

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, D-70550 Stuttgart, bezogen werden.

Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien

Von der Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors
der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Ellen Kuhl

aus Hannover

Hauptberichter:	Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm
Mitberichter:	Prof. dr.ir. René de Borst
Mitberichter:	Prof. Dr.-Ing. Paul Steinmann
Tag der mündlichen Prüfung:	17. Februar 2000

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Stuttgart 2000

Zusammenfassung

Zahlreiche natürliche Materialien wie Sand, Ton, Gestein oder Fels, aber auch künstlich erzeugte Werkstoffe wie beispielsweise Beton gehören der Klasse der kohäsiven Reibungsmaterialien an. Sie zeichnen sich durch ein ausgeprägt druckabhängiges Materialverhalten aus, das sich in unterschiedlichen Versagensformen unter zug- und druckdominanter Beanspruchung äußert. Infolgedessen kann die Zug- und Druckfestigkeit dieser Materialien gegebenenfalls um mehrere Größenordnungen variieren. Im allgemeinen ist das Versagen kohäsiver Reibungsmaterialien durch die Ausbildung von lokalen Versagenszonen wie beispielsweise Mikrorissen, Gleitebenen, Bruchflächen oder Scherbändern geprägt, die in Abhängigkeit des Belastungszustandes normal oder unter einem bestimmten Versagewinkel zur Belastungsrichtung angeordnet sein können. Diese charakteristische lokale Versagensform hat eine hochgradig anisotrope Materialantwort zufolge.

Im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit steht die Entwicklung Finite Element-basierter numerischer Modelle, die in der Lage sind, die eben genannten charakteristischen Eigenschaften kohäsiver Reibungsmaterialien möglichst realitätsgetreu abzubilden. Dazu werden zunächst die klassischen, aus der Literatur bekannten, lokalen isotropen Modelle der Elasto-Plastizität und der Elasto-Schädigung miteinander verglichen. Darauf aufbauend werden die grundlegenden Ideen beider Modellklassen auf die Entwicklung lokaler anisotroper Materialformulierungen im Rahmen des Microplane Konzeptes übertragen. Auf diese Weise läßt sich das Antwortverhalten eines materiellen Punktes als Ergebnis der Raumintegration seines Verhaltens auf allen möglichen Ebenen im Raum interpretieren. Zunächst wird dazu ein generalisiertes, thermodynamisch konsistentes Konzept zur Herleitung allgemeiner microplane-basierter Konstitutivgesetze bereitgestellt, dessen Wirkungsweise dann anhand der Elastizität, der Elasto-Plastizität sowie der Elasto-Schädigung illustriert wird.

Insbesondere im postkritischen Bereich zeigen klassische lokale Kontinuumsmodelle die Tendenz zur Ausbildung lokaler Versagenszonen, deren Breite im Rahmen der numerischen Simulation der Breite eines Finiten Elements entspricht. Aufgrund einer unzureichenden Modellbildung sind klassische Kontinuumsmodelle nicht in der Lage, die physikalisch vorhandenen Änderungen der Mikrostruktur, die mit der Materialentfestigung einher gehen, eindeutig abzubilden. Daraus ergibt sich eine Netzabhängigkeit der Lösung, die sich mathematisch auf einen Typwechsel der zugrunde liegenden Differentialgleichungen zurückführen läßt. In der Literatur werden unterschiedliche Strategien diskutiert, die durch die Einführung einer die Mikrostruktur charakterisierenden internen Längenskala auch im postkritischen Bereich die Gutgestelltheit des Problems gewährleisten können. Aufgrund seiner eleganten, Finite Element spezifischen Realisierbarkeit findet im Rahmen dieser Arbeit das gradientenerweiterte Kontinuum Anwendung. Durch zusätzliche höherwertige Gradienten bestimmter Feldgrößen in den Konstitutivgleichungen kann somit die Existenz einer finiten Anzahl von Lösungen garantiert werden. Insbesondere ist hierzu eine Verallgemeinerung der in der Literatur vorgestellten Vorgehensweise erforderlich, um nicht nur die bekannten isotropen, sondern auch die neuen microplane-basierten anisotropen Konstitutivgesetze im Rahmen eines Gradientenkontinuums realisieren zu können. Die unterschiedliche Wirkungsweise der entwickelten Materialmodelle wird abschließend anhand ausgewählter Beispiele dokumentiert und vergleichend bewertet.

Abstract

Not only the classical geomaterials like sand, clay, stone and rock but also a number of engineering materials, for example concrete, can be classified as cohesive frictional materials. Their mechanical behavior is governed by their pronounced pressure-sensitivity manifesting itself in entirely different failure mechanisms under tensile and compressive loadings. Consequently, the tensile and compressive strength of these materials can vary by several orders of magnitude. During their failure process, the formation of highly localized zones of concentrated straining, such as microcracks, slip planes, macroscopic crack planes or shear bands, can be observed. In general, this phenomenon of strain localization induces a highly anisotropic material response.

The development of finite element-based numerical models which take into account the above mentioned failure characteristics is the basic concern of the present work. To set the stage, the classical, local isotropic models of elasto-plasticity and elasto-damage are briefly reviewed. In a second step, the basic features of these models will be transferred to an anisotropic material characterization embedded in the so-called microplane concept. Within the framework of microplane theory, the response of a material point can be understood as the volume integral of its behavior on all material planes in space integrated over the solid angle. A general, thermodynamically consistent concept of formulating microplane-based constitutive laws will be presented. Its basic features are illustrated by means of the constitutive equations of microplane elasticity, microplane elasto-plasticity and microplane elasto-damage.

Especially in the post-critical regime, the solution of classical local continuum approaches shows the tendency to form highly localized failure zones. In a numerical simulation, the width of these failure zones corresponds to the width of a single finite element and thus tends to zero with an infinite mesh refinement. This disability of classical continuum approaches to model correctly the material behavior in the softening regime is caused by the fact, that local continuum models disregard the effects of changes in the microstructure. From a mathematical point of view, the resulting mesh dependency of the numerical solution is caused by a change of type of the governing equations. Insufficient boundary conditions lead to an ill-posed problem, the result of which is primarily determined by the underlying discretization. In the literature, several strategies have been proposed to remedy this deficiency through the introduction of an internal length scale. By doing so, microstructural changes can be taken into account. Within the present work, the microstructural length scale will be introduced in terms of a gradient enhanced continuum approach. Through the incorporation of higher order gradients in the constitutive equations, the problem remains well-posed and a finite number of solutions can be guaranteed. The existing gradient enhanced damage approaches in the literature are generalized to capture not only the classical isotropic material models but also the new anisotropic microplane-based material formulation. The performance of the proposed models is demonstrated and discussed by means of several selected examples.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als Stipendiatin des DFG Graduiertenkollegs "Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen" am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Ramm, der mir an seinem Institut einen idealen Rahmen für meine Forschungsarbeit geboten hat. Er hat es verstanden, meine persönliche Entwicklung durch einen optimalen Kompromiß zwischen Einräumung wissenschaftlicher Freiheiten und dennoch stetiger Gewährleistung von Sicherheit zu fördern. Sein fortwährendes Interesse und seine kreativen Ratschläge waren eine unverzichtbare Grundlage für die vorliegende Arbeit.

Herr Prof. dr.ir. René de Borst ermöglichte mir einen Forschungsaufenthalt an der TU Delft. Für die herzliche Gastfreundschaft sowie für zahlreiche wissenschaftliche Diskussionen und wertvolle Hinweise, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, bin ich ihm sehr dankbar. Insbesondere möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Paul Steinmann danken. Sein aufrichtiges Interesse an meiner Arbeit und zahlreiche motivierende Gespräche haben diese entscheidend geprägt.

Einen speziellen Dank möchte ich Herrn em. Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. mult. Erwin Stein aussprechen, der mich mit seiner beeindruckenden Persönlichkeit bereits während des Studiums für das Fachgebiet Mechanik begeistern konnte. Ein weiterer Dank gilt auch Herrn Prof. Dr.-Ing. Kaspar Willam, der während seines Forschungsaufenthaltes in Stuttgart immer ein offenes Ohr für meine fachlichen Probleme hatte und stets spontan Zeit für wissenschaftliche Diskussionen gefunden hat.

Ich danke allen Kollegen am Institut für Baustatik für ihre stete Hilfsbereitschaft und Freundlichkeit. Die zahlreichen anregenden Diskussionen, die nicht nur zur Entwicklung dieser Arbeit sondern auch zur Erweiterung des eigenen Wissenshorizontes beigetragen haben, möchte ich nicht missen. Ein besonderer Dank gilt Stefan Schwarz und Holger Steeb die während unserer gemeinsamen Zeit am Institut zu echten Freunden geworden sind. Darüber hinaus danke ich meinen ehemaligen Zimmerkollegen Fehmi Cirak, Kurt Maute und Gian Antonio D'Addetta, die für mich entscheidend zu einem angenehmen Arbeitsklima beigetragen haben.

Schließlich möchte ich mich ganz besonders herzlich bei meinen verständnisvollen Eltern und meinen Schwestern Anke und Katja bedanken, die mir während meiner gesamten Ausbildung eine bedingungslose Unterstützung gewährt haben. Ich danke natürlich auch meinem Ehemann Detlef. Die motivierenden Diskussionen und sein Verständnis für meine Arbeit haben mir stets einen unverzichtbaren Rückhalt gegeben.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Zielsetzung	3
1.3	Gliederung	5
2	Formulierung des Randwertproblems	7
2.1	Allgemeines	7
2.2	Randwertproblem der Kontinuumsmechanik	8
2.3	Schwache Form des Randwertproblems	9
2.4	Diskretisierung	10
2.5	Linearisierung	11
3	Klassische konstitutive Gesetze	13
3.1	Allgemeines	13
3.2	Plastizitätstheorie	15
3.2.1	Isotrope Elasto-Plastizität	17
3.2.2	Charakterisierung unterschiedlicher Plastizitätsmodelle	19
3.3	Kontinuumsschädigungsmechanik	21
3.3.1	Modelle der Degradation	24
3.3.2	Isotrope Elasto-Schädigung	27
3.3.3	Charakterisierung unterschiedlicher Schädigungsmodelle	29
4	Microplane Theorie	31
4.1	Allgemeines	31
4.2	Microplane-basierte konstitutive Gesetze	35
4.2.1	Kinematische und statische Projektion	35
4.2.2	Thermodynamisch konsistente konstitutive Gesetze	36
4.2.3	Diskretisierung – Numerische Integration	39
4.3	Microplane Elastizität	41
4.4	Microplane Elasto-Plastizität	42
4.5	Microplane Elasto-Schädigung	44
4.5.1	Formulierung mit drei Schädigungsvariablen	44
4.5.2	Formulierung mit einer Schädigungsvariablen	48
4.5.3	Formulierung mit Mikrorißschließung	49
4.6	Beispiele – Texturentwicklung	52
4.6.1	Microplane Elastizität	52
4.6.2	Microplane Elasto-Plastizität	53
4.6.3	Microplane Elasto-Schädigung	54

5	Lokalisierung	57
5.1	Allgemeines	57
5.2	Diskussion unterschiedlicher Versagenskriterien	59
5.2.1	Eindeutigkeit	60
5.2.2	Stabilität	62
5.2.3	Elliptizität	63
5.2.4	Starke Elliptizität	65
5.3	Lokalisierungsbedingung der Elasto-Plastizität	66
5.3.1	Analytische Lösung der Lokalisierungsbedingung	67
5.3.2	Numerische Lösung der Lokalisierungsbedingung	68
5.3.3	Geometrische Interpretation der Lokalisierungsbedingung	68
5.4	Lokalisierungsbedingung der Elasto-Schädigung	71
5.4.1	Analytische Lösung der Lokalisierungsbedingung	71
5.4.2	Numerische Lösung der Lokalisierungsbedingung	73
5.4.3	Geometrische Interpretation der Lokalisierungsbedingung	73
5.5	Netzabhängige Lösung – Modellproblem Zugstab	76
5.6	Erweiterte Modelle	78
5.6.1	Netzadaptierter Entfestigungsmodul	79
5.6.2	Berücksichtigung viskoser Effekte	80
5.6.3	Mikropolare Kontinuumstheorien	81
5.6.4	Nichtlokale Integalkontinua	83
5.6.5	Gradientenerweiterte Kontinuumsmodelle	84
6	Gradientenerweiterte Kontinua	87
6.1	Allgemeines	87
6.2	Berücksichtigung höherer Gradienten	90
6.3	Finite Element Formulierung	91
6.3.1	Schwache Form des Randwertproblems	92
6.3.2	Diskretisierung	93
6.3.3	Linearisierung	95
6.3.4	Interpolationsordnung	97
6.4	Konstitutive Gleichungen	98
6.4.1	Isotrope tensorielle Gradientenschädigung	98
6.4.2	Microplane-basierte tensorielle Gradientenschädigung	99
6.5	Beispiele	101
6.5.1	Modellproblem Zugstab	101
6.5.2	L-förmige Scheibe	104
6.5.3	Betondruckversuch	111
6.6	Bestimmung der internen Länge	114
6.6.1	Optimierungsproblem der Parameteridentifikation	114
6.6.2	Beispiel – Parameteridentifikation	118
7	Diskrete Partikelsysteme vs. Microplane Modell	121
7.1	Allgemeines	121
7.2	Diskretes Modell granularer Materialien	124
7.2.1	Kinematik	124
7.2.2	Konstitutives Gesetz	125

7.2.3	Homogenisierung	126
7.3	Elastizität	127
7.4	Elasto-Plastizität	129
7.5	Vergleich mit dem Microplane Modell	130
8	Makroskopische Modelle vs. Microplane Modell	133
8.1	Allgemeines	133
8.2	Parabolische Drucker-Prager Plastizität	134
8.2.1	Fließfunktion und plastisches Potential	134
8.2.2	Parameteranpassung	135
8.2.3	Analytische Lokalisierungsanalyse	136
8.3	Microplane-basierte Drucker-Prager Plastizität	138
8.3.1	Fließfunktion und plastisches Potential	138
8.3.2	Parameteranpassung	138
8.3.3	Numerische Lokalisierungsanalyse	140
8.4	Modellproblem Einfache Scherung	141
8.5	Beispiel - Scheibe mit Loch	145
9	Zusammenfassende Bewertung	149
9.1	Zusammenfassung	149
9.2	Bewertung	150
9.3	Ausblick	151
A	Notation und Tensorrechnung	169
B	Numerische Integration über den Raumwinkel	173

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Das stetig wachsende Interesse an einer möglichst genauen Beschreibung von Böden, Gestein, Fels, Eis, Keramiken und Beton dokumentiert eindrucksvoll, daß die Modellierung kohäsiver Reibungsmaterialien in der heutigen Zeit noch immer eine Herausforderung für die Forschung darstellt. Die Gründe hierfür sind vielfältig. Zum einen sind sie in dem natürlichen Bestreben nach einer optimalen Ausnutzung der Tragfähigkeit von Ingenieurstrukturen zu suchen, die durch Materialersparnis und Gewichtsreduktion wirtschaftlichere Formgebungen ermöglicht.

Zahlreiche jüngere Forschungsarbeiten sind jedoch nicht mehr allein dem Design optimaler Tragwerke gewidmet, vielmehr steht das Design neuer Materialien heute verstärkt im Mittelpunkt der Untersuchungen. In diesem Zusammenhang sind beispielhaft die modernen Hochleistungsbetone und Textilbeton zu nennen, die sich durch gesteigerte Widerstandsfähigkeit gegen mechanische und chemische Angriffe und weitaus höhere Festigkeiten im Vergleich zu herkömmlichen Betonen auszeichnen. Aufgrund der deutlich abgeminderten Duktilität dieser neuen Materialien rückt neben der klassischen Frage nach der Tragfähigkeit einer Struktur insbesondere die Frage nach der Abschätzung der Gefahr eines plötzlichen, spröden Versagens in den Vordergrund. Letztere erfordert zuverlässige Vorhersagen über das Nachversagensverhalten, die einerseits die Materialantwort an sich, andererseits die gesamte Strukturantwort betreffen. Um Vorhersagen über die Entwicklung der Resttragfähigkeit nach dem Erreichen der Traglast treffen zu können, sind fundierte Kenntnisse der zugrunde liegenden Versagensvorgänge aufgrund mikromechanischer Betrachtungen unverzichtbar. Auf der Mikroebene kann die Entstehung von Mikrodefekten und das Wachstum von Mikrorissen beobachtet werden, deren Zusammenschluß zu makroskopisch sichtbaren Zonen lokalisierten Versagens in Form von diskreten Scherbändern oder Makrorissen führen kann.

Die Entwicklung moderner Computertechnologien in den vergangenen zwei Jahrzehnten ermöglicht heute numerische Simulationen mit neuen komplexeren Materialmodellen, die die eben genannten Effekte berücksichtigen können. Anhand der Weiterentwicklung experimenteller Methoden können die neu entwickelten Modelle validiert und die zugehörigen Materialparameter identifiziert werden. Die Kombination aus numerischer Simulation und Experiment bestärkt ihrerseits wiederum die Entwicklung neuer, leistungsfähigerer Materialien.

Kohäsive Reibungsmaterialien gehören der Klasse der Multiskalen-Materialien an, die auf der Mikroebene eine ausgeprägt *heterogene* Struktur aufweisen, während sie auf der Makroebene als nahezu *homogen* angesehen werden können. Abbildung 1.1 verdeutlicht diesen Sachverhalt am Beispiel des Betons. Auf der Mikroebene ist das Materialverhalten durch die Wechselwirkung einzelner Komponenten geprägt. Beispielsweise stellt im Beton die Kontaktzone zwischen dem verhältnismäßig weichen Zementgestein und den relativ festen Zuschlagstoffen eine Schwachstelle im Material dar, die zum Ausgangspunkt eines möglichen makroskopischen Versagens werden kann.

Gemäß Abbildung 1.2 zeichnen sich kohäsive Reibungsmaterialien durch ein unterschiedliches Verhalten unter Zug- und Druckbelastung aus, das sich sowohl in extrem unterschiedlichen Festigkeiten als auch in unterschiedlichen Versagensformen äußert. Während unter Zug ein *sprödes* Verhalten zu beobachten ist, kann der Versagensmode unter Druckbeanspruchung je nach eingprägtem Seitendruck vom spröden Druckversagen bis hin zum klassischen *duktilen* Schubversagen variieren. Dem Materialversagen ist im allgemeinen ein für kohäsive Reibungsmaterialien charakteristisches *dilatantes* Antwortverhalten überlagert.

In nahezu allen Fällen ist eine extrem ausgeprägte *Lokalisierung* von Deformationen in schmalen Versagenszonen zu beobachten, die sich in Form von diskreten Rissen oder Scherbändern darstellt, vergleiche Abbildung 1.3. Diese für kohäsive Reibungsmaterialien typische lokalisierte Versagensform induziert ein *anisotropes* Materialverhalten, das insbesondere unter nicht-proportionalen Belastungen die Resttragfähigkeit einer Struktur von entscheidendem Ausmaß beeinträchtigen kann. In diesem Zusammenhang sind auch die charakteristischen Phänomene der Mikrorißschließung zu erwähnen, die bei einer Lastumkehr eine scheinbare Heilung des Materials hervorrufen.

Nicht zuletzt zeichnen sich kohäsive Reibungsmaterialien durch *nichtlokale* Effekte wie beispielsweise die Mikrorißwechselwirkung aus, so daß das Antwortverhalten eines Punktes stark durch den Zustand seiner Umgebung geprägt ist.

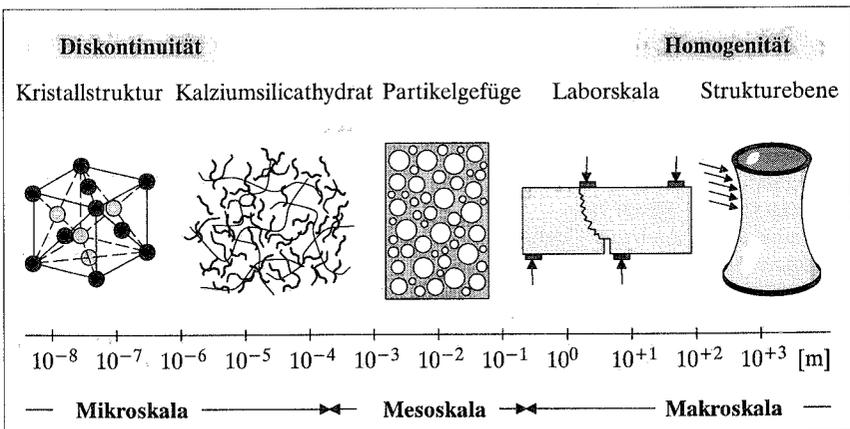


Abbildung 1.1: Darstellung der unterschiedlichen Skalen am Beispiel des Betons nach [150]

1.2 Zielsetzung

Aus den dargestellten Ausführungen ergibt sich die Forderung nach einem geeigneten zuverlässigen numerischen Simulationsverfahren, das in der Lage ist, die genannten charakteristischen Merkmale kohäsiver Reibungsmaterialien möglichst realitätsgetreu abzubilden. Die dazu erforderlichen Modelle sollen sich aus Effizienzgründen auf die Beschreibung der Meso- und der Makroskala entsprechend Abbildung 1.1 beschränken. Aus diesem Grund empfiehlt sich die Einbettung des Verfahrens in eine Finite Element Formulierung, da diese im Gegensatz zu diskreten Partikelmodellen die numerische Simulation größerer Ingenieurstrukturen ermöglicht.

Ausgehend von bekannten isotropen Plastizitäts- und Schädigungsmodellen wird die Komplexität der verwendeten Materialmodelle sukzessiv gesteigert. Insbesondere soll ein generisches Konzept zur Modellierung anisotropen Materialverhaltens entwickelt werden, das die klassischen isotropen Modelle in natürlicher Form beinhaltet. Als Grundlage hierfür bietet sich das sogenannte Microplane Konzept an. Es basiert auf der Annahme, daß sich die Antwort eines Materialpunktes als Funktion der Antworten aller durch den Punkt verlaufenden Ebenen darstellen läßt. Die Konstitutivbeschreibung reduziert sich damit auf die Charakterisierung des Antwortverhaltens der einzelnen Ebenen und besitzt somit eine anschauliche physikalische Interpretation.

Darauf aufbauend soll im zweiten Teil der Arbeit die Einbettung der Materialmodelle in ein erweitertes Kontinuumsmodell erfolgen, das den Anforderungen nach einer eindeutigen, netzunabhängigen Lösung insbesondere im postkritischen Bereich gerecht werden kann. Bekanntermaßen sind klassische lokale Kontinuumsmodelle nicht in der Lage, das heterogene Materialverhalten im entfestigenden Bereich eindeutig abzubilden, da sie keine interne Länge besitzen, die die Breite der entstehenden Lokalisierungszone begrenzen kann. Die zugehörigen Gleichungen des beschreibenden Randwertproblems verlieren ihre ursprünglich elliptischen Eigenschaften und das Problem wird schlecht gestellt. In der numerischen Simulation äußert sich diese Schlechtgestellttheit in netzabhängigen Lösun-

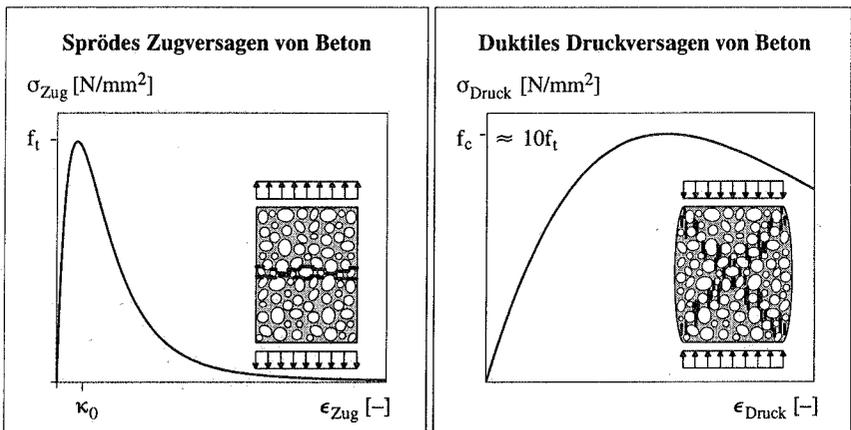


Abbildung 1.2: Unterschiedliches Zug-Druckverhalten am Beispiel des Betons

gen, die bei zunehmender Netzverfeinerung gegen die Ausbildung von Versagenszonen der Breite Null ohne Energiedissipation konvergieren. Da derartige Lösungen vollkommen unphysikalisch erscheinen, soll im Rahmen dieser Arbeit ein gradientenerweitertes, nichtlokales Kontinuumsmodell bereitgestellt werden, das durch die zusätzliche Berücksichtigung einer internen Längenskala die Begrenzung der Lokalisierungszone ermöglicht. Der Identifikation der Materialparameter der entwickelten Modelle soll eine besondere Bedeutung beigemessen werden. Einerseits gilt es, die Materialparameter des hier verwendeten microplane-basierten anisotropen Materialmodells physikalisch zu interpretieren. Andererseits wird es erforderlich, den internen Längenparameter des Gradientenkontinuums zu bestimmen. Dies läßt sich jedoch nur mittels inverser Modellierungsstrategien durchführen. Insbesondere kann der interne Längenparameter nicht mehr allein mit herkömmlichen homogenen Zug- und Druckversuchen ermittelt werden. Seine Bestimmung erfordert erweiterte Techniken wie beispielsweise optische Feldmeßmethoden, die sich mit Hilfe von Optimierungsverfahren im Rahmen der Finite Element Methode auswerten lassen.

Nicht immer ist eine extrem detaillierte Modellbildung erforderlich, häufig liefern wirtschaftlichere, einfache Modellierungsstrategien bereits hinreichend genaue Ergebnisse. Gegebenenfalls sind jedoch komplexere Materialmodelle unverzichtbar, um bestimmte charakteristische Effekte erfassen zu können. Aus diesem Grund sollen abschließend die verschiedenen Modellklassen unterschiedlicher Komplexität miteinander verglichen werden. Insbesondere wird es das Ziel sein, die Gültigkeitsbereiche der vorgestellten Verfahren gegeneinander abzugrenzen und die unterschiedlichen Modelle hinsichtlich ihres Einsatzbereiches zu bewerten.

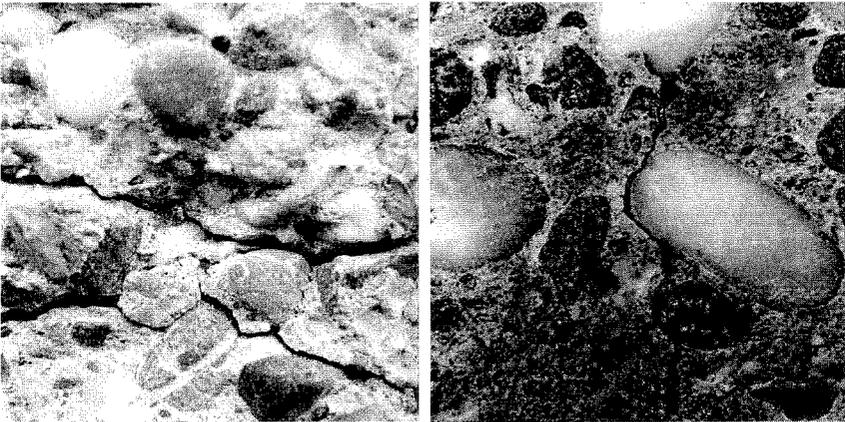


Abbildung 1.3: Mikrorißbildung in Beton

1.3 Gliederung

Die vorliegende Arbeit gliedert sich wie folgt. Zunächst wird in Kapitel 2 eine Zusammenfassung des beschreibenden Randwertproblems der *geometrisch linearen* Theorie im Rahmen eines *lokalen Kontinuumsmodells* bereitgestellt. Die numerische Lösung des Randwertproblems erfolgt mit Hilfe der *Finite Element Methode*. Die dazu erforderliche schwache Form sowie deren Diskretisierung und Linearisierung werden kurz skizziert.

In Kapitel 3 werden die klassischen Konstitutivgesetze der *lokalen, isotropen* Elasto-Plastizität und Elasto-Schädigung vorgestellt. Zunächst wird der Anwendungsbereich beider Modellklassen definiert. Aufbauend auf der Herleitung der konstitutiven Gesetze im Rahmen der *Thermodynamik irreversibler Prozesse* erfolgt dann eine Diskussion spezieller assoziierter und nicht-assoziierter Modelle.

Während in Kapitel 3 ausschließlich isotrope Konstitutivgesetze diskutiert wurden, soll in Kapitel 4 ein grundlegendes Konzept zur Modellierung *anisotropen* Materialverhaltens vorgestellt werden. Insbesondere wird ein allgemeines Schema zur thermodynamisch konsistenten Herleitung beliebiger anisotroper Konstitutivgesetze im Rahmen des *Microplane* Konzeptes aufgezeigt, dessen Wirkungsweise anhand der rheologischen Modelle der Elastizität, der Elasto-Plastizität und der Elasto-Schädigung illustriert werden soll.

Kapitel 5 ist dem Versagensphänomen der *Lokalisierung* gewidmet. Aufbauend auf einer Gegenüberstellung der klassischen Versagenskriterien für den Verlust von *Eindeutigkeit*, *Stabilität* und *Elliptizität* wird die Lokalisierungsbedingung, die den Verlust der elliptischen Eigenschaften des zugehörigen Randwertproblems kennzeichnet, exemplarisch anhand des Modellproblems des einaxialen Zuges ausgewertet. Die mit dem Verlust von Elliptizität verbundene Netzabhängigkeit der numerischen Lösung wird mit Hilfe des eindimensionalen Zugproblems veranschaulicht. Abschließend erfolgt eine kurze Diskussion unterschiedlicher Erweiterungsstrategien, die durch eine verbesserte Modellbildung den Verlust der elliptischen Eigenschaften verhindern und somit die Gutgestelltheit des Problems bewahren können.

Die Berücksichtigung höherwertiger räumlicher Gradienten stellt eine elegante *nichtlokale* Erweiterungsstrategie dar, die in Kapitel 6 erläutert werden soll. Nach einer kurzen Bereitstellung der erweiterten Finite Element Formulierung werden sowohl ein *isotropes* als auch ein *anisotropes* gradientenerweitertes Schädigungsmodell vorgestellt. Die regularisierende Wirkung *gradientenerweiterter Kontinuumsmodelle* wird anhand ausgewählter Beispiele veranschaulicht. Durch die Gradientenerweiterung werden zusätzliche Materialparameter erforderlich, deren Werte sich, wie gezeigt wird, mit Hilfe von Optimierungsverfahren im Rahmen einer *inversen Modellierung* identifizieren lassen.

Das Microplane Konzept, das die allgemeine Basis dieser Arbeit darstellt, läßt sich als Bindeglied zwischen der *Mikroebene* und der *Makroebene* interpretieren. Während Kapitel 7 der engen Verwandtschaft des Microplane Modells mit *diskreten* Partikelmodellen gewidmet ist, soll in Kapitel 8 ein Vergleich mit *makroskopisch phänomenologischen* Materialmodellen diskutiert werden. Dieser kann insbesondere hilfreich sein, um eine systematische Anpassung der Eingangsparameter des Microplane Modells an makroskopisch meßbare Materialkenngrößen zu ermöglichen. Abschließend erfolgt in Kapitel 9 eine zusammenfassende Bewertung der unterschiedlichen vorgestellten Simulationsstrategien.

Kapitel 2

Formulierung des Randwertproblems

Zur Einführung in die Thematik sollen in diesem Kapitel die grundlegenden Gleichungen der geometrisch linearen Kontinuumsmechanik sowie ihre numerische Umsetzung im Rahmen der Finite Element Methode skizziert werden. Dazu werden zunächst die das mechanische Randwertproblem charakterisierenden Grundgleichungen und Randbedingungen erläutert. Ausgehend von der zugehörigen schwachen Form wird die räumliche Diskretisierung mittels der Methode der Finiten Elemente durchgeführt. Die anschließende Linearisierung des entstehenden Gleichungssystems liefert den Ausgangspunkt inkrementell iterativer Verfahren zur Lösung des im allgemeinen nichtlinearen Problems.

2.1 Allgemeines

Das mechanische Verhalten von Ingenieurstrukturen ist in der Regel hochgradig komplex, so daß es häufig nahezu unmöglich ist, geschlossene analytische Lösungen anzugeben. In diesem Kapitel soll die Methode der Finiten Elemente als klassischer Vertreter der numerischen Verfahren vorgestellt werden, um das mechanische Antwortverhalten von Strukturen computergestützt zu modellieren. Die Finite Element Methode stellt in der heutigen Zeit ein für den Ingenieur unverzichtbares Werkzeug zur Simulation komplexer strukturmechanischer Vorgänge dar. Durch den stetig wachsenden Einsatz moderner Computertechnologien wurde die Entwicklung der Methode seit Ende der 60er Jahre stark vorangetrieben. Die grundlegenden Ideen der Finite Element Methode gehen auf ARGYRIS [5], CLOUGH [57] und auch ZIENKIEWICZ [226] zurück. Heute findet man zahlreiche Lehrbücher der Methode, zu den wohl bekanntesten zählen diejenigen von ZIENKIEWICZ & TAYLOR [228], HUGHES [93] und BATHE [9]. Mathematisch orientierte Ausführungen lassen sich beispielsweise STRANG & FIX [203] oder BRAESS [41] entnehmen.

Das Randwertproblem der klassischen Kontinuumsmechanik setzt sich aus der lokalen Form der Impulsbilanz, der kinematischen Bestimmungsgleichung sowie einem Konstitutivgesetz zusammen und wird durch geeignete Verschiebungs- oder Spannungsrandbedingungen komplettiert. Auf eine ausführliche Herleitung der mechanischen Grundgleichungen wird an dieser Stelle verzichtet, detaillierte Ausführungen finden sich beispielsweise in TRUESDELL & TOUPIN [216], TRUESDELL & NOLL [215], GREEN & ZERNA [84],

MALVERN [140], MARSDEN & HUGHES [143] sowie auch STEIN & BARTHOLD [194]. Für komplizierte Geometrien und Belastungen oder auch für ein komplexes Materialverhalten läßt sich der Satz der beschreibenden Gleichungen häufig nur noch numerisch lösen, als Werkzeug dient die Finite Element Methode. Der Grundgedanke dieser Methode basiert auf der Zerlegung der zu untersuchenden Struktur in eine finite Anzahl von Elementen, deren Verhalten im Rahmen der hier vorgestellten, weitverbreiteten Verschiebungsmethode durch die diskreten Verschiebungen an den Knoten dieser Elemente charakterisiert ist. Der Zusammenbau aller Elemente liefert unter Einhaltung kinematischer Kompatibilitätsbedingungen ein globales Gleichungssystem mit den Knotenverschiebungen als Unbekannte. Die für den Ingenieur relevanten Größen, wie beispielsweise die Verzerrungen oder die Spannungen, lassen sich anschließend in einer Nachlaufrechnung bestimmen.

Für den hier betrachteten Fall nimmt das globale Gleichungssystem aufgrund des nichtlinearen Materialverhaltens eine nichtlineare Struktur an, so daß zur Lösung inkrementell iterative Verfahren zum Einsatz kommen. Dazu wird die äußere Belastung schrittweise aufgebracht und zu jedem Schritt wird iterativ der zugehörige Gleichgewichtspunkt bestimmt. Besonders verbreitet ist in diesem Zusammenhang das NEWTON-RAPHSON Verfahren, das die konsistente Linearisierung der beschreibenden Gleichungen erfordert, um so in der Nähe der Lösung quadratische Konvergenz garantieren zu können.

Im folgenden sind die einzelnen Schritte der Herleitung einer Finite Element Formulierung kurz zusammengestellt. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich auf *geometrisch lineare, quasi-statische* Problemstellungen. Weiterhin soll ausschließlich ein *ratenunabhängiges* Materialverhalten betrachtet werden. Im Gegensatz zu dem in Kapitel 6 vorgestellten Gradientenkontinuum wird hier ein *klassisches lokales* Kontinuumsmodell zugrunde gelegt.

2.2 Randwertproblem der Kontinuumsmechanik

Im folgenden definiere $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{n_{dim}}$ die Konfiguration, die von dem zu beschreibenden Körper mit den Plazierungen $\mathbf{x} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ eingenommen wird. Es sollen nachfolgend ausschließlich quasi-statische Probleme betrachtet werden, so daß $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}(t)$. Die Deformationen des Körpers seien durch das vektorwertige Verschiebungsfeld $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ charakterisiert. Unter der Annahme einer *linearen Kinematik* in Verbindung mit kleinen Verzerrungen läßt sich das Tensorfeld der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim} \times n_{dim}}$ als symmetrischer Anteil des Verschiebungsgradienten

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^{sym} \mathbf{u} \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \quad (2.1)$$

darstellen. Das Tensorfeld der Spannungen $\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim} \times n_{dim}}$ erfülle die lokale Form der *Impulsbilanz* im Gebiet \mathcal{B} ,

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \quad (2.2)$$

wobei $\mathbf{b} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ das Vektorfeld der Volumenkräfte pro Dichteeinheit ρ symbolisiert. Aufgrund der *Drehimpulsbilanz* ist das Spannungsfeld des klassischen BOLTZMANN Kontinuums symmetrisch, so daß gilt $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ in \mathcal{B} . Bei einer Beschränkung auf ratenunabhängige Materialien lassen sich die Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ durch die *konstitutiven Gleichungen*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, q) \quad \text{in} \quad \mathcal{B} \quad (2.3)$$

als Funktion der Verzerrungen ϵ und eines Satzes von internen Variablen, die im folgenden in dem Vektor \mathbf{q} zusammengefaßt werden sollen, beschreiben. Der Rand $\partial\mathcal{B}$ des Körpers \mathcal{B} sei in disjunkte Untermengen $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_u \cup \partial\mathcal{B}_t$ mit $\partial\mathcal{B}_u \cap \partial\mathcal{B}_t = \emptyset$ unterteilt, auf denen entweder mit \mathbf{u}^p Randbedingungen vom DIRICHLET Typ oder mit \mathbf{t}^p Randbedingungen vom NEUMANN Typ vorgeschrieben sind, vergleiche Abbildung 2.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^p - \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \partial\mathcal{B}_u \\ \mathbf{t}^p - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} & \text{auf} & \partial\mathcal{B}_t \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.3 Schwache Form des Randwertproblems

Die Integration der Impulsbilanz (2.2) über das Gebiet \mathcal{B} und der NEUMANN Randbedingungen (2.4.2) über den Gebietsrand $\partial\mathcal{B}$ führt nach einer skalaren Multiplikation mit der vektorwertigen Testfunktion $\delta\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$, die den DIRICHLET Randbedingungen (2.4.1) genügen soll, auf folgende Darstellung.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{u} \cdot [\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}] dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \delta\mathbf{u} \cdot [\mathbf{t}^p - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] dA = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (2.5)$$

Interpretiert man die Testfunktion $\delta\mathbf{u}$ als virtuelle Verschiebung, so läßt sich die Herleitung analog mittels des Prinzips der virtuellen Arbeit motivieren. Mit Hilfe der partiellen Integration läßt sich die obige Gleichung unter Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes wie folgt vereinfachen.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta\nabla\mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \delta\mathbf{u} \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] dA + \int_{\partial\mathcal{B}} \delta\mathbf{u} \cdot [\mathbf{t}^p - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] dA \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (2.6)$$

Einsetzen der kinematischen Beziehung (2.1) unter Berücksichtigung der Drehimpulsbilanz, der konstitutiven Gleichungen (2.3) und der DIRICHLET Randbedingungen (2.4.1), die im Gegensatz zu der Gleichgewichtsbeziehung (2.2) und den NEUMANN Randbedingungen (2.4.2) in starker Form erfüllt werden sollen, führt auf die folgende schwache Form der Gleichgewichtsbeziehung.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q}) dV = \int_{\mathcal{B}} \delta\mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial\mathcal{B}_t} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^p dA \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (2.7)$$

Schwache Form des Gleichgewichts

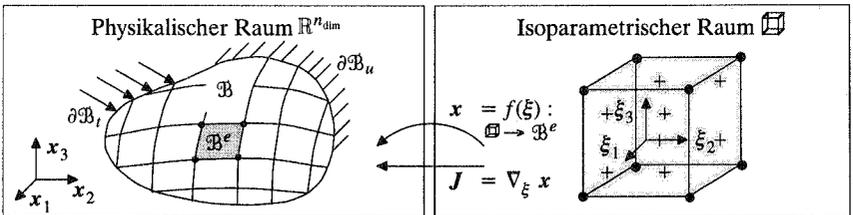


Abbildung 2.1: Diskretisiertes Gebiet \mathcal{B} und isoparametrische Abbildung

Hierbei repräsentiert der linke Teil der Gleichung die innere virtuelle Arbeit δW_{int} , während die rechte Gleichungsseite die externe virtuelle Arbeit δW_{ext} darstellt. Dementsprechend läßt sich die Gleichgewichtsbeziehung (2.7) vereinfacht in der folgenden Form angeben,

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.8)$$

wobei die interne und externe virtuelle Arbeit die folgende Form annehmen.

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &:= \int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q}) \, dV \\ \delta W_{ext} &:= \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^p \, dA \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.4 Diskretisierung

Die Diskretisierung des Gebietes \mathcal{B} erfordert seine Zerlegung in n_{elm} Finite Elemente $\mathcal{B} = \bigcup_{el=1}^{n_{elm}} \mathcal{B}^e$, die im folgenden durch jeweils n_{nod} Knoten charakterisiert seien, vergleiche Abbildung 2.1. Der Verschiebungsverlauf \mathbf{u} innerhalb eines Elementes läßt sich dementsprechend durch das Produkt aus Ansatzfunktionen $N^I(\boldsymbol{\xi})$ und diskreten Knotenfreiheitsgraden \mathbf{d}_I aufsummiert über alle n_{nod} Elementknoten approximieren, wobei $\boldsymbol{\xi}$ die natürlichen Koordinaten der isoparametrischen Abbildung symbolisiert. Eine analoge Diskretisierung gelte für die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &:= \sum_{I=1}^{n_{nod}} N^I \mathbf{d}_I & \boldsymbol{\epsilon} &:= \sum_{I=1}^{n_{nod}} \mathbf{d}_I \otimes \nabla_x N^I \\ \delta \mathbf{u} &:= \sum_{I=1}^{n_{nod}} N^I \delta \mathbf{d}_I & \delta \boldsymbol{\epsilon} &:= \sum_{I=1}^{n_{nod}} \delta \mathbf{d}_I \otimes \nabla_x N^I \end{aligned} \quad (2.10)$$

Entsprechend ergibt sich der Gradient des Verschiebungsfeldes aus den aufsummierten dyadischen Produkten der Knotenfreiheitsgrade mit den räumlichen Gradienten der Ansatzfunktionen $\nabla_x N^I$. Diese Gradienten der Ansatzfunktionen bezüglich der globalen Koordinaten \mathbf{x} lassen sich durch Anwendung der Kettenregel als Produkte aus der Inversen der JACOBI Matrix \mathbf{J} mit den partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den isoparametrischen Koordinaten $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} N^I$ angeben, siehe Abbildung 2.1.

$$\nabla_x N^I = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\boldsymbol{\xi}} N^I \quad \text{mit} \quad \mathbf{J} := \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\xi} \quad (2.11)$$

Unter der Voraussetzung der Kompatibilitätsbedingung ergibt sich die elementbezogene Version der Gleichgewichtsbeziehung (2.8) als Differenz der diskretisierten, elementspezifischen internen und externen virtuellen Arbeitsausdrücke δW_{int}^e und δW_{ext}^e ,

$$\delta W_{int}^e - \delta W_{ext}^e = 0 \quad \forall \delta \mathbf{d}_I \quad (2.12)$$

wobei sich letztere als skalares Produkt der Variation der Elementfreiheitsgrade mit den internen und externen Elementlasten darstellen lassen.

$$\begin{aligned} \delta W_{int}^e &:= \sum_{I=1}^{n_{nod}} \delta \mathbf{d}_I \cdot \mathbf{f}_{int}^I & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{int}^I := \int_{\mathcal{B}^e} \nabla N^I \cdot \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q}) \, dV \\ \delta W_{ext}^e &:= \sum_{I=1}^{n_{nod}} \delta \mathbf{d}_I \cdot \mathbf{f}_{ext}^I & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{ext}^I := \int_{\mathcal{B}^e} N^I \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_t^e} N^I \mathbf{t}^p \, dA \end{aligned} \quad (2.13)$$

Gemäß dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung ist die Aussage (2.12) dem Gleichgewicht der internen und externen Knotenkräfte \mathbf{f}_{int}^I und \mathbf{f}_{ext}^I in allen n_{nod} Elementknoten eines Elementes e äquivalent.

$$\mathbf{f}_{int}^I - \mathbf{f}_{ext}^I = \mathbf{0} \quad \forall I = 1, \dots, n_{nod} \quad (2.14)$$

2.5 Linearisierung

Im Rahmen dieser Arbeit wird vorwiegend ein nichtlineares Materialverhalten untersucht, bei dem sich der Spannungstensor als Funktion der Verzerrungen und eines Satzes von internen Variablen darstellen läßt. Dieser Zusammenhang ist im allgemeinen hochgradig nichtlinear, so daß die Lösung der entstehenden Gleichungen, wie allgemein üblich, inkrementell iterativ im Rahmen eines NEWTON-RAPHSON Verfahrens bestimmt werden soll. Dazu ist eine TAYLOR Reihenentwicklung der Gleichgewichtsbeziehung (2.14) um die genäherte Lösung zum Iterationsschritt n erforderlich. Diese liefert

$$[\mathbf{f}_{int}^I - \mathbf{f}_{ext}^I]^n = [\mathbf{f}_{int}^I - \mathbf{f}_{ext}^I]^{n-1} + \sum_{J=1}^{n_{nod}} \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{int}^I}{\partial \mathbf{d}_J} - \frac{\partial \mathbf{f}_{ext}^I}{\partial \mathbf{d}_J} \right] \cdot \Delta \mathbf{d}_J + \mathcal{O} \left(\sum_{J=1}^{n_{nod}} \Delta^2 \mathbf{d}_J \right) = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

wobei $\Delta \mathbf{d}_J := \mathbf{d}_J^n - \mathbf{d}_J^{n-1}$ die Differenz der diskreten Knotenfreiheitsgrade zum Iterationsschritt n und $n-1$ darstellt. Im folgenden sollen von Gleichung (2.15) lediglich die Terme bis zur linearen Ordnung in $\Delta \mathbf{d}_J$ berücksichtigt werden. Unter der Annahme deformationsunabhängiger äußerer Lasten, so daß $\mathbf{f}_{ext}^I = const$ ergeben sich die entsprechenden partiellen Ableitungen der Lastvektoren bezüglich der Knotenfreiheitsgrade wie folgt.

$$\left[\frac{\partial \mathbf{f}_{int}^I}{\partial \mathbf{d}_J} \right]^{n-1} = \int_{B^e} \nabla N^I \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{tan} \cdot \nabla N^J dV \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial \mathbf{f}_{ext}^I}{\partial \mathbf{d}_J} \right]^{n-1} = \mathbf{0} \quad (2.16)$$

Hierin bezeichnet $\boldsymbol{\varepsilon}_{tan}$ den vierstufigen Materialtangentialtensor, der sich mittels der partiellen Ableitung des Spannungstensors bezüglich des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}_{tan} := [\partial \boldsymbol{\sigma} / \partial \boldsymbol{\epsilon}]^{n-1}$ definieren läßt. Die linearisierte Gleichgewichtsbeziehung aus Gleichung (2.15) kann in dem folgenden elementspezifischen Gleichungssystem zusammengefaßt werden, dessen Lösung die inkrementelle Änderung des Vektors der Elementfreiheitsgrade $\Delta \mathbf{d} := [\Delta \mathbf{d}_J]$ liefert.

$$\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{d} = \mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int}^{n-1} \quad (2.17)$$

Elementspezifisches linearisiertes Gleichungssystem

Die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k} sowie der externe und interne Elementlastvektor \mathbf{f}_{ext} und \mathbf{f}_{int}^{n-1} ergeben sich hierbei wie folgt.

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &:= [\mathbf{k}^{IJ}] & \text{mit} & \quad \mathbf{k}^{IJ} = \int_{B^e} \nabla N^I \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{tan} \cdot \nabla N^J dV \\ \mathbf{f}_{ext} &:= [\mathbf{f}_{ext}^I] & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{ext}^I = \int_{B^e} N^I \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial B^e} N^I \mathbf{t}^p dA \\ \mathbf{f}_{int}^{n-1} &:= [\mathbf{f}_{int}^{I,n-1}] & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{int}^{I,n-1} = \int_{B^e} \nabla N^I \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n-1} dV \end{aligned} \quad (2.18)$$

Die Integralterme lassen sich mittels geeigneter Quadraturverfahren, beispielsweise mit Hilfe der GAUSS'schen Integration, durch diskrete Auswertung an bestimmten Integrationspunkten numerisch bestimmen, vergleiche ZIENKIEWICZ & TAYLOR [228], HUGHES [93] oder BATHE [9]. Die Summe der individuellen virtuellen Arbeitsanteile aller Elemente entspricht den virtuellen Arbeiten des Gesamtsystems entsprechend Gleichung (2.8) mit $\delta W_{int} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \delta W_{int}^e$ sowie $\delta W_{ext} = \sum_{e=1}^{n_{elm}} \delta W_{ext}^e$. Dementsprechend liefert der Zusammenbau aller $e = 1, \dots, n_{elm}$ Elemente

$$\mathbf{K} := \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{k}^e \quad \Delta \mathbf{D} := \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \Delta \mathbf{d}^e \quad \mathbf{F}_{ext} := \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{f}_{ext}^e \quad \mathbf{F}_{int}^{n-1} := \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{f}_{int}^{e,n-1} \quad (2.19)$$

das inkrementelle globale Gleichungssystem der folgenden Form,

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \mathbf{D} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}^{n-1} \quad (2.20)$$

Strukturspezifisches linearisiertes Gleichungssystem

wobei \mathbf{K} und $\Delta \mathbf{D}$ jeweils die globale Tangentensteifigkeitsmatrix und das Inkrement des globalen Freiheitsgradvektors darstellen. Entsprechend beschreiben \mathbf{F}_{ext} und \mathbf{F}_{int} die globalen Lastvektoren der externen und internen Systemlasten.

Im Rahmen dieser Arbeit soll ausschließlich ein materiell nichtlineares Verhalten untersucht werden. Es ist dazu erforderlich, die Definition des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q})$, dessen Wahl sich insbesondere auf den Vektor der internen Kräfte \mathbf{f}_{int}^{n-1} auswirkt, in entsprechender Form zu spezifizieren. Die Spezifizierung des Spannungstensors beeinflusst durch den Materialtangentialtensor $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}$ ebenfalls die tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{k} . Da die betreffenden Integralterme zur Bestimmung der internen Elementkräfte sowie der Elementsteifigkeitsmatrix entsprechend Gleichung (2.18) im folgenden numerisch ausgewertet werden sollen, erfolgt sowohl die Ermittlung des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ als auch die Bestimmung der Materialtangente $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}$ lediglich lokal auf der Ebene der Integrationspunkte. Die zu diesem Zweck erforderliche Spezifizierung der Materialbeschreibung soll in den folgenden Kapiteln ausführlich dargestellt werden. Die numerische Umsetzung der beschriebenen Modelle erfolgte im Rahmen des Finite Element Programms CARAT, siehe STEGMÜLLER, BLETZINGER & KIMMICH [193].

Kapitel 3

Klassische konstitutive Gesetze

3.1 Allgemeines

Dieses Kapitel dient einer Einführung in die Materialmodellierung im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse. Exemplarisch werden die klassischen konstitutiven Gesetze der isotropen Elasto-Plastizität und der isotropen Elasto-Schädigung gegenüber gestellt. Nach einer physikalischen Motivation des phänomenologischen Plastizitäts- bzw. Schädigungsmodells wird die Herleitung des jeweiligen beschreibenden Gleichungssatzes skizziert. Abschließend erfolgt eine kurze Diskussion der speziellen Wahl der äquivalenten Spannung bzw. Verzerrung für ausgewählte klassische Materialgesetze. Die in diesem Kapitel bereitgestellten isotropen konstitutiven Gesetze bilden damit die Basis einer microplane-basierten anisotropen Materialformulierung, die in Kapitel 4 hergeleitet werden soll.

Dieses Kapitel ist der Charakterisierung inelastischen Materialverhaltens gewidmet. Abbildung 3.1 zeigt schematisch den Spannungs-Dehnungsverlauf eines Materials, das über die Elastizitätsgrenze hinaus zyklisch beansprucht wurde. Im allgemeinen sind hierbei sowohl irreversible plastische Verzerrungen als auch eine Degradation der elastischen Eigenschaften zu beobachten. Ein solches Verhalten kann im Rahmen der *Thermodynamik irreversibler Prozesse* durch die Einführung *interner Variablen* charakterisiert werden, vergleiche TRUESDELL & TOUPIN [216], TRUESDELL & NOLL [215], COLEMAN & NOLL [59] und COLEMAN & GURTIN [58]. Das in Abbildung 3.1 dargestellte Antwortverhalten läßt sich insbesondere durch eine Kombination aus der Plastizitätstheorie und der Kontinuumschädigungsmechanik modellieren. Im Rahmen dieser Arbeit soll vereinfachend davon ausgegangen werden, daß einer dieser beiden Mechanismen als vernachlässigbar klein gegenüber dem anderen, dominanten Mechanismus angesehen werden kann. Dementsprechend wird zunächst die reine Plastizitätstheorie und anschließend die reine Kontinuumschädigungsmechanik vorgestellt.

Die Herleitung der beiden Materialmodelle, die sich hier auf kleine Verzerrungen beschränken sollen, erfolgt im Rahmen einer allgemeinen Vorgehensweise. Diese basiert auf der Spezifizierung einer freien Energiefunktion Ψ als Funktion der Verzerrungen ϵ und eines Satzes von internen Variablen \mathbf{q} . Die Auswertung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in Form der CLAUDIUS-DUHEM Ungleichung liefert die konjugierten Größen

zu den Argumenten dieser freien Energiefunktion. Der elastische Bereich des jeweiligen Materialmodells wird durch die Fließ- bzw. Schädigungsfunktion Φ charakterisiert. Im Rahmen der Plastizitätstheorie ist diese Fließfunktion üblicherweise *spannungsbasiert* formuliert und läßt sich als Differenz aus einer für das Materialverhalten charakteristischen äquivalenten Spannung oder Vergleichsspannung und der jeweiligen Fließspannung angeben, vergleiche Abschnitt 3.2. Im Gegensatz dazu nimmt die in Abschnitt 3.3 vorgestellte Schädigungsfunktion eine *verzerrungsbasierte* Form an und kann dementsprechend als Differenz aus einer von der äquivalenten Verzerrung abhängigen Funktion und dem Schädigungsparameter selbst angegeben werden. Selbstverständlich sind auch verzerrungsbasierte Plastizitätsformulierungen bzw. spannungsbasierte Schädigungsmodelle denkbar, siehe beispielsweise SIMO & JU [190], LEMAITRE & CHABOCHE [126] oder SUANNO [205]. Diese sollen jedoch hier nicht weiter behandelt werden.

Die Auswertung der zugehörigen Dissipationsungleichung liefert unter Einhaltung der Fließ- bzw. Schädigungsfunktion als Nebenbedingung die Evolutionsgleichungen der jeweiligen internen Variablen sowie die KUHN-TUCKER Bedingungen, die als Be- und Entlastungsvorschriften dienen. Während die Lösung der Evolutionsgleichungen der Plastizitätstheorie in der Regel ein Zeitintegrationsverfahren erfordert, kann die Evolutionsgleichung der Kontinuumschädigungsmechanik für den hier vorgestellten speziellen Fall explizit gelöst und in direkter Darstellung angegeben werden.

Die physikalische Motivation, die geschichtliche Entwicklung der jeweiligen Materialmodelle sowie die Herleitung der zugehörigen konstitutiven Gesetze soll im folgenden zunächst anhand der klassischen Plastizitätstheorie und anschließend anhand der Kontinuumschädigungsmechanik dargestellt werden. Dabei sind die vorgestellten Modelle zunächst auf *isotrope* Materialien beschränkt. Weiterhin sollen ausschließlich *lokale* Materialmodelle betrachtet werden, für die sich die Spannungsantwort eines materiellen Punktes stets allein aus der Geschichte dieses Punktes selbst bestimmen läßt. Diese werden im Sinne von NOLL als ‘*simple materials*’ bezeichnet, vergleiche TRUESDELL & NOLL [215]. Eine Erweiterung auf anisotrope, nichtlokale Materialmodelle erfolgt in Kapitel 4 bzw. 6.

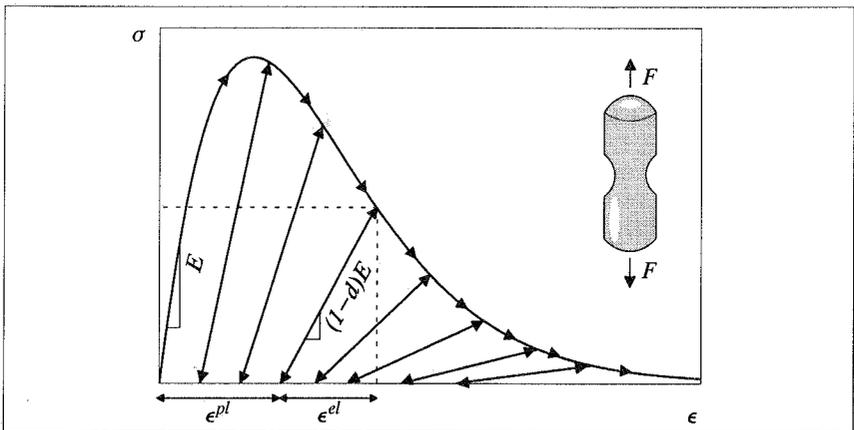


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung inelastischen Materialverhaltens

3.2 Plastizitätstheorie

Die Plastizitätstheorie dient der phänomenologischen Beschreibung der Entstehung irreversibler Verzerrungen. Dabei ist die makroskopisch phänomenologische Charakterisierung stark an das Materialverhalten auf der Mikroskala angelehnt. Die plastischen Verformungen der Mikrostruktur, die primär durch schubdominante Beanspruchungen hervorgerufen werden, sind im wesentlichen durch das Abgleiten mikroskopischer Elemente, wie beispielsweise der Atome eines Kristallgitters, entlang materialspezifischer ausgezeichnete Gleitebenen gekennzeichnet. Die reine Plastizitätstheorie ist hierbei lediglich in der Lage, die Entwicklung der aufgrund des Gleitvorganges entstehenden irreversibler Verzerrungen zu charakterisieren. Dabei bleiben die elastischen Materialeigenschaften im Modell unbeeinträchtigt, so daß das Spannungs-Dehnungs-Verhältnis bei Ent- und Wiederbelastung stets dem ursprünglichen Ausgangsverhältnis entspricht.

Abbildung 3.2 zeigt das mikromechanische Modell der Plastizität. Im unbelasteten Ausgangszustand erkennt man die regelmäßig angeordnete Struktur von Mikroelementen. In der klassischen Metallplastizität stellen diese Elemente die einzelnen Atome eines Kristallgitters dar, während man sich die Mikroelemente im Rahmen der Plastizitätstheorie kohäsiver Reibungsmaterialien beispielsweise als diskrete Sandkörner vorstellen kann. Bis zu einer bestimmten kritischen Grenzlast, die durch die Fließspannung gekennzeichnet ist, bleibt die Anordnung der Struktur unverändert. Die auftretenden Verformungen sind ausschließlich durch die Änderung der Abstände der einzelnen Elemente zueinander gekennzeichnet und somit rein elastisch. Bei einer Beanspruchung jenseits der Fließgrenze hingegen beginnen einzelne Schichten von Mikroelementen aneinander abzugleiten. Wie in Abbildung 3.2 skizziert, erfolgt dieser Gleitvorgang bevorzugt entlang ausgezeichneter Ebenen, die durch die dichteste Packung von Mikroelementen charakterisiert sind. Während die mit dem Gleiten verbundene Gestaltsänderung in metallischen Materialien nahezu isochor verläuft, ist der Gleitvorgang in Geomaterialien aufgrund einer Auflockerung des Korngefüges mit einer Volumendilatation verbunden. Bei metallischen Mate-

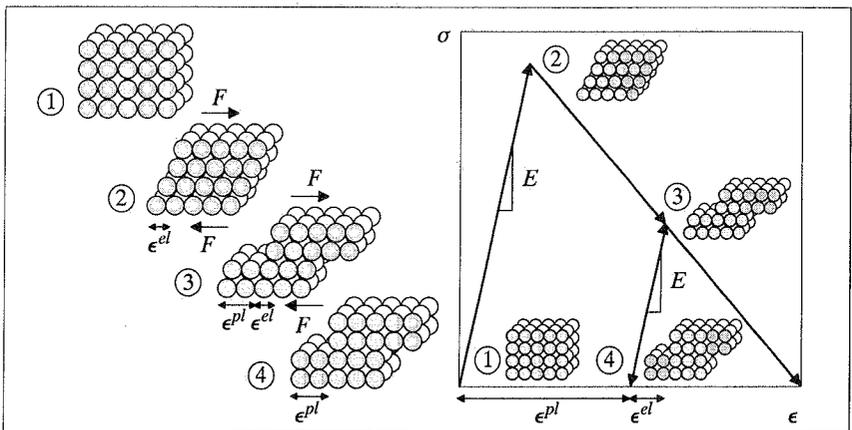


Abbildung 3.2: Mikromechanisches Modell der Elasto-Plastizität

rialien führt der plastische Fließvorgang auf ein makroskopisch verfestigendes Verhalten, das sich mittels der gegenseitigen Behinderungen einzelner Versetzungen erklären läßt. In Abbildung 3.2 hingegen ist ein entfestigendes Verhalten skizziert, wie es bei Geomaterialien, bedingt durch eine Auflockerung des Korngefüges, beobachtet werden kann. In beiden Fällen ist die Deformationsfigur durch irreversible Verformungen, verbunden mit einer Änderung der Positionen einzelner Mikroelemente, geprägt. Bei einer Entlastung, deren Pfad parallel zum Erstbelastungspfad erfolgt, verbleiben plastische Dehnungen. Im Gegensatz zur Kontinuumsschädigungsmechanik, die ein relativ junges Forschungsgebiet darstellt, sind die Anfänge der heutigen Plastizitätstheorie bereits mehr als ein Jahrhundert alt. Die wohl älteste Charakterisierung des plastischen Materialverhaltens geht auf TRESCA [213] zurück, der anhand zahlreicher Versuchsreihen an metallischen Werkstoffen die Analogie des inkompressiblen plastischen Fließens von Festkörpern zum Verformungsverhalten von Fluiden aufzeigen konnte. Erstmals wurden diese Beobachtungen von LÉVY [127] in einem allgemeinen Gleichungssatz für dreidimensionale Kontinua formuliert. Die ersten Fließformulierungen von TRESCA [214] und MOHR [155], die als Grundlage der heutigen Plastizitätstheorie verstanden werden können, sind durch die für das Fließen verantwortliche Hauptschubspannung als Differenz der ersten und dritten Hauptspannung gekennzeichnet. Die klassische VON MISES Plastizität [153] hingegen, die zu Beginn dieses Jahrhunderts entwickelt wurde, berücksichtigt zusätzlich die zweite Hauptspannung. So entsteht eine Fließformulierung, die üblicherweise auch als J_2 -Plastizität bezeichnet wird, da ihre Vergleichsspannung der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators entspricht. Den Plastizitätsformulierungen nach TRESCA [214] und VON MISES [153] liegt die Annahme zugrunde, daß das plastische Fließen einen rein isochoren Vorgang darstellt. Für metallische Materialien, die durch ein reines Schubversagen gekennzeichnet sind, ist diese Annahme durchaus gerechtfertigt. Anders ist jedoch das plastische Verhalten von Geomaterialien stark von dem hydrostatischen Druck geprägt. Es kann durch Fließfunktionen charakterisiert werden, die zusätzlich zum Einfluß der Schubspannungsterme die erste Invariante des Spannungstensors berücksichtigen, wie etwa die klassische MOHR-COULOMB [155] Formulierung sowie die speziell für Geomaterialien entwickelte DRUCKER-PRAGER [67] Plastizität. Erweiterte Plastizitätsmodelle beinhalten zusätzlich die dritte Invariante des Spannungsdeviators, um das unterschiedliche Kompressions- und Extensionsverhalten abbilden zu können, vergleiche EHLERS [71] oder WILLAM, HANSEN & KANG [225]. Mitte der 20er Jahre gelang HENCKY [86] die erste geschlossene Beschreibung des plastischen Materialverhaltens mittels einer Theorie, die heute allgemein unter dem Begriff *Deformationstheorie* geläufig ist. Im Gegensatz zu der nicht immer eindeutigen Deformationstheorie, die lediglich einen Zusammenhang zwischen den totalen Spannungen und Verzerrungen definiert, liefert die kurze Zeit darauf von PRANDTL und REUSS vorgestellte *Fließtheorie* selbst für zyklische Belastungen stets eine eindeutige Lösung, vergleiche REUSS [179]. Aus diesem Grund basieren die heutigen Plastizitätsformulierungen nahezu ausschließlich auf der letztgenannten Theorie, die durch die geschichtsabhängige Charakterisierung der Beziehung zwischen Spannungs- und Verzerrungsraten gekennzeichnet ist. Da die Plastizitätstheorie, verglichen mit der Kontinuumsschädigungsmechanik, ein allgemein akzeptiertes, weitverbreitetes Werkzeug zur Beschreibung inelastischen Materialverhaltens darstellt, soll an dieser Stelle auf detailliertere Ausführungen verzichtet werden. Zur ausführlichen Beschreibung der Theorie sei auf die klassischen Werke von NÁDAI [160] und HILL [88] sowie modernere Zusammenstellungen von MANDEL [142], LEMAÎTRE & CHABOCHE [126], LUBLINER [132], MIEHE [147] sowie SIMO & HUGHES [189] verwiesen.

3.2.1 Isotrope Elasto–Plastizität

Im folgenden Abschnitt wird kurz die Herleitung der Grundgleichungen der isotropen Elasto–Plastizität skizziert. Unter der hier postulierten Annahme kleiner Verzerrungen läßt sich der Verzerrungstensor ϵ , der dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten entspricht, additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil ϵ^{el} und ϵ^{pl} zerlegen.

$$\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{pl} \quad (3.1)$$

Die freie HELMHOLTZ Energie Ψ kann als Funktion der Gesamtverzerrungen sowie der internen Variablen $\mathbf{q} = \{\epsilon^{pl}, \kappa\}$ angegeben werden. Diese setzen sich aus den plastischen Verzerrungen ϵ^{pl} und einer das isotrope Verfestigungsverhalten charakterisierenden Größe κ zusammen. Damit kann die freie Energiefunktion wie folgt spezifiziert werden,

$$\Psi = \Psi(\epsilon, \epsilon^{pl}, \kappa) = W(\epsilon - \epsilon^{pl}) + \int_0^\kappa \phi(\kappa) d\kappa \quad (3.2)$$

wobei W die gespeicherte Energie bezeichnet, die sich aus der zweifachen Verjüngung des vierstufigen Elastizitätstensors \mathcal{E}^{el} mit den elastischen Verzerrungen ergibt.

$$W = W(\epsilon - \epsilon^{pl}) = \frac{1}{2} [\epsilon - \epsilon^{pl}] : \mathcal{E}^{el} : [\epsilon - \epsilon^{pl}] \quad (3.3)$$

Der zweite Summand in (3.2) charakterisiert das Verfestigungsverhalten als Funktion der Fließspannung ϕ . Die CLAUSIUS–DUHEM Ungleichung,

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{P} = \sigma : \dot{\epsilon} \quad (3.4)$$

die aus dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik hervorgeht, liefert eine Restriktion für die konstitutiven Gleichungen. Sie besagt, daß die Dissipation \mathcal{D} , die Differenz aus Spannungsleistung \mathcal{P} und Evolution der freien Energie Ψ , zu keiner Zeit des Prozesses negativ sein darf. Die Auswertung der isothermen Version der CLAUSIUS–DUHEM Ungleichung nach COLEMAN & NOLL [59] bzw. COLEMAN & GURTIN [58] liefert die Definition des Spannungstensors σ als konjugierte Größe zu den elastischen Verzerrungen,

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \epsilon^{el}} = \mathcal{E}^{el} : [\epsilon - \epsilon^{pl}] \quad (3.5)$$

sowie die verbleibende Dissipationsungleichung.

$$\mathcal{D} = \sigma : \dot{\epsilon}^{pl} - \phi \dot{\kappa} \geq 0 \quad (3.6)$$

Es ist üblich, die Fließfunktion Φ als spannungsbasiertes Versagenskriterium charakterisiert durch die Differenz der Vergleichsspannung $\varphi(\sigma)$ und der Fließspannung $\phi(\kappa)$

$$\Phi = \Phi(\sigma, \phi) = \varphi(\sigma) - \phi(\kappa) \leq 0 \quad \text{mit} \quad \nu := \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \quad (3.7)$$

anzugeben, wobei ν den Normalentensor auf die Fließfläche im Spannungsraum darstellt. Mit Hilfe des *Postulats der maximalen Dissipation* läßt sich die Dissipationsungleichung (3.6) in ein mathematisches Optimierungsproblem mit der Fließfunktion (3.7) als Nebenbedingung überführen, vergleiche LUENBERGER [133]. Der hierzu erforderliche LAGRANGE'sche Multiplikator $\dot{\gamma}$ wird als plastischer Multiplikator bezeichnet. Die Stationarität des zugehörigen Sattelpunktproblems

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D} + \dot{\gamma} \Phi = -\sigma : \dot{\epsilon}^{pl} + \phi \dot{\kappa} + \dot{\gamma} [\varphi(\sigma) - \phi(\kappa)] \rightarrow \text{stat} \quad (3.8)$$

liefert mit dem plastischen Potential $\Phi^* = \Phi$ sowohl die Evolutionsgleichungen der plastischen Verzerrungen und der Verfestigungsvariablen,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= -\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} + \dot{\gamma} \boldsymbol{\mu} = 0 & \rightarrow & \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\mu} & \text{mit} & \boldsymbol{\mu} := \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} &= \dot{\kappa} - \dot{\gamma} = 0 & \rightarrow & \dot{\kappa} = \dot{\gamma} \end{aligned} \quad (3.9)$$

als auch die Be- und Entlastungsvorschriften in Form der KUHN-TUCKER Bedingungen

$$\Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (3.10)$$

und die Konsistenzbedingung.

$$\dot{\Phi} \dot{\gamma} = 0 \quad (3.11)$$

Deren Auswertung führt unmittelbar auf die Evolutionsgleichung des plastischen Multiplikators $\dot{\gamma}$,

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{h} \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{mit} \quad h := H + \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\mu} \quad (3.12)$$

wobei H den isotropen Verfestigungsmodul bezeichnet. Dieser läßt sich mit Hilfe der Evolutionsgleichung der Fließspannung definieren.

$$\dot{\phi} = H \dot{\kappa} \quad \text{mit} \quad H = \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \quad (3.13)$$

Der vierstufige elasto-plastische Tangentenoperator $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep}$, der die Beziehung zwischen Spannungs- und Verzerrungsraten charakterisiert, so daß $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, nimmt damit die folgende Form an.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} - \frac{1}{h} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} \quad (3.14)$$

Aufgrund der Herleitung über das *Postulat der maximalen Dissipation* entspricht die Fließrichtung $\boldsymbol{\mu}$ in diesem Fall gerade der Normalen auf die Fließfläche $\boldsymbol{\nu}$, weshalb eine derartige Fließregel auch als *Normalenregel* bzw. die zugehörige Plastizitätsformulierung als *assoziiert* bezeichnet wird. Es ist offensichtlich, daß eine solche assoziierte Plastizitätsformulierung, die die *Konvexität der Fließfläche* impliziert, für $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\mu}$ auf symmetrische elasto-plastische Tangentenoperatoren führt, vergleiche Tabelle 3.1.

Freie Energie	$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\epsilon}^{pl}, \kappa) = 1/2 \boldsymbol{\epsilon}^{el} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}^{el} + \int_0^\kappa \phi(\kappa) d\kappa$
Spannungen	$\boldsymbol{\sigma} = \partial \Psi / \partial \boldsymbol{\epsilon}^{el} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : [\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl}]$
Fließspannung	$\phi = \partial \Psi / \partial \kappa \quad \dot{\phi} = H \dot{\kappa}$
Fließfunktion	$\Phi = \varphi(\boldsymbol{\sigma}) - \phi(\kappa) \leq 0$
Evolutionsgleichungen	$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{pl} = \dot{\gamma} \partial \Phi / \partial \boldsymbol{\sigma} \quad \dot{\kappa} = \dot{\gamma}$
KUHN-TUCKER Bedingungen	$\dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \Phi = 0$
Konsistenzbedingung	$\dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0$
Tangentenmoduli	$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep} = \partial^2 \Psi / \partial \boldsymbol{\epsilon}^2 = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} - 1/h \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$

Tabelle 3.1: Isotrope Elasto-Plastizität – Konstitutive Gleichungen

3.2.2 Charakterisierung unterschiedlicher Plastizitätsmodelle

Im vorigen Abschnitt wurde die thermodynamische Herleitung eines isotropen Plastizitätsmodells skizziert. Es ist leicht ersichtlich, daß die Spezifizierung eines Plastizitätsmodells stark von der Wahl der äquivalenten Spannung $\varphi(\boldsymbol{\sigma})$ beeinflusst wird. Im folgenden sollen daher kurz einige der bekanntesten Vergleichsspannungsmodelle und die daraus resultierenden Plastizitätsformulierungen erläutert werden. Die Wahl der äquivalenten Spannung definiert die Normale $\boldsymbol{\nu}$ auf die Fließfläche im Spannungsraum. In Abschnitt 3.2.1 wurde postuliert, daß die zugehörige Fließrichtung $\boldsymbol{\mu}$ dieser Normalenrichtung entspricht. Eine alternative Wahl der Fließrichtung, die auf eine nicht-assozierte Plastizitätsformulierung führt, wird im zweiten Teil dieses Abschnitts diskutiert.

Äquivalente Spannung

Während sich für metallische Werkstoffe mit nahezu identischen Druck- und Zugfestigkeiten druckunabhängige Fließformulierungen wie beispielsweise die Plastizitätstheorie nach TRESCA [214] oder die VON MISES Plastizität [153] anbieten, eignen sich für dilatante Geomaterialien druckabhängige Definitionen der Vergleichsspannung, entsprechend dem Plastizitätsmodell von MOHR-COULOMB [155] oder DRUCKER-PRAGER [67]. Die unterschiedlichen Vergleichsspannungen der einzelnen Modelle sind in Tabelle 3.2 gegenüber gestellt.

	$\varphi = \varphi(\boldsymbol{\sigma})$
TRESCA[214]	$\varphi = [\sigma_I - \sigma_{II}] / 2 \quad \forall \quad I, II=1,2,3 \quad I \neq II$
MOHR-COULOMB [155]	$\varphi = [\sigma_I - \sigma_{II}] / 2 + \alpha [\sigma_I + \sigma_{II}] / 2 \quad \forall \quad I, II=1,2,3 \quad I \neq II$
VON MISES [153]	$\varphi = \sqrt{J_2}$
DRUCKER-PRAGER [67]	$\varphi = \sqrt{J_2} + \alpha I_1$

Tabelle 3.2: Unterschiedliche Definitionen der äquivalenten Spannung

Abbildung 3.3 zeigt die resultierenden Fließfunktionen des MOHR-COULOMB sowie des DRUCKER-PRAGER Modells in der Deviatorenebene, der sogenannten Π -Ebene, sowie im Invariantenraum. Während das MOHR-COULOMB Kriterium als klassischer Vertreter der Mehrflächen-Plastizität eine sechsseitige Pyramide darstellt, nimmt das DRUCKER-PRAGER Modell eine Kegelform an. Die Fließfunktionen nach TRESCA und VON MISES ergeben sich jeweils als vom hydrostatischen Druck unabhängige Spezialfälle mit $\alpha = 0$. Da für zweidimensionale Formulierungen nur zwei Hauptspannungen σ_I und σ_{II} existieren, sind das MOHR-COULOMB und das DRUCKER-PRAGER Modell in diesem Fall identisch, gleiches gilt für das TRESCA und VON MISES Kriterium.

