

**EIN FINITES ELEMENTKONZEPT ZUR BERECHNUNG
VON PLATTEN UND SCHALEN BEI STOFFLICHER UND
GEOMETRISCHER NICHTLINEARITÄT**

von

JÜRGEN MICHAEL SÄTTELE



Bericht Nr. 80-3

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Stuttgart 1980

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen am 2. Juni 1980 vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 1980

Hauptberichter: Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Mitberichter: Professor Dr. -Ing. G. Brinkmann

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, Postfach 1140, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Gesamtherstellung: **aku** - Fotodruck GmbH, 8600 Bamberg

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird ein auf der Verschiebungsmethode basierendes finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität vorgelegt.

Ausgegangen wird von einer inkrementellen Gleichgewichtsaussage in totaler oder mitgehender Lagrange-Formulierung. Den konstitutiven Beziehungen liegt das Verhalten elastoplastischer Werkstoffe zugrunde.

Die Elemente werden über einen "Degenerationsprozeß", verbunden mit einer numerischen Integration über die Elementdicke, erzeugt.

Den Abschluß der Arbeit bilden Anwendungen. Diese haben zum Ziel, das eigene Konzept zu verifizieren, typisches geometrisch und stofflich nichtlineares Tragverhalten aufzuzeigen und enden mit einer praxisorientierten Aufgabe.

Summary

Using the displacement method a finite element concept is presented for material and geometric nonlinear analysis of plates and shells.

Starting point is an incremental equilibrium equation in total and updated Lagrangian formulation. The constitutive relations are based on elastoplastic material models. The concept of "degeneration" is employed in connection with a numerical integration procedure over the element thickness to develop the elements presented herein.

Various examples are following to verify the elements and to illustrate typical material and geometric nonlinear structural behaviour. They end with an application of practical interest.

Resumé

Se fondant sur la méthode des déplacements un concept d'éléments finis est présenté pour l'analyse matérielle et géométrique non-linéaire des plaques et des coques.

Une équation incrémentelle d'équilibre en formulations lagrangiennes totale et mouvante représente le point de départ. Les relations constitutives sont basées sur des modèles de matériaux élastoplastiques.

Un processus de "dégénération" est employé en liaison avec une intégration numérique sur l'épaisseur pour développer les éléments.

Plusieurs exemples suivent, vérifiant l'adéquation des éléments et illustrant le comportement typique sur le point de vue de la nonlinéarité géométrique et matérielle. En fin d'ouvrage une question d'intérêt pratique est examinée.

Inhaltsverzeichnis

Schrifttumsverzeichnis	7
Bezeichnungen	20
1. Einleitung und Ziel der Arbeit	23
2. Die stoffunabhängigen Gleichungen des Kontinuums	27
2.1 Allgemeine Vorbemerkungen	27
2.2 Schreibweise und Bezeichnungen	27
2.3 Deformations- und Spannungsbegriffe	28
2.4 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen in inkrementeller Form	30
3. Die Materialgleichungen des elastoplastischen Werk- stoffs	35
3.1 Allgemeines	35
3.2 Modelle plastischen Werkstoffverhaltens	35
3.3 Mehrachsiges Verhalten	36
3.4 Stoffgleichungen bei großen Deformationen	56
4. Entwickelte finite Elemente und Rechentechnik	61
4.1 Diskretisierung	61
4.2 Ermittlung der Spannungen	63
4.3 Algorithmus zur Berechnung elasto- plastischer Spannungen	64
4.4 Numerische Lösung des nichtlinearen Problems	65
4.5 Die Entwicklung spezieller Elemente	68

5.	Numerischer Teil	80
5.1	Kragarm	80
5.2	Geometrisch und stofflich nichtlinearer Plattenstreifen	84
5.3	Kreisplatte, geometrisch und stofflich nichtlinear	87
5.4	Geometrisch und stofflich nichtlineare Zylinderschale	91
5.5	Querbelastete Quadratplatte	94
5.6	Imperfekte Rechteckplatte unter Längslast	98
5.7	Hyperbolisches Paraboloid unter Außendruck	102
5.8	Querbelastetes Zylinderschalenfeld	109
5.9	Traglasten längsgedrückter, imperfekter Rechteckplatten mit Seitenverhältnissen $\alpha \leq 1$	113
	Anhang	133

Schrifttumsverzeichnis

- [1] Ahmad, S.,
Irons, B. M.,
Zienkiewicz, O. C. : Curved Thick Shell and Membrane
Elements with Particular Reference
to Axisymmetric Problems.
Proc. 2nd Conf. "Matrix Methods in
Structural Mechanics",
AFFDL-TR-68-150, 539/71 (1968).
- [2] Ahmad, S.,
Irons, B. M.,
Zienkiewicz, O. C. : Analysis of Thick and Thin Shell Struc-
tures by Curved Finite Elements.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 3,
275/90 (1971).
- [3] Argyris, J. H. : Continua and Discontinua.
Proc. 1st Conf. "Matrix Methods in
Structural Mechanics",
AFFDL-TR-66-80, 11/189 (1966).
- [4] Argyris, J. H. : Elastoplastic Matrix Displacement
Analysis of Three-Dimensional Con-
tinua.
J. Royal Aeronautical Soc., Vol. 69,
No. 657, 633/36 (1965).
- [5] Armen, H.,
Pifko, A.,
Levine, H. S. : A Finite Element Method for the
Plastic Bending Analysis of Struc-
tures.
Proc. 2nd Conf. "Matrix Methods in
Structural Mechanics",
AFFDL-TR-68-150, 1301/39 (1968).
- [6] Axelsson, K.,
Samuelsson, A. : Finite Element Analysis of Elastic-
Plastic Materials Displaying Mixed
Hardening.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 14,
211/25 (1979).

- [7] Backhaus, G. : Zur analytischen Erfassung des allgemeinen Bauschingereffektes.
Acta Mechanica, Volume 14, 31/42 (1972).
- [8] Bäcklund, J. : Finite Element Analysis of Nonlinear Structures.
Dissertation Chalmers University, Göteborg (1973).
- [9] Bathe, K. -J. ,
Wilson, E. L. ,
Iding, R. H. : NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems.
SESM Report No.74-3, Dept. Civil Eng., University of California, Berkeley (1974).
- [10] Bathe, K. -J. ,
Ramm, E. ,
Wilson, E. L. : Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 9, 353/86 (1975).
- [11] Bathe, K. -J. ,
Ozdemir, H. : Elastic - Plastic Large Deformation Static and Dynamic Analysis.
Computers & Structures, Volume 6, 81/92 (1976).
- [12] Bathe, K. -J. ,
Snyder, M. D. ,
Cimento, A. P. : On Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Response.
Proc. Int. Conf. "Engineering Application of the Finite Element Method", Paper 23, Høvik, Norwegen (1979).
- [13] Bathe, K. -J. ,
Bolourchi, S. : A Geometric and Material Nonlinear Plate and Shell Element.
Computers & Structures, Volume 11, 23/48 (1980).

- [14] Batoz, J. L.,
Chattopadhyay, A.,
Dhatt, G. : Finite Element Large Deflection Ana-
lysis of Shallow Shells.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 10,
39/58 (1976).
- [15] Bergan, P. G. : Nonlinear Analysis of Plates Consider-
ing Geometric and Material Effects.
Report No. 72-1, Division of Struct.
Mechanics, The Norwegian Institute
of Technology, The University of
Trondheim, Norwegen (1972).
- [16] Bergan, P. G.,
Clough, R. W. : Convergence Criteria for Iterative
Processes.
AIAA-Journal, Volume 10, 1107/08
(1972).
- [17] Bergan, P. G. : Solution Algorithms for Nonlinear
Structural Problems.
Proc. Int. Conf. "Engineering Appli-
cation of the Finite Element Method",
Paper 13, Høvik, Norwegen (1979).
- [18] Besseling, J. F. : A Theory of Plastic Flow for Aniso-
tropic Hardening in Plastic Deforma-
tion of an Initially Isotropic Material.
Report S 410, 3-410, National Aero-
nautical Research Institute, Amster-
dam (1953).
- [19] Bland, D. R. : The Two Measures of Work-Hard-
ening.
Proc. 9th Int. Congress on Applied
Mechanics, Brussel 1956, Volume 8,
45/50 (1957).

- [26] Bushnell, D. : Stress, Stability and Vibration of Complex Branched Shells of Revolution. NASA CR-2116 (1972).
- [27] Clough, R. W. : The Finite Element Method after Twenty-five Years - a Personal View. Proc. Int. Conf. "Engineering Application of the Finite Element Method", Paper 1, Høvik, Norwegen (1979).
- [28] Cormeau, I. : Elastoplastic Thick Shell Analysis by Viscoplastic Solid Finite Elements. Int. J. Num. Meth. Eng., Volume 12, 203/27 (1979).
- [29] Crisfield, M. A. : Large Deflection Elasto-Plastic Buckling Analysis of Plates Using Finite Elements. TTRL Report LR 593, Transport and Road Research Laboratory, Crowthorne, Berkshire (1973).
- [30] Dhatt, G. : Instability of Thin Shells by the Finite Element Method. Proc. IASS Symposium, Wien 1970 (1970).
- [31] Drucker, D. C. : A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations. Proc. 1st U.S. National Congress on Appl. Mechanics, ASME, 487/91 (1951).
- [32] Dupuis, G. A.,
Hibbit, H. D.,
McNamara, S. F.,
Marcal, P. V. : Nonlinear Material and Geometric Behavior of Shell Structures. Computers & Structures, Volume 1, 223/39 (1971).

- [33] Duwez, P. : On the Plasticity of Crystals.
Physical Review, Vol. 47, 494/501
(1935).
- [34] Fischer, M.,
Harre, W. : Ermittlung der Traglastkurven von
einachsig gedrückten Rechteckplatten
aus Baustahl der Seitenverhältnisse
 $\alpha \leq 1$ mit Hilfe von Versuchen.
Teil I: Stahlbau 7, 199/204 (1978),
Teil II: Stahlbau 8, 239/47 (1978).
- [35] Forsberg, K. : An Evaluation of Finite Difference and
Finite Element Techniques for Gen-
eral Shells.
Proc. IUTAM Symposium "High Speed
Computing of Elastic Structures",
Lüttich, 837/59 (1971).
- [36] Fung, P. K.,
Burns, D. J.,
Lind, N. C. : Yield under High Hydrostatic Pres-
sure.
In: Foundation of Plasticity (Ed. A.
Sawczuk), Noordhoff, Leiden (1972).
- [37] Gerdeen, J. C.,
Simonen, F. A.,
Hunter, D. T. : Large Deflection Analysis of Elastic-
Plastic Shells Using Numerical Inte-
gration.
AIAA-Journal, Vol. 9, 1012/18 (1971).
- [38] Green, A. E.,
Naghdi, P. M. : A General Theory of an Elastic-Plas-
tic Continuum.
Arch. ration. Mech. Analysis, Vol. 18,
251/81 (1965).
- [39] Green, A. E.,
Naghdi, P. M. : A Thermodynamic Development of
Elastic-Plastic Continua.
Proc. IUTAM Symposium "Irrevers-
ible Aspects of Continuum Mechanics",
Wien 1966, 117/31 (1968).

- [40] Green, A. E. , Some Remarks on Elastic-Plastic De-
Naghdi, P. M. : formation at Finite Strain.
Int. J. Eng. Sci. , Vol. 9, 1219/29
(1971).
- [41] Hill, R. : The Mathematical Theory of Plasticity.
Oxford University Press (1960).
- [42] Hodge, P. G. Jr. : A New Method of Analyzing Stresses
and Strains in Work-Hardening Plas-
tic Solids.
Diskutiert von W. Prager in: Journal
Applied Mechanics, Vol. 23, 493/96
(1956); Vol. 24, 482/83 (1957).
- [43] Hodge, P. G. , Numerical Methods for the Limit Ana-
Belytschko, T. : lysis of Plates.
J. Applied Mech. , Vol. 35, 796/802
(1968).
- [44] Hunsacker, B. Jr. , A Comparison of the Capability of
Vaughan, D. K. , Four Hardening Rules to Predict a
Stricklin, J. A. : Material's Plastic Behavior.
J. Pressure Vessel Techn. (ASME),
Vol. 98, 66/74 (1976).
- [45] Hutchinson, J. W. : Plastic Buckling.
Advances in Applied Mech. , Vol. 14,
67/144 (1974).
- [46] Iwan, W. D. : On a Class of Modells for the Yielding
Behavior of Continuas and Composite
Systems.
J. Applied Mech. , Vol. 34, 612/17
(1967).
- [47] Jordan-Engeln, G. , Numerische Mathematik für Ingenieure.
Reutter, F. : Bibliographisches Institut, Mannheim
(1978).

- [48] Kalev, I.,
Gluck, J. : Cyclic Elastic-Plastic Dynamic Analysis by the Finite Element Method. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 10, 63/74 (1977).
- [49] Key, S.,
Biffle, J. H.,
Krieg, R. D. : A Study of the Computational and Theoretical Differences of Two Finite Strain Elastic - Plastic Constitutive Models. US - Germany Symp. "Formulations and Algorithms in Finite Element Analysis", MIT, Cambridge 1976, MIT-Press (1977).
- [50] Kleiber, M. : Kinematics of Deformation Processes in Materials Subjected to Finite Elastic-Plastic Strains. Int. J. Eng. Sci., Vol. 13, 513/25 (1975).
- [51] Klöppel, K.,
Schmied, R.,
Schubert, J. : Die Traglast mittig und außermittig gedrückter dünnwandiger Kastenträger unter Verwendung der nichtlinearen Baultheorie. Teil II: Experimentelle Untersuchungen, Vergleiche der experimentellen und theoretischen Ergebnisse. Stahlbau 1, 9/19 (1969) und 3, 73/83 (1969).
- [52] Koiter, W. T. : General Theorems for Elastic-Plastic Solids. Progress in Solid Mechanics, Vol. 1, Chapter IV, 165/222 (1960).

- [53] Kråkeland, B. : Large Displacement Analysis of Shells Considering Elasto-Plastic and Elasto-Viscoplastic Materials.
Report No. 77-6, Division of Structural Mechanics, The Norwegian Institute of Technology, University of Trondheim, Norwegen (1977).
- [54] Kröplin, B. -H. : Beulen ausgesteifter Blechfelder mit geometrischer und stofflicher Nicht-linearität.
Bericht 77-22, Institut für Statik, TU Braunschweig (1977).
- [55] Larsen, P. K. ,
Popov, E. P. : Elastic - Plastic Analysis of Thick-Walled Pressure Vessels with Sharp Discontinuities.
J. Eng. for Industry (ASME), 1016/20 (1971).
- [56] Larsen, P. K. ,
Popov, E. P. : A Note on Incremental Equations and Approximate Constitutive Relations in Large Inelastic Deformations.
Acta Mechanica, Vol. 19, 1/14 (1974).
- [57] Lee, E. H. ,
Liu, D. T. : Finite Strain Elastic-Plastic Theory.
Proc. IUTAM Sympos. "Irreversible Aspects of Continuum Mechanics",
Wien 1966, 213/22 (1968).
- [58] Lee, L. H. N. : Inelastic Buckling of Initially Imperfect Cylindrical Shells Subject to Axial Compression.
J. Aerospace Sci. , 87/95 (1962).
- [59] Malvern, L. E. : Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.
Prentice Hall (1969).

- [60] Mróz, Z. : On the Description of Anisotropic Workhardening.
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 15, 163/75 (1967).
- [61] Murphy, L. M. ,
Lee, L. H. N. : Inelastic Buckling Process of Axially Compressed Cylindrical Shells Subjected to Edge Constraints.
Int. J. Solids Structures, Volume 7, 1153/70 (1970).
- [62] Naghdi, P. M. ,
Murch, S. A. : On the Mechanical Behavior of Viscoelastic/plastic Solids.
J. Applied Mech. , Vol. 30, 321/28 (1963).
- [63] Naghdi, P. M. : Stress-Strain Relations in Plasticity and Thermoplasticity.
Proc. 2nd Conf. Naval Struct. Mech. , 121/67, Pergamon (1960).
- [64] Neale, K. W. : A Method for the Estimation of Plastic Buckling Loads.
Int. J. Solids Structures, Volume 10, 217/30 (1974).
- [65] Onat, E. T. ,
Drucker, D. C. : Inelastic Stability and Incremental Theories of Plasticity.
J. Aeronaut. Sci. , Vol. 20, 181/86 (1953).
- [66] Owen, D. R. J. ,
Prakash, A. ,
Zienkiewicz, O. C. : Finite Element Analysis of Non-Linear Composite Materials by Use of Overlay Systems.
Computers & Structures, Volume 4, 1251/67 (1974).

- [67] Paulun, J.: Zur Theorie und Berechnung geometrisch und physikalisch nichtlinearer Kontinua mit Anwendung der Methode der finiten Elemente.
Bericht Nr. F 77-4 aus dem Bereich der Mechanik der TU Hannover (1977).
- [68] Perzyna, P.: Fundamental Problems in Viscoplasticity.
Advances in Applied Mechanics, Vol. 9, 243/377 (1966).
- [69] Pope, G. G.: The Application of the Matrix Displacement Method in Plane Elastoplastic Problems.
Proc. 1st Conf. "Matrix Methods in Structural Mechanics",
AFFDL-TR-66-80, 635/54 (1966).
- [70] Prager, W.,
Hodge Jr., P. G.: Theorie idealplastischer Körper.
Springer (1954).
- [71] Prager, W.: The Theory of Plasticity: a Survey of Recent Achievements.
Proc. Inst. Mech. Eng., 41/57 (1955).
- [72] Prager, W.: Non-isothermal Plastic Deformation.
Proc. Koninklijke Nederlands Akad. von Wetenschappen, Vol. 61, 176/82 (1958).
- [73] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
Bericht 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart (1976).
- [74] Reckling, K. -A.: Zur Theorie der Plattenbeulung im plastischen Materialbereich.
Ing.-Archiv, XXVIII, 263/76 (1959).

- [75] Reckling, K. -A. : Plastizitätstheorie und ihre Anwendung auf Festigkeitsprobleme. Springer (1967).
- [76] Sawczuk, A. ,
Jaeger, T. : Grenztragfähigkeits-Theorie der Platten. Springer (1963).
- [77] Sharifi, P. : Nonlinear Buckling Analysis of Composite Shells. AIAA-Journal, Vol. 13, 729/34 (1975).
- [78] Söreide, T. H. : Collaps Behavior of Stiffened Plates Using Alternative Finite Element Formulations. Report No. 77-3, Div. of Structural Mechanics, The Norwegian Inst. of Technology, University of Trondheim, Norwegen (1977).
- [79] Stricklin, J. A. ,
Haisler, W. E. : Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis. Computers & Structures, Volume 7, 125/36 (1977).
- [80] Taylor, G. I. ,
Quinney, H. : The Plastic Distortion of Metals. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol. 230, 323/62 (1931).
- [81] Timoshenko, S. P. ,
Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells. Mc Graw-Hill (1959).
- [82] Truesdell, C. ,
Noll, W. : The Nonlinear Field Theories of Mechanics. Handbuch der Physik, Band III/3, Springer (1965).

- [83] Turner, M. J.,
Dill, E. H.,
Martin, H. C.,
Melosh, R. J. : Large Deflection Analysis of Complex Structures Subjected to Heating and External Loads.
J. Aerospace Sci., Vol. 27, 97/106 (1960).
- [84] Wolmir, A.S. : Biegsame Platten und Schalen.
VEB Verlag für das Bauwesen (1962).
- [85] Wegmüller, A. W.,
Kostem, C. N. : Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Plates and Eccentrically Stiffened Plates.
Report No. 378 A. 4, Fritz Eng. Lab., Lehigh University (1973).
- [86] Yamada, Y.,
Yoshimura, N.,
Sakurai, T. : Plastic Stress Strain Matrix and its Application for the Solution of Elastic Plastic Problems by the Finite Element Method.
Int. J. Mech. Sci., Vol. 10, 343/54 (1968).
- [87] Ziegler, H. : A Modification of Prager's Hardening Rule.
Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 17, 55/65 (1959).
- [88] Zienkiewicz, O. C.,
Valliappan, S.,
King, I. P. : Elasto-Plastic Solutions in Engineering Problems - "Initial Stress", Finite Element Approach.
Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 1, 75/100 (1969).
- [89] Zienkiewicz, O. C. : Methode der finiten Elemente.
Hanser (1975).

Bezeichnungen

Indizierung

<u>links</u>	oben	m	Wirkungszustand $t = m$
	unten	n	Bezugszustand
<u>rechts</u>	oben	e	elastisch
		p	plastisch
		'	deviatorisch
	unten	i, j, k	Komponenten des kartesischen Koordinatensystems (i, j, k = 1, 2, 3)
		, j	Ableitung nach der j-ten Koordinate

Geometrie, Verschiebung, Verzerrung, Spannung

m_{x_i}	Koordinate im Zustand m (i = 1, 2, 3)	
$\frac{m_{x_i}}{n_{x_j}} = \frac{\partial m_{x_i}}{\partial n_{x_j}}$	Deformationsgradient	
m_{u_i}	Gesamtverschiebungen im Zustand m	
u_i	Verschiebungsinkrement	
$m_o \epsilon_{ij}$	Green-Lagrange-Verzerrungstensor	
$m_m \epsilon_{ij}$	(Euler-) Almansi-Verzerrungstensor	
$m_o s_{ij}$	Kirchhoff- (Kirchhoff-Piola II.) Spannungstensor	
$m_o \tau_{ij}$	Lagrange- (Kirchhoff-Piola I.) Spannungstensor	
$m_m \tau_{ij}$	(Euler-) Cauchy-Spannungen	
$m_n t_i$	Oberflächenkraftkomponente	} im Zustand m, } bezogen auf n
$m_n f_i$	Volumenkraftkomponente	
m_p	spezifische Masse	

Werkstoff und konstitutive Größen

E	Elastizitätsmodul
v	Querdehnzahl

$\sigma_F, \sigma_o^m s_F$	einachsige Fließspannung	
$T = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}}$	Tangentenmodul	} mit $\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}$ Größen des einachsigen Vergleichszustands
$T^P = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^P}$	plastischer Tangentenmodul	
${}^m C_{ijkl}$	konstitutiver Tensor im Zustand m, bezogen auf n	
F	(Anfangs-) Fließbedingung	
f	Verfestigungsfunktion	
g	Verfestigungsansatz	

Matrizen und finite Element-Bezeichnungen

${}^m B_n$	Operatormatrix, lineare Kinematik
${}^m \hat{B}_n$	Operatormatrix für die Verschiebungsableitungen
${}^m C_n, {}_n C$	konstitutive Matrix
${}^m d_n, {}_n d$	Vektor der Verschiebungsableitungen ${}^m u_{n,i,j}, {}_n u_{i,j}$
${}^m \epsilon_n, {}_n \epsilon$	Vektor der Verzerrungen ${}^m \epsilon_{n,ij}, {}_n \epsilon_{ij}$
${}_n e, {}_n \eta$	linearer, nichtlinearer Anteil von ${}_n \epsilon$
${}^m F_n$	Vektor der verallgemeinerten inneren Knotenkräfte
${}^m J$	Jacobimatrix
${}^m K_n$	inkrementelle Gesamtsteifigkeitsmatrix
${}^m K_{n,g}$	geometrische Steifigkeitsmatrix
${}^m R$	Vektor der verallgemeinerten äußeren Knotenkräfte
${}^m s_o, {}_o s$	Vektor der Kirchhoff-Spannungen ${}^m s_{o,ij}$
${}^m t$	Vektor der Cauchy-Spannungen ${}^m t_{ij}$

${}^m \mathbf{u}, \mathbf{u}$	Vektor der Knotenverschiebungen ${}^m u_i, u_i$
k	zum Knoten k gehörend
M	Gesamtzahl der Knoten am Element
r, s, t	lokale Koordinaten
$\bar{\varphi}$	Interpolationsfunktion
$\varphi(k), \psi(k)$	Winkel der Normalen am Knoten k
$h(k)$	Dicke, gemessen auf der Normale in k
$\alpha(k), \beta(k)$	Winkeländerungen (Rotationsfreiheitsgrade) in k

Sonstige Bezeichnungen

$d {}^m_a$	differentielles Flächenelement im Zustand m
$d {}^m_v$	differentielles Volumenelement im Zustand m
${}^m_{n_i}$	Komponente der Flächennormalen im Zustand m
${}^m_{\delta} W_{(i)}, {}^m_{\delta} W_{(a)}$	virtuelle innere/äußere Arbeit im Zustand m

Abmessungen

L	Länge
B	Breite
H	Dicke
R	Radius
A, B	Seitenabmessungen

Nichtmetrische Einheiten

1 in	= 25,4 mm
1 lb	= 4,45 N
1 ksi	= 10^3 psi = $10^3 \frac{\text{lb}}{\text{in}^2} = 6,895 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$

1. Einleitung und Ziel der Arbeit

In den letzten Jahren haben numerische Rechenverfahren in das Ingenieurwesen Eingang gefunden, die es ermöglichen, das Tragverhalten allgemeiner Strukturen bis hin zu Versagenszuständen zu beschreiben. Dazu wurden Rechenmodelle entwickelt, die durch die Mitnahme geometrischer und stofflicher Nichtlinearität über den engen Bereich linearer Approximationen hinaus Gültigkeit besitzen.

An erster Stelle allgemeiner Anwendung steht die Methode der finiten Elemente (FEM), die inzwischen eine fast zwanzigjährige Geschichte nichtlinearer Entwicklung aufweisen kann.

Begünstigt wurde die schnelle Ausdehnung von linearen auf nichtlineare Probleme durch die zeitlich parallel verlaufende Leistungssteigerung großer digitaler Rechanlagen und der damit entstandenen Möglichkeit, zu vertretbaren Kosten die Lösung nichtlinearer Aufgaben auf numerischem Weg anzugehen.

Auf der anderen Seite wurde das Ingenieurwesen in den letzten Dekaden von der Realisierung außergewöhnlicher Projekte geprägt. Besonders hohe Anforderungen an die Sicherheit und Wirtschaftlichkeit der Konstruktionen etwa in Luft- und Raumfahrt, Meerestechnik oder im Kraftwerksbau lieferten Anstöße, vorhandene rechnerische Methoden weiterzuentwickeln. Die nichtlinearen Erweiterungen der Methode der finiten Elemente detailliert und historisch genau wiederzugeben, fällt aufgrund der Vielzahl und Verschiedenartigkeit aller Entwicklungen schwer. Clough, der der Methode ihren Namen gab, hält dies in [27] für "a task for specialists in the history of engineering science". So soll hier nur eine kurze Zusammenfassung einiger Trends gegeben werden.

Die Erschließung nichtlinearer Anwendungen vollzog sich zunächst getrennt nach geometrischer und stofflicher Nichtlinearität.

Die Begriffe "geometrische Steifigkeit" und "Anfangsspannungsmatrix" wurden 1960 von Turner u. a. [83] eingeführt und für ein Balken- und ein Membranelement abgeleitet. Ende der 60er Jahre liegen dann auch

für Schalenelemente geometrisch nichtlineare Formulierungen vor. Diese sind jedoch weitgehend auf die Lösung linearer Beulprobleme über eine Eigenwertanalyse beschränkt. Geometrisch nichtlineare Vorgänge unter Einschluß großer Verschiebungen, Rotationen und Verzerrungen können nicht gelöst werden. Erst Mitte der 70er Jahre gelingt es, durch konsequente kontinuumsmechanische Herleitung eine allgemeine Basis zu finden. Alternative Möglichkeiten zur Darstellung der Bewegungsgleichungen werden klar herausgearbeitet, die Gleichgewichtsbeziehungen in inkrementeller Form angewendet und Spannungs- und Verzerrungsgrößen präzise definiert. Beispielhaft ist die Arbeit von Bathe, Ramm und Wilson [10].

Nichtlineares Stoffverhalten wird erstmals 1965 in Arbeiten von Argyris [4] und Pope [69] behandelt. Zugrunde gelegt ist ein elastoplastisches Material. In der Folgezeit werden Modelle für andere Werkstoffe vorgelegt, so z. B. für Beton, Kunststoffe und Böden. Die gleichzeitige Behandlung geometrischer und stofflicher Nichtlinearität bleibt selten und ist vorwiegend auf ebene oder achsensymmetrische Probleme beschränkt. Daneben ist die Diskussion geeigneter Schalenelemente für den geometrisch nichtlinearen Fall noch in vollem Gang. Neue Anregungen gingen von Ahmad, Irons und Zienkiewicz aus, die in [2] vorschlagen, Schalenelemente nicht auf klassischem Weg über eine Flächentheorie, sondern über einen sogenannten Degenerationsprozeß abzuleiten. Schwierigkeiten bei der Anwendung auf sehr dünne Schalen verzögerten jedoch die allgemeine Anwendung, bis deren Ursachen erkannt und mit speziellen Integrationstechniken umgangen wurden.

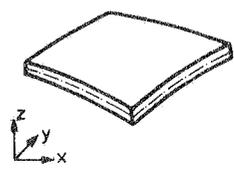
Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, finite Elemente zur Berechnung allgemeiner Platten und Schalen bei geometrischer und stofflicher Nichtlinearität vorzulegen und deren Anwendungsbereich zu diskutieren. Es werden nur statische Untersuchungen vorgenommen. Dem Gesamtkonzept liegt die Verschiebungsmethode zugrunde; die Elemente werden über Degeneration gewonnen.

Dazu wird in den einzelnen Abschnitten auf folgende Fragestellungen eingegangen:

Der zweite Abschnitt enthält eine Zusammenstellung der stoffunabhängigen Gleichungen. Nach Einführen der Spannungs- und Verzerrungsbegriffe werden die Gleichgewichtsbeziehungen für die totale und die mitgehende Lagrange-Formulierung in inkrementeller Form abgeleitet.

Im dritten folgen die Grundgleichungen elastoplastischen Werkstoffverhaltens im Rahmen der klassischen phänomenologischen Theorie, bestehend aus Fließbedingung, Verfestigungsfunktion und Fließgesetz. Verwendet wird die v. Mises-Fließbedingung und das Fließgesetz für idealplastischen und isotrop verfestigenden Werkstoff. Besonders eingegangen wird auf die Anwendung der Stoffgleichungen bei geometrisch nichtlinearen Vorgängen. Endliche, große plastische Verzerrungen werden ausgeschlossen.

Thema des vierten Abschnittes ist die Erzeugung spezieller finiter Elemente für geometrisch und stofflich nichtlineare Anwendungen. Dazu wird vom Konzept der sogenannten Degeneration Gebrauch gemacht. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Elementtypen sind in Tafel 1. 1 zusammengefaßt. Sie basieren auf den bei Ramm [73] für den stofflich linearen Fall abgeleiteten Elementen.

Typ	eben / achsensymmetrisch	Platte / Schale
Form		
erzeugt durch Degeneration aus	- ebener Spannungszustand - ebener Verzerrungszustand - Achsensymmetrie	dreidimensionales Kontinuum
Anzahl Knoten	2 bis 5	8,9 oder 16

Tafel 1. 1: Entwickelte Elementtypen

Die Erfassung der sukzessiven Plastizierung des Querschnittes geschieht über ein Rechenmodell, bei dem beliebig viele Integrationspunkte über die Elementdicke angeordnet werden können ("Schichtpunkte").

Der fünfte Abschnitt enthält numerische Anwendungen. Im Vordergrund steht dabei zunächst die Absicht, die mit dem eigenen Rechenkonzept erzielten Lösungen anhand im Schrifttum verfügbarer Ergebnisse zu verifizieren. Daneben sollen typische Phänomene des Tragverhaltens bei geometrischer und stofflicher Nichtlinearität aufgezeigt werden. Das letzte Beispiel ist eine Parameteruntersuchung zum Tragverhalten imperfekter Platten unter Längslast. Hier soll mit einer Fragestellung des Stahlbaus die Reihe der akademischen Beispiele verlassen werden und die Brauchbarkeit des vorliegenden Konzepts für die Lösung praxisorientierter Aufgaben gezeigt werden.

2. Die stoffunabhängigen Gleichungen des Kontinuums

2.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Der verwendeten finiten Elementformulierung liegt als zentrale Aussage eine inkrementelle Darstellung des Prinzips der virtuellen Verrückungen (P. d. v. V.) zugrunde. Diese soll im folgenden Abschnitt für das geometrisch nichtlineare Problem abgeleitet werden.

Zur Beschreibung der Bewegung eines Körpers werden die Ortsvektoren seiner Körperpartikel und die Zeit t als unabhängige Variable verwendet. Die Ortsvektoren werden in einer beliebig wählbaren Bezugskonfiguration gemessen. Nach Truesdell [82] ist dies eine "Bezugsbeschreibung" (referential description) des Bewegungsvorgangs. Daneben wird auch die Bezeichnung "Materialbeschreibung" (material description) verwendet, da die Ortsvektoren gleichzeitig die materiellen Partikel des Körpers kennzeichnen. Die Ortsvektoren sind die materiellen Koordinaten. Wird als Bezugssystem die Ausgangskonfiguration zur Zeit $t = 0$ verwendet, ist es üblich, von einer "Lagrange-Darstellung" zu sprechen. Im folgenden soll diese jedoch "totale Lagrange-Darstellung" (T. L.) genannt werden, im Unterschied zu der mitgehenden (updated) Lagrange-Darstellung (U. L.). Dort wird die aktuelle Ausgangslage vor dem Inkrement als Bezugskonfiguration gewählt.

Die Zeit t hat für den hier behandelten statischen Fall nicht die Bedeutung eines echten Parameters. Sie dient nur zur Kennzeichnung des inkrementellen Vorgangs.

Für die kontinuumsmechanischen Grundlagen wird auf das Lehrbuch von Malvern [59] verwiesen, während die Herleitung der inkrementellen Form des Prinzips der virtuellen Verrückungen der Arbeit von Bathe, Ramm und Wilson [10] und der von Ramm [73] folgt.

2.2 Schreibweise und Bezeichnungen

Verwendet werden raumfeste kartesische Koordinaten, die es erlauben, zugunsten einer Indexschreibweise ($i, j \dots = 1, 2, 3$) auf den Tensorformalismus zu verzichten. Es gelten die Summenkonvention und das Kronecker-Symbol δ_{ij} .

Für den inkrementellen Vorgang ist es erforderlich, die Lage bzw. den Wirkungszustand m und den Bezugszustand n einer Größe zu unterscheiden und zu kennzeichnen. Dazu werden links oben und unten stehende Indizes eingeführt. Eine inkrementelle Größe wirkt zwischen zwei Lagen und hat daher keinen linken oberen Index m für den Wirkungszustand.

