

# Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors  
der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Hongkai Wang**

geboren in Schensi, VR China

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm  
Mitberichterin: Prof. Dr.-Ing. U. Kuhlmann  
Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juli 1998



z  
25.5.

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1998

## Kurzfassung

Diese Arbeit befaßt sich mit dem Stabilitätsverhalten von dünnwandigen Stabtragwerken mit Berücksichtigung der Profilverformung unter Verwendung finiter Balken- und Schalenelemente. Ziel ist die Erweiterung der FEM-Tragwerksanalyse für dünnwandige Stäbe durch eine Modellierung mit gekoppelten Balken- und Schalenelementen.

Für die Untersuchung der dünnwandigen Stäbe ohne lokale Verformung werden Balkenelemente eingesetzt, während beim Fall mit Profilverformung Schalenelemente verwendet werden. Für einen effizienten Einsatz der Schalenmodellierung wird ein Netzgenerator DBGEN speziell für dünnwandige Stäbe entwickelt.

Im Hinblick auf die Tatsache, daß die lokale Querschnittsverformung nur in einem partiellen Bereich des ganzen Tragwerks auftritt, können gekoppelte Balken- und Schalenelemente eingesetzt werden. Dabei werden Multikopplungsbedingungen aufgestellt, welche die geometrische Verträglichkeit in der Koppelfläche fordern, und über direktes Einsetzen eingearbeitet. Durch das Kopplungskonzept ist die Analyse der Interaktion von lokalem und globalem Stabilitätsverhalten mit geringerem Rechenaufwand möglich. Die Erstellung der Multikopplungsbedingungen von Balken- und Schalenelementen durch DBGEN ermöglicht die praktische Anwendung der gekoppelten Modellierung auf komplexe Stabtragwerke mit deformierbarem Knotenbereich.

## Abstract

This thesis deals with the stability analysis of thin-walled beams considering cross sectional distortion applying both beam and shell elements. The objective is the development of a finite element model for thin-walled beams coupling beam and shell elements.

For global buckling of thin-walled beams the beam element is used, and the shell element is employed in areas of local stability failure. For an efficient use of the shell model a mesh generator DBGEN is written specifically for thin-walled beams.

With respect to the local character of the cross sectional distortion the coupled beam and shell elements are applied. The multipoint constraints are derived satisfying the geometric compatibility within the cross-section. The system equation with multipoint constraints is solved using a straightforward elimination. As expected for the analysis of the interaction of local and global buckling the coupling method turns out to be much more efficient. The automatical output of the multipoint constraints by DBGEN allows to conveniently analyse the coupled model for complex frames with deformable joint areas.

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Stipendiat am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart in den Jahren 1993-1997.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. E. Ramm für die Anregung zu dieser Arbeit, für seine Unterstützung und für die Übernahme des Hauptberichts.

Frau Professor Dr.-Ing. U. Kuhlmann danke ich für das Interesse an der Arbeit und die Übernahme des Mitberichts.

Professor Dr.-Ing. P. Osterrieder danke ich für die Überlassung seines Balkenrechenprogramms, das in dieser Arbeit zur gekoppelten Modellierung verwendet wird.

Einen herzlichen Dank möchte ich Herrn Dipl.-Ing. J. Müller für die sorgfältige Korrektur bei der deutschen Fassung aussprechen.

Allen Kollegen des Instituts möchte ich ebenfalls danken für die Hilfsbereitschaft und die angenehme Zeit.

Schließlich danke ich meinem Großonkel Pedro Wang Liu, der mit seiner finanziellen Unterstützung des Studiums die Basis für diese Arbeit geschaffen hat.

Weiterhin möchte ich mich bei dem Katholischen Akademischen Ausländer-Dienst bedanken, der das Stipendium finanziert hat.

Stuttgart, Juli 1998

Hongkai Wang

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Zielsetzung</b>	<b>1</b>
1.1	Einleitung und Problemstellung . . . . .	1
1.2	Übersicht über Lösungsverfahren und Motivation . . . . .	2
1.3	Ziel und Lösungskonzept der Arbeit . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Einführung in die Theorie der dünnwandigen Stäbe</b>	<b>5</b>
2.1	Klassifizierung der Stabtragwerke . . . . .	5
2.1.1	Stäbe mit Vollquerschnitt . . . . .	5
2.1.2	Dünnwandige Stäbe . . . . .	6
2.2	Voraussetzungen für dünnwandige Stäbe mit offenem Profil . . . . .	8
2.2.1	Erläuterung der Annahme für die Querschnittsverformung . . . . .	9
2.2.2	Erläuterung der Annahme für die Querschnittsverwölbung . . . . .	9
2.3	Kinematik am dünnwandigen Querschnitt . . . . .	12
2.3.1	Verschiebungen in der Querschnittsebene . . . . .	12
2.3.2	Verschiebungen aus der Querschnittsebene heraus . . . . .	13
2.4	Stabilitätsphänomene bei dünnwandigen Stäben . . . . .	15
2.4.1	Biegedrillknicken und Beulen . . . . .	16
2.4.2	Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Diskretisierung mit dünnwandigen Balkenelementen</b>	<b>19</b>
3.1	Programmbeschreibung . . . . .	19
3.2	Graphische Darstellung der dünnwandigen Stabträger . . . . .	20
3.3	Numerische Beispiele . . . . .	21
3.3.1	Doppelsymmetrisches I-Profil unter Biegebeanspruchung . . . . .	21
3.3.2	Einfluß der Höhe des Lastangriffs auf die kritische Last . . . . .	23
3.3.3	Einfeldträger mit ideal plastischem Material unter Torsion . . . . .	26
3.4	Bemerkungen und Schlußfolgerungen . . . . .	28

<b>4</b>	<b>Diskretisierung mit Schalenelementen</b>	<b>31</b>
4.1	Programmbeschreibung . . . . .	31
4.1.1	Einführung in das Programmsystem <i>CARAT</i> . . . . .	31
4.1.2	Elementbeschreibung . . . . .	32
4.2	Problematik bei den Knicken . . . . .	34
4.2.1	5P-Modell mit unterschiedlichen Direktoren an Knickstelle . . . . .	34
4.2.2	5P-Modell mit Drillfreiheitsgraden . . . . .	35
4.2.3	7P-Modell mit einem gemeinsamen Direktor je Punkt . . . . .	36
4.3	Automatische Netzgenerierung . . . . .	37
4.3.1	Netzgenerierung mit dem Preprozessor "Design" . . . . .	37
4.3.1.1	Das Konzept der Design-Elemente . . . . .	37
4.3.1.2	Netzgenerierung eines I-Profiles mit "Design" . . . . .	37
4.3.2	Netzgenerierung mit DBGEN . . . . .	40
4.3.2.1	Das Konzept von DBGEN für dünnwandige Träger . . . . .	40
4.3.2.2	Behandlung der Netzänderung . . . . .	44
4.3.2.3	Integration von DBGEN in <i>CARAT</i> . . . . .	45
4.3.2.4	Netzgenerierungsbeispiele mit DBGEN . . . . .	47
4.4	Untersuchung bei elastischem Materialverhalten . . . . .	49
4.4.1	Gabelgelagerter Träger unter Biegebeanspruchung . . . . .	49
4.4.1.1	I-Profil unter Gleichstreckenlast . . . . .	49
4.4.1.2	I-Profile mit variabler Länge unter konstantem Biegemoment . . . . .	51
4.4.1.3	I-Profile mit variabler Breite unter konstantem Biegemoment . . . . .	54
4.4.2	Gabelgelagerter Träger unter zentrischer Druckbelastung . . . . .	56
4.4.2.1	I-Profil unter zentrischer Druckbelastung . . . . .	56
4.4.2.2	U-Profil unter Druckbelastung im Schwerpunkt . . . . .	58
4.4.3	Kragträger mit unterschiedlichen Querschnitten . . . . .	61
4.4.3.1	L-Profil unter exzentrischer Drucklast . . . . .	61
4.4.3.2	Unsymmetrisches U-Profil unter Torsionsbelastung . . . . .	63

4.5	Untersuchung bei plastischem Materialverhalten . . . . .	66
4.5.1	Geometrisch und stofflich nichtlineare Einzelplatte . . . . .	66
4.5.1.1	Quadratplatte unter Gleichlast . . . . .	66
4.5.1.2	Rechteckplatte unter Längslast . . . . .	70
4.5.2	Rechnerische Ermittlung der Rotationskapazität . . . . .	75
4.5.2.1	Einleitung . . . . .	75
4.5.2.2	Simulationsberechnungen von 3-Punkt-Biegeversuchen . . . . .	75
4.6	Schlußfolgerungen . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Verknüpfung der Balken- und Schalenelemente</b>	<b>81</b>
5.1	Multikopplungsbedingungen . . . . .	81
5.2	Lösungskonzept . . . . .	82
5.2.1	Matrizenmanipulation beim direkten Einsetzen . . . . .	82
5.2.2	Organisation der Zwangsbedingungen . . . . .	85
5.2.3	Abänderung der Bandbreite . . . . .	85
5.3	Numerische Untersuchungen . . . . .	86
5.3.1	Kragträger mit U-Profil unter Torsion . . . . .	86
5.3.2	Kragträger mit I-Profil unter Gleichstreckenlast . . . . .	87
5.3.3	Abgewinkelter dünnwandiger Kragträger mit U-Profil . . . . .	89
5.4	Kritik und Schlußfolgerungen . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Rahmen und Rahmenecken</b>	<b>95</b>
6.1	Räumliches Tragverhalten eines Rahmens . . . . .	95
6.2	Einfluß der Eckekonstruktion auf das Tragverhalten . . . . .	97
6.3	Lokale Verformung in Rahmenecken . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>113</b>
	<b>Literatur</b>	<b>115</b>

# 1 Einleitung und Zielsetzung

## 1.1 Einleitung und Problemstellung

Wegen ihres relativ leichten Gewichtes und ihrer vereinfachten Montage finden die dünnwandigen Stabtragwerke immer häufigere Anwendung im Stahlbau und Leichtbau. Gleichzeitig erhebt sich die Frage nach einer effektiven Berechnung solcher Tragwerke. Die Besonderheit der räumlichen dünnwandigen Stäbe ist, daß bedeutende Querschnittsverwölbungen bei Torsionsbeanspruchung und Profilverformungen im konzentrierten Beanspruchungsbereich auftreten können. Dies wird durch ihre Empfindlichkeit auf Instabilität ausgedrückt und führt zu einer erheblichen Abminderung der Verzweigungs- und Traglasten.

Die Traglasten eines einzelnen räumlichen Stabes können durch

- globales Versagen eines ganzen Stabes (Kippen, Knicken, allg. Biegedrillknicken);
- lokales örtliches Versagen der einzelnen Querschnittsteile (Beulen von Gurt- oder Stegplatten);
- Interaktion des globalen und lokalen Versagens

beeinflusst werden. Für die Untersuchung des Biegedrillknickens als globales Versagen werden räumliche Balkenelemente ohne Querschnittsverzerrungen eingesetzt. Die Querschnittsverwölbung wird durch die Verdrehung (die Verdrehung pro Längeneinheit) als zusätzlicher Freiheitsgrad berücksichtigt. Das wurde bereits in vielen Arbeiten, z.B. [6], [7], [24], [29], [30] und [46] behandelt. Krajcinovic hat in [46] die exakten hyperbolischen Funktionen zur Darstellung der Verdrehung um die Längsachse verwendet. Für die Untersuchung des lokalen Beulens geht Bulson in seinen Arbeiten [22], [23] davon aus, daß nur die Querschnittsteile in einem kürzeren Abschnitt des Stabes beulen können, während die gemeinsamen Kanten aneinanderstoßender Querschnittskomponenten gerade bleiben. Tien und Wang [83] benutzen ebenfalls die Differentialgleichung der Einzelplatte zur Darstellung eines dünnwandigen Querschnittes und machen von der Methode der finiten Differenzen Gebrauch. Ihr Vorgehen beschränkt sich auf die Lösung des Eigenwertproblems für lokales Beulen. Beobachtungen von Stabversagen zeigen, daß die ersten beiden oben genannten Versagensarten häufig gleichzeitig auftreten und sich gegenseitig ungünstig beeinflussen. Deshalb reicht eine getrennte Betrachtung von lokalem und globalem Versagen nicht aus.

Um das wirkliche Tragverhalten zu erfassen, soll deshalb die Interaktion des lokalen und globalen Versagens betrachtet werden. Außerdem tritt häufig die Querschnittsverzerrung nicht vor der Entstehung von plastischen Zonen auf, so daß eine wirklichkeitsnahe Untersuchung die materielle Nichtlinearität mit berücksichtigen soll. Weil die Traglastuntersuchung des Stabes mit Berücksichtigung der Profilverformungen relativ kompliziert ist, ist eine exakte Lösung nur in Sonderfällen zu erhalten. Deshalb soll in dieser Arbeit ein leistungsfähiges numerisches Verfahren entwickelt werden.

## 1.2 Übersicht über Lösungsverfahren und Motivation

Zur Erzielung praktischer Lösungen von dünnwandigen Stabtragwerken unter Berücksichtigung der Profilverformungen sind verschiedene Verfahren denkbar. Bradford et al. [12], [18], Hancock et al. [40] und Roberts et al. [69] setzen Verschiebungsfunktionen an und machen von der Energie- oder Variationsmethode Gebrauch. Aber dieses Verfahren ist auf einfache Stützungs- und Lastbedingungen, spezielle Annahmen bezüglich der Beulformen und spezielle Querschnittsformen begrenzt.

Bei der finiten Streifenmethode wird ein Träger in Längsrichtung in Streifen unterteilt und angenommen, daß sich diese Streifen nach der Plattentheorie verhalten. Die Längsverschiebungen in der Plattenebene werden in Fourier-Reihen [15], [31], [38], [39], [41] oder Spline-Funktionen [48], [49] entwickelt, während die Querverschiebungen zur Plattenebene durch ein Polynom ausgedrückt werden. Da entsprechend dem gewählten Ansatz nur ein bestimmter Beulmodus darstellbar ist, kann die finite Streifenmethode nicht bei allgemeinen Stützungs- und Lastbedingungen zur Anwendung kommen, in denen der Beulmodus nicht von vornherein bekannt ist.

Eine erfolgreiche Methode ist die finite Element-Methode, die bis jetzt schon in vielen Analysen von dünnwandigen Stäben mit Querschnittsverformungen eingesetzt wurde. Dabei werden die häufig verwendeten I- und U-Profile in den Vordergrund gestellt. Um die Stegverformung zu erfassen, nimmt eine Reihe von Autoren an, daß sich der Querschnitt aus einem oder zwei steifen Gurt(en) und einem flexiblen Steg zusammensetzt. Die steifen Gurte werden als räumliche Balkenelemente idealisiert. Akay, Johnson und Will [1] und El-Ghazaly, Sherbourne und Dubey [35] idealisieren den Steg eines Querschnittes durch Plattenelemente. Durch die Verwendung von allgemeinen Faltwerkselementen kann die Interaktion des lokalen und globalen Versagens in der darstellbaren Querschnittsform ohne Einschränkungen erfaßt werden. In [35] werden die Beullasten unter Berücksichtigung des elastisch-plastischen Werkstoffverhaltens ermittelt, wobei die Festlegung von plastischen Zonen auf die Berücksichtigung von Längsspannungen beschränkt ist. Bradford und Trahair [10], [11], [13], [14], [16], [17] und Chin, Al-Bermani und Kitipornchai [26] entwickeln ein Balkenelement mit Verschiebungs- und Verdrehfreiheitsgraden an den Profilkanten, um die Querschnittsverformung zu erfassen. Dabei wird angenommen, daß sich der Steg in Querrichtung als eine kubische Funktion verschiebt. Solche Verfahren sind nur für Stäbe mit einem unausgesteiften dünnen Steg gültig. Damit geht die Allgemeinheit der Querschnittsverzerrung verloren.

Ein besonderer Weg ist von Batista [8] und Priebe [64] gegangen worden. Sie benutzen die Methode der wirksamen Breiten zur Ermittlung der Querschnitts- und Stabtragfähigkeit des Knickstabes. Der Interaktion zwischen lokalem und globalem Versagen der einzelnen Platte liegt die Stabilität des ganzen Querschnittes zugrunde. Durch Auswahl eines Koeffizienten für das lokale Versagen wird die kritische Last für verschiedene Profile bestimmt [8]. Die geometrische Imperfektion kann ebenfalls berücksichtigt werden. Die Methode der mitwirkenden Breite wird in erster Linie auf Druckstäbe angewandt.

Ein alternativer Weg ist, daß der Stab durch ein „spezielles“ Balkenelement idealisiert wird [44], [65], [86]. Bei diesem speziellen Balkenelement in [44] wird von einem allgemeinen, räumlichen Balkenelement [58] mit Wölbfreiheitsgraden ausgegangen. Dieses wird um zusätzliche Plattenfreiheitsgrade erweitert, wodurch die Profilverformung ermöglicht wird. Das elastisch-plastische Werkstoffverhalten wird ebenfalls berücksichtigt. Die Besonderheit dieses speziellen Balkenelements im Vergleich zum normalen Balkenelement ist es, daß die jeweils maßgebende Versagensart durch die Interaktion von Balken- und Plattenfreiheitsgraden erfaßt wird. In seiner einfachsten Form wird die Anzahl der Freiheitsgrade gegenüber einem herkömmlichen Balkenelement nur geringfügig erhöht. Die Berechnung der unterschiedlichen Versagensformen kann damit wirtschaftlich vorgenommen werden.

Die obigen Verfahren haben ihre eigenen Vorteile in Bezug auf die jeweiligen Annahmen und sind für einzelne Balken erfolgreich einsetzbar. Ihnen gemeinsam ist die Unfähigkeit, räumliche Stabtragwerke mit Knotenbereichen und Aussteifungen an der Lasteinleitungsstelle darzustellen. Ihnen überlegen ist ein Modell, das den dünnwandigen Stab durch einen Zusammenbau von Faltwerkselementen (Platten- und Scheibenelementen) idealisiert [2], [27], [43]. Weil der Gurt und der Steg in separate Elemente eingeteilt werden, kann sich der Querschnitt beliebig verzerren. Verschiedenartige Stützbedingungen und Verteilungen der Lasten in Längsrichtung können systematisch dargestellt werden. Weiter können auch die Stegsteifen als Platten problemlos behandelt werden. Die Interaktion zwischen lokalem und globalem Versagen von Stäben mit beliebigem Querschnitt kann ohne Einschränkungen erfaßt werden. Aber diese genaue Berechnung hat den Preis des höheren Rechenaufwandes, besonders bei großen Stabtragwerkssystemen. Mit Faltwerkselementen des FEM-Programmpaketes ANSYS haben Morrell et al. [56] den Einfluß der Eckkonstruktion auf das Systemtragverhalten untersucht. Scheer, Pasternak und Schween [76], Pasternak und Chróscielewski [61] und Vayas, Pasternak und Schween [87] haben die Zugfeldbildung von Rahmenecken untersucht. In [61] wurden auch Träger mit Quer- und Längssteifen sowie mit Ausschnitten analysiert. Um für die Anwendung des Fließgelenkverfahrens eine zulässige Gelenkverdrehung angeben zu können, haben Greschik, White, McGuire und Abel [36], Kuhlmann [47], Maquoi und Lognard [53], Roik und Kuhlmann [72] und Spangemacher und Sedlacek [79] das Nachbeulverhalten im Fließgelenk untersucht und die Rotationskapazität berechnet.

Im Hinblick auf die Tatsache, daß die Querschnittsverzerrung nur in einem partiellen Bereich auftritt, z.B. in dem konzentrierten Beanspruchungsbereich oder in der durch Löcher gestörten Zone, ist eine Untersuchung durch Faltwerkselemente längs des ganzen Stabes unnötig. Wünschenswert ist, nur diesen Sonderbereich durch lokale Verfeinerung mittels Faltwerkselementen genauer zu untersuchen, während der ungestörte Bereich durch Balkenelemente abgebildet wird. In der Praxis wird die Zone, wo die Querschnittsverzerrung wahrscheinlich auftritt, durch Anschauung und Erfahrung bestimmt. Die beiden durch unterschiedliche Rechenmodelle diskretisierten Teile werden durch Einführung der Kopplungsbedingungen in ihrem Verknüpfungsquerschnitt verbunden. Damit wird die Anzahl der Freiheitsgrade von Faltwerkselementen zu der von Balkenelementen reduziert und die geometrische Verträglichkeit

erfüllt. Durch diese Technik kann die Anzahl von Freiheitsgraden stark reduziert werden. Durch dieses Modell ist die Analyse der Interaktion von lokalem und globalem Versagen ohne großen Rechenaufwand möglich. Bedeutende Beiträge dazu sind die Arbeiten von Gründer [37], Schneider [77] und Yamao und Sakimoto [91]. In [91] werden dreidimensionale Balkenelemente von Sakimoto et al. [74] und dreieckige Faltwerkselemente zur Kopplung eingesetzt.

### 1.3 Ziel und Lösungskonzept der Arbeit

Ziel der Arbeit ist die Erweiterung der Möglichkeiten der FEM-Strukturanalyse zur Traglastberechnung von räumlichen dünnwandigen Stabtragwerken mit gleichmäßiger Querschnittsgeometrie unter Berücksichtigung der Bereiche mit gegebenenfalls auftretenden Profilverformung. Eingesetzt werden Schalenelemente, die im Sonderfall als ebene Modelle auch für Faltwerke benutzt werden. Das grundlegende Problem hierbei besteht in der Erfassung der Auswirkung der lokalen Verformung auf das Gesamtverhalten der dünnwandigen Stabtragwerke ohne höheren Aufwand als bei reinen Schalenelementen. Deshalb werden im Bereich, wo das lokale Beulen erwartet wird, Schalenelemente von Ramm [66] und Büchler [19] eingebracht. Im anderen Bereich, wo weitgehend Balkenannahmen zutreffend sind, werden dünnwandige Balkenelemente von Osterrieder und Werner [60] eingesetzt. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt darin, wie die beiden Bereiche zusammengebaut werden, um die Interaktion zwischen lokalem und globalem Versagen wirtschaftlich und wirklichkeitsnah zu erfassen. Es wird eine Lösung vorgestellt, die auf einer Kopplung von finiten Balken- und Schalenelementen beruht und durch direkte Einarbeitung der Zwangsgleichungen an der Kopplungsstelle durchgeführt wird. Mittels dieser Methode gelingt es auch, Stabtragwerke mit Knotenbereichen zu berechnen.

Das Rechenprogramm des räumlichen dünnwandigen Balkens von Osterrieder ist ein eigenständiges Softwarepaket; es soll zuerst in das finite Element Programmsystem **CARAT** ( **C**omputer **A**ided **R**esearch **A**nalysis **T**ool ) eingebracht werden. Die Schalenelemente sind schon in **CARAT** vorhanden. Im Hinblick auf die Gleichmäßigkeit des Stabquerschnitts werden Rechteckelemente eingesetzt. Ein geeignetes Schalenelementmodell soll ausgewählt werden, das sich dem Balkenelementmodell von Osterrieder im theoretischen Hintergrund anpaßt, d.h. das Schalenelement soll auch ein Verschiebungsmodell sein und auf der Totalen Lagrange-Formulierung basieren.

Zunächst werden die Grundlagen der dünnwandigen Stäbe in Kapitel 2 bereitgestellt. Kapitel 3 beschreibt die Anwendung der Balkenelemente. In Kapitel 4 wird die Anwendung der Schalenelemente unter Verwendung des vorgestellten Netzgenerators dargestellt. In Kapitel 5 wird ein Kopplungskonzept von Balken- und Schalenmodell vorgestellt, das auf der in Kapitel 2 gegebenen Querschnittskinetik basiert. Das Konzept wird durch einige Beispiele erklärt. Zum Schluß werden in Kapitel 6 einige komplizierte räumliche Stabtragwerke mit Balken- und Schalenelementen untersucht.

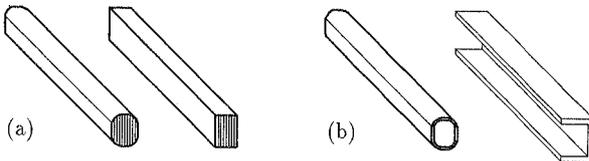
## 2 Einführung in die Theorie der dünnwandigen Stäbe

Die allgemeine Theorie der dünnwandigen Stäbe ist vielfach beschrieben, z.B. in [45], [71] und [90]. In diesem Kapitel wird die Theorie der in dieser Arbeit interessierenden dünnwandigen Stäbe mit offenem, prismatischem Profil nach rein geometrischen Gesichtspunkten vorgestellt. Die Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen und die allgemeinen Differentialgleichungen des Gleichgewichts am Stabelement sowie der Ausdruck der potentiellen Energie und der Schnittgrößen sind dem angegebenen Schrifttum zu entnehmen.

### 2.1 Klassifizierung der Stabtragwerke

Unter Stabtragwerken versteht man Strukturen, bei denen eine Abmessung gegenüber den anderen beiden überwiegt. Wenn man den Aufbau der Stäbe betrachtet, können sie weiter in zwei Klassen unterteilt werden[90]:

1. Stäbe mit Vollquerschnitt, wobei sich die Abmessungen in der Querschnittsebene in der Größe wenig voneinander unterscheiden (Bild 2.1a).
2. dünnwandige Stäbe, wobei die Dicke der Plattenkomponente klein im Vergleich zu irgendeiner charakteristischen Querschnittsabmessung ist (Bild 2.1b).



**Bild 2.1:** Stäbe mit Vollquerschnitt und dünnwandige Stäbe

#### 2.1.1 Stäbe mit Vollquerschnitt

Bei der Untersuchung der Stäbe mit Vollquerschnitt auf Biegung und Zug/Druck kann eine Reihe geometrischer Hypothesen eingeführt werden, so daß von den sechs Komponenten des Verformungstensors des Stabes als räumlicher Körper bei Querbiegung und Längskraft nur die Dehnung in Richtung der Stabachse erhalten bleibt. Deshalb liegt das Gesetz von *Ebenbleiben der Querschnitte* [81], d.h. Bernoulli's Hypothese, der elementaren Theorie der Balkenbiegung zugrunde. Für Torsionsbeanspruchung geht man von der sogenannten *reinen Torsionstheorie*[82], d.h. der St. Venantsche Torsionstheorie, aus, die auf den Hypothesen vom Fehlen der Dehnungen und Schubverzerrungen in der Querschnittsebene und der Dehnungen in Richtung

der Stabachse beruht. Diese Theorie ermöglicht nur die Bestimmung von Schubspannungen im Stabquerschnitt. Eine Gemeinsamkeit der elementare Theorie der Zug-/Druck-, Biege- und der reinen Torsionsbeanspruchung ist die Zurückführung der Querschnittskräfte des Stabes auf eine Resultierende, die als räumlicher Vektor betrachtet werden kann.

Die vereinfachte Balkentheorie von Bernoulli führt zum Widerspruch zwischen den Schubspannungen und den Schubverzerrungen. Eine Korrektur erfolgt in der Timoshenko-Balkentheorie [84], die nur voraussetzt, daß die Normale des Balkens während der Deformation geradlinig bleibt. Die Timoshenko-Balkentheorie geht von über der Querschnittshöhe konstanten effektiven Schubverzerrungen aus. Dabei wird ein Schubkorrekturfaktor, der von der Querschnittsform abhängig ist, eingeführt, um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß die Schubspannungen und Schubverzerrungen nicht gleichmäßig über den Querschnitt verteilt sind.

### 2.1.2 Dünnwandige Stäbe

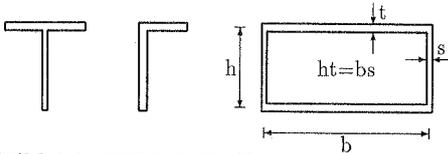
Die charakteristische Besonderheit der dünnwandigen Stäbe besteht darin, daß bei der Torsion Querschnittsverwölbungen und folglich zu dieser Deformation proportionale Längsspannungen auftreten, die in jedem Querschnitt eine Gleichgewichtsgruppe bilden. Diese zusätzlichen Normalspannungen in Längsrichtung, die infolge der relativen Querschnittsverwölbung entstehen und von der Theorie der reinen Torsion nicht erfaßt werden, können bei dünnwandigen Stäben sehr große Werte annehmen. Eine ganze Reihe von Arbeiten, z.B. von Wagner [88], Wlassow [90] und Bornscheuer [9] führten zur Theorie der Wölbkrafttorsion.

Dünnwandige Stäbe können nach ihren Profilformen weiter in zwei Klassen unterteilt werden, nämlich dünnwandige Stäbe mit geschlossenem Querschnittsprofil und dünnwandige Stäbe mit offenem Querschnittsprofil (Bild 2.1b). Der wesentliche Unterschied liegt in der Berechnung der Verwölbung infolge Torsion, wobei die Voraussetzung über die Vernachlässigung der Schubverzerrung in der Mittelfläche der Querschnittsplatten für Stäbe mit geschlossenem Profil nicht zutrifft. Im Vergleich zu Stäben mit geschlossenem Profil können erhebliche Änderungen der Längsspannungen infolge Torsion bei Stäben mit offenem Querschnittsprofil hervorgerufen werden.

Die klassische Theorie der Wölbkrafttorsion offener Profile vernachlässigt den Verformungseinfluß der Wölbschubspannungen. Diese Annahme führt zu gewissen Unstimmigkeiten in kurzen Stäben und an solchen Stellen, wo die Größe der sekundären Wölbschubspannungen vergleichbar mit der primären Schubspannungen ist, z.B. am Lager eines eingespannten Stabes. Analog zur Berücksichtigung des Einflusses der Schubverformung beim Biegeträger können die Wölbschubverzerrungen infolge der sekundären Schubkräfte behandelt werden. Ein Beitrag dazu liefern die Arbeiten von Heilig [42] und Roik und Sedlacek [73]. Dort wird in Analogie zur bekannten Schub-

korrektur bei der Biegung von einer Wölbschubkorrektur Gebrauch gemacht. Bei dünnwandigen offenen Querschnitten braucht i.a. der Einfluß der Schubverzerrungen nicht berücksichtigt zu werden. Bei geschlossenen Profilen ist er dagegen nicht mehr zu vernachlässigen, sondern grundsätzlich mitzubetrachten.

Es sei besonders erwähnt, daß bei gewissen Formen der Profilkontur infolge Torsion überhaupt keine Querschnittsverwölbung und somit auch keine Längsspannungen auftreten (Bild 2.2).



**Bild 2.2:** Wölbfreie Profile

Zur Untersuchung der dünnwandigen Stäbe kann man von zwei Wegen ausgehen:

- Der dünnwandige Stab wird als Stab mit gerader oder schwach gekrümmter Achse aufgefaßt, welcher jedoch wegen der dünnen Wanddicke nicht mehr wie ein Stab mit Vollquerschnitt angesehen werden darf, sondern nach der St. Venantschen Torsion oder Wölbkrafttorsion bei Torsionbeanspruchung behandelt werden muß.
- Der dünnwandige Stab wird als prismatische, zylindrische oder schwach gekrümmte Translationsschale betrachtet. Das gilt besonders, wenn die Querschnittsabmessungen geringfügig kleiner als die Stablänge sind. Auf Kosten eines erheblichen Rechenaufwands kann diese Betrachtungsweise eine sehr genaue Behandlung beliebiger, polygonaler Querschnitte ermöglichen.

Diese Klassifizierung hat einen mehr qualitativen Charakter, der durch die Hypothesen bestimmt wird. Eine zutreffende Hypothese und daraus entstehende Berechnungsart hängen vom Systemverhalten unter äußerer Last, vom Charakter der mechanischen Aufgabe und von der geforderten Genauigkeit ab. So kann z.B. ein dünnwandiger Stab mit starrem, geschlossenem Querschnittsprofil bei Biegetorsion in vielen Fällen als Stab mit kontinuierlichem Querschnitt betrachtet werden. Die in einem solchen Stab entstehenden zusätzlichen Normalspannungen in Längsrichtung können nach dem Prinzip von de Saint-Venant vernachlässigt werden. Wenn der Stab ein starres offenes Profil hat, müssen die Wölbspannungen nach der Theorie der Wölbkrafttorsion berücksichtigt werden. Wenn der Stab dagegen ein deformierbares Profil hat, so muß er als dünnwandiges Raumsystem vom Typ einer langen zylindrischen oder prismatischen Schale betrachtet werden.

## 2.2 Voraussetzungen für dünnwandige Stäbe mit offenem Profil

Für dünnwandige Stäbe mit einem offenen, abschnittsweise konstanten, prismatischen Querschnitt werden folgende Voraussetzungen getroffen:

1. Das Material ist im allgemeinen elastisch, homogen und isotrop, d.h. das Hookesche Gesetz ist unbeschränkt gültig.
2. Die Dehnungen sollen klein sein.
3. Die Querschnittsform soll bei der Verformung des Stabes erhalten bleiben. Lokale Instabilitäten der Querschnittssegmente sind ausgeschlossen. Unter dieser Annahme kann der dünnwandige Stab wie eine zylindrische oder prismatische Schale mit beliebiger starrer Querschnittskontur betrachtet werden.

Bei Verzicht auf diese Annahme soll der Stab als drei-dimensionale Schalenstruktur betrachtet werden. Dabei soll die Voraussetzung weiter gültig sein, daß der Winkel zwischen aneinanderstoßenden Platten an der gemeinsamen Kante bei Verformung erhalten bleibt.

4. Für die Biegebeanspruchung gilt die Hypothese von Jacob Bernoulli vom Ebenbleiben der Querschnitte: Die vor der Biegedeformation zur Stabachse senkrechten Querschnittsebenen sollen auch nach der Deformation senkrecht zur Stabachse liegen und eben sein.
5. Die Voraussetzung von Ebenbleiben der Querschnitte wird für die Torsionbeanspruchung dünnwandiger offener Profile durch die Forderung erweitert, daß die aus der Änderung der Längsnormalspannungen entstehende Schubverzerrung in der Profilmittelfläche Null sein soll.

Diese Voraussetzung, die der Wagner-Hypothese [88] entspricht, führt dazu, daß sich bei einem aus ebenen Einzelscheiben zusammengesetzten Profil der Gesamtquerschnitt im allgemeinen verwölbt, die Querschnitte der Einzelscheiben bei Biegetorsion jedoch eben bleiben.

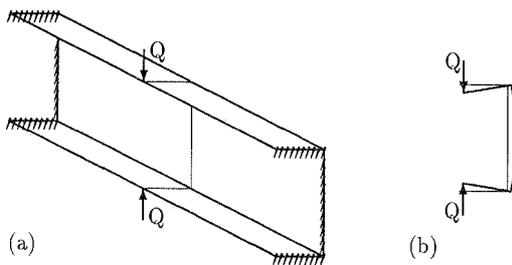
Als Konsequenz daraus können die zu den Querkräften gehörigen Schubspannungen nicht über ein Stoffgesetz ermittelt werden, sondern müssen aus dem Gleichgewicht am Stabelement berechnet werden.

6. Normalspannungen in Dickenrichtung der Profilkomponente sind vernachlässigbar. Diese übliche Annahme ist auch für Platten und Schalen bei kleinen Wanddicken zulässig.
7. Der Verlauf der Verwölbung in Dickenrichtung wird konstant angenommen. Querverwölbung wird vernachlässigt.

Die speziell für dünnwandige Stäbe eingeführten Annahmen 3 und 5 sollen an einigen Beispielen eingehend und anschaulich erklärt werden.

### 2.2.1 Erläuterung der Annahme für die Querschnittsverformung

Ein dünnwandiger Stab mit U-Profil und Einspannung an den beiden Stabenden unter einer Querbelastung, die aus zwei entgegengesetzt gerichteten gleichgroßen Querlasten  $Q$  besteht, die in beliebigem Querschnitt des Stabes angreifen, ist in Bild 2.3a dargestellt. Für einen elastischen Stab mit verformbarem Profil (Bild 2.3b) ruft eine solche Belastung sowohl globale Biegeverformungen in der Symmetrieebene als auch lokale Verformungen in Gurt- und Stegplatten hervor. Infolge dieser Verformungen dehnen sich die Längskanten des dünnwandigen Stabes, was auch in der allgemeinen Theorie prismatischer und zylindrischer Schalen zum Ausdruck kommt. Sowohl die Normal- als auch die Schubspannungen sind für den betrachteten Belastungsfall direkt von den Verformungen des Stabprofils abhängig.



**Bild 2.3:** Einfachsymmetrisches U-Profil unter zwei entgegengesetzt gerichteten gleichgroßen Querlasten

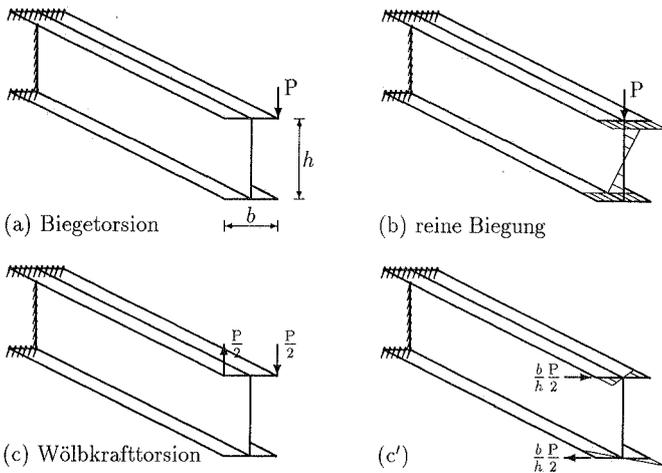
Wenn der Stab nun als eine Schale mit starrer Querschnittskontur angesehen wird, dann leistet die im Gleichgewicht befindliche Querlast keinerlei Arbeit. Das Stabprofil bleibt unverändert und demzufolge werden keine Spannungen im Stabquerschnitt hervorgerufen. Daran ist zu erkennen, daß die Annahme nichtverformbarer Querschnittskontur einen Übergang von der Schalentheorie zur dünnwandigen Balkentheorie darstellt und zu einer großen Vereinfachung bei der Untersuchung der dünnwandigen Stäbe führt.

### 2.2.2 Erläuterung der Annahme für die Querschnittsverwölbung

In Bild 2.4 ist ein Kragträger mit doppelt-symmetrischem I-Profil unter exzentrischer Querkraft  $P$  am freien Ende dargestellt. Diese Belastung ruft im Träger einen kombinierten Spannungs- und Deformationszustand hervor, der in zwei grundsätzlich verschiedene Anteile zerlegt werden kann: ein reiner Biegezustand infolge der Belastung in der Stegebene (Bild 2.4b) und ein Torsionszustand (Bild 2.4c).

Der Biegezustand wird durch das Gesetz von Ebenbleiben der Querschnitte beschrie-

ben. Dabei erhalten beide Flansche des I-Trägers gleichartige Formänderungen: der obere Flansch wird gedehnt, der unterer gedrückt. Der Steg biegt sich in seiner Ebene anti-symmetrisch.

