

**Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern
und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt
unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen
globalem und lokalem Versagen**

von

Gundram Kammler

Bericht Nr. 7 (1987)

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Stuttgart 1987

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung : 9. Oktober 1987

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm

Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. J. Oxfort

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Zusammenfassung

Die Traglastberechnung räumlicher Stabtragwerke unter Berücksichtigung lokalen Querschnittsversagens und der Interaktion mit globalen Versagensformen steht im Mittelpunkt dieser Arbeit. Zu diesem Zweck wird ein finites Balkenelement für beliebige, dünnwandige Querschnitte so verallgemeinert, daß die Erfassung der Profilverformung möglich ist. Die inkrementellen Gleichgewichtsbeziehungen werden auf kontinuumsmechanischer Grundlage mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen formuliert. Es wird eine mitgehende Koordinatendarstellung mit lokalen, kartesischen, elementfesten Koordinatensystemen (updated Lagrange - Darstellung) verwendet.

Der Querschnitt eines Profilstabes wird aus einzelnen Platten zusammengesetzt, dadurch kann die Profilverformung durch die Biegewirkung der einzelnen Querschnittsplatten beschrieben werden. Die in den Einzelplatten wirkenden Membranspannungen werden durch Integration über den Querschnitt zu Balkenschnittgrößen zusammengefaßt. Die Erstellung der inkrementellen Elementsteifigkeitsmatrix geschieht unter Verwendung kubischer Interpolationspolynome. Sie setzt sich, abhängig vom Querschnitt, aus der Balkensteifigkeitsmatrix, mehreren Steifigkeitsmatrizen der einzelnen Querschnittssegmente und Kopplungsmatrizen zusammen.

Das Element wird zur geometrisch und physikalisch nichtlinearen Untersuchung räumlicher Stäbe eingesetzt. Die Bestimmung von Verzweigungslasten und die Berechnung nichtlinearer Last-Verformungsbeziehungen ist möglich. Zur Erfassung plastischer Werkstoffzustände wird ein in integralen Größen (Spannungsergebnissen) formuliertes Fließgesetz verwendet, das den Erfordernissen des speziellen Elementes angepaßt wird.

Mehrere numerische Beispiele zeigen im Vergleich mit bekannten Lösungen die Brauchbarkeit des Verfahrens.

Summary

The subject of the present study is the ultimate load analysis of 3-D framed structures with particular reference to local and distortional buckling. Based on a nonlinear finite beam element with an arbitrary, thin-walled open cross section, a special beam element with additional (local) degrees of freedom is derived. Using a continuum mechanics approach the incremental equilibrium equations are formulated with the principle of virtual work. An updated Lagrangian approach with a local cartesian element frame attached to the moving element is used.

The cross section of the beam element is composed of single plates. The local deformations of the cross section are described by plate bending equations. The membrane stresses are represented by the beam equations. By using cubic interpolation functions the incremental element stiffness matrix is derived. The total matrix is composed of single beam-, plate- and coupling matrices.

The new element is applied in geometrically and materially nonlinear analysis of beams and beam-columns. Eigenvalues and nonlinear load-deflection curves are calculated. To describe nonlinear effects due to plasticity an approximate yield criterion given by Ilyushin is used (stress-resultants are used instead of stresses).

Several numerical examples are given and compared to previous results.

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen	1
1.0 Einleitung	3
2.0 Literaturübersicht	6
2.1 Elastisches Material	7
2.2 Berücksichtigung von elastoplastischem Werkstoffverhalten	9
3.0 Lösungskonzept der Arbeit	12
4.0 Grundgleichungen zur Beschreibung des inkrementellen Gleichgewichtes	14
4.1 Prinzip der virtuellen Verrückungen	14
4.2 Mitgehende Koordinaten - Darstellung	17
4.3 Voraussetzungen und Annahmen	19
4.4 Entwicklung der Grundgleichungen	21
4.4.1 Querschnittskinematik für Balken und Platte	25
4.4.2 Einbringen der Querschnittskinematik	28
4.4.3 Überführung der Spannungen in Schnittgrößen	29
5.0 Werkstoffabhängige Grundgleichungen	32
5.1 Elastisches Werkstoffverhalten	32
5.2 Elastisch - plastisches Werkstoffverhalten	34
5.2.1 Voraussetzungen und Annahmen	37
5.2.2 Herleitung des Stoffgesetzes aus der Fließbedingung	39
6.0 Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente	45
6.1 Anforderungen an die Ansätze	45
6.2 Wahl einer geeigneten Verschiebungsfunktion	46
6.3 Inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei elastischem Werkstoffverhalten	53
6.3.1 Spannungsverlauf	53
6.3.2 Ermittlung der Steifigkeitsmatrix	56
6.4 Inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei elastisch-plastischem Werkstoffverhalten	62
6.4.1 Wahl eines numerischen Integrationsverfahrens	62
6.4.2 Ermittlung der Steifigkeitsmatrix	63

7.0 Zusammenbau der Elementmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix	65
7.1 Transformationsbeziehung	65
7.1.1 Verträglichkeit zwischen Elementen	67
7.1.2 Verträglichkeit innerhalb eines Elementes	68
8.0 Berechnung der Spannungen	71
8.1 Spannungsermittlung bei elastischem Werkstoffgesetz	71
8.2 Rücktransformation der Spannungen	75
8.3 Spannungsermittlung bei elastisch-plastischem Werkstoffverhalten	76
9.0 Implementierung im Rechenprogramm	79
9.1 Berechnung von Last-Verformungskurven mit Hilfe eines inkrementellen Rechenverfahrens	79
9.1.1 Iterationsverfahren	80
9.1.2 Konvergenz - Divergenz	81
9.2 Eigenwertuntersuchungen	82
9.3 Umsetzung ins Programm - Programmablauf	84
9.3.1 Vorgehen bei der Annahme elastischen Materials	86
9.3.2 Programmablauf bei Berücksichtigung plastischen Materials ..	89
10.0 Berechnete Beispiele bei elastischem Materialverhalten ...	95
10.1 Parameterstudien zur linearen Plattenbiegung	95
10.2 Beuluntersuchungen ebener Rechteckplatten	100
10.2.1 Beuluntersuchungen vierseitig gelenkig gelagerter Rechteckplatten	100
10.2.2 Beuluntersuchungen dreiseitig, gelenkig gelagerter Platten ..	107
10.3 Lokales Beulen zusammengesetzter Querschnitte	110
10.3.1 Lokales Beulen von I und C- Profilen unter konstanter Längsspannung	110
10.3.2 Lokales Beulen biegebelasteter Träger mit I- Querschnitt ..	117
10.4 Gekoppeltes lokal - globales Stabilitätsversagen	123
10.5 Berechnung einer I- Stütze als Spannungsproblem	139
11.0 Beispiele unter Berücksichtigung elastisch - plastischen Werkstoffverhaltens	141
11.1 Test des Materialgesetzes an Einzelplatten	141
11.1.1 Querbelaastete Quadratplatte	141
11.1.2 Imperfekte Rechteckplatte unter Längslast	144

11.2	Berechnung der plastischen Beulverzweigungslast für ein längsbelastetes I - Profil	147
11.3	Berechnung der Last-Verschiebungskurve eines längsbelasteten C- Profiles	151
12.0	Zusammenfassung und Ausblick	155
	Schrifttumsverzeichnis	157
	Anhang 1	171
	Anhang 2	185

Bezeichnungen

Indizierung

links	oben	m	Wirkungszustand
	unten	n	Bezugszustand
rechts	oben	B	Balkenanteil
		P	Plattenanteil
	unten	i,j,k	Komponenten der kartesischen Koordinatensysteme
		,j	Ableitung nach der j-ten Komponente

Statische und kinematische Größen

${}^m_n S_{ij}$	Kirchhoff - Piola Spannungstensor 2. Art
${}_n S_{ij}, S_{ij}$	Inkrement des Kirchhoff - Piola Spannungstensors
${}^m_m \tau_{ij}$	Cauchy Spannungstensor
${}^m_n \epsilon_{ij}$	Green - Lagrange Verzerrungstensor
${}_n \epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}$	Inkrement des Green - Lagrange Verzerrungstensors
${}^m_m \epsilon_{ij}$	Almansi Verzerrungstensor

Werkstoff und Querschnittsgrößen

E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
σ_F	einachsiale Fließspannung
σ_{Ki}	nominale Knickspannung
D	Breite des Querschnittssegmentes
L	Elementlänge
t	Segmentdicke

ε	Gesamtdehnungsinkremente
ε_p	plastische Dehnungsinkremente

Koordinatensysteme

X, Y, Z	raumfestes kartesisches Koordinatensystem
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Querschnittskordinatensystem
x, y, z	Segmentkoordinatensystem

Matrizen und Vektoren

N	gesamte Spannungsresultanten	$[N_x \ N_y \ N_{xy}]$
M	gesamte Spannungsresultanten	$[M_x \ M_y \ M_{xy}]$
n	inkrementelle Spannungsresultanten	$[n_x \ n_y \ n_{xy}]$
m	inkrementelle Spannungsresultanten	$[m_x \ m_y \ m_{xy}]$
σ	Vektor der inkrementellen Spannungen	
$\bar{\sigma}$	Vektor der Gesamtspannungen	
C	elastische Werkstoffmatrix für den ebenen Spannungszustand	
C_n	plastische Werkstoffmatrix Membranspannungsanteile	
C_m	plastische Werkstoffmatrix Biegeanteile	
C_{mn}	plastische Werkstoffmatrix Biege-/Membrananteile	
L_ξ, L_η	lineare Ansatzfunktionen	
Φ_ξ, Φ_η	kubische Ansatzfunktionen	
Φ_{ξη}	zweidimensionale Ansatzfunktionen	
u_s	Vektor der Stabendverschiebungen in x-Richtung	
v_M	Vektor der Stabendverschiebungen in der x, y Ebene	
w_M	Vektor der Stabendverschiebungen in der x, z Ebene	
θ_{xM}	Vektor der Stabendverschiebungsgrößen für Torsion	
w_L	Vektor der lokalen Stabendverschiebungsgrößen	

1.0 Einleitung

Im Bauwesen und anderen Ingenieurdisziplinen sind Balken und Stützen aus Stahl häufig verwendete Bauteile. Sie kommen als einfache ebene Träger, sowie als Teile räumlicher Rahmensysteme vor. Die Berechnung dieser Bauteile erfolgt seit jeher nach der Balkentheorie. Auch moderne finite Element Programme, die die Berechnung von Trägern und Rahmen unter Berücksichtigung verschiedener Effekte, wie der Querschnittsverwölbung oder geometrisch- und stofflich nichtlinearen Einflüssen gestatten, basieren meist auf der Balkentheorie. Die Gründe sind einleuchtend, denn auch bei finite Element Programmen hängen Zeit und Preis der Berechnung von der Problemgröße, also der Anzahl der Freiheitsgrade ab. Die Beschränkung auf das wesentliche Tragverhalten ist daher ein Gebot der Wirtschaftlichkeit. Es werden vielfach sogenannte "dünnwandige" Profile I, C, L verwendet, denn der Querschnitt soll aus Gründen der Materialeinsparung dem Tragverhalten angepaßt werden. Da die Wanddicke dieser Profile im Vergleich zu den sonstigen Querschnittsabmessungen klein ist, ist die Annahme der Querschnittstreue - also die Unverformbarkeit des Querschnittes in sich - nur eine Näherung der Balkentheorie, die nicht uneingeschränkt gültig ist.

Vor allen Dingen im kritischen Bereich vor oder nach der Stabilitätslast und in teilplastischen Zuständen ist diese Annahme nicht mehr richtig. Infolge der Dünnwandigkeit können die einzelnen Scheiben eines Profiles auch für sich alleine versagen. Vielfach begegnet man diesem Problem mit der Vorgabe von Mindestdicken oder der Forderung nach getrennten Nachweisen der Balkenwirkung des Gesamtträgers einerseits und der Plattenwirkung einzelner Profilelemente (Flansch,Steg) andererseits.

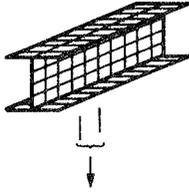
Getrennte Nachweise sind jedoch nur bedingt aussagekräftig, denn die Traglast eines aus einem dünnwandigen Profil bestehenden Trägers kann durch eine örtliche Schwächung des Querschnittes durch Verformung oder Plastizierung eines Querschnittsteils abgemindert werden. Ebenso ist die Beanspruchung einer einzelnen Scheibe vom Belastungs- und Verformungszustand des gesamten Trägers abhängig. Um also räumliche Träger in allen Fällen richtig zu beurteilen, muß die Annahme von der Querschnittstreue aufgegeben und die Verformung des Profiles durch Plattenbiegung der Einzelscheiben berücksichtigt werden.

Um zur Berechnung dieses Effektes bestehende Computerprogramme verwenden zu können, bleibt nur die Möglichkeit, den gesamten Träger mit Platten- / Scheibenelementen zu modellieren. Dies hat allerdings zur Folge, daß ein sehr aufwendiges Modell entsteht, das nur bei kleinen Systemen oder zur Untersuchung einzelner Systemteile wirtschaftlich eingesetzt werden kann. Es ist wünschenswert, zur Berechnung räumlicher Träger und Rahmen ein Element zur Verfügung zu haben, das die Berücksichtigung der Profilverformung ohne eine aufwendige Systemidealisierung gestattet. Prinzipiell bestehen zwei Möglichkeiten zur Entwicklung eines solchen Elementes. Erstens, durch herauskondensieren von "unwichtigen" Freiheitsgraden aus einem aufwendigen Modell heraus oder zweitens, durch Hinzunahme von "Querschnittsfreiheitsgraden" zu einem einfachen Balkenmodell. Endprodukt beider Wege ist ein Balkenelement mit zusätzlichen Querschnittsfreiheitsgraden. In Bild 1 sind die prinzipiellen Schritte zur Erzeugung dieses Elementes am Beispiel eines I - Trägers gegenübergestellt.

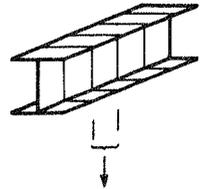
Weg **A** geht von einer Idealisierung des Trägers mit finiten Platten- / Scheibenelementen aus. Die bei einer solchen Idealisierung auftretenden diskreten Freiheitsgrade (fünf pro Elementknoten) sind an einem Systemausschnitt angetragen (Schritt **1**). Um die Fülle der Freiheitsgrade zu reduzieren, kann man die Verschiebungsgrößen der einzelnen Systemknoten, analog zu den üblichen Balkenannahmen, durch die Verschiebungen bzw. die Verdrehungen eines signifikanten Punktes ausdrücken. Weiterhin können die Biegeverformungen des Querschnittes, durch die Annahme ihres Verlaufes, in einzelne, unabhängige Verschiebungsgrößen zusammengefaßt werden (Schritt **2**). Weg **B** beschreibt die Entwicklung des "speziellen" Balkenelementes ausgehend von einem allgemeinen, räumlichen Balkenelement mit Wölbfreiheitsgraden (Schritt **1**). Unter Beibehaltung der "globalen" Balkenfreiheitsgrade werden dem Element zusätzliche, lokale Freiheitsgrade hinzugefügt, die die Verformung des Querschnittes erfassen (Schritt **2**). Beide Wege führen zu einem speziellen Balkenelement mit zusätzlichen, lokalen Freiheitsgraden (Schritt **3**).

Zur Entwicklung des hier beschriebenen Elementes wurde der Weg **B** beschritten.

Näherung : Verschiebungsansätze

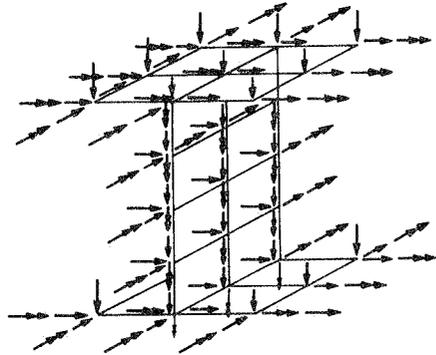


Näherung : Balkentheorie + Ansatz für Querschnittsverwölbung



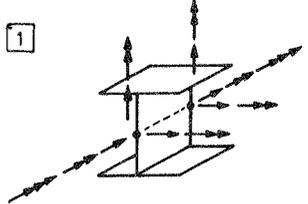
Systemausschnitt

①



Element

1

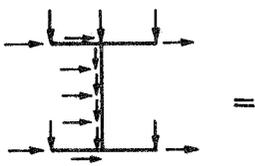


+

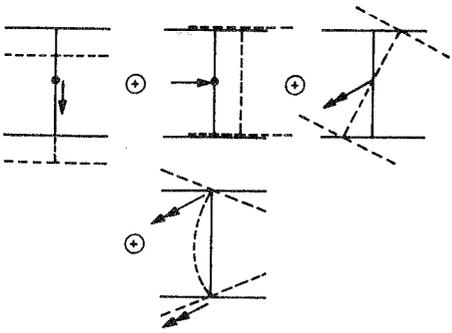
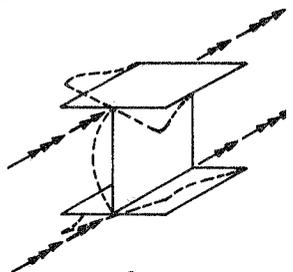
Zusammenfassung der Freiheitsgrade durch Querschnittsannahmen (analog in Längsrichtung)

„Aufpfropfen“ von Plattenfreiheitsgraden auf den Balken

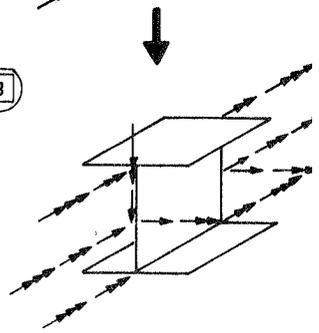
②



2



3



2.0 Literaturübersicht

Auf dem klassischen Gebiet der Stabstatik gibt es seit jeher eine Fülle von Arbeiten, die, ausgehend von den Eulerschen Differentialgleichungen oder von Energiemethoden mit globalen oder bereichsweisen Ansätzen, Lösungen für das Biegetorsionsproblem des offenen dünnwandigen Stabes aus linear elastischem Werkstoff angeben. Sukzessiv wurde, neuerdings auf der Grundlage finiter Element Modelle, das Verhalten des Balkens durch Berücksichtigung eines elasto-plastischen Werkstoffgesetzes und großen Verformungen /75/, /93/ besser erfaßt. Eine ausführliche Übersicht hierzu findet sich in der Arbeit von Osterrieder /75/. Er selbst entwickelt, auf der Basis des Prinzips der virtuellen Verrückungen mit bereichsweisen Verschiebungsansätzen, ein Balkenelement für offene, beliebige, dünnwandige Querschnitte. Um die Gesamtverformungen in einen Starrkörperanteil und einen Deformations- oder Relativverformungsanteil zu zerlegen, verwendet er eine Darstellung mit einem mitgehenden, lokalen, kartesischen Koordinatensystem. Diese Formulierung gestattet die Beschreibung beliebig großer Verschiebungen und Rotationen. Die Wlassow - Hypothesen für offene dünnwandige Querschnitte werden dabei sowohl für die Verformungsinkremente als auch für die gesamten Relativverformungen verwendet. Das entwickelte Element wird zur geometrisch und physikalisch nichtlinearen Untersuchung von ebenen und räumlichen Rahmentragwerken eingesetzt. In der verwendeten bilinearen Spannungs - Dehnungs - Beziehung für elastisch plastischen Werkstoff ist für wiederholte Belastung eine kinematische Verfestigung vorgesehen. Es wird jedoch nicht von der Annahme abgewichen, daß die Querschnittsform auch bei Verformungen erhalten bleibt. Das Versagen von Einzelplatten eines Profiles (Steg- und Flanschbeulen) wurde ausgeschlossen. Das Kipp - Problem unter Aufgabe der Querschnittstreue behandelt Fischer /32/ 1966, indem er zur Lösung des Problems die Energiemethode in Verbindung mit dem Ritzschen Verfahren verwendet. Damit ist er in der Lage, die Lösung des Kipp - Problems von I-Trägern, die außer durch exzentrischen Druck auch noch durch gleichmäßig verteilte Last am Trägerlängsrand querbelastet sind, anzugeben. Er behandelt Fälle der Gabellagerung mit und ohne Verwölbungsbehinderung an den Stabenden bei Voraussetzung elastischen Werkstoffverhaltens.

Untersuchungen über das Stabilitätsverhalten dünnwandiger Querschnitte unter Berücksichtigung der Profilverformung und der Auswirkung von Bindeblechen und Abkantungen werden von Schardt /95/ angegeben. Zur

Berücksichtigung der Interaktion zwischen lokalem Versagen durch Plattenbeulen und globalem Versagen durch Ausweichen von Stäben infolge von Kippen, Knicken und Biegedrillknicken wurden verschiedene Modelle entwickelt.

Die vorliegende Literatur läßt sich hier unter dem Gesichtspunkt der Geometriebeschreibung in zwei Gruppen einteilen. Zum einen wird versucht, die Platten- und Scheibenwirkung des Querschnittes durch entsprechende Elemente, aus denen der Querschnitt zusammengesetzt wird, zu beschreiben. Zum anderen versuchen verschiedene Autoren auf der Basis von Balkenmodellen die Plattenwirkung durch unterschiedliche Annahmen zu erfassen. Es werden häufig, von den von Kármánschen Differentialgleichungen der Einzelplatte ausgehend, über Fallwerksbetrachtungen, Formeln für die zulässigen Lasten aufgestellt. Vielfach ergeben sich jedoch hieraus Einschränkungen bezüglich des verwendbaren Werkstoffgesetzes, der Erfäßbarkeit der Interaktion zwischen lokalem und globalem Versagen und der Querschnittsform.

2.1 Elastisches Material

Bulson /17/ beschreibt auf der Basis der Plattendifferentialgleichung das lokale Beulverhalten von Einzelplatten und beliebig zusammengesetzten Querschnitten. Er berechnet zunächst nur ein lokales Beulen der Einzelplatten, die gemeinsamen Kanten aneinanderstoßender Platten bleiben dabei gerade. Darüberhinaus nimmt er an, daß die Beulwellenzahl einzelner Querschnittsplatten in Längsrichtung gleich ist. Die Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen beschränkt er auf Fälle, in denen die Verdrehung des Querschnittes um die Längsachse ausgeschlossen ist, d.h. nur Knicken ist möglich. Die Beulform ist auf eine lokale Beulwelle in Längsrichtung beschränkt, die nicht in allen Fällen die richtige Versagensform darstellt. Ebenfalls von der klassischen Plattentheorie ausgehend, benutzen Tien und Wang /109/ die Differentialgleichung der Einzelplatte zur Darstellung eines dünnwandigen Querschnittes, den sie mit Hilfe der Methode der finiten Differenzen berechnen. Sie bestimmen Schnittgrößen an den Einzelplatten aus der Fallwerkstheorie und setzen diese als Membrananteile in die Differentialgleichung ein. Ihr Vorgehen ermöglicht die Berücksichtigung der Scheibenwirkung bei kurzen Trägern, beschränkt sich aber auf die Lösung des Eigenwertproblems für lokales Beulen.

Ein anderer Weg wurde von Hancock /43/ unter Verwendung der finiten Streifenmethode eingeschlagen. Er unterteilt einen Träger in Längsrichtung in Streifen und nimmt an, daß diese sich nach der Plattentheorie verhalten. Die Längsverschiebungen in der Plattenebene werden durch einen sinusförmigen, die Querverschiebungen der Plattenebene durch einen linearen Ansatz beschrieben. Die Annäherung der Verschiebungen aus der Plattenebene heraus wird in Längsrichtung durch eine Fourierreihenentwicklung (mit Sinuswellen) und in Querrichtung durch ein Polynom 3.Ordnung durchgeführt. Der sinusförmige Ansatz in Längsrichtung stellt jedoch eine gewisse Einschränkung dar, da entsprechend dem gewählten Ansatz nur ein bestimmter Beulmodus darstellbar ist, der jedoch nicht von vorne herein bekannt ist. Der ermittelte Lastfaktor hängt damit vom gewählten Ansatz ab. Eine Interaktion der verschiedenen Beulmodi ist wegen der Orthogonalität des Fourier-Ansatzes nicht möglich. Beispielsweise ist mit Hancocks Verfahren die Interaktion einer lokalen Beule mit 4 Halbwellen und dem globalen Versagen des Gesamtträgers in Form einer Halbwelle nicht erfaßbar. In /44/ wird dieser Ansatz auf die Berücksichtigung von Imperfektionen bei gekoppeltem Versagen erweitert.

Stellvertretend für eine Zahl von Autoren, die das Problem mit finiten Elementen untersucht haben, seien hier noch die Überlegungen von zwei Vertretern der in Abschnitt 2.0 definierten Gruppen dargestellt.

Akay, Johnson und Will /1/ idealisieren den Steg eines Querschnittes durch finite Dreieck- und Rechteckelemente. Sie beschreiben das Scheibenverhalten der Träger durch zwei Freiheitsgrade pro Knoten und das Plattenverhalten durch drei Freiheitsgrade pro Knoten und ermitteln mit diesen Elementen die elastische Steifigkeitsmatrix. Die hohe Anzahl der Freiheitsgrade wird für die immer wieder neu zu erstellende geometrische Matrix reduziert, indem sie hierfür nur noch die Verschiebungen aus der Ebene heraus berücksichtigen. Durch die Verwendung von allgemeinen Platten- / Scheibenelementen sind ihnen in der darstellbaren Querschnittsform und der Erfassung der Interaktionen keine Grenzen gesetzt.

Rajasekaran und Murray /82/ beschreiten den in Bild 1 mit B bezeichneten Weg. Sie erzeugen, ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verrückungen, Steifigkeitsmatrizen für ein räumliches Balkenelement, das die Möglichkeit der Profilverformung durch Verwendung von zusätzlichen Plattenfreiheitsgraden erhält. Diese zusätzlichen Freiheitsgrade berücksichtigen nur die Biegeverformung der einzelnen Querschnittssegmente, wobei jeweils der Steg und die Gurte eines Profiles durch eine Platte dargestellt werden und die einzelnen Platten an den Längskanten des Profiles verbunden sind. In

Stablängsrichtung ist eine Unterteilung in Elemente wie bei gewöhnlichen Balkenelementen möglich. Sie ermitteln Steifigkeitsmatrizen für I-Profile und führen damit Eigenwertuntersuchungen durch, aus denen sie kritische Längen für Träger unter festen äußeren Lasten berechnen. Es wird versucht, mit einem Minimum an Freiheitsgraden auszukommen, um ein sehr handliches, rechenzeitsparendes Element zur Verfügung zu haben. Die damit erzielten Ergebnisse können jedoch für Versagen des Steges nicht voll befriedigen, da hierfür der Ansatz nicht ausreichend ist.

2.2 Berücksichtigung von elastoplastischem Werkstoffverhalten

Grundlagen zur Ermittlung der plastischen Versagenslast von Stahlträgern unter Berücksichtigung lokaler Beulerscheinungen wurden 1957 von Haaijer /38/ gelegt. In einer theoretischen Arbeit gibt er Gleichungen zur Behandlung des plastischen Beulproblems von unterschiedlich gelagerten Platten an. Weitere Grundlagen ermittelt Haaijer zusammen mit Thürlimann /39/ im darauffolgenden Jahr; sie führen Versuche an längsbelasteten Stahlträgern mit I - Profil durch. Hierbei wurden sowohl die Längen der Träger, als auch die Querschnittsabmessungen so variiert, daß unterschiedliche Querschnittsteile (Flansch oder Steg) für das Versagen des Gesamtträgers maßgebend wurden.

Eine neuere Arbeit zum plastischen Beulen wurde von Stoverink /106/ vorgelegt. Der Autor ersetzt die Platten- und Scheibenwirkung der Querschnitte durch ein Gitterrostmodell nach Hrennikoff, das er so verfeinert, daß er durch Anpassung der Ersatzflächen seiner Stäbe auch plastische Zustände im Element erfassen kann. Die Profilverformung nähert er durch Einführung eines Ersatzträgheitsmomentes für vertikale, den Steg eines I-Trägers ersetzende Stäbe an.

Ähnlich wie /1/ idealisiert Henkel /47/ den Querschnitt durch Platten- / Scheibenelemente mit fünf Freiheitsgraden pro Knoten. Er untersucht elastisch - plastisches Werkstoffverhalten, beschränkt sich aber bei der Stabilitätsberechnung auf die Lösung des Eigenwertproblems des nur global verformten Systems. Das hat zur Folge, daß nur Membranspannungen zur Plastifizierung führen und die Biegespannungen in den Platten lediglich in das Eigenwertproblem eingehen. Unter praktischen Gesichtspunkten ist jedoch gerade der Punkt, an dem das System in einen globalen oder einen lokalen Beulmodus verzweigt, von großem Interesse. Um zu diesem Punkt zu gelangen, führt er eine plastische Scheibenberechnung durch, ermittelt daraus

plastische Zonen und löst mit verminderter Steifigkeit das Stabilitätsproblem. Die äußere Scheibenlast wird solange gesteigert, bis die aufgebrachte Last nur noch unwesentlich von der ermittelten Stabilitätslast abweicht.

Mit Henkels Vorgehen vergleichbar ist auch eine Untersuchung von El-Ghazaly, Sherbourne und Dubey /30/, die zur Idealisierung des Stegbereiches Dreieckselemente mit 9 Freiheitsgraden verwenden und die Gurte durch eindimensionale Balkenelemente darstellen. Sie ermitteln Beullasten unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen lokalen und globalen Beulmodi, beschränken sich aber ebenfalls auf Längsspannungen zur Festlegung von elastischen und plastischen Bereichen.

Spezielle Elemente zur Beschreibung des Verhaltens von Stahlprofilträgern werden in /14/ und /26/ angegeben. Bradford /14/ entwickelt ein Balkenelement mit Verschiebungs- und Verdrehfreiheitsgraden an den Profilkanten, um die Querschnittsverformung zu erfassen. Seine Untersuchungen sind allerdings auf das Eigenwertproblem von statisch bestimmten Einfeldträgern mit konstantem bzw. linearem Momentenverlauf beschränkt, da dadurch die Momentenverteilung im Balken vorab bekannt ist und als Ausgangswert in die Beulanalyse eingehen kann. Das von Dawe und Kulak /26/ angegebene Verfahren zur Bestimmung der lokalen Versagenslasten von Breitflanschträgern ist ebenfalls Einschränkungen bezüglich der Belastung und Lagerung unterworfen. Sie beschreiben das Querschnittsverhalten mit einem speziell I-Profilen angepaßten, quintischen Ansatz in Quer- und einem sinusförmigen Ansatz in Längsrichtung. Um die Stabilitätsbedingung für die Einzelplatte bzw. den daraus zusammengesetzten Querschnitt angeben zu können, ist auch hier ein definierter Membranspannungszustand notwendig, der für ein vorgegebenes Lastniveau ermittelt wird, um damit das Eigenwertproblem zu lösen. Die Gewinnung des richtigen Lastniveaus erfordert ein iteratives Vorgehen. Die Autoren bestätigen ihr Modell durch Vergleichsrechnungen mit den von Haaijer und Thürlimann /39/ angegebenen Versuchen, sowie durch eigene Versuchsreihen mit längs- und biegebelasteten I - Trägern.

Der Einfluß von örtlichem Beulen auf die Verdrehfähigkeit in Fließgelenken wird von Kuhlmann /53/ untersucht. Um für die Anwendung des Fließgelenkverfahrens eine zulässige Gelenkverdrehung angeben zu können, untersucht sie das Nachbeulverhalten im Fließgelenk, denn bei Beulbeginn tritt kein schlagartiges Versagen auf, sondern die Verdrehung, bei der der Querschnitt seine plastische Tragfähigkeit verliert übersteigt im allgemeinen die Beulverdrehung.

Diese Übersicht, die exemplarisch für weitere ähnliche Vorgehensweisen steht, macht deutlich, daß vor allen Dingen der Lösungsweg B für elastisch -

plastisches Material bisher nicht ohne deutliche Einschränkungen beschränkt werden konnte. Diese Arbeit versucht, aufbauend auf der Arbeit von Osterrieder /75/ und dem Modell von Rajasekaran /82/, einen Beitrag zur allgemeineren Erfassung des gekoppelten lokal - globalen Beulens von Stahlträgern mit beliebigem Querschnitt zu leisten.

3.0 Lösungskonzept der Arbeit

Ziel der Arbeit ist die Traglastberechnung räumlicher Stabtragwerke mit einem auf kontinuumsmechanischer Grundlage entwickelten finiten Balkenelement mit Berücksichtigung der Profilverformung. Die Behandlung folgender Probleme ist möglich

- beliebige unsymmetrische ,offene, dünnwandige Querschnitte
- endliche Verschiebungen und Rotationen
- Untersuchung von globalem Verhalten des Gesamttragwerkes
- Untersuchung von lokalem Querschnittsverformungen an örtlich stark beanspruchten Stellen
- Untersuchung der Interaktionen von globalem und lokalem Verhalten
- Spannungsprobleme und Eigenwertanalysen
- elastisch und elastisch-idealplastisches Werkstoffverhalten, teilplastizierte Zonen

Zunächst wird die inkrementelle Gleichgewichtsbedingung für ein allgemeines Kontinuum mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen formuliert. Den Bezugszustand für die Berechnung des inkrementellen Verformungszustandes bildet der letzte bekannte Deformationszustand, was zur "updated" Lagrange-Formulierung (U.L.) des Problems führt.

Die Arbeitsgleichung wird in Anteile aus Balkenwirkung und Plattenwirkung der Querschnittssegmente sowie gemischte Terme zerlegt. In den Balkenanteilen wird die Theorie der offenen dünnwandigen Stäbe, in den Plattenanteilen die Kirchhoffsche Plattentheorie eingebracht. Man erhält die stoff-freien Grundgleichungen.

Die Spannungsinkremente werden mit Hilfe eines Werkstoffgesetzes durch die Dehnungsinkremente ausgedrückt. Im Sinne der Verschiebungsmethode der finiten Elemente wird das Problem durch Einbringen von Verschiebungsansätzen für Balken- und Plattenfreiheitsgrade diskretisiert.

Durch Integration erhält man die inkrementellen Elementsteifigkeitsmatrizen, die, nach einer Transformation vom lokalen, mitgehenden Elementkoordinatensystem in ein raumfestes, globales Systemkoordinatensystem, mit der direkten Steifigkeitsmethode zur Gesamtsteifigkeitsmatrix aufaddiert werden. Durch Auflösung des Gleichungssystems kann man die globalen Knotenverschiebungsinkremente errechnen, die zu den Gesamtverschiebungen des vorhergehenden Zustands addiert werden.

Aus den ins Elementkoordinatensystem zurücktransformierten Knotenverschiebungen werden die Knotenkraftgrößen des aktuellen Zustands ermittelt und mit den äußeren Lasten ins Gleichgewicht gesetzt. Auftretende Differenzkräfte (Ungleichgewichtskräfte) werden iterativ entfernt.

4.0 Grundgleichungen zur Beschreibung des inkrementellen Gleichgewichtes

Ausgehend vom Prinzip der virtuellen Verrückungen für das 3D - Kontinuum werden die inkrementellen Gleichgewichtsbeziehungen für einen Stab mit offenem dünnwandigem Querschnitt und der Möglichkeit der Profilverformung hergeleitet.

Die verwendete Schreibweise und Art der Darstellung folgt im wesentlichen der Arbeit von Ramm /87/. Die vorliegende Arbeit stellt eine Erweiterung des von Osterrieder /75/ entwickelten Balkenelementes dar. Die Grundgleichungen und die Herleitung der balkenspezifischen Terme sind in /75/ ausführlich dargestellt, so daß an dieser Stelle nur die Herleitung der Plattenterme und der gekoppelten Platten - Balkenterme behandelt wird.

Ziel der Herleitung ist die Beschreibung eines unbekanntem, endlich deformierten Zustandes 2 aus einem bereits ermitteltem, bekannten Verformungszustand 1 heraus (inkrementelles Vorgehen).

4.1 Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen stellt für den gesuchten Zustand 2 die Gleichgewichtsaussage dar.

$${}^2\delta W \equiv {}^2\delta W_{(i)} + {}^2\delta W_{(a)} = 0 \quad (1)$$

Hierin ist ${}^2\delta W_{(i)}$ die virtuelle innere Arbeit, bezogen auf ein raumfestes kartesisches Koordinatensystem.

$$- {}^2\delta W_{(i)} = \int_{V_1} {}^2s_{ij} \delta {}^2e_{ij} d({}^1V) = {}^2\delta W_{(a)} \quad (2)$$

Die hier gewählte updated Lagrange - Formulierung verwendet als Bezugszustand für den Kirchhoff - Piola Spannungstensor 2. Art ${}^2s_{ij}$ den bekannten Deformationszustand 1.

$${}^2\delta W_{(a)} = \int_{V_1} {}^2s_{ij} \delta {}^2e_{ij} d({}^1V) \quad (3)$$

Sowohl der Spannung- als auch der Verzerrungstensor können additiv in einem bekannten Anteil des Verschiebungszustandes 1 und einen inkrementellen Anteil zerlegt werden.

$${}^2_1s_{ij} = {}^1_1\tau_{ij} + {}_1s_{ij} \quad (4a)$$

$${}^2_1\varepsilon_{ij} = {}^1_1\varepsilon_{ij} + {}_1\varepsilon_{ij} \quad (4b)$$

Für die Gleichheit von Wirkungs- und Bezugszustand geht in Gleichung (4a) der Kirchhoff - Piola Tensor 2. Art in den Cauchy Spannungstensor über.

$${}^1_1s_{ij} \rightarrow {}^1_1\tau_{ij} \quad (5)$$

Mit

$$\delta^2_1\varepsilon_{ij} = \delta_1\varepsilon_{ij} \quad (6)$$

erhält man aus (3) und (4)

$$\int_V {}_1s_{ij} \delta_1\varepsilon_{ij} d^1V + \int_V {}^1_1\tau_{ij} \delta_1\varepsilon_{ij} d^1V = {}^2\delta W_{(a)} \quad (7)$$

Durch Aufspaltung des inkrementellen Green - Lagrangeschen Verzerrungstensors in lineare und nichtlineare Anteile

$${}_1\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}_1u_{i,j} + {}_1u_{j,i} + {}_1u_{k,i} {}_1u_{k,j}) \quad (8a)$$

$${}_1e_{ij} = \frac{1}{2} ({}_1u_{i,j} + {}_1u_{j,i}) \quad (8b)$$

$${}_1\eta_{ij} = \frac{1}{2} ({}_1u_{k,i} {}_1u_{k,j}) \quad (8c)$$

folgt daraus für die inkrementelle Arbeit

$$\int_V s \delta \varepsilon dV + \int_V \tau \delta \eta dV = {}^2\delta W_{(a)} - \int_V {}^1\tau \delta e dV \quad (9)$$

Im weiteren wird zur vereinfachenden Schreibweise auf den linken unteren Fußzeiger verzichtet, da sich alle Terme auf den Zustand 1 beziehen. Bei

Berücksichtigung lokalen Querschnittsverhaltens setzen sich die Gesamtverformungen aus lokalen (Platten-) und globalen (Balken-) Verformungen zusammen. Die Plattenverformungen stellen hierbei zusätzliche Verformungen dar, die nur aus der Biegeverformung der einzelnen Querschnittsplatten resultieren.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^B + \mathbf{u}^P \quad (10 a)$$

Ebenso kann man die Spannungskremente aus Balken- bzw. Plattenverformungen berechnen

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^B + \mathbf{s}^P \quad (10 b)$$

Die hochgestellten Indizes bezeichnen die Herkunft der einzelnen Verformungs- bzw. Spannungskomponenten.

B Balken P Platte

τ enthält die Spannungskomponenten des bekannten Bezugszustandes 1, die zur Ermittlung des inkrementellen Zuwachses benötigt werden. Auf ihre Ermittlung wird in einem späteren Kapitel eingegangen; sie werden deshalb nicht in Platten- und Balkenanteile aufgespalten.

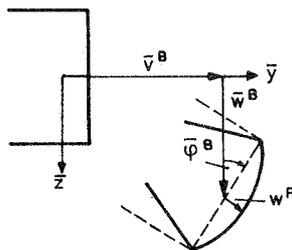


Bild 2 : Verschiebungskomponenten von Balken und Platte

Damit ergibt sich aus Gleichung (9)

$$\begin{aligned}
 & \int_V \mathbf{s}^B \delta \boldsymbol{\varepsilon}^B dV + \int_V \mathbf{s}^P \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P dV + \int_V \mathbf{s}^B \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P dV \\
 & + \int_V \mathbf{s}^P \delta \boldsymbol{\varepsilon}^B dV + \int_V \mathbf{s}^P \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{BP} dV + \int_V \mathbf{s}^B \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{BP} dV \\
 & + \int_V {}^1\tau \delta \boldsymbol{\eta}^{BB} dV + \int_V {}^1\tau \delta \boldsymbol{\eta}^{PP} dV \\
 & + \int_V {}^1\tau \delta \boldsymbol{\eta}^{PB} dV + \int_V {}^1\tau \delta \boldsymbol{\eta}^{BP} dV \\
 & = {}^2\delta W_{(a)} - \int_V {}^1\tau \delta \mathbf{e} dV
 \end{aligned} \tag{11}$$

Die doppelten Indizes bezeichnen die einzelnen Anteile bei Produkttermen.

4.2 Mitgehende Koordinaten - Darstellung

Um, der üblichen Stabtheorie dünner Querschnitte folgend, nur mit Normalspannungen in Stablängsrichtung sowie Schubspannungen in der Ebene der Einzelplatten operieren zu können, wurde von Osterrieder ein lokales, mitgehendes Bezugskoordinatensystem eingeführt. Darüberhinaus ist es notwendig, ein eigenes Koordinatensystem für jedes Querschnittssegment anzugeben, auf das die lokalen, rein additiven Querschnittsverformungen bezogen werden. Die Wahl der Grundelemente muß so allgemein sein, daß daraus beliebige Querschnitte zusammensetzbar sind. Es sind also drei Koordinatensysteme zur Beschreibung des Problems notwendig (vgl. Bild 3).

- ein globales Bezugskoordinatensystem X, Y, Z
- ein lokales, mitgehendes Querschnittskoordinatensystem $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ für jedes Balkenelement
- ein lokales, auf das aktuelle Querschnittskoordinatensystem bezogenes System für jedes Segment des Querschnittes (Platte) x, y, z .

Im Sinne der finiten Elemente wird das Gesamtsystem in endliche (finite) Balkenelemente und jedes Element in eine bestimmte, vom Querschnitt abhängige Anzahl von Unterelementen eingeteilt. Gleichung (11) wird dann auf jedes Element und seine Subelemente angewendet. Die Arbeit des gesamten Systems folgt aus der Summation über alle Elemente und Unterelemente.

$$\begin{aligned}
 & \sum_n \left[\int_V \mathbf{s}^B \delta \boldsymbol{\varepsilon}^B dV + \int_V {}^1\tau \delta \boldsymbol{\eta}^{BB} dV \right] \\
 & + \sum_n \sum_{ns} \left[\int_V \mathbf{s}^P \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P dV + \int_V \mathbf{s}^B \delta \boldsymbol{\varepsilon}^P dV + \int_V \mathbf{s}^P \delta \boldsymbol{\varepsilon}^B dV \right. \\
 & + \int_V \mathbf{s}^B \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{PB} dV + \int_V \mathbf{s}^P \delta \boldsymbol{\varepsilon}^{BP} dV \\
 & \left. + \int_V {}^1\tau \delta \boldsymbol{\eta}^{PP} dV + \int_V {}^1\tau \delta \boldsymbol{\eta}^{PB} dV + \int_V {}^1\tau \delta \boldsymbol{\eta}^{BP} dV \right] \\
 & = {}^2\delta W_{(a)} - \sum_n \sum_{ns} \int_V {}^1\tau \delta \mathbf{e} dV
 \end{aligned} \tag{12}$$

n Anzahl der Elemente ; ns Anzahl der Subelemente

Die endlichen Gesamtverschiebungen eines Querschnittspunktes setzen sich aus einer großen Starrkörperverschiebung, einer kleinen Relativverschiebung des Balkens (\rightarrow Balkenspannungen) und einer Verschiebung der Querschnittssegmente bezogen auf den Ausgangsquerschnitt (\rightarrow Plattenwirkung) zusammen.

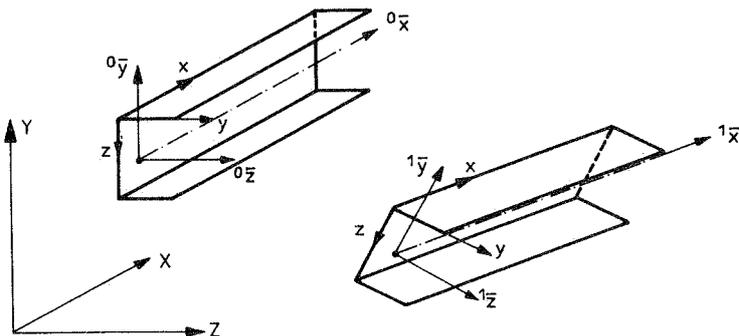


Bild 3 : Koordinatensysteme : Global - Balken - Platte

4.3 Voraussetzungen und Annahmen

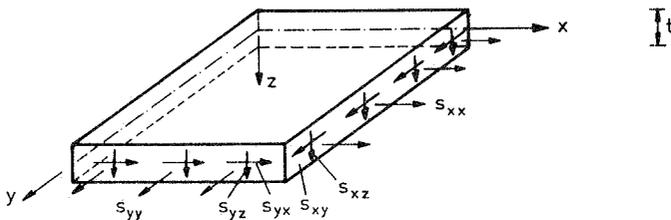
1. Die räumlichen Stäbe besitzen offene, abschnittsweise konstante, prismatische Querschnitte. Zur Berücksichtigung der Querschnittsverformung und zur numerischen Behandlung des Querschnittes bei physikalischer Nichtlinearität wird dieser aus ebenen Segmenten (Platten) zusammengesetzt.
2. Der Querschnitt ist dünnwandig ($b, h \gg t$). Die Verteilung der Spannungen über die Dicke eines Segmentes ist bei elastischem Werkstoffverhalten linear. Die Spannungen werden aus Balken- und Plattenwirkung bestimmt.
3. Die Verschiebungen eines Punktes auf der Querschnittsfläche werden durch Superposition der Balken- und Plattenverformungen bestimmt.
4. Die aus der Balkentheorie resultierenden Stablängsspannungen sind über die Dicke der Einzelplatten konstant, gleich den Werten in der Mittelfläche. Umlagerungen dieser Membranspannungen infolge der Verzerrungen der Plattenmittelfläche beim Ausbeulen der vierseitig gelenkig gelagerten Platte werden näherungsweise im Mittel berücksichtigt.
5. Die aus der Änderung der Längsnormalspannungen entstandenen Schubverzerrungen in den Mittelflächen der Einzelplatten sind gering und werden vernachlässigt. Das hat zur Folge, daß die zu den Querkräften des Balkens gehörenden Schubspannungen nicht über ein Werkstoffgesetz, sondern aus dem Gleichgewicht am Stabelement berechnet werden.
6. Der Verlauf der Verwölbung in Dickenrichtung wird als konstant angenommen.
7. Der Querschnitt ist in der Lage seine Form zu verändern. Die daraus resultierenden Plattenmomente werden mit den Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie ermittelt.
8. Die Flächennormale auf einer Einzelplatte bleibt auch im verformten Zustand normal zur Mittelfläche, Querschubverzerrungen der Platten werden vernachlässigt.
9. Mit den Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie wird das Werkstoffgesetz der Einzelplatten zwischen Plattenmomenten und Plattenkrüm-

mungen definiert. Die Plattenquerkräfte werden als abhängige Größen aus den Momenten ermittelt.

10. Der Winkel zwischen aneinanderstoßenden Platten bleibt an der gemeinsamen Kante erhalten.
11. Das zwischen Spannungen und Dehnungen geltende Stoffgesetz wird entweder linear elastisch oder elastisch - idealplastisch angenommen. Entlastungen werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.
12. Als Belastung können sowohl Einzel- und Linienlasten des Balkens als auch Flächenbelastungen der Einzelplatten erfaßt werden. Die Lasten behalten auch bei Verformung der Stäbe ihre Richtung bei.

Mit den gemachten Annahmen werden die Spannungen eines allgemeinen Volumenelementes auf die für dünnwandige Einzelelemente relevanten Spannungen reduziert. Die Annahmen gelten sowohl für den Spannungszustand in der Konfiguration $1 + \tau$ als auch für den inkrementellen Spannungszuwachs s . Die Spannungskomponenten sind in Bild 4 angegeben. Die Verläufe der Spannungskomponenten über die Plattendicke sind, nach Balken- und Plattenanteilen getrennt, für elastisches Materialverhalten in Bild 5 und für plastisches Materialverhalten in Bild 6 aufgetragen.

Aus der Kirchhoffschen Plattentheorie folgt $s_{zz} = 0$



t Plattendicke

Bild 4 : Spannungskomponenten an einem Flächenelement

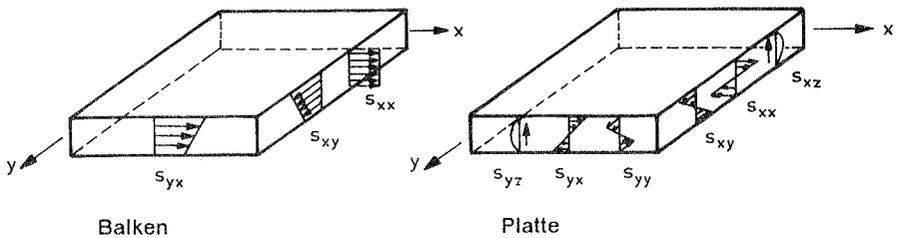


Bild 5 : Spannungsverläufe für Balken- und Plattenanteile - elastisch

Die einzelnen Verzerrungskomponenten sind linear über die Dicke einer Querschnittsplatte verteilt. Bei elastischem Werkstoff ergeben sich die gleichen Verläufe für die korrespondierenden Spannungen. Bei plastischem Werkstoffverhalten wird das in Kapitel 5 näher beschriebene, integrale Werkstoffgesetz, das in Spannungsresultanten der Mittelfläche formuliert ist verwendet. Die Spannungsverläufe sind in Bild 6 angegeben.

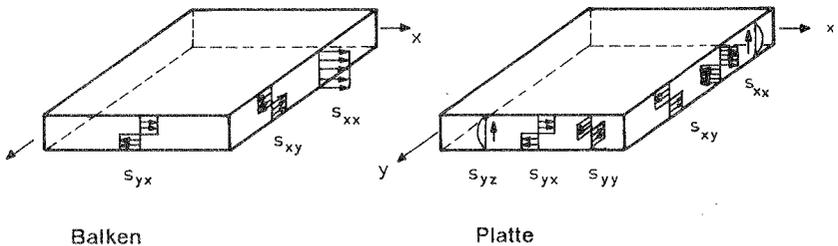


Bild 6 : Spannungsverläufe für Balken- und Plattenanteile - plastisch

4.4 Entwicklung der Grundgleichungen

Die folgenden Ableitungen werden für ein Element durchgeführt. Infolge der Annahmen (4) - (8) verschwinden die gekoppelten Balken-Platten-Terme des inkrementellen Spannungsanteils aus Gleichung (12), denn die entsprechenden Größen haben einen symmetrischen beziehungsweise antimetrischen Verlauf. Gleichung 13 verdeutlicht diesen Umstand bei Betrachtung einzelner Komponenten.

$$\int_V \mathbf{s}^B \delta \varepsilon^P dV = \int_V \begin{matrix} \text{B} \\ \text{P} \end{matrix} dz = 0 \quad (13a)$$

$$\text{Elastisch :} \quad \int_V \mathbf{s}^P \delta \varepsilon^B dV = \int_V \begin{matrix} \text{P} \\ \text{B} \end{matrix} dz = 0 \quad (13b)$$

$$\text{Plastisch :} \quad \int_V \mathbf{s}^P \delta \varepsilon^B dV = \int_V \begin{matrix} \text{P} \\ \text{B} \end{matrix} dz = 0 \quad (13c)$$

In der weiteren Gleichungsentwicklung existieren unterschiedliche Bezugskoordinatensysteme für die einzelnen Anteile. Alle Integrale die ausschließlich Terme aus Balkenwirkung enthalten (Index B) beziehen sich auf das mitgehende Querschnittskoordinatensystem. Die verbleibenden Integralausdrücke, die nur Plattenterme (Index P) oder gekoppelte Platten-Balkenterme (Index BP) enthalten, sind auf das lokale Koordinatensystem der Einzelplatte bezogen. Dadurch wird für die gekoppelten Terme eine Transformation notwendig. Auch die Spannungen der Konfiguration 1 ${}^1\tau_{ij}$ beziehen sich auf dieses Koordinatensystem. Die Bezugskoordinatensysteme sind an den jeweils verwendeten Indizes zu unterscheiden.