Zum Beispiel bedeuten

$$\begin{array}{ll} {}^m_n a_{ij} & \text{wirkt in der Lage } m \text{ und ist bezogen auf } n, \\ {}^n a_{ij} & \text{inkrementelle Größe, bezogen auf } n. \end{array}$$

Partielle Ableitungen nach einer Koordinatenrichtung werden durch ein Komma abgekürzt.

Zum Beispiel
$${}^m_n u_{i,j} = \frac{\partial {}^m u_i}{\partial {}^n x_j}$$

Zu beachten ist, daß $\partial {}^m u_i$ nicht die m -te Ableitung ist, sondern

$$\partial {}^m u_i \triangleq \partial ({}^m u_i)$$

und ebenso $\delta {}^m u_i \triangleq \delta ({}^m u_i)$

2.3 Deformations- und Spannungsbegriffe

2.3.1 Deformationsgradient

In Bild 2.1 ist ein differentielles Linienelement zwischen den Punkten P und Q eines Körpers in der unverformten Ausgangslage $t = 0$ und in einer Konfiguration zum Zeitpunkt $t = m$ dargestellt.

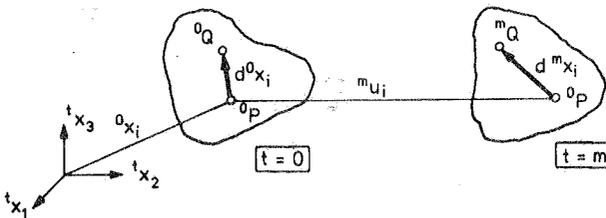


Bild 2.1: Verschiebung, Dehnung und Drehung des Linienelements

Für die Koordinaten im Zustand m gilt mit den Verschiebungen:

$${}^m x_i = {}^o x_i + {}^m u_i \quad (2.1)$$

Für das Linienelement gilt die Beziehung:

$$d {}^m x_i = {}^m_{o} x_{i,j} d {}^o x_j \quad (2.2)$$

mit dem Deformationsgradienten:

$${}^m_{o} x_{i,j} = \frac{\partial {}^m x_i}{\partial {}^o x_j} \quad (2.3)$$

2.3.2 Verzerrungen

Verwendet wird der Green-Lagrange-Verzerrungstensor. Dieser ist wie folgt definiert:

$$(d \underline{{}^m x})^2 - (d \underline{{}^o x})^2 = 2 {}^m_{o} \epsilon_{ij} d {}^o x_i d {}^o x_j \quad (2.4)$$

Mit dem Deformationsgradienten erhält man:

$${}^m_{o} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [{}^m_{o} x_{k,i} {}^m_{o} x_{k,j} - \delta_{ij}] \quad (2.5)$$

Mit (2.1) läßt sich der Green-Lagrange-Verzerrungstensor durch die Verschiebungsableitungen darstellen:

$${}^m_{o} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [{}^m_{o} u_{i,j} + {}^m_{o} u_{j,i} + {}^m_{o} u_{k,i} {}^m_{o} u_{k,j}] \quad (2.6)$$

Als weiteres Maß wird der (Euler-) Almansi-Verzerrungstensor eingeführt, der auf die Koordinaten des Wirkungszustands m bezogen ist:

$${}^m \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [{}^m u_{i,j} + {}^m u_{j,i} + {}^m u_{k,i} {}^m u_{k,j}] \quad (2.7)$$

2.3.3 Spannungen

Verwendet wird der (Euler-) Cauchy-Spannungstensor ${}^m_{m} \tau_{ij}$. Für die Komponenten des Spannungsvektors ${}^m_{m} t_i$ gilt mit den Komponenten der Normale ${}^m n_j$ auf das Flächenelement $d {}^m a$:

$$\frac{m_t}{m_i} = \frac{m_\tau}{m} \tau_{ij} \frac{m}{m} n_j \quad (2.8)$$

Weiter benötigt wird der symmetrische Kirchhoff-Spannungstensor ${}^m_o s_{ij}$ (auch 2. Kirchhoff-Piola- oder Trefftz- oder Kappus-Spannungstensor). Mit der Nanson-Formel für die Änderung des Flächenelements, siehe [59],

$$m_{n_j} d^m a = \frac{o_p}{m_p} o_{n_j} o_{m^x_{k,j}} d^o a \quad (2.9)$$

und mit der Jacobi-Determinante

$$J = \det \left| \frac{m}{o} x_{i,j} \right| = \frac{o_p}{m_p} \quad (2.10)$$

ergeben sich die Komponenten des Kirchhoff-Spannungstensors aus den Cauchy-Spannungen:

$${}^m_o s_{ij} = \frac{o_p}{m_p} o_{m^x_{i,k}} o_{m^x_{j,\ell}} m_\tau{}_{k\ell} \quad (2.11)$$

2.4 Das Prinzip der virtuellen Verrückungen in inkrementeller Form

2.4.1 Inkrementelle Zwischenlagen

Für die Inkrementierung werden die in Bild 2.2 dargestellten Zwischenlagen unterschieden.

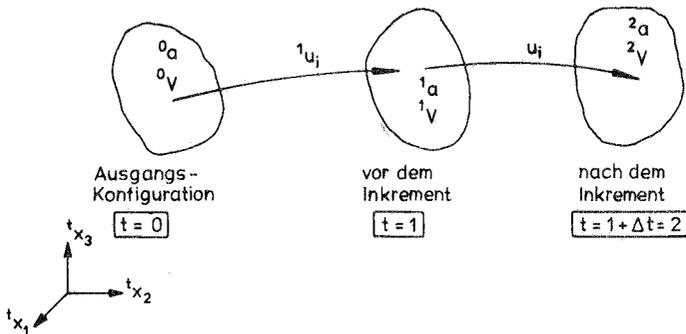


Bild 2.2: Inkrementelle Zwischenlagen

Die Bewegung soll bis zur Lage $t = 1$ bekannt sein. Gesucht ist die um das endliche Inkrement Δt benachbarte Lage $2 = 1 + \Delta t$.

Für die Verschiebungen und das Verschiebungsincrement gilt:

$${}^2u_i = {}^1u_i + u_i \quad (2.12)$$

2.4.2 Inkrementelle Verzerrungen

Für die Green-Lagrange-Verzerrungen im Zustand $m = 1$ gilt:

$${}^1\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [{}^1u_{i,j} + {}^1u_{j,i} + {}^1u_{k,i} {}^1u_{k,j}] \quad (2.13)$$

Im Zustand $m = 1 + \Delta t = 2$ gilt mit (2.12):

$$\begin{aligned} {}^2\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [& {}^1u_{i,j} + u_{i,j} + {}^1u_{j,i} + u_{j,i} + {}^1u_{k,i} + u_{k,i} \\ & + u_{k,i} {}^1u_{k,j} + u_{k,j} + {}^1u_{k,i} + u_{k,i} + u_{k,i} {}^1u_{k,j}] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Werden die in den unbekanntem Verschiebungsincrementen linearen Terme und die quadratischen Terme für sich zusammengefaßt, erhält man:

$${}^o\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,j} u_{k,i}] \quad (2.15)$$

$${}^o\eta_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (2.16)$$

Damit wird:

$${}^2\epsilon_{ij} = {}^o\epsilon_{ij} + {}^o\epsilon_{ij} + {}^o\eta_{ij} = {}^1\epsilon_{ij} + {}^o\epsilon_{ij} \quad (2.17)$$

Die analoge Aufspaltung des Almansi-Verzerrungstensors ergibt:

$${}^1e_{ij} = \frac{1}{2} [{}^1u_{i,j} + {}^1u_{j,i}] \quad (2.18)$$

$${}^1\eta_{ij} = \frac{1}{2} {}^1u_{k,i} {}^1u_{k,j} \quad (2.19)$$

und

$${}^1\epsilon_{ij} = {}^1e_{ij} + {}^1\eta_{ij} \quad (2.20)$$

2.4.3 Spannungsinkremente

Die Spannungen der Lage $m = 2$ werden inkrementiert. Für den Bezugszustand $n = 0$ erhält man:

$${}^2_o s_{ij} = {}^1_o s_{ij} + {}^o s_{ij} \quad (2.21)$$

und für $n = 1$:

$${}^1_o s_{ij} = {}^1_1 \tau_{ij} + {}^1_1 s_{ij} \quad (2.22)$$

2.4.4 Innere virtuelle Arbeit im gesuchten Zustand $m = 2$

Im folgenden soll aus der äußeren virtuellen Arbeit im Zustand $m = 2$ ein Ausdruck für die innere virtuelle Arbeit abgeleitet werden. Mit dem Prinzip gilt:

$${}^2 \delta W_{(i)} = - {}^2 \delta W_{(a)} \quad (2.23)$$

Für die Herleitung wird vorausgesetzt, daß das Gleichgewicht im Innern und am Rand erfüllt ist. Die virtuellen Verrückungen sollen kinematisch zulässig und klein sein. Bezugszustand ist die Ausgangslage $n = 0$. Für die äußere virtuelle Arbeit gilt mit den Oberflächenkräften ${}^2_o t_j = {}^o n_j {}^2_o \tau_{ji}$ und den Volumenkräften ${}^2_o f_i$:

$${}^2 \delta W_{(a)} = \int_{o_a} {}^o n_j {}^2_o \tau_{ji} \delta {}^2 x_i d^o a + \int_{o_v} {}^2_o f_i \delta {}^2 x_i d^o v \quad (2.24)$$

Nach Anwendung des Gauss-Integralsatzes auf das erste Integral und mit dem Gleichgewicht im Innern:

$${}^2_o \tau_{ji,j} + {}^2_o f_i = 0 \quad (2.25)$$

wird (2.24) zu:

$${}^2 \delta W_{(a)} = \int_{o_v} {}^2_o \tau_{ji} \delta {}^2 x_{i,j} d^o v \quad (2.26)$$

Umgeformt auf die Kirchhoff-Spannungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
 - {}^2\delta W_{(i)} &= {}^2\delta W_{(a)} = \int_{O_V} {}^2\sigma_{s,ji} {}^2x_{k,j} \delta {}^2x_{k,i} d^O_V \\
 &= \int_{O_V} {}^2\sigma_{s,ji} \delta {}^2\epsilon_{ij} d^O_V \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

inkrementiert mit (2.17), (2.20) und (2.21) unter Beachtung von

$$\delta {}^2\epsilon_{ij} = \delta {}^0\epsilon_{ij} \quad \text{und} \quad \delta {}^1\epsilon_{ij} = \delta {}^0e_{ij} \quad (2.28)$$

der Arbeitsausdruck für die innere virtuelle Arbeit in der totalen Lagrange-Formulierung ($n = 0$):

$$\begin{aligned}
 - {}^2\delta W_{(i)} &= \int_{O_V} {}^0\sigma_{ij} \delta {}^0\epsilon_{ij} d^O_V + \int_{O_V} {}^1\sigma_{ij} \delta {}^0\eta_{ij} d^O_V \\
 &\quad + \int_{O_V} {}^1\sigma_{ij} \delta {}^0e_{ij} d^O_V \quad (2.29)
 \end{aligned}$$

2.4.5 Iterationsgleichungen

Die Spannungsinkremente ${}^0\sigma_{ij}$ der Gleichung (2.29) sollen durch ein inkrementelles Stoffgesetz der Form

$${}^0\sigma_{ij} = {}^0C_{ijkl} {}^0\epsilon_{kl} \quad (2.30)$$

aus den Verzerrungsinkrementen ${}^0\epsilon_{kl}$ bestimmbar sein. Auf die Herleitung wird später noch ausführlich eingegangen. Gleichung (2.29) wird geordnet nach unbekanntem inkrementellen Größen und den bekannten Größen des Zustands 1. Man erhält einen nichtlinearen Ausdruck in den unbekanntem Verschiebungsinkrementen u_i . Da eine direkte Lösung allgemein nicht möglich ist, linearisiert man, der begangene Fehler muß anschließend iterativ beseitigt werden. Die Iterationsgleichungen ergeben sich nach [73] mit den Übergängen

$${}^0\epsilon_{ij} \rightarrow {}^0e_{ij} \quad \text{und} \quad {}^1\epsilon_{ij} \rightarrow {}^1e_{ij} \quad (2.31)$$

für die totale Lagrange-Darstellung (T. L.)

$$\begin{aligned}
 & \int_{O_V} {}^0 C_{ijrs} {}^1 x_{\ell, s} {}^0 u_{\ell, r} {}^1 x_{k, j} \delta {}^0 u_{k, i} d^0 v \\
 & \quad + \int_{O_V} {}^1 s_{ij} {}^0 u_{k, j} \delta {}^0 u_{k, i} d^0 v \\
 & = 2 \delta W_{(a)} - \int_{O_V} {}^1 s_{ij} {}^1 x_{k, j} \delta {}^0 u_{k, i} d^0 v
 \end{aligned} \tag{2.32.1}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \int_{O_V} {}^0 C_{ijrs} {}^0 e_{rs} \delta {}^0 e_{ij} d^0 v + \int_{O_V} {}^1 s_{ij} \delta {}^0 \eta_{ij} d^0 v \\
 & = 2 \delta W_{(a)} - \int_{O_V} {}^1 s_{ij} \delta {}^0 e_{ij} d^0 v
 \end{aligned} \tag{2.32.2}$$

für die mitgehende Lagrange-Darstellung

$$\begin{aligned}
 & \int_{1_V} {}^1 C_{ijrs} {}^1 u_{s, r} \delta {}^1 u_{j, i} d^1 v \\
 & \quad + \int_{1_V} {}^1 \tau_{ij} {}^1 u_{k, j} \delta {}^1 u_{k, i} d^1 v \\
 & = 2 \delta W_{(a)} - \int_{1_V} {}^1 \tau_{ij} \delta {}^1 u_{j, i} d^1 v
 \end{aligned} \tag{2.33.1}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \int_{1_V} {}^1 C_{ijrs} {}^1 e_{rs} \delta {}^1 e_{ij} d^1 v + \int_{1_V} {}^1 \tau_{ij} \delta {}^1 \eta_{ij} d^1 v \\
 & = 2 \delta W_{(a)} - \int_{1_V} {}^1 \tau_{ij} \delta {}^1 e_{ij} d^1 v
 \end{aligned} \tag{2.33.2}$$

3. Die Materialgleichungen des elastoplastischen Werkstoffs

3.1 Allgemeines

Ziel der folgenden Ableitungen ist es, das Verhalten elastoplastischer Werkstoffe zu beschreiben. Hierzu wird die Plastizitätstheorie verwendet. Da diese in Lehrbüchern [41], [70], [75] ausreichend dargestellt ist, sollen hier Grundlagen nur soweit abgeleitet werden, wie dies zur Beschreibung des entwickelten Rechenmodells erforderlich ist.

Ausgangspunkt bilden zwei Modelle für das Verhalten im Werkstoffversuch, der elastisch - ideal plastische und der elastisch - plastisch verfestigende Körper. Diese dienen zunächst zur phänomenologischen Beschreibung plastischen Werkstoffverhaltens und zur Einführung einiger Begriffe.

Im weiteren werden für die Beschreibung mehrachsiger Zustände Fließbedingung, Fließgesetz und Verfestigungsfunktion abgeleitet.

Die Fließbedingung drückt den Fließbeginn bei mehrachsiger Beanspruchung durch den einachsigen Vergleichszustand (Zugversuch) aus. Die Verfestigungsfunktion beschreibt die Modifikation der Fließbedingung während plastischem Fließen. Das Fließgesetz verknüpft die differentiellen plastischen Dehnungen mit den Spannungen und bildet so die Grundlage für die Ableitung der konstitutiven Beziehung in Form einer differentiellen Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Kurz eingegangen wird auf eine alternative Möglichkeit, das Stoffgesetz in finiter Form anzugeben. Ausführlich eingegangen wird auf die im Zusammenhang mit numerischen Rechenverfahren heute gebräuchlichen Verfestigungsmodelle.

Schluß des Abschnitts bilden Erweiterungen zur Übertragung der abgeleiteten Beziehungen auf geometrisch nichtlineare Vorgänge.

3.2 Modelle plastischen Werkstoffverhaltens

Dem einachsigen Zugversuch kommt in der Plastizitätstheorie große Bedeutung zu; insbesondere da er als Vergleichszustand für das mehrdimensionale Verhalten dient.

Zur Approximation des wirklichen Verhaltens gibt es zwei Arten von Nherungsanstzen. Die bereichsweise lineare Darstellung der Spannungs-Dehnungs-Kurve - von der hier Gebrauch gemacht wird - und die Näherung in Form eines Potenzgesetzes nach Ramberg - Osgood, die für analytische Untersuchungen geeignet ist.

Bild 3. 1 zeigt die im folgenden verwendete bilineare Approximation für den elastisch - ideal plastischen und den elastisch - plastisch verfestigenden Körper.

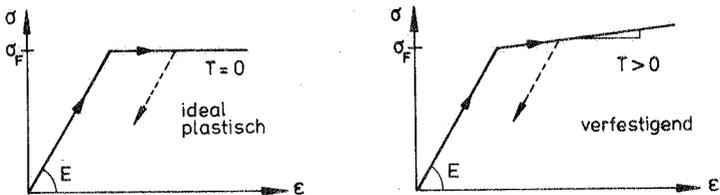


Bild 3. 1: Modelle des einachsigen Zugversuchs

Anhand der in Bild 3. 1 dargestellten Spannungs-Dehnungs-Kurven sollen zunächst die prinzipiellen Eigenschaften der Modellkörper erlauert werden. Unterhalb der Fließgrenze verhalten sich beide linear elastisch. Oberhalb σ_F tritt plastisches Fließen auf. Dies ist dadurch gekennzeichnet, daß nach anschließender Entlastung der Körper nicht in seine Ausgangslage zurückkehrt. Es treten bleibende plastische Verformungen auf. Daraus folgt, ein plastischer Körper verhält sich nicht reversibel hinsichtlich der Verformung. Spannungen und Dehnungen hängen von der Belastungsgeschichte ab.

3. 3 Mehrachsiges Verhalten

3. 3. 1 Voraussetzungen

Für die Ableitung der Grundgleichungen der klassischen Plastizitätstheorie gelten die folgenden Voraussetzungen:

- I Keine Temperaturabhängigkeit
- II Keine Zeitabhängigkeit
- III Keine Geschwindigkeitsabhängigkeit
- IV Kleinheit der Verzerrungen

Zur Behandlung temperaturabhängiger (nicht isothermaler) Prozesse ist es erforderlich, erweiterte Theorien heranzuziehen. Eine einfache, für numerische Modelle geeignete Möglichkeit besteht in der um Temperatureffekte erweiterten klassischen Theorie [63], [72]. Schwieriger für die Anwendung sind die auf der Thermodynamik basierenden konstitutiven Theorien.

Die Berücksichtigung zeitabhängigen Verhaltens führt zur Viskoplastizitätstheorie [62], [68] und damit zu Modellen etwa zur Beschreibung plastischer Kriechvorgänge.

Die Kleinheit der Verzerrungen kann für das sogenannte "eingeschränkte plastische Fließen" vorausgesetzt werden. Dies ist im allgemeinen bei der Analyse von Ingenieurtragwerken gegeben.

Die Grundlagen der Plastizitätstheorie lassen sich aber ebenso auf Probleme mit endlichen Verzerrungen anwenden. Auf Lösungskonzepte beim Vorhandensein endlicher elastischer und plastischer Verzerrungen soll am Ende des Abschnitts kurz eingegangen werden. Erwähnt werden soll noch das Vorgehen, wenn die elastischen Anteile gegenüber den endlichen plastischen Verzerrungen klein sind und vernachlässigt werden können (z. B. bei Metallformungsprozessen). Hier ist eine Beschreibung der Bewegungsgleichungen in einer Raum- (Euler) Darstellung zweckmäßig. Als kinematische Variable verwendet man den Tensor der Deformationsgeschwindigkeiten.

$$\frac{m_D}{m_{ij}} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_{v_{i,j}}}{m_{v_{i,j}}} + \frac{m_{v_{j,i}}}{m_{v_{j,i}}} \right) \quad \text{mit} \quad m_{v_i} = \frac{\partial m_{x_i}}{\partial t}$$

Weiter vorausgesetzt werden:

- V Kleine Verschiebungen und kleine Rotationen.

Dies wird vorläufig vorausgesetzt. Die Darstellung der Verzerrungen kann mit dem Tensor der infinitesimalen Theorie

erfolgen, also:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.1)$$

- VI Die Gesamtverzerrungen lassen sich mit $u_i = u_i^e + u_i^p$ in elastische und plastische Komponenten zerlegen:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (3.2)$$

- VII Die elastischen Verzerrungen genügen dem verallgemeinerten Hooke-Gesetz:

$$\epsilon_{ij}^e = E_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (3.3)$$

- VIII Isotropie.

- IX Stabiles Werkstoffverhalten im Sinne der Postulate von Drucker [31].

- X Das Fließen ist unabhängig vom hydrostatischen Druck (Annahme aufgrund experimenteller Ergebnisse von Bridgman [25], neuerdings Fung [36]).

- XI Die plastischen Dehnungen sind inkompressibel.

3.3.2 Form des Stoffgesetzes

Zur Formulierung des Stoffgesetzes bestehen die beiden prinzipiellen Möglichkeiten in Form eines differentiellen Gesetzes (Fließtheorie) oder in Form einer finiten Beziehung (Deformationstheorie). Hier soll der Fließtheorie der Vorzug gegeben werden. Auf einige vergleichende Aspekte beider Theorien wird im folgenden kurz eingegangen.

Die Deformationstheorie geht auf Hencky (1924) zurück. Mit ihr läßt sich eine Beziehung zwischen den Gesamtverzerrungen und dem Spannungszustand angeben. Die mathematischen Ausdrücke sind einfacher als bei der Fließtheorie. Da jedoch in den Hencky-Gesetzen die Belastungsgeschichte nicht erfaßt ist, ergeben sich mit ihnen für Belastungswege, die von proportionalen Laststeigerungen abweichen, Widersprüche.

Demgegenüber postulieren de Saint-Venant und Levy (beide 1870) für den plastischen Anteil eine Beziehung zwischen differentiellen Verzerrungen einerseits und differentiellen Spannungen sowie den Gesamtspannungen andererseits (erweitert um den elastischen Anteil durch Prandtl (1924), verallgemeinert durch Reuss (1930)). Es entsteht eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Form eines Fließgesetzes mit Gültigkeit für beliebige Belastungswege. Trotz des höheren mathematischen Aufwands wird deshalb heute überwiegend von der Fließtheorie Gebrauch gemacht.

Nicht unerwähnt bleiben soll jedoch die Tatsache, daß die Deformationstheorie bei der Ermittlung plastischer Beullasten oft besser mit experimentellen Lösungen übereinstimmt als die Fließtheorie, mit der sich teilweise beträchtliche Überschätzungen der Beullasten ergeben [45], [65].

Dieser paradoxe Sachverhalt, bei dem die physikalisch strengere Theorie schlechtere Ergebnisse liefert, wird anhand einiger experimentell und theoretisch untersuchter Beispiele im Schrifttum ausgiebig diskutiert. Eine gute Übersicht findet sich bei Hutchinson in [45]. Er zeigt, daß die bekannten Beispiele meistens triviale Vorbeullösungen aufweisen. Die Bedingung für proportionale Belastung ist bis zum Beulen eingehalten und damit die Gültigkeit der Deformationstheorie gegeben. In anderen Arbeiten wird der Frage nachgegangen, durch welche Erweiterungen die Ergebnisse nach der differentiellen Theorie verbessert werden können.

Dazu untersucht eine Reihe von Autoren den Einfluß geometrischer Imperfektionen. Hervorgehoben werden sollen hier die Arbeiten von Onat und Drucker [65] für die Stütze mit kreuzförmigem Querschnitt, die von Murphy und Lee [61] für die Kreiszylinderschale unter Axialdruck und die von Neale [64], ebenfalls für die Kreiszylinderschale, jedoch unter Torsionsbelastung. Für die genannten Fälle wird gezeigt, daß kleinste Imperfektionen genügen, um die zu hohen Vorhersagungen der Fließtheorie zu reduzieren und dadurch in Einklang mit den Experimenten zu bringen.

Einen anderen Weg schlägt Reckling in [74] ein bei der Behandlung plastischen Plattenbeulens. Die durch das Walzen der Bleche hervorgerufene Anisotropie wird berücksichtigt, wodurch eine deutlich bessere Übereinstimmung mit Versuchen erzielt werden kann.

3.3.3 Fließbedingung

Aus den in Abschnitt 3.3.1 gemachten Voraussetzungen ergibt sich eine Reihe von Konsequenzen für die allgemeine Form der Fließbedingung.

- a) Da der Fließbeginn nach Voraussetzung X nicht vom hydrostatischen Druck abhängen soll, wird die Fließbedingung durch den Spannungsdeviator ausgedrückt. Dessen Komponenten lauten:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (3.4)$$

- b) Da Isotropie nach Voraussetzung VIII angenommen wurde, muß sich die Fließbedingung durch die Invarianten des Spannungsdeviators ausdrücken lassen. Die erste Invariante des Deviators verschwindet, so ergibt sich folgende allgemeine Form:

$$F(I'_2, I'_3) = 0 \quad (3.5)$$

Vernachlässigt man die dritte Invariante, erhält man direkt die (Huber-) Mises-Fließbedingung. Sie stimmt recht gut mit Experimenten für metallische Werkstoffe [80] überein und soll im folgenden verwendet werden. Sie lautet:

$$F = I'_2 - \frac{1}{3} \sigma_F^2 = 0 \quad (3.6)$$

mit der zweiten Invariante des Spannungsdeviators:

$$I'_2 = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (3.7)$$

Führt man die Vergleichsspannung $\bar{\sigma}$ ein zu

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + 3 (\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)} \quad (3.8)$$

ergibt sich eine weitere Darstellungsmöglichkeit zu

$$F = \bar{\sigma} - \sigma_F = 0 \quad (3.9)$$

Die Fließbedingung kann geometrisch interpretiert werden als eine Hyperfläche $F = 0$ im 9-dimensionalen euklidischen Raum, dessen Koordinaten die Spannungen bilden. Bei Verwendung symmetrischer Spannungstensoren ergibt sich eine Reduktion auf einen 6-dimensionalen Unterraum. Spezialfälle werden durch weniger Dimensionen ausgedrückt.

Eine gebräuchliche Form ist die Darstellung der Fließbedingung als Fließfläche im dreidimensionalen Hauptspannungsraum.

Ein Spannungsbildvektor wird zerlegt nach deviatorischem und hydrostatischem Anteil. Die deviatorischen Anteile liegen in einer Ebene, die durch die Bedingung $I_1 = 0$ beschrieben wird, der π -Ebene. Die v. Mises-Fließbedingung bildet sich dort als Kreis ab. Die gesamte Fließfläche wird durch einen auf der π -Ebene senkrecht stehenden Zylinder beschrieben (Bild 3.2.1).

Für den zweidimensionalen Spannungszustand wird die Fließbedingung in der Ebene der Hauptspannungen σ_I und σ_{II} dargestellt. Die zweite Invariante lautet in den Hauptspannungen:

$$I'_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2] \quad (3.10)$$

Sie wird für $\sigma_{III} = 0$ zu

$$I'_2(2D) = \frac{1}{3} (\sigma_I - \sigma_{II})^2 \quad (3.11)$$

und damit die Fließbedingung nach v. Mises:

$$F = I'_2(2D) - \frac{1}{3} \sigma_F^2 \rightarrow \sigma_I^2 - 2 \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_{II}^2 = \sigma_F^2 \quad (3.12)$$

Der Kreis der π -Ebene wird somit in der $\sigma_I - \sigma_{II}$ -Ebene für den zweidimensionalen Spannungszustand zur Ellipse (Bild 3.2.2).

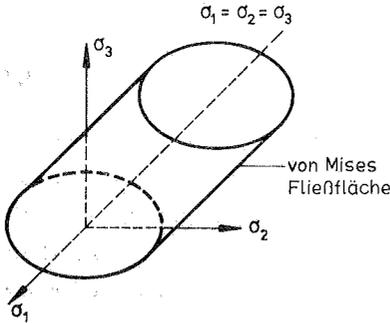


Bild 3.2.1

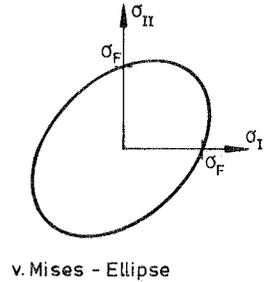


Bild 3.2.2

Bild 3.2: Geometrische Darstellung der v. Mises-Fließbedingung

3.3.4 Verfestigungsfunktion

Mit der Fließbedingung F wurde ein Kriterium abgeleitet, mit dessen Hilfe sich angeben läßt, unter welcher Spannungscombination ein Werkstoff erstmals zu fließen beginnt.

Der momentane Zustand des Materials nach erstmaligem Fließen wird durch die Verfestigungsfunktion definiert. Diese hat zunächst die allgemeine Form:

$$\tilde{f} = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p, \kappa) \quad (3.13)$$

Die Verfestigungsfunktion hängt somit vom Spannungszustand σ_{ij} , den plastischen Dehnungen ϵ_{ij}^p und einem Verfestigungsparameter κ ab. Da κ jedoch im folgenden von σ_{ij} und ϵ_{ij}^p abhängt, läßt sich ohne Verlust an Allgemeinheit auch schreiben:

$$f = f(\sigma_{ij}, \epsilon_{ij}^p) \quad (3.14)$$

Die Funktion f ist mit dem momentanen Fließkriterium identisch. Es ergeben sich mit ihr die folgenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} f < 0 & \quad \text{elastisch} \\ f = 0 & \quad \text{plastisch} \\ f > 0 & \quad \text{unzulässig} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Durch Differenzieren erhält man für $f = 0$ aus (3.14) weitere Bedingungen, die sog. Belastungsbedingungen:

$$\begin{array}{l} < & \text{Entlastung} \\ \text{für } f = 0 \text{ mit } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 & \text{neutrale Belastung} \\ > & \text{Belastung} \end{array} \quad (3.16)$$

Entsprechend Voraussetzung IX soll sich der Werkstoff stabil verhalten. Mit den Postulaten von Drucker [31] ergibt sich dann:

$$d \epsilon_{ij}^p = d \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \text{mit } d \lambda > 0 \quad (3.17)$$

Die Verfestigungsfunktion f und damit die momentane Fließbedingung nehmen den Charakter eines plastischen Potentials an. Die plastischen Verzerrungszuwächse $d \epsilon_{ij}^p$ können durch Differenzieren nach den Spannungen aus f gewonnen werden. Die Beziehung (3.17) ist eine assoziierte Fließregel. Geometrisch veranschaulicht, gibt sie an, daß der Vektor der plastischen Verzerrungszuwächse in Richtung der äußeren Normalen der Verfestigungshyperfläche f weist (Normalenregel). Weiter folgt aus den Drucker-Postulaten eine Einschränkung für die Form der Verfestigungsfläche. Diese muß im Spannungsraum eine konvexe Fläche bilden (Konvexität).

3.3.5 Ansätze für das Verfestigungsgesetz

Um zu einer expliziten Aussage zu gelangen, wie sich die Fließbedingung während der plastischen Verformung ändert, muß ein spezieller Ansatz für die bisher nur allgemein diskutierte Verfestigungsfunktion f gemacht werden. Einige typische Modelle sollen beschrieben und verglichen werden. Die Auswahl beschränkt sich auf nicht allzu komplexe

Ansätze, die für die Implementierung in ein allgemeines numerisches Rechenverfahren geeignet erscheinen.

3.3.5.1 Isotrope Verfestigung

Der Ansatz für das Verfestigungsgesetz lautet:

$$f = g(\sigma_{ij}) - K^2 = 0 \quad (3.18)$$

Darin ist K ein von der Verfestigungsgeschichte abhängiger Parameter, der die isotrope Aufweitung der Verfestigungsflächen kontrolliert (Bild 3.3).

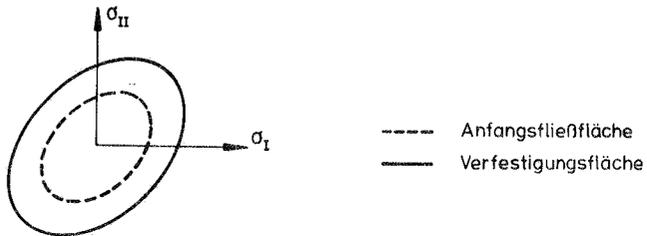


Bild 3.3: Isotrope Aufweitung der Fließfläche

3.3.5.2 Kinematische Verfestigung

Bei plastischer Verformung verschiebt sich die Verfestigungsfläche als starrer Körper. Form, Größe und Orientierung im Spannungsraum ändern sich gegenüber der Anfangsfließfläche nicht (Bild 3.4). Mit dem Tensor α_{ij} für die Koordinaten des verschobenen Mittelpunktes ergibt sich:

$$f = g(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - \text{konst} = 0 \quad (3.19)$$

Durch das Verschieben der Fließfläche wird ein idealer Bauschinger-Effekt bei Lastumkehr erzeugt. Die Richtung der Verschiebung wird von Prager [71] in Richtung des plastischen Dehnungsinkrementes

angenommen. Also:

$$d\alpha_{ij} = c d\epsilon_{ij}^P \quad (3.20)$$

Ziegler nimmt dagegen in [87] für die Verschiebungsrichtung die an, die vom Mittelpunkt der momentanen Verfestigungsfläche radial durch den Spannungsbildpunkt P weist (Bild 3.4). Damit:

$$d\alpha_{ij} = d\mu (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (3.21)$$

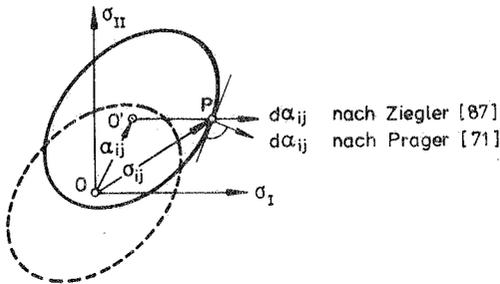


Bild 3.4: Kinematische Verfestigung

3.3.5.3 Kombinierte oder gemischte Verfestigung

Die Kombination von isotroper und kinematischer führt zu dem von Hodge [42] vorgeschlagenen Ansatz:

$$f = g (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - K^2 = 0 \quad (3.22)$$

Zur Festlegung der Anteile von Aufweitung und Translation der Verfestigungsfläche wird durch Axelsson und Samuelsson [6] ein Mischparameter M eingeführt. Damit ergibt sich der isotrope Anteil während der Verfestigung zu

$$d\epsilon_{ij}^{P(i)} = M d\epsilon_{ij}^P \quad (3.23)$$

und der kinematische Anteil zu

$$d \epsilon_{ij}^{P(k)} = (1 - M) d \epsilon_{ij}^P \quad \text{mit} \quad -1 < M \leq 1 \quad (3.24)$$

Da der Parameter M negative Werte annehmen kann, läßt sich über einen gemischten Verfestigungsansatz eine isotrope Zusammendrückung der Verfestigungsfläche (Entfestigung) darstellen.

