^2) \quad (4.8)$$

Gleichung (4.1) gilt nur für den Indifferenzpunkt. Unter Voraussetzung einer proportionalen Last kann ihre Gültigkeit auch ausgehend von einem beliebigen Grundzustand gefordert werden. Durch Vergrößerung der Matrizen ${}^m_0 \mathbf{K}_u$ und (oder) ${}^m_n \mathbf{K}_g$ wird ein Eigenwertproblem angestrebt, das den zugehörigen Lastvergrößerungsfaktor als Eigenwert enthält. Für die Vergrößerung kommen Matrizenelemente, Verschiebungen und Spannungen in Frage. Setzt man in erster Näherung die Proportionalität zwischen diesen Größen und der äußeren Last voraus, so erhält man über den Vergrößerungsfaktor einen Näherungswert für die kritische Last zu

$$\boxed{{}^S \mathbf{R} = m_\lambda \cdot {}^m \mathbf{R}} \quad (4.9)$$

Vergrößerung $S^m \mathbf{R} = {}^m \lambda \cdot {}^m \mathbf{R}$	Eigenwertproblem aus $[{}^n \mathbf{K}_e + {}^n \mathbf{K}_g] \cdot \mathbf{K}_v = \mathbf{0}$	Eigenwertproblem aus $[{}^0 \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_u + {}^m \mathbf{K}_g)] \cdot \mathbf{K}_v = \mathbf{0}$
Matrizen- elemente ($\mathbf{K} \sim \mathbf{R}$) $S_g = {}^m \lambda \cdot {}^m \mathbf{K}_g$ $S_u = {}^m \lambda \cdot {}^m \mathbf{K}_u$	$[{}^m \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_u + {}^m \mathbf{K}_g)] \cdot \mathbf{K}_v = \mathbf{0}$ (4.10a)	$[{}^0 \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_u + {}^m \mathbf{K}_g)] \cdot \mathbf{K}_v = \mathbf{0}$ (4.10c)
Ver- schiebungen ($\mathbf{u} \sim \mathbf{R}$) $S_u = {}^m \lambda \cdot {}^m \mathbf{u}$	$[{}^m \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_u + {}^m \mathbf{K}_g)] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (4.11a)	$[{}^0 \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_u + {}^m \mathbf{K}_g)] \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (4.11b)
Spannungen ($\mathbf{S} \sim \mathbf{R}$) $S_s = {}^m \lambda \cdot {}^m \mathbf{S}$	$[{}^m \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_g)] \cdot \mathbf{S} = \mathbf{0}$ (4.12a)	$[{}^0 \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_{u+s} \cdot ({}^m \mathbf{S}))] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (4.12c)
gemischtes Vorgehen ($\mathbf{S}, \mathbf{u} \sim \mathbf{R}$) $S_u = {}^m \lambda \cdot {}^m \mathbf{u}$ $S_s = {}^m \lambda \cdot {}^m \mathbf{S}$	nicht definiert (4.13a)	$[{}^0 \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_u + {}^m \mathbf{K}_g \cdot ({}^m \mathbf{S})) + {}^m \lambda \cdot ({}^m \mathbf{K}_u \cdot ({}^m \mathbf{u}^2))] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$ (4.13c)

Tafel 4.2 : Eigenwertprobleme für den Lastparameter

Mit Hilfe der Gleichungen (4.4) bis (4.8) lassen sich die in Tafel 4.2 zusammengestellten Eigenwertprobleme gewinnen. Sie unterscheiden sich neben der Art der veränderten Variablen (Matrizenelemente, Verschiebungen, Spannungen) durch die Annahme, welche Anteile der Gesamtsteifigkeitsmatrix als veränderlich angesehen werden.

Die ausschließliche Vergrößerung der Matrix ${}^m_n K_g$ entspricht nach Tafel 4.1 einer (erweiterten) klassischen Stabilitätsuntersuchung. Die zusätzliche Vergrößerung der Matrix ${}^m_0 K_u$ bedeutet dagegen die Mitnahme der Vorbeulverschiebungen und somit eine verbesserte Stabilitätsanalyse.

Diese Eigenwertprobleme sind teilweise bekannt und auch diskutiert worden. So schlagen Gallagher/Yang [46] die lineare Eigenwertgleichung (4.10 b) (Tafel 4.2) vor. Bushnell [26] und Mallet/Marcal [68] geben ein quadratisches EW-Problem analog Gleichung (4.11 c) an. Mallet/Marcal [68] und Stricklin u. a. [90] weisen in Zusammenhang mit diesem quadratischen EW-Problem darauf hin, daß die zugehörige Annahme für die Vergrößerung der Vorbeulverschiebungen (Gleichung (4.11 a)) für nichtlineares Verschiebungsverhalten nur eine Näherung darstellt. Dies und die Tatsache, daß die Lösung quadratischer Eigenwertprobleme sehr zeitaufwendig ist, veranlaßt sie zum Streichen der quadratischen Terme. Bei Verwendung als begleitende Maßnahme, zur Iterationssteuerung und der automatischen Schrittweitenfindung führen solche Vernachlässigungen jedoch zu fehlerhaften kritischen Lasten, weil auch im kritischen Punkt selbst Teile der Tangentensteifigkeitsmatrix fehlen und so die Singularität anderen Laststufen zugeordnet wird. Um diesen Nachteil zu vermeiden, müssen die quadratischen Terme entweder den linearen zugeschlagen (mit Gleichung (4.10 c) als Ergebnis) bzw. konstant belassen werden.

Das Eigenwertproblem nach Gleichung (4.12 c) setzt voraus, daß sich die Anfangsverschiebungen in der Matrix ${}^m_0 K_u ({}^m_u)$ durch Spannungen ausdrücken lassen. Allgemein läßt sich dieser Sachverhalt nicht nachweisen. In [90] wird jedoch die Meinung vertreten, daß dies durch Addition von Termen oder Matrizen ${}^m_0 K_u$ und ${}^m_0 K_g$ entsprechend

$${}^m_0 K_u ({}^m_u) + {}^m_0 K_g ({}^m_u) = {}^m_0 K_{u+g} ({}^m_s) \quad (4.14)$$

möglich sei. Gleichung (4.12 c) ist dann mit Gleichung (4.10 c) identisch.

Die Eigenwertprobleme in Tafel 4.2 entstanden durch die lineare Vergrößerung von Werten des Grundzustandes. Neben dieser Möglichkeit können wahlweise inkrementelle Größen eines bereits erreichten Grundzustands zur Ermittlung eines genäherten kritischen Zustandes verändert werden. Der Unterschied in den beiden Vorgehensweisen ist in den Abbildungen 4.1 a, b dargestellt.

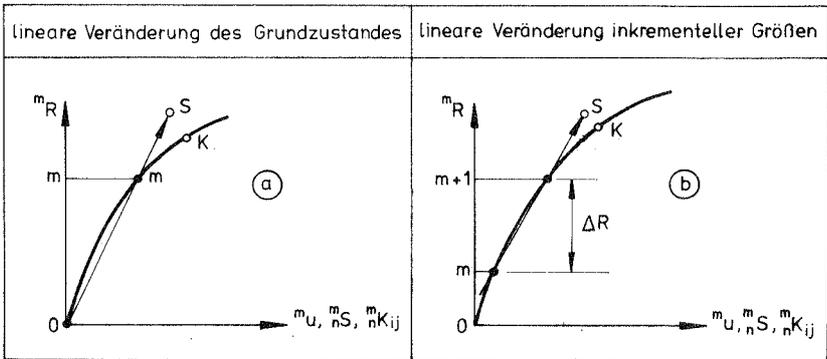


Bild 4.1: Ermittlung genäherter kritischer Zustände.

Anstelle der Gleichungen (4.10 a) bis (4.13 a) treten jetzt die Beziehungen

$$\begin{aligned} S_n K &= m_n K + m_\lambda \cdot \Delta_n K \\ S_u &= m_u + m_\lambda \cdot \Delta u \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$S_n S = m_n S + m_\lambda \cdot \Delta_n S$$

mit
$$S_R = m_R + m_\lambda \cdot \Delta R \quad (4.16)$$

als Näherungswert für die kritische Last.

Im Prinzip können auch hier alle in Tafel 4.2 dargestellten Möglichkeiten ausgeschöpft werden. Dupuis u. a. [34] gehen vom gemischten Vorgehen

(Vergrößerung inkrementeller Spannungen und Verschiebungen) aus und erhalten ein quadratisches Eigenwertproblem analog zu Gleichung (4.13 c). Da auch sie zur Linearisierung die quadratischen Terme vernachlässigen, ist das vorgeschlagene Eigenwertproblem als begleitende Maßnahme unbrauchbar. Ein sinnvolles lineares Eigenwertproblem ergibt dagegen die lineare Vergrößerung inkrementeller Matrizen.

$$\text{Mit } \begin{matrix} S \\ n \end{matrix} \mathbf{K} = \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} + \begin{matrix} m \\ \lambda \end{matrix} \cdot \Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} \quad (4.17)$$

erhält man aus Gleichung (4.1) ein Eigenwertproblem

$$\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} + \begin{matrix} m \\ \lambda \end{matrix} \cdot \Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} \right] \cdot \begin{matrix} m \\ v \end{matrix} = \mathbf{0} \quad (4.18)$$

Für die praktische Rechnung wird die Matrix $\Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}$ über die Differenz der Tangentensteifigkeitsmatrizen zweier inkrementell benachbarter Gleichgewichtszustände ermittelt.

$$\Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} = \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \mathbf{K} - \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} \quad (4.19)$$

Um den Zusammenhang dieses Eigenwertproblems mit denen nach Tafel 4.2 zu erkennen, werden die Matrizen nach Gleichung (4.4) zerlegt in

$$\Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} = \left[\begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_e + \begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_g \right] - \left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_e + \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_g \right]$$

bzw.

$$\Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} = \underbrace{\left[\begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_e - \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_e \right]}_{\Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_u} + \underbrace{\left[\begin{matrix} m+1 \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_g - \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_g \right]}_{\Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_g} \quad (4.20)$$

In Verbindung mit Gleichung (4.18) führt das zu

$$\boxed{\left[\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} + \begin{matrix} m \\ \lambda \end{matrix} \cdot (\Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_u + \Delta \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}_g) \right] \cdot \begin{matrix} m \\ v \end{matrix} = \mathbf{0}} \quad (4.21)$$

also zu einem Eigenwertproblem analog zu Gleichung (4.10 c). Da Gleichung (4.21) gleichermaßen für die totale und mitgehende Lagrange-Formulierung gilt, ist man nun in der Lage, auch bei der mitgehenden Beschreibung auf einfache Weise den Anteil der Anfangsverschiebungsmatrix mitzuvergrößern.

Für eine Beuluntersuchung nach dem ersten Lastschritt ${}^m \mathbf{R} = {}^1 \mathbf{R}$ liefert Gleichung (4. 21) die gleichen Ergebnisse wie Gleichung (4. 10 c), weil hier die inkrementellen Matrizen mit den Gesamtmatrizen noch übereinstimmen. Die Abbildungen 4. 1 a, b gehen für diesen Sonderfall direkt ineinander über. Beuluntersuchungen bei fortgeschrittenen Lastzuständen führen zu Abweichungen, die je nach Größe der Lastinkremente schwanken, aber im kritischen Punkt selbst wieder verschwinden, weil die Singularität ausschließlich von der Tangentensteifigkeitsmatrix (und nicht von der inkrementellen Matrix $\Delta_n \mathbf{K}$) angezeigt wird. Wegen dieser prinzipiellen Übereinstimmung wird auf die Herleitung weiterer inkrementeller Eigenwertgleichungen verzichtet.

Die hier abgeleiteten Gleichungen werden im weiteren zur Ermittlung kritischer Lastzustände eingesetzt. Im einzelnen werden drei Methoden untersucht:

- Begleitende Maßnahmen (Abschnitt 4. 2).
- Automatische Schrittweitenfindung (Abschnitt 4. 4. 1).
- Eigenwertgesteuerte Iterationsverfahren (Abschnitt 4. 4. 2).

4. 2 Begleitende Maßnahmen

Um kritische Punkte in der Last-Verschiebungskurve aufzudecken, wird die elastostatische Rechnung durch Stabilitätsuntersuchungen begleitet. Zur Stabilitätsuntersuchung werden neben dem Determinantenkriterium Eigenwertprobleme für den Lastparameter und die Eigenfrequenz herangezogen.

4. 2. 1 Beobachtung der Determinante

Für die im Lauf einer geometrisch nichtlinearen Rechnung erreichten Gleichgewichtszustände wird der Wert der Determinante errechnet. Nullstellen im Determinantenverlauf ergeben die kritischen Punkte.

$$\det_n^K \mathbf{K} = 0$$

Diese Methode wird wegen ihrer Einfachheit in der Literatur sehr häufig vorgeschlagen (z. B. [47], [58] und [105]).

1. Numerische Auswertung

Die inkrementell-iterativen Lösungsverfahren nach Bild 2.5 erfordern für jeden Lastschritt eine Dreieckszerlegung der Tangentensteifigkeitsmatrix. Für reguläre symmetrische Matrizen stehen dazu im wesentlichen zwei Verfahren zur Verfügung:

I. Die $L^t \cdot D \cdot L$ - Zerlegung [11].

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} = \mathbf{L}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}$$

Dabei ist:

\mathbf{L} eine obere Dreiecksmatrix mit $L_{ii} = 1$

\mathbf{D} eine Diagonalmatrix

Mit den Regeln der Determinantenrechnung folgt:

$$\det \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} = \det \mathbf{D} = \prod_{i=1}^{\ell} D_{ii}$$

(ℓ : Ordnung von $\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K}$)

II. Das erweiterte Cholesky - Verfahren [106].

$$\begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} = \tilde{\mathbf{L}}^t \cdot \tilde{\mathbf{L}}$$

$\tilde{\mathbf{L}}$ ist eine obere Dreiecksmatrix.

Damit ergibt sich die Determinante zu:

$$\det \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} = (\det \tilde{\mathbf{L}})^2 = \prod_{i=1}^{\ell} \tilde{L}_{ii}^2$$

In beiden Fällen fällt die Determinante als ein Nebenprodukt der Dreieckszerlegung an.

In Tafel 4.3 sind die charakteristischen Merkmale der Determinantenberechnung zusammengestellt. Wichtig ist, anzumerken, daß $\det \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \mathbf{K} > 0$ nur eine notwendige, jedoch keine hinreichende Bedingung für die Stabilität des untersuchten Gleichgewichtszustandes darstellt. Denn eine gerade Anzahl negativer Diagonalelemente D_{ii} bzw. imaginärer \tilde{L}_{ii} führt zu einem positiven Determinantenwert, obwohl die inkrementelle Gesamtsteifigkeitsmatrix nicht mehr positiv definit ist.

	Gleichgewichtszustand		
	stabil	indifferent	labil
Eigenschaft von ${}^m_n\mathbf{K}$	positiv definit	singulär	indefinit
Determinante	$\det {}^m_n\mathbf{K} > 0$	$\det {}^m_n\mathbf{K} = 0$	$\det {}^m_n\mathbf{K} \leq 0$
$\mathbf{L}^t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{L}$ Zerlegung	alle $\mathbf{D}_{ii} > 0$	(mindestens) ein $\mathbf{D}_{ii} = 0$	(mindestens) ein $\mathbf{D}_{ii} < 0$
Cholesky-Zerlegung $\tilde{\mathbf{L}}^t \cdot \mathbf{L}$	alle $\tilde{\mathbf{L}}_{ii}$ reell	(mindestens) ein $\tilde{\mathbf{L}}_{ii} = 0$	(mindestens) ein $\tilde{\mathbf{L}}_{ii}$ imaginär

Tafel 4.3: Merkmale der Determinantenberechnung

2. Graphische Auswertung

Zur graphischen Auswertung des Determinantenverlaufes werden die aktuellen Determinantenwerte auf ihren Ausgangswert bezogen und als Funktion der äußeren Last oder eines ausgewählten Verschiebungsparameters aufgetragen.

3. Beispiele

Beispiel 1: Ebenes Fachwerk (Zweibock)

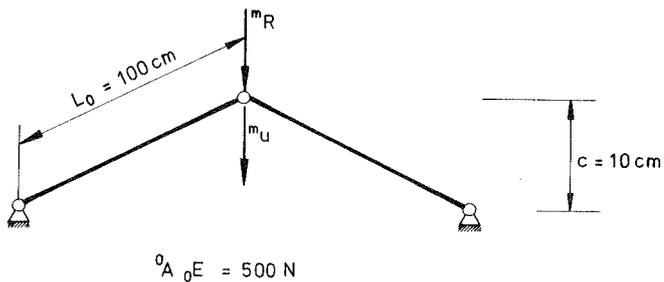


Bild 4.2: Ebenes Fachwerk

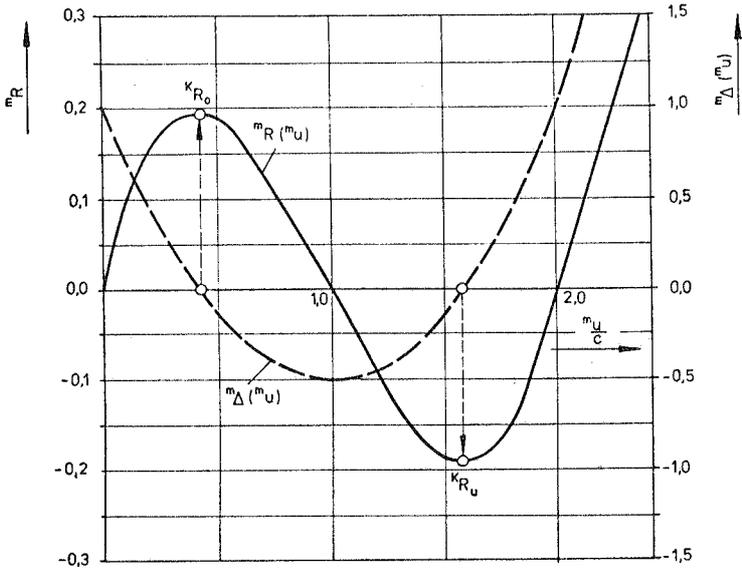


Bild 4.3 : Determinantenverlauf $m_{\Delta} = m_{\Delta}(m_u)$

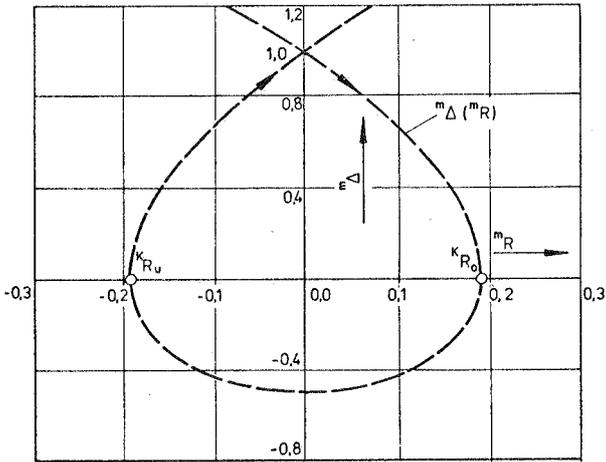


Bild 4.4 : Determinantenverlauf $m_{\Delta} = m_{\Delta}(m_R)$

Für die Last-Verschiebungskurve dieses Systems gilt:

$$m_R = \frac{0_A \cdot 0^E}{0_L^3} \cdot [m_u^3 - 3 \cdot c \cdot m_u^2 + 2 \cdot c^2 \cdot m_u] \quad (4.23)$$

Durch Differentiation ergibt sich daraus die Tangentensteifigkeitsfunktion

$$m_{0K} = \frac{0_A \cdot 0^E}{0_L^3} \cdot [3 \cdot m_u^2 - 6 \cdot c \cdot m_u + 2 \cdot c^2]$$

und mit $m_u = 0$ der elastische Anteil

$$0_{0K_e} = \frac{0_A \cdot 0^E}{0_L^3} \cdot 2 \cdot c^2$$

Die bezogene Determinante nach Gleichung (4, 22) nimmt dann die Form

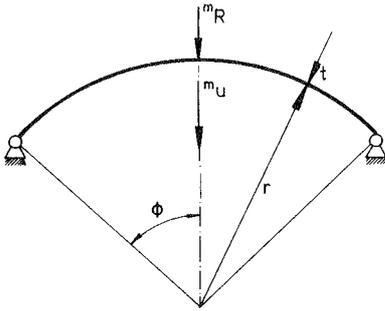
$$m_{\Delta} (m_u) = \frac{\det \begin{matrix} m_{0K} \\ 0 \end{matrix}}{\det \begin{matrix} 0_{0K_e} \\ 0 \end{matrix}} = 1 - 3 \cdot \frac{m_u}{c} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{m_u}{c}\right)^2$$

an. Dieser Verlauf ist zusammen mit der Last - Verschiebungskurve in Bild 4.3 eingetragen. Die Nullstellen der Determinante zeigen sowohl die obere als auch die untere Indifferenzlast des durchschlagenden Systems exakt an.

Bild 4.4 zeigt den gleichen Determinantenverlauf als Funktion der äußeren Last.

Beispiel 2: Flacher Kreisbogen unter Einzellast

Der Kreisbogen nach Walker [96] zeigt beide Versagensmöglichkeiten: Nach einem ausgeprägten nichtlinearen Verhalten wird zunächst ein Verzweigungspunkt mit antisymmetrischer Eigenform erreicht. Folgt man dem primären Ast über die Verzweigung hinaus, so kommt es zum Durchschlagen mit symmetrischer Versagensform.



- $r = 1000$ inch
- $t = 1$ inch
- $b = 2$ inch
- $E = 1,5 \cdot 10^6$ psi
- $\phi = 10^\circ$

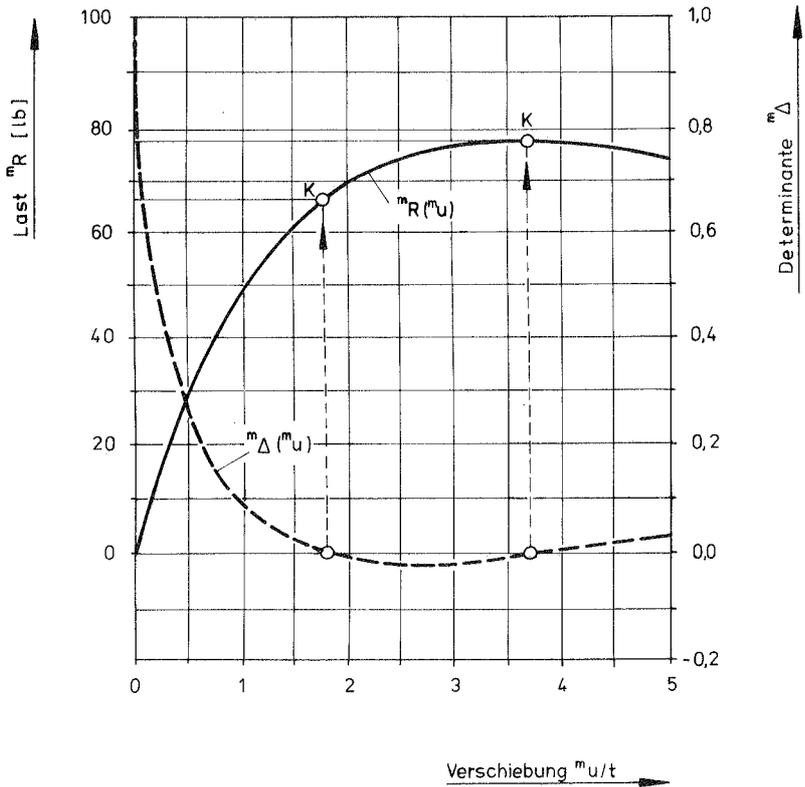


Bild 4.5: Flacher Kreisbogen unter Einzellast

Zur finiten Element-Rechnung wurde das System mit zwei verschiedenen Elementtypen des Programmsystems NISA [18] idealisiert:

- a) 20 gerade Balkenelemente,
- b) 20 gekrümmte isoparametrische Elemente (8 Knoten je Element) für den ebenen Spannungszustand.

Die kritischen Lasten lassen sich auch hier eindeutig aus den Nullstellen des Determinantenverlaufes feststellen. Die Ergebnisse sind im folgenden den Werten nach Walker [96] gegenübergestellt.

K_R [lb]	Walker	20 Balkenelemente	20 isopar. Elemente
Verzweigung	66,08	66,33	67,21
Durchschlag	76,21	77,22	77,50

Beispiel 3: Versuchsbau einer Gitterschale

Die konstruktive Ausführung dieses Holztragwerkes (Lattenquerschnitt $1,5 \times 1,5$ cm, $E = 1,4 \times 10^6$ N/cm²) ist in [74] ausführlich beschrieben. Die Systemidealisierung erfolgte mit 112 Balkenelementen je Schalenviertel.

Der Lastfall Eigengewicht, für den die Schalenform über ein Hängemodell ermittelt wurde, bestätigt die weitgehende Lastabtragung über Normalkräfte. Bild 4.6 enthält die Lastverschiebungskurve und den Determinantenverlauf für diesen Lastfall.

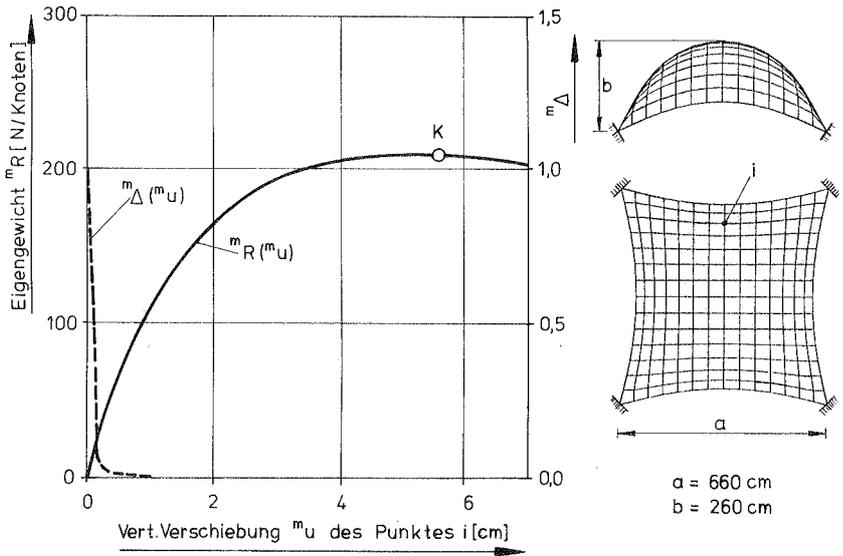
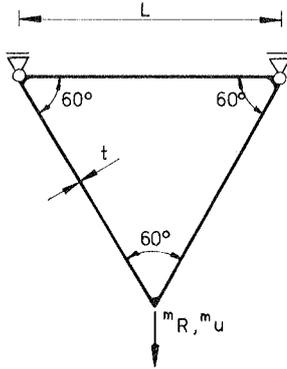


Bild 4.6 : Gitterschale, Lastfall Eigengewicht

Beispiel 4: Dreieckiger Rahmen

Die inkrementell - iterative Rechnung des Systems ergibt praktisch lineares Verschiebungsverhalten (Bild 4. 7). Bei einer Lastaufteilung von 20 lb/Inkrement wird der Iterationsprozeß im siebten Lastinkrement durch das Divergenzkriterium (Abschnitt 2,3) abgebrochen. Wegen dieser Konvergenzschwierigkeiten ist der Determinantenverlauf zunächst nicht mehr feststellbar. Erst bei Lastwerten oberhalb der kritischen Last erhält man wieder konvergentes Verhalten und damit brauchbare Stützstellen für den Determinantenverlauf.

Eine Diskretisierung des Rahmens mit anderen Elementtypen zeigt, daß die Konvergenzschwierigkeiten auch von der Wahl der verwendeten Elemente abhängen.



$L = 20$ inch
 $t = \frac{1}{16}$ inch
 $b = 1$ inch (Dicke)
 $E = 3 \cdot 10^7$ psi
 Idealisierung mit
 12 Balkenelementen.

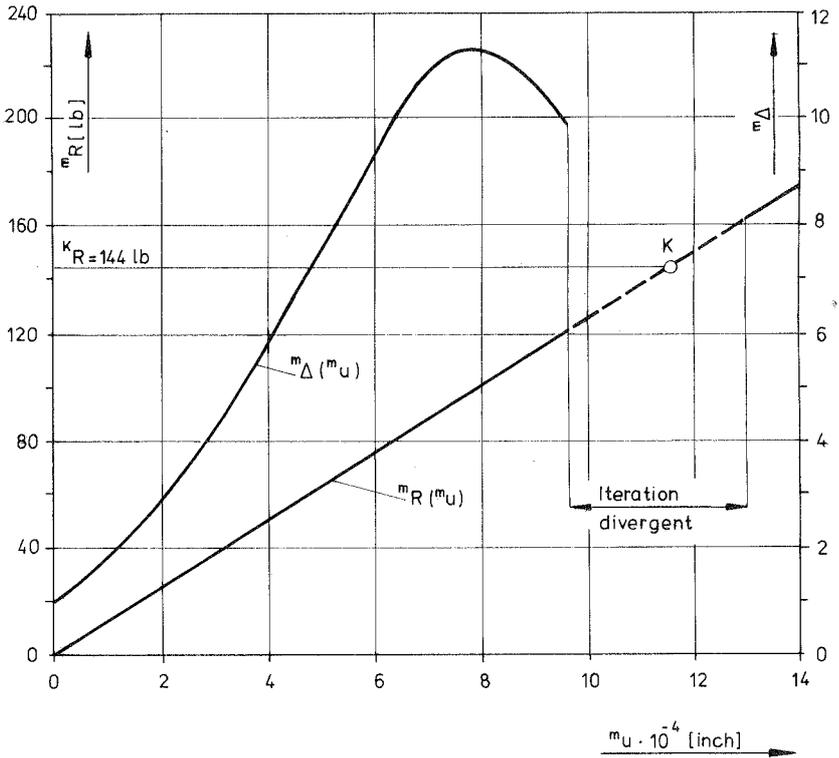


Bild 4.7 : Dreieckiger ebener Rahmen

4. Diskussion der Ergebnisse

Die Beispiele 1 und 2 verdeutlichen, daß über die Beobachtung der Determinante sowohl Verzweigungs- als auch Durchschlagspunkte aufgedeckt werden können.

Beispiel 3 zeigt dagegen einen Fall, der zu einem schleifenden Schnitt des Determinantenverlaufs mit der Abszisse führt und so eine unzuverlässige Aussage über den kritischen Punkt liefert.

Bei Beispiel 4 ergibt sich wegen der Konvergenzschwierigkeiten in der Umgebung des Versagenspunktes ein Bereich, in dem die Determinante nicht feststellbar ist und somit nicht zur Bestimmung der kritischen Last herangezogen werden kann.

Die beiden letzten Beispiele zeigen, daß neben der Berechnung der Determinante alternative Stabilitätsuntersuchungen erforderlich sind.

4.2.2 Eigenwertprobleme für den Lastparameter

Die Auswertung der statischen Stabilitätsgleichungen ist neben der Determinantenanalyse auch mit Hilfe von Eigenwertproblemen möglich (Abschnitt 4.1). Als Ergebnis erhält man dabei Näherungswerte für die kritische Last.

In Zusammenhang mit begleitenden Maßnahmen ist die Güte dieser Näherungswerte im Prinzip belanglos, wenn geometrisch nichtlineare Rechnung und Stabilitätsanalyse bis zum Versagenspunkt durchgeführt werden. Sie gewinnt jedoch sofort an Bedeutung, wenn es wegen numerischer Schwierigkeiten nicht möglich ist, den kritischen Zustand zu erreichen. Eine Extrapolation des Verlaufes der Näherungswerte zum kritischen Punkt wird nur dann sichere Ergebnisse liefern, wenn der Näherungswert bei Abbruch der Rechnung nicht zu weit vom tatsächlichen Indifferenzpunkt entfernt liegt. Es ist also zweckmäßig, bei der Wahl des begleitenden Eigenwertproblems die Güte der Näherungswerte von Anfang an zu berücksichtigen.

1. Numerische Auswertung

Zur Beurteilung der verschiedenen Vorgehensweisen sind lineare und quadratische Eigenwertprobleme der Form:

$$[\mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{B}] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$[\mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{B} + \lambda^2 \cdot \mathbf{C}] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

auszuwerten.

Die Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{B} und \mathbf{C} sind reell und symmetrisch, \mathbf{A} ist zudem positiv definit. Wegen dieser Eigenschaften besitzt das lineare Eigenwertproblem nur reelle Eigenwerte. Beim quadratischen Eigenwertproblem können sich dagegen auch imaginäre und komplexe Eigenwerte einstellen. Da diese jedoch entsprechend den Gleichungen (4.9) und (4.16) zur Berechnung von Näherungswerten für die kritische Last verwendet werden, sind nur die reellen Eigenwerte von Bedeutung. Die Lösung der linearen Eigenwertprobleme erfolgte im wesentlichen mit der von Bathe [11] beschriebenen Kombination der Determinantensuchtechnik, verbunden mit einer Vektoriteration. Für die quadratischen EW-Probleme wurde eine Determinantensuche eingesetzt, wie sie in ähnlicher Form in [80] zu finden ist.

2. Graphische Auswertung

Trägt man die mit Hilfe des Eigenwertes gewonnenen Näherungswerte der kritischen Last in Abhängigkeit der Verschiebungen des Grundzustandes auf, so ergibt sich ein Kurvenzug, der die Last-Verschiebungskurve im kritischen Punkt schneidet ($\lambda = 1$ in Gleichung (4.9) bzw. $\lambda = 0$ in Gleichung (4.16)). Stellt man dagegen die Näherungswerte als Funktion der äußeren Last dar, so ergibt sich der kritische Punkt aus dem Schnitt dieses Kurvenzuges mit der Winkelhalbierenden der beiden Koordinatenachsen. Im Prinzip genügt es dabei, den niedrigsten Eigenwert zur Ermittlung der Versagenslast zu betrachten. Wegen der möglichen Überschneidungen der Kurven der Näherungswerte ist es jedoch zweckmäßig, auch die nächsthöheren Eigenwerte zu ermitteln und in die Beobachtung mit einzubeziehen.

3. Beispiele

Beispiel 1: Ebenes Fachwerk

Um zu einer möglichst einfachen ersten Wertung der Eigenwertprobleme nach Tafel 4.2 zu gelangen, wird das Beispiel des ebenen Fachwerks (Bild 4.2) herangezogen.

Die erforderlichen Steifigkeitsausdrücke ergeben sich nach [81] zu:

$${}^0_0 K_e = \frac{{}^0_A \cdot {}^0_E}{0_L^3} \cdot 2 \cdot c^2$$

$${}^m_0 K_u = \frac{{}^0_A \cdot {}^0_E}{0_L^3} [2 \cdot m_u^2 - 4 \cdot c \cdot m_u]$$

$${}^m_0 K_g = \frac{2 \cdot m_S}{0_L}$$

Mit der Stabkraft:

$${}^m_0 S = \frac{m_R \cdot 0_L}{\cancel{0_A} \cdot m_L} = \frac{{}^0_A \cdot {}^0_E}{2 \cdot 0_L} [m_u^2 - 2 \cdot c \cdot m_u]$$

kann ${}^m_0 K_g$ durch Verschiebungen bzw. ${}^m_0 K_u$ durch Spannungen ausgedrückt werden:

$${}^m_0 K_g (m_u) = \frac{{}^0_A \cdot {}^0_E}{0_L^3} \cdot [m_u^2 - 2 \cdot c \cdot m_u]$$

$${}^m_0 K_u (m_S) = \frac{4 \cdot m_S}{0_L}$$

In den folgenden Bildern sind die Möglichkeiten der Eigenwertuntersuchungen nach Tafel 4.2 zusammengestellt.