Gleichung (12) kann mit den relevanten Spannungen folgendermaßen geschrieben werden

$$\begin{aligned} & \int_V \mathbf{s}_{xx}^B \delta \varepsilon_{xx}^B dV + \int_V \mathbf{s}_{xy}^B \delta (\varepsilon_{xy}^B + \varepsilon_{yx}^B) dV + \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \eta_{xx}^{BB} dV \\ & + \int_V {}^1\tau_{xy} \delta (\eta_{yx}^{BB} + \eta_{xy}^{BB}) dV + \int_V {}^1\tau_{xz} \delta (\eta_{zx}^{BB} + \eta_{xz}^{BB}) dV \\ & + \sum_{ns} \left[\int_V \mathbf{s}_{xx}^P \delta \varepsilon_{xx}^P dV + \int_V \mathbf{s}_{yy}^P \delta \varepsilon_{yy}^P dV + \int_V \mathbf{s}_{xy}^P \delta (\varepsilon_{xy}^P + \varepsilon_{yx}^P) dV \right. \\ & + \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \eta_{xx}^{PP} dV + \int_V {}^1\tau_{yy} \delta \eta_{yy}^{PP} dV + \int_V {}^1\tau_{xy} \delta (\eta_{xy}^{PP} + \eta_{yx}^{PP}) dV \\ & + \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \eta_{xx}^{BP} dV + \int_V {}^1\tau_{xy} \delta (\eta_{xy}^{BP} + \eta_{yx}^{BP}) dV \\ & \left. + \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \eta_{xx}^{PB} dV + \int_V {}^1\tau_{xy} \delta (\eta_{xy}^{PB} + \eta_{yx}^{PB}) dV \right] \quad (14) \\ & = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \end{aligned}$$

Der Term

$${}^1\delta W_{(i)} = \int_V {}^1\tau_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (15)$$

stellt die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte im Zustand 1 dar. Zunächst sollen nur die Terme der linken Seite betrachtet werden, aus denen die elastische und die geometrische Steifigkeitsmatrix hergeleitet werden können, womit die Lösung des linearen Eigenwertproblems möglich ist. Auf die inneren Kräfte wird in einem späteren Kapitel eingegangen.

In der weiteren Herleitung wird Gleichung (14) durch folgende Vernachlässigungen vereinfacht.

- Die inkrementellen Verzerrungen ε_{ij} werden durch ihre linearen Anteile e_{ij} ersetzt. Diese Linearisierung kann im Hinblick auf das zu erstellende, in den Verformungszuwächsen lineare Gleichungssystem vorgenommen werden. Die Nichtlinearität wird dann auf iterativem Weg berücksichtigt.

- Die aus den Schubspannungen in der Plattenmittelfläche herrührenden nichtlinearen Plattenanteile werden als klein vernachlässigt.

Die Vernachlässigungen sind in Gleichung (14) durch Unterstreichung gekennzeichnet.

Im weiteren werden die Summenwerte der Verzerrungsinkremente folgendermaßen abgekürzt:

$$\underline{g}_{ij} = (\underline{e}_{ij} + \underline{e}_{ji}) \quad (16a)$$

$$\underline{\gamma}_{ij} = (\underline{\eta}_{ij} + \underline{\eta}_{ji}) \quad (16b)$$

Die Schubverzerrungen in den Balkenanteilen können auf das lokale Koordinatensystem der Einzelsegmente bezogen werden. Sie werden mittels einer Transformationsbeziehung aus den Verzerrungen im Querschnittskordinatensystem gewonnen (vgl. /75/).

Damit erhält Gleichung (14) folgende Form

$$\begin{aligned}
& \int_V s_{xx}^B \delta e_{xx}^B dV + \int_V s_{xy}^B \delta g_{xy}^B dV \\
& + \int_V {}^1\tau_{xx}^B \delta \eta_{xx}^{BB} dV + \int_V {}^1\tau_{xy}^B \delta \gamma_{xy}^B dV + \int_V {}^1\tau_{xz}^B \delta \gamma_{xz}^B dV \\
& + \sum_{ns} \left[\int_V s_{xx}^P \delta e_{xx}^P dV + \int_V s_{yy}^P \delta e_{yy}^P dV + \int_V s_{xy}^P \delta g_{xy}^P dV \right. \\
& \left. + \int_V {}^1\tau_{xx}^P \delta \eta_{xx}^{PP} dV + \int_V {}^1\tau_{xx}^P \delta \eta_{xx}^{BP} dV + \int_V {}^1\tau_{xx}^P \delta \eta_{xx}^{PB} dV \right] \\
& = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)}
\end{aligned} \tag{17}$$

Die beiden ersten Zeilen der Gleichung (17) führen zur elastischen und zur geometrischen Steifigkeitsmatrix des Balkens. Sie sind in der Arbeit von Osterrieder /75/ ausführlich beschrieben. Deshalb sollen hier nur die neuen Terme, die aus der Plattenwirkung des Querschnittes resultieren, genauer betrachtet werden.

In der weiteren Entwicklung werden die reinen Balkenelemente nur in symbolischer Schreibweise mitgeführt.

$$\int_V s^B \delta e^B dV + \int_V {}^1\tau^B \delta \eta^B dV \tag{18}$$

Mit der in den Gleichungen (8a - 8c) aufgestellten Beziehungen zwischen den Verzerrungen und den Verschiebungen läßt sich Gleichung (17) in folgende Form überführen

$$\begin{aligned}
 & \int_V \mathbf{s}^B \delta \mathbf{e}^B dV + \int_V {}^1\tau^B \delta \boldsymbol{\eta}^B dV + \sum_{ns} \left[\int_V s_{xx}^p \delta u_{x,x}^p dV \right. \\
 & + \int_V s_{yy}^p \delta u_{y,y}^p dV + \int_V s_{xy}^p \delta u_{x,y}^p dV + \int_V s_{yx}^p \delta u_{y,x}^p dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta (\underline{u_{x,x}^p} \underline{u_{x,x}^p} + \underline{u_{y,x}^p} \underline{u_{y,x}^p} + u_{z,x}^p u_{z,x}^p) dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta (\underline{u_{x,x}^B} \underline{u_{x,x}^p} + \underline{u_{y,x}^B} \underline{u_{y,x}^p} + u_{z,x}^B u_{z,x}^p) dV \\
 & \left. + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta (\underline{u_{x,x}^p} \underline{u_{x,x}^B} + \underline{u_{y,x}^p} \underline{u_{y,x}^B} + u_{z,x}^p u_{z,x}^B) dV \right] \\
 & = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)}
 \end{aligned} \tag{19}$$

Wie bereits in Kapitel 1 ausführlich dargestellt wurde, soll ein Element entwickelt werden, dessen Effizienz aus der Berücksichtigung der wesentlichen Effekte des untersuchten Problems herrührt. Deshalb werden weitere, physikalisch vertretbare Vereinfachungen getroffen. Die Längs- und Querdehnungen einer Querschnittsplatte sind im allgemeinen klein gegenüber den Krümmungen. Aus diesem Grund werden die quadratischen Terme der Längs- und Querdehnungen $u_{x,x}$ ($u_{y,x}$) vernachlässigt (unterstrichene Terme in Gleichung 19).

4.4.1 Querschnittskinetik für Balken und Platte

Die einzelnen Segmente (Platten) eines Querschnittes werden nicht als unabhängige Elemente behandelt, die eine Kopplung erst beim Zusammenbau des gesamten Systems erfahren. Vielmehr wird angestrebt, das globale Verformungsverhalten des Querschnittes als Ganzes durch die Balkentheorie und die Verformungen der Querschnittssegmente als zusätzliche Verformungen bezogen auf den Gesamtquerschnitt eines Elementes zu erfassen. Es ist deshalb notwendig die Verschiebung eines beliebigen Punktes auf dem Querschnitt als Funktion der Verschiebungen des Referenzpunktes - Schwerpunkt (S) bzw. Schubmittelpunkt (M) - des Gesamtquerschnittes auszudrücken.

Um eine vektorielle Zerlegung von Verdrehungen zu ermöglichen werden die Verformungszuwächse für ein Lastinkrement als klein vorausgesetzt. Das erfordert kleine Lastinkremente bei der Verformungsberechnung, stellt aber keine Beschränkung bezüglich endlicher Verformungen dar (vgl. /75/).

Die Lage des lokalen Plattenkoordinatensystemes wird durch die Koordinaten der Platteneckpunkte im Querschnittskoordinatensystem (Balken) bestimmt.

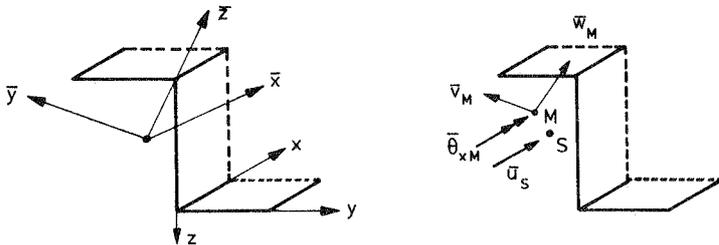


Bild 7 : Querschnittskoordinaten - lokale Koordinaten

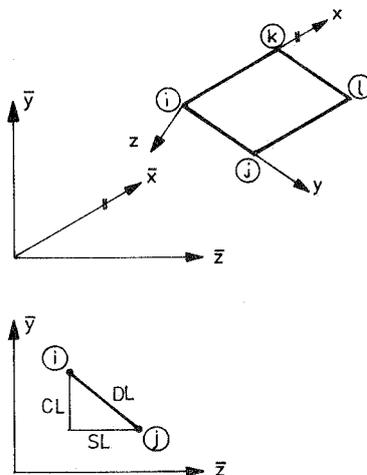


Bild 8 : Transformationsbeziehung einer Platte im Querschnittskoordinatensystem

Beide Koordinatensysteme haben die gleiche x-Achse. Die Lage des Plattenkoordinatensystemes wird durch die Fortschrittsrichtung für y von i nach j definiert. Nach Bild 8 ist damit eine eindeutige Beziehung zwischen den Koordinatensystemen gegeben.

$$CL = \bar{y}_j^B - \bar{y}_i^B \quad (20a)$$

$$SL = \bar{z}_j^B - \bar{z}_i^B \quad (20b)$$

$$DL = \sqrt{SL^2 + CL^2} \quad (20c)$$

Man kann damit die aus Verschiebung des Gesamtquerschnittes (Balken) resultierenden Verschiebungen eines beliebigen Querschnittspunktes im jeweiligen Segmentkoordinatensystem (Platte) angeben.

$$u_z^B = w^B = -\bar{v}^B \frac{SL}{DL} + \bar{w}^B \frac{CL}{DL} \quad (21a)$$

$$u_y^B = v^B = +\bar{v}^B \frac{CL}{DL} + \bar{w}^B \frac{SL}{DL} \quad (21b)$$

Die Komponente u_y^B stellt eine Starrkörperverschiebung in der Ebene der Platte dar und wird somit in den gekoppelten Termen nicht berücksichtigt. Zur weiteren vereinfachenden Schreibweise werden folgende Abkürzungen verwendet.

$$\bar{u}^B = u_x^B \quad (22a) \quad u = u_x \quad (22d)$$

$$\bar{v}^B = u_y^B \quad (22b) \quad v = u_y \quad (22e)$$

$$\bar{w}^B = u_z^B \quad (22c) \quad w = u_z \quad (22f)$$

Die Verschiebungsterme der Gleichungen (22f) - (22e) werden zusätzlich mit einem oberen Index B oder P nach ihrer Herkunft unterschieden.

4.4.2 Einbringen der Querschnittskinetik

Durch Verwendung der in Gleichung (21) angegebenen, geometrischen Bedingung ergibt sich folgende Form der Grundgleichung

$$\begin{aligned}
 & \int_V \mathbf{s}^B \delta \mathbf{e}^B dV + \int_V {}^1\boldsymbol{\tau}^B \delta \boldsymbol{\eta}^B dV + \sum_{ns} \{ \int_V \mathbf{s}_{xx}^p \delta u_{,x}^p dV \\
 & + \int_V \mathbf{s}_{yy}^p \delta v_{,y}^p dV + \int_V \mathbf{s}_{xy}^p \delta u_{,y}^p dV + \int_V \mathbf{s}_{yx}^p \delta v_{,x}^p dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta (w_{,x}^p)^2 dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta [w_{,x}^p (- \bar{v}_{,x}^B \frac{SL}{DL} + \bar{w}_{,x}^B \frac{CL}{DL})] dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta [- \frac{SL}{DL} \bar{v}_{,x}^B w_{,x}^p + \frac{CL}{DL} \bar{w}_{,x}^B w_{,x}^p] dV \} \\
 & = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)}
 \end{aligned} \tag{23}$$

Das Verhalten eines Querschnittspunktes wird durch die charakteristischen Querschnittsverschiebungen $(\bar{u}_s, \bar{v}_M, \bar{w}_M, \bar{\theta}_{xM})$ und seine Koordinaten im Querschnittskordinatensystem eindeutig beschrieben.

$$\bar{v}^B = \bar{v}_M^B - (\bar{z} - \bar{z}_M)^B \bar{\theta}_{xM}^B \tag{24a}$$

$$\bar{w}^B = \bar{w}_M^B + (\bar{y} - \bar{y}_M)^B \bar{\theta}_{xM}^B \tag{24b}$$

Mit den Annahmen der Kirchhoffschen Plattentheorie lassen sich sämtliche Plattenverformungen in Abhängigkeit der Verschiebung senkrecht zur Plattenebene ausdrücken.

$$v^p = - w_{,y}^p z \tag{25a}$$

$$u^p = - w_{,x}^p z \tag{25b}$$

$$w^p = w^p \tag{25c}$$

Eingesetzt in Gleichung (23) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & \int_V \mathbf{s}^B \delta \mathbf{e}^B dV + \int_V {}^1\boldsymbol{\tau}^B \delta \boldsymbol{\eta}^B dV \\
 & + \sum_{ns} \left\{ \int_V \mathbf{s}_{xx}^P z \delta(-w_{,xx}^P) dV + \int_V \mathbf{s}_{yy}^P z \delta(-w_{,yy}^P) dV \right. \\
 & + \int_V \mathbf{s}_{xy}^P z \delta(-w_{,xy}^P) dV + \int_V \mathbf{s}_{yx}^P z \delta(-w_{,yx}^P) dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta(w_{,x}^P)^2 dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \left[w_{,x}^P (-\bar{v}_{M,x}^B + (\bar{z} - \bar{z}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) \frac{SL}{DL} \right. \\
 & \quad \left. + w_{,x}^P (\bar{w}_{M,x}^B + (\bar{y} - \bar{y}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) \frac{CL}{DL} \right] dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \left[-(\bar{v}_{M,x}^B - (\bar{z} - \bar{z}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) w_{,x}^P \frac{SL}{DL} \right. \\
 & \quad \left. + (\bar{w}_{M,x}^B + (\bar{y} - \bar{y}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) w_{,x}^P \frac{CL}{DL} \right] dV \left. \right\} \\
 & = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)}
 \end{aligned} \tag{26}$$

4.4.3 Überführung der Spannungen in Schnittgrößen

Im Sinne einer üblichen Balken- bzw. Plattentheorie ist es sinnvoll, die Annahmen bezüglich der Spannungsverläufe in die Arbeitsgleichung einzubringen und mit resultierenden Spannungen (Schnittgrößen) weiterzuarbeiten. Die Integration der Längsspannungen über die gesamte Querschnittsfläche beziehungsweise die Berücksichtigung ihrer Veränderung mit den Querschnittskoordinaten \bar{y} und \bar{z} sowie der Einheitsverwölbung w_0 liefert die resultierenden Kräfte der Balkentheorie P , $M_{\bar{y}}$, $M_{\bar{z}}$, M_w . Die Integration der Schubspannungen τ_{xy} , τ_{xz} in der Querschnittsebene und die Beachtung des über die Dicke eines Segmentes linear verteilten Verlaufes führt zu den Querkräften $Q_{\bar{z}}$, $Q_{\bar{y}}$ und dem St. Venantschen Torsionsmoment. Die Größen werden auf die charakteristischen Querschnittspunkte, Schwerpunkt bzw. Schubmittelpunkt, bezogen.

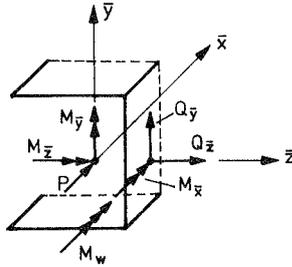


Bild 9 : Schwerpunkt - Schubmittelpunkt

Durch Integration der linearen Anteile der Spannungen τ_{xx} , τ_{yy} und τ_{xy} über die Segmentdicke kann man Schnittgrößen (Momente) der einzelnen Platten ermitteln.

Die aus dem linearem Verlauf der Schubspannungen folgenden Drillmomente einer einzelnen Platte sind dem Torsionsmoment des Balkens vergleichbar. Sie stellen aber für den zusammengesetzten Querschnitt lediglich einen additiven, aus der zusätzlichen Verdrillung der einzelnen Platte resultierenden, Anteil dar, während im Torsionsmoment die Verdrillung des in sich unverformten Querschnittes enthalten ist.

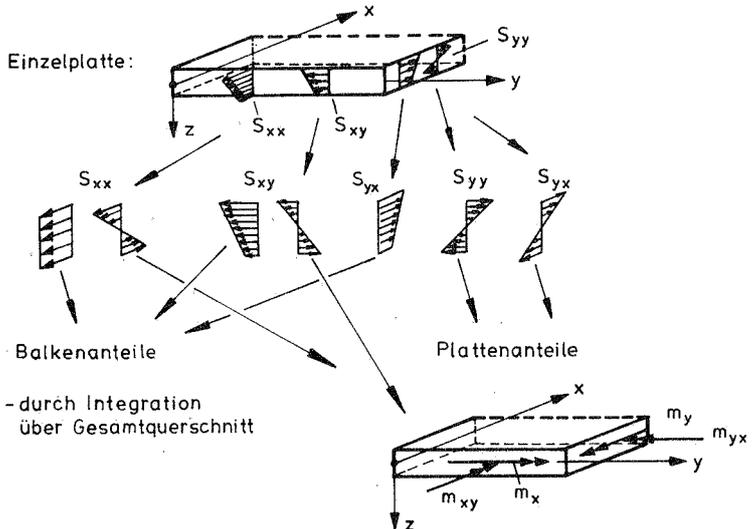


Bild 10 : Spannungsverläufe über die Plattendicke (elastisch)

Analog werden die inkrementellen Spannungszuwächse, die beim Übergang vom Zustand 1 zum Zustand 2 entstehen, zu resultierenden Schnittgrößen zusammengefaßt

$$\begin{aligned}
 & \int_V \mathbf{s}^B \delta \mathbf{e}^B dV + \int_V {}^1\tau^B \delta \boldsymbol{\eta}^B dV \\
 & + \sum_{ns} \left\{ \int_A (-m_x \delta w_{,xx}^p - m_y \delta w_{,yy}^p - m_{xy} \delta w_{,xy}^p - m_{yx} \delta w_{,yx}^p) dx dy \right. \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta (w_{,x}^p)^2 dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \left[w_{,x}^p (-\bar{v}_{M,x}^B + (\bar{z} - \bar{z}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) \frac{SL}{DL} \right. \\
 & \quad \left. + w_{,x}^p (\bar{w}_{M,x}^B + (\bar{y} - \bar{y}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) \frac{CL}{DL} \right] dV \\
 & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \left[-(\bar{v}_{M,x}^B - (\bar{z} - \bar{z}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) w_{,x}^p \frac{SL}{DL} \right. \\
 & \quad \left. + (\bar{w}_{M,x}^B + (\bar{y} - \bar{y}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) w_{,x}^p \frac{CL}{DL} \right] dV \left. \right\} \\
 & = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)}
 \end{aligned} \tag{27}$$

5.0 Werkstoffabhängige Grundgleichungen

Der Arbeit von Osterrieder /75/ folgend wird zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens vorausgesetzt, daß nur kleine Dehnungen auftreten. Zur Berechnung der Spannungen werden von den Gesamtverformungen die Starrkörperanteile abgespalten und nur die verbleibenden Dehnungen verwendet. Darüber hinaus werden nur kleine Verschiebungsinkremente zugelassen.

5.1 Elastisches Werkstoffverhalten

Im elastischen Fall tritt unter den genannten Annahmen keine Kopplung der Werkstoffbeziehung für die Balken- und Plattenanteile auf. Die Balkenspannungen werden mit dem Elastizitätsmodul bzw. Schubmodul aus den nichtlinearen Verzerrungsinkrementen bestimmt.

Entsprechend der Zusammenfassung der Spannungen zu Schnittgrößen wird beim Balken das in der Arbeitsgleichung formulierte Integral über das Volumen eines Querschnittsteilchens in zwei Anteile aufgespalten. Somit können aus der Integration über den Querschnitt entstehende Größen (Fläche oder Trägheitsmomente), die bei elastischem Material nur von der Querschnittsform abhängig sind, in der Arbeitsgleichung konstant gehalten werden, wodurch nur noch eine Integration über die Länge des Balkens durchzuführen ist.

$$\int_A a b d(A) = F_{ab}^{*}) \quad (28)$$

Diese Querschnittswerte werden üblicherweise, obwohl es sich um keine Materialgrößen handelt, in die Werkstoffmatrix des Balkens eingebracht und die Spannungs-Dehnungs-Beziehung in Spannungsresultierenden (Schnittgrößen) angegeben.

*) Zur Beschreibung der Querschnittswerte wurde die von Bornscheuer /10/ eingeführte Bezeichnung der vielfach verwendeten Bezeichnungsweise J_y, J_z, \dots vorgezogen.

$$\begin{bmatrix} P \\ M_{\bar{y}} \\ M_{\bar{z}} \\ M_{TS} \\ M_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EF & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EF_{\bar{y}\bar{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EF_{\bar{z}\bar{z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GJ_T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & EF_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}'_s \\ \bar{v}''_M \\ \bar{w}''_M \\ \bar{\theta}'_{xM} \\ \bar{\theta}''_{xM} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Auf der Grundlage des Hookeschen Werkstoffgesetzes für einen zweidimensionalen Spannungszustand kann für ein Plattensegment folgende Beziehung angegeben werden

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -w_{,xx}^P \\ -w_{,yy}^P \\ -(w_{,xy}^P + w_{,yx}^P) \end{bmatrix} \quad (30)$$

Mit $k = \frac{E t^3}{12 (1 - \nu^2)}$

Die Plattensteifigkeit k enthält ebenfalls einen werkstoffunabhängigen Term (Plattendicke t), da durch die Verwendung von Plattenmomenten auch hier eine Vorabintegration durchgeführt wird.

Im Rechenprogramm NISA werden alle querschnittsabhängigen Werte vor Beginn der Berechnung aus der Querschnittsgeometrie ermittelt und bei elastischem Material für alle gleichförmigen Elemente abgespeichert.

Die werkstoffunabhängige Grundgleichung (27) erhält nach Einbringung der Werkstoffgleichungen (29) und (30) folgendes Aussehen.

$$\begin{aligned}
& \int_V \mathbf{s}^B \delta \mathbf{e}^B dV + \int_V {}^1\boldsymbol{\tau}^B \delta \boldsymbol{\eta}^B dV \\
& + \sum_{ns} \{ \mathbf{k} \int_A [(w_{,xx}^p + v w_{,yy}^p) \delta w_{,xx}^p + (v w_{,xx}^p + w_{,yy}^p) \delta w_{,yy}^p \\
& \quad + \frac{1-v}{2} (w_{,yx}^p + w_{,xy}^p) \delta w_{,xy}^p + \frac{1-v}{2} (w_{,yx}^p + w_{,xy}^p) \delta w_{,yx}^p] dx dy \\
& + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta (w_{,x}^p)^2 dV \\
& + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta [w_{,x}^p (- \bar{v}_{M,x}^B + (\bar{z} - \bar{z}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) \frac{SL}{DL} \\
& \quad + w_{,x}^p (\bar{w}_{M,x}^B + (\bar{y} - \bar{y}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) \frac{CL}{DL}] dV \\
& + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta [- (\bar{v}_{M,x}^B - (\bar{z} - \bar{z}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) w_{,x}^p \frac{SL}{DL} \\
& \quad + (\bar{w}_{M,x}^B + (\bar{y} - \bar{y}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B) w_{,x}^p \frac{CL}{DL}] dV \} \\
& = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)}
\end{aligned} \tag{31}$$

5.2 Elastisch - plastisches Werkstoffverhalten

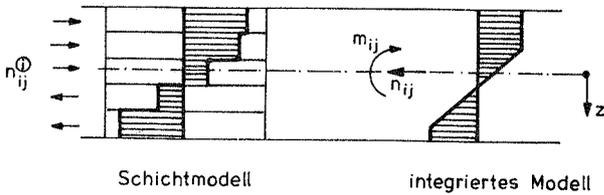
Bei beginnender Plastizierung verlieren die in Kapitel 5.1 beschriebenen Voraussetzungen ihre Gültigkeit. Das Werkstoffgesetz gilt nicht mehr für den gesamten Querschnitt, sondern ist, je nach Plastizierungsfortgang, an jedem Querschnittspunkt unterschiedlich. Auch die Querschnittswerte, Schubmittelpunkt und Schwerpunkt, sind einer Veränderung unterworfen. Darüberhinaus beeinflussen sich Platten- und Balkenschnittgrößen gegenseitig, so daß die Aufrechterhaltung getrennter Werkstoffmatrizen nicht mehr möglich ist. Es muß ein Werkstoffgesetz gefunden werden, daß diesem Umstand Rechnung trägt und eine Verbindung zwischen den Balken- und den Plattengrößen ermöglicht.

Durch die Vernachlässigung von Normal- und Querschubspannungen in Dickenrichtung der Einzelplatten reduziert sich das Problem auf einen dreidimensionalen Spannungsraum zur Beschreibung des ebenen Spannungszustands. Es empfiehlt sich, die auch von Osterrieder verwendete von Mises-Fließbedingung entsprechend zu erweitern. Osterrieder verwendet zur Beschreibung plastischer Zustände näherungsweise ein eindimensionales Fließgesetz in Stablängsrichtung, wobei er die Schubspannungen in der Querschnittsebene, aus denen das St. Venantsche Torsionsmoment errechnet wird, mittels der von Mises-Bedingung begrenzt und ein maximales, aufnehmbares Torsionsmoment ermittelt. Fließen tritt in seinem Element dann auf, wenn die Gesamtlängsdehnungen ϵ die Fließdehnung ϵ_F überschreiten. Dieses für den eindimensionalen Zustand mögliche Vorgehen hat den Vorteil, daß Fließen infolge der direkt aus den Verschiebungen bestimmbaren Dehnungen ermittelt wird. Dies ist sinnvoll, da die Verschiebungsmethode der finiten Elemente im allgemeinen die Verformungen eines Systems besser approximiert als die Spannungen.

Beim nun vorliegenden mehrdimensionalen Spannungszustand kann man nicht mehr so verfahren, da durch die Fließbedingung eine mehrfach gekrümmte Fläche im Spannungsraum festgelegt wird. Nach Plastizierungsbeginn können sich die einzelnen Spannungskomponenten in ihrem Verhältnis zueinander verändern, sie beschreiben jedoch immer einen Punkt auf der Fließfläche. Damit ist die Definition einer einzigen Fließdehnung nicht mehr möglich. Die andere Möglichkeit, die Fließbedingung als eine Beziehung zwischen den wirkenden Spannungen und einer Vergleichsspannung (z.B. von Mises-Bedingung) zu formulieren, setzt allerdings voraus, daß die Spannungen mit ausreichender Genauigkeit ermittelt werden und nimmt damit indirekt Einfluß auf die Wahl der Ansatzfunktionen und der Elemententeilung. Bei elastischem Stoffgesetz ist es mit vertretbarem Aufwand möglich, die Integrale der Gleichung (29) nach der Diskretisierung analytisch zu integrieren und somit die Steifigkeitsbeziehung eines Elementes explizit zu erstellen. Damit kann einerseits Rechenzeit eingespart und andererseits eine, im Rahmen der verwendeten Näherungen und Ansätze, exakte Steifigkeitsbeziehung aufgestellt werden, die nicht mit numerischen Ungenauigkeiten behaftet ist.

Bei Berücksichtigung stofflicher Nichtlinearität ist die analytische Integration der Gleichung (31) nicht mehr durchführbar und man muß auf numerische Integrationsverfahren zurückgreifen. Die Wahl des geeigneten Verfahrens ist dabei ebenso wichtig wie die Beschränkung der resultierenden Datenflut. Denn jeder Punkt des Elementes kann einen unterschiedlichen Spannungszustand und damit nach Fließbeginn eine andere Werkstoffbeziehung als sein

Nachbarnpunkt aufweisen. Die Biegebeanspruchung der Einzelplatten hat darüberhinaus zur Folge, daß nicht nur über die Längsrichtung und den Querschnitt eines Elementes, sondern auch über die Dicke der Platten integriert werden muß. Bei reinen Plattenelementen wird die Dickenintegration oft über sogenannte Schichten durchgeführt. Dazu wird die Gesamplatte in Dickenrichtung in Schichten eingeteilt, jeder Integrationspunkt auf der Fläche muß dann in jeder Schicht vorhanden sein. Die Anzahl der Schichten erhöht die Anzahl der Integrationspunkte multiplikativ. Um den sich über die Querschnittsebene ändernden Verlauf der Spannungen erfassen zu können, ist es notwendig, mindestens 5 - 7 Schichten zu verwenden, da an jedem Integrationspunkt für jede Schicht konstante Werkstoffgrößen angenommen werden. Durch Einführung von Schichten wird der tatsächliche Verlauf in Form einer Treppenfunktion angenähert, diese Annäherung wird verbessert, wenn durch Verwendung von mehr Schichten die Treppenstufen verkleinert werden. Bei plastischem Werkstoffverhalten ist es notwendig, für einen Lastschritt an jedem Integrationspunkt eine Reihe von Elementinformationen vorzuhalten. Dies sind, zusätzlich zum aktuellen Spannungszustand und dem des vorangegangenen Schrittes, die bereits vorhandenen plastischen Dehnungen, aus denen die Werkstoffbeziehung der aktuellen Konfiguration und die Relation des Spannungszustandes bezüglich der Fließfläche ermittelt werden. Da in dieser Arbeit die Einzelplatten nur als Unterelement in das übergeordnete Balkenelement eingebaut werden, erscheint eine Erfassung plastischer Zustände mittels eines Schichtenmodells zu aufwendig und steht damit im Widerspruch zur ursprünglichen Zielsetzung. Aus diesem Grund soll hier ein integriertes Stoffgesetz Verwendung finden, d.h. die Fließbedingung wird in der Mittelfläche in Abhängigkeit von Längskräften und Biegemomenten formuliert. Die Dünnwandigkeit der Einzelplatte kommt dieser Annahme entgegen, da dadurch die Laststufe vom Fließbeginn in einer Randfaser bis zur vollständigen Durchplastizierung relativ klein wird.



Summe über alle Schichten $\sum_{i=1}^n n_{ij}^i = n_{ij}$ $\sum_{i=1}^n n_{ij}^i z = m_{ij}$

Bild 11: Spannungsverteilung an einer Einzelplatte des Querschnittes

Das Verfahren beruht auf dem energetischen Ausgleich der Zwischenzustände. Eine entsprechende Fließbedingung wurde von Ilyuschin bereits 1947 entwickelt. Crisfield /20/ hat diese Bedingung 1974 zur Untersuchung von Platten mit der finiten Element-Methode übernommen.

5.2.1 Voraussetzungen und Annahmen

Die Formulierung einer entsprechenden Fließbedingung basiert auf der von Mises-Bedingung

$$(f)_z = \frac{1}{\sigma_F^2} (s_{xx}^2 + s_{yy}^2 - s_x s_y + 3 s_{xy}^2) \leq 1 \quad (32)$$

Unter Voraussetzung folgender Annahmen:

1. Es wird die Theorie der dünnen Platten verwendet, Schubverformungen senkrecht zur Mittelfläche werden vernachlässigt.
2. Neigungen $\frac{\partial w}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial w}{\partial y} \ll 1$.
3. Es wird elastisch - ideal plastisches Material angenommen.

Die von Ilyuschin entwickelte genäherte Bestimmungsgleichung für die Fließfläche hat folgende Form

$$f = \frac{\bar{N}}{t^2 \sigma_F^2} + \frac{4 S \overline{MN}}{\sqrt{3} t^3 \sigma_F^2} + \frac{16 \bar{M}}{t^4 \sigma_F^2} \leq 1 \quad (33)$$

Mit

$$\bar{N} = N_x^2 + N_y^2 - N_x N_y + 3 N_{xy}^2 \quad (34a)$$

$$\bar{M} = M_x^2 + M_y^2 - M_x M_y + 3 M_{xy}^2 \quad (34b)$$

$$\overline{MN} = M_x N_x + M_y N_y - \frac{1}{2} M_x N_y - \frac{1}{2} M_y N_x + 3 M_{xy} N_{xy} \quad (34c)$$

$$\text{und } S = \frac{\overline{MN}}{|\overline{MN}|}$$

N und M bezeichnen die Spannungsergebnisse der Einzelplatte (vgl. Bild 12).

Diese Bedingung muß den Erfordernissen des speziellen Problems noch angepaßt werden. Dazu müssen, um die Fließbedingung an einem Punkt im Element anwenden zu können, die Spannungen aus den beiden Elementanteilen (Balken und Platte) berechnet werden. Die aus Plattenwirkung der Querschnittsegmente berechenbaren Schnittgrößen M_x , M_y , M_{xy} (vgl. Kapitel 4) liegen bereits in der gewünschten Form vor, während die Balkenschnittgrößen in resultierende Spannungen (N_x , N_y) in der Mittelfläche der Einzelplatte umzurechnen sind. Weder aus Balken- noch aus Plattenschnittgrößen erhält man eine resultierende Normalspannungskomponente N_y , die auch im weiteren nicht berücksichtigt wird, da infolge der länglichen Form der Querschnittsplatten eine bemerkenswerte Spannungskomponente in der Plattenbreite auszuschließen ist. Die Berücksichtigung aller Plattenbiegeanteile (M_x , M_y , M_{xy}) hingegen ist von großer Bedeutung, denn im maßgebenden, biegebeanspruchten Teil einer ausgebeulten Platte kann durchaus ein quadratisches Seitenverhältnis vorliegen (siehe Bild 13).

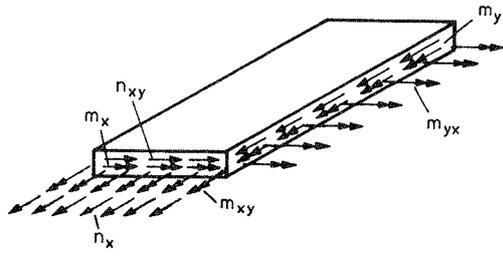


Bild 12: Resultierende Spannungen an einer Querschnittsplatte

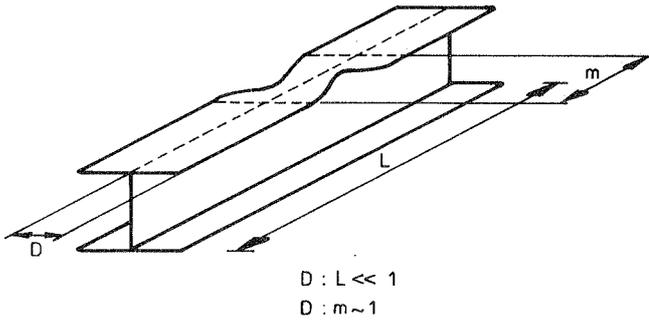


Bild 13: Mögliche Ausbreitung einer lokalen Beule

5.2.2 Herleitung des Stoffgesetzes aus der Fließbedingung

Nach Fließbeginn können sich die Spannungen nur noch auf der Fließfläche bewegen. Die Änderung einer Spannung bedingt die Änderung der anderen und zwar so, daß die Variation der Fließbedingung $\delta f = 0$ ist.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)^T \sigma = 0 \tag{35}$$

Mit Hilfe der Prandtl-Reuss-Bedingung läßt sich der Vektor der plastischen Dehnungsinkremente folgendermaßen darstellen

$$\epsilon_p(x,y,z) = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma(x,y,z)} \quad (36)$$

Die inkrementellen Spannungen ergeben sich aus folgender Beziehung

$$\sigma(x,y,z) = \mathbf{C} (\epsilon(x,y,z) - \epsilon_p(x,y,z)) \quad (37)$$

Durch Elimination des Faktors λ kann hieraus die elasto-plastische Werkstoffmatrix gewonnen werden.

Im Fall der integralen Fließbedingung entfällt die Veränderung der Spannungen über z . Der Spannungstensor wird dann durch zwei Anteile, der in der Mittelfläche wirkenden Spannungsergebnanten, gebildet.

Die Variation der Fließbedingung liefert

$$\delta f = \mathbf{f}_n^T \mathbf{n} + \mathbf{f}_m^T \mathbf{m} = 0 \quad (38)$$

hierin ist

$$\mathbf{f}_n = \frac{1}{t^2} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{N}} + \frac{2S}{\sqrt{3} t^3} \frac{\partial \bar{M}}{\partial \mathbf{M}} \quad (39a)$$

$$\mathbf{f}_m = \frac{2S}{\sqrt{3} t^3} \frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{N}} + \frac{16}{t^4} \frac{\partial \bar{M}}{\partial \mathbf{M}} \quad (39b)$$

\mathbf{n} und \mathbf{m} sind die Vektoren der inkrementellen Spannungsergebnanten und \mathbf{N} und \mathbf{M} die entsprechenden Vektoren der Gesamtspannungsergebnanten.

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} \quad (40a) \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad (40b)$$

Im vorliegenden Fall gilt

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 2 N_x \\ - N_x \\ 6 N_{xy} \end{bmatrix} \quad (41a)$$

$$\frac{\partial \bar{M}}{\partial \mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 2 M_x - M_y \\ 2 M_y - M_x \\ 6 M_{xy} \end{bmatrix} \quad (41b)$$

Die Annahme, daß die Fließbedingung als plastisches Potential behandelt werden kann, ergibt eine Proportionalitätsbeziehung zwischen den plastischen Dehnungszinkrementen und den partiellen Ableitungen des Potentials.

$$\varepsilon_p = \lambda \mathbf{f}_n \quad (42a)$$

$$\kappa_p = \lambda \mathbf{f}_m \quad (42b)$$

Die für die integrale Fließbedingung gültige Gleichung (42) entspricht der allgemein gültigen Gleichung (36).

Für das verallgemeinerte, inkrementelle elastische Stoffgesetz wird Hooke-scher Werkstoff angenommen. Daraus folgt

$$\mathbf{n} = t \mathbf{C} (\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (43a)$$

$$\mathbf{m} = \frac{t^3}{12} \mathbf{C} (\kappa - \kappa_p) \quad (43b)$$

mit

$$\mathbf{C} = \frac{E}{12(1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (42) und (43) in (38) ergibt sich

$$\mathbf{f}_n^T t \mathbf{C} (\varepsilon - \lambda \mathbf{f}_n) + \mathbf{f}_m^T \frac{t^3}{12} \mathbf{C} (\kappa - \lambda \mathbf{f}_m) = 0 \quad (45)$$

Gleichung (44) läßt sich folgendermaßen umformen

$$\mathbf{f}_n^T \mathbf{t} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{f}_m^T \frac{t^3}{12} \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa} - \lambda \left[\mathbf{f}_n^T \mathbf{t} \mathbf{C} \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_m^T \frac{t^3}{12} \mathbf{C} \mathbf{f}_m \right] = 0 \quad (46)$$

Hieraus läßt sich λ bestimmen, zu

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{f}_n^T \mathbf{t} \mathbf{C} \mathbf{f}_n + \mathbf{f}_m^T \frac{t^3}{12} \mathbf{C} \mathbf{f}_m} \left[\mathbf{f}_n^T \mathbf{t} \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{f}_m^T \frac{t^3}{12} \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa} \right] \quad (47)$$

Unter Einführung folgender Abkürzungen

$$\mathbf{T}_n = \mathbf{f}_n^T \mathbf{t} \mathbf{C} \mathbf{f}_n \quad (48a)$$

$$\mathbf{T}_m = \mathbf{f}_m^T \frac{t^3}{12} \mathbf{C} \mathbf{f}_m \quad (48b)$$

kann man die plastischen Dehnungsinkremente durch die Gesamtdehnungsinkremente ausdrücken.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{1}{\mathbf{T}_n + \mathbf{T}_m} \left(\mathbf{t} \mathbf{f}_n \mathbf{f}_n^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{t^3}{12} \mathbf{f}_n \mathbf{f}_m^T \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa} \right) \quad (49a)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_p = \frac{1}{\mathbf{T}_n + \mathbf{T}_m} \left(\mathbf{t} \mathbf{f}_m \mathbf{f}_n^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{t^3}{12} \mathbf{f}_m \mathbf{f}_m^T \mathbf{C} \boldsymbol{\kappa} \right) \quad (49b)$$

und damit schließlich

$$\mathbf{n} = \mathbf{C}_n \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_{nm} \boldsymbol{\kappa} \quad (50a)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{C}_{mn} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{C}_m \boldsymbol{\kappa} \quad (50b)$$

mit den Werkstoffmatrizen

$$\mathbf{C}_n = t \mathbf{C} - \frac{t^2}{T_n + T_m} \mathbf{C} \mathbf{f}_n \mathbf{f}_n^T \mathbf{C} \quad (51a)$$

$$\mathbf{C}_{nm} = - \frac{t^4}{12 (T_n + T_m)} \mathbf{C} \mathbf{f}_m \mathbf{f}_n^T \mathbf{C} \quad (51b)$$

$$\mathbf{C}_m = \frac{t^3}{12} \mathbf{C} - \frac{t^6}{12 (T_n + T_m)} \mathbf{C} \mathbf{f}_m \mathbf{f}_m^T \mathbf{C} \quad (51c)$$

Zur Aufstellung der Werkstoffmatrix sind mehrere Matrizenmultiplikationen bzw. Divisionen notwendig, die eine analytische Auswertung der Werkstoffmatrix ausschließen. Da deren Aufstellung jedoch, abhängig vom Spannungszustand, von Integrationspunkt zu Integrationspunkt unterschiedlich ist und für plastisches Material die Steifigkeitsmatrix ohnehin numerisch gewonnen werden muß, wird die Werkstoffmatrix ebenfalls auf numerischem Weg ermittelt. Die Grundgleichung läßt sich dann allerdings nicht mehr, wie bei elastischem Material (Gleichung 31), explizit, sondern nur in symbolischer Matrixschreibweise angeben.

Die Gleichung lautet

$$\begin{aligned} & \int_V \delta(\mathbf{e}^B)^T \mathbf{C}_n \mathbf{e}^B dV + \int_V {}^1\tau \delta\eta^B dV \\ & + \sum_{ns} \left\{ \int_V \delta(\mathbf{e}^B)^T \mathbf{C}_{nm} \mathbf{k} dV + \int_V \delta\mathbf{k}^T \mathbf{C}_m \mathbf{k} dV + \int_V \delta\mathbf{k}^T \mathbf{C}_{nm} \mathbf{e}^B dV \right. \\ & + \frac{1}{2} \int_V {}^1\tau_{xx} \delta(w_{,x}^p)^2 dV \\ & + \int_V {}^1\tau_{xx} \delta \left[w_{,x}^p \left(-\bar{v}_{M,x}^B + (\bar{z} - \bar{z}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B \right) \frac{SL}{DL} \right. \\ & \quad \left. \left. + w_{,x}^p \left(\bar{w}_{M,x}^B + (\bar{y} - \bar{y}_M) \bar{\theta}_{xM,x}^B \right) \frac{CL}{DL} \right] dV \right\} \\ & = {}^2\delta W_{(a)} - {}^1\delta W_{(i)} \end{aligned} \quad (52)$$

Vereinfachend wurde hier das gemischte Produkt $(w_{,x}^p w_{,x}^B)$ bzw. $(w_{,x}^B w_{,x}^p)$ aus Symmetriegründen zusammengefaßt. Zur Anordnung in der Steifigkeitsmatrix sind beide Ausdrücke getrennt zu entwickeln.

In Gleichung (52) werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$\mathbf{e}^B = \begin{bmatrix} e_{xx}^B \\ g_{xy}^B \end{bmatrix} \quad (53a)$$

$$\boldsymbol{\eta}^B = \begin{bmatrix} \eta_{xx}^B \\ \gamma_{xy}^B \end{bmatrix} \quad (53b)$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} w_{,xx}^p \\ w_{,yy}^p \\ 2 w_{,xy}^p \end{bmatrix} \quad (53c)$$

6.0 Diskretisierung mit der Methode der finiten Elemente

Das durch die Gleichungen (31) und (52) beschriebene Problem weist, mit den inkrementellen Verschiebungen, unendlich viele Unbekannte auf. Für jeden Punkt auf der Längsachse bzw. dem Querschnitt können unterschiedliche Verschiebungen errechnet werden. Ein Grundprinzip der Methode der finiten Elemente ist es, die unendlich vielen unbekanntenen Verschiebungen durch die Annahme ihres Verlaufes über x, y und z in eine endliche Zahl von diskreten Verschiebungsgrößen an definierten Punkten umzusetzen. Man macht sich dabei die Methode von Ritz zunutze, verwendet die Ansätze der Verschiebungen jedoch nur bereichsweise innerhalb eines Elementes. Darüber hinaus werden bei der finiten Element Methode die Ansätze so gewählt, daß die diskreten Verschiebungsgrößen geometrisch deutbare Größen darstellen. Bei der Wahl der Ansatzfunktionen sind folgende Anforderungen zu stellen, um den Arbeitsausdruck integrieren zu können und bei einer Netzverfeinerung Konvergenz zur wahren Lösung zu garantieren.

6.1 Anforderungen an die Ansätze

a.) Lineare Unabhängigkeit:

Die einzelnen Anteile des Ansatzes müssen linear unabhängig voneinander sein, andernfalls entstehen im Gleichungssystem abhängige Gleichungen, d.h. das System wird singular.

b.) Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen verlangt entsprechend den kinematischen Gleichungen ein stetiges Verzerrungsfeld im betrachteten Bereich sowie die Erfüllung der kinematischen Rand- und Übergangsbedingungen. Ist im Arbeitsausdruck die n -te Ableitung der Verschiebungsfunktion enthalten, so muß die Funktion und ihre Ableitung bis zur Ordnung $(n-1)$ stetig sein, um den Ausdruck integrieren zu können (Integrabilitätsbedingung).

Für das hier betrachtete Element bedeutet dies, es müssen mindestens quadratische Polynome verwendet werden, da sowohl Balken- als auch Platten-terme 2. Ableitungen enthalten. Die Ordnung der Ansätze muß so gewählt werden, daß mindestens konstante Verzerrungen (Krümmungen bei Biegung) bzw. Spannungen im Element beschrieben werden können. Es müssen im

Verschiebungsansatz gerade die Terme enthalten sein, die zu einem konstanten Verzerrungsverlauf führen.

c.) Der Verschiebungsansatz muß alle möglichen Starrkörperverschiebungen enthalten. Die einzelnen Starrkörperzustände dürfen jedoch zu keinen Verzerrungen bzw Spannungen führen.

d.) Die Lösung sollte gegen Verdrehungen des Bezugskordinatensystemes invariant sein, d.h. die Terme des gewählten Ansatzpolynomes müssen bei einer Koordinatentransformation erhalten bleiben. Diese Forderung nach "geometrischer Isotropie" ist dann erfüllt, wenn der Ansatz vollständig im elementbezogenen (lokalen) Koordinatensystem definiert ist.

6.2 Wahl einer geeigneten Verschiebungsfunktion

Zur Beschreibung der Balkenverformungen werden von Osterrieder /75/ für die Querverschiebungen, sowie die Verdrehungen und die Querschnittsverwölbung kubische "Hermite"-Polynome gewählt. Für die Darstellung der Längsverschiebung wird ein linearer Ansatz verwendet. Zur Berücksichtigung der lokalen Profilverformung sind für die Einzelplatten Ansatzfunktionen für ein zweidimensionales Verschiebungsfeld erforderlich. Die Hinzunahme der Profilverformung mittels lokaler Freiheitsgrade vergrößert das Problem in nicht unerheblichem Maße. Es werden deshalb zwei verschiedene Plattentypen entwickelt um eine möglichst effiziente Erfassung des lokalen Querschnittsverhaltens zu erreichen. Auf der anderen Seite soll ermöglicht werden, daß, bei ungünstiger Abbildung des Querschnittsverhaltens durch das gewählte Element, auf Elementebene eine Verfeinerung zur Lösungsverbesserung durchgeführt werden kann. Um das Verhalten von Gurtplatten oder Abkantungen abbilden zu können, wird ein Plattenelement (Typ I) für eine dreiseitig gelagerte Platte verwendet. Da einseitig ein freier Rand vorhanden ist, wird in Querrichtung ein linearer und in Längsrichtung ein kubischer Polynomansatz für die Querverschiebungen gewählt (vgl. Bild 17 und 18). Als diskrete Freiheitsgrade werden die Längsverdrehungen an den Knoten I und J des Elementes eingeführt und, aus Kompatibilitätsgründen, die Veränderung der Verdrehung in Längsrichtung (Verwindung). Dieser Plattentyp hat somit vier Freiheitsgrade.

Für Stegplatten, bzw. zur Verdichtung des Unterelementnetzes, wird ein zweites Plattenelement entwickelt, daß in beide Richtungen einen kubischen Verschiebungsansatz aufweist. Ein vollständiger bikubischer Ansatz fordert

als Freiheitsgrade die Verdrehungen in zwei Richtungen und die Verschiebung quer zur Plattenebene an jedem der vier Eckpunkte des Elementes. Aus später noch genauer erläuterten Gründen wird als zusätzlicher Freiheitsgrad die Verwindung an jedem Knoten eingeführt. Es entsteht daraus ein Plattenelement mit 16 Freiheitsgraden.

