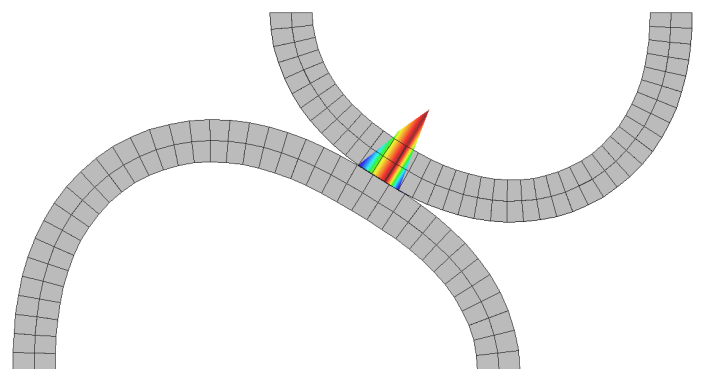
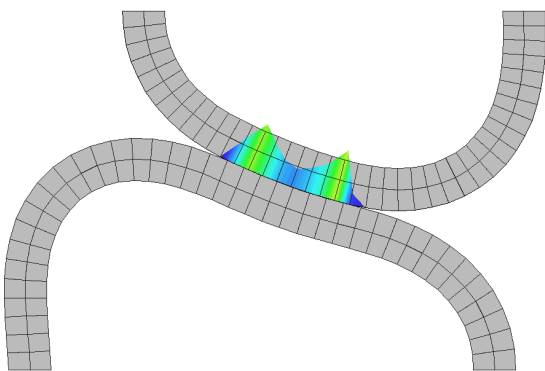
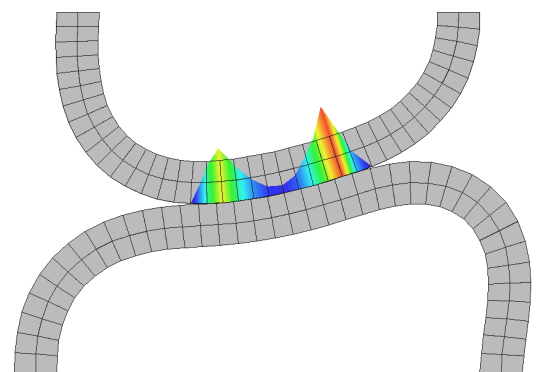
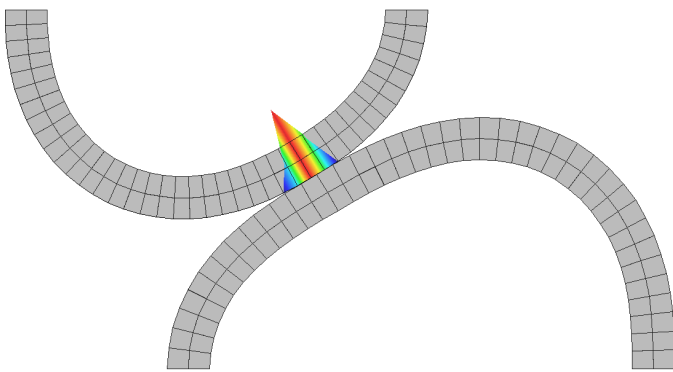


# Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit

Thomas Cichosz





# Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit

von

**Thomas Cichosz**

Bericht Nr. 58

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2012



© Thomas Cichosz

*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123  
Fax: 0711 - 685 66130  
E-Mail: sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de  
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-042135-8

# Stabile und konsistente Kontaktmodellierung in Raum und Zeit

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Thomas Cichosz**

aus Stuttgart Bad Cannstatt

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Detlef Kuhl

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Wriggers

Tag der mündlichen Prüfung: 11. Oktober 2012

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2012



## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit verschiedenen Aspekten der Diskretisierung von Kontaktvorgängen in Raum und Zeit. Im Hinblick auf eine stabile und konsistente Modellierung werden bestehende Verfahren verglichen und Verbesserungen erarbeitet.

Schwerpunkt der räumlichen Untersuchungen ist die Weiterentwicklung der in HARTMANN U. A. (2007) und HARTMANN UND RAMM (2008) vorgestellten Kontaktdiskretisierung, die auf der dualen Mortar-Methode (WOHLMUTH 2000, 2001) basiert. Durch die Verwendung der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren erfüllt diese Formulierung die Nichtdurchdringungsbedingung exakt. Gleichzeitig erlaubt die Diskretisierung der Multiplikatoren mit dualen Formfunktionen die einfache Kondensation der zusätzlichen Unbekannten aus dem resultierenden Gleichungssystem. Somit wird der übliche Nachteil der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren vermieden.

Mit der herkömmlichen Definition der dualen Formfunktionen können am Rand des Kontaktbereichs inkonsistente Mortar-Matrizen entstehen. Als Folge dessen resultieren unphysikalische Werte für die Knotenklaffung und fehlerhaft übertragene Kontaktkräfte. Zur Korrektur dieses Verhaltens wird in dieser Arbeit eine modifizierte Definition der Mortar-Matrizen vorgeschlagen. Damit die Modifikation nicht die Konditionierung des resultierenden Gleichungssystems verschlechtert, wird zusätzlich eine Wichtungsprozedur für die modifizierten Mortar-Matrizen vorgestellt. Als Ergebnis ist in allen Fällen eine konsistente Übertragung der Kontaktkraft und eine konsistente Berechnung der Normalklaffung möglich, ohne dabei die Konditionierung zu beeinträchtigen.

Die Betrachtungen zur zeitlichen Diskretisierung analysieren zunächst den Einfluss von Kontaktereignissen auf die Eigenschaften der dynamischen Strukturantwort. Beruhend auf den gewonnenen Erkenntnissen wird anschließend eine möglichst optimale zeitliche Kontaktdiskretisierung formuliert. Diese ist mit einer Strategie nach KANE U. A. (1999) energetisch stabil. Durch die Erweiterung einer Idee von DEUFLHARD U. A. (2008) auf Probleme mit großen Deformationen werden Oszillationen in der Kontaktkraft vermieden. Die Modifikation der Geschwindigkeit in einer Nachlaufrechnung stellt physikalisch sinnvolle Kontaktgeschwindigkeiten sicher. Darüber hinaus wird der Kontakt energieerhaltend modelliert, ohne die Nichtdurchdringungsbedingung zu verletzen. Hierzu kommt das Energie-Korrekturkraft-Verfahren zum Einsatz, das eine im Rahmen der vorliegenden Arbeit formulierte Weiterentwicklung des Konzepts von ARMERO UND PETÓCZ (1998) darstellt. Außer mit dem präsentierten Verfahren ist eine energieerhaltende Kontaktbehandlung bei gleichzeitiger exakter Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung nur mit der „Velocity-Update-Method“ (LAURSEN UND LOVE 2002) möglich. Im Gegensatz zu dieser gibt das Energie-Korrekturkraft-Verfahren die dissipierte Energie jedoch nicht ausschließlich in kinetischer Form zurück. Stattdessen bestimmt die Systemantwort, wie die Energie-Korrekturkraft die Gesamtenergie vergrößert.

Anhand von numerischen Experimenten werden abschließend die untersuchten Verfahren bewertet. Zusätzlich wird die Leistungsfähigkeit der entwickelten Methoden demonstriert.

## Abstract

The present thesis deals with different aspects of spatial and temporal discretisation schemes for contact problems. With regard to a stable and consistent modelling existing approaches are compared and improvements are developed.

Main focus of the spatial investigations is the extension of the contact discretisation presented in HARTMANN ET AL. (2007) and HARTMANN AND RAMM (2008), which is based on the dual mortar method (WOHLMUTH 2000, 2001). This formulation fulfils the non-penetration condition exactly by utilising the Lagrange multiplier method. At the same time, interpolating the multipliers with dual shape functions allows for an easy condensation of the additional unknowns from the system of equations. Consequently, the usual drawback of the Lagrange multiplier method is eliminated.

Using the conventional definition for the dual shape functions inconsistent mortar matrices may occur at the boundary of the contact area. This in turn leads to unphysical values of the nodal gaps and to an inaccurate transmission of the contact force. To correct this issue, in the present thesis a modified definition for the mortar matrices is proposed. Additionally, a weighting procedure for the modified mortar matrices is presented to avoid ill-conditioning of the stiffness matrix as a corollary of the proposed modification. Finally, the resulting algorithm allows for a consistent transmission of the contact force and a consistent calculation of the nodal gaps without affecting the conditioning.

The studies related to the temporal discretisation firstly analyse the influence of contact events on the dynamic structural behaviour. Subsequently, based upon the obtained insight a temporal contact discretisation is formulated with the aim of best possible performance. The developed algorithm is stable in energy by using a strategy published by KANE ET AL. (1999). Extending an idea of DEUFLHARD ET AL. (2008) to large deformation problems avoids oscillations of the contact force. Physically meaningful contact velocities are obtained by modifying the velocities of the contact nodes in a postprocessing step. Furthermore, contact events are modelled in a way that conserves energy without violating the non-penetration condition. For this purpose the Energy Correction Force Method, developed within the framework of the present study as an extension of the concept presented in ARMERO AND PETŐCZ (1998), is employed. Apart from the presented algorithm, an energy conserving contact modelling exactly satisfying the non-penetration condition is solely possible by utilising the „Velocity-Update-Method“ (LAURSEN AND LOVE 2002). However, in contrast to this approach the Energy Correction Force Method restores the dissipated energy not exclusively in terms of kinetic energy. Instead, the structural response decides in which manner the total energy is increased by the energy correction force.

Finally, numerical experiments are used to assess the investigated algorithms. Additionally, the performance of the developed schemes is demonstrated.



## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2006 bis 2012 während meiner Tätigkeit als akademischer Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart. Maßgeblich zu ihrem Gelingen beigetragen hat die Unterstützung aus meinem universitären und privaten Umfeld.

Insbesondere bedanken möchte ich mich bei meinem Doktorvater und Hauptberichter Herrn Professor Manfred Bischoff. Als Leiter des Instituts für Baustatik und Baudynamik hat er mir die Möglichkeit gegeben, in einem optimalen Umfeld zu promovieren, mich dabei jederzeit gefördert und unterstützt sowie immer ein offenes Ohr für meine Fragen gehabt. Gleichzeitig hat mir sein Vertrauen eine selbstständige Arbeitsweise erlaubt. Sein Einsatz und seine positive und sehr menschliche Art waren für mich stets vorbildhaft und eine große Motivation. Sowohl fachlich als auch persönlich durfte ich sehr viel von ihm lernen.

Herrn Professor Detlef Kuhl und Herrn Professor Peter Wriggers danke ich vielmals für die Übernahme der Mitberichte, dem Interesse an meiner Arbeit und dem zügigen Erstellen der Gutachten.

Vielen Dank an Herrn Professor Ekkehard Ramm für seinen motivierten und motivierenden Vortragsstil und seine anschaulichen Vorlesungen, die im Studium meine Begeisterung für die Baustatik und für die Finite-Element-Methode geweckt haben.

Dr. Stefan Hüeber danke ich vielmals für die interessanten Diskussionen und Anregungen im Bereich duale Formfunktionen. Ein großes Dankeschön an Carina Seibold für das schnelle und präzise Gegenlesen meiner Arbeit, ebenso an Arndt Wagner und Christoph Wilking für die gewissenhafte Durchsicht einzelner Kapitel. Herzlichen Dank an Dr. Stefan Hartmann für das fachliche Korrekturlesen der Arbeit, für die Einführung in die Kontaktmechanik während meiner Diplomarbeit und für die zahlreichen Erklärungen und Diskussionen während unserer gemeinsamen Zeit am Institut.

An alle Kolleginnen und Kollegen, mit denen ich zusammenarbeiten durfte: Vielen Dank für zahlreiche interessante Diskussionen, für einen Zusammenhalt und eine Arbeitsatmosphäre die ihresgleichen suchen, für sehr unterhaltsame Kaffeepausen und für viele tolle gemeinsame Ausflüge und Freizeitaktivitäten.

Meinen lieben Eltern Elisabeth und Hans und meinem lieben Bruder Jörg danke ich ganz herzlich für die Unterstützung, die mir Abitur und Studium ermöglicht hat und für den Rückhalt, den sie mir jederzeit gegeben haben. Meiner lieben Judith danke ich von ganzem Herzen für all ihre Geduld, ihre Unterstützung, für die Ablenkung und die vielen schönen Momente, die mich in schwierigen Phasen immer wieder schnell auf andere Gedanken gebracht haben.

Stuttgart, im Mai 2013

Thomas Cichosz



---

# Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	ix
Tabellenverzeichnis	xi
Festlegungen und Fachbezeichnungen	xiii
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Stand der Technik . . . . .	2
1.3 Zielsetzung . . . . .	6
1.4 Aufbau der Arbeit . . . . .	7
<b>2 Kontinuums- und kontaktmechanische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1 Festkörperbeschreibung . . . . .	10
2.1.1 Bewegung . . . . .	10
2.1.2 Kinematik und Verzerrung . . . . .	12
2.1.3 Spannungsmaße . . . . .	14
2.1.4 Werkstoffgesetze . . . . .	15
2.1.5 Bilanzgleichungen . . . . .	16
2.2 Kontaktbeschreibung . . . . .	19
2.2.1 Kontaktkinematik . . . . .	20
2.2.2 Kontaktspannung . . . . .	23
2.2.3 Kontakt-Randbedingungen . . . . .	25
2.3 Anfangsrandwertproblem der Elastodynamik . . . . .	26
2.4 Schwache Form (Entwicklung mit der Methode der gewichteten Residuen)	26

2.4.1	Residuum des Gleichgewichts auf dem Kontaktrand . . . . .	28
2.4.2	Prinzip der virtuellen Verschiebungen . . . . .	29
2.4.3	Integrale Nichtdurchdringungsbedingung . . . . .	32
2.4.4	Gesamtformulierung . . . . .	33
2.5	Potentialformulierung . . . . .	33
2.5.1	Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie . . . . .	34
2.5.2	Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren . . . . .	35
2.5.3	Penalty-Methode . . . . .	37
2.5.4	Augmented Lagrange'sche Formulierung . . . . .	38
2.5.5	Perturbed Lagrange'sche Formulierung . . . . .	40
2.6	Zusammenfassung . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Räumliche Diskretisierung</b>	<b>43</b>
3.1	Diskretisierung der kontaktunabhängigen Terme . . . . .	44
3.1.1	Diskretisierung der Feldgrößen . . . . .	44
3.1.2	Diskretisierung der virtuellen Arbeiten . . . . .	45
3.2	Diskretisierungsstrategien für Kontaktprobleme . . . . .	46
3.2.1	Einführung . . . . .	47
3.2.2	NTN-Diskretisierung . . . . .	50
3.2.3	NTS-Diskretisierung . . . . .	51
3.2.4	Glatte Oberflächenrepräsentation . . . . .	54
3.2.5	STS-Diskretisierung . . . . .	56
3.2.6	Mortarbasierte Diskretisierung . . . . .	58
3.2.7	Der Kontakt-Patch-Test . . . . .	70
3.3	Diskretisierung der Kontaktterme mit der dualen Mortar-Methode . . . . .	75
3.3.1	Virtuelle Kontaktarbeit und Nichtdurchdringungsbedingung . . . . .	75
3.3.2	Auswertung der Mortar-Integrale – zweidimensionaler Fall . . . . .	77
3.3.3	Auswertung der Mortar-Integrale – dreidimensionaler Fall . . . . .	80
3.4	Konsistente Behandlung von Rändern . . . . .	81
3.4.1	Problemidentifikation . . . . .	81
3.4.2	Konsistente Formulierung . . . . .	83
3.4.3	Wichtungsprozedur . . . . .	85
3.5	Zusammenfassung . . . . .	87
<b>4</b>	<b>Zeitliche Diskretisierung</b>	<b>89</b>
4.1	Einleitung . . . . .	89
4.2	Implizite Zeitintegrationsverfahren . . . . .	92
4.2.1	Der Newmark-Algorithmus . . . . .	92
4.2.2	Die „Energy-Momentum-Method“ (EMM) . . . . .	97
4.2.3	Nomenklatur . . . . .	100

4.3	Auswirkungen dynamischer Kontakt Ereignisse: Referenzbeispiel . . . . .	100
4.3.1	Numerischer Versuchsaufbau . . . . .	101
4.3.2	Referenzlösung . . . . .	102
4.3.3	Numerische Lösung ohne Modifikation der Kontaktanteile . . . . .	104
4.4	Energetische Stabilität bei Kontakt Ereignissen . . . . .	107
4.4.1	Energetische Stabilität des Newmark-Algorithmus' . . . . .	107
4.4.2	Dissipative Modifikation des Newmark-Algorithmus' . . . . .	110
4.4.3	Energetische Stabilität der „Energy-Momentum-Method“ . . . . .	112
4.5	Zeitliche Oszillationen der Kontaktkräfte . . . . .	113
4.5.1	Untersuchung des Phänomens . . . . .	113
4.5.2	A posteriori Modifikation der Geschwindigkeiten . . . . .	116
4.5.3	Stabilisierung des Integrators durch modifizierten Prädiktor . . . . .	118
4.5.4	Modifikation der Massenmatrix . . . . .	125
4.6	Energieerhaltung bei Kontakt Ereignissen . . . . .	126
4.6.1	Die „Velocity-Update-Method“ (VUM) . . . . .	126
4.6.2	Energieerhaltung über eine Zwangsbedingung . . . . .	130
4.6.3	Energie-Korrekturkraft-Verfahren . . . . .	131
4.7	Ein stabilisierter energieerhaltender Algorithmus . . . . .	133
4.7.1	Strukturgleichung des Newmark-KS- <i>ve</i> -Verfahrens . . . . .	134
4.7.2	Energieveränderung durch die Kontaktbehandlung . . . . .	135
4.7.3	Bestimmung der Energie-Korrekturkraft . . . . .	137
4.8	Zusammenfassung . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Lösung</b>	<b>143</b>
5.1	Aktive-Mengen-Strategie . . . . .	143
5.2	Linearisierung . . . . .	145
5.2.1	Linearisierung der effektiven Strukturgleichung . . . . .	146
5.2.2	Linearisierung der Kontaktbedingungen . . . . .	148
5.2.3	Matrixformulierung des linearisierten Gleichungssystems . . . . .	150
5.3	Kondensation der Kontaktspannung . . . . .	151
5.4	Kompakte Darstellung des Lösungsalgorithmus' . . . . .	153
<b>6</b>	<b>Numerische Experimente – räumliche Kontaktdiskretisierung</b>	<b>157</b>
6.1	Deformation eines Werkstücks . . . . .	157
6.2	Konsistente Behandlung von Rändern . . . . .	160
6.2.1	Einfluss kleiner Segmente . . . . .	160
6.2.2	Zwei Kragarme . . . . .	163
6.3	Zusammenfassung . . . . .	166

<b>7</b>	<b>Numerische Experimente – zeitliche Diskretisierung</b>	<b>169</b>
7.1	Zwei deformierbare Stäbe . . . . .	169
7.2	Deformierbarer Ring durch starres Rohr . . . . .	172
7.3	Zwei deformierbare Scheiben . . . . .	175
7.4	Zusammenfassung . . . . .	178
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>179</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	179
8.2	Ausblick . . . . .	181
<b>A</b>	<b>Anhang</b>	<b>183</b>
A.1	Mathematische und mechanische Grundlagen . . . . .	183
A.2	Räumliche Diskretisierung . . . . .	184
A.2.1	Grundlagen . . . . .	184
A.2.2	Virtuelle Arbeiten . . . . .	186
A.3	Energiebilanzen . . . . .	188
A.3.1	Newmark-Verfahren . . . . .	188
A.3.2	Newmark-KD- und Newmark-KS-Verfahren . . . . .	190
A.4	Räumliche Kontaktdiskretisierung mit der dualen Mortar-Methode . . . . .	193
A.4.1	Allgemeines und Festlegungen . . . . .	193
A.4.2	Segment-Koordinaten . . . . .	193
A.4.3	Linearisierung in vollständig segmentierten Slave-Elementen . . . . .	196
A.4.4	Zusätzliche Linearisierungsanteile in Rand-Elementen . . . . .	204
A.4.5	Zusätzliche Linearisierungsanteile durch die Wichtungsprozedur . . . . .	208
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>211</b>

---

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Materielle Körper, materielle Punkte, Berandung, Spannungsvektoren. . .	12
2.2	Orthogonale Projektion und Normalklaffung. . . . .	20
2.3	Kinematische Kontaktgrößen und Kontaktspannung. . . . .	22
2.4	Starke Form des elastodynamischen Anfangsrandwertproblems. . . . .	27
2.5	KKT-Bedingungen (eindimensionale Veranschaulichung). . . . .	29
3.1	Verschiedene Möglichkeiten der Kontakt-Integral-Auswertung. . . . .	48
3.2	NTN-Formulierung mit bilinearen Q1-Elementen. . . . .	51
3.3	NTS-Formulierung mit bilinearen Q1-Elementen. . . . .	53
3.4	STS-Formulierung mit bilinearen Q1-Elementen. . . . .	57
3.5	Standard- und duale Formfunktionen für bilineare Q1-Elemente. . . . .	67
3.6	Kontakt-Patch-Test: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	71
3.7	Kontakt-Patch-Test: Mortar-Berechnung mit Segmentierung. . . . .	72
3.8	Kontakt-Patch-Test: Mortar-Berechnung ohne Segmentierung. . . . .	73
3.9	Kontakt-Patch-Test: NTS-Berechnung. . . . .	74
3.10	Segment- und Normalen-Definition. . . . .	78
3.11	Konsistente Behandlung von Rändern: Problemidentifikation. . . . .	82
3.12	Definitionen in einem Rand-Element. . . . .	83
3.13	Veränderung der Kontaktkräfte in einem Rand-Element. . . . .	85
4.1	Einkörperkontaktproblem: Veranschaulichung und Bezeichnungen. . . . .	95
4.2	Referenzbeispiel: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	102
4.3	Analytische Lösung: Energie und Kontaktkraft. . . . .	102

---

4.4	Numerische Referenzlösung (farbig) mit Diskretisierung, analytische Lösung (grau) . . . . .	103
4.5	Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-Verfahren. . . . .	105
4.6	Referenzbeispiel: Lösung mit der „Energy-Momentum-Method“. . . . .	106
4.7	Veränderung der Systemenergie durch Kontakt Ereignisse. . . . .	108
4.8	Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KD-Verfahren. . . . .	112
4.9	Entwicklung der Kontaktkraft. . . . .	115
4.10	Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KD- <i>v</i> -Verfahren. . . . .	117
4.11	Struktogramm zur Ermittlung des Verschiebungsprädiktors. . . . .	123
4.12	Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KS-Verfahren. . . . .	125
4.13	Referenzbeispiel: Lösung mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM. . . . .	130
4.14	Referenzbeispiel: EMM (links) und EMM-VUM (rechts). . . . .	130
4.15	Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KD- <i>e</i> -Verfahren. . . . .	133
4.16	Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KS- <i>ve</i> -Verfahren. . . . .	139
5.1	Struktogramm des gesamten Lösungsalgorithmus'. . . . .	154
5.2	Struktogramm der Nachlaufrechnung in einem Zeitschritt. . . . .	155
6.1	Deformation eines Werkstücks: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	158
6.2	Deformation eines Werkstücks: Deformation und Kontaktspannung. . . . .	159
6.3	Einfluss kleiner Segmente: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	161
6.4	Zwei Kragarme: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	163
6.5	Zwei Kragarme: Deformation und Kontaktspannung. . . . .	164
6.6	Konvergenz der internen Energie bei Netzverfeinerung. . . . .	166
7.1	Zwei deformierbare Stäbe: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	170
7.2	Zwei deformierbare Stäbe: Energie und Kontaktkraft. . . . .	170
7.3	Zwei deformierbare Stäbe: Deformation und Geschwindigkeit. . . . .	171
7.4	Deformierbarer Ring durch starres Rohr: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	172
7.5	Deformierbarer Ring durch starres Rohr: Energien. . . . .	173
7.6	Deformierbarer Ring durch starres Rohr: Deformation. . . . .	174
7.7	Zwei deformierbare Scheiben: Problemstellung und Diskretisierung. . . . .	176
7.8	Zwei deformierbare Scheiben: Energien. . . . .	176
7.9	Zwei deformierbare Scheiben: Deformation und Geschwindigkeit. . . . .	177
A.1	Mögliche Segment-Konstellationen. . . . .	195



---

# Tabellenverzeichnis

3.1	LBB-Stabilität und Erfüllung des Kontakt-Patch-Tests. . . . .	50
3.2	Problem aus Abbildung 3.11: Erneute Berechnung mit modifizierten Mortar-Integralen. . . . .	85
4.1	Zeitintegrationsverfahren: Eigenschaften und Bezeichnungen. . . . .	101
6.1	Vertikale Verschiebung des Knotens $\textcircled{A}$ . . . . .	161
6.2	Konvergenz der Betragsnorm der Ungleichgewichtskräfte. . . . .	162
6.3	Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix (erster Lastschritt). . . . .	162
6.4	Vergleich von Verschiebung und Kontaktspannung. . . . .	163
6.5	Interne Energie und relativer Fehler bei verschiedenen Vernetzungen. . .	165



---

# Festlegungen und Fachbezeichnungen

## Festlegungen

- In dieser Arbeit werden deutsche Fachbegriffe verwendet, sofern deren Gebrauch in der Fachsprache üblich ist. Falls eine englische Bezeichnung jedoch geläufiger scheint und ein deutsches Äquivalent eventuell das Verständnis erschweren würde, kommt ausschließlich der englische Begriff zum Einsatz.
- Vektoren, Matrizen und Tensoren zweiter Stufe sind durch in Fettdruck gesetzte griechische oder lateinische Buchstaben gekennzeichnet. Skalare Größen werden in Standardschrift gesetzt. Der Materialtensor wird als einziger Tensor höherer Stufe mit dem Symbol  $\mathbb{C}$  dargestellt.
- Die Einstein'sche Summenkonvention gilt im Folgenden ausschließlich für die räumlichen Komponenten einer Größe. Alle weiteren Summen sind explizit mit dem Summensymbol  $\sum$  ausgewiesen.
- Der Index  $\alpha = 1,2$  kennzeichnet innerhalb dieser Arbeit die Zugehörigkeit einer Größe  $(\bullet)^\alpha$  zu einem materiellen Körper  $\mathcal{B}^\alpha$ . Ist eine auf beiden Körpern definierte Größe ohne Index in der Form  $(\bullet)$  angegeben, so ist  $(\bullet)$  als Vereinigung der Teilgrößen zu verstehen:  $(\bullet) = (\bullet)^1 \cup (\bullet)^2$ .

## Fachbezeichnungen

In der folgenden Aufzählung sind häufig verwendete Abkürzungen und Symbole erläutert. Alle weiteren Größen werden im Rahmen ihrer Einführung definiert.

### Indizes, Einstein'sche Summenkonvention gültig

- $\beta = 1, 2$  ..... Konvektive Koordinatenlinie  
 $i, j, k, l = 1-3$  . Globale räumliche Koordinatenrichtung

### Indizes, Summierung explizit gekennzeichnet

- $\alpha = 1, 2$  ..... Slave-, Master-Körper  
 $e$  ..... Größe des Elements  $e$  (inklusive Slave- und Master-Elemente)  
 $gp$  ..... Größe am Gaußpunkt  $gp$   
 $I, J, K, L$  .... Diskrete Größe des FE-Knotens  $I, J, K, L$   
 $m$  ..... Größe des Segments  $m$   
 $n$  ..... Größe des Zeitschritts  $n$   
 $r$  ..... Größe des Iterationsschritts  $r$

### Abkürzungen

- 1KK, 2KK ... Einkörperkontakt, Mehrkörperkontakt  
 EMM ..... „Energy-Momentum-Method“  
 FEM ..... Finite-Elemente-Methode  
 FETI ..... Finite Element Tearing and Interconnecting  
 KKT ..... Karush-Kuhn-Tucker  
 LBB ..... Ladyzhenskaya-Babůska-Brezzi  
 LLM ..... Localized Lagrange Multipliers  
 N ..... Newmark-Verfahren  
 N-KD ..... Newmark-Verfahren, dissipativ für Kontakt nach KANE U. A. (1999)  
 N-KS ..... N-KD, stabilisiert nach DEUFLHARD U. A. (2008)  
 N-KD/KS- $v$  . N-KD/KS mit Geschwindigkeitsmodifikation  
 N-KD/KS- $e$  . N-KD/KS mit Energie-Korrekturkraft  
 N-KD/KS- $ve$  N-KD/KS mit Geschwindigkeitsmodifikation und Energie-Korrekturkraft  
 NTN ..... „Knoten-zu-Knoten“  
 NTS ..... „Knoten-zu-Segment“  
 NURBS ..... Non-Uniform Rational B-Splines  
 PK1, PK2 .... Erstes, zweites Piola-Kirchhoff'sches Spannungsmaß  
 PMPE ..... Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie  
 PvV ..... Prinzip der virtuellen Verschiebungen

STS .....	„Segment-zu-Segment“
VUM .....	„Velocity-Update-Method“

### Mathematische Notationen

$\operatorname{argmin}(\bullet)$ ....	Funktion, liefert das Argument welches $(\bullet)$ minimiert
$\det(\bullet)$ .....	Determinante von $(\bullet)$
$\operatorname{div}(\bullet)$ .....	Divergenz von $(\bullet)$ , $(\bullet)$ bezieht sich auf die Momentankonfiguration
$\operatorname{Div}(\bullet)$ .....	Divergenz von $(\bullet)$ , $(\bullet)$ bezieht sich auf die Referenzkonfiguration
$\max\{a, x\}$ ...	Funktion, liefert den größeren der beiden Skalare $a$ und $x$
$\delta(\bullet)$ .....	Variation von $(\bullet)$ / virtuelle Größe
$\operatorname{sign}(\bullet)$ .....	Vorzeichen von $(\bullet)$
$\delta_{ij}$ .....	Kronecker-Symbol
$\operatorname{tr}(\bullet)$ .....	Spur von $(\bullet)$
$\Delta(\bullet)$ .....	Inkrementelle Änderung von $(\bullet)$ im Zeitschritt oder Iterationsschritt
$\mathcal{L}_v(\bullet)$ .....	Lie-Ableitung von $(\bullet)$
$ (\bullet) $ .....	Betrag einer skalaren Größe $(\bullet)$
$\ (\bullet)\ $ .....	Euklid'sche Norm eines Vektors $(\bullet)$ / lokal definierte Norm von $(\bullet)$
$\langle(\bullet)\rangle$ .....	Macauley-Klammer, liefert den positiven Anteil von $(\bullet)$
$(\bullet)^h$ .....	Räumlich diskretisierte Größe
$(\bullet)^{\text{algo}}$ .....	Spannung oder Kontaktspannung berechnet im Rahmen der EMM
$(\bullet)^{\text{pred}}, (\bullet)_{\text{pred}}$	Größe in Abhängigkeit von $\mathbf{d}^{\text{pred}}$ im Rahmen des N-KS-Verfahrens
$(\bullet)_0, (\bullet)_t$ .....	Größe zum Zeitpunkt $t_0, t$
$(\bullet)^T$ .....	Transponierte von $(\bullet)$
$(\bullet)^{-1}$ .....	Inverse von $(\bullet)$
$\hat{(\bullet)}$ .....	Vorgegebene Größe
$\dot{(\bullet)}$ .....	Materielle Zeitableitung (Ausnahme: $\dot{\mathbf{g}}_\tau \dots$ Lie-Ableitung von $\mathbf{g}_\tau$ )
$\cup$ .....	Assemblierungsoperator

### Lateinische Buchstaben

$\mathbf{a}$ .....	Vektor aller Knotenbeschleunigungen
$\mathbf{a}^c, \mathbf{a}^{\text{int}}$ .....	Beschleunigungsaufteilung des N-KD-Verfahrens
$\bar{\mathbf{a}}^c$ .....	Modifizierte Definition von $\mathbf{a}^c$ (N-KD/KS- $e$ )
$\mathcal{A}$ .....	Menge aller aktiven Slave-Kontaktknoten
$\mathbf{b}^\alpha$ .....	Volumenlasten bezogen auf ein infinitesimales Volumenelement
$\mathcal{B}^\alpha$ .....	Materieller Körper
$\mathbf{B}^c$ .....	Operatormatrix zur Berechnung von $\mathbf{f}_c$ aus $\mathbf{z}$
$\mathbf{B}_{\text{NTS}}^c$ .....	$\mathbf{B}^c$ für eine räumliche Kontaktdiskretisierung mit der NTS-Methode

$\mathbf{B}_{\text{Md1}}^c$ .....	$\mathbf{B}^c$ für eine räumliche Kontaktdiskretisierung basierend auf der dualen Mortar-Methode (1KK)
$\mathbf{B}_{\text{Md2}}^c$ .....	$\mathbf{B}^c$ für eine räumliche Kontaktdiskretisierung basierend auf der dualen Mortar-Methode (2KK)
$c_n$ .....	Parameter zur Bestimmung der aktiven Menge
$C_I$ .....	Komplementaritätsfunktion des Slave-Kontaktknotens $I$
$C^{-1}$ .....	Skalarwertiger Raum der punktweisen diskontinuierlichen Funktionen
$\mathbf{C}^\alpha$ .....	Rechter Cauchy-Green'scher Deformationstensor, Tensor zweiter Stufe
$\mathbb{C}^\alpha$ .....	Materialtensor, Tensor vierter Stufe
$d\Gamma^\alpha$ .....	Infinitesimales Flächenelement der Referenzkonfiguration
$d\gamma^\alpha$ .....	Infinitesimales Flächenelement der Momentankonfiguration
$d\xi$ .....	Infinitesimales vektorielles Längenelement des Elementparameter-raums
$d\Omega_0^\alpha$ .....	Infinitesimales Volumenelement der Referenzkonfiguration
$d\Omega_t^\alpha$ .....	Infinitesimales Volumenelement der Momentankonfiguration
$d_{\text{obs}}$ .....	Abstand zwischen starrem Hindernis und Ursprung in Richtung von $\mathbf{n}_{\text{obs}}$ (1KK)
$d\mathbf{f}^\alpha$ .....	Infinitesimaler Kraftvektor
$dt$ .....	Infinitesimales Zeitelement
$\mathbf{d}_I^\alpha, \dot{\mathbf{d}}_I^\alpha, \ddot{\mathbf{d}}_I^\alpha$ .....	Verschiebungs-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungsvektor von Knoten $I$
$\mathbf{d}^S$ .....	Vektor mit den Verschiebungen aller Slave-Kontaktknoten
$\mathbf{d}^M$ .....	Vektor mit den Verschiebungen aller Master-Kontaktknoten
$\mathbf{d}^N$ .....	Vektor mit den Verschiebungen aller Knoten der Menge $\mathcal{N}$
$\mathbf{d}$ .....	Vektor aller Knotenverschiebungen
$\mathbf{d}^{\text{pred}}$ .....	Verschiebungsprädiktor, erfüllt die Kontaktbedingungen (N-KS)
$D_{II}^S$ .....	Slave-Mortar-Integral von Slave-Kontaktknoten $I$
$\mathbf{D}^S$ .....	Slave-Mortar-Matrix
$\mathbf{D}_S^A, \mathbf{D}_S^I$ .....	Blockweise Aufteilung von $\mathbf{D}^S$ bezüglich der Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$
$e_{\text{kin}}, e_{\text{int}}, e_{\text{ext}}$ ..	Kinetische, interne, externe Systemenergie
$\tilde{e}_{\text{kin}}, \tilde{e}_{\text{int}}, \tilde{e}_{\text{ext}}$ ..	Energien des Referenzbeispiels aus Abschnitt 4.3, berechnet mit der numerischen Referenzlösung
$\bar{e}_{\text{kin}}, \bar{e}_{\text{int}}, \bar{e}_{\text{ext}}$ ..	Energien des Referenzbeispiels aus Abschnitt 4.3, berechnet mit der analytischen Lösung
$\mathbf{e}_{1-3}$ .....	Normierte Basisvektoren des globalen kartesischen Koordinatensystems
$E$ .....	Elastizitätsmodul
$\mathbf{E}^\alpha$ .....	Green-Lagrange'scher Verzerrungstensor, Tensor zweiter Stufe

$\tilde{f}_c$ .....	Kontaktkraft des Referenzbeispiels aus Abschnitt 4.3, berechnet mit der numerischen Referenzlösung
$\mathbf{f}_{\text{int}}, \mathbf{f}_{\text{ext}}, \mathbf{f}_{\text{kin}}$ ..	Globale Vektoren der internen, externen, kinetischen Kräfte
$\mathbf{f}_c$ .....	Globaler Vektor der Kontaktkräfte
$\mathbf{f}_{\text{enke}}$ .....	Globaler Vektor der Energie-Korrekturkräfte
$\mathbf{F}^\alpha$ .....	Materieller Deformationsgradient, Tensor zweiter Stufe
$g_n$ .....	Normalklaffung
$\tilde{g}_{nI}$ .....	Integrierte Normalklaffung zugehörig zu Slave-Kontaktknoten $I$
$\mathbf{g}_\tau$ .....	Tangentiale Relativverschiebung zwischen Slave- und Master-Seite
$\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}$ .....	Vektor der Knotenwerte $\tilde{g}_{nI}$ aller aktiven Slave-Kontaktknoten
$\tilde{\mathbf{g}}_n$ .....	Vektor aller Knotenwerte $\tilde{g}_{nI}$
$\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^S, \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^M$ .....	Operatoren, beinhalten die Verschiebungsableitungen von $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}$
$\mathbf{G}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}^S, \mathbf{G}_{\mathcal{A}\mathcal{I}}^S$ .....	Blockweise Aufteilung von $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^S$ bezüglich der Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$
$\mathbf{H}^1$ .....	Sobolow-Raum von Funktionen mit quadratintegrierbaren ersten Ableitungen
$\mathcal{I}$ .....	Menge aller inaktiven Slave-Kontaktknoten
$\mathbf{I}$ .....	Identitätstensor, Tensor zweiter Stufe
$\mathbf{I}_{n_{\text{dim}}}$ .....	$2 \times 2$ oder $3 \times 3$ Einheitsmatrix
$J^\alpha = \det \mathbf{F}^\alpha$ ..	Jacobi-Determinante
$J_0 \boldsymbol{\xi}$ .....	Jacobi-Determinante zwischen referentieller Geometrie und Element-Koordinatensystem
$J_{x\eta}$ .....	Jacobi-Determinante zwischen aktueller Geometrie und Segment-Koordinatensystem
$\mathbf{K}_{\text{eff}}$ .....	Effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{A}\mathcal{I}}$ .....	Block von $\mathbf{K}_{\text{eff}}$ , welcher den Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$ zugeordnet ist (äquivalente Definitionen für jede Kombination der Mengen $\mathcal{A}$ , $\mathcal{I}$ , $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ )
$\tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\mathcal{A}\mathcal{I}}$ .....	Block von $\mathbf{K}_{\text{eff}}$ , welcher den Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$ zugeordnet ist und Anteile der Verschiebungsableitungen der Kontaktkräfte enthält
$\ell_e$ .....	Länge eines linienförmigen Slave- oder Master-Elements
$M_{IJ}^M$ .....	Master-Mortar-Integral zwischen den Knoten $I$ und $J$
$\mathcal{M}$ .....	Menge aller Master-Kontaktknoten
$\mathcal{M}_n^-, \mathcal{M}_n^+$ ....	Raum der zulässigen Kontakt-Normalspannungen, der virtuellen Kontakt-Normalspannungen
$\mathcal{M}_\tau$ .....	Raum der zulässigen Kontakt-Tangentialspannungen
$\mathbf{M}$ .....	Massenmatrix
$\mathbf{M}^M$ .....	Master-Mortar-Matrix
$\mathbf{M}_{\mathcal{M}}^A, \mathbf{M}_{\mathcal{M}}^I$ .....	Blockweise Aufteilung von $\mathbf{M}^M$ bezüglich der Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$
$n_{\text{dim}}$ .....	Anzahl der räumlichen Dimensionen
$n_{\text{ele}\alpha}$ .....	Anzahl der finiten Elemente von Körper $\alpha$

$n_{gp}$ .....	Anzahl der Gaußpunkte pro Segment
$n_m$ .....	Anzahl der Master-Kontaktknoten
$n_n$ .....	Anzahl aller Netzknoten
$n_{n\alpha}$ .....	Anzahl der Netzknoten von Körper $\alpha$
$n_r$ .....	Anzahl aller Netzknoten abzüglich der Kontaktknoten
$n_s$ .....	Anzahl der Slave-Kontaktknoten
$n_{sa}$ .....	Anzahl der aktiven Slave-Kontaktknoten
$n_{seg}$ .....	Anzahl der Segmente eines Slave-Elements
$n_{slele}$ .....	Anzahl aller Slave-Elemente
$n_T$ .....	Anzahl aller Zeitschritte
$\bar{\mathbf{n}}^\alpha, \mathbf{n}^\alpha$ .....	Normale auf ein infinitesimales Flächenelement der Referenz-, der Momentankonfiguration
$\mathbf{n}_e$ .....	Aktuelle Normale des Slave- oder Master-Elements $e$
$\mathbf{n}_I$ .....	Aktuelle Normale des Slave-Kontaktknotens $I$
$\mathbf{n}_{obs}$ .....	Normale auf das starre Hindernis (1KK)
$N_I^\alpha$ .....	Standard-Formfunktion des Knotens $I$
$N_{I,X_i}^\alpha$ .....	Standard-Formfunktion des Knotens $I$ , abgeleitet nach $X_i$
$\mathcal{N}$ .....	Menge aller FE-Knoten abzüglich der Kontaktknoten
$p_I$ .....	Skalarer Impulskorrekturwert des Slave-Kontaktknotens $I$ (VUM)
$p_{int}, p_{ext}$ .....	Leistung der internen, externen Spannungen
$\mathbf{p}_I$ .....	Impulskorrekturvektor des Slave-Kontaktknotens $I$ (VUM)
$\mathcal{P}^\alpha$ .....	Materieller Punkt
$\hat{\mathcal{P}}^2$ .....	Materieller Punkt des Master-Körpers mit Position $\hat{\mathbf{x}}^2$
$\mathbf{P}^\alpha$ .....	Erster Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor, Tensor zweiter Stufe
$\mathbf{r}$ .....	Residuumsvektor
$\mathbf{r}_{mod}$ .....	Kräfteresiduum abzüglich der Kontaktkräfte
$\mathbf{r}_{mod}^{\mathcal{A}}$ .....	Anteil von $\mathbf{r}_{mod}$ , welcher der Menge $\mathcal{A}$ zugeordnet ist (äquivalente Definitionen für die Mengen $\mathcal{I}$ , $\mathcal{N}$ und $\mathcal{M}$ )
$\mathbb{R}$ .....	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+$ .....	Menge der positiven reellen Zahlen und Null
$\mathbb{R}^-$ .....	Menge der negativen reellen Zahlen und Null
$\mathcal{S}$ .....	Menge aller Slave-Kontaktknoten
$\mathbf{S}^\alpha$ .....	Zweiter Piola-Kirchhoff'scher Spannungstensor, Tensor zweiter Stufe
$t_0, t, T$ .....	Beginn, allgemeiner Zeitpunkt, Ende des betrachteten Zeitintervalls
$\mathbf{t}^\alpha, \mathbf{t}_0^\alpha, \bar{\mathbf{t}}^\alpha$ .....	Cauchy'scher, PK1, PK2 Spannungsvektor
$\mathbf{t}_{c_\sigma}^\alpha$ .....	Cauchy'scher Kontaktspannungsvektor, abhängige Größe
$\mathbf{t}_c$ .....	Cauchy'scher Kontaktspannungsvektor, unabhängige Feldgröße
$\mathbf{t}_{c_n} = t_{c_n} \mathbf{n}^1$ ...	Normalanteil von $\mathbf{t}_c$ (äquivalente Definition für $\mathbf{t}_{c_\sigma}^\alpha$ )
$\mathbf{t}_{c_\tau} = t_{c_\tau\beta} \boldsymbol{\tau}_\beta$ ..	Tangentiale Anteil von $\mathbf{t}_c$ (äquivalente Definition für $\mathbf{t}_{c_\sigma}^\alpha$ )



$\mathbf{T}_{\mathcal{A}}$ .....	Operator, beinhaltet die Tangentenvektoren aller aktiven Slave-Kontaktknoten
$\bar{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}, \bar{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}}$ ....	Blockweise Aufteilung von $\bar{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}}$ bezüglich der Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$
$\bar{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}}$ .....	Operator, beinhaltet die Verschiebungsableitungen der Tangentenvektoren aller aktiven Slave-Kontaktknoten
$\mathbf{u}^{\alpha}$ .....	Verschiebungsvektor eines Punkts
$\mathcal{U}_t^{\alpha}$ .....	Raum der zulässigen Verschiebungen
$\mathbf{v}$ .....	Vektor aller Knotengeschwindigkeiten
$\mathbf{v}^c$ .....	Geschwindigkeitskorrektur von $\mathbf{v}$ im Rahmen der VUM
$\mathbf{v}^{\text{mod}}$ .....	Modifikation von $\mathbf{v}$ zur Sicherstellung von physikalisch sinnvollen Kontaktgeschwindigkeiten
$\mathbf{v}^s$ .....	Alternative Bezeichnung von $\mathbf{v}$ im Rahmen der VUM
$\mathcal{V}^{\alpha}$ .....	Raum der zulässigen virtuellen Verschiebungen
$w^{\alpha}(\mathbf{E}^{\alpha})$ .....	Verzerrungsenergiefunktion in Abhängigkeit von $\mathbf{E}^{\alpha}$
$\mathbf{X}^{\alpha}, \mathbf{x}^{\alpha}$ .....	Ortsvektor eines Punkts in der Referenz-, Momentankonfiguration
$\hat{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x}^1)$ .....	Projektionspunkt von $\mathbf{x}^1$ auf der Master-Seite
$\mathbf{X}_I^{\alpha}, \mathbf{x}_I^{\alpha}$ .....	Ortsvektor des Knotens $I$ in der Referenz-, Momentankonfiguration
$\mathbf{z}_I$ .....	Kontaktspannungsvektor des Slave-Kontaktknotens $I$
$\mathbf{z}_{nI}$ .....	Anteil von $\mathbf{z}_I$ in Richtung der Oberflächen-Normalen
$\mathbf{z}$ .....	Vektor der Kontaktspannungen aller Slave-Kontaktknoten
$\mathbf{z}^{\mathcal{A}}, \mathbf{z}^{\mathcal{I}}$ .....	Aufteilung von $\mathbf{z}$ bezüglich der Mengen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{I}$

### Griechische Buchstaben

$\beta$ .....	Zeitintegrationsparameter des Newmark-Verfahrens
$\gamma$ .....	Zeitintegrationsparameter des Newmark-Verfahrens
$\dot{\gamma}$ .....	Multiplikator im Gleitreibungsgesetz
$\gamma_d^{\alpha}, \gamma_n^{\alpha}, \gamma_c^{\alpha}$ ....	Dirichlet-, Neumann-, Kontaktrand in der Momentankonfiguration
$\Gamma_d^{\alpha}, \Gamma_n^{\alpha}, \Gamma_c^{\alpha}$ ....	Dirichlet-, Neumann-, Kontaktrand in der Ausgangskonfiguration
$\delta z_{nI}$ .....	Betrag von $\delta \mathbf{z}_{nI}$
$\delta \mathbf{d}_I^{\alpha}$ .....	Virtueller Verschiebungsvektor des Knotens $I$
$\delta \mathbf{d}^S$ .....	Vektor mit den virtuellen Verschiebungen aller Slave-Kontaktknoten
$\delta \mathbf{d}^M$ .....	Vektor mit den virtuellen Verschiebungen aller Master-Kontaktknoten
$\delta \mathbf{d}^N$ .....	Vektor mit den virtuellen Verschiebungen aller Knoten der Menge $\mathcal{N}$
$\delta \mathbf{d}$ .....	Vektor mit den virtuellen Verschiebungen aller Knoten
$\delta \mathbf{u}^{\alpha}$ .....	Virtueller Verschiebungsvektor eines Punkts
$\delta \mathbf{z}_{nI}$ .....	Virtueller Kontakt-Normalspannungsvektor des Slave-Kontaktknotens $I$
$\delta \mathbf{z}_n$ .....	Vektor der virtuellen Kontakt-Normalspannungen aller Slave-Kontaktknoten

$\delta\Pi_{PvV}$ .....	Virtuelle Arbeit
$\delta\Pi_{PvV}^{\text{kin}}$ .....	Virtuelle Arbeit der kinetischen Kräfte
$\delta\Pi_{PvV}^{\text{int}}, \delta\Pi_{PvV}^{\text{ext}}$	Virtuelle Arbeiten der internen, externen Kräfte
$\delta\Pi_{PvV}^{\text{c}}$ .....	Virtuelle Arbeit der Kontaktkräfte
$\delta\Pi^{\text{nd}}$ .....	Integrale Nichtdurchdringungsbedingung
$\Delta e_c$ .....	Veränderung der Systemenergie durch Kontakt im Rahmen des Newmark-Verfahrens
$\Delta e_c^{(i)}$ .....	Energiedissipation durch Kontakt im Rahmen des N-KD-Verfahrens
$\Delta e_c^{(ii)}$ .....	Energiedissipation durch die Geschwindigkeitsmodifikation
$\Delta e_c^{(iii)}$ .....	Veränderung der Systemenergie bei Kontakt durch die Stabilisierung des Integrators im Rahmen des N-KS-Verfahrens
$\Delta t$ .....	Zeitschrittweite
$\epsilon_n, \epsilon_\tau$ .....	Penalty-Parameter in Normalen-, Tangentialrichtung
$\eta$ .....	Segment-Koordinate
$\Theta_\beta$ .....	Koordinatenlinie auf der Oberfläche eines Körpers
$\lambda$ .....	Lamé-Konstante
$\lambda_n$ .....	Lagrange'scher Multiplikator im Rahmen einer Potentialformulierung
$\Lambda_{nI}$ .....	Lagrange'scher Multiplikator des Slave-Kontaktknotens $I$ zur Bestimmung von $\mathbf{d}^{\text{pred}}$ im Rahmen des N-KS-Verfahrens
$\Lambda_I^{\text{enko}}$ .....	Lagrange'scher Multiplikator des Slave-Kontaktknotens $I$ zur Bestimmung der Energie-Korrekturkraft
$\Lambda_{nI}^{\text{v}}$ .....	Lagrange'scher Multiplikator des Slave-Kontaktknotens $I$ zur Bestimmung der modifizierten Geschwindigkeit $\mathbf{v}^{\text{mod}}$
$\Lambda$ .....	Globaler Vektor aller Knotenwerte $\Lambda_{nI}$
$\Lambda_{\text{enko}}$ .....	Globaler Vektor aller Knotenwerte $\Lambda_I^{\text{enko}}$
$\mu$ .....	Lamé-Konstante
$\mu_\tau$ .....	Reibungskoeffizient
$\nu$ .....	Querdehnzahl
$\xi_\beta$ .....	Konvektive Oberflächenkoordinate
$\hat{\xi}_\beta$ .....	Konvektive Oberflächenkoordinate der Position $\hat{\mathbf{x}}^2$
$\xi^\alpha$ .....	Element-Koordinate eines linienförmigen Slave- oder Master-Elements
$\xi_a^1, \xi_b^1$ .....	Koordinaten $\xi^1$ von Segmentbeginn, -ende
$\xi_a^2, \xi_b^2$ .....	Koordinaten $\xi^2$ von Segmentbeginn, -ende
$\xi^\alpha$ .....	Allgemeine Element-Koordinate
$\Pi_{\text{PMPE}}$ .....	Potentialfunktion des PMPE
$\Pi_{\text{PMPE}}^{\text{int}}, \Pi_{\text{PMPE}}^{\text{ext}}$	Potential der inneren, äußeren Kräfte
$\Pi^{\text{c}}$ .....	Potentialfunktion der Kontaktbedingungen
$\Pi_{\text{LM}}^{\text{c}}$ .....	$\Pi^{\text{c}}$ mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren
$\Pi_{\text{PEN}}^{\text{c}}$ .....	$\Pi^{\text{c}}$ mit der Penalty-Methode
$\Pi_{\text{AL}}^{\text{c}}$ .....	$\Pi^{\text{c}}$ mit der Augmented Lagrange'schen Methode

$\Pi_{\text{PL}}^{\text{c}}$ .....	$\Pi^{\text{c}}$ mit der Perturbed Lagrange'schen Methode
$\rho_0, \rho$ .....	Massendichte in der Referenz-, Momentankonfiguration
$\boldsymbol{\sigma}^{\alpha}$ .....	Cauchy'scher Spannungstensor, Tensor zweiter Stufe
$\boldsymbol{\tau}_{\beta}$ .....	Oberflächentangente an die Koordinatenlinie $\Theta_{\beta}$
$\boldsymbol{\tau}_{\beta_I}$ .....	Diskrete Oberflächentangente des Slave-Kontaktknotens $I$
$\phi$ .....	Gleitfunktion
$\phi_I$ .....	Duale Formfunktion des Slave-Kontaktknotens $I$
$\Phi^{\alpha}$ .....	Platzierungsfunktion
$\Psi^{\alpha}(\mathbf{C}^{\alpha})$ .....	Verzerrungsenergiefunktion in Abhängigkeit von $\mathbf{C}^{\alpha}$
$\Omega_0^{\alpha}, \Omega_t^{\alpha}$ .....	Ortsgebiet des Körpers $\mathcal{B}^{\alpha}$ zum Zeitpunkt $t_0, t$
$\partial\Omega_0^{\alpha}, \partial\Omega_t^{\alpha}$ ....	Berandung des Körpers $\mathcal{B}^{\alpha}$ zum Zeitpunkt $t_0, t$



---

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Bewusst oder unbewusst, Kontaktvorgänge begegnen uns in vielen alltäglichen Situationen. Die zugrundeliegenden Gesetze erscheinen uns instinktiv logisch. Zwei Körper können nicht ineinander eindringen. Dieses Prinzip haben wir verinnerlicht, beispielsweise wenn wir eine Leiter gegen einen Baum lehnen. Gleichzeitig ist uns in solch einem Fall bewusst, dass die Leiter bei moderaten Neigungswinkeln stehen bleibt, in ungünstigen Fällen aber wegrutschen könnte. Letztlich werden wir uns auf der Leiter stehend nicht zu weit zurücklehnen, da uns klar ist, dass die Verbindung zwischen Leiter und Baum keinen Zug übertragen kann.

Ebenso verbreitet wie im Alltag ist Kontakt in numerischen Simulationen von strukturmechanischen Problemen. Prominente Beispiele sind Simulationen von Umformprozessen oder Crash-Test-Simulationen. Darüber hinaus sind Kontaktalgorithmen aber in vielen weiteren Bereichen notwendig, die sich mit der numerischen Simulation von geometrisch oder materiell nichtlinearen Prozessen beschäftigen. Aus dem Bereich des Bauingenieurwesens kann beispielsweise die Ermittlung der Momenten-Rotations-Charakteristik einer geschraubten Balken-Stützen-Verbindung genannt werden. Ohne eine Modellierung des Kontakts zwischen Schraube und Flansch ist hier keine zuverlässige Untersuchung möglich. Als Simulationswerkzeug hat sich für die aufgezählten sowie für weitere strukturmechanische Bereiche überwiegend die Methode der finiten Elemente durchgesetzt.

Auch wenn die Berücksichtigung von Kontaktbedingungen in vielen numerischen Simulationen eine Notwendigkeit darstellt, so ist die adäquate numerische Simulation von Kontaktvorgängen keineswegs ein vollständig gelöstes Problem. Dies gilt vor allem dann,

wenn Probleme mit großen Deformationen betrachtet werden. Ein Grund hierfür liegt in der nicht glatten Natur des Phänomens Kontakt, welches die Randbedingungen der kontaktierenden Körper sprunghaft verändert. Darüber hinaus stellen die Simulationsverfahren selbst eine Quelle für mögliche Schwierigkeiten dar. Die numerische Lösung basiert auf einer räumlichen und zeitlichen Diskretisierung. Hierfür müssen vereinfachende Annahmen getroffen werden. In Kombination mit der nicht glatten Natur des Kontaktphänomens resultieren dadurch oft unbefriedigende Simulationsergebnisse, da die Stärke von FE-Programmen in der effizienten Lösung von glatten Problemstellungen liegt. Aus diesem Grund ist die Weiterentwicklung von räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsstrategien auch heute noch ein wichtiges Forschungsgebiet der numerischen Strukturmechanik.

## 1.2 Stand der Technik

Ein numerischer Kontaktalgorithmus lässt sich im Wesentlichen anhand der folgenden drei Fragestellungen charakterisieren:

- Mit welcher Methode werden die kontinuumsmechanischen Gleichungen so ergänzt, dass die Kontaktbedingungen eingehalten oder annähernd eingehalten werden?
- Wie erfolgt anschließend die räumliche Diskretisierung der kontinuumsmechanischen Kontakt-Integrale?
- Auf welche Art und Weise wird im Falle von dynamischen Problemen die Zeitintegration modifiziert, um die Kontaktmodellierung zu verbessern?

In den folgenden Absätzen werden für die einzelnen Punkte jeweils verschiedene Möglichkeiten erläutert.

Die Berücksichtigung der Kontaktbedingungen in der kontinuumsmechanischen Beschreibung kann mit unterschiedlichen Verfahren erfolgen. Am weitesten verbreitet sind die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren, die Penalty-Methode oder Kombinationen wie beispielsweise die Augmented Lagrange'sche Formulierung. Mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren können die Kontaktbedingungen exakt berücksichtigt werden. Allerdings sind dafür zusätzliche Unbekannte notwendig. Die Penalty-Methode benötigt keine zusätzlichen Unbekannten, erfüllt die Kontaktbedingungen aber nur approximativ. Unabhängig von der gewählten Methode sind die Zusatzbedingungen so zu formulieren, dass das resultierende System eine eindeutige Lösung besitzt.

Die räumliche Kontaktdiskretisierung erfolgte im Rahmen der Methode der finiten Elemente zuerst mit sogenannten Kollokationsformulierungen. Diese erfüllen die Kontaktbedingungen an ausgewählten Punkten der kontaktierenden Oberflächen. Für Probleme

mit kleinen Deformationen wurden anfänglich konforme Vernetzungen in Kombination mit „Knoten-zu-Knoten“-Kontaktformulierungen (FRANCAVILLA UND ZIENKIEWICZ 1975; HUGHES U. A. 1976) verwendet. Hierbei werden die einzelnen Knoten der kontaktierenden Körper paarweise gekoppelt. Kontaktprobleme mit nicht konformen Vernetzungen oder Kontaktprobleme mit großen Deformationen konnten erstmals mit dem sogenannten „Knoten-zu-Segment“-Algorithmus simuliert werden. Dieser erzwingt die Kontaktbedingungen zwischen einem FE-Knoten einer Kontaktoberfläche und dessen Projektionspunkt auf der Kante oder Oberfläche des kontaktierten Körpers. Frühe Formulierungen dieser Methode finden sich beispielsweise in HUGHES U. A. (1977) und HALLQUIST (1979), Weiterentwicklungen unter anderem in BATHE UND CHAUDHARY (1985), HALLQUIST U. A. (1985), WRIGGERS UND SIMO (1985), WRIGGERS U. A. (1990) oder LAURSEN UND SIMO (1993).

Auch wenn „Knoten-zu-Segment“-Algorithmen viele Kontaktprobleme gelöst haben, so kann die Verwendung einer Kollokationsdiskretisierung zu Schwierigkeiten in der Simulation führen. Als Beispiele seien die ungenaue Spannungsrepräsentation oder numerische Instabilitäten genannt. Letztere treten vor allem dann auf, wenn sich unter großen tangentialen Relativverschiebungen eine kollokierte Kontaktgröße sprunghaft ändert. Gleitet beispielsweise ein Kollokationspunkt über einen durch die räumliche Diskretisierung erzeugten Oberflächenknick, ändert sich je nach Formulierung die Richtung der Kontaktkraft diskontinuierlich. Dies wiederum kann im Rahmen einer iterativen Lösungsprozedur zu Konvergenzproblemen führen. Durch die Definition einer zusätzlichen geglätteten Oberflächenbeschreibung zur Auswertung der Kontaktbedingungen können solche Instabilitäten teilweise verhindert werden, siehe beispielsweise PADMANABHAN UND LAURSEN (2001), WRIGGERS U. A. (2001) oder PUSO UND LAURSEN (2002). Allerdings ist die Konstruktion dieser geglätteten Oberfläche algorithmisch sehr anspruchsvoll, vor allem für dreidimensionale Probleme. Darüber hinaus muss die Beziehung zwischen facettierter und geglätteter Geometrie für eine implizite Berechnung linearisiert werden, wodurch der numerische Aufwand zusätzlich steigt.

Aufgrund der Nachteile einer Kollokationsformulierung begann schon früh die Entwicklung von Diskretisierungen, welche die Kontaktbedingungen nicht an ausgewählten Punkten sondern in einer integralen Art und Weise erfüllen. Die erste dieser „Segment-zu-Segment“-Diskretisierungen wurde Mitte der 80er Jahre von SIMO U. A. (1985) vorgestellt. Weiterentwicklungen auf nichtlineare Probleme mit großen Deformationen sowie auf dreidimensionale Probleme folgten, siehe beispielsweise PAPADOPOULOS UND TAYLOR (1992, 1993), ZAVARISE UND WRIGGERS (1998) oder EL-ABBASI UND BATHE (2001).

Eine spezielle Klasse von Kontaktdiskretisierungen mit integral formulierten Kontaktbedingungen entstand Mitte der 90er Jahre. Als Basis diente dabei die Mortar-Methode,

die ursprünglich im Rahmen von Gebietszerlegungsverfahren als Methode zur Kopplung nicht konformer Diskretisierungen entwickelt wurde (BERNARDI U. A. 1993, 1994). Kennzeichnend für die Mortar-Methode ist eine Oberflächenkopplung, welche die Eindeutigkeit der Lösung erhält und bei Netzverfeinerung zu optimalen räumlichen Konvergenzraten führt. Mortarbasierte Kontaktformulierungen übernehmen diese Eigenschaften durch eine entsprechende Umsetzung der Kontaktbedingungen. Frühe Formulierungen für Probleme mit kleinen Deformationen finden sich beispielsweise in BEN BELGACEM U. A. (1998), BEN BELGACEM (2000) oder MCDEWITT UND LAURSEN (2000). Über die bereits erwähnten Vorteile hinaus vermeidet die integrale Formulierung der Kontaktbedingungen im Zusammenhang mit großen Deformationen (FISCHER UND WRIGGERS 2005; PUSO UND LAURSEN 2004a; YANG U. A. 2005) numerische Instabilitäten. Neben der üblichen Kombination mit facettierten Oberflächen wurden in jüngster Zeit auch mortarbasierte Kontaktalgorithmen mit a priori glatten Geometriebeschreibungen veröffentlicht, als Beispiele seien TEMIZER U. A. (2011); TEMIZER U. A. (2012), DE LORENZIS U. A. (2011), DE LORENZIS U. A. (2012) oder LU (2011) genannt.

Umgesetzt mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren erfüllt eine mortarbasierte Kontaktdiskretisierung die Kontaktbedingungen exakt. Dafür sind allerdings zusätzliche Unbekannte erforderlich, welche im Allgemeinen das resultierende Gleichungssystem vergrößern. Werden die Lagrange'schen Multiplikatoren dagegen mit dualen Formfunktionen (WOHLMUTH 2000, 2001) diskretisiert, ist eine einfache Kondensation der zusätzlichen Unbekannten möglich. So sind die Kontaktbedingungen exakt erfüllt und der übliche Nachteil der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren wird vermieden. In WOHLMUTH UND KRAUSE (2003), HÜEBER UND WOHLMUTH (2005) wurde diese Methode erstmals auf Kontaktprobleme angewandt. Die Erweiterung auf Kontaktprobleme mit großen Deformationen wurde von HARTMANN U. A. (2007), HARTMANN UND RAMM (2008) vorgestellt, die konsistente Linearisierung von POPP U. A. (2009).

Für die Simulation von dynamischen Kontaktproblemen ist neben der räumlichen auch eine zeitliche Diskretisierung erforderlich. Hierzu werden in der nichtlinearen Strukturmechanik üblicherweise direkte Zeitintegrationsverfahren verwendet, welche meistens auf den klassischen Newmark-Ansätzen (NEWMARK 1959) basieren. Soll die Simulation zuverlässige Ergebnisse liefern, muss der verwendete Integrator energetisch stabil sein. Nach der Definition von BELYTSCHKO UND SCHOEBERLE (1975) bedeutet dies, dass ohne das Einwirken von äußeren Kräften die Energie des Gesamtsystems konstant bleiben oder abnehmen muss. Durch Kontakt Ereignisse wird die Systemenergie verändert, so dass sich auch die Eigenschaften des Integrators ändern. Die Initiierung von Kontakt führt meistens zu einer Verkleinerung der Systemenergie, womit das Kriterium der energetischen Stabilität nicht verletzt wird (siehe beispielsweise LAURSEN (2003)). Sobald die Kontaktbedingungen aber wieder gelöst werden, kann die Verwendung des klassischen Newmark-Verfahrens zu einem Anstieg der Systemenergie führen (siehe bei-



spielsweise ARMERO UND PETŐCZ (1998), LAURSEN (2003)). Somit geht aufgrund der Kontaktbedingungen die ursprünglich vorhandene energetische Stabilität des Integrators verloren. Soll die Simulation auch mit Berücksichtigung der Kontaktbedingungen stabile Ergebnisse liefern, müssen modifizierte Integratoren verwendet werden. Entsprechende dissipative Modifikationen finden sich unter anderem in LAURSEN UND CHAWLA (1997) oder KANE U. A. (1999).

Als Resultat der räumlichen Diskretisierung werden den Freiheitsgraden des Kontakttrands diskrete Knotenmassen zugeordnet, während im Kontinuierlichen der Kontakttrand die Dicke null besitzt und somit masselos ist. Gleichzeitig werden die Verschiebungen des Kontakttrands durch die Kontaktbedingungen eingeschränkt, wodurch mit den üblichen Newmark-Ansätzen oszillierende Knotenbeschleunigungen entstehen. In Kombination mit den diskreten Knotenmassen oszillieren dadurch wiederum die Trägheitskräfte, über die Bewegungsgleichung letztendlich die Kontaktkräfte. Als Resultat wird die Strukturantwort des kompletten Systems gestört. Die Amplituden der Kontaktspannung sind eine Funktion der Zeit und besitzen somit keinerlei physikalische Information mehr. Dieses Problem kann konzeptionell mit zwei verschiedenen Ansätzen verhindert werden. KHENOUS U. A. (2006, 2008) und HAGER U. A. (2008) entfernen die diskreten Knotenmassen von den Kontaktfreiheitsgraden. Somit führen die oszillierenden Spannungen nicht mehr zu oszillierenden Knotenkräften. TAYLOR UND PAPADOPOULOS (1993), SOLBERG UND PAPADOPOULOS (1998) oder DEUFLHARD U. A. (2008) modifizieren den Integrator und beheben damit die Ursache der oszillierenden Beschleunigungen.

Bei der Simulation von dynamischen Langzeitvorgängen kann die kontinuierliche Dissipation von Systemenergie zu einer nicht akzeptablen Veränderung der Systemantwort führen. In diesem Fall muss der Integrator nicht nur energetisch stabil sondern auch energieerhaltend sein. In Zusammenhang mit Kontaktvorgängen kann Energieerhaltung durch eine Modifikation der Knotengeschwindigkeiten in einer Nachlaufrechnung erzielt werden (LAURSEN UND LOVE 2002). Damit bekommt das System die im aktuellen Zeitschritt verlorene Gesamtenergie als kinetische Energie wieder zurück. Andere Verfahren (ARMERO UND PETŐCZ 1998; LAURSEN UND CHAWLA 1997) benutzen eine Modifikation der Kontaktbedingungen im Rahmen einer Umsetzung mit der Penalty-Methode, wodurch die Einhaltung der Kontaktbedingungen abhängig von der zeitlichen Diskretisierung wird.

In einer kontinuierlichen Beschreibung sind die Geschwindigkeiten zweier kontaktierender Oberflächen in Richtung der Oberflächen-Normalen identisch. Im Rahmen einer zeitlichen Diskretisierung gilt dies ohne eine gesonderte Behandlung im Allgemeinen nicht mehr. Darüber hinaus beginnen die Geschwindigkeiten bei Kontakt aufgrund der Oszillationen in den Beschleunigungen ebenfalls zu oszillieren. Werden für die Berechnung der tangentialen Kontaktspannung aber beispielsweise geschwindigkeitsabhängige

Materialgesetze verwendet, ist eine zuverlässige Geschwindigkeitsberechnung Voraussetzung für eine sinnvolle Systemantwort. Modifizierte Geschwindigkeitsansätze, welche Oszillationen vermeiden und zuverlässige Absolutwerte liefern, finden sich unter anderem in HUGHES U. A. (1976), TAYLOR UND PAPADOPOULOS (1993), SOLBERG UND PAPADOPOULOS (1998) oder ARMERO UND PETŐCZ (1998).

### 1.3 Zielsetzung

Das erste Ziel dieser Arbeit liegt in der Untersuchung und Weiterentwicklung der am Institut für Baustatik und Baudynamik entwickelten räumlichen Kontaktdiskretisierung, die auf der dualen Mortar-Methode basiert. HARTMANN U. A. (2007) sowie HARTMANN UND RAMM (2008) haben diese Diskretisierung als Erweiterung der Formulierung von WOHLMUTH UND KRAUSE (2003) und HÜEBER UND WOHLMUTH (2005) auf Probleme mit großen Deformationen vorgestellt. In der vorliegenden Arbeit soll anhand numerischer Experimente und theoretischer Betrachtungen untersucht werden, ob die entwickelte Formulierung auch unter möglichst allgemeinen Bedingungen zwischen den kontaktierenden Körpern stabil und konsistent ist. Als Beispiel für solch eine Untersuchung sei das Vertauschen von Slave- und Master-Seite und die anschließende Bewertung der Ergebnisse genannt. Im Falle von Defiziten ist die Erarbeitung von Verbesserungen vorgesehen.

Der zweite Teil dieser Arbeit befasst sich zunächst mit der Untersuchung verschiedener Zeitintegrationsverfahren im Hinblick auf das Verhalten unter Kontakt ereignissen mit großen Deformationen. Konkret sollen die betrachteten Algorithmen bezüglich der Punkte energetische Stabilität, Oszillationen der Kontaktspannung sowie Energieerhaltung untersucht und verglichen werden. Zusätzlich wird die Qualität der Geschwindigkeit der Kontaktknoten betrachtet. In einem zweiten Schritt soll mithilfe der untersuchten Algorithmen eine zeitliche Kontaktdiskretisierung entwickelt werden, welche im Hinblick auf die untersuchten Punkte ein möglichst optimales Verhalten zeigt. Dabei ist dieses Ziel ohne eine approximative Erfüllung der Kontaktbedingungen mit der Penalty-Methode zu erreichen. Das resultierende Verfahren soll außerdem so konstruiert sein, dass eine spätere Anwendung auf dünnwandige Schalentragerwerke möglich ist.

Die beiden in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Ziele stellen zwei unabhängige jeweils in sich abgeschlossene Arbeitskomplexe dar. Dementsprechend wird einerseits die räumliche Diskretisierung basierend auf der dualen Mortar-Methode mit keiner speziellen zeitlichen Diskretisierung assoziiert. Andererseits kommt im zweiten Teil dieser Arbeit neben der dualen Mortar-Methode auch der NTS-Algorithmus als räumliche Diskretisierung zum Einsatz.

Beide Teilziele der vorliegenden Arbeit konzentrieren sich auf die methodische Untersuchung und Weiterentwicklung der betrachteten Diskretisierungskonzepte. Die untersuchten Systeme sollen so komplex wie nötig, aber gleichzeitig so einfach wie möglich sein. Aus diesem Grund werden in beiden Themenkomplexen ausschließlich zweidimensionale reibungsfreie Kontaktprobleme betrachtet. Die algorithmische Umsetzung für dreidimensionale Diskretisierungen ist aber ohne weiteres möglich und stellt lediglich eine technische Herausforderung dar. Allgemeine Grundlagen für dreidimensionale Probleme sind an entsprechenden Stellen kompakt skizziert.

Alle im Rahmen dieser Arbeit demonstrierten Weiterentwicklungen bzw. alle für vergleichende numerische Experimente notwendigen Algorithmen wurden entweder in das institutseigene FE-Programm CCARAT oder in das vom Autor dieser Arbeit entwickelte FE-Programm MCCT implementiert.

## 1.4 Aufbau der Arbeit

Als Grundlage für die numerische Behandlung des Kontaktproblems werden in Kapitel 2 zunächst die kontinuumsmechanische Beschreibung der Festkörperdeformation sowie die der Kontakt-Randbedingungen in starker Form vorgestellt. Anschließend erfolgt mithilfe der Methode der gewichteten Residuen die Überführung der starken Form in eine schwache Formulierung. Die Behandlung der Kontaktbedingungen erfolgt dabei äquivalent zu der Behandlung, welche im Rahmen einer Potentialformulierung mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren erzielt wird.

Ausgehend von der schwachen Formulierung folgt in Kapitel 3 die räumliche Diskretisierung der kontaktunabhängigen Terme. Anschließend werden verschiedene Strategien zur räumlichen Diskretisierung der Kontakt-Integrale vorgestellt und miteinander verglichen. Die auf der dualen Mortar-Methode basierende Kontaktdiskretisierung wird detailliert erläutert, die Auswertung der entsprechenden Kontakt-Integrale ausführlich dargestellt. Abschließend folgt die Identifizierung und Untersuchung einer Inkonsistenz. Eine Modifikation zur Lösung des Problems wird vorgestellt.

Kapitel 4 widmet sich zuerst der zeitlichen Diskretisierung im Allgemeinen. Der Hauptteil des Kapitels beschäftigt sich darauf folgend mit den Auswirkungen dynamischer Kontakt ereignisse auf die numerische Simulation. Konkret werden die Aspekte energetische Stabilität, Oszillationen der Kontaktspannung, Energieerhaltung und Qualität der Kontaktgeschwindigkeiten betrachtet. Anhand eines einfachen Referenzbeispiels werden die einzelnen Phänomene untersucht sowie verschiedene Lösungsansätze bewertet und verglichen. Abschließend wird eine zeitliche Diskretisierung entwickelt, welche Lö-

sungsansätze für alle vier Punkte kombiniert und dabei eine neue Idee zur Energieerhaltung verwendet.

In Kapitel 5 ist zunächst die Strategie zur Ermittlung der momentan aktiv am Kontakt teilnehmenden FE-Knoten dargestellt. Anschließend folgen die Linearisierung des nicht-linearen globalen Gleichungssystems und eine Matrix-Formulierung der resultierenden Beziehungen. Abschließend wird die Kondensation der Kontaktspannung im Zusammenhang mit der dualen Mortar-Methode erläutert.

Kapitel 6 demonstriert anhand von numerischen Experimenten zuerst die Leistungsfähigkeit der dualen Mortar-Methode als räumliche Kontaktdiskretisierung. Darauf folgend wird die Leistungsfähigkeit der in Kapitel 3 präsentierten Modifikation untersucht.

Letztlich werden in Kapitel 7 verschiedene numerische Experimente mit den zeitlichen Diskretisierungsstrategien aus Kapitel 4 durchgeführt. Damit werden zum einen verschiedene Methoden miteinander verglichen, zum anderen wird die Leistungsfähigkeit des neu vorgestellten Verfahrens demonstriert.

# 2

---

## Kontinuums- und kontaktmechanische Grundlagen

Als Basis für die numerische Simulation von dynamischen Kontaktvorgängen wird in diesem Kapitel eine kontinuumsmechanische Beschreibung des zugrundeliegenden Problems eingeführt. Abschnitt 2.1 charakterisiert zunächst die Festkörperdeformation im Allgemeinen. Anschließend sind in Abschnitt 2.2 die Restriktionen durch mögliche Kontaktbedingungen dargestellt. Die resultierenden Gleichungen beschreiben dann das dynamische Kontaktproblem vollständig und in punktwieser Form, siehe Abschnitt 2.3. Als Grundlage für eine numerische Lösung wird die punktweise Formulierung in Abschnitt 2.4 mit der Methode der gewichteten Residuen in eine integrale Formulierung überführt. In Abschnitt 2.5 ist vergleichend eine integrale Formulierung basierend auf einem Variationsprinzip dargestellt. Die Behandlung der Kontaktausdrücke aus Abschnitt 2.4 soll so aus einem anderen Blickwinkel betrachtet sowie mit alternativen Verfahren verglichen werden. Abschließend sind in Abschnitt 2.6 die wichtigsten Punkte noch einmal zusammengefasst.

Die im Folgenden eingeführten Gleichungen sollen als Einleitung dienen und eine konsistente Notation innerhalb der Arbeit ermöglichen. Sie stellen keine vollständige Beschreibung der zugrundeliegenden Themenkomplexe dar. Für eine ausführliche Darstellung der Kontinuumsmechanik sei auf die Lehrbücher von HOLZAPFEL (2000), ALTENBACH UND ALTENBACH (1994) und BAŞAR UND WEICHERT (2000) verwiesen. Die kontinuumsmechanischen Ausführungen in dieser Arbeit orientieren sich des Weiteren an EHLERS (2005) und den kontinuumsmechanischen Kapiteln in BELYTSCHKO U. A. (2008). Eine umfassende Beschreibung der Kontaktmechanik sowie ein detaillierter Überblick zur algorithmischen Behandlung von Kontaktproblemen ist in den Lehrbüchern von WRIGGERS (2002) und LAURSEN (2003) sowie in WRIGGERS UND ZAVARISE (2004)

zu finden. In WILLNER (2003) werden sowohl die Kontinuums- als auch die Kontaktmechanik ausführlich dargestellt.

## 2.1 Festkörperbeschreibung

Ziel der folgenden kontinuumsmechanischen Beschreibung ist die Formulierung eines Satzes von Gleichungen, welcher den Bewegungszustand eines materiellen Körpers vollständig charakterisiert. In der vorliegenden Arbeit erfolgt dabei eine Beschränkung auf rein mechanische Probleme, so dass thermodynamische Effekte vernachlässigt werden.

Im Hinblick auf eine spätere Kontaktbeschreibung (Abschnitt 2.2) sind alle Beziehungen für zwei materielle Körper  $\mathcal{B}^\alpha$  mit  $\alpha = 1, 2$  definiert<sup>1</sup>. Auch bei Kontakt zwischen einer Vielzahl von deformierbaren Körpern (*Mehrkörperkontakt – 2KK*) können die Kontaktvorgänge jeweils als paarweiser Kontakt zwischen zwei einzelnen Körpern beschrieben werden. Der Sonderfall des Kontakts zwischen einem deformierbaren und einem starren Körper (*Einkörperkontakt – 1KK*)<sup>2</sup> ergibt sich aus der Mehrkörperkontaktformulierung durch entsprechende Vereinfachungen.

### 2.1.1 Bewegung

Der Zustand eines materiellen Körpers  $\mathcal{B}^\alpha$  kann zu jedem Zeitpunkt  $t$  eines betrachteten Zeitraumintervalls  $[t_0, T]$  durch die Eigenschaften seiner *materiellen Punkte*  $\mathcal{P}^\alpha$  beschrieben werden, welche in den dreidimensionalen Euklid'schen Raum eingebettet sind. Die Position eines materiellen Punkts zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  wird als bekannt angenommen und durch den Ortsvektor  $\mathbf{X}^\alpha = X_i^\alpha \mathbf{e}_i$  angegeben. Als Basis dient dabei ein ortsfestes kartesisches Koordinatensystem mit normierten Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$ . Für einen beliebigen Zeitpunkt  $t \in [t_0, T]$  wird die aktuelle Position  $\mathbf{x}^\alpha$  von  $\mathcal{P}^\alpha$  über eine *Platzierungsfunktion*  $\Phi^\alpha$  in Abhängigkeit der Referenzposition  $\mathbf{X}^\alpha$  und der Zeit  $t$  ausgedrückt:

$$\mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \Phi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \Phi_i^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)\mathbf{e}_i. \quad (2.1)$$

Im Folgenden wird gelegentlich die Bezeichnung  $\mathbf{X}^\alpha$  nicht nur für die Ortsvektoren der materiellen Punkte verwendet, sondern vereinfachend auch für die materiellen Punkte selbst. Die Verschiebung

$$\mathbf{u}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \Phi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) - \mathbf{X}^\alpha \equiv \mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) - \mathbf{X}^\alpha \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>Für den Index  $(\bullet)^\alpha$  gilt die Einstein'sche Summenkonvention nicht.

<sup>2</sup>Ein Einkörper-Kontaktproblem wird in der Literatur häufig auch als Signorini-Problem bezeichnet.

eines materiellen Punkts lässt sich aus der Differenz zwischen aktueller und ursprünglicher Position ermitteln. Dabei stellt die zweite Differenz in einer vereinfachenden Notation den Funktionswert  $\mathbf{x}^\alpha = \Phi^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$  selbst als Funktion  $\mathbf{x}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t)$  dar. Ein- bzw. zweimaliges Anwenden der materiellen Zeitableitung auf die Platzierungsfunktion führen auf Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) &= \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}^\alpha}{\partial t} \\ \ddot{\mathbf{u}}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}^\alpha}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}^\alpha}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{2.3}$$

eines materiellen Punkts.

Wie in der Festkörpermechanik üblich, wird auch in dieser Arbeit die *Lagrange'sche* oder *materielle Betrachtungsweise* verwendet. Diese beschreibt die Änderung der Körpereigenschaften von  $\mathcal{B}^\alpha$  durch Beobachtung der Änderungen an den materiellen Punkten des Körpers. Der Begriff „materieller Punkt“ weist in diesem Zusammenhang darauf hin, dass sich die jeweils beobachteten Stellen oder, alternativ formuliert, die Beobachter mit dem Material mitbewegen. Im Gegensatz dazu könnten die Beobachter auch fixe Raumpositionen  $\mathbf{x}^\alpha$  betrachten. Die Änderungen der Körpereigenschaften würde dann anhand der Eigenschaften der passierenden materiellen Punkte beschrieben. (*Euler'sche Betrachtungsweise*). Beide Betrachtungsweisen können anschaulich durch den Verkehrsfluss auf einer Straße erläutert werden. In der Lagrange'schen Betrachtungsweise sitzen die Beobachter in den Fahrzeugen. Damit verändern sich ihre aktuellen Positionen  $\mathbf{x}^\alpha$ , jedoch nicht ihre „Parkpositionen“  $\mathbf{X}^\alpha$  zum Zeitpunkt  $t_0$ . Jeder Beobachter verfolgt dabei seine eigene Geschwindigkeit oder weitere Eigenschaften seines eigenen Fahrzeugs. Dahingegen benützen beispielsweise Verkehrsüberwachungskameras die Euler'sche Betrachtungsweise. An jeweils fixen Positionen werden die passierenden Fahrzeuge beobachtet, eventuell wird ihre Geschwindigkeit bestimmt.

Die Anordnung der materiellen Punkte eines Körpers  $\mathcal{B}^\alpha$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  im räumliche Gebiet  $\Omega_t^\alpha$  wird *Konfiguration* genannt. Zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  sind die Positionen aller materiellen Punkte bekannt. Daher wird diese Konfiguration als *Referenzkonfiguration*  $\Omega_0^\alpha$  bezeichnet. Die Referenzkonfiguration wird in dieser Arbeit als undeformiert und spannungsfrei angenommen. Für einen allgemeinen, gerade betrachteten Zeitpunkt  $t$  wird das augenblicklich eingenommene Körpergebiet  $\Omega_t^\alpha$  als *Momentankonfiguration* bezeichnet. Die Berandung des Körpergebiets ist in der Referenzkonfiguration durch  $\partial\Omega_0^\alpha$  und in der Momentankonfiguration durch  $\partial\Omega_t^\alpha$  gegeben. Diese Ränder werden weiter unterteilt in einen *Dirichlet-Rand*  $\Gamma_d^\alpha$  bzw.  $\gamma_d^\alpha$ , einen *Neumann-Rand*  $\Gamma_n^\alpha$  bzw.  $\gamma_n^\alpha$  und einen *Kontaktrand*  $\Gamma_c^\alpha$  bzw.  $\gamma_c^\alpha$ . Dabei ist es möglich, auf dem Dirichlet-Rand Verschiebungen vorzugeben, auf dem Neumann-Rand Oberflächenspan-

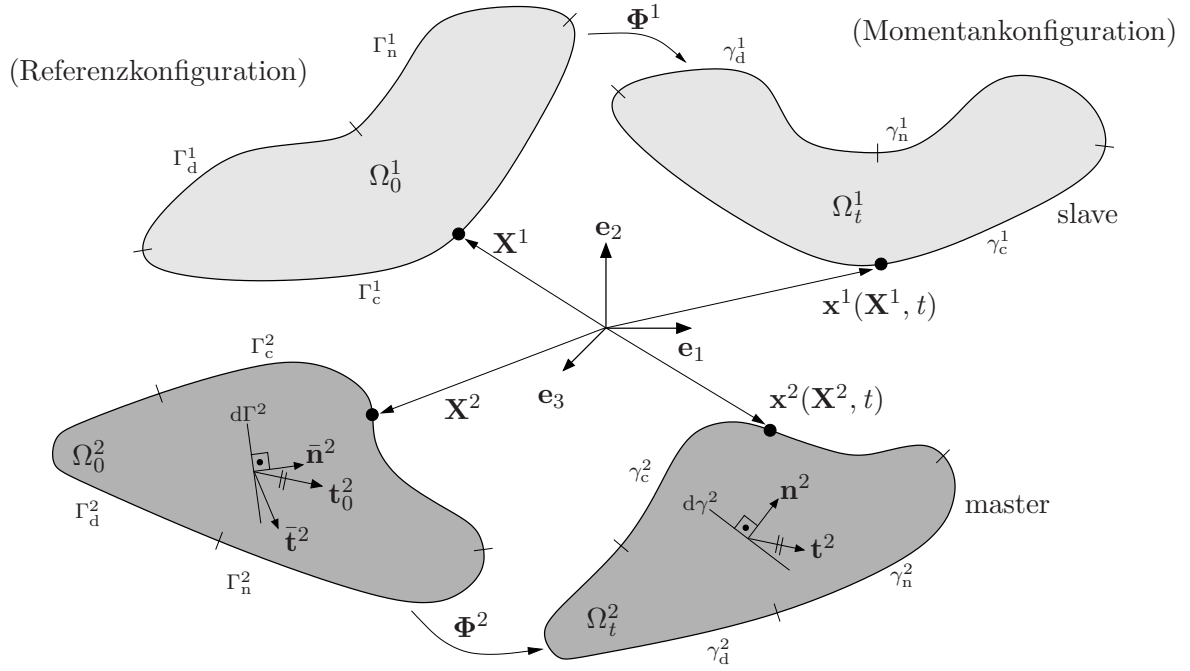


Abbildung 2.1: Materielle Körper, materielle Punkte, Berandung, Spannungsvektoren.

nungen und auf dem Kontaktrand Kontaktbedingungen. Die einzelnen Ränder bedecken für jeden Zeitpunkt  $t$  die komplette Oberfläche von  $\Omega_t^\alpha$ , ohne zu überlappen:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_d^\alpha \cup \gamma_n^\alpha \cup \gamma_c^\alpha &= \partial\Omega_t^\alpha \\ \gamma_d^\alpha \cap \gamma_n^\alpha &= \gamma_d^\alpha \cap \gamma_c^\alpha = \gamma_n^\alpha \cap \gamma_c^\alpha = \emptyset \end{aligned} \right\} \forall t \in [t_0, T]. \quad (2.4)$$

In Abbildung 2.1 sind schematisch zwei deformierbare Körper mit ihren Berandungen in der Referenz- und der Momentankonfiguration dargestellt. Wie in vielen weiteren Veröffentlichungen aus dem Bereich der Kontaktmechanik werden auch in dieser Arbeit die Bezeichnungen *Slave* bzw. *Master* für die Körper  $\Omega^1$  bzw.  $\Omega^2$  oder mit ihnen assoziierten Größen verwendet. Im Rahmen der integralen Formulierung des Kontaktproblems (siehe Abschnitt 2.4) wird der Slave-Körper in der Regel für die Auswertung der Kontakt-Integrale benutzt.

### 2.1.2 Kinematik und Verzerrung

Die Definition von geeigneten Deformations- und Verzerrungsmaßen ist notwendig, um die Bewegung eines materiellen Körpers charakterisieren zu können. Eine wichtige Größe zur Charakterisierung von Deformationen ist dabei der *materielle Deformationsgra-*



dient  $\mathbf{F}^\alpha$ . Dieser ist als zweistufiger Tensor über die Beziehung

$$\mathbf{F}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \frac{\partial \Phi^\alpha}{\partial \mathbf{X}^\alpha} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}^\alpha}{\partial \mathbf{X}^\alpha} \quad (2.5)$$

als partielle Ableitung der aktuellen Koordinate  $\mathbf{x}^\alpha$  nach der Referenzkoordinate  $\mathbf{X}^\alpha$  definiert. Geometrisch interpretiert kann  $\mathbf{F}^\alpha$  auch als lineare Abbildung eines infinitesimalen Linienelements  $d\mathbf{X}^\alpha$  von der Referenz- auf die Momentankonfiguration verstanden werden

$$d\mathbf{x}^\alpha = \mathbf{F}^\alpha d\mathbf{X}^\alpha, \quad (2.6)$$

wobei  $d\mathbf{x}^\alpha$  das deformierte Linienelement in der Momentankonfiguration darstellt. Die Determinante des materiellen Deformationsgradienten

$$J^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \det \mathbf{F}^\alpha > 0 \quad (2.7)$$

wird auch *Jacobi-Determinante* genannt und beschreibt die Transformation eines infinitesimalen Volumenelements von der Referenzkonfiguration auf die Momentankonfiguration:

$$d\Omega_t^\alpha = J^\alpha d\Omega_0^\alpha. \quad (2.8)$$

In Gleichung (2.7) wurde die Forderung  $J^\alpha > 0$  gestellt, welche wie folgt begründet werden kann: Die Bewegung und damit Beziehung (2.6) müssen eindeutig invertierbar sein, was  $J^\alpha \neq 0$  erfordert. Eine Auswertung von  $J^\alpha$  zum Zeitpunkt  $t_0$  liefert  $J^\alpha = 1$ . Da die Bewegung stetig sein muss, resultiert somit die Forderung  $J^\alpha > 0$ . Neben der Transformation von Linien- und Volumenelementen lässt sich mithilfe von  $\mathbf{F}^\alpha$  auch die Transformation von infinitesimalen Flächenelementen darstellen:

$$d\gamma^\alpha \mathbf{n}^\alpha = \det \mathbf{F}^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}^\alpha d\Gamma^\alpha. \quad (2.9)$$

$d\Gamma^\alpha$  bezeichnet dabei ein orientiertes infinitesimales Flächenelement der Referenzkonfiguration mit zugehöriger Normale  $\bar{\mathbf{n}}^\alpha$ ,  $d\gamma^\alpha$  das entsprechende infinitesimale Flächenelement der Momentankonfiguration mit zugehöriger Normale  $\mathbf{n}^\alpha$ .

Die Bewegung eines materiellen Körpers setzt sich aus Starrkörperanteilen und Verzerrungen zusammen, wobei nur Verzerrungen innere Kräfte hervorrufen. Der Deformationsgradient  $\mathbf{F}^\alpha$  beschreibt die vollständige Bewegung abzüglich der Starrkörpertranslationen, weswegen er nicht direkt als Verzerrungsmaß verwendet wird. Er dient aber als Basis für die Definition von verschiedenen Verzerrungsmaßen, wie dem in dieser Arbeit

verwendeten *Green-Lagrange'schen Verzerrungstensor*

$$\mathbf{E}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) = \frac{1}{2}[(\mathbf{F}^\alpha)^\top \cdot \mathbf{F}^\alpha - \mathbf{I}] = \frac{1}{2}(\mathbf{C}^\alpha - \mathbf{I}). \quad (2.10)$$

Dabei bezeichnet  $\mathbf{I}$  den Identitätstensor zweiter Stufe und  $\mathbf{C}^\alpha$  den *rechten Cauchy-Green'schen Deformationstensor*.  $\mathbf{E}^\alpha$  ist invariant gegenüber Starrkörperverschiebungen und -verdrehungen und stellt somit ein geeignetes Verzerrungsmaß zur Beschreibung von großen Deformationen dar.