Assoziierte und nicht-assozierte Plastizitätsmodelle

Für metallische Materialien entspricht die Normalenrichtung auf die Fließfläche in erster Näherung der Richtung des plastischen Fließens, $\boldsymbol{\nu} \parallel \boldsymbol{\mu}$. Die resultierende Plastizitätsformulierung ist konform mit dem Postulat der maximalen Dissipation und wird als *assoziert* bezeichnet, vergleiche Abschnitt 3.2.1. Für dilatante Geomaterialien hingegen würde eine derartige Normalenregel zur Bestimmung der Fließrichtung die volumetrischen Verzerren extrem überschätzen. Es ist in diesem Zusammenhang üblich, die Fließrichtung

als Normale auf ein unabhängig von der Fließfunktion Φ zu spezifizierendes plastisches Potential Φ^* zu definieren, vergleiche beispielsweise DRUCKER & PRAGER [67]. Damit ist die Normalenrichtung auf die Fließfläche nicht mehr identisch der Fließrichtung $\nu \parallel \mu$, so daß die zugehörige Fließformulierung als *nicht-assoziert* bezeichnet wird. Die zugehörigen Grundgleichungen, die nun nicht mehr dem Postulat der maximalen Dissipation genügen, führen auf unsymmetrische Tangentenoperatoren. Dies wirkt sich insbesondere auf das Materialversagen aus, das, wie in Kapitel 5 gezeigt wird, für nicht-assozierte Modelle früher eintreten kann, als für assoziierte Plastizitätsformulierungen.

	Φ, Φ^*	ν	μ
VON MISES [153] assoziert	$\Phi = \sqrt{J_2} - \phi$ $\Phi^* = \sqrt{J_2} - \phi$	$\nu = \sigma^{dev} / [2\sqrt{J_2}]$ $\mu = \sigma^{dev} / [2\sqrt{J_2}]$	$\nu \parallel \mu$
DRUCKER-PRAGER [67] assoziert	$\Phi = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \phi$ $\Phi^* = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \phi$	$\nu = \sigma^{dev} / [2\sqrt{J_2}] + \alpha \mathbf{1}$ $\mu = \sigma^{dev} / [2\sqrt{J_2}] + \alpha \mathbf{1}$	$\nu \parallel \mu$
DRUCKER-PRAGER [67] nicht-assoziert	$\Phi = \sqrt{J_2} + \alpha I_1 - \phi$ $\Phi^* = \sqrt{J_2} + \alpha^* I_1 - \phi^*$	$\nu = \sigma^{dev} / [2\sqrt{J_2}] + \alpha \mathbf{1}$ $\mu = \sigma^{dev} / [2\sqrt{J_2}] + \alpha^* \mathbf{1}$	$\nu \not\parallel \mu$

Tabelle 3.3: Assoziierte und nicht-assozierte Plastizitätsmodelle

In Tabelle 3.3 sind beispielhaft die Fließfunktion und das plastische Potential sowie die zugehörigen Normalentensoren für die VON MISES und die DRUCKER-PRAGER Plastizität gegenüber gestellt. Während die ersten beiden Tabellenzeilen eine assoziierte Fließformulierung mit $\nu \parallel \mu$ charakterisieren, stellt die letzte Zeile eine für Geomaterialien typische nicht-assozierte Fließformulierung mit $\nu \not\parallel \mu$ dar, wie sie in Kapitel 8 ausführlich untersucht wird.

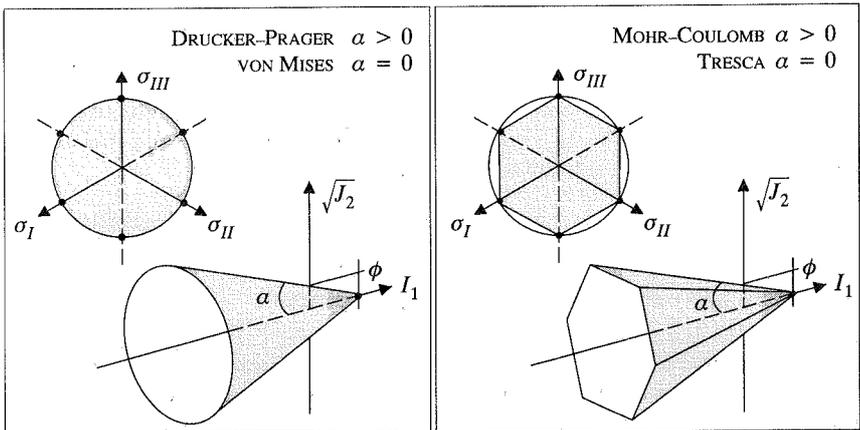


Abbildung 3.3: Unterschiedliche Fließflächen

3.3 Kontinuumsschädigungsmechanik

Im Gegensatz zur Plastizitätstheorie ist die Kontinuumsschädigungsmechanik der phänomenologischen Beschreibung der mit der Deterioration eines Materials verbundenen Mechanismen gewidmet. Das zugrunde liegende Versagensverhalten findet auf unterschiedlichen Skalen statt, beginnend mit der Akkumulation von Mikrospannungen in der Nähe von Mikrodefekten und inneren Grenzschichten sowie dem Versagen atomarer Verbindungen auf der Mikroskala. Eine natürliche Konsequenz dieser mikroskopischen Defekte ist die Bildung von Mikrorissen und Mikroporen auf der Mesoskala sowie, bei weiterer Belastung, deren Wachstum und Zusammenschluß zu makroskopisch sichtbaren Rißmustern. Während sich die Versagensvorgänge auf der Mikro- und Mesoskala mit Hilfe der Schädigungstheorie im Rahmen der Mechanik kontinuierlich deformierbarer Körper beschreiben lassen, fallen die diskontinuierlichen Versagensmechanismen auf der Makroskala eher in das Gebiet der Bruchmechanik.

So beschränkt sich die Kontinuumsschädigungsmechanik auf die Beschreibung der Schädigungsvorgänge auf der atomaren Ebene bis hin zur Reißinitiation. Auf Atomebene beginnt das Versagen mit der Reduktion der Anzahl der atomistischen Verbindungen. Da diese hauptsächlich die elastischen Eigenschaften des Materials beeinflussen, kann die Schädigung im wesentlichen als die Degradation der elastischen Materialeigenschaften verstanden werden, so daß mit einer reinen Elasto-Schädigung keine irreversiblen Dehnungen verbunden sind. In der Realität findet man häufig Kombinationen aus der Abminderung der elastischen Eigenschaften sowie auftretenden irreversiblen Verzerrungen, die durch eine Kopplung von Kontinuumsschädigungsmechanik und Plastizitätstheorie beschrieben werden können. Für betonartige Materialien kann jedoch insbesondere im Zugbereich der Schädigungsmechanismus als dominant gegenüber dem Plastizitätsversagen angenommen werden, da das Versagensverhalten eher von quasi-spröder Natur ist. Dieses quasi-spröde Verhalten führt auf stark lokalisierte Versagensformen und ist infolgedessen mit hohen räumlichen Gradienten der Schädigungsgrößen verbunden.

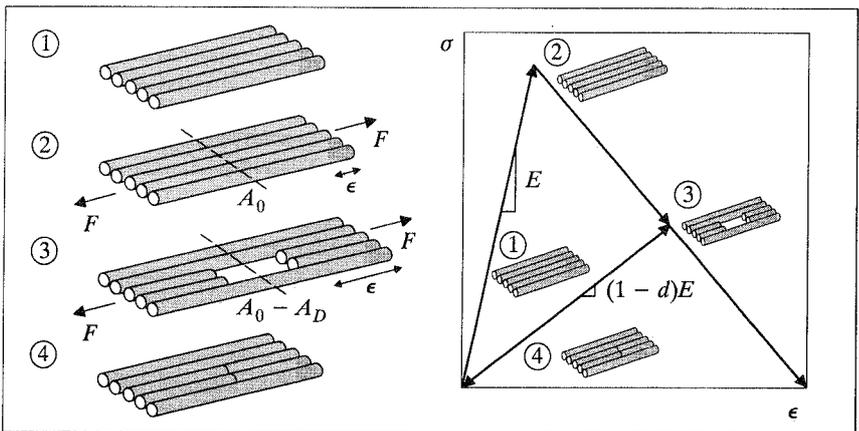


Abbildung 3.4: Mikromechanisches Modell der Elasto-Schädigung

Seit der Einführung des skalaren Schädigungskonzeptes Ende der 50er Jahre ist das Interesse an dem Gebiet der Kontinuumschädigungsmechanik als Werkzeug zur phänomenologischen Beschreibung der Degradation mechanischer Eigenschaften stetig angewachsen. Der Begriff der Schädigungsmechanik wird heute unmittelbar mit KACHANOV [102] in Verbindung gebracht, der erstmals eine skalare Größe zur phänomenologischen Beschreibung der Deterioration der Materialeigenschaften eingeführt hat. Allerdings wählte KACHANOV als Beschreibungsgröße die Kontinuität des Materials $\Psi := [A_0 - A_d]/A_0$ mit $1 \geq \Psi \geq 0$, wobei A_d die geschädigte Fläche und A_0 die ursprünglich ungeschädigte Ausgangsfläche darstellt. Kurz darauf gelang RABOTNOV [176] die Formulierung des *“Konzeptes der effektiven Spannungen”*, das einen Bezug zwischen den nominalen Spannungen und den im geschädigten Material herrschenden effektiven Spannungen herstellt. Danach blieben diese grundlegenden Ideen, die heute die Basis der Kontinuumschädigungsmechanik darstellen, über längere Zeit hinweg weitestgehend unbeachtet.

Erst zu Beginn der 70er Jahre wurde das Interesse an der phänomenologischen Beschreibung von Schädigung wieder neu geweckt. Anstelle der Kontinuität wurde die Schädigungsvariable $d := 1 - \Psi$ eingeführt, und der Begriff der skalaren Schädigung konnte als effektive Flächendichte von Mikrodefekten $d := A_d/A_0$ verstanden werden. Abbildung 3.4 illustriert das mikromechanische Modell der Schädigung mit Hilfe der parallelen Anordnung einer unendlichen Anzahl von Fasern, vergleiche KRAJČINOVIC [106]. Im Ausgangszustand ist die geschädigte Fläche identisch Null, es ist also dementsprechend keine Schädigung vorhanden $d = 0$. Zunehmende Belastung führt auf sukzessives Versagen einzelner Fasern und ist mit einem Abfall der Spannungs–Dehnungskurve verbunden. Die effektive Flächendichte der gebrochenen Fasern wächst, so auch der Schädigungsparameter, es gilt $0 \leq d \leq 1$ sowie $d \geq 0$. Unter Entlastung kehrt die Spannungs–Dehnungskurve wieder zum Ursprung zurück, es sind weder irreversible Verzerrungen noch eine zusätzliche Schädigungsakkumulation zu beobachten, so daß $\dot{d} = 0$.

Mittels dieser anschaulichen Interpretation gelang es vor allem LEMAÎTRE [123],[124], KRAJČINOVIC [105], KACHANOV [103] und CHABOCHE [53], das Konzept der isotropen Kontinuumschädigungsmechanik im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse aufzubereiten, wobei die skalare Schädigungsgröße d als interne Variable eingeführt wurde. Um den unterschiedlichen Versagensphänomenen Rechenschaft zu tragen, wurden zahlreiche differenzierte Schädigungsmodelle für duktile Schädigung, Kriechschädigung, Ermüdungsschädigung sowie viskose Schädigung formuliert und seit Ende der 80er Jahre in umfangreichen Übersichtsbüchern veröffentlicht, siehe LEMAÎTRE & CHABOCHE [126], KACHANOV [103], KRAJČINOVIC & LEMAÎTRE [108], LEMAÎTRE [125] sowie KRAJČINOVIC [106]. Eine weitere Vereinfachung konnte die Kontinuumschädigungsmechanik mit den Beiträgen von SIMO & JU [190] und JU [99] erfahren, die eine Methode vorstellten, die es ermöglichte, die Evolutionsgleichung der Schädigungsvariablen durch eine ratenfreie explizite Gleichung zu ersetzen. So konnte die algorithmische Effizienz der numerischen Umsetzung bemerkenswert verbessert werden. Eine sehr gute zusammenfassende Klassifizierung unterschiedlicher isotroper Schädigungsmodelle bietet die Übersichtsveröffentlichung von CAROL, RIZZI & WILLAM [50].

Es ist abschließend zu erwähnen, daß unter Zuhilfenahme einer einzigen Schädigungsvariablen lediglich eine bestimmte Klasse der isotropen Schädigung abgebildet werden kann, da der skalarwertigen Schädigung die Annahme einer unveränderlichen POISSON Zahl zugrunde liegt. Im allgemeinen Fall der isotropen Schädigung müßten also zwei Schädigungsvariablen eingeführt werden, um die beiden Elastizitätskonstanten unabhängig von-

einander abmindern zu können, vergleiche JU [100].

Die isotrope Schädigungstheorie zeichnet sich vor allem durch ihre Einfachheit, ihre extrem hohe Effizienz und relativ gute Genauigkeit für die meisten praktischen Anwendungen, die proportionalen Belastungszuständen unterliegen, aus. Jedoch konnte experimentell, insbesondere in quasi-spröden Materialien wie Beton, ein stark richtungsabhängiger Charakter der Schädigung beobachtet werden. Auf der Mikroebene äußert sich diese Richtungsabhängigkeit durch Ausbildung von Mikrorissen, die nahezu orthogonal zur Richtung der maximalen Hauptspannung angeordnet sind. Die Annahme von gleichmäßig verteilten, kugelförmigen Mikroporen, die der isotropen Schädigung zugrunde liegt, wird offensichtlich verletzt, so daß eine anisotrope Materialbeschreibung erforderlich wird. Die einfachsten Modelle der anisotropen Schädigung basieren auf der Einführung einer vektorwertigen Schädigungsvariablen, vergleiche KRAJČINOVIC & FONESKA [107]. Sie können als natürliche Erweiterung der Interpretation von Schädigung als effektive Flächendichte von Mikrodefekten verstanden werden. Der Schädigungsvektor \mathbf{d} läßt sich als Produkt der für eine Materialebene charakteristischen Schädigung d_n mit der Ebenennormalen \mathbf{n} bestimmen, so daß gilt $\mathbf{d} = d_n \mathbf{n}$. Ein wesentlicher Vorteil dieses Modells, das später mit dem Microplane Modell auf die Berücksichtigung mehrerer charakteristischer Materialebenen erweitert wurde, ist zweifelsohne seine anschauliche physikalische Interpretationsmöglichkeit.

Von MURAKAMI [159] wurde ein zweistufiger Schädigungstensor eingeführt, der die Dichte von Mikrodefekten in den Flächen orthogonal zu den Hauptspannungsrichtungen beschreiben konnte. Eine Erweiterung des Modells im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie wurde von STEINMANN & CAROL [199] vorgestellt. Dieses Modell, das lediglich drei Schädigungsparameter benötigt, ist aufgrund seiner Einfachheit sehr beliebt, jedoch ist es auf eine bestimmte Klasse orthotropen Materialverhaltens beschränkt. Weiterhin erfordert es die nachträgliche Symmetrisierung des Spannungstensors, da die Symmetriehaltung der Spannungen in einem zweistufigen Schädigungsmodell nicht notwendigerweise gewährleistet ist. Der von MURAKAMI beschriebene zweistufige Schädigungstensor wurde von CORDEBOIS & SIDOROFF [61] aufgegriffen, um mit seiner Hilfe einen Schädigungstensor vierter Stufe einzuführen, vergleiche auch JIRÁSEK [97] sowie CAROL, RIZZI & WILLAM [51]. In einer noch allgemeineren Form wurden sogar achtstufige Schädigungstensoren definiert. In der Regel bleibt jedoch zu bemerken, daß die Interpretierbarkeit und die physikalische Bedeutung der einzelnen Tensorkomponenten für höherwertige Tensoren immer schwieriger wird. Häufig werden deshalb analytische Lösungen aus mikro-mechanischen Untersuchungen wie beispielsweise für ein Feld paralleler Mikrorisse oder gleichmäßig verteilter Mikroporen zur Motivation höherwertiger Schädigungstensoren herangezogen. Ein solches Vorgehen ist ausführlich in den Veröffentlichungen von CHABOCHE [52], JU [101], LUBARDA & KRAJČINOVIC [131], BRUHNS & SCHIESSE [44] sowie in den Übersichtsbüchern von NEMAT-NASSER & HORI [161] und KRAJČINOVIC [106] beschrieben.

Die Entwicklung der Modellbildung einer anisotropen Schädigung kann demnach, im Gegensatz zur isotropen Schädigung, noch immer nicht als beendet angesehen werden. Obwohl die Beschreibung der anisotropen Schädigung im Rahmen der Thermodynamik irreversibler Prozesse seit Mitte der 80er Jahre als so gut wie abgeschlossen gilt, mangelt es heute noch immer an einer einheitlichen Notation sowie einer allgemein akzeptierten Theorie zur Interpretation der zur Schädigungsmodellierung notwendigen Größen.

3.3.1 Modelle der Degradation

Effektive Spannungen – Verzerrungsäquivalenz

Das *“Konzept der effektiven Spannungen”* wurde erstmals zu Beginn der 60er Jahre von RABOTNOV [176] formuliert. Es besagt, daß die effektiven Spannungen $\tilde{\sigma}$ als die nominalen Spannungen σ bezogen auf die infolge der Schädigung abgeminderte Querschnittsfläche verstanden werden können. Im verallgemeinerten Fall der anisotropen Schädigung stellt sich die damit verbundene Abbildung des physikalischen Raums in den effektiven Spannungsraum durch den vierstufigen Tensor $[\mathcal{I} - \mathcal{D}]^{-1}$ dar, der den aktuellen Schädigungszustand mittels der Differenz des vierstufigen Einheitstensors \mathcal{I} und des vierstufigen Schädigungstensors \mathcal{D} charakterisiert.

$$\tilde{\sigma} := [\mathcal{I} - \mathcal{D}]^{-1} : \sigma \quad (3.15)$$

Für den Sonderfall der isotropen Schädigung läßt sich der vierstufige Schädigungstensor als der mit der skalarwertigen Schädigungsdichte d gewichtete Einheitstensor darstellen $\mathcal{D} := d \mathcal{I}$, so daß sich die allgemeine Definition der effektiven Spannungen wie folgt vereinfachen läßt.

$$\tilde{\sigma} := \frac{1}{[1 - d]} \sigma \quad (3.16)$$

Desweiteren können infolge der von LEMAITRE [123], [126] postulierten *“Hypothese der Verzerrungsäquivalenz”* die Verzerrungen assoziiert mit dem aktuellen Schädigungszustand unter den nominalen Spannungen als äquivalent zu den Verzerrungen eines ungeschädigten Materials unter den effektiven Spannungen aufgefaßt werden.

$$\epsilon = \mathcal{E}^{ed-1} : \sigma = \mathcal{E}^{el-1} : \tilde{\sigma} \quad (3.17)$$

Durch Einsetzen der Definition der effektiven Spannungen erhält man unmittelbar die Definition des vierstufigen Materialtensors der Elasto-Schädigung \mathcal{E}^{ed} als Abbildung des elastischen Materialtensors \mathcal{E}^{el} vom effektiven Spannungsraum in den physikalischen Raum.

$$\mathcal{E}^{ed} := [\mathcal{I} - \mathcal{D}] : \mathcal{E}^{el} \quad (3.18)$$

Im isotropen Fall läßt sich die Darstellung wie folgt vereinfachen.

$$\mathcal{E}^{ed} := [1 - d] \mathcal{E}^{el} \quad (3.19)$$

Das *“Konzept der effektiven Spannungen”* in Verbindung mit der *“Hypothese der Verzerrungsäquivalenz”* ist in Abbildung 3.5 unten links dargestellt. Es findet insbesondere bei der Formulierung von verzerrungsbasierten Materialmodellen Anwendung, die auf der Annahme beruhen, daß die Evolution der Schädigung in direkter Abhängigkeit von der Geschichte der totalen Verzerrungen beschreibbar ist. Verzerrungsbasierte Modelle sind besonders zur Modellierung von gesteinartigen Materialien, wie beispielsweise von Beton, geeignet. Im Gegensatz zu spannungsbasierten Modellen sind sie in der Lage, die sogenannten *“splitting modes”*, ein für Beton charakteristisches Druckversagen durch Ribbildung parallel zur Belastungsrichtung, abzubilden. Ein weiterer Vorteil der verzerrungsbasierten Modelle ist ihre bemerkenswert einfache algorithmische Umsetzung im Vergleich zu spannungsbasierten Modellen.

Effektive Verzerrungen – Spannungsäquivalenz

Eine duale Formulierung basiert auf der Einführung des *“Konzeptes der effektiven Verzerrungen”*, das durch die Abbildung des physikalischen Raums in den effektiven Verzerrungsraum mittels des vierstufigen Tensors $[\mathcal{I} - \mathcal{D}]$ charakterisiert ist. Die effektiven Verzerrungen $\tilde{\epsilon}$ ergeben sich für den anisotropen Fall dementsprechend zu

$$\tilde{\epsilon} := [\mathcal{I} - \mathcal{D}] : \epsilon \tag{3.20}$$

bzw. für den Sonderfall der isotropen Schädigung als die um den Faktor $[1 - d]$ abgeminderten nominalen Verzerrungen ϵ .

$$\tilde{\epsilon} := [1 - d] \epsilon \tag{3.21}$$

Das Konzept der effektiven Verzerrungen steht in unmittelbarem Zusammenhang mit der *“Hypothese der Spannungsäquivalenz”*, nach der die Spannungen assoziiert mit einem bestimmten Schädigungszustand unter den nominalen Verzerrungen als äquivalent zu den Spannungen des ungeschädigten Materials unter den effektiven Verzerrungen verstanden werden können.

$$\sigma = \mathcal{E}^{ed} : \epsilon = \mathcal{E}^{el} : \tilde{\epsilon} \tag{3.22}$$

Analog zur vorhergehenden Betrachtungsweise geht aus der Hypothese der Spannungsäquivalenz die Definition des konstitutiven Tensors der Elasto-Schädigung für den allgemeinen anisotropen Fall

$$\mathcal{E}^{ed} := \mathcal{E}^{el} : [\mathcal{I} - \mathcal{D}] \tag{3.23}$$

bzw. für den Sonderfall der isotropen Schädigung hervor.

$$\mathcal{E}^{ed} := \mathcal{E}^{el} [1 - d] \tag{3.24}$$

Das *“Konzept der effektiven Verzerrungen”* in Verbindung mit der *“Hypothese der Spannungsäquivalenz”*, wie in Abbildung 3.5 oben rechts dargestellt, wird vorwiegend im

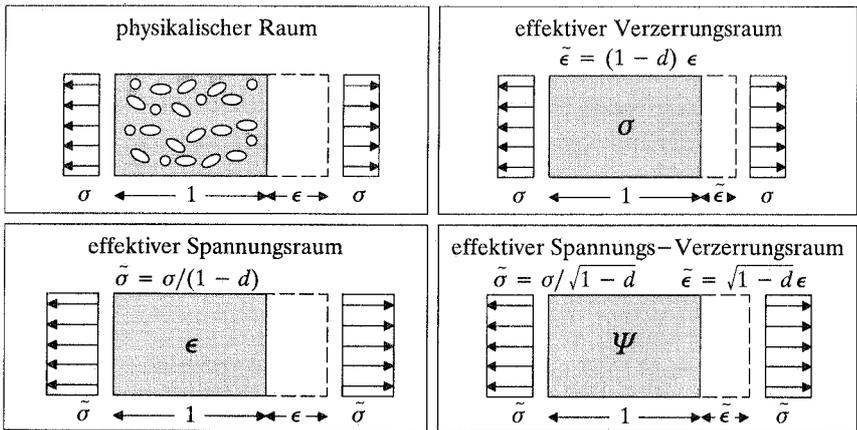


Abbildung 3.5: Effektive Spannungen und effektive Verzerrungen

Zusammenhang mit spannungsbasierten Materialmodellen eingesetzt. Insbesondere die Bruchkriterien der Bruchmechanik sind typische Vertreter solcher spannungsbasierter Versagungskriterien.

Effektive Spannungen und effektive Verzerrungen – Energieäquivalenz

Während die Tensoren der konstitutiven Moduli der isotropen Schädigung in beiden Formulierungen eine identische Form annehmen, vergleiche (3.19) und (3.24), erhält man für die anisotrope Schädigung im allgemeinen unterschiedliche Materialtensoren, vergleiche (3.18) und (3.23). Insbesondere fällt auf, daß die Materialtensoren der anisotropen Schädigung nur für bestimmte Klassen von Schädigungstensoren \mathbf{D} eine symmetrische Form annehmen. Schädigungstensoren, die auf einer mikromechanischen Herleitung, beispielsweise aus der analytischen Lösung eines Feldes paralleler Mikrorisse resultieren, erfüllen diese Symmetrieanforderungen a priori, vergleiche LEMAÎTRE & CHABOCHE [126]. Alternativ zu den Darstellungen im effektiven Spannungsraum und im effektiven Verzerrungsraum, für die die Symmetrie des Materialtensors nicht in allgemeiner Form gewährleistet ist, wurde von CORDEBOIS & SIDOROFF [61] das *“Konzept der effektiven Spannungen und Verzerrungen”* vorgeschlagen, vergleiche auch JIRÁSEK [97]. Die effektiven Spannungen und Verzerrungen ergeben sich demnach folgendermaßen,

$$\tilde{\sigma} := [\mathcal{I} - \Delta]^{-1} : \sigma \quad \text{und} \quad \tilde{\epsilon} := [\mathcal{I} - \Delta] : \epsilon \quad (3.25)$$

bzw. für den isotropen Sonderfall analog wie folgt.

$$\tilde{\sigma} := \frac{1}{[1 - \Delta]} \sigma \quad \text{und} \quad \tilde{\epsilon} := [1 - \Delta] \epsilon \quad (3.26)$$

In Verbindung mit diesem Konzept gilt die *“Hypothese der Energieäquivalenz”*, nach der die Dichte der im geschädigten Material gespeicherten Energie unter den nominalen Verzerrungen äquivalent zu der Energiedichte des ungeschädigten Materials unter den effektiven Verzerrungen verstanden werden kann, vergleiche Abbildung 3.5 unten rechts.

$$\Psi = 1 / 2 \epsilon : \mathcal{E}^{ed} : \epsilon = 1 / 2 \tilde{\epsilon} : \mathcal{E}^{el} : \tilde{\epsilon} \quad (3.27)$$

Daraus folgt unmittelbar die Definition des Materialtensors für den anisotropen Fall.

$$\mathcal{E}^{ed} := [\mathcal{I} - \Delta]^T : \mathcal{E}^{el} : [\mathcal{I} - \Delta] \quad (3.28)$$

Im Gegensatz zu den beiden vorhergehenden Formulierungen ist für diese dritte Darstellung der konstitutive Tensor der anisotropen Elasto-Schädigung aufgrund seiner Konstruktionsvorschrift immer symmetrisch. Für den isotropen Fall ergibt sich analog

$$\mathcal{E}^{ed} := [1 - \Delta] \mathcal{E}^{el} [1 - \Delta] \quad (3.29)$$

so daß das Quadrat der skalaren Schädigungsgröße $[1 - \Delta]$ unmittelbar als der Schädigungsoperator $[1 - d]$ der beiden vorhergehenden Herleitungen interpretiert werden kann, $[1 - \Delta]^2 := [1 - d]$. In gleicher Form gilt die *“Hypothese der Äquivalenz der komplementären Energie”*, die auf eine analoge Darstellung der Materialtensoren führt, vergleiche CORDEBOIS & SIDOROFF [61].

3.3.2 Isotrope Elasto–Schädigung

Im folgenden soll eine isotrope Schädigungsformulierung basierend auf dem *“Konzept der effektiven Spannungen”* in Verbindung mit der *“Hypothese der Verzerrungsäquivalenz”* vorgestellt werden. In der einfachsten Form läßt sich die isotrope Schädigung durch nur eine Schädigungsvariable d darstellen, so daß der Vektor der internen Variablen \mathbf{q} die folgende Form annimmt, $\mathbf{q} = \{d\}$. So läßt sich die freie HELMHOLTZ Energie als Funktion der Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$ sowie der Schädigungsvariablen d als $\Psi = \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d)$ darstellen. Die freie Energie kann dementsprechend als die mit $[1 - d]$ gewichtete gespeicherte Energie W des ungeschädigten Kontinuums verstanden werden.

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\epsilon}, d) = [1 - d] W(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (3.30)$$

Die gespeicherten Energie läßt sich dabei als Funktion des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon}$ und des verstüfigen Elastizitätstensors $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$ angeben.

$$W = W(\boldsymbol{\epsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.31)$$

Für den hier betrachteten isothermen Fall läßt sich der zweite Hauptsatz der Thermodynamik wie folgt in Form der CLAUSIUS–DUHEM Ungleichung darstellen.

$$\mathcal{D} = \mathcal{P} - \dot{\Psi} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{P} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.32)$$

Durch Einsetzen der Evolution der freien Energie aus (3.30) in Gleichung (3.32) läßt sich die CLAUSIUS–DUHEM Ungleichung in der entsprechenden Form nach COLEMAN & NOLL [59], vergleiche auch COLEMAN & GURTIN [58], auswerten und liefert unmittelbar die Definition der Spannungen als thermodynamisch konjugierte Größe zu den Verzerrungen,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = [1 - d] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.33)$$

sowie die Energiefreisetzungsrates Y als thermodynamisch konjugierte Größe zu den Schädigungsvariablen.

$$Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} = W \quad (3.34)$$

Die Dissipationsungleichung in Verbindung mit dem *Postulat der maximalen Dissipation*

$$\mathcal{D} = Y \dot{d} \geq 0 \quad (3.35)$$

bildet in Kombination mit einer zu spezifizierenden Schädigungsfunktion Φ , die sich beispielsweise als Differenz aus einer Funktion ϕ in Abhängigkeit der äquivalenten Verzerrung η und des Schädigungsparameters d formulieren läßt,

$$\Phi(\eta, d) = \phi(\eta) - d \leq 0 \quad \text{mit} \quad \eta = \eta(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (3.36)$$

ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung. Im Sinne von SIMO & JU [190] handelt es sich bei der Schädigungsfunktion (3.36) um ein verzerrungsbasiertes Versagenskriterium, bei dem sich die äquivalente Verzerrung η beispielsweise als Funktion der Energiefreisetzungsrates Y darstellen läßt, so daß $\eta \equiv Y$. Dann läßt sich das resultierende Optimierungsproblem, den Standardverfahren der Optimierung folgend, in ein Sattelpunktproblem überführen, vergleiche LUENBERGER [133]. Die Lösung der zugehörigen LAGRANGE Funktion

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D} + \kappa \Phi = -Y \dot{d} + \kappa [\phi(Y) - d] \rightarrow \text{stat} \quad (3.37)$$

liefert die Evolutionsgleichungen des Schädigungsparameters d als Funktion des LAGRANGE'schen Multiplikators $\dot{\kappa}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = -\dot{d} + \dot{\kappa} \frac{\partial \phi}{\partial Y} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{d} = \dot{\kappa} \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad (3.38)$$

sowie die KUHN-TUCKER Be- und Entlastungsbedingungen in der gewohnten Form.

$$\Phi \leq 0 \quad \dot{\kappa} \geq 0 \quad \Phi \dot{\kappa} = 0 \quad (3.39)$$

Die Auswertung der Konsistenzbedingung

$$\dot{\Phi} \dot{\kappa} = 0 \quad (3.40)$$

nach SIMO & JU [190] unter der Voraussetzung einer monoton steigenden Funktion $\phi(\bullet)$ führt auf die Evolutionsgleichung des Geschichtsparameters κ .

$$\dot{\kappa} = \dot{\eta} \geq 0 \quad (3.41)$$

Analog läßt sich der Geschichtsparameter auch in expliziter Form als der in der Belastungsgeschichte $[-\infty; \tau]$ maximal erreichte Wert der äquivalenten Verzerrung η , hier identisch zur Energiefreisetzungsrate Y , angeben, so daß der Schädigungsparameter die folgende direkte Darstellungsform annimmt.

$$d = \phi(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = \max_{-\infty < t < \tau} (\eta(t), \kappa_0) \quad (3.42)$$

Hierin beschreibt κ_0 analog zur Fließspannung in der Plastizitätstheorie einen verzerungsbasierten Schädigungsschwellwert. Den Zusammenhang zwischen dem Spannungs- und dem Verzerrungstensor $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} : \boldsymbol{\epsilon}$ liefert der vierstufige Sekantentensor der isotropen Elasto-Schädigung $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed}$.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} = [1 - d] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} \quad (3.43)$$

Die Beziehung zwischen Spannungs- und Verzerrungsraten $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ führt auf die Definition des vierstufigen Tensors der Tangentenmoduli der Elasto-Schädigung, der sich wie folgt aus einer Rang-Eins Modifikation des Sekantentensors ergibt.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} - \frac{1}{H} \boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\nu} \quad (3.44)$$

Im Fall des hier zugrunde gelegten "Konzeptes der effektiven Spannungen" ergibt sich der zweistufige Tensor $\boldsymbol{\mu}$ wie folgt,

$$\boldsymbol{\mu} := \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - d} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.45)$$

während $\boldsymbol{\nu}$, die Normale auf die Schädigungsfläche im Verzerrungsraum, die folgende Form annimmt,

$$\boldsymbol{\nu} := \frac{\partial \kappa}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \quad (3.46)$$

und $1/H := \partial \phi / \partial \kappa$. Zur Übersicht sind die konstitutiven Gleichungen der skalaren isotropen Elasto-Schädigung noch einmal in der Tabelle 3.4 zusammengefaßt.

Freie Energie	$\Psi = \Psi(\epsilon, d) = 1/2 [1 - d] \epsilon : \mathcal{E}^{el} : \epsilon$
Spannungen	$\sigma = \partial \Psi / \partial \epsilon = [1 - d] \mathcal{E}^{el} : \epsilon$
Energiefreisetzungsrate	$Y = -\partial \Psi / \partial d = 1/2 \epsilon : \mathcal{E}^{el} : \epsilon$
Schädigungsfunktion	$\Phi = \phi(\eta) - d \leq 0$
KUHN-TUCKER Bedingungen	$\dot{\kappa} \geq 0 \quad \dot{\Phi} \leq 0 \quad \dot{\kappa} \Phi = 0$
Konsistenzbedingung	$\dot{\kappa} \dot{\Phi} = 0$
Schädigungsevolution	$d = \phi(\kappa) \quad \kappa = \max_{-\infty < t < \tau} (\eta(t), \kappa_0)$
Tangentenmoduli	$\mathcal{E}_{tan}^{ed} = \partial^2 \Psi / \partial \epsilon^2 = [1 - d] \mathcal{E}^{el} - \frac{1}{H} \mu \otimes \nu$

Tabelle 3.4: Isotrope Elasto-Schädigung – Konstitutive Gleichungen

3.3.3 Charakterisierung unterschiedlicher Schädigungsmodelle

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Herleitung der Grundgleichungen der isotropen Elasto-Schädigung skizziert. Die Spezifizierung eines geeigneten Schädigungsmodells ist analog zur Elasto-Plastizität entscheidend durch die Wahl der äquivalenten Verzerrung $\eta(\epsilon)$ geprägt. Da der Tensor μ im Gegensatz zur Elasto-Plastizität für alle isotropen Schädigungsmodelle, die auf dem Konzept der effektiven Spannungen basieren, genau den effektiven Spannungen entspricht, bestimmt die Wahl der äquivalenten Verzerrung durch den resultierenden Normalentensor ν direkt die Assoziiertheit der Formulierung und somit auch die Symmetrie des Tangentenoperators. Nachfolgend sollen kurz einige der bekanntesten Schädigungsformulierungen beschrieben werden.

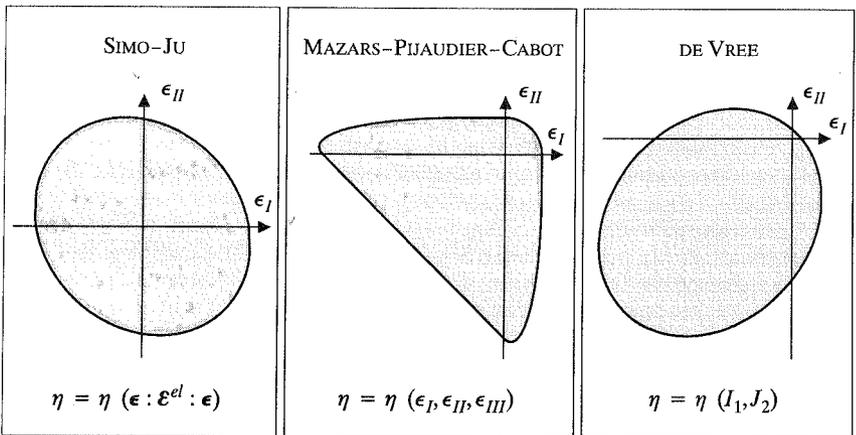


Abbildung 3.6: Unterschiedliche Schädigungsflächen

Äquivalente Verzerrung, Assoziierte und nicht-assozierte Schädigungsmodelle

In der in Abschnitt 3.3.2 gewählten Darstellung der *assozierten* Schädigungformulierung, die als unmittelbare Konsequenz aus dem Postulat der maximalen Dissipation hervorgeht, erhält man einen symmetrischen Tangententensor. Die Symmetrie wird im wesentlichen durch die Wahl der äquivalenten Verzerrung η in der Schädigungsfunktion (3.36) bestimmt, die im vorigen Abschnitt identisch der Energiefreisetzungsrate gewählt wurde. Abbildung 3.6, links, zeigt die resultierende Versagensfläche für den ebenen Spannungszustand mit einer POISSON Zahl von $\nu = 0.2$, dargestellt im Hauptverzerrungsraum. Dieser Klasse von *assozierten* Schädigungsmodellen entsprechen beispielsweise auch das Schädigungsmodell von SIMO & JU [190], bei dem die äquivalente Verzerrung gerade der Wurzel der zweifachen Energiefreisetzungsrate entspricht, sowie das Modell von JU [99] mit der Wahl der äquivalenten Verzerrung als Quadratwurzel der Energiefreisetzungsrate, vergleiche Tabelle 3.5. Für alle diese Modelle, für die sich die Normale auf die Schädigungsfläche als Vielfaches der effektiven Spannung darstellen läßt, gilt dementsprechend $\nu \parallel \mu$. Im Sinne von CAROL, RIZZI & WILLAM [50] können deshalb alle isotropen Schädigungsmodelle basierend auf dem Konzept der effektiven Spannungen, deren äquivalente Verzerrung sich als Funktion der Energiefreisetzungsrate darstellen läßt, als *assoziert* im Schädigungsraum, im Verzerrungsraum und im Steifigkeitsraum aufgefaßt werden.

	$\eta = \eta(\epsilon)$	ν	μ
Thermodynamik	$\eta = 1/2\epsilon : \mathcal{E}^{el} : \epsilon$	$\nu = \tilde{\sigma}$	
SIMO & JU [190]	$\eta = \sqrt{\epsilon : \mathcal{E}^{el} : \epsilon}$	$\nu = \tilde{\sigma}/\eta$	$\mu = \tilde{\sigma} \parallel \nu$
JU [99]	$\eta = \sqrt{1/2\epsilon : \mathcal{E}^{el} : \epsilon}$	$\nu = \tilde{\sigma}/2\eta$	
LEMAÎTRE [124]	$\eta = \sqrt{\epsilon : \epsilon}$	$\nu = \epsilon$	
MAZARS [145]	$\eta = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \epsilon_I \rangle^2}$	$\nu = \partial_\epsilon \eta$	$\mu = \tilde{\sigma} \not\parallel \nu$
DE VREE [220]	$\eta = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2}$	$\nu = \partial_\epsilon \eta$	

Tabelle 3.5: Assoziierte und nicht-assozierte Schädigungsmodelle

Demgegenüber steht eine Reihe von Schädigungsmodellen, bei denen sich die äquivalente Verzerrung nur als eine reine Funktion des Verzerrungstensors angeben läßt, wie beispielsweise das Modell nach LEMAÎTRE [124], [126] formuliert in der Norm des Verzerrungstensors, vergleiche SIMO & JU [190]. Insbesondere bei der Modellierung von Beton finden derartige *nicht-assozierte* Schädigungsmodelle Anwendung, wie beispielsweise das Betonmodell nach MAZARS & PIAUDIER-CABOT [145] charakterisiert durch die positiven Hauptverzerrungen, vergleiche Abbildung 3.6, Mitte. Ein weiteres Modell dieser Kategorie ist das von MISES basierte Schädigungsmodell von DE VREE, BREKELMANS & VAN GILS [220], formuliert in der ersten Invarianten des Verzerrungstensors sowie der zweiten Invarianten des Verzerrungsdeviators. Aufgrund der Einführung eines Wichtungsparmeters, der das Verhältnis von Betondruckfestigkeit zur Zugfestigkeit des Betons widerspiegelt, ist das letztgenannte Modell sehr gut geeignet, um das unterschiedliche Druck- und Zugverhalten von Beton entsprechend der Versagensfläche von KUPFER & GERSTLE [120] abzubilden, vergleiche Abbildung 3.6, rechts. Alle diese Modelle, bei denen sich die äquivalente Verzerrung nicht direkt als Funktion der Energiefreisetzungsrate darstellen läßt, gelten im Sinne von CAROL, RIZZI & WILLAM [50] als *nicht-assoziert*, denn es gilt $\nu \not\parallel \mu$.

Kapitel 4

Microplane Theorie

Ziel dieses Kapitels ist die Einführung in das Konzept der Microplane Theorie sowie die Gegenüberstellung unterschiedlicher microplane-basierter Materialmodelle. Zunächst soll daher ein generelles Konzept bereitgestellt werden, das auf der Wahl einer mikroskopischen freien Energiefunktion basiert und eine allgemeingültige thermodynamisch konsistente Herleitung beliebiger konstitutiver Gesetze ermöglicht. Die numerische Umsetzung des allgemeinen Konzeptes im Rahmen der Microplane Theorie wird kurz erläutert. Danach wird das generische Konzept auf die bekannten rheologischen Modelle der Elastizität, der Elasto-Plastizität sowie der Elasto-Schädigung angewandt. Die Wirkungsweise der unterschiedlichen rheologischen Modelle wird anhand einfacher Modellprobleme illustriert.

4.1 Allgemeines

Eine breite Klasse von Materialien, die im elastischen Bereich näherungsweise als *isotrop* angenommen werden können, weist im inelastischen Bereich ein ausgeprägtes *anisotropes* Verhalten auf. Insbesondere durch die Entstehung von Mikrorissen oder plastischen Zonen wird ein stark richtungsabhängiges Verhalten induziert, dem in der Modellbildung Rechnung getragen werden sollte. Dies kann, wie bereits in Kapitel 3.3 diskutiert, im Rahmen der Kontinuumschädigungsmechanik mittels mehrstufiger Schädigungstensoren oder direkt durch eine Modifikation der Steifigkeits- oder Nachgiebigkeitsmatrix geschehen. Jedoch gestaltet es sich häufig problematisch, geeignete Evolutionsgleichungen für mehrstufige Tensoren zu formulieren und die zugehörigen Parameter zu interpretieren sowie ihre Werte experimentell zu identifizieren.

Eine elegante Motivation zur Herleitung anisotroper Stoffgesetze liefert die Microplane Theorie, die das makroskopisch dreidimensionale Verhalten auf eine Materialbeschreibung auf charakteristischen Ebenen reduziert. Durch Auswertung der vereinfachten Materialgesetze auf allen möglichen Ebenen im Raum ergibt sich eine makroskopisch anisotrope Materialbeschreibung mit einer natürlichen Interpretierbarkeit der zugehörigen Materialparameter. In der Praxis werden die Stoffgesetze der Mikroebenen im allgemeinen nur für eine diskrete Anzahl von Richtungen ausgewertet, so daß je nach Anzahl der berücksichtigten Richtungen eine beliebig genaue Approximation erreicht werden kann. Der grund-

legende Ansatz des Microplane Konzeptes ist hierbei keineswegs neu. Die Materialcharakterisierung auf einzelnen Materialebenen wurde bereits zu Beginn dieses Jahrhunderts von MOHR [155] vorgeschlagen:

“Wir bezeichnen mit A einen Punkt des Körpers, dessen Zustand inbetracht gezogen werden soll, und denken uns zu diesem Zweck eine unendlich kleine Kugel vom Mittelpunkte A aus dem Körper herausgeschnitten. Die Gesamtheit der Spannungen aller Oberflächenelemente dieser Kugel, die in unendlicher Vergrößerung in Fig. 1 abgebildet ist, bildet den Spannungszustand des Körperpunktes A .”

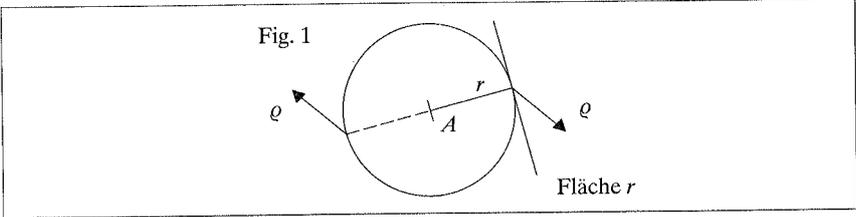


Abbildung 4.1: Grundlegende Idee des Microplane Konzeptes nach MOHR [155]

Gegen Ende der 30er Jahre wurde diese Idee, die in Abbildung 4.1 skizziert ist, von TAYLOR [209] auf die Modellierung des plastischen Fließens kristalliner Materialien angewandt und von BATDORF & BUDIANSKY [8] ein Jahrzehnt später erstmals im Rahmen der *Kristallplastizität* umgesetzt. Nach einer ausgeprägten Weiterentwicklung der Theorie in den 80er und 90er Jahren, stellt die *Gleitebenentheorie* heute ein allgemein akzeptiertes Werkzeug zur Modellierung metallischer Materialien dar, siehe beispielsweise MIEHE [148], MIEHE, SCHRÖDER & SCHOTTE [149] oder auch SAWISCHLEWSKI, STEINMANN & STEIN [186] und STEINMANN, KUHL & STEIN [200]. Dies ist nicht zuletzt darin begründet, daß die diskreten Auswertungsrichtungen für kristalline Materialien bereits intrinsisch durch die Struktur des Kristallgitters vorgegeben sind. So besitzt beispielsweise ein flächenzentriertes Einkristall vier ausgeprägte Gleitebenen mit jeweils drei Gleitrichtungen, siehe Abbildung 4.2.

Ende der 70er Jahre wurde das Konzept der Materialbeschreibung auf ausgezeichneten weichen Materialebenen von ZIENKIEWICZ & PANDE [227] auf die Modellierung gesteinerartiger Geomaterialien angewandt, allerdings weiterhin im Rahmen einer Plastizitätsformulierung. Erst Mitte der 80er Jahre gelang es BAŽANT & GAMBAROVA [15] und BAŽANT

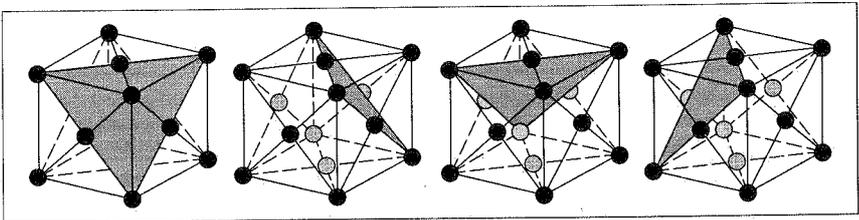


Abbildung 4.2: Kristallgitter eines flächenzentrierten Einkristalls

& OH [18], die Ideen von TAYLOR auf die Modellierung von sprödem Materialverhalten im Rahmen einer Schädigungsformulierung zu übertragen. Die Bezeichnung *Microplane Model* wurde eingeführt, um die Allgemeingültigkeit des Konzeptes zu verdeutlichen. In Analogie zu kristallinen Materialien mit ausgezeichneten Gleitebenen ging man davon aus, daß auch Beton ausgezeichnete Ebenen in Form von Grenzschichten zwischen festen Zuschlagstoffen und weichem Matrixmaterial aufweisen solle, entlang denen bevorzugt Mikrorißbildung stattfindet, vergleiche Abbildung 4.3.

Im Gegensatz zu den Modellen der Gleitebenentheorie, die sich auf eine statische Projektion (*“static constraint”*) gründen, basieren die Microplane Modelle ausschließlich auf einer kinematischen Projektion (*“kinematic constraint”*), bei der sich die Verzerrungskomponenten einer Ebene aus der Projektion des makroskopischen Verzerrungstensors ergeben, vergleiche Abbildung 4.4. Während die statische Projektion häufig mit den Homogenisierungstechniken nach REUSS [178] in Verbindung gebracht wird, steht die kinematische Projektion in engem Zusammenhang mit den VOIGT’schen Homogenisierungsverfahren entsprechend [218], vergleiche auch SCHRÖDER [188].

In den ersten Microplane Modellen wurde zunächst nur die Normalkomponente der Verzerrungen bei der Formulierung der konstitutiven Gesetze berücksichtigt. Jedoch zeigte sich bald, daß diese vereinfachte Modellbildung, insbesondere für Beton, im Bereich des reinen hydrostatischen Drucks erhebliche Mängel aufwies. Weiterhin war der Wertebereich der POISSON-Zahl für das ursprüngliche Modell auf $-1 \leq \nu \leq 0.25$ begrenzt. So wurde von BAŽANT & PRAT [25] bald darauf eine erweiterte Version vorgestellt, die es ermöglichte, das volumetrische sowie das deviatorische Verhalten normal und tangential zur Mikroebene getrennt zu beschreiben.

Das Modell von BAŽANT & PRAT [25] bildete die Grundlage für zahlreiche weiterführende und ergänzende Arbeiten. So gelang es CAROL, PRAT & BAŽANT [49] eine vollständig explizite Version des Modells zu formulieren, sowie die konstitutiven Gleichungen der Microplane Schädigung in ein Modell der Kontinuumsschädigungsmechanik mit vierstufigem Schädigungstensor zu überführen, siehe CAROL, BAŽANT & PRAT [47]. Eine erste nichtlokale Version des Modells, die netzunabhängige Ergebnisse auch im postkritischen Bereich garantieren sollte, wurde von BAŽANT & OŽBOLT [20] vorgestellt. OŽBOLT und BAŽANT [167] gelang es, das nichtlokale Verhalten mit Hilfe des Konzeptes der Mikrorißwechselwirkung physikalisch zu interpretieren. Das nichtlokale Integralmodell lieferte insbesondere für triaxiale zyklische Belastungen sehr gute Übereinstimmung mit Versuchsergebnissen, vergleiche OŽBOLT & BAŽANT [166] und BAŽANT & OŽBOLT [21]. Eine alternative nichtlokale Version des Microplane Modells im Rahmen eines Gradientenkontinuums wurde von KUHLE, RAMM und DE BORST [118] vorgeschlagen.

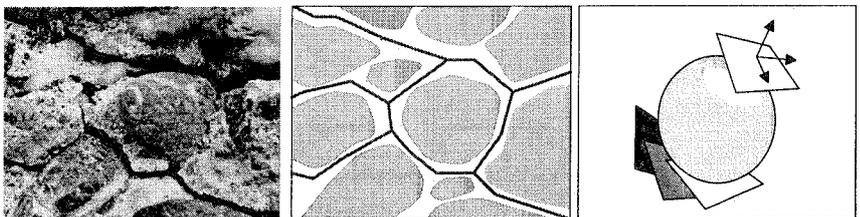


Abbildung 4.3: Modellierung von Rißbildung in Beton mit dem Microplane Modell

Ein Defizit des Basismodells wurde von JIRÁSEK [96] aufgezeigt, der eine unbegründete laterale Ausdehnung unter einaxialem Zug feststellen konnte. Dieser Modellfehler konnte durch die Einführung des *“stress-strain boundary”*-Konzeptes behoben werden, siehe BAŽANT, JIRÁSEK, XIANG & PRAT [16] sowie BAŽANT, XIANG & PRAT [26]. Unter Berücksichtigung der zusätzlichen Modifikationen konnten mit Hilfe des Microplane Modells exzellente Ergebnisse bei der Modellierung versagensinduzierter Anisotropie in Beton erzielt werden, siehe BAŽANT, OŽBOLT & ELIGEHAUSEN [22], OŽBOLT [164] [165] sowie BAŽANT & PLANAS [24]. Mit Hilfe einer konsistenten Linearisierung der konstitutiven Gleichungen des Microplane Modells, siehe KUHL & RAMM [114], konnten sowohl effektive Algorithmen eingesetzt, als auch Lokalisierungsanalysen zur Bestimmung der kritischen Versagensrichtungen durchgeführt werden. Weiterhin wurde von TIKHOMIROV & STEIN [211] gezeigt, daß sich die Ideen des Microplane Konzeptes auf natürliche Weise auf die Modellierung des Verbundverhaltens von Stahlbeton übertragen lassen.

Alle bisher beschriebenen Microplane Modelle basieren im wesentlichen auf der Arbeit von BAŽANT & PRAT [25]. Aufgrund einer Kombination von kinematischer Projektion und Homogenisierung über die Äquivalenz der virtuellen Arbeiten führen diese gegebenenfalls auf unsymmetrische Materialtensoren. Weiterhin ist für die bisherigen Microplane Modelle die Einhaltung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik nicht notwendigerweise gewährleistet, so daß bestimmte Kombinationen von Lastzyklen denkbar sind, unter denen in einem System künstlich Energie generiert werden könnte. So wurde insbesondere in den vergangenen Jahren an der Formulierung eines thermodynamisch konsistenten microplane-basierten Modells gearbeitet, siehe CAROL, JIRÁSEK & BAŽANT [48] sowie KUHL, CAROL & STEINMANN [112]. Diese Vorgehensweise soll im vorliegenden Kapitel kurz erläutert werden. Sie ermöglicht die Anwendung des Microplane Konzeptes auf beliebige rheologische Modelle. Während sich diese Arbeit auf Microplane Modelle der reinen Elasto-Plastizität und Elasto-Schädigung beschränkt, existieren bereits jüngere Forschungsarbeiten, die eine Kombination von Plastizität und Schädigung erlauben, vergleiche KUHL & RAMM [116].

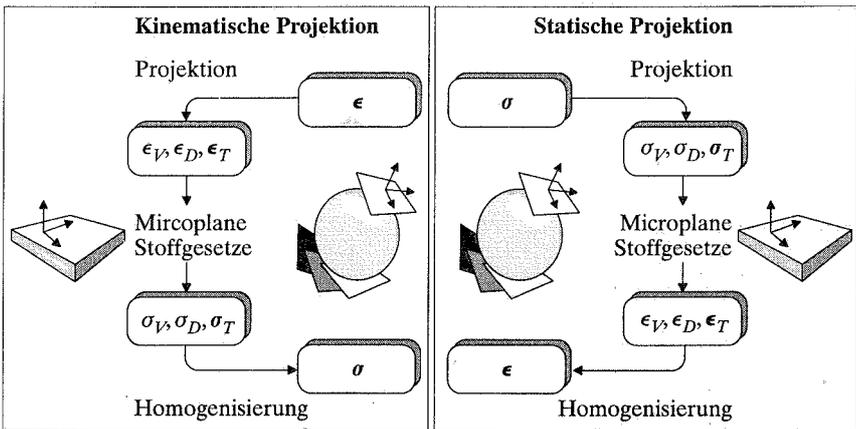


Abbildung 4.4: Kinematische und statische Projektion

4.2 Thermodynamisch konsistente Herleitung microplane-basierter konstitutiver Gesetze

Im folgenden Teilabschnitt soll zunächst ein allgemeines Konzept zur thermodynamisch konsistenten Herleitung microplane-basierter Stoffgesetze vorgestellt werden. Um Verwechslungen zu vermeiden, sollen im folgenden alle Komponenten der Mikroebene als mikroskopische Größen bezeichnet werden, obwohl es sich hierbei nicht tatsächlich um eine mikroskopische Formulierung handelt. Dabei soll der aus dem Englischen entlehene Begriff "Microplane" hier beibehalten werden, da er sich auch in der deutschsprachigen Literatur entsprechend etabliert hat.

4.2.1 Kinematische und statische Projektion

Die meisten Microplane Formulierungen basieren auf einer kinematischen Projektion ("kinematic constraint"), bei der sich die volumetrische und die deviatorische Verzerrungskomponente ϵ_V und ϵ_D sowie der tangentialer Verzerrungsvektor ϵ_T einer Ebene durch die Projektion des Verzerrungstensors ϵ mit den zwei- bzw. dreistufigen Projektionstensoren V , D und T bestimmen lassen.

$$\epsilon_V = V : \epsilon \quad \epsilon_D = D : \epsilon \quad \epsilon_T = T : \epsilon \quad (4.1)$$

Die Verzerrungskomponenten der Ebene lassen sich wie folgt im Verzerrungsvektor t_ϵ zusammenfassen, der sich aus der Normalprojektion des Verzerrungstensors ϵ auf die Ebene ergibt, vergleiche Abbildung 4.5.

$$t_\epsilon = \epsilon \cdot n = [\epsilon_V + \epsilon_D] n + \epsilon_T \quad (4.2)$$

Im Gegensatz dazu lassen sich bei der statischen Projektion ("static constraint"), die für die Modelle der Kristallplastizität charakteristisch ist, die volumetrische und die deviatorische Spannungskomponente $\bar{\sigma}_V$ und $\bar{\sigma}_D$ sowie der tangentialen Spannungsvektor $\bar{\sigma}_T$ einer Ebene als Projektion des makroskopischen Spannungstensors σ darstellen,

$$\bar{\sigma}_V = V : \sigma \quad \bar{\sigma}_D = D : \sigma \quad \bar{\sigma}_T = T : \sigma \quad (4.3)$$

und der Spannungsvektor \bar{t}_σ ergibt sich entsprechend dem CAUCHY Theorem als Normalprojektion des Spannungstensors.

$$\bar{t}_\sigma = \sigma \cdot n = [\bar{\sigma}_V + \bar{\sigma}_D] n + \bar{\sigma}_T \quad (4.4)$$

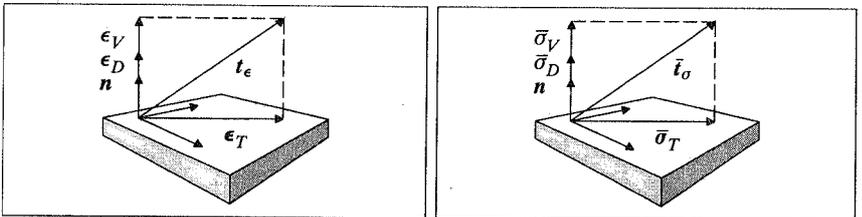


Abbildung 4.5: Verzerrungs- und Spannungskomponenten auf einer Mikroebene

Hierbei stellen \mathbf{V} , \mathbf{D} und \mathbf{T} den volumetrischen, den deviatorischen und den tangentialen Projektionstensor dar. Sie lassen sich direkt als Funktionen der Ebenennormalen \mathbf{n} sowie des Einheitstensors zweiter Stufe $\mathbf{1}$ und des symmetrisierten Einheitstensors vierter Stufe \mathcal{I}^{sym} angeben, vergleiche (A.4) sowie (A.8).

$$\begin{aligned}\mathbf{V} &= \frac{1}{3} \mathbf{1} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} - \frac{1}{3} \mathbf{1} \\ \mathbf{T} &= \mathbf{n} \cdot \mathcal{I}^{sym} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}\end{aligned}\quad (4.5)$$

Dabei ist \mathbf{T} ein dreistufiger Tensor, dessen Vormultiplikation eines zweistufigen Tensors einen Vektor in der durch die Normale \mathbf{n} charakterisierten Ebene liefert. Die Nachmultiplikation eines Vektors \mathbf{v} in der Ebene mit dem Projektionstensor \mathbf{T} liefert dementsprechend einen symmetrischen zweistufigen Tensor.

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} = [\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}]^{sym} + [\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}] \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} = [\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}]^{sym} \quad (4.6)$$

Mit Hilfe der folgenden Integrationsregeln über den Raumwinkel Ω , vergleiche BAŽANT & OH [18] sowie LUBARDA & KRAJČINOVIĆ [131],

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} d\Omega &= \frac{4\pi}{3} & 3 \\ \int_{\Omega} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\Omega &= \frac{4\pi}{3} & \mathbf{1} \\ \int_{\Omega} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\Omega &= \frac{4\pi}{3} [\mathcal{I}^{vol} + \frac{2}{5} \mathcal{I}^{dev}]\end{aligned}\quad (4.7)$$

und der volumetrisch-deviatorischen Zerlegung des vierstufigen Einheitstensors gemäß (A.9) lassen sich die Integrale der vierstufigen Produkte der Projektionstensoren \mathbf{V} , \mathbf{D} und \mathbf{T} wie folgt analytisch bestimmen, wobei \mathbf{T}^T die Transponierte gemäß (A.5) bezeichnet.

$$\begin{aligned}\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\Omega &= \mathcal{I}^{vol} \\ \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} d\Omega &= \frac{2}{5} \mathcal{I}^{dev} \\ \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega &= \frac{3}{5} \mathcal{I}^{dev}\end{aligned}\quad (4.8)$$

Dabei kann der Raumwinkel Ω als Kombination des normierten sphärischen Koordinatentripels $[r, \omega_1, \omega_2]$ der Einheitskugel mit $r = 1$, $0 \leq \omega_1 \leq \pi$ und $0 \leq \omega_2 \leq 2\pi$ verstanden werden. Es sei darauf hingewiesen, daß nur in bestimmten Sonderfällen der Elastizität die statische und die kinematische Projektion *gleichzeitig* gültig sind. Die hier betrachteten Gesetze basieren ausschließlich auf der kinematischen Projektion, vergleiche Abbildung 4.6, so daß die mit Hilfe der konstitutiven Gleichungen bestimmten Microplane Spannungen σ_V , σ_D und σ_T im allgemeinen nicht mit den Spannungskomponenten $\bar{\sigma}_V$, $\bar{\sigma}_D$ und $\bar{\sigma}_T$ der statischen Projektion übereinstimmen.

4.2.2 Thermodynamisch konsistente konstitutive Gesetze

Die bisherigen Microplane Modelle, die sich im wesentlichen auf der Version von BAŽANT & PRAT [25] gründen, weisen zwei entscheidende Nachteile auf. Da die konstitutiven Gesetze nicht auf der Annahme der Existenz eines Potentials basieren, sondern eher phänomenologisch motiviert sind, ist die Einhaltung des zweitens Hauptsatzes der Thermodynamik, der mit einer nicht-negativen Dissipation verbunden ist, für die existierenden

Modelle nicht notwendigerweise gewährleistet. Eine weitere Konsequenz dieser phänomenologischen Herleitung ist die unbegründete Unsymmetrie der Materialtangente. Im folgenden soll eine thermodynamisch konsistente Herleitung anisotroper Materialformulierungen vorgestellt werden, die einen allgemeinen Rahmen zur Entwicklung microplane-basierter Stoffgesetze bildet, vergleiche KUHLE, CAROL & STEINMANN [112]. Dieses universelle Konzept ist, wie anschließend gezeigt werden soll, auf beliebige Klassen rheologischen Verhaltens anwendbar. Die makroskopische CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung isothermer Prozesse

$$\mathcal{D}^{mac} = \mathcal{P}^{mac} - \dot{\Psi}^{mac} \geq 0 \quad (4.9)$$

stellt den Ausgangspunkt für die Entwicklung thermodynamisch konsistenter Materialformulierungen dar. Sie besagt, daß die Dissipation, die Differenz aus Spannungsleistung $\mathcal{P}^{mac} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ und Evolution der freien Energie Ψ^{mac} , nie negativ sein darf. Hierbei bezeichnen alle Größen, die durch den Index $(\bullet)^{mac}$ gekennzeichnet sind, makroskopische Größen, wohingegen der im folgenden verwendete Index $(\bullet)^{mic}$ Größen auf der Mikroebene charakterisiert. Unter der folgenden fundamentalen Annahme

$$\Psi^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi^{mic} d\Omega \quad (4.10)$$

Mikro-Makro Beziehung der freien Energie

nach CAROL, JIRÁSEK & BAŽANT [48] läßt sich eine integrale Beziehung zwischen der makroskopischen freien HELMHOLTZ Energie Ψ^{mac} und den freien Energien der Mikroebenen Ψ^{mic} angeben. Letztere können als Funktionen der Verzerrungskomponenten der Mikroebene ϵ_V , ϵ_D und ϵ_T sowie einer beliebigen Anzahl von internen Variablen beschrieben werden, die sich in dem Vektor \mathbf{q} zusammenfassen lassen.

$$\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_T, \mathbf{q}) \quad (4.11)$$

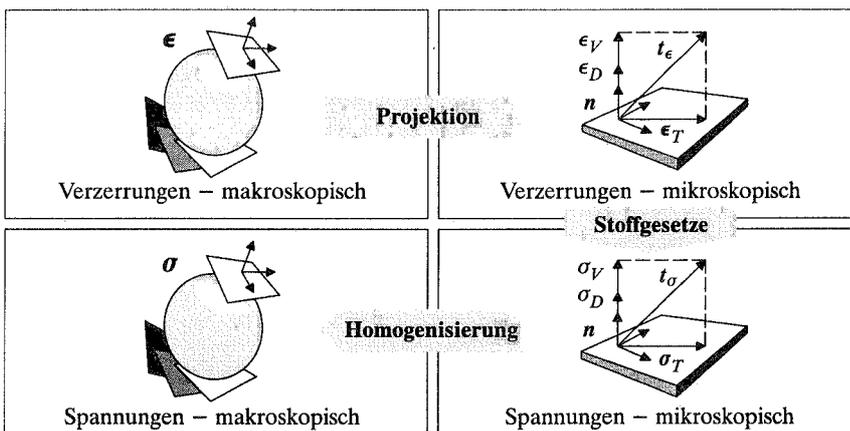


Abbildung 4.6: Microplane Theorie basierend auf dem "kinematic constraint"

Mit Hilfe der kinematischen Projektionsbeziehung (4.1) läßt sich die Evolutionsgleichung der mikroskopischen freien Energie wie folgt angeben,

$$\dot{\Psi}^{mic} = [\mathbf{V}\sigma_V + \mathbf{D}\sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \mathcal{D}^{mic} \quad (4.12)$$

wobei σ_V , σ_D und $\boldsymbol{\sigma}_T$ als konstitutive mikroskopische Spannungen verstanden werden können.

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V} \quad \sigma_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D} \quad \boldsymbol{\sigma}_T := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_T} \quad (4.13)$$

In der Regel stimmen diese konstitutiven Spannungen jedoch nicht mit den Spannungskomponenten des Gleichgewichts der statischen Projektion aus Gleichung (4.3) überein. Weiterhin definiert \mathcal{D}^{mic} die mikroskopische Dissipation,

$$\mathcal{D}^{mic} := - \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \mathbf{q}} \star \dot{\mathbf{q}} \quad (4.14)$$

wobei \star das Skalarprodukt der Ordnung \mathbf{q} symbolisiert. Durch Anwendung der Integralbeziehung (4.10) auf die Evolutionsgleichung der mikroskopischen freien Energie nach (4.12) ergibt sich unmittelbar die Bestimmungsgleichung der makroskopischen freien HELMHOLTZ Energie.

$$\dot{\Psi}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V}\sigma_V + \mathbf{D}\sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T \, d\Omega : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{D}^{mic} \, d\Omega \quad (4.15)$$

Die Auswertung der makroskopischen CLAUSIUS–DUHEM Ungleichung (4.9) nach COLEMAN & NOLL [59] bzw. COLEMAN & GURTIN [58] liefert die Definition der makroskopischen Spannungen als Funktion der mikroskopischen Spannungskomponenten

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V}\sigma_V + \mathbf{D}\sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T \, d\Omega \quad (4.16)$$

Mikro–Makro Beziehung der Spannungen

sowie die makroskopische Dissipationsungleichung in der nachfolgenden integralen Darstellungsform.

$$\mathcal{D}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{D}^{mic} \, d\Omega \geq 0, \quad (4.17)$$

Mikro–Makro Beziehung der Dissipation

Die makroskopische Dissipationsungleichung stellt eine Restriktion für die Bestimmungsgleichungen der internen Variablen \mathbf{q} dar. Die verschärfte Forderung, daß die mikroskopische Dissipation jeder einzelnen Ebene nicht–negativ sei,

$$\mathcal{D}^{mic} \geq 0 \quad (4.18)$$

kann damit als eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik entsprechend Gleichung (4.17) verstanden werden. So läßt sich Gleichung (4.12) als mikroskopische Version der CLAUSIUS–DUHEM Ungleichung

$$\mathcal{D}^{mic} = \mathcal{P}^{mic} - \dot{\Psi}^{mic} \geq 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{P}^{mic} := \sigma_V \dot{\epsilon}_V + \sigma_D \dot{\epsilon}_D + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_T. \quad (4.19)$$

interpretieren, wobei \mathcal{P}^{mic} eine mikroskopische Spannungsleistung beschreibt, die ebenfalls über einen integralen Zusammenhang mit der makroskopischen Spannungsleistung in Bezug gesetzt werden kann.

$$\mathcal{P}^{mac} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{P}^{mic} d\Omega \quad (4.20)$$

Mikro-Makro Beziehung der Spannungsleistung

Die Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungs- und Verzerrungsraten $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ definiert mit Hilfe von Gleichung (4.16) den vierstufigen Tangententensor $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}$.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \otimes \frac{d\sigma_V}{d\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{D} \otimes \frac{d\sigma_D}{d\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{T}^T \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}_T}{d\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega \quad (4.21)$$

Mikro-Makro Beziehung der Tangentenmoduli

Die folgenden Beispiele zeigen, daß der Tangententensor eine symmetrische Form annimmt, da die vorgestellte Herleitung im Gegensatz zu allen bisherigen Microplane Formulierungen auf der Einführung eines Potentials basiert. Abschließend sei noch einmal darauf hingewiesen, daß sich der makroskopische Spannungstensor sowohl aus der integralen Beziehung der über Gleichung (4.13) definierten konstitutiven Spannungen σ_V , σ_D und $\boldsymbol{\sigma}_T$ als auch aus der Vollwinkelintegration der Spannungskomponenten des Gleichgewichts (4.3) $\bar{\sigma}_V$, $\bar{\sigma}_D$ und $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_T$ darstellen läßt.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \sigma_V + \mathbf{D} \sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T d\Omega = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \bar{\sigma}_V + \mathbf{D} \bar{\sigma}_D + \mathbf{T}^T \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}}_T d\Omega \quad (4.22)$$

Dies bedeutet jedoch nicht notwendigerweise, daß die entsprechenden Spannungskomponenten der Mikroebene gleiche Werte annehmen müssen.

$$\sigma_V \neq \bar{\sigma}_V \quad \sigma_D \neq \bar{\sigma}_D \quad \boldsymbol{\sigma}_T \neq \bar{\boldsymbol{\sigma}}_T \quad (4.23)$$

Wie aus dem CAUCHY Theorem bekannt ist, läßt sich der zweistufige Spannungstensor nicht eindeutig in mehr als drei Raumrichtungen zerlegen. Folglich stellen die durch den Satz der konstitutiven Gleichungen definierten mikroskopischen Spannungskomponenten nur eine von unendlich vielen Kombinationen von zulässigen mikroskopischen Spannungen dar. Die spezielle Wahl der Spannungskomponenten auf der Grundlage der jeweiligen freien Energiefunktion der Mikroebene ist jedoch gerechtfertigt, da sie die Einhaltung der makroskopischen CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung garantiert.

4.2.3 Diskretisierung – Numerische Integration

Nur in bestimmten Sonderfällen, wie beispielsweise bei rein isotropem Materialverhalten, lassen sich die Integralausdrücke aus Abschnitt 4.2.2 analytisch berechnen, wie am Beispiel der isotropen Elastizität im Abschnitt 4.3 gezeigt wird. Für den allgemeinen Fall hingegen ist eine analytische Integralauswertung nahezu unmöglich. Aus diesem Grund wird dazu übergegangen, die Integralausdrücke der konstitutiven Gleichungen numerisch mit einem Quadraturverfahren zu ermitteln. Dazu werden die Integralterme durch Summation der

gewichteten diskreten Auswertungen des Integranden an einer bestimmten Anzahl n_{mp} von Integrationspunkten I approximiert, vergleiche BAŽANT & OH [18].

$$\int_{\Omega} (\bullet) d\Omega \approx \sum_{I=1}^{n_{mp}} (\bullet)^I w^I \quad (4.24)$$

Hierbei bezeichnet w^I den Wichtungskoeffizienten des I -ten Integrationspunktes. Die makroskopischen Spannungen (4.16) lassen sich demnach wie folgt approximieren,

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \sum_{I=1}^{n_{mp}} \left[\mathbf{V}^I \frac{\partial \Psi^{mic I}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_V^I} + \mathbf{D}^I \frac{\partial \Psi^{mic I}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_D^I} + \mathbf{T}^{TI} \cdot \frac{\partial \Psi^{mic I}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}_T^I} \right] w^I \quad (4.25)$$

während die numerische Auswertung des vierstufigen Tensors der makroskopischen Tangentenmoduli (4.21) dementsprechend die folgende Form annimmt.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} \approx \sum_{I=1}^{n_{mp}} \left[\mathbf{V}^I \otimes \frac{d\boldsymbol{\sigma}_V^I}{d\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{D}^I \otimes \frac{d\boldsymbol{\sigma}_D^I}{d\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{T}^{TI} \cdot \frac{d\boldsymbol{\sigma}_T^I}{d\boldsymbol{\epsilon}} \right] w^I \quad (4.26)$$

Die Anzahl der Integrationspunkte bestimmt die Genauigkeitsordnung der Approximation. Jedoch ist es wichtig, einen akzeptablen Kompromiß zwischen Maximierung der Genauigkeit und Begrenzung des numerischen Aufwands zu finden. Abbildung 4.7 zeigt exemplarisch die numerische Integration mit 20, 32, 42 und 122 Integrationspunkten bzw. Mikroebenen. Die jeweils resultierenden Polyeder, die sich aus den zugehörigen Mikroebenen zusammensetzen, können als numerische Approximation einer Einheitskugel interpretiert werden.

Untersuchungen von BAŽANT & OH [18], [19] zufolge liefert eine Integration mit $n_{mp} = 42$ Integrationspunkten bzw. eine Auswertung der Microplane Stoffgesetze auf 42 Ebenen, die in Abbildung 4.7.3 dargestellt ist, für die meisten Fälle eine hinreichend genaue Approximation. Bei einer entsprechenden Wahl der Integrationspunkte und Wichtungskoeffizienten gemäß Anhang B können Polynome bis zur neunten Ordnung exakt integriert werden, vergleiche BAŽANT & OH [18]. Im folgenden wird daher ausschließlich eine numerische Integration mit 42 Mikroebenen verwendet. Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften ist es jedoch ausreichend, nur eine Halbkugel zu betrachten, die sich in diesem Fall mit $n_{mp} = 21$ Mikroebenen approximieren läßt.

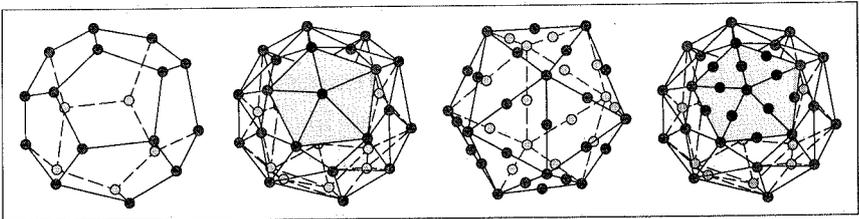


Abbildung 4.7: Numerische Integration mit 20, 32, 42 und 122 Integrationspunkten

4.3 Microplane Elastizität

Unter der Annahme eines rein elastischen Materialverhaltens werden keine zusätzlichen internen Variablen auf der Mikroebene benötigt. Die mikroskopische freie Energie ist damit lediglich eine Funktion der Verzerrungskomponenten $\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_T)$. Sie läßt sich als Summe der gespeicherten Energieanteile W_V , W_D und W_T angeben,

$$\Psi^{mic} = W_V(\epsilon_V) + W_D(\epsilon_D) + W_T(\epsilon_T) \quad (4.27)$$

wobei sich die gespeicherten Energieanteile der volumetrischen, deviatorischen und tangentialen Komponenten wie folgt darstellen lassen.

$$W_V = \frac{1}{2} \epsilon_V \mathcal{E}_V^{el} \epsilon_V \quad W_D = \frac{1}{2} \epsilon_D \mathcal{E}_D^{el} \epsilon_D \quad W_T = \frac{1}{2} \epsilon_T \cdot \mathcal{E}_T^{el} \cdot \epsilon_T \quad (4.28)$$

Hierbei bezeichnen \mathcal{E}_V^{el} , \mathcal{E}_D^{el} und \mathcal{E}_T^{el} die elastischen Moduli der Mikroebene. Die mikroskopischen Spannungskomponenten σ_V , σ_D und σ_T ergeben sich gemäß Abschnitt 4.2.2 als Produkt der jeweiligen elastischen Moduli und der Verzerrungskomponenten.