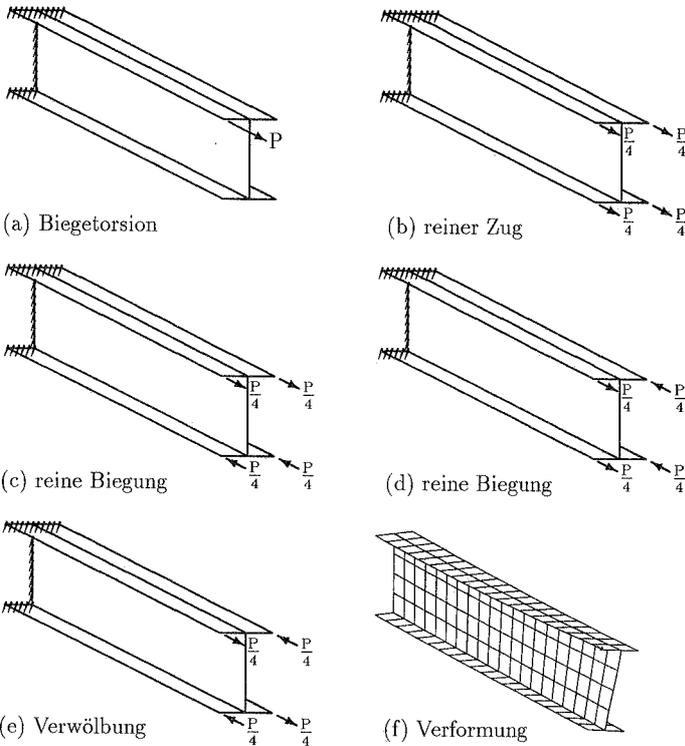


**Bild 2.4:** Kragträger mit I-Profil unter exzentrischer Querkraft

Wegen der Behinderung der Verwölbung ist die Torsion keine reine Torsion, sondern eine Wölbkrafttorsion, da einzelne Plattenkomponente des Stabes infolge der Torsion auch Biegung erhalten. In den Querschnitten entstehen neben den Schubspannungen auch Normalspannungen, die Wölbnormalspannungen genannt werden. Der Zustand der Wölbkrafttorsion läßt sich durch Bild 2.4c' anschaulich erklären. Auf Grund der Hypothese über das starre Querschnittsprofil kann die in der Querschnittsebene angreifende Last durch eine andere statisch äquivalente Last ersetzt werden, ohne daß sich der Spannungs- und Verformungszustand des dünnwandigen Stabes ändert. In Bild 2.4 gelten z.B. (a)=(b)+(c) und (c)=(c'). Von Bild 2.4c' ist ersichtlich, daß die Flansche des I-Trägers infolge der Torsion Biegung in ihren Ebenen erhalten, und zwar jeder Flansch in entgegengesetzter Richtung. Dabei werden die linken Randfasern des oberen Flansches gezogen und die rechten gedrückt. Am unteren Flansch sind die Verhältnisse umgekehrt. Dies entgegengesetztes Heraustreten der Längsfasern aus der Querschnittsebene bedeutet ein Verwölben des Querschnittes und damit muß bei der St. Venantschen Torsion die Annahme vom Ebenbleiben der Querschnitte fallen gelassen werden.

Das Erlauben der Querschnittsverwölbungen bedeutet auch, daß der Stab in Längsrichtung als elastisch verformbar angesehen werden muß. Diese Folgeannahme bedingt, daß eine äußere Längsbelastung in irgendeinem Punkt des Querschnittes nicht wie eine Querbelastung durch ein anderes statisch äquivalentes Längskraftsystem

ersetzt werden kann. Dabei muß eine zusätzliche im Gleichgewicht stehenden Kraftgruppe mit berücksichtigt werden, durch die die Querschnittsverwölbungen bedingt sind. Für dünnwandige Stäbe haben die Querschnittsverwölbungen infolge solcher Längskraft-Gleichgewichtsgruppen nicht wie bei Stäben mit geschlossenem Profil nur örtlichen Charakter, d.h. die entsprechenden Bimomente klingen in der Regel sehr langsam ab. Die Anwendung des Saint-Venantschen Prinzips auf die Torsionsberechnung dünnwandiger Stäbe kann daher zu großen Fehlern führen.



**Bild 2.5:** Kragträger mit I-Profil unter exzentrischer Längskraft

Bild 2.5 zeigt einen Kragträger mit doppelt-symmetrischem I-Profil unter exzentrischer Längskraft am freien Ende [90]. Entsprechend der elementaren Biegetheorie des Balkens wird diese Last durch eine statisch äquivalente Kräftegruppe ersetzt. Der reine Zugspannungszustand und die reinen Biegezustände sind jeweils in Bild 2.5b und 2.5c,d dargestellt. Für den dünnwandigen Stab fehlt in dieser Zerlegung noch eine Variante, und zwar das System mit einer im Gleichgewicht stehenden Kräftegruppe in Längsrichtung (Bild 2.5e). Diese Kräftegruppe besteht aus zwei gleichgroßen, ent-

gegengesetzt gerichteten Längskräften in beiden Flanschen, die zwei Biegemomenten in den Flanschebenen entsprechen. Infolge dieser Bimomentenbelastung erleiden die Querschnitte eine Verwölbung. Als globales Verhalten wird der dünnwandige Stab im Vergleich zur elementaren Biegetheorie noch zusätzlich verdreht. Bild 2.5f zeigt die qualitative Verformung des Stabes, die mit Schalenelementen berechnet wird. Dabei ist die Verdrehung des Stabes deutlich zu sehen.

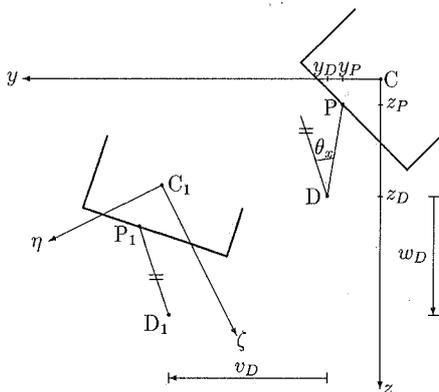
Wenn die Längskraft für das hier betrachtete System in einem beliebigen Punkt des Stags angriff, erleidet der Stab keine Verdrehung. Das Heraustreten der Längsfasern aus der Querschnittsebene, besonders an der Lasteinleitungsstelle, kann nur mit der Methode der Schalentheorie erfaßt werden.

## 2.3 Kinematik am dünnwandigen Querschnitt

Die Kinematik am dünnwandigen Stab wurde von Wlassow [90] und Bornscheuer [9] umfassend dargelegt. Da die kinematischen Beziehungen Grundlage der Kopplung von Balken- und Schalenelementen in dieser Arbeit sind, werden sie hier nochmals hergeleitet.

### 2.3.1 Verschiebungen in der Querschnittsebene

Wir betrachten einen Querschnitt und definieren ein lokales Koordinatensystem mit beliebigem Punkt C als Ursprung (Bild 2.6).



**Bild 2.6:** Verformungsbeziehungen in der Querschnittsebene

Wegen der Dünnwandigkeit kann der offene dünnwandige Querschnitt durch die Profilmittellinie dargestellt werden. Aufgrund der Annahme von der Erhaltung der



Nach Einführung des Winkels  $\alpha$  zwischen der  $y$ -Achse und der  $\bar{n}$ -Achse ergeben sich die Beziehungen der Verschiebungen des Punktes P in zwei lokalen Koordinatensystemen:

$$\begin{aligned} t &= v \sin \alpha - w \cos \alpha \\ n &= v \cos \alpha + w \sin \alpha \end{aligned} \quad (4)$$

Die Tangentialverschiebung  $t$  in Richtung der Tangente an die Profillinie und die Normalverschiebung  $n$  in Richtung der Kurvennormalen im Punkt P sind Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen  $x$  und  $s$ .

Aus Bild 2.7a folgt weiter:

$$\begin{aligned} r_t &= (y - y_D) \sin \alpha - (z - z_D) \cos \alpha \\ r_n &= -(y - y_D) \cos \alpha - (z - z_D) \sin \alpha \end{aligned} \quad (5)$$

Durch Einsetzung der Gleichungen (3) in (4) und mit Berücksichtigung der Gleichungen (5) erhält man die Beziehungen:

$$\begin{aligned} t &= v_D \sin \alpha - w_D \cos \alpha + r_n \theta_x \\ n &= v_D \cos \alpha + w_D \sin \alpha + r_t \theta_x \end{aligned} \quad (6)$$

Dabei beschreiben die letzten Glieder in den Gleichungen (6) jeweils die Anteile an den Verschiebungen  $t$  und  $n$ , die sich aus der Drehung des Querschnittes um den Bezugspunkt D ergeben.

Aufgrund der Annahme der Vernachlässigung der Schubverzerrung in der Profilmitelfläche des Stabes (Wagner-Hypothese) gilt:

$$\gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

wobei  $u(x, s)$  die Längsverschiebung des Punktes P aus der Querschnittsebene heraus ist.

Durch partielle Integration über  $s$  erhält man die Längsverschiebung:

$$u = u_0 - \int_0^s \frac{\partial t}{\partial x} d\bar{s} \quad (8)$$

wobei  $u_0$  ein Wert ist, der nur von  $x$  abhängt und die Anfangslängsverschiebung im Punkt  $s = 0$  beschreibt.

Die erste Gleichung von (6) wird differenziert und anschließend in (8) eingesetzt:

$$u = u_0 - \int_0^s v'_D \sin \alpha d\bar{s} + \int_0^s w'_D \cos \alpha d\bar{s} - \int_0^s \theta'_x r_n d\bar{s} \quad (9)$$

mit der Definition  $(\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$ .

Aus Bild 2.7 ist zu ersehen:

$$\begin{aligned}\sin \alpha \, ds &= dy \\ \cos \alpha \, ds &= -dz \\ r_n \, ds &= d\omega\end{aligned}\tag{10}$$

Hierin ist  $d\omega$  die doppelte Fläche des von den Endpunkten des Bogendifferentials  $ds$  und dem Bezugspunkt D gebildeten Dreiecks (Bild 2.7b).

Setzt man nun die Beziehungen (10) in die Gleichungen (9) ein, so erhält man nach Ausführung der Integration:

$$u = u_0 - v'_D y - w'_D z - \theta'_x \omega\tag{11}$$

wobei  $y$  und  $z$  die kartesischen Koordinaten des Punktes P sind.  $\omega$  wird als Einheitsverwölbung bezeichnet. Sie ist entsprechend der obigen Ableitung definiert als:

$$\omega = \int_0^s r_n \, d\tilde{s}\tag{12}$$

Dieses Integral ist bei festgesetztem Bezugspunkt D und Anfangspunkt  $P_0$  eindeutig bestimmt.

Unter der Voraussetzung kleiner Verformungen werden die Verdrehungen  $\theta_y, \theta_z$  infolge Biegung und die Verdrehung  $\chi$  definiert:

$$\begin{aligned}\theta_y &= -w'_D \\ \theta_z &= v'_D \\ \chi &= \theta'_x\end{aligned}\tag{13}$$

Durch diese Beziehungen läßt sich die Gleichung (11) wie folgt schreiben:

$$u = u_0 + z\theta_y - y\theta_z - \omega\chi\tag{14}$$

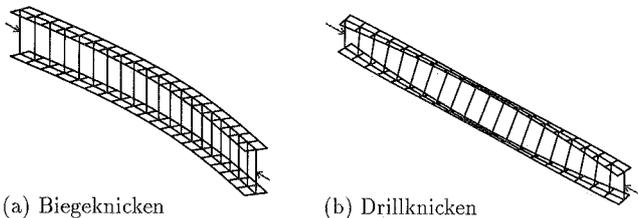
Aus der Gleichung (14) ist zu ersehen, daß die Längsverschiebung  $u$  aus drei Anteilen besteht, nämlich der Axialverschiebung des Querschnittes, den Längsverschiebungen aus den Biegeverformungen und der Verwölbung infolge Torsion.

## 2.4 Stabilitätsphänomene bei dünnwandigen Stäben

Die Grundlagen wie Spannungsprobleme, Stabilitätsprobleme und Traglastprobleme kann man dem Schrifttum [80] entnehmen. Hier werden nur die Stabilitätsprobleme wie *Knicken*, *Kippen*, allgemein mit *Biegedrillknicken* bezeichnet, und *Beulen* kurz vorgestellt, die im Stahlbau und Leichtmetallbau eine ausschlaggebende Rolle spielen.

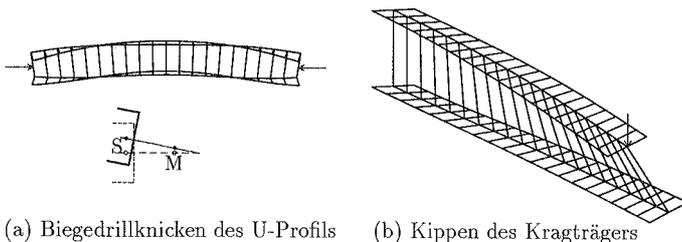
## 2.4.1 Biegedrillknicken und Beulen

Das *Knicken* ist eine Instabilitätserscheinung, wobei ein gerader, zentrisch gedrückter Stab aus homogenem, unbeschränkt elastischem und bruch sicherem Material große Ausbiegungen erfährt. Für den Stab mit kleiner Länge oder mit Verband gegen seitliche Ausweichung tritt dagegen reines *Drillknicken* auf (Bild 2.8).



**Bild 2.8:** Biegeknicken, Drillknicken des Druckstabes

Unter *Biegedrillknicken* versteht man, daß das seitliche Ausweichen eines mittig oder außermittig gedrückten geraden Stabes unter kritischer Belastung mit einer gleichzeitigen Verdrehung verknüpft ist. Diese Instabilitätserscheinung sieht man gut am Beispiel eines Druckstabes mit U-Profil (Bild 2.9a), wobei Schwerpunkt  $S$  und Schubmittelpunkt  $M$  bekanntlich nicht zusammenfallen. Unter einer bestimmten Last, der kritischen Last, wird der Stab plötzlich verdreht und zugleich gebogen. Wegen der gleichzeitigen Parallelverschiebung ist dabei der Schubmittelpunkt gewöhnlich nicht der Drehpunkt. Die kritische Last wird bei gegebener Stablänge durch die Biege- sowie Torsionssteifigkeit, also damit auch durch die Wölbsteifigkeit bestimmt.



**Bild 2.9:** Biegedrillknicken des Druckstabes

Ein Sonderfall des Biegedrillknickens ist das Kippen. Als *Kippen* bezeichnet man das Ausknicken des Druckgurtes eines auf Biegung beanspruchten schlanken Balkens. Dabei wird der Träger seitlich ausgebogen und gleichzeitig verdreht (Bild 2.9b).

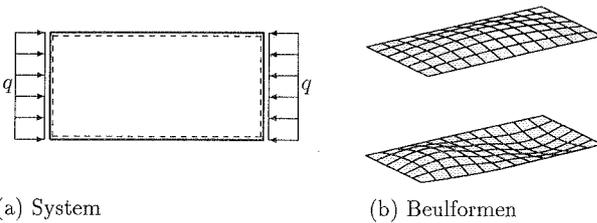
Kippgefährdung ist besonders bei dünnwandigen offenen Profilen vorhanden. Kipp-

gefährdete Träger müssen an den Auflagern gehalten werden. Man nimmt an, daß dort eine Gabelagerung das Verdrehen verhindert.

Die frühere Unterscheidung zwischen Knicken, Biegedrillknicken und Kippen ist nicht gerechtfertigt. Deshalb werden solche Instabilitäterscheinungen heute allgemein Biegedrillknicken genannt.

Dem Knicken des geraden Stabes entspricht bei den Platten- und Schalenträgwerken das *Beulen*, das unter bestimmten Voraussetzungen bezüglich der geometrischen Form, der Krafteintragung und der Lagerungsbedingungen existiert.

Bild 2.10 zeigt beispielsweise einen Stegblechabschnitt, dessen Ränder gelenkig gelagert sind. Unter einer kritischen Lastintensität  $q_{kr}$  wird die ebene Ausgangslage indifferent. Bei weiterer Steigerung der Belastung kann sich eine Beulfigur mit verschiedenen Halbwellenzahlen in beiden Hauptrichtungen ausbilden.



**Bild 2.10:** Beulen

Diese Stabilitätsprobleme gehören zu den Verzweigungsproblemen und treffen i.a. bei idealen Systemen zu, die aber in Praxis wegen der konstruktions- und werksstoffbedingten Imperfektionen selten auftreten. Unter Berücksichtigung der Imperfektionen kann ein Verzweigungsproblem sowohl in ein Durchschlagproblem als auch in ein Spannungsproblem übergehen. Deshalb sind bei Stabilitätsuntersuchungen neben der planmäßigen Last auch unplanmäßige Imperfektionen zu berücksichtigen.

#### 2.4.2 Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens

Dünnwandige Stäbe bestehen aus mehreren Plattenstreifen. Deshalb ist es notwendig, neben der Biegedrillknickuntersuchung des Gesamtstabes auch eine Beuluntersuchung für Einzelteile zu führen.

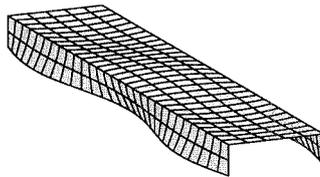
Bild 2.11a zeigt die lokale Verformung des Querschnitts eines doppelt-symmetrischen I-Trägers unter Biegebeanspruchung. Der Steg ist dünn und nicht steif genug, um eine

Drehung des Trägers als Ganzes zu erzwingen. Der Zuggurt weicht geringfügig aus, während der Druckgurt stark ausknickt. Wegen der geringen Biegesteifigkeit des Steges ist das Systemverhalten kaum durch das lokale Ausbeulen des Steges beeinflusst. Die Berechnung nach der Balkentheorie für dünnwandige Stäbe liefert dennoch ein brauchbares Ergebnis. Hier kann die lokale Verformung des Querschnitts als örtliche Wirkung angesehen werden. Aber in vielen Fällen haben die lokale Querschnittsverformungen unvernachlässigbare Einflüsse auf das Systemverhalten. Es entsteht dann eine Interaktion zwischen lokalem Versagen durch Profilausbeulen und globalem Versagen durch Biegedrillknicken. Die Möglichkeiten, die gegenseitige Beeinflussung von lokalen und globalen Instabilitäten zu erfassen, sind schon im Abschnitt 1.2 diskutiert worden.

Im Extremfall knickt der Stab nicht als Ganzes, sondern einzelne Wandungen beulen aus (Bild 2.11b). Dann verliert die Balkentheorie völlig ihre Gültigkeit.



(a) gekoppelte Verformungen



(b) Ausbeulen der Stabwandungen

**Bild 2.11:** Lokale Querschnittsverformungen

## 3 Diskretisierung mit dünnwandigen Balkenelementen

Für die Untersuchung der Stabtragwerke mit dünnwandigen Profilen ohne lokale Verformung können räumliche Balkenelemente eingesetzt werden. Hier wird das von Osterrieder und Werner [60] entwickelte Rechenprogramm *BTPL* für räumliche dünnwandige Balkenelemente verwendet. Die theoretischen Grundlagen des Programmes sind dem Schrifttum [58] zu entnehmen.

### 3.1 Programmbeschreibung

Das Programm *BTPL* ist ein FE-Programm zur Berechnung von geometrisch und physikalisch nichtlinearen Biegetorsionsproblemen. Es ist ein selbstständiges auf dem PC lauffähiges Programm. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das Programm in das FE-Programmpaket *CARAT* implementiert. Zur Anpassung an *CARAT* werden einige Änderungen gemacht. Pre- und Postprozessor werden auch hinzugefügt.

Das dünnwandige Balkenelement basiert auf der Bernoulli Theorie II. Ordnung unter Verwendung der totalen Lagrange Formulierung. Das Element besitzt 2 Knoten. Jeder Knoten hat 7 Freiheitsgrade, nämlich 3 Verschiebungen  $u, v, w$ ; 3 Verdrehungen  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  und eine Verdrillung  $\theta_x'$ . Der Verformungszustand innerhalb eines Elementes wird durch kubische Polynome für die Verschiebungen  $v, w$  quer zur Stabachse sowie für die Verdrehung  $\theta_x$  um die Längsachse beschrieben. Für die Verschiebung  $u$  in Richtung der Stabachse wird ein linearer Ansatz gewählt.

Das Programm *BTPL* hat folgende Möglichkeiten:

- *BTPL* liest Querschnittswerte für Profile der Reihen I, IPE, HEA, HEB, HEM und U sowie L aus Profildaten ein. Für einfachsymmetrische I- oder U-Querschnitte, I-Querschnitte mit Obergurtwinkeln oder mit aufgeschweißter Schiene ermittelt das Programm aus den Profilabmessungen die benötigten Querschnittsgrößen. Zusätzlich können Träger mit beliebigen benutzerdefinierten doppelt- oder einfachsymmetrischen Profilen berechnet werden. Träger mit beliebigen unsymmetrischen Profilen können ebenfalls berechnet werden, jedoch ist eine Spannungsauswertung noch nicht vorgesehen.
- *BTPL* gestattet die Erfassung von Gleichstreckenlasten, von äußeren Längskräften, Verschiebungs- und Drehbettungen.
- An den Knoten können diskrete Federsteifigkeiten vorgesehen werden.
- Lasten und Federsteifigkeiten dürfen exzentrisch angreifen.
- Zur Berücksichtigung von Vorverformungen als Vorverkrümmungen in Richtung der beiden Querschnittshauptachsen oder als Vorverdrehungen um die

Längsachse sind lediglich die Nullpunkte sowie die Amplituden der sinus- oder parabelförmigen Halbwellen zu spezifizieren.

- Beliebige Freiheitsgrade von Doppelknoten können gekoppelt werden.

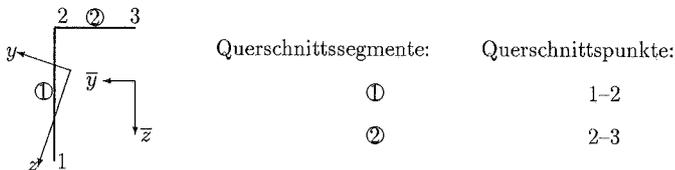
Das Programm *BTPL* hat folgende Einschränkungen:

- Die Elemente haben konstante Querschnitte.
- Physikalisch nichtlineare Berechnungen beschränken sich auf doppeltsymmetrische Querschnitte.
- Die Elemente sind räumlich formuliert, jedoch ist der Anfangszustand, nämlich die lokale  $x$ - $z$ -Ebene, nur in der globalen  $x$ - $z$ -Ebene möglich. Bei einfachsymmetrischen Querschnitten ist die lokale  $z$ -Hauptachse Symmetrieachse. Bei unsymmetrischen Querschnitten wird die lokale  $z$ -Hauptachse vom Programm bestimmt.

### 3.2 Graphische Darstellung der dünnwandigen Stabträger

Im Raum wird das Balkenelement durch die Verbindungslinie der zwei Knoten definiert. Die Rotation um die Längsachse und Querschnittsverwölbung eines dünnwandigen Elementes können nicht durch eine Linie veranschaulicht werden. Zur Verbesserung der Anschaulichkeit soll der dünnwandige Stabträger durch Flächenelemente dargestellt werden. Das wird die Auswertung der Ergebnisse erleichtern.

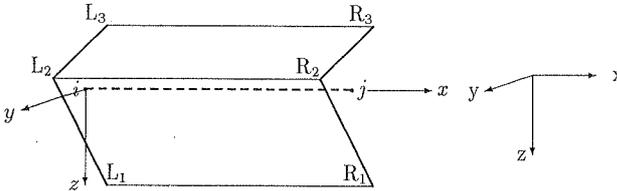
Wir nehmen an, daß der zusammengesetzte dünnwandige Querschnitt aus mehreren geradlinigen Segmenten entsteht, siehe Bild 3.2.1. Die Querschnittspunkte werden durchnummeriert. Jedes Querschnittssegment ist von zwei Querschnittspunkten eindeutig bestimmt. Ein beliebiges Referenzkoordinatensystem mit  $\bar{y}\bar{z}$ -Achse in der Querschnittsebene wird erstellt. Die  $\bar{x}$ -Achse zeigt in die Richtung der Stabachse. Mit den Koordinaten der Querschnittspunkte bezüglich des Referenzsystems  $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$  und der Dicke der Querschnittssegmente können die lokalen  $y$ - und  $z$ -Hauptachsen des Querschnitts bestimmt werden [62]. Die  $x$ -Achse ist parallel zur  $\bar{x}$ -Achse. Wegen der Einschränkung des Programms muß die lokale  $x$ - $z$ -Ebene parallel zur globalen  $x$ - $z$ -Ebene liegen.



**Bild 3.2.1:** Numerierung der Querschnittspunkte und der Querschnittssegmente

Nach der Bestimmung der Koordinaten der Querschnittspunkte bezüglich des lokalen Koordinatensystems  $xyz$  und der Koordinaten der Endpunkte im globalen Koordinatensystem  $xyz$  wird der Träger im Raum festgelegt.

Zwei Endquerschnitte eines Balkenelementes  $ij$  definieren die einzelnen 4-knotigen Flächenelemente; ihre Anzahl stimmt mit der Zahl der Querschnittssegmente überein (Bild 3.2.2).



**Bild 3.2.2:** Flächenelemente aus Querschnittssegmenten

Um die Verformungen des Trägers darzustellen, müssen die Koordinaten der verformten Querschnittspunkte berechnet werden, die durch im Abschnitt 2.3 beschriebene Querschnittskinetik leicht berechnet werden können.

Zur besseren Anschaulichkeit werden die Verformungen mit einem Vergrößerungsfaktor multipliziert. Es sei hier besonders erwähnt, daß der Faktor nicht mit den berechneten Verschiebungen der Querschnittspunkte, sondern mit lokalen Verformungen der Elementendpunkte multipliziert werden soll. Deshalb müssen die Verschiebungen der Querschnittspunkte bei jeder Änderung des Vergrößerungsfaktors neu berechnet werden, die auf die Anfangskoordinaten der Querschnittspunkte aufaddiert werden. Der Grund dafür ist, daß die Verschiebungen nicht an den Querschnittspunkten, sondern an den Elementendpunkten ausgegeben werden.

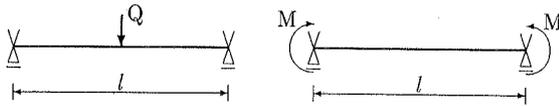
### 3.3 Numerische Beispiele

An drei ausgewählten Beispielen soll die Anwendung des Programms für dünnwandige Stäbe mit offenem Querschnitt demonstriert werden. Die graphische Darstellung von Elementverformungen wird ebenfalls gezeigt.

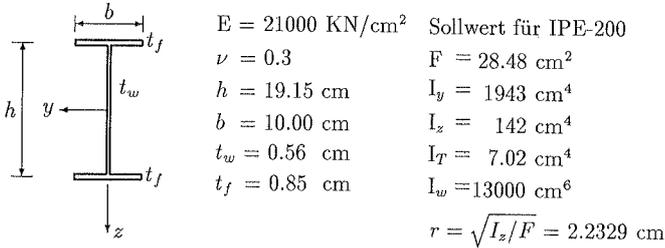
#### 3.3.1 Doppelsymmetrisches I-Profil unter Biegebeanspruchung

Der im Bild 3.3.1 dargestellte Träger mit doppelsymmetrischem I-Profil unter Einzellast in Feldmitte wird von Nylander in [57] analytisch untersucht. Die Belastung greift an der Stegmitte oder am oberem Flansch an. Die Kipplast bei mittigem An-

griff ist größer als die beim Angriff am oberen Flansch.



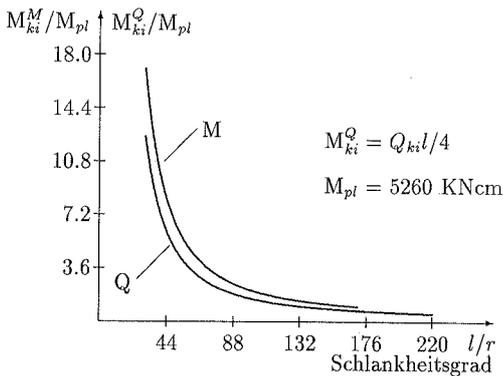
**Bild 3.3.1:** System



**Bild 3.3.2:** Querschnitt und Material

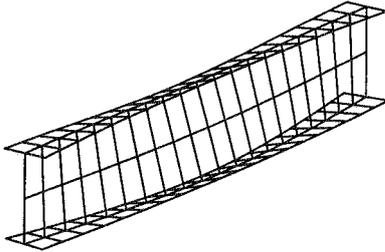
In [50] werden für Träger solchen Typs rechnerisch und experimentell bestimmte Kippplasten bei Belastung mit einer Einzellast in Feldmitte und mit gegengleichen Randmomenten angegeben.

Hier wird der Träger mit 20 Elementen diskretisiert. Die errechneten idealen Kippmomente  $M_{ki}^Q$  und  $M_{ki}^M$  bezogen auf das vollplastische Moment  $M_{pl}$  werden in Abhängigkeit vom Schlankheitsgrad  $l/r$  in Bild 5.3.3 aufgetragen. Die Einzellast greift im Schwerpunkt an. Die Rechenergebnisse stimmen sehr genau mit dem Formelwert in [57] und [85] und dem Ergebnis in [50] überein.



**Bild 3.3.3:** Kippmoment-Schlankheitsgrad-Kurve

Bild 3.3.4 zeigt die Versagensform für den Fall als freies Kippen des Trägers.

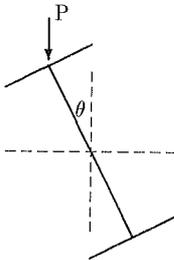


**Bild 3.3.4:** Kippen des Trägers

### 3.3.2 Einfluß der Höhe des Lastangriffs auf die kritische Last

In der Praxis greift die Last meistens am oberen oder unteren Flansch des Trägers an. Diese Einleitungsart beeinflusst die Größe der kritischen Last sehr stark.

Im Bild 3.3.5 ist ein verdrehter doppelsymmetrischer I-Träger mit der Last am Obergurt dargestellt, um den Einfluß der Einleitungsstelle zu verdeutlichen.



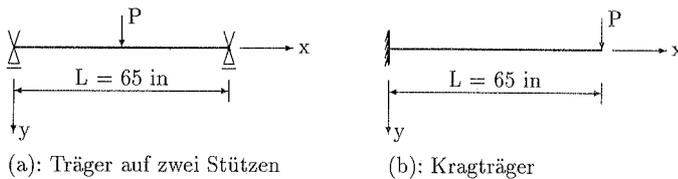
**Bild 3.3.5:** Verdrehter Träger mit Last am Obergurt

Man sieht sofort, daß dieser Lastangriff das Torsionsmoment vergrößert. Das kritische Moment wird kleiner. Greift die Last am Untergurt an, so ist das umgekehrt.

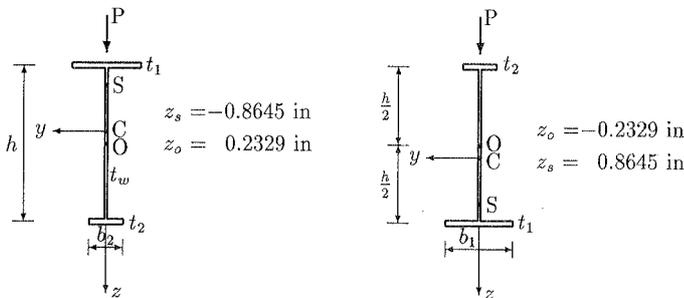
Für ein einfachsymmetrisches I-Profil ist die kritische Last noch von seiner Anordnung abhängig, je nach dem, ob der schmalere Flansch oben oder unten ist. Auf die Ableitung wird hier verzichtet und auf die Literatur, z.B. [5] und [57], verwiesen. Der Grund läßt sich mit dem sogenannten Wagner-Effekt [5] leicht erklären. Unter Torsion werden Normalspannungen (Druck- und Zugspannungen) im Querschnitt des Trägers erzeugt. Sie bewirken eine Störung der Torsionsbeanspruchungen, die auch als Änderung der Torsionssteifigkeit gedeutet werden kann. Für ein doppelsymme-

trisches I-Profil gleichen sich die Störungen aus. Es gibt keine Änderung der Torsionssteifigkeit. Aber für ein einfachsymmetrisches I-Profil gibt es keinen vollständigen Ausgleich der Torsionsstörungen wegen der nicht zusammenfallenden Schwer- und Schubmittelpunkte. Dies führt zu einer Vergrößerung oder Abminderung der Torsionssteifigkeit. Wegen des größeren Abstands des schmalen Gurtes vom Schubmittelpunkt haben die Normalspannungen in diesem Gurt einen größeren Hebelarm und sind der dominante Faktor für den Wagner-Effekt.

Am folgenden Beispiel wird diese Aussage rechnerisch bestätigt. Bild 3.3.6 zeigt einen gabelgelagerten Träger unter Einzellast in der Feldmitte und einen Kragträger unter Einzellast am freien Ende. Das Beispiel wird von Anderson und Trahair [5] analytisch und von Chan und Kitipornchai [24] numerisch untersucht. In [5] wird die Verzweigungslast durch numerische Integration der Differentialgleichungen der Biegung und Torsion erhalten. Diese Methode wird dort als "finite integral method" bezeichnet.



**Bild 3.3.6:** System



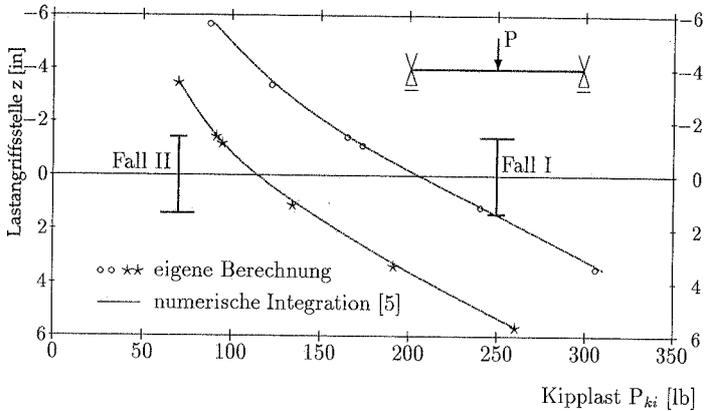
*Fall I: Schmaler Gurt unten*

*Fall II: Schmaler Gurt oben*

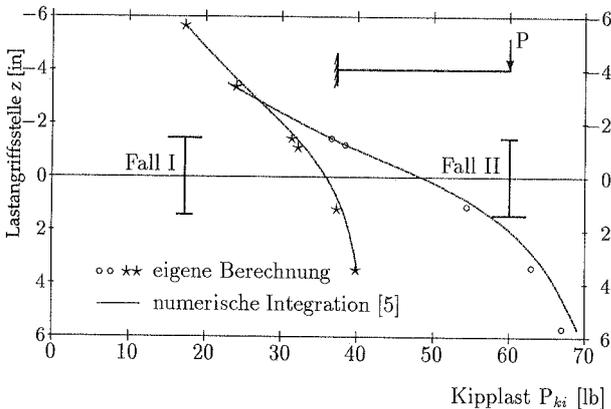
$$\begin{array}{llll}
 E = 9500 \text{ kip/in}^2 & G = 3686 \text{ kip/in}^2 & \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_w/GI_T} = 0.247 & \\
 h = 2.852 \text{ in} & t_w = 0.0862 \text{ in} & \frac{1}{L} \sqrt{EI_y/GI_T} = 0.0875867 & \\
 b_1 = 1.241 \text{ in} & t_1 = 0.1232 \text{ in} & \frac{1}{L^2} \sqrt{EI_yGI_T} = 8.80 \text{ lb} & \\
 b_2 = 0.625 \text{ in} & t_2 = 0.1231 \text{ in} & & 
 \end{array}$$

**Bild 3.3.7:** Querschnittsbeiwert und Anordnung des Trägers und der Last

Der Querschnittsbeiwert und die Anordnung des Trägers und der Last werden im Bild 3.3.7 dargestellt. Dabei sind O, C und S jeweils Stegmitte, Schwerpunkt und Schubmittelpunkt. Die berechneten Kipplasten in Abhängigkeit vom Belastungsort werden für Träger auf zwei Stützen im Bild 3.3.8 und für Kragträger im Bild 3.3.9 aufgetragen. Die Versagensformen werden im Bild 3.3.10 dargestellt. Die Rechenergebnisse stimmen mit den analytischen Werten sehr gut überein.



**Bild 3.3.8:** Kipplast in Abhängigkeit von der Lastangriffsstelle (System a)

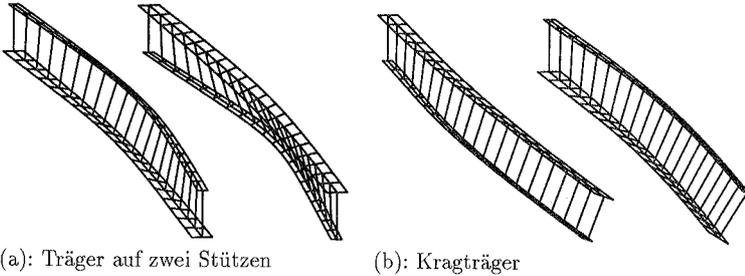


**Bild 3.3.9:** Kipplast in Abhängigkeit von der Lastangriffsstelle (System b)

Läßt man die Anordnung des Trägers beiseite, ist die Kipplast am Untergurt größer als die am Obergurt. Unter Berücksichtigung der Anordnung ist zu sehen, daß die

Kippplast unter gleicher Lasthöhe für den Träger auf zwei Stützen beim Fall des breiten Gurtes oben größer als beim Fall des breiten Gurtes unten ist. Der Grund ist, daß die Last den unteren Gurt auf Zug belastet. Bei der Anordnung des schmalen Gurtes unten führen die Zugspannungen wegen größeren Hebelarms zu einer Vergrößerung der Torsionssteifigkeit. Hier ist die Anordnung mit dem breiten Gurt oben günstiger (Bild 3.3.8).

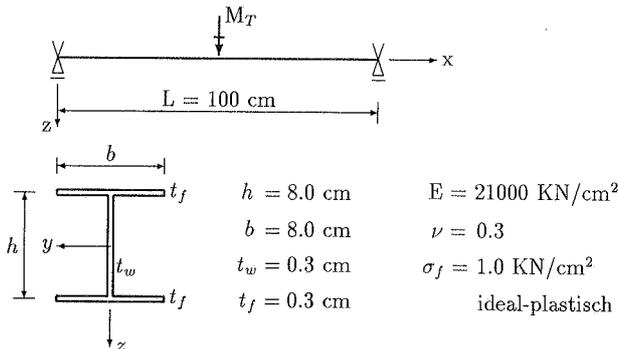
Für den Kragträger verursacht die Last im oberen Gurt Zug. Deshalb ist das Systemtragverhalten genau umgekehrt. Die günstige Anordnung ist der schmale Gurt oben (Bild 3.3.9).



**Bild 3.3.10:** Versagensformen des Trägers

### 3.3.3 Einfeldträger mit ideal plastischem Material unter Torsion

Der im Bild 3.3.11 gezeigte Einfeldträger aus ideal-elastischem, ideal-plastischem Werkstoff wird unter Einzeltorsionsmoment in der Feldmitte belastet. Der unrealistische niedrige Wert für die Fließspannung wurde von Osterrieder [58] so gewählt und für dieses akademische Beispiel übernommen.