3.3.5.4 Verfestigungsmodell nach Mróz

Durch die Einführung eines Feldes von Fließflächen verallgemeinert Mróz [60] die isotrope und die kinematische Verfestigung. Eine gegebene einachsige Spannungs-Dehnungs-Kurve läßt sich dann durch beliebig viele lineare Abschnitte approximieren. Die einzelnen Fließflächen können isotrop, kinematisch oder gemischt verfestigen. Die Translation erfolgt so, daß sich kein Überschneiden einzelner Flächen ergibt. Die momentane Verschiebungsrichtung $d\alpha$ bei einem auf der Fläche g_t liegenden Spannungsbildpunkt P verläuft so, daß g_t die Fläche g_{t+1} in R erreicht. Dabei entspricht die Richtung der Außennormale von g_{t+1} in R der von g in P (Bild 3.5.1). Fallen die Mittelpunkte der Flächen g_t und g_{t+1} zusammen, entsteht als Sonderfall die Richtung nach Ziegler (Bild 3.5.2) [87].

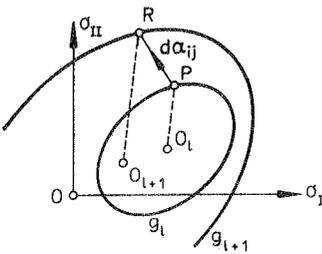


Bild 3.5.1

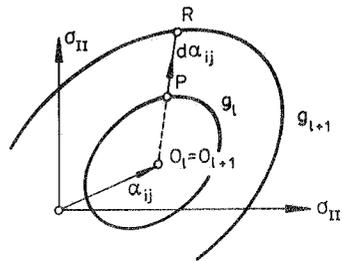


Bild 3.5.2

Bild 3.5: Translationsrichtungen der Verfestigungsflächen des Modells nach Mróz

3.3.5.5 Mehrschicht- (Overlay-) Modell

Dem Modell liegt der durch Untersuchungen an Kristallen motivierte Gedanke zugrunde, den makroskopisch homogenen Stoff durch das Zusammenwirken heterogener Bestandteile zu beschreiben, siehe Duwez [33]. Das Vorgehen soll für den einachsigen Fall erläutert werden.

Ein Materialelement wird aus n elastisch - ideal plastischen Schichten (Prandtl-Körpern) aufgebaut gedacht, deren elastische Eigenschaften gleich, die Fließspannungen aber unterschiedlich sind. Das Gesamtverhalten ergibt sich mit der Bedingung, daß alle Schichten durch Parallelschalten gleichdeformiert werden. Das Prinzip ist in Bild 3.6 für $n = 3$ Schichten dargestellt.

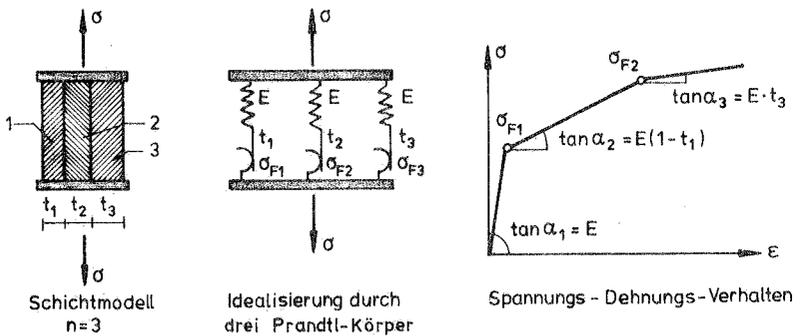


Bild 3.6: Prinzip des Mehrschichtmodells

Auf dem beschriebenen Vorgehen beruht das Verfestigungsgesetz von Besseling [18]. Iwan [46] schlägt ein Modell vor, bei dem die Zahl der Schichten sehr groß wird ($n \rightarrow \infty$). Für die Verteilung der Schichtfließspannungen ist dann eine kontinuierliche Funktion anzunehmen. Die bisher stückweise lineare einachsige Spannungs-Dehnungs-Beziehung nimmt einen stetigen nichtlinearen Verlauf an.

3.3.5.6 Gesichtspunkte zur Auswahl eines Verfestigungsansatzes

Mit einem speziellen Ansatz wird man in erster Linie versuchen, die im Experiment aufgetretenen Effekte zu beschreiben. Da das Verfestigungsverhalten eines Werkstoffs stark von der Art der Belastung abhängt, sollen hier Fälle mit einmaliger plastischer Belastung von denen mit wiederholter oder zyklischer plastischer Belastung unterschieden werden.

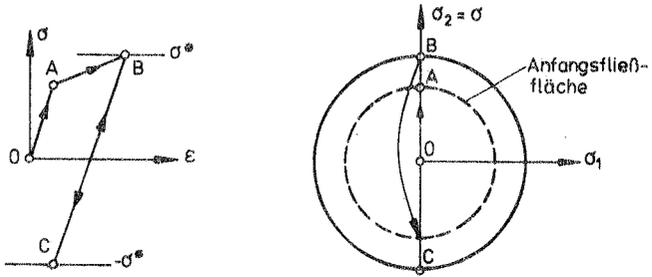
Für die einmalige plastische Belastung soll ausgeschlossen sein, daß nach erfolgter Plastizierung mit anschließender elastischer Entlastung der Werkstoff erneut plastisch belastet wird. Für diesen Fall spielt es keine Rolle, ob die Verfestigung durch eine Aufweitung oder eine Verschiebung der Fließfläche eintritt. Es ergeben sich daher keine Unterschiede zwischen den oben dargestellten Ansätzen. Das Werkstoffverhalten kann mit einem einfachen Modell (isotrop oder kinematisch) beschrieben werden. Verbesserte Modelle sind nur erforderlich, wenn der einachsige Vergleichszustand nicht ausreichend durch die bilineare Beziehung dargestellt werden kann. Mit dem Mróz- oder dem Mehrschicht-Modell läßt sich dann eine beliebig feine Approximation erzielen.

Für den Fall wiederholter plastischer Belastung, der z. B. bei zyklischer Last auftritt, ergeben sich prinzipielle Unterschiede zwischen den einzelnen Ansätzen. Diese sollen zunächst in Bild 3.7 veranschaulicht werden.

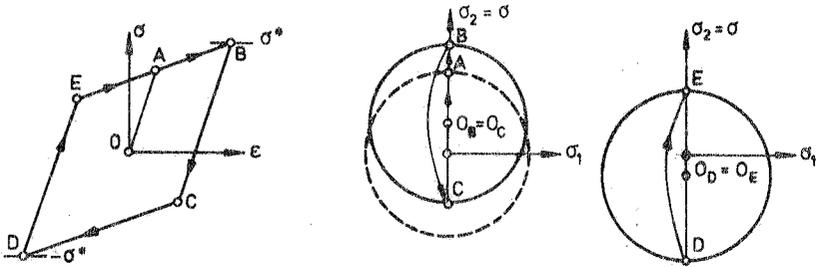
Für einachsige zyklische Belastung zwischen einem oberen Spannungswert $\sigma = +\sigma^*$ (mit $\sigma^* > \sigma_F$) und einem unteren $\sigma = -\sigma^*$ werden isotrope, kinematische und die Verfestigung nach Mróz verglichen.

In Bild 3.7.1 ist die isotrope Verfestigung dargestellt. Bei erstmaliger plastischer Belastung wird die Fließfläche längs \overline{AB} aufgeweitet. Entlastung, gegensinnige Belastung und alle weiteren Zyklen verlaufen daher für $-\sigma^* \leq \sigma \leq \sigma^*$ elastisch.

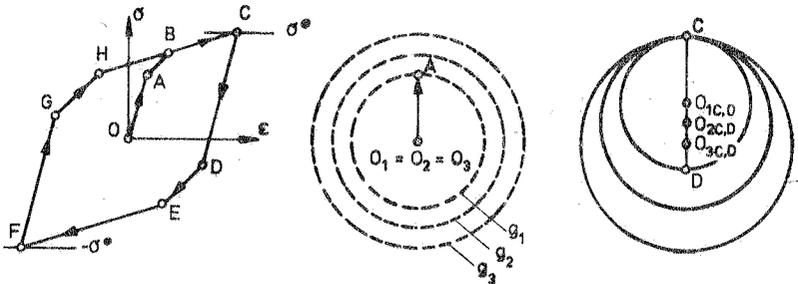
Bei der in Bild 3.7.2 dargestellten kinematischen Verfestigung wird die Fließfläche längs \overline{AB} verschoben. Bei gegensinniger Belastung



3.7.1. Isotrope Verfestigung



3.7.2. Kinematische Verfestigung



3.7.3. Verfestigung nach Mróz (reine Translation)

Bild 3.7: Vergleich von Verfestigungsansätzen, zyklische Last

erreicht jetzt der Spannungsbildpunkt in C die Fließfläche, so daß längs \overline{CD} erneut Fließen auftritt. Die Fortführung des Lastzyklus ergibt ein geschlossenes Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Für die

Verfestigung nach Mróz entsteht ebenfalls eine geschlossene $\sigma - \epsilon$ - Kurve, Bild 3.7.3. Durch die Einführung mehrerer Fließflächen ist es jedoch möglich, die plastischen Abschnitte \overline{ABC} , \overline{DEF} und \overline{GHC} mit mehr als einem linearen Segment (hier: zwei) abzubilden.

Geht man vom tatsächlichen Werkstoffverhalten aus, läßt sich die Brauchbarkeit eines Verfestigungsansatzes vor allem danach bewerten, wie gut die im Versuch aufgetretene, von der Art des Lastzyklus abhängende Form des Bauschinger-Effekts durch das theoretische Modell wiedergegeben wird. Für Metalle ergibt sich im einachsigen Versuch bei Änderung der Belastungsrichtung eine dem idealen Bauschinger-Effekt entsprechende Reduktion der Fließspannung. Da diese jedoch bei fortgesetzter plastischer Belastung rasch wieder ansteigt, unterscheidet Backhaus [7] einen bleibenden und einen verschwindenden Anteil des Bauschinger-Effektes. Dies ist in Bild 3.8 schematisch dargestellt. Trägt man zudem den Verlauf der isotropen und der kinematischen Verfestigung auf, zeigt sich, daß diese das Verhalten im Versuch nur unzureichend idealisieren.

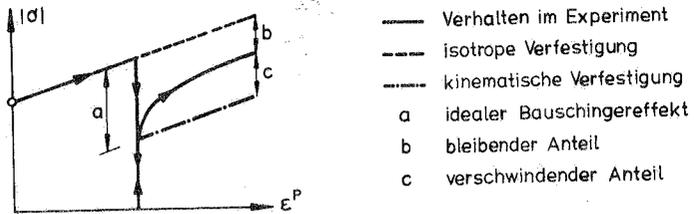


Bild 3.8: Anteile des Bauschinger-Effektes nach [7]

Die Anwendung eines das tatsächliche Verfestigungsverhalten nur unzureichend erfassenden Ansatzes kann bei der Lösung einer strukturellmechanischen Aufgabe zu einer qualitativ falschen Wiedergabe des Systemverhaltens führen. Jedoch soll auch darauf hingewiesen werden, daß die Unterschiede im Systemverhalten, die sich bei alternativer

Anwendung verschiedener Verfestigungsmodelle ergeben, nicht signifikant sind für Werkstoffe, die nur schwach verfestigen. Eine ausreichende Werkstoffidealisierung für Systeme unter wechselnden Lasten wird in [6] mit Hilfe gemischter Ansätze, in [48] mit dem Konzept nach Mróz und in [66] mit einem Mehrschichtmodell erreicht. Dabei bieten Mróz und Mehrschichtmodell allgemeinere Möglichkeiten als die gemischte Verfestigung.

Da der Rechenaufwand mit zunehmender Komplexität des Verfestigungsansatzes steigt, ergibt sich hier ein weiteres Beurteilungskriterium. Hunsaker u. a. [44] vergleichen die numerische Effizienz und zeigen, daß bei gleichem Grad der Approximation das Mehrschichtmodell Mróz überlegen ist.

Zusammenfassend ergeben sich für die Beurteilung der Brauchbarkeit einzelner Verfestigungsansätze folgende Gesichtspunkte:

- Werkstoffe mit ausgeprägtem Verfestigungsverhalten werden für wechselnde Lasten am sinnvollsten mit einem Mehrschichtmodell beschrieben.
- Bei nur schwacher Verfestigung oder für Fälle ohne wechselnde Belastung genügt isotrope Verfestigung.

3.3.6 Differentielle Verzerrungs-Spannungs-Beziehung für den isotrop verfestigenden Werkstoff

Vor der Ableitung der differentiellen Verzerrungs-Spannungs-Beziehung sind im Ansatz für das Verfestigungsgesetz nach Gleichung (3.18) die Form $g(\sigma_{ij})$ der Verfestigungsfläche festzulegen und der Parameter K zu bestimmen. Da für die ursprüngliche Fließfläche die v. Mises-Bedingung gewählt wurde, gilt:

$$g(\sigma_{ij}) = I_2' = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (3.25)$$

Zur Bestimmung von K gibt es alternative Vorgehensweisen, die jedoch bei Verwendung der v. Mises-Bedingung zum selben Resultat

führen [19]. Die folgende Ableitung setzt voraus, daß K nur von der gesamten plastischen Dissipationsarbeit abhängt:

$$K = K (W^P) \quad (3.26)$$

mit der plastischen Dissipationsarbeit:

$$W^P = \int_0^{\epsilon_{ij}^P} dW^P \quad (3.27)$$

und der spezifischen Dissipationsarbeit:

$$dW^P = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}^P = \sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P \quad (3.28)$$

Mit (3.17) für $d\epsilon_{ij}^P$ und mit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} [g(\sigma_{ij}) - K^2] = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \\ &\sigma'_{ij} \frac{\partial \sigma'_{mn}}{\partial \sigma_{mn}} = \sigma'_{ij} \end{aligned} \quad (3.29)$$

wird:

$$dW^P = d\lambda \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} \quad (3.30)$$

Zur Bestimmung von $d\lambda$ wird die weitere Annahme gemacht, daß zum mehrachsigen Zustand ein einachsiger Vergleichszustand existiere. Der einachsige Zustand kann aus einem Zugversuch gewonnen werden. Für die folgenden Ableitungen wird von der in Bild 3.9 dargestellten bilinearen Idealisierung ausgegangen.

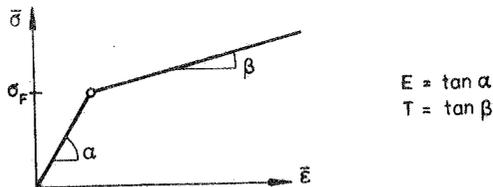


Bild 3.9:

Einachsiger Vergleichszustand

Oberhalb der Fließspannung σ_F wird das Anwachsen der Gesamtverzerrungen durch ein Tangentenmodul $T = \tan \beta$ beschrieben. Für die plastischen Anteile des Verzerrungszuwachses ergibt sich nach Bild 3.10 mit dem plastischen Tangentenmodul:

$$T^P = \tan \varphi = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\epsilon}^P} = \frac{E T}{E - T} \quad (3.31)$$

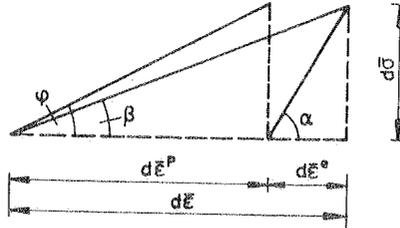


Bild 3.10: Plastischer Tangentenmodul

Die spezifische plastische Dissipationsarbeit des Vergleichszustandes beträgt:

$$d\bar{W}^P = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^P = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{T^P} \quad (3.32)$$

Die dissipierten Arbeiten des mehrachsigen und des Vergleichszustandes sollen gleich sein:

$$dW^P = d\bar{W}^P \quad (3.33)$$

$$d\lambda \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{T^P} \quad (3.34)$$

Für $d\lambda$ ergibt sich daraus:

$$d\lambda = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{T^P \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} = \frac{\bar{\sigma} d\bar{\sigma}}{T^P \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2} = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\sigma}}{T^P \bar{\sigma}} \quad (3.35)$$

Geht man erneut von der Annahme gleicher Dissipationsarbeiten aus, erhält man den Zusammenhang zwischen den Dehnungsänderungen im

mehrachsigem und im Vergleichszustand:

$$\sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}^P = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^P \quad (3.36)$$

Substituiert man σ'_{ij} durch:

$$\sigma'_{ij} = \frac{d\epsilon_{ij}^P}{d\lambda} = \frac{d\epsilon_{ij}^P}{\frac{3}{2} \frac{d\bar{\sigma}}{T^P \bar{\sigma}}} = \frac{2}{3} \frac{d\epsilon_{ij}^P}{d\bar{\epsilon}^P} \bar{\sigma} \quad (3.37)$$

ergibt sich:

$$\frac{2}{3} \frac{d\epsilon_{ij}^P}{d\bar{\epsilon}^P} \bar{\sigma} d\epsilon_{ij}^P = \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}^P \quad (3.38)$$

Nach Umformen erhält man den Ausdruck für die Änderung der plastischen Vergleichsdehnung:

$$d\bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^P d\epsilon_{ij}^P} \quad (3.39)$$

Für die Spannungen ergibt sich der Zusammenhang zwischen mehrachsigen Zustand und dem Vergleichszustand direkt aus der v.-Mises-Fließbedingung. Es ist nach Ersetzen von σ_{ij} durch $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} \quad (3.40)$$

nach Differenzieren:

$$\bar{\sigma} d\bar{\sigma} = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} d\sigma'_{ij} \quad (3.41)$$

Die differentielle Verzerrungs-Spannungs-Beziehung für die plastischen Verzerrungsanteile wird mit (3.17), (3.29) und (3.35):

$$d\epsilon_{ij}^P = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij} d\bar{\sigma}}{T^P \bar{\sigma}} \quad \text{für } d\bar{\sigma} > 0 \quad (3.42)$$

Die elastischen Verzerrungsanteile sind durch das Hooke-Gesetz (3.3) gegeben. Nach Aufspalten in Kugel- und Deviatoranteile werden sie zu den plastischen hinzuaddiert. Man erhält das Prandtl-Reuss-Gesetz:

$$d \epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} d \sigma'_{ij} + \frac{3 \sigma'_{ij}}{2 T^P \bar{\sigma}} d \bar{\sigma} \quad \text{für } d \bar{\sigma} > 0$$

$$d \epsilon_{ii} = \frac{1 - 2 \nu}{E} d \sigma_{ii} \quad \text{für } d \bar{\sigma} \approx 0$$
(3.43)

3.7 Elastoplastischer Stofftensor

Für die spätere Anwendung im Rahmen einer finiten Elementformulierung ist es zweckmäßig, die Werkstoffgleichungen in einer zum Prandtl-Reuss-Gesetz (3.43) inversen Form darzustellen:

$$d \sigma_{ij} = C_{ijkl}^{ep} d \epsilon_{kl} \quad (3.44)$$

Die Herleitung des elastoplastischen Stofftensors C_{ijkl}^{ep} wird, einem Vorschlag von Yamada u. a. [86] folgend, vorgenommen. Dabei wird die Gleichung (3.43) nicht direkt invertiert, die für den perfekt plastischen Fall mit $T = T^P = 0$ nicht definiert ist. Daß eine inverse Darstellung zu (3.43) existiert und daß diese eindeutig ist, wurde von Koiter in [52] gezeigt.

Ausgegangen wird von

$$d \sigma'_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} (d \epsilon'_{ij} - d \epsilon_{ij}^P) \quad (3.45)$$

Mit (3.17) und (3.29) und nach Multiplikation mit σ'_{ij} :

$$\sigma'_{ij} d \sigma'_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} (d \epsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} d \lambda) \sigma'_{ij} \quad (3.46)$$

Weiter mit (3.41) und (3.35) wird:

$$\sigma'_{ij} d \sigma'_{ij} = \frac{2}{3} \bar{\sigma} d \bar{\sigma} = \frac{4}{9} d \lambda T^P \bar{\sigma}^2 \quad (3.47)$$

(3.47) in (3.46) eingesetzt, mit $\sigma'_{ij} d \epsilon'_{ij} = \sigma'_{ij} d \epsilon_{ij}$ und (3.40) erhält man:

$$\frac{4}{9} d \lambda T^P \bar{\sigma}^2 = \frac{E}{1 + \nu} \sigma'_{ij} d \epsilon_{ij} - \frac{E}{1 + \nu} \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 d \lambda \quad (3.48)$$

Nach $d\lambda$ aufgelöst:

$$d\lambda = \frac{\sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}}{\frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \left[1 + \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{T^P}{E} \right]} \quad (3.49)$$

Mit der Abkürzung

$$S = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \left(1 + \frac{2}{3} (1+\nu) \frac{T^P}{E} \right) \quad (3.50)$$

wird:

$$d\lambda = \frac{\sigma'_{ij} d\epsilon_{ij}}{S} \quad (3.51)$$

(3.48) in (3.44), und mit $d\epsilon'_{ij} = d\epsilon_{ii} - \delta_{ij} \frac{d\epsilon_{kk}}{3}$

$$d\sigma'_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(d\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{d\epsilon_{kk}}{3} - \sigma_{ij} \frac{\sigma'_{kl} d\epsilon_{kl}}{S} \right) \quad (3.52)$$

Andererseits ist:

$$d\sigma_{ij} = d\sigma'_{ij} + \frac{E}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{d\epsilon_{kk}}{3} \quad (3.53)$$

(3.52) in (3.53) eingesetzt, ergibt die gewünschte Form: die differentielle Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für den elastisch-idealplastischen oder isotrop verfestigenden Werkstoff. Nämlich:

$$d\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(d\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} d\epsilon_{kk} - \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{S} d\epsilon_{kl} \right) \quad (3.54)$$

Mit (3.54) ist der Stofftensor C_{ijkl}^{ep} definiert. Eine ausführliche Darstellung des Stofftensors in Matrizenform findet sich nach Definition der entsprechenden Spannungs- und Verzerrungsvektoren in Abschnitt 4.

3.4 Stoffgleichungen bei großen Deformationen

3.4.1 Vorbemerkungen

Im folgenden soll die für die Herleitung der Stoffgleichungen im Rahmen der phänomenologischen Plastizitätstheorie getroffene Beschränkung auf kleine Deformationen (Verschiebungen und Rotationen) wieder fallengelassen werden.

Die Verzerrungen werden weiter klein vorausgesetzt. Die Aufgabe dieser Annahme würde die Verwendung einer allgemeinen, thermodynamisch begründeten Theorie endlicher elastoplastischer Verzerrungen erfordern. Die dazu nötigen Betrachtungen würden im Rahmen dieser Arbeit zu weit gehen. Zudem ist die Implementierung einer derartigen Theorie in ein numerisches Rechenkonzept zur Behandlung von Platten- und Schalenaufgaben wenig sinnvoll, solange von anderen weit einschränkenderen Hypothesen Gebrauch gemacht werden muß (etwa die Annahme, daß die Schalenquerschnitte während der Verformung eben bleiben). Auf den derzeitigen Stand der Entwicklung konstitutiver Theorien elastoplastischer Kontinua bei endlichen Verzerrungen soll jedoch eingegangen werden.

3.4.2 Konzepte zur Beschreibung endlicher elastoplastischer Verzerrungen

Eine allgemeine Theorie erfordert:

- a) die Erfüllung thermodynamischer Restriktionen,
- b) die Einführung kinematischer Variabler, die eine konsistente Zerlegung in elastische und plastische Deformationsanteile zulassen.

Das weitreichendste Konzept liegt hierzu mit den Arbeiten von Green und Naghdi [38], [39] vor. Als kinematische Variable werden Green-Lagrange-Verzerrungen verwendet, für die Gesamtverzerrungen ${}^m\epsilon_{ij}$ und für die plastischen Anteile ${}^m\epsilon_{ij}^p$. Formal ergibt sich:

$${}^m\epsilon_{ij} = {}^m\epsilon_{ij}^e + {}^m\epsilon_{ij}^p \quad (3.55)$$

Der Tensor ${}^m\epsilon_{ij}^e$ entspricht nicht dem üblichen Maß für den elastischen Anteil, da er vom plastischen Dehnungszustand abhängt. Seine Einführung ist jedoch nicht erforderlich, da die Spannungen aus thermodynamischen Betrachtungen gewonnen werden (über die freie Helmholtz-Energie und die Entropie). Die konstitutiven Beziehungen für die plastischen Anteile werden dagegen aus einer Verallgemeinerung des Konzepts der Fließ- und Verfestigungsflächen gewonnen. Anwendungen der Theorie sind dem Verfasser noch nicht bekannt geworden.

Daneben gibt es ein auf Lee und Liu [57] zurückgehendes Konzept, in dessen Mittelpunkt eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten steht. Dazu wird eine spannungslose Zwischenlage der Bewegung eingeführt, die sich nach Entlasten aus dem momentanen Zustand ergibt (Bild 3.11).

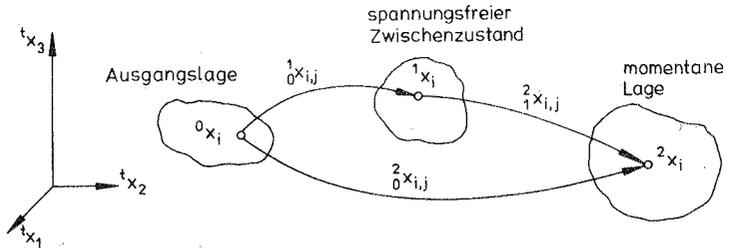


Bild 3.11: Kinematik der elastoplastischen Deformation nach [57]

Es ist der Gradient

der elastischen Deformation

$${}^2_1 x_{i,j}^e = x_{i,j}^e$$

und der plastischen Deformation

$${}^1_0 x_{i,j}^p = x_{i,j}^p$$

Damit wird:

$${}^2_0 x_{i,j}^e = x_{i,j}^e x_{i,j}^p \quad (3.56)$$

Die konstitutiven Gleichungen ergeben sich für die plastischen Deformationsanteile ähnlich wie bei Green und Naghdi aus Fließ- und Verfestigungsflächen. Dagegen werden die elastischen Spannungen aus einer thermoelastischen Theorie gewonnen, in die als kinematische Variable der Deformationsgradient $x_{i,j}^e$ und der Green-Deformations-Tensor $x_{k,i}^e x_{k,j}^e$ eingehen.

In [40] wird gezeigt, daß die Theorie von Lee und Liu aus der von Green und Naghdi durch zusätzliche, einschränkende Annahmen hergeleitet werden kann. Als Schwäche wird erkannt, daß zur Formulierung des elastischen Teils der konstitutiven Relationen eine rein kinematische Zerlegung erforderlich ist. Das verwendete Maß $x_{i,j}^e$ ist keine

konsistente elastische Größe (ein Linienelement wird in der plastisch deformierten Lage gemessen). Weiter sei bemerkt, daß die multiplikative Zerlegung nach Gleichung (3.56) kein alternatives Konzept zu der durch die Gleichung (3.55) formal eingeführten Zerlegung darstellt [40], [56].

Bei inhomogenen Deformationen führt die Wegnahme der äußeren Last nicht zu einer spannungsfreien Zwischenlage. Es bleiben Eigenspannungen. Kleiber verallgemeinert daher in [50] das kinematische Konzept von Lee und Liu durch die Unterscheidung freier elastischer Anteile und elastischer Residuen. Letztere werden einer weiteren Bewegungslage zugeordnet.

3.4.3 Eigenes Vorgehen

Die Beschränkung auf kleine Verzerrungen erlaubt

- einen Verzicht auf thermomechanische Koppelungseffekte und damit die Verwendung des verallgemeinerten Hooke-Gesetzes und der klassischen Plastizitätstheorie isothermaler Vorgänge.
- eine konsistente Zerlegung in elastische und plastische Anteile über eine additive Beziehung in den Verzerrungen.

Die Stoffgleichungen sollen zwischen Green-Lagrange-Verzerrungen ${}^m_{\circ} \epsilon_{ij}$ und Kirchhoff-Spannungen ${}^m_{\circ} s_{ij}$ gegeben sein. Die Green-Lagrange-Verzerrungen sind ein objektives Maß, d. h. sie ändern sich bei Starrkörperbewegungen nicht. Die Kirchhoff-Spannungen sind den Green-Lagrange-Verzerrungen zugeordnet, da sich in ihnen direkt ein Arbeitsausdruck angeben läßt. Mit den differentiellen Zuwächsen $d_{\circ} \epsilon_{ij}$ und $d_{\circ} s_{ij}$ geht die Gleichung (3.44) über in

$$d_{\circ} s_{ij} = {}^m_{\circ} C_{ijkl}^{ep} d_{\circ} \epsilon_{kl} \quad (3.57)$$

und Gleichung (3.54) mit S nach Gleichung (3.50):

$$d_{\circ} s_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (d_{\circ} \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} d_{\circ} \epsilon_{kk} - \frac{{}^m_{\circ} s'_{ij} \quad {}^m_{\circ} s'_{kl}}{S} d_{\circ} \epsilon_{kl}) \quad (3.58)$$

Vorteil der gewählten Vorgehensweise ist, daß die Stoffbeziehung direkt in die in Abschnitt 2, Gleichung (2.29) abgeleitete Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen für die totale Lagrange-Darstellung eingesetzt werden kann. Für die mitgehende Lagrange-Darstellung wären die entsprechenden Größen der Gleichung (3.57) auf die des Prinzips zu transformieren.

Weiter wird angenommen, daß auch der in Bild 3.9 eingeführte einachsige Vergleichszustand in Green-Lagrange-Verzerrungen und Kirchhoff-Spannungen gegeben sei. Strenggenommen, liegen hier andere, im Versuch bestimmte Maße vor, die auf die obigen Größen zu transformieren wären. Dabei geht jedoch der stückweise lineare Zusammenhang verloren. Die Beschränkung auf kleine Verzerrungen erlaubt den Verzicht auf die Transformation. Der begangene Fehler ist vernachlässigbar.

Das beschriebene Vorgehen entspricht Vorschlägen in [11], [56], [67].

Eine der mitgehenden Lagrange-Darstellung angepaßte Formulierung wird in [49] empfohlen. Verwendet werden die Zeitableitungen des Almansi-Verzerrungsincrements und der Jaumann-Spannung. Diese ergibt sich mit zusätzlichen Termen zur Berücksichtigung von Starrkörperdrehungen aus der Cauchy-Spannung. Ist zusätzlich der Vergleichszustand in Cauchy-Spannungen und den natürlichen Dehnungen gegeben, lassen sich näherungsweise auch Probleme mit großen Dehnungen behandeln [12].

4. Entwickelte finite Elemente und Rechentechnik

4.1 Diskretisierung

Die Methode der finiten Elemente (FEM) ist im Schrifttum eingehend dargestellt, besonders hingewiesen werden soll hier lediglich auf eine Arbeit von Argyris [3] und das Lehrbuch von Zienkiewicz [89].

Im folgenden werden direkt die Iterationsgleichungen für ein Element in diskretisierter Form angegeben.

Aus Gleichung (2.32) erhält man nach Einführung bereichsweiser Ritz-Ansätze für die totale Lagrange-Darstellung:

$$\left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K} + \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_g \right) \mathbf{u} = \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{R} - \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{F} \quad (4.1)$$

Für die mitgehende Lagrange-Darstellung lassen sich entsprechende Matrizen angeben. Die Bezeichnungsweise lehnt sich an die Arbeit [73] an. In Gleichung (4.1) bedeuten:

\mathbf{u}	Inkrement der Knotenverschiebung
$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{R}$	Vektor der verallgemeinerten Knotenkräfte
$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{F}$	Vektor der inneren Kräfte
$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}$	inkrementelle Steifigkeitsmatrix
$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_g$	geometrische Steifigkeit (Anfangsspannungsmatrix)

Die Matrizen der Gleichung (4.1) entstehen aus den Arbeitsausdrücken der Gleichung (2.32) wie folgt:

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{F} = \int_{\begin{matrix} 0 \\ v \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{B}^T \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{S} \, d^0 v \quad \triangleq \int_{\begin{matrix} 0 \\ v \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} s_{ij} \delta_{0e_{ij}} \, d^0 v \quad (4.2)$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K} = \int_{\begin{matrix} 0 \\ v \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{B}^T \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{C} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{B} \, d^0 v \quad \triangleq \int_{\begin{matrix} 0 \\ v \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} C_{ijrs} e_{rs} \delta_{0e_{ij}} \, d^0 v \quad (4.3)$$

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{K}_g = \int_{\begin{matrix} 0 \\ v \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \hat{\mathbf{B}}^T \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \mathbf{S} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \hat{\mathbf{B}} \, d^0 v \quad \triangleq \int_{\begin{matrix} 0 \\ v \end{matrix}} \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} s_{ij} \delta_{0\eta_{ij}} \, d^0 v \quad (4.4)$$

Mit den Kirchhoff-Spannungen in vektorieller Form:

$${}^1_0 \mathbf{s} = [{}^1_0 s_{11} \quad {}^1_0 s_{22} \quad {}^1_0 s_{33} \quad {}^1_0 s_{12} \quad {}^1_0 s_{13} \quad {}^1_0 s_{23}] \quad (4.5)$$

und als Matrix:

$${}^1_0 \mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^1_0 s_{11} & {}^1_0 s_{12} & {}^1_0 s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & {}^1_0 s_{22} & {}^1_0 s_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & {}^1_0 s_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & {}^1_0 s_{11} & {}^1_0 s_{12} & {}^1_0 s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & {}^1_0 s_{22} & {}^1_0 s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & {}^1_0 s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & {}^1_0 s_{11} & {}^1_0 s_{12} & {}^1_0 s_{13} \\ & & & & & & & {}^1_0 s_{22} & {}^1_0 s_{23} \\ & & & & & & & & {}^1_0 s_{33} \end{bmatrix}$$

sym.