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V} = \mathcal{E}_V^{el} \epsilon_V \quad \sigma_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D} = \mathcal{E}_D^{el} \epsilon_D \quad \sigma_T := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_T} = \mathcal{E}_T^{el} \cdot \epsilon_T \quad (4.29)$$

Der makroskopische Spannungstensor läßt sich dementsprechend wie folgt angeben.

$$\sigma = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \mathcal{E}_V^{el} \epsilon_V + \mathbf{D} \mathcal{E}_D^{el} \epsilon_D + \mathbf{T}^T \cdot \mathcal{E}_T^{el} \cdot \epsilon_T d\Omega \quad (4.30)$$

Die Beziehung zwischen dem makroskopischen Spannungs- und Verzerrungstensor $\sigma = \mathcal{E}^{el} : \epsilon$ liefert den vierstufigen elastischen Materialtensor \mathcal{E}^{el} als Funktion der elastischen Moduli der Mikroebene \mathcal{E}_V^{el} , \mathcal{E}_D^{el} und \mathcal{E}_T^{el} .

$$\mathcal{E}^{el} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{E}_V^{el} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mathcal{E}_D^{el} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{T}^T \cdot \mathcal{E}_T^{el} \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad (4.31)$$

Unter der zusätzlichen Annahme eines isotropen Verhaltens auf der Mikroebene bleiben die tangentialen Spannungen stets parallel zu den tangentialen Verzerrungen $\epsilon_T \parallel \sigma_T$, so daß sich der Tensor der tangentialen Moduli vereinfacht als der mit dem skalarwertigen tangentialen Elastizitätsmodul \mathcal{E}_T^{el} gewichtete Einheitstensor beschreiben läßt $\mathcal{E}_T^{el} = \mathcal{E}_T^{el} \mathbf{1}$. Die Gleichung (4.31) läßt sich dementsprechend wie folgt vereinfachen.

$$\mathcal{E}^{el} = \mathcal{E}_V^{el} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} d\Omega + \mathcal{E}_D^{el} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} d\Omega + \mathcal{E}_T^{el} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad (4.32)$$

Eine analytische Integration der vierstufigen Produkte der Projektionstensoren gemäß den Gleichungen (4.8) ergibt die nachfolgende vereinfachte Darstellung des Elastizitätstensors.

$$\mathcal{E}^{el} = \mathcal{E}_V^{el} \mathbf{I}^{vol} + \frac{2}{5} \mathcal{E}_D^{el} \mathbf{I}^{dev} + \frac{3}{5} \mathcal{E}_T^{el} \mathbf{I}^{dev} \quad (4.33)$$

Durch einen Koeffizientenvergleich mit dem Elastizitätstensor des HOOKE'schen Gesetzes

$$\mathcal{E}^{el} = 3 K \mathbf{I}^{vol} + 2 G \mathbf{I}^{dev} \quad (4.34)$$

ergeben sich unmittelbar die Bestimmungsgleichungen für die elastischen Moduli der Mikroebene als Funktionen des Kompressionsmoduls K und des Schubmoduls G .

$$\mathcal{E}_V^{el} = 3K \quad \frac{2}{5}\mathcal{E}_D^{el} + \frac{3}{5}\mathcal{E}_T^{el} = 2G \quad (4.35)$$

Mikro-Makro Beziehung der konstitutiven Moduli

Diese Relationen zwischen den mikroskopischen und makroskopischen Elastizitätskonstanten wurden erstmals von BAŽANT & PRAT [25] angegeben. Aufgrund der Betrachtung von drei separaten Anteilen auf der Mikroebene kann entweder der deviatorische oder der tangentiale Modul in Gleichung (4.35.2) frei gewählt werden. Für das microplane-ähnliche Modell von FICHANT, LA BORDERIE und PIJAUDIER-CABOT [76], [77], das lediglich volumetrische und tangentiale Komponenten berücksichtigt, gilt dementsprechend $\mathcal{E}_D^{el} = 0$ und $\mathcal{E}_T^{el} = 10/3 G$. Für die Sonderfälle $\mathcal{E}_D^{el} \equiv \mathcal{E}_T^{el}$ und $\mathcal{E}_D^{el} \equiv 0$ ergeben sich die einzigen Modelle, für die die konstitutiven Spannungskomponenten aus Gleichung (4.29) identisch mit den Spannungskomponenten des Gleichgewichts (4.3) sind, so daß $\sigma_V \equiv \bar{\sigma}_V$, $\sigma_D \equiv \bar{\sigma}_D$ und $\sigma_T \equiv \bar{\sigma}_T$.

4.4 Microplane Elasto-Plastizität

Im folgenden Abschnitt soll das Microplane Konzept auf ein Modell angewendet werden, bei dem das plastische Fließen den wesentlichen dissipativen Mechanismus darstellt. Unter der Annahme kleiner Verzerrungen läßt sich der makroskopische Spannungstensor gemäß Gleichung (3.1) additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegen, so daß $\epsilon = \epsilon^{el} + \epsilon^{pl}$. Ebenso lassen sich die volumetrischen, deviatorischen und tangentialen Verzerrungsanteile der Mikroebenen als die Summe der jeweiligen elastischen und plastischen Komponenten darstellen.

$$\epsilon_V = \epsilon_V^{el} + \epsilon_V^{pl} \quad \epsilon_D = \epsilon_D^{el} + \epsilon_D^{pl} \quad \epsilon_T = \epsilon_T^{el} + \epsilon_T^{pl} \quad (4.36)$$

Vereinfachend soll hier nur der Einfluß der isotropen Verfestigung berücksichtigt werden, so daß sich der Vektor der internen Variablen aus den jeweiligen plastischen Verzerrungsanteilen sowie der Verfestigungsvariablen κ zusammensetzt zu $\mathbf{q} = \{\epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}, \epsilon_T^{pl}, \kappa\}$. Die mikroskopische freie Energie $\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_T, \epsilon_V^{pl}, \epsilon_D^{pl}, \epsilon_T^{pl}, \kappa)$ kann dann wie folgt spezifiziert werden,

$$\Psi^{mic} = W_V(\epsilon_V - \epsilon_V^{pl}) + W_D(\epsilon_D - \epsilon_D^{pl}) + W_T(\epsilon_T - \epsilon_T^{pl}) + \int_0^\kappa \phi(\kappa) d\kappa \quad (4.37)$$

wobei die Anteile der gespeicherten Energie W_V , W_D und W_T lediglich Funktionen der elastischen Verzerrungskomponenten sind. In Anlehnung an die Auswertung in Abschnitt 4.2.2 ergeben sich die Spannungskomponenten der Mikroebene als konjugierte Größen zu den jeweiligen elastischen Verzerrungskomponenten, bzw. als Produkt aus den elastischen Moduli der Mikroebene und den elastischen Verzerrungsanteilen.

$$\sigma_V := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V^{el}} = \mathcal{E}_V^{el} \epsilon_V^{el} \quad \sigma_D := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D^{el}} = \mathcal{E}_D^{el} \epsilon_D^{el} \quad \sigma_T := \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_T^{el}} = \mathcal{E}_T^{el} \epsilon_T^{el} \quad (4.38)$$

Wählt man die elastischen Moduli \mathcal{E}_V^{el} , \mathcal{E}_D^{el} und \mathcal{E}_T^{el} entsprechend Gleichung (4.35), so entspricht das Modell im elastischen Teilbereich für $\epsilon_V^{pl} = 0$, $\epsilon_D^{pl} = 0$ und $\epsilon_T^{pl} = \mathbf{0}$ dem HOOKE'schen Stoffgesetz. Die Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D}^{mic} = \sigma_V \epsilon_V^{pl} + \sigma_D \epsilon_D^{pl} + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \boldsymbol{\epsilon}_T^{pl} - \phi \dot{\kappa} \geq 0 \quad (4.39)$$

und die Fließfunktion Φ , die sich aus der Differenz der Vergleichsspannung φ und der Fließspannung ϕ ergibt,

$$\Phi = \varphi(\sigma_V, \sigma_D, \boldsymbol{\sigma}_T) - \phi(\kappa) \leq 0 \quad (4.40)$$

mit

$$\nu_V := \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_V} \quad \nu_D := \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_D} \quad \boldsymbol{\nu}_T := \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}_T} \quad (4.41)$$

bilden unter der Annahme des *Postulats der maximalen Dissipation* ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung. Dessen Lösung liefert mit $\Phi^* = \Phi$ die folgenden Evolutionsgleichungen für die plastischen Verzerrungskomponenten und die Verfestigungsvariable

$$\dot{\epsilon}_V^{pl} = \dot{\gamma} \mu_V \quad \dot{\epsilon}_D^{pl} = \dot{\gamma} \mu_D \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_T^{pl} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\mu}_T \quad \dot{\kappa} = \dot{\gamma} \quad (4.42)$$

mit

$$\mu_V := \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_V} \quad \mu_D := \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma_D} \quad \boldsymbol{\mu}_T := \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}_T} \quad (4.43)$$

sowie die KUHN-TUCKER Be- und Entlastungsbedingungen in der bekannten Form.

$$\Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (4.44)$$

Durch Auswertung der Konsistenzbedingung

$$\dot{\Phi} \dot{\gamma} = 0 \quad (4.45)$$

kann die Definitionsgleichung des plastischen Multiplikators $\dot{\gamma}$ angegeben werden,

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{h} [\nu_V \mathcal{E}_V^{el} \mathbf{V} + \nu_D \mathcal{E}_D^{el} \mathbf{D} + \boldsymbol{\nu}_T \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_T^{el} \cdot \mathbf{T}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.46)$$

wobei

$$h := \nu_V \mathcal{E}_V^{el} \mu_V + \nu_D \mathcal{E}_D^{el} \mu_D + \boldsymbol{\nu}_T \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_T^{el} \cdot \boldsymbol{\mu}_T + H \quad (4.47)$$

gilt. Hierin beschreibt H den isotropen Verfestigungsmodul, der sich durch die Evolutionsgleichung der Fließspannung definieren läßt.

$$\dot{\phi} = H \dot{\kappa} \quad \text{mit} \quad H = \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \quad (4.48)$$

Der vierstufige Tensor der elasto-plastischen Tangentenmoduli $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep}$ liefert den Zusammenhang zwischen der makroskopischen Spannungs- und Verzerrungsrate $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ und läßt sich in der folgenden Form angeben.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{h} [& \mathbf{V} \mathcal{E}_V^{el} \mu_V + \mathbf{D} \mathcal{E}_D^{el} \mu_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_T^{el} \cdot \boldsymbol{\mu}_T] \\ & \otimes [\nu_V \mathcal{E}_V^{el} \mathbf{V} + \nu_D \mathcal{E}_D^{el} \mathbf{D} + \boldsymbol{\nu}_T \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_T^{el} \cdot \mathbf{T}] d\Omega. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Durch die Einführung eines Potentials sowie die Annahme einer assoziierten Fließregel mit $\Phi^* = \Phi$, so daß $\mu_V \equiv \nu_V$, $\mu_D \equiv \nu_D$ und $\boldsymbol{\mu}_T \equiv \boldsymbol{\nu}_T$, nimmt die elasto-plastische Materialtangentente eine symmetrische Form an. Die konstitutiven Gleichungen der microplane-basierten Elasto-Plastizität sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt.

Freie Energie	$\Psi^{mac} = \Psi^{mic}(\Psi^{mic})$	$= \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi^{mic} d\Omega$
mikroskopisch	$\Psi^{mic} = W_V(\epsilon_V^{el}) + W_D(\epsilon_D^{el}) + W_T(\epsilon_T^{el}) + \int_0^{\kappa} \phi d\kappa$	
Spannungen	$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\sigma_V, \sigma_D, \boldsymbol{\sigma}_T)$	$= \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma_V \mathbf{V} + \sigma_D \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \mathbf{T} d\Omega$
volumetrisch	$\sigma_V = \partial \Psi^{mic} / \partial \epsilon_V$	$= \mathcal{E}_V^{el} \epsilon_V^{el}$
deviatorisch	$\sigma_D = \partial \Psi^{mic} / \partial \epsilon_D$	$= \mathcal{E}_D^{el} \epsilon_D^{el}$
tangential	$\boldsymbol{\sigma}_T = \partial \Psi^{mic} / \partial \boldsymbol{\epsilon}_T$	$= \boldsymbol{\mathcal{E}}_T^{el} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_T^{el}$
Fließspannung		
mikroskopisch	$\phi = \partial \Psi^{mic} / \partial \kappa$	$\dot{\phi} = H \dot{\kappa}$
Fließfunktion		
mikroskopisch	$\Phi = \varphi(\sigma_V, \sigma_D, \boldsymbol{\sigma}_T) - \phi(\kappa) \leq 0$	
KUHN-TUCKER Bedingungen		
mikroskopisch	$\dot{\gamma} \geq 0$	$\Phi \leq 0$ $\dot{\gamma} \Phi = 0$ $\dot{\gamma} \dot{\Phi} = 0$
Evolution der Verfestigungsvariablen		
mikroskopisch	$\dot{\kappa} = \dot{\gamma}$	
Plastische Verzerrungen		
volumetrisch	$\dot{\epsilon}_V^{pl} = \dot{\gamma} \partial \Phi^* / \partial \sigma_V$	
deviatorisch	$\dot{\epsilon}_D^{pl} = \dot{\gamma} \partial \Phi^* / \partial \sigma_D$	
tangential	$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_T^{pl} = \dot{\gamma} \partial \Phi^* / \partial \boldsymbol{\sigma}_T$	

Tabelle 4.1: Microplane Elasto-Plastizität - Konstitutive Gleichungen

4.5 Microplane Elasto-Schädigung

4.5.1 Formulierung mit drei Schädigungsvariablen

Das Microplane Modell in der ursprünglichen Version nach BAŽANT & PRAT [25] basiert auf einer Schädigungsformulierung mit getrennter Berücksichtigung des volumetrischen, des deviatorischen und des tangentialen Schädigungsanteils. Dabei können die unterschiedlichen Schädigungsparameter als effektive Dichte der Mikrorisse und Mikroporen einer Mikroebene interpretiert werden, vergleiche LEMAÎTRE [125]. Der volumetrische und der deviatorische Schädigungsanteil d_V und d_D beschreiben dabei die Schädigung normal zur Ebene, wohingegen d_T die Schädigung in der Ebene wiedergibt. Der Vektor der internen Variablen enthält demnach die drei Schädigungsparameter d_V , d_D und d_T , so daß $\mathbf{q} = \{d_V, d_D, d_T\}$. Die mikroskopische freie Energie läßt sich also als Funktion der Verzerrungskomponenten und der Schädigungsparameter angeben, $\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \boldsymbol{\epsilon}_T, d_V, d_D, d_T)$, und kann in der folgenden Form spezifiziert werden.

$$\Psi^{mic} = [1 - d_V] W_V(\epsilon_V) + [1 - d_D] W_D(\epsilon_D) + [1 - d_T] W_T(\boldsymbol{\epsilon}_T) \quad (4.50)$$

Wiederum erhält man durch Auswertung der mikroskopischen CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung die Definition der Spannungskomponenten der Mikroebene als konjugierte Größen

zu den jeweiligen Verzerrungskomponenten. Sie ergeben sich als die gewichteten nominalen Spannungskomponenten, bzw. aus dem Produkt der modifizierten elastischen Moduli \mathcal{E}_V^{ed} , \mathcal{E}_D^{ed} und \mathcal{E}_T^{ed} mit den zugehörigen Verzerrungskomponenten.

$$\begin{aligned}\sigma_V &::= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V} = \mathcal{E}_V^{ed} \epsilon_V & \mathcal{E}_V^{ed} &::= [1 - d_V] \mathcal{E}_V^{el} \\ \sigma_D &::= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D} = \mathcal{E}_D^{ed} \epsilon_D & \mathcal{E}_D^{ed} &::= [1 - d_D] \mathcal{E}_D^{el} \\ \sigma_T &::= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_T} = \mathcal{E}_T^{ed} \cdot \epsilon_T & \mathcal{E}_T^{ed} &::= [1 - d_T] \mathcal{E}_T^{el}\end{aligned}\quad (4.51)$$

Bei einer Wahl der elastischen Moduli \mathcal{E}_V^{el} , \mathcal{E}_D^{el} und \mathcal{E}_T^{el} entsprechend Gleichung (4.35) liefert das Modell für $d_V = d_D = d_T \equiv 0$ das HOOKE'sche Gesetz eines linear elastischen Werkstoffes. Die weitere Auswertung der mikroskopischen CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung nach COLEMAN & NOLL [59] führt auf die Definition der mikroskopischen Energiefreisetzungsraten Y_V , Y_D und Y_T als thermodynamisch konjugierte Größen zu den Schädigungsvariablen d_V , d_D und d_T .

$$Y_V := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} = W_V \quad Y_D := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} = W_D \quad Y_T := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} = W_T \quad (4.52)$$

Die mikroskopische Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D}^{mic} = Y_V \dot{d}_V + Y_D \dot{d}_D + Y_T \dot{d}_T \geq 0 \quad (4.53)$$

in Kombination mit dem *Postulat der maximalen Dissipation* sowie drei unabhängig formulierte Schädigungsbedingungen als Differenz einer Funktion ϕ der Energiefreisetzungsraten Y und den Schädigungsparametern d

$$\begin{aligned}\Phi_V(Y_V, d_V) &= \phi_V(Y_V) - d_V \leq 0 \\ \Phi_D(Y_D, d_D) &= \phi_D(Y_D) - d_D \leq 0 \\ \Phi_T(Y_T, d_T) &= \phi_T(Y_T) - d_T \leq 0\end{aligned}\quad (4.54)$$

führen wiederum auf ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen.

$$\mathcal{L} = -\mathcal{D} + \kappa_V \Phi_V + \kappa_D \Phi_D + \kappa_T \Phi_T \rightarrow \text{stat} \quad (4.55)$$

Hierbei stellen die κ_V , κ_D und κ_T die jeweiligen LAGRANGE Multiplikatoren dar. Die Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & - Y_V \dot{d}_V + \kappa_V [\phi_V(Y_V) - d_V] \\ & - Y_D \dot{d}_D + \kappa_D [\phi_D(Y_D) - d_D] \\ & - Y_T \dot{d}_T + \kappa_T [\phi_T(Y_T) - d_T] \rightarrow \text{stat}\end{aligned}\quad (4.56)$$

liefert die Evolutionsgleichungen für die Schädigungsvariablen

$$\dot{d}_V = \kappa_V \frac{\partial \phi_V}{\partial Y_V} \quad \dot{d}_D = \kappa_D \frac{\partial \phi_D}{\partial Y_D} \quad \dot{d}_T = \kappa_T \frac{\partial \phi_T}{\partial Y_T} \quad (4.57)$$

sowie die KUHN - TUCKER Be- und Entlastungsbedingungen.

$$\begin{aligned} \Phi_V &\leq 0 & \dot{\kappa}_V &\geq 0 & \Phi_V \dot{\kappa}_V &= 0 \\ \Phi_D &\leq 0 & \dot{\kappa}_D &\geq 0 & \Phi_D \dot{\kappa}_D &= 0 \\ \Phi_T &\leq 0 & \dot{\kappa}_T &\geq 0 & \Phi_T \dot{\kappa}_T &= 0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Weiterhin lassen sich individuellen Konsistenzbedingungen wie folgt angeben.

$$\dot{\Phi}_V \dot{\kappa}_V = 0 \quad \dot{\Phi}_D \dot{\kappa}_D = 0 \quad \dot{\Phi}_T \dot{\kappa}_T = 0 \quad (4.59)$$

Die Auswertung der Konsistenzbedingungen nach SIMO & JU [190] liefert die folgende vereinfachte Darstellung der Evolutionsgleichungen.

$$\dot{\kappa}_V = \dot{Y}_V \geq 0 \quad \dot{\kappa}_D = \dot{Y}_D \geq 0 \quad \dot{\kappa}_T = \dot{Y}_T \geq 0 \quad (4.60)$$

Alternativ lassen sich die Geschichtsparameter κ als die in der Belastungsgeschichte $[-\infty; \tau]$ jeweils maximal erreichten Werte der Energiefreisetzungsrate angeben,

$$\kappa_V = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_V(t), \kappa_V^0) \quad \kappa_D = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_D(t), \kappa_D^0) \quad \kappa_T = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_T(t), \kappa_T^0) \quad (4.61)$$

wobei κ_V^0 , κ_D^0 und κ_T^0 die individuellen Schwellwerte des Schädigungswachstums darstellen. Damit gehen die Evolutionsgleichungen der Schädigungsparameter (4.57) unmittelbar in direkte Definitionen der Schädigungsparameter als Funktion der Geschichtsparameter über.

$$d_V = \phi_V(\kappa_V) \quad d_D = \phi_D(\kappa_D) \quad d_T = \phi_T(\kappa_T) \quad (4.62)$$

Die Auswertung der makroskopischen CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung liefert entsprechend Abschnitt 4.2.2 die Definition des Spannungstensors,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (4.63)$$

des vierstufigen Tensors der Sekantenmoduli

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\mathcal{E}}_V^{ed} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_D^{ed} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_T^{ed} \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad (4.64)$$

sowie die Beziehung zwischen Spannungsraten und Verzerrungsraten

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\epsilon}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.65)$$

durch den vierstufigen Tensor der Tangentenmoduli der Elasto-Schädigung.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_V}{\partial \kappa_V} \frac{\sigma_V^2}{[1 - d_V]^2} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \frac{\partial \phi_D}{\partial \kappa_D} \frac{\sigma_D^2}{[1 - d_D]^2} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \frac{\partial \phi_T}{\partial \kappa_T} \mathbf{T}^T \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_T \otimes \boldsymbol{\sigma}_T}{[1 - d_T]^2} \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad (4.66)$$

Im Gegensatz zu den ursprünglichen Microplane Modellen basierend auf der Version von BAŽANT & PRAT [25] fällt auf, daß die Tensoren der Sekanten- sowie der Tangentenmoduli in dieser Formulierung aufgrund des Potentialcharakters des Modells sowie eines assoziierten Schädigungsverhaltens eine symmetrische Form annehmen.

Im Gegensatz zu den ursprünglichen Microplane Modellen ist die Einhaltung der makroskopischen Dissipationsungleichung $\mathcal{D}^{mac} \geq 0$ in dieser Formulierung in der starken Form gewährleistet, da die Erfüllung der mikroskopischen Dissipationsungleichung $\mathcal{D}^{mic} \geq 0$ durch Gleichung (4.53) direkt gefordert wurde. Zur Übersicht sind die Gleichungen der Microplane Elasto-Schädigung mit drei unabhängigen Schädigungsparametern in der Tabelle 4.2 nochmals zusammengefaßt.

Freie Energie	$\Psi^{mac} = \Psi^{mac}(\Psi_V, \Psi_D, \Psi_T) = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi_V^{mic} + \Psi_D^{mic} + \Psi_T^{mic} d\Omega$		
volumetrisch	$\Psi_V^{mic} = \Psi_V^{mic}(\epsilon_V, d_V, \kappa_V)$	$= [1 - d_V] W_V$	
deviatorisch	$\Psi_D^{mic} = \Psi_D^{mic}(\epsilon_D, d_D, \kappa_D)$	$= [1 - d_D] W_D$	
tangential	$\Psi_T^{mic} = \Psi_T^{mic}(\epsilon_T, d_T, \kappa_T)$	$= [1 - d_T] W_T$	
Spannungen	$\boldsymbol{\sigma} = \partial\Psi^{mac} / \partial\boldsymbol{\epsilon}$	$= \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V}\sigma_V + \mathbf{D}\sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T d\Omega$	
volumetrisch	$\sigma_V = \partial\Psi^{mic} / \partial\epsilon_V$	$= [1 - d_V] \mathcal{E}_V^{el} \epsilon_V$	
deviatorisch	$\sigma_D = \partial\Psi^{mic} / \partial\epsilon_D$	$= [1 - d_D] \mathcal{E}_D^{el} \epsilon_D$	
tangential	$\boldsymbol{\sigma}_T = \partial\Psi^{mic} / \partial\boldsymbol{\epsilon}_T$	$= [1 - d_T] \mathcal{E}_T^{el} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_T$	
Energiefreisetzungsraten			
volumetrisch	$Y_V = -\partial\Psi^{mic} / \partial d_V$	$= W_V$	
deviatorisch	$Y_D = -\partial\Psi^{mic} / \partial d_D$	$= W_D$	
tangential	$Y_T = -\partial\Psi^{mic} / \partial d_T$	$= W_T$	
Schädigungsfunktionen			
volumetrisch	$\Phi_V = \phi_V(Y_V) - d_V$	≤ 0	
deviatorisch	$\Phi_D = \phi_D(Y_D) - d_D$	≤ 0	
tangential	$\Phi_T = \phi_T(Y_T) - d_T$	≤ 0	
KUHN-TUCKER Bedingungen			
volumetrisch	$\Phi_V \leq 0$	$\dot{\kappa}_V \geq 0$	$\dot{\kappa}_V \Phi_V = 0 \quad \dot{\kappa}_V \dot{\Phi}_V = 0$
deviatorisch	$\Phi_D \leq 0$	$\dot{\kappa}_D \geq 0$	$\dot{\kappa}_D \Phi_D = 0 \quad \dot{\kappa}_D \dot{\Phi}_D = 0$
tangential	$\Phi_T \leq 0$	$\dot{\kappa}_T \geq 0$	$\dot{\kappa}_T \Phi_T = 0 \quad \dot{\kappa}_T \dot{\Phi}_T = 0$
Schädigungsevolution			
volumetrisch	$\dot{d}_V = \dot{\kappa}_V \partial\phi_V / \partial Y_V$		
deviatorisch	$\dot{d}_D = \dot{\kappa}_D \partial\phi_D / \partial Y_D$		
tangential	$\dot{d}_T = \dot{\kappa}_T \partial\phi_T / \partial Y_T$		

Tabelle 4.2: Microplane Elasto-Schädigung - Konstitutive Gleichungen

4.5.2 Formulierung mit einer Schädigungsvariablen

Die ursprünglichen Microplane Modelle basieren auf der Annahme einer nahezu vollständigen Entkopplung des volumetrischen, deviatorischen und tangentialen Verhaltens. Lediglich die tangentialen Gesetze wurden teilweise in Abhängigkeit der volumetrischen Spannungen oder, um eine explizite Formulierung zu gewinnen, in Abhängigkeit der volumetrischen Verzerrungen angegeben, vergleiche BAŽANT & PRAT [25] CAROL, PRAT & BAŽANT [49]. Dies war insbesondere notwendig, um der volumetrischen Abhängigkeit des Reibungseinflusses bei der Modellierung von Beton Rechnung zu tragen. Im folgenden Abschnitt soll eine Microplane Formulierung diskutiert werden, die auf der Einführung einer einzigen Schädigungsvariablen pro Mikroebene beruht, so daß die volumetrischen, deviatorischen und tangentialen elastischen Moduli der Ebene gleichermaßen abgemindert werden. Obwohl die Herleitung hier wieder im Rahmen des in Abschnitt 4.2.2 bereitgestellten, generalisierten Schemas erfolgt, führt die Formulierung auf eine ähnliche Darstellung wie das jüngst von JIRÁSEK [98], [97] vorgeschlagene Verfahren basierend auf der Annahme der Energieäquivalenz.

Es wird im folgenden also nur eine Schädigungsvariable d eingeführt, so daß gilt $\mathbf{q} = \{d\}$. Dementsprechend ergibt sich die mikroskopische freie Energie als Funktion der Verzerrungskomponenten sowie der internen Variablen, $\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \epsilon_T, d)$, und kann in der folgenden Form spezifiziert werden.

$$\Psi^{mic} = [1 - d] [W_V(\epsilon_V) + W_D(\epsilon_D) + W_T(\epsilon_T)] \quad (4.67)$$

Im Gegensatz zum Abschnitt 4.5.1 ergeben sich nun alle Spannungskomponenten als in gleichem Maße abgeminderte nominale Spannungen, bzw. aus dem Produkt der mit $[1 - d]$ abgeminderten Elastizitätsmoduli und den jeweiligen Verzerrungskomponenten.

$$\begin{aligned} \sigma_V &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V} = \mathcal{E}_V^{ed} \epsilon_V & \mathcal{E}_V^{ed} &:= [1 - d] \mathcal{E}_V^d \\ \sigma_D &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D} = \mathcal{E}_D^{ed} \epsilon_D & \mathcal{E}_D^{ed} &:= [1 - d] \mathcal{E}_D^d \\ \sigma_T &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_T} = \mathcal{E}_T^{ed} \cdot \epsilon_T & \mathcal{E}_T^{ed} &:= [1 - d] \mathcal{E}_T^d \end{aligned} \quad (4.68)$$

Die mikroskopische Energiefreisetzungsrate ergibt sich als Summe der gespeicherten Energieanteile W_V , W_D und W_T .

$$Y := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d} = W_V + W_D + W_T \quad (4.69)$$

Es ist nun lediglich die Spezifikation einer Schädigungsfunktion Φ als Differenz der äquivalenten Energiefreisetzungsrates ϕ und des Schädigungsparameters d erforderlich.

$$\Phi = \phi(Y) - d \leq 0 \quad (4.70)$$

Die Lösung des zugehörigen Optimierungsproblems aus der Dissipationsungleichung mit der Schädigungsfunktion als Nebenbedingung führt in der bekannten Art und Weise auf die Evolutionsgleichungen für die internen Variablen, die KUHN - TUCKER Gleichungen und die Konsistenzbedingung. Deren Auswertung nach SIMO & JU [190] liefert die folgende direkte Bestimmungsgleichung für die Schädigungsvariable.

$$d = \phi(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = \max_{-\infty < t < \tau} (Y(t), \kappa^0) \quad (4.71)$$

Der makroskopische Spannungstensor läßt sich mit Hilfe der folgenden Sekantenbeziehung $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} : \boldsymbol{\epsilon}$ bestimmen, wobei sich der vierstufige Sekantentensor der Elasto-Schädigung wie folgt darstellen läßt.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} [1 - d] [\boldsymbol{\mathcal{E}}_V^{el} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_D^{el} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_T^{el} \cdot \mathbf{T}] d\Omega \quad (4.72)$$

Dementsprechend liefert die Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungs- und Verzerrungsraten $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ den vierstufigen Tensor der Tangentenmoduli der Elasto-Schädigung.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial \kappa} \frac{[\mathbf{V} \sigma_V + \mathbf{D} \sigma_D + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T]}{1 - d} \otimes \frac{[\sigma_V \mathbf{V} + \sigma_D \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \mathbf{T}]}{1 - d} d\Omega \quad (4.73)$$

Da analog zu Abschnitt 4.4 nur eine Versagensfunktion eingeführt wurde, weist die Materialtangente der Elasto-Schädigung aus Gleichung (4.73) eine bemerkenswert ähnliche Struktur auf, wie die Materialtangente der Elasto-Plastizität entsprechend Gleichung (4.49).

4.5.3 Formulierung mit Mikrorißschließung

Das ursprüngliche Microplane Modell von BAŽANT & PRAT [25] sowie alle darauf aufbauenden Modelle basieren auf einer separaten Spezifizierung des Materialverhaltens unter Zug- und Druckbeanspruchung. Durch die Einführung zweier unabhängiger Sätze von internen Variablen können dann in anschaulicher Form sowohl die Effekte der Mikrorißschließung als auch das zug-druck-unsymmetrische Verhalten, das charakteristisch für zahlreiche gesteinartige Materialien ist, abgebildet werden. Die mit tensoriellen Mikrorißschließungsmodellen verbundenen Probleme der Definition von positiven und negativen Verzerrungsmaßen und die daraus resultierende künstliche Energieerzeugung bzw. -vernichtung werden im Rahmen des Microplane Konzeptes in natürlicher Art und Weise gelöst, da die relevanten Verzerrungsgrößen in skalarer Form vorliegen. Aus diesem Grund ist das Microplane Modell zur Modellierung gesteinartiger Materialien, wie beispielsweise Beton, ausgezeichnet geeignet. Im Gegensatz zu den volumetrischen und deviatorischen Materialgesetzen auf der Mikroebene können die tangentialen Spannungs-Dehnungskurven als vorzeichenunabhängig angenommen werden. Weiterhin werden Rißschließungseffekte in tangentialer Richtung vernachlässigt, so daß zur Beschreibung des tangentialen Verhaltens nur ein Variablensatz erforderlich ist, $\mathbf{q} = \{d_V^+, d_V^-, d_D^+, d_D^-, d_T\}$. Die mikroskopische freie Energie $\Psi^{mic} = \Psi^{mic}(\epsilon_V, \epsilon_D, \boldsymbol{\epsilon}_T, d_V^+, d_V^-, d_D^+, d_D^-, d_T)$ läßt sich in der folgenden Form spezifizieren,

$$\begin{aligned} \Psi^{mic} &= H(\epsilon_V) [1 - d_V^+] W_V(\epsilon_V) + H(-\epsilon_V) [1 - d_V^-] W_V(\epsilon_V) \\ &+ H(\epsilon_D) [1 - d_D^+] W_D(\epsilon_D) + H(-\epsilon_D) [1 - d_D^-] W_D(\epsilon_D) \\ &+ [1 - d_T] W_T(\boldsymbol{\epsilon}_T) \end{aligned} \quad (4.74)$$

wobei $H(\bullet)$ die HEAVISIDE Funktion gemäß (A.18) darstellt. Die Auswertung der mikroskopischen CLAUSIUS-DUHEM Ungleichung liefert in gewohnter Form die mikroskopischen

Spannungskomponenten

$$\begin{aligned}
 \sigma_V &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V} = \mathcal{E}_V^{ed} \epsilon_V & \mathcal{E}_V^{ed} &:= [H(\epsilon_V) [1 - d_V^+] + H(-\epsilon_V) [1 - d_V^-]] \mathcal{E}_V^{el} \\
 \sigma_D &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D} = \mathcal{E}_D^{ed} \epsilon_D & \mathcal{E}_D^{ed} &:= [H(\epsilon_D) [1 - d_D^+] + H(-\epsilon_D) [1 - d_D^-]] \mathcal{E}_D^{el} \\
 \sigma_T &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_T} = \mathcal{E}_T^{ed} \epsilon_T & \mathcal{E}_T^{ed} &:= [1 - d_T] \mathcal{E}_T^{el}
 \end{aligned} \tag{4.75}$$

sowie die Energiefreisetzungsraten als konjugierten Größen zu den Schädigungsvariablen.

$$\begin{aligned}
 Y_V^+ &:= -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V^+} = H(\epsilon_V) W_V & Y_V^- &:= -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V^-} = H(-\epsilon_V) W_V \\
 Y_D^+ &:= -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D^+} = H(\epsilon_D) W_D & Y_D^- &:= -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D^-} = H(-\epsilon_D) W_D \\
 Y_T &:= -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} = W_T
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

Die Lösung des Optimierungsproblems aus der Dissipationsungleichung

$$\mathcal{D}^{mic} = Y_V^+ \dot{d}_V^+ + Y_V^- \dot{d}_V^- + Y_D^+ \dot{d}_D^+ + Y_D^- \dot{d}_D^- + Y_T \dot{d}_T \geq 0 \tag{4.77}$$

in Verbindung mit dem Postulat der maximalen Dissipation unter der Einhaltung der fünf unabhängigen Schädigungsfunktionen als Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
 \Phi_V^+ &:= \phi_V^+(Y_V^+) - d_V^+ \leq 0 & \Phi_V^- &:= \phi_V^-(Y_V^-) - d_V^- \leq 0 \\
 \Phi_D^+ &:= \phi_D^+(Y_D^+) - d_D^+ \leq 0 & \Phi_D^- &:= \phi_D^-(Y_D^-) - d_D^- \leq 0 \\
 \Phi_T &:= \phi_T(Y_T) - d_T \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

liefert die Evolutionsgleichungen für die Schädigungsparameter als Funktionen der LAGRANGE'schen Multiplikatoren κ .

$$\begin{aligned}
 \dot{d}_V^+ &= \kappa_V^+ \frac{\partial \phi_V^+}{\partial Y_V^+} & \dot{d}_V^- &= \kappa_V^- \frac{\partial \phi_V^-}{\partial Y_V^-} \\
 \dot{d}_D^+ &= \kappa_D^+ \frac{\partial \phi_D^+}{\partial Y_D^+} & \dot{d}_D^- &= \kappa_D^- \frac{\partial \phi_D^-}{\partial Y_D^-} \\
 \dot{d}_T &= \kappa_T \frac{\partial \phi_T}{\partial Y_T}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

Weiterhin gelten die KUHN - TUCKER Be- und Entlastungsbedingungen sowie die Konsistenzbedingungen,

$$\begin{aligned}
 \Phi_V^+ \leq 0 & \quad \kappa_V^+ \geq 0 & \quad \Phi_V^+ \kappa_V^+ = 0 & \quad \dot{\Phi}_V^+ \kappa_V^+ = 0 \\
 \Phi_V^- \leq 0 & \quad \kappa_V^- \geq 0 & \quad \Phi_V^- \kappa_V^- = 0 & \quad \dot{\Phi}_V^- \kappa_V^- = 0 \\
 \Phi_D^+ \leq 0 & \quad \kappa_D^+ \geq 0 & \quad \Phi_D^+ \kappa_D^+ = 0 & \quad \dot{\Phi}_D^+ \kappa_D^+ = 0 \\
 \Phi_D^- \leq 0 & \quad \kappa_D^- \geq 0 & \quad \Phi_D^- \kappa_D^- = 0 & \quad \dot{\Phi}_D^- \kappa_D^- = 0 \\
 \Phi_T \leq 0 & \quad \kappa_T \geq 0 & \quad \Phi_T \kappa_T = 0 & \quad \dot{\Phi}_T \kappa_T = 0
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

deren Auswertung in Analogie zum vorigen Abschnitt die folgenden expliziten Bestimmungsgleichungen für die Schädigungsparameter definiert.

$$\begin{aligned}
 d_V^+ &= \phi_V^+ (\kappa_V^+) & \text{mit} & \quad \kappa_V^+ = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_V^+(t), \kappa_V^+{}^0) \\
 d_V^- &= \phi_V^- (\kappa_V^-) & \text{mit} & \quad \kappa_V^- = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_V^-(t), \kappa_V^-{}^0) \\
 d_D^+ &= \phi_D^+ (\kappa_D^+) & \text{mit} & \quad \kappa_D^+ = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_D^+(t), \kappa_D^+{}^0) \\
 d_D^- &= \phi_D^- (\kappa_D^-) & \text{mit} & \quad \kappa_D^- = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_D^-(t), \kappa_D^-{}^0) \\
 d_T &= \phi_T (\kappa_T) & \text{mit} & \quad \kappa_T = \max_{-\infty < t < \tau} (Y_T(t), \kappa_T^0)
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Der Sekantentensor der Elasto-Schädigung liefert die Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungen und Verzerrungen $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} : \boldsymbol{\epsilon}$ und läßt sich analog zum Abschnitt 4.5.1 angeben.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \boldsymbol{\mathcal{E}}_V^{ed} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \boldsymbol{\mathcal{E}}_D^{ed} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_T^{ed} \cdot \mathbf{T} \, d\Omega \tag{4.82}$$

Die Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungs- und Verzerrungsraten ist über den vierstufigen Tensor der Tangentenmoduli definiert $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$, der sich in der folgenden Form darstellen läßt, vergleiche KUHLE & RAMM [114].

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{sec}^{ed} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} & \frac{\partial \phi_V^+}{\partial \kappa_V^+} \frac{\sigma_V^2}{[1 - d_V^+]^2} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \frac{\partial \phi_V^-}{\partial \kappa_V^-} \frac{\sigma_V^2}{[1 - d_V^-]^2} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} \\
 & + \frac{\partial \phi_D^+}{\partial \kappa_D^+} \frac{\sigma_D^2}{[1 - d_D^+]^2} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \frac{\partial \phi_D^-}{\partial \kappa_D^-} \frac{\sigma_D^2}{[1 - d_D^-]^2} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} \\
 & + \frac{\partial \phi_T}{\partial \kappa_T} \mathbf{T}^T \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}_T \otimes \boldsymbol{\sigma}_T}{[1 - d_T]^2} \cdot \mathbf{T} \, d\Omega
 \end{aligned} \tag{4.83}$$

Abbildung 4.8 zeigt beispielhaft den möglichen Verlauf der unabhängig voneinander wählbaren Konstitutivgesetze der Mikroebenen im Zug- und Druckbereich, vergleiche BAŽANT & PRAT [25]. Insbesondere für kohäsive Reibungsmaterialien, die ein extrem unterschiedliches Zug-Druckverhalten aufweisen, ist ein solches Modell aus diesem Grund besonders geeignet.

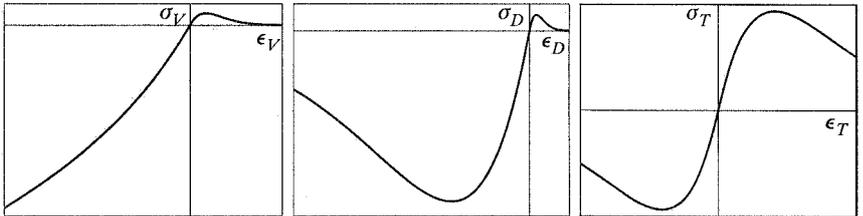


Abbildung 4.8: Spannungs-Dehnungskurven auf der Mikroebene

4.6 Beispiele – Texturentwicklung

Ein wesentlicher Vorteil des Microplane Modells gegenüber anderen anisotropen Materialmodellen liegt in der anschaulichen Darstellbarkeit der Ergebnisse, insbesondere im Hinblick auf die Evolution der sich ausbildenden Texturen. Im folgenden soll die Ausprägung von Anisotropie exemplarisch anhand der Modellprobleme des einaxialen Zuges sowie der einfachen Scherung analysiert werden. Dazu wird ein 1 mm^3 großer Würfel im ebenen Verzerrungszustand untersucht.

4.6.1 Microplane Elastizität

Die nachfolgenden Berechnungen basieren auf der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Wahl der elastischen Microplanemoduli als Funktionen der makroskopischen Elastizitätskonstanten $K=16666.7\text{ N/mm}^2$ und $G=12500\text{ N/mm}^2$, entsprechend einem Elastizitätsmodul von $E=30000\text{ N/mm}^2$ und einer POISSON Zahl von $\nu=0.2$. Bei einer gleichen Gewichtung des deviatorischen und tangentialen Anteils nehmen die zugehörigen elastischen Microplane Moduli die Werte $\mathcal{E}_V^{\text{el}} = 50000\text{ N/mm}^2$, $\mathcal{E}_D^{\text{el}} = 25000\text{ N/mm}^2$ und $\mathcal{E}_T^{\text{el}} = 25000\text{ N/mm}^2$ an. Abbildung 4.9 zeigt die resultierende Verteilung der gespeicherten Energieanteile W_V , W_D und W_T entsprechend Gleichung (4.28) für die Modellprobleme des einaxialen Zuges sowie der einfachen Scherung. Die gezeigten Energieanteile entsprechen einer aufgetragenen Verschiebung u von $u = 0.004\text{ mm}$. Es ist deutlich erkennbar, daß die volumetrischen Verzerrungen eine isotrope Verteilung annehmen, während die gespeicherten Energieanteile basierend auf den deviatorischen und tangentialen Verzerrungskomponenten richtungsabhängige Größen darstellen. Bemerkenswerterweise erreicht die gespeicherte Energie der volumetrischen Verzerrungen unter einaxialem Zug unter allen Energiekomponenten den maximalen Wert. Wie erwartet wird der Energieanteil der deviatorischen Verzerrungen in Lastrichtung maximal, während die tangentialen Verzerrungen insbesondere unter einem Winkel von 45° die größten Energieanteile liefern.

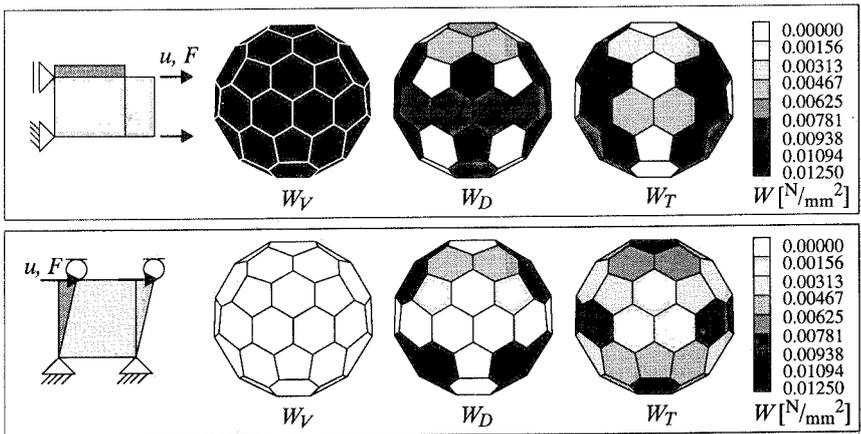


Abbildung 4.9: Gespeicherte Energieanteile W_V , W_D und W_T

Im Gegensatz zum einaxialen Zug ist der Lastfall der einfachen Scherung rein isochor, so daß die volumetrische gespeicherte Energie zu Null wird. Die deviatorischen Komponenten nehmen unter einem Winkel von 45° zur Lastrichtung maximale Werte an. Die tangentialen Verzerrungen hingegen weisen in den Ebenen, deren Normalen parallel sowie orthogonal zur Belastungsrichtung angeordnet sind, Maximalwerte auf.

4.6.2 Microplane Elasto-Plastizität

Im nächsten Beispiel wird das plastische Verhalten in Anlehnung an das in Abschnitt 4.4 vorgestellte microplane-basierte Plastizitätsmodell untersucht. Die makroskopischen Elastizitätskonstanten werden entsprechend Abschnitt 4.6.1 gewählt. Vereinfachend ist hier der deviatorische Elastizitätsmodul zu $\mathcal{E}_D^d = 0 \text{ N/mm}^2$ angenommen, so daß der tangentielle Modul einen Wert von $\mathcal{E}_T^d = 41667 \text{ N/mm}^2$ annimmt. Die äquivalente Spannung φ

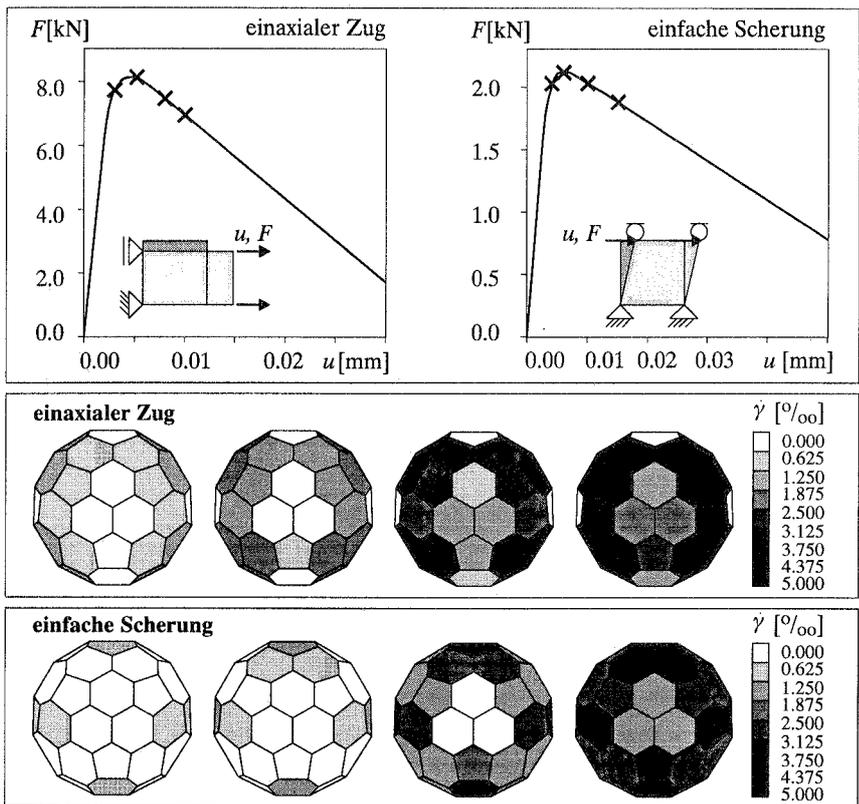


Abbildung 4.10: Last-Verschiebungskurven und Plastischer Multiplikator $\dot{\gamma}$

wird vereinfachend zu

$$\varphi(\sigma_V, \sigma_D, \sigma_T) = \|\sigma_T\|$$

gewählt, wobei mit $\|\bullet\|$ die L_2 -Norm gemäß (A.7) bezeichnet sei. Dies entspricht einer rein deviatorischen Fließbedingung, wie sie für die klassische VON MISES Plastizität entsprechend Tabelle 3.3 charakteristisch ist. Es wird ein linear entfestigendes Materialverhalten angenommen. Die Fließspannung kann dementsprechend mit Hilfe der folgenden Funktion, die ein lineares Entfestigungsverhalten charakterisiert, beschrieben werden.

$$\phi(\kappa) = \sigma_Y + H\kappa$$

Der Anfangswert der Fließspannung wurde zu $\sigma_Y = 50 \text{ N/mm}^2$ gewählt, während der Entfestigungsmodul zu $H = E/15 = 2000 \text{ N/mm}^2$ angenommen wurde. Bemerkenswerterweise zeigen die Last-Verschiebungskurven, die in Abbildung 4.10 gegenüber gestellt sind, trotz der Wahl eines bilinearen Verhaltens auf den einzelnen Ebenen eine deutliche Ausrundung im Bereich des kritischen Punktes. Diese Abweichung von dem auf der Ebene vorgeschriebenen bilinearen Spannungs-Dehnungsverlauf ist auf den sukzessiven Übergang einzelner Ebenen in den plastischen Bereich zurückzuführen. Haben schließlich alle Ebenen zu fließen begonnen, so wird in der dargestellten Last-Verschiebungskurve das lineare Entfestigungsverhalten der Ebenen abgebildet.

In Abbildung 4.10 ist die Evolution des plastischen Multiplikators $\dot{\gamma}$ zu den in den Last-Verschiebungskurven markierten Belastungsstadien gezeigt. Es ist eine deutliche Tendenz zur Texturbildung erkennbar. Maximalwerte des plastischen Multiplikators werden für den einaxialen Zug unter einem Winkel von 45° zur Lastrichtung eingenommen, während bei der einfachen Scherung maximale Werte auf den Ebenen parallel und orthogonal zur Belastungsrichtung auftreten.

4.6.3 Microplane Elasto-Schädigung

Die Ergebnisse, die auf der in Tabelle 4.2 zusammengefaßten Schädigungsformulierung mit drei unabhängigen Schädigungsparametern basieren, sind in Abbildung 4.11 gegenüber gestellt. Die zugrunde gelegten elastischen Materialparameter wurden entsprechend dem vorigen Abschnitt gewählt, während für die Schädigungsparameter die folgende exponentielle Evolutionsgleichung ohne Schädigungsschwellwert angenommen wurde.

$$d(\kappa) = 1 - \exp[-[\kappa/a]^p]$$

Dementsprechend wird die Spezifizierung zweier zusätzlicher Materialparameter für jede Komponente erforderlich, die jeweils zu $a_V = 0.009$, $p_V = 0.5$, $a_D = 0.0125$, $p_D = 0.4$, $a_T = 0.032$ und $p_T = 0.5$ gewählt wurden. Gemäß dem in Abschnitt 4.5.1 beschriebenen Schädigungsmodell entsprechen die Variablen κ_V , κ_D und κ_T dem jeweiligen Maximalwert des zugehörigen gespeicherten Energieanteils W_V , W_D und W_T . Damit stellen die in Abbildung 4.9 für den elastischen Fall skizzierten Energieanteile die treibenden Größen des Schädigungsprozesses dar.

Abbildung 4.11 zeigt die resultierenden Last-Verschiebungskurven für die Modellprobleme des einaxialen Zuges und der einfachen Scherung. Die Schädigungsparameter d_D und d_T zu den markierten Stadien der Belastungsgeschichte sind ebenfalls in Abbildung 4.11 gezeigt. Sie spiegeln die ausgeprägte Texturevolution wider. Diese wird entscheidend durch

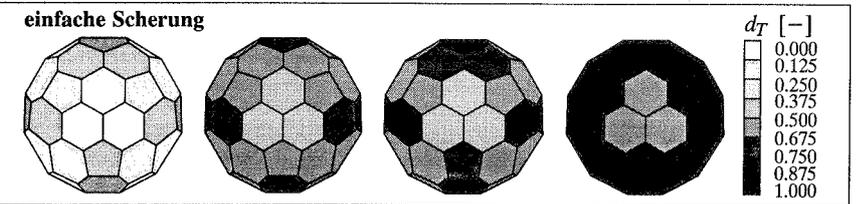
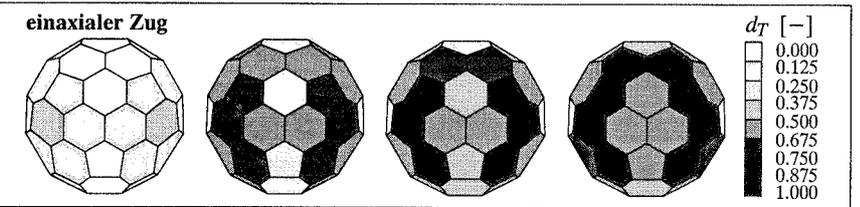
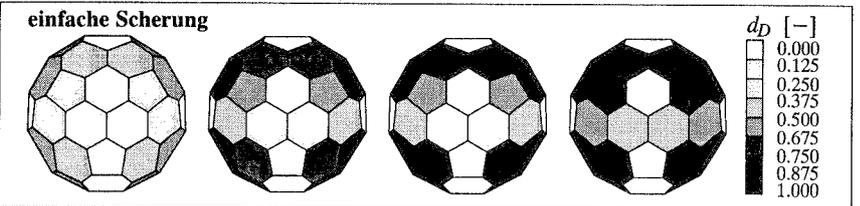
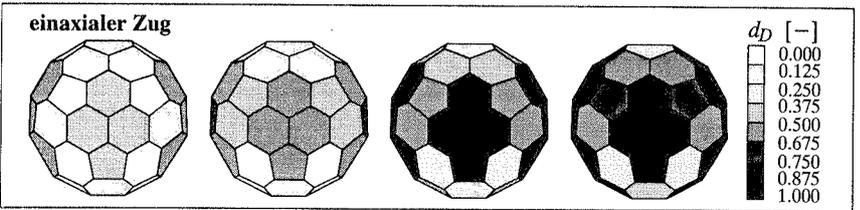
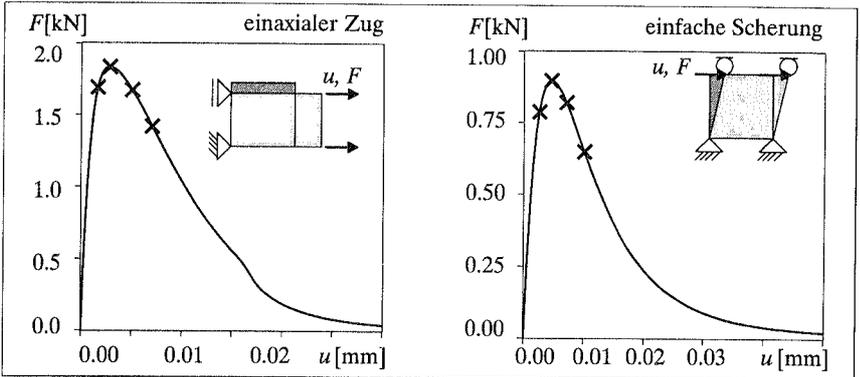


Abbildung 4.11: Last-Verschiebungskurven und Schädigung d_D und d_T

die Wahl der Schädigungsgesetze geprägt. Während unter Zugbeanspruchung die deviatorische Schädigung in Lastrichtung maximal ist, nimmt die tangentielle Schädigung unter einem Winkel von 45^0 zur Lastrichtung die größten Werte an. Die Schädigungsverteilung der deviatorischen und tangentielle Komponenten weist nahezu eine inverse Anordnung auf, so daß Ebenen mit minimaler deviatorischer Schädigung eine maximale tangentielle Schädigung erfahren. Gleiches gilt für die einfache Scherung, unter der die deviatorischen Schädigungsanteile unter einem Winkel von 45^0 maximal werden, während die tangentielle Schädigung auf den Ebenen, deren Normale parallel und orthogonal zur Lastrichtung angeordnet ist, maximale Werte aufweist. Die in Abbildung 4.11 gezeigten Verteilungen der tangentialen Schädigung ähneln stark den Verteilungen des plastischen Multiplikators aus Abbildung 4.10, da für das im vorigen Abschnitt gezeigte Beispiel ebenfalls die tangentielle Spannungskomponente die treibende Größe des plastischen Fließens darstellt.

Die Beispiele dieses Abschnittes haben gezeigt, daß das Microplane Konzept als allgemeingültige Grundlage zur Modellierung eines anisotropen Materialverhaltens eingesetzt werden kann. Einzelne Versagensphänomene auf der Mikroskala lassen sich detailliert abbilden. Desweiteren bietet die numerische Simulation anschauliche Erklärungen der Wechselwirkungen einzelner Versagensvorgänge. Insbesondere für spröde, kohäsive Reibungsmaterialien erscheint das Microplane Konzept daher hervorragend geeignet. Eine entkoppelte Betrachtung der einzelnen Versagensformen, wie sie für die ursprünglichen Modelle durch die Einführung unterschiedlicher Schädigungsfunktionen auf der Ebene postuliert wurde, scheint dem Modell zu viele Freiheiten zu ermöglichen. Diese müssen durch geeignete Parameterwahl wieder eingeschränkt werden, um ein glattes makroskopisches Antwortverhalten gewährleisten zu können. Insbesondere konnten bei Untersuchungen des Schädigungsmodells mit drei unabhängig formulierten Schädigungsfunktionen Be- und Entlastungsvorgänge einzelner Komponenten beobachtet werden, deren Ursache sich auf einer Mehrdeutigkeit der deviatorisch-tangentialen Projektion gründet. Formulierungen, die auf der Einführung einer einzigen Versagensfunktion pro Ebene basieren und damit automatisch eine konstitutive Kopplung des Normal- und Tangentialverhaltens berücksichtigen, können jedoch als eine attraktive, numerisch stabile Alternative verstanden werden.

Kapitel 5

Lokalisierung

Das folgende Kapitel ist dem Versagensphänomen der Lokalisierung gewidmet. Aufbauend auf einer kurzen Einführung werden die klassischen Kriterien des Verlustes der Eindeutigkeit, der Stabilität, der Elliptizität sowie der starken Elliptizität diskutiert. Das Lokalisierungskriterium, das für quasi-statische Probleme den Verlust der Elliptizität kennzeichnet, wird anschließend beispielhaft für die konstitutiven Modelle der Elasto-Plastizität sowie der Elasto-Schädigung erläutert. Dabei wird insbesondere eine geometrische Interpretation des Lokalisierungskriteriums, das sich in den Mohr'schen Koordinaten in Form einer Ellipse darstellen läßt, veranschaulicht. Anhand des Modellproblems des Zugstabes wird die mit der Lokalisierung einhergehende Netzhängigkeit der Lösung illustriert. Abschließend erfolgt eine Diskussion erweiterter Modelle, die auch im postkritischen Bereich eine eindeutige, netzunabhängige Lösung garantieren.

5.1 Allgemeines

Unter dem Begriff *Lokalisierung* versteht man die Ausbildung schmaler Versagenszonen mit einer hohen Konzentration von Deformationen, während der Rest der Struktur möglicherweise sogar eine Entlastung erfahren kann. Dieser Versagensvorgang beginnt mit der Entstehung von Mikrorissen und Mikroporen, deren Akkumulation bei fortschreitender Belastung zur Ausprägung von Zonen stark lokalisierter Verzerrungen führt. Diese stellen zu einem späteren Zeitpunkt den Ausgangspunkt für ein mögliches diskretes Versagen dar. Eine eindrucksvolle Sammlung von Aufnahmen lokalisierter Versagensformen findet sich in NÁDAI [160]. Hier sind sowohl die klassischen Lokalisierungsphänomene in metallischen Materialien wie beispielsweise Eisen, Stahl und Kupfer als auch lokalisierte Versagensformen von Geomaterialien wie Marmor, Sand und Gestein abgebildet und in anschaulicher Form erläutert. Das wohl bekannteste Phänomen lokalisierten Versagens stellen die LÜDERS-Bänder in duktilen metallischen Materialien dar, aber auch das klassische Grundbruchphänomen der Bodenmechanik sowie die Akkumulation von Schädigung in spröden Materialien wie Beton können als lokalisierte Versagensformen verstanden werden. Traditionell unterscheidet man das für spröde Materialien charakteristische *kohäsive Versagen*, das mit einem trennbruchartigen Materialversagen verbunden ist und das für duktile Materialien typische *Reibungsversagen*, das einem Abgleiten entlang schwächerer

Materialebenen entspricht. Beide Versagensarten können als *Bifurkation* einer ursprünglich homogenen Strukturantwort hin zu einer hochgradig konzentrierten Versagensform verstanden werden. Die Bandbreite der Lokalisierungszone in Metallen ist hierbei typischerweise kleiner als ein Millimeter, wohingegen die Zone lokalisierten Versagens in geklüfteten Gebirgsmassen häufig bis zu mehreren Metern breit sein kann.

Obwohl die klassischen Instabilitätsphänomene aufgrund von Materialversagen seit langer Zeit bekannt sind, ist das Interesse an einer mathematisch korrekten Beschreibung von lokalisierten Versagensformen in den vergangenen Jahren zunehmend gestiegen. Eine der ersten theoretischen Arbeiten dieser Thematik, die sich mit der Wellenausbreitung in elastischen Medien befaßt, wurde bereits zu Beginn dieses Jahrhunderts von HADAMARD [85] veröffentlicht. Seine grundlegenden Ideen wurden von THOMAS [210], HILL [90] und MANDEL [141] Anfang der 60er Jahre aufgegriffen und auf elasto-plastisches Materialverhalten übertragen. Zu Beginn wurden nahezu ausschließlich Lokalisierungsvorgänge in metallischen Materialien wie beispielsweise die Phänomene der Scherbandbildung und Einschnürungsphänomene untersucht. Insbesondere aufgrund der für Metalle gültigen Assoziiertheit der plastischen Fließregel und der damit verbundenen Symmetrie der Materialtangente waren die Zusammenhänge zwischen der *Lokalisierungsbedingung* und den von HILL [89] vorgestellten Begriffen von *Eindeutigkeit* und *Stabilität* zunächst unklar. Ende der 70er Jahre gelang dann jedoch RUDNICKI & RICE [185], MAIER & HUECKEL [139] sowie RANIECKI & BRUHNS [177] eine klare Differenzierung der oben genannten Kriterien für den Fall einer nicht-assozierten Plastizitätsformulierung. Die Materialtangente der für Geomaterialien charakteristischen nicht-assozierten Fließgesetze nimmt in der Regel eine unsymmetrische Form an, so daß einige der Versagenskriterien bereits vor dem Erreichen des Maximums der Spannungs-Dehnungskurve eintreten können. Die damit verbundenen destabilisierenden Effekte für unterschiedliche Fließregeln von Metallen, Einkristallen und Geomaterialien wurden von RICE [181] in einer umfangreichen Übersichtsveröffentlichung untersucht. Insbesondere die von RICE [181] analysierten, kritischen Verfestigungsmoduli, die für nicht-assozierte Fließgesetze im allgemeinen auch positive Werte annehmen können, verdeutlichen die destabilisierende Wirkung nicht-assoziierter Plastizitätsphänomene.

Bis Mitte der 80er Jahre wurden numerische Untersuchungen von materiellen Instabilitäten und den daraus resultierenden Lokalisierungsphänomenen nahezu ausschließlich im Rahmen klassischer Kontinuumsmodelle durchgeführt. Im postkritischen Bereich konnte jedoch eine Abhängigkeit der klassischen Kontinuumslösung von der gewählten Diskretisierung beobachtet werden, wie sie beispielsweise von DE BORST [30] dokumentiert wurde. Die Netzabhängigkeit der Lösung konnte nicht mehr allein durch den Verlust von Stabilität erklärt werden. Vielmehr wurden der mögliche Typwechsel der Differentialgleichung und die damit verbundene Unzulänglichkeit der ursprünglich ausreichenden Randbedingungen als Ursache für die Diskretisierungssensitivität der Lösung angesehen. Das Eintreten der Lokalisierungsbedingung signalisiert den möglichen Verlust der elliptischen Eigenschaften der beschreibenden Differentialgleichungen eines quasi-statischen Problems. Die Gutgestelltheit des Randwertproblems, die mit einer finiten Anzahl linear unabhängiger Lösungen verbunden ist, geht damit verloren. Dementsprechend ist bei den Bewegungsgleichungen der Dynamik ein Typwechsel vom hyperbolischen zum elliptischen Typ möglich, so daß die ursprünglich ausreichenden Anfangs- und Randbedingungen unzureichend werden und auf schlecht gestellte Probleme führen, siehe HILL [90] oder SLUYS [191].

Änderungen der Mikrostruktur, die durch klassische Kontinuumsmodelle nicht ausrei-

chend erfaßt werden, können als Ursache für den Verlust von Elliptizität bzw. Hyperbolizität verstanden werden. Insbesondere bei Simulationen von Strukturen, deren Abmessungen nicht hinreichend groß gegenüber einer für die Mikroskala charakteristischen Länge sind, können diese Effekte der Mikroebene in der Beschreibung nicht ohne weiteres vernachlässigt werden, vergleiche MÜHLHAUS [156]. Durch die Berücksichtigung einer internen Länge in den konstitutiven Gleichungen läßt sich der Typwechsel der Differentialgleichung vermeiden. Unterschiedliche Maßnahmen, wie sie in den zusammenfassenden Büchern von MÜHLHAUS [156] sowie DE BORST & VAN DER GIESSEN [36] gegenüber gestellt sind, können getroffen werden, um diese zusätzlichen Informationen der Mikroebene zu berücksichtigen, so daß die Gutgestelltheit des Problems auch im postkritischen Bereich weiterhin gewährleistet bleibt.

Die charakteristischen Eigenschaften, die mit dem Verlust von Elliptizität aufgrund plastischen Materialverhaltens verbunden sind, wurden in der Vergangenheit bereits ausführlich untersucht. In OTTOSEN & RUNESSON [163] findet sich beispielsweise eine Zusammenstellung der analytischen Lösungen der Elliptizitätsbedingung für zahlreiche unterschiedliche Plastizitätsmodelle. Detaillierte Ausführungen zur Lokalisierungsanalyse im Rahmen der geometrisch nichtlinearen Theorie finden sich bei STEINMANN, LARSSON & RUNESSON [201]. Die geometrische Interpretation des Verlustes von Elliptizität wurde von BENALLAL [27], BENALLAL & COMI [29], IORDACHE & WILLAM [94], [95] sowie KUHL, RAMM & WILLAM [119] diskutiert. Die in diesem Zusammenhang aus der Plastizitätstheorie bekannten Auswertungstechniken können nahezu ohne Modifikationen auf die Kontinuumschädigungsmechanik übertragen werden. Entsprechende Untersuchungen für isotropes Schädigungsverhalten findet man bei beispielsweise in LEMAÎTRE [123] sowie RIZZI, CAROL & WILLAM [183]. Lokalisierungsuntersuchungen anhand anisotroper Schädigungsmodelle für Beton wurden von ORTIZ [162] durchgeführt. Es sei abschließend bemerkt, daß der Verlust von Elliptizität nur eine von drei möglichen Ursachen für die eventuelle Schlechtgestelltheit des Problems darstellt, vergleiche BENALLAL, BILLARDON & GEYMONAT [28] sowie DE BORST & VAN DER GIESSEN [36].

5.2 Diskussion unterschiedlicher Versagenskriterien

Im folgende Abschnitt sollen vier unterschiedliche Kriterien vorgestellt werden, die als Indikatoren im Rahmen einer Versagensanalyse eingesetzt werden können, siehe beispielsweise DE BORST, SLUYS, MÜHLHAUS und PAMIN [40], OTTOSEN & RUNESSON [163] sowie WILLAM [224]. Die beiden zunächst beschriebenen Kriterien, der *Verlust von Eindeutigkeit* und der *Verlust von Stabilität*, können als Kriterien für *diffuse* Versagensformen verstanden werden, bei denen die Kontinuität der Feldgrößen innerhalb eines Körpers erhalten bleibt. Abbildung 5.1 zeigt das zugehörige kontinuierliche Versagen eines Probekörpers unter Druckbeanspruchung. Der Verlust von Eindeutigkeit sowie der Verlust von Stabilität können sowohl auf der Materialebene als auch auf Strukturebene untersucht werden. Beide Kriterien können also entsprechend ihrer Formulierung als Indikatoren sowohl für *lokales* als auch *globales* Versagen dienen. Die hier verwendeten Begriffe von *Stabilität* und *Eindeutigkeit* stehen in engem Zusammenhang mit dem Stabilitätsbegriff nach LYAPUNOV [134], der zur Untersuchung geometrischer Instabilitäten verwendet wird. Die LYAPUNOV-Stabilität, die eine begrenzt kleine Änderung der Lösung bei kleiner Störung der Eingangsgröße charakterisiert, ist jedoch nur für den elastischen Fall direkt mit den hier betrachteten Begriffen vergleichbar.

Im Gegensatz zu den beiden erstgenannten Kriterien stellen der *Verlust von Elliptizität* sowie der *Verlust von starker Elliptizität* ausschließlich *lokale* Versagenskriterien dar. Sie gelten als Indikatoren für *diskontinuierliche* Versagensformen. Diese zeichnen sich durch die Ausprägung von Sprüngen bestimmter Feldgrößen entlang singularer Flächen aus. Gemäß Abbildung 5.1 nach WILLAM [224] unterscheidet man zwischen *schwachen Diskontinuitäten*, für die zwar die Kontinuität des Geschwindigkeitsfeldes erhalten bleibt, jedoch eine Diskontinuität in der Rate der Verzerrungen auftritt (Abbildung 5.1.2) und *starken Diskontinuitäten*, für die sowohl das Geschwindigkeitsfeld als auch die Rate der Verzerrungen einen diskontinuierlichen Verlauf entlang der singularen Fläche annehmen (Abbildung 5.1.3). Während schwache Diskontinuitäten lokalisierte Versagensformen hervorrufen, sind starke Diskontinuitäten im allgemeinen mit diskreten Versagensphänomenen verbunden. Im Rahmen dieser Arbeit sollen ausschließlich lokalisierte Versagensformen aufgrund von schwachen Singularitäten behandelt werden. Für symmetrische Tangententensoren, wie sie für assoziierte Materialmodelle üblich sind, fallen alle vier Versagenskriterien mit dem Maximum der Spannungs-Dehnungskurve zusammen. Für unsymmetrische Tangententensoren hingegen ergeben sich Unterschiede hinsichtlich des Zeitpunktes des Einsetzens der jeweiligen Versagensform. Diese Unterschiede sollen nachfolgend diskutiert werden.

5.2.1 Eindeutigkeit

Solange die in einem Materiepunkt herrschenden Spannungen unter zunehmender Deformation monoton anwachsen, ist eine eindeutige Zuordnung von Spannungen und Verzerrungen möglich. Die Materialantwort kann dementsprechend als *eindeutig* bezeichnet werden, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist.

$$\dot{\sigma} > 0 \tag{5.1}$$

Bei einer Beschränkung auf inkrementell lineare Materialien mit $\dot{\sigma} = \mathcal{E}_{tan} : \dot{\epsilon}$ gilt analog die folgende Beziehung.

$$\mathcal{E}_{tan} : \dot{\epsilon} > 0 \tag{5.2}$$

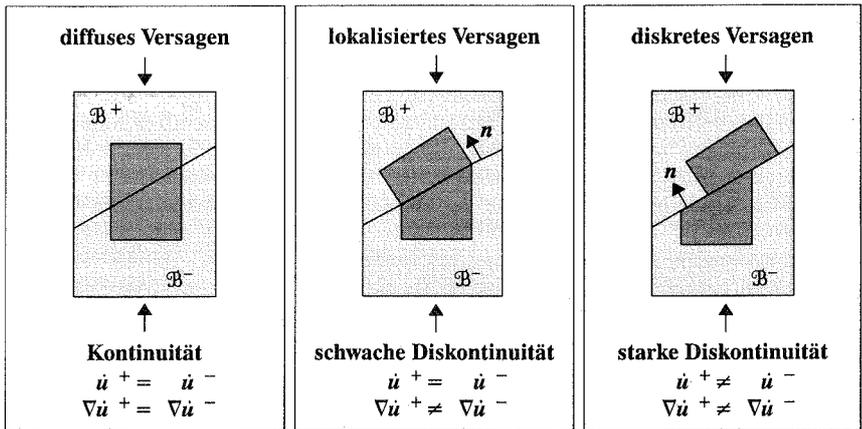


Abbildung 5.1: Unterschiedliche Versagensformen

Der lokale Verlust von Eindeutigkeit unter Spannungskontrolle tritt ein, sobald der kritische Punkt erreicht ist, an dem das Wachstum des Spannungstensors im Materialpunkt gerade zu Null wird, $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0}$ ("limit point condition"). Diese Bedingung entspricht dem Singulärwerden der Materialtangente.

$$\det \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} = 0 \quad (5.3)$$

Verlust von Eindeutigkeit – lokal

Im globalen Sinne kann die inkrementelle Lösung des zugehörigen Randwertproblems als eindeutig verstanden werden, solange in jedem Punkt der Struktur eine eindeutige Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungsraten möglich ist. Es dürfen also keine zwei unterschiedlichen Spannungsraten $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ existieren, die die globale Gleichgewichtsbeziehung in ihrer Ratendarstellung $\text{div} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \rho \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0}$ für vorgegebene Randbedingungen gleichzeitig erfüllen. Sei die Differenz zweier möglicher Spannungsraten zu $\Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ gegeben, so erhält man durch Subtraktion der Auswertung der Gleichgewichtsbeziehung in den zwei zugehörigen Punkten die folgende Bedingung.

$$\text{div} \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

Die schwache Form der Gleichung (5.4) erhält man durch Integration über das Gebiet Ω und Wichtung mit einer Wichtungsfunktion, die hier als Variation der Differenz zweier Verschiebungsraten $\delta \Delta \dot{\mathbf{u}}$ interpretiert werden soll. Nach anschließender Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes

$$\int_B \delta \Delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \Delta \dot{\boldsymbol{\sigma}} \, dV = 0 \quad (5.5)$$

folgt unter der Annahme eines inkrementell linearen Materialverhaltens unmittelbar die nachfolgende Formulierung.

$$\int_B \delta \Delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} : \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} : \Delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV = 0 \quad (5.6)$$

Die Diskretisierung der integralen Eindeutigkeitsbeziehung mit $\delta \Delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \sum_{I=1}^{n_{nod}} \delta \Delta \dot{\mathbf{d}}_I \otimes \nabla N^I$ und $\Delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \sum_{I=1}^{n_{nod}} \Delta \dot{\mathbf{d}}_I \otimes \nabla N^I$ führt nach dem Zusammenbau der Elementvektoren und -matrizen auf das folgende globale Gleichungssystem,

$$\mathbf{K} \cdot \Delta \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

das für alle kinematisch zulässigen $\delta \Delta \dot{\mathbf{d}}$ gelten soll. Hierbei stellt $\Delta \dot{\mathbf{D}} = \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \Delta \dot{\mathbf{d}}^e$ mit $\Delta \dot{\mathbf{d}} = [\Delta \dot{\mathbf{d}}_I]$ das Inkrement der Evolution des Vektors der globalen Freiheitsgrade dar, während $\mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{k}^e$ mit $\mathbf{k} = [\int_{g^e} \nabla N^I \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} \cdot \nabla N^J \, dV]$ die im allgemeinen Fall unsymmetrische Tangentenmatrix der Struktur beschreibt. Die nicht-triviale Lösung von Gleichung (5.7)

$$\det \mathbf{K} = 0 \quad (5.8)$$

Verlust von Eindeutigkeit – global

die dem Singulärwerden der Tangentenmatrix entspricht, kann somit als Bedingung für den globalen Verlust von Eindeutigkeit verstanden werden.

