

✓

# BERECHNUNG DÜNNWANDIGER PRISMATISCHER FALTWERKE MIT VERFORMBAREM MEHRZELLEN QUERSCHNITT

von

Bernd-Michael Sulke



Bericht Nr. 77 - 1

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: o. Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Stuttgart 1977

Dieser Bericht wurde unter dem Titel "Berechnung dünnwandiger prismatischer  
Faltwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt" als Dissertation von Herrn  
Bernd-Michael Sulke dem Fachbereich 11, Konstruktiver Ingenieurbau, der  
Universität Stuttgart am 22.12.76 vorgelegt. Die mündliche Doktorprüfung  
fand am 27. Mai 1977 statt.

Berichter waren:

Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Professor Dr. -Ing. G. Hees



Berichte können durch das Institut für Baustatik der Universität  
Stuttgart, Postfach 560, 7000 Stuttgart 1, bezogen werden.

### Zusammenfassung

In Erweiterung der technischen Biegetheorie werden Berechnungsansätze für dünnwandige, prismatische Kastenträger untersucht. Fragen im Zusammenhang mit den auftretenden Schubverzerrungen werden geklärt und verschiedene Näherungsstufen der Berechnung aufgezeigt. In Beispielen wird die Güte der Lösung überprüft. Betrachtungen zum Tragverhalten mehrzelliger Kastenträger zeigen, daß unter Einzellaasten ein oder zwei spezielle Profilverformungszustände überwiegen. Damit ist eine wesentlich vereinfachte Näherungslösung möglich.

### Summary

Statements are analysed to calculate thinwalled prismatic box girders, extending the technical bending theory. Existing problems concerning shear strain are examined, and different ways to approach a solution are shown. The good agreement with other theories is checked in some examples. Under a concentrated load the reactions of multicellular box girders indicate the significance of one or two special distortion types of the cross section. Therefore, an essentially simplified calculation is possible.

### Resumen

En este trabajo se analizan hipótesis de cálculo para vigas cajón de paredes delgadas, extendiendo la teoría de flexión. Además, se estudian problemas derivados del corte y se proponen distintas aproximaciones posibles. Mediante ejemplos, se controla la validez de esta teoría con respecto a otras. Para el caso de vigas cajón multicelulares sometidas a una carga concentrada, se demuestra que existe una o dos deformaciones de perfil significativas para conocer el comportamiento del sistema. De este modo, se logra una efectiva simplificación en el cálculo.

<u>Inhaltsverzeichnis</u>	Seite
Literaturverzeichnis	9
Bezeichnungen	17
1. Einleitung	25
2. Berechnungsgrundlagen	30
2.1 Voraussetzungen	30
2.2 Querschnittsform und Koordinatensysteme	31
2.3 Definition einer Profilverformung	34
2.4 Lastansätze für die Faltwerksberechnung	37
2.5 Grundbeziehungen am Wandelement	38
2.6 Allgemeines zur Wahl von Lösungsansätzen	42
2.7 Zusätzliche Forderungen an die Verwölbungsansätze	45
3. Profilverformungen ohne Berücksichtigung einer Schubdeformation	47
3.1 Ansatz für den Verwölbungsverlauf	47
3.2 Der einzellige Kasten	50
3.3 Allgemeine mehrzellige Trapezkästen	52
3.4 Beispiel für einen dreizelligen Kastenträger	57
3.5 Folgerungen, Sonderfälle	60
4. Profilverformungen bei Berücksichtigung von Schubverzerrungen infolge Drehungen	63
4.1 Einführung von Schubflüssen in die Verwölbungsberechnung einzelner Profilverformungszustände	63
4.2 Allgemeine Herleitung des Näherungsansatzes für $\hat{w}(s)$	67
4.3 Betrachtungen zum Näherungsansatz	74
4.4 1. Stufe der Orthogonalisierung für die Längsverwölbungen infolge Profilverformung	79

5.	Berechnung eines mehrzelligen Falwerkts bei Berücksichtigung der Drehschubflüsse	83
5.1	Ansätze in Matrizenschreibweise	83
5.2	Querbiegemomente bei Profilverformungen	86
5.3	Herleitung des Differentialgleichungssystems	89
5.4	Schnittgrößen der Kastenträger	93
5.5	Orthogonalisierung 2. Stufe	98
5.5.1	Allgemeine Anmerkungen	98
5.5.2	Durchführung der Orthogonalisierung 2. Stufe am Beispiel des Falles 1 für $F$ und $J$	99
5.5.3	Möglichkeit einer Reduktion des Eigenwertproblems	103
6.	Faltwerksberechnungen bei näherungsweise Berücksichtigung der Biege- und Wölbschubverzerrungen	107
6.1	Allgemeine Ansätze	107
6.2	Näherungsverfahren nach Heilig	109
6.3	Näherungsverfahren nach Bencoter	114
6.4	Vereinfachte Näherungslösungen	118
6.5	Randbedingungen	119
6.5.1	Endlagerung mit Schott	119
6.5.2	Randbedingungen in Feldmitte eines symmetrisch belasteten Trägers	120
7.	Auswertungen	123
7.1	Berechnung mehrzelliger Träger mit Hilfe des Übertragungsverfahrens	123
7.2	Vergleich der Ergebnisse mit einem anderen unabhängigen Rechenprogramm	126
7.3	Einflüsse näherungsweise Entkopplungen	147
8.	Untersuchungen zur vereinfachten Berechnung mehrzelliger Falwerke	153
8.1	Einfluß einer Erhöhung der Zellenzahl auf die Tragwirkung	153

8.2	Vereinfachung der Faltwerkberechnung durch den Ansatz einzelner ausgewählter Profilverformungen	157
8.3	Anmerkungen zum Abklingverhalten der Profilverformungen bei mehrzelligen Kastenträgern	169
9.	Zusammenfassung	179



Literaturverzeichnis

- [1] Craemer, H. : Allgemeine Theorie der Faltwerke.  
Beton und Eisen 29 (1930) S. 276/81.
- [2] Gruber, E. : Berechnung prismatischer Scheibenwerke.  
Abhandlungen IVBH, Band 1 (1932) S. 225 /  
241.
- [3] Schardt, R. : Eine Erweiterung der technischen Biegelehre für die Berechnung biegesteifer prismatischer Faltwerke.  
Der Stahlbau 35 (1966) H. 6, S. 161/71.
- [4] Sedlacek, G. : Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorganges für prismatische Stäbe mit dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Profilverformung.  
Dissertation, TU Berlin, 1968.  
In: Fortschritt-Berichte VDI-Z, Reihe 4, Nr. 8, September 1968.
- [5] Castrillón O., E. A. : Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.  
Dissertation, Uni. Stuttgart, 1975.
- [6] Steinle, A. : Torsion und Profilverformung.  
Dissertation, Universität Stuttgart (TH), 1967.
- [7] Hees, G. : Querschnittsverformung des einzelligen Kastenträgers mit vier Wänden in einer zur Wölbkrafttorsion analogen Darstellung.  
Die Bautechnik 48 (1971) H. 11, S. 370/77  
und 49 (1972) H. 1, S. 21/28.



- [8] Sedlacek, G. : Zur Berechnung der Spannungsverteilung in dünnwandigen Stäben unter Berücksichtigung der Profilverformung.  
Der Stahlbau 38 (1969) H. 10, S. 314/20.
- [9] Roik, K.,  
Sedlacek, G. : Erweiterung der technischen Biege- und Verdrehtheorie unter Berücksichtigung von Schubverformungen.  
Die Bautechnik 47 (1970) H. 1, S. 20/32.
- [10] Sedlacek, G. : Die Anwendung der erweiterten Biege- und Verdrehtheorie auf die Berechnung von Kastenträgern mit verformbarem Querschnitt.  
Straße Brücke Tunnel 23 (1971) H. 9, S. 241/44 und H. 12, S. 329/35.
- [11] Bornscheuer, F. W. : Systematische Darstellung des Biege- und Verdrehvorgangs unter besonderer Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion.  
Der Stahlbau 21 (1952) H. 1, S. 1/9.
- [12] Bornscheuer, F. W. : Beispiel und Formelsammlung zur Spannungsberechnung dünnwandiger Stäbe mit wölbbehindertem Querschnitt.  
Der Stahlbau 21 (1952) H. 12, S. 225/32 und 22 (1953) H. 2, S. 32/44; Berichtigung 30 (1961) H. 3, S. 96.
- [13] Wlassow, W. S. : \* Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in der Technik.  
Originalrussisch, deutsche Übersetzung:  
Akademie-Verlag, Berlin, 1958.

---

\*) Auch andere Schreibweise des Namens gebräuchlich, besonders im englischsprachigen Raum: Vlasov, V. Z.

- [14] Wlassow, W. S. : Dünnwandige elastische Stäbe.  
Originalrussisch, deutsche Übersetzung:  
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, Band 1  
(1964) und Band 2 (1965).
- [15] Lacher, G. : Zur Berechnung des Einflusses der Quer-  
schnittsverformungen auf die Spannungs-  
verteilung bei durch elastische oder star-  
re Querschotte versteiften Tragwerken  
mit prismatischem, offenem oder ge-  
schlossenem biegesteifen Querschnitt un-  
ter Querlast.  
Der Stahlbau 31 (1962) H. 10, S. 299/308  
und H. 11, S. 325/35.
- [16] Bažant, Z. B. : Pièces longues à voiles épais et calcul  
des poutres à section déformable.  
Annales des Ponts et Chaussées 138 (1968)  
Nr. 3, S. 155/69.
- [17] De Boer, R. : Der gerade Stab mit geschlossenem dünn-  
wandigem Profil unter näherungsweise  
Berücksichtigung der Schub- und Quer-  
schnittsdeformationen.  
Ingenieur-Archiv 39 (1970) H. 1, S. 53/62.
- [18] De Boer, R. : Die näherungsweise Ermittlung der mit-  
tragenden Breite bei geraden prismati-  
schen Stäben mit geschlossenen dünnwan-  
digen Profilen.  
Der Stahlbau 39 (1970) H. 1, S. 16/20.
- [19] Kollbrunner, C. F., Dünnwandige Stäbe. Band 1: Stäbe mit un-  
Hajdin, N. : deformierbarem Querschnitt (1972).  
Band 2: Stäbe mit deformierbaren Quer-  
schnitten. Nicht - elastisches Verhalten  
dünnwandiger Stäbe (1975).  
Springer - Verlag, Berlin.

- [20] Goldberg, J. E.,      Theory of Prismatic Folded Plate Structures.  
Leve, H. L. :  
Abhandl. IVBH, Band 17 (1957) S. 59/86.
- [21] Scordelis, A. C. :      Analysis of Simply Supported Box Girder Bridges.  
Structural Engineering and Struct. Mech.  
Report No. 66-17, University of California,  
Berkeley, Oktober 1966.
- [22] Scordelis, A. C. :      Analysis of Continuous Box Girder Bridges.  
Structural Engineering and Struct. Mech.  
Report No. 67-25, University of California,  
Berkeley, November 1967.
- [23] Lin, C. S.,  
Scordelis, A. C. :      Computer Program for Bridges on Flexible Bents.  
Structural Engineering and Struct. Mech.  
Report No. 71-24, University of California,  
Berkeley, Dezember 1971.
- [24] Scordelis, A. C. :      Analytical and Experimental Studies of Multi-cell Concrete Box Girder Bridges.  
Symposium on Folded Plates and Spatial Panel Structures (IASS/CISM), Udine,  
September 1974 - preliminary copy.
- [25] Du Preez, R. J. :      Die Berechnung allgemeiner Flächentragwerke mit Hilfe finiter Streifenelemente.  
Dissertation, Universität Stuttgart, 1972.
- [26] Du Preez, R. J. :      Berechnung prismatischer Flächentragwerke mit Hilfe von finiten Streifenelementen.  
Die Bautechnik 49 (1972) H. 5, S. 151/62.

- [27] Rokey, K. C. ,           Development in Bridge Design and Construction.  
Bannister, J. L. ,  
Evans, H. R. :           Crosby Lockwood & Son Ltd. , London,  
(Herausgeber)           1971.
- [28] Robertson, J. C. ,       Transverse Shear Deformation in Multi-cell Box Beam Bridges.  
Pama, R. P. ,  
Cusens, A. R. :         Abhandl. IVBH, Band 30-II (1970) S. 169/  
190.
- [29] Arendts, J. G. ,         Concrete Box-Girder Bridges as Sandwich Plates.  
Sanders, Jr., W. W. :    Proc. ASCE, J. of the Structural Division, Vol. 96 (1970) H. 11, S. 2353/371.
- [30] Bode, H. :             Beitrag zur Berechnung und Konstruktion von Sandwichplatten.  
Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1974. Mitteilungen aus dem Institut für Konstruktiven Ingenieurbau Nr. 74 - 10, November 1974.
- [31] Heilig, R. :            Der Schubverformungseinfluß auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil.  
Der Stahlbau 30 (1961) H. 4, S. 97/103.
- [32] Heilig, R. :            Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform.  
Der Stahlbau 30 (1961) H. 11, S. 333/49.
- [33] Benscoter, S. U. :     A Theory of Torsion Bending for Multi-cell Beams.  
J. of Applied Mechanics 21 (1954) Nr. 1, S. 25/34.
- [34] Hetényi, H. :         Beams on Elastic Foundation.  
Ann Arbor: The University of Michigan Press, Ninth Printing, 1971.

- [35] Schardt, R., Okur, H. : Hilfwerte für die Lösung der Differentialgleichungen  $ay^{IV}(x) - by''(x) + cy(x) = p(x)$ . Der Stahlbau 40 (1971) H. 1, S. 6/17.
- [36] Vlazov, V. Z., Leont'ev, U. N. : Beams, Plates and Shells on Elastic Foundations. Originalrussisch, englische Übersetzung: Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966.
- [37] Zurmühl, R. : Matrizen. Springer-Verlag, Berlin, 4. Auflage, 1964.
- [38] Wilkinson, J. H. : The Algebraic Eigenvalue Problem. Clarendon Press, Oxford, 1965.
- [39] Dabrowski, R. : Zeitschrift zu R. Heilig [32]. Der Stahlbau 31 (1962) H. 4, S. 128.
- [40] Ylinen, A. : Über den Einfluß der Schubspannungen auf die Durchbiegung, das Biegemoment und die Querkraft eines Balkens auf elastischer Unterlage. Tieteellisiä Tutkimuksia No. 16, Suomen Teknillinen Korkeakoulu Helsinki, 1958.
- [41] Wilkinson, J. H., Reinsch, C. : Linear Algebra. Handbook for Automatic Computation. Vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [42] Christiansen, J. : Numerical Solution of Ordinary Simultaneous Differential Equations of the 1st Order Using a Method for Automatic Step Change. Numerische Mathematik 14 (1970) S. 317/324; Errata 15 (1971).
- [43] Uhrig, R. : Elastostatik und Elastokinetik in Matrizen-schreibweise. Springer-Verlag, Berlin, 1973.

- [44] Pestel, E. C. ,           Matrix Methods in Elastomechanics.  
Leckie, F. A. :           Mc Graw - Hill Book Company, New York,  
1963.
- [45] Marguerre, K. ,       Das Übertragungsverfahren und seine Gren-  
Uhrig, R. :           zen.  
                              Zeitschrift für Angewandte Mathematik und  
                              Mechanik, Band 44 (1964) H. 1/2, S. 1/21.



Bezeichnungen

Werkstoffkennwerte:

E	Elastizitätsmodul
$\mu$	Querdehnzahl
$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$	Schubmodul

Koordinaten:

x, y, z	kartesische Hauptkoordinaten
s, n	mitlaufende Koordinaten im Querschnitt (Bild 2, 2)
$\alpha$	Neigungswinkel der s - Achse gegenüber der x - Achse (Bild 4, 5)
w	Wölbkoordinate bei Torsion
$w_i$	Wölbkoordinate bei der i - ten Profilverformung
<b>k</b>	Spaltenvektor der Koordinaten eines Punktes, Definition nach (5. 6)

Geometrische Größen:

a, b, c, h	allgemeine Querschnittsabmessungen nach Bild 2. 5
l	Trägerlänge
t	Wanddicke
$\beta$	Winkel zwischen Deckplatte und Steg (Bild 2. 5)
d	Abstand des Drehpunktes D von einem anderen Punkt (Kapitel 3)
r	Drehradius einer Wand, durch Fußzeiger genauer bestimmt
<b>r</b>	Spaltenvektor der Drehradien einer Wand, Defi- nition nach (5. 3)

Verschiebungen und Verformungen:

$v_x, v_y, v_z$	Verschiebungen eines Punktes in Richtung der Koordinatenachsen
-----------------	---



$v_s$	Wandverschiebung in s - Richtung
$\theta$	Torsionsverdrehung des gesamten Querschnitts
$\theta_i$	Verschiebungs- und Verdrehzustand infolge der i-ten Profilverformung
$\mathbf{v}_g$	Spaltenvektor der gesamten Verschiebung eines Punktes unter Einschluß aller Schubanteile, Definition nach (6, 1)
$\mathbf{v}$	Spaltenvektor der Verschiebungen nach (5. 1) ohne den Anteil aus Biege- und Wölbschubverzerrungen
$\mathbf{g}$	Spaltenvektor der Schubanteile an der gesamten Verschiebung
$\rho$	Rotationswinkel eines unverzerrten Elementes (Bild 2, 12)
$\theta_o$	spezieller Drehwinkel für den gesamten Querschnitt (Kapitel 3)
$\delta_j$	spezielle Winkeländerung im Gelenkwerk für die Zelle j bei der Profilverformung ohne Berücksichtigung einer Schubdeformation (Kapitel 3)
$\Delta_{j, i}$	relativer Wanddrehwinkel der Wand j bei der Profilverformung $\theta_i = 1$ (Abschnitt 5, 2)
$\mathbf{d}_j$	Zuordnungsvektor der einzelnen Drehanteile $\Delta_{j, i}$ zu $\Delta_j$ nach (5. 20)
$\delta$	Spaltenvektor aller $\Delta_j$ für den gesamten Querschnitt
$\mathbf{D}$	Zuordnungsmatrix für alle $\mathbf{d}_j$ nach (5. 22)

Verzerrungen und Spannungen:

$$\epsilon = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad \text{Längsdehnung}$$

$$\gamma = \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} \quad \text{Schubverzerrung}$$

$\sigma = E \epsilon$	Längsspannung, meist anstelle von $\sigma_z$
$\sigma_s$	Spannungen in Wandquerrichtung (s-Richtung), im Kapitel 7
$\sigma_Q$	Querbiegespannungen nach (5.30)
$\tau = G \gamma$	Schubspannungen, meist anstelle von $\tau_{zs}$ bzw. $\tau_{sz}$

Schnittgrößen:

$N$	Längskraft
$M_x, M_y$	Biegemomente um die y- bzw. x-Achse
$M_w, M_{wi}$	Bimomente infolge Torsion bzw. Profilverformung
$\mathbf{m}$	Spaltenvektor der Biege- und Bimomente nach (5.50)
$m_Q$	Wandbiegemomente in Querrichtung infolge Profilverformungen
$b_i^*$	Anteil am Querbiegemoment $m_Q$ infolge der i-ten Profilverformung
$\mathbf{b}$	Spaltenvektor aller Querbiegeanteile $b_i^*$ für einen Punkt, Definition nach (5.26)
$\mathbf{m}_Q$	Spaltenvektor aller Querbiegemomente $m$ an den Wandenden nach (5.27)
$\mathbf{M}$	Zuordnungsmatrix aller $\mathbf{b}$ für die Wandenden zu $\mathbf{m}_Q$ nach (5.28)
$Q_x, Q_y$	Querkräfte in der x-, y-Ebene
$M_T$	Torsionsmoment
$M_{Vi}$	Verzerrungsmoment infolge der i-ten Profilverformung
$\mathbf{t}$	Spaltenvektor der Querkräfte, Torsions- und Verzerrungsmomente nach (5.60)

$T = t \tau$	Schubkraft in einer Wand
$T_{0c}, T_{0o}, T_{0l}$ usw.	Teilkonstanten der Integrationskonstanten $T_0(z)$
$\psi_i$	Schubfluß in einer Zelle infolge Drehung bei $\phi_i = 1$
$\Psi$	Spaltenvektor aller Drehschubflüsse in einer Zelle

Lastgrößen:

$p$	verteilte Längsbelastung
$q$	verteilte Querbeltung
$p_R, q_R$	Lasten an den Trägerenden
$P, Q$	Einzellasten in Längs- bzw. Querrichtung
$\mathbf{p}, \mathbf{p}_R, \mathbf{q}, \mathbf{q}_R$	Lastvektoren gemäß (5.43)

Querschnittswerte und abgeleitete Größen:

$F$	Querschnittsfläche des Trägers
$F_{m,j}$	eingeschlossene Fläche der j-ten Zelle
$\mathbf{F} = \int_F \mathbf{k} \mathbf{k}^T dF$	Matrix aller Biege- und Wölbträgheitsmomente
$F_{xx}, F_{yy}, F_{ww}, F_{wiwi}$ usw.	Elemente von $\mathbf{F}$
$\mathbf{J} = \int_F \frac{1}{t^2} \Psi \Psi^T dF$	Matrix der Torsionsträgheitsmomente
$J_T, J_{ii}, J_{ij}$	Elemente von $\mathbf{J}$
$J_Q = \frac{t^3}{12(1-\mu^2)}$	Querbiegesteifigkeit (Plattenbiegesteifigkeit) einer Wand
$\mathbf{B} = \frac{1}{E} \int_s \frac{1}{EJ_Q} \mathbf{b} \mathbf{b}^T ds$	Matrix der Querbiegesteifigkeiten des Querschnitts
$B_{ij}$	Elemente von $\mathbf{B}$

$F_{x_0}(s), F_{y_0}(s)$	Schubfaktoren für die Biege- und Wölb- schubspannungen, Bildung nach
$F_{w_0}(s), F_{w_{i0}}(s)$	
$\oint_i$	Integrationskonstante bei der Ermittlung der Wölbschubspannungen
$F_x(s), F_y(s), F_w(s), F_{w_i}(s)$	Schubkoordinaten nach
$f$	Spaltenvektor aller Schubkoordinaten ei- nes Punktes für die Biege- und Wölb- schubspannungen
$F_{w_i}(s) = F_{w_{i0}}(s) + \oint_i$	

Spezielle Größen in Kapitel 6 nach Heilig:

$S = \int_F \frac{1}{t^3} f f^T dF$	Matrix der Wölbschub-Steifigkeiten
$\kappa = E/G S F^{-1}$	Hilfsmatrix zur Erfassung der Schubver- zerrungseinflüsse
$F_\kappa = F + \frac{G}{E} \kappa J$	modifizierte Matrizen für die Trägheits- momente
$J_\kappa = J + \frac{E}{G} \kappa B$	
$q_\kappa = q - \kappa q''$	modifizierte Belastung

nach Bencoter:

$R = \int_F r r^T dF$	Matrix der zentralen Trägheitsmomente
$v = E/G F(R-J)^{-1}$	Hilfsmatrix zur Erfassung der Schub- verzerrungseinflüsse
$F_v = \frac{G}{E} v R$	modifizierte Matrizen für die Trägheits- momente
$J_v = J + \frac{E}{G} v B$	
$q_v = q - v q''$	modifizierte Belastung

Sonstige Hilfsgrößen:

$\delta (\dots)$	Zeichen für eine virtuelle Größe in Kapitel 5 und 6
$\delta A_{ges}, \delta A_a, \delta A_i$	virtuelle Arbeiten
A, B, C, D	allgemeine Konstanten
$k_{ix}, k_{iy}$	Faktoren bei der Orthogonalisierung 1. Stufe
$\lambda$	Lagrange-Faktor, Eigenwert
<b>I</b>	Einheitsmatrix
$i_j$	j-te Spalte der Einheitsmatrix
<b>o</b> , <b>O</b>	Nullvektor bzw. Nullmatrix
<b>E</b>	Transformationsmatrix bei der Orthogonalisierung 2. Stufe
$e_j$	j-te Spalte von <b>E</b> , Eigenvektor
<b>C</b>	Transformationsmatrix zur Abspaltung der Profilverformung ohne Schub (Abschnitt 5.5.3)
$c_i$	Elemente von <b>C</b> gemäß (5.76)
<b>y</b>	Vektor der Verschiebungen <b>v</b> und der erforderlichen Ableitungen beim Umbau in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung
<b>A</b>	Koeffizientenmatrix des Differentialgleichungssystems 1. Ordnung
<b>l</b>	Lastvektor beim Differentialgleichungssystem 1. Ordnung
<b>U</b>	Übertragungsmatrix
$y_q$	Lastvektor beim Übertragungsverfahren
$\xi, \eta, \zeta$	Hilfsparameter bei der Lösung der allgemeinen linearen Differentialgleichung 4. Ordnung (Abschnitt 8.3)

Zusatzzeichen

oben:

$(\dots)' = \frac{\partial}{\partial z} (\dots)$	Ableitung einer Größe nach z
$(\dots)' = \frac{\partial}{\partial s} (\dots)$	Ableitung einer Größe nach s
T	die Matrix liegt in transponierter Form vor
^	Kennzeichnung einer Größe als im 1. Ansatz gewählt oder bestimmt
-	Kennzeichnung einer Größe nach der durchgeführten Orthogonalisierung 1. Stufe
*	Unterscheidungszeichen für einzelne Größen
D	Anteil aus der Saint Venantschen Drehung
PV	Anteil aus der Profilverformung

unten:

V	Größe infolge einer Profilverformung
T	Torsionsgröße, speziell bei $r_T$
D	aus Drehungen herrührende Größe, speziell bei $\tau_D$
B	aus Biegung bzw. Verwölbung herrührende Größe, speziell bei $\tau_B$
U	Kennzeichen einer Untermatrix, z. B. bei der Orthogonalisierung 2. Stufe
Diag	Kennzeichen für eine Diagonalmatrix
A, E	Kennzeichnung von Anfangs- bzw. Endwerten

Weitere Bezeichnungen, Abkürzungen und Symbole werden im Text erläutert.



## 1. Einleitung

Prismatische Tragwerke mit offener oder geschlossener Querschnittsform bilden einen Großteil der ausgeführten Brücken in Beton und Stahl. Für die im Bauwesen üblichen Abmessungen und Stützweiten können sie als relativ dünnwandig angesehen werden. Besonders im Betonbau verzichtet man nach Möglichkeit auf eine Anordnung von Querschotten im Feld, da diese allgemein einen zusätzlichen Arbeitsaufwand bedeuten und speziell bei der Anwendung von Vorschubrüstungen hinderlich sind. Damit wird eine genauere Untersuchung der Brücken als Falwerke mit Berücksichtigung der Verformbarkeit des Querschnitts erforderlich.

Für die Berechnung von Tragwerken mit offenen Querschnitten sind übersichtliche und leicht anwendbare Methoden zur Erfassung der wichtigsten Bemessungsgrößen abgeleitet worden. Sie beruhen entweder auf der "klassischen" Falwerkstheorie nach Craemer [1] und Gruber [2] oder stellen Erweiterungen der technischen Biegelehre dar in bezug auf den Ansatz von Verformungszuständen für den Querschnitt, wie z. B. bei Schardt [3] oder Sedlacek [4].

Ähnlich reichhaltiges Schrifttum und entsprechend einfache Berechnungsmethoden gibt es für einen Sonderfall des Trägers mit geschlossenem Querschnitt, den einzelligen Kasten. Eine Übersicht über die verschiedenen Theorien und zahlreiche Literaturangaben hierzu finden sich in der Abhandlung von Castrillón [5]. Darunter hervorzuheben sind die Arbeiten von Steinle [6] und Hees [7], die die Ermittlung der einzigen möglichen Profilverformung näherungsweise von der Biege- und Torsionsberechnung abspalten und somit getrennt auflösbare Differentialgleichungen erhalten. Der Typ der neuen Differentialgleichung für die Profilverformung entspricht der eines elastisch gebetteten Balkens und die dafür bekannten Lösungen können übernommen werden. Für den Fall eines anderen speziellen Querschnitts, eines symmetrischen dreizelligen Kastenträgers, der aber wegen zweier Dreieckszellen lediglich eine einzige Verformungsmöglichkeit des Querschnitts besitzt, leitet Castrillón in [5] einige Näherungsansätze



ab. Diese lassen sich jedoch nicht verallgemeinern und auf andere Profile übertragen.

Für Tragwerke mit beliebigen mehrzelligen Querschnitten hat Sedlacek in einer grundlegenden Arbeit [4] eine übersichtliche und handliche Methode vorgeschlagen, die in Anlehnung an die Berechnung offener Querschnitte durchgeführt wird. Die späteren Arbeiten [8], [9] und [10] zeigen Anwendungen dieser Berechnungsweise. Bei der Untersuchung geschlossener Profile bestimmt Sedlacek zusätzliche Schubflüsse, die ihm eine Erfüllung der Kontinuitätsbedingungen in der angesetzten Wölbfläche ermöglichen. Diese Ermittlung erfolgt analog zu der Berechnung der Saint Venantschen Torsionsschubflüsse, es fehlt aber eine nähere Begründung. Bei der Vorbereitung der vorliegenden Arbeit haben Vergleichsberechnungen nach verschiedenen Theorien an einzelnen Faltwerken gezeigt, daß die Ergebnisse, die auf den Ansätzen von Sedlacek beruhen, ausreichend genau waren. Daneben erlaubt diese Berechnungsweise auch eine Ausweitung auf die Untersuchung von Tragwerken nach der Theorie II. Ordnung. In der Darstellungsweise lehnt sich Sedlacek an die Arbeiten von Bornscheuer an, der in [11] und [12] die Wölbkrafttorsion zusammenfassend behandelt. Dies ermöglicht eine klare Übersicht über die zu ermittelnden Querschnittswerte und deren Einfluß auf die Tragwirkung.

Die meisten der übrigen Untersuchungen mehrzelliger dünnwandiger Träger gehen von der Schalenberechnung aus und leiten von daher als Sonderfall die Grundbeziehungen der prismatischen Faltwerke ab. Als erste große Gruppe ist die auf der Theorie von Wlassow beruhende zu nennen, die mehr oder weniger starke Erweiterungen seiner Ansätze aus [13] und [14] vornimmt. Dazu gehören beispielsweise die Arbeiten von Lacher [15], Bažant [16], De Boer [17], [18] und auch Castrillon [5] im Abschnitt über die Berechnung allgemeiner Querschnitte. Eine ausführliche Darstellung des neuesten Standes dürfte im 2. Band von Kollbrunner und Hajdin [19] zu finden sein. Hierbei sind schnell die Grenzen der Handrechnung erreicht, da Differentialgleichungssysteme 2. Ordnung gelöst werden müssen

und teilweise Entkopplungen nur in wenigen Sonderfällen durchführbar sind. Für den Einsatz von Rechenanlagen eignen sich diese Ansätze jedoch gut, ganz besonders in Verbindung mit einer Fourier-Reihenentwicklung in Trägerlängsrichtung. Damit wird das Gesamtproblem auf die Lösung normaler Gleichungssysteme in Querrichtung für jedes Reihenglied reduziert. Schwierigkeiten ergeben sich durch die dabei vorgeschriebenen einfachen Lagerungsbedingungen, die nur durch umständliche Zusatzberechnungen umgangen werden können.

Die zweite große Gruppe der Berechnungsmethoden geht von der Elastizitätstheorie für Platten und Scheiben aus, wie sie von Goldberg und Leve in [20] formuliert und auf *Faltwerke* angewandt wurde. Auch hierbei werden Fourier-Reihenansätze in Trägerlängsrichtung benutzt. Die Berechnung beschränkt sich deshalb zunächst auf *Einfeldträger*, doch haben Scordelis und verschiedene seiner Mitarbeiter Erweiterungen für durchlaufende Tragwerke vorgenommen; [21], [22], [23]. Anwendungsreife Computerprogramme liegen vor, wie z. B. MULTPL und MUPDI. Hinweise dazu finden sich in [24].

Von dem elementweisen Zusammensetzen des *Faltwerks* in Querrichtung aus Platten- und Schalenabschnitten für die einzelnen Reihenglieder der Fourierentwicklung ist es nur ein kleiner Schritt zur konsequenten Anwendung der Methode der finiten Elemente. Dies ermöglicht auch eine Untersuchung weitaus komplizierterer Tragwerksformen, wie z. B. gekrümmter oder schief gelagerter *Faltwerke*. Auch Träger mit in Längsrichtung veränderlichem Querschnitt sind erfaßbar. In diesem Zusammenhang sei auf die Arbeiten von Du Preez [25] und [26] verwiesen sowie auf das Buch von Rockey, Bannister und Evans [27].

Auf weitere mögliche Methoden einer Näherungsberechnung für mehrzellige Brückenträger soll hier nicht eingegangen werden. Dazu gehören Untersuchungen als Trägerroste, orthotrope Platten oder Sandwichplatten. Dabei wird das vorhandene Tragwerk entweder in Ersatzträger aufgespalten oder als Kontinuum mit verschmierten Ersatzsteifigkeiten beschrieben. Hinweise finden sich beispielsweise in den Veröffentlichungen von Robertson, Pama, Cusens [28] und Arendts,

Sanders [29] sowie in der Abhandlung von Bode [30].

Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, ausgehend von den Berechnungsmethoden für stabförmige Tragwerke mit offenem Querschnitt bzw. für einzellige Kastenträger nach Hees [7], eine Theorie für mehrzellige prismatische dünnwandige Falwerke zu entwickeln. Es soll geklärt werden, ob es irgendwelche Profilverformungen gibt, bei denen lineare Ansätze für die Längsverwölbung ohne Berücksichtigung von Schubverzerrungen in der Wandebene möglich sind. Bevor die Bedeutung solcher Profilverformungen für das Tragverhalten der Falwerke untersucht werden kann, muß der allgemeine Ansatz für die Längsverwölbungen bei einer beliebigen Querschnittsverformung abgeleitet werden. Mit Hilfe der gefundenen Ansätze ist die weitere Berechnung durchzuführen. Insbesondere muß das zugehörige vollständige Differentialgleichungssystem für die noch unbekanntes Verschiebungsgrößen aufgestellt werden. Die Möglichkeiten, durch geeignete Wahl der Einheitsverschiebungszustände oder durch spätere Orthogonalisierungen derselben vollständige bzw. teilweise Entkopplungen im Differentialgleichungssystem zu erreichen, werden anschließend erörtert. Da bei linearen Ansätzen für die Verwölbungen der Einfluß der Biege- und Wölbschubspannungen auf das Tragverhalten sicherlich nicht exakt erfaßt wird, wie dies aus der Wölbkrafttorsion und der Profilverformung offener Querschnitte bekannt ist, sollen Näherungsmethoden zur verbesserten Erfassung dieser Effekte entwickelt werden. Ansatzpunkte dafür finden sich bei den Betrachtungen von Heilig in [31] bzw. [32] und Bencoter in [33].

Anhand von ausgesuchten Beispielen werden die auf die oben beschriebene Art gewonnenen Ergebnisse und Näherungslösungen mit unabhängigen Rechenprogrammen verglichen. Dazu bieten sich z. B. die in Berkeley von Scordelis u. a. entwickelten Computerprogramme an, wie sie in [21] beschrieben sind.

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung wollen einen Beitrag liefern zu einer einfacheren und schnelleren Abschätzung des Einflusses von Querschnittsverformungen auf das Tragverhalten von

Brückenträgern. Da der praktisch tätige Ingenieur auch heute noch nicht immer umfangreiche und ausgereifte Rechenprogramme zur Verfügung hat, bzw. solche im Entwurfsstadium nicht wirtschaftlich einsetzen kann, soll er in der Lage sein, mittels Handrechnungen einige Anhaltswerte für die Dimensionierung zu erhalten. Kleinere bis mittlere Tischcomputer sind auch dabei von großem Nutzen, besonders wenn man mit ihnen den Grundfall des elastisch gebetteten Balkens und dem Brückenquerschnitt entsprechende Rahmensysteme durchrechnen kann.

## 2. Berechnungsgrundlagen

### 2.1 Voraussetzungen

In der vorliegenden Arbeit sollen dünnwandige, prismatische Faltwerke mit gerader Achse untersucht werden. Die einzelnen Wandabschnitte müssen eben sein. Auch wenn vorwiegend mehrzellige Kastenträger einer bestimmten Querschnittsform (siehe Abschnitt 2.2) betrachtet werden, sind die im folgenden dargestellten Berechnungsmethoden auf andere Zellenanordnungen übertragbar. Der Sonderfall offener Querschnitte ist mit eingeschlossen.

Es gelten die üblichen Voraussetzungen für die Berechnung dünnwandiger Tragwerke:

1. Der Werkstoff ist homogen und isotrop. Rißbildungen und damit verbundene Steifigkeitsänderungen, wie sie bei Beton auftreten können, werden nicht erfaßt.
2. Es gilt das Hookesche Gesetz.
3. Die Wanddicke ist klein gegenüber den übrigen Querschnittsabmessungen des Trägers. Die Normalspannungen senkrecht zur Wandmittelfläche können somit unberücksichtigt bleiben.
4. Die Verformungen des Tragwerks sind so klein, daß die Näherungsannahmen der Theorie I. Ordnung gültig sind.

Daneben werden noch folgende Anforderungen an die Einzelwände gestellt:

Die einzelnen Wandabschnitte seien so schlank, bzw. die Trägerlänge zwischen zwei Auflagern sei so groß, daß eine Behandlung als Balken gemäß der technischen Biegelehre möglich ist. Scheibenwirkungen sollen somit vernachlässigbar sein. Daraus folgt für die Einzelwände die Annahme über das Ebenbleiben der Querschnitte (Bernoulli) und das Geradliniengesetz für die Normalspannungen (Navier). Für das gesamte Faltwerk wird dies nicht gefordert.

Ebenfalls vernachlässigt wird die Plattenwirkung der Wände des Faltwerks in Trägerlängsrichtung. Die entsprechenden Biegemomente sind

mit der vorliegenden Theorie nicht berechenbar, sie können jedoch aus zusätzlichen örtlichen Plattenuntersuchungen im Bereich der angreifenden Lasten oder der Randstörungen leicht abgeschätzt werden. Durch diese Vernachlässigung der Längsbiegemomente ist es möglich, zur Beschreibung der Tragwirkung in *Faltwerksquerrichtung* näherungsweise einen Plattenstreifen der Breite 1 als Biegeträger anzusetzen. Das erfordert bei den betrachteten mehrzelligen Querschnitten eine Rahmenberechnung. Die zugehörigen Biegesteifigkeiten der Wände als Balken werden jedoch gemäß der Plattentheorie erhöht angesetzt (Plattensteifigkeit). Eventuell vorhandene elastische Querrahmen, die in engerem Abstand angeordnet sind, wie es im Stahlbrückenbau vorkommt, können in Form eines Erhöhungsfaktors bei der Querbiegesteifigkeit erfaßt werden. Zusätzlich wird noch angenommen, daß die Wände in der Querschnittsebene des *Faltwerks* vollkommen dehnsteif sind. Dies entspricht bei einer Rahmenberechnung dem Ansatz unendlich großer Längssteifigkeiten der Stäbe.

## 2.2 Querschnittsform und Koordinatensysteme

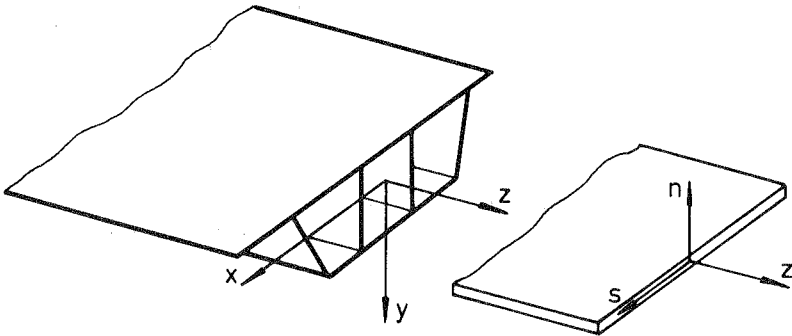
Die im folgenden betrachtete Querschnittsform wird insoweit festgelegt, daß Deckplatten und Bodenplatten zueinander parallel sind und jeweils eine Ebene bilden. Die Stege können dazwischen beliebig angeordnet sein. Wie Bild 2.1 zeigt, besitzen die Zellen unter diesen Bedingungen im allgemeinen eine Trapezform, können aber auch zu Dreiecken entarten. Die Zahl der Zellen ist beliebig. Die obere Fahrbahnplatte darf beiderseits über den Kastenteil auskragen. Diese vorgegebene Querschnittsform entspricht den üblicherweise ausgeführten Brücken.



Bild 2.1: Allgemeine Querschnittsform

Bei den weiteren theoretischen Ableitungen werden keinerlei Forderungen an das Vorhandensein von Querschotten oder ihre Anordnung in Trägerlängsrichtung gestellt. Normalerweise befinden sich Schotte im Bereich der Auflager zur besseren Einleitung konzentrierter Kräfte in den Überbau und zur Aussteifung der Fahrbahnübergänge. Sie lassen sich beim Einfeldträger durch Beachtung entsprechender Randbedingungen erfassen. Zwischenschotte im Feld sind mit etwas größerem Aufwand als Zusatzbedingungen einrechenbar. Darauf soll in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingegangen werden, das entwickelte Rechenprogramm ist aber in dieser Richtung jederzeit erweiterungsfähig.

Die Festlegung der Koordinatensysteme erfolgt gemäß Bild 2. 2.



a) globale Koordinaten

b) mitlaufende Koordinaten

Bild 2. 2: Koordinatensysteme

Bei der Festlegung der Richtung für die Querschnittsordinate  $s$  in der Wandmittellinie ist man frei. Es empfiehlt sich jedoch, wegen leichter Überschaubarkeit möglichst vom positiven Umlaufsinn auszugehen. Als positiv wird dabei ein Umlauf von  $s$  um den ganzen Trägerquerschnitt bzw. um eine einzelne Zelle verstanden, der im Sinne einer Rechtsschraube um die  $z$ -Achse herumführt. Bild 2. 3 gibt hierfür ein Beispiel.

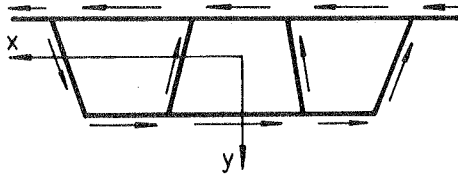


Bild 2.3: Beispiel einer Festlegung von + s

Die Tragwerksverschiebungen werden in Richtung der Koordinatenachsen als positiv angesetzt (Bild 2.4). Drehungen des Querschnitts um die z-Achse im Sinn einer Rechtsschraube gelten als positiv. Sie werden als Drehvektoren mit Doppelpfeilen dargestellt.

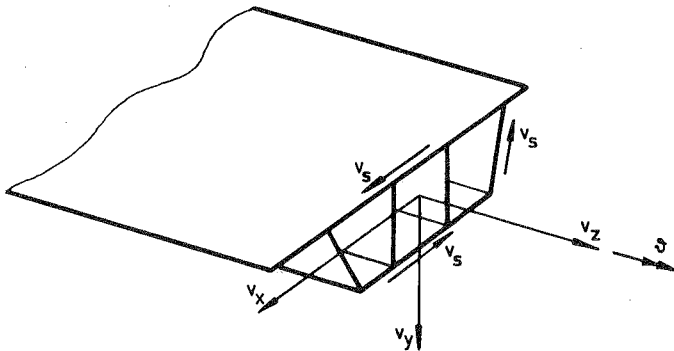


Bild 2.4: Festlegung der positiven Verschiebungen

Bei Untersuchungen mit allgemeinen Abmessungen wird Bild 2.5 zugrunde gelegt mit den Größen  $a_i$ ,  $b_i$  und  $\beta_i$  für die Zelle i.

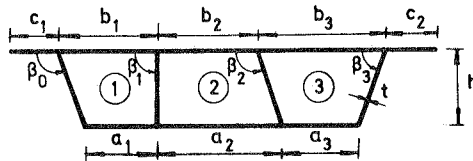
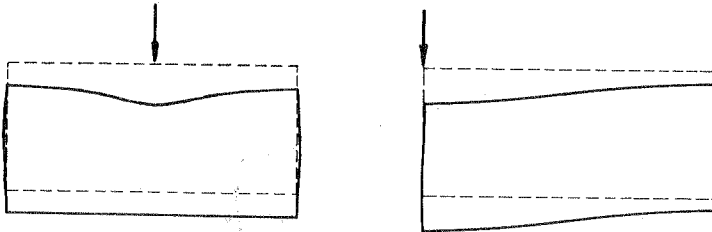


Bild 2.5: Allgemeine Querschnittsabmessungen



### 2.3 Definition einer Profilverformung

Unter dem Begriff "Profilverformung" oder "Querschnittsverformung" soll im folgenden nicht jede Querverbiegung des Querschnittsrahmens verstanden werden, sondern die Relativverschiebung der Knotenpunkte des Faltwerks im Querschnitt. Als Knoten werden dabei lediglich die Eckpunkte der Einzelzellen eingeführt.

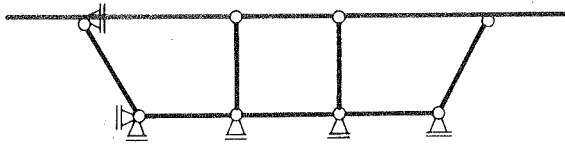


a) Biegezustand ohne  
Profilverformung

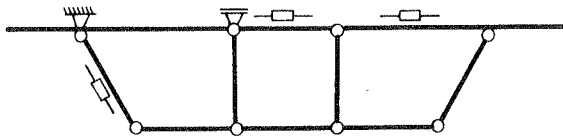
b) Profilverformung

Bild 2.6: Querschnitt eines einzelligen, rechteckigen  
Kastenträgers zur Veranschaulichung des Begriffs  
"Profilverformung"

Einen Überblick über die möglichen Profilverformungen bei einem Querschnitt mit  $n$  Zellen erhält man durch Betrachtung des zugehörigen Gelenksystems. Dabei führt man in allen Eckpunkten des Querschnittsrahmens Gelenke ein. Auskragende Teile, wie z. B. die Fahrbahnplatte, gehören stets zu dem benachbarten Wandabschnitt in derselben Ebene. Der so kinematisch gewordene Rahmen muß durch zusätzliche Halterungen stabilisiert werden. Beispiele sind in Bild 2.7 angegeben.