Aus Bild 4.8 ist zunächst der deutliche Einfluß der Mitvergrößerung von ${}^m_0 K_u$ auf die Näherungswerte für die kritische Last erkennbar. Das Vorgehen im Sinne einer linearen Stabilitätsuntersuchung (Gleichung (4.10 c)) führt zu weit besseren Näherungen als das klassische Vorgehen (Gleichung (4.10 b)). In den kritischen Punkten selbst sind beide Verfahren jedoch gleichwertig. Bild 4.9 zeigt die Ergebnisse des quadratischen Eigenwertproblems, das aus der linearen Vergrößerung der Anfangsverschiebungen in ${}^m_0 K_u$ und ${}^m_0 K_g$ entsteht. Bis zu einer Last von 0,18 (also 91 % der Versagenslast) ergeben sich komplexe Eigenwerte und damit unbrauchbare Lösungen für die kritische Last. Die restlichen quadratischen Eigenwertprobleme (Bild 4.10 und 4.11) besitzen hier für den dargestellten Bereich stets reelle Eigenwerte. Gegenüber den linearen EW - Problemen fällt auf, daß wegen der

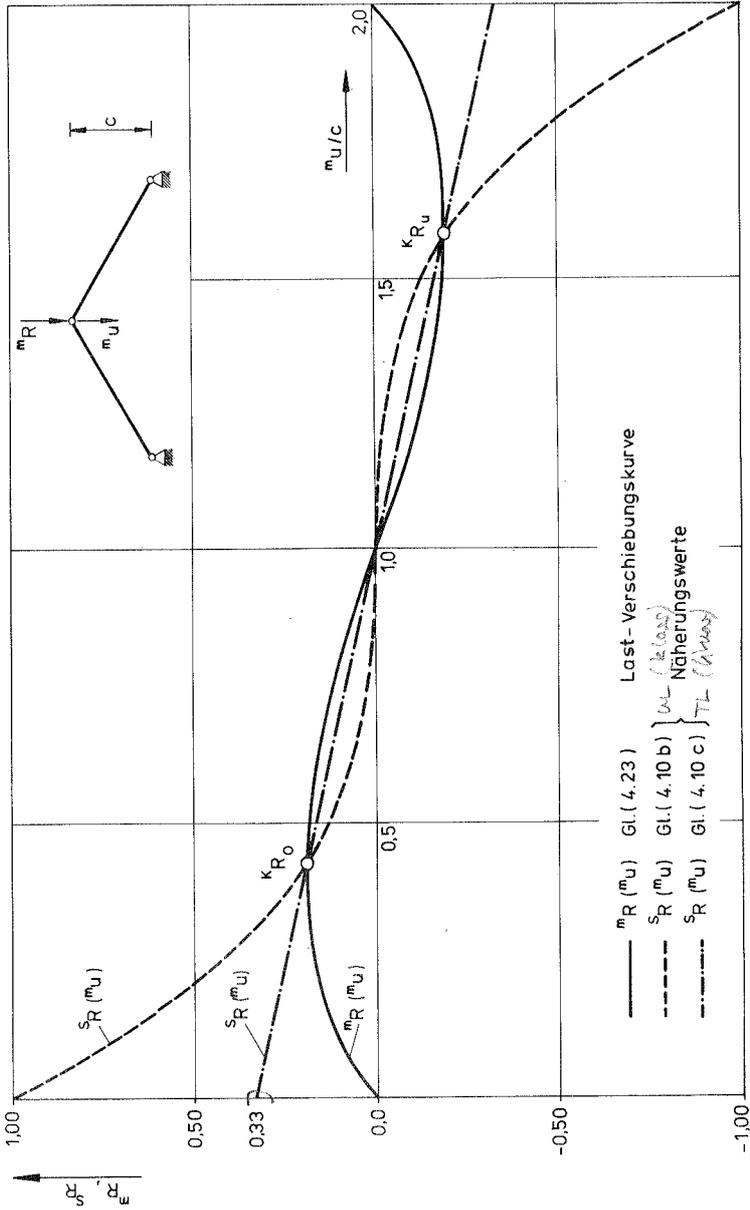


Bild 4.8: Begleitende Maßnahmen (EW - Problem aus Matrizenelementen)

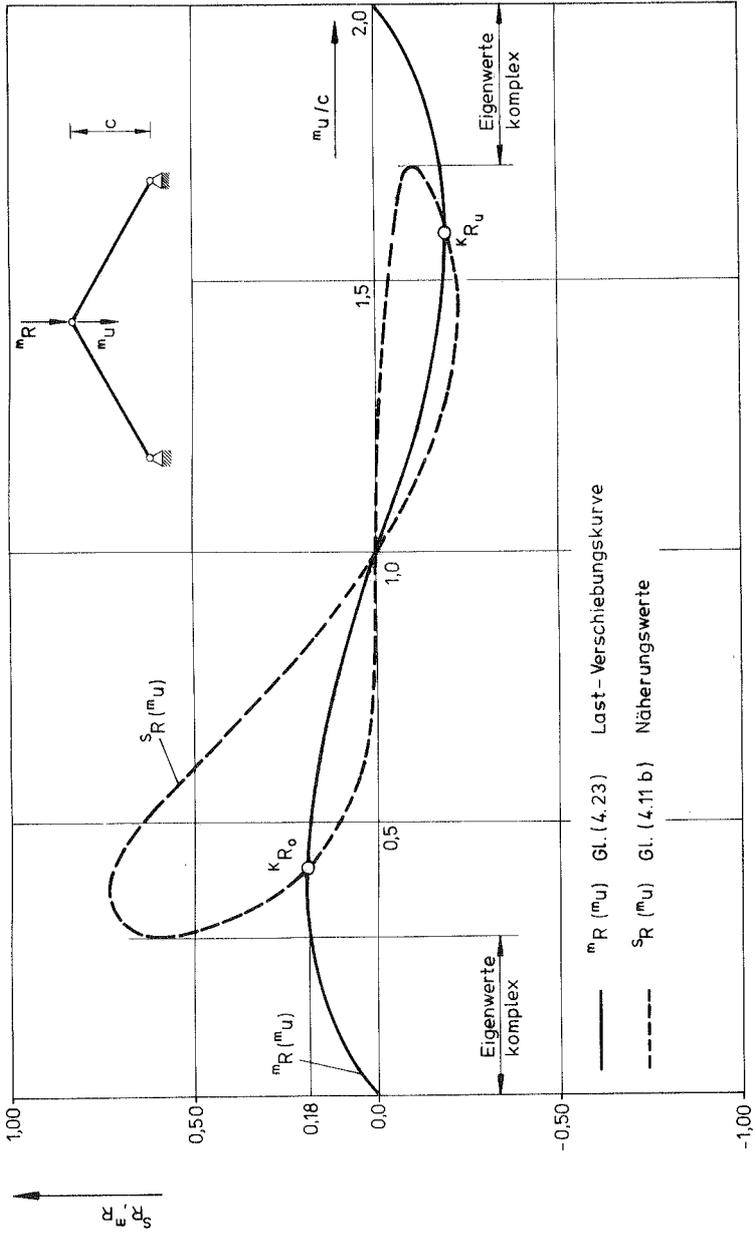


Bild 4.9 : Begleitende Maßnahmen (EW - Problem aus Verschiebungen)

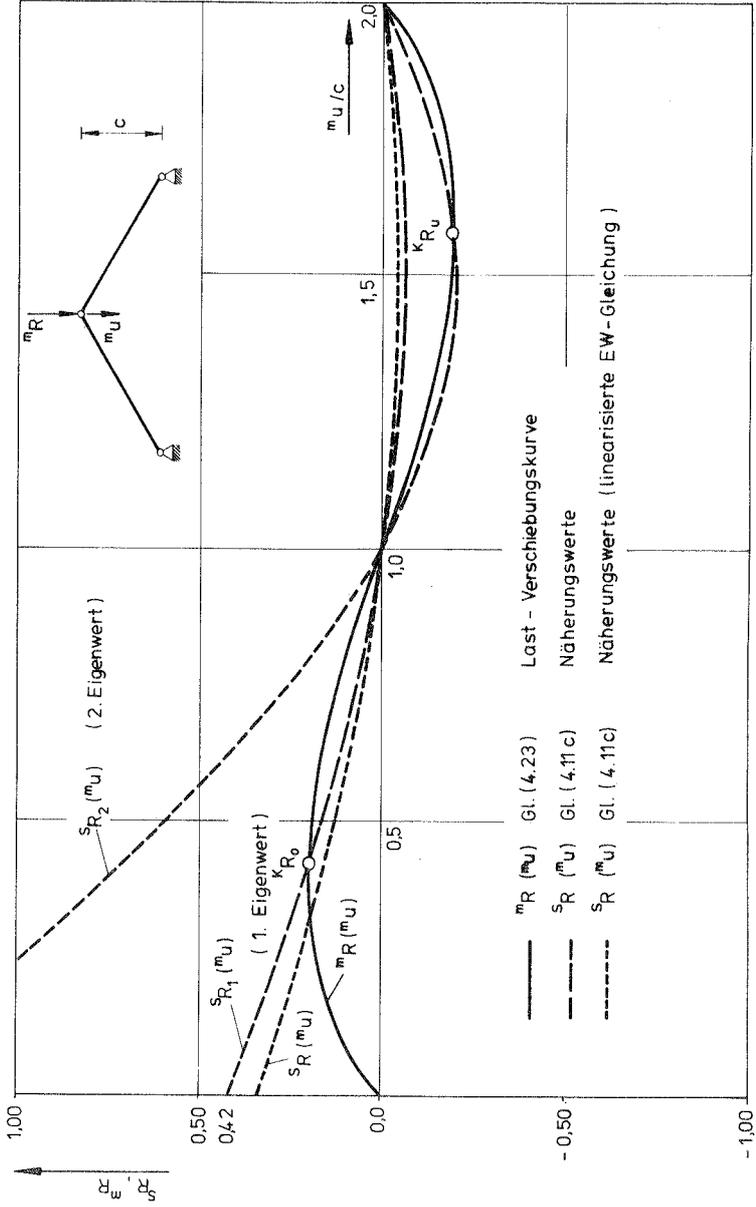


Bild 4.10 : Begleitende Maßnahmen (EW - Problem aus Verschiebungen)

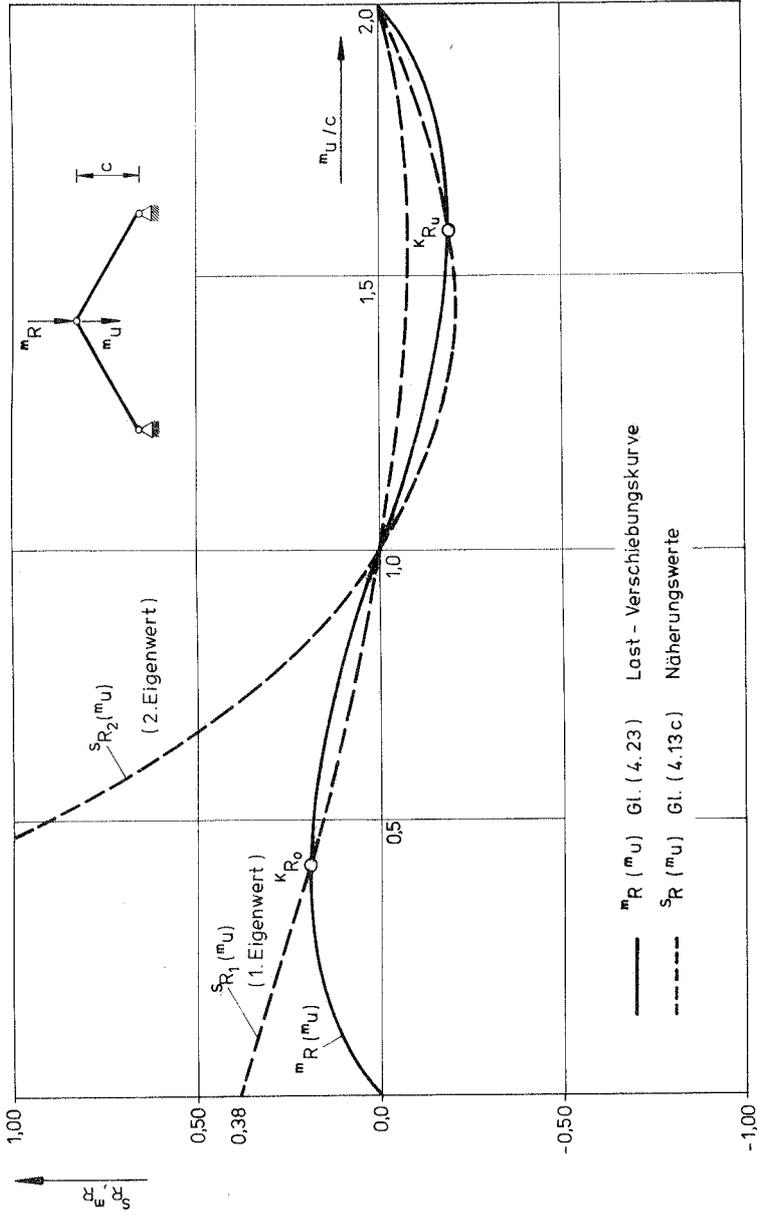


Bild 4.11: Begleitende Maßnahmen (EW - Problem aus gemischtem Vorgehen)

zwei Vorzeichen der quadratischen Gleichung zwei Näherungswertkurven entstehen. Dabei ist die eine dem oberen, die andere dem unteren Durchschlagspunkt zugeordnet. Bild 4.10 enthält neben der exakten Lösung der quadratischen Eigenwertgleichung (4.11 c) auch die von Stricklin [90] bzw. Mallet/Marcal [68] vorgeschlagene Linearisierung des Problems. Die Vernachlässigung der quadratischen Terme führt zu einem physikalisch nicht motivierten Verzweigungspunkt unterhalb der Durchschlagslast. Zusammenfassend ist aus den Bildern 4. 8 bis 4. 11 zu erkennen, daß die quadratischen Eigenwertprobleme bezüglich der Näherungswerte gegenüber den linearen nicht im Vorteil sind.

Da es zu einer sicheren Beurteilung nicht genügt, sich am ebenen Fachwerk allein zu orientieren, wurden weitere Untersuchungen an Bögen und Kugelhappen durchgeführt. Dort zeigten sich teilweise komplexe Eigenwerte auch bei Gleichung (4. 11 c). Wegen des zusätzlich erhöhten Lösungsaufwandes verbieten sich die quadratischen EW-Probleme daher praktisch von selbst.

Da weiterhin einerseits die Eigenwertgleichungen (4. 10 b) und (4. 12 b) übereinstimmen und andererseits die Gleichungen (4. 10 c) und (4. 12 c) zu gleichen Eigenwerten führen, genügt es, aus Tafel 4.2 lediglich die beiden EW-Probleme nach Gleichung (4. 10 b) und (4. 10 c) für die weiteren Untersuchungen zu übernehmen.

In Bild 4. 12 sind schließlich die Ergebnisse der Gleichungen (4. 10 c) und (4. 18) für den ebenen Rahmen gegenübergestellt. Wie in Abschnitt 4. 1. 2 erläutert, führen beide EW-Probleme zu gleichen Näherungswerten bei Belastungsbeginn. Nach einem Auseinanderlaufen treffen sich die Kurven der Näherungswerte im kritischen Punkt wieder. Beide Eigenwertprobleme sind von den Ergebnissen her also gleichwertig. Während jedoch Gleichung (4. 10 c) nur für die totale Lagrange-Formulierung gilt, kann Gleichung (4. 18) auch in der mitgehenden Lagrange-Formulierung verwendet werden.

Durch diese Voruntersuchung kann man sich im weiteren auf die Bewertung der in Tafel 4. 4 zusammengefaßten EW - Probleme beschränken. Insbesondere soll mit den folgenden Beispielen geklärt werden, ob die Berücksichtigung der Anfangsverschiebungen dem (erweiterten) klassischen Vorgehen vorzuziehen ist.

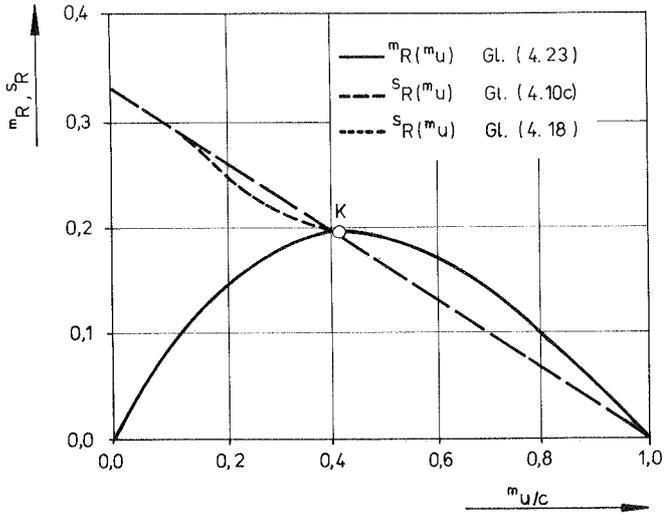


Bild 4.12 : EW - Problem aus inkrementellen Größen

EW-Untersuchung	mitgehende Lagrange-Formulierung	totale Lagrange-Formulierung
klassisches Vorgehen	$[{}^m\mathbf{K}_e + {}^m\lambda \cdot {}^m\mathbf{K}_g] \cdot {}^m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Gl. 4.24)	$[{}^0\mathbf{K}_e + {}^m\lambda \cdot {}^0\mathbf{K}_g] \cdot {}^m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Gl. 4.25)
Berücksichtigung der Anfangsverschiebungen	$[{}^m\mathbf{K} + {}^m\lambda \cdot \Delta_m\mathbf{K}] \cdot {}^m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Gl. 4.26)	$[{}^0\mathbf{K}_e + {}^m\lambda \cdot ({}^0\mathbf{K}_u + {}^m\mathbf{K}_g)] \cdot {}^m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Gl. 4.27) $[{}^m\mathbf{K} + {}^m\lambda \cdot \Delta_0\mathbf{K}] \cdot {}^m\mathbf{v} = \mathbf{0}$ (Gl. 4.28)

Tafel 4.4 : EW - Untersuchungen als begleitende Maßnahmen

Beispiel 2: Kugelschale unter Außendruck [95]

Die Idealisierung der Schale erfolgte mit 12 isoparametrischen axialsymmetrischen Elementen (8 Knoten je Element). Bild 4. 13 enthält neben der Last-Verschiebungskurve die Näherungswertkurven der beiden Eigenwertgleichungen (4. 25) und (4. 27). (In Zusammenhang mit geometrischen Imperfektionen (Formabweichungen) wird diese Kugelschale auch in Abschnitt 8 (Abbildungen 8. 3 und 8. 4) behandelt.)

Beispiel 3: Gitterkuppel unter Einzellast [28]

Zur numerischen Rechnung wurde das halbe System mit 24 Balkenelementen idealisiert (Plexiglasmodell $A = 0,7 \times 0,7 \text{ in}^2$, $E = 4,4 \times 10^5 \text{ psi}$).

Versagen tritt bei einer Last von 57,2 lb durch symmetrisches Durchschlagen ein. Als begleitende Maßnahme sind in Bild 4. 14 Eigenwertuntersuchungen nach den Gleichungen (4. 24) und (4. 26) gegenübergestellt. Das klassische Vorgehen zeigt zunächst über die erste Eigenform antisymmetrisches, über die zweite Eigenform symmetrisches Versagen an. Erst unmittelbar vor Erreichen des kritischen Punktes wechseln die beiden Eigenformen. Die sich aus den zugehörigen Eigenwerten ergebenden Kurven der Näherungswerte zeigen dies durch eine Überschneidung an. Die Mitvergrößerung der Anfangsverschiebungen liefert dagegen bei wesentlich besseren Näherungswerten von Beginn an die tatsächliche Versagensform.

Beispiel 4: Versuchsbau einer Gitterschale

Während sich der Determinantenverlauf dieses Systems (Beispiel 3, Abschnitt 4. 2. 1) als ungeeignet zur Ermittlung des kritischen Punktes erwies, zielen die begleitenden Eigenwertprobleme (Bild 4. 15) eindeutig auf den Durchschlagspunkt hin.

Beispiel 5: Flacher Kreisbogen unter Einzellast

Für dieses bereits in Abschnitt 4. 2. 1 (Beispiel 2) behandelte System enthält Bild 4. 16 die Ergebnisse der beiden Eigenwertgleichungen (4. 24) und (4. 26). Bemerkenswert sind die extrem niedrigen Näherungswerte bei Mitvergrößerung der Anfangsverschiebungen.

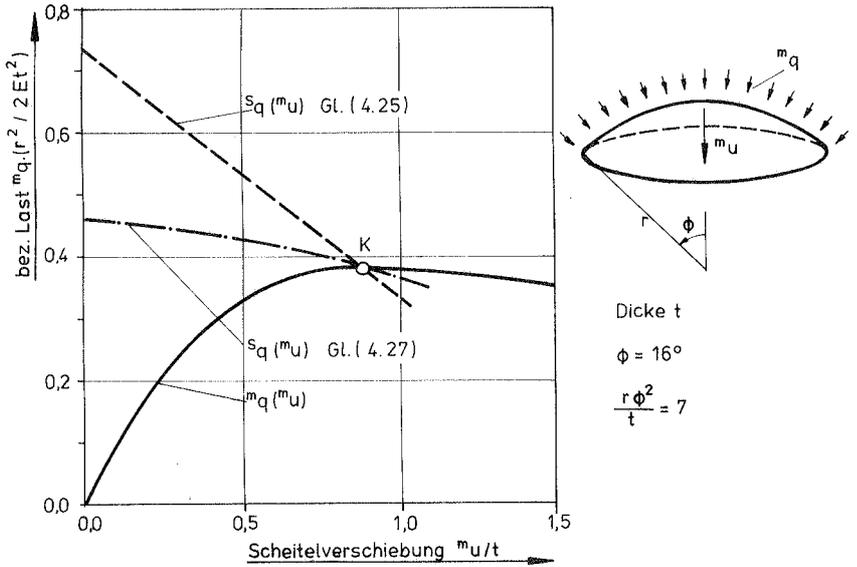


Bild 4.13 : Eingespannte Kugelschale unter Außendruck

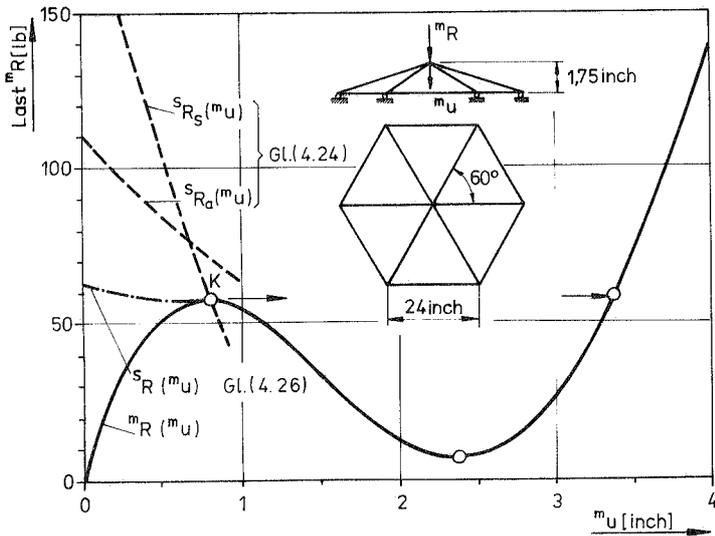
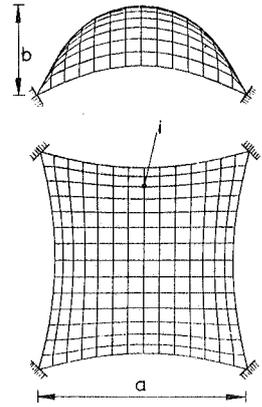
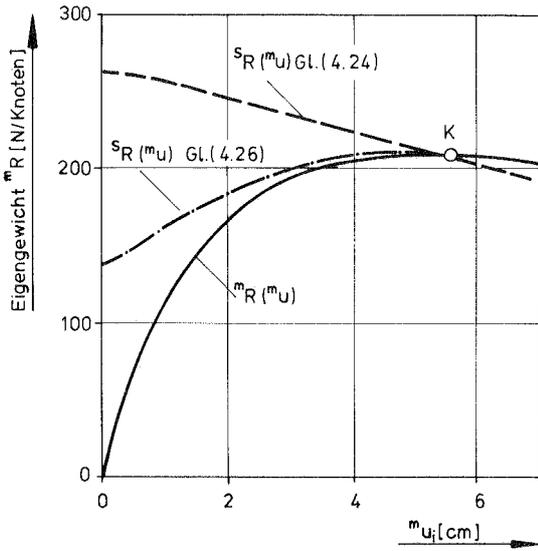


Bild 4.14 : Gitterkuppel unter Einzellast



$a = 660$ cm
 $b = 260$ cm

Last - Versch. diagramm

System

Eigenform v

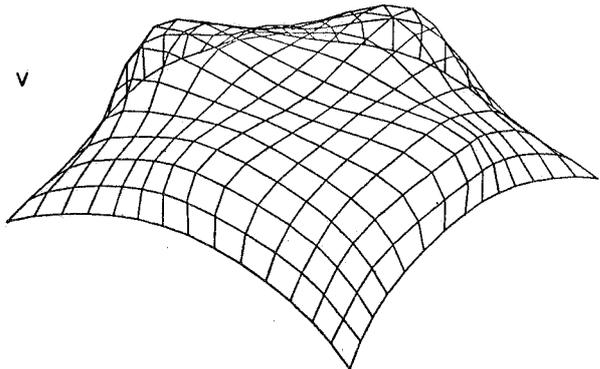
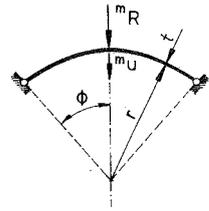
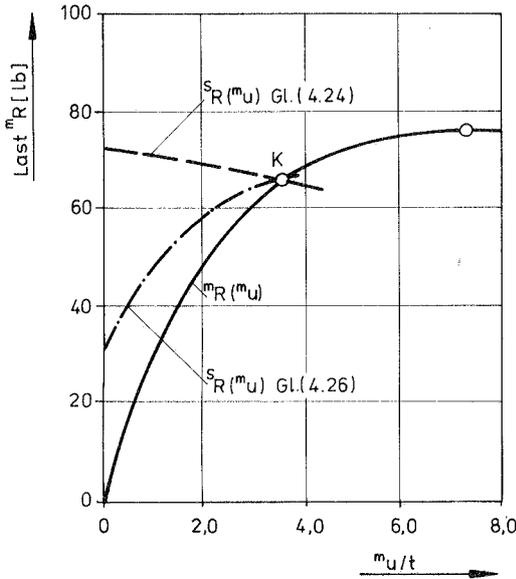


Bild 4.15 : Gitterschale, Lastfall Eigengewicht



$r = 1000$ inch
 $\phi = 10^\circ$
 $t = 1$ inch, $b = 2$ inch.
 $E = 1,5 \cdot 10^6$ psi

Bild 4.16 : Kreisbogen unter Einzellast

4. Diskussion der Ergebnisse

Die hier dargestellten Beispiele wurden aus einer größeren Anzahl bisher untersuchter Beispiele ausgewählt, um die wesentlichen Phänomene der begleitenden EW-Probleme exemplarisch aufzuzeigen. Insgesamt kann das unterschiedliche Verhalten der beiden Vorgehensweisen folgendermaßen charakterisiert werden:

Klassisches Vorgehen:

- Die Näherungswerte grenzen die kritische Last in der Regel von oben ein.
- Es ergeben sich sehr häufig Überschneidungen der Näherungswertkurven, d. h. bei Belastungsbeginn werden häufig falsche Eigenformen angezeigt. Erst bei höheren Lastzuständen - mitunter unmittelbar vor Erreichen der Versagenslast - liefert die EW-Untersuchung den tatsächlichen Beulmodus.

Mitvergrößerung der Anfangsverschiebungen

- Die Näherungswerte gleicher Belastungsstufen liegen stets niedriger als beim klassischen Vorgehen.
- Die Kurven der Näherungswerte nähern sich den kritischen Punkten teilweise von oben, teilweise jedoch von unten.
- Überschneidungen der Näherungswertkurven treten äußerst selten auf, d. h. bereits bei Belastungsbeginn wird die Eigenform meist richtig angezeigt.
- Abgesehen von den nachstehenden Ausnahmen liegen die Kurven der Näherungswerte günstiger als beim klassischen Vorgehen. Als Ausnahmen sind dabei nichtversteifte kontinuierlich gekrümmte Systeme (z. B. Bögen, Zylinderschalenfelder, Kugelkappen) unter der Wirkung konzentrierter Lasten anzusehen.

4.2.3 Eigenwertprobleme für die Eigenfrequenz

1. Numerische Auswertung

Die Stabilitätsgrenze wird nach Gleichung (3, 4) über das in ω^2 lineare Eigenwertproblem festgestellt.

$$\begin{bmatrix} {}^m_n \mathbf{K} & - & {}^m_n \omega^2 \cdot \mathbf{M} \end{bmatrix} \cdot {}^m_n \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Dabei stellt ${}^m_n \mathbf{K}$ die Tangentensteifigkeitsmatrix dar. Sie ist symmetrisch und unterhalb des ersten kritischen Lastzustandes positiv definit.

Die Massenmatrix ist je nach Ansatz eine Diagonalmatrix ("lumped mass") oder eine symmetrische positiv definite Bandmatrix ("consistent mass").

Zur Lösung des Eigenwertproblem es wurde auch hier eine Kombination aus Determinantensuchtechnik und Vektoriteration verwendet. Eine Gegenüberstellung möglicher Lösungsalgorithmen ist in [11] zu finden.

2. Graphische Auswertung

Zur zeichnerischen Darstellung werden für verschiedene Gleichgewichtszustände die niedrigsten Eigenfrequenzen ${}^m_n \omega_i$ berechnet und auf den Wert ω_1^0

des Ausgangszustandes (erste natürliche Eigenfrequenz) bezogen. Die so normierten Werte können entweder in Abhängigkeit einer charakteristischen Verschiebung oder als Funktion der äußeren Last aufgetragen werden. Kritische Punkte im Last-Verschiebungsdiagramm sind durch Nullstellen des Frequenzverlaufes gekennzeichnet.

3. Beispiele

Beispiel 1: Ebenes Fachwerk

Im Sonderfall des ebenen Fachwerks (Abschnitt 4.2.1, Beispiel 1) ergibt sich für die Eigenfrequenz:

$$\frac{m}{0} \frac{\omega^2}{2} = 1 - 3 \cdot \frac{m}{c} u + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{m}{c} u\right)^2 \quad (4.29)$$

also der gleiche funktionelle Verlauf wie in Abschnitt 4.2.1 für die Determinantenwerte. Die Abbildungen 4.3 und 4.4 gelten also unverändert für die bezogene Eigenfrequenz.

Beispiel 2: Versuchsbau einer Gitterschale (Bild 4.17)

Im Gegensatz zur Determinantenanalyse (Abschnitt 4.2.1, Beispiel 3) zeigt der Frequenzverlauf den kritischen Punkt eindeutig an. Die kritische Last steht in Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Eigenwertprobleme für den Lastparameter (Abschnitt 4.2.2, Beispiel 4).

Beispiel 3: Kreisbogen unter Einzellast [48]

Mit diesem System soll gezeigt werden, daß auch Frequenzverläufe zu Überschneidungen und damit anfänglich zu fehlerhaften Eigenformen führen können. Die in Bild 4.18 dargestellte Frequenzanalyse ergibt bei Belastungsbeginn für den ersten Eigenwert eine antisymmetrische, für den zweiten eine symmetrische Schwingungsform. Der Wechsel der beiden Eigenformen führt zum symmetrischen Durchschlagsverhalten und einer antisymmetrischen Verzweigung im Nachbeulbereich.

4. Diskussion der Ergebnisse

Die untersuchten Beispiele zeigen, daß Frequenzverläufe ein brauchbares Mittel zur Erkennung kritischer Lastzustände darstellen. Im Gegensatz

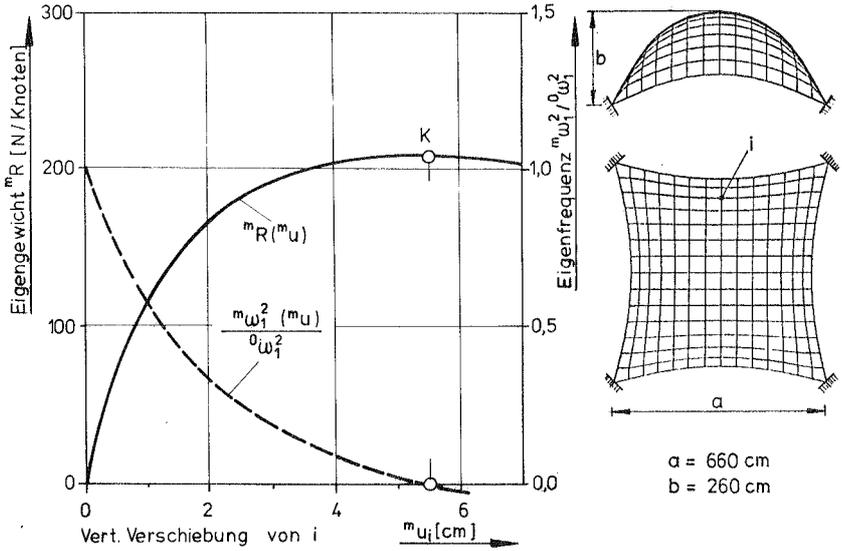


Bild 4.17 : Frequenzverlauf - Gitterschale

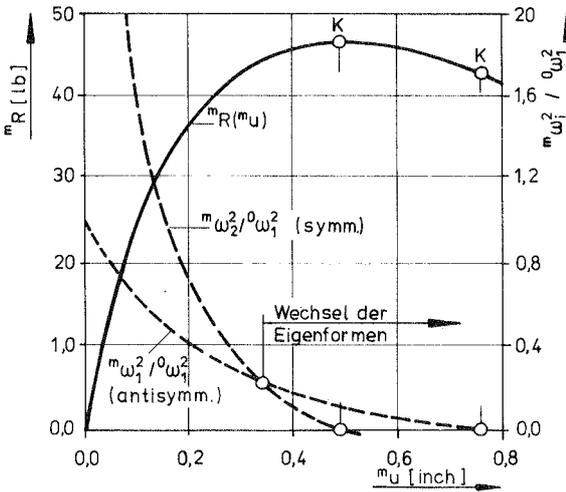


Bild 4.18 : Frequenzverlauf - Kreisbogen

zur Determinante entstanden keine schleifenden Schnitte mit den Abszissen der entsprechenden Diagramme.

4.2.4 Zusammenfassung

Zum Vergleich sind Vor- und Nachteile der verschiedenen begleitenden Maßnahmen in Stichworten zusammengestellt.

Beobachtung der Determinante

- Sehr geringer Aufwand zur Berechnung der Determinante.
- Wegen möglicher schleifender Schnitte und nicht bestimmbarer Bereiche nur bedingt brauchbar.
- Selbst bei Systemen mit linearem oder schwach nichtlinearem Vorbeulverhalten ist eine inkrementell - iterative Rechnung erforderlich, um Stützstellen für den Determinantenverlauf zu bekommen.
- Die Eigenform ist nicht ermittelbar.

Eigenwertprobleme für den Lastparameter

- Näherungswert für die kritische Last.
- Vorhersage der Eigenform.
- Erhöhter numerischer Aufwand gegenüber der Determinantenberechnung.

Eigenwertprobleme für die Eigenfrequenz

- Vorhersage der kritischen Last durch Extrapolation des Frequenzverlaufes (jedoch erst nach mehrfacher Auswertung des Eigenwertproblems möglich, siehe z. B. Bild 4.27).
- Vorhersage der Eigenform.
- Zur Ermittlung von Stützstellen für den Frequenzverlauf muß selbst bei linearem Verhalten inkrementell - iterativ gearbeitet werden.

Eine abschließende Beurteilung der drei Verfahren mündet in folgende Empfehlungen:

1. Obwohl sich die Determinante nicht immer als ein zuverlässiges Maß zur Aufdeckung kritischer Punkte gezeigt hat, sollte man bei nicht-linearen Rechnungen auf diese Stabilitätsaussage nicht verzichten.
2. Eigenwertprobleme für den Lastparameter und die Eigenfrequenz sind für nichtlineare Stabilitätsuntersuchungen gleichermaßen gut geeignet. Wegen der einfacher zu gewinnenden Näherungswerte für die kritische Last wird man in der Regel auf Eigenwertprobleme für den Lastparameter zurückgreifen. Abgesehen von Tragwerken unter konzentrierten Lasten ist dabei die Mitvergrößerung der Anfangsver-schiebungen vorzuziehen.

Neben den hier vorgeschlagenen Möglichkeiten sind weitere begleitende Maßnahmen möglich. So verwendet Söreide [88] einen sogenannten Steifigkeitsparameter.

Dies ist ein normierter Ausdruck für die Arbeit der inkrementellen Lasten an den inkrementellen Verschiebungen. Am Beispiel des ebenen Rahmens (Abschnitt 4.2.1, Beispiel 1) ergibt sich der gleiche Verlauf wie für die Determinante (Bilder 4.3, 4.4). Bei unbekanntem Systemverhalten ist diese Methode für Stabilitätsuntersuchungen mit Vorsicht anzuwenden, weil sie nicht in der Lage ist, Verzweigungspunkte aufzudecken.