### 2.1.3 Spannungsmaße

Spannungen beschreiben den Zusammenhang zwischen inneren und äußeren Kräften und charakterisieren den durch die Verzerrung hervorgerufenen inneren Beanspruchungszustand. Der wahre Spannungszustand in einem materiellen Punkt lässt sich eindeutig mit dem symmetrischen *Cauchy'schen Spannungstensors*  $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$  angeben. Dieser ist durch das Theorem von Cauchy

$$\mathbf{t}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha, t, \mathbf{n}^\alpha) = \boldsymbol{\sigma}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha, t) \cdot \mathbf{n}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha, t) \quad (2.11)$$

als Abbildung des Normalenfelds  $\mathbf{n}^\alpha$  einer zugehörigen Schnittfläche  $\gamma^\alpha$  auf das *Cauchy'sche Spannungsvektorfeld*  $\mathbf{t}^\alpha$  definiert. Dabei sind alle Größen auf die aktuelle Konfiguration bezogen. In der Form

$$d\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{x}^\alpha, t, \mathbf{n}^\alpha) = \mathbf{t}^\alpha d\gamma^\alpha \quad (2.12)$$

beschreibt  $\mathbf{t}^\alpha$  die auf ein infinitesimales Flächenelement  $d\gamma^\alpha$  der Momentankonfiguration wirkende Kraft  $d\mathbf{f}^\alpha$ . Bei Bezug auf das zugehörige infinitesimale Flächenelement  $d\Gamma^\alpha$  der Referenzkonfiguration ergibt sich die Abbildungsvorschrift

$$\mathbf{t}^\alpha \frac{d\gamma^\alpha}{d\Gamma^\alpha} = \mathbf{t}_0^\alpha = \mathbf{P}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) \cdot \bar{\mathbf{n}}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha) \quad (2.13)$$

für den unsymmetrischen *ersten Piola-Kirchhoff'schen (PK1) Spannungstensor*  $\mathbf{P}^\alpha$ . Da die Asymmetrie von  $\mathbf{P}^\alpha$  bei einer numerischen Behandlung von Nachteil ist, wird durch Multiplizieren von Gleichung (2.13) mit  $(\mathbf{F}^\alpha)^{-1}$  der symmetrische *zweite Piola-Kirchhoff'sche (PK2) Spannungstensor*  $\mathbf{S}^\alpha$  definiert:

$$(\mathbf{F}^\alpha)^{-1} \cdot \mathbf{t}_0^\alpha = \bar{\mathbf{t}}^\alpha = \mathbf{S}^\alpha(\mathbf{X}^\alpha, t) \cdot \bar{\mathbf{n}}^\alpha. \quad (2.14)$$

Im Folgenden werden  $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$  und  $\mathbf{t}^\alpha$  zur Beschreibung der Kontaktspannungen verwendet,  $\mathbf{S}^\alpha$  und  $\mathbf{t}_0^\alpha$  zur Beschreibung aller weiteren Spannungen. Einsetzen von Beziehung (2.11)

in Gleichung (2.14) liefert unter Beachtung der Transformationsvorschrift (2.9) die Beziehung

$$\mathbf{S}^\alpha = J^\alpha (\mathbf{F}^\alpha)^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot (\mathbf{F}^\alpha)^{-\top} \quad (2.15)$$

zwischen dem PK2 und dem Cauchy'schen Spannungstensor. In Abbildung 2.1 sind die verschiedenen Spannungsvektoren  $\mathbf{t}^\alpha$ ,  $\mathbf{t}_0^\alpha$  und  $\bar{\mathbf{t}}^\alpha$  dargestellt. Dabei repräsentieren die in der Referenzkonfiguration abgebildeten Spannungsvektoren nicht den Spannungszustand zum Zeitpunkt  $t_0$ , sondern sind als transformierte Größen des momentanen Spannungszustands zu verstehen.

### 2.1.4 Werkstoffgesetze

Werkstoff- oder Materialgesetze stellen eine Approximation des realen Werkstoffverhaltens dar. Abhängig von Feldgrößen wie Verzerrung, Temperatur und gegebenenfalls auch Geschichtsvariablen kann somit eine Spannungsantwort auf die vorhandene Beanspruchung berechnet werden. In der vorliegenden Arbeit kommen ausschließlich *hyperelastische Materialgesetze* zur Anwendung. Diese sind durch die Existenz einer *Verzerrungsenergiefunktion*  $\Psi^\alpha(\mathbf{C}^\alpha)$  oder  $w^\alpha(\mathbf{E}^\alpha)$  gekennzeichnet, mit der die aktuelle Spannung eindeutig als Funktion der aktuellen Verzerrung berechnet werden kann:

$$\mathbf{S}^\alpha = 2 \frac{\partial \Psi^\alpha(\mathbf{C}^\alpha)}{\partial \mathbf{C}^\alpha} = \frac{\partial w^\alpha(\mathbf{E}^\alpha)}{\partial \mathbf{E}^\alpha}. \quad (2.16)$$

#### St. Venant-Kirchhoff'sches Material

Das *St. Venant-Kirchhoff'sche Materialgesetz* ist zur Beschreibung von Deformationen mit großen Rotationen geeignet, liefert im Druckbereich aber nur bei kleinen Verzerrungen eine realistische Spannungsantwort. Es stellt eine Verallgemeinerung des Hooke'schen Gesetzes auf einen mehrdimensionalen Spannungs- und Verzerrungszustand dar und wird über die Verzerrungsenergiefunktion

$$w_{\text{StVK}}^\alpha(\mathbf{E}^\alpha) = \mu (\mathbf{E}^\alpha : \mathbf{E}^\alpha) + \frac{1}{2} \lambda (\text{tr } \mathbf{E}^\alpha)^2 \quad (2.17)$$

charakterisiert. Hierin bezeichnen  $\lambda$  und  $\mu$  die Lamé-Konstanten. In der Ingenieurliteratur werden meistens die anschaulicheren Materialkonstanten Elastizitätsmodul  $E$  und Querdehnzahl  $\nu$  verwendet, welche über die Beziehung

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.18)$$

aus den Lamé-Konstanten berechnet werden können. Durch Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion  $w_{\text{StVK}}^\alpha$  nach  $\mathbf{E}^\alpha$  resultiert ein linearer Zusammenhang zwischen den PK2 Spannungen und den Green-Lagrange'schen Verzerrungen

$$\mathbf{S}^\alpha = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}^\alpha) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^\alpha = \mathbb{C}^\alpha : \mathbf{E}^\alpha, \quad (2.19)$$

wobei auch der vierstufige Materialtensor

$$\mathbb{C}^\alpha = \frac{\partial^2 w_{\text{StVK}}^\alpha}{\partial \mathbf{E}^\alpha \partial \mathbf{E}^\alpha}, \quad \mathbb{C}_{ijkl}^\alpha = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.20)$$

zur Darstellung der Spannungs–Verzerrungs–Beziehung benutzt werden kann.

### Neo-Hooke'sches Material

Treten neben großen Rotationen zusätzlich große Verzerrungen im Druckbereich auf, wird das Materialverhalten durch das St. Venant-Kirchhoff'sche Materialmodell nicht mehr realistisch beschrieben. Da die Green-Lagrange'schen Verzerrungen  $\mathbf{E}^\alpha$  für unendlich große Kompression gegen einen festen endlichen Wert streben, gilt aufgrund des linearen Spannungs–Verzerrungs–Zusammenhangs (2.19) Äquivalentes für die PK2 Spannungen  $\mathbf{S}^\alpha$ . Ein *Neo-Hooke'sches Materialgesetz* liefert hingegen auch für große elastische Verzerrungen im Druckbereich eine realistische Spannungsantwort. Für ein kompressibles Neo-Hooke'sches Materialgesetz kann eine Verzerrungsenergiefunktion beispielsweise mit

$$\Psi_{\text{NH}}^\alpha(\mathbf{C}^\alpha) = \frac{1}{2} \lambda (\ln J^\alpha)^2 - \mu \ln J^\alpha + \frac{1}{2} \mu (\text{tr} \mathbf{C}^\alpha - 3) \quad (2.21)$$

angegeben werden. Die Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion  $\Psi_{\text{NH}}^\alpha$  nach  $\mathbf{C}^\alpha$  liefert dann den PK2 Spannungstensor

$$\mathbf{S}^\alpha = \lambda \ln J^\alpha (\mathbf{C}^\alpha)^{-1} + \mu [\mathbf{I} - (\mathbf{C}^\alpha)^{-1}]. \quad (2.22)$$

### 2.1.5 Bilanzgleichungen

Bilanzgleichungen stellen eine mathematische Beschreibung fundamentaler physikalischer Gesetze dar und werden in integraler Form für ein ganzes System aufgestellt. Sind die integrierten Feldgrößen hinreichend glatt, ist die Überführung in eine lokale Form aus partiellen Differentialgleichungen möglich. Bei den hier betrachteten rein mechanischen Problemen werden zur Bestimmung der Unbekannten die Massenbilanz, die Impulsbilanz, die Drehimpuls- und die Energiebilanz benötigt.

## Massenbilanz

Die *Massenbilanz* oder das *Prinzip der Massenerhaltung* besagt, dass die Masse eines geschlossenen Systems konstant bleiben muss, solange keine Masse über die Oberfläche zu- oder abfließt und im Inneren keine Masse produziert wird oder verloren geht. Bei den im Folgenden untersuchten rein mechanischen Problemen sind diese Bedingungen erfüllt, so dass die Massenbilanz in lokaler Form mit der partiellen Differentialgleichung

$$\dot{\rho}^\alpha + \rho^\alpha \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}^\alpha = 0 \quad (2.23)$$

angegeben werden kann. Für Festkörperprobleme, die in der Lagrange'schen Betrachtungsweise beschrieben sind, vereinfacht sich die Massenbilanz zu einer algebraischen Gleichung. Diese beschreibt punktweise die Relation

$$\rho^\alpha J^\alpha = \rho_0^\alpha \quad (2.24)$$

zwischen der Massendichte  $\rho_0^\alpha$  in der Referenzkonfiguration und der Massendichte  $\rho^\alpha$  in der aktuellen Konfiguration.

## Impulsbilanz

Im Hinblick auf eine spätere numerische Näherungslösung des kontinuierlichen Problems stellt die *Impulsbilanz* eine der wichtigsten Grundgleichungen dar. Sie besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines materiellen Körpers der Summe der am Körper angreifenden Oberflächen- und Volumenlasten entspricht:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_t^\alpha} \rho^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha \, d\Omega_t^\alpha = \int_{\gamma^\alpha} \mathbf{t}^\alpha \, d\gamma^\alpha + \int_{\Omega_t^\alpha} \rho^\alpha \mathbf{b}^\alpha \, d\Omega_t^\alpha. \quad (2.25)$$

Dabei repräsentiert  $\mathbf{b}^\alpha$  die auf ein infinitesimales Volumenelement bezogene Volumenkraft. Zurückziehen der Impulsbilanz (2.25) in die Referenzkonfiguration liefert die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha \dot{\mathbf{x}}^\alpha \, d\Omega_0^\alpha = \int_{\Gamma^\alpha} \mathbf{t}_0^\alpha \, d\Gamma^\alpha + \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha \, d\Omega_0^\alpha, \quad (2.26)$$

wobei die Massenbilanz (2.24) sowie die Transformationsvorschriften (2.8) und (2.13) verwendet wurden. Die Auswertung von Beziehung (2.26) ergibt mit Gleichung (2.23) und einigen elementaren Umformungen schließlich die lokale Form der Impulsbilanz

$$\rho_0^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha = \operatorname{Div} \mathbf{P}^\alpha + \rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha, \quad (2.27)$$

welche bezüglich eines infinitesimalen Volumenelements der Referenzkonfiguration gültig ist.

### Drehimpulsbilanz

An dieser Stelle wird ohne Angabe einer Herleitung nur kurz das Resultat der Auswertung der *Drehimpulsbilanz* dargestellt. Aus der Drehimpulsbilanz in ihrer lokalen Formulierung folgt die Forderung nach Symmetrie des Cauchy'schen Spannungstensors:

$$\boldsymbol{\sigma}^\alpha = (\boldsymbol{\sigma}^\alpha)^\top. \quad (2.28)$$

Mit der Transformationsbeziehung (2.15) kann diese Forderung äquivalent für den PK2 Spannungstensor aufgestellt werden:

$$\mathbf{S}^\alpha = (\mathbf{S}^\alpha)^\top. \quad (2.29)$$

Eine Formulierung der Drehimpulsbilanz mit anschließender Auswertung, welche als Endresultat auf Gleichung (2.28) führt, ist beispielsweise in HOLZAPFEL (2000) gegeben.

### Energiebilanz

Für rein mechanische Probleme stellt die *Energiebilanz* keine zusätzliche unabhängige Gleichung dar, sondern ist eine Konsequenz der Impulsbilanz. Damit wird sie automatisch erfüllt, solange die Impulsbilanz erfüllt ist. Im Rahmen einer numerischen Näherungslösung gilt diese Folgerung allerdings nicht mehr, so dass die Energiebilanz als Kontrollgleichung für die Qualität bzw. die Stabilität der berechneten Lösung benutzt werden kann.

Die Energiebilanz sagt aus, dass die Summe der Änderungsraten von *kinetischer Energie*  $e_{\text{kin}}$  und *interner mechanischer Energie*  $e_{\text{int}}$  gleich der Rate der *äußeren mechanischen Energie*  $e_{\text{ext}}$  sein muss:

$$\frac{\partial}{\partial t} e_{\text{kin}}(t) + p_{\text{int}}(t) = p_{\text{ext}}(t). \quad (2.30)$$

Dabei setzen sich die kinetische Energie  $e_{\text{kin}}$  sowie die Raten  $p_{\text{int}}$  und  $p_{\text{ext}}$  von interner und externer mechanischer Energie aus den jeweiligen Anteilen der einzelnen Körper  $\mathcal{B}^\alpha$  zusammen:

$$e_{\text{kin}}(t) = \sum_{\alpha=1}^2 e_{\text{kin}}^\alpha(t), \quad p_{\text{int}}(t) = \sum_{\alpha=1}^2 p_{\text{int}}^\alpha(t), \quad p_{\text{ext}}(t) = \sum_{\alpha=1}^2 p_{\text{ext}}^\alpha(t). \quad (2.31)$$

Die kinetische Energie  $e_{\text{kin}}^\alpha$  eines einzelnen Körpers kann durch die Beziehung

$$e_{\text{kin}}^\alpha(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha \mathbf{v}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha \, d\Omega_0^\alpha, \quad (2.32)$$

die Rate der internen Energie<sup>3</sup> eines einzelnen Körpers mithilfe von

$$p_{\text{int}}^\alpha(t) = \int_{\Omega_0^\alpha} \mathbf{S}^\alpha : \dot{\mathbf{E}}^\alpha \, d\Omega_0^\alpha \quad (2.33)$$

und die Rate der externen Energie eines einzelnen Körpers durch die Beziehung

$$p_{\text{ext}}^\alpha(t) = \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha \, d\Omega_0^\alpha + \int_{\Gamma^\alpha} \mathbf{t}_0^\alpha \cdot \mathbf{v}^\alpha \, d\Gamma^\alpha \quad (2.34)$$

berechnet werden.

## 2.2 Kontaktbeschreibung

In Abschnitt 2.1 wurde eine allgemeine kontinuumsmechanische Beschreibung einzelner materieller Körper eingeführt. Eine mögliche Beeinflussung der Körper untereinander wurde noch nicht beachtet. Aufgabe der Kontaktbeschreibung ist es nun, die Wechselwirkung zwischen interagierenden materiellen Körpern zu formulieren.

Schlüsselaufgabe der Kontaktbeschreibung ist die Verhinderung gegenseitiger Durchdringung (*Nichtdurchdringungsbedingung*). Weiterhin muss sichergestellt sein, dass zwischen kontaktierenden Körpern in Richtung der Oberflächen-Normalen ausschließlich Druckspannungen herrschen. Im Falle von Adhäsion können auch begrenzt Zugspannungen übertragen werden, was in dieser Arbeit aber ausgeschlossen wird. Für die tangentialen Anteile der Kontaktspannung ist ein geeignetes Reibungsgesetz zu formulieren. Sind die Reibungseffekte zwischen den Körpern vernachlässigbar klein, können die entsprechenden Anteile im Rahmen einer *reibungsfreien Kontaktformulierung* vernachlässigt werden. Diese Arbeit beschäftigt sich ausschließlich mit reibungsfreiem Kontakt, weshalb die Behandlung von reibungsbehaftetem Kontakt im Folgenden nur schematisch skizziert ist. Eine ausführliche Übersicht zur Modellierung von reibungsbehaftetem Kontakt und entsprechende Algorithmen können beispielsweise in WRIGGERS (2002) gefunden werden.

---

<sup>3</sup>Für hyperelastische Materialien kann die interne Energie auch direkt durch die Verzerrungsenergiefunktion berechnet werden.

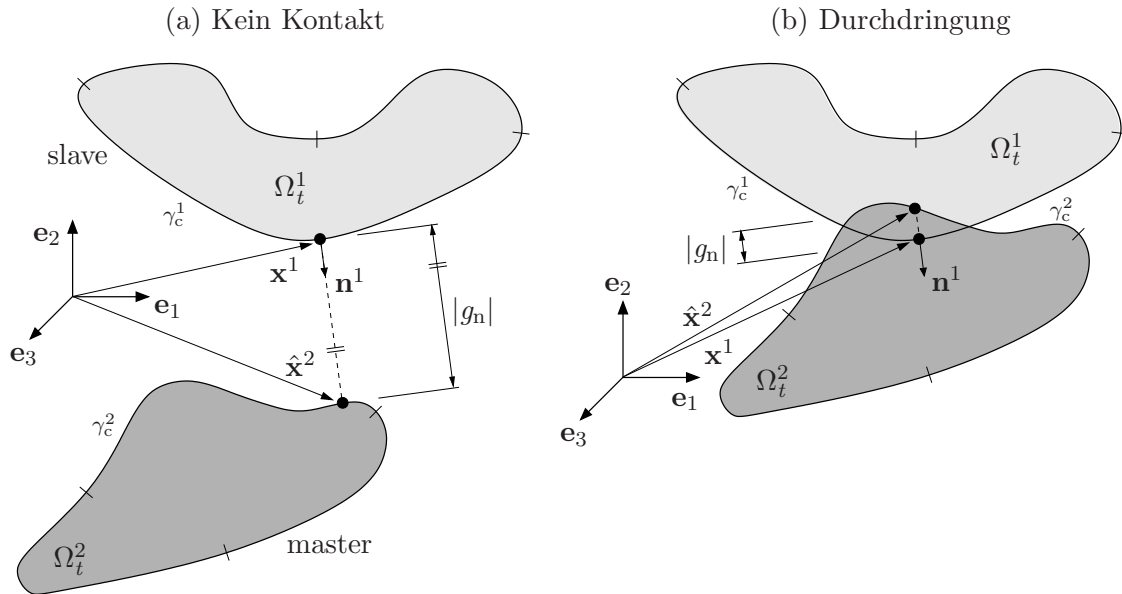
Mathematisch betrachtet kann Kontakt als eine bestimmte Klasse von deformationsabhängigen Randbedingungen aufgefasst werden, in deren Formulierung sowohl die Spannungen als auch die Verschiebungen der Kontaktoberflächen involviert sind. Dementsprechend beginnt die Kontaktbeschreibung in Abschnitt 2.2.1 mit der Einführung kinematischer Definitionen und Größen. Anschließend folgt die Definition der Kontaktspannung sowie die Verknüpfung der Kontaktspannung mit den kinematischen Größen (Abschnitt 2.2.2). Abschließend werden in Abschnitt 2.2.3 mithilfe der eingeführten Größen und Verknüpfungen die Kontakt-Randbedingungen formuliert.

### 2.2.1 Kontaktkinematik

Damit eine kinematische Beschreibung des Kontakts möglich ist, muss zunächst für jede Stelle  $\mathbf{x}^1(\mathbf{X}^1, t) \in \gamma_c^1$  genau diejenige Stelle  $\hat{\mathbf{x}}^2 \in \gamma_c^2$  gefunden werden, welche den Abstand zwischen  $\mathbf{x}^1$  und  $\gamma_c^2$  minimiert. Hierzu wird meistens eine *orthogonale Projektion*

$$\hat{\mathbf{x}}^2(\mathbf{x}^1) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}^2 \in \gamma_c^2} \|\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2\| \quad (2.35)$$

benutzt, welche entweder die Normale der Slave- oder die der Master-Seite zur Bestimmung des Projektionspunkts  $\hat{\mathbf{x}}^2$  verwendet<sup>4</sup>. Im Rahmen der Kontaktformulierung, die



**Abbildung 2.2:** Orthogonale Projektion und Normalklaffung.

<sup>4</sup>In einer kontinuierlichen Beschreibung sind die Normalen kontaktierender Oberflächen identisch, so dass beide Formulierungen äquivalent sind. Bei einer numerischen Lösung gilt dies nur noch annähernd.



in dieser Arbeit weiterentwickelt wird, kommt die Slave-Normale  $\mathbf{n}^1$  zum Einsatz (siehe Abbildung 2.2). Äquivalentes gilt für alle resultierenden kinematischen und kinetischen Kontaktgrößen in Normalenrichtung.

Für einen festen materiellen Punkt  $\mathcal{P}^1$  ändert sich der materielle Punkt  $\hat{\mathcal{P}}^2$ , welcher sich an der aktuellen Projektionsposition  $\hat{\mathbf{x}}^2$  befindet, mit der Zeit. Aus diesem Grund ist in Gleichung (2.35)  $\hat{\mathbf{x}}^2$  als Funktion von  $\mathbf{x}^1$  formuliert. Die Eigenschaften an der Stelle  $\hat{\mathbf{x}}^2$  werden jeweils über den dort aktuell befindlichen Punkt  $\hat{\mathcal{P}}^2$  ausgedrückt:  $\hat{\mathbf{x}}^2 = \hat{\mathbf{x}}^2(\hat{\mathbf{X}}^2, t)$ .

### Normalkontakt

Ist für eine Position  $\mathbf{x}^1$  die Projektionskoordinate  $\hat{\mathbf{x}}^2$  bestimmt, kann die *Normalklaffung*

$$g_n(\mathbf{x}^1) = -\mathbf{n}^1 \cdot (\mathbf{x}^1 - \hat{\mathbf{x}}^2) \quad (2.36)$$

zwischen  $\mathbf{x}^1$  und  $\hat{\mathbf{x}}^2$  berechnet werden. Kontakt herrscht im Falle  $g_n = 0$ . Zustände mit einer positiven Klaffung  $g_n > 0$  erfordern keine Korrektur durch die Kontaktformulierung. Zustände mit  $g_n < 0$  signalisieren eine unphysikalische Durchdringung und müssen durch die Formulierung verhindert werden (siehe Abbildung 2.2(a) bzw. (b))<sup>5</sup>.

### Tangentialer Kontakt

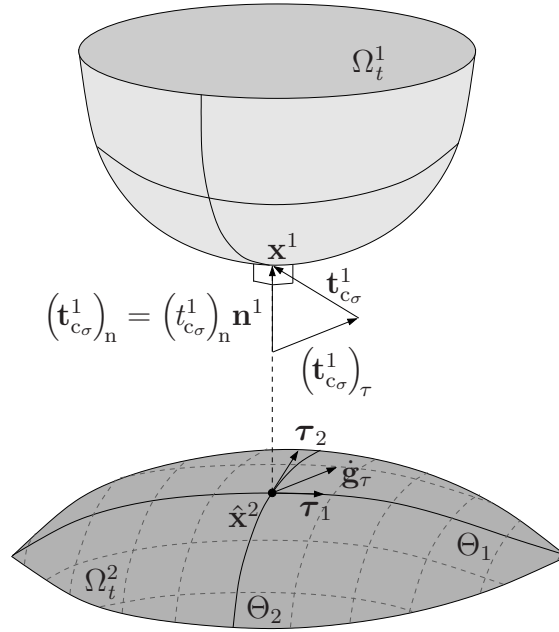
In tangentialer Richtung muss die Relativbewegung zwischen einer Position  $\mathbf{x}^1$  und ihrer aktuellen Projektion  $\hat{\mathbf{x}}^2$  zunächst mit einer geeigneten Größe charakterisiert werden. Da sich die Bewegungsrichtung eines materiellen Körpers im Allgemeinen unter großen Deformationen ändert, ist es sinnvoll hierfür eine Ratenformulierung zu verwenden. Die tangentiale Relativbewegung wird dann mithilfe der *tangentialen Relativgeschwindigkeit*  $\dot{\mathbf{g}}_\tau$  beschrieben.  $\dot{\mathbf{g}}_\tau$  soll dabei auch unter großen Rotationen und für eine eventuell numerisch zulässige Penetration  $g_n < 0$  objektiv bleiben. Diese Anforderungen werden durch die Definition von  $\dot{\mathbf{g}}_\tau$  als zeitliche Änderung der konvektiven Koordinaten  $\hat{\xi}_\beta$  des Projektionspunkts  $\hat{\mathbf{x}}^2$  bezogen auf die Oberflächentangenten  $\boldsymbol{\tau}_\beta$  erfüllt<sup>6</sup>:

$$\dot{\mathbf{g}}_\tau(\mathbf{x}^1) = \mathcal{L}_v \mathbf{g}_\tau := \dot{\hat{\xi}}_\beta \boldsymbol{\tau}_\beta. \quad (2.37)$$

Die Oberflächentangenten  $\boldsymbol{\tau}_\beta$  können als kovariante Basisvektoren eines konvektiven Koordinatensystems im Projektionspunkt  $\hat{\mathbf{x}}^2$  über die Ableitung der Position  $\hat{\mathbf{x}}^2$  nach den Koordinatenlinien  $\Theta_\beta$  gewonnen werden (siehe Abbildung 2.3). Berechnungsvorschriften für  $\dot{\hat{\xi}}_\beta$  und  $\boldsymbol{\tau}_\beta$  sind beispielsweise in WRIGGERS (2002) angegeben.

<sup>5</sup>Die Vorzeichendefinition  $g_n > 0$  für Nichtdurchdringung ist in der Literatur nicht einheitlich.

<sup>6</sup>Die Definition der objektiven Änderung von  $\mathbf{g}_\tau$  wird auch als Lie-Ableitung  $\mathcal{L}_v \mathbf{g}_\tau$  bezeichnet.



**Abbildung 2.3:** Kinematische Kontaktgrößen und Kontaktspannung.

### Variation der kinematischen Kontaktgrößen

Im Rahmen einer schwachen Formulierung (siehe Abschnitt 2.4 und Abschnitt 2.5) werden die Variationen der kinematischen Kontaktgrößen bzw. die virtuellen kinematischen Kontaktgrößen benötigt, d.h. die infinitesimalen Änderungen der Kontaktgrößen bei infinitesimaler Änderung der Verschiebungsfelder. An dieser Stelle werden nur die Endresultate dargestellt. Für eine ausführlich Herleitung sei beispielsweise auf LAURSEN (2003), WRIGGERS (2002) oder WILLNER (2003) verwiesen.

Die Variation der Normalklaffung bestimmt sich mit folgender Beziehung:

$$\delta g_n(\mathbf{x}^1) = -\mathbf{n}^1 \cdot (\delta \mathbf{x}^1 - \delta \hat{\mathbf{x}}^2). \quad (2.38)$$

Die Variation der konvektiven Koordinaten  $\delta \hat{\xi}_\beta$  kann äquivalent zur zeitlichen Ableitung  $\dot{\hat{\xi}}_\beta$  berechnet werden. Oft wird allerdings die vereinfachte Formulierung

$$\delta \hat{\xi}_\beta = \boldsymbol{\tau}_\beta \cdot (\delta \mathbf{x}^1 - \delta \hat{\mathbf{x}}^2) \quad (2.39)$$

verwendet. Diese setzt eine exakte Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung voraus (LAURSEN 2003). Ist diese Forderung nicht erfüllt, beispielsweise durch eine numerische Approximation der Nichtdurchdringungsbedingung, bestimmt Beziehung (2.39) die Variation  $\delta \hat{\xi}_\beta$  nur annähernd.

### 2.2.2 Kontaktspannung

Da die Kontaktbedingungen mit Bezug auf die aktuelle Konfiguration zu formulieren sind, wird die Kontaktspannung  $\mathbf{t}_{c\sigma}^\alpha$  in dieser Arbeit mithilfe von Cauchy'schen Spannungsvektoren dargestellt<sup>7</sup>. Mit Gleichung (2.11) sowie den Spannungstensoren  $\boldsymbol{\sigma}^\alpha$  der kontaktierenden Körper und den Normalen  $\mathbf{n}^\alpha$  der Kontaktflächen  $\gamma_c^\alpha$  resultieren dann folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{c\sigma}^1(\mathbf{x}^1) &= \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n}^1 \\ \mathbf{t}_{c\sigma}^2(\mathbf{x}^2) &= \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}^2.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Durch Auswertung der Impulsbilanz (2.25) in der gemeinsamen Kontaktfläche  $d\gamma_c = d\gamma_c^1 = d\gamma_c^2$  ergibt sich eine Relation zwischen  $\mathbf{t}_{c\sigma}^1$  und  $\mathbf{t}_{c\sigma}^2$ , wobei in der masselosen Kontaktfläche keine Trägheitsterme entstehen:

$$\mathbf{t}_{c\sigma}^1 d\gamma_c^1 = -\mathbf{t}_{c\sigma}^2 d\gamma_c^2.\tag{2.41}$$

Im Weiteren wird mithilfe dieser Beziehung die Kontaktspannung  $\mathbf{t}_{c\sigma}^2$  der Master-Seite durch die Kontaktspannung  $\mathbf{t}_{c\sigma}^1$  der Slave-Seite ersetzt.

Kontakt folgt in Normalen- und in Tangentialrichtung verschiedenen Gesetzesmäßigkeiten. Aus diesem Grund ist es algorithmisch sinnvoll, auch den Kontaktspannungsvektor  $\mathbf{t}_{c\sigma}^1$  komponentenweise in einen Anteil  $(\mathbf{t}_{c\sigma}^1)_n$  normal und einen Anteil  $(\mathbf{t}_{c\sigma}^1)_\tau$  tangential zur Kontaktfläche aufzuteilen:

$$\mathbf{t}_{c\sigma}^1 = (\mathbf{t}_{c\sigma}^1)_n - (\mathbf{t}_{c\sigma}^1)_\tau = (t_{c\sigma}^1)_n \mathbf{n}^1 - (\mathbf{t}_{c\sigma}^1)_\tau \boldsymbol{\tau}_\beta.\tag{2.42}$$

Der tangential Spannungsvektor  $(\mathbf{t}_{c\sigma}^1)_\tau$  ist dabei definiert als Wirkung der Slave- auf die Master-Seite (siehe Abbildung 2.3), woraus das negative Vorzeichen in Gleichung (2.42) resultiert. Zur Formulierung von energetischen Beziehungen ist es sinnvoll,  $(\mathbf{t}_{c\sigma}^1)_\tau$  anteilig in Richtung der Oberflächentangenten  $\boldsymbol{\tau}_\beta$  aufzuteilen, siehe Gleichung (2.42), rechts.

#### Normalkontakt

Berühren sich die Kontaktflächen  $d\gamma_c^1$  und  $d\gamma_c^2$ , folgt aus der kinematischen Bedingung  $g_n = 0$  eine Einschränkung der Verschiebungsfelder. In der hier beschriebenen starken Formulierung resultiert damit automatisch die korrekte Kontakt-Normalspan-

<sup>7</sup>Die zusätzliche Indizierung der Vektoren  $\mathbf{t}_{c\sigma}^\alpha$  mit dem Symbol  $\sigma$  soll bereits andeuten, dass die Kontaktspannung im Rahmen einer integralen Formulierung (siehe Abschnitt 2.4) auch auf einem anderen Weg berechnet werden kann.

nung  $\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_n$ . Im Rahmen einer integralen Formulierung ist es schwierig, die Bedingung  $g_n = 0$  punktweise zu erfüllen. Die Berechnung der Kontakt-Normalspannung erfolgt dementsprechend zumeist auf einem anderen Weg. Verschiedene algorithmische Umsetzungen werden in Abschnitt 2.4.1 vorgestellt.

### Reibungsbehafteter tangentialer Kontakt

Damit die tangentiale Kontaktspannung  $\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau$  ermittelt werden kann, ist es erforderlich diese zuvor durch ein Reibungsgesetz mit der tangentialen Relativgeschwindigkeit (2.37) zu verknüpfen. Im Folgenden sind die hierzu notwendigen Schritte exemplarisch anhand des *Coulomb'schen Reibungsgesetzes* dargestellt.

Phänomenologisch kann reibungsbehafteter Kontakt in die Zustände *Haften* und *Gleiten* eingeteilt werden. Während des Haftzustands sind keine tangentialen Bewegungen erlaubt:

$$\dot{\mathbf{g}}_\tau = 0 \Leftrightarrow \mathbf{g}_\tau = 0. \quad (2.43)$$

Die tangentiale Kontaktspannung wird als Reaktion auf die Restriktion (2.43) ermittelt und liegt betragsmäßig unterhalb eines bestimmten Grenzwerts. Dieser berechnet sich aus dem Absolutwert der aktuellen Kontakt-Normalspannung  $\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_n$  multipliziert mit dem Reibungskoeffizienten  $\mu_\tau$ . Sobald der Betrag der tangentialen Kontaktspannung dem maximal möglichen Wert entspricht, ist die Grenze der Haftreibung erreicht. Dies kann äquivalent durch den Nullwert der *Gleitfunktion*

$$\phi\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right) = \left\| \left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau \right\| - \mu_\tau \left| \left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_n \right| \quad (2.44)$$

beschrieben werden. Bei einer Weiterbelastung erfolgt der Übergang in den Gleitreibungszustand, welcher eine tangentiale Relativbewegung  $\mathbf{g}_\tau \neq 0$  erlaubt. Die tangentiale Kontaktspannung kann dann über die Beziehung

$$\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau = \mu_\tau \left| \left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_n \right| \frac{\dot{\mathbf{g}}_\tau}{\|\dot{\mathbf{g}}_\tau\|} \quad (2.45)$$

berechnet werden. Dabei besitzen  $\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau$  und  $\dot{\mathbf{g}}_\tau$  aufgrund der Definition in Gleichung (2.42) dasselbe Vorzeichen. Mit einer allgemeineren Notation kann Beziehung (2.45) auch in der folgenden Form ausgedrückt werden:

$$\dot{\mathbf{g}}_\tau = \dot{\gamma} \frac{\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau}{\left| \left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau \right|}, \quad \dot{\gamma} \geq 0. \quad (2.46)$$

Komplexere Reibungsbeschreibungen berücksichtigen über den einfachen Zusammenhang (2.45) hinaus beispielsweise den Einfluss von Geschwindigkeit oder Temperatur auf den Reibungskoeffizienten  $\mu_\tau$ . Für eine ausführliche Übersicht zu verschiedenen Reibungsformulierungen sei auf WRIGGERS (2002) verwiesen.

### 2.2.3 Kontakt-Randbedingungen

Mithilfe der eingeführten kinematischen und kinetischen Kontaktgrößen können die resultierenden Kontakt-Randbedingungen kompakt in Form der *Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen* (KKT-Bedingungen)<sup>8</sup> formuliert werden. Für Normalkontakt lauten diese

$$\begin{aligned} g_n &\geq 0 \\ \left(t_{c_\sigma}^1\right)_n &\leq 0 \\ \left(t_{c_\sigma}^1\right)_n g_n &= 0, \end{aligned} \tag{2.47}$$

wobei Gleichung (2.47)<sub>1</sub> gegenseitige Durchdringung verhindert, Gleichung (2.47)<sub>2</sub> Zugspannungen in der Kontaktfläche ausschließt und Gleichung (2.47)<sub>3</sub> Spannungen ungleich null nur für den Kontaktfall erlaubt.

Die tangentiale Kontaktbeschreibung wird durch äquivalente Bedingungen gesteuert:

$$\begin{aligned} \phi &\leq 0 \\ \dot{\mathbf{g}}_\tau &= \dot{\gamma} \frac{\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau}{\left|\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau\right|}, \quad \dot{\gamma} \geq 0 \\ \dot{\gamma} \phi &= 0. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dabei beschränkt Gleichung (2.48)<sub>1</sub> den Betrag der Tangentialspannungen auf Werte kleiner oder gleich der Haftspannungsgrenze. Gleichung (2.48)<sub>2</sub> stellt sicher, dass die Tangentialspannung immer entgegen der Bewegungsrichtung<sup>9</sup> wirkt. Beziehung (2.48)<sub>3</sub> erlaubt im Falle von Haftreibung keine tangentialen Relativverschiebungen.

In dieser Arbeit wird eine reibungsfreie Kontaktformulierung verwendet, so dass anstatt von Gleichung (2.48) die folgende Beziehung benutzt werden kann:

$$\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau = \mathbf{0}. \tag{2.49}$$

<sup>8</sup>Für Normalkontakt werden die KKT-Bedingungen auch Hertz-Signorini-Moreau-Bedingungen genannt.

<sup>9</sup>Aufgrund der Definition in Gleichung (2.42) besitzen  $\left(\mathbf{t}_{c_\sigma}^1\right)_\tau$  und  $\dot{\mathbf{g}}_\tau$  trotzdem dasselbe Vorzeichen.

## 2.3 Anfangsrandwertproblem der Elastodynamik

Mit der lokalen Form der Impulsbilanz (2.27), der kinematischen Gleichung (2.10) sowie den Werkstoffgesetzen (2.19) oder (2.22) ist ein System von nichtlinearen gekoppelten partiellen Differentialgleichungen gegeben, welches den Zustand im Inneren der Körper  $\mathcal{B}^\alpha$  komplett beschreibt. Ergänzt durch die Kontaktbedingungen (siehe Abschnitt 2.2), die Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen sowie die Anfangsbedingungen, welche Verschiebung und Geschwindigkeit im kompletten Gebiet für den Zeitpunkt  $t_0$  festlegen, ist das Anfangsrandwertproblem der Elastodynamik vollständig beschrieben. In Abbildung 2.4 sind alle relevanten Gleichungen noch einmal zusammengefasst. Vorgeschriebene Größen sind dabei mit einem umgedrehten Dachsymbol ( $\checkmark$ ) gekennzeichnet. Die Kontakt-Randbedingungen in Tangentialrichtung sind sowohl für den reibungsbehafteten als auch für den reibungsfreien Fall dargestellt. Wie schon in Abschnitt 2.2 erwähnt, wird in dieser Arbeit die reibungsfreie Formulierung verwendet.

Prinzipiell ist es möglich, in einem materiellen Punkt in verschiedenen Raumrichtungen verschiedene Arten von Randbedingungen vorzuschreiben. Auf eine komponentenweise Definition der Randbedingungen wird im Folgenden jedoch verzichtet, um eine übersichtliche Notation zu bewahren.

## 2.4 Schwache Form (Entwicklung mit der Methode der gewichteten Residuen)

Als Basis für eine numerische Lösung des zugrundeliegenden Problems mit der Methode der finiten Elemente wird die starke Formulierung aus Abschnitt 2.3 in eine schwache Form überführt. Der Ausdruck „schwach“ bedeutet dabei, dass die Problemstellung nicht mehr punktweise sondern integral für das komplette Definitionsgebiet definiert ist. Zur Entwicklung einer schwachen Formulierung mittels der *Methode der gewichteten Residuen* wird ein ausgewählter Teil der problembeschreibenden Gleichungen als Residuum formuliert, mit einer Wichtungsfunktion multipliziert und anschließend über das jeweilige Definitionsgebiet integriert. Aufgrund dieser Behandlung ist es üblich, die entsprechenden Gleichungen als „schwach erfüllt“ zu bezeichnen. Alle verbleibenden Gleichungen werden punktweise in die integrale Formulierung eingesetzt und sind somit weiterhin „stark erfüllt“.

Die schwache Formulierung ist zunächst äquivalent zur starken Form, die Lösungsräume von starker und schwacher Form sind identisch. Allerdings stellt die schwache Formulierung geringere Anforderungen an die Differenzierbarkeit der Feldgrößen, da be-

Lokale Form der Impulsbilanz

$$\rho_0^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha = \text{Div} \mathbf{P}^\alpha + \rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha \quad \text{in } \Omega^\alpha \times [t_0, T]$$

Kinematik: Green-Lagrange'sche Verzerrung

$$\mathbf{E}^\alpha = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^\alpha)^\top \cdot \mathbf{F}^\alpha - \mathbf{I}]$$

Konstitutive Beziehungen

$$\mathbf{S}^\alpha = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}^\alpha) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}^\alpha = \mathbb{C}^\alpha : \mathbf{E}^\alpha \quad (\text{St. Venant-Kirchhoff'sches Material})$$

$$\mathbf{S}^\alpha = \lambda \ln J^\alpha (\mathbf{C}^\alpha)^{-1} + \mu [\mathbf{I} - (\mathbf{C}^\alpha)^{-1}] \quad (\text{Neo-Hooke'sches Material})$$

Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u}_0^\alpha = \check{\mathbf{u}}_0^\alpha \quad \text{in } \Omega_0^\alpha$$

$$\dot{\mathbf{u}}_0^\alpha = \check{\dot{\mathbf{u}}}_0^\alpha \quad \text{in } \Omega_0^\alpha$$

Dirichlet-Randbedingungen

$$\mathbf{u}^\alpha = \check{\mathbf{u}}^\alpha \quad \text{auf } \gamma_d^\alpha \times [t_0, T]$$

Neumann-Randbedingungen

$$\mathbf{P}^\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}}^\alpha = \check{\mathbf{t}}_0^\alpha \quad \text{auf } \gamma_n^\alpha \times [t_0, T]$$

Normalkontakt-Randbedingungen

$$g_n \geq 0 \quad \text{auf } \gamma_c^1 \times [t_0, T]$$

$$\left( \mathbf{t}_{c\sigma}^1 \right)_n \leq 0$$

$$\left( \mathbf{t}_{c\sigma}^1 \right)_n g_n = 0$$

Tangentialkontakt-Randbedingungen  
(reibungsbefahet)

$$\phi \leq 0 \quad \text{auf } \gamma_c^1 \times [t_0, T]$$

$$\dot{\mathbf{g}}_\tau = \dot{\gamma} \frac{\left( \mathbf{t}_{c\sigma}^1 \right)_\tau}{\left| \left( \mathbf{t}_{c\sigma}^1 \right)_\tau \right|}, \quad \dot{\gamma} \geq 0$$

$$\dot{\gamma} \phi = 0$$

Tangentialkontakt-Randbedingungen  
(reibungsfrei)

$$\left( \mathbf{t}_{c\sigma}^1 \right)_\tau = \mathbf{0} \quad \text{auf } \gamma_c^1 \times [t_0, T]$$

**Abbildung 2.4:** Starke Form des elastodynamischen Anfangsrandwertproblems.

stimmte Gebietsterme mittels partieller Integration umgeformt werden. Im Rahmen einer numerischen Näherungslösung werden die Wichtungsfunktionen der schwach erfüllten Gleichungen diskretisiert. Infolgedessen dürfen die schwach erfüllten Beziehungen einen punktuellen Fehler aufweisen, während die stark erfüllten Gleichungen weiterhin überall exakt gelten.

Außer der Integrierbarkeit stellt die Methode der gewichteten Residuen keine weiteren Anforderungen an die beschreibenden Gleichungen. Somit kann sie auch auf dissipative Prozesse, welche beispielsweise plastisches Materialverhalten oder reibungsbehaftete Kontaktvorgänge beinhalten, angewendet werden. Als Integrationskonfiguration muss jeweils die Bezugskonfiguration der zugrundeliegenden Ausdrücke gewählt werden. Eine Transformation von der Momentan- in die Referenzkonfiguration oder umgekehrt ist aber problemlos möglich. In der vorliegenden Arbeit werden alle Kontaktterme bezüglich der aktuellen, alle anderen Ausdrücke bezüglich der Ausgangskonfiguration dargestellt. Dies erlaubt eine effiziente numerische Umsetzung.

Im Folgenden werden in Abschnitt 2.4.1 zunächst die Spannungsausdrücke auf dem Kontaktrand als Residuum formuliert. Anschließend wird mit der resultierenden Beziehung sowie den Residuen der Impulsbilanz und der Neumann-Randbedingungen eine schwache Formulierung erarbeitet, welche als Prinzip der virtuellen Verschiebungen bekannt ist (Abschnitt 2.4.2). In Abschnitt 2.4.3 folgt die Herleitung einer schwachen Formulierung der Nichtdurchdringungsbedingung. Zuletzt werden die resultierenden Gleichungen bzw. Ungleichungen als komplettes Gleichungs- bzw. Ungleichungssystem noch einmal zusammengefasst (Abschnitt 2.4.4).

### 2.4.1 Residuum des Gleichgewichts auf dem Kontaktrand

Im Hinblick auf eine Residuumsformulierung des Gleichgewichts auf dem Kontaktrand erfolgt zuerst die Einführung eines zusätzlichen Kontaktspannungsfelds

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{t}_{c_n} - \mathbf{t}_{c_\tau} = t_{c_n} \mathbf{n}^1 - t_{c_{\tau\beta}} \boldsymbol{\tau}_\beta. \quad (2.50)$$

Anschließend werden mithilfe von  $\mathbf{t}_c$  die Gleichungen (2.40) und (2.41) als Residuen formuliert:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_c - \mathbf{t}_{c_\sigma}^1 &= \mathbf{t}_c - \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n}^1 = \mathbf{0} \\ -\mathbf{t}_c - \mathbf{t}_{c_\sigma}^2 &= -\mathbf{t}_c - \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}^2 = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Zur Definition der Kontaktspannung  $\mathbf{t}_c$  existieren verschiedene Verfahren. Im Folgenden werden die zwei gängigsten Methoden vorgestellt. Weitere Möglichkeiten finden sich beispielsweise in WRIGGERS (2002) oder LAURSEN (2003).



## Regularisierung der Kontaktbedingungen

Wird auf die exakte Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung  $g_n = 0$  verzichtet, kann  $t_{c_n}$  anhand eines Parameters  $\epsilon_n$  (*Penalty-Parameter*) als Funktion der Durchdringungstiefe berechnet werden (Abbildung 2.5(a), Kurve (ii)). Dementsprechend führt eine Lockerung der Haftbedingung  $\dot{g}_\tau = 0$  auf die tangentiale Spannungskomponente  $t_{c_\tau}$ , siehe Kurve (ii) in Abbildung 2.5(b). Der Vorteil dieser Regularisierungen liegt darin, dass  $t_c$  nicht als zusätzliche Unbekannte eingeführt werden muss. Als Nachteil ist jedoch die nur approximative Erfüllung der Kontaktbedingungen zu nennen. Für zufriedenstellende Ergebnisse sind zudem relativ große Penalty-Parameter notwendig, wodurch wiederum ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem entsteht.

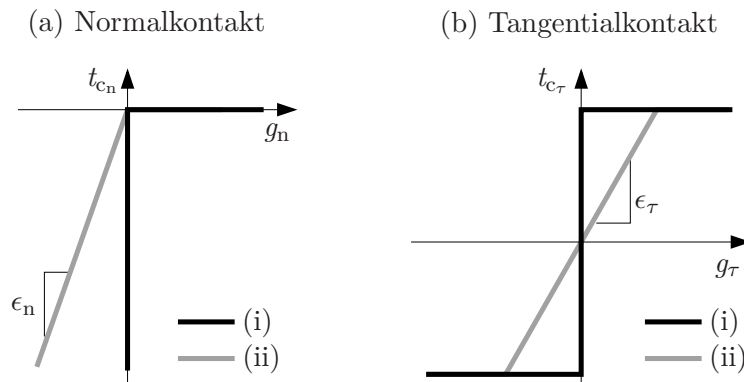


Abbildung 2.5: KKT-Bedingungen (eindimensionale Veranschaulichung).

## Exakte Erfüllung der Kontaktbedingungen

In dieser Arbeit wird die Nichtdurchdringungsbedingung exakt erfüllt (siehe Kurve (i) in Abbildung 2.5(a)). Damit soll eine unphysikalische Durchdringung sowie eine schlechte Konditionierung des resultierenden Gleichungssystems vermieden werden. Die Kontaktspannung  $t_c$  wird hierfür als zusätzliche Unbekannte eingeführt. Sie berechnet sich als Reaktion auf die integral formulierte Nichtdurchdringungsbedingung (Abschnitt 2.4.3). Die tangentialen Spannungskomponenten  $t_{c_{\tau\beta}}$  werden dabei zu null gesetzt. Im Rahmen einer reibungsbehafteten Formulierung wäre es möglich,  $t_{c_\tau}$  als Antwort auf die exakte Einhaltung der Haftbedingung zu bestimmen, siehe Abbildung 2.5(b), Kurve (i).

### 2.4.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PvV) kann durch Anwendung der Methode der gewichteten Residuen auf die lokale Form der Impulsbilanz und die Neumann-

Randbedingungen gewonnen werden. Dabei wird die Wichtungsfunktion  $\delta \mathbf{u}^\alpha$  als *virtuelle Verschiebung* identifiziert, die resultierenden Integralausdrücke  $\delta \Pi_{\text{PvV}}^\alpha$  stellen *virtuelle Arbeiten* dar. Bei Kontaktproblemen ist zusätzlich die virtuelle Arbeit aus der Kontaktspannung zu berücksichtigen. Dazu werden die Gleichungen (2.51)<sub>1</sub> und (2.51)<sub>2</sub> formell wie die Spannungsausdrücke auf dem Neumann-Rand behandelt:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_{\text{PvV}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \mathbf{t}_c) &= \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \int_{\Omega_0^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \left[ \rho_0^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha - \text{Div} \mathbf{P}^\alpha - \rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha \right] d\Omega_0^\alpha \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\Gamma_n^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \left[ \check{\mathbf{t}}_0^\alpha - \mathbf{P}^\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}}^\alpha \right] d\Gamma_n^\alpha \right\} \\
 &\quad - \int_{\gamma_c^1} \delta \mathbf{u}^1 \cdot \left[ \mathbf{t}_c - \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n}^1 \right] d\gamma_c^1 - \int_{\gamma_c^2} \delta \mathbf{u}^2 \cdot \left[ -\mathbf{t}_c - \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \right] d\gamma_c^2 \\
 &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

Mithilfe von Beziehung (2.41) ist es möglich, den letzten Ausdruck in Gleichung (2.52) durch einen Integralausdruck über die Slave-Kontaktfläche zu ersetzen:

$$\int_{\gamma_c^2} \delta \mathbf{u}^2 \cdot \left[ -\mathbf{t}_c - \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \right] d\gamma_c^2 = \int_{\gamma_c^1} \delta \mathbf{u}^2 \cdot \left[ -\mathbf{t}_c + \boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n}^1 \right] d\gamma_c^1. \tag{2.53}$$

Zusätzlich wird der Divergenzterm aus der ersten Zeile von Gleichung (2.52) mittels partieller Integration umgeformt, wodurch sich der Ableitungsoperator auf die virtuelle Größe verschiebt. Anschließend wird der Kontaktanteil des Oberflächenintegrals noch in die aktuelle Konfiguration geschoben:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_0^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \left[ \text{Div} \mathbf{P}^\alpha \right] d\Omega_0^\alpha &= \int_{\Gamma^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \left[ \mathbf{P}^\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}}^\alpha \right] d\Gamma^\alpha - \int_{\Omega_0^\alpha} \mathbf{P}^\alpha : \text{Grad}(\delta \mathbf{u}^\alpha) d\Omega_0^\alpha \\
 &= \int_{\Gamma_n^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \left[ \mathbf{P}^\alpha \cdot \bar{\mathbf{n}}^\alpha \right] d\Gamma_n^\alpha + \int_{\gamma_c^\alpha} \delta \mathbf{u}^\alpha \cdot \left[ \boldsymbol{\sigma}^\alpha \cdot \mathbf{n}^\alpha \right] d\gamma_c^\alpha \\
 &\quad - \int_{\Omega_0^\alpha} (\mathbf{F}^\alpha \cdot \mathbf{S}^\alpha) : \text{Grad}(\delta \mathbf{u}^\alpha) d\Omega_0^\alpha.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Äquivalent zur Vorgehensweise in Gleichung (2.53) kann auch in Gleichung (2.54) die Relation (2.41) zwischen der Slave- und der Master-Kontaktspannung benutzt werden, um das Integral über die Master-Kontaktfläche durch ein Integral über die Slave-Kontaktfläche zu ersetzen:

$$\int_{\gamma_c^2} \delta \mathbf{u}^2 \cdot \left[ \boldsymbol{\sigma}^2 \cdot \mathbf{n}^2 \right] d\gamma_c^2 = \int_{\gamma_c^1} \delta \mathbf{u}^2 \cdot \left[ -\boldsymbol{\sigma}^1 \cdot \mathbf{n}^1 \right] d\gamma_c^1. \tag{2.55}$$

Schließlich liefert Verwenden der Identität  $(\mathbf{F}^\alpha \cdot \mathbf{S}^\alpha) : \text{Grad}(\delta \mathbf{u}^\alpha) = \delta \mathbf{E}^\alpha : \mathbf{S}^\alpha$  in der letzten Zeile von Gleichung (2.54) und anschließendes Einsetzen der Gleichungen (2.54)

und (2.53) in Gleichung (2.52) den endgültigen virtuellen Arbeitsausdruck:

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi_{\text{PvV}} &= \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \overbrace{\int_{\Omega_0^\alpha} \delta\mathbf{u}^\alpha \cdot [\rho_0^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha] d\Omega_0^\alpha}^{\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\alpha,\text{kin}}} + \overbrace{\int_{\Omega_0^\alpha} \delta\mathbf{E}^\alpha : \mathbf{S}^\alpha d\Omega_0^\alpha}^{\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\alpha,\text{int}}} \right. \\
 &\quad \left. - \underbrace{\int_{\Omega_0^\alpha} \delta\mathbf{u}^\alpha \cdot [\rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha] d\Omega_0^\alpha - \int_{\Gamma_n^\alpha} \delta\mathbf{u}^\alpha \cdot \check{\mathbf{t}}_0^\alpha d\Gamma_n^\alpha}_{-\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\alpha,\text{ext}}} \right\} - \underbrace{\int_{\gamma_c^1} (\delta\mathbf{u}^1 - \delta\mathbf{u}^2) \cdot \mathbf{t}_c d\gamma_c^1}_{\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\text{c}}} \\
 &= 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Dabei ist es günstig, die virtuelle Kontaktarbeit noch in einen Normal- und einen Tangentialanteil zu zerlegen:

$$\begin{aligned}
 \delta\Pi_{\text{PvV}}^{\text{c}} &= - \int_{\gamma_c^1} t_{\text{cn}} \mathbf{n}^1 \cdot (\delta\mathbf{u}^1 - \delta\mathbf{u}^2) d\gamma_c^1 + \int_{\gamma_c^1} (t_{\text{c}\tau\beta} \boldsymbol{\tau}_\beta) \cdot (\delta\mathbf{u}^1 - \delta\mathbf{u}^2) d\gamma_c^1 \\
 &= \int_{\gamma_c^1} t_{\text{cn}} \delta g_n d\gamma_c^1 + \int_{\gamma_c^1} t_{\text{c}\tau\beta} \delta \hat{\xi}_\beta d\gamma_c^1.
 \end{aligned} \tag{2.57}$$

Für reibungsfreien Kontakt verschwindet die virtuelle Arbeit der tangentialen Spannungskomponenten, so dass folgende Beziehung resultiert:

$$\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\text{c}} = \int_{\gamma_c^1} t_{\text{cn}} \delta g_n d\gamma_c^1. \tag{2.58}$$

In Gleichung (2.57) sind zur kompakten Darstellung der resultierenden Terme die Aufteilung des Kontaktspannungsvektors aus Gleichung (2.42) und die Variationen der kinematischen Kontaktgrößen aus (2.38) und (2.39) verwendet worden. In Beziehung (2.56) werden Werkstoff- und Kinematikgleichungen sowie die Dirichlet-Randbedingungen weiterhin stark erfüllt. Die entsprechenden Beziehungen sind allerdings nicht eingesetzt worden, um die Darstellung übersichtlich zu halten.

Damit die integralen Ausdrücke (2.56) und (2.57) ohne das Auftreten von Singularitäten ausgewertet werden können, müssen die Verschiebungsfelder  $\mathbf{u}^\alpha$  quadratintegrierbare erste Ableitungen besitzen. Gleichzeitig müssen die Verschiebungsfelder die Dirichlet-Randbedingungen erfüllen:

$$\mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{U}_t^\alpha \quad \mathcal{U}_t^\alpha = \left\{ \mathbf{u}^\alpha : \Omega_0^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \mathbf{u}^\alpha \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^\alpha), \mathbf{u}^\alpha = \check{\mathbf{u}}^\alpha \text{ auf } \gamma_d^\alpha \right\}. \tag{2.59}$$

$\mathbf{H}^1$  bezeichnet dabei den Sobolew-Raum von Funktionen mit quadratintegrierbaren ersten Ableitungen,  $n_{\text{dim}}$  die räumliche Dimension des untersuchten Problems. An die virtuellen Verschiebungen  $\delta\mathbf{u}^\alpha$  werden bezüglich der Integrierbarkeit äquivalente Anforderungen gestellt, allerdings müssen die virtuellen Verschiebungen auf dem Verschie-

bungsrand verschwinden:

$$\delta \mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha \quad \mathcal{V}^\alpha = \left\{ \delta \mathbf{u}^\alpha : \Omega_0^\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} \mid \delta \mathbf{u}^\alpha \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^\alpha), \delta \mathbf{u}^\alpha = \mathbf{0} \text{ auf } \gamma_d^\alpha \right\}. \quad (2.60)$$

Das Kontaktspannungsfeld  $\mathbf{t}_c = t_{c_n} \mathbf{n}^1$  darf Diskontinuitäten aufweisen, da in der virtuellen Kontaktarbeit (2.57) keine Ableitungen der Kontaktspannung auftreten. Gleichzeitig muss die auf die Kontaktspannung bezogene KKT-Bedingung (2.47)<sub>2</sub> erfüllt sein, da ausschließlich Druck-Normalspannungen erlaubt sind:

$$t_{c_n} \in \mathcal{M}_n^- \quad \mathcal{M}_n^- = \left\{ t_{c_n} : \Gamma_c^1 \rightarrow \mathbb{R}^- \mid t_{c_n} \in C^{-1}(\Gamma_c^1), t_{c_n} \leq 0 \right\}. \quad (2.61)$$

Der Raum  $C^{-1}$  enthält dabei alle skalarwertigen Funktionen, welche punktuelle Diskontinuitäten aufweisen dürfen. Für eine ausführliche Diskussion zur Definition von Funktionenräumen im Allgemeinen bzw. von Funktionenräumen für die hier eingeführten und weitere Kontaktgrößen sei auf KIKUCHI UND ODEN (1988), WOHLMUTH (2001) und HUGHES (2000) verwiesen.

### 2.4.3 Integrale Nichtdurchdringungsbedingung

Wie die Werkstoff- und die Kinematikgleichung könnte prinzipiell auch die Nichtdurchdringungsbedingung (2.47)<sub>1</sub> stark als Nebenbedingung in die virtuellen Arbeitsausdrücke eingesetzt werden. Dafür müssten allerdings auch im Rahmen einer numerischen Lösung die Verschiebungsfelder der Slave- und der Master-Kontaktfläche identische Verläufe annehmen können, was nur in einigen Sonderfällen möglich ist (beispielsweise „Knoten-zu-Knoten“-Kontakt, siehe Kapitel 3.2.2). Aus diesem Grund wird die Nichtdurchdringungsbedingung mit der Methode der gewichteten Residuen als integrale Forderung formuliert:

$$\delta \Pi^{\text{nd}} = \int_{\gamma_c^1} \delta t_{c_n} g_n \, d\gamma_c^1 \geq 0. \quad (2.62)$$

Als Integrationsgebiet wurde dabei die Slave-Kontaktfläche  $\gamma_c^1$  gewählt, da die Normalklaffung (2.36) in Abhängigkeit der materiellen Punkte von  $\gamma_c^1$  definiert ist. Die Wichtungsfunktion

$$\delta t_{c_n} \in \mathcal{M}_n^+ \quad \mathcal{M}_n^+ = \left\{ \delta t_{c_n} : \Gamma_c^1 \rightarrow \mathbb{R}^+ \mid \delta t_{c_n} \in C^{-1}(\Gamma_c^1), \delta t_{c_n} \geq 0 \right\} \quad (2.63)$$

kann als virtuelle Kontakt-Normalspannung identifiziert werden, da  $\delta \Pi^{\text{nd}}$  einen Energieausdruck darstellt.

### 2.4.4 Gesamtformulierung

Zusammenfassend ist das schwach formulierte Kontaktproblem durch folgende Beschreibung definiert: Finde ein zulässiges Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  mit  $\mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{U}_t^\alpha$  und ein zulässiges Kontaktspannungsfeld  $\mathbf{t}_c$  mit  $t_{c_n} \in \mathcal{M}_n^-$  so, dass die Beziehungen

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{PvV} &= \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \delta\Pi_{PvV}^{\alpha,\text{kin}} + \delta\Pi_{PvV}^{\alpha,\text{int}} - \delta\Pi_{PvV}^{\alpha,\text{ext}} \right\} + \delta\Pi_{PvV}^c = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha \\ \delta\Pi^{\text{nd}} &= \int_{\gamma_c^1} \delta t_{c_n} g_n d\gamma_c^1 \geq 0 \quad \forall \delta t_{c_n} \in \mathcal{M}_n^+ \end{aligned} \quad (2.64)$$

erfüllt sind.

In der Formulierung  $\delta\Pi^{\text{nd}} \geq 0$  ist neben der Suche nach der Verschiebungs- und der Kontaktspannungslösung implizit auch die Suche nach einer momentan aktiven Kontaktzone mit  $g_n = 0$  und  $\delta t_{c_n} > 0$  bzw. einer inaktiven Kontaktzone mit  $g_n > 0$  und  $\delta t_{c_n} = 0$  enthalten. Für Probleme mit großen Deformationen werden diese Schritte normalerweise innerhalb einer iterativen Prozedur sequentiell behandelt. Zuerst erfolgt die Ermittlung einer momentan aktiven Kontaktzone. Anschließend kann für die aktive Kontaktzone das Ungleichungssystem (2.64) als Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{PvV} &= \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \delta\Pi_{PvV}^{\alpha,\text{kin}} + \delta\Pi_{PvV}^{\alpha,\text{int}} - \delta\Pi_{PvV}^{\alpha,\text{ext}} \right\} + \delta\Pi_{PvV}^c = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha \\ \delta\Pi^{\text{nd}} &= \int_{\gamma_c^1} \delta t_{c_n} g_n d\gamma_c^1 = 0 \quad \forall \delta t_{c_n} \in \mathcal{M}_n^{+/-} \end{aligned} \quad (2.65)$$

formuliert werden. Im Folgenden wird angenommen, dass die momentan aktive Kontaktzone bekannt ist. Entsprechende Algorithmen zur Unterscheidung zwischen aktiven und inaktiven Kontaktbereichen sind in Kapitel 5.3 dargestellt.

## 2.5 Potentialformulierung

Alternativ zur Formulierung mit der Methode der gewichteten Residuen kann eine schwache Form auch mit den Methoden der Variationsrechnung durch die Variation eines Potentials gewonnen werden. Diese Verfahrensweise ist weniger allgemein als die Methode der gewichteten Residuen, da sie die Existenz einer Potentialfunktion voraussetzt. Dissipative Prozesse, wie beispielsweise reibungsbehafteter Kontakt oder plastische Deformationen, können somit nicht beschrieben werden. Allerdings erlaubt die Variationsformulierung eine besonders anschauliche Charakterisierung von verschiedenen Verfahren zur Berücksichtigung der Kontaktbedingungen. Als Ergänzung und Ver-

gleich zu der Vorgehensweise in Abschnitt 2.4 wird deswegen im Folgenden eine schwache Formulierung basierend auf einem Variationsprinzip hergeleitet (Abschnitt 2.5.1). Diese kann anschließend mit verschiedenen Kontaktbehandlungen kombiniert werden (Abschnitte 2.5.2 bis 2.5.5). Auf die Berücksichtigung von dynamischen Anteilen wird hierbei verzichtet, da die Formulierung eine ergänzende Betrachtung darstellt und nicht als Lösungsbasis dienen soll.

### 2.5.1 Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Das *Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie* (PMPE) besagt, dass das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$ , welches den Gleichgewichtszustand definiert, auf eine minimale potentielle Systemenergie führt:

$$\Pi_{\text{PMPE}}(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \overbrace{\int_{\Omega_0^\alpha} w^\alpha(\mathbf{E}^\alpha) d\Omega_0^\alpha}^{\Pi_{\text{PMPE}}^{\alpha,\text{int}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha d\Omega_0^\alpha - \int_{\Gamma_n^\alpha} \check{\mathbf{t}}_0^\alpha \cdot \mathbf{u}^\alpha d\Gamma_n^\alpha}_{-\Pi_{\text{PMPE}}^{\alpha,\text{ext}}} \right\} = \min. \quad (2.66)$$

$\Pi_{\text{PMPE}}$  stellt hierbei die Potentialfunktion des PMPE dar. Die gesuchte Lösungsfunktion  $\mathbf{u}$  mit  $\mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{U}_t^\alpha$  lässt sich durch die Nullstelle der ersten Variation des Potentials ermitteln:

$$\delta\Pi_{\text{PMPE}}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \overbrace{\int_{\Omega_0^\alpha} \delta\mathbf{E}^\alpha : \mathbf{S}^\alpha d\Omega_0^\alpha}^{\delta\Pi_{\text{PMPE}}^{\alpha,\text{int}}} - \underbrace{\int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha \cdot \delta\mathbf{u}^\alpha d\Omega_0^\alpha - \int_{\Gamma_n^\alpha} \check{\mathbf{t}}_0^\alpha \cdot \delta\mathbf{u}^\alpha d\Gamma_n^\alpha}_{-\delta\Pi_{\text{PMPE}}^{\alpha,\text{ext}}} \right\} = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha. \quad (2.67)$$

Dabei wurde die Beziehung  $\mathbf{S}^\alpha = \partial w^\alpha(\mathbf{E}^\alpha)/\partial \mathbf{E}^\alpha$  aus Gleichung (2.16) berücksichtigt. Gleichung (2.67) stellt eine integrale Formulierung der statischen Anteile der Impulsbilanz und der Neumann-Randbedingungen dar. Im Rahmen einer Variationsformulierung werden diese integral erfüllten Beziehungen *Euler-Lagrange-Gleichungen* genannt. Die verbleibenden Gleichungen gelten als *Nebenbedingungen* weiterhin in punktwieser starker Form. Skalarwertige Funktionen wie die Potentialfunktion des PMPE, deren Argument ebenfalls eine Funktion ist, werden als *Funktionale* bezeichnet. Für eine ausführlichere Einführung in die Themengebiete Variationsmethoden und mechanische Variationsfor-

mulierungen sei beispielsweise auf GELFAND UND FOMIN (2000), ODEN UND REDDY (1976) oder WASHIZU (1975) verwiesen.

Mithilfe des PMPE können ausschließlich statische Probleme beschrieben werden. Eine Verallgemeinerung des PMPE auf dynamische Probleme ist durch das *Hamilton'sche Prinzip* gegeben. Wie bereits erwähnt, wird an dieser Stelle auf die Berücksichtigung von dynamischen Anteilen verzichtet, da die Variationsformulierung nicht als Basis für das numerische Lösungsverfahren dienen soll. Stattdessen wird sie benutzt, um verschiedene Methoden zur Berücksichtigung von Kontaktbedingungen vorzustellen. Diese werden besonders anschaulich durch die Einführung eines zusätzlichen Funktionals  $\Pi^c$  berücksichtigt. Die Konstruktion von  $\Pi^c$  kann mit aus der Optimierungstheorie bekannten Methoden erfolgen, siehe beispielsweise LUENBERGER UND YE (2008). Anschließend liefert die Variation

$$\delta\Pi = \delta\Pi_{\text{PMPE}} + \delta\Pi^c = 0 \quad (2.68)$$

des gesamten Potentials die gesuchten Lösungsfelder, hier die Verschiebung und gegebenenfalls noch zusätzlich eingeführte Unbekannte. Im Folgenden werden einige der wichtigsten und am weitesten verbreiteten Methoden zur Berücksichtigung von Kontaktbedingungen vorgestellt und verglichen. Die Ausführungen orientieren sich an der Darstellung, die in der Literatur üblich ist. Dadurch resultiert für die Kontaktspannung teilweise eine andere Vorzeichenkonvention als in Abschnitt 2.4. An entsprechenden Stellen wird hierauf hingewiesen. Da eine Herleitung mit der Methode der gewichteten Residuen ebenfalls möglich wäre, sind die beschriebenen Kontaktbehandlungen nicht auf konservative Probleme beschränkt.

## 2.5.2 Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren

Die *Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren* überführt ausgewählte Nebenbedingungen einer Potentialformulierung durch Multiplikation mit einem zusätzlichen Unbekanntefeld und anschließender Integration über das Definitionsgebiet in Euler-Lagrange-Gleichungen. Die zusätzlichen Unbekannten werden dabei als *Lagrange'sche Multiplikatoren* bezeichnet. Für Kontaktprobleme stellt die Nichtdurchdringungsbedingung (2.47)<sub>1</sub> die entsprechende Nebenbedingung dar. Multiplikation mit dem Lagrange'schen Multiplikatorfeld  $\lambda_n$  und anschließende Integration über den Slave-Kontaktrand führt dann auf das zugehörige Kontaktpotential

$$\Pi_{\text{LM}}^c(\mathbf{u}, \lambda_n) = \int_{\gamma_c^1} \lambda_n g_n \, d\gamma_c^1. \quad (2.69)$$

Durch die Lagrange'sche Multiplikatoren-Formulierung wird das Minimierungsproblem (2.66) beschränkt und in das *Sattelpunktproblem* (KIKUCHI UND ODEN 1988; LUENBERGER UND YE 2008)

$$\Pi_{\text{LM}}(\mathbf{u}, \lambda_n) = \Pi_{\text{PMPE}} + \int_{\gamma_c^1} \lambda_n g_n d\gamma_c^1 = \text{stat} \quad (2.70)$$

überführt. Dies bedeutet, dass der Lösungswert von Gleichung (2.70) ein Minimum bezüglich der Verschiebungen und ein Maximum bezüglich der Lagrange'schen Multiplikatoren darstellt. Wie die Variation

$$\delta \Pi_{\text{LM}}^c = \int_{\gamma_c^1} \left[ \delta \lambda_n g_n + \lambda_n \delta g_n \right] d\gamma_c^1 \quad (2.71)$$

nach den freien Variablen  $\mathbf{u}$  und  $\lambda_n$  zeigt, fügt die Lagrange'sche Multiplikatoren-Formulierung der ursprünglichen Beziehung (2.67) zwei weitere Terme hinzu, welche hier für eine als bekannt angenommene aktive Kontaktzone dargestellt sind:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{PMPE}} + \int_{\gamma_c^1} \lambda_n \delta g_n d\gamma_c^1 &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha \\ \int_{\gamma_c^1} \delta \lambda_n g_n d\gamma_c^1 &= 0 \quad \forall \delta \lambda_n \in \mathcal{M}_n^{+/-}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Der Kontaktausdruck in Gleichung (2.72)<sub>1</sub> addiert dabei das Produkt aus Multiplikatoren und variierter Normalklaffung. Beziehung (2.72)<sub>2</sub> stellt eine beschränkende Bedingung für die Verschiebungen dar. Ein Vergleich von Beziehung (2.72) mit Gleichung (2.65) zeigt die Äquivalenz zwischen der Lagrange'schen Multiplikatoren-Methode und der Kontaktformulierung, welche in Abschnitt 2.4 mit der Methode der gewichteten Residuen hergeleitet wurde. Das Multiplikatorenfeld  $\lambda_n$  kann damit physikalisch als Normal-Kontaktspannung  $t_{c_n}$  identifiziert werden. Aufgrund dieser Äquivalenz wird im Folgenden der Begriff Lagrange'scher Multiplikator gelegentlich auch für die Kontaktspannung verwendet.

Frühe Anwendungen der Lagrange'schen Multiplikatoren-Formulierung auf Kontaktprobleme finden sich beispielsweise in FRANCAVILLA UND ZIENKIEWICZ (1975), HUGHES U. A. (1976) und CHAN UND TUBA (1971). Vorteilhaft an dieser Formulierung ist die exakte Einhaltung der Nichtdurchdringungsbedingung durch Gleichung (2.72)<sub>2</sub>. Nachteilig ist, dass dazu zusätzliche Unbekannte eingeführt werden müssen, welche bei einer späteren numerischen Lösung die Dimension des Gleichungssystems vergrößern. Werden dabei nur die aktiven Zwangsbedingungen im Gleichungssystem gelassen, ändert sich zusätzlich noch die Größe des Systems während der Berechnung, was die numerische Umsetzung weiter erschwert. Allerdings können diese Nachteile mithilfe einer speziellen



Diskretisierung für die Lagrange'schen Multiplikatoren behoben werden, welche in dieser Arbeit verwendet wird, siehe Kapitel 3.2.6.

### 2.5.3 Penalty-Methode

Variationsprobleme, die durch Nebenbedingungen beschränkt sind, können mithilfe der *Penalty-Methode* in unbeschränkte Probleme überführt werden. Diese erfüllen die Nebenbedingungen dann allerdings nur noch annähernd. Hierzu wird das zugrundeliegende Potential so modifiziert, dass eine Verletzung der Nebenbedingungen zu einer Entfernung von der an das Potential gestellten Forderung führt. Für Kontaktprobleme kann zum Basispotential (2.66) beispielsweise das Penalty-Potential

$$\Pi_{\text{PEN}}^c(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_c^1} \epsilon_n \langle g_n \rangle^2 d\gamma_c^1, \quad \epsilon_n \geq 0 \quad (2.73)$$

addiert werden, welches ein Verletzen der Nichtdurchdringungsbedingung mit einer Vergrößerung der Systemenergie bestraft. Der Operator  $\langle \bullet \rangle$  repräsentiert dabei die *Macauley-Klammer*, die den positiven Anteil ihres Operanden liefert:

$$\langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0. \end{cases} \quad (2.74)$$

Rheologisch entspricht die Behandlung von Kontaktproblemen mit der Penalty-Methode dem Aktivschalten von Normalkraftfedern in Punkten mit einer Durchdringung, wobei die Macauley-Klammer die Federn bei einer Klaffung wieder deaktiviert. Algorithmisch entspricht diese Vorgehensweise einer Regularisierung der KKT-Bedingungen für Normalkontakt, siehe hierzu auch Kurve (ii) in Abbildung 2.5(a), welche das Penalty-Potential aus Gleichung (2.73) charakterisiert.

Die gesuchte Verschiebungslösung wird durch das Minimum der modifizierten Potentialfunktion

$$\Pi_{\text{PEN}}(\mathbf{u}) = \Pi_{\text{PMPE}} + \frac{1}{2} \int_{\gamma_c^1} \epsilon_n \langle g_n \rangle^2 d\gamma_c^1 = \min \quad (2.75)$$

definiert, wobei  $\Pi_{\text{PEN}}^c$  das Minimum in Richtung einer annähernd erfüllten Nichtdurchdringungsbedingung verschiebt. Die Variation von  $\Pi_{\text{PEN}}$  nach den Verschiebungen

$$\delta \Pi_{\text{PEN}} = \delta \Pi_{\text{PMPE}} + \int_{\gamma_c^1} \delta g_n \epsilon_n \langle g_n \rangle d\gamma_c^1 = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha \quad (2.76)$$

zeigt die Unterschiede zur Lagrange'schen Multiplikatoren-Formulierung: Die Kontaktnormalspannung wird verschiebungsabhängig über die Approximation  $t_{c_n} = \epsilon_n \langle g_n \rangle$  als

Funktion der Durchdringung definiert und nicht über ein zusätzliches Unbekanntensfeld wie in Gleichung (2.72)<sub>1</sub> berücksichtigt<sup>10</sup>. Eine explizite Formulierung der Nichtdurchdringungsbedingung wie in Gleichung (2.72)<sub>2</sub> ist nicht vorhanden.

Der Vorteil einer Penalty-Formulierung liegt darin, dass bei einer numerischen Lösung keine zusätzlichen Unbekannten eingeführt werden müssen, da alle Gleichungen als Funktion der Verschiebungen formuliert sind. Dafür wird die Nichtdurchdringungsbedingung nur annähernd erfüllt. Hierbei ist oft ein relativ großer Penalty-Parameter  $\epsilon_n$  notwendig, um die Bedingung zufriedenstellend zu erfüllen. Dies wiederum führt zu einer schlechten Konditionszahl des resultierenden Gleichungssystems, was beispielsweise die Konvergenzeigenschaften einer iterativen Lösungsprozedur negativ beeinflusst. Neben vielen anderen haben CURNIER UND ALART (1988), HALLQUIST U. A. (1985) oder ODEN (1981) die Penalty-Methode auf Kontaktprobleme angewandt.

### 2.5.4 Augmented Lagrange'sche Formulierung

Die *Augmented Lagrange'sche Formulierung* kombiniert Elemente der Lagrange'schen Multiplikatoren- und der Penalty-Methode. Dementsprechend berücksichtigt sie die Kontaktbedingungen über ein gemischtes Funktional<sup>11</sup>

$$\Pi_{AL}^c(\mathbf{u}, \lambda_n) = \int_{\gamma_c^1} \left[ \frac{1}{2\epsilon_n} \langle \lambda_n + \epsilon_n g_n \rangle^2 - \frac{1}{2\epsilon_n} \lambda_n^2 \right] d\gamma_c^1, \quad (2.77)$$

welches sowohl ein Lagrange'sches Multiplikatorenfeld  $\lambda_n$  als auch Terme in Abhängigkeit eines Penalty-Parameters  $\epsilon_n$  enthält. Die Verwendung der Multiplikatoren führt wie bei einer reinen Lagrange'schen Multiplikatoren-Formulierung auf ein Sattelpunktproblem, dessen Potential

$$\Pi_{AL}(\mathbf{u}, \lambda_n) = \Pi_{PMPE} + \int_{\gamma_c^1} \left[ \frac{1}{2\epsilon_n} \langle \lambda_n + \epsilon_n g_n \rangle^2 - \frac{1}{2\epsilon_n} \lambda_n^2 \right] d\gamma_c^1 = \text{stat} \quad (2.78)$$

für die gesuchte Lösung stationär wird. Die Variation von Gleichung (2.78) nach  $\mathbf{u}$  und  $\lambda_n$  liefert zusammen mit Gleichung (2.67) das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{PMPE} + \int_{\gamma_c^1} \langle \lambda_n + \epsilon_n g_n \rangle \delta g_n d\gamma_c^1 &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha \\ \frac{1}{\epsilon_n} \int_{\gamma_c^1} \left[ \langle \lambda_n + \epsilon_n g_n \rangle - \lambda_n \right] \delta \lambda_n d\gamma_c^1 &= 0 \quad \forall \delta \lambda_n \in \mathcal{M}_n^{+/-}, \end{aligned} \quad (2.79)$$

wobei die Darstellung wieder für eine als bekannt angenommene, aktive Kontaktzone erfolgt. Die Lösung von Beziehung (2.79) ist identisch zu der Lösung, die sich bei

<sup>10</sup>In der hier angegebenen Formulierung gilt  $t_{c_n} \geq 0$ .

<sup>11</sup>Die hier angegebene Formulierung verwendet die Bedingung  $\lambda_n \geq 0$ .

Verwendung der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren ergibt. Gleichung (2.79)<sub>2</sub> führt dabei wie Bedingung (2.72)<sub>2</sub> zu einer exakten Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung. Dadurch verschwindet in Gleichung (2.79)<sub>1</sub> der Penalty-Term  $\epsilon_n g_n$  und Beziehung (2.72)<sub>1</sub> resultiert. Für eine Klaffung  $g_n \neq 0$  sind aber aufgrund des Penalty-Terms die KKT-Bedingungen differenzierbar (siehe Abbildung 2.5(a)), was die algorithmischen Lösungseigenschaften der Kontaktformulierung verbessert. Da die Nichtdurchdringung schon durch Gleichung (2.79)<sub>2</sub> gewährleistet ist, kann der Penalty-Parameter relativ klein gewählt werden. Die für eine Penalty-Methode charakteristischen Konditionierungsprobleme können auf diese Weise vermieden werden.

Einige Anwendungen der Augmented Lagrange'schen Methode auf Kontaktprobleme belassen die Lagrange'schen Multiplikatoren im Gleichungssystem und lösen simultan für  $\mathbf{u}$  und  $\lambda_n$ , siehe beispielsweise HEEGAARD UND CURNIER (1993). Wie im vorausgegangenen Absatz angedeutet, liegt das Ziel dieser Formulierungen darin, eine Lagrange'sche Multiplikatoren-Formulierung mit algorithmisch verbesserten Lösungseigenschaften zu bekommen.

Weitaus häufiger wird jedoch eine iterative Lösung verwendet, welche als *Uzawa-Algorithmus* bekannt ist (siehe beispielsweise WRIGGERS U. A. (1985), ALART UND CURNIER (1991), SIMO UND LAURSEN (1992)). Innerhalb der iterativen Prozedur wird jeweils mit festgehaltenen Multiplikatoren für die unbekanntenen Verschiebungen gelöst. Anschließend werden die Multiplikatoren punktweise aktualisiert:

Löse für  $\mathbf{u}^{r+1}$  mit festgehaltenem  $\lambda_n^r$ :

$$\delta \Pi_{\text{PMPE}} + \int_{\gamma_c^1} \langle \lambda_n^r + \epsilon_n g_n(\mathbf{u}^{r+1}) \rangle \delta g_n d\gamma_c^1 = 0$$

Aktualisiere anschließend die Lagrange'schen Multiplikatoren: (2.80)

$$\lambda_n^{r+1} = \langle \lambda_n^r + \epsilon_n g_n(\mathbf{u}^{r+1}) \rangle$$

Aktualisiere:  $r = r + 1$ .

Dabei entspricht Beziehung (2.80)<sub>1</sub> der Gleichung (2.79)<sub>1</sub> mit festgehaltenen Werten für die Lagrange'schen Multiplikatoren. Die Aktualisierungsvorschrift (2.80)<sub>2</sub> stellt eine diskrete punktweise Form von Gleichung (2.79)<sub>2</sub> dar. Auch für diese Formulierung wird die Nichtdurchdringungsbedingung exakt bzw. bis zur gewünschten Genauigkeit erfüllt. Im Vergleich zur Lagrange'schen Multiplikatoren-Methode werden dabei keine zusätzlichen Unbekannten im Gleichungssystem belassen. Wie bei einer simultanen Lösung kann der verwendete Penalty-Parameter relativ klein gewählt werden, was Konditionierungsprobleme vermeidet. Nachteil der Formulierung ist die zusätzliche Iterationsschleife  $r$ ,

welche ein mehrmaliges Lösen des kompletten nichtlinearen Problems (2.80)<sub>1</sub> in jedem Lastschritt erfordert.

### 2.5.5 Perturbed Lagrange'sche Formulierung

Wie die Augmented Lagrange'sche Formulierung enthält das Funktional

$$\Pi_{\text{PL}}^c(\mathbf{u}, \lambda_n) = \int_{\gamma_c^1} \left[ \lambda_n g_n - \frac{1}{2\epsilon_n} \lambda_n^2 \right] d\gamma_c^1 \quad (2.81)$$

der *Perturbed Lagrange'schen Formulierung* sowohl Lagrange'sche Multiplikatoren als auch Penalty-Terme. Die Lösung für Verschiebungen und Lagrange'sche Multiplikatoren ist durch das Sattelpunktproblem

$$\Pi_{\text{PL}}(\mathbf{u}, \lambda_n) = \Pi_{\text{PMPE}} + \int_{\gamma_c^1} \left[ \lambda_n g_n - \frac{1}{2\epsilon_n} \lambda_n^2 \right] d\gamma_c^1 = \text{stat} \quad (2.82)$$

definiert. Sie kann durch Variation nach den freien Variablen für eine als bekannt angenommene Kontaktzone mithilfe des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{PMPE}} + \int_{\gamma_c^1} \lambda_n \delta g_n d\gamma_c^1 &= 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^\alpha \in \mathcal{V}^\alpha \\ \int_{\gamma_c^1} \left( g_n - \frac{1}{\epsilon_n} \lambda_n \right) \delta \lambda_n d\gamma_c^1 &= 0 \quad \forall \delta \lambda_n \in \mathcal{M}_n^{+/-}, \end{aligned} \quad (2.83)$$

ermittelt werden. Da die Variation  $\delta \lambda_n$  beliebig ist, gilt mit Gleichung (2.83)<sub>2</sub> punktweise die Bedingung  $\lambda_n = \epsilon_n g_n$ , welche eingesetzt in Gleichung (2.83)<sub>1</sub> auf die Penalty-Formulierung (2.76) führt. Alternativ folgt für  $\epsilon_n \rightarrow \infty$  die Lagrange'sche Multiplikatoren Formulierung (2.72), siehe auch WRIGGERS UND SIMO (1985).

Allerdings können im Rahmen einer numerischen Lösung verschiedene Approximationsfunktionen für  $\mathbf{u}$  und  $\lambda_n$  gewählt werden. Der daraus resultierende Algorithmus (SIMO U. A. 1985; WRIGGERS U. A. 1985) unterscheidet sich von einer reinen Penalty-Formulierung. Diese Flexibilität bietet die Möglichkeit, für eine bestimmte Diskretisierung bessere Ergebnisse als mit einer reinen Penalty-Formulierung zu erhalten, siehe WRIGGERS U. A. (1985).

## 2.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das zu lösende Kontaktproblem kontinuumsmechanisch beschrieben, zunächst stark als punktweise Formulierung und anschließend schwach in

integraler Form. Die schwache Formulierung der Kontaktbedingungen erfolgte mit der Methode der gewichteten Residuen. Die zugrundeliegende Behandlung konnte durch den Vergleich mit einer Potentialformulierung als Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren identifiziert werden. Wie in Abschnitt 2.4.4 erwähnt, sind die Kontakt-Randbedingungen im Folgenden nicht als Ungleichheits- sondern als Gleichheitsbedingungen formuliert. Dazu wird vorausgesetzt, dass die eigentlich unbekannte aktive Kontaktzone mit geeigneten Strategien ermittelt werden kann. Der hierzu notwendige Algorithmus ist in Kapitel 5.1 dargestellt.



# 3

---

## Räumliche Diskretisierung

Im vorangegangenen Kapitel wurde das Kontaktproblem zwischen zwei deformierbaren Körpern kontinuumsmechanisch durch eine partielle Differentialgleichung in Raum und Zeit beschrieben. Eine analytische Lösung dieser Beziehung ist im Allgemeinen nicht möglich. Somit wird eine numerische Näherungslösung basierend auf einer räumlichen und einer zeitlichen Diskretisierung erforderlich. In dieser Arbeit erfolgt die Diskretisierung getrennt zuerst im Raum und anschließend in der Zeit, was in BELYTSCHKO (1983) als *Semidiskretisierungstechnik* bezeichnet wird. Alternativ kann auch zuerst in der Zeit und dann im Raum diskretisiert werden, siehe beispielsweise SIMO UND TARNOW (1992) oder DEUFLHARD U. A. (2008). Bei Betrachtung des statischen Sonderfalls werden die Beschleunigungen als vernachlässigbar klein angenommen, so dass alle dynamischen Effekte entfallen und eine Lösung bereits nach der räumlichen Diskretisierung erfolgen kann.

Dieses Kapitel widmet sich der Diskretisierung im Raum mit der Finite-Elemente-Methode (FEM). Grundlegende Konzepte der FEM finden sich in ARGYRIS (1955), TURNER U. A. (1956), CLOUGH (1960) und ZIENKIEWICZ UND CHEUNG (1964). Einen ausführlichen Überblick zur Entwicklung aus verschiedenen naturwissenschaftlichen Fachrichtungen heraus geben zum Beispiel ZIENKIEWICZ U. A. (2006). Die im Folgenden eingeführten Gleichungen und Konzepte sollen innerhalb der vorliegenden Arbeit eine konsistente Formulierung ermöglichen, sind aber nicht als umfassende Beschreibung der FEM mit ihren verschiedenen Disziplinen zu verstehen. Hierfür sei auf die Lehrbücher von BELYTSCHKO U. A. (2008), ZIENKIEWICZ U. A. (2006), HUGHES (2000) und WRIGGERS (2001) sowie auf die Vorlesungsmanuskripte von RAMM (2004, 2005) und BISCHOFF (2011) verwiesen.

In den folgenden Abschnitten wird zunächst die räumliche Diskretisierung der Geometrie, der kontaktunabhängigen Feldfunktionen und der entsprechenden virtuellen Ar-

beitsanteile erläutert (Abschnitt 3.1). Anschließend werden verschiedene räumliche Diskretisierungsstrategien für Kontaktprobleme vorgestellt und miteinander verglichen (Abschnitt 3.2). Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf mortarbasierten Strategien. Abschnitt 3.3 widmet sich der numerischen Auswertung der Kontaktintegrale, welche aus einer Diskretisierung mit der dualen Mortar-Methode resultieren. Abschließend ist in Abschnitt 3.4 eine Weiterentwicklung dieser Diskretisierung beschrieben (siehe auch CICHOSZ UND BISCHOFF (2011)). Abschnitt 3.5 fasst die wichtigsten Punkte noch einmal zusammen.

## 3.1 Diskretisierung der kontaktunabhängigen Terme

### 3.1.1 Diskretisierung der Feldgrößen

Im Rahmen einer Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente werden zunächst die Geometrien der betrachteten Körper und die darauf definierten unbekanntes Feldfunktionen approximiert. Die Geometrie wird dazu durch ein Netz aus *Linien-, Flächen- oder Volumenelementen* angenähert, welche den Raum ohne Überschneidungen ausfüllen und an ihren Rändern durch gemeinsame Punkte, Linien oder Flächen verbunden sind. Die kontinuierlichen Feldfunktionen werden approximiert durch eine Summe von Knotenwerten multipliziert mit zugehörigen Formfunktionen. Aufgabe der *Formfunktionen*  $N_I^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha)$ , welche zeitlich konstant aber räumlich veränderlich sind, ist hierbei die Interpolation der Knotenwerte innerhalb einzelner Elemente mittels der normierten Elementkoordinate  $\boldsymbol{\xi}^\alpha \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ . Aufgabe der *Netzknoten*  $I$ , welche an fixen materiellen Punkten positioniert sind, ist die Repräsentation der Feldfunktionen durch räumlich fixe aber gegebenenfalls zeitlich veränderliche, diskrete Werte. Die Kompatibilität der elementweisen Ansätze wird einerseits durch die interpolierende Eigenschaft der Formfunktionen und andererseits durch die topologische Kopplung benachbarter Elemente mittels gemeinsamer Randknoten sichergestellt. Im Falle der Geometrieapproximation

$$\mathbf{X}^\alpha \approx \mathbf{X}^{\alpha, \text{h}}(\boldsymbol{\xi}^\alpha) = \sum_{I=1}^{n_{\text{n}\alpha}} N_I^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{X}_I^\alpha \quad n_{\text{n}\alpha} : \text{Anzahl der Knoten von Körper } \alpha \quad (3.1)$$

mit diskreten Knotenpositionen  $\mathbf{X}_I^\alpha \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$  bedeutet Kompatibilität, dass kein Teil des materiellen Körpers doppelt oder überhaupt nicht repräsentiert ist. Für die Integrierbarkeit der virtuellen Arbeitsausdrücke ist Kompatibilität zwischen einzelnen Elementen notwendig, da nur so nicht singuläre erste Ableitungen von Geometrie und Feldfunktionen sichergestellt werden können.



Gleichung (3.1) beschreibt die Approximation der kompletten Geometrie eines Körpers  $\alpha$  als globale Summe über alle  $n_{n\alpha}$  zugehörigen Netzknoten  $I$ . Die Auswertung in einzelnen Elementen erfolgt allerdings nur als Summe der im Element unterstützten Formfunktionen mit zugehörigen Knotenwerten. Für zweidimensionale, vierknotige Scheibenelemente (*bilineare Q1-Elemente*) sind dies beispielsweise vier Formfunktionen mit vier Knotenwerten. Die Bezeichnung „bilinear“ weist darauf hin, dass sich die einzelnen Formfunktionen  $N_I^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha)$  aus dem Produkt von jeweils zwei Formfunktionen  $N_I^\alpha(\xi_1^\alpha)$  bzw.  $N_I^\alpha(\xi_2^\alpha)$  zusammensetzen, die einen linearen Verlauf in  $\xi_1^\alpha$ - bzw.  $\xi_2^\alpha$ -Richtung besitzen. Der Index  $(\bullet)^h$  kennzeichnet approximierte Feldgrößen, wird im Folgenden allerdings nicht für Größen verwendet, die ohnehin nur in der Diskretisierung vorhanden sind.

