

# Beitrag zur Biegetheorie der Kegelschale mit linear veränderlicher Wanddicke

Von der Technischen Hochschule Stuttgart zur Erlangung  
der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr. -Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

13.09.2006  
Z

Dipl. -Ing. Ulrich Krüger

geboren zu Berlin



Hauptberichter:

Prof. Dr. -Ing. F.W. Bornscheuer

Mitberichter:

Prof. Dr. -Ing. W. Pelikan

Tag der Einreichung:

22. Dezember 1965

Tag der mündlichen Prüfung:

27. Mai 1966



## V o r w o r t

Herrn Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer danke ich herzlich für die Anregungen, die mich zum Studium der behandelten Probleme führten, sowie für die stete Unterstützung und Förderung dieser Arbeit.

Herrn Professor Dr.-Ing. W. Pelikan gilt mein aufrichtiger Dank für die Mühe des Korreferats und für seine wertvollen Hinweise.

Allen Lehrern, die meine Ausbildung förderten, und all denen, die mir mit Rat und Tat weiterhalfen, darf ich an dieser Stelle Dank sagen.

U. Krüger

I n h a l t

Schrifttumsverzeichnis	Seite
Bezeichnungen	9
1. Einleitung	11
2. Die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen	14
2.1. Geometrie der Kegelschale	14
2.2. Die Verzerrungen im elastischen Kontinuum	16
2.3. Geometrische Hypothesen der Schalentheorie und ihre Folgerungen	18
2.4. Die Verzerrungen der Kegelschale	25
3. Die Differentialgleichungen für die Verschiebungen	30
3.1. Herleitung der Differentialgleichungen	30
3.2. Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	32
3.3. Die Formänderungsarbeit der Kegelschale	33
3.4. Variation der Formänderungsarbeit	37
4. Lösung der Differentialgleichungen	41
4.1. Lösungsansatz und charakteristische Gleichung	41
4.2. Wurzeln der charakteristischen Gleichung	45
4.3. Allgemeine Lösung des Ansatzes	46
4.4. Verhältnis der Integrationskonstanten	47
5. Die Verschiebungen und die Schnittgrößen	49
5.1. Die Beziehungen zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungen	49
5.2. Verschiebungen und Schnittgrößen als Funktion der Konstanten C	53
6. Randbedingungen	59

7. Programm für einen Elektronenrechner	Seite 65
8. Beispiel. Schnittgrößen und Verformungen an einem Konverter	68
8.1. Aufgabenstellung	68
8.2. Lösungsweg	70
8.3. Der Kreisringträger	73
8.3.1. Der Kreisringträger unter harmonischer Belastung	73
8.3.2. Transformation der Schnittgrößen und Verformungen	77
8.3.3. Verformungen am Kreisringträger	78
8.4. Verformungen an den Kegelschalen $K_1$ , $K_1'$ , $K_2$	79
8.5. Gleichungssystem für das Kraftgrößenverfahren und Auflösung	83
8.6. Korrektur-Lastfall	84
8.7. Spannungsnachweise	90
8.7.1. Spannungsnachweis für die Kegelschale	90
8.7.2. Spannungsnachweis am Ringträger	91
8.8. Diskussion der Ergebnisse	92
9. Zusammenfassung	93
Lebenslauf	

Schrifttumsverzeichnis

- [ 1 ] Pflüger, A.: Stabilität dünner Kegelschalen.  
Ingenieur-Archiv VIII (1937),  
Seite 151 - 172.
- [ 2 ] Nollau, H.: Der Spannungszustand der biegesteifen  
Kegelschale mit linear veränderlicher  
Wandstärke unter beliebiger Belastung.  
Zeitschrift für angew. Mathematik und  
Mechanik 24 (1944), Seite 10 - 34.
- [ 3 ] Flügge, W.: Stresses in Shells.  
Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Hei-  
delberg, 1960.
- [ 4 ] Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre An-  
wendung in der Technik.  
Akademie-Verlag Berlin, 1958.
- [ 5 ] Gravina, P.B.J.: Theorie und Berechnung der Rotations-  
schalen.  
Springer-Verlag Berlin-Göttingen-Hei-  
delberg, 1961.
- [ 6 ] Girkmann, K.: Flächentragwerke.  
Springer-Verlag Wien, 1959. 5. Auflage.
- [ 7 ] Mason, J.: Kreisringträger zur Aussteifung der  
Rotationsschalen.  
Bautechnik 40 (1963), Seite 91 - 92.
- [ 8 ] Honneger, E.: Festigkeitsberechnungen von Kegel-  
schalen mit linear veränderlicher  
Wandstärke.  
Dissertation Zürich 1919.

- [9] Lichtenstern, E.: Die biegungsfeste Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke. Zeitschrift für angew. Mathematik und Mechanik 12 (1932), Seite 347 - 350.
- [10] Nash, W.E.: Approximate Analysis of Axisymmetric Deformations of Conical Shells Having Variable Wall Thickness. Berichte zum Internat. Colloq. on Simplified Calculation Methods, Brüssel 1961 (Veranstalter: IASS), Report IV/3.
- [11] Hoff, N.J.: Thin Circular Conical Shells under Arbitrary Loads. Journal of Appl. Mech. 22 (1955), Seite 557 - 562.
- [12] Seide, P.: A Donnell Type Theorie for Asymmetrical Bending and Buckling of Thin Conical Shells. Journal of Appl. Mech. 24 (1957), Seite 547 - 552.
- [13] Wilson, B.: Asymmetrical Bending of Conical Shells. Journal of the Engineering Mechanic Division 86 (1960), No. EM3, Seite 119 - 139.
- [14] Zrost, H.: Die biegesteife Kegelschale konstanter Wandstärke unter periodischer Belastung. Dissertation Weimar 1963. Auszugsweise in: Wissenschaftl. Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen Weimar 11 (1964), Seite 309 - 315 und Seite 439 - 449.

- [15] Medwadowski, S.J.: Bending of Thin Shell Conical Frustrum Segments.  
Berichte zum Internat. Colloq. on Simplified Calculation Methods, Brüssel 1961 (Veranstalter: IASS), Report III/5.
- [16] Koss, K.: Hängekegeldach.  
Dissertation Graz 1961.
- [17] Blythe, W. u. E.L. Kyser: A Flügge-Vlasov Theory of Torsion for Thin Conical Shells.  
Journal of Appl. Mech. 31 (1964),  
Seite 553 - 555.
- [18] Garnet, H. u. J. Kempner: Axisymmetric Free Vibrations of Conical Shells.  
Journal of Appl. Mech. 31 (1964),  
Seite 458 - 466.
- [19] Zrost, H.: Der Satz von Frobenius am Beispiel der Besselschen Differentialgleichung.  
Wissenschaftl. Zeitschrift der Hochschule für Architektur und Bauwesen 4,  
Seite 451.
- [20] Goldenveizer, A.L.: Theory of Elastic Thin Shells.  
Pergamon Press 1961.

## Bezeichnungen

### Geometrie der Kegelschale (siehe auch Bild 1 und 2)

x-y-z	Kartesisches Koordinatensystem. Ursprung = Kegelspitze
$\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$	Krummliniges orthogonales Koordinatensystem Dimensionen: $\alpha$ [cm], $\beta$ [l], $\gamma$ [l]
$\varrho = \frac{\alpha}{l}$ [l]	dimensionslose Koordinate in Richtung $\alpha$
$\vartheta$ [l]	Öffnungswinkel der Schalenmittelfläche; $c \equiv \cot \vartheta$
$\gamma_0$ [l]	Öffnungswinkel zwischen innerer und äußerer Schalenoberfläche
$l_1, l_2$ [m]	Mantellängen von der Kegelspitze S zum unteren bzw. oberen Rand der Kegelstumpf-Schalenmittelfläche
$a_1, a_2$ [m]	unterer bzw. oberer Grundkreisradius der Schalenmittelfläche

### Materialkonstanten

E [Mp/m <sup>2</sup> ]	Elastizitätsmodul
G [Mp/m <sup>2</sup> ]	Schubmodul
$\mu$ [l]	Querkontraktionszahl

### Verformungen, Spannungen

$\epsilon_{\alpha\alpha}, \epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{\gamma\gamma}$ [l]	Dehnungen
$\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon_{\beta\gamma}, \epsilon_{\gamma\alpha}$ [l]	Gleitungen
$u_\gamma, v_\gamma, w_\gamma$ [m]	Verschiebungen eines Punktes P
u, v, w [m]	Verschiebungen eines Punktes P' der Schalenmittelfläche ( $\gamma = 0$ )
$\sigma_{\alpha\alpha}, \sigma_{\beta\beta}, \sigma_{\gamma\gamma}$ [Mp/m <sup>2</sup> ]	Normalspannungen
$\sigma_{\alpha\beta}, \sigma_{\beta\gamma}, \sigma_{\gamma\alpha}$ [Mp/m <sup>2</sup> ]	Schubspannungen

Schnittgrößen

$N_\alpha, N_\beta, N_{\alpha\beta}, N_{\beta\alpha}$	[Mp/m]	Normal- und Scherkräfte
$M_\alpha, M_\beta, M_{\alpha\beta}, M_{\beta\alpha}$	[Mpm/m]	Biege- und Drillmomente
$Q_\alpha, Q_\beta$	[Mp/m]	Querkräfte
$\bar{N}_{\alpha\beta}, \bar{Q}_\alpha$	[Mp/m]	Kirchhoffsche Ersatzschnittkräfte

$$D = \frac{E \gamma_0}{1-\mu^2} \quad [\text{kp/cm}^2] \quad \text{Modifizierte Dehnsteifigkeit}$$

$$K = \frac{E \gamma_0^3}{12(1-\mu^2)} \quad [\text{kp/cm}^2] \quad \text{Modifizierte Biegesteifigkeit}$$

$$k = \frac{\gamma_0^2}{12} \quad [1]$$

Weitere Bezeichnungen und Abkürzungen sind im Text erläutert.

## 1. Einleitung

Die Behandlung der Biegetheorie von Rotationsschalen nimmt ihren Anfang bei Reißner und Meißner. Aus vereinfachten Beziehungen für die rotationssymmetrisch belastete Schale mit allgemeinem Querschnitt erhalten sie ein Differentialgleichungssystem 2. Ordnung für eine Spannungs- und eine Verschiebungsfunktion, das auf eine einzige Differentialgleichung 4. Ordnung zurückgeführt wird. Für die Kegelschale erweisen sich Besselfunktionen als Lösung (vergl. z.B. [ 5 ] ).

Honneger [ 8 ] erkannte, daß sich aus der Annahme eines speziellen Wanddickengesetzes große Vereinfachungen für die Lösung des Problems ergeben. Für eine proportional zum Abstand von der Kegelspitze zunehmende Schalendicke ergeben sich elementare Lösungen. Lichtenstern [ 9 ] bringt weitere Vereinfachungen: Vernachlässigung der Querkontraktion und der Ringbiegemomente bei Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen. Eine strenge Lösung bringt Flügge [ 3 ] , eine Näherungstheorie wieder Nash [ 10 ] .

Für die unsymmetrisch belastete Kegelschale mit linearem Wanddickengesetz leitet Pflüger [ 1 ] eine Stabilitätstheorie ab. Aus geometrischen Überlegungen werden die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen gewonnen. Die Gleichgewichtsbedingungen werden sowohl aus statischen Betrachtungen als auch aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie abgeleitet. Die Beuldeterminante wird vereinfacht. Gebrauchsfertige Beultafeln sind angegeben.

An diese Arbeit anlehnd gibt Nollau [ 2 ] eine Biegetheorie der randbelasteten Kegelschale wieder. Näherungen werden erst bei der endgültigen Berechnung der Schnittkräfte eingeführt. Eine ähnliche Theorie findet sich bei Flügge [ 3 ] .

Die unsymmetrisch belastete Kegelschale konstanter Dicke behandelt Hoff [ 11 ] . Vereinfachte Verzerrungsausdrücke liefern eine nur für steile Kegelschalen gültige Theorie (als Grenze wird  $\delta = 30^\circ$  angegeben). Für sein Differentialgleichungssystem in den

Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  schlägt er eine Lösung nach Frobenius [19] vor. Darauf aufbauend bringt Seide [12] eine Theorie mit vollständigeren Dehnungsausdrücken, die beim Grenzübergang zum Zylinder dem Grad der Donnelschen Näherung entspricht und die auch für Kegelschalen mit großem Öffnungswinkel gilt. Zwei gekoppelte Differentialgleichungen für eine Spannungs- und eine Verschiebungsfunktion werden auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung reduziert, für die der Verfasser jedoch keine Lösung angibt. Wilson [13] berechnet einen Ausschnitt aus einer Kegelstumpfschale, der längs der Erzeugenden einfach unterstützt ist und an den beiden anderen Rändern beliebig gelagert ist. Aus allgemeinen Beziehungen nach Goldenveizer [20] entwickelt er eine Theorie im Grad der Donnel-Näherungen, nur in den Schubkräften werden Zusatzterme für nötig erachtet. Für das System der Verschiebungsdifferentialgleichungen gelingt ein Separationsansatz, und als Lösung ergeben sich Reihen, die jedoch schlecht konvergieren. Mit Hilfe von Computern gewonnene Ergebnisse sind angegeben.

Zrost [14] leitet eine Biegetheorie aus Wlassows Theorie der schwach gekrümmten Schalen her. Spannungs- und Verschiebungsfunktion werden zu einer übergeordneten Funktion zusammengefaßt. Für letztere ergibt sich eine Differentialgleichung 8. Ordnung, die in zwei Differentialgleichungen 4. Ordnung aufgespalten wird. Die Lösung nach Frobenius mit einem Potenzreihenansatz gestaltet sich numerisch sehr aufwendig und schwierig.

Den Ausschnitt aus einer Kegelstumpfschale bei Biegerandstörungen in Radialrichtung behandelt Medwadowski [15] bei Annahme weitgehender Näherungen in Anlehnung an Geckeler und Schorer. Die Theorie gilt nur für kleine Öffnungswinkel.

Die orthotrope Kegelschale berechnet Koss [16] unter zahlreichen Näherungen für eine Schale mit Rippen in Längs- und Ringrichtung.

Spezielle Probleme werden in [17] und [18] aufgegriffen.

In der vorliegenden Arbeit soll nochmals die Kegelschale mit linear veränderlicher Wanddicke behandelt werden.

Wenn für eine Schale das Differentialgleichungssystem, das die drei Gleichgewichtsbedingungen beinhaltet, als Funktion der Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  der Schalenmittelfläche angegeben wird, so müssen die Differentialoperatoren dieses Gleichungssystems Symmetrie zu seiner Hauptdiagonalen aufweisen. Wlassow [4, S. 207 ff.] führt diese Eigenschaft auf das Bettische Reziprozitätsgesetz zurück.

Die in [1], [2] und [3] angeführten Differentialgleichungssysteme weisen alle die geforderte Symmetrie nicht auf.

In dieser Arbeit soll die Biegetheorie der Kegelschale auf anderem Wege entwickelt werden als in den vorgenannten Arbeiten. Die Symmetrie des Differentialgleichungssystems - bzw. die Abweichungen davon und ihre Auswirkungen auf das Ergebnis - soll dabei besonders betrachtet werden.

In [1], [2] und [3] werden die Verzerrungs-Verformungs-Beziehungen stets aus der geometrischen Anschauung gewonnen. Um von dieser Anschauung und eventuell damit verbundenen Inkonsequenzen loszukommen, werden im folgenden diese Beziehungen aus der räumlichen Elastizitätstheorie, wie sie in [4] dargestellt ist, hergeleitet. Über das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie ergeben sich die Gleichgewichtsbedingungen; auf diesem Weg sind Fehler aus der statischen Anschauung ausgeschlossen. Es zeigt sich, daß man auch auf diesem Weg kein symmetrisches Differentialgleichungssystem erhält.

Die homogene Lösung des Problems wird über die Auflösung der charakteristischen Gleichung gewonnen. Der gesamte Rechengang wird geschlossen im Matrizenkalkül dargestellt.

Auf dieser Basis wird ein Programm für einen elektronischen Rechenautomaten aufgestellt.

Ein Rechenbeispiel veranschaulicht die Anwendung der Theorie.

## 2. Die Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen

### 2.1. Geometrie der Kegelschale

Bild 1 zeigt die Geometrie der Kreis Kegelschale. Durch die Spitze S der Schale ist ein kartesisches Koordinatensystem x-y-z gelegt. Die z-Achse ist die Rotationsachse des Kegels, die Achsen x und y bilden eine senkrecht hierzu verlaufende Ebene durch S.

Außerdem wird ein speziell der Form der Kegelschale angepaßtes krummliniges Koordinatensystem  $\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$  eingeführt. Ein beliebiger Punkt P der Schale ist festgelegt durch seinen Abstand  $\alpha$  von der Kegelspitze S, den Winkel  $\beta$  zwischen den Ebenen y-z und P-z und den Winkel  $\gamma$  zwischen der Schalenmittelfläche mit dem Öffnungswinkel  $\vartheta$  und der Geraden S-P. Außerdem wird der Winkel

$$\Theta = \vartheta + \gamma \quad (2.1)$$

eingeführt.

$P^*(\alpha, \beta)$  ist der auf der Schalenmittelfläche gelegene Fußpunkt des Punktes  $P(\alpha, \beta, \gamma)$ .

Die Flächenscharen  $\alpha = \text{const}$  sind konzentrische Kugeln um S,  $\beta = \text{const}$  sind Ebenen durch die z-Achse,  $\gamma = \text{const}$  sind Doppelkegel mit der Spitze in S. Die Koordinaten sind krummlinig von gemischten Typ (da die Koordinatenlinien  $\alpha$  gerade sind).

Die Koordinatenlinien  $\alpha$  und  $\beta$  sind Hauptkrümmungslinien der Schalenmittelfläche, d.h. Linien, für die die Krümmungsradien der Schalenmittelfläche Extremwerte annehmen. Da die Krümmungen der Koordinatenlinien  $\beta$  ungleich Null sind, liegt eine einfach gekrümmte Schale vor; das Gaußsche Krümmungsmaß ist Null. Die Schalenmittelfläche ist abwickelbar.

Eine Transformation des  $\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$ -Systems auf das x-y-z-System ergibt folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} x &= \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \Theta \\ y &= \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \Theta \\ z &= \alpha \cdot \cos \Theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

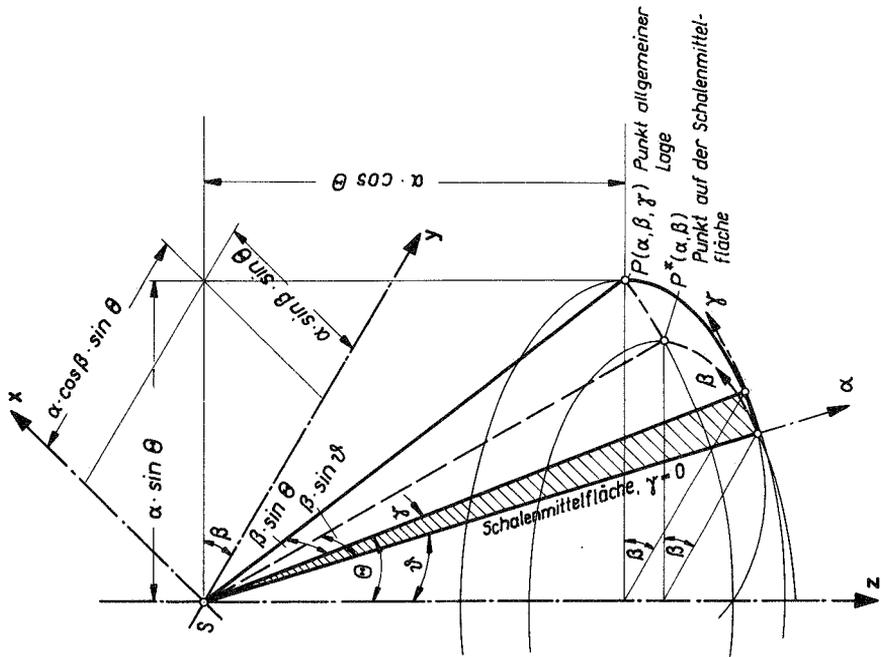


Bild 1: Geometrie der Kegelschale

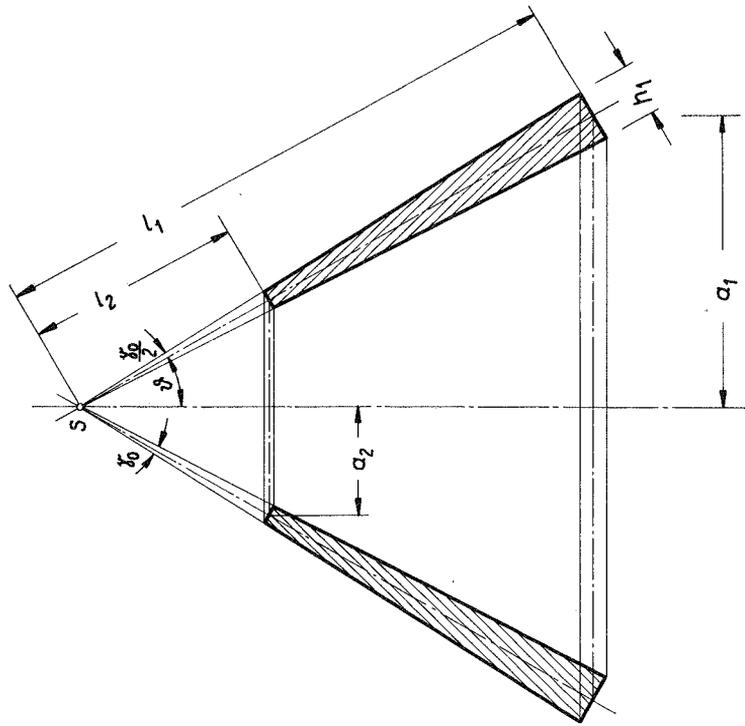


Bild 2: Abmessungen der Kegelschale

Für die Bestimmung der Verzerrungen werden die Laméschen Koeffizienten  $H_1, H_2, H_3$  gebraucht. Sie sind geometrische, vom Koordinatensystem abhängige Größen und ergeben sich für das  $\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$ -System nach [4, S. 153] zu:

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \theta + \cos^2 \beta \cdot \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 = \alpha^2 \cdot \sin^2 \theta (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = \alpha^2 \cdot \sin^2 \theta$$

$$H_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2 = \alpha^2 (\sin^2 \beta \cdot \cos^2 \theta + \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \alpha^2$$

Die Laméschen Koeffizienten und ihre partiellen Ableitungen werden damit:

$n$	$H_n$	$\frac{\partial H_n}{\partial \alpha}$	$\frac{\partial H_n}{\partial \beta}$	$\frac{\partial H_n}{\partial \gamma}$
1	1	0	0	0
2	$\alpha \cdot \sin \theta$	$\sin \theta$	0	$\alpha \cdot \cos \theta$
3	$\alpha$	1	0	0

(2.3)

## 2.2. Die Verzerrungen im elastischen Kontinuum

Bei der Verformung eines elastischen Körpers erfährt irgendein Punkt  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  dieses Körpers die Verschiebungen  $u_\gamma, v_\gamma, w_\gamma$  in Richtung der Koordinaten  $\alpha, \beta, \gamma$ . Der Verformungszustand des dreidimensionalen Körpers in der Umgebung des Punktes  $P$  wird durch sechs Verzerrungsgrößen bestimmt. Es sind dies die drei Dehnungen  $\epsilon_{\alpha\alpha}, \epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{\gamma\gamma}$  in Richtung  $\alpha, \beta, \gamma$  und die drei Gleitungen  $\epsilon_{\alpha\beta}, \epsilon_{\beta\gamma}, \epsilon_{\gamma\alpha}$ , welche die Winkeländerungen zwischen Elementkanten angeben, die vor der Verformung auf den Koordinatenlinien  $\alpha$  und  $\beta$ ,  $\beta$  und  $\gamma$ ,  $\gamma$  und  $\alpha$  lagen.

Die Beziehungen zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen ergeben sich nach [4, S. 159] zu:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{H_1} \cdot \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 \cdot H_2} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \beta} v_{\gamma} + \frac{1}{H_1 \cdot H_3} \cdot \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} w_{\gamma} \\ \epsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{H_2} \cdot \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2 \cdot H_3} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} w_{\gamma} + \frac{1}{H_2 \cdot H_1} \cdot \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_{\gamma} \\ \epsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{H_3} \cdot \frac{\partial w_{\gamma}}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_3 \cdot H_1} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} u_{\gamma} + \frac{1}{H_3 \cdot H_2} \cdot \frac{\partial H_3}{\partial \beta} v_{\gamma} \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{H_1} \cdot u_{\gamma} \right) + \frac{H_2}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{H_2} v_{\gamma} \right) \\ \epsilon_{\beta\gamma} &= \frac{H_2}{H_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{1}{H_2} v_{\gamma} \right) + \frac{H_3}{H_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{H_3} w_{\gamma} \right) \\ \epsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{H_3}{H_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{H_3} w_{\gamma} \right) + \frac{H_1}{H_3} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{1}{H_1} u_{\gamma} \right) . \end{aligned}$$

Mit Gleichung (2.3) erhält man daraus für die Kegelschale:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \alpha} \\ \epsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{\alpha} \cdot u_{\gamma} + \frac{1}{\alpha \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial v_{\gamma}}{\partial \beta} + \frac{\cot \theta}{\alpha} \cdot w_{\gamma} \\ \epsilon_{\gamma\gamma} &= \frac{1}{\alpha} \cdot u_{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial w_{\gamma}}{\partial \gamma} \\ \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\alpha \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \beta} + \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v_{\gamma}}{\alpha} \right) \\ \epsilon_{\beta\gamma} &= \frac{\sin \theta}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v_{\gamma}}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{\alpha \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial w_{\gamma}}{\partial \beta} \\ \epsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \gamma} + \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w_{\gamma}}{\alpha} \right) . \end{aligned} \tag{2.4a - f}$$

### 2.3. Geometrische Hypothesen der Schalentheorie und ihre Folgerungen

Wlassows "Grundgleichungen der allgemeinen Schalentheorie" (siehe [4, S. 169 ff]) basieren auf der Forderung, daß die Flächen  $\gamma = \text{const}$  von der Schalenmittelfläche  $\gamma = 0$  äquidistant sind. Da solche Flächen auch die Schale begrenzen sollen, wird in jener Abhandlung für alle Schalen eine konstante Dicke vorausgesetzt.

Die vorliegende Schale veränderlicher Dicke unterscheidet sich von denen konstanter Dicke unter anderem dadurch, daß der dritte Lamésche Koeffizient  $H_3 \neq 1$  ist.

Der Berechnung von Schalen konstanter Dicke wird im allgemeinen die folgende geometrische Hypothese I zugrundegelegt:

- I) Ein zur Schalenmittelfläche normales geradliniges Linien-element bleibt auch nach der Verformung der Schale geradlinig und normal zur verformten Schalenmittelfläche und ändert seine Länge nicht.

Für konstante Schalendicke folgt hieraus unmittelbar

$$\varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\gamma\alpha} = \varepsilon_{\gamma\gamma} = 0. \quad (2.5)$$

Setzt man die Beziehungen (2.5) auch für die vorliegende Schale veränderlicher Dicke an, so ist die Forderung der Hypothese I nicht mehr streng erfüllt.

Gleichung (2.5) bedeutet nämlich:

- II) Ein Linienelement parallel zur Koordinatenlinie  $\gamma$  schließt nach der Verformung der Schale mit einer Parallelen zur verformten Schalenmittelfläche im Fußpunkt  $P^*(\alpha, \beta)$  des Linienelementes dieselben Winkel ein wie vor der Verformung und ändert seine Form und Länge nicht.

Hypothese II bietet sich für das krummlinige Koordinatensystem  $\alpha$ - $\beta$ - $\gamma$  an, weil ihr die einfachen Gleichungen (2.5) zugrundeliegen. Sie erscheint damit hier sinnvoller als Hypothese I.