- a) Halterungen zur Behinderung von Verschiebungen der Knotenpunkte




- b) Halterungen bei teilweiser Einführung von Drehwinkeln als Unbekannten. Das Symbol  soll bedeuten, daß die Verdrehung dieser Wand behindert ist (Drehwinkel = 0)

Bild 2. 7: Stabilisiertes Gelenkwerk

Die Anzahl der benötigten Halterungen liefert eine Aussage über die Zahl der möglichen Profilverformungen. Als Starrkörper besitzt der Querschnitt drei Bewegungsmöglichkeiten: zwei Verschiebungen und eine Drehung. Da jede Trapezzelle als Gelenkviereck noch eine innere Verschiebungsmöglichkeit besitzt, werden bei  $n$  Zellen (Dreieckszellen ausgeschlossen) insgesamt  $(n + 3)$  Halterungen benötigt. Die inneren Verschiebungsmöglichkeiten der Gelenkvierecke entsprechen den ansetzbaren Profilverformungen. Es gibt somit  $n$  Profilverformungen bei einem  $n$ -zelligem Querschnitt. Arten einzelne Zellen in Dreiecke aus, ist die Zahl der möglichen Profilverformungen um die Anzahl der Dreieckszellen zu vermindern.

In Bild 2. 8 sind für den Querschnitt nach Bild 2. 7 drei mögliche, linear unabhängige Profilverformungen am Gelenkwerk angegeben.

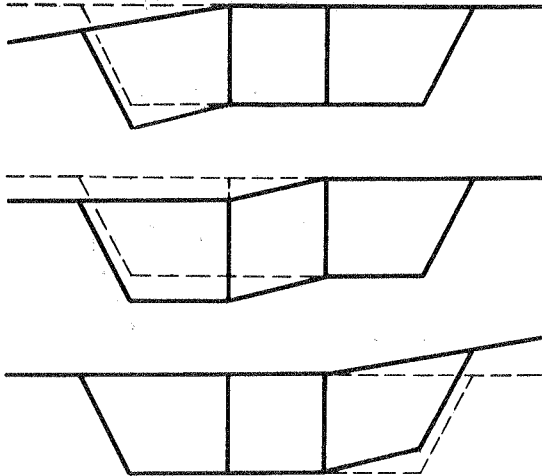
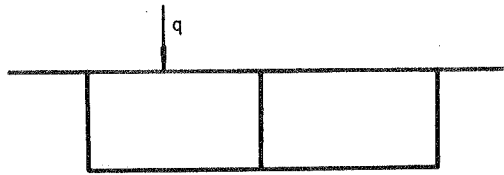
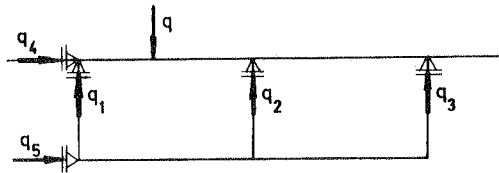


Bild 2. 8: Mögliche Profilverformungen an einem dreizelligen Gelenkwerk

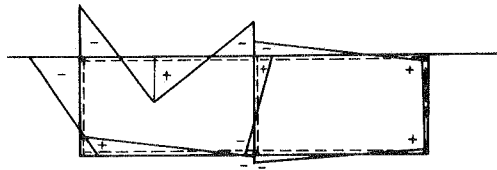
2.4 Lastansätze für die Faltwerksberechnung



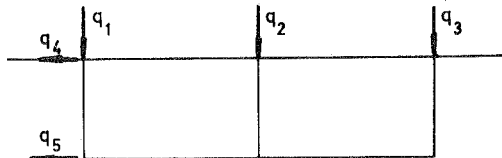
allgemeine Linienbelastung



unverschieblicher Rahmen mit Haltekräften



zugehöriger Grundmomentenverlauf



Knotenlasten auf das Faltwerk

Bild 2. 9: Aufteilung einer allgemeinen Belastung

Als Belastung für die Kastenträger werden nur Knotenlasten betrachtet. Allgemeine Lasten auf der Fahrbahnplatte sind umzurechnen in entsprechende Knotenlasten und Biegemomente des Querschnittsrahmens. Die Vorgehensweise wird in Bild 2.9 angegeben. Voraussetzung für diese Lastaufteilung ist eine unendlich große Dehnsteifigkeit der Wände in s-Richtung, wie sie nach Abschnitt 2.1 angenommen wird.

Das Faltnetz wird für die so bestimmten Knotenlasten durchgerechnet. Zum Schluß erhält man die Gesamtlösung für die Querbiegemomente durch Superposition der Grundmomente zu den Momenten infolge Knotenlasten.

### 2.5 Grundbeziehungen am Wandelement

Bevor Ansätze zur Berechnung der Profilverformung von dünnwandigen Tragwerken gewählt werden können, muß der Zusammenhang zwischen der Querverschiebung  $v_s$  einer Wand, der Längsverschiebung  $v_z$  und einer Schubverzerrung  $\gamma$  in der Wandebene betrachtet werden.

Die Ermittlung der Beanspruchungen in den Tragwerkswänden ist mit den Voraussetzungen nach Abschnitt 2.1 auf ein zweidimensionales, ebenes Problem zurückgeführt worden. Da die Dehnung der Einzelwände in s-Richtung vernachlässigt wird, muß man die zugehörige Normalspannung  $\sigma_s$  aus den weiteren Verformungsbetrachtungen herausnehmen. Diese Spannung ist nur über Gleichgewichtsbetrachtungen am Querrahmen zu ermitteln. Die Längsspannung  $\sigma_z$  kann dann im folgenden als  $\sigma$  ohne weitere Indizierung bezeichnet werden. Da die Schubspannungen  $\tau_{zs}$  und  $\tau_{sz}$  aus Gleichgewichtsgründen am Element einander entsprechen müssen, wird für beide Größen vereinfachend  $\tau$  eingeführt. Bild 2.10 zeigt ein Wandelement mit den betrachteten Spannungen.

Für den Zusammenhang zwischen Verschiebung und Dehnung  $\epsilon$  bzw. Verzerrung  $\gamma$  gilt:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ \gamma &= \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

In Bild 2.11 ist der Zusammenhang zwischen  $\gamma$ ,  $v_s$  und  $v_z$  dargestellt.

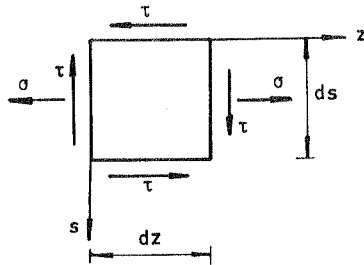


Bild 2.10: Wandelement in der s-z-Ebene

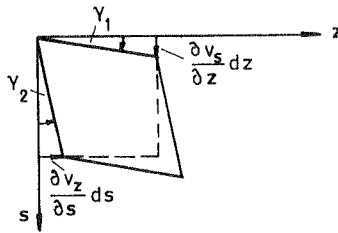


Bild 2.11: Verzerrtes Element

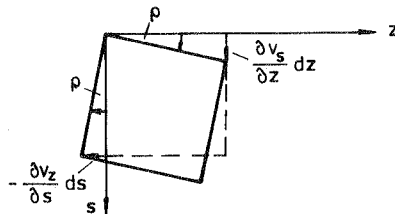


Bild 2.12: Gedrehtes, unverzerrtes Element

Man erhält daraus:

$$\gamma_1 = \frac{\partial v_s}{\partial z}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial v_z}{\partial s}$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s}$$

Im Sonderfall  $\gamma = 0$  ergibt sich bei vorhandenem  $v_s$  und  $v_z$  eine Starrkörperrotation gemäß Bild 2.12.

Für den Rotationswinkel  $\rho$  folgt:

$$\rho = \frac{\partial v_s}{\partial z} \quad \text{bzw.} \quad \rho = - \frac{\partial v_z}{\partial s}$$

$$\text{oder:} \quad \frac{\partial v_z}{\partial s} = - \frac{\partial v_s}{\partial z} \quad (2.2)$$

Es gilt das Hookesche Gesetz:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= E \epsilon \\ \tau &= G \gamma \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\text{mit:} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad (2.4)$$

Um den Zusammenhang zwischen der Schubspannung  $\tau$  und der Längsspannung  $\sigma$  zu erhalten, wird das Gleichgewicht an einem Wandelement in  $z$ -Richtung untersucht. Die Schubspannung  $\tau$  wird als konstant über die Wanddicke  $t$  angesetzt, so daß für die Schubkraft  $T$  gilt:

$$T = \tau t \quad (2.5)$$

Die Wanddicke  $t$  ist über  $z$  konstant, kann aber über  $s$  variieren:  
 $t = t(s)$ .

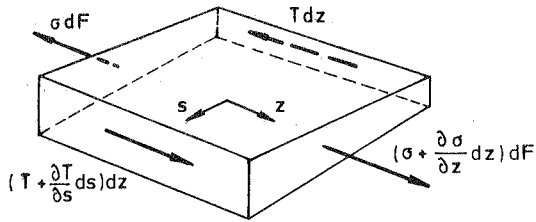


Bild 2.13: Gleichgewicht am Wandelement in z-Richtung

Aus Bild 2.13 ist zu entnehmen:

$$\begin{aligned} (T + \frac{\partial T}{\partial s} ds) dz - T dz + (\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz) dF - \sigma dF &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial s} ds dz + \frac{\partial \sigma}{\partial z} dz dF &= 0 \end{aligned}$$

mit  $dF = t ds$  folgt daraus:

$$\frac{\partial T}{\partial s} = - \frac{\partial \sigma}{\partial z} t \quad (2.6)$$

Nach Integration über s:

$$T = - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} t ds + T_0(z) \quad (2.7)$$

Die Integrationskonstante  $T_0(z)$  ist eine Funktion von z. Über s ist sie zumindest abschnittsweise konstant, so daß gilt:

$$\frac{\partial T_0}{\partial s} = 0$$

Für  $\tau$  folgt aus (2.7) und (2.5):

$$\tau = - \frac{1}{t} \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial z} t ds + \frac{1}{t} T_0(z) \quad (2.8)$$



2.6 Allgemeines zur Wahl von Lösungsansätzen

Nachdem die Spannungen in Abhängigkeit von den Verschiebungen bekannt sind, ist es möglich, durch geeignete Wahl von Verschiebungsansätzen für  $v_s$  und  $v_z$  die Trägerberechnung durchzuführen. Zur Beseitigung der partiellen Differentialoperatoren empfehlen sich Produktansätze der Form

$$\left. \begin{aligned} v_s(s, z) &= \sum_{i=1}^k V_i(z) v_i(s) \\ v_z(s, z) &= \sum_{j=1}^m W_j(z) w_j(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Die Verläufe in Querrichtung  $v_i(s)$  und  $w_j(s)$  werden durch Ansätze vorgegeben. Die Funktionen  $V_i(z)$  und  $W_j(z)$  sind dabei noch unbekannt. Durch entsprechende Gleichgewichtsbedingungen und Kontinuitätsbedingungen wird der Zusammenhang für das Tragwerk wiederhergestellt, und man erhält totale Differentialgleichungssysteme für  $V_i(z)$  und  $W_j(z)$ . Insgesamt sind es  $(k + m)$  Differentialgleichungen.

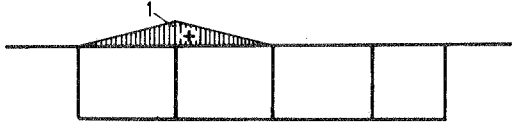
Die Zahl der Ansätze ist für beide Verschiebungsrichtungen beliebig und voneinander unabhängig. Die Vollständigkeit der Ansätze beeinflusst die Ergebnisse teilweise erheblich. Bei wandweise konstanten Verschiebungen  $v_i(s)$  in Querrichtung sind bei  $n$ -zelligen Querschnitten nach Bild 2.1 für die  $n + 1$  Stege sowie die Deckplatte und Bodenplatte insgesamt  $k = n + 3$  Ansätze erforderlich. Bei linearen Verwölbungsansätzen für  $w_j(s)$  müssen sämtliche Knotenpunkte einzeln um den Wert 1 in Längsrichtung verschoben werden. Zusätzlich sind noch die freien Kragarmenden der Deckplatte zu berücksichtigen. Dies ergibt  $m = 2(n + 2)$  Ansätze für  $w_j(s)$ . Zusammengefaßt erhält man ein Differentialgleichungssystem der Größe

$$k + m = 3n + 7$$

Bild 2.14 zeigt zwei Beispiele für diese Ansätze. Der  $w_j(s)$  Ansatz ist dabei in die Zeichenebene umgeklappt worden.



a) Ansatz für  $v_i(s)$  bei konstanter Wandverschiebung



b) Ansatz für  $w_j(s)$  bei polygonaler Längsverwölbung

Bild 2, 14: Verschiebungs- und Verwölbungsansätze nach Wlassow

Die oben skizzierten Lösungsansätze verwendet Wlassow in [13] und [14] bei der allgemeinen Berechnung geschlossener Profile. Das entstehende Differentialgleichungssystem 2. Ordnung ist umfangreich und im Normalfall nicht entkoppelbar. Neben konstanten bzw. linearen Ansätzen können zur Verfeinerung der Berechnung und zur besseren Erfassung der Scheibenspannungszustände auch parabolische oder noch höhere Ansatzfunktionen gewählt werden. Angaben hierzu finden sich z. B. bei Bažant [16]. Der Rechenaufwand steigt beträchtlich und ist ohne Computerhilfe nicht zu bewältigen.

Eine Verringerung der Unbekannten und des Rechenaufwandes ist möglich, wenn man einen eindeutigen Zusammenhang zwischen  $v_s$  und  $v_z$  fordert. Damit reduziert man aber die Anzahl der Freiheitsgrade für die Berechnung, insbesondere werden den Längsverschiebungen Einschränkungen auferlegt. Scheibenspannungszustände können nicht mehr erfaßt werden.

Aus dem Ausdruck für  $\gamma$  nach (2.1) folgt bei Umstellung der Terme:

$$\frac{\partial v_z}{\partial s} = - \frac{\partial v_s}{\partial z} + \gamma \quad (2.10)$$

mit (2.3), (2.8) und Ersatz von  $\epsilon$  gemäß (2.1):

$$\frac{\partial v_z}{\partial s} = - \frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{E}{Gt} \int_0^s \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} t \, ds + \frac{1}{Gt} T_0(z) \quad (2.11)$$

Aus (2.11) ist die Problematik bereits zu erkennen. Die Verschiebungsverläufe in s- und z-Richtung bedingen einander, so daß ein Produktansatz gemäß (2.9) komplizierte Zusammenhänge der einzelnen Funktionen liefert. Das sei am Beispiel eines einzelnen Ansatzes gezeigt:

$$v_s(s, z) = V(z) v(s)$$

$$v_z(s, z) = W(z) w(s)$$

ergibt in (2.11) eingesetzt:

$$W(z) \frac{\partial w(s)}{\partial s} = - \frac{\partial V(z)}{\partial z} v(s) - \frac{E}{Gt} \frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2} \int_0^s w(s) t \, ds + \frac{1}{Gt} T_0(z)$$

Die beiden letzten Terme ergeben sich aus dem Ausdruck für  $\gamma$ . Bei gewähltem  $v(s)$  und unbekanntem Verläufen  $V(z)$  und  $W(z)$  ist die Funktion  $w(s)$  nicht leicht zu ermitteln. Komplizierend ist jedoch nur der Anteil mit  $\frac{\partial^2 W(z)}{\partial z^2}$  aus der Schubverzerrung  $\gamma$ . Vernachlässigt man ihn, so kann man einen einfacheren Zusammenhang zwischen  $v(s)$  und  $w(s)$  herleiten. Fordert man zusätzlich  $W(z) = - \frac{\partial V(z)}{\partial z}$ , ist es möglich, mit diesem Faktor zu dividieren und man erhält:

$$\frac{\partial w(s)}{\partial s} = v(s) - \frac{1}{Gt} \frac{T_0(z)}{\partial V(z)/\partial z} \quad (2/12)$$

Es zeigt sich später, daß der letzte Term eine Konstante darstellt, die aus einer Kontinuitätsbedingung ermittelt werden kann. Die weitere Berechnung muß dann durchgeführt werden unter Beachtung von:

$$\left. \begin{aligned} v_s(s, z) &= V(z) v(s) \\ v_z(s, z) &= - \frac{\partial V(z)}{\partial z} w(s) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Die damit erzielte Verringerung der Unbekannten - hier auf die Funktion  $V(z)$  - bedeutet eine wesentliche Arbeitserleichterung, stellt aber nur eine Näherungslösung dar, deren Genauigkeit noch zu untersuchen ist.

Insgesamt kann man ausgehend von Gleichung (2. 11) drei Näherungsstufen unterscheiden:

1. Berechnung des Kaltwerks ohne Berücksichtigung einer Schubverzerrung  $\gamma$ , d. h. ohne die beiden mit  $G$  behafteten Terme in (2. 11). Es gilt die Beziehung (2. 2) zwischen  $v_z$  und  $v_s$ .
2. Berechnung mit Berücksichtigung eines Anteils von  $\gamma$ . Es gilt die Beziehung wie oben in (2. 12) beispielhaft angegeben. Die Begründung, daß der Anteil  $\frac{1}{Gt} T_0(z)$  in  $\gamma$  aus Querschnittsdrehungen herrührt, wird später gegeben. Man kann von "Schubverzerrungen infolge Drehungen" sprechen.
3. Berechnung mit näherungsweise Berücksichtigung der Biege- und Wölbschubverzerrungen. Hierbei wird zunächst die Verwölbung entsprechend zur Näherungsstufe 2 angenommen. Es erfolgt aber noch eine Modifizierung im Ansatz, die eine näherungsweise Erfüllung der vollständigen Gleichung (2. 11) ermöglicht.

Diese drei Näherungsberechnungen werden in den folgenden Kapiteln einzeln untersucht.

## 2. 7 Zusätzliche Forderungen an die Verwölbungsansätze

Zur weiteren Vereinfachung der Berechnung und zur Abspaltung der Starrkörperverschiebungen des Querschnitts aus Längskraft und Biegung sollen noch zusätzliche Forderungen an die Verwölbungsansätze bei der Profilverformung gestellt werden:

- a) Es darf keine Längskraft aus der Verwölbung  $w_i(s)$  entstehen, d. h. wenn die zugehörige Längsspannung  $\sigma_i$  beträgt, muß gelten:

$$\int_F \sigma_i \, dF = 0 \quad (2. 14)$$

- b) Es dürfen keine Biegemomente um irgendeine der Achsen y oder x entstehen, d. h. :

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma_i x \, dF &= 0 \\ \int_F \sigma_i y \, dF &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Diese Forderungen werden in der 1. Stufe der Orthogonalisierung der Verwölbungsansätze erfüllt, dabei sei auf Abschnitt 4. 4 hingewiesen. In einer 2. Stufe können weitere Anforderungen bezüglich Orthogonalisierungen in spezieller Hinsicht eingearbeitet werden. Angaben dazu finden sich im Abschnitt 5. 5.

### 3. Profilverformungen ohne Berücksichtigung einer Schubdeformation

#### 3.1 Ansatz für den Verwölbungsverlauf

In diesem Kapitel soll die erste der drei in Abschnitt 2.6 genannten Näherungsstufen beim Ansatz für die Verwölbungen untersucht werden. Die hier beschriebene Vorgehensweise bietet bei der Berechnung von Faltwerken mit offenen Querschnitten keinerlei Schwierigkeiten und liefert die Ergebnisse rasch und übersichtlich. Im allgemeinen Fall der geschlossenen Profile dagegen stößt sie auf einige Probleme, wie noch gezeigt wird.

Aus den Grundbeziehungen nach Abschnitt 2.5 ergibt sich bei Vernachlässigung der Schubverzerrung  $\gamma$  als Zusammenhang zwischen  $v_s$  und

$v_z$ :

$$\frac{\partial v_z}{\partial s} = - \frac{\partial v_s}{\partial z} \quad (2.2)$$

Betrachtet man im Querschnitt des Faltwerks eine einzelne Wand, die sich bezüglich eines Pols  $D$  um einen Winkel  $\vartheta = \vartheta(z)$  dreht, so läßt sich anhand von Bild 3.1 die Wandverschiebung  $v_s$  in Richtung von  $s$  mittels  $\vartheta$  ausdrücken.

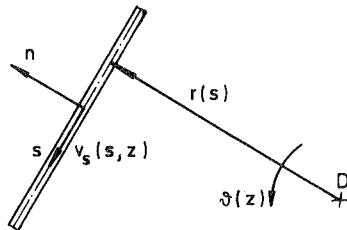


Bild 3.1: Drehung einer Wand in der Querschnittsebene

Der Drehradius  $r$  steht senkrecht auf der Wandmittelfläche und ist positiv, wenn er von  $D$  aus in Richtung von  $+n$  weist. Für eine ebene

Wand ist  $r$  eine Konstante, ändert sich jedoch von Wand zu Wand sprunghaft. Es soll deshalb  $r = r(s)$  angeschrieben werden mit der Zusatzbedingung:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = 0$$

Für die Wandverschiebung  $v_s(s, z)$  ergibt sich als Produktansatz:

$$v_s(s, z) = r(s) \phi(z) \quad (3.1)$$

Wird die Wand mehreren solcher Einzelverschiebungen in  $s$ -Richtung unterworfen, so kann man allgemeiner ansetzen:

$$v_s(s, z) = \sum_{i=1}^k r_i(s) \phi_i(z) \quad (3.2)$$

Gegenüber (2.9) steht hier  $r_i(s)$  für  $v_i(s)$  und  $\phi_i(z)$  für  $V_i(z)$ .

Es genügt zunächst, den Einzelansatz nach (3.1) weiter zu verfolgen.

Aus (3.1) und (2.2) folgt für die Längsverschiebung  $v_z(s, z)$ :

$$\frac{\partial v_z(s, z)}{\partial s} = -r(s) \frac{\partial \phi(z)}{\partial z} = -r(s) \phi'(z) \quad (3.3)$$

mit der Abkürzung:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\dots) = (\dots)'$$

Entsprechend wird später benötigt:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\dots) = (\dots)'$$

Eine Integration über  $s$  liefert  $v_z$ , für das in Anlehnung an (2.13) der Produktansatz:

$$v_z(s, z) = - \sum_{i=1}^k w_i(s) \frac{\partial V_i(z)}{\partial z}$$

gewählt wird. Wegen der angestrebten eindeutigen Zusammengehörigkeit von  $v_s$  und  $v_z$  darf dabei die Summation nur über  $k$  Ansätze durchgeführt werden.

Betrachtet man einen Teilansatz dieser Summe analog (3. 1):

$$\begin{aligned} v_z(s, z) &= -w(s) V'(z) \\ \text{bzw.} \quad \frac{\partial v_z(s, z)}{\partial s} &= -\frac{\partial w(s)}{\partial s} V'(z) \end{aligned} \quad (3. 4)$$

und führt man gemäß (3. 2) folgenden Zusammenhang ein:

$$\begin{aligned} V(z) &= \vartheta(z) \\ \text{bzw.} \quad V'(z) &= \vartheta'(z) , \end{aligned}$$

so ergibt ein Vergleich mit (3. 3):

$$\frac{\partial w(s)}{\partial s} \equiv w'(s) = r(s) \quad (3. 5)$$

Die bei der Integration von (3. 5) anfallende Konstante  $w_0$  soll erst später mit Hilfe von Orthogonalisierungen bestimmt werden. Als Grundverwölbung  $\hat{w}(s)$  wird deshalb angesetzt:

$$\hat{w}(s) = \int_0^s r(s) ds \quad (3. 6)$$

Die Gesamtverwölbung ergibt sich zu:

$$w(s) = \hat{w}(s) + w_0 \quad (3. 7)$$

Diese Beziehung ist bereits aus der Theorie der Wölbkrafttorsion bekannt.

Für  $v_z(s, z)$  gilt somit

im Einzelansatz:

$$v_z(s, z) = -w(s) \vartheta'(z) \quad (3. 8)$$

bzw. insgesamt:

$$v_z(s, z) = -\sum_{i=1}^k w_i(s) \vartheta'_i(z) \quad (3. 9)$$



### 3.2 Der einzellige Kasten

Für den einzelligen Kastenträger mit vier Wänden hat Hees in [7] eine ausführliche Ableitung der Verwölbung aus der Profilverformung durchgeführt. Sie beruht auf dem Grundgedanken, den geschlossenen Querschnittsteildurch einen Schnitt in einen offenen umzuwandeln, die Verwölbung des offenen Profils infolge der Profilverformung zu bestimmen und den entstehenden Verwölbungssprung an der Schnittstelle durch eine entsprechende Rotation des Gesamtquerschnitts zu schließen. In Bild 3.2 sind die entsprechenden Schritte für einen Trapezkasten zusammengestellt.

Zur klareren Unterscheidung der einzelnen Verschiebungsanteile wird der Drehradius einer Wand (Bild 3.1) infolge der Profilverformung  $\vartheta_1 = 1$  mit  $r_V$  bezeichnet, infolge der anschließenden Starrkörperdrehung  $\vartheta_0$  mit  $r_T$ .

Die Teilverwölbungen aus Bild 3.2 d) und f) müssen so überlagert werden, daß der Sprung an der Schnittstelle verschwindet.

Es muß somit gelten:

$$\oint r_V ds + \vartheta_0 \oint r_T ds = 0 \quad (3.10)$$

Daraus folgt für  $\vartheta_0$ :

$$\vartheta_0 = - \frac{\oint r_V ds}{\oint r_T ds} \quad (3.11)$$

oder mit den vorliegenden Abmessungen:

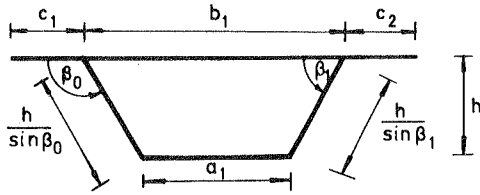
$$\vartheta_0 = - \frac{h a_1}{h a_1 + h b_1} = - \frac{a_1}{a_1 + b_1} \quad (3.12)$$

Im Sonderfall des Rechteckkastens ergibt sich:

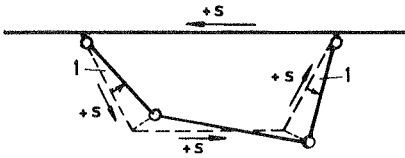
$$\vartheta_0 = - \frac{1}{2}$$

Im Vergleich zu der Schreibweise von Hees [7] gilt:

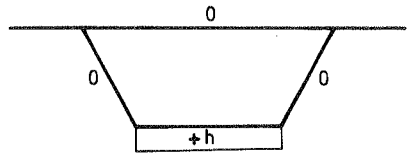
$$\vartheta_0 \stackrel{\Delta}{=} - \frac{1}{\psi_{II}}$$



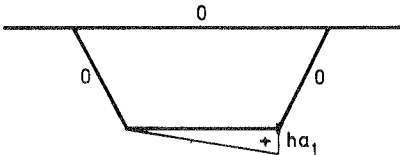
a) Querschnitt mit allgemeinen Abmessungen



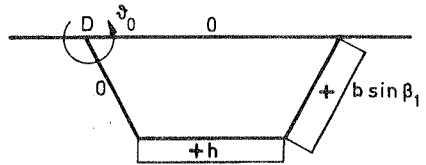
b) Profilverformung  $\varphi_1 = 1$  an der Gelenkfigur



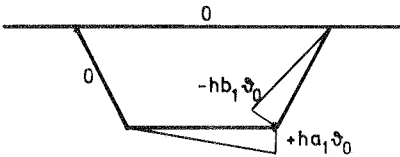
c) Verlauf von  $r_V$  für die Wände



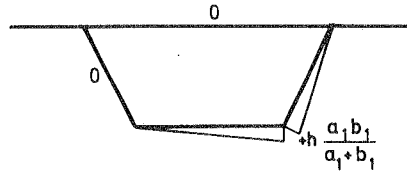
d) Verlauf von  $\int_0^s r_V ds$  am aufgeschnittenen Profil



e)  $r_T$ -Verlauf für die Wände bei Drehung um D mit  $\varphi_0$



f) Verwölbung infolge  $\int_0^s r_T ds$  am aufgeschnittenen Profil



g) Grundverwölbung  $\hat{w}(s)$  infolge Profilverformung

Bild 3.2: Ermittlung der Grundverwölbung  $\hat{w}(s)$  an einem einzelligen Trapezkasten

Um die Grundverwölbung  $\hat{w}(s)$  infolge Profilverformung zu erhalten, muß man beide Verwölbungsverläufe addieren:

$$\hat{w}(s) = \int_0^s r_V ds + \phi \int_0^s r_T ds \quad (3.13)$$

Damit gilt wegen (3.6):

$$r(s) = r_V(s) + \phi r_T(s) \quad (3.14)$$

### 3.3 Allgemeine mehrzellige Trapezkästen

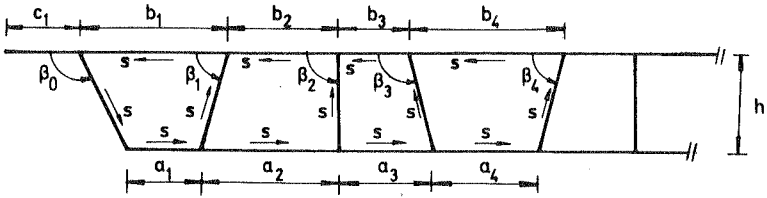
Die bei dem einzelligen Kasten gefundene Möglichkeit, die Grundverwölbung infolge Profilverformung gemäß (3.6) bzw. (3.13) zu ermitteln, soll auf mehrzellige Querschnitte übertragen werden.

Ausgegangen wird von einer Grundzelle, im Bild 3.3 ist es die 1. Zelle, die infolge  $\phi_1 = 1$  verzerrt wird. Die obere Wand dieser Zelle sei zunächst festgehalten. Hierdurch entstehen bei sonst nicht gelösten Bindungen (Bild 2.7 b) Stegverdrehungen der Größe 1. Die Freiheitsgrade der übrigen Zellen werden dadurch aufgehoben, daß der Deckplatte der Zelle j eine Verdrehung  $\delta_j$  eingeprägt wird. Die zugehörigen Verschiebungswege der Einzelwände lassen sich dann formelmäßig angeben und entsprechen den Größen  $r_V$ . Für die allgemeine Verformung der Zelle j finden sich die Werte in Bild 3.3 c) und d). Die Fahrbahnplatte hat für alle Zellen stets  $r_V = 0$ , weil sie nur in n-Richtung verschoben wird.

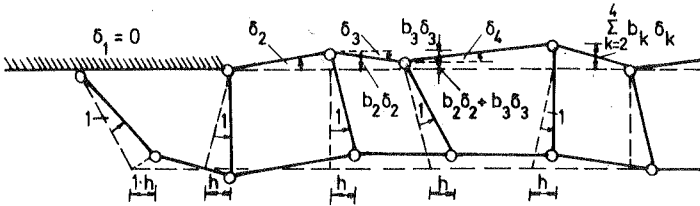
Schneidet man in Gedanken die einzelnen Zellen in der Bodenplatte direkt vor den jeweiligen rechten unteren Knotenpunkten auf und beginnt die Integration stets in der oberen Wand, so lassen sich einfache Ausdrücke für  $\int_0^s r_V ds$  angeben. Die Verläufe für die j-te Zelle finden sich in Bild 3.4.

Der Sprung in der Zelle j beträgt an der Schnittstelle:

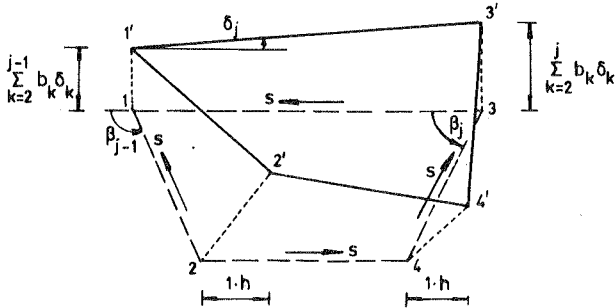
$$\int_j r_V ds = h a_j + h b_j \delta_j \quad (3.15)$$



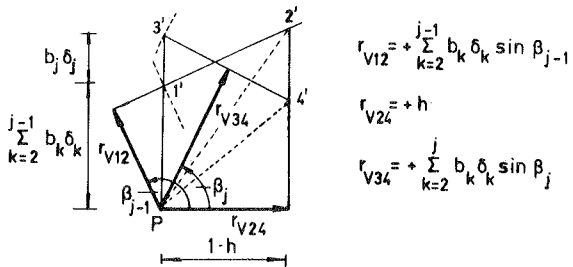
a) Querschnitt mit allgemeinen Abmessungen



b) Verschiebungen des Gelenkwerks



c) Verschiebungen der j - ten Zelle



d) zugehöriger Williotplan und  $r_v$  der einzelnen Wände

Bild 3.3: Allgemeine Profilverformung bei Trapezkästen

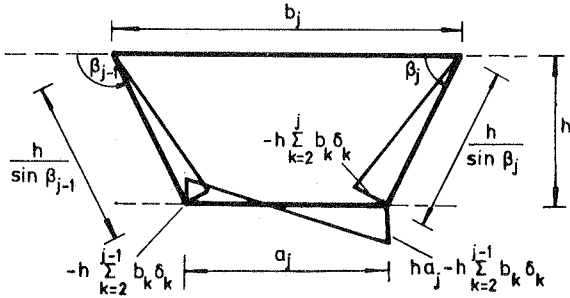


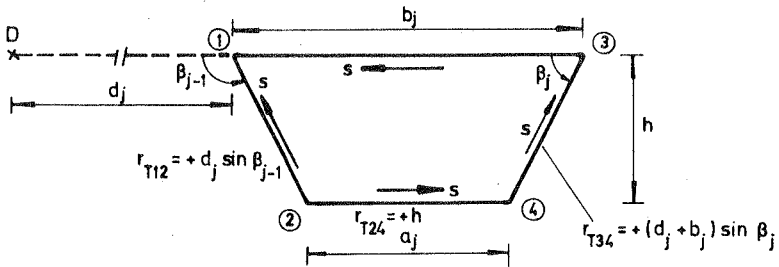
Bild 3. 4: Verlauf von  $\int_0^s r_V ds$  an der j-ten Zelle

Entartet keine der Zellen zum Dreieck, so liegen bei n Zellen insgesamt n solcher Sprünge vor.

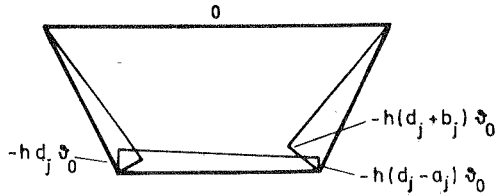
Durch eine Drehung des Gesamtquerschnitts um einen Punkt D mit dem Winkel  $\vartheta_0$  soll versucht werden, diese Sprünge zu beseitigen. Der Drehpunkt D ist frei wählbar und wird günstig angesetzt in Höhe der Deckplatte. Diese Drehung entspricht einer Aufhebung der Anfangsbedingung  $\delta_1 = 0$ , um die resultierende Gesamtdrehung des verzerrten Querschnitts zu betonen, wird jedoch der Drehwinkel mit  $\vartheta_0$  bezeichnet. Aus der Drehung ergeben sich je Schnittstelle neue Verwölbungssprünge, wie in Bild 3. 5 gezeigt.

Für den Sprung in Zelle j gilt dabei:

$$\begin{aligned} \vartheta_0 \int_j^s r_T ds &= -h d_j \vartheta_0 + h a_j \vartheta_0 + h (d_j + b_j) \vartheta_0 = \\ &= h (a_j + b_j) \vartheta_0 \end{aligned} \quad (3.16)$$



a)  $r_T$  - Verläufe bei Drehung um D



b) Verwölbungsverlauf infolge Drehung

Bild 3.5:  $r_T$  und Teilverwölbung infolge  $\vartheta_0$

Insgesamt darf bei dem kontinuierlichen Querschnitt kein Verwölbungs-sprung auftreten. Damit muß analog zu (3.10) für jede Zelle j gelten:

$$\oint_j r_V ds + \oint_j r_T ds \vartheta_0 = 0$$

Daraus folgt:

$$h a_j + h b_j \delta_j + \vartheta_0 h (a_j + b_j) = 0$$

oder 
$$\vartheta_0 = - \frac{a_j + b_j \delta_j}{a_j + b_j} \quad (3.17)$$

$$\text{bzw. } \delta_j = - \frac{1}{b_j} (a_j + \theta_0 (a_j + b_j)) \quad (3.18)$$

Durch Vorgabe von einem einzigen  $\delta_j$  ist  $\theta_0$  nach (3.17) festgelegt. Im vorliegenden Fall durch die Ausgangszelle 1 mit  $\delta_1 = 0$ . Man erhält dann aus (3.17) für  $\theta_0$ :

$$\theta_0 = - \frac{a_1}{a_1 + b_1} \quad (3.19)$$

Diese Lösung entspricht genau dem Ergebnis beim einzelligen Kasten (3.12).

Die übrigen  $\delta_j$  sind nun nicht mehr frei wählbar.

Aus (3.18) folgt für  $j \neq 1$ :

$$\delta_j = - \frac{1}{b_j} \left( a_j - \frac{a_j + b_j}{a_1 + b_1} a_1 \right)$$

oder nach einiger Umformung:

$$\delta_j = \frac{a_1/b_1 - a_j/b_j}{1 + a_1/b_1} \quad (3.20)$$

Da für  $j = 1$  aus (3.20)  $\delta_j = 0$  folgt, kann die Einschränkung auf  $j \neq 1$  fallen gelassen werden.

Nur wenn (3.19) und (3.20) erfüllt werden, ist ein sprungfreier Verwölbungsverlauf zu erreichen. Auch hier gelten die beiden Ausdrücke für  $\hat{w}(s)$  bzw.  $r(s)$  nach (3.13) bzw. (3.14).

In der Überlagerung erhält man für die Verwölbungsgrößen  $\hat{w}(s)$  in den unteren Knotenpunkten der  $j$ -ten Zelle:

linker unterer Knoten 2:

$$\hat{w}(2) = - h \sum_{k=2}^{j-1} b_k \delta_k - h d_j \theta_0$$

rechter unterer Knoten 4:

$$\hat{w}(4) = h a_j - h \sum_{k=2}^{j-1} b_k \delta_k - h (d_j - a_j) \theta_0$$

$$\hat{w}(4) - \hat{w}(2) = h a_j (1 + \theta_0) \quad (3.21)$$

Damit ergibt sich für  $\frac{\partial \hat{w}}{\partial s}$  in der Bodenplatte:

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial s} = \frac{\hat{w}(4) - \hat{w}(2)}{a_j} = h(1 + \vartheta_0) \quad (3.22)$$

Dies ist ein konstanter Wert für alle Zellen.

Der  $\hat{w}$ -Verlauf ist somit in der Bodenplatte ohne Knicke, in der Deckplatte identisch Null. Selbst wenn Translationen des Querschnitts in x- oder y-Richtung überlagert werden - das wäre gleichbedeutend mit der Wahl eines anderen Drehpunktes D -, folgt daraus, daß Bodenplatte und Deckplatte jeweils einen geradlinigen Verschiebungsverlauf  $\hat{w}$  aufweisen.

Von den Freiheitsgraden, die nach Bild 2.7 möglich sind, erlauben die getroffenen Voraussetzungen mit  $\gamma = 0$  nur die freie Wahl der Aufhebung einer Bindung. Die anderen Verschiebungen der zur Aufhebung der Kinematik eingeführten Bindungen (bis auf diejenigen zur Behinderung der Starrkörperverschiebungen des Querschnitts) sind durch (3.20) festgelegt.

Wählt man D so, daß er mit dem Punkt 1 von Zelle 1 zusammenfällt, so ergibt sich ein besonders einfacher  $\hat{w}$ -Verlauf gemäß Bild 3.6.

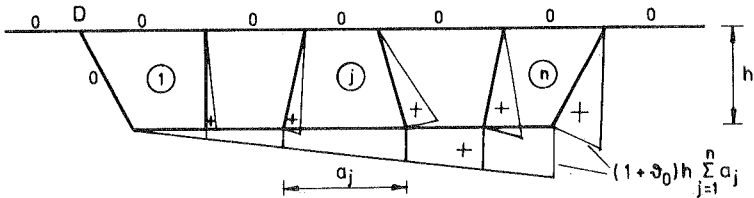
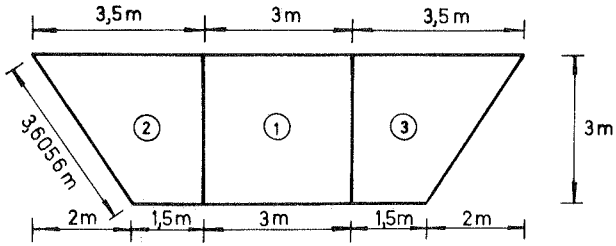


Bild 3.6: Einfachster  $\hat{w}$ -Verlauf am mehrzelligen Kastenträger

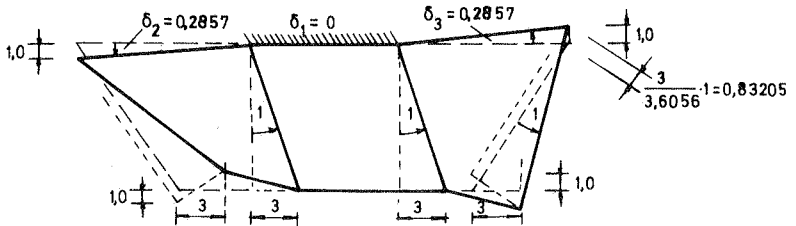
### 3.4 Beispiel für einen dreizelligen Kastenträger

An einem dreizelligen Querschnitt wird die Ermittlung der Grundverwölbung  $\hat{w}_1(s)$  infolge der in Abschnitt 3.3 hergeleiteten speziellen Profilverformung gezeigt. Bild 3.7 zeigt sämtliche erforderlichen Abmessungen sowie die ersten Ansätze der Berechnung.

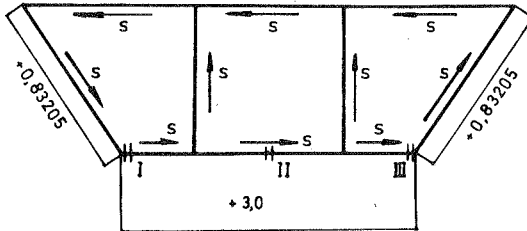




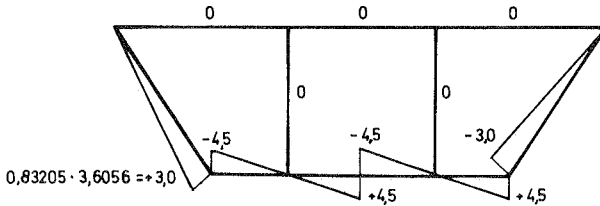
a) Querschnitt



b) Verschiebungszustand  $\hat{\phi}_1 = 1$

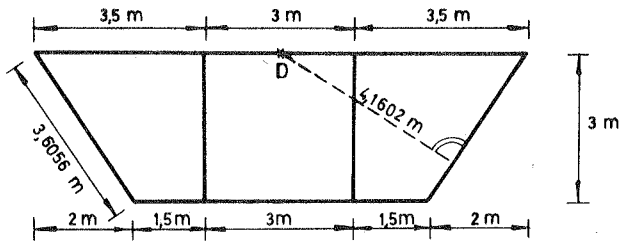


c) Verlauf von  $\hat{r}_{V1}$

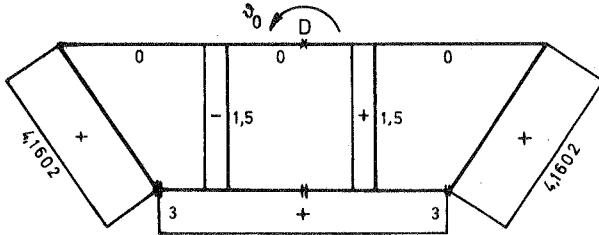


d) Verlauf von  $\int_0^s \hat{r}_{V1} ds$

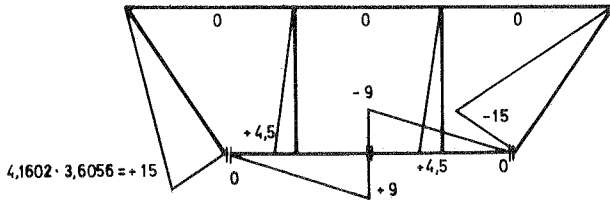
Bild 3.7: Dreizelliger Kastenträger - Erste Ansätze zur Ermittlung der speziellen Profilverformung



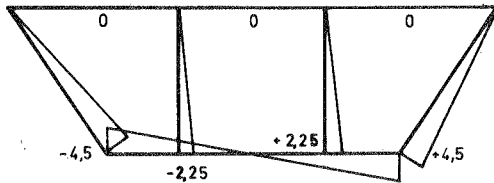
a) Querschnitt



b) Verlauf von  $r_T$  bei Drehung um den Winkel  $\phi_0$



c) Verlauf von  $\int_0^s r_T ds$



d) Grundverwölbung  $\hat{w}_1(s)$

Bild 3.8: Dreizelliger Kastenträger - Starrkörperrotation des verzerrten Querschnitts und Ermittlung der Grundverwölbung

Als Ausgangszelle wird die Mittelzelle 1 gewählt und die Fahrbahnplatte bei der Verzerrung  $\hat{\phi}_1 = 1$  zunächst festgehalten ( $\delta_1 = 0$ ). Aus Gleichung (3.20) folgt für die Verzerrung der übrigen Zellen:

$$\delta_2 = \frac{1 - 1,5/3,5}{1 + 1} = 0,2857 = \delta_3$$

Damit ist der Verlauf der einzelnen Wandverschiebungen  $r_{V1}(s)$  festgelegt. An den Schnittstellen I bis III ergeben sich aus  $\int_0^s r_{V1} ds$  Sprünge der Größe 7,5 bzw. 9,0.

Dreht man anschließend den verzerrten Querschnitt um den beliebig gewählten Pol D, wie dies in Bild 3.8 dargestellt ist, so erhält man einen  $\int_0^s r_T ds$  - Verlauf mit Sprüngen der Größe 15,0 bzw. 18,0 an den drei Schnittstellen. Bei einer Überlagerung beider Wölbanteile ist somit der Drehanteil mit dem Faktor (- 0,5) zu multiplizieren, um die Sprünge zu beseitigen. Aus (3.19) folgt ebenfalls:

$$\phi_o = - \frac{3}{3 + 3} = - 0,50 \quad (\text{Rechteckzelle!})$$

Der schließlich ermittelte Grundverwölbungsverlauf  $\hat{w}_1(s)$  nach (3.13) ist frei von Sprüngen und besitzt einen knickefreien Verlauf über die gesamte Bodenplatte.