4.3 Extrapolation begleitender Maßnahmen

Untersuchungen zum Konvergenzverhalten ergeben [34], daß für die beiden Newton-Raphson-Verfahren konvergentes Verhalten nur bis zum Erreichen des ersten kritischen Zustandes nachgewiesen werden kann. Es ist somit nicht immer zu erwarten, daß ein inkrementell - iteratives Vorgehen, dem diese Iterationsverfahren zugrunde liegen, über die kritische Last hinaus-führt. Wegen der zusätzlichen Konvergenzschwierigkeiten durch die Singu-larität im kritischen Punkt ist es teilweise nicht möglich, den kritischen Zustand überhaupt zu erreichen (Abschnitt 4.2.1, Beispiel 4, Bild 4.7).

Bei Durchschlagspunkten ergibt sich zudem das Problem, daß eine vorge-gebene endliche Lastinkrementierung den Abbruch des Iterationsvorganges unterhalb der Durchschlagslast zur Folge hat (Bild 4.19).

Es sollen daher Verfahren untersucht werden, die es erlauben, den kritischen Zustand durch die Extrapolation der begleitenden Maßnahmen und der Last-Verschiebungskurve näherungsweise festzustellen.

4.3.1 Extrapolation der Determinante

1. Durchschlagspunkte

Das hier vorgestellte Verfahren geht auf Gallagher/Mau [47] zurück. Es basiert auf der Extrapolation des Determinantenverlaufs im $m_{\Delta} - m_R$ -Diagramm und setzt dort eine vertikale Tangente im Durchschlagspunkt voraus. (Diese Voraussetzung ist nicht zwingend und trifft nur teilweise zu.)

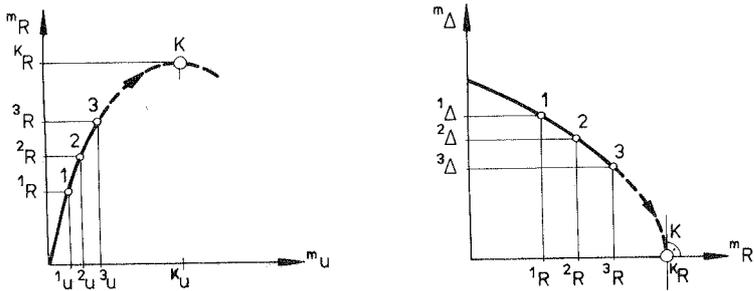


Bild 4.19: Extrapolation der Determinante

Zur Extrapolation wird zunächst ein Polynom für den Determinantenverlauf aufgebaut. Beschränkt man sich auf einen kubischen Ansatz, so sind neben dem kritischen Punkt K selbst drei weitere Stützstellen festzulegen. Das führt zu:

$$m_R(m_{\Delta}) = b_0 + b_1 \cdot m_{\Delta} + b_2 \cdot m_{\Delta}^2 + b_3 \cdot m_{\Delta}^3 \quad (4.30)$$

(m = 1, 2, 3, K)

und den Nebenbedingungen:

$$K_{\Delta} = 0 \quad (4.31 a)$$

$$\left. \frac{\partial m_R}{\partial m_{\Delta}} \right|_{m=K} = 0 \quad (4.31 b)$$

Die Lösung dieser Gleichungen ergibt einen extrapolierten Wert für die kritische Last. Über die anschließende Extrapolation der Lastverschiebungskurve kann damit der kritische Verschiebungszustand ermittelt werden:

$$m_R(m_u) = b_0 + b_1 \cdot m_u + b_2 \cdot m_u^2 + b_3 \cdot m_u^3 \quad (4.32)$$

mit:
$$\left. \frac{\partial m_R}{\partial m_u} \right|_{m=K} = 0 \quad (4.33)$$

Die Anwendung des Verfahrens auf den ebenen Rahmen (Abschnitt 4.2.1, Beispiel 1, Bild 4.4) bzw. auf die Gitterkuppel (Abschnitt 4.2.2, Beispiel 3) ergibt folgenden Sachverhalt:

- Für die Extrapolation der Verschiebungen ist ein kubisches Polynom erforderlich, für den Determinantenverlauf genügt ein quadratischer Ansatz.
- Als Stützstellen sind die zuletzt ausiterierten Lastzustände heranzuziehen. Bei dieser Art der Stützstellenverteilung ergeben sich brauchbare Versagenslasten für $^3R/K_R > 0,7$. Es ist also nicht erforderlich, über eine sehr feine Lastinkrementierung dem kritischen Lastzustand extrem nahe zu kommen.
- Die Extrapolation ergibt für die kritischen Lasten bessere Werte als für die kritischen Verschiebungen (die fehlerbehaftete kritische Last geht in das Polynom für die Verschiebungen ein).
- Die sich über die Extrapolation ergebenden Nachbeulverschiebungen sind unbrauchbar.

Die Untersuchung weiterer Beispiele zeigt jedoch, daß bei der Anwendung Vorsicht geboten ist. Teilweise kommt die vertikale Tangente erst durch eine lokale Krümmung des Determinantenverlaufes unmittelbar vor dem

Durchschlagen zustande (Bild 4.20 b). In diesen Fällen sind Stützstellen im Bereich der lokalen Krümmungen erforderlich, um verlässlich extrapolieren zu können, d. h. die zuletzt ausiterierten Lastzustände müssen sehr nahe bei der Versagenslast liegen.

In anderen Fällen (Bild 4.20 c) fehlt die vertikale Tangente, d. h. die Bedingung (4.31 b) ist verletzt. Bei schleifenden Schnitten in diesem Diagramm ist eine Extrapolation dieser Art nicht mehr möglich (Beispiel 3, Abschnitt 4.2.1).

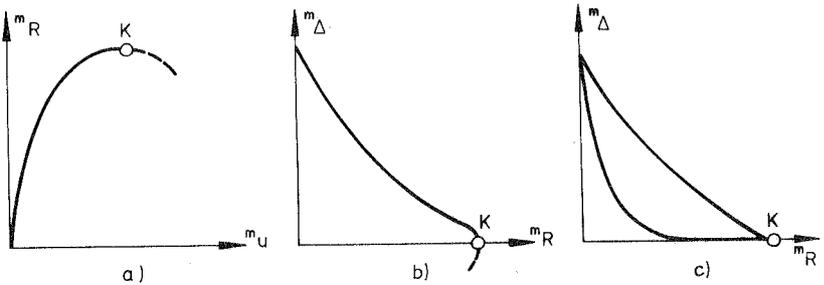


Bild 4.20: Determinantenverlauf bei Durchschlagsproblemen

2. Verzweigungspunkte

Die Extrapolation ist entweder im $m_\Delta = m_\Delta(m_u)$ - oder im $m_\Delta = m_\Delta(m_R)$ -Diagramm durchzuführen (Bild 4.21).

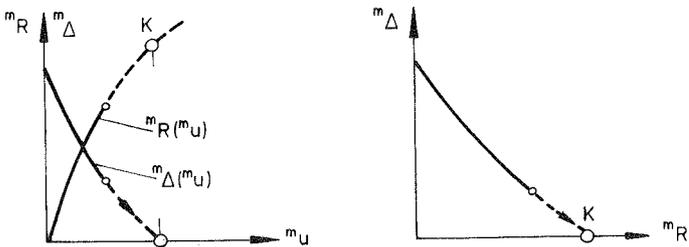


Bild 4.21: Extrapolation der Determinante

Das Verfahren ist nicht anwendbar, wenn schleiende Schnitte der Determinante vorhanden sind bzw. wenn wie in Abschnitt 4.2.1, Bild 4.7 die letzten brauchbaren Determinantenwerte zu weit von der kritischen Last entfernt liegen.

4.3.2 Extrapolation der Näherungswerte für die kritische Last

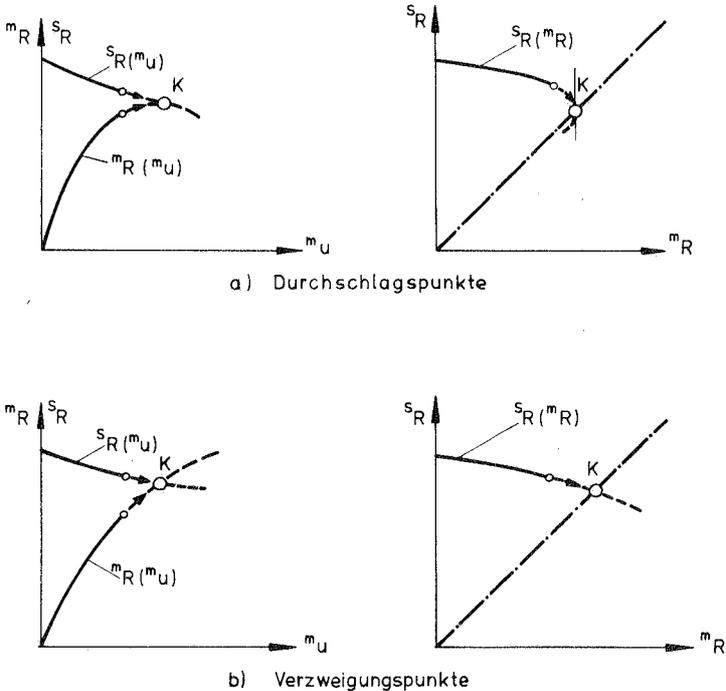


Bild 4.22 : Extrapolation der Näherungswertkurven

Erfolgt die Extrapolation im m_R - m_u -Diagramm, so ergibt sich die kritische Last aus dem gemeinsamen Schnittpunkt der Lastverschiebungskurve mit den Näherungswerten. Bei der Extrapolation im S_R - m_R -Diagramm ist dagegen der Schnitt des Kurvenzuges der Näherungswerte mit der Winkelhalbierenden der beiden Koordinatenachsen maßgebend ($\lambda = 1 : S_R = m_R$).

Neben der Wahl eines EW-Problems, das zu günstigen Näherungswerten führt, ist es für eine sichere Extrapolation erforderlich, mindestens die zweiniedrigsten Eigenwerte zu bestimmen. Nur so können Überschneidungen der Näherungwertkurven erkannt und Fehlschätzungen bei der Extrapolation vermieden werden.

4.3.3 Extrapolation der Eigenfrequenzen

Die kritische Last ergibt sich aus dem Schnitt der extrapolierten Eigenwertkurven mit den Abszissen der Frequenzdiagramme. Wegen der möglichen Überschneidungen (vergleiche Bild 4.18) sollten zur Extrapolation mindestens zwei dieser Eigenwertkurven herangezogen werden.

1. Durchschlagspunkte

Zur Ermittlung von Durchschlagspunkten bietet sich die Extrapolation im $m_w^2 - m_R$ -Verlauf (Frequenzgang) an. Im Gegensatz zum Determinantenverlauf $m_\Delta (m_R)$ führt der Frequenzgang bei allen untersuchten Beispielen zu einer vertikalen Tangente am Durchschlagspunkt (Bild 4.23).

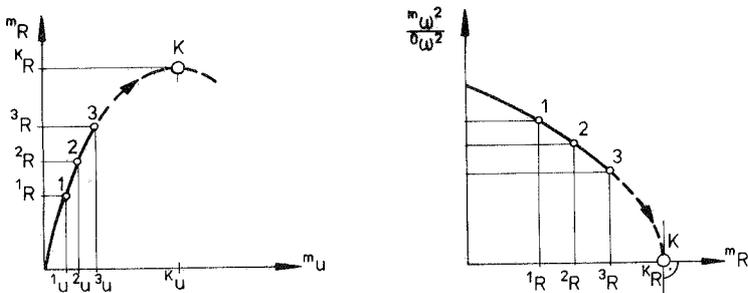


Bild 4.23: Extrapolation der Eigenfrequenzen

Wegen dieser Eigenschaft scheint für die kritische Last ein Extrapolationspolynom der Form:

$$m_R = b_0 + b_1 \cdot \frac{m_w^2}{0_w^2} + b_2 \cdot \left(\frac{m_w^2}{0_w^2}\right)^2 + b_3 \cdot \left(\frac{m_w^2}{0_w^2}\right)^3 \quad (4.34)$$

mit:
$$\frac{K}{\omega} \frac{\omega^2}{\omega^2} = 0 \quad (4.35 a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial m_R}{\partial \left(\frac{m}{\omega^2} \right)} \right|_{m=K} = 0 \quad (4.35 b)$$

sinnvoll,

Für die anschließende Extrapolation der Verschiebungen kann wieder das Polynom nach den Gleichungen (4.32), (4.33) herangezogen werden. Als Stützstellen der Polynome sind die Verschiebungen und Eigenfrequenzen der drei zuletzt erreichten Gleichgewichtszustände zu verwenden. Brauchbare Versagenslasten ergaben sich auch hier bei Lastzuständen ${}^3R_i / K_{R_i} > 0,7$.

2. Verzweigungspunkte

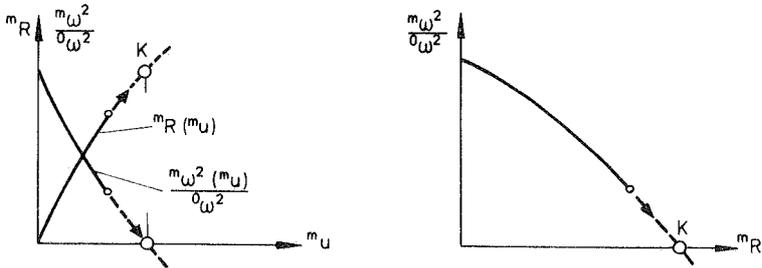


Bild 4.24 : Extrapolation der Eigenfrequenzen

Für die Extrapolation der Eigenfrequenzen im $\frac{m_U^2}{\omega^2} / \omega^2 - m_R$ -Verlauf sei auf die Sonderfälle von Tragwerken hingewiesen, bei denen die Southwell-Ungleichung:

$$\frac{m_U^2}{\omega^2} + \frac{m_R}{K_R} \geq 1$$

exakt oder genähert in eine Gleichung übergeht [83], [32] und [63]. Das Frequenzverhalten ist dann durch eine Gerade charakterisiert und es genügt

neben der natürlichen Eigenfrequenz ω^2 eine weitere Stützstelle zur Bestimmung der kritischen Last. Dieses Verfahren, das zur experimentellen Bestimmung kritischer Lasten durch Schwingungsmessungen [32], [63], [85] herangezogen wird, kann ohne Änderung auch zur Extrapolation berechneter Eigenfrequenzen verwendet werden.

4.3.4 Zusammenfassung

Der Determinantenverlauf erweist sich nur teilweise als brauchbar zur Extrapolation. Dagegen war es nach den bisherigen Erfahrungen mit Schätzwertkurven für die kritische Last bzw. die Eigenfrequenzen immer möglich, den Bereich vom eventuellen Auftreten numerischer Schwierigkeiten bis zum Indifferenzpunkt durch Extrapolation zu überbrücken und die kritische Last hinreichend genau zu bestimmen.

4.4 Verfahren zur direkten Ermittlung von Verzweigungslasten

Das Vorgehen in Abschnitt 4.2 war dadurch gekennzeichnet, daß die für die geometrisch nichtlineare Rechnung erforderliche Lastinkrementierung (willkürlich) festgelegt war. Die kritische Last liegt dann i. a. innerhalb eines Lastinkrements und ergibt sich aus der Interpolation der begleitenden Maßnahme zwischen den beiden angrenzenden Lastwerten.

Bei der direkten Ermittlung von kritischen Lasten dagegen wird mit Hilfe der begleitenden Maßnahme das neue Lastinkrement über den Näherungswert für die kritische Last festgelegt. Ziel ist, über das (inkrementell -) iterative Vorgehen den kritischen Lastzustand direkt anzusteuern, d. h. eine Gleichgewichtsiteration für die kritische Last durchzuführen. Neben dem allgemeinen Vorteil, daß die Interpolation überflüssig wird, bieten diese Verfahren die Möglichkeit, als Startzustand für Nachbeulanalysen den kritischen Last- und Verschiebungszustand genau zu erreichen.

Eine Grundvoraussetzung für die Konvergenz ist, daß in der Umgebung des kritischen Punktes keine numerischen Schwierigkeiten auftreten.

Da Durchschlagpunkte bei Lastinkrementierung nicht ohne zusätzliche Maßnahmen erreichbar sind, können die im weiteren diskutierten Verfahren nur zur Ermittlung von Verzweigungspunkten herangezogen werden.

4.4.1 Automatische Schrittweitenfindung

Im Anschluß an jeden iterativ erreichten Gleichgewichtszustand wird mit Hilfe der begleitenden Maßnahme die nächste auszuiterierende Laststufe durch einen Näherungswert für die kritische Last festgelegt.

Zur Ermittlung dieser Näherungswerte können neben dem Determinantenverlauf auch Eigenwertprobleme für den Lastparameter und die Eigenfrequenz verwendet werden.

1. Schrittweite über die Determinante [58]

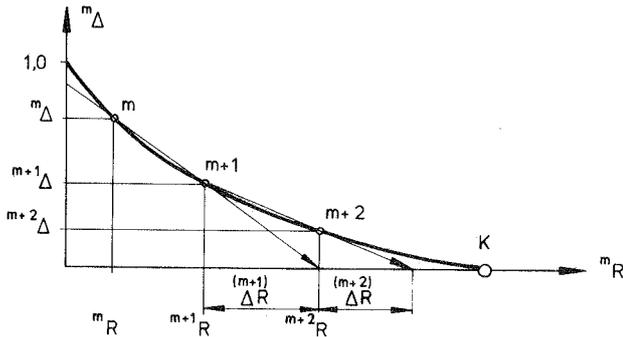


Bild 4.25: Schrittweite über die Determinante

Das prinzipielle Vorgehen ist in Bild 4.25 dargestellt. Die Schrittweite $(m+1)_\Delta R$ wird über die lineare Extrapolation der Determinantenwerte m_Δ und $m+1_\Delta$ gewonnen und der zugehörige Gleichgewichtszustand $m+2$ iterativ ermittelt. Nach der anschließenden Berechnung von $m+2_\Delta$ ergibt sich die neue Schrittweite $(m+2)_\Delta R$ aus der Extrapolation der Stützstellen $m+1$ und $m+2$. Soll das Verfahren zum gewünschten kritischen Punkt konvergieren, so muß ausgehend vom unbelasteten Zustand die monotone Abnahme der Determinantenwerte gewährleistet sein, d.h. die Determinante muß die Stabilitätsgefährdung von Beginn an anzeigen. Der dreieckige ebene Rahmen

nach Abschnitt 4. 2. 1 (Beispiel 4, Bild 4. 7) zeigt, daß dieses Verhalten nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden kann. Die Extrapolation der Determinante bei Belastungsbeginn würde dort in eine negative kritische Last münden. Systeme mit schleifenden Schnitten im Determinantenverlauf können weiterhin eine langsame Konvergenz des Verfahrens zur Folge haben. Zudem wird selbst bei linearem Vorbeulverhalten eine inkrementell - iterative Rechnung erforderlich.

2. Eigenwertprobleme für den Lastparameter

Ausgehend von einem bereits erreichten Gleichgewichtszustand ergibt sich die nächste auszutierende Laststufe aus dem niedrigsten Näherungswert für die kritische Last (Bild 4. 26). Der Vorgang wird abgebrochen, wenn der Eigenwert eine vorgegebene Grenze unterschreitet. Die Wahl eines Eigenwertproblems mit günstigen Näherungswerten ist hier somit von besonderer Bedeutung. Damit kann man sich auf die Eigenwertuntersuchungen nach Abschnitt 4. 2. 2 beschränken. In Tafel 4. 5 sind diese mit den Rechenvorschriften für die Laststufen und die kritische Last zusammengestellt.

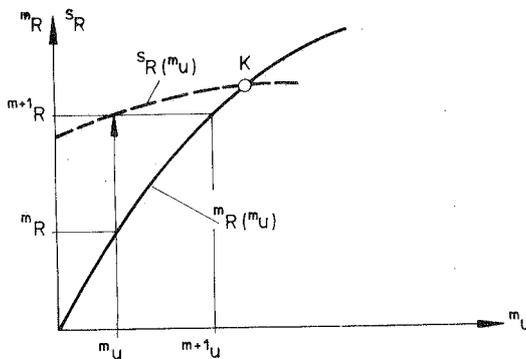


Bild 4.26 : Schrittweite über Näherungswerte

3. Eigenwertprobleme für die Eigenfrequenzen

Analog zum Determinantenverlauf kann die Schrittweite auch aus der linearen Extrapolation des Frequenzganges bestimmt werden.

	Eigenwertproblem	neue Laststufe	kritische Last
klassisches Vorgehen	$[{}^m K_e + {}^m \lambda \cdot {}^m K_g] \cdot {}^m v = 0$ <p style="text-align: center;">(n = 0, m)</p>	${}^{m+1} R = {}^m \lambda \cdot {}^m R$	${}^K R = {}^1 R \cdot \prod_{m=1}^{\infty} {}^m \lambda$
Berücksichtigung der Anfangsverschiebungen	$[{}^m_0 K_e + {}^m \lambda \cdot ({}^m_0 K_u + {}^m_0 K_g)] \cdot {}^m v = 0$	${}^{m+1} R = {}^m \lambda \cdot {}^m R$	${}^K R = {}^1 R \cdot \prod_{m=1}^{\infty} {}^m \lambda$
	$[{}^m_n K + {}^m \lambda \cdot \Delta_n K] \cdot {}^m v = 0$ <p style="text-align: center;">(n = 0, m)</p>	${}^{m+1} R = {}^m \lambda \cdot \Delta R$	${}^K R = {}^1 R \cdot \prod_{m=1}^{\infty} (1 + {}^m \lambda)$

Tafel 4.5: Automatische Schrittweitenfindung

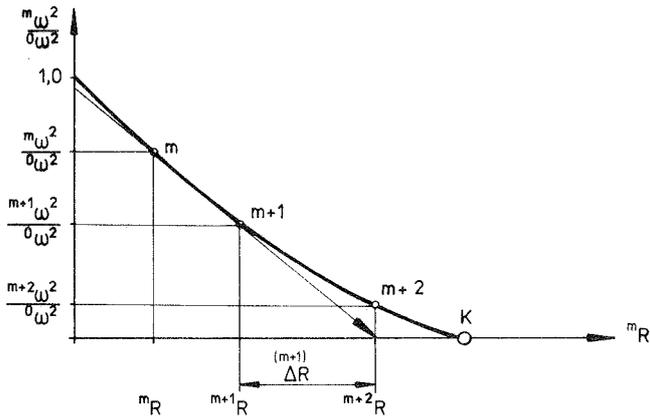


Bild 4.27 : Schrittweite über die Eigenfrequenzen

4.2.2 Eigenwertgesteuerte Iterationsverfahren

Eigenwertgesteuerte Iterationsverfahren und automatische Schrittweitenfindung sind durch einen ähnlichen Rechenablauf gekennzeichnet. Anstelle der Gleichgewichtsiteration wird bei den eigenwertgesteuerten Verfahren lediglich ein einzelner linearer Schritt zum errechneten Lastniveau hin gestartet. Für diesen Zwischenzustand (der sich nicht im Gleichgewicht befindet) wird dann die begleitende Maßnahme erneut ausgewertet und so das nächste Lastniveau festgelegt. Dieser Vorgang wird abgebrochen, wenn die Lastwerte zweier aufeinanderfolgender Schritte bis auf eine vorgegebene Abweichung übereinstimmen und damit die kritische Last mit der gewünschten Genauigkeit erreicht ist. Während also bei der automatischen Schrittweitensteuerung die Verzweigungslast inkrementell - iterativ aufgesucht wird, handelt es sich bei den gesteuerten Iterationsverfahren um eine rein iterative Ermittlung dieser Last. Das Lastniveau der Iteration wird dabei durch die begleitende Maßnahme gesteuert.

Zur Stabilitätsuntersuchung kommen nur noch Eigenwertprobleme für den Lastparameter in Frage. Determinante und Eigenfrequenzen liefern wegen des fehlenden Gleichgewichtes zu unsichere Werte für die Extrapolation. Die entsprechenden Eigenwertprobleme, die Rechenvorschriften für die neuen Laststufen bzw. die kritische Last können ohne Änderung aus Tafel 4.5 entnommen werden.

Der Ablauf des daraus folgenden Rechenprozesses ist in Bild 4.28 für die beiden Newton-Raphson-Verfahren (in symbolischer Form) dargestellt:

- ① Ermittlung des neuen Lastniveaus (mit Hilfe eines EW-Problems),
- ② Linearer Rechenschritt zum neuen Lastniveau und Addition der inkrementellen Verschiebungen zu den Gesamtverschiebungen,

Verschiedene Verfahren der Iterationssteuerung sind in der Literatur bekannt und angewandt worden. Cohen [27] verwendet zur Iteration das Sekantenverfahren, Svalbanos/Balderes [91] und Bushnell [25] wählen lineare Eigenwertprobleme. Später setzt Bushnell in [26] ein quadratisches Eigenwertproblem nach Gleichung (4.11 c) ein. Almroth [2] schlägt dagegen ein durch Vernachlässigung der quadratischen Terme linearisiertes EW-Problem vor.

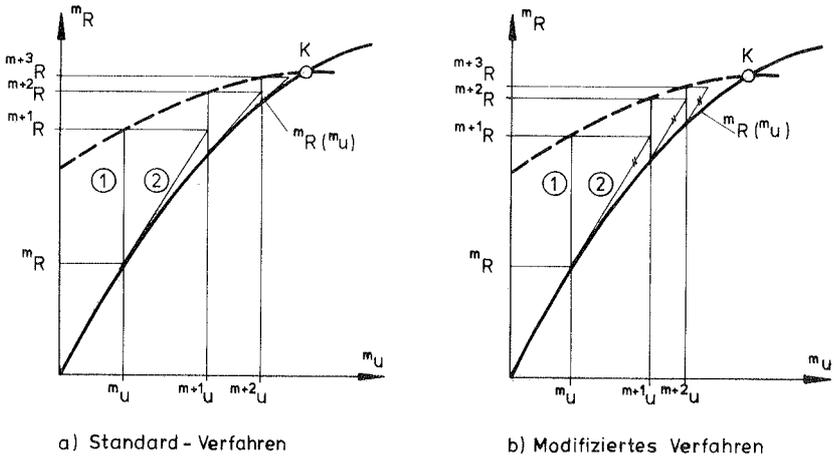


Bild 4.28 : Steuerung der Newton-Raphson Iteration

4. 4. 3 Zusammenfassung

Bei der Schrittweitenfindung wird ausgehend vom Startzustand der kritische Punkt über weitere Gleichgewichtszustände ermittelt. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß zwischen Start- und Verzweigungspunkt weitere Punkte auf der Last-Verschiebungskurve bekannt sind und so das nicht-lineare Verhalten des Systems erkennbar wird. Die Iterationssteuerung verzichtet auf diese Zwischenpunkte und zielt bei geringem numerischen Aufwand direkt auf den kritischen Punkt hin.

In ihrer ursprünglichen Konzeption verwenden beide Verfahren als Startzustand die unbelastete Ausgangskonfiguration. Aus den Bildern 4. 25 bis 4. 28 geht hervor, daß dieses Vorgehen bei Belastungsbeginn häufig sehr große Lastschritte ergibt. In Verbindung mit einem ausgeprägten nicht-linearen Systemverhalten führt das zu Konvergenzschwierigkeiten im Iterationsprozeß. Zur Abhilfe können die aus der Stabilitätsuntersuchung folgenden Lastwerte mit Hilfe eines Dämpfungsfaktors abgemindert werden. Eine sinnvolle Wahl dieses Faktors erfordert jedoch die detaillierte Kenntnis der Eigenschaften der Vorbeulverschiebungen.

Die erweiterten Konzepte legen daher den Startzustand in die Umgebung der kritischen Last und vermeiden so die genannten Konvergenzschwierigkeiten. Zur Festlegung des Startzustandes wird zunächst eine geometrisch nicht-lineare Rechnung mit vorgegebener Lastinkrementierung durchgeführt. Die Iterationssteuerung bzw. die automatische Schrittweitenfindung setzt dann ein, wenn mit Hilfe der begleitenden Maßnahme festgestellt wurde, daß man sich in der Nähe der kritischen Last befindet.

Bei der Wahl der Iterationsverfahren sind zwei Gesichtspunkte gegeneinander abzuwägen. Das Standard-Newton-Raphson-Verfahren zeigt quadratisches Konvergenzverhalten, das modifizierte Verfahren konvergiert nur linear. Wegen der nicht von vornherein bekannten Schrittweite ist vom Standpunkt der Nichtlinearität das Standard-Verfahren vorzuziehen. Die damit verbundene ständige Anpassung der Steifigkeitsmatrix an den aktuell erreichten Verschiebungszustand hat jedoch zur Folge, daß im Lauf der Iteration der singuläre Zustand der Tangentensteifigkeitsmatrix immer mehr erreicht wird. Sieht man also die Ausstrahlung der bevorstehenden Singularität als maßgeblich für die Konvergenz des Iterationsverfahrens an, so scheint die modifizierte Newton-Raphson-Iteration von Vorteil.

Das inkrementell-iterative Vorgehen der automatischen Schrittweitenfindung führt wegen der Anpassung der Steifigkeitsmatrix zu Beginn eines jeden Lastschrittes auch beim modifizierten Verfahren schließlich auf eine singuläre Steifigkeitsmatrix. Dies läßt sich im Prinzip vermeiden, wenn die Steifigkeitsmatrix während der letzten Lastschritte konstant belassen wird. Das kann dann jedoch Konvergenzschwierigkeiten ergeben, weil die verwendete Steifigkeitsmatrix von der Tangente zu sehr abweicht. Welches Verfahren im einzelnen zu verwenden ist, hängt davon ab, ob die Nichtlinearität oder die Singularität dominiert (siehe auch Abschnitte 2, 3 und 4, 3).

5. Ermittlung kritischer Lasten über Reihenentwicklungen der nichtlinearen Stabilitätsgleichungen

Im Abschnitt 4 wurden Möglichkeiten untersucht, die eine vollständige Lösung des nichtlinearen Stabilitätsproblems erlauben. Da diese Verfahren einerseits sehr rechenintensiv sind und andererseits teilweise zu numerischen Schwierigkeiten führen, wird im weiteren versucht, brauchbare Näherungslösungen über Reihenentwicklungen aufzufinden. Das Vorgehen ist dadurch gekennzeichnet, daß charakteristische Größen des Vorbeulzustandes entweder ausgehend vom unbelasteten Zustand (0) oder von einem auf nichtlinearem Weg erreichten Gleichgewichtszustand (1) durch Potenzreihen dargestellt werden (Bild 5. 1). Die Stabilitätsuntersuchung der so angenäherten Vorbeulzustände liefert dann einen Näherungswert für die kritische Last.

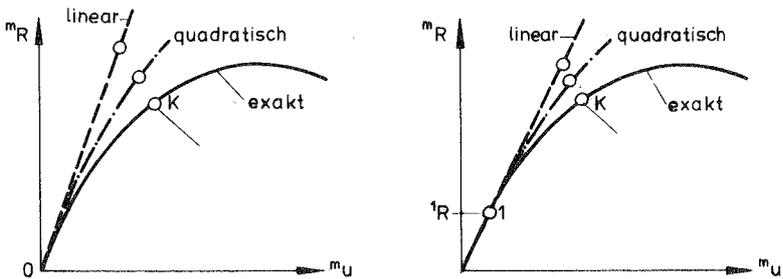


Bild 5.1: Reihenentwicklung des Vorbeulzustandes

Im Hinblick auf die Realisierung der Verfahren in der Methode der finiten Elemente (bzw. finiten Differenzen) scheint es wegen des numerischen Aufwandes sinnvoll, sich auf Reihenentwicklungen bezüglich des Ausgangszustandes zu beschränken, ein Vorgehen, das unter der Bezeichnung "Anfangsstabilitätsanalyse" bekannt ist. Je nach Anzahl der betrachteten Reihenglieder bzw. der Art der Annahmen bezüglich des approximierten Vorbeulverhaltens können in Anlehnung an Tafel 4.1 klassische, lineare und nichtlineare Anfangsstabilitätsanalysen unterschieden werden. Während das klassische und lineare Vorgehen von Reihenentwicklungen bis zu den

linearen Gliedern ausgeht, sind für den nichtlinearen Fall mindestens die quadratischen Terme zu berücksichtigen.

Die klassische Analyse zeichnet sich weiterhin durch die Vernachlässigung der Anfangsverschiebungsmatrix K_u aus.

5.1 Klassische und lineare Anfangsstabilitätsanalyse

5.1.1 Stabilitätsuntersuchungen

1. Ableitung der Eigenwertgleichungen

Ausgehend von der Bedingung für indifferentes Gleichgewicht (Gl. (3.2)) und der Aufspaltung der Tangentensteifigkeitsmatrix nach Gleichung (2.30) bzw. Gleichung (2.31) sind kritische Punkte durch die Gleichungen:

$$\left[\begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_e \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} u) + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_g \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} S) \right] \cdot K v = 0 \quad (5.1)$$

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} K_e + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_u \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} u) + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_g \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} S) \right] \cdot K v = 0 \quad (5.2)$$

festgelegt.

Mit Hilfe der Gleichungen (4.7) und (4.8) folgt daraus:

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} K_e + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_u \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} u) + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_g \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} u) \right] \cdot K v = 0 \quad (5.3)$$

$$\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} K_e + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_u^L \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} u) + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_u^{NL} \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} u^2) + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_g^L \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} u) + \begin{array}{c} K \\ 0 \end{array} K_g^{NL} \begin{array}{c} (K \\ 0 \end{array} u^2) \right] \cdot K v = 0 \quad (5.4)$$

Über die Reihenentwicklung für die Vorbeulverschiebungen eines beliebigen Zustandes:

$$m_u = m_{\lambda} \cdot \begin{array}{c} (1) \\ u \end{array} + m_{\lambda}^2 \cdot \begin{array}{c} (2) \\ u \end{array} + m_{\lambda}^3 \cdot \begin{array}{c} (3) \\ u \end{array} + \dots \quad (5.5)$$

ergeben sich die Verschiebungen des kritischen Grundzustandes:

$$K_u = K_{\lambda} \cdot \begin{array}{c} (1) \\ u \end{array} + K_{\lambda}^2 \cdot \begin{array}{c} (2) \\ u \end{array} + K_{\lambda}^3 \cdot \begin{array}{c} (3) \\ u \end{array} + \dots \quad (5.6)$$

Das Einbringen dieser Verschiebungen in die Gleichungen (5.2) und (5.3) führt bei Beschränkung auf die linearen Terme zum Eigenwertproblem:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_e + \lambda_{\text{klass}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_g^L \left(\begin{matrix} (1) \\ \mathbf{u} \end{matrix} \right) \cdot \mathbf{K}_v^{\text{klass}} = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

der (erweiterten) klassischen Anfangsstabilitätsanalyse bzw. zu:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_e + \kappa_{\text{lin}} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_u^L \left(\begin{matrix} (1) \\ \mathbf{u} \end{matrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_g^L \left(\begin{matrix} (1) \\ \mathbf{u} \end{matrix} \right) \right) \cdot \mathbf{K}_v^{\text{lin}} = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

dem Eigenwertproblem der linearen Anfangsstabilität.

In Gleichung (5.7) wurde dabei der Anteil der Anfangsverschiebung in $\begin{matrix} \mathbf{K} \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_e$ weggelassen, d. h. $\begin{matrix} \mathbf{K} \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_e$ durch $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_e$ ersetzt. Die Indizierung der Eigenwerte λ und Eigenvektoren \mathbf{v} dient dabei zur Kennzeichnung der unterschiedlichen Näherungsstufen der Vorbeulverschiebungen (klass - klassische, lin - lineare Approximation). Um Verwechslungen mit einem später eingeführten weiteren linearen Eigenwertproblem zu vermeiden, wurde in Gleichung (5.8) der Lastparameter in κ umbenannt. Der Näherungswert für die kritische Last berechnet sich für die beiden Näherungen zu:

$$\begin{matrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{R} \end{matrix}_{\text{klass}} = \lambda_{\text{klass}} \cdot \begin{matrix} 1 \\ \mathbf{R} \end{matrix} \quad (5.9)$$

$$\begin{matrix} \mathbf{K} \\ \mathbf{R} \end{matrix}_{\text{lin}} = \kappa_{\text{lin}} \cdot \begin{matrix} 1 \\ \mathbf{R} \end{matrix} \quad (5.10)$$

Zur Beurteilung dieser Näherungswerte werden die Eigenwertprobleme für begleitende Maßnahmen herangezogen. Für das klassische Vorgehen gilt nach Gleichung (4.25):

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_g \cdot \begin{matrix} m \\ \mathbf{v} \end{matrix} = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

und bei Berücksichtigung der Anfangsverschiebungen nach Gleichung (4.27):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_e + {}^m \lambda \cdot \left(\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_u + \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{K}_g \right) \cdot \begin{matrix} m \\ \mathbf{v} \end{matrix} = \mathbf{0} \quad (5.12)$$

Ein Grenzübergang für $m \rightarrow 0$ zeigt, daß die Eigenwertgleichungen (5.11) und (5.12) unmittelbar in die Gleichungen (5.7) und (5.8) übergehen.