(4.6)

Die Matrizen ${}^1_0 \mathbf{B}$ und ${}^1_0 \hat{\mathbf{B}}$ sind Operatormatrizen, man erhält sie aus den Verschiebungsansätzen. Mit ihnen ergeben sich die kinematischen Relationen:

$${}^0 \mathbf{e}^T = {}^1_0 \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (4.7)$$

$${}^0 \mathbf{d}^T = {}^1_0 \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad (4.8)$$

für den linearen Anteil des Verzerrungsincrements:

$${}^0 \mathbf{e}^T = [{}^0 e_{11} \quad {}^0 e_{22} \quad {}^0 e_{33} \quad {}^0 e_{12} \quad {}^0 e_{13} \quad {}^0 e_{23}] \quad (4.9)$$

und für das Inkrement des Verschiebungsgradienten, über den die nicht-linearen Verzerrungsanteile η_{ij} erfaßt werden:

$${}^0 \mathbf{d}^T = [{}^0 u_{1,1} \quad {}^0 u_{1,2} \quad {}^0 u_{1,3} \quad {}^0 u_{2,1} \quad {}^0 u_{2,2} \quad {}^0 u_{2,3} \quad {}^0 u_{3,1} \quad {}^0 u_{3,2} \quad {}^0 u_{3,3}] \quad (4.10)$$

4.2 Ermittlung der Spannungen

Die Kirchhoff-Spannungen lassen sich aus den Werkstoffgleichungen (3.57) berechnen. Sie lauten für den differentiellen Zuwachs in Matrixform:

$$d_o \mathbf{s} = {}^i_o \mathbf{C}^{ep} d_o \mathbf{\epsilon} \quad (4.11)$$

Dabei ergibt sich die elastoplastische Stoffmatrix mit den Spannungen des Zustands i aus Gleichung (3.58) wie folgt:

$${}^i_o \mathbf{C}^{ep} = \frac{E}{1+\nu} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{s'_{11}}{S} & & & & & \text{sym.} \\ \hline \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{s'_{11} s'_{22}}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{s'^2_{22}}{S} & & & & \\ \hline \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{s'_{11} s'_{33}}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{s'_{22} s'_{33}}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} \frac{s'^2_{33}}{S} & & & \\ \hline -\frac{s'_{11} s'_{12}}{S} & -\frac{s'_{22} s'_{12}}{S} & -\frac{s'_{33} s'_{12}}{S} & \frac{1}{2} \frac{s'^2_{12}}{S} & & \\ \hline -\frac{s'_{11} s'_{13}}{S} & -\frac{s'_{22} s'_{13}}{S} & -\frac{s'_{33} s'_{13}}{S} & -\frac{s'_{12} s'_{13}}{S} & \frac{1}{2} \frac{s'^2_{13}}{S} & \\ \hline -\frac{s'_{11} s'_{23}}{S} & -\frac{s'_{22} s'_{23}}{S} & -\frac{s'_{33} s'_{23}}{S} & -\frac{s'_{12} s'_{23}}{S} & -\frac{s'_{13} s'_{23}}{S} & \frac{1}{2} \frac{s'^2_{23}}{S} \\ \hline \end{array}$$

(4.12)

Mit der Abkürzung: $s'_{ii} = {}^i_o s'_{ii}$ bzw. $s'_{ij} = {}^i_o s'_{ij}$ und nach Gleichung (3.50):

$$S = \frac{2}{3} \frac{-2}{s'^2} \left(1 + \frac{2}{3} (1 + \nu) \frac{TP}{E} \right) \quad (4.13)$$

Das Spannungskrement ergibt sich durch Aufintegration über das betrachtete Inkrement $1 \rightarrow 2$. Dies wird näherungsweise durch Summieren über N Teilschritte (Subinkremente) ausgeführt.

$$\begin{aligned} {}_o \mathbf{s} &= \int_{t=1}^{t=2} d_o \mathbf{s} \\ \sim \sum_{i=1}^N \Delta {}_o \mathbf{s} &= \sum_{i=1}^N {}^i_o \mathbf{C}^{ep} \frac{{}_o \mathbf{\epsilon}}{N} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Anmerkung: Da die Spannungen und Dehnungen im elastoplastischen Fall nicht reversibel hinsichtlich der Belastungsgeschichte sind, muß zur Bestimmung des Dehnungszuwachses der Dehnungszustand vor dem Inkrement gespeichert sein. Das gleiche gilt für die Ermittlung der Gesamtspannungen. Diese ergeben sich durch Addition des Spannungszuwachses zu dem gespeicherten letzten Gesamtzustand. Die Erfordernis, den letzten Zustand nicht aus einer Rückrechnung gewinnen zu können, sondern speichern zu müssen, führt zu einem erheblichen Mehraufwand gegenüber einer elastischen Rechnung.

4.3 Algorithmus zur Berechnung elastoplastischer Spannungen

Die auszuführenden Rechenschritte sind schematisch dargestellt. Betrachtet wird das Inkrement $1 \rightarrow 2$, in dem ein Übergang vom elastischen in den plastischen Zustand stattfinden soll.

Gegeben:

die Gesamtspannungen	für $t = 1$	${}^1\sigma_{ij}$
die Gesamtdehnungen	für $t = 1$	${}^1\epsilon_{ij}$
die Gesamtdehnungen	für $t = 2$	${}^2\epsilon_{ij}$

Berechnungsschema

A. Berechnung des Dehnungszuwachses für $\Delta t = 2 - 1$

$${}^0\epsilon_{ij} = {}^2\epsilon_{ij} - {}^1\epsilon_{ij}$$

B. Spannungszuwachs bei Annahme elastischen Verhaltens

$${}^0\sigma_{ij}^e = {}^0C_{ijkl} {}^0\epsilon_{kl}$$

C. Bilden der Gesamtspannung für $t = 2$

$${}^2\tilde{\sigma}_{ij} = {}^1\sigma_{ij} + {}^0\sigma_{ij}^e$$

D. Prüfen der Fließbedingung

$$\text{mit } {}^2\tilde{\sigma}_{ij}$$

$$F({}^2\tilde{\sigma}_{ij}) \geq 0$$

für $F < 0$

Annahme elastisch richtig

$${}^2\sigma_{ij} = {}^2\tilde{\sigma}_{ij}$$

für $F > 0$

Fortsetzung mit E.

- E. E. 1. Bestimmung des rein elastischen Anteils mit der Bedingung für den Faktor r (mit $0 \leq r < 1$)
- $$F \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} s_{ij} + r \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} s_{ij} \right) = 0$$
- E. 2. Spannung, bei der das Fließen beginnt
- $$\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} s_{ij}^* = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} s_{ij} + r \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} s_{ij}$$
- E. 3. Bestimmung des elastoplastischen Dehnungsanteils am Inkrement
- $$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \epsilon_{ij}^{ep} = (1 - r) \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \epsilon_{ij}$$
- E. 4. Ermittlung des zu $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \epsilon_{ij}^p$ gehörenden Spannungszuwachses. Unterteilung von $\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \epsilon_{ij}^{ep}$ in N Teilschritte. Für einen Teilschritt wird $\begin{matrix} i \\ 0 \end{matrix} C_{ijkl}^{ep}$ konstant angenommen.
- $$\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} s_{ij}^{ep} = \sum_{t=1}^N t \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} C_{ijkl}^{ep} \frac{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \epsilon_{ij}^{ep}}{N}$$
- E. 5. Bilden der Gesamtspannung
- $$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} s_{ij} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} s_{ij}^* + \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} s_{ij}^{ep}$$

4.4 Numerische Lösung des nichtlinearen Problems

4.4.1 Vorgehensweise

Zusammenfassende Darstellungen heute gebräuchlicher Rechentechniken finden sich in [17] und [79]. Allgemein üblich, und auch hier verwendet, ist ein inkrementell-iteratives Vorgehen. Basis dazu bildet die inkrementelle Formulierung der virtuellen Arbeitsgleichung, die durch die Diskretisierung in ein System algebraischer Gleichungen übergeführt wurde. Dieses wiederum ist linear in den unbekannt

Verschiebungsinkrementen mit den folgenden Näherungen:

- a) Da die zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix benötigte Stoffmatrix von den Größen eines noch unbekanntem Zustands abhängt, wird sie angenähert durch die Stoffmatrix einer bereits bekannten Bewegungslage.
- b) Die Arbeitsgleichung wird linearisiert mit dem Übergang von der exakten Formulierung Gleichung (2. 29) auf Gleichung (2. 32).

Der mit den Näherungen a) und b) begangene Fehler soll durch eine Iteration beseitigt werden.

4. 4. 2 Gleichgewichtsiteration

Betrachtet wird das Inkrement $1 \rightarrow 2$. Ausgehend von der Gleichgewichtsbedingung des Zustands 2, der Gleichung (4. 1), ergibt sich mit k für den Iterationszyklus die Beziehung:

$${}^1_0 \mathbf{K} ({}^1_0 \mathbf{C}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} = {}^2_0 \mathbf{R} - {}^k_0 \mathbf{F} \quad (4. 15)$$

mit: $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$ Verschiebungszuwachs im k -ten Zyklus

${}^1_0 \mathbf{K}$ Tangentensteifigkeit in der Bewegungslage $t = 1$

Die Auswertung der Gleichung (4. 15) soll auf zwei Arten erfolgen. Beide sind in Bild 4. 1 für einen Freiheitsgrad schematisch dargestellt.

4. 4. 2. 1 Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren

Die Steifigkeitsmatrix wird in $i = 1$ aufgestellt und für alle Iterationszyklen während des Inkrements $1 \rightarrow 2$ konstant gehalten. Also:

$${}^1_0 \mathbf{K} ({}^1_0 \mathbf{C}) \Delta \mathbf{u}^{(k)} = {}^2_0 \mathbf{R} - {}^k_0 \mathbf{F} \quad (4. 16)$$

Die Berücksichtigung der Nichtlinearitäten erfolgt allein über die rechte Seite durch die Bestimmung der inneren Kräfte.

Wird die elastische Stoffmatrix ${}^0_0 \mathbf{C}^e$ anstelle der an den Zustand 1 angepassten Matrix verwendet, entspricht das Verfahren der zur Lösung

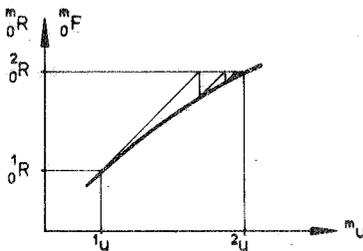
elastoplastischer Probleme vorgeschlagenen Anfangslastmethode [88]. Bei dieser werden die äußeren Lasten in den Iterationsschritten immer auf ein vollständig elastisch angenommenes System aufgebracht. Ergibt die Rückrechnung, daß in Bereichen der Struktur die Fließbedingung verletzt wurde, so werden die dort zuviel aufgebrachten Lasten zu sogenannten Anfangslasten zusammengefaßt und mit ihnen die Struktur erneut belastet.

4. 4. 2. 2 Standard-Newton-Raphson-Verfahren

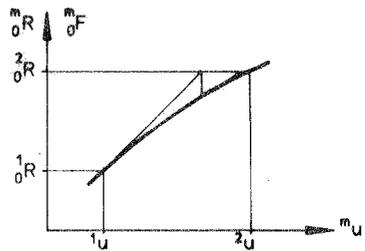
Die Steifigkeitsmatrix wird an die im Zuge der Iteration erreichte Zwischenlage angepaßt. Mit $i = k$ ergibt sich:

$${}^k_{\circ}K ({}^k_{\circ}C) \Delta u^{(k)} = {}^2_{\circ}R - {}^k_{\circ}F \quad (4. 17)$$

Durch die Aufstellung und Invertierung der Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationszyklus ist das Standard-Verfahren im allgemeinen aufwendiger als das modifizierte nach 4. 2. 1, bei dem eine größere Zahl von Iterationen benötigt wird. Das Standard-Newton-Raphson-Verfahren wird deshalb hier nur im Bereich sehr starker Nichtlinearitäten verwendet, bei denen das modifizierte Verfahren nicht mehr konvergiert.



modifiziert nach 4. 4. 2. 1



Standard-Verfahren nach 4. 4. 2. 2

Bild 4. 1: Schemen für Iteration im Inkrement

4.4.2.3 Konvergenzkriterien

Eine Diskussion gebräuchlicher Kriterien für einen inkrementell - iterativen Prozeß findet sich in [16]. Vorgeschlagen wird dort, Normen in den Verschiebungen Normen in anderen Größen vorzuziehen (z. B. in Kräften oder in Spannungen). Das übliche Vorgehen ist, zunächst den Zuwachs der einzelnen Verschiebungskomponente im m-ten Zyklus mit einer Referenzverschiebung zu skalieren. Mit diesen Größen kann dann eine Absolut-, Quadrat- (euklidische) oder eine Maximum-Norm ermittelt werden. Für die Norm wird dann gefordert, daß diese einen vorgegebenen Wert nicht überschreitet.

$$\| \epsilon \| < \gamma \quad (4.18)$$

In Abhängigkeit von der gewünschten Genauigkeit ist γ gewöhnlich in der Größenordnung von 10^{-2} bis 10^{-5} . Nach [16] ergibt sich kein signifikanter Unterschied zwischen den verschiedenen Normen.

4.5 Die Entwicklung spezieller Elemente

4.5.1 Grundlagen und Konzept der Degeneration

Die im folgenden beschriebenen Elemente sind Weiterentwicklungen der von Ramm in [73] für den elastischen Fall abgeleiteten Elemente. Beispiele für erfolgreiche Anwendungen im rein geometrisch nichtlinearen Bereich finden sich in [23], [24].

Die Elemente beruhen auf dem Konzept der Degeneration, das von Ahmad u. a. [1] eingeführt und seither unter verschiedenartigen Aspekten angewendet wurde [13], [53], [55].

Im Gegensatz zum klassischen Konzept, das von einer Flächentheorie (Platte oder Schale) ausgeht, werden bei der Degeneration direkt die Feldgleichungen des dreidimensionalen Kontinuums diskretisiert. Eine detaillierte Gegenüberstellung der beiden Vorgehensweisen findet sich in [73]. Das Konzept der Degeneration erfordert, da keine analytische Vorabintegration über die Elementdicke vorgenommen wird, eine numerische Integration über das Elementvolumen. Dazu werden jetzt Annahmen eingeführt:

- I. Ein Schnitt normal zur Mittelfläche bleibt während der Verformung gerade. Dies führt zu einem linearen Verschiebungsfeld über die Elementdicke (wird auch bei plastischer Verformung angenommen).
- II. Die Dehnung in Dickenrichtung wird zu Null gesetzt. Dadurch und mit I. kann die Anzahl der Freiheitsgrade von sechs auf fünf je Knoten der Mittelfläche reduziert werden.
- III. Der Anteil der Normalspannung in Richtung des Schnittes senkrecht zur Mittelfläche leistet keinen Beitrag im Arbeitsausdruck.

Die eingeführten Bedingungen entsprechen üblichen Annahmen von Platten- oder Schalentheorien. Das klassische und das degenerierte Vorgehen sind somit verwandt. Unterschiede ergeben sich daher nur aus der vertauschten Reihenfolge von Diskretisierung und Integration über die Elementdicke. Einige Vorteile und Nachteile, insbesondere für die rechen-technische Behandlung, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

a) Vorteile der Degeneration:

- einfaches theoretisches Konzept (ohne komplizierte Schalentheorie),
- Einsatzbereich nicht nur im dünnen Bereich, sondern auch für mäßig dicke Verhältnisse,
- direktes Arbeiten mit den Spannungen, statt mit Resultierenden (besonders vorteilhaft für den elastoplastischen Fall bei der Formulierung der Fließbedingung).

b) Nachteil:

- Da zusätzlich über die Elementdicke integriert werden muß, entsteht ein erhöhter Integrationsaufwand. Dies gilt jedoch nur im Elastischen. Im elastoplastischen Fall muß auch bei der klassischen Vorgehensweise numerisch über die Dicke integriert werden [77], [85], um die von der Dickenkoordinate abhängenden Stoffeigenschaften zu erfassen.

4.5.2 Beschreibung der Elemente

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden ein ebenes/achsensymmetrisches Element und ein Platten-/Schalenelement für geometrisch und stofflich nichtlineare Anwendungen über die Degeneration entwickelt.

Den Elementen liegt ein isoparametrisches Verschiebungsmodell zugrunde. Das heißt, Geometrie und Verschiebungsfeld werden mit den gleichen Ansätzen interpoliert. Konvergenz- bzw. Stetigkeitsanforderungen sind dadurch gewährleistet, siehe [89], Abschnitt 8.

Im folgenden werden bezeichnet mit:

M	die Gesamtzahl der Knoten am Element
(k)	zum Knoten k des Elements gehörend
$\bar{\varphi}(k)$	Interpolationsfunktion
$-1 \leq r, s, t \leq 1$	lokale Elementkoordinaten
$h(k)$	Dicke gemessen auf der Normalen

4.5.2.1 Ebenes/achsensymmetrisches Element in der x_2 - x_3 -Ebene

Durch Degeneration aus dem Zweidimensionalen entstehen gekrümmte eindimensionale Elemente

- a) für den ebenen Spannungszustand (Balken mit $\nu = 0$)
- b) für den ebenen Verzerrungszustand
- c) für Achsensymmetrie (Ringelement)

Vorhanden sind Versionen mit linearer ($M = 2$) bis quartischer ($M = 5$) Interpolation (Bild 4.2).

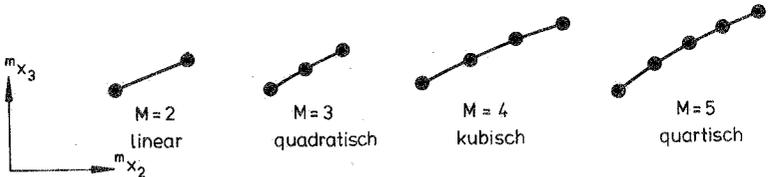


Bild 4.2: Zweidimensional degeneriertes Element

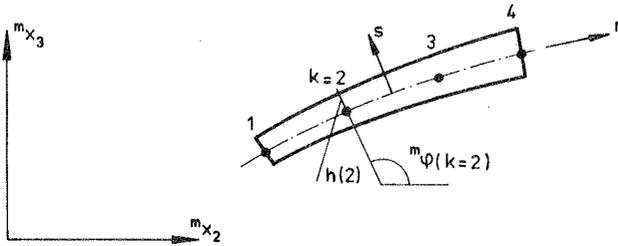


Bild 4.3: Normalenwinkel ${}^m\varphi(k)$ und Dicke $h(k)$

Mit dem Winkel ${}^m\varphi(k)$ nach Bild 4.3 ergibt sich die Geometrie eines Punktes außerhalb der Mittelfläche.

$$\begin{bmatrix} m_{x_2} \\ m_{x_3} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^M \bar{\Phi}(k, r) \begin{bmatrix} m_{x_2}(k) \\ m_{x_3}(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} s \sum_{k=1}^M \bar{\Phi}(k, r) h(k) \begin{bmatrix} \cos {}^m\varphi(k) \\ \sin {}^m\varphi(k) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Das Verschiebungsfeld der Lage 1 erhält man aus dem Vergleich mit der Ausgangslage $t = 0$.

$$\begin{bmatrix} {}^1u_2 \\ {}^1u_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^M \bar{\Phi}(k, r) \begin{bmatrix} {}^1u_2(k) \\ {}^1u_3(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} s \sum_{k=1}^M \bar{\Phi}(k, r) h(k) \begin{bmatrix} \cos {}^1\varphi(k) - \cos {}^0\varphi(k) \\ \sin {}^1\varphi(k) - \sin {}^0\varphi(k) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Die Ausdrücke für die Verschiebungsinkremente ergeben sich entsprechend Gleichung (4.20), wenn man die Gesamtverschiebungen 1u_i und ${}^1u_i(k)$ durch deren Inkremente ersetzt. Der Rotationsanteil ist an der Stelle ${}^1\varphi(k) + \alpha(k)$ zu berechnen. Dabei ist $\alpha(k)$ das unbekannte Winkelinkrement.

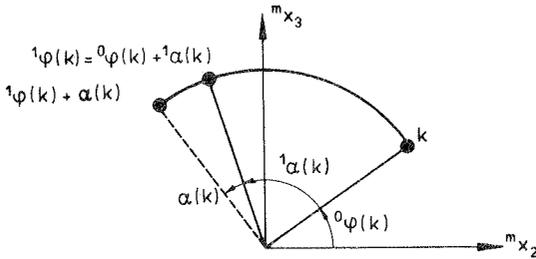


Bild 4. 4: Rotation des Normalenwinkels

Um für die Ermittlung der Steifigkeitsausdrücke einen in $\alpha(k)$ linearen Rotationsanteil zu gewinnen, werden die trigonometrischen Beziehungen der Gleichung (4. 20) linearisiert.

Mit

$$\sin \alpha(k) \sim \alpha(k) \quad \text{und} \quad \cos \alpha(k) \sim 1 \quad \text{für} \quad \alpha(k) \ll 1$$

werden:

$$\begin{aligned} & \cos({}^1\varphi(k) + \alpha(k)) - \cos({}^1\varphi(k)) \\ = & \cos({}^1\varphi(k)) \cos \alpha(k) - \sin({}^1\varphi(k)) \sin \alpha(k) - \cos({}^1\varphi(k)) = -\sin({}^1\varphi(k)) \alpha(k) \\ & \sin({}^1\varphi(k) + \alpha(k)) - \sin({}^1\varphi(k)) \\ = & \sin({}^1\varphi(k)) \cos \alpha(k) + \cos({}^1\varphi(k)) \sin \alpha(k) - \sin({}^1\varphi(k)) = \cos({}^1\varphi(k)) \alpha(k) \end{aligned} \tag{4. 21}$$

Der Ansatz für die Verschiebungsinkremente wird unter Verwendung von (4. 21):

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^M \bar{\Phi}(k,r) \begin{bmatrix} u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} s \sum_{k=1}^M \bar{\Phi}(k,r) h(k) \begin{bmatrix} -\sin({}^1\varphi(k)) \\ \cos({}^1\varphi(k)) \end{bmatrix} \alpha(k) \tag{4. 22}$$

Die Berechnung der inneren Kräfte ${}^m_0\mathbf{F}$ wird mit der für beliebige Rotationen gültigen Gleichung (4. 20) vorgenommen.

Für die Interpolationspolynome $\Phi(k)$ und die aus ihnen herleitbaren Elementmatrizen ${}^1_0\mathbf{B}$, ${}^1_0\hat{\mathbf{B}}$ wird auf die Zusammenstellung im Anhang verwiesen.

Für das ebene/achsensymmetrische Problem entfallen bei Bezugnahme auf die x_2 - x_3 -Ebene die Komponenten „12“ und „13“ in den Vektoren. Nach Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten erhält man aus (4.12) eine Stoffmatrix der Größe 4×4 . Für den ebenen Verzerrungszustand kann mit ${}^m_0\epsilon_{11} = 0$ eine weitere Spalte gestrichen werden. Beim ebenen Spannungszustand läßt sich mit der Bedingung ${}^m_0s_{11} = 0$ die Verzerrungsgröße ${}^m_0\epsilon_{11}$ substituieren. Es ergibt sich eine 3×3 Stoffmatrix.

4.5.2.2 Platten-/Schalenelement

Durch Degeneration aus dem Dreidimensionalen entsteht das gekrümmte Platten-/Schalenelement mit $M = 9$ in biquadratischer und $M = 16$ in bikubischer Version (Bild 4.5).

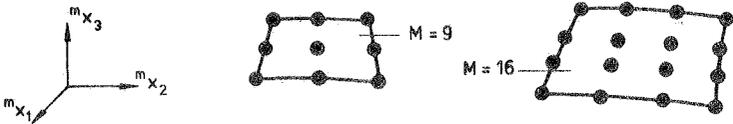


Bild 4.5: Versionen des Platten-/Schalenelements

Mit den räumlichen Winkeln ${}^m\psi_i(k)$ werden Normalenrichtungen an den Knoten definiert und in dieser Richtung die Dicken $h(k)$ gemessen (Bild 4.6).

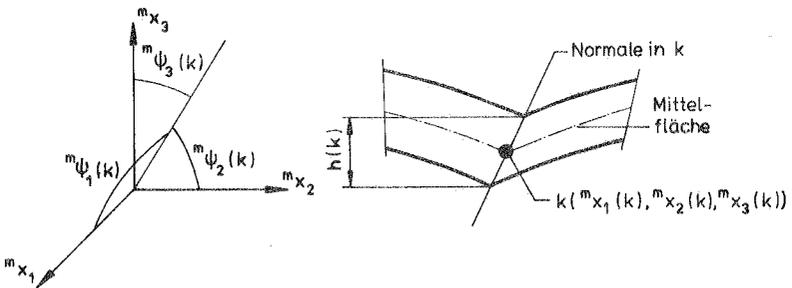


Bild 4.6: Normalenwinkel ${}^m\psi_1(k)$, ${}^m\psi_2(k)$ und ${}^m\psi_3(k)$

Für die Geometrie eines Schalenpunktes gilt dann:

$$\begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \\ m_{x_3} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^M \Phi(k, r, s) \begin{bmatrix} m_{x_1}(k) \\ m_{x_2}(k) \\ m_{x_3}(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} t \sum_{k=1}^M \Phi(k, r, s) h(k) \begin{bmatrix} \cos^m \psi_1(k) \\ \cos^m \psi_2(k) \\ \cos^m \psi_3(k) \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

und das Verschiebungsfeld:

$$\begin{bmatrix} m_{u_1} \\ m_{u_2} \\ m_{u_3} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^M \Phi(k, r, s) \begin{bmatrix} m_{u_1}(k) \\ m_{u_2}(k) \\ m_{u_3}(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} t \sum_{k=1}^M \Phi(k, r, s) h(k) \begin{bmatrix} \cos^1 \psi_1(k) - \cos^0 \psi_1(k) \\ \cos^1 \psi_2(k) - \cos^0 \psi_2(k) \\ \cos^1 \psi_3(k) - \cos^0 \psi_3(k) \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Im Zuge der Bewegung verändert sich die Lage der Normalen. Zur Beschreibung der gedrehten Lage 1 werden verwendet:

${}^1\psi(k)$ der räumliche Winkel, entspricht ${}^1\psi_1(k)$

${}^1\varphi(k)$ Winkel der Projektion der Normalen in der x_2 - x_3 -Ebene mit der x_2 -Achse

Die Richtungskosini der Lage 1 sind damit:

$$\begin{aligned} \cos^1 \psi_1(k) &= \cos^1 \psi(k) \\ \cos^1 \psi_2(k) &= \sin^1 \psi(k) \cos^1 \varphi(k) \\ \cos^1 \psi_3(k) &= \sin^1 \psi(k) \sin^1 \varphi(k) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Für die Winkeländerungen werden eingeführt:

$$\begin{aligned} {}^1\alpha(k) &= {}^1\varphi(k) - {}^0\varphi(k) \\ {}^1\beta(k) &= {}^1\psi(k) - {}^0\psi(k) \end{aligned} \quad (4.26)$$

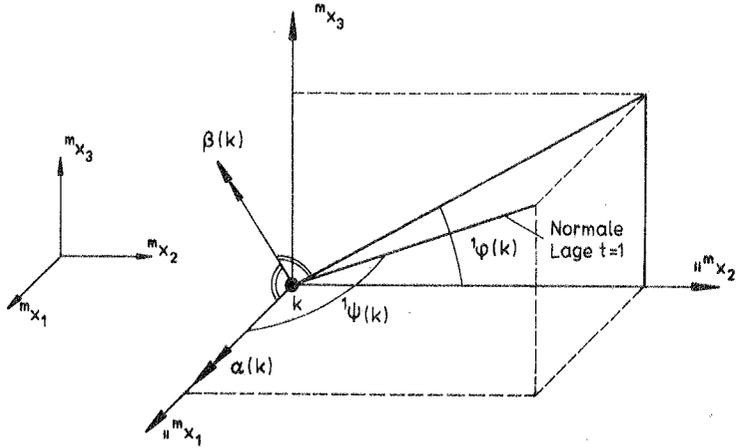


Bild 4. 7: Normalenwinkel in der Lage $t = 1$

Bei der Formulierung der Verschiebungsinkremente wird analog zum ebenen Fall (Abschnitt 4. 5. 2. 1) vorgegangen und die trigonometrischen Beziehungen der unbekannt Winkelinkremente $\alpha(k)$ und $\beta(k)$ linearisiert.

Man erhält ausgehend von der Lage 1 mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned}
 {}^1c_{11}(k) &= 0 & {}^1c_{12}(k) &= -\sin {}^1\psi(k) \\
 {}^1c_{21}(k) &= -\sin {}^1\varphi(k) \sin {}^1\psi(k) & {}^1c_{22}(k) &= \cos {}^1\varphi(k) \cos {}^1\psi(k) \\
 {}^1c_{31}(k) &= \cos {}^1\varphi(k) \sin {}^1\psi(k) & {}^1c_{32}(k) &= \sin {}^1\varphi(k) \cos {}^1\psi(k)
 \end{aligned}
 \tag{4. 27}$$

die in den Rotationsanteilen linearisierte Beziehung für die Verschiebungsinkremente:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^M \Phi(k, r, s) \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix} + \frac{1}{2} t \begin{bmatrix} {}^1c_{11}(k) & {}^1c_{12}(k) \\ {}^1c_{21}(k) & {}^1c_{22}(k) \\ {}^1c_{31}(k) & {}^1c_{32}(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix}
 \tag{4. 28}$$

Für die Berechnung innerer Kräfte ${}^m_0\mathbf{F}$ im Zuge der Gleichgewichtsiteration wird die für beliebige Rotationen gültige Gleichung (4. 24) verwendet.

Interpolationspolynome $\xi(k, r, s)$ und Elementmatrizen ${}^1_0\mathbf{B}$, ${}^1_0\hat{\mathbf{B}}$ siehe Anhang.

Anmerkung zum Stoffgesetz:

Zur Elimination der Energieanteile in Dickenrichtung (Annahme für die Degeneration) wird die Stoffmatrix modifiziert. Dazu wird zunächst die Stoffbeziehung in einem lokalen Koordinatensystem \tilde{x}_1 formuliert. Dieses enthält die Dickenrichtung (Normale) als ${}^m\tilde{x}_3$ - Achse. Die Stoffbeziehung wird zu ${}^m_0\mathbf{s} = {}^m_0\tilde{\mathbf{C}} {}^m_0\tilde{\mathbf{E}}$. Die Bedingung ${}^m\tilde{s}_{33} = 0$ ermöglicht, dritte Spalte und Zeile der Stoffmatrix zu eliminieren. Man erhält so ein anisotropes Stoffgesetz mit ${}^m_0\mathbf{C}^*$.

(In der gleichen Weise wird beim ebenen/achsensymmetrischen Element vorgegangen. Die zur Transformation zwischen lokalen und globalen Größen benötigten Matrizen finden sich in [73].)

4.5.2.3 Integration der Arbeitsausdrücke im elastoplastischen Fall

Bei der Berechnung der inneren Kräfte ${}^m_0\mathbf{F}$ und der Steifigkeitsmatrizen ${}^m_0\mathbf{K}$, ${}^m_0\mathbf{K}_g$ sind Integrationen über das Elementvolumen auszuführen (Gleichungen (4. 2), (4. 3), (4. 4)).

Am Beispiel der inkrementellen Steifigkeitsmatrix ${}^m_0\mathbf{K}$ des degenerierten Platten-/Schalenelements soll die Vorgehensweise gezeigt werden; insbesondere wie im elastoplastischen Fall über die Querschnittsdicke integriert wird.

Die Integration wird numerisch mit einer Summation ausgeführt; man erhält aus Gleichung (4. 2):

$${}^m_0\mathbf{K} = \underbrace{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p w_i w_j}_{\Delta \int dF} \underbrace{\sum_{k=1}^q w_k}_{\Delta \int dh} [{}^m_0\mathbf{B}^T {}^m_0\mathbf{C} {}^m_0\mathbf{B} \det {}^0\mathbf{J}] \quad \begin{matrix} r = r_i \\ s = s_j \\ t = t_k \end{matrix} \quad (4. 29)$$

Mit den Gewichten w_i, w_j, w_k und der Jacobi-Determinante:

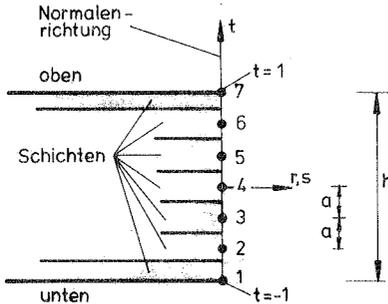
$$d^n v = d^n x_1 d^n x_2 d^n x_3 = \det {}^n \mathbf{J} dr ds dt \quad (4.30)$$

Die äußere Summation entspricht der Flächenintegration und wird mit der Methode von Gauss (siehe [47], Kap. 9.4) ausgeführt. Die Stützstellen r_i, s_j und die zugehörigen Gewichte w_i, w_j können Tabellen entnommen werden. Die Anzahl p der Stützstellen richtet sich nach der Ordnung der Interpolationspolynome, deren Ableitungen in den Matrizen ${}^m \mathbf{B}$ und ${}^n \mathbf{J}$ enthalten sind.

Die Integration in Dickenrichtung profitiert im elastischen Fall von der bei der Degeneration eingeführten Hypothese, daß die Normale während der Verformung gerade bleibt. Dies entspricht der Annahme eines linearen Verschiebungsansatzes in Dickenrichtung. Die Integration kann bei Verwendung des Gauss-Verfahrens mit $q = 2$ Stützstellen exakt vorgenommen werden.

Im elastoplastischen Fall variieren die Stoffeigenschaften ${}^m \mathbf{C}$ in Abhängigkeit von den Zustandsgrößen innerhalb des Elements. Den Integrationspunkten kommt somit weitere Bedeutung zu: sie repräsentieren die Materialeigenschaften des sie umgebenden Bereichs. Für die Integration über die Fläche heißt das, Zahl und Lage der Integrationspunkte sind noch sorgfältiger auszuwählen. Geschehen kann dies über eine verfeinerte Elementeteilung in Bereichen, in denen Plastizierungen zu erwarten sind oder durch Erhöhen von p über die der Ordnung der Integrationspolynome entsprechende Anzahl.