Zur Approximation der Unbekanntenfelder werden in der Regel die gleichen Ansätze wie für die Geometrie gewählt (*Isoparametrisches Konzept*), ebenso werden üblicherweise die wirklichen und die virtuellen Feldgrößen mit denselben Formfunktionen diskretisiert (*Bubnov-Galerkin-Verfahren*):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\alpha &\approx \mathbf{u}^{\alpha,h}(\boldsymbol{\xi}^\alpha, t) = \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_I^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{d}_I^\alpha(t) & \delta \mathbf{u}^\alpha &\approx \delta \mathbf{u}^{\alpha,h}(\boldsymbol{\xi}^\alpha) = \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_I^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \delta \mathbf{d}_I^\alpha \\ \dot{\mathbf{u}}^\alpha &\approx \dot{\mathbf{u}}^{\alpha,h}(\boldsymbol{\xi}^\alpha, t) = \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_I^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{v}_I^\alpha(t) & & (3.2) \\ \ddot{\mathbf{u}}^\alpha &\approx \ddot{\mathbf{u}}^{\alpha,h}(\boldsymbol{\xi}^\alpha, t) = \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_I^\alpha(\boldsymbol{\xi}^\alpha) \mathbf{a}_I^\alpha(t). \end{aligned}$$

Entsprechend zu Gleichung (3.1) sind in Gleichung (3.2) die Knotenvektoren  $\mathbf{d}_I^\alpha$ ,  $\mathbf{v}_I^\alpha$ ,  $\mathbf{a}_I^\alpha$ ,  $\delta \mathbf{d}_I^\alpha \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$  Träger von diskreten Informationen am Knoten  $I$ . Die Knotenwerte  $\mathbf{d}_I^\alpha$ ,  $\mathbf{v}_I^\alpha$  und  $\mathbf{a}_I^\alpha$  von Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung repräsentieren dabei noch kontinuierliche Funktionen in der Zeit. Bei statischen Problemen sind Geschwindigkeit und Beschleunigung vernachlässigbar klein, die Verschiebung hängt nicht von der Zeit ab.

### 3.1.2 Diskretisierung der virtuellen Arbeiten

Die Diskretisierung der virtuellen Arbeiten

$$\delta \Pi_{\text{PvV}} \approx \delta \Pi_{\text{PvV}}^h = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \delta \Pi_{\text{kin}}^{\alpha,h} + \delta \Pi_{\text{int}}^{\alpha,h} - \delta \Pi_{\text{ext}}^{\alpha,h} \right\} + \delta \Pi_{\text{c}}^h = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}^{\alpha,h} \quad (3.3)$$

erfolgt durch Einsetzen der diskretisierten Feldgrößen (3.1) und (3.2) in die kontinuierliche virtuelle Arbeitsgleichung (2.65). Algorithmisch werden die dort angegebenen Gebietsintegrale durch eine Summe von Integralen über jeweils einzelne finite Elemente

ersetzt. Die Auswertung der Elementintegrale erfolgt dann mithilfe von numerischer Integration. Eine ausführlichere Herleitung und Darstellung der einzelnen Terme findet sich in Anhang A.2.2. In diesem Abschnitt ist lediglich eine kompakte Darstellung der Endresultate in Form der diskretisierten kinetischen, internen und externen virtuellen Arbeiten mit globalen Vektoren und Matrizen angegeben:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{\text{kin}}^h &= \sum_{\alpha=1}^2 \delta\Pi_{\text{kin}}^{\alpha,h} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{M} \mathbf{a} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{kin}}(\mathbf{d}) \\
\delta\Pi_{\text{int}}^h &= \sum_{\alpha=1}^2 \delta\Pi_{\text{int}}^{\alpha,h} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}) \\
\delta\Pi_{\text{ext}}^h &= \sum_{\alpha=1}^2 \delta\Pi_{\text{ext}}^{\alpha,h} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Vektoren  $\mathbf{f}_{\text{kin}}, \mathbf{f}_{\text{int}}, \mathbf{f}_{\text{ext}} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}} n_n)}$  fassen dabei alle kinetischen, internen und externen Knotenkräfte zusammen. In den Vektoren  $\delta\mathbf{d}, \mathbf{d}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}} n_n)}$  werden alle virtuellen und wirklichen Knotenverschiebungen sowie alle Knotenbeschleunigungen gesammelt.  $n_n$  steht für die Gesamtsumme aller Netzknoten von Slave- und Master-Seite. Bei der Bezeichnung der einzelnen virtuellen Arbeitsanteile wurde auf den Index  $(\bullet)_{\text{pV}}$  verzichtet, um die Notation übersichtlich zu halten. Wie in Gleichung (3.4)<sub>1</sub> angedeutet, können die kinetischen Kräfte in die deformationsunabhängige Massenmatrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}} n_n) \times (n_{\text{dim}} n_n)}$  und den deformationsabhängigen Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}$  aufgeteilt werden. Der Vektor der externen Kräfte aus Gleichung (3.4)<sub>3</sub> wird in dieser Arbeit als deformationsunabhängig angenommen. Die Diskretisierung der virtuellen Kontaktarbeit ist in Abschnitt 3.3 dargestellt.

## 3.2 Diskretisierungsstrategien für Kontaktprobleme

Der folgende Abschnitt beschreibt die Diskretisierung der Kontaktspannung, der virtuellen Kontaktspannung, der virtuellen Kontaktarbeit und der Nichtdurchdringungsbedingung. Abschnitt 3.2.1 beginnt mit der Definition von Kriterien und Merkmalen, mit denen es möglich ist, Kontaktdiskretisierungen zu bewerten sowie zu kategorisieren. Anschließend geben die Abschnitte 3.2.2 bis 3.2.5 eine Übersicht zu den gängigsten Diskretisierungsstrategien für Kontaktprobleme. Die einzelnen Strategien werden erläutert und anhand der in Abschnitt 3.2.1 erläuterten Kriterien untereinander verglichen. In Abschnitt 3.2.6 wird dann die in der vorliegenden Arbeit untersuchte und weiterentwickelte Kontaktformulierung beschrieben, welche auf der dualen Mortar-Methode basiert<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Zur Demonstration von Weiterentwicklungen im Bereich der zeitlichen Diskretisierung wird neben dieser Diskretisierung auch der NTS-Algorithmus aus Abschnitt 3.2.3 verwendet.

Eine Auswertung des Kontakt-Patch-Tests (siehe Abschnitt 3.2.1) für verschiedene Kontaktdiskretisierungen demonstriert dann in Abschnitt 3.2.7 einige der zuvor erläuterten Aspekte bezüglich der Genauigkeit der Kontaktspannungsübertragung.

Wie in Abschnitt 2.4.4 werden alle Kontaktbeziehungen für eine als bekannt vorausgesetzte aktive Kontaktzone ausgewertet, die im Diskreten durch aktive Slave-Kontaktknoten definiert ist. Die Erläuterung der Kontaktdiskretisierungen in den Abschnitten 3.2.2 bis 3.2.5 orientiert sich an der Darstellungsweise, welche in der Literatur üblicherweise verwendet wird. Da die Vorzeichenkonventionen für Normalklaffung und Kontaktspannung abhängig von der Formulierung der kinematischen und kinetischen Kontaktgrößen sind, unterscheiden sich die Vorzeichenregelungen teilweise von den Definitionen in Gleichung (2.47).

Im Rahmen der Finite-Elemente-Methode wird seit mehr als vier Jahrzehnten intensiv auf verschiedenen Teilbereichen der Kontaktmechanik geforscht. Aus diesem Grund können weder der folgende Überblick noch die Aufzählung der zugehörigen Literaturangaben einen Anspruch auf Vollständigkeit erheben.

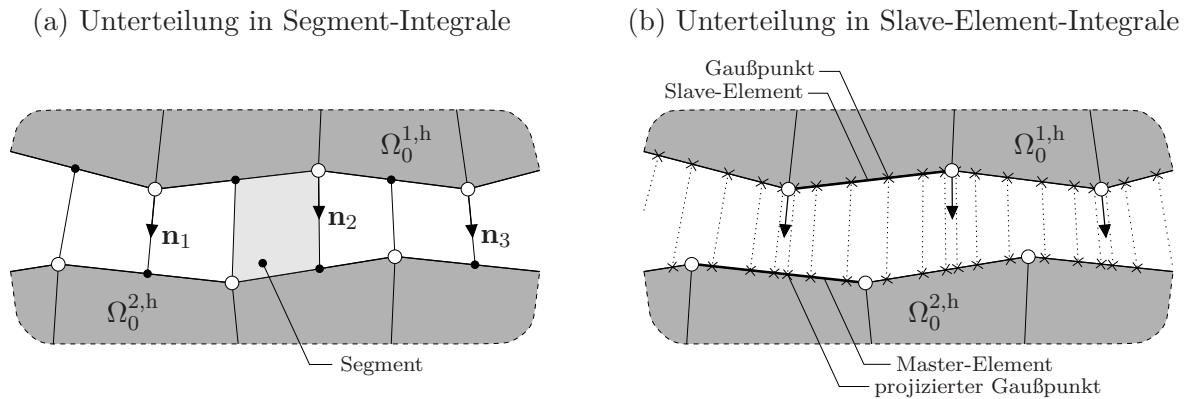
### 3.2.1 Einführung

Kontaktbedingungen können in einem diskretisierten System mit einer Vielzahl von Methoden berücksichtigt werden. Bezüglich der kontinuierlichen Formulierung aus Kapitel 2.4 lassen sich die Verfahren anhand der numerischen Behandlung der Kontakt-Integrale in Kollokationsformulierungen und integrale Formulierungen unterteilen. *Kollokationsformulierungen* kollokieren die Integrale, d.h. sie erfüllen die eigentlich integrale Bedingung punktweise an günstigen Stellen, in der Regel an den Netzknoten der Slave-Kontaktfläche. Eine entsprechende kontinuumsmechanisch basierte Formulierung wurde allerdings erst in LAURSEN UND SIMO (1993) vorgestellt. Die meisten in der Vergangenheit entwickelten Kollokationsmethoden formulieren die Kontaktbedingungen direkt auf der Diskretisierungsebene. *Integrale Formulierungen* werten die Kontaktausdrücke mit numerischer Integration aus, wobei das Integrationsgebiet häufig in geeignete Untergebiete mit glatten Integranden (*Segmente*)<sup>2</sup> aufgeteilt wird, siehe Abbildung 3.1(a). Eine alternative Integrationstechnik (FISCHER UND WRIGGERS 2005) verzichtet auf die Einführung von Segmenten und integriert über komplette Element-Kanten der Slave-Seite (*Slave-Elemente*), siehe Abbildung 3.1(b). Zur adäquaten Behandlung der nicht glatten Integranden ist dann eine entsprechende Anzahl von Gaußpunkten notwendig.

Bezüglich ihrer Leistungsfähigkeit kann eine Kontaktdiskretisierung durch ihre Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften kategorisiert werden. *Stabilität* bedeutet in diesem

---

<sup>2</sup>Von dieser Definition abweichend wird im Rahmen von Kollokationsformulierungen unter dem Begriff „Segment“ in der Regel eine Element-Kante oder -Oberfläche der Master-Seite verstanden.



**Abbildung 3.1:** Verschiedene Möglichkeiten der Kontakt-Integral-Auswertung.

Zusammenhang einerseits, dass das diskretisierte Problem noch eine eindeutige Lösung besitzen muss, andererseits, dass der Algorithmus auch unter großen Deformationen numerisch stabil bleibt. Die *Genauigkeit* einer Kontaktformulierung kann anhand der Qualität bewertet werden, mit welcher der Algorithmus Informationen von der Slave- auf die Master-Seite übermittelt. Ein Indikator hierfür ist wiederum die Qualität der lokalen Spannungslösung nahe der Kontaktoberflächen. Je nach Anwendungsbereich oder Simulationsziel können zu den oben genannten Anforderungen noch weitere hinzukommen. Umgekehrt kann ein Algorithmus, welcher beispielsweise Defizite in der lokalen Spannungsdarstellung aufweist, für eine globale Betrachtung ausreichend gute Ergebnisse liefern. Trotzdem sind die genannten Punkte als wesentliche Standards zu verstehen, wenn neue Kontaktformulierungen entwickelt oder bestehende miteinander verglichen werden. Aus diesem Grund sind die einzelnen Punkte in den folgenden Absätzen noch etwas detaillierter beschrieben.

Kontaktbeschreibungen werden in der Regel als gemischtes Problem mit Verschiebungen und Kontaktspannungen als Unbekannte formuliert. Unabhängig davon, ob die Kontaktbedingungen mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren, der Penalty-Methode oder einer anderen Formulierung umgesetzt werden, muss das resultierende Problem eine eindeutige Lösung besitzen. Diese kann durch die Erfüllung der Elliptizitäts- und der *Ladyzhenskaya-Babůska-Brezzi-(LBB-)Bedingung* (BABŮSKA UND AZIZ 1972; BREZZI 1974; LADYZHENSKAYA UND URAL'TSEVA 1968) sichergestellt werden<sup>3</sup>. Ob die LBB-Bedingung erfüllt wird oder nicht, hängt vor allem davon ab, ob die Werte der Kontaktintegrale bei Netzverfeinerung mit der richtigen Geschwindigkeit gegen den korrekten Wert konvergieren. Dies wiederum ist abhängig von der numerischen Behandlung der Integrale bzw. von der Diskretisierung der Kontaktspannung. Schränkt die Spannungsdiskretisierung die Verschiebungslösung zu wenig ein, können energielose Deformations-

<sup>3</sup>In der Literatur ist die LBB-Bedingung auch unter den Bezeichnungen BB-Bedingung oder Inf-Sup-Bedingung bekannt.

moden verbunden mit räumlich oszillierenden Kontaktspannungen resultieren (siehe beispielsweise Abbildung 5.1 in TAYLOR UND PAPADOPOULOS (1991)). Dahingegen führt eine zu restriktive Umsetzung der Kontaktbedingungen auf übersteife Lösungen mit einem deutlich unterschätzten Verschiebungsfeld (siehe beispielsweise Abbildung 4(c) in PUSO UND LAURSEN (2004a)). In Tabelle 3.1 sind für verschiedene Kontaktdiskretisierungen die Ergebnisse einer Untersuchung der LBB-Stabilität dargestellt. Die Resultate wurden in EL-ABBASI UND BATHE (2001) mithilfe von numerischen Experimenten oder in WOHLMUTH UND KRAUSE (2003) anhand von mathematischen Untersuchungen ermittelt. Dabei sind die Schlussfolgerungen der numerischen Experimente keine Beweise im mathematischen Sinne, da sie an ausgewählten Problemstellungen durchgeführt wurden. Die mathematischen Untersuchungen hingegen setzen kleine Deformationen voraus. Bezüglich einer Problemstellung mit großen Deformationen ist ein positives Ergebnis somit als Indikator, nicht aber als allgemeingültiger Beweis, zu betrachten.

Für einen *numerisch stabilen* Algorithmus sollte sich keine Kontaktgröße sprunghaft mit dem Verschiebungsfeld ändern. Einfache Kollokationsformulierungen erfüllen diese Anforderung im Allgemeinen nicht. Als Folge kann eine schlechte Konvergenz im Rahmen einer iterativen Gleichungslösung bis hin zur Divergenz auftreten.

Die wichtigste Anforderung an die Informationsübermittlung einer Kontaktdiskretisierung ist durch den *Kontakt-Patch-Test* (TAYLOR UND PAPADOPOULOS 1991) formuliert. Mithilfe des Kontakt-Patch-Tests kann überprüft werden, ob eine Kontaktdiskretisierung einen konstanten Verzerrungszustand für eine allgemeine Vernetzung fehlerfrei von der Slave- auf die Master-Kontaktfläche übertragen kann. Bei elastischen Problemen kann äquivalent die Spannungsübertragung untersucht werden. Wird der Kontakt-Patch-Test nicht erfüllt, werden zusätzlich zum Diskretisierungsfehler weitere lokale Fehler in den Spannungsfeldern nahe der Kontaktzone erzeugt, welche sich bei Netzverfeinerung nicht automatisch verkleinern (EL-ABBASI UND BATHE 2001). Mithilfe des Kontakt-Patch-Tests ist in Abschnitt 3.2.7 die Genauigkeit der Spannungsübertragung verschiedener Kontaktdiskretisierungen bewertet. Ein Überblick zum Abschneiden weiterer Formulierungen findet sich in Tabelle 3.1.

Am Rand des Kontaktbereichs können eventuell auftretende Spannungsozillationen die Qualität der lokalen Spannungslösung empfindlich beeinträchtigen. Verursacht werden die Oszillationen durch den sprunghaften Übergang von einem unbelasteten Oberflächenabschnitt zu einem durch die Kontaktspannung belasteten Abschnitt. Mit den Lösungsräumen der FEM kann diese abrupte Spannungsänderung nur dann angemessen abgebildet werden, wenn der Rand des Kontaktbereichs mit dem Rand eines finiten Elements zusammenfällt. Ist dies nicht der Fall, wird der Spannungssprung verschmiert und Oszillationen treten auf. Problematisch ist dieser Effekt vor allem bei finiten Elementen mit hohem Polynomgrad. Da die einzelnen Elemente in der Regel relativ große

Abmessungen besitzen, treten die Oszillationen in einem entsprechend großen Gebiet auf. Damit Elemente höherer Ordnung in diesem Fall weiterhin effektiv eingesetzt werden können, sind Modifikationen nötig, siehe FRANKE U. A. (2010) und KONYUKHOV UND SCHWEIZERHOF (2009). Bei Verwendung linearer Elemente kann der Effekt durch Netzverfeinerung zufriedenstellend begrenzt werden.

Diskretisierungsschema	LBB-Bedingung erfüllt?	Kontakt-Patch-Test bestanden?
NTN (lin)	ja	ja
NTN (quad)	(*)	(*)
NTS (1p, lin/quad)	ja	nein
NTS (2p, lin)	nein	ja
NTS (2p, quad)	nein	nein
STS (SIMO U. A. 1985)	nein	ja
STS (PAPADOPOULOS UND TAYLOR 1992)	nein	ja
STS (EL-ABBASI UND BATHE 2001)	ja	ja
Dual Mortar (WOHLMUTH UND KRAUSE 2003)	ja	ja

Bezeichnungen:

NTN:	Knoten-zu-Knoten
NTS:	Knoten-zu-Segment
STS:	Segment-zu-Segment
1p/2p:	One-pass-/Two-pass-Algorithmus
lin/quad:	Lineare/quadratische Ansätze für die Verschiebungen
(*):	Ja, falls Eck- auf Eck- und Mittel- auf Mittelknoten, sonst nein

Quellen:

Dual Mortar:	WOHLMUTH UND KRAUSE (2003)
Sonst:	EL-ABBASI UND BATHE (2001)

**Tabelle 3.1:** LBB-Stabilität und Erfüllung des Kontakt-Patch-Tests.

### 3.2.2 NTN-Diskretisierung

Frühe Kontaktformulierungen im Rahmen der Finite-Elemente-Methode verwendeten häufig „Knoten-zu-Knoten“-Diskretisierungen (*node-to-node* – NTN), siehe beispielsweise FRANCAVILLA UND ZIENKIEWICZ (1975) und HUGHES U. A. (1976). Als Voraussetzung für die Benutzung dieser Methode müssen die Kontaktflächen des Slave- und des Master-Körpers konform diskretisiert werden (siehe Abbildung 3.2). Der Anwendungsbereich ist anschließend auf Probleme mit kleinen Deformationen begrenzt. Die NTN-Diskretisierung stellt die Kontaktbedingungen durch eine paarweise Kopplung der Verschiebungen von je einem Slave-Kontaktknoten  $I$  und einem Master-Kontakt-

knoten  $J$  sicher. Die zugehörigen Knoten-Kopplungskräfte entsprechen dann den Kontaktkräften.

Algorithmisch geht die NTN-Formulierung aus der Kollokation der kontinuierlichen Gleichungen (2.57) und (2.62) an den  $n_{\text{sa}}$  aktiven Slave-Kontaktknoten der Kontaktfläche hervor:

$$\int_{\gamma_c^1} t_{c_n} \delta g_n d\gamma_c^1 \approx \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} z_{nI} \delta g_{nI} A_I = \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} \overbrace{z_{nI} A_I \bar{\mathbf{n}}_I}^{\mathbf{f}_{cI}^{\text{NTN}}} \cdot (\delta \hat{\mathbf{d}}_J^2 - \delta \mathbf{d}_I^1) \quad (3.5)$$

$$\int_{\gamma_c^1} \delta t_{c_n} g_n d\gamma_c^1 \approx \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} \delta z_{nI} g_{nI} A_I = \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} \delta z_{nI} A_I \bar{\mathbf{n}}_I \cdot (\hat{\mathbf{x}}_J^2 - \mathbf{x}_I^1) = 0.$$

Formal entspricht diese Vorgehensweise einer Diskretisierung der Kontaktspannung und der virtuellen Kontaktspannung mit einer Dirac-Delta Funktion. Der resultierende Knoten-Kontaktkraftvektor  $\mathbf{f}_{cI}^{\text{NTN}}$  in Gleichung (3.5) setzt sich somit aus dem skalaren Normalspannungswert  $z_{nI}$  multipliziert mit der Bezugsfläche  $A_I$  und der Knoten-Normalen  $\bar{\mathbf{n}}_I$  zusammen. Die Knoten-Normale verbindet die Knoten  $I$  und  $J$  und kann für identische Knotenpositionen beispielsweise über die Normalen der an Knoten  $I$  grenzenden Element-Kanten definiert werden. Abbildung 3.2 zeigt schematisch eine zweidimensionale NTN-Diskretisierung für zwei mit bilinearen Q1-Elementen vernetzte Körper. Die Bezugsfläche  $A_I$  entspricht in diesem Fall der Summe der halben Längen der angrenzenden Element-Kanten,  $A_I = \frac{1}{2}(\ell_{e1} + \ell_{e2})$ .

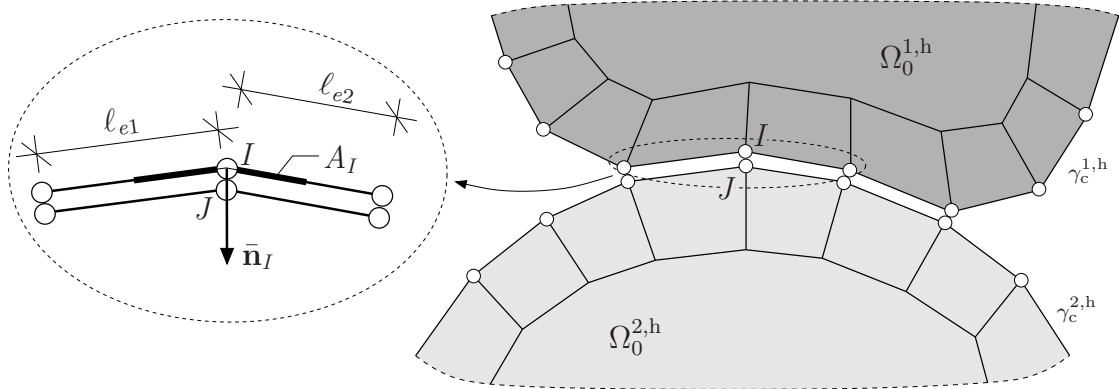


Abbildung 3.2: NTN-Formulierung mit bilinearen Q1-Elementen.

### 3.2.3 NTS-Diskretisierung

Da die NTN-Diskretisierung aufgrund der Beschränkung auf konforme Vernetzungen und kleine Deformationen nur begrenzt einsetzbar ist, entwickelte sich parallel die „Kno-

ten-zu-Segment“-Diskretisierung (*node-to-segment* – *NTS*), siehe beispielsweise HUGHES U. A. (1977) und HALLQUIST (1979). In der Folgezeit wurden zahlreiche Weiterentwicklungen vorgestellt, beispielsweise die Berücksichtigung von Reibung bei Problemen mit großen Deformationen (BATHE UND CHAUDHARY 1985), die Behandlung von zwei- und dreidimensionalen dynamischen Kontaktvorgängen (HALLQUIST U. A. 1985) oder die konsistente Linearisierung für eine Umsetzung mit der Methode der Lagrange’schen Multiplikatoren und der Penalty-Methode (WRIGGERS UND SIMO 1985). In WRIGGERS U. A. (1990) werden Interface-Gesetze formuliert, welche den Zusammenhang zwischen Kontaktspannung und kinematischen Kontaktgrößen äquivalent zu dem Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung bei plastischem Materialverhalten beschreiben. LAURSEN UND SIMO (1993) geben erstmals einen NTS-Algorithmus mit einer rigorosen kontinuumsmechanischen Herleitung an.

Algorithmisch koppelt die NTS-Formulierung durch Kollokation der Gleichungen (2.57) und (2.62) an den  $n_{\text{sa}}$  aktiven Slave-Kontaktknoten je einen Slave-Kontaktknoten  $I$  mit seinem Projektionspunkt  $\hat{\mathbf{x}}^{2,\text{h}}$  auf der Master-Seite (vgl. Abbildung 3.3). Dieser wird durch eine Interpolation mit geeigneten Formfunktionen aus den Knotenpositionen des jeweiligen *Master-Elements*<sup>4</sup> ermittelt. Damit resultiert für bilineare Q1-Elemente eine Summe von  $n_{\text{sa}}$  Ausdrücken, welche jeweils von einem Slave-Kontaktknoten  $I$  und zwei Master-Kontaktknoten  $J_1$  und  $J_2$  abhängen:

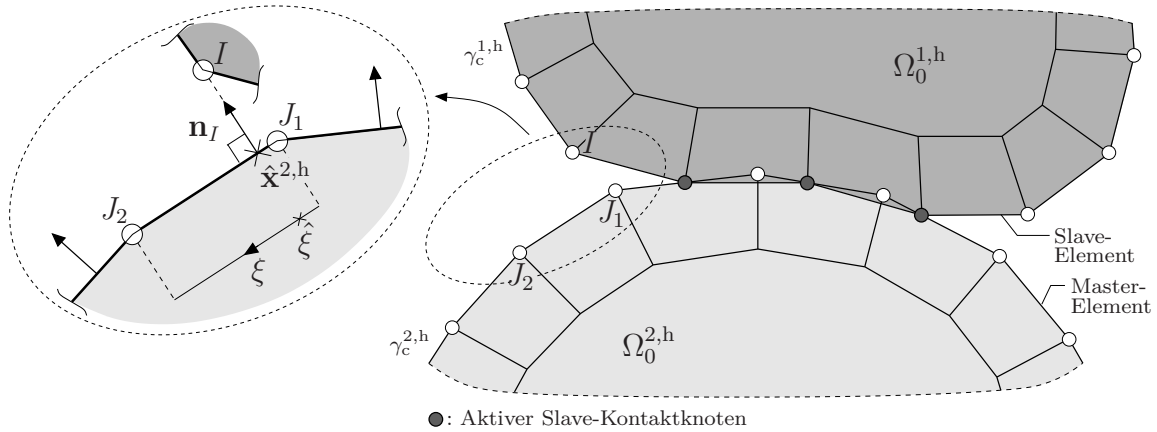
$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_c^1} t_{c_n} \delta g_n d\gamma_c^1 &\approx \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} z_{nI} \delta g_{nI} A_I = \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} z_{nI} A_I \left[ \delta \mathbf{d}_I^1 - (1 - \hat{\xi}) \delta \mathbf{d}_{J_1}^2 - \hat{\xi} \delta \mathbf{d}_{J_2}^2 \right] \cdot \mathbf{n}_I \\
&= \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} z_{nI} A_I \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_I \\ -(1 - \hat{\xi}) \mathbf{n}_I \\ -\hat{\xi} \mathbf{n}_I \end{bmatrix}}_{(\mathbf{f}_c^{\text{NTS}})^{\text{T}} = (\mathbf{B}_{\text{NTS}}^c)^{\text{T}} z_{nI}}^{\text{T}} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{d}_I^1 \\ \delta \mathbf{d}_{J_1}^2 \\ \delta \mathbf{d}_{J_2}^2 \end{bmatrix} \\
\int_{\gamma_c^1} \delta t_{c_n} g_n d\gamma_c^1 &\approx \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} \delta z_{nI} g_{nI} A_I = \sum_{I=1}^{n_{\text{sa}}} \delta z_{nI} A_I \left[ \mathbf{x}_I^1 - (1 - \hat{\xi}) \mathbf{x}_{J_1}^2 - \hat{\xi} \mathbf{x}_{J_2}^2 \right] \cdot \mathbf{n}_I = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$\hat{\xi} \in [0, 1]$  bezeichnet dabei den Koordinatenwert des Projektionspunkts  $\hat{\mathbf{x}}^{2,\text{h}}$  im Parameterraum des Master-Elements, siehe Abbildung 3.3. In der Abbildung dargestellt ist ein sogenannter „one-pass“-Algorithmus, bei welchem die Kontaktknoten der Slave-Seite die Master-Elemente nicht durchdringen dürfen. Die Durchdringung der Slave-Elemente durch die Master-Kontaktknoten ist hingegen zulässig.

---

<sup>4</sup>In NTS-Veröffentlichungen wird abweichend von der hier verwendeten Definition ein Master-Element als Segment bezeichnet.





**Abbildung 3.3:** NTS-Formulierung mit bilinearen Q1-Elementen.

Ein NTS one-pass-Algorithmus erfüllt den Kontakt-Patch-Test nicht. Darüber hinaus ist die Verschiebungslösung davon abhängig, welche Seite als Slave und welche als Master gewählt wird. Um diese Defizite zu beheben, wurden sogenannte „two-pass“-Formulierungen entwickelt (CRISFIELD 2000; TAYLOR UND PAPADOPOULOS 1991), welche den NTS-Algorithmus zweimal nacheinander mit zwischenzeitlichem Vertauschen von Slave- und Master-Seite durchführen. Als Folge daraus dürfen weder die Slave-Kontaktknoten die Master-Elemente noch die Master-Kontaktknoten die Slave-Elemente durchdringen. Diese Verschiebungskopplung ist aber meistens zu restriktiv und damit zu steif. Die resultierenden Verschiebungen sind zu klein (siehe beispielsweise PUSO UND LAURSEN (2004a), Abbildung 4(c)). Ein mathematischer Indikator für dieses Verhalten ist das Nichterfüllen der LBB-Bedingung (EL-ABBASI UND BATHE 2001), welches durch linear abhängige Kontaktbedingungen ausgelöst wird. Für lineare Elemente können diese Redundanzen behoben werden (siehe beispielsweise CRISFIELD (2000)), für Elemente höherer Ordnung im Allgemeinen nicht. Weitere Probleme der NTS-Diskretisierung sind mögliche numerische Instabilitäten, welche entstehen können, wenn ein Slave-Kontaktknoten sein Master-Element wechselt oder ganz von der Kontaktfläche abrutscht und inaktiv wird. Im ersten Fall ändert sich die Richtung der Kontaktkraft sprunghaft, da diese durch die Oberflächen-Normale des Master-Elements definiert ist (siehe Abbildung 3.3). Im zweiten Fall sinkt die Kontaktkraft des abgerutschten Knotens schlagartig von einem endlichen Wert auf null. Als Folge dessen verändert sich die globale Verteilung der Kontaktkräfte abrupt. Teilweise können solche ungünstigen Verhaltensweisen vermieden werden, allerdings nur durch numerisch wesentlich komplexere Verfahren (siehe Abschnitt 3.2.4).

Für eine ausführliche Übersicht zu NTS-Kontaktformulierungen sei auf ZAVARISE UND DE LORENZIS (2009) verwiesen, welche darüber hinaus einen modifizierten NTS-Algorithmus vorstellen, der den Kontakt-Patch-Test besteht. Die resultierende Diskre-

tisierung ist allerdings deutlich komplexer als die in Gleichung (3.6) dargestellte. Im Gegensatz dazu wird ohne Modifikationen eine relativ einfache Struktur erreicht. So kann im Zweidimensionalen mit linearen Elementen der Projektionspunkt  $\hat{\mathbf{x}}^{2,h}$  explizit bestimmt werden. Außerdem erleichtert die im Master-Element konstante Normale die Linearisierung und damit die Implementierung.

#### 3.2.4 Glatte Oberflächenrepräsentation

Die Kollokation der Kontakt-Integrale an den Slave-Kontaktknoten verbunden mit der üblichen facettierten Beschreibung der Master-Oberfläche (siehe Abbildung 3.3) führt zu einer nicht glatten Beschreibung der Kontaktgrößen, wie beispielsweise der Kontaktkraft. Insbesondere bei Problemen mit großen tangentialen Relativverschiebungen können daraus die in Abschnitt 3.2.3 beschriebenen numerischen Instabilitäten entstehen. Motiviert durch diese Problematik wurden Glättungsalgorithmen entwickelt, welche eine glatte Approximation der facettierten Oberfläche einführen, mit der eine kontinuierliche Definition der Kontaktgrößen möglich ist. Im folgenden Abschnitt werden die Umsetzung sowie Vor- und Nachteile dieses Konzeptes kurz skizziert. Für eine ausführliche Diskussion sei auf die Lehrbücher von LAURSEN (2003) und WRIGGERS (2001) sowie die darin angegebene Literatur verwiesen.

Eine a priori glatte Oberflächenbeschreibung kann durch Anwendung des isogeometrischen Konzeptes (HUGHES U. A. 2005) erreicht werden, welches Geometrie und Lösungsräume nicht mit Lagrange'schen Polynomen sondern beispielsweise mit NURBS- (Non-Uniform Rational B-Splines-)basierten Formfunktionen beschreibt. Ein Kontaktalgorithmus, dem eine isogeometrische Oberflächenbeschreibung zugrunde liegt, besitzt automatisch die Vorteile eines Glättungsalgorithmus. Im Gegensatz zu diesem ist es jedoch nicht notwendig, eine zusätzliche glatte Oberfläche einzuführen.

Während Glättungsalgorithmen überwiegend zur Behebung der numerischen Instabilitäten einer Kollokationsformulierung eingesetzt werden, stellt das isogeometrische Konzept eine alternative räumliche Diskretisierungsstrategie dar. Insofern unterscheiden sich beide Konzepte prinzipiell. Angewandt auf Kontaktprobleme ergeben sich aber vergleichbare Vorteile, weshalb in diesem Abschnitt beide Ideen nebeneinander genannt werden.

#### Glättungsalgorithmen

Grundidee eines Glättungsalgorithmus' ist die Einführung einer zusätzlichen glatten Geometriebeschreibung. In Verbindung mit einer Kollokationsformulierung stellt diese zumeist eine geglättete Version der Master-Kontaktfläche dar. Somit können die kollokierten Kontaktgrößen, beispielsweise die Normalklaffung und die Kontaktkraft,

kontinuierlich oder glatt definiert werden. Die geglättete Geometrie muss mindestens  $C^1$ -Kontinuität besitzen und gleichzeitig die ursprüngliche Diskretisierung ausreichend gut approximieren. Letzteres kann mit Funktionen erreicht werden, welche die Netzknoten interpolieren oder den Unterschied zwischen facettierter und geglätteter Geometrie in einem geeigneten Maß minimieren. Für zweidimensionale Probleme verwenden beispielsweise PADMANABHAN UND LAURSEN (2001) Splines und Hermite Polynome, WRIGGERS U. A. (2001) Bézier und Hermite Polynome sowie PIETRZAK (1997) Splines oder Bézier Polynome. In BELYTSCHKO U. A. (2002) wird eine implizite Glättung vorgestellt, welche die Kontaktgrößen bezüglich einer geglätteten Geometrie berechnet, ohne diese vorher explizit zu konstruieren. Für allgemeine dreidimensionale Geometrien ist die Konstruktion geglätteter Oberflächen wesentlich schwieriger, beispielsweise können hierzu Gregory Patches verwendet werden (PUSO UND LAURSEN 2002). Falls eine Linearisierung der Kontaktgrößen benötigt wird, muss der Zusammenhang zwischen geglätteter und ursprünglicher Geometrie linearisiert werden. Dadurch erhöht sich zusätzlich der algorithmische Aufwand. Darüber hinaus kann auch eine glatte Oberflächenbeschreibung solche Instabilitäten nicht verhindern, die durch ein Abrutschen des Kollokationspunkts von der Master-Kontaktfläche ausgelöst werden.

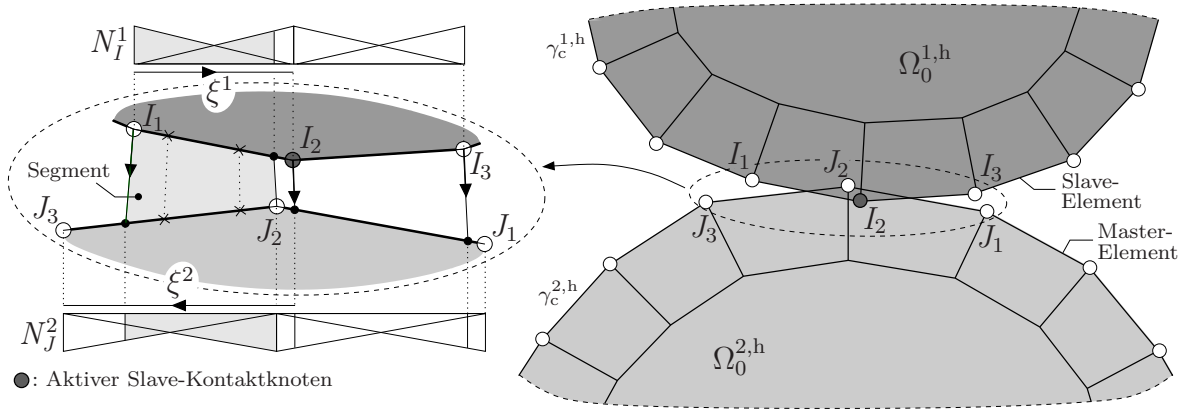
### Isogeometrisches Konzept

Im Rahmen der klassischen FEM werden Geometrie und Lösungsräume in der Regel mit  $C^0$ -kontinuierlichen Lagrange'schen Formfunktionen diskretisiert. Die ursprüngliche Geometrie, welche zumeist glatt mithilfe eines CAD-Programms definiert wurde, wird hierbei nur angenähert. Das isogeometrische Konzept (HUGHES U. A. 2005) verwendet eine Diskretisierung, die direkt auf den CAD-Daten basiert. Hierzu werden Geometrie und Unbekannte beispielsweise mit NURBS-Formfunktionen approximiert. Abhängig vom Ansatzgrad besitzen diese auch zwischen den Elementen einen glatten Verlauf. Trotz der erhöhten Kontinuität weisen NURBS-Formfunktionen noch immer eine lokale Trägereigenschaft auf, wodurch die übliche Bandstruktur der Systemsteifigkeitsmatrix erhalten bleibt. Damit eignet sich das isogeometrische Konzept für alle Arten von Problemen, welche durch nicht glatte Oberflächenbeschreibungen negativ beeinflusst werden. Erste Anwendungen auf Kontaktprobleme zeigen, dass beispielsweise die typischen numerischen Instabilitäten einer Kollokationsformulierung bei großen tangentialen Relativverschiebungen vermieden werden können (MATZEN U. A. 2013; TEMIZER U. A. 2011). Auch im Zusammenhang mit einer integralen Kontaktformulierung, welche die Kontakt-Integrale nicht segmentbasiert auswertet (siehe Abbildung 3.1(b)), stellt eine NURBS-basierte Diskretisierung einen Vorteil dar. Bei solch einer Formulierung rutschen unter tangentialen Relativbewegungen die Integrationspunkte ähnlich den Slave-Kontaktknoten einer NTS-Formulierung von einem Master-Element auf das näch-

ste. Aus diesem Grund kann sich eine facettierte Oberflächenbeschreibung negativ auf die numerische Stabilität auswirken. Mit einer glatten Oberflächenbeschreibung wird dieser Effekt vermieden. NURBS-basierte integrale Kontaktformulierungen finden sich beispielsweise in TEMIZER U. A. (2011), TEMIZER U. A. (2012), DE LORENZIS U. A. (2011), DE LORENZIS U. A. (2012) oder LU (2011). Alle genannten Formulierungen werten die Kontakt-Integrale ohne die Einführung von Segmenten aus.

#### 3.2.5 STS-Diskretisierung

Auch wenn die numerische Stabilität einer Kollokationsformulierung durch die im vorherigen Abschnitt beschriebenen Glättungsalgorithmen verbessert werden kann, ändert dies nichts an den restlichen Problemen wie beispielsweise der ungenauen Spannungsrepräsentation. Darüber hinaus ist die numerische Stabilität nicht a priori durch den Basisalgorithmus vorhanden, sondern muss erst durch den Glättungsalgorithmus „erkauft“ werden. Motiviert durch diese Umstände entstanden schon früh Verfahren, welche die Kontakt-Integrale nicht kollokieren sondern mit einer numerischen Integrationsregel auswerten. Dabei sind die resultierenden Integranden innerhalb einzelner Slave- oder Master-Elemente nicht glatt, da die Normalklaffung  $g_n$  bzw. die virtuelle Normalklaffung  $\delta g_n$  von den Verschiebungsdiskretisierungen der Slave- und der Master-Seite abhängen. Damit die Integrale trotzdem exakt ausgewertet werden können, wird das Integrationsgebiet in *Segmente* mit jeweils glatten Integranden aufgeteilt (siehe Abbildung 3.4, links). Jedes Segment definiert sich dabei durch den Überlappungsbereich je eines Slave- und eines Master-Elements. In der NTS-Terminologie werden Slave- und Master-Elemente als Segmente bezeichnet, wodurch sich der Name „*Segment-zu-Segment*“-Diskretisierung (*segment-to-segment* – *STS*) für die hier beschriebene Gruppe von Verfahren durchgesetzt hat. Als Integrationsgebiet kann die Slave-, die Master- oder eine Zwischenfläche verwendet werden, wobei üblicherweise die Slave-Fläche gewählt wird. Der erste STS-Algorithmus wurde von SIMO U. A. (1985) basierend auf einer Perturbed Lagrange’schen Formulierung vorgestellt. Segmentweise konstante Ansätze für die Lagrange’schen Multiplikatoren führen auf eine integrale Nichtdurchdringungsbedingung. Die Klaffungsintegrale der einzelnen Segmente werden mit der Trapezregel ausgewertet. PAPADOPOULOS UND TAYLOR (1992) verwenden einen Penalty-basierten Algorithmus mit nichtlinearer Kinematik, gemitteltem Normalenfeld und quadratischen Elementen. Zur Berechnung der Segment-Integrale wird die Simpsonregel verwendet. Eine entsprechende dreidimensionale Erweiterung wird in PAPADOPOULOS UND TAYLOR (1993) vorgestellt. ZAVARISE UND WRIGGERS (1998) präsentieren eine Penalty-Formulierung mit linearen Elementen, nichtlinearer Kinematik und einer segmentbasierten Integrationsregel mit einer variablen Anzahl an Integrationspunkten. EL-ABBASI UND BATHE (2001) verwenden die Lagrange’sche Multiplikatoren Methode und vergleichen verschiedene Integrationsregeln



**Abbildung 3.4:** STS-Formulierung mit bilinearen Q1-Elementen.

sowie verschiedene Ansatzordnungen für die Multiplikatoren. Numerische Untersuchungen zeigen, dass mit einer Gauß-Integration auf Segment-Ebene und mit linearen Formfunktionen die LBB-Bedingung erfüllt ist. Darüber hinaus wird bei Netzverfeinerung die optimale Konvergenzrate der Verzerrungsenergie bewahrt. Insofern weist der Konstruktionsgedanke dieses Algorithmus' einige Ideen auf, welche bei der Entwicklung der Mortar-Methode (siehe Abschnitt 3.2.6) von grundlegender Bedeutung sind.

EL-ABBASI UND BATHE (2001) unterteilen die einzelnen STS-Formulierungen weiter bezüglich der Auswertung der Segment-Integrale. Die erste Gruppe besteht dabei aus Verfahren, welche bestimmte Größen der Kontakt-Integrale an diskreten Punkten messen und dann interpolieren (PAPADOPOULOS UND TAYLOR 1992, 1993; SIMO U. A. 1985). Beispielsweise kann die Normalklaffung an den FE-Knoten gemessen und mit geeigneten Funktionen interpoliert werden. Diese Verfahren bestehen den Kontakt-Patch-Test, erfüllen die LBB-Bedingung aber nicht (EL-ABBASI UND BATHE 2001). Verfahren der zweiten Gruppe (EL-ABBASI UND BATHE 2001; ZAVARISE UND WRIGGERS 1998) verwenden bei der Auswertung der Kontakt-Integrale direkt die diskretisierte Geometrie sowie die diskretisierte Kontaktspannung bzw. die entsprechenden virtuellen Größen. Die Kontaktspannung bzw. die virtuelle Kontaktspannung werden dazu auf globaler Ebene als Summe über die Formfunktionen  $N_I^1$  und die zugehörigen Knotenwerte  $\mathbf{z}_{nK}$  bzw.  $\delta \mathbf{z}_{nK}$  der aktiven Slave-Kontaktknoten  $n_{sa}$  diskretisiert (siehe Abbildung 3.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{c_n} &\approx \mathbf{t}_{c_n}^h = \sum_{K=1}^{n_{sa}} N_K^1(\xi^1) \mathbf{z}_{nK} = \sum_{K=1}^{n_{sa}} N_K^1(\xi^1) (z_n \mathbf{n})_K \\ \delta \mathbf{t}_{c_n} &\approx \delta \mathbf{t}_{c_n}^h = \sum_{K=1}^{n_{sa}} N_K^1(\xi^1) \delta \mathbf{z}_{nK} = \sum_{K=1}^{n_{sa}} N_K^1(\xi^1) (\delta z_n \mathbf{n})_K. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Die Formfunktionen  $N_I^1(\xi^1)$  und im Folgenden auch  $N_I^2(\xi^2)$  sind als Auswertung der Formfunktionen  $N_I^\alpha(\xi^\alpha)$  auf dem Kontaktrand zu verstehen. Die normierten Koordi-

naten  $\xi^1$  bzw.  $\xi^2$  beziehen sich jeweils auf den Parameterraum eines Slave- bzw. eines Master-Elements, siehe auch Abbildung 3.4. Einsetzen der diskretisierten Größen (3.7) sowie der diskretisierten Verschiebungen bzw. virtuellen Verschiebungen (3.2)<sub>1</sub> in die kontinuierlichen Kontakt-Integrale (2.57) und (2.62) liefert die diskretisierte Form der Kontakt-Integrale:

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_c^1} t_{c_n} \delta g_n d\gamma_c^1 &= - \int_{\gamma_c^1} \mathbf{t}_{c_n} \cdot (\delta \mathbf{u}^1 - \delta \mathbf{u}^2) d\gamma_c^1 \\
 &\approx - \int_{\gamma_c^{1,h}} \sum_{K=1}^{n_{sa}} N_K^1 \mathbf{z}_{nK} \cdot \left( \sum_{I=1}^{n_s} N_I^1 \delta \mathbf{d}_I^1 - \sum_{J=1}^{n_m} N_J^2 \delta \mathbf{d}_J^2 \right) d\gamma_c^{1,h} \\
 &= - \sum_{K=1}^{n_{sa}} (z_n \mathbf{n})_K \cdot \left( \sum_{I=1}^{n_s} \delta \mathbf{d}_I^1 \int_{\gamma_c^{1,h}} N_K^1 N_I^1 d\gamma_c^{1,h} - \sum_{J=1}^{n_m} \delta \mathbf{d}_J^2 \int_{\gamma_c^{1,h}} N_K^1 N_J^2 d\gamma_c^{1,h} \right) \\
 \int_{\gamma_c^1} \delta t_{c_n} g_n d\gamma_c^1 &= - \int_{\gamma_c^1} \delta \mathbf{t}_{c_n} \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) d\gamma_c^1 \\
 &\approx - \sum_{K=1}^{n_{sa}} (\delta z_n \mathbf{n})_K \cdot \left( \sum_{I=1}^{n_s} \mathbf{x}_I^1 \int_{\gamma_c^{1,h}} N_K^1 N_I^1 d\gamma_c^{1,h} - \sum_{J=1}^{n_m} \mathbf{x}_J^2 \int_{\gamma_c^{1,h}} N_K^1 N_J^2 d\gamma_c^{1,h} \right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Auswertung der Integrale über die Formfunktionen erfolgt als Summe über die einzelnen Segment-Beiträge. In Abbildung 3.4 ist beispielhaft der Beitrag eines einzelnen Segments dargestellt. Pro Segment sind dabei jeweils acht Integralausdrücke zu berechnen, da die Formfunktionen beider Slave-Kontaktknoten mit sich selbst und mit den Formfunktionen der anderen drei Knoten integriert werden müssen. Wird die Integration über die Slave-Seite durchgeführt, ist zur Auswertung des zweiten Integrals in Zeile drei bzw. fünf von Gleichung (3.8) an den Integrationspunkten eine Projektion von der Master- auf die Slave-Seite erforderlich.

Wie schon in Abschnitt 3.2.4 angedeutet, sind neben den hier geschilderten Verfahren alternative integrale Methoden entstanden, welche auf die Einführung von Segmenten verzichten und die Kontakt-Integrale approximativ berechnen. Auf diese Verfahren wird am Ende von Abschnitt 3.2.6 im Zusammenhang mit mortarbasierten Kontaktdiskretisierungen aus dem Bereich der Ingenieurliteratur eingegangen.

### 3.2.6 Mortarbasierte Diskretisierung

Die Mortar-Methode wurde ursprünglich in BERNARDI U. A. (1990) als Kopplungsmethode zwischen spektralen und finiten Elementen eingeführt. In BERNARDI U. A. (1993, 1994) wurde die Strategie dann im Kontext von Gebietszerlegungsverfahren auf

die Kopplung von nicht-konformen Finite-Elemente-Diskretisierungen ausgeweitet. Kennzeichnend für die Mortar-Methode ist eine integrale Oberflächenkopplung, welche per Konstruktion die LBB-Bedingung erfüllt und bei Netzverfeinerung zu optimalen räumlichen Konvergenzraten führt.

Die Trennlinie zwischen mortarbasierten Kontaktdiskretisierungen und STS-Kontaktalgorithmen ist in der Literatur nicht strikt definiert. In dieser Arbeit wird eine Kontaktformulierung als *mortarbasiert* bezeichnet, sofern die Diskretisierung der Kontaktintegrale auf den mathematischen Überlegungen der Mortar-Methode beruht und die Auswertung der Integrale mit numerischer Integration erfolgt.

Im Folgenden wird eine kurze Übersicht zu verschiedenen Algorithmen aus dem Bereich der Gebietszerlegung gegeben. Damit soll auf die numerischen Parallelen zwischen Kopplungsalgorithmen aus den Bereichen Kontaktmechanik und Gebietszerlegung hingewiesen werden. Diese machen Verfahren aus dem einen Fachgebiet auch für das jeweils andere interessant. Anschließend wird auf die Lösbarkeit von Variationsproblemen und auf die Konvergenz von konformen, nicht-konformen und gemischten Finite-Elemente-Formulierungen eingegangen. Mit den dabei eingeführten Beziehungen soll ein prinzipieller Rahmen für das Verständnis der Konstruktionsgrundsätze der Mortar-Methode geschaffen werden. Darauf folgend sind die verschiedenen Entwicklungsrichtungen innerhalb der Mortar-Methode skizziert und die Grundlagen der in dieser Arbeit verwendeten mortarbasierten Kontaktformulierung dargestellt. Abschließend wird eine Übersicht zu den wichtigsten Entwicklungsrichtungen aus dem Bereich der Ingenieurliteratur gegeben, insbesondere für Probleme mit großen Deformationen.

## Gebietszerlegung und Kopplung von Substrukturen

In der Mathematik und der Mechanik wird unter dem Begriff *Gebietszerlegungsverfahren* eine Methode verstanden, welche ein diskretes Problem in mehrere Teilprobleme zerlegt, um die einzelnen Teilprobleme dann möglichst unabhängig voneinander behandeln zu können. Der Informationsaustausch zwischen den einzelnen Teilproblemen muss dabei durch geeignete Kopplungsverfahren sichergestellt sein. Sind die Teilprobleme mit Teilgebieten einer räumlichen Struktur assoziiert, findet der Informationsaustausch an gemeinsamen physikalischen Oberflächen (*Interfaces*) statt. Werden zwei Teilgebiete als materielle Körper und das zugehörige Interface als Kontaktfläche betrachtet, ist die Verwandtschaft zu Algorithmen der Kontaktmechanik offensichtlich. Im Vergleich zu Kontaktproblemen sind die Kopplungsbeziehungen im Interface allerdings in der Regel zeitlich konstant.

Die Gebietszerlegung kann aus numerischen Gründen erfolgen, beispielsweise um ein Problem mit parallelen Lösungsverfahren behandeln zu können. In solch einem Fall

resultieren konform vernetzte Teilgebiete, welche knotenbasiert gekoppelt werden können. Dies entspricht in der Kontaktmechanik dem NTN-Algorithmus. Durch die unabhängige Verfeinerung verschiedener Diskretisierungen, durch die Kopplung a priori nicht-konformer Diskretisierungen oder durch die Kopplung unterschiedlicher Diskretisierungsmethoden werden allgemeinere Kopplungsalgorithmen erforderlich. Äquivalent zur Kontaktmechanik kann die Kopplung dabei punktweise oder integral erfolgen. Verfahren mit punktuellen Kopplungsbedingungen sind beispielsweise die FETI-(Finite Element Tearing and Interconnecting-)Methode (FARHAT 1991) und die LLM-(Localized Lagrange Multipliers-)Methode (PARK UND FELIPPA 1998, 2000; PARK U. A. 2000, 2002). Integrale Kopplungsbedingungen werden von der Mortar-Methode verwendet (BERNARDI U. A. 1990, 1993, 1994). Jedes dieser drei Verfahren wurde zur Behandlung von Kontaktproblemen erweitert, siehe beispielsweise DUREISSEIX UND FARHAT (2001) für die FETI-Methode oder REBEL U. A. (2002) und GONZÁLEZ U. A. (2006, 2008) für den LLM-Algorithmus. Kontaktalgorithmen, welche auf der Mortar-Methode basieren, werden an entsprechender Stelle in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

Zur Umsetzung der Kopplungsbedingungen verwenden die FETI- und die LLM-Methode Lagrange'sche Multiplikatoren. Bei der FETI-Methode werden die Diskretisierungen der Oberflächen direkt mit je einem Multiplikatorenfeld pro Interface gekoppelt. Der LLM-Algorithmus verwendet zwei unabhängige Multiplikatorenfelder pro Interface und koppelt die Diskretisierungen der Oberflächen an einen zuvor eingeführten Interface-Rahmen. Dieser besitzt ein eigenes Verschiebungsfeld und wird diskretisierungsabhängig so konstruiert, dass der Kontakt-Patch-Test<sup>5</sup> erfüllt ist. Da jedes Teilgebiet direkte Informationen nur mit dem Interface-Rahmen austauscht, nicht aber mit den anderen Teilgebieten, trägt der Algorithmus die Bezeichnung „Localized“. Innerhalb der Mortar-Methode haben sich zwei unterschiedliche Verfahren zur Kopplung der Diskretisierungen entwickelt. In der ursprünglichen Formulierung wird mithilfe der Kopplungsbedingung der Lösungsraum a priori so eingeschränkt, dass ausschließlich Lösungen möglich sind, welche die Kopplungsbedingung erfüllen. Algorithmisch betrachtet wird hierzu das ursprüngliche Verschiebungsfeld auf der Slave-Seite (*non-mortar*) eines Interfaces statisch kondensiert und durch ein Verschiebungsfeld ersetzt, das von den Freiheitsgraden der Master-Seite (*mortar*) abhängt. Diese Formulierung führt auf ein Minimierungsproblem, dessen Verschiebungslösung im Interface punktweise Sprünge aufweist, auf Slave- und Master-Seite aber eine Funktion derselben Freiheitsgrade ist. Da solch eine Lösung nicht im Raum der exakten Lösungen liegt, wird das Verfahren als *nicht-konform* bezeichnet. Spätere Veröffentlichungen (BEN BELGACEM 1999; WOHLMUTH 1999) überführen die Mortar-Formulierung auf ein Sattelpunktproblem, welches die Kopplungsbedingungen

---

<sup>5</sup>Der Begriff „Kontakt-Patch-Test“ wird in dieser Arbeit auch im Zusammenhang mit der Interface-Kopplung einer Gebietszerlegungsmethode verwendet.



wiederum mit Lagrange'schen Multiplikatoren sicherstellt. Unabhängig davon, welche Formulierung verwendet wird, erfolgt die Diskretisierungskopplung so, dass die räumliche Konvergenzrate des Diskretisierungsfehlers nicht verschlechtert wird. Die hierzu maßgebenden mathematischen Maße und Bedingungen werden im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt.

### Lösbarkeit von Variationsproblemen und Konvergenz von Finite-Elemente-Formulierungen

Die folgenden Ausführungen geben eine kompakte Übersicht zur Lösbarkeit von Variationsproblemen und zur Konvergenz von konformen, nicht-konformen und gemischten Finite-Elemente-Formulierungen. Sie sind nicht als vollständige und mathematisch rigore Beschreibung der Themenkomplexe zu betrachten, sondern sollen ein prinzipielles Verständnis für die Konstruktionsgrundsätze der Mortar-Formulierung ermöglichen. Für eine fundierte und ausführliche Darstellung sei auf STRANG UND FIX (1973), BRAESS (1997) und HUGHES (2000), für eine kompakte, aber dennoch sehr anschauliche Diskussion auf HAUSSER (1996) verwiesen. Die dargestellten Kriterien und Schlussfolgerungen setzen die Existenz von Potentialen voraus und beruhen zumeist auf der Annahme kleiner Deformationen. Trotzdem kann das Verhalten unter kleinen Deformationen als Indikator für das Verhalten unter großen Deformationen angesehen werden<sup>6</sup>.

#### Konforme Formulierung

Zunächst sei ein Problem in allgemeiner Form durch das kontinuierliche Funktional

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - c(\mathbf{v}) = \min, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{F} \text{ (Raum der zulässigen Funktionen)} \quad (3.9)$$

beschrieben, wobei  $J(\mathbf{v})$  beispielsweise die potentielle Systemenergie charakterisiert. Das bilineare Funktional  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  (*Bilinearform*), welches quadratisch von der Verschiebung  $\mathbf{v}$  abhängt, repräsentiert in diesem Fall die interne Systemenergie. Entsprechend stellt das lineare Funktional  $c(\mathbf{v})$  eine Formulierung der externen Systemenergie dar.  $J(\mathbf{v})$  besitzt eine ähnliche Struktur wie das Potential  $\Pi_{\text{PMPE}}$  aus Gleichung (2.66). Dieses berechnet die interne Systemenergie allerdings über eine Beziehung, welche in einer komplexeren Form von der Verschiebung abhängt als das Funktional  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ . Damit das untersuchte Problem numerisch mit der Methode der finiten Elemente gelöst werden kann, muss das Variationsproblem aus Gleichung (3.9) eine eindeutige Lösung besitzen.

<sup>6</sup> „... The theoretical basis of the LBB condition, incidentally, has only been developed for linear problems. Again we have used the ubiquitous practice of applying the results of linear theory to nonlinear problems when we do not have a nonlinear theory. ...“ (BELYTSCHKO U. A. 2008)

Diese Anforderung wird erfüllt, wenn die Bilinearform  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  stetig und elliptisch ist:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\leq c_1 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{F}, \quad c_1 > 0 \quad (\text{Stetigkeit}) \\ a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq c_2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{F}, \quad c_2 > 0 \quad (\text{Elliptizität}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Gleichung (3.10) hat folgende anschauliche Bedeutung: Die interne Systemenergie  $a(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  wird nur dann identisch null, wenn auch das Verschiebungsfeld  $\mathbf{v}$  verschwindet (Gleichung (3.10)<sub>2</sub>). Werden die Verschiebungen unendlich, resultiert eine unendlich Systemenergie. Sind die Verschiebungen dagegen endlich, wird auch die Systemenergie einen endlichen Wert annehmen (Gleichung (3.10)<sub>1</sub>). Die eingeführte Norm  $\|\mathbf{v}\|$  berechnet sich hierbei als Integral über das betrachtete Gebiet  $d\Omega$ <sup>7</sup>:

$$\|\mathbf{v}\| = \left[ \int_{\Omega} \left( \sum_i (v_i)^2 + \sum_i \sum_j (v_{i,j})^2 \right) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (3.11)$$

Eine Diskretisierung des Funktionals mit der Methode der finiten Elemente bedeutet mathematisch gesehen lediglich, dass der Funktionenraum der möglichen Lösungen von  $\mathcal{F}$  auf  $\mathcal{F}^h \subseteq \mathcal{F}$  eingeschränkt wird. Somit gelten für das diskretisierte Funktional dieselben Bedingungen (3.10) wie für das kontinuierliche. Die im Rahmen dieser Arbeit eingesetzten, voll integrierten Q1-Verschiebungselemente erfüllen in Verbindung mit den verwendeten hyperelastischen Stoffgesetzen beide Forderungen. Gleichzeitig sind die Ansatzräume der Verschiebungen nach Beziehung (3.2)<sub>1</sub> vollständig, d.h. sie können eine in jeder Raumrichtung lineare Funktion exakt repräsentieren. Damit ist sichergestellt, dass die FE-Lösung  $\mathbf{u}^h \in \mathcal{F}^h$  den *Approximationsfehler*  $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}^h\|$  bei einer konformen Diskretisierung minimiert:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}^h\| \leq \inf_{\mathbf{v}^h \in \mathcal{F}^h} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^h\|. \quad (3.12)$$

Darüber hinaus wird gewährleistet, dass der Approximationsfehler bei Netzverfeinerung mit einer bestimmten Ordnung, der Konvergenzrate, gegen null konvergiert.

### Nicht-konforme Formulierung

Ist die Diskretisierung nicht-konform, muss Gleichung (3.10) als Summe über die einzelnen konform diskretisierten Teilgebiete ausgewertet werden. Ein Integral über das komplette Gebiet würde Singularitäten in den Interfaces enthalten. Dies liegt daran, dass die FE-Lösung  $\mathbf{u}^h$  Sprünge in den Interfaces enthält und somit im Vergleich zu einer konformen Diskretisierung nicht mehr in einem Teilraum der exakten Lösung liegt.

---

<sup>7</sup>Mit Ausnahme des aktuellen Abschnitts bezeichnet  $\|(\bullet)\|$  die Euklid'sche Norm  $\|\mathbf{f}\| = [\sum_i (f_i)^2]^{1/2}$  eines Vektors  $\mathbf{f}$ .

Zum Approximationsfehler (siehe Gleichung (3.12)) addiert sich aus diesem Grund ein *Konsistenzfehler*, so dass eine erweiterte Fehlerschätzung, bekannt als *Lemma von Strang* (STRANG UND FIX 1973), verwendet werden muss:

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{u}^h\| \leq \underbrace{\inf_{\mathbf{v}^h \in \mathcal{F}^h} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}^h\|}_{\text{Approximationsfehler}} + \underbrace{\sup_{\mathbf{v}^h \in \mathcal{F}^h, \mathbf{v}^h \neq \mathbf{0}} \frac{\left| \int_{\mathcal{S}^h} \mathbf{t} \cdot [\mathbf{v}^h] \, d\mathcal{S}^h \right|}{\|\mathbf{v}^h\|}}_{\text{Konsistenzfehler}}. \quad (3.13)$$

Der Operator  $[\mathbf{v}^h]$  definiert dabei den Sprung der Größe  $\mathbf{v}^h$  über das Interface  $\mathcal{S}^h$ ,  $\mathbf{t}$  den Cauchy'schen Spannungsvektor und  $|(\bullet)|$  den Betrag einer skalaren Größe  $(\bullet)$ . Die verwendeten Normen sind, wie oben erwähnt, als Summen der Normen der einzelnen Teilgebiete auszuwerten. Bei adäquater Interfacebehandlung konvergiert der Diskretisierungsfehler  $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}^h\|$  trotz des Konsistenzfehlers mit derselben Ordnung, die mit einer konformen Diskretisierung erzielt werden würde. Eine in diesem Sinne adäquate Interfacebehandlung bzw. die resultierende Konvergenzordnung des zugehörigen Diskretisierungsfehlers wird im Folgenden als optimal bezeichnet. Für die zugrundeliegenden mathematischen Untersuchungen sei auf STRANG UND FIX (1973), WOHLMUTH (2001) oder LAURSEN (2003) verwiesen. Im Rahmen nicht-konformer Mortar-Methoden ist Gleichung (3.13) somit eine maßgebende Beziehung, um entsprechende optimale Diskretisierungskopplungen zu gestalten.

### Gemischte Formulierung

Anstatt die Interface-Kopplungsbedingungen direkt als Anforderung an die Lösungsräume der Verschiebungen zu formulieren, kann alternativ eine gemischte Formulierung mit Lagrange'schen Multiplikatoren verwendet werden. In diesem Fall sind die Lösungsräume der Verschiebungen weiterhin Unterräume der analytischen Lösung. Die Erfüllung der Kopplungsbedingungen wird durch die Lagrange'schen Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{H}$  sichergestellt, wobei  $\mathcal{H}$  der Raum der zulässigen Funktionen für  $\boldsymbol{\lambda}$  bezeichnet. Physikalisch kann  $\boldsymbol{\lambda}$  als Kopplungs- oder Kontaktspannungen identifiziert werden. Das resultierende gemischte Funktional

$$\tilde{J}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) - c(\boldsymbol{\lambda}) \stackrel{!}{=} \text{stat} \quad (3.14)$$

repräsentiert ein Sattelpunktproblem, dessen Lösung ein Minimum bezüglich der Verschiebung und ein Maximum bezüglich der Kopplungsspannung  $\boldsymbol{\lambda}$  darstellt. Eine eindeutige Lösung kann genau dann garantiert werden, wenn weiterhin die Elliptizitätsbedingung

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq c_1 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{F}^*, \quad c_1 > 0 \quad (3.15)$$

und zusätzlich die LBB-Bedingung (BABŮSKA UND AZIZ 1972; BREZZI 1974; LADYZHENSKAYA UND URAL'TSEVA 1968) eingehalten ist:

$$\inf_{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{H}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{F}} \frac{|b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})|}{\|\mathbf{v}\| \|\boldsymbol{\lambda}\|} \geq c_2 > 0. \quad (3.16)$$

Dabei ist die Elliptizitätsbedingung (3.15) nur für den Unterraum  $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}$  zu erfüllen, der jene  $\mathbf{v}$  enthält, welche die Bedingung  $b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$  erfüllen.  $\|\boldsymbol{\lambda}\|$  stellt in Gleichung (3.16) eine geeignete Norm für die Kopplungsspannung  $\boldsymbol{\lambda}$  dar. Diese kann beispielsweise durch Integration des Betrags von  $\boldsymbol{\lambda}$  über die Kopplungsränder definiert werden. Die Berücksichtigung von Ableitungen ist dabei nicht notwendig, da das gemischte Funktional  $b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$  keine Ableitungen bezüglich  $\boldsymbol{\lambda}$  enthält.

Im Rahmen einer FE-Lösung müssen die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  unabhängig von der Diskretisierung sein, damit die zugrundeliegende Formulierung die LBB-Bedingung erfüllt. Anschaulich führt dies auf folgende Anforderungen: Die Kontakt- oder Kopplungsspannung  $\boldsymbol{\lambda}$  ist so zu diskretisieren, dass mit  $\boldsymbol{\lambda}^h \in \mathcal{H}^h \subseteq \mathcal{H}$  keine energielosen Deformationsmoden entstehen. Ansonsten können Zustände mit  $b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = 0$  resultieren, obwohl  $\|\mathbf{v}\|$  und  $\|\boldsymbol{\lambda}\|$  ungleich null sind. Gleichzeitig muss eine zu „steife“ Diskretisierung vermieden werden, da sonst der Arbeitsterm  $b(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda})$  in Relation zu  $\|\mathbf{v}\| \|\boldsymbol{\lambda}\|$  unverhältnismäßig anwächst. In beiden Fällen lässt sich keine diskretisierungsunabhängige Konstante  $c_2$  finden, welche Gleichung (3.16) erfüllt.

Mithilfe von  $\|\boldsymbol{\lambda}\|$  kann für die gemischte Formulierung eine Fehlerschätzung äquivalent zu Gleichung (3.12) definiert werden. Dabei ist eine entsprechende Abschätzung des Fehlers von  $\boldsymbol{\lambda}^h$  zu addieren.

### Nicht-konforme positiv definite Mortar-Formulierung

In den ersten Mortar-Formulierungen wird der Raum der möglichen Lösungen a priori so eingeschränkt, dass die Kopplungsbedingungen durch die zulässigen Verschiebungsfelder erfüllt sind, siehe BERNARDI U. A. (1990, 1993, 1994) im Kontext mit Gebietszerlegungsverfahren und BEN BELGACEM U. A. (1998) sowie BEN BELGACEM (2000) für Kontaktprobleme. Algorithmisch wird dazu das Verschiebungsfeld der Slave-Seite aus dem Gleichungssystem kondensiert und durch ein Verschiebungsfeld in Abhängigkeit der Master-Freiheitsgrade ersetzt. Hierfür muss vor der eigentlichen Rechnung in jedem Interface ein Unterproblem gelöst werden, um die Formfunktionen der Master-Freiheitsgrade für die Slave-Seite zu konstruieren. Die Konstruktion erfolgt dabei so, dass die Konvergenzrate des Fehlers in Gleichung (3.13) durch den Konsistenzfehler nicht verschlechtert wird. In diesem Zusammenhang haben BERNARDI U. A. (1990) punktweise und integrale Kopplungsbedingungen miteinander verglichen. Optimale Konvergenzra-

ten konnten dabei nur für die integrale Kopplung erzielt werden. Dieses Resultat gab den Ausschlag für eine integrale Kopplung im Rahmen der Mortar-Methode. Allerdings führt eine integrale Formulierung dazu, dass die lokale Trägereigenschaft der Formfunktionen verloren geht. Infolgedessen erstrecken sich die Formfunktion eines Master-Freiheitsgrads für die Slave-Seite über das komplette jeweilige Interface. Dadurch werden in jedem Interface-Punkt Informationen aller Master-Freiheitsgrade des entsprechenden Interfaces benötigt, was numerisch ungünstig ist.

### **Formulierung als Sattelpunktproblem**

Neben der ursprünglichen nicht-konformen Formulierung der Mortar-Methode entwickelte sich alternativ eine Formulierung als Sattelpunktproblem mit Lagrange'schen Multiplikatoren, siehe BEN BELGACEM (1999) sowie WOHLMUTH (1999) und für Kontaktprobleme beispielsweise HILD (2001) oder BEN BELGACEM UND RENARD (2003). Die Ansatzräume der Lagrange'schen Multiplikatoren werden dabei so konstruiert, dass die LBB-Bedingung (3.16) erfüllt ist und die optimale räumliche Konvergenzordnung des Diskretisierungsfehlers erhalten bleibt. Dafür dürfen die Formfunktionen der Multiplikatoren maximal den gleichen Polynomgrad aufweisen wie der Verschiebungssprung im Interface. Dieser besitzt den Polynomgrad der Verschiebungsformfunktionen. Für Kontaktprobleme lässt sich das Feld der Lagrange'schen Multiplikatoren als Kontaktspannung identifizieren. Die Anforderungen an die Ansatzräume der Multiplikatoren gelten somit für die Ansatzräume der Kontaktspannung.

### **Formulierung als Sattelpunktproblem mit dualen Formfunktionen**

Basierend auf der alternativen Formulierung der Mortar-Methode als Sattelpunktproblem wird in WOHLMUTH (2000, 2001) eine weiterentwickelte Diskretisierung mit dualen Formfunktionen für die Lagrange'schen Multiplikatoren vorgestellt. Mithilfe der dualen Formfunktionen können die Lagrange'schen Multiplikatoren einfach aus dem resultierenden Gleichungssystem eliminiert werden, was mit Standard-Formfunktionen algorithmisch deutlich schwieriger ist. Im Rahmen einer Mortar-Kontaktformulierung kommen duale Formfunktionen erstmals in WOHLMUTH UND KRAUSE (2003) für zweidimensionale reibungsfreie und in HÜEBER UND WOHLMUTH (2005) für zweidimensionale reibungsbehaftete Probleme zum Einsatz. FLEMISCH UND WOHLMUTH (2007) erweitern die Methode auf dreidimensionale Kontaktprobleme. Weitere Veröffentlichungen behandeln dreidimensionalen reibungsbehafteten Kontakt (HÜEBER U. A. 2008), dynamischen Kontakt (HAGER U. A. 2008) sowie thermomechanischen Kontakt (HÜEBER UND WOHLMUTH 2009). Die Erweiterung auf Kontaktprobleme mit großen Deformatio-

nen wird in HARTMANN U. A. (2007) sowie HARTMANN UND RAMM (2008) vorgestellt, die konsistente Linearisierung von POPP U. A. (2009).

Bevor die Idee der dualen Formfunktionen genauer erläutert wird, werden zuerst die zugehörigen Diskretisierungen der Kontaktspannung (2.61) und der virtuellen Kontaktspannung (2.63) in allgemeiner Form angegeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_c &\approx \mathbf{t}_c^h(\boldsymbol{\xi}^1, t) = - \sum_{K=1}^{n_{sa}} \phi_K(\boldsymbol{\xi}^1) \mathbf{z}_K(t) \\ \delta \mathbf{t}_{c_n} &\approx \delta \mathbf{t}_{c_n}^h(\boldsymbol{\xi}^1) = \sum_{K=1}^{n_{sa}} \phi_K(\boldsymbol{\xi}^1) \delta \mathbf{z}_{nK} = \sum_{K=1}^{n_{sa}} \phi_K(\boldsymbol{\xi}^1) (\delta z_n \mathbf{n})_K. \end{aligned} \quad (3.17)$$

In Gleichung (3.17) sind  $\mathbf{z}_K \in \mathbb{R}^{n_{dim}}$  bzw.  $\delta \mathbf{z}_{nK} \in \mathbb{R}^{n_{dim}}$  die Knotenwerte der Kontaktspannung bzw. der virtuellen Kontaktspannung,  $\phi_K$  die auf der Slave-Seite definierten dualen Formfunktionen.  $\boldsymbol{\xi}^1 \in \mathbb{R}^{(n_{dim}-1)}$  stellt die normierte Element-Koordinate innerhalb eines Slave-Elements dar. Die Knotenvektoren  $\mathbf{z}_K$  werden ohne eine a priori Aufteilung in normale und tangente Anteile eingeführt. Durch die am globalen Koordinatensystem orientierte Definition der einzelnen Komponenten  $z_{Ki}$  wird später im Rahmen des verwendeten Lösungsalgorithmus eine einfache Kondensation der Kontaktspannungsknotenwerte ermöglicht, siehe Kapitel 5.3. Aufgrund der unterschiedlichen Diskretisierung von  $\mathbf{t}_c$  und  $\delta \mathbf{t}_{c_n}$  entsteht ein unsymmetrisches Gleichungssystem, was die Anforderungen an den Gleichungslöser erhöht. Da die Formulierung aber als Basis für weitere Arbeiten mit reibungsbehaftetem Kontakt dienen soll, dessen Behandlung ohnehin auf unsymmetrische Systemmatrizen führt, wird dies hier in Kauf genommen.

Mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren kann eine exakte Erfüllung der Kopplungs- oder Kontaktbedingungen gesichert werden. Allerdings sind dafür zusätzliche Unbekannte erforderlich, welche im Allgemeinen die Dimension des resultierenden Gleichungssystems vergrößern. Die duale Mortar-Methode vermeidet diesen Nachteil, indem mit der Biorthogonalitätsbedingung (WOHLMUTH 2000, 2001)

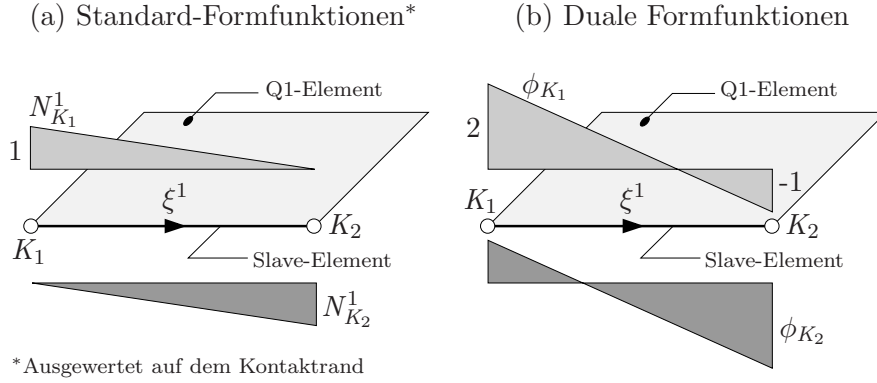
$$\int_{\gamma_c^{1,h}} \phi_K N_I^1 d\gamma_c^{1,h} = \delta_{KI} \int_{\gamma_c^{1,h}} N_I^1 d\gamma_c^{1,h} =: \delta_{KI} D_{II}^S \quad (3.18)$$

die Formfunktionen der Multiplikatoren so definiert werden, dass eine einfache Kondensation der Multiplikatoren aus dem resultierenden Gleichungssystem möglich ist. Darüber hinaus sind die resultierenden Formfunktionen so konstruiert, dass die Erfüllung der LBB-Bedingung (3.16) und die Erhaltung der optimalen räumlichen Konvergenzraten garantiert sind. Für die Ränder zweidimensionaler, bilinearer Q1-Elemente

können duale Formfunktionen a priori durch

$$\phi_{K_1} = \frac{1}{2} (1 - 3\xi^1), \quad \phi_{K_2} = \frac{1}{2} (1 + 3\xi^1) \quad (3.19)$$

angegeben werden. Die Bezeichnungen  $K_1$  und  $K_2$  beziehen sich dabei auf die Knoten eines linearen, linienförmigen Slave-Elements mit eindimensionalem Parameterraum, siehe Abbildung 3.5. Für Elemente höherer Ordnung sowie für allgemeine dreidimensionale Probleme müssen die dualen Formfunktionen deformationsabhängig konstruiert werden, siehe beispielsweise FLEMISCH UND WOHLMUTH (2007).



**Abbildung 3.5:** Standard- und duale Formfunktionen für bilineare Q1-Elemente.

Durch Einsetzen der diskretisierten wirklichen und virtuellen Kontaktspannung (3.17), der dualen Formfunktionen (3.19), der Geometrie (3.1) und der wirklichen und virtuellen Verschiebungen (3.2)<sub>1</sub> in Gleichung (2.57) bzw. Gleichung (2.62) kann jetzt die diskretisierte virtuelle Kontaktarbeit bzw. die diskretisierte Nichtdurchdringungsbedingung angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi_{\text{PvV}}^c &= - \int_{\gamma_c^1} \mathbf{t}_c \cdot (\delta \mathbf{u}^1 - \delta \mathbf{u}^2) d\gamma_c^1 \approx \delta \Pi_c^h \\
 &= \int_{\gamma_c^{1,h}} \sum_{K=1}^{n_{\text{sa}}} \phi_K \mathbf{z}_K \cdot \left( \sum_{I=1}^{n_s} N_I^1 \delta \mathbf{d}_I^1 - \sum_{J=1}^{n_m} N_J^2 \delta \mathbf{d}_J^2 \right) d\gamma_c^{1,h} \\
 &= \sum_{K=1}^{n_{\text{sa}}} \mathbf{z}_K \cdot \left( \sum_{I=1}^{n_s} \delta \mathbf{d}_I^1 \int_{\gamma_c^{1,h}} \phi_K N_I^1 d\gamma_c^{1,h} - \sum_{J=1}^{n_m} \delta \mathbf{d}_J^2 \int_{\gamma_c^{1,h}} \phi_K N_J^2 d\gamma_c^{1,h} \right) \\
 \delta \Pi^{\text{nd}} &= \int_{\gamma_c^1} \delta t_{c_n} g_n d\gamma_c^1 = - \int_{\gamma_c^1} \delta \mathbf{t}_{c_n} \cdot (\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2) d\gamma_c^1 \approx \delta \Pi^{\text{nd},h} \\
 &= - \sum_{K=1}^{n_{\text{sa}}} (\delta z_n \mathbf{n})_K \cdot \left( \sum_{I=1}^{n_s} \mathbf{x}_I^1 \int_{\gamma_c^{1,h}} \phi_K N_I^1 d\gamma_c^{1,h} - \sum_{J=1}^{n_m} \mathbf{x}_J^2 \int_{\gamma_c^{1,h}} \phi_K N_J^2 d\gamma_c^{1,h} \right).
 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Summiert wird jeweils über alle aktiven Slave-Kontaktknoten  $n_{sa}$  oder über alle Slave- bzw. Master-Kontaktknoten  $n_s$  bzw.  $n_m$ . Die Integrale

$$\begin{aligned} D_{KK}^S &:= \int_{\gamma_c^{1,h}} N_K^1 d\gamma_c^{1,h} \\ M_{KJ}^M &:= \int_{\gamma_c^{1,h}} \phi_K N_J^2 d\gamma_c^{1,h} \end{aligned} \tag{3.21}$$

über die dualen Formfunktionen  $\phi_K$  und die Formfunktionen  $N_I^1$  bzw.  $N_J^2$  der Verschiebungsfelder der Slave- bzw. Master-Seite werden im Folgenden auch als Mortar-Integrale bezeichnet.  $D_{KK}^S$  ist ausschließlich durch Größen der Slave-Seite definiert. Somit ist eine Aufspaltung in einzelne Segment-Integrale nicht notwendig. Im Gegensatz dazu integriert  $M_{KJ}^M$  Funktionen der Slave-Seite mit Funktionen der Master-Seite. Dadurch wird eine Projektion der Master-Größen auf die Slave-Seite erforderlich. Zur exakten Auswertung von  $M_{KJ}^M$  muss die Integration auf Segment-Ebene ausgeführt werden, siehe Abschnitt 3.3.2.

Zusammenfassend stellt die duale Mortar-Methode eine sehr attraktive Basis für eine Kontaktdiskretisierung dar, da die resultierende Formulierung folgende Eigenschaften besitzt:

- Die Methode ist stabil, da die Räume der Lagrange'schen Multiplikatoren so konstruiert sind, dass die LBB-Bedingung erfüllt ist.
- Die Methode erfüllt den Kontakt-Patch-Test. Zusätzlich wird die Erhaltung der optimalen räumlichen Konvergenzraten bei Netzverfeinerung im Vergleich zu einer entsprechenden konformen Vernetzung garantiert.
- Die Methode ist durch die integrale Formulierung der Kontaktbedingungen numerisch stabil.
- Die Methode erfüllt die integrale Nichtdurchdringungsbedingung exakt, ohne dadurch das resultierende Gleichungssystem zu vergrößern.

Punkt eins bis Punkt drei gelten dabei für mortarbasierte Kontaktalgorithmen im Allgemeinen, der vierte Punkt ausschließlich für die duale Formulierung. Die numerische Stabilität ist vor allem für Probleme mit großen tangentialen Relativverschiebungen von Bedeutung und durch zahlreiche Veröffentlichungen aus dem Bereich der Ingenieurliteratur belegt. Entsprechende Literaturangaben sind im nächsten Abschnitt aufgeführt.

**Anmerkung:**

Wie schon in Abschnitt 3.2.5 erwähnt, ist der STS-basierte Kontaktalgorithmus von EL-ABBASI UND BATHE (2001) so konstruiert, dass mit linearen kontinuierlichen Form-



funktionen für die Lagrange'schen Multiplikatoren die LBB-Bedingung erfüllt ist und der Kontakt-Patch-Test bestanden wird. Darüber hinaus zeigen räumliche Konvergenzuntersuchungen, dass im Vergleich zu Problemen ohne Kontaktbedingungen die optimale Konvergenzordnung erhalten bleibt. Somit finden sich die Grundideen der Mortar-Methode auch in einigen Algorithmen, welche nicht explizit als mortarbasiert bezeichnet werden. Umgekehrt wird für Mortar-Kontaktalgorithmen gelegentlich der Begriff STS-basiert benutzt, sofern sie zur Integralauswertung Segmente verwenden.

### Umsetzungen und Entwicklungen in der Ingenieurliteratur

Die meisten der bisher genannten Veröffentlichungen zur Mortar-Methode bzw. zur dualen Mortar-Methode stammen aus dem mathematischen Bereich. Der folgende Abschnitt gibt ergänzend einen Überblick zu verschiedenen Weiterentwicklungen aus dem Bereich der Ingenieurliteratur, vor allem für Probleme mit großen Deformationen.

Eine frühe mortarbasierte Kontaktformulierung wird in MCDEWITT UND LAURSEN (2000) für geometrisch lineare, reibungsbehaftete Kontaktprobleme vorgestellt. Die Kontaktbedingungen werden dabei mit der Penalty-Methode umgesetzt. Erste Veröffentlichungen für große Deformationen sind die zweidimensionale reibungsbehaftete Formulierung in YANG U. A. (2005) und die dreidimensionalen Formulierungen für reibungsfreie (PUSO UND LAURSEN 2004a) und reibungsbehaftete (PUSO UND LAURSEN 2004b) Probleme. Weiterentwicklungen verwenden quadratische Elemente (PUSO U. A. 2008), behandeln Selbstkontaktprobleme (YANG UND LAURSEN 2008a, b) oder lösen Kontaktprobleme innerhalb von Struktur-Fluid-Struktur-Konfigurationen (YANG UND LAURSEN 2009). SANDERS U. A. (2009) verwenden Mortar-Kopplungsbedingungen im Zusammenhang mit angereicherten Finite-Elemente-Formulierungen (X-FEM). Zur Umsetzung der Kontaktbedingungen wird in den aufgezählten Veröffentlichungen zumeist die Penalty-Methode benutzt. In YANG UND LAURSEN (2009) kommen daneben auch duale Formfunktionen zum Einsatz.

Die im letzten Absatz genannten Formulierungen benutzen Segmente zur Auswertung der Mortar-Integrale. FISCHER UND WRIGGERS (2005) stellen ein alternatives Integrationskonzept vor, welches auf die Einführung von Segmenten verzichtet. Die nicht glatten Mortar-Integrale der Master-Seite werden dann mit einer entsprechend erhöhten Anzahl von Gaußpunkten integriert, siehe auch Abbildung 3.1(b). Vorteilhaft an dieser Idee ist eine algorithmisch vereinfachte Berechnung und Linearisierung der Mortar-Integrale. FISCHER UND WRIGGERS (2005) präsentieren die Formulierung für reibungsfreie Kontaktprobleme in Verbindung mit der Penalty-Methode und der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren. Für die Penalty-Methode werden einzelne Slave-Kontakt-knoten, für die Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren einzelne Slave-Elemente

aktiv bzw. inaktiv gesetzt. Eine Erweiterung auf reibungsbehaftete Probleme in Verbindung mit quadratischen Elementen und der Penalty-Methode wird in FISCHER UND WRIGGERS (2006) vorgestellt. In TUR U. A. (2009) ist das Konzept mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren und einem kontinuierlichen Normalenfeld für reibungsbehaftete Kontaktprobleme umgesetzt, wobei die aktive Kontaktzone jetzt knotenbasiert ermittelt wird.

Die duale Mortar-Methode wird in HARTMANN U. A. (2007) auf geometrisch nichtlineare Probleme mit großen Deformationen erweitert und in HARTMANN UND RAMM (2008) für dynamische Kontaktprobleme mit energieerhaltenden Algorithmen kombiniert. In der vorliegenden Arbeit wird eine Inkonsistenz behoben, welche im Zusammenhang mit der dualen Mortar-Methode vor allem bei großen Deformationen am Rand des Kontaktbereichs auftreten kann (siehe auch CICHOSZ UND BISCHOFF (2011)). POPP U. A. (2009) präsentieren erstmals eine konsistent linearisierte duale Mortar-Kontaktformulierung mit linearen und quadratischen Elementen für zweidimensionale Probleme. Nachfolgende Veröffentlichungen beschäftigen sich mit Erweiterungen auf dreidimensionale Kontaktprobleme (POPP U. A. 2010) sowie auf reibungsbehafteten Kontakt (GITTERLE U. A. 2010).

Energie-, impuls- und drehimpulserhaltende Kontaktalgorithmen im Zusammenhang mit der Mortar-Methode sind beispielsweise in HESCH UND BETSCH (2009, 2010) zu finden.

#### 3.2.7 Der Kontakt-Patch-Test

Der Kontakt-Patch-Test wurde in TAYLOR UND PAPADOPOULOS (1991) als numerisches Experiment zur Bewertung der Spannungsübertragung zwischen kontaktierenden Körpern vorgestellt. Zur Durchführung des Tests werden zwei kontaktierende Körper so belastet, dass bei korrekter Kontaktspannungsübertragung ein konstanter Verzerrungszustand resultiert. Anschließend wird überprüft, ob sich dieser unter einer möglichst allgemeinen nicht-konformen Vernetzung der Kontaktflächen auch wirklich einstellt. Im folgenden Beispiel wird der Kontakt-Patch-Test in Kombination mit einer NTS- und zwei verschiedenen Mortar-Diskretisierungen ausgewertet. Dabei verwendet die erste Mortar-Diskretisierung Segmente zur Auswertung der Kontakt-Integrale, während die zweite darauf verzichtet. Ziel der Untersuchung ist es, die Leistungsfähigkeit der in dieser Arbeit weiterentwickelten Mortar-Formulierung zu demonstrieren sowie die charakteristischen Eigenschaften der anderen Formulierungen aufzuzeigen. Des Weiteren sollen die Ergebnisse der Formulierungen quantitativ und qualitativ verglichen werden. Zur Durchführung der Untersuchung werden Geometrie, Vernetzung, Belastung und Lagerbedingungen von der in YANG U. A. (2005) vorgestellten Konfiguration übernommen. Diese ist zusammen mit den Werkstoffkennwerten in Abbildung 3.6 darge-

stellt. Für alle Rechnungen wird ein ebener Spannungszustand mit einer konstanten Dicke von 1 mm angenommen. Als Materialmodell kommt das elastische St. Venant-Kirchhoff'sche Werkstoffgesetz zum Einsatz. Somit resultiert bei einem erfolgreich bestandenen Test aus dem konstanten Verzerrungsfeld ein konstantes Spannungsfeld. In den Beschriftungen der Spannungsabbildungen und in den zugehörigen Erläuterungen im Text wird der Übersichtlichkeit halber auf den üblichen Index  $(\bullet)^h$  zur Kennzeichnung der Diskretisierungslösung verzichtet.

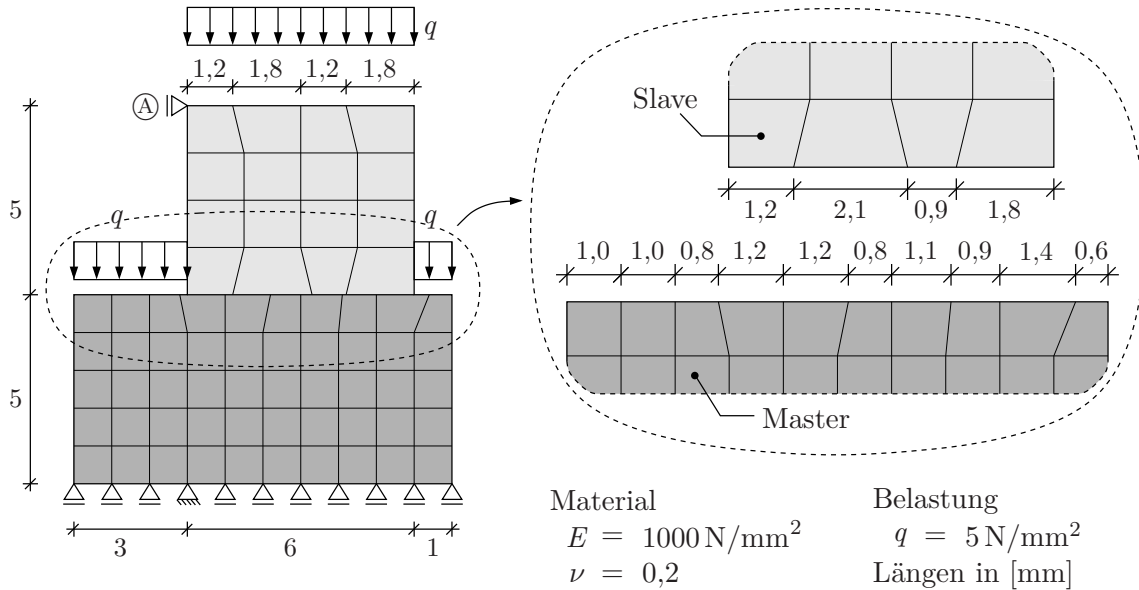
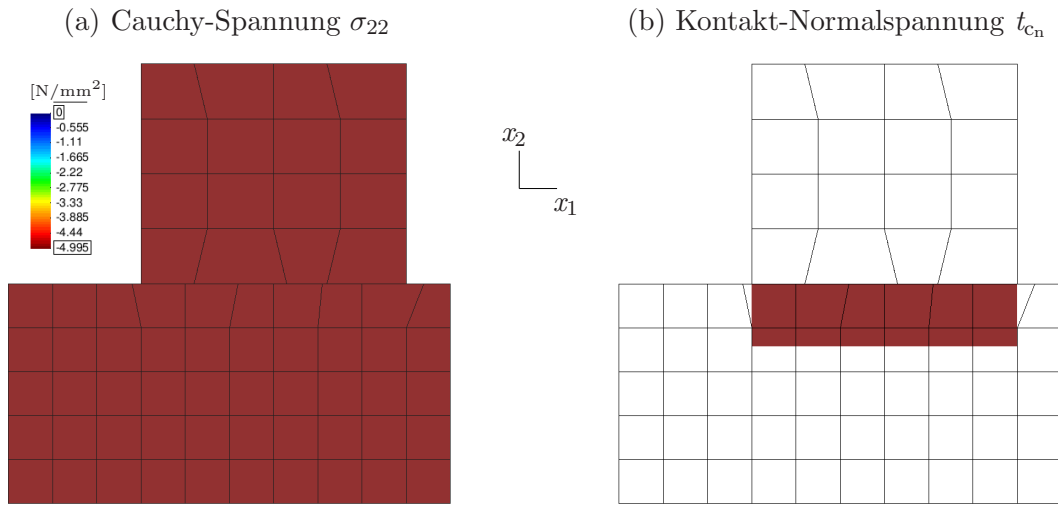


Abbildung 3.6: Kontakt-Patch-Test: Problemstellung und Diskretisierung.