Damit können die Näherungswerte der linearen Anfangsstabilität identifiziert werden als die kritischen Lasten entsprechender begleitender Maßnahmen bei Belastungsbeginn.

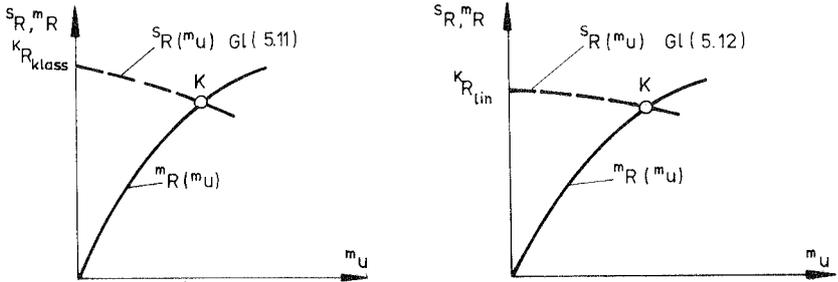


Bild 5.2: Anfangsstabilität- Begleitende Maßnahmen

Diese Rückführung der Ergebnisse erlaubt eine Beurteilung der beiden Anfangsanalysen mit Hilfe der Beispiele nach Abschnitt 4. 2. 2.

2. Zusammenstellung der Rechenschritte

Berechnung der linearen Anfangsverschiebungen

$${}^0_0 K_e \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} = {}^1 R$$

Erzeugen der Systemmatrizen

$${}^1_0 K_u^L(u) \quad , \quad {}^1_0 K_g^L(u)$$

Lösen des Eigenwertproblem (Gleichungen (5. 7), (5. 8))

$$\left[{}^0_0 K_e + \lambda_{\text{klass}} \cdot {}^1_0 K_g^L(u) \right] \cdot {}^K v_{\text{klass}} = 0 \quad \text{(klass. Vorgehen)}$$

oder: $\left[{}^0_0 K_e + \alpha_{\text{lin}} \cdot \left({}^1_0 K_u^L(u) + {}^1_0 K_g^L(u) \right) \right] \cdot {}^K v_{\text{lin}} = 0 \quad \text{(lin. Vorgehen)}$

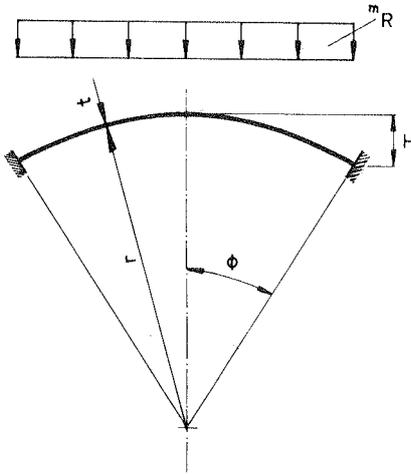
Näherung für den kritischen Zustand (Gleichungen (5. 6), (5. 9), (5. 10))

$${}^K R_{\text{klass}} = \lambda_{\text{klass}} \cdot {}^1 R \quad \text{(klass. Vorgehen)}$$

oder: ${}^K R_{\text{lin}} = \alpha_{\text{lin}} \cdot {}^1 R \quad , \quad {}^K u_{\text{lin}} = \alpha_{\text{lin}} \cdot u \quad \text{(lin. Vorgehen)}$

3. Beispiele

Zum zusätzlichen Vergleich der beiden Vorgehensweisen wird eine Gruppe von Kreisbögen unter Gleichflächenlast betrachtet. Durch die Veränderung des Bogenparameters Λ (Bild 5.3) ergeben sich Systeme mit unterschiedlichem Vorbeulverhalten, dessen Einfluß auf die Ergebnisse der Anfangsstabilitätsanalyse untersucht werden soll.



System [50], [70]

$$\phi = 10^\circ, \quad t = 4$$

$$\Lambda = \frac{2H}{t}$$

$$\bar{R} = \left[\frac{2H}{\pi^2} \cdot \frac{12r^2}{Et^3} \right] \cdot R$$

zu 1,0 gesetzt

Diskretisierung NISA [18]

20 Elemente "plane stress"

Bild 5.3: Kreisbogen unter Gleichlast

In Bild 5.4 sind die Last-Verschiebungskurven und die kritischen Punkte für den Parameterbereich $3 \leq \Lambda \leq 22$ eingetragen. Die verschiedenen Parameterwerte führen dabei zu folgendem Stabilitätsverhalten:

- $\Lambda \leq 2$ Spannungsproblem.
- $\Lambda = 3, 4$ Symmetrisches Durchschlagen.
- $\Lambda = 5$ Durchschlagen mit Verzweigung im instabilen Nachbeulbereich.
- $\Lambda \geq 6$ Verzweigung mit antisymmetrischer Eigenform.

Die Nichtlinearität der Vorbeulverschiebungen nimmt mit wachsenden Λ - Werten ab, bis schließlich ein quasi-linearer Vorbeulzustand erreicht wird.

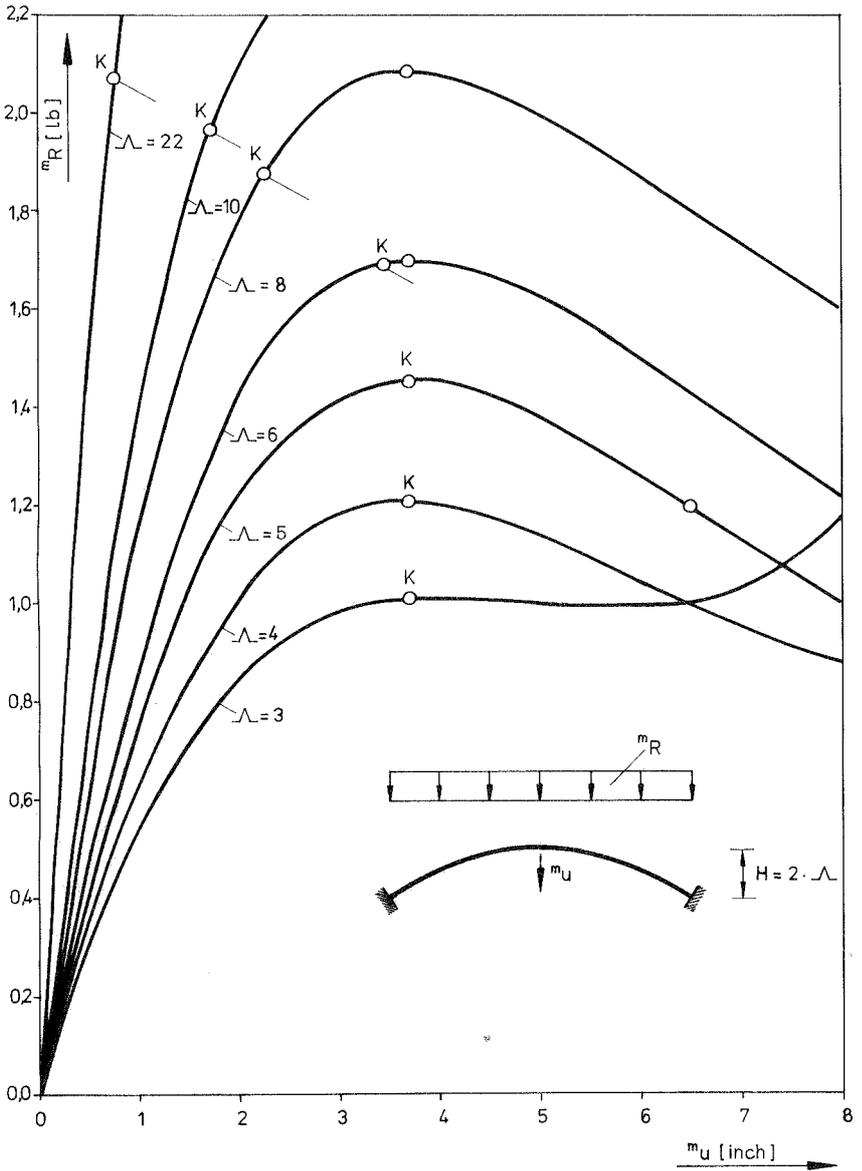


Bild 5.4 : Kreisbögen : Last - Verschiebungskurven

Bogenparameter λ	3	4	5	6	8	10	12	14	18	22
Radius r	395	527	658	790	1050	1315	1580	1840	2370	2896
nichtlineare Stabilitätstheorie mit NISA [18]	k_R	—	—	1,67	1,86	1,93	1,97	1,99	—	—
	k_R	1,01	1,202	1,45	1,88	1,965	2,00	2,03	2,059	2,076
	k_V	s	s	s	a	a	a	a	a	a
klassische Anfangsstabilitätsanalyse Gl. (5.7)	$k_{R_{\text{klass}}}$	2,87	2,52	2,37	2,29	2,17	2,14	2,13	2,12	2,12
	Fehler [%]	184,1	109,6	63,7	35,5	17,5	10,4	7,0	4,9	2,9
	v_{klass}	a	a	a	a	a	a	a	a	a
lineare Anfangsstabilitätsanalyse Gl. (5.8)	$k_{R_{\text{lin}}}$	1,24	1,58	1,78	1,84	1,92	1,967	2,00	2,026	2,052
	Fehler [%]	22,8	31,4	22,7	8,8	2,1	0,1	0,0	0,0	0,0
	v_{lin}	s	s	a	a	a	a	a	a	a

Tafel 5.1 : Kreisbögen (Zusammenstellung : Geometrie – Kritische Lasten)

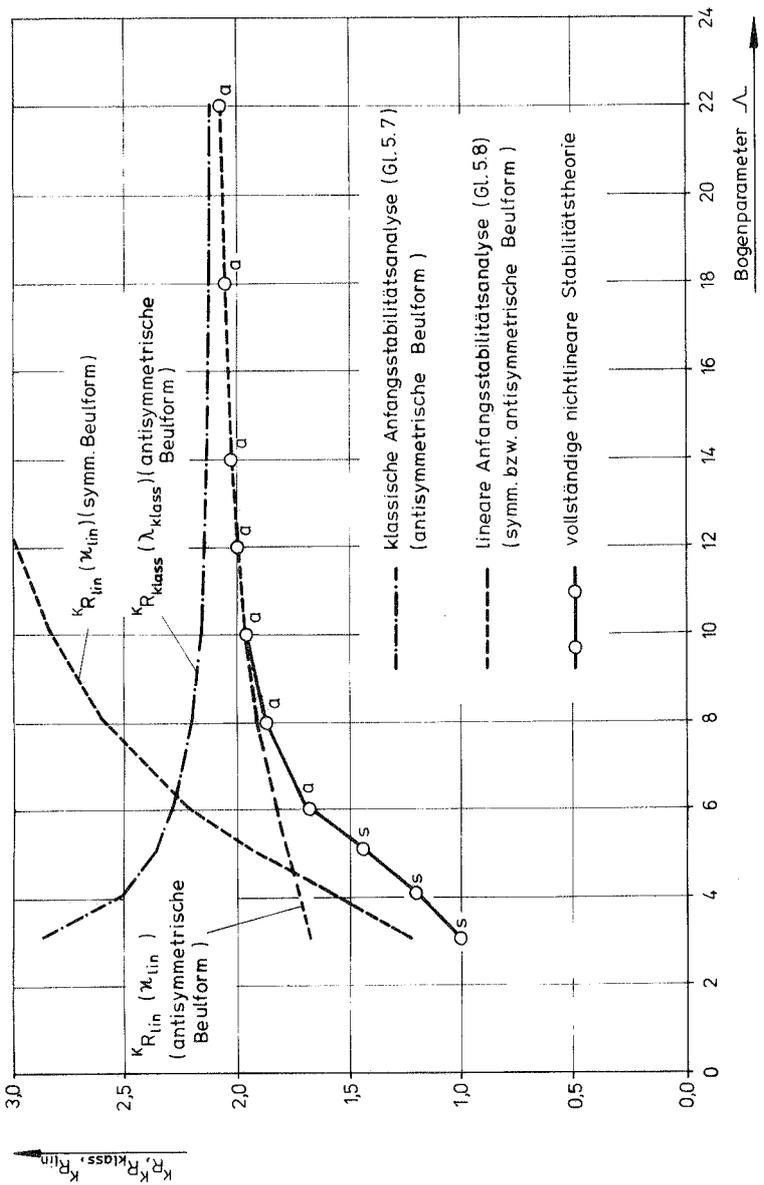


Bild 5.5: Kreisbögen (Vergleich der linearen und klassischen Anfangsanalyse)

In Tabelle 5.1 und Bild 5.5 sind die Ergebnisse der klassischen bzw. der linearen Anfangsstabilitätsanalyse den kritischen Lasten und Eigenformen der vollständigen nichtlinearen Stabilitätsuntersuchung gegenübergestellt. Die Zeiger s bzw. a weisen auf symmetrische bzw. antisymmetrische Eigenformen hin. (Die kritischen Lasten nach [50] beziehen sich dabei auf eine Druckbelastung.)

4. Beurteilung der Stabilitätsuntersuchung

a) Kritische Last

Das klassische Vorgehen (Gleichung (5.7)) liefert nach bisherigen Erfahrungen stets zu hohe Näherungswerte für die kritische Last. Auf diesen Effekt der Linearisierung des Vorbeulzustandes haben bereits Kerr/Soifer [57] hingewiesen.

Die Berücksichtigung der Anfangsverschiebungen nach Gleichung (5.8) kann dagegen auch in Unterschätzung der kritischen Last münden.

b) Beulformen

Überschneidungen der Näherungswertkurven begleitender Maßnahmen führen bei Anfangsstabilitätsbetrachtungen zu fehlerhaften Beulformen.

Da das klassische Vorgehen (Gleichung (5.7)) meist schlechtere Näherungswerte ergibt und häufiger zu Überschneidungen neigt, wird (außer bei konzentrierten Lasten) das um die Anfangsverschiebungen erweiterte Eigenwertproblem nach Gleichung (5.8) vorzuziehen sein.

Wie die Bewertung der Näherungslasten und Beulformen zeigt, ist es trotz der Bemühungen um brauchbare Anfangsnäherungen erforderlich, die Ergebnisse kritisch zu betrachten. Im weiteren soll daher geklärt werden, unter welchen Voraussetzungen Anfangsstabilitätsuntersuchungen die kritische Last und die Versagensform eines Systems brauchbar wiedergeben.

5.1.2 Nachlaufberechnungen zur Kontrolle

Ausgehend von den Ergebnissen der linearen Eigenwertprobleme nach Gl. (5.7) bzw. (5.8) wird über Nachlaufberechnungen kontrolliert, ob die Voraussetzungen, die diesen Gleichungen zugrunde liegen, am betrachteten

System erfüllt sind. Eine solche Untersuchung erfordert die nähere Betrachtung der Eigenschaften der Vorbeulverschiebungen.

Drei Aspekte erscheinen dabei wesentlich:

a) Die Größe der Vorbeulverschiebungen des kritischen Grundzustandes
Die klassische Stabilitätsuntersuchung setzt vernachlässigbare, die lineare Theorie kleine Verschiebungen voraus (Tafel 4. 1).

b) Linearität der Verschiebungen
Dies ist die grundlegende Annahme für den Abbruch der Reihenentwicklung nach dem linearen Glied:

$${}^m \mathbf{u} = {}^m \lambda \cdot \mathbf{u}^{(1)} \quad (5. 13)$$

c) Affinität der Vorbeulverschiebungszustände
Gleichung (5. 13) fordert neben einem linearen Verhalten die Affinität (Parallelität) aller Vorbeulverschiebungszustände.

Weicht das tatsächliche Verschiebungsverhalten von diesen Voraussetzungen ab, so wird es zu Fehlschätzungen für die kritische Last kommen. Die Beurteilung der Ergebnisse einer Anfangsstabilitätsanalyse erfordert also die Kenntnis der genannten Eigenschaften. Da deren genaue Ermittlung eine geometrisch nichtlineare elastostatische Rechnung bis zum kritischen Punkt voraussetzt, soll versucht werden, über Näherungen brauchbare Aussagen zu gewinnen. Zur Abschätzung der Eigenschaften "Linearität" und "Affinität" ist neben den linearen Vorbeulverschiebungen auch eine Approximation der nichtlinearen Anteile notwendig. Erstes Ziel wird daher die Ermittlung verbesserter Vorbeulverschiebungen sein.

1. Genäherte Ermittlung der Vorbeulverschiebungen

a) Reihenentwicklung der Vorbeulverschiebungen

In der Gleichgewichtsbedingung

$${}^m \mathbf{R} = {}^m_0 \mathbf{F} ({}^m \mathbf{u}) \quad (5. 14)$$

werden über Tafel 2, 2 die verallgemeinerten inneren Kräfte in ihre Einzelanteile aufgespalten.

$${}^m \mathbf{R} = {}^m_0 \mathbf{F}_1 ({}^m \mathbf{u}) + {}^m_0 \mathbf{F}_2 ({}^m \mathbf{u}^2) + {}^m_0 \mathbf{F}_3 ({}^m \mathbf{u}^3) \quad (5.15)$$

Die lineare Funktion ${}^m_0 \mathbf{F}_1 ({}^m \mathbf{u})$ läßt sich dabei durch ${}^0_0 \mathbf{K}_e$ darstellen.

$${}^m_0 \mathbf{F}_1 ({}^m \mathbf{u}) = {}^0_0 \mathbf{K}_e \cdot {}^m \mathbf{u} \quad (5.16)$$

Das Einsetzen der ersten Reihenglieder für die Vorbeulverschiebungen (Gleichung (5.5)):

$${}^m \mathbf{u} = m_\lambda \cdot \mathbf{u}^{(1)} + m_{\lambda^2} \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \dots$$

in Gleichung (5.15) liefert mit:

$${}^m \mathbf{R} = m_\lambda \cdot {}^1 \mathbf{R} \quad (5.17)$$

$$\text{und: } {}^1_0 \mathbf{F}_1 (\mathbf{u}^{(1)}) = {}^0_0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(1)} \quad (5.18)$$

$${}^1_0 \mathbf{F}_1 (\mathbf{u}^{(2)}) = {}^0_0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(2)}$$

die Bestimmungsgleichungen für die Reihenglieder. Der Abgleich der mit gleichen λ -Potenzen behafteten Terme ergibt für:

$$\lambda^0: \quad {}^0_0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(1)} = {}^1 \mathbf{R} \quad (5.19)$$

$$\lambda^1: \quad {}^0_0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(2)} = - {}^1_0 \mathbf{F}_2 (\mathbf{u}^{(2)}) \quad (5.20)$$

Damit ergeben sich die approximierten Vorbeulverschiebungen zu:

$$\boxed{{}^m \mathbf{u}_{\text{quad}} = m_\lambda \cdot \mathbf{u}^{(1)} + m_{\lambda^2} \cdot \mathbf{u}^{(2)}} \quad (5.21)$$

Zusammenstellung der Rechenschritte

Ermittlung der Reihenglieder $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2)}$

$${}^0_0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(1)} = {}^1 \mathbf{R}$$

$${}^0_0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(2)} = - {}^1_0 \mathbf{F}_2 (\mathbf{u}^{(2)})$$

Näherung der Vorbeulverschiebungen

$$m_{\mathbf{u}}^{\text{quad}} = m_{\lambda} \cdot \overset{(1)}{\mathbf{u}} + m_{\lambda^2} \cdot \overset{(2)}{\mathbf{u}}$$

b) Darstellung der Vorbeulverschiebungen durch Eigenvektoren

Diese Approximation der Vorbeulverschiebungen geht auf Besseling [12] zurück.

Der grundlegende Gedanke ist die Aufteilung der nichtlinearen Gesamtverschiebungen in einen Anteil, der durch die Eigenvektoren des klassischen Eigenwertproblems dargestellt wird und einen zweiten Anteil, der orthogonal zu diesen steht. Ausgehend von der Berechnung der linearen Anfangsverschiebungen:

$$\overset{0}{\mathbf{K}}_e \cdot \overset{(1)}{\mathbf{u}} = \overset{1}{\mathbf{R}}$$

und der Lösung des klassischen Eigenwertproblems (Gleichung (5. 7)):

$$\left[\overset{0}{\mathbf{K}}_e + \lambda_{\text{klass},i} \cdot \overset{1}{\mathbf{K}}_g^L \left(\overset{(1)}{\mathbf{u}} \right) \right] \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{klass},i}} = \mathbf{0}$$

werden die Anteilskoeffizienten α_i der Eigenvektoren am Vektor der linearen Verschiebungen ermittelt.

$$\mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{klass},i}}^t \cdot \underbrace{\overset{0}{\mathbf{K}}_e \cdot \overset{(1)}{\mathbf{u}}}_{\overset{1}{\mathbf{R}}} = \alpha_i \tag{5. 22}$$

Als Normierungsvorschriften werden in [5]:

$$\overset{(1)}{\mathbf{u}}_t \cdot \overset{0}{\mathbf{K}}_e \cdot \overset{(1)}{\mathbf{u}} = \overset{(1)}{\mathbf{u}}_t \cdot \overset{1}{\mathbf{R}} = 1 \tag{5. 23}$$

$$\text{und: } \mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{klass},i}}^t \cdot \overset{0}{\mathbf{K}}_e \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{klass},i}} = 1 \tag{5. 24}$$

vorausgesetzt.

Über eine Reihenentwicklung der Vorbeulverschiebungen bis zum quadratischen Glied ergeben sich nach Besseling [12] (unter Verzicht auf die Herleitung) die Vergrößerungsfunktionen der zu den Verschiebungen $\overset{(1)}{\mathbf{u}}$ affinen Anteile $\alpha_i \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{klass},i}}$ zu:

$$\frac{\lambda_{\text{klass},i}}{\lambda_{\text{klass},i} - m_\lambda} \cdot m_\lambda$$

Die verbleibenden orthogonalen Anteile:

$$\mathbf{u}_{\text{orth}} = \mathbf{u}^{(1)} - \alpha_i \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass},i}$$

sind dagegen linear weiter zu vergrößern (Kriterium nach Klöppel/Lie).

Durch Zusammenfügen dieser Einzelanteile erhält man die genäherten nicht-linearen Vorbeulverschiebungen:

$$m \mathbf{u}_{\text{quad}} = \frac{\lambda_{\text{klass},i}}{\lambda_{\text{klass},i} - m_\lambda} \cdot m_\lambda \cdot \alpha_i \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass},i} + m_\lambda \cdot \mathbf{u}_{\text{orth}}$$

(5.25)

Zusammenstellen der Rechenschritte

Berechnung der linearen Vorbeulverschiebungen

$${}^0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(1)} = {}^1 \mathbf{R}$$

Lösen des (klassischen) Eigenwertproblems

$$\left[{}^0 \mathbf{K}_e + \lambda_{\text{klass},i} \cdot {}^1 \mathbf{K}_g^L \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \right] \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass},i} = \mathbf{0}$$

Berechnen der Anteilskoeffizienten α_i

$$\mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass},i}^t \cdot {}^0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass},i} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}^t \cdot {}^0 \mathbf{K}_e \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = 1$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}^t \cdot {}^0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass},i}$$

Ermittlung der orthogonalen Anteile

$$\mathbf{u}_{\text{orth}} = \mathbf{u}^{(1)} - \alpha_i \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass},i}$$

Näherung der Vorbeulverschiebungen

$$m_{\mathbf{u}_{\text{quad}}} = \frac{\lambda_{\text{klass}, i}}{\lambda_{\text{klass}, i} - m_{\lambda}} \cdot m_{\lambda} \cdot \alpha_i \cdot K_{\mathbf{v}_{\text{klass}, i}} + m_{\lambda} \cdot \mathbf{u}_{\text{orth}}$$

Numerische Vergleiche zeigen, daß beide Näherungen die nichtlinearen Vorbeulverschiebungen in etwa gleichwertig approximieren.

Da die Näherung nach Besseling von der Lösung des Eigenwertproblem es nach Gleichung (5.7) ausgeht, werden die entsprechenden Vorbeulverschiebungen vorzugsweise zur Beurteilung der Ergebnisse der klassischen Stabilitätsuntersuchung heranzuziehen sein.

2. Abschätzung des Verschiebungsverhaltens

Mit Hilfe der Approximation der nichtlinearen Vorbeulverschiebungen sollen nun die maßgebenden Eigenschaften abgeschätzt und anschließend zur Beurteilung der Brauchbarkeit der Anfangsanalysen herangezogen werden. Zu diesem Zweck werden Faktoren (Kennwerte) eingeführt, die Maße für die Abweichungen von den vorausgesetzten Systemeigenschaften darstellen.

Ausgehend von den linearen kritischen Verschiebungen

$$K_{\mathbf{u}_{\text{lin}}} = \lambda_{\text{klass}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}, \quad K_{\mathbf{u}_{\text{lin}}} = \kappa_{\text{lin}} \cdot \mathbf{u}^{(1)} \quad (5.26)$$

und den entsprechenden nichtlinearen Näherungen nach den Gleichungen (5.21) bzw. (5.25)

$$K_{\mathbf{u}_{\text{quad}}} = K_{\mathbf{u}_{\text{quad}}} (\kappa_{\text{lin}}) \quad (5.27)$$

$$K_{\mathbf{u}_{\text{quad}}} = K_{\mathbf{u}_{\text{quad}}} (\lambda_{\text{klass}}) \quad (5.28)$$

(im Sonderfall $\alpha_1 \neq 0$ muß die Unendlichkeitsstelle von Gleichung (5.25) durch einen Vorfaktor $\lambda_{\text{klass}} \rightarrow \text{z. B. } 0,8 \cdot \lambda_{\text{klass}}$ umgangen werden) hat sich die Definition folgender Faktoren bewährt:

a) Faktor der Größe der Verschiebungen

$$f_{\text{GV}} = \frac{|K_{\mathbf{u}_{\text{quad}}}|_{\text{max}}}{t} > 0 \quad (5.29)$$

Dabei ist t die Tragwerksdicke und $|K_{u_{quad}}|_{max}$ die betragsgrößte Verschiebung des Vektors der genäherten nichtlinearen Verschiebungen.

b) Faktor der Nichtlinearität

$$f_{NL} = \frac{|K_{u_{quad}}|_{max}}{|K_{u_{lin}}|} - 1 > 0 \quad (5.30)$$

(lineares Verhalten: $f_{NL} = 0$)

Da lokale Verschiebungseffekte das Beulverhalten wesentlich beeinflussen können, wurden für beide Faktoren lokale Größen verwandt.

Euklidische Vektornormen sind hier weniger brauchbar, weil sie die örtlichen Effekte zu stark "verschmieren".

c) Faktor der Nichtaffinität

$$f_{NA} = 1 - K_{\bar{u}_{quad}} \cdot \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} K_e \cdot K_{\bar{u}_{lin}} \quad (5.31)$$

Die Vektoren \bar{u} sind über die Normierungsbedingungen

$$\begin{aligned} K_{\bar{u}_{quad}} \cdot \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} K_e \cdot K_{\bar{u}_{quad}} &= 1 \\ K_{\bar{u}_{lin}} \cdot \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} K_e \cdot K_{\bar{u}_{lin}} &= 1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

festgelegt.

Bei vollständiger Affinität zwischen $K_{u_{lin}}$ und $K_{u_{quad}}$ ergibt sich $f_{NA} = 0$ bzw. bei Orthogonalität der beiden Verschiebungsvektoren $f_{NA} = 1$ ($0 \leq f_{NA} \leq 1$).

Mit zunehmender Größe der durch die Einzelfaktoren ausgedrückten Abweichungen vom zugrunde gelegten Verschiebungsverhalten werden die Voraussetzungen zur Gültigkeit der Eigenwertprobleme immer mehr verletzt. Ziel ist nun, zulässige f -Werte festzulegen, für die die Ergebnisse der Anfangsstabilitätsanalysen noch als brauchbar anzusehen sind. Da sich die Faktoren gegenseitig beeinflussen, erscheint ein

multiplikatives Zusammenfügen der Einzelmaße zu einer Gesamtabweichung für das praktische Vorgehen als der einfachste Weg.

$$f = f_{GV} \cdot f_{NL} \cdot f_{NA} \quad (5.33)$$

Da die drei maßgebenden Verschiebungseigenschaften unmittelbar miteinander zusammenhängen, wird i. a. die Möglichkeit vermieden, daß durch das Verschwinden eines Teilmaßes die Gesamtabweichung Null wird. Ein additives Zusammenfügen vermeidet diese Problematik a priori - sie erfordert jedoch eine Wichtung der einzelnen Eigenschaften.

d) Kennwert f_α

Als zusätzliche Möglichkeit zur Charakterisierung des Verschiebungsverhaltens bieten sich die α_i nach Gleichung (5.22) an.

Aus Gleichung (5.25) ist ersichtlich, daß diese Werte die nichtlinearen Anteile der approximierten Vorbeulverschiebungen darstellen. Sind alle α_i -Werte Null, so ergeben sich dort lineare Vorbeulverschiebungen. Das Systemversagen tritt dann über Verzweigungen des linearen Vorbeulpfades ein. Nichtverschwindende α_i -Werte zeigen dagegen Durchschlagspunkte für die zugehörigen Lastparameter $\lambda_{klass,i}$ an. Die zum Durchschlagen führenden Nichtlinearitäten werden umso ausgeprägter sein, je größer die entsprechenden α_i -Werte sind (Bild 5.6). Mit zunehmender Entfernung eines Eigenwertes $\lambda_{klass,i}$ vom niedrigsten kritischen Eigenwert $\lambda_{klass,1}$ wird jedoch der Einfluß der damit verbundenen Nichtlinearität abgeschwächt. Dieses Verhalten legt die Definition eines Kennwertes f_α der Form

$$f_\alpha = \sum_i |\alpha_i| \cdot \frac{\lambda_{klass,1}}{\lambda_{klass,i}} \quad (5.34)$$

nahe. Er drückt sowohl nichtlineares als auch nichtaffines Verhalten aus. In seiner ursprünglichen Form gilt er für die Eigenvektoren des klassischen Eigenwertproblems ($f_\alpha = f_\alpha(\lambda_{klass})$).

Im erweiterten Sinn können zu seiner Berechnung in Gleichung (5.22) auch die Eigenvektoren der linearen Stabilitätsuntersuchung nach Gleichung (5.8) eingesetzt werden ($f_\alpha = f_\alpha(\kappa_{lin})$).

3. Beispiel: Kreisbögen unter Gleichlast

In Tafel 5.2 sind die Faktoren f_{GV} , f_{NL} , f_{NA} und die Gesamtabweichungen f und f_{α} für die Familie der Kreisbögen zusammengestellt. Der Vergleich mit den kritischen Lasten der Anfangsstabilitätsanalysen nach Tafel 5.1 zeigt, daß die Werte f und f_{α} die gleiche Tendenz aufweisen wie die Fehler der kritischen Lasten.

4. Brauchbarkeit der Anfangsstabilitätsanalysen aufgrund numerischer Erfahrungen

Das an den Kreisbögen beobachtete Verhalten der Faktoren läßt die Möglichkeit offen, die Brauchbarkeit der Anfangsstabilitätsuntersuchungen mit Hilfe von Grenzwerten für f und f_{α} zu beurteilen. Zur Festlegung oberer Grenzwerte wurden bisher ca. 40 Tragwerke untersucht und die Fehler der Anfangsnäherungswerte mit den Kennwerten f und f_{α} verglichen. Dabei zeigte sich, daß man mit Hilfe der Abschätzung der charakteristischen Verschiebungseigenschaften offensichtlich in der Lage ist, den Anwendungsbereich der Anfangsstabilitätsuntersuchungen sinnvoll einzugrenzen.

Bei einer Fehlerschranke von 5 % für die Anfangsschätzlasten ergeben sich folgende Grenzen für die f -Werte:

klassische Anfangsstabilitätsanalyse (u nach Gleichung (5.25))

$$\boxed{f < 0,001 \quad \text{und} \quad f_{\alpha} (\lambda_{\text{klass}}) < 0,1} \quad (5.35)$$

lineare Anfangsstabilitätsanalyse (u nach Gleichung (5.21))

$$\boxed{f < 0,0005 \quad \text{und} \quad f_{\alpha} (\lambda_{\text{lin}}) < 0,4} \quad (5.36)$$

Sind jeweils beide Bedingungen erfüllt, so kann bei Akzeptierung der Fehlerschranke die Stabilitätsuntersuchung nach der Anfangsstabilitätsanalyse abgebrochen werden. Obwohl diesen Grenzwerten bereits eine größere Anzahl verschiedener Systeme zugrunde liegt, scheint für eine endgültige Festlegung die Untersuchung weiterer Tragwerke ratsam.

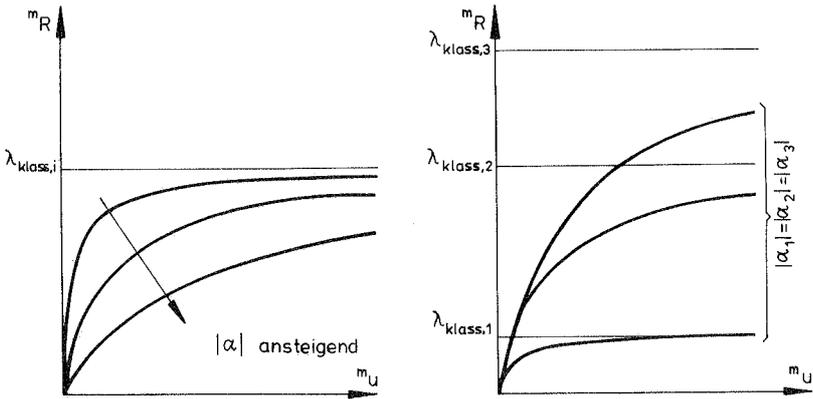


Bild 5.6 : Motivation für den Faktor f_α

λ	r	f_{GV}	f_{NL}	f_{NA}	f	f_α
3	395	0,630	0,41	0,0128	0,00330	0,961
4	527	0,695	0,40	0,0120	0,00333	0,983
5	658	0,650	0,36	0,00994	0,00232	0,854
6	790	0,555	0,30	0,00752	0,00125	0,708
8	1050	0,430	0,23	0,00475	0,00046	0,453
10	1315	0,350	0,19	0,00325	0,00021	0,312
12	1580	0,295	0,16	0,00239	0,00011	0,236
14	1840	0,255	0,15	0,00186	0,00007	0,199
18	2370	0,202	0,14	0,00126	0,00003	0,144
22	2896	0,159	0,13	0,000955	0,00002	0,120

Tafel 5.2 : Kreisbögen (Faktoren zur Abschätzung der Eigenschaften der Vorbeulverschiebungen)

Es sei darauf hingewiesen, daß dem Grenzwert f der klassischen Anfangsanalyse (Gleichung (5.35)) die Näherung der Vorbeulverschiebungen nach Gleichung (5.25), dem der linearen Anfangsanalyse dagegen die Approximation nach Gleichung (5.21) zugrunde liegt. Durch diese unterschiedlichen Vorbeulverschiebungen wird der erweiterte Anwendungsbereich des linearen Vorgehens nur durch f_{α} angezeigt.

Neben dem beschriebenen Verfahren ist die Abschätzung der Brauchbarkeit von Anfangsstabilitätsuntersuchungen auch über den direkten Vergleich der kritischen Lasten aus klassischer und linearer Anfangsanalyse möglich.

Weichen die kritischen Lasten beider Analysen maximal um 5 % voneinander ab, so kann im Rahmen dieser Fehlerschranke die kritische Last der linearen Anfangsanalyse als die tatsächliche kritische Last angesehen werden.

Als weitere Möglichkeit der Abschätzung erscheint auch der normierte Ausdruck für die Ungleichgewichtskräfte

$$\frac{\| K_{R \text{ lin}} - F (K_{u \text{ lin}}) \|}{\| K_{R \text{ lin}} \|}$$

als ein brauchbarer Kennwert.

5. Einfluß der charakteristischen Eigenschaften der Vorbeulverschiebungen auf die Ergebnisse der linearen Anfangsstabilitätsanalyse

Nichtlinearitäten alleine führen bei stabilitätsgefährdeten Systemen (Systeme mit abnehmender Tangentensteifigkeit) zu Überschätzungen der kritischen Last durch lineare Anfangsanalysen. Die Ursache dafür ist in der Unterschätzung der tatsächlichen Verschiebungen durch die lineare Approximation zu suchen. Mit steigender Nichtlinearität alleine sind somit immer stärkere Überschätzungen zu erwarten.