Für die Integration in Dickenrichtung genügen die bisher ausreichenden zwei Gauss-Punkte nicht mehr. Das Integrationschema wird geändert, da bei der Gauss-Integration die Lage der Stützstellen nicht frei wählbar ist (z. B. können keine Punkte auf den Oberflächen angeordnet werden). Die Stützstellen werden, wie in Bild 4.8 dargestellt, äquidistant über den Querschnitt angeordnet, es ergeben sich q Schichten. Integriert wird mit Simpson.



$$a = \frac{h}{q-1}$$

$$\int y dh = \frac{a}{3} (y_1 + 4y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{q-2} + 4y_{q-1} + y_q)$$

$$\text{mit } y_k = \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \det \mathbf{J} \left| \begin{array}{l} s = s_i \\ r = r_j \\ t = t_k \end{array} \right.$$

Bild 4. 8: Integration in Dickenrichtung für $q = 7$

Bei linearem Spannungsverlauf über die Gesamtdicke (elastische Zustände) kann die Integration mit $q = 3$ Stützstellen exakt vorgenommen werden. Tritt Plastizierung auf, ist der Spannungsverlauf nicht mehr linear und für die Integration werden mehr Stellen benötigt. Im allgemeinen läßt sich mit $q = 7$ das Verhalten ausreichend approximieren.

Zu bemerken ist, daß der Rechenaufwand direkt mit der Zahl q der Integrationspunkte ansteigt. Gegenüber dem elastischen Fall mit zwei Gauss-Punkten erfordern $q = 7$ Stützstellen einen $\sim 7/2 = 3,5$ -fachen Rechenzeitbedarf für die Erstellung der Integraalausdrücke. Ebenso steigt der Speicherbedarf der Zustandsgrößen $\mathbf{m}_0 \mathbf{s}$, $\mathbf{m}_0 \mathbf{\epsilon}$, $\mathbf{m}_0 \mathbf{s}$, die aufgrund des differentiellen Stoffgesetzes für den zuletzt errechneten Schritt an den Integrationspunkten gespeichert werden müssen. Im Schrifttum finden sich daher Vorschläge für alternative Konzepte. So schlagen Gerdeen u. a. [37] vor, die Dickenkoordinaten der Punkte zu ermitteln, an denen elastische in plastische Bereiche übergehen. Das Gesamtintegral kann dann über Teilbereiche gebildet werden, in denen der Spannungsverlauf jeweils linear ist. Es werden maximal drei Bereiche benötigt. In jedem Bereich wird mit $q = 2$ Gauss-Punkten exakt integriert (Aufwand also: 2×3 Gauss-Punkte, Speicherung der Zustandsgrößen an $3 + 1 = 4$ Bereichsgrenzen, zusätzlich jedoch Ermittlung

und Speicherung der Bereichskoordinaten). Auf anderen Grundlagen beruht ein Modell von Crisfield [29], das auch von Kröplin [54] verwendet wird. Hier wird die Plastizität mit einem über den Querschnitt aufintegrierten Stoffgesetz erfaßt, wodurch eine Schichtintegration vermieden wird. Die Fließbedingung wird in genäherter Form (nach Ilyuschin) in den Schnittgrößen formuliert.

4.6 Angaben zum Rechenprogramm

Zur Durchführung der Beispielmrechnungen wurden die im Abschnitt 4.5 beschriebenen Elemente mit den zugehörigen Algorithmen nach Abschnitt 4.3 in das finite Element-System NISA (Nichtlineare Struktur-Analysen) implementiert. NISA [22] ist in FORTRAN geschrieben und entstand aus einer Version des Programms NONSAP [9]. Es basiert auf den in den vorhergehenden Abschnitten dargestellten Grundlagen. Die Lösung des nichtlinearen Problems wird inkrementell/iterativ (reines oder modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren) erzielt (siehe Abschnitt 4.4). Das Programm NISA enthält alle wesentlichen Merkmale eines modernen FE-Programms wie

- modularen und übersichtlichen Aufbau,
- dynamisch verwalteten Arbeitsspeicher,
- leistungsfähigen Gleichungslöser (out-of-core, Skyline zur Vermeidung von Nulloperationen),
- Eigenwert Routinen,
- Plotsoftware.

Neben der Steifigkeitsmatrix werden u. a. die in Gruppen zusammengefaßten Elemente extern auf der Platte gespeichert, so daß der Kernspeicher in den einzelnen Lösungsphasen so weit wie möglich für Rechenoperationen zur Verfügung steht.

Alle Rechnungen wurden auf den Anlagen CD 6600 und CYBER 174 des Rechenzentrums der Universität Stuttgart durchgeführt. Dabei standen einem einzelnen Rechenlauf maximal 160 000 Oktale Kernspeicherworte zur Verfügung, von denen etwa 110 000 zum Laden des Programms ohne Arbeitsspeicher benötigt wurden.

5. Numerischer Teil

5.1 Kragarm

Mit dem folgenden Beispiel soll an einem einfachen Fall die physikalisch nichtlineare Lösung verifiziert werden. Weiter soll das numerische Verhalten bei Änderung der Integrationsordnung in Längs- und Dickenrichtung untersucht werden. Zum Vergleich steht eine analytische Lösung zur Verfügung.

5.1.1 System und Idealisierung

In Bild 5.1 sind System, gewählte Abmessungen und Werkstoffdaten zusammengestellt.

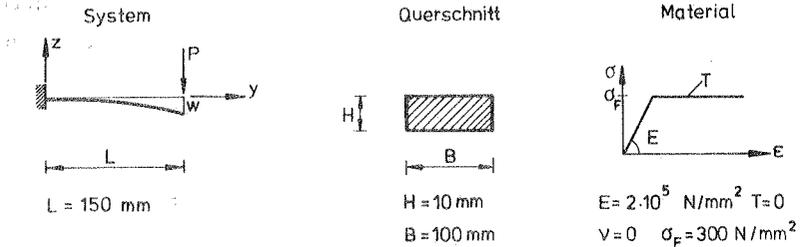


Bild 5.1: System und Material

Die Idealisierung erfolgt mit fünf kubischen Elementen in der Version des ebenen Spannungszustands (Bild 5.2).



Bild 5.2: Finite Element-Idealisierung

5.1.2 Integrationsordnung

Für die Integration in Längsrichtung werden in einem Element p Gauss-Punkte verwendet. An jedem Gauss-Punkt werden q Punkte für die

Simpson-Integration in Dickenrichtung angeordnet. Die Integrationsordnung des jeweils untersuchten Falls wird in den Diagrammen mit „INT p/q“ bezeichnet.

5.1.3. Ergebnisse

5.1.3.1 Analytische Lösung

Das System verhält sich bis zu einer Grenzlast

$$P_{e, gr} = \sigma_F \frac{B}{6} \frac{H^2}{L}$$

elastisch. Die Versagenslast ist für den Rechteckquerschnitt:

$$P_{max} = 1,5 P_{e, gr}$$

Für die Durchbiegungen ergeben sich die Vergleichswerte nach [75], S. 125 ff. Sie betragen für die bezogenen Lasten:

$$P/P_{max} = 0,67 \quad (\text{elastische Grenzlast}) \quad w = 2,25 \text{ mm}$$

$$P/P_{max} = 1,00 \quad (\text{Versagenslast}) \quad w = 5,00 \text{ mm}$$

Die Durchbiegungen im Bereich $0,67 \leq P/P_{max} \leq 1,0$ lassen sich über die Differentialgleichung des Balkens unter Berücksichtigung elastischer und plastischer Querschnittszonen bestimmen. Damit erhält man nach Auswerten für einzelne Lastverhältnisse die in den Bildern 5.3 und 5.4 aufgetragenen analytischen Last-Durchbiegungs-Kurven.

5.1.3.2 Numerische Ergebnisse

In Bild 5.3 dargestellt ist ein Vergleich unterschiedlicher Integrationsordnungen in Dickenrichtung für eine feste Zahl von Integrationspunkten in Längsrichtung ($p = 4$). Aus den Last-Durchbiegungs-Kurven erkennt man, daß sich für $q \geq 7$ eine ausreichende Übereinstimmung mit der analytischen Lösung ergibt. Der Fall mit $q = 5$ Dickenpunkten ergibt für $P/P_{max} < \sim 0,93$ ein zu weiches Verhalten, für $P/P_{max} \rightarrow 1,0$ wird dagegen die Durchbiegung des Kragarmendes unterschätzt.

In Bild 5.4 ist die Integrationsordnung in Längsrichtung variiert bei konstanter Ordnung $q = 9$ in Dickenrichtung. Bereits mit $p = 3$ Gauss-Punkten, die im elastischen Fall das kubische Element exakt integrieren,

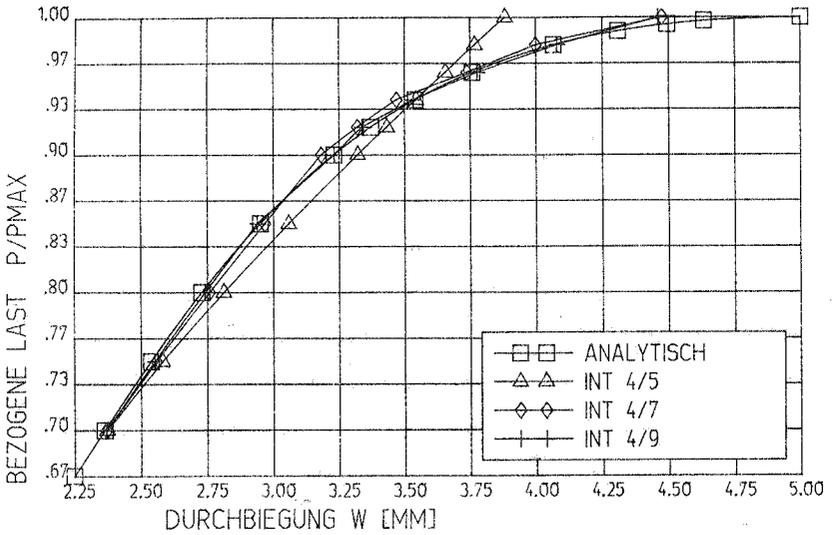


Bild 5.3: Last-Durchbiegungs-Kurven (Dickenintegration variiert)

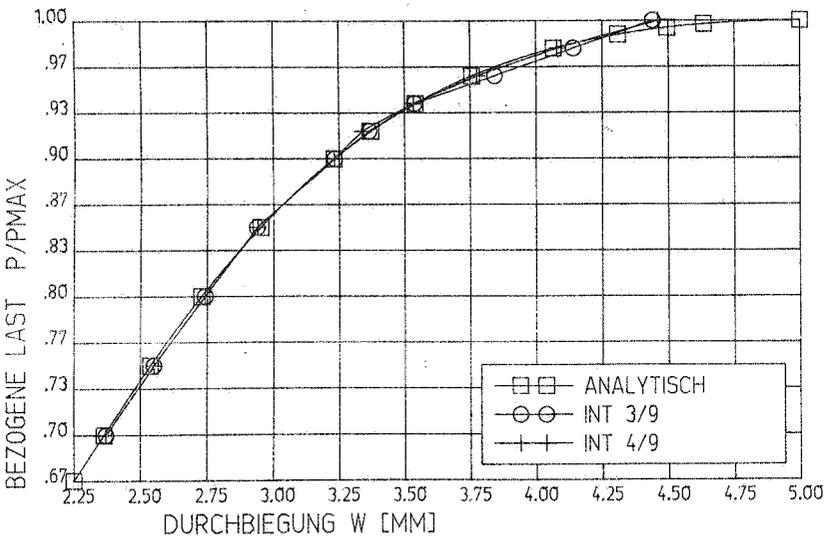


Bild 5.4: Last-Durchbiegungs-Kurven (Längsintegration variiert)

zeigt sich gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Die Erhöhung auf $p = 4$ Gauss-Punkte bringt nur geringfügige Verbesserungen. Aus den Bildern 5.3 und 5.4 erkennt man, daß die numerische Lösung die glatte analytische Last-Verschiebungs-Kurve polygonal approximiert. Dabei wird die analytische Lösung umso enger umschlossen, je mehr Integrationspunkte in Längs- und Dickenrichtung vorhanden sind.

Die Ursache für dieses Verhalten wird deutlich, wenn man die Ausbreitung der plastischen Zonen der analytischen Lösung mit der treppenförmigen Fläche vergleicht, die in der numerischen Lösung den plastischen Bereich repräsentiert. Dies ist in Bild 5.5 für drei Laststufen dargestellt. Man sieht, daß die numerische Lösung im Mittel etwa mit der analytischen Grenzkurve übereinstimmt. In einzelnen Bereichen wird jedoch die plastische Zone unterschätzt, dann wieder überschätzt, was sich in der beschriebenen Form im Last-Verschiebungs-Diagramm auswirkt.

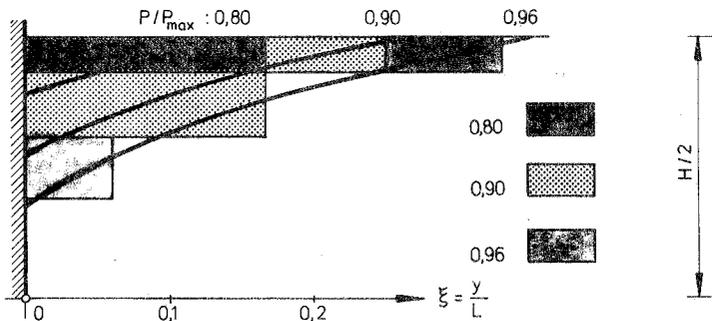


Bild 5.5: Ausbreitung der Fließzonen an der Einspannung

5.1.4 Schlußfolgerung

Aus den Vergleichen der einzelnen Fälle mit der analytischen Lösung ergibt sich für die Auswahl der Integrationspunkte folgender Anhalt:

- Ein unter der Wirkung eines Biegezustands durchplastizierendes Element erfordert mit dem hier verwendeten Simpson-Schema für die Integration in Dickenrichtung mindestens $q = 7$ Stützstellen.
- In Längsrichtung genügt es dagegen, die Anzahl der Gauss-Punkte entsprechend der Ordnung des Verschiebungsansatzes zu wählen.
- Eine Erhöhung über die angegebenen Werte hinaus führt nur zu einer gering verbesserten Approximation der analytischen Last-Durchbiegungs-Kurve.

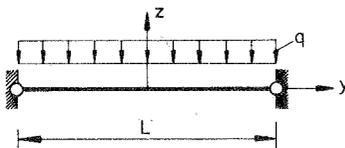
5.2 Geometrisch und stofflich nichtlinearer Plattenstreifen

Im Vordergrund steht die Verifizierung der numerischen Lösung für ein geometrisch und physikalisch nichtlineares Problem. Zum Vergleich wird für den rein geometrisch nichtlinearen Fall eine exakte analytische Lösung [81] verwendet, für den geometrisch und stofflich nichtlinearen Fall andere numerische Lösungen [8], [78].

Daneben sollen einige typische Aspekte des Tragverhaltens dargestellt werden.

5.2.1 System und Idealisierung

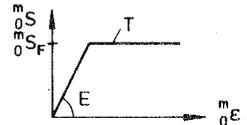
System



$L = 500 \text{ mm}$

Rechteckquerschnitt: $H/B = 10 \text{ mm} / 1000 \text{ mm}$

Material



$E = 2,2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2, T = 0$

$v = 0, m_0 S_F = 300 \text{ N/mm}^2$

Bild 5.6: System und Material

Die Idealisierung erfolgt für das halbe System mit fünf kubischen Elementen des ebenen Spannungszustands. Integriert wird im Element in drei Gauss-Punkten bei jeweils 9 Punkten in Dickenrichtung.

5.2.2 Ergebnisse

In Bild 5.7 ist das Last-Durchbiegungs-Verhalten dargestellt. Die geometrische Nichtlinearität führt zu einer Versteifung des Systems. Die rein geometrisch nichtlineare numerische Lösung weicht weniger als $\pm 0,1\%$ von der exakten analytischen ab. Mit einer analytischen Näherung (sinus-Ansatz für w , siehe [81], S. 81 ff.) ergibt sich mit zunehmender Last eine zu große Verschiebung. Die Abweichung beträgt bei $q = 1,5 \text{ kN/mm}$ bereits etwa $1,5\%$.

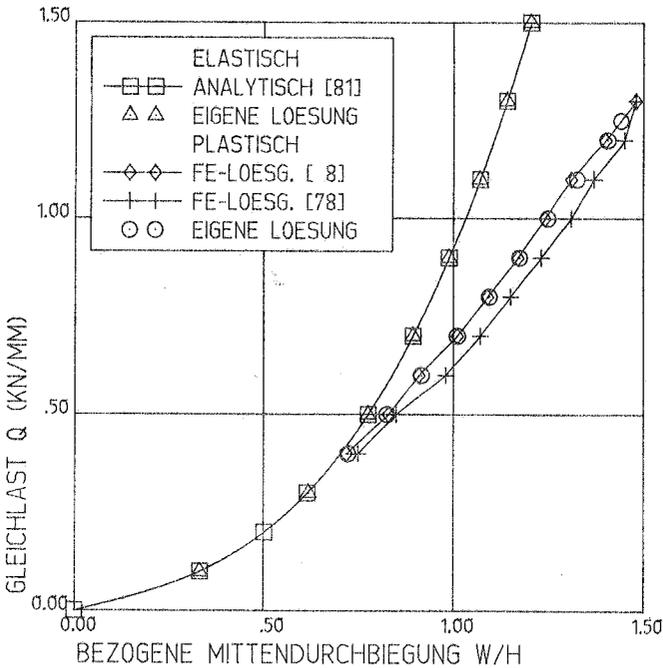


Bild 5.7: Last-Durchbiegungs-Kurven

Für die geometrisch und stofflich nichtlineare Lösung liegt der Fließbeginn bei etwa 0,25 kN/mm (gegenüber 0,16 kN/mm für den geometrisch linearen Fall). Das Last-Verschiebungs-Verhalten befindet sich in Übereinstimmung mit den anderen numerischen Lösungen.

Aufschluß über das Tragverhalten erhält man, wenn die Spannungen über die Belastung aufgetragen werden. In Bild 5.8 sind dies die Längsspannungen σ_{yy} in Plattenmitte an der Oberseite, in der Mitte und der

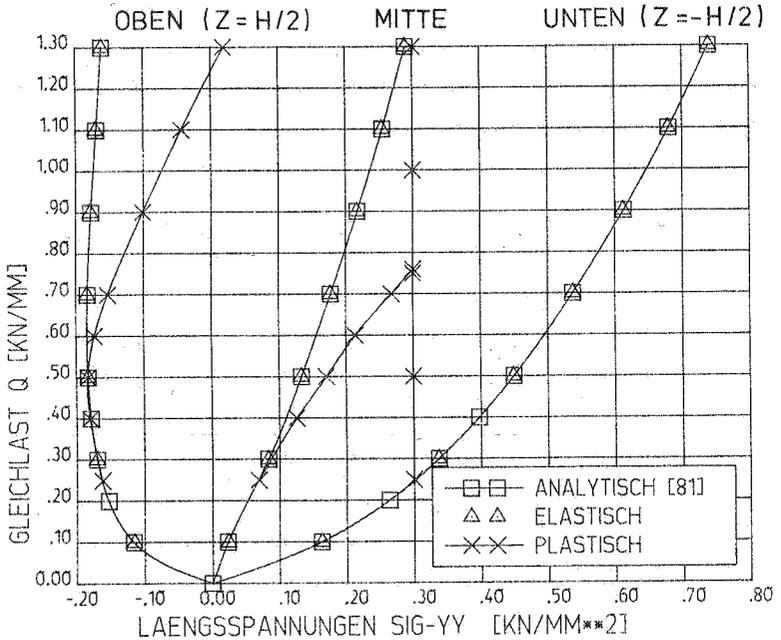


Bild 5.8: Last-Spannungs-Kurven in der Mitte $y = 0$

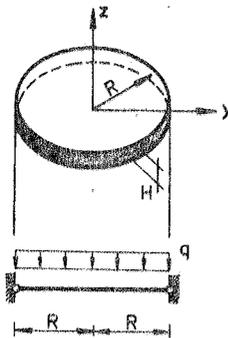
Unterseite. Für den stofflich linearen Fall ist zum Vergleich die exakte analytische Lösung aufgetragen. Das Tragverhalten ist vor allem durch die Herausbildung eines Membranzustands (Längszugspannung in der Mitte) gekennzeichnet, der schließlich den Biegezustand überwiegt. Berücksichtigt man die stoffliche Nichtlinearität, so beginnt

die Plattenunterseite bei einer Last von etwa 0,25 kN/mm zu plastifizieren. Bei weiterer Laststeigerung wächst die Randspannung σ_{yy} "unten" dann nicht mehr, dafür tritt ein verstärktes Anwachsen der Membranspannung σ_{yy} "Mitte" und ein verstärkter Abbau der oberen Randspannung σ_{yy} "oben" auf. Bei etwa 0,75 kN/mm plastiziert die Mittelfläche.

5.3 Kreisplatte, geometrisch und stofflich nichtlinear

Eine gelenkig und unverschieblich gelagerte Kreisplatte unter Gleichlast wird für elastisches und plastisches Werkstoffverhalten bei geometrischer Nichtlinearität untersucht.

5.3.1 System und Material



Radius $R = 750$ mm
Dicke $H = 10$ mm

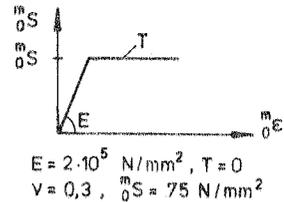


Bild 5.9: System und Material

Die Idealisierung wird mit fünf kubischen Elementen in der achsensymmetrischen Version vorgenommen (für die Integration je Element drei Gauss-Punkte mit jeweils sieben Punkten in Dickenrichtung),

5.3.2 Ergebnisse und Vergleichslösungen

Für die Auftragung der Belastung in den Bildern 5.10 und 5.11 wird der Faktor $1,436 E \cdot H^4 / R^4$ verwendet, der aus der linearen Lösung

stammt (siehe [84], Abs. IV). Mit $q = 1,0 \cdot 1,436 \cdot E \cdot H^4 / R^4$ ergibt sich für die bezogene Mittendurchbiegung $w/H = 1,0$. Die Verschiebungen und Spannungen des geometrisch nichtlinearen elastischen Problems lassen sich mit einer genäherten analytischen Lösung vergleichen (siehe ebenfalls [84], Abs. IV). Das für den Plattenstreifen beobachtete Verhalten zeigt sich auch hier: Mit zunehmender Belastung prognostiziert die analytische Näherung größere Verschiebungen als die numerische Lösung, siehe Tabelle 5.1.

Last $\frac{1,436 E H^4}{R^4}$	numerische Lösung		analytische Näherung		Abweichung % $\frac{b-a}{a} \cdot 100$	
	a		b			
2	0,835		0,8525		+ 2,1	
4	1,118		1,1539		+ 3,2	
6	1,306		1,3583		+ 4,0	

Tabelle 5.1: Bezogene Mittendurchbiegung w/H

Ein entsprechender Vergleich in Plattenmitte für die Radialspannung ist in Tabelle 5.2 zusammengestellt; darin ist die Gesamtspannung nach Membran- (M) und Biegeanteil (B) aufgeschlüsselt.

Last $\frac{1,436 E H^4}{R^4}$	numerische Lösung		analytische Näherung		Abweichung % $\frac{b-a}{a} \cdot 100$	
	a [N/mm ²]		b [N/mm ²]			
	M	B	M	B	M	B
2	22,83	+ 48,75	22,50	+ 52,79	- 1,4	+ 8,3
4	41,31	+ 62,36	40,34	+ 70,68	- 2,3	+ 13,3
6	56,80	+ 70,85	50,05	+ 82,56	- 3,1	+ 16,5

Tabelle 5.2: Radialspannungen in Plattenmitte

Deutlicher als bei den Verschiebungen zeigt sich das abweichende Verhalten in den Spannungen. Die geometrische Nichtlinearität führt bei der numerischen Lösung zu einer stärkeren Herausbildung eines Zugmembranzustands, während die Biegespannungen erheblich unter denen der analytischen Näherung bleiben.

In Bild 5. 10 sind Last-Durchbiegungs-Kurven aufgetragen. Die Berücksichtigung plastischen Werkstoffverhaltens ergibt oberhalb der elastischen Grenzlast von $q_{e,gr} = 2,3 \cdot 1,436 \frac{E H^4}{R^4}$ stärker zunehmende

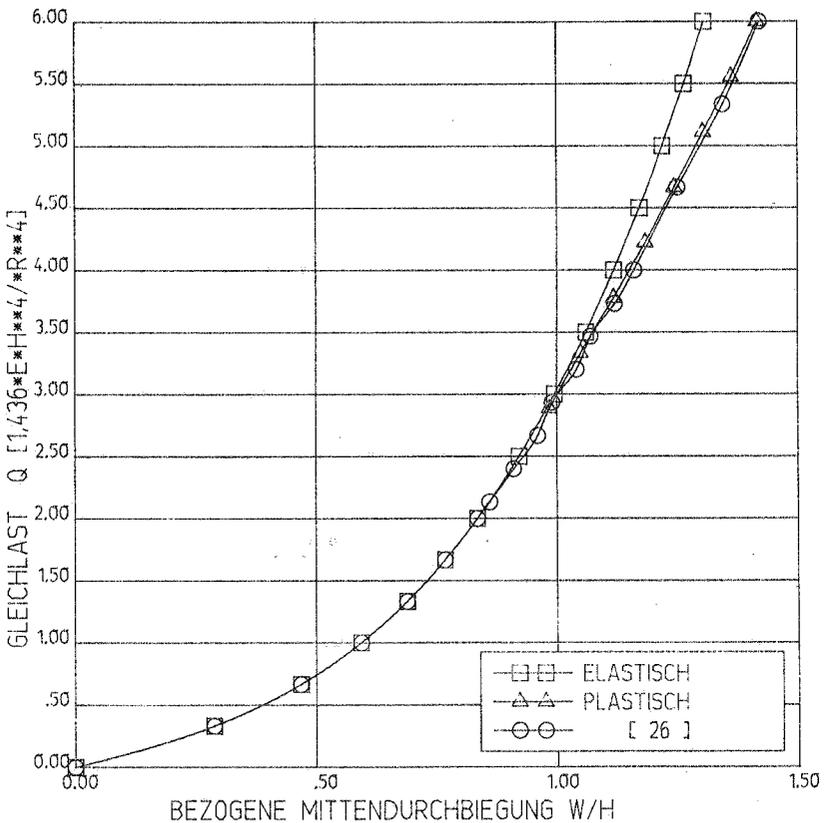


Bild 5. 10: Last-Durchbiegungs-Kurven

Verschiebungen. Die ebenfalls aufgetragene Vergleichslösung wurde mit dem Programm BOSOR [26] erzeugt.

Die Last-Spannungs-Kurven in Bild 5.11 geben den Verlauf der Radialspannungen an der Plattenober- und -unterseite in der Mitte wieder. Das Plastizieren beginnt an der Plattenunterseite unter der Wirkung der Zugmembranspannung und der Biegezugspannung. Die untere Randspannung bleibt dann konstant, während die obere Randspannung ab etwa $q = 3,75 \cdot 1,436 \cdot E \cdot H^4 / R^4$ gegenüber der elastischen Lösung abgebaut wird.

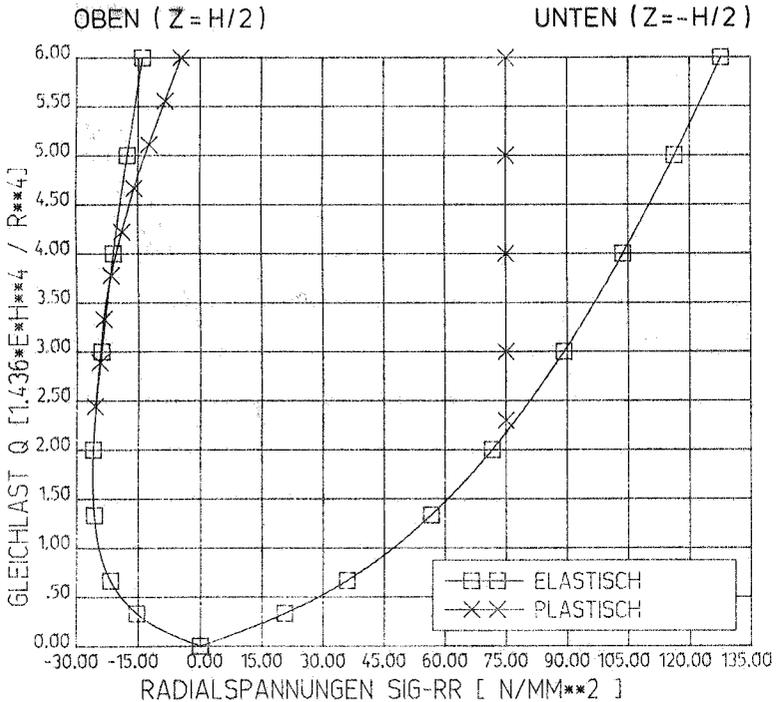


Bild 5.11: Last-Spannungs-Kurven in Plattenmitte

5.4 Geometrisch und stofflich nichtlineare Zylinderschale

Im folgenden wird eine Zylinderschale unter Längslast geometrisch und physikalisch nichtlinear untersucht. Die Ergebnisse werden mit Versuchen [58] und einer numerischen Lösung [61] verglichen. Im Vordergrund steht die Frage, ob der gegebene Versuchswerkstoff sinnvoll durch ein bilineares Modell eines elastisch, isotrop verfestigenden Materials approximiert werden kann.

5.4.1 System und Idealisierung

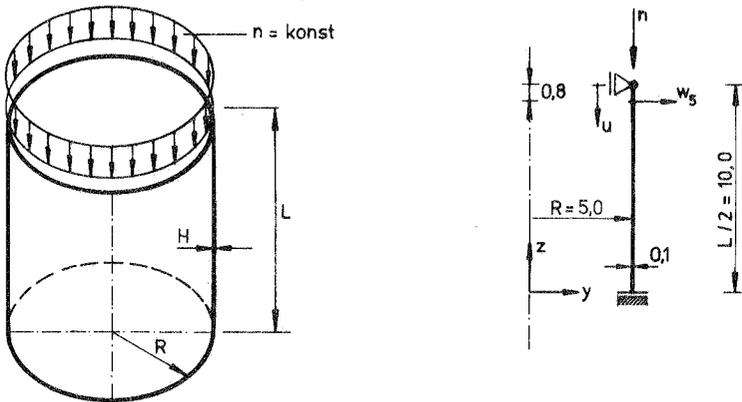


Bild 5.12: System und Idealisierung am halben System

Die Idealisierung erfolgt mit rotationssymmetrischen Elementen, da bei dem vorliegenden $R/H = 5,0/0,1 = 50$ das System rotationssymmetrisch versagt. Verwendet werden insgesamt 15 kubische Elemente, die über die Dicke in neun Punkten integriert werden.

5.4.2 Werkstoff

Für den Versuchswerkstoff sind Spannungs-Dehnungs-Kurven in [58] angegeben. Die vorliegende Aluminiumlegierung weist keine ausgeprägte Fließgrenze auf. Es soll geklärt werden, ob sich mit einer bilinearen

Idealisierung des Werkstoffs das Tragverhalten des Systems ausreichend erfassen lässt. Dazu werden vier alternative Approximationen des Materials vorgenommen. Diese sind in Bild 5.13 dargestellt. Im einzelnen wird gewählt:

Approximation	E [psi]	ν	T [psi]	σ_F [psi]
1	$2,4 \cdot 10^6$	0,32	0	12 000
2	$2,4 \cdot 10^6$	0,32	60 000	10 000
3	$10 \cdot 10^6$	0,32	75 000	10 000
4	$6 \cdot 10^6$	0,32	500 000	6 000

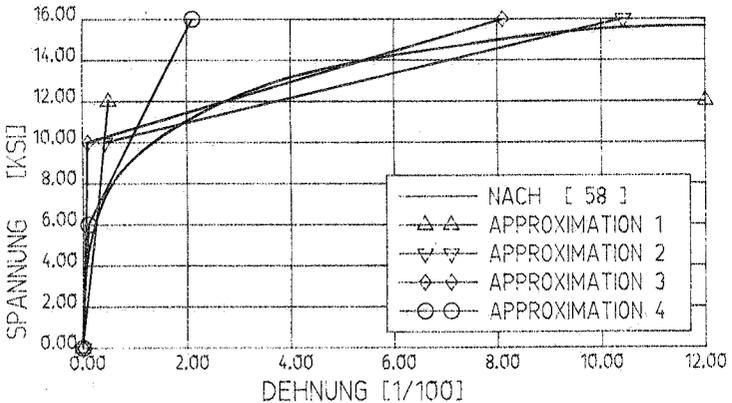


Bild 5.13: Approximation des Werkstoffs am halben System.

5.4.3 Ergebnisse

Das Systemverhalten wird anhand der sich ergebenden Last-Verschiebungs-Kurven beurteilt. Betrachtet werden die Axialverschiebung u des oberen Randes, Bild 5.14, und die durch die Biegerandstörung hervorgerufene Radialverschiebung w_3 , Bild 5.15.