Die Gleichungen (2.5) werden den weiteren Berechnungen zugrundegelegt.

In [1] bis [3] wird jedoch Hypothese I benutzt. Für spätere Vergleiche sollen die Differenzen in den nichtverschwindenden Verzerrungsgrößen abgeschätzt werden, die zwischen entsprechenden Ausdrücken auftreten können, die gemäß Hypothese I bzw. II bestimmt worden sind.

Bild 3 zeigt den Schnitt durch die Schale in einer Ebene  $\beta = \text{const}$ . Der Winkel  $\gamma_0$  ist dabei stark überhöht dargestellt.

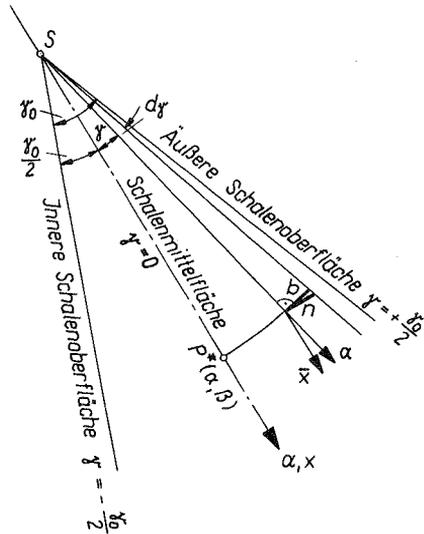
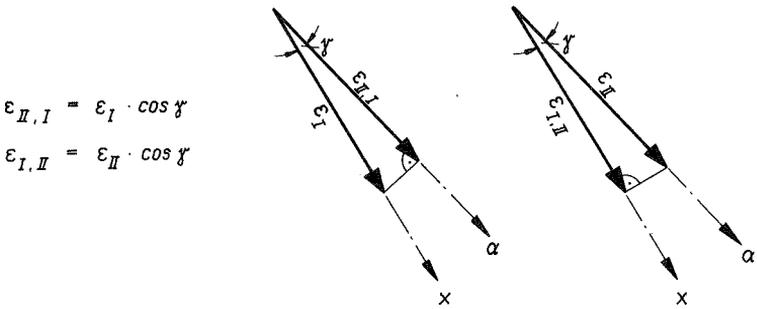


Bild 3: Schnitt durch die Schale in einer Ebene  $\beta = \text{const}$

Hypothese  $\begin{Bmatrix} I \\ II \end{Bmatrix}$  : Linienelement  $\begin{Bmatrix} n \\ b \end{Bmatrix}$  ändert seine Länge auch bei einer Verformung der Schale nicht. Die Dehnung  $\begin{Bmatrix} \epsilon_I \\ \epsilon_{II} \end{Bmatrix}$  in Richtung  $\begin{Bmatrix} x \\ \alpha \end{Bmatrix}$  ist eine der beiden Hauptdehnungen, während die andere orthogonal dazu Null ist; die Gleitung in der Ebene  $\beta = \text{const}$  ist Null. Die Dehnung  $\begin{Bmatrix} \epsilon_{II, I} \\ \epsilon_{I, II} \end{Bmatrix}$  in Richtung  $\begin{Bmatrix} \alpha \\ x \end{Bmatrix}$  ist die Projektion von  $\begin{Bmatrix} \epsilon_I \\ \epsilon_{II} \end{Bmatrix}$  auf diese Richtung (siehe Bild 4).



$$\epsilon_{II,I} = \epsilon_I \cdot \cos \gamma$$

$$\epsilon_{I,II} = \epsilon_{II} \cdot \cos \gamma$$

Bild 4: Dehnungen in der Ebene  $\beta = \text{const}$  nach Hypothese I bzw. II

Setzt man nun die Dehnungen in  $x$ -Richtung gleich, so ist

$$\epsilon_I = \epsilon_{I,II}$$

$$\epsilon_{II,I} = \epsilon_{II} \cdot \cos^2 \gamma.$$

Der Unterschied  $f$  in den Dehnungen in  $\alpha$ -Richtung ist also höchstens

$$f = 1 - \cos^2 \gamma = 1 - \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \dots\right) \left(1 - \frac{\gamma^2}{2} + \dots\right) = \gamma^2 - \dots \quad (2.6)$$

Die Verzerrungen  $\epsilon_{\beta\beta}$  und  $\epsilon_{\alpha\beta}$  werden von den unterschiedlichen Dehnungshypothesen sicher in noch geringerem Maße beeinflusst.

Wenn auch der Winkel  $\gamma$  stets klein ist, weil er sich zwischen den Grenzen  $\gamma = \pm \gamma_0/2$ , den Schalenoberflächen halten muß, so ist doch  $\gamma_0^2$  die Größenordnung, in der auch das Verhältnis von Biegesteifigkeit zu Dehnsteifigkeit der Schale liegt. Diese Größenordnung ist die kleinste, die in den folgenden Ableitungen noch berücksichtigt wird. Man darf also nicht erwarten, daß sich aus den folgenden Ableitungen, denen Hypothese II zugrundeliegt, dieselben Ausdrücke ergeben wie sie in [1] und [2] angegeben sind. In den Koeffizienten von  $\gamma^2$  sind Abweichungen zu erwarten.

Setzt man nun Gleichung (2.5) in die Gleichungen (2.4c), (2.4e), (2.4f) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \cdot u_{\gamma} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial w_{\gamma}}{\partial \gamma} &= 0 \\ \frac{\sin \theta}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v_{\gamma}}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{\alpha \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial w_{\gamma}}{\partial \beta} &= 0 \quad (2.7a - c) \\ \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\partial u_{\gamma}}{\partial \gamma} + \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w_{\gamma}}{\alpha} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.7) sind ein homogenes System linearer partieller Differentialgleichungen für die Verschiebungen  $u_{\gamma}$ ,  $v_{\gamma}$ ,  $w_{\gamma}$ .

Die Verschiebungen eines auf der Schalenmittelfläche gelegenen Punktes  $P^*(\alpha, \beta, 0)$  in Richtung der Koordinaten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  seien  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

$$\begin{aligned} u_{\gamma}(\alpha, \beta, 0) &= u(\alpha, \beta) = u \\ v_{\gamma}(\alpha, \beta, 0) &= v(\alpha, \beta) = v \\ w_{\gamma}(\alpha, \beta, 0) &= w(\alpha, \beta) = w \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nun kann man das Differentialgleichungssystem (2.7) und die Beziehungen (2.8) dazu benutzen, die Verschiebungen  $u_{\gamma}$ ,  $v_{\gamma}$ ,  $w_{\gamma}$  eines Punktes  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  auszudrücken in den Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  seines Fußpunktes  $P^*(\alpha, \beta, 0)$  auf der Schalenmittelfläche und den Koordinaten  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des Punktes  $P$ .

Für das Differentialgleichungssystem (2.7) führt ein Potenzansatz in  $\gamma$  zur Lösung:

$$\begin{aligned} u_{\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= u(\alpha, \beta) + A_1 \gamma + A_2 \gamma^2 + A_3 \gamma^3 + A_4 \gamma^4 + \dots \\ v_{\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= v(\alpha, \beta) + B_1 \gamma + B_2 \gamma^2 + B_3 \gamma^3 + B_4 \gamma^4 + \dots \\ w_{\gamma}(\alpha, \beta, \gamma) &= w(\alpha, \beta) + C_1 \gamma + C_2 \gamma^2 + C_3 \gamma^3 + C_4 \gamma^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

Für  $\gamma = 0$  sind die Gleichungen (2.8) erfüllt.

Die Potenzreihen können in den höheren Potenzen von  $\gamma$  abgebrochen werden, da  $\gamma \ll 1$  ist.

Die Faktoren  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sind Funktionen von  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Sie sind von  $\gamma$  unabhängig. Diese Faktoren müssen nun bestimmt werden.

Gleichung (2.7a) kann umgeformt werden zu

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = -u_x$$

Aus den Gleichungen (2.9a), (2.9c) wird damit

$$-u_x = -u - A_1 \cdot y - A_2 y^2 - A_3 y^3 - A_4 y^4 - \dots \quad (2.10a)$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = +C_1 + 2C_2 y + 3C_3 y^2 + 4C_4 y^3 + 5C_5 y^4 + \dots \quad (2.10b)$$

Koeffizientenvergleich von (2.10a) und (2.10b) ergibt:

$$\begin{aligned} C_1 &= -u \\ C_2 &= -\frac{1}{2} A_1 \\ C_3 &= -\frac{1}{3} A_2 \\ C_4 &= -\frac{1}{4} A_3 \\ C_5 &= -\frac{1}{5} A_4 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Gleichung (2.7c) kann umgeformt werden zu:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\alpha^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w_x}{\alpha} \right)$$

Mit den Gleichungen (2.9a), (2.9c) wird daraus:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = A_1 + 2A_2 y + 3A_3 y^2 + 4A_4 y^3 + 5A_5 y^4 + \dots \quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned} -\alpha^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w_x}{\alpha} \right) &= (w - \alpha \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha}) + (C_1 - \alpha \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \alpha}) y + (C_2 - \alpha \cdot \frac{\partial C_2}{\partial \alpha}) y^2 + \\ &+ (C_3 - \alpha \cdot \frac{\partial C_3}{\partial \alpha}) y^3 + (C_4 - \alpha \cdot \frac{\partial C_4}{\partial \alpha}) y^4 + \dots \end{aligned} \quad (2.12b)$$

Koeffizientenvergleich der Gleichungen (2.12a) und (2.12b) er-

gibt unter Benutzung von Gleichung (2.11):

$$\begin{aligned}
 A_1 &= w - \alpha \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \\
 A_2 &= \frac{1}{2} \left( C_1 - \alpha \cdot \frac{\partial C_1}{\partial \alpha} \right) = -\frac{1}{2} \left( u - \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \\
 A_3 &= \frac{1}{3} \left( C_2 - \alpha \cdot \frac{\partial C_2}{\partial \alpha} \right) = -\frac{1}{6} \left( w - \alpha \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \\
 A_4 &= \frac{1}{4} \left( C_3 - \alpha \cdot \frac{\partial C_3}{\partial \alpha} \right) = +\frac{1}{24} \left( u - \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} \right) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

und Gleichung (2.11) ergibt mit Gleichung (2.13):

$$\begin{aligned}
 C_2 &= -\frac{1}{2} A_1 &= -\frac{1}{2} \left( w - \alpha \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \\
 C_3 &= -\frac{1}{3} A_2 &= +\frac{1}{6} \left( u - \alpha \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \\
 C_4 &= -\frac{1}{4} A_3 &= +\frac{1}{24} \left( w - \alpha \cdot \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Gleichung (2.7b) kann umgeformt werden zu:

$$\sin^2 \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v_\gamma}{\sin \theta} \right) = -\frac{\partial w_\gamma}{\partial \beta} \tag{2.15}$$

Aus der linken Seite der Gleichung (2.15) wird mit Gleichung (2.9b):

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \theta \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v_\gamma}{\sin \theta} \right) &= \frac{\partial v_\gamma}{\partial \gamma} \sin \theta - v_\gamma \cdot \cos \theta \\
 \frac{\partial v_\gamma}{\partial \gamma} \cdot \sin \theta &= (B_1 + 2B_2 \gamma + 3B_3 \gamma^2 + 4B_4 \gamma^3 + \dots) \cdot \\
 &\quad \cdot (\sin \vartheta + \gamma \cdot \cos \vartheta - \frac{\gamma^2}{2} \sin \vartheta - \frac{\gamma^3}{6} \cos \vartheta + \dots) \\
 -v_\gamma \cdot \cos \theta &= -(v + B_1 \gamma + B_2 \gamma^2 + B_3 \gamma^3 + \dots) \cdot \\
 &\quad \cdot (\cos \vartheta - \gamma \cdot \sin \vartheta - \frac{\gamma^2}{2} \cos \vartheta + \frac{\gamma^3}{6} \sin \vartheta + \dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \Theta \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{v_y}{\sin \Theta} \right) &= \sin \vartheta \left\{ (B_1 - v \cdot \cot \vartheta) + (2B_2 + v) \cdot y + \right. \\ &\quad \left. + (3B_3 + \frac{1}{2} B_1 + B_2 \cdot \cot \vartheta + \frac{1}{2} \cdot v \cdot \cot \vartheta) \cdot y^2 + \right. \\ &\quad \left. + (4B_4 - \frac{1}{6} v + 2B_3 \cdot \cot \vartheta + \frac{1}{3} B_1 \cdot \cot \vartheta) \cdot y^3 + \dots \right\} \quad (2.16a) \end{aligned}$$

Die rechte Seite von Gleichung (2.15) wird:

$$-\frac{\partial w_y}{\partial \beta} = -\frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{\partial C_1}{\partial \beta} \cdot y - \frac{\partial C_2}{\partial \beta} \cdot y^2 - \frac{\partial C_3}{\partial \beta} \cdot y^3 - \dots \quad (2.16b)$$

Koeffizientenvergleich der Gleichungen (2.16a) und (2.16b) ergibt unter Benutzung von Gleichung (2.14):

$$\begin{aligned} B_1 &= v \cdot \cot \vartheta - \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} \\ B_2 &= -\frac{1}{2} \left( v - \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \\ B_3 &= -\frac{1}{6} \left( v \cdot \cot \vartheta + \frac{\cot \vartheta}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{2}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\alpha}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ B_4 &= \frac{1}{24} \left( v + \frac{2 \cot^2 \vartheta - 1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\alpha}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial u^2}{\partial \alpha \partial \beta} - \frac{2 \cot \vartheta}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{2 \alpha \cdot \cot \vartheta}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (2.17)$$

#### 2.4. Die Verzerrungen der Kegelschale

Für die Weiterrechnung empfiehlt sich die Einführung einer Summationsschreibweise.

Setzt man  $A_0 = u$   
 $B_0 = v$   
 $C_0 = w$  ,

$$(2.18)$$

so lassen sich die Verschiebungen  $u_\gamma$ ,  $v_\gamma$ ,  $w_\gamma$  gemäß den Gleichungen (2.9) anschreiben als:

$$u_\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cdot \gamma^m$$
$$v_\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cdot \gamma^m$$
$$w_\gamma = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot \gamma^m .$$
$$(2.19)$$

Ferner müssen die trigonometrischen Funktionen  $\frac{1}{\sin \theta}$  und  $\cot \theta$  in eine Reihe entwickelt werden:

$$\frac{1}{\sin \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} r_m \cdot \gamma^m$$
$$\cot \theta = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cdot \gamma^m .$$
$$(2.20)$$

Die Koeffizienten  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  der Gleichungen (2.19) und  $r_m$ ,  $f_m$  der Gleichungen (2.20) sind für  $m = 0, 1, 2$  in Tafel 1 zusammengestellt. Dabei wurden für die partiellen Ableitungen einer beliebigen Funktion  $f = f(\alpha, \beta)$  die folgenden, zweckmäßig erscheinenden Abkürzungen eingeführt:

$$f' = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial \alpha} ; f^* = \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \beta}$$
$$f'' = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} ; f^{**} = \frac{\alpha}{\sin \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} ; f^{***} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \text{ usw.}$$
$$(2.21)$$

Mit diesen Abkürzungen sind die nachstehenden Rechenregeln zu beachten:

$$\begin{array}{l}
 \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} f = f' \\
 \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} f' = f' + f'' \\
 \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} f'' = 2f'' + f'''
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \cdot f) = f + f' \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \cdot f') = 2f' + f'' \\
 \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha \cdot f'') = 3f'' + f'''
 \end{array} \right.
 \left| \begin{array}{l}
 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\alpha^2 \cdot f) = 2f + 4f' + f'' \\
 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\alpha^2 \cdot f') = 6f' + 6f'' + f''' \\
 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} (\alpha^2 \cdot f'') = 12f'' + 8f''' + f''''
 \end{array} \right.$$

(2.22)

Aus den Gleichungen (2.4a, b, d) wird mit Benutzung der Gleichungen (2.19), (2.20):

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\alpha} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial A_m}{\partial \alpha} \cdot y^m \\
 \epsilon_{\beta\beta} &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \left[ A_m + \sum_{n=0}^m \left( \frac{\partial B_n}{\partial \beta} \cdot r_{m-n} + C_n \cdot f_{m-n} \right) \right] \cdot y^m \\
 \epsilon_{\alpha\beta} &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^m \frac{\partial A_n}{\partial \beta} \cdot r_{m-n} - B_m \right) + \frac{\partial B_m}{\partial \alpha} \right] \cdot y^m.
 \end{aligned}$$

(2.23)

Auch diese Verzerrungen stellen sich also als Potenzreihen dar:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\alpha\alpha} &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{\alpha\alpha}^m \cdot y^m \\
 \epsilon_{\beta\beta} &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{\beta\beta}^m \cdot y^m \\
 \epsilon_{\alpha\beta} &= \sum_{m=0}^{\infty} E_{\alpha\beta}^m \cdot y^m
 \end{aligned}$$

(2.24)

mit

$$\begin{aligned}
 \alpha \cdot E_{\alpha\alpha}^m &= \alpha \cdot \frac{\partial A_m}{\partial \alpha} \\
 \alpha \cdot E_{\beta\beta}^m &= A_m + \sum_{n=0}^m \left( \frac{\partial B_n}{\partial \beta} \cdot r_{m-n} + C_n \cdot f_{m-n} \right) \\
 \alpha \cdot E_{\alpha\beta}^m &= \sum_{n=0}^m \frac{\partial A_n}{\partial \beta} \cdot r_{m-n} - B_m + \alpha \cdot \frac{\partial B_m}{\partial \alpha}.
 \end{aligned}$$

(2.25)

Die Koeffizienten  $E_{\alpha\alpha}^m$ ,  $E_{\beta\beta}^m$ ,  $E_{\alpha\beta}^m$  der Gleichungen (2.24) sind in Tafel 1 aufgestellt. Damit sind die Verzerrungen  $\epsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $\epsilon_{\beta\beta}$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta}$  der Schale bekannt als Funktionen der Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  der Schalenmittelfläche.

$m$	$A_m$	$B_m$	$C_m$	$r_m \cdot \sin \vartheta$	$f_m$
0	$u$	$v$	$w$	1	$\cot \vartheta$
1	$w - w'$	$v \cdot \cot \vartheta - w'$	$-u$	$-\cot \vartheta$	$-\cot^2 \vartheta - 1$
2	$-\frac{1}{2}(u - u')$	$-\frac{1}{2}(v - v')$	$-\frac{1}{2}(w - w')$	$\frac{1}{2} + \cot^2 \vartheta$	$\cot \vartheta (\cot^2 \vartheta + 1)$

$m$	$\alpha \cdot E_{\alpha\alpha}^m$	$\alpha \cdot E_{\beta\beta}^m$	$\alpha \cdot E_{\alpha\beta}^m$
0	$u'$	$u + v' + \cot \vartheta \cdot w$	$u' - v + v'$
1	$-w''$	$-\cot \vartheta \cdot u - \cot^2 \vartheta w - w' - w''$	$\cot \vartheta [-u - v + v'] + 2w' - 2w''$
2	$\frac{1}{2}u'''$	$(\frac{1}{2} + \cot^2 \vartheta) \cdot u + \frac{1}{2}u' + \frac{1}{2}u'' + \cot \vartheta [(\frac{1}{2} + \cot^2 \vartheta) \cdot w - \frac{1}{2}w' + w'']$	$(-\frac{1}{2} + \cot^2 \vartheta)u + u' + \frac{1}{2}v - \frac{1}{2}v' + \cot \vartheta [-w' + w'']$

Verschiebungen:  $u_y = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cdot y^m$       Verzerrungen:  $\epsilon_{\alpha\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{\alpha\alpha}^m \cdot y^m$       Trigonometrische Funktionen:  $\frac{1}{\sin \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} r_m \cdot y^m$

$$v_y = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cdot y^m \qquad \epsilon_{\beta\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{\beta\beta}^m \cdot y^m$$

$$w_y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cdot y^m \qquad \epsilon_{\alpha\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{\alpha\beta}^m \cdot y^m \qquad \cot \theta = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \cdot y^m$$

Tafel I: Koeffizienten der Potenzreihen für Verschiebungen, Verzerrungen und trigonometr. Funktionen

### Vergleich der Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen

Die Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen (2.24), (2.25) sollen mit denen bei Nollau [2] verglichen werden. Gleichung (2.6) gab schon den Anhalt, daß Abweichungen in den Gliedern mit  $\gamma^2$  zu erwarten sind.

Führt man die Verzerrungs-Verschiebungs-Gleichungen aus [2] in die hier benutzten Bezeichnungen über und entwickelt alle Brüche, bei denen  $\gamma$  im Nenner auftritt, in Reihen, so zeigt sich die Richtigkeit der Fehlerabschätzung (2.6): für  $m = 0$  und  $m = 1$  sind die Koeffizienten  $E_{\alpha\alpha}^m$ ,  $E_{\beta\beta}^m$ ,  $E_{\alpha\beta}^m$  identisch. Unterschiede ergeben sich für  $m = 2$ .

Man erhält aus [2] :

$$\begin{aligned}\alpha \cdot E_{\alpha\alpha}^2 &= 0 \\ \alpha \cdot E_{\beta\beta}^2 &= u \cdot \cot^2 \vartheta + \cot \vartheta [w \cdot \cot^2 \vartheta + w' + w''] \\ \alpha \cdot E_{\alpha\beta}^2 &= u \cdot \cot^2 \vartheta + \cot \vartheta [-w' + w'']\end{aligned}\tag{2.26}$$

Die Werte aus Tafel 1 für  $m = 2$  und die Gleichungen (2.26) zeigen, daß numerische Unterschiede in den Verzerrungen wesentlich vom Schalenöffnungswinkel  $\vartheta$  abhängen. Die Unterschiede gehen umso mehr zurück, je größer  $\cot \vartheta$  ist, d.h. je kleiner  $\vartheta$  ist und damit je steiler die Kegelschale ist. Beim Grenzübergang zur Kreiszyllinderschale, der sich aus  $\vartheta \rightarrow 0$  ergibt, stimmen die verschiedenen Ausdrücke dann überein. Das muß sich ergeben, weil die Hypothesen I und II für die Verzerrungen mit  $\vartheta \rightarrow 0$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$  gleichfalls ineinander übergehen.

Differenzen zwischen den entsprechenden Ausdrücken treten vor allem in den Termen der Verschiebungen  $u$  und  $v$  auf, bei  $w$  sind sie gering. Die Verschiebungen  $u$  und  $v$  liegen aber bei Schalentragwerken allgemein eine Größenordnung niedriger als die Verschiebungen  $w$ , so daß erst für große Winkel  $\vartheta$  eine wesentliche Abweichung in den Resultaten beider Theorien zu erwarten ist.

Grenzübergang zur Kreiszylinderschale

Als Sonderfall sind in den Gleichungen für die Kegelschale die Gleichungen der Kreiszylinderschale enthalten. Die Koordinaten der Zylinderschale seien  $x, \varphi, z$  und der Radius  $r$ . Beim Grenzübergang sind dann die folgenden Gesetzmäßigkeiten zu beachten (siehe Bild 5):

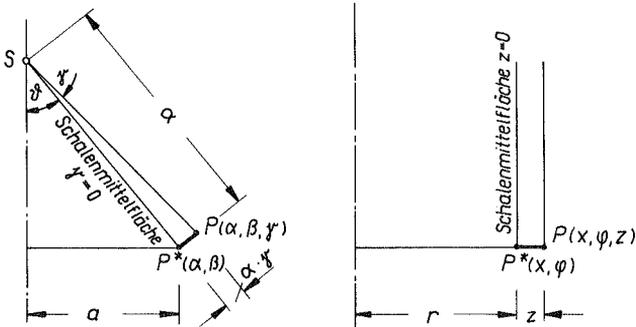


Bild 5: Kegelschale und Zylinderschale

$$\begin{aligned} \vartheta \rightarrow 0 ; \quad \alpha \rightarrow \infty ; \quad \alpha \cdot \gamma \rightarrow z ; \\ \cot \vartheta \rightarrow \infty ; \quad \alpha \cdot \sin \vartheta = a \rightarrow r ; \quad \frac{1}{\alpha} \cot \vartheta \rightarrow \frac{1}{r} ; \quad (2.27) \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} ; \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial \varphi} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot z \\ \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \varepsilon_{\beta\beta} &= \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot w - \left( \frac{1}{r^2} \cdot w - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \cdot z + \left( \frac{1}{r^3} \cdot w + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \cdot z^2 \\ \lim_{\vartheta \rightarrow 0} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{x\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \cdot z + \\ &\quad + \left( \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} \right) \cdot z^2 \quad (2.28) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (2.28) sind identisch mit den Ausdrücken in der Flüggeschen Theorie der Kreiszylinderschale (siehe z.B. [3, S. 212]).

### 3. Die Differentialgleichungen für die Verschiebungen

#### 3.1. Herleitung der Differentialgleichungen

Die Biegetheorie der dünnen Schalen läßt sich zurückführen auf ein System von drei gekoppelten linearen partiellen Differentialgleichungen für die Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  der Schalenmittelfläche. Diese sind die Gleichgewichtsbedingungen eines Schalenelementes in den Richtungen der drei Verschiebungen.

Bei Wlassow [4, S. 161 ff.] sind die elastischen Grundgleichungen für ein orthogonales krummliniges Koordinatensystem angegeben. Dabei werden die Gleichgewichtsbedingungen in den Spannungen an den Elementflächen aufgestellt; die Spannungen lassen sich über die Verzerrungen in den Verschiebungen ausdrücken. Er erhält schließlich [4, Gleichungen (5.17)] :

$$(\lambda + 2\nu) \frac{H_2 H_3}{H_1} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha} - 2\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \beta} (H_3 \omega_\gamma) - \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 \omega_\beta) \right] + H_2 H_3 P_\alpha = 0$$

$$(\lambda + 2\nu) \frac{H_3 H_1}{H_2} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \beta} - 2\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 \omega_\alpha) - \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_3 \omega_\gamma) \right] + H_3 H_1 P_\beta = 0$$

$$(\lambda + 2\nu) \frac{H_1 H_2}{H_3} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma} - 2\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 \omega_\beta) - \frac{\partial}{\partial \beta} (H_1 \omega_\alpha) \right] + H_1 H_2 P_\gamma = 0$$

mit  $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$  und  $\nu = \frac{E}{2(1+\mu)}$  .

Hier soll nur die Lösung des homogenen Gleichungssystems ( $P_\alpha = P_\beta = P_\gamma = 0$ ) untersucht werden. Für die Partikularlösung bietet die Membrantheorie bei stetiger Lastverteilung, kleinem Wanddickenwinkel  $\gamma_0$  und nicht ganz flachen Schalen guten Ersatz.

Die Größen  $\Delta$  (Volumdehnung) und  $\omega$  (Drehwinkel) können aus den Werten  $\varepsilon$  der Tafel 1 bestimmt werden. Schreibt man mit diesen Werten das Gleichungssystem [4, Gleichungen (5.17)] an, so begeht man einen Fehler: Infolge der geometrischen Hypothesen (2.5) sind die Schubverzerrungen  $\varepsilon_{\beta\gamma} = \varepsilon_{\gamma\alpha} = 0$ . Damit ergeben sich bei diesem Vorgehen auch keine Querkräfte. Gleichung (2.5)

ist jedoch nur im Hinblick auf die Geometrie zu verstehen. Sie soll ausdrücken, daß die beiden Schubverzerrungen  $\epsilon_{\beta\gamma}$  und  $\epsilon_{\gamma\alpha}$  und die Dehnung  $\epsilon_{\gamma\gamma}$  gegenüber den drei anderen Verzerrungen  $\epsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $\epsilon_{\beta\beta}$ ,  $\epsilon_{\alpha\beta}$  klein sind und daher die letzteren unwesentlich beeinflussen. Sie soll nicht besagen, daß die Querkräfte beim Gleichgewicht vernachlässigt werden können.