Eine Nichtaffinität kann dagegen in einer Über- oder Unterschätzung münden. Unterschätzungen ergeben sich, wenn die Anfangsverschiebungen eine überhöhte Stabilitätsgefährdung anzeigen, es dem System bei Laststeigerung aber gelingt, sich dieser gefährdeten Situation durch Umlagerung des

Verschiebungsfeldes zu entziehen (stabilisierende Nichtaffinität). Zu Überschätzungen kommt es, wenn das System ausgehend von den Anfangsverschiebungen durch Umlagerungen verstärkt in die stabilitätsgefährdete Konfiguration gedrängt wird (stabilitätsgefährdende Nichtaffinität). Anzumerken ist, daß der Kennwert f_{NA} , wie er in Gleichung (5.31) definiert wurde, nur die Nichtaffinität selbst feststellt, jedoch nicht deren stabilisierenden oder stabilitätsgefährdenden Charakter.

Ob bei gleichzeitigem Zusammenwirken der Eigenschaften Nichtlinearität und Nichtaffinität die kritische Last zu hoch (Bilder 4.13, 4.14) oder zu niedrig (Bilder 4.15, 4.16) geschätzt wird, hängt also von der Art der Nichtaffinität ab. Zeigt sich bei ausgeprägtem nichtlinearem Verhalten, daß der Anfangsnäherungswert mit der tatsächlichen kritischen Last praktisch übereinstimmt, so deutet das darauf hin, daß die Überschätzung aus Nichtlinearität durch ein stabilisierendes nichtaffines Verhalten gerade kompensiert wird.

Für starke Unterschätzungen (Beispiel 5, Abschnitt 4.2.2) sind demnach stark stabilisierende Nichtaffinitäten verantwortlich. Sie konnten bisher nur an kontinuierlichen Systemen mit konzentrierten Lasten beobachtet werden.

5.2 Nichtlineare Anfangsstabilitätsanalyse

Sind die Eigenschaften Nichtlinearität, Größe der Verschiebungen und Nichtaffinität so deutlich ausgeprägt, daß weder eine klassische noch eine lineare Anfangsstabilitätsanalyse ausreicht, so können in einer nächst höheren Approximationsstufe Reihenentwicklungen bis zu den quadratischen Gliedern herangezogen werden.

5.2.1 Reihenentwicklung für die Vorbeulverschiebungen, die Beulform und die potentielle Energie

Diese Form der Reihenentwicklung geht auf Masur/Schreyer [70] zurück, die auf analytischem Wege Anfangsstabilitätsuntersuchungen durchführen. Die Ableitung hier folgt teilweise Glaum/Belytschko/Masur [50], die eine

vereinfachte Form des Konzeptes in der Methode der finiten Elemente verwirklichen. Ziel hier ist, das allgemeine Konzept von Masur/Schreyer auf die Schreibweise der FE umzuformulieren und seine Leistungsfähigkeit an Beispielen aufzuzeigen.

1. Ableitung der Gleichungen

Der Ableitung liegt das Indifferenzkriterium in der Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (Tafel 3, 1) zugrunde.

$$N_{\delta} \quad N_{n\pi} = 0 \quad (5.37)$$

$N_{n\pi}$ stellt die potentielle Energie des Nachbarzustandes dar. Die für die Stabilitätsuntersuchung maßgeblichen (in \mathbf{v} quadratischen) Terme ergeben sich zu:

$$N_{n\pi} = \frac{1}{2} K_{\mathbf{v}t} \cdot K_n K \cdot K_{\mathbf{v}} \quad (5.38)$$

In der totalen Lagrange-Formulierung ($n=0$) kann die inkrementelle Gesamtsteifigkeitsmatrix $K_n K$ aus Gleichung (5.4) entnommen werden. Normiert man den Beulmodus $K_{\mathbf{v}}$ (über den linearen Anteil der geometrischen Matrix) zu:

$$K_{\mathbf{v}t} \cdot K_0 K_g^L \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \cdot K_{\mathbf{v}} = -1 \quad (5.39)$$

und addiert diese Gleichung mit dem Lagrange-Parameter K_q als Nebenbedingung zur Funktion $N_{0\pi}$, so folgt:

$$2 \cdot N_{0\pi} = K_{\mathbf{v}t} \cdot K_0 K \cdot K_{\mathbf{v}} + K_q \cdot (K_{\mathbf{v}t} \cdot K_0 K_g^L \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \cdot K_{\mathbf{v}} + 1)$$

Die notwendige Bedingung für die Existenz eines indifferenten Gleichgewichtszustandes geht dann über in:

$$N_{\delta} \quad N_{0\pi} = 0$$

bzw. nach Ausführen der Variation:

$$\begin{aligned} N_{\delta} \quad N_{0\pi} &= K_{\mathbf{v}t} \cdot K_0 K \cdot \delta K_{\mathbf{v}} + K_q \cdot K_{\mathbf{v}t} \cdot K_0 K_g^L \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \cdot \delta K_{\mathbf{v}} \\ &+ \delta K_q \cdot \frac{1}{2} \cdot [K_{\mathbf{v}t} \cdot K_0 K_g^L \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \cdot K_{\mathbf{v}} + 1] \end{aligned} \quad (5.40)$$

$\delta^K \mathbf{v}$: beliebige zulässige Variation von \mathbf{v}^K (d. h. sie muß die kinematischen Gleichungen erfüllen und den geometrischen Randbedingungen genügen).

Die Vorbeulverschiebungen \mathbf{u} , der Beulmodus \mathbf{v} und der Lagrange-Parameter q werden nun ausgehend vom Grundzustand nach Potenzen des kritischen Lastparameters K_λ entwickelt:

$$K \mathbf{u} = K_\lambda \cdot \mathbf{u}^{(1)} + K_\lambda^2 \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \dots \quad (5.41 a)$$

$$K \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)} + K_\lambda \cdot \mathbf{v}^{(1)} + K_\lambda^2 \cdot \mathbf{v}^{(2)} + \dots \quad (5.41 b)$$

$$K_q = q^{(0)} + K_\lambda \cdot q^{(1)} + K_\lambda^2 \cdot q^{(2)} + \dots \quad (5.41 c)$$

Das Einsetzen dieser Reihenentwicklungen in Gleichung (5.40) führt auf ein Polynom in λ . Der Abgleich der Potenzen λ^0 , λ^1 und λ^2 führt zu den folgenden drei Beulgleichungen:

$$\lambda^0: \quad \delta^K \mathbf{v}^t \cdot \left\{ \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} K_e + \begin{matrix} (0) \\ 0 \end{matrix} K_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} \right\} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0$$

$$\lambda^1: \quad \delta^K \mathbf{v}^t \cdot \left\{ \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} K_e + \begin{matrix} (0) \\ 0 \end{matrix} K_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \left[\left(1 + \begin{matrix} (1) \\ q \end{matrix} \right) \cdot \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_u^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(0)} \right\} = 0$$

$$\lambda^2: \quad \delta^K \mathbf{v}^t \cdot \left\{ \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} K_e + \begin{matrix} (0) \\ 0 \end{matrix} K_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(2)} + \left[\left(1 + \begin{matrix} (1) \\ q \end{matrix} \right) \cdot \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_u^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_u^L \left(\mathbf{u} \right)^{(2)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(2)} + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_u^{NL} \left(\mathbf{u} \right)^{(1)2} + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_g^{NL} \left(\mathbf{u} \right)^{(1)2} + \begin{matrix} (2) \\ q \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_g^{NL} \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(0)} \right\} = 0$$

Aus dem Abgleich der Nebenbedingung ergibt sich bei den konstanten Termen:

$$\mathbf{v}^{(0)t} \cdot \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} K_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} = -1 \quad (5.42)$$

bzw. aus den in λ linearen Termen die Orthogonalitätsbedingung:

$$\mathbf{v}^{(0)t} \cdot \mathbf{K}_g^L \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0 \quad (5.43)$$

Ziel ist es, aus diesen Gleichungen die Reihenglieder $\mathbf{v}^{(i)}$ und $\mathbf{q}^{(i)}$ zu bestimmen.

a) Bestimmung von $\mathbf{q}^{(0)}$ und $\mathbf{v}^{(0)}$

Die erste Beugleichung:

$$\delta \mathbf{K}_v^t \cdot \left[\mathbf{K}_e^0 + \mathbf{q}^{(0)} \cdot \mathbf{K}_g^L \mathbf{u}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0$$

ist für beliebige $\delta \mathbf{K}_v^t$ stets dann erfüllt, wenn

$$\left[\mathbf{K}_e^0 + \mathbf{q}^{(0)} \cdot \mathbf{K}_g^L \mathbf{u}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(0)} = 0 \quad (5.44)$$

gilt. (Diese Beziehung ist identisch mit der EW-Gleichung der klassischen Stabilitätsanalyse nach Gleichung (5.7).)

b) Bestimmung von $\mathbf{q}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(1)}$

Die aus der ersten bzw. zweiten Beugleichung folgenden Vektorgleichungen werden mit $\mathbf{v}^{(1)}$ bzw. $\mathbf{q}^{(0)}$ vormultipliziert und voneinander subtrahiert. Mit Hilfe der Normierungsbedingung ergibt sich $\mathbf{q}^{(1)}$ daraus zu:

$$\mathbf{q}^{(1)} = -1 + \mathbf{v}^{(0)t} \cdot \mathbf{K}_u^L \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} \quad (5.45)$$

Der Vektor $\mathbf{v}^{(1)}$ ergibt sich dann aus der zweiten Beugleichung:

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{K}_e^0 + \mathbf{q}^{(0)} \cdot \mathbf{K}_g^L \mathbf{u}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(1)} = \\ & - \left[(1 + \mathbf{q}^{(1)}) \cdot \mathbf{K}_g^L \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{K}_u^L \mathbf{u}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(0)} \end{aligned} \quad (5.46)$$

c) Bestimmung von $\mathbf{q}^{(2)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$

Die Bestimmungsgleichung für $\mathbf{q}^{(2)}$ erhält man, wenn die aus der ersten bzw. dritten Beugleichung folgenden Vektorgleichungen mit $\mathbf{v}^{(2)}$ bzw. $\mathbf{v}^{(0)}$ vormultipliziert und voneinander subtrahiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{(2)} = & \mathbf{v}^{(1)t} \cdot \mathbf{K}_u^L \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)t} \cdot \left[\mathbf{K}_u^{NL} \mathbf{u}^{(2)} + \right. \\ & \left. \mathbf{K}_g^{NL} \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{K}_u^L \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{K}_g^L \mathbf{u}^{(2)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(0)} \end{aligned} \quad (5.47)$$

Der Vektor $\overset{(2)}{\mathbf{v}}$ folgt aus der dritten Beulgleichung zu:

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_e + \begin{matrix} (0) \\ q \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_g^L \begin{matrix} (1) \\ (\mathbf{u}) \end{matrix} \right] \cdot \mathbf{v} = - \left[(1+q) \cdot \begin{matrix} (1) \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_g^L \begin{matrix} (1) \\ (\mathbf{u}) \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_u^L \begin{matrix} (1) \\ (\mathbf{u}) \end{matrix} \right] \cdot \mathbf{v} \\ - \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_u^{NL} \begin{matrix} (1) \\ (\mathbf{u}) \end{matrix} \right]_2 + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_g^{NL} \begin{matrix} (1) \\ (\mathbf{u}) \end{matrix} \right]_2 + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_u^L \begin{matrix} (2) \\ (\mathbf{u}) \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_g^L \begin{matrix} (2) \\ (\mathbf{u}) \end{matrix} + q \cdot \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_g^L \begin{matrix} (1) \\ (\mathbf{u}) \end{matrix} \right] \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Der Lagrange-Parameter q kann mit Hilfe von Gleichung (5.40) identifiziert werden. Die aus dem Verschwinden des ersten Teils dieser Gleichung folgende Vektorgleichung wird mit $\overset{K}{\mathbf{v}}$ multipliziert. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.39) und (5.38) folgt dann:

$$\overset{K}{K}_q = \overset{K}{\mathbf{v}}^t \cdot \overset{K}{\mathbf{K}} \cdot \overset{K}{\mathbf{v}} = 2 \cdot \overset{N}{0} \pi$$

d. h. der Lagrange-Parameter entspricht der potentiellen Energie.

Mit Hilfe der Reihenentwicklung für q (Gleichung (5.41 c)) ergibt sich wegen $\overset{K}{0} \mathbf{K} \cdot \overset{K}{\mathbf{v}} = 0$:

$$\overset{K}{K}_q = \begin{matrix} (0) \\ q \end{matrix} + \overset{K}{K}_\lambda \cdot \begin{matrix} (1) \\ q \end{matrix} + \overset{K}{K}_\lambda \cdot \begin{matrix} (2) \\ q \end{matrix} + \dots = 0 \quad (5.49)$$

$(\overset{K}{K}_q = 2 \cdot \overset{N}{0} \pi = 0$: siehe auch Kriterium von Timoshenko, Tafel 3.1).

Die Näherungswerte für den kritischen Lastparameter ergeben sich damit als Lösungen der obigen Gleichung.

Klassische Näherung

Die Vernachlässigung der Anfangsverschiebungen führt in Gleichung (5.45) zur Vernachlässigung der Anfangsverschiebungsmatrix, und es folgt:

$$\begin{matrix} (1) \\ q \end{matrix} = -1$$

Der Abbruch der Reihe nach Gleichung (5.49) liefert dann:

$$\lambda_{\text{klass}} = - \frac{\begin{matrix} (0) \\ q \end{matrix}}{\begin{matrix} (1) \\ q \end{matrix}} = \begin{matrix} (0) \\ q \end{matrix} \quad (5.50)$$

das Ergebnis der klassischen Anfangsstabilitätsanalyse (Gleichung (5.7)).

Lineare Näherung

Die Berücksichtigung linearer Vorbeulzustände ergibt dagegen:

$$\lambda_{\text{lin}} = - \frac{\overset{(0)}{q}}{\overset{(1)}{q}} \quad (5.51)$$

Quadratische Näherung

Aus dem Abbruch nach dem quadratischen Glied erhält man:

$$\lambda_{\text{quad}} = \frac{1}{2 \cdot \overset{(2)}{q}} \cdot \left[- \frac{\overset{(1)}{q}}{\overset{(2)}{q}} \pm \sqrt{\frac{\overset{(1)}{q}^2}{\overset{(2)}{q}^2} - 4 \cdot \frac{\overset{(0)}{q}}{\overset{(2)}{q}} \cdot \frac{\overset{(2)}{q}}{\overset{(2)}{q}}} \right] \quad (5.52)$$

2. Zusammenstellung der Rechenschritte

Berechnung der Reihenglieder für die Vorbeulverschiebungen

(Gleichungen (5.19), (5.20))

$$\overset{0}{K}_e \cdot \overset{(1)}{\mathbf{u}} = \overset{1}{R}$$

$$\overset{0}{K}_e \cdot \overset{(2)}{\mathbf{u}} = - \overset{1}{F}_2 \cdot \overset{(1)}{\mathbf{u}}_2$$

Erzeugen der Systemmatrizen

$$\overset{1}{K}_u^L \overset{(1)}{\mathbf{u}}, \quad \overset{1}{K}_g^L \overset{(1)}{\mathbf{u}}, \quad \overset{1}{K}_u^{NL} \overset{(1)}{\mathbf{u}}_2, \quad \overset{1}{K}_g^{NL} \overset{(1)}{\mathbf{u}}_2,$$

$$\overset{1}{K}_u^L \overset{(2)}{\mathbf{u}}, \quad \overset{1}{K}_g^L \overset{(2)}{\mathbf{u}}$$

Lösen des Eigenwertproblem (Gleichung (5.44))

$$\left[\overset{0}{K}_e + \frac{\overset{(0)}{q}}{\overset{(1)}{q}} \cdot \overset{1}{K}_g^L \overset{(1)}{\mathbf{u}} \right] \cdot \overset{(0)}{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

mit der Normierungsbedingung (Gleichung (5.42))

$$\overset{(0)}{\mathbf{v}} \cdot \overset{1}{K}_g^L \overset{(1)}{\mathbf{u}} \cdot \overset{(0)}{\mathbf{v}} = -1$$

Ermittlung von $q^{(1)}$ (Gleichung 5.45))

$$q^{(1)} = - \mathbf{v}^{(0)t} \cdot \mathbf{K}_u^L \cdot \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(0)}$$

Eigenvektor der linearen Approximation (Gleichung (5.46))

$$\left[\mathbf{K}_e^{(0)} + q^{(0)} \cdot \mathbf{K}_g^L \cdot \mathbf{u}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(1)} = - \left[\left(1 + \frac{1}{q} \right) \cdot \mathbf{K}_g^L \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{K}_u^L \cdot \mathbf{u}^{(1)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(0)}$$

Die Gesamtlösung dieses singulären Gleichungssystems wird zusammengesetzt aus der allgemeinen Lösung des homogenen Systems $\mathbf{v}^{(0)}$ und einer partikulären Lösung der inhomogenen Gleichung $\mathbf{v}^{(1)}$.

$$\mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(1)} + \beta \cdot \mathbf{v}^{(0)}$$

Der Faktor β ist durch die Orthogonalitätsbedingung (Gleichung (5.43))

$$\mathbf{v}^{(0)t} \cdot \mathbf{K}_g^L \cdot \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)} = 0$$

festgelegt zu:

$$\beta = \mathbf{v}^{(0)t} \cdot \mathbf{K}_g^L \cdot \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(1)}$$

Parameter $q^{(2)}$ (Gleichung (5.47))

$$q^{(2)} = \mathbf{v}^{(1)t} \cdot \mathbf{K}_u^L \cdot \mathbf{u}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(0)t} \cdot \left[\mathbf{K}_u^{NL} \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{K}_g^{NL} \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{K}_u^L \cdot \mathbf{u}^{(2)} + \mathbf{K}_g^L \cdot \mathbf{u}^{(2)} \right] \cdot \mathbf{v}^{(0)}$$

Abschätzen des kritischen Zustandes (Gln. (5.50), (5.51), (5.52), (5.41 a))

$$\lambda_{\text{klass}} = \frac{1}{q} \quad , \quad \mathbf{K}_{\mathbf{R}_{\text{klass}}} = \lambda_{\text{klass}} \cdot \mathbf{R} \quad , \quad \mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{klass}}} = \mathbf{v}^{(0)}$$

$$\lambda_{\text{lin}} = - \frac{q^{(0)}}{q^{(1)}} \quad , \quad \mathbf{K}_{\mathbf{R}_{\text{lin}}} = \lambda_{\text{lin}} \cdot \mathbf{R} \quad , \quad \mathbf{K}_{\mathbf{u}_{\text{lin}}} = \lambda_{\text{lin}} \cdot \mathbf{u}^{(1)}$$

$$\mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{lin}}} = \mathbf{v}^{(0)} + \lambda_{\text{lin}} \cdot \mathbf{v}^{(1)}$$

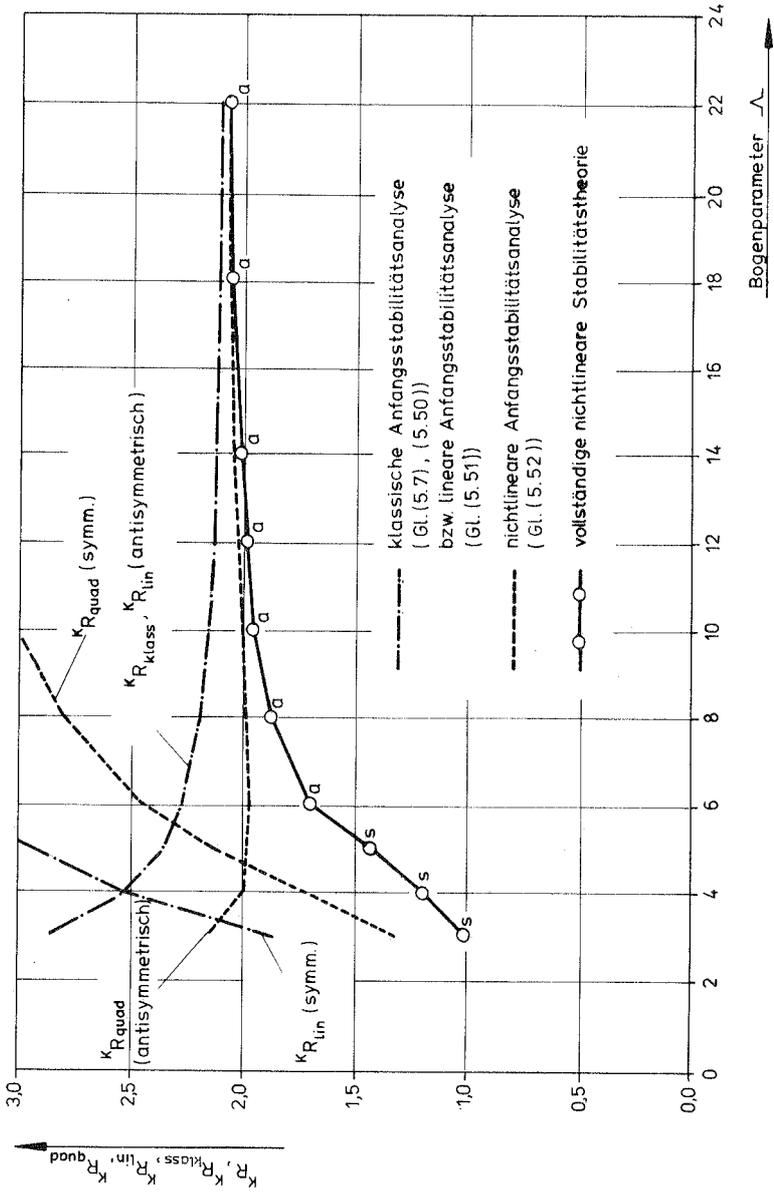


Bild 5.7: Kreisbögen (Reihe der λ -Werte)

$$\lambda_{\text{quad}} = \frac{1}{2 \cdot \binom{(2)}{q}} \left[- \binom{(1)}{q} \pm \sqrt{\binom{(1)}{q}^2 - 4 \cdot \binom{(0)}{q} \cdot \binom{(2)}{q}} \right], \quad K_{R_{\text{quad}}} = \lambda_{\text{quad}} \cdot {}^1 R$$

$$K_{\mathbf{u}_{\text{quad}}} = \lambda_{\text{quad}} \cdot \binom{(1)}{\mathbf{u}} + \lambda_{\text{quad}}^2 \cdot \binom{(2)}{\mathbf{u}}$$

$$K_{\mathbf{v}_{\text{quad}}} = \binom{(0)}{\mathbf{v}} + \lambda_{\text{quad}} \cdot \binom{(1)}{\mathbf{v}} + \lambda_{\text{quad}}^2 \cdot \binom{(2)}{\mathbf{v}}$$

3. Beispiele

Zur Veranschaulichung dieser Reihenentwicklung sind in Bild 5.7 die Ergebnisse der einzelnen Näherungsstufen für die Gruppe von Kreisbögen (nach Abschnitt 5.1.1) dargestellt.

4. Beurteilung der Stabilitätsuntersuchung

Gegenüber der klassischen Näherung zeigt die lineare Approximation (Gleichung (5.51)) nur für den symmetrischen Versagensfall genauere Ergebnisse.

Die Berücksichtigung der quadratischen Reihenglieder führt dagegen im gesamten Parameterbereich zu deutlich verbesserten Näherungswerten.

Im Bereich kleiner Λ - Werte (große Nichtlinearitäten) ergeben sich jedoch weiterhin erhebliche Abweichungen von den tatsächlichen kritischen Lasten.

Aus diesem Anlaß wird eine weitere nichtlineare Anfangsstabilitätsanalyse quadratischer Näherung untersucht mit dem Ziel, einerseits bei gleicher Näherungsstufe bessere Näherungswerte zu erhalten, andererseits über eine Koppelung mit dem bereits dargestellten Verfahren den Anwendungsbereich der Anfangsuntersuchungen zu vergrößern.

5.2.2 Beschränkung der Reihenentwicklung auf die Vorbeulverschiebungen und die Beulform

1. Ableitung der Gleichungen

Als Ausgangspunkt der Reihenentwicklung dient Gleichung (5.4), die eine Bedingung für den kritischen Zustand darstellt.

$$\left[{}^0 K_e + {}^0 K_u^L (K_u) + {}^0 K_u^{NL} (K_u^2) + {}^0 K_g^L (K_u) + {}^0 K_g^{NL} (K_u^2) \right] \cdot K_v = 0$$

Approximiert man die kritischen Vorbeulverschiebungen durch eine Reihenentwicklung bezüglich des (im weiteren zu κ umbenannten) Lastparameters entsprechend Gleichung (5.6) zu:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\mathbf{u}} & \quad \mathbf{K}_{\kappa} \cdot \mathbf{u}^{(1)} + \mathbf{K}_{\kappa^2} \cdot \mathbf{u}^{(2)} \\
 \mathbf{K}_{\mathbf{v}} & = \underbrace{\mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{K}_{\kappa} \cdot \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{K}_{\kappa^2} \cdot \mathbf{v}^{(2)} + \dots}_{\mathbf{K}_{\mathbf{v}} \text{ klass}} \\
 & \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{K}_{\mathbf{v}} \text{ lin}} \\
 & \quad \underbrace{\hspace{15em}}_{\mathbf{K}_{\mathbf{v}} \text{ quad}}
 \end{aligned}$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 [{}^0\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{\kappa} \cdot ({}^1_0\mathbf{K}_u^L(\mathbf{u}) + {}^1_0\mathbf{K}_g^L(\mathbf{u})) \\
 + \mathbf{K}_{\kappa^2} \cdot ({}^1_0\mathbf{K}_u^{NL}(\mathbf{u}^2) + {}^1_0\mathbf{K}_g^{NL}(\mathbf{u}^2) + {}^1_0\mathbf{K}_u^L(\mathbf{u}) + {}^1_0\mathbf{K}_g^L(\mathbf{u})) \\
 + \dots] \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{v}} = \mathbf{0}
 \end{aligned}$$

Der Abbruch nach den linearen Gliedern führt auf das lineare Eigenwertproblem (Gleichung 5.8):

$$[{}^0\mathbf{K}_e + \kappa_{\text{lin}} \cdot ({}^1_0\mathbf{K}_u^L(\mathbf{u}) + {}^1_0\mathbf{K}_g^L(\mathbf{u}))] \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{lin}}} = \mathbf{0} \quad (5.53)$$

Die konsequente Berücksichtigung der quadratischen Terme ergibt dagegen das quadratische Eigenwertproblem:

$$\begin{aligned}
 [{}^0\mathbf{K}_e + \kappa_{\text{quad}} \cdot ({}^1_0\mathbf{K}_u^L(\mathbf{u}) + {}^1_0\mathbf{K}_g^L(\mathbf{u})) + \\
 \kappa_{\text{quad}}^2 \cdot ({}^1_0\mathbf{K}_u^{NL}(\mathbf{u}^2) + {}^1_0\mathbf{K}_g^{NL}(\mathbf{u}^2) + {}^1_0\mathbf{K}_u^L(\mathbf{u}) + \\
 {}^1_0\mathbf{K}_g^L(\mathbf{u}))] \cdot \mathbf{K}_{\mathbf{v}_{\text{quad}}} = \mathbf{0} \quad (5.54)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen können auch als Sonderfall aus dem bei Connor/Morin [29] abgeleiteten allgemeineren Eigenwertproblem gewonnen werden, wenn dort anstelle eines beliebigen Grundzustandes der Ausgangszustand verwendet wird.

Über die Eigenwerte κ_{quad} ergibt sich die Anfangsnäherung der quadratischen Approximation zu:

$${}^K \mathbf{R}_{\text{quad}} = \kappa_{\text{quad}} \cdot {}^1 \mathbf{R} \quad (5.55)$$

2. Zusammenstellen der Rechenschritte

Berechnung der Reihenglieder (Gleichungen (5.19), (5.20))

$${}^0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(1)} = {}^1 \mathbf{R}$$

$${}^0 \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}^{(2)} = - {}^1 \mathbf{F}_2 \left(\mathbf{u}^{(1)} \right)$$

Erzeugen der Systemmatrizen

$${}^1 \mathbf{K}_u^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)}, \quad {}^1 \mathbf{K}_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)}, \quad {}^1 \mathbf{K}_u^{NL} \left(\mathbf{u} \right)^{(1)2}, \quad {}^1 \mathbf{K}_g^{NL} \left(\mathbf{u} \right)^{(1)2},$$

$${}^1 \mathbf{K}_u^L \left(\mathbf{u} \right)^{(2)}, \quad {}^1 \mathbf{K}_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(2)}$$

Lösen der Eigenwertprobleme (Gleichungen (5.53), (5.54))

$$\left[{}^0 \mathbf{K}_e + \kappa_{\text{lin}} \cdot \left({}^1 \mathbf{K}_u^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} + {}^1 \mathbf{K}_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} \right) \right] \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{lin}} = \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} & \left[{}^0 \mathbf{K}_e + \kappa_{\text{quad}} \cdot \left({}^1 \mathbf{K}_u^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} + {}^1 \mathbf{K}_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(1)} \right) \right. \\ & \quad \left. + \kappa_{\text{quad}}^2 \cdot \left({}^1 \mathbf{K}_u^{NL} \left(\mathbf{u} \right)^{(1)2} + {}^1 \mathbf{K}_g^{NL} \left(\mathbf{u} \right)^{(1)2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left({}^1 \mathbf{K}_u^L \left(\mathbf{u} \right)^{(2)} + {}^1 \mathbf{K}_g^L \left(\mathbf{u} \right)^{(2)} \right) \right] \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{quad}} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Ermittlung des kritischen Zustandes

$${}^K R_{\text{lin}} = \kappa_{\text{lin}} \cdot {}^1 R, \quad {}^K u_{\text{lin}} = \kappa_{\text{lin}} \cdot u^{(1)}$$

$${}^K R_{\text{quad}} = \kappa_{\text{quad}} \cdot {}^1 R, \quad {}^K u_{\text{quad}} = \kappa_{\text{quad}} \cdot u^{(1)} + \kappa_{\text{quad}}^2 \cdot u^{(2)}$$

3. Beispiele

Zur Darstellung der Leistungsfähigkeit dieser Vorgehensweise wird erneut die Gruppe von Kreisbögen nach Abschnitt 5. 1. 1 herangezogen. In Bild 5. 8 sind die Näherungen der quadratischen Approximation den kritischen Lasten der vollständigen nichtlinearen Stabilitätstheorie und den Näherungswerten der linearen Anfangsanalyse gegenübergestellt.

4. Beurteilung der Stabilitätsuntersuchung

Der Vergleich der Ergebnisse in Bild 5. 7 zeigt, daß die quadratische Näherung bei ausgeprägtem nichtlinearem Verschiebungsverhalten (kleine Λ - Werte) zu merklich verbesserten Näherungen für die kritische Last führt und die Eigenvektoren \mathbf{v} im gesamten Parameterbereich mit den tatsächlichen Beulformen übereinstimmen.

In den Bildern 5. 9 und 5. 10 werden schließlich die linearen bzw. quadratischen Näherungsstufen der beiden Reihenentwicklungen miteinander verglichen. Es zeigt sich in beiden Fällen, daß die Reihe der κ - Werte zu deutlich verbesserten Näherungswerten führt, ein Sachverhalt, der sich abgesehen von Systemen mit konzentrierten Lasten bei allen bisher untersuchten Systemen ergeben hat. Trotzdem ergeben die Eigenwerte κ_{quad} der quadratischen Approximation im Bereich kleiner Λ - Werte weiterhin nicht unerhebliche Abweichungen von der tatsächlichen kritischen Last.

5. 2. 3 Koppelung der Reihenentwicklungen

Die Anfangsnäherungen ${}^K R_{\text{quad}}$ aus κ_{quad} bzw. λ_{quad} stellen lediglich bei mäßig nichtlinearem Vorbeulverhalten gute Näherungen für die kritische Last dar.

Wie bereits angedeutet, soll daher versucht werden, über die Koppelung der beiden Reihenentwicklungen (nach Abschnitt 5. 2. 1 bzw. 5. 2. 2) die Anwendung

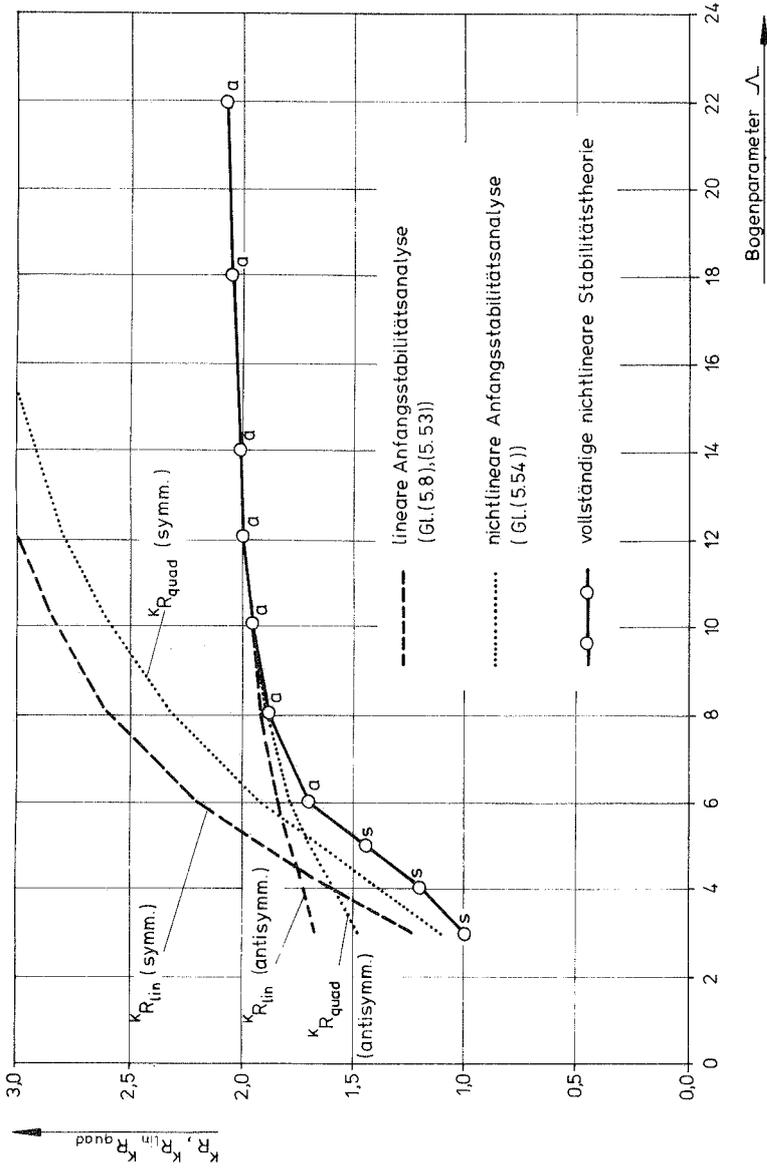


Bild 5.8 : Kreisbögen (Reihe der α -Werte)

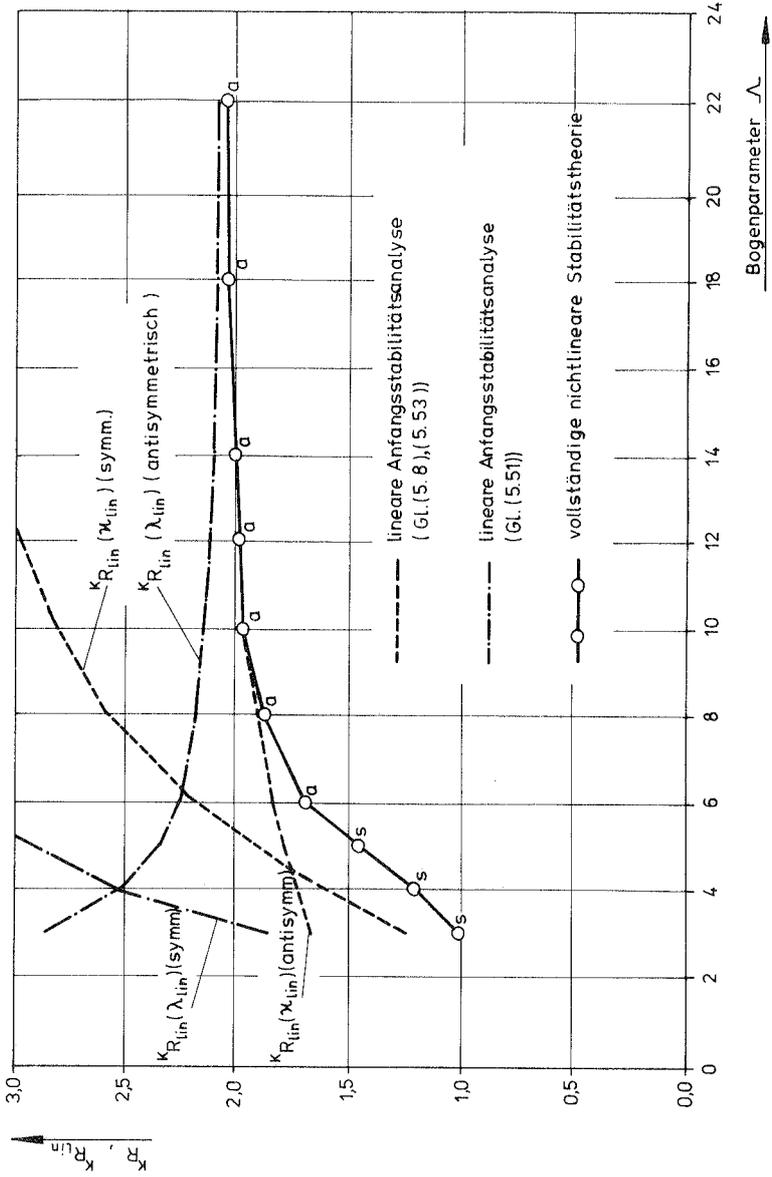


Bild 5.9 : Kreisbögen (Vergleich der linearen Anfangsanalysen)

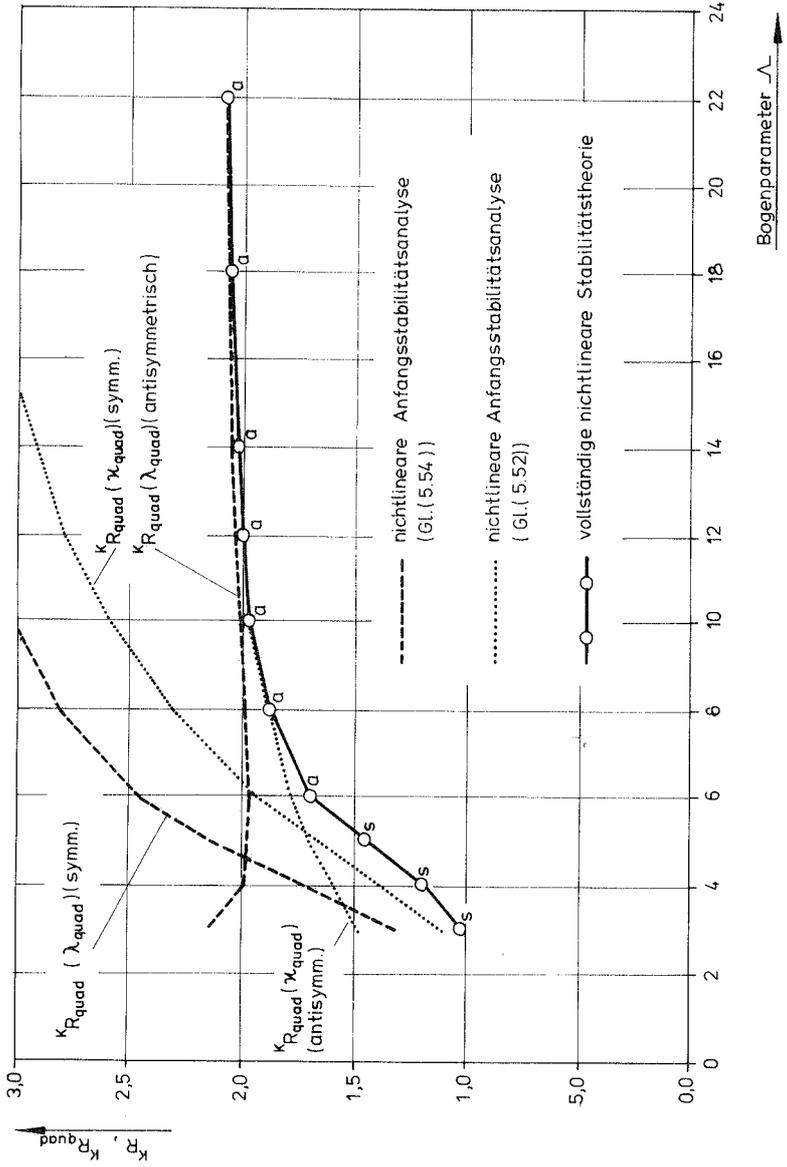


Bild 5.10: Kreisbögen (Vergleich der quadratischen Anfangsanalysen)

der nichtlinearen Anfangsstabilitätsanalyse auch bei ausgeprägtem nicht-linearen Verhalten zu ermöglichen.