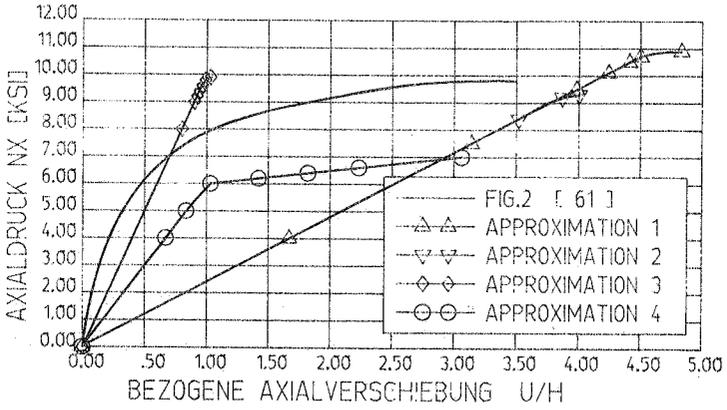


Bild 5. 14: Druck-Axialverschiebungs-Kurven

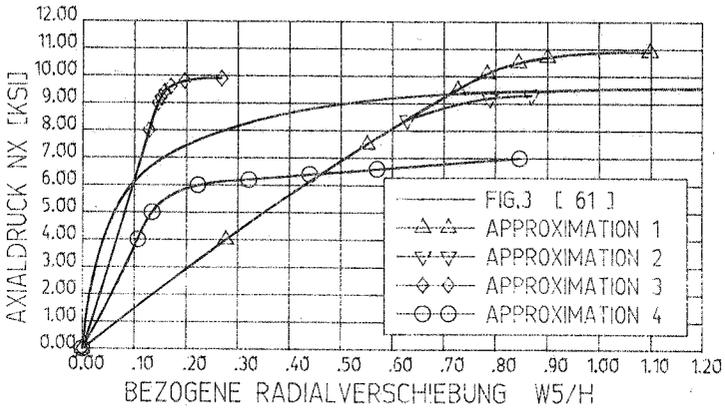


Bild 5. 15: Druck-Radialverschiebungs-Kurven

Es ergibt sich, daß mit jedem der betrachteten Modelle das Systemverhalten nur in einem begrenzten Bereich ausreichend erfaßt wird. So werden mit den Approximationen 1 und 2 die Verschiebungen bis zu einer Längslast $n = 9$ ksi überschätzt und dann erst in etwa angenähert. Für die Approximationen 3 und 4 erhält man ein umgekehrtes Verhalten. Für niedrige Laststufen, bei denen der Werkstoff besser angepaßt ist, stimmen Axial- und Radialverschiebung ebenfalls besser mit denen des Versuchs überein. Demgegenüber wird dann im Bereich der Maximallast ein zu steifes Verhalten vorhergesagt.

Die rechnerischen Traglasten hängen stark von der Festlegung der Fließgrenze ab und liegen für die Modelle 1 bis 3 nur geringfügig über der Last bei der erstes Fließen auftritt. Ein gewisses Überschreiten über die Fließgrenze hinaus ergibt sich nur mit dem Modell 4 (größter Tangentenmodul T). Als Versagensmodus tritt das Einfallen einer ringförmigen Beule unterhalb des oberen Randes auf.

Der Einfluß der geometrischen Nichtlinearität zeigt sich nur bei den Approximationen 1 und 2. Ab etwa $n = 4$ ksi weichen die Radialverschiebungen w_5 vom linearen Verlauf ab.

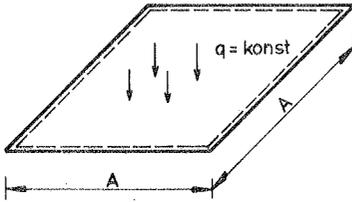
5.4.4 Folgerung

Eine ausreichende Beschreibung des Systemverhaltens ist mit der bilinearen Approximation des gegebenen Versuchswerkstoffs nur begrenzt möglich. Hier wäre es sinnvoll, den einachsigen Vergleichszustand über ein Potenzgesetz darzustellen.

5.5 Querbelastete Quadratplatte

Zur Verifizierung und zur Untersuchung der Konvergenz der numerischen Lösung bei Idealisierung mit dem Platten-/Schalenelement wird nur der stofflich nichtlineare Fall untersucht. Entsprechende Untersuchungen für das rein geometrisch nichtlineare Problem mit dem Element liegen vor, siehe z. B. [73].

5.5.1 System und Abmessungen



gelenkige Lagerung

$A = 20 \text{ in}$ $H = 0,1 \text{ in}$

Material $E = 10^7 \text{ lbs/in}^2$, $\nu = 0$ perfekt plastisch
 $\sigma_F = 36000 \text{ lbs/in}^2$

Bild 5.16: System und Material

Mit den angegebenen Abmessungen und Materialkonstanten wurde das Beispiel erstmals von Armen u. a. [5] untersucht und seither von verschiedenen anderen Autoren zu Vergleichen verwendet.

5.5.2 Idealisierungen

Unter Beachtung der Symmetrie wurde ein Plattenviertel mit 2×2 und 3×3 kubischen Elementen S 16 sowie mit 5×5 quadratischen Elementen S 9 idealisiert (Bild 5.17).

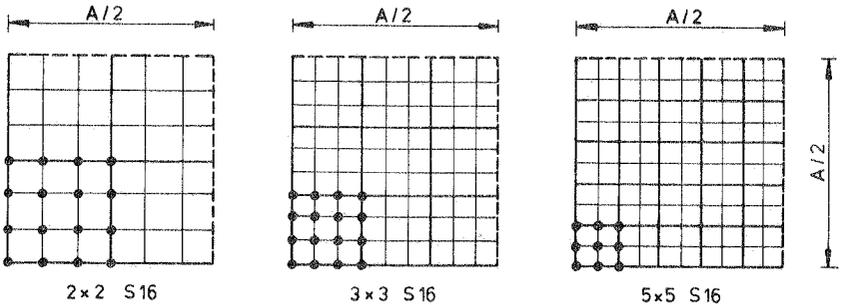


Bild 5.17: Idealisierung für ein Plattenviertel

	2 x 2 S 16	3 x 3 S 16	5 x 5 S 9
Gesamtzahl Knoten	7 x 7 = 49	10 x 10 = 100	11 x 11 = 121
Gauss-Punkte/Element	3 x 3 = 9	3 x 3 = 9	2 x 2 = 4
Gauss-Punkte insgesamt	9 x 4 = 36	9 x 9 = 81	4 x 25 = 100

In Dickenrichtung wurden sieben und neun Integrationspunkte gewählt.

5.5.3 Ergebnisse

In Bild 5.18 sind Last-Durchbiegungs-Kurven für den Plattenmittelpunkt aufgetragen. Die äußere Last q ist auf die Traglast nach der Fließgelenk-linientheorie q_{F1} bezogen. Mit dem vollplastischen Moment

$$M_p = \sigma_F \frac{H^2}{4} = 90 \text{ lbs/in}^2$$

des Querschnitts bei einachsiger Beanspruchung ergibt sich für q_{F1} nach [76]

$$q_{F1} = \frac{24 M_p}{A^2} = 5,4 \text{ lbs/in}^2$$

Als obere Schranken für die Traglast liegen aus dem Schrifttum ferner vor:

$$\text{nach [70]} \quad q^+ = \frac{2}{\sqrt{3}} q_{F1} = 1,1547 q_{F1}$$

$$\text{nach [43]} \quad q^+ = 1,106 q_{F1}$$

Bereits mit dem Raster 2 x 2 S 16 ergaben sich Last-Durchbiegungs-Kurven, die sich durch Verfeinern des Rasters oder durch Erhöhen der Punkte in Dickenrichtung von sieben auf neun nur noch unwesentlich ändern. Aufgetragen ist daher nur eine Kurve der eigenen Lösung. Zum Vergleich werden FE-Lösungen von Bergan [15], Fig. 6.19 und Bäcklund [8], Fig. 6.5 herangezogen. Mit letzterer ergibt sich gute Übereinstimmung, während sich nach [15] ein zu steifes Verhalten einstellt (die Traglast liegt über der oberen Schranke nach [43]).

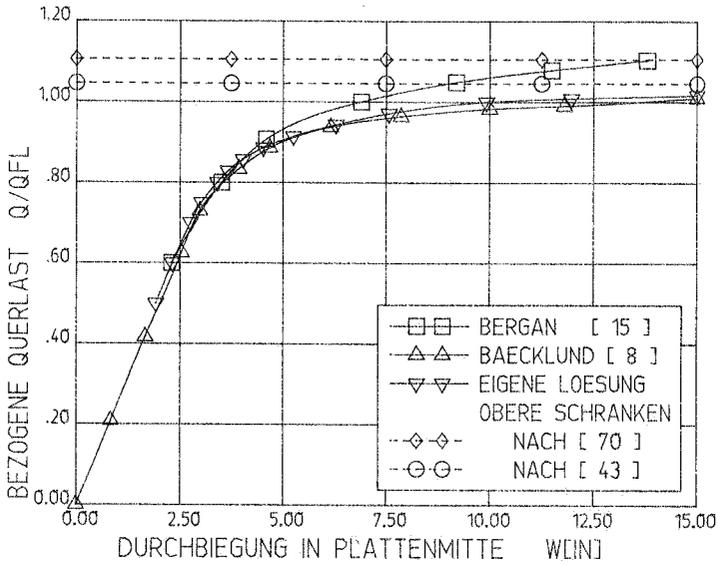


Bild 5. 18: Last-Durchbiegungs-Kurven

In Bild 5. 19 ist die Ausbreitung der Fließzonen an der Plattenoberfläche dargestellt. Die markierten Bereiche ergeben sich, wenn man für eine Laststufe die zu den plastischen Integrationspunkten gehörenden Umgebungen zusammenfaßt. Dem Bild liegt das Raster 5 x 5 S 9 zugrunde. Mit den anderen Rastern (insbesondere 2 x 2 S 16) erhält man bedingt durch die spärliche Verteilung der Integrationspunkte in der Plattenebene größere Bilder. Das Fließen beginnt in der Plattenecke. Bei weiterer Laststeigerung bildet sich ein zweiter plastischer Bereich in der Plattenmitte, der schließlich mit dem Eckbereich über die Diagonale zusammenwächst. Danach breitet sich die plastische Zone über die gesamte Oberfläche aus.

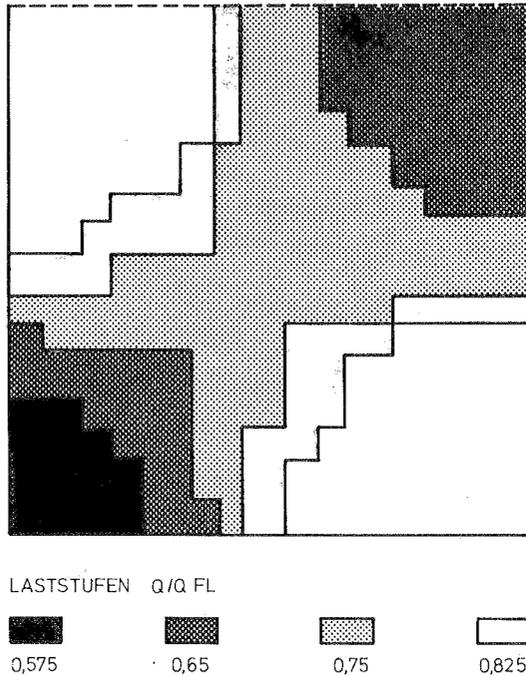


Bild 5.19: Ausbreitung der Fließzonen an der Oberfläche
(Plattenviertel)

5.6 Imperfekte Rechteckplatte unter Längslast

Im folgenden wird eine längsgedrückte Rechteckplatte mit vorgegebener geometrischer Imperfektion untersucht. Geometrische und stoffliche Nichtlinearität werden gleichzeitig berücksichtigt.

5.6.1 System und Abmessungen

Die Abmessungen entsprechen einer zuerst von Crisfield [29] und dann von Kröplin [54] untersuchten Platte.

$A = 222,25 \text{ mm}$
 $B = 254 \text{ mm}$
 $\alpha = A/B = 0,875$
 $H = 3,175 \text{ mm}$

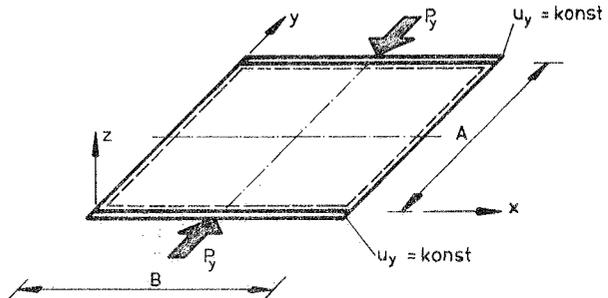


Bild 5. 20: System

Randbedingungen: gelenkig, frei verschieblich in der x-y-Ebene, gedrückte Ränder bleiben gerade

Werkstoff: $E = 205\,000 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,3$, $T = 0$,
 $\sigma_F = 250 \text{ N/mm}^2$

Imperfektion: Die Ausgangsgeometrie wird affin zur ersten Eigenform angenommen (eine Sinushalbwellen in x- und in y-Richtung).
Es ist:

$$z = c \sin \frac{\pi x}{B} \sin \frac{\pi y}{A}$$

Imperfektionsamplitude: Für c wird gewählt:
 $c = 0,254 \text{ mm}$ und $2,54 \text{ mm}$
Damit ist:
 $c/H = 0,08$ und $0,8$

Idealisierung: für ein Plattenviertel $4 * 4$ quadratische Elemente S 9

5.6.2 Ergebnisse

Das Tragverhalten wird anhand der Last-Durchbiegungs-Kurven im Plattenmittelpunkt beurteilt. Diese sind in Bild 5.21 für die Imperfektionsamplituden $c/H = 0,08$ und $0,8$ dargestellt. Die äußere Last ist auf die Normalkraft P_{yF} bezogen, die völlige Plastifizierung bewirkt.

$$P_{yF} = \sigma_F B H = 201,61 \text{ kN}$$

Eine weitere charakteristische Größe ist die Euler-Last P_{yki} der perfekten Platte. Mit

$$k = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 \quad \text{und} \quad \sigma_e = \frac{\pi^2 E H^2}{12(1-\nu^2)B^2}$$

$$P_{yki} = k \sigma_e B H = 95,53 \text{ kN}$$

$$P_{yki}/P_{yF} = 0,474$$

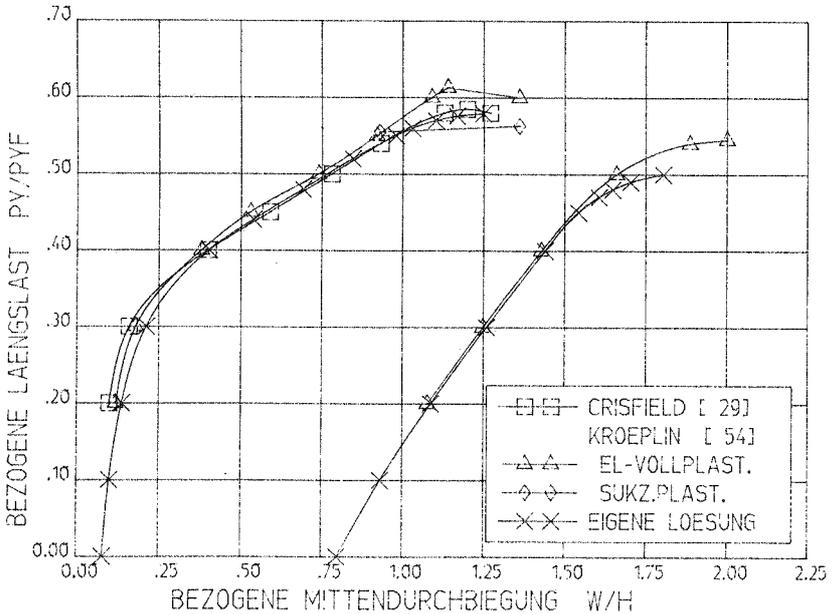


Bild 5.21: Last-Durchbiegungs-Kurven für $c/H = 0,08$ und $0,8$

Aus den Last-Durchbiegungs-Kurven erkennt man: Für die kleine Imperfektionsamplitude $c/H = 0,08$ wächst die Mittendurchbiegung zunächst nur schwach an. Ab etwa $P_y/P_{yF} = 0,3$ (bzw. $P_y/P_{yki} = 0,63$) geht die Platte in einen deutlich weicheren Zustand über. Oberhalb $P_y/P_{yF} = 0,5$ ($1,05 P_{ki}$) beginnt ein gewisses Versteifen. Das Verhalten ähnelt dem der perfekten Platte (keine Mittendurchbiegung bis zur Euler-Last, Verzweigen in die stabile Gleichgewichtslage, verbunden mit dem Auftreten von Mittendurchbiegungen, bei weiterer Laststeigerung zunehmende Versteifung). Im Gegensatz dazu der Fall mit der größeren Imperfektionsamplitude $c/H = 0,8$, bei dem die Mittendurchbiegung mit steigender Last weitgehend gleichmäßig anwächst.

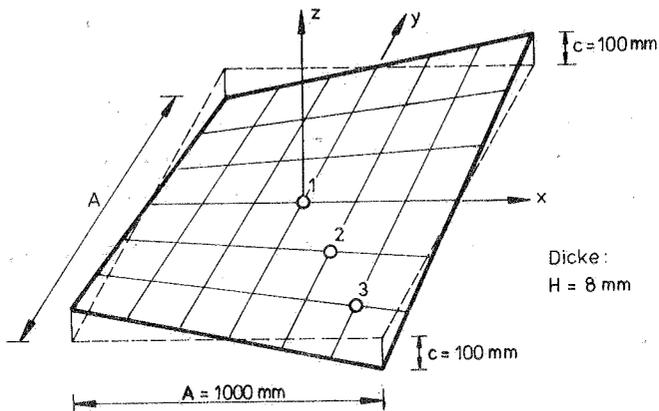
Der Plastifizierungsbeginn liegt für $c/H = 0,08$ bei etwa $P_y/P_{yF} = 0,56$ und für $c/H = 0,8$ bei $0,45 P_{yF}$. Die Last-Durchbiegungs-Verläufe werden zunehmend flacher. Die Traglasten ergeben sich zu $P_{max} = 0,58 P_{yF}$ ($c/H = 0,08$) und $0,51 P_{yF}$ ($c/H = 0,8$).

Zum Vergleich sind in Bild 5.21 die Ergebnisse nach [29] und [54] aufgetragen.

5.7 Hyperbolisches Paraboloid unter Außendruck

Behandelt wird eine eingespannte HP-Schale unter Außendruckbelastung. Durchgeführt wird zuerst eine nur geometrisch nichtlineare Rechnung für zwei Idealisierungen, deren Ergebnisse mit dem Schrifttum verglichen werden. Es folgt der rein stofflich nichtlineare Fall und schließlich die Berücksichtigung beider Nichtlinearitäten.

5.7.1 System



Rand: eingespannt und unverschieblich
Werkstoff: $E = 2850 \text{ N/mm}^2$, $\nu = 0,4$, $T = 0$,
 $\sigma_F = 1,0 \text{ N/mm}^2$

Bild 5.22: System und Material

5.7.2 Geometrisch nichtlineare elastische Lösung

5.7.2.1 Idealisierung

Zur Überprüfung der Idealisierung werden zuerst Lösungen für zwei verschiedene Elementraster ermittelt und miteinander verglichen. Gewählt werden für die gesamte Schale ein $4 * 4$ und ein $6 * 6$ Raster mit kubischen Elementen S 16, die jeweils in $3 * 3$ Gauss- und in

7 Schichtpunkten integriert werden. In Bild 5.23 sind die Last-Durchbiegungs-Kurven in den mit 1 bis 3 bezeichneten Punkten der Druckdiagonalen einander gegenübergestellt. Während sich die beiden Raster im Punkt 1 (Schalenmittelpunkt) nur unwesentlich unterscheiden, treten zum Rand hin größere Differenzen in den Durchbiegungen auf. Besonders im Punkt 3 (A/6 vom Rand entfernt) wird das Verhalten der Schale durch das grobe 4 * 4 Raster zu steif wiedergegeben. Im folgenden wird daher nur noch das 6 * 6 Raster verwendet (361 Knoten, 1445 Freiheitsgrade).

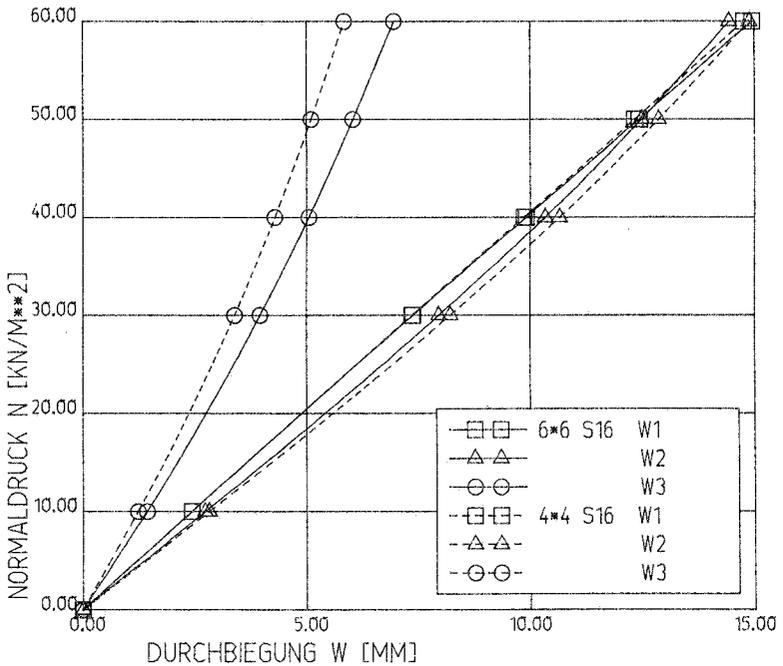


Bild 5.23: Last-Durchbiegungs-Kurven

5.7.2.2 Vergleich mit vorhandenen Lösungen

Zum Vergleich findet sich im Schrifttum eine Reihe von finiten Element-Lösungen [21], [30], [14], die sich in den angegebenen Ergebnissen nur gering unterscheiden. Die eigene Lösung mit 6×6 S16 Elementen wird in Bild 5.24 einer neueren Lösung von Batoz u. a. [14] gegenübergestellt. Es zeigt sich gute Übereinstimmung in den verglichenen Verschiebungen der Punkte 2 und 3.

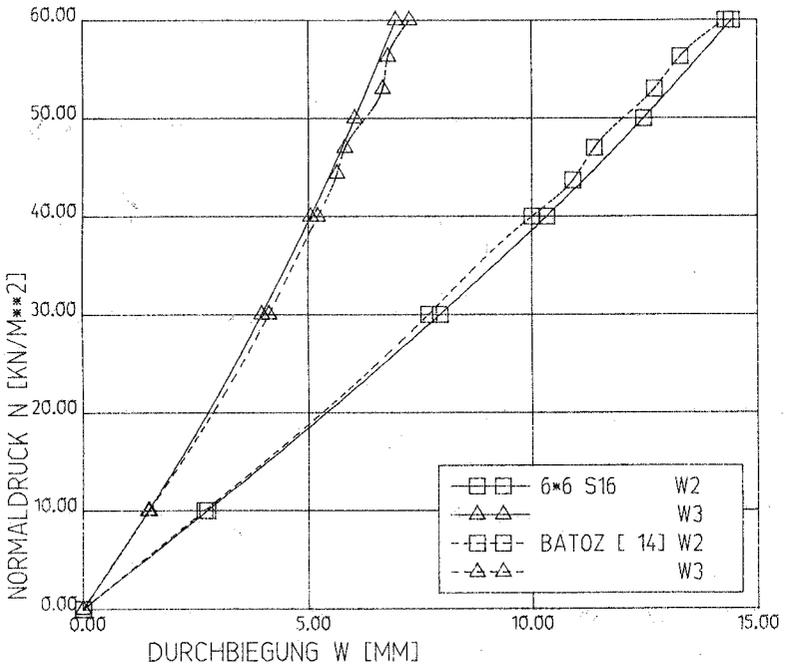


Bild 5.24: Last-Durchbiegungs-Kurven

Die geometrische Nichtlinearität bewirkt eine Versteifung der Schale. In einem Außennormaldruckbereich von etwa 45 kN/m^2 bis 55 kN/m^2 zeigen sich in der Lösung [14] zudem geringe Instabilitäten des Systems in den Verschiebungen der Punkte 2 und 3 an.

5.7.3 Elastoplastische Lösungen

5.7.3.1 Geometrisch linearer Fall

Die Plastizierung beginnt bei einem Normaldruck von $3,0 \text{ kN/m}^2$ an den Oberflächen im Bereich der Schalenmitte und der eingespannten Ränder. Ab etwa $3,3 \text{ kN/m}^2$ nimmt die Mittendurchbiegung w_1 gegenüber der linearen Lösung [20] stark zu, siehe Bild 5.25. Eine Laststeigerung über $3,5 \text{ kN/m}^2$ hinaus ist nicht möglich. Ergebnisse nach [8] weichen im Linearen deutlich ab, führen aber zu einer vergleichbaren Maximallast.

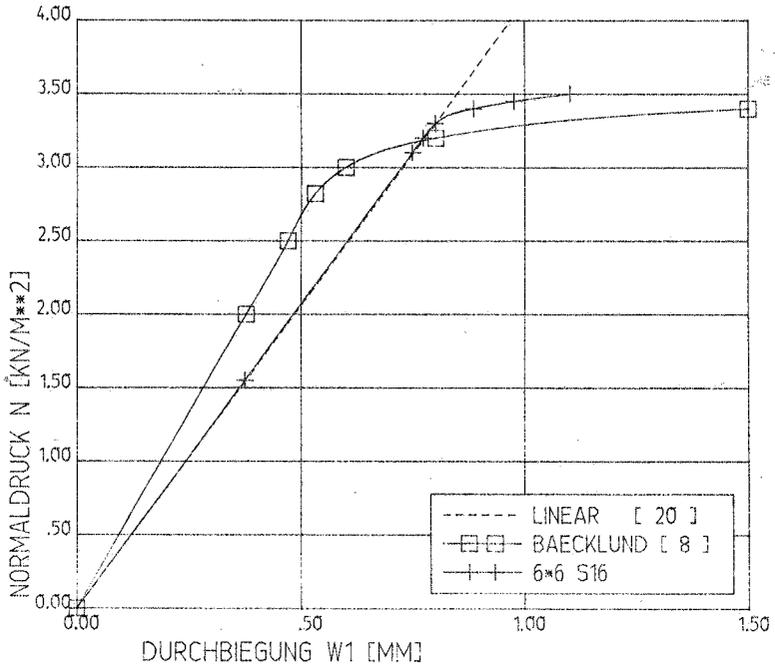


Bild 5.25: Last-Durchbiegungs-Kurven

5.7.3.2 Geometrisch nichtlinearer Fall

In Bild 5.26 sind die Last-Durchbiegungs-Kurven in den Punkten 1 bis 3 aufgetragen.

Aus Bild 5.25 ist bereits ersichtlich, daß die Verschiebungen des elastoplastischen Problems im Vergleich zu Systemabmessungen klein bleiben. Die zusätzliche Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität wird somit auch keine wesentlichen Änderungen des Tragverhaltens bewirken. Ein Vergleich der Kurven für w_1 des linearen (Bild 5.25) und des nichtlinearen Falls (Bild 5.26) ergibt im Rahmen der Zeichengenauigkeit keine Unterschiede. Ein abweichendes Verhalten tritt erst oberhalb von $3,5 \text{ kN/m}^2$ auf: weitere Laststeigerung ist nur dann möglich, wenn die geometrische Nichtlinearität berücksichtigt wird.

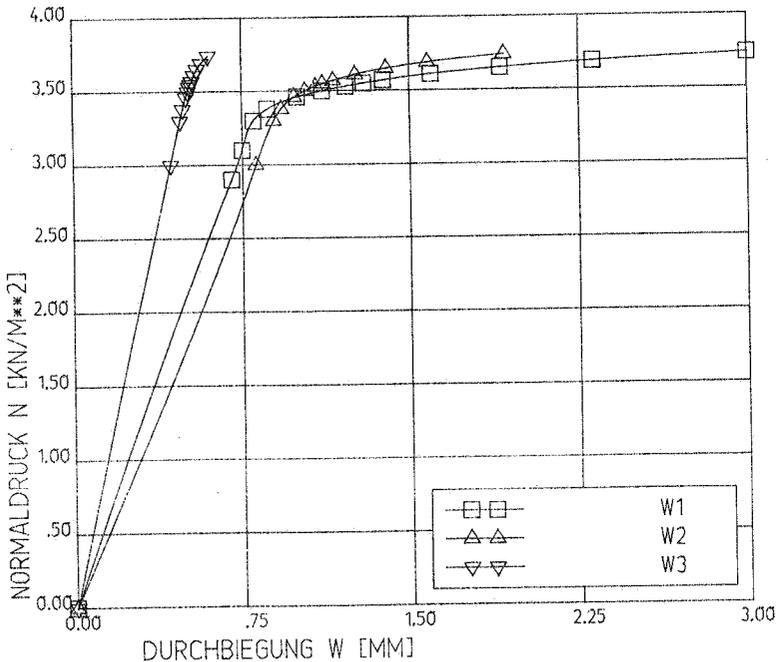


Bild 5.26: Last-Durchbiegungs-Kurven

Der Eckbereich der Schale bleibt bis zur Maximallast $3,75 \text{ kN/m}^2$ elastisch, was sich auch in dem bis dahin nur schwach nichtlinearen Anwachsen der Durchbiegung im Punkt 3 zeigt. Bemerkenswert ist noch, daß sich mit fortschreitender Plastizierung eine Änderung in der Form der Biegefläche ergibt, nämlich: die Verschiebung des Mittelpunktes wächst stärker an als die der übrigen Punkte, so daß sich der Ort der Maximalverschiebung vom Punkt 2 in den Punkt 1 verschiebt (Bild 5.27).

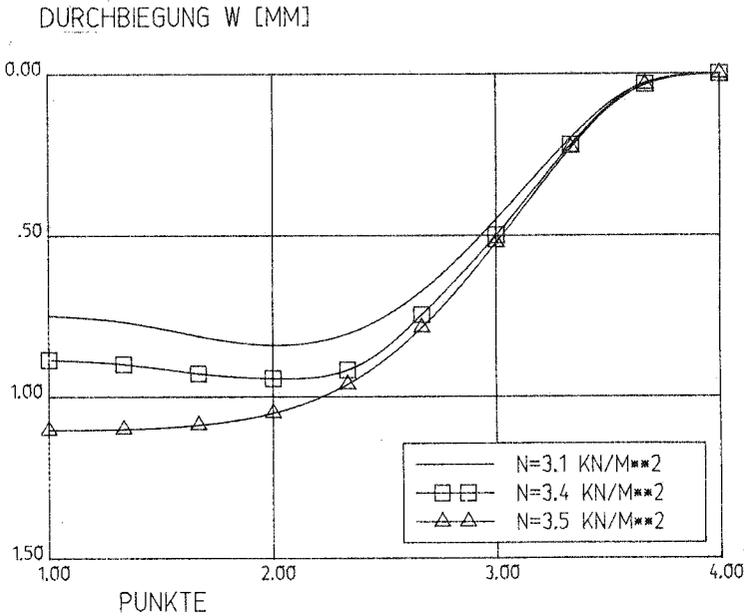


Bild 5.27: Biegelinien längs der Diagonalen 1 - 4

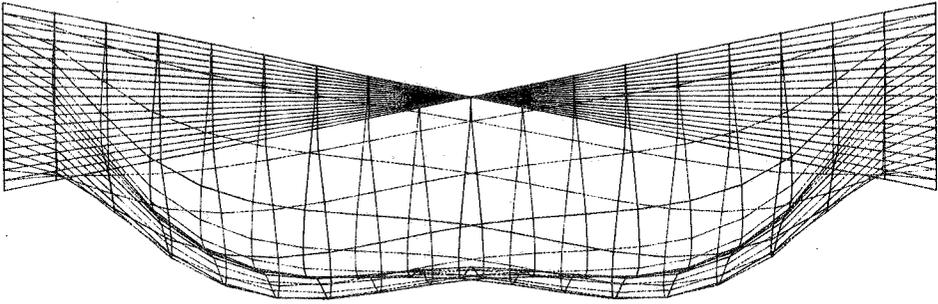


Bild 5.28: Verschiebungsfigur, elastischer Zustand,
Projektion in die x - z - Ebene

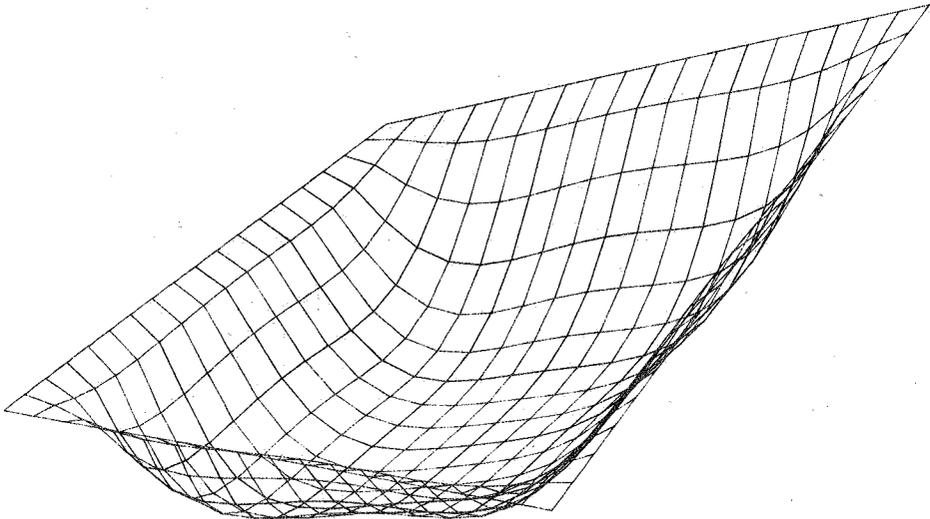
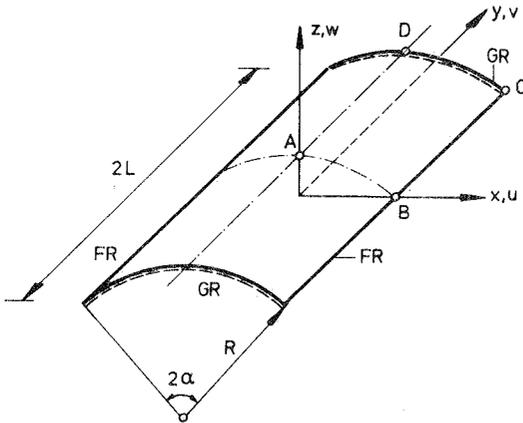


Bild 5.29: Verschiebungszustand, plastischer Zustand, 3,5 kN/m²

5.8 Querbelastetes Zylinderschalenfeld

Das im folgenden untersuchte Zylinderschalenfeld unter vertikaler Querbelastung wurde im Schrifttum bereits vielfach verwendet, um Schalelemente zu testen und zu vergleichen. Eine Zusammenfassung linearer Lösungen findet sich bei Forsberg [35]. Elastoplastische Ergebnisse wurden von Dupuis u. a. [32], Bäcklund [8] und in einer neueren Arbeit von Corneau [28] erzielt. Die Berücksichtigung beider Nichtlinearitäten wurde von Kräkeland [53] vorgenommen.