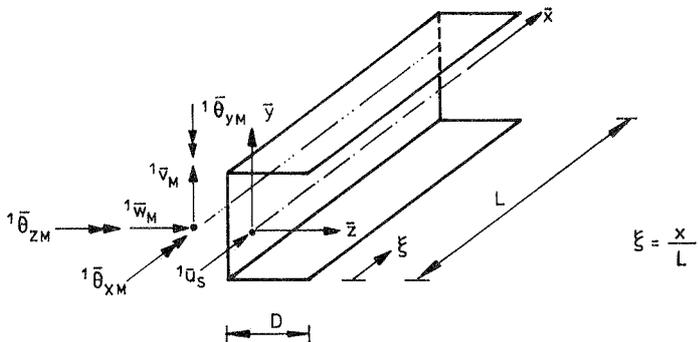


Bild 14: Inkrementelle Knotenverschiebungsgrößen des Balkens

Die Vektoren der diskreten Knotenverschiebungen des Balkens lauten

$$\mathbf{u}_S = [\bar{u}_S(0) \quad \bar{u}_S(L)]^T \quad (54a)$$

$$\mathbf{v}_M = [\bar{v}_M(0) \quad L \bar{\theta}_{z_M}(0) \quad \bar{v}_M(L) \quad L \bar{\theta}_{z_M}(L)]^T \quad (54b)$$

$$\mathbf{w}_M = [\bar{w}_M(0) \quad L \bar{\theta}_{y_M}(0) \quad \bar{w}_M(L) \quad L \bar{\theta}_{y_M}(L)]^T \quad (54c)$$

$$\boldsymbol{\theta}_{xM} = [\bar{\theta}_{x_M}(0) \quad L \bar{\theta}_{x_M,x}(0) \quad \bar{\theta}_{x_M}(L) \quad L \bar{\theta}_{x_M,x}(L)]^T \quad (54d)$$

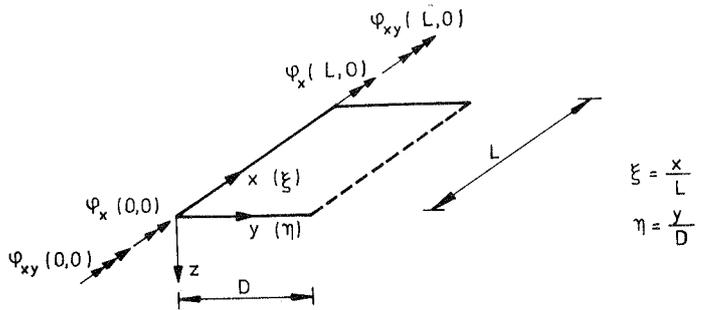


Bild 15: Knotenverschiebungsgrößen eines Querschnittssegmentes (Platte Typ I)

Der Vektor der diskreten Knotenverschiebungen für eine Platte Typ I

$$\mathbf{w}_L = [\varphi_x(0,0) \quad \varphi_{xy}(0,0) \quad \varphi_x(L,0) \quad \varphi_{xy}(L,0)]^T \quad (55)$$

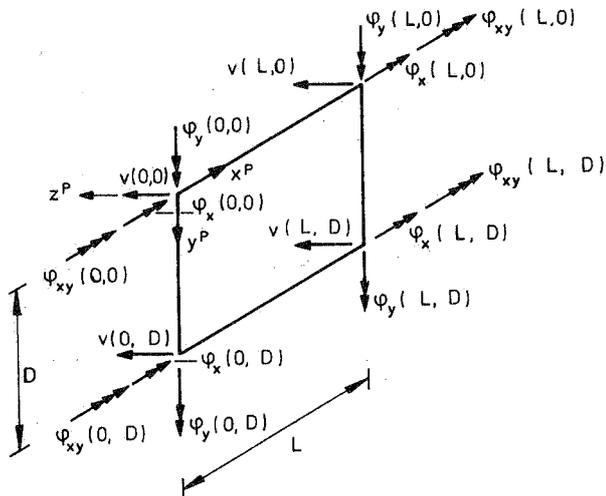


Bild 16: Knotenverschiebungsgrößen eines Querschnittssegmentes (Platte Typ II)

Der Vektor der diskreten Knotenverschiebungen für eine Platte Typ II

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}_L = & \begin{bmatrix} \varphi_x(0,0) & \varphi_y(0,0) & v(0,0) & \varphi_{xy}(0,0) \\
 & \varphi_x(0,D) & \varphi_y(0,D) & v(0,D) & \varphi_{xy}(0,D) \\
 & \varphi_x(L,0) & \varphi_y(L,0) & v(L,0) & \varphi_{xy}(L,0) \\
 & \varphi_x(L,D) & \varphi_y(L,D) & v(L,D) & \varphi_{xy}(L,D) \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{56}$$

Mit den Vektoren der Ansatzfunktionen

$$\mathbf{L}_\xi = \begin{bmatrix} (1 - \xi) & \xi \end{bmatrix}^T \tag{57a - d}$$

$$\mathbf{L}_\eta = \begin{bmatrix} (\eta - 1) & \eta \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_\xi = \begin{bmatrix} (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3) & (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) & (3\xi^2 - 2\xi^3) & (\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix}^T$$

$$\Phi_\eta = \begin{bmatrix} (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) & (\eta - 2\eta^2 + \eta^3) & (3\eta^2 - 2\eta^3) & (\eta^3 - \eta^2) \end{bmatrix}^T$$

können die Verschiebungen an einer beliebigen Stelle $\xi = \frac{x}{L}$, $\eta = \frac{y}{D}$ innerhalb des Elementes dargestellt werden.

Balken:

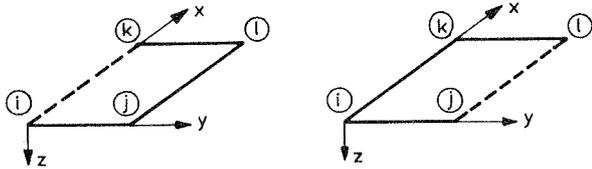
$$\mathbf{u}_S(\xi) = \mathbf{L}_\xi^T \mathbf{u}_S \tag{58a}$$

$$\mathbf{v}_M(\xi) = \Phi_\xi^T \mathbf{v}_M \tag{58b}$$

$$\mathbf{w}_M(\xi) = \Phi_\xi^T \mathbf{w}_M \tag{58c}$$

$$\theta_M(\xi) = \Phi_\xi^T \theta_M \tag{58d}$$

Die Ansatzfunktion $L_{1\eta}$ hat ein anderes Vorzeichen als die analoge Funktion in ξ - Richtung, da für jede Platte die Definition eines eigenen Koordinatensystemes notwendig ist. Die positive y -Richtung weist von i nach j . Die x -Richtungen des Platten- und des Querschnittskordinatensystemes sind identisch.



$$w_L(\xi, \eta) = D L_{1\eta} \Phi_{\xi} w_L \quad (59a)$$

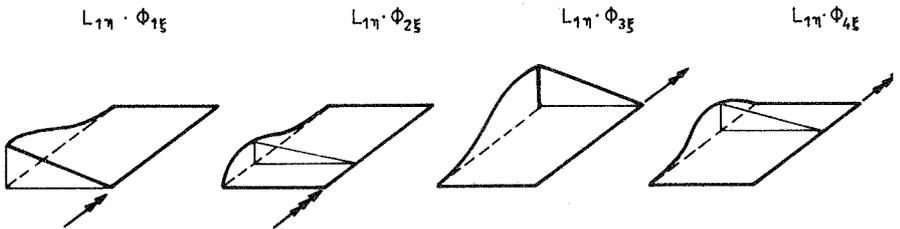


Bild 17: Platte Typ I freier Rand auf der linken Seite

$$w_L(\xi, \eta) = D L_{2\eta} \Phi_\xi w_L \quad (59b)$$

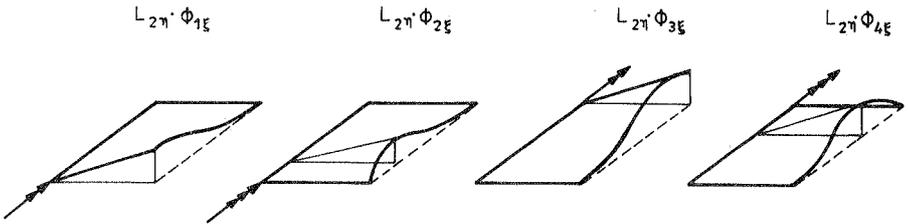


Bild 18: Platte Typ I freier Rand auf der rechten Seite

Für eine Platte des Typs II lautet der Vektor der Ansatzfunktionen.

$$w_L(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} D \Phi_{2\eta} \Phi_{1\xi} & - L \Phi_{1\eta} \Phi_{2\xi} & \Phi_{1\eta} \Phi_{1\xi} & D \Phi_{2\eta} \Phi_{2\xi} \\ D \Phi_{4\eta} \Phi_{1\xi} & - L \Phi_{3\eta} \Phi_{2\xi} & \Phi_{3\eta} \Phi_{1\xi} & D \Phi_{4\eta} \Phi_{2\xi} \\ D \Phi_{2\eta} \Phi_{3\xi} & - L \Phi_{1\eta} \Phi_{4\xi} & \Phi_{1\eta} \Phi_{3\xi} & D \Phi_{2\eta} \Phi_{4\xi} \\ D \Phi_{4\eta} \Phi_{3\xi} & - L \Phi_{3\eta} \Phi_{4\xi} & \Phi_{3\eta} \Phi_{3\xi} & D \Phi_{4\eta} \Phi_{4\xi} \end{bmatrix} w_L \quad (60)$$

$$w_L(\xi, \eta) = \Phi_{\xi\eta} w_L$$

Die Ansatzfunktionen sind in Bild 19 dargestellt.

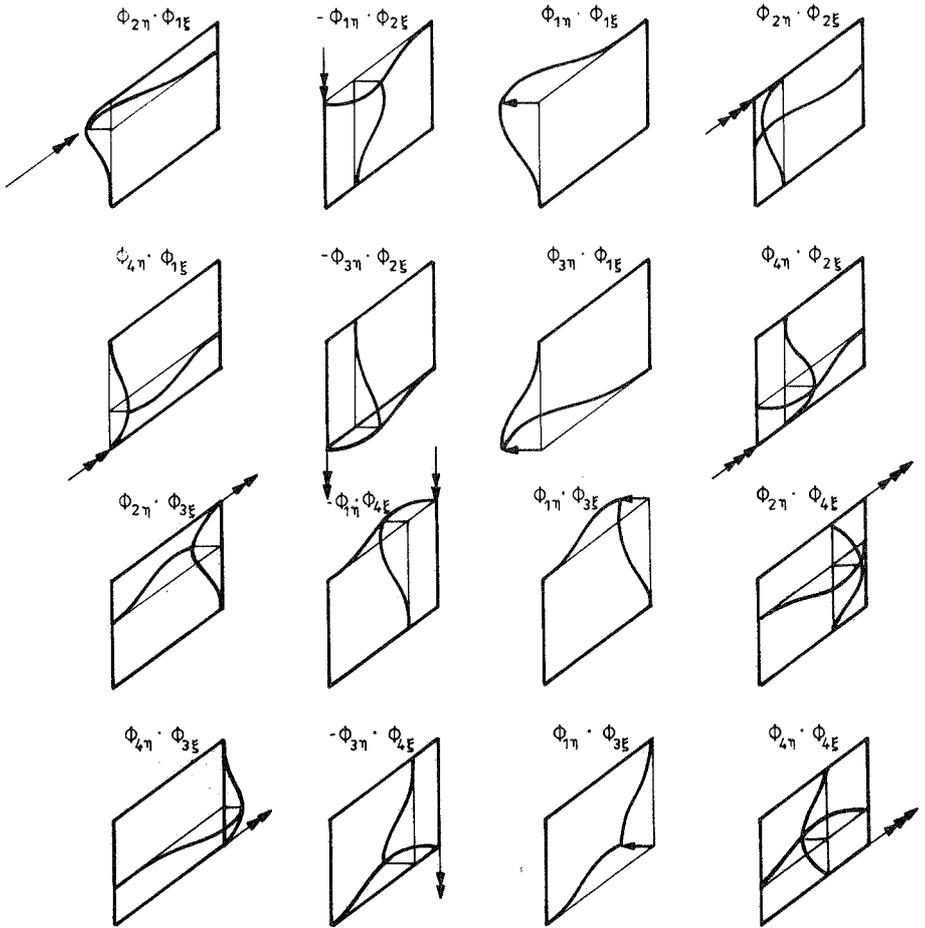


Bild 19: Ansatzfunktionen der Platte Typ II

6.3 Inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei elastischem Werkstoffverhalten

Der Zusammenhang zwischen den Dehnungen und den Spannungsresultanten der Mittelfläche wird durch Einbringung der Verschiebungsansätze in eine Beziehung zwischen diskreten Knotenverschiebungen und Stabendschnittgrößen für die Balkenwirkung und diskreten, fiktiven Knotenmomenten bzw. -kräften für die Plattenanteile überführt. Es werden dabei sowohl für die Verschiebungsinkremente als auch für die virtuellen Verschiebungen dieselben Ansätze verwendet. Die reinen Balkenterme sind hier nicht explizit dargestellt, sie können /75/ entnommen werden.

Außerdem ist zu beachten

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{L} \quad (61a)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{D} \quad (61b)$$

$$\int_L \int_D () dx dy = L D \int_0^1 \int_0^1 () d\xi d\eta \quad (62)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \Phi_i = \Phi_{i,\xi} \quad (63a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \Phi_i = \Phi_{i,\eta} \quad (63b)$$

6.3.1 Spannungsverlauf

Die Arbeitsgleichung in Form der Gleichung (31) setzt sich aus linearen und quadratischen Termen zusammen. Die linearen Terme führen jeweils für Balken- und Plattenanteile getrennt zur elastischen Steifigkeitsmatrix des Elementes bzw. der Subelemente. Die quadratischen Terme geben die Veränderung der Steifigkeit durch Berücksichtigung des wirkenden Kraftzustandes am verformten System wieder, sie führen zur sogenannten geometrischen Steifigkeitsmatrix.

Die "elastische" Steifigkeitsmatrix enthält werkstoffabhängige Größen und bleibt, bezogen auf das mitgehende Querschnittskordinatensystem, bis zum

Plastizierungsbeginn konstant, während die geometrische Steifigkeitsmatrix, durch den sich verändernden Kraft- bzw. Verformungszustand, in jeder Laststufe ein anderes Aussehen aufweist. In ihr beeinflussen sich die einzelnen Anteile des Elementes gegenseitig. Zwar ist keine Beeinflussung der aus Plattenwirkung resultierenden Spannungen auf die reinen Balkenverformungen gegeben, aber die aus Balkenschnittgrößen stammenden Spannungen müssen in den geometrischen (nichtlinearen) Termen der Platte und den gemischten Plattenbalkentermen berücksichtigt werden. Zur Aufstellung der geometrischen Balkensteifigkeitsmatrix verwendet Osterrieder /75/ die diskreten Kraftgrößen, da Verschiebungs- und Kraftgrößen auf das gleiche Querschnittskordinatensystem bezogen sind. Bei der Aufstellung der geometrischen Plattensteifigkeitsmatrix und der gemischten Balken - Platten - Matrizen ist es notwendig, die Balkenschnittgrößen auf die einzelnen Platten zu beziehen. Um die Matrizen auf analytischem Weg bestimmen zu können, muß der Verlauf der Spannungen in einer Einzelplatte bekannt sein. Entsprechend der Voraussetzung ist die Verteilung der Längsspannungen über die Plattendicke konstant. Außerdem wird davon ausgegangen, daß die Einzelplatten durch Abspaltung des Starrkörperanteiles keinen großen Relativverschiebungen ausgesetzt sind, d.h. sie bleiben in Querrichtung gerade. Da der Balkenquerschnitt nur lineare Verwölbungen erfährt, kann die Längsspannung als linear über die Plattenbreite angenommen werden.

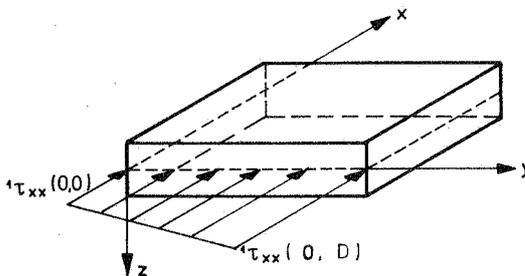


Bild 20: Verlauf der Normalspannungen in Plattenmitte

Der Verlauf ist durch die Kenntnis der Spannungsordinaten an den Elementeckpunkten eindeutig beschrieben. Sie können bei elastischem Material direkt aus den diskreten Balkenschnittkräften ermittelt werden.

Für eine Platte gilt:

$${}^1\tau_{xx} = {}^1\tau_{xx}(0,0) + ({}^1\tau_{xx}(0,D) - {}^1\tau_{xx}(0,0)) \eta \quad (64)$$

Für den Schubmittelpunktsabstand eines Punktes kann ebenso verfahren werden.

$$(\bar{y} - \bar{y}_M) = (\bar{y}(0,0) - \bar{y}_M) + (\bar{y}(0,D) - \bar{y}(0,0)) \eta \quad (65a)$$

$$(\bar{z} - \bar{z}_M) = (\bar{z}(0,0) - \bar{z}_M) + (\bar{z}(0,D) - \bar{z}(0,0)) \eta \quad (65b)$$

Durch Einbringen der Verschiebungsansätze und des Spannungsverlaufes lassen sich alle Integralausdrücke der Gleichung (31) als Integrale quartischer Polynome darstellen. Sie können, zur Einsparung von Rechenzeit, bei elastischem Werkstoffverhalten, vorab analytisch integriert werden.

6.3.2 Ermittlung der Steifigkeitsmatrix

Unter Berücksichtigung der im vorherigen Abschnitt angegebenen Beziehungen folgt aus Gleichung (31)

$$\begin{aligned}
 & \delta \mathbf{u}_S^T [\dots] \mathbf{u}_S + \delta \mathbf{v}_M^T [(\dots) \mathbf{v}_M + (\dots) \mathbf{0}_{xM}] + \delta \mathbf{w}_M^T [(\dots) \mathbf{w}_M + (\dots) \mathbf{0}_{xM}] \\
 & \quad + \delta \mathbf{0}_{xM}^T [(\dots) \mathbf{0}_{xM} + (\dots) \mathbf{v}_M + (\dots) \mathbf{w}_M] \\
 & + \sum_{ns} \delta \mathbf{w}_L^T [\int_0^1 \int_0^1 t D k (\frac{1}{L^4} \Phi_{\xi\eta, \xi\xi} \Phi_{\xi\eta, \xi\xi}^T + \frac{\nu}{L^2 D^2} \Phi_{\xi\eta, \xi\xi} \Phi_{\xi\eta, \eta\eta}^T \\
 & \quad + \frac{1}{D^4} \Phi_{\xi\eta, \eta\eta} \Phi_{\xi\eta, \eta\eta}^T + \frac{\nu}{L^2 D^2} \Phi_{\xi\eta, \eta\eta} \Phi_{\xi\eta, \xi\xi}^T \\
 & \quad + \frac{1 - \nu}{L^2 D^2} \Phi_{\xi\eta, \xi\eta} 2 \Phi_{\xi\eta, \xi\eta}^T) d\eta d\xi \\
 & \quad + \int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi] \mathbf{w}_L \\
 & + \sum_{ns} \delta \mathbf{w}_L^T [\int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (- \frac{SL}{DL}) \mathbf{v}_M \\
 & \quad + \int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (\frac{CL}{DL}) \mathbf{w}_M \\
 & \quad + (\int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} (- \bar{z} + \bar{z}_M) \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (- \frac{SL}{DL}) \\
 & \quad + \int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} (\bar{y} - \bar{y}_M) \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (\frac{CL}{DL})) \mathbf{0}_{xM}] \\
 & + \sum_{ns} \delta \mathbf{v}_M^T \int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (- \frac{SL}{DL}) \mathbf{w}_L \\
 & + \sum_{ns} \delta \mathbf{w}_M^T \int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (\frac{CL}{DL}) \mathbf{w}_L \\
 & + \sum_{ns} \delta \mathbf{0}_{xM}^T [\int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} (- \bar{z} + \bar{z}_M) \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (- \frac{SL}{DL}) \\
 & \quad + \int_0^1 \int_0^1 t L D^1 \tau_{xx} (\bar{y} - \bar{y}_M) \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (\frac{CL}{DL})] \mathbf{w}_L
 \end{aligned} \tag{66}$$

Die angegebene Formel stellt die inkrementelle Arbeit eines aus n_s Einzelplatten bestehenden Balkenelementes dar. Jeder Integralausdruck führt zu einer eigenen Matrix. Die Summe aller Matrizen ergibt die Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen Querschnittskoordinatensystem. Die Gesamtmatrix läßt sich in zwei Teile, die elastische und die geometrische Matrix, aufspalten. Bezeichnet man den Vektor aller diskreten Knotenverschiebungsgrößen mit

$$\mathbf{v} = [\mathbf{u}_S \quad \mathbf{v}_M \quad \mathbf{w}_M \quad \theta_{xM} \quad \mathbf{w}_L]^T \quad (67)$$

dann erhält man durch Multiplikation der Steifigkeitsmatrix mit dem Vektor der Verschiebungsgrößen den Vektor der inkrementellen Knotenkraftgrößen.

$$\mathbf{S} = (\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g) \mathbf{v} \quad (68)$$

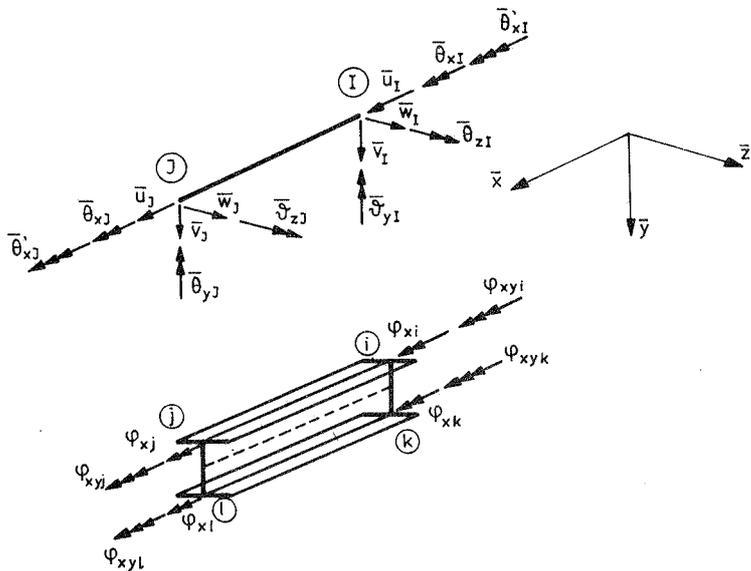
Zur Ermittlung der einzelnen Teilmatrizen muß vorausgesetzt werden, daß Stoffeigenschaften und Geometrie innerhalb eines Subelementes konstant sind. Die konkrete Ermittlung der Teilmatrizen soll an dieser Stelle nicht beschrieben werden, die Matrizen können dem Anhang 1 entnommen werden. Zum besseren Verständnis soll jedoch kurz die Struktur der Elementsteifigkeitsmatrix exemplarisch erläutert werden.

Die ersten beiden Terme von Gleichung (31) stellen die elastische und geometrische Matrix des Balkens (vergl. /75/) dar, sie haben jeweils eine Größe von 14×14 und bilden den Kern der Matrizen. Die weiteren, lokalen Plattensteifigkeitsmatrizen vergrößern die Matrizen, wobei die Gesamtzahl der Freiheitsgrade von der Anzahl der verwendeten Querschnittsplatten und dem Plattentyp abhängt. Die Werte des dritten Integrales führen zur elastischen Steifigkeitsmatrix der Einzelplatten, die für Platten vom Typ I durch eine 4×4 und für Platten des Types II durch eine 16×16 Matrix dargestellt werden. Die Matrix selbst ergibt sich aus der Addition von fünf Einzelmatrizen. Das vierte Integral führt zur geometrischen Matrix einer Einzelplatte. Die übrigen Ausdrücke stellen die Kopplung zwischen Platte und Balken dar, sie ergeben ausschließlich Terme der geometrischen Matrix. Die einzelnen Kopplungsmatrizen können in Gruppen eingeteilt werden, die jeweils die Balkenbiegung in \bar{y} oder \bar{z} -Richtung sowie die Torsion mit der Plattenbiegung koppeln. Es handelt sich hierbei um je 4×4 Matrizen (Typ I) bzw. 4×16 Matrizen (Typ II), die sich für die drei Gruppen jeweils aus drei unterschiedlichen Matrizen errechnen lassen, da der Verlauf der Spannungen und der Geometrie in

jeweils einen konstanten und einen linearen Anteil aufgespalten wird (vgl. Kapitel 6.2).

In den Bildern 21 - 25 ist die Struktur der Matrizen für zwei unterschiedliche Subelementierungen symbolisch dargestellt. Die Einzelmatrizen der Steifigkeitsmatrix sind in den Tafeln 1-14 im Anhang 1 enthalten.

Anhand eines Beispielen soll die Struktur der ermittelten Matrizen bzw. die Anordnung der Steifigkeitsmatrizen der Einzelplatten in der Elementsteifigkeitsmatrix demonstriert werden.



I, J Nummern der Balkenknoten

i, j, k, l zusätzliche Subknoten

Bild 21: Minimale Idealisierung eines Balkenelementes mit I-Querschnitt

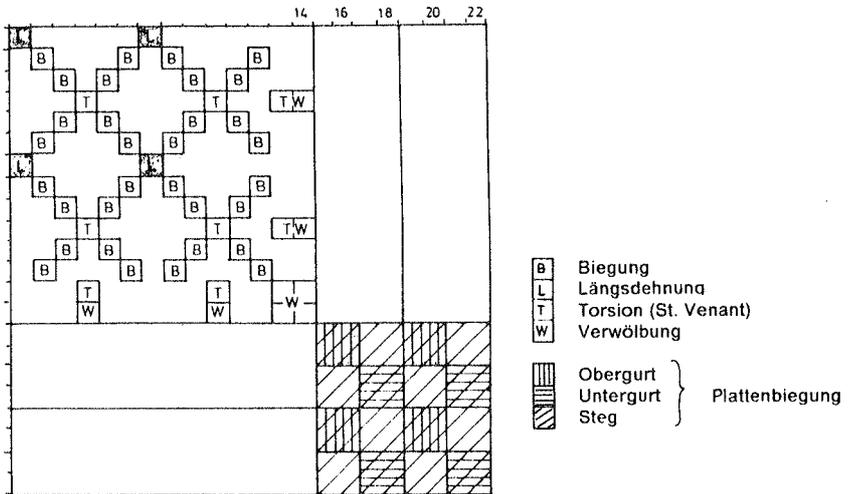


Bild 22: Elastische Elementsteifigkeitsmatrix mit 5 Subelementen

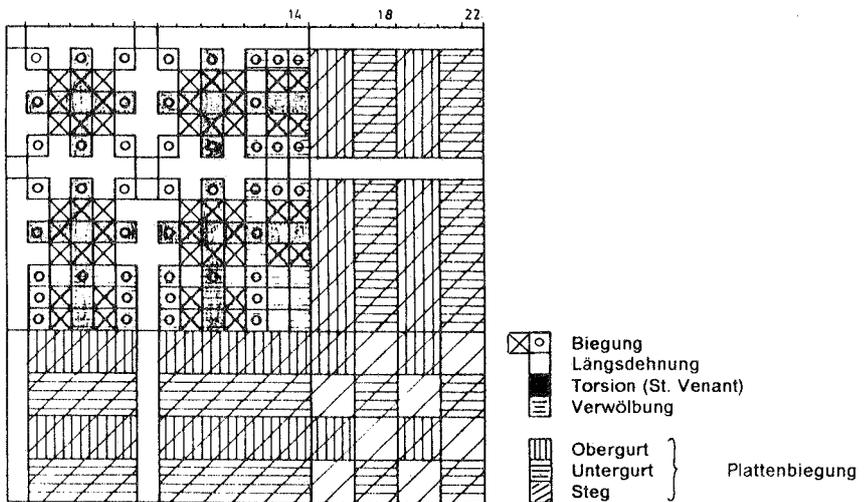


Bild 23: Geometrische Matrix

Hierbei können folgende Feststellungen getroffen werden:

Kopplung Balken - Platte:

Eine Kopplung von Balken- und Plattenbiegung entsteht nur, wenn die Verschiebungskomponenten in die gleiche Richtung weisen. Es ergeben sich zum Beispiel aus der Stegbiegung eines I - Profiles keine Kopplungsterme mit der Balkenbiegung um die schwache Achse. Diese Beobachtung gilt allerdings nur für symmetrische Querschnitte, bei denen die einzelnen Platten rechtwinklig zueinander angeordnet sind. Für Balkentorsion hingegen ergeben sich für jede Querschnittsplatte entsprechende Kopplungsterme. Mit Ausnahme der Längsverschiebung werden alle Balkenterme mit Plattentermen gekoppelt.

Kopplung Platte - Platte:

Eine gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Platten ist, soweit sie keinen gemeinsamen Knoten haben, nicht gegeben.

Ein zweites Beispiel (Bild 24) soll die Veränderung der Elementsteifigkeitsmatrix bei einer anderen Subelementierung darstellen. Es gibt 14 Einzelmatrizen für die beiden Plattentypen (s. Anhang 1), die für jedes Subelement (Platte), seiner Geometrie angepaßt, mehrfach verwendet werden. Es ist möglich, ein Element aus beliebig vielen Subelementen zusammensetzen. In der vorliegenden Arbeit wurde eine obere Grenze von 8 Subelementen pro Element eingeführt, um die Matrizen nicht zu sehr aufzublähen. Testrechnungen bestätigen, daß damit gute Ergebnisse möglich sind.

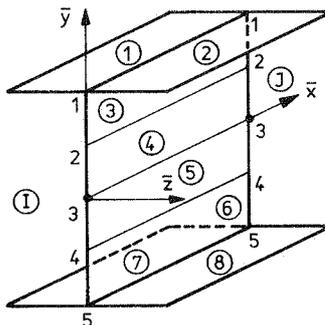


Bild 24: Einteilung des Querschnittes in Unterelemente (Platten)

	Freiheitsgrade		angeschl. Subelem.
	Knoten I	Knoten J	
Balken	1 - 6 , 13	7 - 12 , 14	
Subknoten 1	15 - 18	35 - 38	1,2,3
Subknoten 2	19 - 22	39 - 42	3,4
Subknoten 3	23 - 26	43 - 46	4,5
Subknoten 4	27 - 30	47 - 50	5,6
Subknoten 5	31 - 34	51 - 54	6,7,8

Die Querverschiebung und die Verdrehung um die \bar{y} -Achse werden als lokale Randbedingung der Elemente 3 und 6 an den Knoten 2 und 8 behindert.

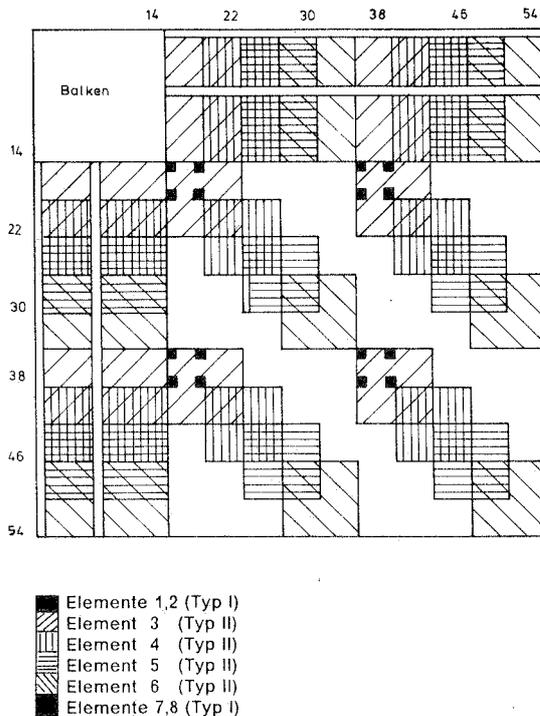


Bild 25: Elementsteifigkeitsmatrix für I-Profil mit 8 Subelementen

6.4 Inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix bei elastisch-plastischem Werkstoffverhalten

Die Aufstellung der inkrementellen Steifigkeitsmatrix ist bei Berücksichtigung von plastischem Werkstoffverhalten nicht mehr auf analytischem Wege möglich. Darüber hinaus ist beim gewählten Vorgehen zur Erzeugung der nicht-linearen Werkstoffmatrix die Matrix selbst nur auf numerischem Weg aufzustellen.

Es wird also ein numerisches Integrationsverfahren notwendig. Jedoch wird der ursprüngliche Vorteil der analytischen Berechnung der Steifigkeitsmatrizen nicht vollständig aufgezehrt. Das hat folgende Gründe:

- Für nicht teilplastizierte Elemente können weiter die analytisch gewonnenen Matrizen verwendet werden.
- Ein Großteil der Berechnung einer nichtlinearen Last-Verformungsbeziehung kann, bis zum Plastizierungsbeginn, mit den elastischen Werten ermittelt werden.

6.4.1 Wahl eines numerischen Integrationsverfahrens

Ein wesentliches Kriterium zur Auswahl des Verfahrens stellt die Ordnung des zu integrierenden Ausdruckes dar. Die gewählten Ansätze enthalten maximal kubische Polynome, durch Vektormultiplikation der Ansatzvektoren entstehen die zu integrierenden Matrizen. Die Ausgangsterme der numerisch zu integrierenden elastischen Steifigkeitsmatrix sind maximal von 4. Ordnung, da die Ansatzfunktionen durch Einbringung der geometrischen Gleichungen abgeleitet und in ihrer Ordnung erniedrigt werden. Allerdings bezieht sich diese Betrachtung auf den geometrischen Anteil der Matrix, durch Einbeziehen der Werkstoffgleichungen wird die Ordnung wieder erhöht. Eine genauere Erfassung kann nur durch möglichst viele Integrationspunkte erreicht werden. Daraus ergibt sich als Forderung an das Verfahren:

- Erfassung des Plastizierungsbeginns eines Elementes durch Integrationspunkte an den Rändern des Elementes.
- Erhöhung der Integrationspunkte in gleichen Abständen, um Veränderungen der Materialkennwerte besser zu erfassen.

Das häufig verwendete Gaußsche-Integrationsverfahren wurde wegen der ersten Forderung nicht eingesetzt. Eine Variante dieses Verfahrens, das Gauß-Lobatto-Verfahren, verwendet Integrationspunkte auf dem Rand, es liefert jedoch für drei Integrationspunkte pro Richtung die gleichen Werte wie das einfachere Simpson-Verfahren, dem hier wegen der einfachen Erhöhung der Integrationspunkte sowie den gleichmäßigen Abständen zwischen den Punkten der Vorzug gegeben wurde.

6.4.2 Ermittlung der Steifigkeitsmatrix

Durch Einbringung der Verschiebungsansätze wird Gleichung (52) diskretisiert. Um die von Osterrieder /75/ ermittelte Balkensteifigkeitsmatrix weiter verwenden zu können, wird die Werkstoffmatrix für die aus Balkenwirkung resultierenden Scheibenspannungen weiter spezialisiert. Die Interaktion zwischen Längs- und Schubspannungen wird zunächst vernachlässigt und die Matrix C_n entsprechend kondensiert, so daß nur noch die Interaktion zwischen Längsspannungen und Plattenmomenten enthalten ist. Damit werden die Balkenlängsspannungen sowie die Balkenbiegemomente bestimmt. Die Interaktion mit den Schubspannungen wird dann mit Hilfe der Fließbedingung als Begrenzung der aufnehmbaren plastischen Schubspannungen $\text{zul}^1 \tau_{xy,PL}$ berücksichtigt. Damit wird analog zu /75/ ein aufnehmbares St. Venantsches Torsionsmoment ermittelt.

$$M_{TS, PL} = \text{zul}^1 \tau_{yz, PL} W_{T, PL} \quad (69)$$

$W_{T, PL}$ bezeichnet das vollplastische St. Venantsche Torsionswiderstandsmoment.

Das elastisch berechnete St. Venantsche Torsionsmoment wird mit dem so ermittelten Grenzwert verglichen und durch ihn ersetzt, wenn dieser Wert überschritten wird.

Die linke Seite der diskretisierten Arbeitsgleichung (52) hat dann folgendes Aussehen.

$$\begin{aligned}
& \delta (\mathbf{v}^B)^T \int_0^1 [\dots] \mathbf{v}^B d\xi + \sum_{ns} \delta (\mathbf{v}^B)^T \int_0^1 \int_0^1 L D \Phi_{\xi, \xi} \mathbf{C}_{nm} \hat{\Phi}_{\xi\eta}^T \mathbf{w}_L d\xi d\eta \\
& + \sum_{ns} \delta \mathbf{w}_L^T [(\int_0^1 \int_0^1 L D \hat{\Phi}_{\xi\eta} \mathbf{C}_m \hat{\Phi}_{\xi\eta}^T d\xi d\eta) \mathbf{w}_L \\
& \quad + (\int_0^1 \int_0^1 L D \hat{\Phi}_{\xi\eta} \mathbf{C}_{mn} \Phi_{\xi, \xi}^T d\xi d\eta) \mathbf{v}^B \\
& \quad + (\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} \frac{1}{L} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\xi d\eta) \mathbf{w}_L] \\
& + \sum_{ns} \delta \mathbf{w}_L^T [\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} \frac{1}{L} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi, \xi}^T d\eta d\xi (- \frac{SL}{DL}) \mathbf{v}_M \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} \frac{1}{L} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi, \xi}^T d\eta d\xi (\frac{CL}{DL}) \mathbf{w}_M \\
& \quad + (\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} (- \bar{z} + \bar{z}_M) \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi, \xi}^T d\eta d\xi (- \frac{SL}{DL}) \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} (\bar{y} - \bar{y}_M) \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi\eta, \xi} \Phi_{\xi, \xi}^T d\eta d\xi (\frac{CL}{DL})) \boldsymbol{\theta}_{xM}] \\
& + \sum_{ns} \delta \mathbf{v}_M^T \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} \frac{1}{L} \Phi_{\xi, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (- \frac{SL}{DL}) \mathbf{w}_L \\
& + \sum_{ns} \delta \mathbf{w}_M^T \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} \frac{1}{L} \Phi_{\xi, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (\frac{CL}{DL}) \mathbf{w}_L \\
& + \sum_{ns} \delta \boldsymbol{\theta}_{xM}^T [\int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} (- \bar{z} + \bar{z}_M) \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (- \frac{SL}{DL}) \\
& \quad + \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{t} L D {}^1\tau_{xx} (\bar{y} - \bar{y}_M) \frac{1}{L^2} \Phi_{\xi, \xi} \Phi_{\xi\eta, \xi}^T d\eta d\xi (\frac{CL}{DL})] \mathbf{w}_L
\end{aligned} \tag{70}$$

$$\text{mit } \hat{\Phi}_{\xi\eta} = [\Phi_{\xi\eta, \xi\xi} \quad \Phi_{\xi\eta, \eta\eta} \quad \Phi_{\xi\eta, \xi\eta}]^T \tag{71}$$

7.0 Zusammenbau der Elementmatrizen zur Systemsteifigkeitsmatrix

Die virtuelle Arbeitsgleichung wurde wegen der Diskretisierung des Systems bisher nur auf ein Element angewendet. Um ein ganzes System zu beschreiben, müssen die einzelnen Elemente zusammengefügt werden. Dazu ist es notwendig, die bisher im elementeigenen Querschnittskordinatensystem aufgestellten Elementsteifigkeitsmatrizen in ein globales Systemkoordinatensystem zu überführen. In diesem Koordinatensystem kann der Zusammenbau der einzelnen Elemente zur Systemsteifigkeitsmatrix mittels der direkten Steifigkeitsmethode durchgeführt werden. Am selben Knoten angreifende Elemente liefern dann für übereinstimmende Freiheitsgrade jeweils einen additiven Steifigkeitsanteil für diesen Freiheitsgrad. Dies gilt auch für die lokalen Querschnittsfreiheitsgrade, die auf die lokalen Ausgangskordinatensysteme des unverformten Querschnittes bezogen sind. Alle Freiheitsgrade des Systems sind im Vektor \mathbf{r} zusammengefaßt. Die korrespondierenden Knotengrößen (Stabendgrößen des Balkens bzw. fiktive Knotenkräfte der Platten) im Zustand 1 werden, ebenfalls ins globale Koordinatensystem transformiert, zum Vektor ${}^1\mathbf{F}$ der inneren Kräfte aufaddiert. Die Differenz zum Vektor der äußeren Lasten ${}^2\mathbf{R}$ in der gesuchten Konfiguration 2 muß für die richtigen inneren Kräfte verschwinden. Die Beziehung für das gesamte Tragwerk lautet dann:

$$\delta \mathbf{r}^T \mathbf{K} \mathbf{r} = \delta \mathbf{r}^T ({}^2\mathbf{R} - {}^1\mathbf{F}) \quad (72)$$

Daraus können die gesuchten Verschiebungsinkremente bestimmt werden.

7.1 Transformationsbeziehung

Der Zusammenbau der Elemente erfolgt in unterschiedlichen Koordinatensystemen für global definierte Balkengrößen und lokal definierte Plattengrößen. Für die globalen Balkenfreiheitsgrade, Verschiebungen $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ und Verdrehungen $\bar{\theta}_x, \bar{\theta}_y, \bar{\theta}_z$ an beiden Elementknoten können die in /75/ angegebenen Transformationsmatrizen weiter verwendet werden. Es ist jedoch zu beachten, daß die zum Teil im Schubmittelpunkt des Querschnittes definierten Größen auf einen für alle Balkenfreiheitsgrade einheitlichen Punkt, den

Schwerpunkt zu beziehen sind. Er wurde ausgewählt, da bei Stahlbauten üblicherweise die Systemlinie in die Schwerachse gelegt wird. Die lokal definierten Größen, Querschnittsverwölbung $\theta_{xM,x}$ bzw. die Plattenfreiheitsgrade, werden untransformiert in die Gesamtsteifigkeitsmatrix übernommen. Zu diesem Zweck werden die von Osterrieder /75/ angegebenen Transformationsmatrizen lediglich um die Anzahl der zusätzlichen lokalen Freiheitsgrade vergrößert und mit dem Wert 1 für die entsprechenden Hauptdiagonalterme versehen. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die lokal definierten Freiheitsgrade in den Nachbarelementen entsprechend ausgerichtete Freiheitsgrade vorfinden (geradlinige, gleichartige Trägerabschnitte - vgl. Kapitel 7.1.1) Die Transformationsbeziehung zwischen den lokalen und den globalen Knotengrößen hat dann folgende Form

$$v_L = \Delta T \ ^1T v_G \quad (73)$$

$$s_G = \ ^1T^T \Delta T^T s_L \quad (74)$$

Damit erhält man die auf das globale X,Y,Z - Koordinatensystem bezogene globale Elementsteifigkeitsmatrix **K**.

$$s_G = \ ^1T^T \underbrace{\Delta T^T k_L \Delta T}_{\mathbf{K}} \ ^1T^T v_G \quad (75)$$

Hierbei geben ΔT die Transformationsbeziehung zwischen Schubmittelpunkt und Schwerpunkt und $\ ^1T$ die Transformationsbeziehung zwischen lokalen und globalen Koordinaten, an.

Die Orientierungsänderung des elementbezogenen Querschnittskoordinatensystemes der Konfiguration 1 bezüglich des globalen Systemes wird schrittweise, durch kleine inkrementelle Änderungen vorgenommen, um die endliche Verdrehung des elementfesten Koordinatensystemes gegenüber dem Ausgangssystem erfassen zu können. Die Transformationsmatrix des Zustandes 1 wird daher durch die Multiplikation der Transformationsbeziehungen für jeweils kleine inkrementelle Schritte bestimmt.

$$\ ^1T = T_n T_{n-1} \dots T_2 T_1 \ ^0T \quad (76)$$

Dieses Vorgehen setzt voraus, daß die lokalen Plattenfreiheitsgrade bereits auf das Querschnittskordinatensystem des Balkens bezogen sind, was durch Verwendung der Transformationsbeziehungen (20 a-c), (21) und (22 a) gewährleistet ist. Die Winkel werden aus der Lage der Plattensegmente im Querschnittskordinatensystem bestimmt, die sich durch eine Addition der Verschiebungsinkremente zu den Ausgangskordinaten ergibt. Es wird allerdings vorausgesetzt, daß die Relativverformungen (Plattenverformungen) gegenüber dem unverformten Querschnitt für sich alleine gesehen klein sind. Eine endliche Gesamtverschiebung eines Querschnittspunktes ergibt sich durch Addition einer inkrementell ermittelten, großen Starrkörperdeformation der Balkenlängsachse und den jeweils als klein angesehenen Verschiebungen des Querschnittes bzw. der Querschnittssegmente, bezogen auf den starren Querschnitt.

7.1.1 Verträglichkeit zwischen Elementen

Die rein lokale Definition von Verwölbung und Plattenverformungen hat zur Folge, daß eine Kopplung der Freiheitsgrade nicht möglich ist, wenn zwei Tragwerksteile (Elemente) unter einem bestimmten Winkel verbunden werden sollen (zum Beispiel Stütze-Träger in einem Rahmensystem). Die Profilverformung kann nur für jeden Träger allein betrachtet werden. Die Eckbereiche können nur unter Berücksichtigung des ausgeführten Anschlusses genau erfaßt werden, dazu bedarf es einer feinen Idealisierung des Eckbereiches, was allerdings das hier verwendete Konzept sprengen würde. Als möglicher Weg bietet sich eine Vorabermittlung des Anschlußverhaltens und eine Erstellung von Knotensteifigkeitsmatrizen an. Solche Knotenmatrizen könnten im Anschlußbereich anstelle der verwendeten Stabelemente in die Gesamtsteifigkeitsmatrix hineinaddiert werden. Untersuchungen zum Problem der Kopplung zwischen Biegung, Torsion und Verwölbung bei Anschlüssen offener Profile wurden zum Beispiel von Öhlschläger /74/ durchgeführt, der Federmatrizen für verschiedene Anschlußtypen erzeugt. Die Erstellung solcher Matrizen hat allerdings folgende Schwierigkeiten:

- a) Für jeden Knotentyp bzw. bei veränderten Querschnittswerten können sich die Steifigkeitsverhältnisse im Anschlußbereich so verändern, daß eine neue Knotenmatrix aufzustellen ist.
- b) Die Erfassung von nichtlinearen Einflüssen im Knotenbereich bedingt ebenfalls eine Veränderung der Knotenmatrix.

Die Berücksichtigung von Knotenanschlüssen ist in der vorliegenden Arbeit durch die Wahl der Randbedingungen der lokalen Freiheitsgrade möglich. Es bestehen drei Möglichkeiten:

- a) Lokale Freiheitsgrade können ohne Rücksicht auf die Orientierung der anschließenden Stäbe gekoppelt werden.
- b) Zwei oder mehr aneinander anzuschließende Stäbe werden nur in den globalen Balkenfreiheitsgraden gekoppelt, die lokalen Größen bleiben jeweils frei. Damit ist eine freie Querschnittsverformung der Einzelträger möglich.
- c) Die lokalen Freiheitsgrade werden an den Anschlußknoten behindert. Es entsteht dadurch quasi eine unnachgiebige Steife, die die Profilverformung unterbindet.

Da für jeden einzelnen Freiheitsgrad unterschiedliche Lagerungsbedingungen einzugeben sind, können auch lokale Verformungen differenziert behandelt werden. Es ist zum Beispiel möglich, die Profilverformung ganz oder teilweise zu unterbinden, eine Querschnittsverwölbung aber zuzulassen. Das Verhalten realer Konstruktionen ist mit den Alternativen b) und c) am besten abzubilden. Sie dienen auch als Grenzwerte für den Einfluß des Knotenbereiches auf die Gesamtstabilität einer Konstruktion.

7.1.2 Verträglichkeit innerhalb eines Elementes

Ein einzelnes Element wird aus einer Reihe von Subelementen (Platten) zusammengesetzt. Sowohl an den im Element vorhandenen Verbindungskanten, als auch an den Knoten zwischen zwei Elementen muß die innere Arbeit richtig wiedergegeben werden, es dürfen keine Sprünge oder Knicke auftreten. Die Kontinuität wird beim verwendeten Plattenelement durch den gewählten bikubischen Ansatz garantiert. Jeder einzelne Freiheitsgrad ist so gewählt, daß für einen Einheitszustand das Verschiebungsfeld über die Elementkanten hinweg stetig verläuft. Das sich aus Überlagerung aller Verformungen ergebende Gesamtverschiebungsfeld ist damit zwangsläufig kontinuierlich (Bild 26).

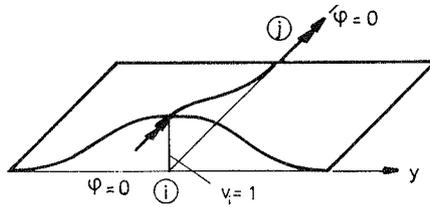


Bild 26: Verschiebungsfeld für $v_i = 1$

An der Kante zwischen Steg und Gurt sind allerdings noch zusätzliche Betrachtungen notwendig. Sie sollen am Beispiel eines ζ -Profils erläutert werden. Die Freiheitsgrade Verdrehung φ_x und Verwindung φ_{xy} verlaufen unabhängig von der Lage der Platte im Querschnitt kontinuierlich. Aus Bild 27 b.) ist ersichtlich, daß der Winkel zwischen Steg- und Gurtplatte erhalten bleibt. Die Querverschiebung v und die Verdrehung φ_y aus dem Steg finden jedoch im Gurt keinen Partner. Sie stellen Scheibenfreiheitsgrade der Gurtplatten dar, die hier nicht berücksichtigt sind.

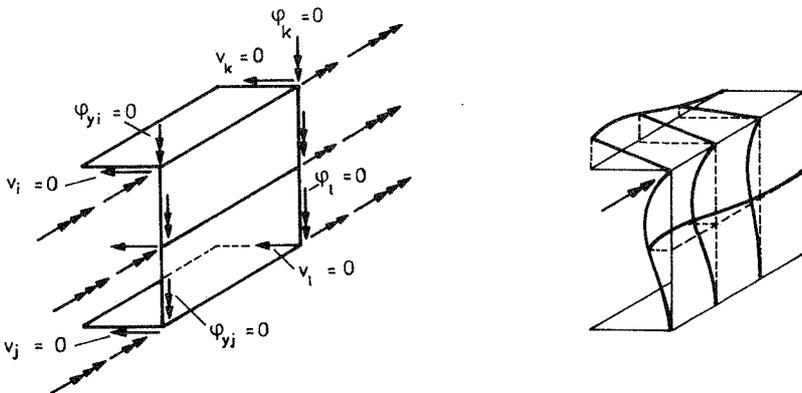


Bild 27: a) Idealisierung mit 4 Platten b) Einheitszustand

Bei der Idealisierung werden diese Freiheitsgrade deshalb unterdrückt (Bild 27a). Dies ist zulässig, da die Scheibensteifigkeit des Gurtes um ein vielfaches über der Plattensteifigkeit des Steges liegt. Darüber hinaus ist die Behinderung dieser Freiheitsgrade notwendig, um eine klare Trennung von Balkenverformungen und den zusätzlichen Profilverformungen aufrechtzuerhalten. Andernfalls würden gleiche Verformungsanteile in beiden (Balken-

und Platten-) Freiheitsgraden auftreten, und zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen.

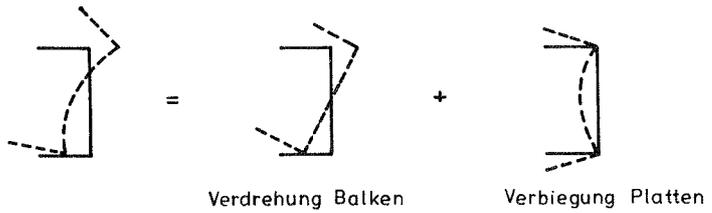


Bild 28: Verformung des Querschnittes

8.0 Berechnung der Spannungen

8.1 Spannungsermittlung bei elastischem Werkstoffgesetz

Zur Erstellung der inkrementellen geometrischen Elementsteifigkeitsmatrix und zur Bildung des Vektors der Ungleichgewichtskräfte werden die Spannungen bzw. die resultierenden Spannungen im Zustand 1 benötigt.

$${}^1\delta W_{(i)} = \int_V {}^1\tau_{ij} \delta_1 e_{ij} dV \quad (77)$$

Sowohl in den inneren Kräften Gleichung (77) als auch bei der geometrischen Matrix treten die Cauchy-Spannungen ${}^1\tau_{ij}$ des Zustandes 1 auf. Ein geeignetes Stoffgesetz, das den Anforderungen der Objektivität genügt, sollte in den Kirchhoff-Piola Spannungen 2. Art und den Green - Lagrange Verzerrungen - beide bezogen auf den Ausgangszustand definiert werden. Durch Transformation können diese Variablen in die Cauchy - Spannungen bzw. die Almansi Verzerrungen überführt werden; der diese Maße verbindende "Stofftensor" entsteht dann durch Transformation 4. Ordnung. Da das vorliegende Problem auf kleine Dehnungen beschränkt ist, kann näherungsweise auf diese Transformation verzichtet werden. Es wird deshalb von folgendem Stoffgesetz ausgegangen:

$${}^1\tau_{ij} = {}^1C_{ijkl} {}^1e_{kl} \quad (78)$$

$${}^1e_{kl} = \frac{1}{2} ({}^1u_{k,l} + {}^1u_{l,k} - {}^1u_{i,k} {}^1u_{i,l}) \quad (79)$$

Bei Beschränkung auf die relevanten Spannungen ergibt sich aus Gleichung (77) im lokalen x, y, z Koordinatensystem für eine Einzelplatte

$$\begin{aligned} {}^1\delta W_{(i)} = & \int_V {}^1\tau_{xx} \delta_1 e_{xx} dV + \int_V {}^1\tau_{yy} \delta_1 e_{yy} dV \\ & + 2 \int_V {}^1\tau_{xy} \delta_1 e_{xy} dV \end{aligned} \quad (80)$$

Mit den nach Platten und Scheiben- (Balken) Anteilen aufgespaltenen Verschiebungskomponenten

$${}^1u_x = {}^1u^B - z {}^1w'_{,x} \quad (81a)$$

$${}^1u_y = {}^1v^B - z {}^1w'_{,y} \quad (81b)$$

$${}^1u_z = {}^1w^B + {}^1w^P \quad (81c)$$

ergibt sich aus Gleichung (79)

$$\begin{aligned} {}^1\varepsilon_{xx} = & {}^1u'_{,x} - z {}^1w''_{,xx} - \frac{1}{2} [({}^1u'_{,x})^2 + ({}^1v'_{,x})^2 + ({}^1w'_{,x})^2] \\ & - \frac{1}{2} ({}^1w'_{,x})^2 - \frac{1}{2} ({}^1w'_{,x} {}^1w'_{,x}) \end{aligned} \quad (82a)$$

$${}^1\varepsilon_{yy} = - z {}^1w''_{,yy} \quad (82b)$$

$$2 {}^1\varepsilon_{xy} = {}^1g'_{xy} - 2 z {}^1w''_{,xy} \quad (82c)$$

mit

$$\begin{aligned} {}^1w'_{,x} = & [({}^1\bar{w}'_{M,x} + (\bar{y} - \bar{y}_M) {}^1\bar{\theta}'_{xM,x}) \frac{CL}{DL} \\ & - ({}^1\bar{v}'_{M,x} - (\bar{z} - \bar{z}_M) {}^1\bar{\theta}'_{xM,x}) \frac{SL}{DL}] \end{aligned} \quad (82d)$$

und

$$\begin{aligned} {}^1v'_{,x} = & [({}^1\bar{w}'_{M,x} + (\bar{y} - \bar{y}_M) {}^1\bar{\theta}'_{xM,x}) \frac{SL}{DL} \\ & - ({}^1\bar{v}'_{M,x} + (\bar{z} - \bar{z}_M) {}^1\bar{\theta}'_{xM,x}) \frac{CL}{DL}] \end{aligned} \quad (82e)$$

Mit den Größen ${}^1u^B$, ${}^1v^B$, ${}^1w^B$ werden die, in die lokalen Plattenkoordinatensysteme transformierten, gesamten Relativverschiebungen des Balkens ausgedrückt.