5.2.2 Stabilität

Ein strengeres Kriterium als die Eindeutigkeitsanforderung stellt die Stabilitätsbedingung nach HILL [89] dar, nach der ein Material als *stabil* angesehen werden kann, solange der Arbeitsbegriff zweiter Ordnung, das Skalarprodukt aus Spannungs- und Verzerrungsraten, einen positiven Wert annimmt, vergleiche auch MAIER & HUECKEL [139].

$$d^2W = \frac{1}{2} \dot{\epsilon} : \dot{\sigma} > 0 \quad (5.9)$$

Für inkrementell lineare Materialien läßt sich diese Beziehung wie folgt umschreiben.

$$\dot{\epsilon} : \mathcal{E}_{tan} : \dot{\epsilon} > 0 \quad (5.10)$$

Bemerkenswerterweise wird für die Stabilitätsbedingung im Gegensatz zur Eindeutigkeitsbedingung (5.3) nur der symmetrische Anteil des Tangententensors aktiviert,

$$\dot{\epsilon} : \mathcal{E}_{tan}^{sym} : \dot{\epsilon} > 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{E}_{tan}^{sym} = \frac{1}{2} [\mathcal{E}_{tan} + \mathcal{E}_{tan}^T] \quad (5.11)$$

so daß sich der *lokale Verlust von Stabilität* als Singulärwert des symmetrisierten Tangententensors \mathcal{E}_{tan}^{sym} darstellen läßt.

$$\det \mathcal{E}_{tan}^{sym} = 0 \quad (5.12)$$

Verlust von Stabilität – lokal

Die durch Gleichung (5.12) charakterisierte materielle Instabilität kann sich auf die Strukturebene übertragen und kann selbst bei Abwesenheit geometrisch destabilisierender Terme zum Auslöser einer strukturellen Instabilität werden. Man bezeichnet das Strukturverhalten als stabil, wenn kleine Störungen des Gleichgewichtszustandes nur beschränkt kleine Änderungen des Antwortverhaltens hervorrufen. Die mathematische Bedingung für globale Stabilität entspricht der Erfüllung der lokalen Stabilitätsbedingung (5.9) im integralen Sinne.

$$\int_{\mathcal{B}} \dot{\epsilon} : \dot{\sigma} dV > 0 \quad (5.13)$$

Diese Bedingung muß für beliebige, kinematisch zulässige Verzerrungsraten erfüllt sein. Für inkrementell lineares Materialverhalten läßt sich die integrale Stabilitätsbedingung wie folgt darstellen.

$$\int_{\mathcal{B}} \dot{\epsilon} : \mathcal{E}_{tan} : \dot{\epsilon} dV > 0 \quad (5.14)$$

Mit Hilfe der Diskretisierung der Verzerrungsraten zu $\dot{\epsilon} = \sum_{I=1}^{n_{mod}} \dot{\mathbf{d}}_I \otimes \nabla N^I$ geht die diskretisierte Form von Gleichung (5.14) in die folgende globale Beziehung über,

$$\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{K} \cdot \dot{\mathbf{D}} > 0 \quad (5.15)$$

wobei $\dot{\mathbf{D}} = \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \dot{\mathbf{d}}^e$ mit $\dot{\mathbf{d}} = [\dot{\mathbf{d}}_I]$ die Evolution des globalen Freiheitsgradvektors und $\mathbf{K} = \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \mathbf{k}^e$ mit $\mathbf{k} = [\int_{\mathcal{B}^e} \nabla N^I \cdot \mathcal{E}_{tan} \cdot \nabla N^J dV]$ die Tangentensteifigkeitsmatrix darstellt. Es

ist offenkundig, daß wiederum nur der symmetrische Anteil der Steifigkeitsmatrix in der Stabilitätsbedingung berücksichtigt wird,

$$\dot{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{K}^{sym} \cdot \dot{\mathbf{D}} > 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{K}^{sym} = \frac{1}{2} [\mathbf{K} + \mathbf{K}^T] \quad (5.16)$$

so daß der *globale Verlust von Stabilität* durch das Singulärwerden des symmetrischen Anteils der Steifigkeitsmatrix

$$\det \mathbf{K}^{sym} = 0 \quad (5.17)$$

Verlust von Stabilität – global

gekennzeichnet ist. Für den Sonderfall eines symmetrischen Materialtensors bzw. Tangententensors fallen die lokalen Kriterien (5.3) und (5.12) bzw. die globalen Kriterien (5.8) und (5.17) zusammen. Im allgemeinen Fall eines unsymmetrischen Materialtensors bzw. einer unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix liefern die BROMWICH Schranken eine Abschätzung

$$\begin{aligned} \lambda_{min}(\mathcal{E}_{tan}^{sym}) &\leq \mathcal{R}\lambda_{min}(\mathcal{E}_{tan}) \leq \lambda_{max}(\mathcal{E}_{tan}^{sym}) \\ \lambda_{min}(\mathbf{K}^{sym}) &\leq \mathcal{R}\lambda_{min}(\mathbf{K}) \leq \lambda_{max}(\mathbf{K}^{sym}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

des für das Versagen verantwortlichen kleinsten reellwertigen Eigenwertes $\mathcal{R}\lambda_{min}$, siehe BROMWICH [43]. Dieser ist für den symmetrischen Materialtensor \mathcal{E}_{tan}^{sym} bzw. für die symmetrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{sym} kleiner oder gleich dem reellwertigen kleinsten Eigenwert der Tensoren \mathcal{E}_{tan} bzw. \mathbf{K} selbst. Dementsprechend stellen die Kriterien (5.12) und (5.17) für den Verlust von Stabilität stärkere Kriterien als die Bedingungen (5.3) und (5.8) für den Verlust von Eindeutigkeit dar.

5.2.3 Elliptizität

Für den quasi-statischen Fall sind die Differentialgleichungen des zugrunde liegenden Randwertproblems zunächst *elliptisch*. Die Lokalisierungsbedingung, deren Herleitung im folgenden kurz skizziert werden soll, stellt in diesem Fall ein Kriterium für einen möglichen Wechsel der verantwortlichen Differentialgleichung vom *elliptischen* zum *hyperbolischen* Typ dar. Der Verlust von Elliptizität ist durch die Entstehung einer schwachen Diskontinuität geprägt, die sich durch einen Sprung in der Rate des Verschiebungsgradienten bei kontinuierlicher Verschiebungsrate auszeichnet.

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket &:= \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = \mathbf{0} \\ \llbracket \nabla \dot{\mathbf{u}} \rrbracket &:= \nabla \dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla \dot{\mathbf{u}}^- \neq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Der Sprung in einer Feldgröße $\llbracket \bullet \rrbracket = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$ läßt sich als Differenz des positivseitigen und des negativseitigen Wertes der Feldgröße angeben. Mit Hilfe der MAXWELL'schen Kompatibilitätsbedingung kann ein solcher Sprung in der allgemeinen Form als dyadisches Produkt des Sprungvektors \mathbf{m} und der Normalen auf die Diskontinuität \mathbf{n} , gewichtet mit der Amplitude ξ , dargestellt werden, vergleiche MAXWELL [144]. So läßt sich der Sprung in der Rate des Verschiebungsgradienten als Rang-Eins Tensor der folgenden Form angeben.

$$\llbracket \nabla \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \xi \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \quad \rightarrow \quad \llbracket \dot{\epsilon} \rrbracket = \xi [\mathbf{m} \otimes \mathbf{n}]^{sym} \quad (5.20)$$

Gleichgewicht entlang der Diskontinuität entsprechend dem CAUCHY Lemma

$$[[\mathbf{t}]] := \mathbf{t}^+ - \mathbf{t}^- = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

liefert in Verbindung mit der Definition des Spannungsvektors gemäß dem CAUCHY Theorem

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (5.22)$$

für inkrementell lineare Materialien die folgende Beziehung.

$$[[\mathbf{t}]] = \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\sigma}]] = \mathbf{n} \cdot [[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}]] = \mathbf{0} \quad (5.23)$$

Unter der Annahme eines kontinuierlichen Verlaufes des Tangententensors nach HILL [89] sowie RANIECKI & BRUHNS [177] (*“linear comparison solid”*),

$$[[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}]] := \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^+ - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^- = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

folgt aus (5.23) unmittelbar die Lokalisierungsbedingung,

$$\xi [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} \cdot \mathbf{n}] \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0} \quad (5.25)$$

die als Indikator einer kontinuierlichen Bifurkation verstanden werden kann. Nach RICE & RUDNICKI [182] kann eine diskontinuierliche Bifurkation mit $[[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}]] \neq \mathbf{0}$ nie vor der kontinuierlichen Bifurkation mit $[[\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}]] = \mathbf{0}$ eintreten, so daß die Annahme eines linearen Vergleichskörpers stets die kritische Bedingung für mögliche Verzweigungspunkte liefert, vergleiche auch OTTOSEN & RUNESSON [163]. Die nicht-triviale Lösung von Gleichung (5.25) für $\xi \neq 0$ wird häufig auch in der folgenden Form als Eigenwertproblem angegeben.

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{q}(\mathbf{n}) := \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} \cdot \mathbf{n} \quad (5.26)$$

Da die *Lokalisierungsbedingung* ursprünglich für Wellenausbreitungsphänomene hergeleitet wurde, vergleiche auch HILL [90], wird der zweistufige Tensor \mathbf{q} , der sich aus der doppelten Verjüngung des Materialtangententensors $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}$ mit der Normalen auf die Diskontinuität \mathbf{n} ergibt, häufig auch als akustischer Tensor bezeichnet. Die Lokalisierungsbedingung, die im quasi-statischen Fall den *Verlust von Elliptizität* kennzeichnet, kann dementsprechend als Singulärwerden dieses akustischen Tensors verstanden werden.

$$\det \mathbf{q} = 0 \quad (5.27)$$

Verlust von Elliptizität

Im Rahmen der Analyse von Wellenausbreitungsphänomenen nimmt die Gleichung (5.26) die folgende Form an,

$$\mathbf{q}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = \rho c^2 \mathbf{m} \quad (5.28)$$

wobei ρ die Massendichte und c die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit beschreibt. Letztere ist proportional zu den Eigenwerten des akustischen Tensors, so daß die Singularität von \mathbf{q} auch als Ausbildung einer stationären Welle mit der Wellengeschwindigkeit $c = 0$ verstanden werden kann. Aus dem zugehörigen Eigenwertproblem (5.26) lassen sich nicht nur das Eintreten des Verlustes von Elliptizität sondern auch die Lage der entstehenden Diskontinuität sowie der zugehörige Versagensmode bestimmen. Diejenige Normale

\mathbf{n}^{crit} aller möglichen Normalenvektoren im Raum $\mathbf{n} \in \Omega$, für die die Determinante des akustischen Tensors einen minimalen Wert annimmt, bestimmt die Orientierung der Diskontinuität.

$$\mathbf{n}^{crit} := \arg \left(\min_{\mathbf{n} \in \Omega} [\det \mathbf{q}(\mathbf{n})] \right) \quad (5.29)$$

Der zugehörige Sprungvektor \mathbf{m} läßt sich für gegebene \mathbf{n}^{crit} aus dem Eigenproblem (5.26) berechnen. Seine Lage relativ zur Normalen \mathbf{n} definiert den zugrunde liegenden Versagensmode. So ergibt sich für $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m}$ ein reines *Mode I* Versagen, das einer Separation der links- und rechtsseitigen Gebiete entspricht. Diese Versagensform ist charakteristisch für die Ausbildung von Zugrissen in spröden Materialien. Für $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$ tritt ein *Mode II* Versagen ein, das ein Abgleiten der beiden Teilgebiete entlang der Diskontinuität beschreibt, vergleiche Abbildung 5.2. In der Realität findet man häufig ein Zusammenwirken beider Versagensformen, das zu einem gemischten Versagensmode führt.

5.2.4 Starke Elliptizität

Analog zum Abschnitt 5.2.2 läßt sich rein formal wiederum ein stärkeres Kriterium für den Verlust von Elliptizität angeben. Ist bereits der symmetrische Anteil des akustischen Tensors singular,

$$\det \mathbf{q}^{sym} = 0 \quad (5.30)$$

Verlust von starker Elliptizität

so spricht man von dem *Verlust von starker Elliptizität*. Mit Hilfe der Definition des akustischen Tensors gilt entsprechend

$$\det [\mathbf{n} \cdot \mathcal{E}_{tan}^{sym} \cdot \mathbf{n}] = 0 \quad (5.31)$$

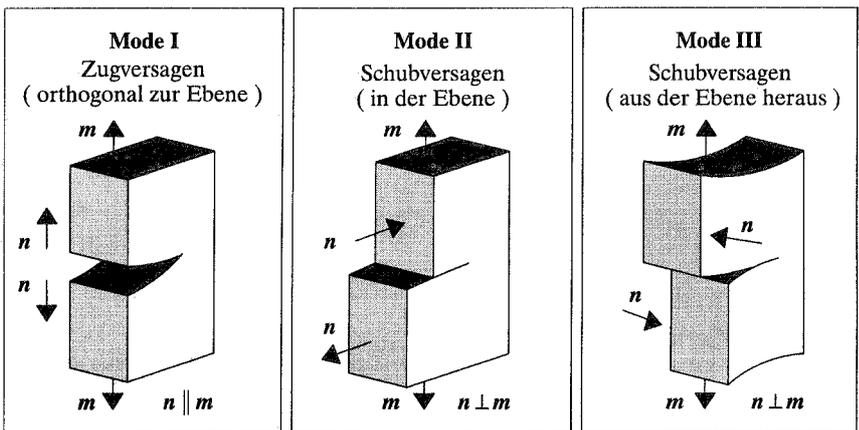


Abbildung 5.2: Unterschiedliche Versagensmoden

so daß sofort erkennbar wird, daß ein Verlust von starker Elliptizität nur dann eintreten kann, wenn bereits die lokale Stabilitätsbedingung von Gleichung (5.12) verletzt worden ist, vergleiche auch OTTOSEN & RUNESSON [163]. Aufgrund der BROMWICH Schranken

$$\lambda_{\min}(\mathbf{q}^{sym}) \leq \mathcal{R}\lambda_{\min}(\mathbf{q}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{q}^{sym}) \quad (5.32)$$

läßt sich wiederum zeigen, daß das Kriterium (5.30) für unsymmetrische akustische Tensoren bereits vor dem Kriterium (5.27) erfüllt sein wird, wobei für symmetrische Tensoren \mathbf{q} jedoch beide Elliptizitätskriterien identisch sind. Es sei nochmals bemerkt, daß sowohl die Elliptizität als auch die starke Elliptizität *lokale* Eigenschaften darstellen. Sobald diese an einem beliebigen Punkt in der Struktur verletzt werden, können die Resultate der numerischen Simulation als unbrauchbar verstanden werden, da die Ergebnisse nun in Abhängigkeit von der gewählten Diskretisierung vollkommen unterschiedliche Formen annehmen können. Die Auswertung der Lokalisierungsbedingung, die den lokalen Verlust von Elliptizität signalisiert, soll nun am Beispiel der Elasto-Plastizität sowie der Elasto-Schädigung illustriert werden.

5.3 Lokalisierungsbedingung der Elasto-Plastizität

Im folgenden Abschnitt soll die Lokalisierungsbedingung (5.27) für die isotrope Elasto-Plastizität analysiert werden. Vergleichend werden drei unterschiedliche Methoden zur Auswertung der Lokalisierungsbedingung diskutiert. Zunächst erfolgt eine analytische Lösung, die dann einer numerischen Auswertung gegenüber gestellt wird. Abschließend wird eine geometrische Darstellung der Lokalisierungsbedingung im MOHR'schen Spannungsraum vorgestellt. In der klassischen Elasto-Plastizität nimmt der Tangentenoperator im allgemeinen die folgende Form an,

$$\mathcal{E}_{tan}^{ep} = \mathcal{E}^{el} - \frac{1}{h} \mathcal{E}^{el} : \boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\nu} : \mathcal{E}^{el} \quad (5.33)$$

wobei gilt $h = H + \boldsymbol{\nu} : \mathcal{E}^{el} : \boldsymbol{\mu}$. In diesem Abschnitt soll exemplarisch das Modellproblem der klassischen assoziierten VON MISES Plastizität mit der äquivalenten Spannung $\varphi(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2}$ mit $J_2 = 1/2 \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \boldsymbol{\sigma}^{dev}$ untersucht werden. Damit ergeben sich die Normalentensoren $\boldsymbol{\nu}$ und $\boldsymbol{\mu}$ auf die Fließfläche und das plastische Potential sowie die zugehörigen Vektoren \mathbf{e}_ν und \mathbf{e}_μ wie folgt.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &:= \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \boldsymbol{\sigma}^{dev} & \text{und} & \quad \mathbf{e}_\nu := \boldsymbol{\nu} : \mathcal{E}^{el} \cdot \mathbf{n} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \mathbf{n} \\ \boldsymbol{\mu} &:= \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \boldsymbol{\sigma}^{dev} & \text{und} & \quad \mathbf{e}_\mu := \mathbf{n} \cdot \mathcal{E}^{el} : \boldsymbol{\mu} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1}{2\sqrt{J_2}} \boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Insbesondere soll hier zur Illustration der Lastfall des einaxialen Zuges mit

$$\sigma_I = \sigma^* \quad \sigma_{II} = 0 \quad \sigma_{III} = 0 \quad (5.35)$$

betrachtet werden, für den sich die erste Invariante des Spannungstensors $I_1 = \sigma^*$ und die zweite Invariante des Spannungsdeviators $J_2 = 1/3 \sigma^{*2}$ ergeben.

5.3.1 Analytische Lösung der Lokalisierungsbedingung

Der akustische Tensor der Elasto-Plastizität resultiert aus der zweifachen Kontraktion des elasto-plastischen Tangentenoperators (5.33) mit dem zunächst noch unbekanntem Normalenvektor auf die Diskontinuität.

$$\mathbf{q}^{ep} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep} \cdot \mathbf{n} \quad (5.36)$$

Der elasto-plastische Akustiktensor ergibt sich unmittelbar aus der nachfolgenden Rang-Eins Modifikation des elastischen Lokalisierungstensors $\mathbf{q}^{el} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} \cdot \mathbf{n}$,

$$\mathbf{q}^{ep} = \mathbf{q}^{el} - \frac{1}{h} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_\mu := \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\nu := \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} \cdot \mathbf{n} \quad (5.37)$$

Akustischer Tensor der Elasto-Plastizität

und läßt sich wie folgt mit dem inversen elastischen akustischen Tensor vorkonditionieren.

$$\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ep} = \mathbf{1} - \frac{1}{h} \mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \quad (5.38)$$

Anstelle der klassischen Lokalisierungsbedingung (5.26) mit $\det \mathbf{q}^{ep} = 0$ wird auf Vorschlag von OTTOSEN & RUNESSON [163] das folgende verallgemeinerte rechte Eigenwertproblem für den Term der linken Seite gelöst.

$$[\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ep}] \cdot \mathbf{m} = \lambda \mathbf{m} \quad (5.39)$$

Seine Lösung führt auf ein lineares Gleichungssystem vom Rang eins mit zwei abhängigen Gleichungen, so daß $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ einen zweifachen konstanten Eigenwert darstellt. Der dritte für die Lokalisierungsbedingung entscheidende Eigenwert läßt sich unter Ausnutzung der Invarianz der Spur des vorkonditionierten elasto-plastischen Akustiktensors $[\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ep}] : \mathbf{1} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 + \lambda_3$ bestimmen, so daß $\lambda_3 = [\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ep}] : \mathbf{1} - 2$ folgt. Die Lokalisierungsbedingung, die dem Singulärwerden des zweistufigen Tensors $[\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ep}]$ und entsprechend dem zu Null werden des kleinsten Eigenwertes λ_3 entspricht, nimmt damit die folgende Form an, vergleiche auch (A.20).

$$\det [\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ep}] = \lambda_3 = 1 - \frac{1}{h} \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{e}_\mu = 0 \quad (5.40)$$

Daraus folgt mit D_q^{ep} unmittelbar ein skalarwertiges Maß für die Lokalisierungsintegrität

$$\lambda_{min} [\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ep}] = 1 - D_q^{ep} \quad \text{mit} \quad D_q^{ep} = \frac{\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{q}^{el-1} \mathbf{e}_\mu}{H + \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\mu}} \quad (5.41)$$

Integrität der Lokalisierung der Elasto-Plastizität

sowie der kritische Verfestigungsmodul H^{crit} aus dem maximalen Verfestigungsmodul unter allen möglichen kritischen Moduli \bar{H}^{crit} für alle Raumrichtungen $\mathbf{n} \in \Omega$.

$$H^{crit} = \max_{\mathbf{n} \in \Omega} \bar{H}^{crit}(\mathbf{n}) \quad \text{mit} \quad \bar{H}^{crit} = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{e}_\mu - \boldsymbol{\nu} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\mu} \quad (5.42)$$

Kritischer Verfestigungsmodul der Elasto-Plastizität

Für Verfestigungsmoduli H mit $H > H^{crit}$ ist dementsprechend kein lokalisiertes Versagen möglich. Ist der Verfestigungsmodul jedoch kleiner als der kritische Verfestigungsmodul $H < H^{crit}$, so kann unter der kritischen Richtung \mathbf{n}^{crit}

$$\mathbf{n}^{crit} = \arg \left(\min_{\mathbf{n} \in \Omega} \det [\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ep}(\mathbf{n})] \right) \quad (5.43)$$

eine lokalisierte Versagensform beobachtet werden. Für das betrachtete Modellproblem ergibt sich der kritische Verfestigungsmodul H^{crit} aus der Lösung des Optimierungsproblems entsprechend Gleichung (5.42) zu $H^{crit} = -1/12 E$, so daß sich die kritische Richtung \mathbf{n}^{crit} unter einem Winkel θ^{crit} von $\tan^2 \theta^{crit} = [2 - \nu] / [1 + \nu]$ einstellt, vergleiche OTTOSEN & RUNESSON [163].

5.3.2 Numerische Lösung der Lokalisierungsbedingung

Insbesondere für komplexe Plastizitätsbeschreibungen, deren akustischer Tensor sich nicht als Rang-Eins Modifikation des elastischen Akustiktensors darstellen läßt, ist es nicht möglich, geschlossene analytische Lösungen anzugeben. Desweiteren ist es häufig unmöglich, das Minimierungsproblem (5.43) in analytischer Form zu lösen, so daß eine numerische Auswertung der Lokalisierungsbedingung erforderlich wird. Dazu wird die Determinante des akustischen Tensors der Elasto-Plastizität für alle Raumrichtungen $\mathbf{n} \in \Omega$ ausgewertet. Üblich ist in diesem Zusammenhang die Darstellung seiner normierten Determinante, aufgetragen über alle Raumwinkel $0 \leq \theta \leq 2\pi$, wie sie in Abbildung 5.3 für das Modellproblem der VON MISES Plastizität unter einaxialem Zug für unterschiedliche POISSON Zahlen skizziert ist. Die Minima der dargestellten Kurven kennzeichnen die kritischen Richtungen θ^{crit} .

5.3.3 Geometrische Interpretation der Lokalisierungsbedingung

Die Lokalisierungsbedingung der Elasto-Plastizität entsprechend Gleichung (5.40)

$$H + \nu : \mathcal{E}^{el} : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{e}_\mu \quad (5.44)$$

läßt sich anschaulich im MOHR'schen Spannungsraum darstellen, vergleiche BENALLAL [27], BENALLAL & COMI [29] und IORDACHE & WILLAM [94], [95]. Hierbei bezeichnet \mathcal{E}^{el} den elastischen Materialtensor, während \mathbf{q}^{el} mit $\mathbf{q}^{el} = \mathbf{n} \cdot \mathcal{E}^{el} \cdot \mathbf{n}$ den elastischen akustischen Tensor darstellt, dessen Inverse sich mit Hilfe der SHERMAN-MORRISON Formel (A.19) explizit angeben läßt.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{el} &= \frac{E}{1+\nu} \mathcal{I}^{sym} + \frac{E\nu}{[1+\nu][1-2\nu]} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \\ \mathbf{q}^{el} &= \frac{E}{2[1+\nu]} \mathbf{1} + \frac{E}{2[1+\nu][1-2\nu]} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ [\mathbf{q}^{el}]^{-1} &= \frac{2[1+\nu]}{E} \mathbf{1} - \frac{1+\nu}{E[1-\nu]} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Die Normalentensoren ν und $\boldsymbol{\mu}$ auf die Fließfläche und das plastische Potential, sowie die zugehörigen Vektoren \mathbf{e}_ν und \mathbf{e}_μ in Gleichung (5.44) charakterisieren die spezifische

Plastizitätsformulierung. Für das Modellproblem der assoziierten VON MISES Plastizität können sie Gleichung (5.34) entnommen werden. Mit Hilfe der nachfolgenden Transformation in die MOHR'schen Koordinaten σ_N und σ_T , vergleiche MOHR [154],

$$\begin{aligned}\sigma_N &:= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ \sigma_T^2 &:= [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] - \sigma_N^2\end{aligned}\quad (5.46)$$

geht die Lokalisierungsbedingung aus Gleichung (5.44) in die folgende Darstellung über,

$$\frac{[\sigma_N - \sigma_0]^2}{A^2} + \frac{\sigma_T^2}{B^2} = 1 \quad (5.47)$$

Lokalisierungsellipse im MOHR'schen Spannungsraum

die eine Ellipsenschar im MOHR'schen Spannungsraum beschreibt. Für das gewählte Modellproblem der assoziierten VON MISES Plastizität ergeben sich der Ellipsenmittelpunkt σ_0 sowie die σ_N - und σ_T -Achsenabschnitte A und B wie folgt.

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} I_1 \quad A^2 = \frac{2}{1 - 2\nu} [1 - \nu] B^2 \quad B^2 = \left[\frac{2[1 + \nu]}{E} H + 1 \right] J_2 \quad (5.48)$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die Ellipsen symmetrisch zur σ_N -Achse angeordnet sind. Ihre Verschiebung in σ_N -Richtung ist proportional zum jeweiligen hydrostatischen Druck. Punkte innerhalb der Ellipse beschreiben den Zustand $\det \mathbf{q}^{ep} > 0$ während außerhalb liegende Punkte durch $\det \mathbf{q}^{ep} < 0$ charakterisiert sind. Für Punkte auf der Ellipse gilt dementsprechend die Lokalisierungsbedingung $\det \mathbf{q}^{ep} = 0$. Die Berührungspunkte der kritischen Ellipse mit dem MOHR'schen Spannungskreis

$$[\sigma_N - \sigma_C]^2 + \sigma_T^2 = r^2 \quad (5.49)$$

MOHR'scher Spannungskreis

mit dem Mittelpunkt σ_C und dem Radius r

$$\sigma_C = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (5.50)$$

definieren sowohl die Größe der kritischen Ellipse in Form des Verfestigungsmoduls H^{crit} , als auch den kritischen Winkel θ^{crit} . Abbildung 5.3 zeigt exemplarisch die kritischen Lokalisierungsellipsen und die zugehörigen MOHR'schen Spannungskreise für den Lastfall des einaxialen Zugs entsprechend Gleichung (5.35).

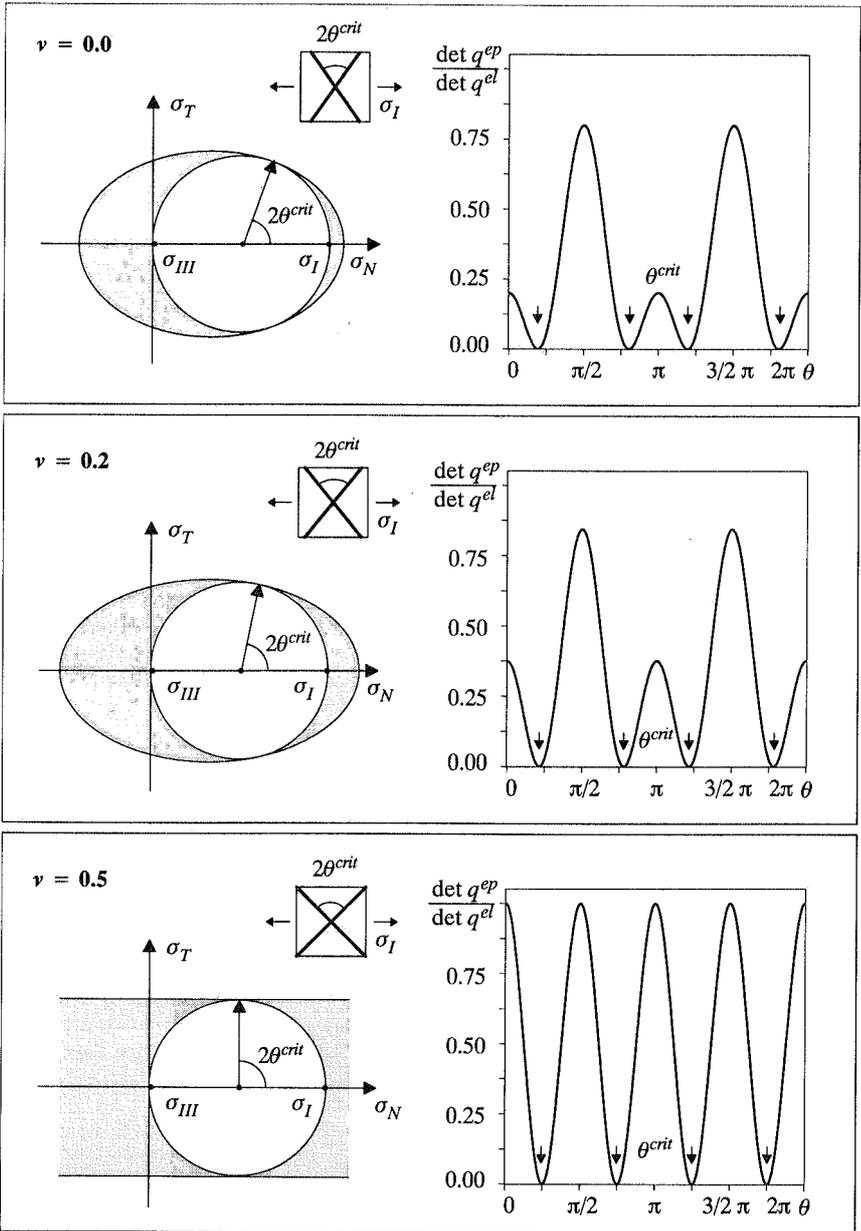


Abbildung 5.3: Lokalisierungsanalyse der Elasto-Plastizität – Einaxialer Zug

5.4 Lokalisierungsbedingung der Elasto-Schädigung

Im folgenden Abschnitt sollen die analytische, die numerische und die geometrische Auswertung der Lokalisierungsbedingung (5.27) für die isotrope Kontinuumschädigungsmechanik vorgestellt werden. Der zugehörige Tangentenoperator nimmt dabei die folgende Form an,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} = [1 - d] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} - \frac{1}{H} \boldsymbol{\mu} \otimes \boldsymbol{\nu} \quad (5.51)$$

wobei $1/H := \partial\phi/\partial\kappa$ in Analogie zur Plastizität eine die Entfestigung charakterisierende Größe darstellt. Die Betrachtung soll auf eine assoziierte isotrope Schädigungsformulierung, entsprechend Abschnitt 3.3.3, mit einer äquivalenten Verzerrung von $\varphi(\boldsymbol{\epsilon}) = Y$ beschränkt werden, so daß die Normalentensoren $\boldsymbol{\nu}$ und $\boldsymbol{\mu}$ und die zugehörigen Vektoren \boldsymbol{e}_ν und \boldsymbol{e}_μ die folgende Form annehmen.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu} &= \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{e}_\nu = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{n} = \frac{E\nu I_1}{[1 + \nu][1 - 2\nu]} \boldsymbol{n} + \frac{E}{1 + \nu} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\mu} &= \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{e}_\mu = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = \frac{E\nu I_1}{[1 + \nu][1 - 2\nu]} \boldsymbol{n} + \frac{E}{1 + \nu} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{n} \end{aligned} \quad (5.52)$$

Die drei unterschiedlichen Verfahren werden anhand des homogenen einaxialen Zugproblems im ebenen Verzerrungszustand untersucht, für das sich die Hauptverzerrungen direkt zu

$$\epsilon_I = \epsilon^* \quad \epsilon_{II} = 0 \quad \epsilon_{III} = -[\nu\epsilon^*]/[1 - \nu] \quad (5.53)$$

angeben lassen, so daß sich die erste Invariante zu $I_1 = [1 - 2\nu]/[1 - \nu]\epsilon^*$ ergibt.

5.4.1 Analytische Lösung der Lokalisierungsbedingung

Der akustische Tensor der isotropen Elasto-Schädigung ergibt sich aus der zweifachen Verjüngung des Tangententensors (5.51) mit dem zunächst noch unbekanntem Normalenvektor auf die Diskontinuität.

$$\boldsymbol{q}^{ed} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ed} \cdot \boldsymbol{n} \quad (5.54)$$

Er läßt sich als Rang-Eins Modifikation des mit $[1 - d]$ gewichteten elastischen Lokalisierungstensors $\boldsymbol{q}^{el} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} \cdot \boldsymbol{n}$ darstellen.

$$\boldsymbol{q}^{ed} = [1 - d] \boldsymbol{q}^{el} - \frac{1}{H} \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{e}_\mu := \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{e}_\nu := \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{n} \quad (5.55)$$

Akustischer Tensor der Elasto-Schädigung

Zunächst erfolgt, wie auch im vorigen Abschnitt, die Vorkonditionierung des akustischen Tensors (5.55) mit dem inversen elastischen Akustiktensor.

$$\boldsymbol{q}^{el-1} \cdot \boldsymbol{q}^{ed} = [1 - d] \mathbf{1} - \frac{1}{H} \boldsymbol{q}^{el-1} \cdot \boldsymbol{e}_\mu \otimes \boldsymbol{e}_\nu \quad (5.56)$$

Erneut wird auf Vorschlag von OTTOSEN & RUNESSON [163] zur Auswertung der klassischen Lokalisierungsbedingung anstelle von Gleichung (5.26) mit $\det \boldsymbol{q}^{ed} = 0$ das allgemeine rechte Eigenwertproblem

$$[\boldsymbol{q}^{el-1} \cdot \boldsymbol{q}^{ed}] \cdot \boldsymbol{m} = \lambda \boldsymbol{m} \quad (5.57)$$

untersucht. Mit der gleichen Argumentation wie im vorigen Abschnitt folgt aus der Invarianz der Spur des zweistufigen Tensors $[\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ed}]$, vergleiche auch (A.20), die folgende Bestimmungsgleichung

$$\det [\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ed}] = \lambda_3 = 1 - \frac{1}{1-d} \frac{1}{H} \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{e}_\mu = 0 \quad (5.58)$$

für die skalarwertige Lokalisierungsintegrität der Elasto-Schädigung

$$\lambda_{\min} [\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ed}] = 1 - D_q^{ed} \quad \text{mit} \quad D_q^{ed} = \frac{\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{q}^{el-1} \mathbf{e}_\mu}{[1-d]H} \quad (5.59)$$

Integrität der Lokalisierung der Elasto-Schädigung

sowie den kritischen Verfestigungsmodul H^{crit} .

$$H^{crit} = \max_{\mathbf{n} \in \Omega} \bar{H}^{crit}(\mathbf{n}) \quad \text{mit} \quad \bar{H}^{crit} = \frac{1}{[1-d]} [\mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{e}_\mu] \quad (5.60)$$

Kritischer Verfestigungsmodul der Elasto-Schädigung

Entsprechend Gleichung (5.60) hängen die kritischen Verfestigungsmoduli unmittelbar von der Wahl des entsprechenden Schädigungsmodells ab. Die zugehörigen kritischen Richtungen \mathbf{n}^{crit} , die die Lage der Diskontinuität charakterisieren, ergeben sich dann wie folgt.

$$\mathbf{n}^{crit} = \arg \left(\min_{\mathbf{n} \in \Omega} \det [\mathbf{q}^{el-1} \cdot \mathbf{q}^{ed}(\mathbf{n})] \right) \quad (5.61)$$

Bemerkenswerterweise erhält man für den kritischen Verfestigungsmodul H^{crit} bis auf den skalaren Vorfaktor $[1-d]$ und den zusätzlichen Summanden $-\nu : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\mu}$ die gleiche Darstellung, wie sie im vorigen Abschnitt für die Elasto-Plastizität hergeleitet wurde. Da diese beiden Größen keinen weiteren Einfluß auf die Minimierung bezüglich der kritischen Richtung \mathbf{n}^{crit} nehmen, gelten die von OTTOSEN & RUNESSON [163] vorgestellten analytischen Lösungen zur Bestimmung der kritischen Richtungen bezogen auf die Hauptachsen allgemeiner Spannungszustände.

POISSON Zahl	kritischer Winkel	Versagensmode
$\nu = 0.0$	$\theta^{crit} = 00.000^0$	Mode I
$\nu = 0.2$	$\theta^{crit} = 26.565^0$	Mixed Mode
$\nu = 0.5$	$\theta^{crit} = 45.000^0$	Mixed Mode

Tabelle 5.1: Elasto-Schädigung – Kritische Winkel θ^{crit} und Versagensmoden

Für die hier betrachtete assoziierte Schädigungsformulierung läßt sich der kritische Winkel θ^{crit} zwischen der Belastungsrichtung und der Normalen auf die Diskontinuität beispielsweise als Funktion der ersten und dritten Hauptverzerrung angeben, $\tan^2 \theta^{crit} = -\epsilon_{III}/\epsilon_I$, so daß für das betrachtete Modellproblem des einaxialen Zuges im ebenen Verzerrungszustand der kritische Winkel θ^{crit} unmittelbar als Funktion der POISSON Zahl angeben werden kann, $\tan^2 \theta^{crit} = \nu/[1-\nu]$, vergleiche RIZZI, CAROL & WILLAM [183]. Entsprechend ergeben sich für unterschiedliche POISSON Zahlen die in Tabelle 5.1 aufgeführten kritischen Winkel und die zugehörigen Versagensformen.

5.4.2 Numerische Lösung der Lokalisierungsbedingung

Im allgemeinen Fall kann das Minimierungsproblem (5.61) natürlich auch numerisch ausgewertet werden. Abbildung 5.4 zeigt die normierte Determinante des akustischen Tensors der Elasto-Schädigung für einaxialen Zug, aufgetragen über alle Raumwinkel $0 \leq \theta \leq 2\pi$, für unterschiedliche POISSON Zahlen. Wie auch im vorigen Abschnitt kennzeichnen die Minima der abgebildeten Kurven die kritischen Richtungen θ^{crit} .

5.4.3 Geometrische Interpretation der Lokalisierungsbedingung

Eine geometrische Veranschaulichung gewinnt die Lokalisierungsbedingung durch eine graphische Darstellung im MOHR'schen Verzerrungsraum, vergleiche RIZZI, CAROL & WILLAM [183]. Dazu wird in die Lokalisierungsbedingung aus Gleichung (5.58)

$$[1 - d] H = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{q}^{ed-1} \cdot \mathbf{e}_\mu \quad (5.62)$$

die Definition des inversen elastischen Akustiktensors entsprechend Gleichung (5.45) eingesetzt. Die aus den Normalentensoren ν und μ resultierenden Vektoren \mathbf{e}_ν und \mathbf{e}_μ hängen von der Wahl des speziellen Schädigungsgesetzes ab und können für den Fall der assoziierten, thermodynamisch konsistenten Schädigung Gleichung (5.52) entnommen werden. Durch die Transformation in die MOHR'schen Koordinaten ϵ_N und ϵ_T mit

$$\begin{aligned} \epsilon_N &:= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n} \\ \epsilon_T^2 &:= [\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n}] - \epsilon_N^2 \end{aligned} \quad (5.63)$$

läßt sich die Gleichung (5.62) in der folgenden Form darstellen,

$$\frac{[\epsilon_N - \epsilon_0]^2}{A^2} + \frac{\epsilon_T^2}{B^2} = 1 \quad (5.64)$$

Lokalisierungsellipse im MOHR'schen Verzerrungsraum

die eine Ellipsenschar im MOHR'schen Verzerrungsraum beschreibt. Das Modellproblem der assoziierten Schädigung liefert die folgenden Bestimmungsgleichungen für den Ellipsenmittelpunkt ϵ_0 sowie die ϵ_N - und ϵ_T -Achsenabschnitte A und B .

$$\epsilon_0 = \frac{\nu I_1}{1 - 2\nu} \quad A^2 = \frac{2[1 - \nu]}{1 - 2\nu} B^2 \quad B^2 = [1 - d] \frac{1 + \nu}{2E} H \quad (5.65)$$

Die Ellipse für die aktuellen Werte von d und H , die der zugehörigen Lokalisierungsbedingung $\det \mathbf{q}^{ed} = 0$ entspricht, ist ebenso wie die Ellipse der Elasto-Plastizität symmetrisch zur Normalen-Achse. Ihre Verschiebung in ϵ_N -Richtung ist proportional zum volumetrischen Anteil des Verzerrungstensors. Für Punkte innerhalb der Ellipse gilt $\det \mathbf{q}^{ed} > 0$, für außerhalb liegende Punkte entsprechend $\det \mathbf{q}^{ed} < 0$. Solange der größte MOHR'sche Verzerrungskreis innerhalb der Ellipse liegt, ist also kein lokalisiertes Versagen möglich. Beim Einsetzen von Lokalisierung berührt der größte MOHR Kreis, der sich durch die Gleichung

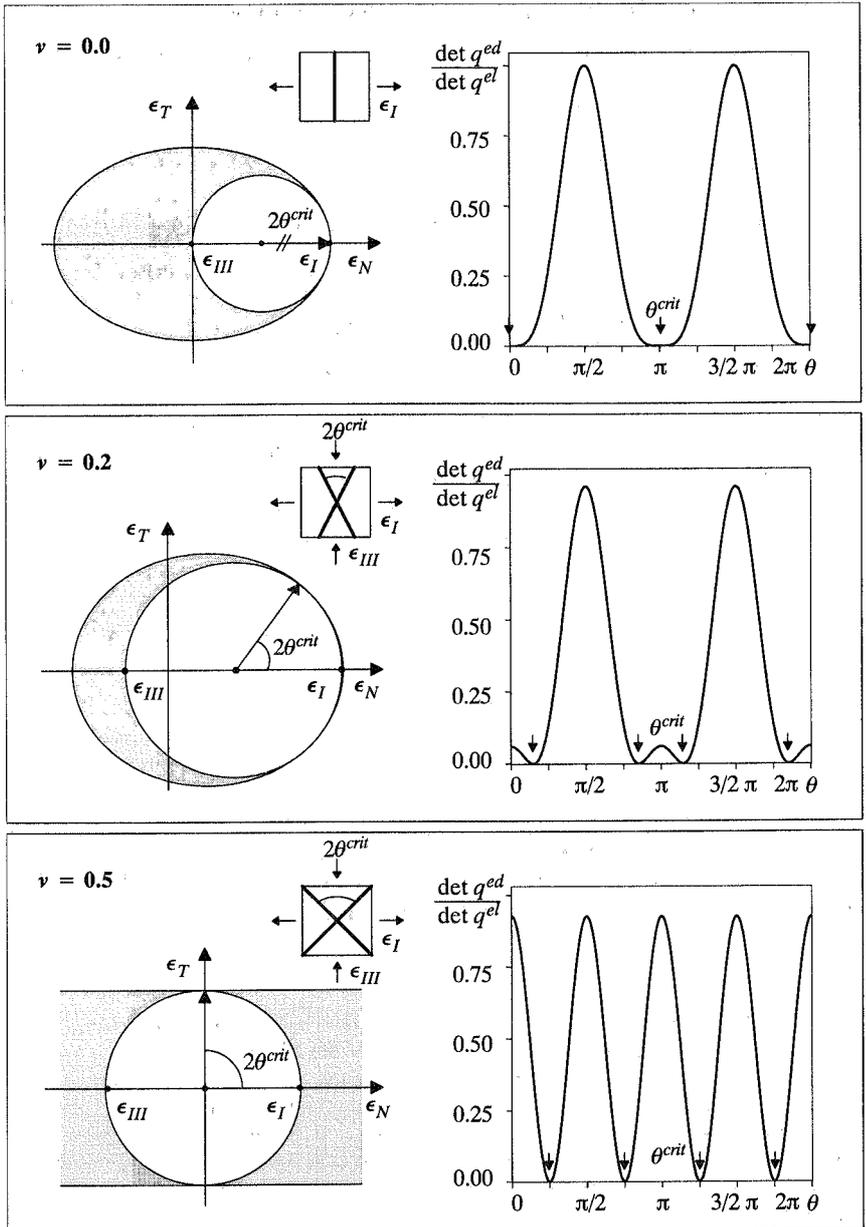


Abbildung 5.4: Lokalisierungsanalyse der Elasto-Schädigung – Einaxialer Zug

$$[\epsilon_N - \epsilon_C]^2 + \epsilon_T^2 = r^2 \quad (5.66)$$

MOHR'scher Verzerrungskreis

beschreiben läßt, die Lokalisierungsellipse. In Analogie zum vorigen Abschnitt bezeichnen hierbei ϵ_C und r mit

$$\epsilon_C = \frac{\epsilon_I + \epsilon_{III}}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{\epsilon_I - \epsilon_{III}}{2} \quad (5.67)$$

den Mittelpunkt und den Radius des durch den aktuellen Verzerrungszustand gekennzeichneten MOHR'schen Kreises. Gleichsetzen von (5.64) und (5.66) liefert eine quadratische Gleichung in der Normalkomponente der Verzerrungen. Die doppelte Nullstelle der entstehenden Gleichung definiert sowohl den kritischen Verfestigungsmodul als auch die Normalkoordinate des Berührungspunktes, die sich in diesem Fall zu $\epsilon_N = \epsilon_I + \nu\epsilon_{II} + \epsilon_{III}$ ergibt. Der zugehörige kritische Winkel θ^{crit} kann durch Ausnutzung trigonometrischer Beziehungen in der folgenden Form angegeben werden,

$$\tan^2(\theta^{crit}) = \frac{[\epsilon_I - \epsilon_{III}]^2 - [\epsilon_I + \epsilon_{III} + 2\nu\epsilon_{II}]^2}{[2\epsilon_I + 2\nu\epsilon_{II}]^2} \quad (5.68)$$

vergleiche RIZZI, CAROL & WILLAM [183]. Die graphische Darstellung der Lokalisierungsellipsen und der zugehörigen MOHR'schen Verzerrungskreise für den Lastfall des einaxialen Zuges ist für unterschiedliche POISSON Zahlen in Abbildung 5.4 skizziert.

5.5 Netzabhängige Lösung – Modellproblem Zugstab

Die Abhängigkeit der Lösung von der gewählten Diskretisierung soll anhand eines anschaulichen, eindimensionalen Beispiels verdeutlicht werden. Dazu wird ein mit m Elementen diskretisierter Zugstab betrachtet, vergleiche DE BORST [30]. Untersucht wird die globale Strukturantwort, die durch die Spannung σ sowie die über die Stablänge gemittelte Verzerrung $\bar{\epsilon}$ charakterisiert ist. Die durchschnittliche Verzerrung $\bar{\epsilon}$ lässt sich aus der Längenänderung des gesamten Stabes bezogen auf seine Ausgangslänge bestimmen. Exemplarisch soll ein elasto-schädigendes Materialverhalten mit linearer Entfestigung zugrunde gelegt werden, für das die Schädigungsvariable d in Abhängigkeit des Schwellwertes der Schädigungsdehnung κ_0 und der maximal erreichbaren Dehnung κ_u die folgende Form annimmt.

$$d = \frac{\kappa_u [\bar{\epsilon} - \kappa_0]}{\bar{\epsilon} [\kappa_u - \kappa_0]} \quad \forall \quad \kappa_0 \leq \bar{\epsilon} \leq \kappa_u \quad (5.69)$$

Entsprechend Abbildung 5.5 besitzt das Material dann im entfestigenden Bereich die negative Steigung $(-nE)$, wobei sich der Wichtungsfaktor des Elastizitätsmoduls wie folgt angeben lässt.

$$n := \frac{\kappa_0}{\kappa_u - \kappa_0} \quad (5.70)$$

Unter der Annahme eines homogenen Körpers mit identischen Materialeigenschaften und gleicher Querschnittsfläche in allen m Elementen wird der gesamte Stab gleichermaßen gedehnt und die Strukturantwort ist identisch der durch das Materialgesetz vorgegebenen Antwort eines Materialpunktes, vergleiche Abbildung 5.5. Die durchschnittliche Verzerrung $\bar{\epsilon}^{hom}$ ergibt sich im Fall einer homogenen Strukturantwort aus der Summe der elastischen und inelastischen Verzerrungen mit $\epsilon^{el} := \sigma/E$ und $\epsilon^{ed} := [1 - \sigma/[E\kappa_0]] \kappa_u$ zu

$$\bar{\epsilon}^{hom} = \frac{\sigma}{E} + \left[1 - \frac{\sigma}{E\kappa_0}\right] \kappa_u \quad (5.71)$$

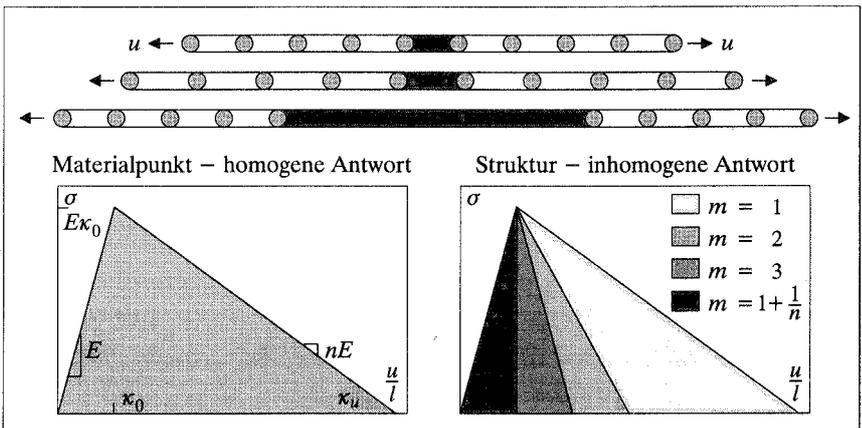


Abbildung 5.5: Modellproblem Zugstab

so daß sich die Tangente \mathcal{E}_{tan}^{hom} an die globale Spannungs-Dehnungskurve wie folgt darstellen läßt.

$$\mathcal{E}_{tan}^{hom} = \left[\frac{d\bar{\epsilon}^{hom}}{d\sigma} \right]^{-1} = -nE \quad (5.72)$$

Die durch den Schädigungsvorgang freigesetzte Energie G_f , kann als die Fläche unter der Spannungs-Verschiebungskurve $G_f = \int \sigma \, du$ interpretiert werden, vergleiche HILLERBORG, MODÉER & PETERSON [91]. Für das hier betrachtete Modellproblem ergibt sich unter der Annahme eines Risses der Breite w mit konstanter Verzerrungsverteilung über die Rißbandbreite, so daß $u_u = \kappa_u w$, die Bruchenergie der homogenen Lösung in der folgenden Form.

$$G_f^{hom} = \int \sigma \, du = \frac{1}{2} E \kappa_0 \kappa_u w \quad (5.73)$$

In der Simulation können jedoch numerische Ungenauigkeiten, wie beispielsweise Rundungsfehler, geringe Abweichungen von dem angenommenen, homogenen Verhalten hervorrufen, die sich insbesondere im postkritischen Bereich extrem stark auswirken können. Bereits kleine Inhomogenitäten führen dann zu einem Wechsel vom homogenen Lösungspfad hin zu einer ungünstigeren Lösung, für die nur ein Teil des Stabes eine Schädigung erfährt. Die kritische Lösung ist diejenige, für die die geringste Menge an Energie dissipiert wird. Sie stellt sich ein, indem die Schädigungsakkumulation nur in einem einzigen Element stattfindet, während alle anderen Elemente eine elastische Entlastung erfahren. Für diesen Fall ergeben sich die gemittelten Verzerrungen $\bar{\epsilon}^{inh}$ in der folgenden Form.

$$\bar{\epsilon}^{inh} = \frac{\sigma}{E} + \left[1 - \frac{\sigma}{E\kappa_0} \right] \frac{\kappa_u}{m} \quad (5.74)$$

Der Tangentenoperator \mathcal{E}_{tan}^{inh} eines elasto-schädigenden Materials mit linearer Entfestigung läßt sich dementsprechend zu

$$\mathcal{E}_{tan}^{inh} = \left[\frac{d\bar{\epsilon}^{inh}}{d\sigma} \right]^{-1} = \frac{n \, m \, E}{n \, m - n - 1} \quad (5.75)$$

angeben. Die dissipierte Energie G_f ergibt sich wiederum aus der Fläche unterhalb der zugehörigen Spannungs-Verschiebungskurve.

$$G_f^{inh} = \frac{1}{2m} E \kappa_0 \kappa_u w \quad (5.76)$$

Offensichtlich sind sowohl die gemittelten Verzerrungen als auch der Tangentenoperator und die freigesetzte Energie des inhomogenen Problems Funktionen der gewählten Elementanzahl m . Eine Diskretisierung mit einem einzigen Element liefert als untere Grenze die homogene Lösung.

$$\bar{\epsilon}^{inh}|_{m=1} = \bar{\epsilon}^{hom} \quad \mathcal{E}_{tan}^{inh}|_{m=1} = \mathcal{E}_{tan}^{hom} \quad G_f^{inh}|_{m=1} = G_f^{inh} \quad (5.77)$$

Für eine zunehmend feinere Diskretisierung scheint die Sprötheit des Materials zuzunehmen. Für $m > 1 + 1/n$ kann dementsprechend sogar ein "Snapback"-Verhalten beobachtet werden, vergleiche Abbildung 5.5. Wächst die Elementanzahl gegen unendlich, so erhält man als obere Grenze die elastische Materialantwort mit den elastischen gemittelten Verzerrungen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\epsilon}^{inh} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{\sigma}{E} + \left[1 - \frac{\sigma}{E\kappa_0} \right] \frac{\kappa_u}{m} \right] = \frac{\sigma}{E} \quad (5.78)$$

und der elastischen Materialtangente.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{tan}^{inh} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{m E}{m - 1 - 1/n} \right] = E \tag{5.79}$$

Die dissipierte Energie G_f geht für eine unendlich feine Diskretisierung gegen Null, vergleiche auch BAŽANT & BELYTSCHKO [14].

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_f^{inh} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[\frac{E \kappa_0 \kappa_n w}{2 m} \right] = 0 \tag{5.80}$$

Diese Lösung, die ein Versagen in einer Zone der Breite Null ohne Energiedissipation vorhersagt, ist physikalisch vollkommen unbegründet. Im Abschnitt 5.6 sollen unterschiedliche Methoden diskutiert werden, die durch die Berücksichtigung zusätzlicher Terme in den konstitutiven Gleichungen eine Lösung mit finiter Energiedissipation gewährleisten.

5.6 Erweiterte Modelle

Ziel des folgenden Kapitels ist die Diskussion unterschiedlicher Verfahren, die selbst im postkritischen Bereich die Existenz einer finiten Anzahl von Lösungen des Randwertproblems garantieren. Dazu werden die fünf gebräuchlichsten Methoden vorgestellt, die durch Berücksichtigung zusätzlicher Terme in den konstitutiven Gleichungen eine netzunabhängige Lösung ermöglichen. Während die erstgenannte Methode ausschließlich eine finite Energiedissipation sicherstellen kann, sind die folgenden vier Strategien zusätzlich in der Lage, eine Lokalisierungszone von finiter Breite abzubilden. In der Literatur werden derartige Erweiterungen häufig als *Regularisierungsstrategien* bezeichnet. Diese Wortwahl erscheint etwas unglücklich, da es nicht das alleinige Ziel dieser Methoden sein kann, die mathematischen Gleichungen zu regularisieren. Vielmehr ist es erforderlich, die Ursache der Schlechtgestellttheit des Problems zu beheben, die in einer unzureichenden Beschreibung der heterogenen Mikrostruktur zu suchen ist, vergleiche Abbildung 5.6. Daher

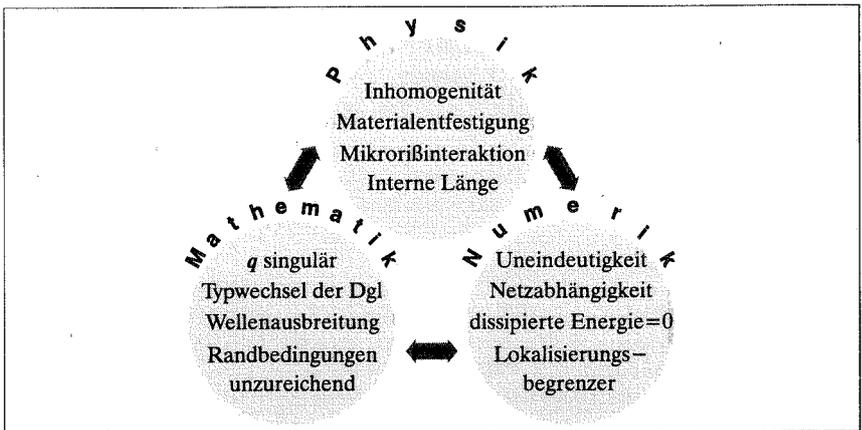


Abbildung 5.6: Versagensphänomen Lokalisierung

werden die unterschiedlichen Erweiterungsstrategien insbesondere unter dem Aspekt ihrer physikalischen Motivation und der damit verbundenen unterschiedlichen Berücksichtigung der internen Längenskala diskutiert. Die Vor- und Nachteile der einzelnen Verfahren, besonders im Hinblick auf ihre numerische Umsetzung, werden gegenübergestellt.

5.6.1 Netzadaptierter Entfestigungsmodul

Ein anschauliches und ausgesprochen einfaches Verfahren zur eindeutigen netzunabhängigen Lösung entfestigender Probleme im Rahmen klassischer Kontinuumsmodelle wurde zu Beginn der 80er Jahre von PIETRUSZCZAK & MRÓZ [174], BAŽANT & OH [17] sowie WILLAM [223] vorgeschlagen. Das Grundkonzept der Methode ist in unterschiedlichen Variationen allgemein unter den Begriffen Rißbandmethode, Methode der verschmierten Rißbildung oder Methode des netzadaptierten Entfestigungsmoduls bekannt und steht in engem Zusammenhang mit den Methoden der Bruchmechanik. Interpretiert man die Fläche unterhalb der Spannungs–Verschiebungskurve, wie bereits im Abschnitt 5.5 angedeutet, als erforderliche Energie zur Erzeugung eines Risses der Einheitsfläche, so kann diese Bruchenergie G_f^* als konstanter materialspezifischer Parameter verstanden werden,

$$G_f^* := \int \sigma \, du = w \int \sigma \, d\epsilon = \text{const} \tag{5.81}$$

vergleiche HILLERBORG, MODÉER & PETERSON [91]. Unter der Annahme der Lokalisierung der Verzerrungen in einer Zone der Breite eines Elementes kann die Rißbandbreite w somit als Quotient aus der Strukturabmessung und der Elementanzahl beschrieben werden, so daß für das in Abschnitt 5.5 betrachtete Modellproblem $w = L/m$ gilt. Hierbei stellt L die Länge des betrachteten Stabes dar. Entsprechend läßt sich nun die maximale Verzerrung κ_u als Funktion der Elementanzahl m angeben.

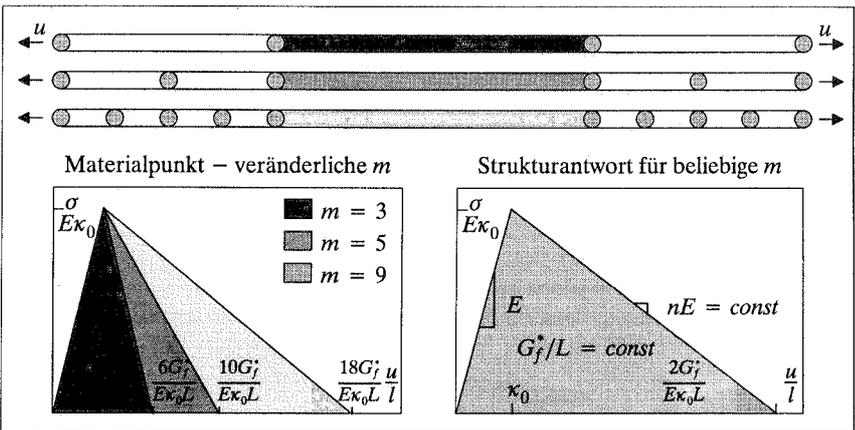


Abbildung 5.7: Modellproblem Zugstab – Netzangepaßter Entfestigungsmodul

$$\kappa_u = \frac{2G_f^* m}{E \kappa_0 L} \quad (5.82)$$

Regularisierung des Entfestigungsmoduls

Als natürliche Konsequenz der Einführung eines netzangepaßten Entfestigungsmoduls nehmen sowohl die gemittelten Verzerrungen $\bar{\epsilon}^{inh}$

$$\bar{\epsilon}^{inh} = \frac{\sigma}{E} + \left[1 - \frac{\sigma}{E \kappa_0} \right] \frac{2G_f^*}{E \kappa_0 L} \quad (5.83)$$

als auch die Tangente \mathcal{E}_{tan}^{inh} des betrachteten Modellproblems

$$\mathcal{E}_{tan}^{inh} = \left[\frac{d\bar{\epsilon}^{inh}}{d\sigma} \right]^{-1} = \left[\frac{1}{E} - \frac{2G_f^*}{E^2 \kappa_0^2 L} \right]^{-1} \quad (5.84)$$

eine elementanzahl-unabhängige, objektive Darstellung an. Die regularisierende Wirkung der Einführung eines netzbabhängigen Entfestigungsmoduls für das Modellproblem des in Abschnitt 5.5 betrachteten Zugstabes ist in Abbildung 5.7 für eine Diskretisierung mit drei, fünf und neun Elementen schematisch skizziert. Offensichtlich ist die Lokalisierungszone auf die Breite eines Elementes beschränkt. Ein in ein Element eingebettetes Lokalisierungsband der Fläche $A_{band} < A_{elem}$ kann in analoger Form durch Wichtung des Entfestigungsparameters mit der von der Lokalisierungszone anteilmäßig eingenommenen Elementfläche A_{band}/A_{elem} beschrieben werden, vergleiche PIETRUSZCZAK & MRÓZ [174]. Jedoch sei nochmals bemerkt, daß die Methode des netzadaptierten Entfestigungsmoduls auf die Modellierung schmaler Lokalisierungszone beschränkt ist. Die Rißbandbreite darf nie größer als die Elementgröße sein, da sich die berechnete Lokalisierungszone immer nur über eine Elementbreite erstrecken kann. Diese Einschränkung kann insbesondere bei mehrdimensionalen Simulationen sowie beim Einsatz höherwertiger Elemente Probleme bereiten und auf netzausrichtungabhängige Lösungen führen.

5.6.2 Berücksichtigung viskoser Effekte

Zahlreichen Versuchsergebnissen zufolge ist das Antwortverhalten vieler Werkstoffe extrem von der Belastungsgeschwindigkeit abhängig. Unter zunehmender Belastungsrate steigt die Materialfestigkeit an, die Schädigungsakkumulation sinkt. Gleiches gilt bei Belastungsraten von $\dot{\epsilon} > 0.1/s$ auch für betonartige Materialien, vergleiche auch VAN MIER [150]. Diese Beobachtung motiviert die Berücksichtigung viskoser Terme in den konstitutiven Gleichungen, wie sie von PERZYNA [173] vorgeschlagen wurde, siehe beispielsweise auch SLUYS [191] oder WANG [222]. Entsprechend der Viskoplastizität vom PERZYNA Typ wird auch bei der Viskoschädigung die Konsistenzbedingung $\dot{\Phi} \dot{\gamma} = 0$ durch eine konstitutive Evolutionsgleichung für den Schädigungsmultiplikator $\dot{\gamma}$ ersetzt, vergleiche DUBÉ, PIAUDIER-CABOT & LA BORDERIE [68],

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \left[\frac{\langle \Phi(Y, \phi(\kappa)) \rangle}{\kappa_0} \right]^n \quad l = c^{el} \eta \quad (5.85)$$

Interne Länge bei Viskoschädigung

wodurch die Existenz von Zuständen außerhalb der Fließfläche ermöglicht wird. Im Gegensatz zu dem dimensionslosen Parameter n besitzt der Viskositätsparameter η die Einheit einer Zeitgröße, so daß durch die Berücksichtigung viskoser Effekte automatisch eine Zeitskala eingeführt wird. Durch Multiplikation mit der elastischen Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c^{el} läßt sich diese Zeitgröße in Bezug zu einer internen Länge l setzen. Damit behält das transiente Problem selbst im postkritischen Bereich seine Hyperbolizität bei, siehe beispielsweise DE BORST, SLUYS, MÜHLHAUS & PAMIN [40]. Ein wesentlicher Vorteil viskoser Regularisierungsstrategien ist, daß die mit ihnen verbundenen Änderungen im Rahmen von Finite Element Codes von minimaler Natur sind. Allerdings bleibt zu bemerken, daß diese Methode ausschließlich bei ausgeprägt viskosen Effekten, die sich häufig nur bei extrem hohen Belastungsgeschwindigkeiten auswirken, wirklich einen regularisierenden Einfluß ausübt. Daher wird die viskose Erweiterung insbesondere bei der Modellierung von Stoßproblemen unter hohen Geschwindigkeiten empfohlen, sonst sollte sie jedoch eher vermieden werden.

5.6.3 Mikropolare Kontinuumstheorien

Die wohl älteste Methode zur Berücksichtigung einer internen Längenskala wurde bereits zu Beginn dieses Jahrhunderts von den Brüdern COSSERAT & COSSERAT [62] im Rahmen mikropolarer Kontinua vorgestellt. Anfang der 90er Jahre gewann das Konzept aus zweierlei Gründen erneut an Bedeutung. Einerseits ermöglichte die erhöhte Rechenkapazität moderner Computer die Handhabung der aufgrund der zusätzlichen Rotationsfreiheitsgrade komplexeren Gleichungssysteme. Andererseits konnte die COSSERAT Formulierung durch ihre regularisierende Wirkung bei der Berechnung materieller Instabilitäten überzeugen, siehe beispielsweise DE BORST [31], STEINMANN [195] und STEINMANN & WILLIAM [202]. Die Methode wird heute vornehmlich zur Modellierung von kohäsionslosen Geomaterialien eingesetzt, deren Rotation einzelner Partikel eine physikalische Motivation für die mikropolare Kontinuumerweiterung liefert, siehe auch EHLERS & VOLK [72] bzw. VOLK [219]. Die Kinematik des COSSERAT Kontinuums zeichnet sich durch die Einführung zusätzlicher Rotationsfreiheitsgrade $\mathbf{w} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ aus, die unabhängig von dem durch $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$ charakterisierten Verschiebungsfeld angesetzt werden, vergleiche Abbildung 5.8. Folglich setzt sich der nun unsymmetrische Verzerrungstensor $\boldsymbol{\epsilon}$ aus dem Verschiebungsgradienten und dem skalaren Produkt der mikropolaren Rotationen mit dem dreistufigen Permutationstensor \mathbf{e} zusammen. Zusätzlich ergibt sich der mikropolare Krümmungstensor $\boldsymbol{\kappa}$ als der Gradienten des unabhängigen, mikropolaren Rotationsfeldes.

$$\boldsymbol{\epsilon} = \nabla \mathbf{u} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{w} \qquad \boldsymbol{\kappa} = \nabla \mathbf{w} \qquad (5.86)$$

Die Bilanzgleichungen mikropolarer Kontinua lassen sich durch die bekannten Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und die zusätzlich berücksichtigten Momentenspannungen $\boldsymbol{\mu}$ charakterisieren, siehe Abbildung 5.8. Aus der Darstellung der Impuls- und Drehimpulsbilanz

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{e} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \qquad (5.87)$$

ist unmittelbar ersichtlich, daß der Spannungstensor nur für divergenzfreie Momentenspannungen seine Symmetrie erhält, während er im allgemeinen Fall eine unsymmetrische Form annimmt, $\boldsymbol{\sigma} \neq \boldsymbol{\sigma}^T$. Das auf COSSERAT Kontinua verallgemeinerte HOOKE'sche

Gesetz kann aus der freien Energiefunktion

$$\Psi(\boldsymbol{\epsilon}, \boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}_u^{el} : \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\kappa} : \boldsymbol{\mathcal{E}}_w^{el} : \boldsymbol{\kappa} \quad (5.88)$$

gewonnen werden, so daß sich die unsymmetrischen Spannungen sowie die Momentenspannungen als thermodynamisch konjugierte Größe zu den unsymmetrischen Verzerrungen und den mikropolaren Krümmungen darstellen lassen.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_u^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\kappa}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_w^{el} : \boldsymbol{\kappa} \quad (5.89)$$

Der vierstufige Elastizitätstensor der Verschiebungsgrößen $\boldsymbol{\mathcal{E}}_u^{el}$ kann in allgemeiner Form als Funktion der LAMÉ Parameter λ_u und μ_u sowie des COSSERAT spezifischen Schubmoduls μ_u^c , der die Beziehung zwischen den schiefsymmetrischen Spannungs- und Verzerrungskomponenten definiert, angegeben werden.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_u^{el} = \lambda_u \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu_u \boldsymbol{\mathcal{I}}^{sym} + 2\mu_u^c \boldsymbol{\mathcal{I}}^{skw} \quad (5.90)$$

Die Definition des Materialtensors der Rotationsgrößen $\boldsymbol{\mathcal{E}}_w^{el}$ berücksichtigt in analoger Form drei zusätzliche Materialparameter.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_w^{el} = \lambda_w \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu_w \boldsymbol{\mathcal{I}}^{sym} + 2\mu_w^c \boldsymbol{\mathcal{I}}^{skw} \quad (5.91)$$

Im zweidimensionalen Fall reduziert sich die Anzahl der Materialparameter aufgrund von $\lambda_w \equiv 0$ und $\mu_w \equiv \mu_w^c$ auf vier. Aus Dimensionsgründen ist es üblich, den verbleibenden Rotationsschubmodul in der Form

$$\mu_w := l^2 \mu^c \quad (5.92)$$

Interne Länge im COSSERAT-Kontinuum

darzustellen, so daß mit dem Proportionalitätsfaktor l^2 automatisch das Quadrat einer internen Längen in der COSSERAT Theorie berücksichtigt wird. Im Gegensatz zur Methode des netzangepaßten Entfestigungsmoduls charakterisiert der zusätzliche Materialparameter l nicht nur die Form der Versagenskurve, sondern auch tatsächlich die Breite der Lokalisierungszone, die sich für Simulationen mit dem COSSERAT Modell über mehrere Elementbreiten erstrecken kann.

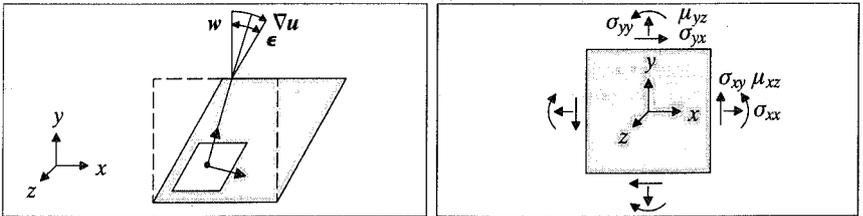


Abbildung 5.8: Kinematik und Statik des mikropolaren Kontinuums

Die Erweiterung auf mikropolare Kontinuumstheorien betrifft im Gegensatz zu den nicht-lokalen Kontinuumserweiterungen sowohl die kinematische als auch die konstitutive Ebene. Die damit verbundenen Änderungen können sich also bereits im elastischen Bereich auswirken. Jedoch werden die Unterschiede gegenüber klassischen Kontinuumstheorien nur aktiviert, wenn die zusätzlichen Rotationsfreiheitsgrade tatsächlich von der Belastung angeregt werden. Daher gewährleistet das COSSERAT Kontinuum zwar bei schubdominantem Mode II Versagen den Erhalt der elliptischen Eigenschaften, wohingegen der regularisierende Effekt des COSSERAT Kontinuums bei kohäsionsdominanten Mode I Versagensformen häufig zu gering ist, um den Typwechsel der beschreibenden Differentialgleichung zu vermeiden. In diesem Zusammenhang wurde kürzlich eine geometrische Interpretation der Lokalisierungsbedingung vorgestellt, die das Mode I Versagen im MOHR'schen Spannungsraum graphisch veranschaulicht, siehe IORDACHE & WILLAM [94].

5.6.4 Nichtlokale Integralkontinua

Klassische Kontinuumstheorien basieren auf der grundlegenden Annahme, daß die Spannungsantwort eines Punktes \boldsymbol{x} lediglich durch die Geschichte des Punktes selbst bestimmt sei. Die Gültigkeit dieser Annahme wurde Ende der 60er Jahre unter anderem von KRÖNER [109] sowie ERINGEN & EDELEN [75] hinterfragt. Alternativ wurde ein *nichtlokales* Kontinuumsmodell vorgeschlagen, bei dem die Antwort eines Punktes sowohl von dem Punkt selbst, als auch von der Geschichte aller Punkte in einer gewissen Nachbarschaft ($\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}$) beeinflußt wird. Das zunächst auf elastisches Materialverhalten beschränkte Modell wurde in den 80er Jahren erstmals im Rahmen der Finite Element Methode mittels überlappender Makroelemente umgesetzt, siehe BAŽANT [11]. Die grundlegende Idee nichtlokaler Kontinuumsmodelle wurde von PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT [175] sowie BAŽANT & PIJAUDIER-CABOT [23] aufgegriffen und auf inelastisches Materialverhalten im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik angewandt.

Aufgrund seiner regularisierenden Wirkung bei der Berechnung materieller Instabilitäten ist das nichtlokale Kontinuum noch immer sehr beliebt, vergleiche GANGHOFER, SLUYS & DE BORST [80]. Anstatt jedoch, wie ursprünglich vorgeschlagen, alle Größen der konstitutiven Gleichungen nichtlokal vorzuhalten, wird heute vereinfachend häufig nur noch eine einzige die Entfestigung charakterisierende Größe in den konstitutiven Gleichungen nichtlokal berücksichtigt, siehe PIJAUDIER-CABOT & BAŽANT [175], BRINKGREVE [42] oder SCHANZ [187]. Diese nichtlokale Größe ($\bar{\bullet}$), im Fall der Schädigungsmechanik in der Regel die äquivalente Verzerrung $\bar{\eta}$, die interne Variable $\bar{\kappa}$ oder der Schädigungsparameter \bar{d} , läßt sich dann aus der gewichteten räumlichen Mittelwertbildung ihrer lokalen Gegenstücke (\bullet) über ein bestimmtes Volumen $V_g := \int_V g(\boldsymbol{\xi}) dV$ definieren.

$$\bar{\bullet}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{V_g} \int_V g(\boldsymbol{\xi}) \bullet(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}) dV \quad \text{mit} \quad g(\boldsymbol{\xi}) = g(\boldsymbol{\xi}, l) \quad (5.93)$$

Interne Länge im Integralkontinuum

Häufig wird als Wichtungsfunktion $g(\boldsymbol{\xi})$ die GAUSS'sche Verteilungsfunktion

$$g(\boldsymbol{\xi}) = \exp \left[\frac{-\boldsymbol{\xi}^2}{2l^2} \right] \quad (5.94)$$

gewählt, die den abklingenden Einfluß mit wachsender Entfernung ξ widerspiegelt. Die Größe l , die den Einflußradius der nichtlokalen Terme definiert, entspricht einer für die Mikrostruktur charakteristischen internen Länge, die die Breite der Lokalisierungszone der Simulation beeinflusst. Eine anschauliche physikalische Interpretation gewinnen nicht-lokale Schädigungsmodelle insbesondere bei der Simulation von quasispromden Materialien wie Beton, dessen Verhalten auf der Mikroebene stark von nichtlokalen Effekten wie beispielsweise der Mikrorißwechselwirkung geprägt ist, vergleiche BAŽANT [12]. Durch die mikromechanische Betrachtung eines quasi-periodischen Feldes von Mikrorißen läßt sich eine Einflußmatrix $\Lambda(\mathbf{x}, \xi)$ bestimmen, die die Einflußkoeffizienten der einzelnen Nachbarschaftspunkte ξ auf den Punkt \mathbf{x} enthält. So läßt sich die Integralbeziehung aus Gleichung (5.93) wie folgt numerisch approximieren,

$$\bar{(\bullet)}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_{IP}} \Lambda(\mathbf{x}, \xi^I) (\bullet)(\xi^I) \quad (5.95)$$

siehe auch BAŽANT [13] sowie OŽBOLT & BAŽANT [167]. In der Kontinuumschädigungsmechanik ist das nichtlokale Integralkontinuum weit verbreitet. Die nichtlokale Größe (\bullet) wird in den konstitutiven Gleichungen durch die Schädigungsfunktion berücksichtigt, die sich wie damit folgt darstellen läßt.

$$\bar{\Phi} = \phi(\bar{\eta}) - d \leq 0 \quad (5.96)$$

Als natürliche Konsequenz ergibt sich der Schädigungsparameter d als Funktion einer nichtlokalen internen Variablen $d = \phi(\bar{\kappa})$, während die restlichen Gleichungen des konstitutiven Gleichungssatzes entsprechend Tabelle 3.4 vollkommen unverändert bleiben. Wie aus dieser Formulierung ersichtlich ist, verzichten nichtlokale Integralkontinua im Gegensatz zum COSSERAT Kontinuum auf die Einführung zusätzlicher Freiheitsgrade. Änderungen gegenüber klassischen Kontinuumsmodellen finden lediglich auf der konstitutiven Ebene statt und erfordern daher nur begrenzte Änderungen in Finite Element Programmen. Der Einsatz nichtlokaler Integralmodelle erfordert stattdessen eine zusätzliche Iteration zur Bestimmung integraler Größen, die jedoch in der Praxis häufig durch einen einzigen Iterationsschritt angenähert wird.