1. Ableitung der Koppelgleichung

Zur Koppelung werden die Lösungen der beiden Reihen aneinandergesetzt und zu einem gemeinsamen Schnittpunkt extrapoliert.

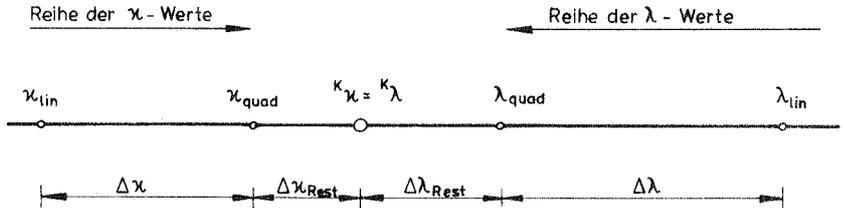


Bild 5.11: Koppelung der Reihenentwicklung

Zur Festlegung des Schnittpunktes wird die Proportionalität der Restglieder mit der Differenz der Reihenglieder aus linearer und quadratischer Approximation vorausgesetzt (Bild 5.12).

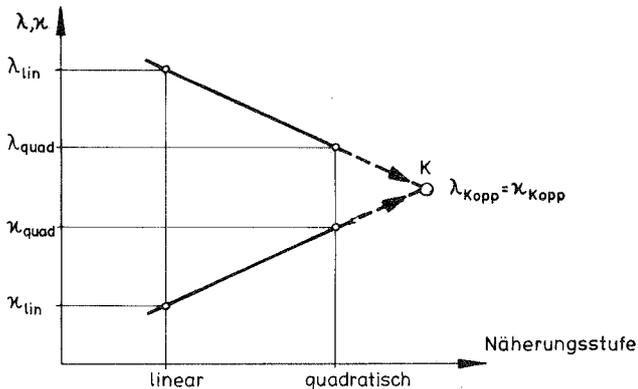


Bild 5.12: Extrapolation zur Koppelung

$$\frac{\Delta \kappa}{\Delta \kappa_{\text{Rest}}} = \frac{\Delta \lambda}{\Delta \lambda_{\text{Rest}}}$$

Daraus ergibt sich der Schätzwert für den Lastparameter:

$$\kappa_{\text{Kopp}} = \lambda_{\text{Kopp}} = \frac{\lambda_{\text{lin}} \cdot \kappa_{\text{quad}} - \lambda_{\text{quad}} \cdot \kappa_{\text{lin}}}{\kappa_{\text{quad}} - \kappa_{\text{lin}} + \lambda_{\text{lin}} - \lambda_{\text{quad}}} \quad (5.56)$$

Die kritische Last ist dann durch:

$$K_{\text{R}_{\text{Kopp}}} = \kappa_{\text{Kopp}} \cdot {}^1\text{R} = \lambda_{\text{Kopp}} \cdot {}^1\text{R} \quad (5.57)$$

festgelegt.

Zur Koppelungsvorschrift ist zu ergänzen, daß "zusammenpassende" Eigenwerte, d. h. Lastparameter mit gleicher Beulform (symmetrisch, antisymmetrisch, gleiche Wellenzahl, ...) miteinander zu verwenden sind. Wegen der besseren Näherungswerte der κ -Reihe ist die zum kleinsten Eigenwert κ_{quad} gehörende Beulform als maßgebend zur Berechnung der kritischen Last anzusehen.

2. Beispiele

Die Anwendung der Koppelgleichung auf die Gruppe von Kreisbögen ist in Bild 5.13 dargestellt. Es zeigt sich, daß die kritischen Lasten nun auch im Bereich kleiner Λ -Werte, d. h. bei stark nichtlinearem Verhalten, sehr gut angenähert werden. Der Fehler der Anfangsnäherung beträgt maximal 3,7%, die Beulform wird im gesamten Parameterbereich richtig vorhergesagt.

Zum Vergleich der Möglichkeiten verschiedener Anfangsstabilitätsuntersuchungen enthält Bild 5.11 ergänzend die Ergebnisse des klassischen Vorgehens.

Die Verbesserungen in den Vorhersagen sind allerdings mit einem erhöhten numerischen Aufwand verbunden. Gegenüber der Auswertung der vollständigen nichtlinearen Stabilitätstheorie mit Hilfe inkrementell-iterativer Lösungsverfahren einschließlich begleitender Maßnahmen erbringt jedoch die nichtlineare Anfangsstabilitätsanalyse beträchtliche Einsparungen in der Rechenzeit.

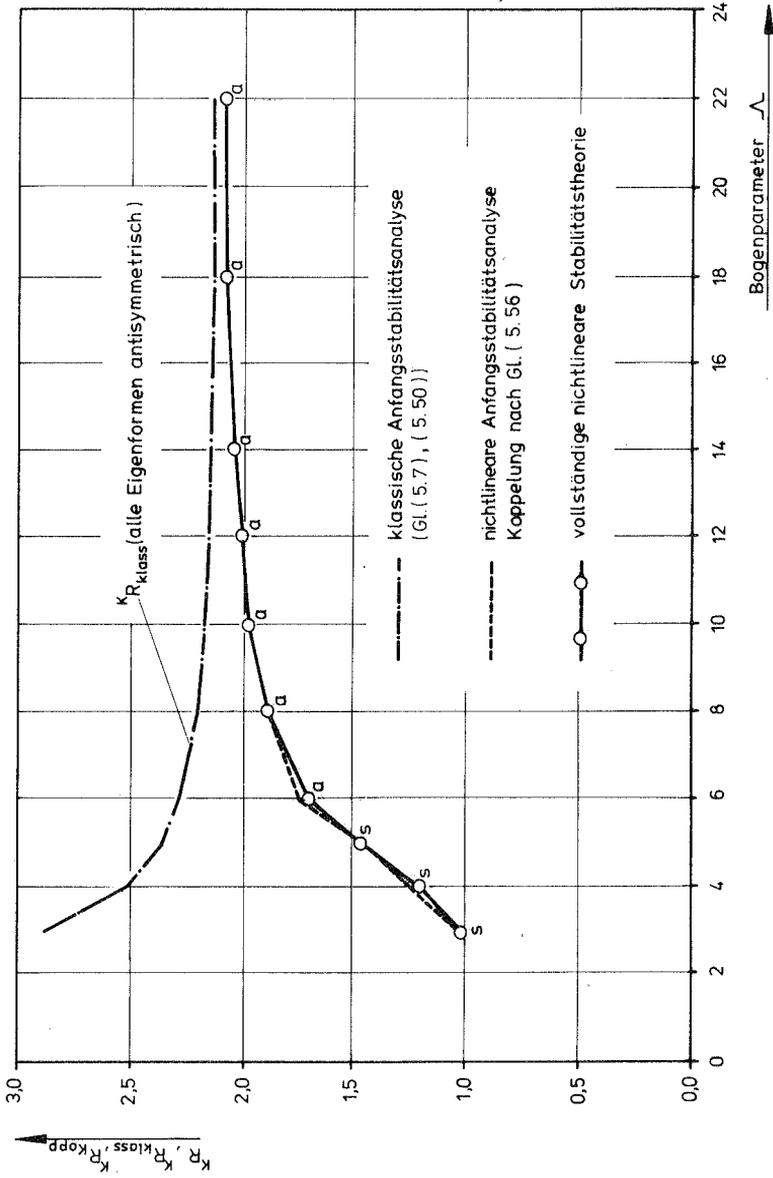


Bild 5.13: Kreisbögen (Koppelung)

3. Grenzen des Anwendungsbereiches

Die Beispiele zeigen, daß die Anwendung der Koppelgleichung durch nicht-lineares Verhalten und große Verschiebungen nicht eingeschränkt wird.

Eine Grenze ergab sich lediglich bei extrem nichtaffinem Verschiebungsverhalten. Legt man zur Abschätzung des nichtaffinen Vorbeulverhaltens den Faktor der Nichtaffinität nach Gleichung (5.31) zugrunde, so ergibt sich die Schranke des Anwendungsbereichs zu $f_{NA} < 0,03$.

Im Bereich größerer Nichtaffinitäten ist die kritische Last über die vollständige Auswertung der nichtlinearen Stabilitätstheorie zu ermitteln.

5.3 Stabilitätsuntersuchung bei unbekanntem Vorbeulverhalten

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß Anfangsstabilitätsuntersuchungen durchaus in der Lage sind, die kritische Last und den Beulmodus brauchbar abzuschätzen. Damit stehen diese Untersuchungen teilweise in Konkurrenz mit den Methoden der vollständigen Auswertung der nichtlinearen Stabilitätstheorie, und es erhebt sich die Frage, welches Verfahren zur Bestimmung des kritischen Zustandes herangezogen werden soll.

Vom Standpunkt der Rechenzeit ist den Anfangsuntersuchungen stets der Vorzug zu geben. Wegen der beschränkten Anwendbarkeit solcher Untersuchungen sind (bei Systemen mit unbekanntem Vorbeulverhalten) die Eigenschaften der Vorbeulverschiebungen abzuschätzen. Mit Hilfe der bereits festgelegten zulässigen Grenzen der Faktoren und Kennwerte für die Anwendbarkeit der einzelnen Analysen ergibt sich die in Bild 5.14 dargestellte Vorgehensweise.

Die Anfangsanalyse zeigt sich auch als sehr wertvoll, wenn die kritische Last über die nichtlineare Stabilitätstheorie ermittelt werden muß, denn für eine sinnvolle Lastinkrementierung ist es erforderlich, mindestens die Größenordnung der tatsächlichen Versagenslast zu kennen. Es ist daher zu empfehlen, jede Stabilitätsuntersuchung mit einer Anfangsanalyse zu beginnen.

Analog dem Verfahren nach Bild 5.14 kann die Stabilitätsuntersuchung wahlweise auch mit der klassischen Anfangsanalyse begonnen werden.

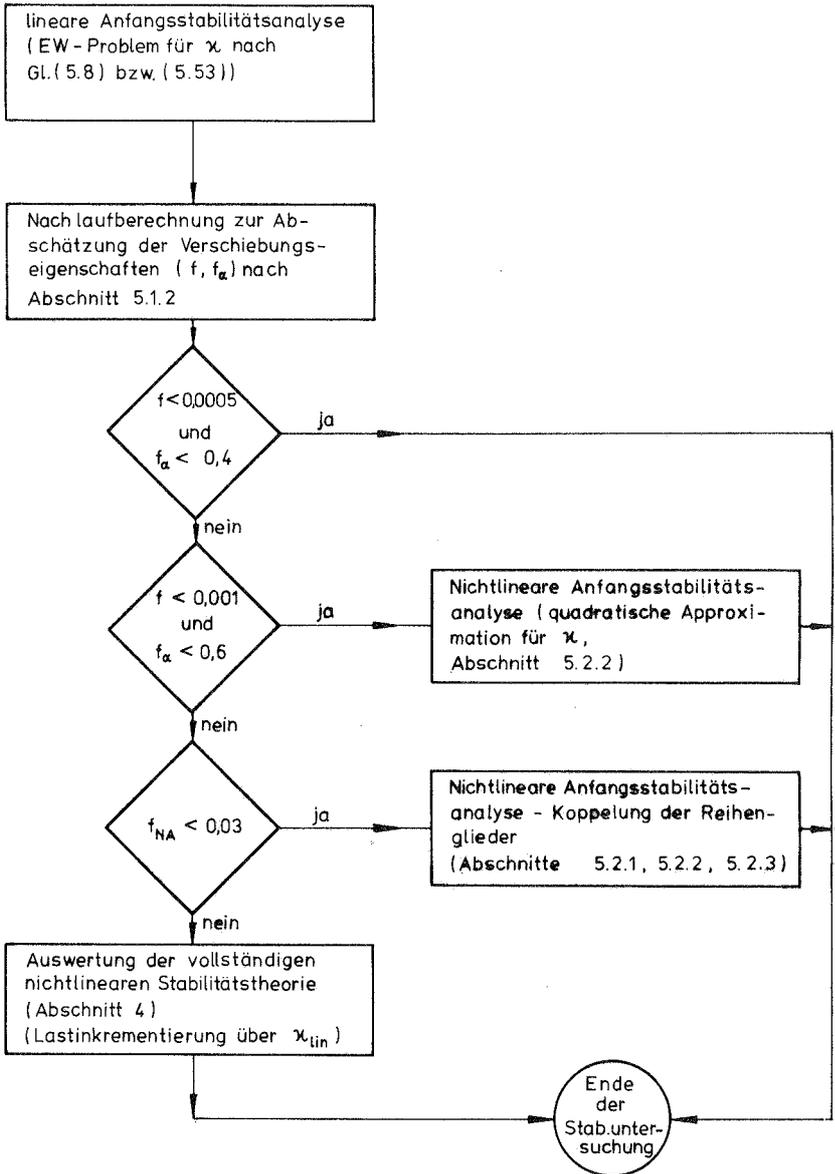


Bild 5.14: Ermittlung kritischer Lasten

Abgesehen vom klassischen Vorgehen liegt den Anfangsstabilitätsuntersuchungen die Aufspaltung der Gesamtsteifigkeitsmatrix nach Gleichung (5.4) zugrunde. Da diese Art der Trennung nur in der totalen Lagrange-Formulierung durchgeführt werden kann, ist die mitgehende Lagrange-Formulierung hier unbrauchbar.

6. Ermittlung kritischer Lasten mit Hilfe dehnungsloser Modelle

Tragwerksuntersuchungen zeigen, daß die experimentellen Versagenslasten teilweise beträchtlich unter den kritischen Lasten des Indifferenzkriteriums liegen.

Um diese Diskrepanz zu überbrücken, wurden von verschiedenen Autoren Stabilitätskriterien vorgeschlagen, die in Abschnitt 3. 2. 2 unter dem Begriff "dehnungslose Modelle" zusammengefaßt sind.

Aufgabe dieses Abschnitts ist, verschiedene Vorgehensweisen, denen allgemeiner Charakter zukommt, am Beispiel der Kreiszyylinder- bzw. Kugelschale anzuwenden und mit experimentellen Ergebnissen zu vergleichen.

Auf die Darstellung von Verfahren, die nur für Sonderfälle anwendbar sind, z. B. die dehnungslosen Streifenmodelle bei Kirste [59] und ElNaschie [71], wird verzichtet.

6.1 Das Konzept der verzerrungsfreien Verbiegungen bei Fritz/Wittek [41], [42], [64], [100]

Dem Konzept liegt die Voraussetzung dehnungsloser, genauer gesagt, verzerrungsfreier Verformungen der Schalenmittelfläche beim Übergang vom Grund- zum Nachbarzustand zugrunde. Durch dieses Vorgehen soll ein Näherungswert für die untere Indifferenzlast bzw. die untere Grenze tatsächlicher Versagenslasten gefunden werden. Die Verwirklichung der Dehnungslosigkeit erfolgt wahlweise durch Streichung des (inkrementellen) Membranpotentials des Nachbarzustandes oder durch metrikreue Beulverschiebungen. Zur Ermittlung der kritischen Last wird eine klassische Anfangsstabilitätsanalyse (Vernachlässigung der Anfangsverschiebungen, der Grundzustand enthält nur Membranspannungen) herangezogen. Gegenüber dem klassischen Eigenwertproblem der vollständigen Indifferenztheorie:

$$\begin{bmatrix} 0 & \\ 0 & \mathbf{K}_e \end{bmatrix} + \lambda_{\text{klass}} \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & \mathbf{K}_g \end{bmatrix} \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass}} = \mathbf{0} \quad (6.1)$$

ergibt sich das entsprechende Eigenwertproblem der verzerrungsfreien Verbiegungen zu:

$$\left[\begin{matrix} {}^0\mathbf{K}_{e, B} + \lambda_{\text{klass}} \cdot {}^1\mathbf{K}_g \end{matrix} \right] \cdot \mathbf{K} \mathbf{v}_{\text{klass}} = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

Die Tafeln 6. 1 und 6. 2 enthalten die Systemmatrizen für den Fall der Kreis-zylinderschale mit in der Ebene starren, jedoch völlig biegeweichen Deckel-scheiben.

In der Matrix ${}^0\mathbf{K}_{e, B}$ der verzerrungsfreien Theorie verbleiben nur die mit dem Steifigkeitsparameter S behafteten Terme der Matrix ${}^0\mathbf{K}_e$. Die geometrischen Matrizen gelten im vorliegenden Fall für beide Eigenwert-probleme unverändert.

Für den Lastfall Normaldruck hat sich die Anwendung des statischen Sta-bilitätskriteriums als zulässig erwiesen, obwohl diese Druckkräfte (lokal) nicht von einem Potential ableitbar sind. Als Freiheitsgrade des Systems enthält die Eigenwertgleichung die Amplituden der Längs-, Tangential- und Radialverschiebungen.

Wegen der Betrachtung dünner Schalen wurden hier die Gleichungen auf den ebenen Spannungszustand beschränkt.

Weiterhin liegt den Matrizen der Ansatz von Flügge [40] für die Schach-brettbeule mit abwechselnden Beulen nach innen (i) und außen (a) zugrunde (Bild 6. 1).

vollständige Indifferenztheorie [41]

$${}^0_0\mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = -\kappa^2 - \frac{1-\nu}{2} \cdot m^2, \quad A_{12} = \frac{\kappa \cdot m}{2} \cdot (1+\nu) = A_{21}$$

$$A_{22} = -\kappa^2 \cdot \frac{(1-\nu)}{2} - 2 \cdot \kappa^2 \cdot S(1-\nu) - m^2 - 4m^2 \cdot S, \quad A_{13} = -\nu \kappa = A_{31}$$

$$A_{23} = m + 2m \cdot S + 2\kappa^2 \cdot m \cdot S + 2m^3 \cdot S = A_{32}$$

$$A_{33} = -1 - S - 2\kappa^2 \cdot \nu S - 2m^2 \cdot S - \kappa^4 \cdot S - 2m^2 \cdot \kappa^2 \cdot S - m^4 \cdot S \quad (6.3)$$

verzerrungsfreie Verbiegungen [41]

$${}^0_0\mathbf{K}_{e,B} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{31} = 0$$

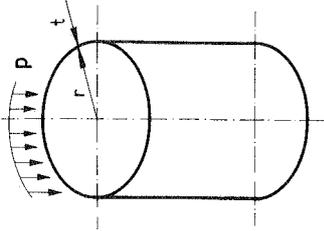
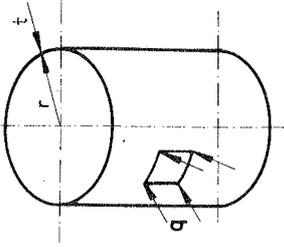
$$a_{22} = -2\kappa^2 \cdot S(1-\nu) - 4m^2 \cdot S$$

$$a_{23} = 2m \cdot S + 2\kappa^2 m \cdot S + 2m^3 \cdot S = a_{32}$$

$$a_{33} = -S - 2\kappa^2 \cdot S \nu - 2m^2 \cdot S - \kappa^4 \cdot S - 2m^2 \cdot \kappa^2 \cdot S - m^4 \cdot S$$

(6.4)

Tafel 6.1 : Systemmatrix \mathbf{K}_e der Kreiszylinderschale

Mantelndruck	
Normaldruck [41]	richtungstreuer Druck [42]
<p style="text-align: center;">Axialbelastung [41]</p>  <p style="text-align: center;">$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{P}{D}$</p>	 <p style="text-align: center;">$D = \frac{E \cdot t}{1 - \nu^2}$</p> <p style="text-align: center;">$\tilde{\mathbf{q}} = r \cdot \frac{q}{D}$</p>
${}^1\mathbf{K}_g = \tilde{\mathbf{p}} \cdot \begin{bmatrix} \kappa^2 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa^2 \end{bmatrix}$	${}^1\mathbf{K}_g = \tilde{\mathbf{q}} \cdot \begin{bmatrix} m^2 & 0 & -\kappa \\ 0 & m & -m \\ 0 & -2m & m^2+1 \end{bmatrix}$
	${}^1\mathbf{K}_g = \tilde{\mathbf{q}} \cdot \begin{bmatrix} m^2 & 0 & 0 \\ 0 & m+1 & -2m \\ 0 & -2m & m^2+1 \end{bmatrix}$

Tafel 6.2: Systemmatrix \mathbf{K}_g der Kreiszylinderschale

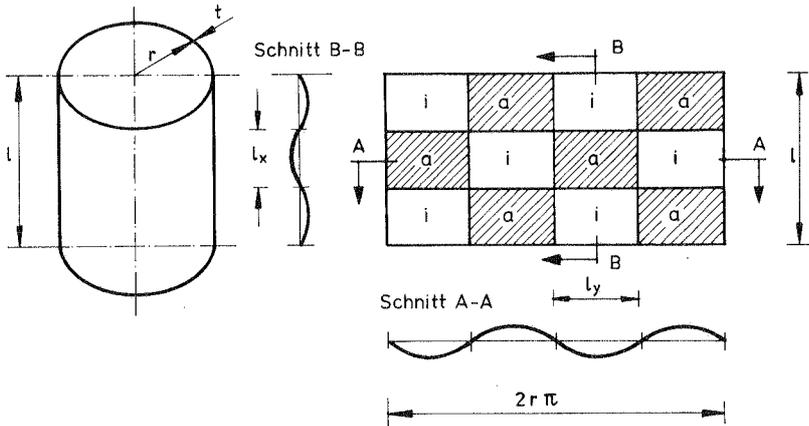


Bild 6.1: Schachbrettbeulen der Kreiszylinderschale

Bezeichnungen:

- l_x Länge einer halben Beulwelle in Längsrichtung
- l_y Länge einer halben Beulwelle in Umfangsrichtung
- n Anzahl der Halbwellen in Längsrichtung
- m Anzahl der Vollwellen in Umfangsrichtung

$$m = \frac{\pi \cdot r}{l_y} \quad (6.5)$$

$$n = \frac{l}{l_x} \quad (6.6)$$

Beulparameter: $\kappa = \frac{\pi \cdot r \cdot n}{l} \quad (6.7)$

Beulwellenverhältnis: $\alpha = \frac{l_y}{l_x} = \frac{\kappa}{m} \quad (6.8)$

Steifigkeitsverhältnis: $S = \frac{t^3}{12 \cdot r^3} = \frac{K}{D \cdot r^3} \quad (6.9)$

6.1.1 Die Kreiszyinderschale unter Axialbelastung

1. Vollständige Indifferenztheorie

Die Auswertung der Eigenwertgleichung führt auf das charakteristische Polynom, dessen kleinste Wurzel die kritische Last am Indifferenzpunkt ergibt. Die exakte Bestimmung dieses Wertes erfolgt i. a. im sogenannten Flüggeschen Diagramm [40]. Dabei ist jeder Schalengeometrie eindeutig eine kritische Last und eine Umfangswellenzahl zugeordnet.

Die genäherte Bestimmung unter ausschließlicher Berücksichtigung der größten Potenzen von m_0 und κ ergibt die bezogene klassische Beullast $K_{p_0}^{\sim}$ nach Timoshenko/Flügge zu:

$$K_{p_0}^{\sim} = 2 \cdot \sqrt{(1 - \nu^2)} \cdot S \quad (6.10)$$

und die nicht eindeutige Beziehung:

$$\frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + m^2)^2} = \sqrt{\frac{S}{1 - \nu^2}} \quad (6.11)$$

für die Umfangswellenzahl m_0 und den Beulparameter κ .

2. Verzerrungsfreie Verbiegungen

Wegen $a_{1i} = a_{i1} = 0$ (für $i = 1, 2, 3$) wird der kleinste Eigenwert der charakteristischen Gleichung Null. Die beiden restlichen Eigenwerte folgen dann aus der quadratischen Gleichung:

$$K_{p_B}^{\sim 2} + K_{p_B}^{\sim} \cdot \frac{a_{22} + a_{33}}{\kappa^2} + \frac{a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}}{\kappa^4} = 0 \quad (6.12)$$

Es zeigt sich, daß die Eingrenzung der experimentellen Versagenslasten nur mit dem größten Eigenwert möglich ist. Unter Voraussetzung $\kappa, m \gg 1$ erhält man aus Gleichung (6.12) eine Näherung für diesen Wert zu:

$$K_{p_B}^{\sim} = m^2 \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \cdot S \quad (6.13)$$

Mit der Minimalbedingung für das Beulwellenverhältnis α folgt daraus $\alpha = 1$ bzw. $\kappa = m$, d. h. eine quadratische Schachbrettbeule. Die zugehörige

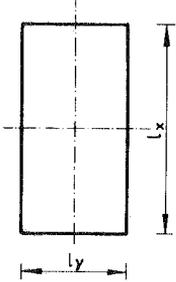
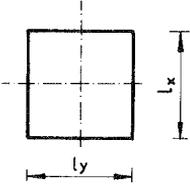
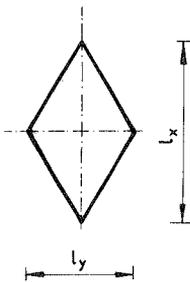
kritische Last ergibt sich zu:

$$\frac{K_{\sim}}{P_B} = 4 \cdot m^2 \cdot S$$

(6.14)

3. Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

a) Beulform

vollständige Indifferenztheorie	verzerrungsfreie Verbiegungen	experimentell
		
<p>langgestreckte Schachbrettbeule</p> <p>$\alpha = 0,45$</p> <p>(für $S = 10^{-5}$ bei $l/r = 1$)</p>	<p>quadratische Schachbrettbeule</p> <p>$\alpha = 1$</p> <p>(für alle Schalenparameter)</p>	<p>im Mittel längsgestreckte Rautenbeule</p> <p>$\alpha = 0,75$</p> <p>(nach Donnell / Wan [31])</p>

Tafel 6.3: Vergleich der Beulformen

Im Gegensatz zur Darstellung in [41, S. 144] ist es wegen des gewählten Ansatzes für die Schachbrettbeule nicht möglich, den im Experiment beobachteten Effekt des Rautenbeulens [31], [36] nachzuvollziehen.

b) Kritische Last

Das Konzept der verzerrungsfreien Verbiegungen wurde eingeführt, um die starke Überschätzung der experimentellen Versagenslasten durch die kritischen Lasten der vollständigen Indifferenztheorie zu vermeiden. Leider ist die Umfangswellenzahl in Gleichung (6.14) unbestimmt, d. h. das Konzept der verzerrungsfreien Verbiegungen alleine ist nicht in der Lage, experimentelle Versagenslasten einzugrenzen. Zur eindeutigen Festlegung von Schätzlasten muß also nach Umfangswellenzahlen gesucht werden.

Als erste Möglichkeit bieten sich die theoretischen Umfangswellenzahlen der vollständigen Indifferenztheorie nach Gleichung (6.11) an. Mit $\alpha = 1$ ergibt sich daraus:

$$\frac{K_{\tilde{p}_B}}{K_{\tilde{p}_0}} = \frac{K_{p_B}}{K_{p_0}} = 0,5 \quad (6.15)$$

ein Wert, der in [42] als Versagensgrenze schwach imperfekter Systeme angesehen wird. Wie die experimentellen Versagenslasten in Bild 6.3 jedoch zeigen, kommt dieser vom Schalenparameter unabhängigen Grenze zumindest bei dünnwandigen Schalen ($r/t > 1000$) keine Bedeutung zu. Als weitere Möglichkeit für die Auswahl bieten sich die experimentell ermittelten Umfangswellenzahlen an. In [41] wird aus Versuchsergebnissen von Donnell/Lundquist (Bild 6.2) geschlossen, daß die Anzahl der Umfangswellen aus dem Experiment im Durchschnitt etwa die Hälfte der theoretischen Wellenzahlen nach Gleichung (6.11) beträgt. Für den Fall der quadratischen Beulform folgt daraus:

$$K_{\tilde{p}_B} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{(1 - \nu^2)} \cdot S$$

und:

$$\frac{K_{\tilde{p}_B}}{K_{\tilde{p}_0}} = \frac{K_{p_B}}{K_{p_0}} = 0,125$$

Dieser Wert stellt zwar eine brauchbare untere Grenze für die experimentellen Versagenslasten dar, ihn jedoch als die untere Grenze des Konzepts der verzerrungsfreien Verbiegungen zu bezeichnen [41], [42], erscheint fragwürdig. Denn einerseits liegt der Berechnung nicht der betragskleinste Eigenwert zugrunde, andererseits kann von einem Mittelwert der Umfangswellenzahlen nicht auf eine untere Grenze der Versagenslasten geschlossen werden.

Um die Auswertung zu ergänzen, wird hier eine tatsächliche untere Grenze für einige experimentelle Umfangswellenzahlen bestimmt.

a) Ergebnisse nach Neufville/Connor [73]

$$m_{\text{exp}} = 2,7 \cdot 4 \sqrt{\frac{r}{t}} \cdot \sqrt{\frac{r}{\ell}}$$

mit dem Geltungsbereich: $800 < r/t < 1600$ und $0,333 < r/\ell < 1$.

b) Ergebnisse nach Donnell/Lundquist [31] (Bild 6.2)

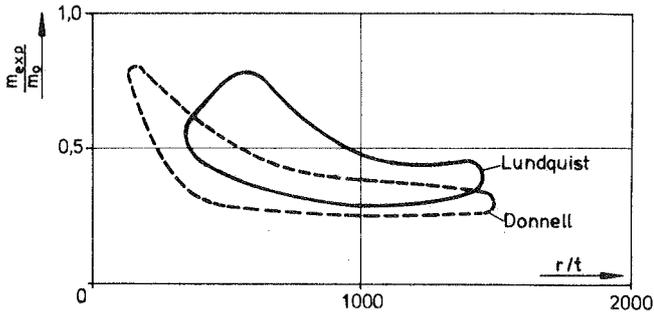


Bild 6.2 : Experimentelle Umfangswellenzahlen

In Bild 6.3 sind die Einhüllenden der experimentellen Versagenslasten und der sich aus all diesen Umfangswellenzahlen ergebenden Näherungswerte gegenübergestellt. Die untere Grenze der kritischen Last aus den verzerrungsfreien Verbiegungen liegt nach den drei betrachteten Versuchsgruppen bei ca. 3 % der klassischen Verzweigungslast der Kreiszyinderschale und ergibt damit eine unrealistische Abschätzung der experimentellen Werte.

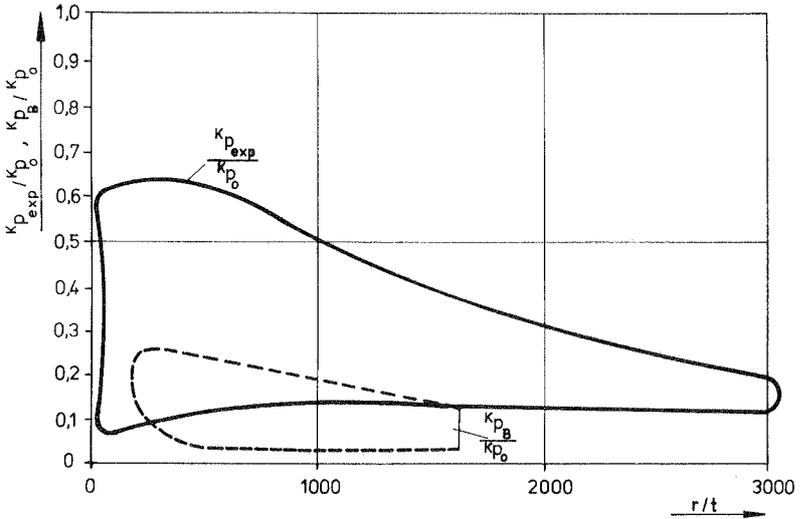


Bild 6.3 : Versagenlasten der Kreiszyllinderschale

6.1.2 Die Kreiszyllinderschale unter Manteldruck

1. Vollständige Indifferenztheorie

Eine genäherte Auswertung der Beuldeterminante für größere Umfangswellenzahlen kann Pflüger [77] entnommen werden. Demnach gilt bei Normaldruck für einen Bereich von $0,5 \leq l/r \leq 10$ und $\nu = 0,3$ für die kritische Belastung:

$$K_{q_0} \approx \frac{0,835 \cdot \frac{t}{r}}{\frac{l}{r} \cdot \sqrt{\frac{r}{t}} - 0,657} \quad (6.16)$$

und für die Beulwellenzahl:

$$m_0 = 2,742 \cdot \sqrt[4]{\frac{r^3}{l^2 \cdot t}} \quad (6.17)$$

Als Sonderfall des Beulens der Kreiszyklinderschale unter Manteldruck ist das Rohrbeulen bzw. Ringknicken zu betrachten. Bei exakter Auswertung des Eigenwertproblems nach Gleichung (6.1) mit Hilfe der Matrizen nach Tafel 6.1 und 6.2 liefert der Grenzübergang für $\ell \rightarrow \infty$ ($\kappa \rightarrow 0$) und die einfache Ovalisierung ($m = 2$)

$$\text{bei richtungstreuem Druck: } K_{q_0}^{\sim} = 4 \cdot S \quad (6.18)$$

$$\text{bzw. bei Normaldruck: } K_{q_0}^{\sim} = 3 \cdot S$$

also Ergebnisse, die in der Literatur bekannt sind [75], [13].