**Bild 3.3.11:** System, Querschnitt und Material

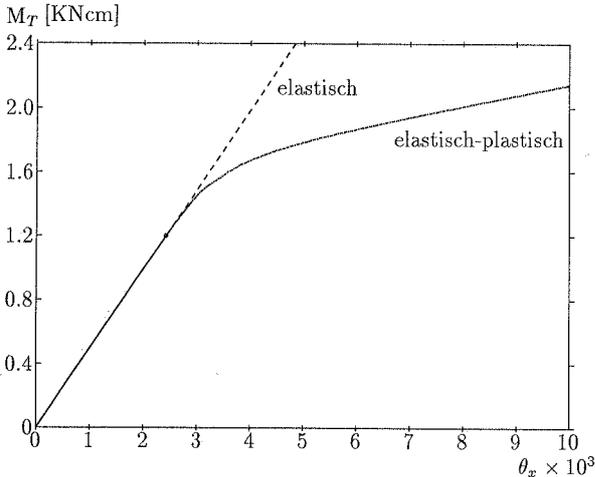
Im elastischem Bereich lauten die Wölb- und Torsionsmomente:

$$M_\omega = \frac{M_T}{\lambda} \frac{\sinh \lambda x}{2 \cosh \lambda \frac{l}{2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{GJ_T}{EF_{\omega\omega}}}, \quad 0 \leq x \leq \frac{l}{2}$$

$$M_{TS} = M_T \frac{\cosh \lambda x}{2 \cosh \lambda \frac{l}{2}}, \quad M_{Tp} = \frac{M_T}{2} - M_{TS}, \quad M_{TS}|_{x=0} = 0.79 \frac{M_T}{2}$$

Es ist ersichtlich, daß das Wölbmoment  $M_\omega$  zu den Gabelagern hin abklingt. Die Torsionsabtragung im ganzen Träger geschieht hauptsächlich über Wölbkrafttorsion  $M_{TS}$ .

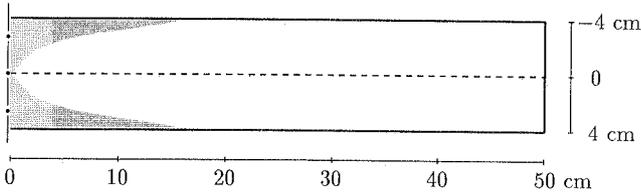
Die berechnete Verdrehung im Feldmitte in Abhängigkeit vom Torsionsmoment wird in Bild 3.3.12 dargestellt. Im Vergleich zum elastischen Stoffgesetz ist die Tragfähigkeit bei Berücksichtigung vom Materialversagen stark reduziert. Beim Torsionsmoment  $M_T=1.2$  KNcm beginnt die Plastizierung an den äußeren Rändern des Querschnittes in der Feldmitte. In Bild 3.3.13 wird der Verlauf der Fließgebiete am Gurt in Längsrichtung beim Erreichen der Vollplastizierung in der Stabmitte eingetragen. In diesem Grenzzustand erstreckt sich der teilplastizierter Bereich ungefähr über 1/3 der Balkenlänge. Die Ungenauigkeit der Fließgelenk-Theorie ist hier ersichtlich, bei der das Plastizieren auf einen Punkt konzentriert wird; die Nachbarbereiche bleiben elastisch.



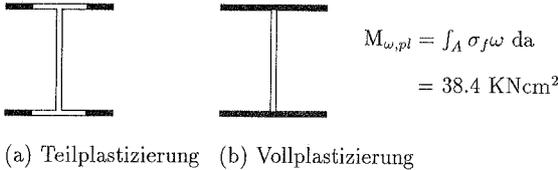
**Bild 3.3.12:** Torsionsmoment-Verdrehungskurve

Die Plastizierung im Querschnitt (Bild 3.3.14) ist symmetrisch. Sie geschieht nur am Gurt. Bei der Vollplastizierung des Querschnittes beträgt das vollplastisches

Wölbmoment infolge der Wölbnormalspannungen  $M_{\omega,pl}=38.4 \text{ KNcm}^2$ . Das wird bei  $M_T=1.81 \text{ KNcm}$  erst in der Stabmitte geschehen. Vom Bild 3.3.12 ist zu sehen, daß nach Erreichen des vollplastischen Wölbmomentes in Feldmitte eine Wölbmomentenumlagerung geschieht und der Träger weiter belastet werden kann.



**Bild 3.3.13:** Ausbreitung der Plastizierung am Gurt in Längsrichtung beim Erreichen der Vollplastizierung in der Stabmitte



(a) Teilplastizierung (b) Vollplastizierung

**Bild 3.3.14:** Verlauf der Fließgebiete im Querschnitt

### 3.4 Bemerkungen und Schlußfolgerungen

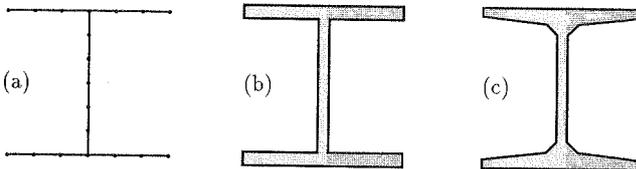
Die im Abschnitt 3.3 angegebenen Beispiele haben die Leistungsfähigkeit des hier verwendeten Balkenelementes zur Berechnung von Stabtragwerken mit dünnwandigen offenen Querschnitten gezeigt. Jedoch gilt das Element nur für gerade schubstarre Stäbe. Dabei muß auch sichergestellt werden, daß alle Abweichungen von der Stabtheorie nur als lokale Effekte auftreten und im Sinne des Prinzips von St. Venant als unwesentlich für das Gesamtverhalten des Tragwerks vernachlässigt werden können.

Für materiell nichtlineare Berechnungen ist das Element sehr beschränkt einsetzbar. Dies liegt in der vereinfachten eindimensionalen Plastizität des Stabmodells. Eine direkte Anwendung der Plastizitätstheorie der allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustände auf die schubstarre Stabtheorie ist problematisch, weil die Biegeschub- und Wölbschubspannung einen nicht zu vernachlässigenden Einfluß auf das plastische Materialverhalten haben.

Im übrigen tritt die lokale Querschnittsverformung oft mit einer Plastizierung zusammen auf. So verliert die Annahme des schubstarrten Querschnitts ihre Gültigkeit. Bei vielen praktischen Fällen ist das Stabmodell für Knotenbereiche und Lasteinleitungsstellen sehr problematisch. Für eine genaue Untersuchung müssen Falterwerke bzw. Schalenelemente verwendet werden. Diese Modellierung wird im nächsten Kapitel eingehend diskutiert.

Hier soll eine Bemerkung zur materiell nichtlinearen Berechnungen erläutert werden. Bei dünnwandigen Querschnitten sind die Querschnittselemente so dünn, daß die Längsnormalspannungen und die Längsverzerrungen über die Dicke als konstant betrachtet werden können. Deshalb werden die Integrationspunkte nur auf der Profilmittellinie angeordnet (Bild 3.4.1a). Die Querschnittswerte werden auch unter der Voraussetzung der konstanten Dicke der Querschnittskomponenten berechnet (Bild 3.4.1b).

Aber bei vielen Berechnungen benutzt man die wirklichen Querschnittswerte mit Berücksichtigung der Profilausrundung (Bild 3.4.1c), die in der Norm z.B. DIN-1025 berücksichtigt werden. Bei materiell nichtlinearen Berechnungen werden die Spannungen an jedem beliebigen Punkt des Querschnitts durch die mit Verformungen berechneten Querschnittskräften integral ermittelt. Dabei sind die rechnerischen Querschnittswerte implizit enthalten.



**Bild 3.4.1:** (a) Integrationspunkte in der Querschnittsebene  
 (b) Querschnitt ohne Ausrundung  
 (c) Querschnitt mit Ausrundung

Von Bild 3.4.1b,c ist ersichtlich, daß die rechnerischen Querschnittswerte mit der konstanten Dicke an jeder Querschnittskomponente nicht gleich mit den tabellari-schen Querschnittswerten sind. Da für Vergleiche im elastischen Bereich die Tabellenwerte eingesetzt werden, bei elastisch-plastischen Stoffgesetzen aber das Modell ohne Ausrundung eingesetzt wird, kann es bei Kopplung dieser beiden Modelle zu numerischen Schwierigkeiten kommen. Das Problem wird hier durch Übernahme der rechnerischen Querschnittswerte einfach vermieden.



## 4 Diskretisierung mit Schalenelementen

In diesem Kapitel wird das Schalenmodell zur Berechnung der dünnwandigen Träger an Hand von mehreren Beispielen untersucht. Diese Modellierung ist für dünnwandige Stabtragwerke unbeschränkt einsetzbar. Es wird gezeigt, daß für mittellange Stabträger eine Interaktion zwischen dem lokalen Versagen als Plattenbeulen und dem globalen Versagen als Biegedrillknicken entsteht.

### 4.1 Programmbeschreibung

#### 4.1.1 Einführung in das Programmsystem *CARAT*

Die Berechnungen in dieser Arbeit werden mit dem FE-Programmpaket *CARAT* ausgeführt. *CARAT* ist die Abkürzung von *Computer-Aided-Research-Analysis-Tool*. Es ist ein Forschungsprogramm, in der Programmiersprache FORTRAN 77 geschrieben, und wird am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart entwickelt. Es dient zur statischen und dynamischen Berechnung sowie Eigenwertanalyse von Strukturen mit der Finite-Elemente-Methode.

*CARAT* besitzt eine Modulstruktur, so daß ein neues Element sehr leicht eingebaut werden kann. Das formatfreie Einlesen und der Design-Preprozessor zur Netzgenerierung erleichtern die Eingabe der Daten. Das Service-System dient zur Verwaltung von Datenfeldern und Kontrollvariablen. Die interne Debug-Kontrolle vereinfacht den Ablauf des Programms und die Fehlerverfolgung.

Die Speicherverwaltung basiert auf der dynamischen Zuweisung von Blank-Common Bereichen für einzelne Felder. Diese Methode stellt eine relativ effiziente Datenübergabe zwischen den Unterprogrammen dar. Zur Speicherung der Systemsteifigkeitsmatrix wird das Skyline- oder Column-Height-Format verwendet und der obere Teil einschließlich der Diagonalen der Systemmatrix spaltenweise in einem eindimensionalen Feld abgespeichert, wobei jede Spalte nur soweit nach oben verfolgt wird, bis das letzte Nicht-Null-Element erreicht ist.

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt iterativ. Dabei stehen mehrere Iterationsverfahren zur Verfügung, die jeweils für bestimmte Probleme geeignet sind. Die wichtigsten Iterationsverfahren sind:

- Newton/Raphson Iteration in modifizierter und reiner Form.
- Quasi-Newton Verfahren, die mit einer Sekantensteifigkeit arbeiten.
- Bogenlängenverfahren können sowohl in Kombination mit Newton oder Quasi-Newton Verfahren eingesetzt werden. Die Vielzahl der Bogenlängenverfahren

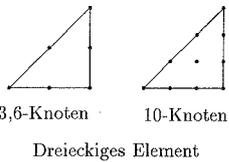
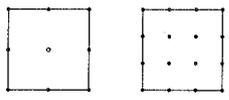
entsteht aus der unterschiedlichen Ermittlung des variierten Lastfaktors über bestimmte Nebenbedingungen.

- Verschiebungskontrolle entspricht dem Bogenlängenverfahren, verwendet aber statt mehrerer Verschiebungen nur den Wert einer charakteristischen Unbekannten.

Für Strukturoptimierung wird *CARAT* ebenfalls verwendet. Durch die Auswahl des Zielkriteriums, der Nebenbedingungen und der eingeführten Variabilität wird eine optimale Konstruktion erreicht, wie z.B. optimale Steifigkeit, minimales Gewicht und optimale Festigkeit.

#### 4.1.2 Elementbeschreibung

In *CARAT* sind verschiedene Elementtypen vorhanden. In dieser Arbeit werden nur Schalenelemente verwendet. Die Schalenelemente basieren auf dem degenerierten Konzept von 3-dimensionalen Körperelementen. Verschiedene Versionen vorab und explizit in Dickenrichtung integrierter, degenerierter Elemente wurden in *CARAT* implementiert (Tabelle 4.1.1).

Elementform	Bezeichnung	Freiheitsgrade	Verbesserung
 <p>3,6-Knoten      10-Knoten</p> <p>Dreieckiges Element</p>	Shell-1 (5P-Theorie)	3-Verschiebungen 2-Rotationen (lokal definiert)	
 <p>4,8,9-Knoten      12,16-Knoten</p> <p>Viereckiges Element</p>	Shell-6 (5P-Theorie)	3-Verschiebungen 2-Rotationen 1-Rotation an Knicken	ANS-Konzept für 4-knotiges El. ANS-Konzept für 9-knotiges El.
	Shell-8 (6/7P-Theorie)	3-Verschiebungen 3-Differenz- verschiebungen	EAS-Konzept für 8-knotiges El. (7P-Theorie)

**Tabelle 4.1.1:** Schalenelemente in *CARAT*

Alle Schalenelemente sind  $C^0$ -kontinuierliche Verschiebungsmodelle. Zugrunde liegt die isoparametrische Elementdarstellung, d.h. Ausgangsgeometrie und verformte Geometrie werden in der gleichen Weise interpoliert. Solche einfach zu formulierenden degenerierten Elemente enthalten jedoch Versteifungseffekte, so daß die Mitnahme der Schubverzerrungen beim Übergang zu wirklich dünnen Tragwerken verfälschte

Ergebnisse liefert. In Extremfällen kann diese Eigenschaft zu einem totalen Versteifen, dem sogenannten “shear-locking” führen. “Shear-locking” tritt besonders bei niedriggradigen Elementen, z.B. 4-knotigen Schalelementen, auf.

Um die unerwünschten Versteifungseffekte zu vermeiden, ohne “zero energy modes” als Nebeneffekt bei der Anwendung der reduzierten Integration zu erhalten, wird eine hybrid-gemischte Formulierung genutzt. Bei einer Vielzahl der hybrid-gemischten Elementkonzepte wird in *CARAT* die Methode der sogenannten “Assumed Natural Strain”(ANS)-Formulierung für 4-knotige Elemente nach Dvorkin und Bathe [33] bzw. für 9-knotige Elemente nach Pinsky und Jang [63] aufgenommen.

Bei Schalelementen mit 5-Parametern (Shell-1 und Shell-6) wird angenommen, daß der Schalendirektor seine Länge während des Deformationsprozesses beibehält. Die Spannungen in Dickenrichtung werden zu Null gesetzt. Beim Fall, daß Spannungen und Dehnungen in Dickenrichtung von Bedeutung sind, z.B. Flächentragwerke mit konzentrierter Last oder bei Delamination von Schalen mit geschichtetem Aufbau, muß die Schalentheorie erweitert werden. Ein bedeutender Beitrag dazu ist die Arbeiten von Büchter et al. [20],[21]. Im Vergleich zur konventionellen Schalenformulierung mit 5-Parametern wird dort ein Differenzvektor eingeführt, der die Dickenänderung repräsentiert. Mit der Annahme eines linearen über die Schalendicke veränderlichen Verschiebungsfeldes folgt daraus eine konstante Dickenverzerrung  $\epsilon_{33}$ . Diese 6-Parameter-Theorie liegt dem Element Shell-8 zugrunde, allerdings mit folgender Ergänzung.

Bei der 6-Parameter-Theorie ist es notwendig, daß auch die Normalspannung in Dickenrichtung  $\sigma_{33}$  konstant über die Dicke (oder Null) ist. Die Nichterfüllung dieser Bedingung kann einen relativen Fehler in der Größenordnung von  $\nu^2$  ( $\nu$ -Querdehnzahl) oder noch größer verursachen. Dieser Fehler tritt besonders dann auf, wenn z.B. die Schalen hauptsächlich durch Biegung beansprucht werden. Eine Erweiterung der 6-Parameter-Schalentheorie auf eine 7-Parameter-Formulierung wird deshalb von Büchter et al. [20],[21] vorgeschlagen. Sie basiert auf dem hybrid-gemischten “Enhanced Assumed Strain”(EAS)-Konzept. Die Grundidee ist, daß die kompatiblen Verzerrungen aus der Verschiebungsableitung in Dickenrichtung um einen zusätzlichen, inkompatiblen Anteil  $\beta_{33}$  erweitert werden, der linear über die Dicke verläuft. Mit dieser Theorie ist das 8-knotige Schalelement Shell-8 in *CARAT* implementiert worden.

Es sei noch zu erwähnen, daß die 3 Freiheitsgrade, die das Verschiebungsfeld außerhalb der Mittelfläche definieren, beim Element Shell-8 in vektorieller Form beschrieben werden. Es ist mit beliebig stehendem, aber nicht tangential zur Schalenmittelfläche liegendem Direktor möglich. Die Methode mit gemeinsamen Normalen dient zur Berechnungen von Schalen mit Knicken. In nächstem Abschnitt wird das Knickproblem eingehend diskutiert.

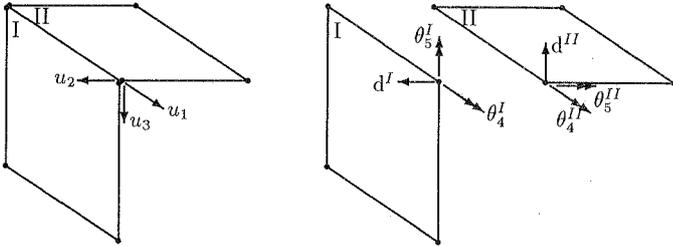
In dieser Arbeit wird hauptsächlich das schubweiche 8-knotige Element Shell-6 benutzt. Elementtyp Shell-1 dient zur materiell nichtlinearen Berechnung. Wegen der Problematik der gemeinsamen Normale bei Strukturen mit Kreuz-Querschnitten ist der Elementtyp Shell-8 für dünnwandige Stabtragwerke nur beschränkt einsetzbar.

## 4.2 Problematik bei den Knicken

Die in dieser Arbeit betrachteten dünnwandigen Stabtragwerke haben eine aus mehreren ebenen Platten zusammengesetzte Struktur. Dabei treten mehrere orthogonale Kanten und Kreuzungen auf. Die Problematik bei den Knicken unterscheidet sich je nach eingesetztem Elementtyp.

### 4.2.1 5P-Modell mit unterschiedlichen Direktoren an Knickstelle

Element Shell-1 besitzt wie die Faltwerkselemente 5 Freiheitsgrade an jedem Knoten (Bild 4.2.1). Die 3-Verschiebungen können problemlos auf ein globales Koordinatensystem transformiert werden und damit den einfachen Zusammenbau ermöglichen. Die Verdrehung um die Normale tritt nicht als unabhängige Variable auf, damit finden die Freiheitsgrade  $\theta_5^I$  und  $\theta_5^{II}$  keinen Partner, d.h. sie beziehen ihre Steifigkeit nur aus einer Plattenseite. Dadurch entsteht eine Inkompatibilität beim Zusammenbau. Dieser Defekt ist in der Faltwerkstheorie, nicht in der Elementformulierung begründet.

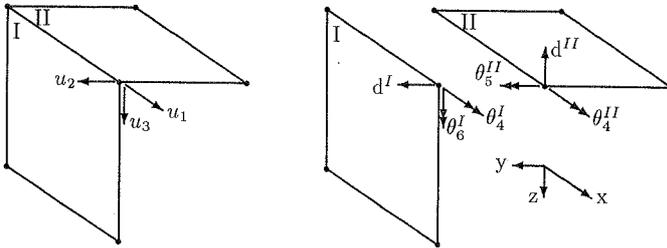


**Bild 4.2.1:** 5-Parameter-Modell mit lokal definierten Rotationen an der Kante [66]

Wegen der lokale Definition der Rotationsfreiheitsgrade müssen zwei Knoten an der Kante eingeführt werden, wobei an jedem Knoten nur ein Direktor vorhanden ist. Die Freiheitsgrade  $\theta_4^I = \theta_4^{II}$  können miteinander gekoppelt werden. Die in unterschiedliche Richtungen weisenden Freiheitsgrade  $\theta_5^I$  und  $\theta_5^{II}$  sind isoliert.

Die Notwendigkeit, Doppelknoten einzuführen und einzelne Freiheitsgrade zu koppeln, kann elegant umgegangen werden, wenn an dem Elementknoten von vornherein 3 Rotationsfreiheitsgrade definiert werden (Bild 4.2.2). Die zwei zunächst lokal

definierten Rotationen bzw. Momente werden in die drei global orientierten Komponenten zerlegt. Der Zusammenbau erfolgt wie üblich. Dadurch erspart man die Einführung der Doppelknoten. Dabei zeigt Element Shell-6 seinen Vorteil. Es besitzt 6 auf ein globales Koordinatensystem bezogene Freiheitsgrade am Elementknoten, so daß unterschiedliche Strukturelemente einfach aneinander angeschlossen werden können.



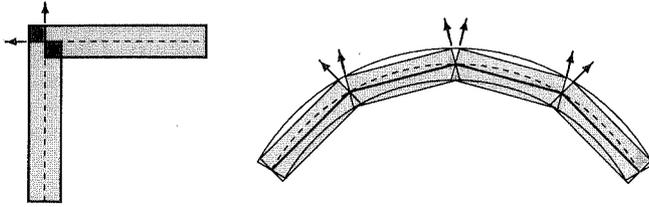
**Bild 4.2.2:** 5-Parameter-Modell mit global definierten Rotationen an der Kante

Hier muß man beachten, daß die Inkompatibilität an der Knickstelle nicht durch die globale Definition der Rotationsfreiheitsgrade beseitigt wird, da die zu den Rotationsfreiheitsgraden  $\theta_5$  und  $\theta_6$  gehörende Steifigkeit ihre Beiträge ebenfalls nur aus einer Plattenseite erhält (Bild 4.2.2). Die Freiheitsgrade um die Normale außerhalb der Kantenknoten müssen festgehalten werden. Zur Ausschaltung der Drehung um die Schallennormale in beliebiger Orientierung ist dazu an jedem Knoten ein lokales Koordinatensystem nötig.

#### 4.2.2 5P-Modell mit Drillfreiheitsgraden

Die 5-Parameter-Modelle, die zusätzlich noch mit sogenannten Drillfreiheitsgraden arbeiten, z.B. [4], [51], [52] und [55], haben an der Verschneidungsstelle keine Probleme, da die 3 lokalen Verdrehungskomponenten im abgekanteten Teil mit eigenen Steifigkeiten vorliegen, die direkt miteinander gekoppelt werden können.

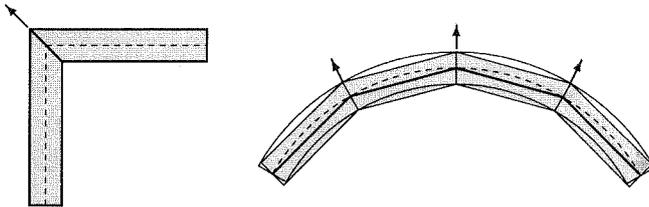
Die oben vorgestellten Elementkonzepte haben eine Gemeinsamkeit, daß jedes an der Kante angeschlossene Element eine eigene Elementnormale hat. Konsequenterweise entsteht eine Inkompatibilität der Verschiebungen in Kantenlängsrichtung außerhalb der Mittelfläche. Dies ist eine Folge der mechanischen Annahmen (Bild 4.2.3) und nicht eines inkompatiblen FE-Modells. Je dünner das Tragwerk, desto geringer ist die lokale Schwächung. Im Gegensatz zur gekrümmten Struktur kann dieser "Fehler" bei dünnwandiger Struktur mit orthogonalen Knicken nicht mit zunehmender Netzverdichtung kleiner gemacht werden.



**Bild 4.2.3:** Systembedingte Knicke und Diskretisierungsknicke

#### 4.2.3 7P-Modell mit einem gemeinsamen Direktor je Punkt

Diese Alternative geht davon aus, daß das Schalenelement mit veränderlicher Dicke und beliebig stehendem Direktor arbeitet [19]. An Verschneidungskanten werden die Einzelnormalen zu einer gemeinsamen Normalen gemittelt (Bild 4.2.4). Dadurch entsteht an jedem Knoten nur ein Direktor. Wegen der schrägen Anordnung ist die Länge der gemittelten Normalen größer als die ursprünglich in Dickenrichtung gemessene Länge.



**Bild 4.2.4:** Zwei Verdrehungen mit einer gemeinsamen Normalen

Die Ermittlung des gemeinsamen Direktors am Knoten entspricht exakt der Kontinuumsinterpolation. Das Verfahren erfaßt die Steifigkeiten der angrenzenden Elemente korrekt und hat sich auch bei größeren Verschneidungswinkeln als brauchbar erwiesen. Das Konzept wird in *CARAT* beim 8-knotigen Element Shell-8 verwendet.

Da die Methode mit gemeinsamen Normalen noch nicht für mehr als zwei Schalenteile ausgereift ist, können die in dieser Arbeit interessierenden Stabtragwerke mit I-Profil nicht mit dem Element Shell-8 berechnet werden.

## 4.3 Automatische Netzgenerierung

Wegen der immer komplexeren Tragwerksstrukturen und zeitaufwendiger manueller Eingabe der FE-Netze erfordert die FE-Methode ein Werkzeug zur automatischen Netzgenerierung. In *CARAT* steht ein Preprozessor zur Verfügung, der FE-Daten mit wenig Eingabeaufwand generiert und es somit erlaubt, kompliziertere Strukturgeometrien zu erfassen und zu variieren.

Der Preprozessor dient als Grundlage für erweiterte Anwendungsmöglichkeit, wie z.B. die Strukturoptimierung oder das adaptive Vernetzen, und bietet zusätzlich viele Vereinfachungen, die in alltäglichen Analysen eingesetzt werden können.

In diesem Abschnitt wird das Design-Konzept des Preprozessors für offene dünnwandige Stabtragwerke diskutiert und ein eigener Netzgenerator *DBGEN* zur Vernetzung von dünnwandigen Stabtragwerken vorgestellt.

### 4.3.1 Netzgenerierung mit dem Preprozessor "Design"

#### 4.3.1.1 Das Konzept der Design-Elemente

Zur Beschreibung von allgemeinen Geometrien haben sich Verfahren durchgesetzt, die ähnlich wie die FE-Methoden die Form abschnittsweise approximieren. In Abgrenzung zum FE-Verfahren werden die Formabschnitte "Design-Elemente" genannt. Analog den FE-Verfahren ist ein Design-Element durch "Design-Knoten" und "Formfunktionen", auch Interpolations- oder Ansatzfunktionen genannt, definiert. Mit entsprechenden Design-Elementen und passenden Formfunktionen können linienförmige, flächige und räumliche Geometrien erfaßt werden.

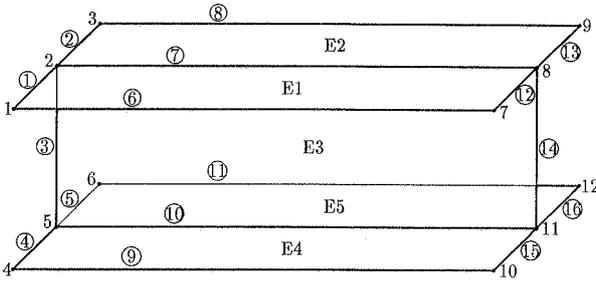
Die zu vernetzende Struktur wird durch einfach zusammenhängende Design-Elemente, wie z.B. Dreiecke oder Vierecke, approximiert. Für ebene Flächentragwerke werden in "Design" beispielsweise die linearen, quadratischen oder kubischen Serendipity-Formfunktionen zur Interpolation der Netzknotenpunkte verwendet. Das FE-Netz wird auf den Parameterebenen der Design-Elemente durch vorgegebene Unterteilungen mit entsprechenden Ansatzfunktionen entlang der Gebietsränder generiert.

#### 4.3.1.2 Netzgenerierung eines I-Profiles mit "Design"

In Bild 4.3.1 sind die Design-Kontrolldaten der Generierung von einem dünnwandigen Stabträger mit I-Profil dargestellt. Dabei werden 12 Design-Knoten und 16 Design-Kantenelemente angeordnet. Daraus erhält man 5 Design-Flächenelemente E1 bis E5.

Wegen der rechteckigen Form der einzelnen Plattenkomponenten werden Viereckelemente aufgenommen. Hier werden z.B. 8-knotige Schalenelemente gewählt. Die Eingabedaten und Anzahl der generierten Knoten und Elementnummern werden in Tabelle 4.3.1 zusammengefaßt, wobei NUMNP und NUMNE jeweils die Anzahl der

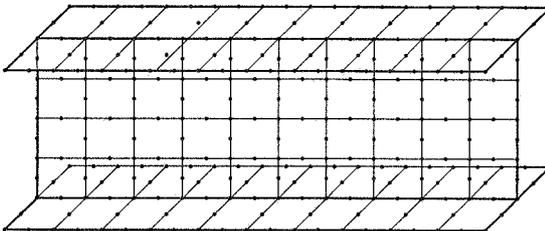
generierten Knoten- und Elemente sind. Wegen der Einführung der Doppelknoten beim Elementtyp Shell-1 an der Knickstelle ist die Anzahl der generierten Knotennummern größer als die beim Elementtyp Shell-6. Das generierte FE-Netz wird in Bild 4.3.2 dargestellt.



**Bild 4.3.1:** Design-Kontrolldaten

Design-Kantenelemente					Design-Flächenelemente		
No.	Topologie	Teilung	Topologie	No.	Topologie		
①	1 – 2	1	7 – 8	⑫	E1	⑥ ⑫ ⑦ ①	
②	2 – 3	1	8 – 9	⑬	E2	⑦ ⑬ ⑧ ②	
③	2 – 5	4	8 – 11	⑭	E3	⑦ ⑭ ⑩ ③	
④	4 – 5	1	10 – 11	⑮	E4	⑨ ⑮ ⑩ ④	
⑤	5 – 6	1	11 – 12	⑯	E5	⑩ ⑯ ⑪ ⑤	
⑥	1 – 7	10	4 – 10	⑨	El.-Typ	Shell-1	Shell-6
⑦	2 – 8	10	5 – 11	⑩	NUMNP	361	277
⑧	3 – 9	10	6 – 12	⑪	NUMNE	80	80

**Tabelle 4.3.1:** Design-Eingabedaten und generierte Knoten- und Elementnummern



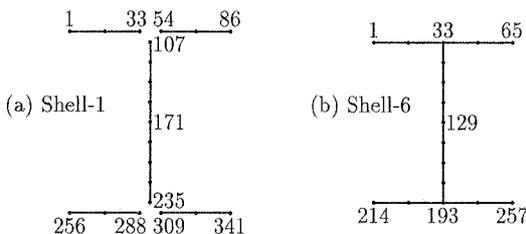
**Bild 4.3.2:** Generiertes FE-Netz

Die elementweise Knotenpunktnumerierung der Design-Elemente hat eine größere halbe Bandbreite des Gleichungssystems zur Folge, und es wird zu viel Speicherplatz gebraucht. Mit dem Bandbreitenoptimierer wird der benötigte Speicherplatz stark reduziert (Tabelle 4.3.2) und es werden damit auch unnötige und zeitaufwendige Null-Operationen im Laufe des Lösungsvorgangs vermieden.

		Shell-1	Shell-6
Gleichungsnummer bei Festhaltung einer Seite		1340	1340
Anzahl der zu speichernden	ohne Bandbreitenoptimierung	222800	223940
Elemente der Systemmatrix	mit Bandbreitenoptimierung	202920	139398

**Tabelle 4.3.2:** Generierte Gleichungsnummer und benötigter Speicherplatz

Die Bandbreitenoptimierung ändert die ursprünglichen Gleichungsnummern, die nach der Reihenfolge der Knotenpunktnumerierung numeriert werden, und entspricht damit grundsätzlich einer erneuten Knotenpunktnumerierung. Aus der Tabelle 4.3.2 ist zu sehen, daß die Kopplung der Gleichungen wegen der Einführung der Doppelknoten die Umordnung der Gleichungsnummern stark beeinflusst hat. Die Zahl der zu speichernden Matrixelemente beim Shell-1 Element mit Doppelknoten ist sogar nach der Bandbreitenoptimierung noch viel größer als die beim Shell-6 Element ohne Doppelknoten. Deshalb ist der Design-Preprozessor kein ideales Werkzeug zur Netzgenerierung von dünnwandigen Stabtragwerken.



**Bild 4.3.3:** Knotenpunktnumerierung des Querschnitts an der linken Seite

Eine andere Schwierigkeit ist die zeitintensive Suche nach der Zugehörigkeit der Knoten an der Knickstelle bei der Einführung der Doppelknoten (Bild 4.3.3). Die Doppelpunkte haben gleiche Koordinaten und liegen im graphischen Bild aufeinander. Eine visuelle Unterscheidung ihrer Zugehörigkeit ist sehr schwer. Eine fehlerfreie Unterscheidung der Doppelknoten ist nur mit Hilfe der Elementtopologie möglich.

Die oben erwähnten Unzulänglichkeiten des Design-Preprozessors verschärfen sich besonders bei Rahmenstrukturen oder bei Stabtragwerken mit Versteifungsplatten.

### 4.3.2 Netzgenerierung mit DBGEN

Aus den in Abschnitt 4.3.1 erwähnten Gründen wird in dieser Arbeit ein eigener Netzgenerator DBGEN zur Vernetzung von dünnwandigen Stabtragwerken entwickelt. DBGEN ist speziell für prismatische Stabträger geschrieben und kann momentan nur für I-, U-, und Z-Profile eingesetzt werden.

Für nicht prismatische Abschnitte, z.B. Eckbereiche der Rahmenstruktur, Versteifungsstellen oder einen Abschnitt mit Aussparung, können Design-Elemente eingesetzt werden. DBGEN kann die von sich selbst vernetzten Teile und die vom Design-Preprozessor vernetzten Teile automatisch zusammenfügen. Deshalb ist der hier vorgestellte Netzgenerator auch für komplizierte dünnwandige Stabtragwerke einsetzbar.

DBGEN vernetzt die Struktur mit den in dieser Arbeit hauptsächlich verwendeten 8-knotigen Schalenelementen und 2-knotigen Balkenelementen. An der Stelle mit Netzänderungen werden 8-knotige viereckige oder 6-knotige dreieckige Schalenelemente als Übergangselemente verwendet. Für die Kopplung von Schalenelementen mit Balkenelementen werden die Zwangsbedingungen vom Programm erstellt, es wird keine manuelle Eingabe benötigt.

#### 4.3.2.1 Das Konzept von DBGEN für dünnwandige Träger

DBGEN erzeugt die Knoten abschnittsweise rings um die Stablängsachse, so daß die Differenz der Knotennummern der Elemente minimal wird und eine relativ kleine Bandbreite des Gleichungssystems garantiert wird. Eine weitere Bandbreitenoptimierung bringt keine große Verbesserung. Das Konzept des Netzgenerators läßt sich nach folgenden Schritten erklären:

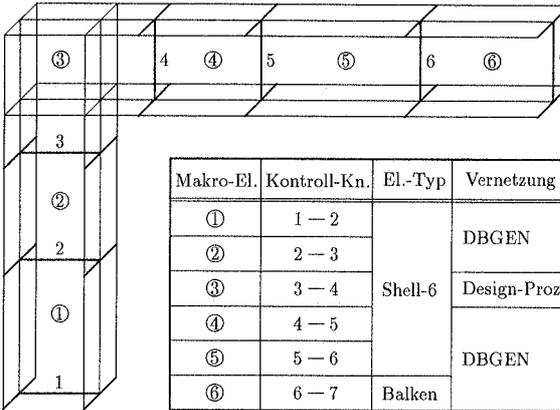
##### *Schritt 1: Auswählen der Kontrollknoten*

DBGEN erfordert eine manuelle Eingabe der Kontrollknoten. Die Kontrollknoten sollen die charakteristischen Punkte sein (Bild 4.3.4), z.B. Stabendpunkte 1 und 7, Profil- oder Netzänderungsstelle 2 und 5, Grenzstelle 6 mit ungleichen Berechnungsmodellen und die den Eckbereich abgrenzenden Punkte 3 und 4, usw..

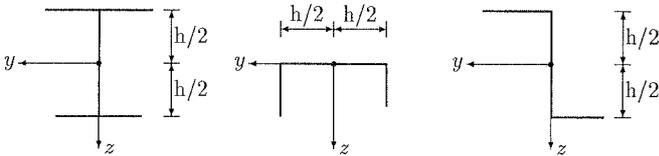
Es werden die Stegmittelpunkte des Querschnitts als Kontrollknotenpunkte ausgewählt (Bild 4.3.5).

Zur Festlegung der Profilorientierung werden lokale Koordinatensysteme an den Kontrollknoten eingeführt (Bild 4.3.5). Der Einfachheit halber ist die lokale  $y$ -Achse parallel zur globalen  $y$ -Achse. Die lokalen Koordinatensysteme an der Querschnittsebene werden vom Netzgenerator implizit verwendet und brauchen nicht explizit eingege-

ben zu werden. Dadurch wird ein prismatischer Abschnitt des Stabträgers durch zwei Kontrollpunkte und ihre Reihenfolge im Raum festgelegt.



**Bild 4.3.4:** Auswählen der Kontrollpunkte

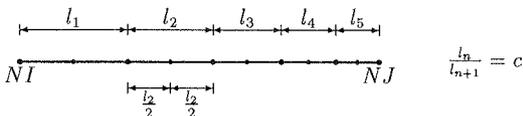


**Bild 4.3.5:** Lokalisierung der Kontrollpunkte

Die von zwei Kontrollpunkten bestimmten Makro-Stackelemente können durch DBGEN oder den Design-Prozessor vernetzt werden.

*Schritt 2: Erzeugung der Knotenpunkten zwischen den Kontrollknoten*

Zur Erzeugung der Knotenpunkte zwischen den Kontrollknoten wird die Eingabe der Unterteilung entlang der Längsrichtung des von zwei Kontrollknoten bestimmten Stababschnittes gebraucht. Durch zusätzliche Eingabe der Gewichtung kann die Feinheit der Vernetzung entlang der Stablängsrichtung beeinflusst werden (Bild 4.3.6).



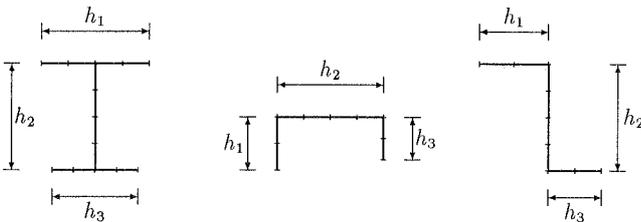
**Bild 4.3.6:** Erzeugung der Knotenpunkte zwischen den Kontrollknoten

Für eine Berechnung mit Balkenelementen ist die Netzgenerierung jetzt schon beendet. Es müssen nur noch die Informationen über die Querschnitte eingegeben werden.