Im vorliegenden Fall lassen sich die Gleichungen [4, (5.17)] der räumlichen Elastizitätslehre also nicht verwenden, weil sonst die Gleichgewichtsbedingungen verletzt wären.

Meistens beschreitet man zur Aufstellung der Verschiebungs-Differentialgleichungen folgenden Weg: man formuliert die 6 Gleichgewichtsbedingungen eines Schalenelementes, drei Kräfte- und drei Momentenbedingungen in Richtung  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Momente, Normal- und Schubkräfte drückt man über die Spannungen und Verzerrungen in den Verschiebungen aus. Zwei Momenten-Gleichgewichtsbedingungen liefern Ausdrücke für die darin enthaltenen Querkräfte, und mit diesen Ausdrücken ergeben die drei Kräfte-Gleichgewichtsbedingungen die gesuchten Differentialgleichungen. Dieser Weg ist in [1] und [2] für die Kegelschale aufgezeigt.

Im folgenden sollen die gesuchten Differentialgleichungen aus dem Variationsprinzip gewonnen werden. Bei Anwendung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie bietet das den Vorteil, daß man mit vorhandenen Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen diese Gleichungen rein formal aufstellen kann, ohne noch einmal auf die geometrischen Verhältnisse der Schale eingehen zu müssen.

Die Beziehungen für die Energie der Schale werden mit der Annahme gewonnen, daß die Verformungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  klein sind gegenüber der Schalendicke. Dies entspricht einer Rechnung nach Theorie I. Ordnung.

### 3.2. Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie besagt:

Von allen möglichen Gleichgewichtslagen nimmt ein System diejenige Lage ein, für die die potentielle Energie ein Minimum ist.

Die potentielle Energie  $\Pi$  setzt sich zusammen aus dem Potential der äußeren Kräfte  $\Pi_G$  und dem Potential der inneren Kräfte  $\Pi_i$ .

$$\Pi = \Pi_G + \Pi_i \quad (3.1)$$

Mit

$$\Pi_G = - 2 A_G \quad ; \quad \Pi_i = - A_i$$

wird daraus

$$\Pi = - 2 A_G - A_i . \quad (3.2)$$

Aus dem Energiesatz  $A_G + A_i = 0$

erhält man schließlich

$$\Pi = + 2 A_i - A_i = + A_i . \quad (3.3)$$

Das Prinzip besagt

$$\Pi = + A_i = \text{Min} .$$

oder: die erste Variation des Energieausdruckes muß verschwinden

$$\delta \Pi = 0 \quad \text{oder}$$

$$\delta A_i = 0 . \quad (3.4)$$

### 3.3. Die Formänderungsarbeit der Kegelschale

Die innere Arbeit oder Formänderungsarbeit einer Schale sei  $A_1$ , die auf die Volumeneinheit bezogene Formänderungsarbeit sei  $a_1$ . Es ist:

$$-a_i = \int_0^{\varepsilon_{\alpha\alpha}} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} d\varepsilon_{\alpha\alpha} + \int_0^{\varepsilon_{\beta\beta}} \bar{\sigma}_{\beta\beta} d\varepsilon_{\beta\beta} + \int_0^{\varepsilon_{\gamma\gamma}} \bar{\sigma}_{\gamma\gamma} d\varepsilon_{\gamma\gamma} + \int_0^{\varepsilon_{\alpha\beta}} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta} + \int_0^{\varepsilon_{\beta\gamma}} \bar{\sigma}_{\beta\gamma} d\varepsilon_{\beta\gamma} + \int_0^{\varepsilon_{\gamma\alpha}} \bar{\sigma}_{\gamma\alpha} d\varepsilon_{\gamma\alpha}. \quad (3.5)$$

Mit Gleichung (2.5) vereinfacht sich die allgemeine Gleichung (3.5) zu:

$$-a_i = \int_0^{\varepsilon_{\alpha\alpha}} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} d\varepsilon_{\alpha\alpha} + \int_0^{\varepsilon_{\beta\beta}} \bar{\sigma}_{\beta\beta} d\varepsilon_{\beta\beta} + \int_0^{\varepsilon_{\alpha\beta}} \bar{\sigma}_{\alpha\beta} d\varepsilon_{\alpha\beta}. \quad (3.6)$$

Das Hookesche Werkstoffgesetz lautet:

$$\begin{array}{l|l} E \cdot \varepsilon_{\alpha\alpha} = \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} - \mu \bar{\sigma}_{\beta\beta} - \mu \bar{\sigma}_{\gamma\gamma} & G \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} = \bar{\sigma}_{\alpha\beta} \\ E \cdot \varepsilon_{\beta\beta} = \bar{\sigma}_{\beta\beta} - \mu \bar{\sigma}_{\gamma\gamma} - \mu \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} & G \cdot \varepsilon_{\beta\gamma} = \bar{\sigma}_{\beta\gamma} \\ E \cdot \varepsilon_{\gamma\gamma} = \bar{\sigma}_{\gamma\gamma} - \mu \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} - \mu \bar{\sigma}_{\beta\beta} & G \cdot \varepsilon_{\gamma\alpha} = \bar{\sigma}_{\gamma\alpha} \end{array} \quad (3.7a - f)$$

Führt man außer der Hypothese (2.5) auch noch

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma} = 0 \quad (3.8)$$

ein, so vereinfachen sich die Gleichungen (3.7a, b, d), nach den Spannungen aufgelöst, zu:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\alpha\alpha} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{\alpha\alpha} + \mu \cdot \varepsilon_{\beta\beta}) \\ \bar{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_{\beta\beta} + \mu \cdot \varepsilon_{\alpha\alpha}) \\ \bar{\sigma}_{\alpha\beta} &= G \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \varepsilon_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.9a - c)$$

Es sei darauf hingewiesen, daß die beiden hier verwendeten Hypothesen  $\varepsilon_{\gamma\gamma} = 0$  und  $\bar{\sigma}_{\gamma\gamma} = 0$  über die Gleichung (3.7c) zueinander im Widerspruch stehen und für  $\mu \neq 0$  die Beziehung  $\bar{\sigma}_{\alpha\alpha} = -\bar{\sigma}_{\beta\beta}$  ergeben. Dieser Widerspruch wird aber in allen klas-

sischen Abhandlungen der Platten- und Schalentheorie stillschweigend in Kauf genommen (siehe z.B. bei Girkmann [6, S. 468, Gleichungen (1190)]). Er erscheint vertretbar, weil die Erfüllung der Gleichung (3.7c) hier von untergeordneter Bedeutung ist.

Es wird Gleichung (3.9) in Gleichung (3.6) eingesetzt, wobei man beachtet, daß die Werte  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$  und  $\varepsilon_{\beta\beta}$  proportional von Null bis auf den Endwert anwachsen.

$$-a_i = \frac{1}{2} \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \varepsilon_{\alpha\alpha}^2 + \varepsilon_{\beta\beta}^2 + 2\mu \varepsilon_{\alpha\alpha} \varepsilon_{\beta\beta} + \frac{1-\mu}{2} \varepsilon_{\alpha\beta}^2 \right\} \quad (3.10)$$

Die Formänderungsarbeit der ganzen Schale wird:

$$-A_i = - \int_{(V)} a_i dV \quad (3.11)$$

Dabei ist  $dV = ds_\alpha \cdot ds_\beta \cdot ds_\gamma$  (siehe Bild 6).

Mit  $ds_\alpha = d\alpha$   
 $ds_\beta = a_\gamma \cdot d\beta \approx \alpha \sin \vartheta (1 + \gamma \cot \vartheta) d\beta$   
 $ds_\gamma = \alpha d\gamma$

wird

$$dV = \alpha^2 (1 + \gamma \cot \vartheta) \sin \vartheta d\alpha d\beta d\gamma \quad (3.12)$$

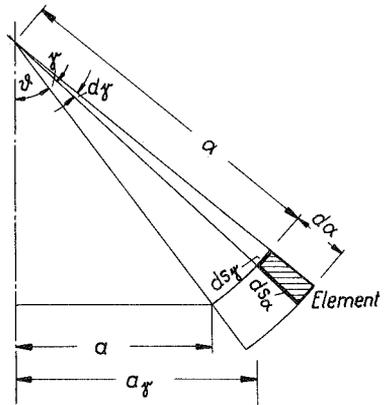


Bild 6: Schnitt durch die Kegelschale mit Element

Es wird

$$-A_1 = \frac{E}{1-\mu^2} \iiint_{(F)} \frac{1}{2} \left\{ \epsilon_{\alpha\alpha}^2 + \epsilon_{\beta\beta}^2 + 2\mu \epsilon_{\alpha\alpha} \epsilon_{\beta\beta} + \frac{1-\mu}{2} \epsilon_{\alpha\beta}^2 \right\} \alpha^2 (1 + \gamma \cot \vartheta) \sin \vartheta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \quad (3.13)$$

Mit Gleichung (2.24) wird aus Gleichung (3.13):

$$\begin{aligned} -A_1 = & \frac{E}{1-\mu^2} \iiint_{(F)} \frac{1}{2} \left[ \left\{ (E_{\alpha\alpha}^0)^2 + 2E_{\alpha\alpha}^0 \cdot E_{\alpha\alpha}^1 \cdot \gamma + [2E_{\alpha\alpha}^0 \cdot E_{\alpha\alpha}^2 + (E_{\alpha\alpha}^1)^2] \gamma^2 + \dots \right\} + \right. \\ & \left. + \left\{ (E_{\beta\beta}^0)^2 + 2E_{\beta\beta}^0 \cdot E_{\beta\beta}^1 \cdot \gamma + [2E_{\beta\beta}^0 \cdot E_{\beta\beta}^2 + (E_{\beta\beta}^1)^2] \gamma^2 + \dots \right\} + \right. \\ & \left. + 2\mu \left\{ E_{\alpha\alpha}^0 E_{\beta\beta}^0 + [E_{\alpha\alpha}^0 E_{\beta\beta}^1 + E_{\alpha\alpha}^1 E_{\beta\beta}^0] \gamma + [E_{\alpha\alpha}^0 E_{\beta\beta}^2 + E_{\alpha\alpha}^1 E_{\beta\beta}^1 + E_{\alpha\alpha}^2 E_{\beta\beta}^0] \gamma^2 + \dots \right\} + \right. \\ & \left. + \frac{1-\mu}{2} \left\{ (E_{\alpha\beta}^0)^2 + 2E_{\alpha\beta}^0 E_{\alpha\beta}^1 \cdot \gamma + [2E_{\alpha\beta}^0 E_{\alpha\beta}^2 + (E_{\alpha\beta}^1)^2] \gamma^2 + \dots \right\} \right] \cdot \\ & \cdot (1 + \gamma \cot \vartheta) \alpha^2 \sin \vartheta \, d\alpha \, d\beta \, d\gamma \quad (3.14) \end{aligned}$$

Die Integration über den Winkel  $\gamma$  läßt sich ausführen.

$$\int_{-\gamma_0/2}^{+\gamma_0/2} d\gamma = \gamma_0$$

$$\int_{-\gamma_0/2}^{+\gamma_0/2} \gamma \, d\gamma = 0 \quad (3.15)$$

$$\int_{-\gamma_0/2}^{+\gamma_0/2} \gamma^2 \, d\gamma = \frac{1}{12} \cdot \gamma_0^3 = k \cdot \gamma_0 \quad \text{mit} \quad k = \frac{\gamma_0^2}{12}$$

Höhere Potenzen als  $\gamma^2$  können vernachlässigt werden, da die Integration über  $\gamma^3$  wieder Null ergibt und aus den Integralen über  $\gamma^4$  Glieder mit dem Multiplikator  $k^2 = \left(\frac{\gamma_0^2}{12}\right)^2$  hervorgehen, die gegen 1 vernachlässigt werden dürfen.

Gleichungen (3.15) in Gleichung (3.14) berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
 -A_i = & \frac{E}{1-\mu^2} \iint_{(F)} \frac{1}{2} \left[ (E_{\alpha\alpha}^0)^2 + (E_{\beta\beta}^0)^2 + 2\mu \cdot E_{\alpha\alpha}^0 E_{\beta\beta}^0 + \frac{1-\mu}{2} (E_{\alpha\beta}^0)^2 + \right. \\
 & + k \{ 2 E_{\alpha\alpha}^0 E_{\alpha\alpha}^2 + (E_{\alpha\alpha}^1)^2 + 2 E_{\beta\beta}^0 E_{\beta\beta}^2 + (E_{\beta\beta}^1)^2 + \\
 & + 2\mu [E_{\alpha\alpha}^0 E_{\beta\beta}^2 + E_{\alpha\alpha}^1 E_{\beta\beta}^1 + E_{\alpha\alpha}^2 E_{\beta\beta}^0] + \frac{1-\mu}{2} [2E_{\alpha\beta}^0 E_{\alpha\beta}^2 + (E_{\alpha\beta}^1)^2] \} + \\
 & + 2 \cot \vartheta [E_{\alpha\alpha}^0 E_{\alpha\alpha}^1 + E_{\beta\beta}^0 E_{\beta\beta}^1] + 2\mu \cot \vartheta [E_{\alpha\alpha}^0 E_{\beta\beta}^1 + E_{\alpha\alpha}^1 E_{\beta\beta}^0] + \\
 & \left. + (1-\mu) \cdot \cot \vartheta \cdot E_{\alpha\beta}^0 E_{\alpha\beta}^1 \right] \cdot \alpha^2 \cdot \sin \vartheta \, d\alpha \, d\beta \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Nun lassen sich die Werte aus Tafel 1 einsetzen. Es wird

$$\begin{aligned}
 -A_i = & \frac{E}{1-\mu^2} \iint_{(F)} \left\{ \frac{1}{2} u^2 + \mu u u' + u v^* + c \cdot u w + \frac{1}{2} u'^2 + \mu u' v^* + c \cdot u' w + \frac{1-\mu}{4} u^{*2} - \right. \\
 & \frac{1-\mu}{2} u^* v - \frac{1-\mu}{2} u^* v' + \frac{1-\mu}{4} v^2 - \frac{1-\mu}{2} v v' - \frac{1-\mu}{4} v'^2 + \frac{1}{2} v^{*2} + \\
 & + c \cdot v^* w + \frac{1}{2} c^2 \cdot w + k \left[ \frac{1+c^2}{2} u^2 + \frac{1+\mu}{2} u u' + \frac{1}{2} \mu u u'' + \frac{1}{2} u u^{**} + \right. \\
 & + \frac{1}{2} u v^* + c((1+c^2) \cdot u w + \frac{1}{2} u w' + u w^{**}) + \frac{1}{2} \mu u'^2 + \frac{1}{2} u' u'' + \\
 & + \frac{1}{2} \mu u' u^{**} + \frac{1}{2} u' v^* + c \left( \frac{1+\mu}{2} u' w - \frac{1}{2} \mu u' w' - u' w'' \right) - \\
 & - \frac{1-\mu}{4} (1-c^2) u^{*2} + \frac{1-\mu}{2} u^* u^{**} + \frac{1-\mu}{2} u^* v - \frac{1-\mu}{2} u^* v' + \\
 & + c \left( -\frac{1-\mu}{2} u^* w^* + \frac{1-\mu}{2} u^* w^{**} \right) + \frac{1}{2} \mu u'' v^* + \frac{1}{2} \mu \cdot c \cdot u'' w - \frac{1-\mu}{2} u'^* v + \\
 & + \frac{1-\mu}{2} u'^* v' + \frac{1}{2} u^{**} v^* + \frac{1}{2} c \cdot u^{**} w - \frac{1-\mu}{4} (1-3c^2) v^2 + \frac{1-\mu}{2} (1-3c^2) v v' + \\
 & + c \left( -\frac{3}{2} (1-\mu) v w^* + \frac{3}{2} (1-\mu) v w^{**} \right) - \frac{1-\mu}{4} (1-3c^2) v'^2 + c \left( \frac{3}{2} (1-\mu) v'^* w^* - \right. \\
 & - \frac{3}{2} (1-\mu) v'^* w^{**} + \frac{1}{2} v^* w - \frac{1}{2} v^* w' - \mu v^* w'' \left. \right) + \frac{1}{2} c^2 (1+c^2) w^2 + \frac{1}{2} c^2 w w' + \\
 & + c^2 w w^{**} + \frac{1}{2} w'^2 + \mu w' w'' + w' w^{**} + (1-\mu) w^{*2} - 2(1-\mu) w^* w'^* + \\
 & \left. + \frac{1}{2} w^{**2} + \mu w'' w^{**} + (1-\mu) w'^{*2} + \frac{1}{2} w^{**2} \right\} \sin \vartheta \, d\alpha \, d\beta \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde abkürzend  $\cot \vartheta = c$  gesetzt.

### 3.4. Variation der Formänderungsarbeit

Gemäß Gleichung (3.4) ist zu bilden  $\delta A_1 = 0$ .

Es ist

$$-A_1 = \iint F(\alpha, u, u', u'', u''', v, v', v'', w, w', w'', w''') \cdot \sin \vartheta \, d\alpha \, d\beta \quad (3.18)$$

Es genügt die Variation des Integranden in Gleichung (3.18).

Für die Verschiebungen  $u, v, w$  müssen die variierten Funktionen  $U = u + \omega_1 \cdot f_1$ ;  $V = v + \omega_2 \cdot f_2$ ;  $W = w + \omega_3 \cdot f_3$  eingeführt werden.  $f_1, f_2, f_3$  sind beliebige Funktionen, die dieselben Randbedingungen wie  $u, v, w$  erfüllen müssen.  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sind reelle Konstanten. Für  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$  gehen  $U, V, W$  in die gesuchten Lösungsfunktionen  $u, v, w$  über.

Der Variationsvorgang braucht jedoch nicht ausgeführt zu werden. Die Lösungen ergeben sich als die Eulerschen Differentialgleichungen, und zwar je eine für die Variation nach  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ .

$$\begin{aligned} [F]_u &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_\beta} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\alpha}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial u_{\beta\beta}} = 0 \\ [F]_v &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial F}{\partial v_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial F}{\partial v_\beta} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v_{\alpha\alpha}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial F}{\partial v_{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial v_{\beta\beta}} = 0 \\ [F]_w &= \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial F}{\partial w_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial F}{\partial w_\beta} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial w_{\alpha\alpha}} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial F}{\partial w_{\alpha\beta}} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial w_{\beta\beta}} = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Es bedeuten  $u_\alpha = \frac{\partial u}{\partial \alpha}$ ;  $u_\beta = \frac{\partial u}{\partial \beta}$ ; usw.

Die Gleichungen (3.19) lassen sich auch darstellen als Operatoren der Verschiebungen  $u, v, w$  und deren Ableitungen:

$$\begin{aligned} [F]_u &= L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) = 0 \\ [F]_v &= L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) = 0 \\ [F]_w &= L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Die Operatoren, die sich nach Einsetzen der Gleichung (3.17) in die Gleichungen (3.19) und Durchführung der partiellen Differentiationen ergeben, sind in Tafel 2a angegeben.

Genauso wie die Tafel 2b zum Vergleich angegebenen Operatoren nach Nollau [2], sind die Operatoren nicht symmetrisch zur Hauptdiagonalen, das heißt, es ist  $L_{jk} \neq L_{kj}$ . Obwohl rein formal von den bei Wlassow angegebenen Beziehungen der räumlichen Elastizitätslehre ausgegangen und die artgleichen geometrischen Hypothesen, wie sie Wlassow für die Biegetheorie der Kreiszylinderschale formuliert, eingeführt wurden, konnte die geforderte Symmetrie der Operatoren nicht erreicht werden.

Möglichkeiten für eine Änderung im Differentialgleichungssystem bestehen einmal in der Formulierung anderer geometrischer Hypothesen, als der im Abschnitt 2.3. erörterten. Eine Mitnahme der Schubverzerrungen erschwert die mathematische Lösung des Problems ungemein; auch erscheint es fraglich, ob es geeignetere Hypothesen als die von Bernoulli bzw. die für diese Arbeit modifizierte Bernoulli-Hypothese gibt. Zum anderen könnte auch der Wegfall von Gleichung (3.8) im Elastizitätsgesetz noch Änderungen bewirken. Eine Handhabe, die das Gleichungssystem zwingend symmetrisiert, scheint sich nicht zu bieten, so daß man auch noch auf Probieren angewiesen wäre.

Ein Vergleich der in den vorhergehenden Abschnitten hergeleiteten Differential-Operatoren gemäß Tafel 2a mit den in [2] angegebenen gemäß Tafel 2b zeigt nur Unterschiede in den mit  $k = \gamma_0^2/12$  behafteten Termen, was auch nach den Diskussionen der Gleichungen (2.6) und (2.26) zu erwarten war. Auch hier stimmen jedoch noch die wichtigsten Terme überein, das sind insbesondere die höchsten Ableitungen der Verschiebungsfunktionen  $w$ .

Das in [2] angegebene Differentialgleichungssystem für eine Kegelschale konstanter Dicke weist auch keine Symmetrie auf, so daß die Störung der Symmetrie also nicht allein auf das Wanddickengesetz zurückgeführt werden kann. Auch die Form der Schale wird dabei eine Rolle spielen.

$i, k$	Faktor	$u$	$u'$	$u^*$	$u''$	$u'^*$	$u^{**}$	$u'''$	$u''^*$	$u'^{**}$	$u^{***}$
1,1	1	$1-\mu$	$-2$		$-1$		$-\frac{1-\mu}{2}$				
	k	$\frac{1+\mu}{2} + c^2$	$3$		$\frac{3}{2}$		$\frac{4-3\mu}{2} \cdot \frac{1-\mu}{2} c^2$				
2,1	1			$-2+\mu$		$-\frac{1+\mu}{2}$					
	k			$\frac{1-2\mu}{2}$		$-\frac{3-2\mu}{2}$			$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$
3,1	c	$1$	$\mu$								
	k·c	$\frac{1}{2} + c^2$	$-\frac{3}{2}(4-\mu)$		$-6+\mu$		$\frac{5-2\mu}{2}$	$-1$			$\frac{1-\mu}{2}$

		$v$	$v'$	$v^*$	$v''$	$v'^*$	$v^{**}$	$v'''$	$v''^*$	$v'^{**}$	$v^{***}$
1,2	1			$\frac{3}{2}(1-\mu)$		$-\frac{1+\mu}{2}$					
	k			$-1+2\mu$		$\frac{1+2\mu}{2}$			$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
2,2	1	$1-\mu$	$-1+\mu$		$-\frac{1-\mu}{2}$		$-1$				
	k	$-(1-\mu)(1-3c^2)$	$(1-\mu)(1-3c^2)$		$\frac{1-\mu}{2}(1-3c^2)$						
3,2	c			$1$							
	k·c			$4-5\mu$		$-\frac{5+2\mu}{2}$			$-\frac{3-\mu}{2}$		

		$w$	$w'$	$w^*$	$w''$	$w'^*$	$w^{**}$	$w'''$	$w''^*$	$w'^{**}$	$w^{***}$
1,3	c	$1-\mu$	$-\mu$								
	k·c	$\frac{1+\mu}{2} + c^2$	$\frac{5}{2}\mu$		$3+\mu$		$\frac{4-\mu}{2}$	$1$			$-\frac{1-\mu}{2}$
2,3	c			$-1$							
	k·c			$-\frac{7-6\mu}{2}$		$\frac{7-6\mu}{2}$			$\frac{3-\mu}{2}$		
3,3	1	$c^2$									
	k	$c^2(\frac{1}{2} + c^2)$	$-2(1-3\mu)$		$11+3\mu$		$-5+6\mu+2c^2$	$8$			$4$

Tafel 2a: Operatoren  $L_{ik}$  des Differentialgleichungssystems;

hergeleitet aus der Variationsrechnung

$$+k \cdot (w'''' + 2w'''' + w''''')$$

i, k	Faktor	u	u'	u*	u''	u'*	u**	u'''	u''*	u'''*	u''**
1,1	1	$1-\mu$	-2		-1		$-\frac{1-\mu}{2}$				
	k	$c^2$					$-\frac{1-\mu}{2}c^2$				
2,1	1			$-2+\mu$		$-\frac{1+\mu}{2}$					
	k										
3,1	c	1	$\mu$								
	k·c	$-1+c^2$	-7		-6		$2-\mu$	-1		$\frac{1-\mu}{2}$	

		v	v'	v*	v''	v'*	v**	v'''	v''*	v'''*	v''**
1,2	1			$\frac{3}{2}(1-\mu)$		$-\frac{1+\mu}{2}$					
	k										
2,2	1	$1-\mu$	$-1+\mu$		$-\frac{1-\mu}{2}$		-1				
	k	$3c^2(1-\mu)$	$-3c^2(1-\mu)$		$-\frac{3}{2}c^2(1-\mu)$						
3,2	c			1							
	k·c			$3-5\mu$		$-3-\mu$				$-\frac{3-\mu}{2}$	

		w	w'	w*	w''	w'*	w**	w'''	w''*	w'''*	w''**
1,3	c	$1-\mu$	$-\mu$								
	k·c	$c^2$	1		3		$\frac{3-\mu}{2}$	1		$-\frac{1-\mu}{2}$	
2,3	c			-1							
	k·c			$-3(1-\mu)$		$3(1-\mu)$				$\frac{3-\mu}{2}$	
3,3	1	$c^2$									
	k	$c^2(-1+c^2)$	$-2(1-3\mu)$		$11+3\mu$		$-5+6\mu+2c^2$	8		4	

Tafel 2b: Operatoren  $L_{ik}$  des Differentialgleichungssystems; hergeleitet aus den Gleichgewichtsbedingungen nach Nollau in [2]

$$+k \cdot (w'''' + 2w'''' + w''''')$$

#### 4. Lösung der Differentialgleichungen

##### 4.1. Lösungsansatz und charakteristische Gleichung

Die Gleichungen (3.20) stellen in Verbindung mit den Werten der Tafel 2a ein System von drei homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung für die Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  dar. Es sind gemäß der Lösung des Variationsproblems Eulersche Differentialgleichungen. Daher führt in  $\alpha$ -Richtung ein Potenzansatz zum Ziel, während in  $\beta$ -Richtung ein harmonischer Ansatz das Differentialgleichungssystem befriedigt.

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \cdot \varrho^{\lambda'_m} \cdot \cos m\beta \\ v &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^* \cdot \varrho^{\lambda'_m} \cdot \sin m\beta \\ w &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m^* \cdot \varrho^{\lambda'_m} \cdot \cos m\beta \end{aligned} \quad (4.1)$$

Hierbei sei  $\varrho = \frac{\alpha}{l}$  (4.1a)

die dimensionslose Koordinate in Richtung  $\alpha$ , bezogen auf eine beliebige feste Länge  $l$ .

Es gilt  $\varrho^n \cdot \frac{\partial^n f}{\partial \varrho^n} = \alpha^n \cdot \frac{\partial^n f}{\partial \alpha^n} \equiv f^{(n)}$  . (4.1b)

Die drei Differentialgleichungen Tafel 2a ergeben mit dem Ansatz (4.1) für jede Harmonische  $m$  drei lineare Gleichungen (4.2) mit den Unbekannten  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ .

$$\begin{aligned} d_{11} \cdot A^* + d_{12} \cdot B^* + d_{13} \cdot C^* &= 0 \\ d_{21} \cdot A^* + d_{22} \cdot B^* + d_{23} \cdot C^* &= 0 \\ d_{31} \cdot A^* + d_{32} \cdot B^* + d_{33} \cdot C^* &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Die Koeffizienten  $d_{ik}$  des Gleichungssystems (4.2) sind von  $m$  abhängig und enthalten die Unabhängige  $\lambda'_m$ , deren Index  $m$  hier künftig nicht mehr angeschrieben wird, da sich die weiteren Untersuchungen stets auf eine bestimmte Harmonische  $m$  beziehen sollen. Das Gleichungssystem ist homogen und hat daher nur dann von Null verschiedene Lösungen für  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ , wenn die Koeffizienten-Determinante  $\det D$  verschwindet.

$$\det D = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

Diese Bedingung liefert eine Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte  $\lambda'$ , die sogenannte charakteristische Gleichung. Mit der Substitution

$$\lambda = \lambda' + 1/2 \quad (4.4)$$

werden die Koeffizienten  $d_{ik}$  der Determinante (4.3) gemäß dem Lösungsansatz (4.1) aus Tafel 2a bestimmt.