### 3.5 Folgerungen, Sonderfälle

Aus der Untersuchung allgemeiner mehrzelliger Trapezkästen im Abschnitt 3.3 folgt, daß bei der Wahl einer beliebigen Ausgangszelle 1, die eine Einheitsverzerrung erleidet, alle anderen Zellen relativ dazu feste Verzerrungsformen annehmen müssen, um eine Verwölbungsberechnung ohne Berücksichtigung einer Schubverzerrung zu ermöglichen. Die gesamte "Profilverformung ohne Schub", wie dieser Fall kurz bezeichnet werden soll, ist durch die Formeln (3.19) und (3.20) festgelegt. Der Verwölbungsverlauf ist ebenfalls nach (3.13) und (3.14) vorgegeben. Bei dem dabei gefundenen geradlinigen, knickefreien Verlauf über Deck- und Bodenplatte gibt es für die betrachtete Querschnittsform gemäß Bild 3.6 lediglich eine einzige linear unabhängige Grundverwölbungsmöglichkeit.

Wählt man als Ausgangszelle eine andere Zelle  $m$ , so ergeben sich für die neuen Verformungen  $\vartheta_o^*$  und  $\delta_j^*$ , die im Unterschied zum früheren Ansatz durch einen Stern gekennzeichnet sind:

$$\vartheta_o^* = - \frac{a_m}{a_m + b_m} = - \frac{a_m/b_m}{1 + a_m/b_m}$$
$$\delta_j^* = \frac{a_m/b_m - a_j/b_j}{1 + a_m/b_m}$$

Für die Summe von  $\vartheta_o^*$  und  $\delta_j^*$  gilt:

$$\vartheta_o^* + \delta_j^* = - \frac{a_j/b_j}{1 + a_m/b_m}$$

Vergleicht man die Gesamtverdrrehungen der einzelnen Deckplattenabschnitte  $\vartheta_o + \delta_j$  bzw.  $\vartheta_o^* + \delta_j^*$  miteinander, so ergibt sich eine Proportionalität:

$$\frac{\vartheta_o^* + \delta_j^*}{\vartheta_o + \delta_j} = \frac{1 + a_1/b_1}{1 + a_m/b_m} = \text{konstant}$$

Die beiden Profilverformungen sind somit bis auf einen konstanten Faktor identisch.

Aus diesen Betrachtungen folgt:

Für allgemeine mehrzellige Trapezkästen nach Bild 2. 1 gibt es nur eine einzige Profilverformung, für die die Verwölbung ohne Berücksichtigung von Schubverzerrungen berechenbar ist. Entartet eine der Zellen zu einem Dreieck, so gibt es überhaupt keine derartige Profilverformung. Alle anderen Profilverformungen müssen unter Berücksichtigung von Schubverzerrungen ermittelt werden.

Die weitere Untersuchung dieser Profilverformung und die Herleitung des Differentialgleichungssystems erfolgt später. Hier sollen noch kurz einige Sonderfälle behandelt werden.

Für  $n = 1$  erhält man die Lösung für den einzelligen Kasten, wie dies in Abschnitt 3. 2 dargestellt worden ist.

Bei mehrzelligen Kästen sind die Zustände mit  $\delta_j \equiv 0$  für alle Zellen geometrisch deutbar. Aus (3.20) folgt die Forderung:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_j}{b_j} = \text{konstant}$$

Geometrisch bedeutet das für den betrachteten Querschnittstyp, daß alle Stege in ihrer Verlängerung durch einen Punkt gehen müssen (Strahlensatz). Bild 3.9 verdeutlicht diesen Zusammenhang. Ganz speziell gehören dazu alle Rechteckkästen mit  $a_j/b_j = 1$  (Schnittpunkt der Stäbe im Unendlichen).

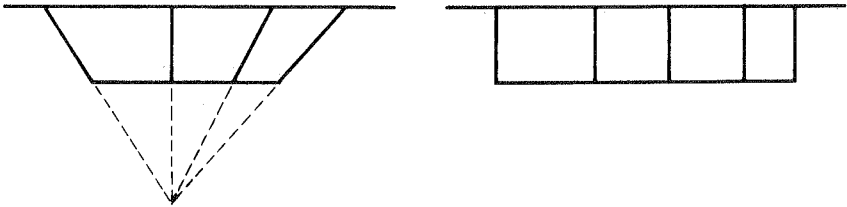


Bild 3.9: Spezielle Querschnittsformen, für die alle  $\delta_j \equiv 0$  sind

Die zugehörige Profilverformung kann man sich für diese speziellen Querschnittsformen aus der Gelenkfigur herleiten, wobei Fahrbahn- und Bodenplatte jeweils als durchlaufende Wände ansetzbar sind. In Bild 3.10 ist dies dargestellt, allerdings ohne die zugehörige Drehung um  $\theta_0$ .

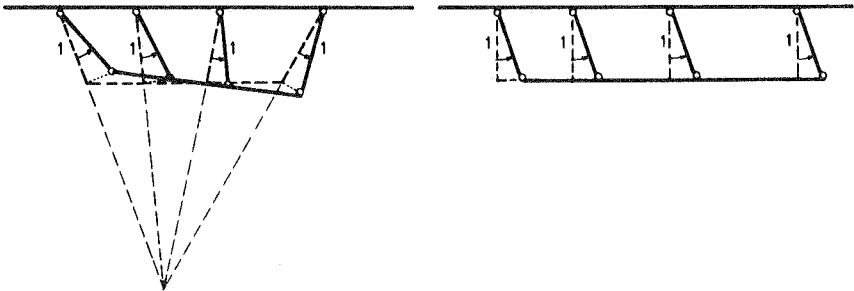


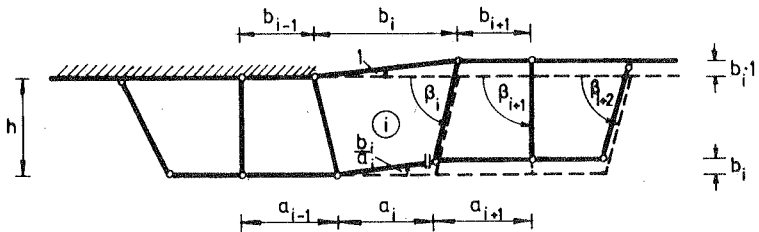
Bild 3.10: Profilverformung ohne Schub bei speziellen Querschnitten

4. Profilverformungen bei Berücksichtigung von Schubverzerrungen infolge Drehungen

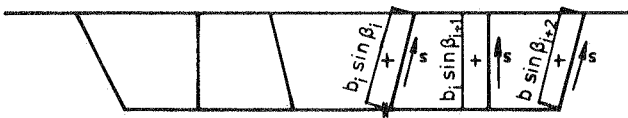
4.1 Einführung von Schubflüssen in die Verwölbungsberechnung einzelner Profilverformungszustände

In Kapitel 3 ist es gelungen, für eine spezielle Profilverformung einen kontinuierlichen Verwölbungsverlauf zu ermitteln, ohne den Einfluß von  $\gamma$  zu berücksichtigen. Dies ist aber im Allgemeinfall nicht möglich, d. h. zumindest  $(n - 1)$  Profilverformungen müssen unter Einschluß von Schubverzerrungen berechnet werden.

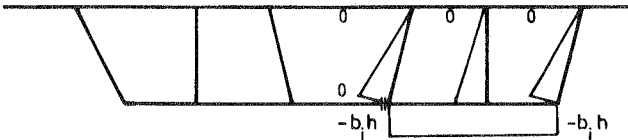
Ausgangspunkt der Überlegungen ist das in Querrichtung bezüglich einer einzigen Zelle  $i$  verformte Gelenkwerk. Anstatt wie früher jede einzelne der  $n$  Zellen aufzuschneiden, wird nur ein Einzelschnitt in der verzerrten Zelle  $i$  geführt.



zunächst in Ruhe befindlicher Teil      verschobener Teil



Verlauf von  $r_V$



Verlauf von  $\int_0^s r_V ds$

Bild 4.1: Profilverformung und daraus resultierende Teilverwölbung

Bild 4.1 zeigt den angesetzten Profilverformungszustand sowie die sich daraus ergebenden Verwölbungsanteile  $\int_0^S r_V ds$  entsprechend zu (3.6). Der Index V soll bei den Drehradien r der Einzelwände an die Profilverformung erinnern. Im Unterschied dazu wird bei Querschnittsdrehungen der Index T angefügt.

Bei der Integration für  $\int_0^S r_V ds$  empfiehlt sich ein Beginn in der Fahrbahnplatte. Wegen der reinen Parallelverschiebung des rechten Querschnittsteils tritt für die Bodenplatte ein konstanter Verwölbungswert der Größe  $(-b_1 h)$  auf. Auch wenn man zunächst ein vollständig aufgeschnittenes Grundsystem betrachtet hätte, könnte man alle Schnitte bis auf den einzigen in der Zelle i wieder schließen. Nur dort ergibt sich ein Verwölbungssprung, der von der Größe der angesetzten Profilverformung abhängt.

Die fehlende Kontinuität in der Verwölbung des Querschnitts kann man entsprechend zu Kapitel 3 durch eine Starrkörperdrehung des einfach aufgeschnittenen Systems wiederherstellen. Da das Restsystem aber geschlossene Teile besitzt, ist die Ermittlung des Verwölbungsverlaufes infolge einer Drehung um den Winkel  $\vartheta_0$  komplizierter geworden. In den geschlossenen Zellen werden durch die Drehung Bredtsche Schubflüsse hervorgerufen, die auf die Verwölbung Einfluß nehmen (Wölbkrafttorsion). Der somit auf Torsion zu berechnende Querschnitt zerfällt im allgemeinen in zwei ungleiche Teile mit in der Summe  $(n - 1)$  Schubflüssen  $\psi$ . In der aufgeschnittenen Zelle i beträgt der umlaufende Schubfluß  $\psi_i = 0$ , d. h. in Deckplatte und Bodenplatte ist der Bredtsche Schubverzerrungsanteil gleich Null. In den beiden Stegen neben dieser Zelle i wirken nur die Schubflüsse  $\psi_{i-1}$  bzw.  $\psi_{i+1}$  der benachbarten Zellen.

Die Berechnung der Schubflüsse und der sich infolge Starrkörperrotation ergebenden Verwölbung ist z. B. von Bornscheuer [11] angegeben worden. Im vorliegenden Fall muß zusätzlich eine Durchmultiplikation mit der Größe des Drehwinkels  $\vartheta_0$  erfolgen.

Es gilt das allgemeine Gleichungssystem für die Bredtschen Schubflüsse:

$$\begin{aligned}
 & - \psi_{j-1}^D \int_{j-1,j} \frac{1}{t} ds + \psi_j^D \oint_j \frac{1}{t} ds - \psi_{j+1}^D \int_{j,j+1} \frac{1}{t} ds = \\
 & = \oint_j r_T ds \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

$$\text{und } \psi_j = \psi_j^D \cdot \theta_o \quad (4.2)$$

Der obere Index D soll auf die Bredtsche Torsion mit der Drehung 1 hinweisen.

Das Gleichungssystem (4.1) zerfällt wegen  $\psi_i = 0$  in zwei voneinander unabhängige Teilsysteme. Eine ausführlichere Herleitung findet sich in Abschnitt 4.2.

Für die Verwölbung infolge der Querschnittsrotation ergibt sich gemäß [11]:

$$\hat{w}(s) = \left( \int_0^s r_T ds - \psi^D \int_0^s \frac{1}{t} ds \right) \theta_o \quad (4.3)$$

Der nach (4.3) sich ergebende Verwölbungsverlauf aus der Drehung besitzt einen Sprung an dem Schnitt in Zelle i. Auch ohne Kenntnis des gesamten Verlaufes läßt sich durch geeignete Wahl des Drehpunktes D und des Anfangspunktes A der Integration dieser Sprung angeben. Die erforderlichen Werte finden sich in Bild 4.2.

Als Bedingung zur Beseitigung des Sprunges erhält man aus den Bildern 4.1 und 4.2:

$$- b_i h - \theta_o \left( \psi_{i-1}^D \frac{h}{t_l \sin \beta_{i-1}} + a_i h + b_i h + \psi_{i+1}^D \frac{h}{t_r \sin \beta_i} \right) = 0$$

Mit Einführung der Größe  $F_{m,i}$  für den Querschnitt der Zelle i nach der Definition:

$$F_{m,i} = \frac{a_i + b_i}{2} h \quad (4.4)$$

ergibt sich:

$$\theta_o = - \frac{b_i h}{2 F_{m,i} + \psi_{i-1}^D \frac{h}{t_l \sin \beta_{i-1}} + \psi_{i+1}^D \frac{h}{t_r \sin \beta_i}} \quad (4.5)$$



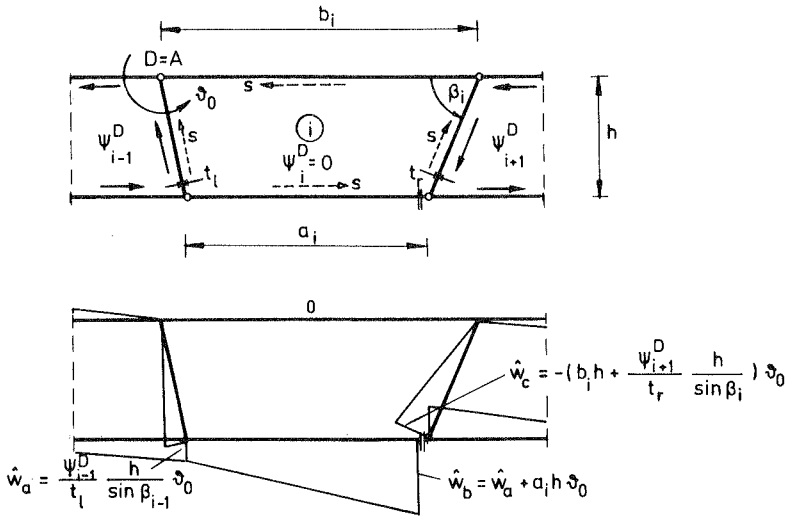


Bild 4.2: Verwölbungsverlauf infolge Drehung für die Zelle i

Den gesamten Verwölbungsverlauf erhält man durch Superposition zu:

$$\hat{w}(s) = \int_0^s r_V ds + \vartheta_0 \int_0^s r_T ds - \vartheta_0 \Psi^D \int_0^s \frac{1}{t} ds \quad (4.6)$$

mit  $\vartheta_0$  aus (4.5).

Dies läßt sich allgemeiner anschreiben:

$$\hat{w}(s) = \int_0^s r(s) ds - \psi \int_0^s \frac{1}{t} ds \quad (4.7)$$

$$\text{mit } r(s) = r_V(s) + \vartheta_0 r_T(s) \quad (4.8)$$

und Beachtung von (4.2).

Mit Hilfe Bredtscher Torsionsschubflüsse ist es also möglich, einen kontinuierlichen Verwölbungsverlauf bei einer vorgegebenen Profilverformung zu berechnen. Beliebige Profilverformungen lassen sich durch Superposition aus dem oben betrachteten Profilverformungstyp herstellen.

4.2 Allgemeine Herleitung des Nherungsansatzes für  $\hat{w}(s)$

Die Betrachtungen in Abschnitt 4.1 haben die Möglichkeit eines linearen Nherungsansatzes für  $\hat{w}(s)$  aufgezeigt, der nach Gleichung (4.7) ermittelt werden kann. Ausgangspunkt ist dabei ein Querverschiebungs- und Verdrehungszustand der durch (4.8) beschrieben wird. Es lässt sich daraus für den Allgemeinfeld folgern:

Die Querverschiebung  $v_{s,i}(s, z)$  der i-ten Profilverformung kann man angeben als:

$$v_{s,i}(s, z) = r_i(s) \phi_i(z) \quad (4.9)$$

Die Längsverschiebung  $v_{z,i}(s, z)$  infolge derselben Profilverformung wird angesetzt zu:

$$v_{z,i}(s, z) = -w_i(s) \phi'_i(z) \quad (4.10)$$

entsprechend der Gleichung (3.8) in Abschnitt 3.1.

Die Größe  $r_i(s)$  gibt die Verschiebung der Einzelwände in Richtung von +s an infolge einer Profilverformung der Größe  $\phi_i = 1$ . Man kann  $r_i(s)$  auch als einen allgemeinen "Drehradius" deuten, der für jede Wand einen anderen Wert besitzt.

Aus den Teilzustanden  $v_{s,i}$  bzw.  $v_{z,i}$  lässt sich die gesamte Verschiebung infolge aller Profilverformungen durch Superposition gewinnen. Es gilt:

$$\left. \begin{aligned} v_s(s, z) &= \sum_i v_{s,i}(s, z) \\ v_z(s, z) &= \sum_i v_{z,i}(s, z) \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Indem folgenden Abschnitt ist es völlig ausreichend, nur die Einzelanteile gemäß (4.9) und (4.10) weiterzuverfolgen.

Die Größe  $w_i(s)$  ist die "Wolbkoordinate" des i-ten Verformungszustandes und soll noch genauer bestimmt werden.

Entsprechend den Grundbeziehungen nach Abschnitt 2.5 gilt nach Einführung der Ausdrücke (4.9) und (4.10):

für die Längsspannung  $\sigma_i$  nach (2.3) und (2.1):

$$\begin{aligned}\sigma_i &= E \epsilon_i = -E w_i(s) \frac{\partial^2 \phi_i(z)}{\partial z^2} \\ \sigma_i &= -E w_i(s) \phi_i''\end{aligned}\quad (4.12)$$

für die Schubspannung  $\tau_i$  nach (2.8):

$$\tau_i = -\frac{1}{t} \int_0^s \frac{\partial}{\partial z} (-E w_i(s) \phi_i''(z)) t ds + \frac{1}{t} T_o(z)$$

Zur Vereinfachung wird für das gesamte Faltwerk ein konstanter E-Modul angesetzt. Entsprechendes gilt später auch für den Schubmodul G und die Querkontraktionszahl  $\mu$ . Andernfalls müßten zusätzliche Bezugsgrößen  $E/E_c$  mit  $E_c$  als Vergleichswert unter den Integralen mitgeführt werden, wie dies z. B. Castrillón in [15] gezeigt hat.

Man erhält:

$$\tau_i = \frac{E}{t} \int_0^s w_i(s) t ds \phi_i'''(z) + \frac{1}{t} T_o(z) \quad (4.13)$$

Anstelle des Integralausdruckes wird als Abkürzung gemäß Bornscheuer [11] für das aufgeschnittene Grundsystem eingeführt:

$$\int_0^s w_i(s) t ds = \int_{s=0}^s w_i(s) dF = F_{wi,o}(s) \quad (4.14)$$

Die zum Integral zugehörige Integrationskonstante ist oben in  $T_o(z)$  bereits erfaßt worden. Die Integration über  $w_i(s)$  beginnt an jeder Schnittstelle mit dem Wert Null. Der Index o bei  $F_{wi,o}(s)$  soll daran erinnern.

Für die Schubspannung erhält man so:

$$\tau_i = \frac{E}{t} F_{wi,o}(s) \phi_i'''(z) + \frac{1}{t} T_o(z) \quad (4.15)$$

Für die Schubverzerrung  $\gamma$  folgt mit dem Hookeschen Gesetz:

$$\gamma = \frac{\tau_i}{G} = \frac{E}{Gt} F_{wi,o}(s) \phi_i'''(z) + \frac{1}{Gt} T_o(z) \quad (4.16)$$

Aus (2.10) ergibt sich mit (4.9), (4.10) und (4.16):

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial w_i(s)}{\partial s} \phi'_i(z) &= - r_i(s) \phi'_i(z) + \frac{E}{Gt} F_{w_i, o}(s) \phi''''_i(z) + \\
 &+ \frac{1}{Gt} T_o(z)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Bevor die Form des Ansatzes für  $w_i(s)$  weiter eingeschränkt wird, soll  $T_o(z)$  als eine Linearkombination der Funktionen  $\phi_i, \phi'_i, \phi''_i$  usw. angeschrieben werden. Diese Funktionen bilden ein Orthogonalsystem, d. h. eine Größe läßt sich nicht als Linearkombination der anderen darstellen. Dieses Orthogonalsystem ist dann die Basis für den Raum der Kombinationen von  $z$ .

$$\begin{aligned}
 T_o(z) &= T_{oc} + T_{oo} \phi_i(z) + T_{o1} \phi'_i(z) + \\
 &+ T_{o2} \phi''_i(z) + T_{o3} \phi''''_i(z) + \dots
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Die Koeffizienten  $T_{oc}, T_{oo}, T_{o1}$  usw. sind zumindest abschnittsweise über  $s$  konstant, wie es auch von  $T_o(z)$  gefordert wurde.

Um die Stetigkeit der Längsverwölbungen zu gewährleisten, muß beim Umlauf um eine beliebige Zelle  $m$  erfüllt sein:

$$\oint_m \frac{\partial v_{zi}}{\partial s} ds = 0 \tag{4.19}$$

Setzt man (4.18) in (4.17) ein und integriert über  $s$  unter Beachtung von (4.19), so erhält man geordnet nach Funktionen  $\phi_i, \phi'_i, \phi''_i$  usw.:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{G} \oint_m \frac{1}{t} T_{oc} ds + \frac{1}{G} \oint_m \frac{1}{t} T_{oo} ds \phi_i(z) \\
 &- \oint_m \left( r_i(s) - \frac{1}{Gt} T_{o1} \right) ds \phi'_i(z) + \frac{1}{G} \oint_m \frac{1}{t} T_{o2} ds \phi''_i(z) \\
 &+ \oint_m \left( \frac{E}{Gt} F_{w_i, o}(s) + \frac{1}{Gt} T_{o3} \right) ds \phi''''_i(z) + \dots
 \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Funktionen  $\phi_i, \phi'_i, \phi''_i$  usw. zerfällt diese Gleichung in mehrere einzelne Bedingungen für die Koeffizienten von  $T_o$ .

Es müssen somit aus Kontinuitätsgründen in Querrichtung erfüllt sein:

$$\left. \begin{aligned}
 \oint_m \frac{1}{t} T_{oc} \, ds &= 0 \\
 \oint_m \frac{1}{t} T_{oo} \, ds &= 0 \\
 \oint_m \left( r_i(s) - \frac{1}{Gt} T_{o1} \right) ds &= 0 \\
 \oint_m \frac{1}{t} T_{o2} \, ds &= 0 \\
 \oint_m \left( \frac{E}{Gt} F_{wi,o}(s) + \frac{1}{Gt} T_{o3} \right) ds &= 0 \\
 \text{usw.} &
 \end{aligned} \right\} (4.20)$$

Diese Forderungen sind unabhängig von dem gewählten Verlauf von  $w_i(s)$ . Zur Bestimmung der unbekanntenen T-Größen erfolgt eine Betrachtung der Schubspannungen und des Gleichgewichts am Element.

Um später eine Entkopplung der Berechnung mit Profilverformungen gegenüber der Untersuchung des Stabes mit starrem Querschnitt auf Längsbeanspruchungen zu erhalten, sei für  $w_i(s)$  die zusätzliche Bedingung zu erfüllen, daß bei einer Integration von  $\sigma_i$  über den Querschnitt keine Normalkraft entsteht. Nach (2.14) gilt dann:

$$\int_F \sigma_i \, dF = 0$$

daraus ergibt sich bei Berücksichtigung von (4.12):

$$\int_F w_i \, dF = 0 \tag{4.21}$$

Dies hat zur Folge, daß auch  $F_{wi,o}(s)$  nach (4.14) an allen freien Enden des Querschnitts verschwindet. Da an diesen Punkten außerdem die Schubspannungen  $\tau_i$  gleich Null sein müssen, folgt für alle offenen Querschnittsteile aus (4.15), daß ein  $T_o(z)$  nicht vorhanden sein kann. Nur in geschlossenen Querschnittsteilen erhält man somit Werte für die T-Größen.

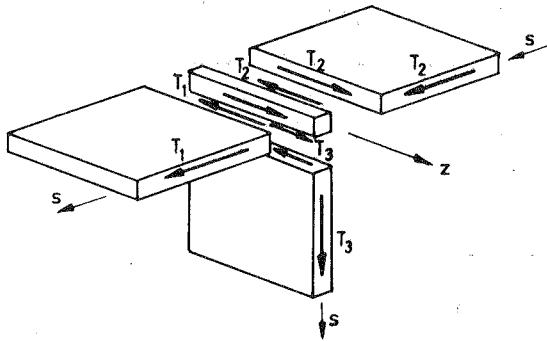
Da die  $T$ -Größen wandweise konstant sein müssen, gibt es zunächst  $(3n + 1)$  verschiedene Werte in einem  $n$ -zelligen Querschnitt für jeden dieser Faktoren. Dabei sind Dreieckzellen ausgeschlossen.

Aus der Zusammengehörigkeit zugeordneter Schubflüsse  $\tau_{zs}^t = \tau_{sz}^t$  und dem Gleichgewicht in  $z$ -Richtung an den Knotenlinien des Faltnetzes folgen die Aussagen gemäß Bild 4.3 für jede  $T$ -Größe:

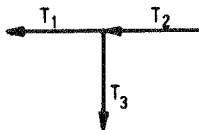
$$T_1 - T_2 + T_3 = 0 \quad (4.22)$$

Man kann mit (4.22) insgesamt  $(k - 1)$  Bedingungen aufstellen, wenn  $k$  die Zahl der Knotenlinien des geschlossenen Querschnittsteils ist. Beim  $n$ -zelligen Kasten gilt dabei:

$$k = 2(n + 1)$$



a) allgemeiner Knoten mit Schubkräften



b) symbolische Darstellung

Bild 4.3: Zusammenhang der  $T$ -Größen an den Knoten

Zusammen mit den  $n$  Bedingungen für jede Zelle gemäß (4. 20) hat man ein Gleichungssystem von  $3n + 1$  Gleichungen für ebenso viele Unbekannte. Dies gilt für jeden einzelnen  $T_{oi}$ -Faktor. Bei einem einzelligen Kasten folgt aus (4. 22), daß der Schubfluß für den geschlossenen Teil des Querschnitts konstant sein muß. Bei mehrzelligen Querschnitten ergibt sich aus der Überlagerung, daß die  $T$ -Größen zellenweise konstant sind. In gemeinsamen Zwischenwänden zweier Zellen wirkt die Differenz beider Zellenanteile nach Bild 4. 4.

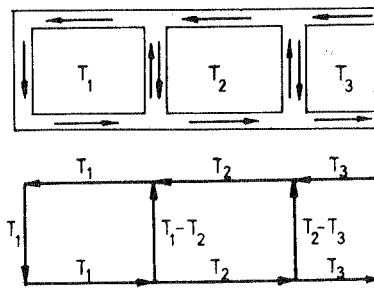


Bild 4. 4: Allgemeine  $T$ -Größen für die Querschnittszellen

Es verbleiben noch jeweils  $n$  Größen für jedes  $T_{oi}$ , die aus (4. 20) bestimmbar sind.

Da das Gleichungssystem:

$$\oint_m \frac{1}{t} T_{oi} ds = 0$$

für alle  $i \neq 1$  und  $2$  homogen ist und die Koeffizientenmatrix aus  $\int \frac{1}{t} ds$  nicht singular ist, folgt:

$$T_{o1} = T_{o2} = T_{o3} = T_{o4} = \dots = 0$$

bzw.:  $T_{o1} \neq 0$  und  $T_{o3} \neq 0$

Führt man als neue Größen ein:

$$\left. \begin{aligned} \psi_i &= \frac{1}{G} T_{o1} \\ \phi_i &= \frac{1}{E} T_{o3} \end{aligned} \right\} \quad (4. 23)$$

so gilt zur Ermittlung dieser Werte nach (4. 20):

$$\left. \begin{aligned} \oint_m \frac{1}{t} \psi_i \, ds &= \oint_m r_i(s) \, ds \\ \oint_m \frac{1}{t} \varphi_i \, ds &= - \oint_m \frac{1}{t} F_{wi,o}(s) \, ds \end{aligned} \right\} \quad (4. 24)$$

Für den allgemeinen Querschnitt nach Bild 2. 1 ergibt sich daraus ein Gleichungssystem mit folgendem Aufbau:

$$\begin{aligned} - \psi_{i,m-1} \int_{m-1,m} \frac{1}{t} \, ds + \psi_{i,m} \oint_m \frac{1}{t} \, ds \\ - \psi_{i,m+1} \int_{m,m+1} \frac{1}{t} \, ds &= \oint_m r_i(s) \, ds \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} - \varphi_{i,m-1} \int_{m-1,m} \frac{1}{t} \, ds + \varphi_{i,m} \oint_m \frac{1}{t} \, ds \\ - \varphi_{i,m+1} \int_{m,m+1} \frac{1}{t} \, ds &= - \oint_m \frac{1}{t} F_{wi,o}(s) \, ds \end{aligned}$$

dabei betreffen die Integrationen

$$\int_{m-1,m} \frac{1}{t} \, ds \quad \text{die Zwischenwand der Zellen } (m-1) \text{ und } m$$

$$\oint_m \frac{1}{t} \, ds \quad \text{das vollständige Umlaufintegral um die Zelle } m$$

Mitdenaus (4. 24) ermittelten Werten für  $\psi_i$  und  $\varphi_i$  kannman Gleichung (4. 17) anschreiben als:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial w_i(s)}{\partial s} \varphi_i'(z) &= - (r_i(s) - \frac{1}{t} \psi_i) \varphi_i'(z) + \\ &+ \frac{E}{Gt} (F_{wi,o}(s) + \varphi_i) \varphi_i'''(z) \end{aligned} \quad (4. 25)$$

Die Gleichung (4. 25) ist bei Unabhängigkeit von  $\varphi_i'(z)$  und  $\varphi_i'''(z)$  nicht erfüllbar durch einen linearen Ansatz  $w_i(s)$ . Man muß eine Näherungslösung anstreben, indem man den Einfluß des mit  $\varphi_i'''(z)$  behafteten



Terms auf die Verwölbung vernachlässigt. Dieser Term enthält die Schubanteile infolge der Wandverschiebung in  $s$ -Richtung, d. h. Größen, die dem Biegeschub beim Balken entsprechen.

Es kann gefordert werden:

$$\frac{\partial w_i(s)}{\partial s} \phi_i'(z) = (r_i(s) - \frac{1}{t} \psi_i) \phi_i'(z) \quad (4.26)$$

Daraus folgt bei Integration über  $s$ :

$$w_i(s) = \int_0^s r_i(s) ds - \int_0^s \frac{1}{t} \psi_i ds + w_0 \quad (4.27)$$

Es wird als Grundverwölbung definiert:

$$\hat{w}_i(s) = \int_0^s r_i(s) ds - \int_0^s \frac{1}{t} \psi_i ds \quad (4.28)$$

so daß aus (4.27) folgt:

$$w_i(s) = \hat{w}_i(s) + w_0 \quad (4.29)$$

Die Bestimmung der Konstanten  $w_0$  wird in Abschnitt 4.4 durchgeführt. Gleichung (4.28) ist identisch mit (4.7) aus Abschnitt 4.1.

### 4.3 Betrachtungen zum Näherungsansatz

Setzt man (4.23) in den Ausdruck für  $\tau_i$  nach (4.15) ein, so ergibt sich:

$$\tau_i = \frac{E}{t} (F_{w_i,0}(s) + \Phi_i) \phi_i'''(z) + \frac{G}{t} \psi_i \phi_i'(z) \quad (4.30)$$

Die beiden unterschiedlichen Anteile in  $\tau_i$  kann man getrennt betrachten:

$$\tau_{Di} = \frac{G}{t} \psi_i \phi_i'(z) \quad (4.31)$$

$$\tau_{Bi} = \frac{E}{t} (F_{w_i,0}(s) + \Phi_i) \phi_i'''(z) \quad (4.32)$$

Die Gleichung (4.31) beschreibt einen Anteil der Schubspannungen, der, wie in Abschnitt 4.1 gezeigt wurde, als allgemeiner Bredtscher

Schubfluß infolge Querschnittsverdrehungen deutbar ist. Der Index D soll an diese Drehungen erinnern. Gleichung (4. 32) gibt dagegen einen Schubspannungsanteil an, der aus der Veränderung der Längsspannungen  $\sigma_i$  resultiert (2. 8), somit mit der jeweiligen Verwölbung bzw. Wanddurchbiegung (4. 12) zusammenhängt. Der Index B soll an diese Biegewirkung erinnern. Man kann hierbei auch von "Wölbschubspannungen" sprechen.

Rein formal erinnern die Ausdrücke (4. 28), (4. 31) und (4. 32) an die Beziehungen, wie sie aus der Wölbkrafttorsionsberechnung bekannt sind, siehe z. B. Bornscheuer [11]. Sedlacek [4] hat diese Ansätze auch in seiner Arbeit an den Ausgangspunkt der Betrachtungen gesetzt, ohne jedoch auf die Berechtigung des Ansatzes einzugehen.

Ergänzend kann im Ausdruck für  $\tau_B$  noch eine Abkürzung eingeführt werden:

$$\text{mit } F_{wi}(s) = F_{wi,o}(s) + \phi_i \quad (4. 33)$$

$$\text{gilt } \tau_{Bi} = \frac{E}{t} F_{wi}(s) \phi_i'''(z) \quad (4. 34)$$

Dies ergibt auch für die mehrzelligen Querschnitte eine Schreibweise, wie sie für offene Profile geläufig ist.

Es fehlt noch eine nähere Erläuterung zum Ansatz von  $r_i(s)$  gemäß (4. 9). Im Abschnitt 4. 1 zeigte es sich, daß man Verzerrungs- und Verdrehungszustände unterscheiden kann mit den zugehörigen Größen  $r_{Vi}$  und  $r_{Ti}$  für die Einzelwände. Nach (4. 8) läßt sich  $r_i(s)$  anschreiben als:

$$r_i(s) = r_{Vi}(s) + \phi_{oi} r_{Ti}(s)$$

Setzt man dies in die Gleichung für  $\psi_i$  nach (4. 24) ein, so folgt daraus:

$$\oint_m \frac{1}{t} \psi_i ds = \oint_m r_{Vi}(s) ds + \phi_{oi} \oint_m r_{Ti}(s) ds \quad (4. 35)$$

Das Umlaufintegral  $\oint_m r_{Ti}(s) ds$  für die Starrkörperdrehung läßt sich auch als Flächeninhalt der Zelle m deuten:

$$\oint_m r_{Ti}(s) ds = 2 F_{m,m} \quad (4.36)$$

Im vorliegenden Fall gilt mit den allgemeinen Abmessungen nach Bild 2.5:

$$2 F_{m,j} = (a_j + b_j) h \quad (4.37)$$

Das Gleichungssystem (4.35) stellt sich somit dar als:

$$\begin{aligned} -\psi_{i,m-1} \int_{m-1,m} \frac{1}{t} ds + \psi_{i,m} \oint_m \frac{1}{t} ds - \psi_{i,m+1} \int_{m,m+1} \frac{1}{t} ds = \\ = \oint_m r_{Vi} ds + 2 F_{m,m} \vartheta_{oi} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Im Sonderfall  $\vartheta_{oi} = \vartheta_o = 1$  und aller  $r_V = 0$  liegt eine reine Starrkörperdrehung des Querschnitts vor. Aus (4.38) folgt das bekannte Gleichungssystem der Bredtschen Torsion:

$$-\psi_{m-1}^D \int_{m-1,m} \frac{1}{t} ds + \psi_m^D \oint_m \frac{1}{t} ds - \psi_{m+1}^D \int_{m,m+1} \frac{1}{t} ds = 2 F_{m,m}$$

Aus den Schubflüssen  $\psi_i$  nach (4.38) ergibt sich im allgemeinen Fall ein resultierendes Drehmoment  $M_{Ti}$  für jeden Profilverformungszustand  $i$ . Dieses Drehmoment läßt sich angeben als:

$$M_{Ti} = \int_F \tau_{Di} r_{Ti} dF \quad (4.39)$$

Will man jedoch kein resultierendes Drehmoment infolge einer Profilverformung zulassen, so muß eine entsprechende Gegendrehung des starren Querschnitts um den Winkel  $\vartheta_{oi}^*$  vorgenommen werden. Als gesamter Drehwinkel ergibt sich dann:

$$\vartheta_{oi} = \vartheta_{oi}^{PV} + \vartheta_{oi}^*$$

wenn mit  $\vartheta_{oi}^{PV}$  der Anteil gemäß (4.5) bezeichnet wird. Der Kopfzeiger PV kennzeichnet dabei die Herkunft aus der Profilverformung.

Diese zweite Drehung kann man bereits in die Bestimmung der Schubflüsse einbeziehen, indem man dem Gleichungssystem (4.38) mit  $\psi_i^{PV}$  noch das der Bredtschen Torsion infolge  $\vartheta_{oi}^*$  überlagert. Faßt man die

resultierenden Schubflüsse zu  $\psi_i$  zusammen:

$$\psi_i = \psi_i^{PV} + \psi_i^D \vartheta_{oi}^*$$

so erhält man erneut ein Gleichungssystem der Form (4. 38). Im Unterschied zu früher ist jetzt das neue  $\vartheta_{oi}$  nicht mehr von vornhinein bekannt und im allgemeinen Fall keiner der Schubflüsse gleich Null. Es müssen nun  $(n + 1)$  Unbekannte ermittelt werden. Die noch fehlende Bestimmungsgleichung ergibt sich aus der neuen Forderung  $M_{Ti} = 0$  mit (4. 31) und (4. 39):

$$\int_F \frac{1}{t} \psi_i r_{Ti} dF = 0 \quad (4. 40 a)$$

oder 
$$\int_s \psi_i r_{Ti} ds = 0$$

Wegen zellenweise konstantem  $\psi_i$  kann man dies mit (4. 36) umschreiben in:

$$\sum_{m=1}^n \psi_{i,m} F_{m,m} = 0 \quad (4. 40 b)$$

Aus (4. 38) und (4. 40 b) können alle  $\psi_i$  und  $\vartheta_{oi}$  ermittelt werden.

Diese zuletzt beschriebene Vorgehensweise ist vorteilhaft bei beliebigen, komplizierten Profilverformungszuständen und soll für die weitere Berechnung als Grundlage dienen. Durch die Entkopplung der Profilverformungen von der Torsion bezüglich des verschwindenden Drehmomentes  $M_{Ti}$  ist bereits eine weitere Teilorthogonalisierung vorgenommen worden, die zur Vereinfachung der Berechnung dient.

Aus dem Gleichungssystem (4. 38) kann man auch zu den Ansätzen von Sedlacek [4] gelangen, indem man anstelle von  $M_{Ti} = 0$  fordert:

$$\vartheta_{oi} = 0$$

d. h. der verzerrte Querschnitt soll keine Drehung durchführen.

Es ergibt sich dann:

$$-\psi_{i,m-1} \int_{m-1,m} \frac{1}{t} ds + \psi_{i,m} \oint_m \frac{1}{t} ds - \psi_{i,m+1} \int_{m,m+1} \frac{1}{t} ds = \oint_m r_{Vi} ds$$

, das der Formel (III. 4) von Sedlacek [4] entspricht.

Erst wenn man bei Sedlacek eine anschließende Orthogonalisierung bezüglich seiner Matrix  $J_s$  durchführt, trennt man Torsion und Profilverformung. Dies bedingt aber  $M_{Ti} = 0$ , welches auch aus (4.40 a) und (5.56) in Kapitel 5 folgt, und man gelangt danach zu denselben Profilverformungsansätzen wie in der vorliegenden Arbeit.

Sucht man unter allen möglichen Profilverformungszuständen nach einer ohne Schubanteile, d. h.  $\psi_i \equiv 0$ , so folgt bei identischer Erfüllung von (4.40) aus (4.38) die Forderung:

$$-2 F_{m,m} \delta_{oi} = \oint_m r_{Vi} ds$$

für alle Zellen. Es muß deshalb gelten:

$$\begin{aligned} -2 \delta_{oi} &= \frac{\oint r_{Vi} ds}{F_{m,1}} = \frac{\oint r_{Vi} ds}{F_{m,2}} = \dots = \frac{\oint r_{Vi} ds}{F_{m,m}} = \\ &= \dots = \frac{\oint r_{Vi} ds}{F_{m,n}} \end{aligned} \quad (4.41)$$

Beim Ansatz einer einzigen verformten Zelle  $i$  erhält man jedoch mit  $r_{Vi}$  nach Bild 4.1:

$$\oint_m r_{Vi} ds = 0 \quad \text{für alle } m \neq i$$

$$\text{und} \quad \oint_i r_{Vi} ds = -b_i h$$

Das steht im Widerspruch zur Forderung (4.41). Diese kann somit nur erfüllt werden, wenn in allen Zellen gleichzeitig Profilverformungen auftreten. Die einzelnen Wanddrehwinkel  $\delta_m$  lassen sich aus der Bedingung (4.41) berechnen. In Abhängigkeit von Zelle 1 ergibt sich:

$$\oint_m r_V ds = \frac{F_{m,m}}{F_{m,1}} \oint_1 r_V ds$$

Setzt man die Profilverformung gemäß Bild 3. 3 an, so gilt:

$$\oint_1 r_V ds = a_1 h$$

$$\oint_m r_V ds = a_m h + b_m h \delta_m$$

(siehe auch (3. 15)). Mit  $F_{m,j}$  gemäß (4. 37) ergibt sich bei einer Auflösung nach  $\delta_m$ :

$$\delta_m = \frac{1}{b_m} \left( \frac{a_m + b_m}{a_1 + b_1} a_1 - a_m \right)$$

bzw. nach weiterer Umformung:

$$\delta_m = \frac{a_1/b_1 - a_m/b_m}{1 + a_1/b_1} \quad \text{wie in (3. 20)}$$

Der in Kapitel 3 behandelte Sonderfall ist somit in den allgemeinen Ausdrücken enthalten und braucht nicht gesondert weiterverfolgt zu werden.

#### 4. 4 1. Stufe der Orthogonalisierung für die Längsverwölbungen infolge Profilverformung

Die Längsverwölbung  $w_i(s)$  ist nach (4. 29) bis auf eine Integrationskonstante  $w_0$  berechenbar. In der Wahl dieser Größe ist man noch frei, doch empfiehlt sich die Berücksichtigung der in Abschnitt 2. 7 gestellten Zusatzforderungen, um eine mögliche Trennung der Normalkraft- und Biegezustände bezüglich der Profilverformungen durchzuführen. Die sich ergebenden Ausdrücke entsprechen den bei der Torsionsberechnung starrer Querschnitte bekannten Formeln.

Die Forderungen nach (2. 14) und (2. 15) schreiben sich mit dem Ansatz (4. 12) als:

$$\left. \begin{aligned} \int_F \sigma_i dF = 0 & \quad \rightarrow \quad \int_F \bar{w}_i dF = 0 \\ \int_F \sigma_i x dF = 0 & \quad \rightarrow \quad \int_F \bar{w}_i x dF = 0 \\ \int_F \sigma_i y dF = 0 & \quad \rightarrow \quad \int_F \bar{w}_i y dF = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4. 42)$$

Der Querstrich über  $\bar{w}_i$  erinnert an die Erfüllung dieser drei Bedingungen. Die entsprechende Umrechnung von  $\hat{w}_i$  auf  $\bar{w}_i$  soll als

Orthogonalisierung 1. Stufe bezeichnet werden. Die erste Forderung von (4. 42) kann durch eine entsprechende Wahl der Konstanten  $w_o$  erfüllt werden. Bei der Auswirkung der Drehpunktverschiebung dagegen sei an die Wölbkrafttorsion erinnert mit der Festlegung von  $x_M$  und  $y_M$ , d. h. der Lage des Schubmittelpunktes. Bei den Profilverformungen wird entsprechend ein "Verzerrungsruhepunkt" ermittelt, wie Hees dies in [ 7 ] für einen einzelligen Kasten gezeigt hat. Dieser Punkt hat aber nur eine geringe Bedeutung für die Berechnung einer Profilverformung, da durch Überlagerung mit den  $r_V$  jede Wand einen anderen Drehwinkel um diesen Punkt besitzt. Für jedes  $\phi_i$  gibt es außerdem einen anderen Verzerrungsnullpunkt.

Hier wird die Orthogonalisierung als Superposition von Translationen des Querschnitts in der x- bzw. y-Richtung bei entsprechender Überlagerung der zugehörigen Koordinaten dargestellt, die anschließend formelmäßig bestimmt werden.

$$\bar{w}_i = \hat{w}_i + w_{io} + k_{ix} x + k_{iy} y \quad (4. 43)$$

Ferner wird vorausgesetzt, daß x und y bereits orthogonale Hauptkoordinaten des Querschnitts sind, daß also auch für sie gilt:

$$\int_F x \, dF = 0 \quad , \quad \int_F y \, dF = 0$$

und außerdem noch:

$$\int_F x y \, dF = 0 \quad (4. 44)$$

Aus (4. 42) folgt mit (4. 43):

$$\int_F \bar{w}_i \, dF = 0 = \int_F \hat{w}_i \, dF + w_{io} \int_F dF + k_{ix} \int_F x \, dF + k_{iy} \int_F y \, dF$$

$$\int_F \bar{w}_i x \, dF = 0 = \int_F \hat{w}_i x \, dF + w_{io} \int_F x \, dF + k_{ix} \int_F x^2 \, dF + k_{iy} \int_F x y \, dF$$

$$\int_F \bar{w}_i y \, dF = 0 = \int_F \hat{w}_i y \, dF + w_{io} \int_F y \, dF + k_{ix} \int_F x y \, dF + k_{iy} \int_F y^2 \, dF$$

Mit den Abkürzungen nach Bornscheuer [11] erhält man:

$$\left. \begin{aligned}
 w_{io} &= - \frac{\int_F \hat{w}_i dF}{\int_F dF} = - \frac{\hat{F}_{wi}}{F} \\
 k_{ix} &= - \frac{\int_F \hat{w}_i x dF}{\int_F x^2 dF} = - \frac{\hat{F}_{xwi}}{F_{xx}} \\
 k_{iy} &= - \frac{\int_F \hat{w}_i y dF}{\int_F y^2 dF} = - \frac{\hat{F}_{ywi}}{F_{yy}}
 \end{aligned} \right\} (4.45)$$

Für die weiteren Untersuchungen wird ebenfalls gefordert, daß die Längsverwölbung  $w(s)$  infolge Wölbkrafttorsion in gleicher Weise orthogonalisiert ist, wie hier für die Profilverformungen gezeigt wurde.