In Gleichung (82) sind die nichtlinearen Verzerrungsanteile zur Berechnung der St. Venantschen Torsion und die quadratischen Terme der Plattenkrümmung

mungen als klein vernachlässigt. Darüber hinaus werden auch die Terme $(w_{,y}^p)^2$ und $(w_{,x}^p w_{,y}^p)$, die den sekundären Membraneffekt der Einzelplatten darstellen, nicht berücksichtigt. Der Membranspannungseffekt in x-Richtung $(w_{,x}^p)^2$ wird in Form einer geänderten Längsspannungsverteilung über den Querschnitt (Überlagerung aus Balken und Platte) berücksichtigt (vgl. Kapitel 9).

Die inkrementellen, virtuellen Verzerrungen $\delta_1 e_{ij}$ erhalten infolge der Vernachlässigung von Querdehnungen in den Balkenanteilen folgendes Aussehen

$$\delta_1 e_{xx} = \delta u_{,x}^B - z \delta w_{,xx}^P \quad (83a)$$

$$\delta_1 e_{yy} = 0 - z \delta w_{,yy}^P \quad (83b)$$

$$2 \delta_1 e_{xy} = \delta g_{xy} - z \delta 2 w_{,xy}^P \quad (83c)$$

Setzt man als Werkstoffbeziehung das Hookesche Werkstoffgesetz für elastisches Material ein, erhält man die Spannungen im Zustand 1, die, multipliziert mit den virtuellen Verzerrungen, die innere Arbeit ergeben. Es ist dabei zu beachten, daß sich aus den in z-Richtung linearen Plattenverzerrungen $z w_{,xx}^P$ und den über die Segmentdicke konstanten Balkendehnungen $u_{,x}^B$, Integrale der folgenden Form zu Null ergeben

$$\text{z.B.:} \quad \int_V E u_{,x}^B z \delta w_{,xx}^P dV = 0 \quad (84)$$

Gleichung (80) läßt sich folgendermaßen angeben

$$\begin{aligned}
 {}^1\delta W_{(t)} &= \int_V E \, {}^1u_{,x}^B \delta u_{,x}^B \, dV + \int_V G \, {}^1g_{xy}^B \delta g_{xy}^B \, dV \\
 &+ \int_V E \left({}^1w_{,xx}^P + \nu \, {}^1w_{,yy}^P \right) z^2 \delta w_{,xx}^P \, dV \\
 &+ \int_V E \left(\nu \, {}^1w_{,xx}^P + {}^1w_{,yy}^P \right) z^2 \delta w_{,yy}^P \, dV \\
 &+ 2 \int_V \frac{E(1-\nu)}{2} \, {}^1w_{,xy}^P \, 2z^2 \delta w_{,xy}^P \, dV \\
 &- \frac{1}{2} \int_V E \left[\left({}^1u_{,x}^B \right)^2 + \left({}^1v_{,x}^B \right)^2 + \left({}^1w_{,x}^B \right)^2 \right] \delta u_{,x}^B \, dV \\
 &- \frac{1}{2} \int_V E \left[\left({}^1w_{,x}^P \right)^2 + \left({}^1w_{,x}^{BP} \, {}^1w_{,x}^P \right) \right] \delta u_{,x}^B \, dV
 \end{aligned} \tag{85}$$

Gleichung (85) enthält Produkte der Verschiebungsableitungen der Konfiguration 1. Durch Einbringung der Verschiebungsansätze entstehen daraus Produkte der diskreten Knotenverschiebungsgrößen. In Matrixschreibweise ergibt sich folgende Form

$$\delta \mathbf{v}^T \mathbf{k}_s \, {}^1\mathbf{v} \tag{86}$$

\mathbf{k}_s ist hierbei die Sekantensteifigkeitsmatrix der Konfiguration 1, sie kann wieder in eine elastische und eine geometrische Matrix zerlegt werden. Die geometrische Sekantensteifigkeitsmatrix, für sich betrachtet, ist unsymmetrisch, darüber hinaus fehlen in ihr nichtlineare Terme zur Bestimmung der Plattenmomente. Das heißt, daß diese Werte zunächst ohne den Einfluß geometrischer Nichtlinearität ermittelt werden. Dieser Umstand ist folgendermaßen zu begründen: Die verwendete Theorie zur Beschreibung des Plattenverhaltens geht von einer ebenen Platte aus, die Verformungszuwächse, aus denen die Spannungen (Momente) der Platten ermittelt werden, beziehen sich auf eine ebene, ungekrümmte Referenzfläche. Im Sinne der "updated Lagrange- Formulierung" wird beim Übergang von Konfiguration 1 in Konfiguration 2 die neue Lage der Referenzfläche bestimmt. Bei diesem Vorgehen bestimmen sich die geometrisch nichtlinearen Effekte aus der Transformationsbeziehung zwischen der Referenzflächen der unverformten Lage 0 und der verformten Lage.

8.2 Rücktransformation der Spannungen

Ausgangskordinatensystem ist das jeder Platte zugeordnete lokale Koordinatensystem im unverformten Querschnitt 0x , 0y , 0z . Belastungen der Platte bleiben gemäß diesem Koordinatensystem richtungstreu. Die inneren Kräfte hingegen werden am verformten System bestimmt.

Durch eine Rücktransformation der inneren Kräfte ins Ausgangskordinatensystem können diese mit den angreifenden äußeren Kräften ins Gleichgewicht gesetzt und die Ungleichgewichtskräfte ermittelt werden, die dann iterativ zu entfernen sind (siehe Kapitel 9). Die in der Plattenebene wirkenden Scheibenspannungen haben hierbei einen dominierenden Einfluß. Beim gewählten Modell werden nur Längsspannungen aus der Balkenwirkung berücksichtigt, die, unter Voraussetzung kleiner Querschnittsverformungen, dann gemäß Bild 29 transformiert werden. In Bild 29 ist die unverformte Lage einer Platte im Querschnittskordinatensystem und die aus den zusätzlichen Plattenverformungen resultierende verformte Referenzfläche dargestellt. Abhängig von den wirkenden Balkenschnittgrößen kann der Verlauf der Längsspannungen über eine Querschnittsplatte ermittelt werden (für P konstant, für M_y^B , M_z^B , M_w^B linear).

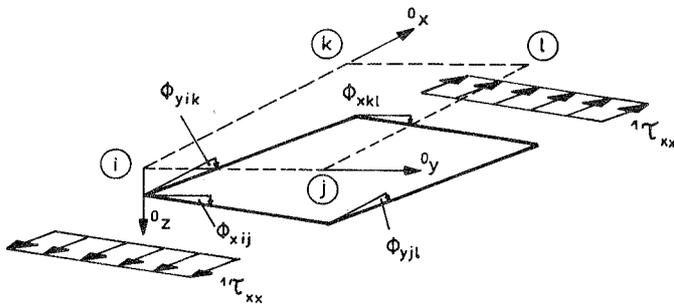


Bild 29: Spannungen in der verformten Lage

Zunächst werden die resultierenden Spannungen der Mittelfläche entsprechend dem Verlauf in y -Richtung in diskrete Knotenkräfte umgerechnet, die dann ins Ausgangskordinatensystem zurücktransformiert werden. Da die Verformungen der Querschnittsplatten als klein vorausgesetzt werden, können die vektoriellen Größen ebenso transformiert werden.

8.3 Spannungsermittlung bei elastisch-plastischem Werkstoffverhalten

Nach Überschreiten des elastischen Werkstoffbereiches können die inneren Kräfte nur noch numerisch bestimmt werden. Die Gründe hierfür wurden in früheren Kapiteln bereits erläutert. Zur Bestimmung der Knotenkräfte wird die in Kapitel 5 beschriebene Werkstoffbeziehung verwendet. Sie ist jedoch erst nach Erreichen der Fließfläche gültig, da sie die Veränderung der einzelnen Kraftkomponenten zueinander, bei einer Bewegung des Spannungspunktes auf der Fließfläche, beschreibt. Es ist dazu allerdings notwendig, den genauen Durchstoßpunkt des Spannungsvektors durch die Fließfläche, also das Lastniveau, bei dem der gerade betrachtete Querschnittspunkt vom elastischen in den plastischen Zustand übergeht, zu kennen. Überschreiten nun innerhalb eines Lastinkrementes ein oder mehrere Punkte die Fließgrenze, so ist unwahrscheinlich, daß für diese Punkte mit einer elastischen Berechnung gerade der Spannungszustand ermittelt wird, der den Durchstoßpunkt charakterisiert. Normalerweise werden die elastisch ermittelten Spannungskomponenten einen Punkt außerhalb der Fließfläche beschreiben. Um aber das angegebene Werkstoffgesetz zur Berechnung der Kräfte verwenden zu können, muß die elastische Spannung korrigiert werden. Anhand eines einfachen zweidimensionalen Beispielen soll dieser Umstand näher erläutert werden, das Vorgehen im Programm wird in Kapitel 9 beschrieben.

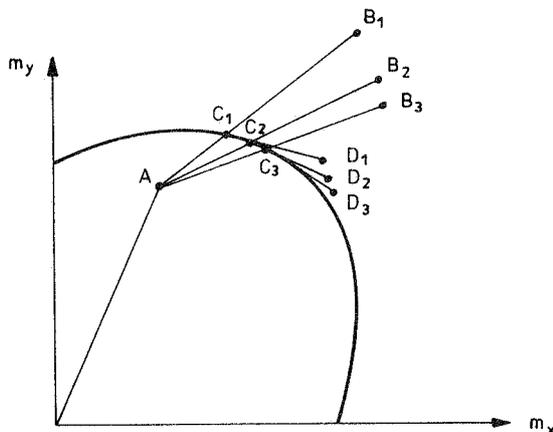


Bild 30: Fließfläche für zwei Spannungsergebnisse

Es wird exemplarisch nur das Verhalten eines einzigen Querschnittspunktes betrachtet. Zunächst werden die Spannungen oder resultierenden Größen

unter Zugrundelegung elastischen Werkstoffverhaltens errechnet. Punkt A beschreibt den Spannungszustand des ausiterierten Inkrementes $i-1$ durch Laststeigerung wird im ersten Iterationsschritt des neuen Inkrementes i der Punkt B_1 erreicht. Die Überprüfung der Spannungen liefert $f > 0$. Mit Hilfe einer Interpolation zwischen dem Punkt B_1 (Inkrement i) und dem Punkt A (Inkrement $i-1$) wird der Durchstoßpunkt C_1 auf der Fließfläche bestimmt. Mit den, diesen Punkt überschreitenden, Dehnungsincrementen und der elastoplastischen Werkstoffmatrix, die aus dem Spannungszustand des Durchstoßpunktes ermittelt wird, wird der Spannungszustand am Ende des Inkrementes i , tangential zur Fließfläche abgeschätzt (Punkt D_1). Mit dieser Abschätzungen werden die Ungleichgewichtskräfte für die Newton - Raphson Iteration ermittelt. Im folgenden Iterationsschritt wird, ausgehend vom Punkt A, auf elastischem Weg der Punkt B_2 errechnet. Damit wird erneut der Durchstoßpunkt (C_2) bestimmt und der Spannungszustand am Ende des Inkrementes (Punkt D_2) abgeschätzt. Dieses Vorgehen wird wiederholt, bis für den Punkt D Konvergenz erreicht wird.

Zur Ermittlung der Knotenkräfte bei elastisch-plastischem Werkstoffverhalten ist ebenso wie bei elastischem Werkstoff die Aufstellung einer Sekantensteifigkeitsmatrix notwendig, die aus der stoff-freien Gleichung (77) hergeleitet werden kann. Diese Matrix wird für jedes Element numerisch ermittelt, indem für jeden Integrationspunkt die zutreffende Werkstoffbeziehung in den Arbeitsterm eingebracht wird. Das Integral über das Elementvolumen wird dabei durch eine Summe über die Integrationspunkte ersetzt. Auswahl und Wichtungsfaktor der einzelnen Punkte ergeben sich aus dem Integrationsverfahren.

In matrizieller Schreibweise kann die innere Arbeit bei Verwendung von elastisch-plastischen Werkstoffmatrizen in folgender Form geschrieben werden.

$$\begin{aligned}
 {}^1\delta W_{(i)} = & \int_V \delta (\mathbf{e}^B)^T \mathbf{C}_n \mathbf{e}^B dV + \int_V \delta (\mathbf{e}^B)^T \mathbf{C}_{nm} \mathbf{k}^B dV \\
 & + \int_V \delta \mathbf{k} \mathbf{C}_m \mathbf{k} dV + \int_V \delta \mathbf{k}^P \mathbf{C}_{nm} \mathbf{e}^B dV \\
 & + \int_V \delta (\mathbf{e}^B)^T \mathbf{C}_n \boldsymbol{\eta}^B dV + \int_V \delta (\mathbf{e}^B)^T \mathbf{C}_{nm} \boldsymbol{\eta}^{BP} dV \\
 & + \int_V \delta (\mathbf{e}^B)^T \mathbf{C}_m \boldsymbol{\eta}^P dV
 \end{aligned} \tag{87}$$

Zusätzlich zu den Abkürzungen der Gleichung (53) wurden folgende Abkürzungen verwendet

$$\delta \mathbf{e} = \delta \mathbf{e}^B + z \delta \mathbf{k} \quad (88a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e}^B + z \cdot \mathbf{k} + \boldsymbol{\eta}^B + \boldsymbol{\eta}^P + \boldsymbol{\eta}^{PB} \quad (88b)$$

$$\boldsymbol{\eta}^P = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x}^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (89a)$$

$$\boldsymbol{\eta}^{PB} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} w_{,x}^P \cdot w_{,x}^B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (89b)$$

Nachdem die in Gleichung (87) enthaltenen Vektoren der Verschiebungsableitungen durch die Ansatzfunktionen in die diskreten Knotenfreiheitsgrade überführt worden sind, kann, durch Auswertung der Integrale, die gesuchte Sekantensteifigkeitsmatrix erstellt werden.

9.0 Implementierung im Rechenprogramm

Das hier entwickelte dreidimensionale Balkenelement mit Profilverformung wurde in das Programmsystem NISA 80 /40/ implementiert. Mit diesem Programm können geometrisch und materiell nichtlineare Probleme berechnet werden. Es ist neben Fachwerk-, Platten-, Scheiben- und Schalenelementen auch ein 3-D Balkenelement zur Berechnung von Balken mit offenem, dünnwandigem Querschnitt enthalten /75/. Aufbauend auf der Grundstruktur dieses Elementes wurde das neue Element eingebaut. Vorhandene Programmteile, wie ein blockstrukturierter Gleichungslöser zur Lösung des Gleichungssystems unter Ausnützung der "Skyline"-Struktur des Systems (Vermeidung von Nulloperationen), Iterationsprozeduren nach der Newton-Raphson und Bogenlängenmethode sowie ein Eigenwertlöser wurden verwendet. Ein vorhandenes Plotprogramm konnte nicht eingesetzt werden, da damit nur die Verschiebungen der Balkenschwerachse darstellbar sind, die hier interessierenden Querschnittsverformungen aber nicht sichtbar werden. Deshalb wurde ein neues Plotprogramm angefertigt, um Ergebnisse zu veranschaulichen und eine optische Kontrolle zu ermöglichen.

9.1 Berechnung von Last-Verformungskurven mit Hilfe eines inkrementellen Rechenverfahrens

Die rechte Seite der Arbeitsgleichung eines geometrisch nichtlinearen Problems hat folgendes Aussehen

$$\mathbf{U} = {}^2\mathbf{R} - {}^n\mathbf{F} \quad 1 \leq n \leq 2 \quad (90)$$

${}^2\mathbf{R}$ stellt den Vektor der äußeren Last und ${}^n\mathbf{F}$ den Vektor der inneren Kräfte in einem Zwischenzustand n dar. Möchte man nun ein nichtlineares Problem berechnen, so sind zu Beginn nur die äußeren Lasten, nicht jedoch die inneren Kräfte des Systems bekannt. Man ermittelt sich also zunächst, unter Vernachlässigung des Einflusses der inneren Kräfte auf die geometrische Steifigkeitsmatrix der linken Seite, die Verformungen des Systems und daraus die inneren Kräfte, wobei nichtlineare Anteile im Verzerrungstensor berücksichtigt werden. Die hieraus resultierenden inneren Kräfte korrespondieren mit dem ermittelten Verformungszustand, nicht jedoch zwangsläufig mit den äußeren Lasten, so daß sich eine Differenz zwischen äußeren Lasten

und inneren Kräften ergibt. Diese Differenzkräfte, die sogenannten "Ungleichgewichtskräfte", müssen zur Befriedigung des Gleichgewichtes iterativ entfernt werden. Im hier verwendeten Programm werden diese Kräfte solange als Last auf das System aufgebracht, bis sich, mit den daraus berechenbaren Verformungsanteilen, die inneren Kräfte im Gleichgewicht mit den äußeren Lasten befinden und die "Ungleichgewichtskräfte" verschwinden. Die hier vorliegende Form der Arbeitsgleichung ist durch die verwendete Linearisierung des nichtlinearen virtuellen Verzerrungstensors $\delta \varepsilon_{ij}$ entstanden. Der Tensor wurde in Hinblick auf das zu erstellende, in den Verformungszuwächsen lineare Gleichungssystem durch seinen linearen Anteil δe_{ij} ersetzt. Werden die ermittelten inneren Kräfte verwendet, um die geometrische Matrix der linken Seite zu verbessern, so wird dadurch zwar die Iterationsgeschwindigkeit verändert, die Richtigkeit des Ergebnisses ist jedoch nur von der Genauigkeit der Schnittgrößen der rechten Seite abhängig. Ein inkrementelles Vorgehen bei der Berechnung von nichtlinearen Problemen ist auch besonders durch die Wegabhängigkeit begründet, so ändert sich zum Beispiel bei Plastizität das Werkstoffverhalten abhängig vom aufgebrauchten Lastniveau und dem erreichten Verformungszustand. Bei der Berechnung sind zwei Kriterien zu beachten, die sich aus den in der Herleitung verwendeten Annahmen ergeben:

1. Die Elemententeilung muß so fein gewählt werden, daß über die aktuelle Sehne des verformten Elementes integriert werden kann.
2. Die Lastinkremente sind klein genug anzunehmen, um weiterhin eine vektorielle Behandlung der Verdrehungsinkremente zu ermöglichen.

9.1.1 Iterationsverfahren

Zur Berechnung von Last-Verformungskurven mit dem erzeugten Element konnten im Programm vorhandene Iterationsverfahren verwendet werden. Sie sind in /75/, /87/ und /92/ ausführlich dargestellt und sollen hier nur kurz erwähnt werden. Die verwendeten Lösungsverfahren sind alle der Gruppe der inkrementell-iterativen Verfahren zuzuordnen, die, im Gegensatz zu rein inkrementellen Methoden, größere Lastschritte erlauben. Sie können in zwei Gruppen eingeteilt werden.

- a.) Iteration mit Lastkontrolle
- b.) Iteration mit Kontrolle der Bogenlänge

In beiden Gruppen kann die Iteration jeweils mit dem Standard- oder dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren durchgeführt werden. Sie unterscheiden sich nur darin, daß beim modifizierten Newton-Raphson-Verfahren die Tangentensteifigkeitsmatrix K nicht in jedem Iterationsschritt, sondern nur bei Bedarf, meistens zu Beginn eines neuen Lastinkrementes aufgestellt wird. Das Standard-Newton-Raphson-Verfahren ist in Bezug auf die Iterationsanzahl meist günstiger, da die neu erstellte Tangentialsteifigkeitsmatrix der sich ändernden Last-Verformungsebene besser angepaßt ist. Von Nachteil hingegen ist, daß die Methode durch häufiges Neuerstellen der Steifigkeitsmatrix rechenintensiver ist als das modifizierte Verfahren. Eine absolute Aussage zugunsten der einen oder der anderen Methode läßt sich nicht treffen, denn vielfach wird der Vorteil von wenigen Iterationsschritten durch die aufwendigere Berechnung innerhalb eines Schrittes kompensiert. Eine Auswahl ist oft am konkreten Beispiel zu treffen, wobei es auch möglich ist, während der Berechnung einer nichtlinearen Last-Verformungsbeziehung das Iterationsverfahren zu wechseln. Die mit b.) bezeichnete Methode der Iteration mit Kontrolle der Bogenlänge kann häufig in den Bereichen, in denen das System infolge hoher Last und dominierenden geometrischen oder materiellen Effekten nur noch eine geringe Steifigkeit aufweist, eingesetzt werden. Die geringe Reststeifigkeit des Systems kann sonst zu numerischen Problemen durch Konvergenzschwierigkeiten, die selbst bei sehr kleinen Lastschritten nicht überwunden werden können und zur Divergenz des Iterationsverfahrens führen. Es ist dann sinnvoll, das Lastinkrement mittels spezieller Algorithmen einer vorgegebenen Bogenlänge anzupassen.

9.1.2 Konvergenz - Divergenz

Um die Konvergenz der verwendeten Verfahren feststellen zu können, muß ein Schrankenwert für die Iterationsbeendigung angegeben werden. Solche Kriterien können lokal oder global in den Verformungen oder den Kräften definiert werden. Bei den lokalen Kriterien wird der Zuwachs der Komponenten im letzten Iterationsschritt auf eine Referenzgröße bezogen. Das im Programm NISA verwendete globale Verformungskriterium hingegen bezieht die Vektornorm der Verschiebungszuwächse des n -ten Iterationsschrittes $\Delta \mathbf{r}^n$ auf die Norm der inkrementellen Verschiebungen $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}^n$.

$$\frac{|| \Delta \mathbf{r}^n ||}{|| \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}^n ||} \leq \varepsilon \quad (91)$$

Hierin ist ε die gewünschte Genauigkeitsschranke. Durch den Bezug auf inkrementelle Größen wird dieses Kriterium bei kleiner werdenden Lastschritten und konstant gehaltenem ε verschärft.

Um Divergenz zu erkennen und damit unnötige Rechenschritte bis zur "numerischen Explosion" zu ersparen wird eine Kräfte norm verwendet, und zwar wird die Norm der Ungleichgewichtskräfte mit der Norm der inkrementellen Lasten verglichen. Dieser Vergleich wird nach der Hälfte der als Maximum vorgegebenen Iterationsschritte ausgeführt. Für den Fall, daß die Ungleichgewichtskräfte größer sind als die inkrementelle Last, wird die Berechnung abgebrochen und mit einem kleineren Lastinkrement oder einem besseren Iterationsverfahren erneut gestartet. Zu diesem Zweck werden im Programm die Daten des letzten ausiterierten Zustandes in einem "Restart-File" gesichert.

9.2 Eigenwertuntersuchungen

Im Gegensatz zum Spannungsproblem gehören beim Stabilitätsproblem mehrere Gleichgewichtslagen zu einem Lastniveau. Die beiden möglichen statischen Instabilitätsformen sind das Durchschlags- bzw. das Verzweigungsproblem.

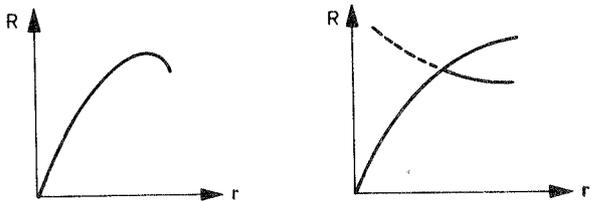


Bild 31: Durchschlagsproblem - Verzweigungsproblem

Bei Stabsystemen ist das Versagen durch Verzweigen häufiger anzutreffen. Es kommen hier die typischen Versagensformen Knicken, Biegedrillknicken oder Beulen von Einzelteilen (Steg oder Flansch) vor. Man muß hierbei zwei Arten von Verzweigungsproblemen deutlich unterscheiden.

a.) Verzweigung aus einem linearen Pfad der Last-Verformungskurve heraus.

b.) Verzweigung aus einem nichtlinearem Pfad der Last-Verformungskurve (nichtlinearer Vorbeulbereich).

Der nur längsbelastete Euler-Stab ist eindeutig der Gruppe a) zuzuordnen, da das Versagen schlagartig, ohne zuvor bemerkbare Verformungen quer zur Stabachse erfolgt. Hier hauptsächlich betrachtete, lokale Versagensformen weisen meist ein nichtlineares Vorbeulverhalten auf, bis der nichtlineare, zur Versagenslast des Balkens als globales System führende Ast, durch einen lokalen oder gekoppelt lokal-globalen Ast der Last-Verformungskurve verlassen wird. Die Definition des statischen Stabilitätsproblems ergibt sich aus dem Indifferenzkriterium, das besagt, daß neben einem im Gleichgewicht befindlichen Grundzustand, mindestens ein infinitesimal benachbarter Zustand existiert, der mit derselben Belastung im Gleichgewicht steht. Daraus ergibt sich die Forderung, daß der Vektor der infinitesimalen Verschiebungsinkremente, der beim Übergang vom einen in den anderen Zustand entsteht, für den Lastvektor Null errechnet werden kann. Das führt auf die Formulierung des Eigenwertproblems in folgender Form

$$[\mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{K}_g] \mathbf{r} = 0 \quad (92)$$

λ ist ein linearer Multiplikator für die geometrische Steifigkeitsmatrix. Es wird also vorausgesetzt, daß sich der im kritischen Zustand vorliegende Spannungszustand durch Extrapolation aus dem Spannungszustand zum Zeitpunkt der Eigenwertuntersuchung ergibt. Es ist häufig ausreichend, zur Beurteilung eines Systems den niedrigsten Eigenwert λ_{krit} als kritischen Lastfaktor zu bestimmen. Wird das Eigenwertproblem ohne Berücksichtigung bereits aufgetretener Verformungen, im Sinne einer Anfangsstabilitätsuntersuchung, gelöst, so erhält man die sogenannte klassische Stabilitätslast.

Zur Lösung des nichtlinearen Stabilitätsproblems wird unter Berücksichtigung bereits eingetretener Verformungen auf einem bestimmten Lastniveau eine lineare Eigenwertanalyse entsprechend Gleichung (84) durchgeführt. Es ist allerdings notwendig, diese Untersuchung begleitend zur nichtlinearen Last-Verformungsbeziehung auf unterschiedlichen Laststufen solange durchzuführen, bis sich der kritische Eigenwert $\lambda_{\text{krit}} = 1$ einstellt. Dieses Vorgehen wird von verschiedenen Autoren zur Bestimmung von Versagenslasten bei Berücksichtigung nichtlinearen Werkstoffverhaltens verwendet [26/,47/.

Die Verzweigungslast in einen lokalen Versagensmodus oder einen gekoppelten lokal-globalen Modus kann auf diesem Weg ermittelt werden. Das Vorgehen soll am Beispiel eines durch Biegung (global) belasteten I-Trägers kurz erläutert werden.

Da keine lokalen Biegeverformungen vorliegen, wird in einem solchen Träger aufgrund hoher Längsspannungen örtlich die Fließgrenze überschritten. Führt man mit den in diesem Lastniveau vorhandenen Materialgrößen eine Eigenwertuntersuchung durch, so wird sich infolge der verminderten Querschnittstragfähigkeit z.B. eine lokale Versagensform einstellen, die unterhalb einer klassischen Stabilitätslast ohne Berücksichtigung nichtlinearen Materialverhaltens liegt. Der zu dieser Laststufe gehörende Lastfaktor λ_1 entspricht allerdings nicht der plastischen Beullast, da der Spannungszustand voraussetzungsgemäß linear bis zum Versagen extrapoliert wurde, was der Wirklichkeit nicht entspricht. Um sie zu ermitteln, muß die Eigenwertuntersuchung auf einem höheren Lastniveau, bei weiter fortgeschrittener Plastizierung wiederholt werden. Der Eigenwert λ_{krit} nimmt bei weiter ansteigendem Lastniveau solange ab, bis der ermittelte Ausgangszustand der Eigenwertuntersuchung dem Endzustand (Versagenszustand) entspricht, also $\lambda_{krit} = 1$ wird. Ein Großteil der in Kapitel 2 aufgeführten Untersuchungen des plastischen, lokal-globalen Stabilitätsproblems beschränken sich auf die Bestimmung der Verzweigungslast in ähnlicher Weise.

9.3 Umsetzung ins Programm - Programmablauf

Der Ablauf der Berechnung wurde der bestehenden Programmstruktur angepaßt, wobei einige Programmteile abhängig von den speziellen Erfordernissen des Elementes anzufertigen waren. Bild 32 zeigt den prinzipiellen Ablauf für ein Lastinkrement, einzelne Programmteile werden im folgenden genauer erläutert.

In den Ablaufdiagrammen (Bild 32 - 35) werden folgende Abkürzungen verwendet:

N	Nummer eines Elementes
NE	Nummer eines Subelementes (Platte)
NUME	max. Anzahl der Elemente
NPLA	max. Anzahl der Subelemente pro Element
Spg.res.	Spannungsergebnisse
St.N.R.	Standard Newton - Raphson Verfahren
Mod.N.R.	Modifiziertes Newton - Raphson Verfahren

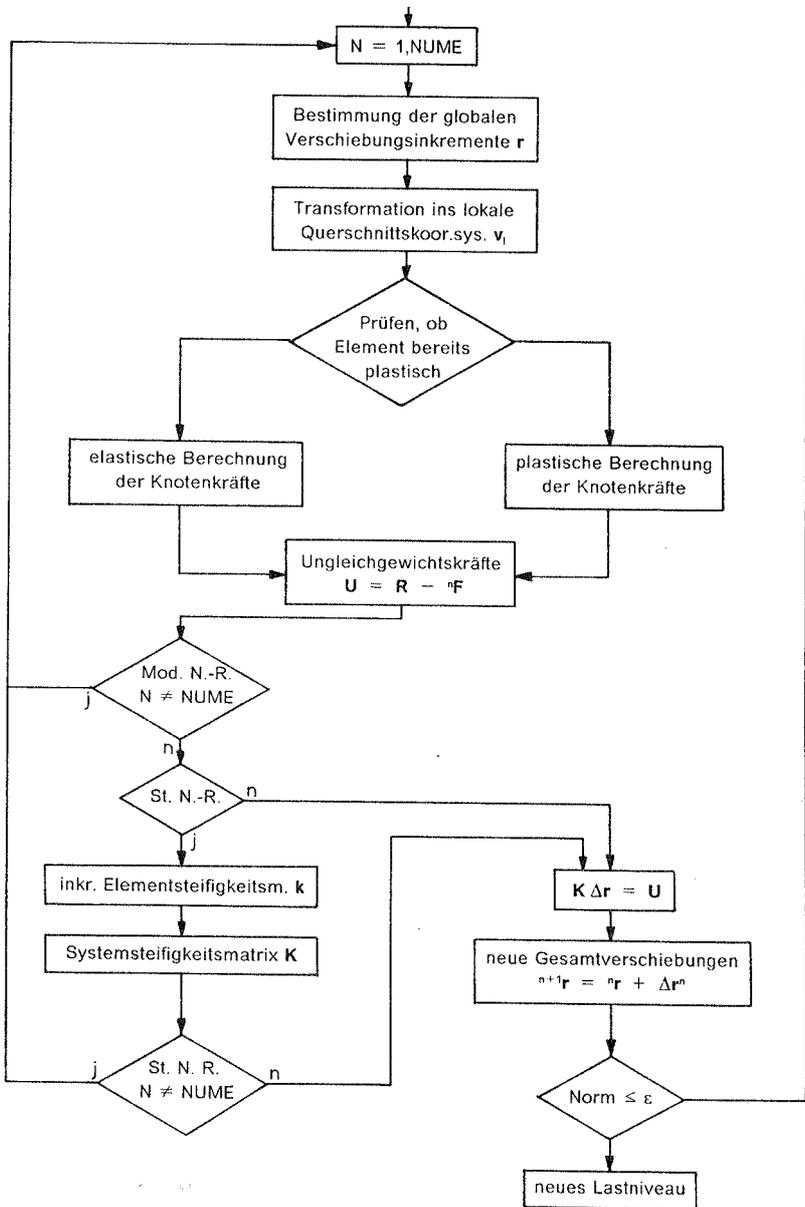


Bild 32: Ablaufdiagramm für die inkrementell-iterative Berechnung

9.3.1 Vorgehen bei der Annahme elastischen Materials

Die Einzelplatten stellen keine eigenständigen Elemente dar, sondern sind Teile eines übergeordneten Balkenelementes. Um allerdings mit den Grundplatten beliebige Querschnittsformen nachbilden zu können, ist es nicht möglich, den Plattenfreiheitsgraden feste Positionen innerhalb der Elementsteifigkeitsmatrix zuzuordnen. Im vorliegenden Programm wird in der Eingabe die Beschreibung des Querschnittes durch Querschnittspunkte, deren Koordinaten im elementfesten Querschnittskordinatensystem anzugeben sind, verlangt. Zwischen diesen Punkten werden die Plattensegmente definiert. Das lokale Koordinatensystem einer Platte wird hierbei durch die Orientierung von Querschnittspunkt i nach j festgelegt. Durch die Angabe mehrerer Punkte auf einem geraden Querschnittsteil ist die Unterteilung dieses Segmentes (z.B. Steg) in mehrere Platten möglich. An jedem Querschnittspunkt muß die Anzahl der lokalen (Platten-) Freiheitsgrade angegeben werden. Hiermit wird die Auswahl der Einzelplatten gesteuert. Die Eingabe dieser Daten ist für jeden neuen Querschnitt im System erforderlich, bei Verwendung eines einheitlichen Querschnittes nur einmal. Aus den Nummern der Querschnittspunkte wird eine Querschnittszuordnungsmatrix erstellt, mit der die Anordnung der Steifigkeitsanteile einzelner Platten in der Elementsteifigkeitsmatrix ermittelt werden kann. Durch eine Summationschleife über alle Querschnittsplatten ergibt sich die gesamte Elementsteifigkeitsmatrix, die nach elastischen und geometrischen Anteilen aufgeteilt wird. Die Kopplungsterme zwischen Balken und Platte werden getrennt nach zusammengehörenden Gruppen von Freiheitsgraden berechnet und in der geometrischen Matrix angeordnet. Die zur Erstellung der geometrischen Matrix notwendigen Spannungen im Zustand 1 $\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \end{Bmatrix}$ werden aus Stabendgrößen und Querschnittswerten des Balkenquerschnittes an den Eckpunkten der Einzelplatten bestimmt. Der Verlauf der Spannungen über die Plattenbreite wurde bereits bei der analytischen Berechnung der Steifigkeitsanteile mitberücksichtigt. In den Diagrammen auf den folgenden Seiten ist der Ablauf der beiden Subroutinen LEST und LGEST zur Erstellung der Elementsteifigkeitsmatrix angegeben.

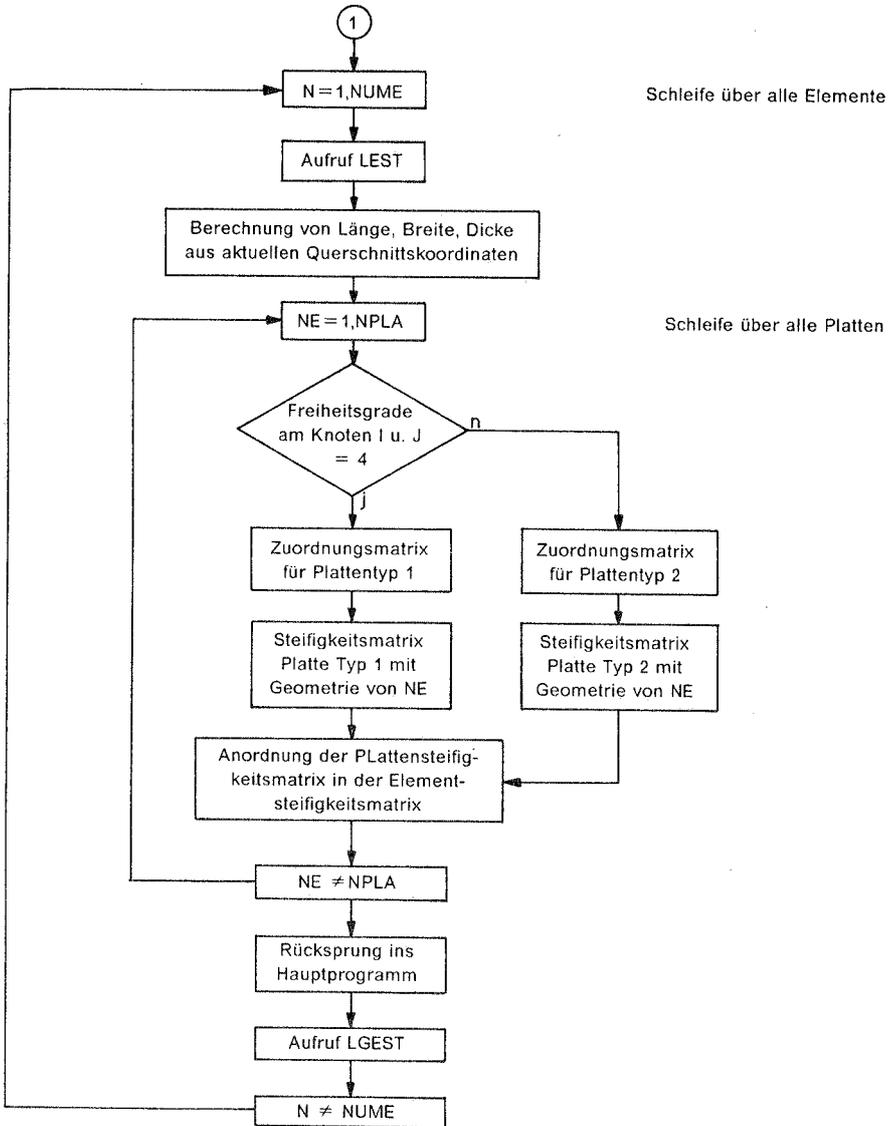


Bild 33: Ablaufdiagramm zur Bestimmung der lokalen Anteile der elastischen Elementsteifigkeitsmatrix

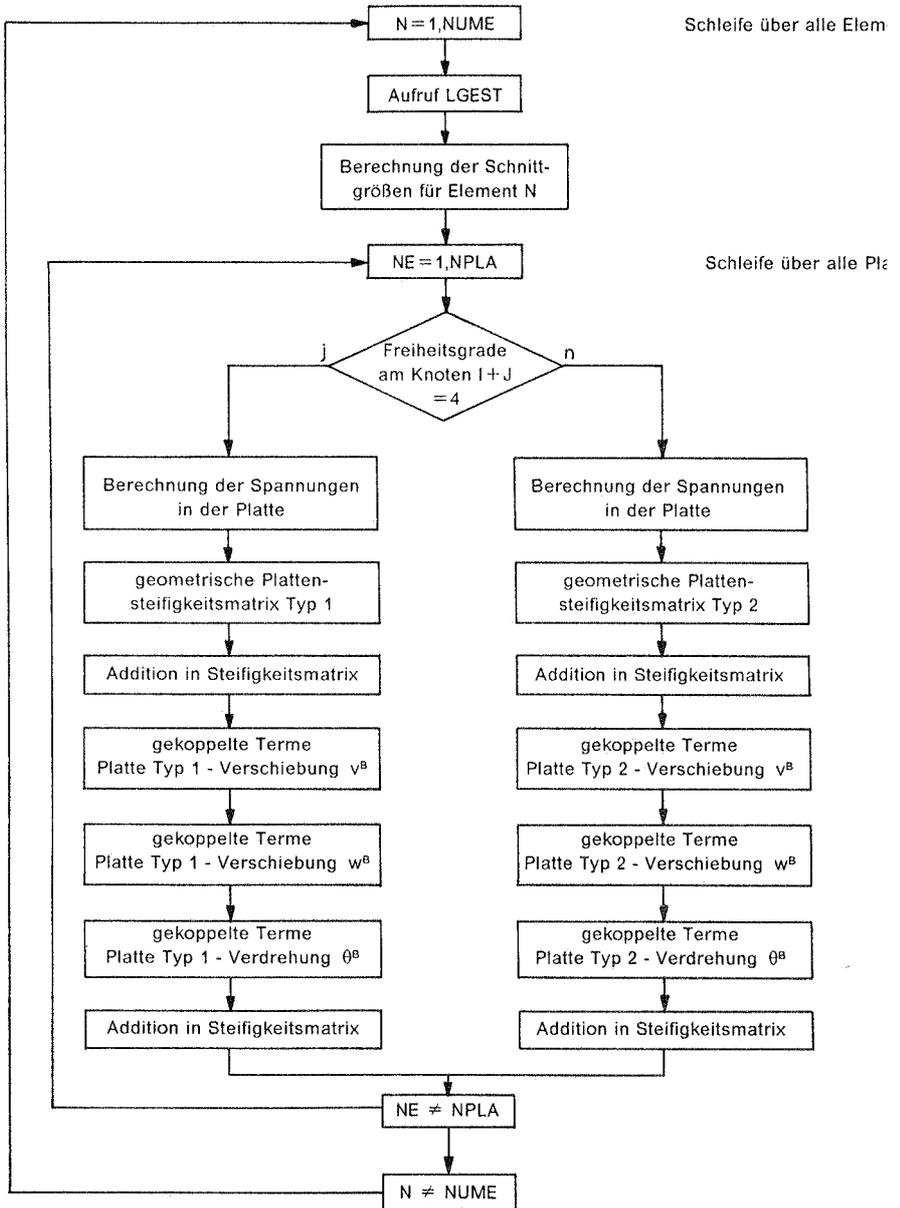


Bild 34: Ablaufdiagramm zur Bestimmung der lokalen Anteile der geometrischen Elementsteifigkeitsmatrix

9.3.2 Programmablauf bei Berücksichtigung plastischen Materials

Die Berücksichtigung eines nichtlinearen Werkstoffes erfordert einen erheblich größeren Aufwand als die rein elastische Berechnung. Zum einen erhöht sich der Rechenaufwand, da die analytisch ermittelten Steifigkeitsmatrizen, aus denen sich direkt die Knotenkräfte ergeben, durch die nur noch punktweise definierbare Werkstoffbeziehung, nicht mehr verwendbar sind. Zum anderen ist durch die Wegabhängigkeit des Problems die Notwendigkeit gegeben, wesentlich mehr Informationen als für die rein elastischen Berechnung abzuspeichern. Für plastisch bzw. teilplastische Elemente wird es notwendig, in einem aktuellen Lastschritt i , neben den Verformungen und der Elementlänge des letzten, ausiterierten Lastniveaus $i-1$, auch die Spannungsergebnisse des zurückliegenden Schrittes $i-1$ zu kennen. Sie sind notwendig, um den Spannungszuwachs an plastischen Punkten, bzw. den Durchstoßpunkt des Spannungsvektors durch die Fließfläche, beim Übergang von elastischem zu plastischem Verhalten, zu ermitteln. Die fünf Spannungsergebnisse (n_x , n_{xy} , m_x , m_y , m_{xy}) werden an den Integrationspunkten auf der Plattenmittelfläche bestimmt. Bei Verwendung der Simpson-Integration sind für jede Platte mindestens drei Punkte in Längs- und Querrichtung, also neun Punkte vorzusehen. Bei einem aus acht Platten zusammengesetzten I-Profil, ergeben sich damit 81 Punkte pro Element, an denen je fünf Spannungswerte vorzuhalten sind. Bei mehr Integrationspunkten steigt der Speicherbedarf multiplikativ an. Um dieser Datenflut Grenzen aufzuerlegen, werden im vorliegenden Programm nur für die Elemente, die auch tatsächlich plastisch geworden sind, die resultierenden Spannungen im Schritt $i-1$ abgespeichert. Dadurch wird eine Variable notwendig, die vor Eintritt in die plastische Berechnung angibt, ob das betrachtete Element im zurückliegenden Schritt bereits plastisch war. Die Feldgröße dieser Variable ist allerdings nur so groß wie die Anzahl der Elemente. Bei einer elastisch-plastischen Berechnung können für jedem Punkt (Integrationspunkt) eines Querschnittes drei unterschiedliche Zustände eintreten.

- A) Element bleibt elastisch.
- B) Element war im Schritt $i-1$ noch elastisch, einzelne Punkte des Elementes überschreiten im betrachteten Schritt i erstmals die Fließgrenze.
- C) Einige Punkte des Elementes waren im Schritt $i-1$ bereits plastisch.

Treten in einem Element erstmals plastische Punkte auf (Zustand B), so wird der Spannungszustand dieses Elementes nach Beendigung der Iteration

abgespeichert. Es wird dabei nicht unterschieden, ob ein Integrationspunkt plastisch oder elastisch ist. Der Code: "Element plastisch" wird bereits beim ersten plastischen Punkt gesetzt. Dieses Vorgehen erfordert zwar im plastischen Ast der Berechnung (Zustand C) eine nochmalige Untersuchung der einzelnen Integrationspunkte, ist aber wirtschaftlicher, da die Elementinformation nur für teilplastische Elemente aufgehoben wird und auch nur diese den rechenintensiveren plastischen Ast durchlaufen. Insbesondere wenn man darüber hinaus berücksichtigt, daß sich beim hier betrachteten Problem des lokalen Versagens, die plastischen Zonen meist örtlich konzentriert in wenigen Elementen einstellen. Der Ablauf der Berechnung ist in Bild 35 dargestellt, er soll zunächst noch etwas ausführlicher erläutert werden. Die Nummern beziehen sich auf die einzelnen im Bild dargestellten Schritte.

Zur Berechnung wird eine Schleife über alle Elemente durchlaufen.

1. Zu Beginn eines jeden Iterationsschrittes innerhalb eines Inkrementes wird der Vektor der globalen Knotenverschiebungsinkremente \mathbf{r} berechnet. Durch Transformation werden die Verschiebungsinkremente des Elementes \mathbf{v}_L bestimmt.
2. Anhand einer Variablen, die für teilplastizierte Elemente von 0 auf 1 gesetzt wird, wird entschieden, ob das Element bisher elastisch war.
 - A1 Ist das Element elastisch, werden mit den Elementverschiebungsinkrementen neue Stabendschnittgrößen berechnet.
 - A2 Die Balkenschnittgrößen werden mit den geometrischen Werten des Querschnittes in Spannungresultanten (n_x, n_{xy}) in den Integrationspunkten auf der Mittelfläche der Querschnittsplatten umgerechnet. Die Umrechnung ist notwendig, da die Fließbedingung nur in diesen Größen formuliert ist.
 - A3 Aus der Werkstoffmatrix und der Matrix der Ableitungen der Ansatzfunktionen werden die Plattenmomente an den Integrationspunkten (m_x, m_y, m_{xy}) berechnet.
 - A4 Mit den ermittelten Spannungresultanten wird die Einhaltung der Fließbedingung überprüft. Ist $f_i \leq 1$ können die Knotenkräfte (Balkenschnittgrößen und fiktive Knotenkräfte der Platten) durch Integration der Spannungresultanten für das betrachtete Element ermittelt werden.

- B** Alle Schritte müssen für jeden Integrationspunkt durchgeführt werden.
- B1** Ist die Fließbedingung überschritten $f_i > 1$, dann wird mit den vorhandenen Verschiebungen des letzten Schrittes der Spannungszustand des Lastniveaus $i-1$ ermittelt.
- B2** Aus dem Spannungszustand wird die Fließfunktion im Zustand $i-1$ bestimmt.
- B3** Für jeden Punkt wird näherungsweise der Faktor berechnet, an dem der Spannungsvektor die Fließfläche berührt $a = \frac{1 - f_{i-1}}{f_i - f_{i-1}}$
- B4** Mit diesem Faktor werden die Spannungsergebnisse bei Erreichen der Fließfläche abgeschätzt (Index E ... estimate).
Hier

$$\sigma = \begin{bmatrix} n_x \\ n_{xy} \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_E = [1 - a] \sigma_{i-1} + a \sigma_i$$

- B5** Mit den abgeschätzten Spannungsergebnissen wird die Werkstoffmatrix des Punktes ermittelt und damit die resultierenden Spannungen des Lastinkrementes nach folgender Beziehung berechnet

$$\sigma_{i,PL} = \sigma_{i,E} + [1 - a] \mathbf{C}_{PL,E} \varepsilon$$

- B6** Punkte, an denen die Fließgrenze nicht überschritten wird, bleiben gegenüber der elastischen Berechnung unverändert. Aus den resultierenden Spannungen werden die Knotenkräfte durch numerische Integration gewonnen.

Ein Punkt wird erst nach Beendigung der Iteration als plastischer Punkt abgespeichert. Während der Iteration wird der Faktor zur Bestimmung des Durchstoßpunktes immer wieder neu ermittelt.

- C1** Für Elemente die plastisch waren, sind die resultierenden Spannungen des vorangegangenen Schrittes $i-1$ abgespeichert. Der Wert der Fließfunktion wird für jeden Punkt neu ermittelt.
- C2** Mit der Werkstoffmatrix des letzten ausiterierten Zustands werden die resultierenden plastischen Spannungsinkremente nach dem aktuellen Schritt i abgeschätzt und zu den Spannungsergebnissen des vorherigen Schrittes addiert. Für die Spannungsinkremente an den bisher elastischen Punkten wird die elastische Werkstoffmatrix verwendet.
- C3** Mit den geschätzten Spannungsergebnissen wird die Fließfunktion des aktuellen Schrittes bestimmt. Es ergeben sich drei Verzweigungsmöglichkeiten:
- 1 ... Punkt war elastisch ($f_{i-1} \leq 1$)
und bleibt elastisch ($f_i \leq 1$) → weiter A5
 - 2 ... Punkt war elastisch ($f_{i-1} < 1$)
und wird plastisch ($f_i \geq 1$) → weiter B3
 - 3 ... Punkt war plastisch ($f_{i-1} \geq 1$)
und bleibt plastisch ($f_i > 1$) → weiter C4
- C4** Die Spannungen nach dem letzten Inkrement und nach dem aktuellen Schritt werden gemittelt.
- C5** Mit der neuen Spannungsschätzung wird eine neue Werkstoffmatrix $C_{PL,av}$ ermittelt.
- C6** An den plastischen Punkten werden die Spannungsergebnisse nach folgender Formel bestimmt
- $$\sigma_{i,PL} = \sigma_{i-1} + C_{PL,av} \varepsilon$$
- C7** Die Knotenkräfte werden durch Integration erzeugt.

