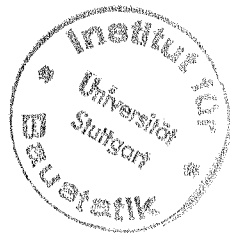


# Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen

von  
HANS STEGMÜLLER



7

Bericht Nr. 5 (1985)  
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart  
Professor Dr.-Ing. E. Ramm

Stuttgart 1985

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 1985

Hauptberichter: Professor Dr.-Ing. E. Ramm  
Mitberichter: Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h.  
F. W. Bornscheuer  
Professor Dr.-Ing. W. Wunderlich

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7, 7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Gesamtherstellung **aku**-Fotodruck Bamberg

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit werden Schalenelemente untersucht, die durch sogenannte Degeneration aus dem 3-dimensionalen Kontinuum direkt hergeleitet werden. Es werden verschiedene Integrationsverfahren zur Überwindung der "Locking" Probleme gezeigt und deren Vor- und Nachteile dargestellt. Mit einer Vorabintegration der Dickenrichtung, die auch bei nichtlinearem Materialgesetz anwendbar ist, wird die rechenintensive Volumenintegration dieser Elemente beseitigt. Eine Beurteilung der Elemente hinsichtlich der Effizienz schließt den ersten Teil der Arbeit ab.

Im zweiten Teil werden Beispiele zur Stabilität von wassergefüllten Schalen berechnet. Bei diesem Lastfall ist die Wirkung des Innendrucks, der gleichzeitig mit der beulauslösenden Längskraft wirkt, ein wichtiger Parameter. Bei allen untersuchten Schalensystemen ist eine deutliche Erhöhung der Beullast vorhanden. Der Grund ist bei den Kegelschalen die Abminderung der Imperfektionsempfindlichkeit, bei den zusammengesetzten Schalen aus Kegel und Torus die günstige Beeinflussung des zweiachsigen Druckspannungszustandes. Die hier berechneten kombinierten Schalensysteme sind nicht imperfektionsempfindlich. Plastische Untersuchungen zeigen, daß bei Kegelschalen unter Wasserlast das Materialversagen alleine maßgebend wird. Bei den zusammengesetzten Schalen ist durch die Mitnahme der Plastizität eine starke Interaktion zwischen Beulen und Materialversagen vorhanden, die die Beullast deutlich abmindert.

## Summary :

In this study degenerated elements in nonlinear shell analyses are examined. Some remarks are given on reduced integration methods in order to avoid locking phenomena. Integration through the thickness is carried out independently from the integration over the element area. This method also holds for nonlinear material and replaces the time consuming volume integration usually applied for degenerated elements. Comparisons of the efficiency of different element types are shown.

The second part shows nonlinear analyses of liquid-filled cones and toroidal shells. Stability and ultimate load of shells with this loading condition is strongly influenced by the internal pressure, which stabilizes the structure against buckling. For all shells calculated a remarkable increase in buckling load is recognized, but due to different reasons. For conical shells imperfection sensitivity is decreased, but for shells with combinations of conical and toroidal parts the differences in buckling loads are only due to the change of the two-dimensional compression stress state. The analyzed toroidal shells are not imperfection sensitive. If plasticity is included, liquid-filled steel cones show only material failure. For the combined steel shells with conical and toroidal parts, the buckling load is reduced drastically due to interaction between buckling and material failure.

## Inhaltsverzeichnis

1.0	EINLEITUNG UND MOTIVATION	1
1.1	Übersicht Schalenelemente	5
1.2	Gekrümmte Elemente aus einer Schalentheorie	7
1.3	Faltwerkselemente	8
1.4	Degenerierte Elemente	9
1.5	Axialsymmetrische Elemente mit Fourierreihen	11
2.0	DEGENERIERTE SCHALENELEMENTE	13
2.1	Ausgangsgleichungen	14
2.2	Ansatzfunktionen	16
2.3	Integration über die Elementdicke	20
2.3.1	Materielle Nichtlinearität	26
2.3.2	Geometrische Nichtlinearität	28
2.3.3	Rechenzeitvergleiche	29
2.4	Integration in der Elementebene	29
2.5	Darstellung der Energieanteile	31
2.6	Elementverhalten - degenerierte Elemente	35
2.6.1	"Shear Locking"	36
2.6.2	"Membrane Locking"	39
2.7	Integrationsverfahren - Allgemeines	42
2.7.1	"Zero - Energy - Modes"	43
2.7.2	Reduzierte Integration und "hourglass - control"	47
2.7.3	Selektiv reduzierte Integration	48
2.7.4	Spezielle selektive Integrationsverfahren	50
2.8	Modifikation der Ansatzfunktionen	51
2.9	Kombination von S4 und S16 Elementen	52
2.10	Vergleich und Beurteilung degenerierter Elemente	53
2.10.1	Rechenzeiten	55
3.0	DAS DKT - SCHALENELEMENT	60
3.1	Ausgangsgleichungen und Ansatzfunktionen	60
3.2	Nichtlineare Erweiterungen	62
3.3	Elementverhalten	64

4.0	GRENZLASTBERECHNUNGEN VON DÜNNEN SCHALEN	67
4.1	Begriffsdefinitionen	67
4.2	Analytische Berechnungen	69
4.3	Numerische Verfahren - Finite Elemente / Programm	70
5.0	KEGELSCHALE MIT WASSERFÜLLUNG	73
5.1	Axialsymmetrische Analysen - elastisch	75
5.2	Nicht axialsymmetrische Analysen - elastisch	79
5.2.1	Eigenwertanalysen	80
5.2.2	Geometrisch imperfektes System	83
5.2.3	Unsymmetrische Imperfektionen	85
5.2.4	Axialsymmetrische Imperfektion	87
5.2.5	Einfluß der Imperfektionsamplitude	88
5.2.6	Lastfall Tangentiallast	90
5.3	Elastische Analysen - Zusammenfassung	91
5.4	Vergleich mit Normen und Versuchen	92
5.5	Axialsymmetrische Analysen - plastisch	96
5.6	Beurteilung der Berechnungen	101
6.0	ZUSAMMENGESetzte SCHALEN (TORUSSCHALEN)	103
6.1	Tragverhalten und Beulnachweis	104
6.2	Torus - Kegelschale (System TK)	105
6.3	System Zylinder - Torus - Kegel (ZTK)	113
6.3.1	Elastische Analysen - Axiallast	113
6.3.2	Elastische Analysen - Axiallast und Innendruck	118
6.3.3	Plastische Analysen - Axiallast	122
6.3.4	Plastische Analysen - Axiallast und Innendruck	123
7.0	SCHLUSSFOLGERUNGEN	127

## Bezeichnungen :

Erklärungen zur Indexschreibweise :

links oben  $m$  Wirkungszustand  
unten  $n$  Bezugszustand

rechts oben  $i$  Elementknotennummern  
unten  $j$  Komponenten des kartesischen  
Koordinatensystems

Es gilt die Summationskonvention für doppelt auftretende Indizes bei den Komponenten des kartesischen Koordinatensystems.

Alle verwendeten Symbole sind im Text erklärt. Matrizen sind durch Fettdruck gekennzeichnet.





## 1.0 Einleitung und Motivation

Die Untersuchung von Platten- und Schalentragswerken mit der Methode der finiten Elemente hat sich in den letzten Jahren immer mehr in den nichtlinearen Bereich verlagert. Die Berechnung der Traglast unter Einbeziehung von Materialversagen und geometrischer Nichtlinearität sowie die Beurteilung der Stabilität, ist bei immer schlankeren Konstruktionen zu einem wesentlichen Bestandteil der Standsicherheitsnachweise geworden. Mit der Methode der finiten Elemente lassen sich auch komplexe Strukturen unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten für die Praxis genügend genau untersuchen. Allerdings ist gerade bei Schalen der Aufwand nicht unerheblich. Die dabei verwendeten Schalenelemente und Algorithmen zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen sind deshalb Gegenstand intensiver Forschung. Diese Arbeit befaßt sich mit degenerierten Schalenelementen und deren Anwendung zur Berechnung von Schalenkonstruktionen.

Die verwendeten degenerierten Elemente zeichnen sich durch eine einfache Formulierung aus, da die Ausgangsgleichungen direkt aus der 3-dimensionalen Theorie abgeleitet werden und somit keine Schalentheorie erforderlich ist. Die Theorie mit Schubverformungen ermöglicht unabhängige Ansatzfunktionen für die Rotationen und die Querverschiebung. Verwendet man Elemente mit solchen getrennten Ansätzen für sehr dünne Schalen oder Platten, kann durch die übermäßige Zunahme der Schubenergie gegenüber der Biegeenergie ein Blockieren der Elemente auftreten, das sogenannte "Shear Locking". Dieser Effekt ist

nicht bei allen Elementtypen gleich stark, sondern hängt auch von der Ordnung der verwendeten Ansatzfunktionen ab. Ein weiteres Phänomen ist das "Membrane Locking", das beim Einsatz von niedrig interpolierten gekrümmten Elementen auftritt, da die dehnungslosen Verformungen nicht mehr richtig abgebildet werden. Es entstehen bei reiner Biegung Dehnungen der Mittelfläche, so daß die Lösungen mit derartigen Elementen viel zu steif ausfallen. Das folgende Bild zeigt das prinzipielle Elementverhalten beim Auftreten von "Locking" Phänomenen. Im Diagramm der linken Seite ist das Ergebnis einer Plattenrechnung mit zunehmendem Verhältnis Länge  $a$  zu Dicke  $h$  gezeigt, im rechten Diagramm das Konvergenzverhalten des gekrümmten S9-Schalenelements bei der Berechnung eines Zylinderschalenfeldes.

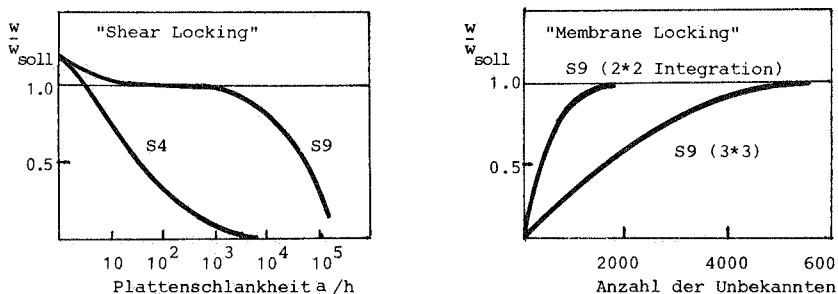


Bild 1. "Shear Locking" und "Membrane Locking"

Sowohl "Shear Locking" als auch "Membrane Locking" können mit einer Beeinflussung der Integrationsordnung beseitigt werden, indem einzelne Terme der Steifigkeitsmatrix eine Ordnung niedriger integriert werden, als dies normalerweise erforderlich ist. Diese Vorgehensweise wird mit dem Begriff "reduzierte Integration" bezeichnet. Die Anwendung der reduzierten Integra-

tion führt fast immer auf Einzelelemente mit "internen" Kinematiken, die bei genügend vielen Halterungen des Gesamtsystems nach dem Zusammenbau verschwinden. Diese "innere" Kinematik wird, im Unterschied zu nicht unterdrückten Starrkörperverschiebungen, mit "Zero-Energy-Modes" bezeichnet, da bei Aktivierung dieser Verschiebungszustände keine Verzerrungsenergie entsteht. Zu diesem Fragenkomplex - reduzierte Integration und "Zero-Energy-Modes" - werden in dieser Arbeit Untersuchungen angestellt, die die Einsatzmöglichkeiten der verschiedenen Methoden und Elemente zeigen sollen. Genauere Begriffsdefinitionen sind in den einzelnen Kapiteln enthalten.

Die berechneten Anwendungsbeispiele sollen die Leistungsfähigkeit der Methode der finiten Elemente bei der Lösung von Stabilitätsproblemen von Schalen zeigen. Da der Begriff Stabilität im wesentlichen für elastisches Verhalten steht, werden mit Grenzlastberechnungen, als umfassender Begriff, alle Arten von Versagenszuständen, wie z.B. elastisches Beulen, plastisches Beulen, reines Materialversagen, erfaßt. In Bild 2 auf Seite 4 ist ein in dieser Arbeit untersuchtes System gezeigt. Es handelt sich um eine Kegelschale mit Wasserfüllung, die als Modell /1/ im Zuge der Bemessung eines sogenannten Biohochreaktors (Bild 3 auf Seite 4) untersucht wurde. Weitere Modelluntersuchungen sind in /2/ an kombinierten Schalensystemen ausgeführt und sollen den Einfluß der Plastizierung auf das Tragverhalten zeigen.

Die Problematik der flüssigkeitsgefüllten Kegel- oder Toruschalen liegt in der Beulgefährdung des unteren Teils durch



Bild 2. Modellversuch

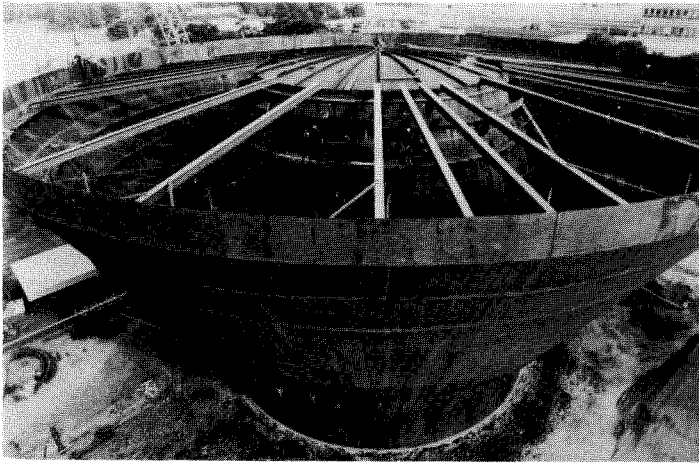


Bild 3. Biohochreaktor

hohe Längsdruckkräfte. Lange Zeit wurde dieser Effekt nicht ausreichend berücksichtigt und ist erst durch zwei Unfälle in Belgien an Wasserhochbehältern wieder Gegenstand intensiver Forschung geworden /3/. Das Ziel der Untersuchungen dieser Arbeit ist der Einfluß des stützenden Innendrucks auf die Stabilitäts - und Versagenslast. Die existierenden Vorschriften zur Bemessung von Schalen lassen eine Stützwirkung nur für die Kreiszyinderschale /4/, bzw. für die Kegelschale /5/ zu, da die Effekte bei anderen Schalenformen noch nicht ausreichend untersucht und quantifiziert sind. Ergebnisse aus elastischen Versuchen lassen sich nicht immer auf das reale Bauwerk übertragen, da das Materialversagen eine große Rolle spielt. Berechnungen mit einem Programm ermöglichen den Übergang von elastischem zu plastischem Material ohne Probleme, so daß die zusätzlichen Effekte der Plastizierung bei der Untersuchung des realen Bauwerks berücksichtigt sind.

### 1.1 Übersicht Schalenelemente

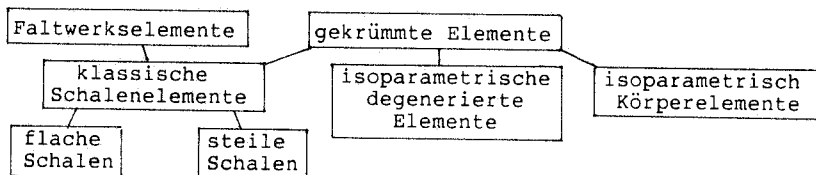


Bild 4. Übersicht Schalenelemente

Die Einordnung der degenerierten Elemente in die Vielzahl der vorhandenen Elemente ist in Bild 4 dargestellt (aus /6/).

Ergänzend zu dieser Einteilung unterscheidet man noch nach der Art der Ansätze :

1. Verschiebungsmodelle
2. Spannungsmodelle
3. Hybride Verschiebungsmodelle
4. Hybride Spannungsmodelle
5. Gemischte Modelle

Zu jedem dieser Ansätze gehören andere Ausgangsgleichungen. Bei Verschiebungsmodellen geht man vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen /7/ oder dem Minimum der gesamten potentiellen Energie aus, wobei ersteres allgemeiner ist. Modifikationen der genannten Prinzipien beinhalten zusätzliche Nebenbedingungen, so daß die Ansprüche an die Ansatzfunktionen reduziert werden können. Gemischten und hybriden Modellen liegt das Prinzip von Hellinger-Reissner oder Hu-Washizu zugrunde. Hybride Spannungsmodelle sind durch die Möglichkeit der Elimination der unbekanntenen Spannungen auf Elementebene interessant, da die entstehenden Elementmatrizen nur noch Verschiebungsfreiheitsgrade enthalten und somit in jedem Programm für Verschiebungselemente verwendet werden können. Zusammenhänge zwischen Verschiebungselementen mit reduzierter Integration und den hybriden Spannungsmodellen sind in /10/ dargestellt. Hybride Verschiebungsmodelle und reine Spannungsmodelle haben sich nicht durchgesetzt.

Nichtlineare Anwendungen mit hybriden Spannungsmodellen findet man in /11/-/13/. Die folgenden Untersuchungen und Aussagen

beschränken sich jetzt immer auf Elemente, denen ein Verschiebungsmodell zugrunde liegt.

## 1.2 Gekrümmte Elemente aus einer Schalentheorie

Schalenprobleme sollten eigentlich am besten mit einer Schalentheorie zu beschreiben sein, wenn keine Querschubverzerrungen berücksichtigt werden. Bei der Verwendung von allgemein gekrümmten Schalenelementen ist die Aufstellung passender Ansatzfunktionen jedoch ein großes Problem. Die folgenden Bedingungen 1 und 2 müssen von allen Elementmodellen, die dritte Bedingung bei Verwendung von Verschiebungsmodellen erfüllt werden.

1. Starrkörperverschiebungen dürfen keine Dehnungen erzeugen.
2. Konstante Dehnungszustände müssen möglich sein.
3.  $C_1$ -Kontinuität wegen der 2.Ableitungen im Energieausdruck

Diese Forderungen sind mit Verschiebungsansätzen nur durch komplizierte Ansatzfunktionen (bis 5.Ordnung) zu erfüllen, in denen Knotenvariable höherer Verschiebungsableitungen vorkommen /14/. Verwendet man lineare oder quadratische Ansätze, so werden die Starrkörperverschiebungen nicht mehr richtig abgebildet, was besonders im nichtlinearen Bereich eine wesentliche Rolle spielt. Um die 3.Forderung nach der  $C_1$ -Kontinuität zu umgehen, werden teilweise Schalentheorien mit Schubverformungen verwendet. Die Konvergenz bei dünnen Schalen wird dann durch das Einbringen der Kirchhoff-Bedingungen an diskreten Punkten erreicht, was gleichzeitig auch die Zahl der Frei-

heitsgrade am Element reduziert. Diese Idee ist von verschiedenen Autoren verwendet worden /15//16//17/.

### 1.3 Faltwerkselemente

Die einfachsten Schalenelemente erhält man aus der Überlagerung von bekannten Platten- und Scheibenelementen, wobei die Geometrie innerhalb des Elements immer als eben vorausgesetzt wird. Das bedeutet bei einer allgemeinen Schale, daß nur Dreieckselemente verwendet werden können, da mit 4 Punkten eine Ebene überbestimmt ist. Die Elementmatrizen enthalten im linearen Fall keine Kopplung von Membran- und Biegewirkung. Bei nichtlinearer Anwendung ist die Kopplung beider Anteile nur über die geometrische Matrix vorhanden.

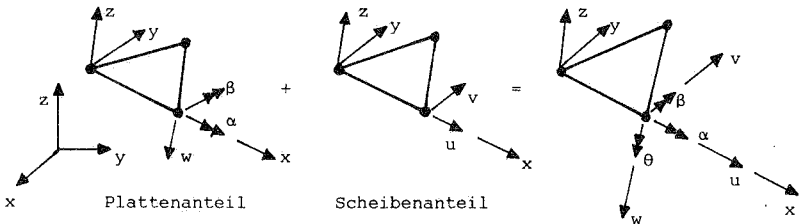


Bild 5. Faltwerkselement Platte + Scheibe

Die Biegeanteile der Plattenelemente sind meist mit kubischen Ansätzen, die Membrananteile der Scheibenelemente mit linearen Ansätzen interpoliert. Dies erfordert eine auf das Tragverhalten abgestimmte Elemententeilung, unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Konvergenzeigenschaften. Die Plattenelemente basieren entweder auf der Kirchhoff-Plattentheorie oder



der Reissner/Mindlin-Theorie. Erfolgreiche nichtlineare Anwendungen sind das TRUMP-Element /18/ und das DKT-Schalenelement. Letzteres ist aus dem DKT-Plattenelement /19/ durch die Überlagerung eines linearen Scheibenelements (CST) entstanden /20/. Das DKT-Schalenelement mit nichtlinearen Erweiterungen ist im Kapitel 3 beschrieben. An einem Beispiel ist gezeigt, wie sich die unterschiedliche Konvergenz der Biege- und Membrananteile bei nichtlinearen Problemen ungünstig auswirken kann.

#### 1.4 Degenerierte Elemente

Im Unterschied zu Elementen aus einer Schalentheorie wird bei der Degeneration die Reduktion des 3-dimensionalen Kontinuums auf ein 2-dimensionales Flächentragwerk erst mit der Diskretisierung ausgeführt. Die Annahmen der Schalentheorie sind also nicht in den Ausgangsgleichungen enthalten, sondern werden durch die Ansatzfunktionen und Materialgesetze eingebracht /21/.

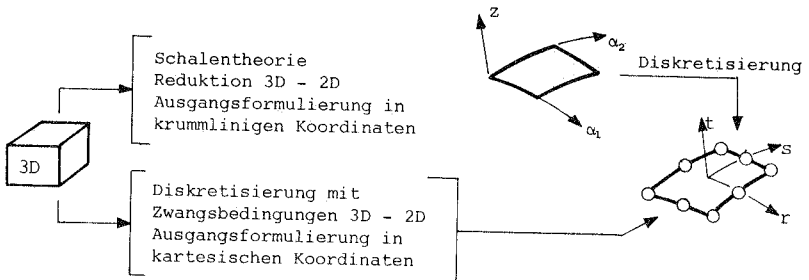


Bild 6. Konzept der Degeneration

Da die Querschubverzerrungen berücksichtigt werden, müssen die unabhängigen Ansatzfunktionen der Verschiebungen und Rotationen nur die  $C_0$ -Kontinuität erfüllen. Die im Kapitel 1.2 angeführten Bedingungen 1 und 2 werden bereits mit einfachen Ansätzen erfüllt. Wegen der Berücksichtigung der Schubverformungen kann das Element auch für relativ dicke Schalen eingesetzt werden. Die Beschreibung großer Rotationen ist durch Ansätze mit trigonometrischen Funktionen einfach durchführbar /22/. Die Vorteile der einfachen Formulierung haben zu einem verstärkten Einsatz dieser Elemente geführt, wobei besonders die linearen (4 Knoten) und quadratischen (8,9 Knoten) Elemente verwendet werden /25/, /26/. Anwendungen mit höherwertigen Elementen, vor allem des kubischen S16-Elements, sind relativ selten, da diese Elementversion sehr rechenintensiv ist. Dafür ist es das einzige Element der Familie der degenerierten Elemente, das die bereits erwähnten Nachteile des "Shear Locking" und des "Membrane Locking" nicht aufweist und deshalb mit voller Integration als zuverlässiges, robustes Element eingesetzt werden kann. Alle niedrig interpolierten Elemente und auch das S12-Element (kubisch, Serendipity) erfordern den Einsatz der reduzierten Integration und verlagern damit das Problem des "Locking" auf die "Zero-Energy-Modes", mit denen eventuell kinematische Gesamtsysteme entstehen. Zuverlässigkeit und Einfachheit der Verschiebungselemente erscheinen nach dem heutigen Stand der Forschung noch als gegensätzliche Bedingungen.

Ein allen degenerierten Elementen gemeinsamer Nachteil gegenüber Elementen aus einer Schalentheorie ist die rechenin-

tensive Volumenintegration. Durch die Einführung einer Vorabintegration der Dickenrichtung, die auch für nichtlineare Stoffgesetze gilt, wird die Effizienz und der Einsatzbereich dieser Elemente stark verbessert. Gegenüber Elementen aus einer Schalentheorie ist damit kein numerischer Mehraufwand erforderlich. Die Herleitung dieser Vorabintegration ist im Kapitel 2 dargestellt.

### 1.5 Axialsymmetrische Elemente mit Fourierreihen

Viele Schalenstrukturen haben eine rotationssymmetrische Geometrie. Diesem Umstand kann bereits bei der Wahl der Elemente Rechnung getragen werden, indem nicht eine flächenhafte, sondern eine linienhafte Idealisierung verwendet wird. Dabei wird mit Hilfe von Fourierreihen das partielle Schalenproblem mit 2 unabhängigen Variablen in ein gewöhnliches Problem überführt. Im linearen Fall sind die einzelnen Fourierterme vollständig entkoppelt. Bei nichtlinearen Anwendungen ist dies nicht mehr der Fall - die Kopplung der Fourierterme führt auf ein vollbesetztes Gleichungssystem. Trotzdem ist ein Gleichungssystem mit Fourierreihen meist noch kleiner, als bei Verwendung einer flächenhaften Idealisierung. In /27/ ist eine Formulierung entwickelt worden, die die Kopplung der Fourierterme auf der rechten Seite im Lastvektor berücksichtigt und damit wieder eine entkoppelte Steifigkeitsmatrix erreicht. Der entstehende Fehler wird iterativ beseitigt, was bei nichtlinearen Problemen kein Nachteil ist. Das Verfahren arbeitet immer mit der Anfangssteifigkeit, so daß in der Nähe eines Traglastpunktes Probleme mit der Konvergenz auftreten können. Ist ein Scha-

lenproblem mit diesem Verfahren lösbar, so ist es gegenüber flächenhaften Elementen immer wirtschaftlicher. Grenzfälle mögen sich bei konzentrierten Lasten ergeben, wenn eine sehr große Zahl von Fouriertermen erforderlich wird. Liegt keine rotationssymmetrische Geometrie vor, z.B. Schalen mit Längsversteifungen oder Aussparungen, können nur noch flächenhafte Elemente eingesetzt werden.

## 2.0 Degenerierte Schalenelemente

Das Konzept der Degeneration ist für Schalenelemente in /21/ von Ahmad vorgestellt worden. Die guten Ergebnisse und die Einfachheit der Formulierung haben zu einer Vielzahl von Anwendungen geführt. Der Grund für die Einführung der Degeneration ist in den Schwierigkeiten der Verschiebungselemente zu suchen, die über eine Schalentheorie hergeleitet werden. Die Ausgangsgleichungen werden im 3-dimensionalen Kontinuum aufgestellt und führen im nichtlinearen Bereich auf relativ einfache Formulierungen. In /22/ ist diese Erweiterung in den nichtlinearen Bereich mit Verwendung höherwertiger Elemente beschrieben.

Die degenerierten Elemente sind aber auch nicht frei von Nachteilen. Durch die Verwendung einer Theorie mit Schubverformungen tritt bei der Berechnung von dünnen Tragwerken das "Shear Locking" auf, ein Effekt der bereits in der Einleitung kurz erklärt ist. An dieser Stelle soll aber betont werden, daß "Shear Locking" nicht eine Eigenschaft der degenerierten Elemente ist, sondern eine Folge der verwendeten Theorie mit Schubverformungen. Auch das zweite Problem, das "Membrane Locking" ist nicht eine spezielle Eigenschaft der degenerierten Elemente, sondern in der Unfähigkeit der linearen und quadratischen Ansatzfunktionen zu suchen, wenn im gekrümmten Fall dehnungslose Verformungen abgebildet werden müssen. Eine Vielzahl von Arbeiten ist auf dem Gebiet der degenerierten Schalenelemente erschienen, die sich alle mit den reduzierten Integrationsverfahren zur Vermeidung der "Locking" Probleme

beschäftigt haben. Stellvertretend ist hier nur eine Auswahl zitiert /28/-/35/. In den folgenden Kapiteln wird auf die Aufsätze noch einmal genauer Bezug genommen.

## 2.1 Ausgangsgleichungen

Eine ausführliche Darstellung der folgenden Gleichungen ist in /22/ enthalten, woraus auch die Bezeichnungsweise übernommen ist. Sie werden hier zum weiteren Verständnis nur knapp zusammengestellt. Die Gleichungen werden aus dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen abgeleitet, da für die Diskretisierung ein Verschiebungsmodell verwendet wird. Das Prinzip wird in der noch unbekanntenen Endlage 2 formuliert und danach alle Größen auf einen bekannten Zustand transformiert. Je nach Wahl des Bezugszustandes erhält man die totale Lagrange Formulierung (T.L) oder die mitgehende, "updated" Lagrange Formulierung (U.L). Bei T.L. ist die unverformte Lage, bei U.L. die bereits erreichte Lage 1 vor dem Inkrement der gewählte Bezugszustand. Damit ist auch bereits ausgesagt, daß es sich um eine inkrementelle Formulierung handelt. Die entstehenden Gleichungen sind nichtlinear in den gesuchten Verschiebungsincrementen und werden für die Aufstellung einer Steifigkeitsmatrix linearisiert. Gleichung 2.1 zeigt den linearisierten Energieausdruck des Prinzips der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V) in inkrementeller Form in der U.L. Formulierung.

$\int_V C_{ijkl} e_{kl} \delta_1 e_{ij} dv + \int_V s_{ij} \delta_1 \eta_{ij} dv = \delta^2 W_a - \int_V s_{ij} \delta_1 e_{ij} dv$	(2.1)
---	-------

C ist der konstitutive Tensor, e der lineare,  $\eta$  der nichtlineare Anteil des Verzerrungstensors und s der Cauchy-Spannungstensor. C, e,  $\eta$  sind inkrementelle Größen. Die linke Seite beschreibt die linearisierte inkrementelle innere virtuelle Arbeit, die rechte Seite die Differenz der äußeren Arbeit im Zustand 2 und der inneren Arbeit im Zustand 1. Bei Verwendung der T.L.-Formulierung wird der geänderte Bezugszustand dadurch angezeigt, indem der linke untere Fußzeiger durch 0 ersetzt wird. Gleichung 2.1 wird diskretisiert, wobei für die Verschiebungen und die Geometrie Ansatzfunktionen eingeführt werden, die noch keinem speziellen Element zugeordnet sind. Alle Größen werden in einer passenden Vektor- bzw. Matrixform dargestellt, die in folgender Form definiert sind :

Definitionen der verwendeten Matrizen		(2.2)
$\mathbf{u}^T = [u_1^1 u_2^1 u_3^1 \Delta\varphi^1 \Delta\psi^1 \mid u_1^2 u_2^2 u_3^2 \Delta\varphi^2 \Delta\psi^2 \mid \dots \mid u_1^i u_2^i u_3^i \Delta\varphi^i \Delta\psi^i]$		
	$i = 1, k \dots$	Anzahl der Knoten
$\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} \epsilon_{12} \epsilon_{13} \epsilon_{23}]$		
	$\epsilon_{ij} \dots$	Elemente des Verzerrungstensors
$\mathbf{s}^T = [s_{11} s_{22} s_{33} s_{12} s_{13} s_{23}]$		
	$s_{ij} \dots$	Elemente des Spannungstensors
$\hat{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$		
	$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}$	
	$\mathbf{e} \dots$ linearer Anteil Verzerrungsinkrement $\boldsymbol{\eta} \dots$ nichtlinearer Anteil Verzerrungsinkrement	
$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{s}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \hat{\mathbf{s}} \end{bmatrix}$		
	$\mathbf{e} = \mathbf{B} \mathbf{u}$ Operatormatrix $\mathbf{B}$	
	$\partial u_i / \partial x_j = \hat{\mathbf{d}} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}$ Operatormatrix $\hat{\mathbf{B}}$	
Diskretisierte Form P.d.v.V.		(2.3)
$\delta \mathbf{u}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dV + \int_V \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{B}} \, dV \right) \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{P} - \delta \mathbf{u}^T \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{s} \, dV$		

Das erste Integral aus 2.3 führt auf die gewöhnliche Steifigkeitsmatrix  $K_e$ , das zweite auf die geometrische Matrix  $K_G$  (Anfangsspannungsmatrix). Die rechte Seite enthält die äußeren Kräfte der Lage 2 und die Element-Knotenkräfte, die dem inneren Spannungszustand das Gleichgewicht halten, kurz als innere Kräfte bezeichnet. Der Ausdruck der rechten Seite bildet die Ungleichgewichtskräfte, die durch Iteration zum Verschwinden gebracht werden müssen.

## 2.2 Ansatzfunktionen

Für die Geometrie der Schale sowie für das Verschiebungsfeld wird ein isoparametrischer Ansatz eingeführt (2.4 und 2.5).

<p>Ansatzfunktionen Geometrie <span style="float: right;">(2.4)</span></p> $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \phi^i \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ x_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^k \phi^i h^i \begin{bmatrix} \cos \psi_1^i \\ \cos \psi_2^i \\ \cos \psi_3^i \end{bmatrix}$
--

<p>Ansatzfunktionen Verschiebungen <span style="float: right;">(2.5)</span></p> $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \phi^i \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^k \phi^i h^i \begin{bmatrix} \cos m\psi_1^i - \cos o\psi_1^i \\ \cos m\psi_2^i - \cos o\psi_2^i \\ \cos m\psi_3^i - \cos o\psi_3^i \end{bmatrix}$
---

Die Verschiebungen eines jeden Schalenpunktes werden mit den Verschiebungen der Mittelfläche und den Winkeländerungen der Normalen beschrieben. Dabei sind Verschiebungen und Rotationen unabhängig voneinander interpoliert. Der Ansatz gilt für beliebig große Winkeländerungen der Normalen. Alle Definitionen für die Beschreibung der Ansätze sind in Bild 7 auf Seite 19



dargestellt. Ortsvektoren werden als gerichtete Größen mit einem Pfeil versehen.