### Mortar-Berechnung mit Segmentierung

Die erste Berechnung wird mit der in dieser Arbeit weiterentwickelten Formulierung durchgeführt. Diese wertet die Kontakt-Integrale durch Aufteilung in einzelne Segment-Integrale aus.

Wie zu erwarten, besteht die Formulierung den Kontakt-Patch-Test. Unter der aufgebrauchten Belastung stellt sich ein lineares Verschiebungsfeld mit maximaler vertikaler Absenkung von 0,050 mm in Punkt  $\textcircled{A}$  ein, siehe Abbildung 3.7. Daraus resultiert ein konstantes Spannungsfeld in beiden Körpern, wobei die vertikale Komponente der Cauchy'schen Spannung  $\sigma_{22} = -4,995 \text{ N/mm}^2$  beträgt. Da sich die Cauchy'schen Spannung auf die deformierte Konfiguration bezieht, resultiert eine Differenz im Vergleich zu der aufgebrauchten Gleichstreckenlast. Die entsprechende vertikale Komponente des PK1 Spannungstensors beträgt exakt  $P_{22} = -5,000 \text{ N/mm}^2$ . Dem konstanten Spannungszustand entsprechend beträgt auch der Kontakt-Normalspannungsverlauf konstant



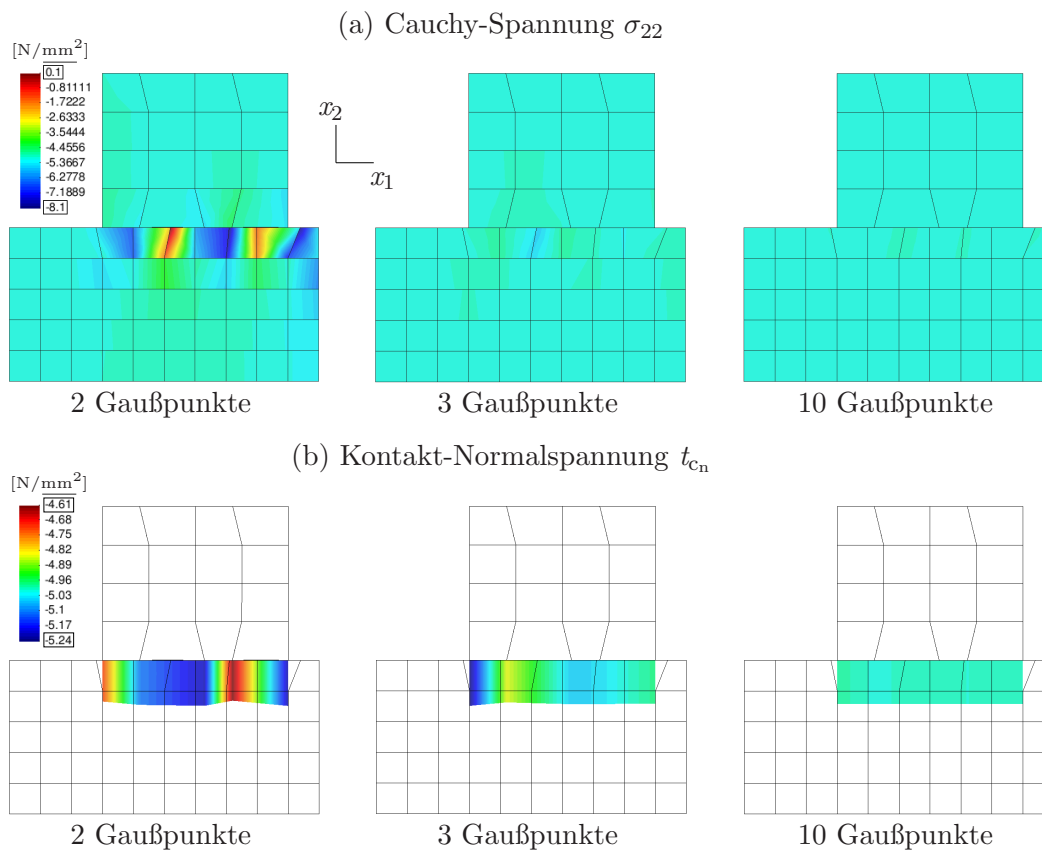
**Abbildung 3.7:** Kontakt-Patch-Test: Mortar-Berechnung mit Segmentierung.

$t_{c_n} = -4,995 \text{ N/mm}^2$ . Die Kontakt-Normalspannung ergibt sich dabei durch Multiplikation der diskretisierten Kontaktspannung aus Gleichung (3.17)<sub>1</sub> mit der Normalen der Slave-Kontaktoberfläche.

### Mortar-Berechnung ohne Segmentierung

Für einen Vergleich zu den Ergebnissen einer Mortar-Diskretisierung mit Segmentierung wird die zweite Berechnung mit dem mortarbasierten Kontaktalgorithmus nach FISCHER UND WRIGGERS (2005) durchgeführt, welcher auf eine Segmentierung verzichtet. Anstatt die Kontakt-Integrale in einzelne Segment-Integrale aufzuteilen, integriert diese Methode die Kontakt-Integrale mit einer variablen Anzahl von Gaußpunkten über komplette Slave-Elemente. Hieraus resultiert gegebenenfalls ein nicht glatter Integrand, vgl. Abbildung 3.1(b). Die folgenden Auswertungen verwenden zwei, drei oder zehn Gaußpunkte pro Slave-Element. Betrachtet werden die Energienorm, die vertikale Komponente der Cauchy'schen Spannung an den Gaußpunkten der Q1-Elemente sowie der Kontakt-Normalspannungsverlauf. Als Referenz dient die Lösung der Mortar-Berechnung mit Segmentierung.

Der Fehler der Energienorm ist bereits für zwei Gaußpunkte mit 0,2% sehr gering und verschwindet für zehn Gaußpunkte beinahe komplett (0,0002%). Die Cauchy'schen Spannungen in den Q1-Elementen weisen bei zwei Gaußpunkten pro Slave-Element noch relativ große Fehler auf. Die maximalen bzw. minimalen Spannungswerte betragen  $\sigma_{22} = -1,3493 \text{ N/mm}^2$  bzw.  $\sigma_{22} = -7,1864 \text{ N/mm}^2$ , was einem Fehler von 73,0% bzw. 43,9% entspricht. Für drei Gaußpunkte sind die Abweichungen mit 4,7% bzw. 8,8% schon deutlich geringer, für zehn Gaußpunkte liegen beide Werte unter einem Prozent.

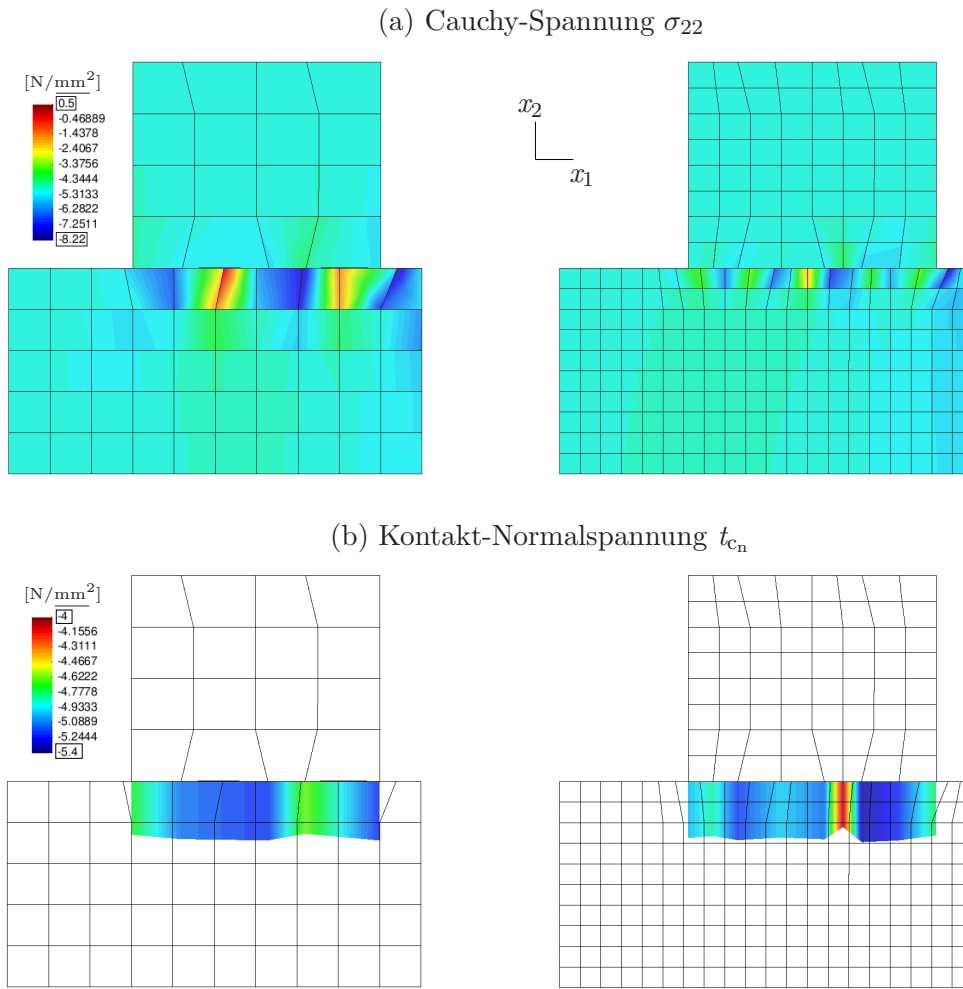


**Abbildung 3.8:** Kontakt-Patch-Test: Mortar-Berechnung ohne Segmentierung.

Für den Kontaktspannungsverlauf gilt Entsprechendes, siehe auch Abbildung 3.8(b). Sowohl die Verzerrungsenergie als auch die lokale Spannungslösung streben somit bei einer Erhöhung der Anzahl der Gaußpunkte pro Slave-Element gegen die exakte Lösung der Mortar-Methode mit Segmentierung. Vorteilhaft an dieser Formulierung ist insofern das Vermeiden der numerisch aufwendigen Segmentierung bei gleichzeitig konsistenten Ergebnissen. Allerdings kann durch die Auswertung der Kontakt-Integrale an festen Punkten eines Slave-Elements eine Situation entstehen, in welcher Integrationspunkte ähnlich einem Slave-Kontaktknoten in einer NTS-Formulierung von einem Master-Element auf das nächste rutschen. Dies wiederum kann eine Quelle für numerische Instabilitäten darstellen.

### NTS-Berechnung

Zuletzt wird der Kontakt-Patch-Test mit einer NTS-Diskretisierung durchgeführt, welche aus WRIGGERS (2002) übernommen wurde. Die Berechnung erfolgt mit zwei verschiedenen Vernetzungen. Das grobe Netz ist in Abbildung 3.6 dargestellt, das feinere resultiert aus einer Halbierung der Element-Kantenlängen, siehe Abbildung 3.9. Wie zu erwarten



**Abbildung 3.9:** Kontakt-Patch-Test: NTS-Berechnung.

besteht die Formulierung den Kontakt-Patch-Test nicht. Der Fehler in der Energienorm beträgt für das grobe Netz 2,4 % und verkleinert sich bei Verwendung des feinen Netzes auf 0,5 %. Allerdings liegt er in beiden Fällen noch über dem Fehler der größten Lösung der Mortar-Methode ohne Segmentierung (0,2 %). Die lokalen Spannungsfehler liegen mit maximalen bzw. minimalen Spannungswerten von  $\sigma_{22} = 1,3638 \text{ N/mm}^2$  bzw.  $\sigma_{22} = -7,1359 \text{ N/mm}^2$  an den Gaußpunkten der Q1-Elemente für das grobe Netz bei 72,7 % bzw. 42,9 %. Somit liegt die Qualität der Spannungslösung ungefähr im Bereich der größten Lösung der Mortar-Methode ohne Segmentierung. Allerdings verkleinern sich die Spannungsfehler bei Netzverfeinerung nur bedingt. Aufgrund der Verkleinerung der Elementgrößen treten die fehlerhaften Spannungen zwar in einem kleineren Gebiet auf, siehe Abbildung 3.9(a) rechts, die maximalen Fehler bleiben aber bei Werten von 46,6 % bzw. 48,9 %. Äquivalentes gilt für den Kontaktspannungsverlauf, welcher aus den Kontaktkräften geteilt durch die entsprechende Bezugsfläche  $A_I$ , siehe hierzu auch Abbildung 3.2, ermittelt wird. Wie der Vergleich zwischen feinem und grobem Netz in

Abbildung 3.9(b) zeigt, treten die maximalen Abweichungen sowie der unregelmäßigere Verlauf nicht bei der groben sondern bei der feinen Diskretisierung auf.

#### **Zusammenfassung**

Anhand der untersuchten Problemstellung konnte demonstriert werden, dass die mortarbasierte Kontaktformulierung mit dualen Formfunktionen und segmentbasierter Integralauswertung den Kontakt-Patch-Test besteht. Für die Mortar-Formulierung ohne Segmentierung nach FISCHER UND WRIGGERS (2005) streben sowohl die Verzerrungsenergie als auch die lokale Spannungslösung bei einer Erhöhung der Anzahl der Gaußpunkte pro Slave-Element gegen die exakte Lösung. Der Kontakt-Patch-Test wird somit ebenfalls bestanden. Die NTS-Formulierung erfüllt den Kontakt-Patch-Test erwartungsgemäß nicht, bei Netzverfeinerung verbessert sich die lokale Spannungslösung darüber hinaus nur geringfügig.

## **3.3 Diskretisierung der Kontaktterme mit der dualen Mortar-Methode**

Im vorausgegangenen Abschnitt 3.2 wurden verschiedene Kontaktdiskretisierungsstrategien vorgestellt und miteinander verglichen. Die folgenden Abschnitte 3.3 und 3.4 befassen sich detailliert mit der Kontaktdiskretisierung aus Abschnitt 3.2.6, welche auf der dualen Mortar-Methode basiert.

Abschnitt 3.3.1 beginnt mit der Herleitung einer kompakten Schreibweise für die virtuelle Kontaktarbeit und die integrale Nichtdurchdringungsbedingung. Anschließend ist die segmentbasierte Auswertung der resultierenden Mortar-Integrale für zweidimensionale Probleme dargestellt (Abschnitt 3.3.2). Die Vorgehensweise für dreidimensionale Geometrien wird in Abschnitt 3.3.3 nur kurz skizziert, da sich die vorliegende Arbeit ausschließlich mit zweidimensionalen Untersuchungen beschäftigt.

### **3.3.1 Virtuelle Kontaktarbeit und Nichtdurchdringungsbedingung**

Damit die virtuelle Kontaktarbeit aus Gleichung (3.20) in kompakter Form entsprechend der Darstellung der internen, externen und kinetischen virtuellen Arbeiten aus Gleichung (3.4) angegeben werden kann, wird die Menge aller FE-Knoten in drei Untermengen aufgeteilt: Die Untermenge  $\mathcal{S}$  beinhaltet alle potentiellen Kontaktknoten der Slave-

Oberfläche, die Untermenge  $\mathcal{M}$  alle potentiellen Kontaktknoten der Master-Oberfläche und die Untermenge  $\mathcal{N}$  alle verbleibenden Knoten. Den Mengen entsprechend wird der globale Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}$  ebenfalls in die Vektoren  $\mathbf{d}^{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_{\text{s}}}$ ,  $\mathbf{d}^{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_{\text{m}}}$  und  $\mathbf{d}^{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_{\text{r}}}$  mit allen Verschiebungen der Knoten von  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  aufgeteilt:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{\mathcal{N}} \\ \mathbf{d}^{\mathcal{M}} \\ \mathbf{d}^{\mathcal{S}} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$n_{\text{r}}$  bezeichnet hierbei die Anzahl aller FE-Knoten abzüglich der Kontaktknoten. Eine äquivalente Aufteilung erfolgt für den globalen Vektor  $\delta \mathbf{d}$  der virtuellen Verschiebungen. Der globale Vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_{\text{s}}}$  fasst die Kontaktspannungsvektoren  $\mathbf{z}_I$  aller Slave-Kontaktknoten  $I$  zusammen. Unter Verwendung der in Gleichung (3.21) eingeführten Definition der Mortar-Integrale werden dann die globalen Mortar-Matrizen  $\mathbf{D}_{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}} n_{\text{s}}) \times (n_{\text{dim}} n_{\text{s}})}$  und  $\mathbf{M}_{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}} n_{\text{s}}) \times (n_{\text{dim}} n_{\text{m}})}$  durch knoten- bzw. knotenpaarzugehörige  $n_{\text{dim}} \times n_{\text{dim}}$  Blöcke definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{\mathcal{S}} [K, K] &= \int_{\gamma_c^{1,h}} N_K^1 d\gamma_c^{1,h} \mathbf{I}_{n_{\text{dim}}} = D_{KK}^{\mathcal{S}} \mathbf{I}_{n_{\text{dim}}} \\ \mathbf{M}_{\mathcal{M}} [K, J] &= \int_{\gamma_c^{1,h}} \phi_K N_J^2 d\gamma_c^{1,h} \mathbf{I}_{n_{\text{dim}}} = M_{KJ}^{\mathcal{M}} \mathbf{I}_{n_{\text{dim}}}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Damit lässt sich die diskrete Form der virtuellen Kontaktarbeit in kompakter Schreibweise angeben

$$\begin{aligned} \delta \Pi_c^h &= (\delta \mathbf{d}^1)^{\top} \mathbf{D}_{\mathcal{S}} \mathbf{z} - (\delta \mathbf{d}^2)^{\top} \mathbf{M}_{\mathcal{M}}^{\top} \mathbf{z} \\ &= \delta \mathbf{d}^{\top} \mathbf{B}_{\text{Md2}}^c \mathbf{z} \\ &= \delta \mathbf{d}^{\top} \mathbf{f}_c(\mathbf{d}), \end{aligned} \quad (3.24)$$

wobei der Kontaktkraftvektor  $\mathbf{f}_c \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_{\text{m}}}$  über den deformationsabhängigen Operator

$$\mathbf{B}_{\text{Md2}}^c = \left[ \mathbf{0}, -\mathbf{M}_{\mathcal{M}}, \mathbf{D}_{\mathcal{S}} \right]^{\top}, \quad \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}} n_{\text{s}}) \times (n_{\text{dim}} n_{\text{r}})} \quad (3.25)$$

von den Knotenverschiebungen abhängt. Die integrale Nichtdurchdringungsbedingung aus Gleichung (3.20) kann durch Einführung der globalen Vektoren  $\delta \mathbf{z}_{\text{n}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{s}}}$  und  $\tilde{\mathbf{g}}_{\text{n}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{s}}}$ , welche alle virtuellen Kontakt-Normalspannungen und alle integralen Knotenklaffungen enthalten, ebenfalls kompakt dargestellt werden:

$$\delta \Pi^{\text{nd,h}} = \delta \mathbf{z}_{\text{n}}^{\top} \tilde{\mathbf{g}}_{\text{n}}. \quad (3.26)$$



Ein einzelner Eintrag von  $\tilde{\mathbf{g}}_n$  bezogen auf Knoten  $I$  bestimmt sich dabei mit

$$\tilde{g}_{nI} = -\mathbf{n}_I^\top \mathbf{D}_S[I, I] \mathbf{x}_I^1 + \mathbf{n}_I^\top \sum_{J=1}^{n_m} \mathbf{M}_{\mathcal{M}}[I, J] \mathbf{x}_J^2. \quad (3.27)$$

### Semidiskrete Beschreibung des Kontaktproblems

Durch Einsetzen der virtuellen Kontaktarbeit (3.24) in Gleichung (3.3) ist zusammen mit der diskretisierten Nichtdurchdringungsbedingung (3.26) und den KKT-Bedingungen (2.47) die semidiskrete Formulierung des untersuchten Kontaktproblems vollständig beschrieben. Beziehung (3.3) bzw. (3.26) muss für beliebige virtuelle Verschiebungen  $\delta \mathbf{d}$  bzw. für beliebige virtuelle Kontaktspannungen  $\delta \mathbf{z}_n$  erfüllt sein. Damit resultiert insgesamt der folgende Gleichungssatz:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\text{kin}} + \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} + \mathbf{f}_c &= \mathbf{0} \\ \tilde{g}_{nI} &\geq 0 \quad \forall I \in \mathcal{S} \\ z_{nI} &\geq 0 \quad \forall I \in \mathcal{S} \\ \tilde{g}_{nI} z_{nI} &= 0 \quad \forall I \in \mathcal{S} \\ (z_{\tau_\beta})_I &= \mathbf{0} \quad \forall I \in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Die Kontakt-Normalspannung  $z_{nI}$  bzw. die Kontakt-Tangentialspannung  $(z_{\tau_\beta})_I$  eines Slave-Kontaktknotens  $I$  kann dabei über die folgende Vorschrift bestimmt werden:

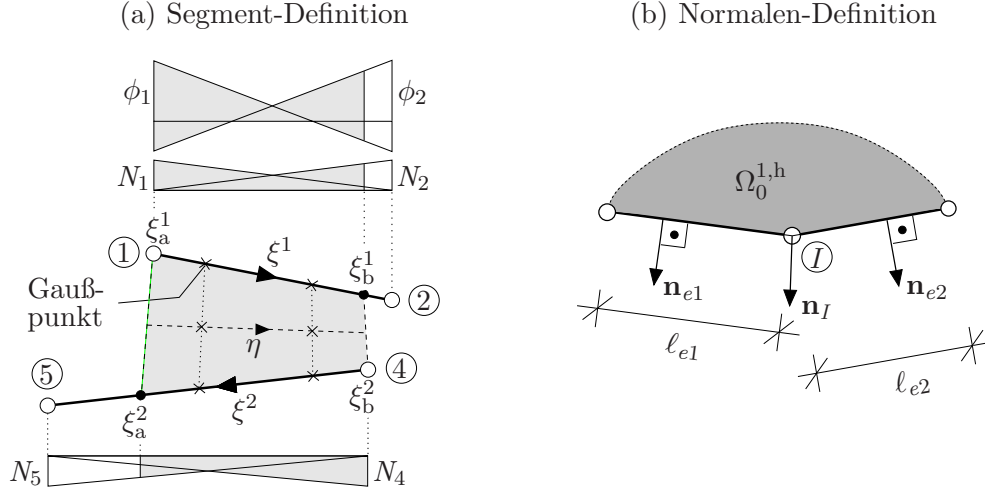
$$\begin{aligned} z_{nI} &= \mathbf{z}_I \cdot \mathbf{n}_I \\ (z_{\tau_\beta})_I &= \mathbf{z}_I \cdot \boldsymbol{\tau}_{\beta_I}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

$\boldsymbol{\tau}_{\beta_I}$  steht hierbei für die Knoten-Tangente (zweidimensionale Probleme) bzw. die Knoten-Tangenten  $\boldsymbol{\tau}_{\beta_I}$  (dreidimensionale Probleme) des Slave-Kontaktknotens  $I$ .

### 3.3.2 Auswertung der Mortar-Integrale – zweidimensionaler Fall

Zur exakten numerischen Auswertung der Mortar-Integrale (3.21) wird das Integrationsgebiet in Segmente aufgeteilt, welche durch einen jeweils glatten Verlauf der Integranden gekennzeichnet sind. Jedes Segment repräsentiert dabei den Überlappungsbereich je eines Slave- und eines Master-Elements. Dieser ist auf der Slave-Seite entweder durch einen Slave-Kontaktknoten oder die Projektion eines Master-Kontaktknotens, auf der Master-Seite durch einen Master-Kontaktknoten oder die Projektion eines Slave-Kontaktknotens begrenzt, siehe Abbildung 3.1(a). Zur Kennzeichnung der Segmentgrenzen in den Parameterräumen der Slave- und Master-Elemente werden die Koordinatenbe-

zeichnungen  $\xi_a^\alpha$  (Segmentbeginn) und  $\xi_b^\alpha$  (Segmentende) eingeführt. Dies ist in Abbildung 3.10(a) anhand eines einzelnen Segments veranschaulicht, welches auf der linken Seite durch den Slave-Kontaktknoten 1 bzw. dessen Projektion, auf der rechten Seite durch den Master-Kontaktknoten 4 bzw. dessen Projektion begrenzt wird. Damit die



**Abbildung 3.10:** Segment- und Normalen-Definition.

Segmente eindeutig bestimmt werden können, muss die Projektion einheitlich definiert sein und pathologische Fälle vermeiden. Hierzu ist entweder ein kontinuierliches Normalenfeld oder die Einführung von Fallunterscheidungen notwendig. In der vorliegenden Arbeit wird auf die in YANG U. A. (2005) vorgestellte Verfahrensweise zurückgegriffen, welche ein auf der Slave-Seite definiertes kontinuierliches Normalenfeld verwendet. Die interpolierte Knoten-Normale

$$\mathbf{n}_I = \frac{1}{\left\| \frac{\ell_{e2}}{\ell_{e1}} \mathbf{n}_{e1} + \frac{\ell_{e1}}{\ell_{e2}} \mathbf{n}_{e2} \right\|} \left( \frac{\ell_{e2}}{\ell_{e1}} \mathbf{n}_{e1} + \frac{\ell_{e1}}{\ell_{e2}} \mathbf{n}_{e2} \right) \quad (3.30)$$

eines Slave-Kontaktknotens  $I$  bestimmt sich dabei aus einem gewichteten Durchschnitt der Normalen  $\mathbf{n}_{e1}$  und  $\mathbf{n}_{e2}$ , welche die Normalen der angrenzenden Slave-Elemente darstellen.  $\ell_{e1}$  und  $\ell_{e2}$  bezeichnen die Längen dieser Slave-Elemente, siehe Abbildung 3.10(b). Die Projektions-Koordinaten  $\xi_a^2$  (Segmentbeginn) oder  $\xi_b^2$  (Segmentende) eines Slave-Kontaktknotens  $I$  auf der Master-Seite können durch Lösen der Beziehung

$$\left( N_4^2 \mathbf{x}_4^2 + N_5^2 \mathbf{x}_5^2 - \mathbf{x}_I^1 \right) \times \mathbf{n}_I = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

gewonnen werden (siehe Anhang A.4.2 für eine detaillierte Beschreibung). Die Nummerierung der Knoten und der Formfunktionen bezieht sich dabei auf ein repräsentatives Segment, welches in Abbildung 3.10(a) dargestellt ist. Zur Bestimmung der Projektions-Koordinaten  $\xi_a^1$  bzw.  $\xi_b^1$  eines Master-Kontaktknotens  $J$  auf der Slave-Seite muss die

Beziehung

$$\left(N_1^1 \mathbf{x}_1^1 + N_2^1 \mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_J^2\right) \times \left(N_1^1 \mathbf{n}_1 + N_2^1 \mathbf{n}_2\right) = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

gelöst werden, was ebenfalls ausführlicher in Anhang A.4.2 geschildert wird.

Sind die Segment-Koordinaten ermittelt, wird in jedem Segment eine Einheitskoordinate  $\eta \in [-1, 1]$  eingeführt, um die Segment-Integration standardisiert durchführen zu können.  $\eta$  ist über die Beziehung

$$\xi^\alpha = \frac{1}{2} (1 - \eta) \xi_a^\alpha + \frac{1}{2} (1 + \eta) \xi_b^\alpha \quad (3.33)$$

mit den Koordinaten der Slave- bzw. Master-Element-Parameterräume verbunden, siehe Abbildung 3.10(a). Mit Gleichung (3.33) lässt sich dann die Jacobi-Determinante zwischen wahrer Geometrie und Segment-Parameterraum als Produkt der Jacobi-Determinanten zwischen wahrer Geometrie und Slave-Element-Parameterraum und zwischen Slave-Element- und Segment-Parameterraum darstellen:

$$J_{\mathbf{x}\eta} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi^1} \right\| \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \ell_e \frac{1}{2} (\xi_b^1 - \xi_a^1) = \frac{1}{4} \ell_e (\xi_b^1 - \xi_a^1). \quad (3.34)$$

Die Berechnung des Mortar-Integrals  $(3.21)_1$  der Slave-Seite kann ohne eine Aufteilung in Segment-Integrale erfolgen, da der Integrand in den einzelnen Slave-Elementen eine glatte Funktion darstellt. Summieren über die  $n_{\text{slele}}$  Beiträge der an den Slave-Kontaktknoten  $K$  angrenzenden Slave-Elemente liefert dann:

$$D_{KK}^S = \int_{\gamma_c^{1,h}} N_K^1 d\gamma_c^{1,h} = \sum_{e=1}^{n_{\text{slele}}} \underbrace{\int_{-1}^1 N_K^1 \left\| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^1} \right\| d\xi^1}_{(D_{KK}^S)_e} = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{\text{slele}}} \ell_e. \quad (3.35)$$

Im Gegensatz zu  $D_{KK}^S$  muss das Mortar-Integral  $(3.21)_2$  der Master-Seite in einzelne Segment-Beiträge zerlegt werden, da der Integrand in den einzelnen Slave-Elementen einen nicht glatten Verlauf besitzt:

$$\begin{aligned} M_{KJ}^M &= \int_{\gamma_c^{1,h}} \phi_K N_J^2 d\gamma_c^{1,h} \\ &= \sum_{e=1}^{n_{\text{slele}}} \sum_{m=1}^{n_{\text{seg}}} \int_{-1}^1 \phi_K(\xi^1(\eta)) N_J^2(\xi^2(\eta)) J_{\mathbf{x}\eta} d\eta \\ &= \sum_{e=1}^{n_{\text{slele}}} \sum_{m=1}^{n_{\text{seg}}} \underbrace{\sum_{gp=1}^{n_{gp}} \phi_K(\xi^1(\eta_{gp})) N_J^2(\xi^2(\eta_{gp})) J_{\mathbf{x}\eta} w_{gp}}_{(M_{KJ}^M)_m}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

$n_{\text{seg}}$  bezeichnet dabei die Anzahl der Segmente pro Slave-Element,  $n_{\text{gp}}$  die Anzahl der Gaußpunkte pro Segment.

#### 3.3.3 Auswertung der Mortar-Integrale – dreidimensionaler Fall

Für dreidimensionale Probleme müssen die dualen Basisfunktionen im Allgemeinen geometrieabhängig konstruiert werden, siehe FLEMISCH UND WOHLMUTH (2007) und HARTMANN U. A. (2007). Eine einfache Darstellung wie die der zweidimensionalen Gleichungen (3.19) ist nur für den Sonderfall quadratischer ebener Slave-Elemente möglich. Die Auswertung der Mortar-Integrale kann aber prinzipiell wie im Zweidimensionalen erfolgen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden ausschließlich numerischen Experimente und Untersuchungen an zweidimensionalen Systemen durchgeführt. Aus diesem Grund wird die Vorgehensweise für dreidimensionale Probleme im Folgenden nur grob skizziert. Für eine ausführliche Beschreibung der Segment-Auswertung im Dreidimensionalen sei auf PUSO UND LAURSEN (2004a), für eine allgemeine Definition der dualen Formfunktionen in dreidimensionalen Problemen auf FLEMISCH UND WOHLMUTH (2007) und HARTMANN U. A. (2007) verwiesen.

Der Kontaktrand in einer dreidimensionalen Formulierung wird im Allgemeinen durch eine doppelt gekrümmte Fläche beschrieben, die Slave- und die Master-Elemente werden durch zweidimensionale, im Allgemeinen gekrümmte Element-Oberflächen repräsentiert. Eine direkte Projektion zwischen den gekrümmten Element-Oberflächen ist sehr aufwendig, weswegen meistens die Tangentialebene an den Mittelpunkt des Slave-Elements zur Berechnung der Kontakt-Integrale verwendet wird. Zur Definition eines Segments werden zuerst alle Knoten und damit alle Kanten eines Slave- und eines Master-Elements auf diese Tangentialebene projiziert. Das Segment ist dann durch ein drei- bis achteckiges Überschneidungspolygon definiert. Zur Integration wird das Überschneidungspolygon in entsprechend drei bis acht Dreiecke zerlegt. Das Segment-Integral setzt sich dann aus den Integralen über die einzelnen Dreiecke zusammen. In jedem Dreieck werden dabei die Werte der Formfunktionen des Slave- und des Master-Elements an den Gaußpunkten benötigt. Entsprechende Koordinatentransformationen sind erforderlich. Prinzipiell ist es möglich, das Mortar-Integral der Slave-Seite separat auszuwerten. Allerdings liegen dann die Integrationsfehler zwischen Slave- und Master-Mortar-Integral in verschiedenen Bereichen.

## 3.4 Konsistente Behandlung von Rändern

In Abschnitt 3.3 wurde die Berechnung der virtuellen Kontaktarbeit und der integralen Nichtdurchdringungsbedingung mithilfe der Mortar-Integrale  $D_{KK}^S$  und  $M_{KJ}^M$  dargestellt. Die Berechnung der Slave-Integrale  $D_{KK}^S$  erfolgt auf Element-Basis, d.h. durch Integration über ein oder mehrere komplette Slave-Elemente. Nur bei einer Integration über komplette Slave-Elemente wird die Biorthogonalitätsbedingung (3.18) zwischen den Formfunktionen  $\phi_K$  der Lagrange'schen Multiplikatoren und  $N_I^1$  der Verschiebungen des Slave-Kontaktrands erfüllt. Die Erfüllung der Biorthogonalitätsbedingung ist Voraussetzung dafür, dass die globale Slave-Mortar-Matrix  $\mathbf{D}_S$  Diagonalstruktur besitzt. Dies wiederum ist notwendig, damit im Rahmen des Lösungsprozesses eine einfache Kondensation der Multiplikatoren möglich ist (siehe Kapitel 5.3). Im Vergleich zu den  $D_{KK}^S$  weisen die Master-Integrale  $M_{KJ}^M$  im Allgemeinen keinen glatten Verlauf über ein Slave-Element auf, weswegen sie segmentweise ausgewertet werden müssen, siehe Abbildung 3.10. Anschließendes Aufaddieren der einzelnen Segment-Beiträge liefert den kompletten Anteil des entsprechenden Slave-Elements. Solange sich ein Slave-Element komplett in Segmente zerlegen lässt, ist die resultierende Beziehung zwischen den Slave- und den Master-Mortar-Integralen konsistent. Am Übergangsbereich zwischen kontaktierenden und nicht kontaktierenden Bereichen des Kontaktrands ist diese Voraussetzung aber gegebenenfalls nicht mehr erfüllt, siehe Abbildung 3.11. Aufgrund der daraus resultierenden Unterschiede in den Integrationsgebieten der Slave- und der Master-Mortar-Integrale entsteht mit den bisherigen Definitionen eine Inkonsistenz. In Abschnitt 3.4.1 wird dies anhand eines exemplarischen Problems veranschaulicht. Anschließend wird in den folgenden Abschnitten 3.4.2 und 3.4.3 eine Lösung des Problems vorgestellt (siehe auch CICHOSZ UND BISCHOFF (2011)). Nicht vollständig in Segmente zerlegbare Slave-Elemente werden dabei auch als *Rand-Elemente* bezeichnet.

### 3.4.1 Problemidentifikation

Anhand eines einfachen Beispiels mit zwei finiten Elementen wird in diesem Abschnitt die Inkonsistenz zwischen den Slave- und den Master-Mortar-Integralen veranschaulicht und ihre Auswirkung auf den in Abschnitt 3.3 vorgestellten Algorithmus untersucht. In der betrachteten Situation berühren sich ein Slave- und ein Master-Körper entlang ihrer gemeinsamen Kontaktränder, siehe Abbildung 3.11. Für beide Körpern ist der Slave- bzw. der Master-Kontaktrand mit je einem Slave- bzw. Master-Element diskretisiert. Dabei ragt das Slave-Element ein Stück weit über den eigentlichen Kontaktbereich hinaus, so dass es nicht komplett in Segmente zerlegt werden kann. Mit den gewählten Abmessungen werden die Mortar-Integrale und daraus folgend die integralen Knoten-

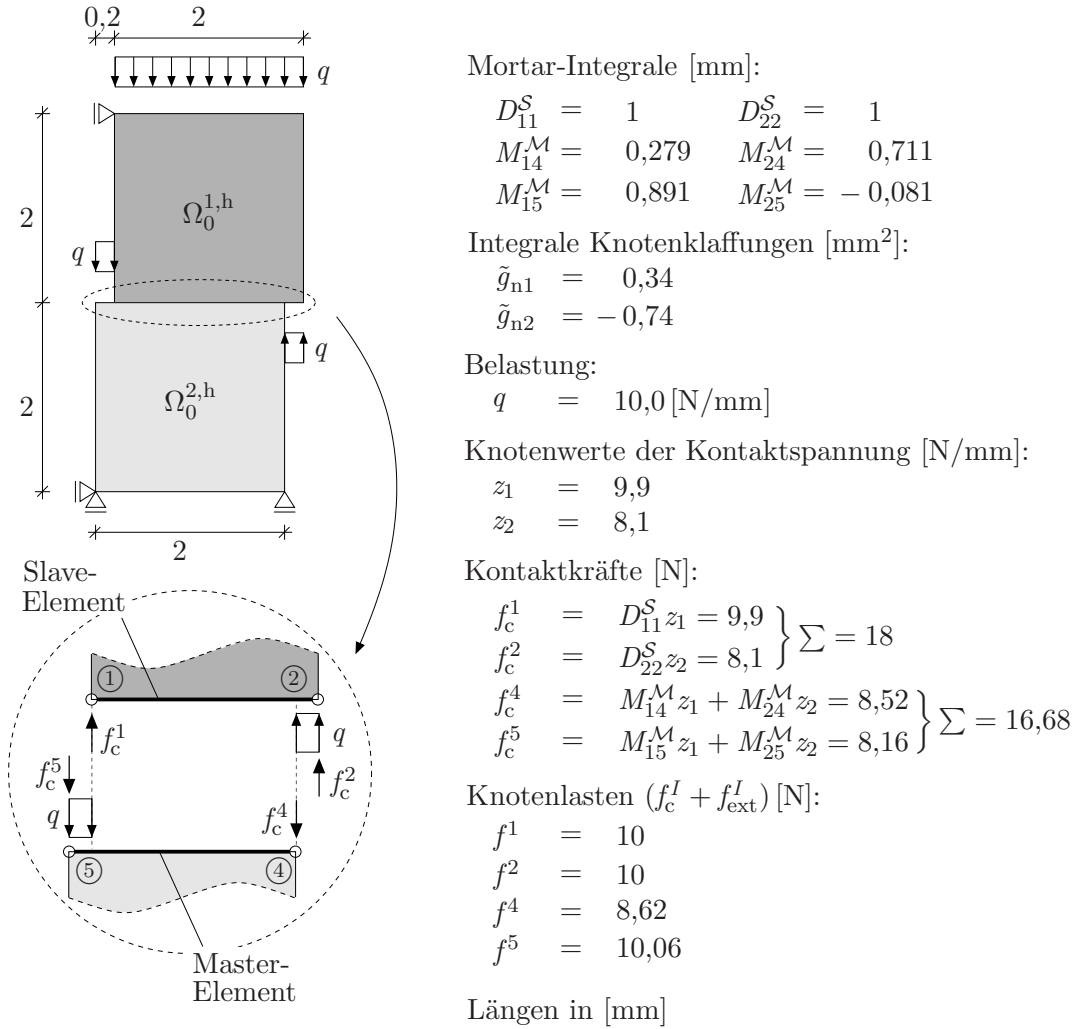


Abbildung 3.11: Konsistente Behandlung von Rändern: Problemidentifikation.

klaffungen (3.27) berechnet. Des Weiteren wird eine Gleichstreckenlast entsprechend der Problemstellung des Kontakt-Patch-Tests aufgebracht und die Übertragung der Kontaktspannung untersucht.

Die Auswertung der Slave-Mortar-Integrale  $D_{KK}^S$  erfolgt durch Integration über das komplette Slave-Element 1 – 2. Die Master-Mortar-Integrale  $M_{KJ}^M$  sind bezüglich des wirklichen Kontaktbereichs definiert, welcher hier durch ein einzelnes Segment zwischen den Knoten 1 und 4 repräsentiert wird. Aufgrund der verschiedenen Bezugsbereiche entsteht eine Inkonsistenz zwischen den integralen Größen und die Beziehung  $D_{KK}^S = \sum_J M_{KJ}^M$  wird nicht mehr erfüllt. Eine Integration von  $D_{KK}^S$  über den wahren Kontaktbereich ist ohne Modifikationen aber nicht möglich, da dies zu einer Verletzung der Biorthogonalitätsbedingung (3.18) und somit auf Terme  $D_{KJ}^S \neq 0$  führen würde. Aufgrund der Inkonsistenz zwischen den Slave- und den Master-Mortar-Integralen entstehen un-

brauchbare Werte der integralen Knotenklaffungen  $\tilde{g}_{nI}$ . Mit den berechneten Werten wird Knoten 1 inaktiv gesetzt, Knoten 2 wird um die scheinbare Durchdringung aus dem Master-Körper herausgedrückt. Die resultierende Problemstellung ist kinematisch, eine Gleichungslösung kann damit nicht erfolgen. Zur prinzipiellen Untersuchung der Kontaktspannungsübertragung wurden die Knotenklaffungen künstlich zu null gesetzt und eine Lösung berechnet. Die resultierenden Kontaktkräfte sind inkorrekt und verletzen die Gleichgewichtsbedingungen in der Kontaktoberfläche. Die einzelnen Zahlenwerte sind in Abbildung 3.11 dargestellt.

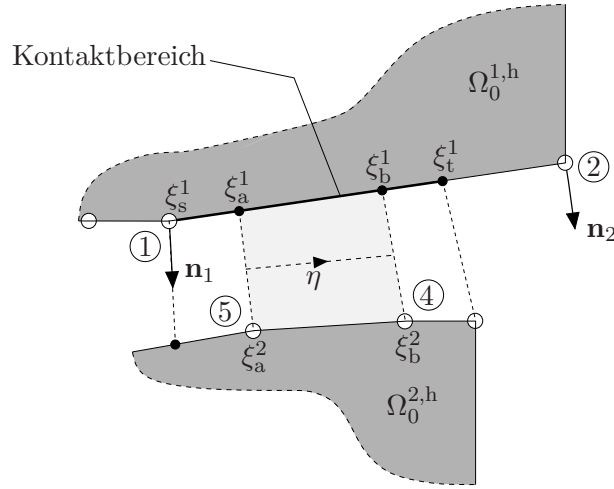


Abbildung 3.12: Definitionen in einem Rand-Element.

### 3.4.2 Konsistente Formulierung

Die im vorausgegangenen Abschnitt 3.4.1 geschilderte Inkonsistenz zwischen den Slave- und den Master-Mortar-Integralen in Rand-Elementen wird durch die unterschiedlichen Integrationsgebiete erzeugt, auf welche sich die  $D_{KK}^S$  und die  $M_{KJ}^M$  beziehen. Ein intuitiver Ansatz zur Lösung dieser Problematik liegt in der Auswertung der Slave-Mortar-Integrale  $D_{KK}^S$  auf Segment-Basis. Damit dabei weiterhin die Biorthogonalitätsbedingung (3.18) erfüllt werden kann, wird diese nun als Integral über den wirklichen Kontaktbereich eines Slave-Elements umformuliert:

$$\int_{\xi_s^1}^{\xi_t^1} \bar{\phi}_K N_I^1(J_{\mathbf{x}\xi^1}) d\xi^1 = \delta_{KI} \int_{\xi_s^1}^{\xi_t^1} N_I^1(J_{\mathbf{x}\xi^1}) d\xi^1. \quad (3.37)$$

Dabei bezeichnen die Koordinatenwerte  $\xi_s^1$  und  $\xi_t^1$  Beginn bzw. Ende des Kontaktbereichs in einem Slave-Element (siehe Abbildung 3.12).  $J_{\mathbf{x}\xi^1} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi^1} \right\| = \frac{1}{2} \ell_e$  repräsentiert die

Jacobi-Determinante zwischen aktueller Geometrie und Slave-Element-Parameterraum.  $\ell_e$  ist die Länge des entsprechenden Slave-Elements.

Gleichung (3.37) liefert zwei Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der modifizierten dualen Basisfunktionen  $\bar{\phi}_K$  innerhalb eines Slave-Elements. Formal kann die daraus resultierende Berechnungsvorschrift in Matrixschreibweise dargestellt werden, wie zum Beispiel in HARTMANN U. A. (2007) für die allgemeine Bestimmung von dualen Formfunktionen in dreidimensionalen Systemen. Im Gegensatz zu der dort vorgestellten Prozedur müssen die zugrundeliegenden Integrale jetzt aber anstatt über die komplette Slave-Element-Fläche über den wirklichen Kontaktbereich eines Slave-Elements  $e$  ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_K &= \sum_{I=1}^2 a_{KI} N_I^1, \quad \mathbf{a} = \left[ \left( \bar{D}_{KK}^S \right)_e \mathbf{I}_2 \right] \bar{\mathbf{m}}_e^{-1}, \quad \mathbf{a}, \bar{\mathbf{m}}_e \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ \text{mit: } \left( \bar{D}_{KK}^S \right)_e &= \frac{\ell_e}{2} \int_{\xi_s^1}^{\xi_t^1} N_K^1 d\xi^1 \\ \left( \bar{m}_{KJ} \right)_e &= \frac{\ell_e}{2} \int_{\xi_s^1}^{\xi_t^1} N_K^1 N_J^1 d\xi^1. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Der modifizierten Definition der dualen Formfunktionen entsprechend werden auch die Slave-Mortar-Integrale  $D_{KK}^S$  anstatt mit Gleichung (3.35) jetzt bezüglich des wirklichen Kontaktbereichs berechnet:

$$\begin{aligned} D_{KK}^S &= \sum_{e=1}^{n_{\text{sele}}} \left( D_{KK}^S \right)_e \\ \text{mit: } \left( D_{KK}^S \right)_e &= \begin{cases} \ell_e/2 & \text{falls } e \text{ inneres Element} \\ \ell_e/2 \int_{\xi_s^1}^{\xi_t^1} N_K^1 d\xi^1 = \left( \bar{D}_{KK}^S \right)_e & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Die Auswertung der Master-Mortar-Integrale  $M_{KJ}^M$  erfolgt weiterhin mit Beziehung (3.36). Allerdings wird der Beitrag

$$\left( \bar{M}_{KJ}^M \right)_m = \sum_{gp=1}^{n_{\text{gp}}} \bar{\phi}_K \left( \xi^1(\eta_{gp}) \right) N_J^2 \left( \xi^2(\eta_{gp}) \right) J_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} \quad (3.40)$$

eines Segments  $m$ , welches zu einem Rand-Element gehört, mit den modifizierten dualen Formfunktionen nach Gleichung (3.38) berechnet.

Durch die modifizierte Definition (3.38) und die modifizierte Berechnung (3.39) sind konsistente Mortar-Integrale und damit physikalisch sinnvolle Knotenklaffungen sowie das Gleichgewicht in der Kontaktfläche sichergestellt. Als Verifikation wird das Problem aus Abbildung 3.11 ein weiteres Mal untersucht, jetzt allerdings mit modifizierten Mortar-In-



tegralen, siehe Tabelle 3.2. Die integrierten Klaffungswerte beider Slave-Kontaktknoten sind identisch null. Die Kontaktkräfte erfüllen das Gleichgewicht in der Kontaktfläche.

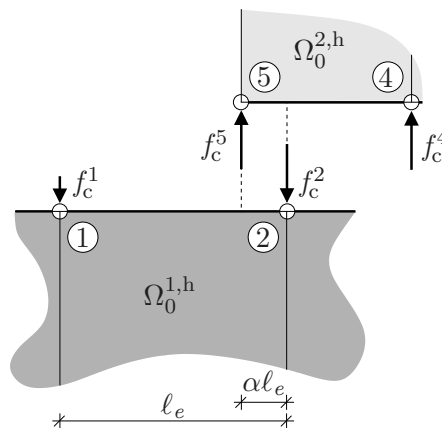
Mortar-Integrale [mm]	Kontaktspannung* [N/mm]	Kontaktkräfte [N]
$\bar{D}_{11}^S = 0,990$	$\bar{z}_1 = 10,0$	$f_c^1 = 9,9$
$\bar{D}_{22}^S = 0,810$	$\bar{z}_2 = 10,0$	$f_c^2 = 8,1$
$\bar{M}_{14}^M = 0,099$	Integrale Klaffung* [mm <sup>2</sup> ]	$f_c^4 = 9,9$
$\bar{M}_{24}^M = 0,891$	$\tilde{g}_{n1} = 0,0$	$f_c^5 = 8,1$
$\bar{M}_{15}^M = 0,891$	$\tilde{g}_{n2} = 0,0$	
$\bar{M}_{25}^M = -0,081$		

\*Knotenwerte

**Tabelle 3.2:** Problem aus Abbildung 3.11: Erneute Berechnung mit modifizierten Mortar-Integralen.

### 3.4.3 Wichtungsprozedur

Eine genauere Untersuchung von Gleichung (3.39) zeigt, dass sich der Betrag von  $(D_{KK}^S)_e$  in einem Rand-Element quadratisch mit der Größe des Kontaktbereichs verkleinert. Die Ursache hierfür ist, dass sich einerseits das Integrationsgebiet und andererseits der Integrand selber verkleinern. Die Kontaktkraft als Integralwert der Kontaktspannung verkleinert sich ungefähr linear mit der Größe des Kontaktbereichs. Abbildung 3.13 veranschaulicht die Ursache für dieses Verhalten. Der Beitrag von Slave-Element 1 – 2 zu den Kontaktkräften  $f_c^1$  und  $f_c^2$  resultiert aus den Master-Kontaktkräften  $f_c^5$  und  $f_c^4$ , wobei  $f_c^4$  nur einen kleinen Einfluss besitzt. Offensichtlich wird der größte Anteil von  $f_c^5$



**Abbildung 3.13:** Veränderung der Kontaktkräfte in einem Rand-Element.

auf Knoten 2 übertragen, ein kleiner Anteil aber auch auf Knoten 1. Verkleinert sich der Kontaktbereich in Element 1 – 2 (hier durch den Parameter  $\alpha$  dargestellt), verkleinert sich der Hebelarm von  $f_c^5$  bezüglich Knoten 2 um denselben Betrag. Auswertung des Momentengleichgewichts am Knoten 2 zeigt, dass sich  $f_c^1$  linear mit  $\alpha$  verkleinert. Infolgedessen vergrößert sich der zugehörige Knotenwert des Lagrange’schen Multiplikators mit dem Faktor  $1/\alpha$ . Durch die Linearisierung des Kontaktkraftvektors (siehe Abschnitt 5.2.1) werden die resultierenden großen Multiplikatorenwerte in die Steifigkeitsmatrix assembliert. Dadurch vergrößert sich deren Konditionszahl drastisch, was die Konvergenzeigenschaften der iterativen Lösungsprozedur deutlich verschlechtert. In extremen Fällen ist es sogar überhaupt nicht mehr möglich, eine konvergente Lösung zu erhalten (siehe Abschnitt 6.2.1). Mit der Einführung von Wichtungsfaktoren für die Mortar-Integrale kann diese Problematik einfacher und effektiv behandelt werden. Elementbezogene Wichtungsfaktoren

$$\kappa_K = \left[ \underbrace{\int_{\xi_s^1}^{\xi_t^1} N_K^1 d\xi^1}_{\omega_e} \right]^{-1} \quad (3.41)$$

erlauben pro Knoten verschiedene Wichtungen in unterschiedlichen Slave-Elementen, vergleiche hierzu auch CICHOSZ UND BISCHOFF (2011). Das Integral in Gleichung (3.41) bezieht sich dabei auf den wirklichen Kontaktbereich eines Rand-Elements  $e$  und definiert den zugehörigen Wichtungsfaktor als Inverse des modifizierten Slave-Mortar-Integrals, ausgewertet im Parameterraum. Somit besitzen die modifizierten und die nicht modifizierten Anteile der Mortar-Integrale dieselbe Größenordnung. Elementbezogene Wichtungsfaktoren sind algorithmisch sehr effektiv, können jedoch in bestimmten Fällen die Genauigkeit der Kontaktspannungsübertragung beeinträchtigen. Deswegen werden in dieser Arbeit alternativ knotenbasierte Wichtungsfaktoren

$$\kappa_K = \left[ \sum_{e=1}^{n_{\text{slave}}} \omega_e \right]^{-1} \quad (3.42)$$

vorgeschlagen (siehe auch POPP U. A. (2013)). Diese sind als Inverse der Summe der elementbezogenen Integrale aus Gleichung (3.41) definiert und besitzen für einen Knoten  $K$  in allen Slave-Elementen den gleichen Betrag. Bei dem in Abbildung 3.12 dargestellten Fall ist  $\kappa_1$  aus Beiträgen zweier Slave-Elemente zu berechnen. Das linke Slave-Element ist dabei komplett in Segmente zerlegbar (inneres Slave-Element), so dass  $\omega_e = 1,0$  gilt. Das rechte Slave-Element ist ein Rand-Element, wodurch eine Integralauswertung zur Berechnung von  $\omega_e$  notwendig wird. Abschließend können mit den Wichtungsfaktoren

aus Gleichung (3.42) die gewichteten modifizierten Mortar-Integrale angegeben werden:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{D}_{KK}^S\right)_e &= \kappa_K \left(\bar{D}_{KK}^S\right)_e && \text{(Beitrag eines Slave-Elements } e) \\ \left(\tilde{M}_{KJ}^M\right)_m &= \kappa_K \left(\bar{M}_{KJ}^M\right)_m && \text{(Beitrag eines Segments } m). \end{aligned} \tag{3.43}$$

### 3.5 Zusammenfassung

Neben der räumlichen Diskretisierung der kontaktunabhängigen Terme wurden in diesem Kapitel verschiedene Kontaktdiskretisierungen vorgestellt, bewertet und miteinander verglichen. Ein Schwerpunkt lag dabei auf der Darstellung und Untersuchung der integralen Kontaktdiskretisierung nach WOHLMUTH UND KRAUSE (2003) und HÜEBER UND WOHLMUTH (2005), welche auf der dualen Mortar-Methode basiert. Durch die Mortar-Kopplung der Kontaktträger ist diese Kontaktdiskretisierung stabil im Sinne der LBB-Bedingung (WOHLMUTH 2001). Darüber hinaus erlauben die dualen Formfunktionen im Rahmen der Gleichungslösung eine einfache Kondensation der Lagrange'schen Multiplikatoren (HÜEBER UND WOHLMUTH 2005; WOHLMUTH UND KRAUSE 2003). Somit wird einerseits das resultierende Gleichungssystem nicht vergrößert, andererseits kann die integrale Nichtdurchdringungsbedingung trotzdem exakt erfüllt werden. Die Leistungsfähigkeit der Kontaktdiskretisierung in puncto Spannungsübertragung wurde in Abschnitt 3.2.7 mithilfe des Kontakt-Patch-Tests demonstriert. Vergleichende Berechnungen mit alternativen Kontaktdiskretisierungen erzielten maximal gleichwertige Ergebnisse.

Den zweiten Schwerpunkt dieses Kapitels stellte die methodische Untersuchung und Behebung einer Inkonsistenz dar, welche bei einer räumlichen Kontaktdiskretisierung mit der dualen Mortar-Methode am Rand des Kontaktbereichs auftreten kann. Ist dort ein Slave-Element nicht komplett in Segmente zerlegbar (Rand-Element), entstehen für einen betroffenen Slave-Kontaktknoten  $I$  inkonsistente Mortar-Integrale:

$$D_{II}^S \neq \sum_J M_{IJ}^M. \tag{3.44}$$

Eine solche Situation kann für kleine Verformungen gegebenenfalls mit einer geschickten Wahl von Slave- und Master-Seite vermieden werden. Für große Deformationen ist dies jedoch nicht mehr ohne Weiteres möglich. Damit in allen Fällen konsistente Mortar-Integrale resultieren, wurde in Gleichung (3.37) die Biorthogonalitätsbedingung (3.18) auf den wahren Kontaktbereich eines Rand-Elements bezogen. Mit den so definierten modifizierten dualen Formfunktionen sind die Mortar-Integrale auch in Rand-Elementen

konsistent:

$$\bar{D}_{II}^S = \sum_J \bar{M}_{IJ}^M. \quad (3.45)$$

Aufgrund der Modifikation (3.45) entstehen für sehr kleine Rand-Elemente betragsmäßig sehr kleine Mortar-Integrale und daraus sehr große Werte der Lagrange'schen Multiplikatoren. Damit als Folge keine schlechte Konditionierung des globalen Gleichungssystems resultiert, wurden in Abschnitt 3.4.3 Wichtungsfaktoren  $\kappa_I$  entwickelt. Multiplizieren der gewichteten Mortar-Integrale aus Gleichung (3.45) mit den Wichtungsfaktoren  $\kappa_I$  führt schließlich auf die modifizierten gewichteten Mortar-Integrale:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{D}_{KK}^S\right)_e &= \kappa_K \left(\bar{D}_{KK}^S\right)_e && \text{(Beitrag eines Slave-Elements } e) \\ \left(\tilde{M}_{KJ}^M\right)_m &= \kappa_K \left(\bar{M}_{KJ}^M\right)_m && \text{(Beitrag eines Segments } m). \end{aligned} \quad (3.46)$$

# 4

---

## Zeitliche Diskretisierung

Das folgende Kapitel befasst sich mit der zeitlichen Diskretisierung der semidiskreten Bewegungsgleichung. Schwerpunktmäßig wird der Einfluss von Kontaktereignissen auf die Eigenschaften der zeitlichen Diskretisierung untersucht. Die zeitliche Diskretisierung ist dabei mit keiner spezifischen räumlichen Kontaktdiskretisierung assoziiert. Neben der dualen Mortar-Methode kommt auch der NTS-Algorithmus zum Einsatz. Die allgemeinen Ausführungen zu Zeitintegrationsverfahren sind bewusst kompakt gehalten und sollen keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf das Lehrbuch von ARGYRIS UND MLEJNEK (1988) sowie auf die Arbeit von KUHLE (1996) verwiesen.

In Abschnitt 4.1 werden zunächst grundlegende Begriffe und Zusammenhänge eingeführt. Anschließend stellt Abschnitt 4.2 die in dieser Arbeit verwendeten Zeitintegrationsverfahren vor. Die Abschnitte 4.3 bis 4.6 befassen sich mit den Auswirkungen von Kontakt auf die Eigenschaften der zugrundeliegenden zeitlichen Diskretisierung. Strategien zur Verbesserung des Verhaltens unter Kontakt werden vorgestellt, untersucht und miteinander verglichen. In Abschnitt 4.7 wird ein neuer Algorithmus für die zeitliche Diskretisierung von Kontaktvorgängen vorgestellt, welcher die negativen Effekte aus Kontakt minimiert, ohne die Nichtdurchdringungsbedingung zu verletzen. Abschließend sind in Abschnitt 4.8 die wichtigsten Aspekte noch einmal zusammengefasst.

### 4.1 Einleitung

Im vorangegangenen Kapitel wurde das kontinuierliche Kontaktproblem durch die räumliche Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente in eine semidiskrete Bewegungsgleichung überführt. Für den statischen Fall kann diese direkt mit einem nu-

merischen Verfahren gelöst werden. Wird eine dynamische Problemstellung untersucht, ist zusätzlich eine zeitliche Diskretisierung erforderlich. Dazu wird der betrachtete Zeitraum  $[t_0, T]$  in  $n_T$  Zeitintervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  aufgeteilt. Die diskreten Zeitpunkte  $t_n$  bzw.  $t_{n+1}$  bezeichnen Start- bzw. Endzeitpunkt eines einzelnen Intervalls. Die Differenz zwischen End- und Startzeitpunkt definiert den Zeitschritt  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Im Rahmen einer Zeitintegration werden die zeitlich kontinuierlichen Systemgrößen  $\mathbf{d}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  und  $\mathbf{a}(t)$  durch approximative Verläufe ersetzt, welche jeweils für ein Intervall definiert sind. Die Approximationen sind im Allgemeinen als Funktion der Systemgrößen zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ , als Funktion der Systemgrößen zu davor liegenden Zeitpunkten, als Funktion des Zeitschritts und ggf. noch als Funktion von zusätzlichen Parametern formuliert. Durch die Kombination der zeitlichen Approximationen der Systemgrößen mit der Bewegungsgleichung resultiert ein Gleichungssatz, welcher die Bestimmung der Systemgrößen am Ende des untersuchten Intervalls erlaubt. Die Systemgrößen zu Beginn des Intervalls werden dabei als bekannt vorausgesetzt. Eine sequentielle Lösung der Gleichungssysteme aller  $n_T$  Intervalle hintereinander liefert dann eine Approximation der kompletten Lösung für den betrachteten Zeitraum  $[t_0, T]$ .

Abhängig davon, ob die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt  $t_n$ , zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  oder zu einem Zwischenzeitpunkt ausgewertet wird, können Zeitintegrationsverfahren als *explizit*, *implizit* oder als Kombination von beiden klassifiziert werden. Implizite Verfahren benötigen zur Bestimmung der unbekanntenen Systemgrößen eine Gleichungslösung. Für nichtlineare Systeme ist dazu ein iteratives Verfahren erforderlich. Explizite Algorithmen können die unbekanntenen Systemgrößen ohne eine Gleichungslösung bestimmen, falls die Massenmatrix des entsprechenden Verfahrens Diagonalstruktur besitzt. Allerdings sind explizite Verfahren nur bedingt stabil. Dies bedeutet, dass in einem nicht belasteten System die unbekanntene Systemantwort am Ende des Zeitschritts verglichen mit der bekannten Systemantwort zu Beginn des Zeitschritts über alle Grenzen anwachsen kann, falls eine kritische Zeitschrittweite überschritten wird. Implizite Verfahren hingegen können so konstruiert werden, dass sie für lineare Problemstellungen unbedingt stabil sind. Als Beispiel sei das Newmark-Verfahren (NEWMARK 1959) mit der Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  genannt. Bei unbedingter Stabilität ist unabhängig vom gewählten Zeitschritt garantiert, dass die gesuchte Systemantwort nicht über alle Grenzen anwächst. Für eine Systemsteifigkeit, welche nicht von der Deformation abhängt, lässt sich dies durch eine Entkopplung der Systemgleichungen und eine anschließende Eigenwertuntersuchung zeigen (*Kriterium der spektralen Stabilität*). Die im Folgenden betrachteten Zeitintegrationsverfahren sind ausnahmslos implizit.

Für nichtlineare Systeme kann das Kriterium der spektralen Stabilität nicht verwendet werden, da die Systemsteifigkeit deformationsabhängig ist. Gut geeignet ist hingegen das Kriterium der energetischen Stabilität nach BELYTSCHKO UND SCHOEBERLE (1975). Dieses definiert ein Zeitintegrationsverfahren genau dann als energetisch stabil,

wenn die Veränderung der Systemenergie zwischen zwei Zeitschritten entweder exakt der Arbeit entspricht, welche von den äußeren Lasten geleistet wird, oder bezüglich der geleisteten Arbeit dissipativ ist. Eine energetisch stabile Zeitintegration kann für nichtlineare Systeme mit drei verschiedenen Ansätzen realisiert werden:

- Verwenden eines Zeitintegrationsverfahrens, welches numerisch Energie dissipiert.
- Verwenden eines Zeitintegrationsverfahrens, welches algorithmisch so konstruiert ist, dass die Systemenergie exakt erhalten bleibt.
- Kombination eines Zeitintegrationsverfahrens mit einer Zusatzbedingung, welche die Erhaltung der Systemenergie erzwingt.

Beispielhaft seien als Vertreter der ersten Gruppe der „Hilber- $\alpha$ “- bzw. „HHT“-Algorithmus (HILBER U. A. 1977) oder die „Generalized- $\alpha$  Method“ (CHUNG UND HULBERT 1993) genannt. Die kontinuierliche Dissipation der Systemenergie durch Verfahren dieser Gruppe kann bei der Simulation von Langzeitprozessen allerdings zu einer nicht akzeptablen Veränderung der Systemantwort führen. Verfahren der zweiten Gruppe basieren auf der „Energy-Momentum-Method“ (EMM) nach SIMO UND TARNOW (1992). Die algorithmische Energieerhaltung wird hier durch eine spezielle Konstruktion des Verzerrungstensors erreicht. Als ein Verfahren der dritten Gruppe kann beispielsweise die „Constraint-Energy-Method“ (CEM) nach HUGHES U. A. (1978) genannt werden, welche den Newmark-Algorithmus mit einer Zwangsbedingung zur Energieerhaltung kombiniert. Eine Erweiterung der „Constraint-Energy-Method“ wurde von KUHLE UND RAMM (1996) mit dem „Constraint-Energy-Momentum-Algorithm“ (CEMA) vorgestellt. Diese verbindet die dissipative „Generalized- $\alpha$  Method“ mit Zwangsbedingungen zur Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls.

Bei impliziten Verfahren kann die Ermittlung einer stabilen Lösung nicht nur durch den Verlust der energetischen Stabilität, sondern auch durch ein Konvergenzversagen der Gleichgewichtssiteration verhindert werden. Dieser Fall tritt auf, wenn hochfrequente Systemschwingungen aufgrund einer zu groß gewählten Zeitschrittweite nicht mehr abgebildet werden können. Vor allem, wenn der Algorithmus die hochfrequenten Schwingungsmoden nicht numerisch dissipiert, ist ein entsprechend kleiner Zeitschritt erforderlich.

Durch Kontaktvorgänge werden die Eigenschaften des zugrundeliegenden Zeitintegrationsverfahrens wesentlich beeinflusst. Verfahren, welche ohne das Auftreten von Kontakt energetisch stabil sind, können diese Eigenschaft bei Kontaktereignissen verlieren. Die üblichen Newmark-Ansätze für die Systemgrößen führen bei Kontaktereignissen zu oszillierenden Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der kontaktierenden FE-Knoten. Aufgrund der oszillierenden Beschleunigungen oszillieren dann auch die Trägheitskräfte und als Folge dessen die Kontaktkräfte. Letztlich wird die Strukturantwort

des kompletten Systems gestört. Zeitintegrationsverfahren, welche energieerhaltend sind, verlieren diese Eigenschaft durch Kontakt ereignisse.

## 4.2 Implizite Zeitintegrationsverfahren

Die im Folgenden dargestellten Untersuchungen und Weiterentwicklungen auf dem Gebiet der zeitlichen Diskretisierung betrachten ausschließlich Phänomene, die durch Kontakt ereignisse verursacht werden. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Arbeit mit dem Newmark-Verfahren ein möglichst einfacher Basisalgorithmus verwendet, siehe Abschnitt 4.2.1. Für nichtlineare Probleme ist der Newmark-Algorithmus nur bedingt energetisch stabil. Die Allgemeinheit der Untersuchungen wird hierdurch jedoch nicht beeinträchtigt, da die Übertragung der erzielten Erkenntnisse auf einen unbedingt stabilen Basisalgorithmus nur eine technische Herausforderung darstellt. Neben dem Newmark-Verfahren kommt vergleichend die „Energy-Momentum-Method“ (EMM) zum Einsatz, siehe Abschnitt 4.2.2. In Kombination mit der „Velocity-Update-Method“ (siehe Abschnitt 4.6) stellt die „Energy-Momentum-Method“ bis zum jetzigen Zeitpunkt die einzige zeitliche Kontaktdiskretisierung dar, welche energetisch stabil und energieerhaltend ist, ohne dafür die Nichtdurchdringungsbedingung verletzen zu müssen.

In den folgenden Untersuchungen und Beispielen wird ausnahmslos eine konstante Zeitschrittweite verwendet:  $\Delta t = \text{konstant}$ . Eine Systemgröße  $a(t_n)$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t_n$  wird in einer vereinfachenden Schreibweise in der Form  $a_n$  oder  $a^n$ , indiziert mit dem Zähler des jeweiligen Zeitschritts, dargestellt. Zeitintegrationsverfahren werden in einer kompakten Ausdrucksweise auch als *Integratoren* bezeichnet.

### 4.2.1 Der Newmark-Algorithmus

Für strukturmechanische Probleme ist der Newmark-Algorithmus (NEWMARK 1959) eines der wichtigsten und sicher auch eines der am häufigsten benutzten Zeitintegrationsverfahren. Darüber hinaus stellt der Newmark-Algorithmus die Basis für zahlreiche weitere Zeitintegrationsverfahren dar, als Beispiele seien der „HHT“-Algorithmus, die „Generalized- $\alpha$  Method“, die „Energy-Momentum-Method“ oder die „Constraint-Energy-Method“ genannt. Die Grundlage des Verfahrens bilden die Newmark-Approximationen von Verschiebung und Geschwindigkeit in der Zeit:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left[ (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n + 2\beta \mathbf{a}_{n+1} \right] \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t \left[ (1 - \gamma) \mathbf{a}_n + \gamma \mathbf{a}_{n+1} \right]. \end{aligned} \tag{4.1}$$



In den Vektoren  $\mathbf{v}_n$  bzw.  $\mathbf{v}_{n+1} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}} n_n)}$  sind dabei alle diskreten Knotengeschwindigkeiten zu den Zeitpunkten  $t_n$  bzw.  $t_{n+1}$  zusammengefasst. Die Vektoren für Verschiebung und Beschleunigung stellen diskrete zeitliche Auswertungen der entsprechenden Größen aus Gleichung (3.3) dar. Mit den Parametern  $\beta$  und  $\gamma$  können die Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften des Verfahrens gesteuert werden. Durch die Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  beispielsweise wird das Verfahren für lineare Probleme absolut stabil und energierhaltend. Die unbekannte Beschleunigung kann mithilfe von Gleichung (4.1)<sub>1</sub> als Funktion der unbekanntenen Verschiebung ausgedrückt werden:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[ (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) - \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n \right]. \quad (4.2)$$

Eine Auswertung der semidiskreten Bewegungsgleichung (3.28)<sub>1</sub> zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  mit anschließendem Einsetzen des Resultats aus Gleichung (4.2) ergibt die nichtlineare effektive Strukturgleichung der Newmark-Methode:

$$\mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) - \frac{1}{2\beta} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n \right] + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1} + \mathbf{f}_c^{n+1} = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

### Berechnung der internen Kräfte

An dieser Stelle wird die Berechnung des internen Kräftevektors in kompakter Form dargestellt, um einen direkten Vergleich zu der entsprechenden Berechnung mit der „Energy-Momentum-Method“ zu ermöglichen. Die räumliche Komponente  $k$  des Anteils eines Knotens  $I$  von  $\mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}$  aus Gleichung (4.3) berechnet sich dabei über die Assemblierung der Anteile aus den einzelnen Elementen  $e$ :

$$f_{\text{int}}^{Ik} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( N_{I, X_i} \left[ \sum_{J=1}^{n_n} N_{J, X_j} d_{Jk} \right] S_{ij}^h J_0 \boldsymbol{\xi} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (4.4)$$

Summiert wird jeweils nur über die Größen des zugehörigen Körpers  $\alpha$ . Auf den entsprechenden Index wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Aus dem gleichen Grund wurde auf den Index des Zeitschritts verzichtet. Alle Größen sind zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ausgewertet. Die Spannung  $S_{ij}^h$  wird stark aus dem zugrundeliegenden Werkstoffgesetz und der diskretisierten Green-Lagrange'schen Verzerrung berechnet, siehe auch Gleichung (A.20) für eine detaillierte Herleitung der einzelnen Ausdrücke.

### Berechnung der Kontaktkräfte

Der Vektor der Kontaktkräfte berechnet sich aus der verschiebungsabhängigen Operatormatrix  $\mathbf{B}^c$  und dem globalen Vektor  $\mathbf{z}_{n+1}$  der Kontaktspannung:

$$\mathbf{f}_c^{n+1} = \mathbf{B}^c(\mathbf{d}_{n+1}) \mathbf{z}_{n+1}. \quad (4.5)$$

Die Dimension von  $\mathbf{z}_{n+1}$  sowie die Dimension und die Berechnung von  $\mathbf{B}^c$  hängen dabei von der verwendeten räumlichen Kontaktdiskretisierung ab. Für Mehrkörperkontaktprobleme sind die entsprechenden Beziehungen im Folgenden mit dem NTS-Algorithmus und der Kontaktdiskretisierung aus Kapitel 3.3, welche auf der dualen Mortar-Methode basiert, dargestellt. Für Einkörperkontakt wird die Kontaktdiskretisierung aus HARTMANN U. A. (2007) verwendet, die ebenfalls auf der dualen Mortar-Methode beruht. Definition und Auswertung von  $\mathbf{B}^c$  und  $\mathbf{z}_{n+1}$  sind für die verschiedenen Methoden in der folgenden Gleichung beschrieben. Dabei werden alle Größen für  $t = t_{n+1}$  ausgewertet:

$$\mathbf{f}_c = \mathbf{B}^c \mathbf{z} = \begin{cases} \left[ \bigcup_{I=1}^{n_{\text{sa}}} (\mathbf{B}_{\text{NTS}}^c)_I \right] \mathbf{z} =: \mathbf{B}_{\text{NTS}}^c \mathbf{z}, & \text{Gl. (3.6), } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_s}, & (\text{NTS}) \\ \mathbf{B}_{\text{Md2}}^c \mathbf{z}, & \text{Gl. (3.25), } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_s}, & (\text{Md2}) \\ \left[ \mathbf{0}, \mathbf{D}_S \right]^T \mathbf{z} =: \mathbf{B}_{\text{Md1}}^c \mathbf{z}, & \text{Gl. (3.25), } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_s}, & (\text{Md1}) \\ \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{dim}} n_s) \times (n_{\text{dim}} (n_n - n_s))} & & \end{cases}$$

(Md1): Mortar dual – 1KK,    (Md2): Mortar dual – 2KK.

(4.6)

Der skalare Kontakt-Normalspannungswert eines Knotens  $I$  berechnet sich ebenfalls diskretisierungsabhängig über die Beziehung

$$\begin{aligned} z_{nI} &\leq 0 && (\text{NTS}) \\ z_{nI} &= \mathbf{z}_I \cdot \mathbf{n}_I \geq 0 && (\text{Md2}) \\ z_{nI} &= \mathbf{z}_I \cdot \mathbf{n}_{\text{obs}} \leq 0 && (\text{Md1}) \end{aligned}$$

(Md1): Mortar dual – 1KK,    (Md2): Mortar dual – 2KK.

(4.7)

wobei  $\mathbf{n}_{\text{obs}}$  die Normale auf das starre Hindernis (englisch: „obstacle“) darstellt, siehe auch Abbildung 4.1.

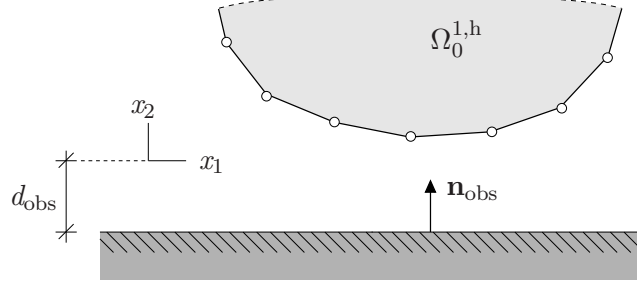


Abbildung 4.1: Einkörperkontaktproblem: Veranschaulichung und Bezeichnungen.

### Auswertung der Nichtdurchdringungsbedingung

Äquivalent zur Kontaktkraft wird auch die Normalklaffung eines Slave-Kontaktknotens  $I$  in Abhängigkeit der räumlichen Kontaktdiskretisierung bestimmt:

$$g_{nI} = \begin{cases} \left( \mathbf{x}_I^1 - (1 - \hat{\xi}) \mathbf{x}_{J_1}^2 - \hat{\xi} \mathbf{x}_{J_2}^2 \right) \cdot \mathbf{n}_I & \geq 0, & \text{Gl. (3.6), (NTS)} \\ \tilde{g}_{nI} & \geq 0, & \text{Gl. (3.27), (Md2)} \\ \mathbf{x}_I \cdot \mathbf{n}_{\text{obs}} + d_{\text{obs}} & \geq 0, & \text{(Md1)} \end{cases}$$

$$\text{(Md1): Mortar dual - 1KK, \quad \text{(Md2): Mortar dual - 2KK.} \quad (4.8)$$

Alle Beziehungen sind dabei zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ausgewertet.  $d_{\text{obs}}$  stellt für den Einkörperkontaktfall den Abstand zwischen Ursprung und starrem Hindernis in Richtung von  $\mathbf{n}_{\text{obs}}$  dar. Für die Gültigkeit der verwendeten Vorzeichendefinition müssen Ursprung und deformierbarer Körper auf derselben Seite des Hindernisses liegen (siehe Abbildung 4.1).

### Änderung der Systemenergie ohne Kontakt

Die Energiebilanz des Newmark-Integrators kann mithilfe der effektiven Strukturgleichung (4.3) und den zeitlichen Approximationen von Verschiebung und Geschwindigkeit (4.1) gewonnen werden. Mit der Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  resultiert dabei die folgende Beziehung (siehe beispielsweise ARGYRIS UND MLEJNEK (1988) oder KRENK (2006)), falls keine äußeren Kräfte vorhanden sind:

$$\underbrace{\frac{1}{2} \left( \mathbf{v}_{n+1}^\top \mathbf{M} \mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n^\top \mathbf{M} \mathbf{v}_n \right)}_{\Delta e_{\text{kin}}^h} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\top \left( \mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} \right) = 0. \quad (4.9)$$

Für lineare Probleme entspricht der rechte Term auf der linken Seite von Gleichung (4.9) exakt der Veränderung der internen Energie. Damit entspricht die Veränderung der kinetischen Energie  $\Delta e_{\text{kin}}^{\text{h}}$  genau der Veränderung der internen Energie. Der Algorithmus ist unbedingt stabil und energierhaltend. Für nichtlineare Probleme hängen die internen Kräfte nichtlinear von den Verschiebungen ab. Aus diesem Grund stellt der rechte Term auf der linken Seite von Gleichung (4.9) nur noch eine Approximation der Veränderung der internen Energie dar. Somit ist der Zuwachs der kinetischen Energie eventuell größer als die Veränderung der internen Energie. Als Folge dessen ist der Algorithmus für nichtlineare Probleme nur noch bedingt stabil.

Damit Gleichung (4.9) im Kontext mit der kontinuumsmechanischen Energiebilanz aus Kapitel 2 besser verstanden und eingeordnet werden kann, wird die kontinuumsmechanische Energiebilanz im folgenden Absatz räumlich diskretisiert und zeitlich integriert. Die resultierende Beziehung entspricht aufgrund der Approximationen, die im Rahmen der Diskretisierung gewählt werden, exakt der Energiebilanz (4.9).

In abstrakter Form liefert die räumliche Diskretisierung der kontinuierlichen Energiebilanz (2.30) mit anschließender Integration über das Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}]$  die folgende Beziehung:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} e_{\text{kin}}(t) + p_{\text{int}}(t) = p_{\text{ext}}(t) \right]^{\text{h}} dt \Leftrightarrow \left( e_{\text{kin}}^{n+1} - e_{\text{kin}}^n \right)^{\text{h}} + \Delta e_{\text{int}}^{\text{h}} = \Delta e_{\text{ext}}^{\text{h}}. \quad (4.10)$$

Darin bezeichnet das  $\Delta(\bullet)$ -Symbol die Differenz einer Größe zwischen den Zeitpunkten  $t_{n+1}$  und  $t_n$ :  $\Delta(\bullet) = (\bullet)_{n+1} - (\bullet)_n$ . Einsetzen der räumlich diskretisierten Geschwindigkeit (3.2)<sub>2</sub> in die kontinuierliche Formulierung der kinetischen Energie (2.32) und anschließendes Auswerten für einen diskreten Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ergibt die diskrete kinetische Energie eines einzelnen Körpers  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} e_{\text{kin}}^{\alpha}(t_{n+1}) &\approx \left[ e_{\text{kin}}^{\alpha}(t_{n+1}) \right]^{\text{h}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0^{\alpha, \text{h}}} \rho_0^{\alpha} \left( \sum_{I=1}^{n_{\alpha}} N_I^{\alpha} \mathbf{v}_{n+1}^{I, \alpha} \right) \cdot \left( \sum_{J=1}^{n_{\alpha}} N_J^{\alpha} \mathbf{v}_{n+1}^{J, \alpha} \right) d\Omega_0^{\alpha, \text{h}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{n_{\alpha}} \sum_{J=1}^{n_{\alpha}} \mathbf{v}_{n+1}^{I, \alpha} \cdot \mathbf{v}_{n+1}^{J, \alpha} \underbrace{\int_{\Omega_0^{\alpha, \text{h}}} \rho_0^{\alpha} N_I^{\alpha} N_J^{\alpha} d\Omega_0^{\alpha, \text{h}}}_{M_{IJ}^{\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Dabei kennzeichnet die Abkürzung  $M_{IJ}^{\alpha}$  den Eintrag zwischen den Knoten  $I$  und  $J$  in der globalen Massenmatrix  $\mathbf{M}$ . Aufsummieren der beiden Beiträge aus Gleichung (4.11)

liefert die diskrete kinetische Energie für das komplette System:

$$\left(e_{\text{kin}}^{n+1}\right)^{\text{h}} = \sum_{\alpha=1}^2 \left[e_{\text{kin}}^{\alpha}(t_{n+1})\right]^{\text{h}} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{n+1}^{\text{T}} \mathbf{M} \mathbf{v}_{n+1}. \quad (4.12)$$

Die diskrete Änderung der internen Energie im Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}]$  folgt durch die räumliche Diskretisierung von Gleichung (2.33) äquivalent zu der Vorgehensweise in Gleichung (3.4)<sub>2</sub> und anschließender Integration von  $t_n$  bis  $t_{n+1}$ :

$$\Delta e_{\text{int}} \approx \sum_{\alpha=1}^2 \left(\Delta e_{\text{int}}^{\alpha}\right)^{\text{h}} = \sum_{\alpha=1}^2 \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\int_{\Omega_0^{\alpha}} \mathbf{S}^{\alpha} : \dot{\mathbf{E}}^{\alpha} d\Omega_0^{\alpha}\right)^{\text{h}} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\mathbf{v}^{\text{T}} \mathbf{f}_{\text{int}}\right) dt. \quad (4.13)$$

Durch die Auswertung des letzten Integrals in Gleichung (4.13) mit der Trapezregel resultiert die approximative Änderung der internen Energie. Dabei wird zusätzlich die Mittelpunktgeschwindigkeit mit  $\mathbf{v}_{n+1/2} = \Delta \mathbf{d} / \Delta t = (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) / \Delta t$  approximiert und ein konstanter Zeitschritt vorausgesetzt<sup>1</sup>:

$$\Delta e_{\text{int}}^{\text{h}} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\mathbf{v}^{\text{T}} \mathbf{f}_{\text{int}}\right) dt \approx \frac{\Delta t^{n+1/2}}{2} \mathbf{v}_{n+1/2}^{\text{T}} \left(\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}\right) \approx \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^{\text{T}} \left(\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}\right). \quad (4.14)$$

Abschließend erfolgt die räumliche Diskretisierung von Gleichung (2.34) entsprechend zu der Vorgehensweise in Gleichung (3.4)<sub>3</sub>. Durch eine Behandlung der resultierenden Terme äquivalent zu Gleichung (4.13) und (4.14) ergibt sich die diskrete Änderung der externen Energie:

$$\Delta e_{\text{ext}} \approx \Delta e_{\text{ext}}^{\text{h}} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^{\text{T}} \left(\mathbf{f}_{\text{ext}}^n + \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1}\right). \quad (4.15)$$

Wird ein linearer Verlauf der externen Lasten im betrachteten Zeitintervall vorausgesetzt, ist die zeitliche Integration mit der Trapezregel in Gleichung (4.15) exakt.

## 4.2.2 Die „Energy-Momentum-Method“ (EMM)

Ohne die Berücksichtigung von Kontaktbedingungen ist die „Energy-Momentum-Method“ (SIMO UND TARNOW 1992) ein unbedingt stabiles und energieerhaltendes Zeitintegrationsverfahren. Sie garantiert diese Eigenschaften durch die Idee der algorithmischen Energieerhaltung. Hierzu wird die Berechnung der internen Kräfte genau so konstruiert, dass die Zeitintegration auch für Probleme mit großen Deformationen energie-

<sup>1</sup>Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich eine konstante Zeitschrittweite verwendet.

impuls- und drehimpulserhaltend ist. Ein Nachteil der Methode ist der numerische Mehraufwand, der durch die Modifikationen entsteht. Da die Berechnung der internen Kräfte auf Elementebene erfolgt, sind grundlegende Veränderungen der Elementroutinen inklusive der Spannungsberechnung erforderlich.

Basis für die zeitliche Approximation von Verschiebung und Geschwindigkeit sind die Newmark-Approximationen (4.1), die im Rahmen der „Energy-Momentum-Method“ mit der festen Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  verwendet werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Zusätzlich werden die Systemgrößen in der Mitte  $t_{n+1/2}$  des Zeitintervalls  $[t_n, t_{n+1}]$  benötigt. Diese ergeben sich durch die lineare Interpolation zwischen den Werten der diskreten Zeitpunkte  $t_n$  und  $t_{n+1}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n+1/2} &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{n+1} + \mathbf{d}_n) \\ \mathbf{v}_{n+1/2} &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \\ \mathbf{a}_{n+1/2} &= \frac{1}{2} (\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n).\end{aligned}\tag{4.17}$$

Auflösen von Gleichung (4.16)<sub>1</sub> nach der unbekanntten Beschleunigung  $\mathbf{a}_{n+1}$  und anschließendes Einsetzen in Gleichung (4.17)<sub>3</sub> liefert dann die Beschleunigungen der Mittelpunktkonfiguration. Formuliert als Funktion der unbekanntten Verschiebung lautet diese:

$$\mathbf{a}_{n+1/2} = \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \frac{2}{\Delta t} \mathbf{v}_n.\tag{4.18}$$

Schließlich führt die Auswertung der semidiskreten Bewegungsgleichung (3.28)<sub>1</sub> für den Zeitpunkt  $t_{n+1/2}$  auf die nichtlineare effektive Strukturgleichung der „Energy-Momentum-Method“:

$$\mathbf{M} \left[ \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) \right] + \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1/2}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1/2} + \mathbf{f}_c(\mathbf{d}_{n+1/2}, \mathbf{z}^{\text{algo}}) = \mathbf{0}.\tag{4.19}$$

Dabei wurde Gleichung (4.18) verwendet, um die Mittelpunktbeschleunigung  $\mathbf{a}_{n+1/2}$  als Funktion der unbekanntten Verschiebung auszudrücken. Die externen Kräfte werden als unabhängig von der Deformation vorausgesetzt. Sie ergeben sich ebenfalls über eine

Mittelung der externen Kräfte an den Intervallgrenzen:

$$\mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1} + \mathbf{f}_{\text{ext}}^n). \quad (4.20)$$

### Berechnung der internen Kräfte

Im Gegensatz zur Newmark-Methode berechnen sich die internen Kräfte mit den Verschiebungen der Mittelpunktconfiguration und mit einem modifizierten Spannungsmaß. Formal folgt die räumliche Komponente  $k$  des Anteils eines Knotens  $I$  von  $\mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1/2})$  aus Gleichung (4.19) wieder aus der Assemblierung der Anteile aus den einzelnen Elementen  $e$ :

$$f_{\text{int}}^{Ik}(\mathbf{d}_{n+1/2}) = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( N_{I,X_i} \left[ \sum_{J=1}^{n_n} N_{J,X_j} d_{Jk}^{n+1/2} \right] S_{ij}^{\text{algo}} J_0 \xi^{n+1/2} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (4.21)$$

Die Spannung  $S_{ij}^{\text{algo}}$  ist dabei mit dem Index  $(\bullet)^{\text{algo}}$  gekennzeichnet, da sie algorithmisch so berechnet wird, dass die Entwicklung der Systemenergie exakt den thermodynamischen Prinzipien folgt. Für hyperelastische Materialgesetze bedeutet dies, dass die Veränderung der kinetischen Energie exakt der Veränderung der internen Energie mit umgedrehtem Vorzeichen entspricht (siehe auch Gleichung (4.9) für den Unterschied zur Newmark-Methode). Wird das St. Venant-Kirchhoff'sche Materialmodell verwendet, muss  $S_{ij}^{\text{algo}}$  dazu mit dem Mittelwert der Verzerrungstensoren der Zeitpunkte  $t_n$  und  $t_{n+1}$  ausgewertet werden, anstatt die Verzerrung der Mittelpunktverschiebung  $\mathbf{d}_{n+1/2}$  zu benutzen (SIMO UND TARNOW 1992). Die Berechnung von  $S_{ij}^{\text{algo}}$  für weitere Werkstoffe ist beispielsweise in GONZALEZ (2000) dargestellt.

### Berechnung der Kontaktkräfte

Äquivalent zu der Vorgehensweise in Gleichung (4.6) berechnet sich der Kontaktkraftvektor in Abhängigkeit der zugrundeliegenden räumlichen Kontaktdiskretisierung. Allerdings werden die einzelnen Terme zu einem anderen Zeitpunkt ausgewertet:

$$\mathbf{f}_c(\mathbf{d}_{n+1/2}) = \mathbf{B}^c(\mathbf{d}_{n+1/2}) \mathbf{z}^{\text{algo}}. \quad (4.22)$$

Die Kontaktspannung  $\mathbf{z}^{\text{algo}}$  berechnet sich als Reaktion auf die algorithmische Umsetzung der Nichtdurchdringungsbedingung, siehe LAURSEN UND LOVE (2002) für verschiedene Möglichkeiten. In dieser Arbeit wird die Nichtdurchdringungsbedingung ausschließlich mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren umgesetzt.  $\mathbf{z}^{\text{algo}}$  folgt

entsprechend dem Vorschlag in LAURSEN UND LOVE (2002) aus der Forderung nach Nichtdurchdringung für den Zeitpunkt  $t_{n+1}$ . Eine Auswertung der Nichtdurchdringungsbedingung in der Mitte des Zeitintervalls würde bei der Initiierung des Kontakts eine unphysikalische Durchdringung erlauben und anschließend zu einer oszillierenden Knotenverschiebung führen.

### Änderung der Systemenergie ohne Kontakt

Die Energiebilanz des Algorithmus' folgt durch Multiplikation der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung (4.19) mit dem Verschiebungsinkrement  $\Delta \mathbf{d}$ . Ohne das Wirken von äußeren Kräften entspricht die Veränderung der kinetischen Energie per Konstruktion exakt dem negativen Wert der Veränderung der internen Energie:

$$\underbrace{\Delta \mathbf{d}^\top \mathbf{M} \left[ \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) \right]}_{\Delta e_{\text{kin}}^h} + \Delta \mathbf{d}^\top \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1/2}, \mathbf{z}^{\text{algo}}) = 0. \quad (4.23)$$

#### 4.2.3 Nomenklatur

An dieser Stelle soll mit Tabelle 4.1 eine Übersicht zu den im Folgenden verwendeten Abkürzungen für Zeitintegrationsverfahren sowie deren Modifikationen gegeben werden. Die jeweiligen Bezeichnungen werden an entsprechender Stelle noch einmal ausführlicher erläutert.

## 4.3 Auswirkungen dynamischer Kontaktereignisse: Referenzbeispiel

Das folgende Beispiel soll die Auswirkungen von dynamischem Kontakt auf ein räumlich und zeitlich diskretisiertes System veranschaulichen. Darüber hinaus wird es als Referenzbeispiel benutzt, um für Kontaktprobleme die Wechselwirkung zwischen zeitlicher Diskretisierung und dynamischer Strukturantwort zu untersuchen. Modifikationen im Hinblick auf eine bessere Simulation von Kontaktproblemen werden anhand des Referenzbeispiels bewertet.