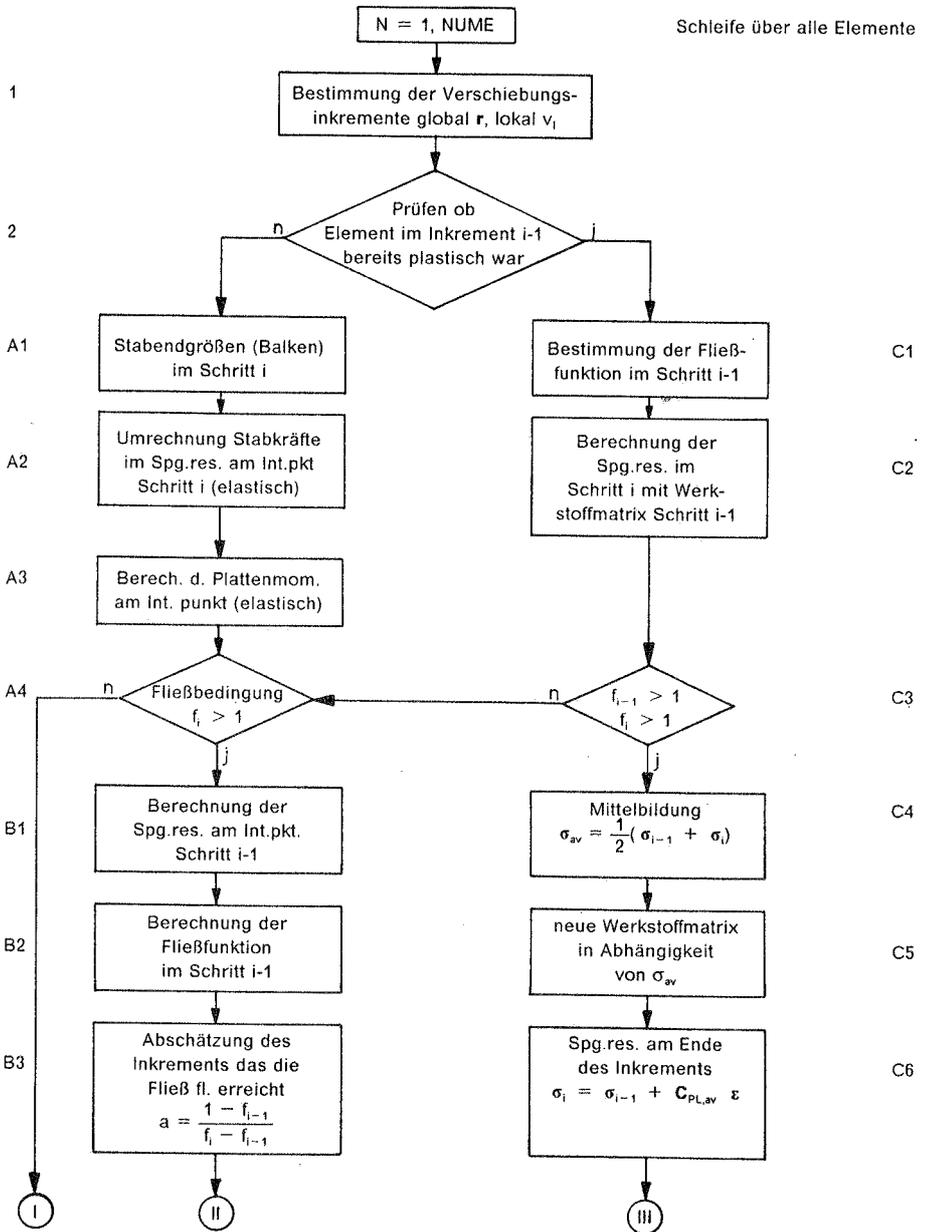


Bild 35 a: Ablaufdiagramm bei plastischem Werkstoffverhalten

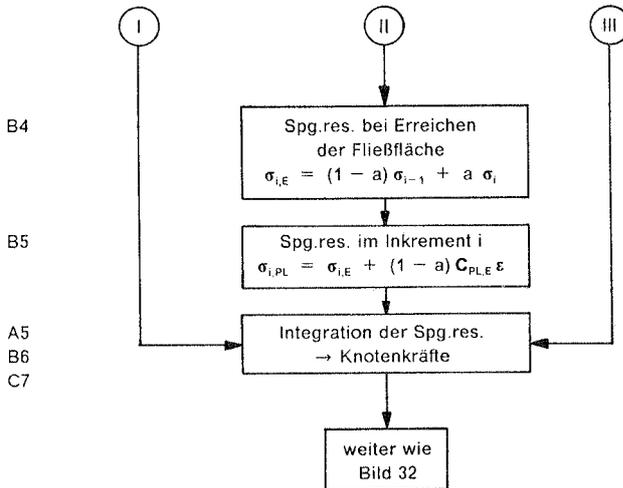


Bild 35 b: Ablaufdiagramm bei plastischem Werkstoffverhalten

Der weitere Weg der Berechnung ist für plastische und elastische Elemente prinzipiell gleich und folgt dem in Bild 32 beschriebenen Weg.

Für jedes Element wird der Vektor der Ungleichgewichtskräfte durch die Differenz der äußeren Lasten und der inneren Kräfte bestimmt. Das Gleichungssystem wird für die verbleibenden Ungleichgewichtskräfte erneut gelöst, bis die Norm der Verschiebungszuwächse im aktuellen Iterationsschritt, bezogen auf den Gesamtverschiebungszuwachs im Inkrement, die vorgegebene Genauigkeitsschranke nicht mehr übersteigt. Je nach verwendeten Iterationsverfahren (Standard Newton-Raphson oder modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren) wird die inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix neu erstellt. Mit den vorhandenen Spannungsergebnissen an jedem Integrationspunkt kann punktweise die Werkstoffmatrix erzeugt werden, aus der sich wiederum auf numerischem Weg die Elementsteifigkeitsmatrix berechnen läßt.

10.0 Berechnete Beispiele bei elastischem Materialverhalten

Die in diesem Kapitel aufgeführten Beispiele wurden unter der Voraussetzung elastischen Materialverhaltens berechnet. Der Schwerpunkt liegt auf der Überprüfung des entwickelten Berechnungsverfahrens und dem Studium unterschiedlicher Einflußgrößen. Die Begrenzung der Tragfähigkeit bei Überschreitung der Fließgrenze wurde hierbei außer Acht gelassen.

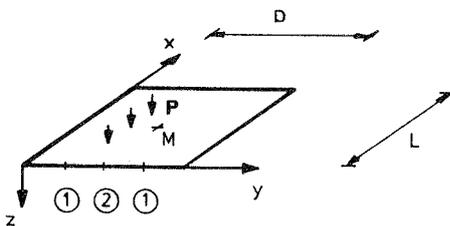
Die Berechnungen der Beispiele 10.1 - 10.4 wurden im Rahmen einer vom Verfasser betreuten Diplomarbeit /31/ durchgeführt.

10.1 Parameterstudien zur linearen Plattenbiegung

Zunächst soll mit dem neu entwickelten Element reines Plattenverhalten untersucht werden. Da ein Querschnitt auf unterschiedliche Art und Weise aus Einzelplatten zusammengesetzt wird, wurden einige Parameterstudien durchgeführt, die grundlegende Erkenntnisse für weitere Berechnungen liefern sollten; denn die Einteilung, Anzahl und Form der Plattenelemente, sowie die verwendeten Plattentypen (Anzahl der Freiheitsgrade) nehmen starken Einfluß auf die Ergebnisse.

Es wurden zwei verschiedene Plattenelemente auf ihre Brauchbarkeit hin getestet. Ein vierknotiges Element mit 12 Freiheitsgraden (Verdrehungen φ_x , φ_y und Vertikalverschiebung v) und ein vierknotiges Element mit 16 Freiheitsgraden (zusätzlich φ_{xy}). Endgültig implementiert wurde das Element mit 16 Freiheitsgraden (im weiteren mit PL 16 bezeichnet), da die Ergebnisse aufgrund des besseren Elementverhaltens erheblich genauer waren. Die mit diesem Element durchgeführten Untersuchungen sind in den beiden folgenden Beispielen auszugsweise dargestellt.

Beispiel 10.1.1: Vierseitig naviergelagerte Quadratplatte mit Gleichlast



$$\begin{aligned} L &= 100 \text{ cm} \\ D &= 100 \text{ cm} \\ t &= 0.5 \text{ cm} \\ E &= 2.1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\ \nu &= 0.0 \\ p &= 10^{-4} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$

Verformungen								
Element	Elem.anz.		v_M [cm]	φ_{x1} [10 ⁻³]	φ_{x2} [10 ⁻³]	φ_{y1} [10 ⁻³]	φ_{y2} [10 ⁻³]	max. Abw. [%]
	x-Ri	y-Ri						
exakt			0.186	4.50	6.15	-4.50	-6.15	
PL16	4	4	0.186	4.51	6.12	-4.51	-6.17	0.5
	4	2	0.187	4.65	6.24		-6.21	1.0
	4	1		5.03	6.93			12.6
	2	2	0.188		6.28		-6.28	2.0

Tabelle 10.1: Quadratplatte mit Flächenlast

Momente						
Element	Elem.anz.		m_{xM} [10 ⁻³ kNm/m]	m_{yM} [10 ⁻³ kNm/m]	m_{xyE} [10 ⁻³ kNm/m]	max. Abw. [%]
	in x	in y				
exakt			36.76	36.76	46.29	
PL16	4	4	37.86	37.86	46.68	2.9
	4	2	38.10	43.68	47.11	18.0
	2	2	44.00	44.00	47.73	19.6

Tabelle 10.2: Quadratplatte mit Flächenlast

Aus den in den Tabellen 10.1 und 10.2 können zur Frage der Elementeteilung wichtige Informationen gewonnen werden. Die Bestimmung von Verformungen kann mit einer Minimalidealisierung von 2×2 Elementen für eine Einzelplatte genügend genau durchgeführt werden. Das heißt, wenn es nur auf die Genauigkeit der Verformungen ankommt, z.B. bei der Bestimmung des Lastfaktors λ in einer linearen Eigenwertuntersuchung, dann sind mit wenigen Elementen bereits gute Ergebnisse erzielbar. Spielt allerdings die Genauigkeit der ermittelten Spannungen eine dominierende Rolle, sollten mehr Subelemente pro Element verwendet werden, um brauchbare Ergebnisse zu erzielen. Die hier gewählte maximale Idealisierung von 4×4 Elementen erscheint ausreichend zu sein.

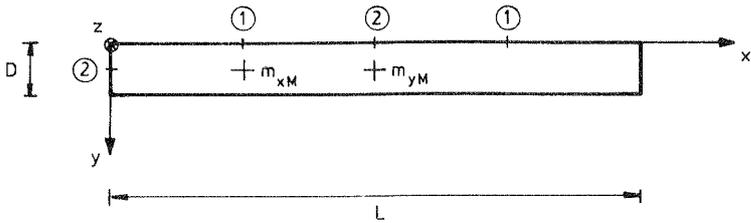
Im Beispiel 10.1.2 wurde als weiterer wichtiger Einflußfaktor das Längen zu Breiten - Verhältnis eines Elementes untersucht.

Das Plattenelement muß als Subelement eines übergeordneten, globalen Balkenelementes gesehen werden. Die Einteilung des Balkenelementes in Einzelplatten wird am Anfang der Berechnung vorgegeben, wobei darauf geachtet werden sollte, die Einteilung des Querschnittes in Einzelplatten nicht unnötig fein zu wählen, da dadurch die Elementsteifigkeitsmatrix aufgebläht wird. Eine Verfeinerung der Idealisierung durch mehr Balkenelemente ist dagegen weitgehend unkritisch, da die Unterteilung in Längsrichtung die Bandstruktur der Gesamtsteifigkeitsmatrix nicht stört und die Brauchbarkeit nicht verändert. Prinzipiell kann man sagen, daß eine feinere Idealisierung mit Balkenelementen eine lineare Erhöhung des Rechenaufwands bedeutet, während eine feinere Querschnittsidealisierung durch Erhöhung der Freiheitsgrade und der Bandbreite etwa quadratisch in die Rechenzeit eingeht.

Wird nun die Systemidealisierung lediglich durch eine feinere Unterteilung in Längsrichtung verbessert, kann dies infolge einer Änderung des Längen zu Breiten - Verhältnisses der Plattenelemente zum gegenteiligen Effekt führen. Es ist also wichtig eine Grenze der Elementform festzulegen, bei der noch keine negativen Einflüsse sichtbar werden.

Die Untersuchungen der Beispiele 10.1.1 und 10.1.2 sollen unter Beachtung der oben genannten Kriterien eine Minimalidealisierung des Querschnittes durch Einzelplatten festlegen und damit eine sinnvolle Idealisierung der Querschnitte weiterer Beispiele gewährleisten.

Beispiel 10.1.2: Vierseitig naviergelagerte Rechteckplatte mit Gleichlast



$$\begin{aligned}
 L &= 1000 \text{ cm} \\
 D &= 100 \text{ cm} \\
 t &= 0.5 \text{ cm} \\
 E &= 2.1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \\
 \nu &= 0.0 \\
 p &= 10^{-4} \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}
 \end{aligned}$$

Verformungen								
Element	Elem.anz.		Elem. verh.	v_M [cm]	φ_{x1} [10^{-3}]	φ_{x2} [10^{-3}]	φ_{y2} [10^{-3}]	max. Abw. [%]
	x-Ri	y-Ri						
exakt				0.594	19.00	19.04	-9.28	
PL16	40	4	1 : 1	0.595	19.01	19.05	-9.29	0.1
	20	4	2 : 1	0.595	19.01	19.05	-9.35	0.7
	8	4	5 : 1	0.595	19.00	19.05	-9.84	6.2
	20	2	1 : 1	0.595	19.01	19.05	-9.38	1.0
	8	2	2.5 : 1	0.595	19.00	19.05	-9.88	6.4
	8	1	5 : 1		19.02	19.02		
	4	1	2.5 : 1		18.61	18.61		

Tabelle 10.3: Rechteckplatte mit Flächenlast

Momente						
Element	Elem.anz.		m_{yM} [$10^{-3}kNm/m$]	m_{xM} [$10^{-3}kNm/m$]	m_{xyE} [$10^{-3}kNm/m$]	max. Abw. [%]
	in x	in y				
exakt			124.88	24.00	67.60	
PL16	40	4	130.02	25.67	68.11	6.9
	20	4	130.02	25.50	68.50	6.3
	8	4	130.02	24.20	70.79	4.7
	20	2	145.80	27.20	69.00	16.7
	8	2	145.80	24.44	71.27	16.7
	8	1	83.30	22.90	74.85	50.0
	4	1	82.45	18.72	69.74	51.4

Tabelle 10.4: Rechteckplatte mit Flächenlast

Die Ergebnisse verdeutlichen, daß bis zu einem Seitenverhältnis 4 : 1 keine zu grossen Abweichungen durch eine Elementverzerrung zu erwarten sind. Bei darüber hinausgehenden Verhältnissen nehmen die Abweichungen langsam zu. Das gewählte Gesamtverhältnis der Platte entspricht der häufig vorkommenden Form der Platten, z.B. als Stegplatte eines Balkens. Darüber hinaus macht diese Parameterstudie deutlich, daß vorallem das Biegemoment m_y bei der hauptsächlich einachsig gespannten Platte durch die Anzahl der Plattenelemente in Querschnittsrichtung beeinflusst wird. Um hier ausreichend genaue Ergebnisse zu erhalten, ist die Idealisierung des Querschnittes mit 4 Platten notwendig.

Die in beiden Beispielen verwendete Minimalidealisierung mit einer Platte in Querrichtung entspricht der von Rajasekaran /82/ verwendeten Elemententeilung; es zeigt sich bereits hier, daß sein Element für Biegezustände von Stegplatten nur bedingt einsetzbar ist.

10.2 Beuluntersuchungen ebener Rechteckplatten

Wird, wie in dieser Arbeit, ein spezielles Element für eine spezielle Fragestellung entwickelt, so muß die Genauigkeit der Näherung durch einen Vergleich mit existierenden Lösungen erfolgen. Analytische Lösungen werden, im Rahmen einer Theorie, oft als exakte Lösungen angesehen, da sie weitgehend frei von numerischen Ungenauigkeiten und dem Problem der Idealisierung sind.

Es wurden zunächst Beuluntersuchungen an den beiden Einzelplattentypen durchgeführt. Durch Vergleich der Beulrandspannung mit bekannten Lösungen sind Parameterstudien möglich, die weitere Aufschlüsse über das Verhalten des neuen Elementteils - die Plattenwirkung - ergeben.

Die Beulrandspannung von Rechteckplatten kann mit folgender Formel beschrieben werden (vgl. Petersen /79/):

$$\sigma_{\text{al}} = \frac{k_{\sigma} E \pi^2}{[12(1 - \nu^2)]} \left(\frac{t^2}{D^2} \right)$$

k_{σ} stellt einen Einflußfaktor der Lagerbedingungen, Geometrie und Randspannungen dar.

Die Geometrie und die Belastung der Einzelplatten werden im Hinblick auf den Einsatz des Elementes als Teil eines Balkenquerschnittes ausgewählt. Die Form wurde ausgehend von der Quadratform in Längsrichtung variiert. Es ergaben sich Beulformen mit einer Sinus-Halbwellen in Quer- und mehreren (abhängig vom Längenverhältnis) in Längsrichtung.

Als Belastungstyp wird zunächst eine konstante Längsdruckkraft angesetzt, die dann schrittweise in eine linear verteilte Längsspannung umgesetzt wird. Damit können die wichtigsten, aus einem Balken resultierenden, Spannungsverläufe für die Einzelelemente erfaßt werden.

10.2.1 Beuluntersuchungen vierseitig gelenkig gelagerter Rechteckplatten

Die im folgenden dargestellten Plattentypen werden untersucht und mit dem analytischen Wert der Beulrandspannung nach /79/ verglichen.

Berechnete Platten						
Plattentyp	Lagerung	L	D	t	in [cm]	
P1	vierseitig gelenkig	100	100	0.5		
P2	vierseitig gelenkig	150	100	0.5		
P3	vierseitig gelenkig	200	100	0.5		
P4	vierseitig gelenkig	500	100	0.5		
P5	dreiseitig gelenkig	100	100	0.5		
P6	dreiseitig gelenkig	200	100	0.5		
P7	dreiseitig gelenkig	500	100	0.5		

Lastidealisierung		
$F \sigma_{Kl}$	σ_{Kl}	$F \sigma_{Kl}$
$F = 1$	$F = 0$	$F = -1$
F Formfaktor des Randspannungsverlaufs		

Tabelle 10.5: Plattentypen

Platte	Elem.anz.		Beulform	Rechnung σ_{Kl} [kN/cm ²]	Literatur /79/	Abw. [%]
	x-Ri	y-Ri				
P1	4	4	1 HW	1.898	1.898	0.0
	4	4	2 HW	2.960	2.966	0.2
	4	4	3 HW	5.414	5.272	2.7
P2	6	4	2 HW	2.060	2.059	0.0
	6	4	1 HW	2.228	2.227	0.0
P3	8	4	2 HW	1.898	1.898	0.0
	8	4	3 HW	2.230	2.228	0.1
	8	4	1 HW	2.967	2.966	0.0

Tabelle 10.6: Beulrandspannung in Abhängigkeit von Plattenverhältnis und Beulform

Platte	Elem.anz.		Beulform	Rechnung σ_{Kl} [kN/cm ²]	Literatur /79/	Abw. [%]
	x-Ri	y-Ri				
P1	2	2	1 HW	1.905	1.898	0.4
	2	2	2 HW	3.375	2.966	13.8
	1	4	1 HW	2.021	1.898	6.5
	1	4	2 HW	3.020	2.966	1.8
	1	2	1 HW	1.918	1.898	1.0
	1	2	2 HW	3.236	2.966	9.3
P2	3	2	2 HW	2.080	2.059	1.1
	3	2	1 HW	2.236	2.227	0.4
P3	4	2	2 HW	1.906	1.898	0.4
	4	2	3 HW	2.264	2.228	1.6
	4	2	1 HW	2.981	2.966	0.5
	2	4	2 HW	1.994	1.898	5.1
	2	4	3 HW	2.696	2.228	21.0
	2	4	1 HW	3.013	2.966	1.3
	4	1	2 HW	2.024	1.898	6.6
	4	1	3 HW	2.324	2.228	4.3
	2	1	2 HW	2.115	1.898	11.5
	2	1	3 HW	2.753	2.228	23.6
P4	8	2	5 HW	1.910	1.898	0.6
	8	2	6 HW	1.987	1.962	1.3
	8	2	4 HW	2.003	1.994	0.4

Tabelle 10.7: Beulrandspannung in Abhängigkeit der Idealisierung

		F = 1.0						F = 0.0						F = -1.0					
Platte	Elem.anz.	Beulform	Rechnung	Literatur	Abw.														
P1	4	4	1 HW	1.898	0.0	1 HW	3.709	3.706	0.0	2 HW	12.42	12.10	2.6	2 HW	12.42	12.10	2.6		
	4	4	2 HW	2.966	0.2	2 HW	5.543	3.706	0.8	1 HW	13.10	12.10	14.0	1 HW	13.10	12.10	14.0		
	2	2	1 HW	1.905	0.4	1 HW	3.735	3.706	0.8	2 HW	13.79	12.10	14.0	2 HW	13.79	12.10	14.0		
	2	2	2 HW	3.375	13.8	2 HW	6.296	6.296		1 HW	14.00	14.00		1 HW	14.00	14.00			
P2	6	4	2 HW	2.060	0.0	2 HW	4.018	4.010	0.2	3 HW	12.20	11.39	7.1	3 HW	12.20	11.39	7.1		
	6	4	1 HW	2.228	0.0	1 HW	4.425	4.010	0.5	2 HW	12.49	11.39	8.6	2 HW	12.49	11.39	8.6		
	3	2	2 HW	2.080	1.1	2 HW	4.028	4.010	0.5	3 HW	12.37	11.39	8.6	3 HW	12.37	11.39	8.6		
	3	2	1 HW	2.236	0.4	1 HW	4.420	4.420		2 HW	13.79	11.39	8.6	2 HW	13.79	11.39	8.6		
P3	8	4	2 HW	1.898	0.0	2 HW	3.708	3.706	0.0	3 HW	11.38	11.39	0.0	3 HW	11.38	11.39	0.0		
	8	4	3 HW	2.230	0.1	3 HW	4.268	3.706	0.8	4 HW	13.79	11.39	7.0	4 HW	13.79	11.39	7.0		
	4	2	2 HW	1.910	0.6	2 HW	3.735	3.706	0.8	3 HW	12.18	11.39	7.0	3 HW	12.18	11.39	7.0		
	4	2	3 HW	2.230	1.3	3 HW	4.352	4.352		4 HW	13.79	11.39	7.0	4 HW	13.79	11.39	7.0		
P4	20	4	5 HW	1.899	0.1	5 HW	1.898	1.898	0.1	7 HW	11.66	11.38	2.3	7 HW	11.66	11.38	2.3		
	20	4	6 HW	1.965	0.1	6 HW	1.962	1.962	0.1	5 HW	12.01	11.38	10.4	5 HW	12.01	11.38	10.4		
	8	2	5 HW	1.910	0.6	5 HW	1.898	1.898	0.6	7 HW	12.57	11.38	10.4	7 HW	12.57	11.38	10.4		
	8	2	6 HW	1.987	1.3	6 HW	1.962	1.962	1.3	5 HW	12.86	11.38	10.4	5 HW	12.86	11.38	10.4		

Tabelle 10.8: Beulrandspannung σ_{ki} [kN/cm^2] in Abhängigkeit von der Idealisierung und der Spannungsverteilung

Platte	Randspannung	Beulform	Rechnung $\sigma_{Kl} [kN/cm^2]$	Literatur /79/	Abw. %	Beulform	Rechnung $\sigma_{Kl} [kN/cm^2]$
P1	F = 1.0	1 HW	1.898	1.898	0.0	2 HW	2.960
	F = 0.4	1 HW	2.696	2.695	0.0	2 HW	
	F = 0.0	1 HW	3.709	3.706	0.0	2 HW	5.543
	F = -0.2	1 HW	4.510	4.510	0.0	2 HW	6.457
	F = -0.3	1 HW	5.031	4.980	0.1	2 HW	6.985
	F = -0.4	1 HW	5.660	5.669	0.2	2 HW	7.563
	F = -0.5	1 HW	6.419	6.400	0.2	2 HW	8.192
	F = -0.6	1 HW	7.332	7.260	1.0	2 HW	8.875
	F = -0.7	1 HW	8.426	8.350	1.0	2 HW	9.612
	F = -0.8	1 HW	9.718	9.727	0.9	2 HW	10.410
	F = -0.9	1 HW	11.210	10.910	2.7	2 HW	11.270
F = -1.0	2 HW	12.420	12.100	2.6	1 HW	13.000	

Tabelle 10.9: Beulrandspannung in Abhängigkeit von der Belastungsverteilung

Einteilung	Elem.anz.		Literatur /79/	Eigene Rechnung σ_{kl} [kN/cm ²]	Abw. %
	in x	in y			
a	4	4	12.10	12.42	2.6
b	4	4	12.10	12.18	0.7
c	4	4	12.10	12.21	0.9
d	4	4	12.10	12.18	0.7
b	8	4	12.10	12.15	0.4
c	8	4	12.10	12.16	0.5
d	8	4	12.10	12.15	0.4

Art der Elementeinteilung (konstante Unterteilung in x-Richtung)

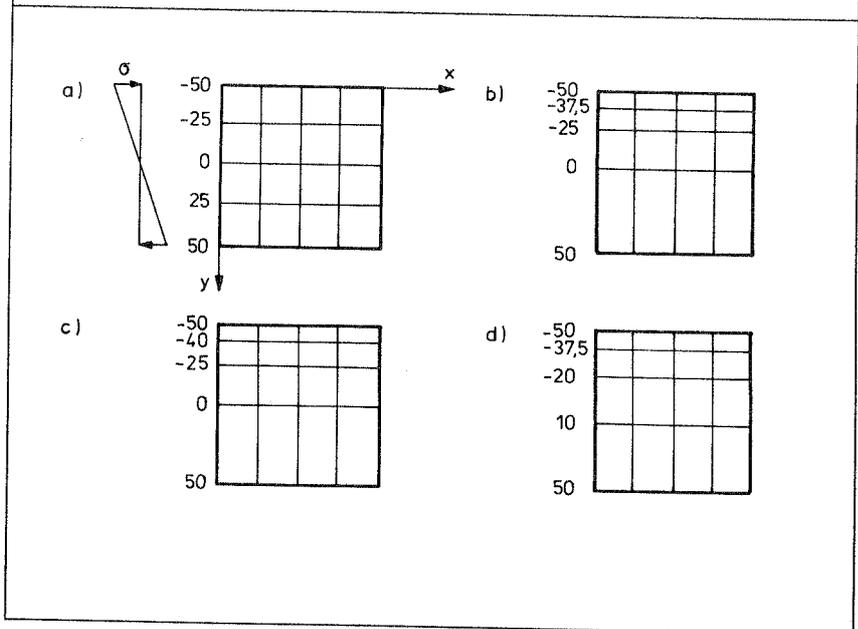


Tabelle 10.10: Abhängigkeit der Beulrandspannung von der Elementeinteilung in Querrichtung

In Tabelle 10.6 sind die Ergebnisse in Abhängigkeit von den Plattenseitenverhältnissen und der Beulform aufgetragen. Hier wurde zunächst nur die äußere Form variiert, die Elemententeilung wurde so angepaßt, daß sich für die einzelnen Elemente die optimale Form (Quadrat) ergab. Die Ergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Sollwerten der analytischen Lösung. Es fällt allerdings auf, daß höhere Beulmodi mit mehrwelligem Beulmuster stärker vom exakten Wert abweichen. Der zunehmende Fehler ist in der Elemententeilung begründet, denn bei höherer Beulwellenzahl stehen bei gleichbleibender Einteilung weniger Elemente zur Darstellung einer Beulhalbwellen zur Verfügung. Die Betrachtung eines Extremfalls macht diese Erklärung noch deutlicher. Verwendet man zum Beispiel nur 1 Element um noch 2 oder mehr Wellen darzustellen, so kann der gewählte dargestellte Verschiebungsansatz nicht mehr zutreffend sein. An den Ergebnissen einer weiteren Untersuchung (Tabelle 10.7), bei der die Elemententeilung der vier Plattentypen bis hin zur Minimalidealisierung von 2×1 Element verändert wurde, läßt sich dieser Zusammenhang ebenfalls ablesen.

Als weiterer Einfluß wurde die Veränderung des Randspannungsverlaufs für unterschiedliche Idealisierungen untersucht. Die Werte können der Tabelle 10.8 entnommen werden. Es werden immer die ersten beiden Eigenwerte mit den zugehörigen Eigenformen ermittelt. Für die 4 Platten wurden die Randspannungen von einer konstanten Verteilung ausgehend bis zu einer linearen Randspannungsverteilung mit gleich großen Zug- und Druckordinaten variiert. Der Einfluß der Elementanzahl pro Beulhalbwellen ist auch hier deutlich erkennbar, wobei ein weiterer negativer Einfluß aus der linear veränderten Randspannung resultiert. Die Untersuchung zeigt, daß eine Idealisierung von 2 oder mehr Elementen pro Halbwellen zu ausreichenden Ergebnissen führt. Sinkt jedoch die Elementanzahl unter 3 Elemente für 2 Halbwellen, so sind verhältnismäßig große Abweichungen zu erwarten. Das Seitenverhältnis der Einzelplatten sollte in diesen Fällen ein Verhältnis von $2 : 1$ nicht überschreiten, da sonst durch die Überlagerung mehrerer negativer Einflüsse die Genauigkeit der Ergebnisse beeinträchtigt wird.

Am Beispiel der Quadratplatte wurde der Einfluß der Randspannungsverteilung unabhängig von anderen Parametern genauer untersucht. Die Werte der Tabelle 10.9 wurden alle mit einer Einteilung von 4×4 Elementen ermittelt. Es zeigt sich dabei, daß die berechneten Beulwerte dann größere Abweichungen von den Sollwerten aufweisen, wenn der Verlauf der Randspannung sich dem Grenzlastfall mit gleichgroßer Druck- bzw. Zugordinate nähert. Die Erklärung hierfür liegt ebenfalls in der abnehmenden Elementanzahl pro

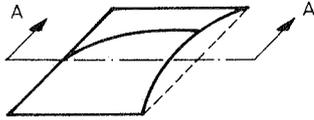
Beulhalbwelle, denn der Druckbereich wird kleiner, was eine unsymmetrische Verschiebung der Beule in Plattenquerrichtung zur Folge hat.

Da die Anzahl der Plattenelemente in Querrichtung möglichst nicht erhöht werden sollte, wurde untersucht, ob durch eine Anpassung der Elementgröße, also quasi einer Elementverdichtung im Druckbereich, eine Verbesserung der Ergebnisse ohne Erhöhung der Gesamtelementanzahl erreicht werden kann. Es wurden dazu vier unterschiedliche Netzeinteilungen verglichen (siehe Tabelle 10.10). Durch Verschiebung der Elemente in den beulgefährdeten Druckbereich (b,c,d) kann eine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse erzielt werden, was nicht ohne weiteres vorherzusehen war, da ja das Längen / Breitenverhältnis negativ zu Buche schlägt.

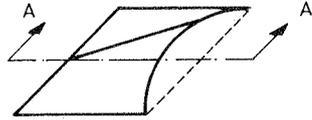
10.2.2 Beuluntersuchungen dreiseitig, gelenkig gelagerter Platten

Für den zweiten, in zusammengesetzten Querschnitten vorkommenden Plattentyp (Typ II - dreiseitig gelagerte Platte) wurden vergleichende Untersuchungen angestellt, die den Einsatzbereich des einfacheren Elementes abgrenzen sollen. Zu diesem Zweck wurden Beulwerte für das spezielle Gurt-element (PL 4) mit linear-kubischem Ansatz und dem aufwendigeren, aber allgemeineren bikubischen Plattenelement (PL 16) berechnet. Vergleichswerte wurden ebenfalls /79/ entnommen.

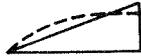
Vergleicht man zunächst, bei gleicher Idealisierung, nur die beiden Elementtypen, so sind keine nennenswerten Ergebnisunterschiede festzustellen. Die grösseren Abweichungen des Plattentyps P7 in Tabelle 10.11 sind lediglich auf eine insgesamt geringere Elementanzahl zurückzuführen. Für die in Tabelle 10.5 angegebenen Randspannungsverläufe liefert das Element PL 4 jedoch hohe Fehlerquoten. Vorallem bei sehr kurzen Platten (Extremfall : Quadratplatte) sind die Fehler signifikant. Bei Betrachtung der sich einstellenden Verformung kann dafür leicht eine Erklärung gefunden werden, denn der lineare Verformungsansatz in Plattenquerrichtung ist für kurze Platten weit von der Realität entfernt. Kurze Platten werden nicht mehr hauptsächlich einachsrig in Längsrichtung gekrümmt, sondern erfahren zweiachsige Biegung.



tatsächlicher Verlauf



Näherung mit PL 4



Schnitt A - A

Bild 36: Verformung einer dreiseitig gelagerten Platte

Allerdings sollte man daraus nicht schließen, daß Element PL4 gänzlich ungeeignet ist. Für hauptsächlich vorkommende, längliche Stegplatten ist dieses Element sogar wegen der geringen Anzahl von Freiheitsgraden, bei gleichzeitig guten Ergebnissen, dem genaueren PL16 Element vorzuziehen.

Platte	Elem.anz.		Rand- spannung	Rechnung σ_{ki} [kN/cm ²]	Literatur /79/	Abw %
	x-Ri	y-Ri				
PL16			F = 1.0			
P5	4	1		0.671	0.669	0.3
P6	8	1		0.319	0.313	1.9
P7	10	1		0.220	0.213	3.3
PL4			F = 1.0			
P5	4	1		0.676	0.669	1.0
P6	8	1		0.320	0.313	2.2
P7	10	1		0.221	0.213	3.7
PL4			F = 0.0			
P5	4	1	max Spg. am freien Rand	0.902	0.878	2.7
P6	8	1		0.427	0.415	2.9
P7	10	1		0.294	0.285	3.3
PL4			F = -1.0			
P5	4	1	Druck am freien Rand	1.257	1.353	7.6
P6	8	1		0.631	0.641	1.6
P7	10	1		0.427	0.442	3.5
PL16			F = 0.0			
P5	4	1	max Spg. am gelag. Rand	2.254	2.341	3.8
P6	8	1		1.200	1.232	2.7
P7	10	1		0.854	0.878	2.8
PL4			F = 0.0			
P5	4	1	max Spg. am gelag. Rand	2.254	2.708	18.0
P6	8	1		1.200	1.282	6.8
P7	10	1		0.854	0.883	3.4

Tabelle 10.11: Vergleich der Beulrandspannung in Abhängigkeit von der Belastungsfunktion und der Beulform

10.3 Lokales Beulen zusammengesetzter Querschnitte

Im folgenden Kapitel sollen Untersuchungen zum lokalen Beulen verschiedener Querschnitte mit den Ergebnissen von drei unterschiedlichen Autoren verglichen werden. Es kommt hierbei erstmals die Interaktion zwischen den einzelnen Querschnittssegmenten zum Tragen. Je nach Abmessung ist Steg- oder Flanschbeulen maßgebend, der Beulwert selbst ist jedoch immer vom gesamten Querschnitt abhängig, da die einzelnen Platten für angrenzende Querschnittsteile elastische Einspannungen darstellen.

10.3.1 Lokales Beulen von I und C - Profilen unter konstanter Längsspannung

Unter der Annahme rein lokalen Versagens spielt die tatsächliche Länge der Träger eine untergeordnete Rolle, da sich der Versagensmodus durch die Behinderung des globalen Ausweichens bei länger werdenden Trägern lediglich mit mehr Halbwellen einstellt, die kritische Spannung aber keinen großen Schwankungen unterworfen ist. Trägt man die kritische Spannung über der Trägerlänge auf, so ergeben sich - ähnlich der Einzelplatte - Girlandenkurven, welche für eine Variation der Länge, von einem Minimalwert ausgehend, ein Ansteigen der kritischen Spannung nur solange zulassen, bis eine benachbarte Beulfigur mit mehr oder weniger Beulwellen energetisch günstiger ist.

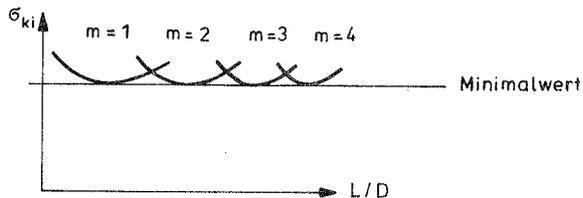


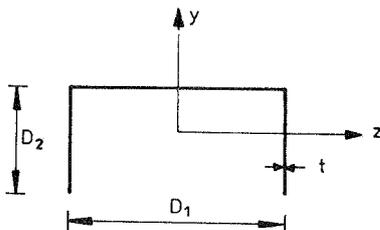
Bild 37: Beulkurven ebener Platten

Der Längenbereich zwischen zwei benachbarten Beulmodi wird mit zunehmender Trägerlänge, also für den betrachteten stabförmigen Träger, immer kleiner, so daß die Beulwerte kaum vom Minimalwert abweichen. Aus diesem Grund wurden als Vergleichswerte die minimalen Beulspannungen,

ohne Berücksichtigung einer festen Trägerlänge, ermittelt. Den Programmberechnungen wurde eine quadratische Elementeteilung im Stegbereich zugrunde gelegt. Die mit nur einem PL4 - Element idealisierten Gurtplatten hatten, entsprechend der Einteilung der Elemente in Längsrichtung, unterschiedliche Seitenverhältnisse.

Die Vergleichswerte nach /79/ stellen nur eine Näherung dar. Die Lösung des Beulproblems für gekoppelte Platten wird dort mit einer geschlossenen Lösung der Differentialgleichung für lange Plattenstreifen angegeben. Der Spannungsgrad der einzelnen Platten wird durch Drehfedern dargestellt, die aus der Steifigkeit der Einzelplatte ermittelt werden. Daraus ergibt sich der Spannungsgrad als Mittelung der Stegplatte (vierseitig) und der Gurtplatte (dreiseitig gelagert). Es ist zwar möglich Beulwerte für Gurt oder Steg anzugeben, aber die Wechselwirkung wird nicht vollständig erfaßt. Die Bestimmung der Vergleichswerte nach Petersen /79/ kann Anhang 2 entnommen werden.

Beispiel 10.3.1: Lokales Beulen C - Profil



$$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$D_1 = 100 \text{ cm}$$

$$D_2 = 50 \text{ cm}$$

$$t = 0.5 \text{ cm}$$

$$\nu = 0.3$$

Ergebnisse nach Petersen /79/

$$\text{Steg : } \sigma_{ki} = 2.31 \text{ kN/cm}^2$$

$$\text{Gurt : } \sigma_{ki} = 1.52 \text{ kN/cm}^2$$

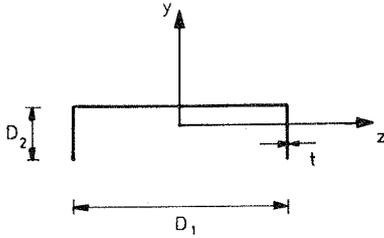
Eigene Berechnung

$$\text{Gurt : } \sigma_{ki} = 1.42 \text{ kN/cm}^2$$

Gurt wird maßgebend

Abweichung 7 %

Beispiel 10.3.2: Lokales Beulen C - Profil



$$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{kN}{cm^2}$$

$$D_1 = 100cm$$

$$D_2 = 25cm$$

$$t = 0.5 \text{ cm}$$

$$\nu = 0.3$$

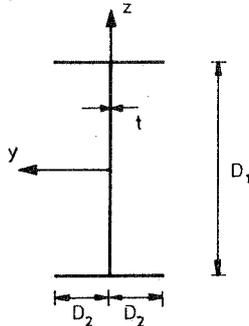
Ergebnisse nach Petersen /79/

Steg : $\sigma_{Kl} = 2.37 \text{ kN/cm}^2$
 Gurt : $\sigma_{Kl} = 5.69 \text{ kN/cm}^2$

Eigene Berechnung

Steg : $\sigma_{Kl} = 2.25 \text{ kN/cm}^2$
 Steg wird maßgebend
 Abweichung 5 %

Beispiel 10.3.3: Lokales Beulen I - Profil



$$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{kN}{cm^2}$$

$$D_1 = 100cm$$

$$D_2 = 25cm$$

$$t = 0.5 \text{ cm}$$

$$\nu = 0.3$$

Ergebnisse nach Petersen /79/

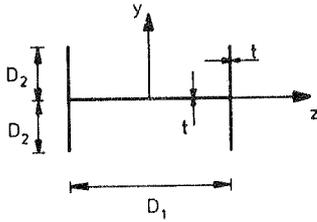
Steg : $\sigma_{Kl} = 2.42 \text{ kN/cm}^2$
 Gurt : $\sigma_{Kl} = 5.79 \text{ kN/cm}^2$

Eigene Berechnung

Steg : $\sigma_{Kl} = 2.42 \text{ kN/cm}^2$
 Steg wird maßgebend
 Abweichung 0 %

Für weitere Querschnitte können Vergleiche mit den von Bulson /17/ ermittelten lokalen Beulwerten angestellt werden. Er leitet ein über die Rand- und Übergangsbedingungen geschlossenes Gleichungssystem her, dessen Lösung den minimalen Beulwert ergibt (vgl. Bild 37). Für die eigene Berechnung ergab sich daraus folgende Schwierigkeit: Die Beuluntersuchung kann nur für Träger mit festen Geometriewerten (Länge, Querschnitt) durchgeführt werden. Da in der Vergleichslösung von Bulson jedoch keine feste Länge angegeben war und die Beulspannung in Abhängigkeit von den Breitenverhältnissen der Querschnittsplatten aufgetragen ist, mußte durch mehrere Versuche erst eine Trägerlänge bestimmt werden, für die der Beulwert minimal wird. Die Ergebnisse sind auf den folgenden Seiten dargestellt, wobei sich eine gute Übereinstimmung der eigenen Berechnungen mit den Werten von Bulson ergibt.

Beispiel 10.3.4: Lokales Beulen I- Profil mit konstanter Längsspannung



$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{kN}{cm^2}$
 $\nu = 0.3$
 $D_1 = 100\text{cm}$
 $D_2 = \text{variabel}$
 $L = \text{variabel}$
 $t = 0.5\text{ cm}$

$$k_{\min} = \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^2 E} \left(\frac{D_1^2}{t^2} \right) \sigma_{Ki}$$

Eigene Ergebnisse

$D_2 [\text{cm}]$	D_2/D_1	$\sigma_{Ki} [kN/cm^2]$	k_1
20.0	0.2	2.424	5.10
60.0	0.6	0.950	2.00
90.0	0.9	0.464	0.98

Ergebnisvergleich

Beulfigur

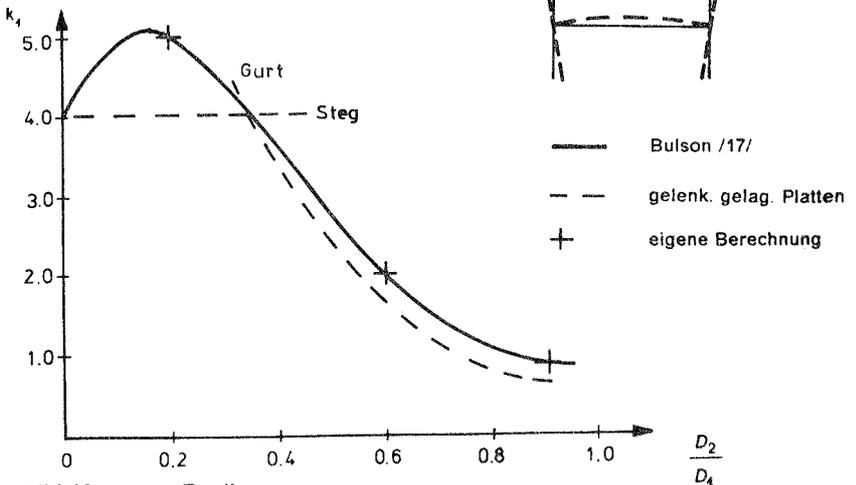
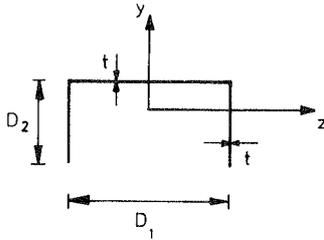


Bild 38: Beulkurven

Beispiel 10.3.5: Lokales Beulen C - Profil mit konstanter Längsspannung



$$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\nu = 0.3$$

$$D_1 = 100 \text{ cm}$$

$$D_2 = \text{variabel}$$

$$L = \text{variabel}$$

$$t = 0.5 \text{ cm}$$

$$k_{\min} = \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^2 E} \left(\frac{D_1^2}{t^2} \right) \sigma_{Ki}$$

Eigene Ergebnisse

$D_2 [cm]$	D_2/D_1	$\sigma_{Ki} [kN/cm^2]$	k_1
20.0	0.2	2.212	4.662
40.0	0.4	1.788	3.750
80.0	0.8	0.699	1.473

Ergebnisvergleich

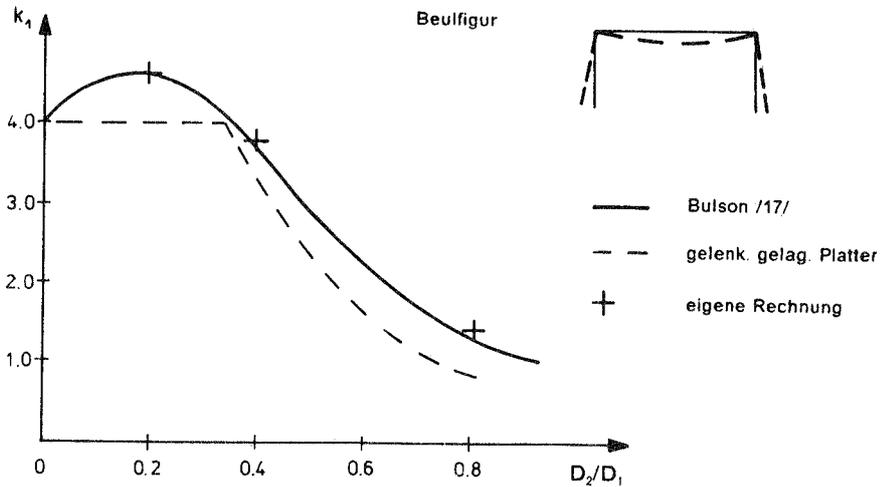
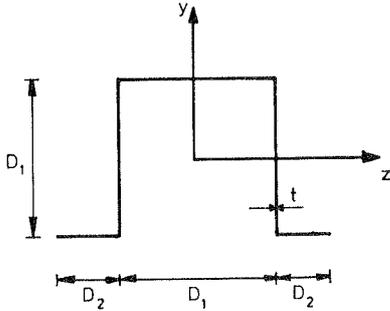


Bild 39: Beulkurven

Beispiel 10.3.6: Lokales Beulen Hutprofil mit konstanter Längsspannung



$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{kN}{cm^2}$
 $\nu = 0.3$
 $D_1 = 100cm$
 $D_2 = \text{variabel}$
 $L = \text{variabel}$
 $t = 0.5cm$

$$k_{\min} = \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^2 E} \left(\frac{D_1^2}{t^2} \right) \sigma_{Ki}$$

Eigene Ergebnisse

$D_2 [cm]$	D_2/D_1	$\sigma_{Ki} [kN/cm^2]$	k_1
60.0	0.6	1.24	2.60
80.0	0.8	0.79	1.67

Ergebnisvergleich

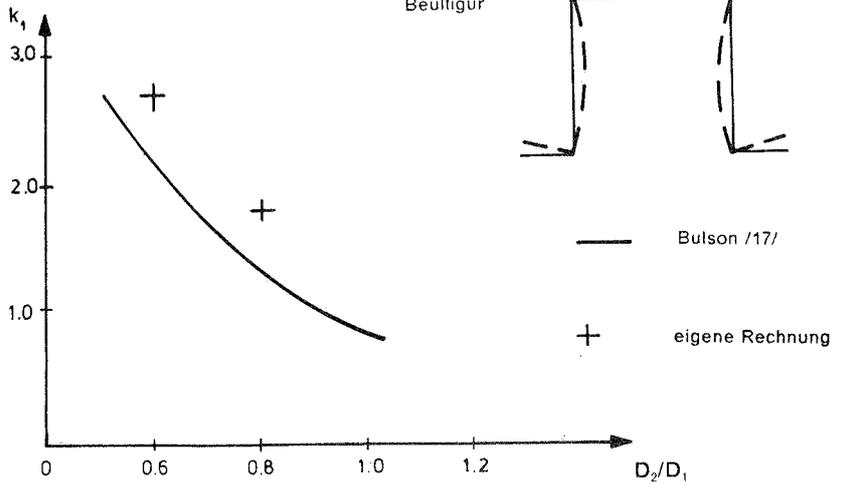


Bild 40: Beulkurven

10.3.2 Lokales Beulen biegebelasteter Träger mit I - Querschnitt

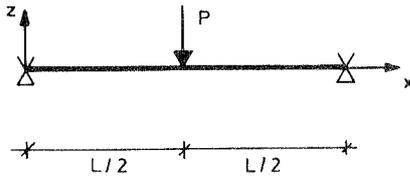
Infolge konstanter Längsspannungen weisen beulende Träger ein regelmäßiges, sich wiederholendes Beulmuster auf. Der gesamte Träger ist am Versagen beteiligt, da zum Zeitpunkt des Versagens in jedem Querschnittspunkt dieselbe Spannung wirkt. Betrachtet man hingegen einen querbelasteten Träger, so ist der Spannungsverlauf ungleichmäßig über die Länge verteilt. Es kommt dadurch zu einer Höchstbeanspruchung in einem speziellen Punkt, an dem dann das Beulen eingeleitet wird. Die Bezeichnung "lokales Beulen" ist in diesem Fall zutreffender, da nur ein lokal eingrenzbarer Bereich beult. Tien /109/ führte entsprechende Untersuchungen an unterschiedlich langen I - Trägern durch. Als Belastung wurden eine Einzellast und eine Gleichstreckenlast über den ganzen Träger gewählt. Die Vergleichsrechnung mit dem entwickelten Element wurde unter folgenden Voraussetzungen durchgeführt:

1. Der Träger wurde gegen globales Ausweichen behindert, nur rein lokale Beulformen wurden ermöglicht.
2. Die Elemententeilung des Steges wurde mit 4 Plattenelementen pro Element durchgeführt. Die Einteilung wurde entsprechend der Variante b der Tabelle 10.10 gewählt, um durch eine Elementverdichtung im Druckbereich die zu erwartende Beulform besser zu erfassen.
3. Der Querschnitt konnte sich in den Auflagerbereichen frei verformen, es wurden keine Steifen angenommen.
4. Die Last greift im Schwerpunkt an, auftretende Quernormalspannungen im Steg werden nicht berücksichtigt.

Die Geometrie und Belastung, sowie die Querschnittswerte der untersuchten Profile sind in der folgenden Tabelle angegeben.