5.8.1 System und Idealisierung



$$R = 7600 \text{ mm}$$

$$l = 7600 \text{ mm}$$

$$\alpha = 40^\circ$$

$$H = 76 \text{ mm}$$

Ränder :

FR : freier Rand

GR : gelenkig, $w=0$

Material :

$$E = 21000 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0$$

$$T = 0 \quad \sigma_F = 4,2 \text{ N/mm}^2$$

Bild 5.30: System und Material

Idealisiert wird unter Beachtung der Symmetrie das Schalenviertel A, B, C, D. Gewählt wird ein Raster mit 3×3 kubischen Elementen S16, die jeweils in 4×4 Gauss-Punkten und in 7 Punkten über die Dicke integriert werden (insgesamt 100 Knoten, 441 Freiheitsgrade).

5.8.2 Geometrisch lineares, elastoplastisches Verhalten

Die in Bild 5.31 zusammengestellten Last-Durchbiegungs-Kurven für w im Punkt B (Mitte des freien Randes) zeigen teilweise beträchtliche Unterschiede.

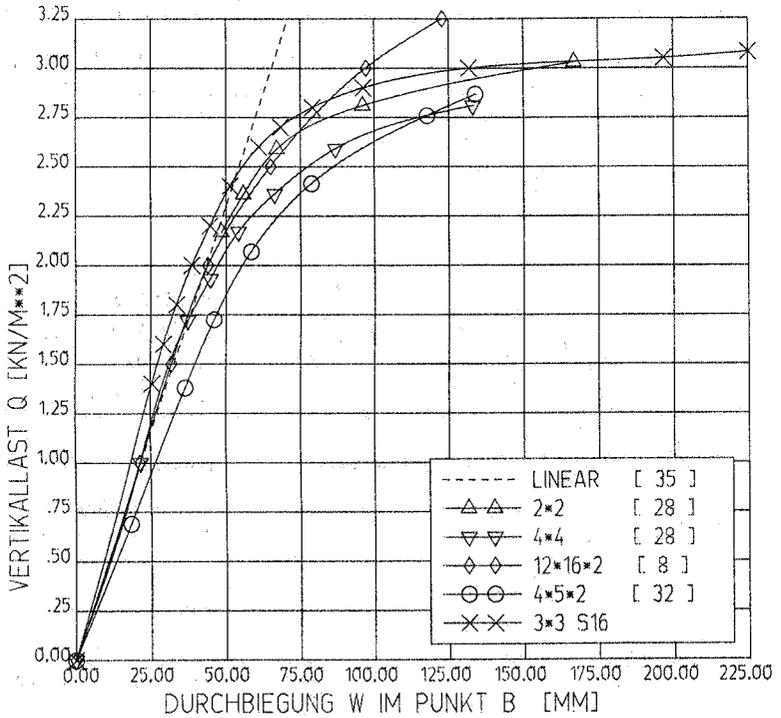


Bild 5.31: Last-Durchbiegungs-Kurven

Der Lösung nach [8] liegt eine sehr aufwendige Idealisierung mit 1264 Freiheitsgraden zugrunde. Im elastischen Bereich stimmt sie gut mit der linearen Lösung [35] überein. Die elastoplastischen Zustände werden jedoch gegenüber den anderen Ergebnissen relativ steif wiedergegeben. Andere, in Fig. 6.17 [8] angegebene, weniger feine Idealisierungen führen bereits zu Abweichungen im Linearen (zu kleine Verschiebungen).

Demgegenüber stimmt die Lösung nach [28] schon bei grober Idealisierung (2*2 Raster, 126 Freiheitsgrade) gut mit [35] überein. Im weiteren wachsen die elastoplastischen Verschiebungen stark an. Eine Verfeinerung des Rasters (4*4) bewirkt, daß der Übergang zum nichtlinearen Verhalten bei etwas geringeren Lasten stattfindet.

Die eigene Lösung entspricht in etwa der des 2 * 2 Rasters in [28]. Konvergenzuntersuchungen wurden nicht durchgeführt. Es ist jedoch zu erwarten, daß bei Rasterverfeinerung eine bessere Approximation im linearen Bereich zu erzielen wäre, verbunden mit einer Reduktion der rechnerischen Maximallast von jetzt $q_{\max} = 3,05 \text{ kN/m}^2$.

Keine Idealisierungsvergleiche sind in [32] durchgeführt. Das verwendete Modell überschätzt bereits die linearen Verschiebungen im Punkt B.

In Bild 5.32 sind die Spannungen σ_{yy} der einzelnen Dickenpunkte über den Querschnitt aufintegriert. Man kommt so zu den für drei Laststufen

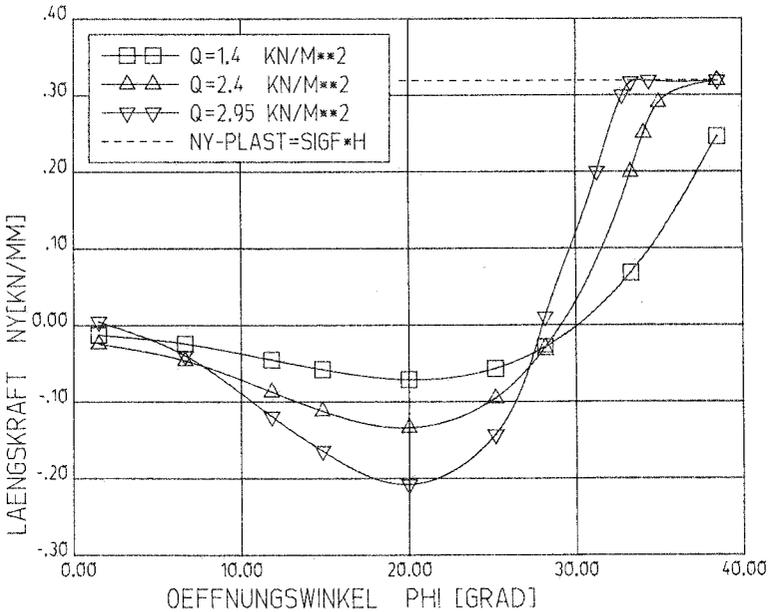


Bild 5.32: Längskraftverlauf im Schnitt A - B

ermittelten Verläufen der Längskraft n_y im Schnitt A - B. Deutlich wird, wie sich bei plastischer Belastung die Lastabtragung ändert. Eine im Elastischen noch vorhandene Spitze der Längskraft wird abgeschnitten. Bei völliger Durchplastizierung des Querschnitts erreicht n_y den Maximalwert $n_{y \max} = \sigma_F H = 0,319 \text{ kN/mm}$.

5.8.3 Geometrisch nichtlineares, elastoplastisches Verhalten

Die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität führt zu einer Versteifung des Systems. Besonders stark werden die Verschiebungen des Punktes B im Bereich der Maximallast reduziert. Diese liegt mit $q_{\max} = 3,25 \text{ kN/m}^2$ etwa 7 % über der des geometrisch linearen Falls. Zum Vergleich angegeben sind in Bild 5.33 die Last-Durchbiegungs-Kurven nach [53] und die der geometrisch linearen Rechnung.

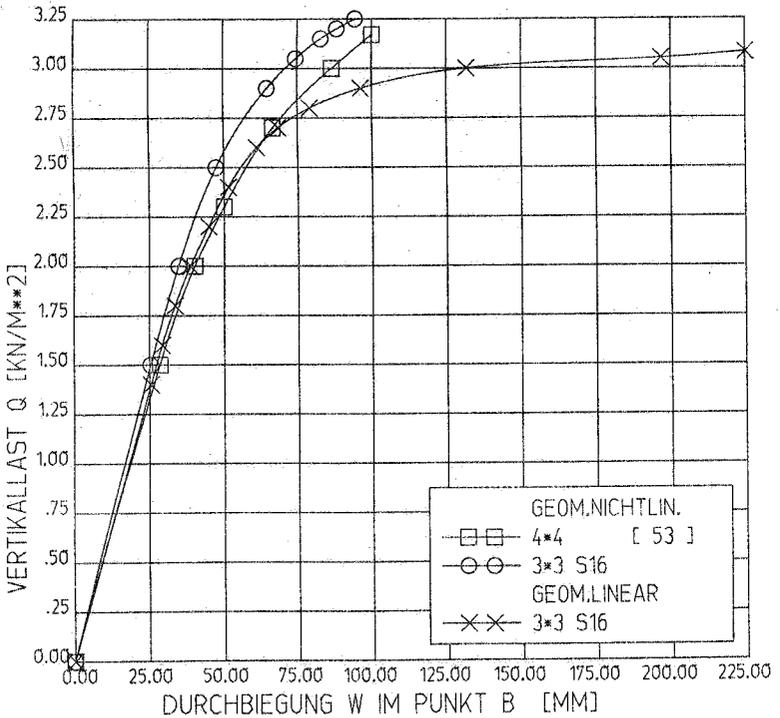


Bild 5.33: Last-Durchbiegungs-Kurven

5.9 Traglasten längsgedrückter, imperfekter Rechteckplatten mit Seitenverhältnissen $\alpha \leq 1$

5.9.1 Problemstellung

Die folgende Parameterstudie zum Tragverhalten einachsiger gedrückter Rechteckplatten wurde in Ergänzung zu Versuchen von Fischer und Harre [34] durchgeführt.

Die Seitenverhältnisse der untersuchten Platten liegen im Bereich $\alpha = a/b \leq 1$, das Tragverhalten damit im Übergang von der Platte zum Stab. Den Versuchsbedingungen entsprechend wurde in der Rechnung für alle Fälle gelenkige Lagerung angenommen. Weiter wurde für die Ränderfreie Verschieblichkeit in der Plattenebene vorausgesetzt, wobei die gedrückten Längsränder gerade bleiben (im Versuch wurde das Geradebleiben durch die Einleitung der Last über einen sehr steifen Randträger erreicht).

Ziel der Rechnung ist es, Aussagen über den Einfluß vorgegebener geometrischer Imperfektionen auf die Traglast zu gewinnen. Die gezielte Vorgabe bestimmter Formabweichungen und deren Variation im Rahmen einer Parameterstudie ist im Versuch nur unzulänglich möglich, so daß sich hier die Rechnung als ideale Ergänzung anbietet.

Die rechnerische Untersuchung wurde in folgenden Schritten durchgeführt:

- Nachrechnung einiger ausgesuchter Fälle des Versuchs mit einem direkten Vergleich zwischen rechnerischer und experimenteller Lösung.
- Vorstudie mit dem Ziel, Anhaltspunkte über den Einfluß der Imperfektionsform auf die Traglast zu erhalten.
- Untersuchung zur Auswirkung der Größe der Anfangsausbiegung auf die Traglast.

5.9.2 Bezeichnungen

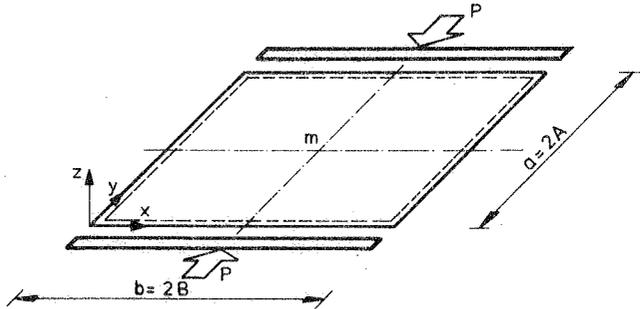


Bild 5.34: System

Mit den im Stahlbau üblichen Bezeichnungen:

Längenabmessungen	a, b [mm]
Plattendicke	t [mm]
Seitenverhältnis	$\alpha = a/b$
Werkstoff Baustahl	$E = 210\,000 \text{ N/mm}^2, \mu = 0,3, \sigma_F [\text{N/mm}^2]$
Schlankheit	$\lambda^* = \frac{a}{t} \sqrt{\frac{\sigma_F}{240}}$
ideale Beullast (bezogen auf a)	$P_{ki} = \sigma_{ki} b t$ <p>mit</p> $\sigma_{ki} = \bar{k} \bar{\sigma}_e$ $\bar{k} = (1 + \alpha^2)^2$ $\bar{\sigma}_e = \pi^2 \frac{E t^2}{12(1 - \mu^2) a^2}$

5.9.3 Imperfektion

Die von der ideal ebenen Platte abweichende Ausgangsgeometrie ist hinsichtlich der Form und der Größe der Anfangsausbiegungen festzulegen. In [51] wird der Vorschlag gemacht, die Größe der Amplitude

in Abhängigkeit von a und dem Verhältnis a/t anzusetzen. Nämlich mit:

$$c = 0,00004 a \frac{a}{t}$$

Dementsprechend ist die Größe im folgenden als Vielfaches von

$$c_1 = 0,00001 a \frac{a}{t}$$

angegeben. Die Form wird üblicherweise affin zur Beulform angenommen. Diese besteht aus je einer Sinushalbwellen in x - und in y -Richtung (Bild 5.35 a). Also:

$$z = c \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi y}{a}$$

Alternativ dazu wird eine an einer Bruchlinienfigur orientierte Ausgangsgeometrie angenommen. Diese ergibt sich wie in Bild 5.35 b dargestellt.

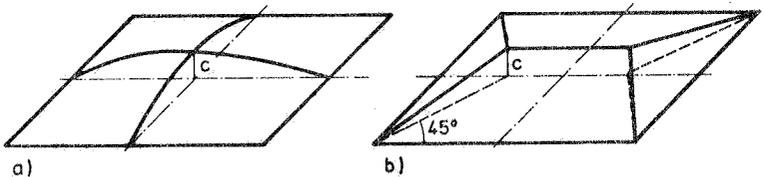


Bild 5.35: Angenommene Imperpektionsformen

Die im Versuch aufgebrauchten Vorverformungen entsprachen näherungsweise der Form a).

5.9.4 Idealisierung

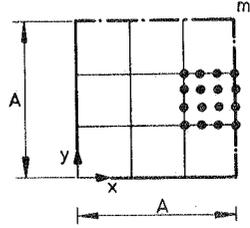
Die Idealisierung beschränkt sich aus Symmetriegründen auf ein Plattenviertel. Die Raster der einzelnen Seitenverhältnisse sind Bild 5.36 zu entnehmen. Gewählt wurden in allen Fällen kubische Elemente $S16$ mit sieben Punkten für die Dickenintegration.

$\alpha = 1$

Raster 3×3 S16

100 Knoten

414 Freiheitsgrade

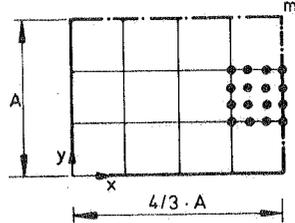


$\alpha = 3/4$

Raster 3×4 S16

130 Knoten

549 Freiheitsgrade

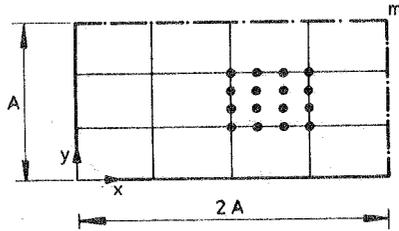


$\alpha = 1/2$

Raster 3×4 S16

130 Knoten

549 Freiheitsgrade



$\alpha = 1/4$

Raster 3×6 S16, 190 Knoten, 819 Freiheitsgrade

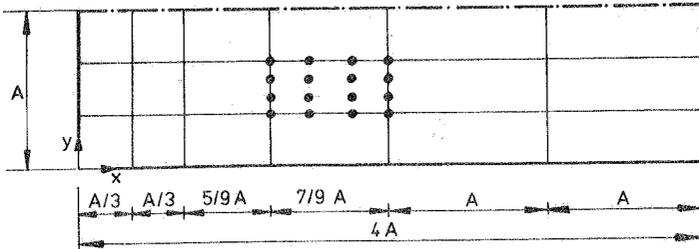


Bild 5. 36:

Idealisierungen des Plattenviertels

5.9.5 Vergleich mit Versuchsergebnissen

Ein Teil der Versuche wurde mit den in Tabelle 1 [34] angegebenen Abmessungen und Werkstoffdaten nachgerechnet. In Bild 5.37 sind dazu für das Seitenverhältnis $\alpha = 3/4$ rechnerische und gemessene Last-Mittendurchbiegungs-Kurven einander gegenübergestellt und in Bild 5.38 die für $\alpha = 1/2$. Im wesentlichen zeigt sich, daß das im Experiment festgestellte Verhalten durch die Rechnung gut wiedergegeben wird. Bei den verglichenen Fällen treten Abweichungen in den Traglasten zwischen $\sim 1\%$ und $\sim 11\%$ auf (siehe Tabelle 5.3).

Fall	P_{\max}/P_{ki}		Abweichung
	Versuch	Rechnung	%
3/4 - 250 - 2	0,737	0,744	0,9
330 - 1	0,96	1,0	4,1
540 - 1	1,78	1,97	10,7
540 - E	1,78	1,83	2,8
1/2 - 250 - 1	0,86	0,948	10,2

Tabelle 5.3

Bemerkenswert ist, daß die rechnerischen Traglasten über denen der Versuche liegen. Eine Erklärung dafür wäre, daß im Versuch zusätzliche, die Traglast mindernde Einflüsse vorlagen. Möglich ist beispielsweise eine imperfekte Lasteinleitung. Nimmt man für die Rechnung exzentrische Belastung an, wobei die Ausmittigkeit mit $e = t/10$ über der Breite b konstant angenommen wird (Fall 3/4 - 540 - E), führt dies bereits zu beträchtlicher Traglastminderung.

Weiter hängt die Traglast von der Höhe der Fließgrenze ab, deren experimentelle Bestimmung wiederum stark vom zeitlichen Verlauf der Lastaufbringung beeinflusst wird. In [34] wurde die dynamische Streckgrenze $\sigma_{s \text{ dyn}}$ ermittelt, so daß für die Rechnung nur $\sigma_F = \sigma_{s \text{ dyn}}$ gesetzt werden kann. Für den im Versuch verwendeten Baustahl wurden für $\sigma_{s \text{ dyn}}$ Werte zwischen $241,4 \text{ N/mm}^2$ und $286,0 \text{ N/mm}^2$ ermittelt.

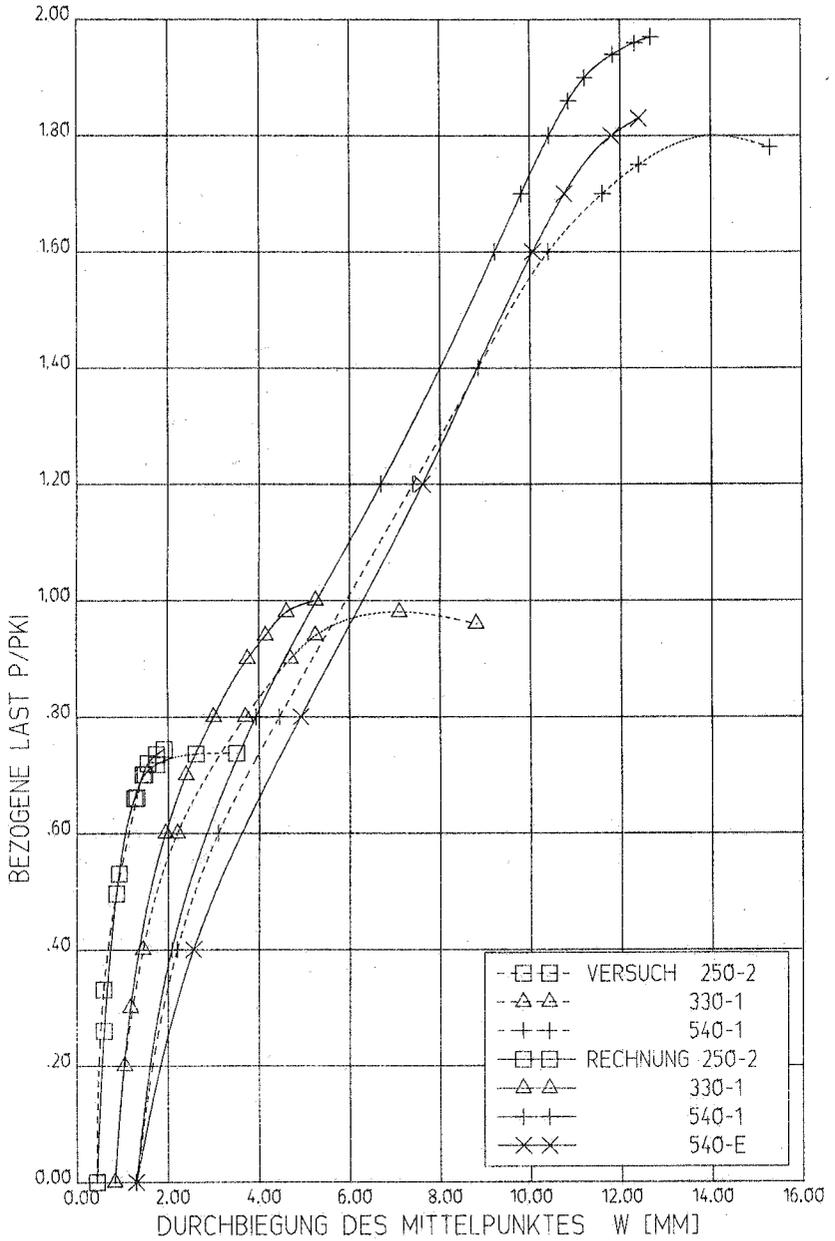


Bild 5.37: Last-Durchbiegungs-Kurven, Platte a/b = 3/4

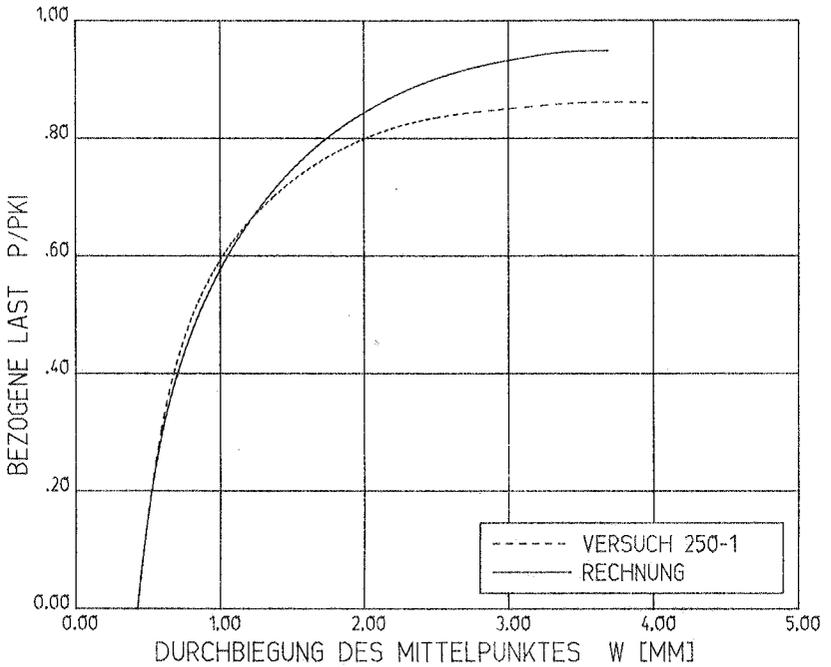


Bild 5.38: Last-Durchbiegungs-Kurven, Platte $a/b = 1/2$

5.9.6 Vergleich von Imperfektionsformen

Zur Form der vorgegebenen Imperfektion wurden vergleichende Rechnungen für Platten mit Seitenverhältnissen $\alpha = 1/2$ und $\alpha = 1/3$ durchgeführt. Alternativ wurden die beiden in 5.9.3 beschriebenen Formen angesetzt. Ergebnisse für die Traglasten sind in Tabelle 5.4 zusammengestellt.

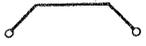
mit $\sigma_F = 240 \text{ N/mm}^2$			P_{\max}/P_{Ki}			
						
α	a	λ^*	$4 c_1$	$20 c_1$	$4 c_1$	$20 c_1$
1/2	200	32,8	0,71	0,60	0,71	0,57
	330	57,2	1,25	1,10	1,23	1,04
1/3	200	33,3	-	0,66	-	0,63

Tabelle 5.4

Die auf P_{ki} bezogenen Traglasten sind für kleine Imperfektionsamplituden $c = 4 c_1$ nur gering von der Imperfektionsform beeinflusst. Erst bei der sehr großen Anfangsausbiegung $c = 20 c_1$ werden Abweichungen deutlich. Die am Versagensbild orientierte Form liefert dann bis zu 6 % niedrigere Traglasten als die zur Beulfigur affine Form.

5.9.7 Parameterstudie zur Imperfektionsamplitude c

5.9.7.1 Übersicht

Behandelt wurden Platten mit den Seitenverhältnissen

$$\alpha = 1, 3/4, 1/2 \text{ und } 1/4.$$

Die Dicke wurde mit $t = 6 \text{ mm}$ und die Fließspannung mit $\sigma_F = 240 \text{ N/mm}^2$ konstant gehalten. Verschiedene Schlankheiten λ^* ergaben sich dann durch Ändern von a. Die Imperfektion ist in der Form affin zur Beulfigur mit den Anfangsausbiegungen

$$c = c_1, 8 c_1 \text{ (für } \alpha = 3/4 \text{ zus. } c = 4 c_1).$$

5.9.7.2 Ergebnisse

Für die einzelnen Seitenverhältnisse α sind in Bildern zusammengefaßt:

- die Last-Durchbiegungs-Kurven des Plattenmittelpunkts in den Bildern 5.39, 5.40, 5.41 und 5.42.

- die auf die Fließspannung σ_F bezogenen Tragspannungen der Rechnung, der Versuche, eine in [34] vorgeschlagene Bemessungskurve und die bezogene Euler-Spannung: Bilder 5.43, 5.44, 5.45 und 5.46.

Ein Vergleich der Tragspannungen liefert:

- Für alle Seitenverhältnisse liegen die Rechenergebnisse innerhalb des durch die Versuche vorgegebenen Streubereichs.
- Die Imperfektionsamplitude c wirkt sich für das jeweilige Seitenverhältnis in Abhängigkeit von der Schlankheit λ^* aus. So ist der Abfall der Traglast bei Vergrößerung der Anfangsausbiegung besonders deutlich in einem mittleren Schlankheitsbereich, während sich für gedrungene und schlanke Fälle kaum eine Beeinflussung ergibt.
- Mit dem in Gleichung 13 [34] gemachten Vorschlag einer Traglastkurve lassen sich in etwa die Rechenwerte für $c = 8 c_1$ beschreiben.