Zusammen mit den Längsverwölbungen  $\hat{w}_i$  werden auch die zugehörigen Drehradien  $\hat{r}_i$  transformiert. Gemäß (4.26) folgt für  $\bar{r}_i(s)$ :

$$\bar{r}_i(s) = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial s} + \frac{1}{t} \bar{\psi}_i$$

bzw.

$$\hat{r}_i(s) = \frac{\partial \hat{w}_i}{\partial s} + \frac{1}{t} \hat{\psi}_i$$

Da bei den vorgenommenen Superpositionen nur Translationen des Querschnitts vorgenommen werden, treten keine neuen Drehschubflüsse auf. Somit ändern sich die  $\psi_i$ -Größen nicht. Es gilt:

$$\bar{\psi}_i = \hat{\psi}_i$$

Daraus folgt:

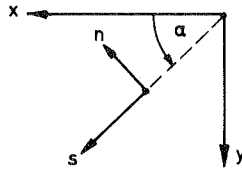
$$\bar{r}_i(s) = \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial s} + \frac{1}{t} \hat{\psi}_i + \frac{\partial w_{io}}{\partial s} + k_{ix} \frac{\partial x}{\partial s} + k_{iy} \frac{\partial y}{\partial s}$$

oder:

$$\bar{r}_i(s) = \hat{r}_i(s) + k_{ix} \sin \alpha + k_{iy} \cos \alpha \quad (4.46)$$



Der Winkel  $\alpha$  wird dabei nach Bild 4.5 von s- und x-Achse eingeschlossen und ist für jede ebene Wand ein konstanter Wert.



$$\frac{dx}{ds} = \sin \alpha$$

$$\frac{dy}{ds} = \cos \alpha$$

Bild 4.5: Definition des Winkels  $\alpha$

5. Berechnung eines mehrzelligen Faltwerks bei Berücksichtigung der Drehschubflüsse

5.1 Ansätze in Matrizenschreibweise

Im folgenden sollen alle diejenigen Verschiebungsgrößen eines Faltwerks, die Querschnittverschiebungen oder Querschnittsverformungen beschreiben, in einem Spaltenvektor zusammengefaßt werden:

$$\bar{\mathbf{v}}^T = (v_x \quad v_y \quad \vartheta \quad \bar{\vartheta}_1 \quad \bar{\vartheta}_2 \quad \dots \quad \bar{\vartheta}_i \quad \dots \quad \bar{\vartheta}_n) \quad (5.1)$$

Die Verschiebung einer Wand läßt sich nach (4. 9) und (4. 11) anschreiben als:

$$v_s(s, z) = \bar{\mathbf{r}}^T \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{r}} \quad (5.2)$$

Der Querstrich erinnert an die durchgeführte Orthogonalisierung 1. Stufe, der Spaltenvektor  $\bar{\mathbf{r}}$  faßt alle Drehradien einer Wand zusammen.

$$\bar{\mathbf{r}}^T = (\sin\alpha \quad \cos\alpha \quad r_T \quad \bar{r}_1 \quad \bar{r}_2 \quad \dots \quad \bar{r}_i \quad \dots \quad \bar{r}_n) \quad (5.3)$$

mit  $r_i$  nach (4. 8):

$$r_i = r_{Vi} + \vartheta_{oi} r_{Ti} \quad (5.4)$$

Für den Anteil dieser Querverschiebungszustände an der Längsverschiebung erhält man aus dem Ansatz (4. 10) bzw. (4. 11):

$$v_z(s, z) = - \bar{\mathbf{k}}^T \bar{\mathbf{v}} = - \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{k}} \quad (5.5)$$

mit dem Spaltenvektor der "Koordinaten" eines Punktes:

$$\bar{\mathbf{k}}^T = (x \quad y \quad w \quad \bar{w}_1 \quad \bar{w}_2 \quad \dots \quad \bar{w}_i \quad \dots \quad \bar{w}_n) \quad (5.6)$$

Für x, y und w werden im folgenden stets orthogonale Hauptkoordinaten vorausgesetzt.

Die in (5. 5) angegebene Längsverschiebung enthält keine Anteile aus der Längskraftbeanspruchung des Trägers, die über den Querschnitt

gleichmäßig verteilt wirkt. Diese Beanspruchungsart ist folglich für eine Gesamtlösung getrennt zu berechnen und den anderen Kraftwirkungen zu überlagern.

Ermöglicht wird diese Trennung durch die Orthogonalisierung 1. Stufe mit der Forderung  $\int_F \sigma_i dF = 0$  für jede einzelne Profilverformung.

Für die gesamte Längsverschiebung gilt dann:

$$v_{z, \text{gesamt}} = v_z + v_{z, N} \quad (5.7)$$

Es besteht neben der hier angegebenen Vorgehensweise auch die Möglichkeit,  $v_{z, N}$  in den Vektor  $\mathbf{v}$  mit aufzunehmen. Dies bedarf einiger formaler Umschreibungen und bringt für die Lösung des Problems keinerlei Erleichterung. Die Matrizenausdrücke werden nur größer und unhandlicher.

Für  $v_{z, N}$  gelten die aus der Stabstatik bekannten Beziehungen bei einer vorhandenen Längsbelastung  $p(s, z)$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Längsspannung:} \quad \sigma_N = E \epsilon_N = E \frac{\partial v_{z, N}}{\partial z} = E v'_{z, N} \\ \text{Längskraft:} \quad \int_F \sigma_N dF = E F v'_{z, N} = N(z) \\ \text{Schubspannung:} \quad \tau_N = - \frac{E}{t} F(s) v''_{z, N} \\ \text{bzw. :} \quad \tau_N = \frac{1}{F t} F(s) \int_s p(s, z) ds \\ \text{Differentialgleichung:} \quad E F v''_{z, N} = - \int_s p(s, z) ds \end{array} \right\} (5.8)$$

Außerdem bringt die verteilte Längsbelastung für die Berechnung der Profilverformungen mit näherungsweise Berücksichtigung der Wölbschubspannungen zusätzliche Probleme mit sich, wie in Kapitel 6 gezeigt wird.

Nach der hier gewählten Vorgehensweise sind auch bei den Längs- und Schubspannungen später die Anteile aus  $v_{z, N}$  zu superponieren:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\text{ges}} &= \sigma + \sigma_N \\ \tau_{\text{ges}} &= \tau + \tau_N \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Unter  $\sigma$  und  $\tau$  werden im weiteren Teil der Arbeit nur die Anteile infolge der Querverschiebungen des Faltwerks verstanden.

Für die Längsdehnung infolge der Querverschiebungen folgt aus Gleichung (5.5):

$$\epsilon = - \bar{\mathbf{k}}^T \bar{\mathbf{v}} = - \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{k}} \quad (5.10)$$

und für die Längsspannung mit dem Hookeschen Gesetz:

$$\sigma = E \epsilon = - E \bar{\mathbf{k}}^T \bar{\mathbf{v}} = - E \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{k}} \quad (5.11)$$

Als weitere Spaltenvektoren werden definiert:

der Vektor der Schubflüsse aus Drehung (allgemeine Bredtsche Schubflüsse):

$$\bar{\boldsymbol{\psi}}^T = (0 \quad 0 \quad \psi \quad \psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \psi_i \quad \dots \quad \psi_n) \quad (5.12)$$

und der Vektor der Schubkoordinaten:

$$\bar{\mathbf{f}}^T = (F_x(s) \quad F_y(s) \quad F_w(s) \quad \bar{F}_{w1}(s) \quad \bar{F}_{w2}(s) \quad \dots \quad \bar{F}_{wi}(s) \quad \dots \quad \bar{F}_{wn}(s)) \quad (5.13)$$

Für die Schubspannungen erhält man gemäß Gleichung (4.30) in Erweiterung auf die Biegezustände:

$$\tau = \frac{G}{t} \bar{\boldsymbol{\psi}}^T \bar{\mathbf{v}} + \frac{E}{t} \bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{v}} = \frac{G}{t} \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\boldsymbol{\psi}} + \frac{E}{t} \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (5.14)$$

Für die beiden Anteile von  $\tau$  gilt nach (4.31) und (4.32):

Drehschubspannungen:

$$\tau_D = \frac{G}{t} \bar{\boldsymbol{\psi}}^T \bar{\mathbf{v}} = \frac{G}{t} \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\boldsymbol{\psi}} \quad (5.15)$$

und Biegeschubspannungen:

$$\tau_B = \frac{E}{t} \bar{\mathbf{f}}^T \bar{\mathbf{v}} = \frac{E}{t} \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{f}} \quad (5.16)$$

Insgesamt ergibt sich  $\tau$  als:

$$\tau = \tau_D + \tau_B \quad (5.17)$$

### 5.2 Querbiegemomente bei Profilverformungen

In den früheren Abschnitten wurde die Biegesteifigkeit der Einzelwände in Querrichtung noch nicht berücksichtigt, da diese für die Ermittlung der Längsverwölbungen bedeutungslos war. Die Darstellung der Verformungsfiguren konnte deshalb am Gelenkwerk erfolgen.

Wie in Abschnitt 2.1 bereits erwähnt, soll keine genauere Plattenberechnung vorgenommen werden, sondern in Anlehnung an Wlassow [13] und [14], Hees [7], Sedlacek [4] u. a. werden die Plattenbiegemomente in Längsrichtung vernachlässigt. Damit vereinfacht sich die Plattenberechnung auf den Ansatz von Biegeträgern in Querrichtung, die für das gesamte Tragwerk viele dicht hintereinander liegende Querrahmen bilden.

Für diese Rahmen der Breite 1 müssen infolge der Profilverformungszustände  $\hat{\delta}_1 = 1$  die zugehörigen Querbiegemomente berechnet werden. Bei mehrzelligen Kastenquerschnitten empfiehlt sich dabei das Verschiebungsgrößenverfahren. Die Rahmen sind für jeden einzelnen Lastzustand in ihrer Ebene unverschiebbar. Es müssen nur Knotendrehwinkel infolge der Einheitsverschiebungszustände ermittelt werden.

Die Biegesteifigkeit eines Wandstreifens der Breite 1 beträgt:

$$J = t^3 / 12$$

Um die Plattenwirkung pauschal zu berücksichtigen, kann man wegen:

$$J_{\text{Platte}} = J_{\text{Balken}} / (1 - \mu^2)$$

ansetzen:

$$J_Q = \frac{t^3}{12 (1 - \mu^2)} \quad (5.18)$$

Mit diesem Wert für  $J_Q$  nach (5.18) wird die weitere Berechnung der Querbiegemomente durchgeführt.

Für die zugehörigen Querbiegemomente infolge der Profilverformungen  $\hat{\theta}_i = 1$  sind nicht die absoluten Größen der einzelnen Wanddrehwinkel  $\hat{\Delta}_{j,i}^*$  von Bedeutung, sondern die "relativen" Drehwinkel  $\hat{\Delta}_{j,i}$ . Diese beschreiben die Verdrehungen aller Einzelwände bezogen auf eine bestimmte, als ruhend gedachte Wand. Eine eventuelle bei der Profilverformung überlagerte Gesamtverdrehung des Querschnitts infolge  $\theta$  aus Torsion bzw.  $\theta_{oi}$  nach (4.38) hat auf die Querbiegemomente keinen Einfluß.

Bezeichnet man die Bezugswand mit k und deren absoluten Drehwinkel mit  $\hat{\Delta}_{k,i}^*$ , so gilt für die relativen Wanddrehwinkel:

$$\hat{\Delta}_{j,i} = \hat{\Delta}_{j,i}^* - \hat{\Delta}_{k,i}^*$$

und  $\hat{\Delta}_{k,i} = 0$

In Abhängigkeit aller Verschiebungszustände kann man für die relativen Wanddrehwinkel  $\hat{\Delta}_j$  der  $(3n+1)$  Wände eines n-zelligen Querschnitts ansetzen:

$$\hat{\Delta}_j = \hat{d}_j^T \hat{v} \quad (5.19)$$

mit dem Zuordnungsvektor:

$$\hat{d}_j^T = (0 \ 0 \ 0 \ \hat{\Delta}_{j,1} \ \hat{\Delta}_{j,2} \ \dots \ \hat{\Delta}_{j,i} \ \dots \ \hat{\Delta}_{j,n}) \quad (5.20)$$

Faßt man alle  $\hat{\Delta}_j$  in einem Vektor  $\hat{\delta}$  zusammen:

$$\hat{\delta}^T = (\hat{\Delta}_1, \hat{\Delta}_2 \ \dots \ \hat{\Delta}_j \ \dots \ \hat{\Delta}_{3n+1}) \quad (5.21)$$

und führt die Zuordnungsmatrix  $\hat{D}$  ein mit:

$$\hat{D}^T = (\hat{d}_1 \ \hat{d}_2 \ \dots \ \hat{d}_j \ \dots \ \hat{d}_{3n+1}) \quad (5.22)$$

so kann man insgesamt anschreiben:

$$\hat{\delta} = \hat{D} \hat{v} \quad (5.23)$$

Wegen des speziellen Aufbaues der Vektoren  $\hat{d}_j$  mit den Nullwerten infolge der Verschiebungen  $v_x$  bzw.  $v_y$  und der Verdrehung  $\theta$ , ändert

sich  $\bar{\delta}$  auch nicht bei der Orthogonalisierung 1. Stufe. Es gilt somit:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta} &= \hat{\delta} \\ \bar{D} &= \hat{D} \\ \bar{\delta} &= \bar{D} \bar{v} \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Die weitere Berechnung der Querbiegemomente nach dem Verschiebungsgrößenverfahren braucht hier nicht dargestellt zu werden. Die danach ermittelten Wandbiegemomente in einem beliebigen Punkt lassen sich angeben als:

$$m_{Q,i} = \bar{b}_i^T \bar{v} = \bar{v}^T \bar{b}_i \quad (5.25)$$

mit dem Vektor der einzelnen Biegeanteile infolge der Verschiebungszustände  $i$ :

$$\bar{b}_i^T = (0 \ 0 \ 0 \ \bar{b}_1^* \ \bar{b}_2^* \ \dots \ \bar{b}_i^* \ \dots \ \bar{b}_n^*) \quad (5.26)$$

Die Anteile von  $v_x$ ,  $v_y$  und  $\theta$  sind auch hier identisch Null.

Größere Bedeutung besitzen die Querbiegemomente direkt neben den Knoten, dabei dem linearen Verlauf alle übrigen Momentenwerte interpolierbar sind. Faßt man diese  $2(3n+1)$  Wandendmomente im Vektor  $m_Q$  zusammen nach der Definition:

$$m_Q^T = (m_{Q,1} \ m_{Q,2} \ \dots \ m_{Q,k} \ \dots \ m_{Q,2(3n+1)}) \quad (5.27)$$

so kann man diese Endmomente in Abhängigkeit von  $\bar{v}$  angeben:

$$m_Q = \bar{M} \bar{v} \quad (5.28)$$

Für  $\bar{M}$  gilt wegen (5.25) und (5.27):

$$\bar{M}^T = (\bar{b}_1 \ \bar{b}_2 \ \dots \ \bar{b}_k \ \dots \ \bar{b}_{2(3n+1)}) \quad (5.29)$$

Die Querbiegespannungen errechnen sich aus den  $m_Q$  durch Division mit dem Widerstandsmoment der Wand zu:

$$\sigma_Q = 6 m_Q / t^3 \quad (5.30)$$

### 5.3 Herleitung des Differentialgleichungssystems

Die Herleitung des Differentialgleichungssystems erfolgt mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen für einen Träger der Länge  $l$ . Als virtuelle Verschiebungen werden die Querverschiebungszustände  $\delta \bar{\mathbf{V}}$  angesetzt. Man erhält auf diese Weise eine Gleichgewichtsaussage für jeden einzelnen Profilverformungszustand. Berücksichtigt werden die Arbeitsanteile infolge der Längsdehnungen, Schubverzerrungen und Querbiegemomente. Dafür lautet die virtuelle innere Arbeit allgemein:

$$\delta A_i = - \int_{z=0}^l \left[ \int_F \sigma \delta \epsilon \, dF + \int_F \tau \delta \gamma \, dF + \int_S m_Q \delta \kappa_Q \, ds \right] dz \quad (5.31)$$

Neben den Längsspannungen  $\sigma$  nach (5.11) werden bei der Arbeit für die Schubspannungen lediglich die  $\tau_D$ -Anteile aus der Drehung nach (5.15) berücksichtigt. Der Anteil der Wölbschubspannungen  $\tau_B$  wird in diesem Abschnitt vernachlässigt.

Die drei auftretenden Arbeitsterme werden einzeln betrachtet und umgeformt.

Untersuchung des 1. Terms der inneren Arbeit infolge Längsspannungen  $\sigma$  und virtuellen Längsdehnungen  $\delta \epsilon$ :

$$\int_F \sigma \delta \epsilon \, dF = \int_F \delta \epsilon \sigma \, dF = \int_F (-\delta \bar{\mathbf{V}}'^T \bar{\mathbf{k}}) (-E \bar{\mathbf{k}}^T \bar{\mathbf{V}}) \, dF$$

Mit der Definition:

$$\bar{\mathbf{F}} = \int_F \bar{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}^T \, dF \quad (5.32)$$

erhält man:

$$\int_F \sigma \delta \epsilon \, dF = \delta \bar{\mathbf{V}}'^T E \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{V}} \quad (5.33)$$

Für den 2. Term der virtuellen inneren Arbeit, den Schubanteil, ergibt sich entsprechend:

$$\int_F \tau \delta \gamma \, dF = \int_F \delta \gamma \tau \, dF = \int_F (\delta \bar{\mathbf{V}}'^T \frac{1}{t} \bar{\Psi}) (\frac{G}{t} \bar{\Psi}^T \bar{\mathbf{V}}) \, dF$$



Mit Einführung von:

$$\bar{\mathbf{J}} = \int_{\mathbf{F}} \frac{1}{t^2} \bar{\boldsymbol{\Psi}} \bar{\boldsymbol{\Psi}}^T d\mathbf{F} \quad (5.34)$$

gilt:

$$\int_{\mathbf{F}} \tau \delta \gamma d\mathbf{F} = \delta \bar{\mathbf{v}}'^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}' \quad (5.35)$$

Der 3. Term erfasst die Querbiegesteifigkeit des Faltwerks. Für  $\delta \kappa_Q$  ist einzusetzen:

$$\delta \kappa_Q = \frac{1}{EJ_Q} \delta m_Q$$

wie dies vom Biegeträger bekannt ist. Es ergibt sich mit (5.25):

$$\int_{\mathbf{s}} m_Q \delta \kappa_Q ds = \int_{\mathbf{s}} \frac{1}{EJ_Q} \delta m_Q m_Q ds = \delta \bar{\mathbf{v}}'^T \int_{\mathbf{s}} \frac{1}{EJ_Q} \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{b}}^T ds \bar{\mathbf{v}}'$$

Auch hier führt man als neue Größe ein:

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{E} \int_{\mathbf{s}} \frac{1}{EJ_Q} \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{b}}^T ds \quad (5.36)$$

und erhält damit:

$$\int_{\mathbf{s}} m_Q \delta \kappa_Q ds = \delta \bar{\mathbf{v}}'^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{v}}' \quad (5.37)$$

Anstatt eine Integration der Querbiegemomente nach (5.36) vorzunehmen, ist es vorteilhafter, auf das Gelenkwerk als Grundsystem für den virtuellen Verschiebungszustand zurückzugehen und so die Matrix  $\bar{\mathbf{B}}$  zu berechnen. Das führt anstelle der Integration auf eine Summation über die Endmomente der einzelnen Wandabschnitte. Bei der Aufstellung von Rechenprogrammen ist diese Vorgehensweise wesentlich einfacher und übersichtlicher.

Man erhält nach dem Reduktionssatz der Statik am stabilisierten Gelenksystem:

$$\int_{\mathbf{s}} m_Q \delta \kappa_Q ds = - \sum (m_{Q, ik} + m_{Q, ki}) \Delta_{ik}$$



mit  $\delta \bar{\mathbf{v}}''^T$  zweimal und der 2. Term mit  $\delta \bar{\mathbf{v}}'^T$  einmal.

$$\begin{aligned} \delta A_i = & - \int_{z=0}^{\ell} [\delta \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' - \delta \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}'' + \delta \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{v}}] dz + \\ & - [\delta \bar{\mathbf{v}}'^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}]_0^{\ell} + \\ & - [\delta \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' + \delta \bar{\mathbf{v}}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}']_0^{\ell} \end{aligned} \quad (5.41)$$

Die virtuelle äußere Arbeit lautet allgemein bei einer Querbelastrung  $q(s, z)$ , einer Längsbelastung  $p(s, z)$  und entsprechenden Randbelastungen  $q_R(s)$  bzw.  $p_R(s)$  an den Rändern  $z = 0$  und  $z = \ell$ :

$$\begin{aligned} \delta A_a = & \int_{z=0}^{\ell} [\int_s q \delta v_s ds + \int_s p \delta v_z ds] dz + \\ & + [\int_s q_R \delta v_s ds + \int_s p_R \delta v_z ds]_0^{\ell} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Für die virtuellen Verschiebungen werden die Gleichungen (5.2) und (5.5) zugrunde gelegt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta A_a = & \int_{z=0}^{\ell} [\int_s \delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{r}} q ds + \int_s (-\delta \bar{\mathbf{v}}'^T \bar{\mathbf{k}}) p ds] dz + \\ & + [\int_s \delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{r}} q_R ds + \int_s (-\delta \bar{\mathbf{v}}'^T \bar{\mathbf{k}}) p_R ds]_0^{\ell} \end{aligned}$$

Als Abkürzungen werden folgende Lastvektoren eingeführt:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}} &= \int_s \bar{\mathbf{r}} q ds \\ \bar{\mathbf{p}} &= \int_s \bar{\mathbf{k}} p ds \\ \bar{\mathbf{q}}_R &= \int_s \bar{\mathbf{r}} q_R ds \\ \bar{\mathbf{p}}_R &= \int_s \bar{\mathbf{k}} p_R ds \end{aligned} \quad (5.43)$$

Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \delta A_a = & \int_{z=0}^{\ell} [\delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{q}} - \delta \bar{\mathbf{v}}'^T \bar{\mathbf{p}}] dz + \\ & + [\delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{q}}_R - \delta \bar{\mathbf{v}}'^T \bar{\mathbf{p}}_R]_0^{\ell} \end{aligned}$$

Auch hier ist eine partielle Integration erforderlich. Danach gilt:

$$\begin{aligned} \delta A_a = & \int_{z=0}^{\ell} [\delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{q}} + \delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{p}}'] dz + \\ & + [-\delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{p}}_R]_0^{\ell} + [\delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{q}}_R - \delta \bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{p}}]_0^{\ell} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Als gesamte virtuelle Arbeit erhält man:

$$\delta A_{\text{ges}} = \delta A_a + \delta A_i$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen muß  $\delta A_{\text{ges}}$  gleich Null sein. Mit (5.44) und (5.41) folgt:

$$\begin{aligned} 0 = & - \int_{z=0}^{\ell} \delta \bar{\mathbf{v}}^T (\mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' - \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}' + \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{p}}') dz + \\ & - [\delta \bar{\mathbf{v}}^T (\mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}' + \bar{\mathbf{p}}_R)]_0^{\ell} + \\ & - [\delta \bar{\mathbf{v}}^T (-\mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}''' + \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}' - \bar{\mathbf{q}}_R + \bar{\mathbf{p}})]_0^{\ell} \end{aligned}$$

Damit dies für beliebige  $\delta \bar{\mathbf{v}}$  erfüllt ist, müssen die einzelnen Ausdrücke in den runden Klammern jeweils für sich gleich Null sein. Man erhält das gesuchte Differentialgleichungssystem:

$$\mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' - \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}' + \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{p}}' \quad (5.45)$$

sowie die Randbedingungen für  $z = 0$  und  $z = \ell$ :

$$-\mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' = \bar{\mathbf{p}}_R \quad (5.46)$$

$$-\mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}''' + \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}' = \bar{\mathbf{q}}_R - \bar{\mathbf{p}} \quad (5.47)$$

Aus diesen Randbedingungen lassen sich die allgemeinen Schnittgrößen des Falterwerks definieren.

#### 5.4 Schnittgrößen der Kastenträger

Die in den beiden Randbedingungsansagen (5.46) und (5.47) auf der linken Seite auftretenden Ausdrücke lassen sich mit in der Stabstatik bekannten Schnittgrößen identifizieren.

Setzt man nach (5.46) an:

$$\bar{\mathbf{m}} = -E \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' \quad (5.48)$$

so bleibt zu zeigen, daß man damit eine allgemeine Definition der Biege- und Bimomente vorgenommen hat.

Für die Biegemomente eines Trägers gilt:

$$M_x = \int_F \sigma x \, dF$$

$$M_y = \int_F \sigma y \, dF$$

und für das Bimoment aus der Wölbkrafttorsion:

$$M_w = \int_F \sigma w \, dF$$

Erweitert man entsprechend für die Profilverformung und bezeichnet:

$$M_{wi} = \int_F \sigma w_i \, dF \quad (5.49)$$

als Bimoment der Profilverformung  $i$ , so kann man zusammenfassend schreiben:

$$\bar{\mathbf{m}}^* = \int_F \sigma \bar{\mathbf{k}} \, dF = \int_F \bar{\mathbf{k}} \sigma \, dF$$

Mit (5.11) zusammen ist es möglich, umzuformen in:

$$\bar{\mathbf{m}}^* = -E \int_F \bar{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}^T \, dF \bar{\mathbf{v}}'' = -E \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' = \bar{\mathbf{m}}$$

Somit ist durch (5.48) der Spaltenvektor der Biege- und Bimomente festgelegt:

$$\bar{\mathbf{m}}^T = (M_x \quad M_y \quad M_w \quad \bar{M}_{w1} \quad \dots \quad \bar{M}_{wi} \quad \dots \quad \bar{M}_{wn}) \quad (5.50)$$

Entsprechend kann man aus (5.47) gewinnen:

$$\bar{\mathbf{t}} = -E \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}''' + G \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}' \quad (5.51)$$

Dieser Ausdruck soll verglichen werden mit den bekannten Querkräften eines Biegeträgers:

$$Q_x = \int_F \tau \sin \alpha \, dF$$

$$Q_y = \int_F \tau \cos \alpha \, dF$$

und dem Torsionsmoment:

$$M_T = \int_F \tau r_T \, dF$$

Definiert man ferner, wie z. B. Hees in [7], ein Verzerrungsmoment der i-ten Profilverformung:

$$M_{Vi} = \int_F \tau r_i \, dF \quad (5.52)$$

so kann man alle diese Größen zusammenfassen in:

$$\bar{\mathbf{t}}^* = \int_F \tau \bar{\mathbf{r}} \, dF = \int_F \bar{\mathbf{r}} \tau \, dF$$

Mit (5.14) ergibt sich weiter:

$$\bar{\mathbf{t}}^* = G \int_F \frac{1}{t} \bar{\mathbf{r}} \bar{\Psi}^T \, dF \bar{\mathbf{v}}^I + E \int_F \frac{1}{t} \bar{\mathbf{r}} \bar{\mathbf{f}}^T \, dF \bar{\mathbf{v}}^{III} \quad (5.53)$$

Zum Vergleich mit (5.51) bedarf es noch einiger Umformungen. Nach (4.26) folgt mit (5.6):

$$\frac{\partial}{\partial s} \bar{\mathbf{k}} = \bar{\mathbf{k}}' = \bar{\mathbf{r}} - \frac{1}{t} \bar{\Psi}$$

bzw. 
$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{k}}' + \frac{1}{t} \bar{\Psi} \quad (5.54)$$

Setzt man (5.54) in den 1. Term von (5.53) ein und integriert partiell den Ausdruck mit  $\bar{\mathbf{k}}'$ , so erhält man:

$$\int_F \frac{1}{t} \bar{\mathbf{r}} \bar{\Psi}^T \, dF = \int_s \bar{\mathbf{k}}' \bar{\Psi}^T \, ds + \int_F \frac{1}{t^2} \bar{\Psi} \bar{\Psi}^T \, dF$$

$$\int_F \frac{1}{t} \bar{\mathbf{r}} \bar{\Psi}^T \, dF = \bar{\mathbf{k}} \bar{\Psi}^T \Big|_a^e - \int_s \bar{\mathbf{k}} \bar{\Psi}^T \, ds + \int_F \frac{1}{t^2} \bar{\Psi} \bar{\Psi}^T \, dF$$

Die Ableitung  $\bar{\Psi}^T$  muß nach der Definition der Schubflüsse stets gleich Null sein, ebenso der Ausdruck  $\bar{\mathbf{k}} \bar{\Psi}^T$  wegen Kontinuität in  $\bar{\mathbf{k}}$  und  $\bar{\Psi}$  an einer beliebigen Schnittstelle a/e. Es gilt:

$$\int_s \bar{\mathbf{k}}' \bar{\Psi}^T \, ds = 0 \quad (5.55)$$

Zusammengefaßt folgt mit (5.34):

$$\int_{\mathbb{F}} \frac{1}{t} \bar{r} \bar{\Psi}^T dF = \bar{J} \quad (5.56)$$

Eine entsprechende Umformung für den zweiten Term in (5.53) ergibt:

$$\int_{\mathbb{F}} \frac{1}{t} \bar{r} \bar{f}^T dF = \int_{\mathbb{F}} \bar{k} \cdot \bar{f}^T ds + \int_s \frac{1}{t} \bar{\Psi} \bar{f}^T ds$$

Da  $\bar{\Psi}$  zellenweise konstant ist, folgt:

$$\int_s \frac{1}{t} \bar{\Psi} \bar{f}^T ds = \sum_{m=1}^n \bar{\Psi}_m \int_m \frac{1}{t} \bar{f}^T ds$$

mit (4.24) und (4.33) gilt aber:

$$\int_m \frac{1}{t} F_{w_i}(s) ds = \int_m \left( \frac{1}{t} F_{w_i,0}(s) + \frac{1}{t} \Phi_i \right) ds = 0$$

oder gemäß der Definition von  $\bar{f}$  in (5.13):

$$\int_s \frac{1}{t} \bar{\Psi} \bar{f}^T ds = 0 \quad (5.57)$$

Man erhält damit:

$$\int_{\mathbb{F}} \frac{1}{t} \bar{r} \bar{f}^T dF = \int_s \bar{k} \cdot \bar{f}^T ds \quad (5.58)$$

Nach einer partiellen Integration folgt:

$$\int_{\mathbb{F}} \frac{1}{t} \bar{r} \bar{f}^T dF = \bar{k} \bar{f}^T \Big|_a^e - \int_s \bar{k} \cdot \bar{f}^T ds$$

Auch hier ist der erste Ausdruck der rechten Seite für eine beliebige Stelle  $a/e$  wegen der Kontinuität von  $\bar{k}$  und  $\bar{f}$  identisch Null.

Im 2. Term kann gemäß (4.14) angesetzt werden:

$$\frac{\partial}{\partial s} \bar{f} = \bar{f} \cdot = \bar{k} t$$

Insgesamt erhält man mit (5.32):

$$\int_{\mathbb{F}} \frac{1}{t} \bar{r} \bar{f}^T dF = - \int_{\mathbb{F}} \bar{k} \bar{k}^T dF = - \bar{F} \quad (5.59)$$

Setzt man (5.56) und (5.59) in (5.53) ein, so folgt:

$$\bar{\mathbf{t}}^* = \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}' - \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' = \bar{\mathbf{t}}$$

Der Spaltenvektor  $\bar{\mathbf{t}}$  enthält die Querkräfte, Torsions- und Verzer-  
rungs Momente:

$$\bar{\mathbf{t}}^T = (Q_x \quad Q_y \quad M_T \quad \bar{M}_{V1} \dots \bar{M}_{Vi} \dots \bar{M}_{Vn}) \quad (5.60)$$

Entsprechend den Schubspannungen kann auch hier eine Aufteilung vor-  
genommen werden in Drehanteile  $\bar{\mathbf{t}}_D$

$$\text{mit: } \bar{\mathbf{t}}_D^T = (0 \quad 0 \quad M_{TP} \quad \bar{M}_{V1D} \dots \bar{M}_{ViD} \dots \bar{M}_{VnD}) \quad (5.61)$$

und Biege- bzw. Wölbanteile  $\bar{\mathbf{t}}_B$

$$\text{mit: } \bar{\mathbf{t}}_B^T = (Q_x \quad Q_y \quad M_{TS} \quad \bar{M}_{V1B} \dots \bar{M}_{ViB} \dots \bar{M}_{VnB}) \quad (5.62)$$

wobei angesetzt wird:

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{t}}_D + \bar{\mathbf{t}}_B \quad (5.63)$$

Im Fall der Wölbkrafttorsion sind die dort üblichen Bezeichnungen  $M_{TP}$  für "primäres" Torsionsmoment und  $M_{TS}$  für "sekundäres" Tor-  
sionsmoment eingefügt worden. Es gilt dann:

$$\bar{\mathbf{t}}_D = \mathbf{G} \bar{\mathbf{J}} \bar{\mathbf{v}}' \quad (5.64)$$

$$\bar{\mathbf{t}}_B = -\mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \bar{\mathbf{v}}'' = \bar{\mathbf{m}}' \quad (5.65)$$

Die letzte Beziehung folgt unmittelbar aus (5.48).

Es besteht die Möglichkeit, die Längsspannungen  $\sigma$  in Abhängigkeit von  
den zuvor definierten Schnittgrößen anzugeben. Dies bedingt aber die  
Invertierbarkeit von  $\bar{\mathbf{F}}$ . Für eine programmierte Berechnung emp-  
fiehl sich dagegen, bei der Spannungsermittlung direkt von Gleichung  
(5.11) auszugehen, Entsprechendes gilt für die Biegeschubspannungen  
 $\tau_B$  und ganz besonders für die Drehschubspannungen  $\tau_D$ , da im letzten  
Fall  $\bar{\mathbf{J}}$  nicht invertierbar ist. Hier stehen die Gleichungen (5.15)



und (5, 16) zur Verfügung. Will man aber dennoch von den Schnittgrößen ausgehen, so ist durch geeignete Orthogonalisierungen der Einzelzustände und Reduktion des Problems auf die Beanspruchungsanteile, die tatsächlich Beiträge zu  $\sigma$ ,  $\tau_B$  oder  $\tau_D$  liefern, eine Berechnung der Spannungen möglich, wenn auch umständlich.

## 5.5 Orthogonalisierung 2. Stufe

### 5.5.1 Allgemeine Anmerkungen

Vorgegeben ist das gekoppelte Differentialgleichungssystem in Matrixschreibweise nach Gleichung (5.45):

$$E \bar{F} \bar{v}^{IV} - G \bar{J} \bar{v}'' + E \bar{B} \bar{v} = \bar{q} + \bar{p}'$$

Die Kopplung erfolgt über die im allgemeinen Fall vollbesetzten drei Matrizen  $\bar{F}$ ,  $\bar{J}$  und  $\bar{B}$ . Durch eine geeignete Einführung neuer Verformungszustände als Linearkombination der in  $\bar{v}$  enthaltenen Grundzustände kann eine teilweise Orthogonalisierung einzelner Matrizen oder Untermatrizen erzielt werden. Eine vollständige Orthogonalisierung von allen drei maßgebenden Matrizen gleichzeitig ist allgemein nicht erreichbar. Die vorgenommene Teilorthogonalisierung soll als Orthogonalisierung 2. Stufe bezeichnet werden. Es sind grundsätzlich folgende Möglichkeiten vorhanden:

1. Vollständige Orthogonalisierung von  $\bar{F}$  und  $\bar{J}$ .  
In allen Fällen verhältnismäßig geringer Biegesteifigkeit des Querrahmens, besonders aber bei Gelenkwerken mit entfallender Matrix  $\bar{B}$  dürfte diese Orthogonalisierung sinnvoll sein.
2. Vollständige Orthogonalisierung von  $\bar{J}$  und  $\bar{B}$ .  
Hierbei kann man sich auf die Profilverformungszustände beschränken, die nur untereinander umgeordnet werden.
3. Vollständige Orthogonalisierung von  $\bar{F}$  und  $\bar{B}$ .  
In diesem Fall sind wie bei der 1. Möglichkeit die Profilverformungen mit der Wölbkrafttorsion zusammenhängend zu betrachten.

4. Teilweise Orthogonalisierungen der Profilverformungszustände untereinander

- a) bezüglich **F** und **J**
- b) bezüglich **F** und **B**

Der Fall **J** und **B** ist unter Punkt 2 bereits erfaßt.

Die Orthogonalisierungen allein bewirken zumeist nur eine Beschleunigung der Integration des Differentialgleichungssystems. Sie gewinnen aber an Bedeutung im Zusammenhang mit einer Vernachlässigung der noch verbleibenden Nebendiagonalelemente im Differentialgleichungssystem. Die Güte der dabei erzielten Näherungslösungen wird später überprüft. Man kann auf diese Weise das Gesamtproblem in einzelne, weitaus einfacher zu lösende Differentialgleichungen aufspalten. Die Differentialgleichungen sind dabei vom allgemeinen Typ

$$A v^{IV} - B v'' + C v = D$$

und entsprechen somit der Differentialgleichung eines elastisch gebetteten Balkens mit einer Zugkraft nach Theorie II. Ordnung. Die Lösungsmöglichkeiten sind vielfach behandelt und finden sich unter anderem bei Hetényi [34] und Schardt, Okur [35]. Sehr ausführliche Angaben zur Lösung sind auch in dem Buch von Vlazov, Leont'ev [36] gemacht worden, das von einer komplizierten Betätigung des Balkens ausgeht und dabei eine Differentialgleichung obigen Typs erhält.

5.5.2 Durchführung der Orthogonalisierung 2. Stufe am

Beispiel des Falles 1 für **F** und **J**

Es soll gefordert werden, daß nach der Orthogonalisierung 2. Stufe **F** und **J** jeweils Diagonalmatrizen sind. Dazu führt man eine Transformation der Koordinaten  $\bar{k}$  mittels einer Matrix **E** durch:

$$k = E \bar{k} \tag{5.66}$$

Da die beiden Biegezustände bereits entkoppelt sind, genügt es, allein die restlichen Zustände infolge Torsion und Profilverformungen zu betrachten.



und man kann ansetzen:

$$\mathbf{k}_U = \mathbf{E}_U \bar{\mathbf{k}}_U$$

mit der Forderung, daß die Untermatrizen von  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{F}_U$  und  $\mathbf{J}_U$ , Diagonalmatrizen sind. Dieser Übergang auf Untermatrizen ist bei dem Fall 4 mit Teilorthogonalisierung stets erforderlich, in den übrigen Fällen dient er einer beschleunigten Ermittlung der Orthogonalzustände, indem der Umfang des Problems reduziert wird.

Im folgenden soll der prinzipielle Weg aufgezeigt werden. Dabei wird vom Gesamtproblem ausgegangen. Durch Beifügung des Index  $U$  erhält man alle benötigten Angaben für die reduzierten Ansätze.

Für die Verschiebungen ist durch den Ansatz (5.66) ebenfalls die Transformation festgelegt. Da die Längsverschiebung  $v_z(s, z)$  unabhängig von dem Stand der Orthogonalisierung zu sein hat, folgt aus (5.5):

$$v_z(s, z) = - \bar{\mathbf{k}}^T \bar{\mathbf{v}}' = - \mathbf{k}^T \mathbf{v}' = - \bar{\mathbf{k}}^T \mathbf{E}^T \mathbf{v}'$$

somit aber:

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{E}^T \mathbf{v}$$

$$\text{bzw. : } \mathbf{v} = (\mathbf{E}^T)^{-1} \bar{\mathbf{v}} \quad (5.67)$$

Für die Matrix  $\mathbf{F}$  der Wölbrägheitsmomente folgt aus (5.32) und (5.66):

$$\mathbf{F} = \int_F \mathbf{k} \mathbf{k}^T dF = \int_F \mathbf{E} \bar{\mathbf{k}} \bar{\mathbf{k}}^T \mathbf{E}^T dF = \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{E}^T \quad (5.68)$$

Da auch die Schubspannungen  $\tau$  unabhängig von der Orthogonalisierung sein müssen, gilt nach (5.15):

$$\tau_D = \frac{G}{t} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{v}' = \frac{G}{t} \bar{\boldsymbol{\psi}}^T \bar{\mathbf{v}}' = \frac{G}{t} \bar{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{E}^T \mathbf{v}'$$

$$\text{bzw. : } \boldsymbol{\psi} = \mathbf{E} \bar{\boldsymbol{\psi}} \quad (5.69)$$

Daraus folgt mit (5.34) für  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{J} = \int_F \frac{1}{t^2} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^T dF = \int_F \frac{1}{t^2} \mathbf{E} \bar{\boldsymbol{\psi}} \bar{\boldsymbol{\psi}}^T \mathbf{E}^T dF = \mathbf{E} \bar{\mathbf{J}} \mathbf{E}^T \quad (5.70)$$

Entsprechend ergibt sich wegen der Unabhängigkeit der Querbiegemomente  $m_Q$  vom Stand der Orthogonalisierung aus (5. 25) und (5. 67):

$$m_Q = \mathbf{b}^T \mathbf{v} = \bar{\mathbf{b}}^T \bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{b}}^T \mathbf{E}^T \mathbf{v}$$

mit  $\mathbf{b} = \mathbf{E} \bar{\mathbf{b}}$  (5. 71)

und für  $\mathbf{B}$  nach (5. 36) analog zu  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{B} = \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{E}^T \quad (5. 72)$$

Eventuell noch benötigte Matrizen können ähnlich transformiert werden. Wichtig ist dabei aber die Ermittlung der Transformationsmatrix  $\mathbf{E}$ .

Nach der Transformation soll gelten:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{Diag}} = \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{E}^T$$

und:  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{Diag}} = \mathbf{E} \bar{\mathbf{J}} \mathbf{E}^T$

Daraus folgt für jede Spalte mit  $\mathbf{E}^T = [ \mathbf{e}_j ]$  und  $\mathbf{I} = [ \mathbf{i}_j ]$ :

$$\mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{e}_j = A \mathbf{i}_j$$

und  $\mathbf{E} \bar{\mathbf{J}} \mathbf{e}_j = B \mathbf{i}_j$

wobei  $A$  und  $B$  Konstanten sind.

Da sich die rechten Seiten nur um einen Proportionalitätsfaktor  $\lambda = \frac{B}{A}$  unterscheiden, ergibt sich daraus:

$$\lambda \mathbf{E} \bar{\mathbf{F}} \mathbf{e}_j = \mathbf{E} \bar{\mathbf{J}} \mathbf{e}_j$$

oder:  $\mathbf{E} (\bar{\mathbf{J}} - \lambda \bar{\mathbf{F}}) \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$

Das führt zu dem allgemeinen Eigenwertproblem:

$$(\bar{\mathbf{J}} - \lambda \bar{\mathbf{F}}) \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \quad (5. 73)$$

Ist  $\bar{\mathbf{F}}$  nicht singular und damit invertierbar, so kann man die Aufgabe in ein spezielles Eigenwertproblem umwandeln:

$$(\bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{J}} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{e}_j = \mathbf{0} \quad (5. 74)$$

oder mit  $\mathbf{H} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \bar{\mathbf{J}}$  :

$$(\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

Die Werte von  $\lambda$  sind die Eigenwerte des Problems und die jeweils zugehörigen  $\mathbf{e}_j$  die Eigenvektoren. Nach der Lösung dieser mathematischen Aufgabe ist dann auch  $\mathbf{E}$  bestimmt.

Lösungsmöglichkeiten zu den allgemeinen oder speziellen Eigenwertproblemen finden sich z. B. bei Zurmühl [37] und Wilkinson [38]. Ferner existieren fertige Rechenprogramme zur Eigenwertermittlung. Auf diese rein mathematischen Probleme soll nicht weiter eingegangen werden.

Auch alle übrigen vorher besprochenen teilweisen Orthogonalisierungen lassen sich analog behandeln und führen auf entsprechende Eigenwertprobleme.

### 5.5.3 Möglichkeit einer Reduktion des Eigenwertproblems

Speziell im Fall der Entkopplung von  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{J}$  gibt es eine besondere Möglichkeit, das Eigenwertproblem zu reduzieren, indem man die Kenntnis der in Kapitel 3 behandelten speziellen Profilverformung ausnutzt. Dieser Verformungszustand soll im folgenden mit  $\mathcal{S}_1$  identifiziert werden. Durch das Fehlen jeglicher Schubgrößen infolge  $\mathcal{S}_1$  ist dieser Zustand in der Matrix der Torsionsträgheitsmomente  $\bar{\mathbf{J}}_1$  bereits vollständig entkoppelt:

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ \hline & J_T & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{J}_{22} & \dots & \bar{J}_{2n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & 0 & \bar{J}_{2n} & \dots & \bar{J}_{nn} \end{pmatrix}$$

Es existieren nur noch Nebendiagonalglieder in  $\bar{\mathbf{F}}$ , die diesen Zustand mit den übrigen verbinden:

$$\bar{\Pi}_i = \begin{pmatrix} F_{xx} & 0 & & & & \\ 0 & F_{yy} & & & & \\ \hline & & F_{ww} & \bar{F}_{ww1} & \bar{F}_{ww2} & \dots & \bar{F}_{wwn} \\ & & \bar{F}_{ww1} & \bar{F}_{w1w1} & \bar{F}_{w1w2} & \dots & \bar{F}_{w1wn} \\ & 0 & \bar{F}_{ww2} & \bar{F}_{w1w2} & \bar{F}_{w2w2} & \dots & \bar{F}_{w2wn} \\ & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \bar{F}_{wwn} & \bar{F}_{w1wn} & \bar{F}_{w2wn} & \dots & \bar{F}_{wnwn} \end{pmatrix}$$

Durch geeignete Superposition dieses Zustandes  $\bar{\phi}_1$  zu  $\phi$  und den übrigen  $\phi_i$  kann man erreichen, daß gilt:

$$F_{ww1} = F_{w1w2} = \dots = F_{w1wn} = 0$$

Gewählter Ansatz:

$$w^* = w + c_0 \bar{w}_1$$

daraus folgt:

$$F_{ww1}^* = \bar{F}_{ww1} + c_0 \bar{F}_{w1w1} \stackrel{\text{soll}}{=} 0$$

Man erhält somit:

$$c_0 = - \frac{\bar{F}_{ww1}}{\bar{F}_{w1w1}} \quad (5.75)$$

und als neues Wölbträgheitsmoment:

$$F_{ww}^* = F_{ww} + c_0^2 \bar{F}_{w1w1} + 2 c_0 \bar{F}_{ww1}$$

bzw. mit (5.75):

$$F_{ww}^* = F_{ww} + c_0 \bar{F}_{ww1} \quad (5.76)$$

Entsprechend läßt sich bei jeder i-ten Profilverformung (außer  $i = 1$ ) ansetzen:

$$w_i^* = \bar{w}_i + c_i \bar{w}_1$$

mit:

$$c_i = - \frac{\bar{F}_{w1wi}}{\bar{F}_{w1w1}} \quad (5.77)$$





werden.) Der Einfluß der Torsion auf die Längsspannungen im Tragwerk, der proportional zu  $F_{ww}^*$  ist, nimmt somit erheblich ab. Zusätzlich entsteht bei der Transformation in der Differentialgleichung für  $\phi^*$  eine neue Größe  $B_w^* = c_0^2 B_{11}$ , die aus der Rahmensteifigkeit  $B_{11}$  der Profilverformung  $\phi_1$  herrührt. Diese "elastische Bettung" bewirkt eine weitere Verminderung des Einflusses von  $\phi^*$  auf das gesamte Tragverhalten.