Diese Koeffizienten  $d_{ik}$  werden in Matrixschreibweise dargestellt als

$$d_{ik} = \mathcal{V}_{ik(1,2)}' \cdot \mathcal{V}_{ik(2,21)} \cdot \ell_{(21,1)} \quad (4.5)$$

Die Koeffizienten der Vektoren  $\mathcal{V}_{ik}'$  und der Matrizen  $\mathcal{V}_{ik}$  sowie die Elemente des Vektors  $\ell$  sind in Tafel 3 angegeben. Der Vektor  $\ell$  ist nach Potenzen von  $\lambda$  geordnet. Die  $d_{ki}$  gehen aus den  $d_{ik}$  hervor, wenn  $\lambda$  mit  $-\lambda$  und  $\lambda^3$  mit  $-\lambda^3$  vertauscht werden.

Die Ausrechnung der Determinante ist eine sehr mühsame Arbeit. Die ungeraden Potenzen von  $\lambda$  verschwinden, und es entsteht eine Gleichung 8. Grades für  $\lambda$  bzw. 4. Grades für  $\lambda^2$ :

$$\lambda^8 + g_6 \lambda^6 + g_4 \lambda^4 + g_2 \lambda^2 + g_0 = 0 \quad (4.6)$$

Die  $g_i$  lassen sich darstellen als

$$g_i = m_{i(1,5-\frac{\eta}{2})}^{*1} \cdot \mathcal{G}_{i(5-\frac{\eta}{2},10)}^* \cdot \mathcal{G}_{(10,1)} \quad (4.7)$$

Die Koeffizienten dieser Vektoren und Matrizen finden sich in Tafel 4.

Auch die in [2, Gleichung (16a - e)] angegebenen Ausdrücke für  $g_i$  lassen sich in die Form der Gleichung (4.7) bringen. Dabei ändern sich nur die Matrizen  $\mathcal{G}_i$ . Spürbare Unterschiede im Ergebnis sind lediglich für dicke Schalen und große Öffnungswinkel  $\vartheta$  zu erwarten.

$i, k$	$\mathcal{V}_{ik}$	$\mathcal{V}_{ik}$													
1,1	1	$\frac{5}{4}$	-1			$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$						-1		
	k	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	1		-2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$				$\frac{3}{2}$		
2,1	M	$\frac{7}{4}$	$-\frac{5}{4}$							$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$				
	Mk	$-\frac{7}{8}$	$\frac{3}{2}$			$-\frac{1}{2}$				$\frac{1}{2}$	-1		$\frac{1}{2}$		
3,1	c	1	$-\frac{1}{2}$							1					
	ck	$\frac{7}{8}$		1		$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$			$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
1,2	M	$\frac{7}{4}$	$-\frac{5}{4}$							$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$				
	Mk	$-\frac{7}{8}$	$\frac{3}{2}$			$-\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$	1		$\frac{1}{2}$		
2,2	1	$\frac{9}{8}$	$-\frac{9}{8}$			1							$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
	k	$-\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{27}{8}$	$-\frac{27}{8}$								$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
3,2	Mc	1													
	Mck	$\frac{33}{8}$	$-\frac{33}{8}$							$\frac{1}{2}$	-2		$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
1,3	c	1	$-\frac{1}{2}$										-1		
	ck	$\frac{7}{8}$		1		$-\frac{9}{4}$	$\frac{3}{4}$			$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
2,3	Mc	1													
	Mck	$\frac{33}{8}$	$-\frac{33}{8}$							$-\frac{1}{2}$	2		$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
3,3	1		1												
	k	$\frac{13}{16}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$		1	$\frac{11}{2}$	-6	-2	1			$-\frac{7}{2}$	3	-2

1	$\mu$	$c^2$	$\mu c^2$	$c^4$	$M^2$	$\mu M^2$	$c^2 M^2$	$\mu c^2 M^2$	$M^4$	1	$\mu$	$M^2$	$\mu M^2$	1	$\mu$	$c^2$	$\mu c^2$	$M^2$	1	1
1										2			$\lambda^2$				$\lambda^3$	$\lambda^4$		

$l =$

Tafel 3: Koeffizienten der Vektoren  $\mathcal{V}_{ik}$ , der Matrizen  $\mathcal{V}_{ik}$  und des Vektors  $l$ .

$i$	$m_i^*$	$G_i^*$								
6	1		-7	4			2			
	$M^2$		-4							
4	1	1	$\frac{127}{8}$	-17	3	-5	$-\frac{3}{2}$	1	4	-3
	$M^2$		17	-12		-6				
	$M^4$		6							
2	1	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{203}{16}$	$\frac{79}{4}$	$-\frac{15}{2}$	$\frac{25}{2}$	$-\frac{61}{8}$	$-\frac{5}{2}$	-10	$\frac{15}{2}$
	$M^2$		$-\frac{71}{4}$	18		13	-10		-4	2
	$M^4$		-13	12		8	-2			
	$M^6$		-4							
0	1	$\frac{9}{16}$	$\frac{585}{256}$	$-\frac{63}{16}$	$\frac{27}{16}$	$-\frac{45}{16}$	$\frac{63}{32}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{27}{16}$
	$M^2$		$\frac{215}{16}$	$-\frac{103}{4}$	12	$\frac{89}{8}$	$-\frac{43}{2}$	12	5	$-\frac{5}{2}$
	$M^4$		$-\frac{81}{8}$	23	-12	-8	$\frac{13}{2}$		1	
	$M^6$		3	-4		-2				
	$M^8$		1							

$$\mathcal{G}^1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{1-\mu^2}{k}c^2 & 1 & \mu & \mu^2 & c^2 & \mu c^2 & \mu^2 c^2 & c^4 & \mu c^4 & \mu^2 c^4 & \hline \hline \end{array}$$

Tafel 4: Koeffizienten der Vektoren  $m_i^*$ , der Matrizen  $G_i^*$  und des Vektors  $\mathcal{G}$

Auch die bei Nollau [2, Gleichungen (16)] angegebenen Koeffizienten der charakteristischen Gleichung lassen sich in Form der Gleichungen (4.5) ausdrücken. Die entsprechenden Matrizen  $G_i^*$  erhält man aus den in Tafel 4 angegebenen, wenn man dort die

Elemente  $g_{1,5}$  mit  $\frac{4}{5}$  und  $g_{1,8}$  mit  $\frac{1}{4}$  multiplizieren, während man  $g_{1,7}$  und  $g_{1,10}$  streicht. Die Änderungen in den Matrizen  $g_i^*$  sind geringfügig und werden sich nur bei dicken Schalen auswirken. Obwohl die Bernoulli-Hypothese abgeändert wurde, ergeben sich kaum Unterschiede in den Koeffizienten und damit auch in den Wurzeln der charakteristischen Gleichung. Das kann als Anzeichen dafür gedeutet werden, daß auch die Störung der Symmetrie im Differentialgleichungs-System von geringem Einfluß auf das Endergebnis sein kann, was auch Wlassow [ 4 ] bei der Diskussion unterschiedlicher Theorien für die Kreiszyinderschale bemerkt.

#### 4.2. Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Die charakteristische Gleichung (4.6) ist eine Gleichung 4. Grades für  $\lambda^2$ . Aus ihr erhält man die 4 Wurzeln  $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2$ . Sie ergeben sich je paarweise konjugiert komplex oder reell. Aus physikalischen Gründen müssen die reellen Wurzeln  $\lambda_v^2$  stets positiv sein.

Nun wird Wurzelpaar  $\lambda_1^2$  und  $\lambda_2^2$  betrachtet. Die sich ergebenden Werte für  $\lambda$  und  $\lambda'$  sind in Tafel 5 angegeben.

	komplexe Eigenwerte	reelle Eigenwerte
Lösungen der Gleichung 4. Grades für $\lambda^2$ :	$\lambda_{1,2}^2 = \alpha_1 \pm i \nu_1$	$\lambda_1^2 = \alpha_1 > 0; \lambda_2^2 = \alpha_2 > 0$
daraus $\lambda$ :	$\lambda_{1,2} = + \xi_1 \pm i \eta_1$ $\lambda_{5,6} = - \xi_1 \pm i \eta_1$	$\lambda_1 = + \xi_1 \quad ; \quad \lambda_2 = + \xi_2$ $\lambda_5 = - \xi_1 \quad ; \quad \lambda_6 = - \xi_2$
mit $\lambda' = \lambda - \frac{1}{\lambda}$ :	$\lambda'_{1,2} = \xi_1 - \frac{1}{2} \pm i \eta_1 = \xi'_1 \pm i \eta_1$ $\lambda'_{5,6} = -\xi_1 - \frac{1}{2} \pm i \eta_1 = \xi'_5 \pm i \eta_5$	$\lambda'_1 = \xi_1 - \frac{1}{2} = \xi'_1; \lambda'_2 = \xi_2 - \frac{1}{2} = \xi'_2$ $\lambda'_5 = -\xi_1 - \frac{1}{2} = \xi'_5; \lambda'_6 = -\xi_2 - \frac{1}{2} = \xi'_6$
	$\xi'_{r+4} = -\xi'_r - 1; \eta_{r+4} = \eta_r$	$\xi'_{r+4} = -\xi'_r - 1$

Tafel 5: Wurzeln der charakteristischen Gleichung

Die Eigenwerte  $\lambda'_3, \lambda'_4, \lambda'_7, \lambda'_8$  werden entsprechend aus den Wurzeln  $\lambda_3^2, \lambda_4^2$  gebildet. Es zeigt sich, daß die Lösung der charakteristischen Gleichung stets wenigstens ein komplexes Wurzelpaar  $\lambda'_{r,r+1}$  ergibt.

### 4.3. Allgemeine Lösung des Ansatzes

Aus Gleichung (4.1) entnimmt man

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^* \cdot \rho^{\lambda'_m} \cdot \cos m\beta = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cdot \cos m\beta \\
 v &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m^* \cdot \rho^{\lambda'_m} \cdot \sin m\beta = \sum_{m=0}^{\infty} v_m \cdot \sin m\beta \\
 w &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m^* \cdot \rho^{\lambda'_m} \cdot \cos m\beta = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \cdot \cos m\beta
 \end{aligned} \tag{4.8a - c}$$

Mit den Werten aus Tafel 5 für  $\lambda'_m$  ergibt sich aus (4.8c)

$$w_m = \sum_r C_r^* \cdot \rho^{\lambda'_r} \quad r = 1, 2, \dots, 8. \tag{4.9}$$

Komplexe Eigenwerte  $\lambda'_r$  ergeben gedämpfte Schwingungen für die Verformung  $w$  in  $\alpha$ -Richtung. Aus reellen Eigenwerten  $\lambda'_r$  folgen reine Potenzfunktionen. Für komplexe Eigenwerte  $\lambda'_r$  ergeben sich auch komplexe Integrationskonstanten  $C_r^*$ , die auf reelle Konstanten  $C_r$  umgerechnet werden sollen.

#### a) Komplexe Eigenwerte $\lambda'_r$ :

$$\text{Nach Tafel 5 ist: } \lambda'_{r,r+1} = \xi'_r \pm i \eta_r, \quad r = 1, 3, 5, 7. \tag{4.10a}$$

Gleichung (4.10a) wird in Gleichung (4.9) eingesetzt. Mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x \tag{4.11}$$

erhält man

$$w_m = \sum_r \rho^{\xi'_r} [(C_r^* + C_{r+1}^*) \cdot \cos(\eta_r \cdot \ln \rho) + i(C_r^* - C_{r+1}^*) \cdot \sin(\eta_r \cdot \ln \rho)] \tag{4.12a}$$

$r = 1, 3, 5, 7.$

$$\text{Mit } C_r = C_r^* + C_{r+1}^* \tag{4.13a}$$

$$\text{und } C_{r+1} = i(C_r^* - C_{r+1}^*)$$

wird aus Gleichung (4.12a)

$$w_m = \sum_r \varphi^{\xi_r'} [C_r \cdot \cos(\eta_r \cdot \ln \varphi) + C_{r+1} \cdot \sin(\eta_r \cdot \ln \varphi)] ; \quad r = 1, 3, 5, 7. \quad (4.14a)$$

$C_r$  und  $C_{r+1}$  sind reelle Konstanten,  $C_r^*$  und  $C_{r+1}^*$  sind konjugiert komplex.

Entsprechende Umformungen für  $A_r^*$  und  $B_r^*$  ergeben aus Gleichung (4.8a - b):

$$\begin{aligned} u_m &= \sum_r \varphi^{\xi_r'} [A_r \cdot \cos(\eta_r \cdot \ln \varphi) + A_{r+1} \cdot \sin(\eta_r \cdot \ln \varphi)] \\ v_m &= \sum_r \varphi^{\xi_r'} [B_r \cdot \cos(\eta_r \cdot \ln \varphi) + B_{r+1} \cdot \sin(\eta_r \cdot \ln \varphi)] \end{aligned} \quad (4.14a)$$

#### b) Reelle Eigenwerte $\lambda^1$ :

Nach Tafel 5 ist:  $\lambda_r^1 = \xi_r'$   $r = 1, 2, \dots, 8.$  (4.10b)

Mit  $A_r \equiv A_r^*$ ,  $B_r \equiv B_r^*$ ,  $C_r \equiv C_r^*$  (4.13b)

erhält man

$$\begin{aligned} u_m &= \sum_r \varphi^{\xi_r'} \cdot A_r \\ v_m &= \sum_r \varphi^{\xi_r'} \cdot B_r \\ w_m &= \sum_r \varphi^{\xi_r'} \cdot C_r \end{aligned} \quad (4.14b)$$

#### 4.4. Verhältnis der Integrationskonstanten

Die Integrationskonstanten  $A_r^*$ ,  $B_r^*$ ,  $C_r^*$  sind miteinander über das homogene Gleichungssystem (4.2) verknüpft.  $A_r^*$  und  $B_r^*$  sollen nun in  $C_r^*$  ausgedrückt werden, bzw.  $A_r$  und  $B_r$  in  $C_r$ . Aus dem homogenen Gleichungssystem (4.2) folgt:

$$\frac{A_r^*}{C_r^*} = \frac{a_r^*}{c_r^*} \quad \text{und} \quad \frac{B_r^*}{C_r^*} = \frac{b_r^*}{c_r^*} \quad (4.15)$$

$$\text{mit} \quad a_r^* = \begin{vmatrix} d_{12} & d_{13} \\ d_{22} & d_{23} \end{vmatrix} \quad b_r^* = \begin{vmatrix} d_{13} & d_{11} \\ d_{23} & d_{21} \end{vmatrix} \quad c_r^* = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

Die Werte  $d_{ik}$  erhält man aus Gleichung (4.5), für die jetzt auch der Vektor  $\ell$  bekannt ist.

a) Komplexe Eigenwerte  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
 \text{Mit} \quad A_r &= a_r C_r - a_{r+1} C_{r+1} \\
 A_{r+1} &= a_{r+1} C_r + a_r C_{r+1} \\
 B_r &= b_r C_r - b_{r+1} C_{r+1} \\
 B_{r+1} &= b_{r+1} C_r + b_r C_{r+1}
 \end{aligned} \tag{4.17a}$$

$$\begin{aligned}
 \text{und} \quad a_{r,r+1}^* &= a_r^* \pm i \cdot a_j^* \\
 b_{r,r+1}^* &= b_r^* \pm i \cdot b_j^* \\
 c_{r,r+1}^* &= c_r^* \pm i \cdot c_j^*
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

erhält man über die Gleichung (4.13a) und (4.15), (4.16):

$$\begin{aligned}
 a_r &= \frac{a_R^* c_R^* + a_J^* c_J^*}{c_R^{*2} + c_J^{*2}} & b_r &= \frac{b_R^* c_R^* + b_J^* c_J^*}{c_R^{*2} + c_J^{*2}} \\
 a_{r+1} &= \frac{a_R^* c_J^* - a_J^* c_R^*}{c_R^{*2} + c_J^{*2}} & b_{r+1} &= \frac{b_R^* c_J^* - b_J^* c_R^*}{c_R^{*2} + c_J^{*2}}
 \end{aligned} \tag{4.19a}$$

b) Reelle Eigenwerte  $\lambda$ :

$$A_r = a_r \cdot C_r \qquad B_r = b_r \cdot C_r \tag{4.17b}$$

$$a_r = \frac{a_r^*}{c_r^*} \qquad b_r = \frac{b_r^*}{c_r^*} \tag{4.19b}$$

Damit lassen sich in jedem Fall nun die Werte  $u_m$  und  $v_m$  der Gleichung (4.8) bzw. (4.14) in  $w_m$  ausdrücken. Als Integrationskonstanten tauchen nur noch die Werte  $C_r$  auf ( $r = 1, 2, \dots, 8$ ), die sowohl für reelle wie komplexe Eigenwerte reell sind.

Es zeigt sich, daß reelle Eigenwerte nur bei niedrigen Harmonischen  $m$  auftreten. Jedoch sind auch dann nur 4 Wurzeln reell, während sich die anderen 4 Wurzeln als konjugiert komplexe Paare ergeben. Die Lösung ist dann eine Koppelung der Ansätze (4.14a) und (4.14b).

## 5. Die Verschiebungen und die Schnittgrößen

### 5.1. Die Beziehungen zwischen den Schnittgrößen und den Verschiebungen

Die Integration der Normalspannungen  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{\beta\beta}$  bzw. der Schubspannungen  $\sigma_{\alpha\beta}$ ,  $\sigma_{\beta\alpha}$  über die Schalendicke ergibt die Normal- bzw. Schubkräfte. Für die Momente muß der Hebelarm  $\alpha y$  der Spannungen mitintegriert werden. Siehe Bild 7a.

$$N_{\alpha} = \int_{-\frac{y_0}{2}}^{+\frac{y_0}{2}} \sigma_{\alpha\alpha} (1 + c \cdot y) \alpha \, dy$$

$$N_{\beta} = \int \sigma_{\beta\beta} \alpha \, dy$$

$$N_{\alpha\beta} = \int \sigma_{\alpha\beta} (1 + c \cdot y) \alpha \, dy$$

$$N_{\beta\alpha} = \int \sigma_{\beta\alpha} \alpha \, dy$$

(5.1a - b)

$$M_{\alpha} = - \int \sigma_{\alpha\alpha} (1 + c \cdot y) \alpha^2 y \, dy$$

$$M_{\beta} = - \int \sigma_{\beta\beta} \alpha^2 y \, dy$$

$$M_{\alpha\beta} = - \int \sigma_{\alpha\beta} (1 + c \cdot y) \alpha^2 y \, dy$$

$$M_{\beta\alpha} = - \int \sigma_{\beta\alpha} \alpha^2 y \, dy$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3.9) und (2.24) lassen sich die Spannungen in den Koeffizienten der Dehnungen ausdrücken.

Es seien  $D = \frac{E y_0^3}{1 - \mu^2}$  die Dehnsteifigkeit

(5.2)

und  $K = \frac{E y_0^3}{12(1 - \mu^2)} = D \cdot \frac{y_0^2}{12} = D \cdot k$  die Biegesteifigkeit.

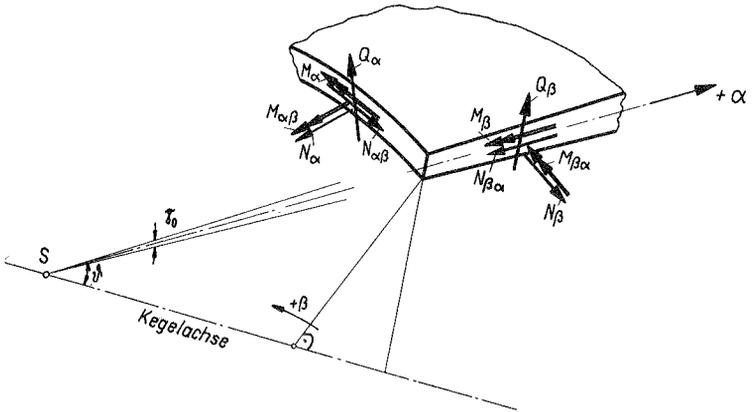
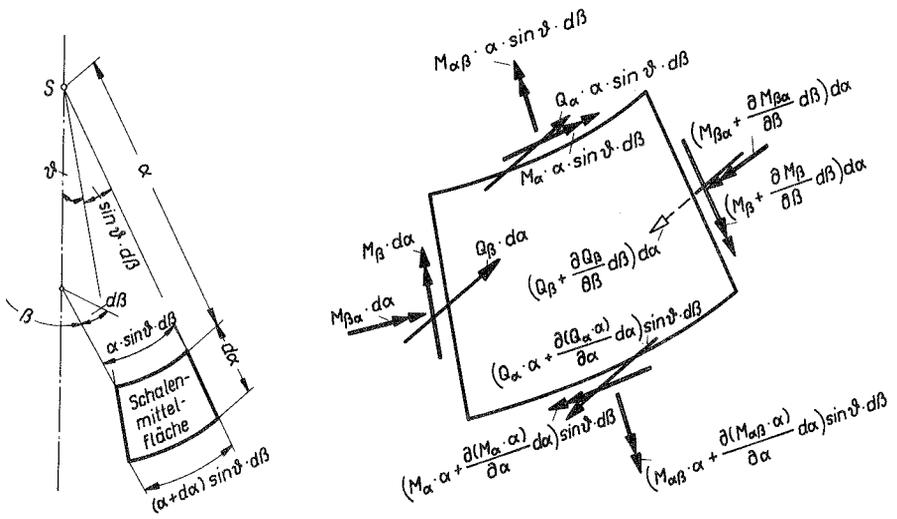


Bild 7a: Schnittgrößen der Kegelschale



Abmessungen des Schalenelements

Bild 7b: Schnittgrößen für das Momentengleichgewicht am Schalenelement

Nach Integration über  $\gamma$  erhält man:

$$N_{\alpha} = D \cdot \alpha \{ E_{\alpha\alpha}^{\circ} + k (c \cdot E_{\alpha\alpha}^1 + E_{\alpha\alpha}^2) + \mu [ E_{\beta\beta}^{\circ} + k (c \cdot E_{\beta\beta}^1 + E_{\beta\beta}^2) ] \}$$

$$N_{\beta} = D \cdot \alpha \{ E_{\beta\beta}^{\circ} + k \cdot E_{\beta\beta}^2 + \mu [ E_{\alpha\alpha}^{\circ} + k \cdot E_{\alpha\alpha}^2 ] \}$$

$$N_{\alpha\beta} = D \cdot \frac{1-\mu}{2} \cdot \alpha \{ E_{\alpha\beta}^{\circ} + k (c \cdot E_{\alpha\beta}^1 + E_{\alpha\beta}^2) \}$$

$$N_{\beta\alpha} = D \cdot \frac{1-\mu}{2} \cdot \alpha \{ E_{\alpha\beta}^{\circ} + k \cdot E_{\alpha\beta}^2 \}$$

$$M_{\alpha} = -K \cdot \alpha^2 \{ c \cdot E_{\alpha\alpha}^{\circ} + E_{\alpha\alpha}^1 + \frac{9}{5} k (c \cdot E_{\alpha\alpha}^2 + E_{\alpha\alpha}^3) + \mu [ c \cdot E_{\beta\beta}^{\circ} + E_{\beta\beta}^1 + \frac{9}{5} k (c \cdot E_{\beta\beta}^2 + E_{\beta\beta}^3) ] \}$$

$$M_{\beta} = -K \cdot \alpha^2 \{ E_{\beta\beta}^1 + \frac{9}{5} k \cdot E_{\beta\beta}^3 + \mu [ E_{\alpha\alpha}^1 + \frac{9}{5} k \cdot E_{\alpha\alpha}^3 ] \}$$

$$M_{\alpha\beta} = -K \cdot \frac{1-\mu}{2} \cdot \alpha^2 \{ c \cdot E_{\alpha\beta}^{\circ} + E_{\alpha\beta}^1 + \frac{9}{5} k (c \cdot E_{\alpha\beta}^2 + E_{\alpha\beta}^3) \}$$

$$M_{\beta\alpha} = -K \cdot \frac{1-\mu}{2} \cdot \alpha^2 \{ E_{\alpha\beta}^1 + \frac{9}{5} k \cdot E_{\alpha\beta}^3 \} \quad (5.3)$$

In der Biegetheorie der Kreiszyinderschale werden bei den Schnittkräften die mit  $k$  behafteten Terme meist vernachlässigt; in den Momenten werden außerdem nur die Ableitungen der Verschiebungen  $w$  berücksichtigt (Donnel-Näherungen). Ähnliche Näherungen führt auch Nollau [2] für die Kegelschale ein. Zahlenbeispiele zeigten jedoch, daß diese Näherungen bei der Kegelschale nicht statthaft sind. Sie können in einzelnen Schnittgrößen das Ergebnis um mehr als 50% verfälschen.

Lediglich die in den Momenten auftretenden Terme, die mit  $k$  behaftet sind (in den Gleichungen (5.3) unterstrichen), dürfen vernachlässigt werden. Sie liegen in  $\gamma$  bereits eine Potenz höher als entsprechende Terme bei den Kräften, und Vergleichsrechnungen ergaben Fehler in der Größenordnung 1% bei ihrer Vernachlässigung.

Die Querkräfte  $Q_\alpha$  und  $Q_\beta$  gewinnt man wie üblich aus den zwei Momenten-Gleichgewichtsbedingungen (siehe Bild 7b).

Momenten-Gleichgewicht in Richtung  $\alpha$ :

$$\frac{\partial(M_\alpha \cdot \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha \sin \vartheta d\beta + \frac{\partial M_{\beta\alpha}}{\partial \beta} d\beta d\alpha - M_\beta d\alpha \sin \vartheta d\beta - Q_\alpha \alpha \sin \vartheta d\beta d\alpha = 0$$

oder

$$Q_\alpha = \frac{1}{\alpha} (M'_\alpha + M_\alpha + M_{\beta\alpha}^* - M_\beta) \quad (5.4a)$$

Momenten-Gleichgewicht in Richtung  $\beta$ :

$$\frac{\partial M_\beta}{\partial \beta} d\beta d\alpha + \frac{\partial(M_{\alpha\beta} \cdot \alpha)}{\partial \alpha} d\alpha \sin \vartheta d\beta + M_{\beta\alpha} d\alpha \sin \vartheta d\beta - Q_\beta d\alpha \alpha \sin \vartheta d\beta = 0$$

oder

$$Q_\beta = \frac{1}{\alpha} (M_\beta^* + M'_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}) \quad (5.4b)$$

Um die Ableitungen der Momente  $M_\alpha$  und  $M_{\alpha\beta}$  ausführen zu können, drückt man letztere in den Verschiebungen aus:

$$M_\alpha = K \cdot \alpha \cdot \{-c \cdot u' + w'' + \mu(-c \cdot v' + w' + w'')\} \quad (5.5)$$

$$M_{\alpha\beta} = K \cdot (1-\mu) \cdot \alpha \{c(v-v') - w' + w''\}$$

Damit wird

$$\begin{aligned} Q_\alpha &= K \{-c[3u' + u'' + \mu(2v' + v'')]\} + 3\mu w' + (4+\mu)w'' + w''' + \mu(2w'' + w''') + \frac{1}{\alpha}(M_{\beta\alpha}^* - M_\beta) \\ Q_\beta &= K(1-\mu)\{c(2v - 2v' - v'') - 2w' + 2w'' + w'''\} + \frac{1}{2}(M_\beta^* + M_{\beta\alpha}) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Da infolge der geometrischen Hypothesen (2.5) nicht genügend Integrationskonstanten zur Erfüllung aller statischen Randbedingungen vorhanden sind, müssen die Schnittgrößen  $N_{\alpha\beta}$ ,  $M_{\alpha\beta}$  und  $Q_\alpha$  zu den Kirchhoffschen Ersatzkräften zusammengefaßt werden.