Die in Gleichung (5.93) erhobene Anforderung an die Wichtungsfunktion hat ungleiche Wichtungskoeffizientenpaare in der Nähe von Gebietsrändern zur Folge, da das zugehörige Volumen weit außen liegender Punkte kleiner und somit die jeweiligen Wichtungskoeffizienten größer sind als bei Punkten, deren gesamter Einflußbereich im Gebietsinneren liegt. Eine weitere Ursache für ungleiche Wichtungskoeffizientenpaare liegt in dem unterschiedlichen Einsetzen des inelastischen Materialverhaltens und den damit verbundenen ungleich großen Einflußwerten. Dies entspricht im übertragenen Sinn einer Verletzung des Satzes von BETTI-MAXWELL und führt im allgemeinen auf unsymmetrische Systemmatrizen. Ein weiterer, oft genannter Nachteil nichtlokaler Integralkontinua ist ihre Finite Element untypische Erzeugung von durch Einflußbereichen charakterisierten Makroelementen, die eine konsistente Linearisierung sowie eine parallele Umsetzung der Methode erschweren.

5.6.5 Gradientenerweiterte Kontinuumsmodelle

Die numerische Umsetzung des in Abschnitt 5.6.4 beschriebenen nichtlokalen Integralkontinuums im Rahmen eines Finite Element Programmes erfordert eine räumliche Mittelwertbildung über mehrere benachbarte Elemente. Diese Methodik widerspricht jedoch

dem lokalen Charakter der Finite Element Technik. Einen alternativen Zugang bieten nichtlokale Kontinuumsmodelle, die mit räumlichen Gradienten bestimmter Feldgrößen angereichert sind. Für kristalline Materialien lassen sich diese zusätzlichen Gradiententerme mit Hilfe der plastischen Versetzungsdichte motivieren, vergleiche AIFANTIS [1], [2]. Alternativ kann die Berücksichtigung höherwertiger Gradienten auch direkt aus der nichtlokalen Integralgleichung (5.93) des vorigen Abschnitts motiviert werden. Für den eindimensionalen Fall mit $l \ll L$ läßt sich zeigen, daß die Definition einer nichtlokalen skalaren Feldgröße ($\bar{\bullet}$)

$$(\bar{\bullet})(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{-\xi^2}{2l^2}\right] (\bullet)(x + \xi) d\xi \quad (5.97)$$

gleichermaßen auch durch eine partielle Differentialgleichung beschrieben werden kann. Dazu wird die Funktion $(\bullet)(x + \xi)$ in einer TAYLOR Reihe um $\xi = 0$ entwickelt

$$(\bullet)(x + \xi) = (\bullet)(x) + \xi \nabla(\bullet)(x) + \frac{1}{2!} \xi^2 \nabla^2(\bullet)(x) + \frac{1}{3!} \xi^3 \nabla^3(\bullet)(x) + \frac{1}{4!} \xi^4 \nabla^4(\bullet)(x) + \dots \quad (5.98)$$

und in Gleichung (5.97) eingesetzt.

$$\begin{aligned} (\bar{\bullet})(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bullet)(x) \exp\left[\frac{-\xi^2}{2l^2}\right] + \nabla(\bullet)(x) \exp\left[\frac{-\xi^2}{2l^2}\right] \xi + \frac{1}{2} \nabla^2(\bullet)(x) \exp\left[\frac{-\xi^2}{2l^2}\right] \xi^2 \\ &+ \frac{1}{6} \nabla^3(\bullet)(x) \exp\left[\frac{-\xi^2}{2l^2}\right] \xi^3 + \frac{1}{24} \nabla^4(\bullet)(x) \exp\left[\frac{-\xi^2}{2l^2}\right] \xi^4 + \dots d\xi \end{aligned} \quad (5.99)$$

Unter der Annahme eines isotropen Materialverhaltens verschwinden die ungeraden Terme bei der Integration, die letztendlich auf die folgende partielle Differentialgleichung führt.

$$(\bar{\bullet})(x) = (\bullet)(x) + \frac{1}{2} l^2 \nabla^2(\bullet)(x) + \frac{1}{8} l^4 \nabla^4(\bullet)(x) + \dots \quad (5.100)$$

Es hat sich als ausreichend erwiesen, lediglich die Terme bis zum zweiten Gradienten der Feldgröße (\bullet) zu berücksichtigen,

$$(\bar{\bullet})(x) = (\bullet)(x) + c \nabla^2(\bullet)(x) \quad \text{mit} \quad c = c(l^2) \quad (5.101)$$

Interne Länge im Gradientenkontinuum

vergleiche beispielsweise DE BORST & MÜHLHAUS [37] sowie PAMIN [168], erweiterte Formulierungen sind jedoch denkbar. Offensichtlich ist der Wichtungsfaktor c des Gradiententerms vom Quadrat des über die Wichtungsfunktion definierten Einflußradius l abhängig, so daß eine interne Längenskala in der Formulierung enthalten ist. Wie im nachfolgenden Kapitel noch ausführlich beschrieben wird, ist es üblich, die partielle Differentialgleichung (5.101) als zusätzliche EULER Gleichung zu berücksichtigen und diese mit Hilfe der Finite Element Methode zu lösen. Dazu ist es im allgemeinen erforderlich, die nichtlokale Feldgröße ($\bar{\bullet}$) als zusätzlichen Freiheitsgrad in die Formulierung einzubringen. Trotz des damit verbundenen Mehraufwandes ist das Gradientenkontinuum heute stark verbreitet, da die einzelnen Feldgrößen entsprechend dem Charakter der Finite Element

Methode lokal vorliegen. Eine konsistente Linearisierung der zugehörigen Gleichungen ist daher ausgesprochen einfach, so daß sich das Gradientenkontinuum insbesondere bei Problemen mit einer großen Anzahl von Systemfreiheitsgraden besonders empfiehlt. Von allen in diesem Kapitel diskutierten Regularisierungsmethoden wurde für die in dieser Arbeit behandelten Problemstellungen das gradientenerweiterte Kontinuumsmodell als geeignetste Strategie angesehen. Es soll daher im folgenden Kapitel ausführlich erläutert werden.

Kapitel 6

Gradientenerweiterte Kontinua

Dieses Kapitel dient der Einführung in die Theorie gradientenerweiterter Kontinuumsmodelle. Dazu wird nach einer kurzen Diskussion der bestehenden Verfahren zunächst die Definition höherwertiger Gradienten bestimmter Feldgrößen erläutert. Im Gegensatz zu der in Kapitel 2 beschriebenen verschiebungsbasierten Finite Element Formulierung erfordert die Finite Element Berechnung gradientenerweiterter Modelle die Einführung zusätzlicher Knotenfreiheitsgrade. Diese dienen der Berücksichtigung des nichtlokalen Einflusses. Aus diesem Grund soll die Herleitung einer gradientenerweiterten Finite Element Formulierung ausführlich dargestellt werden. Anschließend wird die Berücksichtigung der zusätzlichen Gradiententerme in den konstitutiven Gleichungen der isotropen und der microplane-basierten Schädigung skizziert. Einige ausgewählte Beispiele illustrieren die regularisierende Wirkung der Gradientenerweiterung. Abschließend erfolgt die Bereitstellung eines numerischen Optimierungsverfahrens, mit dessen Hilfe die Parameteridentifikation des internen Längenparameters ermöglicht wird.

6.1 Allgemeines

Die grundlegenden Arbeiten von TOUPIN [212] und MINDLIN [152] zu Beginn der 60er Jahre stellen die Basis der heutigen gradientenerweiterten Kontinuumsmodelle dar. In den ursprünglichen Theorien, die lediglich der Beschreibung eines elastischen Materialverhaltens dienen, werden höherwertige Gradienten der Verzerrungen in der freien Energiefunktion berücksichtigt. Dieser Zugang führt systematisch auf die Einführung höherwertiger konjugierter Spannungsgrößen. Im Gegensatz dazu basieren die heute gemeinhin üblichen Gradientenmodelle auf der Berücksichtigung höherwertiger Gradienten ausgewählter, möglichst skalarwertiger Größen, die sich ausschließlich in der Fließfunktion bemerkbar machen. Als natürliche Konsequenz ist die klassische Elastizitätstheorie damit automatisch in der Formulierung enthalten, da die zusätzlichen Gradienten allein der Charakterisierung des inelastischen Materialverhaltens dienen.

Erstmals wurde eine derartige Beschreibung von AIFANTIS [1] vorgeschlagen, der im Rahmen der Plastizitätstheorie eine Gradientenerweiterung des Verfestigungsterms durch mikromechanisch motivierte Versetzungsmodelle begründen konnte, vergleiche auch AIFANTIS [2]. Eine Einbettung der Theorie in eine entsprechende Variationsformulierung gelang

MÜHLHAUS & AIFANTIS [157] für Materialien mit druckunabhängigem Verhalten, sowie VARDOULAKIS & AIFANTIS [217] für dilatante Geomaterialien. Die numerische Umsetzung im Rahmen der Finite Element Methode, die sich durch die Erfüllung der Konsistenzbedingung in schwacher Form und die damit verbundene Einführung des plastischen Multiplikators als unabhängige Feldgröße auszeichnet, folgte kurz darauf. Während von MÜHLHAUS & AIFANTIS [157] sowohl für das Verschiebungsfeld, als auch für das Feld des plastischen Multiplikators C^0 -kontinuierliche Ansätze gewählt wurden, werden von DE BORST & MÜHLHAUS [37], PAMIN [168], und DE BORST & PAMIN [38] C^1 -kontinuierliche Ansätze für den plastischen Multiplikator vorgeschlagen. Alternativ wird die Einführung des Gradienten des plastischen Multiplikators als zusätzliche Feldgröße diskutiert. Eine dynamische Erweiterung der daraus resultierenden Formulierungen wurde von SLUYS, DE BORST & MÜHLHAUS [192] vorgestellt. In STEINMANN [196], [197] findet sich beispielsweise eine anschauliche Interpretation der höherwertigen Gradienten im Rahmen der klassischen Versetzungstheorie.

Aufgrund der physikalisch nur schwer erfaßbaren Bedeutung der erforderlichen Randbedingungen für die zusätzliche Feldgröße stehen Gradientenmodelle durchaus nicht unberechtigt im Mittelpunkt der Kritik. Insbesondere die Erfassung des veränderlichen internen Randes zwischen dem elastischen und plastischen Bereich bereitet numerische Probleme. Von LASRY & BELYTSCHKO [122] sowie MÜHLHAUS & AIFANTIS [157] wurde daher die Wahl einer homogenen natürlichen Randbedingung für die zusätzliche Feldgröße vorgeschlagen. Erst jüngst wurde in diesem Zusammenhang von SVEDBERG & RUNESSON [207] die thermodynamisch konsistente Herleitung eines Gradientenplastizitätsmodells vorgestellt. Im Gegensatz zu den bisherigen Modellen ergeben sich damit die entsprechenden Randbedingungen als natürliche Konsequenz aus thermodynamischen Restriktionen zu nicht-homogenen NEUMANN Randbedingungen, vergleiche auch SVEDBERG [206]. Während die meisten bisherigen Modelle auf der Berücksichtigung des zweiten Gradienten des plastischen Multiplikators zur Beschreibung des Verfestigungsverhaltens beruhen, wurde kürzlich von FLECK & HUTCHINSON [78] ein alternatives Modell vorgestellt. In Analogie zu den elastischen Modellen von TOUPIN [212] und MINDLIN [152] findet in diesem Modell der zweite Gradient der Verzerrungen in der freien Energiefunktion Berücksichtigung.

Obwohl die Anfänge der Gradientenplastizität bereits in den 80er Jahren zu finden sind, wurden nichtlokale Schädigungsformulierungen zunächst nahezu ausschließlich im Rahmen von Integralkontinuumsmodellen umgesetzt. Dies ist nicht zuletzt auf eine mangelnde physikalische Motivation der Gradientenerweiterung von Schädigungsmodellen zurückzuführen, der im Rahmen der Metallplastizität eine direkte mikromechanische Interpretation zugewiesen werden kann. Das in jüngster Zeit stetig anwachsende Interesse an gradientenerweiterten Schädigungsbeschreibungen ist insbesondere auf die grundlegenden Ideen von PEERLINGS [169] zurückzuführen. Das von ihm entwickelte Modell zeichnet sich durch die Berücksichtigung des zweiten Gradienten der äquivalenten Verzerrung in der Schädigungsfunktion aus. Da bei den geläufigen Schädigungsmodellen die Schädigungsevolution direkt ausgewertet werden kann, wird anstelle der Konsistenzbedingung die gradientenbasierte Definitionsgleichung der nichtlokalen Verzerrungen als zusätzliche EULER Gleichung berücksichtigt. Besonders aufgrund der Möglichkeit einer impliziten Einführung dieser nichtlokalen äquivalenten Verzerrung wurde eine numerisch attraktive Methode geschaffen, die lediglich C^0 -kontinuierliche Interpolationen der zusätzlichen Feldgröße erfordert, siehe PEERLINGS, DE BORST, BREKELMANS & DE VREE [171], PEER-

LINGS, DE BORST, BREKELMANS, DE VREE & SPEE [172] sowie PEERLINGS, DE BORST, BREKELMANS & GEERS [170]. Eine zusätzliche Erweiterung auf eine verzerrungsbasierte transiente Gradientenschädigung wurde von GEERS [81] diskutiert. Zur Vermeidung einer künstlichen Aufweitung der Schädigungszone orthogonal zur Versagensrichtung wurde die Einführung einer variablen Gradientenaktivität in Abhängigkeit des aktuellen Belastungszustandes vorgeschlagen, vergleiche auch GEERS, DE BORST, BREKELMANS & PEERLINGS [82]. Erst kürzlich gelang STEINMANN [198] die Erweiterung des PEERLINGS-Modells auf finite Deformationen.

Eine Alternative zu den von PEERLINGS [169] entwickelten Formulierungen stellen Schädigungsmodelle mit einer Berücksichtigung höherer Gradienten des Geschichtsparameters dar, vergleiche DE BORST, BENALLAL & HEERES [34]. Thermodynamisch konsistente Gradientenschädigungsmodelle nach FRÉMOND & NEDJAR [79] berücksichtigen stattdessen den räumlichen Gradienten des Schädigungsparameters selbst, siehe auch MÜHLHAUS, DE BORST, SLUYS & PAMIN [158] sowie COMI [60]. Während für die meisten Simulationen eine isotrope Schädigungsformulierung ausreichend ist, kann sich insbesondere unter nicht-proportionaler Belastung ein stark anisotropes Schädigungsbild einstellen. In diesem Zusammenhang wurde kürzlich von KUHLE, RAMM & DE BORST [111], [117], [118] ein microplane-basiertes anisotropes Schädigungsmodell vorgeschlagen, in dem der gesamte Verzerrungstensor als nichtlokale Größe in der Schädigungsbeschreibung Berücksichtigung findet, vergleiche auch KUHLE & RAMM [115]. Von DE BORST, GEERS, KUHLE & PEERLINGS [35] bzw. DE BORST [36] wurde ein Vergleich der resultierenden Formulierung mit entsprechenden gradientenerweiterten "rotating crack" und "fixed crack" Modellen diskutiert.

Insbesondere der Kombination von gradientenerweiterten Schädigungs- und Plastizitätstheorien wurde in jüngster Zeit ein konzentriertes Interesse gewidmet. SVEDBERG & RUNESSON [207], [208] schlagen in diesem Zusammenhang die Kopplung eines gradientenerweiterten Plastizitätsmodells mit einem lokalen Schädigungsmodell vor. Im Gegensatz dazu wird von DE BORST [33] sowie DE BORST, PAMIN & GEERS [39] die Kombination eines gradientenerweiterten Schädigungsmodells mit einer lokalen Plastizitätsformulierung als numerisch eleganter sowie physikalisch plausibler bewertet.

Im folgenden Abschnitt soll zunächst die Berücksichtigung höherwertiger Gradienten im Rahmen der Kontinuumsschädigungsmechanik vorgestellt werden. Anschließend wird die numerische Umsetzung mittels der Finite Element Methode diskutiert. Die beschriebene Formulierung basiert auf den grundlegenden Ideen von PEERLINGS [169] und stellt eine Erweiterung der Methode auf anisotrope Schädigungsmodelle dar. Diese Erweiterung beinhaltet die ursprüngliche, isotrope Formulierung in natürlicher Form. Anhand der isotropen Schädigung sowie der microplane-basierten anisotropen Schädigung wird die Berücksichtigung höherwertiger Gradienten der Verzerrungen in den konstitutiven Gleichungen erläutert. Die regularisierende Wirkungsweise der Gradientenerweiterung wird mit Hilfe von ausgewählten Beispielen veranschaulicht. Abschließend wird ein Optimierungsverfahren skizziert, das es ermöglicht, den aufgrund der Gradientenerweiterung einzuführenden Parameter der internen Länge numerisch zu bestimmen. Die Wirkungsweise dieses Verfahrens wird beispielhaft illustriert.

6.2 Berücksichtigung höherer Gradienten

Die *explizite*, eindimensionale Gradientengleichung (5.101), die in Kapitel 5.6.5 aus der nichtlokalen Integralgleichung motiviert wurde, bildet die Grundlage der nachfolgenden allgemeinen dreidimensionalen Definition einer nichtlokalen Größe.

$$\vec{\bullet} = \bullet + c \operatorname{div} \nabla(\bullet) + \mathcal{O}([\operatorname{div} \nabla]^2(\bullet)) \quad (6.1)$$

Explizite Definition einer nichtlokalen Größe

Eine alternative Formulierung entsteht durch erneute Bildung der Divergenz des Gradienten von (6.1) und skalare Multiplikation mit dem Wichtungskoeffizienten c .

$$c \operatorname{div} \nabla(\vec{\bullet}) = c \operatorname{div} \nabla(\bullet) + c^2 [\operatorname{div} \nabla]^2(\bullet) + \mathcal{O}([\operatorname{div} \nabla]^3(\bullet)) \quad (6.2)$$

Wird die Gleichung (6.1) von Gleichung (6.2) subtrahiert, so ergibt sich die nachfolgende *implizite* Definitionsgleichung der nichtlokalen Größe $\vec{\bullet}$.

$$\bullet = \vec{\bullet} - c \operatorname{div} \nabla(\vec{\bullet}) + \mathcal{O}([\operatorname{div} \nabla]^2(\bullet)) \quad (6.3)$$

Implizite Definition einer nichtlokalen Größe

Sie berücksichtigt ebenfalls Glieder bis zum quadratischen Term. Sowohl die explizite Bestimmungsgleichung (6.1) als auch die implizite Definition (6.3) können als Grundlage für eine gradientenerweiterte Kontinuumsformulierung verstanden werden. Dabei wird die jeweilige Definitionsgleichung als zusätzliche EULER Gleichung in der Formulierung berücksichtigt und in schwacher Form erfüllt. Die Beschreibung geht dementsprechend in eine *Zweifeld-Formulierung* über, bei der sowohl das Verschiebungsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ als auch die nichtlokale Feldgröße $\vec{\bullet}(\mathbf{x})$ als primäre Unbekannte eingeführt werden.

Die Unterschiede zwischen der expliziten und impliziten Definition der nichtlokalen Größe sind ausführlich in PEERLINGS [169] diskutiert. Insbesondere erweist sich die implizite Definition als numerisch wesentlich eleganter, da für das zusätzliche nichtlokale Verzerrungsfeld lediglich C^0 -kontinuierliche Ansatzfunktionen erforderlich sind. Für klassische Gradientenmodelle mit expliziter Definition ist hingegen eine C^1 -kontinuierliche Interpolation der nichtlokalen Größe notwendig, vergleiche PEERLINGS [169] bzw. PEERLINGS, DE BORST, BREKELMANS, DE VREE & SPEE [172], bzw. für eine analoge Diskussion im Rahmen der Gradientenplastizität PAMIN [168] sowie DE BORST & PAMIN [38].

Desweiteren unterscheiden sich die explizite und die implizite Formulierung in der Art ihrer Approximation. Während die explizite Gradientengleichung nur scheinbar nicht-lokal ist, da sie lediglich den zweiten Gradienten der lokalen Größe beinhaltet, werden bei impliziten Modellen zusätzlich höherwertige Gradienten der lokalen Größe implizit berücksichtigt. Aus diesem Grund können die impliziten Gradientenformulierungen als wirklich nichtlokal verstanden werden. Dementsprechend gleichen ihre Simulationsergebnisse denen nichtlokaler Integralmodelle, während die expliziten Gradientenmodelle ein grundsätzlich anderes Verhalten widerspiegeln, vergleiche PEERLINGS [169]. Im Rahmen dieser Arbeit wurde daher ausschließlich die implizite Gradientengleichung (6.3) verwendet.

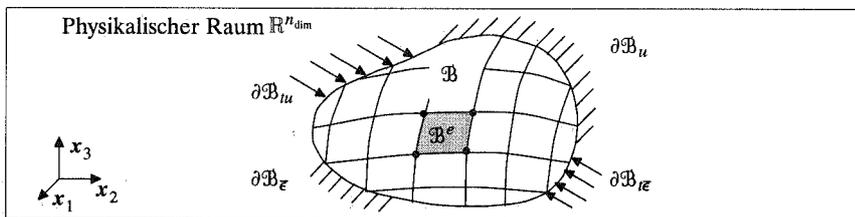
Modellproblem	zusätzliche nichtlokale Größe	Definitionsgleichung
eindimensional	Verzerrung $(\bar{\bullet}) = \bar{\epsilon}(\mathbf{x})$	$\epsilon = \bar{\epsilon} - \text{div} [c \cdot \nabla \bar{\epsilon}]$
skalarwertig	äquivalente Verzerrung $(\bar{\bullet}) = \bar{\eta}(\mathbf{x})$	$\eta = \bar{\eta} - \text{div} [c \cdot \nabla \bar{\eta}]$
tensoriell	Verzerrungstensor $(\bar{\bullet}) = \bar{\epsilon}(\mathbf{x})$	$\epsilon = \bar{\epsilon} - \text{div} [\mathbf{C} : \nabla \bar{\epsilon}]$

Tabelle 6.1: Einführung nichtlokaler Größen

Tabelle 6.1 zeigt die Anwendung der impliziten Definitionsgleichung (6.3) zur Einführung unterschiedlicher nichtlokaler Größen. Während die Gradientengleichung für den in Kapitel 5.6.5 skizzierten *eindimensionalen* Fall entsprechend der ersten Tabellenzeile auf die skalarwertige Verzerrung ϵ anzuwenden ist und somit eine zusätzliche Feldgröße $\bar{\epsilon}$ von skalarwertiger Natur berücksichtigt werden muß, muß die Gradientengleichung im allgemeinen dreidimensionalen Fall, wie in der dritten Tabellenzeile angedeutet, auf den gesamten Verzerrungstensor ϵ angewendet werden. Da die damit verbundene Einführung zusätzlicher *tensorieller* Freiheitsgrade für die nichtlokalen Verzerrungen $\bar{\epsilon}$ numerisch sehr aufwendig ist, wurden bisher in der Literatur ausschließlich *skalarwertige* isotrope Gradientenschädigungsmodelle untersucht, bei denen entsprechend der zweiten Tabellenzeile lediglich die äquivalente Verzerrung $\bar{\eta}$ als nichtlokale Größe eingeführt wird. Für eine derartige Formulierung ist der Wichtungskoeffizient c im allgemeinen Fall durch einen zweistufigen Wichtungstensor zu ersetzen. Bisherige Formulierungen basieren jedoch ausschließlich auf der vereinfachenden Annahme, daß sich dieser Wichtungstensor als der mit dem Gradientenparameter c gewichtete Einheitstensor darstellen läßt, so daß $c = c \mathbf{1}$. Für dreidimensionale, anisotrope Schädigungsformulierungen ist die Anwendung der nichtlokalen Definitionsgleichung auf eine tensorwertige Größe gemäß der dritten Tabellenzeile jedoch unvermeidlich. Im folgenden soll die Gradientengleichung daher auf das Verzerrungsfeld ϵ angewendet werden. Dementsprechend wird der nichtlokale Verzerrungstensor $\bar{\epsilon}$ als zusätzliche Feldgröße eingeführt. Im allgemeinen Fall wird nun die Berücksichtigung eines sechsstufigen Wichtungstensors \mathbf{C} erforderlich, aber auch dieser kann unter entsprechenden Annahmen vereinfachend als $\mathbf{C} = c \mathcal{I}^{(6)}$ dargestellt werden.

6.3 Finite Element Formulierung

Im folgenden Kapitel soll die Herleitung einer Finite Element Formulierung für gradientenerweiterte Kontinua skizziert werden. Die resultierende Zweifeld-Formulierung basiert

Abbildung 6.1: Diskretisiertes Gebiet \mathcal{B}

auf der *impliziten* Definition der nichtlokalen Verzerrungen. Analog zum Kapitel 2 gelten im gesamten Gebiet \mathcal{B} die kinematische Beziehung, die lokale Form der Impulsbilanz sowie ein entsprechendes Konstitutivgesetz. Der Rand des Gebietes $\partial\mathcal{B}$ sei entsprechend Kapitel 2 in disjunkte Untermengen $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_u \cup \partial\mathcal{B}_{t_u}$ mit $\partial\mathcal{B}_u \cap \partial\mathcal{B}_{t_u} = \emptyset$ unterteilt, auf denen die zugehörigen DIRICHLET bzw. NEUMANN Randbedingungen vorgeschrieben seien.

$$\begin{array}{rcll}
 & \boldsymbol{\epsilon} & = & \nabla^{sym} \mathbf{u} & \text{in} & \mathcal{B} \\
 \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} & & = & \mathbf{0} & \text{in} & \mathcal{B} \\
 & \boldsymbol{\sigma} & = & \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \mathbf{q}) & \text{in} & \mathcal{B} \\
 \mathbf{u}^p - \mathbf{u} & & = & \mathbf{0} & \text{auf} & \partial\mathcal{B}_u \\
 \mathbf{t}_u^p - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} & & = & \mathbf{0} & \text{auf} & \partial\mathcal{B}_{t_u}
 \end{array} \tag{6.4}$$

Starke Form & Randbedingungen – Gleichgewicht

In entsprechender Form kann eine Bilanzgleichung für das Tensorfeld nichtlokalen Verzerrungen basierend auf der impliziten Definitionsgleichung (6.3) mit Gültigkeit im gesamten Gebiet \mathcal{B} postuliert werden. Dementsprechend ist die Differenz aus der Divergenz des Tensorfeldes $\boldsymbol{\tau} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim} \times n_{dim} \times n_{dim}}$ und den nichtlokalen Verzerrungen $\bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim} \times n_{dim}}$ gerade gleich den negativen lokalen Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon}$. Der dreistufige Tensor $\boldsymbol{\tau}$ kann hierbei gemäß dem konstitutiven Gesetz $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}})$ als Funktion des Gradienten der nichtlokalen Verzerrungen $\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ verstanden werden. Für das nichtlokale Verzerrungsproblem läßt sich der Gebietsrand $\partial\mathcal{B}$ in die disjunkten Untermengen $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \cup \partial\mathcal{B}_{t_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}}$ mit $\partial\mathcal{B}_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \cap \partial\mathcal{B}_{t_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}} = \emptyset$ unterteilen, für die in entsprechender Form Randbedingungen vom DIRICHLET bzw. NEUMANN Typ anzugeben sind, vergleiche Abbildung 6.1.

$$\begin{array}{rcll}
 \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \bar{\boldsymbol{\epsilon}} & & = & -\boldsymbol{\epsilon} & \text{in} & \mathcal{B} \\
 & \boldsymbol{\tau} & = & \boldsymbol{\tau}(\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) & \text{in} & \mathcal{B} \\
 \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^p - \bar{\boldsymbol{\epsilon}} & & = & \mathbf{0} & \text{auf} & \partial\mathcal{B}_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}} \\
 \mathbf{t}_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}^p - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} & & = & \mathbf{0} & \text{auf} & \partial\mathcal{B}_{t_{\bar{\boldsymbol{\epsilon}}}}
 \end{array} \tag{6.5}$$

Starke Form & Randbedingungen – nichtlokale Verzerrungen

6.3.1 Schwache Form des Randwertproblems

Entsprechend Kapitel 2 liefert die Integration der Impulsbilanz (6.4.1) über das Gebiet \mathcal{B} und der NEUMANN Randbedingungen (6.4.3) über den Gebietsrand $\partial\mathcal{B}$ nach einer skalaren Multiplikation mit der vektorwertigen Testfunktion $\delta \mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim}}$, die den DIRICHLET Randbedingungen (6.5.2) genügen soll, die folgende Beziehung.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot [\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}] dV + \int_{\partial\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot [\mathbf{t}^p - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] dA = \mathbf{0} \quad \forall \delta \mathbf{u} \tag{6.6}$$

Durch partielle Integration, Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes, Einsetzen der kinematischen Beziehung und Berücksichtigung der DIRICHLET Randbedingungen (6.4.1) entsteht unmittelbar die klassische schwache Form der Gleichgewichtsbeziehung, deren Herleitung bereits ausführlich in Kapitel 2 beschrieben wurde.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \bar{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\rho} \, \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_{tr}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_u^p \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (6.7)$$

Schwache Form – Gleichgewicht

In analoger Form lassen sich die Definitionsgleichung der nichtlokalen Verzerrungen (6.5.1) sowie die NEUMANN Randbedingungen des nichtlokalen Verzerrungsproblems (6.5.3) über das Gebiet \mathcal{B} bzw. den Gebietsrand $\partial \mathcal{B}$ integrieren und mit der tensorwertigen Testfunktion $\delta \bar{\epsilon} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{dim} \times n_{dim}}$, die den zugehörigen DIRICHLET Randbedingungen (6.5.2) genügen soll, wichten.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \bar{\epsilon} : [\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} - \bar{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}] \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}} \delta \bar{\epsilon} : [\mathbf{t}_\epsilon^p - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}] \, dA = 0 \quad \forall \delta \bar{\epsilon} \quad (6.8)$$

Die schwache Form der nichtlokalen Verzerrungsdefinition läßt sich unmittelbar durch partielle Integration, Anwendung des GAUSS'schen Integralsatzes und Berücksichtigung der DIRICHLET Randbedingungen gewinnen.

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \nabla \bar{\epsilon} : \boldsymbol{\tau} \, dV + \int_{\mathcal{B}} \delta \bar{\epsilon} : [\bar{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}] \, dV = \int_{\partial \mathcal{B}_{tr}} \delta \bar{\epsilon} : \mathbf{t}_\epsilon^p \quad \forall \delta \bar{\epsilon} \quad (6.9)$$

Schwache Form – nichtlokale Verzerrungen

6.3.2 Diskretisierung

Die räumliche Diskretisierung erfordert die Zerlegung des Gebietes \mathcal{B} in n_{elm} Finite Elemente, so daß $\mathcal{B} = \bigcup_{\ell=1}^{n_{elm}} \mathcal{B}^\ell$. Jedes Element \mathcal{B}^ℓ sei durch n_{unod} Verschiebungsknoten und $n_{\epsilon nod}$ nichtlokale Verzerrungsknoten charakterisiert, wobei die Anzahl der Verschiebungsknoten und der nichtlokalen Verzerrungsknoten nicht notwendigerweise identisch zu wählen ist. Entsprechend der klassischen Finite Element Diskretisierung aus Kapitel 2 läßt sich der Verschiebungsverlauf \mathbf{u} innerhalb eines Elementes durch das Produkt der Ansatzfunktionen $N^I(\boldsymbol{\xi})$ mit den diskreten Knotenverschiebungsfreiheitsgraden \mathbf{d}_u^I summiert über alle Verschiebungsknoten n_{unod} approximieren. Gemäß dem BUBNOV–GALERKIN Verfahren gelte eine entsprechende Diskretisierung für die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$. Die räumlichen Gradienten des Verschiebungsfeldes $\nabla \mathbf{u}$ und des virtuellen Verschiebungsfeldes $\delta \nabla \mathbf{u}$ lassen sich mittels der aufsummierten dyadischen Produkte der Knotenfreiheitsgrade $\mathbf{d}_{u,I}$ bzw. der virtuellen Verschiebungsfreiheitsgrade $\delta \mathbf{d}_{u,I}$ mit den räumlichen Gradienten der Ansatzfunktionen $\nabla_x N_u^I = \mathbf{J}^{-1} \nabla_\xi N_u^I$ angeben, wobei $\mathbf{J} := \nabla_\xi \boldsymbol{\xi}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &:= \sum_{I=1}^{n_{unod}} N_u^I \mathbf{d}_{u,I} & \nabla \mathbf{u} &:= \sum_{I=1}^{n_{unod}} \mathbf{d}_{u,I} \otimes \nabla_x N_u^I \\ \delta \mathbf{u} &:= \sum_{I=1}^{n_{unod}} N_u^I \delta \mathbf{d}_{u,I} & \delta \nabla \mathbf{u} &:= \sum_{I=1}^{n_{unod}} \delta \mathbf{d}_{u,I} \otimes \nabla_x N_u^I \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die diskretisierte, elementspezifische Gleichgewichtsbeziehung (6.7) kann nun als Differenz der elementbezogenen internen und externen Arbeit $\delta W_{u,int}^e$ und $W_{u,ext}^e$ angegeben werden,

$$\delta W_{u,int}^e - \delta W_{u,ext}^e = 0 \quad \forall \delta \mathbf{d}_{u,I} \quad (6.11)$$

wobei die elementbezogenen virtuellen Arbeitsausdrücke die folgende Form annehmen.

$$\begin{aligned} \delta W_{u,int}^e &:= \sum_{I=1}^{n_{unod}} \delta \mathbf{d}_{u,I} \cdot \mathbf{f}_{u,int}^I & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{u,int}^I := \int_{\mathcal{B}^I} \nabla N_u^I \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dV \\ \delta W_{u,ext}^e &:= \sum_{I=1}^{n_{unod}} \delta \mathbf{d}_{u,I} \cdot \mathbf{f}_{u,ext}^I & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{u,ext}^I := \int_{\mathcal{B}^I} N_u^I \rho \mathbf{b} \, dV \\ & & & \quad + \int_{\partial \mathcal{B}_{i\bar{e}}^e} N_u^I \mathbf{t}_u^p \, dA \end{aligned} \quad (6.12)$$

Entsprechend dem Fundamentallema der Variationsrechnung kann die Gleichung (6.11) auch als Gleichgewicht der internen und externen Knotenkräfte $\mathbf{f}_{u,int}^I$ und $\mathbf{f}_{u,ext}^I$ in allen $I = 1, \dots, n_{unod}$ Verschiebungsknoten verstanden werden.

$$\mathbf{f}_{u,int}^I - \mathbf{f}_{u,ext}^I = \mathbf{0} \quad \forall I = 1, \dots, n_{unod} \quad (6.13)$$

Knotenspezifisches Gleichgewicht

In analoger Form läßt sich der Verlauf des nichtlokalen Verzerrungsfeldes $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ mittels der Produkte der Ansatzfunktionen $N_{\bar{\epsilon}}^K(\boldsymbol{\xi})$ mit den diskreten Knotenverzerrungsfreiheitsgraden $\mathbf{d}_{\bar{\epsilon},K}$ aufsummiert über alle nichtlokalen Verzerrungsknoten $n_{\bar{\epsilon}nod}$ approximieren. Wiederum gelte eine entsprechende Diskretisierung für das virtuelle nichtlokale Verzerrungsfeld $\delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$. Analog ergeben sich die Gradienten beider Felder aus Aufsummierung der dyadischen Produkte der räumlichen Gradienten der Ansatzfunktionen $\nabla_x N_{\bar{\epsilon}}^K$ mit den jeweiligen Knotenfreiheitsgraden, wobei $\nabla_x N_{\bar{\epsilon}}^K = \mathbf{J}^{-1} \nabla_{\xi} N_{\bar{\epsilon}}^K$.

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\epsilon}} &:= \sum_{K=1}^{n_{\bar{\epsilon}nod}} N_{\bar{\epsilon}}^K \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},K} & \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} &:= \sum_{K=1}^{n_{\bar{\epsilon}nod}} \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},K} \otimes \nabla_x N_{\bar{\epsilon}}^K \\ \delta \bar{\boldsymbol{\epsilon}} &:= \sum_{K=1}^{n_{\bar{\epsilon}nod}} N_{\bar{\epsilon}}^K \delta \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},K} & \delta \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} &:= \sum_{K=1}^{n_{\bar{\epsilon}nod}} \delta \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},K} \otimes \nabla_x N_{\bar{\epsilon}}^K \end{aligned} \quad (6.14)$$

Die diskretisierte, elementspezifische Definitionsgleichung der nichtlokalen Verzerrungen kann nun als Differenz aus den internen und externen virtuellen Bestimmungsgrößen $\delta W_{\bar{\epsilon},int}^e$ und $\delta W_{\bar{\epsilon},ext}^e$ angegeben werden,

$$\delta W_{\bar{\epsilon},int}^e - \delta W_{\bar{\epsilon},ext}^e = 0 \quad \forall \delta \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},K} \quad (6.15)$$

die sich wie folgt darstellen lassen.

$$\begin{aligned} \delta W_{\bar{\epsilon},int}^e &:= \sum_{K=1}^{n_{\bar{\epsilon}nod}} \delta \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},K} : \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^K & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^K := \int_{\mathcal{B}^e} \nabla N_{\bar{\epsilon}}^K \cdot \boldsymbol{\tau} \, dV \\ & & & \quad + \int_{\mathcal{B}^e} N_{\bar{\epsilon}}^K \sum_{L=1}^{n_{\bar{\epsilon}nod}} N_{\bar{\epsilon}}^L \mathbf{d}_{\bar{\epsilon}}^L \, dV \\ & & & \quad - \int_{\mathcal{B}^e} N_{\bar{\epsilon}}^K \sum_{I=1}^{n_{unod}} \mathbf{d}_u^I \otimes \nabla N_u^I \, dV \\ \delta W_{\bar{\epsilon},ext}^e &:= \sum_{K=1}^{n_{\bar{\epsilon}nod}} \delta \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},K} : \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext}^K & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext}^K := \int_{\partial \mathcal{B}_{i\bar{e}}^e} N_{\bar{\epsilon}}^K \mathbf{t}_{\bar{\epsilon}}^p \, dA \end{aligned} \quad (6.16)$$

Aus Gleichung (6.15) folgt aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung die Äquivalenz der internen und externen Knotengrößen $\mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}$ und $\mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext}$ in allen $K = 1, \dots, n_{\epsilon nod}$ nichtlokalen Verzerrungsknoten.

$$\mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^K - \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext}^K = \mathbf{0} \quad \forall K = 1, \dots, n_{\epsilon nod} \quad (6.17)$$

Knotenspezifische nichtlokale Verzerrungsdefinition

6.3.3 Linearisierung

Die bestimmenden Gleichungen (6.13) und (6.17) sind über die lokalen und nichtlokalen Verzerrungen miteinander gekoppelt und im allgemeinen hochgradig nichtlinear. Ihre Lösung kann beispielsweise inkrementell iterativ im Rahmen eines NEWTON-RAPHSON Verfahrens erfolgen. Die dazu erforderliche TAYLOR Reihenentwicklung um die Lösung zum aktuellen Iterationsschritt n führt bei Abbruch nach dem linearen Term auf das folgende elementspezifische Gleichungssystem.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{uu} & \mathbf{k}_{u\bar{\epsilon}} \\ \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}u} & \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_u \\ \Delta \mathbf{d}_{\bar{\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{u,ext} \\ \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{u,int}^{n-1} \\ \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

Elementspezifisches linearisiertes Gleichungssystem

Seine Lösung liefert die inkrementelle Änderung der Elementfreiheitsgrade $\Delta \mathbf{d}_u := [\Delta \mathbf{d}_{u,J}]$ und $\Delta \mathbf{d}_{\bar{\epsilon}} := [\Delta \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},L}]$. Hierbei setzt sich die erweiterte Elementmatrix aus den folgenden vier Submatrizen zusammen.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{uu} &:= [\mathbf{k}_{uu}^{JJ}] & \text{mit} & \quad \mathbf{k}_{uu}^{JJ} = \frac{\partial \mathbf{f}_{u,int}^J}{\partial \mathbf{d}_{u,J}} = \int_{B^e} \nabla N_u^J \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{ed} \cdot \nabla N_u^J dV \\ \mathbf{k}_{u\bar{\epsilon}} &:= [\mathbf{k}_{u\bar{\epsilon}}^{LL}] & \text{mit} & \quad \mathbf{k}_{u\bar{\epsilon}}^{LL} = \frac{\partial \mathbf{f}_{u,int}^J}{\partial \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},L}} = \int_{B^e} \nabla N_u^J \cdot \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ed} \quad N_{\bar{\epsilon}}^L dV \\ \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}u} &:= [\mathbf{k}_{\bar{\epsilon}u}^{KJ}] & \text{mit} & \quad \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}u}^{KJ} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^K}{\partial \mathbf{d}_{u,J}} = - \int_{B^e} N_{\bar{\epsilon}}^K \quad \boldsymbol{\mathcal{I}} \cdot \nabla N_u^J dV \\ \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}} &:= [\mathbf{k}_{\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}}^{KL}] & \text{mit} & \quad \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}}^{KL} = \frac{\partial \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^K}{\partial \mathbf{d}_{\bar{\epsilon},L}} = \int_{B^e} \nabla N_{\bar{\epsilon}}^K \cdot \boldsymbol{\mathcal{C}} \cdot \nabla N_{\bar{\epsilon}}^L dV \\ & & & \quad + \int_{B^e} N_{\bar{\epsilon}}^K \quad \boldsymbol{\mathcal{I}} \quad N_{\bar{\epsilon}}^L dV \end{aligned} \quad (6.19)$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß das entstehende Gleichungssystem eine unsymmetrische Form annimmt, da $\mathbf{k}_{u\bar{\epsilon}} \neq \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}u}^T$. Die partielle Ableitung des Spannungstensors bezüglich des lokalen Verzerrungstensors liefert den vierstufigen Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}^{ed}$, der hier dem aus der klassischen Kontinuumstheorie bekannten Sekantentensor entspricht. Die partielle Ableitung der Spannungen bezüglich der nichtlokalen Verzerrungen definiert entsprechend den vierstufigen Tensor $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ed}$, während sich der sechsstufige Tensor $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ aus der partiellen Ableitung der Spannungsgröße $\boldsymbol{\tau}$ nach dem Gradienten der nichtlokalen Verzerrungen ergibt.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{ed} := \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{ed} := \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad \boldsymbol{\mathcal{C}} := \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \nabla \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \quad (6.20)$$

Die Summe der Spannungsableitungen \mathcal{E}^{cd} und $\bar{\mathcal{E}}^{ed}$, die in Abschnitt 6.4 noch genauer spezifiziert werden sollen, liefert den klassischen vierstufigen Materialtangentialtensor der lokalen Kontinuumsmechanik, die als Sonderfall mit $\mathbf{C} \equiv \mathbf{0}$ in der vorliegenden Elementformulierung enthalten ist. Weiterhin ergeben sich die in Gleichung (6.18) eingeführten internen und externen Lastvektoren in der folgenden Form.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_{u,ext} &:= [\mathbf{f}_{u,ext}^I] & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{u,ext}^I = \int_{\mathcal{B}^e} N_u^I \quad \rho \mathbf{b} \quad dV \\
 & & & \quad + \int_{\partial\mathcal{B}_{\Gamma_u}^e} N_u^I \quad \mathbf{t}_u^p \quad dA \\
 \mathbf{f}_{u,int}^{n-1} &:= [\mathbf{f}_{u,int}^{I,n-1}] & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{u,int}^{I,n-1} = \int_{\mathcal{B}^e} \nabla N_u^I \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n-1} \quad dV \\
 \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext} &:= [\mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext}^K] & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext}^K = \int_{\partial\mathcal{B}_{\Gamma_{\bar{\epsilon}}}^e} N_{\bar{\epsilon}}^K \quad \mathbf{t}_{\bar{\epsilon}}^p \quad dA \\
 \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^{n-1} &:= [\mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^{K,n-1}] & \text{mit} & \quad \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^{K,n-1} = \int_{\mathcal{B}^e} \nabla N_{\bar{\epsilon}}^K \cdot \boldsymbol{\tau}^{n-1} \quad dV \\
 & & & \quad + \int_{\mathcal{B}^e} N_{\bar{\epsilon}}^K [\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{n-1} - \boldsymbol{\epsilon}^{n-1}] \quad dV
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Die entstehenden Integralgleichungen können mit Hilfe des GAUSS'schen Integrationsverfahrens durch gewichtete Auswertung an diskreten Integrationspunkten numerisch approximiert werden. Der abschließende Zusammenbau aller $e = 1, \dots, n_{elm}$ Elemente

$$\mathbf{K} := \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{uu}^e & \mathbf{k}_{u\bar{\epsilon}}^e \\ \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}u}^e & \mathbf{k}_{\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}}^e \end{bmatrix} \quad \Delta\mathbf{D} := \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{d}_u^e \\ \Delta\mathbf{d}_{\bar{\epsilon}}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{ext} := \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{u,ext}^e \\ \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},ext}^e \end{bmatrix} \quad \mathbf{F}_{int}^{n-1} := \bigcup_{e=1}^{n_{elm}} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{u,int}^{e,n-1} \\ \mathbf{f}_{\bar{\epsilon},int}^{e,n-1} \end{bmatrix} \tag{6.22}$$

führt schließlich auf das inkrementelle globale Gleichungssystem der folgenden Form.

$$\mathbf{K} \cdot \Delta\mathbf{D} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}^{n-1} \tag{6.23}$$

Strukturspezifisches linearisiertes Gleichungssystem

Hierin beschreiben \mathbf{K} und $\Delta\mathbf{D}$ jeweils die globale Tangentensteifigkeitsmatrix und das Inkrement des globalen Freiheitsgradvektors, während \mathbf{F}_{ext} und die \mathbf{F}_{int}^{n-1} die externen und internen Systemlasten darstellen. Es sei nochmals bemerkt, daß sich die Unsymmetrie der Elementmatrix natürlich auf Systemebene wiederfindet, so daß zum Lösen des globalen Gleichungssystems unsymmetrische Gleichungslöser erforderlich werden.

Zur Charakterisierung des betreffenden Materialverhaltens ist nun die Spezifizierung konstitutiver Gesetze erforderlich, die einen Zusammenhang zwischen den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und den Verzerrungen $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}, \dots)$ sowie zwischen der Spannungsgröße $\boldsymbol{\tau}$ und dem Gradienten der nichtlokalen Verzerrungen $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\nabla\bar{\boldsymbol{\epsilon}}, \dots)$ definieren. In Abschnitt 6.4 sollen geeignete konstitutive Gesetze für isotrope und anisotrope Gradientenschädigungsformulierungen erläutert werden. Zunächst erfolgt jedoch eine kurze Diskussion möglicher Interpolationsordnungen des Verschiebungsfeldes und des nichtlokalen Verzerrungsfeldes.

6.3.4 Interpolationsordnung

Abbildung 6.2 zeigt die Ergebnisse der Simulation eines geschädigten Zugstabes für unterschiedliche Interpolationsordnungen des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} und des nichtlokalen Verzerrungsfeldes $\bar{\epsilon}$. Die Resultate aus Abbildung 6.2, links, basieren auf einer Modellierung durch vierknotige Elemente mit einer bilinearen Interpolation des Verschiebungsfeldes und des nichtlokalen Verzerrungsfeldes. Diese Elemente, für die hier eine 2×2 GAUSS-Punkt Integration verwendet wurde, sollen im folgenden als Q1Q1-Elemente bezeichnet werden. Aus ihrer linearen Interpolation beider Felder resultieren ein konstantes lokales Verzerrungsfeld ϵ sowie ein lineares Schädigungsfeld d und somit eine lineare Spannungsverteilung. Aufgrund der unausgeglichene Interpolationsordnungen weist die Spannungsverteilung des Q1Q1-Elementes starke lokale Oszillationen auf, die physikalisch ungerechtfertigt sind.

Eine geeignete Alternative stellt das Q2Q1-Element aus Abbildung 6.2, rechts, dar, bei dem ein serendipity-basierter quadratischer Verschiebungsansatz in Kombination mit einer bilinearen nichtlokalen Verzerrungsinterpolation bei einer 2×2 GAUSS-Punkt Integration verwendet wurde. Dementsprechend verlaufen nun sowohl das lokale Verzerrungsfeld als auch die Verteilung der Schädigungsvariablen linear und der Spannungsverlauf nimmt eine anschauliche, physikalisch interpretierbare Form an. Die leichten Spannungssprünge an den Elementengrenzen sind auf die relativ grobe Diskretisierung in Kombination mit C^0 -kontinuierlichen LAGRANGE Polynomen zurückzuführen. Sie verschwinden jedoch bei Netzverfeinerung.

Aufgrund seiner starken lokalen Spannungs-Oszillationen kann das Q1Q1-Element als unbrauchbar klassifiziert werden, vergleiche auch PEERLINGS [169]. Brauchbare Ergebnisse

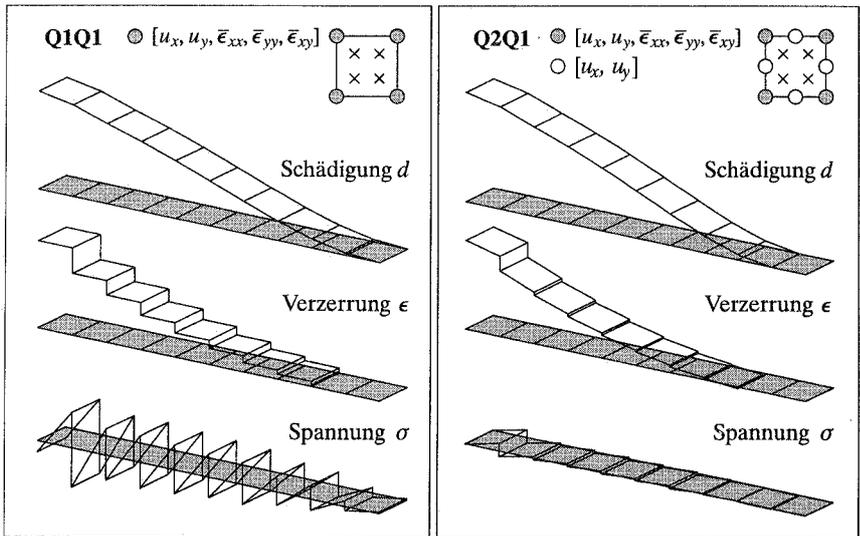


Abbildung 6.2: Einfluß der Interpolationsordnung

liefern hingegen Elemente, deren Interpolation des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} eine Ordnung höher gewählt wird, als die Interpolation des nichtlokalen Verzerrungsfeldes $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$. Damit sind die Interpolationsordnungen des lokalen und des nichtlokalen Verzerrungsfeldes identisch. Im folgenden sollen daher ausschließlich Q2Q1-Elemente in Kombination mit einer 2x2 GAUSS-Punkt Integration verwendet werden.

6.4 Konstitutive Gleichungen

6.4.1 Isotrope tensorielle Gradientenschädigung

Die konstitutiven Gleichungen der Gradientenschädigung definieren durch die Spezifizierung des Potentials Ψ^σ einen Zusammenhang zwischen den Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und den lokalen Verzerrungen $\boldsymbol{\epsilon} = \nabla^{sym} \mathbf{u}$. Weiterhin läßt sich eine Beziehung zwischen dem dreistufigen Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ und dem Gradienten der nichtlokalen Verzerrungen $\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ durch die Einführung eines zweiten Potentials Ψ^τ angeben.

$$\Psi^\sigma = \Psi^\sigma(\boldsymbol{\epsilon}, d) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : [1 - d] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \Psi^\tau = \Psi^\tau(\nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}) = \frac{1}{2} c \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} : \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.24)$$

Sowohl der aufgrund der Schädigung modifizierte Elastizitätstensor, der entsprechend Kapitel 3.3.2 zu $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{ed} = [1 - d] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$ gewählt wurde, als auch der sechsstufige Tensor des internen Längeneinflusses $\boldsymbol{\mathcal{C}} = c \boldsymbol{\mathcal{I}}^{(6)}$ stellen in diesem Zusammenhang richtungsunabhängige Größen dar. Die Schädigung kann dementsprechend durch die skalarwertige Größe d beschrieben werden, während sich die Mikrostruktur allein durch den skalarwertigen Gradientenparameter c charakterisieren läßt. Die konjugierten Größen zu den lokalen Verzerrungen, der Schädigungsvariablen und dem Gradienten der nichtlokalen Verzerrungen ergeben sich dementsprechend wie folgt.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} = [1 - d] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad Y = -\frac{\partial \Psi^\sigma}{\partial d} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \Psi^\tau}{\partial \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}} = c \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (6.25)$$

In der Schädigungsfunktion Φ findet der nichtlokale Charakter der konstitutiven Gleichungen Berücksichtigung. Sie soll als Differenz einer Funktion ϕ der nichtlokalen äquivalenten Verzerrung $\bar{\eta}$ und der Schädigungsvariablen d angenommen werden.

$$\Phi(\bar{\eta}, d) = \phi(\bar{\eta}) - d \leq 0 \quad \text{mit} \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}(\bar{\boldsymbol{\epsilon}}) \quad (6.26)$$

In dieser Form der Darstellung läßt sich die nichtlokale äquivalente Verzerrung $\bar{\eta}$ als Funktion des nichtlokalen Verzerrungstensors $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ berechnen, während von PEERLINGS [169] entsprechend der zweiten Zeile von Tabelle 6.1 direkt eine Definitionsgleichung für die skalarwertige, nichtlokale äquivalente Verzerrung $\bar{\eta}$ verwendet wurde. Das hier vorgestellte, verallgemeinerte Modell kann sich also in Abhängigkeit von der Wahl der äquivalenten Verzerrung $\bar{\eta}$ erheblich von dem Originalmodell von PEERLINGS [169] unterscheiden. Die KUHN-TUCKER Bedingungen und Konsistenzbedingung ergeben sich in der gewohnten Form.

$$\dot{\kappa} \geq 0 \quad \dot{\Phi} \leq 0 \quad \dot{\kappa} \Phi = 0 \quad \dot{\kappa} \dot{\Phi} = 0 \quad (6.27)$$

Ihre Auswertung nach SIMO & JU [190] führt direkt auf die explizite Schädigungsdefinitionsgleichung entsprechend Kapitel 3.3.2.

$$d = \phi(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = \max_{-\infty \leq t \leq \tau} (\bar{\eta}(t), \kappa_0) \quad (6.28)$$

In Analogie zur lokalen Schädigung ergibt sich der Geschichtsparameter κ als Maximalwert des Schädigungsschwellwertes κ_0 und der nichtlokalen äquivalenten Verzerrung $\bar{\eta}$. Der in Kapitel 6.3.3 eingeführte Sekantentensor \mathcal{E}^{ed} und der vierstufige Tensor der Schädigungsänderung $\bar{\mathcal{E}}^{ed}$, die zur Linearisierung des zugehörigen Randwertproblems erforderlich werden, nehmen die folgende Form an.

$$\mathcal{E}^{ed} = \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = [1 - d] \mathcal{E}^{el} \quad \bar{\mathcal{E}}^{ed} = \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\epsilon}} = -\frac{1}{H} \boldsymbol{\mu} \otimes \bar{\nu} \quad (6.29)$$

Hierbei wurde in Anlehnung an Kapitel 3 von der Abkürzung $1/H := \partial \phi / \partial \kappa$ sowie den Definitionen

$$\boldsymbol{\mu} := \frac{\sigma}{1 - d} = \bar{\sigma} \quad \text{und} \quad \bar{\nu} := \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\epsilon}} = \frac{\partial \kappa}{\partial \bar{\eta}} \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{\epsilon}} \quad (6.30)$$

entsprechend Gleichung (3.45) und (3.46) Gebrauch gemacht. In Tabelle 6.2 sind die konstitutiven Gleichungen der isotropen Gradientenschädigung aus Gründen der Übersichtlichkeit noch einmal zusammengefaßt.

Freie Energie	$\Psi^\sigma = \Psi^\sigma(\epsilon, d) = 1/2 \epsilon : [1 - d] \mathcal{E}^{el} : \epsilon$
Nichtlokales Verzerrungspotential	$\Psi^\tau = \Psi^\tau(\nabla \bar{\epsilon}) = 1/2 \quad c \nabla \bar{\epsilon} : \nabla \bar{\epsilon}$
Spannungen	$\sigma = \partial \Psi^\sigma / \partial \epsilon = [1 - d] \mathcal{E}^{el} : \epsilon$
Energiefreisetzungsrate	$Y = -\partial \Psi^\sigma / \partial d = 1/2 \quad \epsilon : \mathcal{E}^{el} : \epsilon$
Konjugierte Größe	$\tau = \partial \Psi^\tau / \partial \nabla \bar{\epsilon} = c \nabla \bar{\epsilon}$
Schädigungsfunktion	$\Phi = \phi(\bar{\eta}) - d \leq 0 \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}(\bar{\epsilon})$
KUHN-TUCKER Bedingungen	$\dot{\kappa} \geq 0 \quad \Phi \leq 0 \quad \dot{\kappa} \Phi = 0$
Konsistenzbedingung	$\dot{\kappa} \dot{\Phi} = 0$
Schädigungsevolution	$d = \phi(\kappa) \quad \kappa = \max_{-\infty \leq t \leq \tau} (\bar{\eta}(t), \kappa_0)$
Sekantentensor	$\mathcal{E}^{ed} = \partial \sigma / \partial \epsilon = [1 - d] \mathcal{E}^{el}$
Schädigungsänderung	$\bar{\mathcal{E}}^{ed} = \partial \sigma / \partial \bar{\epsilon} = -\frac{1}{H} \boldsymbol{\mu} \otimes \bar{\nu}$
Tensor der internen Länge	$\mathcal{C} = \partial \tau / \partial \nabla \bar{\epsilon} = c \mathcal{I}^{(6)}$

Tabelle 6.2: Isotrope Gradientenschädigung - Konstitutive Gleichungen

6.4.2 Microplane-basierte tensorielle Gradientenschädigung

In Analogie zu dem in Abschnitt 4.5.1 eingeführten Microplane Schädigungsmodell mit drei Schädigungsvariablen d_V, d_D und d_T basiert die im folgenden diskutierte anisotrope Gradientenschädigung auf der Annahme der kinematischen Projektion. Diese Annahme soll nun sowohl für den lokalen als auch für den nichtlokalen Verzerrungstensor Gültigkeit besitzen.

$$\begin{aligned} \epsilon_V &= \mathbf{V} : \epsilon & \epsilon_D &= \mathbf{D} : \epsilon & \epsilon_T &= \mathbf{T} : \epsilon \\ \bar{\epsilon}_V &= \mathbf{V} : \bar{\epsilon} & \bar{\epsilon}_D &= \mathbf{D} : \bar{\epsilon} & \bar{\epsilon}_T &= \mathbf{T} : \bar{\epsilon} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Während sich das Potential Ψ^σ aus der Raumwinkelintegration der Microplane Energien Ψ^{mic} ergibt,

$$\Psi^\sigma = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Psi^{mic} d\Omega \quad (6.32)$$

wobei

$$\Psi^{mic} = [1 - d_V] W_V(\epsilon_V) + [1 - d_D] W_D(\epsilon_D) + [1 - d_T] W_T(\epsilon_T) \quad (6.33)$$

soll das zweite Potential Ψ^τ entsprechend dem isotropen Modell direkt auf der Makroebene formuliert werden.

$$\Psi^\tau = \Psi^\tau(\nabla \bar{\epsilon}) = \frac{1}{2} \nabla \bar{\epsilon} : \mathbf{C} : \nabla \bar{\epsilon} \quad (6.34)$$

Damit ergeben sich die Spannungskomponenten,

$$\begin{aligned} \sigma_V &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_V} = \mathcal{E}_V^{ed} \epsilon_V & \mathcal{E}_V^{ed} &:= [1 - d_V] \mathcal{E}_V^{el} \\ \sigma_D &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_D} = \mathcal{E}_D^{ed} \epsilon_D & \mathcal{E}_D^{ed} &:= [1 - d_D] \mathcal{E}_D^{el} \\ \sigma_T &:= \frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial \epsilon_T} = \mathcal{E}_T^{ed} \cdot \epsilon_T & \mathcal{E}_T^{ed} &:= [1 - d_T] \mathcal{E}_T^{el} \end{aligned} \quad (6.35)$$

die Anteile der Energiefreisetzungsrates,

$$Y_V := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_V} = W_V \quad Y_D := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_D} = W_D \quad Y_T := -\frac{\partial \Psi^{mic}}{\partial d_T} = W_T \quad (6.36)$$

und der dreistufige Spannungstensor τ

$$\tau = \frac{\partial \Psi^\tau}{\partial \nabla \bar{\epsilon}} = \mathbf{C} : \nabla \bar{\epsilon} \quad (6.37)$$

unmittelbar als konjugierte Größen zu den Primärvariablen. Die Fließfunktionen werden in Anlehnung an das isotrope Modell als Differenzen von den Funktionen der nichtlokalen Energiefreisetzungsrates \bar{Y}_V , \bar{Y}_D und \bar{Y}_T

$$\bar{Y}_V := \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_V \mathcal{E}_V^{el} \bar{\epsilon}_V \quad \bar{Y}_D := \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_D \mathcal{E}_D^{el} \bar{\epsilon}_D \quad \bar{Y}_T := \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_T \cdot \mathcal{E}_T^{el} \bar{\epsilon}_T \quad (6.38)$$

und den zugehörigen Schädigungsvariablen d_V, d_D und d_T eingeführt.

$$\begin{aligned} \Phi_V(\bar{Y}_V, d_V) &:= \phi_V(\bar{Y}_V) - d_V \leq 0 \\ \Phi_D(\bar{Y}_D, d_D) &:= \phi_D(\bar{Y}_D) - d_D \leq 0 \\ \Phi_T(\bar{Y}_T, d_T) &:= \phi_T(\bar{Y}_T) - d_T \leq 0 \end{aligned} \quad (6.39)$$

Wiederum ist der Be- und Entlastungsprozeß durch die KUHN-TUCKER Bedingungen und die Konsistenzbedingung charakterisiert,

$$\begin{aligned} \Phi_V \leq 0 & \quad \dot{\kappa}_V \geq 0 & \quad \Phi_V \dot{\kappa}_V = 0 & \quad \dot{\Phi}_V \dot{\kappa}_V = 0 \\ \Phi_D \leq 0 & \quad \dot{\kappa}_D \geq 0 & \quad \Phi_D \dot{\kappa}_D = 0 & \quad \dot{\Phi}_D \dot{\kappa}_D = 0 \\ \Phi_T \leq 0 & \quad \dot{\kappa}_T \geq 0 & \quad \Phi_T \dot{\kappa}_T = 0 & \quad \dot{\Phi}_T \dot{\kappa}_T = 0 \end{aligned} \quad (6.40)$$

deren Auswertung die nachfolgende klassische explizite Darstellung der Schädigungsparameter ermöglicht.

$$\begin{aligned} d_V &= \phi_V(\kappa_V) & \text{mit} & & \kappa_V &= \max_{-\infty < t < \tau} (\bar{Y}_V(t), \kappa_V^0) \\ d_D &= \phi_D(\kappa_D) & \text{mit} & & \kappa_D &= \max_{-\infty < t < \tau} (\bar{Y}_D(t), \kappa_D^0) \\ d_T &= \phi_T(\kappa_T) & \text{mit} & & \kappa_T &= \max_{-\infty < t < \tau} (\bar{Y}_T(t), \kappa_T^0) \end{aligned} \quad (6.41)$$

Der Sekantentensor der anisotropen Elasto-Schädigung \mathcal{E}^{ed} sowie der vierstufige Tensor der Schädigungsänderung $\bar{\mathcal{E}}^{ed}$ nehmen damit die folgende integrale Darstellungsform an, vergleiche auch KUHLE, RAMM & DE BORST [118].

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{ed} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathcal{E}_V^{ed} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \mathcal{E}_D^{ed} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{T}^T \cdot \mathcal{E}_T^{ed} \cdot \mathbf{T} d\Omega \\ \bar{\mathcal{E}}^{ed} &= \frac{\partial \sigma}{\partial \bar{\epsilon}} = -\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_V}{\partial \kappa_V} \frac{\sigma_V^2}{[1-d_V]^2} \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + \frac{\partial \phi_D}{\partial \kappa_D} \frac{\sigma_D^2}{[1-d_D]^2} \mathbf{D} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{T}^T \cdot \frac{\partial \phi_T}{\partial \kappa_T} \frac{\sigma_T \otimes \sigma_T}{[1-d_T]^2} \cdot \mathbf{T} d\Omega \end{aligned} \quad (6.42)$$

6.5 Beispiele

6.5.1 Modellproblem Zugstab

Die regularisierende Wirkung der Gradientenerweiterung soll nachfolgend anhand eines 100mm langen Zugstabes illustriert werden, dessen Elastizitätsmodul zu $E=20000\text{N/mm}^2$ gewählt wird. Das Schädigungswachstum wird durch die folgende Gleichung abgebildet,

$$d = \phi(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} [1 - \alpha + \alpha \exp[\beta[\kappa_0 - \kappa]]]$$

die ein exponentielles Entfestigungsverhalten beschreibt. Damit wird das Schädigungswachstum durch den Parameter $\beta = 650$, den Schädigungsschwellwert $\kappa_0 = 0.0001$ sowie

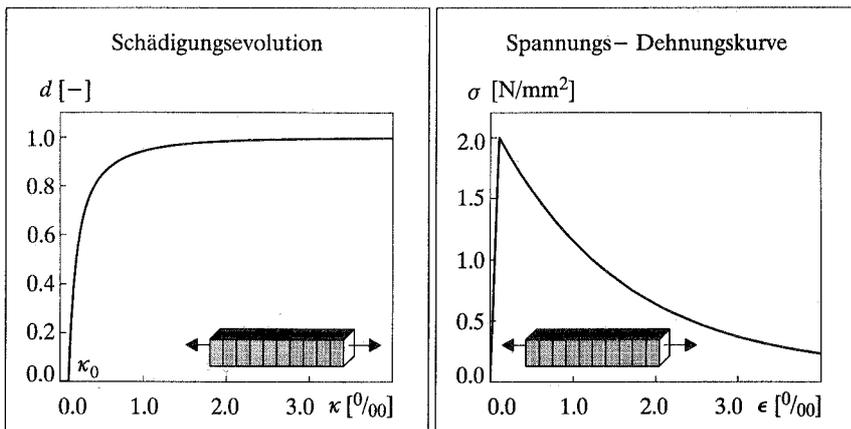


Abbildung 6.3: Exponentielle Schädigung

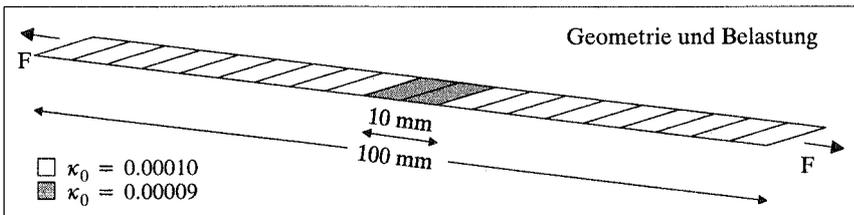


Abbildung 6.4: Modellproblem Zugstab

eine maximal mögliche Degradation von $\alpha = 0.96$ charakterisiert. Abbildung 6.3 zeigt die zugehörige Evolution der Schädigungsvariablen d aufgetragen über der internen Variablen κ . Das resultierende Spannungs–Dehnungsverhalten für ein homogenes, eindimensionales Problem ist in Abbildung 6.3, rechts, skizziert.

Die Geometrie des untersuchten Modellproblems kann Abbildung 6.4 entnommen werden. Um eine Lokalisierungszone zu initiieren, wird in der Mitte des Stabes eine 10mm breite Imperfektion eingeführt, für die der Schädigungsschwellwert κ_0 um 10 % reduziert wird. Die Evolution der lokalen Verzerrung ϵ sowie der Schädigungsvariablen d ist in Abbildung 6.5 skizziert. Die Berechnungen basieren auf einer Wahl des Gradientenparameters von $\sqrt{c} = 2\text{mm}$. Auffällig ist die Konzentration der Verzerrungen in einer immer schmalwerdenden Versagenszone in Stabmitte. Im Gegensatz dazu wächst der Einflußbereich der Schädigung kontinuierlich. Sowohl die Verzerrungen als auch der Schädigungsparameter nehmen aufgrund der Gradientenerweiterung eine Zone ein, deren Breite größer ist, als die Elementbreite der gewählten Diskretisierung.

In Abbildung 6.6 sind die Spannungs–Verschiebungskurven und die Schädigungsverteilung für unterschiedlich feine Diskretisierungen gegenüber gestellt. Aufgrund der Berücksichtigung höherwertiger Gradienten in der Schädigungsfunktion zeichnet sich das Antwortver-

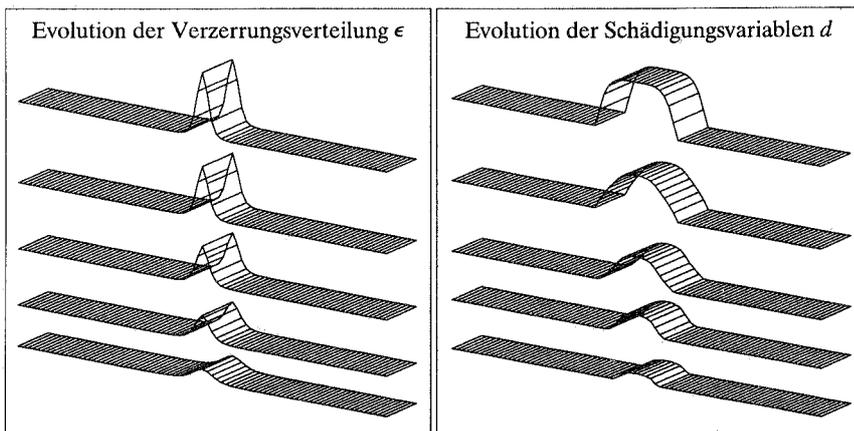


Abbildung 6.5: Zugstab – Evolution der Verzerrungen und der Schädigung

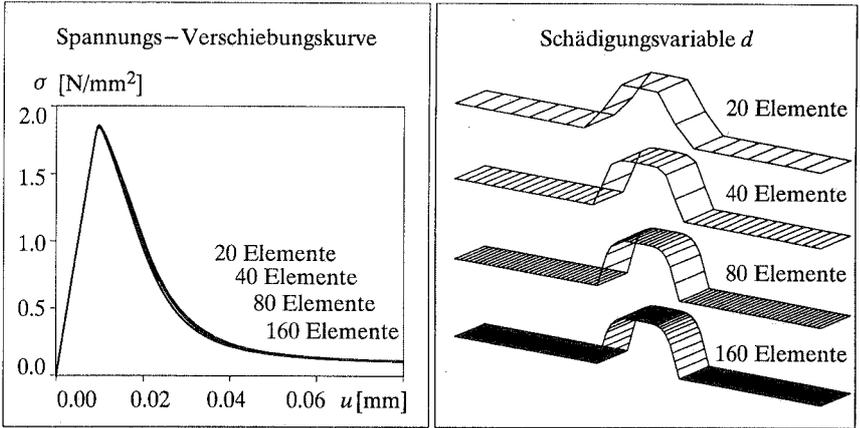


Abbildung 6.6: Zugstab – Netzunabhängigkeit der Lösung

halten der Diskretisierungen mit 20, 40, 80 und 160 Elementen durch nahezu deckungsgleiche Spannungs-Verschiebungskurven sowie eine konstante charakteristische Energie-dissipation aus, die unabhängig von der gewählten Diskretisierung ist. Die bemerkenswert identische Verteilung der Schädigungsvariablen für die unterschiedlichen Diskretisierungen unterstreicht die regularisierende Wirkung der Gradientenerweiterung. Während die grobe Diskretisierung mit nur 20 Elementen noch eine leichte Abweichung von den anderen Ergebnissen liefert, wird mit den drei feineren Diskretisierungen eine nahezu identische Schädigungsverteilung erreicht.

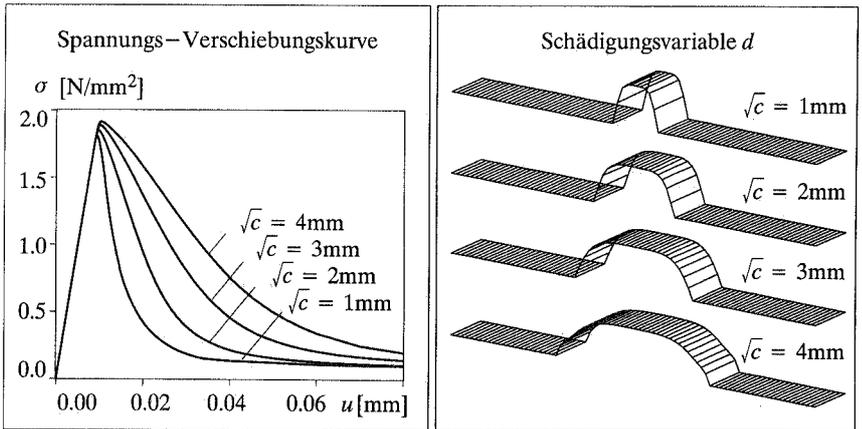


Abbildung 6.7: Zugstab – Einfluß der internen Länge

Der Einfluß des Gradientenparameters c wird in Abbildung 6.7 verdeutlicht. Dargestellt sind sowohl die Spannungs–Verschiebungskurven als auch die Schädigungsverteilungen einer Diskretisierung mit 80 Elementen für unterschiedliche Gradientenparameter $\sqrt{c} = 1\text{mm}$, $\sqrt{c} = 2\text{mm}$, $\sqrt{c} = 3\text{mm}$ und $\sqrt{c} = 4\text{mm}$. Mit wachsendem Gradientenparameter steigt auch die maximal ertragbare Spannung, da die Schädigung über eine breitere Versagenszone verteilt wird und sich somit eine globale Entfestigung erst zu einem etwas späteren Zeitpunkt einstellen kann. Als natürliche Konsequenz ist ein größerer Gradientenparameter dementsprechend mit einer größeren Energiedissipation verbunden. Die Verteilung der Schädigungsvariablen über die Stablänge demonstriert eindrucksvoll den Zusammenhang zwischen dem Gradientenparameter und dem Quadrat der internen Länge $c \approx l^2$ für dieses eindimensionale Beispiel. Wie aus Abbildung 6.7, rechts, deutlich wird, wächst der Einflußbereich der Schädigung quadratisch mit einer linearen Änderung des Gradientenparameters.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das Modellproblem des Zugstabes den regularisierenden Einfluß der Gradientenerweiterung bestätigen konnte. Für hinreichend feine Vernetzungen kann das Antwortverhalten als nahezu unabhängig von der gewählten Diskretisierung angesehen werden. Bei Netzverfeinerung konvergiert die dissipierte Energie gegen einen charakteristischen konstanten Wert, dessen Betrag stark von der Wahl des Gradientenparameters geprägt ist. Es konnte numerisch ein quadratischer Zusammenhang zwischen der internen Länge und dem Gradientenparameter c verifiziert werden. Die Wahl des Gradientenparameters wirkt sich somit unmittelbar auf die Breite der Lokalisierungszone aus.

6.5.2 L–förmige Scheibe

Abschließend wird eine von LACKNER [121], HUEMER [92] und MENRATH [146] untersuchte L–förmige Scheibe mit Hilfe des gradientenerweiterten Schädigungsmodells untersucht.