Für die Aufstellung der Ansatzfunktionen wird ein lokales, normiertes Koordinatensystem  $r, s, t$  im Bereich  $-1$  bis  $+1$  verwendet. Dabei sind die Ansatzfunktionen  $\phi$  nur abhängig von  $r$  und  $s$ . Angaben über die Ansatzfunktionen  $\phi$  bei verschiedenen Interpolationsordnungen findet man in /22/. Die Elementdicke  $h$  kann im Element veränderlich sein und wird in der Flächennormalenrichtung gemessen. Als Unbekannte zur Beschreibung der Winkeländerungen stehen mehrere Möglichkeiten zur Auswahl. Aus den drei Werten der Richtungskosinus der Normalen wird als erste Unbekannte die Änderung des Winkels genommen, als zweite Unbekannte die Projektion der Normalen auf die  $x_2$ - $x_3$ -Ebene und die Änderung des Winkels dieser projizierten Normalen gegenüber der  $x_2$ -Achse. Diese Definition ist im verwendeten Programm NISA80 /38/ enthalten (siehe auch Bild 7 auf Seite 19).

Die trigonometrischen Funktionen der Gleichung 2.5 für die Beschreibung der Verschiebungen außerhalb der Mittelfläche werden für die Aufstellung der inkrementellen Steifigkeitsmatrix linearisiert (Gleichung 2.6), d.h. durch das erste Reihenglied ersetzt. Die Matrix  $T$  bildet die gewählten Rotationen in die drei Koordinatenrichtungen ab. Die zusätzliche Linearisierung wird nur für die Aufstellung der inkrementellen Steifigkeitsmatrix verwendet, die inneren Kräfte werden mit dem genauen Ansatz 2.5 berechnet.

Linearisierter Ansatz inkrementelle Verschiebungen (2.6)

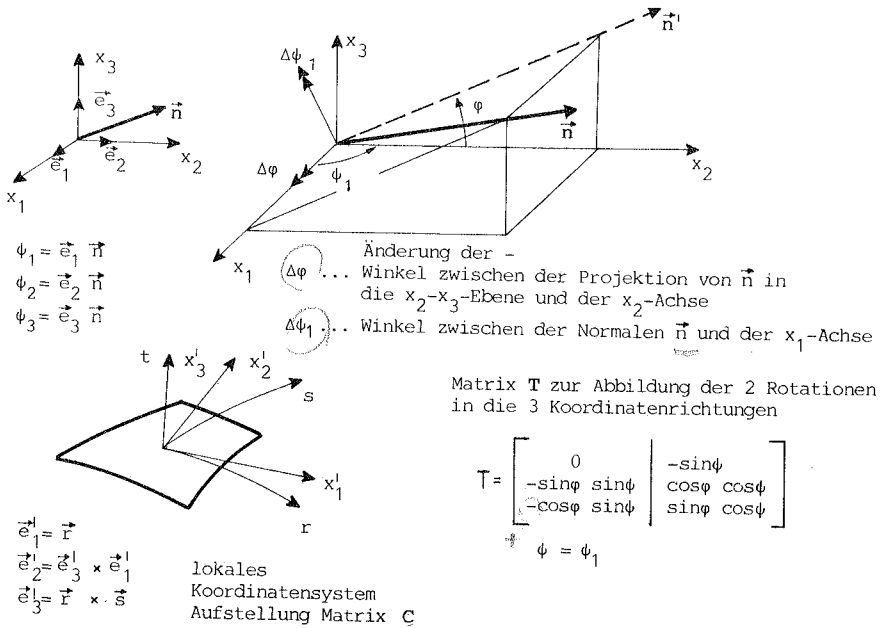
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^k \Phi^i \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} t \sum_{i=1}^k \Phi^i h^i \mathbf{T}^i \begin{bmatrix} \Delta\varphi \\ \Delta\psi_1 \end{bmatrix}$$

Mit der Wahl dieses Ansatzes 2.5 bzw. 2.6 sind zwei Bedingungen eingeführt worden :

1. Die Normale ändert ihre Länge nicht.
2. Der Querschnitt bleibt eben.

Die dritte Bedingung für dünne Tragwerke, die Vernachlässigung der Normalspannungen in Dickenrichtung, wird durch eine anisotrope, lokale Materialmatrix erfüllt. Diese Matrix  $C$  wird in einem lokalen Koordinatensystem mit der Bedingung - Spannung in Dickenrichtung soll Null sein - aufgestellt (siehe Bild 7 auf Seite 19). Danach erfolgt die Transformation auf das globale System, was im allgemeinen auf eine voll besetzte Matrix  $C$  führt.

Die in Gleichung 2.4 und 2.5 angegebenen Ansätze sind variabel in der Anzahl der Knoten, die für die Interpolation verwendet werden. In vielen existierenden Programmen sind diese Elemente mit variabler Knotenzahl vorgesehen, so daß es dem Benutzer obliegt, eine Auswahl des Elementtyps vorzunehmen. Dazu ist eine genaue Kenntnis des Elementverhaltens notwendig, da die niedrig interpolierten Elemente stark unterschiedliches Konvergenzverhalten zeigen. Die in NISA80 /38/ enthaltenen Elemente sind im Bild 8 auf Seite 19 gezeigt



**Bild 7. Definitionen Ansätze**



S16 - kubisch  
Lagrange



S4 - linear  
Lagrange / Serendipity



S12 - kubisch  
Serendipity



S10 - kubisch



S9 - quadratisch  
Lagrange



S6 - quadratisch



S8 - quadratisch  
Serendipity



S3 - linear

**Bild 8. Isoparametrische Elementfamilie**

## 2.3 Integration über die Elementdicke

Die Steifigkeitsausdrücke der Gleichung 2.3 werden normalerweise über das Elementvolumen numerisch integriert. Dabei wird der komplette Integrand in Dickenrichtung und in der Fläche ausgewertet. Um eine Vorabintegration der Dickenrichtung ausführen zu können, muß die Abhängigkeit des Integranden von der Dickenrichtung explizit dargestellt werden. Liegt diese Aufspaltung vor, kann das Dickenintegral getrennt vom Flächenintegral ausgeführt werden.

Darstellung der Vorgehensweise bei Vorabintegration :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T(r,s,t) \mathbf{C}(r,s,t) \mathbf{B}(r,s,t) |\mathbf{J}(r,s,t)| dr ds dt$$

↓

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 + t \mathbf{B}_3 \quad i, j = 1, 2, 3$$
  

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}_i^T(r,s) \int_{-1}^{+1} t^k \mathbf{C}(r,s,t) dt \mathbf{B}_j(r,s) |\tilde{\mathbf{J}}(r,s)| dr ds$$

↓  
Vorabintegration der Dickenrichtung

$$t^k \mathbf{C}(r,s,t) \rightarrow \mathbf{D}(r,s), \mathbf{Q}(r,s), \mathbf{R}(r,s)$$

k = 0      1      2

Bei elastischem Material ist die Ausführung des inneren Integrals analytisch möglich, bei nichtlinearen Materialgesetzen muß ein numerisches Verfahren herangezogen werden.

Die Vorabintegration ist in /35/ für elastische Probleme und in /39/ für plastische Probleme beschrieben. Allerdings wird in /39/ nur eine, bei nichtlinearem Material unzulässige

Näherungsformulierung verwendet, die in einigen Fällen zu Konvergenzschwierigkeiten führt oder sogar einen Abbruch der Rechnung zur Folge hat. Die hier entwickelte Vorabintegration enthält außer der Annahme einer schwachen Krümmung des Elements keine weiteren Näherungen.

Steifigkeitsmatrizen : <span style="float: right;">(2.7)</span> $K_e = \int_V B^T C B dV \qquad K_G = \int_V \hat{B}^T S \hat{B} dV$
--

Für die weitere Zerlegung muß jetzt eine wichtige Annahme getroffen werden, die in den meisten Theorien dünner Schalen üblich ist. Vernachlässigt man bei der Beschreibung der Schalen-geometrie die Krümmungsunterschiede von Innen- und Außenseite der Schale, so wird die Determinante der Jakobimatrix J unabhängig von der Dickenrichtung und es gilt der folgende Übergang vom Volumenelement dV zum Flächenelement dA:

Volumenelement --> Flächenelement <span style="float: right;">(2.8)</span>	
$dV =  J  dr ds dt$	$E = \sum_{i=1}^3 (x_{i,r})^2$
$dV = \frac{1}{2} h dt dA$	$G = \sum_{i=1}^3 (x_{i,s})^2$
$dA = \sqrt{EG - F^2}$	$F = \sum_{i=1}^3 (x_{i,r} x_{i,s})$
Dickenkoordinate : $\bar{z} = \frac{1}{2} h t \quad d\bar{z} = \frac{1}{2} h dt$	
E,F,G sind die Koeffizienten der ersten quadratischen Fundamentalform - die Ableitungen $x_{,r}$ und $x_{,s}$ können aus der Jakobimatrix J entnommen werden.	

Die Zerlegung der Matrix B in einen konstanten Anteil und einen von  $\bar{z}$  abhängigen Anteil ist in Gleichung 2.9 gezeigt. Der genaue Inhalt der Matrizen  $B_1, B_2, B_3$  ist in Bild 9 auf Seite 24 in vollständiger Form wiedergegeben.

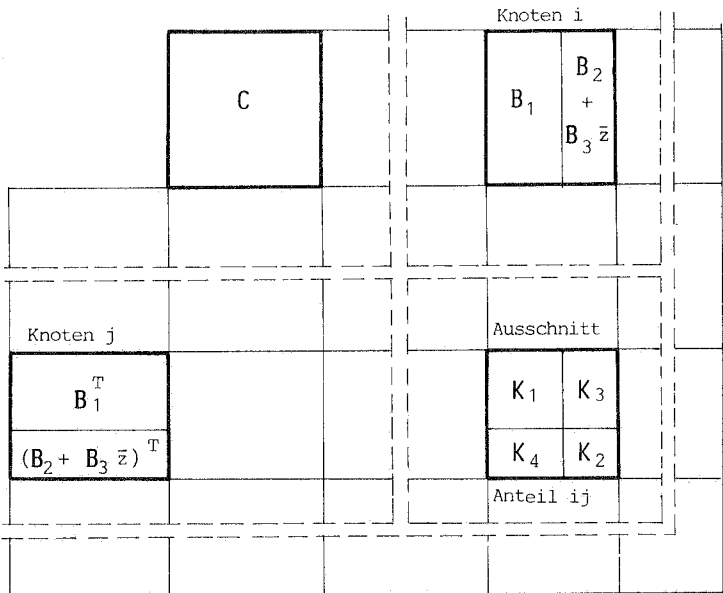
Aufspaltung der Operatormatrix  $B$  : (2.9)

$$B^T C B = \left[ B_1 \mid B_2 + \bar{z} B_3 \right]^T C \left[ B_1 \mid B_2 + \bar{z} B_3 \right]$$

<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi</math></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"><math>B</math></td> </tr> </table>	$u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi$	$B$	=	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>0</math></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"><math>B_1</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"><math>0</math></td> </tr> </table>	$u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi$	$0$	$B_1$	$0$	+	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>0</math></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"><math>0</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"><math>B_2</math></td> </tr> </table>	$u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi$	$0$	$0$	$B_2$	+	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 2px;"><math>0</math></td> </tr> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"><math>0</math></td> <td style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"><math>B_3</math></td> </tr> </table>	$u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi$	$0$	$0$	$B_3$	· $\bar{z}$
$u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi$																					
$B$																					
$u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi$	$0$																				
$B_1$	$0$																				
$u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi$	$0$																				
$0$	$B_2$																				
$u_1 u_2 u_3 \Delta\phi \Delta\psi$	$0$																				
$0$	$B_3$																				

Führt man nun das Produkt  $B^T C B$  mit dieser Zerlegung aus, so entstehen folgende Untermatrizen  $K$  :

Multiplikation  $B^T C B$  in zerlegter Form



Die Einzelanteile der Untermatrizen  $K$  werden in Dickenrichtung integriert und neue Materialmatrizen  $D, Q$  und  $R$  eingeführt. Alle Anteile mit  $Q$  verschwinden im elastischen Fall.

Gewöhnliche Steifigkeitsmatrix  $K_e$  (2.10)

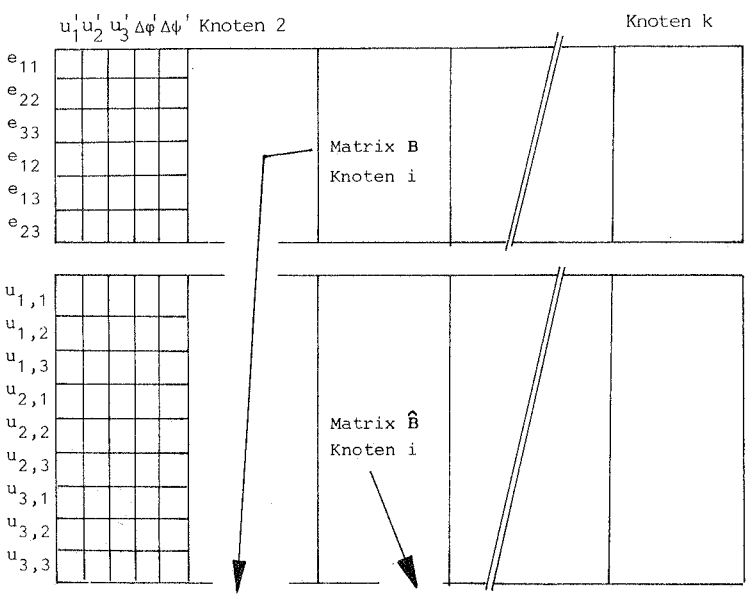
$$\begin{aligned}
 K_{e1} &= \iint_A (B_1^T D B_1) dA & \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{entfällt im elastischen} \\ \text{Fall da } Q = 0 \end{array} \right. \\
 K_{e2} &= \iint_A (B_2^T D B_2 + B_3^T R B_3 + B_2^T Q B_3 + B_3^T Q B_2) dA \\
 K_{e3} &= \iint_A (B_1^T D B_2 + B_1^T Q B_3) dA \\
 K_{e4} &= \iint_A (B_2^T D B_1 + B_3^T Q B_1) dA
 \end{aligned}$$

Definition der Matrizen  $D, Q$  und  $R$  : (2.11)

$$\begin{aligned}
 D &= \int_h C d\bar{z} & D &= C h \\
 Q &= \int_h C \bar{z} d\bar{z} & \xrightarrow{\text{elastisch}} & Q = 0 \\
 R &= \int_h C \bar{z}^2 d\bar{z} & R &= C h^3 / 12
 \end{aligned}$$

Die Matrix  $D$  entspricht der Dehnsteifigkeit der Schale, die Matrix  $R$  der Biegesteifigkeit, wie sie bei einer Schalentheorie definiert sind.  $Q$  beinhaltet die Kopplung zwischen allen Spannungen und Dehnungen bei nichtlinearen Materialgesetzen.

Die mit  $B$  verwandte Matrix  $\hat{B}$  wird analog der Gleichung 2.9 in einen konstanten und in  $\bar{z}$  linear veränderlichen Anteil aufgespalten. Die Integration der Dickenrichtung wird hier über die Spannungen ausgeführt und es entstehen die Matrizen  $N, M$  und  $L$ .



$\phi_{,1}^i$	0	0	$\psi_{,1}^i * t_{11}$	$\psi_{,1}^i * t_{12}$
0	$\phi_{,2}^i$	0	$\psi_{,2}^i * t_{21}$	$\psi_{,2}^i * t_{22}$
0	0	$\phi_{,3}^i$	$\psi_{,3}^i * t_{31}$	$\psi_{,3}^i * t_{32}$
$\phi_{,2}^i$	$\phi_{,1}^i$	0	$\psi_{,2}^i * t_{11}$ +	$\psi_{,2}^i * t_{12}$ +
			$\psi_{,1}^i * t_{21}$	$\psi_{,1}^i * t_{22}$
$\phi_{,3}^i$	0	$\phi_{,1}^i$	$\psi_{,3}^i * t_{11}$ +	$\psi_{,3}^i * t_{12}$ +
			$\psi_{,1}^i * t_{31}$	$\psi_{,1}^i * t_{32}$
0	$\phi_{,3}^i$	$\phi_{,2}^i$	$\psi_{,3}^i * t_{21}$ +	$\psi_{,3}^i * t_{22}$ +
			$\psi_{,2}^i * t_{31}$	$\psi_{,2}^i * t_{32}$

$\phi_{,1}^i$	0	0	$\psi_{,1}^i * t_{11}$	$\psi_{,1}^i * t_{12}$
$\phi_{,2}^i$	0	0	$\psi_{,2}^i * t_{11}$	$\psi_{,2}^i * t_{12}$
$\phi_{,3}^i$	0	0	$\psi_{,3}^i * t_{11}$	$\psi_{,3}^i * t_{12}$
0	$\phi_{,1}^i$	0	$\psi_{,1}^i * t_{21}$	$\psi_{,1}^i * t_{22}$
0	$\phi_{,2}^i$	0	$\psi_{,2}^i * t_{21}$	$\psi_{,2}^i * t_{22}$
0	$\phi_{,3}^i$	0	$\psi_{,3}^i * t_{21}$	$\psi_{,3}^i * t_{22}$
0	0	$\phi_{,1}^i$	$\psi_{,1}^i * t_{31}$	$\psi_{,1}^i * t_{32}$
0	0	$\phi_{,2}^i$	$\psi_{,2}^i * t_{31}$	$\psi_{,2}^i * t_{32}$
0	0	$\phi_{,3}^i$	$\psi_{,3}^i * t_{31}$	$\psi_{,3}^i * t_{32}$

$$\phi_{,j} = J_{j1}^{-1} * \phi_{,r} + J_{j2}^{-1} * \phi_{,s}$$

$$\psi_{,j} = \frac{h}{2} ( t * \phi )_{,j} = \frac{h}{2} ( J_{j3} * \phi + t * \phi_{,j} )$$

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \\ t_{31} & t_{32} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}$$

Jakobi-Matrix

Bild 9. Operatormatrizen B und  $\hat{B}$



Geometrische Matrix  $K_G$ :

(2.12)

$$K_{G1} = \iint_A (\hat{B}_1^T \mathbf{N} \hat{B}_1) dA$$

$$K_{G2} = \iint_A (\hat{B}_2^T \mathbf{N} \hat{B}_2 + \hat{B}_3^T \mathbf{L} \hat{B}_3 + \hat{B}_2^T \mathbf{M} \hat{B}_3 + \hat{B}_3^T \mathbf{M} \hat{B}_2) dA$$

$$K_{G3} = \iint_A (\hat{B}_1^T \mathbf{N} \hat{B}_2 + \hat{B}_1^T \mathbf{M} \hat{B}_3) dA$$

$$K_{G4} = \iint_A (\hat{B}_2^T \mathbf{N} \hat{B}_1 + \hat{B}_3^T \mathbf{M} \hat{B}_1) dA$$

Alle Vektoren oder Matrizen, die aus Spannungen aufgebaut sind, enthalten immer die Elemente des Spannungstensors. Für die inneren Kräfte  $F$  werden die Vektoren  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$  definiert, die entsprechend dem Vektor  $\mathbf{s}$  aufgebaut sind, für die Aufstellung der geometrischen Matrix die Matrizen  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  und  $\mathbf{L}$ . Zur Berechnung der Werte in  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{N}$  und  $\mathbf{L}$  werden die Spannungswerte der Mittelfläche verwendet ( $s_0$  bzw.  $S_0$ ), für die Berechnung von  $\mathbf{m}$  und  $\mathbf{M}$  die Randspannungswerte an der Oberfläche ( $s_1$  und  $S_1$ ).

Innere Kräfte (Knotenkräfte) :

(2.13)

$$F_{i1} = \iint_A (B_1^T \mathbf{n}) dA$$

$$F_{i2} = \iint_A (B_2^T \mathbf{n} + B_3^T \mathbf{m}) dA$$

Definition von  $N, M, L$  :

(2.14)

$$N = \int_h S \, d\bar{z}$$

$$N = S_0 h$$

$$M = \int_h S \bar{z} \, d\bar{z} \quad \text{--- elastisch ---} \rightarrow M = S_1 h^2 / 6$$

$$L = \int_h S \bar{z}^2 \, d\bar{z}$$

$$L = S_0 h^3 / 12$$

Index 0 : konstanter Anteil der Spannungen

Index 1 : linear veränderlicher Anteil (Randspannung)

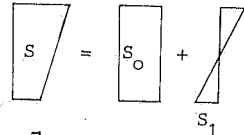
Aufbau der Matrix  $N$  und des Vektors  $n$  :

$$n_{ij} = \int_h s_{ij} \, d\bar{z}$$

$$n = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{22} & n_{33} & n_{12} & n_{13} & n_{23} \end{bmatrix}$$

$$\hat{n} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{12} & n_{22} & n_{23} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} \hat{n} & o & o \\ o & \hat{n} & o \\ o & o & \hat{n} \end{bmatrix}$$



Die Matrix  $N$  enthält die Membrankräfte und die Querkräfte, die Matrix  $M$  die Biege- und Drillmomente. Diese Interpretation gilt bei Verwendung eines lokalen Koordinatensystems in der Schalenfläche.

### 2.3.1 Materielle Nichtlinearität

Die analytische Integration der Gleichungen 2.11 und 2.14 ist bei materieller Nichtlinearität nicht mehr möglich. In diesem Fall ist eine Schichtintegration /40/ notwendig, die numerisch mit Gauss- oder Simpsonintegration ausgeführt wird. Letztere

hat den Vorteil, daß Punkte auf den Oberflächen vorhanden sind. Alle Beispiele in dieser Arbeit sind mit Simpsonintegration berechnet.

Die gezeigte Vorabintegration enthält bei einer geometrisch linearen, materiell nichtlinearen Berechnung einer Platte keine Vernachlässigungen und bei Schalen nur die Annahme der Krümmung der Mittelfläche für Innen- und Außenseite der Schale, d.h. keine Abhängigkeit von der Dickenrichtung. Bei einer Plattenrechnung entstehen exakt die gleichen Matrizen, wie bei einer Integration des Gesamtausdrucks der Gleichung 2.7 über das Elementvolumen. Dies unterscheidet das hier gewählte Vorgehen von der Darstellung in /39/, da dort die Matrix Q nicht berücksichtigt ist und die Matrix R ebenso wie die Matrix L nur näherungsweise berechnet wird. Außerdem wird dort die Schichtintegration der Dickenrichtung für die Matrizen D, N, M mit der Rechteckregel ausgeführt, was eine relativ hohe Zahl von Schichten erfordert.

Näherung für die Matrizen R und L nach /39/ : (2.15)

$$R = D h^2/12$$

$$L = N h^2/12$$

Mit Vergleichsrechnungen wurde festgestellt, daß bei derartigen Vernachlässigungen für unterschiedliche Steifigkeitsverhältnisse an der Ober- bzw. Unterseite (z.B. Stahlbeton im Zustand II) keine Konvergenz mehr erreicht und die Traglastrechnung abgebrochen wird. Die Ersparnis an Rechenzeit bei Verwen-

dung der Näherung nach 2.15 ist nur sehr gering, während die Vernachlässigung der Matrix  $Q$  die Erstellung der Steifigkeitsmatrix um etwa 10% beschleunigt. Der Gesamtanteil der Dickenintegration an der Lösung eines nichtlinearen Problems ist aber nicht größer als 15%, so daß die genaue Berechnung verwendet wird.

### 2.3.2 Geometrische Nichtlinearität

Die oben beschriebene Vorgehensweise ist im geometrisch linearen Fall und bei der "Updated" Lagrange Darstellung ohne weitere Einschränkungen brauchbar. Im Fall der totalen Lagrange Formulierung erscheint das Problem, daß die Ableitungen der Anfangsverschiebungen in der Matrix  $B$  enthalten sind und somit eine weitere Abhängigkeit von  $\bar{z}$  vorliegt. Die Vernachlässigung dieser Abhängigkeit von  $\bar{z}$  bedeutet, daß die Verschiebungen über die Elementdicke als konstant angenommen werden. Abschätzungen über die Größe des Fehlers müssen über Vergleichsrechnungen erfolgen.

Bei der Entscheidung für die U.L Formulierung in vorliegender Arbeit war nicht dieser Aspekt maßgebend, sondern die Tatsache, daß bei der totalen Lagrange Formulierung ein deutlich höherer Programmieraufwand vorliegt und dementsprechend mehr Rechenzeit verbraucht wird.

### 2.3.3 Rechenzeitvergleiche

Vergleichsrechnungen mit Vorabintegration und Integration des Gesamtausdrucks über die Elementdicke ergeben ein Verhältnis von 1:1.5 bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix mit elastischem Materialgesetz. Die Reduktion von 2 Gausspunkten über die Dicke auf einen Punkt führt also nicht auf die halbe Rechenzeit. Dies ist durch einen höheren Programmieraufwand bedingt, da die getrennte Ausführung von Matrix-Multiplikationen mehr Rechenzeit benötigt. Deutlich höher fällt die Ersparnis an Rechenzeit bei nichtlinearem Materialgesetz aus. Hier liegt das Verhältnis bei 1:3, wenn eine Simpsonintegration mit 7 Punkten (6 Schichten) über die Elementdicke verwendet wird. Genauere Angaben über die Rechenzeitverteilung bei einem nichtlinearen Rechenlauf sind am Ende dieses Kapitels angegeben.

### 2.4 Integration in der Elementebene

Normalerweise wird die numerische Integration nach Gauss in der Elementebene eingesetzt. Dabei ist je nach Elementtyp eine unterschiedliche Integrationsordnung, d.h. eine andere Anzahl von Integrationspunkten erforderlich. Die folgende Übersicht gibt die übliche Anzahl von Integrationspunkten für die verschiedenen Elementtypen an.

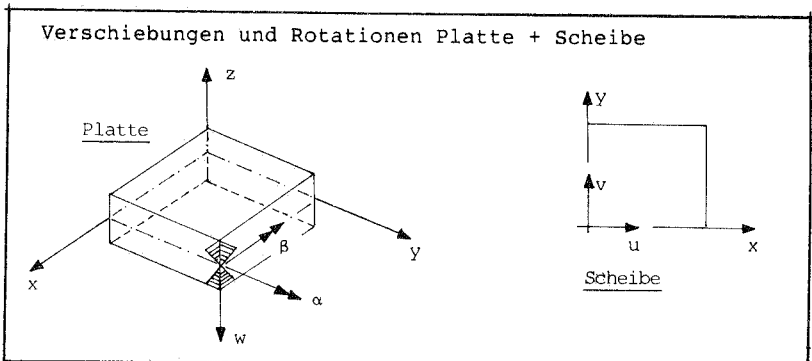
Lineare Elemente (4 Knoten)	2*2	Gausspunkte
Quadratische Elemente (8,9 Knoten)	3*3	"
Kubische Elemente (12,16 Knoten)	4*4	"
Quartische Elemente (16,25 Knoten)	5*5	"

Die Anzahl der Gausspunkte richtet sich nach dem Grad des zu integrierenden Polynoms. Mit  $n$  Punkten kann ein Polynom vom Grad  $2*n-1$  exakt integriert werden. Angewandt wird die Integration auf den Ausdruck  $B^T D B dA$ , so daß die Ordnung dieses Integranden entscheidend ist. Für ein ebenes, unverzerrtes Plattenelement enthält die Matrix  $B$  Polynome vom Grad  $m$ , wenn  $m$  die Ordnung der Ansatzfunktion ist. Dies resultiert aus der Tatsache, daß auch bei der Ableitung nach der Richtung  $r$ , die zweite Richtung  $s$  mit der Ordnung  $m$  erhalten bleibt.  $dA$  ist in diesem Fall unabhängig von  $r$  und  $s$ , so daß sich ein Polynom der Ordnung  $2*m$  ergibt, das mit  $m+1$  Punkten, für jede Richtung, exakt integriert wird.

Diese Integrationsordnung wird im folgenden immer als vollständige Integration bezeichnet. Bei gekrümmten Elementen ist durch die Transformation der Ableitungen lokal-global und des von  $r$  und  $s$  abhängigen Differentials  $dA$ , keine exakte Integration mehr möglich. Es hat sich aber gezeigt, daß die normale Integrationsordnung ausreicht und eine Erhöhung der Anzahl der Gausspunkte keine wesentliche Verbesserung der Ergebnisse bringt.

## 2.5 Darstellung der Energieanteile

Für selektive Integrationsverfahren ist eine getrennte Darstellung der Energieanteile der Steifigkeitsmatrix (Gleichung 2.7) erforderlich. Dabei wird zusätzlich zur Zerlegung der Matrix  $B$  noch eine Aufspaltung der Materialmatrix  $D$  in Membran- und Querschubanteile vorgenommen. Um die folgenden Ableitungen zu vereinfachen, wird ein ebenes, unverzerrtes Element in der  $x$ - $y$ -Ebene vorausgesetzt, womit der Platten- und Scheibenanteil entkoppelt dargestellt werden kann. Bei einem gekrümmten Schalenelement sind die Ausdrücke komplizierter, da die Ableitungen nach der Richtung  $z$  an den einzelnen Knoten nicht mehr verschwinden. Die vollständige Verzerrungsenergie aus Platten- und Scheibenanteil setzt sich aus Membran-, Biege- und Querschubenergie zusammen. In den folgenden Gleichungen sind  $u, v, w$  die Verschiebungen der Mittelfläche. Die Rotationen sind so definiert, daß  $\alpha$  Verschiebungen in  $x$ -Richtung und  $\beta$  Verschiebungen in  $y$ -Richtung erzeugt. Dies sind die üblichen Platten- und Scheibefreiheitsgrade.



Mit diesen Definitionen ergibt sich die Verzerrungsenergie einer Platte erweitert um die Membranenergie des Scheibenanteils :

<p>1. Anteil Membranenergie : <span style="float: right;">(2.16)</span></p> $\frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \iint_A \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} dA$
<p>2. Anteil Biegeenergie : <span style="float: right;">(2.17)</span></p> $\frac{1}{24} \frac{Eh^3}{1-\nu^2} \iint_A \left\{ \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \beta}{\partial y} + \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right)^2 \right\} dA$
<p>3. Anteil Querschubenergie : <span style="float: right;">(2.18)</span></p> $\frac{1}{4} \frac{Eh}{1+\nu} \iint_A \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta \right)^2 \right\} dA$

Es soll jetzt gezeigt werden, zu welchem Energieanteil die verschiedenen Ausdrücke der Gleichung 2.10 Beiträge liefern. Dazu ist zuerst noch eine Aufspaltung der Materialmatrix notwendig.

<b>Membran- und Querschubanteile Materialmatrix <span style="float: right;">(2.19)</span></b>																																					
$D = \frac{E}{1-\nu^2}$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 200px; height: 150px;"> <tr><td>1</td><td><math>\nu</math></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td><math>\nu</math></td><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td>0</td><td></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td><math>\frac{1-\nu}{2}</math></td><td></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\frac{1-\nu}{2}k</math></td><td></td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td><math>\frac{1-\nu}{2}k</math></td></tr> </table>	1	$\nu$					$\nu$	1							0							$\frac{1-\nu}{2}$							$\frac{1-\nu}{2}k$							$\frac{1-\nu}{2}k$
1	$\nu$																																				
$\nu$	1																																				
		0																																			
			$\frac{1-\nu}{2}$																																		
				$\frac{1-\nu}{2}k$																																	
					$\frac{1-\nu}{2}k$																																
<p><math>k \dots</math> Schubkorrekturfaktor (5/6)</p>																																					
<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px; height: 80px;"> <tr><td colspan="2" style="background-color: #cccccc;">Membran</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table> <p><math>D_m \dots</math> Membran</p>	Membran		0	0	0	0	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center; width: 100px; height: 80px;"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td style="background-color: #cccccc;">Schub</td></tr> </table> <p><math>D_s \dots</math> Querschub</p>	0	0	0	0	0	Schub																								
Membran		0																																			
0	0	0																																			
0	0	0																																			
0	0	Schub																																			

Anschließend werden die Elemente der Matrix B in einem lokalen Koordinatensystem aufgestellt, das bei der Platte mit dem glo-



balen Koordinatensystem übereinstimmt. Es zeigt sich, daß die Einzelmatrizen  $B_1, B_2, B_3$  teilweise sehr schwach besetzt sind, was bei der Programmierung berücksichtigt werden sollte. Die Elemente der Matrix  $B$  sind nur in einer abgekürzten Symbolik dargestellt. Die genaue Definition dieser Symbole ist bereits im Kapitel 2.3 erklärt.

Matrix  $B$  im lokalen Koordinatensystem (2.20)

$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\Delta\varphi$	$\Delta\psi$	$\Delta\varphi$	$\Delta\psi$
$\phi_1$						$-\phi_1$
	$\phi_2$					$-\phi_2$
$\phi_2$	$\phi_1$					$-\phi_1$
		$\phi_1$			$-1$	
		$\phi_2$			$-1$	
$B_1$			$B_2$			$B_3$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verschiebungen und Rotationen werden für die nachfolgende Zerlegung in einer passenden Vektorform benötigt, die eine Zuordnung zu den oben verwendeten Plattenfreiheitsgraden ermöglicht.