Beispiel 10.3.7: Lokales Beulen I-Träger mit Einzellast

System und Belastung

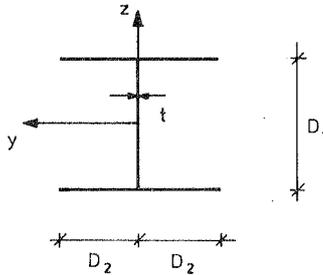


$$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\nu = 0.3$$

$$L = \text{variabel}$$

Geometrie



$$D_1 = 100 \text{ cm}$$

$$D_2 = \text{variabel}$$

$$t = 0.5 \text{ cm}$$

$$k_2 = \frac{12(1 - \nu^2)}{\pi^2 E} \left(\frac{D_2^2}{t^2} \right) \sigma_{Kl}$$

Querschnittsidealisierung

Gurte : je 1 Element PL4

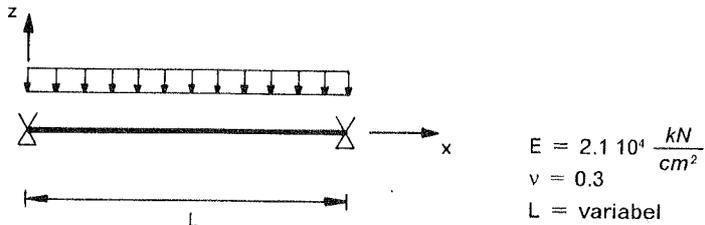
Steg : je 4 Elemente PL16 Einteilung b₁

Ergebnisse							
D_2 [cm]	L [cm]	$\frac{L}{D_2}$	Elemente in Längsrichtung	P_{Kl} [kN]	σ_{Kl} [kN/cm ²]	k_2 [1]	Tien /109/
25	450	18	18	202.95	6.85	0.902	
25	225	9	9	461.71	7.78	1.025	
25	100	4	4	993.70	7.45	0.982	1.12
50	450	9	9	112.00	2.16	1.138	1.01
50	200	4	4	273.90	2.35	1.237	

Tabelle 10.12: Lokales Beulen - I-Träger mit Einzellast Vergleich mit Tien

Beispiel 10.3.8: Lokales Beulen I-Träger mit Gleichlast

System und Belastung



Geometrie wie Beispiel 10.3.7

Ergebnisse							
D_2 [cm]	L [cm]	$\frac{L}{D_2}$	Elemente in Längsrichtung	p_{ki} [kN/m]	σ_{ki} [kN/cm ²]	k_2 [1]	Tien /109/
25	450	18	18	0.80	6.08	0.8	
25	225	9	9	3.48	6.61	0.87	0.3
50	450	9	9	0.43	1.87	0.99	0.88
50	200	4	4	2.38	2.04	1.09	0.41

Tabelle 10.13: Lokales Beulen - I-Träger mit Gleichlast Vergleich mit Tien

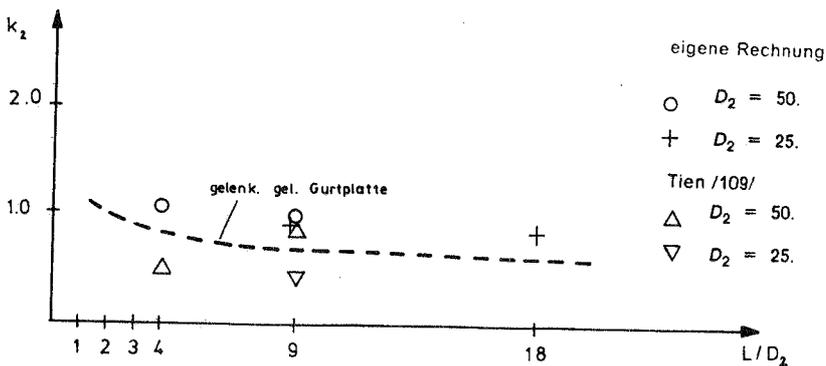


Bild 41: Vergleich

Die gestrichelte Kurve in Bild 41 stellt den Grenzwert für eine gelenkig gelagerte Obergurtplatte dar. Für den Lastfall "Einzellast" ist die Übereinstimmung der Ergebnisse befriedigend, während bei der Gleichstreckenbelastung - vor allem für sehr kurze Träger - große Unterschiede auftreten. Sie sind in den unterschiedlichen Annahmen begründet. Mit dem hier entwickelten Element wurde, im Hinblick auf den Einsatz als Balken, die Lastabtragung durch reine Biegespannungen (Längsspannungen) beschrieben, während Tien das Scheibenverhalten durch einen zweidimensionalen Spannungszustand berücksichtigt. Dies wirkt sich besonders bei kurzen Trägern aus. Die von ihm ermittelten Werte liegen grundsätzlich unter den hier berechneten Beullasten, da sich der zweidimensionale Spannungszustand negativ auf die Beullast auswirkt. Mit Hilfe der von Tien angegebenen Berechnungsformel des Scheibenspannungszustandes können die Größen der Spannungsergebnisse n_x und n_y für verschiedene Schlankheiten verglichen werden. Die Verläufe von n_x und n_y für den Stegbereich des im Beispiel 10.3.8 dargestellten I-Träger unter Gleichlast sind in Bild 42 angegeben.

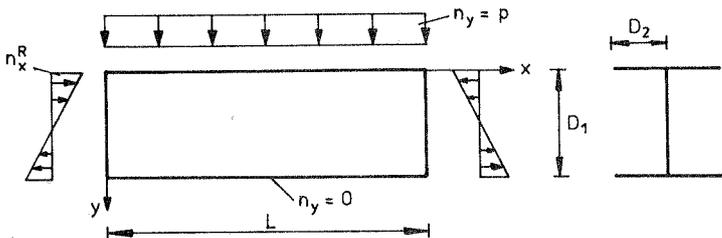


Bild 42: Verläufe der Spannungsresultanten im Steg

Betrachtet man die Maximalspannung am gedrückten Rand, dann kann der Zusammenhang zwischen den Spannungsresultanten der Mittelfläche n_x und n_y wie folgt angegeben werden

$$n_y^R = n_x^R \left[\frac{4 D_1^2}{3 L^2} + \frac{16 D_2 D_1}{L^2} \right]$$

Für unterschiedliche Gurt zu Steg Verhältnisse (D_2/D_1), die die Schlankheit der Gurte für sich angeben, ist das Verhältnis von n_y^R/n_x^R über der Trägerschlankheit im folgenden Diagramm aufgetragen. Ab einer Schlankheit von 3 wird die Maximalordinate der Längsspannung größer als die zunächst domi-

nierdende Quernormalspannung und nimmt mit wachsender Schlankheit schnell zu. Der Einfluß von n_y auf die kritische Beulspannung ist infolge des zum gezogenen Rand hin auf Null abnehmenden, linearen Verlaufes geringer als der von n_x . Petersen /79/ gibt hierzu an, daß n_y bereits ab einer Schlankheit von 3 vernachlässigbar ist.

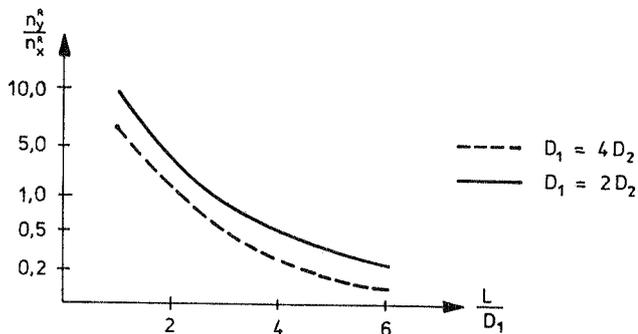


Bild 43: Einfluß der Quernormalspannung

Wenn der Vergleich der kritischen Spannungen auch nicht voll befriedigen konnte, so zeigen doch die ermittelten Versagenszustände eine gute Übereinstimmung. Die sich daraus ergebenden Beulmodi der beiden Beispiele sind in Bild 44 dargestellt. Es ist dabei zu beachten, daß die Netzlínien nur zur Darstellung der Querschnittsverformungen eingetragen sind und nicht dem tatsächlich gerechneten Elementnetz entsprechen. Da durch die normalerweise verwendete Darstellung der Verformungen von Balkensystemen durch die Verformungsfigur der Systemlinie, die hier interessierenden Querschnittsverformungen unsichtbar bleiben, wurde ein spezielles Nachlaufprogramm entwickelt, mit dem die auf Balkenebene ermittelten Verformungen in eine dreidimensionale Darstellung umgesetzt werden können. Das in den Bildern verwendete Elementnetz kann von der eigentlichen Berechnung unabhängig, gröber oder feiner gewählt werden.

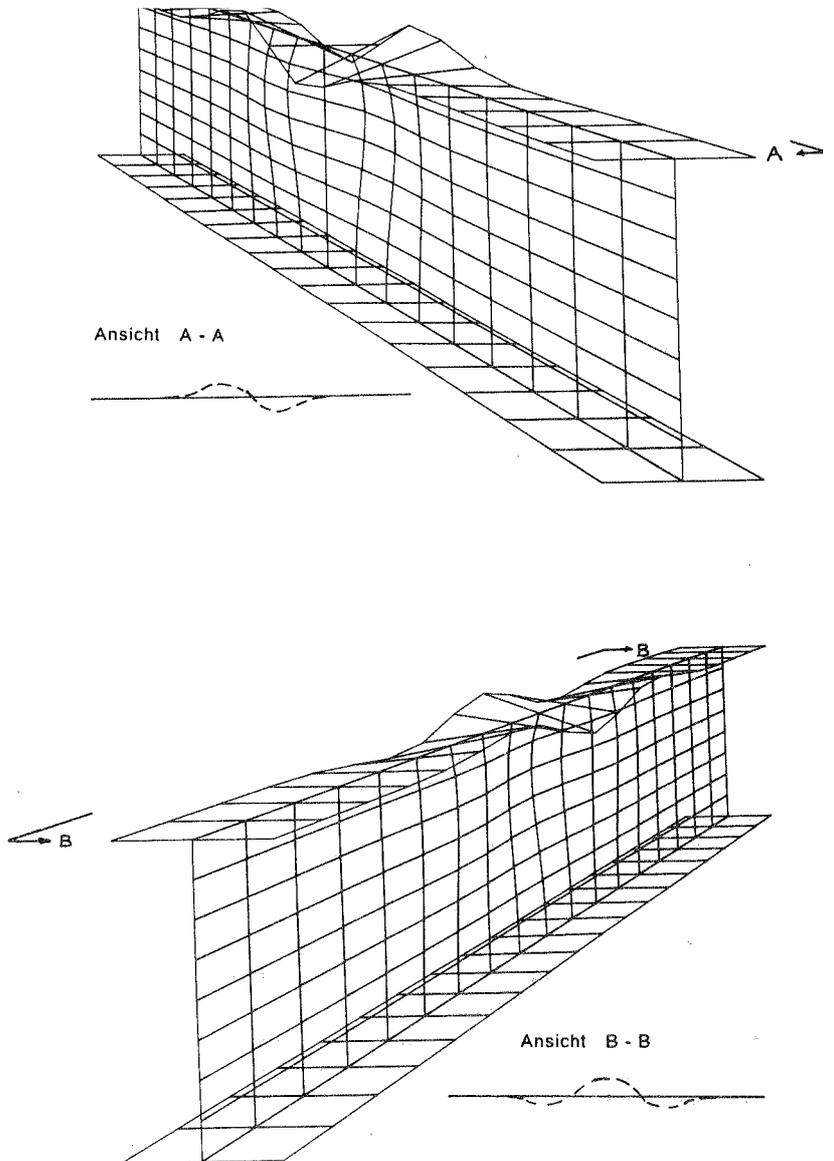


Bild 44: Beulmodi - oben : Einzellast in Feldmitte
 unten : Gleichstreckenlast

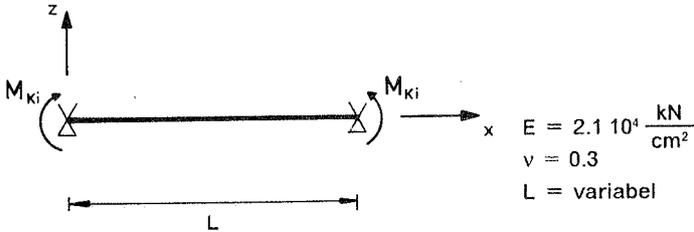
10.4 Gekoppeltes lokal - globales Stabilitätsversagen

Im folgenden Kapitel soll anhand ausgewählter Literaturbeispiele der Übergang zwischen dem rein lokalen Versagen des Querschnittes und dem globalen Versagen des Trägers als Ganzes aufgezeigt werden. Hierzu wurde die lineare Stabilitäts-(Verzweigungs-)last berechnet. Bei konstant gehaltenen Querschnittswerten wurden Träger unterschiedlicher Längen untersucht, so daß sich die Bereiche gegeneinander abgrenzen lassen. Hauptaugenmerk soll dabei auf dem gekoppelten Versagensbereich liegen, in dem sich die unterschiedlichen Beulformen zu einer gemeinsamen Form überlagern und dadurch die Beul- oder Knicklast abgemindert wird. Es wurden Untersuchungen für I und C - Profile unter konstanter Momentenbeanspruchung, veränderlicher Momentenbeanspruchung aus Gleichstreckenlast und konstanter Längsbelastung angestellt, für die sich entsprechende Vergleichswerte in der Literatur finden. Die Berechnungen wurden mit Werten von Hancock /42/, El-Ghazaly, Sherbourne und Dubey /30/ und Rajasekaran /82/ verglichen. Die Darstellung der Ergebnisse ist der von diesen Autoren verwendeten Auftragsweise angepaßt. Es werden dabei die kritischen Spannungen, die zum Versagen führen, über dem Schlankheitsverhältnis L / D_1 aufgetragen. Zusätzlich sind in den Schaubildern noch die Grenzkurven der für sich isoliert betrachteten Versagensformen der einzelnen Querschnittsteile und der Träger als Ganzes (Kippen, Knicken) eingetragen. Sie wurden mit Formeln aus dem Handbuch von Petersen /79/ ermittelt. Die Abgrenzung und Beurteilung der Ergebnisse wird damit einfacher und die Lösungen der einzelnen Autoren können besser eingeordnet werden.

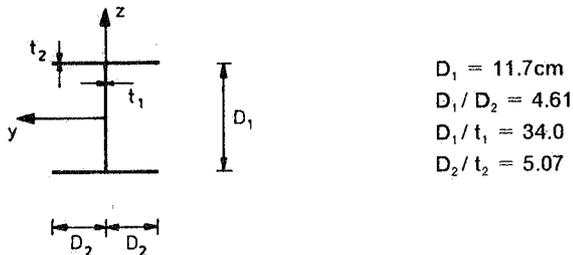
Beispiel 10.4.1: Gabelgelagerter Träger mit I - Profil unter konstanter Momentenbeanspruchung

Dieses Beispiel wurde von allen drei angegebenen Autoren berechnet. Das System und die Querschnittswerte sind auf der folgenden Seite zusammengestellt. Die Querschnittswerte sind als Verhältnisse der Gurt - und Stegabmessungen angegeben, da die absolute Größe dieser Werte keine Rolle spielt und nur das Steifigkeitsverhältnis entscheidend ist. Die Idealisierung des Stegbereichs erfolgte mit vier Elementen über die Steghöhe in den Varianten a - d (Tabelle 10.10). Die Unterteilung der Elemente in Längsrichtung ist für die einzelnen Berechnungen ebenfalls angegeben. Die Ergebnisse sind in Abhängigkeit von den nominalen Knickspannungen $\sigma_{K_i} = M_{K_i} / W_{e_i}$ aufgetragen (W_{e_i} für Druckgurtschwerpunkt).

System und Belastung



Geometrie



Ergebnisse						
L [cm]	$\frac{L}{D_1}$	Elem.anz. in x-Ri. in y-Ri	M_{Ki} [kNcm]	σ_{Ki} [kN/cm ²]	$\frac{\sigma_{Ki}}{E} \cdot 100$	Versagens- form
2.34	0.2	2 b *)	41850	1116.5	5.30	lokal
11.68	1.0	4 d *)	14095	376.0	1.80	lokal
17.52	1.5	6 d *)	14295	381.4	1.82	lokal/gekopp.
23.36	2.0	8 d *)	14110	375.9	1.79	gekoppelt
35.04	3.0	12 d *)	10485	209.7	1.33	gekoppelt
58.40	5.0	20 a *)	4139	110.3	0.50	gekoppelt

*) Elementeinteilung entsprechend Tabelle 10.10

Tabelle 10.14: Gabelgelagerter I-Träger mit konstanter Momentenbeanspruchung

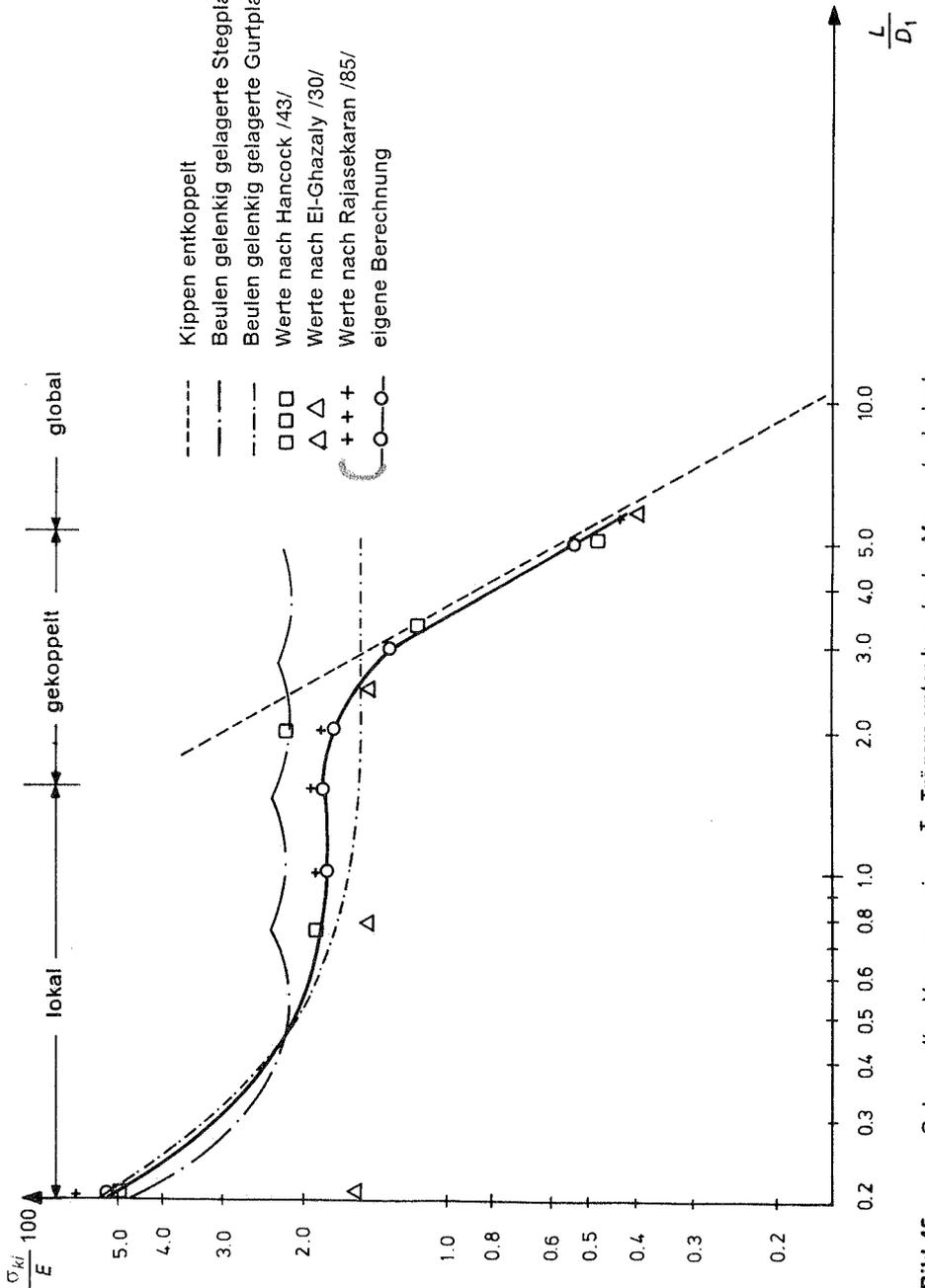


Bild 45: Gekoppeltes Versagen eines I - Trägers unter konstanter Momentenbelastung

Die in den Bildern 45,46,49 und 50 angegebenen Bereiche für lokales, gekoppeltes oder globales Versagen wurden aus den zu Verzweigungslasten gehörenden Eigenformen bestimmt. Eine Zuordnung in den gekoppelten Versagesbereich wurde vorgenommen, wenn lokale und globale Verformungen in gleicher Größenordnung beteiligt waren.

Im folgenden ist noch eine Variante mit doppelt so breiten Gurten aber sonst gleichen Ausgangsgrößen angegeben.

$$D_1 / D_2 = 2.31$$

$$D_1 / t_1 = 34.00$$

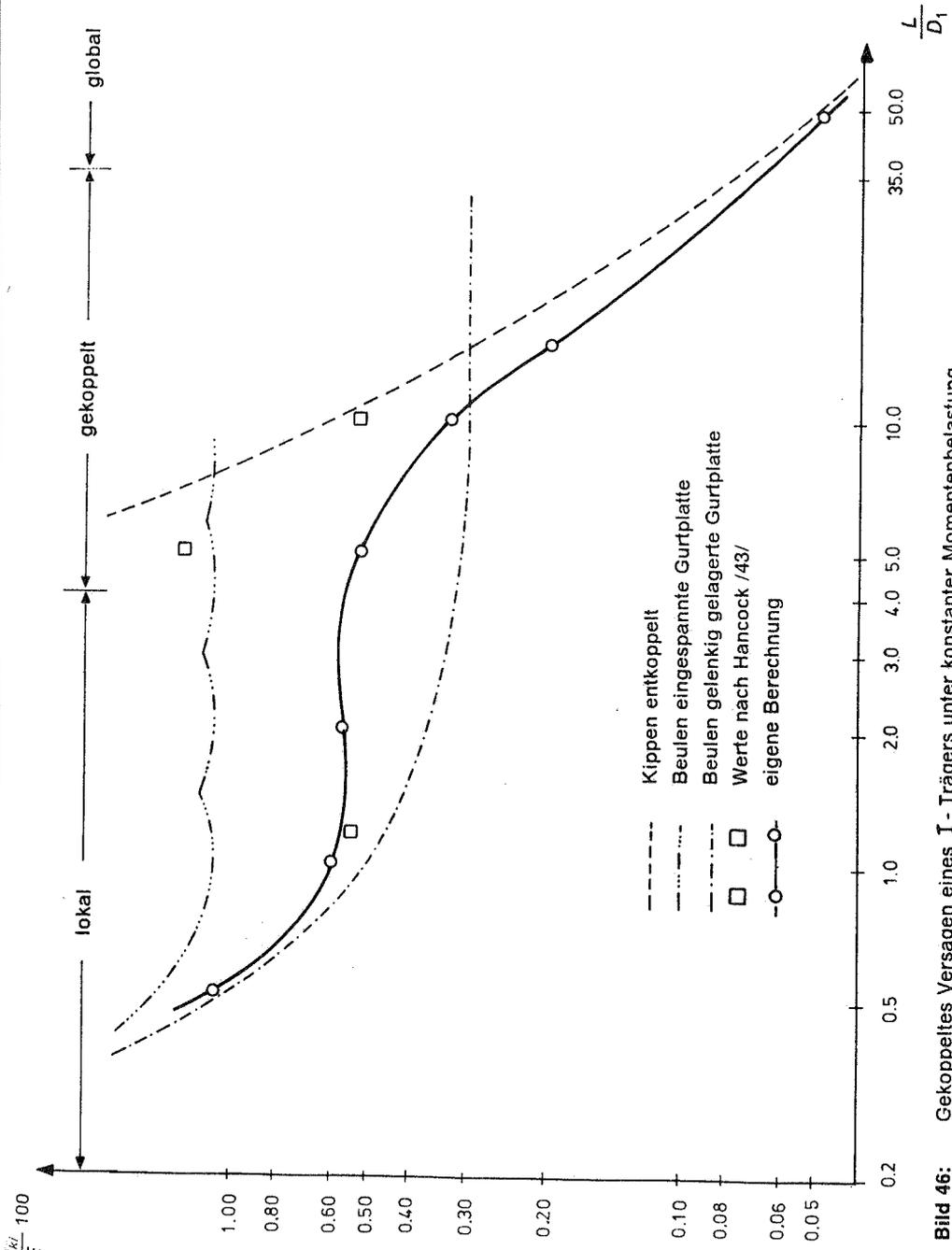
$$D_2 / t_2 = 10.1$$

Ergebnisse						
L [cm]	$\frac{L}{D_1}$	Elem.anz. in x-Ri. in y-Ri	M_{ki} [kNcm]	σ_{ki} [kN/cm ²]	$\frac{\sigma_{ki}}{E} \cdot 100$	Versagensform
5.38	0.5	4 b *)	14905	223.3	1.06	lokal
11.66	1.0	4 d *)	8375	125.6	0.598	lokal
23.32	2.0	8 d *)	8195	122.8	0.585	lokal
58.30	5.0	20 d *)	7435	111.3	0.530	gekoppelt
116.60	10.0	25 a *)	4770	71.4	0.340	gekoppelt
174.90	15.0	30 a *)	2880	42.0	0.200	gekoppelt
174.90	15.0	15 2 EI	3292	49.4	0.235	gekoppelt
583.00	50.0	30 2 EI	728	10.9	0.052	global

*) Elementeteilung entsprechend Tabelle 10.10

Tabelle 10.15: Gabelgelagerter I-Träger mit konstanter Momentenbeanspruchung

Auf den folgenden Seiten sind die Versagensformen für unterschiedlich lange Träger im Plotbild dargestellt.



Berechnete Beispiele bei elastischem Materialverhalten

Bild 46: Gekoppeltes Versagen eines I-Trägers unter konstanter Momentenbelastung

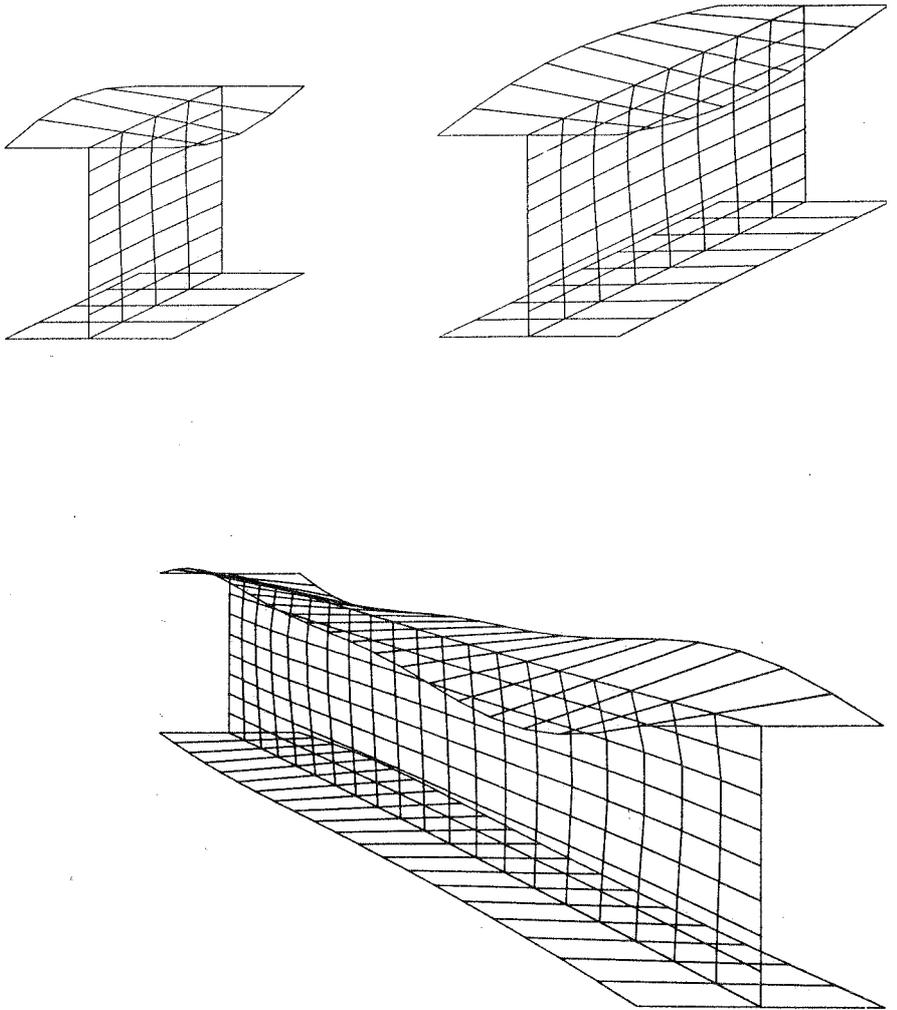


Bild 47: Beulmodi - $L/D_1 = 1.0$; $L/D_1 = 2.0$; $L/D_1 = 5.0$

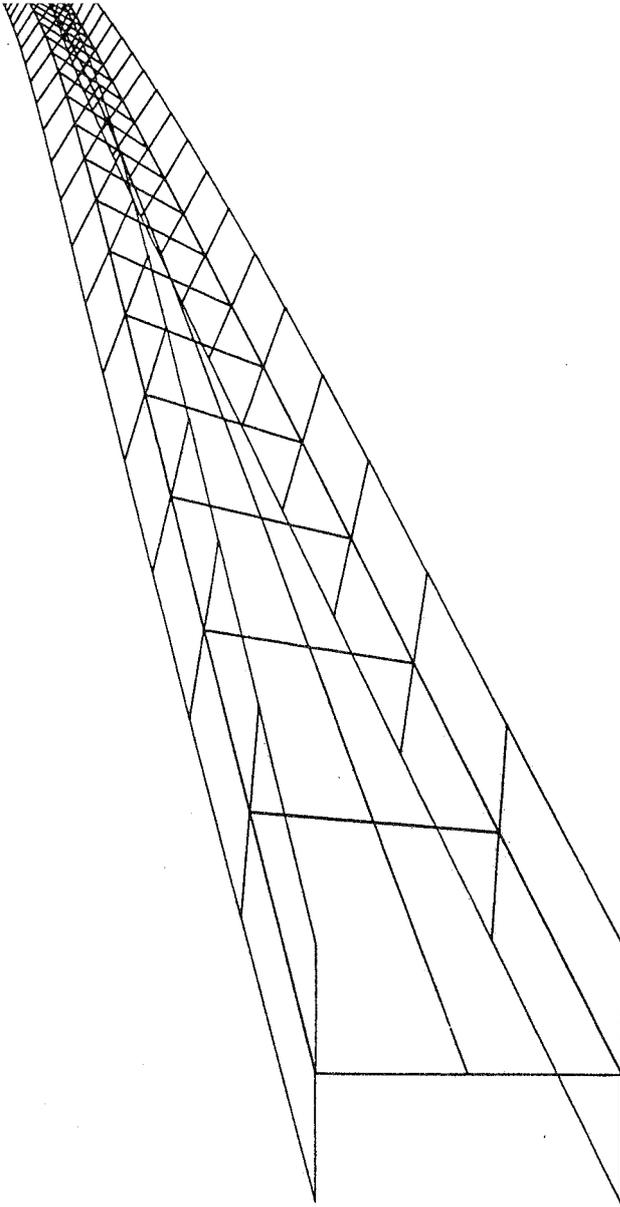


Bild 48: Beulmode - $L/D_1 = 50.0$

Die Ergebnisse sind in Anlehnung an die Auftragsweise von Hancock in logarithmischem Maßstab angegeben. Sie weisen durchgehend eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der anderen Autoren auf. Die bei Variante 1 auftretenden Abweichungen von El-Ghazaly /30/ im stark gedrun- genen Trägerbereich und Hancock beim L / D_1 - Verhältnis von 2.0 sind durch deren Annahmen bedingt.

Die von El-Ghazaly gewählte Idealisierung mit eindimensionalen Balkenele- menten zur Beschreibung des Gurtbereichs ist für kurze Trägerlängen nicht ausreichend, da hier ein ausgeprägtes Plattenverhalten der dreiseitig gela- gerten Gurtplatten durch zweiachsige Lastabtragung für eine Erhöhung der aufnehmbaren Last sorgt. Beim gewählten Querschnittsverhältnis wird der Druckgurt für das Versagen maßgebend, was zur Unterschätzung der Versa- genslast führt. Dies wird noch deutlicher, wenn man die Beulkurven der isoli- tiert betrachteten, gelenkig gelagerten Steg - bzw. Gurtplatte mit zum Ver- gleich heranzieht. Sie stellen Grenzwerte dar, die nicht unter- oder über- schritten werden dürfen. Im allgemeinen war eine sehr gute Überein- stimmung der Ergebnisse mit den Werten von Hancock festzustellen. Die bereits erwähnte Abweichung ist darauf zurückzuführen, daß Hancock den Versagensmodus durch die Fourierreihenentwicklung in Längsrichtung (vgl. Kapitel 2) festlegt und sich die zum niedrigsten Beulwert gehörende Form überhaupt nicht einstellen kann.

Die gute Übereinstimmung der berechneten Beulwerte mit den Ergebnissen von Rajasekaran war zu erwarten, da das hier maßgebende Gurtelement aus gleichen Ansätzen hergeleitet wurde. Numerisch geringe Unterschiede sind durch eine bessere Erfassung des Stegverhaltens bedingt, welches auf die gegebenen Verhältnisse der Variante 1 jedoch nur einen sekundären Einfluß hat.

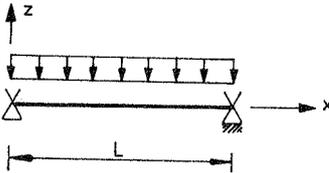
Für die Variante 2 mit breiteren Gurten standen nur Vergleichslösungen von Hancock zur Verfügung. Die bereits gemachten Feststellungen gelten hier ebenfalls. Für das L / D_1 - Verhältnis von 5.0 weist der von ihm ermittelte Wert wiederum eine große Abweichung auf, da als Versagenszustand für den Obergurt 3 Halbwellen angesetzt wurden. Die eigene Berechnung zeigt einen Bereich, in dem gekoppeltes Versagen auftritt. Bemerkenswert ist dabei, daß in den lokal - globalen Versagenszuständen die Form hauptsächlich durch die globale Beulfigur, das Kippen, dominiert wird; die lokalen Verformungen beschreiben ebenfalls eine Halbwelle, obwohl rein lokal versagende Platten bei grösserer Schlankheit D_1 / L meist ein mehrwelliges Beulmuster zeigen. Es wird dadurch sehr deutlich, daß eine echte Interaktion besteht, die auch bis zu sehr langen Trägern hin wirksam bleibt ($L / D_1 = 35$).

Beispiel 10.4.2: Gabelgelagerter I-Träger unter Gleichlast

Bei diesem Beispiel steht eine andere Belastung sowie eine andere Versagensform im Vordergrund. Durch die schmale Ausbildung der Gurte ist für das lokale Beulen der Steg verantwortlich. Verglichen werden die Werte mit Ergebnissen von Rajasekaran /82/.

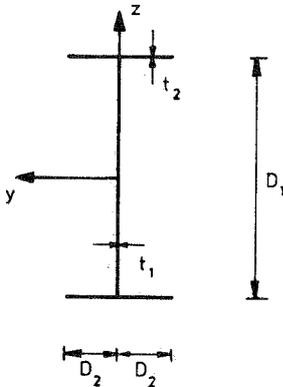
Bezüglich der Annahme der Lastangriffshöhe und der Quernormalspannungen gilt Annahme 4 des Kapitels 10.3.2.

System und Belastung



$$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$
$$\nu = 0.3$$
$$L = \text{variabel}$$

Geometrie



$$D_1 = 15.0 \text{ cm}$$
$$D_2 = 2.5 \text{ cm}$$
$$t_1 = 0.3 \text{ cm}$$
$$t_2 = 0.5 \text{ cm}$$

Ergebnisse					
L [cm]	$\frac{L}{D_1}$	Elem.anz. in x-Ri. in y-Ri	σ_{Kl} [kN/cm ²]	$\frac{\sigma_{Kl}}{E} \cdot 100$	Versagens- form
15.0	1.0	4 d *)	373.54	1.78	lokal
22.5	1.5	6 d *)	323.75	1.54	lokal/gekopp.
30.0	2.0	8 d *)	298.50	1.42	gekoppelt
45.0	3.0	12 a *)	177.20	0.84	gekoppelt
75.0	5.0	20 a *)	69.50	0.33	gekoppelt
*) Elementeinteilung entsprechend Tabelle 10.10					

Tabelle 10.16: Gabelgelagerter I-Träger unter Gleichlast

Die Ergebnisse sind in Bild 49 graphisch dargestellt. Zum Vergleich sind wiederum die nominalen Beulspannungen der gelenkig gelagerten Steg- und Gurtplatte eingetragen. Der Unterschied der eigenen Berechnung zu den von Rajasekaran bestimmten Werten ist auf die bessere Idealisierung des Stegbereichs zurückzuführen. Rajasekaran verwendet nur ein bikubisches Plattenelement zur Beschreibung des Stegverhaltens, was für den vorliegenden Biegelastfall unzureichend ist. Wie die Untersuchungen der Einzelplatten unter Biegedruck (Kapitel 10.2) anschaulich gezeigt haben, wird die eigentliche, ausbeulende Druckzone mit nur einem Plattenelement zu ungenau erfaßt. Die sich tatsächlich einstellende Beulfigur kann nur grob angenähert werden. Bekanntermaßen verhält sich eine Idealisierung mit wenigen Elementen steifer als eine feinere; aus diesem Grund ist die von Rajasekaran ermittelte Beulspannung zu groß.

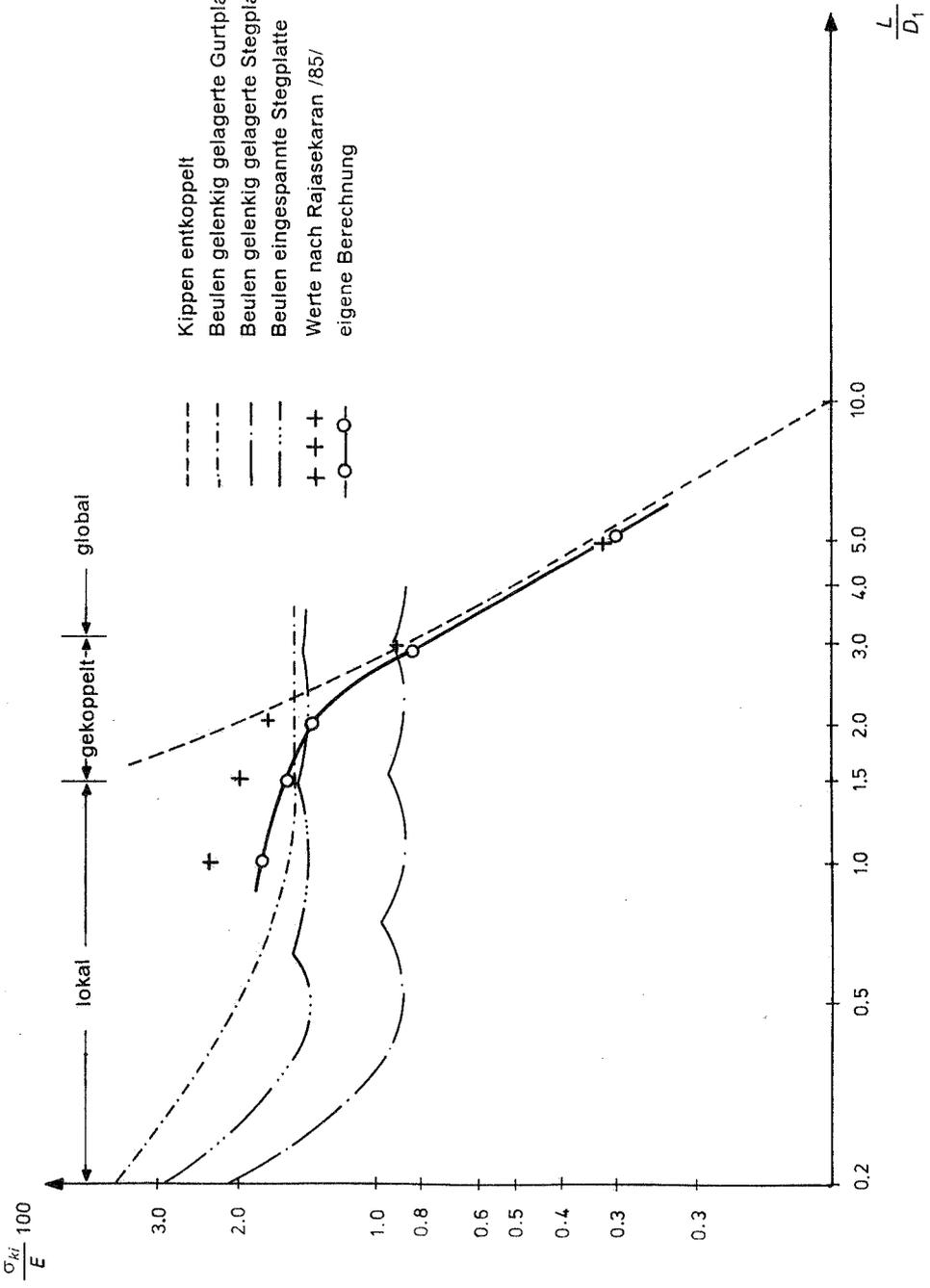
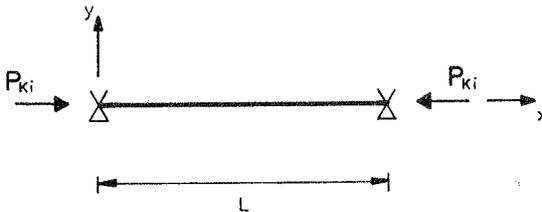


Bild 49: Gekoppeltes Versagen eines I-Trägers unter Gleichstreckenlast

Beispiel 10.4.3: Längsbelasteter Stab mit C - Profil

Als letztes Beispiel dieser Gruppe wird ein längsbelasteter Stab mit C - Profil betrachtet. Die globale Versagensform dieses Trägertyps unterscheidet sich von den bisher betrachteten I - Profilen, die durch ihre symmetrische Geometrie und die gewählte Belastung nur kippen konnten. Für das C - Profil sind als globale Versagensform, Biegedrillknicken für mittlere Schlankheiten ($L/D_1 \approx 5 - 10$) und Knicken um die z-Achse für größere Schlankheitsverhältnisse ($L/D_1 > 10$) möglich. Für nicht doppelt symmetrische Profile waren im hier untersuchten Bereich keine Vergleichswerte aus der Literatur verfügbar; die Ergebnisse wurden daher durch Betrachtung der Grenzkurven für rein lokales und rein globales Versagen kontrolliert.

System und Belastung



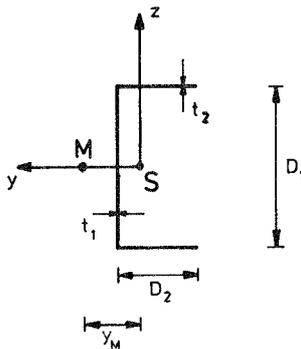
$$E = 2.1 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$$

$$\nu = 0.3$$

$$L = \text{variabel}$$

Last im Schwerpunkt

Geometrie



$$D_1 = 10.0\text{cm}$$

$$D_2 = 5.0\text{cm}$$

$$t_1 = 0.3\text{cm}$$

$$t_2 = 0.5\text{cm}$$

$$y_M = 3.646\text{cm}$$

Ergebnisse						
L [cm]	$\frac{L}{D_1}$	Elem.anz. in x-Ri. in y-Ri	P_{K_i} [kNcm]	σ_{K_i} [kN/cm ²]	$\frac{\sigma_{K_i}}{E} \cdot 100$	Versagens- form
10	1.0	4 d *)	832.7	104.09	0.496	lokal
20	2.0	8 d *)	766.0	95.75	0.456	lokal
25	2.5	10 d *)	764.0	95.50	0.455	lokal/gekopp.
30	3.0	12 d *)	761.0	95.12	0.453	gekoppelt
40	4.0	16 d *)	563.7	70.46	0.336	gekoppelt
50	5.0	20 d *)	438.0	54.76	0.261	gekoppelt
100	10.0	20 a *)	239.1	29.90	0.143	gekoppelt
100	10.0	40 2 EI	282.1	35.26	0.168	gekoppelt
200	20.0	20 2 EI	114.3	14.25	0.068	global

*) Elementeinteilung entsprechend Tabelle 10.10

Tabelle 10.17: Gabelgelagerter [-Träger mit Längsbelastung

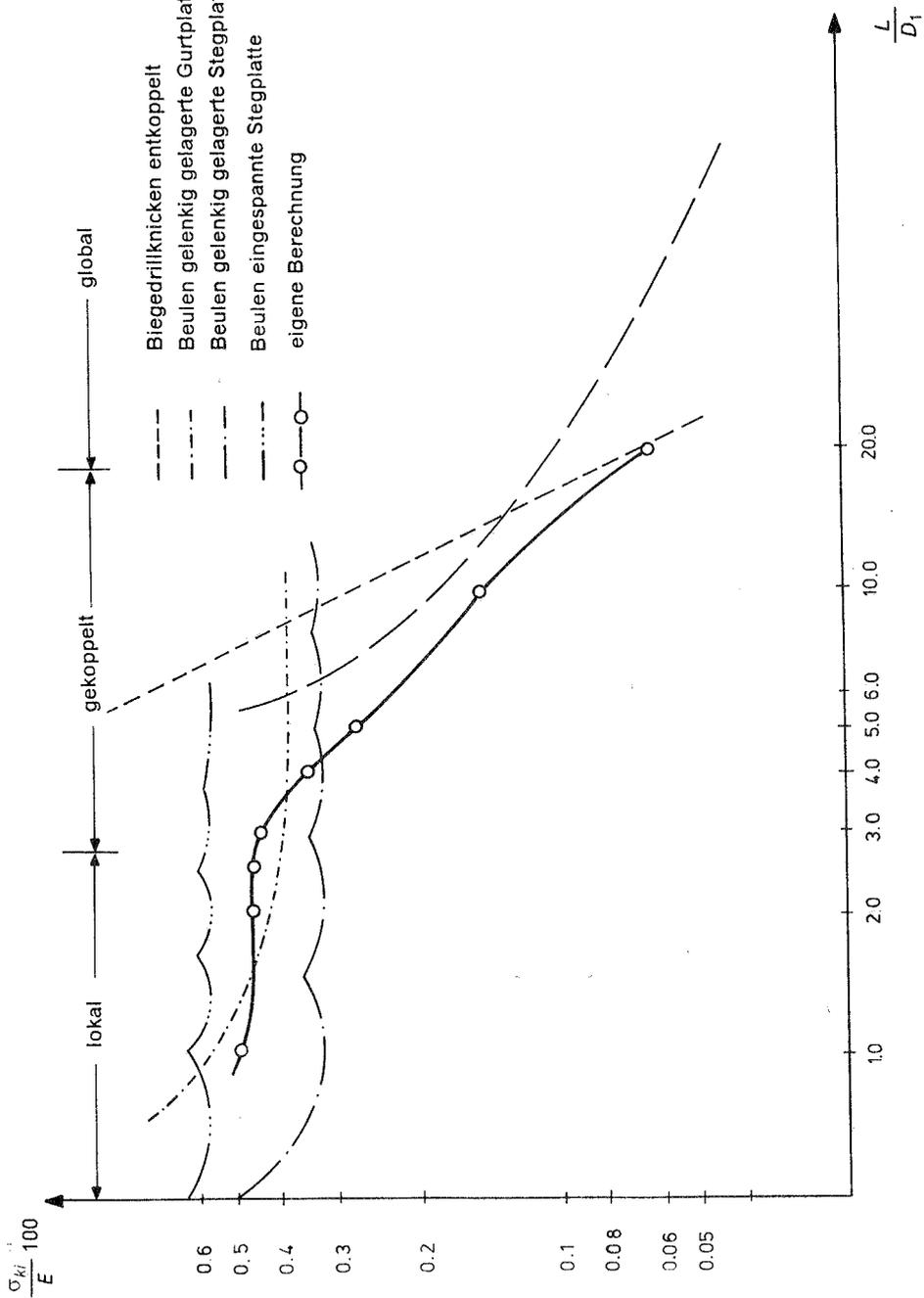


Bild 50: Gekoppeltes Versagen eines C - Profiles unter Längsspannung

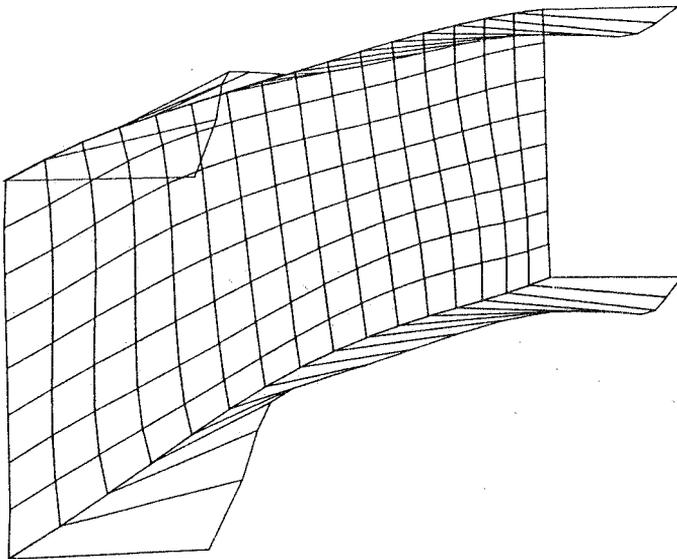
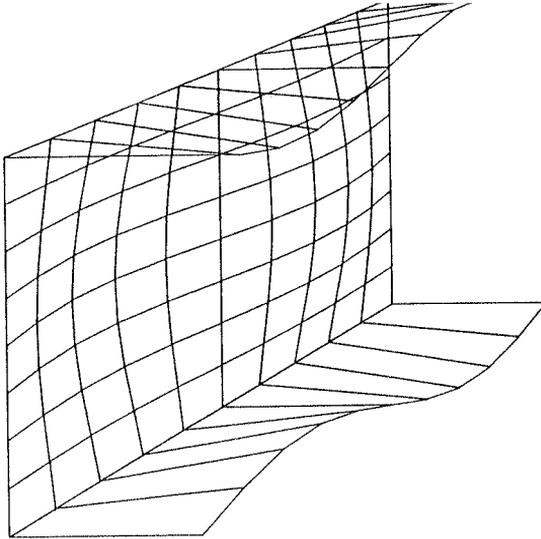


Bild 51: Versagensmodi eines C - Profiles $L/D_1 = 2.5$; $L/D_1 = 4.0$

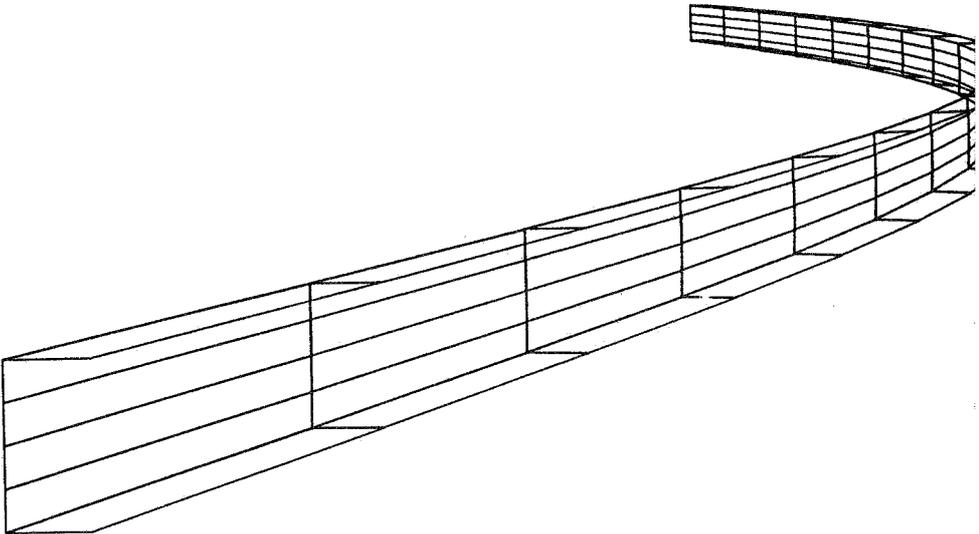
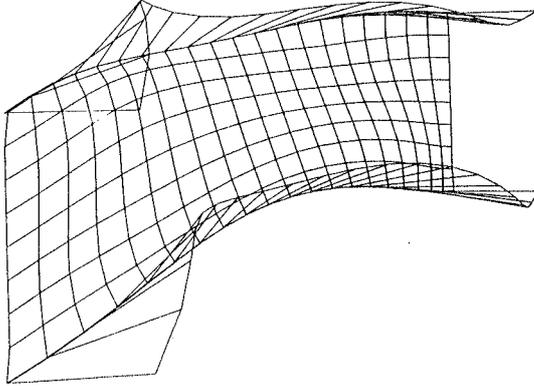
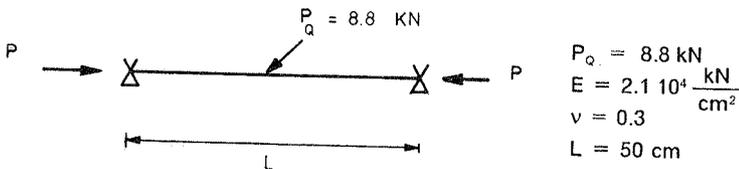


Bild 52: Versagensmodi eines C- Profiles $L/D_1 = 5.0$; $L/D_1 = 20.0$

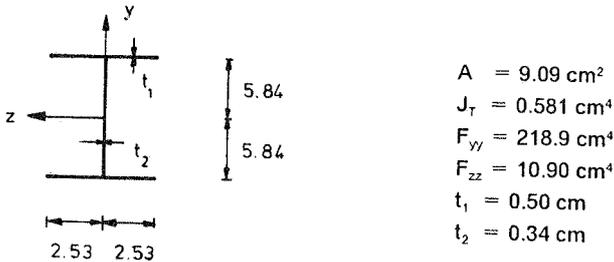
10.5 Berechnung einer I - Stütze als Spannungsproblem

Der Einsatz des Elementes zur Berechnung von Spannungsproblemen soll in diesem Beispiel gezeigt werden. Im Gegensatz zu Eigenwertanalysen ist bei der Bestimmung einer nichtlinearen Lastverformungsbeziehung eine Anfangsverformung notwendig, durch die die geometrische Nichtlinearität aktiviert wird.