2. Verzerrungsfreie Verbiegungen

Die beiden nichtverschwindenden Eigenwerte ergeben sich als Wurzeln des charakteristischen Polynoms

für Normaldruck:

$$K_{q_B}^{\sim 2} + \frac{m^2 \cdot a_{33} + (1 + m^2) \cdot a_{22} + 3 \cdot m \cdot a_{23}}{m^4 - m^2} \cdot K_{q_B}^{\sim} + \frac{a_{22} \cdot a_{33} - a_{32}^2}{m^4 - m^2} = 0 \quad (6.19a)$$

und für richtungstreuen Druck:

$$K_{q_B}^{\sim 2} + \frac{(m^2 + 1) \cdot a_{33} + (m^2 + 1) \cdot a_{22} + 4 \cdot m \cdot a_{23}}{(m^2 - 1)^2} \cdot K_{q_B}^{\sim} + \frac{a_{22} \cdot a_{23} - a_{32}^2}{(m^2 - 1)^2} = 0 \quad (6.19b)$$

Als maßgebend wird auch hier jeweils der betragsgrößte Eigenwert angesehen.

Im Gegensatz zur axialbelasteten Kreiszyklinderschale sind für den Lastfall Manteldruck die Umfangswellenzahlen und damit die kritische Last eindeutig bestimmt.

Zum Aufsuchen der kritischen Last ist die Umfangswellenzahl - wie bei der vollständigen Indifferenztheorie - so zu variieren, daß sich ein Minimum für

den Lastparameter ergibt. Die daraus folgenden kritischen Lasten sind für das Längenverhältnis $l/r = 2$ in Bild 6.4 eingetragen.

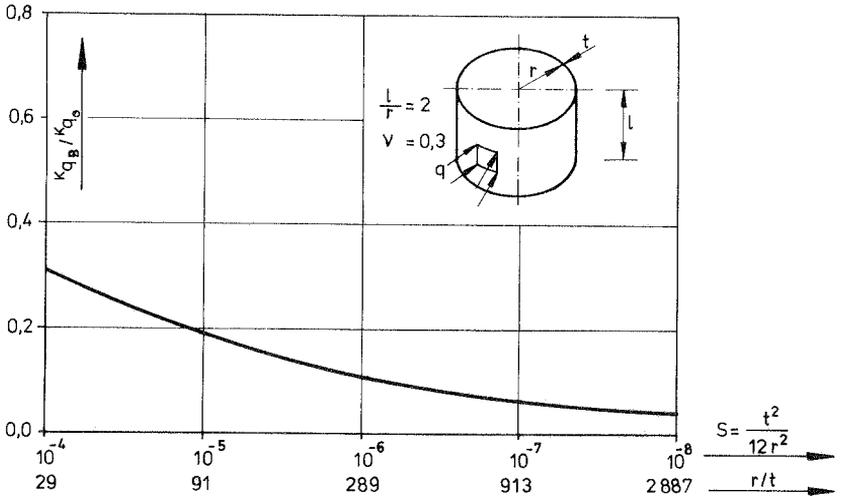


Bild 6.4: Exakte Auswertung der verzerrungs-freien Verbiegungen für Normaldruck

Der Grenzübergang zum Rohr- bzw. Ringbeulen ist mit $\kappa \rightarrow \infty$ und $m = 2$ durchzuführen. Entgegen den Darstellungen in der Literatur [41, S. 133] und [42, S. 42], die sowohl für Normaldruck als auch richtungstreuen Manteldruck einen Lastwert von $K_{q_B}^{\sim} = 3 \cdot S$ anzeigen, liefert der Grenzübergang in den charakteristischen Polynomen (Gleichungen (6.19)) eine kritische Last $K_{q_B}^{\sim} = 5 \cdot S$ für beide Arten der Druckbelastung.

Da das Rohrbeulen und Ringknicken a priori dehnungslos ist, muß der Grenzübergang bei verzerrungsfreien Verbiegungen jedoch unmittelbar die Versagenslasten der vollständigen Indifferenztheorie (Gleichungen (6.18)) ergeben.

3. Vergleich mit experimentellen Ergebnissen

Wie eine Zusammenfassung von Versuchsergebnissen [16] zeigt, liegt die untere Grenze der experimentellen Versagenslasten etwa bei $K_{p_{exp}} \geq 0,55 K_{p_o}$. Die kritischen Lasten der verzerrungsfreien Verbiegungen (Bild 6.4) liegen dagegen im Bereich von $0,03 K_{p_o} \leq K_{p_B} \leq 0,3 K_{p_o}$, also bei Werten, die es nicht erlauben, den Bereich des experimentellen Versagens nach unten hin brauchbar abzugrenzen. In [42], [100] wird diese Schrankeneigenschaft durch die Verwendung theoretischer Umfangswellenzahlen nach Pflüger erreicht [101]. Pflüger [77] gelangte mit Hilfe des Kriteriums der kleinsten Störverformungen (Abschnitt 3.2.4) zu Umfangswellenzahlen, die gegenüber den Werten der vollständigen Indifferenztheorie (nach Gleichung (6.17)) um ca. 10 % abgemindert sind, d. h. zu:

$$m \approx 0,9 \cdot m_o \quad (6.20)$$

Die kritische Last wird über eine genäherte Auswertung des charakteristischen Polynoms, Gleichungen (6.19), bestimmt. Unter Voraussetzung von $\kappa, m \gg 1$ kann die größte Wurzel angenähert werden zu:

$$K_{q_B}^{\sim} = (m^2 + 2 \cdot \kappa^2 + \frac{\kappa^4}{m^2}) \cdot S \quad (6.21)$$

bzw. mit $m \gg \kappa$:

$$K_{q_B}^{\sim} = m^2 \cdot S \quad (6.22)$$

Das Einsetzen der Gleichungen (6.20) und (6.17) in (6.22) und die Vernachlässigung des zweiten Ausdruckes im Nenner der Gleichung (6.16) bei der klassischen Beullast $K_{q_o}^{\sim}$ führt zu:

$$\frac{K_{q_B}^{\sim}}{K_{q_o}^{\sim}} = \frac{K_{q_B}}{K_{q_o}} = 0,60$$

d. h. zu einem Wert, der eine gute untere Grenze der experimentellen Versagenslasten darstellt. Der Charakter dieses Quotienten ist allerdings mehr fiktiver Natur. Denn Pflüger [77] selbst stellt fest, daß von ihm experimentell ermittelte (stark streuende) Umfangswellenzahlen im Mittel ca. 30 % unter seinen theoretischen Werten lagen.

Die Verwendung dieses experimentellen Mittelwertes in Gleichung (6.22) ergibt:

$$\frac{K_{q_B}^{\sim}}{K_{q_0}^{\sim}} = \frac{K_{q_B}}{K_{q_0}} = 0,3$$

also erneut eine deutliche Unterschätzung der experimentellen Lasten.

Das Einsetzen unterer experimenteller Wellenzahlen führt somit zu ähnlich unrealistisch niedrigen kritischen Lasten wie die Wellenzahlen des dehnungslosen Konzeptes (Bild 6.4).

6.2 Die Plattenlösung ebener Beulfelder

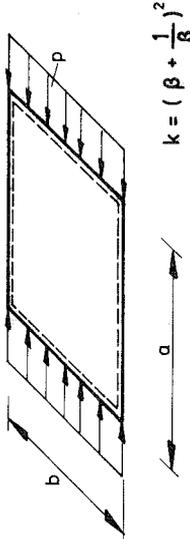
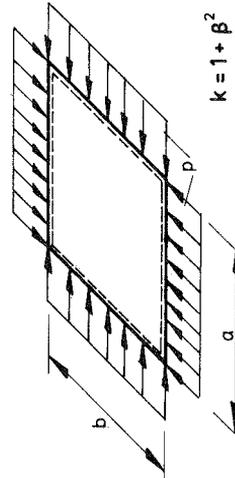
Dulácska [33] gelangt über die Lösung der Differentialgleichung flacher Schalen zu folgender Hypothese:

Eine untere Grenze für die untere Indifferenzlast ergibt sich über die kritischen Kräfte einer Platte, welche bei gleichen Randbedingungen die selbe Form und Größe besitzt wie das ausgebeulte Schalenfeld.

Da beim Plattenbeulen bei Beulbeginn nur die Verbiegungen der Mittelebene maßgebend sind, entspricht die vorgeschlagene Stabilitätsuntersuchung einem dehnungslosen Konzept.

Im weiteren soll hier untersucht werden, welche Bedeutung dieser Aussage beim Beulproblem der Kreiszylinder- bzw. Kugelschale zukommt. Zur Auswertung der Hypothese wird zunächst die kritische Last und das zugehörige Beulmuster mit Hilfe der Indifferenztheorie festgestellt. Anschließend werden die gebeulten Schalenfelder entlang der Knotenlinien aufgeschnitten und die Einzelfelder durch Abwicklung bzw. Projektion in ebene Beulfelder überführt. Die kritischen Kräfte der so gewonnenen Plattenteile dienen zur Abschätzung der unteren Versagensgrenze des Schalentragerwerks.

Die den angesprochenen Schalenbeulproblemen zugeordneten kritischen Plattenkräfte sind in Tafel 6.4 zusammengestellt.

<p>Allseitig Navier - gelagerte Platte unter einseitigem Druck [78]</p>	 <p style="text-align: center;">$k = \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2$</p>	<p>Allseitig Navier - gelagerte Platte unter zweiseitigem Druck [78]</p>	 <p style="text-align: center;">$k = 1 + \beta^2$</p>
	<p>$\beta = \frac{b}{a}$; $\kappa \tilde{p}_p = \frac{\kappa \tilde{p}_0}{D}$; $\kappa \tilde{p}_p = k \cdot p$</p>		<p>;$p = \frac{E t^3 \cdot \pi^2}{12(1-\nu) \cdot b^2}$</p>
	<p>$\kappa \tilde{p}_p = \frac{t^2 \cdot \pi^2}{12 \cdot b^2} \cdot \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)^2$</p>		<p>$\kappa \tilde{p}_p = \frac{t^2 \cdot \pi^2}{12 \cdot b^2} \cdot (1 + \beta)^2$</p>

Tafel 6.4: Kritische Plattenkräfte

6.2.1 Die Kreiszylinderschale unter Axialbelastung bzw. Manteldruck

Wegen des regelmäßigen Schachbrettmusters (Bild 6.1) genügt es, eine einzelne Beule zu betrachten,

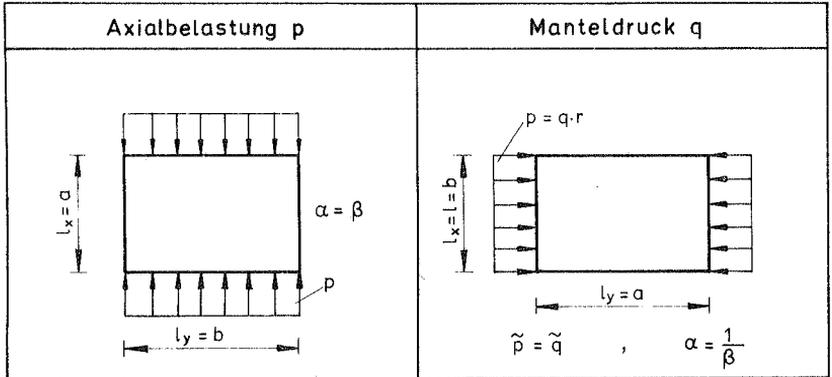


Bild 6.5: Ebene Schachbrettbeule

Die Umformung der Beziehung für die kritischen Plattenkräfte bei einseitigem Druck:

$$K_{\tilde{p}_p} = \frac{t^2 \cdot \pi^2}{12 \cdot b^2} \cdot \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right)^2 \quad (\text{nach Tafel 6.4})$$

mit Hilfe der Parameter nach Gl.(6.5) einschließlich (6.9) führt auf die gesuchten kritischen Lasten.

Es ergibt sich bei Axialbelastung:

$$K_{\tilde{p}_p} = m^2 \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \cdot S \quad (6.23)$$

und bei Manteldruck:

$$K_{\tilde{q}_p} = \left(m^2 + 2 \cdot \kappa^2 + \frac{\kappa^4}{m^2} \right) \cdot S \quad (6.24)$$

Beide Ausdrücke sind identisch mit den entsprechenden genäherten Beziehungen der verzerrungsfreien Verbiegungen (Gleichungen (6.13), (6.21)).

Da bei Ableitung von Gleichung (6.24) bezüglich der Größe der Beulparameter m und κ keine Annahmen zu treffen waren, ist hier der Grenzübergang zum Rohr- bzw. Ringbeulen möglich. Für $\kappa \rightarrow 0$ ergibt sich bei einfacher Ovalisierung:

$$K_{q_p}^{\sim} = 4 \cdot S$$

ein Wert, der mit der Lösung der vollständigen Indifferenztheorie bei richtungstreuer Belastung (Gleichung (6.18)) exakt übereinstimmt.

6.2.2 Die Kugelschale unter Außendruck

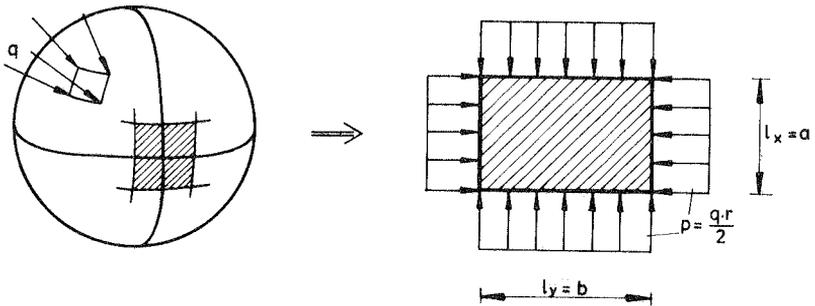


Bild 6.6 : Schachbrettbeule der Kugelschale

Die Verwendung des schachbrettartigen Beulmusters zur Stabilitätsuntersuchung der Kugelschale führt auf die sogenannte klassische Beullast (Zoelly-Last):

$$K_{q_o}^{\sim} = \frac{t}{r} \cdot \sqrt{\frac{1 - \nu^2}{S}} \quad (6.25)$$

und auf die Beziehung:

$$\left[\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right] = \frac{1}{\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{D \cdot (1 - \nu^2)}{K \cdot r^2}} \quad (6.26)$$

für die nicht eindeutig bestimmten Beulwellenlängen in Ring- und Meridianrichtung l_x und l_y [63].

Die kritischen Plattenkräfte der zweiseitig belasteten Platte nach Tafel 6. 4 gehen mit:

$$b = \frac{4 \cdot \pi \cdot r}{m} \quad (m: \text{Anzahl der Vollwellen in Ringrichtung})$$

über in:

$$\boxed{K_{q_p} \sim 2 \cdot m^2 \cdot (1 + \alpha^2) \cdot S} \quad (6.27)$$

6.2.3 Auswertung der Plattenlösung

Zur Abschätzung der unteren Durchschlagslasten sind in die "Plattenlösungen" nach den Gleichungen (6. 23), (6. 24) und (6. 27) die Umfangswellenzahlen der vollständigen Indifferenztheorie (Gleichungen (6. 11), (6. 17) und (6. 26)) einzusetzen. Die resultierenden Lastwerte - ausgedrückt durch die zugehörigen klassischen Beullasten - sind in Tafel 6. 5 zusammengefaßt.

Der Vergleich mit den unteren Grenzen der experimentellen Versagenslasten zeigt, daß bei keinem der untersuchten Systeme der "Plattenlösung" eine untere Schrankeneigenschaft zukommt.

6.3 Zusammenfassung

Zum Vergleich sind die Ergebnisse der verzerrungsfreien Verbiegungen und der "Plattenlösung" in Tafel 6. 5 tabellarisch gegenübergestellt. Die Übersicht enthält weiterhin (soweit bekannt) die entsprechenden Resultate eines dehnungslosen Modells nach Croll [30]. Aus der Literatur geht leider nicht hervor, auf welchem Weg Croll zu den Lasten des "Tangentenmodulverfahrens" gelangt.

Die Gegenüberstellung zeigt, daß die betrachteten Konzepte zu identischen Ergebnissen führen.

Die Untersuchungen in Abschnitt 6. 1 machen deutlich, daß die verzerrungsfreien Verbiegungen weder mit experimentellen Umfangswellenzahlen noch mit den theoretischen Umfangswellenzahlen, die sich aus dem Konzept selbst ergeben, in der Lage sind, die untere Grenze der experimentellen Versagenslasten brauchbar abzuschätzen.

	Kreiszylinderschale		Kugelschale (Außendruck)
	Axialbelastung	Manteldruck	
Grenzen des experimentellen Versagens	$k p_{exp} \approx 0,1 \cdot k p_0$	$k q_{exp} \approx 0,55 \cdot k q_0$	$k q_{exp} \approx 0,1 \cdot k q_0$
Verzerrungsfreie Verbiegungen (Näherungen für $\nu, m \gg 1$)	$k \tilde{p}_B = m^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \cdot S$	$k \tilde{q}_B = (m^2 + 2\nu^2 + \frac{\nu^4}{m^2}) \cdot S$	—
"Plattenlösung" (exakte Auswertung)	$k p_B _{m=m_0} = 0,5 \cdot k p_0$	$k q_B _{m=m_0} = 0,75 \cdot k q_0$	—
	$k \tilde{p}_p = m^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \cdot S$	$k \tilde{q}_p = (m^2 + 2\nu^2 + \frac{\nu^4}{m^2}) \cdot S$	$k \tilde{q}_p = 2 m^2 (1 + \alpha^2) \cdot S$
Tangentenmodulverfahren	$k p_p _{m=m_0} = 0,5 \cdot k p_0$	$k q_p _{m=m_0} = 0,75 \cdot k q_0$	$k q_p _{m=m_0} = 0,5 \cdot k q_0$
	$k \tilde{p}_T = m^2 \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \cdot S$	—	—
	$k p_T _{m=m_0} = 0,5 \cdot k p_0$	—	$k q_T _{m=m_0} = 0,5 \cdot k q_0$

Tafel 6.5: Vergleich dehnungsloser Modelle

Auch der in [42] vorgeschlagenen Abschätzung kritischer Lasten leicht imperfekter Systeme, mit Hilfe der Umfangswellenzahlen der vollständigen Indifferenztheorie kommt - wie die axialbelastete Kreiszyinderschale gezeigt hat - keine praktische Bedeutung zu.

Es bleibt zu klären, ob die Ursache dafür im mangelhaften Ansatz für die Beulform, in der Art der Auswertung über eine klassische Anfangsstabilitätsanalyse oder in den Grundannahmen des Konzeptes zu suchen ist.

Die Auswertungen in Abschnitt 6.2 haben weiterhin gezeigt, daß auch die Plattenlösung nach Dulácska zur Abschätzung der unteren kritischen Last für die Eingrenzung experimenteller Versagenslasten nicht herangezogen werden kann.

Da das "Tangentenmodulverfahren" nach Croll zu den gleichen Ergebnissen wie die "Plattenlösung" führt, sind die dehnungslosen Modelle nach dem heutigen Stand der Kenntnisse nicht in der Lage, Versagenslasten quantitativ abzuschätzen.

Tafel 6.5 zeigt jedoch die Möglichkeit einer qualitativen Abschätzung an.

Der Vergleich zwischen der axialbelasteten Kreiszyinderschale und der Kugelschale ergibt für $m = m_o$ ein Verhältnis der kritischen Lasten von

$$K_{p_p} / K_{p_o} = K_{q_p} / K_{q_o} = 0,5 \quad (6.28)$$

Beide Systeme besitzen dabei einerseits etwa gleiche untere experimentelle Versagenslasten von:

$$K_{p_{exp}} \geq 0,1 \cdot K_{p_o} \quad \text{bzw.} \quad K_{q_{exp}} \geq 0,1 \cdot K_{q_o}$$

andererseits ergeben sich für beide Systeme gleiche Abminderungskurven für die kritische Last bei Vorhandensein von Imperfektionen [63]. Das heißt, die etwa gleiche Imperfektionsanfälligkeit dieser Systeme spiegelt sich in der Gleichheit der beiden Quotienten (Gleichung (6.28)) wider. Die weniger imperfektionsanfällige Kreiszyinderschale unter Manteldruck besitzt dagegen mit $K_{q_p} / K_{q_o} = 0,75$ einen deutlich höheren Wert. Der imperfektionsunempfindlichen Platte ist schließlich das Verhältnis $K_{q_p} / K_{q_o} = 1$ zugeordnet.

Aus dieser Sicht der Ergebnisse scheint eine qualitative Abschätzung der Imperfektionsanfälligkeit mit Hilfe des Quotienten $\frac{K_{q_p}}{K_{q_o}}$ durchaus möglich. Abschätzbar sind jedoch nur Abminderungen, die durch (teilweises) Wegfallen stützender Membrankräfte bzw. Membranenergie verursacht werden.

Imperfektionsempfindlichkeiten aus anderen Ursachen mit ebenfalls drastischen Abminderungen der Versagenslasten werden mit diesem Kriterium nicht erfaßt (z. B. Fachwerkkuppel in [19]).

7. Ermittlung kritischer Lasten mit Hilfe der modifizierten
Energiekriterien nach Tsien

Als eine weitere Möglichkeit zur Abschätzung kritischer Lasten werden die Energiekriterien nach Tsien [93], [94] untersucht. In ihrer ursprünglichen Form sollten sie zur Berücksichtigung des Einflusses äußerer energetischer Störungen auf das Stabilitätsverhalten dienen. Da energetische Störungen i. a. nur geringe Auswirkungen auf das Einleiten des Beulvorganges besitzen, scheint die Anwendung dieser Energiekriterien zumindest zweifelhaft (Abschnitt 3. 2. 3).

Gjelsvik und Bodner konnten jedoch zeigen [48], [49], daß unter gewissen Voraussetzungen (Abschnitt 3. 2. 3) die kritische Last des einfachen Energiekriteriums bei "Beulen unter konstanter Last" eine untere Versagensgrenze geometrisch imperfekter Systeme darstellt. Aus der Anschauung kann diese Grenzeigenschaft auch der entsprechenden Last des verschärften Energiekriteriums zugeordnet werden (Bild 7. 1).

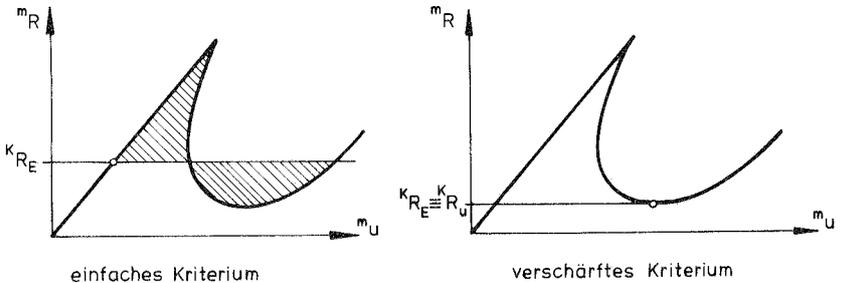


Bild 7.1: Energiekriterien: Beulen unter konstanter Last

Ziel dieses Kapitels ist es, die Brauchbarkeit dieser beiden Kriterien durch Gegenüberstellung mit experimentellen Versagenslasten zu klären. Die kritische Last K_{R_U} wird mit Hilfe des Lastverschiebungsdiagramms bestimmt. Als Abszisse ist dabei die verallgemeinerte Verschiebung zu

verwenden, d. h. die Verschiebung, die in Verbindung mit der Belastung das äußere Potential ergibt (z. B. bei Einzellast die Verschiebung unter dem Lastangriffspunkt, bei hydrostatischem Druck die Volumenänderung).

Der Vergleich der dehnungslosen Modelle mit dem verschärften Energiekriterium (Beulen unter konstanter Last) zeigt, daß in beiden Vorgehensweisen die untere kritische Last als maßgeblich für das Versagen angesehen wird.

7.1 Beispiele

Beispiel 1: Flache Kugelschale unter Außendruck

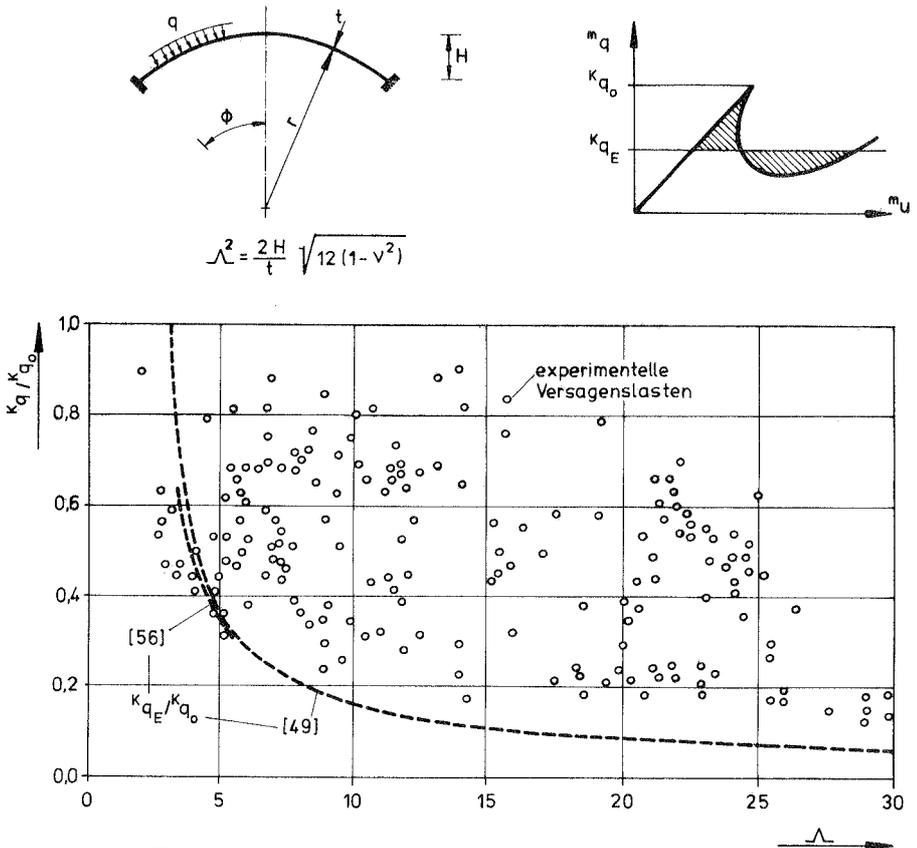


Bild 7.2: Flache Kugelschale

Wie Bild 7.2 [63], [82] zeigt, liegen die experimentellen Versagenslasten innerhalb eines extrem breiten Streubereiches zwischen ca. 12 % und 90 % der klassischen Beullast der vollständigen Kugelschale.

Dieser Streubereich wird von den kritischen Lasten des einfachen Energiekriteriums [49], [56] im wesentlichen nach unten abgegrenzt. Im Bereich sehr flacher bzw. dicker Schalen ist das experimentelle Versagen mit Plastifizierungserscheinungen verbunden. Es erscheint daher verständlich, daß die kritischen Lasten des Energiekriteriums, denen rein elastisches Verhalten zugrunde liegt, nicht zu unteren Versagensgrenzen führen. Bei steileren bzw. dünneren Schalen ergibt sich zunächst eine brauchbare Abgrenzung für die experimentellen Versagenslasten. Ab $\lambda \geq 15$ liegen die kritischen Lasten allerdings so niedrig (etwa 50 % der niedrigsten experimentellen Werte), daß sie zu einer sinnvollen Bemessung nicht mehr herangezogen werden können.

Beispiel 2: Kreisbogen unter Einzellast

Im Gegensatz zu den stark imperfektionsanfälligen flachen Schalen zeigen hier die experimentellen Untersuchungen ein relativ schmales Streuband nahe der kritischen Last am Durchschlagspunkt.

Die Auswertung des Energiekriteriums erfolgte über eine finite Elemente-Idialisierung mit Hilfe des Programmsystems NISA [18] (40 isoparametrische Elemente für den ebenen Spannungszustand, 8 Knoten je Element). Die Ergebnisse sind in Bild 7.3 den experimentell ermittelten Versagenslasten gegenübergestellt.

Während das einfache Energiekriterium als eine brauchbare untere Grenze der experimentellen Werte angesehen werden kann, führt das verschärfte Energiekriterium auf eine unrealistisch niedrige Schranke.

Beispiel 3: Sinusförmiger Bogen unter sinusförmig verteilter Last

(Bild 7.4)

Die Untersuchung dieser Systeme geht auf Fung/Kaplan [43] zurück. Abgesehen vom Bereich des symmetrischen Beulens ergibt bereits das einfache Energiekriterium völlig unbrauchbare Versagenswerte. Dem verschärften

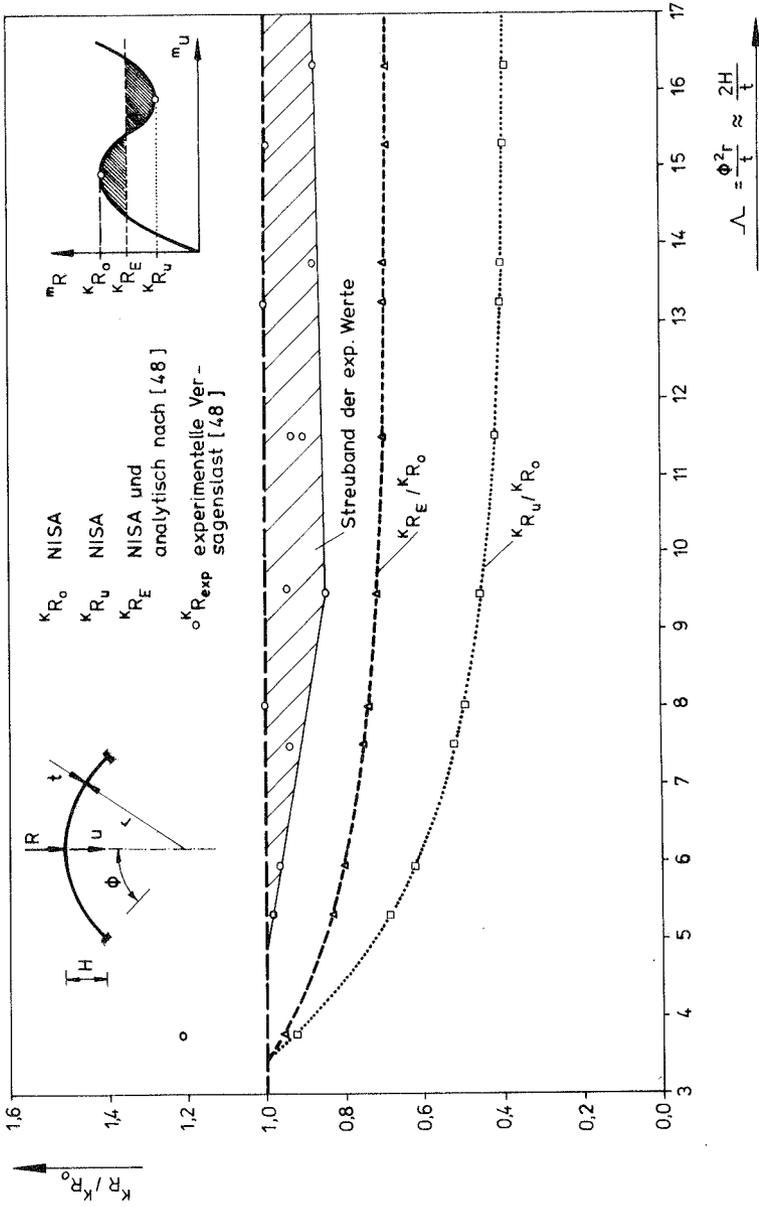


Bild 7.3 : Kreisbögen unter Einzellast

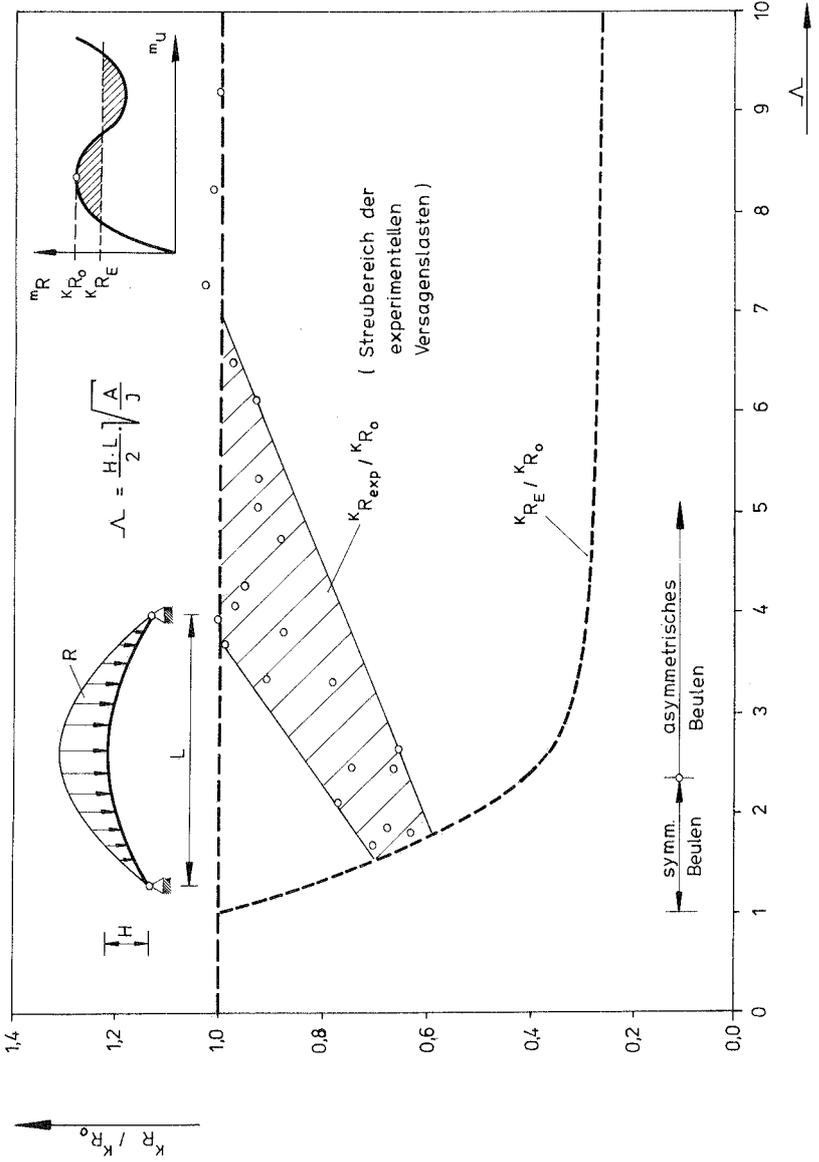


Bild 7.4: Sinusförmige Bögen unter sinusförmiger Last

Kriterium kommt hier keine Bedeutung zu, weil die unteren kritischen Punkte teilweise bei negativen Lastwerten liegen.

7.2 Beurteilung

Die betrachteten Beispiele zeigen, daß das verschärfte Kriterium wegen seiner zu niedrigen kritischen Lasten zur Abschätzung unterer experimenteller Versagensgrenzen nicht herangezogen werden kann. Da in Experimenten i. a. neben den geometrischen Imperfektionen weitere Einflüsse vorhanden sind, die eine zusätzliche Abminderung der Versagenslast zur Folge haben, gilt dies verstärkt für kritische Lasten bei ausschließlicher Betrachtung geometrischer Imperfektionen.

Demgegenüber führt das einfache Energiekriterium teilweise zu brauchbaren Ergebnissen (Beispiel 2, mittlerer Parameterbereich bei Beispiel 1). Ob die kritische Last des Energiekriteriums eines Systems eine sinnvolle Schranke des tatsächlichen Versagens darstellt, kann erst über den Vergleich mit einer hinreichend großen Anzahl experimenteller Versagenslasten geklärt werden. Eine allgemeine Bedeutung kommt daher auch dem einfachen Energiekriterium nicht zu.

8. Berücksichtigung von Imperfektionen

Als Imperfektionen werden Abweichungen realer Tragwerke von ihren Sollabmessungen bzw. ihrem Sollzustand bezeichnet. Sie können vielfältiger Natur sein. Als wichtigste seien zunächst Formabweichungen, Imperfektionen durch ungleichmäßige Lasteinleitung und Eigenspannungszustände genannt. Mannigfaltige Untersuchungen haben gezeigt, daß die zum Teil beträchtlichen Unterschiede zwischen tatsächlichen und rechnerischen Versagenslasten auf das Vorhandensein von Imperfektionen zurückgeführt werden können.