Liegt ein symmetrischer Trägerquerschnitt vor, so kann man Teilkopplungen durch den Ansatz symmetrischer und antisymmetrischer Profilverformungen erhalten. Der Rechenaufwand für die weitere Orthogonalisierung 2. Stufe wird dabei verringert, da nur noch die symmetrischen bzw. antisymmetrischen Verformungszustände untereinander gekoppelt sind. Die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenvektoren ist bei geringerem Umfang der Teilsysteme wesentlich einfacher. Die spezielle Profilverformung ohne Schub nach Kapitel 3 besitzt dabei stets eine antisymmetrische Verwölbung. Im Beispiel von Abschnitt 3. 4 ist dies zu erkennen. Weil der Torsionszustand ebenfalls zur antisymmetrischen Gruppe gehört, sind beide Verformungsfälle regelmäßig miteinander gekoppelt.

6.      Faltwerksberechnung bei näherungsweise Berücksichtigung  
          der Biege- und Wölbschubverzerrungen

6.1     Allgemeine Ansätze

Bei der zusätzlichen Berücksichtigung von Biege- und Wölbschubverzerrungen wird sich eine größere Verformung des Tragwerks ergeben, als dies ohne den Schubanteil in Kapitel 5 ermittelt wurde. Die entsprechende Erscheinung bei der Berechnung des normalen Biegebalkens ist bekannt. Infolge der Schubverzerrungen ändern sich die Längsverwölbungen der Einzelwände. Wie in der technischen Biegelehre üblich, soll aber dieser Einfluß vernachlässigt werden, um den linearen Verlauf von  $w(s)$  über  $s$  nicht zu verlieren.

Neben der bereits in Kapitel 5 angesetzten Verschiebung  $\mathbf{v}$ , die alle Verschiebungsanteile infolge elastischer Längenänderung der einzelnen Längsfasern erfaßt (Biegung aller Wände in  $s$ -Richtung), wird zusätzlich eine Verschiebung  $\mathbf{g}$  berücksichtigt, die durch Biege- bzw. Wölbschubverzerrungen hervorgerufen wird. Die Bezeichnung  $\mathbf{g}$  soll an die "Gleitverformung" erinnern. Für die gesamte Verschiebung  $\mathbf{v}_g$  in Querrichtung gilt dann:

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v} + \mathbf{g} \quad (6.1)$$

Nach dieser Definition der Verschiebungsanteile kann die Wandverschiebung  $v_s$  entsprechend zu (4.9) und (4.11) bzw. (5.2) beschrieben werden als:

$$v_s(s, z) = \mathbf{r}^T \mathbf{v}_g = \mathbf{v}_g^T \mathbf{r} \quad (6.2)$$

Da  $\mathbf{g}$  auf die Längsverwölbung keinen Einfluß haben soll, wird für die Längsverschiebung  $v_z$  gemäß (5.5) angesetzt:

$$v_z(s, z) = - \mathbf{k}^T \mathbf{v}' = - \mathbf{v}'^T \mathbf{k} \quad (6.3)$$

Für  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{k}$  sollen auch weiterhin die Aussagen von Kapitel 5 gelten. Die Verwölbungsberechnung ändert sich somit nicht gegenüber den früheren Abschnitten.

Im folgenden wird für die Verschiebungs- und Verwölbungsansätze zumindest die Orthogonalisierung 1. Stufe vorausgesetzt. Da auch eine

Orthogonalisierung 2. Stufe durchgeführt sein kann, wird der Querstrich über den Vektoren und Matrizen weggelassen.

Aus den Ansätzen nach (6.2) und (6.3) folgt, daß sich die von  $v_s$  abgeleitete Größe  $\tau_D$  gemäß (5.15) nun angeben läßt als:

$$\tau_D = \frac{G}{t} \psi^T v'_g = \frac{G}{t} v'^T_g \psi \quad (6.4)$$

Alle übrigen von  $v_z$  abgeleiteten Größen wie  $\epsilon$  (5.10),  $\sigma$  (5.11),  $\tau_B$  (5.16) bleiben dagegen unverändert. Insgesamt gilt wieder (5.17):

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_D + \tau_B \\ \text{d. h. } \tau &= \frac{G}{t} \psi^T v'_g + \frac{E}{t} f^T v'' \end{aligned} \quad (6.5)$$

Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, erfüllt dieses  $\tau$  die Gleichgewichtsbedingungen am Element.

Leitet man aus (2.1) ein  $\tau^*$  ab, das die Kontinuitätsbedingung erfüllt, so erhält man:

$$\begin{aligned} \tau^* &= G \gamma = G \left( \frac{\partial v_s}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial s} \right) \\ \tau^* &= G r^T v'_g - G k^T v' \end{aligned}$$

mit (5.54) und (6.1):

$$\begin{aligned} \tau^* &= G r^T v'_g - G \left( r^T - \frac{1}{t} \psi^T \right) (v'_g - g^i) \\ \tau^* &= \frac{G}{t} \psi^T v'_g + G \left( r - \frac{1}{t} \psi \right)^T g^i \end{aligned} \quad (6.6)$$

Vergleicht man  $\tau^*$  nach (6.6) mit  $\tau$  nach (6.5), so ist die Gleichheit des Schubspannungsanteils  $\tau_D = \tau_D^*$  aus der Drehung zu erkennen. Dieser Anteil erfüllt somit Gleichgewicht und Kontinuität gleichermaßen. Die Wölbschubanteile  $\tau_B$  und  $\tau_B^*$  dagegen unterscheiden sich vollkommen.

Zum Vergleich seien beide Ausdrücke direkt einander gegenübergestellt:

$$\tau_B = \frac{E}{t} \mathbf{f}^T \mathbf{v}''' \quad (5.16)$$

$$\tau_B^* = \mathbf{G} \left( \mathbf{r} - \frac{1}{t} \boldsymbol{\psi} \right)^T \mathbf{g}' = \mathbf{G} \dot{\mathbf{k}}^T \mathbf{g}' \quad (6.7)$$

Da  $\mathbf{v}'''(z)$  und  $\mathbf{g}'(z)$  voneinander unabhängig sind und außerdem bei einem linearen Verwölbungsansatz  $\mathbf{f}(s) \neq \mathbf{r}(s) - \frac{1}{t} \boldsymbol{\psi}(s)$  ist, gilt:

$\tau_B$	erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen am Element, nicht aber die Kontinuitätsbedingungen;
$\tau_B^*$	erfüllt die Kontinuitätsbedingungen am Element, nicht jedoch die Gleichgewichtsbedingungen.

Eine exakte Erfüllung des Gleichgewichts und der Kontinuität zugleich ist deshalb mit den in dieser Arbeit gewählten Ansätzen nicht möglich. Es kann aber eine näherungsweise Erfüllung einer der beiden fehlenden Bedingungen erreicht werden, wie dies auch bei der Wölbkrafttorsion bekannt ist. Darin unterscheiden sich zwei der wichtigsten Näherungslösungen:

Die erste wird im deutschen Sprachraum mit den Arbeiten von Heilig in [31] und [32] über Wölbkrafttorsion verbunden, die zweite mit Benscoter [33], obwohl nach dem Hinweis von Dabrowski in seiner Zuschrift [39] bereits frühere russische Arbeiten von G. J. Dshanelidze und J. G. Panowko bzw. A. A. Umanskij vorliegen.

Beide Näherungsverfahren zur Berücksichtigung der Biege- und Wölb Schubspannungen sollen im folgenden auf die allgemeine Berechnung dünnwandiger mehrzelliger Kastenträger mit Profilverformung erweitert werden.

## 6.2 Näherungsverfahren nach Heilig

Da  $\tau_B$  nicht die Kontinuitätsbedingung erfüllt,  $\tau_B^*$  dagegen nicht das Gleichgewicht, soll zwischen beiden Schubspannungen und damit zwischen den Verschiebungsgrößen  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{g}$  ein näherungsweise Zusammenhang über eine Arbeitsbetrachtung hergestellt werden. Es wird gefordert, daß die Schubverzerrungsarbeiten an einem Faltwerksabschnitt der Länge  $dz$  infolge der beiden Wölb Schubverzerrungen  $\gamma_B$

bzw.  $\gamma_B^*$  und der aus dem Gleichgewicht ermittelten Schubspannung  $\tau_B$  einander gleich sind. Es soll gelten:

$$\frac{1}{2} \int_F \gamma_B \tau_B dF dz = \frac{1}{2} \int_F \gamma_B^* \tau_B dF dz$$

Berücksichtigt man das Hookesche Gesetz, so lautet diese Forderung:

$$\int_F \tau_B^2 dF = \int_F \tau_B^* \tau_B dF$$

Mit (5. 16) und (6. 7) ergibt sich:

$$E^2 \mathbf{v}'''^T \int_F \frac{1}{t^2} \mathbf{f} \mathbf{f}^T dF \mathbf{v}''' = EG \mathbf{v}'''^T \int_F \frac{1}{t} \mathbf{f} \left( \mathbf{r} - \frac{1}{t} \boldsymbol{\psi} \right)^T dF \mathbf{g}'$$

Führt man eine neue, symmetrische Matrix  $\mathbf{S}$  ein als:

$$\mathbf{S} = \int_F \frac{1}{t^2} \mathbf{f} \mathbf{f}^T dF \quad (6. 8)$$

und beachtet die Umformungen gemäß (5. 58) und (5. 59), so erhält man aus der obigen Bedingung:

$$\mathbf{v}'''^T E \mathbf{S} \mathbf{v}''' = - \mathbf{v}'''^T G \mathbf{F} \mathbf{g}'$$

Da beide Seiten skalare Größen sind, folgt auch:

$$E \mathbf{S} \mathbf{v}''' = - G \mathbf{F} \mathbf{g}' \quad (6. 9)$$

Bei Beachtung dieser Zusatzbedingung erfüllt  $\tau_B$  die geometrische Verträglichkeit im Mittel über die Querschnittsfläche.

Das Differentialgleichungssystem wird entsprechend zu Kapitel 5 mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen aufgestellt. Als virtuelle Verschiebungsgrößen dienen dabei  $\delta \epsilon$  nach (5. 10) und  $\delta \gamma = \frac{1}{G} \delta \tau$  mit  $\delta \tau$  nach (6. 5). Die Querbiegeanteile hängen von der Gesamtverschiebung  $\mathbf{v}_g$  ab.

Man erhält als virtuelle innere Arbeit gemäß (5. 31) mit (5. 37):

$$\begin{aligned} \delta A_i = & - \int_{z=0}^L \left[ \int_F (-\delta \mathbf{v}'''^T \mathbf{k}) (-E \mathbf{k}^T \mathbf{v}''') dF + \right. \\ & + E \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{B} \mathbf{v}_g + \int_F \left( \frac{1}{t} \delta \mathbf{v}'_g \boldsymbol{\psi} + \frac{E}{Gt} \delta \mathbf{v}'''^T \mathbf{f} \right) \cdot \\ & \left. \left( \frac{G}{t} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{v}'_g + \frac{E}{t} \mathbf{f}^T \mathbf{v}''' \right) dF \right] dz \end{aligned}$$

Führt man auch hier die Abkürzungen nach (5.32), (5.34) bzw. (6.8) ein und beachtet (5.57), so ergibt sich:

$$\delta A_i = - \int_{z=0}^{\ell} \left[ E \delta \mathbf{v}''^T \mathbf{F} \mathbf{v}'' + G \delta \mathbf{v}'^T \mathbf{J} \mathbf{v}' + \frac{E^2}{G} \delta \mathbf{v}'''^T \mathbf{S} \mathbf{v}''' + E \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{B} \mathbf{v}_g \right] dz$$

Setzt man im 3. Term für  $E \mathbf{S} \delta \mathbf{v}'''$  den Ausdruck nach (6.9) ein, so gilt:

$$\delta A_i = - \int_{z=0}^{\ell} \left[ E \delta \mathbf{v}''^T \mathbf{F} \mathbf{v}'' + G \delta \mathbf{v}'^T \mathbf{J} \mathbf{v}' - E \delta \mathbf{g}'^T \mathbf{F} \mathbf{v}''' + E \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{B} \mathbf{v}_g \right] dz$$

Nach partieller Integration des 1. Terms kann man diesen mit dem 3. Term zusammenfassen unter Beachtung von (6.1):

$$\delta A_i = - \int_{z=0}^{\ell} \left[ - E \delta \mathbf{v}^T \mathbf{F} \mathbf{v}''' + G \delta \mathbf{v}'^T \mathbf{J} \mathbf{v}' + E \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{B} \mathbf{v}_g \right] dz + \left[ E \delta \mathbf{v}'^T \mathbf{F} \mathbf{v}'' \right]_0^{\ell}$$

Führt man die Teilintegration wie bei Kapitel 5 weiter durch, so erhält man:

$$\delta A_i = - \int_{z=0}^{\ell} \left[ E \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{F} \mathbf{v}'' - G \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{J} \mathbf{v}_g'' + E \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{B} \mathbf{v}_g \right] dz - \left[ E \delta \mathbf{v}'^T \mathbf{F} \mathbf{v}'' \right]_0^{\ell} + \left[ - E \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{F} \mathbf{v}_g'' + G \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{J} \mathbf{v}_g' \right]_0^{\ell} \quad (6.10)$$

Für die virtuelle äußere Arbeit folgt aus (5.42):

$$\delta A_a = \int_{z=0}^{\ell} \left[ \int_s \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{r} q ds - \int_s \delta \mathbf{v}'^T \mathbf{k} p ds \right] dz + \left[ \int_s \delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{r} q_R ds - \int_s \delta \mathbf{v}'^T \mathbf{k} p_R ds \right]_0^{\ell}$$

Hier gelingt keine geeignete Umformung, die unter dem Integral über  $z$  alle Ausdrücke in Abhängigkeit nur von  $\delta \mathbf{v}_g$  enthält. Darauf hat bereits Sedlacek in [4] hingewiesen. Ein komplizierter Umbau

auf  $\delta \mathbf{v}$  ist dagegen möglich unter Verwendung von (6. 1) und (6. 9), bringt für die in der Praxis wichtige Querbelastung aber keinerlei Vorteile. Da sich diese Schwierigkeit nur bei einer verteilten Längsbelastung  $p(s, z)$  ergibt, soll dieser Fall hier nicht weiter untersucht werden. Die folgenden Ableitungen gelten somit nur noch für die Querbelastung  $q$  bzw.  $q_R$  und eine Längsbelastung durch Einzelkräfte  $p_R$ .

Für die äußere virtuelle Arbeit ergibt sich mit den Abkürzungen nach (5. 43):

$$\delta A_a = \int_{z=0}^{\ell} [\delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{q}] dz + [\delta \mathbf{v}_g^T \mathbf{q}_R - \delta \mathbf{v}^T \mathbf{p}_R]_{z=0}^{\ell} \quad (6. 11)$$

Aus der Bedingung  $\delta A = \delta A_i + \delta A_a = 0$  folgen entsprechend zu Kapitel 5 das Differentialgleichungssystem:

$$E \mathbf{F} \mathbf{v}'' - G \mathbf{J} \mathbf{v}_g'' + E \mathbf{B} \mathbf{v}_g = \mathbf{q} \quad (6. 12)$$

und die Randbedingungen an den Stellen  $z = 0$  und  $z = \ell$ :

$$- E \mathbf{F} \mathbf{v}'' = \mathbf{p}_R \quad (6. 13)$$

$$- E \mathbf{F} \mathbf{v}''' + G \mathbf{J} \mathbf{v}_g' = \mathbf{q}_R \quad (6. 14)$$

Das Differentialgleichungssystem nach (6. 12) kann mit Hilfe von (6. 1) und (6. 9) umgewandelt werden in ein System, das nur von  $\mathbf{v}_g$  abhängt, wenn die Matrix der Biege- und Wölbträgheitsmomente  $\mathbf{F}$  invertierbar ist. Andernfalls muß ein erweitertes Differentialgleichungssystem gelöst werden, wie dies bei Sedlacek gezeigt wird. Zu diesem Doppelsystem gehört neben (6. 12) ein aus (6. 1) und (6. 9) gewonnenes Differentialgleichungssystem:

$$E \mathbf{S} \mathbf{v}'' = G \mathbf{F} \mathbf{v}' - G \mathbf{F} \mathbf{v}_g' \quad (6. 15)$$

Die Lösung wird wesentlich komplizierter.

Ist  $\mathbf{F}$  invertierbar, so kann man (6. 12) mit  $\mathbf{S} \mathbf{F}^{-1}$  durchmultiplizieren und erhält:

$$E \mathbf{S} \mathbf{v}'' - G \mathbf{S} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{v}_g'' + E \mathbf{S} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v}_g = \mathbf{S} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{q}$$

mit (6.15) folgt nach einiger Umformung:

$$E F v'' = E F v_g'' + E S F^{-1} J v_g'' - \frac{E^2}{G} S F^{-1} B v_g + \frac{E}{G} S F^{-1} q$$

Führt man als Abkürzung eine Hilfsmatrix  $\kappa$  ein mit:

$$\kappa = \frac{E}{G} S F^{-1} \quad (6.16)$$

so ergibt sich:

$$E F v'' = E \left( F + \frac{G}{E} \kappa J \right) v_g'' - E \kappa B v_g + \kappa q \quad (6.17)$$

Aus (6.17) und (6.12) folgt das neue Differentialgleichungssystem:

$$E \left( F + \frac{G}{E} \kappa J \right) v_g'' - G \left( J + \frac{E}{G} \kappa B \right) v_g'' + E B v_g = q - \kappa q''$$

Definiert man folgende Matrizen neu:

$$\left. \begin{aligned} F_{\kappa} &= F + \frac{G}{E} \kappa J \\ J_{\kappa} &= J + \frac{E}{G} \kappa B \\ q_{\kappa} &= q - \kappa q'' \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

so gilt:

$$E F_{\kappa} v_g'' - G J_{\kappa} v_g'' + E B v_g = q_{\kappa} \quad (6.19)$$

Dies ist eine Form des Differentialgleichungssystems, wie sie aus Kapitel 5 bereits bekannt ist.

Aus (6.17) folgt:

$$v'' = F^{-1} F_{\kappa} v_g'' - F^{-1} \kappa B v_g + \frac{1}{E} F^{-1} \kappa q \quad (6.20)$$

Die Definition der Schnittgrößen kann analog zu Abschnitt 5.4 durchgeführt werden:

$$m = -E F v'' \quad (6.21)$$

$$t_D = G J v_g' \quad (6.22)$$

$$t_B = m' = -E F v''' \quad (6.23)$$



mit: 
$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_D + \mathbf{t}_B \quad (5.63)$$

Es läßt sich dabei  $\mathbf{v}''$  mittels (6.20) eliminieren:

$$\mathbf{m} = -E \mathbf{F}_\kappa \mathbf{v}''_g + E \kappa \mathbf{B} \mathbf{v}_g - \kappa \mathbf{q} \quad (6.24)$$

$$\mathbf{t}_B = -E \mathbf{F}_\kappa \mathbf{v}'''_g + E \kappa \mathbf{B} \mathbf{v}'_g - \kappa \mathbf{q}' \quad (6.25)$$

Für die Spannungen gelten die Beziehungen (5.11), (5.17), (5.16) und (6.4). Auch hier kann für  $\mathbf{v}''$  erneut (6.20) eingesetzt werden.

### 6.3 Näherungsverfahren nach Benscoter

Wurde bei Heilig für die Herleitung der Differentialgleichungen von  $\tau_B$  ausgegangen und über eine Energiebetrachtung die Forderung nach geometrischer Verträglichkeit für  $\tau_B$  im Mittel erfüllt, so geht man nach Benscoter von  $\tau_B^*$  aus. Diese Schubspannung erfüllt, wie in Abschnitt 6.1 gezeigt, nicht das Gleichgewicht am Element. Es soll aber gefordert werden, daß wenigstens im Mittel das Gleichgewicht an einem Tragwerksabschnitt der Länge  $dz$  erfüllt ist.

Das Gleichgewicht am Tragwerksabschnitt wird mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen untersucht. Als virtuelle Zustände werden in Längsrichtung Verschiebungen  $\delta v_z$  gewählt, die über  $s$  linear sind gemäß (6.3):

$$\delta v_z = -\delta v'^T \mathbf{k}$$

Nach (2.6) und (2.5) gilt:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau t) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} t = 0$$

Da  $\tau_D$  konstant über  $s$  ist, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_B t) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} t = 0 \quad (I)$$

Setzt man statt  $\tau_B$  den Wert  $\tau_B^*$  nach (6.7) ein, so ist dieses Gleichgewicht nicht mehr erfüllt:

$$\frac{\partial}{\partial s} (\tau_B^* t) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} t \neq 0 \quad (II)$$

Die virtuelle Verschiebungsarbeit einer Gleichgewichtsgruppe (I) ist stets Null. Um einen Zusammenhang zwischen  $\tau_B^*$  und  $\sigma$  bezüglich des Gleichgewichts zu erhalten, wird gefordert, daß auch die virtuelle Verschiebungsarbeit der Kräftegruppe (II) am Trägerelement der Länge  $dz$  verschwinden muß. Es wird somit das Gleichgewicht durch  $\tau_B^*$  im Mittel über den Querschnitt erfüllt.

Setzt man entsprechend für die virtuelle Arbeit an, so gilt:

$$-\delta \mathbf{v}'^T \int_s \mathbf{k} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (\tau_B^* t) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} t \right] ds = 0$$

Für beliebige Verschiebungen  $\delta \mathbf{v}'$  muß dann gelten:

$$\int_s \mathbf{k} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (\tau_B^* t) + \frac{\partial \sigma}{\partial z} t \right] ds = \mathbf{0} \quad (6.26)$$

wobei  $\mathbf{0}$  ein Spaltenvektor der Länge  $(n+3)$  bei  $n$  Profilverformungen ist. Der Ausdruck (6.26) entspricht dem Ansatz von Benscoter in [33].

Integriert man den 1. Term partiell, so ergibt sich:

$$\int_s \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial s} (\tau_B^* t) ds = \mathbf{k} \tau_B^* t \Big|_a^c - \int_s \dot{\mathbf{k}} \tau_B^* t ds$$

Der Randterm verschwindet wegen Kontinuität in  $\mathbf{k}$  und  $\tau_B^*$ . Damit geht (6.26) über in:

$$\int_F \dot{\mathbf{k}} \tau_B^* dF = \int_F \mathbf{k} \frac{\partial \sigma}{\partial z} dF$$

Setzt man weiter die Gleichungen (6.7) und (5.11) ein, so erhält man:

$$G \int_F \dot{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{k}}^T dF \mathbf{g}' = -E \int_F \mathbf{k} \mathbf{k}^T dF \mathbf{v}''' \quad (6.27)$$

Für die linke Seite ergibt sich durch Umformung mit (5.54):

$$\begin{aligned} \int_F \dot{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{k}}^T dF &= \int_F \left( \mathbf{r} - \frac{1}{t} \boldsymbol{\psi} \right) \left( \mathbf{r} - \frac{1}{t} \boldsymbol{\psi} \right)^T dF = \int_F \mathbf{r} \mathbf{r}^T dF + \\ &\int_F \frac{1}{t^2} \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\psi}^T dF - \int_F \mathbf{r} \frac{1}{t} \boldsymbol{\psi}^T dF - \int_F \frac{1}{t} \boldsymbol{\psi} \mathbf{r}^T dF \end{aligned}$$

Mit (5.34) und (5.56) kann weiter vereinfacht werden. Neu eingeführt wird eine symmetrische Matrix der zentralen Trägheitsmomente:

$$\mathbf{R} = \int_{\mathbb{F}} \mathbf{r} \mathbf{r}^T d\mathbb{F} \quad (6.28)$$

Insgesamt erhält man unter Beachtung der Symmetrie von  $\mathbf{J}$  :

$$\int_{\mathbb{F}} \dot{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{k}}^T d\mathbb{F} = \mathbf{R} + \mathbf{J} - \mathbf{J} - \mathbf{J} = \mathbf{R} - \mathbf{J} \quad (6.29)$$

In (6.27) eingesetzt, folgt zusammen mit (5.32):

$$\mathbf{G} (\mathbf{R} - \mathbf{J}) \mathbf{g}' = -\mathbf{E} \mathbf{F} \mathbf{v}''' \quad (6.30)$$

Die Herleitung des Differentialgleichungssystems erfolgt erneut mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Für die äußere virtuelle Arbeit kann der Ausdruck (6.11) aus Abschnitt 6.2 übernommen werden. Es gilt dabei die bereits erwähnte Beschränkung der Längsbelastung auf Einzelkräfte. Für die virtuelle innere Arbeit gilt Ausdruck (5.31), wobei für den Anteil  $\tau$  der Wert  $\tau^*$  nach (6.6) mit (6.7) und entsprechend auch  $\delta\gamma^*$  eingesetzt wird.

$$\begin{aligned} \delta A_i &= - \int_{z=0}^{\ell} \left[ \int_{\mathbb{F}} \sigma \delta \varepsilon d\mathbb{F} + \int_{\mathbb{F}} \tau^* \delta \gamma^* d\mathbb{F} + \int_s m_Q \delta \kappa_Q ds \right] dz \\ \delta A_i &= - \int_{z=0}^{\ell} \left[ \mathbf{E} \delta \mathbf{v}''^T \mathbf{F} \mathbf{v}'' + \mathbf{G} \int_{\mathbb{F}} \left( \frac{1}{t} \delta \mathbf{v}'_g{}^T \boldsymbol{\Psi} + \delta \mathbf{g}'^T \dot{\mathbf{k}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{1}{t} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{v}'_g + \dot{\mathbf{k}}^T \mathbf{g}' \right) d\mathbb{F} + \mathbf{E} \delta \mathbf{v}_g{}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_g \right] dz \end{aligned}$$

mit (5.34), (5.55) und (6.29):

$$\begin{aligned} \delta A_i &= - \int_{z=0}^{\ell} \left[ \mathbf{E} \delta \mathbf{v}''^T \mathbf{F} \mathbf{v}'' + \mathbf{G} \delta \mathbf{v}'_g{}^T \mathbf{J} \mathbf{v}'_g + \mathbf{G} \delta \mathbf{g}'^T (\mathbf{R} - \mathbf{J}) \mathbf{g}' + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E} \delta \mathbf{v}_g{}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_g \right] dz \end{aligned}$$

Beseitigt man  $\delta \mathbf{g}'$  mit (6.1), integriert den 1. Term partiell und beachtet (6.30), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta A_i &= - \int_{z=0}^{\ell} \left[ \mathbf{G} \delta \mathbf{v}'_g{}^T (\mathbf{J} \mathbf{v}'_g + \mathbf{R} \mathbf{g}' - \mathbf{J} \mathbf{g}') + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{E} \delta \mathbf{v}_g{}^T \mathbf{B} \mathbf{v}_g \right] dz - \left[ \mathbf{E} \delta \mathbf{v}'^T \mathbf{F} \mathbf{v}'' \right]_0^{\ell} \end{aligned}$$

Integriert man den Term mit  $\delta \mathbf{v}'_g$  partiell und setzt den Ausdruck für  $\delta A_i$  in die gesamte virtuelle Arbeit  $\delta A$  ein, erhält man das Differentialgleichungssystem:

$$- G J v_g'' - G (R - J) g'' + E B v_g = q \quad (6.31)$$

und die Randbedingungen für  $z = 0$  und  $z = l$ :

$$- E F v'' = p_R \quad (6.32)$$

$$G J v_g' + G (R - J) g' = q_R \quad (6.33)$$

Eliminiert man  $g$  mit Hilfe von (6.30) und berücksichtigt noch (6.1), so kann alles in  $v_g$  und  $v$  dargestellt werden:

Die Differentialgleichungen:

$$E F v'' - G J v_g'' + E B v_g = q \quad (6.34)$$

$$E F v''' = - G (R - J) v_g' + G (R - J) v' \quad (6.35)$$

und die Randbedingungen:

$$- E F v'' = p_R \quad (6.32)$$

$$- E F v''' + G J v_g' = q_R \quad (6.36)$$

Die Gleichungen (6.34), (6.32) und (6.36) entsprechen genau denen nach Heilig: (6.12), (6.13) und (6.14). Der Unterschied liegt lediglich in Gleichung (6.35) bzw. (6.15).

Eliminiert man aus (6.34) und (6.35)  $v''$ , so gilt:

$$G (R - J) v'' = G R v_g'' - E B v_g + q \quad (6.37)$$

Dieser Ausdruck tritt an die Stelle von (6.17) nach Heilig.

Ist  $(R - J) = \int_0^l \dot{k} \dot{k}^T dF$  invertierbar, was im Regelfalle erfüllt ist, so kann man weiter eliminieren und erhält aus (6.37) und (6.34):

$$E F (R - J)^{-1} R v_g'' - G (J + \frac{E^2}{G^2} F (R - J)^{-1} B) v_g'' + E B v_g = q - \frac{E}{G} F (R - J)^{-1} q''$$

Führt man zur Abkürzung ein:

$$v = \frac{E}{G} F (R - J)^{-1} \quad (6.38)$$

und definiert neu:

$$\begin{aligned} F_v &= \frac{G}{E} v R \\ J_v &= J + \frac{E}{G} v B \\ q_v &= q - v q'' \end{aligned} \quad (6.39)$$

so ergibt sich als Differentialgleichungssystem:

$$E F_v v_g^{IV} - G J_v v_g'' + E B v_g = q_v \quad (6.40)$$

das formal der Gleichung (6.19) nach Heilig entspricht. Gleichung (6.37) läßt sich mit den neuen Abkürzungen umformen in:

$$v'' = F^{-1} F_v v_g'' - F^{-1} v B v_g + \frac{1}{E} F^{-1} v q \quad (6.41)$$

Die Schnittgrößendefinitionen können wie bei Heilig erfolgen. Es gelten die Gleichungen (6.21), (6.22), (6.23) und (5.63). Auch hierbei kann  $v''$  mit (6.41) eliminiert werden.

#### 6.4 Vereinfachte Näherungslösungen

Bei der vollständigen Faltwerksberechnung mit Berücksichtigung der Biege- und Wölbschubverzerrungen entweder nach Heilig oder nach Benscoter geht die durch frühere Orthogonalisierungen erreichte teilweise Entkopplung verloren. Es sind somit kompliziertere Differentialgleichungssysteme zu lösen. Hinzu kommt noch die längere Ermittlung aller Ausgangsmatrizen, wie z. B.  $\kappa$ ,  $F_\kappa$ ,  $J_\kappa$  usw. mit allen eventuell erforderlichen Inversionen. Es liegt deshalb nahe, weitere Vernachlässigungen vorzunehmen, um den Rechenumfang zu verringern.

Vernachlässigt man in der Matrix  $S$  nach Heilig bzw.  $R$  nach Benscoter die Nebendiagonalelemente und hat man vorher eine vollständige Orthogonalisierung 2. Stufe für  $F$  und  $J$  durchgeführt, so werden auch die Matrizen  $\kappa$  bzw.  $v$  zu Diagonalmatrizen. Mit  $S \rightarrow S_{\text{Diag}}$ ,  $F \rightarrow F_{\text{Diag}}$  und  $J \rightarrow J_{\text{Diag}}$  ergibt sich aus (6.16):

$$\kappa \rightarrow \frac{E}{G} S_{\text{Diag}} F_{\text{Diag}}^{-1} = \kappa_{\text{Diag}}$$

Die Inversion von  $\mathbf{F}_{\text{Diag}}$  ist durch Kehrwertbildung für die Hauptdiagonalelemente schnell durchgeführt. Kopplungen im Differentialgleichungssystem bestehen somit nur infolge  $\mathbf{B}$ . Dies wirkt sich ebenfalls auf  $\mathbf{J}_n$  aus. Vernachlässigt man die Nebendiagonalelemente von  $\mathbf{B}$ , wie es auch bei einer Näherungslösung zum Differentialgleichungssystem nach Kapitel 5 möglich ist, so erhält man entkoppelte Differentialgleichungen vom bekannten Typ:

$$A v_g^{IV} - B v_g'' + C v_g = q$$

Die teilweise abweichenden Randbedingungen infolge des Ansatzes nach (6.1) sind dabei zu beachten.

### 6.5 Randbedingungen

Für eine Faltwerksberechnung ohne Berücksichtigung der Wölbschubverzerrungen lassen sich die Randbedingungen analog zum Balken angeben. Eine direkte Übernahme fertiger Ergebnisse ist speziell nach einer näherungsweise Entkopplung möglich. Im Falle einer Berechnung mit Wölbschubeinfluß sind die Randbedingungen bezüglich der Schnittgrößen umzuformen auf die Ableitungen von  $v_g$ . Dies soll an zwei Beispielen gezeigt werden:

#### 6.5.1 Endlagerung mit Schott

Die übliche Lagerung am Brückenende mit freier Verwölbarkeit des Querschnitts, aber behinderter Profilverformung und behinderter Querverschiebung des Tragwerks bedingt an dieser Stelle:

$$v_g = 0$$

und:  $m = 0$

Mit (6.21) folgt aus der Randbedingung für die Kräfte:

$$v_g'' = 0$$

Aus (6.20) ergibt sich dann bei Beachtung der Verschiebungsbedingung am Rand:

$$- E F_{\kappa} v_g'' = \kappa q$$

bzw. aus (6.41):

$$- E F_{\nu} v_g'' = \nu q$$

Bei einer Aufspaltung in einzelne Differentialgleichungen kann diese Randbedingung am normalen Biegeträger als ein zusätzlicher Momentenangriff mit  $m_{\kappa}^* = \kappa q$  bzw.  $m_{\nu}^* = \nu q$  simuliert werden.

Liegt im Sonderfall keine verteilte Belastung  $q$  vor, so erhält man die weitaus einfachere Randbedingung:

$$v_g'' = 0$$

Nur dies entspricht der Bedingung am Biegeträger ohne Schubeinfluß.

Direkte Lösungen finden sich für den Balken mit Schubverzerrung auf elastischer Bettung bei Ylinen [40].

#### 6.5.2 Randbedingungen in Feldmitte eines symmetrisch belasteten Trägers

Aus Symmetriegründen muß in Feldmitte die Längsverschiebung  $v_z$  gleich Null sein. Mit (6.3) folgt:

$$v' = 0$$

Weiter muß die antimetrische Schnittgröße  $t$  in Feldmitte verschwinden oder einen Sprung durch Null aufweisen. Letzteres ist bei dem Angriff von Einzellasten in Feldmitte der Fall. Vor einer weiteren Untersuchung werden noch einige Umformungen vorgenommen:

Aus (6.15) folgt mit (6.16) bei Heilig:

$$v_g' = v' - \kappa^T v''' \quad (6.42)$$

und aus (6.30), (6.38) und (6.1) bei Benschoter:

$$v_g' = v' - \nu^T v''' \quad (6.43)$$

Setzt man (6.42) in die Schnittgröße  $t$  gemäß (5.63), (6.22) und (6.23) ein, so gilt:

$$t = G J v' - G J \kappa^T v''' - E F v'''$$

$$\text{bzw.: } \mathbf{t} = \mathbf{GJ} \mathbf{v}' - \mathbf{GJ} \mathbf{v}^T \mathbf{v}''' - \mathbf{E} \mathbf{F} \mathbf{v}'''$$

Mit (6.18) unter Beachtung der Symmetrie von  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{J}$  folgt für Heilig:

$$\mathbf{t} = \mathbf{GJ} \mathbf{v}' - \mathbf{E} \mathbf{F}_{\kappa}^T \mathbf{v}''' \quad (6.44)$$

Bei Bencoter sind mehr Umformungen erforderlich. Mit (6.38) und (6.39) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{GJ} \mathbf{v}' - \mathbf{E} \left( \mathbf{F} + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{E}} \mathbf{vJ} \right)^T \mathbf{v}''' \\ \mathbf{t} &= \mathbf{GJ} \mathbf{v}' - \mathbf{E} \left( \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{E}} \mathbf{v} (\mathbf{R} - \mathbf{J}) + \frac{\mathbf{G}}{\mathbf{E}} \mathbf{vJ} \right)^T \mathbf{v}''' \\ \mathbf{t} &= \mathbf{GJ} \mathbf{v}' - \mathbf{E} \mathbf{F}_{\nu}^T \mathbf{v}''' \end{aligned} \quad (6.45)$$

-----  
 Fall a) Keine Einzellast in Feldmitte:

$$\mathbf{t} = \mathbf{0}$$

Mit der Verformungsbedingung  $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$  folgt aus (6.43) bzw. (6.44):

$$\mathbf{v}''' = \mathbf{0}$$

Dann gilt aber wegen (6.42) bzw. (6.43):

$$\mathbf{v}'_g = \mathbf{0}$$

Aus einmaliger Ableitung von (6.20) folgt bei Heilig:

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}_{\kappa} \mathbf{v}'''_g + \frac{1}{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{q}' \\ - \mathbf{E} \mathbf{F}_{\kappa} \mathbf{v}'''_g &= \boldsymbol{\kappa} \mathbf{q}' \end{aligned}$$

und für konstante Belastung  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{v}'''_g = \mathbf{0}$$

Analog ergibt sich aus (6.40) bei Bencoter:

$$- \mathbf{E} \mathbf{F}_{\nu} \mathbf{v}'''_g = \mathbf{v} \mathbf{q}'$$



Fall b) Einzellasten in Feldmitte:

Die Betrachtung wird am linken Abschnitt des Trägers durchgeführt.  
Als Randbedingung in Feldmitte folgt dann:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2} \mathbf{t}_L = \frac{1}{2} \Sigma \mathbf{Q} \mathbf{r}$$

Aus (6.43) und der Randbedingung  $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$  ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \mathbf{t}_L = -E \mathbf{F}_\kappa^T \mathbf{v}'''$$

bzw. bei invertierbarem  $\mathbf{F}_\kappa^T$ :

$$\mathbf{v}''' = -\frac{1}{2E} (\mathbf{F}_\kappa^T)^{-1} \mathbf{t}_L$$

Für  $\mathbf{v}'_g$  gilt wegen (6.41):

$$\mathbf{v}'_g = \frac{1}{2E} \boldsymbol{\kappa}^T (\mathbf{F}_\kappa^T)^{-1} \mathbf{t}_L$$

Analog bei Benschoter:

$$\mathbf{v}'_g = \frac{1}{2E} \mathbf{v}^T (\mathbf{F}_\nu^T)^{-1} \mathbf{t}_L$$

Aus der einmaligen Ableitung von (6.20) bei Heilig folgt für  $\mathbf{v}'''_g$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'''_g = & -\frac{1}{2E} \mathbf{F}_\kappa^{-1} \mathbf{F} (\mathbf{F}_\kappa^T)^{-1} \mathbf{t}_L + \frac{1}{2E} \mathbf{F}_\kappa^{-1} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}^T (\mathbf{F}_\kappa^T)^{-1} \mathbf{t}_L + \\ & -\frac{1}{E} \mathbf{F}_\kappa^{-1} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{q}' \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}'''_g = -\frac{1}{2E} \mathbf{F}_\kappa^{-1} (\mathbf{F} - \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}^T) \mathbf{F}_\kappa^{-1T} \mathbf{t}_L - \frac{1}{E} \mathbf{F}_\kappa^{-1} \boldsymbol{\kappa} \mathbf{q}'$$

Entsprechend läßt sich bei Benschoter aus (6.40) ableiten:

$$\mathbf{v}'''_g = -\frac{1}{2E} \mathbf{F}_\nu^{-1} (\mathbf{F} - \mathbf{v} \mathbf{B} \mathbf{v}^T) \mathbf{F}_\nu^{-1T} \mathbf{t}_L - \frac{1}{E} \mathbf{F}_\nu^{-1} \mathbf{v} \mathbf{q}'$$

Bei konstanter Gleichstreckenlast oder wenn nur Einzellasten angreifen, gilt:

$$-E \mathbf{F}_\kappa \mathbf{v}'''_g = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \boldsymbol{\kappa} \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa}^T) \mathbf{F}_\kappa^{-1T} \mathbf{t}_L$$

$$\text{bzw.: } -E \mathbf{F}_\nu \mathbf{v}'''_g = \frac{1}{2} (\mathbf{F} - \mathbf{v} \mathbf{B} \mathbf{v}^T) \mathbf{F}_\nu^{-1T} \mathbf{t}_L$$

## 7. Auswertungen

### 7.1 Berechnung mehrzelliger Träger mit Hilfe des Übertragungsverfahrens

Zur praktischen Berechnung mehrzelliger Kastenträger nach der in Kapitel 5 und 6 dargestellten Theorie wurde ein Computerprogramm in FORTRAN IV geschrieben. Dieses läuft sowohl auf der CDC 6600 als auch auf der CYBER 174 der Universität Stuttgart. Der Umfang des Rechenprogramms (DISSU) soll hier nur kurz skizziert werden.

Anhand der eingegebenen Trägerabmessungen werden sämtliche erforderlichen Matrizen erstellt, wie z. B.  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{J}$  und  $\mathbf{B}$ . Die Orthogonalisierung 1. Stufe wird dabei stets durchgeführt, die Orthogonalisierung 2. Stufe wahlweise für die verschiedenen in Abschnitt 5.5 aufgeführten Möglichkeiten. Für die Ermittlung der Eigenwerte und Eigenvektoren wird eine FORMAT-Routine\*) herangezogen, die auf dem allgemeinen QR-Algorithmus beruht, wie er bei Wilkinson und Reinsch in [41] beschrieben ist.

Die Berechnung kann wahlweise mit und ohne Verformungen infolge der Wölbschubeinflüsse nach Heilig bzw. Benscoter erfolgen. Die entsprechenden Randbedingungen werden im Programm gemäß Abschnitt 6.5 berücksichtigt.

Zur numerischen Lösung der in Kapitel 5 und 6 abgeleiteten Differentialgleichungssysteme wird eine Integration nach der Methode von Runge-Kutta vorgenommen mit automatischer Schrittweitenänderung nach Merson. Dazu liegt ebenfalls ein fertiges Computerprogramm von IMSL (International Mathematical and Statistical Libraries, INC.) vor. Das angewandte Programm beruht auf Christiansen [42] und ist in der Lage, sehr schnell ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung aufzuintegrieren, wenn Anfangswerte vorgegeben sind. Zuvor muß das in Kapitel 5 bzw. 6 abgeleitete Differentialgleichungssystem 4. Ordnung

---

\*) Entwickelt von der Rechengruppe des Instituts für Statik und Dynamik in Zusammenarbeit mit dem Rechenzentrum der Universität Stuttgart.

umgeformt werden. Dies wird am Beispiel von (5.45) gezeigt für den Normalfall, daß  $F$  invertierbar ist. Man erhält zunächst:

$$v^{IV} = -F^{-1}Bv + \frac{G}{E}F^{-1}Jv'' + \frac{1}{E}F^{-1}q \quad (7.1)$$

Führt man mit der Einheitsmatrix  $I$  noch folgende Identitäten ein:

$$v' = I v'$$

$$v'' = I v''$$

$$v''' = I v'''$$

kann man zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} v' \\ v'' \\ v''' \\ v^{IV} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -F^{-1}B & 0 & \frac{G}{E}F^{-1}J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ v''' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{E}F^{-1}q \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Mit den Abkürzungen:

$$y = \begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ v''' \end{pmatrix} \quad l_q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{E}F^{-1}q \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -F^{-1}B & 0 & \frac{G}{E}F^{-1}J & 0 \end{pmatrix} \quad (7.3)$$

ergibt sich das Differentialgleichungssystem 1. Ordnung zu:

$$y' = Ay + l_q \quad (7.4)$$

Durch numerische Integration mit speziellen Anfangswerten wie

$$y_A^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{usw. bei } l_q = 0$$

kann spaltenweise eine Übertragungsmatrix  $U$  für ein vorgegebenes Intervall  $\Delta l$  ermittelt werden.

Bei  $y_A^* = 0$  und vorgegebener Querbelastung  $l_q$  erhält man entsprechend einen Lastvektor  $y_q$ . Das Problem ist somit übergeführt worden in die Form:

$$y_E = U y_A + y_q \quad (7.5)$$

Vom Anfangsvektor  $y_A$  bzw. vom Endvektor  $y_E$  bei einer Übertragung über den Abschnitt  $\Delta l$  kennt man als Randbedingungen jeweils nur die Hälfte der Elemente. Die fehlenden Anfangswerte erhält man durch Lösen der Gleichungssysteme, die sich aus den bekannten Randbedingungen für  $y_E$  ergeben. Zwischenwerte können anschließend bei bekanntem  $y_A$  durch Übertragung über entsprechende Teilintervalle analog zu (7.5) berechnet werden. Die neue Übertragungsmatrix  $U_A$  muß jedesmal neu durch numerische Integration ermittelt werden. Eine ausführliche Darstellung des Übertragungsverfahrens findet sich bei Uhrig [43] und Pestel, Leckie [44], kürzer in Zurmühl [37].

Durch schnell abklingende Lösungsanteile können numerische Instabilitäten beim Übertragungsverfahren auftreten, die eine Anwendung in der ursprünglichen Form nicht zulassen. Dieses Problem ergibt sich ebenfalls bei der vorliegenden Untersuchung der Kastenträger mit Profilverformungen. Eine Lösung erfordert die Mitnahme von Zwischenwerten verbunden mit einer Rückkehr zum Gaußschen Eliminationsverfahren. Zur Anwendung im Programm gelangte dabei das Verfahren von Marguerre und Uhrig [45], das auch bei einer größeren Trägereinteilung in Abschnitte mit  $0,1 l$  schon sehr zufriedenstellende Ergebnisse liefert.