Definition der Verschiebungen und Rotationen (2.21)

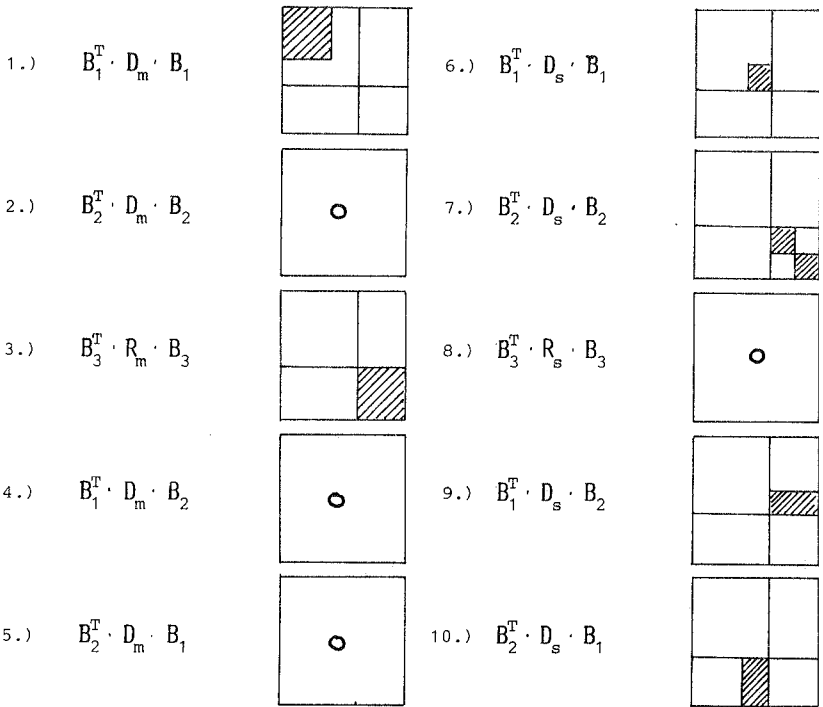
$$u = \begin{bmatrix} v \\ r \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} \Delta\varphi^i \\ \Delta\psi^i \end{bmatrix}$$

Verzerrungsenergie eines Elements (2.22)

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_e} \epsilon^T C \epsilon \, dV = \frac{1}{2} \int_{V_e} u^T B^T C B u \, dV$$



- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1.) $V^T B_1^T \cdot D_m \cdot B_1 \cdot V$  | → | vollständige Membranenergie   |
| 3.) $r^T B_3^T \cdot R_m \cdot B_3 \cdot r$  | → | vollständige Biegeenergie   |
| 6.) $V^T B_1^T \cdot D_s \cdot B_1 \cdot V$  | → | $\frac{1}{4} \cdot \frac{Eh}{1+\nu} \cdot \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\}$ |
| 7.) $r^T B_2^T \cdot D_s \cdot B_2 \cdot r$  | → | $\frac{1}{4} \cdot \frac{Eh}{1+\nu} \cdot \{ \alpha^2 + \beta^2 \}$   |
| 9.) $V^T B_1^T \cdot D_s \cdot B_2 \cdot V$  | → | $\frac{1}{4} \cdot \frac{Eh}{1+\nu} \cdot \left\{ - \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \alpha - \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \beta \right\}$        |
| 10.) $r^T B_2^T \cdot D_s \cdot B_1 \cdot r$ | → | $\frac{1}{4} \cdot \frac{Eh}{1+\nu} \cdot \left\{ - \alpha \cdot \frac{\partial w}{\partial x} - \beta \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \right\}$        |

Bild 10. Energieanteile der Steifigkeitsmatrix

Das Bild 10 auf Seite 34 zeigt die Zuordnung der Energieanteile der Steifigkeitsmatrix zu den Verschiebungsgrößen in einer schematischen und formelmäßigen Darstellung. Im Regelfall werden die Schubenergieterme 6-10 alle gemeinsam integriert. Es gibt aber auch Vorschläge, die verschiedenen Anteile unterschiedlich zu integrieren /41/, um die im folgenden behandelten "Locking" Phänomene zu vermeiden. Diese Vorgehensweise wird als selektive Integration ("selective reduced integration") bezeichnet. Der Rechenaufwand steigt mit zunehmender Zerlegung an, da mehr einzelne Matrix-Multiplikationen erforderlich sind

## 2.6 Elementverhalten - degenerierte Elemente

Das bereits erwähnte Problem des "Locking" bei den degenerierten Elementen wird in den beiden folgenden Kapiteln genauer untersucht. Sowohl "Shear Locking" als auch "Membrane Locking" sind abhängig vom Elementtyp und damit von der verwendeten Interpolationsordnung. Bei hochwertigen Elementtypen, z.B. dem kubischen S16-Element tritt im praktisch interessanten Bereich kein "Shear Locking" auf und das "Membrane Locking" nur in abgeschwächter Form. Bei den niedrig interpolierten Elementen - S4, S8, S9 - sind beide "Locking" Phänomene kombiniert vorhanden. Die intensive Forschung auf diesem Gebiet hat sowohl Ursachen untersucht, als auch Methoden zur Überwindung der Probleme aufgezeigt. Einzelne Ergebnisse werden im folgenden dargestellt. Ausführliche Untersuchungen zum Elementverhalten sind in /42/, /43/, /44/ enthalten.

### 2.6.1 "Shear Locking"

Bei dünnen Tragwerken ist die Annahme unabhängiger Ansätze für die Querverschiebungen und Rotationen nicht mehr gerechtfertigt. Bei geringer Elementdicke tritt eine Kopplung zwischen beiden Variablen auf, die der zweiten Bernoulli-Hypothese - Normale bleibt während der Verformung normal - entspricht. Dies wird im folgenden auch als Kirchhoff-Bedingung bezeichnet. Das Elementverhalten, aufgetragen über den Parameter  $a/h$ , zeigt im nächsten Bild den Effekt des "Shear Locking" für die Elemente S4, S8 und S12. Es handelt sich dabei um eine Platte mit der Seitenlänge  $a$  und der Dicke  $h$  mit Navier-Randbedingungen unter Gleichlast.

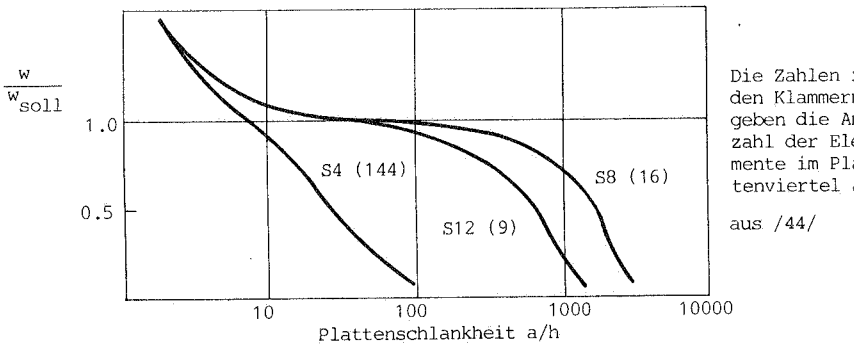


Bild 11. Elementverhalten - "Shear Locking"

Die Kirchhoff-Bedingung wird über die Schubsteifigkeit, die als Penalty-Faktor betrachtet werden kann, in die Steifigkeitsmatrix eingebracht. Bei der beschränkten Genauigkeit der Zahlendarstellung in einem Rechner, ergibt das Produkt aus großer Schubsteifigkeit und verschwindender Schubverformung nicht Null. Die eigentlich lastabtragenden Biegeenergieanteile

verschwinden aus den Steifigkeitstermen und es bleibt nur die sehr kleine Schubverformung übrig.

Die Abhängigkeit des "Shear Locking" von der Ordnung der Ansatzfunktionen ist aus dieser Erklärung aber nicht zu ersehen. Hier bietet sich eine in /41/ entwickelte Darstellung an, mit der gezeigt wird, daß lineare Elemente bei vollständiger Integration die Kirchhoffbedingungen im Elementmittelpunkt erfüllen. Neben diesen erwünschten und notwendigen Kirchhoffbedingungen im Mittelpunkt existieren noch unerwünschte Bedingungen, die für das "Shear Locking" verantwortlich sind. Diese Darstellung aus /41/ wird im folgenden kurz wiedergegeben.

Formänderungsenergie Platte : (2.23)

$$U = h^3 \left\{ \frac{E}{24(1-\nu^2)} \iint_{A_e} (\text{Biegeenergie aus } \alpha \text{ und } \beta) \, dA \right. \\ \left. + k \frac{E}{4(1+\nu)} \frac{1}{h^2} \iint_{A_e} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta \right)^2 \right] \, dA \right\}$$

Hierin ist  $k$  der Schubkorrekturfaktor,  $h$  die Plattendicke und  $A$  die Fläche des Elements. Der Vorfaktor des zweiten Ausdrucks (Schubenergie) wird für kleine Plattendicken  $h$  immer grösser, der Gesamtausdruck des zweiten Integrals geht aber auf Grund der verschwindenden Schubverformung gegen Null. Dies stellt die Kirchhoffbedingung im Sinne der Penalty-Methode dar.

Zwangsbedingungen bei  $h \rightarrow 0$  : (2.24)

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right) = 0 \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \beta \right) = 0$$

Die Verzerrungsenergie wird jetzt unter Verwendung eines Elements mit linearen Ansätzen für die Verdrehung  $\alpha$  und die Querverschiebung  $w$  ausgedrückt.

<p>Lineare Ansätze für <math>w</math> und <math>\alpha</math> : <span style="float: right;">(25)</span></p> $\alpha = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x y$ $w = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 x y \quad \frac{\partial w}{\partial x} = b_1 + b_3 y$ $\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha = (b_1 - a_0) + (b_3 - a_2) y + a_1 x + a_3 x y$
---

Zur Vereinfachung wird nur noch die x-Richtung betrachtet. Der entsprechende Schubanteil aus Gleichung 2.23 wird mit 2\*2 Gausspunkten über die Elementfläche integriert. Die Koeffizienten  $a_0$ - $a_3$  und  $b_0$ - $b_3$  können zusammengefaßt werden und ergeben aus dem Vergleich mit den Gleichungen 25 Bedingungen für den Elementmittelpunkt ( $x=y=0$ ).

<p>Integration Schubenergie x-Richtung <span style="float: right;">(2.26)</span></p> $\iint_{A_e} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right)^2 dA = 4 a b \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right)_0^2 + \frac{a^2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha \right)_0^2 \right.$ $\left. + \frac{b^3}{3} \left( \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_0^2 + \frac{a^2 b^2}{9} \left( \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} \right)_0^2 \right\}$ <p><math>a, b \dots</math> Elementabmessung <math>(\dots)_0 =</math> Wert in Elementmitte</p>
--

Die unterstrichenen Terme sind überzählige Bedingungen und führen zu einem Blockieren des Elements. Gelingt es nun durch eine andere Wahl der Integrationspunkte, die überzähligen Bedingungen zu eliminieren, erhält man ein Element, das kein "Shear Locking" und auch keine "Zero-Energy-Modes" enthält. Dies ist im Kapitel "Spezielle selektive Integrationsverfahren" auf Seite 50 gezeigt.

## 2.6.2 "Membrane Locking"

Das bei gekrümmten Schalenelementen auftretenden "Membrane Locking" äußert sich in einem sehr schlechten Konvergenzverhalten der Elemente. Das Bild 12 auf Seite 39 zeigt das Elementverhalten von verschiedenen Elementtypen bei der Berechnung einer Kreiszyinderschale unter zwei Einzellasten. Aus dem Diagramm ist zu ersehen, daß auch das kubische S16-Element nicht frei von "Membrane Locking" ist. Das Element liefert allerdings noch relativ gute Ergebnisse. Bei reduzierter Integration des Membranenergieanteils wird die Konvergenz bei allen Elementen deutlich verbessert.

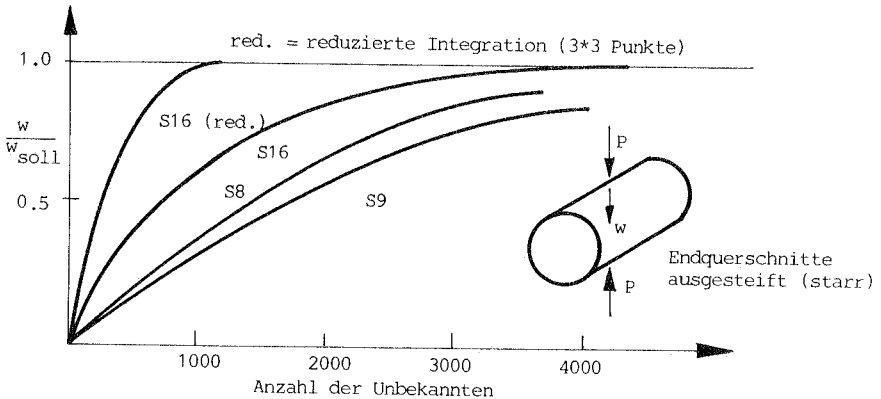
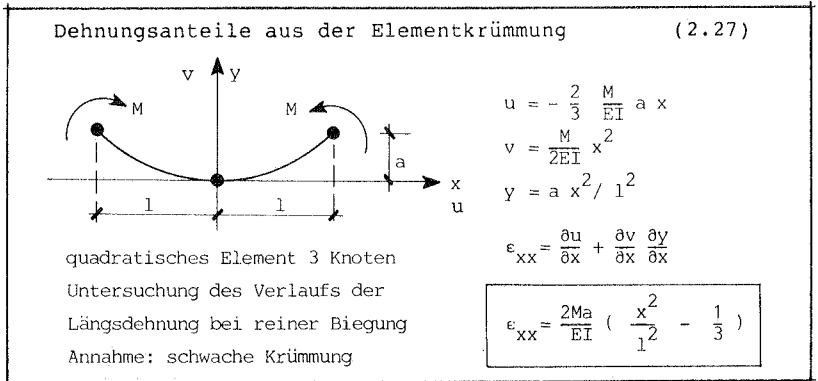


Bild 12. Elementverhalten - "Membrane Locking"

Die Ursache des "Membrane Locking" liegt im Auftreten von dehnungslosen Verformungen die von den Ansatzfunktionen bei gekrümmter Elementgeometrie nicht richtig abgebildet werden. Dies trifft vor allem auf die quadratischen Elemente (S8, S9) zu, wo dieser Effekt am deutlichsten zum Ausdruck kommt. Eine ausführliche Untersuchung über die Eigenschaften der Ansatz-

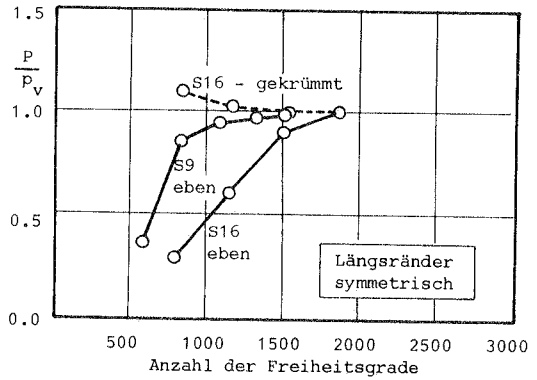
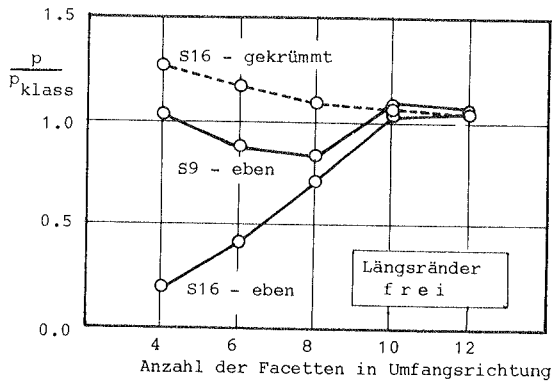
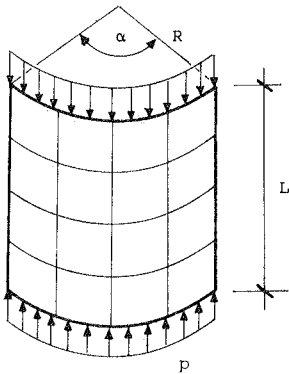
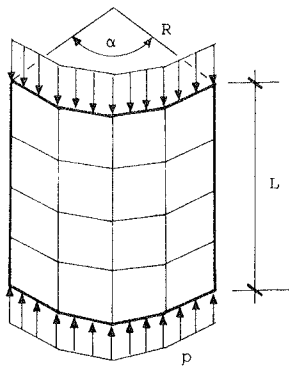
funktionen ist in /45/ am Beispiel eines gekrümmten Balkenelements enthalten. Hier soll nur eine einfache Betrachtung eines schwach gekrümmten Elements die prinzipielle Problematik darstellen.



Aus den Formeln 2.27 ist zu ersehen, daß bei einer 2-Punkt Gaussintegration die unerwünschten Dehnungen der Mittelfläche bei reiner Biegung verschwinden, da die Gausspunkte bei  $x = \pm 1/\sqrt{3}$  liegen. Das Element ist mit dieser Integrationsordnung wieder brauchbar, enthält aber jetzt "Zero-Energy-Modes", so daß andere Probleme auftreten können, die in einem späteren Kapitel beschrieben sind.

Eine zweite Möglichkeit der Überwindung des Problems "Membrane Locking" bietet die Facettierung, d.h. die Elemente werden ohne Krümmung verwendet. Dies ist allerdings nur bei abwickelbaren Flächen möglich und widerspricht eigentlich der Verwendung von isoparametrischen Elementen, die ja gerade zur Abbildung gekrümmter Geometrien mit diesem Ansatz verwendet werden. Daß bei der Facettierung Vorsicht geboten ist, zeigen zwei Beispiele aus /46/, in denen bei geringer Anzahl von Elementen





Abmessungen :

R = 457 mm  
 L = 686 mm  
 h = 1.6 mm  
 $\alpha = 82^\circ$

Werkstoff :

Aluminium  
 $E = 7.04 \text{ N/mm}^2$   
 $\nu = 0.33$

Randbedingungen :

Längsränder frei/symmetr.  
 Querränder - gelenkig  
 und längsverschieblich

$p_{\text{klass}}$  ist die Beullast  
 des geschlossenen  
 Zylinders

$p_v$  ist die konvergierte  
 Lösung des S16-Elements

Bild 13. Gekrümmte Elemente - Facettierung

eine deutliche Abweichung von der exakten Lösung zu sehen ist. Das Konvergenzverhalten des S9-Elements ist besonders zu beachten, da mit 4 Elementen bereits eine gute Lösung erscheint, was sich aber bei einer Elementverdichtung in der Facette als nicht richtig herausstellt.

## 2.7 Integrationsverfahren - Allgemeines

Das unbefriedigende Verhalten der niedrig interpolierten Elemente hat schon sehr früh zur Anwendung der reduzierten Integration geführt /35/,/37/. Die anfänglich sehr suspekt erscheinende Methode, ist inzwischen durch weitere Forschung in ihrer Wirkung genau untersucht worden. Verschiedene Verfahren stehen zur Verfügung, die alle das Ziel haben, möglichst einfache Elemente, z.B lineare 4-Knoten Elemente, allgemein anwendbar zu machen. Das größte Problem ist dabei die Zuverlässigkeit, da die bisher vorgestellten Verfahren nicht bei allen Anwendungen gleich gut arbeiten. So bleibt beim Einsatz dieser Elemente für ein System mit unbekanntem nichtlinearen Verhalten immer eine gewisse Unsicherheit, ob nicht das Element für eventuell auftretende Konvergenzprobleme verantwortlich ist. Notwendig sind dann Kontrollrechnungen mit höherwertigen, zuverlässigen Elementen (z.B. S16), die eine entsprechend höhere Rechenzeit haben. In den folgenden Kapiteln werden die unterschiedlichen Verfahren im Hinblick auf die jeweiligen Vor- und Nachteile untersucht.

### 2.7.1 "Zero-Energy-Modes"

Ein wesentlicher Aspekt bei reduzierter Integration sind die "Zero-Energy-Modes", so daß dieses Phänomen im folgenden genauer beschrieben wird. Eine Eigenwertanalyse einer Element- oder Systemsteifigkeitsmatrix ohne Lagerungen ergibt Null-Eigenwerte, deren Eigenformen die Starrkörperverschiebungen darstellen. Wird das Element oder System statisch bestimmt gelagert, müssen diese Nulleigenwerte verschwinden. Bei den reduzierten Integrationsverfahren der degenerierten Elemente zeigt sich nun, daß trotz statisch bestimmter Lagerung noch zusätzliche Null-Eigenwerte auftreten, deren Ursache eine innere Kinematik der Elemente ist. Im englischen Schrifttum hat sich dafür die Bezeichnung "Zero-Energy-Modes" eingeprägt und wird im weiteren mit ZEM abgekürzt.

Elementtyp	vollst.red. Integration	Anzahl der ZEM im	
		Element	System
S4	1*1	6	6
S8	2*2	2	0
S9	2*2	7	7
S16	3*3	6	6

Tabelle 1 : Eigenwertanalysen am Element und System

Tabelle 1 zeigt das Ergebnis von Eigenwertanalysen am Element und am System. Das Element ist statisch bestimmt gelagert, beim System, ein Ausschnitt einer Kreiszyinderschale mit 7\*7 Knoten, sind die Verschiebungen an allen 4 Eckpunkten unterdrückt. Diese Lagerung ist bereits statisch unbestimmt, verhindert deshalb aber keine zusätzlichen ZEM. Dies wurde durch Vergleiche mit statisch bestimmter Lagerung festge-

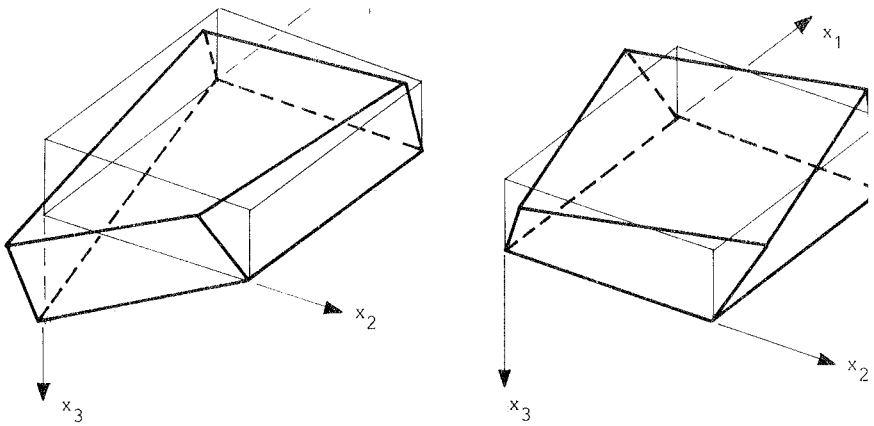


Bild 14. "Zero-Energy-Modes" Einzelemente

stellt. Einige ZEM der Elemente sind im Bild 14 auf Seite 44 für verschiedene Elemente dargestellt.

Der Einfluß der Randbedingungen auf die ZEM wird am Beispiel einer Platte gezeigt. Die quadratische Platte ist mit  $4 \times 4$  S4-Elementen idealisiert und wird für eine Eigenwertanalyse der Systemmatrix verwendet. Dabei werden alle Freiheitsgrade in der Ebene (Scheibenanteil) unterdrückt, womit je Knoten nur noch 3 Freiheitsgrade vorhanden sind. Es treten im Vergleich zur oben untersuchten Kreiszyinderschale, hier sind je Knoten 5 Freiheitsgrade vorhanden, keine ZEM des Scheibenanteils auf. Das S4-Element enthält 2, das S9-Element 3 ZEM aus dem Scheibenanteil. Das Bild 15 auf Seite 45 zeigt die Veränderung der Anzahl der ZEM mit den Randbedingungen. Entscheidend für das Elementverhalten sind die Festhalterungen der Querverschiebung ( $w$ ). Werden bei zwei nebeneinander liegenden Knoten die  $w$ -Verschiebungen unterdrückt, verschwindet dieser "hourglass-mode" und die Rechnung liefert brauchbare Ergebnisse, trotz

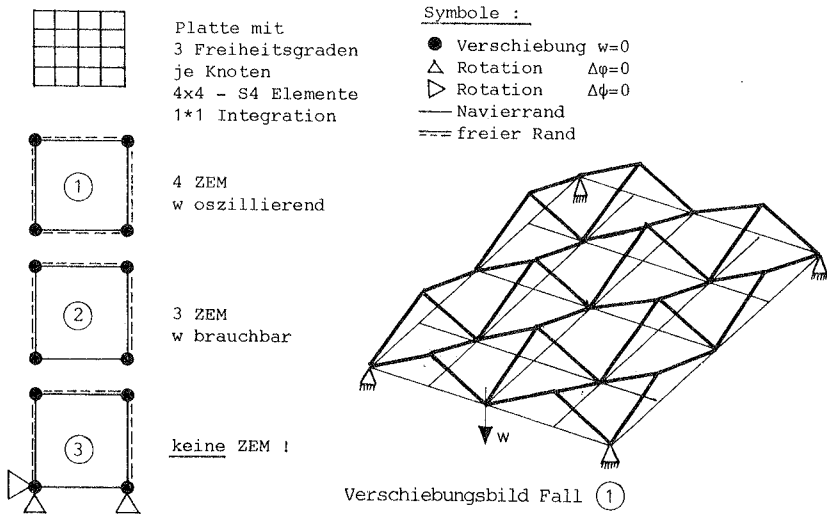


Bild 15. "Zero-Energy-Modes" und Randbedingungen

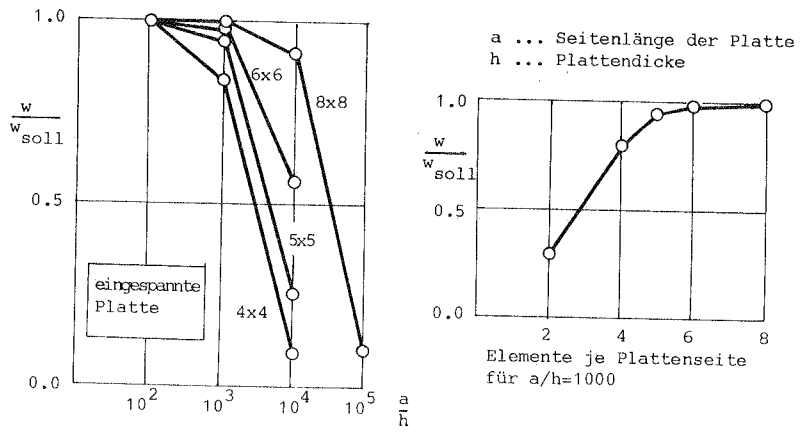


Bild 16. S8-Element mit reduzierter Integration

zusätzlicher ZEM in den Rotationen. Im Mittelpunkt des Elements - dies ist hier auch der Integrationspunkt - ergibt die Mittelbildung aus den 4 Knotenwerten der Rotationen den richtigen Wert, mit dem die Spannungen außerhalb der Mittelfläche berechnet werden können. Diese Tatsache spielt in einem späteren Kapitel bei der Kombination des S4-Elements mit höherwertigen Elementen eine Rolle.

Aus der Tabelle 1 ist zu sehen, daß beim S8-Element keine ZEM in der Systemmatrix enthalten sind. Damit bietet sich dieses Element für eine allgemeine Anwendung an, da es mit 2\*2 Gausspunkten sehr effektiv arbeitet. Es zeigt sich aber, daß das "Shear Locking" nicht vollständig beseitigt ist (Bild 16 auf Seite 45). Bei Systemen mit sehr vielen Halterungen (z.B. eingespannte Platten) tritt ein schwaches Blockieren des Elements auf. Dies kann aber durch eine mäßige Elementverdichtung beseitigt werden. Zur Überprüfung der Ergebnisse ist dann der Einsatz eines S9-Elements zu erwägen, da bei vielen Halterungen die ZEM ausgeschaltet sind. Der Übergang vom einen zum anderen Element ist durch Mitnahme des Mittelknotens bei der Idealisierung einfach möglich. Man muß nur bei den S8-Elementen die Freiheitsgrade der Mittelknoten vollständig unterdrücken. Stimmen beide Lösungen im wesentlichen überein, ist das S8-Element für die weitere nichtlineare Rechnung wirtschaftlicher.

Das in der Tabelle nicht enthaltene S12-Element hat bei 3\*3 Integration keine ZEM in der Elementmatrix. Die Systemmatrix ist also bei dieser Integrationsordnung niemals singulär. Das

Element ist trotzdem nicht brauchbar, da das "Shear Locking" nicht beseitigt wird. Aus diesem Grund wird dieser Elementtyp im weiteren nicht mehr untersucht und auch nicht verwendet.

### 2.7.2 Reduzierte Integration und "hourglass-control"

Die bei den Eigenwertuntersuchungen verwendete vollständig reduzierte Integration ist sehr effektiv und kann vor allem ohne Programmänderungen angewandt werden. Das Problem der ZEM schränkt allerdings die Brauchbarkeit dieses Verfahrens dann ein, wenn die Systemmatrix ZEM enthält. Das Versagen der Methode ist in den meisten Fällen so offensichtlich, daß keine Probleme mit der Interpretation der Ergebnisse entstehen. Bei nichtlinearen Anwendungen ist eine sofortige Divergenz die Folge. Fehler dieser Art sind also im Regelfall deutlich sichtbar.

In /33/ ist ein Verfahren zur Kontrolle der ZEM angegeben, was in Anlehnung an die Form der ZEM als "hourglass-control" bezeichnet wird. Bei dieser Methode werden verallgemeinerte Dehnungen definiert, die von den ZEM aktiviert werden, bei Starrkörperverschiebungen aber verschwinden. Mit diesen Dehnungen und zugehörigen verallgemeinerten Spannungen wird eine sogenannte Stabilisierungsmatrix aufgestellt und zur normalen Steifigkeitsmatrix addiert. Der Vorteil des Verfahrens ist die Beibehaltung der 1-Punkt-Integration und damit die Effektivität der S4-Elemente. Der Nachteil liegt in der Wahl eines Skalierungsparameters für die Werte der Stabilisierungsmatrix, da bei zu großen Werten das bereits bekannte "Shear Locking", bei

zu kleinen Werten wieder die Kinematik der ZEM auftritt. Diese Tatsache schafft Probleme bei der Beurteilung einer Rechnung, da durch "hourglass-control" die Fehler verkleinert werden und nicht unbedingt sofort ersichtlich sind. Bei Anwendung dieser Methode müssen daher mehrere Skalierungswerte untersucht werden, um eine Absicherung der Ergebnisse zu haben. Für Parameterstudien mit einmal "geeichtem" Skalierungswert ist das Element effektiv einsetzbar.

### 2.7.3 Selektiv reduzierte Integration

Weitaus häufiger findet man in der Literatur die Anwendung der selektiven Integration für die Aufstellung der Elementmatrizen. Dabei wird die Tatsache berücksichtigt, daß die Querschub- und Membranenergieanteile die Ursache für das schlechte Elementverhalten der niedrig interpolierten Elemente sind. Nach der Aufspaltung der Energieanteile (siehe "Darstellung der Energieanteile" auf Seite 31) kann man jeden Anteil mit einer anderen Anzahl von Gausspunkten integrieren. Dieses Verfahren wurde erfolgreich bei Plattenelementen eingesetzt /47/, wobei zu bemerken ist, daß trotz der selektiven Integration noch 2 ZEM enthalten sind. Punktgestützte Systeme sind damit auch mit diesem Verfahren nicht zu rechnen, da einer der verbleibenden ZEM die  $w$ -Verschiebungen beeinflusst.

Bei Verwendung als Schalenelement ist normalerweise eine lokale Formulierung notwendig /25/, /34/, um die Aufspaltung der Energieanteile durchführen zu können. Lokal bedeutet hier, daß in jedem Integrationspunkt ein in der Schalenfläche liegendes



Koordinatensystem definiert wird, in dem die Operator- und Materialmatrizen aufgestellt werden. Anschließend muß dann durch eine Transformation der Steifigkeiten der Bezug zu den global definierten Knotenvariablen hergestellt werden. Obwohl die Transformation für jeden Steifigkeitsanteil an jedem Knoten ausgeführt werden muß, ist bei Vermeidung aller Nulloperationen bei der Multiplikation  $B^T D B$  die lokale Formulierung günstiger. Dies ist durch die schwach besetzte Matrix  $D$  bedingt.

Eine Trennung der Schubenergie ist auch bei globaler Formulierung möglich. Membran- und Schubanteil der Materialmatrix werden im lokalen Koordinatensystem aufgestellt und anschließend auf das globale System transformiert. Es entsteht im allgemeinen für beide Anteile eine voll besetzte Matrix  $C$ . Dieses Verfahren wurde in dieser Arbeit zur Untersuchung des Verhaltens der selektiven Integration eingesetzt, da eine Umstellung des bestehenden Programms NISA80 auf lokale Formulierung sehr aufwendig gewesen wäre.

Man unterscheidet bei der selektiven Integration noch zwischen zwei Möglichkeiten :

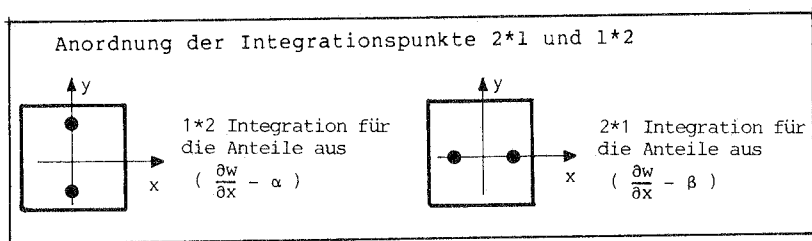
1. Reduktion nur für die Querschubenergieanteile
2. Reduktion für die Querschub- und Membranenergieanteile

Je nach Elementtyp kann 1 oder 2 notwendig werden, da es davon abhängt, ob "Membrane Locking" in merkbarer Form auftritt. Die Biegeenergie wird immer mit voller Integration berücksichtigt.

Die Effizienz der Elemente wird dadurch verschlechtert, da der Aufwand der Integration - z.B. 4 Punkte statt 1 Punkt - deutlich zunimmt.