*Schritt 3: Erzeugung der Knotenpunkte im Querschnitt*

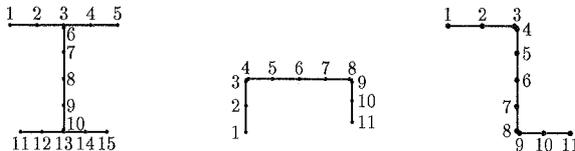
Die Kontrollknoten und ihre Zwischenpunkte sind keine FE-Knotenpunkte. Sie dienen nur zur Festlegung des Trägers im Raum. Die FE-Knoten werden am quer zur Längsrichtung des Stababschnittes stehenden Querschnitt erzeugt. Natürlich liegen alle Knotenpunkte auf der Profilmittellinie. Dazu muß die Länge und Unterteilung der einzelnen Linienkomponenten eingegeben werden (Bild 4.3.7).

Zur Vereinfachung wird die einzelne Profilkomponente gleichmäßig unterteilt. Um die Kompatibilität zu garantieren, werden die Abmessung und Unterteilung des Profils bei den Makroelementen eingegeben, damit die Vernetzung rings um die Längsrichtung eines Stababschnittes immer gleich ist (Bild 4.3.7). Eine veränderliche Netzdicke ist nur in Stablängsrichtung vorgesehen (Bild 4.3.6).



**Bild 4.3.7:** Länge und Unterteilung der einzelnen Linienkomponenten

Die Knotennummerierung im Querschnitt erfolgt in negativer Richtung rings um die vom ersten Kontrollpunkt zum zweiten Kontrollpunkt gezogene Richtungslinie (Bild 4.3.8). Deshalb können die Nummern der Doppelknoten durch ihre Nachbarknoten nach der Reihenfolge berechnet werden. Die Zugehörigkeit der Doppelknoten kann visuell identifiziert werden.

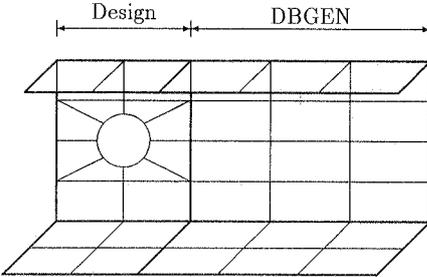


**Bild 4.3.8:** Knotennummerierung des Querschnittes

Die Erzeugung der Knoten erfolgt makro-elementweise. Bei der Knotengenerierung des nächsten Makro-Elementes wird immer geprüft, ob die dazu anschließenden Makro-Elemente schon vernetzt sind. Wenn dieses der Fall ist, werden die vorher

erzeugten Knoten an der Anschlußstelle weiter für das momentan behandelte Makro-Element benutzt, damit keine überflüssige Knoten erzeugt werden.

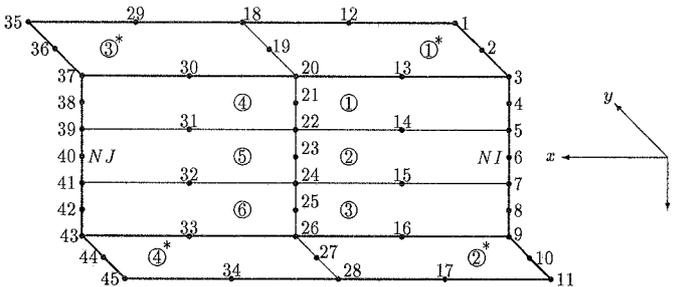
Wenn die anschließenden Makro-Elemente vom Design-Prozessor übergeben werden, muß beachtet werden, daß die Unterteilung des Querschnittes an der Anschlußstelle gleich ist (Bild 4.3.9). Weil die Generierung mit DBGEN nach der Generierung mit dem Design-Prozessor erfolgt, werden die von "Design" erzeugten Knoten an der Anschlußstelle ausgesucht und an das momentan behandelte Makro-Element übergeben.



**Bild 4.3.9:** Kopplung der DBGEN- und Design-Makroelemente

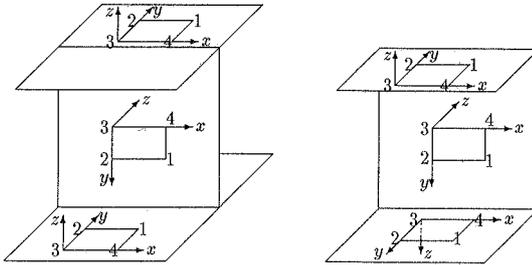
#### *Schritt 4: Generierung der Elementtopologie*

Da die Anfangs- und Endknotennummern des Makro-Elementes immer abgespeichert werden, kann die Elementtopologie durch die Unterteilung des Profils gerechnet werden. Die generierten Elemente werden nach der Dicke der Querschnittskomponenten und nach dem Materialgesetz gruppiert. In Bild 4.3.10 wird angenommen, daß die Dicken der Gurte gleich sind. Die Elemente in den Gurten und die Elemente im Steg werden jeweils gruppiert.



**Bild 4.3.10:** Generierung der Elementtopologie in einem Stababschnitt

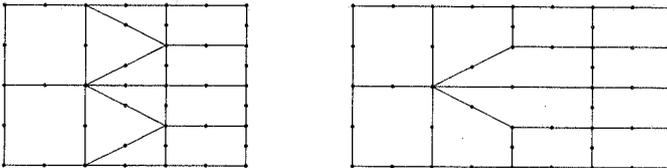
Die Elementtopologie befolgt immer die Regel, daß die  $x$ -Richtung des lokalen Elementkoordinatensystems parallel zur Stablängsrichtung ist und sogar alle Elemente in einem Stababschnitt gleiche lokale  $x$ -Richtung haben (Bild 4.3.11), damit eine richtige Kopplung der Verdrehungen von Doppelknoten garantiert wird.



**Bild 4.3.11:** Knotenzuordnung in einzelnen Querschnittskomponenten

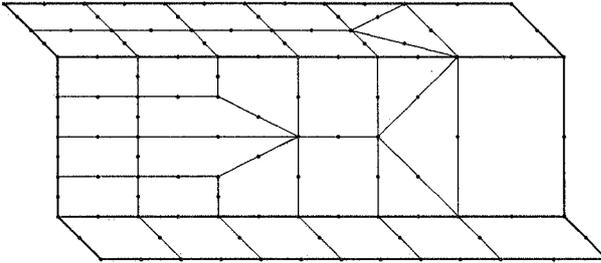
#### 4.3.2.2 Behandlung der Netzänderung

Eine Netzänderung, die der  $h$ -Adaption entspricht, besteht nur an der Anschlußstelle von zwei mit DBGEN zu vernetzenden Stababschnitten. Zur Fehlerverminderung wird die sogenannte “two-to-one”-Regel [32] befolgt. Zur Vermeidung der irregulären Knoten bei Netzadaption werden dreieckige oder beliebige viereckige Elemente als Übergangselemente benutzt (Bild 4.3.12).



**Bild 4.3.12:** Verfeinerungsstrategie

Die Netzänderung erfolgt auf der Ebene der einzelnen Plattenkomponenten des Querschnittes. Beliebige Kombinationen der Netzänderungen in Plattenkomponenten zwischen benachbarten mit DBGEN zu vernetzenden Stababschnitten sind möglich (Bild 4.3.13).



**Bild 4.3.13:** mögliche Netzänderungen

#### 4.3.2.3 Integration von DBGEN in CARAT

Der Netzgenerator DBGEN ist direkt in das Programmsystem *CARAT* integriert. Zur Kompatibilität teilt er dieselbe Incore-Datenbasis wie alle anderen Programmmodule des Systems. Eine Zusammenarbeit mit dem Preprozessor "Design" ist möglich.

Die Eingabedaten für DBGEN sind als ein weiterer Eingabeblock im Standard-eingabebefehle anzugeben. Zur Ausführung von DBGEN ist im Steuerblock **PC-DATA** der Flag **NODGEN=1** zu setzen. Daten für DBGEN werden in einem eigenständigen Eingabeblock eingegeben. Er beginnt mit **NODE-GEN\_DATA** und endet mit **NODE-GEN\_END**. Die weitere Eingabe ist durch Blockkennner gegliedert. Sie erfolgt formatfrei. Tabelle 4.3.3 gibt eine Übersicht der Blockkennner.

PC-DATA	DESIGN=1	Flag zur Ausführung von DESIGN
	NODGEN=1	Flag zur Ausführung von DBGEN
NODE-GEN_DATA		
NG-CTR	Kontrolldaten	
NG-COOR	Koordinaten	
NG-LINE	Attribute der linearen Makroelemente	
NG-NETZ	Attribute der Topologie in Längsrichtung	
NG-PROF	Abmessung der Profile	
NG-QTOP	Topologie der Querschnitte	
NODE-GEN_END		

**Tabelle 4.3.3:** Übersicht der Blockkennner der Eingabedaten

Die Eingabe der Kontrolldaten wird in Tabelle 4.3.4 erläutert. Die Eingabe von anderen Blöcken soll hier nicht weiter ausgeführt werden. Bei der Eingabe **NGINP=1** im Kontrollblock **NG-CTR** wird ein Muster der Eingabedaten ausgegeben. Im nächsten Abschnitt wird die Eingabe an einem Beispiel erläutert.

Es sei noch erwähnt, daß der Netzgenerator DBGEN speziell für dünnwandige Balken geschrieben ist, um die Bandbreite der Systemmatrix möglichst zu reduzieren. Damit können Rahmensysteme mit Schalenelementen unter wenigem Aufwand gelöst werden. Andererseits können die Kopplungsbedingungen vom Programm ausgegeben werden, damit ihre umständliche manuelle Eingabe vermieden wird.

Ein weiterer Vorteil ist die Netzänderungsmöglichkeit mit DBGEN. Sofern die "two-to-one"-Regel eingehalten wird, kann die Netzänderung durch dreieckige Elemente als Übergangselemente völlig vom Programm ausgeführt werden. Eine automatische Verfeinerung mit viereckigen Übergangselementen ist noch nicht implementiert, sondern muß noch "von Hand" erfolgen, wobei der Parameter NGINP=3 gesetzt wird.

Schlüsselwort	Werte Default (*)	Beschreibung der Eingabe im Block NG-CTR
NUMND	2*	Anzahl der Kontrollknoten
NUMLE	1*	Anzahl der Makro-Elemente
NUMPR	1*	Anzahl der Profiltypen
NUMQT	1*	Anzahl der Querschnittstopologie
NDFUG	0*	Übergabe der von Design erzeugten Knoten
NDREI	0*	Dreieckige Elemente als Übergangselemente bei der Netzänderung
NPLAS	0*	=0 für Shell-6, Ausschalten lokaler $\theta_z$ außer der Kante =1 für Shell-8 =2 für Shell-1 mit Doppelknoten an der Kante
NGINP	2*	$\geq 1$ Ausgabe eines Musters der Eingabedaten $\geq 2$ Ausgabe der Elementeingabe =3 Externer Eingriff zur weiteren Bearbeitung

**Tabelle 4.3.4:** Eingabe der Kontrollknoten

Einige weitere Bemerkungen:

- 1). Bei der Eingabe der Koordinaten muß der Träger in der globalen xz-Ebene liegen. Weiter soll das lineare Makroelement mit zwei Kontrollknoten parallel zur globalen x- oder z-Richtung definiert sein. Sonst müssen lokale Koordinatensysteme eingeführt werden, die DBGEN nicht erlaubt. Eine Abhilfe ist, NGINP=3 im Kontrollblock zu setzen. Damit kann der Benutzer die von DBGEN erzeugten Knotennummern und Elementtopologien nach Bedarf weiter bearbeiten.
- 2). Die Knotennumerierung erfolgt makro-elementweise und beginnt immer beim Anfangsknoten und läuft bis zum Endknoten. Deshalb ist darauf zu achten, daß die linearen Makroelemente und Kontrollknoten so durchnumeriert werden (Bild 4.3.4), daß eine minimale Differenz der abhängigen Knotennummern erreicht wird. Bei kreuzförmiger Struktur ist es unvermeidlich, eine größere Bandbreite zu verursachen, die nur durch Bandbreitenoptimierung kleiner gemacht werden kann.

- 3). Für jedes Makroelement wird ein Vernetzungsflag gesetzt. Mit dem Wert  $-1$  werden die vom Design-Preprozessor erzeugten Knoten an der Anschlussstelle ausgesucht und den weiteren Makroelementen übergeben. Mit dem Wert  $0$  werden zweiknotige Balkenelemente erzeugt. Beim Wert  $1$  des Flags werden 8-knotige Schalenelemente verwendet. Sinnvollerweise sollen das mit Balkenelementen vernetzte Makroelement und das anschließende mit Schalenelementen vernetzte Makroelement gleiche Profilform und gleiche Abmessungen haben.
- 4). Als Querschnittsform sind nur I-, U- und Z-Profile möglich. Die ungleiche Länge der Ober- und Untergurte führt zur allgemeinen Form dieser Profile.
- 5). Die Anzahl der Unterteilungen der Gurte für ein I-Profil bezieht sich auf einen Schenkel.

#### 4.3.2.4 Netzgenerierungsbeispiele mit DBGEN

*Beispiel 1: Kragträger mit I-Profil*

Der im Abschnitt 4.3.1 vorgestellte Kragträger wird hier mit DBGEN vernetzt. Bild 4.3.14 zeigt die entsprechenden Eingabedaten. Weil der Preprozessor DBGEN speziell für dünnwandige Balken geschrieben ist, ist die Eingabe sehr einfach.

```

C=====
PC-DATA  DESIGN=0  NODGEN=1
C-----
NODE-GEN_DATA
NG-CTR   NUMND=2  NUMPR=1  NPLAS=0  :=0 für Shell-6
          NUMLE=1  NUMQT=1          :=2 für Shell-1
C-----
NG-COOR  ND-No.    X          Y          Z
          1         0.0        0.0        0.0
          2        100.0       0.0        0.0
C-----
NG-LINE  LE-No.    NI     NJ  Vernetzungsflag  PR-No.
          1         1     2     1                    1
C-----
NG-NETZ  LE-No.  First  Last  TEIL          QT-No.
          1       1.0  1.0   10           1
C-----
NG-PROF  1  TYPE=I
          LTOP=20.0  HTOP= 2.
          LMIT=30.0  HMIT= 3.
          LBOT=20.0  HBOT= 2.
C-----
NG-QTOP  1  NTOP=1          NMIT=4          NBOT=1
NODE-GEN_END
C=====

```

**Bild 4.3.14:** Eingabedaten bei Netzgenerierung mit DBGEN

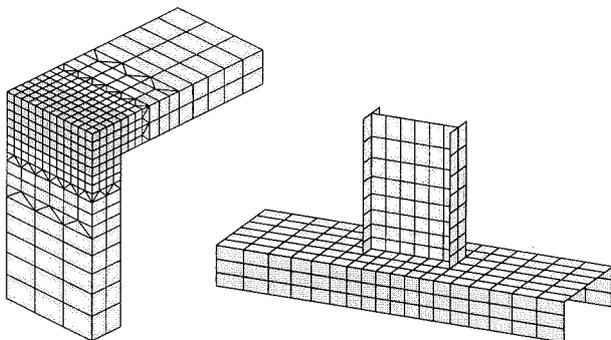
Die generierten FE-Daten werden in Tabelle 4.3.5 zusammengefaßt. Im Vergleich zur Tabelle 4.3.2 hat der Netzgenerator DBGEN eine bessere Knotennumerierungsstrategie als Design-Prozessor für dünnwandige Stabtragwerke. Der Speicherbedarf mit DBGEN ist bei Shell-1 wesentlich geringer als mit dem Design-Prozessor. Interessantweise liefert der Bandbreitenoptimierer bei Shell-1 für dieses Beispiel ein schlechteres Ergebnis als ohne Bandbreitenoptimierer; er ist offensichtlich nicht "optimal" ausgelegt.

NUMNP=319/277      NUMNE=80		Shell-1	Shell-6
Gleichungsnummer bei Festhaltung linker Seite		1340	1340
Anzahl der zu speichernden Elemente der Systemmatrix	ohne Bandbreitenopti.	156222	155177
	mit Bandbreitenopti.	170289	139398

**Tabelle 4.3.5:** Generierte FE-Daten mit DBGEN

*Beispiel 2: L-Rahmen und T-Rahmen*

Die Netze eines L-Rahmens und eines T-Rahmens sind in Bild 4.3.15 dargestellt. Dieses Beispiel wird gewählt, um die Netzänderung durch dreieckige Elemente und die Kopplungsmöglichkeit ungleicher Profiltypen zu demonstrieren.



**Bild 4.3.15:** Vernetzungsbeispiele mit DBGEN

Eine Vernetzung eines L-Rahmens von DBGEN mit nicht rechtwinkligen Viereckselementen als Übergangselemente wird im Abschnitt 6.3 gezeigt.

Weitere Beispiele werden hier nicht angeführt. Alle in dieser Arbeit untersuchten Beispiele mit I- und U-Profil werden durch den Generator DBGEN vernetzt.

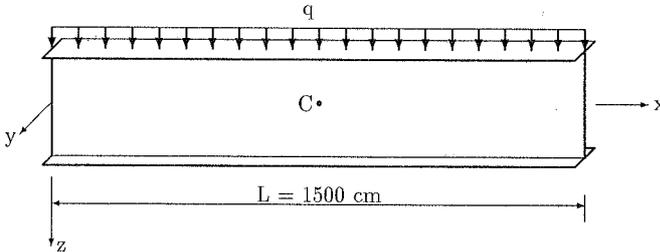
## 4.4 Untersuchungen bei elastischem Materialverhalten

In diesem Abschnitt werden mehrere Beispiele mit Schalenelementen unter der Voraussetzung elastischen Materialverhaltens berechnet. Die Berechnungen werden mit Pfadwechsel- und Pfadverfolgungsprozeduren von Reitinger [67] bis weit in den Nachbeulbereich hinein geführt. Bei kurzen Trägern treten maßgebend lokale Verformungen auf und die Stabtragwerke verlieren ihre Eigenschaft und Definition. Deshalb wird hier das gekoppelte Versagen in den Vordergrund gestellt und nur mittellange und schlanke Trägern intensiv untersucht. Die angeführten Beispiele werden für die rechnerische Bestätigung von den in Abschnitt 2.4 beschriebenen Stabilitätsproblemen bei dünnwandigen Stabtragwerken ausgewählt.

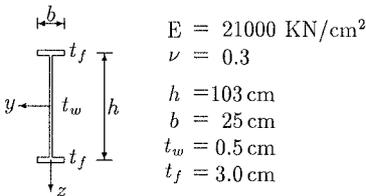
### 4.4.1 Gabelgelagerter Träger unter Biegebeanspruchung

Zuerst soll das Kippen des auf Biegung beanspruchten Trägers untersucht werden. Das gekoppelte und globale Versagen wird für mittellange und schlanke Einfeldträger in den folgenden Beispielen untersucht.

#### 4.4.1.1 I-Profil unter Gleichstreckenlast



**Bild 4.4.1:** System und Last



**Bild 4.4.2:** Querschnitt und Material

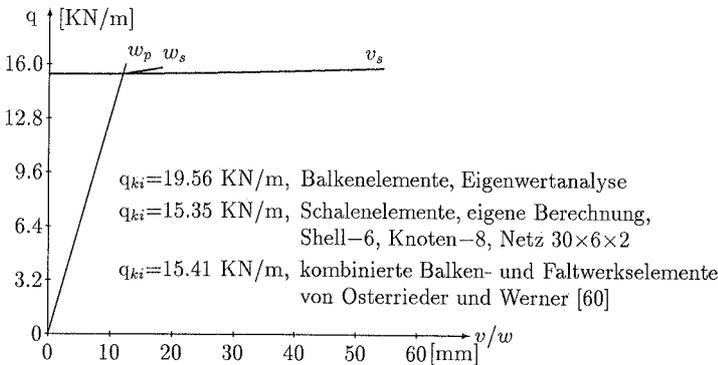
Bild 4.4.1 zeigt ein Einfeldträger mit I-Profil unter Gleichstreckenlast. Mit Berücksichtigung des relativen dünnen Stegs (Bild 4.4.2) untersuchen Osterrieder und Wer-

ner [60] den Träger mit kombinierten Balken- und Faltwerkselementen, wobei die steifen Gurte mit Balkenelementen idealisiert werden, während der weiche Steg mit Faltwerkselementen diskretisiert wird. Damit kann das lokale Ausbeulen des Stegs erfaßt werden. Dort wird gezeigt, daß ein geringes Ausbeulen in der Trägermitte und kleine lokale Verformungen in der Nähe des Auflagers auftreten.

Hier soll das gleiche Beispiel mit Schalenelementen untersucht werden. Mit einem vergleichsweise groben Netz (30x6 Elemente im Steg) gibt es schon eine befriedigende Lösung  $q_{ki}=15.35$  KN/m im Vergleich zu einer Referenzlösung  $q_{ki}=15.41$  KN/m mit relativ feinem Netz (120x15 Elemente im Steg) aus [60]. Der Grund für die etwas kleinere Kippplast ist offensichtlich, da die Idealisierung der Gurte mit Balkenelementen das System steifer macht.

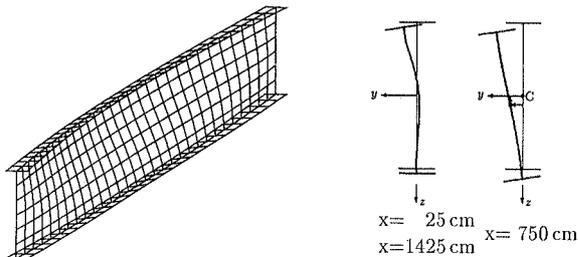
Wie erwartet vermindert die Berücksichtigung der lokalen Verformung die kritische Last. Wenn die lokale Querschnittsverformung durch reine Balkenelemente ausgeschaltet wird, ist die berechnete kritische Last um 27% höher als die mit Schalenelementen.

Bild 4.4.3 zeigt die Last-Verschiebungskurve des Trägermittelpunktes im Primär- und Sekundärpfad. Nach dem Verzweigungspunkt weicht der Träger überwiegend seitlich aus. Die Laststeigerung ist anschließend sehr gering. Dagegen steigt die Biegeverformung sehr stark an. Das ist das typische Verhalten der Kippinstabilität.



**Bild 4.4.3:** Last - Verschiebungskurve des Punktes C

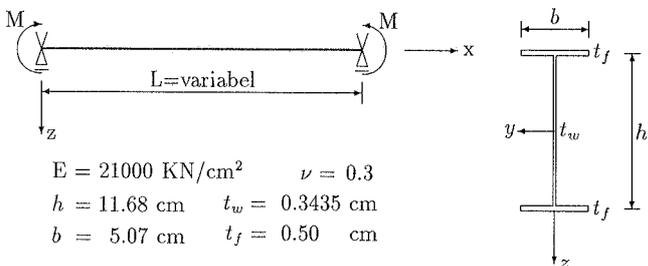
Bild 4.4.4 zeigt die Versagensform des Trägers. In der Trägermitte tritt eine leichte lokale Verformung auf, während ein relativ großes Ausbeulen des Stegbleches im Stützenbereich erscheint. Diese Interaktion zwischen lokalem Ausbeulen und globaler seitlicher Ausweichung vermindert das Tragvermögen.



**Bild 4.4.4:** Gekoppeltes Versagen des Querschnitts

#### 4.4.1.2 I-Profile mit variabler Länge unter konstantem Biegemoment

Das in Bild 4.4.5 dargestellte Beispiel wurde von Hancock [39] mit der finiten Streifenmethode, von El-Ghazaly et al. [35] mit kombinierten Balken- und Plattenelementen und von Kammler [44] mit speziellen um zusätzliche Plattenfreiheitsgrade erweiterten Balkenelementen berechnet. Die Querschnittswerte werden fest angenommen, während die Länge des Trägers variiert wird. Damit kann der Einfluß des Schlankheitsverhältnisses auf das Systemverhalten untersucht werden.



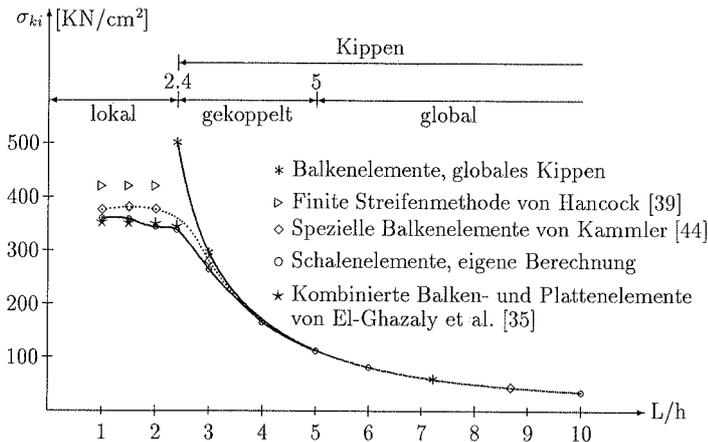
**Bild 4.4.5:** System, Material und Last

Hier soll das gleiche Beispiel mit Schalenelementen berechnet werden. Die Ergebnisse sind durch Knickspannungen  $\sigma_{ki}$  in Abhängigkeit von der Schlankheit  $L/h$  in Tabelle 4.4.1 und in Bild 4.4.6 zusammengefaßt. Die angegebenen kritischen Spannungen  $\sigma_{ki}$  wurden aus den zu Verzweigungslasten gehörenden Eigenformen durch Lösung der erweiterten Gleichungssysteme bestimmt [67]. Der Index  $b$  von  $\sigma_{ki}^b$  und  $M_{ki}^b$  in der Tabelle 4.4.1 kennzeichnet die Lösung mit reinen Balkenelementen.

Im Bild 4.4.6 ist zu sehen, daß die Berechnung mit Schalenelementen in dem Bereich, wo globales Versagen maßgebend ist, genau mit der aus Balkenelementen übereinstimmt. Bild 4.4.7 zeigt die typische Kippversagensform.

Länge [cm]	L/h	$M_{ki}$ [KNcm]	$\sigma_{ki}$ [KN/cm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{ki}^b$ [KN/cm <sup>2</sup> ]	$M_{ki}^b$ [KNcm]	Versagensform
11.68	1	13516	360.4			lokal
17.52	1.5	13460	358.9			
23.36	2	12899	344.0			
28.03	2.4	12685	338.3	456.7	17125	lokal/gekoppelt
35.04	3	9946	265.2	295.9	11096	gekoppelt
46.72	4	6184	164.9	170.8	6407	
58.40	5	4194	111.8	112.9	4232	gekoppelt/global
70.08	6	3045	81.2	81.3	3047	global
116.80	10	1301	34.7	34.7	1301	

**Tabelle 4.4.1:** Kritische Momente und Spannungen in Abhängigkeit von L/h

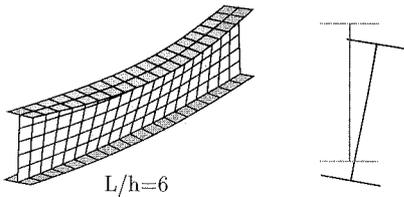


**Bild 4.4.6:** Knickspannungen  $\sigma_{ki}$  in Abhängigkeit von der Schlankheit L/h

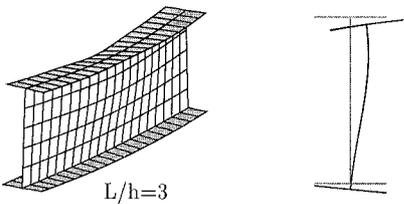
Mit der Verkürzung des Trägers weichen die beiden Lösungen voneinander ab. Bei  $L/h < 5$  erscheint schon die Mitwirkung der lokalen Verformung und bei  $L/h < 4$  tritt deutlich die Interaktion zwischen lokalen und globalen Verformungen auf (Bild 4.4.8). Die ursprüngliche seitliche Verformung wird durch lokale Instabilität des Stegs beschleunigt. Bei  $L/h < 3$  werden schließlich die Lösungen mit Balkenelementen unbrauchbar.

Bei  $L/h < 2.4$  dominiert die lokale Instabilität. In diesem Bereich ist der Druckgurt maßgeblich für das Versagen verantwortlich. Im Bereich  $1.6 \leq L/h < 2.4$  versagt der

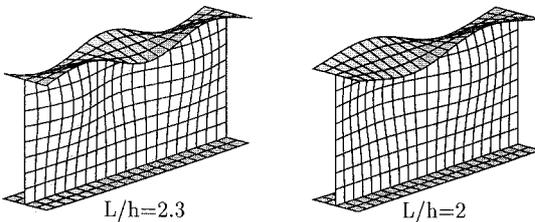
Träger mit 2 bis 3 Halbwellen (Bild 4.4.9a). Die beiden Eigenwerte liegen dicht beieinander. Im Gegensatz dazu ist bei  $L/h < 1.6$  nur eine Halbwellenform zu erkennen (Bild 4.4.9b). Diese Erscheinung zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem von Hancock [39] mit der finiten Streifenmethode und von El-Ghazaly et al. [35] mit kombinierten Balken- und Plattenelementen berechneten Versagensmodus. Jedoch nähern sich die berechneten kritischen Spannungen nur den Werten von [35]. Die große Abweichung von Hancock und Kammler kann mit der genäherten Erfassung von Druckgurt- und Stegverhalten erklärt werden. Einerseits hat Hancock den Versagensmodus durch die Fourierreihenentwicklung in Längsrichtung festgelegt, was zur Folge hat, daß sich die zum niedrigsten Beulwert gehörende Versagensform nicht einstellen kann. Andererseits hat Kammler eine obere Grenze von 4 Elementen über die Steghöhe vorgesehen und kann das rein lokale Versagen aus Plattenwirkung bei  $L/h < 2$  nicht hinreichend genau erfassen.



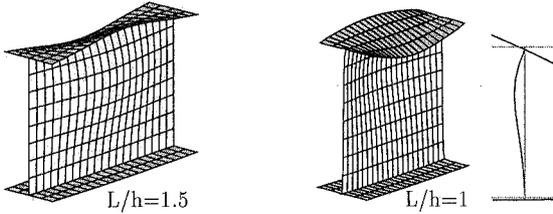
**Bild 4.4.7:** Globales Versagen



**Bild 4.4.8:** Gekoppeltes Versagen



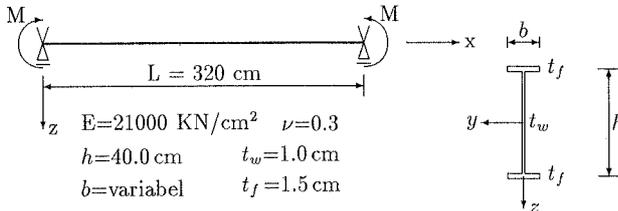
**Bild 4.4.9a:** Lokales Versagen mit mehreren Halbwellen



**Bild 4.4.9b:** Lokales Versagen mit einer Halbwelle

#### 4.4.1.3 I-Profile mit variabler Breite unter konstantem Biegemoment

Im Vergleich zum vorhergehenden Beispiel soll hier der Einfluß des Querschnittsverhältnisses auf das Systemverhalten eines mittellangen I-Trägers untersucht werden. Bild 4.4.10 zeigt die Systemskizze. Die Länge des Trägers und die Dicke der Querschnittskomponenten sind fest vorgegeben. Geändert wird nur die Gurtbreite, wobei die Höhe des Profils auch fest gehalten wird. Dieses Beispiel wurde von Roberts und Jhita [69] mit der Energiemethode und von Chin et al. [26], Al-Bermani et al. [2] mit kombinierten Balken- und Faltwerkselementen untersucht.

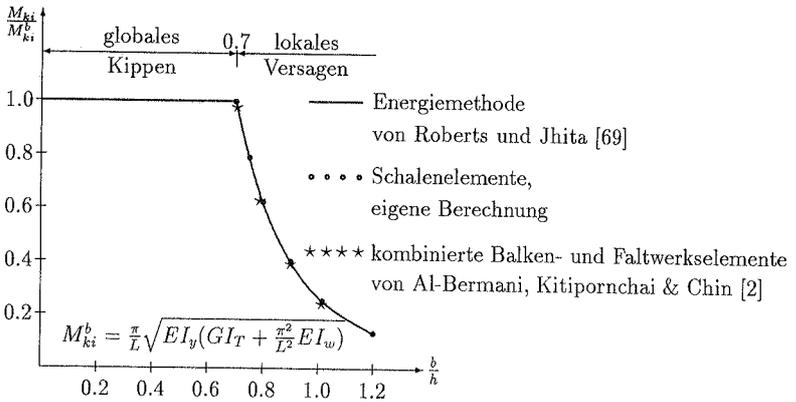


**Bild 4.4.10:** System, Material und Last

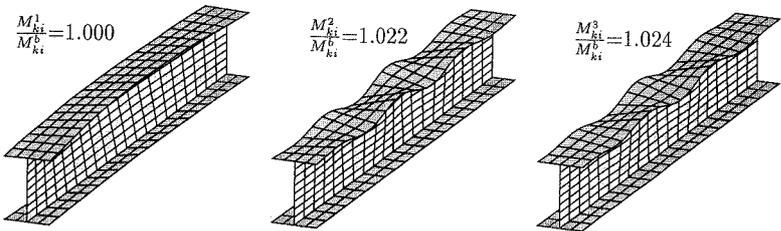
Hier wird das gleiche Beispiel mit Schalenelementen untersucht. Das berechnete auf  $M_{ki}^b$  bezogene kritische Moment  $M_{ki}$  wird in Abhängigkeit vom Breite-Höhe-Verhältnis  $\frac{b}{h}$  in Bild 4.4.11 aufgetragen, wobei  $M_{ki}^b$  das theoretische Kippmoment für globales Versagen nach der Balkentheorie beim Fall freier Verwölbung an beiden Enden [3] ist. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit der Lösung der angegebenen Autoren.

Deutlich ist ein Knick im Bild 4.4.11 zu erkennen, der ungefähr an der Stelle  $\frac{b}{h} = 0.7$  liegt. Wegen des relativ gedungenen Querschnitts mit  $\frac{h}{t_w} = 40$ ,  $\frac{t_f}{t_w} = 1.5$  tritt bei kleiner Breite  $\frac{b}{h} \leq 0.7$  nur globales Kippen auf. Mit der Verbreiterung des Gurtes geht das globale Versagen in lokales Versagen über. Bilder 4.4.12 und 4.4.13 zeigen die den 3 niedrigsten Eigenwerten entsprechenden Versagensformen und die dazu gehörenden

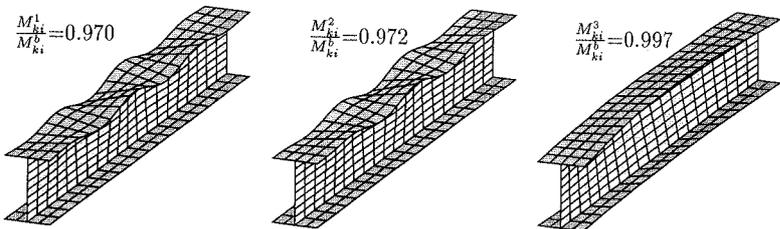
Kippmomente im Übergangsbereich. Die lokale Versagensform besteht aus mehreren Wellen in Längsrichtung. Es sind zwei dicht beieinander liegende Versagensformen vorhanden.



**Bild 4.4.11:** Relatives kritisches Moment in Abhängigkeit von  $b/h$



**Bild 4.4.12:** Mögliche Versagensformen des Querschnitts bei  $b/h=0.7$

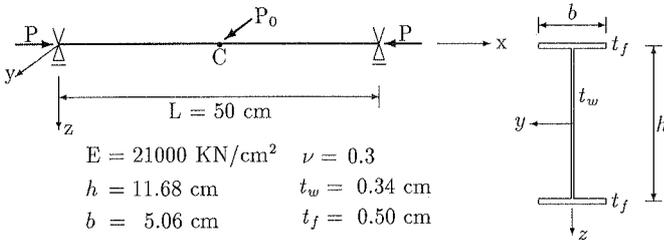


**Bild 4.4.13:** Mögliche Versagensformen des Querschnitts bei  $b/h=0.71$

## 4.4.2 Gabelgelagerter Träger unter zentrischer Druckbelastung

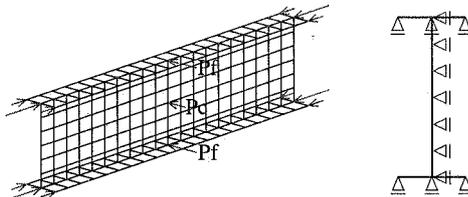
### 4.4.2.1 I-Profil unter zentrischer Druckbelastung

Ein gerader, zentrisch gedrückter Stab versagt bekanntlich durch Biegeknicken. Aber in Praxis tritt selten ein ideales System auf. Um die Abweichungen von der planmäßigen Ausführung abzudecken, sollen die Imperfektionen bei der Stabilitätsuntersuchung berücksichtigt werden. In diesem Beispiel wird der Einfluß von geometrischer Imperfektion auf das Systemverhalten diskutiert.



**Bild 4.4.14:** System, Material und Last

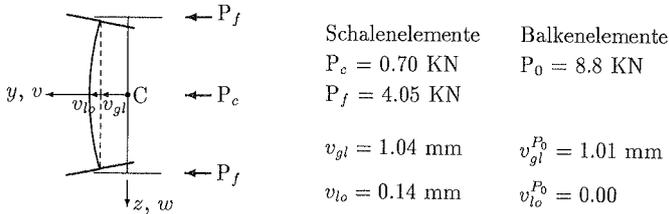
Bild 4.4.14 zeigt einen Druckstab mit I-Profil. Die Imperfektion wird durch eine Störlast in Trägermitte angebracht. Dieses Beispiel wurde von Kammler [44] mit speziellen Balkenelementen berechnet. Hier wird es mit Schalenelementen untersucht. Die Vernetzung mit  $20(2 \times 6 \times 2)$  Elementen, die Eintragung der Lasten und die Randbedingungen werden in Bild 4.4.15 dargestellt. Weil der Träger eine kurze Länge mit  $L/h=5$  hat, sollen hier zwei Punkte beachtet werden. Erstens sollen die Drucklasten so eingetragen werden, daß die Längsverschiebungen aller Endpunkte bei perfektem System gleich sind. Diese Zwangsbedingung ist bei Schalenelementen nicht so einfach zu erreichen. Sie sollte aber möglichst überprüft und gegebenenfalls iterativ angepaßt werden. Zweitens sollen die Randbedingungen die freie Verdrehung um die z-Achse an den Trägerenden ermöglichen.



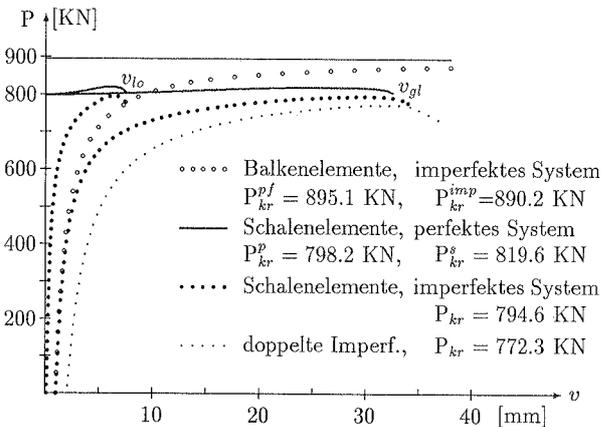
**Bild 4.4.15:** Netz, Lasteinleitung und Randbedingung an den Trägerenden

Die Erzeugung von Imperfektionen wird in Bild 4.4.16 dargestellt. Die Maximalver-

formung aus der Störlast in Querrichtung beträgt 1.04 mm. Die lokale Störlast in Stegmitte verursacht eine Anfangsprofilverformung von 0.14 mm und aktiviert einen gekoppelten Versagensmodus. Bei der Modellierung mit Balkenelementen bewirken die gesamten Störlasten ( $P_0=2P_f+P_c$ ) nur eine globale Biegeverformung mit einem Maximalwert von 1.01 mm. Die konstanten Störlasten dienen nur zur Erzeugung von Imperfektionen, nur die Längsbelastung wird gesteigert.