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\alpha\beta} &= N_{\alpha\beta} - \cot \vartheta \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot M_{\alpha\beta} \\ \bar{Q}_\alpha &= Q_\alpha + \frac{1}{\alpha} \cdot M_{\alpha\beta}^* \end{aligned} \quad (5.7a - b)$$

\*) Hier ist die Ableitung in [2] mit einem Vorzeichenfehler behaftet, der sich auf die Ergebnisse sehr stark auswirken kann.

5.2. Verschiebungen und Schnittgrößen als Funktion der Konstanten C

Die Gleichungen (4.14) ergeben mit den Umrechnungen (4.17) für die Integrationskonstanten A und B die Verschiebungen u, v, w als Funktionen der Konstanten C an.

S sei eine Wirkung, das soll heißen irgendeine Schnittgröße oder eine Verschiebung oder irgendeine Ableitung dieser Größen.

Dann läßt sich schreiben:

$$S = F \cdot \sum_m \left\{ t_m \cdot \sum_r \varphi^{kr} [(p_r C_r - p_{r+1} C_{r+1}) \cos(\eta_r \ln \varphi) + (p_{r+1} C_r + p_r C_{r+1}) \sin(\eta_r \ln \varphi)] \right\}. \quad (5.8)$$

Mit

$$\bar{S}_m = \sum_r \varphi^{kr} [(p_r C_r - p_{r+1} C_{r+1}) \cos(\eta_r \ln \varphi) + (p_{r+1} C_r + p_r C_{r+1}) \sin(\eta_r \ln \varphi)] \quad (5.9)$$

wird 
$$S = F \cdot \sum_m t_m \cdot \bar{S}_m = F \cdot \sum_m \bar{S}_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

Für die Summation über r in (5.8) bzw. (5.9) ist zu beachten:

a) Komplexe Eigenwerte  $\lambda^i$ :  $r = 1, 3, 5, 7.$

b) Reelle Eigenwerte  $\lambda^i$ :  $r = 1, 2, \dots, 8.$

Es wird  $\eta_r = p_{r+1} - C_{r+1} = 0$  und  $\cos(\eta_r \ln \varphi) = 1, \sin(\eta_r \ln \varphi) = 0.$

Tafel 6a enthält die Werte F,  $t_m$ ,  $p_r$ , und  $p_{r+1}$  für die Verschiebungen u, v, w sowie für einige Ableitungen derselben.

Daraus erhält man gemäß Tafel 1 die  $p_r$ -Werte für die Reihenglieder  $E_{\alpha\alpha}^i, E_{\beta\beta}^i, E_{\alpha\beta}^i$  der Verzerrungen  $\epsilon_{\alpha\alpha}, \epsilon_{\beta\beta}, \epsilon_{\alpha\beta}.$

Mit ihnen wieder lassen sich nach den Gleichungen (5.4), (5.6) und (5.7) die  $p_r$ -Werte für alle Schnittgrößen angeben. Siehe Tafel 6b.

Zur praktischen Berechnung von  $\bar{S}_m$  geht man am besten zur Matrizenrechnung über. Folgende Matrizen und Vektoren werden eingeführt:

$$r_{(8,1)} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_8 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Für Ableitungen in Richtung  $\beta$  gilt:

$$P_{U_r}' = -M \cdot U_r$$

$$P_{U_r}'' = -M^2 \cdot U_r$$

$$P_{U_r}''' = -M \cdot U_r$$

$$P_{V_r}' = +M \cdot V_r$$

$$P_{V_r}'' = -M^2 \cdot V_r$$

$$P_{V_r}''' = +M \cdot V_r$$

usw.

mit  $M = \frac{m}{\sin \vartheta}$

S	t <sub>m</sub>	F	$P_r$ für komplexe Eigenwerte $\lambda'_{r,r+1} = \xi'_r \pm i\eta_r$ $P_r$ für reelle EW	$P_{r+1}$ für komplexe Eigenwerte $\lambda'$
U			$a_r$	$a_{r+1}$
U'	cos miß	1	$\xi'_r a_r$ $+ \eta_r a_{r+1}$	$\xi'_r a_{r+1} - \eta_r a_r$
U''			$(\xi'_r - 1) \cdot \xi'_r \cdot a_r$ $+ (\xi'_r - 1) \eta_r a_{r+1} + \eta_r (\xi'_r a_{r+1} - \eta_r a_r)$	$(\xi'_r - 1)(\xi'_r a_{r+1} - \eta_r a_r) - \eta_r (\xi'_r a_r + \eta_r a_{r+1})$
V			$b_r$	$b_{r+1}$
V'	sin miß	1	$\xi'_r b_r$ $+ \eta_r b_{r+1}$	$\xi'_r b_{r+1} - \eta_r b_r$
V''			$(\xi'_r - 1) \cdot \xi'_r \cdot b_r$ $+ (\xi'_r - 1) \eta_r b_{r+1} + \eta_r (\xi'_r b_{r+1} - \eta_r b_r)$	$(\xi'_r - 1)(\xi'_r b_{r+1} - \eta_r b_r) - \eta_r (\xi'_r b_r + \eta_r b_{r+1})$
W			1	-
W'			$\xi'_r$	$-\eta_r$
W''	cos miß	1	$\xi'_r (\xi'_r - 1)$	$-\eta_r (2\xi'_r - 1)$
W'''			$\xi'_r (\xi'_r - 1)(\xi'_r - 2)$	$-3\xi'_r \eta_r (\xi'_r - 2) + \eta_r (\eta_r^2 - 2)$

Tafel 6a: Beiwerte  $P_r$  und  $P_{r+1}$  der Verschiebungen und ihrer Ableitungen

S	$t_m$	F	$p_r$ für reelle oder komplexe Eigenwerte $\lambda'$
$E_{\alpha\alpha}^0$			$u'$
$E_{\alpha\alpha}^1$	$\cos m\beta$	$\frac{1}{\alpha}$	$-w''$
$E_{\alpha\alpha}^2$			$\frac{1}{2} u''$
$E_{\beta\beta}^0$			$u + M \cdot v + c \cdot w$
$E_{\beta\beta}^1$	$\cos m\beta$	$\frac{1}{\alpha}$	$-c \cdot u + (M^2 - c^2) \cdot w - w'$
$E_{\beta\beta}^2$			$(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} M^2 + c^2) \cdot u + \frac{1}{2} u' + c [(\frac{1}{2} - M^2 + c^2) w + \frac{1}{2} w']$
$E_{\alpha\beta}^0$			$-M \cdot u - v + v'$
$E_{\alpha\beta}^1$	$\sin m\beta$	$\frac{1}{\alpha}$	$c(M \cdot u - v + v') + 2M(w' - w)$
$E_{\alpha\beta}^2$			$M(\frac{1}{2} - c^2) \cdot u - M \cdot u' + \frac{1}{2}(v - v') + M \cdot c(w - w')$
$N_\alpha$	$\cos m\beta$		$E_{\alpha\alpha}^0 + k(c \cdot E_{\alpha\alpha}^1 + E_{\alpha\alpha}^2) + \mu[E_{\beta\beta}^0 + k(c \cdot E_{\beta\beta}^1 + E_{\beta\beta}^2)]$
$N_\beta$	$\cos m\beta$	D	$E_{\beta\beta}^0 + k \cdot E_{\beta\beta}^2 + \mu(E_{\alpha\alpha}^0 + k \cdot E_{\alpha\alpha}^2)$
$N_{\alpha\beta}$	$\sin m\beta$		$\frac{1-\mu}{2} [E_{\alpha\beta}^0 + k(c \cdot E_{\alpha\beta}^1 + E_{\alpha\beta}^2)]$
$N_{\beta\alpha}$	$\sin m\beta$		$\frac{1-\mu}{2} [E_{\alpha\beta}^0 + k \cdot E_{\alpha\beta}^2]$
$M_\alpha$	$\cos m\beta$		$-[c \cdot E_{\alpha\alpha}^0 + E_{\alpha\alpha}^1 + \mu(c \cdot E_{\beta\beta}^0 + E_{\beta\beta}^1)]$
$M_\beta$	$\cos m\beta$	$\alpha \cdot K$	$-[E_{\beta\beta}^1 + \mu \cdot E_{\alpha\alpha}^1]$
$M_{\alpha\beta}$	$\sin m\beta$		$-\frac{1-\mu}{2} [c \cdot E_{\alpha\beta}^0 + E_{\alpha\beta}^1]$
$M_{\beta\alpha}$	$\sin m\beta$		$-\frac{1-\mu}{2} \cdot E_{\alpha\beta}^0$
$Q_\alpha$	$\cos m\beta$		K
$Q_\beta$	$\sin m\beta$	$(1 - \mu)[c(2v - 2v' - v'') + M(2w - 2w' - w'')] - M \cdot M_\beta + M_{\beta\alpha}$	
$\bar{N}_{\alpha\beta}$	$\sin m\beta$	D	$N_{\alpha\beta} - c \cdot k \cdot M_{\alpha\beta}$
$\bar{Q}_\alpha$	$\cos m\beta$	K	$Q_\alpha + M \cdot M_{\alpha\beta}$

In der 4. Spalte dieser Tafel ist unter  $u, u', E_{\alpha\alpha}^0, M_{\beta\alpha}, \dots$  usw. stets der  $p_r$ -Wert dieser Wirkung S zu verstehen!

Tafel 6b:      Beiwerte  $p_r$  der Dehnungen und der Schnittgrößen

a) Komplexe Eigenwerte  $\lambda_r$ :

$$\mathbf{w}_{(8,1)} = \begin{bmatrix} e_1 t_1 \\ e_1 t_2 \\ e_3 t_3 \\ e_3 t_4 \\ e_5 t_1 \\ e_5 t_2 \\ e_7 t_3 \\ e_7 t_4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \text{mit } e_r &= \varphi^{k_r'} = e^{k_r' \cdot \ln \varphi} \\ t_r &= \cos(\eta_r \ln \varphi) \\ t_{r+1} &= \sin(\eta_r \ln \varphi) \\ \text{für } r &= 1, 3, 5, 7 \end{aligned} \quad (5.12a)$$

$$\mathcal{P}_{(8,8)} = \begin{bmatrix} \rho_1 & -\rho_2 & 0 & 0 & \dots & \dots & & \\ \rho_2 & \rho_1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \rho_3 & -\rho_4 & & & & \\ 0 & 0 & \rho_4 & \rho_3 & & & & \\ \vdots & & & & \rho_5 & -\rho_6 & & \\ \vdots & & & & \rho_6 & \rho_5 & & \\ \vdots & & & & & & \rho_7 & -\rho_8 \\ \vdots & & & & & & \rho_8 & \rho_7 \end{bmatrix} \quad (5.13a)$$

b) Reelle Eigenwerte  $\lambda_r$ :

$$\mathbf{w}_{(8,1)} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_8 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \text{mit } e_r &= \varphi^{k_r'} \\ \text{für } r &= 1, 2, \dots, 8 \end{aligned} \quad (5.12b)$$

$$\mathcal{P}_{(8,8)} = \begin{bmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & & & \\ 0 & \rho_2 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & \rho_3 & & & & & \\ \vdots & & & \rho_4 & & & & \\ \vdots & & & & \rho_5 & & & \\ \vdots & & & & & \rho_6 & & \\ \vdots & & & & & & \rho_7 & \\ \vdots & & & & & & & \rho_8 \end{bmatrix} \quad (5.13b)$$

Da stets höchstens ein Eigenwert-Quatrupel reell ist, treten  $\mathbf{w}$  und  $\mathcal{P}$  nie rein wie in Gleichungen (5.12b) und (5.13b) auf,

sondern sie bilden sich für vier Eigenwerte nach den Gleichungen (5.12a), (5.13a), für die anderen vier nach Gleichungen (5.12b), (5.13b).

Damit läßt sich Gleichung (5.9) schreiben als

$$\boxed{\bar{S}_m = \mathcal{M}' \cdot \rho \cdot r} \quad (5.14)$$

Die Wirkung  $S$  soll jetzt nicht - wie nach Gleichung (5.8) bzw. (5.10) - nur an einer einzigen Stelle der Schale mit den Koordinaten  $\alpha$  und  $\beta$  bestimmt werden, sondern an allen Gitterpunkten eines Rasters mit den Koordinaten

$$\frac{\alpha}{l} = \varrho = \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_i \quad \text{und} \quad \beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k.$$

Dazu werden die Vektoren  $\mathcal{A}$  und die Matrix  $\mathcal{M}$  eingeführt.

$$\mathcal{A}_{(k,i)} = \begin{bmatrix} \cos(m\beta_1) \\ \cos(m\beta_2) \\ \cos(m\beta_3) \\ \vdots \\ \cos(m\beta_k) \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{A}_{(k,i)} = \begin{bmatrix} \sin(m\beta_1) \\ \sin(m\beta_2) \\ \sin(m\beta_3) \\ \vdots \\ \sin(m\beta_k) \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Der Vektor  $\mathcal{A}$  läuft mit dem  $\cos(m\beta)$  oder  $\sin(m\beta)$ , je nach dem, ob  $t_m = \cos(m\beta)$  oder  $t_m = \sin(m\beta)$  ist (Tafel 6).

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}'(\varrho_1) \\ \mathcal{M}'(\varrho_2) \\ \vdots \\ \mathcal{M}'(\varrho_i) \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$\mathcal{M}(\varrho)$  bestimmt sich dabei gemäß Gleichung (5.12a) oder (5.12b). Damit erhält man die Matrix  $\bar{\mathcal{D}}_m$  für die Größe  $\bar{S}_m = t_m \cdot \bar{S}_m$  an allen  $i \cdot k$  Gitterpunkten zu:

$$\boxed{\bar{\mathcal{D}}_{m(k,i)} = \mathcal{A} \cdot [\mathcal{M} \cdot \rho \cdot r]'} \quad (5.17)$$

In Gleichung (5.17) ändert sich bei der Berechnung verschiedener Wirkungen jeweils nur die Matrix  $\bar{p}$ .

Schließlich ergibt sich für jede Wirkung

$$\bar{r} = \tilde{f} \cdot \sum_m \bar{y}_m \quad (5.18)$$

Für die Bestimmung von  $\tilde{f}$  sind dabei zwei Fälle zu unterscheiden:

a)  $F = \text{const.}$  Es sei  $\tilde{f} \equiv F$  (5.19a)

Gemäß Gleichung (5.18) ist die Matrix  $\bar{r} = \sum_m \bar{y}_m$  mit den konstanten Faktor  $F$  zu multiplizieren.

b)  $F = F(\alpha)$

Es ist  $\tilde{f}_{(i,i)} = \begin{bmatrix} F(\alpha_1) & 0 & 0 & \dots & \\ 0 & F(\alpha_2) & 0 & & \\ 0 & & F(\alpha_3) & & \\ \vdots & & & & \\ & & & & F(\alpha_i) \end{bmatrix}$  (5.19b)

$\tilde{f}$  ist eine Diagonalmatrix. Dieser allgemeine Fall beinhaltet den Fall  $F = \text{const.}$  als Sonderfall, für den  $\tilde{f} = F \cdot \ell$  wird ( $\ell = \text{Einheitsmatrix}$ ).

## 6. Randbedingungen

Das homogene System erhält Verschiebungen und damit Spannungen nur aus den vorzugebenden Randbedingungen (vergl. Abschnitt 3). Gemäß den Lösungsansätzen für die Verschiebungen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  (siehe Gleichungen (4.1)) wird eine in Umfangsrichtung geschlossene Schale vorausgesetzt, die durch zwei Flächen  $\alpha_1 = \text{konst.}$  und  $\alpha_2 = \text{konst.}$  begrenzt ist.

Für jeden Rand sind vier Randbedingungen vorzugeben, die auf ein Gleichungssystem zur Bestimmung der  $2 \times 4$  Integrationskonstanten  $C_1 \dots C_8$  führen, wenn man sie mittels der Gleichung (5.14) formuliert. Die Randbedingungen können statischer oder geometrischer Art sein. Eine statische Randbedingung schließt die jeweils zugehörige geometrische aus und umgekehrt. Die statischen und geometrischen Größen, über die bei Formulierung der Randbedingungen verfügt werden kann, sind nachfolgend aufgeführt, wobei zugehörige Größen übereinander stehen.

Statische Randbedingungen	enthalten Aussagen über	$N_\alpha$	$\bar{N}_{\alpha\beta}$	$\bar{Q}_\alpha$	$M_\alpha$
Geometr. Randbedingungen		$u$	$v$	$w$	$w'$

Eine Koppelung zugehöriger Größen über Federkonstanten oder allgemeiner über Federmatrizen ist bei elastischer Lagerung (z.B. Anschluß von anderen Schalen oder von Randträgern) möglich.

Die Randbedingungen können nicht homogen sein, da sonst die Verschiebungen und Spannungen Null sind. Wenigstens eine statische oder geometrische Größe muß an einem der beiden Ränder von Null verschieden sein.

Für am Rand angreifende Einzellasten ist eine Fourierentwicklung anzusetzen. Die Ableitung erfolgt für  $n$  Einzellasten (Kräfte oder Momente), die in gleichen Abständen über den Umfang  $2\pi a$  eines Randes verteilt sind. Die Lasten müssen immer auf einer endlichen Breite  $2a\epsilon$  angreifen;  $\epsilon$  kann allerdings beliebig klein gewählt werden (Bild 8).

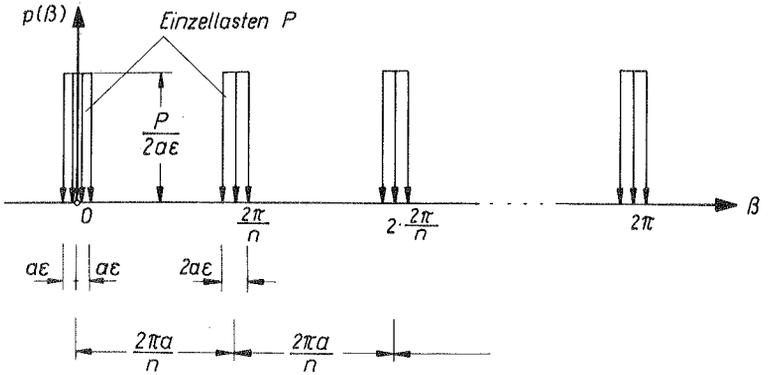


Bild 8: Funktionsverlauf  $p(\beta)$  für  $n$  Einzellasten  $P$

Die Fourierreentwicklung für  $n$  Einzellasten lautet:

$$p(\beta) = p + \frac{2p}{\epsilon} \sum_{m=n, 2n, \dots}^{\infty} \frac{\sin(m\epsilon)}{m} \cdot \cos(m\beta) \quad (6.1)$$

Die Funktion  $p(\beta)$  spaltet sich auf in die gleichmäßig über den Umfang verteilte Last

$$\bar{p} = \frac{P \cdot n}{2\pi\alpha} \quad (6.2)$$

und die in Bild 9 dargestellte Gleichgewichtsgruppe

$$\bar{p}(\beta) = \frac{2p}{\epsilon} \sum_{m=n, 2n, 3n, \dots}^{\infty} \frac{\sin(m\epsilon)}{m} \cdot \cos(m\beta) . \quad (6.3)$$

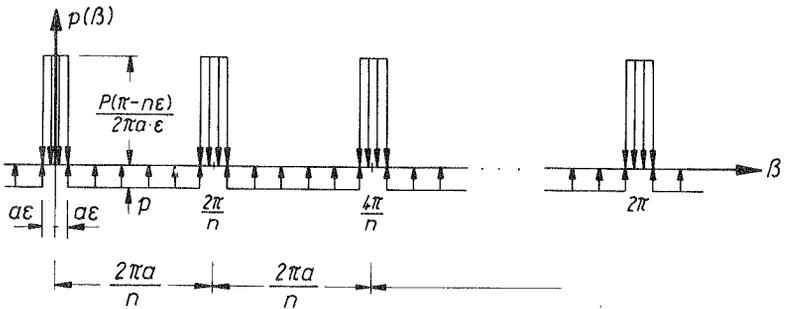
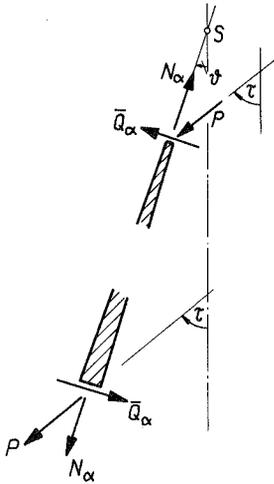


Bild 9: Gleichgewichtsgruppe aus  $n$  Einzellasten  $P$  und einer Streckenlast  $p$ .



Die Zerlegung einer am Schalenrand angreifenden Kraft  $P$ , die mit der Kegelachse den Winkel  $\tau$  einschließt, ergibt (Bild 10):

oberer Rand:  $N_\alpha = -P \cdot \cos(\tau - \vartheta)$

$$\bar{Q}_\alpha = P \cdot \sin(\tau - \vartheta)$$

für  $\tau = \frac{\pi}{2}$ :  $N_\alpha = -P \cdot \cos \vartheta$

$$\bar{Q}_\alpha = P \cdot \sin \vartheta$$

unterer Rand:  $N_\alpha = P \cdot \cos(\tau - \vartheta)$

$$\bar{Q}_\alpha = -P \cdot \sin(\tau - \vartheta)$$

für  $\tau = \frac{\pi}{2}$ :  $N_\alpha = P \cdot \cos \vartheta$

$$\bar{Q}_\alpha = -P \cdot \sin \vartheta \quad (6.4)$$

Bild 10: Randschnittkräfte

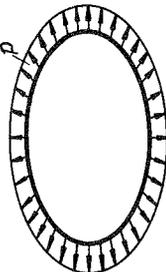
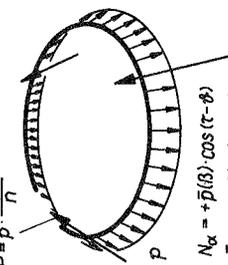
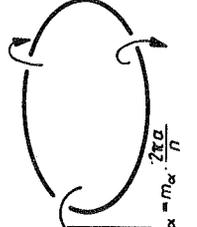
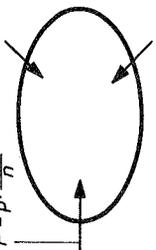
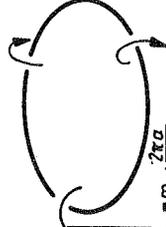
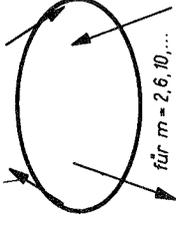
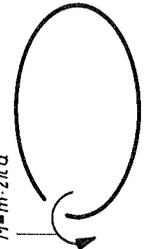
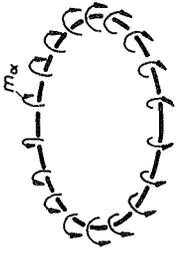
In Tafel 7 sind die häufigsten Randbedingungen für Einzellasten und gleichmäßig verteilte Lasten zusammengestellt.

Für  $m \geq 2$  gibt die Reihenentwicklung (6.1) stets Gleichgewichtszustände wieder. Die Formulierung der Randbedingungen bereitet keine Schwierigkeiten. Die Sonderfälle  $m = 0$  und  $m = 1$  müssen davon losgelöst werden. In beiden Fällen ergeben sich unabhängig von irgendwelchen Parametern zwei Doppelwurzeln

$$\lambda_3^2 = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad \lambda_4^2 = \frac{9}{4} .$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned} \lambda_3' &= \xi_3' = 0 & \lambda_7' &= \xi_7' = -1 \\ \lambda_4' &= \xi_4' = 1 & \lambda_8' &= \xi_8' = -2 . \end{aligned} \quad (6.5)$$

<p>① Gleichgewichtsgruppen rotationssymmetrisch</p>	<p>①a Gleichstreifenlast</p>  <p><math>N_{\alpha} = + p \cdot \sin \vartheta</math></p>	<p>② Gleichgewichtsgruppen nicht rotationssymmetrisch</p>	<p>②a n Einzelkräfte u. Gleichstreifenlast</p>  <p><math>N_{\alpha} = + \bar{p}(\beta) \cdot \cos(\tau - \vartheta)</math>  <math>\bar{Q}_{\alpha} = - \bar{p}(\beta) \cdot \sin(\tau - \vartheta)</math></p>	<p>③ Randlasten nicht im Gleichgewicht</p>	<p>③a n Einzelkräfte</p>  <p><math>N_{\alpha} = + p(\beta) \cdot \cos(\tau - \vartheta)</math>  <math>\bar{Q}_{\alpha} = - p(\beta) \cdot \sin(\tau - \vartheta)</math></p>
	<p>②b m Einzelkräfte, horizontal</p>  <p><math>N_{\alpha} = + p(\beta) \cdot \sin \vartheta</math>  <math>\bar{Q}_{\alpha} = - p(\beta) \cdot \cos \vartheta</math></p>	<p>②c n Einzelmomente</p>  <p><math>M_{\alpha} = m_{\alpha} \cdot \frac{2\pi\alpha}{n}</math>  <math>M_{\alpha} = + m_{\alpha}(\beta)</math></p>	<p>②d Einzelkräfte paarweise entgegengerichtet</p>  <p><math>N_{\alpha} = + \frac{2p}{\epsilon} \sum \frac{\sin m\epsilon}{m} \cdot \cos m\beta \cdot \cos(\tau - \vartheta)</math>  <math>\bar{Q}_{\alpha} = - \frac{2p}{\epsilon} \sum \frac{\sin m\epsilon}{m} \cdot \cos m\beta \cdot \sin(\tau - \vartheta)</math>          für <math>m = 2, 6, 10, \dots</math></p>	<p>③b Einzelmoment</p>  <p><math>M_{\alpha} = + m_{\alpha}(\beta)</math>          für <math>n = 1</math></p>	
<p>①b Gleichstreifenmoment</p>  <p><math>M_{\alpha} = + m_{\alpha}</math></p>					

Tafel 7: Zusammenstellung der häufigsten Randlasten. Vorzeichen für Lastangriff am unteren Rand einer Kegelschale, deren Spitze oben liegt.

Die charakteristische Gleichung (4.7) läßt sich durch  $\lambda^4 - \frac{5}{2}\lambda^2 + \frac{9}{16}$  dividieren; die verbleibende Gleichung 4. Grades liefert die anderen vier Wurzeln  $\lambda'_{1,2,5,6}$  aus

$$\lambda^4 + g_2\lambda^2 + g_0 = 0 \quad (6.6)$$

mit  $g_i = \alpha_i \cdot \delta^i$  . (6.7)

Der Vektor  $\delta$  ist identisch mit dem aus Tafel 5, die Vektoren  $g_i$  sind für  $m = 0$  und  $m = 1$  verschieden. Sie sind in Tafel 4a angegeben. Durch die Eigenwerte  $\lambda^i$  nach Gleichung (6.5) werden Membranspannungszustände dargestellt (vergl. [2] ).

Eine Lastentwicklung nach Gleichung (6.1) verlangt für  $m = 0$  stets  $C_4 = C_8 = 0$ , da die antimetrischen Größen  $\bar{N}_{\alpha\beta}$  bzw.  $v$  identisch Null sind. Bei den Lastfällen 2b und 2c (Tafel 7) sind die Fälle 1a und 1b die Teilzustände für  $m = 0$ . Für diese Gleichgewichtsfälle muß auch  $C_3 = C_7 = 0$  gesetzt werden, da keine Membranspannungen anfallen. Im Lastfall 3a ist  $C_3 \neq 0$  für  $m = 0$ , da Membranspannungen auftreten.