### 2.7.4 Spezielle selektive Integrationsverfahren

Die im Kapitel 2.6.1 gezeigte Darstellung des "Shear Locking" ergab für ein lineares Element neben den Kirchhoffbedingungen noch zusätzliche Terme, die nicht erwünscht sind. Vollständig reduzierte und selektiv reduzierte Integration eliminieren diese Zusatzterme, und zusätzlich noch eine der beiden Kirchhoffbedingungen. Dies kann durch eine weitere Modifikation der selektiven Integration vermieden werden, indem für die Schubenergieanteile der x- und y-Richtung verschiedene Anordnungen von Integrationspunkte gewählt werden. Dieses Vorgehen ist in /41/ für das lineare 4-Knotenelement beschrieben. Die gleiche Anordnung der Integrationspunkte, wenn auch mit einer anderen Herleitung wird bereits in /30/ verwendet. Beide Elemente enthalten keine ZEM und sind sowohl als dickes wie auch als dünnes Platten/Schalenelement einsetzbar.



Aus der Übersicht über die Energieanteile in Bild 10 auf Seite 34 ist zu ersehen, daß für eine derartige Trennung die vorliegende Aufspaltung nicht ausreicht. Es müssen in den Matrizen

noch weitere Unterteilungen vorgenommen werden, um die x- und y-Richtung zu trennen, was zusätzlichen Aufwand bedeutet.

Der große Nachteil dieser speziellen selektiven Integration ist die Abhängigkeit der Steifigkeitsmatrizen von der Elementorientierung, da für den Zusammenbau mit den global definierten Knotenvariablen gearbeitet werden muß. Dies erfordert, daß die lokalen Elementkoordinaten möglichst wenig von den globalen Koordinatenrichtungen abweichen. Dreht man die Elemente beispielsweise um 90 Grad, so verhalten sie sich wie normal integrierte S4-Elemente und zeigen ein extremes "Shear Locking". Der allgemeine Einsatz als Schalenelement ist damit nicht möglich. Auch ist Vorsicht geboten bei nicht rechtwinkligen Plattensystemen.

## 2.8 Modifikation der Ansatzfunktionen

Eine andere Methode versucht die Probleme der Schubenergie bei dünnen Elementen mit einer Modifikation der Ansatzfunktionen zu überwinden. Der erste Vorschlag in diese Richtung wurde für Plattenelemente in /48/ mit dem Heterosis-Element vorgestellt. Dabei werden unterschiedliche Ansatzfunktionen für die Verdrehungen (S8) und die Verschiebungen (S9) in Kombination mit selektiver Integration verwendet. Das Element enthält keine ZEM und zeigt kein "Shear Locking". Die Programmierung ist allerdings relativ aufwendig und das Element durch Verwendung von 3\*3 Integrationen auch nicht besonders effektiv.

Neuere Entwicklungen interpolieren unabhängig die Schubverzerrungen mit den diskreten Werten der Elementseitenmitte als neue Knotenparameter und modifizieren damit die Schubenergieanteile der Elementmatrix. Die Stützwerte in den Elementmitten sind aus dem Verschiebungsfeld errechnet. In /31/ ist diese Methode aus der Kombination einer S9-Interpolation für die Verschiebungen und einer S4-Interpolation für die Verdrehungen abgeleitet. Ein ähnliches Element ist in /32/ als Schalenelement hergeleitet und in /50/ die Anwendung dieser Methode auf S8 und S9 Elemente dargestellt. Alle diese Elemente enthalten keine ZEM und sind sowohl im dicken als auch im dünnen Bereich einsetzbar. Es tritt kein "Shear Locking" auf. Mit Verwendung der vollen Integration verliert das S4- und auch das S8/S9- Element viel von seiner Effizienz. Dieser Nachteil muß gegenüber dem Gewinn an Zuverlässigkeit in Kauf genommen werden.

## 2.9 Kombination von S4 und S16 Elementen

Die Genauigkeit einer nichtlinearen Rechnung wird von der Berechnung der inneren Kräfte, also der rechten Seite der Gleichung 2.3 bestimmt. Hierzu wurde die Methode entwickelt, die Steifigkeitsmatrix mit einfachen 4-Knotenelementen aufzustellen, die rechte Seite hingegen mit dem zuverlässigen S16-Element zu berechnen. Beide Elemente verwenden dieselbe Knotentopologie (9 Elemente S4 = 1 Element S16).

Eigene Rechnungen mit dieser Methode führten wegen zu großer Unverträglichkeiten nicht zum Erfolg. Das Problem lag in den

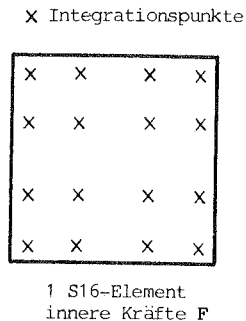
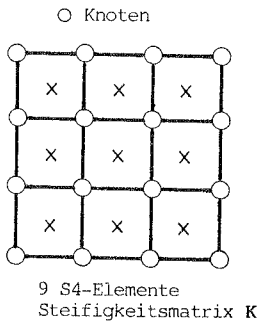


Bild 17. Kombination S16 - S4-Elemente

Rotationen, die bei den 4-Knotenelementen mit 1-Punktintegration fast immer Anteile von "Zero-Energy-Modes" enthalten. Nur im Integrationspunkt des S4-Elements ergeben sich die richtigen Rotationen. Das S16-Element verwendet aber andere Integrationspunkte und erzeugt somit sehr große Ungleichgewichtskräfte. Das Verschiebungsfeld konnte allerdings "konvertiert" werden, wenn gleichzeitig eine Systemmatrix mit S16-Elementen erzeugt wird. Mit dieser Matrix können mit einer Iteration neue, S16-kompatible Verschiebungen erzeugt werden. Ein weiteres Problem ist bei plastischen Berechnungen die unterschiedliche Lage der Integrationspunkte, da die Spannungen im Integrationspunkt benötigt werden. Aus diesem Grund wurde die Methode nicht weiter verfolgt.

### 2.10 Vergleich und Beurteilung degenerierte Elemente

Betrachtet man die isoparametrische Elementfamilie der degenerierten Elemente, so ist bei der Vielzahl der Interpolationsmöglichkeiten und Integrationsverfahren eine Auswahl für eine

bestimmte Anwendung erforderlich. Die Frage nach dem optimalen Element kann nicht allgemein beantwortet werden. Einige Vor- und Nachteile der beschriebenen Elemente lassen sich aber für eine Klassifizierung heranziehen.

- S16** : Dieser hochwertige Elementtyp ist immer dann angebracht, wenn ein noch unbekanntes Systemverhalten vorliegt. Für Kontrollrechnungen gegenüber den niedrig interpolierten Elementen ist dieses Element in einem Programmsystem von großem Nutzen.
- S9** : Dieses Element erfordert reduzierte Integration und enthält "Zero-Energy-Modes". Selektive Integration beseitigt nicht die Probleme der ZEM, da bei gekrümmten Elementen auch die Membranenergieanteile reduziert integriert werden müssen.
- S8** : Dieses Element erfordert reduzierte Integration, enthält aber keine ZEM bei Systemen aus 2 oder mehr Elementen. Das schwache "Shear Locking" bei eingespannten Platten verschwindet bei mäßiger Elementverdichtung. Beim Einsatz als Schalenelement bei den in dieser Arbeit gerechneten Beispielen zeigte sich ein sehr gutes Elementverhalten.
- S4** : Dieses Element erfordert reduzierte Integration und enthält ZEM. Alle selektiven Integrationsverfahren sind gegenüber dem S8-Element mit vollständig reduzierter Integration unwirtschaftlicher. Das Element ist mit einer 1-Punkt Integration und "hourglass-control" mit bekannten Skalierungsparametern (systemabhängig) für Parameterstudien effektiv einsetzbar und bietet

sich mit dieser Methode vor allem für dynamische Anwendungen an.

### 2.10.1 Rechenzeiten

Angaben zur Effizienz von Elementen basieren meist auf Rechenzeitvergleichen für die Steifigkeitsmatrizen. Dieses Maß ist allerdings nicht besonders objektiv, da je nach Rechnerotyp die Verhältnisse unterschiedlich ausfallen können. Die Rechenzeit einer Elementmatrix beinhaltet auch keine Aussage über das Elementverhalten und ist zudem bei einer nichtlinearen Analyse nicht immer der wesentliche Anteil der Gesamtkosten.

Die Übersicht in Tabelle 2 zeigt die Rechenzeiten für die Aufstellung der Elementmatrizen einschließlich dem Zusammenbau zur Systemmatrix. Als System wurde der Ausschnitt einer Kreiszyinderschale mit 49 Knoten gewählt. Die Idealisierung erfolgte mit 2\*2-S16, 3\*3-S8 und mit 6\*6-S4 Elementen, denen immer das gleiche Knotenraster zugrunde lag. Gerechnet wurde auf einer VAX 11/780 und auf einer IBM 3083. Bei der VAX wird die CPU-Zeit von der Rechnerauslastung beeinflusst, bei der IBM dagegen nicht. Alle Werte sind auf das S4-Element mit 1\*1-Integration bezogen.

Element	Integration	VAX 11/780	IBM 3083
S4	1*1	1.00	1.00
S4	2*2	3.56	2.76
S8	2*2	2.34	3.01
S8	3*3	5.35	5.04
S9	2*2	2.82	3.65
S9	3*3	6.35	6.85
S16	3*3	6.95	6.31
S16	4*4	12.84	11.60

Tabelle 2 : Rechenzeiten Systemmatrix

Die Zahlen der Tabelle 2 zeigen deutlich, daß das 4-Knotenelement nur mit vollständig reduzierter Integration effektiv ist. Selektive Integration ohne lokale Formulierung läßt die Vergleiche gegenüber den anderen Elementen noch schlechter ausfallen.

In der nächsten Tabelle ist die Gesamtrechenzeit für ein geometrisch nichtlineares Problem dargestellt. Dabei gehen alle Komponenten eines Programms in die Berechnung ein und über die Iterationszahl auch das Elementverhalten.

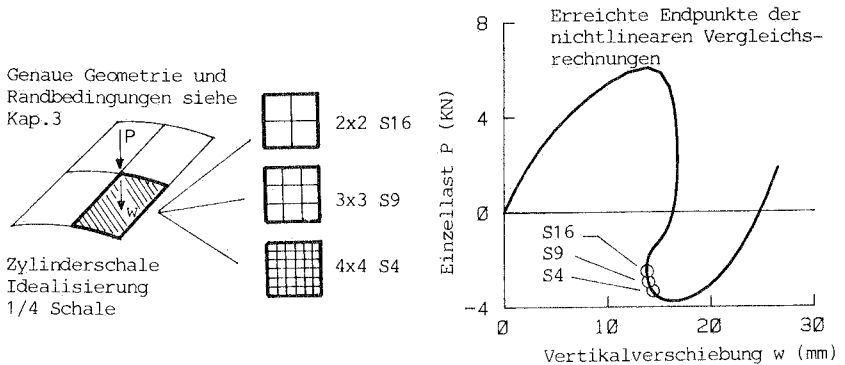


Bild 18. Beispiel Kreiszylinderschale - Rechenzeiten



Die Iterationsmethode der konstanten Bogenlänge /56/ bietet sich für dieses Beispiel an, da es sich um ein "Durchschlagproblem" handelt. Für alle Elemente wurden 20 Schritte bei gleicher Anfangsbogenlänge gerechnet. Während der Rechnung findet eine automatische Anpassung der Bogenlänge statt, die mit der Anzahl der Iterationen gesteuert ist. Als optimale Iterationszahl wurde hier 5 verwendet. Alle Elemente erreichen mit 20 Schritten etwa den gleichen Last- und Verschiebungszustand (siehe LV-Diagramm). Es ergeben sich folgende Rechenzeiten (CPU-Sekunden auf der CRAY 1):

Element	S16	S9	S4	S4
Integration	4*4	2*2	1*1	1*1 + 2*2
CPU-Zeit	37.33	14.70	9.05	26.41

Tabelle 3 : Rechenzeiten - 20 Schritte nichtlinear

Das schlechte Abschneiden der selektiv reduzierten Integration (nur Schubenergie reduziert) ist zum Teil auf die globale Formulierung zurückzuführen. Bei Programmen die mit selektiver Integration arbeiten, ist also auf die Art der Formulierung zu achten. Allerdings wird auch mit lokaler Formulierung die geringe Rechenzeit der S9-Elemente nicht erreicht. Hier geht auch das Elementverhalten mit ein, das beim S9-Element zu einer geringeren Iterationszahl führt und damit die Gesamtzeit vermindert.

In Bild 19 auf Seite 58 ist ein Diagramm mit der Verteilung der Rechenzeiten bei einer rein materiell nichtlinearen Rechnung gezeigt. Für ein Plattenviertel, idealisiert mit 2\*2-S16

Elementen und  $4 \times 4$  Integration in der Ebene, sowie 7 Punkten in Dickenrichtung ist die Verteilung des Rechenaufwands in Abhängigkeit der Zahl der Inkremente aufgetragen. Dargestellt sind immer die bis zum aktuellen Schritt aufsummierten Rechenzeiten. Der Anteil der Steifigkeitsmatrix umfaßt nur die Aufstellung der Elementmatrizen, nicht die Addition zur Systemmatrix. Der Anteil Dickenintegration beinhaltet die Ausführung der numerischen Integration der Materialmatrix und die Integration der Spannungen zu den Schnittgrößen. Dies sind die Integrale der Gleichungen 2.11 und 2.14. Der restliche Anteil enthält Gleichungsauflösung, Normenberechnung, I/O-Operationen, Zusammenbau der Systemmatrix.

Mit zunehmender Plastizierung tritt der Anteil der Dickenintegration und Steifigkeitsmatrix immer mehr in den Hintergrund, während die plastische Spannungsberechnung bereits nach 4 Schritten etwa 40% der Gesamtrechenzeit ausmacht und das Verhältnis bei weiteren Schritten noch weiter zur Spannungsrechnung verschoben wird.

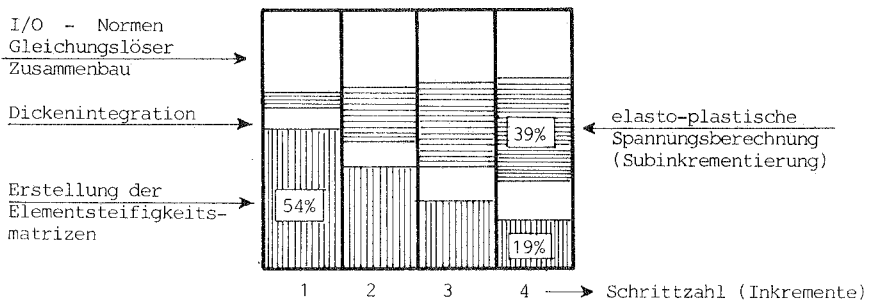


Bild 19. Rechenzeitverteilung - Traglast einer Platte

Die plastische Spannungsberechnung erfolgt im Programm NISA80 mit einer Subinkrementierung zur Integration des differentiellen Stoffgesetzes (Prandtl-Reuss). Die maximale Anzahl der Subinkremente ist auf 20 beschränkt. In jedem Subinkrement wird eine Korrektur der Spannungen ausgeführt, um die Fließbedingung (v.Mises) einzuhalten. Dieser Algorithmus sollte durch neuere, einfachere Verfahren ersetzt werden, was bei den gezeigten Verteilungen große Verbesserungen bringen wird.

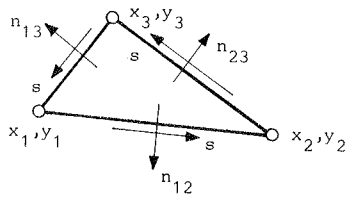
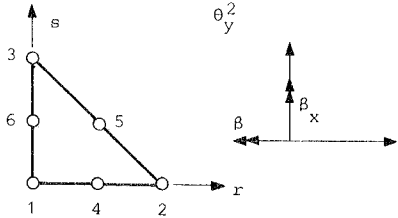
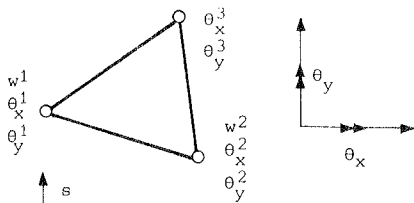
Die verschiedenen Vergleiche sollen darauf hinweisen, daß die Beurteilung der Effizienz von Elementen ein sehr vielschichtiges Problem ist. Ein wesentlicher Faktor ist auch die Art der Programmierung. Der unterschiedliche Programmierstil verschiedener Gruppen kann die Ausführungszeiten ohne weiteres in einer Größenordnung von 30-50% beeinflussen.

### 3.0 Das DKT-Schalenelement

Zu Vergleichszwecken wird das DKT-Schalenelement verwendet, da es als sehr einfach und effektiv beschrieben wird. Dieses Element gehört in die Klasse der Faltwerkselemente und bildet die Schalengeometrie abschnittsweise eben ab. Das Element entsteht aus der Überlagerung eines Plattenelements mit diskreten Kirchhoffbedingungen (DKT = Discrete Kirchhoff Theory) und einem linearen Scheibenelement (CST = Constant Strain Triangle). Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist die Idee der diskreten Kirchhoffbedingungen bereits in /15/ und /16/ beschrieben. In /19/ ist eine genaue Darstellung für das Plattenelement enthalten und in /20/ die Erweiterung auf das nichtlineare Schalenelement. Das Biegeverhalten des Elements ist durch den quadratischen Ansatz für die Rotationen ausgezeichnet, während das Membranverhalten ausgesprochen schlecht ist. Dies ist keine Überraschung, da das CST-Element bei Scheibenproblemen sehr langsam konvergiert. Bei nichtlinearen Anwendungen kann diese Diskrepanz zu folgenschweren Fehlern führen, wie in einem Beispiel am Ende des Kapitels gezeigt ist. Die grundlegenden Gleichungen und Matrizen werden kurz dargestellt und eine Beurteilung des Elements gegeben.

#### 3.1 Ausgangsgleichungen und Ansatzfunktionen

Aus der Verzerrungsenergie des Plattenelements werden die Schubanteile gestrichen, da bei dünnen Tragwerken der Biegeanteil überwiegt. Damit verbleiben im Energieausdruck zur Herleitung einer Steifigkeitsmatrix nur noch die Verdrehungen  $\beta$ .



$$u = [w^1, \theta_x^1, \theta_y^1, w^2, \theta_x^2, \theta_y^2, w^3, \theta_x^3, \theta_y^3]$$

$$\kappa = B u$$

$$\beta_x = \sum_{i=1}^6 \Phi^i \beta_x^i$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^6 \Phi^i \beta_y^i$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{bmatrix}$$

Gesucht:

$$\beta_x = \beta_x (w^i, \theta_x^i, \theta_y^i)$$

$$\beta_y = \beta_y (w^i, \theta_x^i, \theta_y^i)$$

$$x_{ij} = x_i - x_j$$

$$y_{ij} = y_i - y_j$$

i, j Knotennummern

Bild 20. Definitionen DKT-Element

Diese Verdrehungen werden mit einem quadratischen Ansatz interpoliert, der in Bild 20 auf Seite 61 angegeben ist. Die Zuordnung zu den Knotenvariablen, die aus den Verdrehungen und der Querverschiebung w bestehen, benötigt die diskreten Kirchhoffbedingungen, mit denen Rotation und Querverschiebung an bestimmten Stellen im Element verknüpft werden. Es wird kein Ansatz für die Querverschiebung w im Element aufgestellt. Eine zusätzliche Bedingung über den Verlauf der Rotation  $\beta_n$  längs des Elementrandes vervollständigt die Gleichungen zur Reduktion der 12 Ansatzparameter auf die 9 Knotenvariablen.

Diskrete Zwangsbedingungen DKT-Plattenelement (3.1)

$$\begin{aligned} \beta_x + w_{,x} &= 0 && \text{an den Eckknoten } 1, 2, 3 \\ \beta_y + w_{,y} &= 0 && \\ \beta_s + w_{,s} &= 0 && \text{an den Mittelknoten } 4, 5, 6 \\ \beta_n^k &= \frac{1}{2} (\beta_n^i + \beta_n^j) && i, j = 1, 2, 3 \quad k = 4, 5, 6 \end{aligned}$$

Die neuen Formfunktionen  $H_x$  und  $H_y$  sind abhängig von den Ansatzfunktionen  $\phi$  und den Koordinaten der Elementeckpunkte. Die genaue Herleitung ist in /19/ dargestellt.

Interpolation der Rotationen (3.2)

$$\begin{aligned} \beta_x &= H_x u \\ \beta_y &= H_y u \end{aligned}$$

Steifigkeitsmatrix DKT-Element (3.3)

$$B = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} Y_{31} & H_{x,r} + Y_{12} & H_{x,s} \\ -x_{31} & H_{y,r} - x_{12} & H_{y,s} \\ -x_{31} & H_{x,r} - x_{12} & H_{x,s} + Y_{31} & H_{y,r} + Y_{21} & H_{y,s} \end{bmatrix}$$

$$K = \iint_A B^T D B \, dA \quad D = D \text{ (Biegung)}$$

### 3.2 Nichtlineare Erweiterungen

Im nichtlinearen Bereich kann bei Verwendung von mitgehenden Elementkoordinaten die gleiche Vorgehensweise angewandt werden. Ergänzungen sind für die geometrische Matrix notwendig. Ausgehend vom zweiten Anteil der Gleichung 2.1 wird die geometrische Matrix unter der Annahme einer linearen Verteilung der Verschiebung  $w$  über das Element aufgestellt. Krümmungsanteile

werden also in der Matrix  $K_G$  vernachlässigt. Die geometrische Matrix ist im Anhang Teil A ausführlich dargestellt.

Geometrische Matrix DKT-Element		(3.4)
$K_G = \int s_{ij} \delta n_{ij} dV$		nur Normalkräfte, keine Momente
$\delta n_{ij} = u_{k,j} \delta u_{k,i}$	$s_{ij} \rightarrow N$	(konstant im Element)
$u_{k,i} = \hat{B} u$	$K_G = \hat{B}^T N \hat{B} A$	
$u, v, w \rightarrow$ lineare Ansätze, damit $\hat{B}$ unabhängig von $r, s$	$A \dots$	Elementfläche

Weitere Betrachtungen sind zur Berechnung der Gesamtmomente erforderlich. Um das Problem der großen Rotationen zu umgehen, die bekannterweise keine Vektoreigenschaft besitzen und nicht transformiert werden können, wird eine inkrementelle Ermittlung verwendet. Für jedes Inkrement werden über lineare Krümmungs-Verschiebungsbeziehungen die Zuwächse der Momente errechnet und zu den bereits vorhandenen Momenten addiert. Die rechte Seite mit den inneren Kräften wird damit, im Gegensatz zu den im vorherigen Abschnitt gezeigten degenerierten Elementen, nicht mehr exakt berechnet, so daß die Lösung von der Wahl des Inkrements beeinflußt wird.

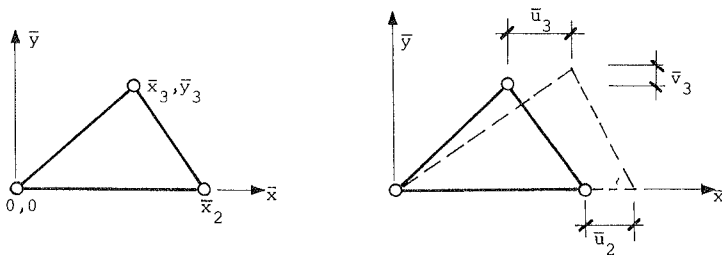
Für die Membrankräfte wird ein anderes Vorgehen gewählt. Hier können aus den Differenzverschiebungen der Ausgangslage und der Endlage (siehe Bild 21 auf Seite 65) die Verzerrungen ebenfalls mit linearen kinematischen Gleichungen errechnet werden, solange keine großen Dehnungen auftreten (Abspaltung der Starrkörperanteile).

Alle Steifigkeiten, Kräfte und Momente sind lokale Größen, so daß vor dem Zusammenbau der Anteile mehrerer Elemente eine Transformation lokal-global erforderlich ist.

### 3.3 Elementverhalten

Das Element wurde mit der dargestellten Formulierung in das Programm NISA80 eingebaut, um einen Vergleich mit den degenerierten Elementen zu erhalten. Die Programmierung ist durch die vielen Transformationen etwas aufwendig, wenn gleichzeitig auch noch auf Effektivität im Programmcode geachtet werden muß (z.B. Vermeidung von Nulloperationen). Es wurden mehrere Testbeispiele gerechnet, wobei sich bei Plattenanwendungen ein gutes Elementverhalten zeigte, bei Schalenanwendungen dagegen einige Probleme auftraten. Beim Beispiel der flachen Kreiszylinderschale unter einer Einzellast (Bild 22 auf Seite 65) ergaben sich besonders erwähnenswerte Ergebnisse. Dieses hochgradig nichtlineare System ist zum Test von nichtlinearen Elementen gut geeignet. Die ebenfalls in Bild 22 auf Seite 65 gezeigte Lastverschiebungskurve mit 5\*5 DKT-Elementen zeigt im Anfangsbereich für die Verschiebung  $w$  eine gute Lösung, die allerdings den Durchschlagpunkt, und damit die Traglast, zu früh erreicht. Der Grund liegt in den viel zu hohen Normalkräften, die aus einer nicht ausreichenden Idealisierung kommen und sich im Laufe der nichtlinearen Rechnung aufbauen. Vergleicht man nun zur Beurteilung des Netzes nur die Verschiebung am Anfang, so können gravierende Fehler auftreten. Die Kontrolle der Kräfte ist bei diesem Element unbedingt erforderlich.





1.) Transformation  $u_{\text{global}} \rightarrow \bar{u}_{\text{lokal}}$

2.) Differenzverschiebungen

$$\begin{aligned} \bar{u}_2 &= u_2 - u_1 \\ \bar{u}_3 &= u_3 - u_1 \\ \bar{v}_3 &= v_3 - v_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{2A} \bar{x}_2 \bar{u}_2 \\ \epsilon_y &= \frac{1}{2A} \bar{y}_3 \bar{v}_3 \\ \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2A} (\bar{x}_3 \bar{u}_2 + \bar{x}_2 \bar{u}_3) \end{aligned}$$

Bild 21. Membrananteile bei großen Verschiebungen

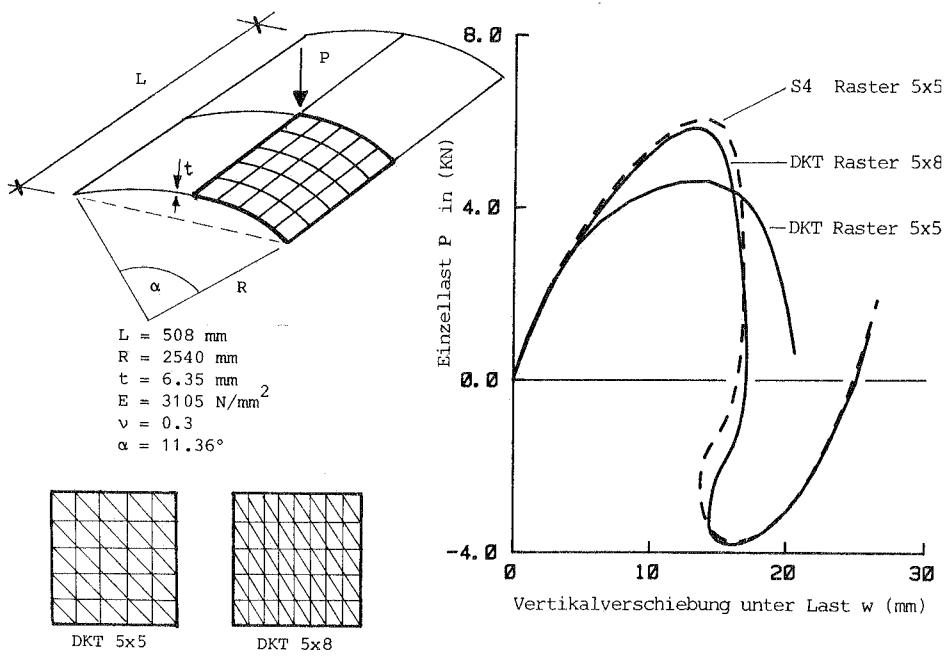


Bild 22. Beispiel DKT-Element

Das Konvergenzverhalten des DKT-Schalenelements ist ebenfalls kritisch zu bewerten. Die im Bild 22 auf Seite 65 dargestellten Lastverschiebungskurven (LV) erforderten deutlich kleinere Inkremente als die Vergleichslösung mit degenerierten Elementen. Bei gleichem Inkrement konnte nur mit der echten Newton-Raphson Iteration Konvergenz erzielt werden, was aber die Rechenzeiten stark ansteigen ließ. Die komplette Berechnung der LV des DKT-Elements erforderte mehrere Unterbrechungen (Restart), da immer wieder eine Korrektur der Bogenlänge (constant-arc-length-method) erforderlich war. Der automatische Algorithmus zur Anpassung der Bogenlänge war beim DKT-Element nicht ausreichend, während bei den degenerierten Elementen die komplette Kurve mit einem Rechenlauf erhalten wurde. Die Rechenzeiten liegen höher als bei Verwendung des Sl6-Elements.

Die Konvergenzschwierigkeiten und damit verbunden der erhöhte Aufwand an Rechenzeit und Bearbeitungszeit lassen den Einsatz des DKT-Schalenelements fragwürdig werden. Bei allen Problemen, in denen die Membrantragwirkung eine große Rolle spielt, ist dieses Element nicht zu empfehlen. Rechenzeitvergleiche für das oben erwähnte Beispiel fallen sehr ungünstig aus. Als Plattenelement ist das DKT-Element effektiv einsetzbar ; alle Transformationen lokal-global sind dann nicht mehr erforderlich.

## 4.0 Grenzlastberechnungen von dünnen Schalen

Die Anwendung von dünnen Schalen in druckbeanspruchten Konstruktionen ist häufig mit Stabilitätsproblemen verbunden. Für praktische Anwendungen sind einfache Formeln entwickelt worden, wobei man sich auf einfache Geometrien (Zylinder, Kegel, Kugel), einfache Lastfälle (Axiallast, Außendruck) und einfache Randbedingungen beschränken mußte. Das Ziel vieler Versuchsreihen und Parameterstudien ist oft, neue Formeln bereitzustellen oder vorhandene zu ergänzen, um weitere Einflüsse zu erfassen. Das Hauptproblem bei der Anwendung solcher "einfacher" Formeln ist die Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches, teilweise auch ihre komplizierte Handhabung.

Ein anderer Weg zur Ermittlung der Sicherheit gegen Stabilitätsversagen kann im Einzelfall mit Hilfe einer numerischen Berechnung beschränkt werden. Dazu ist allerdings eine genaue Kenntnis der Güte des Rechenverfahrens und der Gültigkeit der Idealisierung notwendig. Die folgenden Kapitel zeigen die Anwendung der im vorherigen Teil behandelten degenerierten Elemente bei der Berechnung von flüssigkeitsgefüllten Schalen und Vergleiche der Ergebnisse mit Normen und Versuchen.

### 4.1 Begriffsdefinitionen

Der Begriff Grenzlastberechnungen soll alle Arten von Versagenszuständen (Beulen, elastische Traglast, plastische Traglast) zusammenfassen. Für eine Unterscheidung der ein-

zelenen Begriffe wird im folgenden eine kurze Interpretation gegeben, wie Beullast, Traglast usw. in dieser Arbeit verstanden werden.

Mit Beullast ist im allgemeinen eine elastische Grenze definiert, bei der eine Struktur verzweigt. Die Angabe einer Beulspannung genügt normalerweise nicht, da bei variabler Dicke oder veränderlicher Geometrie und Belastung der Spannungsbegriff nicht eindeutig ist. Zur Abgrenzung des elastischen vom plastischen Beulen ist aber eine Spannungsangabe erforderlich. Die Berechnung der Beullast ist nicht immer eindeutig. In den meisten Fällen handelt es sich um die lineare Stabilitätsberechnung, die mit allen Programmen für Schalenstabilität ausgeführt werden kann. Dabei wird der Vergrößerungsfaktor eines Grundzustands gesucht, bei dem das System mehrdeutige Gleichgewichtszustände erreicht. Folgender Unterschied muß beachtet werden :

- o Der Grundzustand ist ein Membranzustand. Diese Annahme liegt fast allen analytisch berechneten Beullasten zugrunde. Meistens werden die Verformungen des Grundzustands vernachlässigt.
- o Der Grundzustand enthält alle Spannungen, d.h. auch Biegestörungen infolge unverträglicher Randbedingungen oder konzentrierter Lasten. Dieser Fall ist bei fast allen Rechenprogrammen vorhanden.

Die Berücksichtigung eines nichtlinearen Vorbeulverhaltens des perfekten Systems kann die Ergebnisse ebenfalls deutlich beeinflussen. Die geometrisch perfekte Kreiszylinderschale unter Axiallast erreicht in diesem Fall bei Berücksichtigung der Biegerandstörung nur noch 87% der klassischen Beullast. In einigen Fällen kann sich durch eine nichtlineare Vorbeulrechnung die Reihenfolge der Eigenwerte verändern, z.B. von einer rotationssymmetrischen Eigenform zu einer nicht rotationssymmetrischen Eigenform, was auf die Beurteilung des Systems und auf die Imperfektionsannahmen einen großen Einfluß hat. Um eine berechnete Beullast zu bewerten, muß definiert sein, welche Methode zu Grunde liegt und welche Effekte berücksichtigt werden.

Der Begriff Beulen ohne weiteren Zusatz wird in dieser Arbeit für den geometrischen Effekt, d.h. elastische Vorgänge, verwendet. Spielt das Materialversagen eine wesentliche Rolle, handelt es sich um eine Traglast. Im Zwischenbereich, bei dem beide Effekte - Beulen und Materialversagen - zum Tragen kommen, ist der Begriff "plastisches Beulen" gerechtfertigt.