**Bild 4.4.16:** Erzeugung von Imperfektionen



**Bild 4.4.17:** Last-Verschiebungskurve

Die Rechenergebnisse werden in Form von Last-Verschiebungskurven in Bild 4.4.17 aufgetragen. Für das perfekte System beträgt die Knicklast aus dem Balkenmodell 895.1 kN. Die Verzweigungslast aus dem Schalenmodell beträgt nur 798.2 kN. Bei der Weiterverfolgung des Gleichgewichts in den sekundären Pfad erhält man ein Traglast von 819.6 kN. Das zeigt ein stark gekoppeltes Versagen bei den gegebenen Maßen.

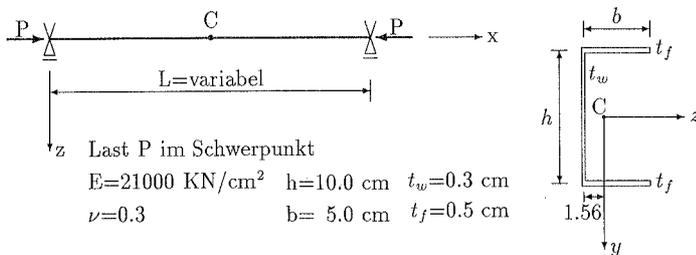
Mit Berücksichtigung der Imperfektion beträgt die Traglast mit dem Balkenmodell 890.2 kN und mit dem Schalenmodell 794.6 kN. Von der Größenordnung her führt die Imperfektion beim Balkenmodell nur zu einer geringen Abminderung der auf-

nehmbaren Last. Gleichfalls reagiert die erreichbare Last beim Schalenmodell nicht anfällig gegenüber Imperfektionen. Die aufnehmbare Last bei gegebener Imperfektion wird um 3% reduziert. Bei verdoppelter Imperfektionsamplitude wird die erreichbare Last um 5.8% reduziert und ergibt 772.3 KN. Die hier angegebene Lösung hat eine geringe Abweichung mit der von Kammler. Für die gegebene Imperfektion beträgt die erreichbare Last bei ihm 778 KN.

#### 4.4.2.2 U-Profil unter Druckbelastung im Schwerpunkt

Im Gegensatz zum doppelsymmetrischen Querschnitt tritt im allgemeinen das Biegedrillknicken bei nicht doppelt symmetrischen Profilen unter zentrischer Druckbelastung auf. Diese Tatsache wird hier an einem einfach symmetrischen U-Profil gezeigt.

Bild 4.4.18 zeigt einen längsbelasteten Träger mit U-Profil. Die Querschnittswerte sind fest. Die Länge wird variiert, damit unterschiedliche Versagensformen erzielt werden können. Dieses Beispiel wurde von Kammler mit speziellen Balkenelementen [44] und von Osterrieder und Werner mit kombinierten Balken- und Faltschalen-Elementen [60] untersucht. Ihre Ergebnisse sind sehr unterschiedlich. Hier soll das gleiche Beispiel mit Schalenelementen untersucht werden. Die Elemententeilung in Querrichtung beträgt  $3 \times 6 \times 3$ . In Längsrichtung werden die Elemente so dicht eingesetzt, daß die einzelne Elementlänge ungefähr im Bereich  $1.5 \sim 2.5$  cm liegt, damit jedes Element eine quasi quadratische Form besitzt. Die Rechenergebnisse sind in Abhängigkeit von der Schlankheit  $L/h$  in Tabelle 4.4.2 und in Bild 4.4.19 dargestellt.



**Bild 4.4.18:** System, Material und Last

Für schlanke Träger mit  $L/h > 10$  tritt globales Versagen ein. Die Lösung mit Schalenelementen zeigt eine gute Übereinstimmung mit der aus Balkenelementen. In Bild 4.4.19 ist ein Schnittpunkt zu sehen, der ungefähr bei  $L/h = 14.5$  liegt. Bei  $L/h > 14.5$  verliert das System seine Stabilität durch Biegeknicken. Unter dieser Grenze kontrolliert das Biegedrillknicken die Stabilität des Trägers. Bild 4.4.20 zeigt diese Tatsache sehr deutlich.

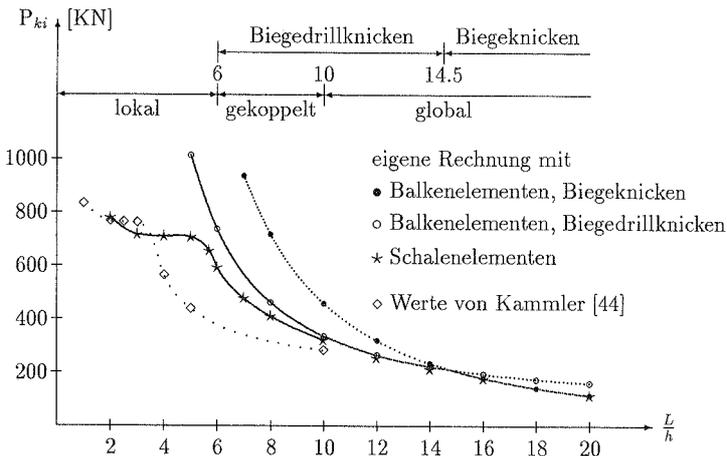
Für mittlere Schlankheiten mit  $6 < L/h \leq 10$  versagt das System durch gekoppeltes Biegedrillknicken. Wegen der Interaktion von lokaler und globaler Verformung

überschätzt die Lösung mit Balkenelementen das Tragvermögen. Die hier erhaltene Versagensform bei  $L/h=8$  (Bild 4.4.21) trotz der Abweichung in der Versagenslast stimmt mit der von Kammler [44] überein, aber hat eine große Abweichung zu den Ergebnissen von Osterrieder und Werner [60], die ein gekoppeltes Biegeknicken erhalten.

Bei  $L/h \leq 6$  dominiert das rein lokale Versagen. Bild 4.4.22 zeigt die möglichen Versagensformen bei unterschiedlicher Länge. Bei  $L/h=5,4$  werden drei Halbwellen beobachtet, während bei  $L/h=3,2$  jeweils zwei und eine Halbwellen auftreten. Die Versagensform bei  $L/h=5$  weist gute Übereinstimmung mit der von Osterrieder und Werner [60] auf. Die Lösung von Kammler [44] zeigt dagegen ein gekoppeltes Biegedrillknicken.

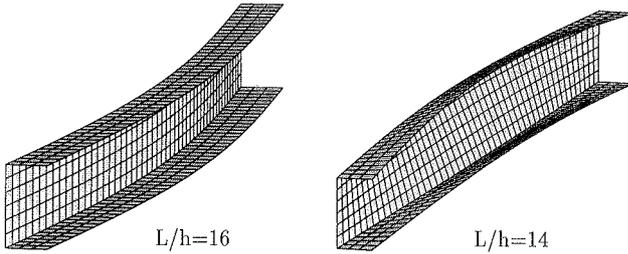
Länge [cm]	$P_{ki}$ [KN]	Versagensform (Schalenelemente)	$P_{ki}^b$ [KN]	Versagensform (Balkenelemente)
40	710.0	lokal	1522.0	Biegedrillknicken
50	707.2		1013.6	
60	597.0		737.4	
80	409.9	gekoppeltes Biegedrillknicken	462.4	
100	320.5		334.7	
140	212.8	globales Biegedrillknicken	222.4	
160	177.1	globales Biegeknicken	179.4	Biegeknicken
200	114.8		114.8	

**Tabelle 4.4.2:** Kritische Last in Abhängigkeit von der Stablänge

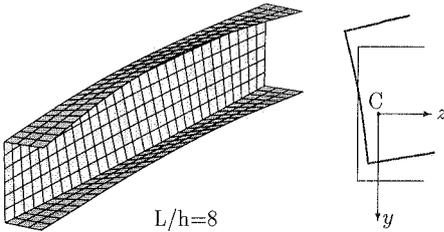


**Bild 4.4.19:** Kritische Last in Abhängigkeit von Schlankheitsverhältnissen

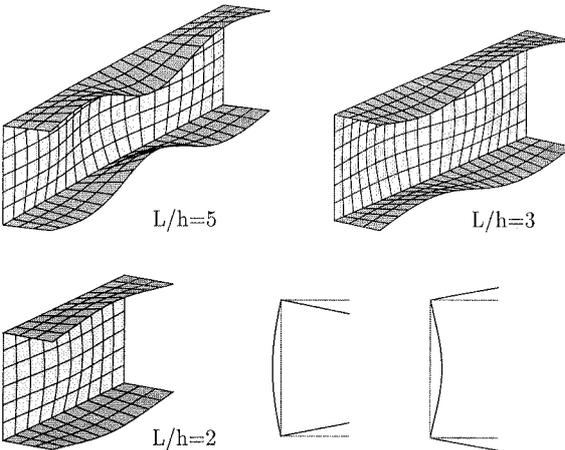
Es sei hier erwähnt, daß das einfachsymmetrische U-Profil bezüglich der Randbedingungen sehr empfindlich ist, besonders bei kurzen Trägern. Deshalb ist eine gut übereinstimmende Berechnung mit anderen Autoren nur bei gleicher Eingabe der Randbedingungen möglich.



**Bild 4.4.20:** Globales Versagen bei schlankem Träger



**Bild 4.4.21:** Gekoppeltes Biegedrillknicken bei mittelschlankem Träger



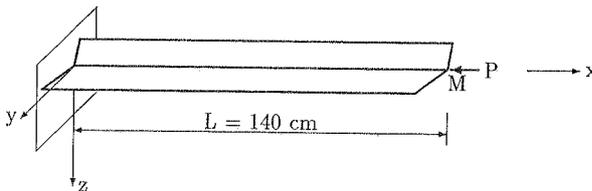
**Bild 4.4.22:** Lokales Versagen bei kurzem Träger

### 4.4.3 Kragträger mit unterschiedlichen Querschnitten

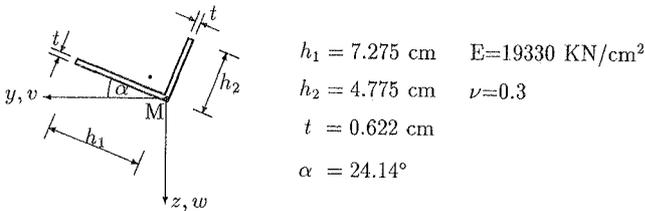
Bei den vorherigen Beispielen werden nur I- und U-Profile mit mindestens einer Symmetrieachse berechnet. In diesem Abschnitt werden unsymmetrische L- und U-Profile untersucht.

#### 4.4.3.1 L-Profil unter exzentrischer Drucklast

Der in Bild 4.4.23 und 4.4.24 dargestellte Kragträger mit L-Profil wurde von Chan et al. [24] mit dünnwandigen Balkenelementen und von Chin et al. [28] mit Faltwerkselementen untersucht. Hier wird er mit Schalenelementen und Balkenelementen berechnet, um ihre Leistungsfähigkeit bei großen Verformungen zu zeigen. In Längsrichtung wird der Träger in 10 Elemente eingeteilt. Beim Schalenmodell wird für jeden Schenkel ein Element eingesetzt.



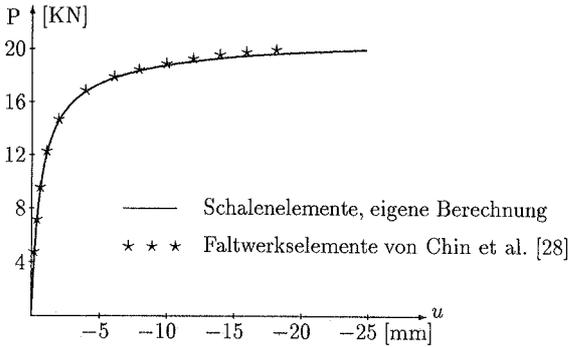
**Bild 4.4.23:** System und Last



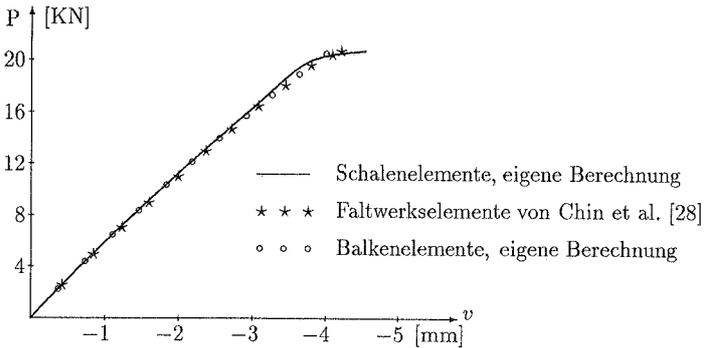
**Bild 4.4.24:** Querschnitt und Material

Unter exzentrischer Last, die am Schubmittelpunkt des freien Endquerschnitts angreift, zeigt der Träger Biege- und Torsionsverformungen. Die berechneten Endverschiebungen werden in Bild 4.4.25 bis 4.4.27 aufgetragen. Eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen von Chin et al. [28] ist ersichtlich.

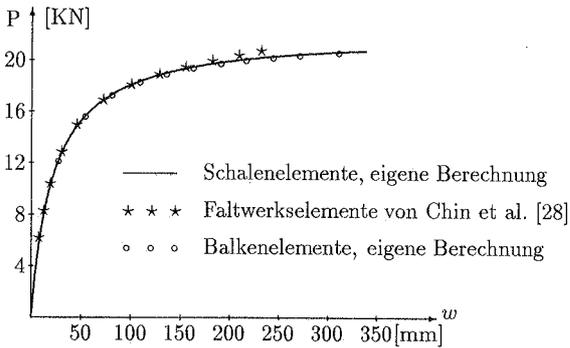
Wegen der Formulierung der Balkenelemente nach Theorie II. Ordnung ist keine richtige Wiedergabe für die Längsverschiebung unter Biegung möglich. Deshalb fehlt in Bild 4.4.25 das Ergebnis des Balkenmodells.



**Bild 4.4.25:** Last-Verschiebungskurve (P-u)



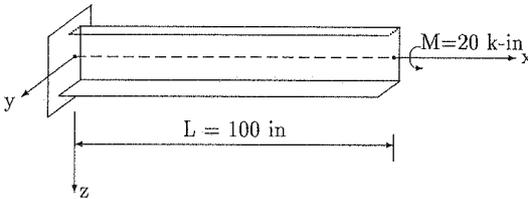
**Bild 4.4.26:** Last-Verschiebungskurve (P-v)



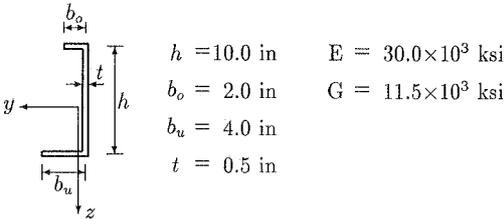
**Bild 4.4.27:** Last-Verschiebungskurve (P-w)

#### 4.4.3.2 Unsymmetrisches U-Profil unter Torsionsbelastung

Als letztes Beispiel der elastischen Berechnungen wird ein Kragträger mit unsymmetrischem U-Profil unter Torsionsbelastung betrachtet. Bilder 4.4.28 und 4.4.29 zeigen die Systemskizze und die Querschnittswerte. Das Beispiel stammt von Chen und Atsuta [25], wobei eine lineare analytische Lösung für die Endverdrehung von  $0.2174 \text{ rad}$  ( $\approx 12.46^\circ$ ) angegeben wird. Durch Lösung der Differential-Gleichungen hat Eisenberger [34] die exakte Steifigkeit für polynomial veränderliche Querschnitte entwickelt. Mit seiner Methode wird die exakte Lösung mit einem Element für das hier betrachtete Beispiel erzielt.



**Bild 4.4.28:** System und Last



**Bild 4.4.29:** Querschnitt und Material

Zuerst soll an diesem Beispiel das Konvergenzverhalten der Balkenelemente bei Elementverfeinerung dargestellt werden. Die Ergebnisse werden mit konstanten Elementlängen gewonnen und in Tabelle 4.4.3 dargestellt. Es zeigt sich, daß bereits eine Idealisierung mit zwei Elementen ausreichend genaue Ergebnisse liefert. Die geringe Abweichung der linearen Lösung von der analytischen Lösung liegt in der approximativen Interpolationsfunktion zur Darstellung der Verdrehung um die Längsachse.

In der Tabelle 4.4.3 ist zu erkennen, daß ungleiche absolute Werte der Endverdrehung bei Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität erhalten werden. Allerdings ist der Einfluß der geometrischen Nichtlinearität bei dieser Belastung äußerst gering.

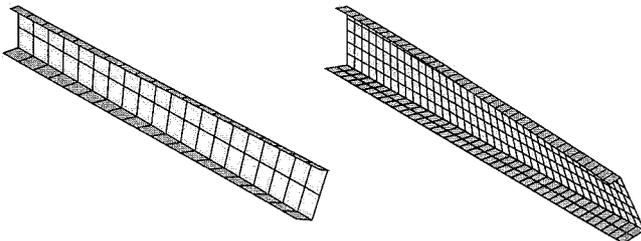
Anzahl der Balkenelemente	geom. nichtlinear		linear
	+M	-M	$\pm M$
1	0.2096	-0.2091	$\pm 0.2093$
2	0.2158	-0.2152	$\pm 0.2155$
3	0.2167	-0.2161	$\pm 0.2164$
4	0.2169	-0.2163	$\pm 0.2166$
5	0.2170	-0.2164	$\pm 0.2167$
6	0.2170	-0.2164	$\pm 0.2167$
Analytische Lösung	-	-	$\pm 0.2174$

**Tabelle 4.4.3:** Konvergenzverhalten der Balkenelemente

Beim Schalenmodell werden in den bisherigen Berechnungen nur 8-knotige 5P-Shell-6 Elemente mit reduzierter Integration  $2 \times 2$  verwendet. Zum Vergleich wird auch die Berechnung mit vollständiger Integration  $3 \times 3$  durchgeführt. Die Ergebnisse aus zwei Vernetzungen (Bild 4.4.30) sind in Tabelle 4.4.4 gegenübergestellt. Man erkennt den bekannten Effekt, daß die vollständige Integration eine kleinere Endverdrehung im Vergleich zur reduzierten Integration liefert, d.h. das System ist steifer.

Für dieses Beispiel können auch Shell-8 Elemente mit gemeinsamer Normalen an jedem Knoten eingesetzt werden. Die Ergebnisse sind in Tabelle 4.4.5 und 4.4.6 dargestellt. Es ist zu sehen, daß die Ergänzungen durch das EAS-Konzept für das hier betrachtete Beispiel fast keine Rolle spielt. Im Gegensatz zum 5P-Shell-6 Elementtyp liefert hier die vollständige Integration eine größere Endverdrehung im Vergleich zur reduzierten Integration, d.h. das System verhält sich weicher.

Die Abweichung der Lösung mit dem Schalenmodell von der mit dem Balkenmodell hat ihre ungleiche Formulierung als Hauptursache. Außerdem wird das Endmoment beim Schalenmodell durch ein Kräftepaar ersetzt, das eine lokale Wirkung am Endquerschnitt verursacht. Im Gegensatz dazu sind die Eingabe der Randbedingungen und die Lasteinleitung beim Balkenmodell einfacher.



**Bild 4.4.30:** Vernetzung und Verformung des Trägers

Enddrillwinkel (rad) beim Netz 20(1×2×1)			
Integrations- ordnung	geom. nichtlinear		linear
	+M	-M	±M
2×2	0.2177	-0.2166	±0.2198
3×3	0.2163	-0.2153	±0.2184

Enddrillwinkel (rad) beim Netz 40(1×5×2)			
Integrations- ordnung	geom. nichtlinear		linear
	+M	-M	±M
2×2	0.2215	-0.2204	±0.2237
3×3	0.2191	-0.2180	±0.2213

**Tabelle 4.4.4:** Endverdrehung mit 8-knotigen 5P-Shell-6 Elementen

Enddrillwinkel (rad) beim Netz 20(1×2×1)			
Integrations- ordnung	geom. nichtlinear		linear
	+M	--M	±M
2×2	0.2074	-0.2065	±0.2091
3×3	0.2134	-0.2125	±0.2153

Enddrillwinkel (rad) beim Netz 40(1×5×2)			
Integrations- ordnung	geom. nichtlinear		linear
	+M	-M	±M
2×2	0.2190	-0.2180	±0.2211
3×3	0.2192	-0.2182	±0.2213

**Tabelle 4.4.5:** Endverdrehung mit 8-knotigen 6P-Shell-8 Elementen

Enddrillwinkel (rad) beim Netz 20(1×2×1)			
Integrations- ordnung	geom. nichtlinear		linear
	+M	-M	±M
2×2	0.2079	-0.2070	±0.2096
3×3	0.2138	-0.2128	±0.2157

Enddrillwinkel (rad) beim Netz 40(1×5×2)			
Integrations- ordnung	geom. nichtlinear		linear
	+M	-M	±M
2×2	0.2195	-0.2185	±0.2216
3×3	0.2197	-0.2186	±0.2218

**Tabelle 4.4.6:** Endverdrehung mit 8-knotigen 7P-Shell-8 Elementen

## 4.5 Untersuchung bei plastischem Materialverhalten

In den vorherigen Berechnungen wird elastisches Materialgesetz verwendet, bei dem die Gesamtspannung allein aus der Gesamtverzerrung berechnet werden kann. Bei Belastung und Entlastung ist der Spannungspfad gleich.

Bei Berücksichtigung vom plastischen Materialverhalten hängt die aktuelle Gesamtspannung noch von der Belastungsgeschichte ab. Deshalb ist es notwendig, einige Informationen vom zuvor berechneten Zustand abzuspeichern.

Zur Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens von der Fließtheorie kennzeichnen zusätzlich zu den elastischen Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen drei weitere Eigenschaften das Materialverhalten:

1. eine Fließbedingung, die den mehrachsigen Spannungszustand festlegt, bei dem das plastische Fließen beginnt;
2. ein Fließgesetz, das die plastischen Verzerrungsinkremente mit den momentanen Spannungen und den Spannungsinkrementen infolge des Fließens verknüpft;
3. ein Verfestigungsgesetz, das festlegt, auf welche Weise die Fließbedingung während des plastischen Fließens modifiziert wird.

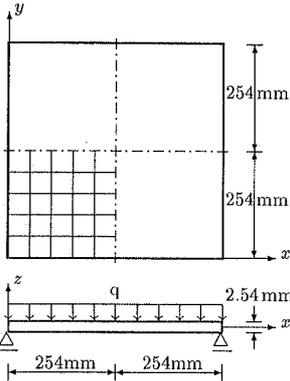
Bei den plastischen Berechnungen werden die Gesamtverzerrungen in elastische und plastische Komponenten zerlegt. Für die elastische Verzerrungen gilt das verallgemeinerte Hooke-Gesetz. Zur Berechnung von Spannungen und plastischen Verzerrungen werden in *CARAT* die von Mises Fließbedingung, ein assoziiertes Fließgesetz und ein isotropes Verfestigungsgesetz verwendet und für alle Schalenelemente implementiert.

### 4.5.1 Geometrisch und stofflich nichtlineare Einzelplatte

Vor der elastisch-plastischen Berechnung am ganzen dünnwandigen Träger sollen erste Untersuchungen an Einzelplatten durchgeführt werden, um das Verhalten der einzelnen Plattenkomponenten des dünnwandigen Querschnittes zu untersuchen.

#### 4.5.1.1 Quadratplatte unter Gleichlast

Das in Bild 4.5.1 dargestellte Beispiel wurde von Sättele [75], Kammler [44] und Matzenmiller [54] mit Falterwerk- und Schalenelementen für das rein materiell nicht-lineare Problem untersucht. Die Tragfähigkeit der Platte wird deshalb nur durch das Biegeversagen des durchplastizierten Querschnitts bestimmt. Später hat Roehl [70] das Beispiel mit Schalenelementen nach den 5-, 6- und 7-P-Theorien untersucht, jedoch mit Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität.



Last:  $q = \lambda \cdot 10^{-2} \text{ N/mm}^2$

Werkstoff: ideal elastisch – ideal plastisch

$E = 6.9 \cdot 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$

$\sigma_F = 248 \text{ N/mm}^2$

Randbedingung:

vierseitig gelenkig

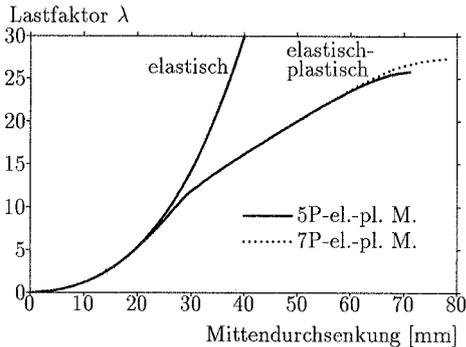
Idealisierung:

5×5 Netze für ein Plattenviertel

Integration: 2×2×7

Fließbeginn:  $\lambda_F = 2.4$

**Bild 4.5.1:** Quadratplatte, System und Material



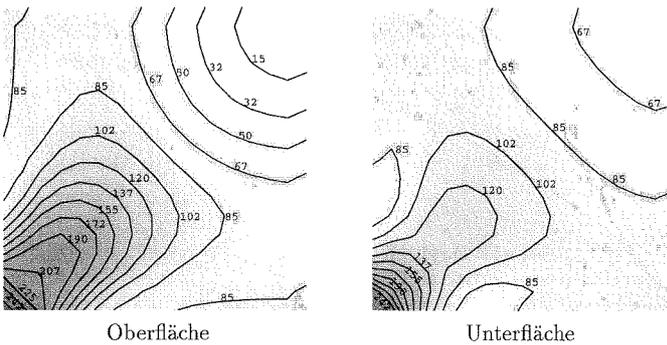
**Bild 4.5.2:** Last–Durchbiegungskurve

Hier soll das gleiche Beispiel mit Schalenelementen nach der 5- und 7-P-Theorie untersucht werden. Die geometrische Nichtlinearität wird berücksichtigt. Um die Membranwirkung abzumindern und die Biegetragfähigkeit der Platte zu betonen, wird nur die Querverschiebung der Lagerung festgehalten. Wegen Symmetriebedingungen wird nur ein Viertel der Platte durch 8-knotige Schalenelemente mit einem Netz von 5×5 Elementen diskretisiert. Die numerische Integration über die Plattenfläche erfolgt mit der Gauß-Integration zweiter Ordnung. In Dickenrichtung werden sieben Integrationspunkte nach der Simpson-Integrationsregel gewählt. Der Laststeigerungsfaktor über der Mittendurchsenkung der Platte ist in Bild 4.5.2 aufgetragen. Für diese dünne Platte stimmen die Ergebnisse der 5- und 7-P-Theorie sehr gut überein. Die geringe Abweichung der beiden Theorien tritt nur bei relativ hohen Belastungen auf.

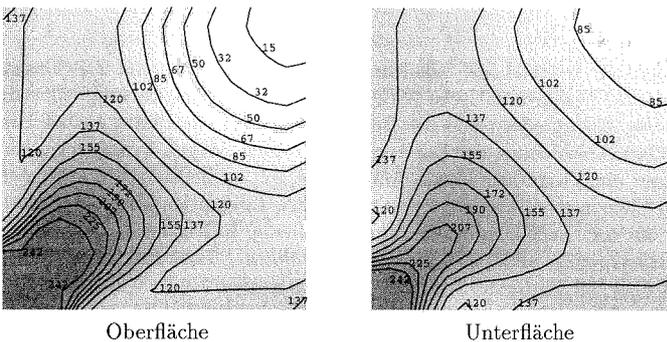
Im Vergleich zur rein materiell nichtlinearen Berechnung kann die Tragfähigkeit ungefähr um den Faktor 6 erhöht werden. Der Grund dafür ist die Mitwirkung der Membranspannungen im Fall großer Verschiebungen.

Bild 4.5.3 zeigt die Verläufe der v. Mises Vergleichsspannungen an der Ober- und Unterfläche bei unterschiedlichen Laststufen. Zur besseren Erfassung der Spannungsverläufe wird ein relativ feines Netz mit  $16 \times 16$  Elementen benutzt. Bei  $\lambda=2.4$  tritt zunächst der Fließbeginn an der Unterfläche des Eckbereiches auf. Er breitet sich dann von den Ecken her aus, bis eine kleine plastische Zone in den Ecken entsteht. Mit der Laststeigerung breitet sich die Fließzone strahlenförmig zur Plattenmitte hin aus (Bild 4.5.3b,c,d).

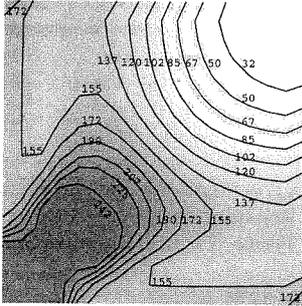
Bei weiterer Belastung folgt die Durchplastizierung der Randbereiche (Bild 4.5.3e). Die Plattenmitte bleibt zunächst überwiegend elastisch und wird erst bei höherer Last von plastischen Erscheinungen erfaßt.



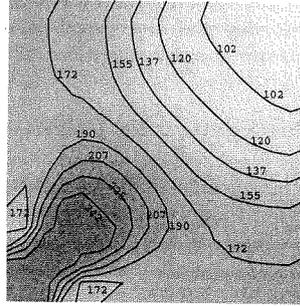
**Bild 4.5.3a:** Vergleichsspannungen bei  $\lambda = 3$



**Bild 4.5.3b:** Vergleichsspannungen bei  $\lambda = 5$

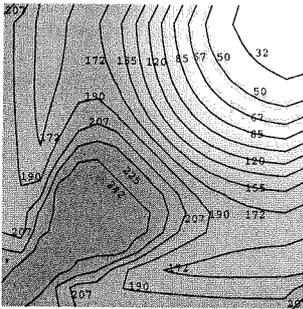


Oberfläche

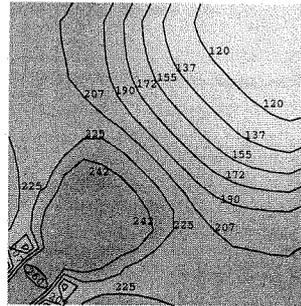


Unterfläche

**Bild 4.5.3c:** Vergleichsspannungen bei  $\lambda = 7$

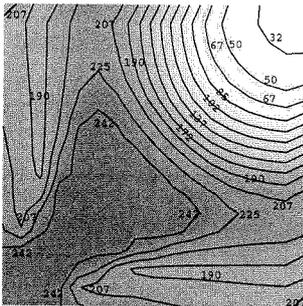


Oberfläche

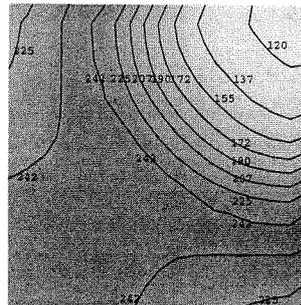


Unterfläche

**Bild 4.5.3d:** Vergleichsspannungen bei  $\lambda = 9$



Oberfläche



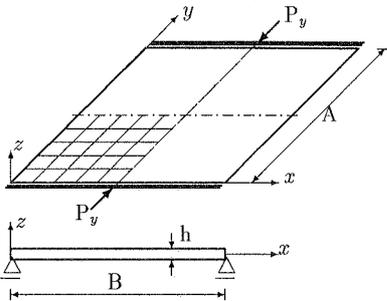
Unterfläche

**Bild 4.5.3e:** Vergleichsspannungen bei  $\lambda = 11$

In Bild 4.5.3 ist zu sehen, daß die Vergleichsspannungen an manchen Stellen größer als die Fließspannung sind. Der Grund dafür ist die Extrapolation der Vergleichsspannungen von den Integrationspunkten zu den Knotenpunkten.

#### 4.5.1.2 Rechteckplatte unter Längslast

Hier wird eine längsgedrückte Rechteckplatte ohne/mit vorgegebener geometrischer Imperfektion (Bild 4.5.4/4.5.6) unter geometrischer Belastung (konstante Randverschiebung) untersucht. Dieses Beispiel wurde von Sättele [75] und Kammler [44] unter Berücksichtigung der Imperfektion berechnet.



Geometrie:  $\alpha = \frac{A}{B} = 0.875$

$A = 222.25 \text{ mm}$

$B = 254.00 \text{ mm} \quad h = 3.175 \text{ mm}$

Werkstoff: ideal elastisch-plastisch

$E = 2.05 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, \quad \nu = 0.3$

$\sigma_F = 250.00 \text{ N/mm}^2$

Randbedingungen:

vierseitig gelenkig

**Bild 4.5.4:** Rechteckplatte, System und Material

Die äußere Last ist auf die Normalkraft  $P_{yF}$  bezogen, die eine vollständige Plastifizierung bewirkt.

$$P_{yF} = \sigma_F B h = 201.61 \text{ KN}$$

Für das perfekte System ist die Euler-Last  $P_{yki}$  eine weitere charakteristische Größe.

$$P_{yki} = \sigma_{ki} B h = 93.39 \text{ KN}, \quad \frac{P_{yki}}{P_{yF}} = 0.463$$

mit

$$\sigma_{ki} = k \sigma_e = 115.8 \text{ N/mm}^2 \quad (\text{lokale kritische Beulspannung})$$

$$k = 4 \quad (\text{lokaler kritischer Beulkoeffizient})$$

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E h^2}{12(1 - \nu^2) B^2} = 28.95 \text{ N/mm}^2$$

Als Alternative kann hier die in der Praxis häufig benutzte Methode der wirksamen Breiten eingesetzt werden. Die folgende durch Experimente gestützte wirksame Breite oder Tragfähigkeit wird von Winter [89] angegeben und wird als Winter-Kurve bezeichnet.

$$\frac{B_e}{B} = \frac{1}{\lambda_p} \left(1 - \frac{0.22}{\lambda_p}\right) = 0.579$$

mit

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\sigma_F}{\sigma_{ki}}} = \frac{B}{h} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\sigma_F}{k\pi^2 E}} = 1.469 \quad (\text{relative Plattenschlankheit})$$

Diese Kurve wird heute allgemein als Grundkurve der Tragfähigkeit beim Plattenbeulen eingesetzt. Sie berücksichtigt auch den Einfluss der Imperfektion.

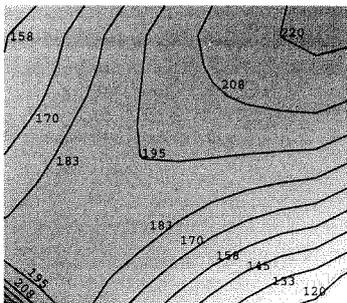
### Fall I: perfektes System

Zum Vergleich mit den angegebenen Autoren wird hier ein relativ grobes Netz von  $5 \times 5$  mit 8-knotigen Schalenelementen für ein Viertel der Platte gewählt. Für das perfekte System wird nach der Verzweigung bei der Euler-Last der stabile Gleichgewichtspfad, verbunden mit dem Auftreten einer Mittendurchbiegung, weiter verfolgt. Die berechnete Verzweigungs- und Traglast wird jeweils den Formelwerten in Tabelle 4.5.1 gegenüber gestellt. Eine sehr gute Übereinstimmung mit den Formelwerten ist ersichtlich.

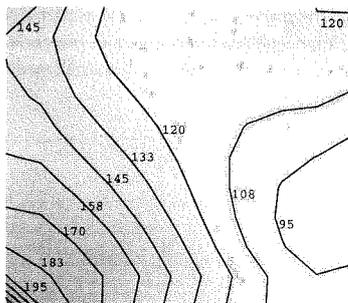
	Verzweigungslast	Traglast
Formel	0.463 <sup>a</sup>	0.579 <sup>b</sup>
Berechnung <sup>c</sup>	0.462	0.587
<sup>a</sup> Euler-Last	<sup>b</sup> Winter-Kurve	
<sup>c</sup> Eigene Berechnung, Fließbeginn bei $\frac{P_y}{P_{yF}} = 0.52$		

**Tabelle 4.5.1:** Ergebnisse des perfekten Systems ( $\frac{P_y}{P_{yF}}$ )

Bild 4.5.5 zeigt die Verläufe der Vergleichsspannungen an der Unter- und Oberfläche bei unterschiedlichen Laststufen. Zur besseren Erfassung der Spannungsverläufe werden sie mit einem feineren Netz von  $10 \times 10$  erzielt. Der Fließbeginn geschieht im verzweigten Pfad bei  $\frac{P_y}{P_{yF}} = 0.52$  ( $w/h = 0.647$ ). Beim Ausbeulen in die z-Richtung tritt der Fließbeginn erst an der Oberfläche im Eckbereich des Systems auf. Nach geringer Laststeigerung beginnt die Oberseite der Plattenmitte zu fließen. Die beiden Fließzonen an der Oberfläche wachsen schnell zusammen, bis der Eckbereich der Unterfläche fließt. Bei weiterer Laststeigerung breitet sich die Fließzone hauptsächlich nach der kürzeren Kante der Plattenoberfläche aus. An der Unterseite breitet sich die Fließzone langsamer aus.