Bei der Bezeichnung von energetischen Ausdrücken wird im Weiteren auf den Index  $(\bullet)^h$  zur Kennzeichnung der Diskretisierungslösung verzichtet. Die interne Energie wird für



	Eigenschaften		Optionale Eigenschaften		
	dissipativ bzgl. $\mathbf{f}_c$	stabilisiert <sup>2</sup>	(a) Geschwindigkeit modifiziert	(b) Energie erhaltend	Eigenschaften (a) und (b)
Newmark	nein	nein	-	-	-
Newmark-KD	ja <sup>1</sup>	nein	N-KD- $v$	N-KD- $e^3$	N-KD- $ve^3$
Newmark-KS	ja <sup>1</sup>	ja	N-KS- $v$	N-KS- $e^3$	N-KS- $ve^3$
EMM	ja <sup>4</sup>	nein	-	EMM-VUM <sup>4</sup>	-

Abkürzungen:

- N: Newmark
- KD: Kontakt – dissipativ
- KS: Kontakt – stabilisiert
- EMM: „Energy-Momentum-Method“
- VUM: „Velocity-Update-Method“

Verweise:

- <sup>1</sup> KANE U. A. (1999)
- <sup>2</sup> DEUFLHARD U. A. (2008)
- <sup>3</sup> Energie-Korrekturkraft-Algorithmus, siehe Abschnitt 4.7
- <sup>4</sup> LAURSEN UND LOVE (2002)

**Tabelle 4.1:** Zeitintegrationsverfahren: Eigenschaften und Bezeichnungen.

das Newmark-Verfahren mit Gleichung (4.14) berechnet, für die „Energy-Momentum-Method“ gemäß Beziehung (4.23).

### 4.3.1 Numerischer Versuchsaufbau

In der untersuchten Problemstellung bewegt sich ein deformierbarer Stab mit einer gleichförmigen Anfangsgeschwindigkeit von  $v_0 = 3,0 \text{ m/s}$  auf ein ebenes starres Hindernis zu. Der Stab ist beschleunigungsfrei, die Geschwindigkeit bis zum Berühren des Hindernisses zeitlich konstant. Nach circa  $3 \cdot 10^{-4}$  Sekunden ist die ursprüngliche Lücke zwischen Stab und Hindernis geschlossen und der Kontaktvorgang beginnt. In Abbildung 4.2 sind Geometrie, Materialdaten und die Vernetzung mit zehn bilinearen Q1-Elementen dargestellt. Als Materialgesetz wird das St. Venant-Kirchhoff'sche Materialmodell benutzt. Die untersuchte Problemstellung wurde in dieser oder ähnlicher Form

beispielsweise auch in TAYLOR UND PAPADOPOULOS (1993), ARMERO UND PETŐCZ (1998) oder DOYEN (2010) zur Beurteilung von Diskretisierungsstrategien für dynamische Kontaktprobleme benutzt.

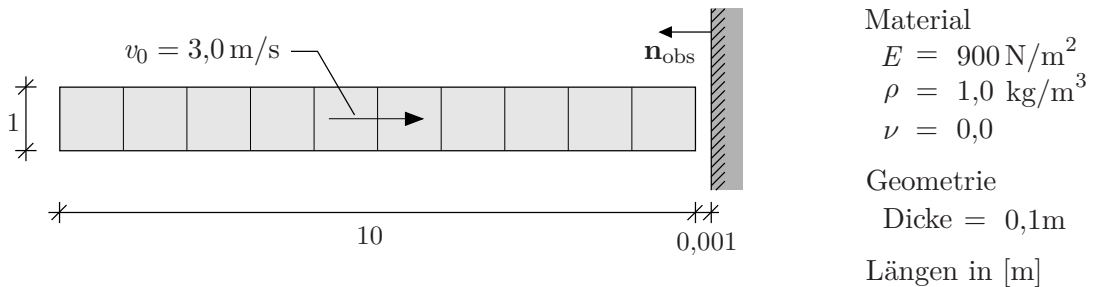


Abbildung 4.2: Referenzbeispiel: Problemstellung und Diskretisierung.

### 4.3.2 Referenzlösung

#### Analytische Lösung

Werden eine lineare Kinematik und ein linear elastisches Materialverhalten vorausgesetzt, ist es möglich, für das betrachtete Problem eine analytische Lösung zu ermitteln. Diese ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Die zugrundeliegenden Gleichungen sind beispielsweise in DOYEN (2010) angegeben. Im folgenden Kapitel wird die analytische Lösung allerdings nicht als Referenz verwendet. Stattdessen wird eine numerische Referenzlösung erstellt. Dies geschieht einerseits aufgrund der nichtlinearen Kinematik, die die untersuchten Algorithmen im Gegensatz zu der analytischen Lösung benutzen. Bei einer

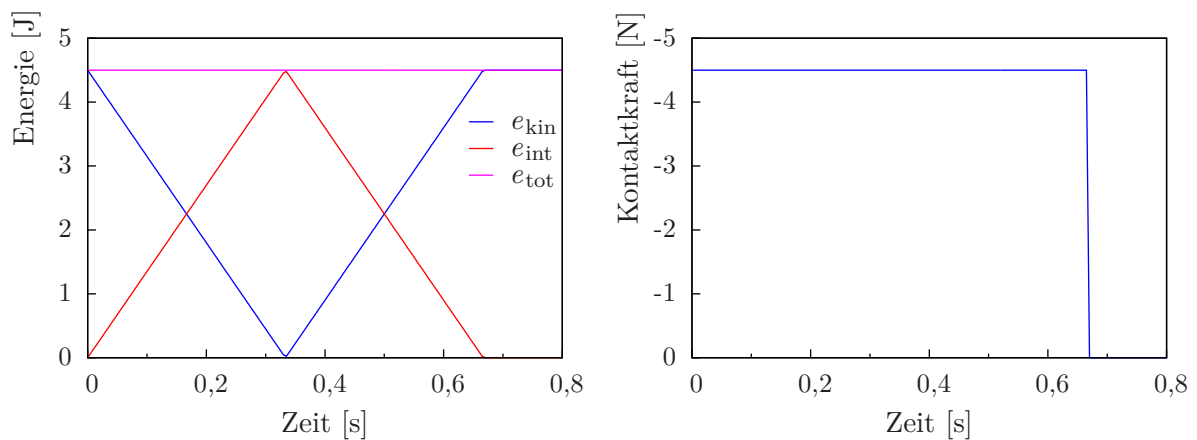
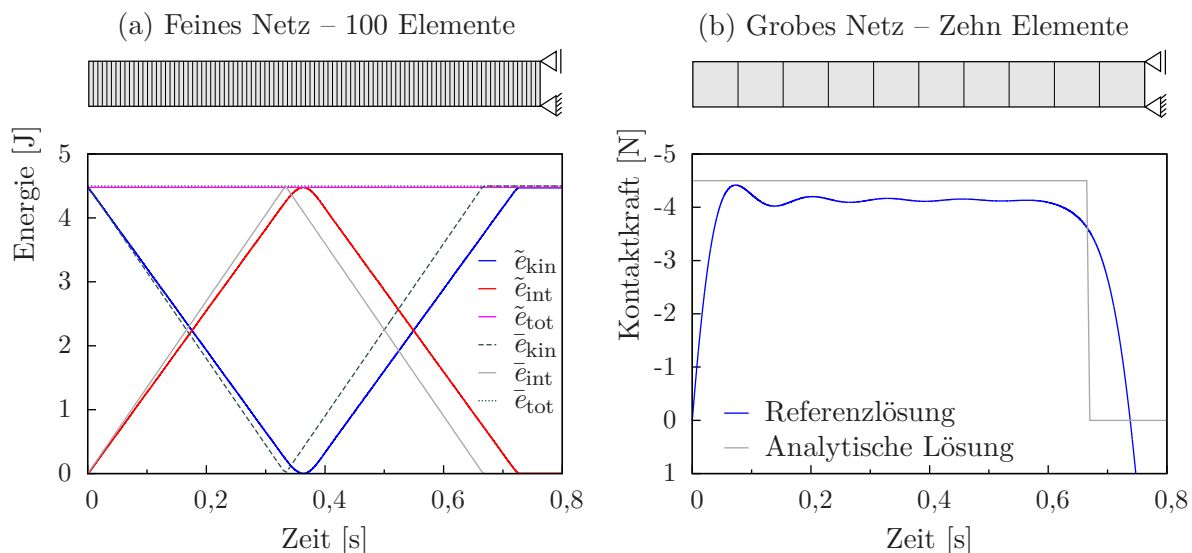


Abbildung 4.3: Analytische Lösung: Energie und Kontaktkraft.

maximalen Verkürzung des Stabs von 1,0 m entsteht dabei eine zu große Diskrepanz zwischen der analytischen und der zu erwartenden numerischen Lösung. Andererseits soll mit den Untersuchungen der Teil des Diskretisierungsfehlers isoliert werden, welcher aus der numerischen Kontaktbehandlung resultiert. Damit dieser Anteil nicht mit anderen Effekten aus der räumlichen oder der zeitlichen Diskretisierung vermischt wird, erscheint eine numerische Referenzlösung sinnvoller.

### Numerische Referenzlösung

Die numerische Referenzlösung simuliert den Zeitraum zwischen Initiieren und Lösen des Kontakts. Dazu werden die Kontaktknoten statisch bestimmt gelagert (siehe Abbildung 4.4). Alle weiteren Knoten erhalten die horizontale Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$ . Als zeitliche Diskretisierung wird das Newmark-Verfahren mit der Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  sowie einer Zeitschrittweite von  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$  s verwendet. Die Referenzlösung für die Kontaktkraft wird anhand der horizontalen Auflagerreaktionen des Systems bestimmt, siehe Abbildung 4.4(b). Als räumliche Diskretisierung werden zehn bilineare Q1-Elemente benutzt. Nach circa 0,74 Sekunden tritt in den Auflagern eine Zugkraft auf. Ab diesem Zeitpunkt wird als Referenz der Wert null festgesetzt. Die Referenzlösung des Energieverlaufs folgt aus einer Berechnung mit 100 bilinearen Q1-Elementen, siehe Abbildung 4.4(a). Die Lösung des groben Netzes ist hier nicht als Referenz geeignet, da die gelagerten FE-Knoten keine kinetische Energie besitzen. Demzufolge ist die Systemenergie des gelagerten Systems bei grober Vernetzung deutlich kleiner als die des Referenzbeispiels aus Abbildung 4.2. Da die Energiekurven der numerischen Referenz-



**Abbildung 4.4:** Numerische Referenzlösung (farbig) mit Diskretisierung, analytische Lösung (grau).

lösung bei grober bzw. feiner Vernetzung nur einen Unterschied in den Absolutwerten aufweisen<sup>2</sup>, sie jedoch nicht in Richtung der Zeitachse gegeneinander verschoben sind, ist die Verwendung des feinen Netzes konsistent. Ab dem Zeitpunkt, zu dem in den Auflagern eine Zugkraft auftritt, werden die Energiekurven „eingefroren“. Somit wird der jeweils zuletzt berechnete Wert als qualitative Referenz für die Zeitspanne nach dem Lösen des Kontakts verwendet.

In den Legenden der folgenden Abbildungen ist die numerische Referenzlösung stets mit einer Tilde gekennzeichnet. In Abbildung 4.4 ist neben der numerischen Referenzlösung vergleichend die analytische Lösung dargestellt (grau, in der Legende mit einem Überstrich markiert). Die zeitliche Verschiebung zwischen den Kurven resultiert, wie bereits angesprochen, aus den unterschiedlichen Kinematiken der analytischen und der numerischen Lösung.

### 4.3.3 Numerische Lösung ohne Modifikation der Kontaktanteile

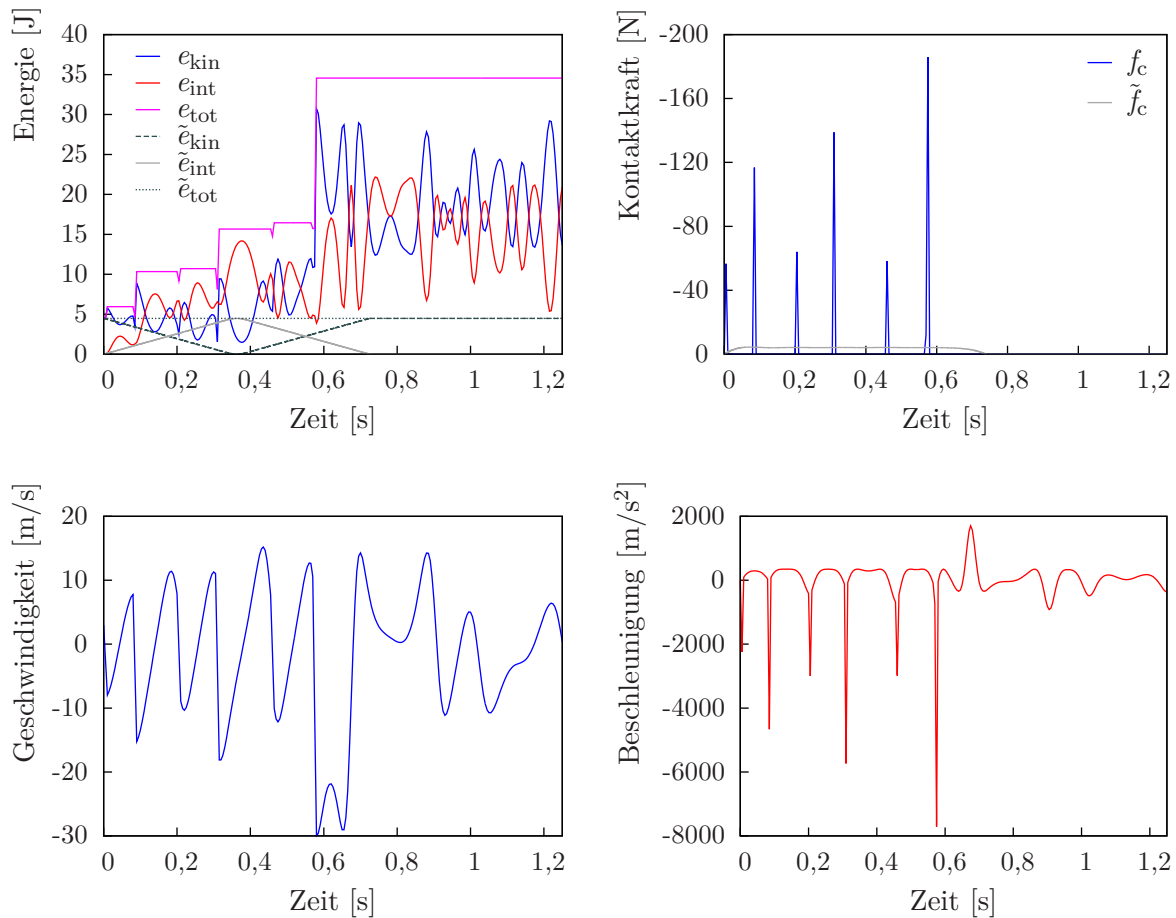
Im Folgenden wird das Referenzbeispiel mit dem Newmark-Algorithmus aus Abschnitt 4.2.1 und der „Energy-Momentum-Method“ aus Abschnitt 4.2.2 gelöst. Die zugrundeliegende Kontaktbehandlung ist in den Gleichungen (4.5) bis (4.7) für das Newmark-Verfahren bzw. in Gleichung (4.22) für die „Energy-Momentum-Method“ dargestellt. Alle Berechnungen werden mit einer konstanten Zeitschrittweite von  $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  durchgeführt. Die detaillierte Analyse der beobachteten Phänomene folgt in den nächsten Abschnitten. Zunächst wird die Systemantwort nur qualitativ beschrieben. In den Abbildungen der Systemenergie und der Kontaktkraft sind die jeweiligen numerischen Referenzlösungen mit grauen Linien gekennzeichnet. Geschwindigkeit und Beschleunigung der gelagerten FE-Knoten sind in der numerischen Referenzlösung identisch null, was auch von den Kontaktberechnungen gefordert werden kann. Die Diskontinuität in der Geschwindigkeit bzw. die Singularität in der Beschleunigung bei Initiieren und Lösen und des Kontakts kann mit der numerischen Lösung allerdings nur approximativ abgebildet werden. Das Auftreten von Oszillationen zu den entsprechenden Zeitpunkten muss in begrenztem Umfang akzeptiert werden.

#### Lösung mit dem Newmark-Algorithmus

In Abbildung 4.5 sind Energie, Kontaktkraft sowie Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kontaktknoten für die Lösung mit dem Newmark-Verfahren dargestellt. Wie der Energieverlauf zeigt, wird der Integrator aufgrund der Kontaktereignisse energetisch instabil. Einer relativ geringen Abnahme der Systemenergie in einigen Zeitschritten steht

---

<sup>2</sup>Die Kurve der groben Vernetzung ist nicht dargestellt.



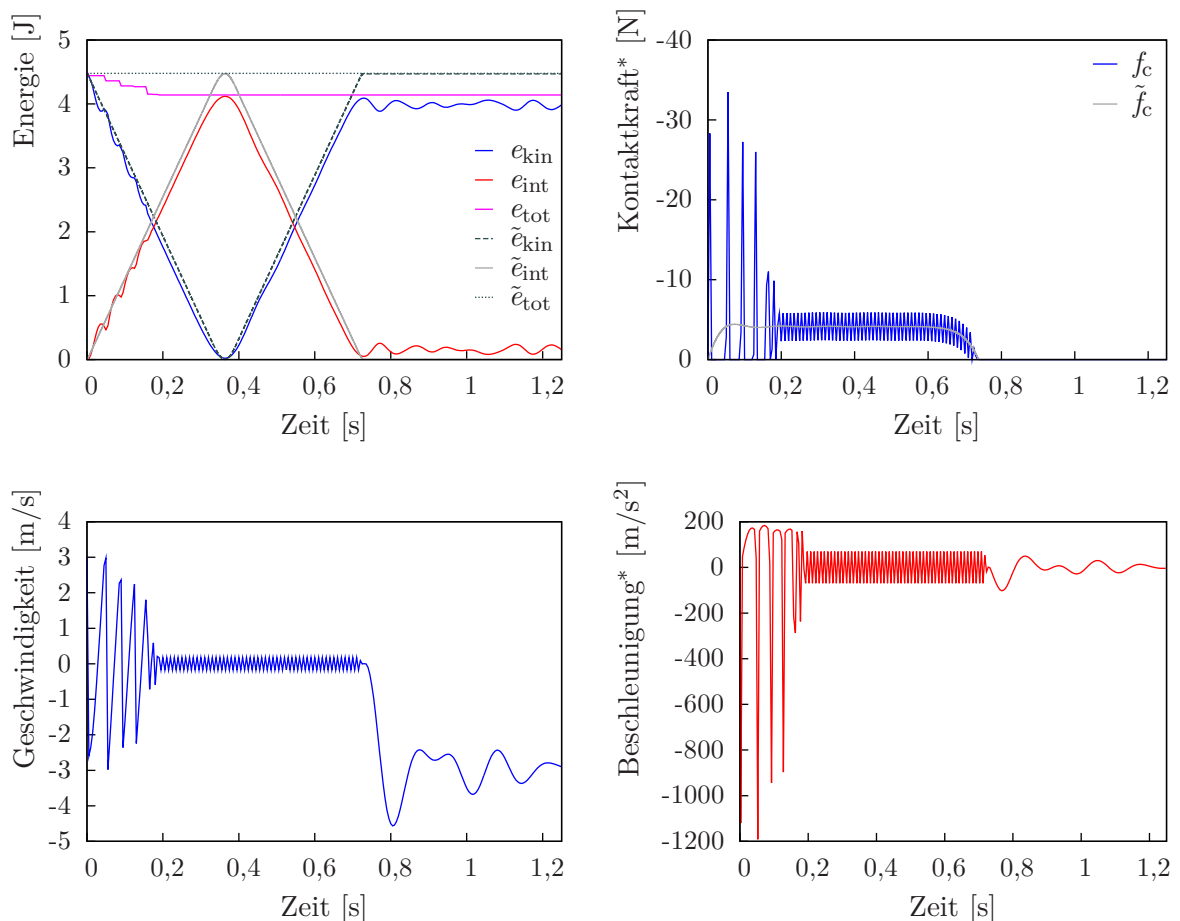
**Abbildung 4.5:** Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-Verfahren.

eine deutliche Zunahme in folgenden Zeitschritten gegenüber. Der Kontaktkraftverlauf zeigt ein oszillierendes Verhalten zwischen Zuständen mit bestehendem und Zuständen mit gelöstem Kontakt. In den wenigen Zeitschritten mit bestehendem Kontakt ist der Absolutwert der Kontaktkraft unphysikalisch hoch. Wie ein Vergleich zwischen Kontaktkraftverlauf und Energieverlauf zeigt, steht ein Initiieren bzw. Lösen von Kontakt offenbar in direktem Zusammenhang mit einer Veränderung der Systemenergie. Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zeigen ein oszillierendes Verhalten. Dieses spiegelt die Bewegung der Kontaktknoten wider, welche aufgrund der Oszillationen zwischen bestehendem und gelöstem Kontakt resultiert. Ein Vergleich der Verläufe von Beschleunigung und Kontaktkraft zeigt, dass offensichtlich auch eine direkte Verbindung zwischen den Ausschlägen der Kontaktkraft und den Ausschlägen der Beschleunigung besteht.

Da aufgrund der stark oszillierenden Systemantwort eine Lösung mit dem St. Venant-Kirchhoff'schen Materialgesetz zu sich selbst durchdringenden Elementen führte, ist in Abbildung 4.5 die Lösung mit dem Neo-Hooke'schen Materialmodell dargestellt.

## Lösung mit der „Energy-Momentum-Method“

Abbildung 4.6 zeigt die Verläufe von Energie, Kontaktkraft und Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kontaktknoten für eine Berechnung mit der „Energy-Momentum-Method“. Für die Verläufe von Kontaktkraft und Beschleunigung sind die Werte der Zeitintervallmitten  $t_{n+1/2}$  aufgetragen, da die semidiskrete Bewegungsgleichung jeweils für den Zeitpunkt  $t_{n+1/2}$  ausgewertet wird. Der Energieverlauf zeigt, dass die Systemenergie in einigen Schritten ab-, aber in keinem Schritt zunimmt. Somit scheint die in Abschnitt 4.2.2 dargestellte Behandlung der Kontaktkräfte bereits dissipativ zu sein. Die Oszillationen in der Kontaktkraft sind geringer als bei der Lösung mit dem Newmark-Verfahren. Nach circa 0,2 Sekunden treten keine Oszillationen mehr zwischen bestehenden und gelösten Kontaktzuständen auf. Ein Vergleich von Energie- und Kontaktkraftverlauf zeigt, dass wie bei der Newmark-Methode eine zeitliche Korrelation zwischen der Verkleinerung der Systemenergie und den Ausschlägen der Kontaktkraft besteht.



\*Werte der Zeitpunkte  $t_{n+1/2}$  dargestellt

**Abbildung 4.6:** Referenzbeispiel: Lösung mit der „Energy-Momentum-Method“.

Auch die Verläufe von Kontaktkraft und Beschleunigung zeigen wieder ein stark zusammenhängendes Verhalten. Der Geschwindigkeitsverlauf zeigt für bestehenden Kontakt Oszillationen um die exakte Nulllösung.

## 4.4 Energetische Stabilität bei Kontaktereignissen

Wie die Auswertung des Referenzbeispiels in Abschnitt 4.3 gezeigt hat, kann sich in einer numerischen Simulation aufgrund von Kontaktereignissen die Systemenergie vergrößern. Dadurch wird der zugrundeliegende Integrator energetisch instabil. Bei der Auswertung mit der „Energy-Momentum-Method“ resultierte allerdings keine Vergrößerung der Systemenergie. Der folgende Abschnitt untersucht, warum das Newmark-Verfahren durch Kontaktereignisse energetisch instabil wird, die „Energy-Momentum-Method“ jedoch nicht. Darüber hinaus wird eine Modifikation vorgestellt, welche auch mit dem Newmark-Verfahren eine energetisch stabile Behandlung von Kontaktvorgängen ermöglicht.

### 4.4.1 Energetische Stabilität des Newmark-Algorithmus'

Ohne die Berücksichtigung von Kontaktereignissen ist der Newmark-Algorithmus für lineare Probleme mit der Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  unbedingt stabil und energieerhaltend, siehe Gleichung (4.9). Werden nichtlineare Kontaktprobleme betrachtet, liefert eine Auswertung der Energiebilanz mit derselben Parameterwahl (siehe Anhang A.3.1) die folgende Beziehung für die Veränderung der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned} \Delta e_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)^\top \left[ - (\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_c^n - \mathbf{f}_{\text{ext}}^n) - (\mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} + \mathbf{f}_c^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1}) \right] \\ &= - \frac{1}{2} \underbrace{\Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1})}_{\Delta e_{\text{int}}} - \frac{1}{2} \underbrace{\Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_c^n + \mathbf{f}_c^{n+1})}_{\Delta e_c} + \frac{1}{2} \underbrace{\Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{ext}}^n + \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1})}_{\Delta e_{\text{ext}}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Wie schon in Abschnitt 4.2.1 angemerkt, bestimmt dabei der Ausdruck  $\Delta e_{\text{int}} = \Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1})$  die Veränderung der internen Energie nur näherungsweise. Die entsprechende approximative Veränderung der Systemenergie resultiert durch Umformen von Gleichung (4.24):

$$\Delta e_{\text{kin}} + \Delta e_{\text{int}} = \Delta e_{\text{ext}} - \Delta e_c. \quad (4.25)$$

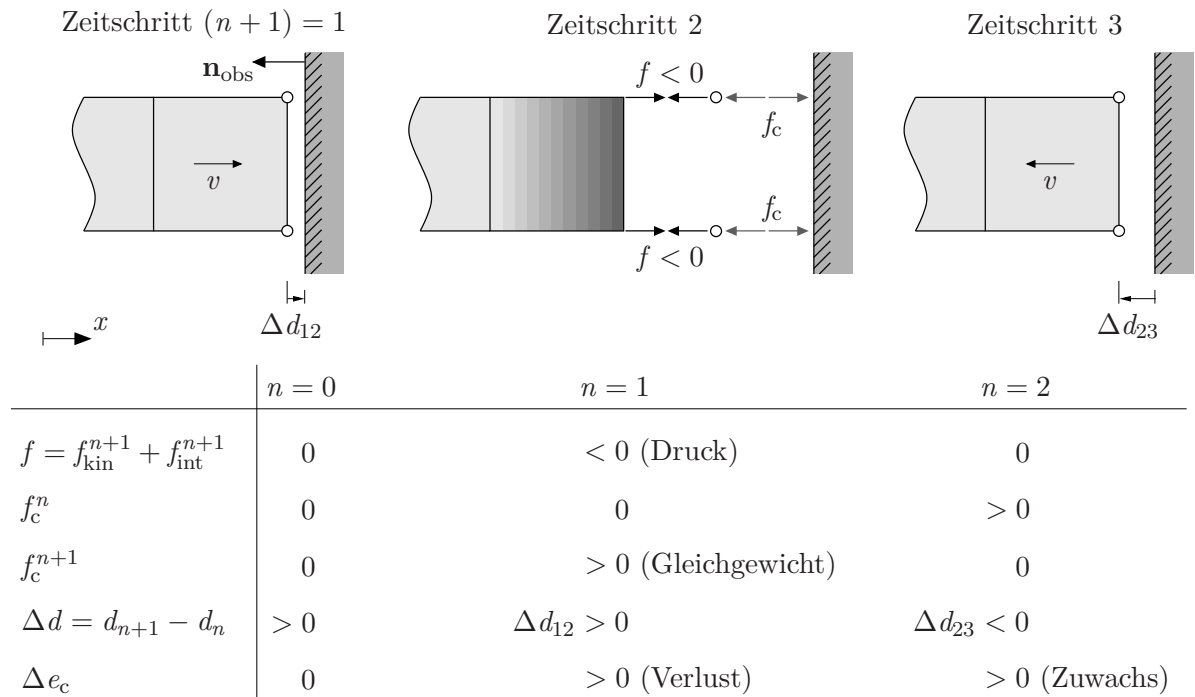
Im Folgenden wird der Ausdruck  $\Delta e_{\text{kin}} + \Delta e_{\text{int}}$  vereinfachend als Veränderung der Systemenergie bezeichnet. Ist der approximative Charakter des Ausdrucks  $\Delta e_{\text{int}}$  von Bedeutung, wird gesondert darauf hingewiesen. Für den Kontaktterm kann mit Gleichung (4.25) folgende Aussage getroffen werden:

- $\Delta e_c < 0$ : Der Kontaktterm vergrößert die Systemenergie.
- $\Delta e_c = 0$ : Der Kontaktterm verändert die Systemenergie nicht. (4.26)
- $\Delta e_c > 0$ : Der Kontaktterm verkleinert die Systemenergie.

Im Weiteren wird untersucht, in welchen Situationen der Kontaktterm  $\Delta e_c$  welches Vorzeichen annimmt. Im Hinblick auf eine energetisch stabile Simulation von Kontaktvorgängen ist es insbesondere wichtig, wann und warum Fälle mit  $\Delta e_c < 0$  auftreten.

### Untersuchung des Kontaktterms

Anhand des Referenzbeispiels aus Abschnitt 4.3 wird das Vorzeichen des Ausdrucks  $\Delta e_c$  exemplarisch untersucht. Die entsprechende Situation ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Betrachtet werden drei fiktive Zeitschritte. Im ersten Schritt ( $n = 0 \Rightarrow n + 1 = 1$ ) bewegt sich der elastische Stab undeformiert und spannungsfrei auf das starre Hindernis zu. Im Verlauf von Schritt 2 berührt der Stab das starre Hindernis, so dass am Ende



**Abbildung 4.7:** Veränderung der Systemenergie durch Kontakt Ereignisse.



des Schritts bereits eine Kontaktkraft wirkt und der Stab deformiert ist. Auf das erste Element wirkt dabei eine Druckkraft  $f < 0$ . Gemäß der Vorzeichenkonvention der Bewegungsgleichung folgt daraus  $f_c^{n+1} > 0$ , die Kontaktkraft besitzt ein positives Vorzeichen. Aufgrund der Orientierung der globalen  $x$ -Achse besitzt das Verschiebungsinkrement, welches die Lücke zwischen Stab und Hindernis geschlossen hat, ebenfalls ein positives Vorzeichen:  $\Delta d_{12} > 0$ . Mit Gleichung (4.24) folgt dann auch für den Kontaktterm  $\Delta e_c$  ein positives Vorzeichen, da am Ende von Schritt 1 noch keine Kontaktkraft vorhanden war ( $f_c^n = 0$ ). Der Kontaktterm verkleinert damit bei der Initiierung des Kontakts die Systemenergie. Am Ende von Schritt 3 ist der Kontakt bereits wieder gelöst. Der Abstand zwischen Stab und Hindernis wächst an. Demzufolge ist das aktuelle Verschiebungsinkrement negativ:  $\Delta d_{23} < 0$ . Die aktuelle Kontaktkraft ist identisch null, die Kontaktkraft des vorherigen Zeitschritts (Schritt 2) aber größer null. Somit resultiert für das aktuelle  $\Delta e_c$  ein negatives Vorzeichen. Die Systemenergie wird durch das Lösen des Kontakts vergrößert. Für den hier nicht betrachteten Fall des bestehenden Kontakts über zwei Zeitschritte verschwindet das Verschiebungsinkrement, so dass der Kontakt die Systemenergie nicht verändert. In kompakter Form kann das Ergebnis der Betrachtung noch einmal wie folgt zusammengefasst werden:

$$\begin{aligned}
 \text{Kontakt wird initiiert: } f_c^n = 0, f_c^{n+1} \neq 0 &\Rightarrow \Delta e_c = \frac{1}{2} \Delta d f_c^{n+1} \geq 0 \\
 \text{Kontakt wird gelöst: } f_c^n \neq 0, f_c^{n+1} = 0 &\Rightarrow \Delta e_c = \frac{1}{2} \Delta d f_c^n \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

Für Mehrkörperkontaktprobleme gelten prinzipiell die gleichen Zusammenhänge wie die in Abbildung 4.7 oder Gleichung (4.27) dargestellten. So könnte das starre Hindernis aus Abbildung 4.7 beispielsweise auch als zweiter deformierbarer Körper betrachtet werden. Das Vorzeichen der Kontaktkraft würde sich in diesem Fall nicht ändern, da in den kontaktierenden finiten Elementen immer noch eine Druckspannung herrscht. Auch für das Vorzeichen des Verschiebungsinkrements bei Initiieren oder Lösen von Kontakt gelten die gleichen Bedingungen. Da das Verschiebungsinkrement aber als Funktion von zwei oder mehreren FE-Knoten formuliert werden müsste<sup>3</sup>, ist eine einfache Darstellung wie in Abbildung 4.7 nicht mehr möglich.

Unter großen Deformationen ist das dissipative Verhalten bei der Initiierung von Kontakt gewissen Beschränkungen unterworfen. Aus den Betrachtungen in Abbildung 4.7 ist ersichtlich, dass die Gültigkeit der Vorzeichendefinition in Gleichung (4.27)<sub>1</sub> von der Relation der Richtungen des Verschiebungsinkrements und der Kontaktkraft abhängt. Die Richtung der Kontaktkraft ist wiederum über die Normale einer der kontaktierenden Oberflächen definiert (in Abbildung 4.7 über die Hindernis-Normale). Tritt eine Situation auf, in welcher sich die kontaktierenden Körper und damit die Oberflächen-

---

<sup>3</sup>Eine entsprechende Zerlegung des globalen Ausdrucks  $\Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_c^{n+1}$  ist in Gleichung (4.94) dargestellt.

Normalen während eines Zeitschritts um sehr große Winkel verdrehen, ist auch ein  $\Delta e_c < 0$  möglich. Alternativ formuliert bewegen sich in solch einem Fall die kontaktierenden Körper aus Sicht der Oberflächen-Normalen aufgrund der großen Rotation nicht aufeinander zu sondern voneinander weg. Für die Formulierung in LAURSEN UND LOVE (2002)<sup>4</sup> ist die Beziehung  $\Delta e_c \geq 0$  beispielsweise auf eine Rotation von maximal  $90^\circ$  während eines Zeitschritts begrenzt. Allerdings ist ein Zeitschritt, welcher Rotationen dieser Größenordnung zulässt, in der Regel ohnehin zu groß, um das Kontaktverhalten der betrachteten Körper sinnvoll zu erfassen.

Damit auch für Probleme mit großen Rotationen während bestehendem Kontakt  $\Delta e_c = 0$  gilt, muss die räumliche Kontaktdiskretisierung die Drehimpulsbilanz erfüllen. Dies ist beispielsweise bei einer mortarbasierten Kontaktdiskretisierung der Fall, welche die Nichtdurchdringungsbedingung exakt erfüllt. Im Allgemeinen ist die Erfüllung der Drehimpulsbilanz für jede räumliche Kontaktdiskretisierung gesondert zu prüfen.

Wird der Kontakt gelöst, resultiert auch für Einkörperkontaktprobleme mit kleinen Deformationen im Allgemeinen eine Vergrößerung der Systemenergie, siehe Gleichung (4.27)<sub>2</sub>. Für Ein- oder Mehrkörperkontakt mit großen Deformationen kann kein besseres Verhalten erwartet werden.

#### 4.4.2 Dissipative Modifikation des Newmark-Algorithmus'

Wie die Untersuchung in Abbildung 4.7 für den Einkörperkontaktfall exemplarisch gezeigt hat, steht der Energiegewinn bei Lösen von Kontaktzuständen in direktem Zusammenhang mit der Abhängigkeit der Energiebilanz von der Kontaktkraft des letzten Zeitschritts. Diese entsteht aufgrund der Abhängigkeit der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung (4.3) von der Beschleunigung  $\mathbf{a}_n$  des letzten Zeitschritts. Eine Auswertung der semidiskreten Bewegungsgleichung (3.28)<sub>1</sub> zum Zeitpunkt  $t_n$  wiederum verdeutlicht die Abhängigkeit der Beschleunigung  $\mathbf{a}_n$  von der Kontaktkraft  $\mathbf{f}_c^n$ :

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{\text{ext}}^n - \mathbf{f}_{\text{int}}^n - \mathbf{f}_c^n). \quad (4.28)$$

KANE U. A. (1999) schlagen eine additive Aufteilung der Beschleunigung vor, um das energetisch instabile Verhalten zu korrigieren:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{\text{int}} + \mathbf{a}^c \quad (4.29)$$

---

<sup>4</sup>Diese Formulierung basiert auf der „Energy-Momentum-Method“. Der angesprochene Effekt ist jedoch äquivalent.

Der Anteil  $\mathbf{a}^{\text{int}}$  ergibt sich aus der Differenz von externen und internen Kräften. Die Beschleunigung  $\mathbf{a}^{\text{c}}$  berechnet sich aus den Kontaktkräften:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}^{\text{int}} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}) \\ \mathbf{a}^{\text{c}} &= \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{f}_{\text{c}}).\end{aligned}\quad (4.30)$$

In den Newmark-Ansätzen (4.1) werden die Kontaktanteile der Beschleunigung durch die Parameterwahl  $\beta = 1/2$  und  $\gamma = 1,0$  vollständig implizit behandelt. Für den Beschleunigungsanteil  $\mathbf{a}^{\text{int}}$  bleiben  $\beta$  und  $\gamma$  allgemein:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left[ (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n^{\text{int}} + 2\beta \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} \right] + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}^{\text{c}} \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \Delta t \left[ (1 - \gamma) \mathbf{a}_n^{\text{int}} + \gamma \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} \right] + \Delta t \mathbf{a}_{n+1}^{\text{c}}.\end{aligned}\quad (4.31)$$

Mit Gleichung (4.30)<sub>1</sub>, ausgewertet für den Zeitpunkt  $t_{n+1}$ , und Beziehung (4.31)<sub>1</sub>, aufgelöst nach  $\mathbf{a}_{n+1}^{\text{c}}$ , resultiert dann die folgende Bestimmungsgleichung für die unbekanntenen Beschleunigungskomponenten:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}) \\ \mathbf{a}_{n+1}^{\text{c}} &= \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) - \left[ (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n^{\text{int}} + 2\beta \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} \right] \\ &= \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) - (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n^{\text{int}} - 2\beta \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}).\end{aligned}\quad (4.32)$$

Schließlich wird die semidiskrete Bewegungsgleichung (3.28)<sub>1</sub> zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  ausgewertet und die unbekanntene Beschleunigung gemäß Gleichung (4.29) aufgeteilt. Anschließendes Einsetzen der Ergebnisse aus Gleichung (4.32) liefert die nichtlineare effektive Strukturgleichung der modifizierten Newmark-Methode (*Newmark-KD*):

$$\mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) - \frac{1}{2\beta} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n^{\text{int}} \right] + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1} + \frac{1}{2\beta} \mathbf{f}_{\text{c}}^{n+1} = \mathbf{0}.\quad (4.33)$$

Für die Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  lautet die resultierende Energiebilanz (siehe Anhang A.3.2) letztlich

$$\Delta e_{\text{kin}} = - \underbrace{\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^{\text{T}} (\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1})}_{\Delta e_{\text{int}}} - \underbrace{\Delta \mathbf{d}^{\text{T}} \mathbf{f}_{\text{c}}^{n+1}}_{\Delta e_{\text{c}}^{(i)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^{\text{T}} (\mathbf{f}_{\text{ext}}^n + \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1})}_{\Delta e_{\text{ext}}}.\quad (4.34)$$

Somit entsteht für das Lösen von Kontakt keine Vergrößerung der Systemenergie mehr:

$$\Delta e_{\text{kin}} + \Delta e_{\text{int}} = \Delta e_{\text{ext}} - \underbrace{\Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_c^{n+1}}_{\Delta e_c^{(i)} \geq 0}. \quad (4.35)$$

Aus diesem Grund wird das Verfahren hier mit dem Kürzel „KD“, welches auf eine dissipative Behandlung des Kontakts hinweist, abgekürzt (vgl. Tabelle 4.1).

### Lösung des Referenzbeispiels mit Newmark-KD

In Abbildung 4.8 sind die Verläufe von Energie und Kontaktkraft für die Lösung des Referenzbeispiels aus Abschnitt 4.3 mit dem Newmark-KD-Algorithmus dargestellt. Im Gegensatz zu der Berechnung mit dem unmodifizierten Newmark-Verfahren (siehe Abbildung 4.5) zeigt die Newmark-KD-Berechnung ein energetisch stabiles Verhalten. Die Systemenergie verkleinert sich jeweils bei der Initiierung von Kontakt, vergrößert sich allerdings nicht wenn der Kontakt wieder gelöst wird. Ähnlich der Berechnung mit der „Energy-Momentum-Methode“ (siehe Abbildung 4.6) sind die Oszillationen des Kontaktkraftverlaufs gedämpft, jedoch immer noch deutlich vorhanden. Geschwindigkeit und Beschleunigung sind ebenfalls äquivalent zu den Verläufen in Abbildung 4.6 und aus diesem Grund nicht dargestellt.

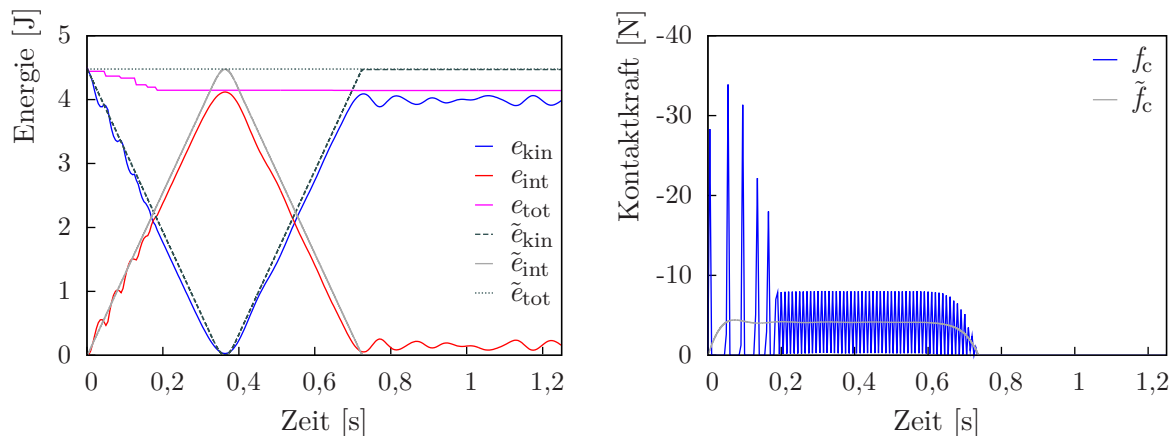


Abbildung 4.8: Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KD-Verfahren.

#### 4.4.3 Energetische Stabilität der „Energy-Momentum-Methode“

Die Energiebilanz der „Energy-Momentum-Methode“ für nichtlineare Systeme mit Kontaktbedingungen resultiert aus der zugehörigen Strukturgleichung (4.19) durch Multi-

plikation mit dem Verschiebungsinkrement  $\Delta \mathbf{d}$ :

$$\Delta e_{\text{kin}} = -\Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1/2}) - \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{c}}(\mathbf{d}_{n+1/2}, \mathbf{z}^{\text{algo}}) + \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1/2}. \quad (4.36)$$

Wie in der Energiebilanz (4.34) des Newmark-KD-Algorithmus sind auch in der Energiebilanz (4.36) keine Kontaktkräfte eines zurückliegenden Zeitschritts enthalten. Dies ist bereits an der effektiven Strukturgleichung (4.19) zu erkennen, da keine Beschleunigungen von zurückliegenden Zeitschritten enthalten sind. Wird der Kontakt gelöst, ist die Kontaktkraft der Mittelpunktconfiguration identisch null, da die Kontaktbedingungen für den Zeitpunkt  $t_{n+1}$  überprüft werden. Damit ist die „Energy-Momentum-Method“ mit der in Abschnitt 4.2.2 dargestellten Kontaktbehandlung energetisch stabil. Abbildung 4.6 zeigt dies exemplarisch durch die Ergebnisse des Referenzbeispiels. Für detaillierte Untersuchungen sei auf LAURSEN UND LOVE (2002) verwiesen.

## 4.5 Zeitliche Oszillationen der Kontaktkräfte

Im folgenden Abschnitt werden die Ursachen der zeitlichen Oszillationen der Kontaktkräfte untersucht und mögliche Lösungen identifiziert. Der Schwerpunkt liegt dabei auf einer Idee von DEUFLHARD U. A. (2008). Diese wird erweitert, um sie auf Probleme mit großen Deformationen anwenden zu können.

### 4.5.1 Untersuchung des Phänomens

Zur prinzipiellen Untersuchung des Phänomens werden drei exemplarische Zeitschritte des Referenzbeispiels aus Abschnitt 4.3 betrachtet, siehe Abbildung 4.9. Im Gegensatz zu der Untersuchung in Abbildung 4.7 sind die Zeitschritte allgemein durch die Indizes ihrer Endzeitpunkte  $t_{n-1}$ ,  $t_n$  und  $t_{n+1}$  bezeichnet. Für  $n$  wird dabei kein konkreter Wert gesetzt, da die allgemeine Darstellung in diesem Fall übersichtlicher ist.

#### Auswertung der problembeschreibenden Gleichungen

Die Untersuchung beginnt mit Zeitschritt  $n - 1$ . Zu dessen Endzeitpunkt  $t_{n-1}$  bewegt sich der deformierbare Stab unbeschleunigt und mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf das starre Hindernis zu. Zwischen Stab und Hindernis befindet sich zu diesem Zeitpunkt noch eine Lücke. Am Ende des zweiten Zeitschritts  $n$  ist diese Lücke perfekt geschlossen. Der Stab berührt das Hindernis spannungsfrei und undeformiert. Eine Kontaktkraft ist noch nicht vorhanden:  $f_{\text{c}}^n = 0$ . Während des folgenden Zeitschritts  $n + 1$  beginnt sich

die Kontaktkraft aufzubauen. Der Stab wird deformiert. Die aktive Kontaktbedingung erlaubt im Vergleich zum letzten Zeitschritt  $n$  keine Veränderung der Verschiebung:

$$g_n^{n+1} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow d_{n+1} = d_n. \quad (4.37)$$

Durch Einsetzen dieser Bedingung in die Newmark-Approximation (4.1)<sub>1</sub> resultiert dann mit der Parameterwahl  $\beta = 1/4$  sowie unter Beachtung von  $a_n = 0$  die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + \Delta t v_n + \frac{1}{4} \Delta t^2 (a_n + a_{n+1}) \\ \Leftrightarrow d_{n+1} - d_n &= \underbrace{\Delta t v_n}_{\neq 0} + \underbrace{\frac{1}{4} \Delta t^2 a_{n+1}}_{\neq 0} = 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Auflösen von Gleichung (4.38)<sub>2</sub> liefert die unbekannte Beschleunigung als Funktion der Geschwindigkeit des letzten Zeitschritts und als Funktion des Zeitschritts selbst:

$$a_{n+1} = -\frac{4v_n}{\Delta t}. \quad (4.39)$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in die Newmark-Approximation (4.1)<sub>2</sub> führt auf den folgenden Ausdruck für die aktuelle Geschwindigkeit:

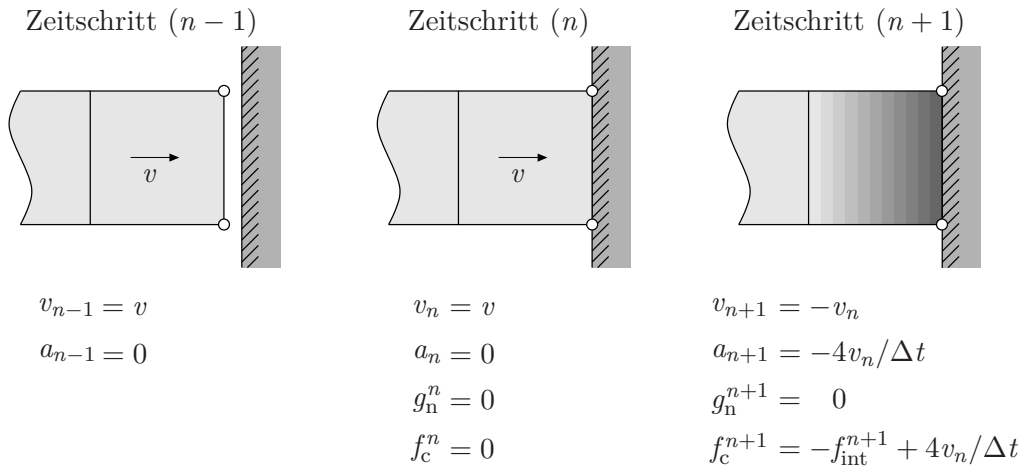
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{2} \Delta t (a_n + a_{n+1}) \\ &= v_n - 2v_n = -v_n. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Schließlich resultiert die aktuelle Kontaktkraft aus einer Auswertung der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung (4.3):

$$\begin{aligned} M a_{n+1} + f_{\text{int}}^{n+1} + f_c^{n+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow f_c^{n+1} &= -f_{\text{int}}^{n+1} + \frac{4Mv_n}{\Delta t}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

## Diskussion der Effekte

Damit gleichzeitig die Newmark-Approximation und die Kontaktbedingung erfüllt werden können, muss die Beschleunigung  $a_{n+1}$  in Gleichung (4.38)<sub>2</sub> den Geschwindigkeits-term in Abhängigkeit von  $v_n$  ausgleichen. Als Resultat strebt die Beschleunigung gegen unendlich, wenn der Zeitschritt gegen null geht.



**Abbildung 4.9:** Entwicklung der Kontaktkraft.

Dieses Verhalten approximiert einerseits die realen Vorgänge in der Kontaktfläche. Aufgrund der Diskontinuität in der Geschwindigkeit entsteht dort eine Singularität in der Beschleunigung. Andererseits besitzt die reale Kontaktfläche aber die Dicke null und folglich keine Masse. Dem Kontaktknoten ist jedoch eine diskrete Knotenmasse zugeordnet, so dass aus der singulären Beschleunigung eine unphysikalische singuläre Trägheitskraft resultiert. Dadurch wiederum entsteht eine unphysikalisch singuläre Kontaktkraft, siehe Gleichung (4.41).

Gleichung (4.40) zeigt, dass die Geschwindigkeit von Zeitschritt  $n$  auf Zeitschritt  $n+1$  bei gleichem Betrag ihr Vorzeichen wechselt. Wird jetzt noch ein folgender Zeitschritt  $n+2$  mit zunächst als aktiv angenommenen Kontakt betrachtet, resultiert mit Gleichung (4.3) sowie Gleichung (4.2) die folgende Kontaktkraft:

$$f_c^{n+2} = -f_{\text{int}}^{n+2} - M a_{n+2} = \underbrace{-f_{\text{int}}^{n+2}}_{>0} - \frac{8Mv_n}{\Delta t}. \quad (4.42)$$

Für  $\Delta t \rightarrow 0$  strebt der Trägheitsterm gegen unendlich. Die Kontaktkraft  $f_c^{n+2}$  wäre somit eine Zugkraft. Folglich muss der Kontakt wieder gelöst werden. Da sich die restlichen Knoten des Stabs aber immer noch auf das starre Hindernis zubewegen, entsteht in einem der folgenden Zeitschritte erneut Kontakt und das oszillierende Verhalten wiederholt sich.

### Möglichkeiten zur Abhilfe

Im Folgenden werden Verfahren, die zeitliche Oszillationen in den Kontaktkräften vermeiden, als *Stabilisierung* des zugrundeliegenden Integrators bezeichnet. Anhand der

vorausgegangenen Betrachtungen lassen sich hierzu drei prinzipielle Möglichkeiten identifizieren:

- Durch eine geeignete Modifikation des Newmark-Integrators kann eine oszillierende Beschleunigung bzw. ein singulärer Beschleunigungswert direkt vermieden werden, siehe Gleichung (4.38).
- Aus der der singulären Beschleunigung resultiert keine singuläre Trägheitskraft, wenn die Masse von den Kontaktknoten entfernt wird, siehe Gleichung (4.41).
- Wird die Geschwindigkeit  $v_{n+1}$  in einer Nachlaufrechnung entsprechend den Kontaktbedingungen modifiziert, ergibt sich durch Gleichung (4.41) nur ein einzelner singulärer Kontaktkraftwert. Die folgenden Werte sind nichtsingulär, da der Trägheitsterm in Gleichung (4.42) direkt beeinflusst werden kann.

#### 4.5.2 A posteriori Modifikation der Geschwindigkeiten

Zuerst soll die stabilisierende Wirkung einer Geschwindigkeitsmodifikation auf den zeitlichen Kontaktkraft-Verlauf untersucht werden. Für die betrachteten Probleme hängt die effektive Strukturgleichung nicht von der aktuellen Geschwindigkeit ab. Aus diesem Grund kann die Geschwindigkeitsmodifikation einfach in einer Nachlaufrechnung außerhalb der Gleichgewichtssiteration durchgeführt werden. Die entsprechenden Formeln finden sich beispielsweise in DOYEN (2010) und sind im Folgenden für das Referenzbeispiel angegeben. Da die Modifikation in Kombination mit dem Newmark-KD-Algorithmus aus Abschnitt 4.4.2 dargestellt ist, wird der resultierende Algorithmus hier als *Newmark-KD-v* bezeichnet.

##### Formulierung für das Referenzbeispiel (1D)

Für das Referenzbeispiel kann eine modifizierte Geschwindigkeit, die den Kontaktbedingungen genügt, durch die einfache Vorschrift

$$v_{n+1}^{\text{mod}} = 0 \tag{4.43}$$

angegeben werden. Durch die Geschwindigkeitsmodifikation wird die kinetische Energie des Systems um den Betrag

$$\Delta e_c^{(\text{ii})} = \frac{1}{2} M_{II} v_{n+1}^2 - \underbrace{\frac{1}{2} M_{II} (v_{n+1}^{\text{mod}})^2}_0 \tag{4.44}$$



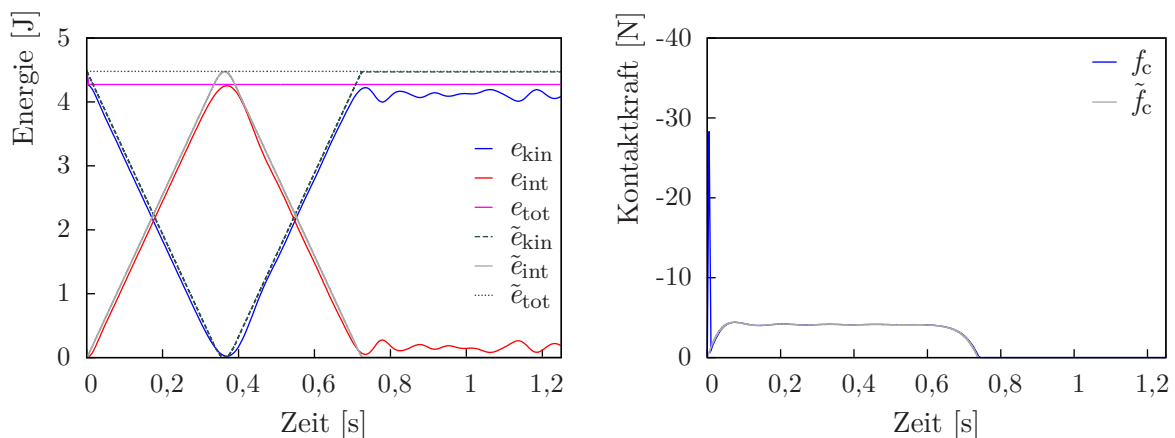
verkleinert.  $v_{n+1}$  stellt hierbei die unmodifizierte Geschwindigkeit dar, die aus der klassischen Newmark-Approximation (4.40) resultiert. Da die modifizierte Geschwindigkeit identisch null ist, geht in Gleichung (4.44) die komplette kinetische Energie der Slave-Kontaktknoten verloren. Die Systemenergie verändert sich dann gemäß der folgenden Beziehung:

$$\Delta e_{\text{kin}} + \Delta e_{\text{int}} = \Delta e_{\text{ext}} - \underbrace{\Delta d f_c^{n+1}}_{\Delta e_c^{(i)}} - \underbrace{\frac{1}{2} M_{II} v_{n+1}^2}_{\Delta e_c^{(ii)}}. \quad (4.45)$$

Anders als der Anteil  $\Delta e_c^{(i)}$  verkleinert sich  $\Delta e_c^{(ii)}$  bei Netzverfeinerung, da sich die Knotenmassen der Kontaktknoten aufgrund der kleineren Elementgrößen verringern.

### Lösung des Referenzbeispiels mit Newmark-KD- $v$

Im Gegensatz zu der Berechnung ohne Geschwindigkeitsmodifikation (siehe Abbildung 4.8) zeigt der Kontaktkraftverlauf bis auf den Ausschlag bei Initiierung des Kontakts ein oszillationsfreies Verhalten. Dies ist auch anhand der Energiekurven zu erkennen, welche anders als in Abbildung 4.8 schon zu Beginn einen glatten Verlauf aufweisen. Trotz der Geschwindigkeitsmodifikation ist der Bruttoenergieverlust geringer als ohne Modifikation, da keine Oszillationen zwischen bestehenden und gelösten Kontaktzuständen auftreten. Allerdings hängt die Qualität des erzielten Ergebnisses direkt von der Qualität der Geschwindigkeitsmodifikation ab. Diese ist für Einkörperkontaktprobleme sehr einfach zu realisieren, da die Geschwindigkeit der Kontaktknoten in Richtung der Hindernis-Normale immer identisch null ist.



**Abbildung 4.10:** Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KD- $v$ -Verfahren.

### 4.5.3 Stabilisierung des Integrators durch modifizierten Prädiktor

Der folgende Abschnitt 4.5.3 widmet sich der Stabilisierung des Newmark-Integrators durch eine Modifikation des Verschiebungsansatzes nach einer Idee von DEUFLHARD U. A. (2008). Das Verfahren wird im Weiteren als *Newmark-KS-Algorithmus* bezeichnet, da die Modellierung von Kontaktereignissen stabilisiert wird. Als Basis des Verfahrens dient dabei der Newmark-KD-Algorithmus aus Abschnitt 4.4.2. Verwandte Modifikationen können beispielsweise in TAYLOR UND PAPADOPOULOS (1993) oder SOLBERG UND PAPADOPOULOS (1998) gefunden werden. Das Verfahren nach DEUFLHARD U. A. (2008) ist im Gegensatz zu den genannten Algorithmen aber räumlich kontinuierlich formuliert, wodurch es mit verschiedenen räumlichen Diskretisierungen bzw. mit verschiedenen räumlichen Kontaktdiskretisierungen kombiniert werden kann. In dieser Arbeit wird das Verfahren in Kombination mit einer diagonalisierten Massenmatrix sowie dem NTS-Algorithmus und der Mortar-Methode als räumliche Kontaktdiskretisierung verwendet.

#### Motivation und numerische Umsetzung

Ausgangspunkt der Idee von DEUFLHARD U. A. (2008) ist der zeitliche Verschiebungsansatz (4.31)<sub>1</sub> des Newmark-KD-Integrators. Anstelle des fixen Ausdrucks  $(\mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n)$  wird aber jetzt ein modifizierter Verschiebungsprädiktor  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  eingeführt:

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left[ (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n^{\text{int}} + 2\beta \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} \right] + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}^{\text{c}}. \quad (4.46)$$

Dieser erfüllt aufgrund seiner Konstruktion automatisch die Nichtdurchdringungsbedingung und ist knotenweise durch die folgende Beziehung definiert:

$$\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}I} = \mathbf{d}_n^I + \Delta t \mathbf{v}_n^I - \frac{\Delta t^2}{2M_{II}} \sum_{K=1}^{n_s} B_{IK}^{\text{c}} \mathbf{n}_K \Lambda_{nK}. \quad (4.47)$$

$B_{IK}^{\text{c}}$  bestimmt sich dabei in Abhängigkeit der räumlichen Kontaktdiskretisierung aus Gleichung (4.6) als Eintrag zwischen den Knoten  $I$  und  $K$  in der Operatormatrix  $\mathbf{B}^{\text{c}}$ . Für  $M_{II}$  gilt Äquivalentes bezüglich einer diagonalisierten Formulierung<sup>5</sup> der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  aus Gleichung (3.4). Die Multiplikatoren  $\Lambda_{nK}$  sind den Slave-Kontaktknoten zugeordnet und korrigieren den Verschiebungsprädiktor so, dass dieser die Nichtdurchdringungsbedingung erfüllt. Hierzu muss vor der Lösung der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung („großes Kontaktproblem“) ein „kleines Kontaktproblem“ gelöst

<sup>5</sup>Entsprechende Berechnungsvorschriften sind beispielsweise in BELYTSCHKO U. A. (2008) angegeben.

werden. Die Bezeichnung „kleines Kontaktproblem“ soll darauf hinweisen, dass der Verschiebungsprädiktor  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  ausschließlich die Verschiebungen der FE-Knoten der Kontaktoberfläche korrigiert. Das zugehörige Gleichungssystem ist insofern nur für diese Freiheitsgrade und die Multiplikatoren  $\Lambda_{nK}$  zu formulieren. Entsprechend dem „großen Kontaktproblem“ berechnen sich die Multiplikatoren  $\Lambda_{nK}$  als Reaktion auf die Nichtdurchdringungsbedingung, welche jetzt aber nicht mit der aktuellen Verschiebung  $\mathbf{d}_{n+1}$  sondern mit dem Verschiebungsprädiktor  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  ausgewertet wird. Erlaubt sind dabei ausschließlich Multiplikatoren, welche im „großen Kontaktproblem“ einer Druckspannung entsprechen würden:

$$\left. \begin{array}{l} g_{nK}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) \geq 0 \\ \Lambda_{nK} \geq 0 \\ g_{nK}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}})\Lambda_{nK} = 0 \end{array} \right\} \forall K \in \mathcal{S}. \quad (4.48)$$

Für die Auswertung von  $g_{nK}$  sei auf Gleichung (4.8) verwiesen.

Nachdem das „kleine Kontaktproblem“ mithilfe von Gleichung (4.48) gelöst ist, bleibt dessen Resultat  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  während der anschließenden Lösung der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung unverändert. Diese folgt aus der semidiskreten Bewegungsgleichung (3.28)<sub>1</sub> ausgewertet zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ , der Beschleunigung  $\mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}}$  aus Gleichung (4.32)<sub>1</sub> und der Beschleunigung  $\mathbf{a}_{n+1}^{\text{c}}$  aus Gleichung (4.46)<sup>6</sup>:

$$\mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) - \frac{1}{2\beta} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n^{\text{int}} \right] + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1} + \frac{1}{2\beta} \mathbf{f}_{\text{c}}^{n+1} = \mathbf{0}. \quad (4.49)$$

Multiplizieren von Gleichung (4.49) mit dem Faktor  $2\beta$  sowie anschließendes Ersetzen von  $\mathbf{a}_n$  mithilfe von Gleichung (4.30)<sub>1</sub> liefert eine alternative Darstellungsweise:

$$\mathbf{M} \left[ \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) \right] + (1 - 2\beta) (\mathbf{f}_{\text{int}}^n - \mathbf{f}_{\text{ext}}^n) + 2\beta (\mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1}) + \mathbf{f}_{\text{c}}^{n+1} = \mathbf{0}. \quad (4.50)$$

Für das Referenzbeispiel sind die Verschiebungsvektoren  $\mathbf{d}_{n+1}$  und  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  identisch. Damit wird eine singuläre oszillierende Beschleunigung vermieden, siehe Gleichung (4.38) und Gleichung (4.39). In Gleichung (4.50) steht die Kontaktkraft dann im Gleichgewicht mit einer von  $\beta$  abhängigen Kombination der internen und externen Kräfte. Unphysikalische Trägheitsterme in der Kontaktkraft werden so vermieden. Für nichtlineare Mehrkörperkontaktprobleme sind  $\mathbf{d}_{n+1}$  und  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  im Allgemeinen nicht identisch. Da aber beide Verschiebungsvektoren die Kontaktbedingungen erfüllen, strebt auch hier eine eventuelle

<sup>6</sup>Gleichung (4.46) muss zuvor noch nach  $\mathbf{a}_{n+1}^{\text{c}}$  aufgelöst werden.

Differenz  $(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}})$  bei einer Verkleinerung des Zeitschritts deutlich schneller gegen null als der ursprüngliche Ausdruck  $(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n)$  in Gleichung (4.33). Somit wird auch in diesem Fall eine singuläre Beschleunigung vermieden und ein physikalisch sinnvoller Kontaktkraftwert erreicht.

### Anmerkung zu den Kontaktgeschwindigkeiten

Mit der gängigen Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  führt der Verschiebungsansatz (4.46) auf die folgende Gleichung:

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}} + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\mathbf{a}_n^{\text{int}} + \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}}) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1}^c. \quad (4.51)$$

Sind  $\mathbf{d}_{n+1}$  und  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  identisch, resultiert daraus die Beziehung

$$\frac{1}{2} \Delta t (\mathbf{a}_n^{\text{int}} + \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}}) + \Delta t \mathbf{a}_{n+1}^c = \mathbf{0}, \quad (4.52)$$

welche durch Einsetzen der Geschwindigkeitsapproximation (4.31)<sub>2</sub> für aktive Kontaktknoten auf den folgenden Zusammenhang führt:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n \quad (4.53)$$

Die Geschwindigkeit eines kontaktierenden Knotens bleibt somit während des Kontaktvorgangs konstant, was einerseits unphysikalisch und andererseits algorithmisch ungünstig ist, vor allem wenn der Kontakt wieder gelöst werden muss. Aus diesem Grund ist eine modifizierte Behandlung der Geschwindigkeiten notwendig, siehe beispielsweise KLAPPROTH (2010) oder Abschnitt 4.5.2 bzw. Abschnitt 4.7 für Mehrkörperkontaktprobleme.

### Herleitung aus einer Potentialformulierung

Die folgende Herleitung soll in der Notation der vorliegenden Arbeit ergänzend zu den Ausführungen in DEUFLHARD U. A. (2008) die theoretische Basis der Newmark-KS-Formulierung mithilfe einer Potentialformulierung darstellen. Startpunkt der Betrachtung ist ein zeitlich bereits diskretisiertes, räumlich aber noch kontinuierliches Problem. Als zeitliche Diskretisierung werden die Newmark-Approximationen gewählt, welche allerdings mit einem zunächst unbekanntem Verschiebungsprädiktor  $\mathbf{u}_{n+1}^{\text{pred}}$  modifiziert sind. An den Verschiebungsprädiktor werden dabei bestimmte Forderungen gestellt. Ziel der Betrachtung ist es, eine räumlich diskretisierte Version des Verschiebungsprädiktors zu erhalten, welche diese Forderungen erfüllt.

Die erste Forderung an den Prädiktor lautet, dass ein Verschiebungsfeld, welches mit den modifizierten Newmark-Ansätzen berechnet wird, die Kontaktbedingungen erfüllen soll. Formuliert mit der Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren ergibt sich das entsprechende Potential

$$\Pi_{\text{LM}}^{\text{pred}}(\mathbf{u}_{n+1}^{\text{pred}}, \Lambda_n) = \int_{\gamma_c^1} \Lambda_n g_n(\mathbf{u}_{n+1}^{\text{pred}}) d\gamma_c^1, \quad (4.54)$$

wobei  $\Lambda_n$  das zugehörige Lagrange'sche Multiplikatorenfeld darstellt. Die zweite Forderung lautet, dass die Korrektur der Newmark-Ansätze zur Erfüllung der ersten Forderung möglichst gering sein soll. Dies kann konkret durch die Forderung nach Minimierung der kinetischen Energie

$$e_{\text{pred}} = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \int_{\Omega_0^\alpha} \left[ \mathbf{u}_{n+1}^{\alpha, \text{pred}} - (\mathbf{u}_n^\alpha + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n^\alpha) \right] \cdot \frac{\rho_0^\alpha}{\Delta t^2} \left[ \mathbf{u}_{n+1}^{\alpha, \text{pred}} - (\mathbf{u}_n^\alpha + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n^\alpha) \right] d\Omega_0^\alpha \right\} \quad (4.55)$$

zwischen modifizierten und nicht modifizierten Ansätzen formuliert werden. Die Feldgrößen in Gleichung (4.55) sind dabei als räumlich kontinuierlich zu verstehen. Kombinieren der ersten und der zweiten Forderung führt zusammen mit den Definitionen aus Gleichung (4.54) und Gleichung (4.55) auf das Sattelpunktproblem

$$e_{\text{pred}} + \Pi_{\text{LM}}^{\text{pred}} \stackrel{!}{=} \text{stat.} \quad (4.56)$$

Dessen Variation kann für eine als bekannt angenommene Kontaktzone in abstrakter Schreibweise durch die Beziehung

$$\delta e_{\text{pred}} + \delta \Pi_{\text{LM}}^{\text{pred}} = 0 \quad (4.57)$$

angegeben werden. Durch Auswerten der einzelnen Variationen in Gleichung (4.57) resultiert der folgende Gleichungssatz:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \int_{\Omega_0^\alpha} \delta \mathbf{u}_{n+1}^{\alpha, \text{pred}} \cdot \frac{2\rho_0^\alpha}{\Delta t^2} \left[ \mathbf{u}_{n+1}^{\alpha, \text{pred}} - (\mathbf{u}_n^\alpha + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n^\alpha) \right] d\Omega_0^\alpha \right\} \\ & + \int_{\gamma_c^1} \Lambda_n \delta g_n(\mathbf{u}_{n+1}^{\text{pred}}) d\gamma_c^1 = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_{n+1}^{\text{pred}} \in \mathcal{V}^\alpha \quad (4.58) \\ & \int_{\gamma_c^1} \delta \Lambda_n g_n(\mathbf{u}_{n+1}^{\text{pred}}) d\gamma_c^1 = 0 \quad \forall \delta \Lambda_n \in \mathcal{M}_n^{+/-}. \end{aligned}$$

Aus der räumlichen Diskretisierung von Gleichung (4.58)<sub>1</sub> folgt mit der diskretisierten Verschiebung bzw. virtuellen Verschiebung aus Gleichung (3.2) sowie der diskretisierten

Kontaktspannung (3.17)<sub>1</sub> die Beziehung

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \int_{\Omega_0^{\alpha,h}} \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_I^\alpha \delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}I} \cdot \frac{2\rho_0^\alpha}{\Delta t^2} \sum_{J=1}^{n_{n\alpha}} N_J^\alpha \left[ \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}J} - (\mathbf{d}_n^J + \Delta t \mathbf{v}_n^J) \right] d\Omega_0^{\alpha,h} \right\} \\ & + \int_{\gamma_c^{1,h}} \sum_{K=1}^{n_{sa}} \phi_K \mathbf{n}_K \Lambda_{nK} \cdot \left( \sum_{I=1}^{n_s} N_I^1 \delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}I} - \sum_{J=1}^{n_m} N_J^2 \delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}J} \right) d\gamma_c^{1,h} = 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Dabei sind die Knotenvektoren aus Gründen der Übersichtlichkeit ohne den Index  $(\bullet)^\alpha$  dargestellt. Das Multiplikatorenfeld  $\Lambda_n$  wird äquivalent zu der Kontaktspannung diskretisiert, da beide Größen als Reaktion auf die Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung berechnet werden. Exemplarisch ist in Gleichung (4.59) die Diskretisierung mit der dualen Mortar-Methode gezeigt. Für eine ausführlichere Darstellung der Umformungen in Gleichung (4.59) sei auf die äquivalenten Umformungen in Gleichung (3.20) verwiesen. Aus der räumlichen Diskretisierung von Gleichung (4.58)<sub>2</sub> resultiert mit der diskretisierten Verschiebung, der diskretisierten Geometrie (3.1) und der diskretisierten virtuellen Kontaktspannung (3.17)<sub>2</sub> die Gleichung

$$- \int_{\gamma_c^{1,h}} \sum_{K=1}^{n_{sa}} \phi_K \mathbf{n}_K \delta \Lambda_{nK} \cdot \left( \sum_{I=1}^{n_s} N_I^1 \mathbf{x}_{n+1}^{\text{pred}I} - \sum_{J=1}^{n_m} N_J^2 \mathbf{x}_{n+1}^{\text{pred}J} \right) d\gamma_c^{1,h} = 0. \quad (4.60)$$

Hierin bezeichnet  $\mathbf{x}_{n+1}^{\text{pred}J}$  die aktuelle Position des Knotens  $J$  berechnet mit dem Verschiebungsprädiktor  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}J}$ . Mit der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  aus Gleichung (3.4) lässt sich Gleichung (4.59) kompakt in globaler Schreibweise angeben<sup>7</sup>:

$$\frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \left[ \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}} - (\mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n) \right] + \mathbf{f}_{\text{pred}} = \mathbf{0}. \quad (4.61)$$

Der Eintrag eines einzelnen Knotens  $I$  des globalen Vektors  $\mathbf{f}_{\text{pred}}$  lautete dabei:

$$\mathbf{f}_{\text{pred}}^I = \sum_{K=1}^{n_s} B_{IK}^c \mathbf{n}_K \Lambda_{nK}. \quad (4.62)$$

Aufgrund des Operatoreintrags  $B_{IK}^c$  korrigiert der Verschiebungsprädiktor nur die Newmark-Approximationen von Kontaktknoten. Schließlich führt Gleichung (4.60) auf eine integrale Nichtdurchdringungsbedingung für jeden Slave-Kontaktknoten  $K$ :

$$g_{nK}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) \geq 0. \quad (4.63)$$

---

<sup>7</sup>Vor der Gleichungslösung wird  $\mathbf{M}$  diagonalisiert.

### Iterative Bestimmung des modifizierten Prädiktors

Die Bestimmungsgleichungen (4.61) und (4.63) für  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  sind nichtlinear abhängig von der Menge  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$  der momentan aktiv am Kontakt teilnehmenden Slave-Kontaktknoten sowie von  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  selbst. Somit ist für die Bestimmung des Verschiebungsprediktors eine Linearisierung und eine iterative Lösung des zugehörigen Gleichungssystems notwendig. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine konsistente Linearisierung der entsprechenden Beziehungen erarbeitet. Die zugehörige Prozedur ist im Folgenden schematisch skizziert.

Initialisiere Unbekannte: $\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^0 = \overset{\circ}{\mathbf{d}}_n + \Delta t \overset{\circ}{\mathbf{v}}_n, \mathbf{\Lambda}^0 = \mathbf{0}$	
Initialisiere aktive Menge: $\mathcal{A}^0 = \mathcal{A}\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}, \mathbf{\Lambda}\right)^0$	
Iterationsschleife: $r = 0, \dots, \max_r$ (Konvergenz)	
Berechne rechte Seite:	$\overset{\circ}{\mathbf{r}}^{\text{pred}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}, \mathbf{\Lambda}\right)^r$ mit Gl. (4.64) $\mathbf{g}_{\mathcal{A}_n}\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^r$ mit Gl. (4.66)
Berechne effektive Steifigkeitsmatrix:	
$\overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\text{pred}} := \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{r}}^{\text{pred}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}, \mathbf{\Lambda}\right)^r}{\partial \left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^r} = \frac{2}{\Delta t^2} \overset{\circ}{\mathbf{M}}_+ \frac{\partial \overset{\circ}{\mathbf{f}}_{\text{pred}}\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}, \mathbf{\Lambda}\right)^r}{\partial \left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^r}$	
Berechne Verschiebungsableitung von $\mathbf{g}_{\mathcal{A}_n}$ :	$\mathbf{G}^{\text{pred}} := \frac{\partial \mathbf{g}_{\mathcal{A}_n}\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^r}{\partial \left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^r}$
Berechne Operator $\overset{\circ}{\mathbf{B}}^c\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^r$ mit Gl. (4.6)	
Assembliere und löse <sup>a</sup> : $\begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\text{pred}} & \overset{\circ}{\mathbf{B}}^c \\ \mathbf{G}^{\text{pred}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^r \begin{bmatrix} \Delta \overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}} \\ \Delta \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{r}}^{\text{pred}} \\ \mathbf{g}_{\mathcal{A}_n} \end{bmatrix}^r$	
Aktualisiere Unbekannte: $\begin{aligned} \left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^{r+1} &= \left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^r + \Delta \overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}} \\ \mathbf{\Lambda}^{r+1} &= \mathbf{\Lambda}^r + \Delta \mathbf{\Lambda} \end{aligned}$	
Aktualisiere aktive Menge:	
$\mathcal{A}^{r+1} = \mathcal{A}\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}, \mathbf{\Lambda}\right)^{r+1} \Rightarrow \Lambda_K = 0, \text{ wenn } K \notin \mathcal{A}$	
$\left(\overset{\circ}{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}\right)^{r+1}$	

<sup>a</sup>Vereinfachend erfolgt hier die Darstellung für  $\mathcal{A} = \mathcal{S}$ , für  $\mathcal{A} \neq \mathcal{S}$  siehe Kapitel 5

**Abbildung 4.11:** Struktogramm zur Ermittlung des Verschiebungsprediktors.

Da der Verschiebungsprädiktor nur die Newmark-Approximationen der Kontaktknoten verändert, wird Gleichung (4.61) für eine effiziente Lösung entsprechend nur mit dieser reduzierten Anzahl von  $n_{\text{dim}}(n_s + n_m)$  Verschiebungsfreiheitsgraden definiert:

$$\mathring{\mathbf{r}}^{\text{pred}} = \frac{2}{\Delta t^2} \mathring{\mathbf{M}} \left[ \mathring{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}} - \left( \mathring{\mathbf{d}}_n + \Delta t \mathring{\mathbf{v}}_n \right) \right] + \mathring{\mathbf{f}}_{\text{pred}} = \mathbf{0}. \quad (4.64)$$

Dabei kennzeichnet das Symbol  $(\mathring{\bullet})$ , dass die diagonalisierte Massenmatrix, die Vektoren der Systemgrößen sowie die Vektoren  $\mathring{\mathbf{r}}^{\text{pred}}$  und  $\mathring{\mathbf{f}}_{\text{pred}}$  für die verringerte Anzahl von Freiheitsgraden formuliert sind. Gleichung (4.63) wird in der Form

$$g_{nK}(\mathring{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}) = 0 \quad (4.65)$$

für alle Slave-Kontaktknoten  $K \in \mathcal{A}$  gefordert. Anschließend werden die Forderungen aller aktiven Kontaktknoten aus Gleichung (4.65) in einer vektoriellen Forderung

$$\mathbf{g}_{\mathcal{A}_n}(\mathring{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{pred}}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}_{\mathcal{A}_n} \in \mathbb{R}^{n_{\text{sa}}} \quad (4.66)$$

zusammengefasst. Die iterative Lösung des durch Gleichung (4.64) und Gleichung (4.66) definierten Systems ist in Abbildung 4.11 schematisch skizziert. Für eine ausführlichere Darstellung der allgemeinen Grundlagen sowie für eine Erläuterung der Ermittlungsstrategie der aktiven Menge  $\mathcal{A}$  sei auf Kapitel 5 verwiesen. Die Dimensionen der in Abbildung 4.11 eingeführten Vektoren und Matrizen sind abhängig von der zugrundeliegenden räumlichen Kontaktdiskretisierung. Bei einer Diskretisierung mit der dualen Mortar-Methode gilt dabei  $\mathbf{K}_{\text{eff}}^{\text{pred}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}(n_s+n_m) \times n_{\text{dim}}(n_s+n_m)}$ ,  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_s}$  und  $\mathbf{G}^{\text{pred}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_{\text{sa}} \times n_{\text{dim}}(n_s+n_m)}$ . Nicht dargestellt ist die Kondensation der Lagrange'schen Multiplikatoren. Diese kann einfach durchgeführt werden, wenn die Multiplikatoren mit dualen Formfunktionen diskretisiert sind. Auch hierfür sei auf Kapitel 5 verwiesen.

### Auswertung der Energiebilanz

Mit der Parameterwahl  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  lautet die Energiebilanz für den Newmark-KS-Algorithmus (siehe Anhang A.3.2):

$$\Delta e_{\text{kin}} + \Delta e_{\text{int}} = \Delta e_{\text{ext}} - \underbrace{\Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_c^{n+1}}_{\Delta e_c^{(i)}} + \underbrace{\left( \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}} \right)^T \mathbf{f}_{\text{pred}}}_{\Delta e_c^{(iii)}}. \quad (4.67)$$

Der Term  $\Delta e_c^{(iii)}$  resultiert dabei aus der Modifikation der Newmark-Approximationen durch den Verschiebungsprädiktor. Für lineare Probleme ist dieser Term dissipativ (DEUFLHARD U. A. 2008):  $\Delta e_c^{(iii)} \geq 0$ . Für nichtlineare Probleme kann dies nicht mehr garantiert werden. Beinhaltet die Differenz zwischen dem Verschiebungsprädiktor



und der endgültigen Lösung eine Rotation der Kontaktoberfläche, kann ein Energiezuwachs  $\Delta e_c^{(iii)} < 0$  resultieren. Da der Verschiebungsprädiktor die Starrkörperrotation der Kontaktoberfläche über die Geschwindigkeit des letzten Zeitschritts jedoch relativ gut abbildet, ist der Anteil  $\Delta e_c^{(iii)}$  zumeist klein gegenüber  $\Delta e_c^{(i)}$ . Somit führt auch ein eventuelles  $\Delta e_c^{(iii)} < 0$  in der Regel nicht zu einer Vergrößerung der Systemenergie.

### Lösung des Referenzbeispiels mit Newmark-KS

Die Lösung des Referenzbeispiels mit dem Newmark-KS-Verfahren führt auf einen Kontaktkraftverlauf, welcher exakt der numerischen Referenzlösung entspricht, siehe Abbildung 4.12. Die verbleibenden, leichten Oszillationen werden nicht durch die Kontaktbehandlung verursacht. Der Energieverlauf weist einen im Diagramm nicht sichtbaren Verlust zu Beginn des Kontakts und einen deutlicheren Energieverlust bei Lösen des Kontakts auf. Der Energieverlust bei Lösen des Kontakts wird dabei durch die konstanten Kontaktgeschwindigkeiten verursacht. Diese führen auch für gelösten Kontakt zunächst noch zu einer Modifikation der Newmark-Approximationen durch den Verschiebungsprädiktor. Somit resultiert ein Energieverlust durch den Term  $\Delta e_c^{(iii)}$  aus Gleichung (4.67).

Die totale Energie der numerischen Referenzlösung ist zu Beginn minimal kleiner als die Energie der Kontaktberechnung, da die kinetische Energie der gelagerten FE-Knoten im Vergleich zu der Energie der Kontaktlösung fehlt.

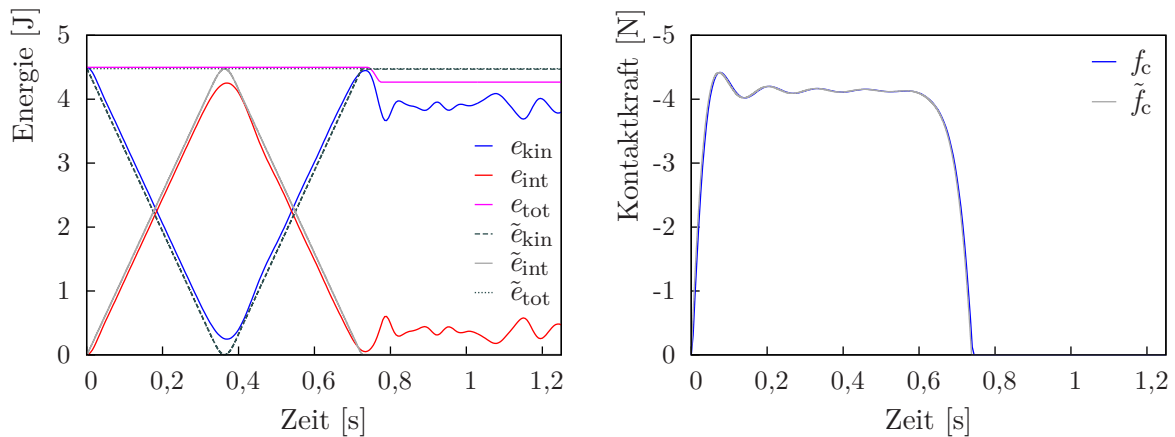


Abbildung 4.12: Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KS-Verfahren.

#### 4.5.4 Modifikation der Massenmatrix

Neben der a-posteriori-Modifikation der Geschwindigkeit und der Modifikation des Integrators können oszillierende Kontaktkräfte auch durch eine Modifikation der Massen-

matrix vermieden werden, siehe beispielsweise KHENOUS U. A. (2006, 2008) oder HAGER U. A. (2008). In diesem Fall führen die Oszillationen der Beschleunigung nicht mehr zu oszillierenden Trägheitskräften, da die diskreten Punktmassen von den Kontaktknoten entfernt werden. Somit entstehen auch keine oszillierenden Kontaktkräfte. Allerdings ist eine derartige Modifikation für dünnwandige Strukturen bei gleichzeitigem Erhalt des Schwerpunkts sowie der Eigenschaften bezüglich der Rotationsträgheit nur schwer möglich, da in Dickenrichtung oft nur eine Elementreihe vorhanden ist. Die Untersuchungen in dieser Arbeit erfolgen jedoch im Hinblick auf eine Simulation von dünnwandigen Strukturen in nachfolgenden Arbeiten. Aus diesem Grund wird eine Modifikation der Massenmatrix nicht weiter betrachtet.

## 4.6 Energieerhaltung bei Kontakt ereignissen

Die kontinuierliche numerische Dissipation von Systemenergie kann bei der Simulation von dynamischen Langzeitprozessen zu einer nicht akzeptablen Veränderung der Systemantwort führen. In diesem Fall werden Algorithmen benötigt, welche nicht nur eine energetisch stabile, sondern auch eine energieerhaltende Behandlung der Kontaktvorgänge garantieren. Der folgende Abschnitt befasst sich mit Verfahren, die diese Anforderungen erfüllen, ohne dafür eine Verletzung der Nichtdurchdringungsbedingung zu benutzen. Methoden, deren Umsetzung ausschließlich durch eine Verletzung der Nichtdurchdringungsbedingung möglich ist (beispielsweise LAURSEN UND CHAWLA (1997) oder ARMERO UND PETŐCZ (1998)), werden nicht betrachtet. Mit dem Energie-Korrekturkraft-Verfahren wird zusätzlich ein neuer Algorithmus vorgestellt, welcher eine in ARMERO UND PETŐCZ (1998) präsentierte Idee adaptiert und im Hinblick auf eine exakte Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung erweitert.

### 4.6.1 Die „Velocity-Update-Method“ (VUM)

Die „Velocity-Update-Method“ wurde von LAURSEN UND LOVE (2002) in Kombination mit der „Energy-Momentum-Method“ als ein Verfahren zur energieerhaltenden Simulation von Kontaktproblemen vorgestellt. Den Ausgangspunkt des Verfahrens stellt die zunächst dissipative Behandlung des Kontakts während der Gleichgewichtsiteration dar, siehe Abschnitt 4.2.2 und Abschnitt 4.4.3. Anschließend werden in einer Nachlaufrechnung die Knotengeschwindigkeiten so korrigiert, dass sich die kinetische Energie um den Betrag der zuvor dissipierten Energie erhöht.

Im Rahmen der „Velocity-Update-Method“ wird die aus den Newmark-Approximationen<sup>8</sup> (4.16) berechnete Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{n+1}$  zuerst in  $\mathbf{v}_{n+1}^s$  umbenannt und durch ein Einsetzen von Gleichung (4.16)<sub>1</sub> in Gleichung (4.16)<sub>2</sub> dargestellt:

$$\mathbf{v}_{n+1}^s = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \mathbf{v}_n. \quad (4.68)$$

Der Index  $(\bullet)^s$  soll dabei andeuten, dass die Newmark-Approximationen auf der Annahme eines glatten Verlaufs (englisch: „smooth“) der Systemgrößen innerhalb des Zeitintervalls basieren. Anschließend wird eine Geschwindigkeitskorrektur  $\mathbf{v}^c$  eingeführt, welche zusammen mit  $\mathbf{v}_{n+1}^s$  eine neue unbekannte Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{n+1}$  definiert:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1}^s + \mathbf{v}^c = \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \mathbf{v}_n + \mathbf{v}^c. \quad (4.69)$$

Mit Gleichung (4.69) kann das Verschiebungsincrement  $\Delta \mathbf{d} = (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)$  zwischen den diskreten Zeitpunkten  $t_n$  und  $t_{n+1}$  in Abhängigkeit der Geschwindigkeiten formuliert werden:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n = \frac{\Delta t}{2} [(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}^c) + \mathbf{v}_n]. \quad (4.70)$$

Multiplizieren der effektiven Strukturgleichung (4.19) mit  $\Delta \mathbf{d}^T$  führt auf die Energiebilanz unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitsmodifikation, wobei für eine übersichtlichere Darstellung angenommen wird, dass keine externen Lasten vorhanden sind:

$$\Delta \mathbf{d}^T \mathbf{M} \left[ \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) \right] + \underbrace{\Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1/2})}_{\Delta e_{\text{int}}} + \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_c(\mathbf{d}_{n+1/2}, \mathbf{z}^{\text{algo}}) = 0. \quad (4.71)$$

Mithilfe von Beziehung (4.70) ist es möglich, den Trägheitsterm in Gleichung (4.71) weiter umzuformen. Hierzu werden  $\Delta \mathbf{d}^T$  bzw.  $(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)$  als Funktion der Geschwindigkeiten ausgedrückt:

$$\begin{aligned} & \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{M} \left[ \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)^T \mathbf{M} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) + \frac{1}{2} (\mathbf{v}^c)^T \mathbf{M} \mathbf{v}^c - (\mathbf{v}_{n+1})^T \mathbf{M} \mathbf{v}^c \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)^T \mathbf{M} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^c)^T \mathbf{M} \mathbf{v}^c - (\mathbf{v}_{n+1}^s)^T \mathbf{M} \mathbf{v}^c. \end{aligned} \quad (4.72)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\Delta e_{\text{kin}}}$

<sup>8</sup>Für die „Energy-Momentum-Method“ sind die Newmark-Parameter bereits fest auf  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  gesetzt.