#### 4.2 Analytische Berechnungen

Das Stabilitätsproblem von Schalentragerwerken ist in der Literatur in einer Vielzahl von Veröffentlichungen zu finden. Stellvertretend sollen hier nur einige zitiert werden. Die Berechnung der Kreiszylinderschale unter Axiallast oder Mantel- druck findet man in /58//59//60/, die Kegelschale mit gleicher Belastung in /61//62/. Hierbei handelt es sich um lineare

Beulanalysen, die von der Differentialgleichung ausgehen und diese mittels eines Ansatzes für die Verschiebungen lösen. Die Ansätze gehen von einem über die gesamte Schale gleichmäßig verteilten Beulmuster aus, mit verschiedenen Wellenzahlen in Umfangs- und Längsrichtung. Untersuchungen an imperfekten Systemen sind ebenfalls mit analytischen Methoden durchgeführt worden. Eine ausführliche Darstellung über imperfekte Kegelschalen unter Axiallast findet man in /63/.

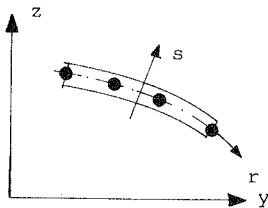
Für die Stabilitätsberechnung mit dem speziellen Lastfall Flüssigkeitsfüllung sind keine analytischen Untersuchungen bekannt. Ersatzweise werden die Formeln des axialbelasteten Kegels verwendet, die wegen des lokalen Beulversagens relativ gute Ergebnisse liefern. Abminderungsfaktoren zur Berücksichtigung der Imperfektionsempfindlichkeit werden aus Versuchen ermittelt und auf die klassische Beullast des axialbelasteten Kegels angewandt. Theoretische Untersuchungen parallel zu den Versuchen wurden in /3/ mit dem Programm BOSOR 4 und in /1/ mit einem anderen Programm für Rotationsschalen ausgeführt.

#### 4.3 Numerische Verfahren - Finite Elemente / Programm

Unter den numerischen Verfahren mit Diskretisierung wird die Methode der finiten Elemente am meisten eingesetzt, auch wenn für Spezialfälle andere Verfahren (z.B. Differenzenverfahren, halbanalytische Methoden, numerische Integration) effektiver sein können. Der Vorzug der Methode der finiten Elemente liegt vor allem darin, daß das Verfahren in der Anpassung an die

Geometrie, Lasten und Randbedingungen einer Struktur sehr flexibel ist. Für alle numerischen Berechnungen in dieser Arbeit sind ausschließlich finite Elemente eingesetzt worden.

Aus den im ersten Teil dargestellten Schalenelementen wird das degenerierte Element mit variabler Knotenzahl verwendet. Diese Elemente sind im Programmsystem NISA80 /38/ enthalten. Bei der Auswahl der Elemente war die Zuverlässigkeit entscheidend, so daß in den meisten Fällen das S16-Element zum Einsatz kam. Ergaben Vergleichsrechnungen mit dem S8-Element ein übereinstimmendes Ergebnis, wurden anschließende Parameterstudien teilweise mit dem bedeutend billigeren S8-Element ausgeführt. Alle rotationssymmetrischen Rechnungen sind mit einem isoparametrischen 4-Knoten Element (kubischer Ansatz) ausgeführt. Das Element entspricht einem S16-Element bei räumlichen Idealisierungen (Bild 23).



4-Knoten Element (kubisch)  
 Materialmodell :  
 - elastisch  
 - elasto/plastisch (Schichtenmodell)  
 Rotationsachse = z-Achse  
 volle Integration 4 Gausspunkte

Bild 23. 2-dim-degeneriertes Schalenelement in NISA80

Die nichtlinearen Rechnungen verwenden eine inkrementelle Lastaufbringung mit Iteration in jedem Inkrement. Als Iterationsverfahren wird hauptsächlich die Methode der konstanten Bogenlänge /56/ in Kombination mit modifiziertem und echtem Newton-Raphson Verfahren eingesetzt. Mit dieser Methode ist eine Rechnung in den Nachbeulbereich ohne große Probleme mög-

lich. Den plastischen Berechnungen liegt die v.Mises Fließbedingung und das Prandtl-Reuss-Gesetz zur Ermittlung der Spannungen zu Grunde. Die Integration der Werkstoffbeziehung, die in differentieller Form vorliegt, erfolgt mit einer Subinkrementierung. In jedem Subinkrement wird bei idealer Plastizität eine Korrektur der erhaltenen Spannungen ausgeführt, um die Fließbedingung einzuhalten. Das Modell läßt isotrope Verfestigung zu; alle folgenden Rechnungen sind aber ohne Verfestigung gerechnet.

Die Eigenwertanalysen sind mit einem Subspace-Algorithmus ausgeführt, der mit Matrizen in Blockstruktur arbeiten kann, so daß keine Beschränkung hinsichtlich der Problemgröße besteht. Der Gleichungslöser verwendet ebenfalls Matrizen in Blockform und benutzt innerhalb eines Blocks die "Column-Height" Technik. Die Speicherung erfolgt allerdings mit der vollen Bandbreite, so daß eine ungünstige Numerierung zu hohen I/O-Zeiten führt.

Das Programmsystem NISA80 läuft auf den Rechanlagen der Universität Stuttgart. Die Berechnungen sind im wesentlichen auf der CRAY 1/M ausgeführt worden, teilweise auch auf einer IBM 3083 oder auf einer VAX 11/780. Die Limitierung der Idealisierung bei einigen Fällen ergibt sich aus den Rechenkosten, die bei umfangreichen Parameterstudien im plastischen Bereich nicht unerheblich sind. Alle Verschiebungsbilder sind mit einem Nachlaufprogramm erstellt, das allerdings keine Algorithmen zur Unterdrückung verdeckter Linien enthält.



## 5.0 Kegelschale mit Wasserfüllung

Das Interesse an derartigen Konstruktionen ist in den letzten Jahren durch einige neue Bauwerke angestiegen. Ausgelöst durch zwei Unglücksfälle in Belgien wurden in /3/ eine Vielzahl von Versuchen durchgeführt, deren Ziel es war, eine Bemessungsvorschrift für diese spezielle Belastung des Kegels zu finden. Weitere Versuche finden sich in /64/ im Zusammenhang mit der Bemessung eines Bioreaktors. Das folgende Bild zeigt die Schnittkräfte nach der Membrantheorie für einen Kegel mit Flüssigkeitsfüllung. Zu beachten ist an dieser Stelle die unterschiedliche Größe der Ringmembrankraft  $n_{\theta}$  und der Längsmembrankraft  $n_{\varphi}$ .

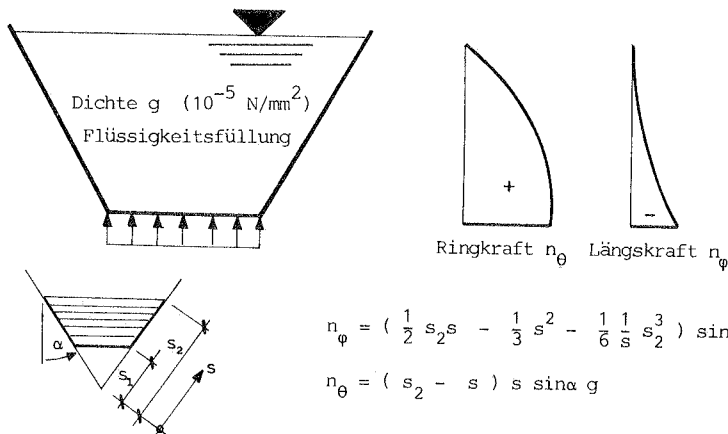


Bild 24. Schnittkräfte Kegel

Daß bei diesen Konstruktionen überhaupt ein Beulproblem auftritt wurde anfangs nicht beachtet, da man die entlastende Wirkung des Innendrucks überschätzt hat. Die Größe der Längskräfte  $n_{\varphi}$  nimmt durch den kubischen Verlauf mit kleiner

werdender Aufstandsfläche stark zu und erreicht je nach Neigung schnell einen kritischen Wert. Die gleichzeitig wirkende Ringzugkraft stabilisiert die Konstruktion wieder, womit zwei Fragestellungen aufgeworfen werden :

1. Wie groß ist der Einfluss des Ringzugs auf die Beullast ?
2. Welche Imperfektionsempfindlichkeit liegt hier vor?

Betrachtet man zusätzlich noch das Materialversagen, so kommt die Frage hinzu, ob überhaupt noch ein Stabilitätsproblem vorliegt, da die hohen Ringzugspannungen bereits frühzeitig zum Fließen führen können. Diese verschiedenen Probleme werden im folgenden behandelt.

Ein weitere Schwierigkeit ergibt sich aus der Art des Lastfalls. Für die Sicherheitsdiskussion und die Traglastberechnung kann man mehrere Arten von Überlasten definieren, die alle zu verschiedenen Ergebnissen führen (Bild 25).

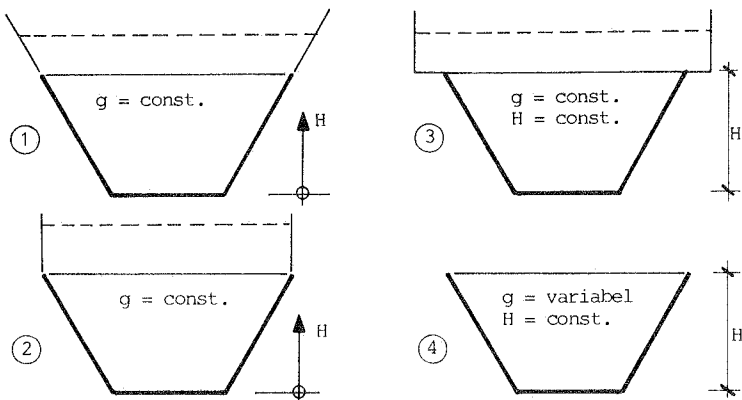


Bild 25. Definitionen von Überlasten

1. Erweiterung des Kegels nach oben mit gleicher Neigung und der Füllhöhe  $H$  als Parameter.
2. Erweiterung des Kegels nach oben mit einem zylindrischen Aufsatz und ebenfalls der Füllhöhe  $H$  als Parameter.
3. Zusatzlasten am oberen Rand, z.B. in Form eines geschlossenen Wasserbehälters, womit nur die Längskraft erhöht wird.
4. Veränderung des spezifischen Gewichts der Füllung bei gleicher Füllhöhe.

Alle diese Lastfälle haben ideellen Charakter, da in einem realen Bauwerk keiner dieser Lastfälle auftreten kann. Modellversuche und Rechnungen können aber damit ausgeführt werden. In dieser Arbeit wird die Variation des spezifischen Gewichts bei konstanter Füllhöhe als Lastparameter verwendet.  $g=1.0$  entspricht also normalem Wasser. Falls keine anderen Angaben gemacht sind, ist bei Traglasten, Eigenwerten usw. immer der Lastparameter  $g$  gemeint.

### 5.1 Axialsymmetrische Analysen - elastisch

Für die elastischen Untersuchungen wurde ein Modell aus den Versuchen in /64/ verwendet. Das Ziel der Rechnungen ist aber nicht der Vergleich mit dem Versuch, sondern die Darstellung der unterschiedlichen Einflüsse beim Beulen von flüssigkeitsgefüllten Kegelschalen. Das Versuchsmaterial hatte ausgeprägte orthotrope Materialeigenschaften, die in der Rechnung nicht berücksichtigt sind. Ein weiterer wichtiger Unterschied ist die Lagerung des Versuchsmodells. Das in der

Rechnung verwendete System ist am Fußpunkt fest eingespannt, das Versuchsmodell hatte im Auflagerbereich eine zusätzliche Folie zur Verstärkung. Damit tritt das Beulen im Versuch am Übergang vom dicken zum dünnen Schalenteil auf. Eine rotationssymmetrische Untersuchung ergab, daß der Einfluß der elastischen Stützung des beulgefährdeten Schalenteils nur einen geringen Einfluß auf die Beullast hat und in den weiteren Rechnungen nicht mehr berücksichtigt wird.

Die axialsymmetrischen Voruntersuchungen sollten die erforderliche Elementanzahl in Längsrichtung herausfinden. Die Berechtigung der Verwendung eines axialsymmetrischen Modells ergibt sich aus der Tatsache, daß die Beullast und die Wellenzahl in Längsrichtung nur sehr wenig von der Anzahl der Umfangswellen beeinflußt wird. Dies ist aus den Untersuchungen in /64/ bekannt. Beim axialbelasteten Kegel oder Kreiszylinder ist diese Vorgehensweise nicht sinnvoll, da dort die Umfangswellenzahl die Beulform der Längsrichtung stark verändert. Der Wert der Elementlänge (mm) in Tabelle 6 bezieht sich auf den Beulbereich. Die Tabelle gibt die ersten beiden Eigenwerte einer linearen Anfangsbeulanalyse an. Die rotationssymmetrische Beulform ist im Bild 28 auf Seite 78 dargestellt. Ferner ist das Ergebnis einer geometrisch nichtlinearen Analyse angegeben, die durch eine begleitende Eigenwertanalyse ergänzt wurde.

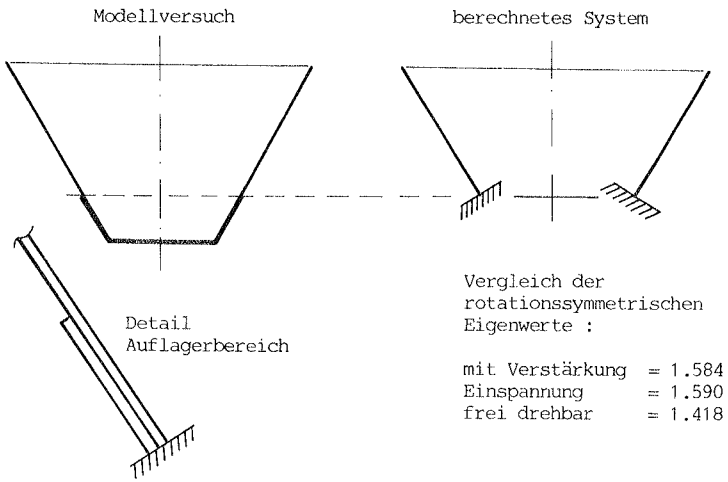


Bild 26. Unterschiede Modellversuch - berechnetes System

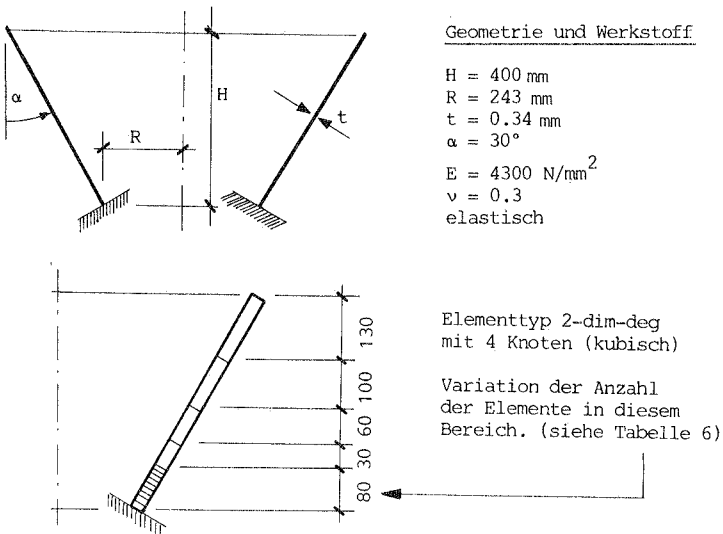


Bild 27. Geometrie und Elementeinteilung Modellkegel

Elementlänge	1.Eigenwert	2.Eigenwert
2 * 40.00	3.15	4.20
4 * 20.00	1.78	1.87
5 * 16.00	1.68	1.81
8 * 10.00	1.59	1.61
12 * 6.67	1.56	1.59

Tabelle 6 : Elementlänge - Eigenwerte

Aus den Ergebnissen ist zu ersehen, daß im Bereich der Beulen eine sehr feine Elemententeilung erforderlich ist. Für die nicht rotationssymmetrische Rechnung mußte ein Kompromiß zwischen Genauigkeit und Aufwand geschlossen werden. Deshalb wurde als Elementlänge für diese Rechnungen 10mm gewählt.

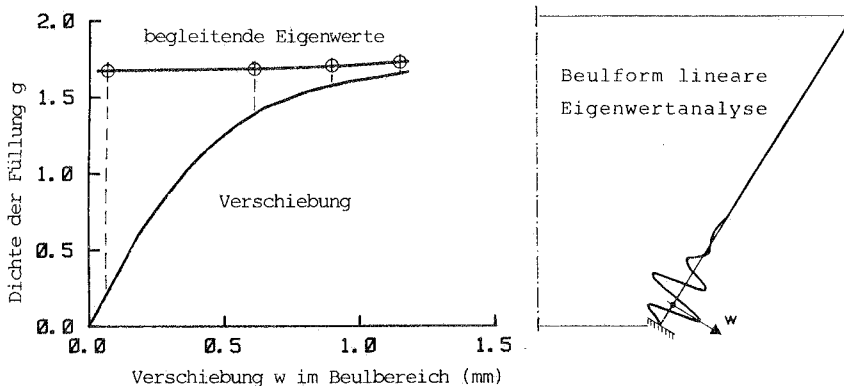


Bild 28. Ergebnisse der axialsymmetrischen Rechnungen

Die nichtlineare axialsymmetrische Rechnung führt bei elastischem Materialverhalten auf keinen Durchschlagpunkt. Die begleitende Eigenwertanalyse zeigt, daß der Eigenwert mit zunehmender Last auch zunimmt. Das Versagen erfolgt erst bei Betrachtung unsymmetrischer Verformungszustände.

## 5.2 Nicht axialsymmetrische Analysen - elastisch

Unter Verwendung der Idealisierung in Längsrichtung entsprechend den axialsymmetrischen Rechnungen, werden jetzt nicht symmetrische Untersuchungen durchgeführt. Für die Wahl des Sektors müssen normalerweise Voruntersuchungen vorliegen, die den Ausschnitt für die Anwendung der Symmetrie festlegen. Diese Rechnungen werden am besten mit einem Rotationsschalprogramm ausgeführt, das Fourieransätze in Umfangsrichtung verwendet. Beim hier berechneten System konnte aus /64/ die kritische Umfangswellenzahl entnommen werden. Die Anzahl der notwendigen Elemente für die Umfangsrichtung (eine Halbwelle) wird durch eine Parameterstudie bestimmt. Bei den hier verwendeten Elementtypen sind drei S16 oder vier S8 Elemente ausreichend.

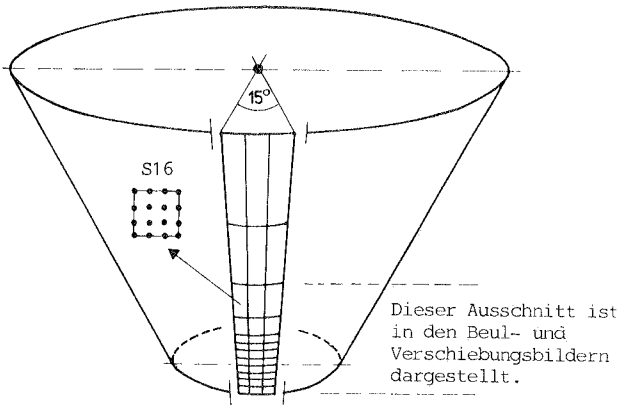


Bild 29. Nicht axialsymmetrische Idealisierung - Kegel

### 5.2.1 Eigenwertanalysen

Die Belastung erzeugt die in Bild 24 auf Seite 73 dargestellten Schnittkraftverläufe nach der Membrantheorie. Die unterschiedlichen Vorzeichen von Ringkraft und Längskraft führen bei einem allgemeinen Eigenwertlöser auf das Problem der negativen Eigenwerte, die physikalisch dem umgekehrten Lastfall Wasseraußendruck entsprechen. Dieser Beulfall tritt aber bei bedeutend niedrigeren Eigenwerten auf. Da ein Eigenwertlöser im Regelfall - z.B auch in NISA80 - immer die absolut niedrigsten Eigenwerte bestimmt, konnten die gesuchten Werte des Lastfalls Wasserinnendruck nur mit einer Modifikation des Eigenwertlösers des Programms NISA80 erhalten werden. Mit Hilfe eines Shiftfaktors wird der Nullpunkt der Eigenwertskala in die Nähe des gesuchten Eigenwerts verschoben. Die unerwünschten Werte des Lastfalls Außendruck haben damit einen absolut größeren Wert, als die Eigenwerte des Lastfalls Innendruck. Das Verfahren ist in der Dynamik zur Konvergenzbeschleunigung schon lange bekannt - für die Lösung dieses Beulproblems ist es eine Notwendigkeit. Das Vorgehen ist im folgenden kurz dargestellt.  $K_e$  ist die elastische Steifigkeitsmatrix,  $K_G$  ist die geometrische Matrix,  $v$  stellt den Vektor der Eigenform dar und  $\lambda$  den gesuchten Eigenwert.

Der Shiftfaktor muß immer entsprechend dem zu erwartenden Eigenwert gewählt werden, der vom gewählten Grundlastniveau abhängt. Für die Kegelschale unter Wasserlast ist bei  $g=0.1$  ein Shiftfaktor von 15, bei  $g=1.6$  ein Faktor von 0.9 angenommen worden.



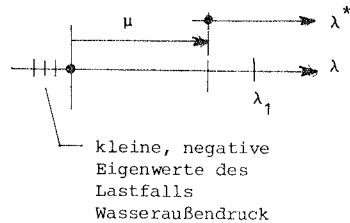
Modifikation des Eigenwertlösers :

$$(K_e + \lambda K_G) v = 0$$

$$[K_e + (\lambda^* + \mu) K_G] v = 0$$

$$[(K_e + \mu K_G) + \lambda^* K_G] v = 0$$

$$K_e = K_e + \mu K_G \quad \lambda = \lambda^* + \mu$$



Die Ergebnisse der Eigenwertanalyse des nicht axialsymmetrischen Problems zeigen die überraschende Tatsache, daß die ersten beiden Eigenwerte exakt mit der rotationssymmetrischen Rechnung übereinstimmen. Erst der dritte Eigenwert hat eine unsymmetrische Eigenform, entsprechend dem Ausschnitt mit 12 Wellen in Umfangsrichtung. Die Beulformen sind in Bild 31 auf Seite 84 dargestellt. Da das endgültige Versagen unsymmetrisch erfolgt, muß sich die Reihenfolge der Eigenwerte mit zunehmender Belastung ändern. Dies tritt erst kurz vor dem Verzweigen auf. In der Tabelle 7 sind Eigenwerte angegeben, die mit einer linearen Stabilitätsberechnung an zwei verschiedenen Lastniveaus erhalten wurden. Der Grundzustand ist geometrisch nichtlinear berechnet, enthält also neben allen Spannungen auch die verformte Geometrie. Der Eigenwert ist mit der Dichte des Grundzustands multipliziert und stellt damit eine kritische Dichte dar, bei der das System verzweigen würde.

Beulform	Eigenwerte bei $g=0,1$	Eigenwerte bei $g=1,6$
symmetrisch	1.63	1.607
symmetrisch	1.65	1.635
12 Wellen	1.87	1.578

Tabelle 7: Eigenwerte 15-Grad Sektor

Das Maximum der nichtlinearen Rechnung, dargestellt im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 30 auf Seite 83, liegt bei 1.596. Es ist damit niedriger als der Grundzustand  $g=1.60$ , bei dem die Eigenwertberechnung ausgeführt wurde. Die Diskrepanz erklärt sich aus der Möglichkeit, das perfekte System über das kritische Lastniveau hinaus zu rechnen. Das Programm muß diesen Zustand allerdings anzeigen, was in NISA80 mit 2 Indikatoren erfolgt. Einmal wird die Determinante der Steifigkeitsmatrix beobachtet, die beim Überschreiten eines kritischen Werts das Vorzeichen wechselt. Allerdings funktioniert dies nur bei einer ungeraden Anzahl von Eigenwerten, die unter dem aktuellen Lastniveau liegen, da bei einer geraden Anzahl Eigenwerte das Vorzeichen positiv bleibt. Deshalb wird in NISA80 auch die Anzahl der negativen Diagonalelemente angegeben, die bei der Dreieckszerlegung der Steifigkeitsmatrix auftreten.

In Bild 30 auf Seite 83 sind die Ergebnisse der eigenen Rechnung (Kegelschale unter Wasserlast) und die Kurve eines Versuchs aus /65/ gegenübergestellt. Der Versuch wurde mit dem Lastfall Axiallast und konstanter Innendruck ausgeführt. Die Reihenfolge der Beulen bei der eigenen Lösung wird durch den Versuch bestätigt.

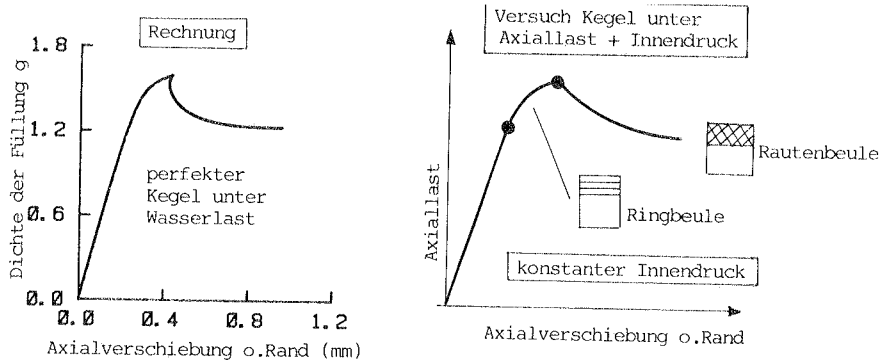


Bild 30. Lastverschiebungskurve Versuch - Rechnung

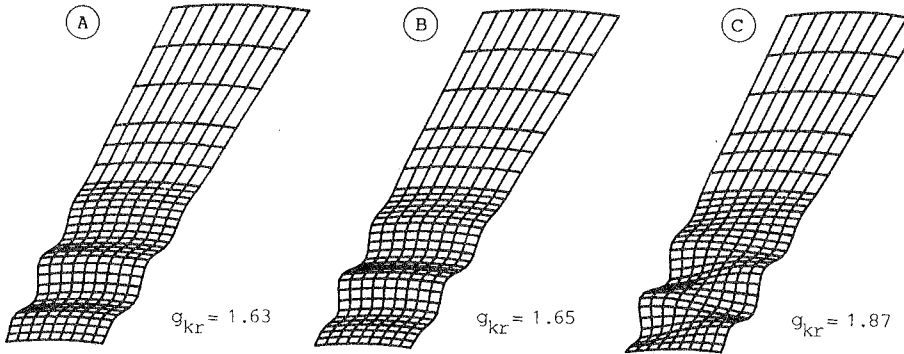
### 5.2.2 Geometrisch imperfektes System

Der relativ geringe Abfall der Last im überkritischen Bereich - nur künstlich im Rechenmodell zu ermitteln - deutet auf eine geringe Imperfektionsempfindlichkeit hin, die aber nicht so groß ist, wie im Fall reiner Axiallast. Die entscheidende Frage bei Analysen mit geometrischen Imperfektionen ist die Annahme der Imperfektionsform und Amplitude. Im wesentlichen bestehen hier zwei Möglichkeiten.

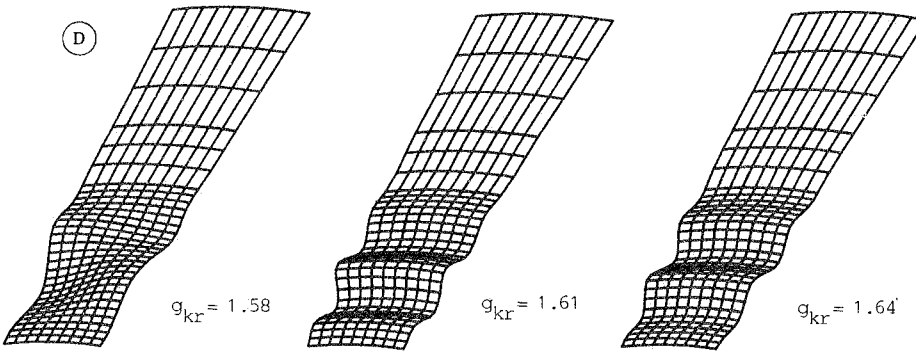
1. Überlagerung von real möglichen, an bereits ausgeführten Bauwerken gemessenen Imperfektionen.
2. Annahme einer vermutlich ungünstigen Form, z.B. eine der Eigenformen der Beulanalyse.

In dieser Arbeit wird der zweite Weg beschritten, wobei die Amplitude bei den folgenden Rechnungen auf die Wanddicke beschränkt ist. Da von vornherein nicht feststellbar ist, welche Beulform die ungünstigste ist, werden mehrere Berechnungen

Wasserlast - Eigenwerte und Eigenformen - Grundlast  $g=0.1$



Wasserlast - Eigenwerte und Eigenformen - Grundlast  $g=1.6$



Tangentiallast - Eigenwerte und Eigenformen - lineare Eigenwertanalyse

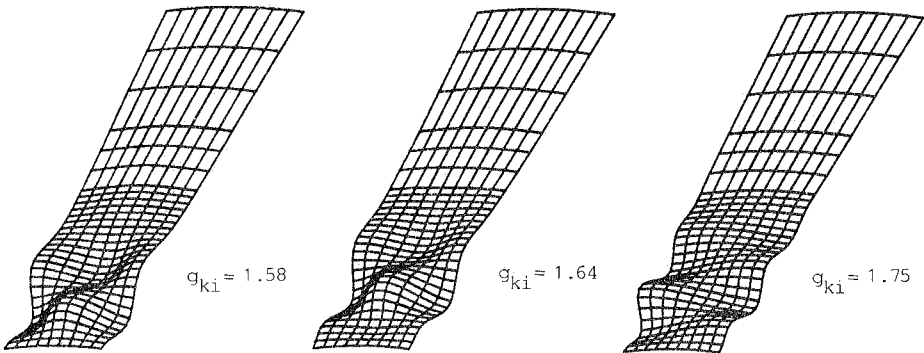


Bild 31. Kegel - Beulformen - räumliche Idealisierung

mit verschiedenen Imperfektionsmustern ausgeführt. In /63/ wird ebenfalls darauf hingewiesen, daß eine Überlagerung der ersten Beulform der perfekten Struktur nicht immer ausreichend ist. Im dort untersuchten Fall der Kegelschale unter Axiallast unterscheidet sich die Anfangsbeulform, in ihrer Welligkeit in beiden Richtungen, stark von der endgültigen Versagensform. Diese Unterschiede sind in Längsrichtung bei den hier berechneten Systemen nicht vorhanden - in Umfangsrichtung findet der Wechsel von symmetrischer zur unsymmetrischer Form statt.

### 5.2.3 Unsymmetrische Imperfektionen

Für die weiteren Berechnungen werden die unsymmetrischen Beulformen C oder D aus Bild 31 auf Seite 84 überlagert ( $w/t=1.0$ ). Beulform C ist bei  $g=0.1$ , Beulform D bei  $g=1.6$  aus einer begleitenden Eigenwertanalyse ermittelt worden. Alle Rechnungen wurden mit dem echten Newton-Raphson Verfahren begonnen, da der Innendruck eine versteifende Wirkung zeigt und das modifizierte Newton-Raphson Verfahren bei derartigen Systemen sehr schlecht konvergiert. Die Struktur mit der Imperfektion C erreicht 91% der Durchschlagslast der perfekten Schale, was nur über den stabilisierenden Effekt der Ringzugspannungen erklärbar ist. Das System mit der Form D als Imperfektion versagte bei  $g=1.37$ . Da diese Imperfektion der endgültigen Versagensform entspricht, liegt die Annahme nahe, daß es sich um die ungünstigste Imperfektion handelt. Der nächste Abschnitt mit axialsymmetrischen Imperfektionen zeigt aber, daß diese Annahme nicht richtig ist.