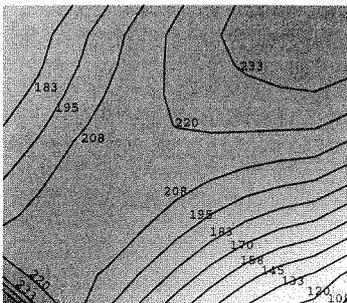


Oberfläche

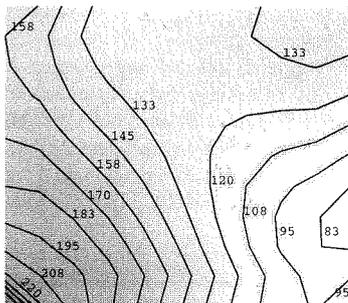


Unterfläche

**Bild 4.5.5a:** Vergleichsspannungen bei  $\frac{P_y}{P_{yF}} = 0.5054$

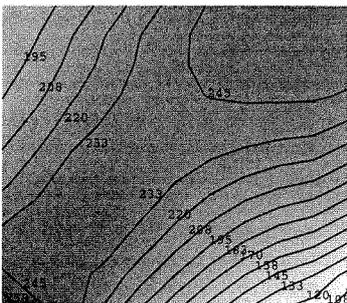


Oberfläche

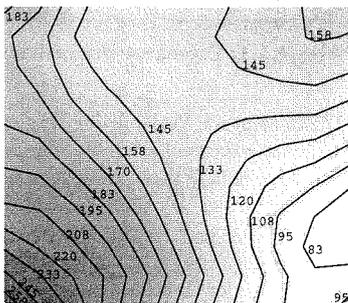


Unterfläche

**Bild 4.5.5b:** Vergleichsspannungen bei  $\frac{P_y}{P_{yF}} = 0.5218$

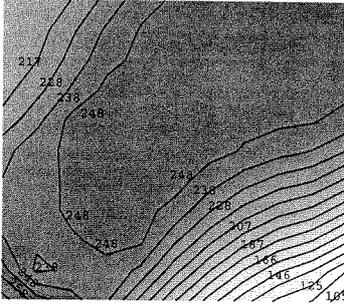


Oberfläche

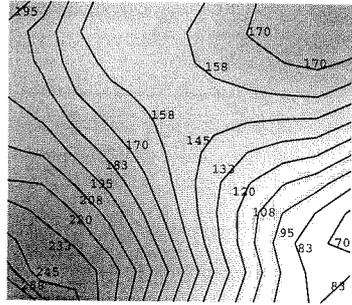


Unterfläche

**Bild 4.5.5c:** Vergleichsspannungen bei  $\frac{P_y}{P_{yF}} = 0.5387$

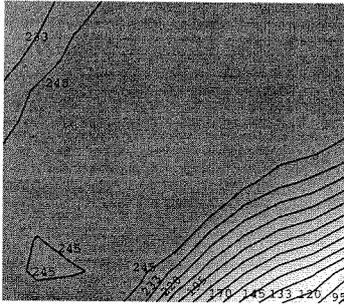


Oberfläche

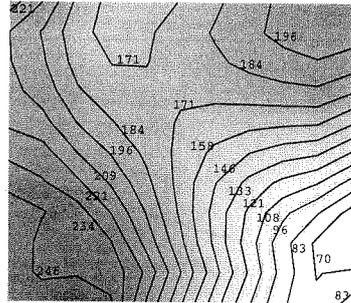


Unterfläche

**Bild 4.5.5d:** Vergleichsspannungen bei  $\frac{P_y}{P_{yF}} = 0.5555$



Oberfläche



Unterfläche

**Bild 4.5.5e:** Vergleichsspannungen bei  $\frac{P_y}{P_{yF}} = 0.5709$

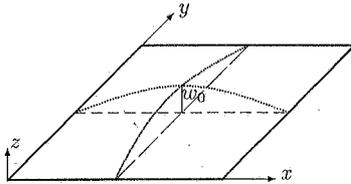
### Fall II: imperfektes System

Jetzt wird die gleiche Platte mit einer geometrischen Imperfektion untersucht. Die erste Eigenform (eine Sinushalbwellen in  $x$ - und  $y$ -Richtung) wird hier als Imperfektion (Bild 4.5.6) angenommen. Dieses imperfekte System wurde von Sättele [75] mit 9-knotigen Schalenelementen berechnet. Hier werden 8-knotige Schalenelemente verwendet.

Die Berechnung wird mit zwei unterschiedlichen Imperfektionsamplituden ( $w_0/h=0.08, 0.8$ ) durchgeführt. Die berechneten Traglasten sind in Tabelle 4.5.2 angegeben.

Um das Tragverhalten des perfekten und imperfekten Systems zu verdeutlichen, sind die Last-Durchbiegungskurven für den Plattenmittelpunkt für die beide Systeme in

Bild 4.5.7 zusammen aufgetragen,



Imperfektion:

$$z = w_0 \sin \frac{\pi}{B} x \sin \frac{\pi}{\lambda} y$$

Idealisierung:

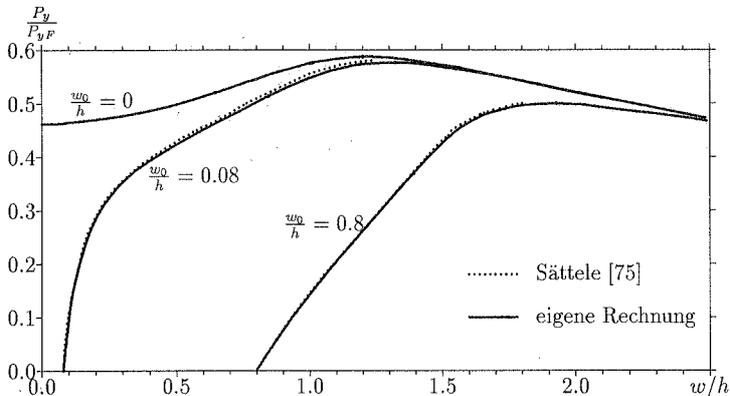
5×5 Netz für ein Plattenviertel

Integration: 2×2×7

**Bild 4.5.6:** Angenommene Imperfektionsform

Imperfektionsamplitude		Fließbeginn	Traglast
$\frac{w_0}{h} = 0.08$	Eigene Lösung	0.50	0.58
	Sättelle [75]	0.56	0.58
$\frac{w_0}{h} = 0.8$	Eigene Lösung	0.37	0.50
	Sättelle [75]	0.45	0.51

**Tabelle 4.5.2:** Ergebnisse des imperfekten Systems ( $\frac{P_y}{P_{yF}}$ )



**Bild 4.5.7:** Last–Durchbiegungskurve

Aus den Last–Durchbiegungskurven erkennt man, daß sich das System bei kleiner Imperfektion mit  $\frac{w_0}{h}=0.08$  ähnlich wie das perfekte System verhält. Im Vorbeulbereich wächst die Mittendurchbiegung zunächst nur schwach an. Ab etwa  $P_y/P_{yF}=0.3$  geht die Platte in einen deutlich weichen Zustand über. Im Nachbeulbereich fallen die beiden Kurven schnell zusammen. Im Gegensatz dazu wächst bei der größeren Imperfektion mit  $\frac{w_0}{h}=0.8$  die Mittendurchbiegung mit steigender Last weitgehend gleichmäßig an. Weit im Nachbeulbereich nähert sich die Kurve der des perfekten Systems.

## 4.5.2 Rechnerische Ermittlung der Rotationskapazität

### 4.5.2.1 Einleitung

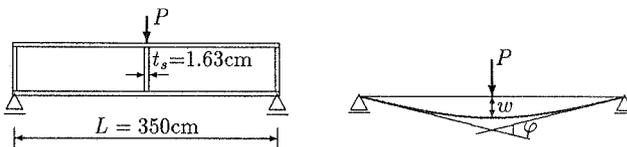
Ein gebräuchliches Verfahren zur realitätsnahen elastisch-plastischen Modellierung von Stabtragwerken im Grenzzustand der Tragsicherheit ist das Fließgelenkverfahren, bei dem die lokalen nichtlinearen Effekte der plastischen Zonen und des Beulens in punktförmigen Fließgelenken berücksichtigt werden. Die Berechtigung des Fließgelenkverfahrens liegt in der Tatsache, daß die Krümmung an den höchstbeanspruchten Stellen der Trägers nur in einem eng begrenzten Bereich stark ansteigt.

Die Anwendbarkeit des Fließgelenkverfahrens ist durch die Begrenzung der  $b/t$ -Verhältnisse für die gedrückten Querschnittsteile auf gedrungene Querschnitte beschränkt. Dabei wird vorausgesetzt, daß in den Fließgelenken die vollplastischen Schnittgrößen nicht nur erreicht, sondern auch unter großen Systemverformungen durch Spannungumlagerungen aufrechterhalten werden können.

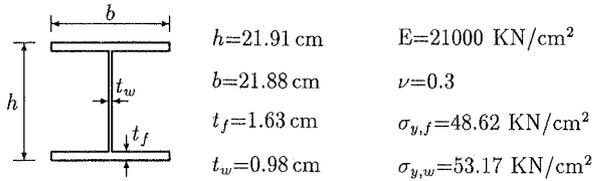
Für die in der Praxis wesentlich verwendeten dünnwandigen I-Profile ist die Anwendung des Fließgelenkverfahrens nur bei ausreichender Rotationskapazität zulässig, die stark von den Querschnittsabmessungen und der Schlankheit des Trägers abhängig ist. Durch Versuche und FE-Simulationsberechnungen haben Greschik et al. [36], Maquoi und Lognard [53], Roik und Kuhlmann [72] und Spangemacher und Sedlacek [79] die Rotationskapazität der I-Profile untersucht. Es wird gezeigt, daß die Rotationskapazität von vielen Faktoren beeinflusst wird, z.B. Querschnittsschlankheit, Imperfektion und Materialeigenschaften. Durch systematische Untersuchung der Einflußparameter wird in [79] eine experimentelle ermittelte Formel zur Bestimmung der Rotationskapazität angegeben; damit kann eine zulässige Gelenkverdrehung bei Anwendung des Fließgelenkverfahrens angegeben werden.

### 4.5.2.2 Simulationsberechnungen von 3-Punkt-Biegeversuchen

Hier wird der von Spangemacher und Sedlacek [79] durchgeführte 3-Punkt-Biegeversuch (D01A4M) mit Schalenelementen (Shell-1) simuliert. Bild 4.5.8 und 4.5.9 zeigen die Systemskizze und Querschnittsabmessungen des Profils HEB220. Im Bereich der Auflager und der Lasteinleitungsstelle werden Steifen vorgesehen, die gleich dick wie die Flansche ausgebildet sind.



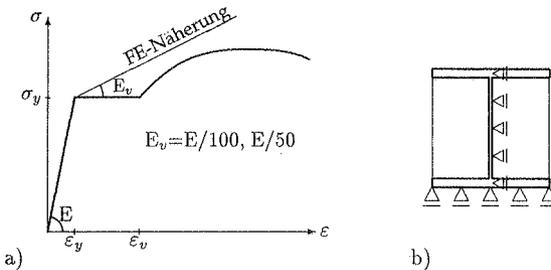
**Bild 4.5.8:** System



**Bild 4.5.9:** Profil HEB220 und Material StE460

Für die wirklichkeitsgetreue Versuchssimulation soll die gemessene  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve (Spannungs-Dehnungs-Kurve) des Werkstoffes Stahl StE460 des Zugversuches als Vergleichsspannungsgrenzlinie bei der FE-Berechnung berücksichtigt werden. Wegen der Einschränkung des verwendeten Programms kann die Vergleichsspannung nicht aus der Meßkurve digital abgegriffen werden. Näherungsweise wird in Bild 4.5.10a eine bilineare  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve aufgenommen.

Bild 4.5.10b zeigt die Festlegung der Randbedingungen an Trägerenden. Zusätzlich wird noch ein Punkt im Lasteinleitungsbereich in Längsrichtung gehalten, so daß das System statisch bestimmt ist.



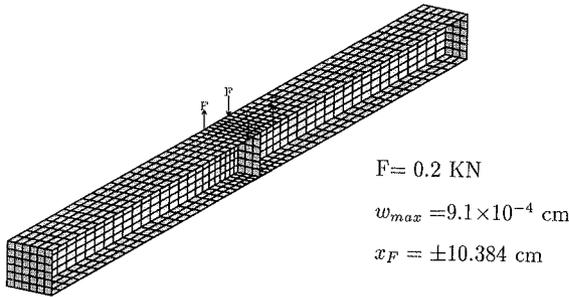
**Bild 4.5.10:** a). Spannungs-Dehnungs-Kurve von StE460  
b). Lagerungsbedingungen

Für die Modellierung des Trägers werden 8-knotige Schalenelemente verwendet. Die geometrische und stoffliche Nichtlinearität wird gleichzeitig berücksichtigt. In der Flächenebene werden 4 Gausspunkte verwendet. In Dickenrichtung werden 7 Integrationspunkte je Gausspunkt gesetzt. Die Anzahl der Integrationspunkte je Element beträgt 28.

Der Träger wird im Bild 4.5.11 vernetzt. Der Beulbereich wird zweckmäßigerweise verfeinert. Einschließlich der Steifenvernetzung werden insgesamt 1044 Elemente gebraucht.

Zur Initiierung des Beulvorganges wird das perfekte System durch Aufbringen von

Störkräften im Beulbereich modifiziert, die eine unsymmetrische Beulverformung am Obergurt verursachen (Bild 4.5.11). In Bezug auf den im Versuch beobachteten Versagensmodus werden die Störlasten am Rand der Oberflansche angesetzt, ungefähr 1/1.05 der halben Flanschbreite von der Trägermitte entfernt. Die lokale Verformung an der Einleitungsstelle der Störlasten macht 1/1792 der Flanschdicke aus. In [79] wird festgestellt, daß die geringere lokale Verformung im Bereich 1/1000~1/5000 der Flanschdicke kaum Einfluß auf die Tragfähigkeit zeigt.



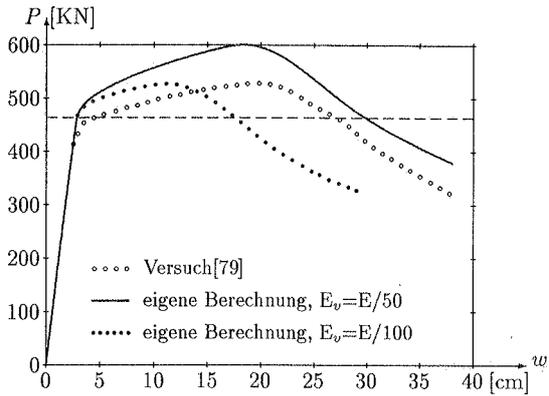
**Bild 4.5.11:** Netz und Erzeugung der Imperfektion

Wegen der approximativen Annahme der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve wird die Berechnung mit zwei unterschiedlichen Verfestigungsmoduln ausgeführt. Der kleinere Rechenwert  $E_v = E/100$  ist für das Fließplateau der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Kurve gedacht. Der größere Rechenwert  $E_v = E/50$  entspricht ungefähr dem wirklichen Verfestigungsmodul. Die Ergebnisse werden in Tabelle 4.5.3 und Bild 4.5.12 zusammengefaßt, wobei  $M_{pl}$  das vollplastische Moment des Querschnitts ist.  $\varphi_{rot}$  ist die Winkelverdrehung beim Wiedererreichen von  $M_{pl}$ .  $\varphi_{pl}$  ist die theoretische Winkelverdrehung beim ersten Erreichen von  $M_{pl}$ .  $\varphi_{pl}^1$  ist die entsprechende rechnerische Winkelverdrehung.  $R = \varphi_{rot}/\varphi_{pl} - 1$  definiert die Rotationskapazität.  $\varphi_{max}$  ist der zugehörige Winkel beim Erreichen des maximalen Moments  $M_{max}$ .

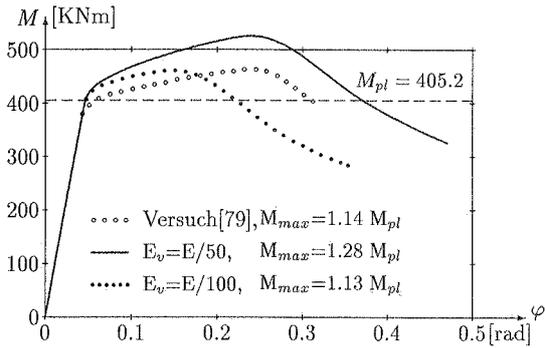
	$M_{max}/M_{pl}$	$\varphi_{pl}^1$	$\varphi_{max}$	$\varphi_{rot}$	$R = \varphi_{rot}/\varphi_{pl} - 1$
Versuch [79]	1.14	—	0.2520	0.3108	6.40
$E_v = E/50$	1.28	0.0452	0.2380	0.3716	7.85
$E_v = E/100$	1.13	0.0462	0.1508	0.2223	4.29

**Tabelle 4.5.3:** Vergleich der Ergebnisse

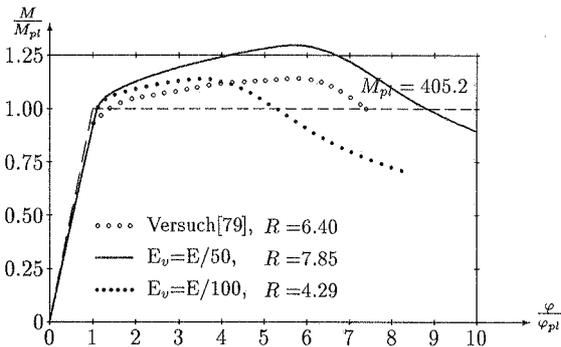
Der Verfestigungsmodul  $E_v$  beeinflusst in erster Linie das Beulverhalten im plastischen Bereich. Je größer  $E_v$  ist, je steifer also der Werkstoff im Verfestigungsbereich reagiert, umso später setzt Beulen ein. Dieses Verhalten wird in Bild 4.5.12 deutlich gezeigt.



**Bild 4.5.12a:** Last-Durchbiegungskurve

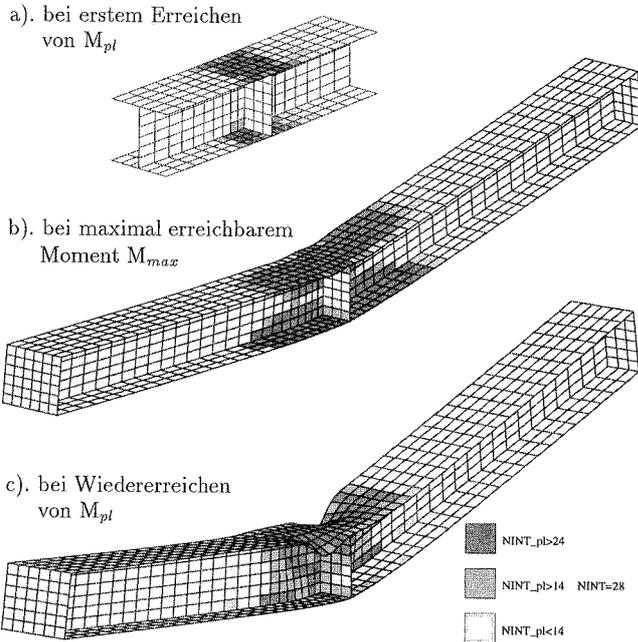


**Bild 4.5.12b:** Momenten-Verdrehungskurve

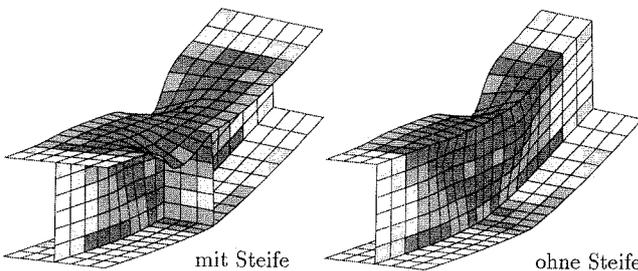


**Bild 4.5.12c:** Momenten-Rotationskurve ( $\varphi_{pl} = 0.042$ )

Beim kleinen Verfestigungsmodul  $E_v = E/100$  ist die erreichte maximale Tragfähigkeit  $M_{max}/M_{pl}$  ungefähr gleich wie die im Versuch. Die sich einstellende Rotationskapazität  $R=4.29$  weicht aber stark vom Versuchswert  $R=6.4$  ab. Beim größeren Verfestigungsmodul  $E_v = E/50$  werden die Rotationskapazität und die maximale Tragfähigkeit durch diese vereinfachte Werkstoffkennlinie überschätzt.



**Bild 4.5.13:** Verformungen und Plastizierungen des Trägers bei  $E_v = E/50$



**Bild 4.5.14:** örtliche Verformungen des Trägers beim Wiedererreichen von  $M_{pl}$

Bild 4.5.13 zeigt die Verformungen und Plastizierungen des Trägers an drei charakteristischen Stellen der Momenten-Rotationskurve in Bild 4.5.12c bei  $E_v = E/50$ , wobei  $NINT = 4 \times 7$  die Anzahl der Integrationspunkte je Element ist.  $NINT_{pl}$  ist die Anzahl der plastizierten Integrationspunkte, die elementweise veränderlich ist. Zur Vereinfachung wird die Plastizierung in drei Stufen eingeteilt, nämlich  $NINT_{pl} > 24$  (voll, fast vollplastisch),  $NINT_{pl} > 14$  (halbplastisch) und  $NINT_{pl} < 14$  (teilplastisch).

In Bild 4.5.13 ist zu erkennen, daß bis zum ersten Erreichen der idealplastischen Traglast praktisch keine sichtbaren Veränderungen am Träger auftreten. Wegen der Spannungsumlagerung und der materiellen Verfestigung ist der Querschnitt in Trägermitte nicht vollplastisch. Nach Erreichen der maximal aufnehmbaren Last wird dieser Querschnitt fast durchplastiziert. Das lokale Ausbeulen des Oberflansches ist weiterhin gering. Danach wächst die lokale Ausbeulung des Druckflansches erheblich stärker an. Beim Wiedererreichen der vollplastischen Last ist die lokale Verformung schon sichtbar groß. Obwohl der Träger im Versagensbereich eigentlich überall gleich beaufschlagt ist, verformt sich der Querschnitt wesentlich nur an der Stelle, wo die Störlast in der gleichen Richtung der Systemlast zeigt.

In Bild 4.5.14 wird die Verformung der Trägermitte beim Wiedererreichen von  $M_{pl}$  örtlich dargestellt. Eine sichtbare Mitausbeulung des Stegs ist zu erkennen.

## 4.6 Schlußfolgerungen

Die vorherigen Berechnungen zeigen die allgemeine Anwendbarkeit der Schalenelementen zur Modellierung von dünnwandigen Stabtragwerken.

Der Vorteil der Schalenmodelle ist die genaue Erfassung der Interaktion der lokalen und globalen Verformungen auf das Systemverhalten.

Der Nachteil sind die relativ höheren Rechenkosten. Durch vernünftige Knotennummerierung des vorgestellten FE-Netzgenerierungskonzeptes wird die Bandbreite des Gleichungssystems stark reduziert, so daß auch größere Systeme bei relativ feinerer Vernetzung untersucht werden können.

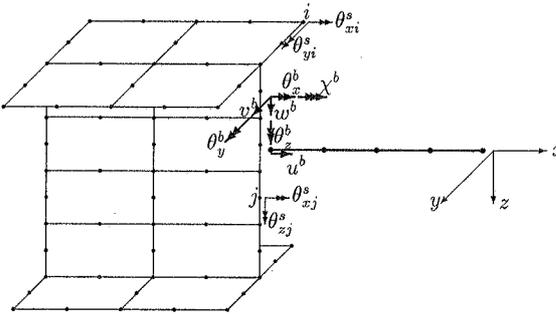
Eine "Problematik" beim Schalenmodell ist die Eingabe der Randbedingungen (ausgenommen volle Einspannung) gegenüber dem Balkenmodell, besonders bei unsymmetrischen Querschnitten. Zum Beispiel kann unter zentrischer Druckbelastung unterhalb der Euler-Knicklast ein geradliniges U-Profil im Balkenmodell bei gelenkiger Lagerung nur verkürzt werden. Beim Schalenmodell tritt aber immer eine geringe seitliche Verformung in der Trägermitte auf. Der Grund dafür ist das Fallenlassen der grundlegenden Annahme der starren Querschnitte des Balkenmodells. Andererseits treten bei kürzeren Trägern lokale Querschnittsverformungen an der Lasteinleitungsstelle auf. Um die gewünschten Ergebnisse zu erzielen und die Realität besser anzunähern, müssen beim Schalenmodell möglicherweise Quersteifen an der Lasteinleitungsstelle angebracht werden.

## 5 Verknüpfung der Balken- und Schalenelemente

In diesem Kapitel wird ein Kopplungskonzept von Balken- und Schalenelementen vorgestellt, das auf der direkten Einarbeitung der Multikopplungsbedingungen basiert. Als Anwendung werden einige Beispiele vorgestellt.

### 5.1 Multikopplungsbedingungen

Bild 5.1 zeigt ein nach Bedarf in Stäbe und Störungsbereiche gegliedertes Stabwerk. Der Störungsbereich wird mit finiten Schalenelementen vernetzt, für die Stäbe gilt die übliche Modellierung mit dünnwandigen Balkenelementen. Die beiden Bereiche müssen gekoppelt werden.



**Bild 5.1:** Modellierung eines Stabs mit gestörtem Bereich

Üblicherweise haben Schalenelemente 5 Freiheitsgrade, während Balkenelemente 7 Freiheitsgrade besitzen. Deshalb muß die Knotennummerierung in den beiden Teilen völlig getrennt erfolgen. Als Kompatibilitätsbedingungen wird hier die in Abschnitt 2.3 vorgestellte Querschnittskinematik der dünnwandigen Balken benutzt.

$$\begin{aligned}
 u_i^s &= u^b + Z_i \theta_y^b - Y_i \theta_z^b - \omega_i \chi^b \\
 v_i^s &= v^b - (Z_i - Z_M) \theta_x^b \\
 w_i^s &= w^b + (Y_i - Y_M) \theta_x^b \\
 \theta_{x_i}^s &= \theta_x^b \\
 \theta_{y_i}^s &= \theta_y^b - (Y_i - Y_M) \chi^b \\
 \theta_{z_i}^s &= \theta_z^b - (Z_i - Z_M) \chi^b
 \end{aligned}$$

wobei  $u^b, v^b, w^b, \theta_x^b, \theta_y^b, \theta_z^b, \chi^b$  die 7-Verschiebungskomponenten eines einzigen Knotens vom Balkenelement sind, während  $u_i^s, v_i^s, w_i^s, \theta_{x_i}^s, \theta_{y_i}^s, \theta_{z_i}^s$  die Verschiebungskomponenten des Knotens  $i$  eines Schalenelementes an der Kopplungsstelle sind. Je nach der Orientierung des Balkens im Raum wird eine Komponente von  $\theta_{x_i}^s, \theta_{y_i}^s, \theta_{z_i}^s$  festgehalten, die die Rotation um die Schalennormale beinhaltet.  $Y_i, Z_i$  und  $\omega_i$  sind

Querschnittskordinaten und normierte Wölbkoordinaten des Querschnitts.  $Y_M, Z_M$  sind Koordinaten des Schubmittelpunktes, die auf das Hauptachsensystem des Querschnitts bezogen sind.

Obige Beziehungen dienen als Basis der geometrischen Kopplung der beiden durch unterschiedliche Elemente modellierten Strukturteile. Deshalb ist eine sorgfältige Eingabe der Kopplungsgleichungen notwendig, wobei auch das Vorzeichen beachtet werden muß. Eine nicht zutreffende Kopplung in der Verschiebungsrichtung kann ein äußeres Moment verursachen, das nicht in den Reaktionskräften auftaucht.

Es sei hier erwähnt, daß die Mitnahme der Zwangsbedingung  $\theta_{xi}^s = \theta_x^b$  das System etwas steifer machen kann. Die mit Schalenelementen berechneten Verdrehungen der Querschnittspunkte in der Längsrichtung des Stabes können sich im Querschnitt punktweise ändern. Beim Gleichsetzen dieser Verdrehungen wird ein „starres“ Gebiet in der Schnittstelle erzeugt.

## 5.2 Lösungskonzept

Schneider [77] geht den Weg, daß alle nicht in der Koppelfläche liegenden Elementknoten des Störungsbereichs eliminiert werden. Es entsteht dann ein Makroelement, das in Rahmen der FE-Analyse als Substruktur betrachtet wird. Die nach der Einführung der Zwangsbedingungen verbleibenden Verschiebungsvariablen können direkt mit den Stäben kompatibel angeschlossen werden.

Im Vergleich zu [77] wird bei Yamao und Sakimoto [91] keine Substruktur, sondern der direkte Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen verwendet. Die Kopplungsbedingungen werden durch Eliminierung der abhängigen Unbekannten von der nach unabhängigen und abhängigen Unbekannten geordneten Systemsteifigkeitsmatrix formuliert.

Um wenige Änderung im vorhandenen Programm vornehmen zu müssen, werden in dieser Arbeit die Kopplungsbedingungen in der Lösungsphase ohne Sortierung der Unbekannten der wie üblich zusammengebauten Systemsteifigkeitsmatrix berücksichtigt. Die Einarbeitung der Zwangsbedingungen kann durch direktes Einsetzen, unter Verwendung Lagrangescher Multiplikatoren oder mit Hilfe der Penalty-Methode geschehen. Um eine möglichst große Genauigkeit der Ergebnisse zu erhalten, wird hier das direkte Einsetzen verwendet.

### 5.2.1 Matrizenmanipulation beim direkten Einsetzen

Eine FE-Berechnung schließt grundsätzlich mit der Auflösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Dabei ist  $\mathbf{K}$  in der Regel die Steifigkeitsmatrix,  $\mathbf{u}$  der Verschiebungsvektor und  $\mathbf{F}$  der Lastvektor des Finite-Elemente-Systems.

Die wesentliche Randbedingung ist:

$$u_i = R_1 \quad (\text{Typ 1}) \quad (15)$$

Normalerweise werden diese Bedingungen beim Fall  $R_1 = 0$  (z.B. Lagerbedingungen) während des Zusammenbaus direkt berücksichtigt. Es bleibt eine reduzierte Systemgleichung. Für den Fall  $R_1 \neq 0$  kann die Systemgleichung durch geometrische Kondensation problemlos gelöst werden.

Wegen der ungleichen Elementtopologie, wie z.B. in Bild 5.1, treten zusätzliche geometrische Zwangsbedingungen auf. Diese nehmen die Formen an:

$$Au_i + Bu_j = R_2 \quad (\text{Typ 2}) \quad (16)$$

$$Au_i + Bu_j + Cu_k = R_3 \quad (\text{Typ 3}) \quad (17)$$

$$Au_i + Bu_j + Cu_k + Du_l = R_4 \quad (\text{Typ 4}) \quad (18)$$

$$Au_i + Bu_j + Cu_k + Du_l + Eu_m = R_5 \quad (\text{Typ 5}) \quad (19)$$

wobei  $u_i, u_j, u_k, u_l, u_m, \dots$  Verschiebungen sind (eine Verschiebung ist unabhängig, die übrigen sind abhängig), während  $A, B, C, D, E, \dots$  die entsprechenden Koeffizienten sind. Diese abhängigen Verschiebungen können zu einem oder mehreren Knoten gehören.  $R_2, R_3, R_4, R_5, \dots$  auf der rechten Seite sind Konstanten, die oft Null sind. Solche Bedingungsungleichungen treten auch in der adaptiven Analyse auf.

Die Lösung der Gleichung mit linearen Zwangsbedingungen mit direktem Einsetzen soll hier an einem Beispiel mit einer Zwangsbedingung des Typs 2 erklärt werden. Wir nehmen an, die ursprüngliche Form der Gleichung ist

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{1j} & K_{1k} & K_{1l} \\ K_{j1} & K_{jj} & K_{jk} & K_{jl} \\ K_{k1} & K_{kj} & K_{kk} & K_{kl} \\ K_{l1} & K_{lj} & K_{lk} & K_{ll} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_j \\ u_k \\ u_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_j \\ F_k \\ F_l \end{pmatrix} \quad (20)$$

mit der zusätzlichen Bedingung

$$Au_j + Bu_k = R_2 \quad (21)$$

Der Einfachheit halber wird die Zwangsbedingung umgeschrieben:

$$u_j = \rho - \alpha u_k \quad \text{mit } \alpha = \frac{B}{A}, \quad \rho = \frac{R_2}{A} \quad (22)$$

wobei  $u_j$  als die von  $u_k$  abhängige Variable angenommen wird.

Nach Einsetzen von (22) in (20) folgt:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{1k} - \alpha K_{1j} & K_{1l} \\ K_{j1} & 0 & K_{jk} - \alpha K_{jj} & K_{jl} \\ K_{k1} & 0 & K_{kk} - \alpha K_{kj} & K_{kl} \\ K_{l1} & 0 & K_{lk} - \alpha K_{lj} & K_{ll} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_k \\ u_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 - \rho K_{1j} \\ F_j - \rho K_{jj} \\ F_k - \rho K_{kj} \\ F_l - \rho K_{lj} \end{pmatrix}$$

Diese Änderung verletzt die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix und macht das Gleichungssystem singular. Zur Wiederherstellung der Symmetrie subtrahiert man das  $\alpha$ -fache der Zeile j von der Zeile k. Anschließend werden alle Koeffizienten der abhängigen Gleichung j durch Null ersetzt.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{1k} - \alpha K_{1j} & K_{1l} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{k1} - \alpha K_{j1} & 0 & K_{kk} - 2\alpha K_{jk} + \alpha^2 K_{jj} & K_{kl} - \alpha K_{jl} \\ K_{l1} & 0 & K_{lk} - \alpha K_{lj} & K_{ll} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ u_k \\ u_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 - \rho K_{1j} \\ 0 \\ F_k - \rho K_{kj} - \alpha F_j + \alpha \rho K_{jj} \\ F_l - \rho K_{lj} \end{pmatrix}$$

Diese Modifikation macht das Gleichungssystem symmetrisch, aber es bleibt immer noch singular. Das Problem kann durch die Reduktion um 1-Dimension des Gleichungssystems gelöst werden. Um wenige Änderungen im vorhandenen Gleichungslöser vornehmen zu müssen, wird hier die Einheitsgröße 1 in die Hauptdiagonale der eliminierten Gleichung j gesetzt.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{1k} - \alpha K_{1j} & K_{1l} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ K_{k1} - \alpha K_{j1} & 0 & K_{kk} - 2\alpha K_{jk} + \alpha^2 K_{jj} & K_{kl} - \alpha K_{jl} \\ K_{l1} & 0 & K_{lk} - \alpha K_{lj} & K_{ll} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_j^* \\ u_k \\ u_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 - \rho K_{1j} \\ 0 \\ F_k - \rho K_{kj} - \alpha F_j + \alpha \rho K_{jj} \\ F_l - \rho K_{lj} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Daraus folgt  $u_j^* = 0$ . Der richtige Wert von  $u_j$  kann durch (22) nach der Lösung von (23) erreicht werden.

Analog kann die Gleichung

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{pmatrix} \quad (24)$$

mit der Zwangsbedingung des Typs 3

$$Au_2 + Bu_4 + Cu_6 = R_3 \quad (25)$$

problemlos behandelt werden. Die Ergebnisse lauten:

$$u_4 = \rho - \alpha u_2 - \beta u_6 \quad \text{mit } \alpha = \frac{A}{B}, \quad \beta = \frac{C}{B}, \quad \rho = \frac{R_3}{B} \quad (26)$$

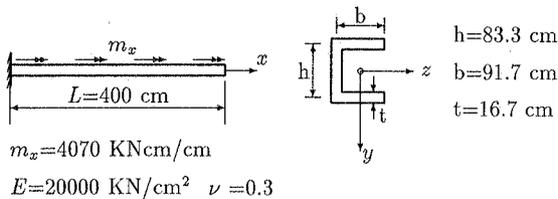


## 5.3 Numerische Untersuchungen

Die folgenden Beispiele werden für die Überprüfung des in den vorhergehenden Abschnitten vorgestellten Kopplungskonzeptes ausgewählt. Hier wird nur die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt.

### 5.3.1 Kragträger mit U-Profil unter Torsion

Ein Kragträger mit U-Profil ist im Bild 5.2 dargestellt. Der Träger ist mit einem gleichmäßigen Torsion  $m_x=4070$  KNcm/cm belastet. Das Beispiel wurde schon von Roark und Young [68] analytisch und von Shakourzadeh, Guo und Batoz [78] mit Balkenelementen untersucht.



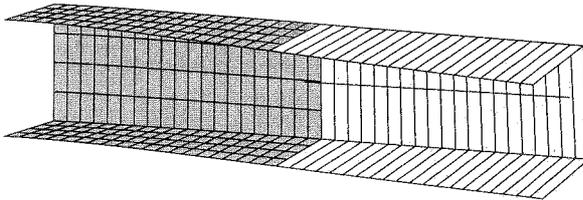
**Bild 5.2:** System, Material und Last

In Tabelle 5.1 sind die Ergebnisse von unterschiedlichen Lösungen gegenübergestellt. Im Vergleich zu Balkenelementen ist die berechnete Endverdrehung mit reinen Schalenelementen um 11% größer. Wegen der kleinen Torsionskraft gibt es hier keinen weiter vorn erwähnten Störungsbereich. Für eine Diskretisierung mit gekoppelten Elementen ist es vernünftig, den Stützbereich des Trägers mit Schalenelementen zu vernetzen. Die Ergebnisse mit gekoppelten Elementen liegen wie erwartet zwischen den mit reinen Balken- und Schalenelementen berechneten Werten, ungefähr um 4% größer im Vergleich zu der Lösung mit reinen Balkenelementen. Das bestätigt die Richtigkeit der Kopplungsmethode.

	Endverdrehung $\theta_x$ (rad)	Endverwindung $\chi$ (rad/cm)	Bimoment ( $x=0$ ) KNcm <sup>2</sup>
Analytische Lösung [68]	0.045	$0.1160 \times 10^{-3}$	$0.1833 \times 10^9$
Balkenelemente	0.04494	$0.1164 \times 10^{-3}$	$0.1833 \times 10^9$
Gekoppelte Elemente*	0.04669	$0.1115 \times 10^{-3}$	–
Schalenelemente <sup>o</sup>	0.04993	–	–
* $x=0-200$ cm, $20(4 \times 4 \times 4)$ Schalenelemente; $x=200-400$ cm, 20 Balkenelemente			
<sup>o</sup> eigene Berechnung, Netze $40(4 \times 4 \times 4)$			

**Tabelle 5.1:** Ergebnisse von unterschiedlichen Lösungen

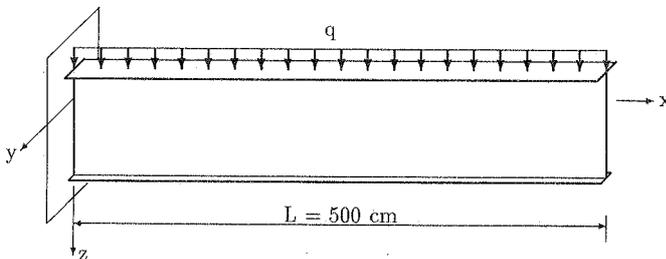
Bild 5.3 zeigt die Verformung des Trägers bei der Diskretisierung mit gekoppelten Elementen. Zur Anschaulichkeit wird der mit Balkenelementen vernetzte Bereich räumlich durch Flächenelemente dargestellt.



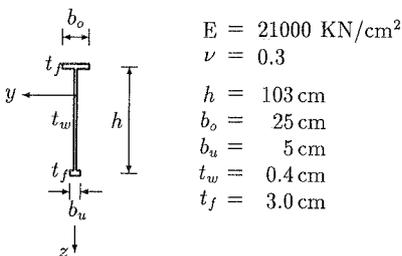
**Bild 5.3:** Diskretisierung und Verformung mit gekoppelten Elementen

### 5.3.2 Kragträger mit I-Profil unter Gleichstreckenlast

Der im Bild 5.4 dargestellte Kragträger mit einfach symmetrischem I-Profil (Bild 5.5) unter Gleichstreckenlast wurde von Osterrieder und Werner [60] mit kombinierten Balken- und Faltwerkelementen untersucht. Wegen des schlanken Stegs tritt eine ausgeprägte lokale Verformung an der Einspannstelle auf. In solchen Fällen gibt die Analyse mit reinen Balkenelementen falsche Ergebnisse.