Ein Umbau der  $y$ -Vektoren, die nur Verschiebungsgrößen enthalten, in neue Vektoren  $X$ , die anstelle der höheren Ableitungen von  $v$  entsprechende Schnittgrößen enthalten, ist möglich. Da bei der Berücksichtigung der Biege- und Wölbschubverzerrungen nach Heilig oder Benscoter aber kaum Vorteile durch die Einführung von  $X$  entstehen, wurde im vorliegenden Programm von einem solchen Umbau abgesehen.

Als Ergebnisse werden vom Rechenprogramm DISSU neben Längsspannungen auch Schubspannungen aus Drehung und Verwölbung getrennt sowie deren Summe angegeben. Außerdem erhält man die Querbiegemomente und Wandverschiebungen in Querrichtung.

## 7.2 Vergleich der Ergebnisse mit einem anderen unabhängigen Rechenprogramm

Die Ergebnisse einer vollständigen Faltwerksberechnung nach dem zuvor beschriebenen Programm DISSU wurden an zahlreichen Beispielen mit dem Programm MULTPL von Scordelis [21] verglichen. Die Übereinstimmungen sind stets außerordentlich gut, wie auch die folgenden drei Beispiele zeigen.

In allen drei Beispielfällen ist als Belastung eine exzentrische Einzellast bzw. Einzellastgruppe in Feldmitte eines Einfeldträgers angesetzt worden. Der untersuchte Träger besitzt Querschotte nur an den Endauflagern, nicht an der Lasteinleitungsstelle.

Folgende Berechnungsverfahren werden bei jedem Beispiel einander gegenübergestellt:

1. Berechnung mit MULTPL. Da die Ergebnisse stark von der jeweils benutzten Anzahl der Fourierreihenglieder abhängen, wird diese in Klammern zusätzlich angegeben.
2. Berechnung mit DISSU ohne Berücksichtigung des Verformungseinflusses der Biege- und Wölbschubspannungen (Kapitel 5), im folgenden kurz "NORMAL" genannt.
3. Berechnung mit DISSU bei näherungsweise Berücksichtigung der Biege- und Wölbschubspannungen bei der Verformungsermittlung nach Heilig (Kapitel 6. 2); kurz "HEILIG" genannt.
4. Berechnung entsprechend zum Verfahren 3, aber nach Benscoter (Kapitel 6. 3); kurz "BENSOTER" genannt.

1. Beispiel: Einzelliger Rechteckkasten mit Flügeln unter einer Torsionslastgruppe

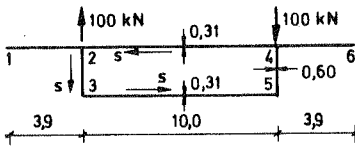
Dieser einzellige Träger ist bereits bei Steinle [6] und Hees [7] als Beispiel herangezogen worden. Die Trägerlänge ist sehr groß gegenüber den einzelnen Wandbreiten, so daß Scheibenwirkungen bei der Spannungsverteilung sicherlich keine Rolle spielen.

Die Tabelle T 7.1 gibt die Wandverschiebungen  $v_s$  des Kastenträgers an, wie man sie rechnerisch nach den oben aufgeführten vier Varianten erhält. Für MULTPL werden zum Vergleich die Ergebnisse für 29 und 49 Reihenglieder einander gegenübergestellt. Bild 7.1 zeigt als Beispiel den Verlauf von  $v_s$  für den linken Steg. Die Werte sind über die halbe Trägerlänge aufgetragen. Da jedoch die Wandverschiebung eine verhältnismäßig unempfindliche Größe darstellt, sind die Schnittgrößen bzw. Spannungen aufschlußreicher.

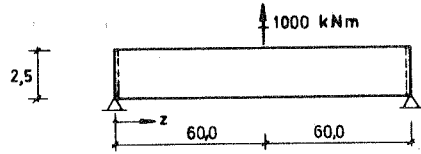
In Tabelle T 7.2 finden sich die Querbiegemomente  $m_Q$  an den Knotenpunkten 2 und 3. Den Verlauf von  $m_Q$  über den Querschnitt in Feldmitte ( $z = 60$  m) verdeutlicht Bild 7.2. Einen Unterschied der Werte zwischen Knoten 2 und 3 gibt es lediglich bei MULTPL, da dort auch die Querbiegemomente in der auskragenden Fahrbahnplatte erfaßt werden. In Bild 7.3 ist deshalb nur die Entwicklung von  $m_{Q3}$  in Trägerlängsrichtung aufgezeichnet worden.

Die Tabelle T 7.3 enthält einige der wichtigsten Werte für die Längsspannungen  $\sigma$ , die in Bild 7.4 auszugsweise dargestellt sind.

Tabelle T 7.4 ergänzt den Vergleich der maßgebenden Größen durch einige Angaben zu den Schubspannungen  $\tau$ . Diese sind im Bild 7.5 für zwei Querschnitte und im Verlauf über die halbe Trägerlänge aufgetragen.



Querschnitt



statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 2100000 \text{ kN/m}^2; \mu = 0,34$

$v_s$ [mm]	z [m]	MULTPL <sup>(*)</sup>		NORMAL	HEILIG	BENSCOTER
		(29)	(49)			
Wand 2-3	60	-0,8447	-0,8467	-0,8367	-0,8677	-0,8582
	58	-0,8324	-0,8316	-0,8271	-0,8472	-0,8414
	48	-0,6260	-0,6259	-0,6407	-0,6345	-0,6363
	36	-0,3822	-0,3822	-0,3889	-0,3836	-0,3850
	24	-0,2196	-0,2196	-0,2189	-0,2192	-0,2191
	12	-0,1028	-0,1028	-0,1014	-0,1028	-0,1025
Wand 1-2- -4-6	60	-0,1047	-0,1048	-0,1026	-0,0995	-0,1003
	58	-0,1045	-0,1044	-0,1018	-0,0996	-0,1003
	48	-0,1010	-0,1010	-0,0996	-0,1005	-0,1003
	36	-0,0880	-0,0880	-0,0890	-0,0893	-0,0891
	24	-0,0629	-0,0629	-0,0642	-0,0639	-0,0639
	12	-0,0322	-0,0322	-0,0328	-0,0326	-0,0326
Wand 3-5	60	+0,0115	+0,0117	+0,0059	+0,0165	+0,0135
	58	+0,0095	+0,0094	+0,0052	+0,0131	+0,0113
	48	-0,0263	-0,0263	-0,0261	-0,0286	-0,0279
	36	-0,0540	-0,0540	-0,0573	-0,0592	-0,0589
	24	-0,0485	-0,0485	-0,0527	-0,0526	-0,0527
	12	-0,0265	-0,0265	-0,0289	-0,0284	-0,0285

x) Werte in Klammern geben die Zahl der Fourierreihenglieder an.

Tabelle T 7. 1:

Wandverschiebungen  $v_s$  für Beispiel 1

(einzelliger Rechteckkasten unter Torsionslastgruppen)

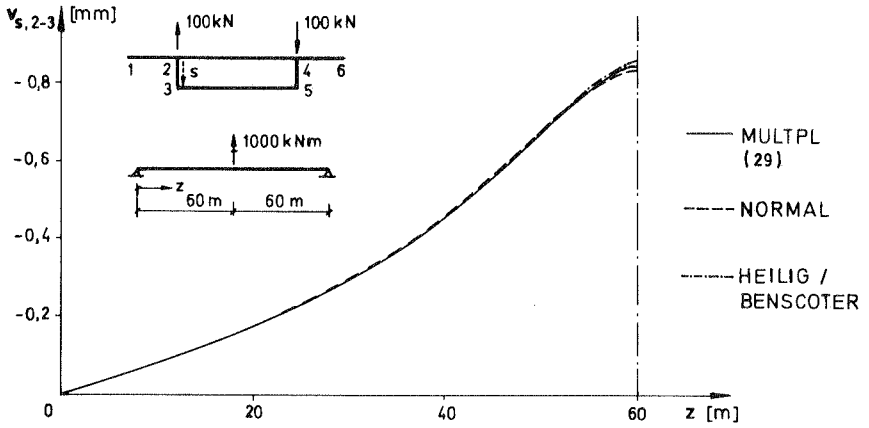
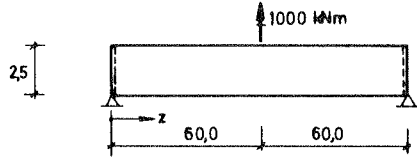
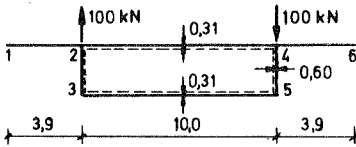


Bild 7. 1: Verlauf der Wandverschiebung  $v_{s,2-3}$  in Beispiel 1 für die halbe Trägerlänge





Querschnitt

statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 2100000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,34$

$m_Q$ [kNm/m]	z [m]	MULTPL $\times$ )		NORMAL	HEILIG	BENSCHOTER
		(29)	(49)			
 Pkt 2	60	- 4,777	- 4,791	- 4,399	- 4,798	- 4,682
	58	- 4,644	- 4,639	- 4,334	- 4,610	- 4,630
	48	- 2,510	- 2,509	- 2,663	- 2,573	- 2,597
	36	- 0,591	- 0,592	- 0,659	- 0,592	- 0,609
	24	+ 0,068	+ 0,061	+ 0,101	+ 0,094	+ 0,096
	12	+ 0,109	+ 0,109	+ 0,150	+ 0,131	+ 0,136
 Pkt 3	60	+ 4,863	+ 4,960	+ 4,399	+ 4,798	+ 4,682
	58	+ 4,671	+ 4,630	+ 4,334	+ 4,610	+ 4,630
	48	+ 2,519	+ 2,518	+ 2,663	+ 2,573	+ 2,597
	36	+ 0,623	+ 0,623	+ 0,659	+ 0,592	+ 0,609
	24	- 0,045	- 0,045	- 0,101	- 0,094	- 0,096
	12	- 0,105	- 0,105	- 0,150	- 0,131	- 0,136

\*) Werte im Steg

Tabelle T 7. 2: Querbiegemomente  $m_Q$  für Beispiel 1

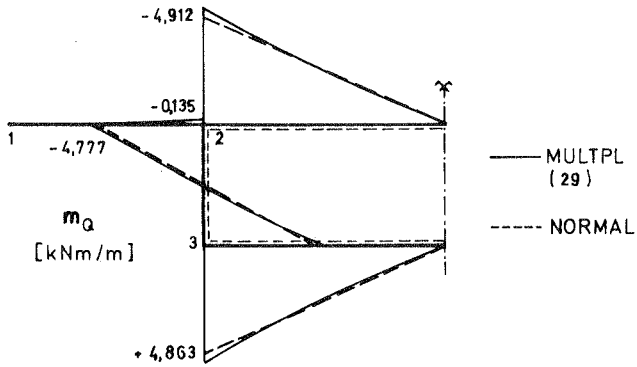


Bild 7. 2: Verlauf von  $m_Q$  über den Querschnitt in Feldmitte ( $z = 60 \text{ m}$ ) bei Beispiel 1

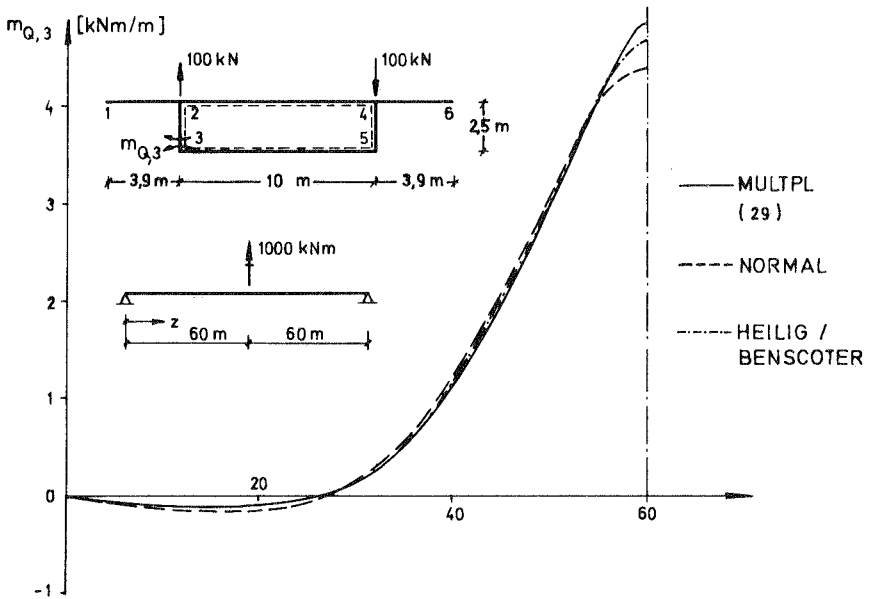
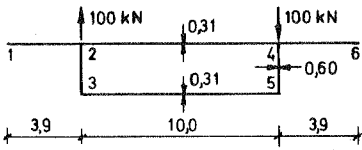
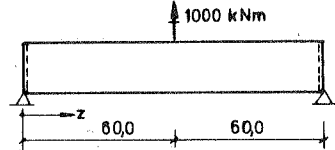


Bild 7. 3: Verlauf des Querbiegemomentes  $m_{Q,3}$  in Beispiel 1 für die halbe Trägerlänge



Querschnitt



statisches System

alle Abmessungen in m

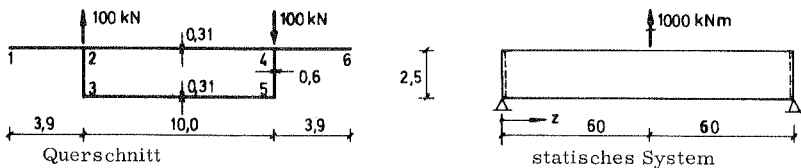
$E = 2100000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,34$

$\sigma$ [kN/m <sup>2</sup> ]	z [m]	MULTPL		NORMAL	HELLIG	BENSCHOTER
		(29)	(49)			
Pkt. 1	60,0	+ 32,945	+ 32,133	+ 29,900	+ 34,784	+ 27,580
	58,0	+ 32,489	+ 32,777	+ 52,471	+ 37,979	+ 36,858
	48,0	- 0,671	- 0,642	- 4,238	- 0,760	- 0,124
	36,0	- 13,698	- 13,712	- 17,135	- 14,588	- 14,822
	24,0	- 7,487	- 7,482	- 8,374	- 7,909	- 8,077
	12,0	- 2,192	- 2,194	- 1,977	- 2,200	- 2,231
Pkt. 2 <sup>*)</sup>	60,0	+ 95,107	+ 115,297 <sup>**)</sup>	+ 90,184	+ 84,452	+ 89,120
	58,0	+ 75,067	+ 65,873	+ 51,115	+ 55,919	+ 57,285
	48,0	- 2,036	- 2,282	+ 1,950	- 0,048	- 0,357
	36,0	- 8,559	- 8,497	- 8,530	- 8,536	- 8,753
	24,0	- 4,153	- 4,177	- 4,855	- 4,417	- 4,501
	12,0	- 1,133	- 1,123	- 1,351	- 1,169	- 1,172
Pkt. 3 <sup>*)</sup>	60,0	-154,809	-168,038	-166,103	-160,466	-162,716
	58,0	-130,456	-125,152	-119,914	-117,095	-118,469
	48,0	+ 2,330	+ 2,713	- 0,049	+ 0,628	+ 0,661
	36,0	+ 23,286	+ 23,190	+ 26,088	+ 24,251	+ 24,768
	24,0	+ 12,107	+ 12,144	+ 13,849	+ 12,809	+ 13,067
	12,0	+ 3,479	+ 3,464	+ 3,598	+ 3,468	+ 3,494

\*) Werte bei MULTPL für den Steg

\*\*) Vergleichswert ( $\sigma_z - \mu \sigma_s$ ) = +115,297 - 0,34 · 65,953 = +92,873

Tabelle T 7.3: Längsspannungen  $\sigma$  im Beispiel 1



alle Abmessungen in m

$E = 2100000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,34$

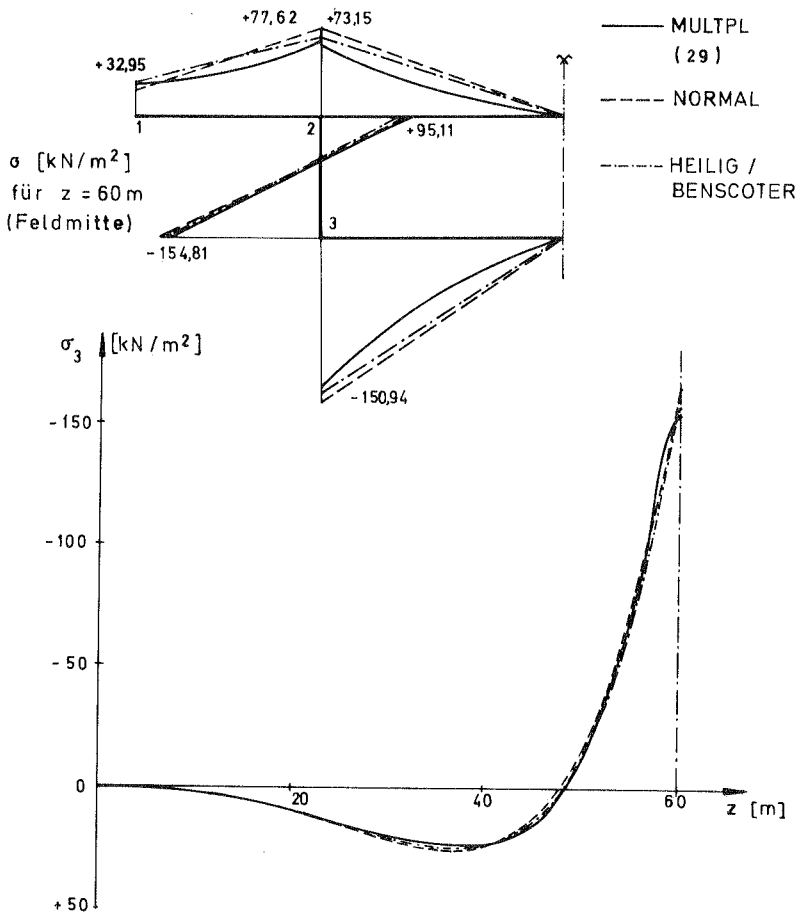
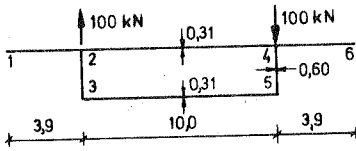
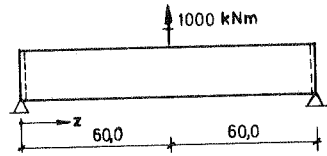


Bild 7.4: Verläufe der Längsspannungen  $\sigma$  für Beispiel 1



Querschnitt

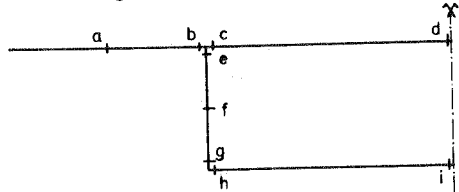


statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 2100000 \text{ kN/m}^2$

$\mu = 0,34$



Sonderbezeichnungen der Punkte für die Angabe von  $\tau$

$\tau$ [kN/m <sup>2</sup> ]	z [m]	MULTPL		NORMAL	HEILIG	BENSCHOTER	
		(29)	(49)				
Fkt. a	57	+ 5,781	+ 5,770	- 1,422	- 3,369	- 4,145	
b		+23,008	+23,379	+27,449	+24,547	+23,755	
c		-29,850	-30,255	-30,863	-31,283	-31,429	
d		- 7,773	- 7,721	- 9,622	- 6,909	- 5,574	
e		-27,310	-27,711	-30,128	-28,846	-28,512	
f		-36,704	-37,566	-32,577	-32,464	-32,615	
g		-18,816	-19,252	-18,682	-18,943	-19,070	
h		-36,417	-37,261	-36,159	-36,665	-36,909	
i		+ 2,221	+ 2,342	+ 7,975	+ 7,514	+ 7,830	
a		0	- 0,253	- 0,250	- 0,009	- 0,030	- 0,030
b			+ 0,002	- 0,157	- 0,326	- 0,365	- 0,364
c	-32,117		-31,943	-32,278	-32,283	-32,283	
d	-31,828		-31,850	-32,465	-32,441	-32,438	
e	-16,595		-16,423	-16,508	-16,491	-16,492	
f	-16,990		-16,629	-16,497	-16,491	-16,493	
g	-16,625		-16,442	-16,649	-16,651	-16,651	
h	-32,177		-31,822	-32,223	-32,228	-32,228	
i	-32,092		-32,148	-32,690	-32,705	-32,702	
h	60		0	0	-45,831	-39,870	-40,908
59			-15,573	-21,253	-40,297	-38,548	-39,203
58		-28,335	-34,251	-37,567	-37,502	-37,908	
56		-39,454	-35,139	-35,376	-35,986	-36,128	
51		-31,695	-33,174	-33,852	-33,949	-33,950	
48		-34,591	-33,484	-33,334	-33,289	-33,286	
36		-30,755	-31,354	-32,231	-32,186	-32,182	
24		-32,199	-31,762	-32,072	-32,080	-32,075	
12		-31,010	-31,384	-32,170	-32,179	-32,178	

Tabelle T 7.4: Schubspannungen  $\tau$  in Beispiel 1

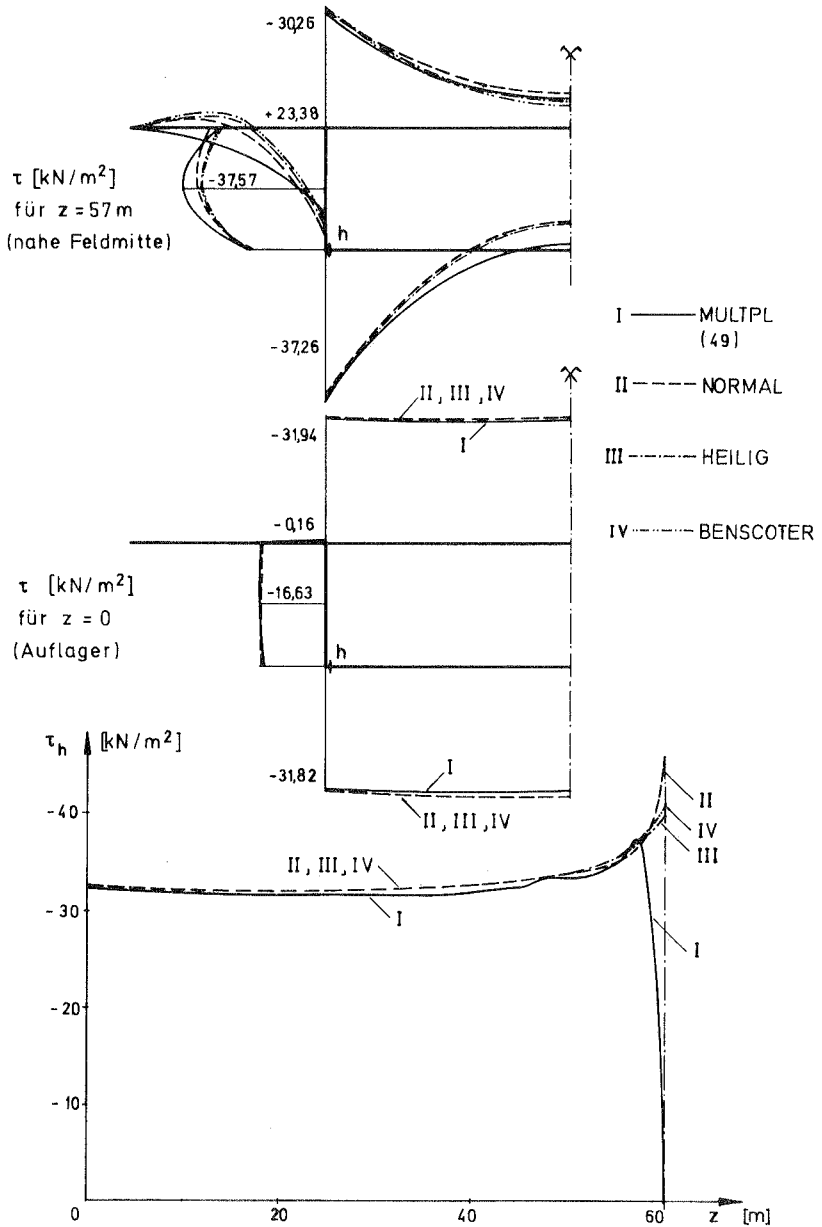


Bild 7.5: Schubspannungsverläufe  $\tau$  für Beispiel 1

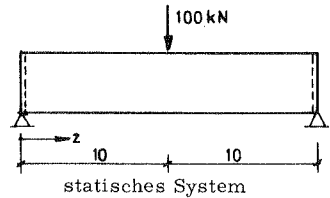
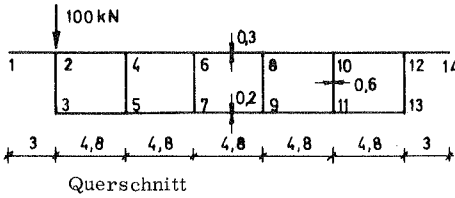
2. Beispiel: Fünfeckiger Kastenträger mit Flügeln unter einer exzentrisch angreifenden Einzellast in Feldmitte

Nach den Abmessungen ist dieser Querschnitt für sehr große Stützweiten geeignet. Im vorliegenden Beispiel wurde aber bewußt eine äußerst geringe Trägerlänge gewählt, um gedrungene Wandabschnitte zu erhalten, die bereits große Einflüsse infolge Scheibenwirkungen erwarten lassen. Es soll damit der untere Grenzbereich für die Zulässigkeit der hier vorgelegten Theorie abgetastet werden. Die Ergebnisse sind trotz dieser extremen Abmessungen sehr gut, wenn man von der Singularität an der Lasteinleitungsstelle absieht.

Die Längsspannungsangaben finden sich für dieses Beispiel in Tabelle T 7.5 und Bild 7.6. Tabelle T 7.6 (Bild 7.7) enthält auszugsweise einige wichtige Querbiegemomente und Schubspannungen. Auf eine Betrachtung der Wandverschiebungen kann verzichtet werden, da die Unterschiede, wie im 1. Beispiel, äußerst gering sind.

3. Beispiel: Unsymmetrischer dreizeckiger Kastenträger unter exzentrischer Einzellast in Feldmitte

Als drittes Beispiel wurde ein unsymmetrischer Querschnitt gewählt bei einer Feldlänge von 50 m. Tabelle T 7.7 gibt hierfür in den wichtigsten Querschnittspunkten die Längsspannungen  $\sigma$  an. In Bild 7.8 sind diese Werte aufgetragen, zum einen über den Querschnitt in Feldmitte, zum anderen über die halbe Trägerlänge für die Maximalspannung (im Knoten 3). Zum Vergleich findet sich auch der Anteil aus Balkenbiegung ohne Torsion (Kurve V) in diesen Diagrammen. Tabelle T 7.8 (Bild 7.9) gibt erneut auszugsweise einige wichtige Querbiegemomente und Schubspannungen an.



alle Abmessungen in m

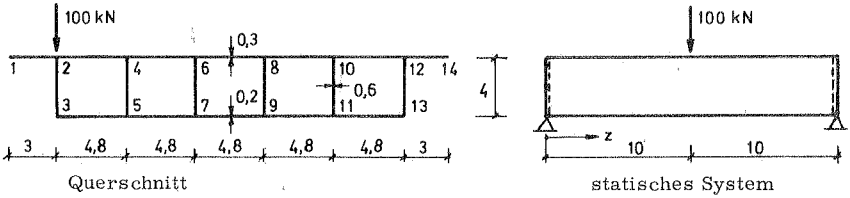
$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

$\sigma$ [kN/m <sup>2</sup> ]	z [m]	MULTPL (49)	NORMAL	HEILIG	BENSCOTER
Pkt.1	10.0	- 37,926	- 54,514	- 60,534	- 49,715
	9.0	- 38,482	- 57,153	- 53,549	- 47,216
	8.0	- 38,193	- 50,916	- 46,756	- 43,205
	6.0	- 31,628	- 36,184	- 33,916	- 33,056
	4.0	- 21,707	- 23,061	- 22,027	- 22,013
	2.0	- 10,963	- 11,229	- 10,834	- 10,949
Pkt.2	10.0	-210,758 <sup>*</sup> )	- 67,200	- 60,839	- 63,920
	9.0	- 56,509	- 54,684	- 52,514	- 54,195
	8.0	- 41,900	- 45,974	- 45,029	- 45,857
	6.0	- 30,446	- 32,146	- 31,914	- 31,960
	4.0	- 19,412	- 20,498	- 20,473	- 20,327
	2.0	- 9,332	- 9,991	- 10,010	- 9,899
Pkt.3	10.0	+104,629	+104,707	+ 96,663	+ 98,709
	9.0	+ 97,881	+ 87,381	+ 83,412	+ 84,395
	8.0	+ 82,655	+ 73,734	+ 71,471	+ 71,823
	6.0	+ 53,349	+ 51,327	+ 50,549	+ 50,367
	4.0	+ 32,700	+ 32,572	+ 32,361	+ 32,104
	2.0	+ 15,755	+ 15,830	+ 15,800	+ 15,643
Pkt.4	10.0	- 13,771	- 6,190	- 8,550	- 9,252
Pkt.5	10.0	+ 17,990	+ 12,124	+ 16,404	+ 15,935
Pkt.6	10.0	- 2,531	- 1,538	- 2,701	- 2,627
Pkt.7	10.0	+ 2,039	+ 4,076	+ 5,805	+ 5,226

<sup>x</sup>) Vergleichswert  $(\sigma_z - \mu\sigma_s) = -210,758 + 0,2 \cdot 289,774 = -152,803$

Tabelle T 7.5: Längsspannungen  $\sigma$  für Beispiel 2  
(fünffelliger Rechteckkasten)





alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

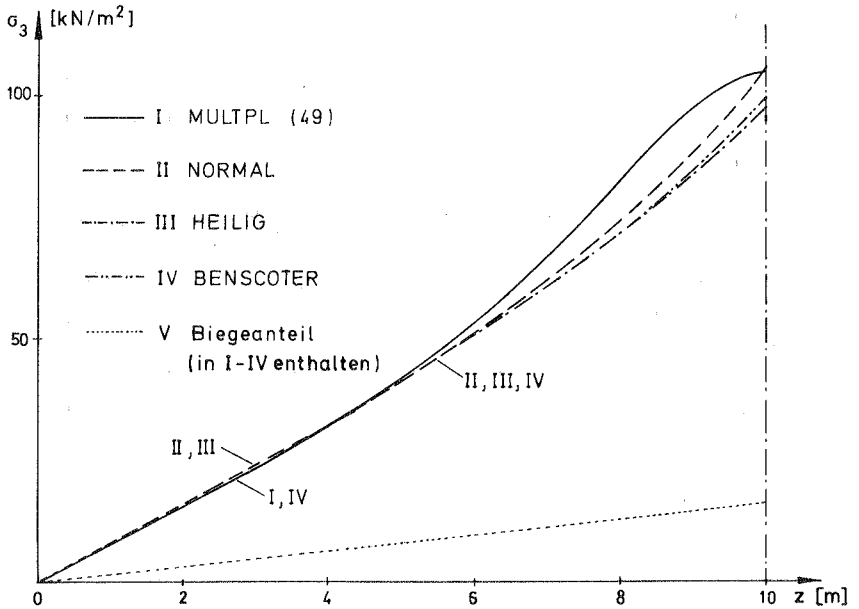
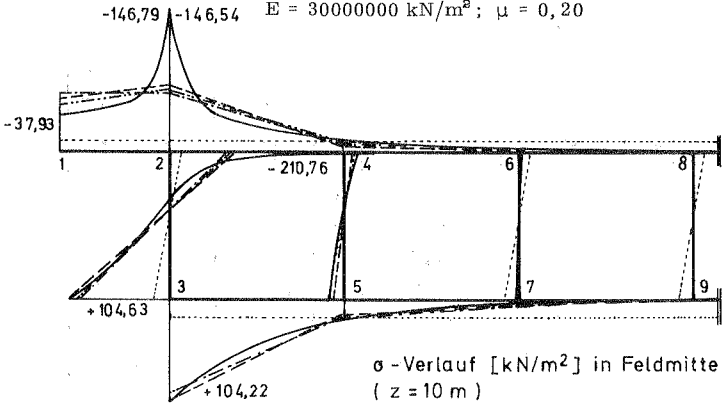
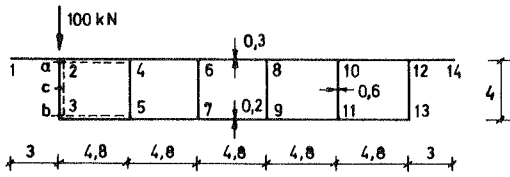
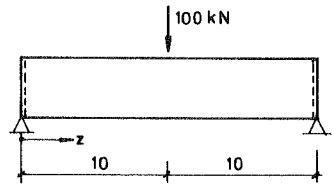


Bild 7. 6: Verläufe der Längsspannungen  $\sigma$  in Beispiel 2



Querschnitt



statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$



Größe	z [m]	MULTPL (49)	NORMAL	HEILIG	BENSCHOTER
$m_Q$ [kNm/m] in Pkt. a 	10	+ 0,9334	+ 0,7004	+ 0,8283	+ 0,8204
	9	+ 0,9114	+ 0,6894	+ 0,7900	+ 0,7846
	8	+ 0,8520	+ 0,6574	+ 0,7358	+ 0,7321
	6	+ 0,6727	+ 0,5436	+ 0,5909	+ 0,5888
	4	+ 0,4611	+ 0,3843	+ 0,4113	+ 0,4101
	2	+ 0,2344	+ 0,1983	+ 0,2106	+ 0,2100
$m_Q$ [kNm/m] in Pkt. b 	10	- 0,3400	- 0,2498	- 0,2966	- 0,2936
	9	- 0,3274	- 0,2460	- 0,2830	- 0,2809
	8	- 0,2928	- 0,2347	- 0,2637	- 0,2622
	6	- 0,2350	- 0,1942	- 0,2119	- 0,2110
	4	- 0,1619	- 0,1374	- 0,1476	- 0,1471
	2	- 0,0824	- 0,0709	- 0,0756	- 0,0753
$\tau$ [kN/m <sup>2</sup> ] in Pkt. c	10	0	+27,018	+24,636	+25,156
	9	+21,777	+24,819	+24,047	+24,365
	8	+25,330	+23,911	+23,547	+23,737
	6	+23,211	+22,953	+22,774	+22,830
	4	+22,176	+22,381	+22,253	+22,257
	2	+21,712	+22,060	+21,951	+21,937
	0	+21,575	+21,955	+21,852	+21,833

Tabelle T 7.6: Querbiegemomente und Schubspannungen (auszugsweise) für Beispiel 2

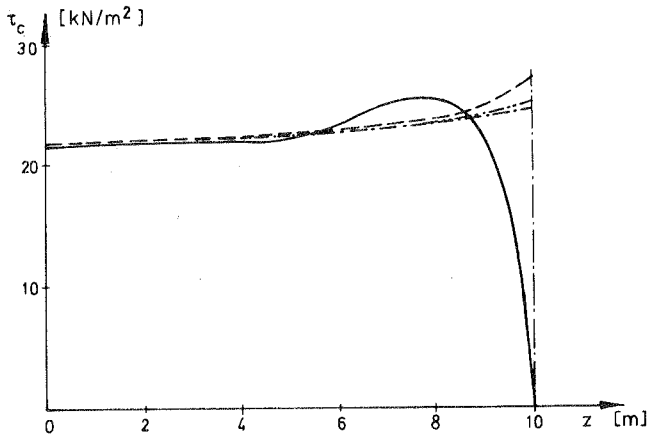
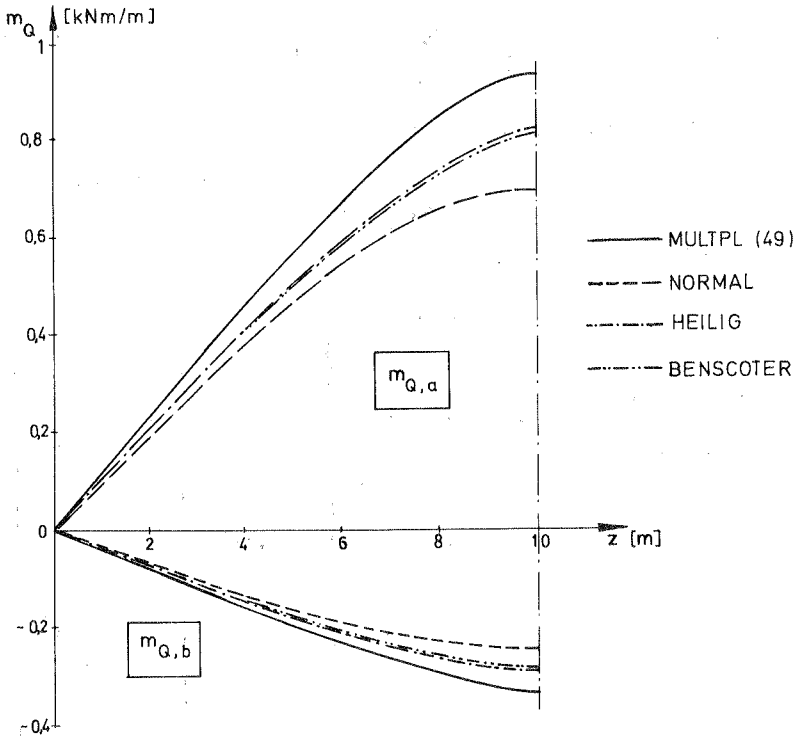
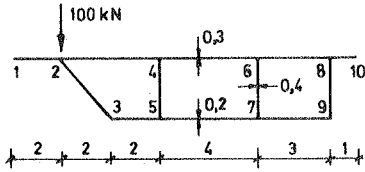
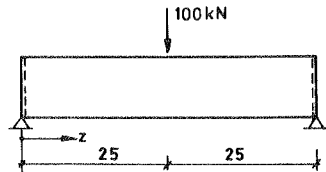


Bild 7.7: Verläufe von  $m_Q$  und  $\tau$  über  $z$  in Beispiel 2



Querschnitt



statisches System

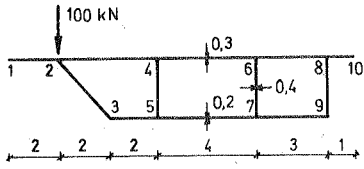
alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

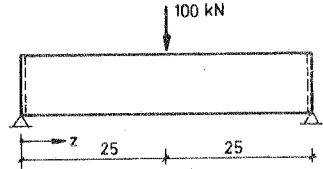
G [kN/m <sup>2</sup> ]	z [m]	MULTPL (49)	NORMAL	HEILIG	BENSCOTER
Pkt.1	25.0	- 36,618	- 42,636	- 77,426	- 75,160
	20.0	- 80,379	- 71,352	- 72,342	- 73,346
	15.0	- 47,379	- 42,854	- 44,392	- 44,849
	10.0	- 27,986	- 26,059	- 27,134	- 27,177
	5.0	- 13,438	- 12,652	- 13,209	- 13,161
Pkt.2	25.0	-235,514 <sup>*)</sup>	-181,547	-151,301	-157,321
	20.0	- 78,149	- 78,264	- 79,543	- 78,212
	15.0	- 51,212	- 50,070	- 51,428	- 50,464
	10.0	- 32,302	- 31,357	- 32,216	- 31,779
	5.0	- 15,790	- 15,347	- 15,767	- 15,607
Pkt.3	25.0	+296,769	+315,556	+289,246	+294,800
	20.0	+170,882	+174,935	+176,043	+174,721
	15.0	+113,351	+113,946	+115,957	+114,836
	10.0	+ 72,128	+ 71,306	+ 72,893	+ 72,266
	5.0	+ 35,489	+ 34,801	+ 35,664	+ 35,388
Pkt.4	25.0	-111,794	- 73,161	- 95,212	- 87,790
Pkt.5	25.0	+200,620	+190,543	+208,854	+202,292
Pkt.6	25.0	-103,456	- 95,961	- 95,513	- 97,908
Pkt.7	25.0	+136,834	+137,297	+132,653	+136,794
Pkt.8	25.0	-110,812	-115,488	-115,440	-115,782
Pkt.9	25.0	+112,518	+101,003	+105,055	+103,021
Pkt.10	25.0	-117,278	-184,944	-152,378	-156,862

\*) Vergleichswert  $(\sigma_z - \mu \sigma_s) = -235,514 - 0,2 \cdot (-243,402) = -186,833$

Tabelle T 7. 7: Längsspannungen  $\sigma$  für Beispiel 3



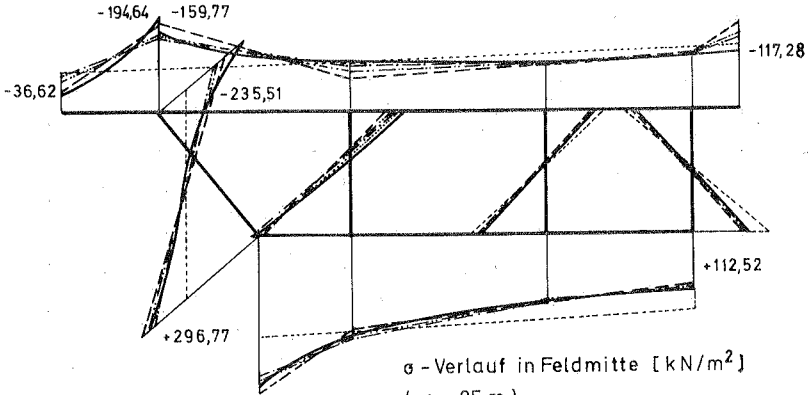
Querschnitt



statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$



$\sigma$  - Verlauf in Feldmitte [ $\text{kN/m}^2$ ]  
( $z = 25 \text{ m}$ )

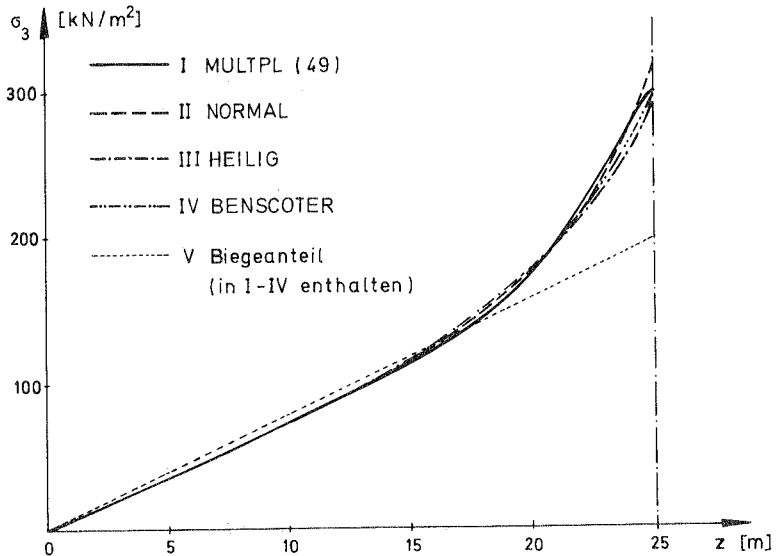
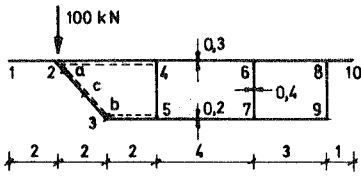
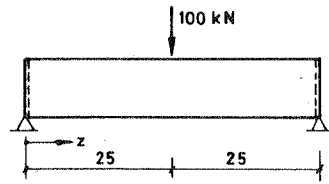


Bild 7. 8: Verläufe der Längsspannungen in Beispiel 3



Querschnitt



statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

Größe	z [m]	MULTPL (49)	NORMAL	HEILIG	BENSCOTER
$m_Q$ [kNm/m] für Pkt. a	25	- 0,4447 <sup>x)</sup>	+ 1,6069	+ 1,8991	+ 1,8221
	23	+ 1,7487	+ 1,5085	+ 1,5801	+ 1,5680
	20	+ 1,0629	+ 1,1481	+ 1,1138	+ 1,1255
	15	+ 0,5053	+ 0,5763	+ 0,5341	+ 0,5431
	10	+ 0,2055	+ 0,2353	+ 0,2155	+ 0,2181
	5	+ 0,0668	+ 0,0744	+ 0,0687	+ 0,0687
$m_Q$ [kNm/m] für Pkt. b	25	- 2,0649	- 2,0213	- 2,3875	- 2,2932
	20	- 1,3330	- 1,4684	- 1,4273	- 1,4416
	15	- 0,6571	- 0,7527	- 0,6977	- 0,7094
	10	- 0,2761	- 0,3150	- 0,2877	- 0,2914
	5	- 0,0922	- 0,1023	- 0,0939	- 0,0942
$\tau$ [kN/m <sup>2</sup> ] für Pkt. c	25	0	+72,395	+58,594	+59,259
	23	+51,516	+49,644	+48,445	+48,993
	20	+40,586	+40,302	+39,543	+39,703
	15	+32,191	+31,534	+31,321	+31,306
	10	+29,097	+27,657	+27,735	+27,679
	5	+27,677	+26,227	+26,420	+26,361
	0	+27,546	+25,893	+26,111	+26,055

x) Vergleichswert ( $m_Q - \mu m_L$ ):  $- 0,4447 - 0,2 \cdot (- 4,6544) = + 0,4862$

Tabelle T 7.8: Querbiegemomente und Schubspannungen für Beispiel 3 (auszugsweise)

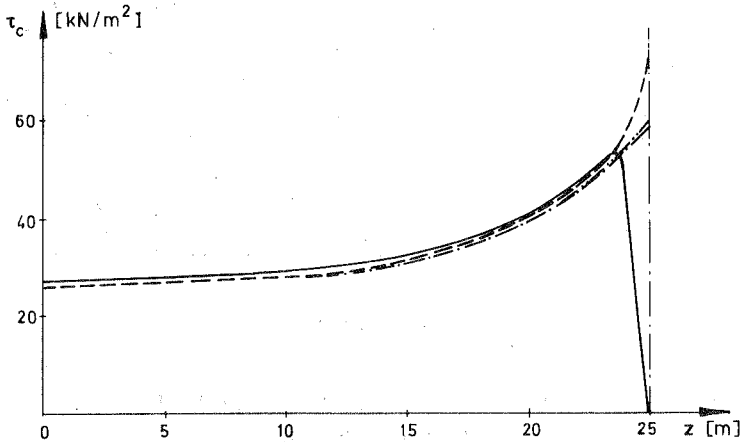
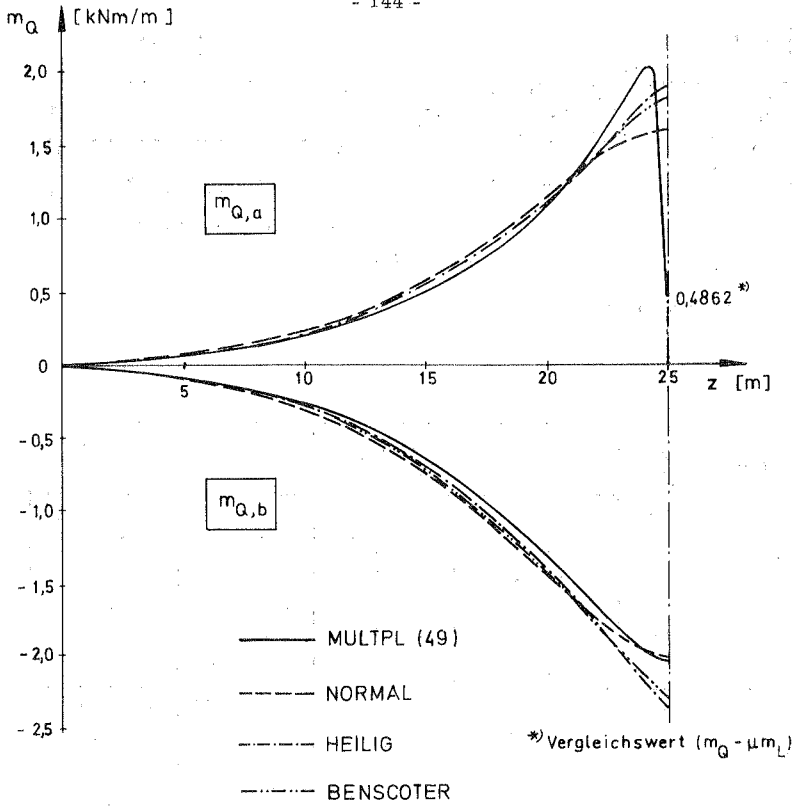


Bild 7. 9: Verläufe von  $m_Q$  und  $\tau$  über  $z$  in Beispiel 3

Insgesamt zeigt sich an den drei Beispielen, daß mit der vorgelegten Theorie eine gute Erfassung der auftretenden Tragwerksbeanspruchungen gegeben ist. Der Vergleich für die Wandverschiebungen wird etwas erschwert durch die bei MULTPL unterschiedlichen Verschiebungen der Punkte einer Wand. Dies rührt vor allem aus dem Einfluß der Wanddehnung in  $s$ -Richtung her, die bei DISSU nicht erfaßt wird. Ein Vergleich für die Mittelwerte liefert jedoch gute Übereinstimmung.