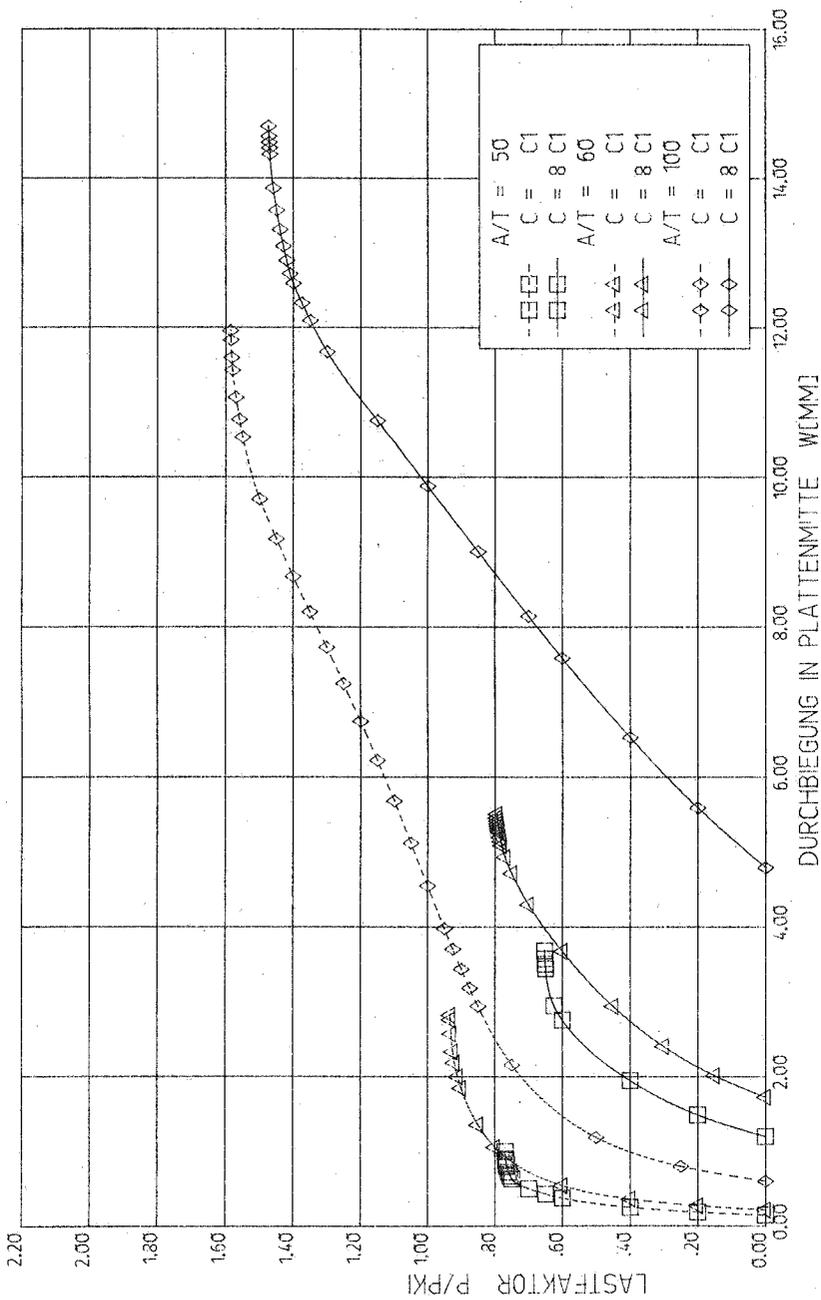


Bild 5.39: Platte $a/b = 1$, Last-Durchbiegungs-Kurven

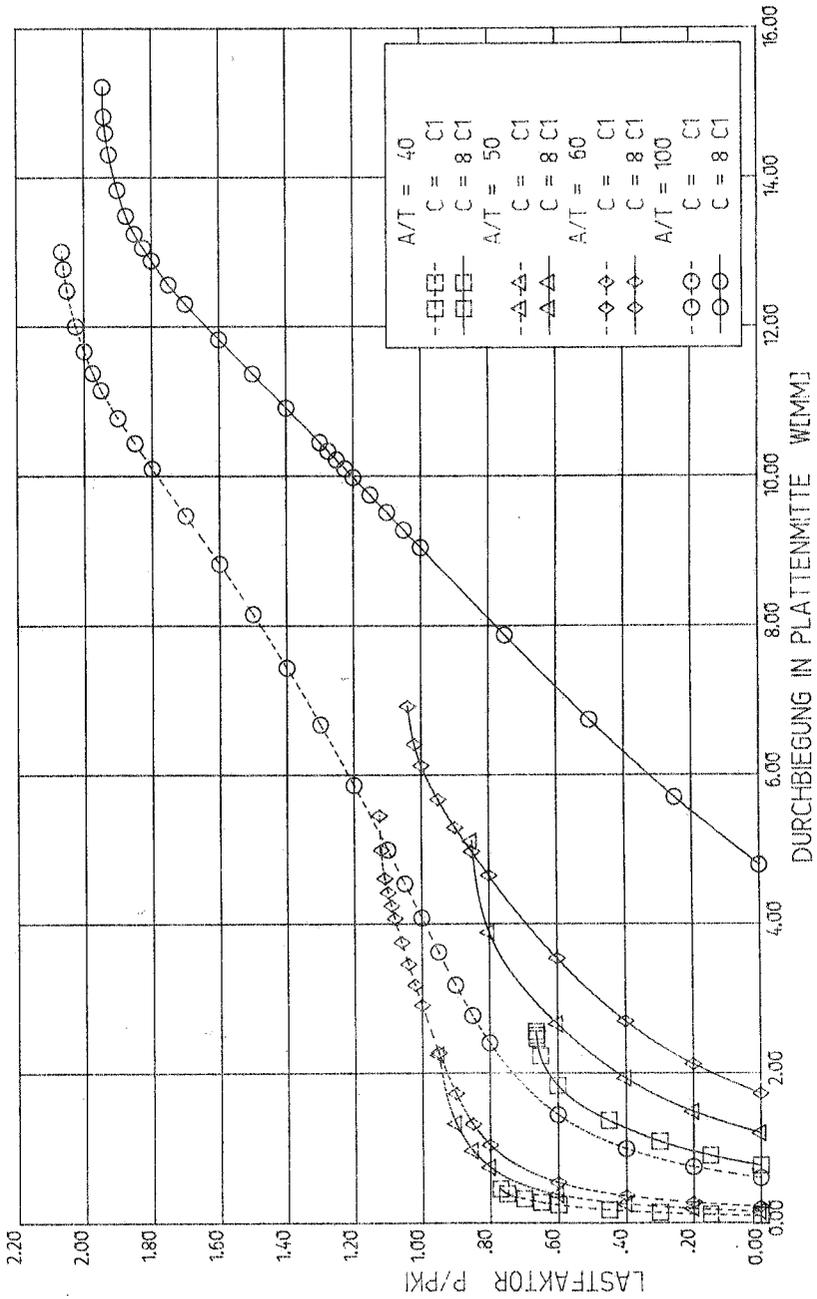


Bild 5. 40: Platte a/b = 3/4, Last-Durchbiegungs-Kurven

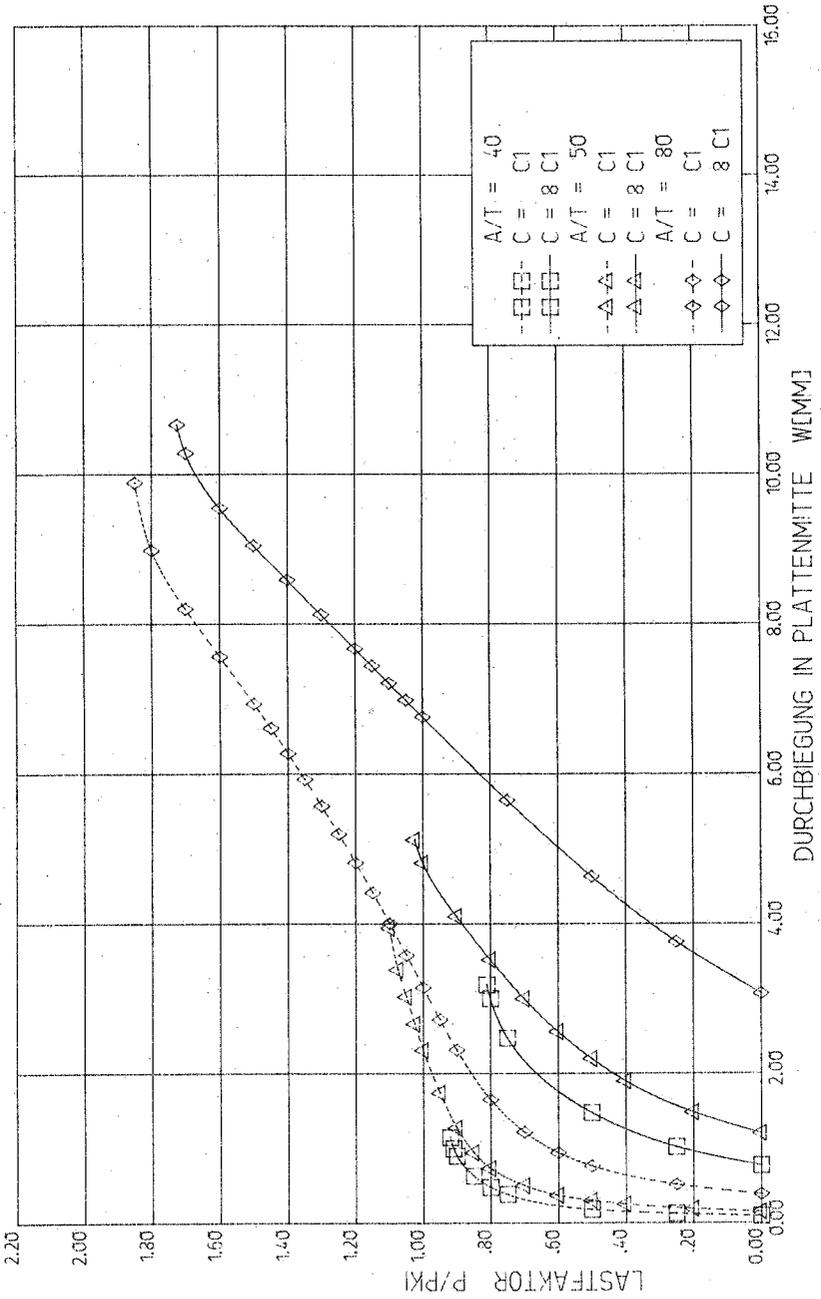


Bild 5.41: Platte $a/b = 1/2$, Last-Durchbiegungs-Kurven

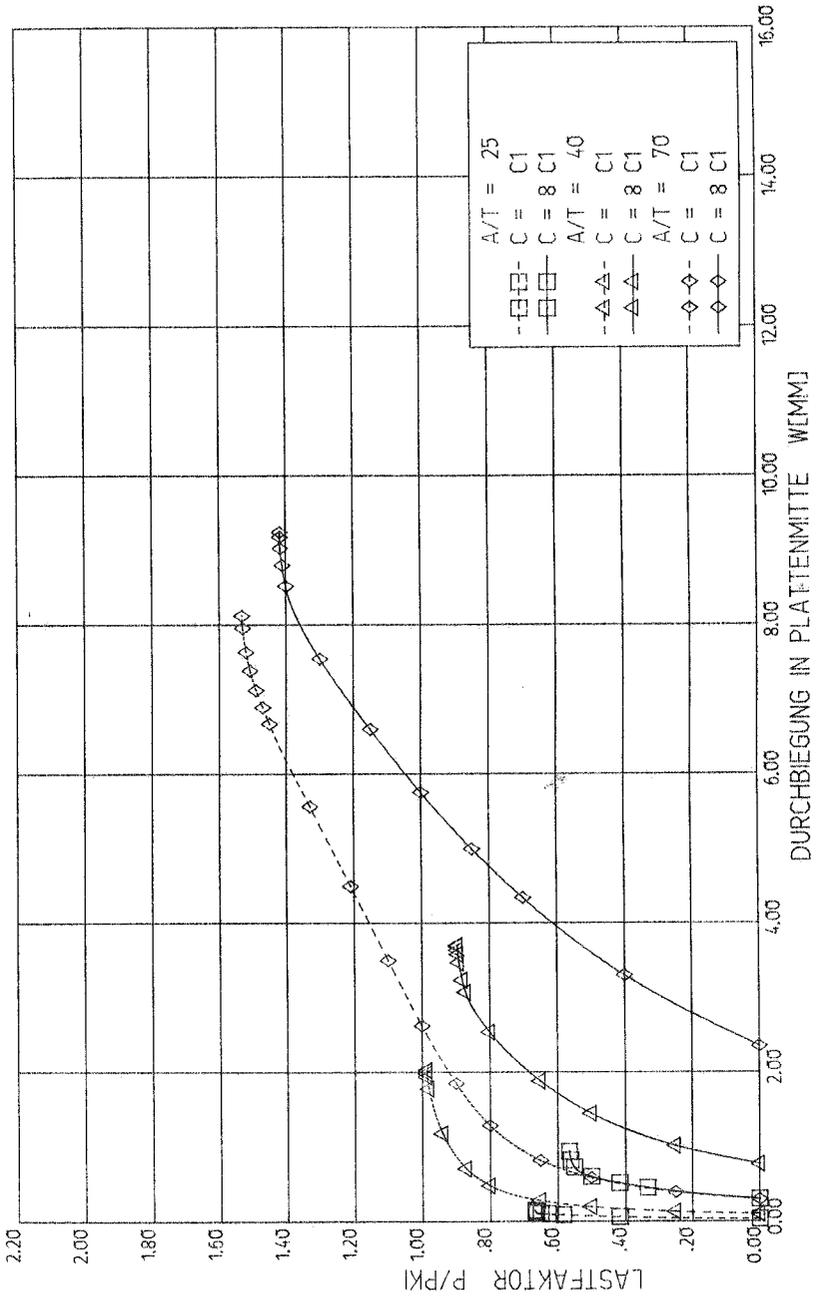


Bild 5.42: Platte a/b = 1/4, Last-Durchbiegungs-Kurven

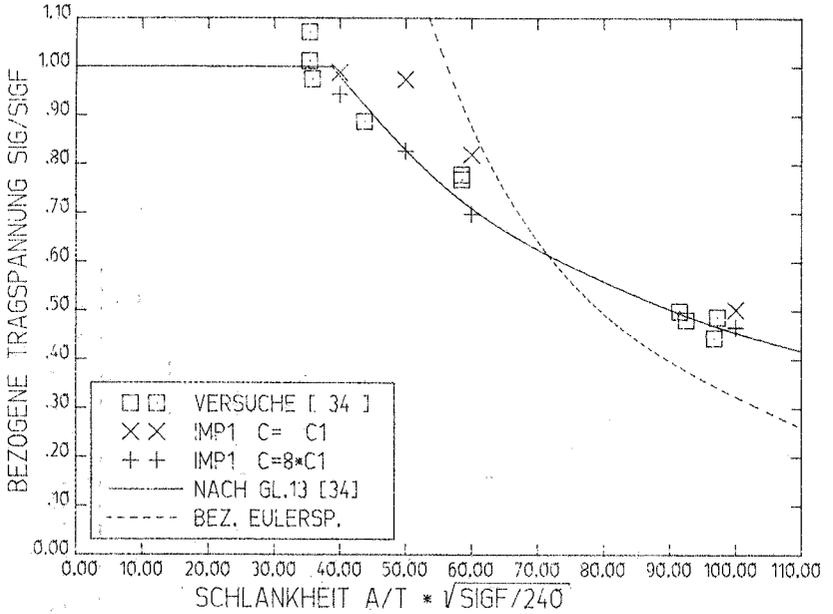


Bild 5. 43: Traglasten, Platte a/b = 1

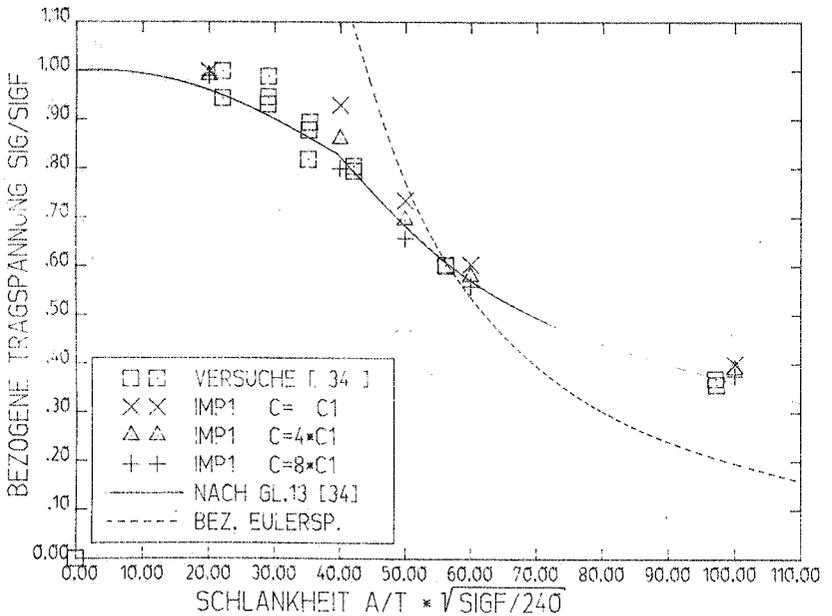


Bild 5. 44: Traglasten, Platte a/b = 3/4

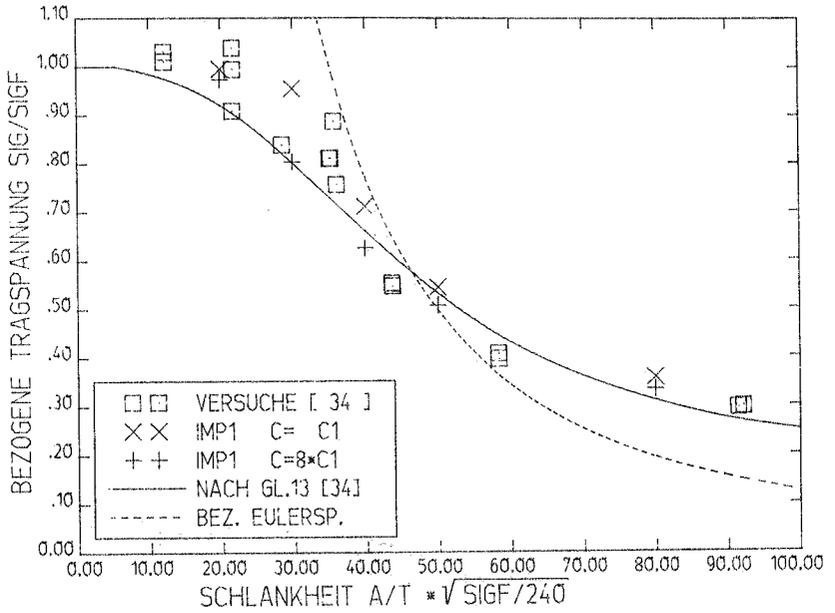


Bild 5.45: Traglasten, Platte a/b = 1/2

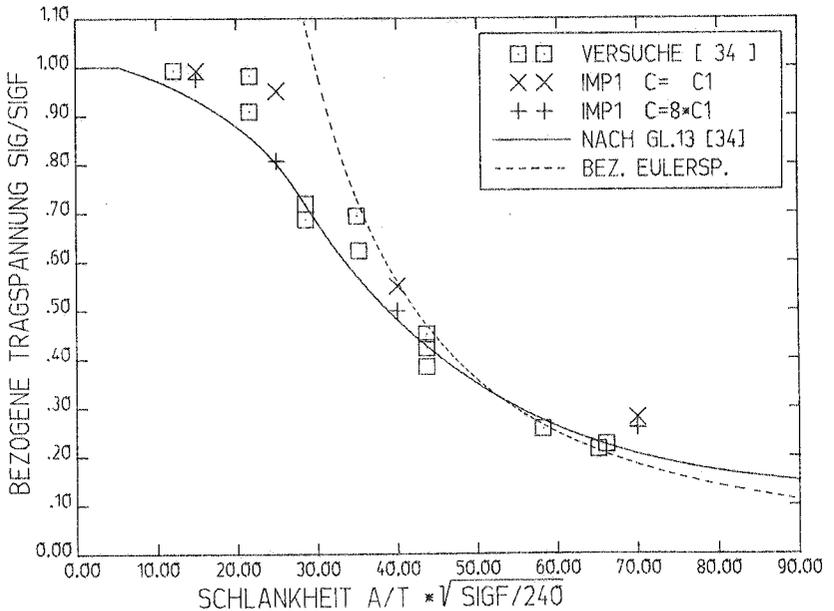


Bild 5.46: Traglasten, Platte a/b = 1/4

Die noch folgenden Bilder enthalten exemplarisch für zwei Platten Auswertungen zum Lastabtragungsverhalten. In Bild 5. 47 ist für die Platte $\alpha = 1/4$, $\lambda^* = 70$, $c = c_1$ der Verlauf der Normalkraft n_y im Schnitt $y = 0,977 A$ aufgetragen. Es zeigt sich das typische Verhalten, wie die Längskraft zum Rand hin konzentriert wird. Bei $P/P_{ki} = 1,3$ ist n_y am Rand bereits etwa doppelt so groß wie in der Plattenmitte. Bei weiterer Laststeigerung wächst die Normalkraft in der Mitte nicht an, so daß die Umlagerung noch verstärkt wird. Bei $P/P_{ki} = 1,532$ ist der Querschnitt am Rand völlig durchplastiziert, die Längskraft erreicht den Grenzwert $n_{y \max} = \sigma_F t = - 1,44 \text{ kN/mm}$.

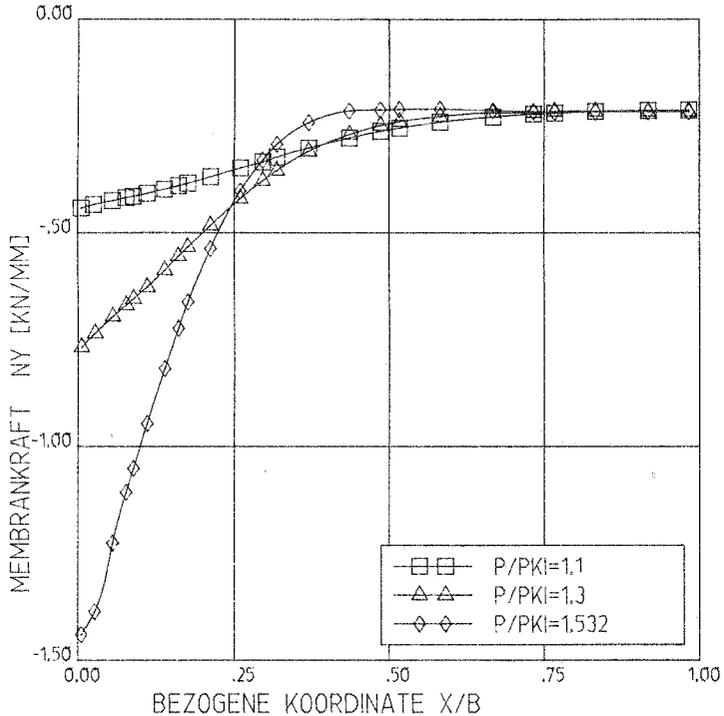


Bild 5. 47: Platte $\alpha = 1/4$, $\lambda^* = 70$, $c = c_1$
Verlauf der Normalkraft n_y im Schnitt $y = 0,977 A$

Für dieselbe Platte $\alpha = 1/4$ ist in Bild 5. 48 die Ausbreitung der plastischen Zonen angegeben. Die Plastizierung beginnt bei $P/P_{ki} = 1,40$ unter der Wirkung von Biegedruck- und Normaldruckspannung im Symmetrieschnitt an der Plattenunterseite. Bei Laststeigerung vergrößert sich der ursprüngliche Bereich, wobei der Eckbereich mit erfaßt wird. Bei $P/P_{ki} = 1,532$, der rechnerischen Maximallast, ist die Platte in einer schmalen Zone am unbelasteten Rand über den Querschnitt völlig durchplastiziert.

Für den Fall $\alpha = 1/2 - 250 - 1$ ist in Bild 5. 49 der Plastizierungszustand über den Querschnitt des Plattenviertels aufgetragen. Ausgewertet wurde das Lastniveau $P/P_{ki} = 0,948$, bei dem die mit $\lambda^* = 43,6$ im mittleren Schlankheitsbereich liegende Platte versagt.

Von der Oberseite gesehen, traten nur im Eckbereich des Plattenviertels plastische Querschnitte auf. Da dort, von unten gesehen, ebenfalls Plastizierungen entstehen, bleibt in der Plattenecke nur ein geringer Rest in der Mitte des Querschnitts elastisch.

Weiter (von unten gesehen) zieht sich die plastische Zone vom Eckbereich zur Symmetrieachse $y = a/2$. Hier wird der Querschnitt bis $5/12 t$ von unten plastisch (Biegung und Normalkraft).

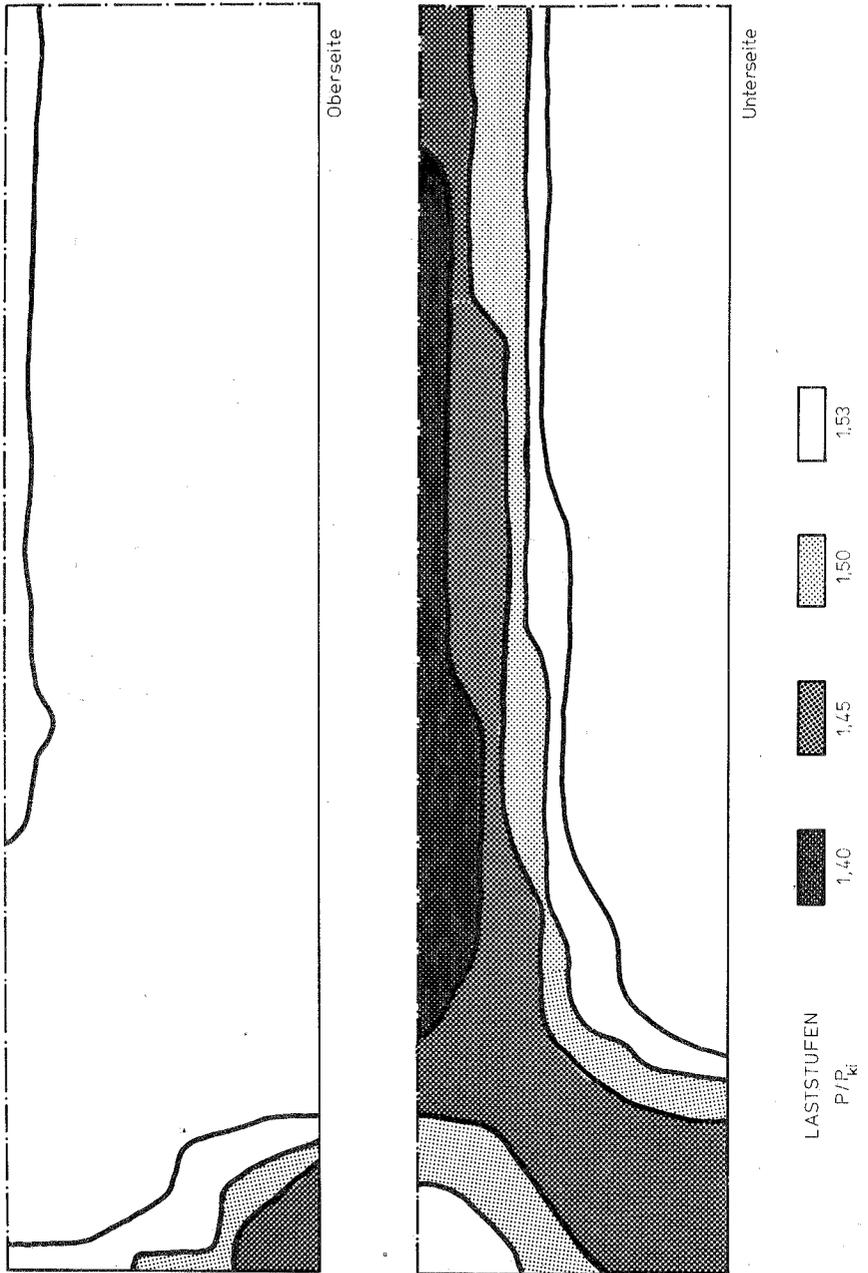


Bild 5. 48: Platte $a/b = 1/4$, $\lambda^* = 70$, $c = 4$
Ausbreitung der Fließzonen an den Oberflächen

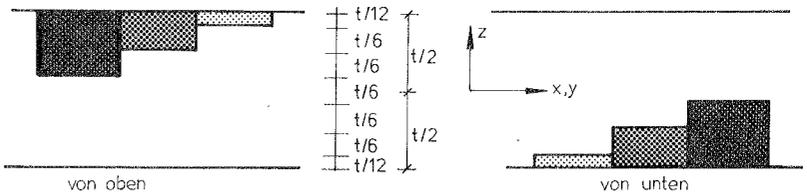
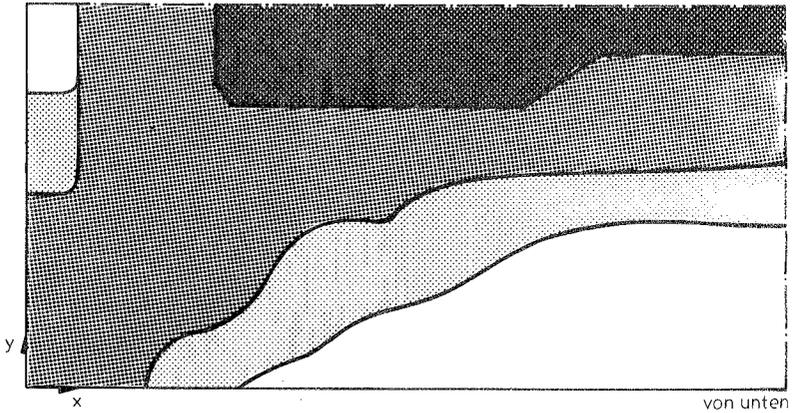
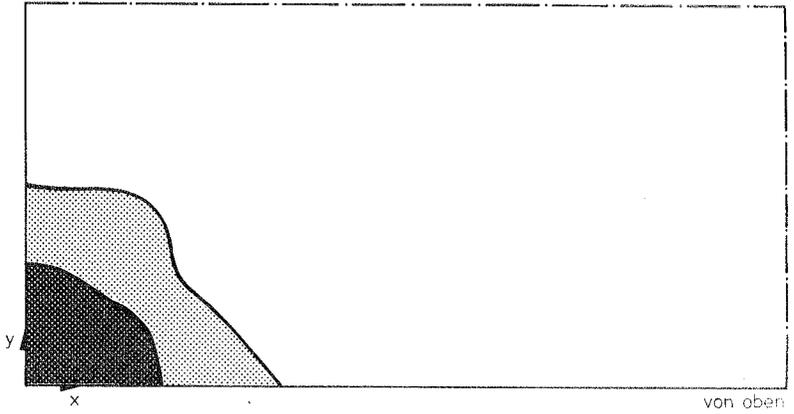


Bild 5.49:

Platte $a/b = 1/2 - 250 - 1$

Plastizierungszustand für $P/P_{ki} = 0,948$

A N H A N G

EBENES / ACHSENSYMMETRISCHES ELEMENT

ϕ	M=2 linear	M=3 quadratisch	M=4 kubisch	M=5 quartisch
k=1	$1/2(1-r)$	$-1/2(1-r)$	$1/16(1-r)(-1+9r^2)$	$1/6r(1-r)(1-4r^2)$
k=2	$1/2(1+r)$	$1-r^2$	$9/16(1-3r)(1-r^2)$	$-4/3r(1-2r)(1-r^2)$
k=3		$1/2(1+r)$	$9/16(1+3r)(1-r^2)$	$(1-r^2)(5-4r^2)$
k=4			$1/16(1+r)(-1+9r^2)$	$4/3r(1+2r)(1-r^2)$
k=5				$-1/6r(1+r)(1-4r^2)$

TAFEL 1 Interpolationspolynome $\phi = \phi(k, r)$

$\circ d$	Ausschnitt Knoten k		
	$u_1(k)$	$u_2(k)$	$\alpha(k)$
$\circ u_{1,1}$	$\circ \phi_{,1}$	0	$\circ \tilde{\phi}_{,1}(-\sin^1\phi(k))$
$\circ u_{1,2}$	$\circ \phi_{,2}$	0	$\circ \tilde{\phi}_{,2}(-\sin^1\phi(k))$
$\circ u_{2,1}$	0	$\circ \phi_{,1}$	$\circ \tilde{\phi}_{,1}(\cos^1\phi(k))$
$\circ u_{2,2}$	0	$\circ \phi_{,2}$	$\circ \tilde{\phi}_{,2}(\cos^1\phi(k))$
$\circ u^1 \circ x_1$	$\phi^1 \circ x_1$	0	$\phi^1 \circ x_1 \frac{s}{2} h(k)(-\sin^1\phi(k))$

TAFEL 2 Operatormatrix $\begin{matrix} 1 \\ \circ \hat{B} \\ \circ \end{matrix}$

$\circ e$	Ausschnitt Knoten k		
	$u_1(k)$	$u_2(k)$	$\alpha(k)$
$\circ e_{11}$	$\circ \phi_{,1} \quad _{11}$	$\circ \tilde{\phi}_{,1} \quad _{21}$	$\circ \tilde{\phi}_{,1} \quad \tilde{T}_1$
$\circ e_{22}$	$\circ \phi_{,2} \quad _{12}$	$\circ \tilde{\phi}_{,2} \quad _{22}$	$\circ \tilde{\phi}_{,2} \quad \tilde{T}_2$
$2e_{12}$	$\circ \phi_{,2} \quad _{11} + \circ \phi_{,1} \quad _{12}$	$\circ \tilde{\phi}_{,2} \quad _{21} + \circ \tilde{\phi}_{,1} \quad _{22}$	$\tilde{\phi}_{,2} \quad \tilde{T}_1 + \tilde{\phi}_{,1} \quad \tilde{T}_2$
$\circ e_{33}$	$\frac{\phi^1(u_1+1)}{\circ x_1^2}$	0	$\frac{\phi^1(u_1+1)}{\circ x_1^2} \frac{s}{2} h(k)(-\sin^1\phi(k))$

TAFEL 3 Operatormatrix $\begin{matrix} 1 \\ \circ \hat{B} \\ \circ \end{matrix}$

mit:

$$\begin{bmatrix} \circ \phi_{,1} \\ \circ \phi_{,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det^0 J} \begin{bmatrix} \circ x_{2,s} \\ \circ x_{1,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ r \end{bmatrix}$$

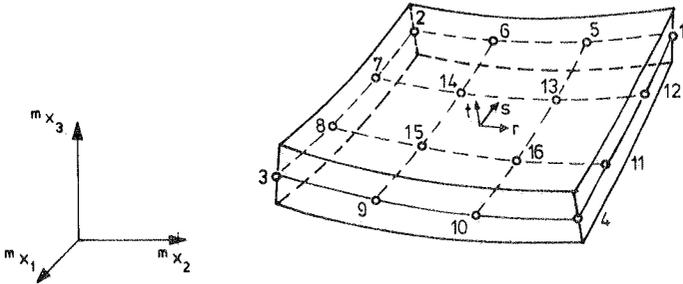
$$\begin{bmatrix} \circ \tilde{\phi}_{,1} \\ \circ \tilde{\phi}_{,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det^0 J} \left(\begin{bmatrix} -\circ x_{2,r} \\ \circ x_{1,r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ r \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} \circ x_{2,s} \\ \circ x_{1,s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi \\ r \end{bmatrix} \right)$$

$$l_{jk} = \begin{matrix} 1 \\ \circ \end{matrix} u_{jk} + \delta_{jk}$$

$$l_j = -\sin^1\phi(k) \cdot l_{1j} + \cos^1\phi(k) \cdot l_{2j}$$

PLATTEN / SCHALENELEMENT

Versionen : bikvadratisch S9
 bikubisch S16



Knotennummerierung Version S16 (M = 16)

KNOTEN	KOORD.		INTERPOLATIONSFUNKTIONEN 256 $\phi(k, r, s)$									
	k	r	s	Faktor	1+r	3r+1	3r-1	1-r	1+s	3s+1	3s-1	1-s
1	1	1	1	1	1	1		1	1	1		
2	-1	1	1		1	1	1	1	1	1		
3	-1	-1	1		1	1	1			1	1	1
4	1	-1			1	1	1			1	1	1
5	$\frac{1}{3}$	1	9	1	1			1	1	1	1	
6	$-\frac{1}{3}$	1	-9	1			1	1	1	1	1	
7	-1	$\frac{1}{3}$	9			1	1	1	1	1		1
8	-1	$-\frac{1}{3}$	-9			1	1	1	1		1	1
9	$-\frac{1}{3}$	-1	-9	1			1	1			1	1
10	$\frac{1}{3}$	-1	9	1	1			1			1	1
11	1	$-\frac{1}{3}$	-9	1	1				1		1	1
12	1	$\frac{1}{3}$	9	1	1				1	1		1
13	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	81	1	1			1	1	1		1
14	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-81	1				1	1	1		1
15	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	81	1				1	1		1	1
16	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-81	1	1			1	1		1	1

TAFEL 4 Interpolationspolynome $\phi = \phi(k, r, s)$

0d	Ausschnitt Knoten k				
	$u_1(k)$	$u_2(k)$	$u_3(k)$	$\alpha(k)$	$\beta(k)$
${}^0u_{1,1}$	${}^0\phi_{,1}$	0	0	${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad {}^1c_{11}$	${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad {}^1c_{12}$
${}^0u_{2,2}$	0	${}^0\tilde{\phi}_{,2}$	0	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad {}^1c_{21}$	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad {}^1c_{22}$
${}^0u_{3,3}$	0	0	${}^0\phi_{,3}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad {}^1c_{31}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad {}^1c_{32}$
${}^0u_{1,2}$	${}^0\phi_{,2}$	0	0	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad {}^1c_{11}$	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad {}^1c_{12}$
${}^0u_{2,1}$	0	${}^0\phi_{,1}$	0	${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad {}^1c_{21}$	${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad {}^1c_{22}$
${}^0u_{1,3}$	${}^0\phi_{,3}$	0	0	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad {}^1c_{11}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad {}^1c_{12}$
${}^0u_{3,1}$	0	0	${}^0\phi_{,1}$	${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad {}^1c_{31}$	${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad {}^1c_{32}$
${}^0u_{2,3}$	0	${}^0\phi_{,3}$	0	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad {}^1c_{21}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad {}^1c_{22}$
${}^0u_{3,2}$	0	0	${}^0\phi_{,2}$	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad {}^1c_{31}$	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad {}^1c_{32}$

TAFEL 5

Operatormatrix ${}^1\hat{B}$

0e	Ausschnitt Knoten k				
	$u_1(k)$	$u_2(k)$	$u_3(k)$	$\alpha(k)$	$\beta(k)$
${}^0e_{11}$	${}^0\phi_{,1} \quad _{11}$	${}^0\phi_{,1} \quad _{21}$	${}^0\phi_{,1} \quad _{31}$	${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad \tilde{ }_{11}$	${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad \tilde{ }_{12}$
${}^0e_{22}$	${}^0\phi_{,2} \quad _{12}$	${}^0\phi_{,2} \quad _{22}$	${}^0\phi_{,2} \quad _{32}$	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad \tilde{ }_{21}$	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad \tilde{ }_{22}$
${}^0e_{33}$	${}^0\phi_{,3} \quad _{13}$	${}^0\phi_{,3} \quad _{23}$	${}^0\phi_{,3} \quad _{33}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad \tilde{ }_{31}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad \tilde{ }_{32}$
2_0e_{12}	${}^0\phi_{,2} \quad _{11}$ + ${}^0\phi_{,1} \quad _{12}$	${}^0\phi_{,2} \quad _{21}$ + ${}^0\phi_{,1} \quad _{22}$	${}^0\phi_{,2} \quad _{31}$ + ${}^0\phi_{,1} \quad _{32}$	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad \tilde{ }_{11}$ + ${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad \tilde{ }_{21}$	${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad \tilde{ }_{12}$ + ${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad \tilde{ }_{22}$
2_0e_{13}	${}^0\phi_{,3} \quad _{11}$ + ${}^0\phi_{,1} \quad _{13}$	${}^0\phi_{,3} \quad _{21}$ + ${}^0\phi_{,1} \quad _{23}$	${}^0\phi_{,3} \quad _{31}$ + ${}^0\phi_{,1} \quad _{33}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad \tilde{ }_{11}$ + ${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad \tilde{ }_{31}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad \tilde{ }_{12}$ + ${}^0\tilde{\phi}_{,1} \quad \tilde{ }_{32}$
2_0e_{23}	${}^0\phi_{,3} \quad _{12}$ + ${}^0\phi_{,2} \quad _{13}$	${}^0\phi_{,3} \quad _{22}$ + ${}^0\phi_{,2} \quad _{23}$	${}^0\phi_{,3} \quad _{32}$ + ${}^0\phi_{,2} \quad _{33}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad \tilde{ }_{21}$ + ${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad \tilde{ }_{31}$	${}^0\tilde{\phi}_{,3} \quad \tilde{ }_{22}$ + ${}^0\tilde{\phi}_{,2} \quad \tilde{ }_{32}$

TAFEL 6

Operatormatrix 1B

mit:

$${}^0\phi_{,j} = {}^0j_1^{-1} \phi_{,r} + {}^0j_2^{-1} \phi_{,s}$$

$${}^0\tilde{\phi}_{,j} = h(k)/2 [{}^0j_3^{-1} \phi + t {}^0\phi_{,j}]$$

${}^1c_{jk}$ siehe Gl. 3.26

${}^0j_{jk}^{-1}$ Elemente der inversen Jacobimatrix

$$l_{jk} = {}^1u_{j,k} + \delta_{jk} \quad \tilde{l}_{jk} = {}^1c_{1k}l_{1j} + {}^1c_{2k}l_{2j} + {}^1c_{3k}l_{3j}$$

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O. :
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B. -M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. -G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.