System und Belastung



Geometrie



Die Querschnittswerte wurden so gewählt, daß die lokale und die globale Versagenslast bei ungekoppelter Betrachtung ungefähr das gleiche Niveau erreichen. In Bild 53 ist die nichtlineare Verformungskurve des Trägers angegeben. Als Imperfektion wurde in Balkenmitte eine Störlast angebracht, die eine Maximalverformung von 1 mm bewirkte. Um einen gekoppelten Versagensmodus zu aktivieren, wurde zusätzlich eine lokale Störlast aufgebracht, durch die das Profil eine Anfangsverformung von 0.13 mm erhielt. Beide Lasten wurden konstant gehalten, so daß sich ein Verformungszuwachs nur infolge der steigenden Längsbelastung ergab. Als Vergleichswerte sind in Bild 53 die nach /79/ ermittelten ungekoppelten linearen Stabilitätslasten für globales Versagen (Knicken) und lokales Versagen (Flanschbeulen) angegeben. Eine weitere Verzweigungslast für gekoppeltes lokal - globales Versagen wurde mittels einer linearen Eigenwertanalyse mit dem Programm NISA

bestimmt. Es zeigt sich, daß für die gewählten Querschnittsverhältnisse, bei denen beide ungekoppelten Versagensarten beim gleichen Lastniveau eintreten, die erreichbare Stabilitätslast sehr anfällig gegenüber Imperfektionsänderungen reagiert. Die Überlagerung der beiden Beulmodi führt zu einer Abminderung der aufnehmbaren Last, da im fortgeschrittenen Vorbeulzustand nur noch ein geringer Zuwachs der Membranspannungen im Flansch möglich ist. Nahezu der gesamte inkrementelle Spannungszuwachs wird durch die Biegeverformung der Flansche absorbiert, so daß die globale Biegeverformung des Gesamtträgers nicht mehr aufgenommen werden kann, was zum Versagen führt.

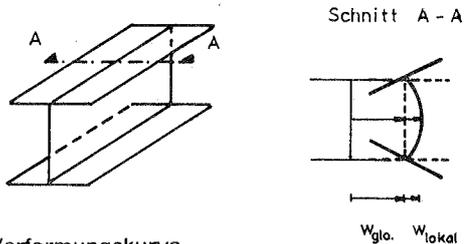
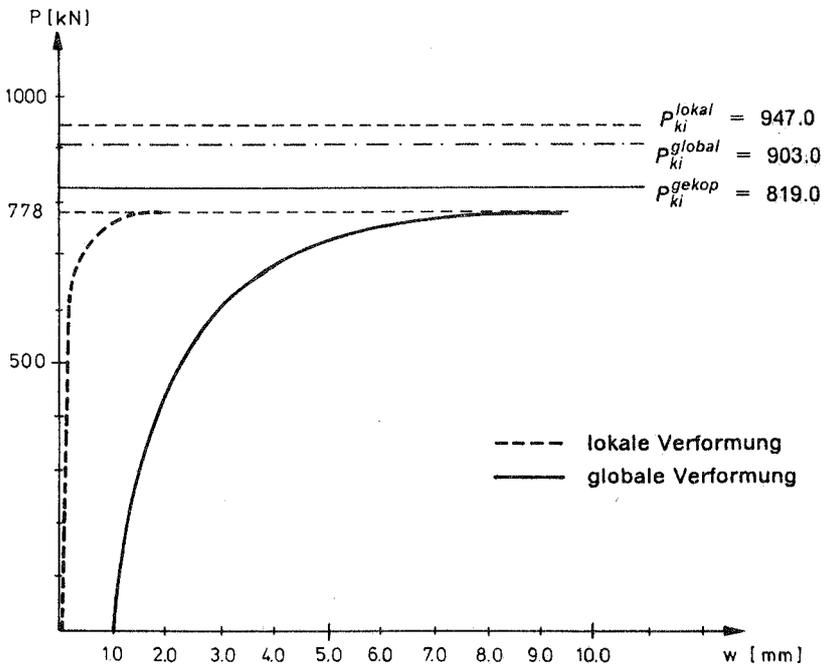


Bild 53: Last - Verformungskurve

11.0 Beispiele unter Berücksichtigung elastisch - plastischen Werkstoffverhaltens

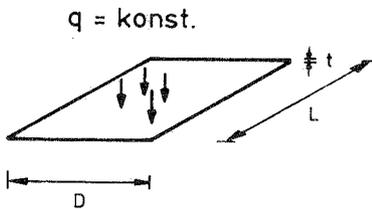
11.1 Test des Materialgesetzes an Einzelplatten

Ebenso wie bei elastischem Werkstoffverhalten sollen erste Untersuchungen an Einzelplatten durchgeführt werden, um das Verhalten des neuen Elementteils ohne Kopplungseinflüsse studieren zu können. Es wurden zwei Rechteckplatten untersucht, wobei zunächst nur das plastische Verhalten im Vordergrund stand, und in einem zweiten Beispiel geometrische nichtlineare Einflüsse berücksichtigt wurden.

11.1.1 Querbelaastete Quadratplatte

Die Untersuchungen wurden an der im folgenden dargestellten Quadratplatte durchgeführt. Als Vergleichslösung liegt eine Berechnungen von Sättelle /92/ vor.

System und Abmessungen:



$$\begin{aligned}L &= 20 \text{ in} \\D &= 20 \text{ in} \\t &= 0.1 \text{ in} \\E &= 1 \cdot 10^7 \frac{\text{lbs}}{\text{in}^2} \\v &= 0.0\end{aligned}$$

Material vollplastisch

Lagerung:

vierseitig gelenkig

Idealisierung:

Das Beispiel wurde mit 4×4 Elementen (PL16) berechnet. Eine feinere Unterteilung mit 4×4 Elementen für ein Plattenviertel erbrachte nur geringfügig abweichende Ergebnisse.

Ergebnisse:

In Bild 54 sind Last - Verschiebungskurven für den Plattenmittelpunkt aufgetragen. Die äußere Last q ist auf die Traglast der Fließlinientheorie bezogen. Das vollplastische Moment hat den Wert

$$m_{PL} = \sigma_F \frac{t^2}{4} = 90 \text{ lbs}$$

Daraus ergibt sich q_{FL} zu

$$q_{FL} = \frac{24m_{PL}}{D \cdot L} = 5.4 \frac{\text{lbs}}{\text{in}^2}$$

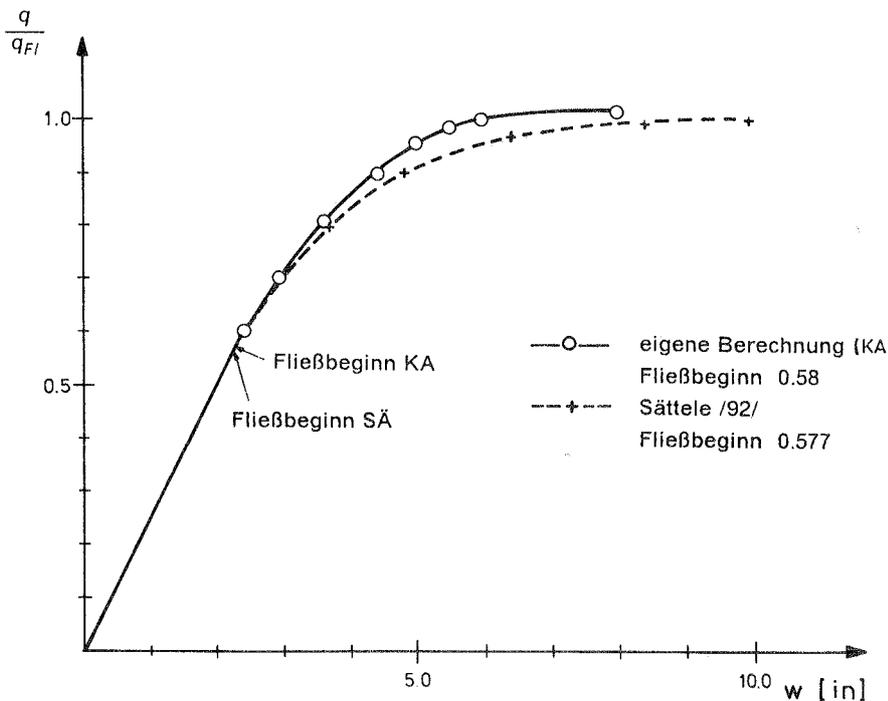


Bild 54: Last - Verschiebungs - Kurve

Die Kurve der eigenen Berechnung liegt, wie zu erwarten war, etwas über der Berechnung von Sättelle. Dies ist hauptsächlich auf das verwendete, integrale Werkstoffgesetz zurückzuführen, wodurch ein Punkt der Platte erst dann als plastisch betrachtet wird, wenn er über die gesamte Plattendicke

durchplastiziert ist. Die von Sättele verwendete Schichtintegration ist in der Lage bereits teilplastische Bereiche an der Plattenober- oder unterseite zu erfassen. Der Fortgang der Plastizierung ist in Bild 55 dargestellt. Hierbei werden Unterschiede der beiden Berechnungen deutlich. Der Fließbeginn tritt fast beim gleichen Lastniveau in den Plattenecken auf (Plastizierung infolge von Drillmomenten). Bei der eigenen Berechnung breitet sich dann diese plastische Zone von den Ecken her aus, bis kurz vor Erreichen der maximal aufnehmbaren Last die Plattenmitte zu plastizieren beginnt. Die beiden plastischen Bereiche wachsen zusammen und bilden schließlich einen Fließmechanismus. Bei der Berechnung von Sättele wird nach dem Plastizieren der Eckbereiche zunächst auch die Plattenmitte plastisch, und beide Bereiche werden bis zum endgültigen Zusammenwachsen gleichmäßig größer. Die Unterschiede sind darin begründet, daß Sättele den Fließbeginn an der Plattenoberfläche aufrägt, während das hier verwendete Modell nur vollplastische Punkte erkennt. Um diese Begründung zu festigen, wurde mit den im Programm NISA vorhandenen Originalelement von Sättele eine weitere Berechnung durchgeführt, wobei diesmal nur durchplastizierte Punkte aufgetragen wurden. Es zeigte sich hierbei ein deutlich späterer Fließbeginn in Plattenmitte, ähnlich dem der eigenen Berechnung.

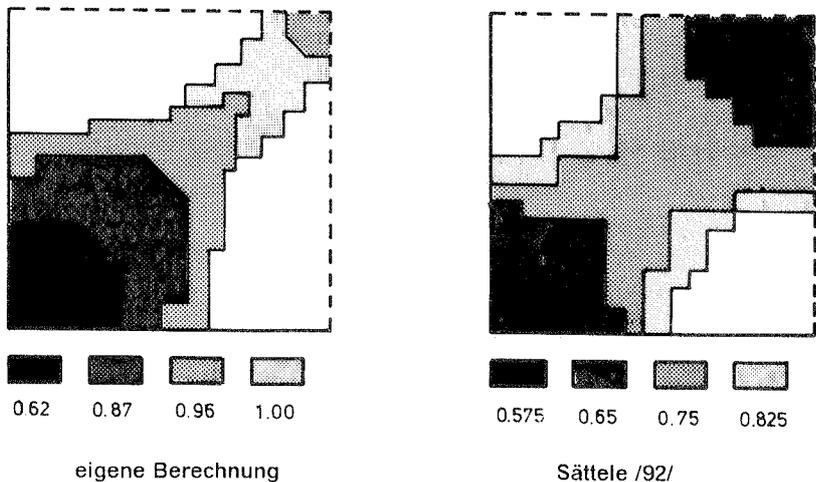
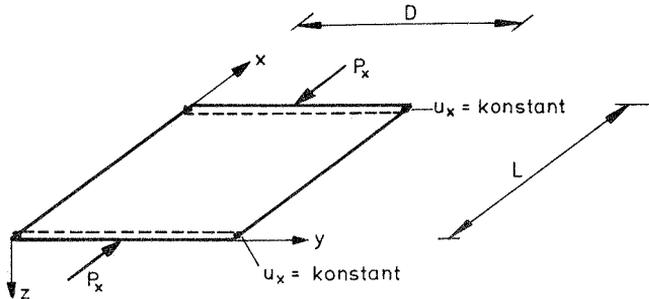


Bild 55: Ausbreitung der Fließzonen

11.1.2 Imperfekte Rechteckplatte unter Längslast

Um die gleichzeitige Erfassung materiell und geometrisch nichtlinearer Effekte an Einzelplatten zu testen, wurde die folgende längsgedrückte Rechteckplatte untersucht. Das Beispiel wurde ausgewählt, da der hier verwendete Ansatz für die Einzelplatten voraussetzt, daß die Verkürzung infolge des Längsdruckes konstant über den Plattenrand erfolgt.

System und Belastung



Geometrie

$$\begin{aligned}L &= 222.25 \text{ mm} \\D &= 254.00 \text{ mm} \\t &= 3.175 \text{ mm}\end{aligned}$$

Werkstoff

$$\begin{aligned}E &= 2.05 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \\v &= 0.3 \\ \sigma_f &= 250 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}\end{aligned}$$

Randbedingung

vierseitig gelenkig gelagert

Idealisierung

4 x 4 Elemente PL 16

Dem System wurde eine Imperfektion affin zur ersten Eigenform aufgebracht (eine Sinushalbwellen in x- und in y- Richtung). Die Berechnung wurde mit zwei unterschiedlichen Imperfektionsamplituden durchgeführt.

1. $c = 0.254 \text{ mm} \rightarrow \frac{c}{t} = 0.08$

2. $c = 2.540 \text{ mm} \rightarrow \frac{c}{t} = 0.8$

Als charakteristische Größen der Platte können die Längskraft P_F , die vollständige Plastifizierung bewirkt

$$P_F = \sigma_F D t = 201.61 \text{ kN}$$

und die Euler-Last P_{Ki} angegeben werden.

$$P_{Ki} = k \sigma_e D t = 95.53 \text{ kN}$$

mit $k = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2$

und $\sigma_e = \frac{\pi^2 E t^2}{12(1 - \nu^2) D^2}$

Die Ergebnisse werden anhand der Last- Durchbiegungskurve im Plattenmittelpunkt beurteilt. Sie sind im Vergleich mit Berechnungen von Sätteln /92/ aufgetragen.

Ergebnisse:

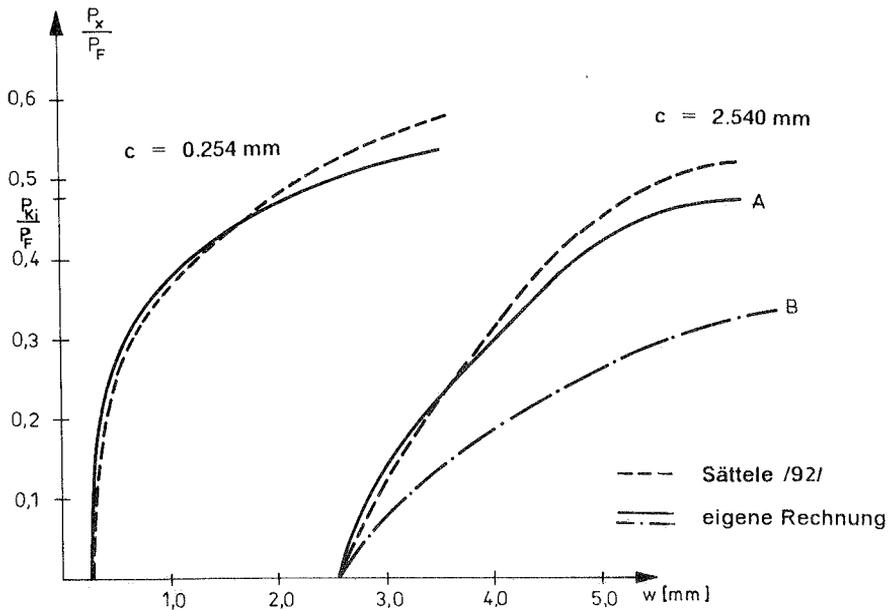


Bild 56: Last- Durchbiegungskurven

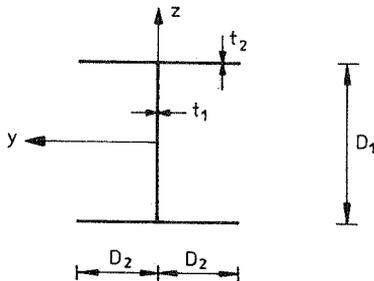
Für die Imperfektion 2,54 mm wurden zwei Berechnungen durchgeführt, da mit dem entwickelten Element eine exakte Erfassung der sich infolge von Plattenquerverformungen ändernden Längsspannungen (Membraneffekt) nicht möglich ist. Kurve A ergibt sich durch eine genäherte Berücksichtigung des Membraneffektes und Kurve B aus Berechnung unter vollständiger Vernachlässigung dieses Effektes. Zunächst soll das Problem näher erläutert werden. Im verwendeten Plattenelement sind nur Längsspannungszustände entsprechend den Balkenannahmen möglich, da es als Teil eines Balkens entwickelt wurde. Beim hier betrachteten Beispiel ist der Verlauf der Längsspannungen über die gesamte Plattenbreite konstant. Bei zunehmender Ausbiegung der Platte verändert sich dieser Verlauf allerdings, da die Längenänderung der Platte in der Mitte kleiner ist als an den Rändern. Das führt dazu, daß sich die Platte in den Rändern abstützt und dadurch in der Mitte Zugspannungen entstehen, die die wirkenden Längsdruckspannungen abmindern. Da der verwendete Ansatz eine richtige Erfassung des Membranzustandes nicht zuläßt, wurde der sich ändernde Längsspannungsverlauf durch eine einfache Mittelbildung zwischen den Längsdehnungen der Mittel-

linie und den Rändern erfaßt (Kurve A). Bei Vernachlässigung dieses Effektes (Kurve B) führt der "geometrische" Abtriebsseffekt infolge der Längsdruckkraft zu einem schnelleren Ansteigen der Verformungen und damit zu früherem Versagen. Berücksichtigt man, daß das Element von Sätteln den Längsspannungszustand besser erfaßt, so ist der Vergleich der beiden Berechnungen durchaus befriedigend. Die Mittelbildung ist im Vergleich der beiden Kurven deutlich erkennbar. Kurve A liegt zunächst über der Vergleichskurve und sinkt bei zunehmenden Verformungen unter die Kurve ab. Das heißt, der entlastende Membraneffekt wird bei kleinen Verformungen über- und bei größeren unterschätzt.

11.2 Berechnung der plastischen Beulverzweigungslast für ein längsbelastetes I - Profil

Die Berechnung der plastischen Verzweigungslast soll an folgendem Beispiel gezeigt werden.

Geometrie:



$$E = 2.0 \cdot 10^4 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} \quad (29600 \text{ ksi})$$

$$\nu = 0.3$$

$$D_1 = 100 \text{ cm}$$

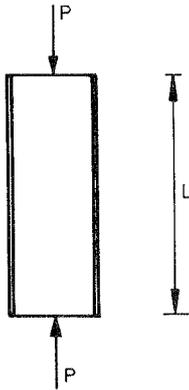
$$D_2 = 50 \text{ cm}$$

$$L = 400 \text{ cm}$$

$$t_1 = 1.5 - 3.0 \text{ cm}$$

$$t_2 = 3.0 \text{ cm}$$

Belastung:



Fließspannung (Norm):

$$F_y = 248 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (36 \text{ ksi})$$

Fließspannung (Versuch):

$$\sigma_F = 296 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (44 \text{ ksi})$$

Als Vergleichslösung werden die von Dawe und Kulak /24/ angegebenen Werte verwendet. Die Autoren geben die Verzweigungslast für längs- und biegebelastete I - Profile an. Ihre Ergebnisse beruhen auf einer numerischen Lösung mit einem speziellen Balkenelement (vgl. Kapitel 2). Sie vergleichen ihre Berechnungen mit selbst durchgeführten Versuchen und erreichen damit gute Übereinstimmung. Das hier berechnete Profil wurde einer Parameterstudie entnommen, in der Dawe und Kulak /24/ den Einfluß der Flanschbreite im Verhältnis zur Stegbreite untersuchen. Die Querschnittswerte der verwendeten Profile werden nicht explizit angegeben, sondern können nur aus den Verhältnisgrößen der Ergebnisse "zurückgerechnet" werden. Die Autoren geben die Steghöhe im Verhältnis zur Stegdicke und die Flanschbreite im Verhältnis zur Flanschdicke an und multiplizieren beide Werte zusätzlich mit der Wurzel der in der kanadischen Norm angegebenen Fließspannung ($\sqrt{F_y}$).

In der Berechnung wurde der in Bild 57 angegebene Eigendehnungszustand berücksichtigt. Die Maximalordinaten der Eigenspannungen wurden mit dem Betrag von $0.3 \sigma_F$ angenommen und in Dehnungen ausgedrückt.

Die Berechnung der plastischen Verzweigungslast ist nicht in einem Schritt möglich, da der zum Versagen führende Spannungszustand nicht von vorneherein bekannt ist und auch nicht, wie bei der Bestimmung der elastischen Verzweigungslast, linear extrapoliert werden kann. Es muß vielmehr in verschiedenen Laststufen eine Eigenwertuntersuchung vorgenommen werden. Bei beginnender Plastizierung wird die Querschnittstragfähigkeit entspre-

chend abgemindert, so daß der Eigenwert λ mit steigender Last abnimmt. Die Grenzlaster ist erreicht, wenn λ den Wert 1 annimmt, da der zugrundegelegte Spannungszustand dem Versagenszustand entspricht. Es ist hierbei allerdings zu berücksichtigen, daß für das Plastizieren lediglich der aus äußerer Last und den Eigenspannungen resultierende Längsspannungszustand verantwortlich ist. Bei Überschreitung der Fließspannung wird jedoch für alle Querschnittsfreiheitsgrade vollplastisches Verhalten angenommen. Die Verzweigungslast wurde mit dem angegebenen Profil für drei unterschiedliche D_1/t_1 Verhältnisse berechnet. Die Ergebnisse sind in Bild 59 aufgetragen. Die Versagenslast P ist auf die vollplastische Last $P_F = A \sigma_F$ bezogen.

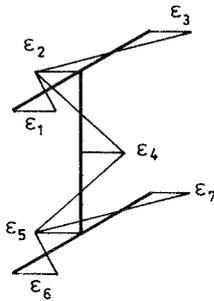


Bild 57: Verlauf der Eigendehnungen

Je nach Länge des Trägers stellt sich ein Versagensmodus mit 3 - 5 lokalen Beulen ein. Infolge des über die Querschnittslänge konstant verlaufenden Spannungszustandes kommt es nicht zur Ausbildung einer dominierenden lokalen Beule, sondern, ähnlich elastischem Verhalten, zu einem regelmäßigen Beulmuster. Im Versagenszustand befinden sich ungefähr 25 % sowohl jeder Gurthälfte als auch des Steges im plastischen Bereich (vgl. Bild 58). Die eigenen Ergebnisse liegen ungefähr 10 % unter den von Dawe /24/ angegebenen Werten. Dieser Umstand dürfte hauptsächlich auf die hier verwendete Annahme von ideal-plastischem Materialverhalten nach Überschreiten der Fließgrenze zurückzuführen sein. Dawe hingegen berücksichtigt in seiner Berechnung Materialverfestigung .

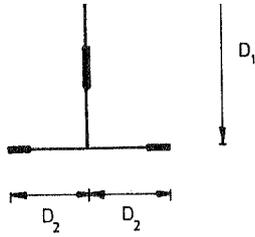
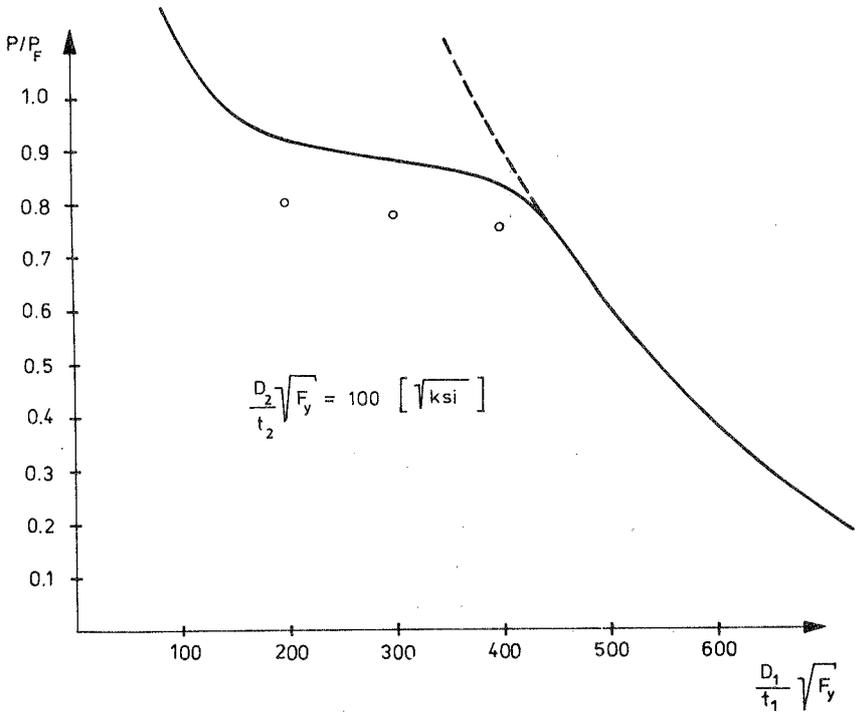


Bild 58: Plastische Zonen



— plastische Verzweigungslast nach Dawe /24/

--- elastische Verzweigungslast

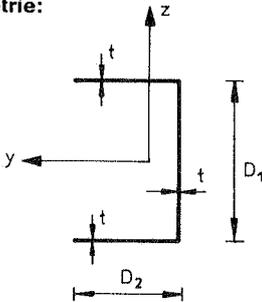
○ ○ eigene Berechnung

Bild 59: Verzweigungslasten

11.3 Berechnung der Last-Verschiebungskurve eines längsbelasteten C - Profiles

Die Berechnung einer nichtlinearen Last-Verschiebungskurve bis zur Ausbildung eines lokalen Versagensmechanismus soll an folgendem Beispiel durchgeführt werden. Die Versagenslast des betrachteten C - Profiles wurde 1986 von Argyris, Balmer, Doltsinis und Kurz /2/ experimentell bestimmt und die nichtlineare Last-Verschiebungskurve mit einer finite Element Rechnung nachvollzogen. Hierzu idealisierten sie den Träger mit 900 Dreieckselementen, wobei eine Verdichtung der Elementeteilung im Mittelbereich durchgeführt wurde.

Geometrie:



$$E = 66000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\nu = 0.3$$

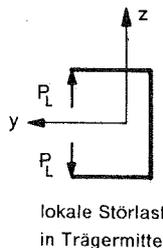
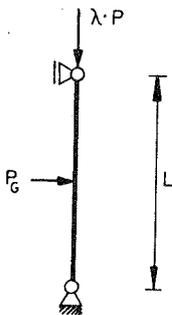
$$D_1 = 30 \text{ mm}$$

$$D_2 = 20 \text{ mm}$$

$$t = 2.0 \text{ mm}$$

$$\sigma_F = 217 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

System und Belastung:



$$L = 600 \text{ mm}$$

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$P_G = 10 \text{ N}$$

$$P_L = 10 \text{ N}$$

lokale Störlast
in Trägermitte

Für die eigene Berechnung wurde eine Idealisierung mit 20 Balken- und jeweils 4 Subelementen gewählt. Durch die Betrachtung des imperfekten

Systems treten infolge steigender Längsbelastung geometrisch nichtlineare Effekte auf. Die Imperfektion wurde in Form von zwei konstant gehaltenen Störlasten aufgebracht; eine Einzellast in Trägermitte, durch die eine globale Querverformung des Trägers hervorgerufen wurde, und ein Kräftepaar an den Gurten, zur Einleitung des lokalen Versagensmechanismus. Die Längsbelastung des so vorverformten Trägers wurde mit dem Faktor λ gesteigert. In Bild 60 ist die ermittelte Last-Verschiebungskurve angegeben. Die Biegebeanspruchung des Trägers infolge der vorgegebenen Störlasten und der aus steigender Längslast resultierenden geometrischen Effekte ist zunächst gering (bis $\lambda = 8$). Bei weiterer Steigerung der Last P nimmt jedoch die Querverschiebung v stark zu und die Biegebeanspruchung steigt an. Infolge der Zusammenwirkung der Längsspannungen und der zunehmenden Biegespannungen wird in Trägermitte die Fließgrenze überschritten. Dadurch wird die Steifigkeit der Profilplatten so abgemindert, daß die lokalen Verformungen in Trägermitte ebenfalls stark zunehmen und sich ein teilplastischer Mechanismus ausbildet (vgl. Bild 61 und 62). Eine weitere Laststeigerung ist nicht mehr möglich, die Querverschiebungen werden trotz zurückgehender Längsbelastung größer. Mit dem hier eingesetzten Element konnte die Entlastungskurve nicht nachvollzogen werden, da ab dem Grenzlastfaktor $\lambda = 9.32$ keine Konvergenz mehr erzielt werden konnte. Dieser Umstand ist damit zu erklären, daß bei voranschreitender Systemverformung auch die lokalen Querschnittsverformungen nicht mehr den Charakter kleiner Verformungen aufweisen, sondern ebenso wie die globalen Systemverformungen als große Verschiebungsgrößen betrachtet werden müssen. Dies ist jedoch in dem hier verwendeten Konzept nicht vorgesehen. Darüberhinaus fehlt dem Berechnungsmodell infolge des verwendeten idealplastischen Werkstoffgesetzes die Möglichkeit der Materialverfestigung. Dennoch kann festgestellt werden, daß die berechnete Versagenslast und die auftretende Versagensform mit einer relativ einfachen Systemidealisierung gut angenähert wurde.

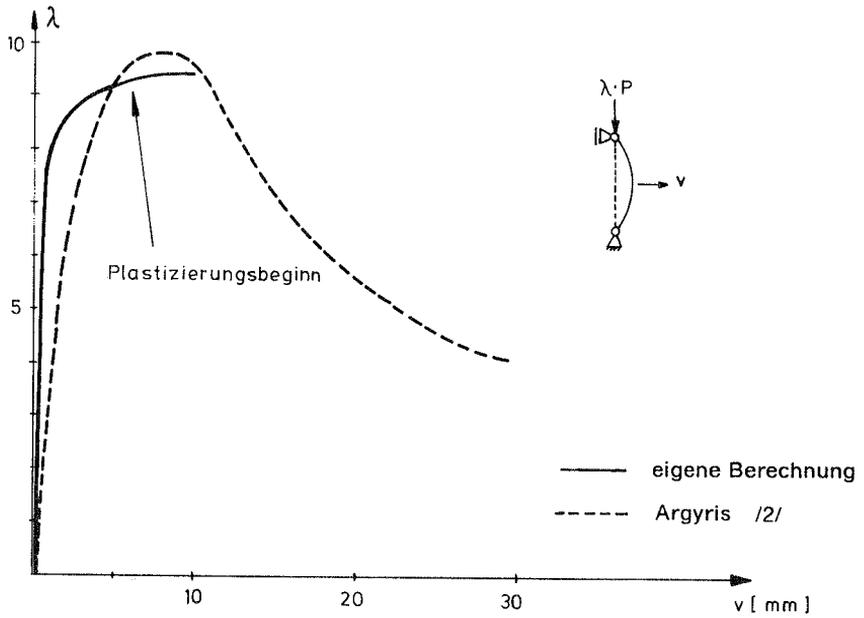


Bild 60: Last-Verschiebungskurve

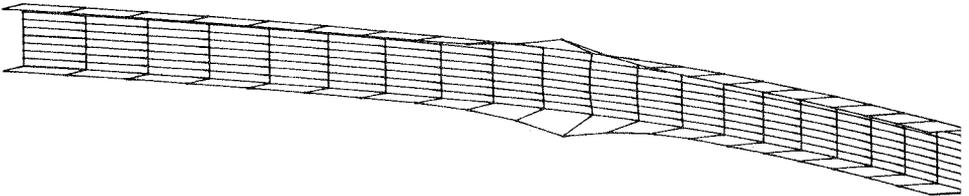


Bild 61: Teilplastischer Versagensmechanismus eines C- Profiles

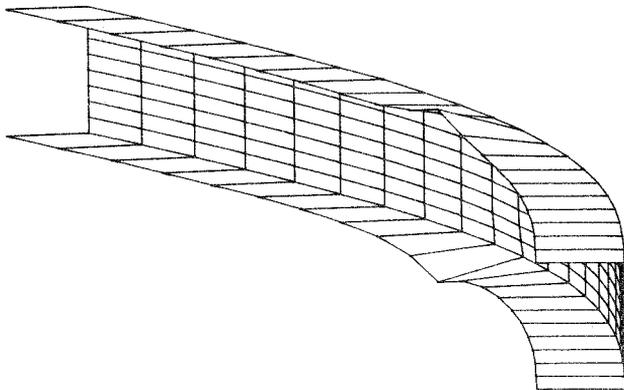


Bild 62: Teilplastischer Versagensmechanismus eines C- Profiles
- perspektivisch verzerrt

12.0 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit werden Stäbe mit offenen, dünnwandigen Querschnitten und Berücksichtigung der Profilverformung untersucht. Es wird sowohl physikalisch wie geometrisch nichtlineares Verhalten in die Untersuchungen einbezogen. Die im Kapitel 3 formulierte Zielsetzung war, auf der Basis eines räumlichen Balkenelementes ein erweitertes finites Element zu schaffen, mit dem die Untersuchung der gegenseitigen Wechselwirkung zwischen lokalem Querschnittsversagen und globalem Versagen des gesamten Stabes möglich ist. Ausgehend von der inkrementellen Gleichgewichtsbedingung für ein allgemeines Kontinuum, wird die Grundgleichung entsprechend den Balkenannahmen spezialisiert. Als Bezugszustand eines Inkrementes dient der letzte bekannte Gleichgewichtszustand, damit entsteht eine mitgehende Lagrange - Formulierung. Die Verformung des Gesamtträgers wird in Balkenanteile und zusätzliche aus der Profilverformung resultierende Plattenanteile aufgespalten. Dazu ist es notwendig ein Profil aus einzelnen Platten zusammensetzen, wobei sich eine Kopplung des Balken- und des Plattenverhaltens entsprechend der Anordnung der einzelnen Platten zum Gesamtquerschnitt ergibt. Im Sinne der Methode der finiten Elemente werden die kontinuierlichen Verschiebungen mittels bereichsweiser Ansätze in diskrete Verschiebungsgrößen umgesetzt. Für diese diskreten Größen werden Steifigkeitsmatrizen entwickelt mit denen sowohl die Lösung des Verzweigungsproblems, mit Hilfe von Eigenwertanalysen, als auch die inkrementell - iterative Berechnung von Last - Verformungskurven möglich ist. Da das lokale Plattenverhalten und seine Interaktion mit der Balkenwirkung für eine einzelne Querschnittsplatte formuliert ist, unterliegt das Konzept keinerlei Querschnittsbeschränkungen. Es können beliebige, aus ebenen Einzelplatten zusammensetzbare Querschnitte untersucht werden. In den Kapiteln 10 und 11 wird anhand ausgewählter Beispiele eine numerische Überprüfung des entwickelten Elementes durchgeführt. Im Rahmen der verwendeten Näherungen werden hierbei gute Übereinstimmungen mit bekannten Vergleichslösungen erreicht.

Das verwendete Konzept erlaubt einige, der im Kapitel 4 eingebrachten Vernachlässigungen und Beschränkungen fallen zu lassen und den Einsatzbereich des Elementes noch zu erweitern. Einerseits könnte durch die Berücksichtigung bisher vernachlässigter Schubspannungsanteile das Elementverhalten bei extrem gedrunghenen Trägern, sowie in Einleitungsbereichen hoher

Querlasten und im Auflagerbereich verbessert werden. Andererseits wäre es im Sinne einer wirklichkeitsnahen Werkstofffassung wünschenswert auch Materialverfestigungen mit ins Stoffgesetz einzubeziehen und die Möglichkeit von Entlastungen zuzulassen. Weiterhin wäre eine verbesserte Erfassung des Scheibenspannungszustandes in den einzelnen Querschnittsplatten anzustreben, da Spannungumlagerungen aus der lokalen Verformung der einzelnen Querschnittsteile nur näherungsweise berücksichtigt werden. Allerdings stößt eine genauere Erfassung, sich nichtlinear über den Querschnitt verändernder Längsspannungen, an die Grenzen der Balkentheorie, da ein solcher Verlauf nicht durch die integralen Balkenschnittgrößen erfaßt werden kann. Dieses Problem wird noch bedeutender, wenn man für die Profilverformungen große Verschiebungen zuläßt. Beim hier verwendeten Balkenmodell könnten solche auf geometrische Effekte zurückzuführende Spannungumlagerungen, nur durch eine Änderung der Werkstoffbeziehung erfaßt werden.

Schriftumsverzeichnis

- /1/ Akay, H.U.,
Johnson, P.C.,
Will, K.M. Lateral and Local Buckling of Beams and
Frames
Proc. ASCE, J. Struc. Div. (1977), 1821-1832.
- /2/ Argyris, J.,
Balmer, H.A.,
Doltsinis, J.S.,
Kurz, A: Computer Simulation of Crash Phenomena.
Int. J. Num. Meth. Eng.,
Vol.22 (1986), 497-519.
- /3/ Ascione, L.,
Grimaldi, A.: On the Stability and Post-Buckling Behavior
of Elastic Beams.
Thin Walled Structures, No. 4 (1983), 325-351.
- /4/ Bamm, D.,
Lindner, J.,
Voss, U.R.: Traglastversuche an ausgesteiften Träger-
auflagern.
Der Stahlbau 10(1983), 296-300.
- /5/ Bathe, K.-J.: Finite Element Procedures in Engineering
Analysis.
Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.
- /6/ Bathe, K.-J.,
Wiener, P.: On Elastic Plastic Analysis of I-Beams in
Bending and Torsion
Computers & Structures,
No. 5 (1983), 711-718.
- /7/ Bazant, Z.P.: Large Deflections Spatial Buckling of Thin
Walled Beams.
Proc. ASCE,
J. Eng. Mech. Div., 12 (1973), 1259-1281.
- /8/ Bijlaard, P.B.: Theory and Tests on the Plastic Stability of
Plates and Shells.
J. Aeronautical Sciences 9 (1949), 529-541.

- /9/ Bornscheuer,F.W.: Vorlesungen in Baustatik,
Teile P (Platten), Tafeln u. Tabellen
Vorlesungsumdruck des Instituts für Bau-
statik, Uni. Stuttgart, 1978.
- /10/ Bornscheuer,F.W., Tafeln der Torsionskenngrößen für die Walz-
Anheuser, L.: profile der DIN 1035-1027.
Der Stahlbau 3(1961), 81-82.
- /11/ Bornscheuer,F.W.: Torsion und Profilverformung dünnwandiger
Stäbe.
Vorlesungsumdruck des Instituts für Bau-
statik, Uni. Stuttgart, 1978.
- /12/ Bradford, M.A., Inelastic Buckling of Beam-Columns with Un-
Trahair, N.S.: equal End Moments.
J. Construct. Steel Research 5 (1985), 195-211.
- /13/ Bradford, M. A.: Inelastic Distortional Buckling of I-Beams.
Computers & Structures,
No. 6 (1986), 923-933.
- /14/ Bradford, M., Elastic Interaction of Local and Lateral
Hancock, G.: Buckling in Beams.
Thin Walled Structures, No. 1, 1984, 1-25.
- /15/ Bufler, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie.
Vorlesungsumdruck des Instituts für Mechanik,
Uni. Stuttgart, 1977.
- /16/ Buffer, H.: Energimethoden.
Vorlesungsumdruck des Instituts für Mechanik,
Uni. Stuttgart, 1978.
- /17/ Bulson, P.S.: Local Stability and Strenght of Structural
Sections.
Thin Walled Structures, Editor: A. Chilver,
Chatto and Windus, 1967, 153-207.

- /18/ Carl, J.: Näherungslösungen des nichtlinearen Biege- und Torsionsproblems für dünnwandige Stäbe mit offenem Profil. Dissertation, TU Berlin, 1970.
- /19/ Chen, W.F., Theory of Beam-Columns.
Atsuta, T.: McGraw-Hill Inc., 1976.
- /20/ Crisfield, M.A.: Large-Deflection Elasto-Plastic Buckling Analysis of Plates Using Finite Elements. Transport and Road Research Laboratory, Rep. LR 593, Crowthorne Berks., 1973.
- /21/ Crisfield, M.A.: Some Approximations in the Nonlinear Analysis of Rectangular Plates Using Finite Elements. Transport and Road Research Laboratory, Rep. 51, Crowthorne Berks., 1974.
- /22/ Crisfield, M.A.: Full-range Analysis of Steel Plates and Stiffened Plating Under Uniaxial Compression. Proc. Inst. Civil Eng., Part 2, (1975), 595 ff.
- /23/ Croll, J.G.A.: Towards Simple Estimates of Shell Buckling Loads. Der Stahlbau 1975, 243-248.
- /24/ Dawe, J.L., Plate Instability of W-Shapes.
Kulak, L.: J. Struc. Eng. 6(1984), 1278-1291.
- /25/ Dawe, J.L., Local Buckling of Hollow Structural Sections.
Elgabry, A.A., J. Struc. Eng. 5(1985) 1101 ff.
Guerdin, G.Y.:
- /26/ Dawe, J.L., Local Buckling of W - Shape Columns.
Kulak, L.: and Beams
J. Struc. Eng. 6 (1984), 1292-1305.

- /27/ Dangelmaier, P.: Traglastberechnungen geschweißter räumlich belasteter Stäbe aus Aluminium. Dissertation, Uni. Karlsruhe, 1985.
- /28/ Deseö, Z.: Zur Berechnung von auf Biegung und Torsion beanspruchten dünnwandigen Trägern nach der Scheibentheorie. Der Stahlbau 9 (1982), 277-281.
- /29/ Dinkler, D., Kröplin, U.B.: Zur Tragsicherheitsnachweis für quadratische, scheibenartig beanspruchte Einzelfelder aus Stahl. Der Stahlbau 6 (1984), 174-178.
- /30/ El-Ghazaly, H.A., Sherbourne, A., Dubey, R.: Inelastic Interactive Distorsional Buckling of W - Shape Steel Beams. Computers & Structures No. 19 (1984), 351-368.
- /31/ Fink, R.: Lokales Beulen von Stahlträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt. Diplomarbeit am Institut für Baustatik, Uni. Stuttgart, 1986.
- /32/ Fischer, M.: Das Kipp-Problem querbelasteter exzentrisch durch Normalkraft beanspruchter I-Träger bei Verzicht auf die Voraussetzung der Querschnittstreue. Dissertation, Uni. Stuttgart, 1966.
- /33/ Fröhlich, K.C.: Grenztragfähigkeit von dünnwandigen Hohlprofilen. Der Stahlbau 10 (1984), 311-316.
- /34/ Fukumoto, Y., Kubo, M.: Buckling in Steel U-Shaped Beams. Proc. ASCE, J. Struc. Div. 5 (1982), 1174-1191.
- /35/ Fung, Y.C.: Continuum Mechanics. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

- /36/ Göben, U., Warkenthin, D.:
Zuschrift zu Lindner, Schmidt :
Biegedrillknicken von I-Trägern unter
unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher
Lasteinleitung.
Der Stahlbau 3 (1984), 95-96.
- /37/ Godoy, L.A., Prato, C.:
Buckling of Thin-Walled Beams under Water
Loading.
J. Struc. Eng. 11 (1984), 2667-2676.
- /38/ Haaijer, G.:
Plate Buckling in the Strain Hardening
Range.
Proc. ASCE,
J. Eng. Mech. Div. (1957), 1212-1247.
- /39/ Haaijer, G., Thurlimann, B.:
On Inelastic Buckling in Steel.
Proc. ASCE,
J. Eng. Mech. Div. 4 (1958), 853-866.
- /40/ Häfner, L., Ramm, E., Sättele, J.M., Stegmüller, H.:
NISA 80 - Programmdokumentation-
Programmsystem.
Bericht des Instituts für Baustatik,
Uni. Stuttgart, 1981.
- /41/ Hancock, G.J.:
Local Distortional and Lateral Buckling of
I - Beams.
Proc. ASCE, J. Struc. Div. (1978), 1787-1798.
- /42/ Hancock, G.J.:
Interaktion Buckling in I - Section Columns.
Proc. ASCE, J. Struc. Div. (1981), 163-179.
- /43/ Hancock, G.J., Bradford, M.A., Trahair, N.S.:
Web Distortion and Flexural-Torsional
Buckling.
Proc. ASCE, J. Struc. Div. (1980), 1557-1571.
- /44/ Hancock, G.J.:
Distortion Buckling of Steel Storage Rack
Columns.
Proc. ASCE, J. Struc. Eng. 12 (1985), 2770-2784.

- /45/ Handelmann, G., Prager, W.: Plastic Buckling of a Rectangular Plate under Edge Thrusts. National Advisory Committee for Aeronautics, Report 946 (1950).
- /46/ Hayduk, R.L.: Extensional Collapse Modes of Structural Members. Computers & Structures Vol. 18, No. 3 (1984), 447-458.
- /47/ Henkel, F.O.: Ein Beitrag zum plastischen Kippen von I-Trägern mit Hilfe der Finit-Element-Methode. Dissertation, TH Darmstadt, 1977.
- /48/ Johnson, P., Will, K.: Beam Buckling by Finite Element Procedure. Proc. ASCE, J. of Struc. Div. 3 (1974), 669 ff.
- /49/ Kalyanaraman, V.: Local Buckling of Cold Formed Steel Members. Proc. ASCE, J. Struc. Div. 5 (1979), 813-828.
- /50/ Kemp, A.: Interaction of Plastic Local and Lateral Buckling. J. Struc. Eng. 10 (1985), 2181 ff.
- /51/ Klee, K.D., Wriggers, P.: Traglastberechnung ebener Stabwerke bei großen Verschiebungen und Verdrehungen. ZAMM 5 (1984), T288.
- /52/ Kröplin, B.H.: Beulen ausgesteifter Blechfelder mit geometrischer und stofflicher Nichtlinearität. Dissertation, TU Braunschweig, 1977.
- /53/ Kuhlmann, U.: Rotationskapazität biegebeanspruchter I - Profile unter Berücksichtigung des plastischen Beulens. Dissertation, Uni. Bochum, 1986.

- /54/ Lay, M.G.: Flange Local Buckling in Wide-Flange Shapes.
Proc. ASCE, J. Struc. Div. (1965), 95-117.
- /55/ Lee, H.P.,
Harris, P.J.: A Nonlinear Finite Element Computer Program for Thin-Walled Members.
Thin-Walled Structures 2 (1984), 355-377.
- /56/ Lindner, J.: Biegedrillknicken von I-Trägern unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Lasteinleitung.
Der Stahlbau 9 (1982), 257-263.
- /57/ Lindner, J.,
Gietzelt, R.: Stabilisierung von Biegeträgern mit I-Profil durch angeschweißte Kopfplatten.
Der Stahlbau, 3 (1984), 69-74.
- /58/ Lindner, J.,
Gietzelt, R.: Zweiachsige Biegung und Längskraftvergleiche verschiedener Bemessungskonzepte.
Der Stahlbau 11 (1984), 328-348.
- /59/ Lindner, J.,
Kurth, W.: Zum Biegedrillknicken von Stützen aus StE 690.
Der Stahlbau, 12 (1982) 366-375.
- /60/ Roik, K.,
Carl, J.,
Lindner, J.: Biegetorsionsprobleme gerader dünnwandiger Stäbe.
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1972.
- /61/ Loughlan, J.: The Ultimate Load Sensitivity of Channel Columns to Column Axis Imperfection.
Thin Walled Structures, No. 3 (1983), 75-96.
- /62/ Malvern, L.E.: Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.
Prentice-Hall, Englewood Cliffs,
New Jersey, 1969.

- /63/ Mazzolani, F.M., Plastic Analysis of Aluminium Alloy Members
Capelli, M., in Bending
Spasiano, G.: Aluminium 10 (1985), 734 ff.
- /64/ Medwadowski, S.T.: Nonprismatic Shear Beams.
J. Struc. Eng. 5 (1984), 1067-1087.
- /65/ Meek, J.: Eine einfache Methode zur Berücksichtigung der Wölbkrafttorsion des doppelstegigen Plattenbalkens.
Die Bautechnik 7 (1982), 228-232.
- /66/ Mollmann, H.: Finite Displacements of Thin-Walled Beams.
Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, No.252 (1982).
- /67/ Morris, O.: Wagner Hypothesis in Beam Column Theory.
Proc. ASCE,
J. Eng. Mech. Div. 6 (1982), 570-580.
- /68/ Mulligan, G.P.: Locally Buckled Thin-Walled Columns.
J. Struc. Eng. 11 (1984), 2635-2650.
- /69/ Murray, D., Technique for Formulating Beam Equations.
Rajasekaran, S.: Proc. ASCE,
J. Eng. Mech. Div. 10 (1975), 561-573.
- /70/ Murray, N.W.: Introduction to the Theory of Thin-Walled Structures.
Oxford Eng. Science Series,
Clarendon Press, 1984.
- /71/ Murray, N. W., The Behavior of a Channel Cantilever under
Lau, A. Y. C.: Combined Bending and Torsional Loads.
Thin Walled Structures, No. 3 (1983), 55-74.
- /72/ Nayak, G.C., Elasto-Plastic Analysis.
Zienkiewicz, O.: A Generalisation for Various Constitutive
Relations Including Strain Softening.
Int. J. Num. Meth. Eng. (1972), 113-135.

- /73/ Nukulchai, K.,
Shin, S.: Versatile and Improved Higher-Order Beam Element.
J. Struc. Eng. 9 (1984), 2234-2249.
- /74/ Öhlschläger, H.: Berechnung verwindungsweicher Nutz-
fahrzeugrahmen auf Torsion unter Be-
rücksichtigung der Knotenbildung.
Dissertation, TH Braunschweig, 1981.
- /75/ Osterrieder, P.: Traglastberechnung von räumlichen Stab-
tragwerken bei großen Verformungen mit
finiten Elementen.
Dissertation, Uni. Stuttgart, 1983.
- /76/ Oxford, J.: Traglastverfahren im Stahlbau.
Vorlesungsumdruck des Lehrstuhls für
Stahlbau und Holzbau,
Uni. Stuttgart, 1978.
- /77/ Oxford, J.: Stabilitätstheorie I - Stäbe
Vorlesungsumdruck des Lehrstuhls
für Stahlbau und Holzbau,
Uni. Stuttgart, 1978.
- /78/ Paulun, J.,
Stein, E.: Geometrisch nichtlineare Traglastberech-
nung ebener Biegungstragwerke.
ZAMM Vol. 64 4 (1984), T79.
- /79/ Petersen, C.: Statik und Stabilität der Baukonstruktionen.
Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1980.
- /80/ Pinsky, P.P.: Isotropic Hardening.
Report Berkeley, 11 (1981).
- /81/ Protte, W.: Zur kombinierten Gurt-Stegblech-Beulung
querbelasteter I-Träger mit einem breiten Gurt.
Der Stahlbau 5 (1983), 151-155.