In den Wandverschiebungen  $v_s$  sind die Unterschiede bei den verschiedenen Berechnungsansätzen nicht sehr gut zu erkennen, außerdem überwiegt in den Beispielen 2 und 3 der Biegeanteil sehr stark. Das Querbiegemoment  $m_Q$  dagegen ist proportional zu den Anteilen der Wandverschiebung, die eine Profilverformung beinhalten, und bietet so eine bessere Vergleichsmöglichkeit als  $v_s$ . Ebenfalls aufschlußreich ist ein Vergleich der Längsspannungen  $\sigma$  und der Schubspannungen  $\tau$  im direkt belasteten Steg.

Bei den Längsspannungen ergeben sich einige Abweichungen in der Nähe der Lasteinleitungsstelle. Im Aufpunkt ist die Beanspruchung bei nicht festgelegter Lastfläche singular. Dies zeigt sich als Konvergenzproblem bei den Fourierreihen von MULTPL, wie bereits Castrillón in [5] ausführlich erörtert hat. Außerdem erfaßt MULTPL nach der Theorie von Goldberg und Leve [20] die genauen Scheibenspannungszustände, damit aber beeinflusst  $\sigma_s$  in Trägerquerrichtung über  $\mu$  den  $\sigma_z$ -Wert im Lasteinleitungsbereich erheblich. Ein verbesserter "Vergleichswert" ergibt sich, wenn man den Wert  $(\sigma_z - \mu \sigma_s)$  heranzieht. Bei der vorgelegten Theorie werden solche örtlichen Störbereiche Saint Venantscher Art nicht erfaßt und müßten im Einzelfall durch Sonderbetrachtungen ergänzt werden. Für die übrigen, nicht direkt belasteten Knotenpunkte erhält man aber sehr gute Übereinstimmungen, vor allem, wenn die genaueren Berechnungen unter näherungsweise Erfassung der Wölbschubbeeinflüsse durchgeführt werden (Heilig bzw. Bescoter).

Sehr empfindlich reagieren die Längsspannungen an den freien Enden der Kragplatten auf die Art der Wölbansätze. Wie in Kapitel 2 gezeigt wurde, ist mit der Wahl eines linearen  $w$ -Verlaufes nur eine



unvollkommene Erfassung der Schubspannungseinflüsse möglich. Zumindest in den Kragarmen müßte ein linearer  $\tau$ -Verlauf bei der Berechnung von  $w$  berücksichtigt werden. Damit verbunden ist dann ein parabolischer  $w$ -Ansatz, der eine Verbesserung bringt. Entsprechende Vorschläge sind von Roik und Sedlacek in [9] gemacht worden. Der Rechenaufwand steigt aber so stark an, daß dies wohl für die meisten Fälle in der Praxis nicht in Frage kommt. Da andererseits diese Unterschiede in den Längsspannungen weitgehend auf den Lasteinleitungsbereich beschränkt sind und man zumeist höhere Werte berechnet, als es tatsächlich der Fall ist, ist an dieser Stelle eine Verschärfung der Berechnung nicht zwingend.

Entsprechend zu den Abweichungen für  $\sigma$  an den Flügelspitzen zeigen sich auch stärkere Abweichungen im  $\tau$ -Verlauf der Kragplatten, wie es Bild 7.5 a verdeutlicht. Die Werte am Steganschnitt sind wiederum zufriedenstellend. Auch hier gibt es Konvergenzprobleme bei MULTPL im Lasteinleitungsbereich. Die sonstigen Schubspannungen im geschlossenen Querschnittsteil weisen unbedeutende Abweichungen auf.

Bei dem schrägen Steg des 3. Beispiels treten unter der vertikalen Last zusätzliche Plattenbiegemomente in Längsrichtung auf, die analog zum Längsspannungsproblem über  $\mu$  einen Einfluß auf das Querbiegemoment  $m_Q$  ausüben. Hinzu kommen erneut bei MULTPL Konvergenzschwierigkeiten. Ansonsten bestehen gute Übereinstimmungen bei  $m_Q$ , selbst im Extremfall von Beispiel 2. Dabei sind erneut die Lösungen nach HEILIG bzw. BENSOTER maßgebend. Zusammenfassend kann gefolgert werden, daß die vorgelegte Theorie in der Lage ist, das Tragverhalten mehrzelliger Kastenträger mit verformbarem Querschnitt richtig zu beschreiben. Außer im Sonderfall sehr kurzer Trägerlängen sind die Ergebnisse mit "NORMAL" ausreichend.

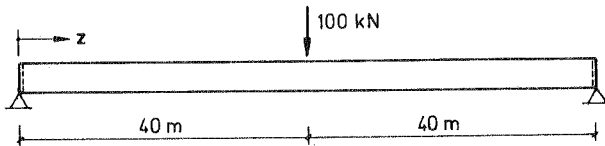
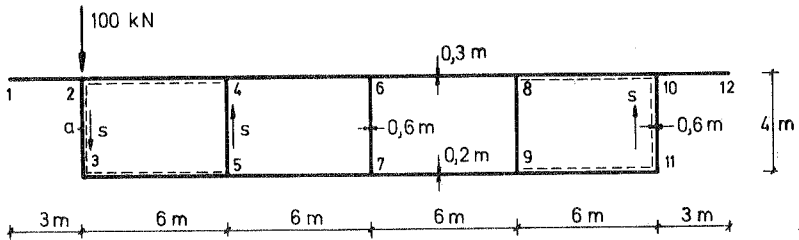
Gegenüber den genaueren Berechnungen nach Scordelis, die bei MULTPL wegen der Fourierreihen auf Einfeldträger ohne Querschotte im Feld beschränkt sind, ist bei der hier dargelegten Theorie und infolge des zur Lösung herangezogenen Übertragungsverfahrens eine Einarbeitung beliebiger Randbedingungen ohne größere Schwierigkeiten möglich. So können auch Zwischenschotte erfaßt und Durchlaufträger untersucht werden. Durch näherungsweise Entkopplungen des

Differentialgleichungssystem ist es ferner möglich, einzelne leichter auflösbare Differentialgleichungen vom Typ des elastisch gebetteten Balkens mit Zugkraft nach Theorie II. Ordnung zu erhalten. Bei deren Berechnung können selbst kleinere Tischcomputer erfolgreich eingesetzt werden.

### 7.3 Einflüsse näherungsweise Entkopplungen

In Abschnitt 5.5 wurden im Zusammenhang mit der Orthogonalisierung 2. Stufe verschiedene Möglichkeiten einer teilweisen Entkopplung angegeben. Durch die anschließende Vernachlässigung der Nebendiagonalelemente, die noch restliche Kopplungen mit sich bringen, ist es möglich, die Differentialgleichungen für jeden Verformungszustand einzeln aufzulösen. Von Interesse ist die Güte der Lösung bei den einzelnen Orthogonalisierungsmöglichkeiten. Eine allgemeine Aussage wird erschwert durch die zahlreichen Parameter, die von Bedeutung sein können, wie Querschnittsform, Abmessungen und Anzahl der Zellen, Trägerlänge, Lastfälle usw. Im folgenden soll anhand eines Beispiels gezeigt werden, wie stark die Lösungen differieren können.

#### 4. Beispiel: Vierzelliger Rechteckkasten mit Flügeln unter exzentrischer Einzellast in Feldmitte



$$E = 30000000 \text{ kN/m}^2; \quad \mu = 0,2$$

Bild 7.10: Querschnitt und statisches System für Beispiel 4

In den Tabellen T 7. 9 und T 7. 10 finden sich für dieses Beispiel exemplarische Angaben zu den Ergebnissen nach verschiedenen Entkopplungsarten. Die meisten Berechnungen wurden ohne Berücksichtigung der Verformungen infolge von Biege- und Wölbschub gemäß Kapitel 5 durchgeführt. Einen Vergleich erlauben die Ergebnisse nach MULTPL und den vollständigen Berechnungen mit NORMAL und HEILIG (Kapitel 6). In Ergänzung zu HEILIG findet sich noch ein Beispiel mit näherungsweise Entkopplung im Differentialgleichungssystem. Dabei ist neben einer Orthogonalisierung bezüglich  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{J}$  zugleich eine Näherung für  $\mathbf{\kappa}$  als Diagonalmatrix eingeführt worden. Die entsprechenden Lösungen nach BENSOTER weichen nur unbedeutend von denen nach HEILIG ab.

Im vorliegenden Beispiel ergeben sich die besten Übereinstimmungen für die Längsspannungen  $\sigma$  im Fall der Orthogonalisierung von  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{J}$  vor der näherungsweise Entkopplung des Differentialgleichungssystems. Weniger gut sind dabei jedoch die Verschiebungswerte  $v_g$ , zufriedenstellend  $m_Q$  und  $\tau$ . Für alle anderen Näherungsstufen mit Teilorthogonalisierungen ergeben sich nicht allzu stark abweichende Ergebnisse, so daß man für Vorbemessungen mit diesen Näherungen auskommen kann.

Führt man jedoch keinerlei vorherige Orthogonalisierung 2. Stufe durch, können bei einer Vernachlässigung aller Kopplungen im Differentialgleichungssystem wesentlich größere Abweichungen in den Werten auftreten. Das ist in den Tabellen T 7. 9 und T 7. 10 bei den Ansätzen 1 bis 4 zu erkennen. Die dabei angesetzten Profilverformungszustände (PV) sind in Bild 7. 11 dargestellt. Eine Orthogonalisierung 1. Stufe ist stets durchgeführt worden. Die Güte der Näherungsberechnung hängt sehr von der Wahl der einzelnen Profilverformungen ab. Dies stellt eine Willkür dar, die erst durch weitere Teilorthogonalisierungen eingeschränkt werden kann. Die beste Näherung erreicht man noch mit dem Ansatz 1, bei dem in jedem Profilverformungszustand nur eine einzige Zelle verzerrt wird.

Größe	G [kN/m <sup>2</sup> ]									
	1	2	3	3	3	3	3	3	10	11
Punkt	40	40	40	40	37	32	40	40	40	40
z [m]										
MULTPL (49)	- 80,87	-126,04 <sup>xx</sup>	+165,12	+128,06	+82,88	+ 27,78	+ 35,97			
NORMAL vollständig	- 94,72	-107,82	+162,51	+123,80	+ 84,50	- 25,91	+ 32,88			
<b>F + J</b> orthog. Dgl.entk.	- 92,23	-103,27	+155,85	+117,18	+ 78,12	- 30,42	+ 39,47			
<b>J + B</b> orthog. Dgl.entk.	-114,28	-113,58	+173,17	+132,47	+ 87,32	- 19,01	+ 20,34			
<b>F + B</b> orthog. Dgl.entk.	- 72,20	- 98,50	+144,78	+105,19	+ 69,77	- 35,35	+ 50,81			
<b>F + J</b> für PV orth., entk.	-122,13	-119,97	+185,53	+137,65	+ 87,84	- 13,71	+ 9,79			
<b>F + B</b> für PV orth., entk.	-113,98	-113,47	+174,15	+127,23	+ 81,11	- 20,38	+ 21,44			
Ansatz 1 PV a, b, c, d, entk. <sup>xxx</sup>	-120,50	-119,87	+184,10	+130,64	+ 78,29	- 25,87	+ 31,21			
Ansatz 2 PV e, f, g, h, entk. <sup>xxx</sup>	-142,83	-137,01	+214,55	+153,95	+ 91,60	- 1,50	- 11,24			
Ansatz 3 PV a, d, e, i, entk. <sup>xxx</sup>	-145,09	-138,57	+216,53	+156,20	+ 93,30	+ 2,59	- 17,41			
Ansatz 4 PV f, g, h, k, entk. <sup>xxx</sup>	-121,52	-119,96	+185,11	+131,44	+ 78,91	- 18,54	+ 18,20			
HEILIG vollständig	-104,80	-101,75	+156,00	+122,86	+ 84,94	- 28,42	+ 33,50			
HEILIG, <b>F + J</b> orth., entk.	- 99,05	- 96,03	+146,76	+114,95	+ 78,34	- 32,27	+ 39,63			

x) Vergleichswert ( $\sigma - \mu \sigma$ )      xx) Profilverformungen nach Bild 7. 11

Tabelle T 7. 9: Längsspannungen  $\sigma$  nach verschiedenen Näherungslösungen (Beispiel 4)

Größe	$v_s$ [mm]				$m_Q$ [kNm/m]				$\tau$ [kN/m <sup>2</sup> ]
	2 - 3	4 - 5	10 - 11	2	3	10	a		
Funkt	40	40	40	40	40	40	40	40	40
z [m]									
MULTPL ( 49 )	+0,8441	-0,6103	-0,3693	+2,543	-0,904	-0,575	+25,93 <del>3</del>		
NORMAL vollständig	+0,8194	-0,5926	-0,3563	+2,480	-0,872	-0,503	+26,36		
<b>F + J</b> orthog. Dgl.entk.	+0,7505	-0,5367	-0,4246	+2,831	-0,991	-0,868	+26,36		
<b>J + B</b> orthog. Dgl.entk.	+0,8418	-0,6162	-0,3347	+2,438	-0,860	-0,472	+29,57		
<b>F + B</b> orthog. Dgl.entk.	+0,7249	-0,5160	-0,4513	+1,371	-0,467	-0,619	+26,36		
<b>F + J</b> für PV orth.,entk.	+0,8591	-0,5909	-0,3160	+2,957	-1,036	-0,993	+33,22		
<b>F + B</b> für PV orth.,entk.	+0,8111	-0,6050	-0,3652	+2,088	-0,736	-0,098	+33,22		
Ansatz 1 PV a, b, c, d entk. <del>xxx</del>	+0,8015	-0,5802	-0,4040	+2,123	-0,745	+0,243	+39,82		
Ansatz 2 PV e, f, g, h entk. <del>xxx</del>	+0,9055	-0,5922	-0,2757	+3,626	-1,269	-1,630	+43,73		
Ansatz 3 PV a, d, e, i entk. <del>xxx</del>	+0,9150	-0,6154	-0,2482	+3,576	-1,255	-1,824	+43,91		
Ansatz 4 PV f, g, h, k entk. <del>xxx</del>	+0,8048	-0,5869	-0,3765	+2,162	-0,760	-0,165	+39,57		
HEILIG vollständig	+0,8468	-0,6137	-0,3705	+2,569	-0,903	-0,540	+24,29		
HEILIG, <b>F + J</b> orth.,entk.	+0,7800	-0,5574	-0,4395	+2,955	-1,034	-0,917	+24,18		

x) Angabe für z = 38 m    xx) Profilverformungen nach Bild 7.11

Tabelle T.7.10:  $v_s$ ,  $m_Q$  und  $\tau$  nach verschiedenen Näherungslösungen (Beispiel 4)

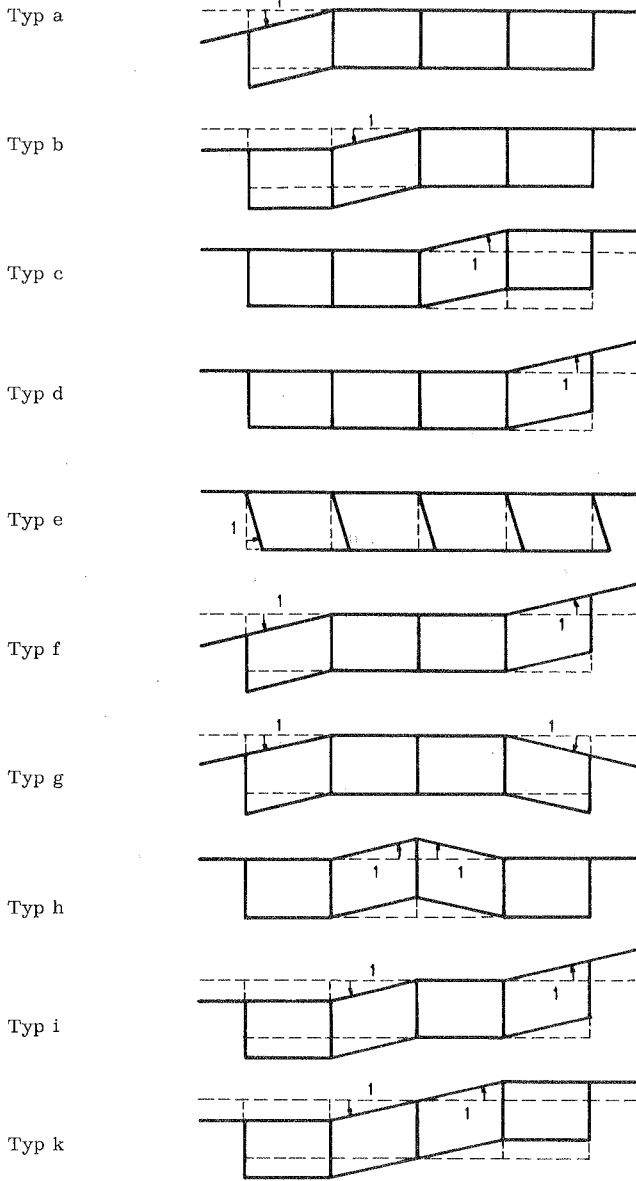


Bild 7. 11: Angesetzte Profilverformungen für Beispiel 4

Das für NORMAL gezeigte Verhalten bei näherungsweise Entkopplung gilt entsprechend für die darauf aufbauenden Berechnungen nach HEILIG oder BENSCHOTER. Diese beiden Verfahren liefern sehr ähnliche Ergebnisse, die in demselben Unschärfbereich gegenüber exakten Theorien (MULTPL) liegen. Damit kann bei Berücksichtigung von Schubverzerrungen keinem der beiden Verfahren der unbedingte Vorzug gegeben werden. Von dem erforderlichen Berechnungsaufwand aus betrachtet, wäre jedoch anzumerken, daß die Matrix  $\mathbf{R}$  und somit die wichtigste Ausgangsgröße für Benschoter erheblich einfacher zu bestimmen ist als die entsprechende Matrix  $\mathbf{S}$  bei Heilig.

Bei Trägern mit mittlerer bis großer Stützweite ist es meistens nicht erforderlich, verschärft nach Heilig oder Benschoter zu untersuchen. Unterschiede zur normalen Berechnungsweise ohne Berücksichtigung von Wölbschubverzerrungen gibt es nur im direkten Lasteinleitungsbereich und diese Abweichungen in den Beanspruchungsgrößen sind dabei verhältnismäßig gering, wie es auch die Beispiele 1 und 3 zeigen. Im Gegensatz zur Wölbkrafttorsion, bei der es erhebliche Unterschiede gibt, ob man die Wölbschubverzerrungen berücksichtigt oder nicht, sind die Profilverformungszustände gegen diese Berechnungsunterschiede wenig empfindlich. Das läßt sich aus dem Verhalten der Einzelwände des Falterwerks in Art normaler Biegeträger deuten, die untereinander gekoppelt sind. Solange ein solcher Wandabschnitt zwischen zwei Knoten ein Verhältnis von Wandhöhe zur Stützweite besitzt, das es zuläßt, noch von einem Balken zu sprechen und nicht von einer Scheibe, spielt der Einfluß der Biege- und Wölbschubspannungen eine untergeordnete Rolle. Hierbei ist es nicht erforderlich, daß die gesamte Brücke im Vergleich ihrer Breite zur Stützweite diesen Anforderungen genügt. Im Extremfall von Beispiel 2 kann man das gut erkennen.

8. Untersuchungen zur vereinfachten Berechnung mehrzelliger  
Faltwerke

8.1 Einfluß einer Erhöhung der Zellenzahl auf die Tragwirkung

Bei der Berechnung mehrzelliger Faltwerke erhebt sich häufig die Frage, inwieweit die Anzahl der Zellen die Tragwirkung verändert. Es wird deshalb ein Träger mit fester Feldlänge und vorgegebenen Außenabmessungen derart variiert, daß im Inneren die Zahl der Stege erhöht wird. Bild 8.1 gibt die Ausgangswerte für die Untersuchung an. Die Zellen sollen stets gleich groß sein.

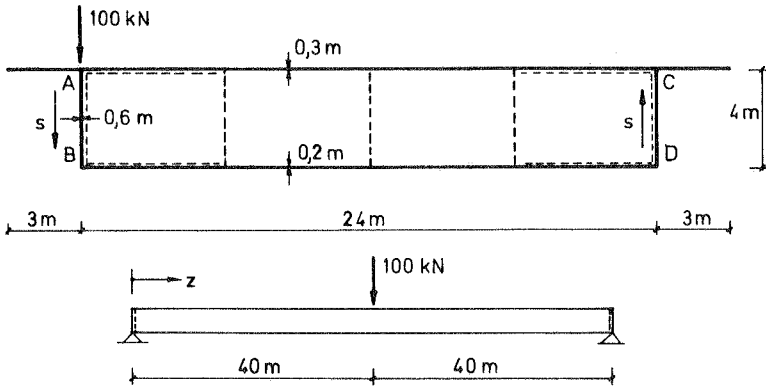


Bild 8.1: Äußere Querschnittsabmessungen und statisches System für die Untersuchung mit variiertem Zellenzahl

Verglichen werden die Wandverschiebungen  $v_s$  der beiden Außenstege, die Längsspannungen  $\sigma$  in den vier angegebenen Punkten, die Querbiegemomente in den Punkten A und C sowie  $\tau$  in der Mitte der Wand AB. Die Berechnung erfolgt stets nach dem Normalfall von DISSU, d. h. ohne Berücksichtigung von Wölbschubspannungen und bei vollständigem Differentialgleichungssystem.



Größe	Dimension	1 Zelle	2 Zellen	3 Zellen	4 Zellen	5 Zellen	6 Zellen
v <sub>s</sub>	A-B	+ 1,4301	+ 1,0995	+ 0,9224	+ 0,8194	+ 0,7500	+ 0,6984
	C-D	+ 0,1999	- 0,2018	- 0,3228	- 0,3563	- 0,3595	- 0,3514
G	A	- 128,87	- 116,64	- 111,12	- 107,82	- 105,33	- 103,17
	B	+ 213,18	+ 185,87	+ 171,59	+ 162,51	+ 155,76	+ 150,24
	C	+ 21,72	- 15,51	- 23,08	- 25,91	- 26,52	- 26,29
	D	- 43,54	+ 17,30	+ 28,93	+ 32,88	+ 33,68	+ 32,69
m <sub>Q</sub>	A	+ 2,151	+ 2,453	+ 2,485	+ 2,480	+ 2,464	+ 2,442
	C	- 2,151	- 1,486	- 0,897	- 0,503	- 0,264	- 0,121
T	A/B	+ 23,542	+ 24,489	+ 25,589	+ 26,363	+ 27,018	+ 27,578

Tabelle T 8.1: Vergleichswerte in Feldmitte bei variierter Zellenzahl

Tabelle T 8.1 gibt die Vergleichswerte für die Feldmitte an. Man erkennt hierbei eine immer kleiner werdende Veränderung dieser Werte mit wachsender Zellenzahl. Bild 8.2 verdeutlicht dieses Verhalten für die Längsspannungen  $\sigma$ . Die Spannungsanteile aus Balkenbiegung sind ebenfalls in das Diagramm eingetragen. Während die Spannungen bei C und D sich immer mehr den Biegegrößen nähern und somit in Querrichtung ein Abklingen des Profilverformungseinflusses andeuten, bleiben sie in den Punkten A und B des direkt belasteten Steges deutlich davon entfernt. Hier dominiert eine örtliche Profilverformung.

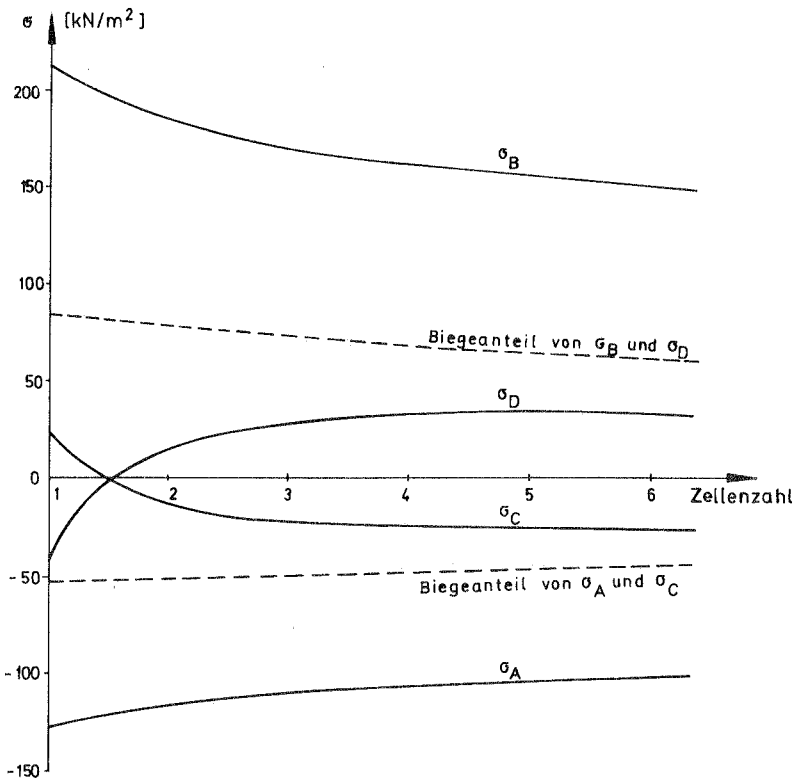


Bild 8.2: Vergleich der Längsspannungen in Feldmitte

Trägt man die Längsspannungen im Knotenpunkt B über die Trägerlänge auf, wie es in Bild 8.3 gezeigt ist, so erkennt man, daß die in Feldmitte gefundene Tendenz auch an anderen Stellen z vorhanden ist. Mit wachsender Zellenzahl ändert sich  $\sigma_B$  immer weniger. Entsprechendes gilt auch für die anderen Querschnittspunkte.

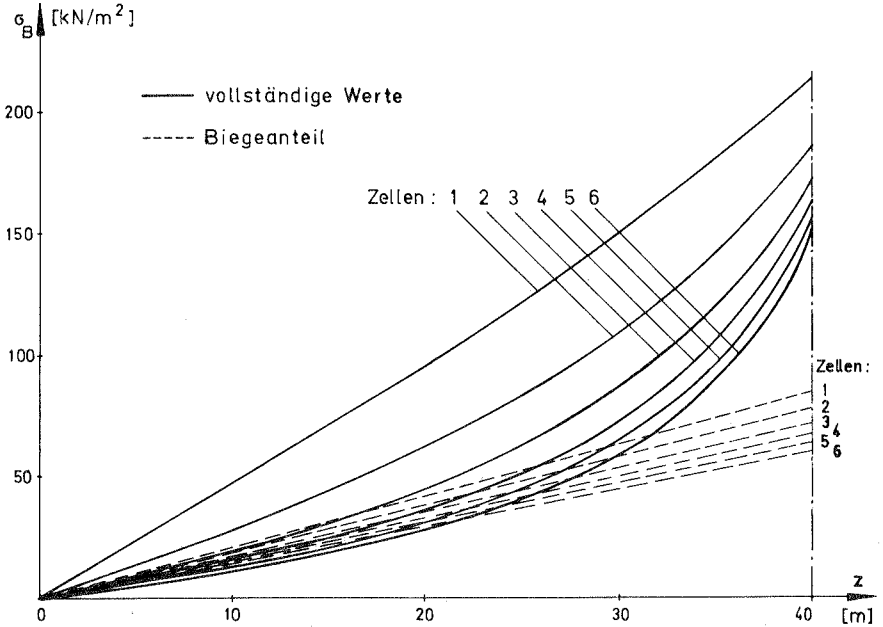


Bild 8.3: Verlauf von  $\sigma_B$  über die halbe Trägerlänge

Außerdem wird der Bereich immer kleiner, in dem die Profilverformung von erheblicher Bedeutung ist. Da sich die Wölb- und Torsionssteifigkeiten bei wachsender Zellenzahl nur wenig ändern, ist dies vor allem auf die zunehmende Querbiegesteifigkeit zurückzuführen, die einer stärker werdenden elastischen Bettung entspricht.

Eine beliebige Erhöhung der Zellenzahl bringt infolge der örtlich auftretenden Beanspruchungsspitzen keine wesentliche Verbesserung,

wenn man über vier bis fünf Zellen hinausgeht. Hier werden vielmehr konstruktive Fragen maßgebend, wie z. B. die Stützweite der Fahrbahnplatte zwischen den Stegen.

## 8.2 Vereinfachung der Faltwerksberechnung durch den Ansatz einzelner ausgewählter Profilverformungen

Aus allen Betrachtungen der auftretenden Tragwerksbeanspruchungen infolge Profilverformung ergibt sich über den Querschnitt gesehen ein abklingendes Verhalten mit der Entfernung von der Lasteinleitungsstelle. Ab einer gewissen Anzahl von Zellen zeigen sich kaum noch Unterschiede, d. h. die hinzukommenden Profilverformungsmöglichkeiten haben nur eine geringe Bedeutung. Es beherrscht eine direkt unter der Last auftretende örtliche Profilverformung das Gesamtbild und wird durch die anderen Zusatzverformungen lediglich modifiziert.

In Trägerlängsrichtung ist mit wachsendem Abstand von der Lasteinleitungsstelle eine Abnahme der Bedeutung dieser lokalen Verformung zu erkennen. Hier wird besonders der normale Biegeanteil wesentlich und die Torsion des Trägers. Weil der Anteil der Wölbkrafttorsion eng mit den Profilverformungen gekoppelt ist, wie bereits in Abschnitt 5.5 gezeigt wurde, ist die dabei besonders bevorzugte Profilverformung von Interesse. Im Spezialfall symmetrischer Querschnitte ist diese einfacher zu erkennen. Die Wölbkrafttorsion besitzt einen antimetrischen Verwölbungsverlauf und ist deshalb nicht mit symmetrischen Profilverformungsansätzen gekoppelt. Unter allen antimetrischen Profilverformungen hebt sich aber die eine spezielle, in Kapitel 3 behandelte Profilverformung heraus, die ohne Berücksichtigung von Schubverzerrungen ermittelt werden kann. Im Falle des einzelligen Kastenträgers ohne Konsolen ergibt sich dabei sogar ein Verwölbungsverlauf, der proportional zu demjenigen infolge Wölbkrafttorsion ist. Betrachtet man die bezüglich der beiden Matrizen  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{J}$  orthogonalisierten Zustände, so zeigt es sich, daß der "klassische" Ansatz für die Wölbkrafttorsion dabei völlig verschwindet und gerade diese spezielle Profilverformung für die Längsspannungen vorherrschend wird. In Abschnitt 5.5.3 wurde bereits darauf hingewiesen, daß

ähnliche Verhältnisse auch bei allgemeinen mehrzelligen Kastenträgern vorliegen. Die Wölbkrafttorsion verliert an Bedeutung gegenüber der speziellen Profilverformung, die somit weitgehend das Gesamtverhalten des Kastenträgers mit verformbarem Querschnitt infolge exzentrischer Belastung beschreibt. Der Querschnitt reagiert dabei auf die Belastung mehr in Art einer einzigen Zelle. Die vorhandenen Zwischenstege erhöhen nur die Rahmensteifigkeit des Querschnitts.

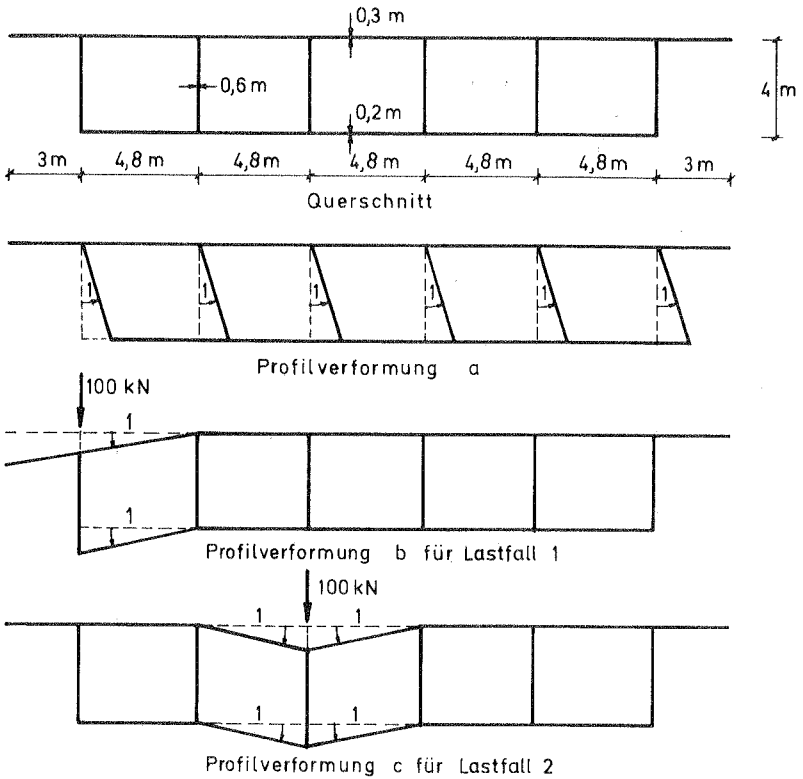
Insgesamt kann man beim Ansatz der Profilverformungen für beliebige, exzentrische Belastung des Trägers zwei Anteile als maßgebend annehmen:

1. eine örtliche, von der Lasteinleitung im Querschnitt abhängige Profilverformung,
2. die spezielle Profilverformung ohne Berücksichtigung von Schubverzerrungen (nach Kapitel 3).

Dies soll an einem Beispiel näher untersucht werden.

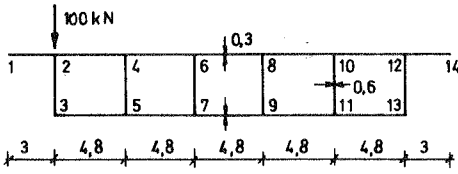
Es wird als Beispiel ein fünfzelliger Kastenträger mit Konsolen gewählt, der Bild 8.1 entspricht und zugleich den Querschnitt aus Beispiel 2 besitzt. Als statisches System wird ein Einfeldträger der Länge  $l = 80$  m gewählt mit einer Einzellast in Feldmitte. Diese Last soll einmal auf dem Außensteg angreifen (Lastfall 1), ein andermal auf einem Innensteg (Lastfall 2).

Die Berechnung wird nach verschiedenen Ansätzen durchgeführt. Zunächst erfolgt die vollständige Untersuchung mit Berücksichtigung aller fünf möglichen Profilverformungen. Danach werden die Werte des starren Querschnitts ermittelt, gefolgt von den vereinfachten Ansätzen mit je nur einer oder zwei Profilverformungen. Als erste Profilverformung, im folgenden als Form a bezeichnet, wird eine Gesamtverzerrung des Querschnitts gewählt, wie sie nach Kapitel 3 bestimmt werden kann. Bild 8.4 zeigt diesen Ansatz am Gelenksystem. Die zweite Profilverformung muß nach der Art des Lastangriffes gewählt werden. Er soll die örtliche Verschiebung  $v_s$  des direkt belasteten Steges gegenüber allen übrigen Stegen erhöhen. Aus den beiden Lastfällen folgen dann die Profilverformungen b bzw. c, wie sie ebenfalls in Bild 8.4 angegeben sind.

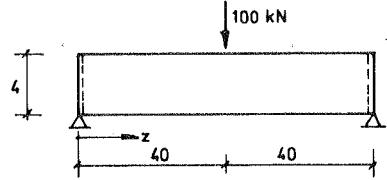


**Bild 8.4:** Maßgebende Profilverformungen bei Beispiel 5  
(Darstellung am Gelenkwerk)

Die Ergebnisse der Berechnungen finden sich für den Lastfall 1 in den Tabellen T 8.2 und T 8.3, für den Lastfall 2 in den Tabellen T 8.4 und T 8.5. Hierbei sind lediglich einige wesentliche Größen auszugsweise angegeben, die es ermöglichen, die Güte der getroffenen Näherung zu erkennen. Die Bilder 8.5 und 8.7 verdeutlichen den Verlauf der jeweils größten Längsspannungen in jedem Querschnitt ( $\sigma_3$  bzw.  $\sigma_7$ ) über die halbe Trägerlänge. In Bild 8.6 bzw. 8.8 sind die wichtigsten Querbiegemomente  $m_Q$  und Schubspannungen  $\tau$  aufgetragen.



Querschnitt



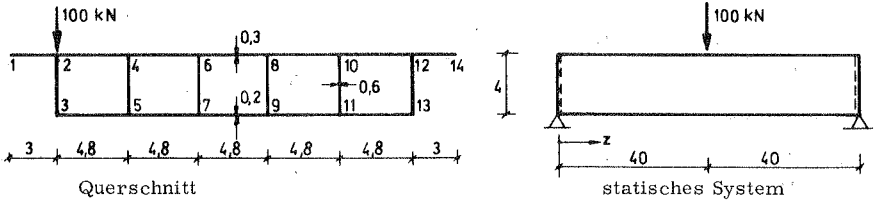
statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

$\sigma$ [kN/m <sup>2</sup> ]	z [m]	NORMAL vollständig	ohne PV	nur 1PV PV. a	nur 1PV PV. b	nur 2PV PV. a+b
Pkt.1	40	- 90,99	- 61,87	- 71,29	- 93,69	- 91,65
2		-105,53	- 67,60	- 77,92	- 94,82	-102,06
3		+155,76	+ 94,29	+110,22	+141,82	+151,01
6		- 40,08	- 51,89	- 54,12	- 37,55	- 39,55
7		+ 56,21	+ 70,74	+ 74,16	+ 52,69	+ 55,36
12		- 26,52	- 27,10	- 16,78	- 35,43	- 28,10
13		+ 33,37	+ 33,56	+ 17,62	+ 44,67	+ 35,35
14	- 40,85	- 32,83	- 23,41	- 36,56	- 38,51	
2	37	- 77,48	- 56,95	- 66,44	- 71,11	- 75,87
3		+114,09	+ 78,85	+ 95,07	+103,37	+111,65
6		- 39,61	- 46,75	- 48,49	- 39,92	- 42,04
7		+ 54,86	+ 63,55	+ 66,55	+ 55,01	+ 58,28
12		- 28,89	- 30,65	- 21,15	- 33,88	- 26,73
13	+ 35,14	+ 39,41	+ 23,19	+ 43,59	+ 31,38	
2	32	- 53,15	- 44,28	- 51,45	- 47,47	- 51,57
3		+ 75,21	+ 60,74	+ 72,49	+ 66,10	+ 72,83
6		- 38,01	- 39,32	- 40,72	- 38,26	- 39,99
7		+ 51,85	+ 53,29	+ 55,60	+ 52,01	+ 54,62
12		- 27,39	- 31,47	- 24,31	- 31,37	- 25,54
13	+ 34,95	+ 41,53	+ 29,78	+ 41,26	+ 31,68	

Tabelle T 8. 2: Vergleichswerte zu Beispiel 5 - Längsspannungen  $\sigma$   
(Lastfall 1)



alle Abmessungen in m  
 $E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

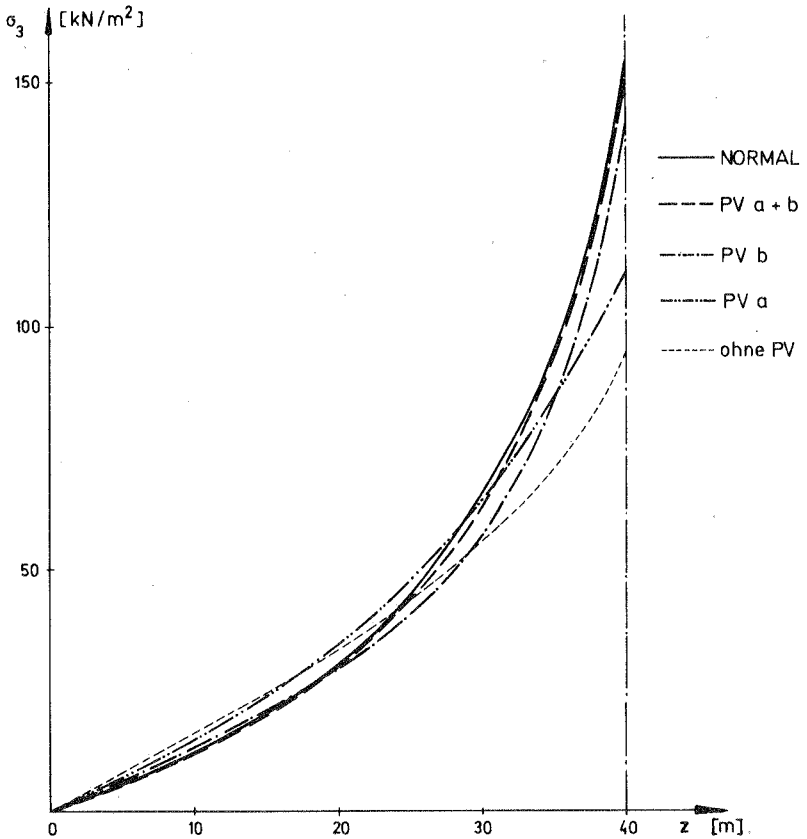
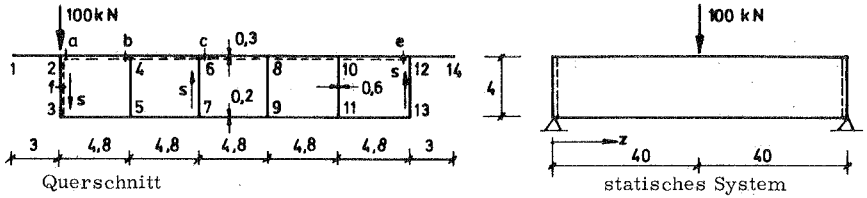


Bild 8.5: Verlauf von  $\sigma_3$  über die halbe Trägelänge für die verschiedenen Berechnungsansätze (Lastfall 1)



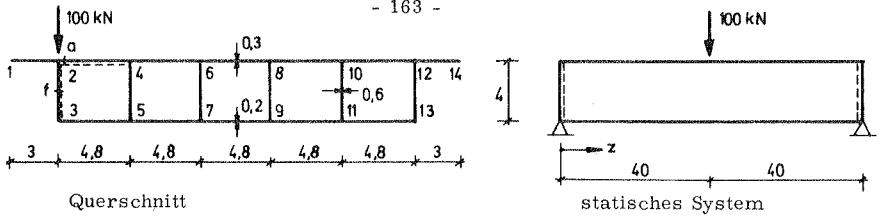


alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

Größe	Punkt	z [m]	NORMAL vollständig	ohne PV	nur 1PV: PV. a	nur 1PV: PV. b	nur 2PV: PV. a+b
$v_s$ [mm]	2-3	40	+0,7500	+0,6042	+0,6852	+0,6890	+0,7297
	6-7		-0,4873	-0,5165	-0,5327	-0,4881	-0,5070
	12-13		-0,3595	-0,3849	-0,3039	-0,3988	-0,3347
	2-3	37	+0,7405	+0,5983	+0,6783	+0,6803	+0,7205
	6-7		-0,4838	-0,5120	-0,5280	-0,4847	-0,5035
	12-13		-0,3572	-0,3827	-0,3026	-0,3959	-0,3325
	2-3	32	+0,6928	+0,5657	+0,6403	+0,6362	+0,6738
	6-7		-0,4627	-0,4866	-0,5015	-0,4635	-0,4810
	12-13		-0,3426	-0,3680	-0,2933	-0,3785	-0,3192
$m_Q$ [kNm/m]	a	40	+ 2,464	-	+ 1,119	+ 2,221	+ 2,526
	b		- 2,399	-	- 1,066	- 2,236	- 2,498
	c		+ 0,867	-	+ 1,022	+ 0,012	+ 0,770
	e		- 0,264	-	- 1,119	- 0,000	- 0,832
	a	37	+ 2,383	-	+ 1,103	+ 2,143	+ 2,447
	b		- 2,318	-	- 1,051	- 2,157	- 2,419
	c		+ 0,862	-	+ 1,008	+ 0,012	+ 0,765
	e		- 0,263	-	- 1,103	- 0,000	- 0,827
	a	32	+ 2,036	-	+ 1,001	+ 1,823	+ 2,095
	b		- 1,975	-	- 0,954	- 1,835	- 2,068
	c		+ 0,800	-	+ 0,915	+ 0,010	+ 0,703
	e		- 0,223	-	- 1,001	- 0,000	- 0,761
$\tau$ [kN/m <sup>2</sup> ]	f	40	+ 27,02	+ 11,93	+ 9,63	+ 25,08	+ 25,97
	f	37	+ 21,92	+ 10,70	+ 11,21	+ 22,06	+ 21,86
	f	32	+ 18,11	+ 9,53	+ 10,49	+ 18,39	+ 17,97