In diesem Fall, wie auch stets für den Fall der Fourierentwicklung für  $m = 1$  (Lastfall 3b), welcher nie ein Gleichgewichtszustand sein kann, müssen die Randbedingungen des gegenüberliegenden Randes eine Aufnahme der anfallenden Lasten zulassen, müssen also wenigstens teilweise geometrische Bedingungen enthalten. Alle Konstanten werden von 0 verschieden angesetzt, auch wenn vier von ihnen Membranspannungszustände wiedergeben.

$$\delta' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \frac{1-\mu^2}{k} c^2 & 1 & \mu & \mu^2 & c^2 & \mu c^2 & \mu^2 c^2 & c^4 & \mu c^4 & \mu^2 c^4 & \\ \hline \end{array}$$

a) m = 0

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline y_2' & & -\frac{9}{2} & 4 & & & 2 & & & & \\ \hline y_0' & 1 & \frac{65}{16} & -7 & 3 & -5 & \frac{7}{2} & 1 & 4 & & -3 & \\ \hline \end{array}$$

b) m = 1

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline y_2' & & -\frac{17}{2} & 4 & & -4 & 2 & & & & \\ \hline y_0' & 1 & \frac{273}{16} & -19 & 3 & 8 & -\frac{17}{2} & 1 & 4 & & -3 & \\ \hline \end{array}$$

Tafel 4a: Vektoren  $y_i$  und Vektor  $\delta$  der charakteristischen Gleichung (6.6) für  $m = 0$  und  $m = 1$

Seither wurde allen Formeln und Betrachtungen eine Schale in Form eines Kegelstumpfes zugrundegelegt, also eine Schale mit zwei Rändern. Für die an der Spitze geschlossene Kegelschale vereinfachen sich die Randbedingungen: es wird  $C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = 0$ .

Bei langen dünnen Schalen beeinflussen sich gegenüberliegende Ränder nicht mehr. Numerisch wird das im Gleichungssystem, aus dem die Integrationskonstanten bestimmt werden, deutlich; in den Gleichungen für den der Randbelastung gegenüberliegenden Rand treten dann in den Koeffizienten gewaltige Größenordnungsunterschiede auf, die insbesondere bei höheren Harmonischen  $m$   $10^{50}$  bald überschreiten können. Dies berechtigt,  $C_5 \dots C_8 = 0$  zu setzen.

### 7. Programm für einen Elektronenrechner

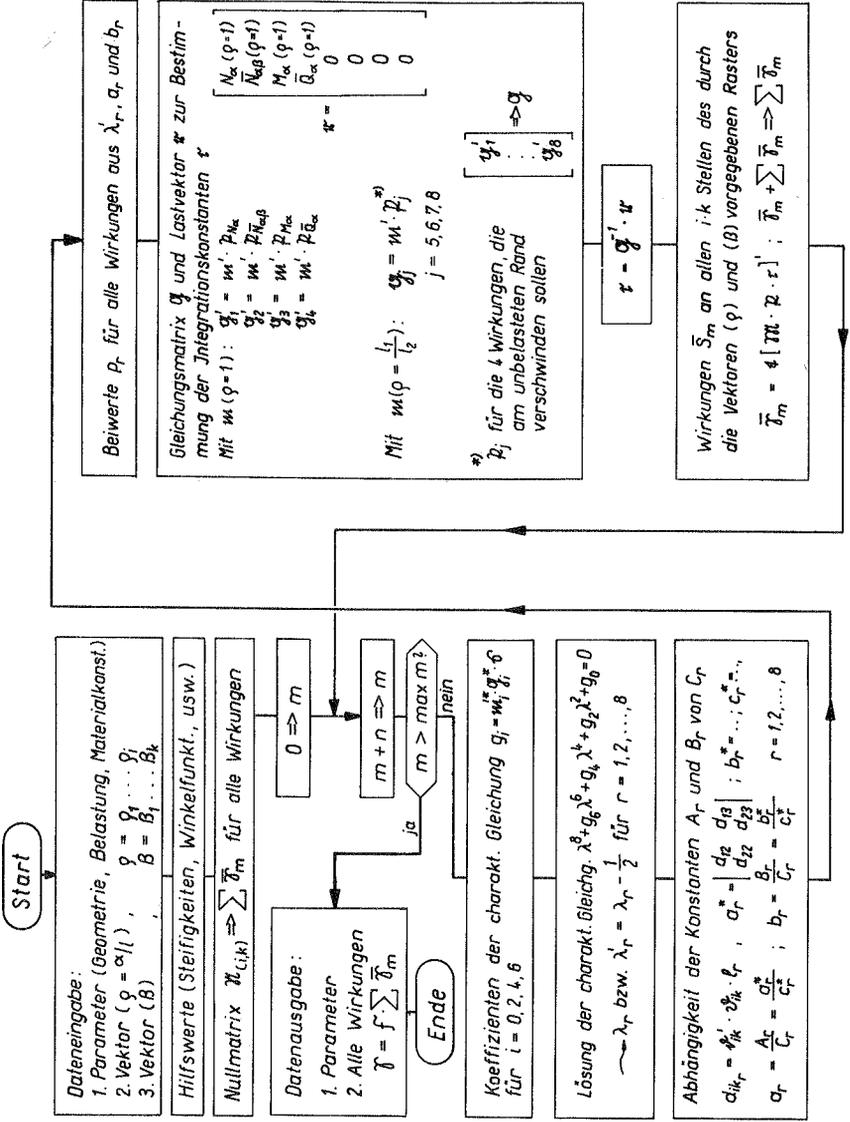
Die bei der Durchrechnung eines Lastfalles aus Tafel 7 anfallende numerische Arbeit ist sehr groß. Für die Ausrechnung aller Wirkungen aus einem einzigen Lastglied der harmonischen Entwicklung einer Einzellast ist auch ein guter Rechner mit einer elektrischen Tischrechenmaschine mehrere Tage beschäftigt. Mehrere Glieder einer Reihenentwicklung zu erfassen, wie es die Lastentwicklung vorschreibt, stößt auf kaum noch vertretbaren Rechenaufwand.

Dabei erweist sich der Rechenablauf des öfteren als numerisch recht anfällig, insbesondere bei der Erfassung höherer Harmonischer. Befriedigende Ergebnisse erfordern wenigstens eine 6-bis 7-stellige Mantisse. Kontrollen sind oft schwierig oder gar nicht durchführbar. Rechenfehler sind daher nicht leicht aufzudecken; sie können sich auf das Ergebnis katastrophal auswirken.

Um zu numerischen Aussagen über die Biegetheorie der unsymmetrisch belasteten Kegelschale zu kommen, erschien daher die Programmierung des Problems für eine elektronische Rechenanlage ratsam.

Das Programm gestaltet sich bei Anwendung des Matrizenkalküls relativ übersichtlich, weshalb in den Abschnitten 4 und 5 weitgehend diese Schreibweise angewandt wurde.

Tafel 8 zeigt ein stark vereinfachtes Flußdiagramm für den Fall einer Schale mit zwei Rändern und einer Lastentwicklung, die mit  $m = n \geq 2$  beginnt (Gleichgewichtsgruppe). Nur die wesentlichen Stationen des Rechenablaufes sind angeführt. Für jede neue Harmonische  $m$  wird der große Zyklus wiederholt. Nach Erreichen eines beliebig vorgegebenen  $\max m$  wird die Rechnung abgebrochen. Im aufgezeichneten Flußdiagramm wird nicht auf die unterschiedliche Behandlung reeller und komplexer Eigenwerte eingegangen.



Tafel 8: Vereinfachtes Flußdiagramm

Bei dünnen, langen Schalen oder bei höheren Harmonischen  $m$  können in den Zeilen 5 bis 8 der Gleichungsmatrix  $Q$  extreme Größenunterschiede in den Koeffizienten auftreten ( $10^{50}$  und mehr!). Im Gleichungssystem wirkt sich dies als vierfacher Rangabfall aus. Praktisch bedeutet das: eine gegenseitige Beeinflussung zweier Ränder aus Randbelastungen kann nicht mehr erfaßt werden. Mit genügender Genauigkeit für die weitere Rechnung kann die Schale als "unendlich lang" betrachtet werden. Auch ist es möglich, daß dann einige oder auch alle Punkte des Rasters, an dessen Gitterpunkten die Wirkungen  $\bar{S}_m$  bestimmt werden sollen, soweit vom gestörten Rand entfernt liegen, daß diese Wirkungen wegen gewaltiger Größenunterschiede in den Elementen der Matrix  $M$  nicht mehr bestimmt werden können. Hier kann ein vorzeitiger Abbruch der Berechnungen erzwungen werden.

Die mit diesen Erscheinungen verbundenen Abfragen und Modifizierungen des Programms sind in Tafel 8 der Übersichtlichkeit wegen weggelassen; auch fehlt darin die Behandlung der Spezialfälle  $m = 0$  und  $m = 1$ . Im Detail bringt die Programmierung eine Vielzahl von Abfragen, Entscheidungen und Fallunterscheidungen mit sich.

Das Programm wurde aufgestellt für die Rechenanlage ER56 (Standart Elektrik Lorenz) der TH Stuttgart, eine Maschine von mittlerer Größe und Geschwindigkeit.

Berechnen lassen sich mit dem Programm sämtliche Wirkungen infolge Randbelastungen an einem Rand nach Tafel 7 sowie Einheitslastzustände infolge  $N_\alpha$ ,  $\bar{N}_{\alpha\beta}$ ,  $M_\alpha$ ,  $\bar{Q}_\alpha$  für beliebiges  $m$ . Die Wirkungen werden an allen Stellen eines vorzugebenden Rasters mit  $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_i$  und  $\beta = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$  bestimmt. Dabei ist  $i \leq 40$ ,  $k \leq 15$ ;  $i \cdot k \leq 100$ .

Rechenzeiten hängen wesentlich ab von der Anzahl der Harmonischen  $m$  der Lastentwicklung, aber auch von der Größe des Rasters, dem Lastfall u.a. Für die Durchrechnung einer Schleife des Flußdiagramms Tafel 8 braucht der Rechner etwa 1 bis 2 Minuten.

## 8. Beispiel. Schnittgrößen und Verformungen an einem Konverter

### 8.1. Aufgabenstellung

Bild 11 zeigt System und Abmessungen eines zu berechnenden Konverters.

Die einzelnen Teile des Systems sind:

1. Ein Tragring T mit Hohlkastenquerschnitt, dessen Querschnitt als formtreu angesehen werden darf, da er durch zahlreiche Schotte ausgesteift ist.
2. Oberhalb des Ringes zwei Kegelschalen  $K_1$  und  $K_2$ , letztere endet oben frei.
3. Unterhalb des Ringes eine Kegelschale  $K'_1$ , an der unten die Bodenplatte sitzt. Die Dicke und Aussteifung der Bodenplatte berechnen, dieselbe für die Rechnung als vollkommen dehn- und biegestarr zu betrachten.

Gesucht sind die Spannungen und Verformungen von Schale und Tragring aus dem Lastfall Eigengewicht der Schale + Ausmauerung + Füllgut = 1000 Mp bei senkrechter Stellung.

Für die Rechnung soll diese Last zunächst als Gleichstreckenlast  $p$  an der Innenkante des Tragringes angreifen. Die Eigengewichtslast greift jedoch über die ganze Schale verteilt an, die Last aus Ausmauerung und Füllgut wirkt hauptsächlich auf die starre Bodenplatte. Deshalb wird ein rotationssymmetrischer Lastfall betrachtet, bei dem eine Last von 800 Mp auf die Bodenplatte angenommen wird, die am Tragring mit einer entgegengesetzten Vertikallast im Gleichgewicht steht. Vom Füllgut, der Ausmauerung und dem Eigengewicht her kommen noch rotationsymmetrische Lasten, die über die Schalenfläche stetig verteilt sind und hauptsächlich einen Membranspannungszustand ergeben, der weder für die Verformungen noch für die Spannungen ins Gewicht fällt und daher vernachlässigt wird.

Die Last wird über zwei Drehzapfen Z an den Stellen  $\beta = 0^\circ$  und  $\beta = 180^\circ$  abgenommen. Die beiden Einzelkräfte P werden in den Tragring T auf eine Breite von  $2\epsilon = 2 \cdot 16^\circ$  eingeleitet. Die Drehzapfen Z werden starr angenommen.

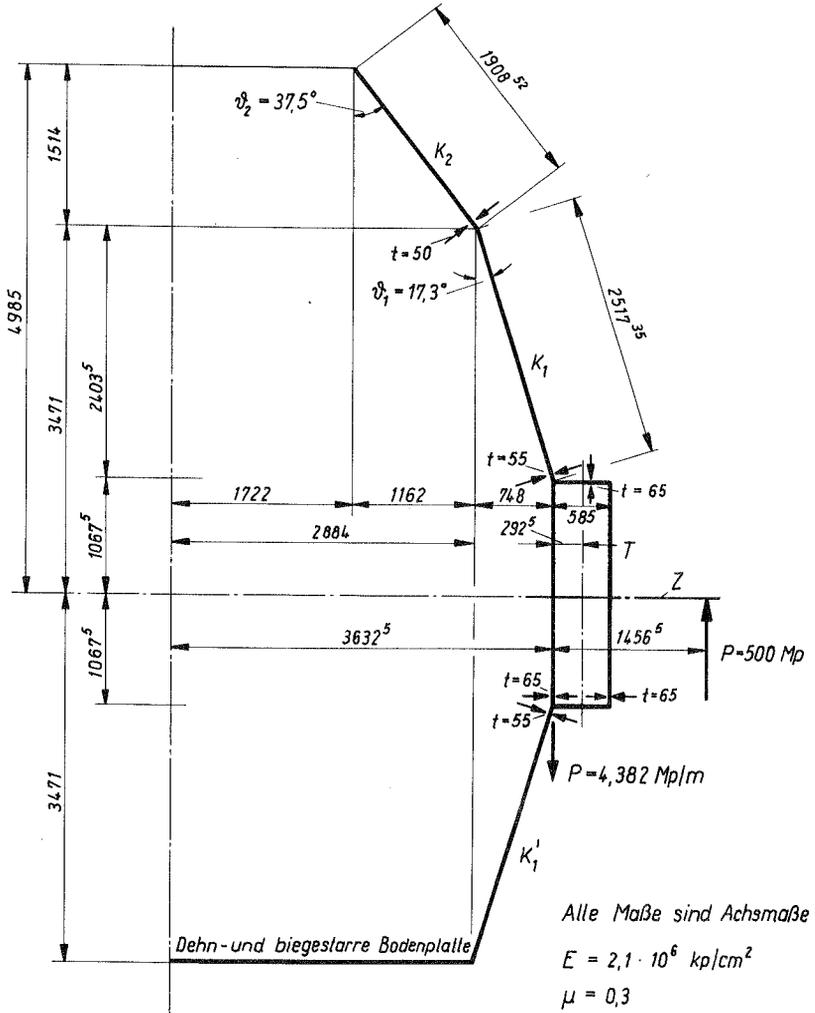


Bild 11: System des Konverters mit Abmessungen

## 8.2. Lösungsweg

Das System ist aus verschiedenen Schalen, einer starren Platte und einem ebenen Ring zusammengesetzt. Kontinuität und Gleichgewicht fordern an jeder Übergangsstelle die Gleichsetzung der vier Verformungen  $u, v, w, w'$  und der vier Kraftgrößen  $N_\alpha, \bar{N}_{\alpha\beta}, \bar{Q}_\alpha, M_\alpha$ . Zur Lösung bieten sich drei Methoden an:

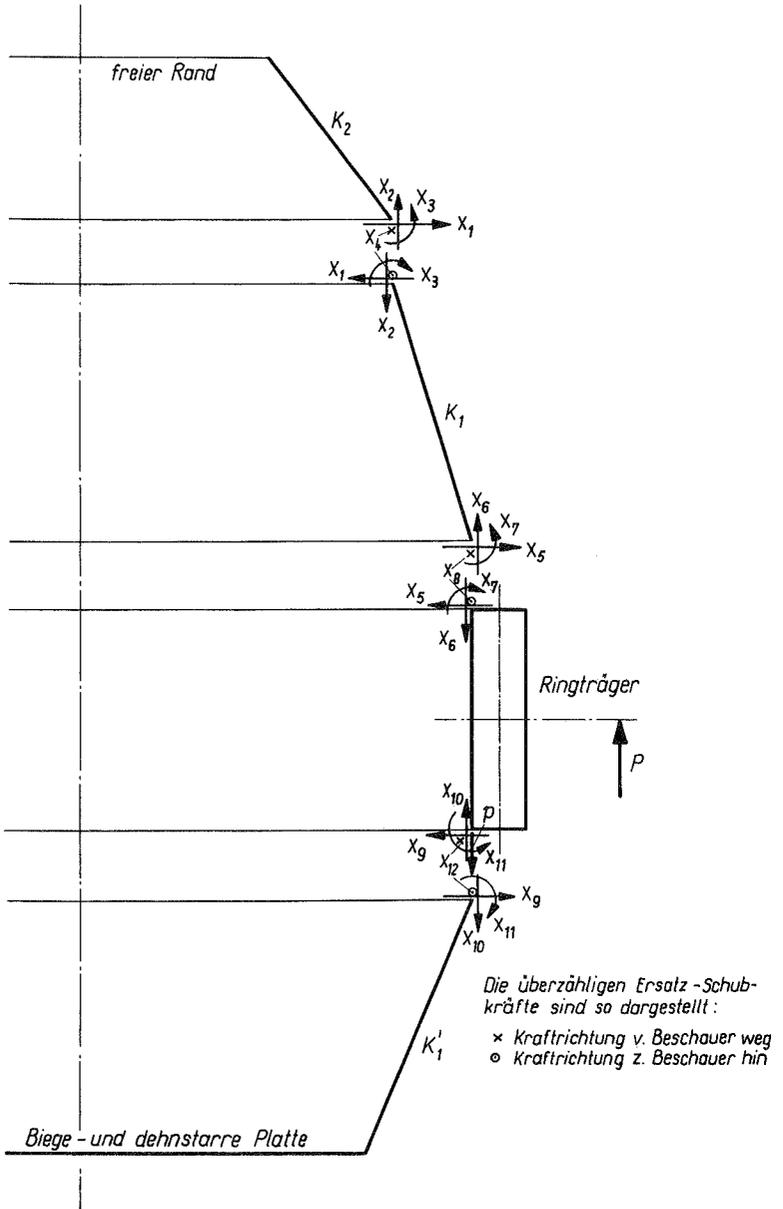
1. Direkte Formulierung der Übergangs- und Randbedingungen. Jeder Rand fordert 4 Randbedingungen, jeder Übergang 8 Übergangsbedingungen. Der Übergang zur Bodenplatte kann hier als Randbedingung formuliert werden. Es ergibt sich also ein System mit 32 linearen Gleichungen, das durch spezielle Übergangsbedingungen in den Verformungen zwischen den Schalen  $K_1$  und  $K_1'$  und dem Tragring T noch auf 28 Gleichungen reduziert werden kann.
2. Das Kraftgrößenverfahren. An jedem Übergang von einem Tragwerkteil auf den folgenden wirken vier Einheits-Kraftgrößen  $X_i = 1$ . Kontinuitätsbedingungen liefern 12 lineare Gleichungen für die insgesamt 12 unbekanntenen Kraftgrößen.
3. Das Formänderungsgrößenverfahren. An jedem Schalenübergang wirken vier Einheits-Deformationszustände  $\phi_j = 1$ . Gleichgewichtsbedingungen liefern 12 lineare Gleichungen für die insgesamt 12 unbekanntene Formänderungsgrößen.

zu 1. Vorteil: direkte Bestimmung aller Integrationskonstanten, keine Superposition einzelner Zustände erforderlich.  
Nachteil: umfangreiches Gleichungssystem; beim Aufstellen unübersichtlich; kann bei dünnen oder langen Schalen Schwierigkeiten für die numerische Lösung bringen.  
Geeignet insbesondere für mehrere Lastfälle am selben System.

zu 2. und 3. Vorteil: überschaubar; numerisch stabil.

Nachteil: viel Superpositionsarbeit.

Methoden 2 und 3 sind für das zu berechnende System gleichwertig.



**Bild 12:** Grundsystem und statisch Überzählige für eine Berechnung nach dem Kraftgrößenverfahren. Querschnitt

Das System wird nach dem Kraftgrößenverfahren (Methode 2) behandelt. In Bild 12 sind die statisch Überzähligen  $X_1$  bis  $X_{12}$  dargestellt, wie sie an den Grundsystemen  $K_2$ ,  $K_1$ , T und  $K'_1$  angreifen. Im "Nullzustand" ( $X_1 \dots X_{12} = 0$ ) ist nur der Tragring T belastet. Aus dieser Belastung entstehen Verformungen  $\delta_{i0}$  an den Stellen der Überzähligen  $X_i$  ( $i = 5, 6, \dots, 12$ ).

Die "Einheitszustände"  $X_i = 1, X_k = 0$  (für alle  $k \neq i$ ) ergeben die Verformungen  $\delta_{ki}$  an den Stellen  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 12$ ).

Für die Berechnung des Nullzustandes ist die vorgegebene, nicht rotationssymmetrische Belastung in eine Fourierreihe zu entwickeln, denn die Schalentheorie erlaubt nur die Behandlung einer harmonischen Belastung. Alle Übergangsbedingungen lassen sich nur für eine konforme Kräfte- und Verformungsverteilung formulieren. Die statisch unbestimmte Rechnung muß also für jedes Reihenglied  $m$  der Lastenentwicklung getrennt durchgeführt werden.

Die Rechnung soll nach Behandlung der Reihenglieder  $m = 0, 2, 4, 6$  abgebrochen werden. Bild 13 zeigt die so erhaltene Annäherung der Lastverteilung an die Einzellasten P. Die Ergebnisse rechtfertigen den Abbruch der Reihenentwicklung nach der Harmonischen  $m = 6$ .

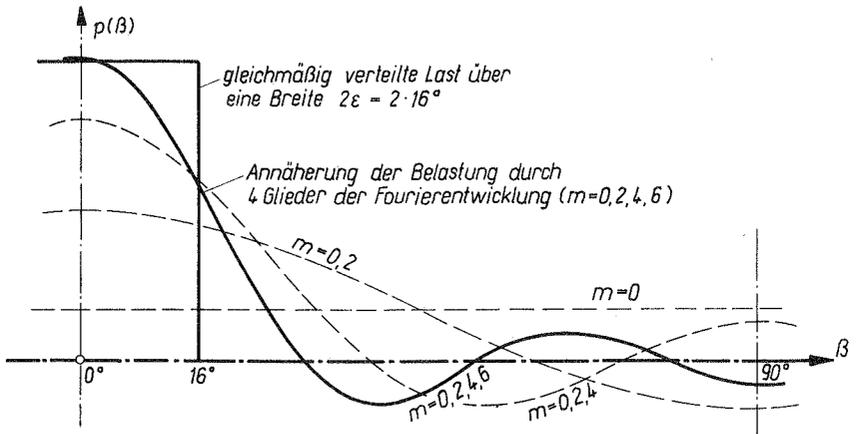


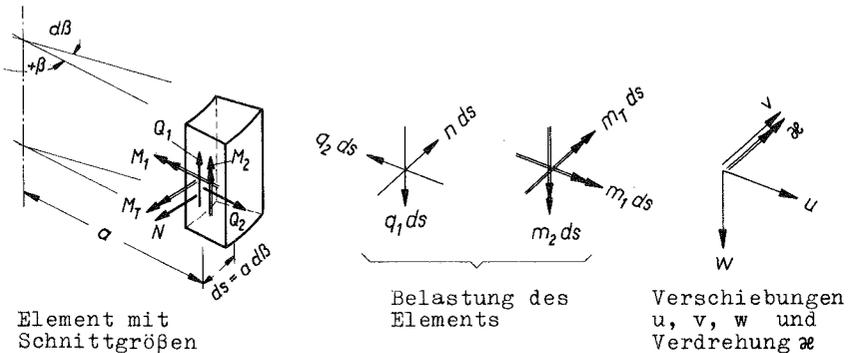
Bild 13: Annäherung der Belastungsfunktion bei Fourier-Analyse

### 8.3. Der Kreisringträger

#### 8.3.1. Der Kreisringträger unter harmonischer Belastung

Eine geschlossene Darstellung der Theorie in [7] enthält einige Inkonsequenzen. Die Theorie wird deshalb neu hergeleitet. Sie gilt nur für Kreisringträger, für deren Querschnitt Schwerpunkt und Schubmittelpunkt zusammenfallen (doppelt symmetrische Querschnitte).

Bild 14 definiert Koordinaten, Schnittkräfte, Verformungen und die Belastungen am Element der Länge  $ds = a d\beta$ .



Gleichgewichtsbedingungen am Element:

$$\left. \begin{aligned} \sum P_{(u)} &= 0 & -Nd\beta - dQ_2 - q_2 ds &= 0 \\ \sum P_{(v)} &= 0 & dN - Q_2 d\beta + n ds &= 0 \\ \sum P_{(w)} &= 0 & dQ_1 + q_1 ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1a - c)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum M_{(u)} &= 0 & dM_1 - M_1 d\beta - Q_1 ds + m_1 ds &= 0 \\ \sum M_{(v)} &= 0 & dM_2 + M_2 d\beta + m_2 ds &= 0 \\ \sum M_{(w)} &= 0 & dM_2 - Q_2 ds + m_2 ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1d - f)$$

Für die Ableitungen nach  $\beta$  soll gelten  $\frac{df}{d\beta} = f'$  (8.2)

Aus den Gleichungen (2b) und (2c) erhält man für die Querkräfte:

$$\begin{aligned} Q_2 &= N^* + a \cdot n \\ Q_1 &= -a \cdot q_1 \end{aligned} \quad (8.3a - b)$$

Gleichung (8.3a) wird in die Gleichungen (8.1a) und (8.1f) eingesetzt, ebenso Gleichung (8.3b) in die Gleichungen (8.1e) und (8.1d):

$$\left. \begin{aligned} N + N^{**} &= -a \cdot q_2 - a \cdot n^* \\ M_2^* - a \cdot N^* &= -a \cdot m_2 + a^2 \cdot n \end{aligned} \right\} \quad (8.4a)$$

$$\left. \begin{aligned} M_T^* - M_T &= -a \cdot m_T \\ M_T^* - M_T^{**} &= a^2 q_1 + a \cdot m_1^* \end{aligned} \right\} \quad (8.4b)$$

Die Gleichungen (8.4a) gelten für den in seiner Ebene belasteten Ring; die Gleichungen (8.4b) gelten für den quer zu seiner Ebene belasteten Ring. Beide Gleichungspaare sind entkoppelt.

Das Elastizitätsgesetz für die Schnittgrößen  $N$ ,  $M_2$ ,  $M_T$  kann aus demjenigen für die Kreiszyinderschale hergeleitet werden (siehe z.B. [6]), wenn man  $\mu = 0$  setzt und höhere Ableitungen der Verschiebungen in Richtung der Erzeugenden streicht. Es widerspricht teilweise dem in [7] angegeben.

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{EF}{a} (v^* + u) + \frac{EJ_2}{a^3} (u + u^{**}) \\ M_2 &= \frac{EJ_2}{a^2} (u + u^{**}) \end{aligned} \right\} \quad (8.5a - b)$$

$$\left. \begin{aligned} M_T &= \frac{EJ_T}{a^2} (-w^{**} - \chi) \\ M_T &= \frac{GJ_T}{a^2} (\chi^* - w^*) \end{aligned} \right\} \quad (8.5c - d)$$

mit  $\chi = a\alpha$  . (8.6)

Verformungen und Belastungen müssen als harmonische Funktionen von  $\beta$  so angesetzt werden, daß in jeder Gleichung nur affine Größen auftreten.