Einsetzen dieses Resultats in Gleichung (4.71) und Substituieren von  $\mathbf{v}_{n+1}^s$  mit Gleichung (4.68) führt schließlich auf eine alternative Darstellung der Energiebilanz:

$$\underbrace{\Delta e_{\text{kin}} + \Delta e_{\text{int}}}_{\Delta e_{\text{tot}}} - \frac{1}{2} (\mathbf{v}^c)^\top \mathbf{M} \mathbf{v}^c - \left[ \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \mathbf{v}_n \right]^\top \mathbf{M} \mathbf{v}^c + \Delta \mathbf{d}^\top \mathbf{f}_c(\mathbf{d}_{n+1/2}) = 0. \quad (4.73)$$

Kann die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{n+1}$  letztlich energieerhaltend bestimmt werden, muss  $\Delta e_{\text{tot}} = 0$  gelten. Aus dieser Forderung resultiert mit Beziehung (4.73) eine quadratische Bestimmungsgleichung für die unbekannte Geschwindigkeitskorrektur:

$$\frac{1}{2} (\mathbf{v}^c)^\top \mathbf{M} \mathbf{v}^c + \left[ \frac{2}{\Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \mathbf{v}_n \right]^\top \mathbf{M} \mathbf{v}^c - \Delta \mathbf{d}^\top \mathbf{f}_c(\mathbf{d}_{n+1/2}) = 0. \quad (4.74)$$

Damit die Geschwindigkeitskorrektur nicht den Körperimpuls verändert, darf sie an Knoten, welche keine Kontaktknoten sind, auch keinen Impuls verursachen. Des Weiteren müssen sich in der Kontaktoberfläche die Impulse von Slave- und Master-Seite gegenseitig aufheben. Hierzu werden skalare Impulswerte  $p_K$  eingeführt, welche an den Slave-Kontaktknoten definiert sind. Anschließend wird der Impuls  $\mathbf{p}_I$  auf einen Knoten  $I$  als Summe aller Impulswerte  $p_K$  multipliziert mit dem jeweiligen Kontaktoptor-Eintrag  $B_{IK}^c$  und der entsprechenden Knoten-Normalen  $\mathbf{n}_K$  festgelegt:

$$\mathbf{p}_I = \sum_{K=1}^{n_s} B_{IK}^c \mathbf{n}_K p_K = \sum_{J=1}^{n_n} M_{IJ} \mathbf{v}_J^c. \quad (4.75)$$

Die skalaren Impulswerte in der Kontaktoberfläche werden dabei wie die Kontaktkräfte einer reibungsfreien Kontaktformulierung übertragen. Knoten, welche nicht Teil der Kontaktoberfläche sind, erhalten keinen Impuls. Mithilfe der zweiten Summe wird in Gleichung (4.75) der Zusammenhang zwischen den Knotenimpulsen und den Geschwindigkeitskorrekturen formuliert. Auflösen dieser Beziehung nach den  $\mathbf{v}_J^c$  und anschließendes Einsetzen in Gleichung (4.74) liefert nach einigen Umformungen eine quadratische Bestimmungsgleichung für die unbekanntenen Knotenimpulse:

$$\sum_{I=1}^{n_s} \left( \sum_{J=1}^{n_s} (A_{IJ} p_I p_J) + b_I p_I + c_I z_{nI} \right) = 0. \quad (4.76)$$

Hierbei gelten die folgenden Abkürzungen:

$$A_{IJ} = -\frac{1}{2} \sum_{K=1}^{n_n} \sum_{L=1}^{n_n} B_{KI}^c B_{LJ}^c M_{KL}^{-1} (\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{n}_J) \quad (4.77)$$

$$b_I = \sum_{K=1}^{n_n} B_{KI}^c \left( -\frac{2}{\Delta t} \Delta \mathbf{d}_K + \mathbf{v}_K \right) \cdot \mathbf{n}_I \quad (4.78)$$

$$c_I = \sum_{K=1}^{n_n} B_{KI}^c \mathbf{d}_K \cdot \mathbf{n}_I. \quad (4.79)$$

Da Gleichung (4.76) nur eine Bedingung für  $n_s$  unbekannte Knotenimpulse liefert, wird für eine eindeutige Lösung jedes einzelne Glied der äußeren Summe zu null gesetzt:

$$A_{II} p_I^2 + \underbrace{\left( \sum_{J=1, J \neq I}^{n_s} A_{IJ} p_J + b_I \right)}_{B_I} p_I + c_I z_{nI} = 0. \quad (4.80)$$

Pro Knoten sind dann zwei reelle Lösungen möglich:

$$p_I^{1/2} = \frac{-B_I \pm \sqrt{(B_I)^2 - 4A_{II}(c_I z_{nI})}}{2A_{II}}. \quad (4.81)$$

Physikalisch sinnvoll ist die Lösung, welche für  $(c_I z_{nI}) \rightarrow 0$  keine Impulskorrektur mehr vornimmt. In der hier verwendeten Notation besitzt diese Lösung das umgekehrte Vorzeichen von  $B_I$ :

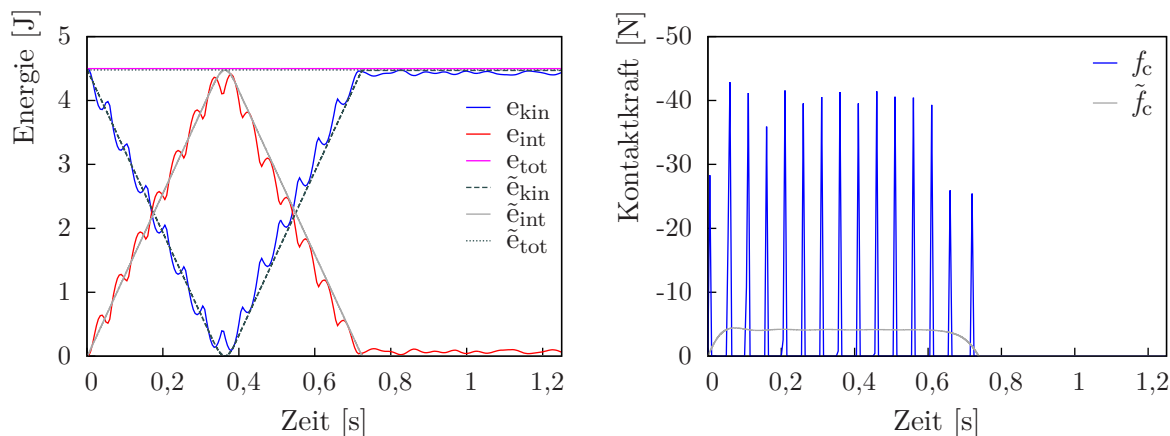
$$\text{sign}(p_I) = -\text{sign}(B_I). \quad (4.82)$$

Da die einzelnen Impulswerte voneinander abhängen, ist eine iterative Lösung der Beziehungen (4.80) notwendig. Eine algorithmisch effiziente Umsetzung kann durch eine konsistente Linearisierung des resultierenden Gleichungssystems erzielt werden. Zunächst muss dazu pro Knoten jeweils eine der Lösungen (4.81) ausgewählt werden. Während der Iteration ist deren Gültigkeit mithilfe von Beziehung (4.82) zu überprüfen und eventuell eine Korrektur vorzunehmen. Sind die Knotenimpulse berechnet, bestimmt sich die Geschwindigkeitskorrektur mit Gleichung (4.75).

### Lösung des Referenzbeispiels mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM

Wie Abbildung 4.13 zeigt, bleibt die totale Energie durch die Geschwindigkeitskorrektur mit der „Velocity-Update-Method“ erhalten. Allerdings weisen der Kontaktkraftverlauf und daraus resultierend auch der Energieverlauf deutlich stärkere Oszillationen auf als bei einer Lösung ohne „Velocity-Update-Method“, siehe Abbildung 4.6.

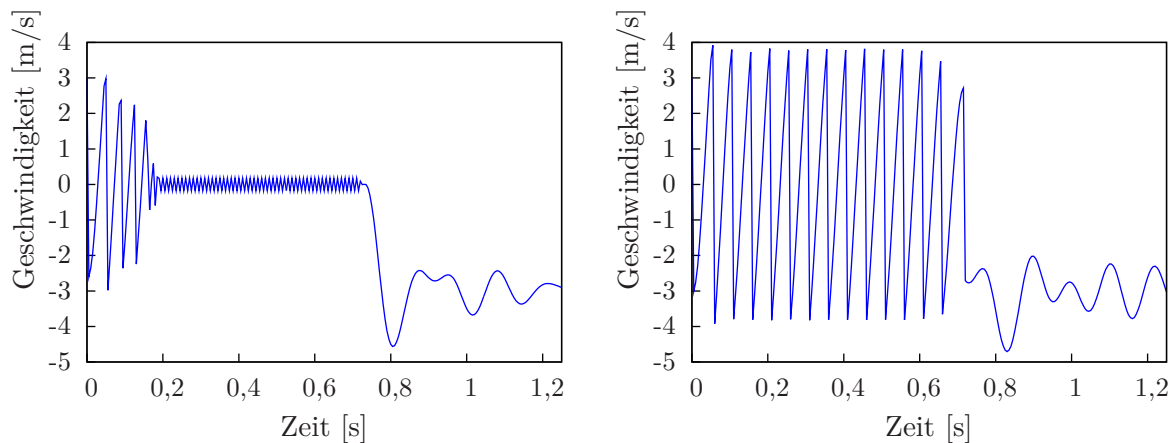
In Abbildung 4.14 sind vergleichend der Geschwindigkeitsverlauf einer Berechnung mit und einer Berechnung ohne „Velocity-Update-Method“ dargestellt. Mit „Velocity-Update-Method“ sind die Oszillationen im Geschwindigkeitsverlauf deutlich ausgeprägter.



**Abbildung 4.13:** Referenzbeispiel: Lösung mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM.

Über die Berechnung der Mittelpunktbeschleunigung (4.18) wirkt sich dies wiederum direkt auf den Kontaktkraftverlauf aus.

Die stärkeren Oszillationen bei Benutzung der „Velocity-Update-Methode“ können einerseits damit erklärt werden, dass die Systemenergie erhalten bleibt. Ein numerischer Dämpfungseffekt durch eine Verkleinerung der Energie ist damit nicht vorhanden. Darüber hinaus erhöht die „Velocity-Update-Methode“ die Geschwindigkeit der Kontaktknoten, wodurch die Oszillationen zusätzlich vergrößert werden.



**Abbildung 4.14:** Referenzbeispiel: EMM (links) und EMM-VUM (rechts).

## 4.6.2 Energieerhaltung über eine Zwangsbedingung

Ähnlich der Idee der „Constraint-Energy-Method“ oder des „Constraint-Energy-Momentum-Algorithm“ könnte die Energieerhaltung auch für Kontaktprobleme über eine

zusätzliche globale Zwangsbedingung sichergestellt werden. Diese müsste innerhalb der Gleichgewichtsiteration die Systemenergie so modifizieren, dass die Energiedissipation aufgrund von Kontakt durch eine Erhöhung der internen und kinetischen Energie ausgeglichen wird. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde diese Idee jedoch nicht weiter verfolgt, da beispielsweise die Kombination mit einer Geschwindigkeitsmodifikation wie in Abschnitt 4.5.2 schwierig ist. Die Modifikation der Geschwindigkeit in einer Nachlaufrechnung würde die Systemenergie erneut verändern. Für die Ermittlung von physikalisch sinnvollen Kontaktgeschwindigkeiten oder als stabilisierendes Werkzeug für den Kontaktkraftverlauf ist eine solche Modifikation aber wünschenswert.

### 4.6.3 Energie-Korrekturkraft-Verfahren

Wie bereits in Abschnitt 4.6.2 angedeutet, ist es erstrebenswert, eine energierhaltende Kontaktbehandlung möglichst modular mit anderen Methoden zur Verbesserung der Kontaktmodellierung kombinieren zu können. Mit der „Velocity-Update-Method“ ist dies nicht ohne Weiteres möglich. Zum Beispiel lässt sich eine Modifikation der Kontaktgeschwindigkeit im Sinne von Abschnitt 4.5.2 nur schwer mit der Geschwindigkeitskorrektur zur Energiemodifikation vereinbaren. Mit dem Energie-Korrekturkraft-Verfahren wird im folgenden Abschnitt ein neuer Algorithmus vorgestellt, welcher eine modulare Kombination mit verschiedenen in den vorangegangenen Abschnitten beschriebenen Methoden erlaubt. Im Rahmen dieser Arbeit wird dazu ein Konzept von ARMERO UND PETŐCZ (1998) adaptiert und im Hinblick auf eine exakte Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung erweitert.

Das Energie-Korrekturkraft-Verfahren ist im Weiteren für das Referenzbeispiel anhand des Newmark-KD-Algorithmus<sup>9</sup> dargestellt. Der resultierende Algorithmus wird dementsprechend als *Newmark-KD-e-Algorithmus* bezeichnet. Eine allgemeine Formulierung für große Deformationen erfolgt in Abschnitt 4.7.

#### Formulierung für das Referenzbeispiel (1D)

Gemäß Gleichung (4.34) verändert sich mit dem Newmark-KD-Algorithmus für das Lösen von Kontakt oder während bestehendem Kontakt<sup>9</sup> die Systemenergie nicht. Der Energieverlust eines einzelnen Slave-Kontaktknotens bei der Initiierung von Kontakt kann für das Referenzbeispiel durch die Beziehung

$$\Delta e_c^{(i)} = (d_{n+1} - d_n) f_c^{n+1} \quad (4.83)$$

<sup>9</sup>Bei bestehendem Kontakt dürfen die Kontaktkräfte hierfür weder den Impuls noch den Drehimpuls des Gesamtsystems verändern. Für den hier betrachteten Fall sind diese Bedingungen stets erfüllt.

angegeben werden. Der Newmark-KD-*e*-Algorithmus gibt diese dissipierte Energie nicht im aktuellen Zeitschritt an das System zurück, sondern speichert  $\Delta e_c^{(i)}$  knotenbasiert. Wird der Kontakt wieder gelöst, erfolgt die Rückgabe der gespeicherten Energie mit einer *Energie-Korrekturkraft*  $f_{\text{enko}}$ . Die Richtung der Energie-Korrekturkraft ist dabei durch die aktuelle Oberflächen-Normale definiert. Im Rahmen des betrachteten Referenzbeispiels stellen  $f_{\text{enko}}$  und die Oberflächen-Normale  $n_{\text{obs}} = -1$  skalare Größen dar. Im Allgemeinen sind beide Größen vektoriell. Der Betrag  $\Lambda_{\text{enko}}$  der Energie-Korrekturkraft definiert sich in Abhängigkeit des aktuellen Verschiebungsincrements und der gespeicherten Energie  $\Delta e_c^{(i)}$ :

$$\Delta d f_{\text{enko}} = \Delta d \left( \Lambda_{\text{enko}} n_{\text{obs}} \right) := \Delta e_c^{(i)}. \quad (4.84)$$

Auflösen von Gleichung (4.84) nach  $\Lambda_{\text{enko}}$  führt dann auf folgende Beziehung:

$$\Lambda_{\text{enko}} = \frac{\Delta e_c^{(i)}}{n_{\text{obs}} \Delta d}. \quad (4.85)$$

Algorithmisch bedingt ist Gleichung (4.85) während des ersten Iterationsschritts nach Lösen des Kontakts singular. Zur Behebung dieser Problematik kann die Energie-Korrekturkraft im ersten Iterationsschritt entweder zu null gesetzt oder mithilfe einer Abschätzung angenähert werden. Letzteres lässt sich beispielsweise mit der folgenden Vorgehensweise realisieren: Zunächst wird mithilfe von Gleichung (4.1)<sub>1</sub> eine grobe Abschätzung  $\tilde{d}_{n+1}$  der unbekanntenen Verschiebung  $d_{n+1}$  unter Annahme einer konstanten Beschleunigung  $a_{n+1} = a_n$  getroffen:

$$\tilde{d}_{n+1} = d_n + \Delta t v_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 a_n. \quad (4.86)$$

Mit den Gleichungen (4.86) und (4.85) könnte bereits jetzt eine Abschätzung für die Energie-Korrekturkraft getroffen werden. Da aber einerseits die Beschleunigung als Koeffizient des quadratischen Anteils in Gleichung (4.86) nur sehr grob abgeschätzt wird, andererseits  $\Lambda_{\text{enko}}$  aufgrund der inversen Beziehung in Gleichung (4.85) sensitiv auf Veränderungen von  $\Delta d$  reagiert, liefert eine solche Abschätzung oft unbefriedigende Ergebnisse. Algorithmisch zuverlässiger hat sich eine Abschätzung über folgende Beziehung gezeigt:

$$\tilde{\Lambda}_{\text{enko}} = \sqrt{\left\| \frac{\Delta e_c^{(i)}}{n_{\text{obs}} \Delta \tilde{d}} \right\|}. \quad (4.87)$$

Dabei werden durch die Wurzel Schwankungen in  $\Delta \tilde{d}$  „gedämpft“, so dass die Größenordnung der Energie-Korrekturkraft für kleine  $\Delta \tilde{d}$  nicht völlig überschätzt wird. Das Be-



tragszeichen unter der Wurzel stellt einen positiven Ausdruck sicher, da die Schätzung  $\Delta\tilde{d}$  theoretisch auch in das starre Hindernis hinein zeigen könnte.

### Lösung des Referenzbeispiels mit Newmark-KD- $e$

Abbildung 4.15 zeigt die Ergebnisse des Referenzbeispiels, gelöst mit dem Newmark-KD- $e$ -Verfahren. Bei der Initiierung von Kontakt wird jeweils Energie dissipiert und gespeichert, bei Lösen des Kontakts wird die Systemenergie wieder auf den ursprünglichen Wert korrigiert. Wie bei der Berechnung mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM sind die Oszillationen des Kontaktkraft- sowie des Energieverlaufs verglichen mit der entsprechenden Berechnung ohne Energieerhaltung deutlich ausgeprägter, siehe Abbildung 4.8. Für die Geschwindigkeit gilt Äquivalentes. Der Geschwindigkeitsverlauf ist nicht dargestellt, da er prinzipiell dem der „Energy-Momentum-Method“-VUM in Abbildung 4.14 (rechts) entspricht. Als Unterschiede sind etwas geringere Amplituden bei den Oszillationen zu nennen (3,5 m/s gegenüber 4,5 m/s bei der „Energy-Momentum-Method“-VUM). Darüber hinaus weisen sowohl die Kontaktkraft als auch die Geschwindigkeit gegen Ende des Kontakts (ab circa 0,6 Sekunden) einen annähernd oszillationsfreien Verlauf auf.

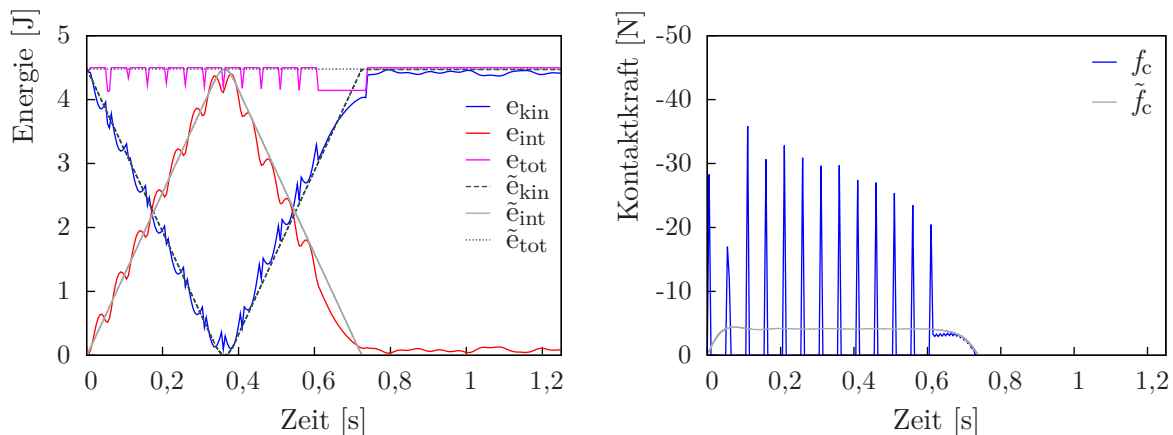


Abbildung 4.15: Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KD- $e$ -Verfahren.

## 4.7 Ein stabilisierter energierhaltender Algorithmus

Im folgenden Abschnitt wird das Energie-Korrekturkraft-Verfahren auf allgemeine Probleme mit großen Deformationen erweitert sowie mit dem Newmark-KS-Integrator und einer Geschwindigkeitsmodifikation zu einem neuen Algorithmus kombiniert. Dieser wird als *Newmark-KS-ve*-Algorithmus bezeichnet und soll Kontakt Ereignisse energierhaltend

modellieren, oszillierende Kontaktkräfte vermeiden und physikalisch sinnvolle Kontaktgeschwindigkeiten sicherstellen. Die Geschwindigkeitsmodifikation erfolgt in dieser Arbeit in Kombination mit der NTS-Diskretisierung. Die Kombination mit anderen räumlichen Kontaktdiskretisierungen ist aber problemlos möglich.

Wie bereits in Abschnitt 4.5.3 angedeutet, kann aus der Newmark-KS-Stabilisierung theoretisch ein Energiezuwachs resultieren. Auch wenn solch ein Verhalten im Rahmen der Untersuchungen dieser Arbeit nicht beobachtet wurde, kann die Energie-Korrekturkraft in diesem Fall dissipativ eingesetzt werden.

### 4.7.1 Strukturgleichung des Newmark-KS-*ve*-Verfahrens

Basis des Newmark-KS-*ve*-Verfahrens ist die Stabilisierung des Newmark-Integrators mit dem Newmark-KS-Algorithmus (Abschnitt 4.5.3). Dieser wiederum beruht auf der dissipativen Modifikation des Newmark-Integrators mit dem Newmark-KD-Verfahren (Abschnitt 4.4.2). Die dort eingeführte Beschleunigungsaufteilung (4.29) wird jetzt zur Berücksichtigung der Energie-Korrekturkraft modifiziert:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} + \bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{\text{c}}. \quad (4.88)$$

Entsprechend muss auch die semidiskrete Bewegungsgleichung (3.28)<sub>1</sub>, ausgewertet zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$ , um die Energie-Korrekturkraft  $\mathbf{f}_{\text{enke}}^{n+1}$  erweitert werden:

$$\mathbf{M}(\mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} + \bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{\text{c}}) + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1} + \mathbf{f}_{\text{c}}^{n+1} + \mathbf{f}_{\text{enke}}^{n+1} = \mathbf{0}. \quad (4.89)$$

Da die Beschleunigungskomponente  $\mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}}$  weiterhin mit Gleichung (4.32)<sub>1</sub> ausgewertet wird, definiert sich die Komponente  $\bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{\text{c}}$  als Reaktion auf die Kontakt- oder die Energie-Korrekturkraft<sup>10</sup>:

$$\bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{\text{c}} = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{f}_{\text{c}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{enke}}^{n+1}). \quad (4.90)$$

In der Verschiebungsapproximation (4.46) des Newmark-KS-Verfahrens wird den obigen Überlegungen folgend der Ausdruck  $\mathbf{a}_{n+1}^{\text{c}}$  durch  $\bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{\text{c}}$  ersetzt:

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}} + \frac{1}{4} \Delta t^2 (\mathbf{a}_n^{\text{int}} + \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}}) + \frac{1}{2} \Delta t^2 \bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{\text{c}}. \quad (4.91)$$

Für eine übersichtliche Darstellung wurden dabei die Newmark-Parameter fest auf die Werte  $\beta = 1/4$  und  $\gamma = 1/2$  gesetzt. Auflösen von Gleichung (4.91) nach  $\bar{\mathbf{a}}_{n+1}^{\text{c}}$  und Einsetzen des Resultats in Gleichung (4.89) führt dann zusammen mit  $\mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}}$  aus Gleichung

---

<sup>10</sup>An einem einzelnen Kontaktknoten wirken beide Kräfte nicht gleichzeitig.

chung (4.32)<sub>1</sub> auf die nichtlineare effektive Strukturgleichung des Newmark-KS-*ve*-Verfahrens:

$$\mathbf{M} \left[ \frac{4}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) - \mathbf{a}_n^{\text{int}} \right] + (\mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1}) + 2(\mathbf{f}_{\text{c}}^{n+1} + \mathbf{f}_{\text{enکو}}^{n+1}) = \mathbf{0}. \quad (4.92)$$

Hierin definiert sich die Energie-Korrekturkraft eines Knotens  $I$  über folgende Beziehung:

$$\mathbf{f}_{\text{enکو}I}^{n+1} = \sum_{K=1}^{n_s} (B_{IK}^c \mathbf{n}_K \Lambda_K^{\text{enکو}})^{n+1}. \quad (4.93)$$

Die Multiplikatoren  $\Lambda_K^{\text{enکو}}$  sind dabei den Slave-Kontaktknoten zugeordnet. Die Übertragung der Multiplikatoren geschieht algorithmisch äquivalent zu der Übertragung der Kontaktspannung.

## 4.7.2 Energieveränderung durch die Kontaktbehandlung

Im Folgenden ist die Berechnung der Energieveränderung durch die Kontaktbehandlung für den Newmark-KS-*ve*-Algorithmus dargestellt. Diese setzt sich aus einem Anteil aufgrund der Newmark-KD-Modifikation, einem Anteil aufgrund der Newmark-KS-Stabilisierung und einem Anteil aufgrund der Geschwindigkeitsmodifikation zusammen. Die einzelnen Anteile werden zusätzlich jeweils in die Beiträge der beteiligten Slave-Kontaktknoten aufgeteilt, um die Energieveränderung bei Lösen des Kontakts knotenbasiert wieder korrigieren zu können.

### Energieveränderung durch die Newmark-KD-Modifikation

Die Energieveränderung aufgrund der Newmark-KD-Modifikation kann durch Auswertung von Gleichung (4.35) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \Delta e_{\text{c}}^{(i)} &= \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{c}}^{n+1} = \sum_{I=1}^{n_c} \Delta \mathbf{d}_I \cdot \mathbf{f}_{\text{c}I}^{n+1} = \sum_{I=1}^{n_c} \Delta \mathbf{d}_I \cdot \sum_{K=1}^{n_s} (B_{IK}^c \mathbf{n}_K z_{\text{n}K})^{n+1} \\ &= \sum_{K=1}^{n_s} (\mathbf{n}_K z_{\text{n}K})^{n+1} \cdot \sum_{I=1}^{n_c} (B_{IK}^c \Delta \mathbf{d}_I)^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Der Anteil eines Slave-Kontaktknotens  $K$  ist dabei durch folgende Beziehung definiert:

$$\Delta e_{\text{c}K}^{(i)} = (\mathbf{n}_K z_{\text{n}K})^{n+1} \cdot \sum_{I=1}^{n_c} (B_{IK}^c \Delta \mathbf{d}_I)^{n+1}. \quad (4.95)$$

### Energieveränderung durch die Newmark-KS-Stabilisierung

Die Energieveränderung durch die Newmark-KS-Stabilisierung wird ausgehend von Gleichung (4.67) formuliert:

$$\begin{aligned}
 \Delta e_c^{(iii)} &= (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}})^\top \mathbf{f}_{\text{pred}} = \sum_{I=1}^{n_c} (\mathbf{d}_{n+1}^I - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}I}) \cdot \mathbf{f}_{\text{pred}}^I \\
 &= \sum_{I=1}^{n_c} (\mathbf{d}_{n+1}^I - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}I}) \cdot \sum_{K=1}^{n_s} (B_{IK}^c \mathbf{n}_K \Lambda_{nK})^{n+1} \\
 &= \sum_{K=1}^{n_s} (\mathbf{n}_K \Lambda_{nK})^{n+1} \cdot \sum_{I=1}^{n_c} \left[ B_{IK}^c (\mathbf{d}_{n+1}^I - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}I}) \right]^{n+1}.
 \end{aligned} \tag{4.96}$$

Der Anteil eines einzelnen Slave-Kontaktknotens  $K$  lautet dementsprechend:

$$\Delta e_{cK}^{(iii)} = (\mathbf{n}_K \Lambda_{nK})^{n+1} \cdot \sum_{I=1}^{n_c} \left[ B_{IK}^c (\mathbf{d}_{n+1}^I - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}I}) \right]^{n+1}. \tag{4.97}$$

### Ermittlung der modifizierten Kontaktgeschwindigkeiten

Durch die Geschwindigkeitsmodifikation soll die Geschwindigkeit der Kontaktknoten so verändert werden, dass für einen aktiven Kontaktknoten  $K$  die Auswertung der Normalklaffung (4.8) auf die Bedingung  $g_{nK}(\mathbf{v}_{n+1}^{\text{mod}K}) = 0$  führt. Dabei ist anstatt der Knotenposition  $\mathbf{x}_{n+1}^K$  die modifizierte Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{n+1}^{\text{mod}K}$  einzusetzen. Gleichzeitig soll die Geschwindigkeitsmodifikation jedoch nicht den Körperimpuls verändern. Eine Modifikation, welche diesen Bedingungen genügt und zusätzlich energetisch dissipativ ist, kann durch das folgende Gleichungssystem definiert werden<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1}^{\text{mod}} - \mathbf{v}_{n+1}) + \mathbf{f}_{\text{mod}}^{n+1} &= \mathbf{0} \\
 g_{nK}(\mathbf{v}_{n+1}^{\text{mod}K}) &= 0 \quad \forall K \in \mathcal{A}.
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

Der Beitrag eines einzelnen Knotens  $I$  zu  $\mathbf{f}_{\text{mod}}^{n+1}$  bestimmt sich dabei als Summe über die Beiträge der einzelnen Slave-Kontaktknoten  $K$ :

$$\mathbf{f}_{\text{mod}I}^{n+1} = \sum_{K=1}^{n_s} B_{IK}^c \mathbf{n}_K \Lambda_{nK}^v. \tag{4.99}$$

---

<sup>11</sup>Für eine ausführliche Diskussion im Zusammenhang mit einer ähnlichen Modifikation sei auf SOLBERG UND PAPADOPOULOS (1998) verwiesen.

Sind die skalaren Modifikationswerte  $\Lambda_{nK}^v$  durch Lösen des Gleichungssystems (4.98) bekannt, lautet die modifizierte Geschwindigkeit eines Knotens  $I$  folgendermaßen:

$$\mathbf{v}_{n+1}^{\text{mod}I} = \mathbf{v}_{n+1}^I - \frac{1}{M_{II}} \sum_{K=1}^{n_s} B_{IK}^c \mathbf{n}_K \Lambda_{nK}^v. \quad (4.100)$$

In Gleichung (4.98) bzw. (4.99) hängen die Massenmatrix  $\mathbf{M}$ , der Operatorwert  $B_{IK}^c$  und die Knoten-Normale  $\mathbf{n}_K$  ausschließlich von den Knotenpositionen aber nicht von den Knotengeschwindigkeiten ab. Somit ist Gleichungssystem (4.98) linear in den Geschwindigkeiten und kann ohne Iteration gelöst werden. Da die effektive Strukturgleichung nicht von der aktuellen Geschwindigkeit abhängt, kann dies in einer Nachlaufrechnung geschehen.

### Energieveränderung durch die Geschwindigkeitsmodifikation

Die Veränderung der kinetischen Energie aufgrund der Geschwindigkeitsmodifikation wird zunächst knotenbasiert für alle Kontaktknoten ermittelt. Anschließend werden die einzelnen Anteile mit dem Projektionsoperator  $\bar{B}_{IK}^c$  den jeweiligen Slave-Kontaktknoten zugeordnet:

$$\Delta e_{cK}^{(ii)} = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^{n_c} \bar{B}_{IK}^c M_{II} \left( \mathbf{v}_{n+1}^I \cdot \mathbf{v}_{n+1}^I - \mathbf{v}_{n+1}^{\text{mod}I} \cdot \mathbf{v}_{n+1}^{\text{mod}I} \right). \quad (4.101)$$

Der Operatorwert  $\bar{B}_{IK}^c$  stellt dabei eine Normierung des Eintrags  $B_{IK}^c$  eines Knotens  $I$  dar. Normiert wird bezüglich der Summe der Einträge zwischen Knoten  $I$  und allen aktiven Slave-Kontaktknoten  $K$ :

$$\bar{B}_{IK}^c = \frac{B_{IK}^c}{\sum_{K=1}^{n_{sa}} B_{IK}^c}. \quad (4.102)$$

Wie bereits erwähnt ist diese Definition für eine Umsetzung mit dem NTS-Algorithmus konzipiert.

### 4.7.3 Bestimmung der Energie-Korrekturkraft

Die Energie-Korrekturkraft soll die im vorausgegangenen Abschnitt 4.7.2 beschriebene Energieveränderung aufgrund von Kontaktereignissen wieder rückgängig machen. Dazu wird zunächst die globale Energieveränderung durch die Energie-Korrekturkraft berech-

net und umgeformt:

$$\begin{aligned}\Delta e_{\text{enکو}} &= \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{enکو}}^{n+1} = \sum_{I=1}^{n_c} \Delta \mathbf{d}_I \cdot \mathbf{f}_{\text{enکو}I}^{n+1} = \sum_{I=1}^{n_c} \Delta \mathbf{d}_I \cdot \sum_{K=1}^{n_s} \left( B_{IK}^c \mathbf{n}_K \Lambda_K^{\text{enکو}} \right)^{n+1} \\ &= \sum_{K=1}^{n_s} \left( \mathbf{n}_K \Lambda_K^{\text{enکو}} \right)^{n+1} \cdot \sum_{I=1}^{n_c} \left( B_{IK}^c \Delta \mathbf{d}_I \right)^{n+1}.\end{aligned}\quad (4.103)$$

Der Anteil eines einzelnen Slave-Kontaktknotens lautet dabei:

$$\Delta e_{\text{enکو}K} = \left( \mathbf{n}_K \Lambda_K^{\text{enکو}} \right)^{n+1} \cdot \sum_{I=1}^{n_c} \left( B_{IK}^c \Delta \mathbf{d}_I \right)^{n+1}.\quad (4.104)$$

Eine Energiekorrektur  $\Delta e_{\text{enکو}K} \neq 0$  soll nur dann vorgenommen werden, wenn Slave-Kontaktknoten  $K$  im letzten Zeitschritt aktiv war und während des aktuellen Zeitschritts inaktiv wird. Ist diese Situation nicht gegeben, gilt  $\Lambda_K^{\text{enکو}} = 0$ . Liegt die beschriebene Situation aber vor, muss mit den Gleichungen (4.95), (4.97) und (4.101) die Energieveränderung zwischen dem Zeitschritt, in welchem Knoten  $K$  aktiv wurde, und dem aktuellen Zeitschritt berechnet werden:

$$\Delta e_{cK}^{\text{tot}} = \sum_{n=1}^{n_{\text{max}}} \left( -\Delta e_{cK}^{n(i)} - \Delta e_{cK}^{n(ii)} + \Delta e_{cK}^{n(iii)} \right) \stackrel{!}{=} \Delta e_{\text{enکو}K}.\quad (4.105)$$

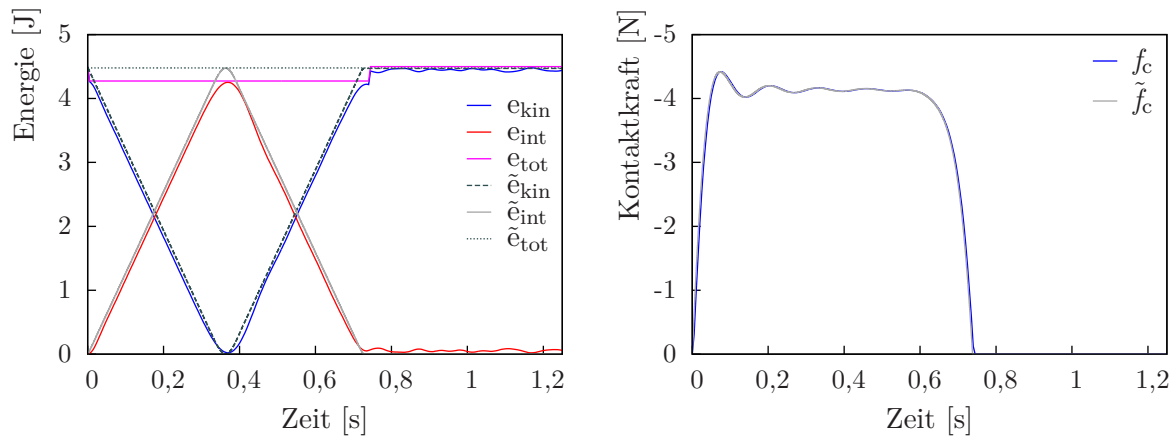
$n_{\text{max}}$  bezeichnet dabei die Spanne der entsprechenden Zeitschritte. Mit Gleichung (4.103) und dem Resultat aus Gleichung (4.105) kann dann der skalare Energie-Korrekturwert für den aktuellen Zeitschritt bestimmt werden:

$$\left( \Lambda_K^{\text{enکو}} \right)^{n+1} = \frac{\Delta e_{cK}^{\text{tot}}}{\mathbf{n}_K^{n+1} \cdot \sum_{I=1}^{n_c} \left( B_{IK}^c \Delta \mathbf{d}_I \right)^{n+1}}.\quad (4.106)$$

Entsprechend den Ausführungen in Abschnitt 4.6.3 ist auch in Gleichung (4.106) wieder eine Abschätzung im ersten Iterationsschritt notwendig. Die aktuelle Energie-Korrekturkraft kann schließlich mit Gleichung (4.93) bestimmt werden.

### Lösung des Referenzbeispiels mit Newmark-KS-*ve*

Abbildung 4.16 zeigt die Lösung des Referenzbeispiels mit dem Newmark-KS-*ve*-Verfahren. Der Kontaktkraft- sowie der Energieverlauf sind frei von Oszillationen. Der Kontaktkraftverlauf entspricht aufgrund der Newmark-KS-Modifikation exakt der numerischen Referenzlösung. Durch die Geschwindigkeitsmodifikation zeigt sich bei Lösen des Kontakts ein deutlich besseres Verhalten als in der entsprechenden Berechnung ohne Geschwindigkeitsmodifikation, siehe Abbildung 4.12. Der Energieverlauf zeigt bei der



**Abbildung 4.16:** Referenzbeispiel: Lösung mit dem Newmark-KS-*ve*-Verfahren.

Initiierung des Kontakts eine Verkleinerung der Systemenergie aufgrund der Geschwindigkeitsmodifikation. Mit der Energie-Korrekturkraft wird die Systemenergie bei Lösen des Kontakts wieder hergestellt.

## 4.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die zeitliche Diskretisierung der semidiskreten Bewegungsgleichung mit dem Newmark-Verfahren und alternativ mit der „Energy-Momentum-Method“ vorgestellt. Neben der zeitlichen Diskretisierung im Allgemeinen lag der Schwerpunkt im Speziellen auf der Untersuchung des Einflusses von Kontaktereignissen auf die zeitliche Diskretisierung sowie auf die Systemantwort des diskretisierten Problems. Hierzu wurde ein Referenzbeispiel definiert, welches den dynamischen Kontakt zwischen einem deformierbaren Stab und einem starren Hindernis modelliert. Die Lösung mit dem Newmark-Verfahren führte dabei auf Ab- und Zunahmen in der Systemenergie, Oszillationen in der Kontaktkraft, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung. In Summe wurde die Systemenergie deutlich vergrößert. Eine Diskretisierung mit der „Energy-Momentum-Method“ zeigte ein energetisch stabiles Verhalten, führte aber ebenfalls auf oszillierende Systemgrößen.

Mithilfe einer prinzipiellen Betrachtung wurde anschließend untersucht, wann und warum sich die Systemenergie durch Kontaktereignisse verändert. Dabei konnte gezeigt werden, dass die „Energy-Momentum-Method“ und der Newmark-Integrator bei der Initiierung von Kontakt Energie dissipieren. Durch das Lösen des Kontakts wird die Systemenergie mit dem Newmark-Integrator aber wieder vergrößert. Der Grund hierfür ist die Kontaktkraft des letzten Zeitschritts, die über den Beschleunigungsvektor des letzten Zeitschritts in der Bewegungsgleichung enthalten ist. Durch eine Modifikation des

Beschleunigungsansatzes nach KANE U. A. (1999) kann dies verhindert und ein dissipatives Verhalten sichergestellt werden. Die Bewegungsgleichung der „Energy-Momentum-Method“ enthält durch ihre Konstruktion a priori nur den Beschleunigungsvektor des aktuellen Zeitschritts, wodurch eine dissipative Kontakt-Behandlung sichergestellt ist.

Der darauf folgende Abschnitt beschäftigte sich mit der Frage, warum die Kontaktkraft oszilliert und wie dies verhindert werden kann. Anhand einer schematischen Untersuchung wurde demonstriert, dass die Erfüllung der Kontaktbedingungen in Kombination mit einem Integrator wie dem Newmark-Verfahren oder der „Energy-Momentum-Method“ zu oszillierenden Beschleunigungen an den kontaktierenden Knoten führt. Infolgedessen resultieren oszillierende Trägheitskräfte, daraus wiederum oszillierende Kontaktkräfte. Mithilfe des Referenzbeispiels wurde gezeigt, dass eine a posteriori Modifikation der Geschwindigkeit schon eine deutlich stabilisierende Wirkung zeigt. Im Zeitschritt der Kontaktinitiierung ergibt sich allerdings immer noch eine unphysikalische Kontaktkraft. Durch eine Modifikation des Integrators können Oszillationen vollständig vermieden werden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde dazu die Stabilisierung nach DEUFLHARD U. A. (2008) untersucht und auf Probleme mit großen Deformationen erweitert. Allerdings führt die Stabilisierung auf eine Veränderung der Energiebilanz. Dadurch kann bei Problemen mit großen Deformationen theoretisch ein nicht dissipativer Anteil in der Energiebilanz entstehen.

In einer weiteren Fragestellung wurde untersucht, wie Kontakt nicht nur energetisch stabil sondern auch energieerhaltend modelliert werden kann. Dabei wurden ausschließlich Verfahren betrachtet, welche diese Anforderungen erfüllen ohne dafür eine Verletzung der Nichtdurchdringungsbedingung zu verwenden. Eine Möglichkeit stellt diesbezüglich die „Velocity-Update-Method“ (LAURSEN UND LOVE 2002) dar, welche in einer Nachlaufrechnung die kinetische Energie um den Betrag der zuvor dissipierten Energie erhöht. Hierzu werden die Knotengeschwindigkeiten entsprechend korrigiert. Infolgedessen ist eine Kombination mit anderen Methoden zur Verbesserung der Kontaktmodellierung, beispielsweise zur Vermeidung von Oszillationen der Kontaktgeschwindigkeiten, jedoch nur schwierig zu realisieren. Mit dem Energie-Korrekturkraft-Verfahren wurde eine neue energieerhaltende Methode vorgestellt. Die durch Kontakt dissipierte Energie wird hierbei knotenweise gespeichert und bei Lösen des Kontakts mithilfe einer Energie-Korrekturkraft wieder freigesetzt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde dazu ein von ARMERO UND PETŐCZ (1998) präsentiertes Konzept erweitert, um die Idee der Energiespeicherung mit einer exakten Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung kombinieren zu können. Eine modulare Kombination des Energie-Korrekturkraft-Verfahrens mit anderen Methoden zur verbesserten Modellierung des Kontakts ist einfach möglich.



Zuletzt wurde das Energie-Korrekturkraft-Verfahren in Verbindung mit der Stabilisierung nach DEUFLHARD U. A. (2008) für Probleme mit großen Deformationen formuliert und mit einer Geschwindigkeitsmodifikation kombiniert. Der resultierende Newmark-KS-*ve*-Algorithmus ist energieerhaltend, vermeidet Oszillationen in der Kontaktkraft und stellt physikalisch sinnvolle Kontaktgeschwindigkeiten sicher. Die einzelnen Strategien sind dabei modular miteinander verknüpft und können unabhängig voneinander modifiziert werden, falls dies erwünscht ist.



---

## Lösung

Das folgende Kapitel widmet sich der Lösung der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung unter Beachtung der momentan aktiven Kontaktbedingungen. Dazu wird in Abschnitt 5.1 zunächst eine geeignete Strategie zur Ermittlung der Menge der aktiven Slave-Kontaktknoten formuliert. Anschließend werden in Abschnitt 5.2 die effektive Strukturgleichung, die Kontaktbedingungen wie auch die Menge der aktiven Slave-Kontaktknoten linearisiert. Die Linearisierung der Kontaktausdrücke ist dabei für die räumliche Kontaktdiskretisierung aus Abschnitt 3.3 dargestellt, welche auf der dualen Mortar-Methode basiert. Für die Linearisierung in Kombination mit einer anderen räumlichen Kontaktdiskretisierung wird an den entsprechenden Stellen auf die Literatur verwiesen. Mit der linearisierten Formulierung kann das nichtlineare Kontaktproblem dann in einer iterativen Prozedur gelöst werden. Abschnitt 5.3 zeigt, dass es aufgrund der dualen Formfunktionen einfach möglich ist, die Knotenwerte der Kontaktspannung aus dem Gleichungssystem zu kondensieren.

### 5.1 Aktive-Mengen-Strategie

Damit die Ungleichheitsbedingungen (3.28)<sub>2</sub>–(3.28)<sub>5</sub> als Gleichheitsbedingungen formuliert werden können, wird die Menge  $\mathcal{S}$  aller Slave-Kontaktknoten in die Menge  $\mathcal{A}$  der aktiv am Kontakt teilnehmenden Knoten und die Menge  $\mathcal{I}$  der inaktiven Knoten mit  $\mathcal{S} = \mathcal{A} \cup \mathcal{I}$  und  $\mathcal{A} \cap \mathcal{I} = \emptyset$  aufgeteilt<sup>1</sup>. Die Bestimmungsgleichungen für  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{I}$  lauten

---

<sup>1</sup>Die Menge  $\mathcal{A}$  wurde bereits in Kapitel 4.5.3 in Zusammenhang mit der iterativen Bestimmung des Verschiebungsprädiktors eingeführt.

dabei folgendermaßen:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{n+1} &:= \left\{ I \in \mathcal{S} \mid z_{nI} - c_n \tilde{g}_{nI} > 0 \right\}_{n+1}, \\ \mathcal{I}_{n+1} &:= \left\{ I \in \mathcal{S} \mid z_{nI} - c_n \tilde{g}_{nI} \leq 0 \right\}_{n+1},\end{aligned}\quad c_n > 0. \quad (5.1)$$

Ein Knoten  $I$  ist damit durch eine Klaffung  $\tilde{g}_{nI} \geq 0$  inaktiv oder wird durch eine Zugspannung  $z_{nI} \leq 0$  inaktiv. Demgegenüber wird ein Knoten  $I$  durch eine unphysikalische Durchdringung  $\tilde{g}_{nI} < 0$  aktiv bzw. bleibt bei einer Druckspannung  $z_{nI} \geq 0$  bei gleichzeitigem  $\tilde{g}_{nI} = 0$  aktiv. Der Parameter  $c_n$  soll dabei den Unterschied in den Größenordnungen zwischen  $z_{nI}$  und  $\tilde{g}_{nI}$  korrigieren, um in einer numerischen Berechnung verfälschte Ergebnisse aufgrund von Rechenungenauigkeiten zu vermeiden. Insofern ist es günstig, für  $c_n$  einen positiven Wert in der Größenordnung des E-Moduls zu wählen (HÜEBER UND WOHLMUTH 2005). Sind mit Gleichung (5.1) die Mengen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{I}$  ermittelt, kann für aktive Knoten eine exakte Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung und für inaktive Knoten eine Kontaktspannung identisch null gefordert werden:

$$\begin{aligned}(\tilde{g}_{nI})_{n+1} &= 0 \quad \forall I \in \mathcal{A}_{n+1} \\ (z_{nI})_{n+1} &= 0 \quad \forall I \in \mathcal{I}_{n+1} \\ (z_{\tau\beta})_{n+1}^I &= 0 \quad \forall I \in \mathcal{S}.\end{aligned}\quad (5.2)$$

Aufgrund der reibungsfreien Formulierung verschwinden die tangentialen Kontaktspannungskomponenten auch für die aktiven Slave-Kontaktknoten.

Die Ermittlung der aktiven Menge nach Gleichung (5.1) kann außerhalb der Iterationschleife für die übrigen Nichtlinearitäten durch eine zusätzliche Iterationsschleife erfolgen. Die effektive Strukturgleichung wird dann zusammen mit Gleichung (5.2) in einer inneren Schleife mit festen Mengen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{I}$  iterativ gelöst. Anschließend werden  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{I}$  in der äußeren Schleife aktualisiert. Falls sich dabei ein Unterschied zu den bisherigen Mengen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{I}$  ergibt, folgt ein erneuter Aufruf der inneren Schleife mit den aktualisierten Mengen. Alternativ und algorithmisch effizienter erfolgt die Bestimmung der aktiven Menge zusammen mit der Gleichgewichtsiteration in einer gemeinsamen Schleife. Mathematisch motiviert wird diese Strategie durch die Definition einer Funktion, welche einerseits feststellt, ob ein Slave-Kontaktknoten gemäß Gleichung (5.1) aktiv oder inaktiv ist, andererseits je nach Resultat entweder Bedingung (5.2)<sub>1</sub> oder Bedingung (5.2)<sub>2</sub> umsetzt. Dem Vorgehen in HÜEBER UND WOHLMUTH (2005) oder HINTERMÜLLER U. A. (2003) folgend kann dazu die knotenspezifischen Komplementaritätsfunktion  $C_I$  („complementarity-function“) verwendet werden:

$$C_I(\mathbf{z}_I, \mathbf{d})_{n+1} := (z_{nI})_{n+1} - \max\left\{0, z_{nI} - c_n \tilde{g}_{nI}\right\}_{n+1} = 0 \quad \forall I \in \mathcal{S}. \quad (5.3)$$

Ist für einen Slave-Kontaktknoten  $I$  die Differenz  $(z_{nI} - c_n \tilde{g}_{nI})$  kleiner oder gleich null, resultiert aus Gleichung (5.3) die Forderung  $(z_{nI})_{n+1} = 0$ . Dadurch wird Knoten  $I$  implizit der Menge  $\mathcal{I}$  aus Gleichung (5.1)<sub>2</sub> zugeordnet. Gleichzeitig wird die entsprechende Forderung in Gleichung (5.2)<sub>2</sub> umgesetzt. Ist der Ausdruck  $(z_{nI} - c_n \tilde{g}_{nI})$  größer null, verschwinden in Gleichung (5.3) die spannungsabhängigen Terme und die Bedingung  $\tilde{g}_{nI} = 0$  resultiert. Somit wird Knoten  $I$  der aktiven Menge  $\mathcal{A}$  aus Gleichung (5.1)<sub>1</sub> zugeordnet und die zugehörige Vorgabe aus Gleichung (5.2)<sub>1</sub> umgesetzt. Die Komplementaritätsfunktion kann im Gegensatz zu Gleichung (5.1) mit geeigneten Werkzeugen linearisiert werden (siehe Abschnitt 5.2.2). Damit ist die mathematische Grundlage für eine einzige Iterationsschleife zur Behandlung aller Nichtlinearitäten gegeben.

Die in diesem Abschnitt beschriebene Auflösung der Kontakt-Ungleichheitsbedingungen durch die Definition einer aktiven Menge, die sowohl von der Verschiebung als auch von der Kontaktspannung abhängt, ist in der Literatur als *Primal-Duale Aktive-Mengen-Strategie* bekannt. Für eine ausführlichere Beschreibung der Hintergründe sei beispielsweise auf ALART UND CURNIER (1991), HINTERMÜLLER U. A. (2003), HÜEBER UND WOHLMUTH (2005) oder CHRISTENSEN U. A. (1998) verwiesen.

## 5.2 Linearisierung

Bevor im Weiteren auf die Linearisierung der effektiven Strukturgleichung und der Kontaktbedingungen eingegangen wird, seien die grundlegenden Gleichungen noch einmal kompakt zusammengefasst. Die effektive Strukturgleichung wird dazu in Abhängigkeit der zeitlichen Diskretisierung durch den Residuumsvektor  $\mathbf{r}$  definiert<sup>2</sup>:

$$\mathbf{r}_{n+1} = \begin{cases} \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) - \tilde{\beta} \mathbf{a}_n \right] + \mathbf{f}_N + \mathbf{f}_c^{n+1} & \text{(N)} \\ \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) - \tilde{\beta} \mathbf{a}_n^{\text{int}} \right] + \mathbf{f}_N + \frac{1}{2\beta} \mathbf{f}_c^{n+1} & \text{(N-KD)} \\ \mathbf{M} \left[ \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) - \tilde{\beta} \mathbf{a}_n^{\text{int}} \right] + \mathbf{f}_N + \frac{1}{2\beta} \mathbf{f}_c^{n+1} & \text{(N-KS)} \\ \mathbf{M} \left[ \frac{4}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) - \mathbf{a}_n^{\text{int}} \right] + \mathbf{f}_N + 2(\mathbf{f}_c^{n+1} + \mathbf{f}_{\text{enko}}^{n+1}) & \text{(N-KS-e)} \\ \mathbf{M} \left[ \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) \right] + \mathbf{f}_{\text{EMM}} + \mathbf{f}_c(\mathbf{d}_{n+1/2}, \mathbf{z}^{\text{algo}}) & \text{(EMM)}. \end{cases} \quad (5.4)$$

<sup>2</sup>Für eine statische Lösung kann Gleichung (5.4)<sub>1</sub> mit  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$  verwendet werden.

Dabei wurden in Gleichung (5.4) die folgenden Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_N &= \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1} - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1} \\
 \mathbf{f}_{\text{EMM}} &= \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1/2}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1/2} \\
 \tilde{\beta} &= \frac{1}{2\beta} (1 - 2\beta).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Die Kontaktbedingungen sind definiert durch Gleichung (5.2) oder alternativ durch Gleichung (5.3) in Kombination mit Gleichung (5.2)<sub>3</sub>. Zusammenfassend muss damit die effektive Strukturgleichung in Kombination mit der Komplementaritätsfunktion und der Tangentialbedingung gelöst werden:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{0} \\
 (\tilde{g}_{nI})_{n+1} &= 0 \quad \forall I \in \mathcal{A}_{n+1} \\
 (z_{nI})_{n+1} &= 0 \quad \forall I \in \mathcal{I}_{n+1} \\
 (z_{\tau\beta})_{n+1}^I &= 0 \quad \forall I \in \mathcal{S}.
 \end{aligned} \right\} C_I(\mathbf{z}_I, \mathbf{d})_{n+1} = 0 \quad \forall I \in \mathcal{S} \tag{5.6}$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird in den restlichen Gleichungen dieses Kapitels auf die Notierung des Zeitschritt-Indexes verzichtet, sofern sich eine Größe auf den Zeitpunkt  $t_{n+1}$  bezieht.

### 5.2.1 Linearisierung der effektiven Strukturgleichung

Als Basis für eine iterative Lösung der nichtlinearen effektiven Strukturgleichung wird der Residuumsvektor (5.6)<sub>1</sub> in eine mehrdimensionale Taylorreihe entwickelt. Ausgehend von einer bereits ermittelten Näherungslösung  $(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r)$  lautet die Bestimmungsgleichung für die korrekte Lösung  $(\mathbf{d}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1})$  dann folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}(\mathbf{d}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) &= \mathbf{r}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r) + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\partial^q \mathbf{r}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r)}{(\partial \mathbf{d}^r)^q q!} (\mathbf{d}^{r+1} - \mathbf{d}^r)^q \\
 &\quad + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r)}{\partial \mathbf{z}^r}}_{\mathbf{B}^c} (\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r) = \mathbf{0}.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Da der Residuumsvektor linear in der Kontaktspannung ist, entfallen in Gleichung (5.7) alle partiellen Ableitungen nach  $\mathbf{z}$  mit einem Index  $q > 1$ . Strebt die Differenz  $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}^{r+1} - \mathbf{d}^r$  gegen den Nullvektor, werden alle verschiebungsabhängigen Terme mit einem Index  $q > 1$  vernachlässigbar klein gegenüber den konstanten und linearen Termen. Damit kann eine verbesserte Näherungslösung  $\mathbf{d}^{r+1}$  im Rahmen eines iterativen Lö-

sungsprozesses für kleine  $\Delta \mathbf{d}$  mit der linearen Approximation

$$\mathbf{r}(\mathbf{d}^{r+1}, \mathbf{z}^{r+1}) \approx \mathbf{r}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r) + \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r)}{\partial \mathbf{d}^r} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{B}^c(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r) (\mathbf{z}^{r+1} - \mathbf{z}^r) = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

ermittelt werden. Im Gegensatz zum vorangegangenen Kapitel bezeichnet  $\Delta \mathbf{d}$  jetzt das Verschiebungsincrement zwischen zwei Iterationsschritten und nicht mehr zwischen zwei Zeitschritten. Im Allgemeinen steht  $\Delta(\bullet)^r$  für die inkrementelle Änderung der Größe  $(\bullet)$  unter der inkrementellen Verschiebungsänderung  $\Delta \mathbf{d}$ :  $\Delta(\bullet)^r = \frac{\partial(\bullet)^r}{\partial \mathbf{d}^r} \Delta \mathbf{d}$ . Der Zeitschritt  $\Delta t$  bezeichnet aber weiterhin die Differenz zwischen den Zeitpunkten  $t_{n+1}$  und  $t_n$ . Durch Umformen von Gleichung (5.8) resultiert schließlich ein lineares Gleichungssystem, welches für eine Ermittlung der Unbekannten noch durch die Kontaktbedingungen ergänzt werden muss:

$$\underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r)}{\partial \mathbf{d}^r}}_{\mathbf{K}_{\text{eff}}^r} \Delta \mathbf{d} + \mathbf{B}^c(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r) \mathbf{z}^{r+1} = - \left[ \underbrace{\mathbf{r}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r) - \mathbf{B}^c(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r) \mathbf{z}^r}_{\mathbf{r}_{\text{mod}}} \right]. \quad (5.9)$$

In Abhängigkeit der zeitlichen Diskretisierung berechnet sich die effektive tangentialsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{eff}}^r$  dabei wie folgt:

$$\mathbf{K}_{\text{eff}}^r = \begin{cases} \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}(\mathbf{d}^r)}{\partial \mathbf{d}^r} + \frac{\partial \mathbf{f}_c^{n+1}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r)}{\partial \mathbf{d}^r} & (\text{N}), (\text{N-KD}), (\text{N-KS}) \\ \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}(\mathbf{d}^r)}{\partial \mathbf{d}^r} + \frac{\partial \mathbf{f}_c^{n+1}(\mathbf{d}^r, \mathbf{z}^r)}{\partial \mathbf{d}^r} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{enke}}^{n+1}(\mathbf{d}^r, \Lambda_{\text{enke}}^r)}{\partial \mathbf{d}^r} & (\text{N-KS-e}) \\ \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1/2}^r)}{\partial \mathbf{d}^r} + \frac{\partial \mathbf{f}_c(\mathbf{d}_{n+1/2}^r, \mathbf{z}^{\text{algo}^r})}{\partial \mathbf{d}^r} & (\text{EMM}). \end{cases} \quad (5.10)$$

Für die Bestimmung der Verschiebungsableitung der internen Kräfte in Gleichung (5.10) sei im Rahmen des Newmark-Verfahrens auf BELYTSCHKO U. A. (2008) und im Rahmen der „Energy-Momentum-Method“ auf SIMO UND TARNOW (1992) oder GONZALEZ (2000) verwiesen.

In Kombination mit der NTS-Diskretisierung wird die Verschiebungsableitung der Kontaktkräfte aus WRIGGERS (2002) übernommen. Für Einkörperkontaktprobleme kommt die Formulierung aus HARTMANN (2007) zum Einsatz. Bei einer zeitlichen Diskretisierung mit der „Energy-Momentum-Method“ werden dabei alle verschiebungsabhängigen Operatoren mit  $\mathbf{d}_{n+1/2}^r$  ausgewertet, andernfalls mit  $\mathbf{d}_{n+1}^r$ . Für die räumliche Kontaktdiskretisierung aus Kapitel 3.3, welche auf der dualen Mortar-Methode basiert, sind die entsprechenden Gleichungen im Folgenden dargestellt.

Die Verschiebungsableitung der Energie-Korrekturkraft wird mit Gleichung (4.93) und Gleichung (4.106) bestimmt. Die hierzu erforderlichen Ableitungen der Knoten-Normalen  $\mathbf{n}_K$  und des Projektionsoperators  $B_{IK}^c$  können aus der Verschiebungsableitung der Kontaktkraft übernommen werden.

### Inkrementelle Änderung des Kontaktkraftvektors

Mit den Gleichungen (3.24) und (3.25) kann die inkrementelle Änderung des Kontaktkraftvektors in kompakter Schreibweise durch die Vektoren  $\mathbf{f}_c^S \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_s}$  und  $\mathbf{f}_c^M \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_m}$  angegeben werden:

$$\Delta \mathbf{f}_c^r = \Delta \left[ \mathbf{0}, -\mathbf{M}_{\mathcal{M}}, \mathbf{D}_{\mathcal{S}} \right]_r^T \mathbf{z}^{r+1} = \left[ \mathbf{0}, \Delta \mathbf{f}_c^M, \Delta \mathbf{f}_c^S \right]_r^T. \quad (5.11)$$

Die inkrementellen Änderungen  $\Delta \mathbf{f}_c^S$  bzw.  $\Delta \mathbf{f}_c^M$  berechnen sich aus der Assemblierung der einzelnen Anteile  $\Delta \mathbf{f}_{c_e}^S$  der Slave-Elemente bzw.  $\Delta \mathbf{f}_{c_m}^M$  der Segmente:

$$\left( \Delta \mathbf{f}_c^S \right)^r = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{slele}}} \left( \Delta \mathbf{f}_{c_e}^S \right)^r, \quad \left( \Delta \mathbf{f}_c^M \right)^r = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{slele}}} \bigcup_{m=1}^{n_{\text{seg}}} \left( \Delta \mathbf{f}_{c_m}^M \right)^r. \quad (5.12)$$

Für zweidimensionale Probleme wird pro Slave-Element bzw. pro Segment auf jeweils zwei Slave-Kontaktknoten assembliert,  $\Delta \mathbf{f}_{c_e}^S \in \mathbb{R}^4$  bzw.  $\Delta \mathbf{f}_{c_m}^M \in \mathbb{R}^4$ , siehe auch Anhang A.4.3. Im Zusammenhang mit dreidimensionalen Problemen sei auf PUSO UND LAURSEN (2004a) oder POPP U. A. (2010) verwiesen. Die zusätzlichen Linearisierungsanteile aufgrund der Modifikationen zur konsistenten Behandlung von Rändern aus Abschnitt 3.4 werden in Anhang A.4.4 und Anhang A.4.5 hergeleitet.

## 5.2.2 Linearisierung der Kontaktbedingungen

In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Aktualisierung der aktiven Menge zusammen mit der Gleichgewichtssiteration in einer gemeinsamen Schleife. Die Linearisierung der Kontaktbedingungen setzt sich somit aus der Linearisierung der Komplementaritätsfunktion (5.3) und der Linearisierung der Tangentialbedingungen (5.2)<sub>3</sub> zusammen.

### Linearisierung der Komplementaritätsfunktion

Aufgrund des nicht glatten Verhaltens des  $\max\{\bullet\}$ -Operators ist auch die Komplementaritätsfunktion (5.3) nicht glatt und damit nicht an allen Stellen eindeutig differenzierbar. Aus diesem Grund ist für die Linearisierung der Komplementaritätsfunktion zuerst die



Definition einer allgemeinen Ableitung für den  $\max\{\bullet\}$ -Operator notwendig (HINTERMÜLLER U. A. 2003; HÜEBER UND WOHLMUTH 2005):

$$f(x) = \max\{a, x\} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq a \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (5.13)$$

Ist das Argument  $x$  wie in Gleichung (5.3) selbst eine Funktion, muss noch die entsprechende innere Ableitung berücksichtigt werden. Die Linearisierung von Gleichung (5.3) führt dann unter Beachtung von Gleichung (5.13) für einen Slave-Kontaktknoten  $I$  auf das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned} (z_{nI} - c_n \tilde{g}_{nI}) \leq 0 & \quad \Rightarrow I \in \mathcal{I}, & \quad \mathbf{z}_I = \mathbf{0} \\ (z_{nI} - c_n \tilde{g}_{nI}) > 0 & \quad \Rightarrow I \in \mathcal{A}, & \quad \underbrace{\frac{\partial \tilde{g}_{nI}(\mathbf{d}^r)}{\partial \mathbf{d}^r}}_{\Delta(\tilde{g}_{\mathcal{A}_n}^r)_I} \Delta \mathbf{d} = -\tilde{g}_{nI}(\mathbf{d}^r). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dabei wurde in Gleichung (5.14)<sub>1</sub> für inaktive Knoten bereits die Tangentialbedingung  $(z_{\tau\beta})_I = 0$  aus Gleichung (5.2)<sub>3</sub> beachtet. Die inkrementelle Änderung  $\Delta(\tilde{g}_{\mathcal{A}_n}^r)_I$  der Normalklaffung für aktive Slave-Kontaktknoten ist im Folgenden dargestellt.

### Inkrementelle Änderung der Normalklaffung

Wie die Linearisierung der Kontaktkraft wird auch die Linearisierung (5.14)<sub>2</sub> der Nichtdurchdringungsbedingung in kompakter Matrix-Vektor-Schreibweise formuliert. Dazu werden zunächst die Normalklaffungswerte (3.26) aller aktiven Slave-Kontaktknoten im Vektor  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n} \in \mathbb{R}^{n_{sa}}$  zusammengefasst. Mit den Operatoren  $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^S \in \mathbb{R}^{n_{sa} \times (n_{\dim} n_s)}$  und  $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^M \in \mathbb{R}^{n_{sa} \times (n_{\dim} n_m)}$  lautet dessen inkrementelle Änderung dann folgendermaßen:

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^r = \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^1 (\mathbf{d}^S)^r + \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^2 (\mathbf{d}^S, \mathbf{d}^M)^r = \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^S(\mathbf{d}^r) \Delta \mathbf{d}^S + \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^M(\mathbf{d}^r) \Delta \mathbf{d}^M. \quad (5.15)$$

Der Vektor  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^1$  beinhaltet dabei die Anteile der gewichteten Knotenklaffung, welche ausschließlich von den Koordinaten der Slave-Kontaktknoten und den Slave-Mortar-Matrizen abhängen, siehe auch Gleichung (3.27). Damit kann  $\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^1$  auf Slave-Element-Basis berechnet werden:

$$\Delta (\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^1)^r = \bigcup_{e=1}^{n_{slele}} (\Delta \tilde{\mathbf{g}}_e^1)^r. \quad (5.16)$$

Die Assemblierung erfolgt hierbei ausschließlich in den Operator  $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^S$ . Entsprechend der Definition von  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^1$  enthält  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^2$  die Anteile der gewichteten Knotenklaffung, welche von

den Koordinaten der Master-Kontaktknoten und den Master-Mortar-Matrizen abhängen. Aus diesem Grund muss  $\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^2$  auf Segment-Basis berechnet werden:

$$\Delta \left( \tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^2 \right)^r = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{sele}}} \bigcup_{m=1}^{n_{\text{seg}}} \left( \Delta \tilde{\mathbf{g}}_m^2 \right)^r. \quad (5.17)$$

Da die Segmente auch Funktionen der Slave-Kontaktknoten sind, erhalten beide Operatoren  $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^S$  und  $\mathbf{G}_{\mathcal{A}}^M$  Einträge aus der Ableitung von  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^2$ . Wie bei der Kontaktkraft wird für zweidimensionale Probleme pro Slave-Element bzw. pro Segment auf jeweils zwei Slave-Kontaktknoten assembliert,  $\Delta \tilde{\mathbf{g}}_e^1 \in \mathbb{R}^2$  bzw.  $\Delta \tilde{\mathbf{g}}_m^2 \in \mathbb{R}^2$ . Die Berechnung der entsprechenden Anteile ist in Anhang A.4 dargestellt.

### Linearisierung der Tangentialbedingungen

Letztlich führt die Linearisierung der tangentialen Bedingungen (5.2)<sub>3</sub> für zwei- bzw. für dreidimensionale Probleme auf eine Gleichung bzw. auf zwei Gleichungen pro aktivem Slave-Kontaktknoten:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_I^r \cdot \Delta \boldsymbol{\tau}_{\beta_I}(\mathbf{d}^r) + (\mathbf{z}_I^{r+1} - \mathbf{z}_I^r) \cdot \boldsymbol{\tau}_{\beta_I}(\mathbf{d}^r) &= -\mathbf{z}_I^r \cdot \boldsymbol{\tau}_{\beta_I}(\mathbf{d}^r) \\ \Leftrightarrow \mathbf{z}_I^r \cdot \Delta \boldsymbol{\tau}_{\beta_I}(\mathbf{d}^r) + \mathbf{z}_I^{r+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\beta_I}(\mathbf{d}^r) &= 0 \quad (\text{keine Summation über } \beta). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Die Assemblierung der linken Seite von Gleichungen (5.18)<sub>2</sub> für alle aktiven Slave-Kontaktknoten  $I$  führt dann auf eine globale Matrix-Vektor-Beziehung, wobei für dreidimensionale Probleme pro Slave-Kontaktknoten jeweils zwei Bedingungen auszuwerten sind:

$$\bigcup_I^{n_{\text{sa}}} \left( \mathbf{z}_I^r \cdot \Delta \boldsymbol{\tau}_{\beta_I}^r + \mathbf{z}_I^{r+1} \cdot \boldsymbol{\tau}_{\beta_I}^r \right) = \bar{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}}^r \Delta \mathbf{d}^S + \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^r \left( \mathbf{z}^A \right)^{r+1}. \quad (5.19)$$

In den Operatoren  $\mathbf{T}_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{sa}}(n_{\text{dim}}-1) \times (n_{\text{dim}} n_{\text{s}})}$  bzw.  $\bar{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{sa}}(n_{\text{dim}}-1) \times (n_{\text{dim}} n_{\text{s}})}$  sind dabei die Tangentenvektoren bzw. die Verschiebungsableitungen der Tangentenvektoren aller aktiven Slave-Kontaktknoten zusammengefasst. Der Vektor  $\mathbf{z}^A \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}} n_{\text{sa}}}$  beinhaltet die Kontaktspannungsvektoren aller aktiven Slave-Kontaktknoten.

### 5.2.3 Matrixformulierung des linearisierten Gleichungssystems

Mit den linearisierten Beziehungen aus Abschnitt 5.2.2 kann die Matrixformulierung des linearisierten Kontaktproblems schließlich durch das folgende Gleichungssystem ausge-

drückt werden:

$$\begin{bmatrix}
 \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{N}\mathcal{N}} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{N}\mathcal{M}} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{N}\mathcal{I}} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{N}\mathcal{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{M}\mathcal{N}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\mathcal{M}\mathcal{M}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\mathcal{M}\mathcal{I}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\mathcal{M}\mathcal{A}} & (-\mathbf{M}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{I}})^{\top} & (-\mathbf{M}_{\mathcal{M}}^{\mathcal{A}})^{\top} \\
 \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{I}\mathcal{N}} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{I}\mathcal{M}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\mathcal{I}\mathcal{I}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\mathcal{I}\mathcal{A}} & \mathbf{D}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{A}\mathcal{N}} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{\mathcal{A}\mathcal{M}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{\mathcal{A}\mathcal{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{D}_{\mathcal{S}}^{\mathcal{A}} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{\mathcal{I}} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{G}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{M}} & \mathbf{G}_{\mathcal{A}\mathcal{I}}^{\mathcal{S}} & \mathbf{G}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}^{\mathcal{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
 \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}\mathcal{I}} & \bar{\mathbf{T}}_{\mathcal{A}\mathcal{A}} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_{\mathcal{A}}
 \end{bmatrix}^r
 \begin{bmatrix}
 \Delta \mathbf{d}^{\mathcal{N}} \\
 \Delta \mathbf{d}^{\mathcal{M}} \\
 \Delta \mathbf{d}^{\mathcal{I}} \\
 \Delta \mathbf{d}^{\mathcal{A}} \\
 (\mathbf{z}^{\mathcal{I}})^{r+1} \\
 (\mathbf{z}^{\mathcal{A}})^{r+1}
 \end{bmatrix}
 = -
 \begin{bmatrix}
 \mathbf{r}_{\text{mod}}^{\mathcal{N}} \\
 \mathbf{r}_{\text{mod}}^{\mathcal{M}} \\
 \mathbf{r}_{\text{mod}}^{\mathcal{I}} \\
 \mathbf{r}_{\text{mod}}^{\mathcal{A}} \\
 \mathbf{0} \\
 \tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}\text{n}} \\
 \mathbf{0}
 \end{bmatrix}^r.
 \tag{5.20}$$

Die Matrizen, Operatoren und Vektoren in Gleichung (5.20) sind dabei blockweise aufgeteilt. Einzelne Blöcke eines Vektors beziehen sich jeweils auf die aktiven Slave-Kontaktknoten, die inaktiven Slave-Kontaktknoten, die Master-Kontaktknoten oder auf die verbleibenden Knoten. Einzelne Blöcke einer Matrix oder eines Operators sind mit Bezug auf eine Kombination aus den Knotengruppierungen definiert.

Durch die ersten vier Zeilen des Gleichungssystems (5.20) wird die linearisierte effektive Strukturgleichung (5.9) repräsentiert. Steifigkeitseinträge, die mit einer Tilde gekennzeichnet sind, erhalten bei der Assemblierung Anteile aus der Verschiebungsableitung des Kontaktkraftvektors. Die sechste Zeile resultiert mit Gleichung (5.14) und Gleichung (5.15) aus der Linearisierung der Nichtdurchdringungsbedingung, die siebte Zeile mit den Gleichungen (5.18)<sub>2</sub> und (5.19) aus der Linearisierung der Tangentialbedingungen. Zeile fünf setzt mithilfe der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_{\mathcal{I}} \in \mathbb{R}^{(n_{\text{s}} - n_{\text{sa}}) \times (n_{\text{s}} - n_{\text{sa}})}$  die Kontaktspannung der inaktiven Slave-Kontaktknoten zu null. Wie schon in Gleichung (5.9) angedeutet, wird für die absolute Kontaktspannung und nicht für deren Inkremente gelöst. Dies ist möglich, da das Gleichungssystem linear in der Kontaktspannung ist, und stellt im Folgenden eine Voraussetzung für die Kondensation der Kontaktspannung dar.

## 5.3 Kondensation der Kontaktspannung

Aufgrund der exakten Umsetzung der Kontaktbedingungen mit der Lagrange'schen-Multiplikatoren-Methode enthält das Gleichungssystem (5.20) neben den Knotenverschiebungen auch die Lagrange'schen-Multiplikatoren als Unbekannte. Somit vergrößert sich infolge der Kontaktbehandlung die Dimension des Gleichungssystems. Wird die triviale Bedingung für die inaktiven Knoten aus dem Gleichungssystem herausgenom-

men und sequentiell umgesetzt, verändert zudem das verbleibende Gleichungssystem bei einer Veränderung der aktiven Menge seine Dimension. Insofern ist es erstrebenswert, die Lagrange'schen-Multiplikatoren aus dem Gleichungssystem herauszukondensieren und ausschließlich für die Verschiebungen zu lösen. Aufgrund der dualen Formfunktionen für die Lagrange'schen-Multiplikatoren, welche durch die Biorthogonalitätsbedingung (3.18) definiert sind, besitzt die Slave-Mortar-Matrix  $\mathbf{D}_S$  Diagonalstruktur. Somit ist im Gegensatz zu einer Formulierung mit Standard-Formfunktionen eine Kondensation einfach möglich. Hierzu wird zunächst die vierte Zeile des Gleichungssystems (5.20) nach den Knotenwerten der Kontaktspannung aufgelöst:

$$\left(\mathbf{z}^A\right)^{r+1} = \left(\mathbf{D}_S^A\right)^{-1} \left( -\mathbf{r}_{\text{mod}}^A - \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AN} \Delta \mathbf{d}^N - \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AM} \Delta \mathbf{d}^M - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{AI} \Delta \mathbf{d}^I - \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{AA} \Delta \mathbf{d}^A \right). \quad (5.21)$$

Anschließend führt ein Einsetzen dieser Beziehung in die zweite und siebte Zeile des Gleichungssystems nach einigen Umformungen auf die folgende Matrixformulierung, siehe auch POPP U. A. (2009) für eine ausführlichere Darstellung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\text{eff}}^{NN} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{NM} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{NI} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{NA} \\ \mathbf{K}_{\text{eff}}^{MN} + \hat{\mathbf{M}}_A^T \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AN} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{MM} + \hat{\mathbf{M}}_A^T \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AM} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{MI} + \hat{\mathbf{M}}_A^T \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AI} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{MA} + \hat{\mathbf{M}}_A^T \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AA} \\ \mathbf{K}_{\text{eff}}^{IN} & \mathbf{K}_{\text{eff}}^{IM} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{II} & \tilde{\mathbf{K}}_{\text{eff}}^{IA} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_A^M & \mathbf{G}_{AI}^S & \mathbf{G}_{AA}^S \\ \hat{\mathbf{T}}_A \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AN} & \hat{\mathbf{T}}_A \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AM} & \hat{\mathbf{T}}_A \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AI} - \bar{\mathbf{T}}_{AI} & \hat{\mathbf{T}}_A \mathbf{K}_{\text{eff}}^{AA} - \bar{\mathbf{T}}_{AA} \end{bmatrix}^r \cdots \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^M \\ \Delta \mathbf{d}^I \\ \Delta \mathbf{d}^A \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{\text{mod}}^N \\ \mathbf{r}_{\text{mod}}^M + \hat{\mathbf{M}}_A^T \mathbf{r}_{\text{mod}}^A \\ \mathbf{r}_{\text{mod}}^I \\ \tilde{\mathbf{g}}_{A_n} \\ \hat{\mathbf{T}}_A \mathbf{r}_{\text{mod}}^A \end{bmatrix}^r. \quad (5.22)$$

Dabei werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\hat{\mathbf{M}}_A = \left(\mathbf{D}_S^A\right)^{-1} \mathbf{M}_{\mathcal{M}}^A, \quad \hat{\mathbf{T}}_A = \mathbf{T}_A \left(\mathbf{D}_S^A\right)^{-1}. \quad (5.23)$$

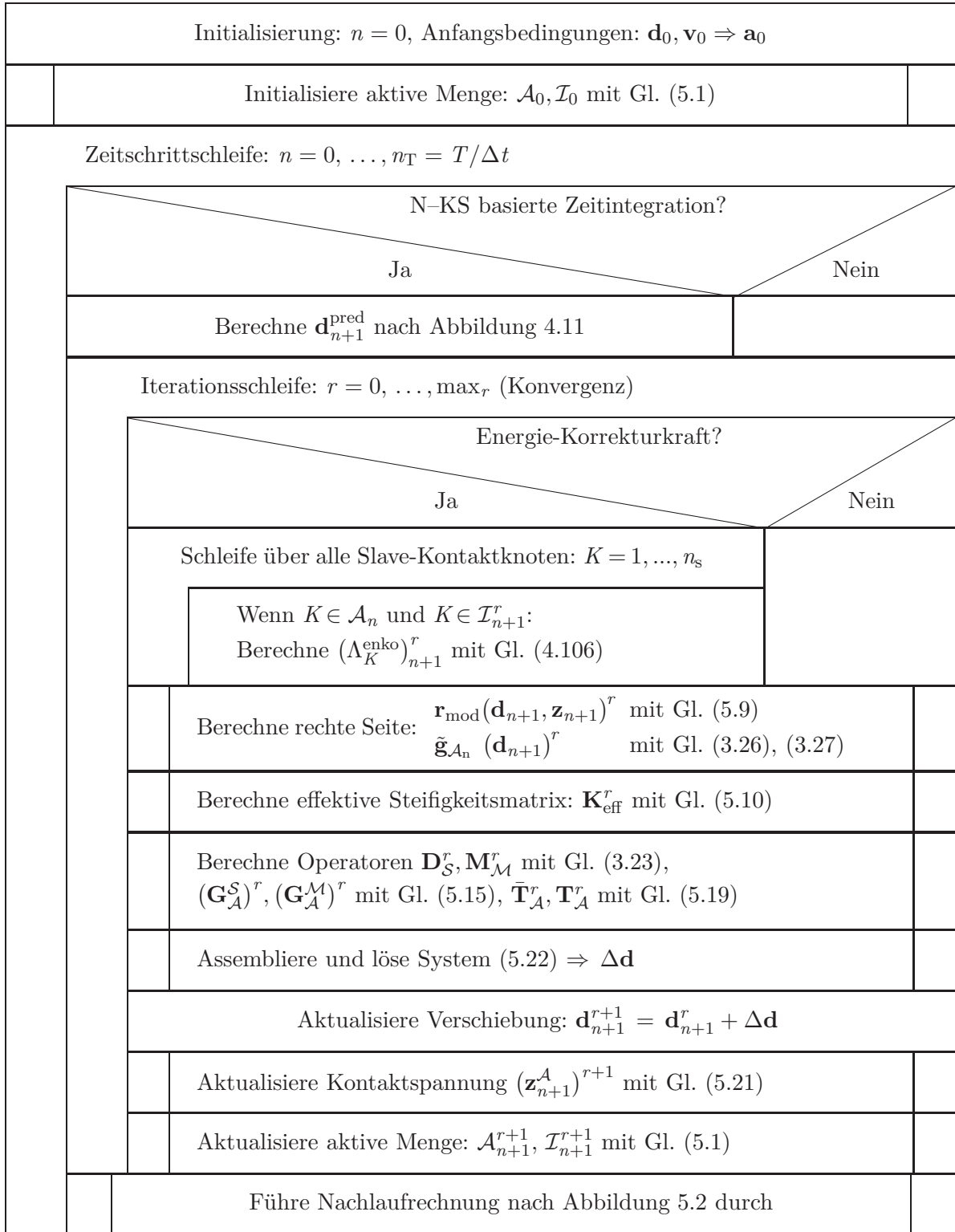
Die Kontaktspannung berechnet sich schließlich nach der iterativen Lösung des kondensierten Systems (5.22) in einer Nachlaufrechnung mit Beziehung (5.21).

In der mathematischen Literatur sowie in HARTMANN UND RAMM (2008) wird die Kondensation der Multiplikatoren mit einem Variablentausch des Verschiebungsfelds

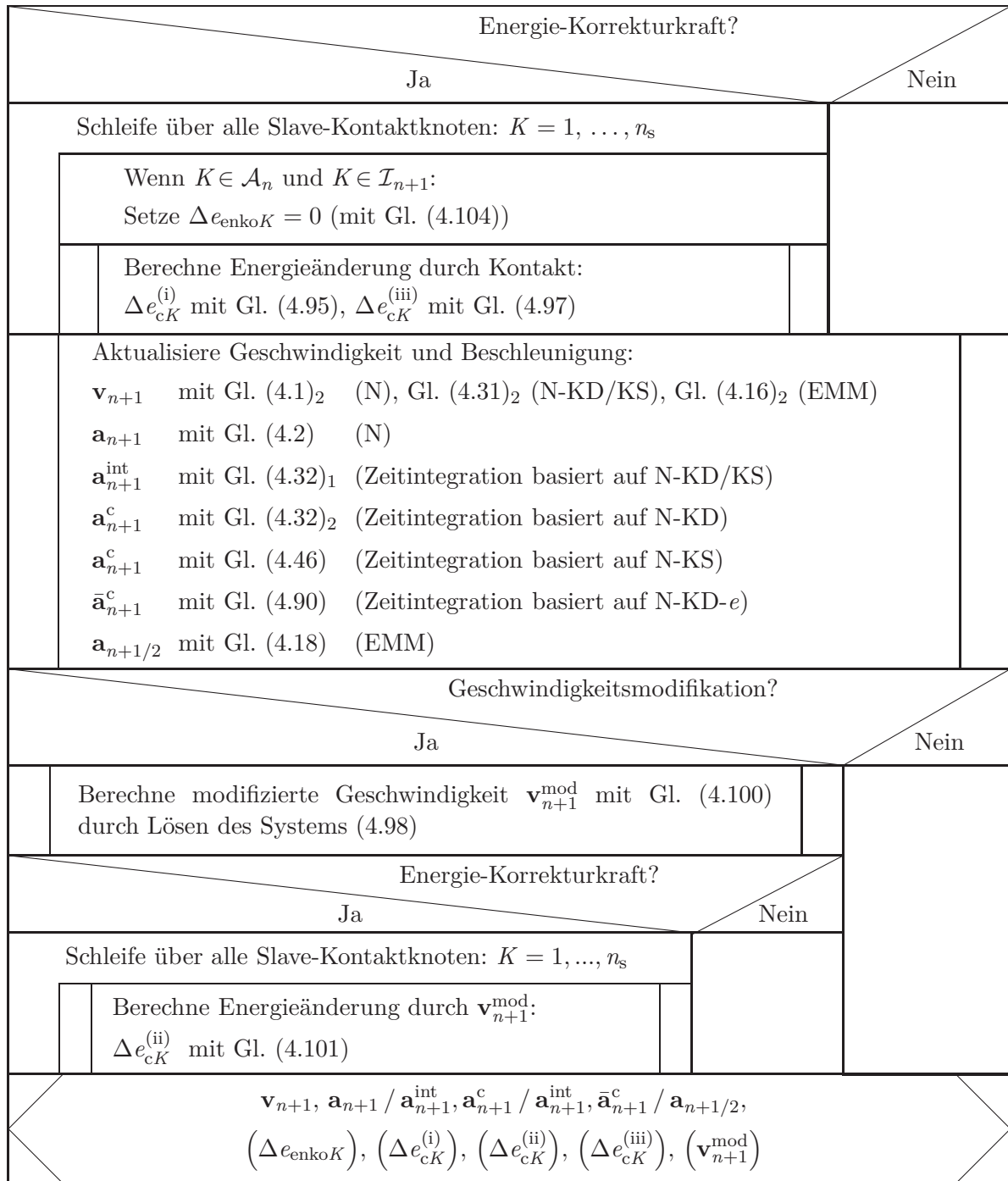
der Slave-Seite gegen die Relativverschiebung zwischen Slave- und Master-Seite kombiniert. Damit kann ein 2KK-Problem formal wie ein 1KK-Problem behandelt werden, was für geometrisch lineare Probleme die Implementierung erleichtert. Für geometrisch nichtlineare Probleme ist der Variablentausch aber eher von Nachteil, da bei der Linearisierung zusätzliche Terme entstehen würden. Deswegen wird die Kondensation in dieser Arbeit ohne einen Variablentausch durchgeführt.

## 5.4 Kompakte Darstellung des Lösungsalgorithmus'

Abschließend ist der gesamte Lösungsalgorithmus für eine räumliche Kontaktdiskretisierung, die auf der dualen Mortar-Methode basiert, in Abbildung 5.1 noch einmal kompakt zusammengefasst. In Abbildung 5.2 ist die zugehörige Nachlaufrechnung für einen einzelnen Zeitschritt dargestellt.



**Abbildung 5.1:** Struktogramm des gesamten Lösungsalgorithmus?


**Abbildung 5.2:** Struktogramm der Nachlaufrechnung in einem Zeitschritt.





# 6

---

## Numerische Experimente – räumliche Kontaktdiskretisierung

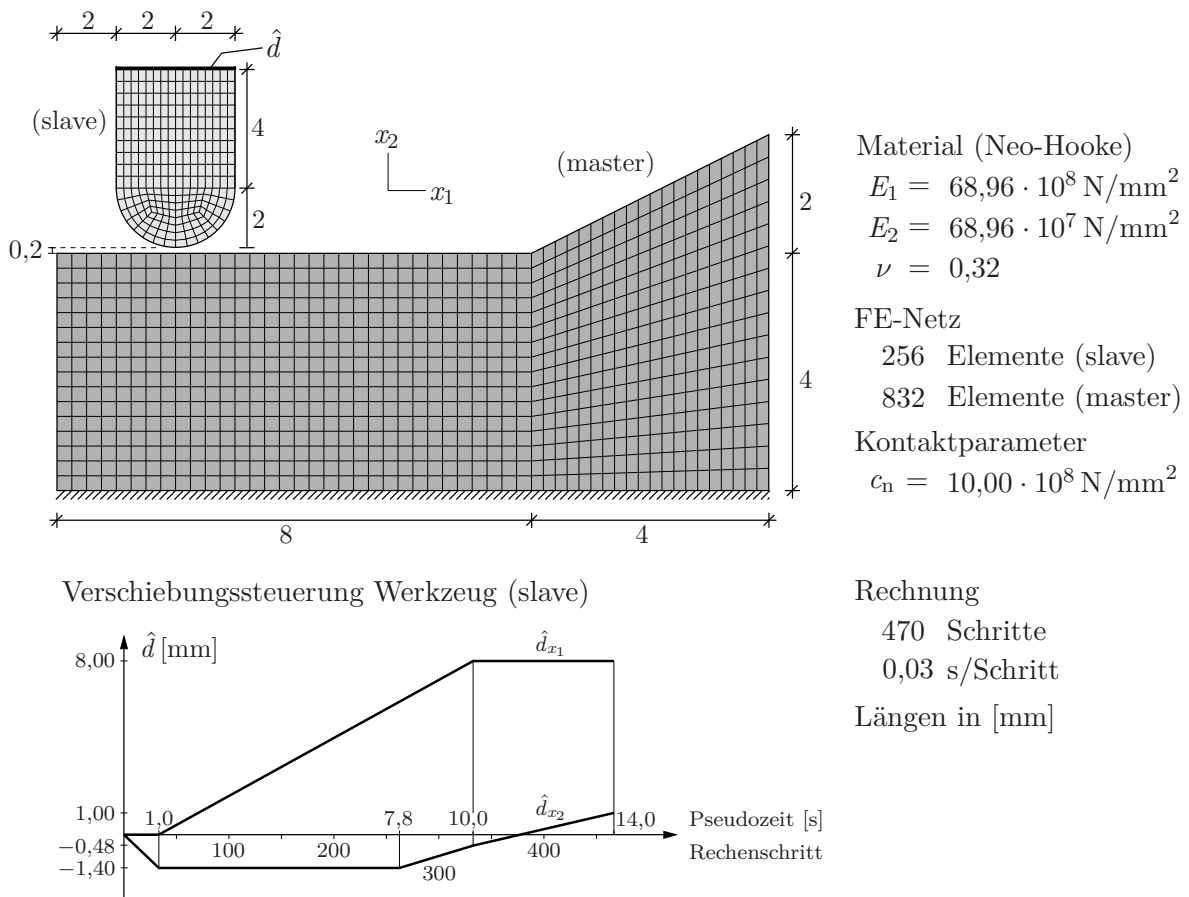
Anhand von numerischen Experimenten wird in diesem Kapitel die räumliche Kontaktdiskretisierung aus den Kapiteln 3.3 und 3.4 untersucht, welche auf der dualen Mortar-Methode basiert. Die Betrachtungen sollen einerseits die Stabilität der Kontaktdiskretisierung unter großen Deformationen demonstrieren, andererseits die Weiterentwicklung aus Kapitel 3.4 zur konsistenten Behandlung von Rändern analysieren.

Alle Berechnungen erfolgen statisch nichtlinear mit bilinearen Q1-Elementen. Es wird jeweils ein ebener Spannungszustand angenommen und ein System mit einer einheitlichen Dicke von einem Millimeter betrachtet.

### 6.1 Deformation eines Werkstücks

In der ersten Untersuchung wird die Verformung eines Werkstücks durch die inkrementelle Bewegung eines stiftförmigen Werkzeugs simuliert. Werkzeug und Werkstück sind deformierbar. Das Werkzeug besitzt jedoch einen zehnmal größeren E-Modul als das Werkstück. Da ein hyperelastisches Materialgesetz verwendet wird, bleiben in der Simulation im Gegensatz zu einem realen Umformprozess keine eingepprägten Deformationen zurück. Die Konzeption der Untersuchung ist angelehnt an das sogenannte „Ironing problem“ von YANG U. A. (2005). Durch einen scharfen Knick in der Geometrie des Werkstücks und die mehrfachen Richtungswechsel des Werkzeugs wird die Problemstellung aber noch komplexer gestaltet. In Abbildung 6.1 sind das System, die Diskretisierung, die verwendeten Materialparameter sowie die Kontakt- und die Steuerungsdaten dargestellt. Mit den abgebildeten Verschiebungskurven wird dabei in jedem Rechenschritt

die Position der oberen Kante des Werkzeugs vorgegeben. Entsprechend den Kurven bewegt sich das Werkzeug zuerst vertikal nach unten und dann horizontal nach rechts bis auf Höhe des Knicks im Werkstück. Anschließend folgt das Werkzeug der Schräge des Werkstücks, bis es schließlich wieder durch eine vertikale Bewegung nach oben aus dem Werkstück entfernt wird. Abbildung 6.2 zeigt die Ergebnisse der Untersuchung



**Abbildung 6.1:** Deformation eines Werkstücks: Problemstellung und Diskretisierung.

anhand von zehn ausgewählten Rechenschritten. Dargestellt sind die Deformation von Werkstück und Werkzeug sowie die Kontaktspannung. Der Kontaktspannungsverlauf entspricht in jedem Schritt dem qualitativ zu erwartenden Verlauf mit einem Maximum in der Mitte des Werkzeugs und einem Abfall zum Rand der Kontaktzone hin. In Berechnungsschritt 260 ist ein Ausschlag des Verlaufs in der Werkzeugmitte zu erkennen, welcher durch den scharfen Knick in der Geometrie des Werkstücks hervorgerufen wird. Trotz der großen tangentialen Relativverschiebungen konnte die aktive Kontaktzone in allen Berechnungsschritten stabil identifiziert und das resultierende Strukturproblem mit quadratischer Konvergenz gelöst werden.

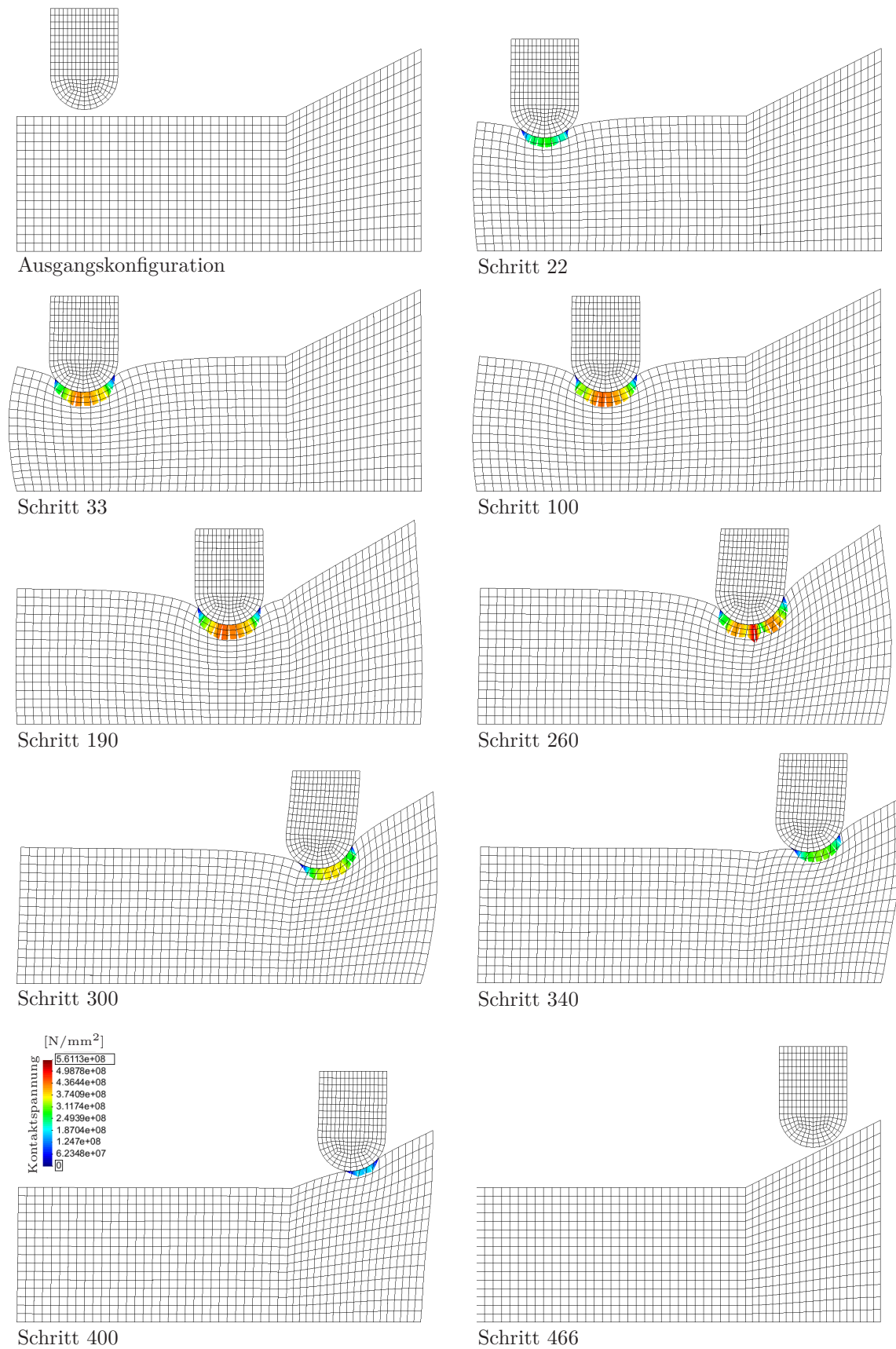


Abbildung 6.2: Deformation eines Werkstücks: Deformation und Kontaktspannung.