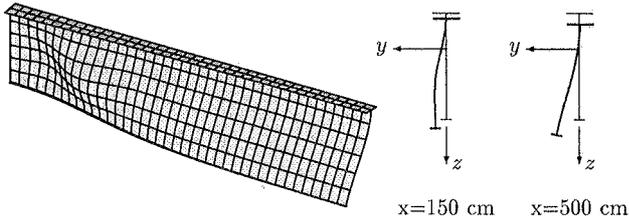


**Bild 5.4:** System und Last



**Bild 5.5:** Querschnitt und Material

Bei der im Bild 5.6 gezeigten Beulfigur des Trägers bei der Diskretisierung mit Schalenelementen ist zu sehen, daß die lokale Verformung außerhalb des Stützberreichs sehr gering ist. Deshalb können hier gekoppelte Elementen eingesetzt werden.

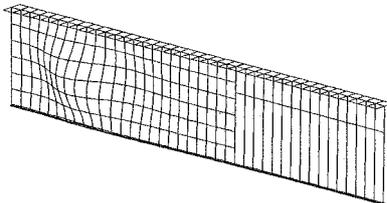


**Bild 5.6:** Beulfigur bei Schalenelementen

Im Bereich von  $3/5L$  von der Einspannstelle wird der Träger mit  $24(2 \times 6 \times 2)$  Schalenelementen vernetzt. Für den übrigen Bereich werden 16 Balkenelemente eingesetzt. Die kritische Last und die Enddurchbiegung bei  $q=1 \text{ KN/m}$  werden in Tabelle 5.2 gegenübergestellt. Die Ergebnisse mit gekoppelten Elementen liegen wie erwartet zwischen denen mit reinen Balken- und Schalenelementen und nähern sich den richtigen Werten aus reinen Schalenelementen an. Dies zeigt die Gültigkeit und Durchführbarkeit der Berechnung mit gekoppelten Elementen zur Analyse von Trägern mit partiell lokaler Verformung.

	Kritische Last KN/m	Enddurchbiegung cm (bei $q=1 \text{ KN/m}$ )
Balkenelemente (globales Kippen)	42.42	0.0187
Gekoppelte Elemente*	14.51	0.0215
Schalenelemente, Netze $40(2 \times 6 \times 2)$	13.965	0.0221
Kombinierte Balken- und Faltwerkselemente[60]	13.569	-
* $x=0-300\text{cm}$ , $24(2 \times 6 \times 2)$ Schalenelemente; $x=300-500\text{cm}$ , 16 Balkenelemente		

**Tabelle 5.2:** Ergebnisse von unterschiedlichen Lösungen

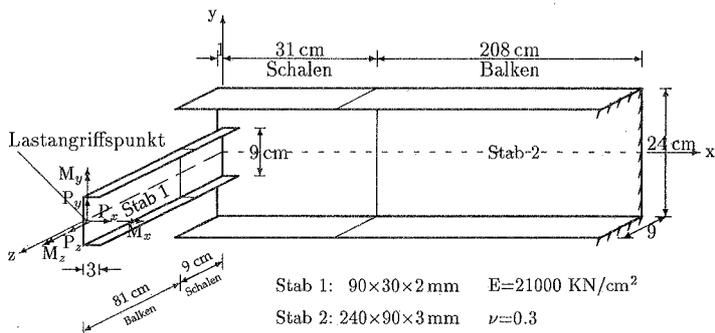


**Bild 5.7:** Erste Eigenform mit gekoppelten Elementen

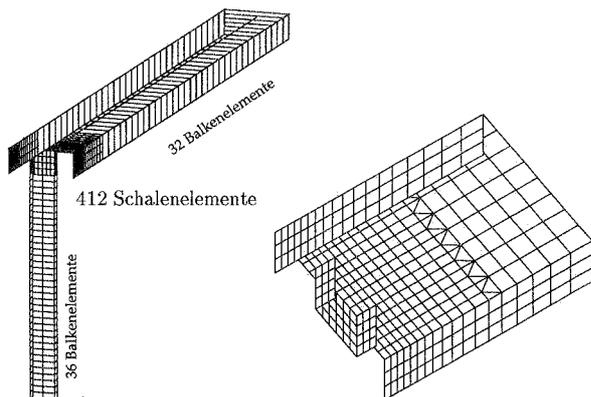
Im Bild 5.7 wird die erste Eigenform des Trägers bei der Vernetzung mit gekoppelten Elementen dargestellt. Die Eigenwertberechnung wird mit der Formel  $(K - \lambda I)\phi = 0$  durchgeführt, damit die Übergangsbedingungen an der Kopplungsstelle problemlos behandelt werden können (näheres dazu siehe Abschnitt 5.4).

### 5.3.3 Abgewinkelter dünnwandiger Kragträger mit U-Profil

Der im Bild 5.8 dargestellte Kragträger aus zwei senkrecht aufeinander stoßenden U-Profilabschnitten unterschiedlicher Größe unter konzentrierten Lasten am freien Ende entstammt der Arbeit von Gründer [37] und wird auch von Schneider [77] zur Untersuchung seiner Kopplungsstrategie ausgewählt. Dort wird gezeigt, daß große Verformungen im Anschlußbereich auftreten, die das Systemverhalten entscheidend beeinflussen und wegen der ausgeprägten Dünnwandigkeit der Profile nicht von der Stabtheorie erfaßt werden können.



**Bild 5.8:** System, Material und Last



**Bild 5.9:** Vernetzungen mit Balken- und Schalenelementen

Das gleiche Beispiel wird hier zur Prüfung des in dieser Arbeit vorgestellten Kopp-  
lungskonzeptes aufgenommen. Bild 5.9 zeigt die Vernetzung mit Balkenelementen  
und Schalelementen Shell-6.

Verschiedene am Schwerpunkt des freien Endquerschnittes angreifende Einzellasten  
werden zur Untersuchung des Stabsystems mit lokalem Störungsbereich aufgebracht.  
Die berechneten Verschiebungen, Verdrehungen und Verdrillungen des Endquer-  
schnittes werden auf den Lastangriffspunkt bezogen.

Lasten	Lösung	$u$ [cm]	$w$ [cm]
$P_x = -0.1$ KN	(a)	-3.49	-0.239
	(b)	-3.69	-0.252
	(c)	-3.59	-0.247
$P_z = 0.1$ KN	(a)	0.239	0.216
	(b)	0.252	0.236
	(c)	0.247	0.231
$M_y = 10$ KNcm	(a)	4.11	0.268
	(b)	4.36	0.283
	(c)	4.25	0.278

**Tabelle 5.3a:** Verschiebungen des Lastangriffspunktes

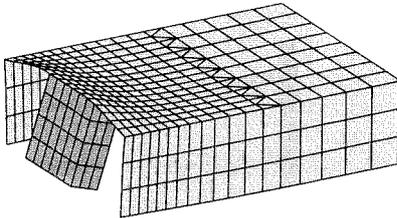
Lasten	Lösung	$v$ [cm]	$\theta_z$ [rad]	$\chi$ [ $\frac{10^{-3}}{\text{cm}}$ ]
$P_y = 0.1$ KN	(a)	14.2	0.0783	-0.748
	(b)	15.2	0.0773	-0.733
	(c)	15.2	0.0770	-0.730
$M_x = -10$ KNcm	(a)	15.30	0.0909	-1.340
	(b)	16.35	0.0899	-1.356
	(c)	16.31	0.0896	-1.356
$M_z = 1$ KNcm	(a)	0.783	0.213	-2.64
	(b)	0.773	0.217	-2.69
	(c)	0.770	0.215	-2.68
$B = 100$ KNcm <sup>2</sup> (Bimoment)	(a)	-0.748	-0.264	6.12
	(b)	-0.732	-0.269	6.41
	(c)	-0.730	-0.268	6.40

**Tabelle 5.3b:** Verschiebungen des Lastangriffspunktes

Im Vergleich zu den Ergebnissen von [37] und [77] sind die Ergebnisse für sieben  
Lastfälle in der Tabelle 5.3 aufgeführt, wobei die Lösungen sind:

- (a) von Grunder[37] mit insgesamt 216 hybriden Faltelementen für den Anschlußbereich. Die Berechnungen werden nach der Theorie I. Ordnung durchgeführt. Zur Kompatibilität werden die Steifigkeitsmatrizen der diskretisierten Störungsbereiche auf die Freiheitsgrade der Stabtheorie kondensiert.
- (b) von Schneider[77] mit 108 Semiloof-Schalenelementen mit Ausnutzung der Symmetrie des Systems für den Anschlußbereich und Balkenelementen für die Restbereiche. Die Kopplung von Balkenelementen und Schalenelementen erfolgt wie in dieser Arbeit durch Einarbeitung der Zwangsbedingungen. Zur Realisierung der Elementkopplungen wird die Penalty-Methode verwendet. Die Berechnung basiert auf der Theorie I. Ordnung.
- (c) eigene Berechnung mit 388 acht-knotigen und 24 sechs-knotigen Schalenelementen für den Anschlußbereich (Bild 5.9) um eine bessere Erfassung der Spannungskonzentration an der Verbindungsstelle zu erhalten. Zum Vergleich mit den anderen Ergebnissen wird auch eine lineare Berechnung durchgeführt.

Für den Lastfall  $P_x = -0.1 \text{ KN}$  ist die Verformung im Bild 5.10 mit dem Vergrößerungsfaktor 10 dargestellt. Die erkennbare lokale Verformung in Anschlußbereich kann nicht von der Stabtheorie erfaßt werden.

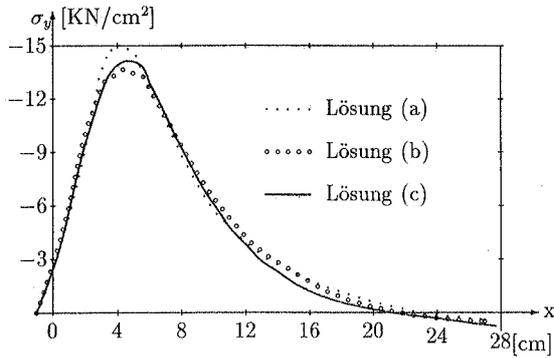


**Bild 5.10:** Verformung beim Lastfall  $P_x = -0.1 \text{ KN}$

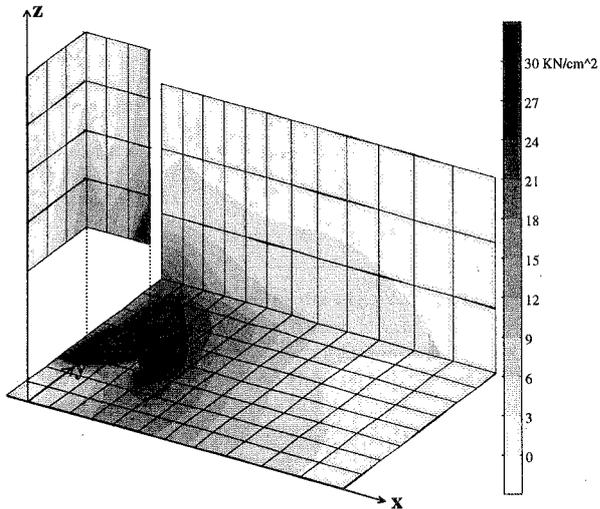
Die Vergleichbarkeit der Ergebnisse besteht nicht nur in den Verformungen, sondern auch in den Spannungen. Stellvertretend dafür wird der Verlauf der Längsspannung  $\sigma_x$  aus Biegung um die  $y$ -Achse entlang des Symmetrieschnittes im Stab 2 beim Lastfall  $P_x = -0.1 \text{ KN}$  betrachtet (Bild 5.11). Eine gute qualitative Übereinstimmung zwischen unterschiedlichen Lösungen ist ersichtlich. Die Spannungsspitze liegt ungefähr an der Stelle  $x=4 \text{ cm}$ . Weiter entfernt von dieser Stelle ist die Spannung schnell abgeklungen. Dies bestätigt das Prinzip von de Saint Venant und gibt eine Abschätzung über die Größe der mit Schalenelementen zu diskretisierenden Stababschnitte.

In Bild 5.12 ist für den Lastfall  $P_x = -0.1 \text{ KN}$  die Verteilung der Vergleichsspannungen an den Außenfläche für beide Profilabschnitte unter Berücksichtigung der

Symmetrie graphisch aufgetragen. Man erkennt, daß im unmittelbaren Störungsbereich der Verbindung eine Spannungumlagerung erfolgt. Die Konzentration der Vergleichsspannungen tritt logischerweise an der Anschlußstelle auf.



**Bild 5.11:** Stegplattenbiegespannung  $\sigma_x$  im Symmetrieschnitt des Stabes 2 beim Lastfall  $P_x = -0.1$  KN



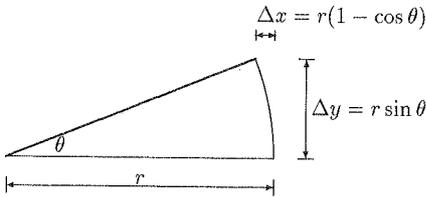
**Bild 5.12:** Verteilung der Vergleichsspannungen an der äußeren Fläche beim Lastfall  $P_x = -0.1$  KN

## 5.4 Kritik und Schlußfolgerungen

Die im Abschnitt 5.3 berechneten Beispiele haben die Leistungsfähigkeit der gekoppelten Elementen gezeigt. Mit der Kopplung können Falterwerks- bzw. Schalenelemente und Balkenelemente ihre eigenen Stärken und Fähigkeiten in vollem Maße entfalten. Dies kann den Rechenaufwand stark reduzieren. Leider gibt es auch einige Unzulänglichkeiten.

### 1. Vereinfachung in den Zwangsgleichungen

Die im Abschnitt 5.1 angegebenen Zwangsgleichungen sind eine Vereinfachung der genauen Querschnittskinematik der dünnwandigen Balken und nur gültig für kleine Verformungen. Die genauen Verschiebungen eines beliebigen Punktes auf der Profilmittellinie enthalten trigonometrische Funktionen der Rotation um den Schubmittelpunkt bezüglich des nicht verdrehten Hauptachsensystems, vgl. Gleichung (1) im Abschnitt 2.3.1. Für kleine Relativverdrehungen der Stabenden gegen die lokale x-Achse und kleine Verformungszuwächse darf die trigonometrische Funktion durch Abbruch ihrer Potenzreihe nach dem ersten Glied linearisiert werden. Das läßt sich aus Bild 5.13 leicht erklären.



**Bild 5.13:** Verschiebung aus Rotation

Für kleinen Drehwinkel  $\theta$  gelten:

$$\sin(\theta) \approx \theta, \quad \cos(\theta) \approx 1$$

Bei Berücksichtigung höherer Glieder der Potenzreihe erhält man nichtlineare Bedingungsgleichungen. Das führt zu einer aufwendigen Umsetzung im Programm.

### 2. Formulierung der Schalenelemente

Die im Abschnitt 5.2 vorgestellte Kopplung wird in der Systemebene nach dem Zusammenbau der Elementsteifigkeitsmatrizen ausgeführt; zugrunde liegt die totale Lagrange-Formulierung zur Beschreibung der Bewegung eines Körpers im Raum. Damit ist es möglich, daß große Verschiebungen und Rotationen (bei kleiner Verzerrung) auftreten. Wegen der Linearisierung der trigonometrischen Funktionen können sich

die Fehler mit der Laststeigerung aufaddieren. Mit mitgehender Lagrange-Formulierung können diese Fehler stark reduziert werden.

### 3. Problematik in der Eigenwertanalyse

Für eine Stabilitätsuntersuchung des Systems mit linearem Vorbeulverhalten wird oft eine Eigenwertanalyse angewandt. Im allgemeinen nimmt das Eigenwertproblem die Form an:

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_0 - \lambda \mathbf{K}_g] \phi &= \mathbf{0} \\ [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}] \phi &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathbf{K}_0$  die elastische Steifigkeitsmatrix und  $\mathbf{K}_g$  die geometrische Matrix.  $\mathbf{K}$  ist die Gesamtmatrix.  $\lambda$  ist der Eigenwert und  $\phi$  die Eigenform.

In der ersten Form gibt es eine Aufspaltung der gesamten Systemsteifigkeitsmatrix. Das führt zu einem Widerspruch mit der in der Systemebene durchgeführten Kopplung. Beim zweiten Fall können Kopplungsgleichungen problemlos behandelt werden, weil das Gleichungssystem die Kopplungsbedingungen mit dem im Abschnitt 5.2 vorgestellten Konzept berücksichtigen kann.

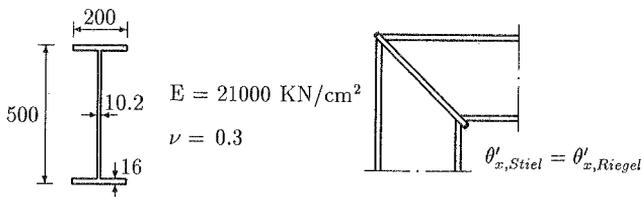
## 6 Rahmen und Rahmenecken

In vorherigen Kapitel werden nur einzelne Stabträger berechnet. Das typische Tragverhalten, z.B. Kippen und Biegedrillknicken, wird rechnerisch mit Balken- und Schalelementen bestätigt. Um das Tragverhalten der zusammengesetzten Stabtragwerke zu zeigen, werden hier einige Rahmensysteme untersucht.

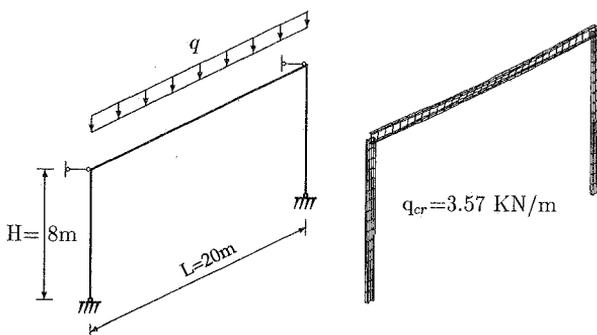
### 6.1 Räumliches Tragverhalten eines Rahmens

Die Stabilitätsuntersuchung eines Zweigelenrahmens mit biegesteifen Ecken wurde schon von Osterrieder und Saal [59] durchgeführt. Hier soll an dem gleichen Beispiel die Güte der Berechnung durch die graphische Darstellung der Verformung von räumlichen Stabtragwerken gezeigt werden.

Stiel und Riegel bestehen aus doppelsymmetrischem Profil IPE500. Um Balkenelemente sinnvoll einzusetzen, wird hier die in Bild 6.1.1 dargestellte Eckkonstruktion angenommen. Das führt zur gleichen Verwölbung an dem Schnittpunkt. Die Verwölbung an der Gelenkstelle am Auflager wird zugelassen. In [59] werden auch andere Eckformen betrachtet.

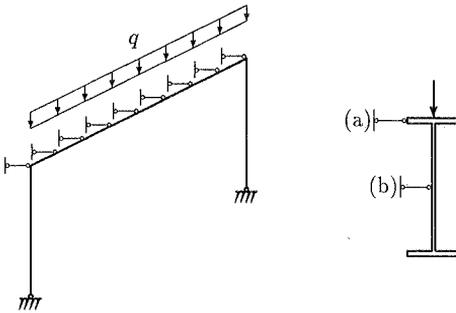


**Bild 6.1.1:** Profil-IPE500, Material und Annahme der Eckkonstruktion

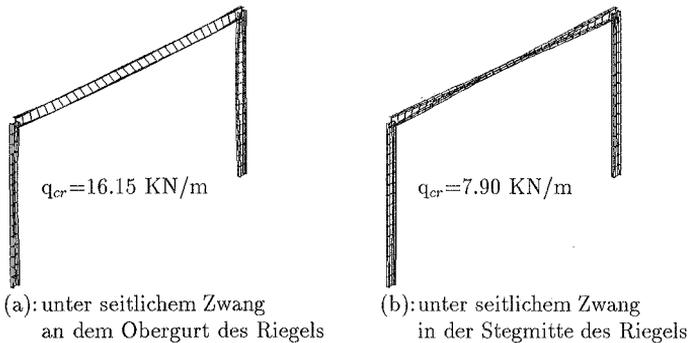


**Bild 6.1.2:** System I und Versagensform

Das System I (Bild 6.1.2) wird nur an den Eckpunkten seitlich gehalten. Die Gleichstreckenlast greift an dem Obergurt des Riegels an. Unter Last  $q_{cr}=3.57 \text{ KN/m}$  versagt der Riegel durch Biegedrillknicken.



**Bild 6.1.3:** System II und seitlicher Zwangsangriff am Riegel



**Bild 6.1.4:** Versagensform bei System II

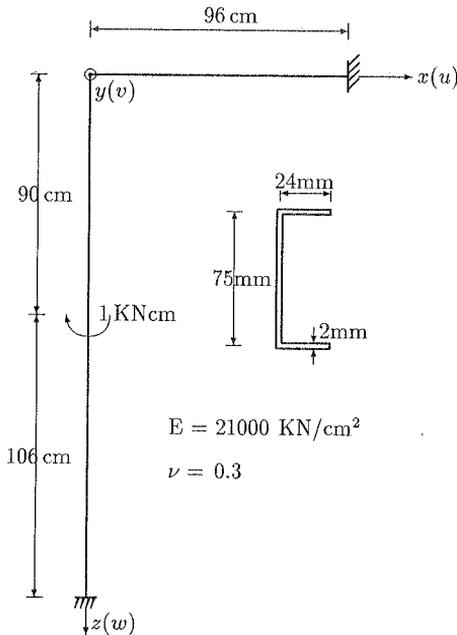
Für System II (Bild 6.1.3) wird der gesamte Riegel seitlich gehalten. Der Abstand der Halterungen beträgt 2.5m. Im Fall (a) ist der Lastangriffspunkt an dem Obergurt des Riegels. Dies kann man als Pfette verstehen. Die kritische Last beträgt  $q_{cr}=16.15 \text{ KN/m}$ . Vom Versagensbild 6.1.4a ist streckenweise Biegedrillknicken zu erkennen. Durch die kontinuierliche seitliche Stützung kann die Tragfähigkeit um ein Mehrfaches erhöht werden.

Im Fall (b) befindet sich die seitliche Halterung in der Stegmitte des Riegels (Bild 6.1.4b). Die Drillknicklast beträgt  $q_{cr}=7.90 \text{ KN/m}$ . Sie ist viel kleiner als die beim Fall mit seitlicher Stützung am Obergurt. Dies zeigt die Wichtigkeit der Einführung von realistischen Randbedingungen für eine sinnvolle Berechnung.

## 6.2 Einfluß der Eckkonstruktion auf das Tragverhalten

Für ein räumliches Rahmensystem mit dünnwandigem Profil ist die Konstruktion des Schnittpunkts zwischen Stiel und Riegel von großer Bedeutung, die je nach Beanspruchung sehr kompliziert sein kann. Die verschiedenen Knotenkonstruktionen haben unterschiedliche Einflüsse auf das ganze Systemtragverhalten. Die Berechnung solcher Systeme mit Balkenelementen haben dieses Problem oft verdeckt. Für eine genaue Untersuchung muß man Faltwerks- oder Schalenelemente verwenden.

Hier wird das Problem an einem von Morrell et al.[56] gerechneten Beispiel untersucht. Das System ist in Bild 6.2.1 dargestellt. Die Frage ist, wie der Riegel reagiert, wenn eine Torsionsmoment an dem Stiel angreift.

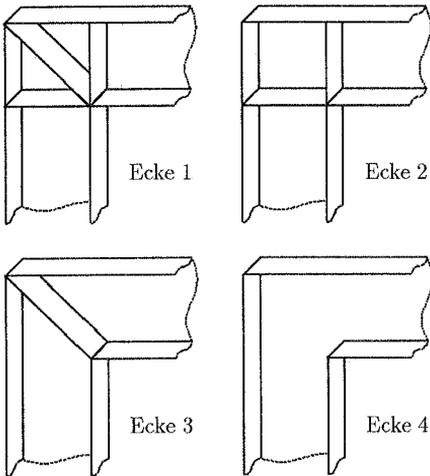


**Bild 6.2.1:** System, Material und Last

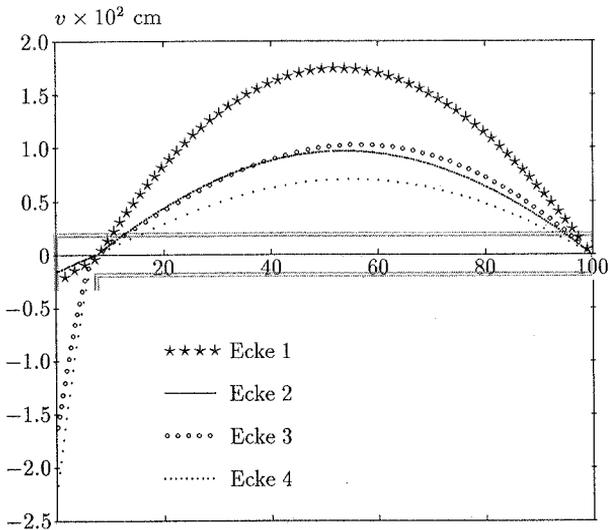
In [56] ergab sich, daß außer Biegung auch Torsion im Riegel auftritt. Die Größenordnung und Richtung der Torsion im Riegel hängt stark von der Konstruktion des Schnittpunkts ab. In Bild 6.2.2 sind vier mögliche Formen der Eckkonstruktion dargestellt. In [56] wurde der L-Rahmen mit Ecke 2, Ecke 3 und Ecke 4 untersucht.

Der Rahmen wird mit 8-knotigen Schalenelementen unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearität analysiert. Die berechnete Biegeverformung des Symmetrie-

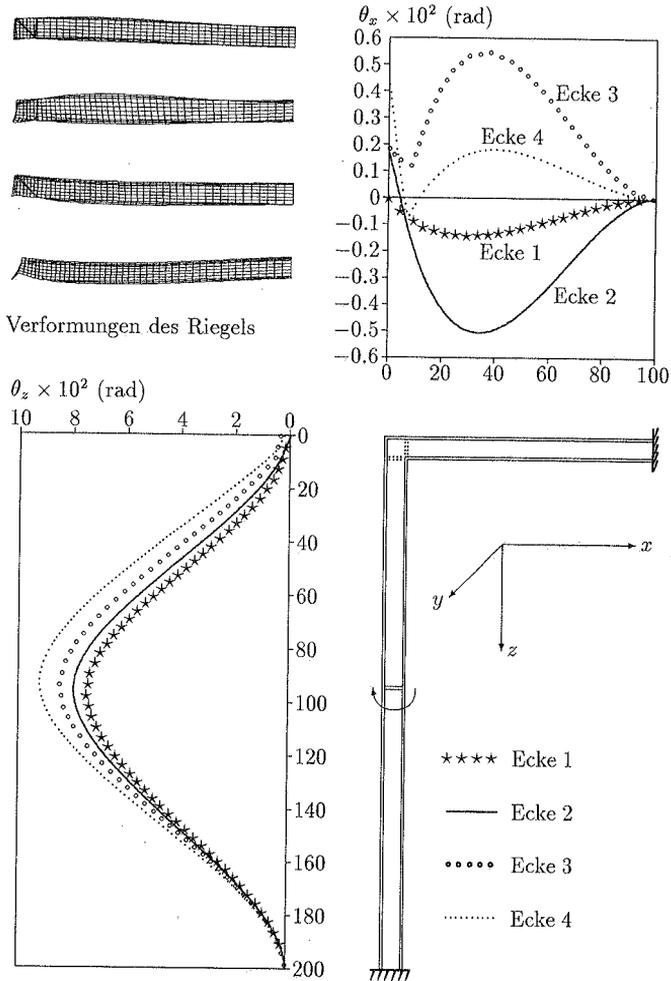
schnittes des Riegels in  $y$ -Richtung und die Verdrehung um die Trägerachse werden in Bild 6.2.3 und Bild 6.2.4 eingetragen. Die Biegeverformung wird auf den Wert an der Stelle von  $x=75$  cm bezogen.



**Bild 6.2.2:** Konstruktion der Rahmenecke



**Bild 6.2.3:** Biegeverformung  $v$  des Riegels im Symmetrieschnitt



**Bild 6.2.4:** Verdrehung entlang des Trägers im Symmetrieschnitt

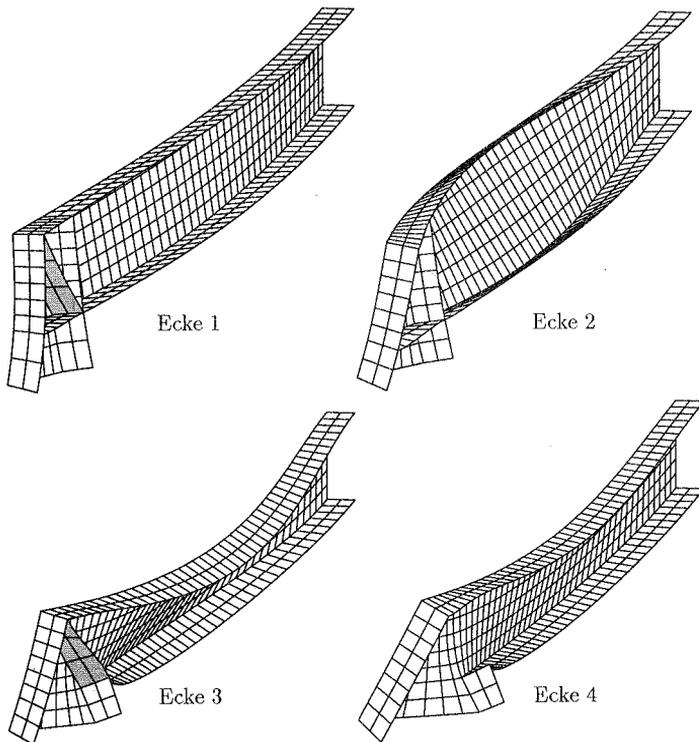
Es ist ersichtlich, daß das System mit Ecke 1 wegen der Behinderung der Verwölbung die größte Biegung im Riegel aufweist. Die geringere Verwölbung hat auch eine geringere Verdrehung im Riegel zur Folge.

Bei der Entfernung der diagonalen Steife wird die Verwölbung des Stiels zugelassen

(Ecke 2). Die Kombination der zwei Komponenten aus Torsion und Verwölbung veranlaßt eine größere Drehung um die negative  $x$ -Richtung im Riegel. Der gleiche Effekt gilt auch für Ecke 3, aber in positive  $x$ -Richtung [56].

Für die Ecke 4 kann sich der Stiel an dem Schnittpunkt fast frei verwölben, es wird nur eine geringe Verdrehung im Riegel hervorgerufen. Der Grund dafür ist die entgegengesetzte Richtung der Drehung des Riegels aus Torsion und Verwölbung. Weil die Übertragungssteife fehlt, ist die Reaktion auf Biegung im Riegel sehr schwach.

In Bild 6.2.3, 6.2.4 ist zu sehen, daß eine große Verformung im Eckbereich in den schwach ausgesteiften Ecken 3 und 4 auftritt. Für die kompakten Ecken 1 und 2 ist dies nicht der Fall. Im Vergleich zu diesen Ecken 1 und 2 verdreht sich der Riegel mit Ecke 3 und Ecke 4 in umgekehrter Richtung. Zur Veranschaulichung werden die Verformungen des Eckbereiches und des Riegels 120-fach vergrößert in Bild 6.2.5 dargestellt.



**Bild 6.2.5:** Verformung der Ecke und des Riegels

Abschließend kann man sagen, daß die Übertragung der Torsion und Biegung vom Stiel zum Riegel stark von der Konstruktion des Anschlusses beeinflußt wird. Bei der Konstruktion des Anschlusses von dünnwandigen Profilen sollen die Übergangsbedingungen für Wölbkrafttorsion sinnvoll berücksichtigt werden.

### 6.3 Lokale Verformung in Rahmenecken

Im Abschnitt 6.2 wurde festgestellt, daß das räumliche Tragverhalten der Rahmen von ihrer Eckkonstruktion stark beeinflußt wird. In diesem Abschnitt soll das Tragverhalten des Eckbereichs in den Vordergrund gestellt werden.

Die Versuche von Scheer, Pasternak und Schween [76] an orthogonal ausgesteiften Rahmenecken mit schlanken Stegen unter Biegung zeigen folgende Versagensbilder.

- das Stegblech beult infolge der Schubspannungen aus seiner Ebene heraus,
- die Verformungen führen zu einer Zugdiagonalen,
- die Zugdiagonale hängt sich an den Gurten und Quersteifen auf; die Gurte biegen sich unter der Querbelastung aus den querverrichteten Spannungskomponenten des Zugfeldes durch; schließlich bilden sich in den Gurten Fließgelenke aus.

Dieses Verhalten von Rahmenecken wird anhand der FE-Berechnung bestätigt.

#### 6.3.1 System

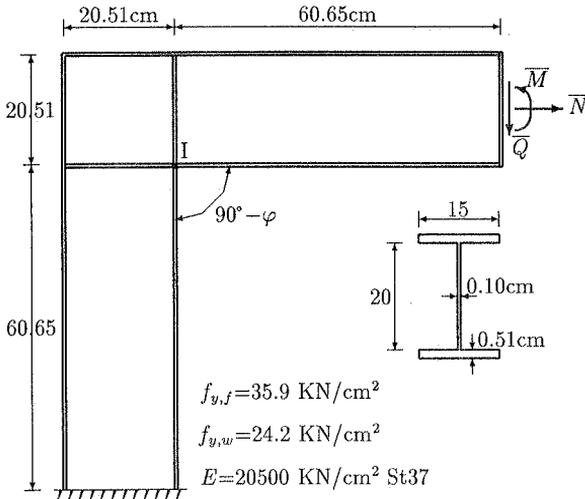
Das System in Bild 6.3.1 stammt aus den in [76] durchgeführten Versuchen an Rahmenecken mit negativer Momentenbeanspruchung (A-05-10-2). In [61] wurde dieses Modell unter negativer und positiver Momentenbeanspruchung mit der FE-Methode nachgerechnet.

Bild 6.3.2 zeigt die Diskretisierung der Rahmenecke und die geometrische Imperfektion aus der Eigenwertberechnung. Die größte Amplitude der Vorverformung im Stegblech beträgt 0.07 cm. Es wird angenommen, daß die konvexe Seite des Eckstegs die Vorderfläche ist. Die Quersteife an der Lasteinleitungsstelle hat die gleiche Dicke wie der Flansch.

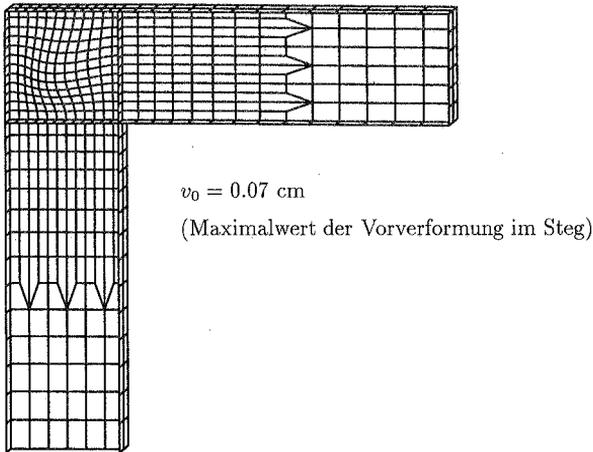
Die Fließspannung des Stegs aus dem Versuch ergibt sich zu  $22.0 \text{ KN/cm}^2$ . Zum besseren Vergleich wird aber der Wert  $24.2 \text{ KN/cm}^2$  aus der FE-Berechnung in [61] angenommen.

Weil es sich hier um eine wirklichkeitsgetreue Versuchssimulation handelt, ist eine wirklichkeitsnahe Spannungs-Dehnungsbeziehung sehr wichtig. Wegen der Einschränkung des hier verwendeten Programms kann momentan nur eine bilineare Verfestigung berücksichtigt werden. Hier wird eine Verfestigung von  $E_h = E/100$  angenommen.

Es sei noch erwähnt, daß sich die Hebelarme von  $Q$  und  $N$  mit der Verformung ändern. Deshalb wird nicht der Lastfaktor, sondern das umgerechnete Moment als die Ordinate der Momenten-Rotationskurve gewählt. Das Moment ist auf den Schnittpunkt der inneren Gurte und nicht auf den Kreuzungspunkt der Systemlinien bezogen.



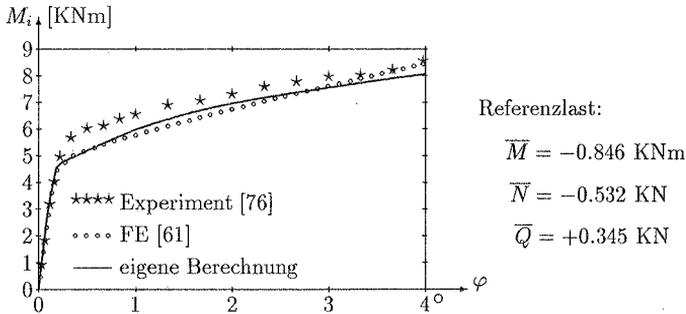
**Bild 6.3.1:** System, Material und Last



**Bild 6.3.2:** Netz und Imperfektion

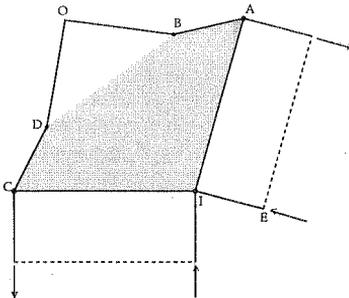
### 6.3.2 Negative Momentenbeanspruchung

Die Lasteinleitung ist im Bild 6.3.1 aufgetragen. Die Referenzlasten  $\bar{M} = -0.846 \text{ KNm}$ ,  $\bar{N} = -0.532 \text{ KN}$ ,  $\bar{Q} = +0.345 \text{ KN}$  ergeben genau ein Moment von 1 KNm im Schnittpunkt der inneren Gurte (I). Sie werden gleichmäßig gesteigert. Die berechneten Momenten-Rotationskurven sind in Bild 6.3.3 dargestellt. Im kleinen Verformungsbereich zeigt Bild 6.3.3 eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten in [76] und der FE-Berechnung in [61].



**Bild 6.3.3:** Momenten-Rotationskurve (negative Momente)

Zur Verdeutlichung ist der kinematische Tragmechanismus des Rahmens in Bild 6.3.4 schematisch dargestellt. Die fette Linie bedeutet die Symmetrielinie der Gurte. Der graue Teil ist das Zugfeld im Steg der Eckbox.



**Bild 6.3.4:** Kinematischer Tragmechanismus des Rahmens (negative Momente)

Bild 6.3.5 zeigt die graphische Darstellung der Vergleichsspannungen bei unterschiedlichen Laststufen. Zweckmäßigerweise werden die nahe beieinander liegenden Lastfaktoren um den Wendepunkt auf der Momenten-Rotationskurve (Bild 6.3.3) aus-

gewählt. Um die wesentlichen Effekte zu zeigen, wird nur die Eckbox betrachtet. Die vorderen Platten der Gurte OA und AI werden weggenommen, um die visuelle Überdeckung zu vermeiden.