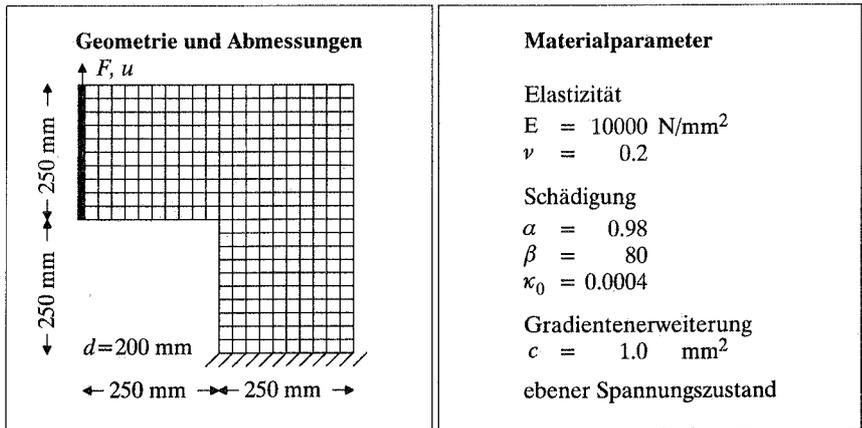


Abbildung 6.8: L–förmige Scheibe – Geometrie und Materialparameter

Die Abmessungen und die zugrunde gelegten Materialdaten des bekannten Benchmark-problems können Abbildung 6.8 entnommen werden. Die Struktur zeichnet sich durch eine unverschiebliche Lagerung des horizontalen Randes des vertikalen Schenkels aus. Auf den vertikalen Rand des horizontalen Schenkels wird eine gleichförmige vertikale Verschiebung aufgebracht. Die horizontale Verschiebung dieses Randes ist hingegen nicht behindert. Der Simulation liegt ein ebener Spannungszustand zugrunde, der gemäß DE BORST [32] algorithmisch umgesetzt wurde. Versuchsergebnissen von HOPSTETTER zufolge wird die Scheibe unter der eingprägten Vertikalverschiebung primär auf Zug beansprucht. Der Versagensvorgang beginnt mit der Initiierung eines Zugrisses in der einspringenden Ecke der Scheibe. Dieser Riß ist leicht gegen die Horizontale geneigt. In einiger Entfernung von der Rißwurzel ändert sich die Richtung des Risses, der dann nahezu horizontal bis zum gegenüberliegenden Scheibenrand fortschreitet.

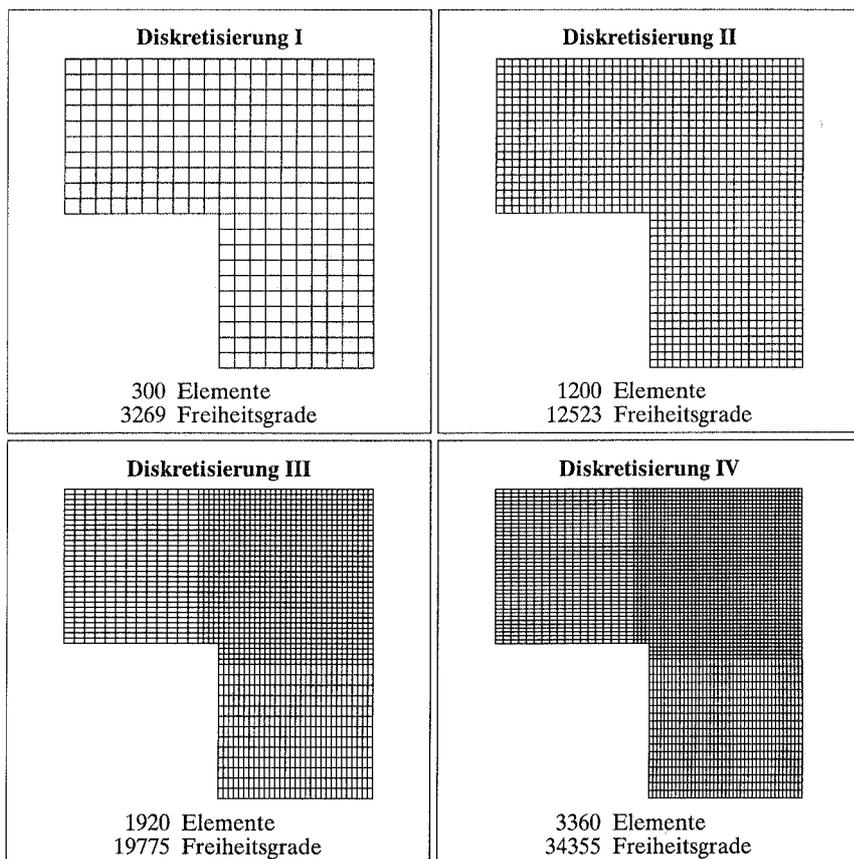


Abbildung 6.9: L-förmige Scheibe – Unterschiedliche Diskretisierungen

Die elastischen Materialparameter werden in Analogie zu LACKNER [121] und HUEMER [92] zu $E = 10000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu = 0.2$ gewählt. Im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen in der Literatur, die ausschließlich mit plastizitätsbasierten Modellen durchgeführt worden sind, soll hier ein exponentielles Schädigungsmodell mit einer Schädigungsevolution von

$$d = \phi(\kappa) = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} [1 - \alpha + \alpha \exp[\beta(\kappa_0 - \kappa)]]$$

zugrunde gelegt werden, vergleiche Abbildung 6.3. Der Parameter β , die maximal mögliche Degradation α und der Schädigungsschwellwert κ_0 werden zu $\beta = 80$, $\alpha = 0.98$ und $\kappa_0 = 0.0004$ gewählt. In Anlehnung an PEERLINGS [169] wird eine äquivalente Verzerrung vom VON MISES-Typ verwendet. Es gilt dementsprechend

$$\eta = \eta(\bar{\epsilon}) = \frac{k-1}{2k} \frac{I_1}{[1-2\nu]} + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{[k-1]^2}{[1-2\nu]^2} I_1^2 + \frac{12k}{[1+\nu]^2} J_2} \quad (6.43)$$

wobei $I_1 = I_1(\bar{\epsilon})$ und $J_2 = J_2(\bar{\epsilon})$ gemäß (A.10) und (A.11) die erste Invariante des nichtlokalen Verzerrungstensors und die zweite Invariante seines Deviators beschreiben. Die hier getroffene Wahl von $k = 10$ ermöglicht die Abbildung des unterschiedlichen Zug- und Druckverhaltens von Beton.

Die numerische Simulation erfolgt mit vier unterschiedlich feinen Diskretisierungen, die in Abbildung 6.9 gegenüber gestellt sind. Während die größte Diskretisierung aus nur 300 Elementen besteht, setzen sich die beiden mittleren und die feine Diskretisierung aus 1200, 1920 und 3360 Elementen zusammen. Bei einer serendipity-basierten Verschiebungsinterpolation in Kombination mit einer bilinearen Verzerrungsinterpolation entsprechend Abschnitt 6.3.4 ergeben sich damit für die grobe Diskretisierung 3269 Freiheitsgrade. Die feineren Diskretisierungen erfordern jeweils 12523, 19775 und 34355 Freiheitsgrade.

Das Antwortverhalten der vier unterschiedlichen Diskretisierungen kann Abbildung 6.10, links, entnommen werden. Während die groben Netze der Diskretisierungen I und II im

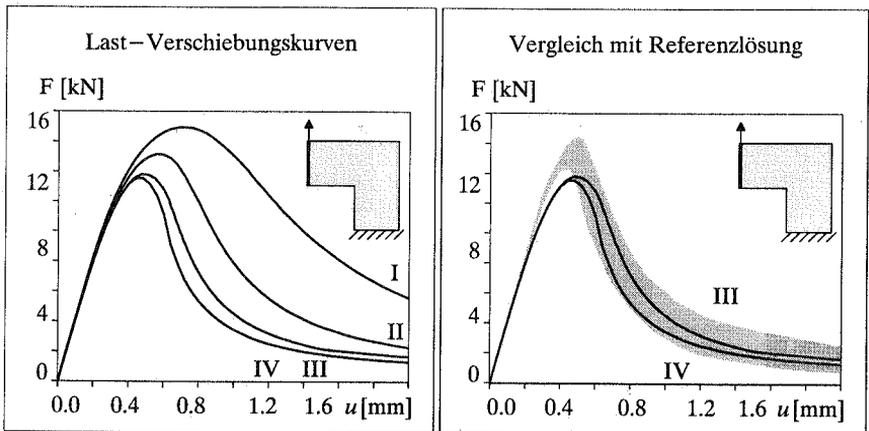


Abbildung 6.10: L-förmige Scheibe – Last-Verschiebungskurven

Verhältnis zu den Diskretisierungen III und IV eine deutliche Abweichung von der Traglast aufweisen, liefern die beiden feinen Netze nahezu identische Last-Verschiebungskurven. Das von HUEMER [92] ermittelte Antwortverhalten, das auf einem anisotropen Plastizitätsmodell mit Berücksichtigung der Bruchenergie basiert, ist in Abbildung 6.10, rechts, grau hinterlegt markiert. Die Antwort des gradientenerweiterten Schädigungsmodells weist für die beiden feinen Diskretisierungen III und IV eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit den aus der Literatur bekannten Ergebnissen auf. Die deutlichen Abweichungen der Diskretisierungen I und II sind hingegen auf die ausgesprochen grobe Vernetzung zurückzuführen.

Abbildung 6.11 zeigt die deformierten Strukturen, deren Verschiebungen in 25-facher Überhöhung dargestellt sind. Das experimentell beobachtete Versagensverhalten wird von den Netzen III und IV sehr gut erfaßt. Die Rißinitiierung in der einspringenden Ecke, die

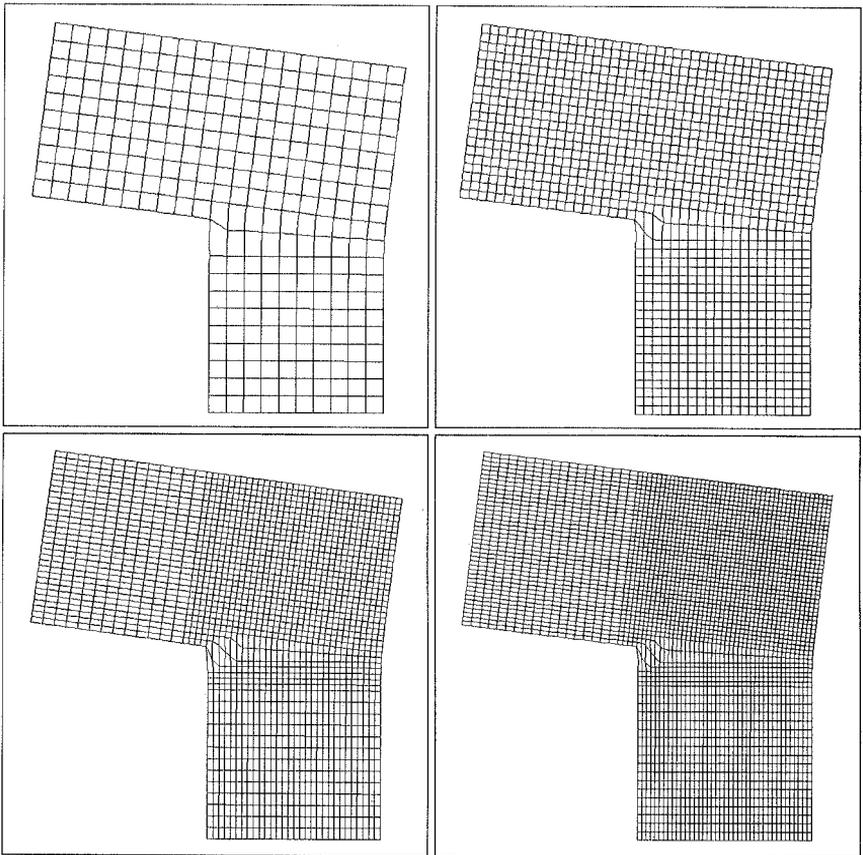


Abbildung 6.11: L-förmige Scheibe – Deformierte Strukturen

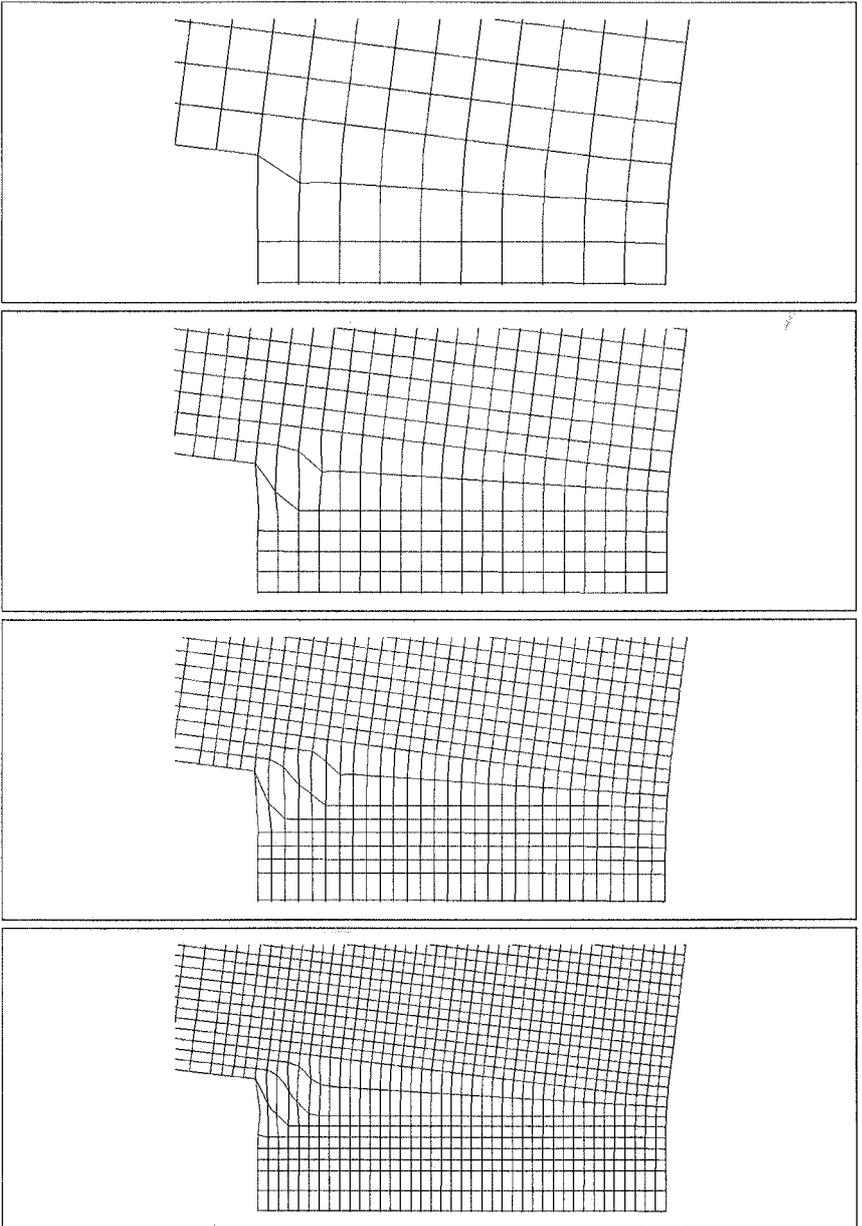


Abbildung 6.12: L-förmige Scheibe – Deformierte Strukturen, Detailansicht

Richtungsänderung des Risses sowie der anschließende horizontale Rißverlauf entsprechen weitestgehend den experimentellen Beobachtungen. Die Diskretisierung I ist hingegen nicht in der Lage, die Richtungsänderung des Risses zu erfassen, wie auch die Detailansicht aus Abbildung 6.12 verdeutlicht. Der Riß verläuft bereits bei seiner Initiierung nahezu horizontal und ändert seine Richtung nicht, so daß mit dem Modell I ein grundsätzlich anderes mechanisches Tragverhalten simuliert wird.

Insbesondere die Richtungsänderung des Risses, deren Modellierung in der Regel Probleme bereitet, kann bei ausreichend feiner Diskretisierung bemerkenswert exakt erfaßt werden. Diesen Sachverhalt verdeutlichen auch die zugehörigen Schädigungsverteilungen, die in Abbildung 6.13 gegenüber gestellt sind. Zum Ende der Belastungsgeschichte konvergiert die Schädigungsvariable in der Rißzone gegen ihren maximal erreichbaren Wert von $d = 0.98$. In der Detailansicht 6.14 ist zu erkennen, daß die Zone maximaler Schädigungskon-

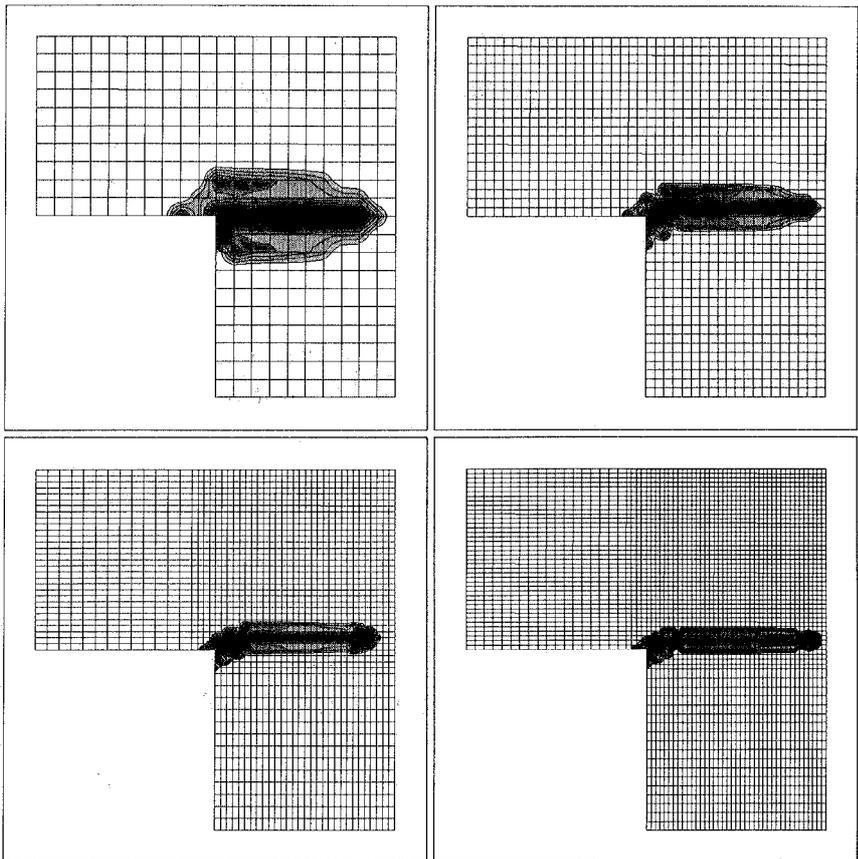


Abbildung 6.13: L-förmige Scheibe – Schädigungsverteilung

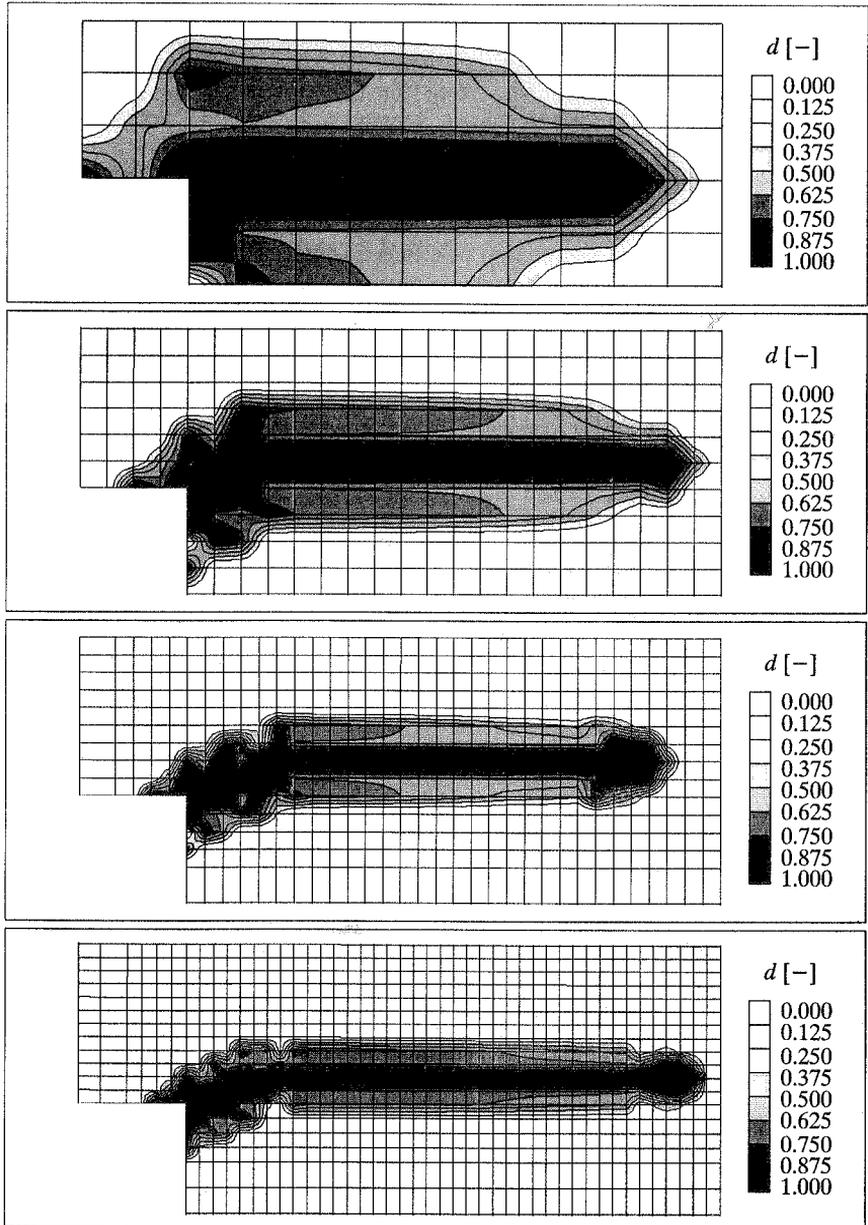


Abbildung 6.14: L-förmige Scheibe – Schädigungsverteilung, Detailansicht

zentration bei der Diskretisierung I auf Höhe des unteren Randes des horizontalen Schenkels verläuft, während die Diskretisierungen II, III und IV, entsprechend den Beobachtungen, eine um ca. 12,5 cm nach oben verschobene Schädigungszone aufweisen.

Die Schädigungsverteilungen verdeutlichen jedoch auch einen Nachteil des vorgestellten Modells. Im Nachversagensbereich kann eine künstliche Aufweitung der Versagenszone beobachtet werden. An der Risßspitze kurz vor dem rechten Scheibenrand weist die Schädigungsverteilung hohe räumliche Gradienten auf. Im Bereich der einspringenden Ecke hingegen hat bereits eine Aufweitung der Schädigungszone stattgefunden, die auch für das Modellproblem des Zugstabes beobachtet werden konnte. Diese physikalisch nicht vorhandene Aufweitung der Lokalisierungszone ist auf einen konstanten Gradientenparameter c zurückzuführen. Sie konnte von GEERS [81] durch Berücksichtigung eines transienten Einflußbereiches, dessen Größe im Verlauf der Belastungsgeschichte abnimmt, vermieden werden. Alternativ wurde von PEERLINGS [169] ein Entfernen der vollständig geschädigten Finiten Elemente aus dem System vorgeschlagen.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß das vorgestellte gradientenerweiterte Schädigungsmodell in der Lage ist, die experimentell beobachteten Versagensphänomene quantitativ zu erfassen. Die ermittelten Last-Verschiebungskurven stimmen auch qualitativ mit den aus der Literatur bekannten Vergleichsrechnungen überein. Das Beispiel der L-förmigen Scheibe konnte verdeutlichen, daß in der Nähe der Risßzone eine extrem feine Diskretisierung erforderlich ist, um das komplexe Verhalten, insbesondere im Bereich der Risßwurzel, wirklichkeitsnah beschreiben zu können. Mit einer feinen Diskretisierung läßt sich eine Richtungsänderung des Risses abbilden, das simulierte Antwortverhalten ist unabhängig von der gewählten Diskretisierung.

6.5.3 Betondruckversuch

Die Wirkungsweise der gradientenerweiterten microplane-basierten Elasto-Schädigung soll anhand der Simulation eines Betondruckversuches untersucht werden. Die Abmessungen sowie die Materialdaten des Betonwürfels sind Abbildung 6.15 zu entnehmen. Der Probekörper ist an seinem oberen und unteren Rand reibungsbehaftet zwischen zwei Belastungsplatten eingespannt, die im Verlauf der Belastungsgeschichte verschiebungsgesteuert aufeinander zu bewegt werden. Es gelte der ebene Verzerrungszustand. Die elastischen Materialparameter werden gemäß den Materialparametern von Beton zu $E=30000 \text{ N/mm}^2$ und $\nu=0.2$ gewählt, wobei der frei wählbare deviatorische Microplane Elastizitätsmodul zu $\mathcal{E}_D^{el}=0 \text{ N/mm}^2$ angenommen wird, so daß $\mathcal{E}_V^{el}=50000 \text{ N/mm}^2$ und $\mathcal{E}_T^{el}=41667 \text{ N/mm}^2$. Weiterhin wird mit

$$d = \phi(\kappa) = 1 - \exp \left[- \left[\frac{\kappa}{a} \right]^p \right]$$

ein exponentielles Schädigungswachstum auf der Mikroebene postuliert. Um dem unterschiedlichen Zug- und Druckverhalten Rechenschaft zu tragen, werden für die volumetrische Schädigungsformulierung unabhängige Schädigungsgesetze für den Extensions- und Kompressionsbereich definiert, so daß $a_V^+ = 0.00009$, $a_V^- = 0.62500$, $p_V^+ = 0.5$ und $p_V^- = 0.5$, während die tangentielle Schädigung durch $a_T = 0.00333$ und $p_T = 0.5$ charakterisiert ist. Der Einfluß der Gradientenerweiterung sei isotrop mit $\mathcal{C} = c \mathcal{I}^{(6)}$, so daß das Konstitutivgesetz des nichtlokalen Verzerrungsproblems die Form

$$\boldsymbol{\tau} = c \nabla \bar{\boldsymbol{\epsilon}}$$

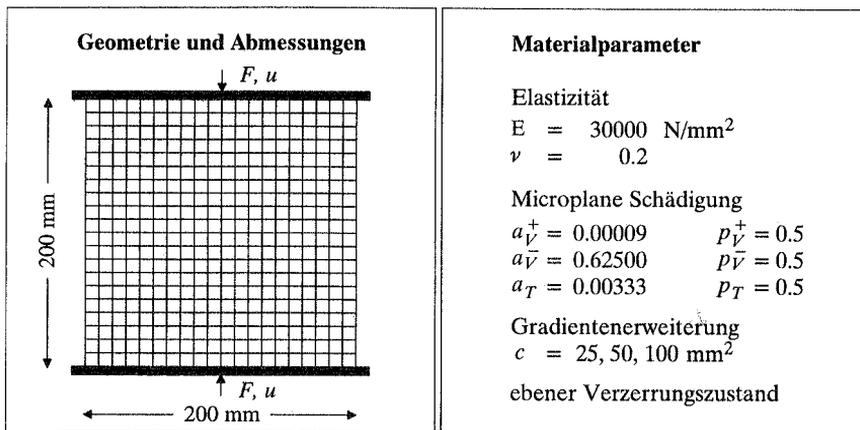


Abbildung 6.15: Betondruckversuch – Geometrie und Materialparameter

annimmt. Der Betonprobekörper wird jeweils mit 400, 900 und 1600 Q2Q1 Elementen abgebildet. Dies entspricht einer Diskretisierung mit 3721, 8281 und 14641 Freiheitsgraden. Abbildung 6.16, links zeigt die resultierenden Last–Verschiebungskurven der drei unterschiedlichen Diskretisierungen bei einem konstanten Gradientenparameter von $c=50 \text{ mm}^2$. Die zugehörigen Verteilungen der nichtlokalen Normalverzerrungen in Belastungsrichtung sind in Abbildung 6.17 gegenüber gestellt. Sie dokumentieren das für reibungsbehaftet gelagerte Betonproben charakteristische gleitflächenförmige Schubversagen unter Druckbeanspruchung. Offensichtlich sind die Ergebnisse unabhängig von der zugrunde liegenden Diskretisierung. Sowohl die zugehörigen Last–Verschiebungskurven als auch die Verteilung

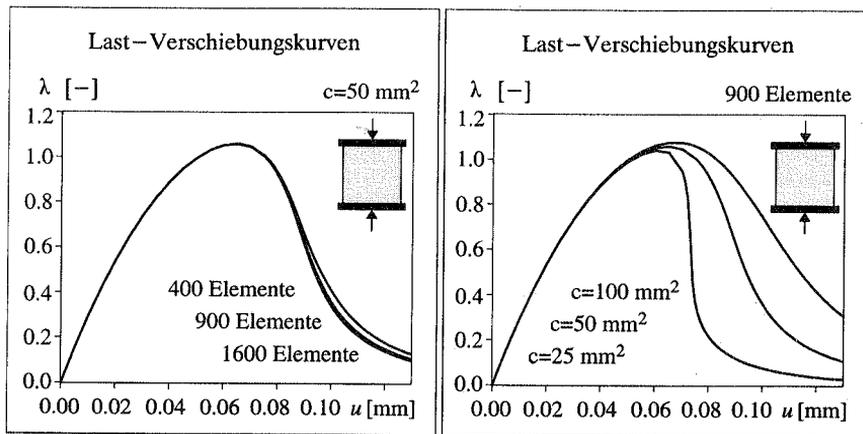


Abbildung 6.16: Betondruckversuch – Last–Verschiebungskurven

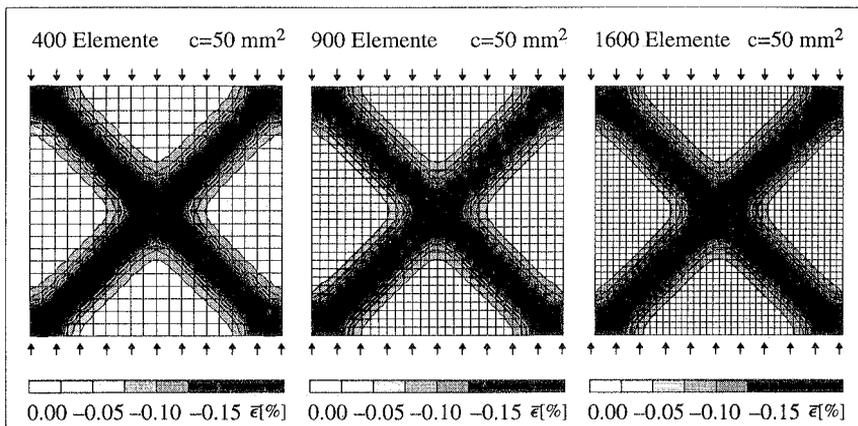


Abbildung 6.17: Betondruckversuch – Nichtlokale Normalverzerrungen

der nichtlokalen Verzerrungen der unterschiedlichen Diskretisierungen können als nahezu identisch bezeichnet werden. Die Versagenszone, die durch eine Konzentration der nichtlokalen Verzerrungen gekennzeichnet ist, nimmt aufgrund der Gradientenerweiterung eine Breite ein, die sich über mehrere Elementreihen erstreckt.

In einem zweiten Simulationsschritt wird der Einfluß des Gradientenparameters c bei einer konstanten Diskretisierung mit 900 Q2Q1 Elementen analysiert. Wie bereits am isotropen eindimensionalen Modellproblem des Zugstabs illustriert, beeinflusst die Wahl des Gradientenparameters die Breite der Versagenszone und damit den Grad der Duktilität des Antwortverhaltens. Diese Tendenz wird anhand der Last-Verschiebungskurven in Abbildung

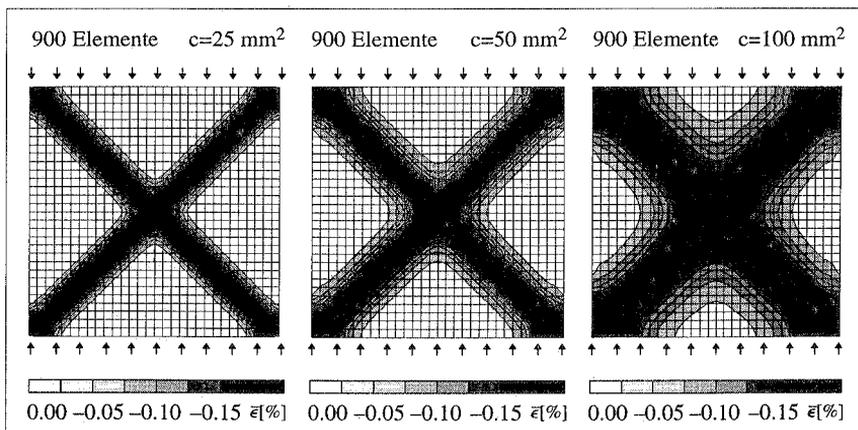


Abbildung 6.18: Betondruckversuch – Nichtlokale Normalverzerrungen

6.16, rechts sowie der Verteilung der nichtlokalen Normalverzerrung in Belastungsrichtung gemäß Abbildung 6.18 verdeutlicht. Mit wachsendem Gradientenparameter c wächst auch die Einflußbreite der Versagenszone. Aufgrund dessen kann sich die Schädigung über einen größeren Bereich erstrecken. Somit verhalten sich weniger Elemente elastisch entlastend, die Strukturantwort wird zunehmend duktiler. Dieses Verhalten wird durch eine leichte Zunahme der Traglast unterstrichen, vergleiche Abbildung 6.16, rechts.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß sich die Tendenz des isotropen eindimensionalen Modellproblems gemäß Abschnitt 6.5.1 auf mehrdimensionale anisotrope Probleme übertragen läßt. Sowohl für isotrope als auch für anisotrope Materialmodelle kann aufgrund der Gradientenerweiterung eine netzunabhängige Lösung mit einer Versagenszone von finiter Breite simuliert werden. Damit konvergiert die bei dem Versagensvorgang freigesetzte Energie bei Netzverfeinerung in Abhängigkeit des Parameters c gegen einen finiten Wert.

In den bisherigen Betrachtungen wurde der Gradientenparameter c als bekannt vorausgesetzt. Die extreme Sensitivität der Lösung bezüglich dieses Parameters verdeutlicht jedoch den Bedarf an Verfahren, mit deren Hilfe der Gradientenparameter in geeigneter Form bestimmt werden kann. In Abschnitt 6.6 soll ein solches Verfahren zur Parameteridentifikation skizziert werden.

6.6 Bestimmung der internen Länge

In den vorhergehenden Abschnitten wurde ausführlich die Formulierung eines *mechanischen* und *mathematischen Modells* diskutiert, das es ermöglichen soll, das Antwortverhalten kohäsiver Reibungsmaterialien im vorkritischen sowie im nachkritischen Bereich hinreichend genau abzubilden. Der Vorgang der Modellbildung wird durch den Prozeß der *Parameteridentifikation* und eine abschließende *Verifikation* des Modells komplettiert. Eine geeignete Bestimmung der Materialparameter, insbesondere des Parameters der internen Länge, der in den bisherigen Betrachtungen als gegeben vorausgesetzt wurde, kann heute noch immer als Herausforderung für die Forschung verstanden werden. In der Literatur wird die interne Länge häufig als Funktion einer für die Mikrostruktur charakteristischen Abmessung angesehen. Für Beton wird in diesem Zusammenhang beispielsweise der dreifache Korndurchmesser als Richtwert angegeben. Im folgenden soll eine Methode vorgestellt werden, die die Bestimmung des Parameters der internen Länge im Rahmen einer inversen Modellierung ermöglicht. Dazu wird angenommen, daß zur Auswertung ein Satz flächenhaft verteilter Daten vorliegt, der beispielsweise mit Hilfe geeigneter optischer Feldmeßmethoden experimentell ermittelt wurde, vergleiche VAN MIER [150] oder auch GEERS [81].

6.6.1 Optimierungsproblem der Parameteridentifikation

Einen klassischen Ansatz zur Auswertung experimentell ermittelter Daten stellt die *Fehlerquadrat-Minimummethode* dar, die eine im gewichteten Mittel optimale Anpassung der Simulationsdaten des Modells an die experimentell ermittelten Versuchsergebnisse liefert. Ein derartiger Ansatz führt in der Regel auf ein mathematisches Optimierungsproblem, das sowohl im Rahmen gradientenfreier Verfahren, wie beispielsweise der Evolutionsstrategie, als auch mittels gradienten-basierter Verfahren numerisch gelöst werden kann. Aufgrund seiner deutlich höheren Effizienz soll hier ein gradienten-basiertes Verfahren in

Kombination mit der Finite Element Methode diskutiert werden, dessen Hauptaufgabe in der Bestimmung des Gradienten der zu minimierenden Zielfunktion liegt. Während von GEERS, DE BORST, PEIJS & MEUWISSEN [83] eine numerische Bestimmung dieses Gradienten mittels Differenzenverfahren vorgeschlagen wird, bietet eine analytische Auswertung basierend auf einer konsistenten *Sensitivitätsanalyse* eine weitaus effizientere Lösungsmöglichkeit. In Kombination mit lokalen finiten Plastizitäts- und Schädigungsmodellen wurden derartige Verfahren bereits erfolgreich eingesetzt, vergleiche ANDRESEN, DANNEMEYER, FRIEBE, MAHNKEN, RITTER & STEIN [4], MAHNKEN & STEIN [138] und MAHNKEN [135], [136]. Nachfolgend soll daher kurz die Bestimmung der internen Länge und weiterer charakteristischer Parameter eines skalaren gradientenerweiterten isotropen Schädigungsmodells entsprechend Zeile zwei aus Tabelle 6.1 skizziert werden, wie sie von MAHNKEN & KUHL [137] vorgestellt wurde.

Im Sinne der mathematischen Programmierung führt die Parameteridentifikation auf ein *inverses Problem*, dessen Ziel die Bestimmung eines Satzes von unbekanntem Materialparametern π ist. Im Gegensatz zum direkten Problem bzw. der Strukturoptimierung werden hierbei sowohl die Strukturantwort, charakterisiert durch das Verschiebungsfeld \mathbf{u} , als auch die Strukturgeometrie \mathbf{s} als bekannt vorausgesetzt, vergleiche Tabelle 6.3.

		gesucht	bekannt
direktes Problem	Strukturanalyse	$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\pi}, \mathbf{s})$	$\boldsymbol{\pi}, \mathbf{s}$
inverses Problem I	Strukturoptimierung	$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\pi})$	$\mathbf{u}, \boldsymbol{\pi}$
inverses Problem II	Parameteridentifikation	$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(\mathbf{s}, \mathbf{u})$	\mathbf{s}, \mathbf{u}

Tabelle 6.3: Direktes und inverses Problem

Die Parameteridentifikation erfolgt durch Minimierung der Zielfunktion $f(\boldsymbol{\pi})$, die sich beispielsweise aus der Summe der Fehlerquadrate der in der Simulation bestimmten Verschiebungsgrößen \mathbf{u} gegenüber den im Experiment gemessenen Verschiebungen $\mathbf{u}^{meß}$ darstellen läßt. Für den hier betrachteten Fall einer inhomogenen, nichtlinearen Strukturantwort ist hierzu die Summation des Fehlers für unterschiedliche Positionen $p = 1, \dots, n_{pos}$ zu unterschiedlichen Zeitschritten $n = 1, \dots, n_{stp}$ durchzuführen.

$$f(\boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{stp}} \sum_{p=1}^{n_{pos}} \| \mathbf{u}(\boldsymbol{\pi})_p^n - \mathbf{u}_p^{n, meß} \|^2 \rightarrow \min_{\boldsymbol{\pi}} f(\boldsymbol{\pi}) \quad (6.44)$$

Vereinfachend wird hier davon ausgegangen, daß die Meßdaten $\mathbf{u}^{meß}$ jeweils zu den gleichen Zeitpunkten vorliegen, wie die Simulationsdaten $\mathbf{u}(\boldsymbol{\pi})$ eines Gleichgewichtspunktes. Dies ist in realen Anwendungen nicht notwendigerweise der Fall, so daß zusätzliche Probleme bei der Abstimmung der Auswertungszeiten auftreten können. Die Minimierung der Zielfunktion (6.44) liefert eine notwendige Bedingung für die Lösung des Optimierungsproblems.

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}} f(\boldsymbol{\pi}) = \sum_{n=1}^{n_{stp}} \sum_{p=1}^{n_{pos}} \| \mathbf{u}(\boldsymbol{\pi})_p^n - \mathbf{u}_p^{n, meß} \| \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{u}_p^n = \mathbf{0} \quad (6.45)$$

Hierbei charakterisiert der Term $\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{u}_p^n$ die Sensitivität der Verschiebungsantwort des Punktes p zum Zeitpunkt n bezüglich der Materialparameter $\boldsymbol{\pi}$. Diese Sensitivität läßt

sich indirekt aus dem Gradienten des Residuums bezüglich der Materialparameter bestimmen. Für die hier betrachtete isotrope skalare Gradientenschädigung setzt sich letzteres aus Anteilen des Gleichgewichtsresiduums R_u und des Residuums des nichtlokalen Verzerrungsproblems $R_{\bar{\eta}}$ zusammen, die durch die Gleichung (6.7) sowie das skalarwertige Analogon zu Gleichung (6.9) definiert sind.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_u \\ R_{\bar{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \delta \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} dV - \int_{\partial \mathcal{B}_{t_u}} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}_u^p dA \\ \int_{\mathcal{B}} \delta \nabla \bar{\eta} \cdot \boldsymbol{\tau} dV - \int_{\mathcal{B}} \delta \bar{\eta} [\bar{\eta} - \eta] dV - \int_{\partial \mathcal{B}_{t_{\bar{\eta}}}} \delta \bar{\eta} \cdot \mathbf{t}_{\bar{\eta}}^p dA \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \forall \delta \mathbf{u} \\ \forall \delta \bar{\eta} \end{array} \quad (6.46)$$

Aufgrund der skalarwertigen Natur der Gradientengleichung bezeichnet $\boldsymbol{\tau}$ hier im Gegensatz zum tensorwertigen Gradientenmodell aus Abschnitt 6.4.1 und 6.4.2 eine vektorwertige Größe, die als konjugierte Größe zum Gradienten der nichtlokalen äquivalenten Verzerrung $\nabla \bar{\eta}$ verstanden werden kann. Während die inkrementelle Lösung $\Delta \mathbf{u}$ des direkten Problems durch die Linearisierung des Residuums $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{\pi})$ bezüglich des Unbekanntenvektors $\mathbf{u} = [\mathbf{u}, \bar{\eta}]^T$

$$\Delta_u \mathbf{R} = \nabla_u \mathbf{R} \cdot \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (6.47)$$

bestimmt ist, liefert das Verschwinden des Gradienten dieses Residuums bezüglich der Materialparameter

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{R} = \nabla_u \mathbf{R} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{u} + \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (6.48)$$

die gesuchte Bestimmungsgleichung für die Sensitivitäten der unbekanntten Feldgrößen bezüglich des Parametersatzes. Hierbei bezeichnet der Term $\nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p \mathbf{R}$ die partielle Parameterableitung des Residuums,

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p R_u \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p R_{\bar{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} \delta \nabla \mathbf{u} : \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{\sigma} dV \\ \int_{\mathcal{B}} \delta \nabla \bar{\eta} \cdot \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{\tau} dV \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \forall \delta \mathbf{u} \\ \forall \delta \bar{\eta} \end{array} \quad (6.49)$$

während die der gesuchten Größe vormultiplizierte Matrix $\nabla_u \mathbf{R}$ gerade dieselbe Struktur annimmt, wie für das direkte Problem (6.47). Die partielle Parameterableitung des Residuums entsprechend Gleichung (6.49) erfordert die Bestimmung der Sensitivitäten der Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ und des Vektors $\boldsymbol{\tau}$ bezüglich der Materialparameter. Für ein isotropes exponentielles Schädigungsmodell mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= [1 - d] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{mit} \quad d = 1 - \frac{\kappa_0}{\kappa} [1 - \alpha + \alpha \exp[\beta [\kappa_0 - \kappa]]] \\ \boldsymbol{\tau} &= c \nabla \bar{\eta} \end{aligned} \quad (6.50)$$

ergeben sich die zugehörigen Sensitivitäten unmittelbar zu

$$\begin{aligned} \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{\sigma} &= [1 - d] \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{\epsilon} - \nabla_{\boldsymbol{\pi}} d \otimes \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{mit} \quad \nabla_{\boldsymbol{\pi}} d = \nabla_{\kappa} d \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \kappa + \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p d \\ \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{\tau} &= \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p c \otimes \nabla \bar{\eta} \end{aligned} \quad (6.51)$$

mit den nachfolgenden partiellen Ableitungen des Schädigungsparameters d und des Gradientenparameters c bezüglich des Parametersatzes $\boldsymbol{\pi} = \{\kappa_0, \alpha, \beta, c\}$.

$$\nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p d = \begin{bmatrix} \frac{-1 + \alpha}{\kappa} - \frac{\alpha}{\kappa} [1 + \kappa_0 \beta] \exp[\beta - [\kappa_0 - \kappa]] \\ \frac{\kappa_0}{\kappa} [1 - \exp[\beta - [\kappa_0 - \kappa]]] \\ \frac{\kappa_0}{\kappa} \alpha [\kappa_0 - \kappa] \exp[\beta - [\kappa_0 - \kappa]] \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

Sowohl das unbekannte Inkrement der Freiheitsgrade $\Delta \mathbf{u}$ als auch die unbekannte Sensitivität der Freiheitsgrade bezüglich der Materialparameter $\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{u}$ lassen sich mit Hilfe der Finite Element Methode bestimmen. Die räumliche Diskretisierung, entsprechend Abschnitt 6.3.2, liefert nach dem Zusammenbau, entsprechend Abschnitt 6.3.3, die Approximation des Unbekanntenfeldes mittels diskreter Knotenwerte \mathbf{D} , während sich die Sensitivitäten durch die Auswertung der diskreten Knotenwerte $\nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{D}$ darstellen lassen. Weiterhin liefern die Diskretisierung und der Zusammenbau der rechten Seiten den Lastvektor \mathbf{F} bzw. den Pseudo-Lastvektor $\mathbf{F}_{\boldsymbol{\pi}}$, wohingegen die Ableitung des Residuums bezüglich der Unbekannten gerade in die Struktursteifigkeitsmatrix \mathbf{K} übergeht.

$$\mathbf{D} \leftarrow \mathbf{u} \quad \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{D} \leftarrow \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{u} \quad \mathbf{F} \leftarrow \Delta_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \quad \mathbf{F}_{\boldsymbol{\pi}} \leftarrow \nabla_{\boldsymbol{\pi}}^p \mathbf{R} \quad \mathbf{K} \leftarrow \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} \quad (6.53)$$

Das direkte Problem (6.47) und die mit dem inversen Problem verbundene Bestimmungsgleichung der Sensitivitäten (6.48) nehmen damit die folgende diskretisierte Form an.

$$\Delta \mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad \text{und} \quad \nabla_{\boldsymbol{\pi}} \mathbf{D} = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{F}_{\boldsymbol{\pi}} \quad (6.54)$$

Die hier nur schematisch skizzierte analytische Sensitivitätsanalyse erfolgt inkrementell und wird simultan zur Strukturanalyse im Rahmen der Finite Element Berechnung durchgeführt. Aus Abbildung 6.19 wird deutlich, daß zur Auswertung der gesamten Zielfunktion zu jedem Iterationsschritt k der Parameteridentifikation eine vollständig nichtlineare

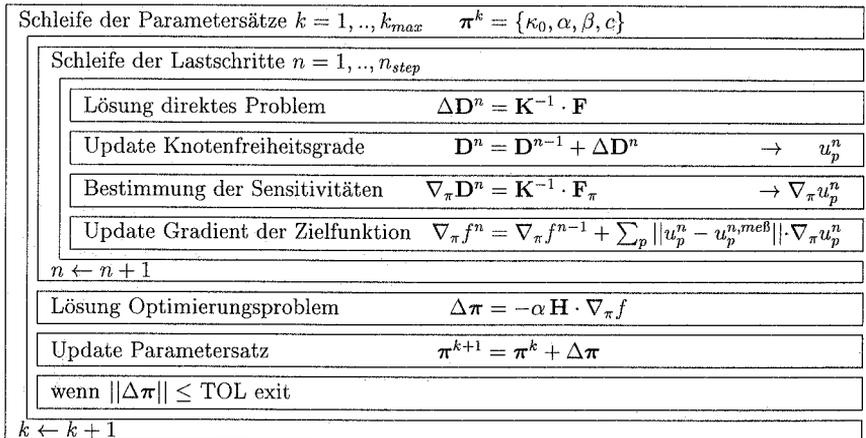


Abbildung 6.19: Algorithmus der Parameteridentifikation im Rahmen der FEM

Strukturanalyse durchzuführen ist. Im Anschluß an die Strukturanalyse wird die inkrementelle Verbesserung $\Delta\pi$ des aktuellen Parametersatzes π^k bestimmt. Im Sinne des klassischen NEWTON Verfahrens würde eine TAYLOR Reihenentwicklung mit Abbruch nach dem linearen Glied die nachfolgende Bestimmungsgleichung für die inkrementelle Parameterverbesserung $\Delta\pi$ ergeben.

$$\nabla_{\pi} f(\pi) + \nabla_{\pi}^2 f(\pi) \cdot \Delta\pi + \mathcal{O}(\Delta\pi^2) = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \Delta\pi = - [\nabla_{\pi}^2 f(\pi)]^{-1} \cdot \nabla_{\pi} f(\pi) \quad (6.55)$$

In praktischen Anwendungen werden jedoch nahezu ausschließlich Approximationen der HESSE-Matrix $\nabla_{\pi}^2 f(\pi)$ verwendet, da die Bestimmung ihrer Inversen extrem zeitaufwendig wäre und zudem ihre positive Definitheit nicht notwendigerweise gewährleistet ist, vergleiche LUENBERGER [133]. Allgemein läßt sich die Gleichung (6.55) durch die folgende Gleichung approximieren,

$$\Delta\pi = -\alpha \mathbf{H} \cdot \nabla_{\pi} f(\pi) \quad (6.56)$$

wobei α einen Schrittweitenparameter und \mathbf{H} die jeweilige Iterationsmatrix beschreibt. Während ein geeigneter Schrittweitenparameter mit Hilfe einer Linesearch-Prozedur ermittelt werden kann, läßt sich die Iterationsmatrix mit dem BFGS-Verfahren bestimmen. Auf eine ausführliche Diskussion des vorgestellten Verfahrens bezüglich der Mehrdeutigkeit seiner Lösung sowie seiner detaillierten numerischen Umsetzung soll an dieser Stelle verzichtet werden, geeignete Lösungsansätze finden sich beispielsweise in MAHNKEN [136].

6.6.2 Beispiel – Parameteridentifikation

Die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Verfahrens wird von MAHNKEN & KUHL [137] anhand eines einfachen Beispiels erläutert. Untersucht wird der in Abbildung 6.20 skizzierte $200 \times 200 \text{ mm}^2$ große Block unter Zugbeanspruchung, der an zwei gegenüberliegenden Seiten reibungsbehaftet gelagert ist, so daß die seitlichen Verschiebungen dort behindert sind. Zunächst wird mittels des exponentiellen isotropen Gradientenschädigungsmodells

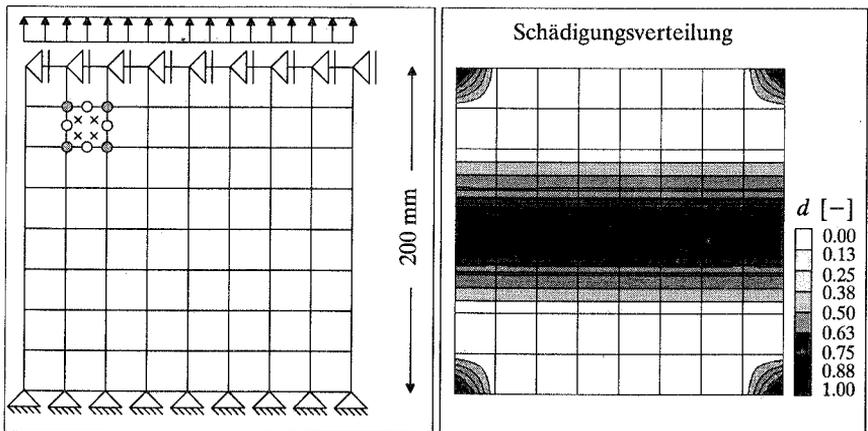


Abbildung 6.20: Geometrie und Schädigungsverteilung

eine synthetische Materialantwort generiert, die im folgenden die Rolle experimentell ermittelter Versuchsdaten übernimmt. Dazu werden die elastischen Materialparameter zu $E=20000\text{N/mm}^2$ und $\nu = 0.2$ gewählt. Der Schädigungsschwellwert $\kappa_0 = 0.0001$ sei ebenfalls aus Standardversuchen bekannt, während für die weiteren charakteristischen Materialparameter der Schädigung die Werte $\boldsymbol{\pi} = \{\alpha, \beta, c\} = \{0.96, 350, 5\text{mm}^2\}$ angenommen werden, vergleiche Tabelle 6.4.

	exakter Wert	Startwert	Identifikationswert
Spannungsdegradation	$\alpha = 0.96$	$\alpha = 0.50$	$\alpha = 0.96$
Formparameter	$\beta = 350$	$\beta = 1000$	$\beta = 350$
Gradientenparameter	$c = 5.0$	$c = 20.0$	$c = 5.0$

Tabelle 6.4: Exakte Werte, Startwerte und identifizierter Parametersatz

Die resultierende Schädigungsverteilung aus Abbildung 6.20, rechts, verdeutlicht das stark inhomogene Antwortverhalten des Zugblockes. Die Strukturantwort sei durch die vertikalen Verschiebungen $u_1^{me\beta}$ und $u_2^{me\beta}$ sowie durch die horizontale Verschiebung $u_3^{me\beta}$ charakterisiert, die in Abbildung 6.21, links, markiert sind. Die Abbildung zeigt die verformte Struktur, deren Deformationen aus Anschauungsgründen 250-fach überhöht dargestellt sind. Es ist deutlich die Ausbildung einer Zone lokalisierten Versagens in der Mitte des Blockes erkennbar, die eine Einschnürung in $u_3^{me\beta}$ -Richtung hervorruft. Im folgenden dienen die Verschiebungsdaten $u_1^{me\beta}$, $u_2^{me\beta}$ und $u_3^{me\beta}$ zu $n_{stp} = 20$ Zeitpunkten als Simulationsdaten der im Experiment gemessenen Versuchsdaten.

Mit einem geschätzten Parametersatz von $\boldsymbol{\pi}^0 = \{\alpha, \beta, c\} = \{0.50, 1000, 20.0\text{mm}^2\}$ beginnt nun die Lösung des inversen Problems, das durch die Minimierung der Zielfunktion

$$f(\boldsymbol{\pi}) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_{stp}} [\|u(\boldsymbol{\pi})_1^n - u_1^{n,me\beta}\|^2 + \|u(\boldsymbol{\pi})_2^n - u_2^{n,me\beta}\|^2 + \|u(\boldsymbol{\pi})_3^n - u_3^{n,me\beta}\|^2]$$

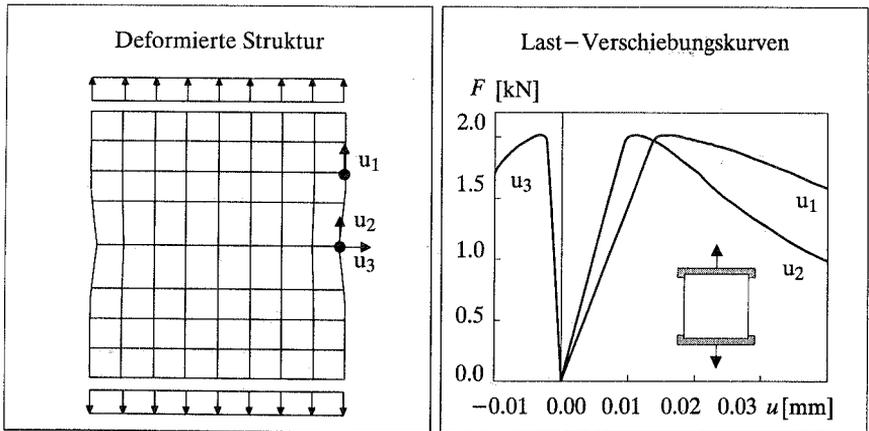


Abbildung 6.21: Deformierte Struktur und Last-Verschiebungskurven

gekennzeichnet ist. In Abbildung 6.22, links, ist die Evolution der Zielfunktion im Rahmen der durchgeführten Parameteridentifikation gemäß MAHNKEN & KUHLE [137] skizziert. Es wird deutlich, daß die Konvergenz zu Beginn des Iterationsverfahrens ausgesprochen schlecht ist. In der Nähe der Lösung hingegen kann ein super-lineares Konvergenzverhalten beobachtet werden. Ein solches Verhalten ist charakteristisch für die Klasse der Quasi-NEWTON Verfahren, der der hier verwendete Algorithmus angehört. Die beobachtete super-lineare Konvergenz kann damit als Verifikation des vorgestellten Verfahrens angesehen werden. Abbildung 6.22, rechts, verdeutlicht den relativen Fehler

$$\text{err}^k(\pi_i) = \frac{\pi_i^k - \pi_i^\infty}{\pi_i^\infty} \quad \forall \quad \pi_i = \{\alpha, \beta, c\}$$

der einzelnen Parameter i zum Zeitpunkt k . Die sukzessive Verbesserung der Parameterwerte im Verlauf der Iteration ist deutlich zu erkennen. Bereits nach $k = 16$ Iterationen sind die jeweiligen Fehler nahezu verschwunden, nach $k = 20$ Iterationen haben alle drei Parameter wieder die exakten Werte π_i^∞ der synthetischen Generierung erreicht, vergleiche auch Tabelle 6.4.

Dieses kleine Beispiel konnte zeigen, daß es grundsätzlich möglich ist, den Gradientenparameter c im Sinne einer inversen Modellierung im Rahmen der Finite Element Methode zu bestimmen. Insbesondere ist dazu allerdings die Wahl eines geeigneten Materialmodells und die Bereitstellung flächenhaft ermittelter Felddaten erforderlich. Diese lassen sich beispielsweise mit Hilfe optischer Feldmeßmethoden bestimmen. Es bleibt zu bemerken, daß eine derartige Technik zur Identifikation der Materialparameter relativ aufwendig ist, da zu jeder iterativen Verbesserung des geschätzten Parametersatzes eine vollständige nicht-lineare Strukturanalyse erforderlich wird.

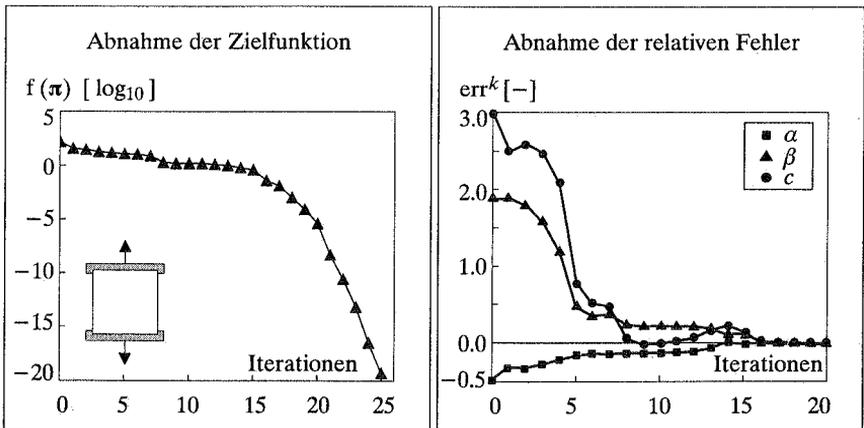


Abbildung 6.22: Evolution der Zielfunktion und der relativen Fehler

Kapitel 7

Diskrete Partikelsysteme vs. Microplane Modell

Das vorliegende Kapitel behandelt eine alternative Modellierungsstrategie, die auf der Simulation eines Zusammenschlusses diskreter Partikel basiert. Nach einer grundsätzlichen Einführung in die Problematik wird eine allgemeine Strategie zur diskreten Modellierung granularer Materialien vorgestellt. Exemplarisch wird die Anwendung auf die rheologischen Modelle der linearen Elastizität sowie der Elasto-Plastizität illustriert. Abschließend wird das diskrete Partikelmodell mit dem kontinuums-basierten Microplane Modell verglichen. Die daraus resultierenden, unterschiedlichen Einsatzbereiche beider Verfahren werden aufgezeigt und diskutiert.

7.1 Allgemeines

Die konstitutive Beschreibung granularer Medien ist insbesondere für zahlreiche geomechanische sowie industrielle Anwendungen von besonderer Bedeutung. Die in diesem Zusammenhang weitverbreiteten, makroskopisch phänomenologischen Materialmodelle sind jedoch nur bedingt in der Lage, das ausgesprochen komplexe Verhalten granularer Materialien abzubilden. Phänomenologische, *kontinuums-orientierte* Modelle sind häufig entweder zu allgemein, um komplexe charakteristische Effekte hinreichend genau erfassen zu können, oder sie erfordern eine unverhältnismäßig große Anzahl von Materialparametern. Die extreme Komplexität des Antwortverhaltens granularer Medien besitzt ihren Ursprung in der Evolution der Mikrostruktur, die in makroskopischen Modellen keine explizite Berücksichtigung findet. Aufgrund der diskreten Natur dieser granularen Mikrostruktur, die sich aus einer Vielzahl *diskreter* Partikel zusammensetzt, empfiehlt es sich, bei der konstitutiven Charakterisierung des Materials das Partikel-Kontaktverhalten direkt zu berücksichtigen. Es ist in diesem Zusammenhang üblich, das granulare Medium als ein Gefüge zahlreicher semi-starrer, runder oder auch polyederförmiger Partikel zu modellieren, die mittels mikroskopischer Kontaktgesetze interagieren. Das resultierende makroskopische Antwortverhalten läßt sich dann mittels geeigneter Homogenisierungstechniken aus der Antwort des gesamten Korngefüges bestimmen. Als natürliche Konsequenz aus dieser Strategie besitzen die verwendeten Materialparameter im Gegensatz zu makroskopisch phänomenologischen Modellen in diesem Fall eine wohldefinierte physikalische Bedeutung.

Die Spezifizierung eines geeigneten Kontaktgesetzes kann als eine der wohl wichtigsten Aufgaben der Modellbildung verstanden werden. So wird den heute gebräuchlichen Modellen üblicherweise im elastischen Bereich das nichtlineare HERTZ-MINDLIN Kontaktmodell zugrunde gelegt. Während die Betrachtungen von HERTZ [87] vor mehr als einem Jahrhundert lediglich eine Charakterisierung des Last-Verschiebungsverhaltens normal zur Kontaktebene erlauben und ursprünglich auf vollkommen glatte Kontaktkörper beschränkt sind, wurde von MINDLIN [151] Mitte dieses Jahrhunderts eine Erweiterung vorgestellt, die zusätzlich das tangentielle Kontaktverhalten erfassen konnte.

Gegen Ende der 50er Jahre wurden erstmals ganze Strukturen von Partikeln untersucht. Die Analysen von DUFFY & MINDLIN [70], DERESIEWICZ [64] und DUFFY [69] beschränkten sich jedoch zunächst auf reguläre Korngefüge von kubisch flächenzentrierter, einfach kubischer und hexagonaler Packungsstruktur. Die analytischen Lösungen konnten anhand von Experimenten zur Wellenausbreitung in Stahlkugelpackungen verifiziert werden.

Während für reguläre, periodische Korngefüge analytische Lösungen angegeben werden können, läßt sich das Verhalten irregulärer Packungsstrukturen in der Regel nur noch numerisch bestimmen. Motiviert durch die Entwicklungen in der Computertechnologie wurde Ende der 70er Jahre von CUNDALL & STRACK [63] das heute wohl bekannteste numerische Simulationsverfahren diskreter granularer Materialien vorgestellt. Es basiert auf einem expliziten Algorithmus zur Lösung der NEWTON'schen Bewegungsgleichung in Kombination mit einem HERTZ-MINDLIN Kontaktmodell unter Berücksichtigung der COULOMB'schen Reibung. Das zugrunde gelegte Modell wurde sukzessive erweitert und ein entsprechendes Programm wird noch heute erfolgreich kommerziell vertrieben.

Seit Beginn der 80er Jahre ist die Forschungstätigkeit auf dem Gebiet der diskreten Methoden insbesondere durch die Fragestellung nach effektiven makroskopischen Größen geprägt. Erstmals wurde eine derartige Problemstellung von BATCHELOR & O'BRIEN [7] im Rahmen der Bestimmung der effektiven Leitfähigkeit eines granularen Mediums behandelt. Die vorgestellte Lösung basiert auf der Annahme einer kinematischen Projektion für die primäre Unbekannte, in diesem Fall den Temperaturgradienten. Für das Elastizitätsproblem wurden analoge Betrachtungen durchgeführt. Die Ermittlung des makroskopischen Spannungstensors aus den dyadischen Produkten aller Kontaktvektoren und den zugehörigen Kontaktkräften wurde bereits zu Beginn des Jahrhunderts von LOVE [130] beschrieben und später von DRESCHER & DE JOSSELIN DE JONG [66] sowie ROTHENBURG & SELVADURAI [184] ausführlich diskutiert. Von DIGBY [65] und WALTON [221] wurde erstmals die Bestimmung der effektiven elastischen Moduli einer statistisch homogenen, elastisch isotropen, druckbeanspruchten Kugelpackung angegeben. Während von WALTON [221] ein nichtlineares elastisches Kontaktverhalten zugrunde gelegt wurde, basiert ein analoges Verfahren von BATHURST & ROTHENBURG [10] auf linear elastischen Kontaktgesetzen, deren Homogenisierung numerisch mittels einer Diskreten Element Simulation bestätigt werden konnte.

Zunächst wurde vereinfachend fast ausschließlich die VOIGT'sche Hypothese zur Homogenisierung verwandt, vergleiche Abbildung 7.1. Sie beruht auf der Annahme eines einheitlichen Verschiebungsfeldes, das die Deformation jedes einzelnen Partikels bestimmt ("*kinematic constraint*"). Daß eine derartige Annahme nur für sehr dichte Packungen gerechtfertigt ist, im allgemeinen jedoch eine extrem starke Restriktion des Gültigkeitsbereiches des Modells darstellt, haben Untersuchungen von KRUYT & ROTHENBURG [110] gezeigt. Alternative Homogenisierungsstrategien in Anlehnung an die REUSS'sche Hypothese in Verbindung mit einem statischen Zwang ("*static constraint*") und andere

Variationen wurden in diesem Zusammenhang von CAMBOU, DUBUJET, EMERIAULT & SIDOROFF [45] bzw. EMERIAULT & CAMBOU [73] diskutiert, vergleiche auch CHANG [55] sowie LIAO, CHANG, YOUNG & CHANG [128].

Die bisher erwähnten Betrachtungen besitzen lediglich für kleine Deformationen relativ weicher Partikel Gültigkeit, deren Verformungen ausschließlich von reversibler Natur sind. Das Deformationsverhalten granularer Packungen aus extrem harten Partikeln ist hingegen primär durch das Abgleiten und Rollen einzelner Partikelgruppen geprägt. Während dieses Deformationsvorganges stellen sich in der Regel Gleitschichten sowie Trennbrüche ein, wie sie bereits zu Beginn der 70er Jahre experimentell von DRESCHER & DE JOSSELIN DE JONG [66] anhand von Versuchen mit photoelastischen Scheibenpackungen beobachtet werden konnten. Die Versetzungen der Partikel tragen zu einem makroskopisch plastischen Verhalten bei. Insbesondere äußert sich das mikromechanische Gleiten entlang ausgezeichneter Ebenen in einem Verlust der Koaxialität zwischen dem makroskopischen Spannungs- und Verzerrungstensor, der von DRESCHER & DE JOSSELIN DE JONG [66] experimentell verifiziert werden konnte. Diese Beobachtung bildete den Ausgangspunkt für die Entwicklung mikroskopisch orientierter Plastizitätsgesetze für granulare Medien, die im Gegensatz zu glatten invarianten-basierten makroskopischen Plastizitätsmodellen in der Lage sind, den Verlust von Koaxialität auf natürliche Weise zu erfassen, vergleiche auch CHRISTOFFERSEN, MEHRABADI & NEMAT-NASSER [56]. Unter der Annahme der statistischen Homogenität gelang CHANG [54] ein Vergleich derartiger partikelbasierter Plastizitätsmodelle mit bekannten makroskopischen Fließformulierungen. Die Ergebnisse der Homogenisierung konnten anhand von numerischen Simulationen verifiziert werden, vergleiche auch EMERIAULT, CAMBOU & MAHBOUBI [74].

Im folgenden soll die Herleitung der makroskopischen konstitutiven Gleichungen basierend auf einem geometrisch linearen diskreten Partikelmodell, skizziert werden. Insbesondere soll die auffällige Analogie zu dem in Kapitel 4 vorgestellten Microplane Modell besonders herausgestellt werden, vergleiche KUHLE, D'ADDETTA, HERRMANN & RAMM [113]. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß der Gültigkeitsbereich des Modells in seiner hier dargestellten Form auf druckdominante Problemstellungen beschränkt ist.

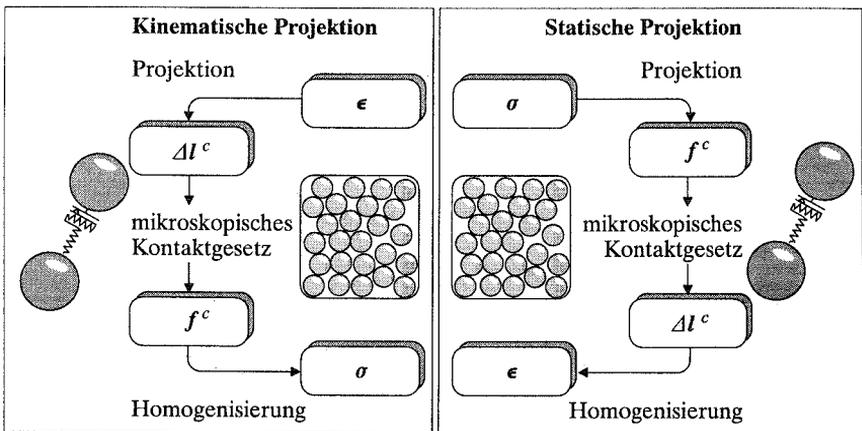


Abbildung 7.1: Kinematische und statische Projektion

7.2 Diskretes Modell granularer Materialien

7.2.1 Kinematik

Um die homogenisierte Antwort eines granularen Mediums zu bestimmen, können zahlreiche Verfahren unterschiedlicher Komplexität herangezogen werden. Die hier vorgestellte Betrachtung soll sich aufgrund ihrer engen Verwandtschaft mit der Microplane Theorie auf die wohl einfachste Technik basierend auf der VOIGT'schen Hypothese beschränken. Diese beinhaltet die Annahme einer gleichmäßig verteilten Verzerrung über das gesamte betrachtete Volumenelement, so daß die Deformation jedes einzelnen Partikels durch dasselbe makroskopische Verzerrungsfeld verursacht wird. Jeder beliebige Vektor \mathbf{l} innerhalb des betrachteten Elementes wird also um den Betrag $\Delta \mathbf{l}$ gedehnt, wobei sich diese Längenänderung als skalares Produkt aus dem normierten Verschiebungsfeld $\boldsymbol{\epsilon}$, das im folgenden als Verzerrungstensor interpretiert werden soll, und dem Vektor \mathbf{l} selbst angeben läßt.

$$\Delta \mathbf{l} = \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{l} \quad (7.1)$$

Insbesondere gilt diese Beziehung natürlich für die Relativverschiebung $\Delta \mathbf{l}^c$ des Kontaktvektors \mathbf{l}^c , der, wie in Abbildung 7.2 skizziert, die direkte Verbindung der Mittelpunkte zweier in Kontakt stehender Kugeln darstellt. Mit der zusätzlichen Beschreibung des Kontaktvektors als Produkt aus seiner Länge $\|\mathbf{l}^c\| = \sqrt{\mathbf{l}^c \cdot \mathbf{l}^c}$ und seiner Kontaktnormalen \mathbf{n}^c entsteht die folgende Darstellung.

$$\Delta \mathbf{l}^c(\mathbf{n}^c) = \|\mathbf{l}^c\| \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n}^c \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{l}^c\| \mathbf{n}^c = \mathbf{l}^c \quad (7.2)$$

Abbildung 7.2 verdeutlicht die mögliche Aufspaltung der relativen Kontaktverschiebungen in normale und tangentiale Richtung,

$$\Delta \mathbf{l}^c(\mathbf{n}^c) = \Delta l_N^c \mathbf{n} + \Delta \mathbf{l}_T^c \quad (7.3)$$

wobei der Betrag der relativen Normalverschiebung Δl_N^c und der Vektor der relativen Tangentialverschiebung $\Delta \mathbf{l}_T^c$ die nachfolgende Form annehmen.

$$\begin{aligned} \Delta l_N^c(\mathbf{n}^c) &= \|\mathbf{l}^c\| \mathbf{n}^c \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n}^c = \|\mathbf{l}^c\| \quad \mathbf{N}^c : \boldsymbol{\epsilon} \\ \Delta \mathbf{l}_T^c(\mathbf{n}^c) &= \|\mathbf{l}^c\| \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{n}^c - \Delta l_N^c \mathbf{n}^c = \|\mathbf{l}^c\| \quad \mathbf{T}^c : \boldsymbol{\epsilon} \end{aligned} \quad (7.4)$$

In Analogie zur Microplane Kinematik aus Kapitel 4.2.1 bezeichnen \mathbf{N} und \mathbf{T} mit

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{n}) &= \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \\ \mathbf{T}(\mathbf{n}) &= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mathcal{I}} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{aligned} \quad (7.5)$$

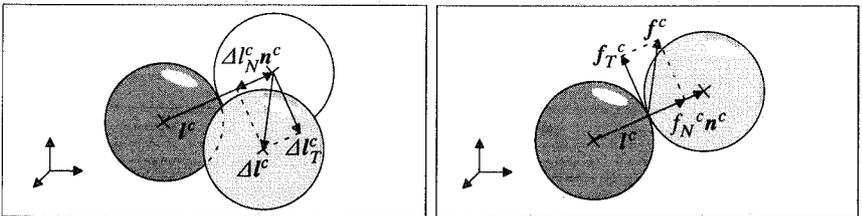


Abbildung 7.2: Partikelkontakt – Kinematik und Kontaktkräfte

den zwei- und dreistufigen normalen und tangentialen Projektionstensor, wobei sich die Integrale der vierstufigen Produkte dieser Projektionstensoren über den Raumwinkel Ω

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \, d\Omega &= \frac{3}{5} \mathcal{I}^{vol} + \frac{2}{5} \mathcal{I} \\ \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \, d\Omega &= -\frac{3}{5} \mathcal{I}^{vol} + \frac{3}{5} \mathcal{I} \end{aligned} \quad (7.6)$$

analog zu denen des Microplane Modells bestimmen lassen, vergleiche KANATANI [104] oder LUBARDA & KRAJČINOVIC [131]. In der nachfolgenden Betrachtung sollen vereinfachend die Rotationen der Partikel vernachlässigt werden. Nach BATHURST & ROTHENBURG [10] ist eine derartige Annahme für dichte Packungen allerdings durchaus gerechtfertigt.