Im weiteren wird zunächst aufgezeigt, welche Auswirkungen die einzelnen Imperfektionsarten auf das Tragverhalten besitzen. Der anschließende Abschnitt soll klären, wie Imperfektionsformen und Amplituden zu wählen sind, um kritische Lasten imperfekter Systeme brauchbar abschätzen zu können.

8.1 Imperfektionsarten

1. Geometrische Imperfektionen

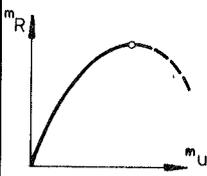
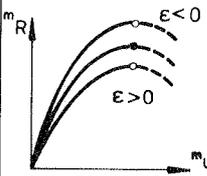
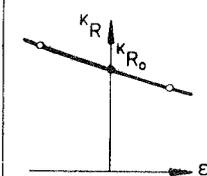
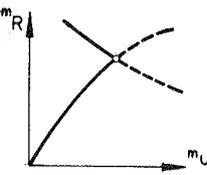
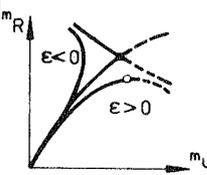
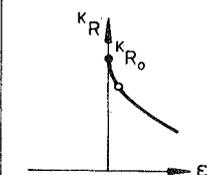
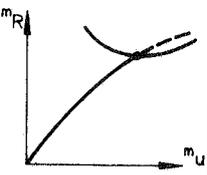
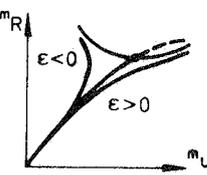
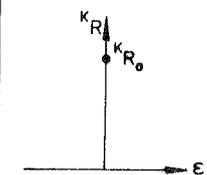
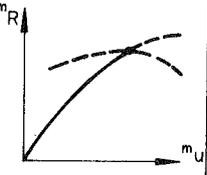
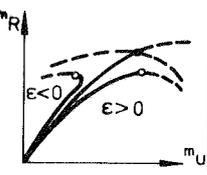
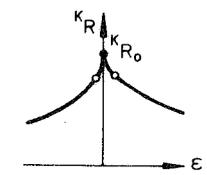
Als geometrische Imperfektionen werden vorwiegend Formabweichungen (z. B. Abweichungen der Geometrie der Mittelfläche von ihrer Sollform) bezeichnet. Sie können lokaler und globaler Natur sein.

Im erweiterten Sinne enthält der Begriff auch Fehler in der Tragwerksdicke.

Der Einfluß von Formabweichungen (auch Vorbeule oder Vorverformung genannt) auf die kritischen Lasten von Systemen verschiedener Versagenscharakteristiken ist in Tafel 8.1 zusammengestellt [62], [92].

Je nach Form der Vorbeule kann das Systemversagen des imperfekten Systems entweder über Durchschlagen oder Verzweigen auftreten (Bild 8.1).

Eine Klassifizierung der Imperfektionscharakteristiken (Abminderungskurven für die kritische Last) nach Britvec [19] ist in Bild 8.2 wiedergegeben.

	perfektes System	imperfektes System	Imperfektionscharakteristik
Durchschlagen			
asymmetrische Verzweigung			
symmetrisch stabile Verzweigung			
symmetrisch instabile Verzweigung			

Tafel 8.1 : Einfluß geometrischer Imperfektionen
 (ϵ : Imperfektionsparameter)

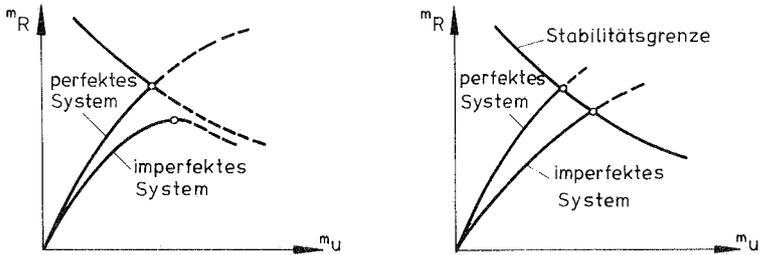


Bild 8.1 : Versagen bei Formabweichungen

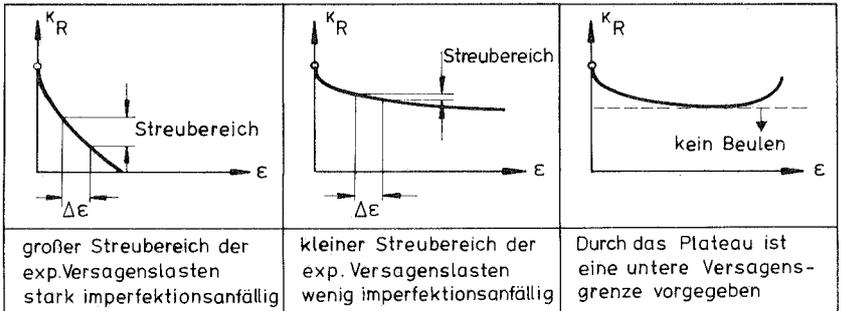


Bild 8.2 : Imperfektionscharakteristiken nach BRITVEC [19]

2. Imperfektionen durch Lasteinleitung

Imperfektionen dieser Art können z. B. durch Unebenheiten in der Auflage (aus Boden- oder Stützensenkung etc.) oder Abweichungen der tatsächlichen Lastverteilung von der angenommenen entstehen.

Am Beispiel der längsbelasteten Kreiszyinderschale wurde in Experimenten festgestellt [39], daß eine ungleichmäßige Lasteinleitung (verursacht durch eine dünne Papierunterlage) zu Veränderungen der Versagenslast von 30 % führt.

3. Imperfektionen aus Eigenspannungen

Eigenspannungszustände können z. B. durch Umformen, Schweißen (Restspannungen) oder Zwängung entstehen.

Wie gravierend der Einfluß von Eigenspannungen sein kann, wird von Bornscheuer in [14] anhand eines Schadensfalles aufgezeigt, bei dem Restspannungen durch Schweißen ursächlich für die Einleitung des Beulvorgangs anzusehen sind.

4. Imperfektionen aus Randbedingungen

Ein weiterer Einfluß auf die Abminderung kritischer Lasten kann durch nicht richtig erfaßte Randbedingungen zustande kommen (z. B. axialbelastete Kreiszyinderschale bei Hoff [51]).

Als weitere Imperfektionen (denen i. a. jedoch untergeordnete Bedeutung zukommt) seien Materialimperfektionen (z. B. Fehlstellen) und äußere energetische Störungen genannt.

5. Kombinierte Wirkung verschiedener Imperfektionsarten

An Versuchsobjekten bzw. realen Tragwerken treten verschiedene Imperfektionsarten stets zusammen auf. Welches Gewicht den einzelnen Arten dabei zukommt, hängt u. a. von der Imperfektionsanfälligkeit des Systems, der Herstellungsgenauigkeit und der Sorgfalt des Versuchsaufbaus bzw. der Durchführung ab. Es scheint daher nicht möglich, den Einfluß von Einzelteilen global festzulegen.

Im Fall der längsbelasteten Kreiszylinderschale weist Esslinger [38] den geometrischen Imperfektionen einen Anteil von 60 % und der ungleichen Lasteinleitung von 40 % der Gesamtabminderung zu. In einem neueren Konzept werden von der gleichen Autorin für die gesamte Reduktion der Versagenslast zu je einem Drittel Lastimperfektionen, Eigenspannungen und geometrische Imperfektionen verantwortlich gemacht [39].

6. Modellierungsimperfektionen (Approximationsfehler)

Neben Imperfektionen, die durch Abweichungen realer Systeme von ihren Sollabmessungen bzw. ihrem Sollzustand gekennzeichnet sind (geometrische Imperfektionen), können zusätzliche Imperfektionen durch die Modellierung idealer Tragwerke mit finiten Elementen auftreten. Gemeint sind damit die geometrischen Abweichungen zwischen der idealen und der durch finite Elemente approximierten Geometrie des Tragwerkes. Als Extremfall kann dabei die Diskretisierung gekrümmter Systeme mit Hilfe ebener Elemente angesehen werden. Der Einfluß solcher Imperfektionen wird in Abschnitt 8.2.3 (Beispiel 2) anhand eines längsbelasteten Zylinderschalenstreifens exemplarisch untersucht.

8.2 Berechnung imperfekter Systeme

Die Beurteilung des Tragverhaltens realer (imperfekter) Systeme kann in verschiedenen Stufen erfolgen. Als Ausgangspunkt dient i. a. die Ermittlung der kritischen Last des perfekten Systems. Der Einfluß der Imperfektionen wird mit Hilfe eines Abminderungsfaktors in Rechnung gestellt.

Zur sinnvollen Festlegung dieses Faktors können sowohl Versuchsergebnisse als auch weitere rechnerische Untersuchungen verwendet werden. Ist man ausschließlich auf rechnerische Werte angewiesen, so kann zu einer ersten Beurteilung der Abminderung das gesamte Last-Verschiebungsverhalten des perfekten Systems herangezogen werden. Eine sichere Festlegung des Reduktionsfaktors ist jedoch nur über die kritischen Lasten (und Last-Verschiebungskurven) imperfektionsbehafteter Systeme möglich. Den Theorien zur globalen Erfassung der Wirkung von Imperfektionen (dehnungslose Modelle, Energiekriterien) kommt bei quantitativer Abschätzung keine allgemeine Bedeutung zu.

8.2.1 Wahl der Imperfektionen

Die Untersuchung des Tragverhaltens imperfekter Systeme erfordert eine sinnvolle Festlegung der Form und Amplituden der zu untersuchenden Imperfektionsart. Die Ausführungen dieses Abschnitts beziehen sich auf geometrische Formabweichungen, sie können jedoch in analoger Weise zur Untersuchung von Imperfektionen aus Eigenspannungen und ungleichmäßiger Lasteinleitung Anwendung finden.

Die Auswirkungen verschiedener Formabweichungen auf die Abminderung kritischer Lasten wurde in der Literatur bereits vielfach untersucht (z. B. [61], [62], [63], [45]). Zusammenfassend kann man drei grundsätzliche Vorgehensweisen unterscheiden.

1. Verwendung "gefährlicher" Imperfektionsformen

Darunter sind Imperfektionsformen zu verstehen, die bei gleicher maximaler Formabweichung die größte Abminderung für die kritische Last ergeben.

Bei Systemen mit deutlich auseinanderliegenden einfachen Eigenwerten wird die zur 1. Beulform affine Formabweichung als gefährlichste Imperfektionsform angesehen. Liegen dagegen die ersten Eigenwerte nahe beieinander oder direkt zusammen (multifurcation) ergibt sich die kritische Formabweichung i. a. als eine Linearkombination der zugehörigen Beulformen. Die der gefährlichsten Vorbeulform entsprechende Kombination wird dabei meist durch Probieren (Variation der Anteilkoeffizienten bei konstanter Gesamtamplitude) gefunden. Neuerdings wird auch versucht, Kriterien zur Feststellung kritischer Vorverformungen zu finden. Wessels [97] formuliert (für die flache Kugelschale) folgendé Hypothese:

"Die bei Vergleich aller Vorverformungsfunktionen gleicher Maximalgröße sich ergebende niedrigste Durchschlagslast ist dadurch gekennzeichnet, daß die verformte Schale den für diese Laststufe größten Biegungs- bzw. kleinsten Dehnungsanteil der inneren Energie besitzt."

Er gewinnt auf diese Weise für den bei ihm untersuchten Parameterbereich eine Imperfektionsform, die in der Tat zu der bisher extremsten Abminderung führt. (siehe auch Bild 8.3). Ob diesem Konzept allgemeine Bedeutung zukommt, können erst weitere Untersuchungen zeigen.

2. Verwendung gemessener Imperfektionen

Durch Vermessen des gesamten Vorverformungsfeldes ist es möglich, kritische Lasten bereits ausgeführter Systeme nachzurechnen [3], [45]. Liegt eine Vielzahl von Versuchsobjekten gleicher Herstellung vor, so kann über die statistische Auswertung der Meßergebnisse eine Versagensgrenze der Objektreihe berechnet werden.

3. Verwendung von Imperfektionen "mittlerer" Gefährlichkeit

Formabweichungen realer Systeme enthalten i. a. Imperfektionen unterschiedlicher Gefährlichkeit. Soll der Einfluß dieser verschiedenen Imperfektionsformen pauschal mit Hilfe einer vorgegebenen Formabweichung erfaßt werden, die gekoppelt wird mit der maximal möglichen Amplitude des wirklichen Systems, so wäre demnach eine Imperfektionsform "mittlerer Gefährlichkeit" zu wählen, um die unterschiedlichen Wirkungen im Mittel zu erfassen.

(Anmerkung: Eine solche Imperfektionsform stellt bei der längsbelasteten Kreiszyinderschale die schachbrettförmige Beule dar. Denn die Abminderungskurven nach Pflüger [76] bzw. nach Arbocz [45] führen in Zusammenhang mit gemessenen maximalen Formabweichungen auf brauchbare Versagensgrenzen.)

Da zur Ermittlung solcher Formabweichungen keine Kriterien vorhanden sind, ist man zu Abschätzung realer Versagenslasten entweder auf die Verwendung beliebiger oder - sofern bekannt - auf kritische Imperfektionsformen angewiesen.

Zur Wahl der Amplituden können im Rahmen eines Sicherheitskonzeptes auch den kritischen Formen maximale Maßabweichungen (Toleranzen) zugeordnet werden. Dieses Vorgehen führt jedoch teilweise auf extrem niedrige Versagenslasten. Als Beispiel hierfür sei auf die Schornsteinnorm nach DIN 4133 hingewiesen. Dort wird eine Nachbildung des Koiterschen Abminderungsfaktors für die kritische axialsymmetrische ringförmige Vorbeule mit maximalen Toleranzen zur Berechnung der Versagenslast verwandt [15]. Für das Verhältnis $r/t = 1000$ ergibt sich bei $t = 10$ mm eine zulässige Last von $K_R/K_{R_0} = 0,0290$, also ein Wert, der weit unter den experimentellen Versagenslasten der längsbelasteten Kreiszyinderschale liegt. Neben der

unzulässigen Extrapolation der Abminderung nach Koiter in den Bereich großer Imperfektionen ist dieser niedrige Lastwert auf die Koppelung von kritischen Imperfektionsformen mit maximalen Maßabweichungen zurückzuführen. Allgemein sollten also kritische Imperfektionen mit Amplituden der Größenordnung in die Rechnung eingehen, mit der sie auch an realen Systemen vorhanden sind.

8.2.2 Zum Rechenablauf

In der Methode der finiten Elemente (bzw. finiten Differenzen) wird zur Idealisierung das imperfekte Tragwerk herangezogen.

Zur Wahl eines problemangepaßten Lösungsverfahrens beginnt die Stabilitätsuntersuchung zweckmäßig mit einer Abschätzung des Vorbeulverschiebungsverhaltens (Abschnitt 5.1.2). Die eigentliche Ermittlung der kritischen Last erfolgt dann entweder über die vollständige oder genäherte Auswertung (Kapitel 4 und 5) der Stabilitätsgleichungen.

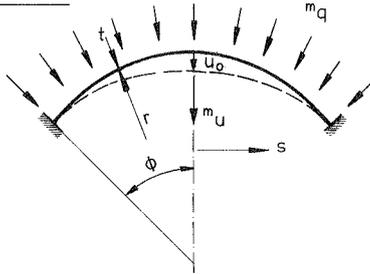
Bei der Diskretisierung von Stabilitätsproblemen ist zu beachten, daß die bereichswisen Ansätze in der Lage sein müssen, neben der Beschreibung der Ausgangsgeometrie, der Verschiebungsfigur und dem Spannungsgradienten auch die Beulfigur zu beschreiben. Dies kann vor allem bei lokalen Beuleffekten bzw. bei Beulformen, die sehr feinwellig über das gesamte System verteilt sind, das maßgebende Kriterium für die Elementeteilung sein. Es genügt dabei nicht immer, sich an den Beulformen im Experiment zu orientieren, weil diese über kaskadenartige Beulvorgänge aus ursprünglich feiner verteilten Beulen entstanden sein können (z. B. Kreiszyinderschale). Zu grobe Idealisierungen ergeben in der Regel Überschätzungen der kritischen Last (z. B. nichtfacettiertes Zylinderschalenfeld, Abschnitt 8.2.3, Beispiel 2).

8.2.3 Beispiele

Beispiel 1: Kugelschale unter Außendruck

Der Einfluß geometrischer Formabweichungen auf rechnerische Versagenslasten soll am Beispiel der Kugelschale (Bild 8.3) untersucht werden. Mit

System [95]



Imperfektion :

$$u_{imp} = u_0 \cdot (1 - s^2)^2$$

Systemparameter

$$\alpha = \frac{r}{t} \cdot \phi^2$$

$$\Lambda^2 = \frac{2H}{t} \cdot \sqrt{12(1 - \nu^2)}$$

Abminderungskurven

- nichtlineare Stabilitätstheorie
- - -○ Anfangsschätzwerte nach $\left. \begin{array}{l} \text{Gl. (4.25) } \\ \text{Gl. (4.27) } \end{array} \right\}$

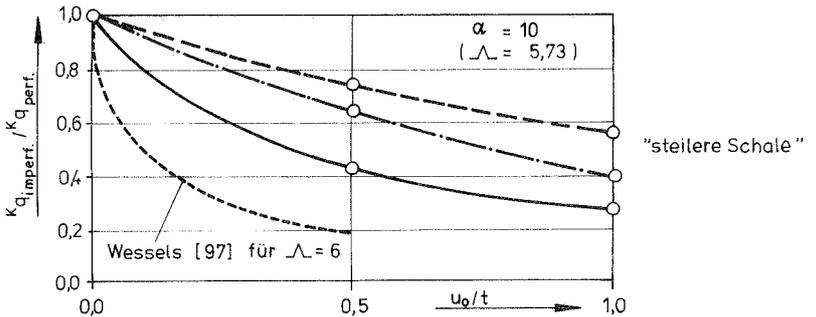
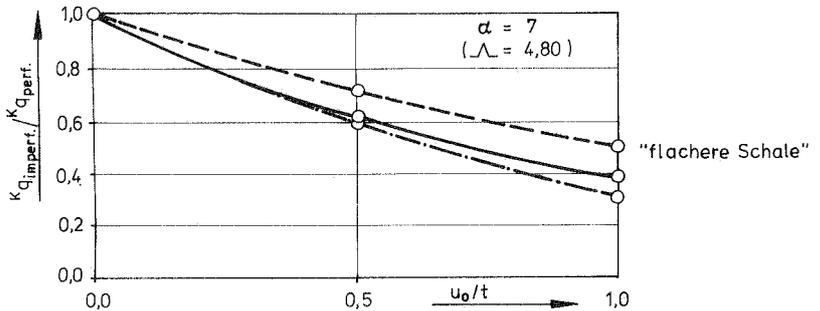


Bild 8.3 : Geometrisch imperfekte Kugelschalen

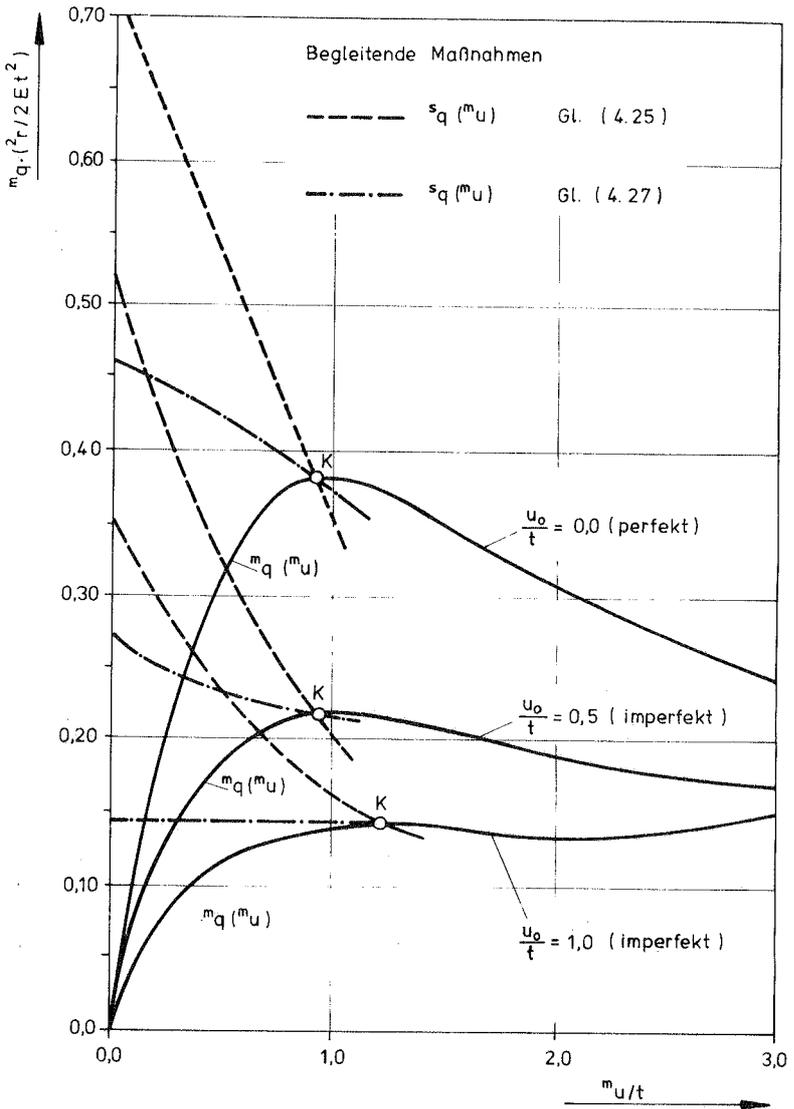


Bild 8.4 : Kugelschalen (Last-Verschiebungskurven $\alpha=7$)

der Beschränkung auf rotationssymmetrisches Beulen wird eine symmetrische Formabweichung als Imperfektion angesetzt [95]. Untersucht werden flache ($\alpha = 7$) und steilere Schalen ($\alpha = 10$). Die Diskretisierung erfolgt mit 12 (bei $\alpha = 7$) bzw. 16 (bei $\alpha = 10$) isoparametrischen, achsensymmetrischen Elementen (8 Knoten je Element).

Die Auswertung der nichtlinearen Stabilitätstheorie ergibt starke Abminderungen für die Versagenslasten, die (bei gleichen Imperfektionsamplituden) für die steilere Schale ausgeprägter sind als für die flachere Schale. Der Vergleich mit den experimentellen Beullasten (Bild 7. 2) zeigt, daß die untere Grenze des Streubereiches bereits mit Amplituden $u_0/t = 1$ erreicht wird.

Die kritische Imperfektionsform nach Wessels [97] mit einer Überhöhung im Außenbereich und einer Abflachung am Scheitel führt gegenüber der parabolischen Vorbeule zu einer weiteren Abminderung der Beullasten.

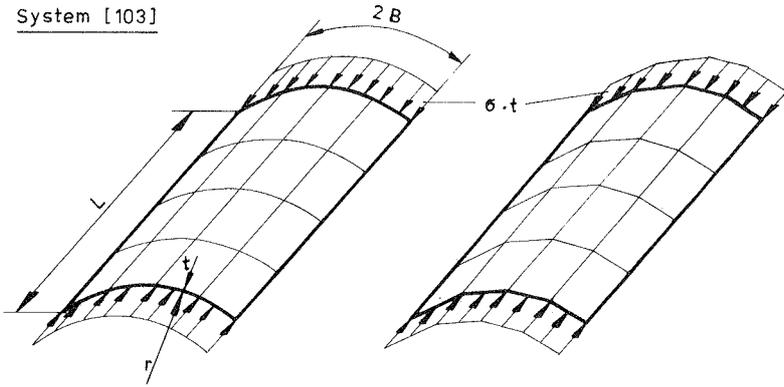
Der Verwendung von Anfangsschätzwerten der begleitenden Maßnahmen (Bild 8. 4) zur Abschätzung der Abminderung kommt erwartungsgemäß nur qualitativer Charakter zu.

Beispiel 2: Zylinderschalenfeld

Zweck dieses Beispiels (Bild 8. 5) ist, den Einfluß von Modellierungsimperfektionen auf kritische Lasten darzustellen. Zur Diskretisierung werden dabei die degenerierten biquadratischen (S 9) und bikubischen Schalenelemente (S 16) nach Ramm [81], enthalten im Programmsystem NISA [18], in ebener und gekrümmter Form eingesetzt und die Ergebnisse mit einer Vergleichslösung nach König u. a. [60] bzw. mit experimentellen Beullasten [103] verglichen.

Zur Bestimmung der kritischen Last genügt wegen des linearen Vorbeulverhaltens eine klassische oder lineare Anfangsstabilitätsanalyse. Die Ergebnisse sind in Bild 8. 6 zum Vergleich des Rechenaufwandes in Abhängigkeit von der Anzahl der Unbekannten bzw. zum Vergleich gleicher geometrischer Systeme über die Anzahl der Elemente (Facetten) in Umfangsrichtung dargestellt. Es zeigt sich, daß bei zu grober Idealisierung mit gekrümmten bikubischen Schalenelementen (S 16) die kritische Last

System [103]



Ausgangssystem und gekrümmte Idealisierung

facettierte Idealisierung
(z. B. 4 Facetten)

Abmessungen : $r = 457 \text{ mm}$, $L = 686 \text{ mm}$, $t = 1,6 \text{ mm}$
 $2B = 654 \text{ mm}$ ($r/t = 286$)

Werkstoff : Aluminium, $\nu = 0,33$, $E = 7,04 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

Randbedingungen : Längsränder : frei
Querränder : gelenkig-längsverschieblich

Beulform (gekrümmte Idealisierung)

(Vereinfachte Darstellung)

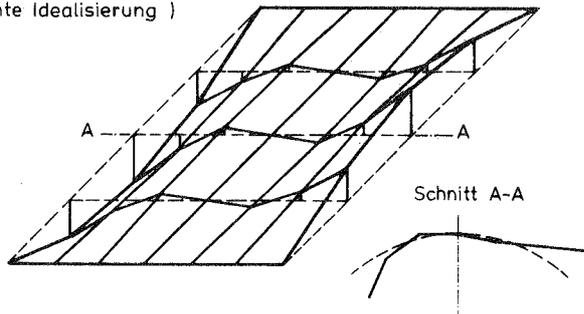


Bild 8.5 : Zylinderschalenfeld

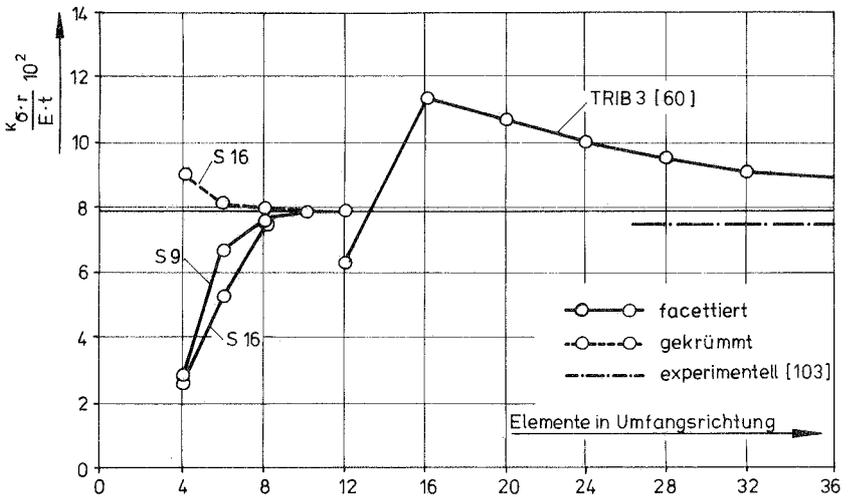
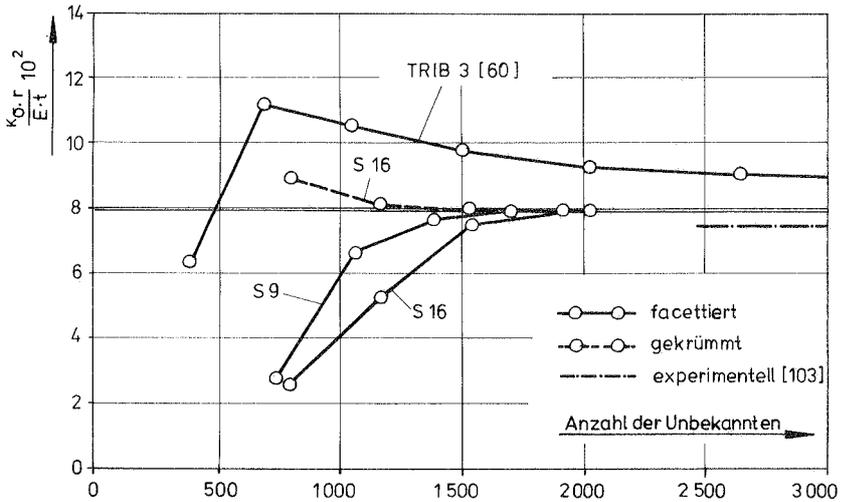


Bild 8.6 : Zylinderschalenfeld (Vergleich der kritischen Spannungen bei gekrümmter und facettierter Idealisierung)

überschätzt wird. Mit zunehmender Anzahl von Elementen in Umfangsrichtung (bzw. der Anzahl der Unbekannten) wird diese Überschätzung abgebaut, bis schließlich ein kritischer Lastwert von 7,9 erreicht wird. Die gute Übereinstimmung mit der Versagenslast des Experimentes deutet darauf hin, daß das System relativ unanfällig bezüglich der Anfangsimperfektionen ist.

Die facettierten Idealisierungen (S 9, S 16) liefern dagegen bei geringer Elementzahl extrem niedrige Beullasten (mit veränderter Beulform). Der Grund dafür ist im physikalischen Effekt der Facettierung zu suchen: Anstelle des gekrümmten Schalentragwerkes wird ein Falterwerk mit Plattenverhalten untersucht. Diese Aussage wird untermauert durch die Tatsache, daß die Ergebnisse des bikubischen Elementes (S 16) unter denen des biquadratischen Elementes (S 9) liegen. Weiterhin hat eine (hier nicht dargestellte) zusätzliche Untersuchung mit einer Elementverdichtung innerhalb der einzelnen Facetten, zu einer weiteren Absenkung der kritischen Last geführt. Bei Verfeinerung der Facettierung wird das Plattenverhalten abgebaut und die kritische Last des gekrümmten Systems erreicht.

Der Vergleich dieser Ergebnisse mit der Facettierung durch ebene TRIB 3 Elementenach König u. a. [60] zeigt, daß neben dem physikalischen Effekt auch das Elementverhalten wesentlichen Einfluß auf die berechnete kritische Last besitzt. Die schlechte Konvergenz der TRIB 3 Ergebnisse dürfte dabei auf deren mangelnde Kompatibilität bei Knicken und dem (gegenüber dem kubischen Ansatz für die Biegeanteile) zu niedrigen (linearen) Ansatz für die Membrananteile zurückzuführen sein.

9. Zusammenfassung und Ausblick

Die Arbeit behandelt die numerische Lösung von Stabilitätsproblemen elastischer Tragwerke unter besonderer Berücksichtigung des nichtlinearen Verschiebungsverhaltens und von Imperfektionen.

Im wesentlichen werden zwei Ziele verfolgt:

1. Eine zusammenfassende Beurteilung von Methoden zur Bestimmung kritischer Lasten für perfekte und imperfekte Systeme unter Berücksichtigung endlicher Vorbeulverschiebungen (und hinreichend kleiner Verzerrungen). Dabei werden sowohl Verfahren zur vollständigen als auch zur genäherten Auswertung der Stabilitätsgleichungen herangezogen.

Bei der vollständigen Auswertung wurde im wesentlichen das Konzept "begleitende Maßnahmen" verfolgt. Dabei sind folgende Schlußfolgerungen zu ziehen:

- Die Determinantenanalyse ist nur dann brauchbar, wenn keine schließenden Schnitte im Nullstellenbereich vorliegen und wenn der Determinantenverlauf bis zum kritischen Punkt bestimmbar ist.
- Begleitende Eigenwertprobleme für den Lastparameter sind ein empfehlenswertes Mittel zum Auffinden kritischer Lasten. Von den verschiedenen untersuchten Eigenwertproblemen haben sich die in Tafel 4.4 zusammengefaßten Möglichkeiten als besonders geeignet erwiesen. Abgesehen von Systemen mit konzentrierten Lasten ist dabei die Mitvergrößerung der Anfangsverschiebungen vorzuziehen.
- Die Auswertung des kinetischen Stabilitätskriteriums über die Bestimmung der niedrigsten Eigenfrequenzen ist ebenfalls geeignet, um kritische Lasten aufzufinden.
- Die Extrapolation der Werte aus den begleitenden Maßnahmen (Determinante, Eigenwerte für den Lastparameter und die Eigenfrequenz) von einem bereits ermittelten Zustand unterhalb der kritischen Last läßt in vielen Fällen eine brauchbare Vorhersage des kritischen Punktes selbst zu.

Zur genäherten Bestimmung kritischer Lasten wurden Anfangsstabilitätsuntersuchungen verschiedener Approximationsstufen linearer und quadratischer Form mit folgenden Ergebnissen untersucht:

- Es gelang, die im Schrifttum [50], [70] angegebene quadratische Approximation mit einer Reihenentwicklung der Vorbeulverschiebungen, der Beulform und der potentiellen Energie in die Methode der finiten Elemente umzusetzen. Die klassische und eine lineare Anfangsstabilitätsanalyse sind dabei als Sonderfälle enthalten.
- Als Alternative wird eine Anfangsstabilitätsanalyse mit quadratischer Näherungsstufe aus einer ausschließlichen Reihenentwicklung der Vorbeulverschiebungen und der Beulform hergeleitet und ihr linearer Sonderfall beschrieben.
- Der Anwendungsbereich und die Leistungsfähigkeit der verschiedenen Approximationen wird am Beispiel einer Familie von Bögen mit unterschiedlichen geometrischen Parametern gezeigt (Bilder 5.5 bis 5.10).
- Eine Koppelung der beschriebenen linearen und quadratischen Näherungsstufen führt zu wesentlich verbesserten Abschätzungen der kritischen Lasten (Bild 5.13).

Durch das Aufspalten der Eigenschaften der Vorbeulverschiebungen (Größe, Affinität und Nichtlinearität) konnte ein Verfahren entwickelt werden, das es bei geringem Rechenaufwand erlaubt, die Systemeigenschaften abzuschätzen und einen angemessenen Lösungsweg auszusuchen (Bild 5.14).

2. Beurteilung von Methoden zur Abschätzung kritischer Lasten realer, imperfekter Tragwerke.

Es werden zwei Verfahren (dehnungslose Modelle und Energiekriterien) behandelt, die versuchen, den Einfluß von Formabweichungen auf das Tragverhalten pauschal, d. h. ohne detaillierte Kenntnisse von Imperfektions-Formen und -Amplituden abzuschätzen.

- In einer kritischen Durchleuchtung verschiedener dehnungsloser Modelle werden Zusammenhänge aufgezeigt. Es wird festgestellt, daß

diese Modelle zwar geeignet sind, um eine qualitative Abschätzung von Imperfektionsanfälligkeiten (die durch den Wegfall stützender Membrankräfte zustande kommen) vorzunehmen, die Fähigkeit zur unteren Abgrenzung von Versagenslasten imperfekter Tragwerke kommt ihnen jedoch nicht zu.

- Das Energiekriterium von Tsien in der einfachen und der verschärften Form hat eine ähnliche Zielsetzung wie die dehnungslosen Modelle. Es eignet sich ebenfalls nur beschränkt zur Abschätzung kritischer Lasten imperfekter Systeme.

Damit kommt der Bewertung des Tragverhaltens durch gezielt vorgegebene Imperfektionen besondere Bedeutung zu.

- Es wird klargelegt, daß die Methoden zur vollständigen und genäherten Auswertung der Stabilitätsgleichungen unverändert auch bei Systemen mit vorgegebenen Imperfektionen angewendet werden können.
- Die Frage, mit welchen Amplituden die jeweiligen Imperfektionsformen in die Rechnung einzusetzen sind, konnte nur angeschnitten werden. Eine wesentliche Aufgabe für die Zukunft wird sein, diese Problematik zu klären, um mit einem vernünftigen Aufwand an Untersuchungen die Versagenslasten realer Tragwerke brauchbar anzunähern.

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papaliou, J. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R.W. Rembold, J.M. Sättele,
K.H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O. :
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizeiliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,
K.H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76-2 E. Ramm:
Geometrischnichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B. -M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke mit
verformbarem mehrzelligen Querschnitt
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Be-
rechnung von Stahlbetonplatten