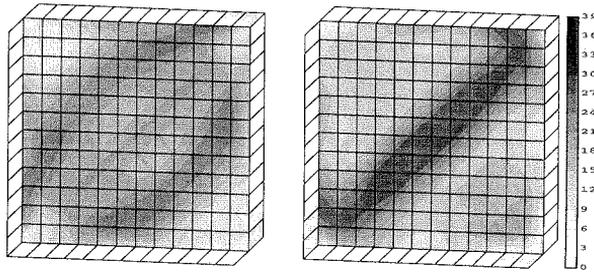
Die Bilder 6.3.6 und 6.3.7 zeigen die Verformungen des Rahmens und die entsprechende Plastizierungsentwicklung mit der Laststeigerung, wobei  $NINT=4 \times 7$  die Anzahl der Integrationspunkte je Element ist.  $NINT_{pl}$  ist die Anzahl der plastizierten Integrationspunkte, die elementweise veränderlich ist. Zur Vereinfachung wird die Plastizierung in drei Stufen eingeteilt, nämlich  $NINT_{pl} > 24$  (voll, fast vollplastisch),  $NINT_{pl} > 14$  (halbplastisch) und  $NINT_{pl} < 14$  (teilplastisch). Wegen der Biegung des Riegels bei großen Verformungen (Bild 6.3.7) ist der Rotationswinkel  $\varphi$  global gemessen.

In den Bildern 6.3.5~6.3.7 können die drei oben erwähnten Tragverhaltensstufen bei Rahmenecken mit schlanken, ausgesteiften Stegen deutlich erkannt werden. Im unterkritischen Zustand ist das Stegblech der Rahmenecke bereits unter den kombinierten Biegemomenten, Quer- und Normalkräften stark beansprucht (Bild 6.3.6a). In Richtung der Diagonalen A-C ist die Beanspruchung stärker als in der Richtung der Diagonalen O-I.

Mit wachsender Last entsteht ein schmales Zugband entlang der Diagonalen A-C (Bild 6.3.6b,c). Dann beginnt sich das Band über das Stegblech der Rahmenecke in orthogonaler Richtung nach O und I auszubreiten (Bild 6.3.6d,e), und zunächst bildet sich eine plastische Zone im Schnittpunkt I der Innengurte (Bild 6.3.6f). Die Plastizierung geht über die Steifen hinaus, und der innere Bereich der Rahmenecke wird immer weicher (Bild 6.3.6g). Das hat zwei Fließzonen in den äußeren Gurten A und C zur Folge (Bild 6.3.6h).

Mit der Ausbreitung der Plastizierung in den Ecken A und C wachsen die zu den Gurten AO und CO quergerichteten Spannungskomponenten des Zugfeldes schnell an und rufen eine Biegebeanspruchung der Gurte hervor. Schließlich entstehen zwei weitere Fließbereiche B und D in den äußeren Gurten (Bild 6.3.7a). Damit sind fünf Fließzonen (I,A,C,B,D) in der Rahmenecke vorhanden.

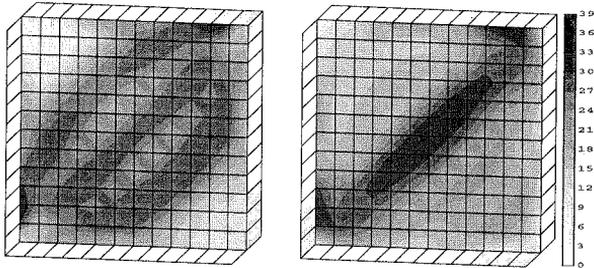
Das Weichwerden der Rahmenecke veranlaßt eine Verschiebung der Beanspruchung von der inneren Rahmenecke zum äußeren Riegel. Das Verkleinern des Winkels  $\widehat{AIE}$  zwischen der Steife AI und dem Untergurt IE des Riegels ruft eine Druckbeanspruchung im angrenzenden Stegblech hervor. Damit beult das Stegblech aus seiner Ebene heraus. Die gedrückten unteren Gurte biegen sich mit (Bild 6.3.7b,c,d).



Hinterfläche

$\lambda=4$

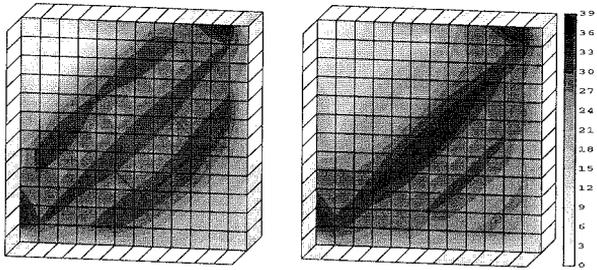
Vorderfläche



Hinterfläche

$\lambda=4.5$

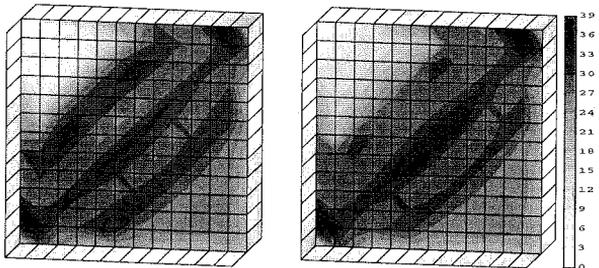
Vorderfläche



Hinterfläche

$\lambda=4.75$

Vorderfläche

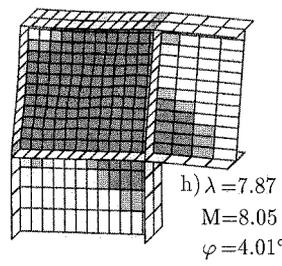
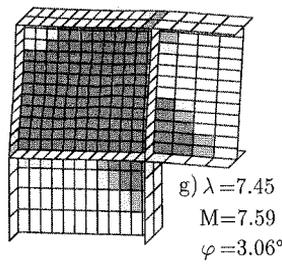
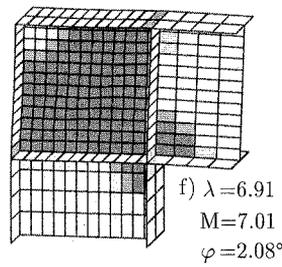
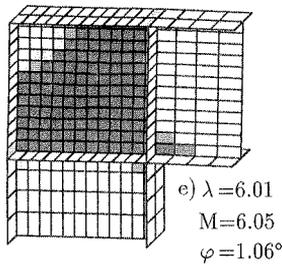
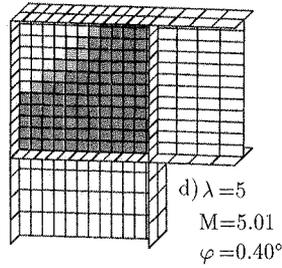
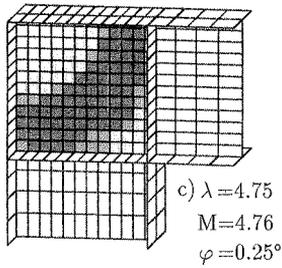
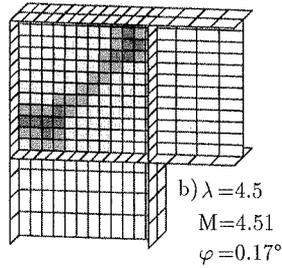
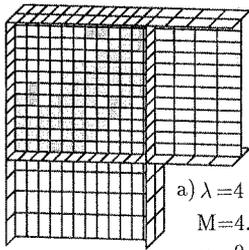


Hinterfläche

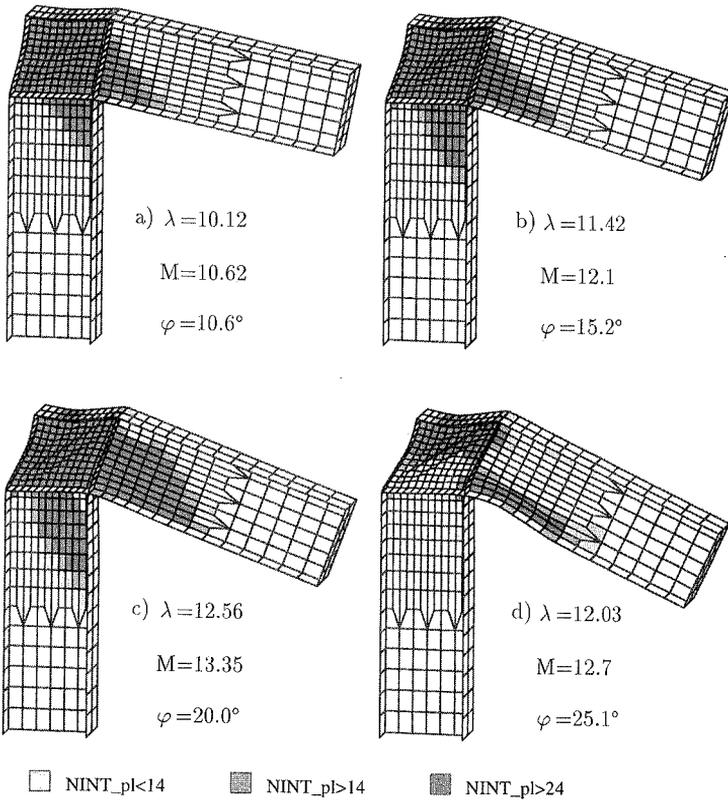
$\lambda=5$

Vorderfläche

**Bild 6.3.5:** Vergleichsspannungen bei unterschiedlichen Laststufen



**Bild 6.3.6:** Entwicklung der Plastizierung bei steigenden Lasten  
(im Bereich kleiner Verformungen)



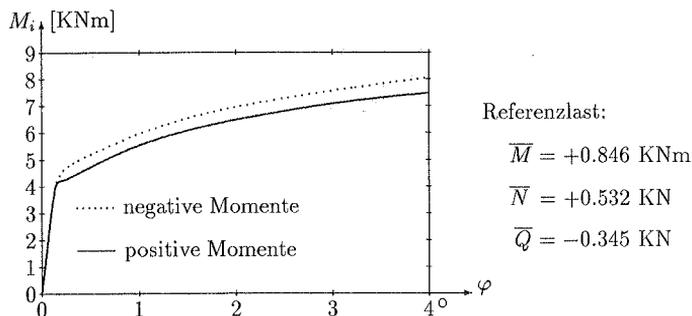
**Bild 6.3.7:** Entwicklung der Plastizierung bei steigenden Lasten  
(im Bereich großer Verformungen)

### 6.3.3 Positive Momentenbeanspruchung

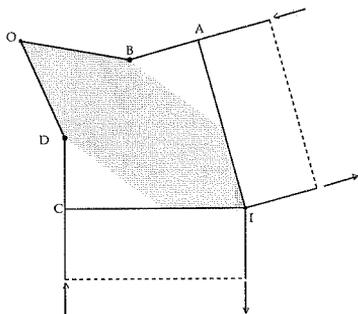
Ändert man das Vorzeichen aller äußeren Kräfte in Bild 6.3.1, werden ebenfalls die drei vorne genannten Tragverhaltensstufen beobachtet. Die berechnete Momenten-Rotationskurve ist im Bild 6.3.8 aufgetragen. Bild 6.3.9 zeigt die schematische Darstellung des kinematischen Tragmechanismus.

Bild 6.3.10 ist die graphische Darstellung der Vergleichsspannungen bei unterschiedlichen Laststufen um den Wendepunkt auf der Momenten-Rotationskurve (Bild 6.3.8). Bild 6.3.11 zeigt die entsprechenden Verformungen und die Ausbreitung der Pla-

stizierung. Bild 6.3.12 zeigt die Verformungen des Rahmens und die entsprechende Plastizierungsentwicklung bei großen Verformungen.



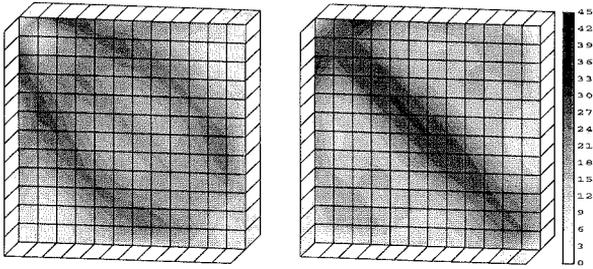
**Bild 6.3.8:** Momenten-Rotationskurve (positive Momente)



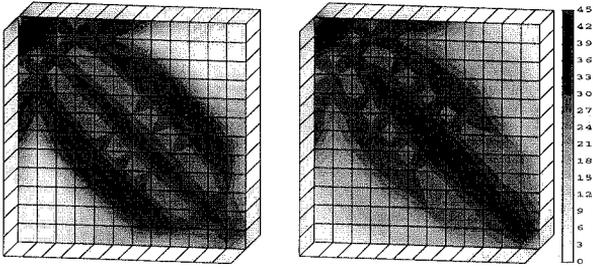
**Bild 6.3.9:** Kinematischer Tragmechanismus des Rahmens (positive Momente)

Im Gegensatz zum Fall bei negativer Momentenbeanspruchung ist das in der Rahmenecke gebildete Zugband entlang der Diagonalen OI ausgerichtet (Bild 6.3.11). Mit wachsender Belastung folgen plastische Bereiche in den Ecken O und I (Bild 6.3.11d). Bei weiterer Beanspruchung entstehen zwei zusätzliche Gelenke B und D in den Gurten AO und CO (Bild 6.3.12a,b). Insgesamt werden vier Fließzonen (O,I,B,D) gebildet (Bild 6.3.12c,d).

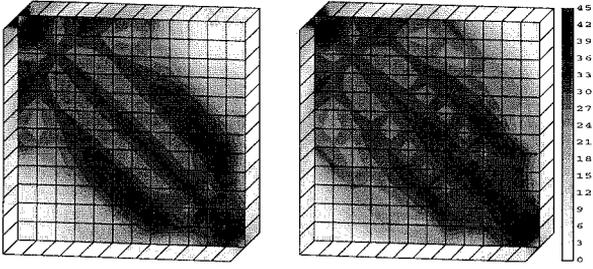
Im Vergleich zur negativen Momentenbeanspruchung hat das System bei positiver Momentenbeanspruchung eine geringere Tragfähigkeit. Das wird deutlich, wenn man einen Vergleich zwischen den beiden kinematischen Tragmechanismen der Rahmenecke in Bild 6.3.4 und in Bild 6.3.9 zieht.



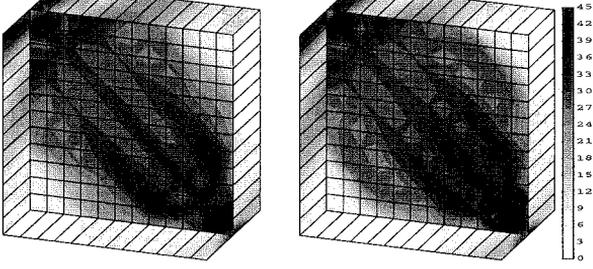
Hinterfläche  $\lambda=4$  Vorderfläche



Hinterfläche  $\lambda=4.5$  Vorderfläche

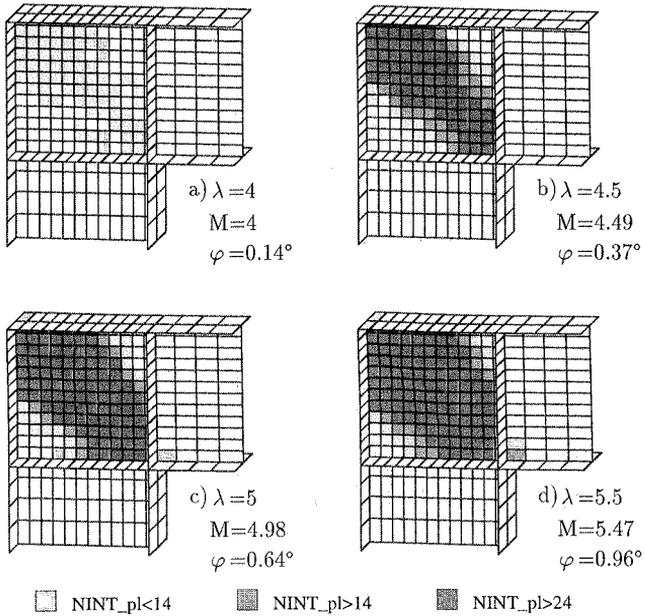


Hinterfläche  $\lambda=5$  Vorderfläche

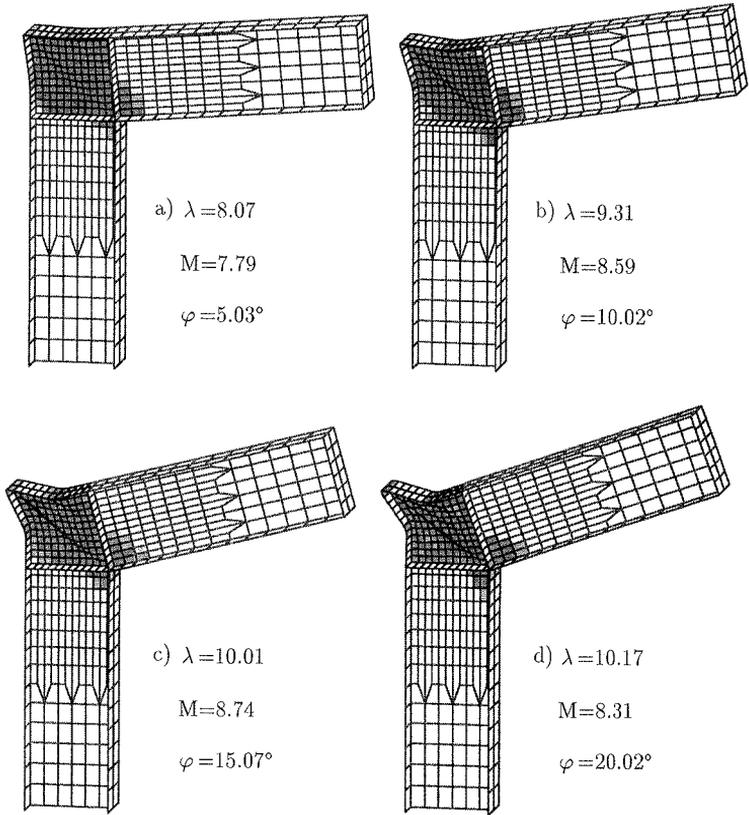


Hinterfläche  $\lambda=5.5$  Vorderfläche

**Bild 6.3.10:** Vergleichsspannungen bei unterschiedlichen Laststufen



**Bild 6.3.11:** Entwicklung der Plastizierung bei steigenden Lasten  
(im geringen Lastbereich)



**Bild 6.3.12:** Entwicklung der Plastizierung bei steigenden Lasten  
(im hohen Lastbereich)



## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung von dünnwandigen Stabtragwerken mit Berücksichtigung der Profilverformung und der Konstruktion der Stabtragwerksknoten unter Verwendung finiter Balken- und Schalenelemente.

Für die Untersuchung der Stäbe ohne lokale Verformung werden räumliche Balkenelemente eingesetzt, während beim Fall mit Profilverformung Schalenelemente verwendet werden. Beim Schalenmodell wird ein Netzgenerator speziell für offene dünnwandige Stabtragwerke vorgestellt. Die Knotennumerierung des Netzgenerators erfolgt abschnittsweise rings um die Stablängsachse, damit eine maximale Reduktion der Bandbreite des Gleichungssystems erreicht wird. Mit der Schalenmodellierung kann die Interaktion zwischen lokalem und globalem Versagen von Stäben mit beliebigen Querschnitten ohne Einschränkung erfaßt werden. Als Anwendung wurde ein 3-Punkte-Biegeversuch nachgerechnet und ein L-Rahmen mit großer lokaler Verformung untersucht. Die geometrischen und materiellen Nichtlinearitäten werden vollständig berücksichtigt.

Im Hinblick auf die Tatsache, daß die lokale Querschnittsverformung nur in einem partiellen Bereich des ganzen Tragwerks auftritt, wird ein Kopplungskonzept von Balken- und Schalenelementen vorgestellt. Dabei werden die Multikopplungsbedingungen, welche die Kontinuität der Verschiebungen in der Koppelfläche fordern, aufgestellt und mit dem direkten Einsetzen eingearbeitet. Dadurch können die Balken- und Schalenelemente je nach Bedarf zur Modellierung eingesetzt werden und ihre eigenen Stärken in vollem Maße entfalten. Ein typischer Anwendungsfall hierfür ist die Berechnung dünnwandiger Stabtragwerke mit deformierbarem Knotenbereich. Zur numerischen Überprüfung des Kopplungskonzepts wurden einige ausgewählte Beispiele berechnet. Eine Übereinstimmung mit den bekannten Vergleichslösungen und mit aufwendigeren Schalenmodellen wurde erzielt.

Dem Kopplungskonzept liegt die Linearisierung der kinematischen Beziehungen des dünnwandigen Balkens zugrunde, wodurch seine Anwendung auf kleine Verformungen beschränkt ist. Für die weitere Entwicklung ist es wünschenswert, ein besseres Kopplungskonzept zu schaffen, damit es auch für Systeme mit großen Verformungen eingesetzt werden kann.



## Literatur

- [1] Akay, H.U.,  
Johnson, C.P.,  
Will, K.M.: Lateral and local buckling of beams and frames.  
J. Struct. Div., Proc. ASCE, **103**(ST9), 1977,  
pp.1821-1832.
- [2] Al-Bermani, F.G.A.,  
Kitipornchai, S.,  
Chin, S.: Stability of cold-formed members.  
Eng. Struct., **16**(5), 1994, pp.386-392.
- [3] Allen, H.G.,  
Bulson, P.S.: Background to buckling.  
McGraw-Hill, U.K., 1980.
- [4] Allman, D.J.: A compatible triangular element including vertex  
rotations for plane elasticity analysis.  
Computers & Structures, **19**, 1984, pp.1-8.  
A quadrilateral finite element including vertex  
rotations for plane elasticity analysis.  
Int. J. Num. Meth. Eng., **26**, 1988, pp.717-730.
- [5] Anderson, J.M.,  
Trahair, N.S.: Stability of monosymmetric beams and cantilevers.  
J. Struct. Div., Proc. ASCE, **98**(ST1), 1972,  
pp.269-286.
- [6] Barsoum, R.S.: Finite element method applied to the problem of  
stability of a non-conservative system.  
Int. J. Num. Meth. Eng., **3**, 1971, pp.63-87.
- [7] Barsoum, R.S.,  
Gallagher, R.H.: Finite element analysis of torsional and torsional-  
flexural stability problems.  
Int. J. Num. Meth. Eng., **2**, 1970, pp.335-352.
- [8] Batista, E.M.,  
Batista, R.C.: Local-global buckling interaction—some recent research  
results.  
Thin-Walled Structures, **19**, 1994, pp.269-283.
- [9] Bornscheuer, F.W.: Systematische Darstellung des Biege- und Verdreh-  
vorganges unter besonderer Berücksichtigung der  
Wölbkrafttorsion.  
Stahlbau, **21**, 1952, S.1-9.
- [10] Bradford, M.A.: Distortional buckling of monosymmetric I-beams.  
J. Construct. Steel Research, **5**, 1985, pp.123-136.
- [11] Bradford, M.A.: Inelastic distortional buckling of I-beams.  
Computers & Structures, **24**(6), 1986, pp.923-933.

- [12] Bradford, M.A.: Buckling of elastically restrained beams with web distortions. *Thin-Walled Structures*, **6**, 1988, pp.287-304.
- [13] Bradford, M.A.: Lateral-distortional buckling of Tee-section beams. *Thin-Walled Structures*, **10**, 1990, pp.13-30.
- [14] Bradford, M.A.: Buckling of doubly-symmetric cantilevers with slender webs. *Eng. Struct.*, **14**(5), 1992, pp.327-334.
- [15] Bradford, M.A., Hancock, G.J.: Elastic interaction of local and lateral buckling in beams. *Thin-Walled Structures*, **2**, 1984, pp.1-25.
- [16] Bradford, M.A., Trahair, N.S.: Distortional buckling of I-beams. *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, **107**(ST2), 1981, pp.355-370.
- [17] Bradford, M.A., Trahair, N.S.: Distortional buckling of thin-web beam-columns. *Eng. Struct.*, **4**(1), 1982, pp.2-10.
- [18] Bradford, M.A., Waters, S.W.: Distortional instability of fabricated monosymmetric I-beams. *Computers & Structures*, **29**(4), 1988, pp.715-724.
- [19] Büchter, N.: Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen. Dissertation, Bericht Nr. 14(1992), Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [20] Büchter, N., Ramm, E.: 3D-extension of nonlinear shell equations based on the enhanced assumed strain concept. *Computational Methods in Applied Science*, Ch. Hirsch (ed.), Elsevier Science Publishers B.V., 1992, pp.55-62.
- [21] Büchter, N., Ramm, E., Roehl, D.: Three-dimensional extension of nonlinear shell formulation based on the enhanced assumed strain concept. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **37**, 1994, pp.2551-2568.
- [22] Bulson, P.S.: Local stability and strenght of structural sections. *Thin Walled Structures*, Editor: A. Chilver, Chatto and Windus, 1967, pp.153-207.
- [23] Bulson, P.S.: The stability of flat plates. Chatto and Windus, London, 1970.
- [24] Chan, S.L., Kitipornchai, S.: Geometric nonlinear analysis of asymmetric thin-walled beam-columns. *Eng. Struct.*, **9**, 1987, pp.243-254.

- [25] Chen, W.F.,  
Atsuta, T.: Theory of beam-columns.  
Vol.2: Space behavior and design.  
McGraw-Hill, New York, 1977.
- [26] Chin, C.K.,  
Al-Bermani, F.G.A.,  
Kitipornchai, S.: Stability of thin-walled members having arbitrary  
flange shape and flexible web.  
Eng. Struct., **14**(2), 1992, pp.121-132.
- [27] Chin, C.K.,  
Al-Bermani, F.G.A.,  
Kitipornchai, S.: Finite element method for buckling analysis of plate  
structures.  
J. Struct. Eng., ASCE, **119**(4), 1993, pp.1048-1068.
- [28] Chin, C.K.,  
Al-Bermani, F.G.A.,  
Kitipornchai, S.: Non-linear analysis of thin-walled structures using  
plate elements.  
Int. J. Num. Meth. Eng., **37**, 1994, pp.1697-1711.
- [29] Conci, A.: Large displacement analysis of thin-walled beams with  
generic open section.  
Int. J. Num. Meth. Eng., **33**, 1992, pp.2109-2127.
- [30] Conci, A.: Stiffness matrix for nonlinear analysis of thin-walled  
frames.  
J. Eng. Mech., ASCE, **118**(9), 1992, pp.1859-1875.
- [31] Davids, A.J.,  
Hancock, G.J.: Nonlinear elastic response of locally buckled thin-  
walled beam-columns.  
Thin-Walled Structures, **5**, 1987, pp.211-226.
- [32] Demkowicz, L.,  
Oden, J.T.,  
Rachowicz, W.,  
Hardy, O.: Toward a universal  $h$ - $p$  adaptive finite element strategy.  
Part 1: Constrained approximation and data structure.  
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **77**, 1989, pp.79-112.
- [33] Dvorkin, E.N.,  
Bathe, K.J.: A continuum mechanics based four-node shell element  
for general nonlinear analysis.  
Engineering Computations, **1**, 1984, pp.77-88.
- [34] Eisenberger, M.: Nonuniform torsional analysis of variable and open  
cross-section bars.  
Thin-Walled Structures, **21**, 1995, pp.93-105.
- [35] El-Ghazaly, H.A.,  
Sherbourne, A.N.,  
Dubey, R.N.: Inelastic interactive distortional buckling of W-shape  
steel beams.  
Computers & Structures, **19**(3), 1984, pp.351-368.

- [36] Greschik, G.,  
White, D.W.,  
McGuire, W.,  
Abel, J.F.: On the correlation of analyses and tests of the inelastic flexural behavior of wide-flange steel beams. *Computers & Structures*, **48**(3), 1993, pp.511-522.
- [37] Gründer, J.: Verformungs- und Spannungsberechnung an Stabtragwerken aus dünnwandigen, offenen Profilen unter Berücksichtigung des elastischen Knotenverhaltens. Dissertation, Universität Dresden, 1987.
- [38] Guo, Y.L.,  
Chen, S.F.: Postbuckling interaction analysis of cold-formed thin-walled channel sections by finite strip method. *Thin-Walled Structures*, **11**, 1991, pp.277-289.
- [39] Hancock, G.J.: Local, distortional, and lateral buckling of I-beams. *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, **104**(ST11), 1978, pp.1787-1798.
- [40] Hancock, G.J.,  
Bradford, M.A.,  
Trahair, N.S.: Web distortion and flexural-torsional buckling. *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, **106**(ST7), 1980, pp.1557-1571.
- [41] Hancock, G.J.,  
Davids, A.J.,  
Key, P.W.,  
Lau, S.C.W.,  
Rasmussen, K.J.R.: Recent developments in the buckling and nonlinear analysis of thin-walled structural members. *Thin-Walled Structures*, **9**, 1990, pp.309-338.
- [42] Heilig, R.: Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil. *Stahlbau*, **30**, 1961, S.97-103.
- [43] Johnson, C.P.,  
Will, K.M.: Beam buckling by finite element procedure. *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, **100**(ST3), 1974, pp.669-685.
- [44] Kammler, G.: Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen. Dissertation, Bericht Nr. 7(1987), Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [45] Kollbrunner, C.F.,  
Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe. Band 1: Stäbe mit undeformierbaren Querschnitten. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

- [46] Krajcinovic, D.: A consistent discrete elements technique for thinwalled assemblages. *Int. J. Solids Structures*, **5**, 1969, pp.639-662.
- [47] Kuhlmann, U.: Rotationskapazität biegebeanspruchter I-Profile unter Berücksichtigung des plastischen Beulens. Mitteilung Nr. 86-5, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr-Universität Bochum.
- [48] Kwon, Y.B., Hancock, G.J.: A nonlinear elastic spline finite strip analysis for thin-walled sections. *Thin-Walled Structures*, **12**, 1991, pp.295-319.
- [49] Kwon, Y.B., Hancock, G.J.: Post-buckling analysis of thin-walled channel sections undergoing local and distortional buckling. *Computers & Structures*, **49**(3), 1993, pp.507-516.
- [50] Linder, J., Gietzelt, R.: Biegedrillknicken – Erläuterungen, Versuche, Beispiele. *DAST-Bericht 10*, 1980.
- [51] Long, Y.Q., Xu, Y.: Generalized conforming quadrilateral membrane element with vertex rigid rotational freedom. *Computers & Structures*, **52**(4), 1994, pp.749-755.
- [52] MacNeal, R.H., Harder, R.L.: A refined four-noded membrane element with rotational degrees of freedom. *Computers & Structures*, **28**(1), 1988, pp.75-84.
- [53] Maquoi, R., Lognard, B.: Plastic analysis and high strength steels. *Festschrift, Udo Vogel*, 1993, pp.161-172, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe.
- [54] Matzenmiller, A.: Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen. Dissertation, Bericht Nr. 8(1988), Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [55] Mohr, G.A.: A simple rectangular membrane element including the drilling freedom. *Computers & Structures*, **13**, 1981, pp.483-487.
- [56] Morrell, P.J.B., Riddington, J.R., Ali, F.A., Hamid, H.A.: Influence of joint detail on the flexural/torsional interaction of thin-walled structures. *Thin-Walled Structures*, **24**, 1996, pp.97-111.

- [57] Nylander, H.: Drehungsvorgänge und gebundene Kippung bei geraden, doppeltsymmetrischen I-Trägern. Ingeniörsvetenskapsakademiens Handlingar, Nr.174, 1943.
- [58] Osterrieder, P.: Traglastberechnung von räumlichen Stabtragwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen. Dissertation, Bericht Nr. 1(1983), Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [59] Osterrieder, P., Saal, H.: Lateral torsional stability of plane steel frames. International conference on steel and aluminium structures, ICSAS 91, Singapore, 22-24 May 1991, pp.692-702.
- [60] Osterrieder, P., Werner, F.: Interaction of local and global buckling in thin-walled beams. Proc. Int. Conf. on Stability of Structures ICSS 95, 7-9 June 1995, PSG College of Technology, Coimbatore, India.
- [61] Pasternak, H., Chróścielewski, J.: Zur Beurteilung des Tragverhaltens von Bauteilen mit schlanken ausgesteiften Stegen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode. Bauingenieur, **68**, 1993, S.277-289.
- [62] Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen. Vieweg & Sohn, Braunschweig-Wiesbaden, 1980.
- [63] Pinsky, P.M., Jang, J.: A  $C^0$ -elastoplastic shell element based on assumed covariant strain interpolations. Proceedings of the Int. Conference NUMETA '87, (G.N. Pande, J. Middleton, eds.), Swansea, 1987.
- [64] Priebe, J.: Die Methode der wirksamen Breiten bei der Berechnung von Querschnitts- und Stabtragfähigkeiten. Stahlbau, **64**, 1995, S.336-344.
- [65] Rajasekaran, S., Murray, D.W.: Coupled local buckling in wide-flange beam-columns. J. Struct. Div., Proc. ASCE, **99**(ST6), 1973, pp.1003-1023.
- [66] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. Habilitation, Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.

- [67] Reitinger, R.: Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke  
Dissertation, Bericht Nr. 17(1994),  
Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [68] Roark, R.J.,  
Young, W.C.: Formulas for stress and strain, 5th Edn.  
McGraw-Hill, New York, 1975.
- [69] Roberts, T.M.,  
Jhita, P.S.: Lateral, local and distortional buckling of I-beams.  
Thin-Walled Structures, **1**, 1983, pp.298-308.
- [70] Roehl, D.: Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.  
Dissertation, Bericht Nr. 16(1994),  
Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [71] Roik, K.,  
Carl, J.,  
Linder, J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe.  
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-München-Düsseldorf, 1972.
- [72] Roik, K.,  
Kuhlmann, U.: Rechnerische Ermittlung der Rotationskapazität biegebeanspruchter I-Profile,  
Stahlbau, **11**, 1987, S.321-327.
- [73] Roik, K.,  
Sedlacek, G.: Theorie der Wölbkrafttorsion unter Berücksichtigung der sekundären Schubverformungen.  
Stahlbau, **35**, 1966, S.43-52.
- [74] Sakimoto, T.,  
Yamao, T.,  
Kikuchi, R.,  
Sakata, T.: Nonlinear analysis of thin-walled frames and members with arbitrary open cross sections.  
Structural Eng. / Earthquake Eng.,  
Proc. JSCE, **2**(2), 1985, pp.139-147.
- [75] Sättele, J.M.: Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen mit stofflicher und geometrischer Nichtlinearität. Dissertation, Bericht Nr. 80-3,  
Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [76] Scheer, J.,  
Pasternak, H.,  
Schween, T.: Zum Tragverhalten ausgesteifter Rahmenecken mit schlanken Stegen.  
Stahlbau, **60**, 1991, S.41-48.
- [77] Schneider, F.: Finite Element auf der Grundlage verallgemeinerter Vlasov-Stabmodelle und ihr Einsatz bei der statischen und dynamischen FEM-Strukturanalyse dünnwandiger Konstruktionen. Dissertation, T.H. Magdeburg, 1989.

- [78] Shakourzadeh, H.,  
Guo, Y.Q.,  
Batoz, J.L.: A torsion bending element for thin-walled beams with open and closed cross sections. Computers & Structures, **55**, 1995, pp.1045-1054.
- [79] Spangemacher, R.,  
Sedlacek, G.: Zum Nachweis ausreichender Rotationsfähigkeit von Fließgelenken bei der Anwendung des Fließgelenkverfahrens. Stahlbau, **61**, 1992, S.329-339.
- [80] Steup, H.: Stabilitätstheorie im Bauwesen. Verlag für Architektur Ernst & Sohn, Berlin, 1990.
- [81] Szabó, I.: Einführung in die technische Mechanik. 6. Auflage. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.
- [82] Szabó, I.: Höhere technische Mechanik. 4. Auflage. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1964.
- [83] Tien, Y.L.,  
Wang, S.T.: Local buckling of beams under stress gradient. J. Struct. Div., Proc. ASCE, **105**(ST8), 1979, pp.1571-1588.
- [84] Timoshenko, S.: Theory of elastic stability. McGraw-Hill, New York, 1936.
- [85] Timoshenko, S.,  
Gere, J.M.: Theory of elastic stability. McGraw-Hill, New York, 1961.
- [86] Toneff, J.D.,  
Stiemer, S.F.,  
Osterrieder, P.: Local and overall buckling in thin-walled beams and columns. J. Struct. Eng., ASCE, **113**(4), 1987, pp.769-786.
- [87] Vayas, I.,  
Pasternak, H.,  
Schween, T.: Beanspruchbarkeit und Verformung von Rahmenecken mit schlanken Stegen. Bauingenieur, **69**, 1994, S.311-317.
- [88] Wagner, H.: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. Festschrift 25 Jahre T.H. Danzig, 1929.
- [89] Winter, G.: Strength of thin-walled compression flanges. Trans. ASCE, **112**, 1947, pp.527-554.
- [90] Wlassow, W.S.: Dünnwandige elastische Stäbe. Band 1 und Band 2: Deutsche Bearbeitung von Eva Duda. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1964/1965.
- [91] Yamao, T.,  
Sakimoto, T.: Nonlinear analysis of thin-walled structures by a coupled finite element method. Structural Eng. / Earthquake Eng., Proc. JSCE, **3**(2), 1986, pp.57-66.

## **LEBENS LAUF**

- Name: Hongkai Wang
- Geburtsdatum: 15. 03. 1967 in Schensi, VR China
- 9.1974–7.1979: Grundschule in Schensi, VR China
- 9.1979–7.1982: Mittelschule in Schensi, Abschluß mit mittlerer Reife
- 9.1982–7.1985: Gymnasium in Schensi, Abschluß mit Abitur
- 9.1985–7.1989: Studium des Bauingenieurwesens an der Chinesischen Universität für Bergbau und Technologie (CUBT) in Jiangsu, Abschluß mit Bachelor
- 9.1989–1.1992: Studium für Konstruktiven Ingenieurbau an der CUBT, Abschluß mit Magister
- 3.1992–4.1993: Assistent für Baustatik an der CUBT
- 9.1993–7.1998: Promotion am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart in Deutschland

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J.M. Sättele:**  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 **G. Werner:**  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 **K. Tompert:**  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 **W. Riehle:**  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 **G. Müller, R.W. Rembold, J.M. Sättele, K.H. Schweizerhof, W. Wissmann:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 **G. Müller:**  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 **E.A. Castrillón O.:**  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R.D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K.H. Schweizerhof, F. Seible:**  
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 **E. Ramm:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 **B.-M. Sulke:**  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 **F. Fujii:**  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 **B. Brendel:**  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 **H.G. Berg:**  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 **F.W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J.M. Sättele:**  
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 **R.I. Del Gaizo:**  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.

- 80-2 R.W. Rembold:**  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J.M. Sättele:**  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 L. Häfner:**  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:**  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:**  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1(1983) P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2(1983) T.A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3(1983) A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4(1984) A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5(1985) H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalelementen.
- 6(1987) A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7(1987) G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8(1988) A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9(1989) D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Elementberechnungen.

- 10(1989) **K. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11(1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächtragwerken.
- 12(1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13(1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14(1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen rotationen.
- 15(1992) **Th. J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16(1994) **D. Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17(1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18(1995) **R. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19(1995) **M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20(1996) **N. Rehle:**  
Adaptive Finite Elemente Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21(1996) **C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22(1996) **D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23(1998) **H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24(1998) **H.K. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25(1998) **K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.