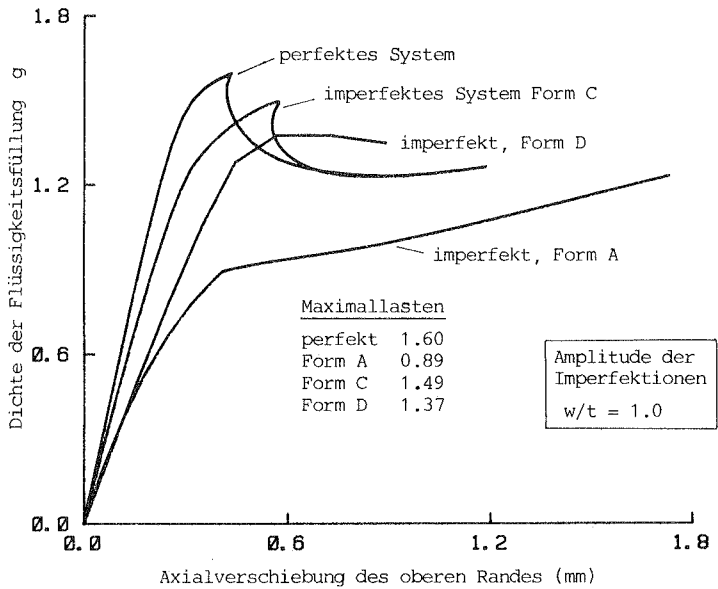


Bild 32. Kegel - LV - Wasserlast - imperfekte Geometrie

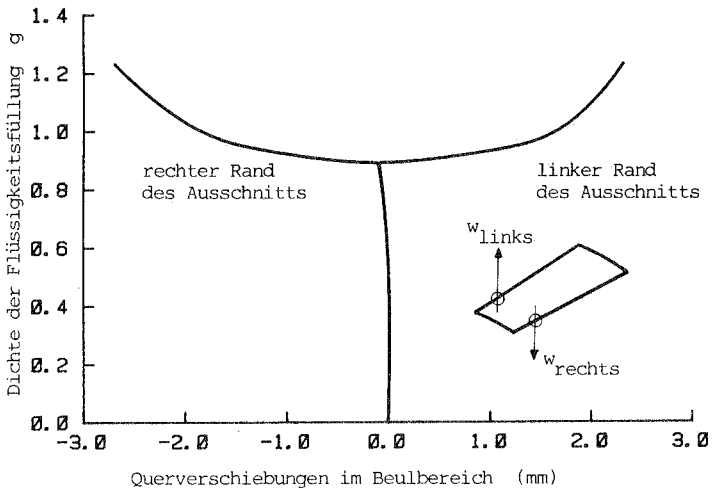


Bild 33. Kegel - LV - Wasserlast - Imperfektion A

#### 5.2.4 Axialsymmetrische Imperfektion.

Überlagert wurde die Beulform A aus Bild 31 auf Seite 84. Die Rechnung erreichte bereits bei  $g=0.89$  einen kritischen Punkt. Bei diesem Lastniveau war eine Laststeigerung anfangs nicht mehr möglich. Mit sehr kleinen Lastinkrementen konnte die Rechnung fortgesetzt werden. In der Lastverschiebungskurve in Bild 33 auf Seite 86 zeigt sich praktisch ein Verzweigungspunkt, wobei die bis dahin symmetrische Verschiebungsfigur unsymmetrisch wird. Der Übergang vom symmetrischen in ein unsymmetrisches Verschiebungsfeld war ohne Zusatzmaßnahmen möglich, da die überlagerte axialsymmetrische Imperfektion geringe numerische Unsymmetrien enthielt. Überraschenderweise tritt nach dem Verzweigen kein Lastabfall ein. Trotz des leichten Anstiegs der Last im Nachbeulbereich würde das System in einem Versuch ohne Verschiebungskontrolle durch das plötzliche Ausweichen bei diesem Lastniveau versagen (vgl. Eulerstab). Der Versuch Nr.5 in /64/ für diesen gerechneten Kegel hatte eine Versagenslast von  $g=1.0$ . Im Modell war zur Verstärkung des Auflagerbereichs eine zweite Folie aufgeklebt, womit eine ringförmige Exzentrizität der Nulllinie, d.h ebenfalls eine axialsymmetrische Imperfektion, vorlag. Dies könnte der Grund für die relativ gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Versuch sein, trotz idealisierter Annahmen über Material und Wanddicken.

Die axialsymmetrische Imperfektion als kritische Imperfektion steht auch in Übereinstimmung mit den Ergebnissen in /66/ für Kreiszyinderschalen. Die Ringzugspannungen aus dem Innendruck

können die unsymmetrische Imperfektion in gewissem Maße wieder "ausbügeln"

### 5.2.5 Einfluß der Imperfektionsamplitude

Nach der Variation der Form der Imperfektion ist noch eine Untersuchung der Amplitude notwendig. Dazu wird das Modell mit einer ringförmigen Imperfektion mit einer Amplitude von  $w/t=4.0$  nachgerechnet. Bei dieser Rechnung ergibt sich kein ausgeprägter Verzweigungs- oder Durchschlagpunkt, was bei der Definition einer Beullast Schwierigkeiten bereitet. Die Lastverschiebungskurve zeigt nur ein sehr starkes Anwachsen der Verformungen. Die Verschiebungsfigur bleibt symmetrisch.

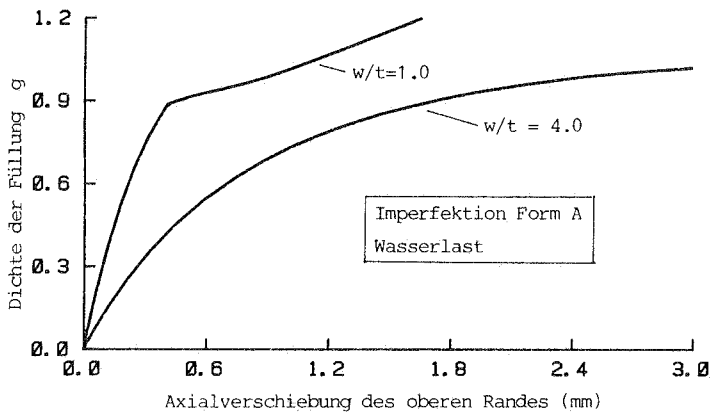


Bild 34. Einfluß der Amplitude



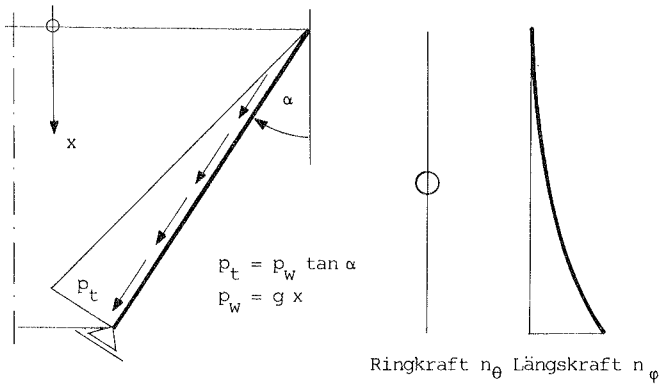


Bild 35. Lastfall Tangentiallast

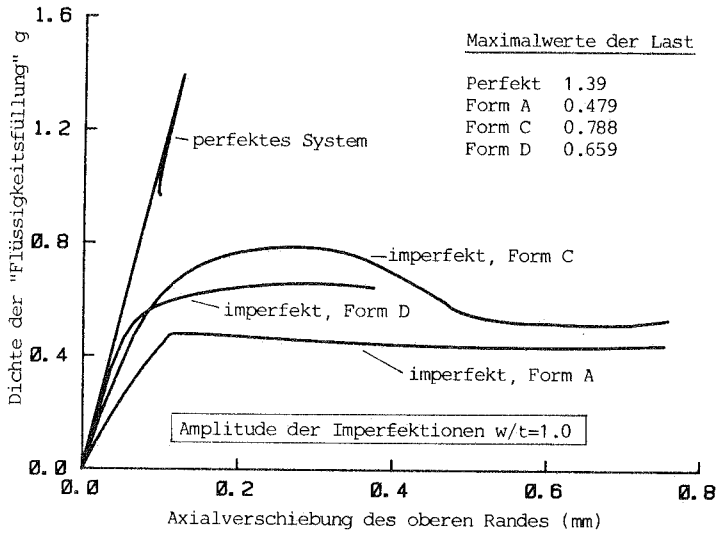


Bild 36. Lastverschiebungskurven Tangentiallast

### 5.2.6 Lastfall Tangentiallast

Zur Beurteilung der Wirkung des Innendrucks werden im folgenden die gleichen Rechnungen mit einem anderen Lastfall wiederholt. Mit diesem nur rechnerisch möglichen Lastfall, soll der gleiche Verlauf der Längsdruckkräfte  $n_{\phi}$  erzeugt werden, ohne die beim Lastfall Wasserlast vorhandenen Ringzugkräfte  $n_{\theta}$ . Zu diesem Zweck wird eine linear veränderliche Tangentiallast aufgebracht (siehe Bild 35 auf Seite 89). Im Gegensatz zu den vorher ausgeführten begleitenden Eigenwertanalysen bei  $g=0.1$  und  $g=1.6$  wird jetzt eine lineare Anfangsbeulanalyse verwendet. Tabelle 8 enthält sowohl die Werte für Wasserlast, die jetzt geringfügig höher sind, als auch die Werte für Tangentiallast. Für Tangentiallast zeigen sich keine axialsymmetrischen Beulformen mehr (siehe Bild 31 auf Seite 84). Die niedrigsten Beullasten haben die doppelte kritische Umfangswellenzahl (24 Wellen). Der Beulwert ist allerdings nicht wesentlich anders als beim Lastfall Wasserlast.

Beulform	Tangentiallast	Beulform	Wasserlast
24 Wellen	1.58	symmetrisch	1.68
24 Wellen	1.64	symmetrisch	1.69
12 Wellen	1.75	12 Wellen	1.83

Tabelle 8 : Eigenwerte Tangentiallast

Die Ergebnisse der nichtlinearen Rechnungen an den gleichen imperfekten Systemen wie bei Wasserlast sind zusammen mit dem perfekten System in Bild 36 auf Seite 89 dargestellt. Erstaunlich ist die Tatsache, daß nach wie vor die rotationssymmetrische Imperfektion den grösseren Lastabfall verursacht. Der Innendruck hat für alle Imperfektionsformen einen deutlich

stabilisierenden Einfluß, der relativ unabhängig von der gewählten Imperfektionsform zu sein scheint. Das Verhältnis der Maximallasten von Wasserlast und Tangentiallast für verschiedene Imperfektionsformen liegt zwischen 0.48 und 0.55, d.h. der Innendruck erhöht die Beullasten der imperfekten Schalen auf das Doppelte.

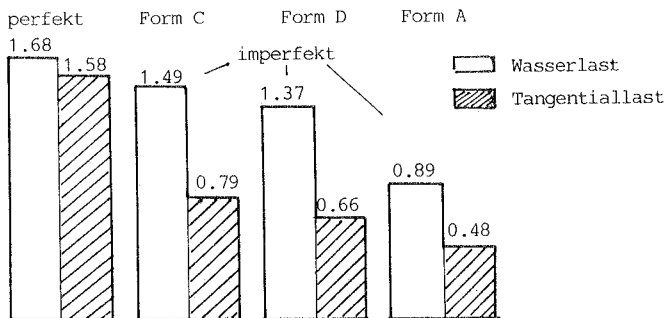


Bild 37. Vergleich der Beullasten

### 5.3 Elastische Analysen - Zusammenfassung

Aus den elastischen Berechnungen an einem Modellkegel lassen sich folgende Aussagen ableiten.

- o Die lineare Beullast wird durch den Innendruck nicht wesentlich beeinflusst. Es ändern sich vor allem die Beulformen.
- o Die Imperfektionsanfälligkeit wird durch den Innendruck deutlich herabgesetzt. Dieser Einfluß ist bei allen Imperfektionsformen gleich.
- o Axialsymmetrische Imperfektionen haben sich als besonders ungünstig erwiesen und brachten den maximalen Lastabfall.

- o Die Amplitude der axialsymmetrischen Vorbeule hat keinen großen Einfluß auf die erreichte Maximallast.

Ein Vergleich der hier erzielten Ergebnisse mit den aktuellen Bemessungsvorschriften soll dieses Kapitel abschliessen.

#### 5.4 Vergleich mit Normen und Versuchen

Das Bemessungskonzept der DAST-Richtlinie 013 /4/ geht von der linearen Beullast aus und schreibt bestimmte Abminderungsfaktoren zur Erfassung des wirklichen Tragverhaltens vor. Dabei wird die lineare Beullast aus der klassischen Lösung des axialbelasteten Kegels berechnet. Die Faktoren der Richtlinie sind aus einer Vielzahl von Versuchen als unterer Grenzwert ermittelt und zusätzlich mit dem Wert 0.75 abgemindert, um einen einheitlichen Sicherheitsfaktor von 1.5 für die Bemessung verwenden zu können. Obwohl die DAST-Richtlinie 013 nicht für diesen Lastfall zugelassen ist, sind die Vergleichswerte interessant. Alle Zwischenrechnungen für die Zahlenwerte der folgenden Tabellen sind im Anhang Teil B enthalten. Lastwerte sind immer als Dichte der Flüssigkeitsfüllung zu verstehen (1.0=Wasser). Mit Spannung ist im folgenden immer die maximale Längsspannung im Kegel gemeint.

Die analytische lineare Beullast, ausgedrückt als Dichte der Flüssigkeit, kann aus der kritischen Spannung für Axiallast (1.Wert Tabelle 9) und der tatsächlichen Spannung bei Vollfüllung (2.Wert) am unteren Rand des Kegels berechnet werden. Die Beullast als Quotient der ersten beiden Werte ist der

3. Wert der Tabelle 9. Es fällt auf, daß die mit dem Programm berechnete lineare Beullast von  $g=1.68$  deutlich höher ist. Der Abminderungsfaktor  $\alpha$  (4. Wert) und der Erhöhungswert  $\Delta\alpha$  (5. Wert) aus dem Innendruck wird aus den Formeln der DAST-Richtlinie 013 berechnet. Der 7. Wert der Tabelle 9 stellt die Bemessungslast dar. Die mit dem Sicherheitsfaktor erhöhte Gebrauchslast darf diese Last nicht überschreiten.

1. Beulspannung Kegel (DAST)		3.08	N/mm
2. Spannung bei Vollfüllung		2.33	N/mm
3. lineare Beullast	(1:2)	1.322	
4. Abminderungsfaktor		0.169	
5. Erhöhung durch Innendruck		0.3	
6. Gesamtabminderungsfaktor	(4+5)	0.469	
7. Bemessungslast	(3*6)	0.620	

Tabelle 9 : Beulberechnung über DAST-Richtlinie 013

Der Vergleich der linearen Beullasten (Anfangsbeulanalyse) und der Versagenslasten des imperfekten Systems (Imperfektion A) für Wasserlast und Tangentiallast erlaubt ebenfalls die Berechnung von Abminderungsfaktoren und Korrekturen infolge Innendruck. Diese Rechnung ist in Tabelle 10 dargestellt. Die Zahlenwerte sind aus den bereits beschriebenen Rechnungen entnommen.

1. lineare Beullast Wasserfüllung		1.68	
2. lineare Beullast Tangentiallast		1.58	
3. minimale Last imperfekt Wasserfüllung		0.89	
4. minimale Last imperfekt Tangentiallast		0.495	
5. Abminderungsfaktor ohne Innendruck	(4:2)	0.315	
6. Abminderungsfaktor mit Innendruck	(3:1)	0.530	
7. Erhöhung infolge Innendruck	(6-5)	0.215	

Tabelle 10 : Abminderungsfaktoren mit NISA80

Die relativ gute Übereinstimmung beider Abminderungsfaktoren, 0.469 nach DAST und 0.530 nach der Rechnung, bedarf noch einer weiteren Diskussion. Die Programmwerte zeigen einen geringeren Einfluß des stabilisierenden Innendrucks an, haben dafür einen höheren  $\alpha$ -Wert und kommen so auf das gleiche Ergebnis. Wie bereits erwähnt, unterscheiden sich lineare Beullast des Programms und analytische Beullast, so daß die für die Bemessung zugrunde liegenden Lasten mit 0.620 (DAST) und 0.89 (NISA80) recht unterschiedlich ausfallen. Es stellt sich die Frage, ob Abminderungsfaktoren aus der Richtlinie auch auf Beullasten aus einer FE-Rechnung angewendet werden dürfen.

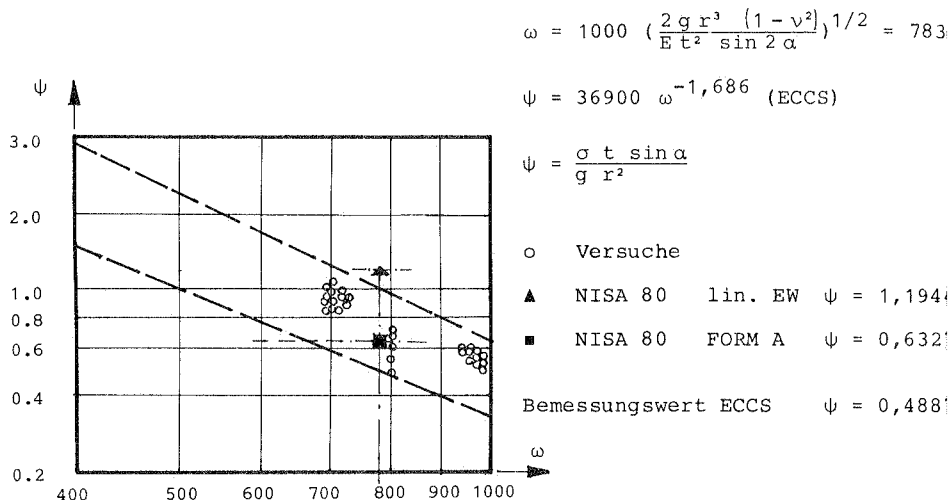


Bild 38. Vergleich Rechnung - Versuche /3/ - ECCS

Ein weiterer Vergleich mit den Versuchsreihen in /3/ führt auf eine ähnliche Grenzlasterlast, wie sie die DAST 013 angibt. Die Formel in /3/ ist durch Auswertung einer großen Zahl von Ver-

suchen aufgestellt worden und ist auch in der ECCS-Richtlinie /5/ aus dem Jahr 1983 enthalten. Die neueste Fassung der ECCS-Richtlinie vom September 1984 enthält geringfügig korrigierte Faktoren zur Ermittlung der Grenzlast bei flüssigkeitsgefüllten Kegelschalen.

Der Vergleich Programm - Richtlinie (Versuche) für die Grenzlasten, die als Bemessungslasten verwendet werden, ergibt eine Differenz in der Größenordnung von 25%. Diese Abweichung hat verschiedene Ursachen. Die Annahmen der Imperfektionsform- und Amplitude sind bei Rechnungen ein gewisser Unsicherheitsfaktor, die unteren Grenzwerte der Bemessungskurven enthalten zusätzlich noch Abminderungsfaktoren zur Erfassung besonders empfindlicher Konstruktionen. Trägt man die Rechenwerte in die Versuchswerte /3/ mit ein, so zeigt sich, daß diese Werte immer im unteren Bereich der Versuchswerte zu liegen kommen. Speziell bei der DAST-Richtlinie 0.13 ist ein zusätzlicher Abminderungsfaktor von 0.75 enthalten, so daß die Grenzlast nach DAST, dividiert mit 0.75, mit der Rechnung sehr genau übereinstimmt. Die Versagenslasten von Stahlschalen sind mit der hier verwendeten Methode für eine Bemessung genügend genau zu bestimmen, wenn mehrere ungünstige Imperfektionsannahmen untersucht werden.

### 5.5 Axialsymmetrische Analysen - plastisch

Die bisher an einem Modellkegel aus Kunststoff durchgeführten Untersuchungen mußten das Materialversagen nicht berücksichtigen, da das Beulen lange vor dem Fließen auftrat.

Dieses Verhältnis ist bei Stahlkonstruktionen aus Baustahl St37 oder St52 anders. Infolge der hohen Ringzugkräfte tritt das Fließen des Materials sehr viel früher ein, so daß kein elastisches Beulen mehr vorliegt. Die folgende Tabelle vergleicht die Membranspannungen der Ringrichtung und der Längsrichtung mit der einachsigen Fließspannung bzw. der kritischen Beulspannung. Dabei ist das Verhältnis von Ring- zu Fließspannung für das Materialversagen entscheidend, das Verhältnis Längs- zu Beulspannung für das Stabilitätsversagen. Die Betrachtung kann für jeden Punkt der Schale ausgeführt werden, da beide Versagensarten lokal sind. Diese Betrachtung ergibt die in Tabelle 11 angegebene Zahlenwerte. Beim System 1 handelt es sich um das im vorigen Abschnitt berechnete Tragwerk, das System 2 hat die gleiche Geometrie wie 1, als Material wurde aber Stahl angenommen. Das System 3 ist der im Bild 40 auf Seite 97 dargestellt Behälter und entspricht dem Außenkegel des in Bild 39 auf Seite 97 dargestellten Bioreaktors.

System	Fließspannung/ Ringspannung	Beulspannung/ Längsspannung
1 Kunststoff h=const.	20.10	1.32
2 Stahl h=const.	71.20	61.60
3 Stahl h=variabel	2.58	5.43

Tabelle 11 : Vergleich elastisches - plastisches Versagen

Man sieht deutlich, daß beim System 1 nur elastisches Versagen auftreten kann, während beim System 3 das Plastizieren die dominierende Rolle spielt. Beim System 2 ist eine Interaktion zwischen beiden Wirkungen möglich. Die für das System 3 angegebenen Werte sind am Übergang  $t=22$  zu  $t=18\text{mm}$  Wanddicke für



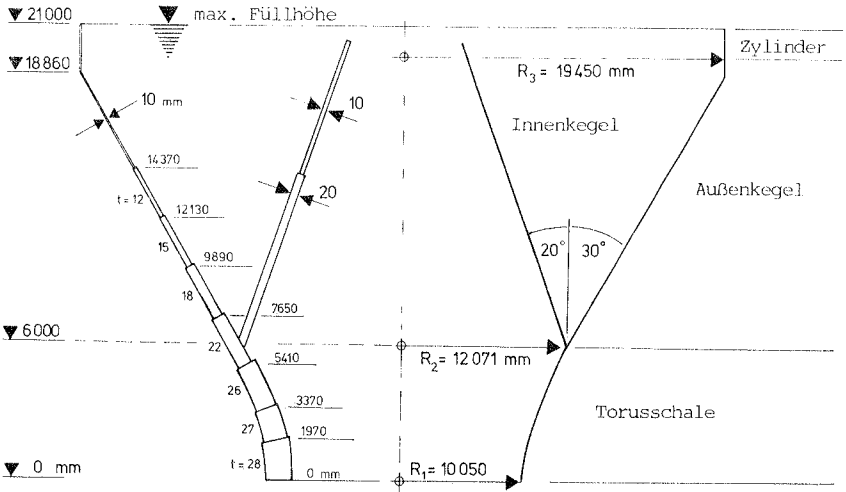


Bild 39. Geometrie Bioreaktor

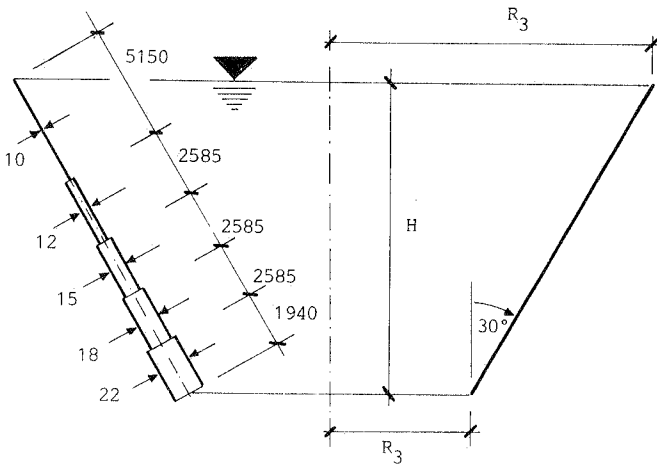


Bild 40. Geometrie Stahlbehälter

den dünneren Kegelteil berechnet, da sich dort die ungünstigsten Verhältnisse ergeben. Bei den Stahlbehältern kommt hinzu, daß durch unterschiedliche Vorzeichen der Membranspannungen das Fließen im Druck/Zug-Bereich deutlich früher beginnt, als im einaxialen Fall.

Bei plastischem Versagen kann im allgemeinen ein axialsymmetrisches Rechenmodell verwendet werden. Das Auftreten einer rotationssymmetrischen Versagensform ist hier umso mehr zu erwarten, da die Ursache des Plastizierens die Ringspannungen sind. Die Längsspannungen sind dem gegenüber wesentlich geringer (siehe Bild 24 auf Seite 73). Der Rechenaufwand sinkt im rotationssymmetrischen Fall beträchtlich und ist selbst für eine praktische Anwendung noch vertretbar.

Eine lineare Anfangsbeulanalyse ergibt einen Beulwert von  $g=6.56$  mit rotationssymmetrischer Beulform. Dieser Wert liegt wiederum deutlich höher, als der analytische Wert von  $g=5.44$ , der am Übergang von  $t=18\text{mm}$  auf  $t=22\text{mm}$  als Quotient der kritischen Längsspannung für  $t=18\text{mm}$  (Formel Axiallast) und der vorhandenen Längsspannung aus der Flüssigkeitsfüllung errechnet wurde. Die Beulwellen sind durch die Abstufung der Wanddicke nicht mehr am unteren Ende konzentriert, sondern breiten sich sehr weit in die Schale hinein aus. Eine Eigenwertanalyse mit Tangentiallast führt auf gleiche Werte. Die Beulform ist in Bild 41 auf Seite 99 gezeigt. Die nichtlineare elasto-plastische Traglastberechnung liefert einen Maximalwert von  $g=2.17$  für die perfekte Struktur. Die zugehörige Versagensform ist ebenfalls in Bild 41 auf Seite 99 dargestellt. Sie konzen-

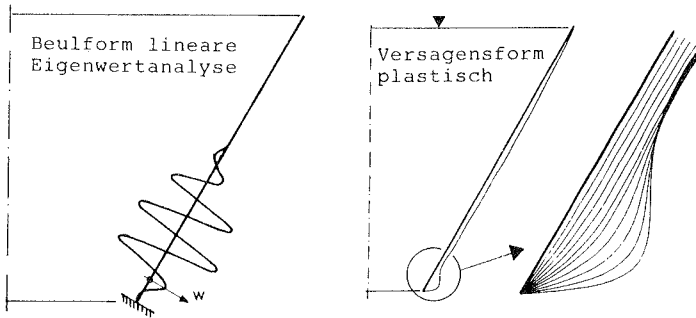


Bild 41. Beul- und Versagensform plastische Analyse

triert sich auf ein Ausweichen, ähnlich einem Fließgelenk, im Bereich des Wanddickensprungs von 22 auf 18mm. Hauptversagensmodus ist nicht das Beulen, sondern ein Materialversagen. Für die imperfekte Geometrie wird eine ringförmige Nahteinziehung angenommen, wie sie z.B beim Schweißen entsteht. Die Amplitude ist wiederum mit der Wanddicke ( $t=18\text{mm}$ ) auf  $w/t=1.0$  skaliert. Die Schweißimperfektion wird einmal nach innen (1) und einmal nach außen angesetzt (2). Das Bild 42 auf Seite 100 zeigt, daß die Imperfektionen nur einen geringen Lastabfall verursachen.

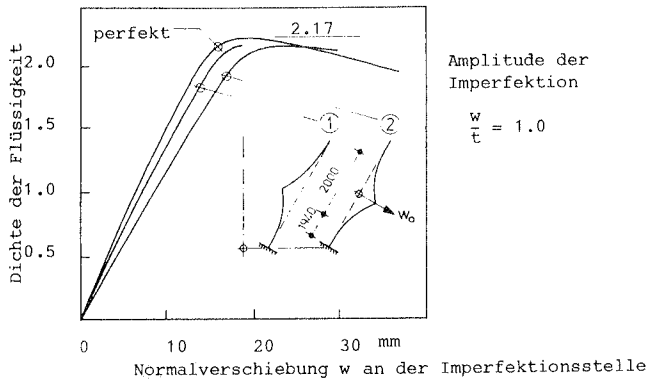


Bild 42. Lastverschiebungskurven - Kegel - plastisch

Die Traglasten liegen mit  $g=2.12$  und  $2.10$  N/mm für die Imperfektion 1 bzw. 2 nur geringfügig unter dem Wert der perfekten Schale. Eine nicht axialsymmetrische Kontrollrechnung zeigt bei diesem Lastniveau noch kein Verzweigen in eine unsymmetrische Form. Eine Berechnung des kompletten Bioreaktors (Bild 39 auf Seite 97) mit Eigenspannungen aus dem Schweißvorgang mindert die Traglast nur geringfügig ab. Diese Ergebnisse sind in /67/ dargestellt.

Schlußfolgerungen aus den plastischen Analysen :

- o Eine rotationssymmetrische Rechnung ist bei plastischem Versagen ausreichend. Es muß noch untersucht werden, bis zu welchen Spannungsverhältnissen diese Aussage zutrifft.
- o Die Ringzugspannungen aus dem Innendruck sind als Auslöser für das axialsymmetrische Versagen durch das Materialfließen verantwortlich. Sie haben damit keine stabilisierende Wirkung.

- o Imperfektionen zeigen beim Traglastproblem keinen Einfluß.

## 5.6 Beurteilung der Berechnungen

Die Grenze für die Anwendung einer rotationssymmetrischen Rechnung ist nicht eindeutig festlegbar. Die in Tabelle 11 berechneten Verhältniswerte der Membranspannungen mit Beul- bzw. Fließspannung werden im folgenden für eine einfache Abschätzung des Versagenmodus herangezogen. Beulen und Materialversagen werden bei diesem Lastfall von Spannungen in verschiedenen Richtungen beeinflusst. Dies steht im Gegensatz zum Lastfall Axiallast bei dem der Übergang vom elastischen zum plastischen Beulen nur vom Radius/Dickenverhältnis  $r/t$  abhängt, da Plastizieren und Beulen von der Längsspannung verursacht wird. Beim Lastfall Wasserlast kann trotz großem  $r/t$ -Verhältnis, in dessen Bereich normalerweise kein Plastizieren durch Axiallast auftritt, das Materialversagen dominant werden, wenn die Ringspannungen einen entsprechend hohen Wert annehmen. Aus dieser Überlegung heraus wird folgende Betrachtung angestellt. Man berechnet sich die beiden Verhältnisse  $a$  und  $b$  entsprechend der untenstehenden Vorschrift.

$a = \text{Beulspannung} / \text{vorhandene Längsspannung}$
$b = \text{Fließspannung} / \text{vorhandene Ringspannung}$

Dabei ist die Beulspannung ein mit der Geometrie veränderlicher Wert, da der Radius des Kegels sich ändert. Die punktweise Betrachtung erfolgt über die ganze Schale - verwendet werden dann die kleinsten Werte  $a$  und  $b$ . Bildet man nun das Verhältnis  $c=b/a$ , so kann man für Kegelschalen bei  $c>2$  ein

plastisches, rotationssymmetrisches Versagen erwarten. Dieser Faktor 2 ergibt sich aus der Annahme, daß bei elastischem, unsymmetrischem Beulen der Abminderungsfaktor, gegenüber der Beullast der perfekten Struktur, nicht kleiner als 0.5 wird, weil der Innendruck die Imperfektionsempfindlichkeit abmindert. Zu beachten ist bei der Berechnung des Ausdrucks b die Abhängigkeit der Fließspannung von dem zweidimensionalen Spannungszustand. Im hier vorhandenen Druck-Zug Zustand muß die Verminderung der einachsigen Fließspannung berücksichtigt werden.

## 6.0 Zusammengesetzte Schalen (Torusschalen)

In einigen Behälterkonstruktionen treten die Schalenformen, Zylinder, Kegel und Torus aus verfahrenstechnischen Gründen in Kombinationen auf (Bild 39 auf Seite 97). Während Zylinder und Kegel einfach gekrümmt sind, handelt es sich beim Torus um eine doppelt gekrümmte Schale. Praktische Ausführungen beschränken sich aus Gründen einer einfachen Fertigung meist auf Abschnitte aus Kegelstümpfen. Damit entstehen Knicke in der Konstruktion ; diese Schalenform kann dann als Torus mit ringförmigen Imperfektionen betrachtet werden. Das Tragverhalten bleibt gegenüber dem idealen Torus im wesentlichen erhalten, vorausgesetzt die Knicke zwischen den einzelnen Abschnitten werden nicht zu groß. Für diese kombinierten Schalen existieren keine einfachen Formeln für den Stabilitätsnachweis.

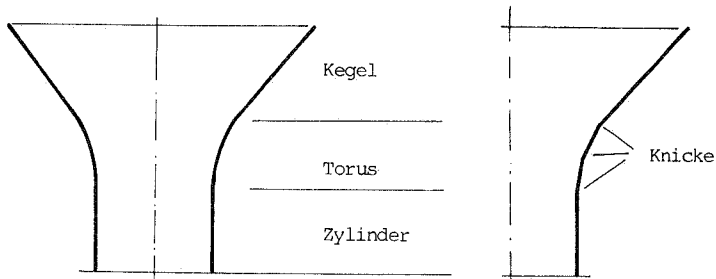


Bild 43. Geometrie der allgemeinen Strukturen

Das folgende Kapitel soll zwei wesentliche Fragen zur Stabilität solcher Schalenkonstruktionen untersuchen:

1. Wie ist die Imperfektionsempfindlichkeit der zusammengesetzten Schale einzuschätzen ?
2. Wie ist der Einfluß eines zusätzlichen Innendrucks zu beurteilen ?

Die folgenden Berechnungen sind in zwei Hauptteile gegliedert. Im ersten Teil wird nur das elastische Verhalten, im zweiten Teil dann der Einfluß des Plastizierens des Stahlbehälters untersucht. Alle Rechnungen sind wieder mit dem Programm NISA80 ausgeführt. Die Beschreibung der Algorithmen und der verwendeten Elemente ist im Kapitel 4 zu finden.

### 6.1 Tragverhalten und Beulnachweis

Das Tragverhalten von zusammengesetzten Schalen der obigen Art wird wesentlich von der Umlenkung der Meridiankräfte (Längskräfte) bestimmt. Dadurch entsteht im Bereich der Torusschale eine zusätzliche Druckbeanspruchung in Ringrichtung. Die Überlagerung von Längsdruck und Ringdruck hat auf das Beulverhalten einen entscheidenden Einfluß. Diese Ringdruckkräfte entstehen sowohl bei doppelt gekrümmten "echten" Torusschalen als auch bei Schalen aus abschnittsweise geraden Kegelstümpfen. Werden die Knicke nicht zu groß, kann man von einem ähnlichen Tragverhalten ausgehen.

Bei den Konstruktionen mit Knicken sind zusätzlich hohe Biegespannungen vorhanden, die aber beim elastischen Beulen, wie aus Untersuchungen in /2//64/ bekannt, keine Rolle spielen.



Bei plastischen Versagenszuständen kann die Geometrie mit Knicken einen merkbaren Einfluß auf die Traglast haben.