7.2.2 Konstitutives Gesetz

Die resultierende Normal- und Tangentialkraft f_N^c und f_T^c lassen sich durch eine geeignete Konstitutivannahme aus den relativen normalen und tangentialen Kontaktverschiebungen bestimmen.

$$\begin{aligned} f_N^c(\mathbf{n}^c) &= f_N^c(\Delta l_N^c, \Delta l_T^c) \\ f_T^c(\mathbf{n}^c) &= f_T^c(\Delta l_N^c, \Delta l_T^c) \end{aligned} \quad (7.7)$$

Wie aus Abbildung 7.2 ersichtlich, stellen die normale und tangentiale Kontaktkraft die Komponenten des Kontaktkraftvektors \mathbf{f}^c dar.

$$\mathbf{f}^c(\mathbf{n}^c) = f_N^c \mathbf{n}^c + \mathbf{f}_T^c \quad (7.8)$$

Mit Hilfe der Gleichheit der mikroskopischen und makroskopischen virtuellen Arbeit läßt sich eine Beziehung zwischen den Kontaktkräften eines repräsentativen Elementes und dem makroskopischen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ angeben, siehe auch CHRISTOFFERSEN, MEHRABADI & NEMAT-NASSER [56] sowie CHANG [55].

$$\delta W^{mac} = \delta W^{mic} \quad (7.9)$$

Die makroskopische virtuelle Arbeit kann dabei in der gewohnten Form als skalares Produkt aus dem Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und den virtuellen Verzerrungen $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ angegeben werden, während sich die mikroskopische Arbeit gerade aus dem Produkt aller Kontaktkräfte \mathbf{f}^c mit den zugehörigen virtuellen Kontaktvektoren $\delta \Delta l^c$ aufsummiert über alle Kontakte c dividiert durch das Gesamtvolumen V ergibt.

$$\delta W^{mac} = \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{und} \quad \delta W^{mic} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} \mathbf{f}^c \cdot \delta \Delta l^c \quad (7.10)$$

Aus der Kombination der Gleichungen (7.9) und (7.10) folgt unter der Annahme der VOIGT'schen Hypothese (7.1), so daß $\delta \Delta l^c = \delta \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{l}^c$, die Definition des makroskopischen Spannungstensors, die bereits von LOVE [130] in dieser Form beschrieben wurde.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} [\mathbf{f}^c \otimes \mathbf{l}^c]^{sym} \quad (7.11)$$

Aufgrund der Vernachlässigung der Partikelrotationen nimmt der Verzerrungstensor eine symmetrische Form an, so daß sich der Spannungstensor aus dem symmetrischen Anteil des dyadischen Produktes aller Kontaktkräfte und Kontaktverschiebungen ergibt. Durch Einsetzen der Definition des Kontaktkraftvektors (7.8) mit (7.7) erhält man die folgende Darstellung.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} [[f_N^c \mathbf{n}^c + \mathbf{f}_T^c] \otimes \mathbf{l}^c]^{sym} \quad (7.12)$$

Damit läßt sich der homogenisierte Spannungstensor mit Hilfe der Projektionstensoren aus Gleichung (7.4) sowie den folgenden Identitäten $\mathbf{l}^c = \|\mathbf{l}^c\| \mathbf{n}^c$ und $[\mathbf{f}_T^c \otimes \mathbf{n}^c]^{sym} = \mathbf{T}^{cT} \cdot \mathbf{f}_T^c$, unmittelbar als Funktion der normalen und tangentialen Kontaktkräfte, der Länge des Kontaktvektors und der zugehörigen Projektionstensoren angeben.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} \|\mathbf{l}^c\| [N^c f_N^c + \mathbf{T}^{cT} \cdot \mathbf{f}_T^c] \quad (7.13)$$

Die Beziehung zwischen den homogenisierten Spannungs- und Verzerrungsraten $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ definiert in gewohnter Form den vierstufigen Tangententensor $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}$.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} \|\mathbf{l}^c\|^2 \left[N^c \otimes \frac{df_N^c}{d\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{T}^{cT} \cdot \frac{d\mathbf{f}_T^c}{d\boldsymbol{\epsilon}} \right] \quad (7.14)$$

Diskreter makroskopischer Konstitutivtensor

7.2.3 Homogenisierung

Unter der Annahme einer *isotropen* Packungsstruktur aus gleich großen Kugeln, so daß $\mathbf{l}^c = 2r \mathbf{n}^c$ mit $r = const$, für die die Kontaktpunkte gleichförmig über alle Raumrichtungen verteilt sind, läßt sich eine analytische Lösung des Homogenisierungsprozesses angeben. Für eine hinreichend große Anzahl von Partikeln gehen die diskrete Darstellung des Spannungstensors und des Tangententensors in eine integrale Darstellungsform über. Nach LIAO, CHANG, YOUNG & CHANG [128] läßt sich die Summe einer beliebigen Funktion $F(\mathbf{n})$ über alle Kontakte $c = 1, \dots, N$ durch das Integral dieser Funktion über den Raumwinkel Ω gewichtet mit der Anzahl der Kontakte dividiert durch 4π approximieren.

$$\sum_{c=1}^N F(\mathbf{n}^c) \approx \frac{N}{4\pi} \int_{\Omega} F(\mathbf{n}) d\Omega \quad (7.15)$$

Dementsprechend geht die diskrete Form der Spannungsdefinition (7.11) in die folgende kontinuierliche Darstellung über,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{Nr}{2V\pi} \int_{\Omega} [\mathbf{f} \otimes \mathbf{n}]^{sym} d\Omega = \frac{Nr}{2V\pi} \int_{\Omega} N f_N + \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}_T d\Omega \quad (7.16)$$

während sich das kontinuierliche Gegenstück zum diskreten Tangententensor (7.14) wie folgt darstellen läßt.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan} = \frac{Nr^2}{V\pi} \int_{\Omega} N \otimes \frac{df_N}{d\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{T}^T \cdot \frac{d\mathbf{f}_T}{d\boldsymbol{\epsilon}} d\Omega \quad (7.17)$$

7.3 Elastizität

In diesem Abschnitt soll die konstitutive Annahme in Form eines *linear elastischen* Kontaktgesetzes im Sinne von HERTZ [87] und MINDLIN [151] diskutiert werden. Diese liefert die folgende Beziehung.

$$\begin{aligned} f_N^c(\mathbf{n}^c) &= k_N \Delta l_N^c \\ f_T^c(\mathbf{n}^c) &= k_T \Delta l_T^c \end{aligned} \quad (7.18)$$

Durch Einsetzen des Kontaktgesetzes (7.18) und der kinematischen Beziehung (7.4) in die "diskrete" Spannungsdefinition (7.13) erhält man einen Ausdruck für den Spannungstensor, der allein von den Projektionstensoren, den Kontaktsteifigkeiten und dem makroskopischen Verzerrungstensor abhängig ist.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} \|\mathbf{l}^c\|^2 [k_N \mathbf{N}^c \otimes \mathbf{N}^c + k_T \mathbf{T}^{cT} \cdot \mathbf{T}^c] : \boldsymbol{\epsilon} \quad (7.19)$$

Diese Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungen und Verzerrungen führt mit $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} : \boldsymbol{\epsilon}$ auf die Einführung des diskreten vierstufigen Tensors der konstitutiven Moduli des granularen Materials.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} \|\mathbf{l}^c\|^2 [k_N \mathbf{N}^c \otimes \mathbf{N}^c + k_T \mathbf{T}^{cT} \cdot \mathbf{T}^c] \quad (7.20)$$

Wiederum läßt sich der Grenzübergang zu einer hinreichend großen Anzahl gleichverteilter Kugeln identischer Größe durchführen. Somit ergibt sich der kontinuierliche Spannungstensor zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{Nr^2}{V\pi} \int_{\Omega} k_N \mathbf{N}^c \otimes \mathbf{N}^c + k_T \mathbf{T}^{cT} \cdot \mathbf{T}^c d\Omega : \boldsymbol{\epsilon} \quad (7.21)$$

während sich der kontinuierliche Elastizitätstensor entsprechend Gleichung (7.17) wie folgt darstellen läßt.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} = \frac{Nr^2}{V\pi} \int_{\Omega} k_N \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + k_T \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad (7.22)$$

Unter der Annahme eines *isotropen* Materialgesetzes sind die Kontaktsteifigkeiten k_N und k_T unabhängig von der Orientierung \mathbf{n} und können deshalb aus dem Integral herausgezogen werden.

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} = k_N \frac{Nr^2}{V\pi} \int_{\Omega} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} d\Omega + k_T \frac{Nr^2}{V\pi} \int_{\Omega} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} d\Omega \quad (7.23)$$

Durch die analytische Auswertung der Integralausdrücke mit Hilfe von Gleichung (7.6) erhält man für den kontinuierlichen elastischen Konstitutivtensor $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$ den nachfolgenden Ausdruck, der sich unmittelbar mit dem Elastizitätstensor des generalisierten HOOKE'schen Gesetzes vergleichen läßt.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} &= \frac{4Nr^2}{5V} [k_N - k_T] \boldsymbol{\mathcal{I}}^{vol} + \frac{4Nr^2}{15V} [2k_N + 3k_T] \boldsymbol{\mathcal{I}} \\ \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} &= \quad \quad \quad 3\lambda \quad \quad \quad \boldsymbol{\mathcal{I}}^{vol} + \quad \quad \quad 2\mu \quad \quad \quad \boldsymbol{\mathcal{I}} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert die Werte der homogenisierten LAMÉ Konstanten λ und μ ,

$$\lambda = \frac{4Nr^2}{15V} [k_N - k_T] \quad \text{und} \quad \mu = \frac{4Nr^2}{15V} \left[k_N + \frac{3}{2} k_T \right] \quad (7.25)$$

bzw. des makroskopischen Elastizitätsmoduls E sowie der POISSON Zahl ν

$$E = \frac{4Nr^2 k_N [2k_N + 3k_T]}{3V 4k_N + k_T} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{k_N - k_T}{4k_N + k_T} \quad (7.26)$$

Mikro-Makro Beziehung der konstitutiven Moduli

als Funktionen der Kontaktsteifigkeiten. Physikalisch läßt sich der Wertebereich der POISSON Zahl auf $-1 < \nu < 0.5$ einschränken. Aus Gleichung (7.26.2) ist hingegen ersichtlich, daß die homogenisierte POISSON Zahl des hier vorgestellten Modells auf Werte von $-1 < \nu < 0.25$ beschränkt ist. Größere Werte können lediglich mittels negativer tangentialer Steifigkeiten erreicht werden, dieser Wertebereich ist jedoch unphysikalisch. Abbildung (7.3) verdeutlicht diesen Nachteil des Modells. Das linke Diagramm zeigt die Abhängigkeiten des makroskopischen Elastizitätsmoduls E , skaliert mit $E^* = [4Nr^2]/[3V] k_N$, und der POISSON Zahl ν vom Verhältnis der tangentialen zur normalen Kontaktsteifigkeit k_T/k_N . In dem rechten Diagramm sind die jeweiligen normalen und tangentialen Kontaktsteifigkeiten, skaliert mit $k^* = [3V]/[4Nr^2] E$, für unterschiedliche POISSON Zahlen gegenüber gestellt. Es ist offensichtlich, daß POISSON Zahlen $\nu > 0.25$ nur für negative tangentielle Kontaktsteifigkeiten $k_T < 0$ abgebildet werden können. Sofern die makroskopischen Moduli jedoch den erläuterten Modellbeschränkungen genügen, lassen sich die zugehörigen mikroskopischen Kontaktsteifigkeiten als Funktionen der LAMÉ Konstanten

$$k_N = \frac{3V}{4Nr^2} [2\mu + 3\lambda] \quad \text{und} \quad k_T = \frac{3V}{4Nr^2} [2\mu - 2\lambda] \quad (7.27)$$

bzw. des Elastizitätsmoduls und der POISSON Zahl angeben, vergleiche Abbildung 7.3, links.

$$k_N = \frac{3V}{4Nr^2} \frac{E}{1 - 2\nu} \quad \text{und} \quad k_T = \frac{3V}{4Nr^2} \frac{E}{1 + \nu} \frac{1 - 4\nu}{1 - 2\nu} \quad (7.28)$$

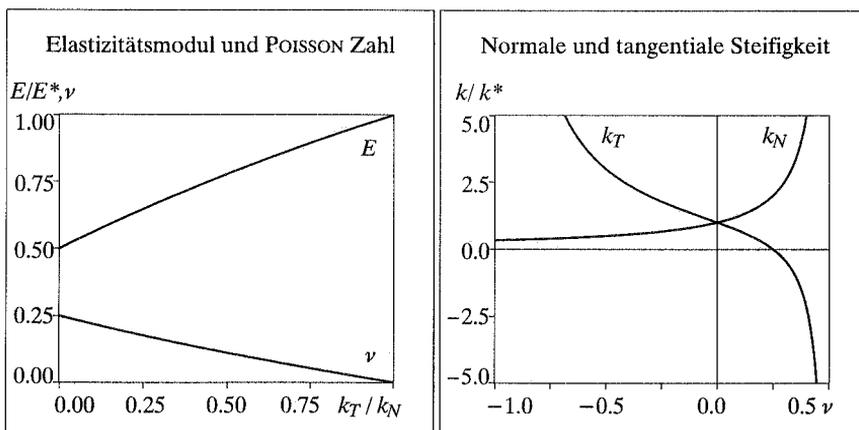


Abbildung 7.3: Beziehung zwischen mikroskopischen und makroskopischen Moduli

7.4 Elasto-Plastizität

In diesem Abschnitt soll die Erweiterung des Partikelmodells auf ein elasto-plastisches Materialverhalten erläutert werden. Die entsprechend erweiterten Kontaktgesetze, die den Einfluß des Reibungsverhaltens der Partikel berücksichtigen, beruhen auf der Annahme, daß sich die Verschiebungskremente des Kontaktvektors additiv in elastische Anteile Δl_N^{el} und Δl_T^{el} und irreversible plastische Anteile Δl_N^{pl} und Δl_T^{pl} zerlegen lassen.

$$\begin{aligned}\Delta l_N(\mathbf{n}) &= \Delta l_N^{el} + \Delta l_N^{pl} \\ \Delta l_T(\mathbf{n}) &= \Delta l_T^{el} + \Delta l_T^{pl}\end{aligned}\quad (7.29)$$

Die Normal- und Tangentialkomponente des Kontaktkraftvektors resultieren jedoch ausschließlich aus den elastischen Relativverschiebungen.

$$\begin{aligned}f_N(\mathbf{n}) &= k_N \Delta l_N^{el} = k_N \Delta l_N - f_N^{pl} & f_N^{pl} &:= k_N \Delta l_N^{pl} \\ \mathbf{f}_T(\mathbf{n}) &= k_T \Delta l_T^{el} = k_T \Delta l_T - \mathbf{f}_T^{pl} & \mathbf{f}_T^{pl} &:= k_T \Delta l_T^{pl}\end{aligned}\quad (7.30)$$

Das Reibungsverhalten der Partikel läßt sich durch das COULOMB'sche Reibungsgesetz beschreiben, das sich in Form der folgenden Fließfunktion Φ darstellen läßt,

$$\Phi(\mathbf{n}) = \|\mathbf{f}_T\| - \alpha f_N - \phi \leq 0 \quad (7.31)$$

wobei

$$\nu_N(\mathbf{n}) := \frac{\partial \Phi}{\partial f_N} \quad \nu_T(\mathbf{n}) := \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{f}_T} \quad (7.32)$$

deren partielle Ableitung nach den Kraftkomponenten f_N und \mathbf{f}_T symbolisiert. Im Rahmen dieser Betrachtung soll vereinfachend die häufig im Zusammenhang mit Partikelmodellen verwendete Annahme eines kohäsionslosen Verhaltens gelten, so daß $\phi = 0$ gilt, vergleiche auch CHANG [54] sowie EMERIAULT, CAMBOU & MAHBOUBI [74]. Durch den Reibungskoeffizienten α wird eine Kopplung zwischen der Normal- und Tangentialkomponente berücksichtigt. Die Evolution der plastischen Anteile der Kontaktverschiebungen läßt sich nun als Funktion des plastischen Multiplikators $\dot{\gamma}$ sowie der Richtungen des plastischen Fließens, charakterisiert durch μ_N und μ_T , darstellen.

$$\begin{aligned}\Delta l_N^{pl}(\mathbf{n}) &= \dot{\gamma} \mu_N & \text{mit} & \quad \mu_N := \frac{\partial \Phi^*}{\partial f_N} \\ \Delta l_T^{pl}(\mathbf{n}) &= \dot{\gamma} \mu_T & \text{mit} & \quad \mu_T := \frac{\partial \Phi^*}{\partial \mathbf{f}_T}\end{aligned}\quad (7.33)$$

Für den Fall einer assoziierten Plastizitätsformulierung mit $\Phi^* = \Phi$ stimmen die Fließrichtungen mit den Normalen auf die Fließfläche überein. Im allgemeinen können die Fließrichtungen μ_N und μ_T jedoch unabhängig von der Fließfunktion gewählt werden, so daß $\Phi^* = \|\mathbf{f}_T\| - \alpha^* f_N - \phi^*$. Für Partikelmodelle ist in diesem Zusammenhang eine Wahl von $\alpha^* = 0$ und somit $\mu_N = 0$ und $\mu_T = \nu_T$ üblich. Der Plastizitätsprozeß wird weiterhin durch die KUHN-TUCKER Bedingungen

$$\Phi \leq 0 \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad \Phi \dot{\gamma} = 0 \quad (7.34)$$

sowie die Konsistenzbedingung

$$\dot{\Phi} \dot{\gamma} = 0 \quad (7.35)$$

charakterisiert, deren Auswertung die Evolutionsgleichung des plastischen Multiplikators $\dot{\gamma}$ liefert.

$$\dot{\gamma}(\mathbf{n}) = \frac{\|\mathbf{l}\|}{h} [\nu_N k_N \mathbf{N} + \nu_T \cdot k_T \mathbf{T}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad \text{mit} \quad h(\mathbf{n}) := \nu_N k_N \mu_N + \nu_T \cdot k_T \boldsymbol{\mu}_T \quad (7.36)$$

Für die getroffene Annahme einer nicht-assozierten Plastizitätsformulierung mit $\mu_V = 0$ und $\boldsymbol{\mu}_T = \nu_T$ kann die Ratendarstellung der normalen und tangentialen plastischen Kontaktkräfte, entsprechend Gleichung (7.30), wie folgt angegeben werden.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{j}}_N^{pl}(\mathbf{n}) &= 0 \\ \dot{\mathbf{j}}_T^{pl}(\mathbf{n}) &= \left[\|\dot{\mathbf{j}}_T\| - \tan \varphi \dot{j}_N \right] \boldsymbol{\mu}_T \end{aligned} \quad (7.37)$$

Schließlich läßt sich der makroskopische "diskrete" Spannungstensor gemäß Gleichung (7.11) darstellen.

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} \|\mathbf{l}^c\| [\mathbf{f}^c \otimes \mathbf{n}^c]^{sym} \quad (7.38)$$

Hierbei bezeichnen $\mathbf{f}^c = f_N^c \mathbf{n} + \mathbf{f}_T^c$ den in den Gleichungen (7.30) spezifizierten Kontaktvektor. Der diskrete elasto-plastische Tangententensor $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep}$ liefert die Beziehung zwischen den makroskopischen Spannungs- und Verzerrungsraten $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ mit

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{tan}^{ep} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{el} - \frac{1}{V} \sum_{c \in V} \frac{\|\mathbf{l}^c\|^2}{h} [\mathbf{N}^c k_N \nu_N^c + \mathbf{T}^{cT} \cdot k_T \nu_T^c] \otimes [\mu_N^c k_N \mathbf{N}^c + \boldsymbol{\mu}_T^c \cdot k_T \mathbf{T}^c], \quad (7.39)$$

wobei $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{el}$, entsprechend Gleichung (7.20), den elastischen Materialtensor des Granulats darstellt.

7.5 Vergleich mit dem Microplane Modell

Obwohl die Ansätze des diskreten Partikelmodells und des in Kapitel 4 beschriebenen Microplane Modells grundsätzlich verschieden erscheinen, weisen beide Modelle dennoch bemerkenswerte Gemeinsamkeiten auf. Beide Formulierungen basieren auf der kinematischen Projektion in Anlehnung an die VOIGT'sche Hypothese. Während das Partikelmodell in Relativverschiebungen und Kontaktkräften formuliert ist, basiert das Microplane Modell auf Verzerrungs- und Spannungskomponenten, vergleiche Tabelle 7.1. Für beide Formulierungen kann der makroskopische Spannungstensor mittels der Gleichheit der mikroskopischen und makroskopischen virtuellen Arbeiten ermittelt werden. Während das Partikelmodell von Natur aus ein *diskretes* Modell ist, wird für das kontinuierliche Microplane Modell lediglich zur numerischen Ermittlung des Antwortverhaltens eine räumliche Diskretisierung erforderlich. In seiner ursprünglichen Form ist das Microplane Modell jedoch *kontinuierlich*, wohingegen das Partikelmodell nur durch geeignete Homogenisierungsstrategien unter bestimmten Annahmen in eine entsprechende kontinuierliche Darstellung überführt werden kann, vergleiche Abbildung 7.4. In einem Vergleich können sowohl die diskreten als auch die kontinuierlichen Versionen beider Modelle gegenübergestellt werden. Während sich die diskrete Auswertung in beiden Fällen in der Summation

	Partikelmodell	Microplane Modell
Kinematik	$\Delta l^c = \Delta l_N^c \mathbf{n} + \Delta l_T^c$ $\Delta l_N^c = l^c \mathbf{N} : \boldsymbol{\epsilon}$ $\Delta l_T^c = l^c \mathbf{T} : \boldsymbol{\epsilon}$	$\mathbf{t}_\epsilon = \epsilon_N \mathbf{n} + \boldsymbol{\epsilon}_T$ $\epsilon_N = \mathbf{N} : \boldsymbol{\epsilon}$ $\boldsymbol{\epsilon}_T = \mathbf{T} : \boldsymbol{\epsilon}$
Kraftgrößen	$\mathbf{f}^c = f_N^c \mathbf{n} + \mathbf{f}_T^c$ $f_N^c = k_N \Delta l_N^c$ $\mathbf{f}_T^c = k_T \Delta l_T^c$ $\boldsymbol{\sigma} = \frac{N_r}{2V\pi} \int [\mathbf{f}^c \otimes \mathbf{n}]^{sym} d\Omega$	$\mathbf{t}_\sigma = \sigma_N \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_T$ $\sigma_N = \mathcal{E}_N^{el} \epsilon_N$ $\boldsymbol{\sigma}_T = \mathcal{E}_T^{el} \boldsymbol{\epsilon}_T$ $\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int [\mathbf{t}_\sigma \otimes \mathbf{n}]^{sym} d\Omega$
Konstitutive Moduli	$k_N = \frac{3V}{4N_r^2} [2\mu + 3\lambda]$ $k_T = \frac{3V}{4N_r^2} [2\mu - 2\lambda]$ $\mathcal{E}^{el} = \frac{N_r^2}{V\pi} \int [k_N \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + k_T \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}] d\Omega$	$\mathcal{E}_N^{el} = 2\mu + 3\lambda$ $\mathcal{E}_T^{el} = 2\mu - 2\lambda$ $\mathcal{E}^{el} = \frac{3}{4\pi} \int [\mathcal{E}_N^{el} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} + \mathcal{E}_T^{el} \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}] d\Omega$

Tabelle 7.1: Vergleich linear elastischer Modelle

über alle Kontakte bzw. über alle Mikroebenen widerspiegelt, führt die kontinuierliche Beschreibung auf die Auswertung des Integrals über den Raumwinkel Ω . In dieser kontinuierlichen Formulierung lassen sich für beide Modelle Relationen zwischen den jeweiligen Kontaktsteifigkeiten bzw. den Microplane Moduli zu den makroskopischen Elastizitätskonstanten angeben. Deren bemerkenswert ähnliche Struktur ist in Tabelle 7.1 gegenüber gestellt.

Die Analogie beider Modelle spiegelt sich auch in der Beschreibung des elasto-plastischen Materialverhaltens wider. Während dem Microplane Plastizitätsmodell in Abschnitt 4.4 eine Fließfunktion in Anlehnung an die klassische DRUCKER-PRAGER Plastizität zugrun-

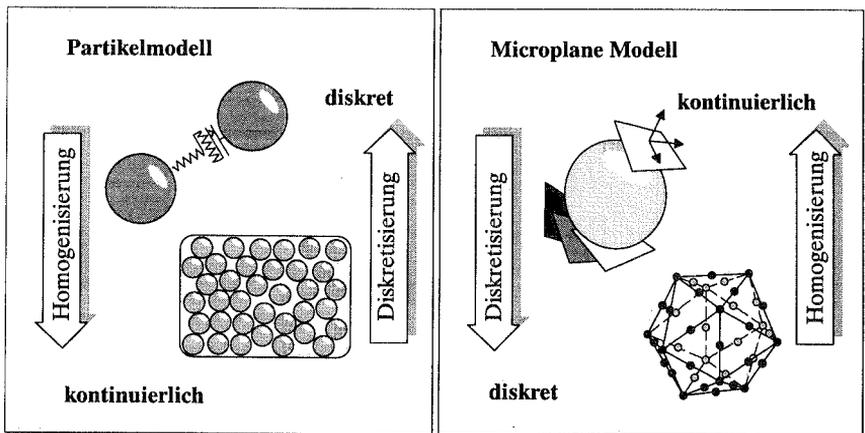


Abbildung 7.4: Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen Modellen

	Partikelmodell	Microplane Modell
Kinematik	$\Delta \mathbf{l} = \Delta l_N \mathbf{n} + \Delta \mathbf{l}_T$ $\Delta l_N = \Delta l_N^{el} + \Delta l_N^{pl}$ $\Delta \mathbf{l}_T = \Delta \mathbf{l}_T^{el} + \Delta \mathbf{l}_T^{pl}$	$\mathbf{t}_e = \epsilon_N \mathbf{n} + \epsilon_T$ $\epsilon_N = \epsilon_N^{el} + \epsilon_N^{pl}$ $\epsilon_T = \epsilon_T^{el} + \epsilon_T^{pl}$
Kraftgrößen	$\mathbf{f} = f_N \mathbf{n} + \mathbf{f}_T$ $f_N = k_N \Delta l_N^{el}$ $\mathbf{f}_T = k_T \Delta \mathbf{l}_T^{el}$ $\boldsymbol{\sigma} = \frac{N_T}{2V\pi} \int [\mathbf{f} \otimes \mathbf{n}]^{sym} d\Omega$	$\mathbf{t}_\sigma = \sigma_N \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_T$ $\sigma_N = C_N \epsilon_N^{el}$ $\boldsymbol{\sigma}_T = C_T \epsilon_T^{el}$ $\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{4\pi} \int [\mathbf{t}_\sigma \otimes \mathbf{n}]^{sym} d\Omega$
Fließfunktion	$\Phi = f^{eq} \leq 0$ $f^{eq} = \ \mathbf{f}_T\ - \tan \varphi f_N$	$\Phi = \sigma^{eq} - Y \leq 0$ $\sigma^{eq} = \ \boldsymbol{\sigma}_T\ - \tan \varphi \sigma_N$
Fließregel	$\Delta l_N^{pl} = \dot{\gamma} \mu_N$ $\Delta \mathbf{l}_T^{pl} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\mu}_T$ $\dot{\gamma} = \ \mathbf{l}\ /h [\nu_N k_N \mathbf{N}$ $\quad + \nu_T k_T \mathbf{T}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$	$\epsilon_N^{pl} = \dot{\gamma} \mu_N$ $\boldsymbol{\epsilon}_T^{pl} = \dot{\gamma} \boldsymbol{\mu}_T$ $\dot{\gamma} = 1/h [\nu_N \mathcal{E}_N^{el} \mathbf{N}$ $\quad + \nu_T \mathcal{E}_T^{el} \mathbf{T}] : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$

Tabelle 7.2: Vergleich elasto-plastischer Modelle

de gelegt wurde, wird das Reibungsverhalten von Kugelpackungen üblicherweise mit Hilfe des kohäsions-vernachlässigenden COULOMB'schen Reibungsgesetzes motiviert. Durch die Einführung eines plastischen Multiplikators für jeden Partikelkontakt kann das Partikelmodell in eine klassische Plastizitätsdarstellung überführt werden. So kann auch ein makroskopischer Tangentenoperator der Kugelpackung angegeben werden, der eine analoge Form annimmt, wie der Tangentenoperator des Microplane Modells. Tabelle 7.2 zeigt einen zusammenfassenden Vergleich beider Plastizitätsformulierungen.

Abschließend sollte noch erwähnt werden, daß beide Modelle trotz ihrer erstaunlichen Ähnlichkeit jedes für sich ihre Berechtigung besitzen. Der Einsatz des diskreten Partikelmodells kann insbesondere Auskunft über mikromechanische Versagensvorgänge geben, die von Kontinuumsmodellen nicht hinreichend genau erfaßt werden. Ein weiterer unbestrittener Vorteil diskreter Verfahren ist ihre Fähigkeit, lokalisierende Versagensvorgänge in natürlicher Form abbilden zu können. Die interne Länge, die in klassischen Kontinuumsmodellen keine Berücksichtigung findet, ist in diskreten Modellen intrinsisch über die Partikelgröße und ihre Interaktion enthalten, so daß ein Versagen immer nur unter einer finiten Energiedissipation stattfinden kann.

In weiteren Untersuchungen könnte das diskrete Modell herangezogen werden, um Informationen über den internen Längenparameter des makroskopischen Modells zu gewinnen. Weiterhin könnte das Partikelmodell sinnvoll genutzt werden, um beispielsweise die strukturelle Anisotropie eines Materials in Form einer Kontaktverteilungsfunktion zu erfassen. Diese kann dann mittels geeigneter Wichtungskoeffizienten in einer microplane-basierten Simulation berücksichtigt werden. Für großdimensionierte numerische Simulationen ganzer Ingenieurstrukturen erscheint das Partikelmodell hingegen ungeeignet, da der numerische Aufwand einer diskreten Simulation im Vergleich zu Finite Element Simulationen relativ hoch ist.

Kapitel 8

Makroskopische Modelle vs. Microplane Modell

Ziel dieses Kapitels ist die Bereitstellung einer Methodik, die es ermöglichen soll, die Parameter des Microplane Modells systematisch an makroskopisch meßbare Materialkenngrößen anzupassen. Dazu wird zunächst ein bekanntes makroskopisch-phenomenologisches Materialmodell beschrieben, dessen Parameter sich als Funktionen der einaxialen Zug- und Druckfestigkeit darstellen lassen. Anhand eines Vergleiches des makroskopischen Modells mit einem analog definierten Microplane Modell kann auf Beziehungen zwischen den makroskopischen Parametern und den Parametern der Microplane Konstitutivgesetze geschlossen werden. Diese liefern einen Zusammenhang zwischen den Eingangsgrößen des Microplane Modells und den makroskopisch meßbaren Materialeigenschaften. Die allgemeine Vorgehensweise wird anhand des Modellproblems der parabolischen Drucker-Prager Plastizität illustriert und mit Hilfe von Vergleichen beider Modelle am Beispiel der einfachen Scherung und der Scheibe mit Loch verifiziert.

8.1 Allgemeines

Alle bisher existierenden Microplane Modelle basieren auf der Formulierung phänomenologischer Materialgesetze auf den einzelnen Ebenen, zu deren Eichung experimentell ermittelte Ergebnisse herangezogen werden. Insbesondere werden unabhängige Schädigungsgesetze für die volumetrischen, die deviatorischen und die tangentialen Komponenten postuliert, so daß entsprechend Abschnitt 4.5.1 eine *Poly-Versagensflächen* Formulierung auf den einzelnen Ebene entsteht, vergleiche BAŽANT & PRAT [25], BAŽANT & OŽBOLT [20] oder CAROL & BAŽANT [46]. Eine konstitutive Kopplung des volumetrischen und tangentialen Verhaltens, wie sie in Versuchen beobachtet werden kann, findet nur im schwachen Sinne statt, siehe CAROL, PRAT & BAŽANT [49]. Diese phänomenologisch motivierten Modelle liefern exzellente Ergebnisse bei der Simulation spröder Versagensformen von Beton, vergleiche beispielsweise OŽBOLT & BAŽANT [166] oder BAŽANT & PLANAS [24]. Trotz der relativ großen Freiheit, die derartige Modelle aufgrund der Berücksichtigung mehrerer unabhängigen Schädigungsmechanismen liefern, sind die zugehörigen

Materialparameter jedoch nicht frei wählbar, wenn das Antwortverhalten gewissen Glätteanforderungen genügen soll. Bisher werden die Materialparameter der existierenden Microplane Modelle größtenteils mittels inverser Techniken bestimmt. Damit ist keine eindeutige Zuordnung von den auf der Mikroebene eingeführten Parametern zu makroskopisch meßbaren Effekten möglich.

Nachfolgend soll eine alternative Strategie diskutiert werden, die eine Parameterbestimmung mittels einer Anpassung der Microplane Gesetze an hinreichend verifizierte makroskopische Materialmodelle ermöglicht. Auf diese Weise gewinnen die entsprechend geeichten Parameter eine physikalische Bedeutung und können direkt den im Versuch ermittelten charakteristischen Eigenschaften, wie beispielsweise der einaxialen Zug- und Druckfestigkeit, zugewiesen werden. Dieses Vorgehen soll zunächst anhand des relativ einfachen Modellproblems der DRUCKER-PRAGER Plastizität illustriert werden. Im Sinne einer *Zwei-Invarianten Formulierung* nach DRUCKER & PRAGER [67] läßt sich die makroskopische Fließfunktion kohäsiver Reibungsmaterialien in Abhängigkeit der ersten Spannungsinvariante I_1 sowie der zweiten Invariante des Spannungsdeviators J_2 darstellen. Das ursprüngliche Modell ist durch die Einführung zweier Materialparameter gekennzeichnet. Es berücksichtigt den Reibungskoeffizienten α sowie die Fließspannung ϕ . Während die Fließfläche des Originalmodells eine lineare Form im Invariantenraum annimmt, soll hier eine parabolische Fließfläche analysiert werden, die aus einer verallgemeinerten DRUCKER-PRAGER Formulierung hervorgeht, vergleiche LIEBE & WILLAM [129]. Die Materialparameter dieser Formulierung lassen sich eindeutig als Funktionen der einaxialen Zug- und Druckfestigkeit darstellen.

Motiviert durch die volumetrisch-deviatorische Kopplung der makroskopischen Plastizitätsbeschreibung wird auf der Mikroebene eine *Mono-Versagensflächen* Formulierung entsprechend Abschnitt 4.4 postuliert. Da die Bestimmung der volumetrischen, deviatorischen und tangentialen Komponenten auf der Mikroebene nicht eindeutig ist, sollen hier vereinfachend die deviatorischen Komponenten vernachlässigt werden. Die so entstehenden Microplane Konstitutivgesetze können nun an das makroskopische Modell angepaßt werden. Auf diese Weise erhält man aussagekräftige Eingangparameter, die direkt makroskopisch meßbaren Materialeigenschaften zugeordnet werden können. Anhand des Modellbeispiels der einfachen Scherung sollen die Ergebnisse beider Modelle bei entsprechender Parametrisierung miteinander verglichen werden. Abschließend erfolgt ein Vergleich beider Materialformulierungen anhand des Benchmark Problems der Scheibe mit Loch.

8.2 Parabolische Drucker-Prager Plastizität

8.2.1 Fließfunktion und plastisches Potential

Die Charakterisierung eines Plastizitätsmodells erfordert die Spezifizierung der Fließfunktion Φ^{mac} sowie des plastischen Potentials Φ^{*mac} . Diese lassen sich im Rahmen einer verallgemeinerten nicht-assozierten DRUCKER-PRAGER Plastizität in der folgenden Form angeben,

$$\begin{aligned}\Phi^{mac} &= \Phi^{mac}(I_1, J_2) = J_2^m - z [c \alpha^{mac} I_1 - \phi^{mac}]^n \\ \Phi^{*mac} &= \Phi^{*mac}(I_1, J_2) = J_2^m - z [c \alpha^{*mac} I_1 - \phi^{*mac}]^n\end{aligned}\quad (8.1)$$

wobei zusätzlich zu den ursprünglichen DRUCKER-PRAGER Parametern α^{mac} und ϕ^{mac} die dimensionslosen Parameter m , z , c und n eingeführt wurden, die eine beliebige Form-

gebung der Fließfunktion und des plastischen Potentials ermöglichen. So lassen sich mit dieser generalisierten Form im Gegensatz zum Originalmodell, das sich auf lineare Fließfunktionen im $\{I_1, \sqrt{J_2}\}$ -Raum beschränkt, auch parabolische, elliptische oder hyperbolische Fließflächen beschreiben, vergleiche LIEBE & WILLAM [129]. Für eine Wahl von $m = 1/2$, $z = -1$, $c = 1$ und $n = 1$ erhält man als Spezialfall die klassische lineare Darstellung nach DRUCKER & PRAGER [67]. Im folgenden soll exemplarisch eine parabolische Version der generalisierten Form untersucht werden, die aus einer Wahl von $m = 1$, $z = -1$, $c = 1$ und $n = 1$ hervorgeht.

$$\begin{aligned} \Phi^{mac} &= \Phi^{mac}(I_1, J_2) = J_2 + \alpha^{mac} I_1 - \phi^{mac} \\ \Phi^{*mac} &= \Phi^{*mac}(I_1, J_2) = J_2 + \alpha^{*mac} I_1 - \phi^{*mac} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Es verbleiben schließlich jeweils zwei Parameter α^{mac} und ϕ^{mac} , die der Charakterisierung der Form der parabolischen Fließfläche dienen.

8.2.2 Parameteranpassung

Die verbleibenden Parameter der Fließfunktion, der Reibungskoeffizient α^{mac} sowie die Fließspannung ϕ^{mac} , lassen sich als Funktionen der einaxialen Zug- und Druckfestigkeit f_t und f_c angeben, die mit Hilfe einaxialer Versuche experimentell ermittelt werden können. Die charakteristischen Versagenspunkte unter Zug und Druck liefern mit

$$\begin{aligned} \Phi^{mac} &= \Phi^{mac}\left(f_t, \frac{1}{3} f_t^2\right) = \frac{1}{3} f_t^2 + \alpha^{mac} f_t - \phi^{mac} = 0 \\ \Phi^{mac} &= \Phi^{mac}\left(-f_c, \frac{1}{3} f_c^2\right) = \frac{1}{3} f_c^2 - \alpha^{mac} f_c - \phi^{mac} = 0 \end{aligned} \tag{8.3}$$

zwei Bestimmungsgleichungen für die das Modell charakterisierenden Parameter α^{mac} und ϕ^{mac} , die sich damit in der folgenden Form angeben lassen.

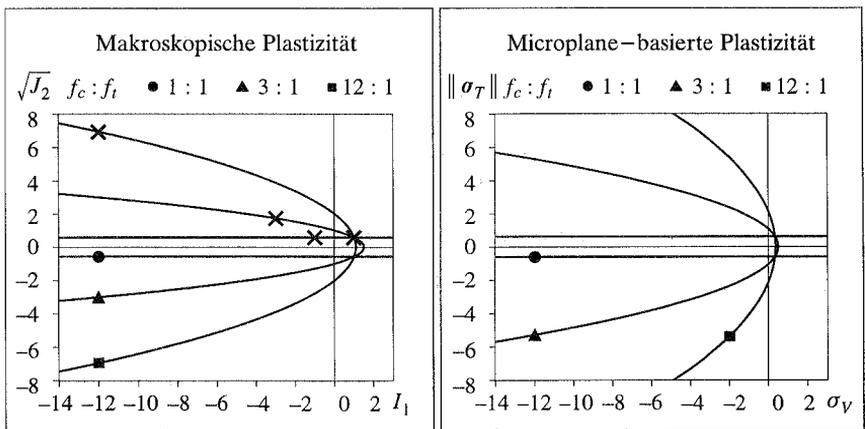


Abbildung 8.1: Parabolische DRUCKER-PRAGER Plastizität

$$\alpha^{mac} = \frac{f_c - f_t}{3} \quad \text{und} \quad \phi^{mac} = \frac{f_c f_t}{3} \quad (8.4)$$

Makroskopische parabolische Drucker-Prager Plastizität – Parameter

Abbildung 8.1, links, zeigt die Darstellung dreier möglicher Fließflächen im Invariantenraum. Hierbei wurde das Verhältnis von einaxialer Druck- zu Zugfestigkeit $f_c : f_t$ beispielhaft zu 1 : 1, zu 3 : 1 und zu 12 : 1 gewählt. Die Markierung im ersten Quadranten kennzeichnet den Versagenspunkt für einaxialen Zug, die drei Markierungen im zweiten Quadranten stellen jeweils die Versagenspunkte unter einaxialem Druck dar.

8.2.3 Analytische Lokalisierungsanalyse

Mit diesen Angaben läßt sich eine analytische Auswertung der Lokalisierungsbedingung, entsprechend Gleichung (5.26),

$$\det \mathbf{q}^{ep} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{q}^{ep} = \mathbf{q}^{el} - \frac{\mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu}{h} \quad (8.5)$$

durchführen, wobei $h = H + \nu : \mathcal{E}^{el} : \mu$. Die Normalen ν und μ auf die Fließfläche sowie das plastische Potential lassen sich in der folgenden Form angeben,

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\partial \Phi^{mac}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} + \alpha^{mac} \mathbf{1} \\ \mu &= \frac{\partial \Phi^{mac*}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} + \alpha^{*mac} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (8.6)$$

während die in Kapitel 5 eingeführten Vektoren \mathbf{e}_μ und \mathbf{e}_ν die folgende Gestalt annehmen.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\nu &= \nu : \mathcal{E}^{el} : \mathbf{n} = \frac{E}{1 + \nu} \boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \mathbf{n} + \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha^{mac} \mathbf{n} \\ \mathbf{e}_\mu &= \mathbf{n} \cdot \mathcal{E}^{el} : \mu = \frac{E}{1 + \nu} \boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \mathbf{n} + \frac{E}{1 - 2\nu} \alpha^{*mac} \mathbf{n} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Mit dem elastischen akustischen Tensor, entsprechend Gleichung (5.45), den Normalentensoren (8.6) und den Vektoren (8.7) nimmt die zugehörige Lokalisierungsbedingung

$$H + \nu : \mathcal{E}^{el} : \mu = \mathbf{e}_\nu \cdot [\mathbf{q}^{el}]^{-1} \cdot \mathbf{e}_\mu \quad (8.8)$$

entsprechend Gleichung (5.27) die folgende Form an.

$$\begin{aligned} H + \frac{2E}{1 + \nu} \left[J_2 + \frac{3[1 + \nu]}{2[1 - 2\nu]} \alpha^{mac} \alpha^{*mac} \right] \\ = \frac{2E}{1 + \nu} \left[\sigma_T^2 + \frac{1 - 2\nu}{2[1 - \nu]} s_N^2 + \frac{1 + \nu}{2[1 - \nu]} [\alpha^{mac} + \alpha^{*mac}] s_N + \frac{[1 + \nu]^2}{2[1 - \nu][1 - 2\nu]} \alpha^{mac} \alpha^{*mac} \right] \end{aligned} \quad (8.9)$$

Gemäß Abschnitt 5.3.3 beschreibt die Gleichung (8.9) eine Ellipsenschar im MOHR'schen Spannungsraum, dessen Koordinaten σ_N und σ_T sich wie folgt darstellen lassen,

$$\begin{aligned}\sigma_N &:= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \\ s_N &:= \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \mathbf{n} \\ \sigma_T^2 &:= [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] - \sigma_N^2 = [\boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \mathbf{n}] \cdot [\boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \mathbf{n}] - s_N^2\end{aligned}\quad (8.10)$$

wobei $s_N := \sigma_N - I_1/3$ die Normalprojektion des Spannungsdeviators symbolisiert. Die Berührungspunkte der aus Gleichung (8.9) resultierenden Ellipsenschar,

$$\frac{[\sigma_N - \sigma_O]^2}{A^2} + \frac{\sigma_T^2}{B^2} = 1 \quad (8.11)$$

beschrieben durch den Mittelpunkt σ_O und die Achsenabschnitte A und B ,

$$\begin{aligned}\sigma_O &= \frac{1}{3} I_1 - \frac{1+\nu}{2[1-2\nu]} [\alpha^{mac} + \alpha^{*mac}] \\ A^2 &= 2 \frac{1-\nu}{1-2\nu} B^2 \\ B^2 &= \frac{1+\nu}{2E} H + J_2 + \frac{[1+\nu]^2}{8[1-2\nu][1-\nu]} [\alpha^{mac} + \alpha^{*mac}]^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha^{mac} \alpha^{*mac}\end{aligned}\quad (8.12)$$

mit dem größten MOHR'schen Spannungskreis,

$$[\sigma_N - \sigma_C]^2 + \sigma_T^2 = r^2 \quad (8.13)$$

charakterisiert durch den Mittelpunkt σ_C und den Radius r ,

$$\sigma_C = \frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2} \quad \text{und} \quad r = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} \quad (8.14)$$

liefern die Bestimmungsgleichungen für den kritischen Versagenswinkel sowie den kritischen Verfestigungsmodul. Für das nicht-assozierte parabolische DRUCKER-PRAGER Modell entsprechend Gleichung (8.2) erhält man unmittelbar die nachfolgende Gleichung für den kritischen Versagenswinkel Θ^{crit} .

$$\tan^2 \Theta^{crit} = \frac{r - [1 - 2\nu] [\sigma_C - I_1/3] + [1 + \nu] [\alpha^{mac} + \alpha^{*mac}] / 2}{r + [1 - 2\nu] [\sigma_C - I_1/3] - [1 + \nu] [\alpha^{mac} + \alpha^{*mac}] / 2} \quad (8.15)$$

Nicht-assozierte parabolische Drucker-Prager Plastizität – Kritischer Versagenswinkel

Offensichtlich wird der Versagenswinkel stark von dem Reibungskoeffizienten α^{mac} , dem zugehörigen Parameter α^{*mac} und der POISSON Zahl ν beeinflusst. Die analytische Lösung für den kritischen Verfestigungsmodul H^{crit} läßt sich wie folgt angeben.

$$\begin{aligned}H^{crit} &= \frac{2E}{1+\nu} \left[[1-2\nu] \left[\sigma_C - \frac{1}{3} I_1 + \frac{1+\nu}{2[1-2\nu]} [\alpha^{mac} + \alpha^{*mac}] \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + r^2 - J_2 - \frac{[1+\nu]^2}{8[1-2\nu][1-\nu]} [\alpha^{mac} + \alpha^{*mac}]^2 - \frac{[1+\nu]}{[1-\nu]} \alpha^{mac} \alpha^{*mac} \right]\end{aligned}\quad (8.16)$$

Nicht-assozierte parabolische Drucker-Prager Plastizität – Kritischer Verfestigungsmodul

8.3 Microplane–basierte Drucker–Prager Plastizität

8.3.1 Fließfunktion und plastisches Potential

Die zugehörige Microplane Plastizität soll auf einer Fließfunktion basieren, die ihre Motivation in der parabolischen makroskopischen DRUCKER–PRAGER Plastizität des vorigen Abschnittes findet. Dazu werden die beiden Invarianten der makroskopischen Formulierung jeweils durch die volumetrische Spannungskomponente sowie die Hälfte des Skalarproduktes des tangentialen Spannungsvektors ersetzt, so daß sich die Fließfunktion und das plastische Potential einer Ebene wie folgt darstellen lassen.

$$\begin{aligned}\Phi^{mic} &= \Phi^{mic}(\sigma_V, \sigma_T) = [1/2 \sigma_T \cdot \sigma_T]^m - z [c \alpha^{mic} \sigma_V - \phi^{mic}]^n \\ \Phi^{*mic} &= \Phi^{*mic}(\sigma_V, \sigma_T) = [1/2 \sigma_T \cdot \sigma_T]^m - z [c \alpha^{*mic} \sigma_V - \phi^{*mic}]^n\end{aligned}\quad (8.17)$$

Es sei nochmals bemerkt, daß in dieser Formulierung aus Anschauungsgründen lediglich die volumetrische Spannungsprojektion und der tangentiale Spannungsvektor berücksichtigt werden. Einen derartigen Spezialfall der allgemeinen Microplane Formulierung, der auf einer Vernachlässigung der deviatorischen Anteile basiert, erhält man durch entsprechende Wahl der microplane–basierten Elastizitätsmoduli aus Gleichung (4.35) mit $\mathcal{E}_D^{el} \equiv 0$. Entsprechend dem vorhergehenden Abschnitt wird exemplarisch eine parabolische Fließfunktion im $\{\sigma_V, \sigma_T\}$ –Raum untersucht,

$$\begin{aligned}\Phi^{mic} &= \Phi^{mic}(\sigma_V, \sigma_T) = 1/2 \sigma_T \cdot \sigma_T + \alpha^{mic} \sigma_V - \phi^{mic} \\ \Phi^{*mic} &= \Phi^{*mic}(\sigma_V, \sigma_T) = 1/2 \sigma_T \cdot \sigma_T + \alpha^{*mic} \sigma_V - \phi^{*mic}\end{aligned}\quad (8.18)$$

die sich mit Hilfe der speziellen Wahl von $m = 1$, $z = -1$, $c = 1$ und $n = 1$ aus der allgemeinen Formulierung (8.17) gewinnen läßt, vergleiche Gleichung (8.1) und (8.2).

8.3.2 Parameteranpassung

Die Grundlage der Parameteranpassung bildet ein Koeffizientenvergleich der Faktoren der microplane–basierten Fließfunktion mit denen der makroskopischen Fließfunktion. Ein derartiger Vergleich erfordert die Bestimmung der Spannungsinvarianten als Funktionen der Spannungskomponenten auf der Mikroebene. Im elastischen Bereich entsprechen diese Invarianten genau denen des makroskopischen Plastizitätsmodells. Mit Einsetzen der Plastizität hingegen können diese Invarianten wegen der zugrunde liegenden kinematischen Projektion lediglich als Näherungen an die Invarianten des makroskopischen Modells verstanden werden. Grundlage der Betrachtung ist die additive Zerlegung des makroskopischen Spannungstensors σ in einen volumetrischen und einen deviatorischen Anteil.

$$\sigma = \sigma^{vol} + \sigma^{dev} \quad (8.19)$$

Hierbei beschreibt der volumetrische Anteil eine reine Funktion der volumetrischen Spannungskomponenten, während der deviatorische Anteil allein aus der Vollwinkelintegration der tangentialen Spannungsanteile resultiert.

$$\sigma^{vol} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{V} \sigma_V d\Omega \quad \text{und} \quad \sigma^{dev} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \mathbf{T}^T \cdot \sigma_T d\Omega \quad (8.20)$$

Damit läßt sich die erste Invariante des Spannungstensors direkt als Funktion der volumetrischen Spannungsanteile aller Ebenen angeben,

$$I_1 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{1} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \sigma_V d\Omega \quad (8.21)$$

Mikro-Makro Beziehung der ersten Invarianten des Spannungstensors

während die zweite Invariante des Spannungsdeviators allein eine Funktion der tangentialen Spannungsvektoren der Ebenen darstellt.

$$J_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^{dev} : \boldsymbol{\sigma}^{dev} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{3}{10} \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T d\Omega \quad (8.22)$$

Mikro-Makro Beziehung der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators

Die Invariantenbeziehungen bilden die Grundlage des zur Parameteranpassung erforderlichen Koeffizientenvergleiches. Dazu wird zunächst die Vollwinkelintegration der Fließfunktionen der Mikroebene durchgeführt,

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Phi^{mic} d\Omega = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T + \alpha^{mic} \sigma_V - \phi^{mic} d\Omega \quad (8.23)$$

wobei sich die einzelnen Summanden mit Hilfe der Invariantenbeziehungen (8.21) und (8.22) sowie der Integralbeziehung für konstante Integranden (4.7) wie folgt darstellen lassen.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_T \cdot \boldsymbol{\sigma}_T d\Omega &= \frac{5}{3} J_2 \\ \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \alpha^{mic} \sigma_V d\Omega &= \alpha^{mic} I_1 \\ \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \phi^{mic} d\Omega &= \phi^{mic} 3 \end{aligned} \quad (8.24)$$

Ein Koeffizientenvergleich der über den Raumwinkel integrierten Fließfunktion (8.23) mit der Fließfunktion des makroskopischen DRUCKER-PRAGER Modells (8.2)

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \Phi^{mic} d\Omega &= \frac{5}{3} J_2 + \alpha^{mic} I_1 - 3 \phi^{mic} \\ \Phi^{mac} &= J_2 + \alpha^{mac} I_1 - \phi^{mac} \end{aligned} \quad (8.25)$$

liefert die Bestimmungsgleichungen für den Reibungskoeffizienten α^{mic} sowie die Fließspannung ϕ^{mic} des Microplane Modells als Funktionen der makroskopischen Größen,

$$\alpha^{mic} \approx \frac{5}{3} \alpha^{mac} \quad \text{und} \quad \phi^{mic} \approx \frac{5}{9} \phi^{mac} \quad (8.26)$$

bzw. mit Gleichung (8.4) als Funktionen der einaxialen Druck- und Zugfestigkeit f_c und f_t .

$$\alpha^{mic} \approx \frac{5}{3} \frac{f_c - f_t}{3} \quad \text{und} \quad \phi^{mic} \approx \frac{5}{9} \frac{f_c f_t}{3} \quad (8.27)$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß ein solcher Koeffizientenvergleich lediglich auf einer Näherungsbetrachtung beruht. Einerseits liefern die Invariantenbetrachtungen nur im elastischen Bereich exakt die gleichen Spannungsinvarianten wie das makroskopische Modell, andererseits erfordert ein Gleichsetzen der mikroskopischen und makroskopischen Fließbedingung entsprechend Gleichung (8.25), daß alle Mikroebenen bereits den elastischen Bereich verlassen haben, so daß $\Phi^{mac} \equiv 0$ und auf allen Ebenen $\Phi^{mic} \equiv 0$ gilt. Die Parameterbeziehungen (8.27) sind demnach nur dann exakt erfüllt, wenn die Fließspannung tatsächlich auf allen Mikroebenen simultan erreicht würde. Da diese Situation für allgemeine Belastungszustände nicht notwendigerweise erfüllt ist, können die Parametergleichungen im allgemeinen Fall lediglich als Näherungsbeziehungen verstanden werden, um die microplane-basierten Parameter anzupassen.

Für den hier betrachteten speziellen Fall der parabolischen Fließfläche nimmt der microplane-basierte Reibungskoeffizient, entsprechend Gleichung (8.27), fünf Drittel des makroskopischen Reibungskoeffizienten an, während die Fließspannung der Ebene fünf Neuntel der makroskopischen Fließspannung beträgt. Abbildung 8.1, rechts, zeigt exemplarisch die zugehörigen Fließflächen für ein Verhältnis von einaxialer Druck- zu Zugfestigkeit $f_c : f_t$ von 1 : 1, 3 : 1 und 12 : 1. Aufgrund der Parameteranpassung verlaufen die microplane-basierten Fließflächen deutlich steiler, als die zugehörigen Fließflächen des makroskopischen Modells, das in Abbildung 8.1, rechts, dargestellt ist.

8.3.3 Numerische Lokalisierungsanalyse

In Analogie zum makroskopischen Modell nimmt die Lokalisierungsbedingung der Microplane Plastizität die folgende Form an,

$$\det \mathbf{q}^{ep} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{q}^{ep} = \mathbf{q}^{el} - \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\mathbf{e}_{\mu} \otimes \mathbf{e}_{\nu}}{h} d\Omega \quad (8.28)$$

wobei $h = H + \nu_V \mathcal{E}_V^{el} \mu_V + \nu_T \mathcal{E}_T^{el} \cdot \boldsymbol{\mu}_T$. Die Normalen auf die Fließfläche ν_V und ν_T sowie auf das plastische Potential μ_V und $\boldsymbol{\mu}_T$ ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} \nu_V &= \frac{\partial \Phi^{mic}}{\partial \sigma_V} = \alpha^{mic} & \text{und} & & \nu_T &= \frac{\partial \Phi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_T} = \boldsymbol{\sigma}_T \\ \mu_V &= \frac{\partial \Phi^{*mic}}{\partial \sigma_V} = \alpha^{*mic} & \text{und} & & \boldsymbol{\mu}_T &= \frac{\partial \Phi^{*mic}}{\partial \boldsymbol{\sigma}_T} = \boldsymbol{\sigma}_T, \end{aligned} \quad (8.29)$$

während sich die Vektoren \mathbf{e}_{μ} und \mathbf{e}_{ν} wie folgt darstellen lassen,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\nu} &:= [\nu_V \mathbf{V} \mathcal{E}_V^{el} + \nu_T \cdot \mathbf{T} \mathcal{E}_T^{el}] \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{e}_{\mu} &:= \mathbf{n} \cdot [\mathcal{E}_V^{el} \mathbf{V} \mu_V + \mathcal{E}_T^{el} \mathbf{T}^T \cdot \boldsymbol{\mu}_T] \end{aligned} \quad (8.30)$$

wobei \mathbf{n} gemäß Abschnitt 5 den Normalenvektor der Lokalisierungsanalyse darstellt, der jedoch im allgemeinen nicht mit den Normalenvektoren der Mikroebene zur Bestimmung der Projektionstensoren \mathbf{T} übereinstimmt. Es ist offensichtlich, daß die Struktur des akustischen Tensors der Microplane Plastizität entgegen dem makroskopischen Modell keine Rang-Eins Modifikation annimmt. Dementsprechend ist eine analytische Auswertung der Lokalisierungsbedingung für den allgemeinen Fall unmöglich, so daß eine numerische Auswertung von Gleichung (8.28) erforderlich wird. Im folgenden Abschnitt wird eine solche numerische Auswertung exemplarisch anhand des Modellbeispiels der einfachen Scherung illustriert.

8.4 Modellproblem Einfache Scherung

Anhand des Modellproblems der einfachen Scherung sollen die makroskopische und die microplane–basierte Plastizitätsformulierung gegenübergestellt werden. Die in Abbildung 8.2 skizzierte einfache Scherung stellt ein verzerrungskontrolliertes Modellproblem dar, bei dem die Schubverzerrungen in der Ebene sukzessive gesteigert werden, während alle anderen Verzerrungskomponenten identisch zu Null gewählt werden. Experimentell durchgeführte Schubversuche sind durch eine dilatante Materialantwort charakterisiert. Das Phänomen der *Volumendilatation* wurde erstmals vor mehr als einhundert Jahren von REYNOLDS [180] beschrieben und wird aus diesem Grund auch häufig als REYNOLDS Effekt bezeichnet. Als natürliche Konsequenz des REYNOLDS Effektes ruft eine Behinderung der vertikalen Seitenausdehnung eine scheinbare Materialverfestigung hervor. Aufgrund unterschiedlich starker Ausprägungen des Dilatanzeinflusses sind im Schubversuch unterschiedliche Versagensphänomene zu beobachten. Unter geringem Seitendruck entstehen die klassischen, aus der Metallplastizität bekannten, duktilen Versagensformen, während starker Seitendruck mit einem extrem spröden Mode I Versagen verbunden ist.

Im folgenden soll das Modellproblem der einfachen Scherung unter variiertem Dilatanzeinfluß untersucht werden. Für das nicht–assoziierte makroskopische Materialmodell entsprechend Abschnitt 8.2 sowie für das microplane–basierte Modell nach Abschnitt 8.3 werden hierzu exemplarisch ausgewählte Formulierungen unterschiedlicher $f_c : f_t$ – Verhältnisse analysiert. Das plastische Potential aller drei Formulierungen sei vom VON MISES Typ, so daß $\alpha^{*mac} = \alpha^{*mic} = 0.0000$. Der Elastizitätsmodul wird zu $E = 30000 \text{ N/mm}^2$ angenommen, während die POISSON Zahl zu $\nu = 0.2$ gewählt wird.

Tabelle 8.1 dokumentiert die Abhängigkeit des kritischen Versagenswinkels Θ^{crit} vom Festigkeitsverhältnis $f_c : f_t$ sowie von der POISSON Zahl ν . Mit steigender Abweichung von Druck– und Zugfestigkeit sowie mit wachsender POISSON Zahl ist eine zunehmend sprödere Materialantwort, gekennzeichnet durch eine Reduktion des Versagenswinkels Θ^{crit} , zu beobachten. Während für nahezu gleiche Festigkeitsverhältnisse ein gemischter Versagensmode mit $\Theta^{crit} = 45^\circ$ eintritt, tendiert der Versagensmode für wachsende Abweichungen von Druck– und Zugfestigkeit aufgrund der zunehmenden Volumendilatation mehr und mehr zu einem reinen Mode I Versagen, das durch $\Theta^{crit} = 0^\circ$ gekennzeichnet ist, vergleiche Abbildung 8.2.

Abbildung 8.3 zeigt eine Gegenüberstellung der Ergebnisse der makroskopischen und der microplane–basierten Lokalisierungsanalyse. Die analytische Auswertung der Lokalisierungsbedingung des makroskopischen Modells liefert für die unterschiedlichen Festigkeitsverhältnisse die links dargestellten Lokalisierungsellipsen. Die zugehörigen Ergebnisse der

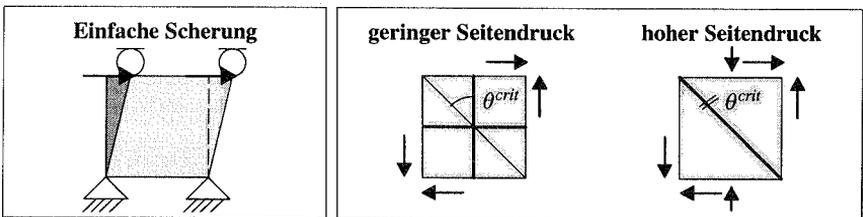


Abbildung 8.2: Modellproblem der einfachen Scherung

$f_c : f_t$	$\nu=0.000$	$\nu=0.125$	$\nu=0.250$	$\nu=0.375$	$\nu=0.499$
1:1	45.00 ⁰				
3:1	35.26 ⁰	33.99 ⁰	32.69 ⁰	31.36 ⁰	30.01 ⁰
5:1	29.45 ⁰	27.24 ⁰	24.90 ⁰	22.38 ⁰	19.64 ⁰
8:1	22.20 ⁰	18.26 ⁰	13.37 ⁰	5.39 ⁰	0.00 ⁰
12:1	11.78 ⁰	0.00 ⁰	0.00 ⁰	0.00 ⁰	0.00 ⁰

Tabelle 8.1: Einfache Scherung – Kritischer Versagenswinkel Θ^{crit}

numerischen Lokalisierungsanalyse für das Microplane Modell sind anhand des richtungsabhängigen skalierten akustischen Tensors jeweils rechts daneben dargestellt. Dem obersten Bild liegt ein Verhältnis von $f_c : f_t = 1 : 1$ zugrunde. Dementsprechend ist der Reibungskoeffizient des makroskopischen sowie des microplane-basierten Modells identisch zu Null, $\alpha^{mac} = \alpha^{mic} = 0.0000$. Man erhält die klassische, aus der Metallplastizität bekannte, assoziierte VON MISES Plastizität, die sich durch eine vom hydrostatischen Druck unabhängige Fließfunktion auszeichnet. Die Lokalisierungsanalyse liefert sowohl für das makroskopische Modell als auch für das Microplane Modell zwei kritische Richtungen, jeweils unter $\Theta^{crit} = 45.00^0$ und $\Theta^{crit} = 135.00^0$. Dieses Antwortverhalten, das durch ein reines Schubversagen geprägt ist, ist charakteristisch für druckunabhängige Materialien und entspricht beispielsweise der klassischen Ausprägung von LÜDERS Bändern in metallischen Werkstoffen.

Den Untersuchungen des mittleren Bildes liegt die Annahme zugrunde, daß die Druckfestigkeit dreimal größer sei als die Zugfestigkeit des Materials, so daß $f_c : f_t = 3 : 1$. Der zugehörige makroskopische Reibungskoeffizient ergibt sich somit unmittelbar zu $\alpha^{mac} = 0.6667$, während der Reibungskoeffizient der Microplane Formulierung einen Wert von $\alpha^{mic} = 1.1111$ annimmt. Diese Wahl verursacht ein moderates Dilatanzverhalten. Die kritischen Versagensrichtungen des makroskopischen Modells weichen mit $\Theta^{crit} = 33.21^0$ und $\Theta^{crit} = 146.79^0$ bereits merklich von den Versagensrichtungen der druckunabhängigen Formulierung ab. Es ist somit ein gemischtes Schub-Druck Versagen beobachtbar. Die numerische Lokalisierungsanalyse des Microplane Modells liefert Versagenswinkel von $\Theta^{crit} = 32.75^0$ und $\Theta^{crit} = 147.25^0$. Es kann dementsprechend ein bemerkenswert ähnliches Antwortverhalten wie im makroskopischen Modell beobachten werden.

Abschließend wurde das Antwortverhalten unter einer extrem starken Abweichung von Druck- zu Zugfestigkeit analysiert, die ein ausgeprägtes Dilatanzverhalten hervorruft. Für das gewählte Festigkeitsverhältnis von $f_c : f_t = 12 : 1$ ergeben sich der zugehörige makroskopische und microplane-basierte Reibungskoeffizient jeweils zu $\alpha^{mac} = 3.6667$ und $\alpha^{mic} = 6.1111$. Wie auf dem unteren Bild von Abbildung 8.3 zu erkennen ist, ist unter einer derart großen Abweichung von Druck- zu Zugfestigkeit nur noch eine einzige kritische Richtung zu beobachten. Diese stellt sich unter einem Winkel von $\Theta^{crit} = 0.00^0$ ein, was einem reinen Mode I Versagen entspricht. Wiederum liefern das makroskopische Modell und das Microplane Modell gleiche Ergebnisse.

Abbildung 8.4 zeigt die zugehörigen Schubspannungs-Schubdehnungskurven der simulierten Scherversuche. Den numerischen Berechnungen liegt ein lineares Entfestigungsverhalten zugrunde. Links ist das Antwortverhalten des makroskopischen Modells dargestellt, für das der Verfestigungsmodul gerade identisch zu dem aus der analytischen Lösung bekannten kritischen Verfestigungsmodul gewählt wurde, so daß $H = H^{crit}$. Die Markie-

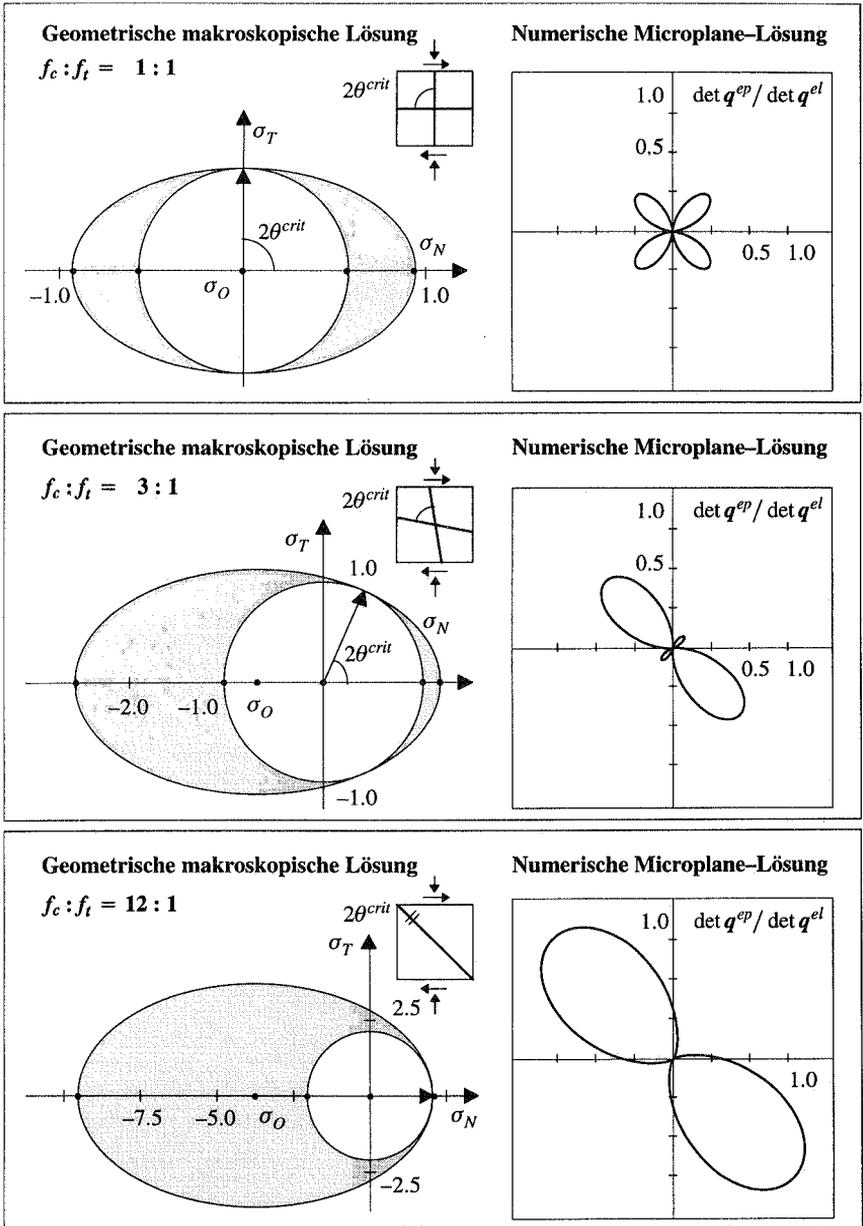


Abbildung 8.3: Makroskopische und microplane-basierte Lokalisierungsanalyse

rungen kennzeichnen das Einsetzen der Lokalisierung, das in diesem Fall offensichtlich mit dem Verlassen des elastischen Bereiches übereinstimmt. Der destabilisierende Einfluß des zugrunde gelegten nicht-assozierten Modells wird durch ein Einsetzen der Lokalisierungsbedingung vor dem Erreichen der maximalen Tragfähigkeit verdeutlicht, vergleiche Abschnitt 5.2.

Die rechte Seite verdeutlicht das Antwortverhalten des Materialpunktes, das aus der Integration aller Microplane-Antworten resultiert. Bemerkenswerterweise äußert sich das auf der Mikroebene postulierte lineare Verhalten in einer partiell nichtlinearen Antwort des Materialpunktes. Die erste Markierung einer jeden Kurve kennzeichnet das Verlassen des elastischen Bereiches. Im Gegensatz zum makroskopischen Modell tritt jedoch das Einsetzen von Lokalisierung, das mit der zweiten Markierung verbunden ist, erst zu einem späteren Zeitpunkt der Lastgeschichte ein. Für das Microplane Modell wird die Lokalisierungsbedingung erstmals zu dem Zeitpunkt erfüllt, zu dem alle Ebenen den elastischen Bereich verlassen haben. Während das homogenisierte Antwortverhalten vor der ersten und nach der zweiten Markierung linear verläuft, findet im Zwischenbereich ein sukzessiver Übergang der einzelnen Ebenen in den plastischen Bereich statt. Dieser äußert sich in der homogenisierten Antwort in einem nichtlinearen Übergangsbereich.

Anhand des illustrierten Beispiels der parabolischen nicht-assozierten DRUCKER-PRAGER Plastizität konnte gezeigt werden, daß es prinzipiell möglich ist, die microplane-basierten Materialparameter, die in den bisherigen Modellen reine Eingangsgrößen ohne physikalische Bedeutung darstellen, systematisch auf makroskopisch meßbare Materialkennwerte zu beziehen. Mit Hilfe der Auswertung von Näherungsgleichungen für die Spannungsinvarianten ist es gelungen, die Materialparameter des makroskopischen und des microplane-basiereten Modells anhand eines Koeffizientenvergleiches ineinander zu überführen. Das auf diese Art geeichte Microplane Modell liefert, wie am Modellproblem der einfachen Scherung gezeigt wurde, Simulationsergebnisse, die denen des makroskopischen Modells entsprechen. Sowohl die kritischen Versagenswinkel aus der zugehörigen Lokalisierungsanalyse, als auch die jeweiligen Spannungs-Dehnungskurven weisen eine bemerkenswerte Übereinstimmung auf.

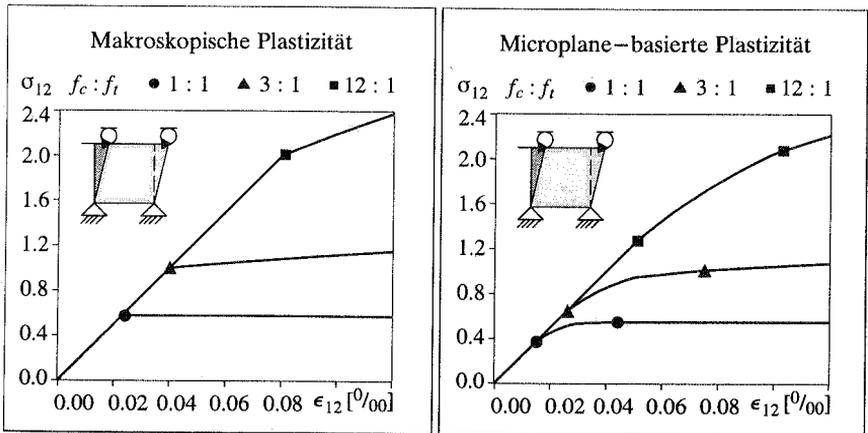


Abbildung 8.4: Makroskopische und microplane-basierte Spannungs-Dehnungskurven

8.5 Beispiel – Scheibe mit Loch

Abschließend soll die Übereinstimmung des lokalen microplane-basierten Plastizitätsmodells mit dem makroskopischen Modell anhand des Strukturbeispiels der Scheibe mit Loch illustriert werden. Das klassische Benchmarkproblem des DFG Paketantrages "Adaptive Finite Element Methoden in der Angewandten Mechanik" nach BARTHOLD, SCHMIDT & STEIN [6] besteht aus einer $200 \times 200 \text{ mm}^2$ großen Aluminiumscheibe, deren Elastizitätsmodul und POISSON Zahl die Werte von $E=206899.9 \text{ N/mm}^2$ und $\nu=0.29$ annehmen. Die Aluminiumscheibe, für die im folgenden der ebene Verzerrungszustand postuliert wird, zeichnet sich durch eine kreisrunde Aussparung vom Radius $r=10 \text{ mm}$ in Scheibenmitte aus. Das Materialverhalten sei ideal plastisch bei einer einaxialen Zug- und Druckfestigkeit von $f_t = f_c = 450 \text{ N/mm}^2$. Damit ergeben sich die Materialparameter des makroskopischen, parabolischen Modells zu $\alpha^{mac} = \alpha^{*mac} = 0.00$ und $\phi^{mac} = 67500 \text{ N}^2/\text{mm}^4$, während die Microplane Parameter Werte von $\alpha^{mic} = \alpha^{*mic} = 0.00$ und $\phi^{mic} = 112500 \text{ N}^2/\text{mm}^4$ annehmen. Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften kann die Simulation am Viertelsystem erfolgen, das mit 256 achtknotigen verschiebungsbasierten Serendipity-Scheibenelementen in Kombination mit einer 2×2 GAUSS-Punkt Integration diskretisiert wurde. Die Lochscheibe wird unter der Last $\lambda \bar{p}$ mit $\bar{p} = 100 \text{ MPa}$ gleichförmig in vertikale Richtung gezogen. Damit beträgt der kritische Lastfaktor der Traglast $\lambda^{crit} = 4.66$. Abbildung 8.5 zeigt die Entwicklung des Lastfaktors aufgetragen über den vertikalen Verschiebungen des oberen Randes. Im linken Diagramm ist die Last-Verschiebungskurve des ursprünglichen Benchmarkproblems dargestellt, die exakt die Traglast von $\lambda^{crit} = 4.66$ erreicht. Das rechte Diagramm zeigt die Materialantwort des microplane-basierten Plastizitätsmodells. Auffällig ist zum einen das etwas frühere Einsetzen des plastischen Fließens in der Simulation mit dem Microplane Modell, zum anderen die leicht abgeminderte Traglast mit $\lambda^{crit} = 4.30$. Beide Abweichungen stimmen prinzipiell mit den Abweichungen der Ergebnisse des Modellproblems der einfachen Scherung überein. Während das frühere Einsetzen der Plastizität auf die frühe Überschreitung der Fließspannung in einzelnen

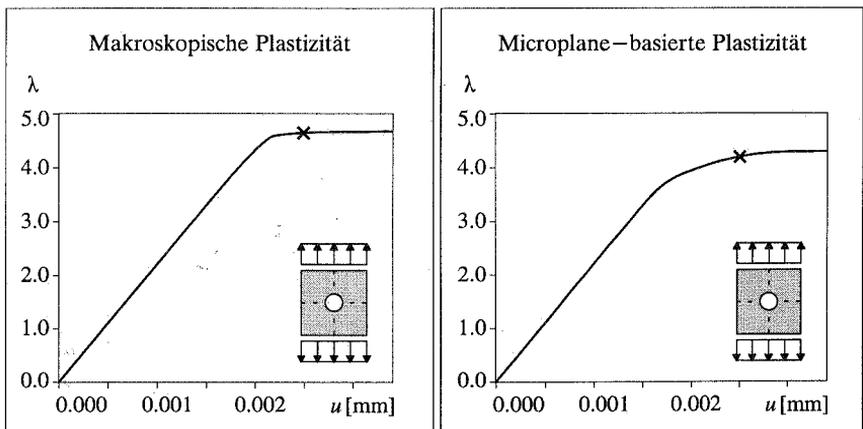


Abbildung 8.5: Makroskopische und microplane-basierte Last-Verschiebungskurven

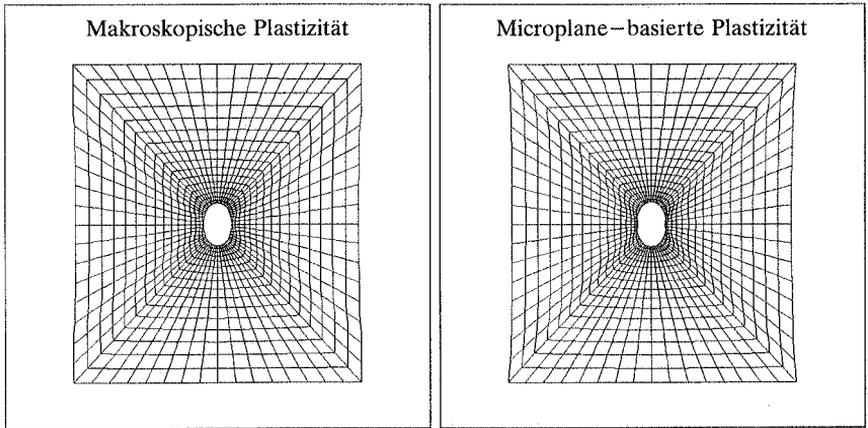


Abbildung 8.6: Deformierte Strukturen

kritischen Mikroebenen zurückzuführen ist, basiert die Abweichung von der Traglast auf dem Fehler der numerischen Vollwinkelintegration. Insgesamt wird das Antwortverhalten des makroskopischen Materialmodells jedoch relativ gut durch das Microplane Modell approximiert.