Ansätze für die Verformungen:

$$\begin{aligned}u &= \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cdot \cos m\beta \\v &= \sum_{m=1}^{\infty} v_m \cdot \sin m\beta \\w &= \sum_{m=0}^{\infty} w_m \cdot \cos m\beta \\X = \alpha x &= \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m \cdot \cos m\beta\end{aligned}\tag{8.7}$$

Ansätze für die Belastungen:

$$\begin{aligned}n &= \sum_{m=1}^{\infty} n_m \cdot \sin m\beta \\q_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} q_{1m} \cdot \cos m\beta \\q_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} q_{2m} \cdot \cos m\beta \\m_1 &= \sum_{m=1}^{\infty} m_{1m} \cdot \sin m\beta \\m_2 &= \sum_{m=1}^{\infty} m_{2m} \cdot \sin m\beta \\m_T &= \sum_{m=0}^{\infty} m_{Tm} \cdot \cos m\beta\end{aligned}\tag{8.8}$$

Ansätze für die Schnittgrößen:

$$\begin{aligned}N &= \sum_{m=0}^{\infty} N_m \cdot \cos m\beta \\M_2 &= \sum_{m=0}^{\infty} M_{2m} \cdot \cos m\beta\end{aligned}\tag{8.9a, b}$$

$$M_1 = \sum_{m=0}^{\infty} M_{1m} \cdot \cos m\beta$$

$$M_T = \sum_{m=1}^{\infty} M_{Tm} \cdot \sin m\beta$$
(8.9c, d)

Führt man noch die dimensionslosen Verhältniswerte

$$\psi_1 = \frac{GJ_T}{EJ_1} \quad \text{und} \quad \psi_2 = \frac{a^2 \cdot F}{J_2}$$
(8.10)

ein, so ergeben die Gleichungen (8.5) mit den Ansätzen (8.7) und (8.9):

$$a \cdot N_m = \frac{EJ_2}{a^2} [(\psi_2 + 1 - m^2) \cdot u_m + \psi_2 \cdot m \cdot v_m]$$

$$M_{2m} = \frac{EJ_2}{a^2} \cdot (1 - m^2) \cdot u_m$$

$$M_{1m} = \frac{EJ_1}{a^2} [m^2 \cdot w_m - \chi_m]$$

$$M_{Tm} = \frac{EJ_1}{a^2} \cdot \psi_1 [-m \cdot \chi_m + m \cdot w_m]$$
(8.11)

Diese Beziehungen setzt man in die Gleichungen (8.4) ein und erhält:

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{m^2-1}{\psi_2}\right) \cdot u_m + m \cdot v_m &= \frac{a^2}{EF} \cdot \frac{1}{m^2-1} \cdot (q_{2m} + m \cdot r_m) \\ m \cdot u_m + m^2 \cdot v_m &= \frac{a^2}{EF} \left(r_m - \frac{1}{a} \cdot m_{2m}\right) \end{aligned} \right\} \quad (8.12a)$$

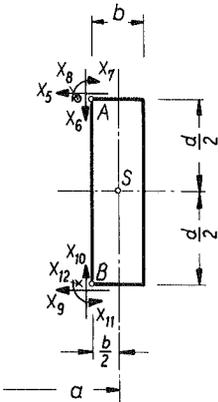
$$\left. \begin{aligned} (1+m^2\psi_1) \cdot \chi_m - m^2(1+\psi_1) \cdot w_m &= \frac{a^3}{EJ_1} \cdot m_{Tm} \\ -m^2(1+\psi_1) \cdot \chi_m + m^2(m^2+\psi_1) \cdot w_m &= \frac{a^3}{EJ_1} \cdot (a \cdot q_{1m} + m \cdot m_{1m}) \end{aligned} \right\} \quad (8.12b)$$

Für vorgegebene Belastungen lassen sich aus den Gleichungspaaren (8.12a) und (8.12b) die verformungen bestimmen. Aus ihnen folgen mit den Gleichungen (8.11), (8.9) die Schnittgrößen.

Der Sonderfall rotationssymmetrischer Belastung ist aus allen Gleichungen leicht abzulesen.

8.3.2. Transformation der Schnittgrößen und Verformungen

Die statisch Überzähligen  $X_5 \dots X_{12}$  greifen gemäß Bild 15 an den inneren Ecken A und B des Ringträgers an. Es ist daher nötig, ihre Wirkungen auf den Schwerpunkt S zu transformieren.



Es sei  $\varphi = \frac{a - \frac{b}{2}}{a}$  , (8.13)

dann ergeben sich die Belastungen des Ringträgers infolge der Überzähligen X aus der nachfolgenden Tafel (vergleiche auch Bild 14):

	n	q <sub>1</sub>	q <sub>2</sub>	m <sub>1</sub>	m <sub>2</sub>	m <sub>r</sub>
X <sub>5/9</sub> = 1			+1 · φ			± $\frac{d}{2}$ · φ
X <sub>6/10</sub> = 1		± 1 · φ				± $\frac{b}{2}$ · φ
X <sub>7/11</sub> = 1						± 1 · φ
X <sub>8/12</sub> = 1	± 1 · φ			+ $\frac{d}{2}$ · φ	± $\frac{b}{2}$ · φ	

(8.14)

Bild 15:

Die statisch Überzähligen am Kreisringträger

Umgekehrt müssen die aus den Lastzuständen errechneten Verformungen der Schwerlinie auf die Eckpunkte A und B transformiert werden:

$u_{A/B} = u \pm \frac{d}{2} \chi = u \pm \frac{d}{2a} \chi$  oder  $u_{A/Bm} = u_m \pm \frac{d}{2a} \chi_m$

$v_{A/B} = \varphi \cdot v + \frac{b}{2} \cdot \frac{u}{a} \pm \frac{d}{2} \cdot \frac{w}{a}$   $v_{A/Bm} = \varphi \cdot v_m - m \cdot \frac{b}{2a} u_m \mp m \cdot \frac{d}{2a} w_m$

$w_{A/B} = w - \frac{b}{2} \chi = w - \frac{b}{2a} \chi$   $w_{A/Bm} = w_m - \frac{b}{2a} \chi_m$

$\chi_{A/B} = \chi$   $\chi_{A/Bm} = \chi_m$  (8.15)

### 8.3.3. Verformungen am Kreisringträger

Systemwerte gemäß Bild 11:

$$a = 392,5 \text{ cm} \quad b = 58,5 \text{ cm} \quad d = 213,5 \text{ cm} \quad t_1 = t_2 = 6,5 \text{ cm}$$

$$\varphi = \frac{a-b}{2} = 0,92548 \quad \frac{b}{2a} = 0,074522 \quad \frac{d}{2a} = 0,27197$$

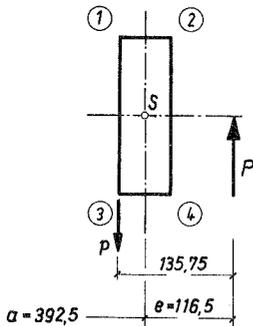
$$F = 3536 \text{ cm}^2 \quad J_1 = 19212000 \text{ cm}^4 \quad J_2 = 2601300 \text{ cm}^4 \quad J_T = 7455600 \text{ cm}^4$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kp/cm}^2 \quad \mu = 0,3 \quad G = \frac{1}{2(1+\mu)} \cdot E = \frac{1}{2,6} \cdot E$$

$$\psi_1 = \frac{6J_T}{EJ_1} = 0,14926 \quad \psi_2 = \frac{a^2 \cdot F}{J_2} = 209,41.$$

Exzentrizität der Kräfte P:  $e = 116,5 \text{ cm} \quad \epsilon = 16^\circ \hat{=} 0,27925$

#### Kreisringträger unter äußerer Last:



Die gleichmäßig verteilte Last  $p$  greift an der Innenkante des Ringträgers an, die zwei Einzellasten  $P = 500 \text{ Mp}$  an den Stellen  $\beta = 0^\circ$  und  $\beta = 180^\circ$  auf einer Breite  $2\epsilon = 32^\circ$  mit der Exzentrizität  $e = 116,5 \text{ cm}$  (Bild 16).

Es ist  $p = 438,14 \text{ kp/cm}$ .

$P$  wird gemäß Gleichung (6.1) in eine Reihe entwickelt, und zusammen mit  $p$  ergeben sich die Lasten auf die Schwerlinie des Ringes zu

Bild 16:

Kreisringträger

unter äußerer Last

$$q_1(\beta) = -810,98 \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\epsilon)}{m\epsilon} \cdot \cos(m\beta) \quad [\text{kp/cm}] \quad (8.16)$$

$$m_T(\beta) = -63859 - 94479 \sum_{m=2,4,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\epsilon)}{m\epsilon} \cdot \cos(m\beta) \quad [\text{kpcm/cm}].$$

Mit den Belastungen nach Gleichung (8.16) geht man in das Gleichungssystem (8.12b) und erhält für jedes  $m = 0, 2, 4, \dots$  die Ver-

formungen  $\chi_m$  und  $w_m$  und aus diesen mit Hilfe der Umformungen (8.15) die Verformungen der Innenkanten A und B des Ringträgers, die bis auf das Vorzeichen die  $\delta_{10}$ -Werte des Systems sind (Verformungen infolge äußerer Last an den Angriffsstellen der statisch Überzähligen).

Die Belastungen des Ringträgers infolge der Einheitslasten  $X_5 \dots X_{12} = 1$  entnimmt man der Aufstellung (8.14) und bestimmt über die beiden Gleichungssysteme (8.12a) und (8.12b) die Verformungen  $u_m$ ,  $v_m$ ,  $w_m$ ,  $\chi_m$  für jedes  $m$ . Diese Verformungen der Ring-Innenkanten sind die  $\delta_{ik}$ -Werte.

Die so ermittelten  $\delta_{10}$ - und  $\delta_{ik}$ -Werte sind in Tafel 9 für  $m = 0, 2, 4$  angegeben.

#### 8.4. Verformungen an den Kegelschalen $K_1, K_1', K_2$

Die Berechnung der  $\delta_{ik}$ -Werte an den drei Kegelschalen erfolgte elektronisch mit dem in Abschnitt 7 beschriebenen Programm. Die Einheitslasten  $X_1 \dots X_{12}$  wirken gemäß Bild 12 einzeln auf die Schalen. Die Verformungen im Sinne der statisch Überzähligen an den Rändern sind die  $\delta_{ik}$ -Werte. Für  $m = 0, 2, 4, 6$  sind sie für die Schalen  $K_1, K_2, K_1'$  in den Tafeln 10a, 10b, 10c angegeben.

Eine durchgreifende Rechenkontrolle bietet hier die Forderung  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$  auf Grund des Bettischen Reziprozitätsgesetzes. In Tafel 10a liegen die Fehler durchweg unter 2%, wobei zu beachten ist, daß sich die  $\delta$ -Werte an voneinander verschiedenen Rändern der Schale (zum Beispiel  $\delta_{15}$  und  $\delta_{51}$ ) noch um den Faktor  $\rho = l_1/l_2$  unterscheiden, der das Verhältnis der Umfänge am oberen und unteren Rand angibt. In Tafel 10c liegen die Fehler in derselben Größenordnung. Empfindliche Unterschiede bis zu 30% zeigen sich jedoch für  $m = 2$  in Tafel 10b, wenngleich für alle anderen  $m$  die Symmetrie sehr gut ist. Der Fall  $m = 2$  stellt die ungünstigste Belastung einer solchen Schale dar. Für die flachere Schale  $K_2$  stellt die Vernachlässigung der unterstrichenen Terme in den Gleichungen (5.3) wohl schon eine zu weitgehende Näherung dar, obschon diese Näherungen auch in den "genauen" Biegetheorien ähnlicher Schalen enthalten sind. Die Mitnahme dieser vernach-

Harmonische m	Wirkung	Verformungen der Ringträger-Achse				Verformungen der Ringträger - Innenkanten A und B								
		$u_m$	$v_m$	$w_m$	$\chi_m$	$d_{5i}^T = -u_{Am}$	$d_{6i}^T = +w_{Am}$	$d_{7i}^T = \frac{1}{\alpha} \chi_m$	$d_{8i}^T = -v_{Am}$	$d_{9i}^T = -u_{Bm}$	$d_{10i}^T = -w_{Bm}$	$d_{11i}^T = -\frac{1}{\alpha} \chi_m$	$d_{12i}^T = +v_{Bm}$	
0	$L^*)$	—	—	—	-957,080	+260,297	-243,842	-243,842	-260,297	-243,842	+243,842	-243,842	-260,297	
	$X_5=1$	-1,91022	—	—	-14,8068	+5,93793	-3,77243	-3,77243	+2,11608	+3,77243	+3,77243	+3,77243	+2,11608	
	$X_7$	—	—	—	+13,8705	-3,77236	+3,53390	+3,53390	+3,77236	-3,53390	-3,53390	-3,53390	+3,77236	
	$X_9$	-1,91022	—	—	+14,8068	+2,11608	+3,77243	+3,77243	+5,93793	-3,77236	-3,77236	-3,77236	+5,93793	
	$X_{11}$	—	—	—	-13,8705	+3,77236	-3,53390	-3,53390	-3,77236	+3,53390	+3,53390	+3,53390	-3,77236	
2	L	—	—	-249,75	-8022,34	+2181,84	-1896,91	-2043,91	-1356,99	-1896,91	+1896,91	+2043,91	-2181,84	
	$X_5=1$	-44,6754	+22,3377	-12,6676	-45,7347	+57,1139	-9,2594	-11,6522	-34,2221	+32,2369	+9,2594	+11,6522	+32,2369	
	$X_6$	—	—	+12,7098	+34,0450	-9,2592	+10,1727	+8,6739	+6,9137	+9,2592	-10,1727	-8,6739	+6,9137	
	$X_7$	—	—	+11,8665	+42,8427	-11,6519	+8,6738	+10,9153	+6,4547	+11,6519	-8,6738	-10,9153	+6,4547	
	$X_8$	+27,3318	-14,1102	+8,8016	+25,3352	-34,2222	+6,9136	+6,4548	+21,9199	-20,4414	+6,9136	-6,4548	-12,3448	
	$X_9$	-44,6754	+22,3377	+12,6676	+45,7347	+32,2369	+9,2594	+11,6522	-20,4413	+57,1139	-9,2594	+11,6522	+34,2221	
	$X_{10}$	—	—	-12,7098	-34,0450	+9,2592	-10,1727	-8,6739	-6,9137	-9,2592	+10,1727	+8,6739	-6,9137	
	$X_{11}$	—	—	+11,8665	+42,8427	-11,6519	+8,6738	+10,9153	+6,4547	-11,6519	+8,6738	+10,9153	-6,4547	
	$X_{12}$	-27,3318	+14,1102	+8,8016	+25,3352	+20,4413	+6,9136	+6,4548	-12,3448	+34,2222	-6,9136	-6,4548	+21,9199	
	4	L	—	—	-63,1948	-679,249	+184,735	-12,5758	-173,057	-68,7484	-184,735	+12,5758	+173,057	-68,7484
		$X_5=1$	-1,78702	+0,44676	-0,50670	-7,12013	+3,72348	+0,02391	-1,81405	-1,49739	+0,14944	-0,02391	+1,81405	+0,39493
		$X_6$	—	—	+0,20444	-0,08787	+0,02390	+0,21099	-0,02239	+0,22241	-0,02390	+0,21099	+0,02239	+0,22241
$X_7$		—	—	+0,47466	+6,66989	-1,81401	-0,02239	+1,69933	+0,51639	+1,81401	+0,02239	-1,69933	+0,51639	
$X_8$		+0,94615	-0,34760	+0,37345	+2,02681	-1,49738	+0,22241	+0,51638	+1,01000	-0,39492	-0,22241	-0,51638	-0,19747	
$X_9$		-1,78702	+0,44676	+0,50670	-7,12013	-0,14944	+0,02390	-1,81401	-0,39492	+3,72348	+0,02391	-1,81405	+1,49739	
$X_{10}$		—	—	-0,20444	+0,08787	-0,02391	-0,21099	+0,02239	-0,22241	+0,02390	+0,21099	-0,02239	-0,22241	
$X_{11}$		—	—	-0,47466	-6,66989	+1,81405	+0,02239	-1,69933	-0,51638	-1,81401	-0,02239	+1,69933	-0,51639	
$X_{12}$		-0,94615	+0,34760	+0,37345	+2,02681	+0,39493	+0,22241	+0,51639	-0,19747	+1,49738	-0,22241	-0,51638	+1,01000	

Tafel 9: Verformungen  $\delta$  am Tragring T, 10<sup>6</sup>-fach \*) L = Lastzustand  
 Dimensionen: [ m und Mp ]

m	i	$\delta_{i_1}$	$\delta_{i_2}$	$\delta_{i_3}$	$\delta_{i_4}$	$\delta_{i_5}$	$\delta_{i_6}$	$\delta_{i_7}$	$\delta_{i_8}$
0	1	+ 628,67		- 22,948		+ 0,4435		+ 0,0249	
	3	- 22,948		+ 1,7030		- 0,0302		- 0,0008	
	5	+ 0,5586		- 0,0380		+ 654,76		+ 19,537	
	7	+ 0,0313		- 0,0011		+ 19,536		+ 1,1510	
2	1	+ 211070	+ 20060	- 478,63	- 105032	- 112245	+ 10392	+ 364,15	+ 56181
	2	+ 20416	+ 22240	+ 223,14	- 10006	- 78225	- 40237	- 257,57	+ 39021
	3	- 474,13	+ 224,34	+ 6,3730	+ 226,67	+ 668,43	- 580,10	- 4,7388	+ 334,48
	4	- 105041	- 9831,6	+ 228,90	+ 52425	+ 56229	- 5367,7	- 183,03	- 27894
	5	- 744111	- 98417	- 835,53	+ 71541	+ 360340	+ 165777	+ 995,95	- 179336
	6	+ 12141	- 50802	- 729,02	- 6294	+ 166413	+ 106432	+ 777,59	- 83000
	7	+ 452,26	- 32568	- 5,9628	+ 227,36	+ 10013	+ 778,52	+ 7,2471	- 491,11
	8	+ 71504	+ 49098	+ 418,16	- 35496	- 179355	- 82692	- 488,32	+ 89424
4	1	+ 14513	+ 3160,3	- 94,569	- 3493,3	+ 111,27	+ 1364,7	+ 51,381	- 83,658
	2	+ 3160,5	+ 799,14	- 17,626	- 744,31	- 1197,4	- 184,18	+ 4,8084	+ 28701
	3	- 94,587	- 17,629	+ 2,2423	+ 18,694	- 59,795	+ 30,015	- 0,5611	+ 15,210
	4	- 3493,2	- 744,25	+ 18,689	+ 877,93	- 79,693	- 362,65	- 13,154	+ 33,924
	5	+ 137,76	- 1508,6	- 75,299	- 99,758	+ 20979	+ 8112,9	+ 123,01	- 5081,3
	6	+ 1717,9	- 232,17	- 37,797	- 456,53	+ 8113,4	+ 3316,4	+ 52,860	- 1982,3
	7	+ 64,700	+ 6054,4	- 0,7065	- 16,563	+ 122,99	+ 52,852	+ 1,8871	- 26,511
	8	- 104,77	+ 361,63	+ 19,155	+ 42,577	- 5081,5	- 1982,3	- 26,516	+ 1269,7
6	1	+ 4088,19	+ 1074,8	- 46,937	- 614,93	+ 529,84	+ 320,19	+ 12,605	- 107,13
	2	+ 1074,8	+ 297,58	- 12,450	- 156,77	+ 21,185	+ 42,177	+ 2,5776	- 8,0252
	3	- 46,943	- 12,452	+ 1,7938	+ 5,0110	- 13,665	- 5,6399	- 0,1405	+ 2,4290
	4	- 614,92	- 156,77	+ 5,0099	+ 108,29	- 106,06	- 60,348	- 2,2583	+ 20,968
	5	+ 667,14	+ 26,637	- 17,208	- 133,55	+ 5371,8	+ 1896,18	+ 51,323	- 821,84
	6	+ 403,22	+ 53,106	- 7,1024	- 75,998	+ 1896,2	+ 689,04	+ 18,464	- 295,24
	7	+ 15,874	+ 3,2460	- 0,1769	+ 2,8440	+ 51,320	+ 18,463	+ 1,3393	- 6,1741
	8	- 134,913	- 10,100	+ 3,0592	+ 26,405	- 295,26	- 6,1750	- 6,1750	+ 142,44

Tafel 10a: Verformungen  $\delta$  an der Schale  $K_1$  [cm]

$m$	$i$	$d_{1i}$	$d_{2i}$	$d_{3i}$	$d_{4i}$
0	1	+500,40	X	+19,669	X
	3	+ 19,668		+ 1,4988	
2	1	+398285	+352843	+1898,5	-197 967
	2	+400144	+375172	+2179,9	-199 065
	3	+ 2529,4	+ 2515,4	+ 17,040	- 1250,9
	4	-198321	-175 843	- 938,65	+ 98 699
4	1	+ 11644	+ 9817,2	+ 114,60	- 2 792,6
	2	+ 9821,8	+ 8426,7	+ 101,67	- 2 370,4
	3	+ 114,75	+ 101,75	+ 2,5182	- 24,641
	4	- 2793,5	- 2,5182	- 24,613	+ 699,57
6	1	+ 2921,8	+ 2368,8	+ 45,929	- 440,16
	2	+ 2369,0	+ 1942,9	+ 37,771	- 361,82
	3	+ 45,931	+ 37,770	+ 1,7090	- 5,5826
	4	- 440,28	- 361,89	- 5,5838	+ 79,374

Tafel 10b: Verformungen  $\delta$  an der Schale  $K_2$  [cm]

$m$	$i$	$d_{9i}$	$d_{10i}$	$d_{11i}$	$d_{12i}$
0	9	+ 654,77	X	+ 19,537	X
	11	+ 19,536		+ 1,1510	
2	9	+1117,5	+ 405,16	+ 21,025	- 233,01
	10	+ 405,17	+ 173,68	+ 6,8987	- 96,571
	11	+ 21,024	+ 6,8983	+ 1,1482	- 0,9422
	12	- 233,03	- 96,577	- 0,9426	+ 116,21
4	9	+3311,3	+1206,2	+ 32,820	- 669,12
	10	+1206,2	+ 458,27	+ 11,528	- 250,70
	11	+ 32,817	+ 11,527	+ 1,1932	- 3,7344
	12	- 669,18	- 250,72	- 3,7354	+ 167,54
6	9	+4043,6	+1408,3	+ 41,943	- 593,38
	10	+1408,3	+ 503,81	+ 14,594	- 210,55
	11	+ 41,940	+ 14,593	+ 1,2431	- 4,5066
	12	- 593,43	- 210,56	- 4,5073	+ 103,04

Tafel 10c: Verformungen  $\delta$  an der Schale  $K_1$  [cm]

lässigten Terme bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, der Rechenaufwand steigt jedoch noch stark an. Für das behandelte Beispiel sind die besprochenen Differenzen von untergeordneter Bedeutung, da - wie man noch sehen wird - die Schale  $K_2$  für das gesamte Tragwerk ohnehin nur eine geringe Aussteifung bringt.

8.5. Gleichungssystem für das Kraftgrößenverfahren und Auflösung

Jetzt kann das Gleichungssystem für das gesamte Tragwerk aufgestellt werden, das für jedes  $m$  in 12 Gleichungen 12 Kontinuitätsbedingungen enthält. Die Matrix der  $\delta_{ik}$  setzt sich zusammen aus den  $\delta_{ik}$ -Werten für den Ringträger T und die Schalen  $K_1, K_2, K_1'$ :

$$[\delta_{ik}] = [d_{ik}^T] + [d_{ik}^{K_1}] + [d_{ik}^{K_2}] + [d_{ik}^{K_1'}] \quad (8.17)$$

Für jeden einzelnen  $\delta_{ik}$ -Wert sind allerdings höchstens 2 Summanden ungleich Null.

Das Gleichungssystem lautet dann

$$[d_{ik}]_{(12,12)} \cdot [X_k]_{(12,1)} = [-d_{i0}]_{(12,1)} \quad (8.18)$$

Die Auflösung dieser Gleichungssysteme je für  $m = 0, 2, 4, 6$  ergibt die Überzähligen  $X_i$  gemäß Tafel 11.

$m =$	0	2	4	6
$X_1$	- 0,00389	- 6,5633	- 26,2405	- 2,8889
$X_2$	-	+ 17,0359	+ 50,7307	+ 4,9222
$X_3$	- 0,43683	- 397,916	- 208,187	- 216,048
$X_4$	-	+ 17,6077	+ 64,1737	+ 6,2607
$X_5$	- 77,6427	+ 3,3789	- 78,7710	- 23,0845
$X_6$	-	+ 37,3107	+ 264,692	+ 45,7748
$X_7$	+1478,83	- 291,573	+ 14,4121	+ 188,120
$X_8$	-	+ 44,1924	+ 89,5874	- 28,4783
$X_9$	- 77,6407	+ 415,520	+ 111,524	+ 24,0609
$X_{10}$	-	-1380,06	- 150,571	- 17,1395
$X_{11}$	-1478,80	- 146,345	-1051,41	-322,608
$X_{12}$	-	- 406,148	+ 212,016	+ 91,2725

Tafel 12: Überzählige  $X_i$  für  $m = 0, 2, 4, 6$ . Maßeinheiten [kp]-[cm]

Die tatsächliche Belastung der Schalen ergibt sich jetzt, wenn man die Einheitszustände mit den entsprechenden  $X_1$  multipliziert und summiert. Für jedes  $m$  lassen sich dann die Wirkungen (Verformungen und Schnittgrößen) an jeder gewünschten Stelle bestimmen. Dann ist noch über  $m$  ( $m = 0, 2, 4, 6$ ) zu summieren.

Für die elektronische Berechnung erweist es sich jedoch als praktischer, jede Schale unter gleichzeitiger Wirkung sämtlicher  $X_1$  zu berechnen, wodurch man sich die erstgenannten Summationen erspart.

Die wichtigsten Verformungen und Schnittgrößen sind in den Bildern 17 aufgetragen.

Die Verformungen und Schnittgrößen des Ringträgers sind in den Bildern 18 angegeben.

### 8.6. Korrektur-Lastfall

Für die vorhergehende Rechnung wurde angenommen, daß die gesamte Last von 1000 Mp an der Innenkante des Ringträgers angreift. Tatsächlich wird die Last überwiegend über die starr angenommene Bodenplatte und über Wandreibung an der unteren Kegelschale  $K'_1$  angreifen.

Hier soll als ungünstigster Fall angenommen werden, daß 800 Mp an der Bodenplatte angreifen. Die Kräfteverteilung für diesen Zusatz-

spannungszustand wird nun bestimmt.

Gemäß Bild 19 werden die Kräfte  $p$  und  $p_1$  an den Rändern der Schale  $K'_1$  in die Komponenten  $N_\alpha$  und  $H$  zerlegt.

Die Kräfte  $N_\alpha$  und  $N_{\alpha_1}$  ergeben einen rotationssymmetrischen Membranzustand, in dem die Schale nur durch Längskräfte  $N_\alpha$  beansprucht wird.