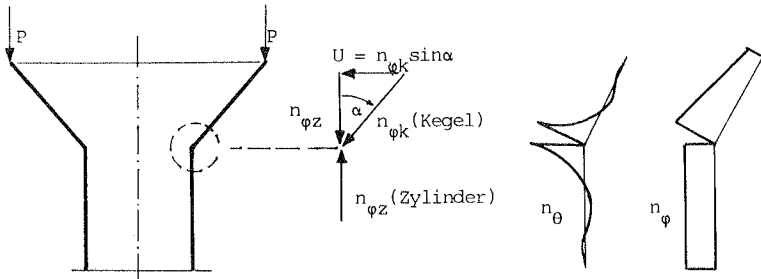


Bild 44. Tragverhalten - Umlenkungswirkung

Der Stabilitätsnachweis muß im allgemeinen mit einem zweiachsigen Spannungszustand geführt werden, wobei die Geometrie der Torusschalen in den üblichen Normen nicht enthalten ist. Näherungen über Kegelstümpfe sind möglich, enthalten aber eine ganze Reihe von Annahmen (Ersatzaußendruck, Randbedingungen, Länge des Kegelabschnitts), die das Ergebnis der Beulberechnung mehr oder weniger stark beeinflussen. Für die Beurteilung eines Beulwerts oder einer Traglast ist deswegen die Analysenqualität ein maßgebender Faktor. Näherungsformeln und FE-Rechnung dürfen nicht gleich eingestuft werden.

## 6.2 Torus-Kegelschale (System TK)

Die hier gerechnete Modellschale wurde in /1/ und /64/ experimentell und rechnerisch untersucht. Die genaue Geometrie ist in Bild 45 auf Seite 106 gezeigt. Das Modell versagte bei einer Füllhöhe von 360 mm, so daß dieser Wert als Füllhöhe für

die FE-Rechnung genommen wird. Das spezifische Gewicht wird wieder als Lastfaktor gesteigert. Der über die Grenzfüllhöhe hinausgehende Bereich der Modellschale wurde weggelassen, da er ohne Bedeutung ist.

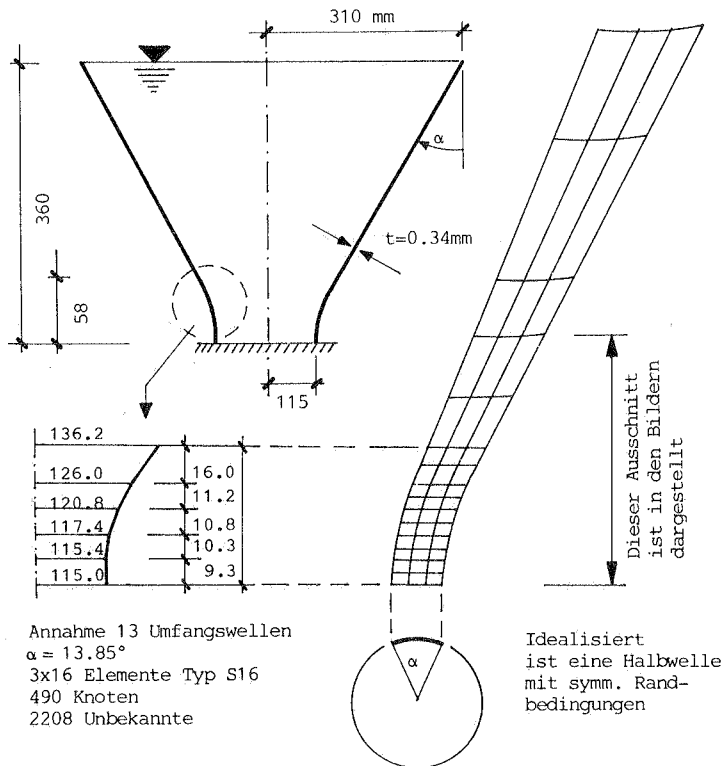


Bild 45. TK - Geometrie - Idealisierung

Die lineare Anfangsbeulanalyse ergibt einen Beulwert von  $g=1.031$ , was erstaunlich nahe an der Versagenslast des Versuchs liegt. Der Ausschnitt ist entsprechend einer Voruntersu-

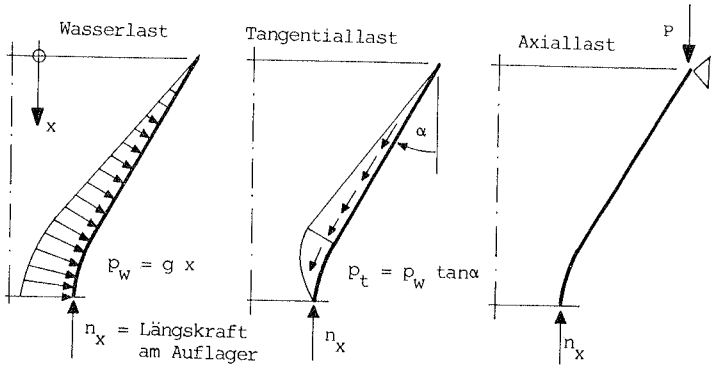


Bild 46. TK - Darstellung der Lastfälle

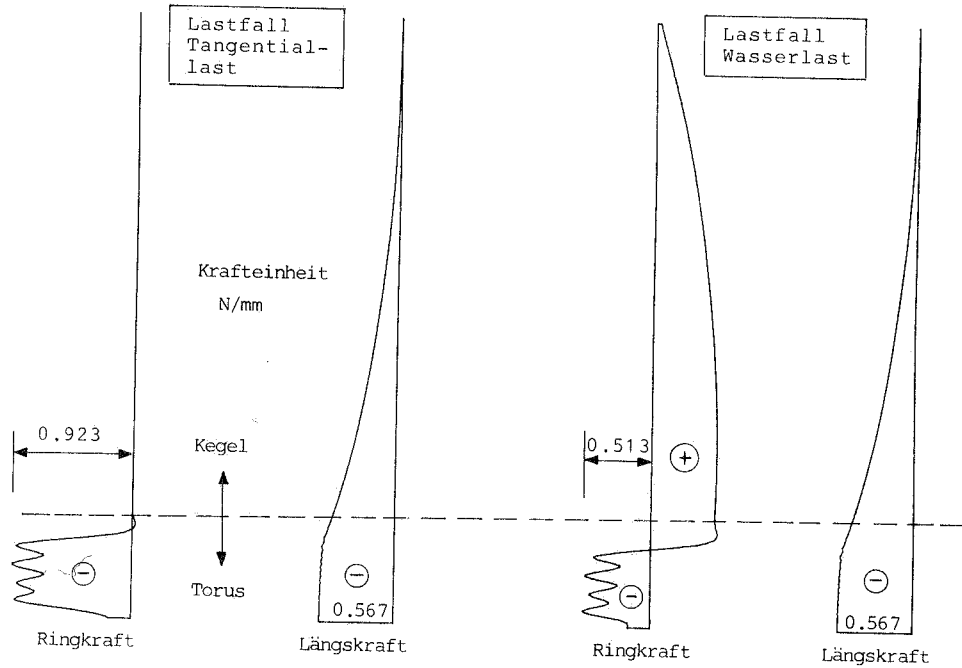
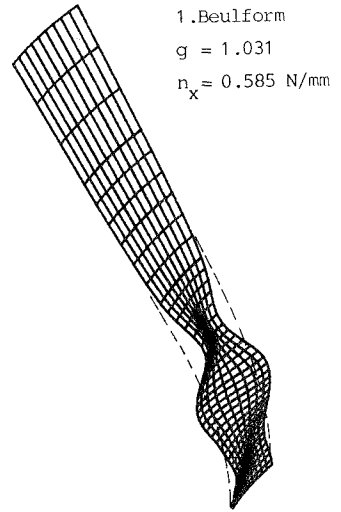
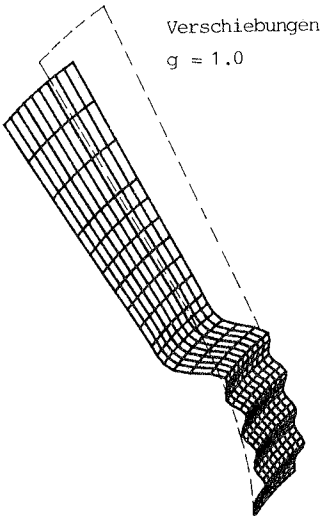


Bild 47. TK - Membranspannungen

Wasserlast



Tangentiallast

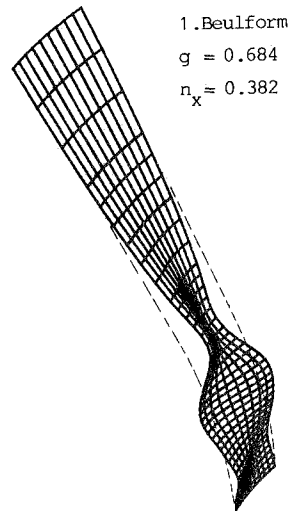
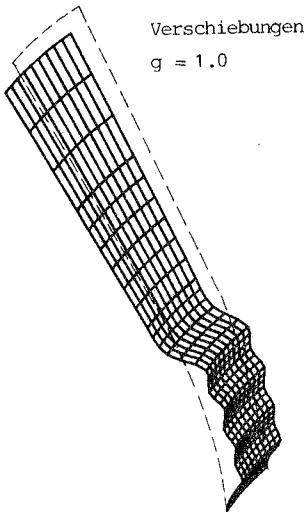


Bild 48. TK - Verschiebungen - Beulformen - elastisch

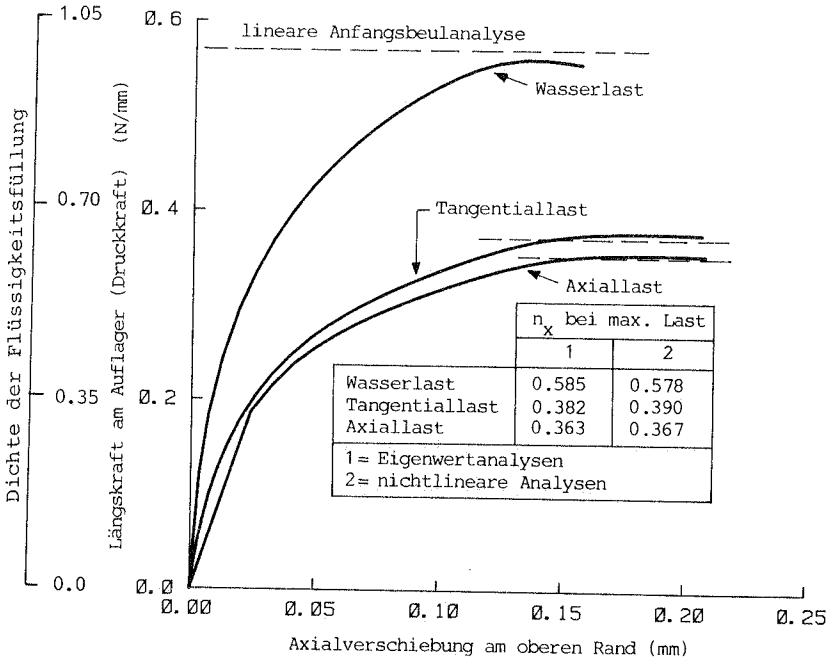


Bild 49. TK - LV - elastisch - verschiedenen Lastfälle

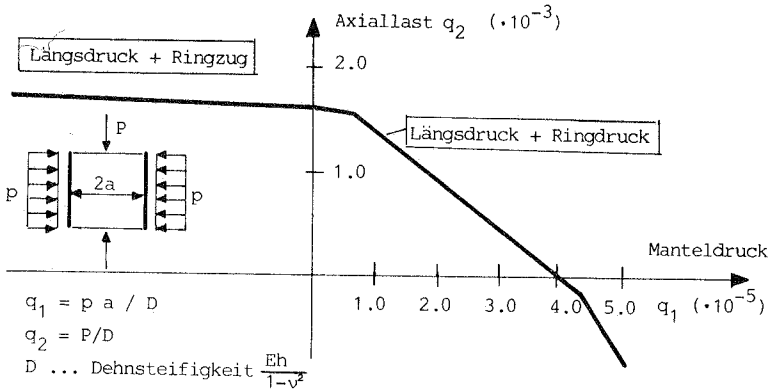


Bild 50. Interaktion Längslast - Außendruck

chung mit  $N=13$  Umfangswellen gewählt. Bei dieser Wellenzahl ergab sich der kleinste Eigenwert einer Analyse mit dem Programm KSHEL /68/, das mit Fourierreihen in Umfangsrichtung arbeitet. Aus /1/ ist als kritische Wellenzahl der Wert 15 zu entnehmen. Die Unterschiede haben auf die Ergebnisse nur einen geringen Einfluß. Die Beulform bei Wasserlast ist in Bild 48 auf Seite 108 rechts oben dargestellt. Diese Beulform wird als Imperfektion mit der Amplitude  $w/t=1.0$  auf das System aufgebracht und dieses dann nichtlinear bis zum Durchschlagpunkt gerechnet. In Bild 49 auf Seite 109 ist als Lastparameter die Längskraft am Auflager gegenüber der Axialverschiebung am oberen Rand aufgetragen und zusätzlich noch die zum Lastfall Wasserlast gehörige Dichte. Die zum Lastniveau  $g=1.0$  ( $n=0.567$ ) zugehörige Verschiebungsfigur ist für zwei Lastfälle (Wasserlast und Tangentiallast) in Bild 48 auf Seite 108 wiedergegeben. Sie zeigt im Torusbereich eine durch die Knicke verursachte Wellenbildung. Zu beachten ist aber vor allem, daß sich der untere Bereich durch die Lastumlenkung, sowohl bei Wasserlast, als auch bei Tangentiallast, nach innen verschiebt und damit Ringdruckkräfte entstehen.

Die erreichte Maximallast der nichtlinearen Rechnung von  $g=1.018$  ( $n=0.578$ ) entspricht fast der linearen Beullast ( $g=1.031$  -->  $n=0.585$ ) und deutet darauf hin, daß diese Schale aus Kegel und Torus beim Lastfall Wasserlast nur eine sehr geringe Empfindlichkeit gegen Imperfektionen besitzt.

Um die Frage nach dem Einfluß des Innendrucks bei diesem Verhalten zu klären, wird der bereits bei den Kegelschalen defi-

nierte Lastfall Tangentiallast (Bild 46 auf Seite 107) verwendet. Dabei entspricht die Längskraftverteilung der des Wasserdrucks. Anders als beim Kegel wird durch die Umlenkung im Torusbereich jetzt eine Ringdruckkraft erzeugt. Deshalb ergibt die lineare Eigenwertanalyse mit  $g=0.674$  ( $n=0.382$ ) eine deutliche Abminderung, wobei die Beulform bei Tangentiallast, dargestellt in Bild 48 auf Seite 108 rechts unten, ähnlich aussieht. Die Erklärung für das gegenüber dem Kegel andere Verhalten liegt also in der gleichzeitigen Wirkung von Längsdruck und Ringdruck im Beulbereich, durch die die lineare Beullast stark beeinflusst wird. Ein ähnliches Verhalten ist von der Kreiszyinderschale bekannt. Das Interaktionsdiagramm in Bild 50 auf Seite 109 aus /58/ verdeutlicht diese Tatsache. Die lineare Beullast wird durch Ringzug nicht wesentlich erhöht, aber durch Ringdruck stark vermindert. Im Falle der wassergefüllten Schale werden die Ringdruckkräfte im Torusbereich abgebaut, was zu einer Erhöhung des linearen Beulwerts führt. Die nichtlineare Rechnung mit Tangentialbelastung am gleichen imperfekten System wie zuvor, ergibt eine Grenzlast von  $g=0.687$  ( $n=0.390$ ), d.h. eine geringfügig höhere Last, als aus der linearen Eigenwertberechnung (Bild 49 auf Seite 109). Dieses Ergebnis zeigt, daß nicht der Innendruck der Wasserfüllung für die Unempfindlichkeit gegenüber Imperfektionen verantwortlich ist, da in allen Fällen die lineare Anfangsbeullast mit der Durchschlaglast übereinstimmt. Zur Bestätigung wird noch der Lastfall Axiallast gerechnet. Dabei ist die äußere Last so gewählt, daß am Auflager die gleiche Längskraft entsteht, wie bei den vorherigen Rechnungen (siehe Bild 46 auf Seite 107). Es ergeben sich nur geringfügig nied-

rigere Werte als beim Lastfall Tangentiallast, da die Längskraftverteilung im Torusbereich etwas anders ist. Auch dieses Ergebnis ist im Lastverschiebungsdiagramm in Bild 49 auf Seite 109 eingetragen.

Für elastisches Verhalten ergeben sich folgende Aussagen :

1. Die zusammengesetzte Schale aus Torus und Kegel erreicht die lineare Beullast auch mit imperfekter Geometrie. Das System ist nicht imperfektionsanfällig.
2. Die Berechnung der Beullast muß alle Effekte enthalten, insbesondere den richtigen Spannungszustand infolge der Umlenkung der Meridiankräfte. Genäherte Last- und Spannungsverhältnisse sind unzureichend.
3. Die Steigerung der Beullast durch Innendruck wird durch eine Änderung des zweiachsigen Druckspannungszustandes im Beulbereich verursacht (Reduktion der Ringdruckspannungen).

In der Literatur findet man zu diesem Thema einige Aussagen, die die Unempfindlichkeit der Torusschale gegenüber Imperfektionen bestätigen /69//70//71/. Dabei wird in den meisten Fällen der Lastfall Wasseraußendruck untersucht, bei dem Axialbelastung + Außendruck ebenfalls zu zweiachsiger Druckbeanspruchung im Torus führen.

Versuche mit Torusschalen zeigen eine relativ geringe Streubreite und übertreffen in manchen Fällen die lineare Beullast



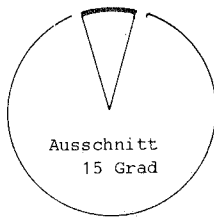
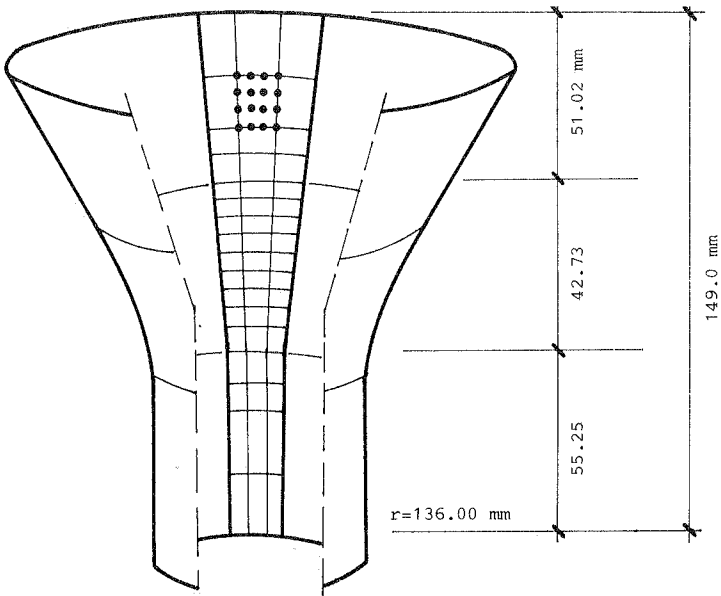
/64/. Dies bestätigt ebenfalls die hier gewonnenen Ergebnisse für elastisches Verhalten.

### 6.3 System Zylinder-Torus-Kegel (ZTK)

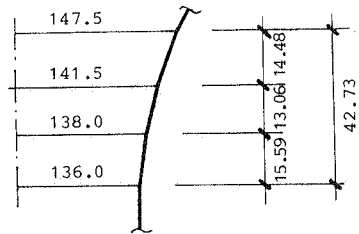
Das Modell wurde in /2/ experimentell untersucht. Es besteht aus drei Schalenabschnitten (Bild 51 auf Seite 114) und ist aus Stahl hergestellt, so daß das Versagen des Materials mit berücksichtigt werden muß. Der Torusabschnitt ist aus einzelnen Kegelschüssen hergestellt, so daß keine stetige, sondern eine geknickte Konstruktion entsteht. Die Belastung besteht aus Axiallast und konstantem Innendruck, wobei im Gegensatz zur Wasserlast beliebige Verhältnisse zwischen beiden Lastarten möglich sind. Das Radius-Dickenverhältnis ist mit  $r/t=300-400$  im Bereich, bei dem für Kreiszylinderschalen unter Axiallast plastische Effekte das Beulen beeinflussen. Da hier zusätzlich ausgeprägte Biegezustände an den Knickpunkten vorliegen, kann eine stärkere Beeinflussung der Beullast durch das Materialversagen erwartet werden. Zur Einschätzung dieses Einflusses werden zunächst elastische Rechnungen durchgeführt und dann die Plastizität hinzugenommen.

#### 6.3.1 Elastische Analysen - Axiallast

Die beim System Torus-Kegel erhaltenen Ergebnisse deuten für diesen Schalentyp auf ein stabiles Nachbeulverhalten, ähnlich der Platte, hin. Das gutartige Nachbeulverhalten der negativ gekrümmten Schalen ist z.B auch von der HP-Schale bekannt. Um diese Frage für das vorliegende System genauer zu untersuchen,

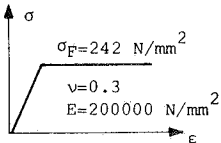


Detail Torusschale



In jedem Torusabschnitt werden 2 Elemente (S16) verwendet.

Material



Randbedingungen : -oberer Rand gekoppelte Verschiebungen vertikal  
 -unterer Rand voll eingespannt  
 -Längsränder mit Symmetriebedingungen

Allgemeines : Elementtyp S16 mit voller Integration (4\*4)  
 3\*18 Elemente  
 550 Knoten  
 2439 Unbekannte mit einer Bandbreite von 158

Bild 51. ZTK - Geometrie und Idealisierung

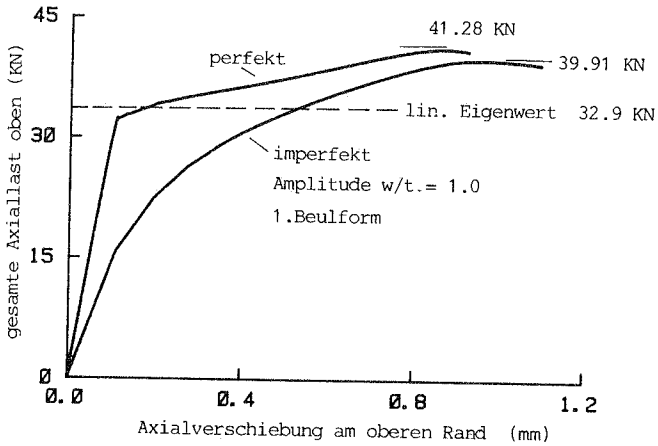


Bild 52. ZTK - LV - elastisch - Axiallast

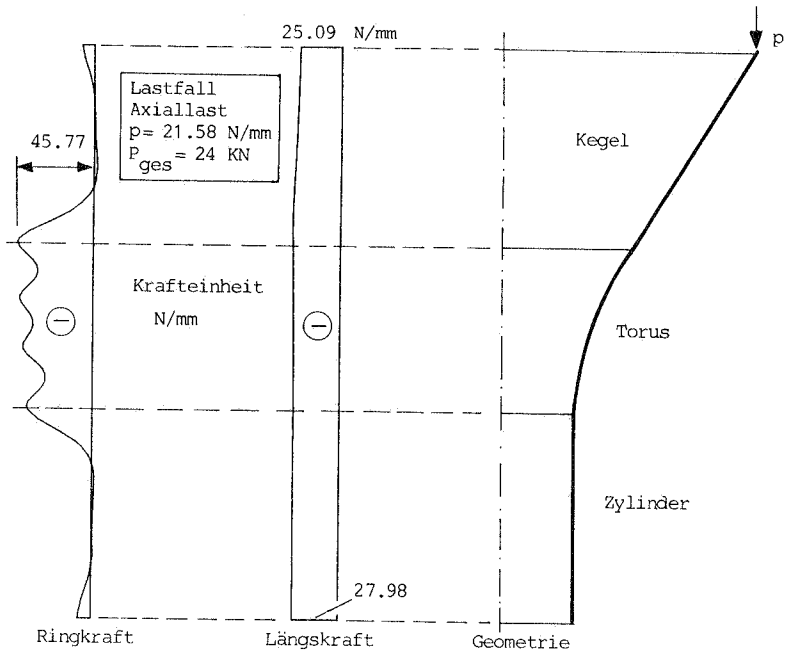
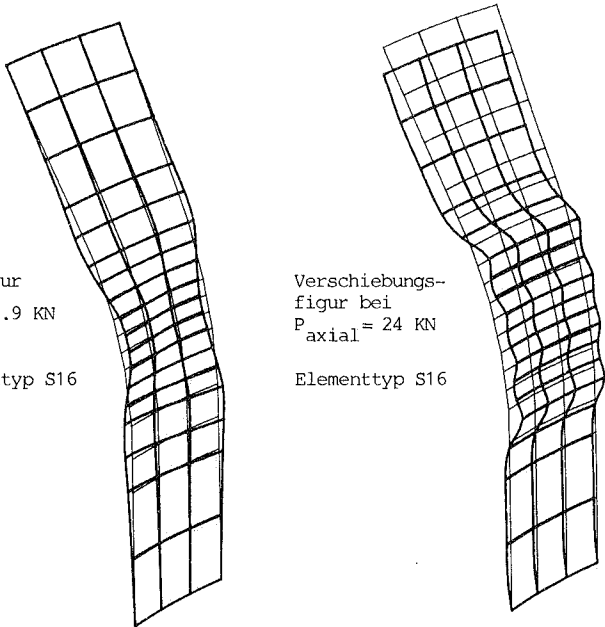


Bild 53. ZTK - Membranspannungen Lastfall Axiallast

wird eine perfekte Struktur in den Nachbeulbereich gerechnet. Dabei muß nach Erreichen des kritischen Punktes mit Hilfe von Störlasten eine Unsymmetrie im Verschiebungsfeld erzeugt werden, damit ein Verzweigen in den Nachbeulbereich erfolgt. Diese Methode ist numerisch sehr sensibel und kann normalerweise nur mit Hilfe eines verschiebungskontrollierten Iterationsverfahrens sinnvoll angewandt werden. Eine andere Möglichkeit ist die Überlagerung der Beulform zum Verschiebungsfeld /67/, was allerdings ebenfalls numerisch empfindlich ist.

Aus der Schale wird ein Sektor von 15 Grad herausgeschnitten und durch 3\*18 Schalenelemente des Typs S16 idealisiert (Bild 51 auf Seite 114). Der Ausschnitt entspricht einer halben Beulwelle in Umfangsrichtung; der Winkel ist aus den Versagenszuständen der Versuche /2/ ermittelt. Zunächst wurde eine lineare Anfangsbeulanalyse ausgeführt, die auf eine kritische Last von  $P=32.9$  KN führte. Die zugehörige unsymmetrische Eigenform ist zusammen mit der symmetrischen Verschiebungsfigur bei  $P=24.0$  KN im Bild 54 auf Seite 117 dargestellt. Das Versagen spielt sich im Torusbereich ab.

Das Lastverschiebungsdiagramm in Bild 52 auf Seite 115 zeigt das Ergebnis der geometrisch nichtlinearen Rechnungen am perfekten und imperfekten System. Als Imperfektion ist die erste Eigenform nach Bild 54 auf Seite 117 mit einer Amplitude von  $w/t=1.0$  überlagert. Bei der perfekten Struktur erhält man nach dem Verzweigen bei  $P=32.9$  KN einen Lastanstieg, das heißt es liegt ein stabiles Nachbeulverhalten vor. Die endgültige Versagenslast liegt mit  $P=41.28$  KN etwa 20% höher als die Ver-



Beulfigur  
 $P_{ki} = 32.9 \text{ KN}$   
Elementtyp S16

Verschiebungs-  
figur bei  
 $P_{axial} = 24 \text{ KN}$   
Elementtyp S16

Bild 54. ZTK - Verschiebung - Beulform - elastisch

zweigungslast. Nichtlineare Rechnungen am imperfekten System erreichen ohne Verzweigen direkt den Durchschlagpunkt, der auch beim imperfekten System mit  $P=39.91 \text{ KN}$  deutlich höher als die lineare Beullast liegt. Dies bestätigt die bisher gewonnenen Ergebnisse der Unempfindlichkeit dieses Schalentyps gegenüber geometrischen Imperfektionen.

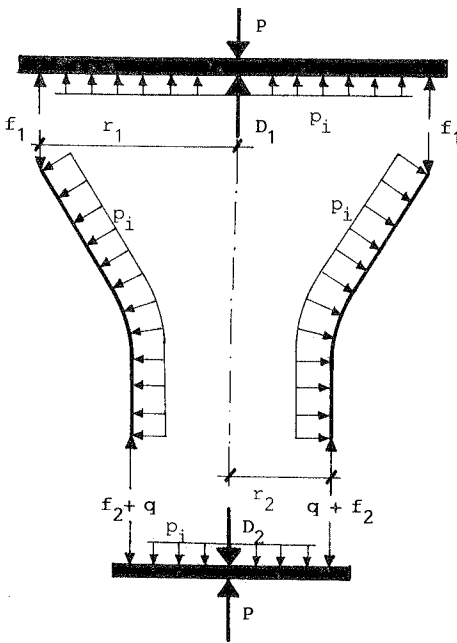
Die Anwendung der üblichen Abminderungsfaktoren für Kegel- oder Zylinderschalen auf die Beullasten dieser kombinierten Schale, würde zu niedrige Bemessungslasten ergeben. Dabei muß allerdings betont werden, daß die Beullasten mit einer FE-Be-

rechnung erhalten wurden und nicht mit Näherungsformeln für ein stark idealisiertes System, z.B. aus /2/.

Die idealen Beullasten liegen bei  $P=154$  KN für den Zylinder und  $P=115$  KN für den Kegel. Der Abminderungsfaktor nach /4/ für den Zylinder ist  $\alpha=0.259$  und führt damit auf eine reale Beullast von  $39.9$  KN. Die mit dem Wert  $\alpha=0.259$  abgeminderte Zylinderbeulspannung  $\sigma=103.6$  N/mm liegt nur geringfügig über dem definierten Grenzwert von  $\sigma_e=0.4 \cdot \sigma_F=96.0$  N/mm und bringt keine Abminderung der Beullast infolge plastischer Einflüsse. Für den Kegel ergeben sich für den oberen Rand  $\alpha=0.232$  und für den unteren Rand  $\alpha=0.251$ . Dies führt auf Beullasten von  $26.6$  bzw.  $28.8$  KN. Der mit dem Programm NISA80 errechnete kritische Wert von  $P=39.9$  KN (elastische Beullast imperfektes System) stimmt fast exakt mit der Zylinderbeullast überein. Diese Übereinstimmung ist hier aber rein zufällig, da die zugrunde liegenden Spannungszustände beim Beulen sehr unterschiedlich sind. Zu beachten ist, daß nach der Richtlinie keine Abminderung infolge Plastizität notwendig ist. Im übernächsten Kapitel wird aber gezeigt, daß die Plastizierung im Torusbereich die reale Traglast des Systems auf  $P=20.7$  KN reduziert und somit elastische Untersuchungen alleine nicht zulässig sind.

### 6.3.2 Elastische Analysen - Axiallast und Innendruck

Der beim Lastfall Wasserfüllung vorhandene zusätzliche Innendruck wird bei diesem System durch eine gleichmäßige Druckbelastung simuliert. Dabei sind Axiallast und Innendruck unabhängig steuerbar (nicht proportionale Belastung). Infolge



$P$  ... gesamte äußere Last (KN)

$p_i$  ... Innendruck

$D$  ... Deckelkräfte (KN)

$f$  ... Randlasten (KN/m)

$$f_1/f_2 = r_2/r_1$$

$$f = P / 2\pi r \quad (r=r_1, r_2)$$

$q$  ... zusätzliche Längskraft  
im Zylinder durch den  
Innendruck

$$Q = \pi (r_1^2 - r_2^2) p_i$$

$$q = Q / 2\pi r_2$$

Lastparameter für die Rechnungen  
mit Innendruck ist die gesamte  
Längskraft im Zylinder  $P - D_2$

Bild 55. Lastfall Axiallast + Innendruck

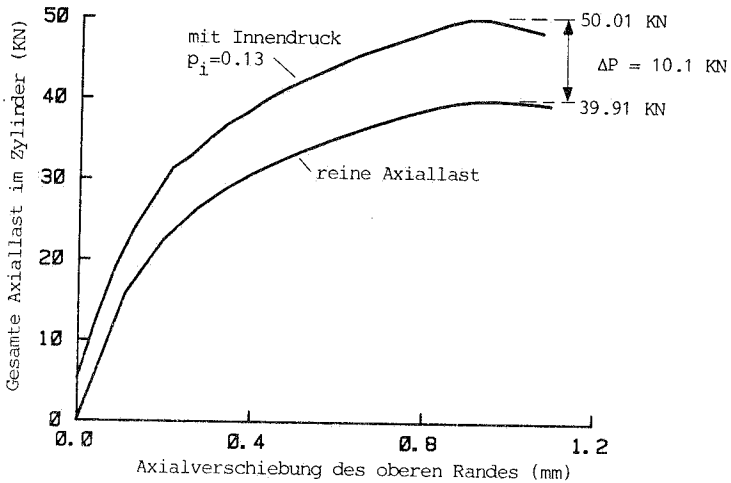


Bild 56. ZTK - LV - elastisch - Axiallast und Innendruck

der Kegelneigung entsteht durch den Innendruck eine zusätzliche Längskraft im Torusbereich, was bei der Beurteilung des Ergebnisses berücksichtigt werden muß. Eine Deckelkraft tritt in der Rechnung, im Gegensatz zum Versuch, nicht auf. Das Bild 55 auf Seite 119 definiert die Lasten, die beim kombinierten Lastfall auftreten. Dabei ist P die gesamte Last am oberen Rand, die in der Rechnung als äußere Last aufgebracht wurde.  $f_1$  und  $f_2$  sind verteilte Kräfte je Einheitslänge am Umfang. Q enthält die zusätzliche Längskraft am unteren Rand der Konstruktion, die aus dem Innendruck auf die schräge Kegelfläche resultiert. Betrachtet man die Deckelkräfte  $D_1$  und  $D_2$ , so ergibt sich  $Q=D_2-D_1$ . Maschinenlasten in einem Versuch enthalten zusätzlich zur Kraft P noch die Deckelkraft  $D_1$  am oberen Rand - für den unteren Rand muß dann  $F=P+Q+D_2$  gelten. Der für die elastische Untersuchung gewählte Innendruck beträgt  $p=0.13 \text{ N/mm}^2$ .