Die Knotenwerte der Kontaktspannung sind in Abbildung 6.2 mit Standard-Formfunktionen interpoliert. Dies entspricht einer geglätteten Darstellung des „sägezahn“-ähnlichen Verlaufs, der sich bei einer Darstellung mit dualen Formfunktionen zeigen würde, siehe beispielsweise HARTMANN (2007) für einen Vergleich beider Varianten. Das Integral des Kontaktspannungsverlaufs ist bei beiden Interpolationsmöglichkeiten identisch, was in HÜEBER U. A. (2005) zusammen mit weiteren mathematischen Betrachtungen dargestellt ist.

## 6.2 Konsistente Behandlung von Rändern

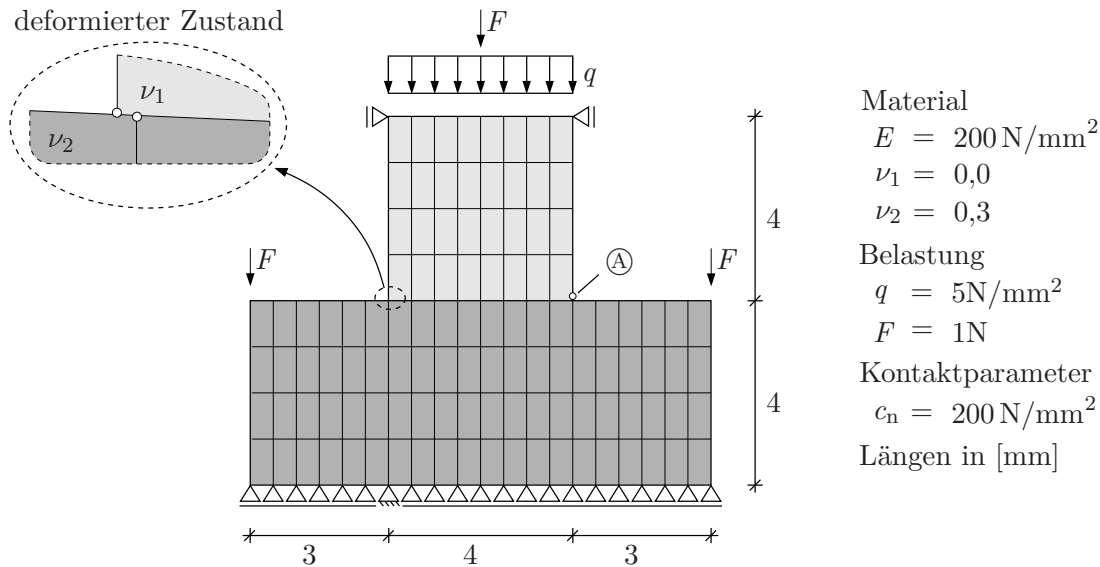
Die folgenden zwei Untersuchungen befassen sich mit der Modifikation zur konsistenten Behandlung von Rändern aus Kapitel 3.4. Anhand einer exemplarischen Betrachtung wurde dort bereits gezeigt, dass ohne Modifikation keine konsistenten Ergebnisse resultieren, falls Slave-Elemente nicht vollständig in Segmente zerlegbar sind. Mit den numerischen Experimenten in diesem Abschnitt soll einerseits die Leistungsfähigkeit der Modifikation demonstriert werden, andererseits wird die Notwendigkeit der entwickelten Wichtungszprozedur für die modifizierten Mortar-Integrale aufgezeigt.

In beiden Problemstellungen wird das St. Venant-Kirchhoff'sche Materialgesetz verwendet, die Wichtung der modifizierten Mortar-Matrizen erfolgt mit den elementbezogenen Wichtungsfaktoren (vgl. auch CICHOSZ UND BISCHOFF (2011)).

### 6.2.1 Einfluss kleiner Segmente

Mithilfe einer einfachen Untersuchung soll zunächst betrachtet werden, welchen Einfluss kleine Segmente auf die Leistungsfähigkeit der modifizierten Berechnung der Mortar-Matrizen in Rand-Elementen haben. Hierfür wird ein kleiner quadratischer Block auf einen größeren rechteckigen gepresst. Abbildung 6.3 zeigt das System, die Diskretisierung, die Belastung und Lagerung sowie die Material- und Kontaktparameter. In der undeformierten Konfiguration sind die Vernetzungen der Slave- und der Master-Kontaktfläche konform. Während des Belastungsvorgangs, welcher inkrementell in zehn kraftgesteuerten Berechnungsschritten durchgeführt wird, entsteht aufgrund des Querdehneffekts jedoch eine nicht-konforme Situation mit kleinen Segmenten, siehe Abbildung 6.3. Die Belastung ist dabei so gewählt, dass die kleinen Segmente möglichst lange erhalten bleiben.

Berechnet und betrachtet werden drei verschiedene Konfigurationen der geschilderten Problemstellung: Zuerst wird der obere Block als Slave-Körper ausgewählt, der untere Block als Master-Körper. Mit dieser „klassischen“ Wahl ist jedes Slave-Element



**Abbildung 6.3:** Einfluss kleiner Segmente: Problemstellung und Diskretisierung.

vollständig in Segmente zerlegbar, so dass keine Rand-Elemente entstehen und keine Modifikationen notwendig sind. Im Folgenden dient die Lösung dieser Konfiguration als Referenzlösung. In einer zweiten Konfiguration wird die Zuordnung von Slave- und Master-Seite vertauscht und die Berechnung mit modifizierten Mortar-Matrizen aber ohne Wichtungsprozedur durchgeführt. Schließlich wiederholt die dritte Konfiguration die Berechnung der zweiten, verwendet im Gegensatz zu dieser aber gewichtete modifizierte Mortar-Matrizen.

Die Endresultate sind für alle Berechnungen weitgehend identisch, was in Tabelle 6.1 exemplarisch durch die Endverschiebung von Knoten  $\textcircled{A}$  dargestellt ist. Allerdings wirkt sich die Verwendung der modifizierten Mortar-Matrizen ohne Wichtungsprozedur sehr negativ auf die Konvergenzeigenschaften in der Gleichgewichtsiteration aus, siehe Tabelle 6.2. Dabei ist es für die Betrugsnorm der Ungleichgewichtskräfte nicht möglich, die vorgegebene Konvergenzschranke von  $1,00\text{e-}9$  zu unterschreiten. Durch den Einsatz der Wichtungsprozedur kann dieses Defizit korrigiert und ein deutlich verbessertes Konvergenzverhalten erzielt werden, welches äquivalent zu dem der Referenzlösung ist. Tabelle 6.3 zeigt mit den Konditionszahlen der Systemsteifigkeitsmatrix die Ursachen für das

	oben: slave unten: master	oben: master unten: slave (nicht gewichtet)	oben: master unten: slave (gewichtet)
$d_{Av}$ [mm]	-4,36811e-02	-4,37600e-02	-4,37596e-02

**Tabelle 6.1:** Vertikale Verschiebung des Knotens  $\textcircled{A}$ .

Newton-Schritt	Lastschritt 1			Lastschritt 2			
	oben: slave unten: master	oben: master unten: slave (nicht gewichtet)	oben: master unten: slave (gewichtet)	oben: slave unten: master	oben: master unten: slave (nicht gewichtet)	oben: master unten: slave (gewichtet)	
0	0,0	0,0*	0,0*	0	0,0	0,0	
1	8,17e-04	1,26e+02	8,38e-04	1	8,12e-04	3,65e+00	8,34e-04
2	5,80e-09	2,02e+01	2,46e-05	2	5,71e-09	1,11e-01	5,83e-09
3	3,57e-12	1,66e+00	1,94e-10	3	3,29e-12	1,08e-07	3,06e-11
4		2,60e-02		4		1,01e-07	
5		4,72e-06		5		8,11e-08	
6		1,26e-08		6		9,78e-08	
7		5,10e-08		7		4,90e-08	
8		2,19e-07		8		6,96e-08	
		⋮				⋮	

\*Veränderung der aktiven Menge

**Tabelle 6.2:** Konvergenz der Beträgsnorm der Ungleichgewichtskräfte.

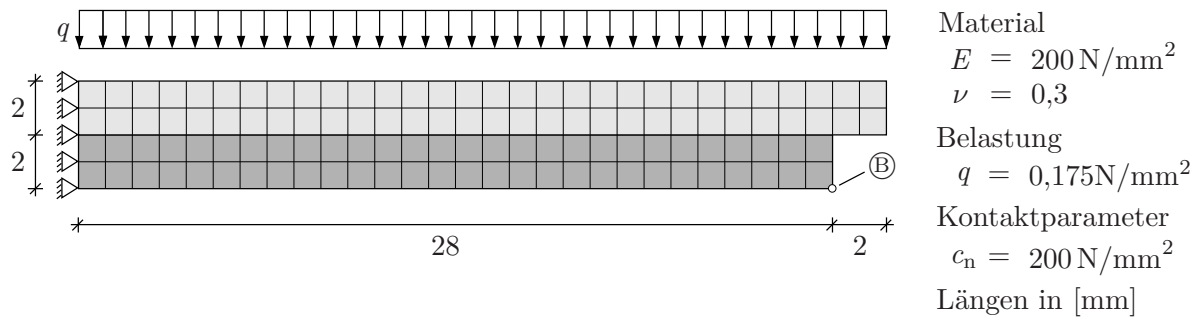
schlechte bzw. gute Konvergenzverhalten der ungewichteten bzw. gewichteten Modifikation. Während die Konditionszahlen für die erste und dritte Konfiguration in derselben Größenordnung liegen, strebt die Konditionszahl der zweiten Konfiguration gegen einen um vielfache Größenordnungen höheren Wert.

Newton-Schritt	oben: slave unten: master	oben: master unten: slave (nicht gewichtet)	oben: master unten: slave (gewichtet)
0	19074	38159,15	38159,15
1	19017	1,702e+16	35888,43
2	19017	4,536e+15	35911,02
3		6,226e+15	35911,07
4		6,475e+15	
5		6,478e+15	
		⋮	

**Tabelle 6.3:** Konditionszahl der Steifigkeitsmatrix (erster Lastschritt).

### 6.2.2 Zwei Kragarme

In einer zweiten Betrachtung soll die modifizierte Berechnung der Mortar-Integrale im Zusammenhang mit großen Deformationen untersucht werden. Darüber hinaus wird die Auswirkung der Modifikation auf die räumlichen Konvergenzraten bei Netzverfeinerung analysiert. Abbildung 6.4 zeigt die zugehörige Problemstellung, in der sich zwei



**Abbildung 6.4:** Zwei Kragarme: Problemstellung und Diskretisierung.

Kragarme mit leicht unterschiedlichen Längen zunächst entlang einer geraden Linie berühren. Weiter dargestellt sind die Diskretisierung mit insgesamt 116 Elementen, die Belastung und Lagerung sowie die Material- und Kontaktparameter. Berechnet wird das Problem mit zwei unterschiedlichen Konfigurationen. In Konfiguration (a) werden der untere Kragarm als Slave- und der obere Kragarm als Master-Körper gewählt. In Konfiguration (b) sind diese Definitionen vertauscht. Die Belastung wird bei beiden Betrachtungen inkrementell in 175 kraftgesteuerten Berechnungsschritten aufgebracht. Abbildung 6.5 zeigt die Ergebnisse der Untersuchung in drei repräsentativen Schritten. Dargestellt sind die Deformation und die Kontaktspannung. Wie anhand der Deformation zu erkennen ist, entstehen unabhängig von der gewählten Konfiguration nicht vollständig in Segmente zerlegbare Slave-Elemente. Für Konfiguration (b) sind diese von Beginn der Berechnung bis zu Lastschritt 91 vorhanden, im Fall von Konfiguration (a) ab Lastschritt 91 bis zum Ende der Berechnung. Somit kann auch eine „geschickte“ Wahl

	(a) oben: master unten: slave	(b) oben: slave unten: master (gewichtet)	Prozentualer Unterschied (bezogen auf (a))
$d_{B_V}$ [mm]	-2,20318e+01	-2,20322e+01	0,018 %
$\int t_{c_n}$ [N]	3,604	3,622	0,499 %

$d_{B_V}$ : Vertikale Verschiebung des Knotens  $\textcircled{B}$   
 $\int t_{c_n}$ : Integral der Kontaktspannung

**Tabelle 6.4:** Vergleich von Verschiebung und Kontaktspannung.

der Slave- bzw. der Master-Seite die Notwendigkeit der modifizierten Definition der Mortar-Matrizen am Rand des Kontaktbereichs nicht vermeiden. Der Kontaktspannungsver-

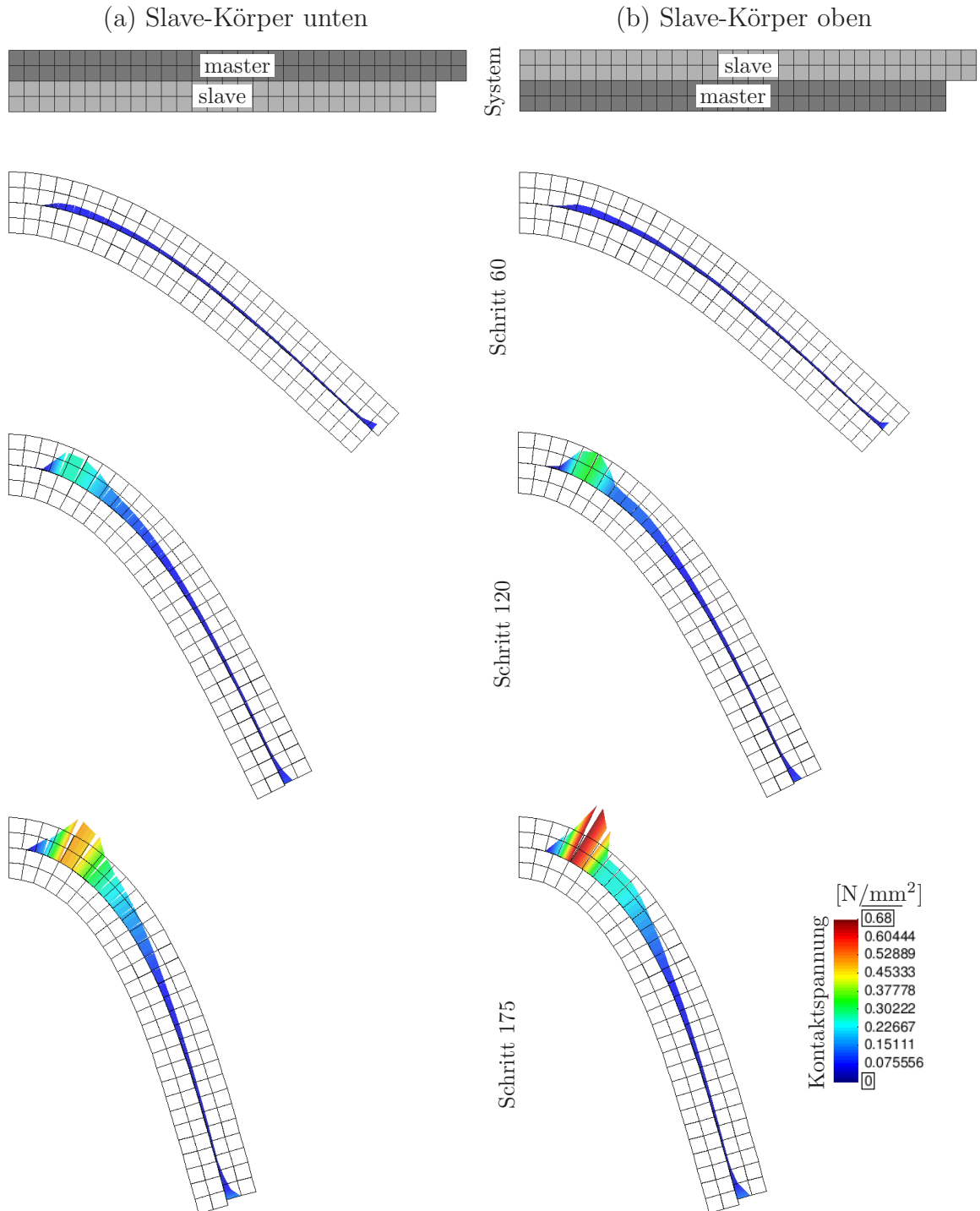


Abbildung 6.5: Zwei Kragarme: Deformation und Kontaktspannung.



lauf ist für beide Konfigurationen qualitativ gleichwertig<sup>1</sup>. Da die Slave-Kontaktknoten und damit die Kontaktbedingungen einmal bezüglich der oberen und einmal bezüglich der unteren Vernetzung definiert sind, entstehen leicht unterschiedliche Maximalwerte. Quantitativ werden die Berechnungen in Tabelle 6.4 anhand der vertikalen Verschiebung von Knoten ⑤ und anhand des Integrals der Kontaktspannung miteinander verglichen. In beiden Fällen sind trotz der relativ groben Diskretisierung die Differenzen sehr gering.

### Konvergenz der internen Energie bei Netzverfeinerung

Mithilfe des momentan betrachteten Beispiels soll im Folgenden untersucht werden, welchen Fehler die interne Energie in einer Berechnung mit bzw. ohne Rand-Elemente aufweist und mit welcher Ordnung dieser Fehler bei Netzverfeinerung konvergiert. Dazu wird mit sieben verschiedenen Vernetzungen die interne Energie des Deformationszustands nach 91 Lastschritten für Konfiguration (a) und Konfiguration (b) ausgewertet. Die feinste Vernetzung dient dabei in beiden Konfigurationen als Referenzlösung für die Fehlerberechnung. Der Deformationszustand in Lastschritt 91 wird gewählt, da bis zu diesem Zeitpunkt in der Berechnung mit Konfiguration (a) keine Rand-Elemente entstehen. Somit ist die interne Energie von Konfiguration (a) frei von einer eventuellen Beeinflussung durch modifizierte Mortar-Matrizen. Tabelle 6.5 zeigt Details zu den verschiede-

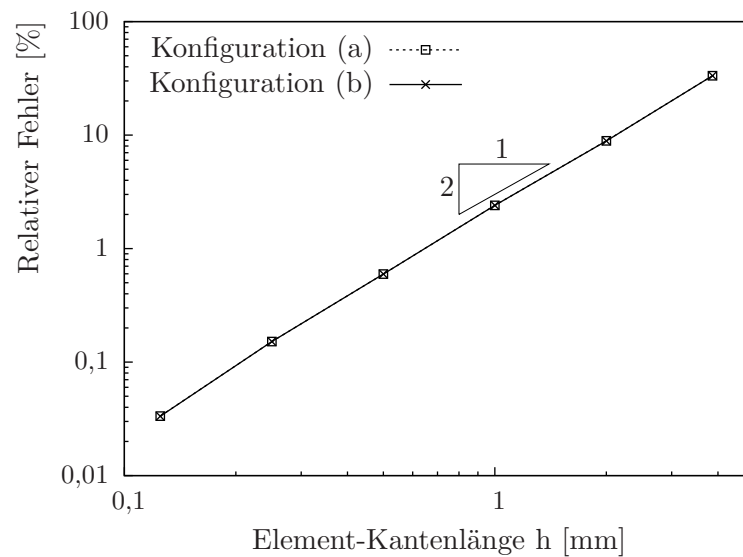
Netz	$n_{\text{ele}}$	h [mm]	Interne Energie	Interne Energie	Fehler [%]	Fehler [%]
			Konfig. (a)	Konfig. (b)	Konfig. (a)	Konfig. (b)
1	15	3,867	6,26022	6,26399	33,3423	33,3021
2	58	2,000	8,55616	8,55816	8,8956	8,8742
3	116	1,000	9,16569	9,16567	2,4054	2,4055
4	464	0,500	9,33566	9,33564	0,5956	0,5957
5	1856	0,250	9,37735	9,37734	0,1517	0,1517
6	7424	0,125	9,38846	9,38846	0,0334	0,0333
7	29696	0,0625	9,39160	9,39159	–	–

$n_{\text{ele}}$  : Elementanzahl  
h : Element-Kantenlänge

**Tabelle 6.5:** Interne Energie und relativer Fehler bei verschiedenen Vernetzungen.

nen Vernetzungen und die Ergebnisse der zugehörigen Berechnungen. Netz 3 entspricht dabei der räumlichen Diskretisierung aus Abbildung 6.4. Für Netz 1 wird der obere bzw. der untere Kragarm gleichmäßig in acht bzw. sieben Rechtecke zerlegt, welche jeweils eine Höhe von zwei Millimetern aufweisen. Alle weiteren Vernetzungen resultieren aus Netz 3 durch sukzessives Aufteilen eines Elements in vier neue quadratische Elemente

<sup>1</sup>Für die Darstellung der Kontaktspannung in einem Rand-Element müssen die nicht gewichteten Knotenwerte aus den gewichteten rückgerechnet werden.



**Abbildung 6.6:** Konvergenz der internen Energie bei Netzverfeinerung.

bzw. durch sukzessives Zusammenfassen von vier Elementen zu einem neuen quadratischen Element. Die Ergebnisse in Tabelle 6.5 zeigen, dass die interne Energie bzw. der Fehler in der internen Energie für Konfiguration (a) und Konfiguration (b) fast identisch ist. Die Konvergenzeigenschaften der räumlichen Kontaktdiskretisierung bleiben somit auch bei Verwendung der modifizierten Mortar-Matrizen erhalten. Abbildung 6.6 zeigt den Fehler der internen Energie aus Tabelle 6.5 aufgetragen in doppeltlogarithmischem Maßstab als Konvergenzdiagramm. Für beide Konfigurationen weisen die Kurven eine Steigung im Bereich des optimalen Werts von 2,0 auf.

### 6.3 Zusammenfassung

Durch numerische Untersuchungen an drei diskreten Systemen wurde in diesem Kapitel die räumliche Kontaktdiskretisierung aus den Kapiteln 3.3 und 3.4 analysiert, welche auf der dualen Mortar-Methode basiert. Dabei konnte zuerst die Stabilität und Leistungsfähigkeit der Diskretisierung für Problemstellungen mit großen Deformationen und großen tangentialen Relativverschiebungen demonstriert werden. Die anschließenden Betrachtungen beschäftigten sich mit der modifizierten Definition der Mortar-Matrizen zur konsistenten Behandlung von Rändern. Hierbei wurde zunächst gezeigt, dass eine Wichtung der modifizierten Mortar-Matrizen notwendig ist. Ohne Wichtungsprozedur verursachen kleine Segmente eine erhebliche Vergrößerung der Konditionszahl der Systemsteifigkeitsmatrix. Dadurch werden wiederum die Konvergenzeigenschaften in der Gleichgewichtsiteration deutlich verschlechtert. Im Weiteren wurde ein Problem mit gro-

ßen Deformationen in zwei Berechnungen untersucht. Bis auf die Definition von Slave- und Master-Seite waren die Randbedingungen der Berechnungen dabei identisch. Abhängig vom betrachteten Deformationszustand musste jeweils in einer Konfiguration eine Modifikation der Mortar-Matrizen durchgeführt werden und in der anderen nicht. Durch einen Vergleich der Ergebnisse in ausgewählten Berechnungsschritten konnte die Äquivalenz der jeweiligen Ergebnisse und somit die Konsistenz der Modifikation gezeigt werden. Abschließend wurde anhand der zuletzt beschriebenen Problemstellung die Konvergenz des Fehlers der internen Energie bei Verfeinerung der Vernetzung untersucht. Dabei konnte gezeigt werden, dass der Fehler auch bei Verwendung der modifizierten Mortar-Matrizen mit optimaler Ordnung konvergiert.



# 7

---

## Numerische Experimente – zeitliche Diskretisierung

Als Abschluss der vorliegenden Arbeit werden in diesem Kapitel die Modifikationen der zeitlichen Diskretisierung aus Kapitel 4 untersucht, welche eine verbesserte Modellierung von dynamischen Kontakt ereignissen ermöglichen.

Für alle Problemstellungen wird ein ebener Spannungszustand angenommen und ein System mit einer einheitlichen Dicke von einem Millimeter betrachtet. Die räumliche Kontaktdiskretisierung der Mehrkörperkontaktprobleme in den Abschnitten 7.1 und 7.3 erfolgt mit dem NTS-Algorithmus.

### 7.1 Zwei deformierbare Stäbe

In der ersten Problemstellung wird die Kollision von zwei identischen Stäben betrachtet, welche sich zu Beginn der Berechnung mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aufeinander zubewegen. Beide Stäbe sind mit jeweils 100 bilinearen Q1-Elementen diskretisiert. Das Problem wird energieerhaltend mit dem Newmark-KS-*ve*-Verfahren und vergleichend mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM berechnet. Abbildung 7.1 zeigt das System, die Diskretisierung, die Anfangsbedingungen sowie die Material-, Kontakt- und Zeitintegrationsparameter. Als Materialmodell kommt das St. Venant-Kirchhoff'sche Materialgesetz zum Einsatz.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in den Abbildungen 7.2 und 7.3 dargestellt. Abbildung 7.2 zeigt die Verläufe von Energie und Kontaktkraft. Anhand der Energiekurven ist zu erkennen, dass sowohl das Newmark-KS-*ve*-Verfahren als auch die „Energy-Momen-

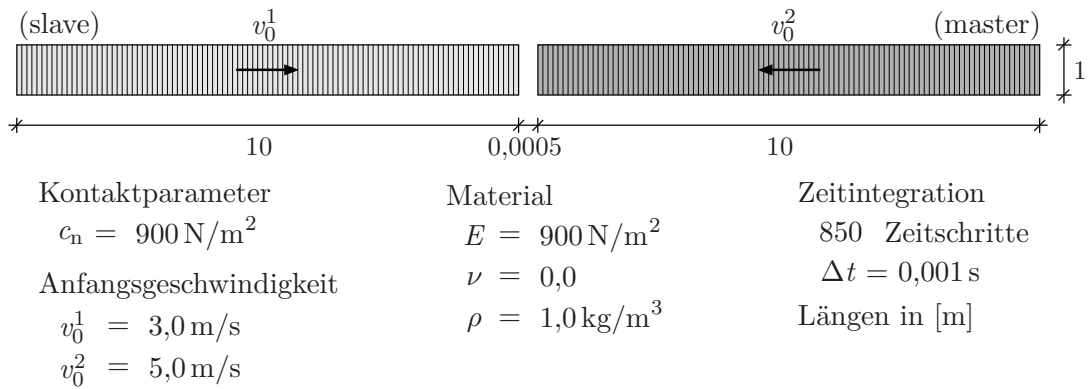


Abbildung 7.1: Zwei deformierbare Stäbe: Problemstellung und Diskretisierung.

tum-Method“-VUM die Systemenergie erhalten. Dabei wird mit dem Newmark-KS-*ve*-Verfahren die Systemenergie zu Beginn der Berechnung um circa 0,5 % verkleinert. Nach 0,752 Sekunden ist der Kontakt beendet und die Systemenergie vergrößert sich durch

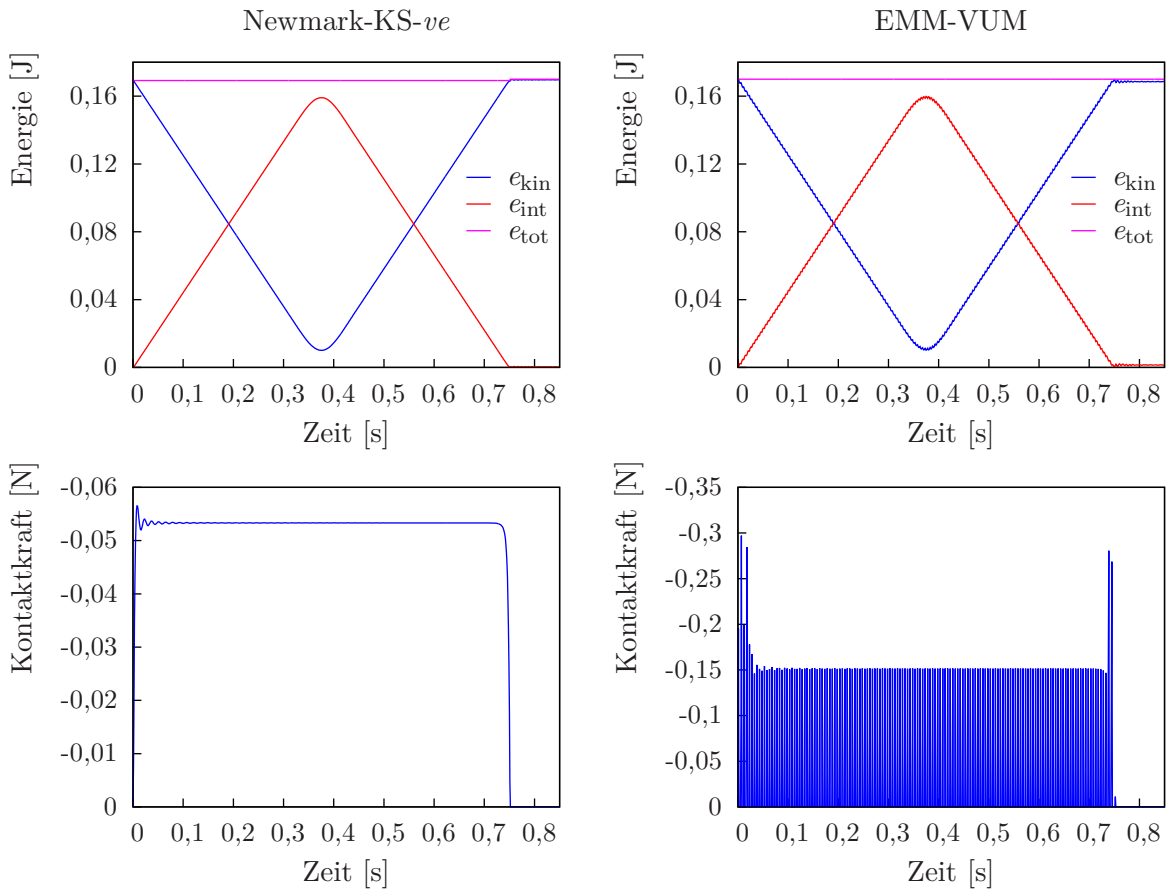
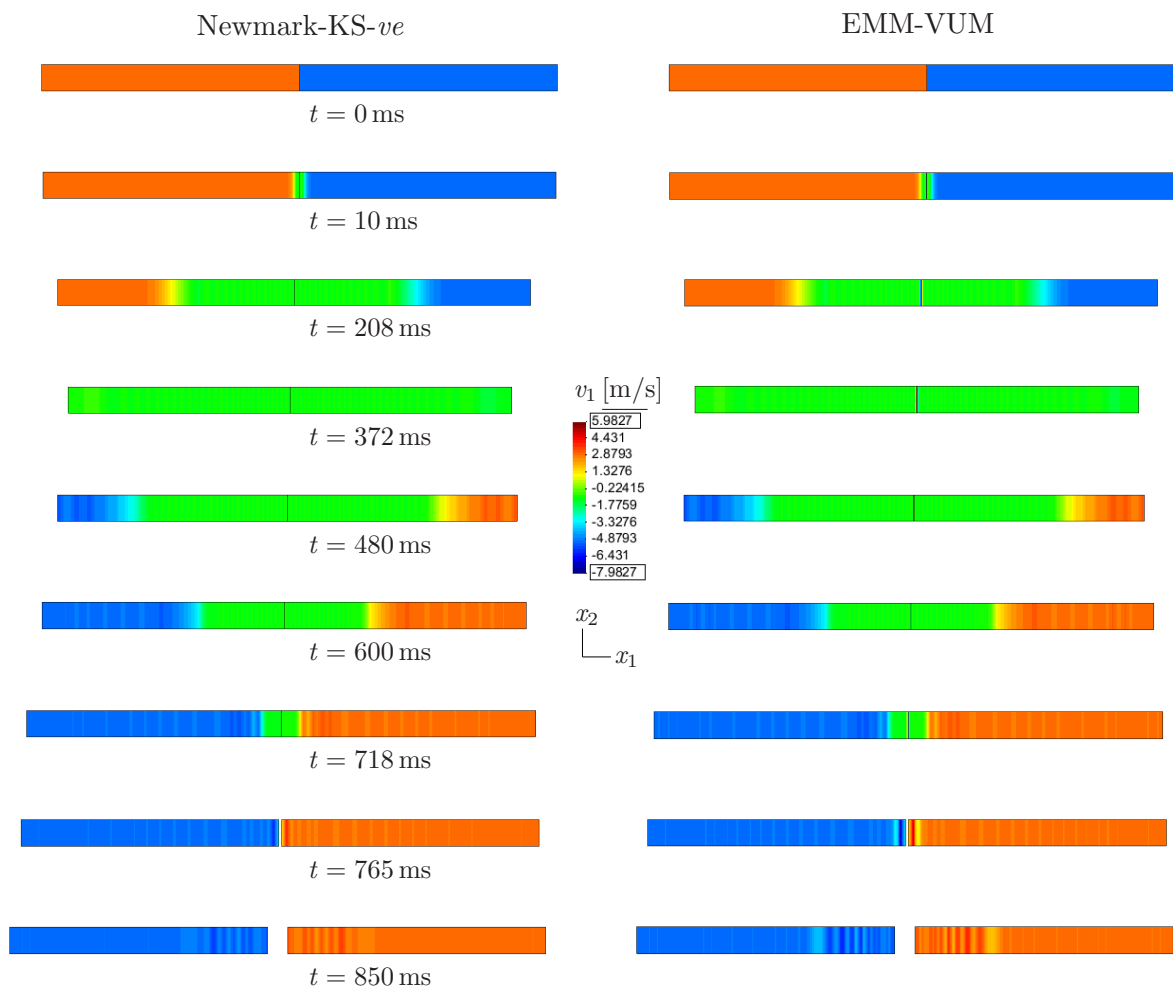


Abbildung 7.2: Zwei deformierbare Stäbe: Energie und Kontaktkraft.

die Energie-Korrekturkraft wieder auf den ursprünglichen Wert. Der Kontaktkraftverlauf zeigt für die Berechnung mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM erwartungsgemäß starke Oszillationen, wodurch Oszillationen zwischen gelösten und bestehenden Kontaktzuständen entstehen. Diese sind auch auf globaler Ebene durch einen leicht welligen Verlauf der Energiekurve zu erkennen. Mit dem Newmark-KS-*ve*-Algorithmus können Oszillationen in der Kontaktkraft aufgrund der Stabilisierung nach DEUFLHARD U. A. (2008) praktisch vollständig vermieden werden.

In Abbildung 7.3 sind die Deformation und die Geschwindigkeit für beide Berechnungen zu diskreten Zeitpunkten dargestellt. Für den Geschwindigkeitsverlauf kann eine analytische Lösung ermittelt werden, siehe beispielsweise LAURSEN UND LOVE (2002). Diese fordert, dass sich die Stäbe nach Lösen des Kontakts mit vertauschten Geschwindigkeitsfeldern wieder auseinanderbewegen. Global wird der analytische Geschwindigkeitsverlauf durch die Lösung beider Verfahren relativ genau erfüllt. Allerdings oszilliert mit

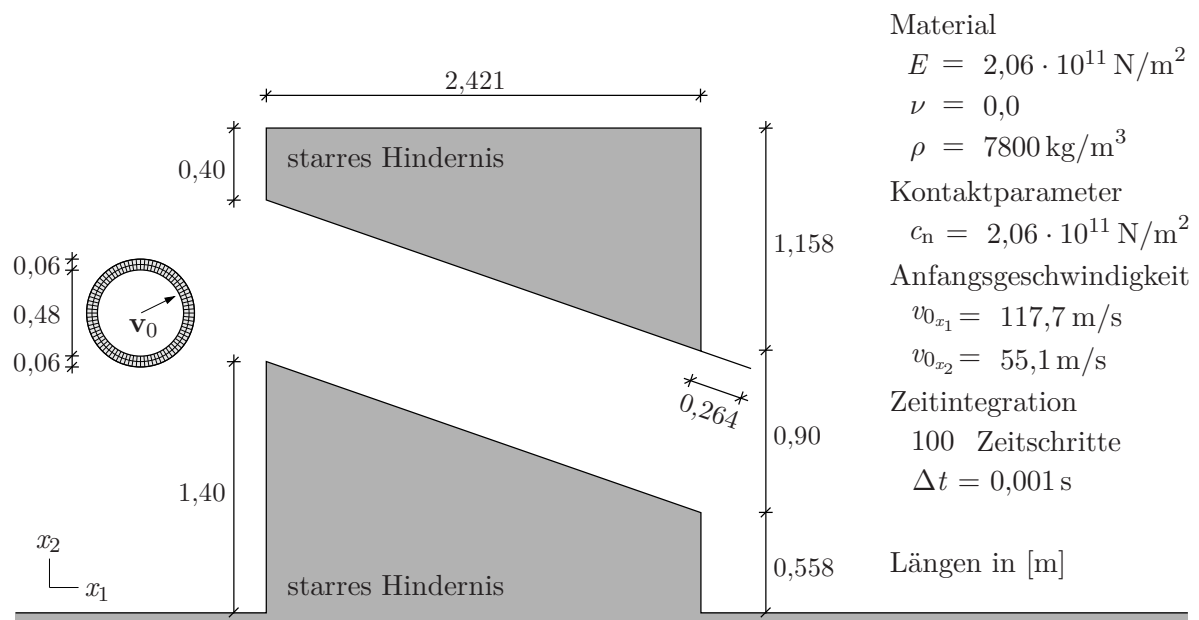


**Abbildung 7.3:** Zwei deformierbare Stäbe: Deformation und Geschwindigkeit.

der „Energy-Momentum-Method“-VUM die Geschwindigkeit in der Kontaktfläche. Dadurch zeigt auch das globale Geschwindigkeitsfeld ein unruhiges Verhalten, was in Abbildung 7.3 vor allem zu den Zeitpunkten  $t = 765$  ms und  $t = 850$  ms erkennbar ist. Insgesamt liegen die Geschwindigkeitswerte zwischen  $5,98$  m/s und  $-7,98$  m/s. Für das Newmark-KS-*ve*-Verfahren ist diese Spanne durch die Geschwindigkeitsmodifikation mit Werten zwischen  $4,83$  m/s und  $-6,83$  m/s deutlich kleiner.

## 7.2 Deformierbarer Ring durch starres Rohr

Die zweite Untersuchung simuliert ein Einkörperkontaktproblem zwischen mehreren starren Hindernissen und einem deformierbaren Ring. Dieser bewegt sich zunächst durch ein starres Rohr und prallt anschließend auf einer horizontalen Fläche auf. Diskretisiert ist der Ring mit 160 bilinearen Q1-Elementen, welche auf zwei Elementreihen in Dickenrichtung verteilt sind. Pro Elementreihe sind jeweils 80 Elemente in Umfangrichtung vorhanden. Als Anfangsbedingung erhält der Ring eine gleichförmige Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_0$  in Richtung des Rohrs. In Abbildung 7.4 sind das System, die Diskretisierung, die verwendeten Materialparameter sowie die Kontakt- und die Zeitintegrationsdaten dargestellt. Berechnet wird die Problemstellung mit vier verschiedenen Algorithmen: Zuerst mit dem klassischen Newmark-Verfahren, danach mit einer dissipativen Behandlung des Kontakts durch das Newmark-KD-Verfahren und anschließend energieerhaltend mit dem

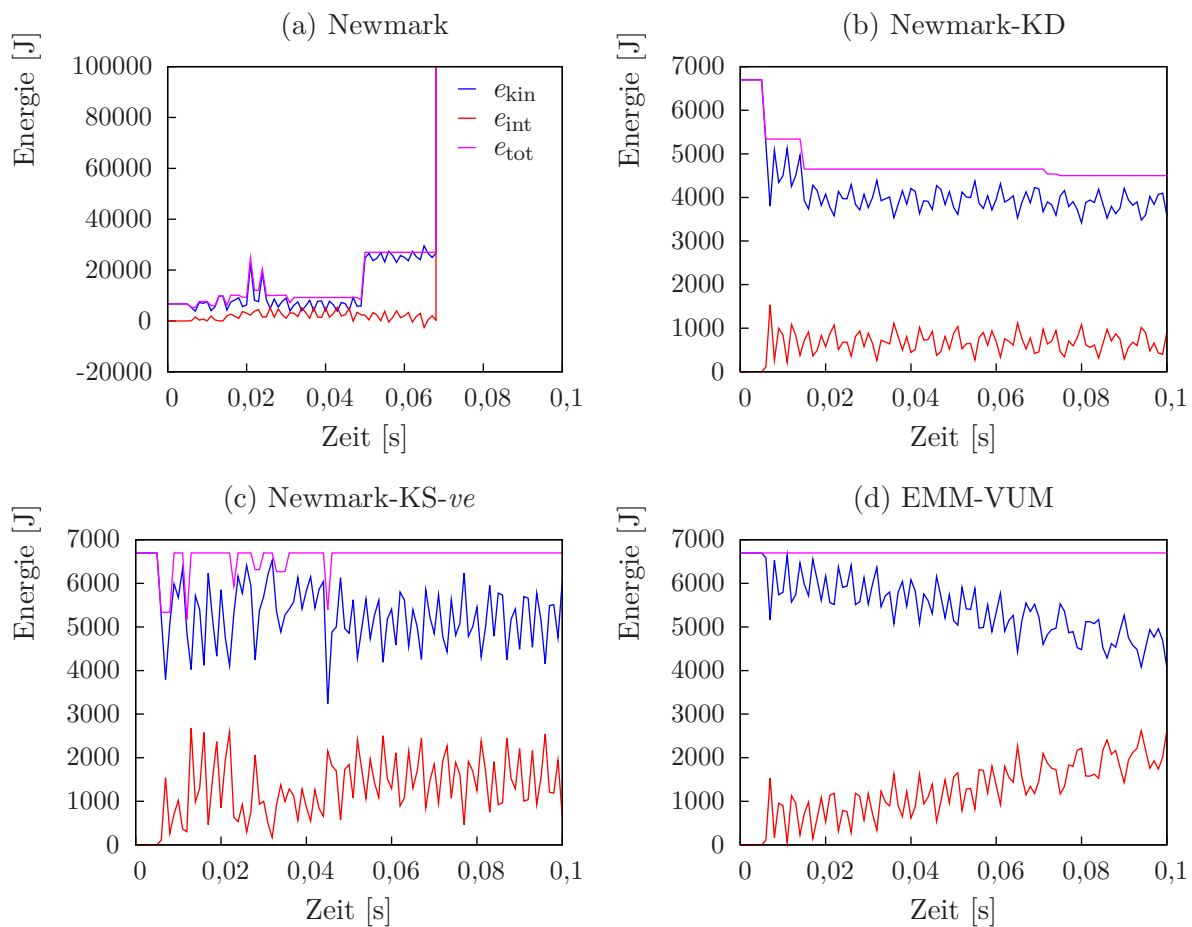


**Abbildung 7.4:** Deformierbarer Ring durch starres Rohr: Problemstellung und Diskretisierung.



Newmark-KS-*ve*-Verfahren und der „Energy-Momentum-Method“-VUM. Als Materialmodell kommt für die Newmark-basierten Algorithmen das Neo-Hooke'sche Materialgesetz aus Abschnitt 2.1.4 zum Einsatz. Da dessen Implementierung für die „Energy-Momentum-Method“-VUM zu aufwendig ist, wird hier das St. Venant-Kirchhoff'sche Materialgesetz verwendet. Bei maximalen Dehnungen von circa 3% sind die Spannungsunterschiede dabei vernachlässigbar. Ziel der Betrachtung ist es, den Einfluss der verschiedenen Kontaktbehandlungen auf die Systemantwort zu untersuchen.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in Abbildung 7.6 anhand der Deformation und in Abbildung 7.5 durch die Entwicklung der Systemenergie dargestellt. Mit dem klassischen Newmark-Verfahren vergrößert sich die Systemenergie zwischen Beginn der Simulation und dem letzten Kontakt ereignis ( $t = 49$  ms) um circa 300 %. Im Vergleich zu den anderen Verfahren ergibt sich dadurch ein Deformationsbild mit deutlich steileren Auf- bzw. Abprallwinkeln des Rings auf die starren Hindernisse. Zudem ist die absolute Anzahl der Anprallvorgänge am höchsten. Nach Beendigung des Kontakts tritt zum



**Abbildung 7.5:** Deformierbarer Ring durch starres Rohr: Energien.

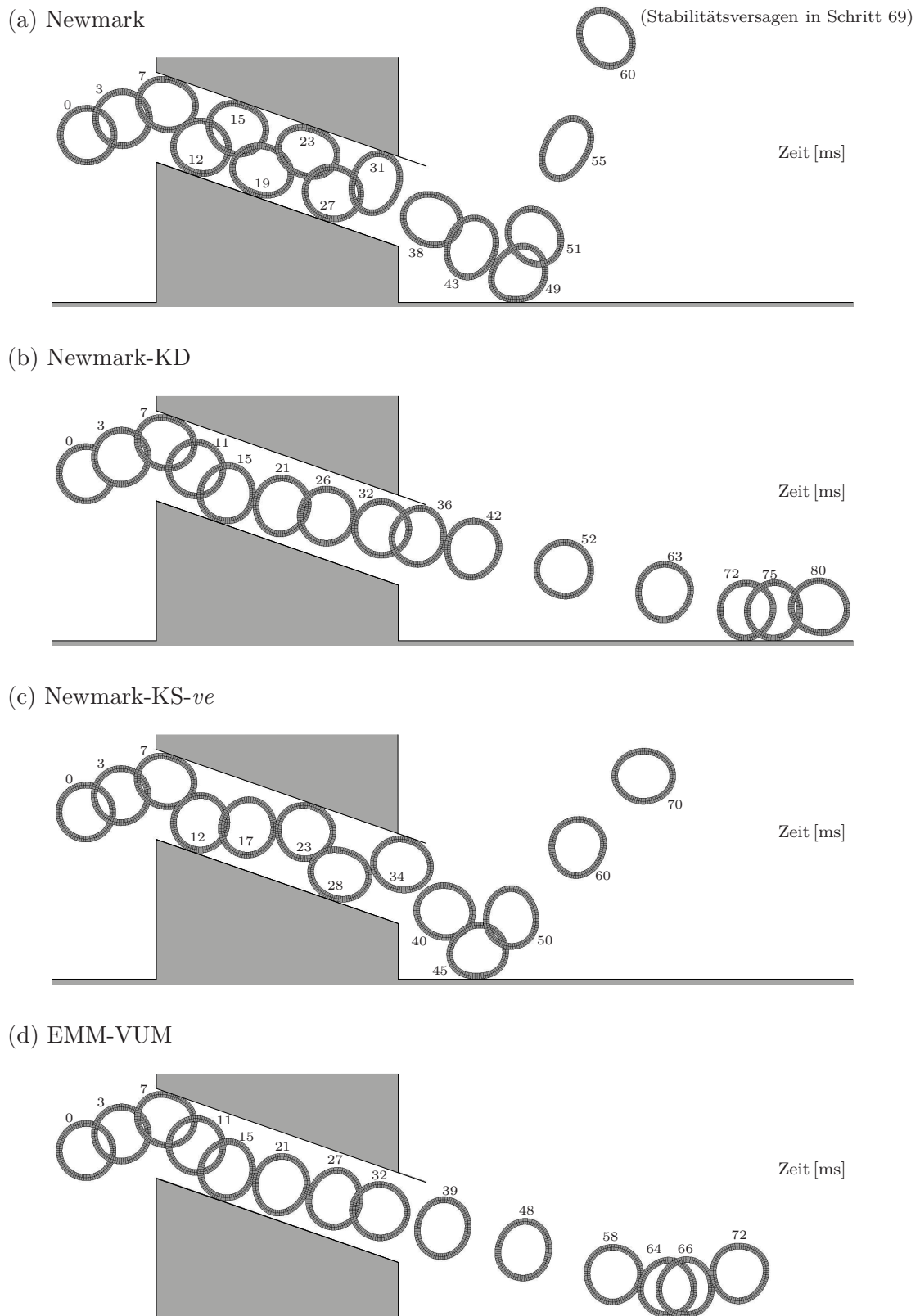


Abbildung 7.6: Deformierbarer Ring durch starres Rohr: Deformation.

Zeitpunkt  $t = 69$  ms ein Stabilitätsversagen auf, welches durch ein Anwachsen der Systemenergie auf Werte der Größenordnung  $10e+10$  gekennzeichnet ist. Die Verformungen nehmen entsprechend große Werte an. Durch eine Berechnung mit dem Newmark-KD-Verfahren kann das Stabilitätsversagen vermieden werden. Allerdings verkleinert sich die Systemenergie aufgrund der dissipativen Behandlung des Kontakts um circa 33 %. In der Deformationsabbildung ist dies durch die relativ flachen Abprallwinkel des Rings zu erkennen, welche auf insgesamt nur zwei Kontakt Ereignisse innerhalb des Rohrs führen.

Bei der Berechnung mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM wird die Systemenergie erhalten. Das Deformationsbild innerhalb des Rohrs ist allerdings ähnlich zu dem des Newmark-KD-Verfahrens. Konsequenterweise gleichen sich während des betreffenden Zeitraums auch die Kurven der internen Energie. Der Grund hierfür ist, dass mit der „Velocity-Update-Method“ ausschließlich die kinetische Energie korrigiert wird. Erst in der zweiten Hälfte des Simulationszeitraums steigt die interne Energie langsam an. Im Vergleich zu der Newmark-KD-Berechnung ergibt sich dadurch für das letzte Kontakt Ereignis ein steilerer Abprallwinkel. Mit dem Newmark-KS-*ve*-Verfahren wird die Systemenergie ebenfalls erhalten. Da die Energieerhaltung aber nicht ausschließlich durch eine Korrektur der kinetischen Energie erfolgt, ist die interne Energie von Beginn an größer als bei der „Energy-Momentum-Method“-VUM. Das resultierende Deformationsverhalten kann zwischen dem der „Energy-Momentum-Method“-VUM und dem des Newmark-Verfahrens eingeordnet werden. Qualitativ entspricht das Deformationsbild am besten der physikalisch zu erwartenden Auf- und Abprallbewegung eines elastischen Rings.

## 7.3 Zwei deformierbare Scheiben

In den Abschnitten 7.1 und 7.2 wurde die Leistungsfähigkeit des Newmark-KS-*ve*-Verfahrens im Vergleich zu anderen Zeitintegrationsverfahren gezeigt. In der letzten Betrachtung soll die allgemeine Anwendbarkeit der Methode im Kontext eines Mehrkörperkontaktproblems mit großen Deformationen demonstriert werden. Dazu wird die Kollision zweier deformierbarer Scheiben simuliert, welche sich zu Beginn der Berechnung mit entgegengesetzten horizontalen Geschwindigkeiten aufeinander zubewegen. Beide Scheiben sind mit je 432 bilinearen Q1-Elementen diskretisiert. Abbildung 7.7 zeigt das System, die Diskretisierung, die Anfangsbedingungen sowie die Material-, Kontakt- und Zeitintegrationsdaten.

Die Ergebnisse der Berechnung sind in den Abbildungen 7.9 und 7.8 dargestellt. Abbildung 7.9 zeigt die Deformation und die horizontale Komponente der Geschwindigkeitsfelder. Durch die Stabilisierung des Integrators (Newmark-KS-*ve*) entsteht ein permanenter Kontakt ohne Oszillationen zwischen gelösten und bestehenden Kontaktzu-

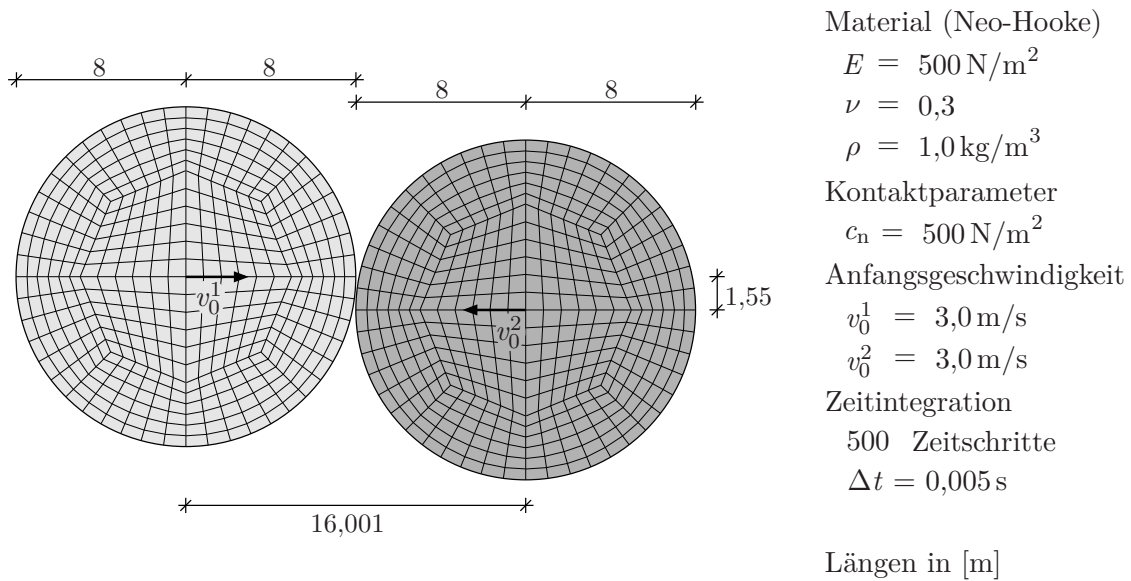


Abbildung 7.7: Zwei deformierbare Scheiben: Problemstellung und Diskretisierung.

ständen. Aufgrund der Geschwindigkeitsmodifikation (Newmark-KS- $\underline{ve}$ ) sind die Geschwindigkeitskomponenten der Kontaktoberflächen in Richtung der Oberflächen-Normalen identisch. Da in der Untersuchung keine großen tangentialen Relativbewegungen auftreten, gilt dies auch annähernd für die horizontale Komponente der Geschwindigkeiten. Die durch den Kontakt verursachte Diskontinuität in der Geschwindigkeit breitet sich in beiden Scheiben sowohl in vertikaler als auch in horizontaler Richtung aus. Dies kann in Abbildung 7.9 beispielsweise zu den Zeitpunkten  $t = 375 \text{ ms}$  oder  $t = 550 \text{ ms}$  erkannt werden. Infolgedessen entsteht nach der Reflexion der Geschwindigkeitswelle an den Körperändern ein diffuses Geschwindigkeitsbild für Zeitpunkte mit  $t > 950 \text{ ms}$ . Der

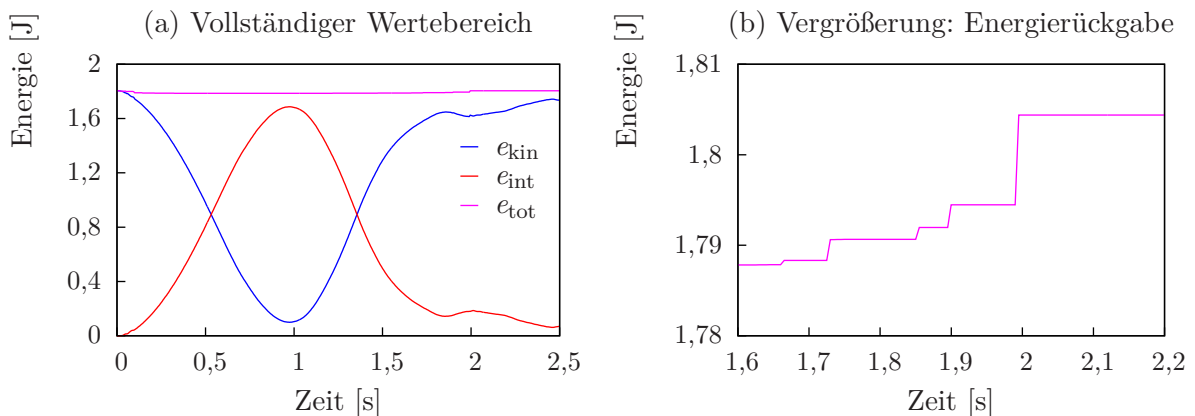


Abbildung 7.8: Zwei deformierbare Scheiben: Energien.

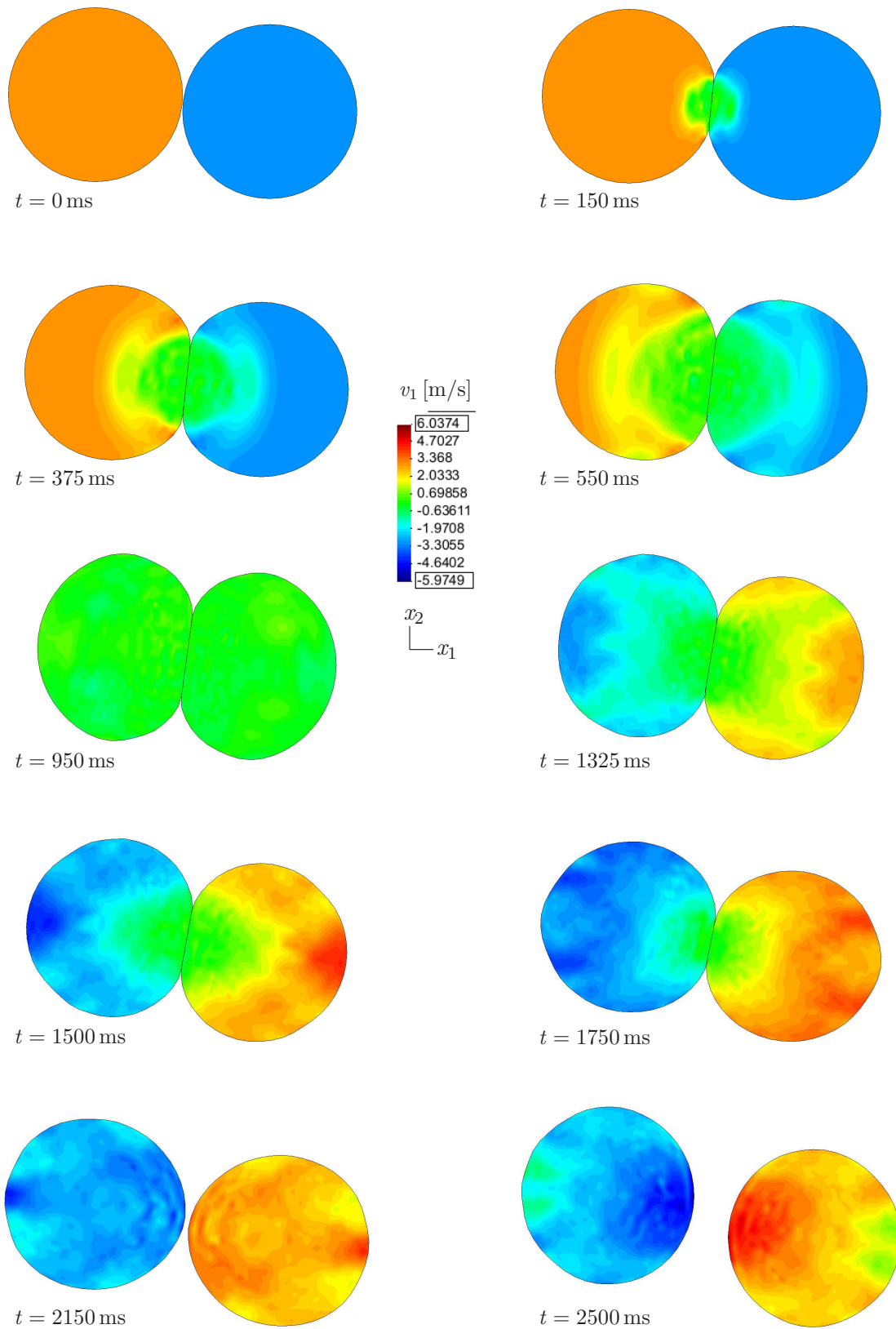


Abbildung 7.9: Zwei deformierbare Scheiben: Deformation und Geschwindigkeit.

Energieverlauf in Abbildung 7.8 zeigt, dass mit der Energie-Korrekturkraft (Newmark-KS-*ve*) die Systemenergie exakt erhalten bleibt. Das rechte Diagramm stellt einen vergrößerten Ausschnitt des linken Diagramms dar. Zu erkennen ist die Energierückgabe für den Zeitraum, in welchem der Kontakt wieder gelöst wird.

## 7.4 Zusammenfassung

Anhand von numerischen Experimenten an drei diskreten Systemen wurden in diesem Kapitel die in Kapitel 4 vorgestellten Verfahren zur verbesserten Modellierung von dynamischen Kontaktereignissen analysiert und verglichen. Zuerst wurde mithilfe einer einfachen Problemstellung die energieerhaltende Modellierung eines Mehrkörperkontaktproblems untersucht. Die Auswertungen mit dem in dieser Arbeit entwickelten Newmark-KS-*ve*-Verfahren und der „Energy-Momentum-Method“-VUM führten zu vergleichbaren globalen Systemantworten. Lokal resultierten aus der Berechnung mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM aber oszillierende Kontaktkräfte und unphysikalische Kontaktgeschwindigkeiten. Durch die Stabilisierung der Zeitintegration und die Geschwindigkeitsmodifikation führte das Newmark-KS-*ve*-Verfahren in diesen Punkten zu deutlich besseren Resultaten. In einer zweiten Untersuchung wurde ein Kontaktproblem zwischen einem deformierbaren Ring und mehreren starren Hindernissen mit verschiedenen Methoden berechnet. Bei der Berechnung mit dem klassischen Newmark-Verfahren konnte ein Stabilitätsversagen beobachtet werden. Durch die dissipative Behandlung des Kontakts mit dem Newmark-KD-Verfahren wurde dieses vermieden. Die Berechnungen mit dem Newmark-KS-*ve*-Verfahren und der „Energy-Momentum-Method“-VUM führten auf stabile und energieerhaltende Ergebnisse. Abhängig von der Entwicklung der kinetischen und der internen Energie resultierten aus den einzelnen Berechnungen deutlich verschiedene Bewegungsvorgänge. Die Auswertung mit der „Energy-Momentum-Method“-VUM führte auf eine ähnliche Systemantwort wie die Berechnung mit dem Newmark-KD-Verfahren. Da die Energieerhaltung der „Velocity-Update-Method“ durch die Erhöhung der kinetischen Energie erfolgt, zeigte sich ein Anwachsen der internen Energie erst verzögert. Somit ergab sich auch im Deformationsverhalten erst mit Verzögerung ein Unterschied. Mit dem Newmark-KS-*ve*-Verfahren wird die interne Energie unmittelbar nach Lösen des Kontakts wieder erhöht. Die aus der Berechnung mit dem Newmark-KS-*ve*-Verfahren resultierende Deformation entsprach qualitativ am besten dem physikalisch zu erwartenden Deformationsbild. Abschließend wurde in der dritten Untersuchung die Leistungsfähigkeit des Newmark-KS-*ve*-Verfahrens für Mehrkörperkontaktprobleme mit großen Deformationen demonstriert. Die Gesamtenergie konnte erhalten werden. Oszillationen zwischen gelösten und bestehenden Kontaktzuständen traten nicht auf. Physikalische Kontaktgeschwindigkeiten wurden sichergestellt.

---

# Zusammenfassung und Ausblick

## 8.1 Zusammenfassung

Mit dem übergeordneten Ziel der konsistenten und stabilen Modellierung von Kontaktvorgängen wurden in dieser Arbeit verschiedene Aspekte von räumlichen und zeitlichen Kontaktdiskretisierungsstrategien untersucht. Den Schwerpunkt des räumlichen Teils stellte die Weiterentwicklung der von HARTMANN U. A. (2007) und HARTMANN UND RAMM (2008) vorgestellten Diskretisierungsstrategie dar, welche auf der dualen Mortar-Methode basiert. Im zeitlichen Teil wurde zunächst der Einfluss von Kontaktereignissen auf die Eigenschaften der dynamischen Strukturantwort analysiert. Aufbauend auf den Erkenntnissen wurde eine zeitliche Kontaktdiskretisierung entwickelt, welche eine stabile und energierhaltende Modellierung von dynamischen Kontaktvorgängen erlaubt.

Bei einer räumlichen Kontaktdiskretisierung mit der dualen Mortar-Methode kann am Rand des Kontaktbereichs eine Inkonsistenz zwischen den Mortar-Matrizen entstehen. Diese Situation tritt dann auf, wenn ein Slave-Element nicht vollständig von Master-Elementen bedeckt wird. In speziellen Fällen kann solch eine Konstellation durch eine geschickte Wahl der Slave-Seite vermieden werden. Für Probleme mit großen Deformationen ist dies im Allgemeinen jedoch nicht mehr möglich. Infolgedessen wird die Kontaktkraft der betreffenden Knoten fehlerhaft übertragen, die Werte der Normalklaffung nehmen beliebig große Beträge an. Zur Korrektur der Inkonsistenz wurde in dieser Arbeit eine modifizierte Definition der Mortar-Matrizen entwickelt. Damit ist in allen Fällen eine konsistente Übertragung der Kontaktkraft und eine konsistente Berechnung der Normalklaffung möglich.

Aufgrund der modifizierten Berechnung der Mortar-Matrizen vergrößert sich die Konditionszahl der Systemsteifigkeitsmatrix, wenn sich der Kontaktbereich eines Slave-Ele-

ments verkleinert. Dadurch wiederum resultiert ein deutlich schlechteres Konvergenzverhalten innerhalb der iterativen Gleichungslösung. Damit diese Problematik vermieden werden kann, wurde in der vorliegenden Arbeit eine Wichtungsprozedur für die modifizierten Mortar-Matrizen entwickelt. Als Ergebnis zeigen weder die Konditionierung noch das Konvergenzverhalten einen Unterschied zu vergleichbaren Problemen ohne Modifikation.

Dynamische Kontaktvorgänge verschlechtern in der Regel die Leistungsfähigkeit des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine zeitliche Kontaktdiskretisierung entwickelt, welche durch die modulare Kombination von verschiedenen Korrekturen die größten Schwachpunkte vermeidet. Im Gegensatz zu einer nicht modifizierten Zeitintegration besitzt der resultierende Algorithmus die folgenden Eigenschaften:

- Nach einer Modifikation von KANE U. A. (1999) ist die Energieveränderung durch die Kontaktkräfte dissipativ.
- Oszillationen in der Kontaktkraft werden durch eine Modifikation des Integrators vermieden. Hierzu wurde das in DEUFLHARD U. A. (2008) vorgestellte Konzept auf große Deformationen erweitert.
- Durch eine a posteriori Modifikation resultieren physikalisch sinnvolle Kontaktgeschwindigkeiten, deren Komponenten in Richtung einer diskreten Oberflächennormalen übereinstimmen.
- Die Systemenergie wird mit dem Energie-Korrekturkraft-Verfahren erhalten. Dazu wird die dissipierte Energie knotenweise gespeichert und nach Lösen des Kontakts mit einer Energie-Korrekturkraft wieder zurückgegeben. Damit dieses Verfahren mit einer exakten Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung kombiniert werden kann, wurde ein von ARMERO UND PETŐCZ (1998) präsentiertes Konzept verallgemeinert.

Der Energie-Korrekturkraft-Algorithmus stellt neben der „Velocity-Update-Method“ (LAURSEN UND LOVE 2002) das einzige Verfahren dar, welches gleichzeitig eine Erhaltung der Systemenergie und eine exakte Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung ermöglicht. Im Gegensatz zur „Velocity-Update-Method“ erfolgt die Rückgabe der dissipierten Energie jedoch nicht direkt in Form von kinetischer Energie, sondern indirekt über eine äußere Kraft. Somit bestimmt die Systemantwort die Verteilung von kinetischer und interner Energie. Allerdings ist mit der „Velocity-Update-Method“ der numerische Aufwand geringer, da die Energiekorrektur in einer Nachlaufrechnung durchgeführt wird.



## 8.2 Ausblick

Die Formulierung von konsistenten Mortar-Matrizen für dreidimensionale Probleme stellt eine sinnvolle Erweiterung der in dieser Arbeit entwickelten Modifikation dar. Prinzipiell lässt sich dazu die Vorgehensweise aus dem Zweidimensionalen übertragen. Vor allem für Probleme mit mehreren Kontaktzonen resultieren jedoch komplexe geometrische Situationen. Beispielsweise soll die Modifikation der Mortar-Matrizen nur dann durchgeführt werden, wenn ein Slave-Element nicht vollständig von Master-Elementen bedeckt ist. Allerdings weisen auch Abschnitte der aktiven Kontaktfläche eine bereichsweise Klaffung auf, da die Nichtdurchdringungsbedingung integral erfüllt wird. Die sorgfältige Unterscheidung zwischen diesen beiden Situationen ist im Dreidimensionalen deutlich schwieriger als für zweidimensionale Probleme.

Eine interessante Fragestellung ist sicherlich auch, inwiefern das Konzept der dualen Formfunktionen mit einer isogeometrischen Geometriebeschreibung kombiniert werden kann. Die a priori glatte Oberflächenbeschreibung würde einen weiteren Vorteil für die numerische Stabilität des resultierenden Verfahrens bedeuten. Allerdings sind Geometrie und Verschiebungen im Rahmen des isogeometrischen Konzepts normalerweise mit deutlich komplexeren Funktionen beschrieben als in Standard-FE-Formulierungen. Aus diesem Grund würde sich auch die Konstruktion der dualen Formfunktionen deutlich aufwendiger gestalten.

Im Hinblick auf eine allgemeine Anwendbarkeit stellt die Kombination der entwickelten zeitlichen Kontaktbehandlung mit einem energetisch stabilen Basisalgorithmus den nächsten konsequenten Schritt dar. Denkbar sind Verknüpfungen mit einer dissipativen Methode wie dem „Hilber- $\alpha$ “-Algorithmus (HILBER U. A. 1977) oder der „Generalized- $\alpha$  Method“ (CHUNG UND HULBERT 1993). Auch eine Verbindung mit der algorithmisch energieerhaltenden „Energy-Momentum-Method“ (SIMO UND TARNOW 1992) kann in Erwägung gezogen werden.

Unter großen Deformationen ist die zusätzliche Energieveränderung durch die Modifikation des Integrators nach DEUFLHARD U. A. (2008) nicht garantiert dissipativ. In einer weiteren Betrachtung sollte untersucht werden, ob dieser Term in allen Fällen durch die dissipativen Terme aufgehoben wird. Entsprechend den Ergebnissen ist eine weitere Modifikation des Verfahrens denkbar.

Im Rahmen der Idee der Energiespeicherung wurde in dieser Arbeit lediglich eine relativ grobe Abschätzung der Energie-Korrekturkraft während des ersten Iterationsschritts verwendet. Die Untersuchung von weiteren Möglichkeiten ist hier sinnvoll, um die Effizienz in der Gleichgewichtsiteration zu steigern.



# A

---

## Anhang

### A.1 Mathematische und mechanische Grundlagen

- Rechenregel, gültig für beliebige Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  und einen beliebigen Tensor zweiter Stufe  $\mathbf{A}$ :

$$\left(\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{a}\right) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}), \quad \mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{b} = b^i \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.1})$$

- Produktregel für den Divergenzoperator:

$$\text{Div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{A}^\top : \text{Grad} \mathbf{b} + \text{Div}(\mathbf{A}^\top) \cdot \mathbf{b}. \quad (\text{A.2})$$

- Gauß'scher Integralsatz:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_0} \text{Div} \mathbf{a} \, d\Omega_0 &= \int_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma \\ \int_{\Omega_0} \text{Div} \mathbf{A} \, d\Omega_0 &= \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

- Partielle Integration (Kombinieren der Beziehungen (A.2) und (A.3)<sub>1</sub> unter Verwendung von Gleichung (A.1), anschließendes Substituieren von  $\mathbf{A}^\top$  mit  $\mathbf{P}$  und  $\mathbf{a}$  mit  $\delta \mathbf{u}$ ):

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{P} : \text{Grad}(\delta \mathbf{u}) \, d\Omega_0 = \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} \cdot \bar{\mathbf{n}} \, d\Gamma - \int_{\Omega_0} \delta \mathbf{u} \cdot \text{Div} \mathbf{P} \, d\Omega_0. \quad (\text{A.4})$$

- Indexschreibweise der virtuellen Arbeiten:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\alpha,\text{kin}} &= \int_{\Omega_0^\alpha} \delta\mathbf{u}^\alpha \cdot [\rho_0^\alpha \ddot{\mathbf{x}}^\alpha] d\Omega_0^\alpha = \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha \delta u_i^\alpha \ddot{x}_i^\alpha d\Omega_0^\alpha \\
\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\alpha,\text{int}} &= \int_{\Omega_0^\alpha} \delta\mathbf{E}^\alpha : \mathbf{S}^\alpha d\Omega_0^\alpha = \int_{\Omega_0^\alpha} \delta E_{ij}^\alpha S_{ij}^\alpha d\Omega_0^\alpha = \int_{\Omega_0^\alpha} \delta F_{ki}^\alpha F_{kj}^\alpha S_{ij}^\alpha d\Omega_0^\alpha \\
\delta\Pi_{\text{PvV}}^{\alpha,\text{ext}} &= \int_{\Omega_0^\alpha} \delta\mathbf{u}^\alpha \cdot [\rho_0^\alpha \mathbf{b}^\alpha] d\Omega_0^\alpha + \int_{\Gamma_n^\alpha} \delta\mathbf{u}^\alpha \cdot \hat{\mathbf{t}}_0^\alpha d\Gamma_n^\alpha \\
&= \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^\alpha \delta u_i^\alpha b_i^\alpha d\Omega_0^\alpha + \int_{\Gamma_n^\alpha} \delta u_i^\alpha [\hat{t}_0^\alpha]_i d\Gamma_n^\alpha.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

## A.2 Räumliche Diskretisierung

Beziehungen, welche im Zusammenhang mit der Kontaktdiskretisierung stehen, werden im Folgenden für zweidimensionale Probleme angegeben. Alle weiteren Beziehungen sind allgemeingültig ohne eine Festlegung der Dimension formuliert.

### A.2.1 Grundlagen

- Komponentendarstellung von Knotenwerten (exemplarisch gezeigt anhand der Geometrie):

$$\mathbf{X}_I^\alpha = X_{Ij}^\alpha \mathbf{e}_j. \tag{A.6}$$

- Abkürzungen für Ableitungen:

$$\begin{aligned}
N_{I,j}^\alpha &= \partial N_I^\alpha / \partial \xi_j^\alpha \\
N_{I,X_j}^\alpha &= \partial N_I^\alpha / \partial X_j^{\alpha,\text{h}}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

- Jacobi-Matrix zwischen referentieller Geometrie und Element-Parameterraum:

$$\mathbf{J}_{0\xi}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}^{\alpha,\text{h}}}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \left( \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_I^\alpha \mathbf{X}_I^\alpha \right)}{\partial \xi^\alpha} = \begin{pmatrix} \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,1}^\alpha X_{I1}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,1}^\alpha X_{I2}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,1}^\alpha X_{I3}^\alpha \\ \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,2}^\alpha X_{I1}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,2}^\alpha X_{I2}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,2}^\alpha X_{I3}^\alpha \\ \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,3}^\alpha X_{I1}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,3}^\alpha X_{I2}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,3}^\alpha X_{I3}^\alpha \end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

mit  $n_{ne}$ : Anzahl der Knoten pro Element

- Jacobi-Determinante zwischen referentieller Geometrie und Element-Parameter-  
raum:

$$J_{0\xi}^\alpha = \det \mathbf{J}_{0\xi}^\alpha. \quad (\text{A.9})$$

- Jacobi-Determinante zwischen aktueller Geometrie und Segment-Parameterraum  
eines Slave-Elements:

$$J_{\mathbf{x}\eta} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi^1} \right\| \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta}. \quad (\text{A.10})$$

Zur Auswertung von Beziehung (A.10) wird die aktuelle Geometrie in Abhängigkeit der Koordinate des Slave-Element-Parameterraums ausgedrückt. Die Koordinate des Slave-Element-Parameterraums wiederum wird als Funktion der Koordinate des Segment-Parameterraums formuliert:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^1 &= N_1 \mathbf{x}_1 + N_2 \mathbf{x}_2 = \frac{1}{2}(1 - \xi^1) \mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi^1) \mathbf{x}_2 \\ \xi^1 &= \frac{1}{2}(1 - \eta) \xi_a^1 + \frac{1}{2}(1 + \eta) \xi_b^1. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Mithilfe der Beziehungen (A.11) können die einzelnen Ableitungen in Gleichung (A.10) berechnet werden:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi^1} \right\| &= \left\| \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \right\| = \frac{1}{2} \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} = \frac{1}{2} \ell_e \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}(\xi_b^1 - \xi_a^1). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Damit resultiert schließlich folgender Ausdruck für  $J_{\mathbf{x}\eta}$ :

$$J_{\mathbf{x}\eta} = \frac{1}{4} \ell_e (\xi_b^1 - \xi_a^1). \quad (\text{A.13})$$

- Jacobi-Determinante zwischen aktueller Geometrie und Slave-Element-Parameter-  
raum als Resultat aus Gleichung (A.12)<sub>1</sub>:

$$J_{\mathbf{x}\xi^1} = \left\| \frac{\partial \mathbf{x}^1}{\partial \xi^1} \right\| = \frac{1}{2} \ell_e. \quad (\text{A.14})$$

- Ableitung der Ansatzfunktion von Knoten  $I$  nach der referentiellen Geometrie:

$$N_{I,X_j}^\alpha = \left( \mathbf{J}_{0\xi}^\alpha \right)_{jk}^{-1} N_{I,k}^\alpha. \quad (\text{A.15})$$

- Diskretisierter materieller Deformationsgradient ( $3 \times 3$  Matrix):

$$\mathbf{F}^{\alpha,h} = \frac{\partial \mathbf{u}^{\alpha,h}}{\partial \mathbf{X}^{\alpha,h}} = \frac{\partial \left( \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_I^\alpha \mathbf{d}_I^\alpha \right)}{\partial \mathbf{X}^{\alpha,h}} = \begin{pmatrix} \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_1}^\alpha d_{I1}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_1}^\alpha d_{I2}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_1}^\alpha d_{I3}^\alpha \\ \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_2}^\alpha d_{I1}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_2}^\alpha d_{I2}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_2}^\alpha d_{I3}^\alpha \\ \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_3}^\alpha d_{I1}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_3}^\alpha d_{I2}^\alpha & \sum_{I=1}^{n_{ne}} N_{I,X_3}^\alpha d_{I3}^\alpha \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

## A.2.2 Virtuelle Arbeiten

Die diskreten virtuellen Arbeiten werden durch Einsetzen der diskretisierten Feldgrößen (siehe Kapitel 3) in die kontinuierliche Beschreibung der virtuellen Arbeiten berechnet. Als Ausgangspunkt wurden diese mit Gleichung (A.5) in Indexschreibweise formuliert.

### Virtuelle kinetische Arbeit

Die diskrete virtuelle kinetische Arbeit eines einzelnen Körpers  $\mathcal{B}^{\alpha,h}$  lautet:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\text{kin}}^{\alpha,h} &= \int_{\Omega_0^{\alpha,h}} \rho_0^{\alpha,h} \delta u_i^{\alpha,h} \ddot{u}_i^{\alpha,h} \, d\Omega_0^{\alpha,h} \\ &= \int_{\Omega_0^{\alpha,h}} \left( \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_I^\alpha \delta d_{Ii}^\alpha \right) \cdot \left( \rho_0^{\alpha,h} \sum_{J=1}^{n_{n\alpha}} N_J^\alpha \ddot{d}_{Ji}^\alpha \right) \, d\Omega_0^{\alpha,h} \\ &= \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} \sum_{J=1}^{n_{n\alpha}} \delta d_{Ii}^\alpha \ddot{d}_{Ji}^\alpha \int_{\Omega_0^{\alpha,h}} \rho_0^{\alpha,h} N_I^\alpha N_J^\alpha \, d\Omega_0^{\alpha,h}. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Summieren über beide Körper liefert die gesamte diskrete virtuelle kinetische Arbeit:

$$\delta \Pi_{\text{kin}}^h = \sum_{\alpha=1}^2 \delta \Pi_{\text{kin}}^{\alpha,h} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{M} \mathbf{a} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{kin}}. \quad (\text{A.18})$$

Die konsistente Massenmatrix berechnet sich aus Gleichung (A.17) mit der knotenpaar-zugehörigen Definition von  $n_{\text{dim}} \times n_{\text{dim}}$  Blöcken:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^\alpha [I, J] &= \int_{\Omega_0^{\alpha,h}} \rho_0^{\alpha,h} N_I^\alpha N_J^\alpha \, d\Omega_0^{\alpha,h} \mathbf{I}_{n_{\text{dim}}} \\ &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}\alpha}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \rho_0^{\alpha,h} N_I^\alpha N_J^\alpha J_{0\xi}^\alpha \right) \, d\xi_1^\alpha \, d\xi_2^\alpha \, d\xi_3^\alpha \mathbf{I}_{n_{\text{dim}}} \\ &= M_{IJ}^\alpha \mathbf{I}_{n_{\text{dim}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

### Virtuelle interne Arbeit

Mit dem diskretisierten materiellen Deformationsgradienten (A.16) kann die diskretisierte virtuelle interne Arbeit eines einzelnen Körpers  $\mathcal{B}^{\alpha,h}$  durch die folgende Beziehung angegeben werden:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\text{int}}^{\alpha,h} &= \int_{\Omega_0^{\alpha,h}} \delta F_{ki}^{\alpha,h} F_{kj}^{\alpha,h} S_{ij}^{\alpha,h} d\Omega_0^{\alpha,h} \\ &= \int_{\Omega_0^{\alpha,h}} \left( \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_{I,X_i}^{\alpha} \delta d_{Ik}^{\alpha} \right) \left( \sum_{J=1}^{n_{n\alpha}} N_{J,X_j}^{\alpha} d_{Jk}^{\alpha} \right) S_{ij}^{\alpha,h} d\Omega_0^{\alpha,h}.\end{aligned}\quad (\text{A.20})$$

Aufsummieren liefert die gesamte diskretisierte virtuelle interne Arbeit:

$$\delta\Pi_{\text{int}}^h = \sum_{\alpha=1}^2 \delta\Pi_{\text{int}}^{\alpha,h} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{int}}.\quad (\text{A.21})$$

Dabei lautet die räumliche Komponente  $k$  des internen Kräftevektors von Knoten  $I$ :

$$\begin{aligned}f_{\text{int}}^{Ik} &= \int_{\Omega_0^{\alpha,h}} N_{I,X_i}^{\alpha} \left( \sum_{J=1}^{n_{n\alpha}} N_{J,X_j}^{\alpha} d_{Jk}^{\alpha} \right) S_{ij}^{\alpha,h} d\Omega_0^{\alpha,h} \\ &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}\alpha}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ N_{I,X_i}^{\alpha} \left( \sum_{J=1}^{n_{n\alpha}} N_{J,X_j}^{\alpha} d_{Jk}^{\alpha} \right) S_{ij}^{\alpha,h} J_{0\xi}^{\alpha} \right] d\xi_1^{\alpha} d\xi_2^{\alpha} d\xi_3^{\alpha}.\end{aligned}\quad (\text{A.22})$$

### Virtuelle externe Arbeit

Letztlich berechnet sich die diskrete virtuelle externe Arbeit eines einzelnen Körpers  $\mathcal{B}^{\alpha,h}$  zu:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\text{ext}}^{\alpha,h} &= \int_{\Omega_0^{\alpha}} \rho_0^{\alpha,h} \delta u_i^{\alpha,h} b_i^{\alpha,h} d\Omega_0^{\alpha} + \int_{\Gamma_n^{\alpha}} \delta u_i^{\alpha,h} [\hat{t}_0^{\alpha}]_i d\Gamma_n^{\alpha} \\ &= \int_{\Omega_0^{\alpha}} \rho_0^{\alpha,h} \left( \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_I^{\alpha} \delta d_{Ii}^{\alpha} \right) b_i^{\alpha,h} d\Omega_0^{\alpha} + \int_{\Gamma_n^{\alpha}} \left( \sum_{I=1}^{n_{n\alpha}} N_I^{\alpha} \delta d_{Ii}^{\alpha} \right) [\hat{t}_0^{\alpha}]_i d\Gamma_n^{\alpha}.\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

Aufsummieren liefert:

$$\delta\Pi_{\text{ext}}^h = \sum_{\alpha=1}^2 \delta\Pi_{\text{ext}}^{\alpha,h} = \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}_{\text{ext}}.\quad (\text{A.24})$$

Die räumliche Komponente  $k$  des externen Kräftevektors eines Knotens  $I$  ergibt sich dabei aus folgender Beziehung:

$$\begin{aligned}
f_{\text{ext}}^{Ii} &= \int_{\Omega_0^\alpha} \rho_0^{\alpha,h} N_I^\alpha b_k^{\alpha,h} d\Omega_0^\alpha + \int_{\Gamma_n^\alpha} N_I^\alpha [\hat{t}_0^\alpha]_k d\Gamma_n^\alpha \\
&= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}\alpha}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \rho_0^{\alpha,h} N_I^\alpha b_k^{\alpha,h} J_{0\xi}^\alpha \right) d\xi_1^\alpha d\xi_2^\alpha d\xi_3^\alpha \\
&\quad + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}\alpha}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( N_I^\alpha [\hat{t}_0^\alpha]_k J_{0\xi_s}^\alpha \right) d\xi_1^\alpha d\xi_2^\alpha.
\end{aligned} \tag{A.25}$$

In Gleichung (A.25) stellt  $J_{0\xi_s}^\alpha$  die Jacobi-Determinante zwischen der referentiellen Geometrie der Oberfläche und dem Parameterraum der Oberfläche dar.

## A.3 Energiebilanzen

Im Folgenden wird die Energiebilanz des Newmark-Verfahrens unter Berücksichtigung der Kontaktbedingungen hergeleitet. Anschließend ist die Ermittlung der Energiebilanz für das Newmark-KD- und das Newmark-KS-Verfahren dargestellt.

Die Differenz zwischen externen und internen Kräften wird in einer vereinfachenden Schreibweise mit  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{f}_{\text{int}}$  bezeichnet.

### A.3.1 Newmark-Verfahren

In einem ersten Schritt wird die nichtlineare effektive Strukturgleichung (4.3) mithilfe von Gleichung (4.2) wieder als Funktion der Beschleunigung formuliert. Anschließend kann Gleichung (4.3) für die Zeitpunkte  $t_{n+1}$  und  $t_n$  nach der Beschleunigung aufgelöst werden:

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}_c^{n+1}), \quad \mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^n - \mathbf{f}_c^n). \tag{A.26}$$

Einsetzen der Resultate aus Gleichung (A.26) in die Newmark-Approximation der Geschwindigkeit (4.1)<sub>2</sub> führt mit der Parameterwahl  $\gamma = 1/2$  auf die folgende Beziehung:

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^n - \mathbf{f}_c^n) + \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}_c^{n+1}). \tag{A.27}$$



Multiplizieren von Gleichung (A.27) mit  $1/2 \Delta t \mathbf{M}$  und anschließendes Umstellen, so dass alle Terme auf der rechten Seite stehen, ergibt dann:

$$\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{M}(-\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{f}^n - \mathbf{f}_c^n) + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{f}^{n+1} - \mathbf{f}_c^{n+1}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.28})$$

Zusätzlich zu Gleichung (A.28) ist für die Ermittlung der Energiebilanz eine zweite Beziehung notwendig. Hierzu wird die Beschleunigung (A.26)<sub>2</sub> in die effektive Strukturgleichung (4.3) eingesetzt. Multiplizieren des Resultats mit dem Faktor  $\beta \Delta t^2$  führt zusammen mit der Wahl  $\beta = 1/4$  auf den folgenden Ausdruck:

$$\mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) - \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_c^n) - \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{f} - \mathbf{f}_c^{n+1}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A.29})$$

Addieren der beiden Gleichungen (A.28) und (A.29) liefert anschließend:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{M}(-\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) + \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Wird der Term  $2\mathbf{M}\mathbf{v}_n$  auf beiden Seiten von Gleichung (A.30)<sub>2</sub> addiert, resultiert daraus:

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n + 2\mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{v}_n) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n). \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Im Folgenden werden die Gleichungen (A.30)<sub>2</sub> und (A.31)<sub>2</sub> verwendet, um die Änderung der kinetischen Energie

$$\Delta e_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{n+1}^\top \mathbf{M} \mathbf{v}_{n+1} - \frac{1}{2} \mathbf{v}_n^\top \mathbf{M} \mathbf{v}_n = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)^\top \mathbf{M} (\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) \quad (\text{A.32})$$

umzuformen. Hierzu wird in Gleichung (A.32) zuerst der Term  $(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)$  mithilfe von Gleichung (A.30)<sub>2</sub> substituiert, welche dazu mit  $\mathbf{M}^{-1}$  vormultipliziert werden muss. Im Anschluss wird der Ausdruck  $\mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)$  durch das Resultat aus Gleichung (A.31)<sub>2</sub> ersetzt:

$$\begin{aligned} \Delta e_{\text{kin}} &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n)^\top \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) \\ &= \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)^\top \mathbf{M} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n). \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Die Umformung in der zweiten Zeile von Beziehung (A.33) nutzt dabei aus, dass die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  symmetrisch ist. Letztlich wird Gleichung (A.29) nach

$\mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n)$  aufgelöst und in die zweite Zeile von Gleichung (A.33) eingesetzt, so dass sich die folgende Beziehung für die Änderung der kinetischen Energie ergibt:

$$\begin{aligned} \Delta e_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)^\top \left[ \mathbf{f}^n + \mathbf{f}^{n+1} - (\mathbf{f}_c^n + \mathbf{f}_c^{n+1}) \right] \\ &= - \underbrace{\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1})}_{\Delta e_{\text{int}}} - \underbrace{\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_c^n + \mathbf{f}_c^{n+1})}_{\Delta e_c} + \underbrace{\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{ext}}^n + \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1})}_{\Delta e_{\text{ext}}}. \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

### A.3.2 Newmark-KD- und Newmark-KS-Verfahren

Die folgenden Beziehungen beschreiben die Ermittlung der Energiebilanzen für das Newmark-KD- und das Newmark-KS-Verfahren. Da viele Beziehungen identisch sind, werden beide Herleitungen gemeinsam dargestellt. Unterschiedliche Gleichungen sind mit geschweiften Klammern jeweils separat für beide Algorithmen angegeben.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die Beschleunigungsaufteilung des Newmark-KD-Verfahrens. Der interne Anteil der Beschleunigung (4.30)<sub>1</sub> wird für die Zeitpunkte  $t_n$  und  $t_{n+1}$  ausgewertet, der Kontaktanteil (4.30)<sub>2</sub> für den Zeitpunkt  $t_{n+1}$ :

$$\mathbf{a}_n^{\text{int}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^n), \quad \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^{n+1}), \quad \mathbf{a}_{n+1}^c = \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{f}_c^{n+1}). \quad (\text{A.35})$$

Zusammen mit der Parameterwahl  $\gamma = 1/2$  führt ein Einsetzen der Beschleunigungen (A.35) in den Geschwindigkeitsansatz (4.31)<sub>2</sub> auf den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t \left[ \mathbf{a}_n^{\text{int}} + \mathbf{a}_{n+1}^{\text{int}} \right] + \Delta t \mathbf{a}_{n+1}^c \\ &= \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t \left[ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^n) + \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}^{n+1}) \right] + \Delta t \mathbf{M}^{-1}(-\mathbf{f}_c^{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

Dieser wird mit  $1/2 \Delta t \mathbf{M}$  multipliziert und so umgestellt, dass alle Terme auf der rechten Seite stehen:

$$\frac{1}{2} \Delta t \mathbf{M}(-\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{f}^n) + \frac{\Delta t^2}{4} (\mathbf{f}^{n+1}) - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{f}_c^{n+1} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.37})$$

Wie für das Newmark-Verfahren ist zur Ermittlung der Energiebilanz neben Gleichung (A.37) noch eine weitere Beziehung notwendig. Dazu wird zunächst die Beschleunigung (A.35)<sub>1</sub> in die effektive Strukturgleichung (4.33) bzw. (4.49) des Newmark-KD- bzw. des Newmark-KS-Verfahrens eingesetzt. Multiplizieren des Resultats mit dem Faktor  $\beta \Delta t^2$  führt dann zusammen mit der Wahl  $\beta = 1/4$  auf die folgende Beziehung:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(N-KD): } \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) \\ \text{(N-KS): } \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) \end{array} \right\} - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{f}^n - \frac{\Delta t^2}{4} \mathbf{f}^{n+1} + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{f}_c^{n+1} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.38})$$

Im Anschluss werden die Beziehungen (A.37) und (A.38) addiert:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{M}(-\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) + \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) \end{array} \right\} \text{(N-KD)} \quad (\text{A.39})$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{M}(-\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) + \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}). \end{array} \right\} \text{(N-KS)}$$

Durch die Addition des Terms  $2\mathbf{M}\mathbf{v}_n$  resultiert aus den Gleichungen (A.39) jeweils eine weitere Bedingung:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n + 2\mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n + \Delta t \mathbf{v}_n) \\ \Leftrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) \end{array} \right\} \text{(N-KD)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n + 2\mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}} + \Delta t \mathbf{v}_n) \\ \Leftrightarrow \mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n) = \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) + \Delta t \mathbf{f}_{\text{pred}}. \end{array} \right\} \text{(N-KS)} \quad (\text{A.40})$$

Für das Newmark-KS-Verfahren wurde dabei der Verschiebungsprädiktor  $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}$  mit Gleichung (4.61) durch einen Ausdruck in Abhängigkeit von  $\mathbf{f}_{\text{pred}}$  ersetzt.