Die nahezu identischen deformierten Strukturen beider Berechnungen sind in Abbildung 8.6 in 25-facher Überhöhung dargestellt. Abbildung 8.7 zeigt die resultierende Verzerrungskomponente in Lastrichtung zu einem Zeitpunkt kurz nach Erreichen der Traglast. Zu diesem Zeitpunkt beträgt die vertikale Verschiebung des oberen Randes gerade $u = 0.0025$ mm. Es ist deutlich erkennbar, daß das Versagen vom linken und rechten

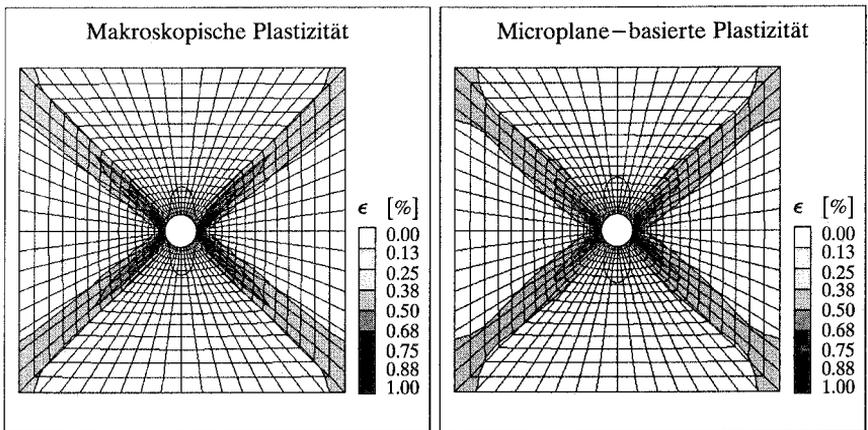


Abbildung 8.7: Makroskopische und microplane-basierte Verzerrungsverteilung

Lochrand ausgeht, an dem die Spannungen etwa den dreifachen Wert der aufgebrachten Spannung annehmen. Beide Modelle liefern das klassische, für metallische Materialien charakteristische Schubversagen unter einem Winkel von 45° zur Belastungsrichtung.

Das Benchmarkbeispiel der Scheibe mit Loch konnte die Qualität der Parameteranpassung des Microplane Plastizitätsmodells an ein makroskopisches Plastizitätsmodell erneut bestätigen. Unter proportionaler Belastung liefern beide Modelle bei angepaßter Parameterwahl nahezu identische Ergebnisse. Jedoch ist das Microplane Modell darüberhinaus in der Lage, ein anisotropes Materialverhalten zu beschreiben.

Es sei jedoch abschließend darauf hingewiesen, daß die Parametereichung in den vorhergehenden Beispielen exemplarisch nur für relativ einfache Modelle durchgeführt wurde. Diese werden in der hier vorgestellten Form sicher nicht in der Lage sein, das komplexe Materialverhalten von Beton unter beliebigen Belastungszuständen exakt abzubilden. Die gezeigte Vorgehensweise ist jedoch nahezu beliebig auf erweiterte Materialgesetze übertragbar.

Kapitel 9

Zusammenfassende Bewertung

9.1 Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden unterschiedliche Strategien zur numerischen Simulation kohäsiver Reibungsmaterialien vorgestellt. Alle Verfahren sind in eine Finite Element Berechnung eingebettet, so daß zunächst die mechanischen Grundlagen und deren numerische Umsetzung mit Hilfe einer klassischen, verschiebungsbasierten Finite Element Formulierung erläutert wurden. Danach erfolgte ein Vergleich grundsätzlich verschiedener isotroper Materialmodelle anhand der klassischen Plastizitätstheorie und der Kontinuumschädigungsmechanik. Darauf aufbauend wurde eine Verallgemeinerung auf anisotropes Materialverhalten diskutiert, das im Rahmen des Microplane Konzeptes in natürlicher Form beschrieben werden kann. Die Wirkungsweise der Microplane Formulierung wurde anhand der rheologischen Modelle der Elastizität, der Elasto-Plastizität sowie der Elasto-Schädigung dokumentiert.

Der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Beschreibung des für kohäsive Reibungsmaterialien charakteristischen entfestigenden Materialverhaltens. Dazu wurden zunächst die klassischen Indikatoren für materielle Instabilität und den Verlust von Elliptizität erläutert. Die daraus resultierenden lokalisierten Versagensformen zeichnen sich, wie gezeigt, durch einen Verlust der Eindeutigkeit verbunden mit der Netzabhängigkeit der numerischen Lösung aus. Als natürliche Abhilfe diente im Rahmen dieser Arbeit ein gradientenerweitertes Kontinuumsmodell. Aufbauend auf einer Zusammenfassung der mechanischen Grundgleichungen wurde die Finite Element Umsetzung als Zweifeld-Formulierung skizziert. Sowohl für isotrope als auch für anisotrope Schädigungsmodelle wurde die Berücksichtigung der höheren Gradienten in den Konstitutivgleichungen erläutert. Die Bereitstellung eines numerischen Verfahrens zur Identifikation der zusätzlichen Materialparameter konnte den Prozeß der Modellbildung vervollständigen.

Da die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Microplane Modelle als Bindeglied zwischen der Mikro- und der Makroebene verstanden werden können, erfolgte abschließend ein Vergleich des vorgestellten Microplane Konzeptes mit diskreten Partikelmodellen. Eine zusätzliche Gegenüberstellung des Microplane Modells mit bekannten kontinuumsbasierten Konstitutivgesetzen konnte desweiteren Analogien zu makroskopisch phänomenologischen Materialformulierungen aufzeigen, die zur Identifikation der Microplane Parameter herangezogen werden können.

Alle in dieser Arbeit bearbeiteten theoretischen Aspekte wurden numerisch umgesetzt und jeweils anhand ausgewählter Modellprobleme veranschaulicht.

Insbesondere wurden im Rahmen dieser Arbeit die folgenden grundsätzlich neuen Aspekte bearbeitet, um die aus der Literatur bekannten Modellierungsverfahren zu verallgemeinern und in geeigneter Form zu ergänzen.

- Entwicklung eines generalisierten, thermodynamisch konsistenten Konzeptes zur Modellierung anisotropen Materialverhaltens im Rahmen der Microplane Theorie
- Modifikation der Konstitutivgesetze auf der Mikroebene zur Berücksichtigung der für kohäsive Reibungsmaterialien charakteristischen Interaktion des volumetrischen und deviatorischen Verhaltens
- Anwendung des verallgemeinerten Konzeptes auf die Modelle der Elastizität, der Elasto-Plastizität und der Elasto-Schädigung
- Konsistente Linearisierung der jeweiligen Modelle zur Steigerung der numerischen Effizienz und zur Durchführung von Lokalisierungsanalysen
- Graphische Illustration der Wirkungsweise microplane-basierter Konstitutivgesetze mit Hilfe von Studien der Texturentwicklung
- Charakterisierung der Eigenschaften der resultierenden Microplane Gesetze anhand einfacher Modellprobleme
- Theoretische Gegenüberstellung der Grundgleichungen des Microplane Konzeptes und der homogenisierten Antwort diskreter Partikelmodelle
- Theoretischer und numerischer Vergleich microplane-basierter Materialmodelle mit makroskopisch phänomenologischen Modellen als Basis zur Entwicklung neuer microplane-basierter Konstitutivgesetze und zur Identifikation der Microplane-Parameter
- Bereitstellung eines gradientenerweiterten Kontinuumsmodells zur Modellierung des entfestigenden Verhaltens isotroper und anisotroper kohäsiver Reibungsmaterialien
- Entwicklung eines gradientenerweiterten anisotropen Schädigungsmodells im Rahmen des Microplane Konzeptes
- Bereitstellung eines allgemeinen Verfahrens zur Bestimmung des Parameters der internen Länge mittels inverser Modellierung mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente

9.2 Bewertung

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte generalisierte Konzept zur Formulierung microplane-basierter Konstitutivgesetze ermöglicht die Charakterisierung eines beliebigen rheologischen Verhaltens anisotroper Materialien. Die Thermodynamik irreversibler Prozesse bildet die Grundlage des vorgestellten Konzeptes, das somit im Gegensatz zu den bisherigen Microplane Formulierungen die Erfüllung des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik a priori gewährleistet. Durch die Berücksichtigung der Kopplung des normalen und tangentialen Verhaltens auf den einzelnen Mikroebenen wird eine globale volumetrisch-deviatorische Interaktion auf natürliche Weise erfaßt. Die damit verbundene Reduktion

der Anzahl der internen Variablen pro Integrationspunkt vermindert den globalen Speicherplatzbedarf erheblich. Eine derartige Formulierung mit nur einer Schädigungs- bzw. Fließfunktion pro Mikroebene erreicht eine weitaus höhere numerische Stabilität als die bisherigen Microplane Formulierungen, bei denen unter monoton steigender Beanspruchung Be- und Entlastungsvorgänge einzelner Komponenten beobachtet werden konnten. Weiterhin zeichnen sich die entwickelten Modelle durch einen reduzierten Parametersatz aus. Die Eingangsgrößen des lokalen Basismodells können nun eindeutig makroskopisch meßbaren Materialeigenschaften zugeordnet und mit Standardversuchen identifiziert werden. Durch eine konsistente Linearisierung der verwendeten Verfahren wurde die numerische Effizienz deutlich gesteigert. Ausgewählte Anwendungsbeispiele haben gezeigt, daß das vorgestellte Konzept eine vielversprechende Basis zur numerischen Simulation anisotropen Materialverhaltens darstellt.

Bei Berechnungen im postkritischen Bereich hat sich das gradientenerweiterte Kontinuumsmodell bewährt. Es gewährleistet eindeutige, netzunabhängige Lösungen bei finiter Energiedissipation. Jedoch bleibt zu bemerken, daß die entsprechenden numerischen Simulationen im Vergleich zu lokalen Verfahren extrem zeitaufwendig sind. Zum einen müssen zusätzliche globale Freiheitsgrade berücksichtigt werden, zum anderen entstehen unsymmetrische Gleichungssysteme, die entsprechende Gleichungslöser erfordern. Für isotrope Gradientenmodelle, die nur eine skalarwertige nichtlokale Größe berücksichtigen, ist der entstehende Mehraufwand tolerierbar gering. Die Notwendigkeit tensorieller, anisotroper Gradientenmodelle sollte jedoch ausführlich geprüft werden, bevor entsprechende zeitaufwendige Verfahren zur Anwendung kommen. Insbesondere bei nicht-proportionalen Beanspruchungen ist jedoch der Einsatz anisotroper Modelle unvermeidlich.

Die Wahl des internen Längenparameters bleibt weiterhin kritisch zu bewerten. Die in dieser Arbeit vorgestellte Parameteridentifikation im Rahmen einer Finite Element-basierten inversen Modellierung ermöglicht grundsätzlich die Bestimmung dieses Längenparameters als Eingangsgröße des Gradientenmodells. Jedoch ist die physikalische Bedeutung der internen Länge bislang noch immer ungeklärt. Studien der Mikrostruktur können hierzu eventuell nähere Informationen liefern. Der Vergleich lokaler microplane-basierter Konstitutivgesetze mit diskreten Partikelmodellen stellt einen ersten Schritt in diese Richtung dar.

9.3 Ausblick

Mit der Bereitstellung eines generalisierten Konzeptes zur Beschreibung anisotropen Materialverhaltens eröffnet sich ein breiter Anwendungsbereich. Der Einsatz microplane-basierter Materialmodelle ist nicht mehr allein auf Beton beschränkt, vielmehr können zahlreiche andere transversal isotrope, orthotrope oder anisotrope Materialien abgebildet werden. Ein klassischer potentieller Einsatzbereich der vorgestellten Modellklasse ist die Geotechnik. Aufgrund von Spannungsumlagerungen im Boden kann beispielsweise bei der Konstruktion von Tunneln insbesondere während der Bauphase ein ausgeprägt anisotropes Materialverhalten beobachtet werden. Ein microplane-basiertes Plastizitätsmodell stellt einen erfolgversprechenden Zugang zur Charakterisierung dieses Verhaltens dar. Aber auch zur Modellierung von Materialien, die bereits im Ausgangszustand ein anisotropes Verhalten aufweisen, bietet sich das Microplane Konzept an. Als typische Vertreter dieser Materialklasse seien beispielsweise Mehrphasenmaterialien wie Stahlbeton oder Faserverbundwerkstoffe zu nennen. Die Grenzschicht zwischen den einzelnen Phasen

kann in diesem Zusammenhang als potentielle Versagensebene verstanden werden. Diese Versagensebene läßt sich direkt mit Hilfe geometrisch vorgegebener Mikroebenen simulieren. Desweiteren kann das Microplane Konzept zur Modellierung orthotroper Werkstoffe herangezogen werden. Beispielsweise können zur Modellierung von Holz bereits die elastischen Materialkonstanten eine vom Raumwinkel abhängige Verteilung annehmen, so daß das richtungsabhängige Verhalten in natürlicher Form beschrieben werden kann.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden vereinfachend nur reine Plastizitäts- und Schädigungsmodelle vorgestellt. Wünschenswert wäre eine Kombination beider Modelle, um die charakteristischen Eigenschaften kohäsiver Reibungsmaterialien noch besser erfassen zu können. Insbesondere unter zyklischen Belastungen ist eine derartige Kopplung von Interesse. Zunächst bietet sich die Kombination eines lokalen Plastizitätsmodells mit dem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten gradientenerweiterten Schädigungsmodell an, aber auch gradientenerweiterte Plastizitätsformulierungen in Kombination mit lokalen Schädigungsmodellen sind denkbar. Es hat sich als sinnvoll erwiesen, jedes entwickelte Microplane Modell zunächst mit bekannten makroskopischen Materialmodellen zu vergleichen, um die Materialparameter in geeigneter Form anzupassen. Diese Strategie empfiehlt sich natürlich auch für kombinierte Plastizitäts-Schädigungsformulierungen.

Weiterhin stellt die physikalische Bedeutung des internen Längenparameters noch immer eine zentrale Frage bei der Modellierung entfestigender Werkstoffe dar. Diese Fragestellung ist eng mit der Forderung nach experimentellen Untersuchungen verbunden, die die Grundlage der vorgestellten Parameteridentifikation bilden. Mit Hilfe einer Finite Element-basierten inversen Modellierung in Kombination mit experimentellen Feldmessungen könnten erste Aussagen über den internen Längenparameter getroffen werden. Einen alternativen Zugang bilden detaillierte Studien der Mikrostruktur. Insbesondere aufgrund der engen Verwandtschaft des Microplane Konzeptes mit diskreten Partikelmodellen können Vergleichsrechnungen beider Verfahren eventuell nähere Informationen über den internen Längenparameter geben. Es wäre in diesem Zusammenhang interessant, den Einfluß der Partikelgröße auf die interne Länge zu untersuchen. Natürlich können auch weitere zusätzliche Informationen des Partikelmodells, wie beispielsweise die räumliche Verteilung der Kontakthäufigkeit, herangezogen werden, um das Microplane Modell in geeigneter Form zu ergänzen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Grundlagen als allgemeine Basis weiterführender Arbeiten verstanden werden können. Das bereitgestellte generalisierte Konzept bietet nicht nur Potential für zahlreiche theoretische und numerische Untersuchungen, auch die Anwendung der vorgestellten Methodik auf andere Materialklassen erscheint vielversprechend.

Literaturverzeichnis

- [1] AIFANTIS, E. C. [1984]. 'On the microstructural origin of certain inelastic models.' *J. Eng. Mat. Tech.*, **106**, pp. 326–330.
- [2] AIFANTIS, E. C. [1992]. 'On the role of gradients in the localization of deformation and fracture.' *Int. J. Eng. Sci.*, **30**, pp. 1279–1299.
- [3] ALBRECHT, J. & L. COLLATZ [1958]. 'Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale.' *ZAMM*, **38**, pp. 1–15.
- [4] ANDRESEN, K., S. DANNEMEYER, H. FRIEBE, R. MAHNKEN, R. RITTER & E. STEIN [1996]. 'Parameteridentifikation für ein plastisches Stoffgesetz mit FE-Methoden und Rasterverfahren.' *Bauingenieur*, **71**, pp. 21–31.
- [5] ARGYRIS, J. H. [1960]. *Energy Theorems and Structural Analysis*. Butterworth London.
- [6] BARTHOLD, F.-J., M. SCHMIDT & E. STEIN [1998]. 'Error indicators and mesh refinements for finite element computations of elastoplastic deformations.' *Comp. Mech.*, **22**, pp. 225–238.
- [7] BATCHELOR, G. K. & W. O' BRIEN [1977]. 'Thermal or electrical conduction through a granular material.' *Proc. Roy. Soc. London A*, **355**, pp. 313–333.
- [8] BATDORF, S. B. & B. BUDIANSKY [1949]. 'A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip.' *Technical Note 1871, National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Washington, D.C.*
- [9] BATHE, K. J. [1995]. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [10] BATHURST, R. J. & L. ROTHENBURG [1988]. 'Micromechanical aspects of isotropic granular assemblies with linear contact interactions.' *J. Appl. Mech.*, **55**, pp. 17–23.
- [11] BAŽANT, Z. P. [1984]. 'Imbricate continuum and its variational derivation.' *J. Eng. Mech.*, **110**, pp. 1693–1712.
- [12] BAŽANT, Z. P. [1991]. 'Why continuum damage is nonlocal: Micromechanics arguments.' *J. Eng. Mech.*, **117**, pp. 1070–1087.
- [13] BAŽANT, Z. P. [1994]. 'Nonlocal damage theory based on micromechanics of crack interactions.' *J. Eng. Mech.*, **120**, pp. 593–617.

- [14] BAŽANT, Z. P. & T. BELYTŠCHKO [1985]. 'Wave propagation in a strain-softening bar: Exact solution.' *J. Eng. Mech.*, **111**, pp. 381–389.
- [15] BAŽANT, Z. P. & P. G. GAMBAROVA [1984]. 'Crack shear in concrete: Crack band microplane model.' *J. Struct. Eng., ASCE*, **110**, pp. 2015–2036.
- [16] BAŽANT, Z. P., M. JIRÁSEK, Y. XIANG & P. PRAT [1994]. 'Microplane model with stress-strain boundaries and its identification from tests with localized damage.' In *Computational Modelling of Concrete Structures*, edited by R. de Borst, N. Bićanić & H. Mang, pp. 255–261. Pineridge Press.
- [17] BAŽANT, Z. P. & B. H. OH [1983]. 'Crack band theory for fracture of concrete.' *RILEM Materials & Structures*, **16**, pp. 155–177.
- [18] BAŽANT, Z. P. & B. H. OH [1985]. 'Microplane model for progressive fracture of concrete and rock.' *J. Eng. Mech.*, **111**, pp. 559–582.
- [19] BAŽANT, Z. P. & B. H. OH [1986]. 'Efficient numerical integration on the surface of a sphere.' *ZAMM*, **66**, pp. 37–49.
- [20] BAŽANT, Z. P. & J. OŽBOLT [1990]. 'Nonlocal microplane model for fracture, damage and size effect in structures.' *J. Eng. Mech.*, **116**, pp. 2485–2505.
- [21] BAŽANT, Z. P. & J. OŽBOLT [1992]. 'Compression failure of quasibrittle material: Nonlocal microplane model.' *J. Eng. Mech.*, **118**, pp. 540–556.
- [22] BAŽANT, Z. P., J. OŽBOLT & R. ELIGEHAUSEN [1994]. 'Fracture size effect: Review of evidence for concrete structures.' *J. Eng. Mech.*, **120**, pp. 2377–2398.
- [23] BAŽANT, Z. P. & G. PIAUDIER-CABOT [1988]. 'Nonlocal damage, localization, instability and convergence.' *J. Appl. Mech.*, **55**, pp. 287–293.
- [24] BAŽANT, Z. P. & J. PLANAS [1998]. *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials*. CRC Press.
- [25] BAŽANT, Z. P. & P. PRAT [1988]. 'Microplane model for brittle plastic material: Part I – Theory, Part II – Verification.' *J. Eng. Mech.*, **114**, pp. 1672–1702.
- [26] BAŽANT, Z. P., Y. XIANG & P. PRAT [1996]. 'Microplane model for concrete. Part I – Stress-strain boundaries and finite strain.' *J. Eng. Mech.*, **122**, pp. 245–254.
- [27] BENALLAL, A. [1992]. 'On localization phenomena in thermo-elasto-plasticity.' *Arch. Mech.*, **44**, pp. 15–29.
- [28] BENALLAL, A., R. BILLARDON & G. GEYMONAT [1988]. 'Some mathematical aspects of the damage softening rate problem.' In *Cracking and Damage*, edited by J. Mazars & Z. P. Bažant, pp. 247–258. Elsevier.
- [29] BENALLAL, A. & C. COMI [1996]. 'Localization analysis via a geometrical method.' *Int. J. Solids & Structures*, **33**, pp. 99–119.
- [30] DE BORST, R. [1986]. *Non-linear analysis of frictional materials*. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Nederlands.

- [31] DE BORST, R. [1991]. 'Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat continuum.' *Eng. Comp.*, **8**, pp. 317-332.
- [32] DE BORST, R. [1991]. 'The zero-normal stress condition in plane-stress and shell elastoplasticity.' *Comm. Appl. Num. Meth.*, **7**, pp. 29-33.
- [33] DE BORST, R. [1998]. 'On gradient-enhanced coupled plastic damage theories.' In *Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina*, edited by E. Oñate & S. Idelsohn. CIMNE, Barcelona, Spain.
- [34] DE BORST, R., A. BENALLAL & O. HEERES [1996]. 'A gradient enhanced damage approach to fracture.' *J. de Phys. IV*, **6**, pp. C6-491-502.
- [35] DE BORST, R., M. G. D. GEERS, E. KUHLMANN & R. H. J. PEERLINGS [1998]. 'Enhanced damage models for concrete fracture.' In *Computational Modelling of Concrete Structures*, edited by R. de Borst, N. Bićanić, H. Mang & G. Meschke, pp. 231-248. Balkema, Rotterdam.
- [36] DE BORST, R. & E. VAN DER GIESSEN [1998]. *Material Instabilities in Solids*. John Wiley & Sons, Ltd.
- [37] DE BORST, R. & H. B. MÜHLHAUS [1992]. 'Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects.' *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **35**, pp. 521-539.
- [38] DE BORST, R. & J. PAMIN [1996]. 'Some novel developments in finite element procedures for gradient-dependent plasticity.' *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**, pp. 2477-2505.
- [39] DE BORST, R., J. PAMIN & M. G. D. GEERS [1999]. 'On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories with a view to localization analysis.' *Eur. J. Mech. / A: Solids*, **18**, pp. 939-962.
- [40] DE BORST, R., L. J. SLUYS, H. B. MÜHLHAUS & J. PAMIN [1993]. 'Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation.' *Eng. Comp.*, **10**, pp. 99-121.
- [41] BRAESS, D. [1997]. *Finite Elemente*. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg, 2. Auflage.
- [42] BRINKGREVE, R. B. J. [1994]. *Geometrical models and numerical analysis of softening*. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [43] BROMWICH, T. J. I.'A. [1906]. *Quadratic forms and their classification by means of invariant-factors*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, London.
- [44] BRUHNS, O. T. & P. SCHIESSE [1996]. 'An anisotropic continuum damage model of elastic-plastic materials with anisotropic damage by oriented microvoids.' *Eur. J. Mech. / A: Solids*, **15**, pp. 367-396.
- [45] CAMBOU, B., P. DUBUJET, F. EMERIAULT & F. SIDOROFF [1995]. 'Homogenization for granular materials.' *Eur. J. Mech. / A: Solids*, **14**, pp. 255-276.

- [46] CAROL, I. & Z. P. BAŽANT [1997]. 'Damage and plasticity in microplane theory.' *Int. J. Solids & Structures*, **34**, pp. 3807–3835.
- [47] CAROL, I., Z. P. BAŽANT & P. PRAT [1991]. 'Geometric damage tensor based on microplane model.' *J. Eng. Mech.*, **117**, pp. 2429–2448.
- [48] CAROL, I., M. JIRÁSEK & Z. BAŽANT [1999]. 'A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I: Free energy and consistent microplane stresses.' *Int. J. Solids & Structures*, submitted for publication.
- [49] CAROL, I., P. PRAT & Z. P. BAŽANT [1992]. 'New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation.' *Int. J. Solids & Structures*, **29**, pp. 1173–1191.
- [50] CAROL, I., E. RIZZI & K. J. WILLAM [1994]. 'A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface.' *Int. J. Solids & Structures*, **31**, pp. 2835–2865.
- [51] CAROL, I., E. RIZZI & K. J. WILLAM [1999]. 'On the formulation of anisotropic degradation using a pseudo-logarithmic damage tensor.' *in preparation*.
- [52] CHABOCHE, J. L. [1982]. 'Le concept de contrainte effective appliqué à l' élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope.' In *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Proc. EUROMECH Colloque 115, June 1979*, edited by J. Boehler, pp. 737–760. Martinus Nijhoff, The Netherlands.
- [53] CHABOCHE, J. L. [1988]. 'Continuum damage mechanics: Part I – General concepts, Part II – Damage growth, crack initiation and crack growth.' *J. Appl. Mech.*, **55**, pp. 59–72.
- [54] CHANG, S. C. [1993]. 'Dislocation and plasticity of granular materials with frictional contacts.' In *Powders & Grains 93*, edited by C. Thornton, pp. 105–110. Balkema, Rotterdam.
- [55] CHANG, S. C. [1997]. 'Numerical and analytical modelling of granulates.' In *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, edited by A. A. Jian-Xin Yuan, pp. 105–114. Balkema, Rotterdam.
- [56] CHRISTOFFERSEN, J., M. M. MEHRABADI & S. NEMAT-NASSER [1981]. 'A micromechanical description of granular material behavior.' *J. Appl. Mech.*, **48**, pp. 339–344.
- [57] CLOUGH, R. W. [1965]. 'The finite element method in structural mechanics.' In *Stress Analysis: Recent Developments in Numerical and Experimental Methods*, edited by O. C. Zienkiewicz & S. Holister. John Wiley & Sons.
- [58] COLEMAN, B. D. & M. E. GURTIN [1967]. 'Thermodynamics with internal variables.' *J. Chem. Phys.*, **47(2)**, pp. 597–613.
- [59] COLEMAN, B. D. & W. NOLL [1963]. 'The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity.' *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **13**, pp. 167–178.

- [60] COMI, C. [1999]. 'Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials.' *Mech. Coh. Frict. Mat.*, **4**, pp. 17–36.
- [61] CORDEBOIS, J. P. & F. SIDOROFF [1982]. 'Damage induced elastic anisotropy.' In *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Proc. EUROMECH Colloque 115, June 1979*, edited by J. Boehler, pp. 761–774. Martinus Nijhoff, The Netherlands.
- [62] COSSERAT, E. & F. COSSERAT [1909]. *Théorie des Corps Déformables*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris.
- [63] CUNDALL, P. A. & O. D. L. STRACK [1979]. 'A discrete numerical model for granular assemblies.' *Géotechnique*, **29**, pp. 47–65.
- [64] DERESIEWICZ, H. [1958]. 'Stress–strain relations for a simple model of a granular medium.' *J. Appl. Mech.*, **80**, pp. 402–406.
- [65] DIGBY, P. J. [1981]. 'The effective elastic moduli of porous granular rocks.' *J. Appl. Mech.*, **48**, pp. 803–808.
- [66] DRESCHER, A. & G. DE JOSSELIN DE JONG [1972]. 'Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material.' *J. Mech. Phys. Solids*, **20**, pp. 337–351.
- [67] DRUCKER, D. C. & W. PRAGER [1952]. 'Soil mechanics and plastic analysis of limit design.' *Quarterly Appl. Math.*, **10**, pp. 157–175.
- [68] DUBÉ, J. F., G. PIAUDIER-CABOT & C. LA BORDERIE [1996]. 'Rate dependent damage model for concrete in dynamics.' *J. Eng. Mech.*, **122**, pp. 939–947.
- [69] DUFFY, J. [1959]. 'A differential stress–strain relation for the hexagonal close-packed array of elastic spheres.' *J. Appl. Mech.*, **81**, pp. 88–94.
- [70] DUFFY, J. & R. D. MINDLIN [1957]. 'Stress–strain relations and vibrations of a granular medium.' *J. Appl. Mech.*, **79**, pp. 585–593.
- [71] EHLERS, W. [1995]. 'A single surface yield function for geomaterials.' *Arch. Appl. Mech.*, **65**, pp. 246–259.
- [72] EHLERS, W. & W. VOLK [1997]. 'On shear band localization phenomena of liquid-saturated granular elastoplastic porous solid materials accounting for viscosity and micropolar solid rotations.' *Mech. Coh. Frict. Mat.*, **2**, pp. 301–320.
- [73] EMERIAULT, F. & B. CAMBOU [1996]. 'Micromechanical modelling of anisotropic non-linear elasticity of granular medium.' *Int. J. Solids & Structures*, **33**, pp. 2591–2607.
- [74] EMERIAULT, F., B. CAMBOU & A. MAHBOUBI [1996]. 'Homogenization for granular materials: Non reversible behavior.' *Mech. Coh. Frict. Mat.*, **1**, pp. 199–218.
- [75] ERINGEN, A. C. & D. G. B. EDELEN [1972]. 'On nonlocal elasticity.' *Int. J. Eng. Science*, **10**, pp. 233–248.

- [76] FICHANT, S., C. LA BORDERIE & G. PIJAUDIER-CABOT [1998]. 'A comparative study of isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures.' In *Damage mechanics in engineering materials*, edited by G. Voyiadjis, J. Ju & J. Chaboche, pp. 259–274. Elsevier.
- [77] FICHANT, S., C. LA BORDERIE & G. PIJAUDIER-CABOT [1999]. 'Isotropic and anisotropic descriptions of damage in concrete structures.' *Mech. Coh. Frict. Mat.*, **4**, pp. 339–359.
- [78] FLECK, N. A. & J. W. HUTCHINSON [1997]. 'Strain gradient plasticity.' *Adv. Appl. Mech.*, **33**, pp. 295–361.
- [79] FRÉMOND, M. & B. NEDJAR [1996]. 'Damage, gradient of damage and principle of virtual power.' *Int. J. Solids & Structures*, **33**, pp. 1083–1103.
- [80] GANGHOFFER, J. F., L. J. SLUYS & R. DE BORST [1999]. 'A reappraisal of nonlocal models.' *Eur. J. Mech. / A: Solids*, **18**, pp. 17–46.
- [81] GEERS, M. G. D. [1997]. *Experimental Analysis and Computational Modelling of Damage and Fracture*. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Nederlands.
- [82] GEERS, M. G. D., R. DE BORST, W. A. M. BREKELMANS & R. H. J. PEERLINGS [1998]. 'Strain-based transient gradient damage model for failure analyses.' *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **160**, pp. 133–153.
- [83] GEERS, M. G. D., R. DE BORST, T. PEIJS & M. H. H. MEUWISSEN [1998]. 'Internal length scales for higher-order damage models in random fibre reinforced composites.' In *Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina*, edited by E. Oñate & S. Idelsohn. CIMNE, Barcelona, Spain.
- [84] GREEN, A. E. & W. ZERNA [1954]. *Theoretical Elasticity*. Oxford University Press.
- [85] HADAMARD, J. [1903]. *Leçons sur la Propagation des Ondes*. Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, Paris.
- [86] HENCKY, H. [1924]. 'Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen.' *ZAMM*, **4**, pp. 323–334.
- [87] HERTZ, H. [1881]. 'Ueber die Berührung fester elastischer Körper.' *J. Math.*, **92**, pp. 156–171.
- [88] HILL, R. [1950]. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford University Press.
- [89] HILL, R. [1958]. 'A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids.' *J. Mech. Phys. Solids*, **6**, pp. 236–249.
- [90] HILL, R. [1962]. 'Acceleration waves in solids.' *J. Mech. Phys. Solids*, **10**, pp. 1–16.

- [91] HILLERBORG, A., M. MODÉER & P. E. PETERSSON [1976]. 'Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements.' *Cement & Concrete Research*, **6**, pp. 773–782.
- [92] HUEMER, T. [1998]. *Automatische Vernetzung und adaptive nichtlineare statische Berechnung von Flächentragwerken mittels vierknotiger finiter Elemente*. Dissertation, Instituts für Festigkeitslehre Technische Universität Wien.
- [93] HUGHES, T. J. R. [1987]. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [94] IORDACHE, M. M. & K. J. WILLAM [1998]. 'Localized failure analysis in elastoplastic Cosserat continua.' *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **151**, pp. 559–586.
- [95] IORDACHE, M. M. & K. J. WILLAM [1999]. 'Localized failure modes in cohesive frictional materials.' *Mech. Coh. Frict. Mat.*, *accepted for publication*.
- [96] JIRÁSEK, M. [1993]. *Modeling of fracture and damage in quasibrittle materials*. Ph.D. thesis, Northwestern University, Evanston, Illinois.
- [97] JIRÁSEK, M. [1998]. *Modeling of Damage and Fracture in Quasibrittle Materials*. Courses on Damage Mechanics, University of Stuttgart, Lectures Notes.
- [98] JIRÁSEK, M. [1999]. 'Comments on microplane theory.' In *Mechanics of Quasi-Brittle Materials and Structures*, edited by G. Pijaudier-Cabot, Z. Bittnar & B. Gérard, pp. 57–77. Hermes Science Publications, Paris.
- [99] JU, J. W. [1989]. 'On energy-based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects.' *Int. J. Solids & Structures*, **25**, pp. 803–833.
- [100] JU, J. W. [1990]. 'Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics.' *J. Eng. Mech.*, **116**, pp. 2764–2770.
- [101] JU, J. W. [1991]. 'On two-dimensional self-consistent micromechanical damage models for brittle solids.' *Int. J. Solids & Structures*, **27**, pp. 227–258.
- [102] КАЧАНОВ, Л. М. [1958]. О ВРЕМЕНИ РАЗРУШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ. ИЗВОСТЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР, ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК, **8**, pp. 26–31.
- [103] КАЧАНОВ, Л. М. [1986]. *Introduction to Continuum Damage Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- [104] KANATANI, K. I. [1984]. 'Distribution of directional data and fabric tensors.' *Int. J. Eng. Science*, **22**, pp. 149–164.
- [105] KRAJČINOVIC, D. [1983]. 'Constitutive equations for damaging materials.' *J. Appl. Mech.*, **50**, pp. 355–360.
- [106] KRAJČINOVIC, D. [1996]. *Damage Mechanics*. North-Holland, Elsevier.

- [107] KRAJČINOVIC, D. & G. U. FONESKA [1981]. ‘The continuous damage theory of brittle materials.’ *J. Appl. Mech.*, **48**, pp. 809–824.
- [108] KRAJČINOVIC, D. & J. LEMAÎTRE [1987]. *Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications*. CISM Courses and Lectures No. 295, Springer Verlag, Wien – New York.
- [109] KRÖNER, E. [1967]. ‘Elasticity theory of materials with long range cohesive forces.’ *Int. J. Solids & Structures*, **3**, pp. 731–742.
- [110] KRUYT, N. P. & L. ROTHENBURG [1996]. ‘Micromechanical definition of the strain tensor for granular materials.’ *J. Appl. Mech.*, **118**, pp. 706–711.
- [111] KUHL, E., R. DE BORST & E. RAMM [1998]. ‘A gradient enhancement with application to anisotropic continuum damage.’ In *Proceedings of the 4th World Congress on Computational Mechanics, Buenos Aires, Argentina*, edited by E. Oñate & S. Idelsohn. CIMNE, Barcelona, Spain.
- [112] KUHL, E., I. CAROL & P. STEINMANN [1999]. ‘New thermodynamic approach to microplane model. Part II: Dissipation and inelastic constitutive modelling.’ *Int. J. Solids & Structures*, submitted for publication.
- [113] KUHL, E., G. A. D’ADDETTA, H. J. HERRMANN & E. RAMM [1999]. ‘A comparison of discrete granular material models with continuous microplane formulations.’ *Granular Matter*, in press.
- [114] KUHL, E. & E. RAMM [1998]. ‘On the linearization of the microplane model.’ *Mech. Coh. Frict. Mat.*, **3**, pp. 343–364.
- [115] KUHL, E. & E. RAMM [1999]. ‘Simulation of strain localization with gradient enhanced damage models.’ *Computational Materials Science*, **16**, pp. 176–185.
- [116] KUHL, E. & E. RAMM [2000]. ‘Microplane modelling of cohesive frictional materials.’ *Eur. J. Mech. / A: Solids*, submitted for publication.
- [117] KUHL, E., E. RAMM & R. DE BORST [1998]. ‘Anisotropic gradient damage with the microplane model.’ In *Computational Modelling of Concrete Structures*, edited by R. de Borst, N. Bićanić, H. Mang & G. Meschke, pp. 103–112. Balkema, Rotterdam.
- [118] KUHL, E., E. RAMM & R. DE BORST [1999]. ‘An anisotropic gradient damage model for quasi-brittle materials.’ *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, accepted for publication.
- [119] KUHL, E., E. RAMM & K. WILLAM [1999]. ‘Failure analysis for elasto-plastic material models on different levels of observation.’ *Int. J. Solids & Structures*, accepted for publication.
- [120] KUPFER, H. B. & K. H. GERSTLE [1973]. ‘Behavior of concrete under biaxial stresses.’ *J. Eng. Mech.*, **99**, pp. 853–866.

- [121] LACKNER, R. [1999]. *Adaptive Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells*. Ph.D. thesis, Institut für Festigkeitslehre Technische Universität Wien.
- [122] LASRY, D. & T. BELYTSCHKO [1988]. 'Localization limiters in transient problems.' *Int. J. Solids & Structures*, **24**, pp. 581–597.
- [123] LEMAÎTRE, J. [1983]. 'A continuous damage mechanics model for ductile fracture.' *J. Eng. Mat. & Techn.*, **107**, pp. 83–89.
- [124] LEMAÎTRE, J. [1984]. 'How to use damage mechanics.' *Nuclear Engineering & Design*, **80**, pp. 233–245.
- [125] LEMAÎTRE, J. [1992]. *A Course on Damage Mechanics*. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- [126] LEMAÎTRE, J. & J. L. CHABOCHE [1985]. *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod, Paris.
- [127] LÉVY, M. M. [1870]. 'Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où élasticité pourrait les ramener à leur premier état.' *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie de Sciences*, **70**, pp. 1323–1325.
- [128] LIAO, C. L., T. P. CHANG, D. H. YOUNG & C. S. CHANG [1997]. 'Stress–strain relationship for granular materials based on the hypothesis of best fit.' *Int. J. Solids & Structures*, **34**, pp. 4087–4100.
- [129] LIEBE, T. & K. WILLAM [1999]. 'Localization results of generalized Drucker–Prager elastoplasticity.' *Technical Note, University of Colorado at Boulder*.
- [130] LOVE, A. E. H. [1927]. *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Cambridge University Press.
- [131] LUBARDA, V. A. & D. KRAJČINOVIC [1993]. 'Damage tensors and the crack density distribution.' *Int. J. Solids & Structures*, **30**, pp. 2859–2877.
- [132] LUBLINER, J. [1990]. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing Company, New York.
- [133] LUENBERGER, D. G. [1973]. *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*. Addison–Wesley Publishing Company.
- [134] LYAPUNOV, A. M. [1992]. *General Problems of Stability of Motion*. Taylor & Francis, London Washington.
- [135] MAHNKEN, R. [1998]. 'A comprehensive study of a multiplicative elastoplasticity model coupled to damage including parameter identification.' *Computers & Structures*, submitted for publication.

- [136] MAHNKEN, R. [1998]. *Theoretische und numerische Aspekte zur Parameteridentifikation und Modellierung bei metallischen Werkstoffen*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 98/2.
- [137] MAHNKEN, R. & E. KUHL [1999]. 'Parameter identification of gradient enhanced damage models with the finite element method.' *Eur. J. Mech. / A: Solids*, **18**, pp. 819–835.
- [138] MAHNKEN, R. & E. STEIN [1997]. 'Parameter identification for finite deformation elasto–plasticity in principal directions.' *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **147**, pp. 17–39.
- [139] MAIER, G. & T. HUECKEL [1979]. 'Nonassociated and coupled flow rules of elasto–plasticity for rock–like materials.' *Int. J. Rock Mech. Min. Science*, **16**, pp. 77–92.
- [140] MALVERN, L. E. [1969]. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [141] MANDEL, J. [1966]. 'Conditions de stabilité et le postulat der Drucker.' In *Rheology and Soil Mechanics*, edited by J. Kravtchenko & P. M. Sirieys, pp. 58–68. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- [142] MANDEL, J. [1972]. *Plasticité Classique et Viscoplasticité*. CISM Courses and Lectures No. 97, Springer Verlag, Wien – New York.
- [143] MARSDEN, J. & J. HUGHES [1983]. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [144] MAXWELL, J. C. [1873]. *Treatise on Electricity and Magnetism*. Clarendon, Oxford.
- [145] MAZARS, J. & G. PIAUDIER-CABOT [1989]. 'Continuum damage theory – Application to concrete.' *J. Eng. Mech.*, **115**, pp. 345–365.
- [146] MENRATH, H. [1999]. *Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern*. Dissertation, Bericht des Instituts für Baustatik Nr. 29, Universität Stuttgart.
- [147] MIEHE, C. [1993]. *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto–Plastizität – Thermodynamische Formulierung und Numerische Implementation*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 93/1.
- [148] MIEHE, C. [1996]. 'Exponential map algorithm for stress updates in anisotropic multiplicative elastoplasticity for single crystals.' *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**, pp. 3367–3390.
- [149] MIEHE, C., J. SCHRÖDER & J. SCHOTTE [1999]. 'Computational homogenization analysis in finite plasticity, simulation of texture development in polycrystalline materials.' *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **171**, pp. 387–418.

- [150] VAN MIER, J. G. M. [1997]. *Fracture Processes of Concrete*. CRC Press.
- [151] MINDLIN, R. D. [1949]. 'Compliance of elastic bodies in contact.' *J. Appl. Mech.*, **16**, pp. 259–268.
- [152] MINDLIN, R. D. [1965]. 'Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity.' *Int. J. Solids & Structures*, **1**, pp. 417–438.
- [153] VON MISES, R. [1913]. 'Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand.' *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*, pp. 582–592.
- [154] MOHR, O. [1882]. 'Ueber die Darstellung des Spannungszustandes und des Deformationszustandes eines Körperelementes und über die Anwendung derselben in der Festigkeitslehre.' *Civilingenieur*, **28**, pp. 113–156.
- [155] MOHR, O. [1900]. 'Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines Materiales?' *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, **46**, pp. 1524–1530, 1572–1577.
- [156] MÜHLHAUS, H. B. [1995]. *Continuum Models for Materials with Microstructure*. John Wiley & Sons.
- [157] MÜHLHAUS, H. B. & E. C. AIFANTIS [1991]. 'A variational principle for gradient plasticity.' *Int. J. Solids & Structures*, **28**, pp. 845–857.
- [158] MÜHLHAUS, H. B., R. DE BORST, L. J. SLUYS & J. PAMIN [1994]. 'A thermodynamic theory for inhomogeneous damage evolution.' In *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, pp. 635–640. Balkema, Rotterdam.
- [159] MURAKAMI, S. [1988]. 'Mechanical modelling of material damage.' *J. Appl. Mech.*, **55**, pp. 280–286.
- [160] NÁDAI, A. [1931]. *Plasticity*. Mc Graw-Hill, New York – London.
- [161] NEMAT-NASSER, S. & M. HORI [1993]. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland, Elsevier.
- [162] ORTIZ, M. [1987]. 'An analytical study of the localized failure modes of concrete.' *Mechanics of Materials*, **6**, pp. 159–174.
- [163] OTTOSEN, N. S. & K. RUNESSON [1991]. 'Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity.' *Int. J. Solids & Structures*, **27**, pp. 401–421.
- [164] OŽBOLT, J. [1993]. 'General microplane model for concrete.' In *Proceedings of the 1st Bolomey Workshop on Numerical Methods in Fracture Mechanics of Concrete*, edited by H. Wittmann, pp. 173–187. Zürich.
- [165] OŽBOLT, J. [1996]. 'Microplane model for quasibrittle materials.' *Report No. 96 I, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Universität Stuttgart*.
- [166] OŽBOLT, J. & Z. P. BAŽANT [1992]. 'Microplane model for cyclic triaxial behavior concrete.' *J. Eng. Mech.*, **118**, pp. 1365–1386.

- [167] OŽBOLT, J. & Z. P. BAŽANT [1996]. 'Numerical smeared fracture analysis: Non-local microcrack interaction approach.' *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**, pp. 635–661.
- [168] PAMIN, J. [1994]. *Gradient-Dependent Plasticity in Numerical Simulation of Localization Phenomena*. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Nederlands.
- [169] PEERLINGS, R. H. J. [1999]. *Enhanced Damage Modelling for Fracture and Fatigue*. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, Nederlands.
- [170] PEERLINGS, R. H. J., R. DE BORST, W. A. M. BREKELMANS & M. G. D. GEERS [1998]. 'Gradient-enhanced damage modelling of concrete fracture.' *Mech. Coh. Fric. Mat.*, **3**, pp. 323–343.
- [171] PEERLINGS, R. H. J., R. DE BORST, W. A. M. BREKELMANS & J. H. P. DE VREE [1996]. 'Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials.' *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **39**, pp. 3391–3403.
- [172] PEERLINGS, R. H. J., R. DE BORST, W. A. M. BREKELMANS, J. H. P. DE VREE & I. SPEE [1996]. 'Some observations on localisation in non-local and gradient damage models.' *Eur. J. Mech. / A: Solids*, **15**, pp. 937–953.
- [173] PERZYNA, P. [1966]. 'Fundamental problems in viscoplasticity.' *Adv. Appl. Mech.*, **9**, pp. 243–377.
- [174] PIETRUSZCZAK, S. & Z. MRÓZ [1981]. 'Finite element analysis of deformation of strain-softening materials.' *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **17**, pp. 327–334.
- [175] PIJAUDIER-CABOT, G. & Z. P. BAŽANT [1987]. 'Nonlocal damage theory.' *J. Eng. Mech.*, **113**, pp. 1512–1533.
- [176] RABOTNOV, I. N. [1963]. 'On the equations of state for creep.' In *Progress in applied mechanics – The Prager anniversary volume*, pp. 307–315. Mac Millan, New York.
- [177] RANIECKI, B. & O. T. BRUHNS [1981]. 'Bounds to bifurcation stresses in solids with non-associated plastic flow law at finite strain.' *J. Mech. Phys. Solids*, **29**, pp. 153–172.
- [178] REUSS, A. [1929]. 'Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle.' *ZAMM*, **9**, pp. 49–58.
- [179] REUSS, A. [1929]. 'Berücksichtigung der elastischen Formänderung in der Plastizitätstheorie.' *ZAMM*, **10**, pp. 266–274.
- [180] REYNOLDS, O. [1885]. 'On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact.' *Philosophical Magazine & Journal of Science*, **20**, pp. 469–481.
- [181] RICE, J. R. [1976]. 'The localization of plastic deformation.' In *Theoretical and Applied Mechanics*, edited by W. Koiter, pp. 207–220. North-Holland.
- [182] RICE, J. R. & J. W. RUDNICKI [1980]. 'A note on some features of the theory of localization of deformation.' *Int. J. Solids & Structures*, **16**, pp. 597–605.

- [183] RIZZI, E., I. CAROL & K. J. WILLAM [1995]. 'Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage.' *J. Eng. Mech.*, **121**, pp. 541–554.
- [184] ROTHENBURG, L. & A. P. S. SELVADURAI [1981]. 'A micromechanical definition of the Cauchy stress tensor for particulate media.' In *Proceedings of the International Symposium on Mechanical Behavior of Structured Media, Ottawa, Canada*, edited by A. P. S. Selvadurai, pp. 469–486.
- [185] RUDNICKI, J. W. & J. R. RICE [1975]. 'Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials.' *J. Mech. Phys. Solids*, **23**, pp. 371–394.
- [186] SAWISCHLEWSKI, E., P. STEINMANN & E. STEIN [1996]. 'Modelling and computations of instability phenomena in multisurface plasticity.' *Comp. Mech.*, **18**, pp. 245–258.
- [187] SCHANZ, T. [1998]. *Zur Modellierung des mechanischen Verhaltens von Reibungsmaterialien*. Habilitationsschrift, Institut für Geotechnik, Universität Stuttgart, Mitteilung-Nr. 45.
- [188] SCHRÖDER, J. [1996]. *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*. Dissertation, Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen) Nr. I-1, Universität Stuttgart.
- [189] SIMO, J. C. & T. J. R. HUGHES [1998]. *Computational Inelasticity*. Springer Verlag, New York – Berlin – Heidelberg.
- [190] SIMO, J. C. & J. W. JU [1987]. 'Strain- and stress based continuum damage models: Part I – Formulation, Part II – Computational aspects.' *Int. J. Solids & Structures*, **23**, pp. 821–869.
- [191] SLUYS, L. J. [1992]. *Wave propagation, localization and dispersion in softening solids*. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [192] SLUYS, L. J., R. DE BORST & H. B. MÜHLHAUS [1993]. 'Wave propagation, localization and dispersion in a gradient-dependent medium.' *Int. J. Solids & Structures*, **33**, pp. 1153–1171.
- [193] STEGMÜLLER, H., K.-U. BLETZINGER & S. KIMMICH [1988]. *Programmsystem CARAT, Eingabebesreibung und Dokumentation*. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [194] STEIN, E. & F.-J. BARTHOLD [1992]. *Elastizitätstheorie*. Unterlagen zur Vorlesung "Elastizitätstheorie", Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- [195] STEINMANN, P. [1992]. *Lokalisierungsprobleme in der Plastomechanik*. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Fridericiana zu Karlsruhe, Karlsruhe.
- [196] STEINMANN, P. [1996]. 'Views on multiplicative elastoplasticity and the continuum theory of dislocations.' *Int. J. Eng. Sci.*, **34**, pp. 1717–1735.

- [197] STEINMANN, P. [1997]. *Modellierung und Numerik duktiler kristalliner Werkstoffe*. Habilitationsschrift, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Bericht-Nr. 97/1.
- [198] STEINMANN, P. [1999]. 'Formulation and computation of geometrically non-linear gradient damage.' *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **46**, pp. 757–779.
- [199] STEINMANN, P. & I. CAROL [1998]. 'A framework for geometrically nonlinear continuum damage mechanics.' *Int. J. Eng. Sci.*, **36**, pp. 1793–1814.
- [200] STEINMANN, P., E. KUHL & E. STEIN [1998]. 'Aspects of non-associated single crystal plasticity: Influence of Non-Schmid effects and localization analysis.' *Int. J. Solids & Structures*, **35**, pp. 4437–4456.
- [201] STEINMANN, P., R. LARSSON & K. RUNESSON [1997]. 'On the localization properties of multiplicative hyperelasto-plastic continua with strong discontinuities.' *Int. J. Solids & Structures*, **34**, pp. 969–990.
- [202] STEINMANN, P. & K. J. WILLAM [1991]. 'Localization within the framework of micropolar elasto-plasticity.' In *Advances in Continuum Mechanics*, edited by V. Mannl, J. Najar & O. Brüller, pp. 296–313. Springer Verlag, Berlin – Heidelberg – New York.
- [203] STRANG, G. & G. J. FIX [1988]. *An analysis of the Finite Element Method*. Wellesley–Cambridge Press.
- [204] STROUD, A. H. [1971]. *Approximate calculation of multiple integrals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [205] SUANNO, R. L. [1995]. *Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Stuttgart.
- [206] SVEDBERG, T. [1996]. *A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage*. Licentiate Thesis, Division of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden.
- [207] SVEDBERG, T. & K. RUNESSON [1997]. 'A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage.' *Int. J. Plast.*, **13**, pp. 669–696.
- [208] SVEDBERG, T. & K. RUNESSON [1998]. 'An algorithm for gradient-regularized plasticity coupled to damage based on a dual mixed FE formulation.' *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **161**, pp. 49–65.
- [209] TAYLOR, G. I. [1938]. 'Plastic strain in metals.' *J. Inst. Metals*, **62**, pp. 307–324.
- [210] THOMAS, T. Y. [1961]. *Plastic Flow and Fracture of Solids*. Academic Press, New York.
- [211] TIKHOMIROV, D. & E. STEIN [1999]. 'Anisotrope Schädigungskonzepte für nicht-lineare Berechnungen von Stahlbetonkonstruktionen.' *Bauingenieur*, **74**.

- [212] TOUPIN, R. A. [1962]. 'Elastic materials with couple-stresses.' *Arch. Ration. Mech. Analysis*, **11**, pp. 385–414.
- [213] TRESCA, M. H. [1864]. 'Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions.' *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie de Sciences*, **59**, pp. 754–758.
- [214] TRESCA, M. H. [1867]. 'Sur l'écoulement des corps solides à de fortes pressions.' *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie de Sciences*, **64**, pp. 809–812.
- [215] TRUESDELL, C. & W. NOLL [1965]. 'The non-linear field theories of mechanics.' In *Handbuch der Physik*, edited by S. Flügge, volume III/3. Springer Verlag, Berlin.
- [216] TRUESDELL, C. & R. TOUPIN [1960]. 'The classical field theories.' In *Handbuch der Physik*, edited by S. Flügge, volume III/1. Springer Verlag, Berlin.
- [217] VARDOULAKIS, I. & E. C. AIFANTIS [1991]. 'A gradient flow theory of plasticity for granular materials.' *Acta Mech.*, **87**, pp. 197–217.
- [218] VOIGT, W. [1910]. *Lehrbuch der Kristallphysik*. Reproduktion des 1928 erschienenen Nachdrucks von 1910, Johnson Reprint Corporation New York – B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart.
- [219] VOLK, W. [1996]. *Untersuchung des Lokalisierungsverhaltens mikropolarer poröser Medien mit Hilfe der Cosserat-Theorie*. Dissertation, Bericht aus dem Institut für Mechanik (Bauwesen) Nr. II-2, Universität Stuttgart.
- [220] DE VREE, J. H. P., W. A. M. BREKELMANS & M. A. J. VAN GILS [1995]. 'Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics.' *Computers & Structures*, **55**, pp. 581–588.
- [221] WALTON, K. [1987]. 'The effective elastic moduli of a random packing of spheres.' *J. Mech. Phys. Solids*, **35**, pp. 213–226.
- [222] WANG, W. [1997]. *Stationary and propagative instabilities in metals – A computational point of view*. Ph.D. thesis, Technische Universiteit Delft, Delft, Netherlands.
- [223] WILLAM, K. J. [1984]. 'Experimental and computational aspects of concrete fracture.' In *Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, edited by F. Damjanić, E. Hinton, D. R. J. Owen, N. Bićanić & V. Simović, pp. 33–69. Pine-ridge Press.
- [224] WILLAM, K. J. [1998]. *Deterioration Analysis of Materials and Structures*. Non-linear Structural Analysis and Finite Elements, University of Stuttgart, Lectures Notes.
- [225] WILLAM, K. J., E. HANSEN & H. D. KANG [1999]. 'Performance evaluation of damage and plasticity formulations for concrete.' In *Proceedings of the US-Japan Seminar on Post-Peak Behavior of Reinforced Concrete Structures Subjected to Seismic Loads*.

- [226] ZIENKIEWICZ, O. C. [1971]. *The Finite Element Method in Engineering Science*. Mc Graw-Hill, London.
- [227] ZIENKIEWICZ, O. C. & G. N. PANDE [1977]. 'Time-dependent multilaminate model of rocks - A numerical study of deformation and failure of rock masses.' *Int. J. Num. Anal. Meth. Geom.*, **1**, pp. 219-247.
- [228] ZIENKIEWICZ, O. C. & R. L. TAYLOR [1989]. *The Finite Element Method, Volume I & II*. Mc Graw-Hill, New York - London.

Anhang A

Notation und Tensorrechnung

Notation

Im folgenden seien die Komponenten eines Tensors mit $[\bullet]_{i,\dots,l}$ bezeichnet. Die zugehörigen Basen $e_{i,\dots,l}$ des EUKLID'schen Raums werden gegebenenfalls vereinfachend nicht gesondert erwähnt, es gelte die folgende Notation,

$$\begin{aligned}
 a &= [a] \\
 \mathbf{a} &= [a]_i e_i \\
 \mathbf{A} &= [A]_{ij} e_i \otimes e_j \\
 \mathcal{A} &= [\mathcal{A}]_{ijkl} e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

wobei im folgenden Abschnitt mit Kleinbuchstaben a eine skalare Größe, dem entsprechenden \mathbf{a} eine vektorwertige Größe, mit dem Großbuchstaben \mathbf{A} ein zweistufiger Tensor und mit dem kalligraphischen Großbuchstaben \mathcal{A} höherwertige Tensoren bezeichnet seien.

Skalare Produkte

Die skalaren Produkte zweier Tensoren seien durch \cdot und $:$ sowie $\dot{}$ und $::$ gekennzeichnet, wobei die Anzahl der Punkte die Stufe der jeweiligen Verjüngung symbolisiert.

$$\begin{aligned}
 c &= [a \cdot b] = [a]_i [b]_i \\
 c &= [A : B] = [A]_{ij} [B]_{ij} \\
 c &= [\mathcal{A} \dot{} \mathcal{B}] = [\mathcal{A}]_{ijk} [\mathcal{B}]_{ijk} \\
 c &= [\mathcal{A} :: \mathcal{B}] = [\mathcal{A}]_{ijkl} [\mathcal{B}]_{ijkl} \\
 [c]_i &= [A \cdot b]_i = [A]_{ij} [b]_j \\
 [C]_{ij} &= [\mathcal{A} : B]_{ij} = [\mathcal{A}]_{ijkl} [B]_{kl} \\
 [C]_{ijk} &= [\mathcal{A} \dot{} \mathcal{B}]_{ijk} = [\mathcal{A}]_{ijklmn} [B]_{lmn}
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Dyadische Produkte

Das dyadischen Produkt zweier Vektoren liefert einen zweistufigen Tensor, während die dyadischen Produkte zweier zweistufiger Tensoren einen vierstufigen Tensor beschreiben. Neben dem klassischen Symbol \otimes seien die Symbole $\bar{\otimes}$ und $\underline{\otimes}$ wie angegeben definiert.

$$\begin{aligned}
 [a \otimes b]_{ij} &= [a]_i [b]_j \\
 [A \otimes B]_{ijkl} &= [A]_{ij} [B]_{kl} \\
 [A \bar{\otimes} B]_{ijkl} &= [A]_{ik} [B]_{jl} \\
 [A \underline{\otimes} B]_{ijkl} &= [A]_{il} [B]_{jk}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Fundamentaltensoren

Die Komponenten des zweistufigen Einheitstensors $\mathbf{1}$ sowie des vierstufigen Einheitstensors \mathcal{I} lassen sich wie angegeben als Funktionen des Kronecker Deltas δ_{ij} darstellen,

$$[\mathbf{1}]_{ij} = \delta_{ij} \quad [\mathcal{I}]_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} \quad (\text{A.4})$$

wobei $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ sowie $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$ gilt. Mit der in (A.3) definierten Notation läßt sich der vierstufige Einheitstensor auch als $\mathcal{I} = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ angeben.

Transponierte und Inverse

Die Transponierte eines zweistufigen Tensors erhält man eindeutig durch Vertauschen seiner beiden Indizes. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendete Inverse eines dreistufigen Tensors \mathcal{T} sowie die Inverse eines vierstufigen Tensors \mathcal{A} seien wie angegeben definiert.

$$\begin{aligned} [\mathcal{A}]_{ij}^T &= [\mathcal{A}]_{ji} \\ [\mathcal{T}]_{ijk}^T &= [\mathcal{T}]_{kij} \\ [\mathcal{A}]_{ijkl}^T &= [\mathcal{A}]_{iljk} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Mit der in (A.3) vereinbarten Notation läßt sich die Transponierte des vierstufigen Einheitstensors auch als $\mathcal{I}^T = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ darstellen. Das skalare Produkt eines zweistufigen Tensors mit seiner Inversen liefert den zweistufigen Einheitstensor.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{1} \quad (\text{A.6})$$

Norm eines Tensors

Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich die mit $\|\bullet\|$ bezeichnete L_2 -Norm von Vektoren bzw. Tensoren verwendet, die sich wie folgt bestimmen läßt.

$$\|\mathbf{a}\| := \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad \text{sowie} \quad \|\mathcal{A}\| := \sqrt{\mathcal{A} : \mathcal{A}} \quad (\text{A.7})$$

Symmetrisch–schiefsymmetrische Zerlegung

Jeder zweistufige Tensor (\bullet) läßt sich eindeutig additiv in einen symmetrischen Anteil (\bullet)^{sym} und einen schiefsymmetrischen Anteil (\bullet)^{skw} zerlegen. Insbesondere gilt diese Zerlegung in der im folgenden angegebenen Form auch für den vierstufigen Einheitstensor \mathcal{I} .

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{sym} + \mathbf{A}^{skw} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{sym} := \frac{1}{2} [\mathbf{A} + \mathbf{A}^T] \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{skw} := \frac{1}{2} [\mathbf{A} - \mathbf{A}^T] \\ \mathcal{I} &= \mathcal{I}^{sym} + \mathcal{I}^{skw} \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}^{sym} := \frac{1}{2} [\mathcal{I} + \mathcal{I}^T] \quad \text{und} \quad \mathcal{I}^{skw} := \frac{1}{2} [\mathcal{I} - \mathcal{I}^T] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Jeder symmetrische Tensor ist identisch zu seiner Transponierten $\mathbf{A}^{sym} = \mathbf{A}^{sym,T}$, während ein schiefsymmetrischer Tensor seiner negativen Transponierten $\mathbf{A}^{skw} = -\mathbf{A}^{skw,T}$ entspricht.

Volumetrisch–deviatorische Zerlegung

Ein zweistufiger Tensor (\bullet) läßt sich eindeutig additiv in einen volumetrischen Anteil (\bullet)^{vol} und einen deviatorischen Anteil (\bullet)^{dev} zerlegen. Insbesondere läßt sich diese Zerlegung auch für den vierstufigen Einheitstensor angeben.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{vol} + \mathbf{A}^{dev} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{vol} := \frac{1}{3} [\mathbf{A} : \mathbf{1}] \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{dev} := \mathbf{A} - \mathbf{A}^{vol} \\ \mathcal{I} &= \mathcal{I}^{vol} + \mathcal{I}^{dev} \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}^{vol} := \frac{1}{3} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}^{dev} := \mathcal{I} - \mathcal{I}^{vol} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Der deviatorische Anteil eines zweistufigen Tensors läßt sich damit auch als skalares Produkt des jeweiligen Tensors mit dem vierstufigen deviatorischen Einheitstensor angeben, $\mathbf{A}^{dev} = \mathcal{I}^{dev} : \mathbf{A}$.

Invarianten

Die Hauptinvarianten eines zweistufigen Tensors \mathbf{A} seien mit I_1 , I_2 und I_3 bezeichnet. Ihre partiellen Ableitungen bezüglich des Tensors \mathbf{A} ergeben sich in der angegebenen Form.

$$\begin{aligned} I_1 &:= \mathbf{A} : \mathbf{1} & \text{mit} & \quad \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{1} \\ I_2 &:= [[\mathbf{A} : \mathbf{1}]^2 - \mathbf{A}^2 : \mathbf{1}] / 2 & \text{mit} & \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{A}} = I_1 \mathbf{1} - \mathbf{A} \\ I_3 &:= \det \mathbf{A} & \text{mit} & \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{A}} = I_3 \mathbf{A}^{-T} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Hierbei wird die erste Invariante I_1 als Spur und die dritte Invariante I_3 als Determinante des Tensors \mathbf{A} bezeichnet. Insbesondere ist bei der Entwicklung von Materialgesetzen die negative zweite Invariante des Deviators \mathbf{A}^{dev} von Interesse, die im allgemeinen mit J_2 bezeichnet wird. Es gilt

$$J_2 := - [[\mathbf{A}^{dev} : \mathbf{1}]^2 - \mathbf{A}^{dev 2} : \mathbf{1}] / 2 \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}^{dev} \quad (\text{A.11})$$

so daß sich die zweite Invariante des Deviators auch direkt als $J_2 = 1/2 \mathbf{A}^{dev} : \mathbf{A}^{dev}$ angeben läßt.

Hauptachsentransformation

Jeder symmetrische, reellwertige Tensor zweiter Stufe \mathbf{A} besitzt drei orthogonale Hauptachsenrichtungen und drei reellwertige Eigenwerte A_I , A_{II} und A_{III} . Diese lassen sich als Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (\text{A.12})$$

mit den Invarianten gemäß Gleichung (A.10) bestimmen. Die zugehörigen normierten Hauptrichtungen \mathbf{n}_I , \mathbf{n}_{II} und \mathbf{n}_{III} sind die Lösungen des folgenden homogenen Gleichungssystems.

$$[\mathbf{A} - A_i \mathbf{1}] \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad \forall i = I, II, III \quad (\text{A.13})$$

Gradient und Divergenz

Der Gradient einer hinreichend differenzierbaren skalarwertigen Funktion $f(\mathbf{x})$ bzw. einer vektorwertigen Funktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ liefert gemäß der folgenden Definition eine vektor- bzw. tensorwertige Funktion, $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ deren Komponenten sich wie folgt darstellen lassen.

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})]_i &= [f(\mathbf{x})]_{,i} = [\mathbf{g}(\mathbf{x})]_i \\ [\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})]_{ij} &= [\mathbf{f}(\mathbf{x})]_{,ij} = [\mathbf{G}(\mathbf{x})]_{ij} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Hierbei bezeichnet $[\nabla_{\mathbf{x}}(\bullet)]_i = \partial(\bullet)/\partial[\mathbf{x}]_i$ die Komponenten des Gradienten bezüglich der kartesischen Koordinaten \mathbf{x} . Der zugehörige Gradient soll im Rahmen dieser Arbeit vereinfachend mit ∇ bezeichnet werden. Zur Unterscheidung sind die Komponenten des Gradienten bezüglich der isoparametrischen Koordination $[\nabla_{\xi}(\bullet)]_i = \partial(\bullet)/\partial[\xi]_i$ mit dem

Index ξ gekennzeichnet. Die Divergenz eines Vektorfeldes $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ bzw. eines zweistufigen Tensorfeldes $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ liefert entsprechend eine skalar- bzw. vektorwertige Funktion f bzw. \mathbf{f} , deren Komponenten sich wie folgt darstellen lassen.

$$\begin{aligned} [\operatorname{div} \mathbf{g}(\mathbf{x})] &= [\mathbf{g}(\mathbf{x})]_{i,i} = [f(\mathbf{x})] \\ [\operatorname{div} \mathbf{G}(\mathbf{x})]_i &= [\mathbf{G}(\mathbf{x})]_{ij,j} = [f(\mathbf{x})]_i \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Gâteaux Ableitung

Die GÂTEAUX Ableitung stellt eine spezielle Form der Richtungsableitung dar. Mit den vorgegebenen Richtungen Δx , $\Delta \mathbf{x}$ bzw. $\Delta \mathbf{X}$ lassen sich die GÂTEAUX Ableitungen einer skalar-, vektor- bzw. tensorwertigen Funktionen Π in der nachfolgenden Form angeben.

$$\begin{aligned} \Delta \Pi(x) &:= \frac{\partial \Pi(x)}{\partial x} \Delta x = \frac{d}{d\epsilon} \Pi(x + \epsilon \Delta x) \Big|_{\epsilon=0} & \forall x \in \mathbb{R} \\ \Delta \Pi(\mathbf{x}) &:= \frac{\partial \Pi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \cdot \Delta \mathbf{x} = \frac{d}{d\epsilon} \Pi(\mathbf{x} + \epsilon \Delta \mathbf{x}) \Big|_{\epsilon=0} & \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_{dim}} \\ \Delta \Pi(\mathbf{X}) &:= \frac{\partial \Pi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} : \Delta \mathbf{X} = \frac{d}{d\epsilon} \Pi(\mathbf{X} + \epsilon \Delta \mathbf{X}) \Big|_{\epsilon=0} & \forall \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n_{dim} \times n_{dim}} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Integralsätze

Mit Hilfe des nachfolgenden GAUSS'schen Integralsatzes lassen sich Volumenintegrale in Flächenintegrale umwandeln.

$$\begin{aligned} \int_B \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV &= \int_{\partial B} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} \, dA \\ \int_B \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV &= \int_{\partial B} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dA \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Insbesondere ist die Anwendung des Integralsatzes für tensorwertige Funktionen bei Herleitungen im Rahmen der Finite Element Methode von Interesse.

Heaviside Funktion und Macaulay Klammern

Im Rahmen dieser Arbeit bezeichne $H(\bullet)$ die HEAVISIDE Funktion. Weiterhin seien die MACAULAY Klammern mit $\langle \bullet \rangle$ bezeichnet.

$$H(\bullet) := \begin{cases} 1 & \text{für } (\bullet) > 0 \\ 0 & \text{für } (\bullet) \leq 0 \end{cases} \quad \langle \bullet \rangle := \begin{cases} (\bullet) & \text{für } (\bullet) > 0 \\ 0 & \text{für } (\bullet) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Es gilt dementsprechend der Zusammenhang $H(\bullet) = \langle \bullet \rangle / (\bullet)$.

Spezielle Formeln für Rang-Eins modifizierte Tensoren

Mit Hilfe der SHERMAN-MORRISON Formel ist es möglich, die Inverse eines zweistufigen Tensors, der sich aus der Rang-Eins Modifikation eines regulären Tensors \mathbf{A} darstellen läßt, direkt anzugeben.

$$[\mathbf{A} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}]^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}} \quad (\text{A.19})$$

Die Determinante eines zweistufigen Tensors, der sich aus der Rang-Eins Modifikation eines regulären Tensors \mathbf{A} darstellen läßt, kann in der folgenden Form angegeben werden.

$$\det[\mathbf{A} + \alpha \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}] = \det \mathbf{A} [1 + \alpha \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{u}] \quad (\text{A.20})$$

Anhang B

Numerische Integration über den Raumwinkel

Das Integral der Größe (\bullet) über den Raumwinkel Ω läßt sich mittels der numerischen Integration durch Auswertung an n_{mp} diskreten Integrationspunkten approximieren.

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} (\bullet) d\Omega = \sum_{I=1}^{n_{mp}} (\bullet)^I w^I \quad (\text{B.1})$$

Jeder der n_{mp} Integrationspunkte kann im Rahmen der Microplane Theorie einer Mikroebene zugeordnet werden. In dieser Arbeit wurde ausschließlich eine Raumwinkelintegration mit $n_{mp} = 42$ Punkten durchgeführt. Unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaften ist jedoch eine Untersuchung mit $n_{mp} = 21$ Integrationspunkten pro Hemisphäre ausreichend. Für den abgebildeten Fall mit $n_{mp} = 42$ Mikroebenen fällt auf, daß die Flächen der einzelnen Mikroebenen keine einheitliche Größe aufweisen. Dies ist auf eine Wahl von nicht-äquidistanten Integrationspunkten zurückzuführen und äußert sich in unterschiedlich großen Wichtungskoeffizienten w^I .

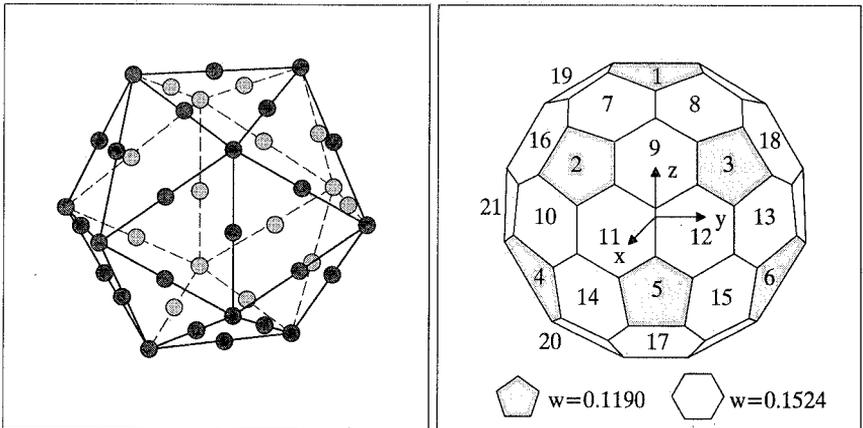


Abbildung B.1: Numerische Integration mit 42 Integrationspunkten bzw. 42 Mikroebenen

Abbildung B.1 zeigt die räumliche Verteilung der zugehörigen Mikroebenen. In Tabelle B.1 sind die Normalenvektoren sowie die zugehörigen Wichtungskoeffizienten der einzelnen Ebenen nach BAŽANT & OH [18], [19] zusammengestellt.

Alternative Integrationsvorschriften für regelmäßige Polyeder wie beispielsweise mit $n_{mp} = 20$ Mikroebenen gemäß Abbildung 4.7.1 in Abschnitt 4.2.3 lassen sich einer Untersuchung von ALBRECHT & COLLATZ [3] entnehmen. Eine umfangreiche Zusammenstellung nicht-äquidistanter Integrationspunkte, beispielsweise mit $n_{mp} = 32$ oder $n_{mp} = 122$ Mikroebenen pro Raumwinkel, wie sie in Abbildung 4.7.2 und 4.7.4 dargestellt sind, findet sich in STROUD [204].

I	x-Koordinate	y-Koordinate	z-Koordinate	w Wichtung
1	0.187592474085	0.000000000000	0.982246946377	0.1190476190478
2	0.794654472292	-0.525731112119	0.303530999103	0.1190476190478
3	0.794654472292	0.525731112119	0.303530999103	0.1190476190478
4	0.187592474085	-0.850650808352	-0.491123473188	0.1190476190478
5	0.794654472292	0.000000000000	-0.607061998207	0.1190476190478
6	0.187592474085	0.850650808352	-0.491123473188	0.1190476190478
7	0.577350269190	-0.309016994375	0.755761314076	0.1523809523808
8	0.577350269190	0.309016994375	0.755761314076	0.1523809523808
9	0.934172358963	0.000000000000	0.356822089773	0.1523809523808
10	0.577350269190	-0.809016994375	-0.110264089708	0.1523809523808
11	0.934172358963	-0.309016994375	-0.178411044887	0.1523809523808
12	0.934172358963	0.309016994375	-0.178411044887	0.1523809523808
13	0.577350269190	0.809016994375	-0.110264089708	0.1523809523808
14	0.577350269190	-0.500000000000	-0.645497224368	0.1523809523808
15	0.577350269190	0.500000000000	-0.645497224368	0.1523809523808
16	0.356822089773	-0.809016994375	0.467086179481	0.1523809523808
17	0.356822089773	0.000000000000	-0.934172358963	0.1523809523808
18	0.356822089773	0.809016994375	0.467086179481	0.1523809523808
19	0.000000000000	-0.500000000000	0.866025403784	0.1523809523808
20	0.000000000000	-0.500000000000	-0.866025403784	0.1523809523808
21	0.000000000000	-1.000000000000	-0.000000000000	0.1523809523808

Tabelle B.1: Integration mit 21 Punkten - Koordinaten und Wichtungskoeffizienten

Lebenslauf

Name	Ellen Kuhl, geb. Sawischlewski
Geburtstag	15.08.1971
Geburtsort	Hannover
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	seit 13.06.1997 verheiratet mit Detlef Kuhl
08/1978 – 07/1982	Grundschule Kaltenweide
08/1982 – 07/1984	Orientierungsstufe Langenhagen
08/1978 – 07/1991	Gymnasium Langenhagen
07/1991	Abschluß Abitur
10/1991 – 12/1995	Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Hannover
12/1995	Abschluß Diplom-Ingenieur
01/1996 – 09/1996	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik der Universität Hannover
10/1996 – 09/1999	Stipendiatin des Graduiertenkollegs “Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen” am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
seit 10/1999	Wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74-1 **M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff, K. Papailiou, J.M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Trag-
verhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 **G. Müller, R. M. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W.
Wissmann:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie
nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter
Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J.
Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten-Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76-2 **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 **B.-M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehr-
zelligen Querschnitt.
- 78-1 **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von
Stahlbetonplatten.
- 79-1 **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 **H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadrati-
schem Grundriß auf Einzelstützen.

- 79-3 **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalenträgwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 **R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 **R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattenträgwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 **J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1 **L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 **K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 **H.-P. André:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983) **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität längsversteifter Kreiszylinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit 'degenerierten' Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendung auf Kugelschalen.

- 7 (1987) **G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) **N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.

- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.