- /82/ Rajasekaran, S.: Finite Element Analysis of Thin-Walled Members of Open Cross Sections. Structural Engineering Report No.34, Depart. of Civil Engineering, Uni. of Alberta, Edmonton, Canada, 1971.
- /83/ Rajasekaran, S., Murray, D.W.: Coupled Local Buckling in Wide-Flange Beam - Columns. Proc. ASCE, J. Struc. Div. 99 (1973), 1003-1023.
- /84/ Rajasekaran, S., Murray, D.W.: Finite Element Solution of Inelastic Beam Equations. Proc. ASCE, J. Struc. Div. 99 (1973), 1025-1041.
- /85/ Rajasekaran, S., Murray, D.W.: Finite Element Large Deflection Analysis of Thin-Walled Beams of Open Section. Proc. 1st Int. Conference Finite Element Methods in Engineering, University of New South Wales, Sydney, Australia, Aug. 28-30, 1974.
- /86/ Rajasekaran, S.: Finite Element Method for Plastic Beam - Columns. Vol. 2: Space Behaviour and Design. McGraw-Hill, New York, 1976, 539-608.
- /87/ Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente. Habilitation, Uni. Stuttgart, 1976.
- /88/ Ramm, E., Kammler, G.: Finite Elemente für Tragwerksberechnungen. Vorlesungsumdruck Inst. f. Baustatik, Universität Stuttgart, 1985.
- /89/ Rippert, E.: Numerische Lösung des Traglast-Problems für Ein- und Mehrfeldträger mit offenen, dünnen Profilen. Dissertation, TH Darmstadt, 1985.

- /90/ Roberts, T.M., Jhita, P.S.: Lateral, Local and Distorsional Buckling of I - Beams. Thin Walled Structures, No. 4 (1983), 289-308.
- /91/ Rondal, J., Maquoi, R.: Stub-Column Strength of Thin-Walled Square and Rectangular Hollow Sections. Thin-Walled Structures, Vol.3 (1985), 15-34.
- /92/ Sättele, J.M.: Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen mit stofflicher und geometrischer Nichtlinearität. Dissertation, Uni. Stuttgart, 1980.
- /93/ Saleh, A.: Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken mit großen Verformungen und Plastizierung. Dissertation, TH Aachen, 1982.
- /94/ Schardt, R., Schrade, W.: Kaltprofilpfetten. Bericht Nr.1 des Instituts für Baustatik der TH Darmstadt, 1982.
- /95/ Schardt, R.: Stabilitätsgerechte Formgebung dünnwandiger Querschnitte. Tagungsheft, Baustatik-Baupraxis, Darmstadt, 1981.
- /96/ Schardt, R.: Besonderheiten des Tragverhaltens dünnwandiger Querschnitte - Berechnungsgrundlagen. Bericht des Institut für Baustatik der TH Darmstadt.
- /97/ Schmied, R.: Die Gesamtstabilität von zweiachsig außermittig gedrückten dünnwandigen I-Stäben unter Berücksichtigung der Querschnittsverformung nach der nichtlinearen Plattentheorie. Der Stahlbau, 1 ((1967), 1-12.

- /98/ Scholz, H.E.: Simplified Interaction Method for Sway Frames.
J. Struc. Eng. 5 (1984), 992-1007.
- /99/ Schrade, W.: Ein Beitrag zum Stabilitätsnachweis dünnwandiger, durch Bindebleche versteifter Stäbe mit offenem Querschnitt.
Bericht Nr.4 des Instituts für Baustatik der TH Darmstadt, 1984.
- /100/ Schröter, F.: Stability in the Mechanics of Continuum.
Springer, 1982.
- /101/ Schröter, V.: Große Verschiebungen und elastoplastisches Tragverhalten.
Mitteilung 84-2 Ruhr-Uni. Bochum.
- /102/ Sedlacek, G.,
Lopetegui, J.,
Stutzki, C.,
Saleh, A.: Ein Computerorientiertes Verfahren zur statischen Berechnung räumlicher Stabwerke unter Berücksichtigung nichtlinearer Effekte.
Der Bauingenieur 60 (1985), 297-305.
- /103/ Shanungan, N.E.: Ultimate Load Behavior of Trapezoidal Steel Decks.
J. Struc. Eng. 6 (1984), 884-896.
- /104/ Sridharan, S.,
Benito, R.: Columns: Static and Dynamic Interactive Buckling.
Proc. ASCE,
J. Eng. Mech. Div. 1 (1984), 49 ff.
- /105/ Sridharan, S.: Interactive Buckling in Thin-Walled Beam-Columns.
Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. Vol. 111
12(1985) 1470 ff.

- /106/ Stoverink, H.: Ein Beitrag zur Ermittlung der Gesamtstabilität von Hallenrahmen unter Berücksichtigung von Vouten und Steifen. Dissertation, TH Aachen, 1985.
- /107/ Stutzki, C.: Traglastberechnung räumlicher Stabwerke unter Berücksichtigung verformbarer Anschlüsse. Dissertation, TH Aachen, 1982.
- /108/ Tan, B.T.: Biegeknicken von vorverformten Druckstäben mit Querlasten. Der Stahlbau 1 (1984), 13-16.
- /109/ Tien, Y.L.,
Wang, S.T.: Local Buckling of Beams under Stress Gradient. Proc. ASCE, J. Struc. Div. 8 (1979), 1571-1588.
- /110/ Timoshenko, S.P.,
Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability. McGraw-Hill Kogakusha, 1982.
- /111/ Trahair, N.S.,
Kitipornchai, S.: Buckling of Inelastic I-Beams Under Uniform Moment. Proc. ASCE, J. Struc. Div. 11 (1972), 2251 ff.
- /112/ Unger, B.: Elastisches Kippen von beliebig gelagerten und aufgehängten Durchlaufträgern mit einfachsymmetrischem, in Trägerachse veränderlichem Querschnitt und einer Abwandlung des Reduktionsverfahrens als Lösungsmethode. Dissertation, TH Darmstadt, 1969.
- /113/ Vacharajitphan, P.,
Trahair, N.: Warping and Distortion at I - Section Joints. Proc. ASCE, J. Struc. Div. (1974), 547 ff.
- /114/ Vasquez, J.: Thin Walled Core Element for Multistory Buildings. J. Struc. Eng. 5 (1984), 1021 ff.

- /115/ Wekezer, J.W.: Instability of Thin Walled Bars.
Proc. ASCE,
J. Eng. Mech. Div. 7 (1985), 923ff.
- /116/ Wisniewski, L., Örtliches Beulen des Stegblechs eines Stahl-
Petlic, P.: stabes mit Berücksichtigung der Längskräfte
in dem Gurten.
Der Stahlbau 8 (1983), 237-240.
- /117/ Wlassow, W.S.: Dünnwandige elastische Stäbe.
Verlag für Bauwesen Berlin 1964.
- /118/ Wöllner, G.: Nachweis der Drillknicksicherheit von
Beulsteifen.
Der Stahlbau 3 (1984), 47-51.
- /119/ Wu, J., Pure Bending of Thin-Walled Beams
Gould, P.L.: Proc. ASCE, J. Eng. Mech. Div. 7 (1984).
- /120/ Wunderlich, W.: Incremental Formulation for Geometrical
Nonlinear Problems.
Beitrag in: Bathe, Oden, Wunderlich
Formulation of Computer Algorithmn in FE
Analysis.
MIT-Press, Cambridge 1977.
- /121/ Yamada, Y., Plastic Stress-Strain Matrix and Its Appli-
Yoshimura, N., cation for the Solution of Elasto- Plastic
Sakurai, T.: Problems by the Finite Element Method.
Int. J. Mech. Science. 10 (1968), 343-354.
- /122/ Yoshida, H.: Lateral Instability of I - Beams with
Imperfections.
J. Struc. Eng. 8 (1984), 1873-1892.
- /123/ Scheer, J.: Zum Problem der Gesamtstabilität von
einfach symmetrischen I - Trägern.
Dissertation, Uni. Stuttgart, 1958.

Anhang 1

	V_1^P	V_2^P	V_3^P	V_4^P	V_5^P	V_6^P	V_7^P	V_8^P	V_9^P	V_{10}^P	V_{11}^P	V_{12}^P	V_{13}^P	V_{14}^P	V_{15}^P	V_{16}^P
S_1^P	$24 \frac{D}{L}$	-66	$132 \frac{L}{D}$	$12 \frac{L}{D}$	$-18 \frac{D}{L}$	-39	$78 \frac{L}{D}$	$-9 \frac{D}{L}$	-24 $\frac{D}{L}$	-66	-132 $\frac{L}{D}$	$12 \frac{L}{D}$	$18 \frac{D}{L}$	-39	$-78 \frac{L}{D}$	$-9 \frac{D}{L}$
S_2^P		$312 \frac{L}{D}$	$-468 \frac{D}{L}$	-44	39	$108 \frac{D}{L}$	$-162 \frac{L}{D}$	26	66	$156 \frac{D}{L}$	$468 \frac{L}{D}$	-22	-39	$54 \frac{L}{D}$	$162 \frac{D}{L}$	13
S_3^P			$936 \frac{DL}{L}$	$66 \frac{L}{D}$	$-78 \frac{L}{D}$	$-162 \frac{L}{D}$	$324 \frac{DL}{L}$	$-39 \frac{L}{D}$	$-132 \frac{L}{D}$	$-468 \frac{L}{D}$	$-936 \frac{DL}{L}$	$66 \frac{L}{D}$	$78 \frac{L}{D}$	$-162 \frac{L}{D}$	$-324 \frac{DL}{L}$	$-39 \frac{L}{D}$
S_4^P				$8 \frac{D}{L}$	$-9 \frac{D}{L}$	-26	$39 \frac{L}{D}$	$-6 \frac{D}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	-22	$-66 \frac{L}{D}$	$4 \frac{D}{L}$	$9 \frac{D}{L}$	-13	$-39 \frac{L}{D}$	$-3 \frac{D}{L}$
S_5^P					$24 \frac{D}{L}$	66	$-132 \frac{L}{D}$	$12 \frac{D}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	39	$78 \frac{L}{D}$	$-9 \frac{D}{L}$	$-24 \frac{D}{L}$	66	$132 \frac{L}{D}$	$12 \frac{D}{L}$
S_6^P						$312 \frac{L}{D}$	$-468 \frac{L}{D}$	44	39	$54 \frac{L}{D}$	$162 \frac{D}{L}$	-13	-66	$156 \frac{L}{D}$	$468 \frac{D}{L}$	22
S_7^P							$936 \frac{D}{D}$	$-66 \frac{L}{D}$	$-78 \frac{L}{D}$	$-162 \frac{L}{D}$	$-324 \frac{DL}{L}$	$39 \frac{L}{D}$	$132 \frac{L}{D}$	$-468 \frac{L}{D}$	$-936 \frac{DL}{L}$	$-66 \frac{L}{D}$
S_8^P								$8 \frac{D}{L}$	$9 \frac{D}{L}$	13	$39 \frac{L}{D}$	$-3 \frac{D}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	22	$66 \frac{L}{D}$	$4 \frac{D}{L}$
S_9^P									$24 \frac{D}{L}$	66	$132 \frac{L}{D}$	$-12 \frac{D}{L}$	$-18 \frac{D}{L}$	39	$78 \frac{L}{D}$	$9 \frac{D}{L}$
S_{10}^P										$312 \frac{D}{D}$	$468 \frac{L}{D}$	-44	-39	$108 \frac{L}{D}$	$162 \frac{D}{D}$	26
S_{11}^P											$936 \frac{DL}{L}$	$-66 \frac{L}{D}$	$-78 \frac{L}{D}$	$162 \frac{D}{D}$	$324 \frac{DL}{L}$	$39 \frac{L}{D}$
S_{12}^P												$8 \frac{D}{L}$	$9 \frac{D}{L}$	-26	$-39 \frac{L}{D}$	$-6 \frac{D}{L}$
S_{13}^P													$24 \frac{D}{L}$	-66	$-132 \frac{L}{D}$	$-12 \frac{D}{L}$
S_{14}^P														$312 \frac{D}{D}$	$468 \frac{L}{D}$	44
S_{15}^P															$936 \frac{DL}{L}$	$66 \frac{L}{D}$
S_{16}^P																$8 \frac{D}{L}$

$$\frac{D^2 k}{210 L^2}$$

Faktor

$\Phi_{\text{dyn, stat}} \Phi_{\text{dyn, stat}}$

Werte aus

Tafel 1 : Elementsteifigkeit Platte Typ II

	v_1^r	v_2^r	v_3^r	v_4^r	v_5^r	v_6^r	v_7^r	v_8^r	v_9^r	v_{10}^r	v_{11}^r	v_{12}^r	v_{13}^r	v_{14}^r	v_{15}^r	v_{16}^r
S_1^r	$312 \frac{D}{L}$	-66	$468 \frac{1}{L}$	$44 \frac{D}{L}$	$156 \frac{D}{L}$	66	$-468 \frac{1}{L}$	$22 \frac{D}{L}$	$108 \frac{D}{L}$	39	$162 \frac{1}{L}$	$-26 \frac{D}{L}$	$54 \frac{D}{L}$	-39	$-162 \frac{1}{L}$	$-13 \frac{D}{L}$
S_2^r		$24 \frac{1}{D}$	$-132 \frac{1}{D}$	-12	-66	$-24 \frac{1}{D}$	$132 \frac{1}{D}$	-12	-39	$-18 \frac{1}{D}$	$-78 \frac{1}{D}$	9	-39	$18 \frac{1}{D}$	$78 \frac{1}{D}$	9
S_3^r			$936 \frac{1}{DL}$	$66 \frac{1}{L}$	$468 \frac{1}{L}$	$132 \frac{1}{D}$	$-936 \frac{1}{DL}$	$66 \frac{1}{L}$	$162 \frac{1}{L}$	$78 \frac{1}{D}$	$324 \frac{1}{DL}$	$-39 \frac{1}{L}$	$162 \frac{1}{L}$	$-78 \frac{1}{D}$	$-324 \frac{1}{DL}$	$-39 \frac{1}{L}$
S_4^r				$8 \frac{D}{L}$	$22 \frac{D}{L}$	12	$-66 \frac{1}{L}$	$4 \frac{D}{L}$	$26 \frac{D}{L}$	9	$39 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	$13 \frac{D}{L}$	-9	$39 \frac{1}{L}$	$-3 \frac{D}{L}$
S_5^r					$312 \frac{D}{L}$	66	$-468 \frac{1}{L}$	$44 \frac{D}{L}$	$54 \frac{D}{L}$	39	$162 \frac{1}{L}$	$-13 \frac{D}{L}$	$108 \frac{D}{L}$	-39	$-162 \frac{1}{L}$	$-26 \frac{D}{L}$
S_6^r						$24 \frac{1}{D}$	$-132 \frac{1}{D}$	12	39	$18 \frac{1}{D}$	$78 \frac{1}{D}$	-9	39	$-18 \frac{1}{D}$	$-78 \frac{1}{D}$	-9
S_7^r							$936 \frac{1}{D}$	$-66 \frac{1}{L}$	$-162 \frac{1}{L}$	$-78 \frac{1}{D}$	$-324 \frac{1}{DL}$	$39 \frac{1}{L}$	$-162 \frac{1}{L}$	$78 \frac{1}{D}$	$324 \frac{1}{DL}$	$39 \frac{1}{L}$
S_8^r								$8 \frac{D}{L}$	$13 \frac{D}{L}$	9	$39 \frac{1}{L}$	$-3 \frac{D}{L}$	$26 \frac{D}{L}$	-9	$-39 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$
S_9^r									$312 \frac{D}{L}$	66	$468 \frac{1}{L}$	$-44 \frac{D}{L}$	$156 \frac{D}{L}$	-66	$-468 \frac{1}{L}$	$-22 \frac{D}{L}$
S_{10}^r										$24 \frac{1}{D}$	$132 \frac{1}{D}$	-12	66	$-24 \frac{1}{D}$	$-132 \frac{1}{D}$	-12
S_{11}^r											$936 \frac{1}{DL}$	$-66 \frac{1}{L}$	$468 \frac{1}{L}$	$-132 \frac{1}{D}$	$-936 \frac{1}{DL}$	$-66 \frac{1}{L}$
S_{12}^r												$8 \frac{D}{L}$	$-22 \frac{D}{L}$	12	$66 \frac{1}{L}$	$4 \frac{D}{L}$
S_{13}^r													$312 \frac{D}{L}$	-66	$-468 \frac{1}{L}$	$-44 \frac{D}{L}$
S_{14}^r														$24 \frac{1}{D}$	$132 \frac{1}{D}$	12
S_{15}^r															$936 \frac{1}{DL}$	$66 \frac{1}{L}$
S_{16}^r																$8 \frac{D}{L}$

$$\frac{L^2 k}{210 D^2}$$

Faktor

$\Phi_{\text{th,th}} \Phi_{\text{th,th}}^T$

- Werte aus

Tafel 2 : Elementsteifigkeit Platte Typ II

	v_1^p	v_2^p	v_3^p	v_4^p	v_5^p	v_6^p	v_7^p	v_8^p	v_9^p	v_{10}^p	v_{11}^p	v_{12}^p	v_{13}^p	v_{14}^p	v_{15}^p	v_{16}^p
S_1^p	$144 \frac{D}{L}$	-9	$108 \frac{L}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$-36 \frac{D}{L}$	9	$-108 \frac{L}{L}$	$-3 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	-9	$-108 \frac{L}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$36 \frac{D}{L}$	9	$108 \frac{L}{L}$	$-3 \frac{D}{L}$
S_2^p	$144 \frac{D}{D}$	$144 \frac{L}{D}$	$-108 \frac{D}{D}$	-12	-9	$-144 \frac{D}{D}$	$108 \frac{D}{D}$	-12	9	$-36 \frac{D}{D}$	$-108 \frac{D}{D}$	3	9	$36 \frac{D}{D}$	$-108 \frac{D}{D}$	3
S_3^p			$1296 \frac{DL}{DL}$	$9 \frac{L}{L}$	$108 \frac{L}{D}$	$108 \frac{L}{D}$	$-1296 \frac{DL}{DL}$	$9 \frac{L}{L}$	$-108 \frac{L}{D}$	$-108 \frac{L}{D}$	$-1296 \frac{DL}{DL}$	$9 \frac{L}{L}$	$-108 \frac{L}{D}$	$108 \frac{L}{D}$	$1296 \frac{DL}{DL}$	$9 \frac{L}{L}$
S_4^p				$16 \frac{D}{L}$	$-3 \frac{D}{L}$	12	$-9 \frac{L}{L}$	$-4 \frac{D}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	3	$-9 \frac{L}{L}$	$-4 \frac{D}{L}$	$3 \frac{D}{L}$	-3	$9 \frac{L}{L}$	$1 \frac{D}{L}$
S_5^p					$144 \frac{D}{L}$	9	$-108 \frac{L}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$36 \frac{D}{L}$	-9	$-108 \frac{L}{L}$	$-3 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	9	$108 \frac{L}{L}$	$12 \frac{D}{L}$
S_6^p						$144 \frac{L}{D}$	$-108 \frac{D}{D}$	12	-9	$36 \frac{D}{D}$	$-108 \frac{D}{D}$	-3	-9	$-36 \frac{D}{D}$	$108 \frac{D}{D}$	-3
S_7^p							$1296 \frac{D}{D}$	$-9 \frac{L}{L}$	$108 \frac{L}{D}$	$108 \frac{L}{D}$	$1296 \frac{DL}{DL}$	$-9 \frac{L}{L}$	$108 \frac{L}{D}$	$-108 \frac{L}{D}$	$-1296 \frac{DL}{DL}$	$-9 \frac{L}{L}$
S_8^p								$16 \frac{D}{L}$	$3 \frac{D}{L}$	3	$-9 \frac{L}{L}$	$1 \frac{D}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	-3	$9 \frac{L}{L}$	$-4 \frac{D}{L}$
S_9^p									$144 \frac{D}{L}$	9	$108 \frac{L}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	$-36 \frac{D}{L}$	-9	$-108 \frac{L}{L}$	$3 \frac{D}{L}$
S_{10}^p										$144 \frac{D}{D}$	$108 \frac{D}{D}$	-12	9	$-144 \frac{D}{D}$	$-108 \frac{D}{D}$	-12
S_{11}^p											$1296 \frac{DL}{DL}$	$-9 \frac{L}{L}$	$108 \frac{L}{D}$	$-108 \frac{L}{D}$	$-1296 \frac{DL}{DL}$	$-9 \frac{L}{L}$
S_{12}^p												$16 \frac{D}{L}$	$3 \frac{D}{L}$	12	$9 \frac{L}{L}$	$-4 \frac{D}{L}$
S_{13}^p													$144 \frac{D}{L}$	-9	$-108 \frac{L}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$
S_{14}^p														$144 \frac{D}{D}$	$108 \frac{D}{D}$	12
S_{15}^p															$1296 \frac{DL}{DL}$	$9 \frac{L}{L}$
S_{16}^p																$16 \frac{D}{L}$

$$\frac{2(1-\nu)}{900} k$$

Faktor

$$\Phi_{k_1, k_2} \Phi_{k_3, k_4}^2$$

Werte aus

Tafel 3 : Elementsteifigkeit Platte Typ II

	v_1^F	v_2^F	v_3^F	v_4^F	v_5^F	v_6^F	v_7^F	v_8^F	v_9^F	v_{10}^F	v_{11}^F	v_{12}^F	v_{13}^F	v_{14}^F	v_{15}^F	v_{16}^F
S_1^F	$576 \frac{D}{L}$	-4356	$4752 \frac{L}{L}$	$528 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	396	$-432 \frac{L}{L}$	$-132 \frac{D}{L}$	$-576 \frac{D}{L}$	-396	$-4752 \frac{L}{L}$	$48 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	36	$432 \frac{L}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$
S_2^F		$576 \frac{L}{D}$	$-432 \frac{D}{D}$	-48	-36	$-576 \frac{D}{D}$	$432 \frac{L}{D}$	-48	36	$-144 \frac{L}{D}$	$432 \frac{L}{D}$	12	36	$144 \frac{L}{D}$	$-432 \frac{L}{D}$	12
S_3^F			$5184 \frac{L}{DL}$	$396 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{L}$	$4752 \frac{D}{D}$	$-5184 \frac{DL}{DL}$	$396 \frac{L}{L}$	$-432 \frac{L}{L}$	$-432 \frac{L}{D}$	$-5184 \frac{DL}{DL}$	$36 \frac{L}{L}$	$-432 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{D}$	$5184 \frac{DL}{DL}$	$36 \frac{L}{L}$
S_4^F				$64 \frac{D}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	48	$-36 \frac{L}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$	$-48 \frac{D}{L}$	132	$-396 \frac{L}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	-12	$36 \frac{L}{L}$	$4 \frac{D}{L}$
S_5^F					$576 \frac{D}{L}$	4356	$-4752 \frac{L}{L}$	$528 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	-36	$-432 \frac{L}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	$-576 \frac{D}{L}$	396	$4752 \frac{L}{L}$	$48 \frac{D}{L}$
S_6^F						$576 \frac{L}{D}$	$-432 \frac{D}{D}$	48	-36	$144 \frac{L}{D}$	$-432 \frac{L}{D}$	-12	-36	$-144 \frac{L}{D}$	$432 \frac{D}{D}$	-12
S_7^F							$5184 \frac{L}{D}$	$-396 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{D}$	$5184 \frac{DL}{DL}$	$-36 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{L}$	$-432 \frac{L}{D}$	$-5184 \frac{DL}{DL}$	$-36 \frac{L}{L}$
S_8^F								$64 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	12	$-36 \frac{L}{L}$	$4 \frac{D}{L}$	$-48 \frac{D}{L}$	-132	$396 \frac{L}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$
S_9^F									$576 \frac{L}{L}$	4356	$4752 \frac{L}{L}$	$-528 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	-396	$-432 \frac{L}{L}$	$132 \frac{D}{L}$
S_{10}^F										$576 \frac{L}{D}$	$432 \frac{L}{D}$	-48	36	$-576 \frac{L}{D}$	$-432 \frac{L}{D}$	-48
S_{11}^F											$5184 \frac{L}{DL}$	$-396 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{L}$	$-4752 \frac{L}{D}$	$-5184 \frac{DL}{DL}$	$-396 \frac{L}{L}$
S_{12}^F												$64 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	48	$36 \frac{L}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$
S_{13}^F													$576 \frac{D}{L}$	-4356	$-4752 \frac{L}{L}$	$-528 \frac{D}{L}$
S_{14}^F														$576 \frac{L}{D}$	$432 \frac{L}{D}$	48
S_{15}^F															$5184 \frac{DL}{DL}$	$396 \frac{L}{L}$
S_{16}^F																$64 \frac{D}{L}$

Tafel 4 : Elementsteifigkeit Platte Typ II - Werte aus $\Phi_{\xi_0, \eta_0} \Phi_{\xi_0, \xi_0}^T$ Faktor $\frac{v \cdot k}{3600}$

	V_1^F	V_2^F	V_3^F	V_4^F	V_5^F	V_6^F	V_7^F	V_8^F	V_9^F	V_{10}^F	V_{11}^F	V_{12}^F	V_{13}^F	V_{14}^F	V_{15}^F	V_{16}^F
S_1^F	$576 \frac{D}{L}$	-36	$432 \frac{L}{D}$	$48 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	36	$-432 \frac{L}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	$-576 \frac{D}{L}$	-36	$-432 \frac{L}{L}$	$48 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	36	$432 \frac{L}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$
S_2^F	$576 \frac{L}{D}$	$576 \frac{L}{D}$	$-4752 \frac{L}{D}$	-528	-396	$-576 \frac{L}{D}$	$4752 \frac{D}{D}$	-48	396	$-144 \frac{L}{D}$	$432 \frac{L}{D}$	132	36	$144 \frac{L}{D}$	$-432 \frac{L}{D}$	12
S_3^F			$5184 \frac{L}{DL}$	$396 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{D}$	$-5184 \frac{L}{DL}$	$36 \frac{L}{L}$	$4752 \frac{L}{L}$	$-432 \frac{L}{D}$	$-5184 \frac{L}{DL}$	$396 \frac{L}{L}$	$-432 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{D}$	$5184 \frac{DL}{DL}$	$36 \frac{L}{L}$
S_4^F				$64 \frac{D}{L}$	$-132 \frac{D}{L}$	48	$-396 \frac{L}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$	$-48 \frac{D}{L}$	12	$-36 \frac{L}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	-12	$36 \frac{L}{L}$	$4 \frac{D}{L}$
S_5^F					$576 \frac{D}{L}$	36	$-432 \frac{L}{L}$	$48 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	-36	$-432 \frac{L}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	$-576 \frac{D}{L}$	36	$432 \frac{L}{L}$	$48 \frac{D}{L}$
S_6^F						$576 \frac{L}{D}$	$-4752 \frac{L}{D}$	528	-36	$144 \frac{L}{D}$	$-432 \frac{L}{D}$	-12	-396	$-144 \frac{L}{D}$	$432 \frac{L}{D}$	-132
S_7^F							$5184 \frac{L}{D}$	$-396 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{D}$	$5184 \frac{DL}{DL}$	$-36 \frac{L}{L}$	$4752 \frac{L}{L}$	$-432 \frac{L}{D}$	$-5184 \frac{DL}{DL}$	$-396 \frac{L}{L}$
S_8^F								$64 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	12	$-36 \frac{L}{L}$	$4 \frac{D}{L}$	$-48 \frac{D}{L}$	-12	$36 \frac{L}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$
S_9^F									$576 \frac{D}{L}$	36	$432 \frac{L}{L}$	$-48 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	-36	$-432 \frac{L}{L}$	$12 \frac{D}{L}$
S_{10}^F										$576 \frac{L}{D}$	$4752 \frac{L}{D}$	-528	396	$-576 \frac{L}{D}$	$-4752 \frac{L}{D}$	-48
S_{11}^F											$5184 \frac{L}{DL}$	$-396 \frac{L}{L}$	$432 \frac{L}{L}$	$-432 \frac{L}{D}$	$-5184 \frac{DL}{DL}$	$-36 \frac{L}{L}$
S_{12}^F												$64 \frac{D}{L}$	$132 \frac{D}{L}$	48	$396 \frac{L}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$
S_{13}^F													$576 \frac{D}{L}$	-36	$-432 \frac{L}{L}$	$-48 \frac{D}{L}$
S_{14}^F														$576 \frac{L}{D}$	$4752 \frac{L}{D}$	528
S_{15}^F															$5184 \frac{L}{DL}$	$396 \frac{L}{L}$
S_{16}^F																$64 \frac{D}{L}$

$$\frac{v}{3600} \text{ k}$$

Faktor

$$\Phi_{E_{1,45}} \Phi_{E_{50,111}}^T$$

Werte aus

Tafel 5 : Elementsteifigkeit Platte Typ II

	v_1^e	v_2^e	v_3^e	v_4^e	v_5^e	v_6^e	v_7^e	v_8^e	v_9^e	v_{10}^e	v_{11}^e	v_{12}^e	v_{13}^e	v_{14}^e	v_{15}^e	v_{16}^e
S_1^e	$144 \frac{D}{L}$	-66	$792 \frac{1}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	-66	$-792 \frac{1}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$108 \frac{D}{L}$	-39	$468 \frac{1}{L}$	-468	$1 \frac{D}{L}$	-9
S_2^e	$624 \frac{1}{D}$	66	$-468 \frac{1}{D}$	-88	39	216 $\frac{1}{D}$	52	$-162 \frac{1}{D}$	$12 \frac{D}{L}$	22	-39	$-54 \frac{1}{D}$	$162 \frac{1}{D}$	$162 \frac{1}{D}$	-13	
S_3^e			$5616 \frac{1}{DL}$	$66 \frac{1}{L}$	$-468 \frac{1}{D}$	$-162 \frac{1}{D}$	$-39 \frac{1}{L}$	$1944 \frac{1}{DL}$	$66 \frac{1}{L}$	$66 \frac{1}{L}$	468 $\frac{1}{L}$	$-162 \frac{1}{D}$	$-1944 \frac{1}{DL}$	$-39 \frac{1}{L}$	$-39 \frac{1}{L}$	
S_4^e			$16 \frac{D}{L}$	$16 \frac{D}{L}$	-9 $\frac{D}{L}$	-52	$-12 \frac{D}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	-4 $\frac{D}{L}$	-4 $\frac{D}{L}$	9 $\frac{D}{L}$	13	$-39 \frac{1}{L}$	$-39 \frac{1}{L}$	3 $\frac{D}{L}$	
S_5^e			$144 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	66	66	$-792 \frac{1}{L}$	$-792 \frac{1}{L}$	-9 $\frac{D}{L}$	-9 $\frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	66	792 $\frac{1}{L}$	792 $\frac{1}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	
S_6^e					$624 \frac{1}{D}$	$624 \frac{1}{D}$	88	$-468 \frac{1}{D}$	13	13	-66	$-156 \frac{1}{D}$	$468 \frac{1}{D}$	$468 \frac{1}{D}$	-22	
S_7^e							$5616 \frac{1}{D}$	$-162 \frac{1}{D}$	$39 \frac{1}{L}$	$39 \frac{1}{L}$	792 $\frac{1}{L}$	$-468 \frac{1}{D}$	$-5616 \frac{1}{DL}$	$-66 \frac{1}{L}$	$-66 \frac{1}{L}$	
S_8^e							$16 \frac{D}{L}$	16 $\frac{D}{L}$	3 $\frac{D}{L}$	3 $\frac{D}{L}$	-12 $\frac{D}{L}$	-22	66 $\frac{1}{L}$	66 $\frac{1}{L}$	-4 $\frac{D}{L}$	
S_9^e									$144 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	$-108 \frac{D}{L}$	39	468 $\frac{1}{L}$	468 $\frac{1}{L}$	9 $\frac{D}{L}$	
S_{10}^e									$624 \frac{1}{D}$	$624 \frac{1}{D}$	-39	$216 \frac{1}{D}$	$162 \frac{1}{D}$	$162 \frac{1}{D}$	52	
S_{11}^e											$-468 \frac{1}{L}$	$162 \frac{1}{D}$	$1944 \frac{1}{DL}$	$39 \frac{1}{L}$	$39 \frac{1}{L}$	
S_{12}^e											9 $\frac{D}{L}$	-52	$-39 \frac{1}{L}$	$-39 \frac{1}{L}$	-12 $\frac{D}{L}$	
S_{13}^e											$144 \frac{D}{L}$	-66	$-792 \frac{1}{L}$	$-792 \frac{1}{L}$	-12 $\frac{D}{L}$	
S_{14}^e												$624 \frac{1}{D}$	$468 \frac{1}{D}$	$468 \frac{1}{D}$	88	
S_{15}^e													$5616 \frac{1}{DL}$	$5616 \frac{1}{DL}$	66 $\frac{1}{L}$	
S_{16}^e															$16 \frac{D}{L}$	

$$\frac{\Gamma_{x1} t D^2}{12600}$$

Faktor

$\Phi_{kn, \xi} \Phi_{kn, \zeta}$

- Werte aus

Tafel 6 : Geometrische Elementsteifigkeit Platte Typ II

	v_f^f	v_f^g	v_f^h	v_f^i	v_f^j	v_f^k	v_f^l	v_f^m	v_f^n	v_f^o	v_f^p	v_f^q	v_f^r	v_f^s	v_f^t	v_f^u	v_f^v
S_1^f	$216 \frac{D}{L}$	$1008 \frac{1}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	$-216 \frac{D}{L}$	-84	$1008 \frac{1}{L}$	$-18 \frac{D}{L}$	$-216 \frac{D}{L}$	-84	$-1008 \frac{1}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	$216 \frac{D}{L}$	$216 \frac{D}{L}$	-84	$-1008 \frac{1}{L}$	$-18 \frac{D}{L}$	v_f^v
S_2^f	$576 \frac{D}{D}$	$-432 \frac{1}{D}$	-112	72	$432 \frac{1}{D}$	$-324 \frac{1}{D}$	96	84	$-144 \frac{D}{D}$	$432 \frac{1}{D}$	28	-72	$-108 \frac{1}{D}$	$324 \frac{1}{D}$	-24		
S_3^f		$5184 \frac{1}{DL}$	$84 \frac{1}{L}$	$-864 \frac{1}{L}$	$-324 \frac{1}{D}$	$3888 \frac{1}{DL}$	$-72 \frac{1}{L}$	$-1008 \frac{1}{L}$	$-432 \frac{1}{D}$	$-5184 \frac{1}{DL}$	$84 \frac{1}{L}$	$864 \frac{1}{L}$	$864 \frac{1}{L}$	$-324 \frac{1}{D}$	$-3888 \frac{1}{DL}$	$-72 \frac{1}{L}$	
S_4^f		$24 \frac{D}{L}$	$24 \frac{D}{L}$	$-18 \frac{D}{L}$	-112	$84 \frac{1}{L}$	$-24 \frac{D}{L}$	$-18 \frac{D}{L}$	28	$-84 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	28	$-84 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	
S_5^f				$360 \frac{D}{L}$	180	$-2160 \frac{1}{L}$	$30 \frac{D}{L}$	$216 \frac{D}{L}$	72	$864 \frac{1}{L}$	$-18 \frac{D}{L}$	$-360 \frac{D}{L}$	$-360 \frac{D}{L}$	180	$2160 \frac{1}{L}$	$30 \frac{D}{L}$	
S_6^f					$1920 \frac{1}{D}$	$-1440 \frac{1}{D}$	240	84	$-108 \frac{1}{D}$	$324 \frac{1}{D}$	28	-180	$-480 \frac{1}{D}$	$1440 \frac{1}{D}$	-60		
S_7^f						$17280 \frac{1}{D}$	$-180 \frac{1}{L}$	$-1008 \frac{1}{L}$	$-324 \frac{1}{D}$	$-3888 \frac{1}{DL}$	$84 \frac{1}{L}$	$2160 \frac{1}{L}$	$-1440 \frac{1}{D}$	$-17280 \frac{1}{DL}$	$-180 \frac{1}{L}$		
S_8^f							$40 \frac{D}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	-24	$72 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	$-30 \frac{D}{L}$	-60	$180 \frac{1}{L}$	$-10 \frac{D}{L}$		
S_9^f								$216 \frac{D}{L}$	84	$1008 \frac{1}{L}$	$-18 \frac{D}{L}$	$-216 \frac{D}{L}$	$-216 \frac{D}{L}$	84	$1008 \frac{1}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	
S_{10}^f									$576 \frac{D}{D}$	$432 \frac{1}{D}$	-112	-72	$432 \frac{1}{D}$	$324 \frac{1}{D}$	96		
S_{11}^f										$5184 \frac{1}{DL}$	$-84 \frac{1}{L}$	$-864 \frac{1}{L}$	$324 \frac{1}{D}$	$3888 \frac{1}{DL}$	$72 \frac{1}{L}$		
S_{12}^f											$24 \frac{D}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	-112	$-84 \frac{1}{L}$	$-24 \frac{D}{L}$		
S_{13}^f												$360 \frac{D}{L}$	-180	$-2160 \frac{1}{L}$	$-30 \frac{D}{L}$		
S_{14}^f													$1920 \frac{1}{D}$	$1440 \frac{1}{D}$	240		
S_{15}^f														$17280 \frac{1}{DL}$	$180 \frac{1}{L}$		
S_{16}^f															$40 \frac{D}{L}$		

$$\frac{(\tau_{xy} - \tau_{xy}) t D^2}{50400}$$

Tafel 7 : Geometrische Elementsteifigkeit Platte Typ II - Werte aus $\Phi_{2,3,4,5} \Phi_{1n,3}$ Faktor

	v_1^f	v_2^f	v_3^f	v_4^f	v_5^f	v_6^f	v_7^f	v_8^f	v_9^f	v_{10}^f	v_{11}^f	v_{12}^f	v_{13}^f	v_{14}^f	v_{15}^f	v_{16}^f
S^p	$72 \frac{D}{L}$	-36	$432 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	$-72 \frac{D}{L}$	-36	$432 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	$-72 \frac{D}{L}$	-36	$-432 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	$72 \frac{D}{L}$	-36	$-432 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$
S^p	$6 \frac{D}{L}$	-48	$36 \frac{1}{L}$	$8 \frac{D}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	-48	$36 \frac{1}{L}$	$-8 \frac{D}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	12	$-36 \frac{1}{L}$	$-2 \frac{D}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	12	$-36 \frac{1}{L}$	$2 \frac{D}{L}$
S^p	$-72 \frac{D}{L}$	36	$-432 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	$72 \frac{D}{L}$	36	$-432 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	$72 \frac{D}{L}$	36	$432 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	$-72 \frac{D}{L}$	36	$432 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$
S^p	$6 \frac{D}{L}$	12	$36 \frac{1}{L}$	$-2 \frac{D}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	12	$36 \frac{1}{L}$	$2 \frac{D}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	-48	$-36 \frac{1}{L}$	$8 \frac{D}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	-48	$-36 \frac{1}{L}$	$-8 \frac{D}{L}$

Tafel 8 : Elementsteifigkeit Kopplung Balken-Platte Typ II - Werte aus $\Phi_{t,1} \Phi_{sh,5}$

Kopplung für Balkenfreiheitsgrade 2,6,8,12 (Biegung um z-Achse) Faktor $\frac{\tau_{xi} t D}{720} \left(\frac{-SL}{DL} \right)$

Kopplung für Balkenfreiheitsgrade 3,5,9,11 (Biegung um y-Achse) Faktor $\frac{\tau_{xi} t D}{720} \left(\frac{CL}{DL} \right)$

Kopplung für Balkenfreiheitsgrade 4,10,13,14 (Torsion) Faktor $\frac{\tau_{xi} t D}{720} \left(z_M \frac{-SL}{DL} - y_M \frac{CL}{DL} + y_i \frac{CL}{DL} + z_i \frac{SL}{DL} \right)$

	v_1^f	v_2^f	v_3^f	v_4^f	v_5^f	v_6^f	v_7^f	v_8^f	v_9^f	v_{10}^f	v_{11}^f	v_{12}^f	v_{13}^f	v_{14}^f	v_{15}^f	v_{16}^f
S^p	$72 \frac{D}{L}$	-24	$288 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	-96	$1152 \frac{1}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	$-72 \frac{D}{L}$	-24	$-288 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	-96	$-1152 \frac{1}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$
S^p	$6 \frac{D}{L}$	-32	$24 \frac{1}{L}$	$8 \frac{D}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	-128	$96 \frac{1}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	8	$-24 \frac{1}{L}$	$-2 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	32	$-96 \frac{1}{L}$	$4 \frac{D}{L}$
S^p	$-72 \frac{D}{L}$	24	$-288 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	96	$-1152 \frac{1}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$72 \frac{D}{L}$	24	$288 \frac{1}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	$-144 \frac{D}{L}$	96	$1152 \frac{1}{L}$	$12 \frac{D}{L}$
S^p	$6 \frac{D}{L}$	8	$24 \frac{1}{L}$	$-2 \frac{D}{L}$	$-12 \frac{D}{L}$	32	$96 \frac{1}{L}$	$4 \frac{D}{L}$	$-6 \frac{D}{L}$	-32	$-24 \frac{1}{L}$	$8 \frac{D}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	-128	$-96 \frac{1}{L}$	$-16 \frac{D}{L}$

Tafel 9 : Elementsteifigkeit Kopplung Balken-Platte Typ II - Werte aus $\Phi_{t,5} \Phi_{sh,5}$

Kopplung für Balkenfreiheitsgrade 4,10,13,14 (Torsion)

Faktor $\frac{(\tau_{xy} - \tau_{xi}) t D}{3600} [(y_i - y_j) \frac{CL}{DL} - (z_i - z_j) \left(\frac{-SL}{DL} \right)]$

	v_1^p	v_2^p	v_3^p	v_4^p	v_5^p	v_6^p	v_7^p	v_8^p	v_9^p	v_{10}^p	v_{11}^p	v_{12}^p	v_{13}^p	v_{14}^p	v_{15}^p	v_{16}^p
S^p	$144 \frac{D}{L}$	-54	$648 \frac{1}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$-216 \frac{D}{L}$	-126	$1512 \frac{1}{L}$	-18 $\frac{D}{L}$	-144 $\frac{D}{L}$	-54	$-648 \frac{1}{L}$	$12 \frac{D}{L}$	$216 \frac{D}{L}$	-126	$-1512 \frac{1}{L}$	$-18 \frac{D}{L}$
S^p	$12 \frac{D}{L}$	-72	$54 \frac{1}{L}$	$16 \frac{D}{L}$	-18 $\frac{D}{L}$	-168	$126 \frac{1}{L}$	-24 $\frac{D}{L}$	-12 $\frac{D}{L}$	18	-54 $\frac{1}{L}$	-4 $\frac{D}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	42	-126 $\frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$
S^p	-144 $\frac{D}{L}$	54	$-648 \frac{1}{L}$	-12 $\frac{D}{L}$	$216 \frac{D}{L}$	126	$-1512 \frac{1}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	$144 \frac{D}{L}$	54	$648 \frac{1}{L}$	-12 $\frac{D}{L}$	-216 $\frac{D}{L}$	126	$1512 \frac{1}{L}$	$18 \frac{D}{L}$
S^p	$12 \frac{D}{L}$	18	$54 \frac{1}{L}$	-4 $\frac{D}{L}$	-18 $\frac{D}{L}$	42	$126 \frac{1}{L}$	$6 \frac{D}{L}$	-12 $\frac{D}{L}$	-72	-54 $\frac{1}{L}$	$16 \frac{D}{L}$	$18 \frac{D}{L}$	-168	-126 $\frac{1}{L}$	-24 $\frac{D}{L}$

Tafel 10 : Elementsteifigkeit Kopplung Balken-Platte Typ II - Werte aus $\Phi_{x,t}$, $\Phi_{y,t}$, $\Phi_{z,t}$

$$\frac{(\tau_{yj} - \tau_{xi}) t D}{3600} \left(-\frac{SL}{DL} \right)$$

Kopplung für Balkenfreiheitsgrade 2,6,8,12 (Biegung um z-Achse)

Faktor

$$\frac{(\tau_{yj} - \tau_{xi}) t D}{3600} \left(\frac{CL}{DL} \right)$$

Kopplung für Balkenfreiheitsgrade 3,5,9,11 (Biegung um y-Achse)

Faktor

$$\frac{\tau_{xi} t D}{3600} [(y_j - y_i) \frac{CL}{DL} - (z_j - z_i) \left(-\frac{SL}{DL} \right)]$$

Kopplung für Balkenfreiheitsgrade 4,10,13,14 (Torsion)

Faktor 1

$$\frac{(\tau_{yj} - \tau_{xi}) t D}{3600} [z_M \left(-\frac{SL}{DL} \right) - y_M \left(\frac{CL}{DL} \right) + y_i \left(\frac{CL}{DL} \right) + z_i \left(\frac{SL}{DL} \right)]$$

Kopplung für Balkenfreiheitsgrade 4,10,13,14 (Torsion)

Faktor 2

	v_1^p	v_2^p	v_3^p	v_4^p
S_1^p	12	6	-12	6
S_2^p		4	-6	2
S_3^p			12	-6
S_4^p				4

Tafel 11 : Elementsteifigkeit Platte Typ I

Werte aus $\Phi_{\xi_n, \xi_n} \Phi_{\xi_n, \xi_n}^T$ Faktor $\frac{D k}{3 L^3}$

	v_1^p	v_2^p	v_3^p	v_4^p
S_1^p	72	6	-72	6
S_2^p		8	-6	-2
S_3^p			72	-6
S_4^p				8

Tafel 12 : Elementsteifigkeit Platte Typ I

Werte aus $\Phi_{\xi_n, \xi_n} \Phi_{\xi_n, \xi_n}^T$ Faktor $\frac{2 D k (1 - \nu)}{60}$

	v_1^p	v_2^p	v_3^p	v_4^p
S_1^p	72	6	-72	6
S_2^p		8	-6	-2
S_3^p			72	-6
S_4^p				8

Tafel 13 : Geometrische Elementsteifigkeit Platte Typ I

freier Rand bei i - Werte aus $\Phi_{\xi_0, \xi}$ $\Phi_{\zeta_0, \zeta}$

- Plattentfreiheitsgrade

$$\text{Faktor} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{xj}}{3} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{12} \right]$$

- Kopplung für Platte und Balkenfreiheitsgrade 2,6,8,12 (Biegung um die z-Achse)

$$\text{Faktor} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{xj}}{2} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{6} \right] \frac{SL}{DL}$$

- Kopplung für Platte und Balkenfreiheitsgrade 3,5,9,11 (Biegung um die y-Achse)

$$\text{Faktor} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{xj}}{2} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{6} \right] \frac{CL}{DL}$$

- Kopplung für Platte und Balkenfreiheitsgrade 4,10,13,14 (Torsion)

$$\text{Faktor 1} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{xj}}{2} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{6} \right] \left[(y_j - y_M) \left(\frac{-CL}{DL} \right) - (z_j - z_M) \left(\frac{SL}{DL} \right) \right]$$

$$\text{Faktor 2} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{xj}}{6} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{12} \right] \left[(y_j - y_i) \left(\frac{-CL}{DL} \right) - (z_j - z_i) \left(\frac{SL}{DL} \right) \right]$$

	v_1^p	v_2^p	v_3^p	v_4^p
S_1^p	72	6	-72	6
S_2^p		8	-6	-2
S_3^p			72	-6
S_4^p				8

Tafel 14 : Geometrische Elementsteifigkeit Platte Typ I

freier Rand bei j - Werte aus $\Phi_{\xi_n, \xi}$ $\Phi_{\eta_n, \xi}$

- Plattenfreiheitsgrade

$$\text{Faktor} \quad \frac{D^3 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{xi}}{3} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{4} \right]$$

- Kopplung für Platte und Balkenfreiheitsgrade 2,6,8,12 (Biegung um die z-Achse)

$$\text{Faktor} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{xi}}{2} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{3} \right] \frac{-SL}{DL}$$

- Kopplung für Platte und Balkenfreiheitsgrade 3,5,9,11 (Biegung um die y-Achse)

$$\text{Faktor} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{yj}}{2} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{3} \right] \frac{CL}{DL}$$

- Kopplung für Platte und Balkenfreiheitsgrade 4,10,13,14 (Torsion)

$$\text{Faktor 1} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{xi}}{2} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{3} \right] \left[(y_i - y_M) \left(\frac{CL}{DL} \right) - (z_i - z_M) \left(\frac{-SL}{DL} \right) \right]$$

$$\text{Faktor 2} \quad \frac{D^2 t}{60 L} \left[\frac{\tau_{yj}}{3} + \frac{(\tau_{xj} - \tau_{xi})}{4} \right] \left[(y_j - y_j) \left(\frac{CL}{DL} \right) - (z_j - z_j) \left(\frac{-SL}{DL} \right) \right]$$

Anhang 2

Nach Petersen /79/ wird die elasto - statische Beulspannung σ_{Ki} eines zusammengesetzten Querschnittes folgendermaßen bestimmt. Man ermittelt, unter Berücksichtigung der elastischen Einspannwirkung der angeschlossenen Querschnittsteile, die Beulspannung getrennt für Gurt und Steg nach folgender Formel

$$\sigma_{Kin} = K_{s_n} \frac{E \pi^2}{12 (1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{D_n}\right)^2 \quad (A1)$$

n . . . Nummer der Platte

Der Drehwiderstand an der gemeinsamen Kante von Gurt und Steg ergibt sich für Beispiel 10.3.2 nach /9/

$$\varphi_1 = 0.089 \cdot 333 / K_1 = 0.123 \quad (A2a)$$

$$\varphi_2 = 0.233 \cdot 83.33 / K_2 = 0.081 \quad (A2b)$$

$$\frac{1}{K_c} = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2 = 0.1018 \quad (A3)$$

Daraus folgt nach /79/

$$\gamma = \frac{2}{D_n} \frac{K}{K_c} \quad (A4)$$

Steg:

$$\gamma_1 = 0.49 \quad (A5a)$$

Gurt:

$$\gamma_2 = 1.96 \quad (A5b)$$

Aus Diagramm 8.79 in /79/ kann damit der Beiwert K_s entnommen und die Beulspannung berechnet werden.

$$\text{Steg:} \quad K_{s_1} = 5.0 \quad \sigma_{K11} = 2.37 \quad (A6a)$$

$$\text{Gurt:} \quad K_{s_2} = 0.75 \quad \sigma_{K12} = 5.69 \quad (A6b)$$

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur
Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbe-
anspruchter Stäbe mit I - Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer
Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale
und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plat-
tenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und
Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskreti-
sierten und erweiterten Trefftz - Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O.:
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger drei-
zelliger Träger unter Berücksichtigung der Profil-
verformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II.

- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falterwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H. G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragerwerken
(in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Platten-tragwerke unter Berücksichtigung der Reissner-schen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geo-metrischer Nichtlinearität.

- 82-1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität
und Traglast des axialbelasteten Kreiszylinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:
Nichtlineare Berechnungen von Tragwerken unter
verformungsabhängiger Belastung mit finiten Ele-
menten.
- 82-3 H.-P. Andrä:
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flach-
decken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei
großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und
physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbe-
tonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter
Kreiszyklinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und
Formabweichungen unter Innendruck und Stützen-
längskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter
Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:
Dynamische Stabilität nach der Methode der
finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugel-
schalen.

Folgende Mitteilungshefte sind bereits erschienen:

- 84 - 1 Programmbeschreibung NISA 80.
 H. Stegmüller, L. Häfner, E. Ramm, J.M. Sättele.
- 84 - 2 Modellierungsfragen - Microcomputer -
 Erdbeheberechnungen.
 A. Burmeister, S. Kimmich, J. Müller, E. Ramm,
 K. Schweizerhof, H. Stegmüller.
- 84 - 3 Nonlinear Analysis of Shell - Like Structures.
 (In englischer Sprache.)
 T.A. Kompfner, E. Ramm, K. Schweizerhof.
- 84 - 4 Stability of Steel Structures.
 (In englischer Sprache.)
 F.W. Bornscheuer, A. Diack, P. Osterrieder,
 E. Ramm, H. Stegmüller.
- 85 - 5 Konvergenztest von isoparametrischen
 degenerierten Platten-/Schalenelementen.
 K. Schweizerhof, J. Müller, E. Ramm.
- 86 - 6 Iteration Procedure for Sudden Local
 Alteration of Structural Stiffness.
 (In englischer Sprache.)
 B. Forde.