Die in Bild 56 auf Seite 119 dargestellten Lastverschiebungskurven zeigen, daß durch den Innendruck die elastische Beulast ansteigt. Die Erhöhung fällt aber deutlich geringer aus als beim Kegel mit Wasser- bzw. Tangentiallast. Spannungsvergleiche mit dem Kegel unter Wasserlast zeigen, daß ein Innendruck von  $p=0.456$  erforderlich ist, um den gleichen "stabilisierenden" Effekt mit diesem Lastfall zu erreichen. Da das System ohnehin plastisch versagt, wurde auf weitere Rechnungen mit elastischem Material verzichtet. Bei den plastischen Berechnungen wurden auch andere Innendrucke untersucht (siehe Tabelle 12).



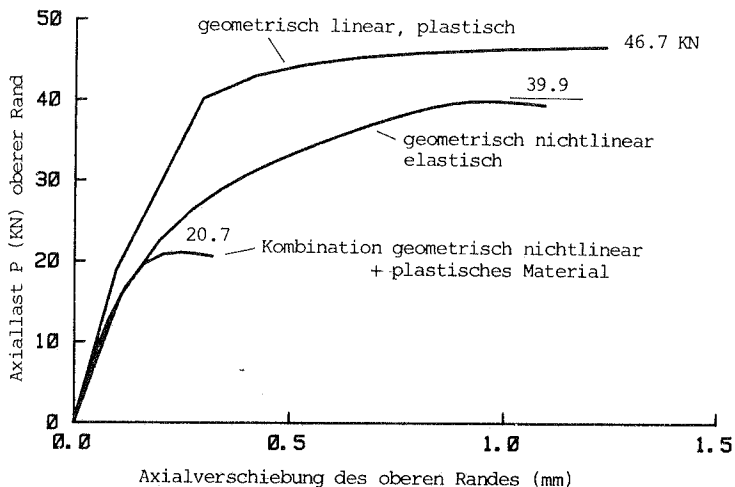


Bild 57. ZTK - LV - plastisch - Axiallast

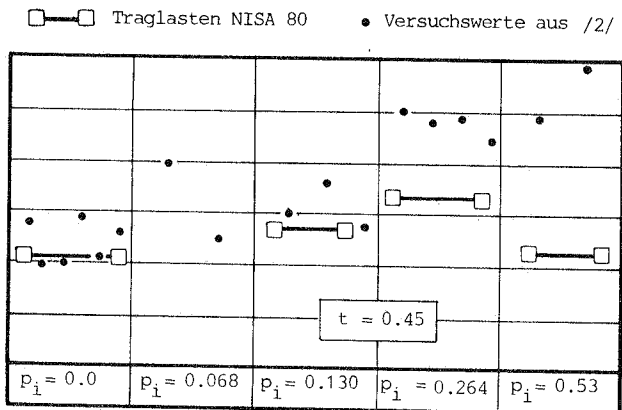


Bild 58. Vergleich Versuch-Rechnung

### 6.3.3 Plastische Analysen - Axiallast

Die vor dem Beulen auftretenden Spannungen in den Knickpunkten der Struktur sind bereits weit oberhalb der Fließgrenze, so daß elasto-plastische Untersuchungen notwendig sind. Die Idealisierung kann beibehalten werden, da sich nur die Materialparameter verändern. Es wird ein ideal elastisches, ideal plastisches Stoffgesetz mit einer Fließgrenze von  $\sigma_F=242 \text{ N/mm}^2$  zugrunde gelegt. Das Lastverschiebungsdiagramm für den Lastfall Axiallast in Bild 57 auf Seite 121 zeigt den deutlichen Abfall der Grenzlast durch die Plastizierung. Zum Vergleich sind sowohl die Ergebnisse der rein geometrisch nichtlinearen wie auch die der rein materiell nichtlinearen Rechnung eingetragen. Daraus ist zu erkennen, daß erst die Kombination aus beiden den starken Abfall der Grenzlast gegenüber der linearen Beullast verursacht. Dies ist für Tragwerke mittlerer Schlankheit ein typisches Phänomen. Die Imperfektionsempfindlichkeit ist bei plastischem Versagen ebenfalls deutlich höher, als bei elastischen Zuständen. Eine Rechnung am perfekten System ergab eine Versagenslast von  $P=26 \text{ KN}$  gegenüber  $P=20.7 \text{ KN}$  für das System mit imperfekter Geometrie.

Da das Plastizieren von den Knickpunkten ausgeht, ist zu überlegen, ob nicht eine Gegenüberstellung beider Geometrieformen - doppelt gekrümmt oder mit Knicken - bei der Berücksichtigung des Materialversagens erfolgen sollte

#### 6.3.4 Plastische Analysen - Axiallast und Innendruck

Beim Kegel unter Wasserlast haben die Ringzugkräfte beim Modell eine stabilisierende Wirkung auf das Beulverhalten ausgeübt, beim realen Bauwerk aus Stahl hingegen, in Verbindung mit dem Längsdruck, zu einem frühzeitigen plastischen Versagen geführt. Die Frage nach dem Materialeinfluß wird jetzt für das System ZTK unter Axiallast und konstantem Innendruck nach Bild 55 auf Seite 119 untersucht. Der wesentliche Unterschied besteht in der getrennten Steuerung von Axiallast und Innendruck, die bei der Wasserfüllung über den gesamten Lastbereich ein konstantes Verhältnis haben. Im Falle getrennter Lastfälle sind beliebige Verhältnisse von Längskraft und Ringkraft einstellbar. Entsprechend Bild 55 auf Seite 119 ist es zweckmäßig, bei Vergleichen mit und ohne Innendruck die effektive Längskraft im Beulbereich am Übergang Torus - Zylinder zu betrachten. Es wird deshalb die resultierende Axialkraft im Zylinder P+Q herangezogen, die in Tabelle 12 in der 4.Spalte aufgeführt ist.

Für das System mit der Wanddicke  $t=0.45\text{mm}$  wird die Traglast der imperfekten Schalen ( $w/t=1.0$  mit beulformaffiner Imperfektion) ermittelt. Neben der Schale mit reiner Axiallast ( $p=0.0$ ) wurden die Fälle  $p=0.13$ ,  $0.264$ ,  $0.450$  und  $0.530 \text{ N/mm}^2$  berechnet und in Tabelle 12 ausgewertet sowie in Bild 58 auf Seite 121 den Versuchen gegenübergestellt.

Der Vergleich Versuch-Rechnung ergibt für die Systeme ohne zusätzlichen Innendruck eine gute Übereinstimmung. Mit zuneh-

mendem Innendruck liegt der errechnete Wert deutlich niedriger als derjenige aus dem Versuch. Beim maximalen Druck von  $p=0.53$  N/mm kann bei der Rechnung nur noch eine sehr kleine äußere Last aufgebracht werden, da das System bereits unter der Wirkung des Innendrucks kurz vor dem Versagen steht. Vergleicht man für diesen Fall den gerechneten Traglastwert mit dem Versuchswert aus /2/, so ist die Differenz in der Größenordnung der Deckelkraft des oberen Randes. In /2/ ist die Last  $F$  und  $p$  nicht definiert. Die hier erhaltenen Ergebnisse führen zu der Vermutung, daß bei den Lastangaben der Versuche die Deckelkraft noch mit enthalten ist.

Die mit dem Programm NISA80 errechneten Traglasten (plastisches Material) für den Lastfall mit Innendruck zeigen eine merkbare Steigerung der Maximallasten gegenüber dem Fall ohne Innendruck. Bei der Kegelschale war eine Beeinflussung der Beullast durch den Innendruck nicht mehr möglich, da der geometrische Effekt des Beulens wegen des dominanten Materialversagens kaum noch Einfluß hatte. Beim hier vorliegenden System ist durch die Interaktion - Beulen und Plastizieren - noch ein Anteil des Beulens vorhanden. Der Innendruck reduziert die Ringdruckspannungen und trägt somit zur Laststeigerung bei. Bei sehr hohen Werten des Innendrucks tritt bereits ein frühzeitiges Fließen ein und läßt keine weitere Steigerung der äußeren Last mehr zu. Dieser Bereich wird allerdings bei einem realen Bauwerk nie erreicht, da die Membranspannung bereits in der Nähe der Fließspannung liegt.

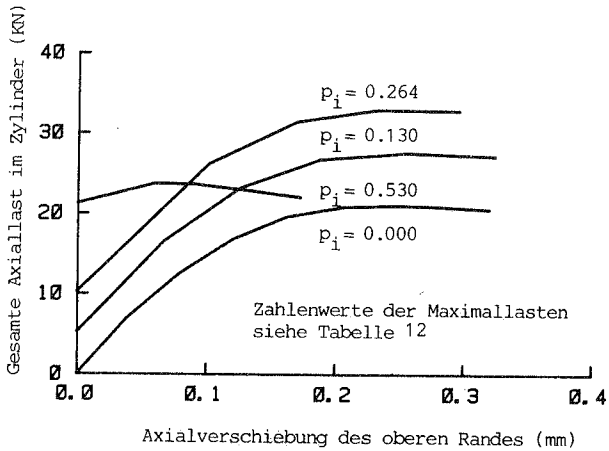


Bild 59. ZTK - LV - plastisch - Axiallast und Innendruck

p	P	Q	P+Q	D
0.000	20.71	0.00	20.71	0
0.130	22.40	5.21	27.61	32%
0.264	22.70	10.26	32.96	57%
0.450	18.04	18.65	36.69	77%
0.530	2.48	21.25	23.73	12%
p = Innendruck P = Axiallast oberer Rand Q = Differenzlast aus Innendruck P+Q = Axiallast unterer Rand D = Erhöhung infolge Innendruck bezogen auf P bei p=0.0 in %				N/mm <sup>2</sup> KN KN KN %

Tabelle 12 : Einfluß des Innendrucks

Die Lastverschiebungskurven mit Axiallast und Innendruck sind im Bild 59 zusammen dargestellt.

## 7.0 Schlußfolgerungen

Diese Arbeit befaßte sich mit degenerierten Schalenelementen und ihre Anwendung auf die Berechnung praktischer Beul- bzw. Traglastprobleme. Es wurde versucht, Hinweise für die sinnvolle Anwendung von nichtlinearen Schalenelementen zu geben. Dabei ist insbesondere an die Auswahl des Elementtyps gedacht, da in vielen Programmen mehrere Elemente zur Auswahl stehen und der Benutzer entscheiden soll, welches sich für seine Anwendung am besten eignet.

Kriterien zur Auswahl eines Elementtyps bei einer praktischen Berechnung sind die Effizienz auf der einen Seite, die Zuverlässigkeit auf der anderen Seite. Keines der vorgestellten Elemente kann beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen. Zu viele Randbedingungen spielen eine Rolle. "Shear Locking" und "Membrane Locking" bringen bei 4,8 und 9-Knoten Elementen immer die Gefahr einer falschen Lösung. Für Berechnungen von Systemen mit noch unbekanntem nichtlinearen Verhalten ist deswegen immer ein zuverlässiges, robustes Element zu empfehlen, das nicht das billigste sein kann. Berücksichtigt man aber nicht nur die Rechenzeit, sondern auch die Bearbeitungszeit, so sind viele Rechenversuche mit Variation von Faktoren oder Verfahren sicher unwirtschaftlicher als eine teure und dafür in kurzer Zeit durchgeführte Rechnung. Die einfachen Elementtypen haben ihre Berechtigung bei Parameterstudien, da dann das prinzipielle Verhalten der Struktur bekannt ist. Hier bieten sich die reduziert integrierten Elemente an, wobei die vollständig reduzierte Integration, eventuell mit "hourglass-

control", bevorzugt werden sollte. Als besonders effektiv bei den Schalenberechnungen hat sich das S8-Element mit 2\*2-Integration erwiesen. Dieses Element enthält keine "Zero-Energy-Modes" und ist für alle Systeme brauchbar. Das "Shear Locking" ist allerdings nicht vollständig beseitigt, so daß auch bei diesem Element Kontrollrechnungen unvermeidlich sind.

Die Anwendungsbeispiele in dieser Arbeit zeigen, daß die Methode der finiten Elemente in der Lage ist, Grenzlastprobleme von Schalen mit einer hohen Genauigkeit zu lösen. Die Berechnungen können Versuche sinnvoll ergänzen, da dort manche Einflüsse nicht getrennt wiedergegeben werden können. Ist die Leistungsfähigkeit eines Elements und des dazugehörigen Programms an Beispielen bewiesen, ist die Durchführung von Parameterstudien sinnvoll möglich. Der Einsatz eines hochentwickelten Programms für nichtlineare Berechnungen ist allerdings nicht ohne Probleme. Die Anforderungen an den Kenntnisstand des Anwenders sind relativ hoch, da die Iterationsverfahren bisher genauso wenig automatisiert angewendet werden können, wie die Auswahl der Elementtypen.

Aus den berechneten Beispielen können für die Beurteilung der Stabilität von flüssigkeitsgefüllten Schalen einige Erkenntnisse gewonnen werden. Der stabilisierende Effekt des Innendrucks ist sowohl bei Kegelschalen als auch bei Torusschalen im elastischen Bereich deutlich merkbar. Die Erhöhung hat allerdings bei beiden Systemen unterschiedliche Ursachen. Beim Kegel wird die Imperfektionsempfindlichkeit abgemindert, bei der Torusschale dagegen der zweiachsige Druckspannungszustand

abgebaut. Die Torusschale ist nicht imperfektionsempfindlich, solange elastische Zustände vorliegen.

Die plastischen Berechnungen zeigen, daß bei den hier berechneten Kegelschalen aus Baustahl mit einem Neigungswinkel von 30 Grad kein Beulproblem mehr vorliegt, da das Materialversagen infolge der hohen Ringspannungen überwiegt. Solche Strukturen können mit einem rotationssymmetrischen Modell berechnet werden.

Die in dieser Arbeit berechneten zusammengesetzten Schalen mit Torusbereichen sind gegen elastisches Beulen nicht imperfektionsempfindlich. Steigerungen der Beullast infolge eines Innendruckes sind der Reduktion der Ringdruckspannungen zuzuschreiben. Bei Einbeziehung des Versagens des Materials ist bei torusförmigen Schalen im untersuchten Bereich von  $r/t=300-400$  eine starke Interaktion zwischen dem geometrischen Einfluß des Beulens und dem Plastizieren vorhanden. Es tritt eine deutlichen Abminderung der Beullast auf. Diese Systeme erfordern im plastischen Bereich immer eine genauere Untersuchung. Der Innendruck steigert die Traglast auch bei plastischem Materialverhalten. Bei sehr hohen Innendrücken kann eine frühzeitige Plastizierung durch die Ringspannungen die aufnehmbare Axiallast reduzieren. Dieser Bereich wird aber durch die übliche Bemessung mit zulässigen Spannungen oder auch zulässigen Lasten nicht erreicht.

Untersuchungen zum Einfluß der Geometrie mit Knicken bei plastischem Verhalten sollten noch ausgeführt werden, da die ho-



hen Biegespannungen sehr früh zum Plastizieren führen und das System dadurch weicher wird. Weitere Parameterstudien mit veränderter Geometrie sind hierzu erforderlich.

## Referenzliste

- /1/ H.Hey, W.Grein : Stabilitätsversuche an Kegel- und Torusmodellen, Stahlbau 11/1984, 338-344
- /2/ U.Schulz : Das Stabilitätsverhalten von torusförmigen Schalen, Stahlbau 11/1983, 321-328
- /3/ D.Vandepitte u.a. : Experimental Investigation of Buckling of Hydrostatically Loaded Conical Shells and Practical Evaluation of the Buckling Load, Buckling of Shells, Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium, Stuttgart 1982, Springer Verlag, 375-399
- /4/ Deutscher Ausschuss für Stahlbau : DAST-Richtlinie 0.13 Beulsicherheitsnachweise für Schalen, 1980
- /5/ ECCS : European Recommendations for Steel Construction : Buckling of Shells.
- /6/ E.Ramm, H.Stegmüller : The Displacement Finite Element Method in Nonlinear Buckling Analysis of Shells, Buckling of Shells, Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium, Stuttgart 1982, Springer Verlag, 210-236
- /7/ H.Bufler : Erweiterung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen und des Prinzips der virtuellen Kräfte, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 50, 1970, 104-108

- /8/ H.Bufler : Die erweitertern Variationsgleichungen der dünnen Platte, Ingenieurarchiv 39, 1970, 330-340
- /9/ K.Washizu : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press, 1975
- /10/ H.Shimodaira : Equivalence between Mixed Models and Displacement Models Using Reduced Integration, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.21, 1985, 89-104
- /11/ D.Talaslidis, G.Wempner : A Simple Finite Element For Elastic-Plastic Deformations of Shells, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 34, 1982, 1051-1064
- /12/ G.Wempner, D.Talaslidis, C.-M. Hwang : A Simple and Efficient Approximation of Shells via Finite Quadrilateral Elements, Journal of Applied Mechanics, Vol.49, 1982, 115-120
- /13/ A.K.Noor, C.M.Andersen : Mixed Models and Selective/Reduced Integration Displacement Models for Nonlinear Shell Analysis, Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells, AMD-Vol.48, 1981, 119-146
- /14/ J.H.Argyris, D.W.Scharpf : The SHEBA Family of Shell Elements for the Matrix Displacement Method. Part III: Large Displacements, The Aero. J. of the Roy. Soc. 73, 1969, 423-426

- /15/ G.A.Wempner, J.T.Oden, D.A.Kross : Finite-Element Analysis of Thin Shells, Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol.94, 1968, 1273-1294
- /16/ G.S.Dhatt : An Efficient Triangular Shell Element, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Vol.8, 1970, 2100-2102
- /17/ I.Fried : Shear in C1 and C0 Bending Finite Elements, International Journal of Solids and Structures, Vol.9, 1973, 771-778
- /18/ J.H.Argyris, H.Balmer, M.Kleiber, U.Hindelang : Natural Description of Large Inelastic Deformations for Shells of Arbitrary Shape - Application of the TRUMP Element, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 22, 361-390 1980
- /19/ J.-L. Batoz, K.-J.Bathe, L.-W. Ho : A Study of Three-Node Triangular Plate Bending Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.15, 1980, 1771-1812
- /20/ K.-J.Bathe, L.- W.Ho : A Simple and Efficient Element for Analysis of General Shell Structures, Computer & Structures, Vol.13, 1981, 673-681
- /21/ S.Ahmad, B.M.Irons, O.C.Zienkiewicz : Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements, In-

ternational Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.2, 1970, 419-451

- /22/ E.Ramm : Geometrische nichtlineare Elastostatik und finite Elemente Bericht Nr.76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976
- /23/ E.Ramm : Finite Elemente für Tragwerksberechnungen, Vorlesung Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1984
- /24/ T.H.H.Pian, P.Tong : Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.1, 1969, 3-28
- /25/ W. Kanok-Nukulchai : A Simple and Efficient Finite Element for General Shell Analysis, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.14, 1979, 179-200
- /26/ M.Mukhopadhyay, D.K.Dinker : Isoparametric Linear Bending Element and One-Point Integration, Computer & Structures, Voll2 ,1980, 365-369
- /27/ W.Wunderlich, H.J.Rensch, H.Obrecht : Analysis of Elastic-Plastic Buckling and Imperfektion-Sensitivity of Shells of Revolution, Buckling of Shells, Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium, Stuttgart 1982, Springer Verlag, 137-174

- /28/ G.Prathap, G.R.Bhasyam : Reduced Integration and the Shear Flexible Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.18, 1982, 195-210
- /29/ G.Prathap : An Optimally Constrained 4 Node Quadrilateral Thin Plate Bending Element, Computer & Structures, Vol.18, No.5, 1984, 798-794
- /30/ R.H.McNeal : A Simple Quadrilateral Shell Element, Computer & Structures, Vol.8, 1978, 175-183
- /31/ T.J.R.Hughes, T.E.Tezduyar : Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory With Particular Reference to the Four-Node Bilinear Isoparametric Element, Journal of Applied Mechanics, Vol.48, 1981, 587-596
- /32/ E.N.Dvorkin, K.-J. Bathe : A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis, Engineering Computations, 1984, Vol.1 ,No.1, 77-88
- /33/ T.Belytschko, C.-S. Tsay : A Stabilization Procedure for the Quadrilateral Plate Element with One-Point Quadrature, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, 1983, 405-419
- /34/ T.J.R.Hughes, R.L.Taylor, W.Kanok-Nukulchai : A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.11, 1977, 1529-1543

- /35/ O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor, J.M.Too : Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.3, 1971, 275-290
- /36/ H.Parisch : A Critical Survey of the 9-Node Degenerated Shell Element With Special Emphasis on Thin Shell Application and Reduced Integration, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 20, 1979, 323-350
- /37/ S.F.Pawsey, R.W.Clough : Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.3, 1971, 575-586
- /38/ H.Stegmüller, E.Ramm, J.M.Sättele, L.Häfner : Theoretische Grundlage des Programmsystems NISA80, Mitteilung Nr.1 des Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1983
- /39/ H.Parisch : Large Displacements of Shells Including Material Nonlinearities, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 27, 1981, 183-214
- /40/ J.-M. Sättele : Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität, Bericht Nr.80-3, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1980

- /41/ G.Prathap, S.Viswanath : An Optimally Integrated Four-Node Quadrilateral Plate Bending Element, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, 1983, 831-840
- /42/ E.D.L. Pugh, E.Hinton, O.C.Zienkiewicz : A Study of Quadrilateral Plate Bending Elements With Reduced Integration, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.12, 1978, 1059-1079
- /43/ N.J.McNeill, J.S.Hansen : An Accuracy Study for a Class of Rectangular Isoparametric Finite Elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 25, 1981, 335-341
- /44/ S.Kimmich : Untersuchungen zum Elementverhalten von degenerierten, isoparametrischen Platten- und Schalenelementen, Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1983
- /45/ L.S.Morley : Quality of Trial Functions in Quadratic Isoparametric Representation of an Arc, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.19, 1983, 37-47
- /46/ B.Brendel, E.Ramm, F.W.Bornscheuer : Stabilitätsuntersuchungen weitgespannter Flächentragwerke, Sonderforschungsbereich 64, Mitteilung 57/1980, Universität Stuttgart



- /47/ T.J.R Hughes, M.Cohen, M.Haroun : Reduced and Selective Integration Techniques in the Finite Element Analysis of Plates, Nuclear Engineering and Design 46, 1978, 203-222
- /48/ T.J.R.Hughes, M.Cohen : The Heterosis Finite Element for Plate Bending, Computer & Structures, Vol.9, 1978, 445-450
- /49/ M.A.Crisfield : A Quadratic Mindlin Element Using Shear Constraints, Computer & Structures, Vol.18, No.5, 1984, 833-852
- /50/ T.Belytschko, J.S.Ong, W.K.Liu : A consistent control of spurious singular modes in the 9-node Lagrange element for the Laplace and Mindlin plate equations, Computer Methods in Applied Mechnics and Engineering 44, 1984, 269-2956
- /51/ Li Xi-Kui, Guo-Quiang Liu, D.J.R Owen : Geometrically Nonlinear Analysis of Thin Plates and Shells Using a Generalized Displacement Method. Engeneering Computations, Vol.1, No.4, 1984, 318-323
- /52/ H.C.Huang, E.Hinton : A Nine Node Lagrangian Mindlin Plate Element With Enhanced Shear Interpolation. Engineering Computations, Vol.1, No.4, 1984, 369-379

- /53/ H.Stolarski, T.Belytschko : Shear and Membrane Locking in Curved Co-Elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 41, 1983, 279-296
- /54/ E.Hinton, N.Bicanic : A Comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin Plate Elements for Free Vibration Analysis, Computer & Structures, Vol.10, 1979, 483-494
- /55/ R.L.Spilker, N.I.Munir : A Hybrid-Stress Quadratic Serendipity Displacement Mindlin Plate Bending Element, Computer & Structures, Vol.12, 1980, 11-21
- /56/ E.Ramm : Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points, Proc. Europe - U.S.Workshop on "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", Bochum 1980, Springer-Verlag 1981
- /57/ K.-J.Bathe, E.Dvorkin : Our Discrete-Kirchhoff and Iso-parametric Shell Elements for Nonlinear Analysis - An Assessment, Computer & Structures, Vol.16, 1983, 89-98
- /58/ W.Flügge : Stresses in Shells, Springer-Verlag 1966
- /59/ A.Pflüger : Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Springer-Verlag 1975
- /60/ D.O.Brush, B.O.Almroth : Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill Book Company 1975

- /61/ L.Kollar, E.Dulacska : Buckling of Shells for Engineers,  
John Wiley and Sons, 1984
- /62/ K.Schiffner : Spannungs- und Stabilitätsverhalten an  
dünnwandigen Kegelschalen bei axialsymmetrischen Randbe-  
dingungen, DLV-Bericht 508, 1966
- /63/ R.Ender : Das Stabilitätsverhalten der axial gedrückten  
Kegelstumpfschale, Mitteilung des Instituts für Statik  
der Universität Hannover Nr.27, 1981
- /64/ H.Hey, P.John : Beullasten wassergefüllter rotatonssym-  
metrischer Schalen in Kegel- und Torusform. Interner  
Bericht Höchst AG
- /65/ W.Schnell, K.Schiffner : Experimentelle Untersuchungen  
des Stabilitätsverhaltens von dünnwandigen Kegelschalen  
unter Axiallast und Innendruck, DLV-Bericht 243, 1962
- /66/ J.W.Hutchinson : Axial Buckling of Pressurized Imperfect  
Cylindrical Shells AIAA-Journal, Vol.3, 1965, 1461-1466
- /67/ H.Stegmüller, E.Ramm, F.W.Bornscheuer : Stability and  
Ultimate Load Analysis of Liquid Filled Conical Shells,  
Third International Colloquium on Stability of Metal  
Structures, Paris, Nov. 1983
- /68/ A.Kalnins : KSHELL - Computer Program for Stress Analysis  
of Axisymmetric Shells

- /69/ P.F.Jordan : Buckling of Toroidal Shells under Hydrostatic Pressure, AIAA-Journal, Vol.11, 1973, 1439-1441
- /70/ M.Stein, J.A.McElman : Buckling of Segments of Toroidal Shells, AIAA-Journal, Vol.3, 1965, 1704-1709
- /71/ L.H.Sobel, W.Fluegge : Stability of Toroidal Shells under Uniform External Pressure AIAA-Journal, Vol.5, 1967, 425-431
- /72/ M.Esslinger, J.Ciprian : Buckling of Thin Conical Shells Under Axial Loads with and without Internal Pressure, Buckling of Shells, Proceedings of a State-of-the-Art Colloquium, Stuttgart 1982, Springer Verlag, 355-374
- /73/ M.Esslinger, B.Geier : Bemerkungen zur DAST-Richtlinie 013, Stahlbau 2/1982, 37-40
- /74/ J.W.Hutchinson : Initial Post-Buckling Behaviour of Toroidal Shell Segments. International Journal of Solids and Structures 3/1967, 97-115

## Anhang - Teil A

### Geometrische Matrix DKT - Element:

P.d.v.V.:

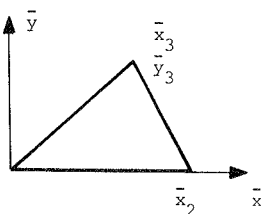
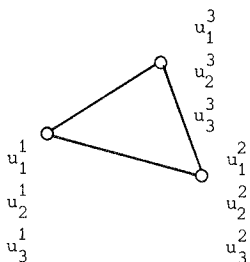
$$\int_1 s_{ij} \delta_1 \epsilon_{ij} d^1v + \int_1 \tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} d^1v = \delta^2 w_a - \int_1 \tau_{ij} \delta_1 e_{ij} dv$$

$s_{ij}$  ... Spannungszinkrement (unbekannt)

$\tau_{ij}$  ... Cauchy - Spannung, Zustand 1

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} u_{k,j} \quad (\text{nichtlinearer Verzerrungsanteil})$$

$$\delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{k,i} u_{k,j} + u_{k,i} \delta u_{k,j}) = \delta u_{k,i} u_{k,j}$$



$$A = \frac{1}{2} x_2 x_3$$

Elementfläche

In den allgemeinen Ansatz für  $u_1, u_2, u_3$  für ein lineares Verschiebungsfeld eines Dreiecks werden die speziellen geometrischen Beziehungen für das abgebildete Element eingeführt

$$(x_{ij} = x_i - x_j).$$

$$u_i = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{aligned} &(\bar{x}_2 \bar{y}_3 - \bar{y}_3 \bar{x}_2 + \bar{x}_{32} \bar{y}) u_i^1 \\ &+ (\bar{y}_3 \bar{x} - \bar{x}_3 \bar{y}) u_i^2 \\ &+ (\bar{x}_2 \bar{y}) u_i^3 \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = u_{i,1} = \frac{1}{2A} (-\bar{y}_3 u_i^1 + \bar{y}_3 u_i^2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = u_{i,2} = \frac{1}{2A} (+\bar{x}_{32} u_i^1 - \bar{x}_3 u_i^2 + \bar{x}_2 u_i^3)$$

$$u_{i,3} = 0$$

Diskretisierung:

$$\int_1^1 \tau_{ij} \delta_1 n_{ij} d^1v = \int_1^1 \tau_{ij} \delta_1 u_{k,i} 1 u_{k,j} d^1v$$

$$\mathbf{d} = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u} \quad \text{mit } \mathbf{d} = [u_{1,1}, u_{2,2}, u_{3,3} \dots]$$

$$\tau_{ij} = \mathbf{S}$$

$$\mathbf{K}_G = \int \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} \mathbf{B} dv$$

	$u_1^1$	$u_2^1$	$u_3^1$	$u_1^2$	$u_2^2$	$u_3^2$	$u_1^3$	$u_2^3$	$u_3^3$
$u_{1,1}$	$-\bar{y}_3$			$\bar{y}_3$					
$u_{1,2}$	$\bar{x}_{32}$			$-\bar{x}_3$			$\bar{x}_2$		
$u_{2,1}$		$-\bar{y}_3$			$\bar{y}_3$				
$u_{2,2}$		$\bar{x}_{32}$			$-\bar{x}_3$			$\bar{x}_2$	
$u_{3,1}$			$-\bar{y}_3$			$\bar{y}_3$			
$u_{3,2}$			$\bar{x}_{32}$			$-\bar{x}_3$			$\bar{x}_2$

$\frac{1}{2A}$

Matrix  $\hat{\mathbf{B}}$

Krümmungsanteile werden vernachlässigt, so daß aus der Spannungsmatrix  $\mathbf{S}$  nur die konstanten Anteile verwendet werden.

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12} & N_{22} \end{bmatrix}$$

$$N_{11} = \int_{-h/2}^{+h/2} s_{11} d\bar{z}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\mathbf{N}} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mathbf{N}} \end{bmatrix}$$

Alle Matrizen sind jetzt unabhängig von  $\bar{x}$  und  $\bar{y}$ .

$$\mathbf{K}_G = \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{N} \hat{\mathbf{B}} A$$

## Anhang - Teil B

### Beulberechnung nach der DAST - Richtlinie 013:

Nur zu Vergleichszwecken - Richtlinie gilt nicht für diesen Fall!

Abminderungsfaktor:

$$\alpha_1 = \frac{0,52}{1 + \frac{r}{100 t \cdot \cos \alpha}} = \frac{0,52}{1 + \frac{243}{34 \cdot \cos 32^\circ}} = 0,169$$

Wirkung des Innendrucks:

$$\bar{q} = \frac{q_i}{E} \left( \frac{r}{t \cos \alpha} \right)^2$$

$$q_i = 0,04 \quad (\text{am Kegelaufleger})$$

$$\bar{q} = \frac{0,04}{4300} \cdot \left( \frac{243}{0,34 \cdot \cos 32^\circ} \right)^2 = 0,660$$

Aus Bild 2.7 (DAST - Richtlinie) folgt:

$$\Delta \alpha = 0,3$$

Gesamtabminderungsfaktor:

$$\alpha = 0,169 + 0,3 = 0,469$$

Ideale Beulspannung:

$$\sigma_{Ki} = 0,605 \cdot E \cdot \frac{t}{r} \cdot \cos \alpha = 3,08 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_e = \alpha \cdot \sigma_{Ki} = 1,445 \text{ N/mm}^2$$

$$g_e = \frac{1,445}{2,33} = 0,620$$

↑  
Spannung bei Vollfüllung

Bei einer Dichte von  $\gamma = g \cdot \gamma_0 = 0,620 \cdot 10^{-5} \text{ N/mm}^3$  ist die Beul-  
last erreicht:  $\gamma_0 = 1,0 \cdot 10^{-5}$  (Wasser).

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,  
K. Papailiou, J. M. Sättele:  
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:  
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur  
Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdreh-  
beanspruchter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:  
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer  
Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:  
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale  
und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plat-  
tenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,  
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:  
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und  
Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskreti-  
sierten und erweiterten Trefftz - Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O. :  
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger drei-  
zelliger Träger unter Berücksichtigung der Profil-  
verformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,  
G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich,  
K. H. Schweizerhof, F. Seible:  
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.  
Teil II.



- 76-2 E. Ramm:  
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:  
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:  
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:  
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H.-G. Berg:  
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:  
Fallstudien zu Schalentragerwerken (in englischer Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:  
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:  
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Platten-tragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:  
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.

- 82-1 L. Häfner:  
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität  
und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:  
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter ver-  
formungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3 H.-P. Andrä:  
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flach-  
decken.
- 1 (1983) P. Osterrieder:  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei  
großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und  
physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbe-  
tonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter  
Kreiszyllinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und  
Formabweichungen unter Innendruck und Stützen-  
längskraft.