Im Folgenden werden die Gleichungen (A.39)<sub>2</sub> und (A.40)<sub>2</sub> verwendet, um die Änderung der kinetischen Energie (A.32) umzuformen. Hierzu wird in Gleichung (A.32) zuerst der Term  $(\mathbf{v}_{n+1} - \mathbf{v}_n)$  mithilfe von Gleichung (A.39) substituiert, welche dazu mit  $\mathbf{M}^{-1}$

vormultipliziert werden muss. Im Anschluss wird der Ausdruck  $\mathbf{M}(\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{v}_n)$  durch das Resultat aus Gleichung (A.40) ersetzt:

$$\begin{aligned}
\Delta e_{\text{kin}} &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n)^\top \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) \left. \vphantom{\frac{1}{\Delta t}} \right\} \text{(N-KD)} \\
&= \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)^\top \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n) \\
\Delta e_{\text{kin}} &= \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}})^\top \left[ \frac{2}{\Delta t} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) + \Delta t \mathbf{f}_{\text{pred}} \right] \left. \vphantom{\frac{1}{\Delta t}} \right\} \text{(N-KS)} \\
&= \frac{2}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)^\top \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}}) + (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}})^\top \mathbf{f}_{\text{pred}}. \left. \vphantom{\frac{2}{\Delta t^2}} \right\} \text{(A.41)}
\end{aligned}$$

Schließlich wird Gleichung (A.29) nach  $\mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n - \Delta t \mathbf{v}_n)$  aufgelöst und in die zweite Zeile von Gleichung (A.41) eingesetzt, so dass für die Änderung der kinetischen Energie folgende Beziehung gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta e_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)^\top \left[ \mathbf{f}^n + \mathbf{f}^{n+1} - 2\mathbf{f}_c^{n+1} \right] \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\} \text{(N-KD)} \\
&= -\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}) - \Delta \mathbf{d}^\top \mathbf{f}_c^{n+1} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{ext}}^n + \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1}) \\
\Delta e_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n)^\top \left[ \mathbf{f}^n + \mathbf{f}^{n+1} - 2\mathbf{f}_c^{n+1} \right] + (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}})^\top \mathbf{f}_{\text{pred}} \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\} \text{(N-KS)} \\
&= -\frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{int}}^n + \mathbf{f}_{\text{int}}^{n+1}) - \Delta \mathbf{d}^\top \mathbf{f}_c^{n+1} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^\top (\mathbf{f}_{\text{ext}}^n + \mathbf{f}_{\text{ext}}^{n+1}) \\
&\quad + (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{pred}})^\top \mathbf{f}_{\text{pred}}. \left. \vphantom{\frac{1}{2}} \right\} \text{(A.42)}
\end{aligned}$$

## A.4 Räumliche Kontaktdiskretisierung mit der dualen Mortar-Methode

### A.4.1 Allgemeines und Festlegungen

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden abweichend von der Darstellung in den vorangegangenen Kapiteln die folgenden Vereinbarungen getroffen:

- Die aktuelle Position eines FE-Knotens wird mit den Kleinbuchstaben  $(x|y|z)$  gekennzeichnet.
- Auch die räumlichen Komponenten einer Größe  $(\bullet)$  werden in der Form  $(\bullet)_{x/y/z}$  mit Kleinbuchstaben indiziert.
- Ein mit  $I$  bzw.  $J$  indizierter FE-Knoten ist ein Slave- bzw. ein Master-Kontaktknoten.
- Knoten mit einer konkreten Nummerierung sind Slave-Kontaktknoten, falls die Ziffern 0, 1, 2, 3 verwendet werden. Knoten mit den Ziffern 4 oder 5 sind Master-Kontaktknoten.

Innerhalb eines Slave-Elements sind alle Größen, welche nicht von der Master-Seite abhängen, eine Funktion von maximal vier Slave-Kontaktknoten. Die Verschiebungen dieser Knoten werden im Vektor  $\mathbf{d}_{\text{sl}}$  gesammelt:

$$\mathbf{d}_{\text{sl}} = \left[ \Delta d_{0x}^1 \mid \Delta d_{0y}^1 \mid \Delta d_{1x}^1 \mid \Delta d_{1y}^1 \mid \Delta d_{2x}^1 \mid \Delta d_{2y}^1 \mid \Delta d_{3x}^1 \mid \Delta d_{3y}^1 \right]^\top. \quad (\text{A.43})$$

Alle Größen, welche auch Informationen der Master-Seite beinhalten, sind Funktionen von maximal vier Slave- und zwei Master-Kontaktknoten. Die Verschiebungen dieser sechs Knoten sind mit dem Vektor  $\mathbf{d}_{\text{slm}}$  zusammengefasst:

$$\mathbf{d}_{\text{slm}} = \left[ \Delta d_{0x}^1 \mid \Delta d_{0y}^1 \mid \Delta d_{1x}^1 \mid \Delta d_{1y}^1 \mid \Delta d_{2x}^1 \mid \Delta d_{2y}^1 \mid \Delta d_{3x}^1 \mid \Delta d_{3y}^1 \mid \dots \right. \\ \left. \dots \Delta d_{4x}^2 \mid \Delta d_{4y}^2 \mid \Delta d_{5x}^2 \mid \Delta d_{5y}^2 \right]^\top. \quad (\text{A.44})$$

Die Nummerierung der Knoten ist in Abbildung A.1(a) veranschaulicht.

### A.4.2 Segment-Koordinaten

Im Folgenden dargestellt ist die Bestimmung der Segment-Koordinaten  $\xi_a^{1/2}$  (Segmentbeginn) oder  $\xi_b^{1/2}$  (Segmentende) für zweidimensionale Segmente. Die Berechnung der

Mortar-Integrale erfolgt nach Ermittlung der Segmentgrenzen wie in Abschnitt 3.3 erläutert.

### Segment-Koordinaten $\xi_{a/b}^1$ der Slave-Seite

Beginnt und endet ein Segment mit einem Slave-Kontaktknoten (Fall (d) in Abbildung A.1), gelten die Bedingungen  $\xi_a^1 = -1,0$  und  $\xi_b^1 = 1,0$ . In allen weiteren Fällen muss mindestens eine Segment-Koordinate durch die Projektion eines Master-Kontaktknotens auf die Slave-Seite bestimmt werden. Wird dieser zunächst allgemein mit  $\mathbf{x}_J^2$  bezeichnet, lautet die zugehörige Bestimmungsgleichung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} & \left[ N_1(\xi_{a/b}^1) \begin{pmatrix} x_1^1 \\ y_1^1 \\ z_1^1 \end{pmatrix} + N_2(\xi_{a/b}^1) \begin{pmatrix} x_2^1 \\ y_2^1 \\ z_2^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_J^2 \\ y_J^2 \\ z_J^2 \end{pmatrix} \right] \times \\ & \dots \left[ N_1(\xi_{a/b}^1) \begin{pmatrix} n_{1x} \\ n_{1y} \\ n_{1z} \end{pmatrix} + N_2(\xi_{a/b}^1) \begin{pmatrix} n_{2x} \\ n_{2y} \\ n_{2z} \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Für eine ebene Problemstellung mit konstantem z-Wert resultiert daraus die Beziehung:

$$\begin{aligned} & \left[ N_1(\xi_{a/b}^1) x_1^1 + N_2(\xi_{a/b}^1) x_2^1 - x_J^2 \right] \left[ N_1(\xi_{a/b}^1) n_{1y} + N_2(\xi_{a/b}^1) n_{2y} \right] \\ & - \left[ N_1(\xi_{a/b}^1) y_1^1 + N_2(\xi_{a/b}^1) y_2^1 - y_J^2 \right] \left[ N_1(\xi_{a/b}^1) n_{1x} + N_2(\xi_{a/b}^1) n_{2x} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

In den Gleichungen (A.45) und (A.46) wurden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi_{a/b}^1), \quad N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi_{a/b}^1). \quad (\text{A.47})$$

Wird der Segmentbeginn durch einen Master-Kontaktknoten bestimmt, folgt  $\xi_a^1$  mit  $\mathbf{x}_J^2 = \mathbf{x}_5^2$  aus Gleichung (A.46). Dieselbe Vorgehensweise liefert  $\xi_b^1$ , falls das Segmentende durch einen Master-Kontaktknoten bestimmt wird. In diesem Fall muss  $\mathbf{x}_J^2 = \mathbf{x}_4^2$  gesetzt werden.

### Segment-Koordinaten $\xi_{a/b}^2$ der Master-Seite

Äquivalent zur Slave-Seite gilt  $\xi_a^2 = 1,0$  und  $\xi_b^2 = -1,0$ , falls ein Segment mit einem Master-Kontaktknoten beginnt und endet (Fall (c) in Abbildung A.1). Ansonsten muss  $\xi_a^2$  oder  $\xi_b^2$  durch die Projektion eines Slave-Kontaktknotens auf die Master-Seite bestimmt werden. Wird dieser zunächst allgemein mit  $\mathbf{x}_J^1$  bezeichnet, gilt folgende Bestimmungs-

gleichung:

$$\left[ N_4(\xi_{a/b}^2) \begin{pmatrix} x_4^2 \\ y_4^2 \\ z_4^2 \end{pmatrix} + N_5(\xi_{a/b}^2) \begin{pmatrix} x_5^2 \\ y_5^2 \\ z_5^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_I^1 \\ y_I^1 \\ z_I^1 \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} n_{Ix} \\ n_{Iy} \\ n_{Iz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.48})$$

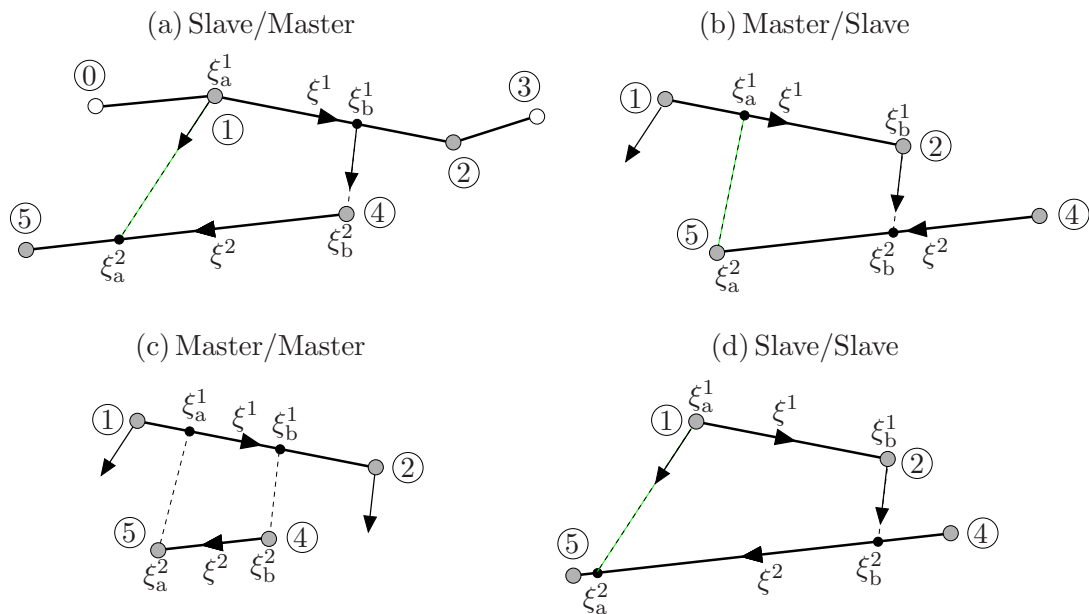
Bei einer ebenen Problemstellung mit konstantem z-Wert ergibt sich daraus die Gleichung

$$\left[ N_4(\xi_{a/b}^2) x_4^2 + N_5(\xi_{a/b}^2) x_5^2 - x_I^1 \right] n_{Iy} - \left[ N_4(\xi_{a/b}^2) y_4^2 + N_5(\xi_{a/b}^2) y_5^2 - y_I^1 \right] n_{Ix} = 0, \quad (\text{A.49})$$

mit den Abkürzungen

$$N_4 = \frac{1}{2} (1 - \xi_{a/b}^2), \quad N_5 = \frac{1}{2} (1 + \xi_{a/b}^2). \quad (\text{A.50})$$

Wird der Segmentbeginn bzw. das Segmentende durch einen Slave-Kontaktknoten bestimmt, resultiert  $\xi_a^2$  bzw.  $\xi_b^2$  mit  $\mathbf{x}_I^1 = \mathbf{x}_1^1$  bzw. mit  $\mathbf{x}_I^1 = \mathbf{x}_2^1$  aus Gleichung (A.49).



(•)/(o): Segmentanfang wird durch (•)-Kontaktknoten bestimmt, Segmentende wird durch (o)-Kontaktknoten bestimmt; für die Platzhalter sind jeweils „Slave“ oder „Master“ einzusetzen

**Abbildung A.1:** Mögliche Segment-Konstellationen.

### A.4.3 Linearisierung in vollständig segmentierten Slave-Elementen

In den folgenden Ausführungen wird die Linearisierung in vollständig segmentierten Slave-Elementen dargestellt. Die zusätzlichen Linearisierungsanteile in Rand-Elementen sind in den Abschnitten A.4.4 und A.4.5 dargestellt.

#### Linearisierung der kontinuierlichen Knoten-Normalen

Die Linearisierung der kontinuierlichen Knoten-Normalen  $\mathbf{n}_I$  wird nur kurz skizziert. Für eine ausführlichere Herleitung sei auf YANG U. A. (2005) verwiesen.

Als erstes werden die nicht normierten Element-Normalen  $\mathbf{n}_{e1}$  und  $\mathbf{n}_{e2}$  der an den Slave-Kontaktknoten  $I$  grenzenden Slave-Elemente berechnet:

$$\mathbf{n}_{e1} = \begin{bmatrix} (y_I^1 - y_{I-1}^1) \\ -(x_I^1 - x_{I-1}^1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{e1x} \\ n_{e1y} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{n}_{e2} = \begin{bmatrix} (y_{I+1}^1 - y_I^1) \\ -(x_{I+1}^1 - x_I^1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{e2x} \\ n_{e2y} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.51})$$

$\mathbf{n}_{e1}$  und  $\mathbf{n}_{e2}$  sind auch in Abbildung 3.10 dargestellt. Ausgehend von Gleichung (3.30) wird  $\mathbf{n}_I$  für die Linearisierung umgeformt, so dass die gewichtete, aber nicht normierte Normale

$$\tilde{\mathbf{n}}_I = \ell_{e2}^2 \mathbf{n}_{e1} + \ell_{e1}^2 \mathbf{n}_{e2} \quad (\text{A.52})$$

resultiert. Linearisieren liefert:

$$\Delta \tilde{\mathbf{n}}_I = \hat{\mathbf{W}} \left[ \Delta d_{(I-1)x}^1 \mid \Delta d_{(I-1)y}^1 \mid \Delta d_{Ix}^1 \mid \Delta d_{Iy}^1 \mid \Delta d_{(I+1)x}^1 \mid \Delta d_{(I+1)y}^1 \right]^T. \quad (\text{A.53})$$

Dabei ist die Matrix  $\hat{\mathbf{W}}$  durch folgende Beziehung gegeben:

$$\hat{\mathbf{W}}^T = \begin{bmatrix} 2n_{e2x} n_{e1y} & 2n_{e1y} n_{e2y} + \ell_{e2}^2 \\ -2n_{e1x} n_{e2x} - \ell_{e2}^2 & -2n_{e1x} n_{e2y} \\ 2n_{e1x} n_{e2y} - 2n_{e2x} n_{e1y} & 2n_{e1y} n_{e2y} - 2n_{e1y} n_{e2y} + \ell_{e1}^2 - \ell_{e2}^2 \\ -2n_{e1x} n_{e2x} + 2n_{e1x} n_{e2x} - \ell_{e1}^2 + \ell_{e2}^2 & -2n_{e2x} n_{e1y} + 2n_{e1x} n_{e2y} \\ -2n_{e1x} n_{e2y} & -2n_{e1y} n_{e2y} - \ell_{e1}^2 \\ 2n_{e1x} n_{e2x} + \ell_{e1}^2 & 2n_{e2x} n_{e1y} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.54})$$



Skalieren von  $\tilde{\mathbf{n}}_I$  auf Einheitslänge und anschließendes Linearisieren führt auf die gesuchte Beziehung

$$\Delta \mathbf{n}_I = \Delta \left[ \frac{\tilde{\mathbf{n}}_I}{\|\tilde{\mathbf{n}}_I\|} \right] = \mathbf{W} \left[ \Delta d_{(I-1)x}^1 \mid \Delta d_{(I-1)y}^1 \mid \Delta d_{Ix}^1 \mid \Delta d_{Iy}^1 \mid \Delta d_{(I+1)x}^1 \mid \Delta d_{(I+1)y}^1 \right]^\top \quad (\text{A.55})$$

mit

$$\mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\mathbf{n}}_I \cdot \tilde{\mathbf{n}}_I}} \hat{\mathbf{W}} - \frac{1}{\sqrt{(\tilde{\mathbf{n}}_I \cdot \tilde{\mathbf{n}}_I)^3}} \begin{bmatrix} \tilde{n}_{Ix} \tilde{n}_{Ix} & \tilde{n}_{Ix} \tilde{n}_{Iy} \\ \tilde{n}_{Ix} \tilde{n}_{Iy} & \tilde{n}_{Iy} \tilde{n}_{Iy} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{W}}. \quad (\text{A.56})$$

## Linearisierung der Segment-Koordinaten

### Linearisierung der Segment-Koordinaten $\xi_{a/b}^1$ der Slave-Seite

Beginnt ein Segment mit einem Slave-Kontaktknoten, ist die Linearisierung von  $\xi_a^1$  identisch null:  $\xi_a^1 = 0$ . Ansonsten wird sie mithilfe von Gleichung (A.46) anhand der folgenden Beziehung berechnet:

$$\begin{aligned} \Delta \xi_a^1 &= \left[ \mathbf{z}_a + \mathbf{z}_b \right] \Delta \mathbf{d}_{\text{slm}} \\ \mathbf{z}_a + \mathbf{z}_b &=: \mathbf{v}_1. \end{aligned} \quad (\text{A.57})$$

Hierin sind  $\mathbf{z}_a$  und  $\mathbf{z}_b$  Zeilen-Vektoren mit jeweils zwölf Einträgen:

$$\mathbf{z}_a = \frac{1}{\alpha_z} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (N_1 n_{1y} + N_2 n_{2y}) N_1 \\ -(N_1 n_{1x} + N_2 n_{2x}) N_1 \\ (N_1 n_{1y} + N_2 n_{2y}) N_2 \\ -(N_1 n_{1x} + N_2 n_{2x}) N_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(N_1 n_{1y} + N_2 n_{2y}) \\ (N_1 n_{1x} + N_2 n_{2x}) \end{bmatrix}^\top, \quad \mathbf{z}_b = \frac{1}{\alpha_z} \begin{bmatrix} f_1 W_{11}^1 + f_2 W_{21}^1 \\ f_1 W_{12}^1 + f_2 W_{22}^1 \\ f_1 W_{13}^1 + f_2 W_{23}^1 + f_3 W_{11}^2 + f_4 W_{21}^2 \\ f_1 W_{14}^1 + f_2 W_{24}^1 + f_3 W_{12}^2 + f_4 W_{22}^2 \\ f_1 W_{15}^1 + f_2 W_{25}^1 + f_3 W_{13}^2 + f_4 W_{23}^2 \\ f_1 W_{16}^1 + f_2 W_{26}^1 + f_3 W_{14}^2 + f_4 W_{24}^2 \\ f_3 W_{15}^2 + f_4 W_{25}^2 \\ f_3 W_{16}^2 + f_4 W_{26}^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (\text{A.58})$$

In Gleichung (A.58) wurden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi_a^1), \quad N_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi_a^1) \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} f_1 &= -N_1(N_1 y_1^1 + N_2 y_2^1 - y_5^2), & f_2 &= N_1(N_1 x_1^1 + N_2 x_2^1 - x_5^2) \\ f_3 &= -N_2(N_1 y_1^1 + N_2 y_2^1 - y_5^2), & f_4 &= N_2(N_1 x_1^1 + N_2 x_2^1 - x_5^2) \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

$$\begin{aligned} \alpha_z &= (N_{1,\xi^1} n_{1x} + N_{2,\xi^1} n_{2x})(N_1 y_1^1 + N_2 y_2^1 - y_5^2) \\ &+ (N_1 n_{1x} + N_2 n_{2x})(N_{1,\xi^1} y_1^1 + N_{2,\xi^1} y_2^1) \\ &- (N_{1,\xi^1} n_{1y} + N_{2,\xi^1} n_{2y})(N_1 x_1^1 + N_2 x_2^1 - x_5^2) \\ &- (N_1 n_{1y} + N_2 n_{2y})(N_{1,\xi^1} x_1^1 + N_{2,\xi^1} x_2^1). \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Des Weiteren bezeichnet  $W_{op}^I$  den Eintrag  $[o,p]$  der Matrix  $\mathbf{W}$  aus Gleichung (A.56) berechnet für den Slave-Kontaktknoten  $I$ .

Die Berechnung von  $\xi_a^1$  kann äquivalent zu der von  $\xi_a^1$  durchgeführt werden:

$$\Delta \xi_b^1 = \mathbf{v}_2 \Delta \mathbf{d}_{\text{sIm}}. \quad (\text{A.62})$$

Vektor  $\mathbf{v}_2$  berechnet sich dabei wie Vektor  $\mathbf{v}_1$ . Als einziger Unterschied sind in den Gleichungen (A.60) und (A.61) anstatt der Knotenkoordinaten  $x_5^2, y_5^2$  die Koordinaten  $x_4^2, y_4^2$  einzusetzen. Die Einträge des Master-Kontaktknotens im Vektor  $\mathbf{z}_a$  müssen entsprechend auf die Positionen neun und zehn geschrieben werden und nicht auf die Positionen elf und zwölf.

### Linearisierung der Segment-Koordinaten $\xi_{a/b}^2$ der Master-Seite

Wird das Ende eines Segments durch einen Master-Kontaktknoten bestimmt, ist die Linearisierung von  $\xi_a^2$  identisch null:  $\xi_a^2 = 0$ . Ansonsten berechnet sich  $\Delta \xi_a^2$  mithilfe von Gleichung (A.49) durch folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \Delta \xi_a^2 &= \begin{bmatrix} \mathbf{z}_a + \mathbf{z}_b \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{\text{sIm}} \\ \mathbf{z}_a + \mathbf{z}_b &=: \mathbf{v}_3. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Wie bei der Linearisierung von  $\xi_a^1$  sind  $\mathbf{z}_a$  und  $\mathbf{z}_b$  wieder Zeilen-Vektoren mit jeweils zwölf Einträgen

$$\mathbf{z}_a = -\frac{1}{\alpha_z} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -(n_{1y}) \\ (n_{1x}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (n_{1y}) N_4 \\ -(n_{1x}) N_4 \\ (n_{1y}) N_5 \\ -(n_{1x}) N_5 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{z}_b = -\frac{1}{\alpha_z} \begin{bmatrix} f_1 W_{11}^1 + f_2 W_{21}^1 \\ f_1 W_{12}^1 + f_2 W_{22}^1 \\ f_1 W_{13}^1 + f_2 W_{23}^1 \\ f_1 W_{14}^1 + f_2 W_{24}^1 \\ f_1 W_{15}^1 + f_2 W_{25}^1 \\ f_1 W_{16}^1 + f_2 W_{26}^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.64})$$

mit

$$N_4 = \frac{1}{2}(1 - \xi_a^2), \quad N_5 = \frac{1}{2}(1 + \xi_a^2) \quad (\text{A.65})$$

$$f_1 = -(N_4 y_4^2 + N_5 y_5^2 - y_1^1), \quad f_2 = (N_4 x_4^2 + N_5 x_5^2 - x_1^1) \quad (\text{A.66})$$

$$\alpha_z = n_{1y}(N_{4,\xi^2} x_4^2 + N_{5,\xi^2} x_5^2) - n_{1x}(N_{4,\xi^2} y_4^2 + N_{5,\xi^2} y_5^2). \quad (\text{A.67})$$

$\Delta \xi_b^2$  kann auf dieselbe Art und Weise berechnet werden wie  $\Delta \xi_a^2$ :

$$\Delta \xi_b^2 = \mathbf{v}_4 \Delta \mathbf{d}_{\text{sIm}}. \quad (\text{A.68})$$

In den Gleichungen (A.64) bis (A.67) sind dazu alle Größen des Slave-Kontaktknotens 1 durch die entsprechenden Größen des Slave-Kontaktknotens 2 zu ersetzen. Im Vektor  $\mathbf{z}_a$  rutschen die Einträge des Slave-Kontaktknotens von den Zeilen drei und vier in die Zeilen fünf und sechs. Im Vektor  $\mathbf{z}_b$  rutschen alle Einträge um zwei Positionen nach unten.

### Linearisierung des Kontaktkraftvektors

Wie in den Gleichungen (5.11) und (5.12) angedeutet, wird der Kontaktkraftvektor  $\mathbf{f}_c$  zur Berechnung und Linearisierung aufgeteilt. Der Vektor  $\mathbf{f}_c^S$  sammelt die Kontaktkräfte aller Slave-Kontaktknoten, der Vektor  $\mathbf{f}_c^M$  die Kontaktkräfte aller Master-Kontaktknoten.

**Berechnung von  $\Delta \mathbf{f}_c^S$** 

Der Slave-Kontaktkraftvektor  $\mathbf{f}_c^S$  und seine Linearisierung werden auf Slave-Element-Basis berechnet. Der Beitrag eines einzelnen Slave-Elements  $e$  lautet dabei:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{c_e}^S &= \left[ (D_{11}^S)_e z_{1x} \mid (D_{11}^S)_e z_{1y} \mid (D_{22}^S)_e z_{2x} \mid (D_{22}^S)_e z_{2y} \right]^\top \\ \Delta \mathbf{f}_{c_e}^S &= \mathbf{K}_{c_e}^S \left[ \Delta d_{1x}^1 \mid \Delta d_{1y}^1 \mid \Delta d_{2x}^1 \mid \Delta d_{2y}^1 \right]^\top. \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

$\mathbf{K}_{c_e}^S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  ist hierin die Kontakt-Steifigkeitsmatrix des Slave-Elements  $e$ :

$$\mathbf{K}_{c_e}^S = \frac{1}{2\ell_e} \begin{bmatrix} z_{1x} \\ z_{1y} \\ z_{2x} \\ z_{2y} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -(x_2 - x_1) \\ -(y_2 - y_1) \\ (x_2 - x_1) \\ (y_2 - y_1) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.70})$$

**Berechnung von  $\Delta \mathbf{f}_c^M$** 

Im Gegensatz zu  $\mathbf{f}_c^S$  erfolgt die Berechnung und Linearisierung des Master-Kontaktkraftvektors  $\mathbf{f}_c^M$  auf Segment-Ebene. Der Beitrag eines einzelnen Segments  $m$  eines Slave-Elements bestimmt sich mit folgender Beziehung:

$$\mathbf{f}_{c_m}^M = - \begin{bmatrix} (M_{14}^M)_m z_{1x} + (M_{24}^M)_m z_{2x} \\ (M_{14}^M)_m z_{1y} + (M_{24}^M)_m z_{2y} \\ (M_{15}^M)_m z_{1x} + (M_{25}^M)_m z_{2x} \\ (M_{15}^M)_m z_{1y} + (M_{25}^M)_m z_{2y} \end{bmatrix}, \quad \Delta \mathbf{f}_{c_m}^M = - \begin{bmatrix} (\Delta M_{14}^M)_m z_{1x} + (\Delta M_{24}^M)_m z_{2x} \\ (\Delta M_{14}^M)_m z_{1y} + (\Delta M_{24}^M)_m z_{2y} \\ (\Delta M_{15}^M)_m z_{1x} + (\Delta M_{25}^M)_m z_{2x} \\ (\Delta M_{15}^M)_m z_{1y} + (\Delta M_{25}^M)_m z_{2y} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.71})$$

Der Linearisierung  $(\Delta M_{IJ}^M)_m$  kann anhand von Gleichung (3.36) ermittelt werden (mit  $I = 1,2$  und  $J = 4,5$ ):

$$(\Delta M_{IJ}^M)_m = \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \begin{array}{l} \Delta \phi_K(\xi^1(\eta_{gp})) \quad N_J(\xi^2(\eta_{gp})) \quad J_{\mathbf{x}\eta} \\ + \phi_K(\xi^1(\eta_{gp})) \Delta N_J(\xi^2(\eta_{gp})) \quad J_{\mathbf{x}\eta} \\ + \phi_K(\xi^1(\eta_{gp})) \quad N_J(\xi^2(\eta_{gp})) \Delta J_{\mathbf{x}\eta} \end{array} \right\} w_{gp}. \quad (\text{A.72})$$

$$(\text{A.73})$$

Auswertung dieser Beziehung (für Details siehe YANG U. A. (2005)) führt auf:

$$\begin{aligned}
(\Delta M_{IJ}^{\mathcal{M}})_m &= \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{2} J_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} (1 - \eta_{gp}) \phi_{I, \xi^1} N_J (\xi^2(\eta_{gp})) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \ell_e w_{gp} \phi_I (\xi^1(\eta_{gp})) N_J (\xi^2(\eta_{gp})) \right\} \Delta \xi_a^1 \\
&+ \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{2} J_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} (1 + \eta_{gp}) \phi_{I, \xi^1} N_J (\xi^2(\eta_{gp})) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \ell_e w_{gp} \phi_I (\xi^1(\eta_{gp})) N_J (\xi^2(\eta_{gp})) \right\} \Delta \xi_b^1 \\
&+ \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{2} J_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} (1 - \eta_{gp}) \phi_I (\xi^1(\eta_{gp})) N_{J, \xi^2} \right\} \Delta \xi_a^2 \\
&+ \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{2} J_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} (1 + \eta_{gp}) \phi_I (\xi^1(\eta_{gp})) N_{J, \xi^2} \right\} \Delta \xi_b^2 \\
&+ \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{4} w_{gp} \phi_I (\xi^1(\eta_{gp})) N_J (\xi^2(\eta_{gp})) (\xi_b^1 - \xi_a^1) \frac{(\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1) \cdot (\Delta \mathbf{x}_2^1 - \Delta \mathbf{x}_1^1)}{\sqrt{(\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1) \cdot (\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1)}} \right\}.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Beziehungen (A.57), (A.62), (A.63) und (A.68) in Gleichung (A.74) ermöglicht es, die obige Gleichung in kompakter Vektor-Schreibweise zu formulieren:

$$(\Delta M_{IJ}^{\mathcal{M}})_m = \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left[ \alpha_{(IJ)1}^{gp} \mathbf{v}_1 + \alpha_{(IJ)2}^{gp} \mathbf{v}_2 + \alpha_{(IJ)3}^{gp} \mathbf{v}_3 + \alpha_{(IJ)4}^{gp} \mathbf{v}_4 + \alpha_{(IJ)5}^{gp} \mathbf{v}_5 \right] \Delta \mathbf{d}_{slm}. \tag{A.74}$$

Die insgesamt 20 Vorfaktoren lauten:

$$\begin{aligned}
\alpha_{(IJ)1}^{gp} &= \frac{1}{4} w_{gp} \ell_e \left[ \frac{1}{2} (\xi_b^1 - \xi_a^1) (1 - \eta_{gp}) \phi_{I, \xi^1} N_J - \phi_I N_J \right] \\
\alpha_{(IJ)2}^{gp} &= \frac{1}{4} w_{gp} \ell_e \left[ \frac{1}{2} (\xi_b^1 - \xi_a^1) (1 + \eta_{gp}) \phi_{I, \xi^1} N_J + \phi_I N_J \right] \\
\alpha_{(IJ)3}^{gp} &= \frac{1}{8} w_{gp} \ell_e (\xi_b^1 - \xi_a^1) (1 - \eta_{gp}) \phi_I N_{J, \xi^2} \\
\alpha_{(IJ)4}^{gp} &= \frac{1}{8} w_{gp} \ell_e (\xi_b^1 - \xi_a^1) (1 + \eta_{gp}) \phi_I N_{J, \xi^2} \\
\alpha_{(IJ)5}^{gp} &= \frac{1}{4 \ell_e} w_{gp} (\xi_b^1 - \xi_a^1) \phi_I N_J.
\end{aligned} \tag{A.75}$$

Der Vektor  $\mathbf{v}_5$  ergibt sich wie folgt:

$$\mathbf{v}_5 = \left[ 0 \mid 0 \mid -(x_2 - x_1) \mid -(y_2 - y_1) \mid (x_2 - x_1) \mid (y_2 - y_1) \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \mid 0 \right]. \tag{A.76}$$

### Linearisierung der Normalklaffung

Wie die Kontaktkraft wird auch die Normalklaffung zur Berechnung und Linearisierung in zwei Anteile zerlegt. Der Vektor  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^1$  beinhaltet dabei die Klaffungsanteile, welche ausschließlich von den Slave-Mortar-Matrizen und den Koordinaten der Slave-Kontaktknoten abhängen. Entsprechend sind in  $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^2$  die Ausdrücke enthalten, welche von den Master-Mortar-Matrizen und den Koordinaten der Master-Kontaktknoten abhängen.

#### Berechnung von $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^1$

Der Slave-Anteil der Normalklaffung wird auf Slave-Element-Basis berechnet. Der Beitrag eines einzelnen Slave-Elements  $e$  lautet:

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_e^1 = \Delta \begin{bmatrix} -\left(D_{11}^S\right)_e \left(n_{1x} x_1 + n_{1y} y_1\right) \\ -\left(D_{22}^S\right)_e \left(n_{2x} x_2 + n_{2y} y_2\right) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.77})$$

Die Auswertung von  $\Delta \tilde{\mathbf{g}}_e^1$  kann wiederum in drei Anteile

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_e^1 = \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{e(a)}^1 + \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{e(b)}^1 + \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{e(c)}^1 \quad (\text{A.78})$$

zerlegt werden, welche sich wie folgt berechnen:

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{e(a)}^1 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(D_{11}^S\right)_e n_{1x} & \left(D_{11}^S\right)_e n_{1y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(D_{22}^S\right)_e n_{2x} & \left(D_{22}^S\right)_e n_{2y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{sl} \quad (\text{A.79})$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{e(b)}^1 = - \frac{1}{2\ell_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_{21}\beta_1 & -y_{21}\beta_1 & x_{21}\beta_1 & y_{21}\beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_{21}\beta_2 & -y_{21}\beta_2 & x_{21}\beta_2 & y_{21}\beta_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{sl} \quad (\text{A.80})$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{e(c)}^1 = - \begin{bmatrix} \left(D_{11}^S\right)_e \left(W_{11}^1 x_1 + W_{21}^1 y_1\right) & 0 \\ \left(D_{11}^S\right)_e \left(W_{12}^1 x_1 + W_{22}^1 y_1\right) & 0 \\ \left(D_{11}^S\right)_e \left(W_{13}^1 x_1 + W_{23}^1 y_1\right) & \left(D_{22}^S\right)_e \left(W_{11}^2 x_2 + W_{21}^1 y_2\right) \\ \left(D_{11}^S\right)_e \left(W_{14}^1 x_1 + W_{24}^1 y_1\right) & \left(D_{22}^S\right)_e \left(W_{12}^2 x_2 + W_{22}^1 y_2\right) \\ \left(D_{11}^S\right)_e \left(W_{15}^1 x_1 + W_{25}^1 y_1\right) & \left(D_{22}^S\right)_e \left(W_{13}^2 x_2 + W_{23}^1 y_2\right) \\ \left(D_{11}^S\right)_e \left(W_{16}^1 x_1 + W_{26}^1 y_1\right) & \left(D_{22}^S\right)_e \left(W_{14}^2 x_2 + W_{24}^1 y_2\right) \\ 0 & \left(D_{22}^S\right)_e \left(W_{15}^2 x_2 + W_{25}^1 y_2\right) \\ 0 & \left(D_{22}^S\right)_e \left(W_{16}^2 x_2 + W_{26}^1 y_2\right) \end{bmatrix}^T \Delta \mathbf{d}_{sl}. \quad (\text{A.81})$$

In Gleichung (A.80) werden dabei die Abkürzungen

$$\begin{aligned}\beta_1 &= n_{1x}x_1 + n_{1y}y_1 & x_{21} &= (x_2 - x_1) \\ \beta_2 &= n_{2x}x_2 + n_{2y}y_2 & y_{21} &= (y_2 - y_1)\end{aligned}\tag{A.82}$$

verwendet.

### Berechnung von $\tilde{\mathbf{g}}_{\mathcal{A}_n}^2$

Der Master-Anteil der Normalklaffung setzt sich aus den Anteilen der einzelnen Segmente eines Slave-Elements zusammen. Der Beitrag von Segment  $m$  lautet dabei:

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_m^2 = \Delta \left[ \begin{aligned} & \left( M_{14}^{\mathcal{M}} \right)_m \left( n_{1x}x_4 + n_{1y}y_4 \right) + \left( M_{15}^{\mathcal{M}} \right)_m \left( n_{1x}x_5 + n_{1y}y_5 \right) \\ & \left( M_{24}^{\mathcal{M}} \right)_m \left( n_{2x}x_4 + n_{2y}y_4 \right) + \left( M_{25}^{\mathcal{M}} \right)_m \left( n_{2x}x_5 + n_{2y}y_5 \right) \end{aligned} \right].\tag{A.83}$$

Zur Auswertung wird  $\Delta \tilde{\mathbf{g}}_m^2$  in drei Anteile

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_m^2 = \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{m(a)}^2 + \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{m(b)}^2 + \Delta \tilde{\mathbf{g}}_{m(c)}^2\tag{A.84}$$

zerlegt. Diese berechnen sich zu:

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{m(a)}^2 = \left[ \begin{array}{cccc} \mathbf{0}_{2 \times 8} & \left( M_{14}^{\mathcal{M}} \right)_m n_{1x} & \left( M_{14}^{\mathcal{M}} \right)_m n_{1y} & \left( M_{15}^{\mathcal{M}} \right)_m n_{1x} & \left( M_{15}^{\mathcal{M}} \right)_m n_{1y} \\ & \left( M_{24}^{\mathcal{M}} \right)_m n_{2x} & \left( M_{24}^{\mathcal{M}} \right)_m n_{2y} & \left( M_{25}^{\mathcal{M}} \right)_m n_{2x} & \left( M_{25}^{\mathcal{M}} \right)_m n_{2y} \end{array} \right] \Delta \mathbf{d}_{\text{slm}}\tag{A.85}$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{m(b)}^2 = \left[ \begin{array}{c} \beta_{14} \left( \Delta M_{14}^{\mathcal{M}} \right)_m + \beta_{15} \left( \Delta M_{15}^{\mathcal{M}} \right)_m \\ \beta_{24} \left( \Delta M_{24}^{\mathcal{M}} \right)_m + \beta_{25} \left( \Delta M_{25}^{\mathcal{M}} \right)_m \end{array} \right]\tag{A.86}$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{m(c)}^2 = \left[ \begin{array}{cc} W_{11}^1 f_{1x} + W_{21}^1 f_{1y} & 0 \\ W_{12}^1 f_{1x} + W_{22}^1 f_{1y} & 0 \\ W_{13}^1 f_{1x} + W_{23}^1 f_{1y} & W_{11}^2 f_{2x} + W_{21}^2 f_{2y} \\ W_{14}^1 f_{1x} + W_{24}^1 f_{1y} & W_{12}^2 f_{2x} + W_{22}^2 f_{2y} \\ W_{15}^1 f_{1x} + W_{25}^1 f_{1y} & W_{13}^2 f_{2x} + W_{23}^2 f_{2y} \\ W_{16}^1 f_{1x} + W_{26}^1 f_{1y} & W_{14}^2 f_{2x} + W_{24}^2 f_{2y} \\ 0 & W_{15}^2 f_{2x} + W_{25}^2 f_{2y} \\ 0 & W_{16}^2 f_{2x} + W_{26}^2 f_{2y} \end{array} \right]^T \Delta \mathbf{d}_{\text{sl}}.\tag{A.87}$$

Dabei werden die folgenden Abkürzungen benutzt:

$$\begin{aligned}
\beta_{14} &= n_{1x} x_4 + n_{1y} y_4 & f_{1x} &= \left(M_{14}^{\mathcal{M}}\right)_m x_4 + \left(M_{15}^{\mathcal{M}}\right)_m x_5 \\
\beta_{15} &= n_{1x} x_5 + n_{1y} y_5 & f_{1y} &= \left(M_{14}^{\mathcal{M}}\right)_m y_4 + \left(M_{15}^{\mathcal{M}}\right)_m y_5 \\
\beta_{24} &= n_{2x} x_4 + n_{2y} y_4 & f_{2x} &= \left(M_{24}^{\mathcal{M}}\right)_m x_4 + \left(M_{25}^{\mathcal{M}}\right)_m x_5 \\
\beta_{25} &= n_{2x} x_5 + n_{2y} y_5 & f_{2y} &= \left(M_{24}^{\mathcal{M}}\right)_m y_4 + \left(M_{25}^{\mathcal{M}}\right)_m y_5
\end{aligned}
\quad \mathbf{0}_{2 \times 8} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{2 \times 8}.$$

(A.88)

### Linearisierung der Tangentialbedingungen

Die Linearisierung der Tangentialbedingungen führt auf einen Ausdruck, welcher in zwei Teile zerlegt werden kann (siehe Gleichung (5.19)). Wird die Kontaktspannung aus dem Gleichungssystem herauskondensiert, muss der zweite Anteil nicht direkt berechnet werden. Lediglich die Bestimmung der Tangenten an den Slave-Kontaktknoten ist notwendig. Der erste Anteil wird in einer Schleife über die aktiven Slave-Kontaktknoten berechnet und assembliert. Der Beitrag eines Slave-Kontaktknotens  $I$  lautet dabei:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{z}_I \cdot \Delta \boldsymbol{\tau}_{\beta_I} \\
&= \left\{ - \left[ W_{21}^I \mid W_{22}^I \mid W_{23}^I \mid W_{24}^I \mid W_{25}^I \mid W_{26}^I \right] z_{Ix} + \left[ W_{11}^I \mid W_{12}^I \mid W_{13}^I \mid W_{14}^I \mid W_{15}^I \mid W_{16}^I \right] z_{Iy} \right\} \\
&\quad \cdot \left[ \Delta d_{(I-1)x}^1 \mid \Delta d_{(I-1)y}^1 \mid \Delta d_{Ix}^1 \mid \Delta d_{Iy}^1 \mid \Delta d_{(I+1)x}^1 \mid \Delta d_{(I+1)y}^1 \right].
\end{aligned}$$

(A.89)

#### A.4.4 Zusätzliche Linearisierungsanteile in Rand-Elementen

##### Linearisierung von $\xi_s^1$ und $\xi_t^1$

Die Berechnung der Linearisierung  $\Delta \xi_{s/t}^1$  kann prinzipiell wie die der Linearisierung  $\Delta \xi_{a/b}^1$  erfolgen:

$$\begin{aligned}
\Delta \xi_s^1 &= \bar{\mathbf{v}}_1 \Delta \bar{\mathbf{d}}_{\text{s|lm}} \\
\Delta \xi_t^1 &= \bar{\mathbf{v}}_2 \Delta \bar{\mathbf{d}}_{\text{s|lm}}
\end{aligned}$$

(A.90)

Mit den Gleichungen (A.57) bis (A.62) berechnen sich die Vektoren  $\bar{\mathbf{v}}_1, \bar{\mathbf{v}}_2$  und  $\Delta \bar{\mathbf{d}}_{\text{s|lm}}$  äquivalent zu den Vektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  und  $\Delta \mathbf{d}_{\text{s|lm}}$ . Dabei muss jeweils der Master-Kontaktknoten eingesetzt werden, welcher den Kontaktbereich eines Slave-Elements begrenzt.



### Linearisierung der modifizierten Mortar-Matrizen

#### Linearisierung von $(\bar{D}_{II}^S)_e$

Innerhalb eines Rand-Elements  $e$  kann der Ausdruck  $(\bar{D}_{II}^S)_e$  direkt ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} (\bar{D}_{11}^S)_e &= \frac{\ell_e}{4} \left( \xi_t^1 - \xi_s^1 - 1/2 (\xi_t^1)^2 + 1/2 (\xi_s^1)^2 \right) \\ (\bar{D}_{22}^S)_e &= \frac{\ell_e}{4} \left( \xi_t^1 - \xi_s^1 + 1/2 (\xi_t^1)^2 - 1/2 (\xi_s^1)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.91})$$

Die zugehörige Linearisierung berechnet sich in einer Schleife über die Gaußpunkte des Rand-Elements

$$\begin{aligned} (\Delta \bar{D}_{II}^S)_e &= \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{J}_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} (1 - \eta_{gp}) N_{I,\xi^1}(\xi^1(\eta_{gp})) - \frac{1}{4} \ell_e w_{gp} N_I(\xi^1(\eta_{gp})) \right\} \Delta \xi_s^1 \\ &+ \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{J}_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} (1 + \eta_{gp}) N_{I,\xi^1}(\xi^1(\eta_{gp})) + \frac{1}{4} \ell_e w_{gp} N_I(\xi^1(\eta_{gp})) \right\} \Delta \xi_t^1 \\ &+ \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{4} w_{gp} N_I(\xi^1(\eta_{gp})) (\xi_t^1 - \xi_s^1) \frac{(\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1) \cdot (\Delta \mathbf{x}_2^1 - \Delta \mathbf{x}_1^1)}{\sqrt{(\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1) \cdot (\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1)}} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.92})$$

mit der Jacobi-Determinante  $\bar{J}_{\mathbf{x}\eta} = \frac{1}{4} (\xi_t^1 - \xi_s^1) \ell_e$ . In kompakter Vektor-Schreibweise lautet Gleichung (A.92) wie folgt:

$$(\Delta \bar{D}_{II}^S)_e = \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left[ \alpha_{(II)1}^{gp} \bar{\mathbf{v}}_1 + \alpha_{(II)2}^{gp} \bar{\mathbf{v}}_2 + \alpha_{(II)5}^{gp} \mathbf{v}_5 \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}_{\text{slm}}. \quad (\text{A.93})$$

Dabei werden die Vorfaktoren

$$\begin{aligned} \alpha_{(II)1}^{gp} &= \frac{1}{4} w_{gp} \ell_e \left[ \frac{1}{2} (\xi_t^1 - \xi_s^1) (1 - \eta_{gp}) N_{I,\xi^1} - N_I \right] \\ \alpha_{(II)2}^{gp} &= \frac{1}{4} w_{gp} \ell_e \left[ \frac{1}{2} (\xi_t^1 - \xi_s^1) (1 + \eta_{gp}) N_{I,\xi^1} + N_I \right] \\ \alpha_{(II)5}^{gp} &= \frac{1}{4 \ell_e} w_{gp} (\xi_t^1 - \xi_s^1) N_I \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

verwendet.

#### Linearisierung von $(\bar{M}_{IJ}^{\mathcal{M}})_m$

Die Linearisierung  $\Delta(\bar{M}_{IJ}^{\mathcal{M}})_m$  führt in Rand-Elementen im Vergleich zu vollständig segmentierten Elementen auf einen zusätzlichen Ausdruck:

$$(\Delta \bar{M}_{IJ}^{\mathcal{M}})_m = (\Delta M_{IJ}^{\mathcal{M}})_m + (\Delta \check{M}_{IJ}^{\mathcal{M}})_m. \quad (\text{A.95})$$

Der erste Term  $(\Delta M_{IJ}^{\mathcal{M}})_m$  wird weiterhin mit Gleichung (A.73) berechnet, wobei allerdings die modifizierten dualen Formfunktionen  $\bar{\phi}_I$  eingesetzt werden müssen. Der zusätzliche Anteil  $(\Delta \check{M}_{IJ}^{\mathcal{M}})_m$  berücksichtigt die Verschiebungsabhängigkeit der modifizierten dualen Formfunktionen:

$$(\Delta \check{M}_{IJ}^{\mathcal{M}})_m = \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \Delta \bar{\phi}_K^{\text{add}}(\xi^1(\eta_{gp})) N_J(\xi^2(\eta_{gp})) J_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} \right\}. \quad (\text{A.96})$$

Gleichung (A.96) wird in zwei Schritten ausgewertet: Zuerst erfolgt innerhalb der Slave-Element-Schleife die Berechnung von  $\bar{\phi}_K^{\text{add}}$  für das aktuelle Slave-Element. Darauf folgend werden in der Schleife über die Segmente des Slave-Elements die kompletten Ausdrücke  $(\Delta \check{M}_{IJ}^{\mathcal{M}})_m$  für jedes Segment berechnet.

Die Auswertung von Gleichung (3.38) führt auf die Bestimmungsgleichung der dualen Formfunktionen des Slave-Elements  $e$ :

$$\begin{bmatrix} \bar{\phi}_1 \\ \bar{\phi}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{a} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \bar{\mathbf{m}}_e} \begin{bmatrix} \bar{m}_{22}(\bar{D}_{11}^S)_e & -\bar{m}_{12}(\bar{D}_{11}^S)_e \\ -\bar{m}_{21}(\bar{D}_{22}^S)_e & \bar{m}_{22}(\bar{D}_{22}^S)_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.97})$$

Für eine übersichtlichere Darstellung wird bei den einzelnen Komponenten der Matrix  $\bar{\mathbf{m}}_e$  auf den Index  $(\bullet)_e$  verzichtet. Linearisierung von Gleichung (A.97) liefert

$$\begin{bmatrix} \Delta \bar{\phi}_1^{\text{add}} \\ \Delta \bar{\phi}_2^{\text{add}} \end{bmatrix} = \Delta \mathbf{a} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.98})$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta a_{11} &= \frac{\bar{m}_{22}(\Delta \bar{D}_{11}^S)_e}{\det \bar{\mathbf{m}}_e} - \frac{(\bar{D}_{11}^S)_e}{(\det \bar{\mathbf{m}}_e)^2} \left( \bar{m}_{22} \bar{m}_{22} \Delta \bar{m}_{11} - \bar{m}_{21} \bar{m}_{22} \Delta \bar{m}_{12} \right. \\ &\quad \left. - \bar{m}_{12} \bar{m}_{22} \Delta \bar{m}_{21} + \bar{m}_{12} \bar{m}_{21} \Delta \bar{m}_{22} \right) \\ \Delta a_{12} &= -\frac{\bar{m}_{12}(\Delta \bar{D}_{11}^S)_e}{\det \bar{\mathbf{m}}_e} + \frac{(\bar{D}_{11}^S)_e}{(\det \bar{\mathbf{m}}_e)^2} \left( \bar{m}_{12} \bar{m}_{22} \Delta \bar{m}_{11} - \bar{m}_{11} \bar{m}_{22} \Delta \bar{m}_{12} \right. \\ &\quad \left. - \bar{m}_{12} \bar{m}_{12} \Delta \bar{m}_{21} + \bar{m}_{12} \bar{m}_{11} \Delta \bar{m}_{22} \right) \\ \Delta a_{21} &= -\frac{\bar{m}_{21}(\Delta \bar{D}_{22}^S)_e}{\det \bar{\mathbf{m}}_e} + \frac{(\bar{D}_{22}^S)_e}{(\det \bar{\mathbf{m}}_e)^2} \left( \bar{m}_{21} \bar{m}_{22} \Delta \bar{m}_{11} - \bar{m}_{21} \bar{m}_{21} \Delta \bar{m}_{12} \right. \\ &\quad \left. - \bar{m}_{11} \bar{m}_{22} \Delta \bar{m}_{21} + \bar{m}_{11} \bar{m}_{21} \Delta \bar{m}_{22} \right) \\ \Delta a_{22} &= \frac{\bar{m}_{11}(\Delta \bar{D}_{22}^S)_e}{\det \bar{\mathbf{m}}_e} - \frac{(\bar{D}_{22}^S)_e}{(\det \bar{\mathbf{m}}_e)^2} \left( \bar{m}_{12} \bar{m}_{21} \Delta \bar{m}_{11} - \bar{m}_{11} \bar{m}_{21} \Delta \bar{m}_{12} \right. \\ &\quad \left. - \bar{m}_{11} \bar{m}_{12} \Delta \bar{m}_{21} + \bar{m}_{11} \bar{m}_{11} \Delta \bar{m}_{22} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

Die Linearisierungsanteile  $(\Delta \bar{D}_{II}^S)_e$  sind dabei durch Gleichung (A.92) gegeben. Linearisierung der Matrix  $\bar{\mathbf{m}}_e$  führt auf:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{m}_{IJ} &= \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{J}_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} (1 - \eta_{gp}) (N_{I,\xi^1} N_J + N_I N_{J,\xi^1}) - \frac{1}{4} \ell_e w_{gp} N_I N_J \right\} \Delta \xi_s^1 \\ &+ \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{2} \bar{J}_{\mathbf{x}\eta} w_{gp} (1 + \eta_{gp}) (N_{I,\xi^1} N_J + N_I N_{J,\xi^1}) + \frac{1}{4} \ell_e w_{gp} N_I N_J \right\} \Delta \xi_t^1 \\ &+ \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left\{ \frac{1}{4} w_{gp} N_I N_J (\xi_t^1 - \xi_s^1) \frac{(\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1) \cdot (\Delta \mathbf{x}_2^1 - \Delta \mathbf{x}_1^1)}{\sqrt{(\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1) \cdot (\mathbf{x}_2^1 - \mathbf{x}_1^1)}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.100})$$

Eine Darstellung in kompakter Vektor-Schreibweise ist durch die Beziehung

$$\Delta \bar{m}_{IJ} = \sum_{gp=1}^{n_{gp}} \left[ \alpha_{(IJ)m1}^{gp} \bar{\mathbf{v}}_1 + \alpha_{(IJ)m2}^{gp} \bar{\mathbf{v}}_2 + \alpha_{(IJ)m5}^{gp} \mathbf{v}_5 \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}_{\text{slm}} \quad (\text{A.101})$$

mit den Vorfaktoren

$$\begin{aligned} \alpha_{(IJ)m1}^{gp} &= \frac{1}{4} w_{gp} \ell_e \left[ \frac{1}{2} (\xi_t^1 - \xi_s^1) (1 - \eta_{gp}) (N_{I,\xi^1} N_J + N_I N_{J,\xi^1}) - N_I N_J \right] \\ \alpha_{(IJ)m2}^{gp} &= \frac{1}{4} w_{gp} \ell_e \left[ \frac{1}{2} (\xi_t^1 - \xi_s^1) (1 + \eta_{gp}) (N_{I,\xi^1} N_J + N_I N_{J,\xi^1}) + N_I N_J \right] \\ \alpha_{(IJ)m5}^{gp} &= \frac{1}{4 \ell_e} w_{gp} (\xi_t^1 - \xi_s^1) N_I N_J \end{aligned} \quad (\text{A.102})$$

gegeben.

## Modifizierte Linearisierung von Kontaktkraft und Normalklaffung

Bei der Linearisierung der Kontaktkraft und der Normalklaffung müssen in Rand-Elementen die modifizierten Linearisierungen (A.92) bzw. (A.95) der Slave- bzw. Master-Mortar-Integrale verwendet werden. Die wichtigsten Änderungen, die sich daraus ergeben, sind:

- Die Linearisierung des Slave-Kontaktkraftvektors berechnet sich nicht mehr mit Gleichung (A.69)<sub>2</sub>. Stattdessen wird Gleichung (A.69)<sub>1</sub> mithilfe von Beziehung (A.92) direkt linearisiert.

- Der Anteil  $\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{e^{(b)}}^1$  der Linearisierung der Normalklaffung wird nicht mehr mit Gleichung (A.80) berechnet, sondern durch den folgenden Ausdruck:

$$\Delta \tilde{\mathbf{g}}_{e^{(b)}}^1 = \Delta \begin{bmatrix} -(\Delta \bar{D}_{11}^S)_e (n_{1x} x_1 + n_{1y} y_1) \\ -(\Delta \bar{D}_{22}^S)_e (n_{2x} x_2 + n_{2y} y_2) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.103})$$

Ansonsten müssen lediglich  $(\Delta D_{11}^S)_e$  durch  $(\Delta \bar{D}_{11}^S)_e$  und  $(\Delta M_{IJ}^M)_m$  durch  $(\Delta \bar{M}_{IJ}^M)_m$  ersetzt werden.

#### A.4.5 Zusätzliche Linearisierungsanteile durch die Wichtungsprozedur

Im Folgenden ist die Linearisierung des knotenbasierten Wichtungsfaktors

$$\kappa_I = [\omega_{e1} + \omega_{e2}]^{-1} \quad (\text{A.104})$$

aus Gleichung (3.42) dargestellt. Dabei sind  $e1$  und  $e2$  die an Knoten  $I$  grenzenden Slave-Elemente, siehe auch Abbildung 3.10. Die Faktoren  $\omega_{e1}$  und  $\omega_{e2}$  können direkt angegeben werden:

$$\begin{aligned} \omega_{e1} &= \frac{1}{2} \left( \xi_{te1}^1 - \xi_{se1}^1 + 1/2 (\xi_{te1}^1)^2 - 1/2 (\xi_{se1}^1)^2 \right) \\ \omega_{e2} &= \frac{1}{2} \left( \xi_{te2}^1 - \xi_{se2}^1 - 1/2 (\xi_{te2}^1)^2 + 1/2 (\xi_{se2}^1)^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

Die Linearisierung dieser Beziehungen führt auf:

$$\Delta \kappa_I = \frac{\kappa_I^2}{2} \left[ (1 + \xi_{se1}^1) \Delta \xi_{se1}^1 - (1 + \xi_{te1}^1) \Delta \xi_{te1}^1 + (1 - \xi_{se2}^1) \Delta \xi_{se2}^1 - (1 - \xi_{te2}^1) \Delta \xi_{te2}^1 \right]. \quad (\text{A.106})$$

Gleichung (A.106) kann wieder in kompakter Notation formuliert werden

$$\Delta \kappa_I = \left[ \alpha_{(I)k1}^{e1} \bar{\mathbf{v}}_1^{e1} + \alpha_{(I)k2}^{e1} \bar{\mathbf{v}}_2^{e1} \right] \bar{\mathbf{d}}_{\text{slm}}^{e1} + \left[ \alpha_{(I)k1}^{e2} \bar{\mathbf{v}}_1^{e2} + \alpha_{(I)k2}^{e2} \bar{\mathbf{v}}_2^{e2} \right] \bar{\mathbf{d}}_{\text{slm}}^{e2}, \quad (\text{A.107})$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_{(I)k1}^{e1} &= \frac{\kappa_I^2}{2} (1 + \xi_{se1}^1), & \alpha_{(I)k2}^{e1} &= -\frac{\kappa_I^2}{2} (1 + \xi_{te1}^1) \\ \alpha_{(I)k1}^{e2} &= \frac{\kappa_I^2}{2} (1 - \xi_{se2}^1), & \alpha_{(I)k2}^{e2} &= -\frac{\kappa_I^2}{2} (1 - \xi_{te2}^1). \end{aligned} \quad (\text{A.108})$$

Die Linearisierungen der Koordinaten  $\xi_{s_{e1}/t_{e1}}^1$  und  $\xi_{s_{e2}/t_{e2}}^1$  berechnen sich in den Slave-Elementen  $e1$  und  $e2$  gemäß Gleichung (A.90). Ist das Slave-Element  $e1$  bzw.  $e2$  kein Rand-Element, entfallen die Linearisierungen von  $\xi_{s_{e1}/t_{e1}}^1$  bzw.  $\xi_{s_{e2}/t_{e2}}^1$ .

Für eine Linearisierung der elementbasierten Wichtungsfaktoren sei auf CICHOSZ UND BISCHOFF (2011) verwiesen.

### Modifizierte Linearisierung von Kontaktkraft und Normalklaffung

Aufgrund der Wichtungsprozedur müssen die Mortar-Integrale der betreffenden Slave-Kontaktknoten mit Gleichung (3.43) berechnet und mit folgender Beziehung linearisiert werden:

$$\begin{aligned} (\Delta \tilde{D}_{II}^S)_e &= \kappa_I (\Delta \bar{D}_{II}^S)_e + \Delta \kappa_I (\bar{D}_{II}^S)_e \\ (\Delta \tilde{M}_{IJ}^M)_m &= \kappa_I (\Delta \bar{M}_{IJ}^M)_m + \Delta \kappa_I (\bar{M}_{IJ}^M)_m. \end{aligned} \tag{A.109}$$

Bei der Linearisierung der Kontaktkraft und der Knotenklaffung sind  $(\Delta \bar{D}_{11}^S)_e$  durch  $(\Delta \tilde{D}_{11}^S)_e$  und  $(\Delta \bar{M}_{IJ}^M)_m$  durch  $(\Delta \tilde{M}_{IJ}^M)_m$  zu ersetzen.



---

# Literaturverzeichnis

## ALART UND CURNIER 1991

Alart, P.; Curnier, A.: A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 92 (1991), S. 353–375.

## ALTENBACH UND ALTENBACH 1994

Altenbach, J.; Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, Stuttgart, 1994.

## ARGYRIS 1955

Argyris, J.H.: Energy theorems and structural analysis: A generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and non-linear stress-strain relations part I. General theory. In: *Aircraft Engineering and Aerospace Technology* 27 (1955), S. 125–134.

## ARGYRIS UND MLEJNEK 1988

Argyris, J.H.; Mlejnek, H.-P.: *Die Methode der finiten Elemente in der elementaren Strukturmechanik. Band 3: Einführung in die Dynamik*. Vieweg, Braunschweig, 1988.

## ARMERO UND PETŐCZ 1998

Armero, F.; Petőcz, E.: Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 158 (1998), S. 269–300.

## BABŮSKA UND AZIZ 1972

Babůska, A.; Aziz, A.K.: Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method. In: Aziz, A.K. (Hrsg.): *The mathematical foundations of the finite ele-*

*ment method with applications to partial differential equations.* Academic Press, New York, 1972, S. 3–363.

BAŞAR UND WEICHERT 2000

Başar, Y.; Weichert, D.: *Nonlinear continuum mechanics of solids: Fundamental mathematical and physical concepts.* Springer, Berlin, 2000.

BATHE UND CHAUDHARY 1985

Bathe, K. J.; Chaudhary, A. B.: A solution method for planar and axisymmetric contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21 (1985), S. 65–88.

BELYTSCHKO 1983

Belytschko, T.: An overview of semidiscretization and time integration procedures. In: Belytschko, T.; Hughes, T. J. R. (Hrsg.): *Computational methods for transient analysis.* Mechanics and Mathematical Methods: A Series of Handbooks. First Series: Computational Methods in Mechanics, Elsevier, Amsterdam, 1983, Kap. 1, S. 1–65.

BELYTSCHKO U. A. 2002

Belytschko, T.; Daniel, J. T.; Ventura, G.: A monolithic smoothing-gap algorithm for contact-impact based on the signed distance function. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 55 (2002), S. 101–125.

BELYTSCHKO U. A. 2008

Belytschko, T.; Liu, W. K.; Moran, B.: *Nonlinear finite elements for continua and structures.* Wiley, Chichester, 2008.

BELYTSCHKO UND SCHOEBERLE 1975

Belytschko, T.; Schoeberle, D. F.: On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics. In: *Journal of Applied Mechanics* 42 (1975), S. 865–869.

BEN BELGACEM 1999

Ben Belgacem, F.: The mortar finite element method with Lagrange multipliers. In: *Numerische Mathematik* 84 (1999), S. 173–197.

BEN BELGACEM 2000

Ben Belgacem, F.: Numerical simulation of some variational inequalities arisen from unilateral contact problems by the finite element methods. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 37 (2000), S. 1198–1216.

BEN BELGACEM U. A. 1998

Ben Belgacem, F.; Hild, P.; Laborde, P.: The mortar finite element method for contact problems. In: *Mathematical and Computer Modelling* 28 (1998), S. 263–271.

BEN BELGACEM UND RENARD 2003

Ben Belgacem, F.; Renard, Y.: Hybrid finite element methods for the Signorini problem. In: *Mathematics of Computation* 72 (2003), S. 1117–1145.



BERNARDI U. A. 1990

Bernardi, C.; Debit, N.; Maday, Y.: Coupling finite element and spectral methods: First Results. In: *Mathematics of Computation* 54 (1990), S. 21–39.

BERNARDI U. A. 1993

Bernardi, C.; Maday, Y.; Patera, A. T.: Domain decomposition by the mortar element method. In: Kasper, H. G.; Garbey, M. (Hrsg.): *Asymptotic and numerical methods for partial differential equations with critical parameters: Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Asymptotic-Induced Numerical Methods for Partial Differential Equations, Critical Parameters, and Domain Decomposition, 25.–28. May 1993, Beaune, Frankreich*. NATO Science Series C, Vol. 384, 1993, S. 269–286.

BERNARDI U. A. 1994

Bernardi, C.; Maday, Y.; Patera, A. T.: A new nonconforming approach to domain decomposition: The mortar element method. In: Brezis, H.; Lions, J. L. (Hrsg.): *Nonlinear partial differential equations and their applications*. Collège de France Seminar, Vol. 12, 1994, S. 13–51.

BISCHOFF 2011

Bischoff, M.: *Finite Elemente für Tragwerksberechnungen*. Unterlagen zur Vorlesung, Sommersemester 2011, Universität Stuttgart, Deutschland. 2011.

BRAESS 1997

Braess, D.: *Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. 2. Auflage. Springer, Berlin, 1997.

BREZZI 1974

Brezzi, F.: On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. In: *RAIRO Analyse Numérique* 8 (1974), S. 129–151.

CHAN UND TUBA 1971

Chan, S. K.; Tuba, I. S.: A finite element method for contact problems of solid bodies – part I. Theory and validation. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 13 (1971), S. 615–625.

CHRISTENSEN U. A. 1998

Christensen, P. W.; Klarbring, A.; Pang, J. S.; Strömberg, N.: Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 42 (1998), S. 145–173.

CHUNG UND HULBERT 1993

Chung, J.; Hulbert, G. M.: A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: The generalized- $\alpha$  method. In: *Journal of Applied Mechanics* 60 (1993), S. 371–375.

CICHOSZ UND BISCHOFF 2011

Cichosz, T.; Bischoff, M.: Consistent treatment of boundaries with mortar contact formu-

lations using dual Lagrange multipliers. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), S. 1317–1332.

CLOUGH 1960

Clough, R. W.: The finite element method in plane stress analysis. In: *Papers of the 2nd Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, USA, September 8-9, 1960*, American Society of Civil Engineers, 1960.

CRISFIELD 2000

Crisfield, M. A.: Re-visiting the contact patch test. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), S. 435–449.

CURNIER UND ALART 1988

Curnier, A.; Alart, P.: A generalized Newton method for contact problems with friction. In: *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée* 7 (1988), S. 67–82.

DE LORENZIS U. A. 2011

De Lorenzis, L.; Temizer, İ.; Wriggers, P.; Zavarise, G.: A large deformation frictional contact formulation using NURBS-based isogeometric analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 87 (2011), S. 1278–1300.

DE LORENZIS U. A. 2012

De Lorenzis, L.; Wriggers, P.; Zavarise, G.: A mortar formulation for 3D large deformation contact using NURBS-based isogeometric analysis and the augmented Lagrangian method. In: *Computational Mechanics* 49 (2012), S. 1–20.

DEUFLHARD U. A. 2008

Deuffhard, P.; Krause, R.; Ertel, S.: A contact-stabilized Newmark method for dynamical contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008), S. 1274–1290.

DOYEN 2010

Doyen, D.: *Méthodes numériques pour des problèmes dynamiques de contact et de fissuration*, Université Paris-Est, Dissertation, 2010.

DUREISSEIX UND FARHAT 2001

Dureisseix, D.; Farhat, C.: A numerically scalable domain decomposition method for the solution of frictionless contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), S. 2643–2666.

EHLERS 2005

Ehlers, W.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik und in die Materialtheorie*. Unterlagen zur Vorlesung, Wintersemester 2005/2006, Universität Stuttgart, Deutschland. 2005.

EL-ABBASI UND BATHE 2001

El-Abbasi, N.; Bathe, K. J.: Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. In: *Computers and Structures* 79 (2001), S. 1473–1486.

## FARHAT 1991

Farhat, C.: A lagrange multiplier based divide and conquer finite element algorithm. In: *Computing Systems in Engineering. Special issue: Parallel methods on large-scale structural analysis and physics applications* 32 (1991), S. 149–156.

## FISCHER UND WRIGGERS 2005

Fischer, K. A.; Wriggers, P.: Frictionless 2D contact formulation for finite deformations based on the mortar method. In: *Computational Mechanics* 36 (2005), S. 226–244.

## FISCHER UND WRIGGERS 2006

Fischer, K. A.; Wriggers, P.: Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 5020–5036.

## FLEMISCH UND WOHLMUTH 2007

Flemisch, B.; Wohlmuth, B.I.: Stable Lagrange multipliers for quadrilateral meshes of curved interfaces in 3D. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007), S. 1589–1602.

## FRANCAVILLA UND ZIENKIEWICZ 1975

Francavilla, A.; Zienkiewicz, O. C.: A note on numerical computation of elastic contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 9 (1975), S. 913–924.

## FRANKE U. A. 2010

Franke, D.; Düster, A.; Nübel, V.; Rank, E.: A comparison of the h-, p-, hp-, and rp-version of the FEM for the solution of the 2D Hertzian contact problem. In: *Computational Mechanics* 45 (2010), S. 513–522.

## GELFAND UND FOMIN 2000

Gelfand, I. M.; Fomin, S. V.: *Calculus of Variations*. Dover, Mineola, 2000.

## GITTERLE U. A. 2010

Gitterle, M.; Popp, A.; Gee, M. W.; Wall, W. A.: Finite deformation frictional mortar contact using a semi-smooth Newton method with consistent linearization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 84 (2010), S. 543–571.

## GONZÁLEZ U. A. 2006

González, J. A.; Park, K. C.; Felippa, C. A.: Partitioned formulation of frictional contact problems using localized Lagrange multipliers. In: *Communications in Numerical Methods in Engineering* 22 (2006), S. 319–333.

## GONZÁLEZ U. A. 2008

González, J. A.; Park, K. C.; Felippa, C. A.; Abascal, R.: A formulation based on localized Lagrange multipliers for BEM-FEM coupling in contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), S. 623–640.

GONZALEZ 2000

Gonzalez, O.: Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2000), S. 1763–1783.

HAGER U. A. 2008

Hager, C.; Hüeber, S.; Wohlmuth, B. I.: A stable energy-conserving approach for frictional contact problems based on quadrature formulas. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008), S. 205–225.

HALLQUIST 1979

Hallquist, J. O.: Nike2D: An implicit, finite deformation, finite element code for analyzing the static and dynamic response of two-dimensional solids / Lawrence Livermore National Laboratory, University of California, Livermore. 1979 (UCRL-52678). – Forschungsbericht.

HALLQUIST U. A. 1985

Hallquist, J. O.; Goudreau, G. L.; Benson, D. J.: Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrange computations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 51 (1985), S. 107–137.

HARTMANN 2007

Hartmann, S.: *Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen*, Bericht Nr. 49, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 2007.

HARTMANN U. A. 2007

Hartmann, S.; Brunssen, S.; Ramm, E.; Wohlmuth, B. I.: Unilateral non-linear dynamic contact of thin-walled structures using a primal-dual active set strategy. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70 (2007), S. 883–912.

HARTMANN UND RAMM 2008

Hartmann, S.; Ramm, E.: A mortar based contact formulation for non-linear dynamics using dual Lagrange multipliers. In: *Finite Elemente in Analysis and Design* 44 (2008), S. 245–258.

HAUSSER 1996

Haußer, C.: *Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke*, Bericht Nr. 21, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1996.

HEEGAARD UND CURNIER 1993

Heegaard, J. H.; Curnier, A.: An augmented Lagrangian method for discrete large-slip contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), Nr. 4, S. 569–593.

HESCH UND BETSCH 2009

Hesch, C.; Betsch, P.: A mortar method for energy-momentum conserving schemes in frictionless dynamic contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 77 (2009), S. 1468–1500.

HESCH UND BETSCH 2010

Hesch, C.; Betsch, P.: Transient three-dimensional domain decomposition problems: Frame-indifferent mortar constraints and conserving integration. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 82 (2010), S. 329–358.

HILBER U. A. 1977

Hilber, H. M.; Hughes, T. J. R.; Taylor, R. L.: Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. In: *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 5 (1977), S. 283–292.

HILD 2001

Hild, P.: Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 184 (2001), S. 99–123.

HINTERMÜLLER U. A. 2003

Hintermüller, M.; Ito, K.; Kunisch, K.: The primal-dual active set strategy as a semismooth Newton method. In: *SIAM Journal on Optimization* 13 (2003), S. 865–888.

HOLZAPFEL 2000

Holzapfel, G. A.: *Nonlinear solid mechanics: A continuum approach for engineering*. Wiley, Chichester, 2000.

HÜEBER U. A. 2005

Hüeber, S.; Mair, M.; Wohlmuth, B. I.: A priori error estimates and an inexact primal-dual active set strategy for linear and quadratic finite elements applied to multibody contact problems. In: *Applied Numerical Mathematics* 54 (2005), S. 555–576.

HÜEBER U. A. 2008

Hüeber, S.; Stadler, G.; Wohlmuth, B. I.: A primal-dual active set algorithm for three-dimensional contact problems with coulomb friction. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 30 (2008), S. 572–596.

HÜEBER UND WOHLMUTH 2005

Hüeber, S.; Wohlmuth, B. I.: A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), S. 3147–3166.

HÜEBER UND WOHLMUTH 2009

Hüeber, S.; Wohlmuth, B. I.: Thermo-mechanical contact problems on non-matching meshes. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), S. 1338–1350.

HUGHES U. A. 1977

Hughes, T. R. J.; Taylor, R. L.; Kanoknukulchai, W.: A finite element method for large displacement contact and impact problems. In: Bathe, K. J.; Oden, J. T.; Wunderlich, W.

(Hrsg.): *Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis: U.S.-Germany Symposium*. MIT, Cambridge, 1977, S. 468–495.

HUGHES U. A. 1976

Hughes, T. R. J.; Taylor, R. L.; Sackman, J.; Curnier, A.; Kanoknukulchai, W.: A finite element method for a class of contact-impact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 8 (1976), S. 249–276.

HUGHES 2000

Hughes, T. J. R.: *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Dover, Mineola, 2000.

HUGHES U. A. 1978

Hughes, T. J. R.; Caughey, T. K.; Liu, W. K.: Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy. In: *Journal of Applied Mechanics* 45 (1978), S. 366–370.

HUGHES U. A. 2005

Hughes, T. J. R.; Cottrell, J. A.; Bazilevs, Y.: Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194 (2005), S. 4135–4195.

KANE U. A. 1999

Kane, C.; Repetto, E. A.; Ortiz, M.; Marsden, J. E.: Finite element analysis of nonsmooth contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 180 (1999), S. 1–26.

KHENOUS U. A. 2006

Khenous, H. B.; Laborde, P.; Renard, Y.: *On the discretization of contact problems in elastodynamics*. Springer, Berlin, 2006 (Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, 27).

KHENOUS U. A. 2008

Khenous, H. B.; Laborde, P.; Renard, Y.: Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics. In: *European Journal of Mechanics – A/Solids* 27 (2008), S. 918–932.

KIKUCHI UND ODEN 1988

Kikuchi, N.; Oden, J. T.: *Contact problems in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods*. Siam, Philadelphia, 1988.

KLAPPROTH 2010

Klapproth, C.: *Adaptive numerical integration of dynamical contact problems*, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, Freie Universität Berlin, Dissertation, 2010.

KONYUKHOV UND SCHWEIZERHOF 2009

Konyukhov, A.; Schweizerhof, K.: Incorporation of contact for high-order finite elements in covariant form. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), S. 1213–1223.

## KRENK 2006

Krenk, S.: Energy conservation in Newmark based time integration algorithms. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 6110–6124.

## KUHL 1996

Kuhl, D.: *Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke*, Bericht Nr. 22, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Dissertation, 1996.

## KUHL UND RAMM 1996

Kuhl, D.; Ramm, E.: Constraint Energy Momentum Algorithm and its application to nonlinear dynamics of shells. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 136 (1996), S. 293–315.

## LADYZHENSKAYA UND URAL'TSEVA 1968

Ladyzhenskaya, O. A.; Ural'tseva, N. N.: *Linear and quasilinear elliptic equations*. Academic Press, New York, 1968 (Mathematics in science and engineering, 46).

## LAURSEN UND SIMO 1993

Laursen, T. A.; Simo, J. C.: A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation-frictional contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), S. 3451–3485.

## LAURSEN 2003

Laursen, T. A.: *Computational contact and impact mechanics: Fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis*. Springer, Berlin, 2003.

## LAURSEN UND CHAWLA 1997

Laursen, T. A.; Chawla, V.: Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), S. 863–886.

## LAURSEN UND LOVE 2002

Laursen, T. A.; Love, G. R.: Improved implicit integrators for transient impact problems – geometric admissibility within the conserving framework. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), S. 245–274.

## LU 2011

Lu, J.: Isogeometric contact analysis: geometric basis and formulation for frictionless contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), S. 726–741.

## LUENBERGER UND YE 2008

Luenberger, D. G.; Ye, Y.: *Linear and nonlinear programming*. 3. Auflage. Springer, New York, 2008 (International series in operations research and management science).

MATZEN U. A. 2013

Matzen, M. E.; Cichosz, T.; Bischoff, M.: A point to segment contact formulation for isogeometric, NURBS based finite elements. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 255 (2013), S. 27–39.

MCDewITT UND LAURSEN 2000

McDewitt, T. W.; Laursen, T. A.: A mortar-finite element formulation for frictional contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), S. 1525–1547.

NEWMARK 1959

Newmark, N. M.: A method of computation for structural dynamics. In: *Journal of the Engineering Mechanics Division* 85 (1959), S. 67–94.

ODEN 1981

Oden, J. T.: Exterior penalty methods for contact problems in elasticity. In: Stein, E.; Wunderlich, W.; Bathe, K. J. (Hrsg.): *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics: Proceedings of the Europe-U.S. Workshop, Ruhr-Universität Bochum, Germany, July 28-31, 1980*, Springer, Berlin, 1981.

ODEN UND REDDY 1976

Oden, J. T.; Reddy, J. N.: *Variational methods in theoretical mechanics*. Springer, Berlin, 1976.

PADMANABHAN UND LAURSEN 2001

Padmanabhan, V.; Laursen, T. A.: A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 37 (2001), S. 173–198.

PAPADOPOULOS UND TAYLOR 1992

Papadopoulos, P.; Taylor, R. L.: A mixed formulation for the finite element solution of contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 94 (1992), S. 373–389.

PAPADOPOULOS UND TAYLOR 1993

Papadopoulos, P.; Taylor, R. L.: A simple algorithm for three-dimensional finite element analysis of contact problems. In: *Computers and Structures* 46 (1993), S. 1107–1118.

PARK UND FELIPPA 1998

Park, K. C.; Felippa, C. A.: A variational framework for solution method developments in structural mechanics. In: *Journal of Applied Mechanics* 65 (1998), S. 242–249.

PARK UND FELIPPA 2000

Park, K. C.; Felippa, C. A.: A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47 (2000), S. 395–418.



PARK U. A. 2000

Park, K. C.; Felippa, C. A.; Gumaste, U. A.: A localized version of the method of Lagrange multipliers and its applications. In: *Computational Mechanics* 24 (2000), S. 476–490.

PARK U. A. 2002

Park, K. C.; Felippa, C. A.; Rebel, G.: A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), S. 2117–2142.

PIETRZAK 1997

Pietrzak, G.: *Continuum mechanics modelling and augmented lagrangian formulation of large deformation frictional contact problems*, Bericht Nr. 1656, Département de Génie Mécanique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Dissertation, 1997.

POPP U. A. 2009

Popp, A.; Gee, M. W.; Wall, W. A.: A finite deformation mortar contact formulation using a primal-dual active set strategy. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), S. 1354–1391.

POPP U. A. 2010

Popp, A.; Gitterle, M.; Gee, M. W.; Wall, W. A.: A dual mortar approach for 3D finite deformation contact with consistent linearization. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 83 (2010), S. 1428–1465.

POPP U. A. 2013

Popp, A.; Seitz, A.; Gee, M. W.; Wall, W. A.: Improved robustness and consistency of 3D contact algorithms based on a dual mortar approach. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2013). – Als Veröffentlichung akzeptiert.

PUSO UND LAURSEN 2004A

Puso, M. A.; Laursen, T. A.: A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), S. 601–629.

PUSO UND LAURSEN 2004B

Puso, M. A.; Laursen, T. A.: A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), S. 4891–4913.

PUSO UND LAURSEN 2002

Puso, M. A.; Laursen, T. A.: A 3D contact smoothing method using Gregory patches. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), S. 1161–1194.

PUSO U. A. 2008

Puso, M. A.; Laursen, T. A.; Solberg, J.: A segment-to-segment mortar contact method for quadratic elements and large deformations. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), S. 555–566.

RAMM 2004

Ramm, E.: *Lineare Finite Elemente für Tragwerksberechnungen*. Unterlagen zur Vorlesung, Wintersemester 2004/2005, Universität Stuttgart, Deutschland. 2004.

RAMM 2005

Ramm, E.: *Nichtlineare Finite Elemente für Tragwerksberechnungen*. Unterlagen zur Vorlesung, Sommersemester 2005, Universität Stuttgart, Deutschland. 2005.

REBEL U. A. 2002

Rebel, G.; Park, K. C.; Felippa, C. A.: A contact formulation based on localized Lagrange multipliers: Formulation and application to two-dimensional problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), S. 263–297.

SANDERS U. A. 2009

Sanders, J. D.; Dolbow, J. E.; Laursen, T. A.: On methods for stabilizing constraints over enriched interfaces in elasticity. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78 (2009), S. 1009–1036.

SIMO UND LAURSEN 1992

Simo, J. C.; Laursen, T. A.: An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. In: *Computers and Structures* 42 (1992), S. 97–116.

SIMO UND TARNOW 1992

Simo, J. C.; Tarnow, N.: The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. In: *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik* 43 (1992), S. 757–792.

SIMO U. A. 1985

Simo, J. C.; Wriggers, P.; Taylor, R. L.: A perturbed lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 50 (1985), S. 163–180.

SOLBERG UND PAPADOPOULOS 1998

Solberg, J. M.; Papadopoulos, P.: A finite element method for contact/impact. In: *Finite Elements in Analysis and Design* 30 (1998), S. 297–311.

STRANG UND FIX 1973

Strang, G.; Fix, G. J.: *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1973.

TAYLOR UND PAPADOPOULOS 1991

Taylor, R. L.; Papadopoulos, P.: On a patch test for contact problems in two dimensions. In: Wriggers, P.; Wagner, W. (Hrsg.): *Nonlinear computational mechanics: State of the art*. Springer, Berlin, 1991, Kap. 6, S. 690–702.

TAYLOR UND PAPADOPOULOS 1993

Taylor, R. L.; Papadopoulos, P.: On a finite element method for dynamic contact/impact

problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 36 (1993), S. 2123–2140.

TEMIZER U. A. 2011

Temizer, İ.; Wriggers, P.; Hughes, T. J. R.: Contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (2011), S. 1100–1112.

TEMIZER U. A. 2012

Temizer, İ.; Wriggers, P.; Hughes, T. J. R.: Three-dimensional mortar-based frictional contact treatment in isogeometric analysis with NURBS. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 209–212 (2012), S. 115–128.

TUR U. A. 2009

Tur, M.; Fuenmayor, F. J.; Wriggers, P.: A mortar-based frictional contact formulation for large deformation using Lagrange multipliers. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), S. 2860–2873.

TURNER U. A. 1956

Turner, M. J.; Clough, R. W.; Martin, H. C.; Topp, L. J.: Stiffness and deflection analysis of complex structures. In: *Journal of the Aeronautical Sciences* 23 (1956), S. 805–823.

WASHIZU 1975

Washizu, K.: *Variational methods in elasticity and plasticity*. Pergamon, Oxford, 1975 (International series of monographs in aeronautics and astronautics, Division 1, Solid and structural mechanics, 9).

WILLNER 2003

Willner, K.: *Kontinuums- und Kontaktmechanik: Synthetische und analytische Darstellung*. Springer, Berlin, 2003.

WOHLMUTH 1999

Wohlmuth, B. I.: Hierarchical a posteriori error estimators for mortar finite element methods with Lagrange multipliers. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 36 (1999), S. 1636–1658.

WOHLMUTH 2000

Wohlmuth, B. I.: A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier. In: *SIAM Journal on Numerical Analysis* 38 (2000), S. 989–1012.

WOHLMUTH 2001

Wohlmuth, B. I.: *Discretization methods and iterative solvers based on domain decomposition*. Springer, Berlin, 2001 (Lecture Notes in Computational Science and Engineering, 17).

WOHLMUTH UND KRAUSE 2003

Wohlmuth, B. I.; Krause, R. H.: Monotone multigrid methods on nonmatching grids for

nonlinear multibody contact problems. In: *SIAM Journal on Scientific Computing* 25 (2003), S. 324–347.

WRIGGERS 2001

Wriggers, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, Berlin, 2001.

WRIGGERS 2002

Wriggers, P.: *Computational contact mechanics*. Wiley, Chichester, 2002.

WRIGGERS U. A. 2001

Wriggers, P.; Krstulovic-Opara, L.; Korelc, J.: Smooth C1-interpolations for two-dimensional frictional contact problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51 (2001), S. 1469–1495.

WRIGGERS UND SIMO 1985

Wriggers, P.; Simo, J. C.: A note on tangent stiffness for fully nonlinear contact problems. In: *Communications in Applied Numerical Methods* 1 (1985), S. 199–203.

WRIGGERS U. A. 1985

Wriggers, P.; Simo, J. C.; Taylor, R. L.: Penalty and augmented Lagrangian formulations for contact problems. In: Middleton, J.; Pande, G. N. (Hrsg.): *Proceedings of the international conference on numerical methods in engineering: Theory and applications, Swansea, 7.-11. Januar 1985*, A. A. Balkema, Rotterdam, 1985.

WRIGGERS U. A. 1990

Wriggers, P.; Van, T. V.; Stein, E.: Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. In: *Computers and Structures* 37 (1990), S. 319–333.

WRIGGERS UND ZAVARISE 2004

Wriggers, P.; Zavarise, G.: Chapter 6: Computational contact mechanics. In: Stein, E.; Borst, R. de; Hughes, T. J. R. (Hrsg.): *Encyclopedia of Computational Mechanics* Bd. 2: Solids and Structures. Wiley, Chichester, 2004.

YANG UND LAURSEN 2008A

Yang, B.; Laursen, T. A.: A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations. In: *Computational Mechanics* 41 (2008), S. 189–205.

YANG UND LAURSEN 2008B

Yang, B.; Laursen, T. A.: A large deformation mortar formulation of self contact with finite sliding. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), S. 756–772.

YANG UND LAURSEN 2009

Yang, B.; Laursen, T. A.: A mortar-finite element approach to lubricated contact problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), S. 3656–3669.

YANG U. A. 2005

Yang, B.; Laursen, T. A.; Meng, X.: Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 62 (2005), S. 1183–1225.

ZAVARISE UND DE LORENZIS 2009

Zavarise, G.; De Lorenzis, L.: A modified node-to-segment algorithm passing the contact patch test. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), S. 379–416.

ZAVARISE UND WRIGGERS 1998

Zavarise, G.; Wriggers, P.: A segment-to-segment contact strategy. In: *Mathematical and Computer Modelling* 28 (1998), S. 497–515.

ZIENKIEWICZ UND CHEUNG 1964

Zienkiewicz, O. C.; Cheung, Y. K.: The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs. In: *ICE Proceedings* 28 (1964), S. 471–488.

ZIENKIEWICZ U. A. 2006

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Zhu, J. Z.: *The finite element method: Its basis and fundamentals*. 6. Auflage. Elsevier, Oxford, 2006.



## Lebenslauf

### Persönliche Angaben:

Name	Thomas Joachim Cichosz
Geburtsdatum	13. März 1981
Geburtsort	Stuttgart Bad Cannstatt
Eltern	Hans und Elisabeth Cichosz, geb. Brenner
Familienstand	ledig

### Schulische Ausbildung:

1988 - 1991	Grundschule Großbottwar
1991 - 1992	Anton-Bruckner-Grundschule Ludwigsburg
1992 - 2001	Friedrich Schiller Gymnasium Ludwigsburg
Juni 2001	Allgemeine Hochschulreife

### Universitäre Ausbildung:

2001 - 2006	Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart
September 2006	Diplomprüfung (mit Auszeichnung)
2006 - 2012	Akademischer Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart





---

## Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T.A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nicht-lineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nicht-lineare Strukturberechnungen.

- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axial-belasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T.J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.

- 20 (1996) **N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) **C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) **D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) **H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) **H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) **K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) **B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) **F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) **M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) **H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) **M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.

- 31 (1999) W.A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D.P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) G.A. D'Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.

- 43 (2004) **M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) **T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A.S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T.M. Hettich:**  
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **Ch. Förster:**  
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**  
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.
- 53 (2010) **J. Kato:**  
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.

- 54 (2010) C.F. Hilchenbach:**  
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**  
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.
- 56 (2012) B.J. Schneider:**  
Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien.
- 57 (2012) R. Etlender:**  
Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen.





**Thomas Cichosz**

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit verschiedenen Aspekten der Diskretisierung von Kontaktvorgängen in Raum und Zeit. Im Mittelpunkt der räumlichen Untersuchungen steht die Verbesserung der am Institut entwickelten mortarbasierten Kontaktformulierung. Diese verwendet zur Erfüllung der Kontaktbedingungen Lagrange'sche Multiplikatoren, welche mit dualen Formfunktionen diskretisiert sind. Mit der herkömmlichen Definition der dualen Formfunktionen können am Rand des Kontaktbereichs inkonsistente Mortar-Matrizen entstehen. Zur Korrektur dieses Defizits wird eine modifizierte Definition der Mortar-Matrizen vorgeschlagen, die eine konsistente Berechnung von Kontaktkraft und Normalklaffung erlaubt. Damit die Modifikation nicht die Konditionierung des Gleichungssystems verschlechtert, wird sie zusätzlich mit einer Wichtungsprozedur kombiniert.

Der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Entwicklung einer möglichst leistungsfähigen zeitlichen Kontaktdiskretisierung. Diese ist mit einer Strategie nach KANE U.A. energetisch stabil. Durch die Erweiterung eines Konzepts von DEUFLHARD U.A. werden Oszillationen in der Kontaktkraft vermieden. Die Modifikation der Geschwindigkeit in einer Nachlaufrechnung stellt physikalisch sinnvolle Kontaktgeschwindigkeiten sicher. Darüber hinaus wird der Kontakt energieerhaltend modelliert, ohne die Nichtdurchdringungsbedingung zu verletzen. Hierzu wird das Energie-Korrekturkraft-Verfahren als Weiterentwicklung einer Idee von ARMERO UND PETŐCZ formuliert. Im Gegensatz zu alternativen Verfahren („Velocity-Update-Method“, LAURSEN UND LOVE) gibt die vorgeschlagene Methode die dissipierte Energie sowohl in interner als auch in kinetischer Form zurück.