Tabelle T 8.3: Vergleichswerte zu Beispiel 5 - Wandverschiebung  $v_s$ , Querbiegemomente  $m_Q$ , Schubspannungen  $\tau$  (Lastfall 1)



alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

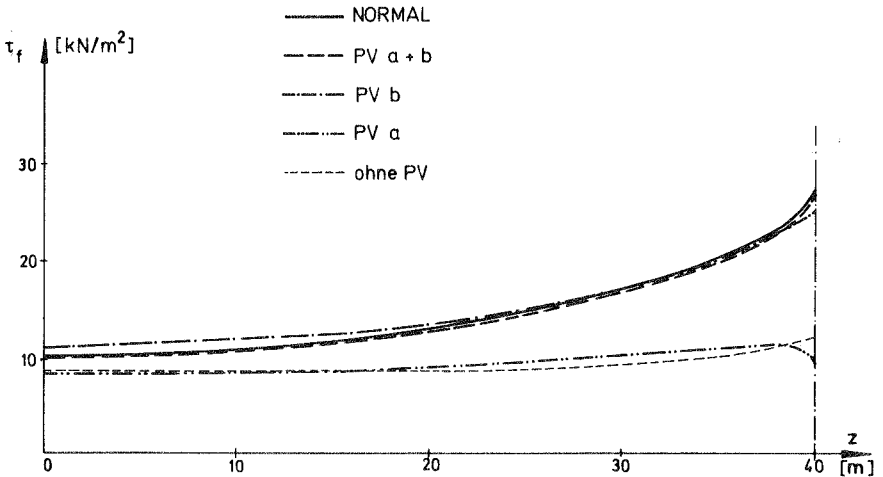
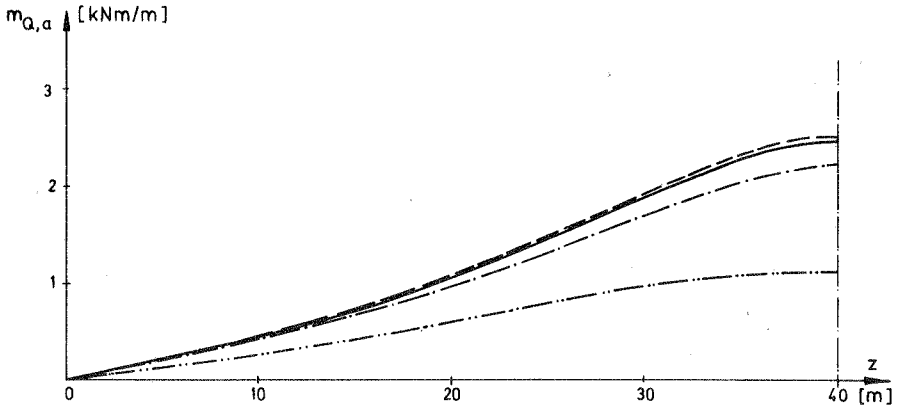
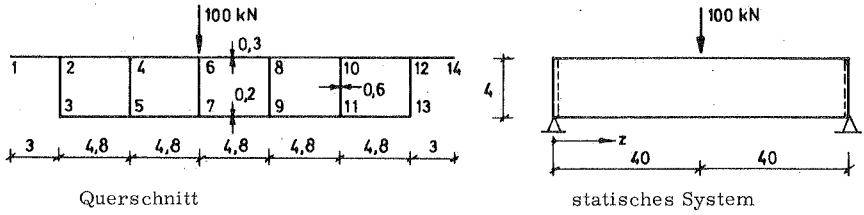


Bild 8.6: Verläufe von  $m_Q$  und  $\tau$  über  $z$  bei Lastfall 1



Querschnitt

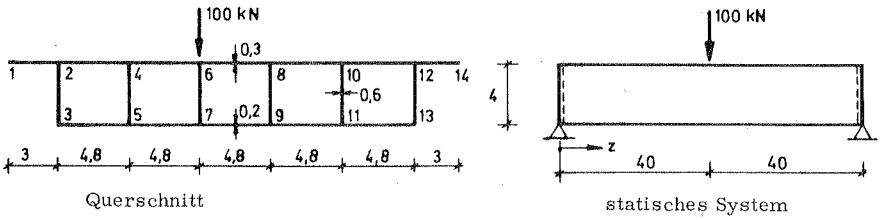
statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

$\sigma$ [kN/m <sup>2</sup> ]	z [m]	NORMAL vollständig	ohne PV	nur 1 PV PV. a	nur 1 PV PV. c	nur 2 PV PV. a+c
Pkt. 1	40	- 41,97	- 50,25	- 52,14	- 39,51	- 42,11
2		- 42,09	- 51,40	- 53,46	- 39,51	- 40,86
3		+ 53,82	+ 69,99	+ 73,18	+ 49,63	+ 52,04
6		- 85,61	- 48,26	- 48,70	- 82,19	- 82,44
7		+119,81	+ 65,28	+ 65,97	+114,58	+115,04
12		- 34,80	- 43,30	- 41,23	- 48,35	- 35,72
13		+ 44,64	+ 57,85	+ 54,66	+ 37,09	+ 45,93
14	- 34,92	- 44,44	- 42,56	- 37,09	- 34,47	
2	37	- 40,81	- 46,43	- 48,33	- 42,30	- 43,72
3		+ 53,20	+ 63,07	+ 66,31	+ 55,87	+ 58,18
6		- 59,94	- 44,39	- 44,73	- 58,09	- 58,34
7		+ 82,31	+ 60,01	+ 60,61	+ 79,92	+ 80,34
12		- 34,41	- 41,17	- 39,27	- 38,06	- 36,66
13	+ 44,65	+ 55,18	+ 51,94	+ 50,45	+ 48,17	
2	32	- 38,29	- 39,16	- 40,59	- 39,46	- 40,73
3		+ 51,38	+ 53,06	+ 55,41	+ 53,46	+ 55,58
6		- 40,76	- 38,17	- 38,45	- 38,92	- 39,14
7		+ 55,09	+ 51,57	+ 52,03	+ 52,67	+ 53,04
12		- 32,56	- 36,60	- 35,17	- 35,96	- 34,70
13	+ 42,80	+ 49,22	+ 46,87	+ 48,25	+ 46,15	

Tabelle T 8. 4: Vergleichswerte zu Beispiel 5 - Längsspannungen  $\sigma$   
(Lastfall 2)



Querschnitt

statisches System

alle Abmessungen in m

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

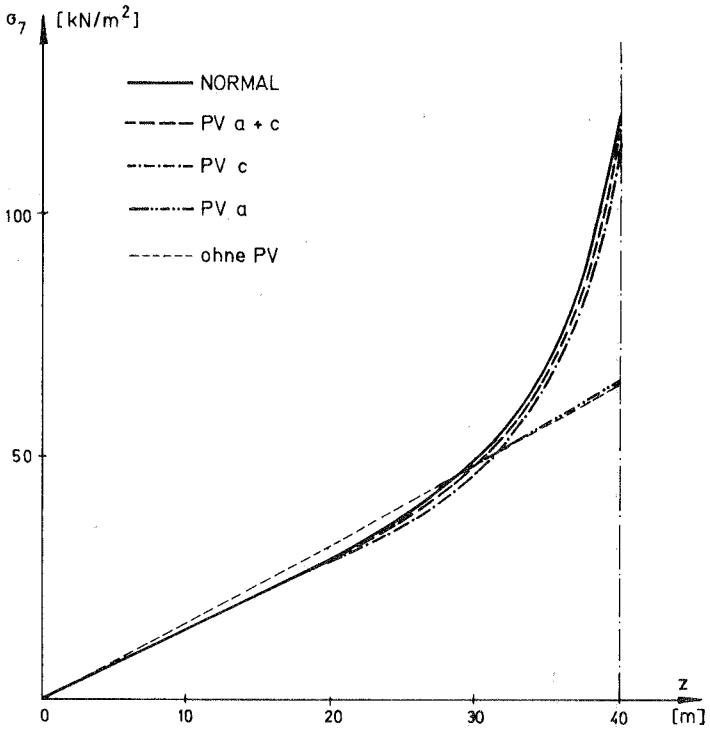
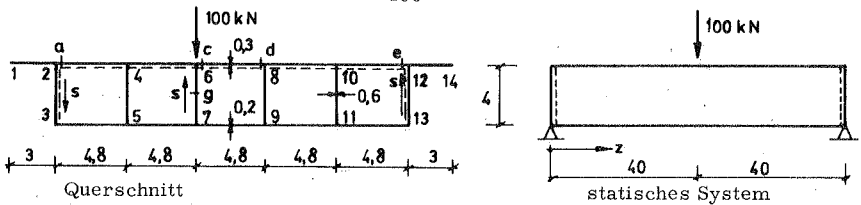


Bild 8.7: Verlauf von  $\sigma_7$  für die verschiedenen Berechnungsansätze (Lastfall 2)

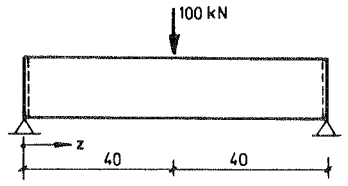
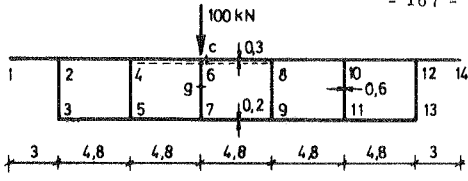


alle Abmessungen in mm

$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

Größe	Punkt	z [m]	NORMAL vollständig	ohne PV	nur 1PV PV. a	nur 1PV PV. c	nur 2PV PV.a+c
$v_s$ [mm]	2-3	40	+0,4873	+0,5165	+0,5327	+0,4983	+0,5135
	6-7		-0,5952	-0,4989	-0,5022	-0,5746	-0,5775
	12-13		-0,4207	-0,4726	-0,4564	-0,4582	-0,4430
	2-3	37	+0,4838	+0,5120	+0,5280	+0,4948	+0,5100
	6-7		-0,5875	-0,4948	-0,4980	-0,5671	-0,5700
	12-13		-0,4177	-0,4689	-0,4529	-0,4550	-0,4399
	2-3	32	+0,4627	+0,4866	+0,5015	+0,4729	+0,4872
	6-7		-0,5499	-0,4708	-0,4738	-0,5308	-0,5335
	12-13		-0,3999	-0,4471	-0,4321	-0,4351	-0,4208
$m_Q$ [kNm/m]	a	40	- 0,383	-	- 0,224	- 0,068	- 0,272
	c		+ 1,701	-	+ 0,204	+ 1,612	+ 1,796
	d		- 1,592	-	- 0,204	- 1,534	- 1,718
	e		- 0,312	-	- 0,224	- 0,004	- 0,208
	a	37	- 0,387	-	- 0,221	- 0,065	- 0,267
	c		+ 1,623	-	+ 0,202	+ 1,541	+ 1,723
	d		- 1,519	-	- 0,202	- 1,466	- 1,648
	e		- 0,309	-	- 0,221	- 0,004	- 0,205
	a	32	- 0,368	-	- 0,200	- 0,054	- 0,244
	c		+ 1,355	-	+ 0,183	+ 1,275	+ 1,446
	d		- 1,265	-	- 0,183	- 1,213	- 1,385
	e		- 0,292	-	- 0,200	- 0,003	- 0,193
$\tau$ [kN/m <sup>2</sup> ]	g	40	- 25,85	- 4,61	- 4,90	- 25,23	- 25,24
	g	37	- 21,19	- 4,45	- 4,47	- 21,07	- 21,07
	g	32	- 16,77	- 4,29	- 4,38	- 16,52	- 16,54

Tabelle T 8.5: Vergleichswerte zu Beispiel 5 -  $v_s$ ,  $m_Q$ ,  $\tau$  (Lastfall 2)



alle Abmessungen in m  
 $E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

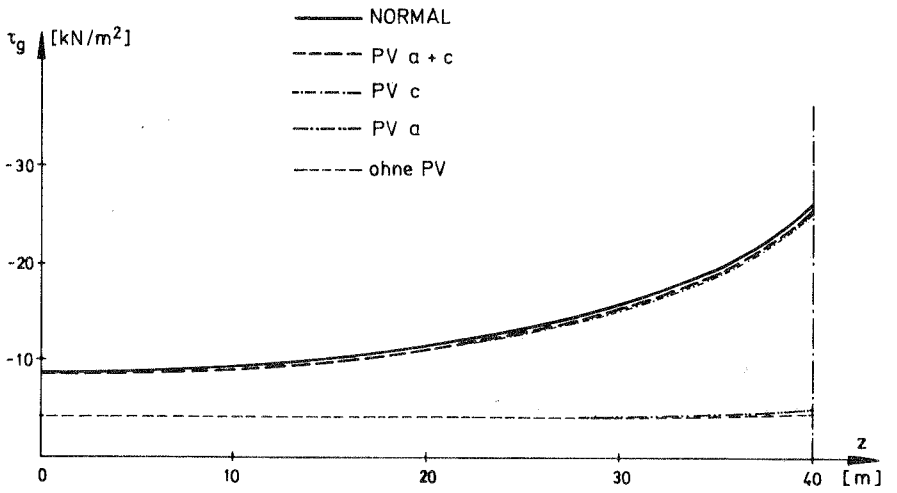
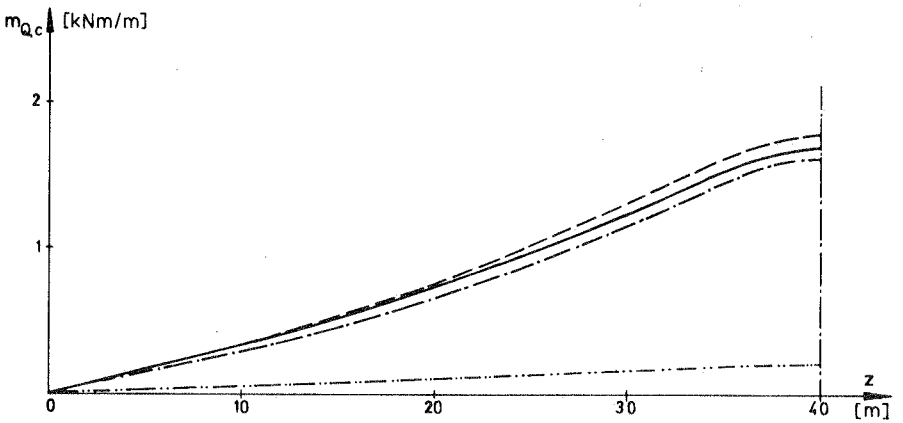


Bild 8. 8: Verläufe von  $m_Q$  und  $\tau$  über  $z$  bei Lastfall 2

Die Ergebniswerte des starren Querschnitts sind in der Umgebung der Belastungsstelle völlig unzureichend und nähern sich erst in einiger Entfernung den tatsächlichen Werten. Dies gilt für die Durchbiegungen und Längsspannungen. Die Schubspannungen  $\tau$  sind auch dann noch nicht in Ordnung. Die Querbiegemomente lassen sich überhaupt nicht erfassen. Es ist somit nicht möglich, die Profilverformung zu vernachlässigen.

Die Hinzunahme der Profilverformung  $a$  bringt bei allen Beanspruchungsgrößen eine kleine Verbesserung und gibt bei den Querbiegemomenten  $m_Q$  das durchschnittliche Niveau an, sofern die Last stark exzentrisch angreift. Am besten ist die Näherung bei einer Belastung, die sich über dem Außensteg befindet. Mit der Annäherung der Last an die Symmetrieachse verliert sich dieser Einfluß aber sehr rasch.

Die Ergebnisse mit dem Ansatz der örtlichen Profilverformung  $b$  oder  $c$  allein sind weitaus besser als die mit der Profilverformung  $a$ . Mit diesen von der Laststellung abhängigen Verformungsannahmen wird das Tragverhalten der mehrzelligen Kastenträger in wesentlichen Punkten richtig erfaßt. Vor allem im Fall geringer Exzentrizitäten, wie beim Lastfall 2, sind die Werte der vollständigen Lösung sehr gut erreicht.

Berücksichtigt man gleichzeitig die Profilverformungen  $a$  und  $b$  bzw.  $c$ , so ist die Abweichung von der vollständigen Lösung nur noch gering. Hier bestätigt sich erneut, daß alle übrigen Profilverformungszustände vernachlässigbar kleine Anteile zur Gesamtlösung liefern. Bei Belastungen auf den Zwischenstegen überwiegt eindeutig der Einfluß der örtlichen Profilverformung auch den der speziellen "Profilverformung ohne Schub" (Ansatz  $a$ ).

Bei hoher Zellenzahl läuft das Tragverhalten in Richtung auf eine lokale Plattenbeanspruchung hinaus, wenn man den Träger als eine orthotrope Hohlplatte auffaßt. Diese Zusatzbeanspruchung überlagert sich der Gesamtbiegung des Tragwerks. Bei großen Lastexzentrizitäten jedoch kommt man ohne die Profilverformung  $a$  nicht aus, wenn man völlig zufriedenstellende Ergebnisse erzielen will.

Zusammenfassend zeigt sich die Möglichkeit, bei Beanspruchungen durch eine konzentrierte Last den Rechenaufwand für Träger mit höherer Zellenzahl zu verringern, indem man lediglich zwei Profilverformungsansätze macht. Diese lassen sich in der oben beschriebenen Art finden. Bei kleineren Lastexzentrizitäten genügt auch die Berücksichtigung einer einzigen Profilverformung, die die örtlich vergrößerte Stegverschiebung unter der konzentrierten Last erfaßt. Bei mehreren Einzellasten können die Wirkungen auf das Tragwerk jeweils für sich vereinfacht ermittelt und superponiert werden. Es bestätigt sich somit die Vermutung von Hees, daß es möglich sein müsse, mit wenigen Ansätzen eine Näherungsberechnung für die Profilverformung mehrzelliger Kastenträger durchzuführen,

### 8.3 Anmerkungen zum Abklingverhalten der Profilverformungen bei mehrzelligen Kastenträgern

Wie aus dem Bild 8.3 zu erkennen ist, klingt der Einfluß der Profilverformungen in Trägerlängsrichtung mehr oder weniger schnell ab. Die dafür maßgebenden Faktoren sollen noch etwas eingehender betrachtet werden. Als Beispiel wird erneut ein Kastenträger mit rechteckigem, fünfzelligem Querschnitt untersucht, indem die Trägerlängen variiert werden. Die Querschnittsabmessungen entsprechen denen von Beispiel 2 und 5, die Trägerlängen betragen 40, 60, 80, 100 und 120 m. Als Belastung wird eine Einzellast in Feldmitte über dem Außensteg angesetzt.

Die Tabelle T 8.6 gibt für die berechneten Fälle zwei der maßgebenden Beanspruchungsgrößen wieder, die Längsspannung  $\sigma$  im unteren Knotenpunkt des belasteten Außensteges und das Querbiegemoment  $m_Q$  oben am Steganschnitt. Um die Anteile aus Biegung und Torsion auszufiltern, werden reduzierte Spannungen  $\sigma^{PV}$  ermittelt, die den Unterschied zwischen den Werten eines Trägers mit starrem Profil zu denen des Trägers mit verformbarem Querschnitt enthalten. In Bild 8.9 finden sich die Verläufe für  $\sigma^{PV}$  und  $m_Q$  über die halbe Trägerlänge aufgetragen. Das Querbiegemoment braucht dabei nicht reduziert zu werden, da es allein aus den Profilverformungen stammt.



Deutlich ist das oben angesprochene Abklingverhalten bei größeren Trägerlängen zu erkennen. Die Maximalwerte ändern sich für  $l > 60$  m nur noch geringfügig.

Ab einer bestimmten Trägerlänge ist es somit nicht unbedingt erforderlich, die allgemeinen Differentialgleichungen für die entkoppelten Profilverformungen exakt zu lösen. Vielmehr bietet sich als Näherung die Lösung für den unendlich langen, elastisch gebetteten Träger an, der durch eine Zugkraft in Längsrichtung versteift wird.

Die Differentialgleichung ist in Abschnitt 5.5.1 bereits kurz erwähnt worden und besitzt nach der Entkopplung folgende Form:

$$A v^{IV} - B v'' + C v = D \quad (8.1)$$

Im Sonderfall der Profilverformung ohne Schubanteile entfällt sogar noch der 2. Term.

Dieser Sonderfall soll zunächst untersucht werden. Die Differentialgleichung lautet dafür:

$$A_1 v_1^{IV} + C_1 v_1 = D_1 \quad (8.2)$$

Für den betrachteten Lastfall entfallen  $D$  und  $D_1$ , und es liegen homogene Differentialgleichungen vor.

Als Hilfsgröße wird wie beim elastisch gebetteten Balken eingeführt:

$$\xi_1 = \sqrt[4]{\frac{C_1}{4 A_1}} \quad (8.3)$$

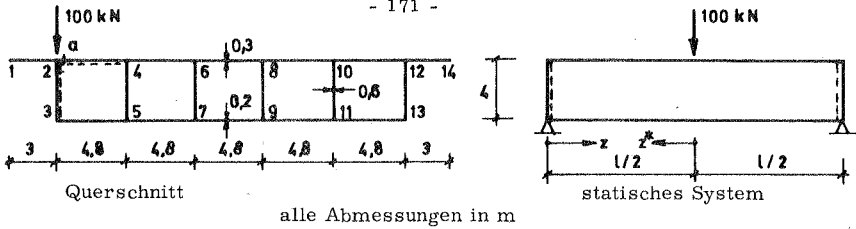
Bei Festlegung der  $z^*$ -Koordinate als:

$$z^* = \frac{1}{2} l - z$$

kann man unter dem Angriff einer Einzellast, die hier als "Verzerrungsmoment"  $M_{V1}$  auftritt, im Mittelbereich als Lösung ansetzen:

$$v_1(z^*) = M_{V1} \frac{\xi_1}{2 C_1} e^{-\xi_1 z^*} (\cos \xi_1 z^* + \sin \xi_1 z^*) \quad (8.4)$$

Diese Lösung ist exakt gültig für  $l \rightarrow \infty$  und kann als Näherung angesetzt werden für  $l \geq 2 l^*$ . Der Wert für  $l^*$  ist dabei noch aus dem Abklingverhalten für  $v$  abzuschätzen.

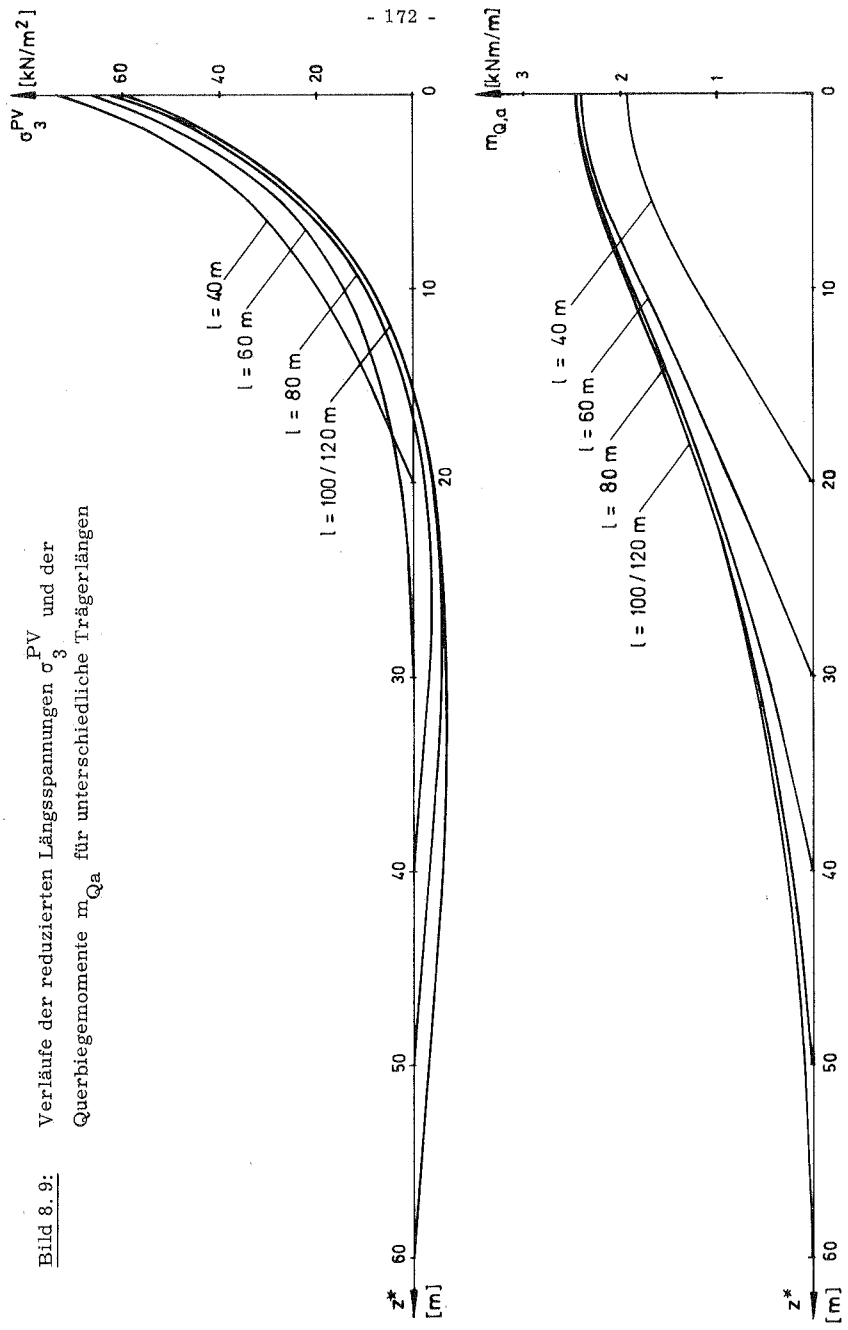


$E = 30000000 \text{ kN/m}^2$ ;  $\mu = 0,20$

$z$ [m]	$z^*$ [m]	$\sigma_3$ [kN/m <sup>2</sup> ]			G <sup>PV</sup> Anteil der Profil- verformung	$m_{Qa}$ [kNm/m]
		voll- ständige Lösung	Biegeanteil	"klassische" Wölbkraft- torsion		
40	0	135,169	31,960	30,174	73,035	1,929
	2	104,611	28,764	22,573	53,274	1,885
	4	83,470	25,568	16,854	41,048	1,770
	8	53,353	19,176	9,272	24,905	1,412
	12	32,030	12,784	4,847	14,399	0,969
	16	15,081	6,392	2,071	-6,618	0,491
60	0	144,055	47,940	30,354	65,761	2,390
	2	113,582	44,744	22,762	46,076	2,351
	5	84,150	39,950	14,777	29,423	2,180
	9	58,109	33,558	8,297	16,254	1,850
	12	44,242	28,764	5,371	10,107	1,575
	18	24,665	19,176	2,206	3,283	1,023
24	11,072	9,588	0,790	0,694	0,500	
80	0	155,762	63,920	30,365	61,477	2,464
	2	125,279	60,724	22,772	41,783	2,426
	5	95,798	55,930	14,790	25,078	2,263
	8	75,211	51,136	9,605	14,470	2,036
	12	55,675	44,744	5,401	5,530	1,703
	16	41,629	38,352	3,036	0,241	1,378
24	22,695	25,568	0,952	-3,825	0,814	
32	10,090	12,784	0,274	-2,968	0,371	
100	0	170,747	79,900	30,365	60,482	2,476
	2	140,252	76,704	22,773	40,775	2,438
	5	110,711	71,910	14,790	24,011	2,277
	10	79,264	63,920	7,204	8,140	1,889
	15	59,099	55,930	3,509	-0,340	1,485
	20	44,887	47,940	1,709	-4,762	1,123
30	25,596	31,960	0,404	-6,768	0,578	
40	11,867	15,980	0,091	-4,204	0,235	
120	0	186,688	95,880	30,365	60,443	2,485
	2	156,189	92,684	22,773	40,732	2,447
	6	119,028	86,292	12,808	19,928	2,215
	12	86,035	76,704	5,403	3,928	1,734
	18	65,757	67,116	2,279	-3,638	1,271
	24	51,404	57,528	0,961	-7,085	0,888
36	31,317	38,352	0,171	-7,206	0,383	
48	15,259	19,176	0,029	-3,946	0,132	

Tabelle T 8.6: Exemplarische  $\sigma$  - und  $m_Q$  - Werte bei Variation der Stützweite eines fünfzelligen Kastenträgers

Bild 8.9: Verläufe der reduzierten Längsspannungen  $\sigma_3^{PV}$  und der Querbiegemomente  $m_{Q,a}$  für unterschiedliche Trägerlängen



Für das Abklingverhalten von  $v$  ist der Faktor  $v_1(z^*)/v_1(0)$  maßgebend. Dieser Wert liefert gleichzeitig eine Aussage zum Verlauf der Querbiegemomente  $m_Q$ , die gemäß (5. 25) direkt proportional zu  $v$  sind. Man erhält mit (8. 4):

$$\frac{v_1(z^*)}{v_1(0)} = e^{-\xi_1 z^*} (\cos \xi_1 z^* + \sin \xi_1 z^*) \quad (8. 5)$$

Diese Kurve besitzt an der Stelle  $\xi_1 z^*_0 = 0,75 \pi$  ihren ersten Nulldurchgang und ist nach  $\xi_1 z^* = 3,5$  betragsmäßig auf unter 4 % ihres Anfangswertes abgeklungen.

Schneller als die Verformung bzw. das Querbiegemoment  $m_Q$  klingt die Längsspannung  $\sigma_1$  ab, die nach (5. 11) proportional zu  $v''_1(z^*)$  ist. Als Faktor ergibt sich bei zweimaliger Differentiation von (8. 4):

$$v''_1(z^*) = -M_{V1} \frac{1}{4 \xi_1 A} e^{-\xi_1 z^*} (\cos \xi_1 z^* - \sin \xi_1 z^*) \quad (8. 6)$$

$$\frac{\sigma_1(z^*)}{\sigma_1(0)} = \frac{v''_1(z^*)}{v''_1(0)} = e^{-\xi_1 z^*} (\cos \xi_1 z^* - \sin \xi_1 z^*) \quad (8. 7)$$

Hier liegt der erste Nulldurchgang bereits bei  $\xi_1 z^*_0 = 0,25 \pi$  und die Beträge fallen für  $\xi_1 z^* > \pi$  rasch unter 4 % ab.

Im obigen Beispiel des fünfzelligen Querschnitts erhält man für diese Profilverformung folgende Werte:

$$F_{w1w1} = 1122,43 \text{ [m}^6\text{]}$$

$$B_{11} = 0,0315033 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\xi_1 = \sqrt[4]{\frac{E B_{11}}{4 E F_{w1w1}}} = 0,051468 \text{ [}\frac{1}{\text{m}}\text{]}$$

Realisiert man die oben erwähnten markanten Stellen der  $v$ - und  $v''$ -Verläufe, so erhält man:

$\xi_1 z^* \text{ [-]}$	$z^* \text{ [m]}$
0,25 $\pi$	15,26
0,75 $\pi$	45,78
$\pi$	61,04
3,5	68,00

Da die Profilverformungen nur einen Teil der Gesamtbeanspruchung des Tragwerkes ausmachen, ist es völlig ausreichend, von dem ersten Nulldurchgang der dimensionslosen Faktoren auf die ansetzbare Abklügelänge  $l^*$  zu schließen. Ein Abfallen der Werte z. B. auf 4 % muß nicht unbedingt gefordert werden. Geht man etwa vom Nulldurchgang für  $v_1(z^*)$  aus, so ist man für  $\sigma_1(z^*)$  bereits im betragsmäßig unbedeutenderen Teil ( $< 0,07$ ), so daß für diese Profilverformung ohne Schubanteile angesetzt werden darf:

$$l^* \approx 0,75 \frac{\pi}{\xi_1}$$

Für eine allgemeine Profilverformung muß von Gleichung (8.1) ausgegangen werden. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden:

1.  $B < 2 \sqrt{AC}$
2.  $B = 2 \sqrt{AC}$
3.  $B > 2 \sqrt{AC}$

Entsprechend ändern sich die Lösungsansätze. Eine allgemeine Erörterung aller drei Möglichkeiten ist nicht erforderlich. Bei den am häufigsten auftretenden Querschnittsabmessungen, vor allem im Massivbrückenbau, liegt zumeist der Fall 3 vor, da die Querbiegesteifigkeit verhältnismäßig klein ist gegenüber der Drehsteifigkeit der Kastenträger. Für die Lösungen für Fall 1 und 2 sei auf Hetényi [34] verwiesen.

#### Betrachtung des Falls $B > 2 \sqrt{AC}$

Als Parameter werden eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sqrt[4]{\frac{C}{4A}} \\ \xi &= \sqrt{\frac{B}{4A} + \zeta^2} \\ \eta &= \sqrt{\frac{B}{4A} - \zeta^2} \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Damit erhält man als Lösung für den unendlich langen Träger unter Einzellastangriff an der Stelle  $z^* = 0$ :

$$v(z^*) = M_{VL} \frac{\zeta^2}{2 C \xi \eta} e^{-\xi z^*} (\eta \cosh \eta z^* + \xi \sinh \eta z^*) \quad (8.9)$$

und für die zweite Ableitung von v:

$$v''(z^*) = -M_{VL} \frac{1}{4 A \xi \eta} e^{-\xi z^*} (\eta \cosh \eta z^* - \xi \sinh \eta z^*) \quad (8.10)$$

Auch hier ist es möglich, nach einer Länge  $\ell^*$  zu suchen, bei der im Lastbereich der Einfluß der wirklichen Trägerlänge vernachlässigt werden kann. Das Abklingverhalten für v und  $m_Q$  wird durch die Funktion:

$$\frac{v(z^*)}{v(0)} = e^{-\xi z^*} \left( \cosh \eta z^* + \frac{\xi}{\eta} \sinh \eta z^* \right) \quad (8.11)$$

beschrieben. Ein Nulldurchgang ist nicht vorhanden, und man kann lediglich eine Grenzgröße festlegen, ab der man den Einfluß auf die Gesamtbeanspruchung vernachlässigen will.

Setzt man als Grenzgröße einen Wert  $g^*$  an, so lautet die Bedingung:

$$g^* = e^{-\xi z_g^*} g \left( \cosh \eta z_g^* + \frac{\xi}{\eta} \sinh \eta z_g^* \right)$$

aus der durch Iteration  $z_g^*$  ermittelt werden kann. Um die transzendenten Gleichung zu vereinfachen, kann man für große Werte von  $\eta z_g^*$  näherungsweise ansetzen:

$$g^* \approx e^{-\xi z_g^*} \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{\eta} \right) e^{\eta z_g^*}$$

Aufgelöst nach  $z_g^*$  erhält man daraus:

$$z_g^* \approx - \frac{1}{\xi - \eta} \ln \frac{2 g^* \eta}{\xi + \eta}$$

Anders ist das Abklingverhalten von  $\sigma(z^*)$ . Aus (8.10) erhält man als Funktion:

$$\frac{\sigma(z^*)}{\sigma(0)} = \frac{v''(z^*)}{v''(0)} = e^{-\xi z^*} \left( \cosh \eta z^* - \frac{\xi}{\eta} \sinh \eta z^* \right) \quad (8.12)$$

Für den Nulldurchgang ergibt sich die Bedingung:

$$\tanh \eta z_0^* = \frac{\eta}{\xi} < 1$$

aus der man iterativ  $z_0^*$  finden kann.

Im vorliegenden Beispiel des fünfzelligen Rechteckkastens ergibt sich für die Profilverformung vom Typ b in Bild 8. 4 ohne Berücksichtigung einer Orthogonalisierung:

$$\begin{aligned} F_{wbwb} &= 70,5578 \quad [m^6] \\ J_{bb} &= 5,53212 \quad [m^4] \\ B_{bb} &= 0,00681973 \quad [m^2] \\ \zeta &= 0,0701117 \quad [1/m] \\ \xi &= 0,1143805 \quad [1/m] \\ \eta &= 0,0570227 \quad [1/m] \end{aligned}$$

Man erhält damit:

$$z_o^* = 9,60 \text{ m}$$

und bei Vorgabe von  $g^* = 0,10$ , d. h. Abfall der Werte auf unter 10 %:

$$z_g^* = 47,25 \text{ m}$$

Für den letzten Wert beträgt der Faktor für die Längsspannungen - 0,033. Auch im Fall einer vorherigen Orthogonalisierung ändern sich hier  $z_o^*$  und  $z_g^*$  nur wenig.

Es ist an diesem Beispiel zu erkennen und läßt sich auch in anderen Fällen nachweisen, daß die Längsspannungen infolge dieser Profilverformungen sehr rasch abklingen im Vergleich zu den Verformungen selber oder den Querbiegemomenten  $m_Q$ . Für eine Festlegung von  $l^*$  kann man deshalb nur von  $z_g^*$  ausgehen und durch entsprechende Vorgabe von  $g^*$  die Lösungsgüte abschätzen.

$$l^* \approx z_g^*$$

Führt man diese Abklingbetrachtungen durch, so genügt es, nur die beiden maßgebenden Profilverformungen, wie sie in Abschnitt 8.2 erkannt worden sind, heranzuziehen. Damit erhält man eine gute Aussage über das Gesamtverhalten der Kastenträger infolge der Nachgiebigkeit des Querschnitts.

Im vorliegenden Fall ergibt sich aus den Abschätzungen, daß etwa bei einer Entfernung  $l^* = 45 \text{ m}$  vom Lasteinleitungsbereich die Profilverformungen abgeklungen sind. Bei der vorgegebenen Einzellastbeanspruchung in Feldmitte ist somit zu erwarten, daß sich Träger

mit Längen über  $2 \cdot l^* = 90$  m bezüglich der Beanspruchungen in Feldmitte nur noch im Anteil der Balkenbiegung unterscheiden. Die reduzierten Längsspannungen und Querbiegemomente sollten bei weiterer Steigerung von  $l$  praktisch unverändert bleiben. Bild 8, 9 bestätigt diese Annahme vollkommen. Sogar ab  $l = 80$  m ist kaum noch eine Änderung bei  $\sigma^{PV}$  oder  $m_Q$  zu erkennen.





## 9. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Berechnung mehrzelliger Falwerke nach der erweiterten technischen Biegetheorie untersucht. Die Möglichkeiten, wandweise lineare Ansätze für die Verwölbung zu wählen, werden allgemein erörtert. Es zeigt sich, daß es höchstens eine einzige Profilverformung gibt, bei der solch ein Ansatz ohne Berücksichtigung von Schubverzerrungen durchführbar ist. Dies steht im Gegensatz zur Berechnung offener Falwerke, bestätigt aber die Ergebnisse von Steinle und Hees beim einzelligen Kastenträger. Gleichzeitig stellt diese spezielle Profilverformung nur einen Sonderfall dar beim allgemeinen Ansatz beliebiger Profilverformungen für den mehrzelligen Querschnitt.

Im Normalfall sind Schubverzerrungen in die Ermittlung der Verwölbungsverläufe einzubeziehen. Unter Beibehaltung linearer Ansätze ist es allerdings nur möglich, Schubanteile aus der Drehung der Zellen zu berücksichtigen. Die benötigten Schubkräfte lassen sich auf Bredtsche Schubflüsse zurückführen. Damit werden die Ansätze von Sedlacek bestätigt und begründet.

Eine vollständige Herleitung der Theorie zur Berechnung mehrzelliger Falwerke mittels der besprochenen polygonalen Verwölbungsverläufe schließt sich an. Der Einfluß der dabei nicht berücksichtigten Verformungen infolge Biege- und Wölbschubspannungen auf die Lösung kann näherungsweise nach zwei Verfahren erfaßt werden. Diese beruhen auf der Vorgehensweise von Heilig bzw. Bencoter und sind zueinander vollkommen analog aufgebaut.

Zur Berechnung mehrzelliger Kastenträger wurde ein Rechenprogramm entwickelt, das auf dem Übertragungsverfahren aufbaut. An einigen Beispielen wird die gute Übereinstimmung der Ergebnisse mit denen aus einem unabhängigen Programm von Scordelis nachgewiesen. Die Einflüsse näherungsweise Vernachlässigungen und Entkopplungen im Differentialgleichungssystem werden an einem Beispiel erörtert. Betrachtungen zum Tragverhalten mehrzelliger Kastenträger bei wachsender Zellenzahl führten zur Erkenntnis, daß nicht

alle Profilverformungszustände von gleicher Bedeutung sind. Es gibt in Abhängigkeit von der Laststellung im Querschnitt eine bzw. zwei spezielle Profilverformungen, deren Berechnung allein ausreicht, um das Tragverhalten in guter Näherung zu erfassen. Die damit verbundene Einsparung an Rechenaufwand kann beträchtlich sein. Abschließend finden sich in der Arbeit einige Anmerkungen zum Abklingverhalten der Profilverformungen in Trägerlängsrichtung.

### Summary

Folded plate structures with multicellular cross sections are calculated by means of the extended technical bending theory. The possibility of choosing polygonal functions for warping of the cross section is discussed. It is shown that only one kind of distortion for the cross section is possible if shear deformations are not considered. This is quite different to the calculation of folded structures with open cross sections. On the other hand, it confirms Steinle's and Hees' results for single-cellular box-beams. At the same time, this is only a special case of the general statement for calculating arbitrary distortions of the structure.

In general, shear deformations must be taken into account. But only shear strains resulting from torsion of the cells can be considered if polygonal functions for warping are assumed. These components of the shear forces are shown to be identical with the generalized Bredt's shear flow, known from the torsion theory. Sedlacek's statements are thus proved and explained in this work.

Further, a complete deduction of the theory of multicellular structural analysis is shown. The above mentioned polygonal functions for warping of the cross sections are used. The effect of neglecting deformations of shear forces which result from bending and warping can be calculated approximately by two methods. Both are mathematically similar and depend on Heilig's and Benscoter's methods.

A computer program is developed to study multicellular box girders. It is based on the matrix transfer method. Some examples show the

good agreement of the results of the theory presented and another independent method of calculation, a computer program from Scordelis. The effects of some neglects and separations in the system of differential equations are examined. Considerations upon the reaction under load of multicellular structures with increasing number of cells indicate that not all kinds of possible distortions are of the same significance. There are only one or two special types of distortion which depend on the point of application of the exterior force. Their calculation allows to get a good approach of the response of the structure. In this way it is possible to save time and work in calculating only these few deformations instead of all. Finally, some remarks are given on the decrease of the distortions in longitudinal direction of the structure.

### Resumen

El presente trabajo tiene por objeto el cálculo de estructuras plegadas múltiples, extendiendo la teoría de flexión. Se enumeran en forma general, las posibilidades de adoptar en el caso de alabeo, ecuaciones lineales para cada pared de la sección. Se demuestra luego que, sin tener en cuenta la distorsión por corte, existe a lo sumo una única deformación del perfil, compatible con dichas ecuaciones. Este criterio difiere de los procedimientos de cálculo de sistemas plegados abiertos. Por otra parte, verifica los resultados de Steinle y Hees para vigas cajón monocelulares. Al mismo tiempo, esa deformación especial es solamente una entre todas las posibles, del perfil de la sección.

En el caso general en cambio, es necesario considerar los efectos debidos al corte. A fin de obtener esta función poligonal del alabeo, debe tenerse en cuenta solamente el corte originado por la rotación de las celdas. Se demuestra que este flujo de tensiones de corte coincide con los resultados de la teoría generalizada de Bredt. Así quedan verificadas y fundamentadas las hipótesis de Sedlacek, en este trabajo.

A continuación, se describe una deducción completa de la teoría para el cálculo de estructuras plegadas, según las mencionadas funciones poligonales del alabeo. El efecto del estado de deformación a tensiones tangenciales de flexión y alabeo, no considerado en la solución, puede determinarse en forma aproximada por los procedimientos basados en los métodos de Heilig y Benschoter respectivamente, análogos entre sí.

El cálculo de las vigas cajón multicelulares se realizó con un programa de computadora, usando la matriz de transferencia. Mediante algunos ejemplos, se demuestra que los resultados coinciden satisfactoriamente con los obtenidos en base al programa que Scordelis realizó por otro camino. Los errores provinientes de las aproximaciones, y las desconexiones en el sistema de ecuaciones diferenciales, se pueden ver en un ejemplo. Consideraciones sobre el comportamiento de vigas cajón multicelulares al aumentar el número de celdas, permiten reconocer que no todos los estados de deformación de perfil son equivalentes. Existen una o dos deformaciones del perfil, cuyo cálculo es suficiente para conocer el comportamiento del sistema, con buena aproximación. Ello depende del punto de aplicación de la carga en el perfil de la sección. Calculando solamente estas deformaciones es posible ahorrar tiempo y trabajo. Finalmente, figuran algunas observaciones sobre el amortiguamiento de las deformaciones de perfil en sentido longitudinal.

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,  
K. Papaliou, J. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Er-  
mittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruch-  
ter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Un-  
terlage.
- 74-4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und  
ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenele-  
mente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75-2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-  
schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und er-  
weiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O. :  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger  
Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,  
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,  
K. H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

76-2

E. Ramm:

Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.