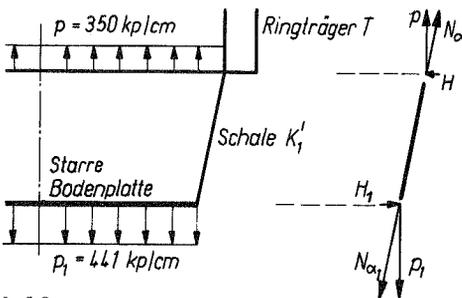
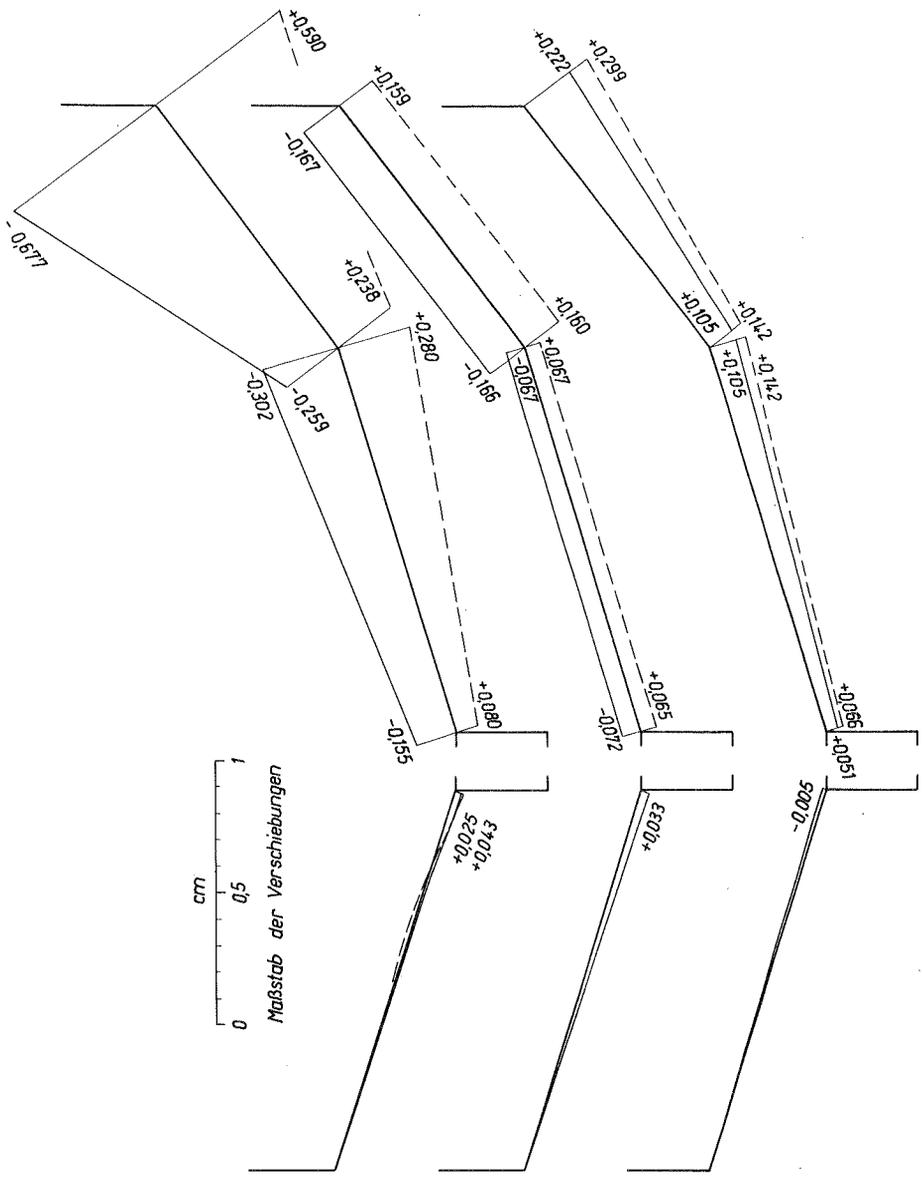


Bild 19:

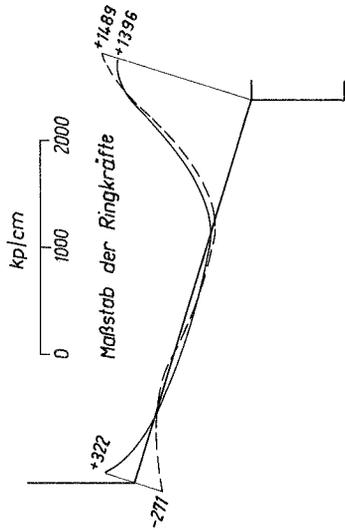
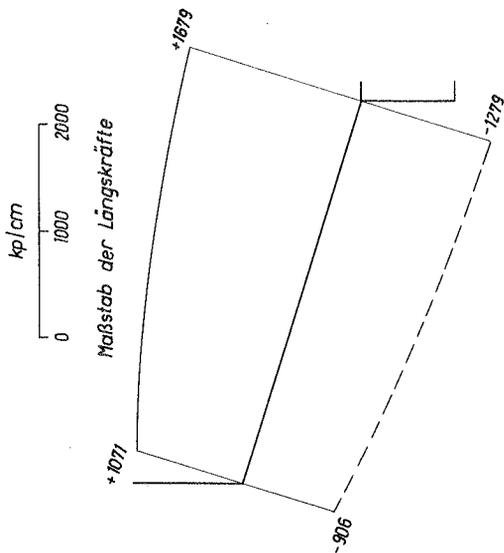
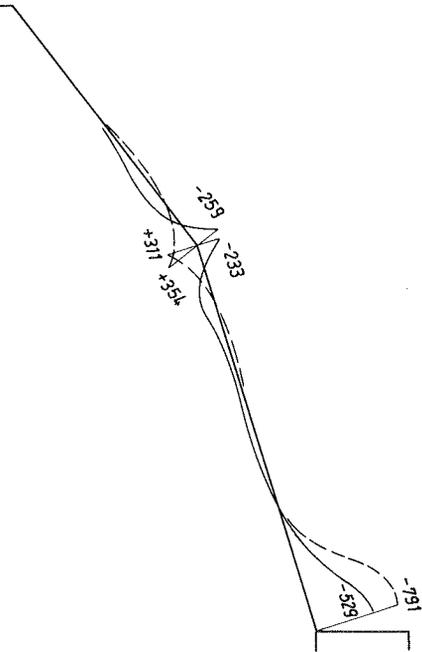
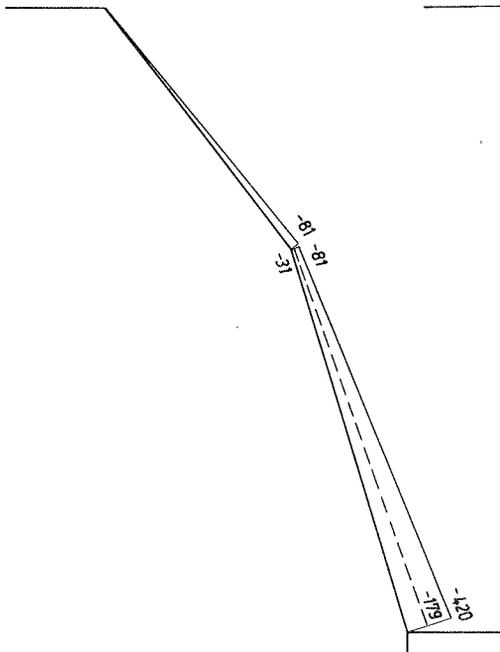
Zusatz-Spannungszustand



Verschiebung **W**      Verschiebung **U**      Ringverschiebung **V**

senkrecht    parallel  
zur Schalensmittelfläche

—————  $\beta = 0^\circ$       —————  $\beta = 22,5^\circ$   
 - - - - -  $\beta = 90^\circ$       - - - - -  $\beta = 45^\circ$



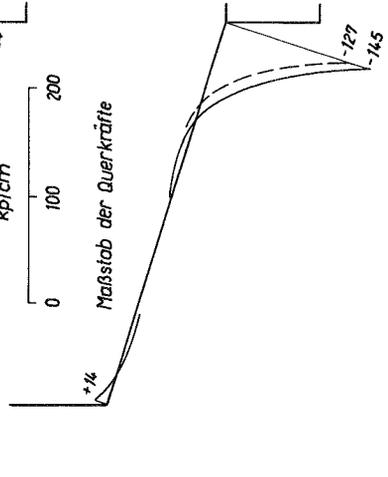
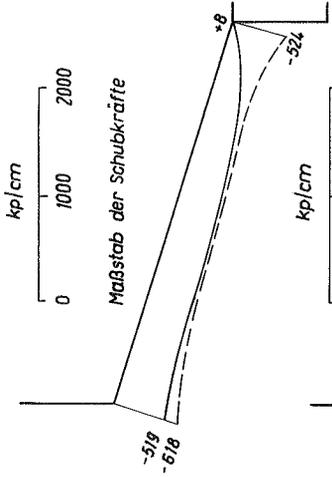
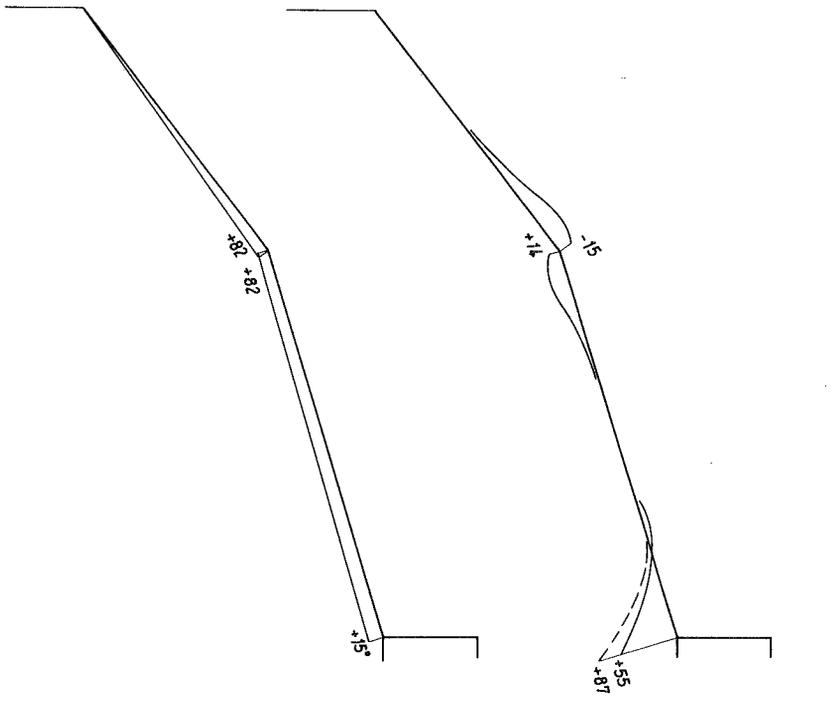
Längskräfte  $N_\alpha$

Ringkräfte  $N_\beta$

——  $\beta = 0^\circ$   
 - - -  $\beta = 90^\circ$

——  $\beta = 0^\circ$   
 - - -  $\beta = 90^\circ$

Bild 17b



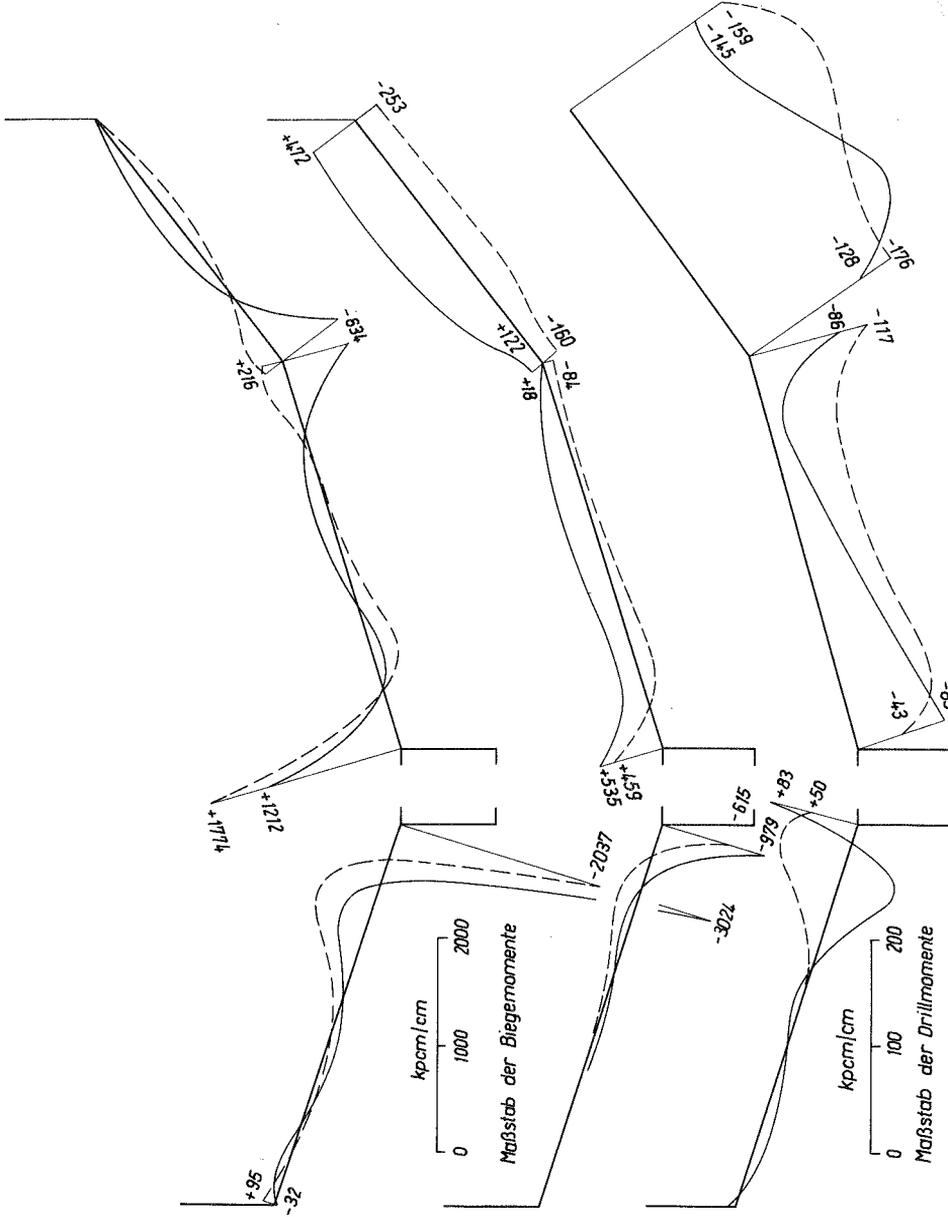
Schubkräfte  $N_{\alpha\beta}$

Querkräfte  $Q_{\alpha}$

—  $\beta = 22.5^\circ$   
 - - -  $\beta = 45^\circ$

—  $\beta = 0^\circ$   
 - - -  $\beta = 90^\circ$

Bild 17c



Biegemomente  $M_{\alpha}$

——  $\beta = 0^{\circ}$   
 - - -  $\beta = 90^{\circ}$

Biegemomente  $M_{\beta}$

——  $\beta = 0^{\circ}$   
 - - -  $\beta = 90^{\circ}$

Drillingmomente  $M_{\alpha\beta}$

——  $\beta = 22,5^{\circ}$   
 - - -  $\beta = 45^{\circ}$

Bild 17d

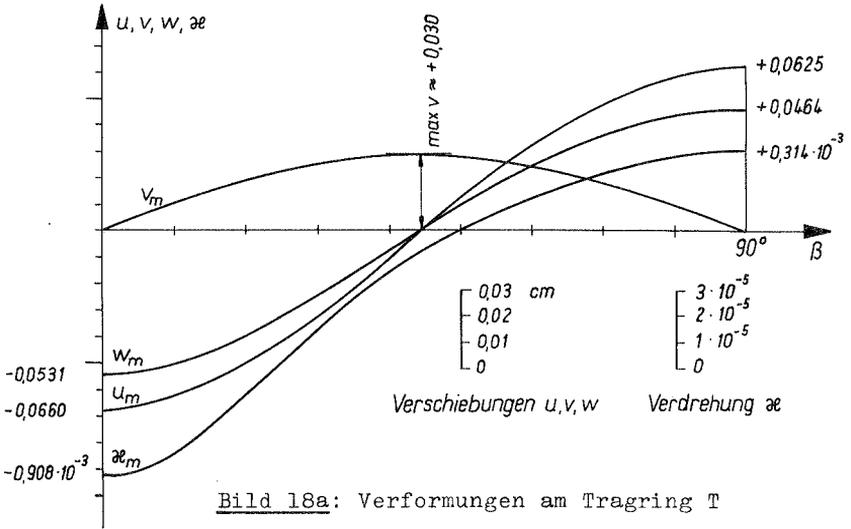


Bild 18a: Verformungen am Tragring T

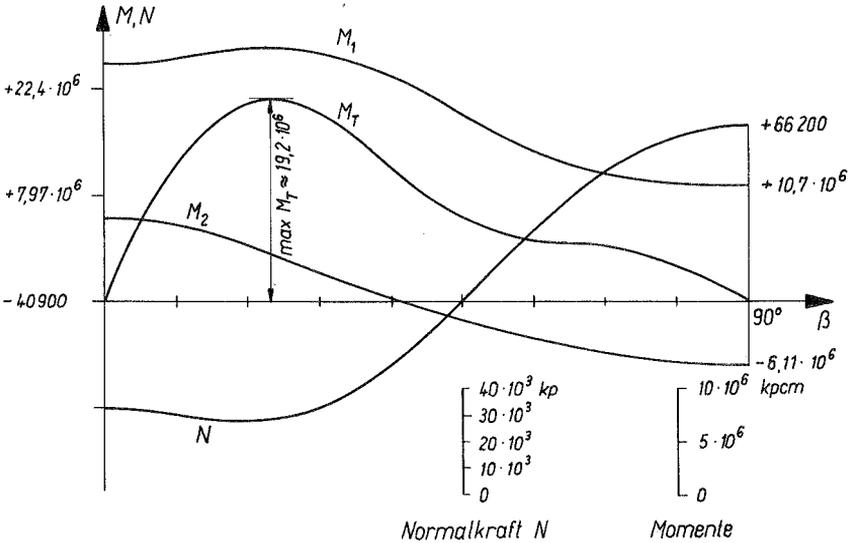


Bild 18b: Verlauf der Biegemomente  $M_1, M_2$ , des Torsionsmomentes  $M_T$  und der Normalkraft  $N$  am Tragring T

Am oberen Rand  $N_{\alpha} = \frac{P}{\cos \vartheta} = + 367 \text{ kp/cm}$ ,

am unteren Rand  $N_{\alpha_1} = \frac{P_1}{\cos \vartheta} = + 462 \text{ kp/cm}$ .

Die Horizontalkomponente  $H_1$  am unteren Rand der Schale  $K_1'$  wird von der starren Bodenplatte ohne weiteres aufgenommen.

Am oberen Rand der Schale  $K_1'$  wirkt die Horizontalkomponente  $H = p \cdot \text{tg } \vartheta = 109 \text{ kp/cm}$  auf den Ringträger T. Auf seine Achse bezogen erfährt er daraus die Belastung

$$q_2 = 109 \text{ kp/cm}$$

$$m_T = 109 \cdot 107 = 11670 \text{ kpcm/cm}.$$

Damit liefert Gleichung (8.12a)

$$u_m = - 2,26 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

und Gleichung (8.12b)

$$X_m = 17,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}.$$

Daraus wird  $\sigma_{7,0} = - \sigma_{11,0} = 44,6 \cdot 10^{-6}$

$$\sigma_{5,0} = + 2,50 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$$

$$\sigma_{9,0} = - 7,02 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$$

und damit  $X_5 = - 8,482$   $X_9 = + 19,732$

$$X_7 = + 171,3$$
  $X_{11} = - 362,3.$

Die Randschnittkräfte am oberen Rand der Schale  $K_1'$  ergeben sich zu

$$N_{\beta} = + 187 \text{ kp/cm}$$

$$M_{\alpha} = - 362,3 \text{ kpcm/cm}$$

$$M_{\beta} = - 108 \text{ kpcm/cm}.$$

Der Tragring erhält daraus die Beanspruchungen

$$N_m = + 4416 \text{ kp}$$

$$M_{1m} = - 1,391 \cdot 10^6 \text{ kpcm}$$

$$M_{2m} = + 8237 \text{ kpcm}.$$

## 8.7. Spannungsnachweise

### 8.7.1. Spannungsnachweis für die Kegelschale

Gemäß Bild 17 erreichen die verschiedenen Schnittgrößen an den Schalen ihre Größtwerte an der Stelle, an der die Schale  $K_1'$  an die Unterkante des Ringträgers anschließt (mit Ausnahme der unbedeutenden Schubkräfte  $N_{\alpha\beta}$ ).

Die Schubkräfte und Drillmomente sind klein gegen die Normalkräfte und Biegemomente, so daß der Spannungsnachweis auf die Stellen  $\beta = 0^\circ$  und  $\beta = 90^\circ$  beschränkt werden kann. Infolge Symmetrie von Belastung und System an diesen Stellen liegen hier die Hauptspannungen in Richtung der Achsen  $\alpha$  und  $\beta$ .

$\beta$	$\sigma_{\alpha\alpha}$			$\sigma_{\beta\beta}$			
		innen	außen		innen	außen	
$0^\circ$	Biegespannungszustand	$N_\alpha = +1679$	+ 305	+ 305	$N_\beta = +1396$	+ 254	+ 254
		$M_\alpha = -3024$	- 600	+ 600	$M_\beta = - 979$	- 194	+ 194
	Korrekturspannungszust.	$N_\alpha = + 367$	+ 67	+ 67	$N_\beta = + 187$	+ 34	+ 34
		$M_\alpha = - 362$	- 72	+ 72	$M_\beta = - 108$	- 21	+ 21
endgültige Spannung		- 300	+1044		+ 73	+ 503	

$90^\circ$	Biegespannungszustand	$N_\alpha = -1279$	- 233	- 233	$N_\beta = +1489$	+ 271	+ 271
		$M_\alpha = - 2037$	- 404	+ 404	$M_\beta = - 616$	- 122	+ 122
	Korrekturspannungszust.	$N_\alpha = + 367$	+ 67	+ 67	$N_\beta = + 187$	+ 34	+ 34
		$M_\alpha = - 362$	- 72	+ 72	$M_\beta = - 108$	- 21	+ 21
endgültige Spannung		-642	+ 310		+ 162	+ 448	

Tafel 14: Spannungen am oberen Rand der Schale  $K_1^1$  [kp/cm<sup>2</sup>]

### 8.7.2. Spannungsnachweis am Ringträger

Für die Längsspannungen aus Biegung und Normalkraft wird der Nachweis an den Stellen  $\beta = 0^\circ$  und  $\beta = 90^\circ$  erbracht. Die Punkte 1-2-3-4 sind die Eckpunkte des Ringträgers gemäß Bild 16.

$\beta = 0^\circ$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
$N = - 364,35$	- 11	- 11	- 11	- 11
$M_1 = + 21,03 \cdot 10^6$	- 117	- 117	+ 117	+ 117
$M_2 = + 7,97 \cdot 10^6$	+ 90	- 90	- 90	+ 90
	- 38	- 218	+ 16	+ 196

$\beta = 90^\circ$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$
$N = + 70600$	+ 20	+ 20	+ 20	+ 20
$M_1 = + 9,32 \cdot 10^6$	- 52	- 52	+ 52	+ 52
$M_2 = - 6,11 \cdot 10^6$	- 69	+ 69	+ 69	- 69
	- 101	+ 37	+ 141	+ 3

Tafel 15: Normalspannungen am Ringträger [kp/cm<sup>2</sup>]

Das Torsionsmoment erreicht mit  $M_T = + 19,2 \cdot 10^6$  kpcm an der Stelle  $\beta = 20^\circ$  etwa sein Maximum. Es folgt  $\tau = 118$  kp/cm<sup>2</sup>.

### 8.8. Diskussion der Ergebnisse

Die  $\delta_{ik}$ -Werte für die Schalen  $K_1$  und  $K_1'$  (Tafeln 10a, c) und die  $\delta$ -Werte für den Tragrings (Tafel 9) sind von sehr unterschiedlicher Größenordnung; das Verhältnis liegt oft über 50:1. Das zeigt die große Steifheit des Tragrings, insbesondere für die nicht rotationssymmetrischen Fälle  $m = 2, 4, 6$ . Trotzdem werden die Beanspruchungen im Tragrings um etwa 30% reduziert gegenüber einem Lastfall, bei dem die gesamte Last an Ringinnenkante angreift und nur auf den Tragrings allein wirkt. Die Schalen erhalten dabei an den Anschlußstellen teilweise wesentlich größere Spannungen als der Tragrings. Die Volleinspannung der Schale  $K_1'$  in einer starren Bodenplatte wirkt sich kaum aus im Auftreten von Biegemomenten, als vielmehr in hohen Längskräften. Eine gewisse Nachgiebigkeit der Bodenplatte würde eine günstige Spannungsumlagerung bringen.

Die Rechnung zeigt, daß die Lastentwicklung bis  $m = 6$  für einen Spannungsnachweis auf jeden Fall ausreicht. Die Verformungen stellen sich hauptsächlich bei der Harmonischen  $m = 2$  ein; sie sind bei  $m = 6$  bis auf etwa 1% angenähert. Für die Schnittgrößen bringt der Fall  $m = 6$  höchstens etwa 10% Veränderung im Spannungszustand; die Ergebnisse sind also sicher mit kleinerm Fehler als 10% behaftet.

Der Spannungsnachweis im Abschnitt 8.6.1. und 8.6.2. zeigt, daß der Behälter den statischen Erfordernissen genügt. Die Verformungen sind noch klein gegen die Wanddicke, womit die Voraussetzungen der Theorie erfüllt sind.

Eine endgültige Kontrolle der Rechnung liefert die Überprüfung aller Kontinuitätsbedingungen. Leider bringen die Kirchhoffschen Ersatzschnittkräfte am freien Rand der Schale ein großes Drillmoment  $M_{\alpha\beta}$ , was sich im Rahmen dieser Theorie nicht umgehen läßt.

## 9. Zusammenfassung

Mit dieser Arbeit wurden zwei Ziele verfolgt.

1. Es wurde gezeigt, daß auch bei formaler Herleitung der Biegetheorie der Kegelschale mit linear veränderlicher Wanddicke aus den Grundgleichungen für das räumliche Kontinuum dann keine Symmetrie auftritt, wenn man die in der Schalentheorie üblichen Näherungen einführt. Die Operatoren  $L_{jk}$  sind von  $L_{ki}$  verschieden, für den Grenzübergang zur Zylinderschale werden sie allerdings gleich. Die möglichen Ursachen dafür liegen, wie in Abschnitt 3.5. erwähnt, vor allem in den geometrischen Hypothesen. Die Auswirkungen auf die numerische Rechnung dürften im allgemeinen gering sein. Beachtenswert ist die nach Einführen der Lösungsansätze für  $u$ ,  $v$ ,  $w$  auftretende Antimetrie in den Koeffizienten  $d_{jk}$  bzw.  $d_{ki}$  der charakteristischen Gleichung dergestalt, daß die  $d_{ki}$  aus den  $d_{jk}$  hervorgehen, wenn  $\lambda$  mit  $-\lambda$  vertauscht wird.

2. Der Rechnungsgang, wie er prinzipiell schon in [ 2 ] dargestellt ist, sollte möglichst überschaubar zusammengefaßt werden, wozu die Matrizenrechnung angewandt wurde. Dadurch wird die gesamte Rechnung auf wenige Matrizenoperatoren reduziert. Die Zusammenhänge lassen sich so leicht überblicken, und das Problem ist auf diese Weise einer Programmierung gut zugänglich. Es zeigte sich, daß die in [ 2 ] vorgenommenen Näherungen in den Schnittgrößen bei den untersuchten Schalen und Lastfällen nicht statthaft sind, da sie große Abweichungen bringen.

Die in der Durchführung der Rechnung auftauchenden numerischen Schwierigkeiten und großen Ungenauigkeiten durch oftmalige Differenzenbildung wurden durch Aufstellen eines Programmes für einen Elektronenrechner behoben.

Mit Hilfe dieses Programmes wurden als Anwendungsbeispiel Verformungen und Spannungen an einem Konverter bestimmt.

## Lebenslauf

- 24.2.1935 geboren in Berlin als Sohn des Kaufmanns Erich Krüger und seiner Ehefrau Doris, geb. Wittmann.
- 1941-1945 Besuch der Volksschule in Berlin und Lindau (B).
- 1945-1951 Besuch des Gymnasiums in Lindau und Ludwigsburg.
- 1951-1953 Lehre im Maurer-Handwerk bei der Firma E. und E. Klotz, Ludwigsburg.  
Gesellenprüfung: 17.10.1953.
- 1953-1955 Besuch der Technischen Aufbauschule in Stuttgart.  
Reifeprüfung: 28.9.1955.
- 1955-1960 Studium des Bauingenieurwesens an der Technischen Hochschule Stuttgart. Vertiefungsrichtung: Konstruktiver Ingenieurbau.  
Diplomhauptprüfung: 10.8.1960.
- Seit 1960 Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter und Wissenschaftlicher Assistent am Lehrstuhl für Baustatik und Elastizitätslehre, Prof. Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer.