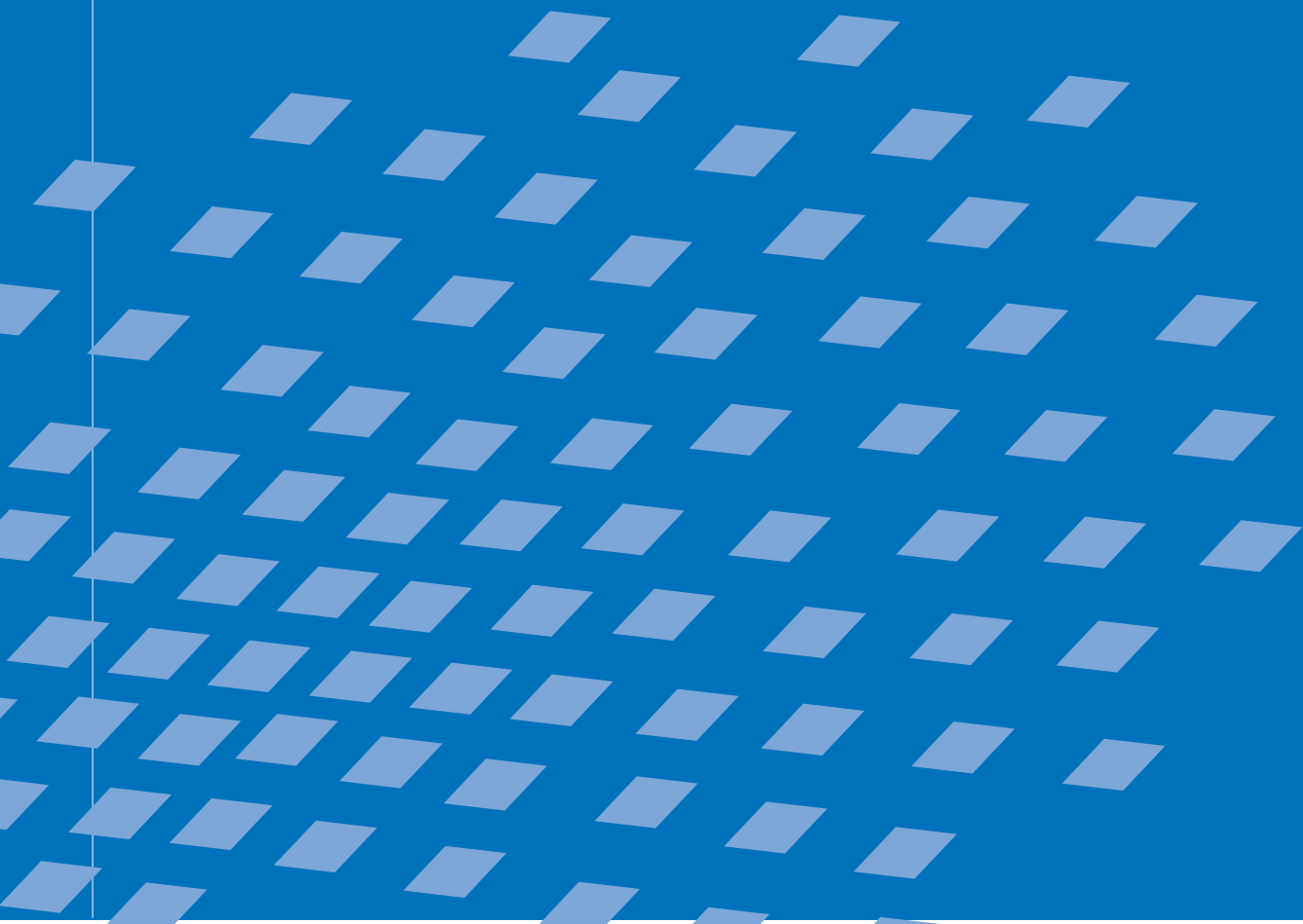




Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen

Stefan Hartmann



Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen

von

Stefan Hartmann

Bericht Nr. 49 (2007)

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

Stuttgart 2007



© Stefan Hartmann

Berichte können bezogen werden über:
Institut für Baustatik und Baudynamik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 7
D-70550 Stuttgart
Tel.: ++49 (0) 711 / 685 661 23
Fax: ++49 (0) 711 / 685 661 30
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.

D93 – Dissertation an der Universität Stuttgart
ISBN 978-3-00-021517-9

Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Stefan Hartmann

aus Kempten im Allgäu

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm

Mitberichterin: Prof. Dr. rer. nat. Barbara Wohlmuth

Tag der mündlichen Prüfung: 10. April 2007

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der numerischen Simulation von Kontaktproblemen dünnwandiger Strukturen unter Verwendung der Methode der Finiten Elemente. Dazu wird eine mortar-basierte Kontaktformulierung vorgestellt und mit geeigneten räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsstrategien verknüpft.

Aufbauend auf die 7-Parameter-Schalenformulierung von Büchter und Ramm (1992) wird im Hinblick auf eine sinnvolle Kopplung mit der elementunabhängigen Kontaktbeschreibung ein trilineares oberflächenorientiertes hybrides Volumen-Schalen-Element hergeleitet. Ergänzend wird auf der Basis des Prinzips von Hu-Washizu ein trilineares geometrisch nichtlineares Volumenelement ausgearbeitet. Numerische Untersuchungen dokumentieren die Leistungsfähigkeit beider FE-Formulierungen.

Für die zeitliche Diskretisierung werden zwei implizite Zeitintegrationsalgorithmen eingesetzt. Neben dem bestehenden „Generalized- α “-Verfahren findet vor allem die „Generalized-Energy-Momentum-Method“ Anwendung. Diese erweist sich in allen durchgeführten numerischen Analysen als unbedingt stabil.

Hauptbestandteil dieser Arbeit ist die Erweiterung der in Hüeber und Wohlmuth (2005) vorgestellten Mortar-Kontaktformulierung auf den geometrisch nichtlinearen Fall. Durch die Einführung von kontinuierlich approximierten Lagrange-Multiplikatoren, die physikalisch den Kontaktdruck repräsentieren, wird die einzuhaltende Inpenetrabilitätsbedingung in einem schwachen integralen Sinne formuliert. Die Wahl von dualen Ansatzfunktionen (Wohlmuth (2000)) zur Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren ermöglicht die knotenweise Entkopplung der zu erfüllenden geometrischen Randbedingungen. In Kombination mit einer Aktiven-Mengen-Strategie entsteht ein Algorithmus, der die Elimination der diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren erlaubt. Diese lassen sich in einer Nachlaufrechnung variationell konsistent in Abhängigkeit der Verschiebungen berechnen. Der resultierende Kontaktalgorithmus vereint, im Gegensatz zu vielen anderen Formulierungen, zwei wesentliche Vorteile: Lediglich die diskreten Knotenverschiebungen treten als primäre Unbekannte auf, wodurch die Größe des abschließend zu lösenden Gleichungssystems konstant bleibt; es sind keinerlei benutzerdefinierte Parameter, wie beispielsweise ein Penalty-Parameter, notwendig.

Detaillierte numerische Untersuchungen dynamischer Kontaktprobleme verdeutlichen die Notwendigkeit zusätzlicher algorithmischer Energieerhaltungsstrategien. Die von Laursen und Love (2002) vorgestellte „Velocity-Update“-Methode zeichnet sich dadurch aus, dass sie die exakte Energieerhaltung bei gleichzeitiger Erfüllung der geometrischen Nichtdurchdringungsbedingung garantiert. Sie wird entsprechend der vorgestellten Kontaktformulierung überarbeitet und für die Kombination mit der „Generalized-Energy-Momentum-Method“ verallgemeinert.

Anhand von numerischen Beispielen wird die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Lösungsstrategie analysiert und bewertet.

Abstract

The present thesis is concerned with the numerical simulation of contact problems of thin-walled structures using the finite element method. A mortar-based contact formulation is presented and combined with suitable strategies for the discretization in space and time.

In view of a useful coupling with the element independent contact description, a trilinear surface oriented hybrid shell element is derived on the basis of the 7-parameter shell model by Büchter and Ramm (1992). Additionally, a trilinear geometric nonlinear brick element based on the principle of Hu-Washizu is devised. Numerical tests demonstrate the performance of both element formulations.

For the discretization in time, two implicit time integration algorithms are used. In addition to the existing „Generalized- α “-Method especially the „Generalized-Energy-Momentum-Method“ is applied. The latter is proven to be unconditionally stable in all performed numerical analyses.

The essential part of this thesis is the extension of the mortar contact formulation presented by Hübner and Wohlmuth (2005) to the geometrically nonlinear regime. Introducing continuously approximated Lagrange Multipliers, physically representing the contact pressure, the geometric impenetrability condition is formulated in a weak, integral sense. Using dual shape functions (Wohlmuth (2000)) for the interpolation of the Lagrange Multipliers allows for a nodal decoupling of the geometric constraints. The combination with an active set strategy results in an algorithm which allows for elimination of the discrete nodal values of the Lagrange Multipliers. They can be easily recovered from the displacements in a variational consistent way. In contrast to many other formulations, the resulting contact algorithm combines two main advantages: Only the discrete nodal displacements appear as primal unknowns, thereby the size of the system of equations to be solved remains constant; there is no need for any user defined parameters like a penalty parameter.

Detailed numerical analyses of dynamic contact problems illustrate the necessity of additional, algorithmic energy-conserving strategies. The „Velocity-Update“-method by Laursen and Love (2002) is characterized by the fact that it guarantees the exact conservation of energy while simultaneously satisfying the geometric impenetrability condition. This method is revised according to the presented contact formulation and generalized for combination with the „Generalized-Energy-Momentum-Method“.

Numerical examples are investigated to analyze and judge the effectiveness of the proposed solution strategy.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2002 bis 2007 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart.

Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Professor Ekkehard Ramm bedanken: Für seinen engagierten und motivierenden Lehrstil, der mich bereits als Student fasziniert hat, für das durch ihn ins Leben gerufene Austauschprogramm mit der University of Calgary, das mir ein unvergessliches Jahr jenseits des Atlantiks ermöglicht hat, für die Anregung dieser Arbeit und die Möglichkeit, diese in einem optimalen Umfeld zu bearbeiten. Vor allem aber für seine stetige Förderung, sein Vertrauen und seine persönliche Unterstützung.

Frau Professor Barbara Wohlmuth möchte ich nicht nur für die Übernahme des Mitberichtes und die sehr zügige Durchsicht meiner Arbeit herzlich danken, sondern auch für die vorausgegangene fachliche Zusammenarbeit, die sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen hat. Ihren Mitarbeitern am Lehrstuhl für Angewandte Mathematik, Numerik für Höchstleistungsrechner Stephan Brunßen und Stefan Hüeber danke ich für die vielen intensiven Diskussionen, die konstruktive Zusammenarbeit und nicht zuletzt für die kritische Durchsicht meiner Arbeit.

Meinem neuen Chef Professor Manfred Bischoff danke ich für die vielen spontanen fachlichen Gespräche, die freundschaftliche Zusammenarbeit und die Weiterbeschäftigung am Institut.

Meinen Kollegen danke ich für das freundschaftliche und produktive Arbeitsklima, die große Hilfsbereitschaft, die zahlreichen fachlichen Diskussionen, vor allem aber auch für die gemeinsamen Stunden beim Skifahren und Wandern. Ein großer Dank vor allem an Malte von Scheven, der unermüdlich meine zahllosen technischen Fragen beantwortete und mir stets mit Rat und Tat zur Seite stand. Thomas Cichosz danke ich für das Korrekturlesen meiner Arbeit.

Ganz herzlich danke ich meinen Eltern für ihr Vertrauen, ihre stetige Unterstützung und für viele erholsame Wochenenden im schönen Allgäu. Meinen Schwiegereltern möchte ich für die tatkräftige Unterstützung bei der Kinderbetreuung vor Ort bedanken. Ein ganz spezielles Dankeschön an meine Schwiegermutter für die intensive und sorgfältige Durchsicht der vorliegenden Arbeit.

Von ganzem Herzen danke ich meiner lieben Frau Mareike für die liebevolle, tatkräftige und motivierende Unterstützung während meiner Promotion. Ein großer Anteil am Gelingen dieser Arbeit gebührt auch meinen Kindern, Jannes, Jona und Lara, die sehr viel Glück und Freude in mein Leben gebracht haben und mich meist in kürzester Zeit auf andere Gedanken gebracht haben.

Stuttgart, im Mai 2007

Stefan Hartmann

Inhalt

1	Einführung	1
1.1	Motivation und Stand der Technik	1
1.2	Ziel der Arbeit	3
1.3	Übersicht	4
2	Grundlagen	7
2.1	Nichtlineare Kontinuumsmechanik	7
2.1.1	Differentialgeometrie	7
2.1.2	Kinematik und Verzerrungsmaß	8
2.1.3	Materialgesetz und Spannungsmaß	9
2.1.4	Dynamische Gleichgewichtsbedingungen	10
2.1.5	Das dynamische Anfangsrandwertproblem	11
2.1.6	Energieprinzipien	11
2.2	Kontaktmechanik für große Deformationen	14
2.2.1	Problembeschreibung	14
2.2.2	Normalkontakt	15
2.2.3	Kontaktrandbedingungen in Tangentialrichtung	18
2.2.4	Das dynamische Anfangsrandwertproblem mit Kontakt	21
2.2.5	Schwache Form des Kontaktproblems	22
2.3	Lösungsverfahren	23
2.3.1	Räumliche Diskretisierung	23
2.3.2	Zeitliche Diskretisierung	24
2.3.3	Iteratives Lösungsverfahren	25
3	Volumenorientierte Finite Elemente für dünnwandige Strukturen	26
3.1	Einführung	26
3.2	7-Parameter-Schalenformulierung	27
3.2.1	Kinematische Annahmen	27
3.2.2	Vorabintegration der Spannungen und des Stoffgesetzes	30
3.2.3	Schwache Form	31
3.3	Räumliche Diskretisierung des 7-Parameter-Modells	32
3.3.1	Diskretisierung über Größen der Schalenmittelfläche	32
3.3.2	Diskretisierung über Größen der Schalenoberflächen	35
3.3.3	Linearisierung	37

3.4	Künstliche Versteifungseffekte	39
3.4.1	Querschublocking	39
3.4.2	Membranlocking	40
3.4.3	Schublocking	40
3.4.4	Volumetrisches Locking	40
3.4.5	Dickenlocking bei gekrümmten Elementen	41
3.5	Methoden zur Reduzierung von Versteifungseffekten	41
3.5.1	Die Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS)	41
3.5.2	Die Enhanced-Assumed-Strain-Methode (EAS)	42
3.5.3	Alternative Methoden	42
3.6	Ein Hu-Washizu-Volumenelement	43
3.6.1	Variationelle Basis	44
3.6.2	FE-Approximation und Modifikation der variationellen Basis	45
3.6.3	Diskretisierung	46
3.6.4	Linearisierung	48
3.7	Numerische Beispiele	49
3.7.1	Die geschlitzte Kreisringplatte	50
3.7.2	Halbkugel mit Loch	51
3.7.3	Offene Zylinderschale	53
3.7.4	Eingespannter Halbzylinder	55
3.8	Zusammenfassung	56
4	Stabile Zeitintegrationsverfahren	58
4.1	Überblick	58
4.2	Das „Generalized- α “-Verfahren (Gen $_{\alpha}$)	60
4.2.1	Modifizierte semidiskrete Bewegungsgleichung	60
4.2.2	Effektive Strukturgleichung und Linearisierung	61
4.3	Die „Generalized-Energy-Momentum-Method“ (GEMM)	63
4.3.1	Algorithmische interne Kräfte	63
4.3.2	Linearisierung der internen virtuellen Arbeit	64
4.3.3	Effektive Strukturgleichung	66
4.3.4	Numerischer Mehraufwand	67
4.4	Zusammenfassung des gesamten Lösungsalgorithmus	68
4.5	Numerisches Beispiel: Das „geworfene Lineal“	70
5	Lösungsverfahren für Kontaktprobleme	73
5.1	Reibungsfreier Kontakt für große Deformationen	74
5.2	Regularisierungsstrategien	74
5.2.1	Die Lagrange-Multiplikator-Methode	74
5.2.2	Die Penalty-Methode	77
5.2.3	Augmented-Lagrange-Methode	78

5.3	Diskretisierungsstrategien	79
5.3.1	Knoten-Segment Kontaktelement	79
5.3.2	Segment-Segment Diskretisierung	80
5.4	Die Mortar-Methode	81
5.4.1	Allgemeines	81
5.4.2	Problemstellung	82
5.4.3	Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren	84
5.4.4	Diskussion und Anwendung für Kontaktprobleme	88
5.5	Zusammenfassung	89
6	Räumliche Diskretisierung des Kontaktes	90
6.1	Kontakt eines deformierbaren Körpers mit starrem Hindernis	90
6.1.1	Schwache Form der Kontaktarbeit	91
6.1.2	Diskretisierung der Kontaktarbeit	92
6.1.3	Semidiskrete Form des Randwertproblems	93
6.1.4	Effektives, inkrementelles Strukturgleichungssystem	93
6.2	Kontakt zweier deformierbarer Körper	95
6.2.1	Schwache Form der Kontaktarbeit	95
6.2.2	Diskretisierung der Kontaktarbeit	96
6.2.3	Semidiskrete Form des Randwertproblems	97
6.2.4	Effektives, inkrementelles Strukturgleichungssystem	98
6.3	Diskrete, duale Ansatzfunktionen	99
6.3.1	Zweidimensionale Probleme	99
6.3.2	Dreidimensionale Probleme - unverzerrte Netze	100
6.3.3	Dreidimensionale Probleme - beliebige, verzerrte Netze	101
6.4	Numerische Integration der Kopplungsmatrizen	102
6.4.1	Berechnung der Einträge für die Diagonalmatrix	102
6.4.2	Berechnung der Einträge für die Kopplungsmatrix	103
6.5	Zusammenfassung	107
7	Kontakt-Randbedingungen – Aktive-Mengen-Strategie	108
7.1	Normalkontakt eines deformierbaren Körpers mit starrem Hindernis	108
7.1.1	Schwache, inkrementelle Nichtdurchdringungsbedingung	108
7.1.2	Schwache, inkrementelle Nichtdurchdringungsbedingung - Alternative Herleitung	110
7.1.3	Aktive-Mengen-Strategie	111
7.1.4	Modifikation der effektiven, inkrementellen Strukturgleichung	114
7.1.5	Gesamter Lösungsalgorithmus	116
7.1.6	Numerische Integration der gewichteten Klaffung	118

7.2	Normalkontakt zweier deformierbarer Körper	120
7.2.1	Schwache, inkrementelle Nichtdurchdringungsbedingung	120
7.2.2	Lokale Basistransformation	122
7.2.3	Aktive-Mengen-Strategie	123
7.2.4	Modifikation der effektiven, inkrementellen Strukturgleichung	123
7.2.5	Gesamter Lösungsalgorithmus	126
7.2.6	Numerische Integration der gewichteten Klaffung	128
7.3	Zusammenfassung	129
8	Energieerhaltungsstrategie für dynamischen Kontakt	130
8.1	Allgemeines	130
8.2	„Velocity-Update“-Methode	131
8.2.1	Grundidee	131
8.2.2	Diskrete Kontakt-Geschwindigkeit	131
8.2.3	Energieerhaltungsbedingungen	132
8.2.4	Bestimmung des Korrekturterms	133
8.3	Modellbeispiel	136
8.3.1	Versuchsaufbau	136
8.3.2	Oszillationen und Einfluss auf die Aktive-Mengen-Strategie	137
8.3.3	Entwicklung der totalen Energie	141
8.4	Zusammenfassung	142
9	Numerische Beispiele	143
9.1	Zweidimensionale Beispiele	143
9.1.1	Hertzscher Kontakt – Signorini Problem	143
9.1.2	Dünner Ring auf starres Hindernis	146
9.1.3	Kontakt-Patchtest	148
9.1.4	Ironing Problem	149
9.2	Dreidimensionale Beispiele	151
9.2.1	Rohr	151
9.2.2	Ball	153
9.2.3	Das „geworfene Lineal“	155
9.2.4	Torus mit und ohne Haftreibung	158
9.3	Zusammenfassung	160
10	Zusammenfassung und Ausblick	162
10.1	Zusammenfassung	162
10.2	Ausblick	164

Literatur	165
Anhang	172
A Finite Elemente	172
A.1 Mittelflächenorientiertes Schalenelement	172
A.2 Oberflächenorientiertes Schalenelement	175
A.3 ANS-Methode	178
A.4 EAS-Methode	179
A.5 Hu-Washizu-Volumenelement	180
B Mortar-Methode und Kontaktformulierung	185
B.1 Gebietszerlegung: Statische Kondensation	185
B.2 Kontakt mit starrem Hindernis: Statische Kondensation	186
B.3 Kontakt zweier deformierbarer Körper: Basistransformation	187
B.4 Konstruktion diskreter dualer Ansatzfunktionen	189
Index	192

Abkürzungen und Bezeichnungen

In der vorliegenden Arbeit werden nach Möglichkeit deutsche Bezeichnungen verwendet. In den Fällen, in denen englische Begriffe als feststehende Bezeichnungen angesehen werden können, für die keine passende deutsche Entsprechung gegeben werden kann, wird der englische Begriff eingeführt und anschließend ausschließlich verwendet.

Falls nicht ausdrücklich abweichend vereinbart, gilt das Folgende:

- Kleine, lateinische Indizes nehmen die Werte 1 bis 3 an
- Kleine, griechische Indizes nehmen die Werte 1 und 2 an

Bei der Diskretisierung mit Finiten Elementen gilt:

- Große, lateinische Indizes laufen von 1 bis n , mit $n :=$ Anzahl der Knoten pro Element
- Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention

Weiter werden Vektoren, Tensoren zweiter und höherer Stufe sowie Matrizen mit fettgedruckten Buchstaben dargestellt. Eine Verwechslung von Matrizen und Tensoren sollte in dem jeweiligen Kontext ausgeschlossen sein. Skalare sind in Standardschrift gesetzt.

Auf folgende Abkürzungen und Bezeichnungen wird mehrfach zurückgegriffen:

Abkürzungen

ANS	Assumed-Natural-Strain
DSG	Discrete-Strain-Gap
EAS	Enhanced-Assumed-Strain
EMM	Energy-Momentum-Method
FE	Finite Elemente
FEM	Finite-Element-Methode
Gen $_{\alpha}$	Generalized- α (-Verfahren)
GEMM	Generalized-Energy-Momentum-Method
HR	Hellinger-Reissner
HW	Hu-Washizu
KKT	Karush-Kuhn-Tucker (Bedingungen)
NTN	Knoten-Knoten-Kontakt (node-to-node contact)
NTS	Knoten-Segment-Kontakt (node-to-segment contact)
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
STS	Segment-Segment-Kontakt (segment-to-segment contact)
S _m	Mittelflächenorientiertes Schalenelement
S _o	Oberflächenorientiertes Schalenelement (Volumen-Schalen-Element)
V _{HW}	Hu-Washizu-Volumenelement

Bezeichnungen

$\mathbf{a}_i, \mathbf{a}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der Momentan- konfiguration
$\mathbf{A}_i, \mathbf{A}^i$	ko- und kontravariante Basisvektoren der Schalenmittelfläche in der Referenzkon- figuration
\mathbf{A}, \mathbf{a}	Metriktensor der Schalenmittelfläche in der Referenz- bzw. Momentankonfigura- tion
$\mathbf{a}_3 = \mathbf{g}_3$	Direktor in der Momentankonfiguration
$\mathbf{A}_3 = \mathbf{G}_3$	Direktor in der Referenzkonfiguration
A	Schalenmittelfläche
A	Menge aller aktiven Slave-Knoten
\mathbf{b}	Volumenkraftvektor pro Masseneinheit
\mathbf{B}	diskretisierter Differentialoperator („B-Operator“)
\mathbf{B}^c	Matrix der Wichtungsfaktoren zur Berechnung der Kontaktkräfte: $\mathbf{f}^c = \mathbf{B}^c \mathbf{z}$
\mathbb{C}	Materialtensor
$\hat{\mathbb{C}}$	Werkstofftensor der Schalentheorie ($\hat{=}$ \mathbb{C} über die Dicke integriert)
\mathbf{C}^S	viskose Dämpfungsmatrix
$d = \{2, 3\}$	Index zur Kennzeichnung der Dimension des betrachteten Problems
$\Delta \tilde{\mathbf{d}}_v^S$	Vektor der gewichteten, inkrementellen Knotenverschiebungen auf dem Slave- Rand in die jeweilige Normalenrichtung
$[\Delta \mathbf{d}]$	<i>inkrementeller Sprung</i> : Vektor der inkrementellen Relativverschiebung zweier dis- kretisierter Kontaktränder zueinander
$[\Delta \tilde{\mathbf{d}}_v]$	Vektor der gewichteten, inkrementellen Relativverschiebung eines Knotens i auf dem Slave-Rand in Richtung seiner Normalen
\mathbf{d}	Vektor der diskreten Knotenverschiebungen
\mathbf{d}^S	Vektor der diskreten Knotenverschiebungen auf dem Slave-Rand
\mathbf{d}^M	Vektor der diskreten Knotenverschiebungen auf dem Master-Rand
$\dot{\mathbf{d}}$	Vektor der diskreten Knotengeschwindigkeiten
$\dot{\mathbf{d}}^c$	Vektor der diskreten Kontakt-Geschwindigkeiten („Velocity-Update“-Methode)
$\ddot{\mathbf{d}}$	Vektor der diskreten Knotenbeschleunigungen
$\tilde{\mathbf{D}}$	Verzerrungsmatrix (EAS-Methode)
\mathbf{D}_S	Kopplungsmatrix auf der Slave-Seite; Diagonalmatrix
$\mathbf{e}^i = \mathbf{e}_i$	orthonormale, globale Basisvektoren
E	Elastizitätsmodul
E^{kin}	kinetische Energie
E^{pot}	potentielle Energie
E^{tot}	totale Energie

ΔE^{tot}	inkrementelle Veränderung der gesamten totalen Energie innerhalb eines Zeitschrittes Δt
ΔE_1^{tot}	inkrementelle Veränderung der totalen Energie ohne Kontakt innerhalb eines Zeitschrittes Δt
ΔE_c^{tot}	zusätzliche, inkrementelle Veränderung der totalen Energie infolge von Kontakt innerhalb eines Zeitschrittes Δt
E	Green-Lagrange-Verzerrungstensor
E^u	verschiebungsabhängiger Green-Lagrange-Verzerrungstensor
E_h^u	Vektor der verschiebungsabhängigen kinematischen Variablen
E^S	spannungsabhängiger Green-Lagrange-Verzerrungstensor
\tilde{E}	Tensor der zusätzlichen Verzerrungen beim modifizierten Prinzip von Hu-Washizu (EAS-Methode)
\tilde{E}_h	Vektor der approximierten, zusätzlichen kinematischen Variablen
E_1	Tensor der zur Stabilität notwendigen Verzerrungen beim Prinzip von Hu-Washizu (Hu-Washizu-Volumenelement)
E_2	Tensor der zusätzlichen Verzerrungen beim Prinzip von Hu-Washizu (Hu-Washizu-Volumenelement)
f^c	Vektor der Kontaktkräfte
f^{dyn}	Vektor der Massenkräfte (Trägheitskräfte)
f^{int}	Vektor der inneren Kräfte
\tilde{f}^{int}	Vektor der zusätzlichen inneren Kräfte (EAS-Methode)
\hat{f}^{int}	Vektor der kondensierten, inneren Kräfte
f^{ext}	externe Kräfte
f^{eff}	effektiver Lastvektor
\hat{f}^{eff}	transformierter effektiver Lastvektor
$f^{eff,mod}$	modifizierter effektiver Lastvektor
$\hat{f}^{eff,mod}$	modifizierter transformierter effektiver Lastvektor
\hat{f}	Vektor der Ungleichgewichtskräfte
F	materieller Deformationsgradient
g	Abstandsfunktion oder Klaffung
g_a, g_b	diskrete Klaffungen an den Segmentgrenzen
\tilde{g}	Vektor der gewichteten Knotenklaffung
g_i, g^i	ko- und kontravariante Basisvektoren in der Momentankonfiguration
G_i, G^i	ko- und kontravariante Basisvektoren in der Referenzkonfiguration
G, g	Metriktensor (Einheitstensor) in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration

$\mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3$	Direktor in der Momentankonfiguration
$\mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3$	Direktor in der Referenzkonfiguration
h	Schalendicke
$\mathbf{h}(\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}, \ddot{\mathbf{d}})$	Bekannte Geschichtsterme eines Zeitintegrationsverfahrens
I	Menge aller inaktiven Slave-Knoten
\mathbf{I}_2	zweidimensionale Einheitsmatrix
\mathbf{I}_3	dreidimensionale Einheitsmatrix
J	Jacobi-Determinante
k	Iterationszähler innerhalb einer Newton-Iteration
\mathbf{K}_{e+u}	Elastische und Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_g	Geometrische Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}_T^u	tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\hat{\mathbf{K}}_T$	modifizierte tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_T^{\text{eff}}$	effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\hat{\mathbf{K}}_T^{\text{eff}}$	transformierte effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{K}_T^{\text{eff},\text{mod}}$	modifizierte effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix
$\hat{\mathbf{K}}_T^{\text{eff},\text{mod}}$	modifizierte transformierte effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix
l	Iterationszähler innerhalb der Aktiven-Mengen-Strategie
\mathbf{L}, \mathbf{L}^T	Kopplungsmatrizen (EAS-Methode)
\mathbf{m}	statische Variablen, in θ^3 linearer Anteil von \mathbf{S} , energetisch konjugiert zu $\boldsymbol{\beta}$
M	Menge aller FE-Knoten des Master-Randes
\mathbf{M}	Massenmatrix
$\tilde{\mathbf{M}}$	Matrix der Ansatzfunktionen für zusätzliche kinematische Variablen (EAS-Methode)
\mathbf{M}_1	Matrix der Ansatzfunktionen für die zur Stabilität notwendigen Verzerrungen (Hu-Washizu-Volumenelement)
\mathbf{M}_2	Matrix der Ansatzfunktionen für die zusätzlichen Verzerrungen (Hu-Washizu-Volumenelement)
\mathbf{M}_z	Matrix der Ansatzfunktionen für die Lagrange-Multiplikatoren (Hu-Washizu-Volumenelement)
\mathbf{M}_S	Kopplungsmatrix bei der Mortar-Methode: Slave-(Non-Mortar-)Seite
\mathbf{M}_M	Kopplungsmatrix bei der Mortar-Methode: Master-(Mortar-)Seite
$\hat{\mathbf{M}}$	Abkürzung: $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{M}_M$
n	Zeitschrittzähler des Zeitintegrationsverfahrens
n_d	Anzahl aller Finiten Elementknoten
n_e	Anzahl Finiten Elemente
n_e^i	Anzahl der Kontaktflächenelemente, die an einen Slave-Knoten i angrenzen

n_c^S	Anzahl Finiter Elementknoten auf dem Slave-Rand
n_c^M	Anzahl Finiter Elementknoten auf dem Master-Rand
n_{gp}	Anzahl der verwendeten Gauß-Punkte bei der numerischen Integration
n_T	Anzahl aller Zeitschritte im gesamten Integrationszeitraum
\mathbf{n}	nach außen gerichteter Normalenvektor in der Momentankonfiguration
\mathbf{n}	statische Variablen, in θ^3 konstanter Anteil von \mathbf{S} , energetisch konjugiert zu \mathbf{a}
N	Menge aller FE-Knoten, die sich weder auf dem Slave- noch auf dem Master-Rand befinden
N_i^S	Ansatzfunktion zur Interpolation der Verschiebung auf dem Slave-Rand
N_i^M	Ansatzfunktion zur Interpolation der Verschiebung auf dem Master-Rand
N_0	nach außen gerichteter Normalenvektor in der Referenzkonfiguration
N	Matrix der Interpolationsfunktionen
\tilde{N}	Matrix der gewichteten Normalenvektoren auf dem Slave-Rand
N_n	Matrix der Normalenvektoren auf dem Slave-Rand zum Zeitpunkt t_n
\mathbf{p}_v	Vektor der diskreten Knotenimpulse in jeweiliger Normalenrichtung
P	Kraft (Einzellast)
\mathbf{P}	Erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
\mathbf{P}	Matrix der Ansatzfunktionen für die Spannungen (Hu-Washizu-Volumenelement)
R_1, \dots, R_4	Konstanten („Velocity-Update“-Methode)
\mathbf{R}, \mathbf{r}	Ortsvektor eines Punktes auf der Schalenmittelfläche in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
\mathbf{R}	Residuum
S	Menge aller FE-Knoten des Slave-Randes
\mathbf{S}	Zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
\mathbf{S}^u	verschiebungsabhängiger zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
\mathbf{S}_h^u	Vektor der approximierten, verschiebungsabhängigen statischen Variablen
\mathbf{S}^E	verzerrungsabhängiger zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{S}}$	zu $\tilde{\mathbf{E}}$ energetisch konjugierte Spannungen beim modifizierten Prinzip von Hu-Washizu
$\tilde{\mathbf{S}}_h$	Vektor der zu $\tilde{\mathbf{E}}_h$ energetisch konjugierten, statischen Variablen
t	Zeitvariable
Δt	Zeitschritt
t_v	Normalkontaktkraft
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{t}^S	Vektor der von \mathbf{S} abhängigen Spannungen
\mathbf{t}^u	Vektor der von \mathbf{S}^u abhängigen Spannungen
$\hat{\mathbf{t}}$	vorgegebener Spannungsvektor auf einem Neumann-Rand Γ_N

\mathbf{t}_c	Kontaktkraftvektor bezogen auf die Referenzkonfiguration: $\mathbf{t}_c = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}_0$
$\bar{\mathbf{t}}_c$	Kontaktkraftvektor bezogen auf die Momentankonfiguration: $\bar{\mathbf{t}}_c = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$
\mathbf{t}_τ	Tangentialkontaktkraft (Reibkraft)
$\mathbf{t}_i^\xi, \mathbf{t}_i^\eta$	normierte Tangentenvektoren eines Knotens i auf dem Slave-Rand
T	Gesamtzeit der Zeitintegration
T_p	Periodendauer einer Schwingung
\mathbf{T}_A	Matrix der normierten Tangentenvektoren aller aktiver Slave-Knoten
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor eines Punktes
$[\mathbf{u}]$	Sprungfunktion (Relativverschiebung zweier materieller Punkte entlang eines Kopplungsrandes)
$\hat{\mathbf{u}}$	vorgegebene Verschiebung auf einem Dirichlet-Rand Γ_D
\mathbf{u}_τ	tangentielle Relativverschiebung der Oberflächen zweier kontaktierender Körper
\mathbf{u}_c	Verschiebungsvektor eines Punktes auf einem Kontakt-Rand Γ_c
$\dot{\mathbf{u}}$	Geschwindigkeitsvektor eines Punktes
$\ddot{\mathbf{u}}$	Beschleunigungsvektor eines Punktes
\mathbf{v}_τ	tangentielle Relativgeschwindigkeit der Oberflächen zweier kontaktierender Körper
\mathbf{v}	Verschiebung eines Punktes der Schalenmittelfläche
\mathbf{w}	Differenzvektor (Differenzverschiebung eines Punktes der Schalenoberseite zu deren Mittelfläche)
w_{ii}	Hauptdiagonaleinträge der Diagonalmatrix $\mathbf{D}_\zeta[i, i]$ (Wichtungsfaktoren)
w_r	Wichtungsfaktor bei der numerischen Integration
W^{int}	Verzerrungsenergiedichtefunktion (in Ω)
W_{2D}^{int}	Verzerrungsenergiedichtefunktion (in A)
x_i	kartesische (orthonormierte) Koordinaten
\mathbf{X}, \mathbf{x}	Ortsvektor eines Punktes in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration (Slave)
\mathbf{Y}, \mathbf{y}	Ortsvektor eines Punktes in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration (Master)
$\hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{y}}$	Projektion von \mathbf{X}, \mathbf{x} auf die Master-Seite in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration
\mathbf{z}	Vektor der internen Parameter für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren (Hu-Washizu-Volumenelement)
\mathbf{z}	Vektor der diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren
\mathbf{z}_ν	Vektor der diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren in Normalenrichtung
\mathbf{z}_τ	Vektor der diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren in Tangentialrichtung

α_f, α_m	Zeitintegrationsparameter zur Modifikation der semidiskreten Bewegungsgleichung beim Gen $_{\alpha}$ -Verfahren und bei der GEMM
\mathbf{a}	kinematische Variablen, in θ^3 konstanter Anteil von \mathbf{E} , energetisch konjugiert zu \mathbf{n}
\mathbf{a}	Vektor der internen Verzerrungsparameter (EAS-Methode)
\mathbf{a}_1	Vektor der zur Stabilität notwendigen internen Verzerrungsparameter (Hu-Washizu-Volumenelement)
\mathbf{a}_2	Vektor der zusätzlichen internen Verzerrungsparameter (Hu-Washizu-Volumenelement)
β, γ	Newmark-Parameter (Zeitintegrationsverfahren)
β	kinematische Variablen, in θ^3 linearer Anteil von \mathbf{E} , energetisch konjugiert zu \mathbf{m}
β	Vektor der internen Spannungsparameter (Hu-Washizu-Volumenelement)
γ	Gebietsrand eines Körpers (Momentankonfiguration)
γ_c	Gebietsrand eines Körpers mit Kontakt-Randbedingung (Momentankonfiguration)
$\Gamma = \partial\Omega$	Gebietsrand
Γ_c	Gebietsrand eines Körpers mit Kontakt-Randbedingung (Referenzkonfiguration)
Γ_D	Gebietsrand eines Körpers mit Dirichlet-Randbedingung (Referenzkonfiguration)
Γ_N	Gebietsrand eines Körpers mit Neumann-Randbedingung (Referenzkonfiguration)
Γ_{obs}	potentieller Kontaktrand eines starren Körpers
ϵ_ν	Penalty-Parameter zur Regularisierung des Normalkontaktes
θ^i	krummlinige, konvektive Koordinaten
λ_L, μ_L	Lamé-Konstanten
λ_ν	Lagrange-Multiplikator in Normalenrichtung
λ	Lagrange-Multiplikator
μ	Reibungskoeffizient der Coulombschen Reibung
$\hat{\mu}$	Betrag des Schalenshifters
ν	Querdehnzahl (Poissonzahl)
ν	auswärtsgerichtete Normale im Projektionspunkt auf der Slave-Seite
ξ, η, ζ	lokale Elementkoordinaten
ξ^α	krummliniges, konvektives Koordinatensystem auf der Kontaktfläche der Master-Seite
$\hat{\xi}$	Projektionspunkt eines Punktes \mathbf{x} des Slave-Randes auf den Master-Rand im konvektiven Koordinatensystem ξ^α

Π	potentielle Energie
Π^{LM}	potentielle Energie unter Verwendung eines Lagrange-Multiplikator-Verfahrens
Π_{HW}	potentielle Energie beim Prinzip von Hu-Washizu
Π_{HW}^{mod}	potentielle Energie beim modifizierten Prinzip von Hu-Washizu (EAS-Methode)
Π_{HW}^{LM}	potentielle Energie beim modifizierten Prinzip von Hu-Washizu (Hu-Washizu-Volumenelement)
$\delta\Pi^{\text{int}}$	interne virtuelle Arbeit
$\delta\Pi^{\text{ext}}$	externe virtuelle Arbeit
$\delta\Pi_c$	virtuelle Kontaktarbeit
$\delta\Pi_c^{\text{aug}}$	virtuelle Kontaktarbeit – Augmented-Lagrange-Methode
$\delta\Pi_c^P$	virtuelle Kontaktarbeit – Penalty-Methode
$\delta\Pi_{PvV}$	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
$\delta\Pi_{HR}$	Prinzip von Hellinger-Reissner
$\delta\Pi_{HW}$	Prinzip von Hu-Washizu
$\delta\Pi_{HW}^{\text{mod}}$	Modifiziertes Prinzip von Hu-Washizu (EAS-Methode)
$\delta\Pi_{HW}^{LM}$	Modifiziertes Prinzip von Hu-Washizu (Hu-Washizu-Volumenelement)
ρ_∞	Spektralradius der Vergrößerungsmatrix eines Zeitintegrationsverfahrens für den Grenzübergang $\Delta t/T_p \rightarrow \infty$
ϱ	Dichte
σ	Cauchy-Spannungstensor
$\mathbf{T}_\beta, \boldsymbol{\tau}_\beta$	kovariante Basisvektoren im Projektionspunkt (Referenz- bzw. Momentankonfiguration)
ϕ_i	Ansatzfunktion zur Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren
ϕ_i^S	Standard Ansatzfunktion zur Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren
ϕ_i^D	Duale Ansatzfunktion zur Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren
Φ	Gleitfunktion beim Coulombschen Reibgesetz
Ω	(diskretisierter) materieller Körper beziehungsweise Gebiet
Ω_{obs}	starrer Körper
Ω_e	Teilgebiet eines Finiten Elementes
$\partial\Omega = \Gamma$	Gebietsrand

Weitere Bezeichnungen werden beim jeweiligen Auftreten erläutert.

Mathematische Notationen und sonstige Vereinbarungen

$\operatorname{div} A$	Divergenz von A
$\operatorname{grad} a$	Gradient von a
$\frac{\partial a}{\partial b} = a_{,b}$	partielle Ableitung von a nach b
$\operatorname{LIN}(a)$	Linearisierung von a
δa	Variation von a
Δa	Inkrement bezüglich a
A^T	Transponierte von A
A^{-1}	Inverse von A
δ_{ij}	Kronecker-Delta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$
$(a)_h, (a)^h$	Diskretisierung (Approximation) von a
$\langle a \rangle$	Macauley-Klammer: $\langle a \rangle = \begin{cases} a & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a \leq 0 \end{cases}$
$\operatorname{sign}(a)$	Signumsfunktion: $\operatorname{sign}(a) = \begin{cases} +1 & \text{falls } a > 0 \\ 0 & \text{falls } a = 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen

1 Einführung

1.1 Motivation und Stand der Technik

Die meisten physikalischen Bewegungsvorgänge werden durch die Wechselwirkung verschiedener, miteinander in Berührung kommender Körper beeinflusst. Alltägliche Dinge wie Spaziergehen oder Radfahren sind ohne das Kontaktieren zweier oder mehrerer Körper nicht möglich. Auch in vielen technischen Anwendungen, sei es in der Umformtechnik, im Automobilbau oder im Bauwesen (vgl. Abb. 1.1), spielt die mechanische Interaktion verschiedener Bauteile eine wichtige Rolle. Wegen ihres günstigen Verhältnisses von Steifigkeit zu Eigengewicht finden häufig dünnwandige Strukturen Anwendung als Konstruktionselemente. Für die Analyse der meist sehr komplexen Fragestellungen ist neben einer geeigneten Beschreibung der Kontakt-Randbedingungen auch die realitätsnahe Abbildung des Strukturverhaltens der beteiligten Körper notwendig. Dabei sind häufig dynamische Effekte sowie große Verformungen der untersuchten Konstruktionselemente zu berücksichtigen.



Abb. 1.1: Beispiele für Kontaktprobleme

Nur vereinzelte Sonderfälle von Kontaktproblemen lassen sich einer analytischen Lösung zuführen. Deshalb müssen für die Untersuchung der für Ingenieure interessanten Fragestellungen geeignete Simulations- und Berechnungsverfahren entwickelt werden. Als Basis hierfür hat sich in den vergangenen Jahrzehnten die Methode der Finiten Elemente als ein überaus leistungsfähiges numerisches Näherungsverfahren etabliert. Für die Modellierung dünnwandiger Strukturen werden dabei verstärkt höherwertige Elementformulierungen benutzt, die die Anwendung unmodifizierter dreidimensionaler Stoffgesetze erlauben. Ein umfassender Überblick über die FE-Modellierung dünnwandiger Strukturen findet sich in Bischoff et al. (2004).

Obwohl bereits in kommerziellen FE-Programmen (z.B. ANSYS, MSC.MARC, ABAQUS oder LS-DYNA) verschiedene Kontaktformulierungen zur Analyse industrieller Anwendungen implementiert sind, besteht immer noch großer Forschungsbedarf nach geeigneteren Verfahren. Dabei steht die Frage nach unbedingt stabilen und robusten Kontaktalgorithmen im Mittelpunkt der aktuellen, wissenschaftlichen Anstrengungen.

Das bislang vorwiegend angewendete Diskretisierungsverfahren zur Berücksichtigung von Kontakt-Randbedingungen bei großen Deformationen ist die Knoten-Segment (*node-to-segment* – NTS) Diskretisierung. Hierbei wird gefordert, dass ein FE-Knoten auf dem Rand eines Körpers (Slave-Knoten) ein ihm gegenüberliegendes Finites Element (Master-Segment) nicht durchdringen darf. Dieses Verfahren wird auch als Kollokationsmethode bezeichnet, da die Kontakt-Randbedingungen nur an einzelnen, diskreten FE-Knoten punktweise erfüllt werden. Die ersten erfolgreichen Anwendungen finden sich bereits in den Arbeiten von Hallquist (1979) und Hughes et al. (1977a). Darauf aufbauend wurden in den vergangenen zwei Jahrzehnten viele Erweiterungen und Verallgemeinerungen dieser Ansätze vorgeschlagen (Hallquist et al. (1985), Wriggers et al. (1990), Benson und Hallquist (1990), Laursen (1992) u.a.).

Kontaktprobleme mit großen Deformationen bedingen meist auch das Auftreten von beachtlichen tangentialen Relativverschiebungen zweier Körper. Wird für die Analyse solcher Fragestellungen die NTS-Diskretisierung eingesetzt, kann dies zu numerischen Problemen führen. Aufgrund der räumlichen Approximation der wahren Geometrie mittels Finiter Elemente kann es zu Ecken und Kanten zwischen benachbarten Elementen kommen, an denen keine eindeutige Normale definiert ist. Das kann Konvergenzprobleme hervorrufen, vor allem dann, wenn die Kontaktflächen starke Krümmungsänderungen aufweisen. Zur Vermeidung dieser Probleme wurden von verschiedenen Autoren (Taylor und Wriggers (1999), Padmanabhan und Laursen (2001), Wriggers et al. (2001), Puso und Laursen (2002), Stadler und Holzapfel (2004)) sogenannte *smooth-contact*-Formulierungen vorgestellt. Hierfür werden die diskretisierten Kontaktflächen mit Hilfe verschiedener Interpolationsmethoden (Hermiteische Polynome, Bezier-Interpolationen, Gregory-Patches) geglättet und kontinuierlich (*smooth*) approximiert.

Unter Einsatz einer sogenannten Segment-Segment (*segment-to-segment* – STS) Diskretisierung lassen sich die erwähnten Probleme einer NTS-Diskretisierung vermeiden. Dieses Verfahren wurde von Simo et al. (1985) für die Annahme geometrischer Linearität eingeführt. Ähnliche Segment-Segment Kontaktformulierungen finden sich in Papadopoulos und Taylor (1992) sowie in Zavarise und Wriggers (1998). Viele der neueren STS-Diskretisierungstechniken basieren auf der sogenannten *Mortar-Methode*. Dieses ursprünglich im Rahmen der Gebietszerlegungsmethoden entwickelte Verfahren (Bernardi et al. (1990, 1993, 1994)) eignet sich besonders für den Informationsaustausch zweier diskretisierter Körper entlang gemeinsamer, nicht konform vernetzter Elementflächen bzw. -kanten. Im Gegensatz zur NTS-Diskretisierung werden die Kontinuitätsbedingungen nicht diskret an einzelnen FE-Knoten gefordert, sondern in einem schwachen, integralen Sinne entlang des Kopplungsrandes formuliert. Auf Basis der Mortar-Methode wurden in jüngster Vergangenheit verschiedene Kontakt-Formulierungen vorgeschlagen. Dabei sind aus der mathematischen Literatur unter anderem die Arbeiten von Belgacem et al. (1998), Hild (2000), Wohlmuth und Krause (2003) und Hübner und Wohlmuth (2005) zu nennen. Darin werden detaillierte mathematische Beweise für die Existenz eindeutiger Lösungen und die Stabilität der eingesetzten Verfahren für die Annahme kleiner Verformungen und linearer Elastizität geführt. Im Bereich der Ingenieurliteratur sind die Arbeiten von McDevitt und

Laursen (2000), Rebel et al. (2002), Puso und Laursen (2004a, 2004b), Yang et al. (2005), Fischer (2005) sowie Fischer und Wriggers (2005, 2006) zu nennen.

Bei der Mortar-Methode werden die Übergangsbedingungen mit Hilfe von kontinuierlich approximierten Lagrange-Multiplikatoren von einem Kopplungsrand auf den anderen übertragen. Für die Interpolation dieser Lagrange-Multiplikatoren kommen häufig die klassischen Ansatzfunktionen zum Einsatz, die auch für die Approximation der Geometrie und der Verschiebungen innerhalb eines Finiten Elementes benutzt werden. Alternativ hierzu wurden von Wohlmuth (2000) sogenannte duale Ansatzfunktionen zur Approximation der eingeführten Lagrange-Multiplikatoren vorgeschlagen. Damit lassen sich die einzuhaltenden Kontinuitätsbedingungen knotenweise entkoppeln und die diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren aus dem zu lösenden Gleichungssystem eliminieren. In Hüeber und Wohlmuth (2005) wird für geometrisch lineare Problemstellungen eine Mortar-Kontaktformulierung vorgestellt, die duale Ansatzräume zur Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren verwendet. Zusammen mit dem Einsatz einer Aktiven-Mengen-Strategie resultiert ein Kontaktalgorithmus, der sich, im Gegensatz zu vielen anderen, durch zwei wesentliche Eigenschaften auszeichnet:

- Die Größe des zu lösenden Gleichungssystems bleibt konstant.
- Es ist kein benutzerdefinierter Parameter (z.B. Penalty-Parameter) notwendig.

1.2 Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer robusten Lösungsstrategie zur Simulation von Kontaktproblemen dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen. Hierfür sind im Wesentlichen folgende drei Teilaspekte zu erarbeiten und miteinander zu kombinieren:

- Formulierung geeigneter Finiter Elemente für die räumliche Diskretisierung dünnwandiger Strukturen im Hinblick auf eine entsprechende Kontaktformulierung.
- Untersuchung von stabilen, impliziten Zeitintegrationsverfahren.
- Verallgemeinerung und Weiterentwicklung der in Hüeber und Wohlmuth (2005) vorgestellten Kontaktformulierung für große Deformationen.

Für die räumliche Diskretisierung dünnwandiger Strukturen ist auf Basis einer 7-Parameter-Schalenformulierung ein oberflächenorientiertes Volumen-Schalen-Element zu entwickeln. Zusätzlich soll, basierend auf dem Prinzip von Hu-Washizu, ein Volumenelement hergeleitet und dessen Einsatz für die Diskretisierung dünnwandiger Strukturen untersucht werden.

Im Rahmen der zeitlichen Diskretisierung soll zusätzlich zu dem bereits vorhandenen „Generalized- α “-Verfahren (Gen_α) die sogenannte „Generalized-Energy-Momentum-Method“ untersucht und bewertet werden. Darüber hinaus sind die Besonderheiten der algorithmischen Energieerhaltung im Falle von dynamischem Kontakt zu analysieren. Ein hierfür geeignetes Verfahren ist entsprechend dem verwendeten Zeitintegrationsverfahren zu verallgemeinern und der entwickelten Kontaktformulierung anzupassen.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit soll auf der Weiterentwicklung einer Mortar-Kontaktformulierung liegen, die duale Ansatzräume zur Interpolation der eingeführten Lagrange-Multiplikatoren verwendet. Hierfür ist der in Hüeber und Wohlmuth (2005) vorgestellte Kontaktalgorithmus für den Fall großer Deformationen zu verallgemeinern und in den Rahmen einer impliziten Zeitintegration einzubetten.

1.3 Übersicht

Nachfolgend wird der Aufbau dieser Arbeit anhand einer kapitelweisen Übersicht dargestellt:

In *Kapitel 2* werden die zum Verständnis dieser Arbeit notwendigen Grundlagen erläutert. Nach einem kurzen Überblick über die nichtlineare Kontinuumsmechanik werden die notwendigen Begriffe zur Definition der Kontakt-Randbedingungen für den allgemeinen Fall großer Deformationen eingeführt. Ein kurzer Überblick über die in dieser Arbeit eingesetzten numerischen Lösungsverfahren schließt dieses Kapitel ab.

Kapitel 3 befasst sich mit der Formulierung adäquater Finiter Elemente für die räumliche Diskretisierung dünnwandiger Strukturen, die im Hinblick auf eine effiziente Kontaktbeschreibung im Wesentlichen drei Kriterien erfüllen müssen: Volumenorientierte Beschreibung der Geometrie, Ansatzfunktionen mit niedriger Polynomordnung und Genauigkeit. Aufbauend auf einer 7-Parameter-Schalenformulierung, die auf Büchter und Ramm (1992a) sowie Büchter et al. (1994) zurückgeht, wird durch eine Reparametrisierung der Geometriebeschreibung des Schalenkörpers ein oberflächenorientiertes Volumen-Schalen-Element entwickelt. Zur Vermeidung schalentypischer Versteifungseffekte (Bischoff (1999)) werden analog zur bestehenden, mittelflächenorientierten Schalenformulierung die *Enhanced-Assumed-Strain-Methode* (EAS) und die *Assumed-Natural-Strain-Methode* (ANS) Methode eingesetzt. Aufbauend auf dem Prinzip von Hu-Washizu wird die von Weissman (1996) vorgestellte FE-Formulierung eines achtknotigen, trilinearen Volumenelementes auf den geometrisch nichtlinearen Fall erweitert. Mit numerischen Berechnungen einiger Benchmark-Tests wird die Leistungsfähigkeit der implementierten FE-Formulierungen analysiert.

In *Kapitel 4* werden zwei geeignete Zeitintegrationsverfahren für die notwendige zeitliche Diskretisierung des elastodynamischen Anfangsrandwertproblems vorgestellt. Zusätzlich zu dem bereits vorhandenen „Generalized- α “-Verfahren wird die von Kuhl und Crisfield (1999) sowie Kuhl und Ramm (1999) entwickelte „Generalized-Energy-Momentum-Method“ (GEMM) angewendet. Die hierfür notwendigen Modifikationen für das in Kapitel 3 hergeleitete oberflächenorientierte Schalenelement werden detailliert erläutert. Anhand eines numerischen Beispiels wird das jeweilige Verhalten der beiden Zeitintegrationsverfahren untersucht.

Kapitel 5 behandelt unterschiedliche Strategien zur numerischen Beschreibung von Kontaktproblemen. Anhand des reibungsfreien Kontaktproblems werden die wesentlichen Merkmale dreier klassischer Regularisierungsstrategien (Lagrange-Multiplikator-Methode, Penalty-Methode,

Augmented-Lagrange-Methode) dargelegt. Zusätzlich werden verschiedene gängige Kontakt-Diskretisierungen beschrieben sowie deren Vor- und Nachteile diskutiert. In Vorbereitung für die nachfolgenden Kapitel werden die Grundzüge der Mortar-Methode erläutert. Diese wird im Rahmen der Gebietszerlegungsmethode für zweidimensionale Probleme beschrieben. Hierfür werden duale Ansatzfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren eingesetzt.

In *Kapitel 6* wird der erste Teil der in dieser Arbeit weiterentwickelten Kontaktformulierung erläutert. Dieser befasst sich mit der räumlichen Diskretisierung des Kontaktes eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis sowie zweier deformierbarer Körper. Die von Hüeber und Wohlmuth (2005) auf der Annahme kleiner Verformungen vorgeschlagene Diskretisierungsstrategie wird für den dynamischen Kontaktfall großer Deformationen verallgemeinert. Ausgehend von der jeweiligen schwachen Form der Kontaktarbeit werden die resultierenden inkrementellen effektiven Strukturgleichungssysteme hergeleitet. Die verwendeten diskreten dualen Ansatzfunktionen zur Approximation der Lagrange-Multiplikatoren werden sowohl für den zwei- als auch für den dreidimensionalen Fall konkretisiert.

Kapitel 7 beschäftigt sich mit der detaillierten Herleitung des zweiten Teils der Kontaktformulierung, nämlich der Berücksichtigung der Kontakt-Randbedingungen für die in Kapitel 6 erläuterten Kontaktprobleme. Im Sinne der Mortar-Methode wird die starke Inpenetrabilitätsbedingung entlang des Kontakt-Randes durch eine schwache integrale Nichtdurchdringungsbedingung ersetzt. Die hierfür notwendige Testfunktion wird erneut mit Hilfe von dualen Ansatzfunktionen diskretisiert, wodurch sich die zunächst mehrdimensionale Ungleichheits-Nebenbedingung in einen Satz skalarer Ungleichungen entkoppeln lässt. Mit Hilfe einer Aktiven-Mengen-Strategie werden die knotenweise einzuhaltenden skalaren Ungleichungen in Gleichheits-Nebenbedingungen umgeformt. Diese werden anschließend dem inkrementellen effektiven Strukturgleichungssystem als einzuhaltende Randbedingungen hinzugefügt. Das resultierende Gleichungssystem erlaubt die Elimination der diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren. Sie entsprechen physikalisch den Kontaktkräften und werden in einer Nachlaufrechnung in Abhängigkeit der resultierenden Knotenverschiebungen variationell konsistent bestimmt. Die algebraische Form zur Beschreibung des allgemeinen Kontaktfalls zweier deformierbarer Körper wird mit Hilfe einer geeigneten Basistransformation in eine dem Spezialfall eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis vergleichbare Form gebracht. Damit lassen sich beide Problemfälle formal identisch behandeln.

In *Kapitel 8* wird auf die Problematik der algorithmischen Energieerhaltung bei dynamischem Kontakt eingegangen. Die von Laursen und Love (2002) vorgeschlagene „Velocity-Update“-Methode wird für die in dieser Arbeit vorgestellte Kontaktformulierung angepasst und im Sinne der GEMM verallgemeinert. Anhand eines Modellbeispiels wird das Auftreten von oszillierenden Kontaktkräften erläutert und deren Konsequenzen für die Aktive-Mengen-Strategie diskutiert. Zur Vermeidung der aus den Oszillationen resultierenden Probleme wird eine Mittelung der diskreten Kontaktkräfte vorgeschlagen.

Kapitel 9 dokumentiert einige ausgewählte numerische Beispiele, um die Leistungsfähigkeit der im Rahmen dieser Arbeit vorgeschlagenen Kontaktformulierung zu untersuchen. Die ausgewählten Beispiele umfassen sowohl zwei- als auch dreidimensionale, statische und dynamische Problemstellungen.

In *Kapitel 10* werden die wesentlichen Aspekte dieser Arbeit zusammengefasst und Anregungen für weitergehende Forschungsmöglichkeiten gegeben.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden einige für das Verständnis der Arbeit wichtigen Grundlagen vorgestellt. Nach einem kurzen Überblick über die nichtlineare Kontinuumsmechanik wird allgemein auf die Problemstellung der Kontaktmechanik für große Deformationen eingegangen. Da für die numerische Lösung der beschriebenen Probleme in dieser Arbeit ausschließlich die Methode der Finiten Elemente zur Anwendung kommt, wird diese anschließend in sehr kurzer und kompakter Form dargestellt. Hauptaugenmerk wird dabei auf die Einführung der im weiteren Verlauf der Arbeit verwendeten Bezeichnungen gelegt, zusätzlich wird an geeigneten Stellen auf weiterführende Literatur verwiesen.

2.1 Nichtlineare Kontinuumsmechanik

Dieser Abschnitt gibt eine kurze Zusammenfassung über die Grundlagen der nichtlinearen Kontinuumsmechanik, die den Ausgangspunkt für die anschließenden numerischen Lösungsverfahren darstellt. Für ein intensiveres Studium dieser Themen werden die Arbeiten von Malvern (1969), Betten (1993), Altenbach und Altenbach (1994), Stein und Barthold (1996), Zienkiewicz und Taylor (2000), Zienkiewicz et al. (2005), Holzapfel (2000) oder Wriggers (2001) empfohlen.

2.1.1 Differentialgeometrie

Zur geometrischen Beschreibung von großen Deformationen eines materiellen Körpers im dreidimensionalen Euklidischen Raum, wird dieser in verschiedenen Konfigurationen betrachtet. Dafür werden im Sinne einer materiellen oder *Lagrangeschen* Beschreibung zwei Koordinatensysteme definiert: Zum einen ein kartesisches Koordinatensystem x_i , das von den orthonormierten Basisvektoren $e^i = e_i$ aufgespannt wird, und zum anderen ein krummliniges, konvektives Koordinatensystem θ^i , das gedanklich als fest mit dem materiellen Körper verbunden interpretiert werden kann (Abb. 2.1).

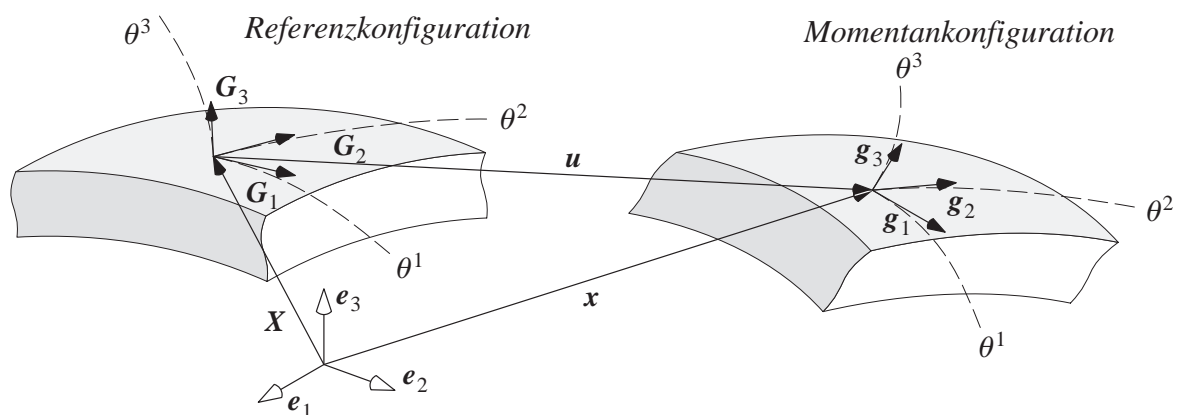


Abb. 2.1: Geometrie und Kinematik in krummlinigen Koordinaten

Die Deformation eines Materiepunktes in der *Momentankonfiguration* kann prinzipiell mit Hilfe einer frei gewählten *Referenzkonfiguration* beschrieben werden. Zur übersichtlicheren Darstellung wird hier die Referenzkonfiguration mit der undeformierten Ausgangskonfiguration identifiziert. Mit dem Feld von Ortsvektoren $\mathbf{X}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ und $\mathbf{x}(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ wird der Körper jeweils in der Referenz- und der Momentankonfiguration beschrieben.

Die *ko- und kontravarianten Basisvektoren* des krummlinigen Koordinatensystems der Referenz- und Momentankonfiguration lauten

$$\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{G}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{X}}, \quad (2.1)$$

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^i}, \quad \mathbf{g}^i = \frac{\partial \theta^i}{\partial \mathbf{x}}. \quad (2.2)$$

In seiner ko- und kontravarianten Darstellung ist der zugehörige *Metriktensor* (Einheitstensor)

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j, \quad \text{mit } G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \quad \text{und} \quad G^{ij} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j \quad (2.3)$$

definiert. Aufgrund der Dualitätseigenschaft der ko- und kontravarianten Basisvektoren

$$\mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = \delta_j^i \quad (2.4)$$

lässt sich das Skalarprodukt zweier energetisch konjugierter Tensoren zweiter Stufe (z.B. *Green-Lagrange-Verzerrungstensor* \mathbf{E} und *Zweiter Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* \mathbf{S}) unabhängig von der Metrik berechnen:

$$\mathbf{E} : \mathbf{S} = E_{ij} S^{ij}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{E} = E_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{und} \quad \mathbf{S} = S^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j. \quad (2.5)$$

Für die Beschreibung der Geometrie und Deformation eines Körpers sind damit alle notwendigen Größen gegeben. Alle Verzerrungsmaße und geometrischen Abbildungen können mit Hilfe der Ortsvektoren sowie der ko- und kontravarianten Basisvektoren in der Referenz- und Momentankonfiguration beschrieben werden.

2.1.2 Kinematik und Verzerrungsmaß

Gleichungen, die geometrische Größen miteinander in Beziehung setzen, werden als kinematische Gleichungen bezeichnet. Durch die Verschiebungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.6)$$

werden die Ortsvektoren der Momentankonfiguration mit denen der Referenzkonfiguration in Beziehung gesetzt. Der unsymmetrische *materielle Deformationsgradient*

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (2.7)$$

definiert eine lineare Abbildung eines Linienelementes der Referenzkonfiguration auf das entsprechende Linienelement der Momentankonfiguration. Mit seiner Hilfe können die ko- und

kontravarianten Basisvektoren beider Konfigurationen durch eine Vorwärtstransformation (*push forward*)

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}_i, \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G}^i, \quad (2.8)$$

bzw. eine Rückwärtstransformation (*pull back*)

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{g}_i, \quad \mathbf{G}^i = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g}^i \quad (2.9)$$

ineinander überführt werden. Da \mathbf{F} den gesamten Bewegungsvorgang beschreibt, enthält er auch die Starrkörperanteile der Bewegung, so dass er nicht als geeignetes Verzerrungsmaß herangezogen werden kann. Aus der Vielzahl geeigneter Maße zur Beschreibung großer Verzerrungen (Holzapfel (2000)) wird in dieser Arbeit der objektive und symmetrische *Green-Lagrange-Verzerrungstensor*

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2}(g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad (2.10)$$

verwendet. Als kinematische Feldgleichung stellt Gleichung (2.10) zudem eine der drei Gebietsgleichungen der Elastodynamik dar, die gemeinsam mit den entsprechenden Rand- und Anfangsbedingungen das dynamische Anfangsrandwertproblem definieren.

2.1.3 Materialgesetz und Spannungsmaß

Mit Hilfe des Materialgesetzes werden die kinematischen Größen mit den Spannungsgrößen in Beziehung gesetzt. Die energetisch konjugierte Größe zum Green-Lagrange-Verzerrungstensor \mathbf{E} ist der *Zweite Piola-Kirchhoff-Spannungstensor* \mathbf{S} , der sich vollständig auf die Referenzkonfiguration bezieht. Er lässt sich nicht direkt physikalisch interpretieren. Die wahren, physikalischen Spannungen werden durch den *Cauchy-Spannungstensor* $\boldsymbol{\sigma}$ repräsentiert, der sich auf die aktuelle, verformte Konfiguration bezieht. Dieser kann mit Hilfe des Deformationsgradienten aus dem zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor ermittelt werden:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{mit} \quad J := \det \mathbf{F}. \quad (2.11)$$

Wird die Existenz eines Potentials vorausgesetzt, lässt sich der Materialtensor vierter Stufe zu

$$\mathbb{C} = \frac{\partial^2 W^{int}(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (2.12)$$

angeben. Darin stellt $W^{int}(\mathbf{E})$ die sogenannte *Verzerrungsenergiedichtefunktion* dar. Für das lineare *St. Venant-Kirchhoff-Materialgesetz* stellt \mathbb{C} eine eindeutige, lineare Beziehung zwischen den zuvor eingeführten, energetisch konjugierten Größen \mathbf{S} und \mathbf{E} her:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l. \quad (2.13)$$

Liegt isotropes Materialverhalten vor, genügen bereits zwei Materialparameter, um das Materialverhalten vollständig zu beschreiben:

$$C^{ijkl} = \lambda_L G^{ij} G^{kl} + \mu_L (G^{ik} G^{jl} + G^{il} G^{kj}), \quad \text{mit} \quad (2.14)$$

$$\lambda_L = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad \mu_L = \frac{E}{2(1 + \nu)} .$$

Dies sind in der mathematischen Literatur die beiden Lamé-Konstanten λ_L und μ_L und in der Ingenieurliteratur der etwas anschaulichere Elastizitätsmodul E und die Querdehn- oder Poissonzahl ν . Das Materialgesetz aus Gleichung (2.13) stellt die zweite der insgesamt drei benötigten Feldgleichungen dar.

2.1.4 Dynamische Gleichgewichtsbedingungen

Ausgehend vom Impulserhaltungssatz kann die lokale, punktweise Form des dynamischen Gleichgewichtes der Elastodynamik im Gebiet Ω für ein Zeitintervall $[0, T]$ mit

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{div } \mathbf{P} + \rho \mathbf{b} \quad \text{in} \quad \Omega \times [0, T] \quad (2.15)$$

angegeben werden. Darin bezeichnet ρ die Dichte des Körpers im undeformierten Zustand, \mathbf{b} den Volumenkraftvektor je Masseneinheit und \mathbf{P} den unsymmetrischen *Ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor*

$$\mathbf{P} = P^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j . \quad (2.16)$$

Er bezieht die Kräfte in der aktuellen Konfiguration auf das entsprechende Flächenelement in der Referenzkonfiguration. Dadurch ist \mathbf{P} als physikalisch interpretierbares Spannungsmaß ebenfalls ungeeignet. Er kann jedoch wiederum mit Hilfe des Deformationsgradienten in Beziehung zu den Cauchy-Spannungen bzw. den zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungen gesetzt werden:

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} . \quad (2.17)$$

Damit lässt sich das dynamische Gleichgewicht (2.15) zu

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b} \quad \text{in} \quad \Omega \times [0, T] \quad (2.18)$$

umschreiben, was aufgrund der Symmetrie des zweiten Piola-Kirchhoff-Spannungstensors für die Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen häufig besser geeignet ist. Mit der Bewegungsgleichung (2.18) ist die dritte Feldgleichung des Anfangsrandwertproblems gegeben.

Anmerkung: In der starken Form des dynamischen Gleichgewichtes aus Gleichung (2.18) ist der Sonderfall des statischen Gleichgewichtes enthalten. Hierfür entfällt der Massenträgheitsterm auf der linken Seite.

2.1.5 Das dynamische Anfangsrandwertproblem

Wie bereits angedeutet, sind für die vollständige Beschreibung des dynamischen Anfangsrandwertproblems neben den drei Feldgleichungen (2.10), (2.13) und (2.18) noch entsprechende Anfangs- und Randbedingungen zu definieren. Dafür wird der Gebietsrand $\Gamma = \partial\Omega$ in zwei nicht überlappende Teilgebiete Γ_D und Γ_N unterteilt, auf denen zum einen Verschiebungs- bzw. *Dirichlet*-Randbedingungen $\hat{\mathbf{u}}$ und zum anderen äußere Lasten bzw. *Neumann*-Randbedingungen $\hat{\mathbf{t}}$ vorgeschrieben werden. In Anlehnung an den italienischen Mathematiker Enzo Tonti (Tonti (1975)) ist in Abbildung 2.2 das Anfangsrandwertproblem der Elastodynamik in Form eines sogenannten Tonti-Diagramms zusammengefasst.

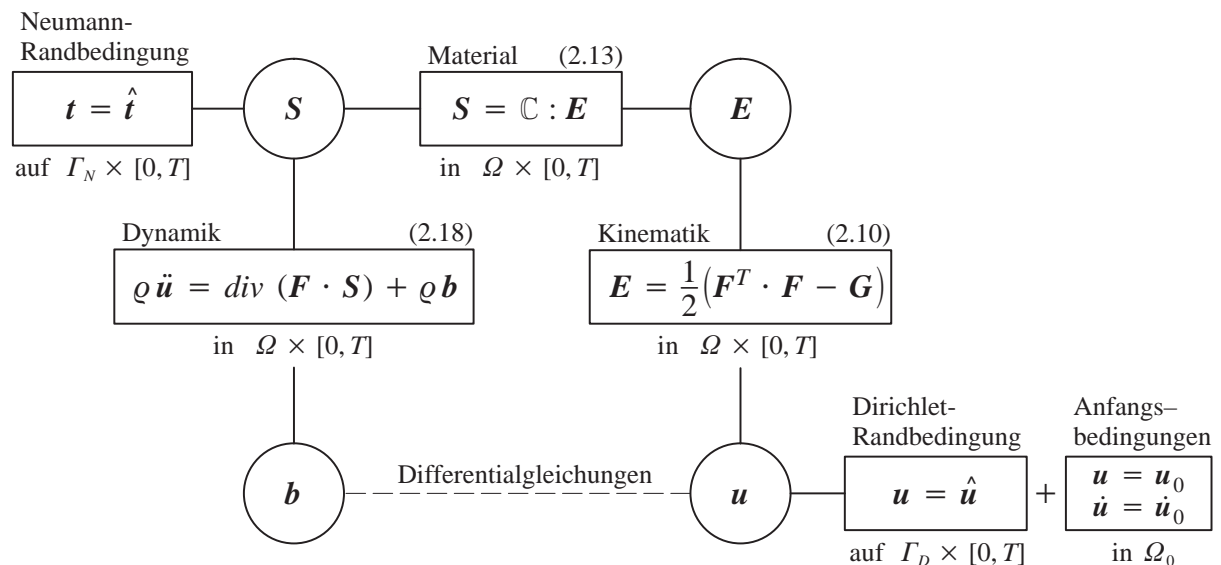


Abb. 2.2: Tonti-Diagramm: Starke Form des Anfangsrandwertproblems

2.1.6 Energieprinzipien

Zur näherungsweise Lösung des Anfangsrandwertproblems mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente müssen verschiedene Feldgleichungen in eine sogenannte schwache Form gebracht werden. In der Regel bilden Funktionale die Grundlage zur Herleitung von Finiten Elementen. Für die weit verbreiteten, reinen Verschiebungselemente bildet das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* (PvV) die Basis. Da hier das unbekannte Verschiebungsfeld als einzige Primärvariable auftritt, wird es auch als sogenanntes Einfeld-Funktional bezeichnet. Viele auf dem PvV basierende FE-Formulierungen niedriger Ordnung leiden jedoch unter verschiedenen, unphysikalischen Versteifungseffekten, so dass alternativ auch sogenannte Mehrfeld-Funktionale für die Herleitung von gemischten oder hybrid-gemischten Elementen verwendet werden. Als Vertreter eines Zweifeld-Funktionalen sei das *Prinzip von Hellinger-Reissner* genannt, bei dem neben den Verschiebungen auch die Spannungen Primärvariablen darstellen. Beim *Prinzip von Hu-Washizu*, das laut Felippa (2000) eher *Prinzip von Fraeijs de Veubeke* (Fraeijs de Veubeke (1951)) heißen müsste, werden zusätzlich zu den Verschiebungen und den Spannungen die Verzerrungen als unabhängige Größen behandelt. Ergänzend zu den drei erwähnten Prinzipien wird gerne eine

modifizierte Form der Prinzip von Hu-Washizu verwendet, das die Grundlage der sogenannten *Enhanced-Assumed-Strain-Methode* (EAS) bildet.

Nachfolgend werden für die angesprochenen Funktionale lediglich die zur Herleitung von Finiten Elementen benötigten Formen angegeben, die aus der ersten Variation des zugrunde gelegten Funktionals und anschließender Anwendung des Gaußschen Integralsatzes resultieren. Für einen detaillierteren Überblick über Funktionale und Variationsmethoden sei auf die Arbeiten von Stein (1964), Oden und Reddy (1976), Bufler (1983) und Bufler (1990) verwiesen. Alternativ lassen sich die nachfolgenden Prinzipien auch mit Hilfe der Methode der gewichteten Residuen erhalten.

In der folgenden Darstellung weisen entsprechende Kopfzeiger auf eine explizite Abhängigkeit von einer Primärvariablen (\mathbf{u} , \mathbf{E} oder \mathbf{S}) hin. Ist beispielsweise der Verzerrungstensor über die kinematische Gleichung (2.10) mit den Verschiebungen gekoppelt, wird dies mit \mathbf{E}^u gekennzeichnet. Im Einzelnen gilt folgendes:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^u &= \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}) , & \mathbf{E}^S &= \mathbb{C}^{-1} : \mathbf{S} , \\ \mathbf{S}^E &= \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{C} : \mathbf{E} , & \mathbf{S}^u &= \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}^u} = \mathbb{C} : \mathbf{E}^u . \end{aligned} \quad (2.19)$$

- *Prinzip der virtuellen Verschiebungen:*

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{PvV}(\mathbf{u}) &= \int_{\Omega} [\varrho \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u) - \varrho \mathbf{b}] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^u) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0 . \end{aligned} \quad (2.20)$$

Lediglich die Verschiebungen \mathbf{u} treten als Primärvariablen auf und werden im Rahmen der FEM durch geeignete Ansätze diskretisiert. Dadurch werden das dynamische Gleichgewicht (2.18) und die Spannungsrandbedingung schwach erfüllt. Die verbleibenden Feldgleichungen werden stark erfüllt. Viele der heute eingesetzten Finiten Elemente basieren auf diesem Prinzip.

- *Prinzip von Hellinger-Reissner:*

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \mathbf{S}) &= \int_{\Omega} [\varrho \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) - \varrho \mathbf{b}] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}^S) : \delta \mathbf{S} \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\Gamma_N} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{t}^S \, d\Gamma = 0 . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Neben den Verschiebungen \mathbf{u} werden zur Formulierung von Finiten Elementen auch die Spannungen \mathbf{S} als unabhängige Größen diskretisiert. Das dynamische Gleichgewicht (2.18),

die kinematische Gleichung (2.10) und die Spannungs- und Verschiebungsrandbedingung werden nun schwach erfüllt. Das Materialgesetz (2.13) ist die einzige Feldgleichung, die weiterhin stark erfüllt wird. Dieses Prinzip bildet die Basis für hybride Spannungselemente (Pian und Chen (1982), Pian und Sumihara (1984), Pian und Tong (1986), Sze et al. (2002)).

- *Prinzip von Hu-Washizu:*

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) &= \int_{\Omega} [\rho \ddot{\mathbf{u}} - \operatorname{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) - \rho \mathbf{b}] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega \\
&+ \int_{\Omega} (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) : \delta \mathbf{S} \, d\Omega + \int_{\Omega} (\mathbf{S}^E - \mathbf{S}) : \delta \mathbf{E} \, d\Omega \\
&- \int_{\Gamma_N} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{t}^S \, d\Gamma = 0 .
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Die Verschiebungen \mathbf{u} , die Spannungen \mathbf{S} und auch die Verzerrungen \mathbf{E} treten im Funktional als Primärvariablen auf. Damit werden in einer entsprechenden FE-Formulierung alle Feldgleichungen sowie die beiden Randbedingungen nur noch schwach erfüllt. Als eines der allgemeinsten Funktionale wird es in jüngster Zeit verstärkt benutzt, um möglichst verzerrungsunempfindliche, versteifungsfreie Finite Elemente herzuleiten (Weissmann (1996), Kasper und Taylor (2000a, 2000b, 2002), Cao et al. (2002, 2003, 2004)).

- *Modifiziertes Prinzip von Hu-Washizu:*

Für die Herleitung der sogenannten EAS-Elemente verwenden Simo und Rifai (1990) eine modifizierte Form des Prinzips von Hu-Washizu. Diese entsteht aus einer Reparametrisierung des Verzerrungsfeldes. Anstatt des gesamten Verzerrungsfeldes \mathbf{E} wird ein zusätzliches Verzerrungsfeld $\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^u$ als freie Variable im Funktional benutzt. Zur Verringerung des Diskretisierungsaufwandes werden die Spannungen \mathbf{S} mit Hilfe der sogenannten *Orthogonalitätsbedingung*

$$\int_{\Omega^h} \mathbf{S}_h : \tilde{\mathbf{E}}_h \, d\Omega = 0 \quad \forall \mathbf{S}_h \in \mathcal{V}_S, \tilde{\mathbf{E}}_h \in \mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{E}}} \tag{2.23}$$

aus der Formulierung eliminiert. Darin sind \mathcal{V}_S und $\mathcal{V}_{\tilde{\mathbf{E}}}$ die Räume der Ansatzfunktionen für die Spannungen \mathbf{S} und die zusätzlichen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$. Durch die Reparametrisierung des Verzerrungsfeldes und der Elimination der Spannungen entsteht schließlich das modifizierte Prinzip von Hu-Washizu:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{HW}^{\text{mod}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) &= \int_{\Omega} [\varrho \ddot{\mathbf{u}} - \text{div}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u) - \varrho \mathbf{b}] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Omega} \overbrace{\tilde{\mathbf{S}} : \delta \tilde{\mathbf{E}}}^{\frac{\partial W^{\text{int}}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}} = \mathbb{C} : \tilde{\mathbf{E}}} \, d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma_N} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^u) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{t}^S \, d\Gamma = 0 .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Darin sind $\tilde{\mathbf{S}}$ die zu den zusätzlichen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ energetisch konjugierten Spannungen. Im Gegensatz zum unmodifizierten Prinzip von Hu-Washizu treten lediglich die Verschiebungen \mathbf{u} und das zusätzliche Verzerrungsfeld $\tilde{\mathbf{E}}$ als Primärvariablen auf. Von den ursprünglichen Feldgleichungen werden das dynamische Gleichgewicht (2.18) und die beiden Randbedingungen schwach erfüllt. Eine ausführliche Herleitung des modifizierten Prinzips von Hu-Washizu findet sich in Bischoff (1999). Darin wird auch die Bedeutung der Orthogonalitätsbedingung detailliert diskutiert.

2.2 Kontaktmechanik für große Deformationen

Der folgende Abschnitt gibt eine kurze Einführung in die Kontaktmechanik für große Deformationen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf der Bereitstellung grundlegender Gleichungen und der Einführung einiger wesentlicher Begriffe. Für ein tiefgreifenderes Studium der Kontaktmechanik werden die Textbücher von Laursen (2002) und Wriggers (2002) sowie der Beitrag von Wriggers und Zavarise (2004) in der *Encyclopedia of Computational Mechanics* empfohlen.

2.2.1 Problembeschreibung

Die mathematische Beschreibung von Kontaktproblemen mündet bereits für den Sonderfall infinitesimal kleiner Deformationen in einem nichtlinearen Problem, da sich die Randbedingungen des Systems verändern. Deshalb kann die Kontaktmechanik zunächst als eine gewisse Menge von Randbedingungen interpretiert werden, die sich während der Berechnung verändert. Für die entstehenden nichtlinearen Beziehungen existieren nur für wenige einfache Sonderfälle analytische Lösungen. Aufgrund der starken Nichtlinearitäten sind numerische Lösungsverfahren sowohl schwierig als auch zeitaufwendig.

Im Folgenden werden die Kontaktbedingungen zweier deformierbarer Körper im Falle großer Deformationen bereitgestellt. Darin sind verschiedene Sonderfälle, wie z.B. der Kontakt eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis, bzw. Kontakt im Rahmen sehr kleiner Deformationen enthalten.

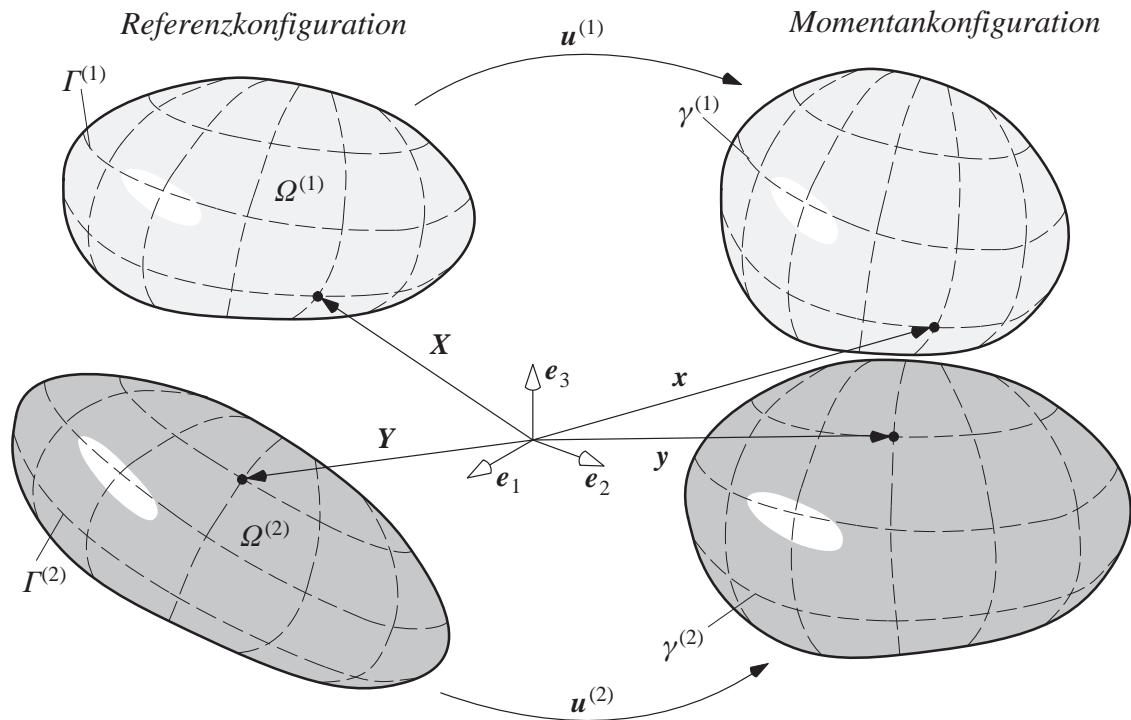


Abb. 2.3: Das Kontaktproblem zweier deformierbarer Körper für große Deformationen

In Abbildung 2.3 ist schematisch das Kontaktproblem zweier deformierbarer Körper $\Omega^{(1)}$ und $\Omega^{(2)}$ für große Deformationen dargestellt. Materielle Punkte von $\Omega^{(1)}$ und $\Omega^{(2)}$ werden in der Referenzkonfiguration mit X bzw. Y und in der Momentankonfiguration entsprechend mit x bzw. y bezeichnet. Dabei wird die Bewegung der Körper über die jeweiligen, zeitabhängigen Verschiebungsfelder $\mathbf{u}^{(1)}$ und $\mathbf{u}^{(2)}$ beschrieben:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}^{(1)} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = \mathbf{Y} + \mathbf{u}^{(2)} . \quad (2.25)$$

Im Weiteren soll der Index $\alpha = 1, 2$ der Unterscheidung der beiden Körper dienen. Der Rand der Gebiete $\Omega^{(\alpha)}$ wird in der Referenzkonfiguration mit $\Gamma^{(\alpha)}$ und in der Momentankonfiguration mit $\gamma^{(\alpha)}$ bezeichnet. Neben den Randbereichen, auf denen Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen vorgegeben werden können, kommt noch ein Bereich $\Gamma_c^{(\alpha)}$ hinzu, auf dem die Kontakt-Randbedingungen definiert werden. Dafür müssen folgende Bedingungen eingehalten werden:

$$\Gamma_N^{(\alpha)} \cup \Gamma_D^{(\alpha)} \cup \Gamma_c^{(\alpha)} = \partial\Omega^{(\alpha)} \quad \text{und} \quad \Gamma_N^{(\alpha)} \cap \Gamma_D^{(\alpha)} = \Gamma_N^{(\alpha)} \cap \Gamma_c^{(\alpha)} = \Gamma_D^{(\alpha)} \cap \Gamma_c^{(\alpha)} = 0 . \quad (2.26)$$

Grundsätzlich lässt sich die Beschreibung der Kontakt-Randbedingungen in einen normalen und einen tangentialen Anteil aufspalten, welche nachfolgend diskutiert werden.

2.2.2 Normalkontakt

Es müssen prinzipiell zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein, um die Kontakt-Randbedingung in Normalenrichtung einzuhalten: Zum einen die sogenannte *Inpenetrabilitätsbedingung* und zum anderen die Bedingung, dass ausschließlich Druckspannungen in der Kontaktfuge

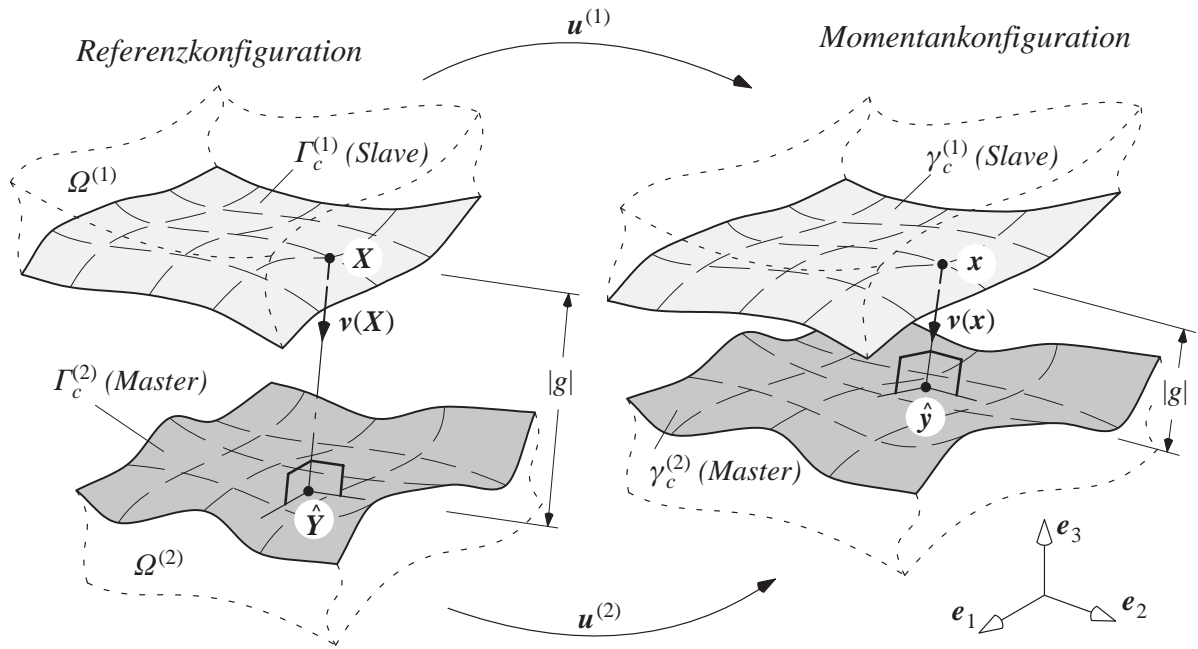


Abb. 2.4: Orthogonale Projektion mit Normale und Abstand

übertragen werden. Durch die erste Bedingung wird ausgeschlossen, dass sich zwei Körper zur gleichen Zeit am selben Ort befinden. Mit der zweiten Bedingung wird gewährleistet, dass zwei Körper nur dann in Kontakt sein können, wenn sie auch Druckspannungen übertragen. Eine mögliche Adhäsion zweier kontaktierender Körper, die zum Auftreten von Zugspannungen in der Kontaktfuge führen könnten, soll im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden. Zur einfacheren Beschreibung der beiden oben genannten Bedingungen wird der Kontaktrand eines Körpers ausgewählt, auf dem die Kontaktbedingungen parametrisiert werden. Dabei wird ständig die Position des Kontaktrandes des zweiten Körpers überwacht. In der Literatur wird üblicherweise die Seite, auf der der Kontakt beschrieben wird, mit *Slave-Seite* bezeichnet, die gegenüberliegende Kontaktfläche wird *Master-Seite* genannt. In einer kontinuierlichen Formulierung spielt dabei die Wahl der Master- und Slave-Seite keine Rolle. Wird später mittels Finiter Elemente räumlich diskretisiert, kann das Vertauschen von Slave- und Master-Seite zu geringfügig unterschiedlichen Ergebnissen führen.

In dieser Arbeit wird $\Gamma_c^{(1)}$ mit der Slave-Seite und $\Gamma_c^{(2)}$ mit der Master-Seite identifiziert. Um den Abstand der beiden kontaktierenden Körper zu bestimmen, wird für jeden Punkt $X \in \Gamma_c^{(1)}$ bzw. $x \in \gamma_c^{(1)}$ der Slave-Seite ein zugehöriger Projektionspunkt $\hat{Y}(X)$ bzw. $\hat{y}(x)$ auf der Master-Seite bestimmt, so dass deren Abstand minimal ist (Abb. 2.4). Dies wird in der Regel mit Hilfe einer orthogonalen Projektion (closest point projection)

$$\hat{Y}(X) = \arg \min_{Y \in \Gamma_c^{(2)}} \|X - Y\| \quad \text{bzw.} \quad \hat{y}(x) = \arg \min_{y \in \gamma_c^{(2)}} \|x - y\| \quad (2.27)$$

durchgeführt. Gleichzeitig wird damit die Richtung der normierten, nach außen gerichteten Normalen ν auf der Slave-Seite definiert. Mit der Definition der vorzeichenbehafteten, skalarwertigen

gen *Abstandsfunktion*, kurz *Klaffung* (gap) g genannt, kann die Geometrie der Normalkontakt-Randbedingung beschrieben werden. Die Klaffung ist definiert mit¹

$$g = g(\mathbf{X}, t) = -\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{y}}). \quad (2.28)$$

In Abbildung 2.4 ist sowohl die orthogonale Projektion, als auch die Definition der Normalen und der Klaffung eingezeichnet. Das Vorzeichen der Klaffung entscheidet letztlich darüber, ob die Inpenetrabilitätsbedingung eingehalten ist. Ist die Abstandsfunktion positiv, befinden sich die beiden Körper nicht in Kontakt (Abb. 2.5a), ist die Klaffung jedoch negativ, liegt eine nicht zulässige Durchdringung (Penetration) der beiden Körper vor (Abb. 2.5c). Im Kontaktfall muss also die Klaffung verschwinden (Abb. 2.5b). Die geometrische Normalkontakt-Randbedingung lässt sich mit der Ungleichheitsnebenbedingung

$$g(\mathbf{X}, t) \geq 0 \quad (2.29)$$

zusammenfassen. Für die vollständige Beschreibung des Normalkontaktes ist zudem die Definition der Spannungsrandbedingung auf dem Kontakttrand notwendig. Im Falle eines Kontaktes zweier Körper muss das lokale Gleichgewicht der Kontaktkräfte

$$\mathbf{t}_c^{(1)}(\mathbf{x}) d\gamma_c^{(1)} = -\mathbf{t}_c^{(2)}(\hat{\mathbf{y}}) d\gamma_c^{(2)} \quad (2.30)$$

in der Momentankonfiguration erfüllt sein. Aufgrund dieser Tatsache können die Kontaktkräfte in Abhängigkeit nur eines Kontakttrandes ausgedrückt werden. Hierfür wird wiederum die Slave-Seite ausgewählt. Die Kontaktkräfte berechnen sich dann zu

$$\mathbf{t}_c = \mathbf{t}_c^{(1)} = \mathbf{P}^{(1)}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{N}_0^{(1)}(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X} \in \Gamma_c^{(1)}. \quad (2.31)$$

Darin ist \mathbf{P} der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und $\mathbf{N}_0^{(1)}(\mathbf{X})$ die nach außen gerichtete, normierte Normale am Punkt $\mathbf{X} \in \Gamma_c^{(1)}$ in der Referenzkonfiguration. Der Vektor der Kontakt-

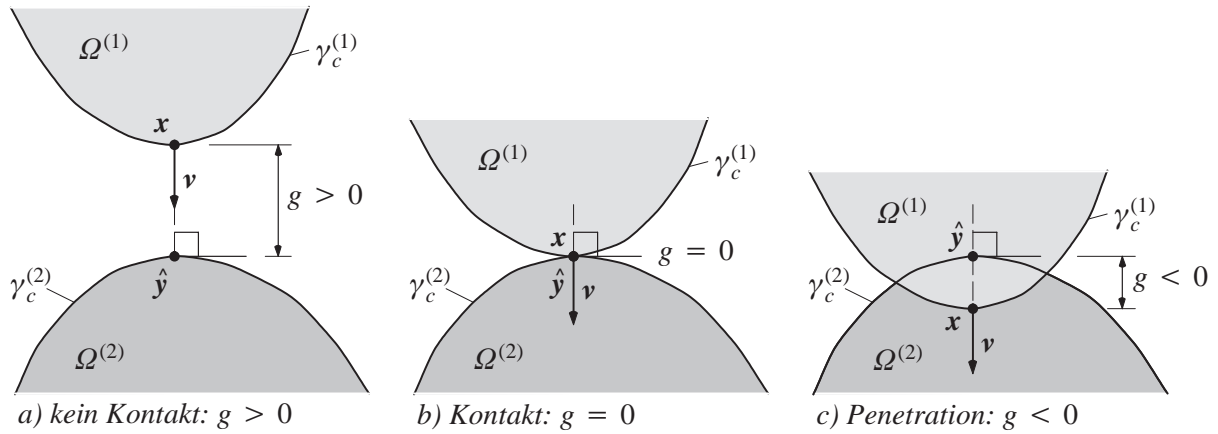


Abb. 2.5: Bedeutung der Abstandsfunktion (zweidimensionale Darstellung)

1. Die Definition der Normalenrichtung und der Abstandsfunktion ist in der Literatur leider nicht einheitlich. Als Konsequenz daraus ergeben sich diverse Vorzeichenunterschiede bei der Formulierung der Kontakt-Randbedingungen.

kräfte t_c lässt sich mit Hilfe der Normalen $\boldsymbol{\nu}$ in einen normalen und einen tangentialen Anteil aufspalten:

$$\boldsymbol{t}_c = t_\nu \boldsymbol{\nu} - \boldsymbol{t}_\tau . \quad (2.32)$$

Die skalare Größe t_ν beschreibt den Kontaktdruck in Richtung der Normalen $\boldsymbol{\nu}$, und der Vektor \boldsymbol{t}_τ stellt die Projektion des Kontaktkraftvektors auf die tangentielle Ebene an $\gamma_c^{(2)}$ dar. Aufgrund der Definition der Normalen $\boldsymbol{\nu}$ bedeutet ein negatives Vorzeichen von t_ν eine entsprechende Kontakt-Druckkraft.

Damit sind alle notwendigen Bezeichnungen und Definitionen eingeführt. Die Ungleichheitsnebenbedingungen des Normalkontaktes lassen sich in Form der klassischen *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) Bedingungen zusammenfassen:

$$\begin{aligned} g(\boldsymbol{X}, t) &\geq 0 , \\ t_\nu &\leq 0 , \\ t_\nu g(\boldsymbol{X}, t) &= 0 . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Hierin stellt Gleichung (2.33)₁ die geometrische Inpenetrabilitätsbedingung dar, Gleichung (2.33)₂ fordert, dass die auftretenden Kontaktkräfte ausschließlich Druckkräfte sein dürfen, und Gleichung (2.33)₃ stellt sicher, dass Kontaktkräfte nur dann auftreten können, wenn sich die Körper tatsächlich in Kontakt befinden, d.h. die Klaffung zu Null wird. In Abbildung 2.6 sind die KKT-Bedingungen als Beziehung zwischen der Klaffung g und der Normalkontaktkraft t_ν graphisch aufgetragen. Darin zeigt die dicke Linie die zulässigen Kombinationen von t_ν und g an. Offensichtlich ist diese Funktion im Kontaktfall ($g = 0$) mehrdeutig, unstetig und deshalb auch nicht differenzierbar, was die Lösung dieses Problems erheblich erschwert und eine entsprechende Regularisierung erforderlich macht. In Kapitel 5 werden einige gängige Lösungsverfahren vorgestellt.

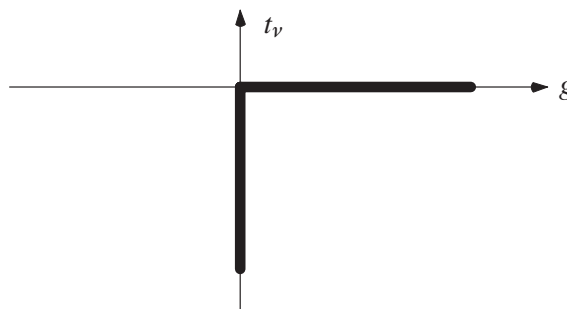


Abb. 2.6: Graphische Darstellung der KKT-Bedingungen des Normalkontaktes

2.2.3 Kontaktrandbedingungen in Tangentialrichtung

Treten zwei Körper miteinander in Kontakt, ist dies immer mit einem gewissen Maß an Reibung verbunden. Im Sinne einer kontinuierlichen Kontaktbeschreibung sind zusätzlich zu den bereits erläuterten Nebenbedingungen des Normalkontaktes die entsprechenden Bedingungen in Tangentialrichtung zu formulieren. Diese werden im Folgenden anhand des vergleichsweise einfa-

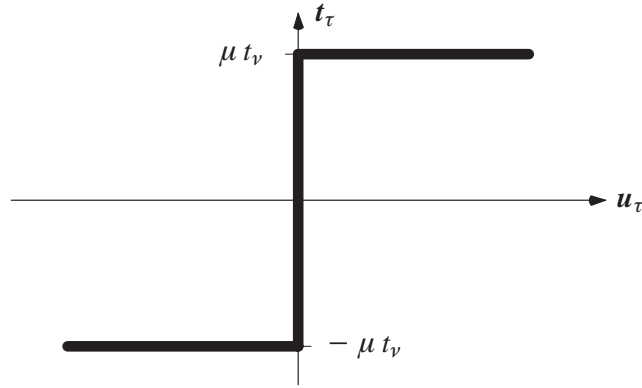


Abb. 2.7: Coulombsches Reibgesetz (eindimensionale Darstellung)

chen Coulombschen Reibgesetzes vorgestellt, wobei die Formulierung auch auf komplexere Reibgesetze übertragen werden kann.

Zunächst wird der Reibungskoeffizient μ als ein, von der Oberflächenrauigkeit der kontaktierenden Körper abhängiger Materialparameter eingeführt. Mit dessen Hilfe kann ein Zusammenhang zwischen den Normal- und Tangentialkontaktkräften über die Ungleichung

$$\| \mathbf{t}_\tau \| \leq \mu t_\nu \quad (2.34)$$

formuliert werden. Dabei muss zwischen Haft- und Gleitreibung unterschieden werden. Ist \mathbf{t}_τ betragsmäßig kleiner als die mit dem Reibungskoeffizienten skalierte Normalkontaktkraft, haften die beiden Oberflächen aneinander und es tritt keine tangentielle Relativverschiebung \mathbf{u}_τ auf. Erreicht jedoch die Tangentialkontaktkraft den entsprechenden Grenzwert, fangen die beiden Oberflächen an, aufeinander zu gleiten:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\tau = 0, & \quad \text{falls} \quad \| \mathbf{t}_\tau \| < \mu t_\nu : & \quad (\text{Haften}) \\ \mathbf{u}_\tau \geq 0, & \quad \text{falls} \quad \| \mathbf{t}_\tau \| = \mu t_\nu : & \quad (\text{Gleiten}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

In Abbildung 2.7 ist das Coulombsche Reibgesetz schematisch dargestellt. Es lässt sich dabei eine gewisse Ähnlichkeit zu Elastoplastizitätsformulierungen für ein starr, ideal plastisches Materialverhalten erkennen. Diese Analogie wird in der Regel bei numerischen Lösungsverfahren genutzt.

Ohne explizit auf Elastoplastizitätsformulierungen einzugehen (Lubliner (1990), Khan und Huang (1995), Simo und Hughes (1998)), wird das Coulombsche Reibgesetz in Anlehnung daran in Form der Kuhn-Tucker Bedingungen angegeben:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{t}_\tau, t_\nu) &= \| \mathbf{t}_\tau \| - \mu t_\nu \leq 0, \\ \mathbf{v}_\tau &= \dot{\gamma} \frac{\mathbf{t}_\tau}{\| \mathbf{t}_\tau \|}, \\ \dot{\gamma} &\geq 0, \\ \dot{\gamma} \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

In Gleichung (2.36)₁ wird mit Φ die *Gleitfunktion* definiert, die, als direktes Analogon zur *Fließfunktion* der Plastizitätstheorie, Gleichung (2.34) widerspiegelt. Die beiden Gleichungen

(2.36)_{2,3} fordern, dass die Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_τ entgegengesetzt zur Reibkraft wirkt oder den Wert Null annehmen muss. In der Plastizitätstheorie würde dies der sogenannten *Fließregel*, mit $\dot{\gamma}$ als *plastischem Multiplikator*, entsprechen. Mit der Kontinuitätsbedingung (2.34)₄ wird sichergestellt, dass Gleiten nur dann auftreten kann, wenn die Gleitfunktion den Wert Null annimmt, d.h. wenn $\|\mathbf{t}_\tau\| = \mu t_\nu$ gilt. Das Pendant hierzu stellt die entsprechende *Konsistenzbedingung* der Elastoplastizität dar.

Anmerkung: Die Gleichungen (2.36)₂₋₄ beschreiben im Wesentlichen Gleichung (2.35), mit einem entscheidenden Unterschied: Die Zusammenhänge zwischen der Relativverschiebung \mathbf{u}_τ und der Reibkraft \mathbf{t}_τ werden in Ratenform geschrieben. Dadurch wird die Auswertung des Reibgesetzes pfadabhängig, was wiederum physikalisch vor allem dann sinnvoll ist, wenn sich die Belastungsrichtung ändert.

Um die Kontakt-Randbedingungen im Falle großer Deformationen objektiv formulieren zu können, hat es sich als vorteilhaft erwiesen, auf der Master-Seite ein konvektives Koordinatensystem $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ einzuführen (Wriggers und Miehe (1992, 1994) sowie Laursen und Simo (1993b)). Dieses Koordinatensystem kann gedanklich als fest auf die Kontaktoberfläche der Master-Seite eingeritzt interpretiert werden (Abb. 2.8).

Mit den Abbildungen

$$\Gamma_c^{(2)} = \Psi_0^{(2)}(A^{(2)}) \quad \text{und} \quad \gamma_c^{(2)} = \Psi_t^{(2)}(A^{(2)}) \quad (2.37)$$

lassen sich die Kontaktflächen $\Gamma_c^{(2)}$ und $\gamma_c^{(2)}$ über den Parameterraum $A^{(2)}$ in der Referenz- und der Momentankonfiguration ausdrücken. Zur Beschreibung der Bewegung eines Punktes

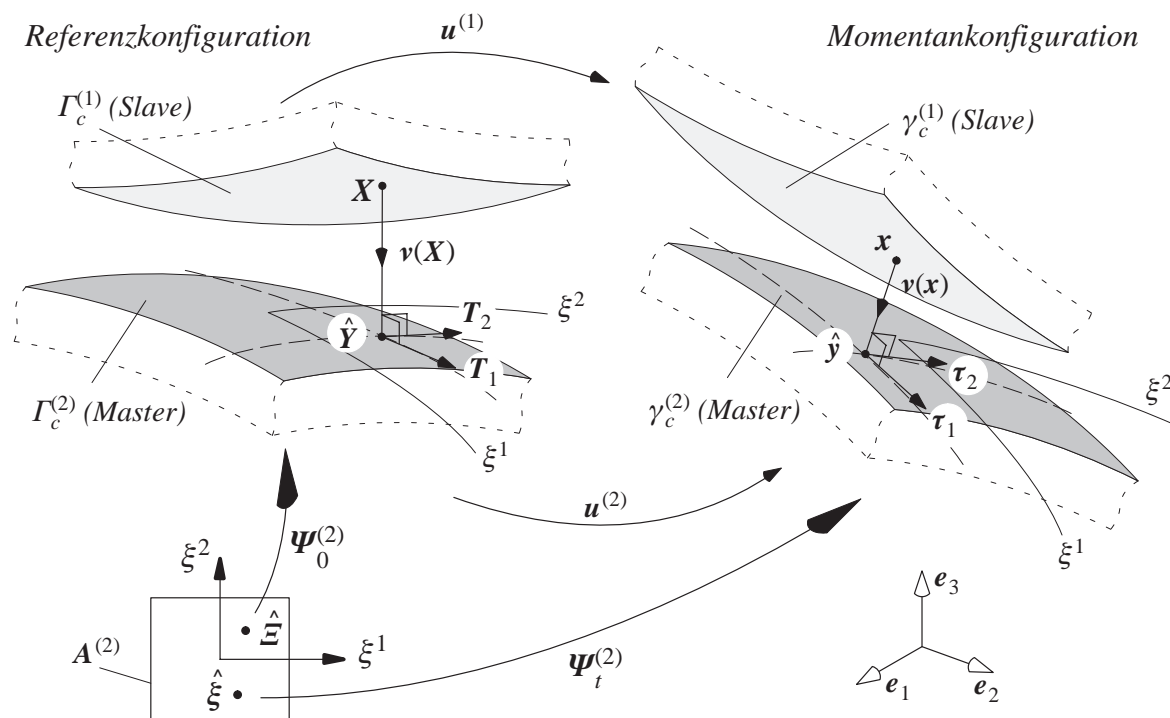


Abb. 2.8: Konvektives Koordinatensystem und Basisvektoren im Projektionspunkt

$\mathbf{X} \in \Gamma_c^{(1)}$ über die Oberfläche $\Gamma_c^{(2)}$, werden im jeweiligen Projektionspunkt $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}) \in \Gamma_c^{(2)}$ die kovarianten Basisvektoren

$$\mathbf{T}_\beta = \frac{\partial \hat{\mathbf{Y}}}{\partial \xi^\beta} = \hat{\mathbf{Y}}_{,\beta} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\tau}_\beta = \frac{\partial \hat{\mathbf{y}}}{\partial \xi^\beta} = \hat{\mathbf{y}}_{,\beta} \quad , \quad \beta = 1, 2 \quad (2.38)$$

in der Referenz- und Momentankonfiguration eingeführt (Abb. 2.8). Dabei ist zu beachten, dass die Basisvektoren nicht mit der Oberfläche der Master-Seite verbunden sind, sondern mit dem Projektionspunkt $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{x})$ mitwandern. Wenn sich also ein Punkt \mathbf{X} bewegt, gleitet der zugehörige Projektionspunkt $\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})$ wie sein Schatten über die Master-Seite. Da die Basisvektoren $\boldsymbol{\tau}_\beta$ einem entsprechenden Punkt \mathbf{x} der Slave-Seite zugeordnet sind, verändern sie sich einerseits infolge einer Deformation des Slave-Körpers und andererseits infolge einer Relativverschiebung der beiden kontaktierenden Körper.

2.2.4 Das dynamische Anfangsrandwertproblem mit Kontakt

Im Abschnitt 2.1.5 wurde das Anfangsrandwertproblem der Elastodynamik für den Fall eines einzelnen deformierbaren Körpers zusammengefasst. Für die Beschreibung eines Kontaktproblems zweier deformierbarer Körper sind folgende Modifikationen notwendig: Die entspre-

Es sind für jeden Zeitpunkt $t \in [0, T]$ die Verschiebungsfelder $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$) zu bestimmen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

- *Dynamisches Gleichgewicht in $\Omega^{(\alpha)}$:*

$$\left[\rho \ddot{\mathbf{u}} = \text{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \rho \mathbf{b} \right]^{(\alpha)}$$
- *Kinematische Beziehungen in $\Omega^{(\alpha)}$:*

$$\left[\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}) \right]^{(\alpha)}$$
- *Konstitutive Beziehungen (hier exemplarisch St. Venant-Kirchhoff) in $\Omega^{(\alpha)}$:*

$$\left[\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E} \right]^{(\alpha)}$$
- *Dirichlet-Randbedingung auf $\Gamma_D^{(\alpha)}$:*

$$\left[\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \right]^{(\alpha)}$$
- *Neumann-Randbedingung auf $\Gamma_N^{(\alpha)}$:*

$$\left[\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}} \right]^{(\alpha)}$$
- *Anfangsbedingungen in $\Omega_0^{(\alpha)}$:*

$$\left[\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \right]^{(\alpha)} ; \quad \left[\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \right]^{(\alpha)}$$
- *Kontaktbedingungen*

<i>in Normalenrichtung auf $\Gamma_c^{(1)}$ (Slave):</i> $g \geq 0$ $t_\nu \leq 0$ $t_\nu g = 0$	<i>in Tangentialrichtung auf $\Gamma_c^{(1)}$ (Slave):</i> $\Phi(\mathbf{t}_\tau, t_\nu) = \ \mathbf{t}_\tau\ - \mu t_\nu \leq 0$ $\mathbf{v}_\tau = \dot{\gamma} \frac{\mathbf{t}_\tau}{\ \mathbf{t}_\tau\ } ; \quad \dot{\gamma} \geq 0$ $\dot{\gamma} \Phi = 0$
--	---

Abb. 2.9: Starke Form des Anfangsrandwertproblems für den Kontakt zweier deformierbarer Körper

chenden Feldgleichungen und Randbedingungen sind für beide Körper zu erfüllen; bei der Lösung dieses Problems sind die zuvor beschriebenen Kontakt-Randbedingungen einzuhalten. In Abbildung 2.9 ist die starke Form des Anfangsrandwertproblems für den Kontakt zweier deformierbarer Körper zusammengefasst.

2.2.5 Schwache Form des Kontaktproblems

Um das Kontaktproblem mit der Methode der Finiten Elemente numerisch lösen zu können, müssen die punktweise zu erfüllenden Kontaktbedingungen in eine schwache Form gebracht werden. Dazu werden die Kontaktkräfte $\mathbf{t}_c^{(\alpha)}$ der beiden Kontaktflächen im Sinne des Prinzips der virtuellen Verschiebungen mit einer entsprechenden Testfunktion (virtuelle Verschiebungen) multipliziert und über den entsprechenden Kontaktrand integriert. Die resultierenden, virtuellen Arbeitsausdrücke der Kontaktkräfte werden anschließend zu einer entsprechend gewählten schwachen Form des Anfangsrandwertproblems aus Kapitel 2.1.5 hinzuaddiert:

$$\delta\Pi^{int,ext} + \delta\Pi_c^{(1)} + \delta\Pi_c^{(2)} = \delta\Pi^{int,ext} - \sum_{\alpha=1}^2 \int_{\Gamma_c^{(\alpha)}} \mathbf{t}_c^{(\alpha)} \cdot \delta\mathbf{u}_c^{(\alpha)} d\Gamma = 0 . \quad (2.39)$$

Hierbei repräsentiert $\delta\Pi^{int,ext}$ bereits die Summe der internen und externen virtuellen Arbeiten der beiden beteiligten Körper, unter Verwendung eines der vorgestellten Prinzipien aus Kapitel 2.1.6. Da während des Kontaktes das Gleichgewicht der Kontaktkräfte entlang der kontaktierenden Oberflächen erfüllt sein muss (Gl. (2.30)), lassen sich die beiden Integrale aus Gleichung (2.39) zu einem Integral zusammenfassen. Hierfür wird wiederum die Slave-Seite ausgewählt, so dass sich die virtuelle Arbeit des Kontaktes zu

$$\delta\Pi_c(\mathbf{u}_c, \delta\mathbf{u}_c) = - \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mathbf{t}_c^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \left[\delta\mathbf{u}_c^{(1)}(\mathbf{X}) - \delta\mathbf{u}_c^{(2)}(\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right] d\Gamma \quad (2.40)$$

ergibt. Mit Hilfe der Variation der Klaffungsfunktion g und des Projektionspunktes $\hat{\xi}$ im Parameterraum (Abb. 2.8) lässt sich die Gleichung (2.40) noch kompakter darstellen. Die beiden notwendigen Variationen ergeben sich zu

$$\delta g = - \boldsymbol{\nu} \cdot \left[\delta\mathbf{u}_c^{(1)}(\mathbf{X}) - \delta\mathbf{u}_c^{(2)}(\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right] \quad (2.41)$$

und

$$\delta\hat{\xi}^\beta = \boldsymbol{\tau}^\beta \cdot \left[\delta\mathbf{u}_c^{(1)}(\mathbf{X}) - \delta\mathbf{u}_c^{(2)}(\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right] . \quad (2.42)$$

Eine ausführliche Herleitung dieser beiden Ausdrücke findet sich in Laursen (2002). Werden die beiden Variationen in Gleichung (2.40) eingesetzt, lässt sich die virtuelle Arbeit des Kontaktes in Komponenten normal und tangential zur Kontaktfläche in sehr kompakter Form darstellen:

$$\delta\Pi_c(\mathbf{u}_c, \delta\mathbf{u}_c) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} t_\nu \delta g + t_{\tau_\beta} \delta\hat{\xi}^\beta d\Gamma . \quad (2.43)$$

Anmerkung: Für die Herleitung von Gleichung (2.42) wurde angenommen, dass für all diejenigen Punkte, für die der Integrand in Gleichung (2.40) ungleich Null ist, die Inpenetrabilitätsbedingung ($g = 0$) exakt erfüllt wird. In einem numerischen Näherungsverfahren wird diese Bedingung in der Regel nicht exakt erfüllt. Es wird jedoch davon ausgegangen, dass die Verletzung dieser Bedingung ausreichend klein ist.

2.3 Lösungsverfahren

In dieser Arbeit wird die Methode der Finiten Elemente (FEM) eingesetzt, um die vorgestellten Anfangsrandwertprobleme der nichtlinearen Strukturmechanik numerisch zu lösen. Dazu wird zunächst eine *räumliche Diskretisierung* der schwachen Form des betrachteten Anfangsrandwertproblems durchgeführt, indem das Gebiet in eine endliche Anzahl von Teilgebieten, den Finiten Elementen, unterteilt wird. Dies führt zu einem nichtlinearen, gekoppelten System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die Beschreibung der zeitlichen Veränderung diskreter Element-Freiheitsgrade. Anschließend erfolgt mit einem geeigneten Zeitintegrationsverfahren eine *zeitliche Diskretisierung* des Differentialgleichungssystems. Das resultierende, nichtlineare Gleichungssystem wird dann mit Hilfe eines inkrementell-iterativen Verfahrens gelöst. Im Folgenden wird lediglich ein kurzer, schematischer Überblick über das allgemeine Lösungsverfahren gegeben, wobei der Übersichtlichkeit halber auf die Berücksichtigung der entsprechenden Kontaktterme verzichtet wird. Für die schwache Form wird exemplarisch das Prinzip der virtuellen Verschiebungen gewählt. Eine detaillierte, konkret auf die Problemstellung dieser Arbeit bezogene räumliche und zeitliche Diskretisierung wird in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellt.

2.3.1 Räumliche Diskretisierung

Zunächst wird das betrachtete Gebiet Ω in n_e Finite Elemente

$$\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e \quad (2.44)$$

unterteilt. Das unbekannte Verschiebungsfeld \mathbf{u} wird mit Hilfe geeigneter Ansatzfunktionen N und den diskreten Element-Knotenverschiebungen \mathbf{d} innerhalb eines einzelnen Elementes approximiert:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{u}_e^h \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}_e^h = N_{(e)} \mathbf{d}_{(e)} . \quad (2.45)$$

Analog hierzu werden auch das Beschleunigungsfeld $\ddot{\mathbf{u}}$ und die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ interpoliert:

$$\ddot{\mathbf{u}}_e^h = N_{(e)} \ddot{\mathbf{d}}_{(e)} \quad \text{und} \quad \delta \mathbf{u}_e^h = N_{(e)} \delta \mathbf{d}_{(e)} . \quad (2.46)$$

In den Gleichungen (2.45) und (2.46) wurde bereits die für FE-Formulierungen typische Matrixschreibweise verwendet. Darin sind N die Matrizen mit den auf Elementebene definierten

Ansatzfunktionen und $\delta \mathbf{d}$, \mathbf{d} und $\ddot{\mathbf{d}}$ die Vektoren der diskreten (virtuellen) Knotenverschiebungen und -beschleunigungen. Mit diesen Ansätzen wird die Diskretisierung der schwachen Form (2.20) durchgeführt, was auf die semidiskrete Form der Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}^{ext} \quad (2.47)$$

führt. Darin ist \mathbf{M} die zeitlich konstante Massenmatrix, und \mathbf{f}^{int} bzw. \mathbf{f}^{ext} sind die Vektoren der internen und externen Knotenkräfte. Auf die konkrete Bestimmung dieser Vektoren und Matrizen wird in Kapitel 3 sowie im Anhang A eingegangen.

Da reale Strukturen in der Regel eine gewisse Dämpfungseigenschaft aufweisen, wird häufig eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung in die Bewegungsgleichung eingebracht, indem Gleichung (2.47) um einen viskosen Dämpfungsterm $\mathbf{C}^S \dot{\mathbf{d}}$ erweitert wird:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}^S \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) = \mathbf{f}^{ext} . \quad (2.48)$$

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten numerischen Beispiele wurden stets ohne viskose Strukturdämpfung berechnet, so dass der Dämpfungsterm im Weiteren nicht berücksichtigt wird.

2.3.2 Zeitliche Diskretisierung

Um das zeitkontinuierliche, semidiskrete Anfangsrandwertproblem (2.47) numerisch integrieren zu können, muss eine geeignete zeitliche Diskretisierung durchgeführt werden. Dazu wird das gesamte zu untersuchende Zeitintervall $[0, T]$ in diskrete, endliche Zeitschritte $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ unterteilt. Ziel des Zeitintegrationsverfahrens ist es, geeignete Ansätze für die unbekanntenen Verschiebungen und Beschleunigungen bereitzustellen, um das bereits räumlich diskretisierte Gleichungssystem (2.47) zu lösen. Als einzige Primärvariable sollen dabei lediglich die diskreten Knotenverschiebungen verbleiben.

In dieser Arbeit werden zum einen das „Generalized- α “-Verfahren (Chung und Hulbert (1993)) und zum anderen die „Generalized-Energy-Momentum-Method“ (Kuhl und Criesfield (1999), Kuhl und Ramm (1999)) eingesetzt. Bei beiden Verfahren wird das diskretisierte, dynamische Gleichgewicht an einem generalisierten Mittelpunkt $t_{n+1-\alpha_{f,m}}$ ausgewertet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_m}(\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}(\mathbf{d}_{n+1})) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}(\mathbf{d}_{n+1})) = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{ext} . \quad (2.49)$$

Dieses nichtlineare Gleichungssystem hängt implizit von den unbekanntenen Knotenverschiebungen \mathbf{d}_{n+1} am Ende des entsprechenden Zeitschrittes ab. Deshalb werden die beiden genannten Methoden den impliziten Zeitintegrationsverfahren zugeordnet. Die ausführliche Darstellung der verwendeten Zeitdiskretisierungsmethoden wird in Kapitel 4 gegeben, wo auch die Bedeutung der Parameter α_m und α_f erläutert wird.

2.3.3 Iteratives Lösungsverfahren

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems (2.49) innerhalb eines Zeitschrittes $[t_n, t_{n+1}]$ wird ein iteratives Prädiktor-Korrektor-Verfahren eingesetzt. Bei dem hier angewendeten *Newton-Raphson-Verfahren* wird dazu Gleichung (2.49) in die Form

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}) \equiv \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_m}(\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}(\mathbf{d}_{n+1})) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}(\mathbf{d}_{n+1})) - \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{ext} = \mathbf{0} \quad (2.50)$$

gebracht. Anschließend wird hierfür eine mehrdimensionale Nullstellensuche durchgeführt, wobei derjenige Verschiebungsvektor \mathbf{d}_{n+1} am Ende des betrachteten Zeitschrittes gesucht wird, der Gleichung (2.50) erfüllt. Sind zum Zeitpunkt t_n die zur Erfüllung des Gleichgewichtszustandes notwendigen Verschiebungen \mathbf{d}_n ($\hat{=} \mathbf{d}_{n+1}^0$) bekannt, wird zunächst im *Prädiktorschritt* ($k = 0$) eine lineare Approximation für den gesuchten Lösungsvektor durchgeführt. Diese ergibt sich aus einer Taylor-Reihenentwicklung, die nach dem linearen Term abgebrochen wird:

$$LIN \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k) = \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}. \quad (2.51)$$

Hierin kennzeichnet k den entsprechenden Iterationsschritt und $LIN \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k)$ ist die *Linearisierung* von $\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1})$ an der Stelle \mathbf{d}_{n+1}^k , wobei gilt:

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^{k+1}) = LIN \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k) + \mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}^k). \quad (2.52)$$

Dabei werden durch das *Residuum* $\mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}^k)$ die Terme höherer Ordnung der Taylor-Reihenentwicklung zusammengefasst. Im Prädiktorschritt ($k = 0$) wird die lineare Gleichung (2.51) für die inkrementellen Verschiebungen

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{d}_{n+1}^k \quad (2.53)$$

gelöst. Diese liefern zusammen mit dem bekannten Verschiebungsvektor $\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n+1}^0$ eine erste Näherung für den gesuchten Lösungsvektor

$$\mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{d}_{n+1}^k + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}, \quad (2.54)$$

der damit gleichzeitig den Startwert für den ersten *Korrektorschritt* darstellt. In den nachfolgenden Korrektorschritten werden dann jeweils mit Gleichung (2.51) neue inkrementelle Verschiebungen ausgerechnet und der entsprechende Lösungsvektor mit Gleichung (2.54) aktualisiert. Dies wird solange wiederholt, bis sich das Residuum \mathbf{R} innerhalb einer festgelegten Fehler-schranke befindet. Der Verschiebungsvektor \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} wird dann als Lösung der Gleichung (2.50) betrachtet. Mit den bekannten Verschiebungen zum Zeitpunkt t_{n+1} werden die entsprechenden Feldgrößen aktualisiert und es kann für den nächsten Zeitschritt nach dem gleichen Schema iterativ gelöst werden.

3 Volumenorientierte Finite Elemente für dünnwandige Strukturen

3.1 Einführung

In diesem Kapitel werden verschiedene Finite Elementformulierungen vorgestellt, die sich für die Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen eignen. Dabei ist zunächst festzuhalten, dass die meisten klassischen Schalenformulierungen a priori eine Dimensionsreduktion durchführen. D.h. der eigentlich dreidimensionale Schalenkörper wird über eine zweidimensionale Referenzfläche, in der Regel die Schalenmittelfläche, approximiert. Es wird auch von einer *Semidiskretisierung* in Dickenrichtung gesprochen. Da die Integrale zur Berechnung der Kontaktarbeit (2.40) jedoch auf den entsprechenden Kontaktflächen, also der Schalenober- bzw. Schalenunterseite, auszuwerten sind, wird die Beschreibung von Kontaktproblemen relativ kompliziert. Die Wirkungen der Kontaktkräfte auf die Oberflächen müssen entsprechend auf die Freiheitsgrade der Mittelfläche übertragen werden. Obwohl dieses Vorgehen zwar von Gee (2004) erfolgreich für eine klassische *Knoten-Segment*-Kontaktformulierung (node-to-segment contact – NTS) angewandt wurde, wird in dieser Arbeit eine entsprechende Reparametrisierung zur Beschreibung des dreidimensionalen Schalenkörpers eingesetzt (Schoop (1986)). Dies hat darüberhinaus den Vorteil, dass die vorgestellte Kontaktformulierung nicht auf die Anwendung eines speziellen Finiten Elementes beschränkt ist, sondern ohne weiteres auch mit vergleichbaren Volumenelementen kombiniert werden kann.

Im Hinblick auf die in den Kapiteln 6 und 7 vorgestellte Kontaktformulierung ist es außerdem vorteilhaft, Finite Elemente einzusetzen, die nur Polynome niedriger Ordnung für die Interpolation der Geometrie verwenden. Bei einer *Segment-Segment*-Kontaktformulierung (segment-to-segment contact – STS) muss nämlich über sich überlappende Teilgebiete zweier Elementflächen integriert werden, was bereits bei bi- bzw. trilinearen Ansätzen zu komplexen Ausdrücken führt. Allerdings ist bekannt, dass vor allem niedrig interpolierte Finite Elemente, die auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebung (2.20) basieren, unter unphysikalischen Versteifungseffekten (Locking) leiden. Diese beeinträchtigen die Qualität der Strukturantwort, die unter Umständen nicht einmal mit zunehmender Netzfeinheit gesichert ist. Damit lassen sich die Anforderungen, die in dieser Arbeit an Finite Elemente gestellt werden, folgendermaßen zusammenfassen.

- Volumenorientierte Beschreibung der Geometrie
→ Knotenfreiheitsgrade auf der Oberfläche
- Ansatzfunktionen mit niedriger Polynomordnung
- Genauigkeit
→ Vermeidung von unphysikalischen Versteifungseffekten

3.2 7-Parameter-Schalenformulierung

Nachfolgend wird eine dreidimensionale Schalenformulierung vorgestellt, die im Wesentlichen auf die Arbeiten von Büchter und Ramm (1992a) und Büchter et al. (1994) zurückgeht, und anschließend von Bischoff und Ramm (1997, 2000) sowie Bischoff (1999) ausführlich analysiert und weiterentwickelt wurde. Deshalb werden nur die wesentlichen, zum Verständnis der vorliegenden Arbeit notwendigen Annahmen und Gleichungen kurz skizziert.

Die *7-Parameter-Schalenformulierung* basiert auf einer Reissner-Mindlin-Kinematik, die im Gegensatz zu den klassischen Schalentheorien um die Dickenänderung der Schale erweitert wurde. Dadurch ist es möglich, den vollständigen, dreidimensionalen Spannungs- und Verzerrungszustand abzubilden, was den Einsatz unmodifizierter, dreidimensionaler Werkstoffgesetze erlaubt. Mit Hilfe des sogenannten *siebten Parameters* wird ein linearer Verlauf der transversalen Normalverzerrungen E_{33} gewährleistet. Damit ergibt sich auch für Biegezustände und $\nu \neq 0$ eine asymptotisch korrekte dreidimensionale Formulierung. Der zusätzliche siebte Freiheitsgrad wird mit Hilfe der EAS-Methode, die auf dem modifizierten Prinzip von Hu-Washizu (2.24) basiert, eingebracht und seine diskreten Parameter können durch eine statische Kondensation auf Elementebene eliminiert werden.

3.2.1 Kinematische Annahmen

Basierend auf dem modifizierten Prinzip von Hu-Washizu, ergeben sich für das 7-Parameter-Modell neben den Verschiebungen \mathbf{u} noch die zusätzlichen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ als freie Variablen. Gemeinsam mit den aus den Verschiebungen berechneten Verzerrungen \mathbf{E}^u entsteht der Verzerrungstensor

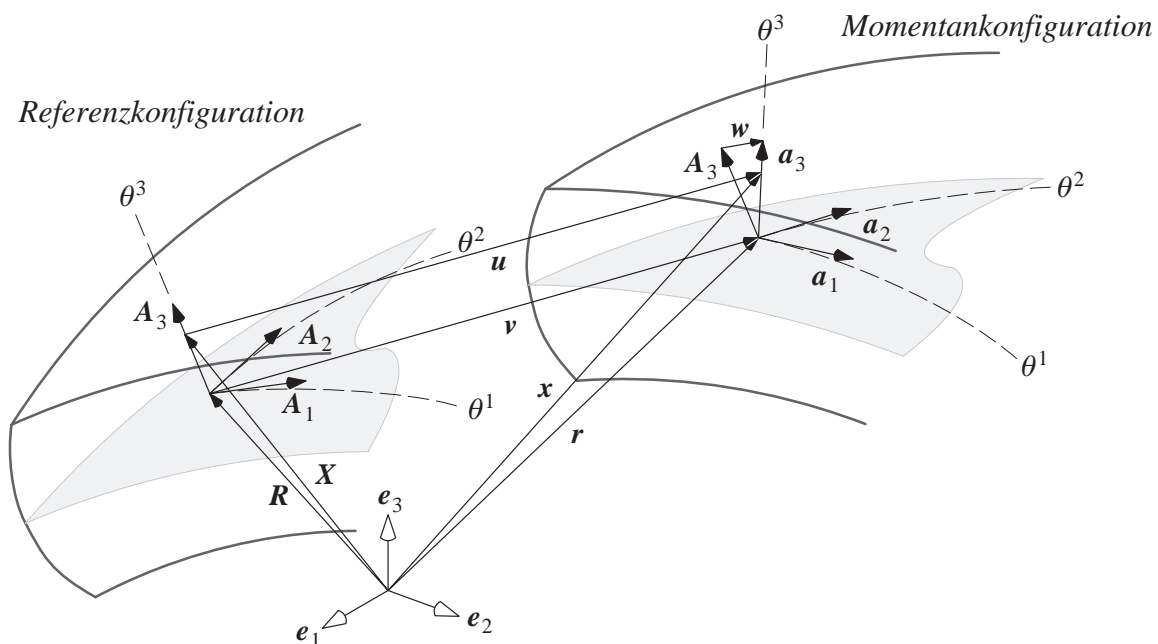


Abb. 3.1: Kinematik der 7-Parameter-Schalenformulierung

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^u + \tilde{\mathbf{E}} . \quad (3.1)$$

Ist die Geometrie der Schale sowohl in der Referenz- als auch in der Momentankonfiguration bekannt (Abb. 3.1), können daraus alle notwendigen kinematischen Größen bestimmt werden (Kap. 2.1). Zur Beschreibung der Geometrie werden die kovarianten Basisvektoren \mathbf{A}_i und \mathbf{a}_i auf der Schalenmittelfläche ($\theta^3 = 0$) berechnet, die sich aus den Richtungsableitungen der Ortsvektoren der Schalenmittelfläche \mathbf{R} und \mathbf{r} ergeben:

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{R}_{,\alpha} \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} . \quad (3.2)$$

Über das Kreuzprodukt der kovarianten Basisvektoren \mathbf{A}_α wird der *Direktor* \mathbf{A}_3 senkrecht zur Schalenebene in der Referenzkonfiguration errichtet. Definitionsgemäß bekommt er die Länge der halben Schalendicke $h/2$:

$$\mathbf{A}_3 = \frac{h}{2} \frac{\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|} . \quad (3.3)$$

Damit kann jeder beliebige Punkt des Schalenkörpers unter Verwendung einer Reissner-Mindlin-Kinematik über die Ortsvektoren der Schalenmittelfläche und dem zugehörigen Direktor in beiden Konfigurationen beschrieben werden:

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} + \theta^3 \mathbf{A}_3 \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \mathbf{r} + \theta^3 \mathbf{a}_3 , \quad \text{mit} \quad \theta^3 \in [-1, 1] . \quad (3.4)$$

Über die Verschiebung

$$\mathbf{v} = \mathbf{r} - \mathbf{R} \quad (3.5)$$

der Schalenmittelfläche und der Aktualisierung des Direktors mit Hilfe des Differenzvektors \mathbf{w}

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{A}_3 + \mathbf{w} \quad (3.6)$$

können die Verschiebungen \mathbf{u} eines Punktes im Schalenraum ausgedrückt werden:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathbf{R} + \mathbf{v} + \theta^3 (\mathbf{A}_3 + \mathbf{w}) - (\mathbf{R} + \theta^3 \mathbf{A}_3) = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w} . \quad (3.7)$$

Für die Beschreibung des Verschiebungsfeldes \mathbf{u} sind somit zunächst sechs Komponenten notwendig, die sich direkt aus dem linear veränderlichen Verschiebungsansatz in Dickenrichtung ergeben. Dies sind die drei Verschiebungskomponenten in der Schalenmittelfläche v_1, v_2 und v_3 sowie die drei Komponenten w_1, w_2 und w_3 des Differenzvektors.

Bei der Herleitung von Schalentheorien wird ein dreidimensionales Problem auf ein zweidimensionales reduziert. Um diese Dimensionsreduktion durchführen zu können, müssen sowohl die Spannungen als auch die Verzerrungen vorab über die Dicke zu den entsprechenden Resultierenden (Schnittkräften bzw. Membranverzerrungen, Krümmungen, ...) integriert werden. Eine detaillierte Analyse der dabei entstehenden statischen und kinematischen Variablen findet sich in Bischoff (1999).

Daraus folgt, dass für die Berechnung der kinematischen Variablen der Verlauf der Verzerrungen in Dickenrichtung bekannt sein muss. Dazu werden die kovarianten Basisvektoren (Gl. (2.1))

an Punkten innerhalb des Schalenkörpers benötigt, welche wiederum durch Größen der Schalenmittelfläche ausgedrückt werden können:

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta^\alpha} + \theta^3 \frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{R}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{A}_{3,\alpha} , \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{A}_3 , \quad (3.8)$$

$$\mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^\alpha} + \theta^3 \frac{\partial \mathbf{a}_3}{\partial \theta^\alpha} = \mathbf{r}_{,\alpha} + \theta^3 \mathbf{a}_{3,\alpha} , \quad \mathbf{g}_3 = \mathbf{a}_3 . \quad (3.9)$$

Mit Gleichung (2.10) lassen sich dann die verschiebungsabhängigen Green-Lagrange-Verzerrungen \mathbf{E}^u an jedem beliebigen Punkt des Schalenkörpers bestimmen, wobei durch die getroffenen kinematischen Annahmen (Gl. (3.7)) lediglich ein konstanter Normalverzerrungsverlauf E_{33}^u dargestellt werden kann. Um das in der Literatur viel beschriebene Poisson-Dickenlocking² (Braun et al. (1994), Braun (1995), Bischoff und Ramm (1997), Bischoff (1999) und weitere) zu vermeiden bzw. ein asymptotisch korrektes Modell zu erhalten, müssen die Normalverzerrungen E_{33} linear in Dickenrichtung verlaufen. Dazu werden die verschiebungsabhängigen Normalverzerrungen mit Hilfe des sogenannten siebten Parameters um einen linearen Anteil erweitert:

$$E_{33} = E_{33}^u + \tilde{E}_{33} . \quad (3.10)$$

Es ergeben sich die Komponenten des Green-Lagrangeschen-Verzerrungstensors zu

$$E_{ij} = E_{ij}^u + \tilde{E}_{ij} \quad \text{mit} \quad E_{ij}^u = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \approx \alpha_{ij}^u + \frac{h}{2} \theta^3 \beta_{ij}^u \quad (3.11)$$

und $\tilde{E}_{ij} = 0$ für $(i,j) \neq (3,3)$ und $\tilde{E}_{33} = \tilde{\beta}_{33}$.

Darin bezeichnen α_{ij}^u die über die Schalendicke konstanten, und β_{ij}^u bzw. $\tilde{\beta}_{33}$ die linear verlaufenden Anteile des Green-Lagrangeschen-Verzerrungstensors. Die prinzipiell noch enthaltenen quadratischen Terme von \mathbf{E}^u können hierbei vernachlässigt werden (Büchter und Ramm (1992a), Büchter et al. (1994)). Durch Einsetzen der Gleichungen (3.8) und (3.9) in (3.11) können die einzelnen kinematischen Variablen in Abhängigkeit der Basisvektoren der Schalenmittelfläche ausgedrückt werden:

2. Aufgrund des linearen Verschiebungsansatzes in Dickenrichtung ergeben sich konstante Normalverzerrungen in Dickenrichtung. Die energetisch konjugierten Spannungen sind jedoch über die Querkontraktionszahl an die linear verlaufenden Normalverzerrungen parallel zur Schalenmittelfläche gekoppelt und verlaufen für lineare Elastizität somit linear in Dickenrichtung. Es entsteht ein Zwang, da die linear verlaufenden Normalverzerrungen in Dickenrichtung im Ansatz nicht enthalten sind.

$$\begin{aligned}
\alpha_{\alpha\beta} &= \alpha_{\alpha\beta}^u = \frac{1}{2} \left(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \right) , \\
\beta_{\alpha\beta} &= \beta_{\alpha\beta}^u = \frac{1}{h} \left(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_{3,\beta} + \mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\alpha} - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_{3,\beta} - \mathbf{A}_\beta \cdot \mathbf{A}_{3,\alpha} \right) , \\
\alpha_{\alpha 3} &= \alpha_{\alpha 3}^u = \frac{1}{2} \left(\mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_3 \right) , \\
\beta_{\alpha 3} &= \beta_{\alpha 3}^u = \frac{1}{h} \left(\mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_{3,\alpha} \cdot \mathbf{A}_3 \right) \\
\alpha_{33} &= \alpha_{33}^u = \frac{1}{2} \left(\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 - \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_3 \right) , \\
\beta_{33} &= \tilde{\beta}_{33} .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Zusammenfassend berechnet sich der vollständige Verzerrungstensor näherungsweise zu

$$E_{ij} \approx \alpha_{ij} + \frac{h}{2} \theta^3 \beta_{ij} . \tag{3.13}$$

3.2.2 Vorabintegration der Spannungen und des Stoffgesetzes

Analog zu den Verzerrungen müssen auch die Spannungen und das Werkstoffgesetz durch eine Vorabintegration in Schalendickenrichtung vollständig in Größen der Schalenmittelfläche ausgedrückt werden. Die Integration über das gesamte Schalenvolumen Ω wird damit in eine Integration über die Schalenmittelfläche A überführt:

$$\int_{\Omega} (\cdot) d\Omega = \int_A \int_{-1}^1 (\cdot) \hat{\mu} d\theta^3 dA . \tag{3.14}$$

Darin ist $\hat{\mu}$ der Betrag des Schalenshifters, der die Beziehung zwischen einem differentiellen Volumenelement $d\Omega$ und einem differentiellen Flächenelement dA herstellt. Dieser ergibt sich zu

$$\frac{d\Omega}{dA} = \frac{((\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3) d\theta^3 d\theta^2 d\theta^1}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2| d\theta^2 d\theta^1} = \frac{(\mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2) \cdot \mathbf{G}_3}{|\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2|} d\theta^3 = \hat{\mu} d\theta^3 . \tag{3.15}$$

Mit Gleichung (3.14) können die statischen Variablen

$$n^{ij} = \int_{-1}^1 S^{ij} \hat{\mu} d\theta^3 \quad \text{und} \quad m^{ij} = \int_{-1}^1 \theta^3 S^{ij} \frac{h}{2} \hat{\mu} d\theta^3 \tag{3.16}$$

berechnet werden. Dabei lassen sich $n^{\alpha\beta}$ mit den Membrankräften, $n^{\alpha 3}$ mit den Querkräften und $m^{\alpha\beta}$ mit den Momenten identifizieren. Die Bedeutung der restlichen statischen Variablen wird ausführlich in Bischoff (1999) diskutiert.

Nachdem mit α_{ij} und β_{ij} die kinematischen, und mit n^{ij} und m^{ij} die statischen Variablen eingeführt wurden, muss als letzter Schritt das Stoffgesetz vorab über die Dicke integriert werden. Der Werkstofftensor der Schalenformulierung $\hat{\mathbb{C}}$ setzt die kinematischen Variablen mit den statischen in Beziehung. Er lautet:

$$\hat{C}_K^{ijkl} = \int_{-1}^1 (\theta^3)^K C^{ijkl} \left(\frac{h}{2}\right)^K \hat{\mu} d\theta^3, \quad K \in \{0, 1, 2\}. \quad (3.17)$$

Für ein lineares Materialverhalten folgt dann:

$$\begin{bmatrix} n^{ij} \\ m^{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{C}_0^{ijkl} & \hat{C}_1^{ijkl} \\ \hat{C}_1^{ijkl} & \hat{C}_2^{ijkl} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{kl} \\ \beta_{kl} \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Nachdem alle notwendigen Größen auf die Schalenmittelfläche bezogen sind, kann der Verzerungsenergieausdruck als Anteil des modifizierten Funktionals von Hu-Washizu als Integral über diese Referenzfläche ausgewertet werden:

$$\int_{\Omega} W^{int} d\Omega = \int_A W_{2D}^{int} dA = \int_A \frac{1}{2} (n^{ij} \alpha_{ij} + m^{ij} \beta_{ij}) dA. \quad (3.19)$$

3.2.3 Schwache Form

Für die Umsetzung mit Finiten Elementen werden die Ansätze des 7-Parameter-Schalenmodells in das modifizierte Prinzip von Hu-Washizu (Gl. (2.24)) eingesetzt. Daraus kann die EAS-Methode (Simo und Rifai (1990)) abgeleitet werden, die ursprünglich zur Vermeidung von künstlichen Versteifungseffekten von Finiten Elementen entwickelt wurde. Obwohl die EAS-Methode generell dem Begriff der Elementtechnologie zugeordnet wird, stellt die Erweiterung der Normalverzerrungen in Dickenrichtung hier einen Teil der Schalentheorie dar (Bischoff (1999)).

Mit Hilfe der Produktregel und des Gaußschen Integralsatzes

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^u) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S}^u : \underbrace{\mathbf{F}^T \cdot \operatorname{grad} \delta \mathbf{u}}_{\delta \mathbf{E}^u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}^u \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.20)$$

lässt sich die schwache Form aus Gleichung (2.24) ein wenig umformen. Sie lautet dann:

$$\delta \Pi_{HW}^{\text{mod}}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) = \int_{\Omega} [\tilde{\mathbf{S}} : \delta \tilde{\mathbf{E}} + \mathbf{S}^u : \delta \mathbf{E}^u] d\Omega + \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \delta \Pi_{HW}^{\text{mod,ext}} = 0 \quad (3.21)$$

mit der Abkürzung

$$\delta \Pi_{HW}^{\text{mod,ext}} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_D} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{t}^S d\Gamma. \quad (3.22)$$

insgesamt sechs Freiheitsgrade je Knoten ergeben. Die approximierten Verschiebungen \mathbf{u}^h innerhalb eines Elementes berechnen sich dann zu

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{v}^h + \theta^3 \mathbf{w}^h = N_K \mathbf{v}^K + \theta^3 N_K \mathbf{w}^K = \mathbf{N} \mathbf{d} , \quad \mathbf{N} \in H^1 . \quad (3.23)$$

Darin bezeichnen $K \in [1, 2, 3, 4]$ die diskreten Knoten eines Elementes, N_K die im lokalen Elementkoordinatensystem definierten, linearen Formfunktionen (Gl. (A.1) im Anhang), \mathbf{N} die Matrix der Interpolationsfunktionen (Gl. (A.7) im Anhang) und \mathbf{d} den Vektor der Elementfreiheitsgrade (Gl. (A.8) im Anhang). Wie bei reinen Verschiebungselementen auch, müssen die Verschiebungsfreiheitsgrade \mathbf{d} an den Elementgrenzen stetig sein. Damit wird die eigentlich nur schwach zu erfüllende, kinematische Randbedingung stark erfüllt, so dass der dritte Term aus Gleichung (3.22) verschwindet.

Der Direktor \mathbf{A}_3^K wird zunächst an jedem Knoten eines Elementes analog der kontinuierlichen Theorie nach Gleichung (3.3) errichtet. Stoßen mehrere Elemente an einem Knoten diskontinuierlich zusammen bzw. hat die diskretisierte Schale dort Knicke, wird der Direktor entsprechend dem Vorschlag von Bischoff (1999) gemittelt, indem er aus dem Schnittpunkt der Schalenlaibungen bestimmt wird (Abb. 3.3).

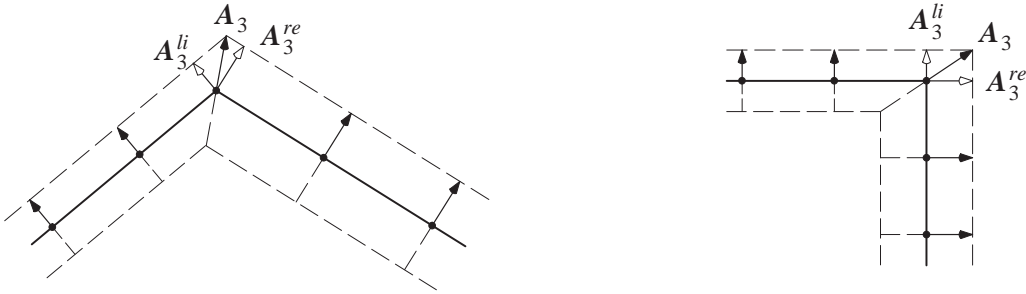


Abb. 3.3: Definition des Direktors an Knicken: Mittelflächen Formulierung

Zusätzlich zur Diskretisierung des Verschiebungsfeldes $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h$ müssen auch Ansätze für die zusätzlichen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ gemacht werden. Bei der Formulierung von Finiten Elementen ist es dabei üblich, sowohl die Verzerrungen als auch die Spannungen unter Ausnutzung der Symmetrie in Vektoren zusammenzufassen. Der Vektor der approximierten, zusätzlichen kinematischen Variablen $\tilde{\mathbf{E}}_h$ (Gl. (A.21) im Anhang) eines finiten Schalenelementes ergibt sich zu

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{a} , \quad \tilde{\mathbf{M}} \in L_2 . \quad (3.24)$$

Dabei ist $\tilde{\mathbf{M}}$ die Matrix der Ansatzfunktionen für die zusätzlichen kinematischen Variablen (Gl. (A.23) im Anhang) und \mathbf{a} der Vektor der internen Verzerrungsparameter (Gl. (A.24) im Anhang). Da die elementweise definierten Parameter \mathbf{a} nicht an die Elementknoten gebunden sind, müssen die zusätzlichen kinematischen Variablen nicht über die Elementgrenzen hinweg stetig sein. Dadurch können die zusätzlichen Verzerrungsparameter \mathbf{a} auf Elementebene eliminiert werden.

Die Definitionen der Vektoren \mathbf{E}_h^u , \mathbf{S}_h^u und $\tilde{\mathbf{S}}_h$ sind im Anhang A.1 gegeben. Analog zur räumlichen Diskretisierung des Verschiebungsfeldes wird auch das Beschleunigungsfeld approximiert:

$$\ddot{\mathbf{u}}^h = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{d}} . \quad (3.25)$$

Werden die Ansätze (3.23) bis (3.25) zusammen mit den Definitionen im Anhang A.1 in Gleichung (3.21) eingesetzt, lässt sich die diskretisierte, schwache Form für ein Finites Element darstellen:

$$\delta \Pi_{HW}^{mod,e}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{E}}) \approx \delta \Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a}) = \delta \Pi_h^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a}) + \delta \Pi_h^{dyn}(\ddot{\mathbf{d}}) - \delta \Pi_h^{ext} = 0 \quad (3.26)$$

mit

$$\begin{aligned} \delta \Pi_h^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a}) &= \int_{A^h} \left[(\tilde{\mathbf{S}}_h)^T \delta \tilde{\mathbf{E}}_h + (\mathbf{S}_h^u)^T \delta \mathbf{E}_h^u \right] dA = \\ &= \int_{A^h} (\tilde{\mathbf{S}}_h)^T \tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} dA \delta \mathbf{a} + \int_{A^h} (\mathbf{S}_h^u)^T \mathbf{E}_{h,d}^u dA \delta \mathbf{d} \\ &= \delta \mathbf{a}^T \tilde{\mathbf{f}}^{int}(\mathbf{a}) + \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) , \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\delta \Pi_h^{dyn}(\ddot{\mathbf{d}}) = \ddot{\mathbf{d}}^T \int_{A^h} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{dyn}(\ddot{\mathbf{d}}) = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} \quad (3.28)$$

und

$$\delta \Pi_h^{ext} = \left[\int_{A^h} \rho \mathbf{b} \mathbf{N} dA + \int_{\Gamma_N^h} \hat{\mathbf{t}} \mathbf{N} d\Gamma \right] \delta \mathbf{d} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{ext} . \quad (3.29)$$

Unter Anwendung des Fundamentallemmas der Variationsrechnung ergibt sich damit die diskretisierte schwache Form des dynamischen Gleichgewichtes innerhalb eines Finiten Elementes zu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a}) = \mathbf{f}^{ext} \quad \text{mit} \quad \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a}) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) + \tilde{\mathbf{f}}^{int}(\mathbf{a}) . \quad (3.30)$$

Hierbei wurde für die äußeren Lasten die Einschränkung gemacht, dass diese unabhängig von den Verschiebungen sind. Ausführungen zur Behandlung von verschiebungsabhängigen Lasten sind neben anderen in Schweizerhof und Ramm (1984) und Mok et al. (1999) zu finden. Da die Massenmatrix \mathbf{M} konstant ist, verbleiben in Gleichung (3.30) lediglich die internen Kräfte $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a})$, die nichtlinear von den Verschiebungsgrößen und den Verzerrungsparametern abhängen. Die für die iterative Lösung mittels eines Newton-Raphson-Verfahrens notwendige Linearisierung wird in Abschnitt 3.3.3 gegeben.

3.3.2 Diskretisierung über Größen der Schalenoberflächen

Im Gegensatz zur klassischen Methode, den dreidimensionalen Schalenraum über eine zweidimensionale Referenzfläche zu parametrisieren, wird nun der vollständige Schalenkörper analog zu einem dreidimensionalen Kontinuumsselement diskretisiert. Dabei sind aufgrund der kinematischen Annahmen des Schalenmodells die Ansätze in Dickenrichtung linear zu wählen, wohingegen in der Schalenebene auch höherwertige Ansätze möglich sind. Es sei darauf hingewiesen, dass die physikalische Grundlage dieser Variante dieselbe ist wie bei der klassischen Formulierung. Analog zum zuvor beschriebenen mittelflächenorientierten Schalenelement werden jedoch in dieser Arbeit ausschließlich achtknotige Hexaeder-Elemente verwendet, weshalb auch in der Schalenebene lineare Ansätze gewählt werden. Die diskreten Elementknoten liegen auf den Schalenoberflächen, wobei zwischen einer Unterseite (Index u) und einer Oberseite (Index o) unterschieden wird (Abb. 3.4). Folglich treten ausschließlich die Verschiebungen $\mathbf{v}^{K_{u,o}}$ auf den Schalenoberflächen als diskrete Knotenfreiheitsgrade auf, so dass sich die Anzahl der Freiheitsgrade je Knoten auf drei reduziert. Aufgrund des linearen Verschiebungsansatzes in Dickenrichtung, der bereits durch das Schalenmodell induziert wurde, lassen sich die entsprechenden Größen in der Schalenmittelfläche analog dem Degenerationskonzept (Büchter und Ramm (1992b), Bischoff (1999)) ermitteln. Der Ortsvektor eines Knotenpaars $\mathbf{X}^{K_{u,o}}$ in der Schalenmittelfläche ist damit durch

$$\mathbf{R}^K = \frac{1}{2}(\mathbf{X}^{K_o} + \mathbf{X}^{K_u}) \quad (3.31)$$

bestimmt, und der Direktor \mathbf{A}_3^K ist eindeutig durch die Differenz zwischen den Ortsvektoren der Knoten auf der Schalenober- bzw. -unterseite festgelegt:

$$\mathbf{A}_3^K = \frac{1}{2}(\mathbf{X}^{K_o} - \mathbf{X}^{K_u}) . \quad (3.32)$$

Gegenüber einer Geometrie-Beschreibung über die Schalenmittelfläche ist damit der Direktor auch an Knoten, an denen die diskretisierte Schalenfläche Knicke aufweist, eindeutig festgelegt

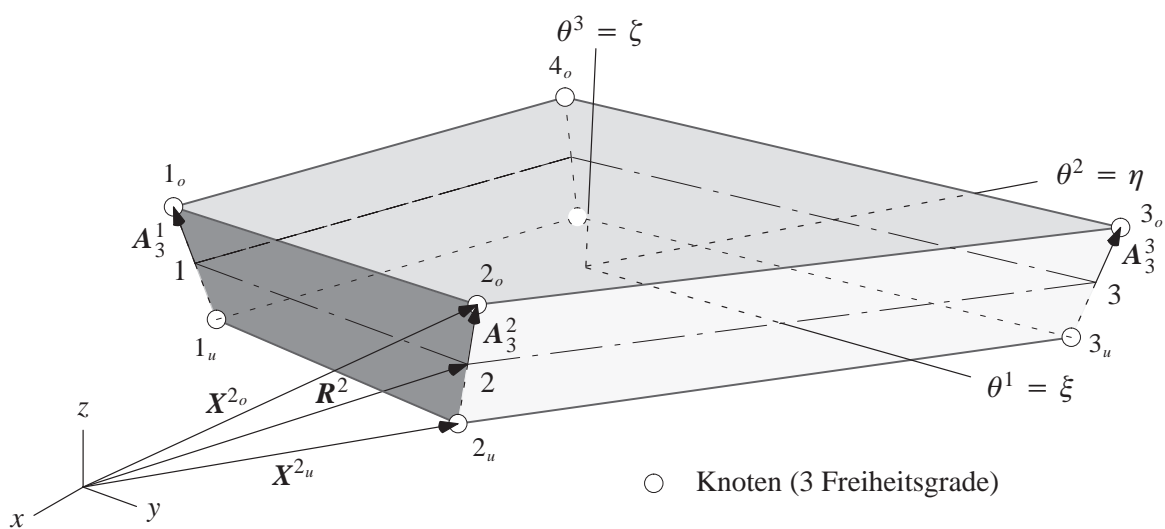


Abb. 3.4: Achtknotiges, oberflächenorientiertes Schalenelement

(Abb. 3.5) und muss nicht entsprechend der angrenzenden Elementflächen gemittelt werden (Abb. 3.3).

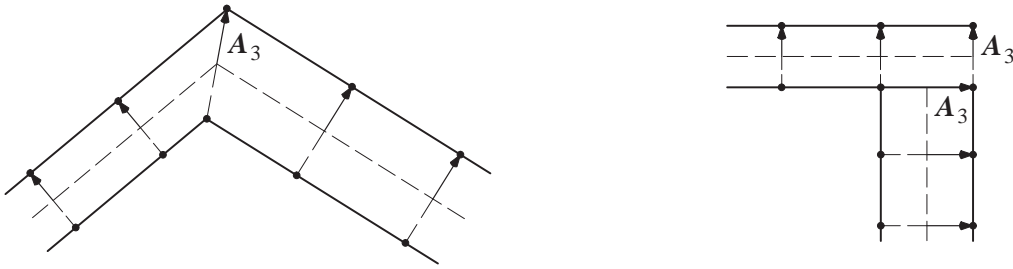


Abb. 3.5: Definition des Direktors an Knicken: Oberflächen Formulierung

Analog zum Ortsvektor zur Schalenmittelfläche \mathbf{R}^K und zum Direktor \mathbf{A}_3^K lassen sich auch die Verschiebungen \mathbf{v}^K in der Schalenmittelfläche sowie die Differenzverschiebungen \mathbf{w}^K des Direktors über die entsprechenden Verschiebungen der Knoten auf der Schalenoberfläche ausdrücken:

$$\mathbf{v}^K = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{K_o} + \mathbf{v}^{K_u}) \quad \text{und} \quad \mathbf{w}^K = \frac{1}{2}(\mathbf{v}^{K_o} - \mathbf{v}^{K_u}) . \quad (3.33)$$

Die approximierten Verschiebungen und Beschleunigungen innerhalb eines Elementes sind damit

$$\mathbf{u}^h = N_K \mathbf{v}^K + \theta^3 N_K \mathbf{w}^K = \frac{1}{2} N_K (\mathbf{v}^{K_o} + \mathbf{v}^{K_u}) + \frac{1}{2} \theta^3 N_K (\mathbf{v}^{K_o} - \mathbf{v}^{K_u}) = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (3.34)$$

und

$$\ddot{\mathbf{u}}^h = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{d}} , \quad (3.35)$$

wobei nun die Matrix der Interpolationsfunktionen \mathbf{N} und der Vektor der Elementfreiheitsgrade \mathbf{d} entsprechend anders definiert sind (Gl. (A.31) und (A.32) im Anhang). Die Ansätze für die zusätzlichen kinematischen Variablen $\tilde{\mathbf{E}}_h$ bleiben dagegen unverändert (Gl. (3.24)). Werden die Approximationen für die Verschiebungen, Beschleunigungen und zusätzlichen kinematischen Variablen in Gleichung (3.21) eingesetzt, ergibt sich wiederum die diskretisierte schwache Form eines Finiten Elementes. Diese ist formal identisch mit Gleichung (3.26) und wird daher nicht noch einmal gesondert dargestellt. Lediglich die Definition der Matrix der Interpolationsfunktionen \mathbf{N} sowie der Vektor der Elementfreiheitsgrade \mathbf{d} (bzw. $\ddot{\mathbf{d}}$) hat sich verändert. Eine detaillierte Darstellung der entsprechenden Vektoren und Matrizen findet sich im Anhang A.2.

Durch die Reparametrisierung der Geometriebeschreibung des Schalenkörpers ist ein oberflächenorientiertes Schalenelement entstanden, das formal exakt gleich behandelt wird wie das klassische, mittelflächenorientierte Schalenelement. Dabei sind einige entscheidende Vorteile gegenüber der klassischen Diskretisierungsstrategie zu nennen:

- Die Definition des Direktorfeldes ist eindeutig über die entsprechenden Knoten auf der Schalenober- bzw. -unterseite bestimmt, so dass keine Mittelung der Direktoren an Diskretisierungsknicken notwendig ist.

- Sowohl die Neumann- als auch die Dirichlet-Randbedingungen lassen sich entsprechend dem realen Verhalten direkt auf die Schalenoberflächen aufbringen, was beim mittelflächenorientierten Schalenelement nur indirekt möglich ist (Ramm et al. (1995)). Dies ist vorteilhaft für:
 - die Simulation von Fluid-Struktur-Interaktions Problemen, bei denen die entsprechenden Lasten des Fluides auf der Ober- und Unterseite der Schale angreifen,
 - eine entsprechende Kontaktformulierung, bei der die entsprechenden Kontaktkräfte auf den Schalenoberflächen wirken.
- Die Diskretisierung geschichteter Sandwichstrukturen kann ohne weiteres durchgeführt werden, indem entsprechend viele oberflächenorientierte Schalenelemente aufeinander angeordnet werden.

Gegenüber diesen entscheidenden Vorteilen ist die etwas aufwendigere Generierung eines dreidimensionalen Modells durchaus gerechtfertigt, zumal die entsprechenden Netzgenerierungsprogramme immer leistungsfähiger werden.

Zusätzlich hat das hier beschriebene Element auch entscheidende Vorteile gegenüber dem Einsatz gewöhnlicher Volumenelemente für die Diskretisierung dünnwandiger Strukturen:

- Mit Hilfe des siebten Parameters wird das bereits angesprochene Poisson-Dickenlocking eliminiert.
- Die schalentypischen Versteifungseffekte (siehe Kapitel 3.4.1) können gezielt behandelt werden, da die Dickenrichtung eines Elementes a priori bekannt ist.
- Elemente mit sehr geringen Dicken können problemlos berechnet werden, ohne auf ein entsprechendes Seitenverhältnis achten zu müssen³. Beim Einsatz von gewöhnlichen Volumenelementen ist die zu verwendende Feinheit des FE-Netzes von der Dicke der zu diskretisierenden Schale abhängig.

3.3.3 Linearisierung

Im Rahmen eines inkrementell-iterativen Lösungsverfahrens ist innerhalb eines Zeitintervalls $[t_n, t_{n+1}]$ die Linearisierung (Kapitel 2.3.3) der nichtlinear von den Verschiebungen und den Verzerrungsparametern abhängigen inneren Kräfte $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a})$ aus Gleichung (3.30) notwendig. Da sich die nachfolgenden Ausführungen ausschließlich auf einen Zeitschritt beziehen, wird einer übersichtlicheren Darstellung halber auf den zeitlichen Index $(n + 1)$ verzichtet. Damit führt die Linearisierung der inneren Kräfte auf

$$LIN \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}^k, \mathbf{a}^k) = \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}^k, \mathbf{a}^k) + \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}^k, \mathbf{a}^k)}{\partial \mathbf{d}^k} \Delta \mathbf{d}^{k+1} + \frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}^k, \mathbf{a}^k)}{\partial \mathbf{a}^k} \Delta \mathbf{a}^{k+1} . \quad (3.36)$$

3. Die Analyse sehr schlanker Strukturen führt allerdings zu einer ausgesprochen schlechten Konditionierung der resultierenden Gleichungssysteme. Dies wirkt sich besonders bei der Anwendung von iterativen Lösern nachteilig aus (Gee (2004)).

Darin sind

$$\Delta \mathbf{d}^{k+1} = \mathbf{d}^{k+1} - \mathbf{d}^k \quad \text{und} \quad \Delta \mathbf{a}^{k+1} = \mathbf{a}^{k+1} - \mathbf{a}^k \quad (3.37)$$

die Vektoren der inkrementellen Knotenverschiebungen und Verzerrungsparameter. Die beiden notwendigen partiellen Ableitungen in Gleichung (3.36) berechnen sich mit

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{d}} = \underbrace{\int_{A^h} \left[\left(\mathbf{E}_{h,dd}^u \right)^T \mathbf{S}_h^u + \left(\mathbf{E}_{h,d}^u \right)^T \mathbf{S}_{h,d}^u \right] dA}_{\mathbf{K}_T^u} + \underbrace{\int_{A^h} \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h,a} \right)^T \tilde{\mathbf{S}}_{h,d} dA}_{\mathbf{L}^T} \quad (3.38)$$

und

$$\frac{\partial \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}} = \underbrace{\int_{A^h} \left(\mathbf{E}_{h,d}^u \right)^T \mathbf{S}_{h,a}^u dA}_{\mathbf{L}} + \underbrace{\int_{A^h} \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h,a} \right)^T \tilde{\mathbf{S}}_{h,a} dA}_{\tilde{\mathbf{D}}} \quad (3.39)$$

wobei \mathbf{K}_T^u die tangentielle Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Sie enthält sowohl die elastische und Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{e+u} als auch die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g und berechnet sich mit

$$\mathbf{K}_T^u = \mathbf{K}_{e+u} + \mathbf{K}_g = \int_{A^h} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dA + \int_{A^h} \mathbf{B}_{,d}^T \mathbf{S}_h^u dA \quad (3.40)$$

Die beiden Kopplungsmatrizen \mathbf{L} und \mathbf{L}^T sowie die Verzerrungsmatrix $\tilde{\mathbf{D}}$ sind mit

$$\mathbf{L}^T = \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \hat{\mathbf{C}} \mathbf{B} dA, \quad \mathbf{L} = \int_{A^h} \mathbf{B}^T \hat{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{M}} dA, \quad \tilde{\mathbf{D}} = \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \hat{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{M}} dA \quad (3.41)$$

und die Vektoren der inneren Kräfte mit

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) = \int_{A^h} \left(\mathbf{E}_{h,d}^u \right)^T \mathbf{S}_h^u dA = \int_{A^h} \mathbf{B}^T \mathbf{S}_h^u dA \quad (3.42)$$

und

$$\tilde{\mathbf{f}}^{int}(\mathbf{a}) = \int_{A^h} \left(\tilde{\mathbf{E}}_{h,a} \right)^T \tilde{\mathbf{S}}_h dA = \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{S}}_h dA \quad (3.43)$$

gegeben. Da die zusätzlichen Verzerrungen $\tilde{\mathbf{E}}$ über die Elementgrenzen hinweg nicht kompatibel sein müssen, können die inneren Verzerrungsparameter \mathbf{a} auf Elementebene kondensiert werden. Die resultierende, modifizierte tangentielle Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_T$ sowie der Vektor der kondensierten inneren Kräfte $\hat{\mathbf{f}}^{int}$ ergeben sich dann zu:

$$\hat{K}_T = K_T^u - L^T \tilde{D}^{-1} L \quad \text{und} \quad \hat{f}^{int} = f^{int} - L^T \tilde{D}^{-1} \tilde{f}^{int} . \quad (3.44)$$

Damit bekommt das zu lösende Gleichungssystem die gleiche Form wie bei einem reinen Verschiebungselement. Als einzige Primärvariable sind die unbekanntes Verschiebungen geblieben. Die internen Verzerrungsparameter $\boldsymbol{\alpha}$ werden auf Elementebene inkrementell über die jeweiligen inkrementellen Elementknotenverschiebungen $\Delta \boldsymbol{d}$ aktualisiert. Nach der in Kapitel 4 vorgestellten zeitlichen Diskretisierung wird der komplette Lösungsalgorithmus nochmals zusammengefasst. Die notwendigen Ableitungen der Vektoren der kinematischen und statischen Variablen sind für beide Diskretisierungsstrategien im Anhang A.1 und A.2 aufgeführt.

3.4 Künstliche Versteifungseffekte

Obwohl mit Hilfe des siebten Parameters das für finite Schalenelemente so wichtige Poisson-Dickenlocking reduziert werden kann, leiden die beiden zuvor eingeführten Finiten Elemente, analog zu reinen Verschiebungselementen, unter einer Vielzahl zusätzlicher künstlicher Versteifungseffekte. Dies äußert sich darin, dass sich die Elemente gewissen Verformungszuständen gewissermaßen verschließen, und die tatsächlichen Verschiebungen sehr stark unterschätzt werden. Im englischen Sprachgebrauch hat sich dafür der Begriff des *Lockings* etabliert (Hughes et al. (1977b)). Da die für Schalenelemente typischen Locking-Effekte bereits ausführlich beschrieben und dokumentiert sind (Andelfinger (1991), Bischoff (1999), Klinkel (2000), Harnau (2004), Koschnick (2004), Schlebusch (2005) und weitere), werden im Folgenden die entsprechenden Effekte nur kurz dargestellt. Alle Ausführungen beschränken sich dabei auf die vorgestellten und in dieser Arbeit ausschließlich verwendeten linearen Verschiebungsansätze: Vierknotige, mittelflächenorientierte und achtknotige, oberflächenorientierte Schalenelemente.

3.4.1 Querschublocking

In schubweichen Schalenelementen treten bei reiner Biegebeanspruchung parasitäre Querkräfte auf, da die Direktoren bei der Deformation nicht mehr senkrecht auf der Referenzfläche stehen. Der Schubwinkel verläuft innerhalb eines Elementes linear, so dass sich das Maximum der parasitären Querschubverzerrungen am Elementrand einstellt (Abb. 3.6). Da das Querschublocking mit zunehmender Schlankheit immer dramatischer wird, ist die Berechnung dünner Schalen mit reinen Verschiebungselementen praktisch nicht möglich. Zwar nimmt die bezogene Schlankheit innerhalb eines Finiten Elementes mit feiner werdendem Netz ab, so dass der Locking-Effekt nach und nach verschwindet; die Anzahl der benötigten Elemente ist jedoch sehr groß (Toncar (2006)).

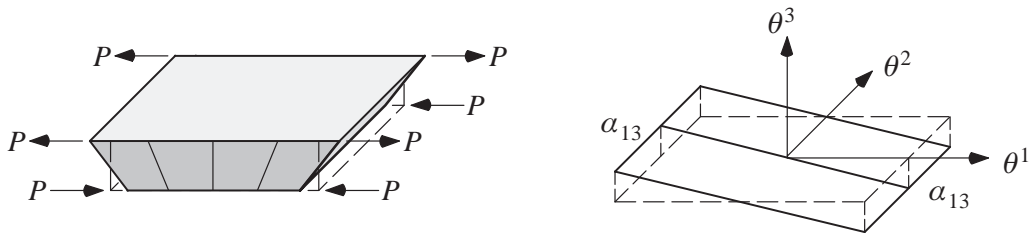


Abb. 3.6: Parasitäre Querschubverzerrungen bei reiner Biegebeanspruchung

3.4.2 Membranlocking

Membranlocking tritt bei bilinearen Elementen nur dann auf, wenn die Elemente gekrümmt sind. Ursache für diesen Locking-Effekt ist das Auftreten von parasitären Membranspannungen, wenn die Elemente dehnungslose Verformungen nicht exakt abbilden können. Die Bedeutung des Membranlockings ist mit der des Querschublockings vergleichbar.

3.4.3 Schublocking

Bei Biegebeanspruchungen in der Schalenebene entstehen bei linearen Elementen parasitäre Schubspannungen. Dieser Versteifungseffekt tritt bereits bei zweidimensionalen Scheibenelementen auf.

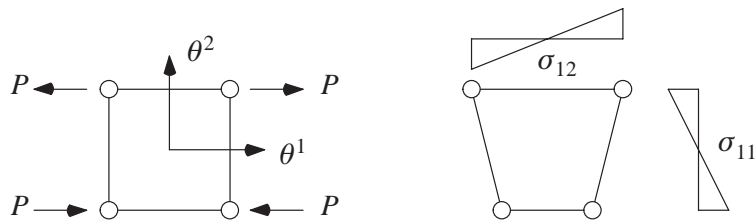


Abb. 3.7: Parasitäre Schubspannungen bei Biegebeanspruchung in der Schalenebene

3.4.4 Volumetrisches Locking

Im Gegensatz zu den anderen Versteifungseffekten hängt dieser von einem Materialparameter, der Querkontraktionszahl, ab. Während der Versteifungseffekt bei $\nu = 0.0$ nicht auftritt, wird er mit zunehmender Poissonzahl ($\nu \rightarrow 0.5$) immer ausgeprägter. Die Ursachen für das volumetrische Locking sind die gleichen wie die für das bereits erläuterte Poisson-Dickenlocking. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die parasitären Normalspannungen nicht in Dickenrichtung der Schale, sondern in deren Membranebene wirken. Ein weiterer wichtiger Unterschied zum Poisson-Dickenlocking ist, dass der Effekt des volumetrischen Lockings mit zunehmender Netzfeinheit verschwindet. Das Poisson-Dickenlocking würde nur dann abgeschwächt, wenn auch in Dickenrichtung verfeinert werden würde.

3.4.5 Dickenlocking bei gekrümmten Elementen

Dieser in der Literatur auch als „*curvature thickness locking*“ (Ramm et al. (1994), Ramm et al. (1995)) bezeichnete Effekt tritt nur bei Schalenformulierungen mit Dickenänderung auf, wenn der Direktor A_3^K am Elementknoten K nicht mehr senkrecht auf der Referenzfläche steht. Da der Verlauf des Direktorfeldes innerhalb eines Elementes linear interpoliert wird, kommt es zur Mitte des Elementes hin zu einer Stauchung bzw. Dehnung des Direktors. Daraus resultieren künstliche Normalverzerrungen, die einen zusätzlichen Anteil zur inneren Energie des Elementes liefern und dieses dadurch steifer machen. Der Effekt wird zum einen mit zunehmender Schlankheit und zum anderen mit größer werdendem Winkel zwischen den diskreten Direktoren immer ausgeprägter.

3.5 Methoden zur Reduzierung von Versteifungseffekten

Ebenso wie die Beschreibung der diversen Locking-Effekte, sind auch die Methoden zu deren Reduzierung bereits detailliert dokumentiert (vgl. Literaturangaben in Abschnitt 3.4), so dass sich die nachfolgenden Darstellungen im Wesentlichen auf die in dieser Arbeit verwendeten Ansätze beschränken. Die Ausführungen konzentrieren sich dabei auf die Vorstellung der konkreten, hier eingesetzten Interpolationen zur Vermeidung der einzelnen Locking-Effekte. Zur Entwicklung und Herleitung der einzelnen Methoden wird an geeigneter Stelle auf einschlägige Literatur verwiesen.

3.5.1 Die Assumed-Natural-Strain-Methode (ANS)

Mit Hilfe der ANS-Methode (Hughes und Tezduyar (1981), Bathe und Dvorkin (1985)) wird in dieser Arbeit das gravierende Querschublocking beseitigt. Dabei werden die Querschubverzerrungen nicht direkt aus den Verschiebungsableitungen berechnet, sondern mit Hilfe diskreter Verzerrungen an geeigneten Kollokationspunkten innerhalb des Elementes interpoliert. Wie aus Abbildung 3.6 ersichtlich ist, verschwinden die parasitären Querschubverzerrungen α_{13} entlang der θ^2 -Achse. Deshalb werden die entsprechenden Kollokationspunkte für die Bestimmung dieser Verzerrungsgröße auf den Seitenmitten der gegenüberliegenden Elementränder gewählt (Abb. 3.8).

Mit speziell gewählten Ansatzfunktionen werden die Querschubverzerrungen, ausgehend von den Werten an den entsprechenden Kollokationspunkten, über das ganze Element interpoliert.

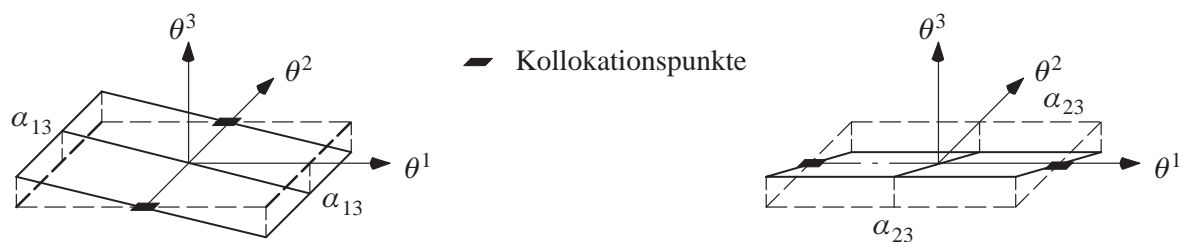


Abb. 3.8: Kollokationspunkte zur Vermeidung von Querschublocking

Da die numerische Umsetzung ausschließlich auf eine Modifikation der B-Operatormatrix hinausläuft, wird die ANS-Methode auch häufig als „*B-bar-Method*“ bezeichnet. Die konkrete Herleitung des modifizierten B-Operators zur Vermeidung von Querschublocking, findet sich unter Angabe der entsprechenden Ansatzfunktionen in Anhang A.3.

Zusätzlich wird die ANS-Methode in dieser Arbeit auch zur Reduzierung des „*curvature thickness locking*“ eingesetzt. Mit geeigneten Ansatzfunktionen werden hier die Quernormalverzerrungen α_{33} entsprechend über das Element interpoliert, wobei die Kollokationspunkte nun mit den Elementknoten in der Schalenmittelfläche zusammenfallen. Die entsprechenden Ansätze und Matrizen sind wiederum in Anhang A.3 zu finden.

3.5.2 Die Enhanced-Assumed-Strain-Methode (EAS)

Für die Formulierung der 7-Parameter-Schalenelemente wurde bereits die EAS-Methode benutzt, wodurch das Poisson-Dickenlocking vermieden werden konnte. Durch die Erweiterung der Verzerrungen β_{33} um einen linearen Term resultierte ein asymptotisch korrektes Schalenmodell. Die gleiche Methodik kann auch für die gezielte Erweiterung anderer Verzerrungsanteile angewendet werden, um weitere Lockingphänomene zu vermeiden. In dieser Arbeit werden mit der EAS-Methode die restlichen Versteifungseffekte reduziert. Da sich die formale Herleitung der modifizierten Elementsteifigkeitsmatrix nicht von der in Abschnitt 3.3 angegebenen Herleitung für die 7-Parameter-Schalenelemente unterscheidet, wird sie hier nicht noch einmal wiederholt. Ein detaillierter Überblick über diese Methode, sowie die Anforderungen an die zusätzlichen Verzerrungsansätze, findet sich in Bischoff (1999). Die konkret in dieser Arbeit verwendeten Ansätze zur Vermeidung der beschriebenen Locking-Effekte sind in Anhang A.4 angegeben.

3.5.3 Alternative Methoden

Zusätzlich zu den in dieser Arbeit verwendeten Methoden sind weitere alternative Verfahren zur Verbesserung der Effizienz von Finiten Elementen bekannt. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit, werden hier einige genannt:

- Unterintegration mit Stabilisierung

Vor allem in kommerziellen FE-Programmen sind unterintegrierte und selektiv reduziert integrierte, stabilisierte Finite Elemente, basierend auf dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen, sehr weit verbreitet. Ähnlich der ANS-Methode werden die Verzerrungen mit Hilfe der Unterintegration an diskreten Punkten, die möglichst keine parasitären Anteile enthalten, ausgewertet. Der Nachteil der Unterintegration ist die mögliche Entstehung von sogenannten inneren Kinematiken („*zero-energy-modes*“). Mit Hilfe geeigneter Stabilisierungsverfahren können diese jedoch weitgehend unterdrückt werden. Ein kurzer Überblick über die Entwicklung von unterintegrierten, stabilisierten Finiten Elementen mit Angabe weiterführender Literatur findet sich z.B. in Erhart (2004) und Koschnick (2004).

- **Hybride und hybrid-gemischte Spannungselemente**
 Basierend auf dem Prinzip von Hellinger-Reissner lassen sich sogenannte hybride bzw. hybrid-gemischte Spannungselemente herleiten. Dabei werden sowohl Ansätze für die Verschiebungen als auch für die Spannungen gemacht. Als eines der bekanntesten Elemente ist hierbei das vierknotige, zweidimensionale Pian-Sumihara Element (Pian und Sumihara (1984)) für Scheiben zu nennen.
- **Discrete-Strain-Gap-Methode (DSG)**
 Die zunächst als „Discrete-*Shear*-Gap“ bezeichnete Methode wurde ursprünglich von Bletzinger et al. (2000) vorgeschlagen, um Querschublocking bei Platten- und Schalenelementen zu vermeiden. Später wurde die Methode von Koschnick et al. (2005) für die Reduzierung von allen geometrischen Locking-Effekten erweitert, so dass sich mittlerweile die Bezeichnung „Discrete-*Strain*-Gap“-Methode durchgesetzt hat. Ähnlich zur ANS-Methode werden die Verläufe einzelner Verzerrungsanteile gezielt modifiziert. Der grundsätzliche Unterschied zur ANS-Methode liegt jedoch darin, dass für die DSG-Methode keine Kollokationspunkte definiert werden müssen. Zudem bietet die DSG-Methode den konzeptionellen Vorteil, dass sie ohne weiteres auf beliebige Elementformulierungen, seien es Drei- oder Viereckselemente, mit beliebiger Polynomordnung angewendet werden können. In Koschnick (2004) wird die DSG-Methode detailliert beschrieben und hinsichtlich der Anwendbarkeit auf verschiedene, geometrische Versteifungseffekte analysiert.
- **Gemischte Methoden, basierend auf dem Prinzip von Hu-Washizu**
 Für die Herleitung von möglichst universell einsetzfähigen, effizienten und robusten Finiten Elementen wird in jüngster Vergangenheit verstärkt das (unmodifizierte) Prinzip von Hu-Washizu als Basis herangezogen (Weissman (1992, 1996), Weissman und Taylor (1992), Karakostas et al. (1993), Talaslidis und Wempner (1993), Kasper und Taylor (2000a, 2000b, 2002), Cao et al. (2002, 2003, 2004) und weitere). Da hier alle drei Feldgleichungen nur in einem schwachen, integralen Sinne erfüllt werden müssen und als Primärvariablen neben den Verschiebungen auch die Spannungen und Verzerrungen diskretisiert werden, können hierfür gezielt sinnvolle Ansätze gewählt werden. Im folgenden Abschnitt wird eines dieser Elementformulierungen, basierend auf dem Vorschlag von Weissman (1996), exemplarisch vorgestellt.

3.6 Ein Hu-Washizu-Volumenelement

In diesem Abschnitt wird ein achtknotiges Volumenelement, basierend auf dem Prinzip von Hu-Washizu, vorgestellt. Als Grundlage dient ein Vorschlag von Weissman (1996), der, ausgehend von der Annahme kleiner Verformungen, ein geometrisch lineares finites Volumenelement vorstellt. Dieses lässt einerseits problemlos die Formulierung von verzerrungsgetriebenen, nichtlinearen Plastizitätsmodellen zu und eignet sich andererseits auch zur Berechnung dünnwandiger

Strukturen. Im Rahmen dieser Arbeit wurde diese Elementformulierung auf den geometrisch nichtlinearen Fall erweitert und in das institutseigene Finite-Element-Programm CCARAT implementiert. Die nachfolgenden Ausführungen beschränken sich zunächst auf den statischen Sonderfall, so dass der Trägheitsterm im dynamischen Gleichgewicht (Gl. (2.18)) unberücksichtigt bleibt.⁴

3.6.1 Variationelle Basis

Das Dreifeld-Funktional von Hu-Washizu bildet die variationelle Basis für die Herleitung dieses Elementes. Für den statischen Fall lässt sich die gesamte freie Energie damit folgendermaßen angeben:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_{\Omega} \left[W^{int}(\mathbf{E}) + \mathbf{S} : \left(\frac{1}{2} \overbrace{(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G})}^{\mathbf{E}^u \text{ (Gl. (2.19))}} - \mathbf{E} \right) \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) d\Gamma . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Darin sind die Verschiebungen \mathbf{u} , die Verzerrungen \mathbf{E} und die Spannungen \mathbf{S} die freien Variablen des Funktionals. Diese Variablen sind so zu bestimmen, dass Π_{HW} aus Gleichung (3.45) stationär wird. Dazu wird das Funktional nach allen freien Variablen einmal variiert:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_{\Omega} \left[\mathbf{S} : \overbrace{\mathbf{F}^T \cdot grad \delta \mathbf{u}}^{\delta \mathbf{E}^u} + \left(\overbrace{\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}}}^{\mathbf{S}^E} - \mathbf{S} \right) : \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) : \delta \mathbf{S} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma + \int_{\Gamma_D} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{t}^S d\Gamma = 0 . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Mit Hilfe der Produktregel und des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{\Omega} \mathbf{S} : \mathbf{F}^T \cdot grad \delta \mathbf{u} d\Omega = \int_{\Gamma_N} \mathbf{t}^S \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Omega} div (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega \quad (3.47)$$

lässt sich Gleichung (3.46) zu

4. Die Elementformulierung kann ohne weiteres für dynamische Probleme erweitert werden. Dazu muss lediglich die konstante konsistente Massenmatrix bestimmt werden. Diese ist nur von den Ansatzfunktionen der Verschiebungsfreiheitsgrade abhängig und somit identisch mit der Massenmatrix eines achtknotigen reinen Verschiebungselementes.

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) = & \int_{\Omega} \left[- \operatorname{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) \cdot \delta \mathbf{u} + \left(\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{S} \right) : \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) : \delta \mathbf{S} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \varrho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{t}^S \, d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

umformen (Kap. 2.1.6, Gl. (2.22)). Darin sind $\delta \mathbf{u}$, $\delta \mathbf{E}$ und $\delta \mathbf{S}$ zulässige Variationen des Verschiebungs-, Verzerrungs- und Spannungsfeldes ($\delta \mathbf{u}$ muss die Verschiebungsrandbedingungen erfüllen). Da die Variationen unabhängig voneinander sind, lässt sich Gleichung (3.46) insgesamt in fünf Teilgleichungen aufspalten, die jeweils eine schwache Form der drei Feldgleichungen und der beiden Randbedingungen darstellen:

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{S} : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) \, d\Omega = 0 \quad (\text{Kinematik}) \quad (3.49)$$

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{E} : \left(\frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} - \mathbf{S} \right) \, d\Omega = 0 \quad (\text{Material}) \quad (3.50)$$

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot [\operatorname{div} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) + \varrho \mathbf{b}] \, d\Omega = 0 \quad (\text{statisches Gleichgewicht}) \quad (3.51)$$

$$\int_{\Gamma_N} \delta \mathbf{u} \cdot (\hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}^S) \, d\Gamma = 0 \quad (\text{statische Randbedingungen}) \quad (3.52)$$

$$\int_{\Gamma_D} \delta \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma = 0 \quad (\text{kinematische Randbedingungen}) \quad (3.53)$$

3.6.2 Finite Element Approximation und Modifikation der variationellen Basis

Unter Verwendung einer Finiten Element Approximation lässt sich die gesamte freie Energie durch die Summe der freien Energien aller einzelnen Elemente

$$\Pi_{HW}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}) \approx \sum_{e=1}^{n_e} \Pi_{HW}^e(\mathbf{u}_e, \mathbf{E}_e, \mathbf{S}_e) \quad (3.54)$$

darstellen. Da sich alle nachfolgenden Ausführungen in diesem Abschnitt ausschließlich auf die Elementebene beziehen, wird der Übersichtlichkeit halber auf den Index „ e “ verzichtet.

Die besondere Schwierigkeit besteht im Weiteren darin, geeignete Ansätze für die zu diskretisierenden Feldgrößen zu wählen. Dabei müssen einerseits interne Zwangsbedingungen erfüllt werden, wie beispielsweise die Inkompressibilität, und andererseits sollen qualitativ hochwertige

Ergebnisse bereits mit einem relativ groben FE-Netz erzielt werden können. Für das hier beschriebene Element wird ein Vorschlag von Weissman (1992) übernommen. Darin werden die Verzerrungsansätze durch zusätzliche Terme ergänzt, die zur Erfüllung der Stabilitätsanforderungen nicht nötig sind:

$$\mathbf{E} := \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 . \quad (3.55)$$

Darin sind \mathbf{E}_1 die zur Stabilität minimal notwendigen und \mathbf{E}_2 die zusätzlichen Verzerrungen. Durch den zusätzlichen Verzerrungsverlauf \mathbf{E}_2 entsteht eine gewisse Freiheit, interne Zwangsbedingungen zu erfüllen. Allerdings muss gleichzeitig gewährleistet werden, dass die Verzerrungen \mathbf{E}_2 keinen zusätzlichen Beitrag zur Energie leisten. Um diese Nebenbedingung erfüllen zu können, wird sie mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren λ , die die Rolle von Verzerrungen spielen, in das ursprüngliche Funktional aus Gleichung (3.45) eingebracht. Das so modifizierte Funktional lautet:

$$\begin{aligned} \Pi_{HW}^{LM}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}, \lambda) = & \int_{\Omega} \left[W^{int}(\mathbf{E}) + \mathbf{S} : (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) + \lambda : \frac{\partial W^{int}}{\partial \mathbf{E}} \right] d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \varrho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_D} \mathbf{t}^S \cdot (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \, d\Gamma . \end{aligned} \quad (3.56)$$

$\mathbf{S}^E = \mathbb{C} : \mathbf{E}$

Einmalige Variation des modifizierten Funktionals nach den freien Variablen liefert schließlich die schwache Form:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{LM}(\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{S}, \lambda) = & \int_{\Omega} \left[\mathbf{S} : \delta \mathbf{E}^u + \left(\mathbf{S}^E - \mathbf{S} - \lambda : \mathbb{C} \right) : \delta \mathbf{E} + (\mathbf{E}^u - \mathbf{E}) : \delta \mathbf{S} + \mathbf{S}^E : \delta \lambda \right] d\Omega \\ & - \underbrace{\left[\int_{\Omega} \varrho \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_D} (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{t}^S \, d\Gamma \right]}_{\delta \Pi_{HW}^{ext}} = 0 . \end{aligned} \quad (3.57)$$

3.6.3 Diskretisierung

Für die unbekanntenen, freien Variablen des Funktionals aus Gleichung (3.56) müssen im Rahmen der Finite-Element-Methode entsprechende Ansätze gemacht werden, wofür im Folgenden wieder auf die für die FE-Methode typische Vektor-Matrix Schreibweise zurückgegriffen wird. Die entsprechenden Ansätze sind:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{d} , \quad (3.58)$$

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}_h = \mathbf{E}_{1,h} + \mathbf{E}_{2,h} = \mathbf{M}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{M}_2 \mathbf{a}_2 , \quad (3.59)$$

$$\mathbf{S} \approx \mathbf{S}_h = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta} , \quad \mathbf{S}^E \approx \mathbf{S}_h^E = \mathbb{C}\mathbf{E}_h = \mathbb{C}(\mathbf{M}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{M}_2\mathbf{a}_2) , \quad (3.60)$$

$$\boldsymbol{\lambda} \approx \boldsymbol{\lambda}_h = \mathbf{M}_z\mathbf{z} . \quad (3.61)$$

Entsprechend einem Bubnov-Galerkin-Verfahren, werden die Ansätze für die variierten Terme analog gewählt. Da die Verschiebungsfreiheitsgrade \mathbf{d} an den Elementgrenzen stetig sein müssen, wird die eigentlich nur schwach zu erfüllende, kinematische Randbedingung (Gl. (3.53)) stark erfüllt. Somit verschwindet der letzte Term des variierten, modifizierten Funktionals aus Gleichung (3.57). Die konkreten Matrizen der Ansätze für die Verschiebungen, Verzerrungen, Spannungen und der Lagrange-Multiplikatoren sind im Anhang A.5 aufgeführt. Da die variierten Größen in Gleichung (3.57) unabhängig voneinander sind, muss unter anderem

$$\int_{\Omega^h} \delta\boldsymbol{\lambda}_h^T \mathbf{S}_h^E d\Omega = 0 \quad (3.62)$$

gelten. Werden die entsprechenden Ansätze (Gl. (3.60) und (3.61)) in Gleichung (3.62) eingesetzt

$$\int_{\Omega^h} \delta\mathbf{z}^T \mathbf{M}_z^T [\mathbb{C}(\mathbf{M}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{M}_2\mathbf{a}_2)] d\Omega = 0 , \quad (3.63)$$

und anschließend nach \mathbf{a}_2 aufgelöst, entsteht

$$\mathbf{a}_2 = - \underbrace{\left[\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_z^T \mathbb{C} \mathbf{M}_2 d\Omega \right]^{-1} \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_z^T \mathbb{C} \mathbf{M}_1 d\Omega \right]}_{\tilde{\mathbf{A}}} \mathbf{a}_1 . \quad (3.64)$$

Das Einsetzen dieser Beziehung sowie aller diskreten Ansätze (Gl. (3.58) - (3.61)) in das variierte Funktional aus Gleichung (3.56) liefert nach einigen Umformungen die diskretisierte schwache Form

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HW}^{LM} \approx \delta\Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a}_1, \boldsymbol{\beta}) &= \delta\mathbf{d}^T \int_{\Omega^h} (\mathbf{E}_{h,d}^u)^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} \\ &+ \delta\boldsymbol{\alpha}_1^T \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbb{C} \mathbf{M}_n d\Omega \mathbf{a}_1 - \int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} \right] \\ &+ \delta\boldsymbol{\beta}^T \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{E}_h^u d\Omega - \int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_n d\Omega \mathbf{a}_1 \right] - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f}^{ext} = 0 . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Darin ist $\mathbf{M}_n := \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2\tilde{\mathbf{A}}$ eine Abkürzung eines mehrmals benötigten, etwas länglichen Terms (siehe Anhang A.5, Gl. (A.82)) und \mathbf{f}^{ext} der Lastvektor.

3.6.4 Linearisierung

Wie bereits dargelegt, werden in dieser Arbeit überwiegend geometrisch nichtlineare Probleme betrachtet, die mit einem inkrementell iterativen Verfahren gelöst werden. Hierfür muss die diskretisierte schwache Form aus Gleichung (3.65) zum jeweiligen Iterationsschritt k entsprechend linearisiert werden:

$$LIN \delta \Pi_h(\mathbf{d}^k, \mathbf{a}_1^k, \boldsymbol{\beta}^k) = \delta \Pi_h^k + \frac{\partial \delta \Pi_h^k}{\partial \mathbf{d}^k} \Delta \mathbf{d} + \frac{\partial \delta \Pi_h^k}{\partial \mathbf{a}_1^k} \Delta \mathbf{a}_1 + \frac{\partial \delta \Pi_h^k}{\partial \boldsymbol{\beta}^k} \Delta \boldsymbol{\beta} . \quad (3.66)$$

Dafür werden die folgenden drei Gâteaux-Ableitungen des diskretisierten, variierten Funktionals benötigt, wobei der Einfachheit halber auf die explizite Darstellung des Iterationszählers k verzichtet wird:

$$\frac{\partial \delta \Pi_h}{\partial \mathbf{d}} = \underbrace{\delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega^h} (\mathbf{E}_{h,dd}^u)^T \mathbf{P} d\Omega}_{\mathbf{K}_g} \boldsymbol{\beta} + \underbrace{\delta \boldsymbol{\beta}^T \int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{E}_{h,d}^u d\Omega}_{\mathbf{G}} , \quad (3.67)$$

$$\frac{\partial \delta \Pi_h}{\partial \mathbf{a}_1} = \underbrace{\delta \mathbf{a}_1^T \int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbb{C} \mathbf{M}_n d\Omega}_{\mathbf{H}} - \underbrace{\delta \boldsymbol{\beta}^T \int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_n d\Omega}_{\mathbf{A}} , \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \delta \Pi_h}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \underbrace{\delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega^h} (\mathbf{E}_{h,d}^u)^T \mathbf{P} d\Omega}_{\mathbf{G}^T} - \underbrace{\delta \mathbf{a}_1^T \int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbf{P} d\Omega}_{\mathbf{A}^T} . \quad (3.69)$$

Damit ergibt sich das linearisierte, inkrementelle Elementgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_g & \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} & -\mathbf{A}^T \\ \mathbf{G} & -\mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{a}_1 \\ \Delta \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{ext} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{int} \\ \mathbf{f}_\alpha^{int} \\ \mathbf{f}_\beta^{int} \end{bmatrix} , \quad (3.70)$$

wobei die Vektoren der inneren Kräfte mit

$$\mathbf{f}^{int} = \int_{\Omega^h} (\mathbf{E}_{h,d}^u)^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} , \quad (3.71)$$

$$\mathbf{f}_\alpha^{int} = \int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbb{C} \mathbf{M}_n d\Omega \mathbf{a}_1 - \int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} , \quad (3.72)$$

$$\mathbf{f}_\beta^{int} = \int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{E}_h^u d\Omega - \int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_n d\Omega \mathbf{a}_1 \quad (3.73)$$

gegeben sind. Da die Ansätze für die Verzerrungen und Spannungen, ebenso wie bei der EAS-Methode, nicht über die Elementgrenzen hinweg kompatibel sein müssen, können sie auf Elementebene eliminiert werden. Eine statische Kondensation liefert schließlich ein inkrementelles Elementgleichungssystem, welches die gleiche Form hat wie das eines reinen Verschiebungselementes:

$$\hat{\mathbf{K}}_T \Delta \mathbf{d} = \hat{\mathbf{f}}. \quad (3.74)$$

Darin ist

$$\hat{\mathbf{K}}_T = \mathbf{K}_g + \mathbf{G}^T \mathbf{A}^{-T} \mathbf{H} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{G} \quad (3.75)$$

die modifizierte tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix und

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}^{ext} - \mathbf{f}^{int} - \mathbf{G}^T \mathbf{A}^{-T} \left(\mathbf{f}_\alpha^{int} + \mathbf{H} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}_\beta^{int} \right). \quad (3.76)$$

der Vektor der Ungleichgewichtskräfte. Damit ist ein aufgeweichtes Verschiebungsmodell entstanden, das sogar im nahezu inkompressiblen Bereich frei von Locking-Phänomenen ist (Weissman (1996)). Als besonders wichtiger Punkt sei noch zu erwähnen, dass die internen Verzerrungs- und Spannungsparameter \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 und $\boldsymbol{\beta}$ nach jedem Iterationsschritt inkrementell aktualisiert werden müssen. Die konkret für diese Elementformulierung benutzten Ansätze für die diversen zu diskretisierenden Feldgrößen sowie eine detaillierte Herleitung des diskretisierten, variierten Funktionals von Gleichung (3.65) sind im Anhang A.5 gegeben.

3.7 Numerische Beispiele

Mit der Berechnung einiger sehr populärer Benchmark-Tests für die geometrisch nichtlineare Analyse von Schalentragwerken wird das Elementverhalten der vorgestellten FE-Formulierungen getestet. Eine Zusammenfassung dieser und weiterer Benchmark-Tests, mit Angabe von tabellarischen Referenzlösungen für die jeweiligen Last-Verschiebungs-Kurven, findet sich in der Arbeit von Sze et al. (2004). Die Referenzlösung wurde dort mit Hilfe des kommerziellen FE-Programms ABAQUS unter Verwendung des vierknotigen, 1-Punkt reduziert integrierten, stabilisierten, *S4R* Schalenelementes bestimmt. In den nachfolgenden Untersuchungen werden die folgenden Kurzbezeichnungen verwendet:

- Ref.: Referenzlösung aus Sze et al. (2004)
- S_m : Mittelflächenorientiertes Schalenelement (Kapitel 3.3.1)
- S_o : Oberflächenorientiertes Schalenelement (Kapitel 3.3.2)
- V_{HW} : Hu-Washizu-Volumenelement (Kapitel 3.6)

3.7.1 Die geschlitzte Kreisringplatte

Als erstes Beispiel wird die geschlitzte Kreisringplatte betrachtet, die durch eine Linienlast in transversaler Richtung belastet wird. Mit diesem Beispiel, das bereits von vielen Autoren berechnet wurde (Basar und Ding (1992), Büchter und Ramm (1992b), Wriggers und Gruttmann (1993), Sansour und Bocko (1998), Klinkel (2000), Schlebusch (2005), Reddy und Arciniega (2006)), wird das Verhalten von Schalenelementen bei großen Verformungen und großen Rotationen untersucht.

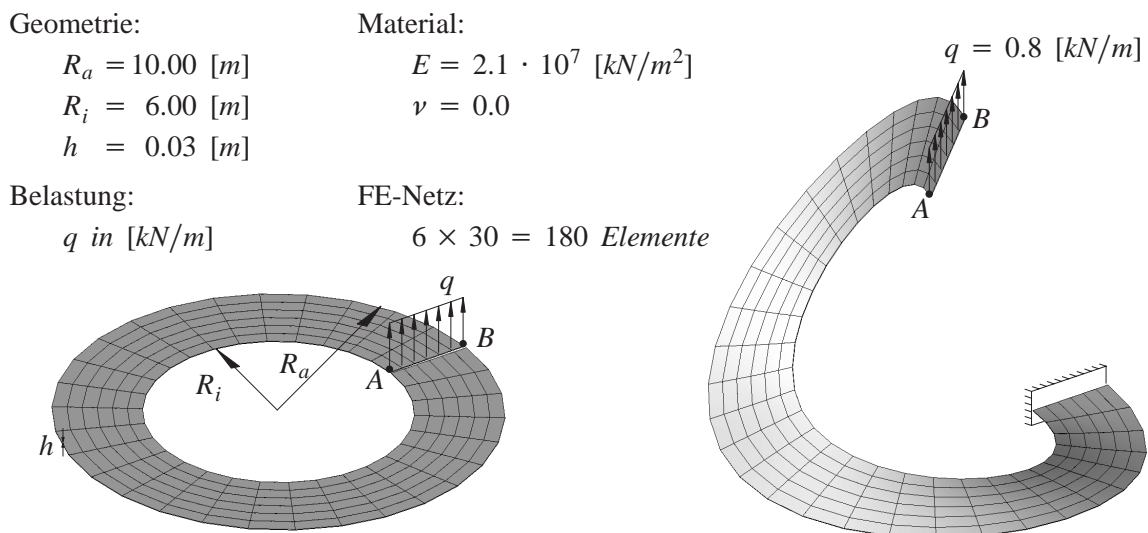


Abb. 3.9: Geometrie, FE-Netz, Materialdaten und Verformungsfigur

Die Geometrie, die Randbedingungen, das Materialverhalten sowie die Verformungsfigur für eine Gleichstreckenlast von $q = 0.8 \text{ [kN/m]}$ ist in Abbildung 3.9 dargestellt. In radialer Richtung wird die Kreisringplatte in sechs, in Umfangsrichtung in 30 Elemente unterteilt, so dass ein relativ grobes FE-Netz mit insgesamt 180 Elementen entsteht. Untersucht werden die Vertikalverschiebungen an den Punkten A und B des Endquerschnittes, der durch eine vertikale Gleichstreckenlast q belastet wird. Bei Diskretisierung der Kreisringplatte mit Volumenelementen, was bei der Verwendung der Elemente S_0 und V_{HW} der Fall ist, wird die Gleichstreckenlast zu gleichen Teilen auf die obere und untere Knotenreihe verteilt. Am unbelasteten Ende wird die Kreisringplatte in alle Richtungen unverschieblich gelagert.

In Abbildung 3.10 sind die Last-Verschiebungs-Kurven der beiden Punkte A und B für die unterschiedlichen Elementformulierungen angegeben. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden bei den beiden Volumenelementen (S_0 und V_{HW}) die Verschiebungen der Knoten auf der jeweiligen Schalenober- und Schalenunterseite gemittelt. Erwartungsgemäß liefern die beiden in dieser Arbeit vorgestellten Schalenelemente (S_m und S_0) nahezu identische Ergebnisse, so dass deren Last-Verschiebungs-Kurven zusammenfallen. Verglichen mit der Referenzlösung von Sze et al. (2004) liefern die beiden Schalenelemente bereits für diese relativ grobe Diskretisierung sehr gute Ergebnisse, wohingegen das vorgestellte Hu-Washizu-Volumenelement ein wenig steifer reagiert.

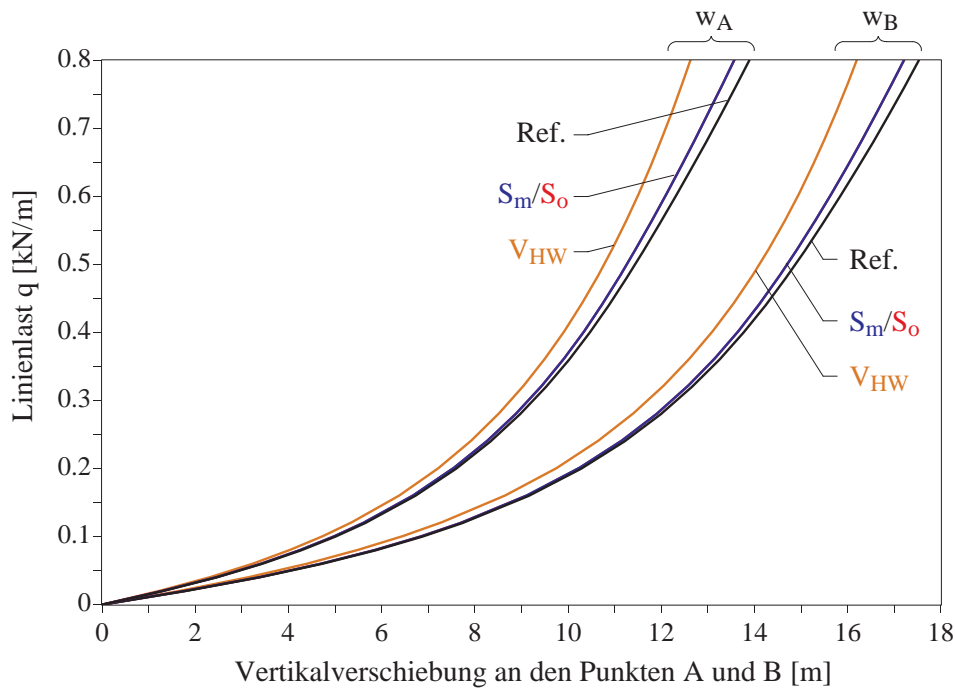


Abb. 3.10: Last-Verschiebungs-Kurve für die geschlitzte Kreisringplatte

3.7.2 Halbkugel mit Loch

Ein weiteres, viel zitiertes Beispiel (Basar und Ding (1992), Büchter und Ramm (1992b), Parisch (1995), Betsch und Stein (1996), Gruttmann und Wagner (2005)), um die Qualität von FE-Formulierungen zu testen, ist die in Abbildung 3.11 dargestellte Halbkugelschale, die an ihrem Pol eine kreisförmige Öffnung von 18° aufweist.

Geometrie:

$$R = 10.00 \text{ [m]}$$

$$h = 0.04 \text{ [m]}$$

Material:

$$E = 6.825 \cdot 10^7 \text{ [kN/m}^2\text{]}$$

$$\nu = 0.3$$

Belastung:

$$P \text{ in [kN]}$$

FE-Netz (für 1/4-System):

$$12 \times 12 = 144 \text{ Elemente}$$

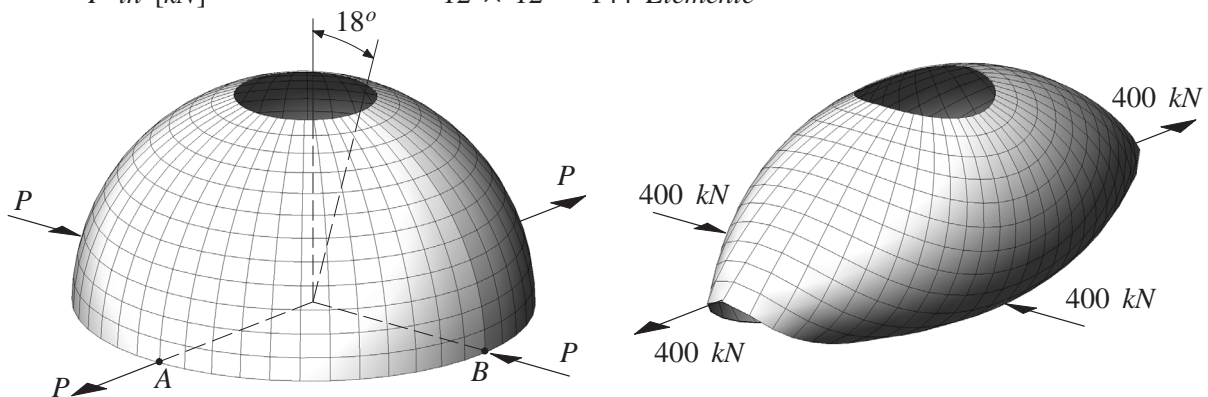


Abb. 3.11: Geometrie, FE-Netz, Materialdaten und Verformungsfigur

Die Schale wird durch insgesamt vier radiale Knotenlasten P belastet, die sich im Abstand von 90° befinden. Für die beiden Volumenelemente (S_o und V_{HW}) wurden die Knotenlasten wiederum zu gleichen Teilen auf die Knoten auf der Schalenober- bzw. Schalenunterseite verteilt. Genaue Angaben zur Geometrie, zum verwendeten Materialverhalten sowie die Verformungsfigur für eine Last $P = 400 \text{ kN}$ sind in Abbildung 3.11 gegeben. Aufgrund der radialsymmetrischen Geometrie der untersuchten Schale und der doppelten Symmetrie der Randbedingungen wird nur ein Viertel des Systems mit 12×12 Elementen diskretisiert. In diesem Testbeispiel, in dem sich neben dem Biegezustand auch ein Membranzustand in der Schale einstellt, werden die Radialverschiebungen der beiden Punkte A und B untersucht.

Die Last-Verschiebungs-Kurven der beiden betrachteten Punkte sind in Abbildung 3.12 dargestellt. Analog zum ersten Beispiel (Kap. 3.7.1) wurden bei den beiden Volumenelementen die Verschiebungen der Knoten auf der Schalenober- und Schalenunterseite gemittelt. Für die Verschiebungen des Punktes A ergeben sich ähnliche Ergebnisse wie bei der geschlitzten Kreisringplatte. Die Last-Verschiebungs-Kurven der beiden Schalenelemente liegen wiederum so nahe beieinander, dass sie nicht zu unterscheiden sind, wohingegen sie bei der Verschiebung des Punktes B geringfügig voneinander abweichen. Dieses zunächst überraschende Phänomen wurde in Untersuchungen von Toncar (2006) bestätigt: Die Ausnutzung von Symmetriebedingungen kann zu geringfügigen Abweichungen führen. Da beim mittelflächenorientierten Schalenelement der Schalendirektor senkrecht auf der Schalenmittelfläche errichtet wird, entsteht durch die Ausnutzung der Symmetrie ein geringer Fehler in der Approximation der Geometrie (Abb. 3.13a). Bei vollständiger Diskretisierung des Systems würden die Direktoren auf beiden Seiten gemittelt werden, und die Symmetrie wäre erfüllt. Allerdings induziert nicht nur die Ausnutzung

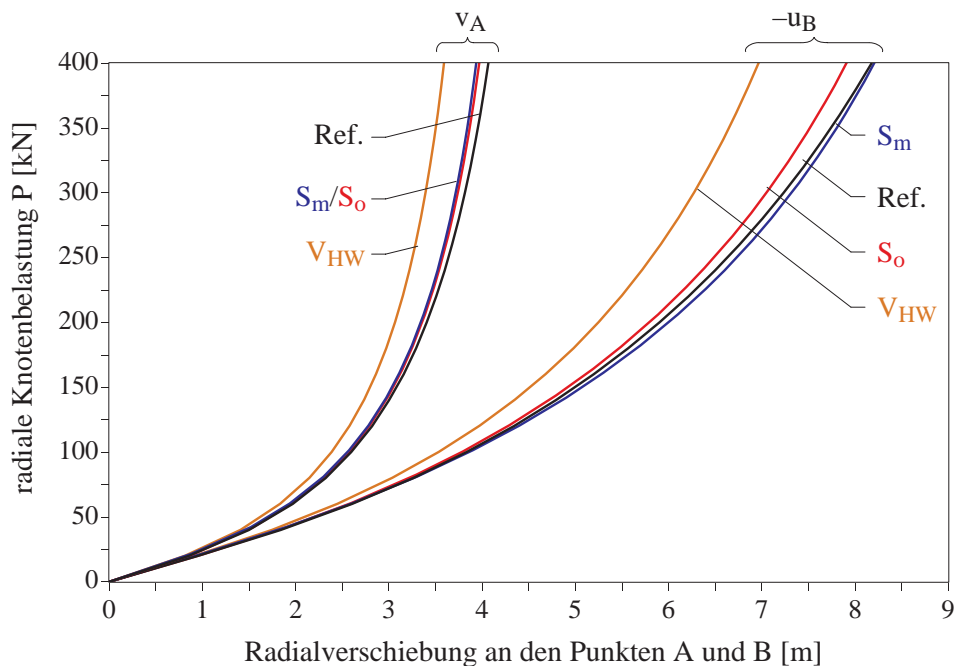


Abb. 3.12: Last-Verschiebungs-Kurve für die Halbkugel mit Loch

der Symmetrie einen geringen Fehler in der geometrischen Approximation, sondern bereits die Geometrie dieses Systems selbst: Es handelt sich im vorliegenden Beispiel um eine Halbkugelschale, weshalb durch die Diskretisierung die unterste Elementreihe bereits ein wenig nach innen geneigt ist. Dadurch ergibt sich auch hier ein geringer Unterschied der beiden Schalenelemente in der Definition des Direktorfeldes (Abb. 3.13b). Im oberflächenorientierten Schalenelement führt dies bereits zu etwas verzerrteren Elementgeometrien, da der Direktor nicht mehr senkrecht steht. Letztlich ist dies auch der Grund für das etwas steifere Verhalten des Volumen-Schalenelementes (S_o) gegenüber dem klassischen Schalenelement (S_m). Mit zunehmender Netzverfeinerung klingt dieser Effekt ab.

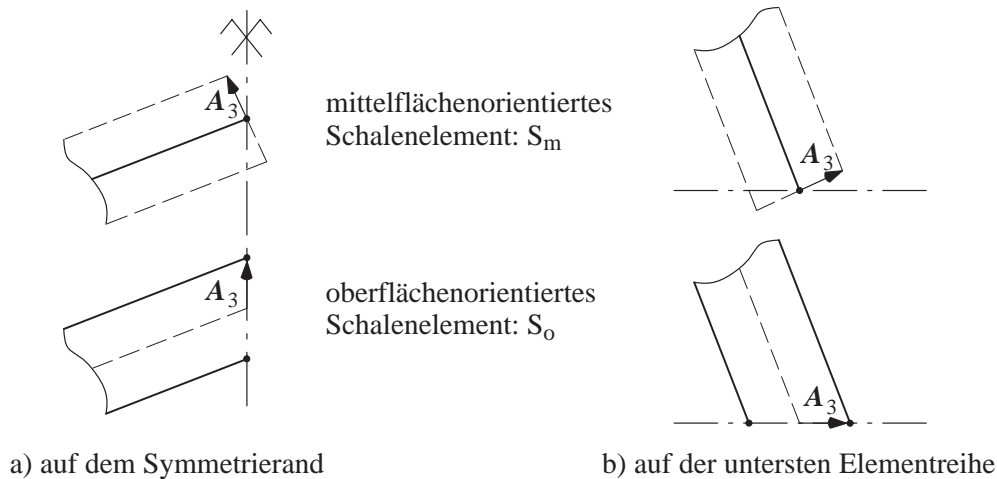


Abb. 3.13: Unterschiedliche Definition des Direktors

Insgesamt lässt sich auch hier erkennen, dass beide Schalenelemente bereits mit diesem relativ groben Netz sehr nahe an die Referenzlösung herankommen, wohingegen das Hu-Washizu-Volumenelement ein wenig zu steife Ergebnisse liefert.

3.7.3 Offene Zylinderschale

Als drittes, sehr bekanntes Beispiel (Sansour und Bufler (1992), Peng und Crisfield (1992), Brank et al. (1995), Sansour und Kollmann (2000), Reddy und Arciniega (2006)) wird das Verformungsverhalten einer offenen Zylinderschale unter zwei radialen Einzellasten P betrachtet. Die Geometrie der Zylinderschale sowie die verwendeten Materialkennwerte und Randbedingungen sind in Abbildung 3.14 angegeben. Werden alle auftretenden Symmetrien dieses Beispiels ausgenützt, genügt es, lediglich ein Achtel des Gesamtsystems mit 16×24 Elementen zu diskretisieren. Kontrolliert werden die Radialverschiebungen an den in Abbildung 3.14 links markierten Punkten A , B und C .

Geometrie:

$$R = 4.953 \text{ [m]}$$

$$L = 10.350 \text{ [m]}$$

$$h = 0.094 \text{ [m]}$$

Material:

$$E = 10.5 \cdot 10^6 \text{ [kN/m}^2\text{]}$$

$$\nu = 0.3125$$

Belastung:

$$P \text{ in [kN]}$$

FE-Netz (für 1/8-System):

$$16 \times 24 = 384 \text{ Elemente}$$

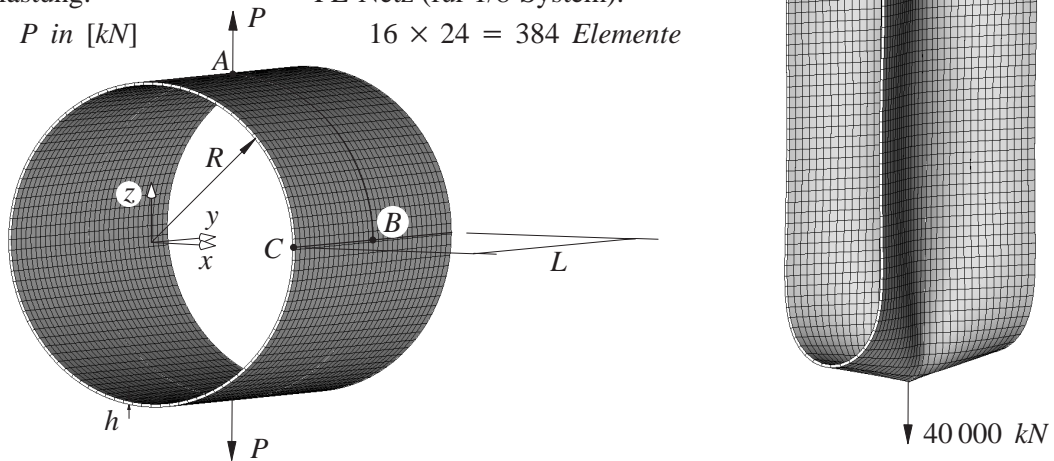


Abb. 3.14: Geometrie, FE-Netz, Materialdaten und Verformungsfigur

In Abbildung 3.14 rechts ist die verformte Zylinderschale für eine Belastung von $P = 40\,000 \text{ kN}$ dargestellt. Die Last-Verschiebungs-Kurven für die zu untersuchenden, markierten Knoten sind in Abbildung 3.15 angegeben. Im Vergleich zu den beiden zuvor betrachteten Beispielen verhalten sich alle untersuchten Elementformulierungen gleichermaßen sehr gut; sie unterscheiden sich nur sehr geringfügig.

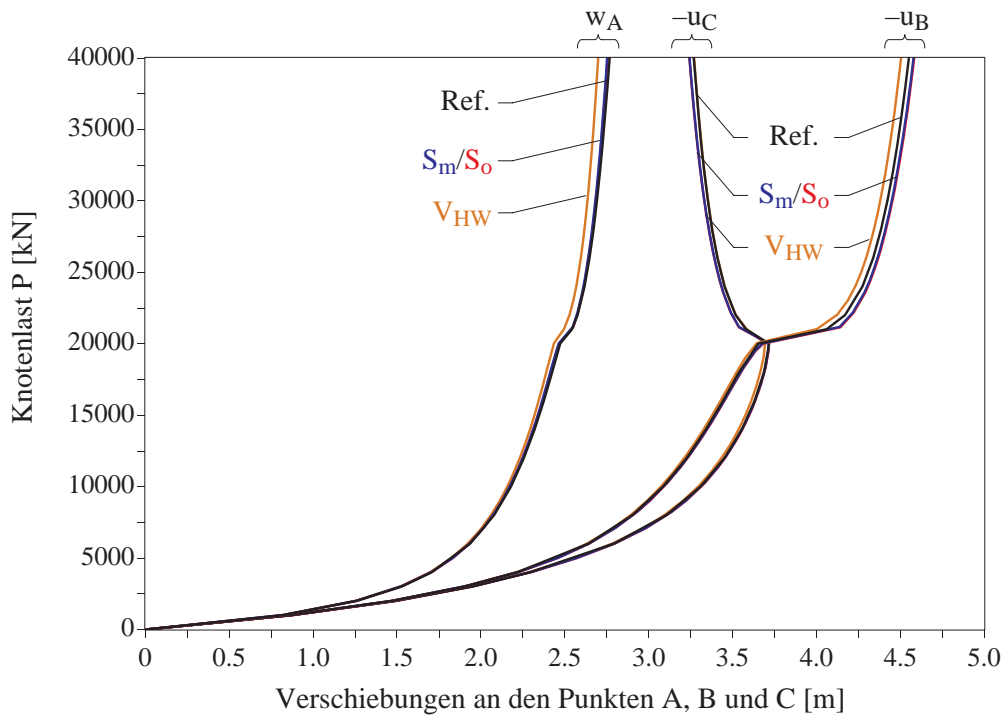


Abb. 3.15: Last-Verschiebungs-Kurve für die offene Zylinderschale

3.7.4 Eingespannter Halbzylinder

Geometrie:

$$R = 103.1 \text{ [mm]}$$

$$L = 304.8 \text{ [mm]}$$

$$h = 3.0 \text{ [mm]}$$

Material:

$$E = 2.0685 \cdot 10^3 \text{ [N/mm}^2\text{]}$$

$$\nu = 0.3$$

Belastung:

$$P \text{ in [N]}$$

FE-Netz (für 1/2-System):

$$16 \times 16 = 256 \text{ Elemente}$$

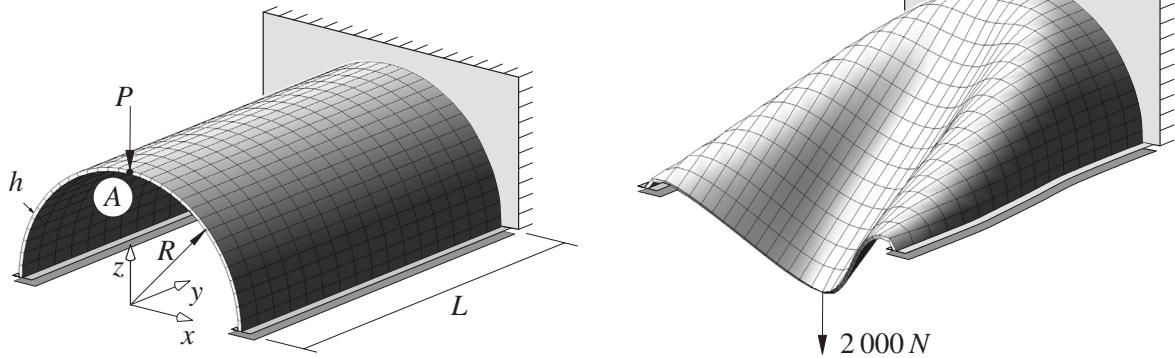


Abb. 3.16: Geometrie, FE-Netz, Materialdaten und Verformungsfigur

Abschließend zu diesen numerischen Untersuchungen wird noch ein viertes, äußerst beliebtes Benchmark-Problem (Stander et al. (1989), Parisch (1991), Klinkel et al. (1999)) betrachtet. Ein an einem Ende eingespannter Halbzylinder, dessen beide Längskanten in vertikaler Richtung und deren Verdrehung um die globale y-Achse gehalten sind, wird durch eine Einzellast P am freien Ende in vertikaler Richtung belastet (Abb. 3.16). Die genauen Geometrieangaben und Randbedingungen sowie die Materialeigenschaften sind in Abbildung 3.16 angegeben. Aufgrund der Symmetrie wird nur eine Hälfte des Halbzylinders mit 16×16 Elementen diskreti-

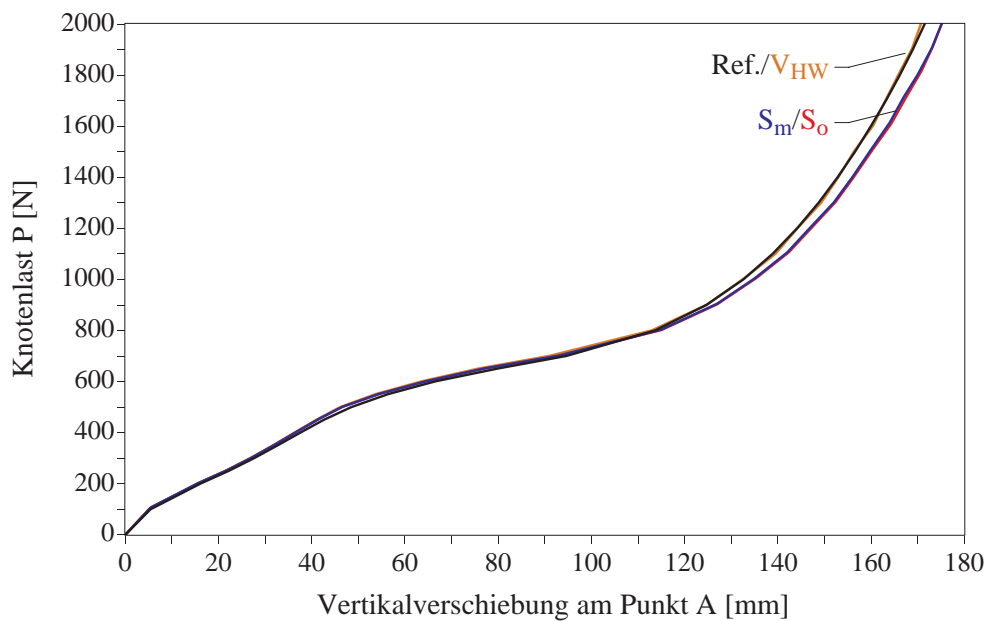


Abb. 3.17: Last-Verschiebungs-Kurve für das eingespannte Rohr

siert. Kontrolliert wird die Vertikalverschiebung des Punktes A , an dem die Einzellast eingeleitet wird. Für die Last $P = 2000\text{ N}$ ist in Abbildung 3.16 rechts die verformte Struktur dargestellt. In Abbildung 3.17 ist die Last-Verschiebungs-Kurve für die Vertikalverschiebung des Punktes A angegeben. Im Unterschied zu den bisher betrachteten Beispielen, ergibt sich hier mit dem Hu-Washizu-Volumenelement (V_{HW}) ein nahezu identischer Verschiebungsverlauf mit der Referenzlösung (Sze et al. (2004)). Die beiden Schalenelemente verhalten sich in diesem Beispiel ein wenig weicher als die Referenzlösung, liefern aber dennoch hervorragende Ergebnisse.

3.8 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zwei FE-Formulierungen vorgestellt, die sich für eine effiziente Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen eignen. Dabei standen die zu Beginn dieses Kapitels formulierten Anforderungen im Vordergrund. Es konnten Finite Elemente eingesetzt werden, die unter Verwendung von Ansätzen niedriger Ordnung gleichzeitig eine gute Qualität der numerischen Lösung garantieren und deren Freiheitsgrade sich auf der Schalenoberfläche befinden.

Aufbauend auf der 7-Parameter-Schalentheorie wurde mit Hilfe einer Reparametrisierung der geometrischen Beschreibung des dreidimensionalen Schalenkörpers ein achtknotiges, oberflächenorientiertes Schalenelement (S_o) vorgestellt. Im Gegensatz zu klassischen Elementformulierungen, die die Geometrie über eine zweidimensionale Referenzfläche und einem entsprechenden Direktorfeld approximieren, wird hier direkt das dreidimensionale Volumen diskretisiert. Die je drei Verschiebungsfreiheitsgrade dieses Elementes befinden sich an den auf der Oberfläche des Schalenkörpers sitzenden Elementknoten. Da dieser Formulierung die gleiche Schalentheorie zugrunde liegt wie dem in Bischoff (1999) ausführlich beschriebenen, mittelflächenorientierten Element (S_m), ist das Verhalten dieser beiden Elemente praktisch identisch. Bekannte bei Schalenformulierungen typische unphysikalische Versteifungseffekte können folglich mit den gleichen Methoden behandelt werden. Zur Vermeidung von Querschublocking und „*curvature thickness locking*“ wird die ANS-Methode eingesetzt, für die Verringerung der restlichen Versteifungseffekte die EAS-Methode. Die durchgeführten, numerischen Beispiele in Kapitel 3.7 bestätigen die hohe Genauigkeit der beiden Schalenelemente und unterstreichen deren grundsätzlich analoges Elementverhalten. Minimale Unterschiede in den beiden Elementen resultieren aus der geringfügig unterschiedlichen Behandlung der Randbedingungen und der Definition des jeweiligen Direktorfeldes. Weitergehende Untersuchungen zum Verhalten dieser beiden Schalenelemente findet sich in der Arbeit von Toncar (2006).

Zusätzlich zu dem oberflächenorientierten Schalenelement wurde ein achtknotiges Volumenelement, basierend auf dem Funktional von Hu-Washizu, vorgestellt (V_{HW}). Diese Elementformulierung beschreibt ebenfalls den dreidimensionalen Schalenkörper über FE-Knoten, die sich auf den Schalenoberflächen befinden und eignet sich somit auch für eine entsprechende Kontaktformulierung. Mit den numerischen Vergleichsrechnungen in Kapitel 3.7 konnte gezeigt werden, dass sich dieses allgemeine Volumenelement auch sehr gut für die Analyse von dünnwandigen

Strukturen einsetzen lässt. Im Gegensatz zu den beiden Schalenelementen ist jedoch der numerische Mehraufwand durch die hohe Anzahl zusätzlicher interner Variablen enorm, so dass aus Sicht des Autors die Anwendung dieser Elementformulierung für die Analyse ausschließlich dünnwandiger Strukturen nicht empfehlenswert erscheint.

Aufgrund des sehr guten Elementverhaltens des vorgestellten achtknotigen oberflächenorientierten Schalenelementes (S_0) wird dieses für die weitere Anwendung in dieser Arbeit ausgewählt. Gegenüber dem alternativ hierzu vorgestellten Volumenelement (V_{HW}) erweist sich das Schalenelement wegen der relativ geringen Anzahl von nur neun zusätzlichen internen Verzerrungsvariablen deutlich robuster und effizienter.

4 Stabile Zeitintegrationsverfahren

Im vorausgegangenen Kapitel wurden verschiedene FE-Formulierungen vorgestellt, die sich für eine räumliche Diskretisierung von dünnwandigen Strukturen eignen. Im Hinblick auf eine effiziente Kontaktmodellierung galt dabei ein besonderes Augenmerk einer volumenorientierten Formulierung. Darauf aufbauend werden in diesem Kapitel zwei geeignete implizite Zeitintegrationsverfahren vorgestellt, mit denen die notwendige zeitliche Diskretisierung eines nichtlinearen, elastodynamischen Problems durchgeführt werden kann. Zunächst wird ein kurzer Überblick über Zeitintegrationsverfahren gegeben, bevor dann konkret auf die zwei in dieser Arbeit verwendeten Algorithmen eingegangen wird. Dies ist zum einen das „Generalized- α “-Verfahren (Gen_α) und zum anderen die „Generalized-Energy-Momentum-Method“ (GEMM). Während für das erstgenannte Verfahren die in Kapitel 3 dargestellte, räumliche Diskretisierung ohne weitere Veränderungen übernommen werden kann, sind für das letztgenannte Verfahren entscheidende Modifikationen auf Elementebene notwendig. Diese werden an entsprechender Stelle vorgestellt und deren Auswirkung auf die numerische Effizienz diskutiert. Anschließend wird der gesamte Lösungsalgorithmus für die Analyse von nichtlinearen Problemen der Elastodynamik zusammengefasst, bevor anhand eines numerischen Beispiels das Verhalten der beiden vorgestellten Zeitintegrationsverfahren untersucht wird.

4.1 Überblick

Der nachfolgende Überblick über diverse Zeitintegrationsverfahren soll dazu dienen, die in dieser Arbeit verwendeten Algorithmen entsprechend einzuordnen und auf die Problematiken und Anforderungen an stabile Zeitintegrationsverfahren im Zusammenhang mit nichtlinearen Problemstellungen hinzuweisen. Er erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit; weitergehende Ausführungen finden sich beispielsweise in der Arbeit von Kuhl (1996).

In der linearen Strukturmechanik werden bereits seit langem erfolgreich Zeitintegrationsverfahren eingesetzt. Bei Anwendung der klassischen Verfahren auf geometrisch nichtlineare Probleme kann es zum Verlust der numerischen Stabilität kommen. Nach der Definition von Belytschko und Schoeberle (1975) ist ein Zeitintegrationsverfahren genau dann numerisch stabil, wenn die Energiebilanz innerhalb eines Zeitschrittes erfüllt ist oder Energie numerisch dissipiert wird. Der Verlust der numerischen Stabilität wurde beispielsweise für die Anwendung der klassischen Trapezregel auf die nichtlineare Dynamik von Schalenträgwerken von Simo und Tarnow (1994) und Kuhl und Ramm (1996) gezeigt.

Erfolgreiche, robuste und unbedingt stabile Zeitintegrationsalgorithmen für die lineare Dynamik können bei der Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichung auf zwei grundsätzlich unterschiedliche Weisen numerisch instabil werden. Entweder tritt ein Konvergenzversagen innerhalb der Gleichgewichtsiteration auf, das nur durch eine entsprechende, adaptive Anpassung

der Zeitschrittweite vermieden werden kann, oder es tritt ein unvermitteltes Stabilitätsversagen des Integrationsalgorithmus auf, das physikalisch unsinnige, aber konvergente Lösungen liefert. Für die Integration des nichtlinearen, semidiskreten Anfangswertproblems sind deshalb robuste Zeitintegrationsmethoden notwendig, die zum einen numerisch stabil sind und zum anderen mit vernünftig großen Zeitschrittweiten zu konvergenten und genauen Lösungen führen.

Prinzipiell stehen drei Möglichkeiten zur Verfügung, diese Anforderungen zu erfüllen:

- Durch das Aufbringen von numerischer Dämpfung wird Energie dissipiert und somit die numerische Stabilität gewährleistet.
- Die exakte Erhaltung der totalen Energie innerhalb eines Zeitschrittes wird algorithmisch realisiert.
- Die Erhaltung der totalen Energie innerhalb eines Zeitschrittes wird durch die Formulierung einer Nebenbedingung erzwungen.

Als Beispiel für ein numerisch dissipatives Verfahren sei die „*Generalized- α* “-Methode (Gen_α) nach Chung und Hulbert (1993) genannt, die es erlaubt, hochfrequente Systemantworten kontrollierbar herauszudämpfen. Zeitintegrationsverfahren mit numerischer Dissipation garantieren die Konvergenz bei endlichen Zeitschritten sowie eine stabile Integration. Sie dissipieren sukzessive Energie, so dass sie für die Analyse von langzeitdynamischen Prozessen nur unbefriedigende Ergebnisse liefern. Als Beispiel für ein algorithmisch energieerhaltendes Verfahren sei die „*Energy-Momentum-Method*“ (EMM) von Simo und Tarnow (1992) genannt, das neben der Erhaltung der totalen Energie auch die Erhaltung von Impuls und Drehimpuls innerhalb eines Zeitschrittes garantiert. Ein Vertreter der Algorithmen, welche die Erhaltung der totalen Energie über eine Nebenbedingung erzwingen, ist die „*Constraint-Energy-Method*“ nach Hughes et al. (1978). Sie wurde später von Kuhl und Ramm (1996) zum „*Constraint-Energy-Momentum-Algorithm*“ weiterentwickelt.

Eine Verallgemeinerung der EMM wurde von Kuhl und Crisfield (1999) und Kuhl und Ramm (1999) vorgestellt. Die sogenannte „*Generalized-Energy-Momentum-Method*“ (GEMM) kombiniert einerseits die Überlegungen der EMM von Simo und Tarnow (1992) mit denen des Gen_α -Verfahrens. Damit können gleichzeitig die Erhaltung bzw. das Abklingen der totalen Energie garantiert und ungewollte, hochfrequente Moden gezielt numerisch dissipiert werden.

In dieser Arbeit werden für die Integration der nichtlinearen Bewegungsgleichung das Gen_α -Verfahren und die GEMM eingesetzt. Diese sind so allgemein formuliert, dass sie bei entsprechender Wahl der Parameter viele der in der Literatur bekannten Zeitintegrationsverfahren vereinigen.

4.2 Das „Generalized- α “-Verfahren (Gen $_{\alpha}$)

Das „Generalized- α “-Verfahren nach Chung und Hulbert (1993) stellt eine Verallgemeinerung des klassischen Newmark Algorithmus dar, der bereits vor knapp 50 Jahren von Newmark (1959) vorgeschlagen wurde. Sind zu Beginn eines Zeitschrittes die diskreten Zustandsvektoren \mathbf{d}_n , $\dot{\mathbf{d}}_n$ und $\ddot{\mathbf{d}}_n$ bekannt, wird mit Hilfe der zeitlichen Diskretisierung die semidiskrete Form der Bewegungsgleichung (Gl. (2.47)) für die unbekanntenen Zustandsvektoren \mathbf{d}_{n+1} , $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}$ und $\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}$ zum Ende des Zeitintervalls in impliziter Form gelöst. Dazu werden, ausgehend von den Newmark Approximationen für die Verschiebungen und die Geschwindigkeiten in einem Zeitintervall $[t_n, t_{n+1}]$ mit den Parametern β und γ

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1}(\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}) &= \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1-2\beta}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_n + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}, \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1}(\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}) &= \dot{\mathbf{d}}_n + (1-\gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

die Geschwindigkeiten und Verschiebungen zum Zeitpunkt t_{n+1} in Abhängigkeit der unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_{n+1}(\mathbf{d}_{n+1}) &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right) \dot{\mathbf{d}}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n, \\ \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}(\mathbf{d}_{n+1}) &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) \ddot{\mathbf{d}}_n. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Somit verbleibt nur noch der Systemvektor der diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{d}_{n+1} am Ende des jeweiligen Zeitschrittes als unbekanntes Größe.

4.2.1 Modifizierte semidiskrete Bewegungsgleichung

Um gleichzeitig die numerische Dissipation und die Genauigkeit zweiter Ordnung des Integrationsverfahrens zu gewährleisten, wird beim Gen $_{\alpha}$ -Verfahren die nichtlineare, semidiskrete Bewegungsgleichung modifiziert und an einem generalisierten Mittelpunkt

$$M\ddot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{ext} \quad (4.3)$$

ausgewertet, der durch die beiden Parameter α_f und α_m charakterisiert wird.⁵ Die Zustandsvektoren zu diesem Zeitpunkt werden durch eine Linearkombination dieser Größen an den Zeitintervallgrenzen

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_m} &= (1-\alpha_m) \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \alpha_m \ddot{\mathbf{d}}_n, \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f) \dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \alpha_f \dot{\mathbf{d}}_n, \\ \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{d}_n, \\ \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{ext} &= (1-\alpha_f) \mathbf{f}_{n+1}^{ext} + \alpha_f \mathbf{f}_n^{ext} \end{aligned} \quad (4.4)$$

ausgedrückt. Die Bestimmung der internen Kräfte kann dabei entweder direkt über die generalisierten Mittelpunktsverschiebungen

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) = \mathbf{f}^{int}\left(\left(1 - \alpha_f\right) \mathbf{d}_{n+1} + \alpha_f \mathbf{d}_n\right) \quad (4.5)$$

oder entsprechend den Ansätzen für die kinematischen Größen mit Hilfe einer Linearkombination aus den internen Kräften der Zeitintervallgrenzen

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) = \left(1 - \alpha_f\right) \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1}) + \alpha_f \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_n) \quad (4.6)$$

ermittelt werden. Für den linearen Fall führen beide Ansätze zu äquivalenten Ergebnissen, wohingegen sich im nichtlinearen Fall unterschiedliche Auswirkungen auf die algorithmische Umsetzung ergeben (Kuhl (1996) sowie Kuhl und Crisfield (1999)). In der vorliegenden Arbeit werden die internen Kräfte nach Gleichung (4.6) bestimmt, was den entscheidenden Vorteil hat, dass dadurch keinerlei Modifikationen in den Elementroutinen notwendig sind.

Anmerkung: Bei Anwendung der in Kapitel 3 vorgestellten Finiten Elemente sind die internen Kräfte nicht nur von den diskreten Knotenverschiebungen, sondern auch von entsprechenden zusätzlichen inneren Variablen abhängig. Um jedoch die ohnehin schon etwas länglichen Ausdrücke möglichst übersichtlich darstellen zu können, wird auf die Kennzeichnung der Abhängigkeit der internen Kräfte von zusätzlichen Variablen verzichtet. Für die Berechnung der effektiven tangentiellen Steifigkeitsmatrix und des effektiven Lastvektors sind diese jedoch zu berücksichtigen; es wird an entsprechender Stelle darauf hingewiesen.

4.2.2 Effektive Strukturgleichung und Linearisierung

Werden die Newmark-Ansätze aus Gleichung (4.2) in die modifizierte, semidiskrete Bewegungsgleichung (4.3) eingesetzt, entsteht ein vollständig diskretisiertes nichtlineares, algebraisches Gleichungssystem, das als effektive Strukturgleichung bezeichnet wird:

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}) \equiv \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{h}(\mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) - \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{ext} = \mathbf{0} . \quad (4.7)$$

Darin sind in

$$\mathbf{h}(\mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n) = \mathbf{M} \left[\frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{d}_n + \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1 - \alpha_m - 2\beta}{2\beta} \ddot{\mathbf{d}}_n \right] \quad (4.8)$$

die zum Zeitpunkt t_n bekannten Geschichtsterme zusammengefasst. Zur Bestimmung der unbekannt Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} werden alle Terme der entstandenen Gleichung auf die linke Seite

-
5. Wie bereits in Kapitel 2.3.1 erwähnt, wird in dieser Arbeit keine viskose Strukturdämpfung berücksichtigt, so dass der geschwindigkeitsproportionale Dämpfungsterm der semidiskreten Bewegungsgleichung entfällt. Die Berücksichtigung dieses Terms stellt keine Schwierigkeit dar. Es führt allerdings dazu, dass die ohnehin schon etwas länglichen Terme bei der späteren Linearisierung der effektiven Strukturgleichung noch länger werden.

gebracht (Gl. (4.7)). Für die anschließend notwendige mehrdimensionale Nullstellensuche wird ein iteratives Prädiktor-Korrektor-Verfahren eingesetzt. Hierfür wird Gleichung (4.7) an der Stelle einer bereits gegebenen Näherungslösung \mathbf{d}_{n+1}^k in eine mehrdimensionale Taylor-Reihe entwickelt:

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^{k+1}) = \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k) + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d} + O(\Delta \mathbf{d}^2) = \mathbf{0} . \quad (4.9)$$

Hierin ist k der Iterationszähler innerhalb der Newton-Iteration, $\Delta \mathbf{d}$ die Differenz zweier aufeinander folgender Näherungslösungen

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} - \mathbf{d}_{n+1}^k \quad (4.10)$$

und $O(\Delta \mathbf{d}^2)$ das Restglied zweiter Ordnung der Taylor-Reihenentwicklung, das verschwindet, wenn $\Delta \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}$ strebt. Damit wurde die nichtlineare effektive Strukturgleichung in eine lineare Gleichung überführt. Sie kann jeweils für eine verbesserte Näherung $\Delta \mathbf{d}$ gelöst werden. Entscheidend für den Linearisierungsprozess ist die Richtungsableitung der effektiven Strukturgleichung, die schließlich auf die effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T^{\text{eff}} = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} = \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + (1 - \alpha_f) \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k}}_{\hat{\mathbf{K}}_T} \quad (4.11)$$

führt. Die Richtungsableitung der inneren Kräfte liefert die tangentielle Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_T$, die für die verschiedenen FE-Formulierungen zur räumlichen Diskretisierung in Kapitel 3 hergeleitet wurden. Der effektive Lastvektor $\mathbf{f}^{\text{eff}} = -\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k)$ berechnet sich mit

$$\mathbf{f}^{\text{eff}} = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{ext}} - \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{d}_{n+1}^k + \mathbf{h}(\mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n) - (1 - \alpha_f) \hat{\mathbf{f}}^{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1}^k, \mathbf{a}_{n+1}^k) - \alpha_f \hat{\mathbf{f}}^{\text{int}}(\mathbf{d}_n, \mathbf{a}_n) , \quad (4.12)$$

wobei darin der Vektor der kondensierten inneren Kräfte $\hat{\mathbf{f}}^{\text{int}}$ der entsprechenden Elementformulierung eingesetzt werden muss. In kompakter Form ergibt sich die effektive, iterative Strukturgleichung dann zu:

$$\mathbf{K}_T^{\text{eff}} \Delta \mathbf{d} = \mathbf{f}^{\text{eff}} . \quad (4.13)$$

Mit Hilfe der beiden Newmark-Parameter β und γ , sowie der beiden Interpolationsparameter α_f und α_m , kann das Maß an numerischer Dissipation des Zeitintegrationsalgorithmus gezielt gesteuert werden. Dabei lassen sich die oben genannten vier Parameter in Abhängigkeit des sogenannten Spektralradius $\rho_\infty \in [0, 1]$ bestimmen (z.B. Kuhl (1996), Mok (2001)):

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} ; \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} ; \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 ; \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f . \quad (4.14)$$

Wird der vom Benutzer zu bestimmende Spektralradius $\rho_\infty = 1.0$ gewählt, ist das Verfahren zwar dissipationsfrei, aber im nichtlinearen Fall nicht stabil. Mit $\rho_\infty \in [0.85, 0.95]$ wird eine numerische Dissipation in den hochfrequenten Moden erreicht, die in den meisten Fällen zur Stabilisierung des Zeitintegrationsverfahrens ausreicht (Gee (2004)).

4.3 Die „Generalized-Energy-Momentum-Method“ (GEMM)

Die „Generalized-Energy-Momentum-Method“, die von Kuhl und Crisfield (1999) bzw. Kuhl und Ramm (1999) vorgeschlagen wurde, ist eine Modifikation des Gen_α -Verfahrens. In seiner allgemeinen Form garantiert die GEMM ein Abklingen der totalen Energie und beinhaltet als Spezialfall die „Energy-Momentum-Method“ (EMM) von Simo und Tarnow (1992), welche die exakte Erhaltung der totalen Energie innerhalb eines Zeitschrittes gewährleistet. Der wesentliche Unterschied gegenüber dem zuvor beschriebenen Gen_α -Verfahren liegt in der Berechnung der algorithmischen, internen Kräfte. Während beim Gen_α -Verfahren die internen Kräfte für die modifizierte, semidiskrete Bewegungsgleichung über eine Linearkombination der Größen an den Zeitintervallgrenzen bestimmt wurden (Gl. (4.6)), werden bei der GEMM die algorithmischen internen Kräfte über eine spezielle Auswertung der internen virtuellen Arbeiten ermittelt. Die unterschiedliche Approximation der internen Kräfte hat einen erheblichen Einfluss auf die zur räumlichen Diskretisierung verwendeten FE-Formulierung. Sowohl die Ermittlung der internen Kräfte, als auch die daraus resultierenden Modifikationen für die in dieser Arbeit verwendete Elementformulierung werden im Folgenden erläutert.

4.3.1 Algorithmische interne Kräfte

Die algorithmischen, internen Kräfte werden über die FE-Diskretisierung der inneren virtuellen Arbeiten der generalisierten Zwischenkonfiguration zum Zeitpunkt $t_{n+1-\alpha_f}$ erhalten. Für das in Kapitel 3.3 vorgestellte, und im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausschließlich verwendete oberflächenorientierte Schalelement sind die diskretisierten, inneren virtuellen Arbeiten durch

$$\delta \Pi_h^{int}(\mathbf{d}, \mathbf{a})|_{n+1-\alpha_f} = \int_{A^h} \left[\left(\tilde{\mathbf{S}}_h \right)^T \delta \tilde{\mathbf{E}}_h + \left(\mathbf{S}_h^u \right)^T \delta \mathbf{E}_h^u \right]_{n+1-\alpha_f} dA \quad (4.15)$$

gegeben (siehe Gl. (3.27)). Entscheidend für die Auswertung dieses virtuellen Arbeitsausdrucks ist die Approximation der virtuellen kinematischen Variablen $\delta \tilde{\mathbf{E}}_h$ und $\delta \mathbf{E}_h^u$ sowie der dazu energetisch konjugierten statischen Variablen $\tilde{\mathbf{S}}_h$ und \mathbf{S}_h^u am generalisierten Mittelpunkt. Werden die gemittelten kinematischen Variablen über die Mittelung der kinematischen Größen der Konfigurationen der Zeitintervallgrenzen und nicht etwa über die kinematischen Größen der gemittelten Konfiguration bestimmt, kann für den Sonderfall der EMM die exakte Erhaltung der totalen Energie gewährleistet werden (Simo und Tarnow (1992): „[...] use of the average of the strains

and not the strain of the average configuration is the key to exact enforcement exact energy conservation.“). Bei Verallgemeinerung dieser Erkenntnis im Sinne des Gen_α -Verfahrens ergibt sich die virtuelle innere Arbeit der GEMM zu

$$\begin{aligned} \delta \Pi_h^{\text{int,GEMM}} &= \int_{A^h} \left(\tilde{\mathbf{S}}_h(\mathbf{a}_{n+1-\alpha_f}) \right)^T \left[(1 - \alpha_f) \delta \tilde{\mathbf{E}}_h(\mathbf{a}_{n+1}) + \alpha_f \delta \tilde{\mathbf{E}}_h(\mathbf{a}_n) \right] dA \\ &+ \int_{A^h} \left(\mathbf{S}_h^u(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) \right)^T \left[(1 - \alpha_f) \delta \mathbf{E}_h^u(\mathbf{d}_{n+1}) + \alpha_f \delta \mathbf{E}_h^u(\mathbf{d}_n) \right] dA . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Wird das lineare St. Venant-Kirchhoff Materialgesetz eingesetzt, kann von dem dadurch implizierten linearen Zusammenhang zwischen statischen und kinematischen Größen Gebrauch gemacht werden. Anstelle der kinematischen Größen können auch die statischen entsprechend gemittelt werden. Damit lässt sich $\delta \Pi_h^{\text{int,GEMM}}$ in Gleichung (4.16) auch alternativ durch

$$\begin{aligned} \delta \Pi_h^{\text{int,GEMM}} &= \int_{A^h} \left[(1 - \alpha_f) \tilde{\mathbf{S}}_h(\mathbf{a}_{n+1}) + \alpha_f \tilde{\mathbf{S}}_h(\mathbf{a}_n) \right]^T \delta \tilde{\mathbf{E}}_h(\mathbf{a}_{n+1-\alpha_f}) dA \\ &+ \int_{A^h} \left[(1 - \alpha_f) \mathbf{S}_h^u(\mathbf{d}_{n+1}) + \alpha_f \mathbf{S}_h^u(\mathbf{d}_n) \right]^T \delta \mathbf{E}_h^u(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) dA \end{aligned} \quad (4.17)$$

ausdrücken (Kuhl und Ramm (1999)).

4.3.2 Linearisierung der internen virtuellen Arbeit

Für die konsistente Linearisierung müssen die partiellen Ableitungen des diskretisierten virtuellen inneren Arbeitsausdrucks aus Gleichung (4.17) nach den unbekanntem Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} und den inneren Variablen \mathbf{a}_{n+1} zum Ende des Zeitschrittes gebildet werden. Dabei ist eine sorgfältige Unterscheidung der Zeitpunkte notwendig, zu denen die jeweiligen Größen auszuwerten sind. Um dies einerseits deutlich kennzeichnen zu können und andererseits die Lesbarkeit der anschließenden Gleichungen etwas zu verbessern, werden folgende Abkürzungen eingeführt:

$(\cdot)_n$: Größen zum Zeitpunkt t_n

$(\cdot)_{n1}$: Größen zum Zeitpunkt t_{n+1}

$(\cdot)_{na}$: Größen zum Zeitpunkt $t_{n+1-\alpha_f}$ mit: $(\cdot)_{na} := (1 - \alpha_f)(\cdot)_{n1} + \alpha_f(\cdot)_n$

Zusammen mit den bereits in Kapitel 3.3 eingeführten Ansätzen für die diskretisierten virtuellen kinematischen Variablen

$$\delta \tilde{\mathbf{E}}_h(\mathbf{a}_{na}) = \tilde{\mathbf{E}}_{h,\mathbf{a}_{na}} \delta \mathbf{a}_{na} = \tilde{\mathbf{M}}_{na} \delta \mathbf{a}_{na} = \tilde{\mathbf{M}} \delta \mathbf{a}_{na} , \quad (4.18)$$

$$\delta \mathbf{E}_h^u(\mathbf{d}_{na}) = \mathbf{E}_{h,\mathbf{d}_{na}}^u \delta \mathbf{d}_{na} = \mathbf{B}_{na} \delta \mathbf{d}_{na} , \quad (4.19)$$

führt Gleichung (4.17) in kompakter Form auf:

$$\begin{aligned}\delta\Pi_h^{int,GEMM} &= \delta\mathbf{a}_{n\alpha}^T \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{S}}_{h_{n\alpha}} dA + \delta\mathbf{d}_{n\alpha}^T \int_{A^h} \mathbf{B}_{n\alpha}^T \mathbf{S}_{h_{n\alpha}}^u dA \\ &= \delta\mathbf{a}_{n\alpha}^T \tilde{\mathbf{f}}^{int}(\mathbf{a}_{n\alpha}) + \delta\mathbf{d}_{n\alpha}^T \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n\alpha}) .\end{aligned}\quad (4.20)$$

Die beiden für die Linearisierung notwendigen partiellen Ableitungen berechnen sich aus

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta\Pi_h^{int,GEMM}}{\partial\mathbf{d}_{n1}} &= \delta\mathbf{d}_{n\alpha}^T \int_{A^h} \left\{ (1 - \alpha_f) \mathbf{B}_{,d}^T \mathbf{S}_{h_{n\alpha}} + \mathbf{B}_{n\alpha}^T \left[(1 - \alpha_f) \mathbf{S}_{h,d_{n1}}^u(\mathbf{d}_{n1}) \right] \right\} dA \\ &+ \delta\mathbf{a}_{n\alpha}^T \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \left[(1 - \alpha_f) \tilde{\mathbf{S}}_{h,d_{n1}}(\mathbf{a}_{n1}) \right] dA\end{aligned}\quad (4.21)$$

und

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta\Pi_h^{int,GEMM}}{\partial\mathbf{a}_{n1}} &= \delta\mathbf{d}_{n\alpha}^T \int_{A^h} \mathbf{B}_{n\alpha}^T \left[(1 - \alpha_f) \mathbf{S}_{h,d_{n1}}(\mathbf{d}_{n1}) \right] dA \\ &+ \delta\mathbf{a}_{n\alpha}^T \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \left[(1 - \alpha_f) \tilde{\mathbf{S}}_{h,\alpha_{n1}}(\mathbf{a}_{n1}) \right] dA .\end{aligned}\quad (4.22)$$

Analog zu Kapitel 3.3.3 werden die inneren Verzerrungsparameter \mathbf{a} durch eine statische Kondensation auf Elementebene eliminiert. Daraus resultiert die modifizierte tangentielle Steifigkeitsmatrix

$$\hat{\mathbf{K}}_T^{GEMM} = (1 - \alpha_f) \left[\mathbf{K}_{e+u} + \mathbf{K}_g - \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \mathbf{L} \right]^{GEMM} ,\quad (4.23)$$

wobei die elastische und Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix sowie die geometrische Steifigkeitsmatrix mit

$$\mathbf{K}_{e+u}^{GEMM} = \int_{A^h} \mathbf{B}_{n\alpha}^T \mathbf{S}_{h,d_{n1}}^u dA = \int_{A^h} \mathbf{B}_{n\alpha}^T \hat{\mathbf{C}}_{n1} \mathbf{B}_{n1} dA ,\quad (4.24)$$

$$\mathbf{K}_g^{GEMM} = \int_{A^h} \mathbf{B}_{,d}^T \mathbf{S}_{h_{n\alpha}} dA\quad (4.25)$$

und die Kopplungsmatrizen und die Verzerrungsmatrix mit

$$\left(\mathbf{L}^{GEMM} \right)^T = \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{S}}_{h,d_{n1}} dA = \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \hat{\mathbf{C}}_{n1} \mathbf{B}_{n1} dA ,\quad (4.26)$$

$$\mathbf{L}^{GEMM} = \int_{A^h} \mathbf{B}_{n\alpha}^T \tilde{\mathbf{S}}_{h,\alpha_{n1}} dA = \int_{A^h} \mathbf{B}_{n\alpha}^T \hat{\mathbf{C}}_{n1} \tilde{\mathbf{M}} dA , \quad (4.27)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}^{GEMM} = \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{S}}_{h,d_{n1}} dA = \int_{A^h} \tilde{\mathbf{M}}^T \hat{\mathbf{C}}_{n1} \tilde{\mathbf{M}} dA \quad (4.28)$$

gegeben sind. Wie aus den Gleichungen (4.24) bis (4.28) ersichtlich wird, geht die Symmetrie der resultierenden tangentiellen Steifigkeitsmatrix verloren. Lediglich die geometrische Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_g^{GEMM} und die Verzerrungsmatrix $\tilde{\mathbf{D}}^{GEMM}$ sind symmetrisch, da einerseits die Ableitungen der B-Operatormatrix $\mathbf{B}_{,d}^T$ unabhängig von der Verformung des Schalenelementes sind (Anhang Gl. (A.15) - (A.19)), und andererseits die Matrix der Ansatzfunktionen $\tilde{\mathbf{M}}$ für die zusätzlichen kinematischen Variablen konstant ist (Anhang A.4). Um die Symmetrie des resultierenden Gleichungssystems zu wahren, schlagen Kuhl und Ramm (1999) vor, die elastische und Anfangsverschiebungssteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{e+u}^{GEMM} aus Gleichung (4.24) durch eine symmetrische Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_{e+u}^{GEMM} \approx \bar{\mathbf{K}}_{e+u}^{GEMM} = \int_{A^h} \mathbf{B}_{n\alpha}^T \hat{\mathbf{C}}_{n1} \mathbf{B}_{n\alpha} dA \quad (4.29)$$

zu approximieren. Für das in dieser Arbeit verwendete Schalenelement würde dies aufgrund der EAS-Erweiterung bedeuten, dass auch die Kopplungsterme entsprechend symmetrisch approximiert werden müssten, um die Symmetrie der resultierenden tangentiellen Steifigkeitsmatrix aus Gleichung (4.23) zu gewährleisten. Da sich die vorliegende Arbeit jedoch vorwiegend mit der Simulation von dynamischen Kontaktproblemen beschäftigt, die ohnehin eine Unsymmetrie des resultierenden Gesamtgleichungssystems nach sich zieht (Kapitel 7), wird hier auf eine nachträgliche Modifikation der konsistent linearisierten Steifigkeitsmatrizen verzichtet.

Anmerkung: Zur Vermeidung des Querschublockings und des „curvature thickness lockings“ wird die ANS-Methode eingesetzt (Kapitel 3.5.1 und Anhang A.3). In der Folge müssen die entsprechenden Modifikationen der B-Operatormatrix zusätzlich für die Zwischenkonfiguration zum Zeitpunkt $t_{n+1-\alpha_f}$ durchgeführt werden.

4.3.3 Effektive Strukturgleichung

Die Herleitung der effektiven, iterativen Strukturgleichung zur Bestimmung der inkrementellen Verschiebungen innerhalb eines Iterationsschrittes erfolgt analog zum Gen_α -Verfahren in Kapitel 4.2.2 und wird deshalb nicht noch einmal aufgeführt. Es ist lediglich darauf zu achten, dass in die effektive Strukturgleichung (Gl. (4.7)) die algorithmischen internen Kräfte entsprechend der GEMM eingesetzt werden. Für die anschließende Berechnung der effektiven tangentiellen Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_T^{\text{eff}}$ muss nun die Linearisierung dieser modifizierten internen Kräfte berücksichtigt werden. Die effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix für die GEMM ergibt sich damit zu

$$\mathbf{K}_T^{eff} = \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \underbrace{\hat{\mathbf{K}}_T^{GEMM}}_{Gl. (4.23)} \quad (4.30)$$

und der effektive Lastvektor zu

$$\mathbf{f}^{eff} = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{ext} - \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{d}_{n+1}^k + \mathbf{h}(\mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n) - \hat{\mathbf{f}}^{int}(\mathbf{d}_{na}, \mathbf{a}_{na}) , \quad (4.31)$$

mit dem von den diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{d} und den internen Variablen \mathbf{a} abhängigen, kondensierten Vektor der internen Kräfte

$$\hat{\mathbf{f}}^{int}(\mathbf{d}_{na}, \mathbf{a}_{na}) = \left[\mathbf{f}^{int} - \mathbf{L}^T \tilde{\mathbf{D}}^{-1} \tilde{\mathbf{f}}^{int} \right]_{na}^{GEMM} \quad (4.32)$$

mit

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{na}) = \int_{A_e} \mathbf{B}_{na}^T \mathbf{S}_{h_{na}} dA \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{f}}^{int}(\mathbf{a}_{na}) = \int_{A_e} \tilde{\mathbf{M}}^T \tilde{\mathbf{S}}_{h_{na}} dA . \quad (4.33)$$

Alle weiteren Aussagen, die für das Gen $_{\alpha}$ -Verfahren gemacht wurden, sind direkt auf die GEMM übertragbar. Die numerische Dissipation hochfrequenter Moden kann analog hierzu durch die geeignete Wahl des Spektralradius ρ_{∞} gezielt gesteuert werden. Wird für die GEMM $\rho_{\infty} = 1.0$ gesetzt, entspricht dieses Verfahren exakt der EMM von Simo und Tarnow (1992) und garantiert die exakte Erhaltung der totalen Energie.

4.3.4 Numerischer Mehraufwand

Die Anwendung der GEMM erfordert einen erheblichen numerischen Mehraufwand. Zunächst müssen deutliche Eingriffe in den Elementroutinen gemacht werden, ohne die dieser Zeitintegrationsalgorithmus nicht anwendbar ist. Eine schnelle, problemlose Kombination der GEMM mit bereits bestehenden Element-Formulierungen eines FE-Programms ist daher nicht möglich. Sind die notwendigen Modifikationen auf Elementebene eingebracht, resultieren daraus numerische Zusatzkosten. Die Approximation der Größen in der generalisierten Zwischenkonfiguration erfordert zum einen die Bereitstellung der statischen Variablen zu Beginn des Zeitschrittes als auch die zweimalige Berechnung der B-Operatormatrix zu den Zeitpunkten $t_{n+1-\alpha_f}$ und t_{n+1} . Wird zusätzlich noch die ANS-Methode angewendet, müssen auch hierfür die entsprechenden Modifikationen der B-Operatormatrix für zwei unterschiedliche Zeitpunkte gemacht werden. Da ein Großteil der Zeit zur numerischen Integration der Elementsteifigkeitsmatrizen auf die Berechnung des B-Operators entfällt, bewirkt dessen zweimalige Bestimmung einen deutlichen Rechenzeitverbrauch.

Darüber hinaus mündet die konsistente Linearisierung der inneren Kräfte in einer unsymmetrischen tangentiellen Steifigkeitsmatrix. Dies führt zu einer Unsymmetrie des abschließend daraus resultierenden, inkrementellen effektiven Strukturgleichungssystems, was den Einsatz eines unsymmetrischen Löser nach sich zieht. Aufgrund des größeren Speicherbedarfs sind unsymmetrische Löser deutlich langsamer als symmetrische.

4.4 Zusammenfassung des gesamten Lösungsalgorithmus

Nachdem die für die numerische Lösung des Anfangsrandwertproblems der Elastodynamik (Abb. 2.2) notwendige räumliche und zeitliche Diskretisierung ausführlich diskutiert wurde, soll im Folgenden der gesamte Lösungsalgorithmus zusammengefasst werden. In dieser Arbeit wird eine sequentielle Raum-Zeit-Diskretisierungsstrategie angewandt, so dass zunächst mit Hilfe von Finiten Elementen eine räumliche Diskretisierung durchgeführt wird. Das daraus entstehende semidiskrete Anfangsrandwertproblem wird anschließend mit einem der beiden zuvor beschriebenen Zeitintegrationsverfahren in der Zeit diskretisiert, so dass ein vollständig diskretisiertes nichtlineares algebraisches Gleichungssystem entsteht. Um dies zu lösen wird ein inkrementell iteratives Lösungsverfahren eingesetzt, das die Linearisierung der diskretisierten effektiven Strukturgleichung erfordert. Dadurch entsteht schließlich ein lineares Gleichungssystem, das für die unbekanntenen inkrementellen Verschiebungen gelöst werden kann. Dies wird in einem iterativen Prozess so lange wiederholt, bis sich das Residuum innerhalb einer festgelegten Fehlerschranke befindet. In Abbildung 4.1 ist der gesamte Lösungsalgorithmus nochmals schematisch zusammengefasst.

Initialisierung: $n = 0$ und Anfangsbedingungen $\mathbf{d}_0; \dot{\mathbf{d}}_0 \Rightarrow \ddot{\mathbf{d}}_0$

Schleife über alle n_T Zeitschritte ($n_T = T/\Delta t$):

Prädiktorschritt ($k=0$):

$$\text{Gen}_\alpha \left\{ \mathbf{K}_T^{\text{eff}} = \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + (1 - \alpha_f) \hat{\mathbf{K}}_T(\mathbf{d}_n, \mathbf{a}_n) \right. \quad \text{Gl. (4.11)}$$

$$\text{GEMM} \left\{ \mathbf{K}_T^{\text{eff}} = \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \hat{\mathbf{K}}_T^{\text{GEMM}}(\mathbf{d}_n, \mathbf{a}_n) \right. \quad \text{Gl. (4.30)}$$

$$\mathbf{f}^{\text{eff}} = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{ext}} + \mathbf{h}(\mathbf{0}, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n) - \hat{\mathbf{f}}^{\text{int}}(\mathbf{d}_n, \mathbf{a}_n) \quad \text{Gl. (4.12); Gl. (4.31)}$$

$$\Delta \mathbf{d}_\Sigma^0 = (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})^{-1} \mathbf{f}^{\text{eff}}$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^0 = \mathbf{d}_n + \Delta \mathbf{d}_\Sigma^0$$

Newton-Raphson-Korrekturiteration:

$$\text{Gen}_\alpha \left\{ \begin{aligned} \mathbf{K}_T^{\text{eff}} &= \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + (1 - \alpha_f) \hat{\mathbf{K}}_T(\mathbf{d}_{n+1}^k, \mathbf{a}_{n+1}^k) & \text{Gl. (4.11)} \\ \mathbf{f}^{\text{eff}} &= \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{ext}} - \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{d}_{n+1}^k + \mathbf{h}(\mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n) - (1 - \alpha_f) \hat{\mathbf{f}}^{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1}^k, \mathbf{a}_{n+1}^k) - \alpha_f \hat{\mathbf{f}}^{\text{int}}(\mathbf{d}_n, \mathbf{a}_n) & \text{Gl. (4.12)} \end{aligned} \right.$$

$$\text{GEMM} \left\{ \begin{aligned} \mathbf{K}_T^{\text{eff}} &= \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \hat{\mathbf{K}}_T^{\text{GEMM}}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^k, \mathbf{a}_{n+1-\alpha_f}^k) & \text{Gl. (4.30)} \\ \mathbf{f}^{\text{eff}} &= \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{\text{ext}} - \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{d}_{n+1}^k + \mathbf{h}(\mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n) - \hat{\mathbf{f}}^{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}^k, \mathbf{a}_{n+1-\alpha_f}^k) & \text{Gl. (4.31)} \end{aligned} \right.$$

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})^{-1} \mathbf{f}^{\text{eff}}$$

$$\Delta \mathbf{d}_\Sigma^{k+1} = \Delta \mathbf{d}_\Sigma^k + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{d}_n + \Delta \mathbf{d}_\Sigma^{k+1}$$

$\Delta \mathbf{d}_\Sigma^k$: Summe der Verschiebungszinkremente innerhalb eines Zeitschrittes

Setzen von: $k = k + 1$ bis zur Konvergenz

Aktualisierung der Bewegungsgrößen mit $\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{k+1}$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{d}}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n \\ \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{d}}_n - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{d}}_n \end{aligned} \right\} \quad \text{Gl. (4.2)}$$

Setzen von: $n = n + 1$ bis $n + 1 = n_T$

Abb. 4.1: Lösungsalgorithmus für ein elastodynamisches Anfangsrandwertproblem

4.5 Numerisches Beispiel: Das „geworfene Lineal“

Die Untersuchung des „geworfenen Lineals“ soll das Verhalten der beiden vorgestellten Zeitintegrationsalgorithmen verdeutlichen. Dieses numerische Beispiel wurde bereits von Kuhl (1996) sowie von Kuhl und Ramm (1999) unter Verwendung von 30 unterintegrierten achtknotigen mittelflächenorientierten Schalenelementen untersucht. In der vorliegenden Arbeit werden zur Diskretisierung der Geometrie des Lineals die in Kapitel 3.3.2 vorgestellten oberflächenorientierten Volumen-Schalenelemente verwendet. Die Geometrie, Materialdaten und Lasten mit der dazugehörigen Lastkurve sind in Abbildung 4.2 dargestellt. Dabei werden die ursprünglich auf die Schalenmittelfläche wirkenden Linienlasten gleichmäßig auf die jeweiligen Schalenoberflächen verteilt. Untersucht werden die Eigenschaften der beiden vorgestellten Zeitintegrationsverfahren für ein Zeitintervall von $T = 100 \text{ ms}$ unter Verwendung einer konstanten Zeitschrittweite von $\Delta t = 50 \mu\text{s}$.

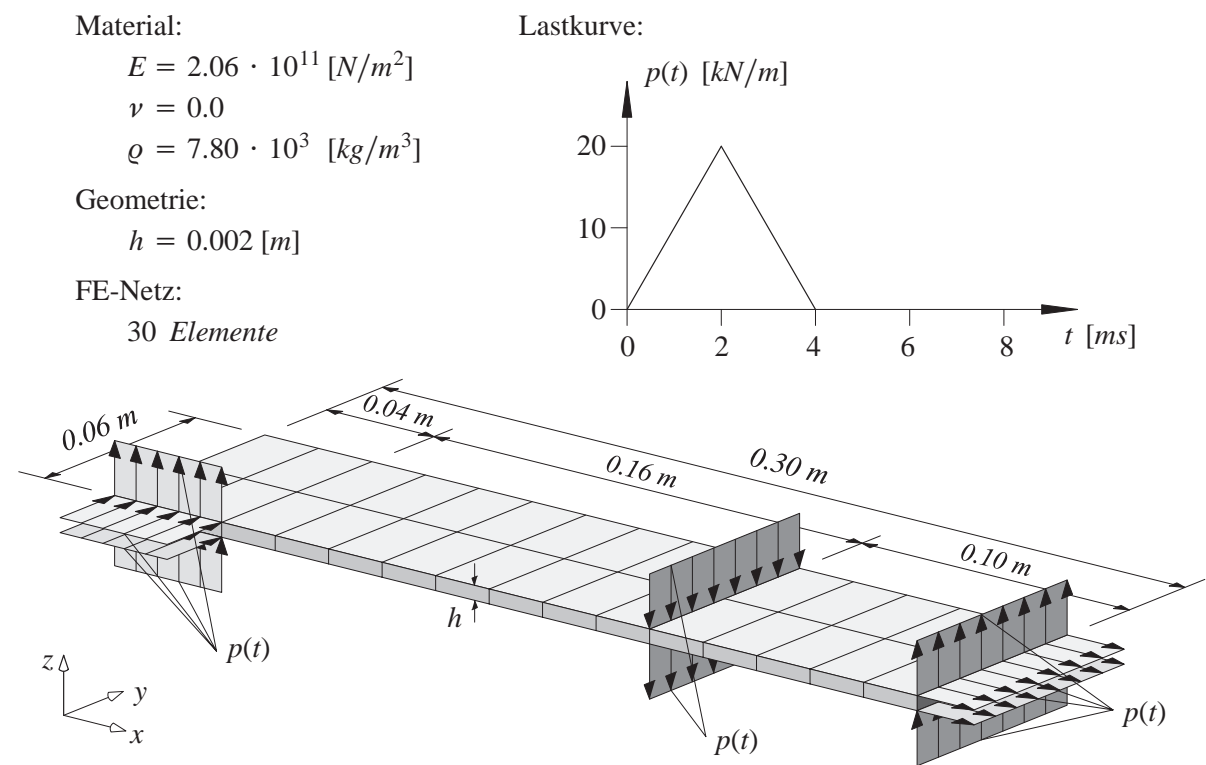


Abb. 4.2: Geworfenes Lineal: Geometrie, Diskretisierung und Belastung

In Abbildung 4.3 ist der komplexe Bewegungsvorgang des Lineals für die erste Hälfte des untersuchten Integrationszeitraums unter Verwendung der GEMM mit einem Spektralradius von $\rho_\infty = 1.0$ dargestellt. Die aufgebrauchte äußere Last bewirkt eine Translation in allen drei Raumrichtungen, eine Rotation um drei Achsen sowie eine Biege- und Torsionsdeformation des Lineals. Für die Berechnung wurden keine Gravitationskräfte berücksichtigt.

In Abbildung 4.4 ist die Entwicklung der totalen Energie sowie der kinetischen und potentiellen Energie während der Integrationszeit für die GEMM und das Gen_α -Verfahren dargestellt. Das Gen_α -Verfahren mit $\rho_\infty = 1.0$ zeigt die bekannten Instabilitäten, die durch ein dramatisches

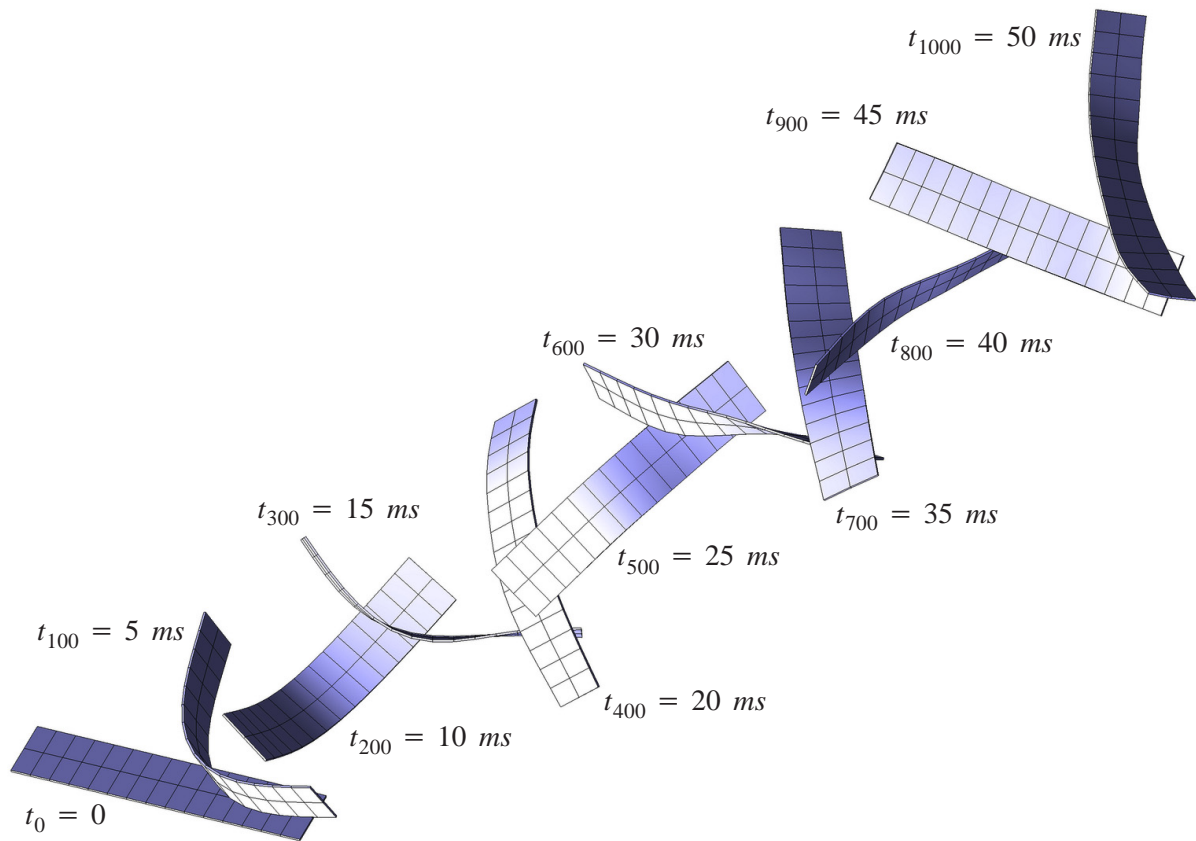


Abb. 4.3: Geworfenes Lineal: Bewegungsvorgang – GEMM mit $\rho_\infty = 1.0$

Anwachsen der totalen Energie gekennzeichnet sind. Selbst eine geringe Zuführung von numerischer Dissipation ($\rho_\infty = 0.95$) kann die numerische Stabilität des Gen_α -Verfahrens nicht garantieren. Erst wenn die numerische Dissipation groß genug gewählt wird ($\rho_\infty \leq 0.90$), kann eine numerisch stabile Analyse gewährleistet werden, welche die hochfrequenten Moden dämpft. Damit verbunden ist jedoch ein Verlust der totalen Energie von etwa 15% im betrachteten Zeitintervall, so dass sich das Gen_α -Verfahren für die Analyse von langzeitdynamischen Problemen nicht eignet.

Auf der rechten Seite von Abbildung 4.4 sind die Ergebnisse für die GEMM dargestellt. Ein Spektralradius von $\rho_\infty = 1.0$, bei dem die GEMM mit der EMM von Simo und Tarnow (1992) übereinstimmt, führt für dieses Beispiel auf ein stabiles Verfahren, das erwartungsgemäß die exakte Erhaltung der totalen Energie garantiert. Durch die Verallgemeinerung der EMM zur GEMM kann gezielt ein Maß an numerischer Dissipation in das Verfahren gebracht werden, indem der Spektralradius $\rho_\infty < 1.0$ gewählt wird. Dies ist vor allem für die Analyse von Problemen mit hochfrequenten Moden, wie zum Beispiel Durchschlagsproblemen, notwendig, da hier die EMM nur in Verbindung mit sehr kleinen Zeitschrittweiten angewandt werden kann (Kuhl und Ramm (1996)).

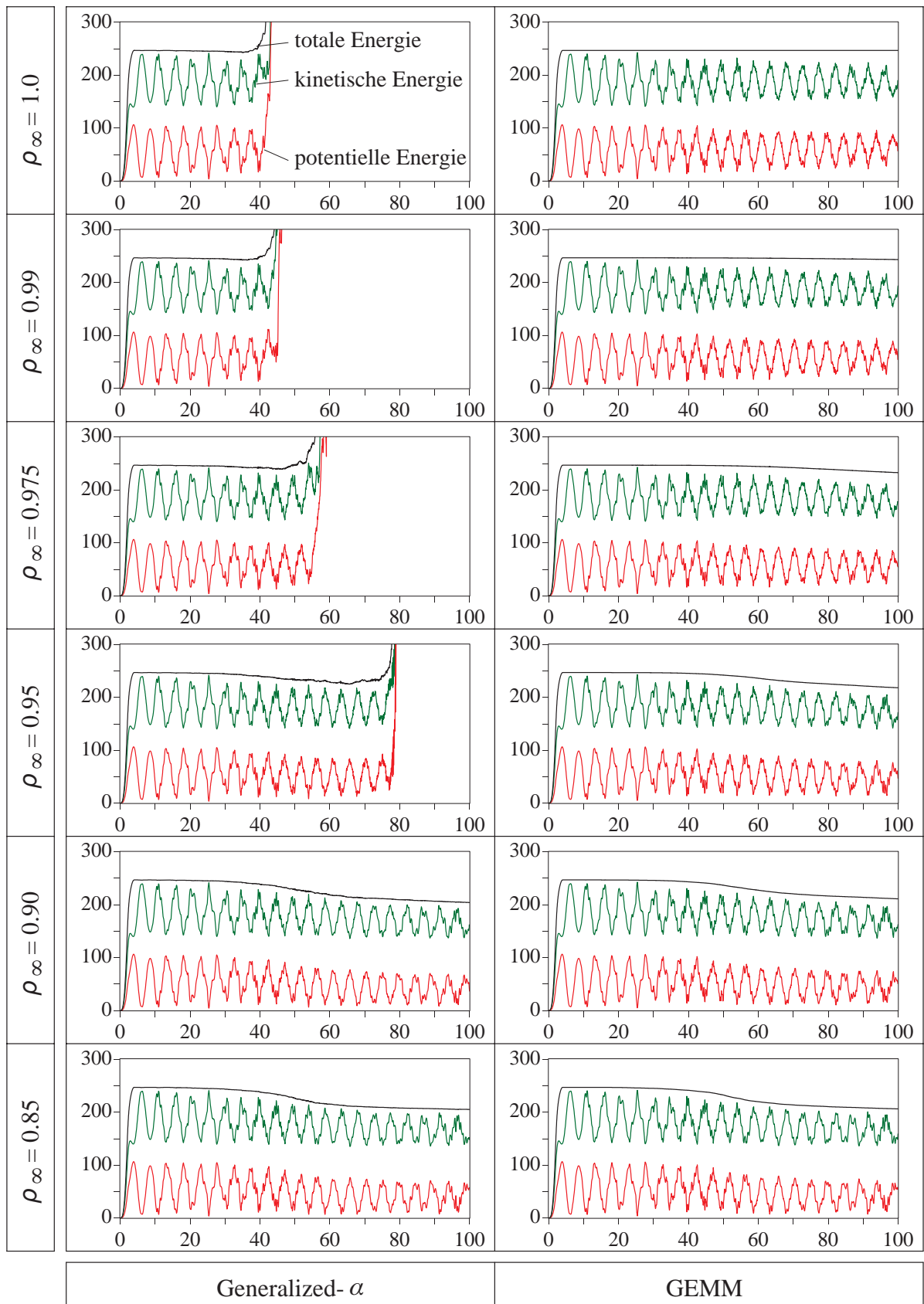


Abb. 4.4: Geworfenes Lineal: Energien [Nm=J] vs Zeit [ms]

5 Lösungsverfahren für Kontaktprobleme

In den vorausgegangenen Kapiteln wurden robuste und stabile, numerische Lösungsverfahren vorgestellt, mit denen elastodynamische Anfangsrandwertprobleme dünnwandiger Strukturen analysiert werden können. Im Weiteren werden dynamische Kontaktprobleme untersucht, wozu das elastodynamische Anfangsrandwertproblem um die entsprechenden Kontakt-Randbedingungen erweitert werden muss (Kap. 2.2.4). Da das kontaktfreie Teilproblem bereits ausführlich untersucht wurde, konzentrieren sich die weiteren Ausführungen ausschließlich auf das hinzukommende Teilproblem des Kontaktes.

Das resultierende nichtlineare Randwertproblem soll weiterhin mit der Methode der Finiten Elemente gelöst werden, wofür die punktweise zu erfüllenden Kontakt-Randbedingungen in eine schwache Form gebracht werden müssen (Kap. 2.2.5). Da der Lösungsraum der resultierenden schwachen Form des Anfangsrandwertproblems durch die Kontakt-Nebenbedingungen eingeschränkt wird, sind geeignete Verfahren zur Behandlung dieser Nebenbedingungen einzusetzen. Viele aus der Optimierungsliteratur bekannte Methoden können hierfür angewandt werden, wobei sich für die Berücksichtigung der Kontakt-Nebenbedingungen im Wesentlichen zwei Verfahren etabliert haben: Die Penalty-Methode und die Lagrange-Multiplikator-Methode. Darüberhinaus werden Kombinationen dieser beiden Verfahren, wie beispielsweise die Augmented-Lagrange-Formulierung eingesetzt. Um die in dieser Arbeit verwendete Kontaktformulierung besser einordnen zu können, werden die angesprochenen Strategien zur Regularisierung der Kontakt-Randbedingungen anhand des reibungsfreien Kontaktes kurz beschrieben. Ein detaillierter Überblick über diese und weitere geeignete Verfahren zur Einhaltung der Kontakt-Randbedingungen finden sich beispielsweise in Wriggers (2002) oder Willner (2003).

Neben der Wahl einer geeigneten Regularisierungsstrategie bei der Entwicklung von robusten und stabilen Kontaktformulierungen im Rahmen der FE-Methode spielt die räumliche Diskretisierung des Kontaktes eine entscheidende Rolle. Die einfachste Möglichkeit der Kontaktdiskretisierung erfolgt mit sogenannten Knoten-Knoten (*node-to-node* – NTN) Kontaktelementen, deren Einsatz auf Problemstellungen mit nur sehr kleinen Verformungen und die Verwendung von konformen Netzen beschränkt ist und deshalb in dieser Arbeit nicht dargestellt wird. Sind größere Deformationen zu berücksichtigen bzw. passen die Netze an den Kontaktflächen nicht zusammen, werden meist Knoten-Segment (*node-to-segment* – NTS) Kontaktelemente eingesetzt. Neuere Ansätze basieren auf sogenannten Segment-Segment (*segment-to-segment* – STS) Formulierungen, in denen die Kontinuität entlang der Kontaktfläche in einem integralen Sinne erfüllt wird. Die wesentlichen Merkmale dieser beiden letztgenannten Diskretisierungsstrategien werden in diesem Abschnitt kurz vorgestellt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine auf der sogenannten Mortar-Methode basierende Kontaktformulierung verwendet. Da die Methode ursprünglich zur Kopplung von nicht konform vernetzten Teilgebieten im Rahmen der Gebietszerlegungsmethoden entwickelt wurde, werden die

grundlegenden Ideen zunächst in diesem Kontext erläutert. Die Darstellungen beschränken sich dabei im Wesentlichen auf die für die praktische Anwendung wichtigen Aspekte und verzichten auf mathematische Details und Beweise. Stattdessen wird an den entsprechenden Stellen auf geeignete Literatur verwiesen.

5.1 Reibungsfreier Kontakt für große Deformationen

In Kapitel 2.2 wurden bereits die entsprechenden Notationen zur Beschreibung von Kontaktproblemen bei großen Deformationen eingeführt. Darüber hinaus wurden die entsprechenden Kontakt-Randbedingungen für Normalkontakt sowie für reibungsbehafteten Kontakt anhand des einfachen Coulombschen Reibgesetzes vorgestellt und die allgemeine schwache Form des Kontaktproblems angegeben. Im Weiteren wird ein reibungsfreier Kontakt betrachtet und die hierfür notwendigen Gleichungen (und Ungleichungen) nochmals kurz zusammengefasst.

Die virtuelle Arbeit des Kontaktes aus Gleichung (2.43) vereinfacht sich für den reibungsfreien Fall zu

$$\delta\Pi_c(\mathbf{u}_c, \delta\mathbf{u}_c) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} t_\nu \delta g \, d\Gamma . \quad (5.1)$$

Zusammen mit der Summe der internen und externen virtuellen Arbeiten $\delta\Pi^{int,ext}$ der beiden kontaktierenden Körper ergibt sich die schwache Form des gesamten Anfangsrandwertproblems inklusive Kontakt mit

$$\delta\Pi^{int,ext} + \delta\Pi_c = 0 . \quad (5.2)$$

Der Lösungsraum dieser schwachen Form ist durch die Kontakt-Randbedingungen in Form der KKT-Bedingungen für den reinen Normalkontakt

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}, t) &\geq 0 , \\ t_\nu &\leq 0 , \\ t_\nu g(\mathbf{X}, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

eingeschränkt. Klassische Verfahren zur Berücksichtigung dieser Nebenbedingungen werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

5.2 Regularisierungsstrategien

5.2.1 Die Lagrange-Multiplikator-Methode

Die Lagrange-Multiplikator-Methode ist in der mathematischen Optimierung als ein Verfahren bekannt, mit dem Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen so umgeformt werden, dass sie effizient gelöst werden können. Dabei wird für jede zu erfüllende Nebenbedingung eine un-

bekannte, skalare Variable eingeführt, die als Lagrange-Multiplikator bezeichnet wird. Jeder dieser Lagrange-Multiplikatoren wird dann mit der entsprechenden Nebenbedingung multipliziert und dem ursprünglichen Optimierungsproblem hinzuaddiert. Damit wird das ursprüngliche Nebenbedingungsproblem auf ein Problem ohne Nebenbedingungen reduziert und kann mit den entsprechenden Methoden gelöst werden. Das Verfahren der Lagrange-Multiplikator-Methode wird im Folgenden anhand des reibungsfreien Kontaktproblems vorgestellt.

Um die Darstellung noch ein wenig zu vereinfachen, wird der Fall der linearen Elastizität ohne Berücksichtigung von Trägheitstermen betrachtet. Hierfür lässt sich die schwache Form des Gleichgewichtes für einen betrachteten Körper aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} [W^{int}(\mathbf{E}^u) - \varrho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}] d\Omega - \int_{\Gamma_N} \hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \rightarrow MIN \quad (5.4)$$

herleiten. Aus der einmaligen Variation von $\Pi(\mathbf{u})$ und der anschließenden Anwendung des Gaußschen Integralsatzes entsteht das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (Gl. (2.20)). Das vermeintliche Optimierungsproblem, das nun im Falle von reibungsfreiem Kontakt gelöst werden muss, lässt sich damit folgendermaßen formulieren:

Bestimmung der Verschiebungen $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$), die folgende Bedingungen erfüllen:

- *geometrische Nebenbedingung auf $\Gamma_c^{(1)}$:*

$$g \geq 0$$

- *Minimum der potentiellen Energie in $\Omega^{(\alpha)}$:*

$$\Pi^{(\alpha)}(\mathbf{u}) \rightarrow MIN$$

Im Rahmen der Kontaktmechanik besteht die Schwierigkeit, dass die zu erfüllende Nebenbedingung in Form einer Ungleichung auftritt. Um die Nebenbedingung in eine Gleichheitsnebenbedingung umformen zu können, müssen mit Hilfe einer geeigneten *Aktiven-Mengen-Strategie* alle aktiven Nebenbedingungen herausgefiltert werden. Aus dem potentiellen Kontaktrand $\Gamma_c^{(1)}$ müssen all diejenigen Teile bekannt sein, die sich tatsächlich in Kontakt befinden. Sind alle aktiven Nebenbedingungen bekannt, kann das Problem in ein Optimierungsproblem mit Gleichheitsnebenbedingungen überführt werden:

Bestimmung der Verschiebungen $\mathbf{u}^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2$), die folgende Bedingungen erfüllen:

- *für alle aktiven Nebenbedingungen auf $\Gamma_c^{(1)}$:*

$$g = 0$$

- *Minimum der potentiellen Energie in $\Omega^{(\alpha)}$:*

$$\Pi^{(\alpha)}(\mathbf{u}) \rightarrow MIN$$

Das so entstandene Optimierungsproblem wird gelöst, indem die geometrischen Nebenbedingungen mit Hilfe eines Lagrange-Multiplikators λ_ν direkt in den ursprünglichen Energieausdruck eingebracht werden. Es entsteht ein modifiziertes Funktional

$$\Pi^{LM}(\mathbf{u}, \lambda_\nu) := \Pi^{(1)}(\mathbf{u}) + \Pi^{(2)}(\mathbf{u}) + \int_{\Gamma_c^{(1)}} \lambda_\nu g \, d\Gamma \rightarrow stat . \quad (5.5)$$

Durch die Anwendung der Multiplikatormethode ist aus dem ursprünglichen Minimierungsproblem ein Stationärproblem geworden. Um dies zu lösen muss die Variation von $\Pi^{LM}(\mathbf{u}, \lambda_\nu)$ nach den unbekannt Variablen \mathbf{u} und λ_ν gebildet werden:

$$\delta\Pi^{LM}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}, \lambda_\nu, \delta\lambda_\nu) = \underbrace{\delta\Pi^{(1)} + \delta\Pi^{(2)}}_{\delta\Pi^{int,ext}} + \underbrace{\int_{\Gamma_c^{(1)}} \lambda_\nu \delta g \, d\Gamma}_{\hat{=} \delta\Pi_c} + \underbrace{\int_{\Gamma_c^{(1)}} \delta\lambda_\nu g \, d\Gamma}_{Nebenbedingung} = 0 . \quad (5.6)$$

Ein Vergleich von Gleichung (5.6) mit den Gleichungen (5.1) und (5.2) zeigt, dass sich der zusätzlich eingeführte Lagrange-Multiplikator λ_ν physikalisch mit der Normalkontaktkraft t_ν identifizieren lässt. Mit dem letzten Term in Gleichung (5.6) wird die geometrische Nebenbedingung direkt mit eingebracht, wobei jedoch darauf zu achten ist, dass die zulässigen Variationen $\delta\lambda_\nu$ ebenfalls durch die Nebenbedingung $\delta\lambda_\nu \leq 0$ eingeschränkt sind. Mathematisch gesehen ist dies ein sogenanntes Sattelpunktproblem (Kikuchi und Oden (1988)), dessen Lösungspunkt einerseits ein Minimum von Π^{LM} in Bezug auf die Verschiebung \mathbf{u} und andererseits ein Maximum von Π^{LM} in Bezug auf den Lagrange-Multiplikator λ_ν darstellt.

Die Anwendung der Lagrange-Multiplikator-Methode erlaubt die exakte Erfüllung der geometrischen Randbedingungen. Als Nachteil muss dem gegenüber hingegenommen werden, dass die eingeführten Lagrange-Multiplikatoren als zusätzliche Unbekannte auftauchen und die Menge der aktiven Nebenbedingungen identifiziert werden muss. In der Konsequenz bedeutet dies für ein numerisches Diskretisierungsverfahren, dass sich die Anzahl der Unbekannten während der Berechnung ständig ändert. Da dies meist zu Lasten der Effektivität eines Berechnungsprogramms geht, wird die Lagrange-Multiplikator-Methode häufig mit der Penalty-Methode kombiniert (Kap. 5.2.3).

Anmerkung: Die Lagrange-Multiplikator-Methode wurde hier für den Sonderfall eines linear elastischen Werkstoffverhaltens und reibungsfreien Kontaktes, ausgehend vom Minimum der potentiellen Energie, hergeleitet. Soll nichtlineares Materialverhalten oder Reibung zwischen den Kontaktflächen berücksichtigt werden, ist es aufgrund der Pfadabhängigkeit nicht möglich von einem zugrundeliegenden Potential zu starten. Hierfür wird direkt die schwache Form des Anfangsrandwertproblems zu Grunde gelegt und die zu erfüllenden Nebenbedingungen im Sinne eines Galerkin-Verfahrens hinzuaddiert.

5.2.2 Die Penalty-Methode

Das wohl am häufigsten verwendete Verfahren zur Regularisierung der Kontakt-Nebenbedingungen ist die Penalty-Methode. Im Gegensatz zur Lagrange-Multiplikator-Methode wird unter Verwendung der Penalty-Methode die geometrische Nichtdurchdringungsbedingung des Kontaktes nicht mehr exakt erfüllt. Mit Hilfe eines sogenannten Penalty-Parameters ϵ_ν wird eine Verletzung der Inpenetrabilitätsbedingung für die aktiven Nebenbedingungen zugelassen, und dadurch ein direkter Zusammenhang zwischen einer nun zulässigen Durchdringung und der daraus resultierenden Kontaktkraft hergestellt. In Abbildung 5.1 ist dieser Zusammenhang graphisch dargestellt. Formal wird die Normalkontaktkraft durch die Beziehung

$$t_\nu = \begin{cases} 0 & \text{falls } g > 0 \quad (\text{kein Kontakt, inaktiv}) \\ \epsilon_\nu g & \text{falls } g \leq 0 \quad (\text{Kontakt bzw. Durchdringung, aktiv}) \end{cases} \quad (5.7)$$

ausgedrückt. Die Normalkontaktkraft im Ausdruck für die virtuelle Kontaktarbeit wird durch diese Beziehung ersetzt:

$$\delta \Pi_c^P(\mathbf{u}_c, \delta \mathbf{u}_c) = \int_{\Gamma_c^{(1)}} (\epsilon_\nu g) \delta g \, d\Gamma, \quad \epsilon_\nu > 0. \quad (5.8)$$

Es kann gezeigt werden, dass die Penalty-Methode für $\epsilon_\nu \rightarrow \infty$ die gleichen Ergebnisse liefert wie die Lagrange-Multiplikator-Methode (Luenberger (1984)). Dies ist auch anhand der graphischen Darstellung in Abbildung 5.1 nachvollziehbar, da die penalty-regularisierte Normalkontakt-Klaffungs-Beziehung mit wachsendem Penalty-Parameter gegen die exakten KKT-Bedingungen aus Abbildung 2.6 strebt.

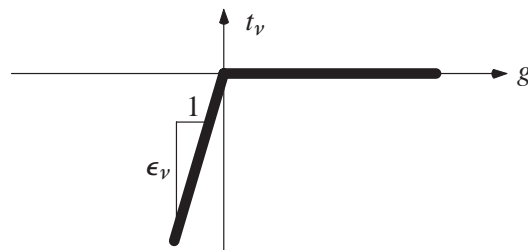


Abb. 5.1: Penalty-Regularisierung der KKT Bedingungen des Normalkontaktes

Ein großer Vorteil dieser Regularisierungsmethode ist die relativ leichte Anwendbarkeit und die Tatsache, dass keine zusätzlichen unbekanntenen Größen in das Problem einfließen. Als Nachteil ist jedoch die problemabhängige Wahl des Penalty-Parameters zu nennen. Wird der Penalty-Parameter sehr hoch gewählt, führt dies zwar nur zu sehr geringen Verletzungen der geometrischen Nichtdurchdringungsbedingung, gleichzeitig resultiert daraus jedoch eine schlechtere Konditionierung der resultierenden Kontaktsteifigkeitsmatrizen. In Wriggers (2002) wird anhand eines eindimensionalen Modellbeispiels die Netzabhängigkeit einer geeigneten Wahl des Penalty-Parameters gezeigt.

Anmerkung: Für die Regularisierung der tangentiellen Kontakt-Randbedingungen kann in ähnlicher Weise vorgegangen werden.

5.2.3 Augmented-Lagrange-Methode

Eine weitere Methode, um die Nichtdifferenzierbarkeit der Kontakt-Randbedingungen zu regularisieren, ist die Augmented-Lagrange-Methode. Wriggers et al. (1985) und Kikuchi und Oden (1988) haben sie im Rahmen von reibungsfreien Kontaktformulierungen eingesetzt. In jüngerer Vergangenheit wurde sie zur Simulation von reibungsbehaftetem Kontakt unter Berücksichtigung großer Verformungen unter anderem von Simo und Laursen (1992), Laursen und Simo (1993a), Özdemir (2003), Puso und Laursen (2004b) und Gee et al. (2005) angewandt. Die grundlegende Idee dieses Verfahrens besteht darin, die Penalty-Methode mit der Lagrange-Multiplikator-Methode zu kombinieren. Dazu wird zunächst ein Ansatz für die Normalkontaktkraft in Abhängigkeit eines Lagrange-Multiplikators und eines Penalty-Parameters formuliert:

$$t_\nu = \langle \lambda_\nu + \epsilon_\nu g \rangle . \quad (5.9)$$

Hierin ist $\langle \cdot \rangle$ die sogenannte Macauley-Klammer. Sie liefert für positive Operanden deren Wert und für negative Operanden Null. Die entscheidende Idee der Augmented-Lagrange-Methode ist, dass der Lagrange-Multiplikator λ_ν zunächst als bekannte Abschätzung des korrekten Lagrange-Multiplikators angenommen und durch ein iteratives Verfahren ermittelt wird. Die innerhalb eines Iterationsschrittes k zu lösende, schwache Form ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (5.9) zu

$$\delta \Pi^{aug}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \delta \Pi^{(1)} + \delta \Pi^{(2)} + \int_{\Gamma_c^{(1)}} \langle \lambda_\nu^{(k)} + \epsilon_\nu g \rangle \delta g \, d\Gamma = 0 , \quad (5.10)$$

wobei $\lambda_\nu^{(k)} \leq 0$ als unveränderliche Näherung gegeben ist. Damit kann Gleichung (5.10) direkt für die unbekanntenen Verschiebungen \mathbf{u} gelöst werden. Der exakte Lagrange-Multiplikator, der physikalisch die Normalkontaktkraft t_ν repräsentiert, ist durch Gleichung (5.9) gegeben, so dass sich daraus direkt die Formel zur Aktualisierung von $\lambda_\nu^{(k)}$ ergibt:

$$\lambda_\nu^{(k+1)} = \langle \lambda_\nu^{(k)} + \epsilon_\nu g^{(k)} \rangle . \quad (5.11)$$

Dieses iterative Verfahren zur Bestimmung der exakten Lagrange-Multiplikatoren ist in der Literatur als *Uzawa-Algorithmus* bekannt. Eine graphische Darstellung dieses Verfahrens ist in Abbildung 5.2 gegeben. Darin wird deutlich, dass die Inpenetrabilitätsbedingung bei Erreichen des korrekten Wertes für den Lagrange-Multiplikator exakt erfüllt wird. Damit vereint die Augmented-Lagrange-Methode die jeweiligen Vorteile der beiden zuvor beschriebenen Regularisierungsverfahren. Zum einen können die geometrischen Randbedingungen exakt erfüllt werden, zum anderen verändert sich die Anzahl der Unbekannten während des Lösungsprozesses nicht. Es muss jedoch in Kauf genommen werden, dass für die Lösung ein zusätzliches iteratives Verfahren notwendig ist.

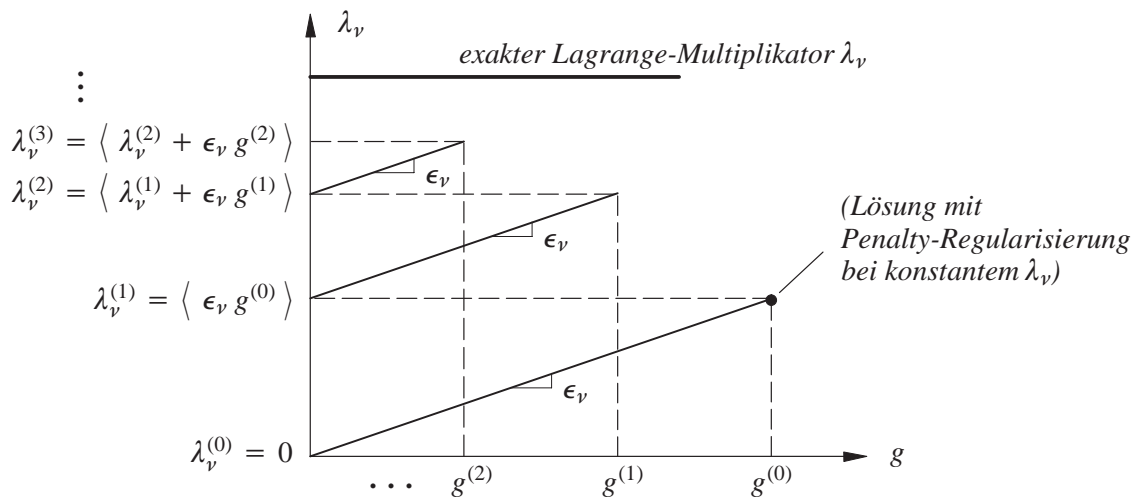


Abb. 5.2: Uzawa-Algorithmus

5.3 Diskretisierungsstrategien

Eines der wichtigsten und gleichzeitig auch schwierigsten Aufgaben im Zusammenhang mit der numerischen Beschreibung von Kontaktproblemen ist die räumliche Diskretisierung der gegenseitigen Einwirkungen auf die beteiligten Körper. Grundsätzlich erfordert die Wechselwirkung zweier, sich in Kontakt befindender Körper die Übertragung der Kontaktkräfte zwischen entsprechenden FE-Netzen, die in der Regel nicht konform sind. Die einzusetzenden Diskretisierungsstrategien sollten in der Lage sein, den sogenannten *Kontakt-Patchtest* zu bestehen. Dieser Test fordert, dass ein konstantes Spannungsfeld, entlang nicht konform vernetzter Kontaktflächen, exakt von einem Körper auf den anderen übertragen werden kann.

5.3.1 Knoten-Segment Kontaktelement

Für eine Diskretisierung des Kontaktes im Rahmen von großen Deformationen werden meist sogenannte Knoten-Segment (*node-to-segment* – NTS) Kontaktelemente eingesetzt. Die Hauptidee dieser Strategie ist, dass ein spezieller Knoten auf der Slave-Seite ein entsprechendes Master-Segment nicht durchdringen darf. In Abbildung 5.3 ist eine Kontaktgruppe unter Verwendung von trilinearen Ansatzfunktionen dargestellt. Die Klaffungsfunktion wird jeweils diskret an jedem Slave-Knoten x ausgewertet, so dass die Kontakt-Randbedingungen nur an diesen Punkten unter Verwendung einer geeigneten Regularisierungsstrategie eingehalten werden. Deshalb wird die NTS-Diskretisierung auch als Kollokationsmethode bezeichnet.

Obwohl diese Art der Diskretisierung sehr populär ist und auch in zahlreichen kommerziellen FE-Programmen implementiert ist, kann die Erfüllung des Patchtestes nicht garantiert werden (Papadopoulos und Taylor (1992) bzw. El-Abbasi und Bathe (2001)). Bei Verwendung Finiter Elemente niedriger Ordnung kann die wahre Geometrie in der Regel nur angenähert werden. Dadurch können entlang der Elementkanten Diskretisierungsknicke entstehen. Diese nicht glatte

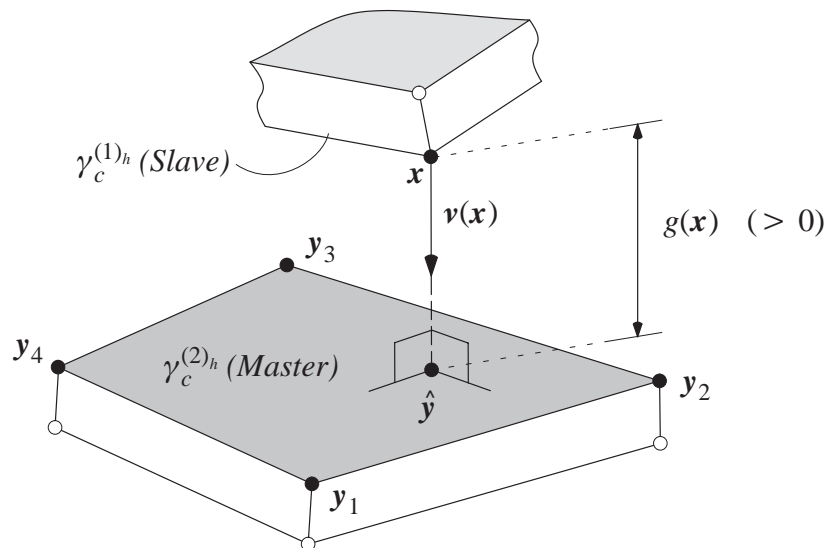


Abb. 5.3: NTS-Kontaktelement

Repräsentierung der wahren Geometrie kann bei der Anwendung einer NTS-Diskretisierung zu Problemen führen. Rutscht beispielsweise ein Slave-Knoten aufgrund von großen Verformungen von seinem ursprünglichen kontaktierenden Master-Segment ab, entstehen Sprünge in den resultierenden Kontaktkräften. Um dies zu umgehen, wurden verschiedene Verfahren zur Glättung der diskretisierten Kontaktflächen vorgeschlagen. In Padmanabhan und Laursen (2001) wird für eine zweidimensionale Kontaktformulierung unter Berücksichtigung von großen Deformationen und Reibung eine Glättungsmethode mit kubischen hermiteschen Interpolationsfunktionen entwickelt. Zur Glättung von beliebigen, unter Umständen adaptiv verfeinerten, zwei- und dreidimensionalen FE-Netzen beschreiben Stadler und Holzapfel (2004) vier geeignete Glättungsverfahren, basierend auf sogenannten „*subdivision*“ Methoden. Puso und Laurssen (2002) schlagen für die Glättung dreidimensional diskretisierter Geometrien den Einsatz von „*Gregory patches*“ vor.

5.3.2 Segment-Segment Diskretisierung

Zur Umgehung der zuvor beschriebenen Problematiken der klassischen NTS-Diskretisierung wurden auch sogenannte *Segment-Segment* (STS – segment-to-segment) Strategien entwickelt. Die ersten Ansätze gehen dabei auf die Arbeit von Simo et al. (1985) zurück. Hier werden für die Beschreibung geometrisch linearer, zweidimensionaler Probleme sogenannte Kontakt Segmente eingeführt. Als Regularisierungsstrategie wird die sogenannte „*Perturbed-Lagrange*“-Formulierung angewendet, die ähnlich wie die bereits vorgestellte Augmented-Lagrange-Methode auf der klassischen Lagrange-Multiplikator-Methode basiert. Im Gegensatz zur NTS-Diskretisierung werden hier die Lagrange-Multiplikatoren und die Klaffungsfunktion mit Hilfe geeigneter Ansätze innerhalb der entsprechenden Segmente interpoliert. Eine typische Aufteilung in Kontakt-Segmente ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

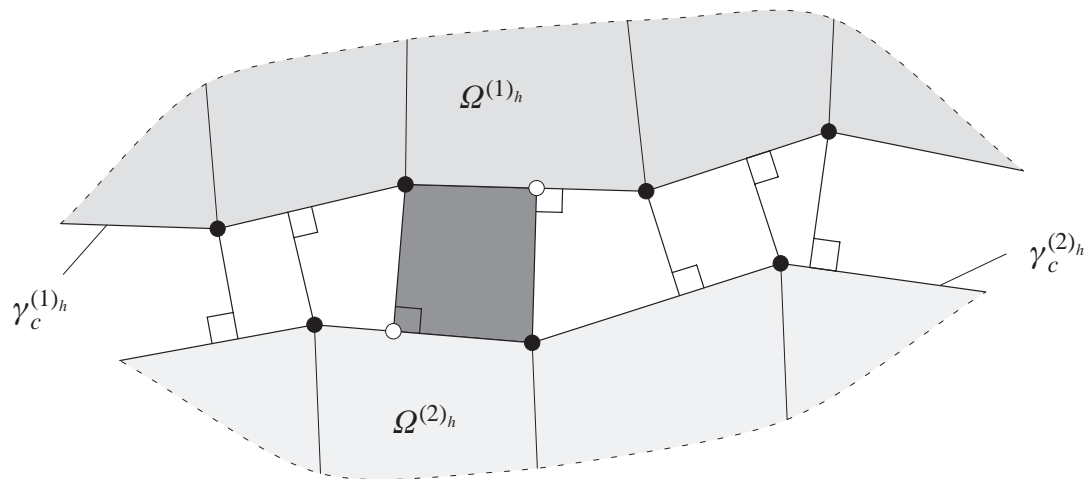


Abb. 5.4: Kontakt-Segmente für zweidimensionale Probleme

Ähnliche Segment-Segment Kontaktformulierungen finden sich in Papadopoulos und Taylor (1992) sowie in Zavarise und Wriggers (1998). Im Unterschied zu den hier erwähnten Formulierungen wurden in jüngster Vergangenheit verschiedene Verfahren entwickelt, die auf der sogenannten *Mortar-Methode* basieren. Hier werden ebenfalls Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren gemacht, allerdings sind diese Ansätze nicht auf ein jeweiliges Kontakt-Segment beschränkt.

5.4 Die Mortar-Methode

5.4.1 Allgemeines

Die Mortar-Element-Methode ist ein sehr leistungsfähiges Verfahren zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen, bei dem Teilprobleme miteinander gekoppelt werden, die entlang ihrer Grenzfläche nicht konform vernetzt sind. Die Ursprünge dieser Verfahren gehen auf eine Arbeit von Bernardi et al. (1990) zurück. Darin wurden zwei verschiedene Methoden zur Kopplung von Finiten Elementen mit spektralen Diskretisierungsmethoden zur Lösung der Poisson-Gleichung vorgestellt und analysiert. Zum Einen wurde die Kontinuität entlang des Kopplungsrandes durch eine lokale, punktweise Bedingung an die FE-Knoten formuliert, und zum Anderen wurden die Kontinuitätsanforderungen im Sinne einer integralen Bedingung ausgedrückt. Detaillierte mathematische Untersuchungen haben dabei gezeigt, dass die integrale Formulierung der Kontinuitätsbedingung bessere Konvergenzeigenschaften aufweist als die exakte Erfüllung der Kompatibilität an einzelnen diskreten Knoten.

Aufbauend auf diesen Erkenntnissen entwickelten Bernardi et al. (1993, 1994) das Grundgerüst der Mortar-Element-Methode. Der Grundgedanke der Mortar-Methode liegt im Wesentlichen in der integralen Formulierung der Kopplungsbedingungen entlang nicht konform vernetzter Teilgebietsgrenzen. Dazu werden in der Regel sogenannte Lagrange-Multiplikatoren einge-

führt, die physikalisch den Kraftübergang in der Grenzfläche darstellen. Die Ansatzfunktionen für die Approximation der Lagrange-Multiplikatoren werden dabei in der ursprünglichen Formulierung von dem angrenzenden FE-Netz übernommen.

Grundsätzlich haben sich in den vergangenen Jahren zwei Verfahren innerhalb der Mortar-Methode etabliert. Das eine mündet in eine nicht konforme Methode, indem der zulässige Lösungsraum so eingeschränkt wird, dass die Nebenbedingungen entlang des Kopplungsrandes a priori im integralen Sinne erfüllt sind. Das zweite stellt eine konforme Methode dar, die auf der Formulierung eines Sattelpunktproblems basiert und große Parallelen zur klassischen Lagrange-Multiplikator-Methode aufweist. Da für beide Versionen Approximationen für die Lagrange-Multiplikatoren eingeführt und die Nebenbedingungen durch eine schwache Form erfüllt werden, müssen gewisse Stabilitätsanforderungen, wie die *inf-sup* Bedingung eingehalten werden. Detaillierte theoretische Untersuchungen hierzu finden sich beispielsweise in Wohlmuth (2001), numerische Aspekte in El-Abbasi und Bathe (2001).

In Wohlmuth (2001) werden alternative Möglichkeiten für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren vorgestellt. Mit Hilfe sogenannter dualer Ansatzräume kann zum Einen die Lokalität der diskreten Basisfunktionen eingehalten, zum Anderen die Eliminierung der eingeführten Lagrange-Multiplikatoren durch eine statische Kondensation durchgeführt werden. Damit kann, ausgehend von einem Sattelpunktproblem, eine symmetrische, positiv definite Formulierung hergeleitet werden.

Nachfolgend wird eine Mortar-Formulierung im Rahmen der Gebietszerlegungsmethode vorgestellt, die auf dem Sattelpunktproblem basiert. Das Hauptaugenmerk wird dabei auf eine möglichst anschauliche Darstellung gelegt, weshalb ein zweidimensionales Problem betrachtet wird. Zusätzlich werden die konkreten Ansätze zur Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren angegeben.

5.4.2 Problemstellung

Für viele physikalische Fragestellungen ist es sinnvoll, das gesamte zu betrachtende Gebiet in kleinere Teilgebiete zu unterteilen und diese dann jeweils mit geeigneten numerischen Verfahren zu lösen. Dabei spielt für die Qualität der Gesamtlösung der Informationsaustausch entlang der Teilgebietsgrenzen eine entscheidende Rolle. Eine typische Unterteilung eines Gebietes in zwei Teilgebiete ist in Abbildung 5.5 dargestellt und zwar für ein kontinuierliches sowie ein diskretisiertes Problem. Die Mortar-Methode stellt ein geeignetes Werkzeug dar, um diskrete Teilgebiete entlang ihrer gemeinsamen, in der Regel nicht konform diskretisierten Gebietsränder sinnvoll miteinander zu koppeln. Dabei ist die Methode grundsätzlich so allgemein ausgelegt, dass Teilgebiete, die durch unterschiedliche numerische Diskretisierungsverfahren analysiert werden, miteinander gekoppelt werden können. Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich die Methode der Finiten Elemente als numerisches Näherungsverfahren eingesetzt, weshalb sich die weiteren Ausführungen darauf beschränken. Zunächst werden die einzuhaltenden Nebenbedingungen entlang des Kopplungsrandes für das kontinuierliche Problem definiert.

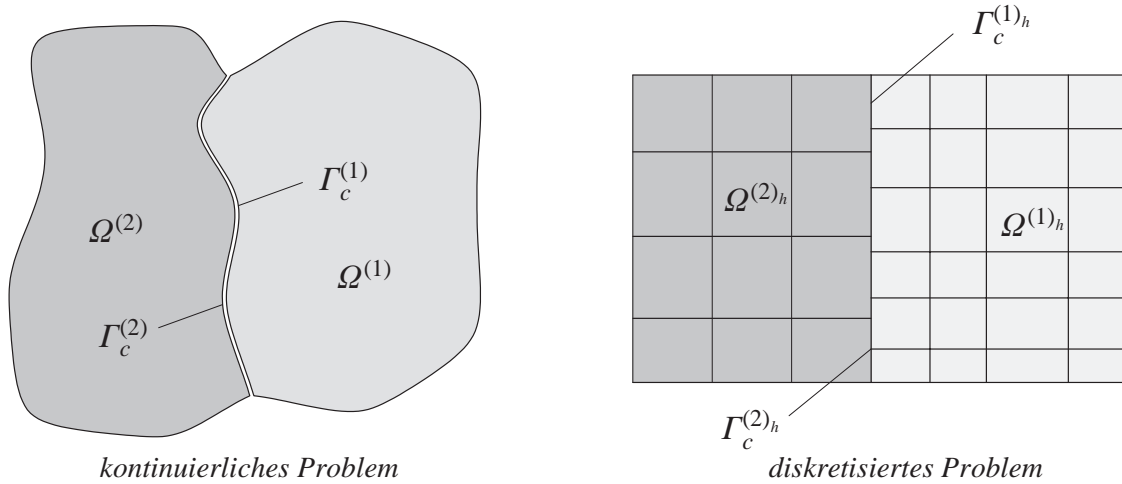


Abb. 5.5: Unterteilung eines Gebietes in zwei Teilgebiete

Entlang des Kopplungsrandes müssen sowohl eine geometrische, als auch eine Spannungs-Randbedingung erfüllt werden. Eine konstante Spannungsverteilung am Rand $\Gamma_c^{(1)}$ muss durch geeignete Kopplungsbedingungen exakt auf den Rand $\Gamma_c^{(2)}$ übertragen werden. Zusätzlich dürfen sich die beiden Teilgebiete nicht relativ zueinander verschieben und auch nicht gegenseitig durchdringen. Analog zu der in der Kontaktmechanik üblichen Unterscheidung zwischen einer Master- und einer Slave-Seite, werden die angrenzenden Ränder in der Mortar-Methode in eine *Mortar*- und eine *Non-Mortar*-Seite unterschieden. Methodisch kann dabei die Mortar-Seite mit der Master-Seite und die Non-Mortar-Seite mit der Slave-Seite identifiziert werden. Deshalb wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausschließlich von der bereits bekannten Unterscheidung in Master- ($\hat{=} \Gamma_c^{(2)}$) und Slave-Seite ($\hat{=} \Gamma_c^{(1)}$) Gebrauch gemacht. Ähnlich der skalaren Klaffungsfunktion g wird eine vektorwertige Sprungfunktion

$$[\mathbf{u}] := \mathbf{u}|_{\Gamma_c^{(2)}} - \mathbf{u}|_{\Gamma_c^{(1)}} \quad (5.12)$$

eingeführt. Die geometrische Nebenbedingung in der Kopplungsfläche lautet damit:

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0} . \quad (5.13)$$

Zur Vorstellung einer auf der Sattelpunktformulierung basierenden Mortar-Methode wird die Nebenbedingung aus Gleichung (5.13) entsprechend der klassischen Lagrange-Multiplikator-Methode (Kap. 5.2.1) eingebracht. Die daraus resultierende schwache Form ergibt sich dann zu

$$\delta \Pi^{LM}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, \delta \boldsymbol{\lambda}) = \delta \Pi^{(1)} + \delta \Pi^{(2)} + \int_{\Gamma_c^{(1)}} \boldsymbol{\lambda} [\delta \mathbf{u}] d\Gamma + \int_{\Gamma_c^{(1)}} \delta \boldsymbol{\lambda} [\mathbf{u}] d\Gamma = 0 . \quad (5.14)$$

Darin repräsentieren die Lagrange-Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}$ den Spannungsvektor im Kopplungsrand. Da Gleichung (5.14) für voneinander unabhängige Variationen $\delta \mathbf{u}$ und $\delta \boldsymbol{\lambda}$ erfüllt sein muss, lässt sie sich in zwei Teilgleichungen aufspalten:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\sum_{\alpha=1}^2 \delta \Pi^{int(\alpha)}}_{a(u, \delta u)} + \underbrace{\int_{\Gamma_c^{(1)}} \lambda [\delta u] d\Gamma}_{b(\delta u, \lambda)} &= \underbrace{\sum_{\alpha=1}^2 \delta \Pi^{ext(\alpha)}}_{f(\delta u)}, \\
\underbrace{\int_{\Gamma_c^{(1)}} \delta \lambda [u] d\Gamma}_{b(u, \delta \lambda)} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

In der mathematischen Literatur wird das Sattelpunktproblem aus Gleichung (5.15) meist in folgender kompakter Form dargestellt:

$$\begin{aligned}
a(u, \delta u) + b(\delta u, \lambda) &= f(\delta u), \\
b(u, \delta \lambda) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Darin stellt die Bilinearform $a(u, \delta u)$ bereits die Summe der virtuellen inneren Arbeiten und die Linearform $f(\delta u)$ die Summe der virtuellen äußeren Arbeiten der beiden Teilgebiete dar. Über die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ wird schließlich die Nebenbedingung in die schwache Form mit eingebracht. Zur Lösung dieses Sattelpunktproblems müssen im Rahmen der Finite-Element-Methode Ansätze für die Verschiebungen \mathbf{u} und für die Lagrange-Multiplikatoren λ gemacht werden, die gewissen Stabilitätskriterien genügen müssen. Für die im kommenden Abschnitt vorgestellten Ansätze wurde dies für den Fall der linearen Elastizität mit kleinen Verformungen bewiesen (Wohlmuth (2001)).

5.4.3 Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren

Die Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren werden auf der Slave-Seite gemacht. In der Standard-Mortar-Formulierung werden diese von dem zugrunde liegenden FE-Netz abgeleitet. Werden beispielsweise zweidimensionale Scheibenelemente mit bilinearen Ansätzen eingesetzt, ergeben sich für die Lagrange-Multiplikatoren die bekannten hutförmigen linearen Ansätze ϕ_i^S (Abb. 5.6a). In Wohlmuth (2001) werden alternativ duale Ansatzfunktionen ϕ_i^D für die Lagrange-Multiplikatoren vorgeschlagen (Abb. 5.6b). Diese erfüllen die sogenannte Biorthogonalitätsbedingung

$$\int_{\Gamma_c^{(1)h}} N_i^S \phi_j^D d\Gamma = \delta_{ij} \int_{\Gamma_c^{(1)h}} N_i^S d\Gamma. \tag{5.17}$$

Darin ist δ_{ij} das Kronecker-Delta

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \tag{5.18}$$

und N_i^S sind die Ansatzfunktionen für die Verschiebungen auf dem Slave-Rand.

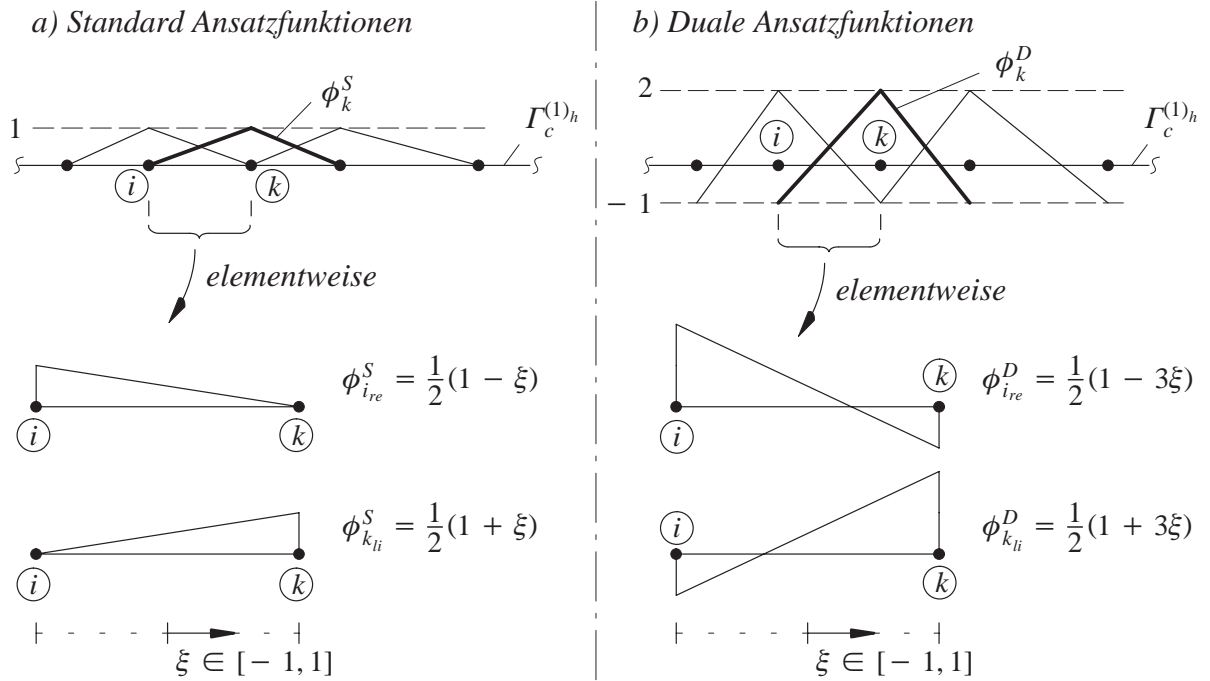


Abb. 5.6: Lineare Ansatzfunktionen für die Lagrange-Multiplikatoren

Die Grundidee der Mortar-Methode ist die schwache Erfüllung der Stetigkeitsbedingung entlang des diskretisierten Kopplungsrandes. Diese lautet:

$$\int_{\Gamma_c^{(1)h}} \delta \lambda^h [\mathbf{u}^h] d\Gamma = \int_{\Gamma_c^{(1)h}} \delta \lambda^h (\mathbf{u}^h|_{\Gamma_c^{(2)}} - \mathbf{u}^h|_{\Gamma_c^{(1)}}) d\Gamma = 0 . \quad (5.19)$$

Zur Auswertung dieses Integrals müssen sowohl die Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren als auch die Ansätze für die Verschiebungen auf dem Kopplungsrand

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_c^{(1)}} \approx \mathbf{u}^h|_{\Gamma_c^{(1)h}} = N_i^S \mathbf{d}_i^S , \quad i = 1, \dots, n_c^S , \quad (5.20)$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_c^{(2)}} \approx \mathbf{u}^h|_{\Gamma_c^{(2)h}} = N_i^M \mathbf{d}_i^M , \quad i = 1, \dots, n_c^M , \quad (5.21)$$

$$\lambda \approx \lambda^h = \phi_i z_i , \quad i = 1, \dots, n_c^S \quad (5.22)$$

eingesetzt werden. Darin bezeichnen n_c^S bzw. n_c^M die Anzahl der FE-Knoten auf dem Slave- bzw. Master-Rand, $N_i^{S,M}$ sind die aus dem FE-Netz resultierenden Ansatzfunktionen für die Verschiebungen entlang des Kopplungsrandes auf der Slave- und Master-Seite. Diese sind eine Dimension niedriger als die Ansätze für die Finiten Elemente im Gebiet. Wird beispielsweise ein dreidimensionales Gebiet mit trilinearen Finiten Elementen diskretisiert, so verbleiben für die Approximation der Kontaktflächen noch bilineare Ansätze. Schließlich werden in den Vektoren \mathbf{d}^S und \mathbf{d}^M die diskreten Knotenverschiebungen auf der Slave- und Master-Seite zusammengefasst, und \mathbf{z} ist der Vektor der diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren. Die Ansätze für die variierten Größen werden im Sinne eines Bubnov-Galerkin-Verfahrens analog gewählt. Damit ergibt sich die voll diskretisierte, integrale Kontinuitätsbedingung zu:

$$\delta z_i^T \int_{\Gamma_c^{(1)h}} \phi_i N_j^S d\Gamma \mathbf{d}_j^S - \delta z_i^T \int_{\Gamma_c^{(1)h}} \phi_i N_k^M d\Gamma \mathbf{d}_k^M = 0 . \quad (5.23)$$

Unter Verwendung der zweidimensionalen Einheitsmatrix \mathbf{I}_2 werden die beiden Kopplungsmatrizen $\mathbf{M}_S \in \mathbb{R}^{2n_c^S \times 2n_c^S}$ und $\mathbf{M}_M \in \mathbb{R}^{2n_c^S \times 2n_c^M}$ definiert. Deren Blockeinträge sind mit

$$\mathbf{M}_S[i, j] = \int_{\Gamma_c^{(1)h}} \phi_i N_j^S d\Gamma \mathbf{I}_2 , \quad i, j = 1, \dots, n_c^S \quad (5.24)$$

und

$$\mathbf{M}_M[i, k] = \int_{\Gamma_c^{(1)h}} \phi_i N_k^M d\Gamma \mathbf{I}_2 , \quad i = 1, \dots, n_c^S ; k = 1, \dots, n_c^M \quad (5.25)$$

festgelegt. Damit ergibt sich Gleichung (5.23) in matrizieller Schreibweise:

$$\delta z^T \mathbf{M}_S \mathbf{d}^S - \delta z^T \mathbf{M}_M \mathbf{d}^M = 0 . \quad (5.26)$$

Da die beiden Kopplungsmatrizen \mathbf{M}_S und \mathbf{M}_M aufgrund ihrer Struktur sehr stark an Massenmatrizen erinnern, werden sie in der mathematischen Literatur häufig auch als solche bezeichnet. Dabei ist die Matrix \mathbf{M}_S quadratisch und symmetrisch und reduziert sich für die Wahl von dualen Ansatzfunktionen für die Lagrange-Multiplikatoren auf eine Diagonalmatrix (Gl. (5.17)). Die Kopplungsmatrix \mathbf{M}_M ist dagegen rechteckig.

Werden die Ansätze für die Verschiebungen und die Lagrange-Multiplikatoren in Gleichung (5.15)₁ eingesetzt, resultiert folgender Term:

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} + (\delta \mathbf{d}^S)^T \mathbf{M}_S \mathbf{z} - (\delta \mathbf{d}^M)^T \mathbf{M}_M^T \mathbf{z} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{ext} . \quad (5.27)$$

Darin ist \mathbf{K} die Steifigkeitsmatrix, bezogen auf alle diskreten Verschiebungsfreiheitsgrade der beiden Teilgebiete, und \mathbf{f}^{ext} ist der gesamte Lastvektor. Nach Unterteilung aller diskreten FE-Knoten in drei Teilbereiche umfasst der Teilbereich S all diejenigen Knoten, die sich auf dem Slave-Rand befinden, der Teilbereich M all diejenigen auf dem Master-Rand und der Teilbereich N alle übrigen Knoten (Abb. 5.7). Da die Gleichungen (5.26) und (5.27) für beliebige Variationen $\delta \mathbf{d}$ und $\delta \mathbf{z}$ erfüllt sein müssen, lassen sich diese beiden Gleichungen mit Hilfe der soeben eingeführten Aufteilung der FE-Knoten in einzelne Teilbereiche, kompakt in matrizieller Schreibweise zusammenfassen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NM} & \mathbf{K}_{NS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{MN} & \mathbf{K}_{MM} & \mathbf{K}_{MS} & -\mathbf{M}_M^T \\ \mathbf{K}_{SN} & \mathbf{K}_{SM} & \mathbf{K}_{SS} & \mathbf{M}_S^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}_M & \mathbf{M}_S & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^N \\ \mathbf{d}^M \\ \mathbf{d}^S \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{ext} \\ \mathbf{f}_M^{ext} \\ \mathbf{f}_S^{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (5.28)$$

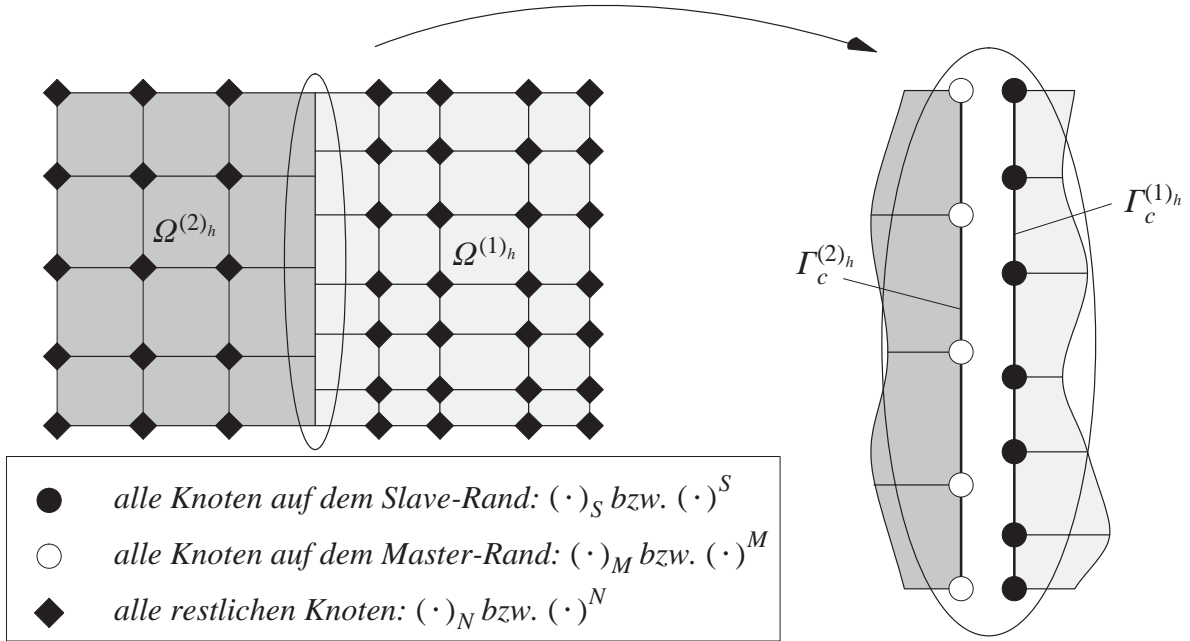


Abb. 5.7: Aufteilen der FE-Knoten

Das resultierende Gleichungssystem enthält die für klassische Lagrange-Multiplikator-Methoden typische $\mathbf{0}$ auf der Hauptdiagonalen und muss sowohl für die diskreten Verschiebungen \mathbf{d} als auch für die diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren \mathbf{z} gelöst werden. Werden die bereits erwähnten dualen Ansätze für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren gewählt, reduziert sich die Kopplungsmatrix \mathbf{M}_S auf eine Diagonalmatrix, die im Weiteren mit \mathbf{D}_S bezeichnet wird. Damit lassen sich die diskreten Knotenwerte \mathbf{z} mittels einer statischen Kondensation aus dem ursprünglichen Gleichungssystem eliminieren, indem die dritte Zeile aus dem Gleichungssystem (5.28) nach \mathbf{z} aufgelöst wird:

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}_S^{-1} \left[\mathbf{f}_S^{ext} - \mathbf{K}_{SN} \mathbf{d}^N - \mathbf{K}_{SM} \mathbf{d}^M - \mathbf{K}_{SS} \mathbf{d}^S \right]. \quad (5.29)$$

Die hierfür notwendige Inversion der Kopplungsmatrix auf der Slave-Seite wird aufgrund der Diagonalität von $\mathbf{M}_S \rightarrow \mathbf{D}_S$ trivial. Das Einsetzen von Gleichung (5.29) in (5.28) führt nach einigen Umformungen (Anhang B.1) in das symmetrische, positiv definite Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & & & \\ \mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} & \mathbf{K}_{NM} + \mathbf{K}_{NS} \hat{\mathbf{M}} & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{MM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} + \mathbf{K}_{MS} \hat{\mathbf{M}} + 2\hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} & -\hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} & \\ & -\mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} & \mathbf{K}_{SS} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^N \\ \mathbf{d}^M \\ \mathbf{d}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{ext} \\ \mathbf{f}_M^{ext} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S^{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.30)$$

das nun ausschließlich für die unbekanntenen Knotenverschiebungen \mathbf{d} gelöst werden muss. Hierin wurde die Abkürzung $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{M}_M$ eingeführt.

5.4.4 Diskussion und Anwendung für Kontaktprobleme

Im vorausgegangenen Abschnitt wurde eine Mortar-Methode im Rahmen der Gebietszerlegung unter der Annahme von linearer Elastizität und kleinen Verformungen vorgestellt. Da die hier beschriebene Variante, ausgehend von einem Sattelpunktproblem hergeleitet wurde, kann ein direkter Zusammenhang mit einer klassischen Lagrange-Multiplikator-Methode hergestellt werden. Das einzige, aber zugleich entscheidende Merkmal der Mortar-Methode ist die schwache integrale Erfüllung der Stetigkeitsbedingung am Kopplungsrand. Dies wird automatisch erreicht, wenn die Lagrange-Multiplikatoren über den ganzen Kopplungsrand hinweg mit Hilfe von geeigneten Ansatzfunktionen approximiert werden.

Diese Grundidee der Mortar-Methode wird in jüngster Vergangenheit verstärkt für die Entwicklung von robusteren Kontaktformulierungen herangezogen. Yang et al. (2005) entwickelten eine Mortar-Kontaktformulierung für die Analyse von zweidimensionalen Problemen. Dazu werden klassische lineare Ansatzfunktionen für die Interpolation der eingeführten Lagrange-Multiplikatoren verwendet. Für die Regularisierung des numerischen Lösungsverfahrens wird eine Penalty-Methode eingesetzt. In Puso und Laursen (2004a) wird eine dreidimensionale Mortar-Formulierung für reibungsfreien Kontakt vorgestellt und später auf Probleme mit Reibung erweitert (Puso und Laursen (2000b)). Die Kontakt-Nebenbedingungen werden in der reibungsfreien Variante wiederum mit einem Penalty-Verfahren regularisiert, wohingegen in der Formulierung für reibungsbehafteten Kontakt eine Augmented-Lagrange-Regularisierung eingesetzt wird. In all den bislang zitierten Arbeiten wird eine der beiden Kontakttränder als Mortar-Seite gewählt, um hierauf die Kontaktbedingungen zu beziehen. Demgegenüber stehen Kontaktformulierungen, die für die Projektion der Übergangsbedingungen eine zusätzliche Zwischenfläche einführen (McDevitt und Laursen (2000), Rebel et al. (2002)).

Die genannten mortar-basierten Kontaktformulierungen bestehen zwar den Kontakt-Patchtest, benötigen aber nach wie vor eine entsprechende Regularisierungsstrategie, um die Kontakt-Randbedingungen zu erfüllen. Wird die Penalty-Methode eingesetzt, ergibt sich durch den benutzerdefinierten Penalty-Parameter eine Verletzung der geometrischen Nichtdurchdringungsbedingung. Eine geeignete Größe des Penalty-Parameters wird neben der Problemstellung auch von der verwendeten Diskretisierung beeinflusst, weshalb eine angemessene Wahl dieser Kenngröße meist problematisch ist. Der Einsatz einer Lagrange-Multiplikator-Methode ermöglicht zwar die exakte Erfüllung der Inpenetrabilitätsbedingung, verändert aber durch die zusätzlichen Unbekannten in Form der diskreten Werte der Lagrange-Multiplikatoren ständig die Größe des resultierenden Gleichungssystems.

Um einerseits der Problematik einer diskontinuierlichen Diskretisierung des Kontaktrandes zu begegnen und andererseits den Einsatz von Regularisierungsstrategien zu vermeiden, wird in dieser Arbeit eine Mortar-Kontaktformulierung eingesetzt, die auf dualen Ansatzräumen für die Lagrange-Multiplikatoren basiert. Der Einsatz dualer Ansatzräume im Rahmen von Gebietszerlegungsstrategien mit der Mortar-Element-Methode geht auf die Arbeiten von Wohlmuth (2000, 2001) zurück. In Hüeber und Wohlmuth (2005) werden sie für die Entwicklung einer mortar-ba-

sierten Kontaktformulierung für kleine Deformationen angewandt. Werden diese Ansätze mit einer geeigneten Aktiven-Mengen-Strategie verknüpft, entsteht ein algebraisches Gleichungssystem, das die Elimination der diskret eingeführten Lagrange-Multiplikatoren erlaubt. Diese können in einem Nachlaufprozess über die berechneten Verschiebungen variationell konsistent bestimmt werden.

5.5 Zusammenfassung

Anhand des reibungsfreien Kontaktproblems wurden zunächst verschiedene Verfahren zur effizienten Berücksichtigung von Ungleichheits-Nebenbedingungen vorgestellt. Die klassische Lagrange-Multiplikator-Methode erlaubt einerseits zwar die exakte Erfüllung der Inpenetrabilitätsbedingung, führt aber dazu, dass sich die Größe des zu lösenden Gleichungssystems durch die Veränderung der aktiven Kontaktfläche ständig ändert. Demgegenüber zeichnet sich die Penalty-Methode dadurch aus, dass sie einerseits sehr leicht zu implementieren ist und andererseits keine zusätzlichen Unbekannten in das Problem einbringt. Als Nachteil ist jedoch die Verletzung der geometrischen Nichtdurchdringungsbedingung zu nennen, die durch einen vom Benutzer zu wählenden Penalty-Parameter abhängt, dessen Wahl in der Regel problemabhängig ist.

Die weit verbreiteten NTS-Kontaktdiskretisierungen können die Erfüllung des Kontakt-Patchtestes nicht garantieren. Außerdem können durch die unstetige Diskretisierung der eigentlichen Kontaktflächen, falls ein Slave-Knoten von einem Master-Segment rutscht, Sprünge in den Kontaktkräften entstehen. Um diese Probleme lösen zu können, werden zum einen verschiedene Methoden zur Glättung der diskretisierten Kontaktflächen vorgeschlagen, zum anderen werden verstärkt STS-Kontaktdiskretisierungen entwickelt, die meist auf der Mortar-Methode basieren. Deren Grundidee ist es, die starken Kontakt-Randbedingungen in der Kontaktfläche durch eine schwache, integrale Forderung zu ersetzen. Dabei werden Lagrange-Multiplikatoren eingeführt, die physikalisch den Kontaktspannungen entsprechen. Sie werden mit geeigneten Ansatzfunktionen über den ganzen Kontaktrand hinweg approximiert. Die meisten der bislang vorgeschlagenen, mortar-basierten Kontaktformulierungen benutzen dabei die klassischen Ansätze für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren, und kombinieren diese Herangehensweise mit der Penalty-Methode.

Der Einsatz von dualen Ansatzräumen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren ermöglicht die schwache Erfüllung der Kontakt-Randbedingungen, ohne dass sich die Größe des resultierenden Gleichungssystems ändert, und ohne dass ein benutzerdefinierter Parameter in die Formulierung einfließt. Deshalb wird in dieser Arbeit die von Hüeber und Wohlmuth (2005) vorgeschlagene, zweidimensionale Kontaktformulierung für statische Probleme mit kleinen Deformationen als Grundlage herangezogen. Sie wird im Weiteren für die Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen verallgemeinert und weiterentwickelt.

6 Räumliche Diskretisierung des Kontaktes

Das nachfolgende Kapitel widmet sich dem ersten Teil der in dieser Arbeit weiterentwickelten Kontaktformulierung: Der räumlichen Diskretisierung der virtuellen Kontaktarbeit. Dies wird zunächst anhand des einfacheren Kontaktproblems eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis detailliert diskutiert, bevor anschließend der allgemeine Fall eines Kontaktes zweier deformierbarer Körper betrachtet wird. Als Ergebnis der räumlichen Diskretisierung und deren Einbettung in ein implizites Zeitintegrationsverfahren entsteht jeweils ein inkrementelles effektives Strukturgleichungssystem, für dessen Lösung noch die entsprechenden Kontakt-Randbedingungen berücksichtigt werden müssen. Die Einarbeitung dieser Nebenbedingungen erfolgt ausführlich in Kapitel 7. Zusätzlich werden die zur Interpolation der eingeführten Lagrange-Multiplikatoren verwendeten diskreten dualen Ansatzfunktionen angegeben und die notwendigen numerischen Integrationen zur Bestimmung der auftretenden Kopplungsmatrizen erläutert.

6.1 Kontakt eines deformierbaren Körpers mit starrem Hindernis

Zunächst soll der Kontakt eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis betrachtet werden. Die detaillierte Analyse dieses speziellen Kontaktproblems hat zum einen den Vorteil, dass einige Ausdrücke deutlich vereinfacht werden, und zum anderen lässt sich das allgemeine Kontaktproblem zweier deformierbarer Körper (Kap. 6.2) durch eine geeignete Basistransformation auf die algebraische Form eines Ein-Körper-Kontaktproblems reduzieren.

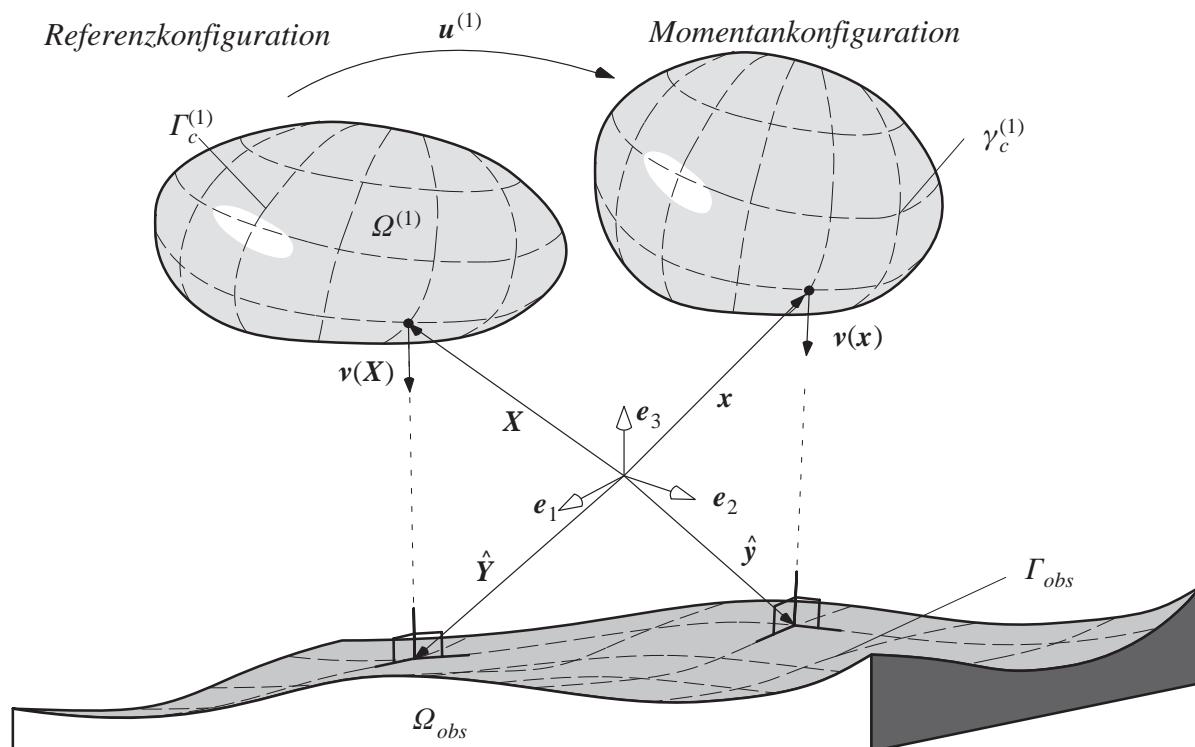


Abb. 6.1: Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit starrem Hindernis

In Abbildung 6.1 ist das Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis schematisch dargestellt. Mit Hilfe der orthogonalen Projektion (Kap. 2.2.2, Gl. (2.27)) wird zu einem Punkt $\mathbf{x} \in \gamma_c^{(1)}$ der Slave-Seite ein zugehöriger Projektionspunkt $\hat{\mathbf{y}} \in \Gamma_{obs}$ auf der Oberfläche des starren Hindernisses definiert und somit gleichzeitig die Richtung der normierten, nach außen gerichteten Normale $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ auf der Slave-Seite festgelegt. Die skalarwertige Klaffungsfunktion ist, wie bereits in Gleichung (2.28) angegeben, durch

$$g = g(\mathbf{X}, t) = - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (6.1)$$

definiert.

6.1.1 Schwache Form der Kontaktarbeit

Für den Fall, dass ein deformierbarer Körper mit einem starren Hindernis in Kontakt kommt, vereinfacht sich die virtuelle Kontaktarbeit aus Gleichung (2.40) zu

$$\delta \Pi_c(\mathbf{u}_c, \delta \mathbf{u}_c) = - \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mathbf{t}_c^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \delta \mathbf{u}_c^{(1)}(\mathbf{X}) \, d\Gamma \quad (6.2)$$

In der vorliegenden Arbeit wird die virtuelle Kontaktarbeit in der aktuellen Konfiguration ausgewertet, ebenso wie in verschiedenen neueren mortar-basierten Kontaktformulierungen auch (Fischer und Wriggers (2005), Yang et al. (2005), Puso und Laursen (2004a, 2004b)). Dies hat den Vorteil, dass die auftretenden Kontaktkräfte direkt physikalisch interpretiert werden können und teilweise umständliche *pull back* Operationen vermieden werden können. In der Momentankonfiguration ist die virtuelle Kontaktarbeit mit

$$\delta \Pi_c(\mathbf{u}_c, \delta \mathbf{u}_c) = - \int_{\gamma_c^{(1)}} \bar{\mathbf{t}}_c^{(1)} \cdot \delta \mathbf{u}_c^{(1)} \, d\gamma \quad (6.3)$$

gegeben. Darin ist $\bar{\mathbf{t}}_c^{(1)}$ der zu den Cauchy-Spannungen $\boldsymbol{\sigma}^{(1)}$ zugehörige Kontakt-Spannungsvektor auf dem deformierten Kontaktrand der Slave-Seite, der mit

$$\bar{\mathbf{t}}_c^{(1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n}^{(1)} \quad (6.4)$$

gegeben ist. Hierin ist $\mathbf{n}^{(1)}$ die nach außen gerichtete, normierte Normale auf dem Slave-Rand in der aktuellen Konfiguration. Der im vorausgegangenen Kapitel vorgestellten Mortar-Methode folgend wird ein Lagrange-Multiplikator λ eingeführt, der den negativen Spannungsvektor $\bar{\mathbf{t}}_c^{(1)}$ auf dem Slave-Rand repräsentiert ($\lambda = - \bar{\mathbf{t}}_c^{(1)}$). So werden die Lagrange-Multiplikatoren als bekannte äußere Flächenbelastung auf dem Slave-Rand interpretiert, die den deformierbaren Körper in den gleichen Verformungszustand versetzen soll, der beim Kontakt mit einem starren Hindernis entsteht (Abb. 6.2). Damit wird aus (6.3)

$$\delta \Pi_c = \int_{\gamma_c^{(1)}} \lambda \cdot \delta \mathbf{u}_c^{(1)} \, d\gamma \quad (6.5)$$

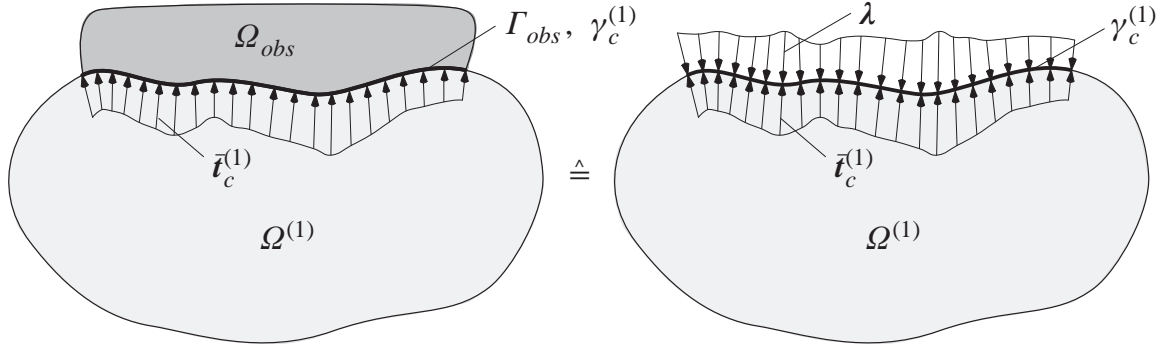


Abb. 6.2: Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit starrem Hindernis

6.1.2 Diskretisierung der Kontaktarbeit

Der eingeführte Lagrange-Multiplikator wird entlang des Slave-Randes mit Hilfe von diskreten dualen Ansatzfunktionen ϕ_i^D diskretisiert:

$$\lambda \approx \lambda^h = \phi_i^D z_i, \quad i = 1, \dots, n_c^S. \quad (6.6)$$

Für die Interpolation der Verschiebungen auf dem Kontaktrand werden die FE-Ansätze im Gebiet auf den entsprechenden Slave-Rand projiziert. Bilineare Ansätze in einem zweidimensionalen Gebiet reduzieren sich zu linearen Ansätzen auf dem eindimensionalen Kontaktrand. Analog hierzu resultieren bilineare Ansätze für die Verschiebungen auf der Kontaktfläche, wenn das dreidimensionale Gebiet mit trilinearen Finiten Elementen diskretisiert wurde. Die Interpolationsfunktionen für die Verschiebungen auf dem Slave-Rand werden nachfolgend mit N_i^S bezeichnet, womit sich die diskretisierte schwache Form der Kontaktarbeit zu

$$\delta \Pi_c \approx \delta \Pi_c^h = (\delta \mathbf{d}^S)^T \int_{\gamma_c^{(1)h}} N_i^S \phi_j^D d\gamma z_j \quad (6.7)$$

ergibt. Da die dualen Ansatzfunktionen für die Lagrange-Multiplikatoren die Biorthogonalitätsbedingung (Gl. (5.17)) mit den resultierenden Interpolationsfunktionen für die Verschiebungen auf dem Slave-Rand erfüllen, kann dieser Ausdruck erheblich vereinfacht werden. Es wird die Diagonalmatrix \mathbf{D}_S definiert, deren Blockeinträge mit

$$\mathbf{D}_S[i, i] := \int_{\gamma_c^{(1)h}} N_i^S d\gamma \mathbf{I}_d, \quad i = 1, \dots, n_c^S; \quad d = \{2, 3\} \quad (6.8)$$

gegeben sind. Darin ist \mathbf{I}_d die zwei- bzw. dreidimensionale Einheitsmatrix, je nachdem, ob zwei- oder dreidimensionale Probleme betrachtet werden sollen. Somit lässt sich Gleichung (6.7) in kompakter Form darstellen:

$$\delta \Pi_c^h = (\delta \mathbf{d}^S)^T \mathbf{D}_S \mathbf{z}. \quad (6.9)$$

Hierin wurden in den Vektoren \mathbf{z} bzw. $\delta \mathbf{d}^S$ alle diskreten Knotenwerte des Lagrange-Multiplikators bzw. der virtuellen Verschiebungen auf dem Slave-Rand zusammengefasst.

6.1.3 Semidiskrete Form des Randwertproblems

Der semidiskreten Form der Bewegungsgleichung für elastodynamische Probleme ohne Kontakt (Kap. 2.3.1, Gl. (2.47)) wird nun der entsprechende Vektor der Kontaktkräfte \mathbf{f}^c , der aus der Diskretisierung der virtuellen Arbeit des Kontaktes (Gl. (6.9)) resultiert, hinzuaddiert. Da die Kontaktkräfte nur auf Knotenfreiheitsgrade wirken, die auf dem Slave-Rand liegen, wird der Vektor der Kontaktkräfte \mathbf{f}^c , der sich auf alle Freiheitsgrade des diskretisierten Problems bezieht, folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{f}_i^c = \begin{cases} \mathbf{D}_S[i, i] \mathbf{z}_i & \text{falls } i \in S, \\ \mathbf{0} & \text{falls } i \notin S. \end{cases} \quad (6.10)$$

Hierin werden im Teilbereich S all diejenigen Knoten zusammengefasst, die auf dem Slave-Rand liegen (Abb. 5.7). Alle anderen Knoten werden in dem Teilbereich N gruppiert. Wird der Vektor der unbekannt Knotenverschiebungen $\mathbf{d} = (\mathbf{d}^N, \mathbf{d}^S)^T$ entsprechend der eingeführten Unterteilung in die beiden Teilbereiche S und N sortiert, lässt sich der Vektor der Kontaktkräfte in matrizieller Form schreiben:

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{B}^c \mathbf{z}. \quad (6.11)$$

Dazu wurde die rechteckige Matrix $\mathbf{B}^c = (\mathbf{0}, \mathbf{D}_S)^T \in \mathbb{R}^{d n_d \times d n_c^S}$ eingeführt. Mit ihr lässt sich die semidiskrete Form des Randwertproblems kompakt schreiben:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) + \mathbf{f}^c = \mathbf{f}^{ext}. \quad (6.12)$$

6.1.4 Effektives, inkrementelles Strukturgleichungssystem

Um das semidiskrete Randwertproblem aus Gleichung (6.12) zeitlich zu diskretisieren, wird eines der beiden in Kapitel 4 vorgestellten Zeitintegrationsverfahren verwendet. Der dort hergeleiteten modifizierten semidiskreten Bewegungsgleichung (4.3) muss im Falle von Kontakt der Vektor der Kontaktkräfte

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c = \mathbf{B}^c \mathbf{z}_{n+1-\alpha_f}, \quad (6.13)$$

ausgewertet am generalisierten Mittelpunkt, hinzuaddiert werden:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{ext}. \quad (6.14)$$

Das Einsetzen der Newmark-Ansätze aus Gleichung (4.2) in Gleichung (6.14) ergibt schließlich das vollständig diskretisierte nichtlineare Gleichungssystem

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}) \equiv \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{h}(\mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c - \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^{ext} = \mathbf{0}, \quad (6.15)$$

das iterativ für die unbekannt Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} gelöst und deshalb entsprechend linearisiert werden muss. Dieser Linearisierungsprozess wurde in Kapitel 4.2.2 bereits ausführlich für

den Fall ohne Kontakt beschrieben. Die nachfolgenden Erläuterungen beschränken sich deshalb vor allem auf die Darstellung der durch den zusätzlichen Kontaktterm induzierten Veränderungen. Ausgehend von einem bereits bekannten Verschiebungszustand \mathbf{d}_{n+1}^k wird eine mehrdimensionale Taylor-Reihenentwicklung von Gleichung (6.15) durchgeführt (Gl. (4.9)), so dass schließlich ein inkrementelles Gleichungssystem der Form

$$\frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k} \Delta \mathbf{d} = - \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k) \quad (6.16)$$

entsteht. Dieses wird für die inkrementellen Verschiebungen $\Delta \mathbf{d}$ in einem iterativen Verfahren so lange gelöst, bis sich das Residuum innerhalb einer gewissen Fehlerschranke befindet. Entscheidend für die Güte des Iterationsverfahrens ist die Bestimmung der effektiven, tangentiellen Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_T^{\text{eff}} = \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^k}. \quad (6.17)$$

Im Gegensatz zu den meisten Kontaktformulierungen ist für die Herleitung dieser tangentiellen Steifigkeitsmatrix keine Linearisierung der Kontaktkräfte erforderlich, da die eingeführten Lagrange-Multiplikatoren als gegebene, äußere Oberflächenlasten interpretiert wurden. Sie stehen mit den Kontaktkräften auf dem Kontaktrand im Gleichgewicht. Wird der deformierbare Körper mit Finiten Elementen diskretisiert, sind die diskreten Kontaktkräfte identisch mit den internen Knotenkräften. Mit anderen Worten: Ist der Verformungszustand bekannt, können daraus die Kontaktkräfte und somit auch die diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren bestimmt werden. Da der jeweils richtige Verformungszustand die entsprechenden geometrischen Kontakt-Randbedingungen einhalten muss, werden diese als entsprechende Verschiebungsrandbedingungen vorgeschrieben. Wie diese Randbedingungen eingebracht werden, wird in Kapitel 7 erläutert.

Die Konsequenz daraus ist, dass die effektive, tangentielle Steifigkeitsmatrix gegenüber der aus Kapitel 4 unverändert bleibt, und die zusätzlichen Kontaktkräfte $\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c$ als bekannte Größen zunächst in die Ungleichgewichtskräfte $\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^k)$ auf der rechten Gleichungsseite von (6.17) einfließen. Um die Kontaktkräfte im inkrementellen Strukturgleichungssystem jedoch sichtbar zu machen, werden sie auf die linke Gleichungsseite gebracht. Mit der bereits eingeführten Unterteilung der Verschiebungsfreiheitsgrade in die Teilbereiche N und S ergibt sich das effektive, inkrementelle Strukturgleichungssystem zu

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{NN} & (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{NS} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{SN} & (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{SS} & \mathbf{D}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^S \\ \mathbf{z}_{n+1-\alpha_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{\text{eff}} \\ \mathbf{f}_S^{\text{eff}} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Darin entspricht der effektive Lastvektor

$$\mathbf{f}_N^{eff} = - \mathbf{G}_N(\mathbf{d}_{n+1}^k) \quad (6.19)$$

für die inneren Freiheitsgrade den Ungleichgewichtskräften, die sich im Laufe des Lösungsprozesses herausiterieren ($\mathbf{f}_N^{eff} \rightarrow \mathbf{0}$). Der effektive Lastvektor

$$\mathbf{f}_S^{eff} = - \mathbf{G}_S(\mathbf{d}_{n+1}^k) + \mathbf{D}_S \mathbf{z}_{n+1-\alpha_f} \quad (6.20)$$

der Freiheitsgrade auf dem Slave-Rand stellt jedoch die Ungleichgewichtskräfte zuzüglich der Kontaktkräfte dar, so dass dieser im auskonvergierten Zustand die diskreten Kontaktkräfte repräsentiert ($\mathbf{f}_S^{eff} \rightarrow \mathbf{f}_S^c$). Damit ist der gesamte effektive Lastvektor \mathbf{f}^{eff} ebenso wie die effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T^{eff} , analog dem kontaktfreien Problem (Gl. (4.12) bzw. (4.31)) gegeben.

Zur Herleitung des effektiven inkrementellen Strukturgleichungssystems wurden zwar die auftretenden Kontaktkräfte berücksichtigt, was sich durch einen zusätzlichen Term ausdrückt, jedoch wurden die einzuhaltenden Kontakt-Randbedingungen bislang noch nicht eingebracht. In Kapitel 7.1 wird ein geeignetes Verfahren vorgestellt, wie die entsprechenden Nebenbedingungen direkt im Sinne von inkrementellen Verschiebungsrandbedingungen in das Gleichungssystem von (6.18) eingearbeitet werden können.

6.2 Kontakt zweier deformierbarer Körper

Nachdem im vorausgegangenen Abschnitt ausführlich die räumliche Diskretisierung für den Sonderfall eines Kontaktes zwischen einem deformierbaren Körper und einem starren Hindernis diskutiert wurde, werden diese Ansätze nun auf den allgemeinen Kontaktfall zweier deformierbarer Körper erweitert. Die notwendigen Begriffsdefinitionen wurden bereits in Kapitel 2.2 eingeführt und werden deshalb nicht nochmals wiederholt.

6.2.1 Schwache Form der Kontaktarbeit

Die virtuelle Kontaktarbeit wurde in Kapitel 2.2.5 hergeleitet und ist mit

$$\delta \Pi_c(\mathbf{u}_c, \delta \mathbf{u}_c) = - \int_{\Gamma_c^{(1)}} \mathbf{t}_c^{(1)}(\mathbf{X}) \cdot \left[\delta \mathbf{u}_c^{(1)}(\mathbf{X}) - \delta \mathbf{u}_c^{(2)}(\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right] d\Gamma \quad (6.21)$$

gegeben. Analog zu dem in Kapitel 6.1 beschriebenen Sonderfall, wird die virtuelle Kontaktarbeit in der aktuellen Konfiguration ausgewertet. Es wird wiederum ein Lagrange-Multiplikator λ eingeführt, der als gegebene äußere Flächenbelastung auf dem Slave-Rand interpretiert wird, die notwendig ist, um dem Slave-Körper einen äquivalenten Verformungszustand aufzuzwingen, wie wenn sich dieser mit dem Master-Körper in Kontakt befände (Abb. 6.3).

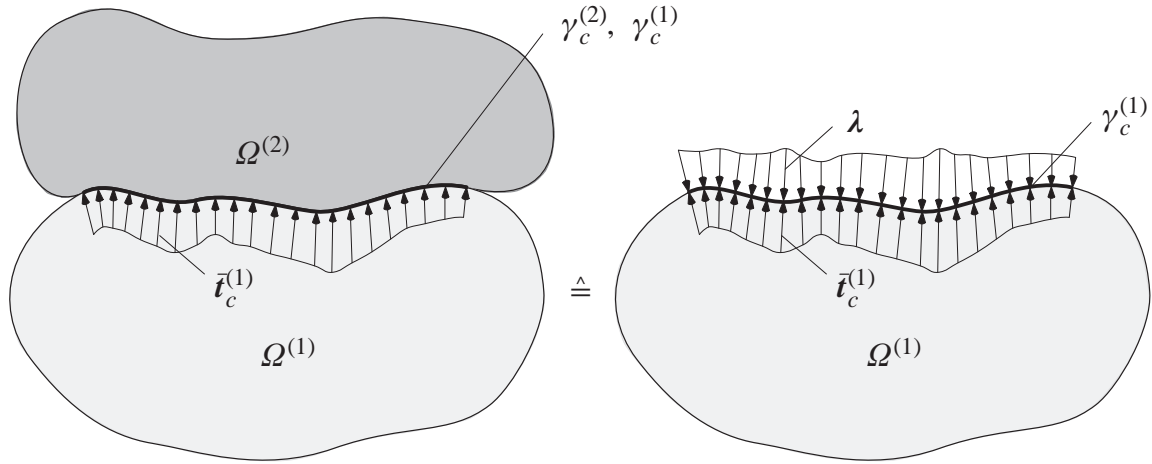


Abb. 6.3: Kontaktproblem zweier deformierbarer Körper

Der Lagrange-Multiplikator entspricht also dem negativen Kraftfluss $\bar{\mathbf{t}}_c^{(1)}$ auf dem Slave-Rand, so dass sich das Vorzeichen in Gleichung (6.21) umdreht und die virtuelle Kontaktarbeit für den Fall zweier deformierbarer Körper in der aktuellen Konfiguration mit

$$\delta\Pi_c = \int_{\gamma_c^{(1)}} \lambda \cdot \left[\delta\mathbf{u}_c^{(1)}(\mathbf{X}) - \delta\mathbf{u}_c^{(2)}(\hat{\mathbf{Y}}(\mathbf{X})) \right] d\gamma \quad (6.22)$$

gegeben ist.

6.2.2 Diskretisierung der Kontaktarbeit

Für die Diskretisierung des Lagrange-Multiplikators werden wiederum die diskreten dualen Ansatzfunktionen verwendet. Die Interpolationsfunktionen für die Verschiebungen auf dem Kontakttrand werden von den zugehörigen FE-Ansätzen im Gebiet abgeleitet und auf den Rand projiziert. Zur einfacheren Unterscheidung werden die Ansatzfunktionen für die Verschiebungen auf dem Slave-Rand mit N_j^S und diejenigen für die Verschiebungen auf dem Master-Rand mit N_k^M bezeichnet. Werden diese Ansätze in Gleichung (6.22) eingesetzt, ergibt sich die diskretisierte schwache Form der Kontaktarbeit zu

$$\begin{aligned} \delta\Pi_c &\approx \delta\Pi_c^h = \int_{\gamma_c^{(1)h}} (\phi_i^D \mathbf{z}_i)^T \left[N_j^S \delta\mathbf{d}_j^S - N_k^M \delta\mathbf{d}_k^M \right] d\gamma \\ &= (\delta\mathbf{d}_j^S)^T \int_{\gamma_c^{(1)h}} N_j^S \phi_i^D d\gamma \mathbf{z}_i - (\delta\mathbf{d}_k^M)^T \int_{\gamma_c^{(1)h}} N_k^M \phi_i^D d\gamma \mathbf{z}_i . \end{aligned} \quad (6.23)$$

Der erste Ausdruck ist dabei bereits aus dem Spezialfall des Ein-Körper-Kontaktes bekannt und lässt sich mit Hilfe der Diagonalmatrix \mathbf{D}_S kompakt zusammenfassen. Zusätzlich wird nun die Kopplungsmatrix \mathbf{M}_M definiert, deren Blockeinträge mit

$$\mathbf{M}_M[i, k] := \int_{\gamma_c^{(1)h}} \phi_i^D N_k^M d\gamma \mathbf{I}_d, \quad i = 1, \dots, n_c^S; k = 1, \dots, n_c^M; d = \{2, 3\} \quad (6.24)$$

gegeben sind (vgl. Gl. (5.25)). Die Besonderheit bei der Bestimmung der Einträge für die Kopplungsmatrix \mathbf{M}_M liegt darin, dass die Ansatzfunktionen für die Verschiebungen auf dem gegenüberliegenden Master-Rand mit den Ansätzen für die Lagrange-Multiplikatoren auf dem Slave-Rand integriert werden müssen. Dieses Integral wird über den Slave-Rand ausgewertet und verändert sich, wenn sich der Master-Rand relativ zum Slave-Rand verschiebt. Auf die zur Bestimmung der Kopplungsmatrix \mathbf{M}_M notwendige numerische Integration wird in Kapitel 6.4.2 eingegangen.

Die diskretisierte, schwache Form der Kontaktarbeit kann damit kompakt zusammengefasst werden:

$$\delta \Pi_c^h = (\delta \mathbf{d}^S)^T \mathbf{D}_S \mathbf{z} - (\delta \mathbf{d}^M)^T \mathbf{M}_M \mathbf{z}. \quad (6.25)$$

In den Vektoren \mathbf{z} , $\delta \mathbf{d}^S$ und $\delta \mathbf{d}^M$ wurden dabei wieder alle diskreten Knotenwerte des Lagrange-Multiplikators bzw. der virtuellen Verschiebungen auf dem Slave- und Master-Rand zusammengefasst.

6.2.3 Semidiskrete Form des Randwertproblems

Um die semidiskrete Form des Randwertproblems zweier kontaktierender Körper zu formulieren, muss, analog zu Kapitel 6.1.3, der entsprechende Vektor der Kontaktkräfte \mathbf{f}^c der semidiskreten Form der kontaktfreien Bewegungsgleichung (Kap. 2.3.1, Gl. (2.47)) hinzuaddiert werden. Der Vektor der Kontaktkräfte \mathbf{f}^c resultiert dabei aus der Diskretisierung der virtuellen Kontaktarbeit (Gl. (6.25)) und lässt sich folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{f}_i^c = \begin{cases} \mathbf{D}_S[i, i] \mathbf{z}_i & \text{falls } i \in S, \\ -\mathbf{M}_M[i, j] \mathbf{z}_j & \text{falls } i \in M, \\ \mathbf{0} & \text{falls } i \in N \quad (i \notin (S \cup M)). \end{cases} \quad (6.26)$$

Dabei wurde wieder von der in Kapitel 5.4.3 eingeführten Unterteilung der FE-Knoten in einzelne Teilbereiche Gebrauch gemacht. Teilbereich S umfasst alle Knoten auf dem Slave-Rand, Teilbereich M alle Knoten auf dem Master-Rand, alle restlichen Knoten sind im Teilbereich N zusammengefasst. Wird der Vektor der Knotenverschiebungen $\mathbf{d} = (\mathbf{d}^N, \mathbf{d}^M, \mathbf{d}^S)^T$ entsprechend dieser Unterteilung sortiert, kann der Vektor der Kontaktkräfte \mathbf{f}^c wiederum in Vektor-Matrix Schreibweise (Gl. (6.11))

$$\mathbf{f}^c = \mathbf{B}^c \mathbf{z} \quad (6.27)$$

angeben werden, wobei die eingeführte, rechteckige Matrix $\mathbf{B}^c \in \mathbb{R}^{d n_d \times d n_c^S}$ nun mit

$$\mathbf{B}^c = (\mathbf{0}, -\mathbf{M}_M, \mathbf{D}_S)^T \quad (6.28)$$

definiert ist. Die semidiskrete Form des Randwertproblems folgt damit formal analog dem Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis (Gl. (6.12)):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}) + \mathbf{f}^c = \mathbf{f}^{ext} . \quad (6.29)$$

6.2.4 Effektives, inkrementelles Strukturgleichungssystem

Die Herleitung für das effektive, inkrementelle Strukturgleichungssystem ist formal identisch mit der für den Fall eines Ein-Körper-Kontaktes. Dazu muss der Vektor der Kontaktkräfte am generalisierten Mittelpunkt ausgewertet, und der modifizierten, semidiskreten Bewegungsgleichung (Gl. (4.3)) hinzuaddiert werden. Im Gegensatz zum Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis ist der Vektor der Kontaktkräfte jetzt zusätzlich von der Kopplungsmatrix \mathbf{M}_M abhängig. Es ist offensichtlich, dass die beiden Kopplungsmatrizen \mathbf{D}_S und \mathbf{M}_M von der Verformung der beiden Körper abhängen. Dennoch kann hier im Gegensatz zu anderen mortar-basierten Kontaktformulierungen (Yang et al. (2005), Puso und Laursen (2004a, 2004b)) auf die sehr aufwendige Linearisierung der Einträge von \mathbf{D}_S und \mathbf{M}_M verzichtet werden: Die genannten Formulierungen benötigen die konsistente Linearisierung zur Bestimmung einer tangentiellen Kontaktsteifigkeitsmatrix. Im Gegensatz dazu werden die beiden Kopplungsmatrizen in der vorliegenden Arbeit ausschließlich für die Formulierung der einzuhaltenden Verschiebungsrandbedingungen (Kapitel 7) benötigt und können innerhalb eines Newton-Iterationsschrittes ($t_{n+1}^k \rightarrow t_{n+1}^{k+1}$) als konstant angenommen werden.

Mit der Unterteilung der Verschiebungsfreiheitsgrade in die Teilbereiche N , M und S und den Kopplungsmatrizen $\mathbf{D}_S = \mathbf{D}_S(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}(\mathbf{d}_{n+1}^k))$ und $\mathbf{M}_M = \mathbf{M}_M(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}(\mathbf{d}_{n+1}^k))$ lässt sich schließlich das effektive inkrementelle Strukturgleichungssystem mit

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_T^{eff})_{NN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{NM} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{NS} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_T^{eff})_{MN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{MM} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{MS} & -\mathbf{M}_M^T \\ (\mathbf{K}_T^{eff})_{SN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{SM} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{SS} & \mathbf{D}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^M \\ \Delta \mathbf{d}^S \\ \mathbf{z}_{n+1-\alpha_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{eff} \\ \mathbf{f}_M^{eff} \\ \mathbf{f}_S^{eff} \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

angeben. Die effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix sowie der effektive Lastvektor sind dabei wiederum durch die in Kapitel 4 hergeleiteten Gleichungen gegeben ((4.11)/(4.30) und (4.12)/(4.31)). Zur Berücksichtigung der einzuhaltenden Kontakt-Randbedingungen wird eine Aktive-Mengen-Strategie verwendet, die in Kapitel 7.2 vorgestellt wird.

6.3 Diskrete, duale Ansatzfunktionen

Ein wesentliches Merkmal der in dieser Arbeit vorgestellten Kontaktformulierung ist die Verwendung diskreter dualer Ansatzfunktionen für die Approximation der Lagrange-Multiplikatoren; sie werden nachfolgend für zwei- bzw. dreidimensionale Finite Elemente angegeben.

6.3.1 Zweidimensionale Probleme

Für die Beispielrechnungen in Kapitel 9 werden auch zweidimensionale Kontaktprobleme untersucht. Hierfür werden ausschließlich vierknotige, bilineare, ebene Scheibenelemente verwendet, die auf einer reinen Verschiebungsformulierung (Q1-Elemente) basieren, so dass der Kontaktrand durch linear interpolierte zweiknotige Linienelemente dargestellt wird. In jedem Linienelement wird ein lokales, eindimensionales Elementkoordinatensystem $\xi \in [-1, 1]$ eingeführt, so dass die Ansätze für die Verschiebungen auf den Kontakträndern wie üblich im Parameterraum definiert werden können. Für die Approximation der Verschiebungen auf den Kontakträndern verbleiben somit die bekannten hutförmigen, linearen Ansatzfunktionen (Abb. 6.4_{links}). Die diskreten dualen Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren sind so zu wählen, dass im physikalischen Integrationsgebiet die Biorthogonalitätsbedingung (Gl. (5.17)) mit den Ansätzen für die Verschiebungen auf dem Slave-Rand eingehalten wird. Da die für die Transformation vom physikalischen Raum in den Parameterraum notwendige Jacobi-Determinante innerhalb eines linearen Linienelementes konstant ist, genügt es für den hier betrachteten, zweidimensionalen Fall, wenn die Biorthogonalitätsbedingung im Parameterraum erfüllt ist. In Abbildung 6.4_{rechts} sind die im Parameterraum definierten diskreten dualen Ansatzfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren angegeben.

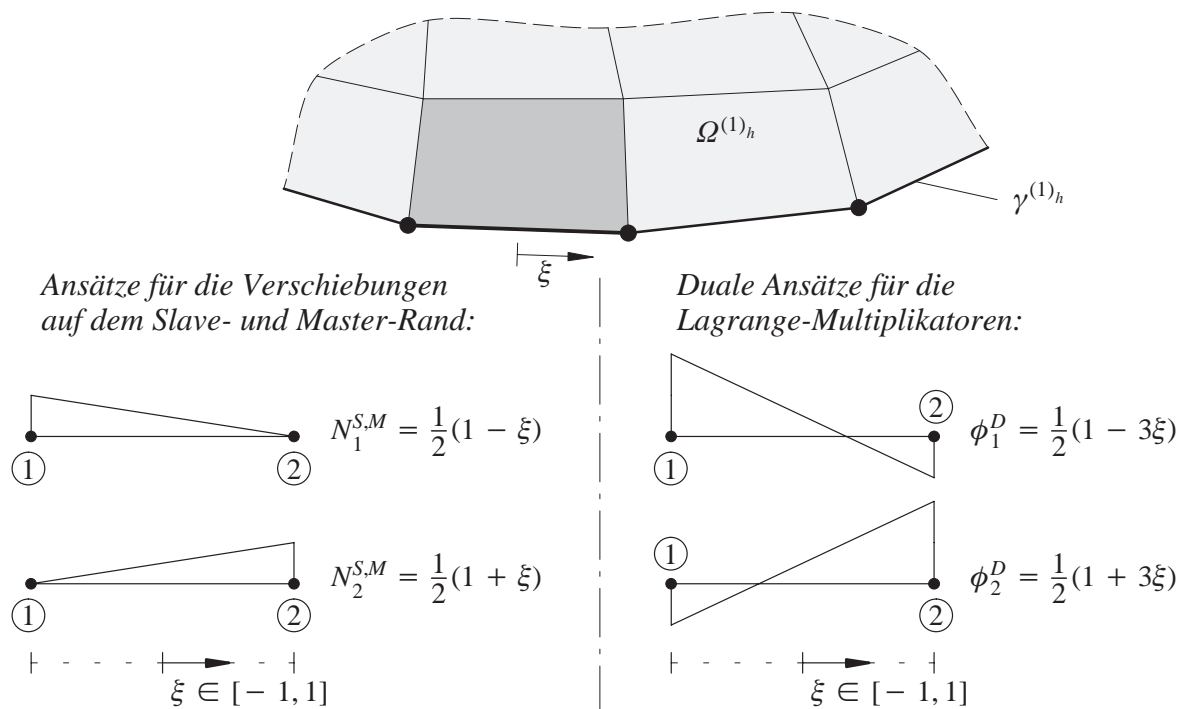


Abb. 6.4: Ansätze für die Verschiebungen und die Lagrange-Multiplikatoren (2D)

6.3.2 Dreidimensionale Probleme - unverzerrte Netze

Für die numerische Analyse dreidimensionaler Kontaktprobleme wird in dieser Arbeit ausschließlich das in Kapitel 3.3.2 vorgestellte achtknotige trilineare oberflächenorientierte Schalelement verwendet. Damit verbleiben für die Approximation der Kontaktflächen vierknotige bilineare räumliche Flächenelemente. In jedem dieser Kontaktflächenelemente wird ein lokales Elementkoordinatensystem $\xi, \eta \in [-1, 1]$ eingeführt, wodurch die Ansätze für die Verschiebungen auf dem Kontaktrand wiederum im Parameterraum definiert werden können. Hieraus resultieren die typischen bilinearen Ansatzfunktionen (Abb. 6.5_{links}). Für die Konstruktion der diskreten dualen Interpolationsfunktionen für die Lagrange-Multiplikatoren muss wiederum die Biorthogonalitätsbedingung (Gl. (5.17)) im physikalischen Integrationsgebiet erfüllt sein. Im Gegensatz zum zuvor beschriebenen, zweidimensionalen Fall ist die zur Transformation nötige Jacobi-Determinante im dreidimensionalen Fall in der Regel innerhalb eines Kontaktflächenelementes veränderlich. Für den Sonderfall einfacher Geometrien der Kontaktelemente mit konstanter Jacobi-Determinante sind die diskreten Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren im Parameterraum in Abbildung 6.5_{rechts} dargestellt.

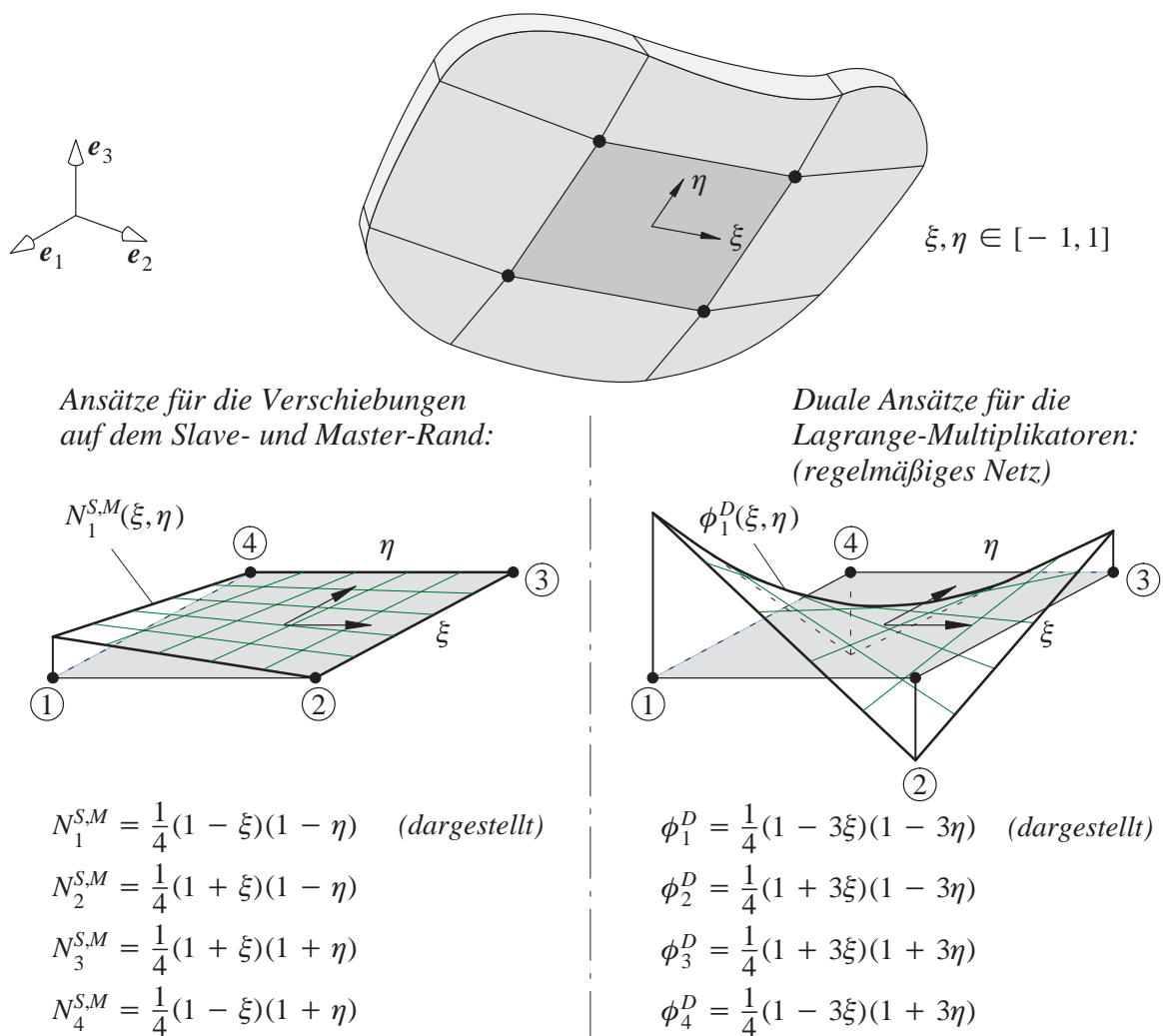


Abb. 6.5: Ansätze für die Verschiebungen und die Lagrange-Multiplikatoren (3D)

6.3.3 Dreidimensionale Probleme - beliebige, verzerrte Netze

Ist die Jacobi-Determinante innerhalb eines Kontaktflächenelementes nicht konstant, was in aller Regel der Fall ist, dann müssen die diskreten dualen Ansatzfunktionen für die Lagrange-Multiplikatoren so konstruiert werden, dass die Biorthogonalitätsbedingung im physikalischen Raum erfüllt ist (Flemisch und Wohlmuth (2005)). Bezogen auf ein Kontaktflächenelement $\gamma_{c,e}^{(1)h}$ lautet die Biorthogonalitätsbedingung:

$$\int_{\gamma_{c,e}^{(1)h}} \phi_i^D(\xi, \eta) N_j^S(\xi, \eta) d\gamma = \delta_{ij} \int_{\gamma_{c,e}^{(1)h}} N_j^S(\xi, \eta) d\gamma = \delta_{ij} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_j^S(\xi, \eta) J d\xi d\eta . \quad (6.31)$$

Darin ist J die Jacobi-Determinante, die die Integration über den physikalischen Kontaktrand $d\gamma$ in eine Integration über $d\xi$ und $d\eta$ überführt. Sie ergibt sich zu

$$J = \| \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 \| , \quad (6.32)$$

mit den kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_α der Kontaktoberfläche $\gamma_c^{(1)h}$. Für die Konstruktion der Interpolationsfunktionen für die Lagrange-Multiplikatoren wird der Ansatz

$$\phi_i^D(\xi, \eta) = a_{ij} N_j^S(\xi, \eta) \quad (6.33)$$

gemacht. Ziel ist es, die Faktoren a_{ij} so zu bestimmen, dass die Bedingung (6.31) erfüllt ist. Werden mit

$$w_{ij} = \delta_{ij} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_j^S(\xi, \eta) J d\xi d\eta \quad (6.34)$$

die Einträge der resultierenden Diagonalmatrix bezeichnet, lässt sich die Bedingung für die Faktoren a_{ij} folgendermaßen ermitteln:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{c,e}^{(1)h}} \phi_i^D(\xi, \eta) N_j^S(\xi, \eta) d\gamma &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \phi_i^D(\xi, \eta) N_j^S(\xi, \eta) J d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} a_{ij} N_j^S(\xi, \eta) N_k^S(\xi, \eta) J d\xi d\eta \\ &= a_{ij} \underbrace{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_j^S(\xi, \eta) N_k^S(\xi, \eta) J d\xi d\eta}_{M_{jk}} = a_{ij} M_{jk} = w_{ik} . \end{aligned} \quad (6.35)$$

Die Integration der gewöhnlichen bilinearen Ansatzfunktionen N_i^S mit sich selbst liefert eine Matrix, deren Einträge mit M_{jk} bezeichnet werden. Diese Matrix ähnelt sehr stark einer Element-

massenmatrix, mit dem Unterschied, dass die Einträge nicht mit einer physikalischen Dichte multipliziert werden. Nach Zusammenfassen der Faktoren a_{ij} in der Matrix $\mathbf{A}_e \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, der Einträge M_{jk} in der „Massenmatrix“ $\mathbf{M}_e \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und der Wichtungsfaktoren w_{ij} in der Diagonalmatrix $\mathbf{D}_e \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ ergibt sich die Bedingung aus (6.35) in matrizieller Form zu

$$\mathbf{A}_e \mathbf{M}_e = \mathbf{D}_e . \quad (6.36)$$

Die Faktoren a_{ij} berechnen sich mit

$$\mathbf{A}_e = \mathbf{D}_e \mathbf{M}_e^{-1} . \quad (6.37)$$

Sind diese Faktoren bekannt, können die diskreten, dualen Ansatzfunktionen mit Hilfe des Ansatzes in Gleichung (6.33) bestimmt werden. In Anhang B.4 wird die Ermittlung der dualen Ansatzfunktionen anhand eines Beispiels gezeigt.

6.4 Numerische Integration der Kopplungsmatrizen

Nachfolgend wird die notwendige numerische Integration der Kopplungsmatrizen vorgestellt. Zunächst wird die Bestimmung der Wichtungsfaktoren der Diagonalmatrix \mathbf{D}_S erläutert, bevor anschließend auf die deutlich kompliziertere Integration zur Berechnung der Einträge der Kopplungsmatrix \mathbf{M}_M eingegangen wird.

6.4.1 Berechnung der Einträge für die Diagonalmatrix

Die numerische Berechnung der Wichtungsfaktoren w_{ii} der Diagonalmatrix \mathbf{D}_S ist aufgrund der Biorthogonalitätsbedingung (Gl. (5.17)) relativ einfach und reduziert sich auf die Integration der Ansatzfunktionen der Verschiebungen auf dem Slave-Rand über den aktuellen Kontaktrand:

$$w_{ij} = \delta_{ij} \int_{\gamma_c^{(1)h}} N_j^S d\gamma . \quad (6.38)$$

Da die Bestimmung dieser Einträge unabhängig von den jeweiligen dualen Ansatzfunktionen ist kann sie sowohl für den zwei- als auch den dreidimensionalen Fall, unabhängig von der jeweiligen Elementgeometrie, formal identisch durchgeführt werden. Die Auswertung dieses Integrals erfolgt wie üblich im Parameterraum, mit Hilfe einer numerischen Gauß-Integration

$$w_{ii} = \sum_{q=1}^{n_e^i} \left[\sum_{r=1}^{n_{gp}} w_r N_i^{S,q}(\xi_r) J(\xi_r) \right] . \quad (6.39)$$

Darin bezeichnet n_e^i die Anzahl der Kontaktflächen- bzw. Kontaktlinienelemente, die an den Slave-Knoten $i \in S$ angrenzen. Für den zweidimensionalen Fall gilt meist $n_e^i = 2$, für den dreidimensionalen Fall in der Regel $n_e^i = 4$, wobei dies jedoch von der Art der Vernetzung abhängt. Die Anzahl der Gauß-Punkte ist mit n_{gp} gekennzeichnet, w_r ist der entsprechende Wichtungsfak-

tor der numerischen Integration und $J(\xi_r)$ ist die Jacobi-Determinante der Abbildung zwischen dem Parameterraum und dem wirklichen Raum, ausgewertet am entsprechenden Integrationspunkt ξ_r . Da für den zweidimensionalen Fall die notwendige Jacobi-Determinante innerhalb eines Kontaktlinienelementes konstant ist, lässt sich hierfür Gleichung (6.39) noch zu

$$w_{ii} = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{n_e^i} \ell_i^q \quad (6.40)$$

vereinfachen (Cichosz (2006)). Darin sind ℓ_i^q die Kantenlängen der an den Slave-Knoten $i \in S$ angrenzenden Kontaktlinienelemente in der verformten Konfiguration. Die Bestimmung der Einträge für die Diagonalmatrix D_S kann also im zweidimensionalen Fall ohne eine numerische Integration erfolgen.

Da die Jacobi-Determinante der resultierenden Kontaktflächenelemente im dreidimensionalen Fall in der Regel nicht konstant ist (Gl. (6.32)), muss hierfür die in Gleichung (6.39) angegebene numerische Integration durchgeführt werden.

6.4.2 Berechnung der Einträge für die Kopplungsmatrix

Die Berechnung der Einträge für die Kopplungsmatrix M_M wird nachfolgend für den zweidimensionalen Fall beschrieben. Hierzu müssen Ansatzfunktionen für die Verschiebungen auf dem Master-Rand mit den Basisfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren auf dem Slave-Rand integriert werden (Gl. (5.25), Gl. (6.24)). Da die Integranden auf unterschiedlichen Kontakträndern definiert sind, muss das Integrationsgebiet in einzelne Segmente unterteilt werden, in denen jeweils beide Funktionen kontinuierlich definiert sind. In Abbildung 6.6 ist dies schematisch für die Berechnung eines Kopplungseintrags m_{ij} dargestellt, wofür das Integrationsgebiet in drei Segmente aufgeteilt werden muss.

Traditionelle Techniken zur Unterteilung des Integrationsgebietes in einzelne Segmente basieren auf einer orthogonalen Projektion (Simo et al. (1985), Papadopoulos und Taylor (1992), McDevitt und Laursen (2000)). Dabei wird jeder Knoten eines Kontaktlinienelementes, sei es auf der Slave- oder Master-Seite, auf den ihm gegenüberliegenden Kontaktrand orthogonal projiziert (Abb. 6.7).

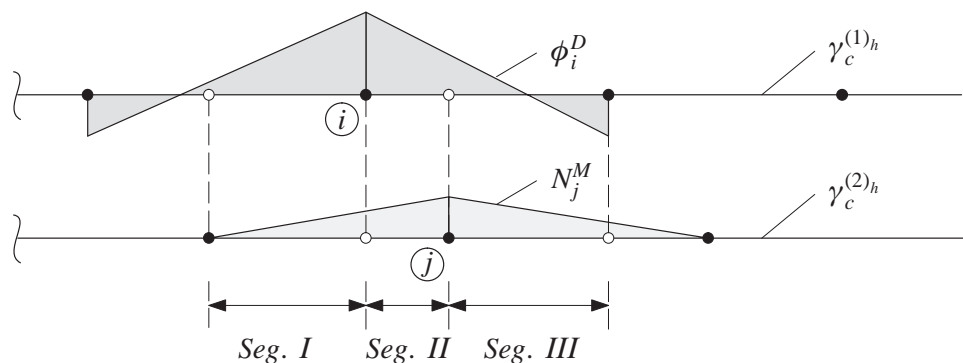


Abb. 6.6: Notwendige Unterteilung in Segmente

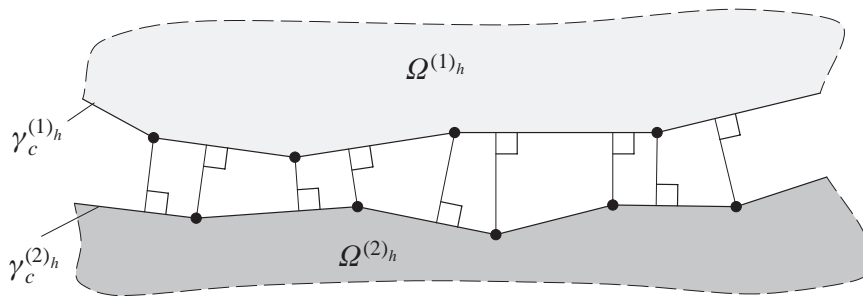


Abb. 6.7: Traditionelle Unterteilung in Segmente

Leider ist diese Methode zur Definition der Segmente nicht immer eindeutig. In einigen Fällen kann es vorkommen, dass zu einem Kontaktknoten kein Projektionspunkt auf dem gegenüberliegenden Kontaktrand gefunden werden kann. Beispiele solcher pathologischer Fälle sind in Abbildung 6.8 dargestellt. Tritt ein solcher pathologischer Sonderfall auf, muss die Definition der Segmente entsprechend angepasst werden. Dies führt zu einem erheblichen Programmieraufwand, da sämtliche Fälle untersucht und abgefragt werden müssen. Um dies zu vermeiden, wird in dieser Arbeit auf eine von Yang et al. (2005) vorgestellte Methode der Segmentdefinition zurückgegriffen. Die Grundidee besteht darin, ein kontinuierliches Normalenfeld auf dem diskretisierten Slave-Rand zu definieren. Aufgrund der Approximation der wahren Geometrie mit bilinearen, zweidimensionalen Finiten Elementen entstehen am Kontaktrand in der Regel Knicke zwischen zwei angrenzenden Kontaktlinienelementen. Wird das Normalenfeld senkrecht auf den Slave-Rand definiert, werden einem Slave-Knoten zwei unterschiedliche Normalen von den angrenzenden Elementkanten zugewiesen (Abb. 6.9a).

Zur Bestimmung eines kontinuierlichen Normalenfeldes entlang des gesamten diskretisierten Slave-Randes wird zunächst eine eindeutige Normale für jeden Slave-Knoten $i \in S$ definiert. Dazu werden die nach außen gerichteten Normalen der beiden angrenzenden Kontaktlinienelemente gemittelt und anschließend normiert. Yang et al. (2005) schlagen vor, die Mittelung der Normalen zusätzlich mit den jeweiligen Längen der angrenzenden Linienelemente zu wichten. Da in dieser Arbeit im Wesentlichen von regelmäßigen FE-Netzen ausgegangen wird, kann auf eine entsprechende Wichtung verzichtet werden. Es wird lediglich das arithmetische Mittel gebildet.

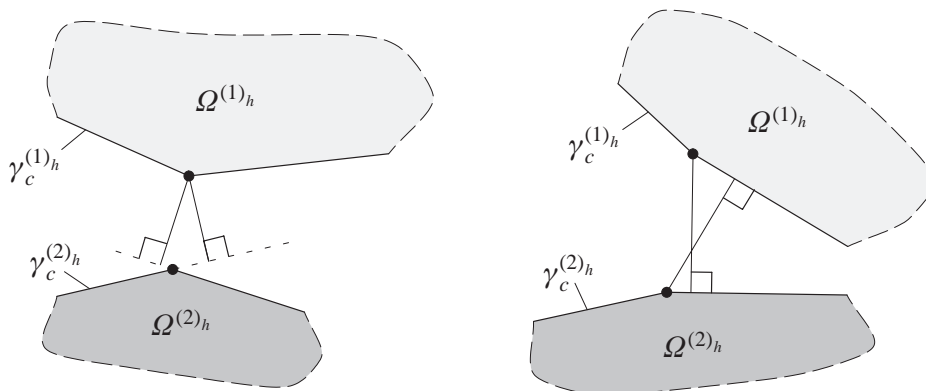


Abb. 6.8: Pathologische Fälle bei der traditionellen Definition der Segmente

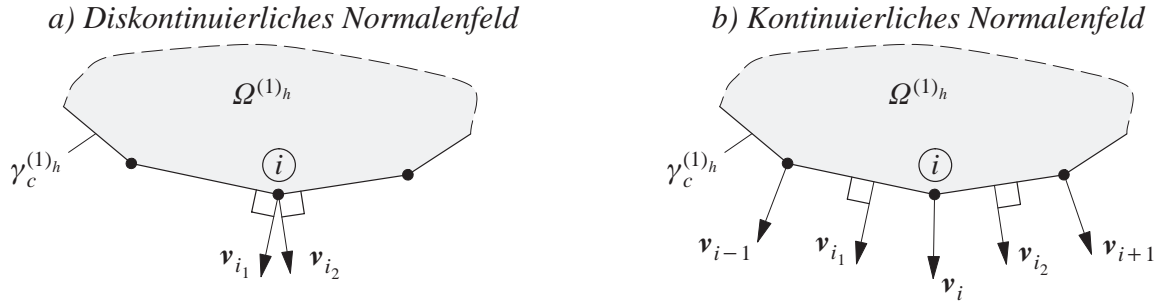


Abb. 6.9: Definition des Normalenfeldes

Die Normale an einem Slave-Knoten ist damit folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{v}_{i_1} + \mathbf{v}_{i_2}}{\|\mathbf{v}_{i_1} + \mathbf{v}_{i_2}\|} . \quad (6.41)$$

Ausgehend von den gemittelten Normalen an den diskreten Slave-Knoten wird das kontinuierliche Normalenfeld mit Hilfe der typischen linearen Ansatzfunktionen N_i^S , analog zu den Verschiebungen, interpoliert:

$$\mathbf{v} = N_i^S \mathbf{v}_i . \quad (6.42)$$

Damit wird jedem Punkt auf dem diskretisierten Slave-Rand eine eindeutige Normale zugewiesen, wodurch die Definition der einzelnen Segmente nun ohne pathologische Ausnahmefälle erfolgen kann. Gegenüber der in Abbildung 6.7 dargestellten, traditionellen Unterteilung des Integrationsgebietes ist die Segmentierung nach der hier beschriebenen Methode in Abbildung 6.10 dargestellt. Daraus wird ersichtlich, dass sowohl die Projektion eines Slave-Knotens auf das gegenüberliegende Master-Element, als auch die Projektion eines Master-Knotens auf ein entsprechendes Slave-Element, ausgehend von der kontinuierlichen Definition des Normalenfeldes auf dem Slave-Rand, erfolgt. Ein typisches Segment, das durch diese Art der Projektion entsteht, ist ebenfalls in Abbildung 6.10 gezeigt.

Zur Definition eines typischen Segmentes müssen also die zuvor genannten Projektionspunkte auf den Slave- bzw. Master-Elementen bestimmt werden. Der Projektionspunkt eines Slave-Knotens $\mathbf{x}_i^{(1)}$ auf ein entsprechendes Master-Element mit den Knoten $\mathbf{x}_1^{(2)}$ und $\mathbf{x}_2^{(2)}$ ergibt sich aus folgender Bedingung:

$$\left[N_1^M(\xi^{(2)}) \mathbf{x}_1^{(2)} + N_2^M(\xi^{(2)}) \mathbf{x}_2^{(2)} - \mathbf{x}_i^{(1)} \right] \times \mathbf{v}_i^{(1)} = \mathbf{0} . \quad (6.43)$$

Sie stellt eine lineare Bedingungsgleichung für die gesuchte, lokale Elementkoordinate $\xi^{(2)}$ des Master-Elementes dar und kann deshalb direkt und eindeutig gelöst werden. Die Bestimmung des Projektionspunktes eines Master-Knotens $\mathbf{x}_i^{(2)}$ auf das zugehörige Slave-Element mit den Knoten $\mathbf{x}_1^{(1)}$ und $\mathbf{x}_2^{(1)}$ ist dagegen komplizierter. Die entsprechende Bedingungsgleichung lautet:

$$\left[N_1^S(\xi^{(1)}) \mathbf{x}_1^{(1)} + N_2^S(\xi^{(1)}) \mathbf{x}_2^{(1)} - \mathbf{x}_i^{(2)} \right] \times \left[N_1^S(\xi^{(1)}) \mathbf{v}_1 + N_2^S(\xi^{(1)}) \mathbf{v}_2 \right] = \mathbf{0} . \quad (6.44)$$

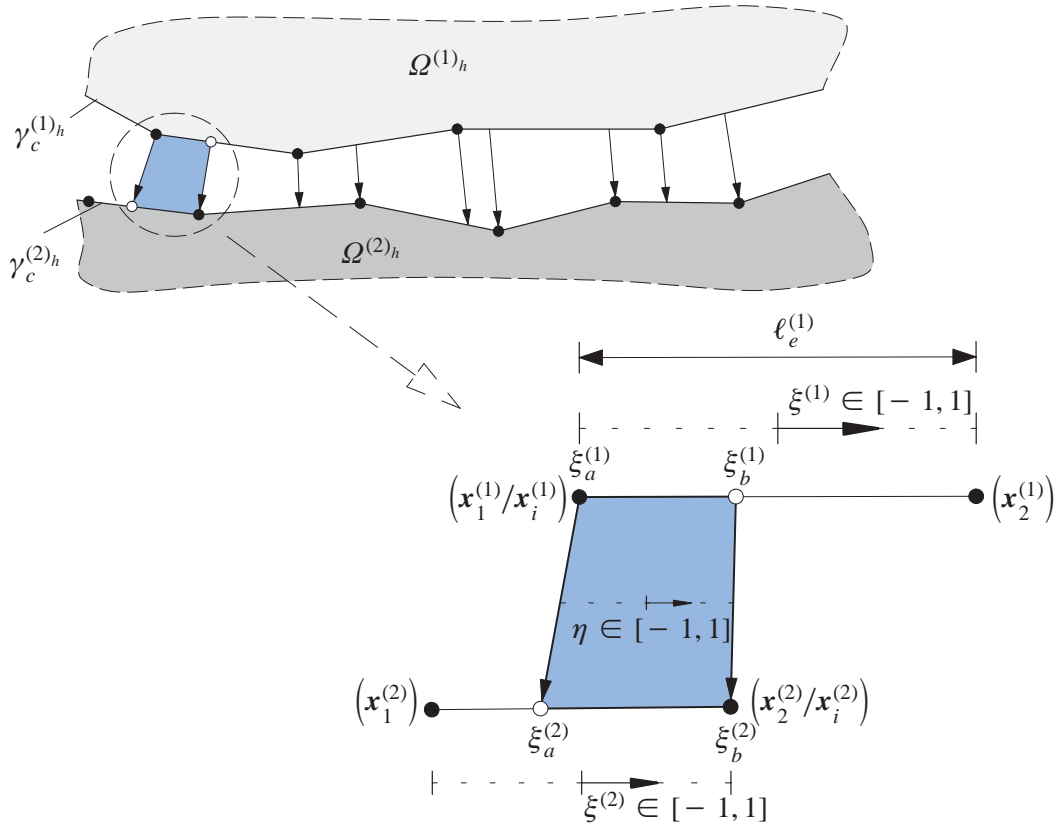


Abb. 6.10: Segmentierung mit kontinuierlichem Normalenfeld – typisches Segment

Dies führt schließlich auf eine quadratische Bedingungsgleichung für die unbekannte lokale Elementkoordinate $\xi^{(1)}$ des Slave-Elementes. Zur Lösung dieser quadratischen Gleichung wird eine lokale Newton-Iteration durchgeführt.

Die numerische Integration über das entsprechende Segment kann durchgeführt werden, wenn die entsprechenden Projektionspunkte auf den Slave- und Master-Elementen mit Hilfe der Gleichungen (6.43) und (6.44) bestimmt sind. Um die bekannte Gauß-Quadratur einsetzen zu können, wird eine weitere lokale Segmentkoordinate $\eta \in [-1, 1]$ eingeführt. Die Segmentgrenzen sind in Abhängigkeit der lokalen Elementkoordinaten auf dem Slave- bzw. Master-Rand durch $\xi_a^{(1)}$, $\xi_b^{(1)}$, $\xi_a^{(2)}$ und $\xi_b^{(2)}$ gegeben (Abb. 6.10). Die Abbildung von der lokalen Segmentkoordinate η auf die entsprechenden Elementkoordinaten wird durch

$$\xi^{(a)}(\eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta) \xi_a^{(a)} + \frac{1}{2} (1 + \eta) \xi_b^{(a)} \quad (6.45)$$

erreicht. Mit dieser Beziehung kann der Anteil des Kopplungseintrags m_{ij}^{seg} eines einzelnen Segmentes als auszuwertendes Integral in Abhängigkeit der lokalen Segmentkoordinate η ausgedrückt werden:

$$m_{ij}^{seg} = \int_{-1}^1 \phi_i^D(\xi^{(1)}(\eta)) N_j^M(\xi^{(2)}(\eta)) J_{seg} d\eta . \quad (6.46)$$

Dieses Integral wird mit Hilfe der Gauß-Integration

$$m_{ij}^{seg} \approx \sum_{r=1}^{n_{gp}} w_r \phi_i^D(\xi^{(1)}(\eta_r)) N_j^M(\xi^{(2)}(\eta_r)) J_{seg} \quad (6.47)$$

numerisch ausgewertet. Darin ist J_{seg} die innerhalb eines Segmentes konstante Jacobi-Determinante der Abbildung zwischen dem Parameterraum η und der wirklichen Geometrie, die sich zu

$$J_{seg} = \frac{\partial \mathbf{x}_e^{(1)h}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{x}_e^{(1)h}}{\partial \xi^{(1)}} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \ell_e^{(1)} \frac{1}{2} (\xi_b^{(1)} - \xi_a^{(1)}) \quad (6.48)$$

ergibt. Hierin ist $\ell_e^{(1)}$ die Länge eines Kontaktlinienelementes auf der Slave-Seite (Abb. 6.10). Zur Ermittlung des gesamten Kopplungseintrags m_{ij} müssen die Anteile aus den einzelnen Integrationen über die Segmente aufsummiert werden. Der gesuchte Eintrag ergibt sich damit schließlich zu

$$m_{ij} = \sum_{seg} m_{ij}^{seg} . \quad (6.49)$$

Anmerkung: Für den dreidimensionalen Fall erfolgt die Berechnung der Kopplungseinträge m_{ij} in ähnlicher Weise. Allerdings müssen zur Definition der jeweiligen Integrationssegmente räumliche Elementflächen aufeinander projiziert werden. Dabei entstehen polygonal umrandete Segmentflächen, die zur numerischen Integration in Dreiecke unterteilt werden. Über die einzelnen Dreiecksflächen wird dann mit einer Gauß-Radau-Regel numerisch integriert. Der gesuchte Kopplungseintrag m_{ij} berechnet sich dann wieder analog zum zweidimensionalen Fall durch Aufsummieren der einzelnen Segmentanteile. Ein entsprechender Algorithmus zur numerischen Integration von m_{ij} findet sich in Puso und Laursen (2004a). Darin werden trilineare Volumenelemente benutzt.

6.5 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde die räumliche Diskretisierung des Kontaktterms sowohl für den Sonderfall des Kontaktes eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis als auch für den allgemeinen Kontaktfall zweier deformierbarer Körper vorgestellt. Im Sinne einer sequentiellen Raum-Zeit-Diskretisierungsstrategie wurden die räumlich approximierten Terme anschließend mit den in Kapitel 4 beschriebenen impliziten Zeitintegrationsverfahren kombiniert und entsprechend linearisiert. Daraus ergaben sich jeweils die inkrementellen effektiven Strukturgleichungssysteme, die innerhalb eines Newton-Iterationsschrittes gelöst werden müssen. Die Lösung dieser Gleichungssysteme muss jedoch die noch zu berücksichtigenden Kontakt-Randbedingungen erfüllen. Die direkte Einarbeitung dieser Nebenbedingungen in die effektiven Strukturgleichungssysteme wird ausführlich im nächsten Kapitel erläutert.

7 Kontakt-Randbedingungen – Aktive-Mengen-Strategie

Im vorausgegangenen Kapitel wurde sowohl für das Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis als auch für den allgemeinen Kontaktfall zweier deformierbarer Körper das jeweilige inkrementelle effektive Strukturgleichungssystem hergeleitet. Dabei wurden jedoch die im Kontaktfall einzuhaltenden Randbedingungen noch nicht berücksichtigt. Dieses Kapitel beschäftigt sich nun mit dem zweiten wichtigen Teil der weiterentwickelten Kontaktformulierung: Der Berücksichtigung der Kontakt-Randbedingungen für die beiden in Kapitel 6 behandelten Kontaktprobleme. Hierzu wird die Kompatibilitätsbedingung in einem schwachen integralen Sinne formuliert und mit Hilfe einer Aktiven-Mengen-Strategie der entsprechenden inkrementellen effektiven Strukturgleichung hinzugefügt. Zunächst wird ausführlich auf den Sonderfall des Ein-Körper-Kontaktes eingegangen, bevor anschließend der allgemeine Fall des Zwei-Körper-Kontaktes behandelt wird.

7.1 Normalkontakt eines deformierbaren Körpers mit starrem Hindernis

7.1.1 Schwache, inkrementelle Nichtdurchdringungsbedingung

In Kapitel 6.1.4 wurde für das Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis die inkrementelle effektive Strukturgleichung hergeleitet, wobei die einzuhaltenden geometrischen Kontakt-Randbedingungen noch nicht berücksichtigt wurden. In Anlehnung an die Grundidee der Mortar-Methode werden diese Kontakt-Nebenbedingungen in einem schwachen integralen Sinne entlang des gesamten Kontaktrandes formuliert. Für den Fall eines reinen Normalkontaktes lautet die schwache Form der Inpenetrabilitätsbedingung (vgl. Gl. (5.6) – *Nebenbedingung*)

$$\int_{\gamma_c^{(1)}} \delta \lambda_\nu g \, d\gamma \geq 0 . \quad (7.1)$$

Für die Interpolation der Variation des Lagrange-Multiplikators in Normalenrichtung werden diskrete, duale Ansatzfunktionen verwendet:

$$\delta \lambda_\nu \approx \delta \lambda_\nu^h = \phi_i^D(\delta z_\nu)_i , \quad i = 1, \dots, n_c^S . \quad (7.2)$$

Die Geometrie und die Verschiebungen werden, dem isoparametrischen Konzept folgend, mit den gleichen Ansätzen interpoliert, so dass die aktuelle Lage eines materiellen Punktes \mathbf{x} auf dem Kontaktrand mit

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{x}^h = \mathbf{X}^h + \mathbf{u}^h = N_i^S(\mathbf{X}_i^S + \mathbf{d}_i^S) , \quad i = 1, \dots, n_c^S \quad (7.3)$$

approximiert wird. Hierin ist $\mathbf{X}_i^S \in \mathbb{R}^d$ der Vektor der Knotenkoordinaten und $\mathbf{d}_i^S \in \mathbb{R}^d$ der Vektor der diskreten Knotenverschiebungen eines Knotens i auf dem Slave-Rand, wobei

$d = \{2, 3\}$ die Dimension des entsprechenden Problems charakterisiert. Mit diesen Ansätzen lässt sich die schwache Form der Inpenetrabilitätsbedingung mit

$$\int_{\gamma_c^{(1)h}} \delta \lambda_v^h g^h d\gamma = - (\delta z_v)_i \int_{\gamma_c^{(1)h}} (\phi^D \mathbf{v})_i^T (\mathbf{x}^h - \hat{\mathbf{y}}^h) d\gamma \geq 0 \quad (7.4)$$

annähern. Darin bezeichnet $\hat{\mathbf{y}}^h$ den zu einem Punkt \mathbf{x}^h auf dem diskretisierten Slave-Rand zugehörigen Projektionspunkt auf dem starren Hindernis. Da (7.4) für beliebige $\delta z_v \geq 0$ gelten muss, lässt sich die skalarwertige Ungleichung als mehrdimensionale nichtlineare Bedingung in Abhängigkeit der diskreten unbekanntenen Knotenverschiebungen \mathbf{d}^S schreiben:

$$\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{d}^S) \geq \mathbf{0} . \quad (7.5)$$

Dazu wurde mit $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{n_c^S}$ der Vektor der gewichteten Klaffung eingeführt, dessen Einträge mit

$$\tilde{g}_i := - \int_{\gamma_c^{(1)h}} (\phi^D \mathbf{v})_i^T \underbrace{N_j^S(\mathbf{X}_j^S + \mathbf{d}_j^S)}_{\mathbf{x}^h} - \hat{\mathbf{y}}^h d\gamma \quad (7.6)$$

definiert sind. Die numerische Auswertung dieses Integrals wird in Kapitel 7.1.6 ausführlich diskutiert. Unter Verwendung eines inkrementellen Verfahrens muss die Ungleichung (7.5) am Ende eines Zeitintervalls

$$\tilde{\mathbf{g}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{d}_{n+1}^S) \geq \mathbf{0} \quad (7.7)$$

erfüllt sein. Dazu ist im Rahmen des zugrunde gelegten iterativen Lösungsverfahrens eine Linearisierung von Gleichung (7.7) notwendig, die schließlich auf eine inkrementelle Ungleichung der Form

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{d}_{n+1}^S)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^S} \Delta \mathbf{d}^S \geq - \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{d}_{n+1}^S) \quad (7.8)$$

führt. Die partielle Ableitung einer gewichteten Klaffung $\tilde{g}_i(\mathbf{d}_{n+1}^S)$ nach den diskreten Knotenverschiebungen $(\mathbf{d}_{n+1}^S)_j$ eines Knotens j auf dem Kontaktrand ist mit

$$\frac{\partial \tilde{g}_i(\mathbf{d}_{n+1}^S)}{\partial (\mathbf{d}_{n+1}^S)_j} = - (\mathbf{v}_{n+1}^k)_i^T \int_{\gamma_c^{(1)h}} \phi_i^D N_j^S d\gamma \quad (7.9)$$

gegeben. Hierfür sind wiederum die Ansatzfunktionen der Verschiebungen mit denjenigen der variierten Lagrange-Multiplikatoren zu integrieren, was aufgrund der Biorthogonalitätseigenschaft dieser beiden diskreten Ansatzräume zu der bereits bekannten Diagonalmatrix \mathbf{D}_S führt. Dadurch ist es möglich, die mehrdimensionale Ungleichungsbedingung (7.8) in einen Satz von unabhängigen, skalaren Ungleichungen für die einzelnen, diskreten Knotenverschiebungen zu reduzieren.

Wird mit

$$\left(\Delta \tilde{d}_v^S\right)_i := \left(\mathbf{v}_{n+1}^k\right)_i^T \mathbf{D}_S[i, i] \Delta \mathbf{d}_i^S, \quad (\text{keine Summe über } i) \quad (7.10)$$

die gewichtete inkrementelle Verschiebung eines Knotens i auf dem Slave-Rand in Richtung seiner Normalen definiert, lässt sich die inkrementelle Nichtdurchdringungsbedingung für jeden einzelnen Slave-Knoten mit

$$\left(\Delta \tilde{d}_v^S\right)_i \leq \left(\tilde{g}_{n+1}^k\right)_i \quad (7.11)$$

formulieren. Werden zudem die diskreten Knotenwerte des Lagrange-Multiplikators $\mathbf{z}_i \in \mathbb{R}^d$ in einen normalen und tangentialen Anteil

$$\mathbf{z}_i = \left(z_\nu \mathbf{v} - z_\tau\right)_i \quad (7.12)$$

aufgespalten, kann das inkrementelle Problem für den reibungsfreien Kontakt eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis wie folgt zusammengefasst werden:

Das effektive, inkrementelle Strukturgleichungssystem (6.18) muss so gelöst werden, dass dessen Lösung für alle FE-Knoten auf dem Slave-Rand die diskreten Nebenbedingungen erfüllt:

$$\left(\Delta \tilde{d}_v^S\right)_i \leq \left(\tilde{g}_{n+1}^k\right)_i, \quad \left(z_\nu\right)_i \geq 0, \quad \left[z_\nu \left(\Delta \tilde{d}_v^S - \tilde{g}_{n+1}^k\right)\right]_i = 0, \quad (7.13)$$

$$\left(z_\tau\right)_i = \mathbf{0}. \quad (7.14)$$

Dabei beschreiben die Einschränkungen in (7.13) die inkrementellen diskreten Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen und Gleichung (7.14) stellt die Gleitbedingung für einen reibungsfreien Kontakt dar.

7.1.2 Schwache, inkrementelle Nichtdurchdringungsbedingung - Alternative Herleitung

Anschaulicher lässt sich die integrale inkrementelle Inpenetrabilitätsbedingung aus Ungleichung (7.11) herleiten, indem die zu erfüllende starke Form der Nichtdurchdringungsbedingung in inkrementeller Weise (Abb. 7.1) formuliert wird. Daraus ergibt sich für einen beliebigen Punkt auf dem Kontaktrand folgende Anforderung:

$$\Delta \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{v}_{n+1}^k \leq g\left(\mathbf{x}_{n+1}^k\right). \quad (7.15)$$

Die inkrementelle Verschiebung in Richtung der Normalen \mathbf{v}_{n+1}^k darf also maximal so groß wie die Klaffung $g\left(\mathbf{x}_{n+1}^k\right)$ sein. Im Sinne eines Galerkin-Verfahrens kann dies nun in eine schwache, integrale Form gebracht werden, indem die Bedingung (7.15) mit einer Wichtungsfunktion multipliziert und über den Kontaktrand integriert wird. Nach Identifizierung der Wichtungs- oder Testfunktion mit der Variation des Lagrange-Multiplikators $\delta \lambda_\nu$ in Normalenrichtung folgt die integrale Form

$$\int_{\gamma_c^{(1)}} \left(\Delta \mathbf{u}^S \cdot \mathbf{v}_{n+1}^k\right) \delta \lambda_\nu \, d\gamma \leq \int_{\gamma_c^{(1)}} g\left(\mathbf{x}_{n+1}^k\right) \delta \lambda_\nu \, d\gamma. \quad (7.16)$$

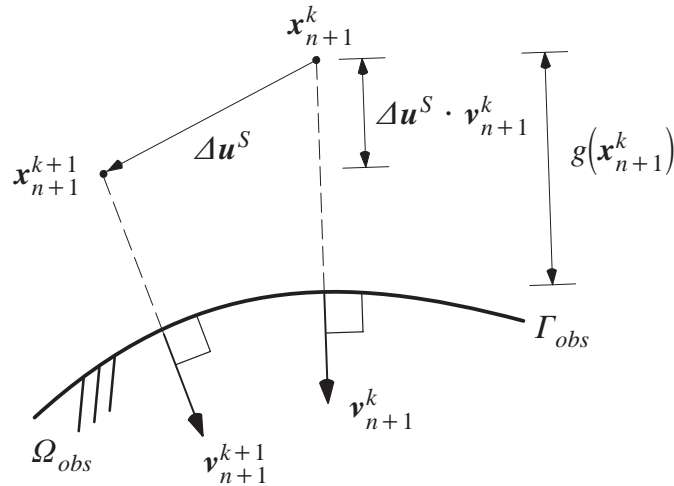


Abb. 7.1: Inkrementelle Nichtdurchdringungsbedingung

Wird diese integrale Bedingung nun mit Hilfe der entsprechenden Ansatzfunktionen für die Verschiebungen und die Variation des Lagrange-Multiplikators diskretisiert, entsteht

$$(\delta z_v)_i \int_{\gamma_c^{(1)h}} \phi_i^D N_j^S d\gamma \left[(\mathbf{v}_{n+1}^k)^T \Delta \mathbf{d}^S \right]_j \leq (\delta z_v)_i \int_{\gamma_c^{(1)h}} \phi_i^D g^h(\mathbf{d}_{n+1}^k) d\gamma . \quad (7.17)$$

Mit den Definitionen für die gewichtete inkrementelle Verschiebung eines Knotens in Richtung seiner Normalen (Gl. (7.10)) und dem Vektor der gewichteten Klaffung $\tilde{\mathbf{g}}$ (Gl. (7.6)), resultiert die inkrementelle Inpenetrabilitätsbedingung (7.11).

Durch die schwache Erfüllung der geometrischen Randbedingung sind zusätzliche Wichtungsfaktoren in die Formulierung hineingekommen, die eine gewisse Information über den Verlauf der Klaffung entlang des Kontaktrandes beinhalten.

7.1.3 Aktive-Mengen-Strategie

Zur Lösung des hier beschriebenen reibungsfreien Kontaktproblems müssen die Ungleichheitsnebenbedingungen aus (7.13) in Gleichheitsnebenbedingungen umgeformt werden. Dafür müssen all diejenigen Knoten auf dem Kontaktrand bestimmt werden, die sich während eines betrachteten Zeitinkrementes Δt mit dem starren Hindernis in Kontakt befinden. Diese Knoten werden im Weiteren als aktive und diejenigen, die sich nicht in Kontakt befinden, als inaktive Knoten bezeichnet. Das Teilgebiet S aller FE-Knoten auf dem Kontaktrand wird hierfür nochmals in zwei Unterteilgebiete aufgespalten: in die Untermenge A , in der alle aktiven Knoten zusammengefasst werden und in die Untermenge I , die alle inaktiven Knoten beinhaltet. Zur Bestimmung der potentiellen Kontaktknoten wird eine sogenannte *Primal-Duale Aktive-Mengen-Strategie* angewandt (Alart und Curnier (1991), Christensen et al. (1998) und Hintermüller et al. (2003)). Diese Methode wurde von Hieber und Wohlmuth (2005) für geometrisch lineare Mehrkörper-Kontaktprobleme verwendet und von Brunssen et al. (2006) für die Analyse von materiell nichtlinearen Kontaktproblemen eines deformierbaren Körpers mit einem starren

Werkzeug eingesetzt. In Hartmann et al. (2006) wird diese Strategie für die Untersuchung von dynamischen Kontaktproblemen dünnwandiger Strukturen mit einem starren Hindernis genutzt. Die Grundidee der hier angewendeten *Aktiven-Mengen-Strategie* ist in Abbildung 7.2 dargestellt. Ausgehend von einem bereits auskonvergierten Verformungszustand zum Zeitschritt n werden zunächst die FE-Knoten auf dem Slave-Rand in eine Teilmenge A und I aufgeteilt. Dann werden für alle aktiven Knoten explizit die einzuhaltenden Verschiebungsrandbedingungen und für alle inaktiven die entsprechende Spannungsrandbedingung vorgeschrieben. Das effektive inkrementelle Strukturgleichungssystem (6.18) wird entsprechend der vorgegebenen Randbedingungen modifiziert und das daraus resultierende nichtlineare Gleichungssystem iterativ gelöst. Nachdem ein Gleichgewichtszustand gefunden wurde, der die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt, wird überprüft, ob alle Knoten auf dem Kontaktrand der richtigen Teilmenge zugeordnet wurden. Ergibt sich für einen aktiven Knoten ein negativer Wert des diskreten Lagrange-Multiplikators ($z_v < 0$) wird dieser Knoten inaktiv gesetzt. Verletzt andererseits ein inaktiv angenommener Knoten die Inpenetrabilitätsbedingung, wird dieser der Teilmenge der aktiven Knoten zugeordnet. Mit der korrigierten Aufteilung der aktiven und inaktiven Knoten wird erneut vom bekannten Verformungszustand des Zeitschrittes n gestartet. Die Randbedingungen werden für die korrigierten Teilmengen A bzw. I vorgeschrieben und das entsprechende Gleichungssystem

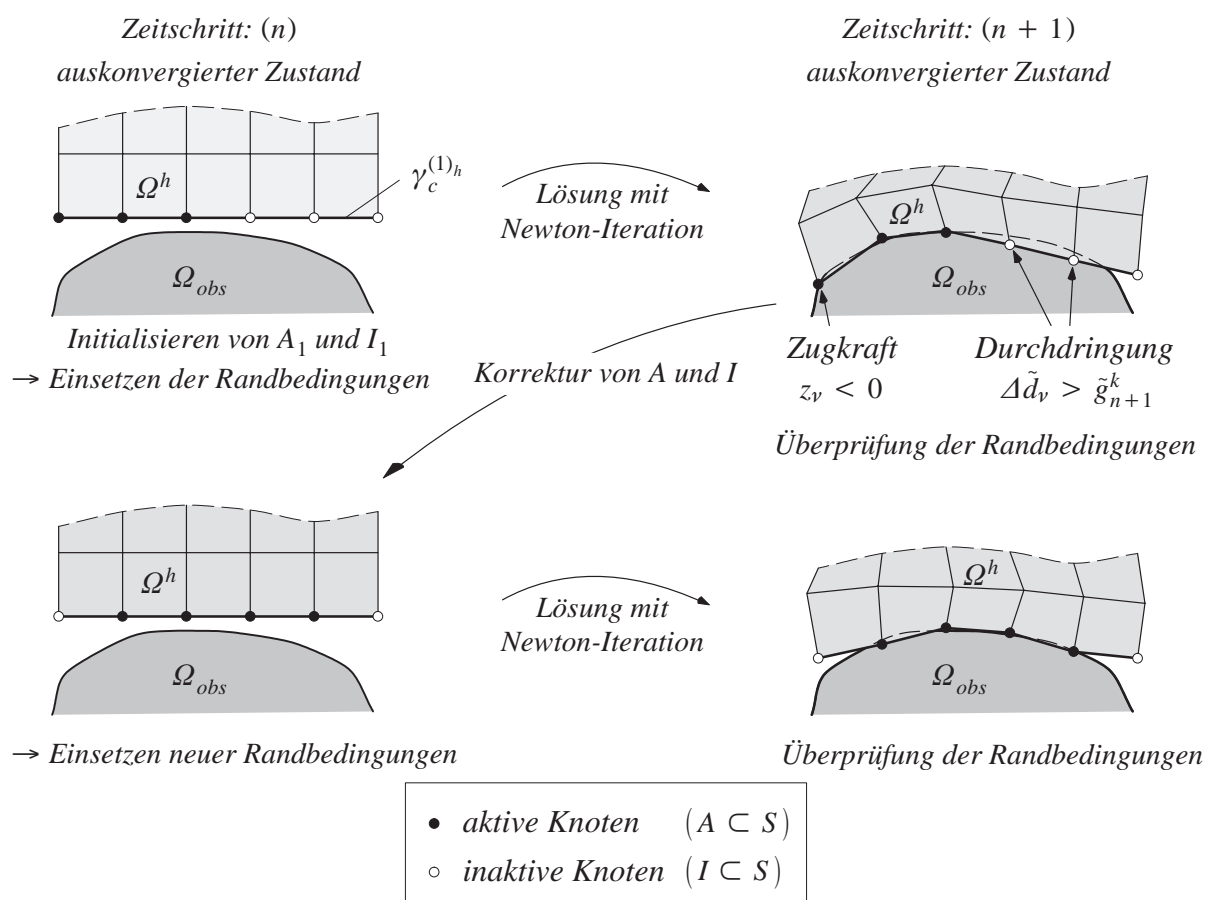


Abb. 7.2: Grundidee der Aktiven-Mengen-Strategie

chungssystem gelöst. Dies wird solange wiederholt, bis sich beim Überprüfen der Randbedingungen keine Veränderung der aktiven Menge mehr ergibt. Danach wird zum nächsten Zeitschritt übergegangen und der gleiche Vorgang wiederholt.

Der Algorithmus für die Aktive-Mengen-Strategie innerhalb eines Zeitinkrementes $[t_n, t_{n+1}]$ ist in Abbildung 7.3 zusammengefasst. Darin kennzeichnet k den Iterationszähler innerhalb einer Newton-Iteration und l den jeweiligen Schritt der Aktiven-Mengen-Schleife.

(0) *Initialisieren von A_l und I_l , so dass gilt:*
 $S = A_l \cup I_l$ und $A_l \cap I_l = \emptyset$ und Setzen von $l = 1$.

(1) *Lösung des effektiven Strukturgleichungssystems (6.18) für die inkrementellen Knotenverschiebungen unter Berücksichtigung folgender Randbedingungen:*

$$\begin{aligned} (\Delta \tilde{d}_v)_i^l &= (\tilde{g}_{n+1}^k)_i^l && \text{für alle } i \in A_l, \\ (z_v)_i^l &= 0 && \text{für alle } i \in I_l, \\ (z_\tau)_i^l &= \mathbf{0} && \text{für alle } i \in S. \end{aligned}$$

(2) *Setzen von A_{l+1} und I_{l+1} zu:*

$$\begin{aligned} A_{l+1} &:= \left\{ i \in S : (z_v)_i^l + (\Delta \tilde{d}_v - \tilde{g}_{n+1}^k)_i^l > 0 \right\}, \\ I_{l+1} &:= \left\{ i \in S : (z_v)_i^l + (\Delta \tilde{d}_v - \tilde{g}_{n+1}^k)_i^l \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

(3) *Wenn $A_{l+1} = A_l$ (und $I_{l+1} = I_l$), mit nächstem Zeitschritt fortfahren, ansonsten Setzen von $l := l + 1$ und Neubeginn bei (1).*

Abb. 7.3: Algorithmus der Aktiven-Mengen-Strategie für den Ein-Körper-Kontakt

Der hier verwendete Algorithmus wird auch als *exakte* Aktive-Mengen-Strategie bezeichnet, da innerhalb jeder Schleife der aktiven Menge das daraus resultierende nichtlineare Gleichungssystem exakt gelöst wird. In Hübner und Wohlmuth (2005) sowie Brunssen et al. (2006) wurde gezeigt, dass eine sogenannte *inexakte* Aktive-Mengen-Strategie den Lösungsprozess deutlich beschleunigen kann, ohne dabei die Qualität der Lösung zu beeinflussen. Bei einer *inexakten* Version der Aktiven-Mengen-Strategie wird die Lösung des resultierenden Gleichungssystems zunächst nicht vollständig ausiteriert, da für die Entscheidung, ob ein Knoten aktiv oder inaktiv zu setzen ist, bereits eine grobe Näherung der Lösung genügt. Sind die korrekten Teilmengen A und I bekannt, wird das abschließende Gleichungssystem vollständig ausiteriert und exakt gelöst. Die *inexakte* Strategie kann zudem mit einem iterativen Löser kombiniert werden. Detaillierte Ausführungen über Möglichkeiten zur weiteren Optimierung der Aktiven-Mengen-Strategie finden sich in den Arbeiten von Hübner und Wohlmuth (2005) sowie in Brunssen et al. (2006).

7.1.4 Modifikation der effektiven, inkrementellen Strukturgleichung

Sind die Teilmengen A und I bekannt, müssen die entsprechenden Randbedingungen in die inkrementelle effektive Strukturgleichung (6.18) eingebracht werden. Dazu wird die Diagonalmatrix D_S in

$$D_S = \begin{bmatrix} D^{I_l} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D^{A_l} \end{bmatrix} \quad (7.18)$$

aufgespalten. Die Normalenvektoren der aktiven Knoten werden in der Matrix $\tilde{N}_{A_l} \in \mathbb{R}^{|A_l| \times d|A_l|}$ zusammengefasst, wobei $|A_l|$ die Anzahl aller aktiver Knoten kennzeichnet. Für eine dreidimensionale Problemstellung ist sie mit

$$\tilde{N}_{A_l} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & w_{ii}v_i^x & w_{ii}v_i^y & w_{ii}v_i^z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad i \in A_l \quad (7.19)$$

definiert. Darin ist w_{ii} die Abkürzung derjenigen Einträge von $D_S[i, i]$, die nicht Null sind und die Eigenschaft von Wichtungsfaktoren haben. Zusätzlich werden die normierten Tangentenvektoren eines Knotens

$$\mathbf{t}_i^\xi \perp \mathbf{v}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_i^\eta := \mathbf{t}_i^\xi \times \mathbf{v}_i \quad \text{mit} \quad \|\mathbf{v}_i\| = \|\mathbf{t}_i^\xi\| = \|\mathbf{t}_i^\eta\| = 1 \quad (7.20)$$

in den Matrizen $T_{A_l}^{(m)} \in \mathbb{R}^{|A_l| \times d|A_l|}$ zusammengefasst. Für dreidimensionale Fälle sind diese folgendermaßen definiert:

$$T_{A_l}^{(m)} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & (t_i^x)^{(m)} & (t_i^y)^{(m)} & (t_i^z)^{(m)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad m = \xi, \eta, \quad i \in A_l. \quad (7.21)$$

Mit Hilfe dieser Definitionen können nun die diskreten Randbedingungen (7.13) und (7.14) in das inkrementelle effektive Strukturgleichungssystem (6.18) eingebracht werden. Daraus resultiert

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_T^{eff})_{NN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{NI_l} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{NA_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_T^{eff})_{I_lN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{I_lI_l} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{I_lA_l} & D^{I_l} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{K}_T^{eff})_{A_lN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{A_lI_l} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{A_lA_l} & \mathbf{0} & D^{A_l} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(d|I_l|)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{N}_{A_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & T_{A_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^{I_l} \\ \Delta \mathbf{d}^{A_l} \\ \mathbf{z}^{I_l} \\ \mathbf{z}^{A_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{eff} \\ \mathbf{f}_{I_l}^{eff} \\ \mathbf{f}_{A_l}^{eff} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{A_l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.22)$$

Hierin ist $\mathbf{I}_{(d|I_l|)}$ die Einheitsmatrix mit der Dimension $(d|I_l|)$, wobei $|I_l|$ die Anzahl aller inaktiver Knoten darstellt. Die Gesamtmatrix T_{A_l} aller normierter Tangentenvektoren der aktiven Knoten

nimmt für den dreidimensionalen Fall die Form $\mathbf{T}_{A_l} = [\mathbf{T}_{A_l}^{\xi}, \mathbf{T}_{A_l}^{\eta}]^T$ an. Im Vektor $\tilde{\mathbf{g}}_{A_l}$ sind die gewichteten Klaffungen $(\tilde{g}_{n+1}^k)_i$ der aktiven Knoten zusammengefasst. Der Vektor \mathbf{z}^{I/A_l} repräsentiert die diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren auf dem Kontaktrand zum Zeitpunkt $t_{n+1-\alpha_f}$.

Bevor dieses inkrementelle Gleichungssystem weiter modifiziert wird, sollen zunächst die Bedeutungen der einzelnen Gleichungen diskutiert werden: Die ersten drei Zeilen von Gleichung (7.22) entsprechen genau den ersten beiden Zeilen von Gleichung (6.18), mit dem Unterschied, dass nun die Teilmenge S aller Knoten auf dem Slave-Rand nochmals in die Untermenge aller aktiver und inaktiver Knoten unterteilt wurde. Mit der vierten Zeile von Gleichung (7.22) wird explizit gefordert, dass alle diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren verschwinden müssen, falls der zugehörige Knoten inaktiv und somit nicht in Kontakt mit dem starren Hindernis ist. Die Einhaltung der geometrischen Inpenetrabilitätsbedingung wird mit der fünften Zeile gefordert. Hier wird erzwungen, dass die gewichtete inkrementelle Verschiebung eines aktiven Knotens in Normalenrichtung genau so groß ist wie die zugehörige gewichtete Klaffung. Damit wird gewährleistet, dass jeder aktive Knoten im ausiterierten Zustand die Lücke zum starren Hindernis geschlossen hat und im integralen Sinne exakt in Kontakt mit diesem ist. Während der Gleichgewichtsiteration strebt die gewichtete Klaffung gegen Null ($\tilde{\mathbf{g}}_{A_l} \rightarrow \mathbf{0}$). Die Einhaltung der Gleitbedingung für reibungsfreien Kontakt wird mit der letzten Zeile in Gleichung (7.22) erfüllt, indem explizit gefordert wird, dass der tangential Anteil des diskreten Lagrange-Multiplikators $\mathbf{z}_t^{A_l} = \mathbf{T}_{A_l} \mathbf{z}^{A_l}$ aller aktiver Knoten verschwindet.

Vor der Lösung des Gleichungssystems (7.22) wird dieses vereinfacht und reduziert. Aufgrund der Verwendung diskreter dualer Ansatzfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren ist es möglich, deren diskrete Knotenwerte unter Verwendung des inkrementellen effektiven Strukturgleichungssystems (6.18) zu eliminieren:

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}_S^{-1} \left[\mathbf{f}_S^{eff} - (\mathbf{K}_T^{eff})_{SN} \Delta \mathbf{d}^N - (\mathbf{K}_T^{eff})_{SS} \Delta \mathbf{d}^S \right]. \quad (7.23)$$

Da die inkrementellen Verschiebungen $\Delta \mathbf{d}$ im Laufe der Gleichgewichtsiteration sukzessive kleiner werden und schließlich gegen Null streben ($\Delta \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}$), können die diskreten Werte der Lagrange-Multiplikatoren auch durch

$$\mathbf{z} \approx \mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{f}_S^{eff} \quad (7.24)$$

approximiert werden. Hierin wird wiederum deutlich, dass die Kontaktkräfte $\mathbf{f}_S^c = \mathbf{D}_S \mathbf{z}$ im Gleichgewichtszustand genau den inneren Knotenkräften auf dem Kontaktrand entsprechen.

Eine statische Kondensation (Anhang B.2) von Gleichung (7.22) liefert schließlich das reduzierte System

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_T^{eff})_{NN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{NI_l} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{NA_l} \\ (\mathbf{K}_T^{eff})_{I_lN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{I_lI_l} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{I_lA_l} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}_{A_l} \\ T_{A_l}(\mathbf{K}_T^{eff})_{A_lN} & T_{A_l}(\mathbf{K}_T^{eff})_{A_lI_l} & T_{A_l}(\mathbf{K}_T^{eff})_{A_lA_l} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_T^{eff,mod}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^{I_l} \\ \Delta \mathbf{d}^{A_l} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{eff} \\ \mathbf{f}_{I_l}^{eff} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{A_l} \\ T_{A_l} \mathbf{f}_{A_l}^{eff} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^{eff,mod}}, \quad (7.25)$$

das innerhalb der Gleichgewichtsiteration für jeden Iterationsschritt k gelöst werden muss. Die Größe dieses Gleichungssystems wird durch die FE-Diskretisierung bestimmt und bleibt während der gesamten Berechnung konstant. Als unbekannte Größen treten lediglich die inkrementellen Knotenverschiebungen auf. Die eingeführten diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren werden in einem Nachlaufprozess variationell konsistent aus den Knotenverschiebungen bzw. den korrespondierenden inneren Knotenkräften bestimmt. Das direkte Einbringen der zu erfüllenden Kontakt-Randbedingungen hat zur Folge, dass schließlich ein unsymmetrisches Gleichungssystem entsteht.⁶ Dieser Nachteil wird jedoch nach Ansicht des Autors aufgrund verschiedener entscheidender Vorteile kompensiert.

Die vorgestellte Formulierung garantiert die exakte Erfüllung der geometrischen Randbedingungen in einem schwachen integralen Sinne. Im Gegensatz zur klassischen Lagrange-Multiplikator-Methode wird dies jedoch nicht durch zusätzliche globale Unbekannte erreicht. Aufgrund der dualen Ansatzfunktionen für die Diskretisierung der Lagrange-Multiplikatoren lassen sich diese lokal eliminieren und treten somit nicht als primäre Variablen auf. Zusätzlich ist darauf hinzuweisen, dass die hier vorgestellte Formulierung keinerlei benutzerdefinierte Parameter, wie beispielsweise einen Penalty-Parameter, benötigt.

7.1.5 Gesamter Lösungsalgorithmus

Der gesamte Lösungsalgorithmus zur numerischen Analyse von reibungsfreien, dynamischen Kontaktproblemen eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis unter Berücksichtigung großer Verformungen soll im Folgenden noch einmal kurz zusammengefasst werden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird für die Berücksichtigung der Kontakt-Randbedingungen auf die Grundidee der Mortar-Methode zurückgegriffen, indem die Kontinuitätsbedingungen entlang des Kontaktrandes in einem integralen Sinne formuliert werden. Dabei weist die hier verwendete Formulierung eine sehr enge Verwandtschaft zur klassischen Lagrange-Multiplikator-Methode

6. Mittels einer geeigneten Basistransformation ließe sich das resultierende Gleichungssystem nachträglich symmetrisieren.

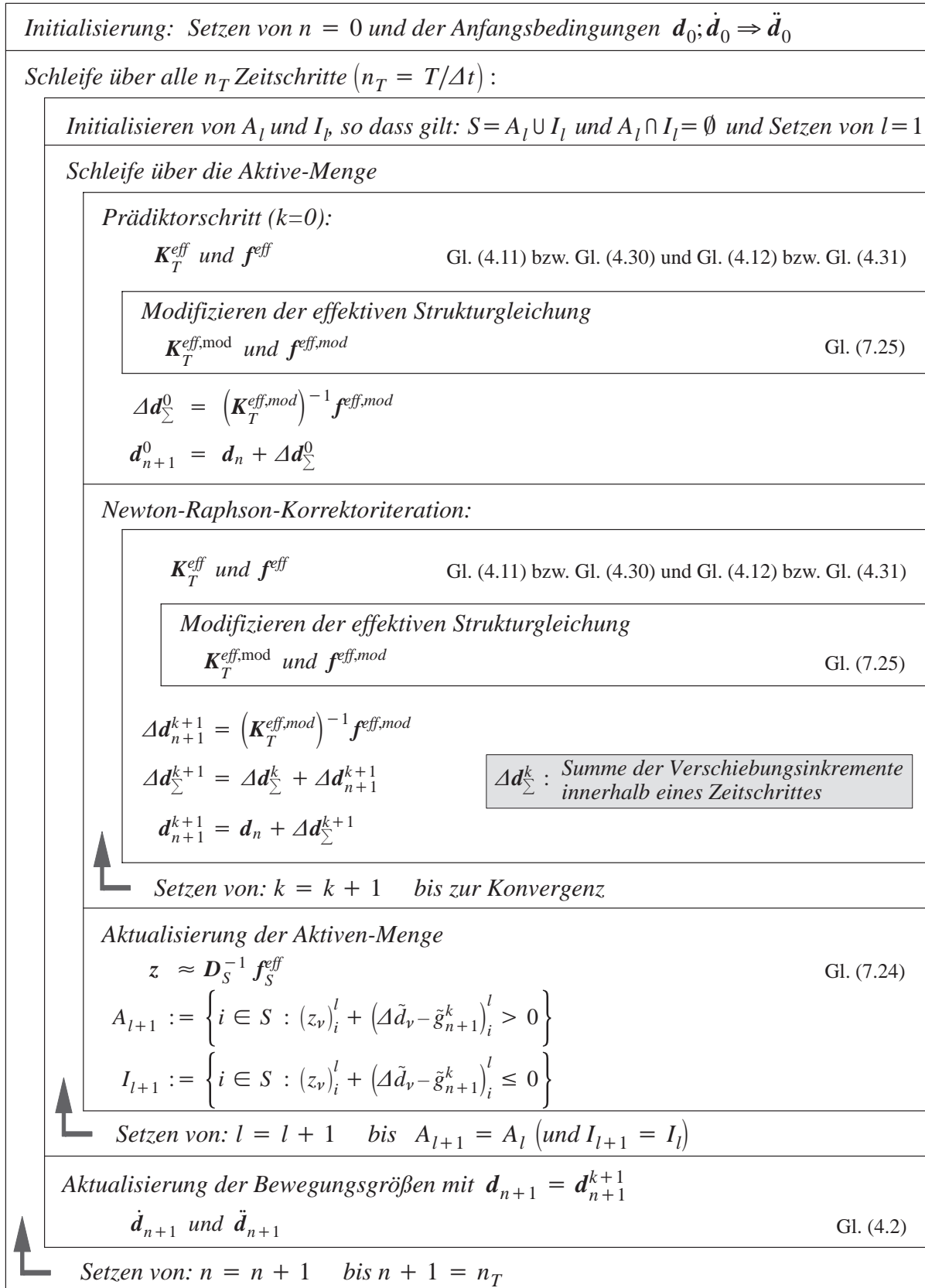


Abb. 7.4: Gesamter Lösungsalgorithmus für ein dynamisches Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis

auf. Die Besonderheit der dargestellten Formulierung besteht in der Wahl der diskreten Ansatzfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren. Mit Hilfe sogenannter dualer Formfunktionen, die zusammen mit den Interpolationsfunktionen für die Verschiebungen auf dem Kontaktrand die Biorthogonalitätsbedingung (5.17) erfüllen, ist es möglich, die mehrdimensionale Ungleichheitsnebenbedingung in einen Satz von skalaren Ungleichungen für jeden einzelnen FE-Knoten auf dem Kontaktrand zu reduzieren. Dieser Satz von skalaren Ungleichungen wird unter Verwendung einer Aktiven-Mengen-Strategie in skalare Gleichheitsnebenbedingungen umgewandelt, die dann explizit als vorgegebene Randbedingungen dem effektiven Strukturgleichungssystem hinzugefügt werden. Die diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren stehen mit den inneren Knotenkräften am Kontaktrand im Gleichgewicht und können aus dem Gleichungssystem eliminiert werden. Durch eine statische Kondensation entsteht schließlich ein zu lösendes inkrementelles unsymmetrisches Gleichungssystem, dessen Größe während der gesamten Rechnung konstant bleibt. In Abbildung 7.4 ist der gesamte Lösungsalgorithmus der hier vorgestellten Kontaktformulierung nochmals zusammengefasst.

7.1.6 Numerische Integration der gewichteten Klaffung

Die Berechnung der gewichteten Klaffung muss in jedem Iterationsschritt durchgeführt werden. Hierfür muss die Ansatzfunktion ϕ_i^D eines Knotens i mit einer geeigneten Näherung der tatsächlichen Klaffungsfunktion über den Kontaktrand numerisch integriert werden. Für einen zweidimensionalen Fall ist dies unter Verwendung bilinearer Ansatzfunktionen für die FE-Diskretisierung in Abbildung 7.5 dargestellt.

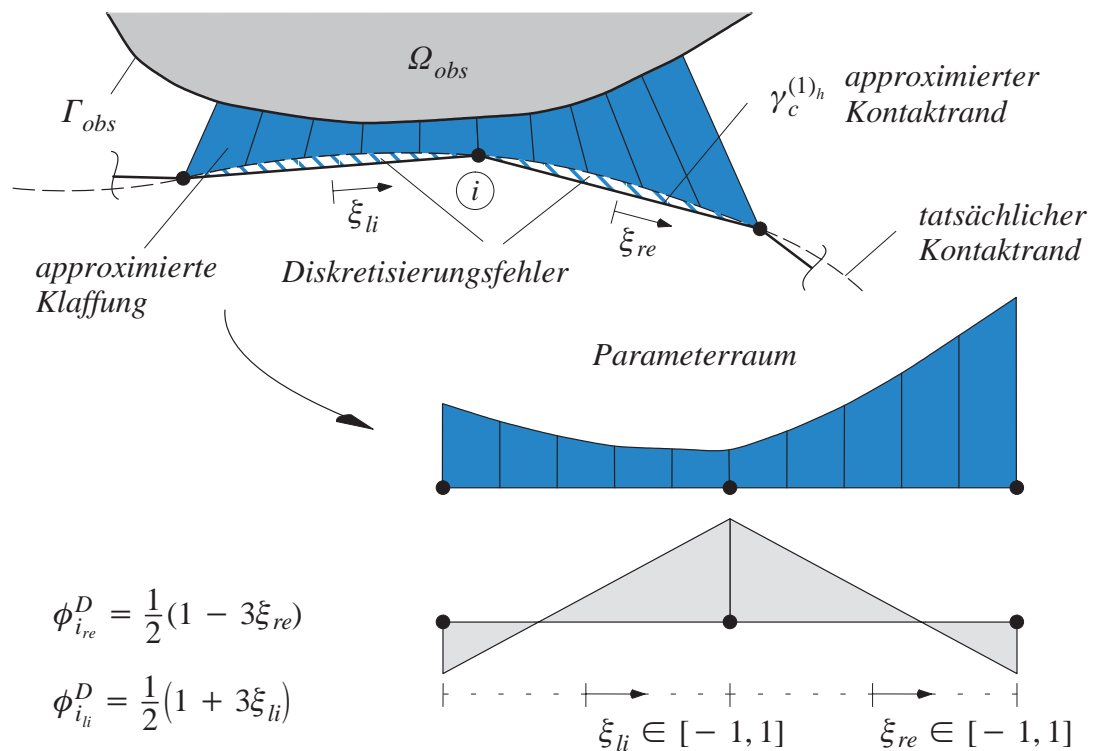


Abb. 7.5: Numerische Integration der gewichteten Klaffung

In der Abbildung ist erkennbar, dass die wahre Geometrie des Kontaktrandes durch die Diskretisierung mit Finiten Elementen in der Regel nur angenähert werden kann. Dadurch entstehen bereits geometrische Diskretisierungsfehler (schraffierter Bereich), die mit zunehmender Feinheit des FE-Netzes jedoch abnehmen. Für die numerische Integration wird die approximierte Klaffung herangezogen, die sich aus dem Abstand zwischen dem approximierten Kontaktrand $\gamma_c^{(1)h}$ und dem Rand des starren Hindernisses Γ_{obs} ergibt. Um die approximierte Klaffung entlang des Kontaktrandes zu integrieren, ist es zweckmäßig, ein lokales Koordinatensystem $\xi_{li}, \xi_{re} \in [-1, 1]$ einzuführen und die numerische Integration dann mit Hilfe einer Gauß-Integration im Parameterraum durchzuführen.

Da für die Anwendung der Gauß-Integration lediglich einzelne Funktionswerte der zu integrierenden Funktionen benötigt werden, wird die Klaffungsfunktion nicht kontinuierlich approximiert. Der Abstand zwischen dem approximierten Kontaktrand und dem starren Hindernis wird jeweils an den Integrationspunkten (Gauß-Punkten) ausgewertet. Dabei hängt die Anzahl der benötigten Gauß-Punkte von der Form der zu integrierenden Funktionen ab. Ist das starre Hindernis beispielsweise eine Gerade, ergibt sich für die approximierte Klaffung bei linearen Verschiebungsansätzen eine lineare Funktion, die mit den ebenfalls linearen Ansätzen der Lagrange-Multiplikatoren integriert werden muss. Für die exakte Auswertung dieser Integration würden bereits zwei Gauß-Punkte je Elementkante genügen. Kompliziertere Geometrien des starren Hindernisses erfordern entsprechend eine erhöhte Anzahl an Integrationspunkten. Die Integration der gewichteten Klaffung für den Sonderfall eines kreisförmigen, starren Hindernisses wird in Cichosz (2006) beschrieben. Ausführliche Darstellungen über die Gauß-Integration sowie die Angabe der Lage der Stützstellen und der notwendigen Gewichtungsfaktoren, finden sich unter anderem in Bathe (2002) oder Zienkiewicz et al. (2005).

Für dreidimensionale Probleme erfolgt die numerische Integration für die Bestimmung der gewichteten Klaffung im Prinzip analog. Es ist lediglich darauf zu achten, die diskreten dualen Ansatzfunktionen im Parameterraum derart zu konstruieren, dass sie die Biorthogonalitätsbedingung mit den diskreten Ansätzen für die Knotenverschiebungen im wirklichen Raum erfüllen (Kap. 6.3.3).

7.2 Normalkontakt zweier deformierbarer Körper

7.2.1 Schwache, inkrementelle Nichtdurchdringungsbedingung

Nachdem in Kapitel 6.2.4 die inkrementelle effektive Strukturgleichung für das Kontaktproblem zweier deformierbarer Körper hergeleitet wurde, wird nachfolgend dargestellt, wie die zu erfüllenden Kontakt-Randbedingungen in die Formulierung eingebracht werden. Ausgangspunkt ist wiederum die schwache Form der Inpenetrabilitätsbedingung für reibungsfreien Kontakt (Gl. (7.1))

$$\int_{\gamma_c^{(1)}} \delta \lambda_\nu g \, d\gamma \geq 0. \quad (7.26)$$

Die diskretisierte, schwache Form ergibt sich mit den bekannten Ansätzen für die Verschiebungen auf den beiden Kontakträndern und der Variation des Lagrange-Multiplikators in Normalenrichtung zu

$$\int_{\gamma_c^{(1)h}} \delta \lambda_\nu^h g^h \, d\gamma = -(\delta z_\nu)_i \left[\int_{\gamma_c^{(1)h}} (\phi^D \mathbf{v})_i^T N_j^S \, d\gamma (\mathbf{X}_j^S + \mathbf{d}_j^S) - \int_{\gamma_c^{(1)h}} (\phi^D \mathbf{v})_i^T N_k^M \, d\gamma (\mathbf{X}_k^M + \mathbf{d}_k^M) \right] \geq 0. \quad (7.27)$$

Diese muss für beliebige $\delta z_\nu \geq 0$ gelten. Mit $\tilde{\mathbf{g}} \in \mathbb{R}^{n_c^S}$ wird wieder ein Vektor der gewichteten Knotenklaffungen eingeführt, dessen Einträge mit

$$\tilde{g}_i := - \left[\int_{\gamma_c^{(1)h}} (\phi^D \mathbf{v})_i^T N_j^S \, d\gamma (\mathbf{X}_j^S + \mathbf{d}_j^S) - \int_{\gamma_c^{(1)h}} (\phi^D \mathbf{v})_i^T N_k^M \, d\gamma (\mathbf{X}_k^M + \mathbf{d}_k^M) \right] \quad (7.28)$$

definiert sind. Die numerische Auswertung dieses Terms wird in Kapitel 7.2.6 diskutiert. Im Rahmen eines inkrementell iterativen Verfahrens muss am Ende eines Zeitschrittes die Bedingung

$$\tilde{\mathbf{g}}_{n+1} = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{d}_{n+1}^S, \mathbf{d}_{n+1}^M) \geq \mathbf{0} \quad (7.29)$$

erfüllt sein, so dass eine Linearisierung von (7.29) notwendig ist. Dies führt schließlich auf die inkrementelle Bedingung

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{d}_{n+1}^S, \mathbf{d}_{n+1}^M)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^S} \Delta \mathbf{d}^S + \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{d}_{n+1}^S, \mathbf{d}_{n+1}^M)}{\partial \mathbf{d}_{n+1}^M} \Delta \mathbf{d}^M \geq -\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^k. \quad (7.30)$$

Hierfür müssen die beiden partiellen Ableitungen nach den unbekanntenen Knotenverschiebungen auf dem Slave- bzw. Master-Rand gebildet werden. Diese berechnen sich mit

$$\frac{\partial(\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^k)_i}{\partial(\mathbf{d}_{n+1}^S)_j} = - (\mathbf{v}_{n+1}^k)_i^T \underbrace{\int_{\gamma_c^{(1)h}} \phi_i^D N_j^S d\gamma}_{\rightarrow \mathbf{D}_S} \quad (7.31)$$

und

$$\frac{\partial(\tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^k)_i}{\partial(\mathbf{d}_{n+1}^M)_k} = + (\mathbf{v}_{n+1}^k)_i^T \underbrace{\int_{\gamma_c^{(1)h}} \phi_i^D N_j^M d\gamma}_{\rightarrow \mathbf{M}_M} . \quad (7.32)$$

Die Auswertung der Integralterme führt auf die bekannten Kopplungsmatrizen \mathbf{D}_S und \mathbf{M}_M . Wird die Matrix der gewichteten Normalen $\tilde{\mathbf{N}} \in \mathbb{R}^{n_s^c \times dn_s^c}$ mit

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & w_{ii} v_i^x & w_{ii} v_i^y & w_{ii} v_i^z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad i \in S \quad (7.33)$$

definiert, folgt die inkrementelle Inpenetrabilitätsbedingung in kompakter Vektor-Matrix-Schreibweise:

$$\tilde{\mathbf{N}} [\Delta \mathbf{d}^S - \mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{M}_M \Delta \mathbf{d}^M] \leq \tilde{\mathbf{g}}_{n+1}^k . \quad (7.34)$$

Darin beschreibt der Ausdruck in Klammern die inkrementelle, relative Verschiebung der beiden Kontaktträger zueinander. Diese Relativverschiebung wird nachfolgend *inkrementeller Sprung* genannt und durch

$$[\Delta \mathbf{d}] = \Delta \mathbf{d}^S - \mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{M}_M \Delta \mathbf{d}^M = \Delta \mathbf{d}^S - \hat{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{d}^M \quad (7.35)$$

gekennzeichnet. Hierfür wurde mit $\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{M}_M$ eine weitere häufig gebrauchte Abkürzung definiert. Aufgrund der Diagonalstruktur der Matrix $\tilde{\mathbf{N}}$ kann die mehrdimensionale inkrementelle Inpenetrabilitätsbedingung (7.34) wiederum in einen Satz von skalaren Ungleichheitsbedingungen für den inkrementellen Sprung eines Knotens auf dem Slave-Rand entkoppelt werden. Dazu wird mit

$$[\Delta \tilde{d}_v]_i := (\mathbf{v}_{n+1}^k)_i^T \mathbf{D}_S[i, i] [\Delta \mathbf{d}]_i, \quad (\text{keine Summe über } i) \quad (7.36)$$

die gewichtete inkrementelle Relativverschiebung eines Knotens i auf dem Slave-Rand in Richtung seiner Normalen definiert. Zusammen mit der Aufspaltung der diskreten Werte der Lagrange-Multiplikatoren in einen normalen und einen tangentialen Anteil (Gl. (7.12)) ergeben sich die Kontakt-Randbedingungen für jeden einzelnen Slave-Knoten:

$$[\Delta \tilde{d}_v]_i \leq (\tilde{g}_{n+1}^k)_i, \quad (z_v)_i \geq 0, \quad \left[z_v \left([\Delta \tilde{d}_v] - \tilde{g}_{n+1}^k \right) \right]_i = 0, \quad (7.37)$$

$$(z_\tau)_i = \mathbf{0}. \quad (7.38)$$

Die Anforderungen in (7.37) stellen wiederum die inkrementellen diskreten Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen und Gleichung (7.38) die Gleitbedingung für reibungsfreien Kontakt dar. Formal ähneln diese diskreten Bedingungen sehr stark denen des Ein-Körper-Kontakt-Falls (Gl. (7.13) und (7.14)). Der einzige Unterschied besteht darin, dass die geometrische Inpenetrabilitätsbedingung nicht direkt für die inkrementellen Verschiebungen eines Slave-Knotens ausgedrückt werden können, sondern nun für den inkrementellen Sprung formuliert werden müssen.

7.2.2 Lokale Basistransformation

Da die einzuhaltenden Kontakt-Randbedingungen in Abhängigkeit des inkrementellen Sprungs $[\Delta \mathbf{d}]$ formuliert sind, ist es sinnvoll, das inkrementelle effektive Strukturgleichungssystem (6.30) so umzuformen, dass der inkrementelle Sprung als primäre Unbekannte vorkommt. Dazu wird eine lokale Basistransformation durchgeführt (Wohlmuth und Krause (2003)), die auf ein algebraisches Gleichungssystem führt, das die gleiche Struktur hat, wie das für den Fall eines Ein-Körper-Kontaktes. Wird mit $\hat{\mathbf{K}}_T^{eff}$ die transformierte effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix von \mathbf{K}_T^{eff} eingeführt, ergibt sich die modifizierte Form des Gleichungssystems (6.30) zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{NN} & \hat{\mathbf{K}}_{NM} & \hat{\mathbf{K}}_{NS} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{K}}_{MN} & \hat{\mathbf{K}}_{MM} & \hat{\mathbf{K}}_{MS} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{K}}_{SN} & \hat{\mathbf{K}}_{SM} & \hat{\mathbf{K}}_{SS} & \mathbf{D}_S \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_T^{eff}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^M \\ [\Delta \mathbf{d}] \\ z_{n+1-\alpha_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{eff} \\ \mathbf{f}_M^{eff} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S^{eff} \\ \mathbf{f}_S^{eff} \end{bmatrix}, \quad (7.39)$$

wobei die transformierte, effektive, tangentielle Steifigkeitsmatrix $\hat{\mathbf{K}}_T^{eff}$ durch

$$\hat{\mathbf{K}}_T^{eff} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_T^{eff})_{NN} & \vdots & (\mathbf{K}_T^{eff})_{NM} + (\mathbf{K}_T^{eff})_{NS} \hat{\mathbf{M}} & \vdots & (\mathbf{K}_T^{eff})_{NS} \\ (\mathbf{K}_T^{eff})_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T (\mathbf{K}_T^{eff})_{SN} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{MM} + (\mathbf{K}_T^{eff})_{MS} \hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{M}}^T (\mathbf{K}_T^{eff})_{SM} + \hat{\mathbf{M}}^T (\mathbf{K}_T^{eff})_{SS} \hat{\mathbf{M}} & (\mathbf{K}_T^{eff})_{MS} + \hat{\mathbf{M}}^T (\mathbf{K}_T^{eff})_{SS} \\ (\mathbf{K}_T^{eff})_{SN} & \vdots & (\mathbf{K}_T^{eff})_{SM} + (\mathbf{K}_T^{eff})_{SS} \hat{\mathbf{M}} & \vdots & (\mathbf{K}_T^{eff})_{SS} \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

gegeben ist. Im Anhang B.3 findet sich eine anschauliche Darstellung der notwendigen Umformungsprozesse.

Werden im Gleichungssystem (7.39) die Teilbereiche N und M zusammengefasst, zeigt sich, dass dieses modifizierte Gleichungssystem genau die gleiche algebraische Struktur aufweist, wie das des Ein-Körper-Kontakt-Problems (Gl. (6.18)).

7.2.3 Aktive-Mengen-Strategie

Da die algebraische Struktur des zu lösenden Gleichungssystems formal derjenigen des Ein-Körper-Kontakt-Problems entspricht, wird zur Berücksichtigung der Randbedingungen wiederum eine Aktive-Mengen-Strategie angewendet. Dazu werden die Slave-Knoten wieder in eine Teilmenge A aller aktiven und eine Teilmenge I aller inaktiven Knoten aufgeteilt. Der einzige Unterschied im Vergleich zum Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers ist, dass die Verschiebungsrandbedingung nun für den inkrementellen Sprung formuliert wird. Ebenso ist im Kontaktfall zweier deformierbarer Körper die Bedingung, ob ein Knoten aktiv oder inaktiv gesetzt werden muss, direkt abhängig von der inkrementellen relativen Verschiebung zwischen einem Slave-Knoten und dem entsprechenden Master-Rand. Der vollständige Algorithmus der Aktiven-Mengen-Strategie für den Fall eines Zwei-Körper-Kontaktes ist in Abbildung 7.6 dargestellt.

- (0) *Initialisieren von A_l und I_l , so dass gilt:
 $S = A_l \cup I_l$ und $A_l \cap I_l = \emptyset$ und Setzen von $l = 1$.*
- (1) *Lösung des transformierten effektiven Strukturgleichungssystems (7.39) für die inkrementellen Knotenverschiebungen bzw. den inkrementellen Sprung unter Berücksichtigung folgender Randbedingungen:*

$$\begin{aligned} [\Delta \tilde{d}_v]_i^l &= (\tilde{g}_{n+1}^k)_i^l && \text{für alle } i \in A_l, \\ (z_v)_i^l &= 0 && \text{für alle } i \in I_l, \\ (z_\tau)_i^l &= \mathbf{0} && \text{für alle } i \in S. \end{aligned}$$

- (2) *Setzen von A_{l+1} und I_{l+1} zu:*

$$\begin{aligned} A_{l+1} &:= \left\{ i \in S : (z_v)_i^l + ([\Delta \tilde{d}_v] - \tilde{g}_{n+1}^k)_i^l > 0 \right\}, \\ I_{l+1} &:= \left\{ i \in S : (z_v)_i^l + ([\Delta \tilde{d}_v] - \tilde{g}_{n+1}^k)_i^l \leq 0 \right\}. \end{aligned}$$

- (3) *Wenn $A_{l+1} = A_l$ (und $I_{l+1} = I_l$), mit nächstem Zeitschritt fortfahren, ansonsten Setzen von $l := l + 1$ und Neubeginn bei (1).*

Abb. 7.6: Algorithmus der Aktiven-Mengen-Strategie für den Zwei-Körper-Kontakt

7.2.4 Modifikation der effektiven, inkrementellen Strukturgleichung

Die Einarbeitung der Kontakt-Randbedingungen und die anschließende Modifikation der effektiven, inkrementellen Strukturgleichung erfolgen ebenfalls analog dem Vorgehen, das bereits für den Sonderfall des Ein-Körper-Kontaktes vorgestellt wurde. Deshalb werden die hierfür notwendigen Definitionen einzelner Matrizen nicht noch einmal wiederholt, sondern lediglich die davon abweichenden Gleichungen angegeben.

Mit der Aufteilung der Diagonalmatrix in einen aktiven und einen inaktiven Anteil (Gl. (7.18)), der Definition der Matrix \tilde{N}_{A_l} aller gewichteter Normalenvektoren (Gl. (7.19)) und der Matrix T_{A_l} aller Tangentenvektoren der aktiven Slave-Knoten können die diskreten Randbedingungen für den Kontaktfall zweier deformierbarer Körper ((7.37) und (7.38)) in das modifizierte inkrementelle effektive Strukturgleichungssystem (Gl. (7.39)) eingearbeitet werden. Daraus ergibt sich

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{NN} & \hat{\mathbf{K}}_{NM} & \hat{\mathbf{K}}_{NI_l} & \hat{\mathbf{K}}_{NA_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{K}}_{MN} & \hat{\mathbf{K}}_{MM} & \hat{\mathbf{K}}_{MI_l} & \hat{\mathbf{K}}_{MA_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{K}}_{I_lN} & \hat{\mathbf{K}}_{I_lM} & \hat{\mathbf{K}}_{I_lI_l} & \hat{\mathbf{K}}_{I_lA_l} & \mathbf{D}^{I_l} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{K}}_{A_lN} & \hat{\mathbf{K}}_{A_lM} & \hat{\mathbf{K}}_{A_lI_l} & \hat{\mathbf{K}}_{A_lA_l} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^{A_l} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{(d|I_l)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{N}_{A_l} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & T_{A_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^M \\ [\Delta \mathbf{d}^{I_l}] \\ [\Delta \mathbf{d}^{A_l}] \\ \mathbf{z}^{I_l} \\ \mathbf{z}^{A_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{\text{eff}} \\ \mathbf{f}_M^{\text{eff}} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S^{\text{eff}} \\ \mathbf{f}_{I_l}^{\text{eff}} \\ \mathbf{f}_{A_l}^{\text{eff}} \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{A_l} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.41)$$

wobei die transformierten Einträge der effektiven tangentiellen Steifigkeiten $\hat{\mathbf{K}}$ mit Gleichung (7.40) gegeben sind. Die Definitionen aller weiterer Matrizen sind in Kapitel 7.1.4 angegeben.

Die einzelnen Teilgleichungen in (7.41) unterscheiden sich in ihrer Bedeutung ebenfalls nur sehr geringfügig gegenüber dem Ein-Körper-Kontakt-Problem (Gl. (7.22)). Der Unterschied besteht lediglich darin, dass zusätzlich der Teilbereich M aller Knoten auf dem Master-Rand berücksichtigt werden muss. Außerdem wird das System aufgrund der durchgeführten Basistransformation nun für den inkrementellen Sprung $[\Delta \mathbf{d}]$ der Verschiebungen gelöst. Mit der fünften Zeile wird somit explizit die Einhaltung der geometrischen Inpenetrabilitätsbedingung gefordert. Die gewichtete inkrementelle Relativverschiebung eines aktiven Slave-Knotens in Richtung seiner Normalen muss genau so groß sein, dass die gewichtete Klaffung am Ende des Zeitschrittes verschwindet und die Lücke zwischen den beiden Körpern im integralen Sinne geschlossen wird. Somit strebt die gewichtete Klaffung während der Gleichgewichtsiteration ebenfalls wieder gegen Null ($\tilde{\mathbf{g}}_{A_l} \rightarrow \mathbf{0}$). Die Einhaltung der Gleitbedingung, sowie der Bedingung, dass die diskreten Werte der Lagrange-Multiplikatoren eines inaktiven Slave-Knotens Null sein müssen, wird genau analog zum Ein-Körper-Kontakt-Fall eingebracht.

Aufgrund der Verwendung diskreter dualer Ansatzfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren ist es analog zu (7.23) möglich, deren diskreten Knotenwerte unter Verwendung des inkrementellen effektiven Strukturgleichungssystems (Gl. (6.30)) zu eliminieren:

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}_S^{-1} \left[\mathbf{f}_S^{\text{eff}} - \left(\mathbf{K}_T^{\text{eff}} \right)_{SN} \Delta \mathbf{d}^N - \left(\mathbf{K}_T^{\text{eff}} \right)_{SM} \Delta \mathbf{d}^M - \left(\mathbf{K}_T^{\text{eff}} \right)_{SS} \Delta \mathbf{d}^S \right]. \quad (7.42)$$

Da im Laufe der Gleichgewichtsiteration die inkrementellen Verschiebungen $\Delta \mathbf{d}$ sukzessive kleiner werden und schließlich gegen Null streben ($\Delta \mathbf{d} \rightarrow \mathbf{0}$), können die diskreten Werte der Lagrange-Multiplikatoren wiederum durch

$$\mathbf{z} \approx \mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{f}_S^{\text{eff}} \quad (7.43)$$

approximiert werden.

Mit einer statischen Kondensation von Gleichung (7.41) entsteht schließlich das reduzierte System

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{NN} & \hat{\mathbf{K}}_{NM} & \hat{\mathbf{K}}_{NI_l} & \hat{\mathbf{K}}_{NA_l} \\ \hat{\mathbf{K}}_{MN} & \hat{\mathbf{K}}_{MM} & \hat{\mathbf{K}}_{MI_l} & \hat{\mathbf{K}}_{MA_l} \\ \hat{\mathbf{K}}_{I_l N} & \hat{\mathbf{K}}_{I_l M} & \hat{\mathbf{K}}_{I_l I_l} & \hat{\mathbf{K}}_{I_l A_l} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}_{A_l} \\ T_{A_l} \hat{\mathbf{K}}_{A_l N} & T_{A_l} \hat{\mathbf{K}}_{A_l M} & T_{A_l} \hat{\mathbf{K}}_{A_l I_l} & T_{A_l} \hat{\mathbf{K}}_{A_l A_l} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{K}}_T^{\text{eff}, \text{mod}}} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^M \\ [\Delta \mathbf{d}^{I_l}] \\ [\Delta \mathbf{d}^{A_l}] \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{\text{eff}} \\ \mathbf{f}_M^{\text{eff}} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S^{\text{eff}} \\ \mathbf{f}_{I_l}^{\text{eff}} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{A_l} \\ T_{A_l} \mathbf{f}_{A_l}^{\text{eff}} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{f}}^{\text{eff}, \text{mod}}}, \quad (7.44)$$

das innerhalb der Gleichgewichtsiteration für jeden Iterationsschritt k gelöst werden muss. Die hierfür notwendigen Umformungen entsprechen formal denjenigen des Ein-Körper-Kontaktes (Anhang B.2) und werden deshalb nicht noch einmal wiederholt.

Es ist erneut darauf hinzuweisen, dass sich die Größe des Gleichungssystems (7.44) während der Berechnung nicht verändert. Die einzigen Unbekannten sind wiederum die Verschiebungen bzw. die Relativverschiebungen, welche durch die FE-Diskretisierung bestimmt werden. In einem Nachlaufprozess können die diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren variationell konsistent aus den Knotenverschiebungen berechnet werden. Im Gegensatz zum Kontaktproblem eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis entsteht durch die Matrix \mathbf{M}_M ein zusätzlicher Kopplungsterm. Dieser bewirkt, dass Steifigkeitsbeziehungen zwischen Freiheitsgraden auf dem Slave- und auf dem Master-Rand entstehen, was Einfluss auf die Maske des Löser hat. In der Regel werden einem Lösungsalgorithmus lediglich die Einträge der Systemmatrix übergeben, die nicht Null sind. Dafür wird zu Beginn der Rechnung die Konnektivität zwischen den einzelnen Freiheitsgraden bestimmt und hierfür die entsprechende Maske des gewählten Speicherformates erstellt. Da die Freiheitsgrade auf dem Slave- bzw. Master-Rand zwei unterschiedlichen Körpern angehören, besteht zunächst keine Verbindung zwischen diesen Unbekannten. Hingegen bewirken die während des Kontaktes entstehenden Kontaktkräfte der kontaktierenden Körper eine Kopplung der entsprechenden Freiheitsgrade. Es entstehen Einträge an bestimmten Stellen der Systemmatrix, für die zunächst keine Einträge vorgesehen waren, so dass die Maske für das gewählte Speicherformat während der Berechnung verändert werden

muss. Dies ist ein erheblicher Eingriff, was den Lösungsprozess deutlich verlangsamt. Das Entstehen zusätzlicher Einträge in der Systemmatrix stellt keine Besonderheit der hier vorgestellten Kontaktformulierung dar, sondern tritt generell bei der Analyse von Kontaktproblemen zweier deformierbarer Körper mittels der FEM auf.

Ebenso wie die vorgestellte Formulierung für den Fall eines Ein-Körper-Kontaktes garantiert der Ansatz für den Kontaktfall zweier deformierbarer Körper die exakte Erfüllung der geometrischen Randbedingungen in einem schwachen integralen Sinne. Durch die Verwendung diskreter dualer Ansatzfunktionen zur Approximation der Lagrange-Multiplikatoren in Verbindung mit einer Aktiven-Mengen-Strategie wird dies bemerkenswerterweise ohne zusätzliche globale Unbekannte und ohne Einführung eines benutzerdefinierten Parameters (z.B. Penalty-Parameter) erreicht.

7.2.5 Gesamter Lösungsalgorithmus

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Formulierung zur numerischen Kontaktanalyse zweier deformierbarer Körper lässt sich wie folgt zusammenfassen: Aufbauend auf der Grundidee der Mortar-Methode werden die Randbedingungen entlang des Kontaktrandes in einem schwachen integralen Sinne erfüllt. Dazu werden auf der Slave-Seite sogenannte Lagrange-Multiplikatoren eingeführt, die physikalisch den Kontaktspannungen innerhalb der Kontaktfuge entsprechen. Für die Diskretisierung dieser Lagrange-Multiplikatoren werden duale Ansatzfunktionen verwendet, die die Biorthogonalitätsbedingung (Gl. (5.17)) mit den Interpolationsfunktionen für die Verschiebungen auf dem Slave-Rand erfüllen. Dadurch wird es möglich, die mehrdimensionale geometrische Ungleichheitsnebenbedingung in einen Satz von skalaren Ungleichungen für jeden einzelnen FE-Knoten auf dem Slave-Rand zu reduzieren. Jede dieser skalaren Ungleichungen stellt eine Bedingung für die inkrementelle relative Verschiebung zwischen einem Slave-Knoten und dem gegenüberliegenden Master-Rand in Richtung der Normalen des Slave-Knotens dar. Um die geometrischen Randbedingungen in analoger Weise einbringen zu können, wie bei der bereits vorgestellten Formulierung für den Fall eines Ein-Körper-Kontaktes, wird das ursprüngliche inkrementelle effektive Strukturgleichungssystem mittels einer Basis-Transformation so modifiziert, dass der inkrementelle Sprung direkt als primäre Unbekannte auftritt. Unter Verwendung einer Aktiven-Mengen-Strategie lassen sich die geometrischen Randbedingungen ohne weitere Modifikationen unverzüglich in das transformierte effektive Strukturgleichungssystem einarbeiten. Mittels einer statischen Kondensation können die diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren aus dem Gleichungssystem eliminiert werden, so dass schließlich ein unsymmetrisches inkrementelles Gleichungssystem entsteht, dessen Größe während des gesamten Lösungsprozesses konstant bleibt. Nachdem für die unbekannt inkrementellen Verschiebungen bzw. den inkrementellen Sprüngen iterativ gelöst wurde, können die diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren in einer Nachlaufrechnung bestimmt werden. In Abbildung 7.7 ist der gesamte Lösungsalgorithmus der hier vorgestellten Kontaktformulierung nochmals zusammengefasst.

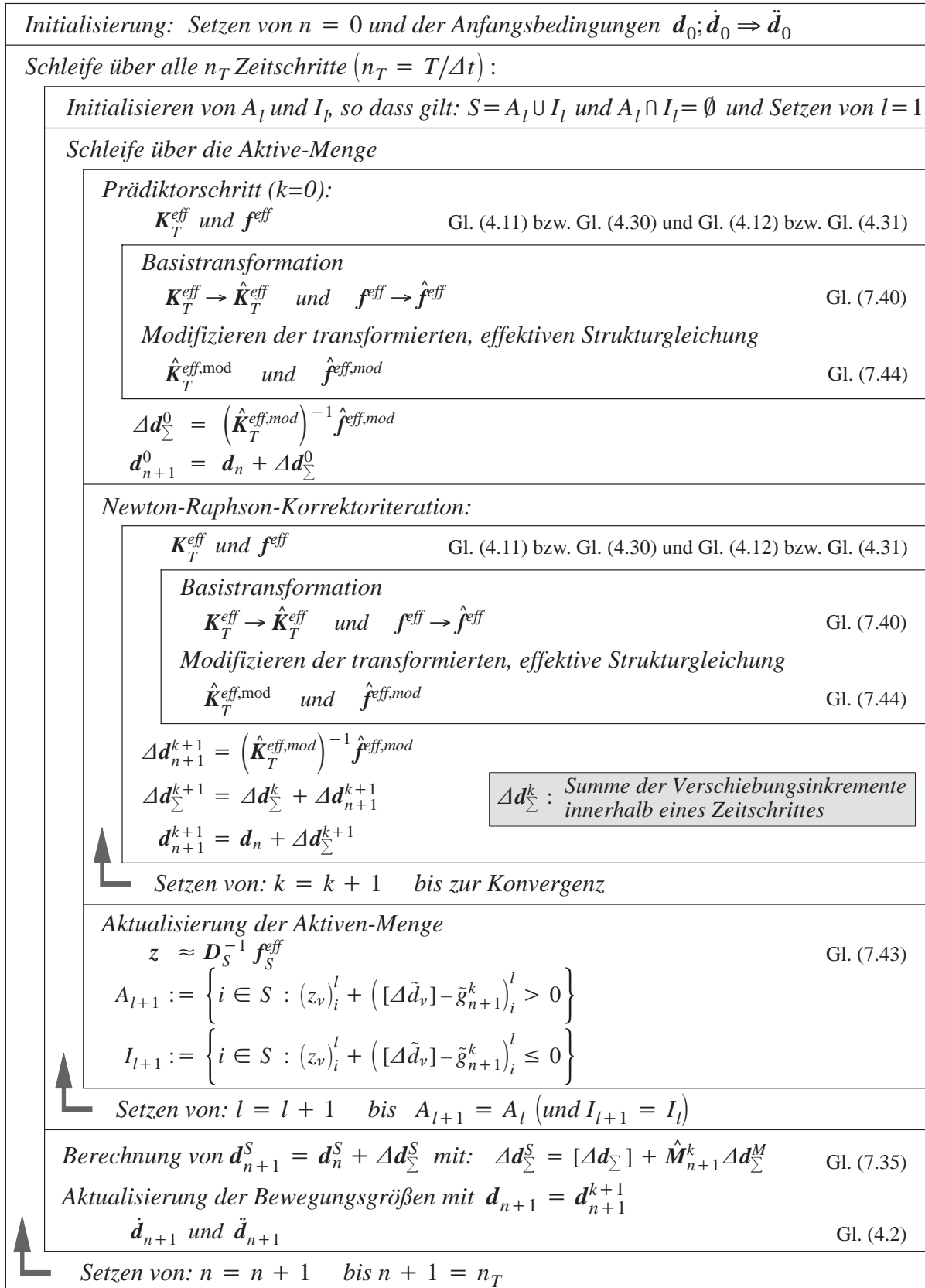


Abb. 7.7: Gesamter Lösungsalgorithmus für ein dynamisches Kontaktproblem zweier deformierbarer Körper

7.2.6 Numerische Integration der gewichteten Klaffung

Die Berechnung der gewichteten Klaffung erfolgt ähnlich der in Kapitel 6.4.2 beschriebenen Prozedur zur Bestimmung der Einträge m_{ij} der Kopplungsmatrix \mathbf{M}_M . Um den Abstand der jeweiligen diskretisierten Kontakttränder mit den Ansatzfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren numerisch integrieren zu können, wird das Integrationsgebiet in einzelne Segmente unterteilt (Kap. 6.4.2).

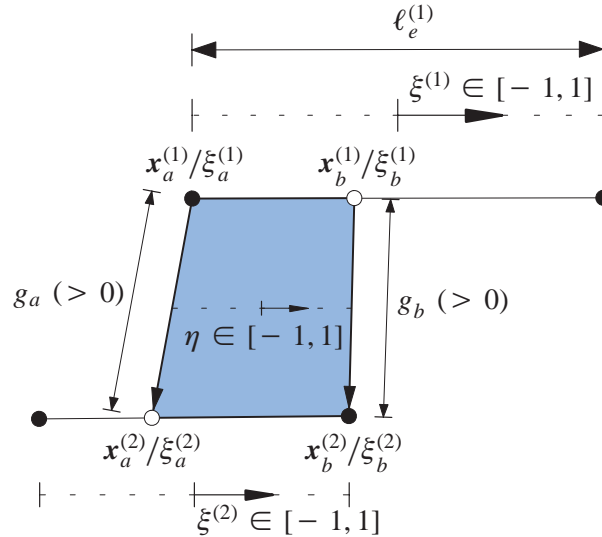


Abb. 7.8: Typisches Segment mit Klaffung g_a und g_b

In Abbildung 7.8 ist mit g_a und g_b der Abstand der beiden diskretisierten Kontaktlinien an den Segmentgrenzen eingezeichnet. Im hier dargestellten Fall sind beide Klaffungen positiv, da sich die beiden Kontaktlinien nicht durchdringen. Analytisch ergeben sich die vorzeichenbehafteten Klaffungen an den Segmentgrenzen durch

$$g_a = \mathbf{x}_a^{(2)} - \mathbf{x}_a^{(1)} \quad \text{und} \quad g_b = \mathbf{x}_b^{(2)} - \mathbf{x}_b^{(1)}. \quad (7.45)$$

Der lineare Verlauf der Klaffung innerhalb eines Segmentes lässt sich dann in Abhängigkeit der lokalen Segmentkoordinate η mit

$$g^{seg}(\eta) = \frac{1}{2} (1 - \eta) g_a + \frac{1}{2} (1 + \eta) g_b \quad (7.46)$$

darstellen. Damit ergibt sich der Anteil eines Segmentes an der gewichteten Klaffung zu

$$\tilde{g}_i^{seg} = \int_{-1}^1 \phi_i^D(\xi^{(1)}(\eta)) g^{seg}(\eta) J_{seg} d\eta. \quad (7.47)$$

Dieses Integral wird unter Verwendung der Gauß-Quadratur

$$\tilde{g}_i^{seg} \approx \sum_{r=1}^{n_{gp}} w_r \phi_i^D(\xi^{(1)}(\eta_r)) g^{seg}(\eta_r) J_{seg} \quad (7.48)$$

numerisch ausgewertet, wobei J_{seg} die in Gleichung (6.48) angegebene, konstante Jacobi-Determinante innerhalb eines Segmentes ist. Die gesamte, gewichtete Klaffung eines Slave-Knotens $i \in S$ berechnet sich schließlich durch Aufsummieren der einzelnen Segmentanteile mit

$$\tilde{g}_i = \sum_{seg} \tilde{g}_i^{seg} . \quad (7.49)$$

7.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst ausführlich der Sonderfall eines Kontaktes zwischen einem deformierbaren Körper und einem starren Hindernis diskutiert. Hierfür wurde ein Verfahren zur Einarbeitung der einzuhaltenden Kontakt-Randbedingungen in das in Kapitel 6.1.4 hergeleitete effektive, inkrementelle Strukturgleichungssystem erläutert. Aufbauend auf der Grundidee der Mortar-Methode wurde die Kompatibilitätsbedingung entlang des Kontaktrandes in einer schwachen integralen Bedingung formuliert. Im Gegensatz zu vielen anderen mortar-basierten Kontaktformulierungen werden die kontinuierlichen Lagrange-Multiplikatoren mit Hilfe diskreter dualer Ansatzfunktionen approximiert. Dadurch wird es möglich, die mehrdimensionale Ungleichheitsnebenbedingung zu entkoppeln und in einen Satz von skalaren Nebenbedingungen umzuformen. Diese werden mit einer Aktiven-Mengen-Strategie in Gleichheitsnebenbedingungen umgeformt und dem inkrementellen effektiven Strukturgleichungssystem hinzugefügt. Eine statische Kondensation dieses Gleichungssystems liefert schließlich ein algebraisches Gleichungssystem, das lediglich für die unbekanntenen Verschiebungsfreiheitsgrade gelöst werden muss.

Anschließend wurden diese Ansätze auf den allgemeinen Kontaktfall zweier deformierbarer Körper übertragen. Eine geeignete Basistransformation erlaubt es, diesen allgemeinen Fall formal identisch wie den zuvor diskutierten Spezialfall eines Ein-Körper-Kontaktes zu behandeln.

8 Energieerhaltungsstrategie für dynamischen Kontakt

8.1 Allgemeines

Die numerische Analyse von dynamischen Kontaktproblemen erfordert die sorgfältige Formulierung der Kontakt-Randbedingungen, um die komplexen Wechselwirkungen zwischen Zustandsgrößen und konstitutiven Variablen zu beschreiben. In den vorausgegangenen Kapiteln wurden Diskretisierungsverfahren für die räumliche und zeitliche Approximation elastodynamischer Kontaktprobleme vorgestellt. Wie jedoch aus der Literatur (Taylor und Papadopoulos (1993), Laursen (2002), Hauret und Le Tallec (2006)) bekannt ist, kann die unmodifizierte Kombination der vorgestellten räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsstrategien zu numerischen Problemen führen. Diese können sich durch oszillierende Kontakt-/Nicht-Kontakt-Zustände einzelner FE-Knoten auf dem Kontaktrand äußern und bis zum Verlust der numerischen Stabilität führen (Laursen (2002)). Mit Hilfe von numerischer Dämpfung lassen sich zwar die unphysikalischen Oszillationen unterdrücken und das Verfahren stabilisieren, zugleich wird dadurch jedoch numerische Genauigkeit eingebüßt.

Eine andere Möglichkeit das numerische Verfahren zu stabilisieren, ohne die Genauigkeit zu beeinflussen, basiert auf dem „Energy-Momentum“-Konzept: In einem räumlich diskretisierten FE-Modell wird der zeitliche Verlauf der Systemenergie gezwungen, sich entsprechend den thermodynamischen Prinzipien zu entwickeln. Für einen reibungslosen dynamischen Kontakt elastischer Körper ohne äußere Belastung bedeutet dies, dass die numerische Approximation die exakte Erhaltung der totalen Energie gewährleisten muss.

Aufbauend auf dieser Grundidee haben sowohl Laursen und Chawla (1997) als auch Armero und Petöcz (1998) energieerhaltende Verfahren für reibungsfreie dynamische Kontaktprobleme vorgestellt. Diese Methoden zeigen jedoch, wie schwierig es ist, die Erfüllung der lokalen Kontakt-Randbedingungen und die exakte Energieerhaltung gleichzeitig zu gewährleisten. Um die exakte Erhaltung der totalen Energie zu garantieren, werden in beiden Strategien die einzuhaltenden Kontakt-Randbedingungen modifiziert, was schließlich zu einer Verletzung der geometrischen Inpenetrabilitätsbedingung führt.

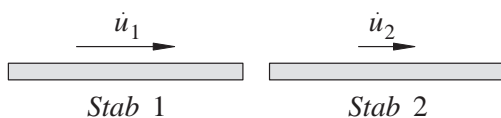
Dagegen gewährleistet die von Laursen und Love (2002) vorgeschlagene „Velocity-Update“-Methode die exakte Energieerhaltung bei gleichzeitiger Erfüllung der geometrischen Nichtdurchdringungsbedingung. Sie wird für die hier vorgestellte Kontaktformulierung angepasst und im Sinne der in Kapitel 4 beschriebenen „Generalized-Energy-Momentum-Method“ (GEMM) verallgemeinert.

8.2 „Velocity-Update“-Methode

8.2.1 Grundidee

Die Grundidee dieses Verfahrens basiert auf physikalischen Beobachtungen: Beim eindimensionalen Zusammenstoß zweier elastischer Stäbe (Abb. 8.1a)) nimmt die Geschwindigkeit eines Stabendes zum Zeitpunkt des Kontaktes sprunghaft ab (Abb. 8.1b)). Die Annahme eines zeitlich kontinuierlichen Geschwindigkeitsverlaufs ist somit für viele dynamische Kontaktprobleme nicht zutreffend. Da die gebräuchlichen Zeitdiskretisierungsverfahren jedoch von einem zeitkontinuierlichen Geschwindigkeitsfeld ausgehen, können die wahren sprunghaften Verläufe nicht abgebildet werden. Um diese dennoch in einem numerischen Verfahren berücksichtigen zu können, wurden bereits von Hughes et al. (1976) entsprechende Korrekturterme für die Geschwindigkeiten, die Kontaktkräfte und die Beschleunigungen an den Kontaktknoten vorgeschlagen.

a) Ausgangszustand



b) Geschwindigkeitsprofil

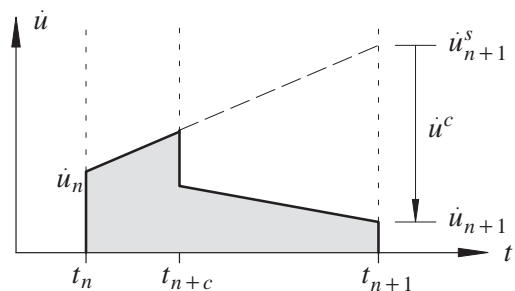


Abb. 8.1: Zusammenprall zweier elastischer, dünner Stäbe (nach Laursen und Love (2002))

Laursen und Love (2002) greifen diese Idee auf und führen einen diskreten Korrekturterm für die Aktualisierung der Geschwindigkeiten am Ende eines jeden Zeitschrittes ein. Die Größe dieses Korrekturterms wird derart bestimmt, dass die exakte Erhaltung der totalen Energie innerhalb eines diskreten Zeitschrittes erfüllt ist. Da die Korrekturen jeweils am Ende eines Zeitschrittes im Sinne eines Nachlaufprozesses durchgeführt werden, hat diese Methode keinerlei Einfluss auf die zugrunde liegende Kontaktformulierung. Der in Laursen und Love (2002) beschriebene Algorithmus basiert auf der impliziten „Energy-Momentum-Method“ von Simo und Tarnow (1992). Dieser wird nachfolgend für die Kombination mit der in Kapitel 4 beschriebenen GEMM verallgemeinert.

8.2.2 Diskrete Kontakt-Geschwindigkeit

Aufgrund der physikalischen Beobachtungen wird ein diskreter Vektor $\dot{\mathbf{d}}^c$ der knotenweisen Kontakt-Geschwindigkeiten eingeführt und in die Bewegungsgleichung eingesetzt. Dazu wird die vollständig diskretisierte dynamische Gleichgewichtsbedingung in Abhängigkeit der unbekannteren Verschiebungen zum Zeitpunkt t_{n+1} ausgedrückt. Diese ergibt sich ohne Berücksichtigung von Dämpfungstermen und äußerer Lasten zu

$$\frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \frac{1 - \alpha_m}{\beta \Delta t} \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}_n - \frac{1 - 2\beta - \alpha_m}{2\beta} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_n + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c = \mathbf{0} . \quad (8.1)$$

Die Aktualisierung der Knoten-Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}$ am Ende eines Zeitschrittes erfolgt über die in Kapitel 4 vorgestellten Newmark Approximationen:

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^s = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) - \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{d}}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n . \quad (8.2)$$

Darin kennzeichnet der Kopfzeiger $(\cdot)^s$, dass es sich hierbei um eine Approximation handelt, die auf der Annahme eines zeitlich kontinuierlichen („smooth“) Geschwindigkeitsverlaufs basiert. Zur Abbildung eines möglichen Sprungs der Geschwindigkeiten wird dem Vektor $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^s$ der „glatten“ Knoten-Geschwindigkeiten ein diskreter Geschwindigkeitsterm $\dot{\mathbf{d}}^c$ hinzuaddiert. Die Aktualisierung der Knoten-Geschwindigkeiten am Ende eines Zeitschrittes ist dann mit

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^s + \dot{\mathbf{d}}^c \quad (8.3)$$

gegeben. Da der Korrekturterm $\dot{\mathbf{d}}^c$ als diskrete Modifikation der Knoten-Geschwindigkeiten am Ende eines jeden Zeitschrittes eingeführt wird sind keine Veränderungen der zugrunde liegenden Kontaktformulierung notwendig. Die geometrischen Kontakt-Randbedingungen werden weiterhin im integralen Sinne exakt erfüllt.

8.2.3 Energieerhaltungsbedingungen

Zur Herleitung des jeweils notwendigen, diskreten Korrekturterms wird die in Simo und Tarnow (1992) vorgestellte Methodik angewandt: Die algorithmische totale Energie des vollständig diskretisierten Systems darf sich während eines Zeitschrittes nicht verändern. Um dies zu gewährleisten wird der Ausdruck für die algorithmische inkrementelle totale Energie ΔE^{tot} des Systems bestimmt, indem die bereits diskretisierte Bewegungsgleichung (8.1) mit einem diskreten Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{d}$ multipliziert wird. Das diskrete Verschiebungsinkrement berechnet sich unter Berücksichtigung des Korrekturterms (8.3) und Gleichung (8.2) zu

$$\Delta \mathbf{d} = (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) = \Delta \mathbf{d}^s - \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \dot{\mathbf{d}}^c \quad (8.4)$$

mit

$$\Delta \mathbf{d}^s = \frac{\beta \Delta t}{\gamma} \left[\dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{d}}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n \right] . \quad (8.5)$$

Zusätzlich wird der Einfluss des Korrekturterms auf die diskrete Bewegungsgleichung durch Einsetzen des Verschiebungsinkrementes aus Gleichung (8.4) in Gleichung (8.1) berücksichtigt. Damit ist die Bedingungsgleichung für die algorithmische Erhaltung der totalen Energie innerhalb eines Zeitschrittes mit

$$\left[\mathbf{M} \left(\ddot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_m} - \frac{1-\alpha_m}{\gamma \Delta t} \dot{\mathbf{d}}^c \right) + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f}) + \mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c \right]^T \Delta \mathbf{d} \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.6)$$

gegeben. Der Ausdruck in Gleichung (8.6) stellt die inkrementelle totale Energie ΔE^{tot} dar, die innerhalb eines Zeitschrittes Δt entsteht; folglich muss bei Energieerhalt $\Delta E^{tot} = 0$ gelten. Mit der Annahme, dass für die Bestimmung der algorithmischen internen Kräfte \mathbf{f}^{int} ein energieerhaltendes (EMM) bzw. kontrolliert dissipatives Verfahren (GEMM) angewendet wird (Kap. 4.3), lässt sich die inkrementelle totale Energie für ein elastodynamisches Problem ohne Kontakt folgendermaßen ausdrücken:

$$\Delta E_1^{tot} = \ddot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_m}^T \mathbf{M} \Delta \mathbf{d}^s + \mathbf{f}^{int}(\mathbf{d}_{n+1-\alpha_f})^T \Delta \mathbf{d} . \quad (8.7)$$

Wie in Kapitel 4.3 gezeigt, ist die GEMM im allgemeinen Fall ein numerisch dissipatives Verfahren ($\Delta E_1^{tot} < 0$), für das nur der Sonderfall von $\rho_\infty = 1.0$ die exakte Erhaltung der totalen Energie ($\Delta E_1^{tot} = 0$) garantiert. Die Bedingungen für die Kontakt-Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}^c$ werden deshalb so formuliert, dass die zusätzliche Energieänderung infolge von Kontakt verschwindet: $\Delta E_c^{tot} = 0$. Die Energieänderung ergibt sich aus der Auswertung der restlichen Terme aus (8.6) zu

$$\Delta E_c^{tot} = \left(-\frac{\beta \Delta t}{\gamma} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1-\alpha_m} - \frac{1-\alpha_m}{\gamma \Delta t} \Delta \mathbf{d}^s + \frac{\beta(1-\alpha_m)}{\gamma^2} \dot{\mathbf{d}}^c \right)^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}^c + \left(\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c \right)^T \Delta \mathbf{d} . \quad (8.8)$$

Nach einigen Umformungen folgt schließlich eine quadratische Bestimmungsgleichung für die gesuchten Kontakt-Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}^c$ in Abhängigkeit von bekannten Größen:

$$\left(R_1 \Delta \mathbf{d} + R_2 \dot{\mathbf{d}}_n + R_3 \ddot{\mathbf{d}}_n + R_4 \dot{\mathbf{d}}^c \right)^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{d}}^c + \left(\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c \right)^T \Delta \mathbf{d} = 0 , \quad (8.9)$$

mit den Konstanten

$$R_1 = \frac{2(\alpha_m - 1)}{\gamma \Delta t} ; R_2 = \frac{1 - \alpha_m}{\gamma} ; R_3 = \frac{\Delta t}{2\gamma} (1 - 2\beta - \alpha_m) ; R_4 = \frac{\beta(\alpha_m - 1)}{\gamma^2} . \quad (8.10)$$

8.2.4 Bestimmung des Korrekturterms

Zur Auflösung der Bedingungsgleichung (8.9) nach $\dot{\mathbf{d}}^c$ wird zunächst der Vektor $\mathbf{z}_v \in \mathbb{R}^{n_c^s}$ aller diskreten Werte der Lagrange-Multiplikatoren in Normalenrichtung auf dem Kontaktrand definiert. Da reibungsfreier Kontakt vorausgesetzt wird, lässt sich der Vektor $\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c \in \mathbb{R}^{3n_d}$ der Kontaktkräfte (Gl. (6.11)) mit

$$\mathbf{f}_{n+1-\alpha_f}^c = \mathbf{B}^c \mathbf{N}_{n+1-\alpha_f} \mathbf{z}_v \quad (8.11)$$

angeben, wobei in der Matrix $\mathbf{N}_{n+1-\alpha_f} \in \mathbb{R}^{3n_c^s \times n_c^s}$ die jeweiligen Normalenvektoren \mathbf{v}_i aller Knoten auf dem Slave-Rand zum Zeitpunkt $t_{n+1-\alpha_f}$ zusammengefasst sind:

$$N_n = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{n,1} & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \mathbf{v}_{n,nc} \end{bmatrix}. \quad (8.12)$$

Aufgrund der eingeführten Kontakt-Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}_c$ entsteht ein Impuls auf dem Kontakttrand. Unter der Annahme, dass die jeweiligen Impulse auf einen Kontaktknoten in Richtung einer Oberflächennormalen wirken, werden diese in ähnlicher Form wie die Kontaktkräfte analog zu (8.11) ausgedrückt:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{d}}^c = \mathbf{B}^c N_{n+\alpha_\nu} \mathbf{p}_\nu. \quad (8.13)$$

Darin ist $\mathbf{p}_\nu \in \mathbb{R}^{n_s}$ der Vektor der diskreten Knotenimpulse in jeweiliger Normalenrichtung. Der Parameter $\alpha_\nu \in [0, 1]$ gibt zunächst eine allgemeine Beschreibung dieses Impulses zu einem noch nicht festgelegten Zwischenzustand. Laursen und Love (2002) haben gezeigt, dass die Wahl von $\alpha_\nu = 1$ die Drehimpulserhaltung für ein Mehrkörper-Kontaktproblem garantiert. Deshalb wird dieser Wert nachfolgend angesetzt. Mit Hilfe des Ansatzes aus Gleichung (8.13) können die diskreten Kontakt-Geschwindigkeiten mit

$$\dot{\mathbf{d}}^c = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^c N_{n+1} \mathbf{p}_\nu \quad (8.14)$$

ausgedrückt werden. Einsetzen der Gleichungen (8.11), (8.13) und (8.14) in (8.9) liefert eine mehrdimensionale quadratische Bedingungsgleichung für die unbekanntenen Knotenimpulse \mathbf{p}_ν auf dem Kontakttrand:

$$\mathbf{p}_\nu^T \mathbf{A} \mathbf{p}_\nu + \mathbf{b} \mathbf{p}_\nu + \mathbf{c} z_\nu = 0, \quad (8.15)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= R_4 N_{n+1}^T (\mathbf{B}^c)^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}^c N_{n+1}, \\ \mathbf{b} &:= \left(R_1 \Delta \mathbf{d} + R_2 \dot{\mathbf{d}}_n + R_3 \ddot{\mathbf{d}}_n \right)^T \mathbf{B}^c N_{n+1}, \\ \mathbf{c} &:= \Delta \mathbf{d}^T \mathbf{B}^c N_{n+1-\alpha_f}. \end{aligned} \quad (8.16)$$

Die quadratische Bedingungsgleichung (8.15) ist offensichtlich nicht eindeutig lösbar. Eine eindeutige Lösung kann jedoch gefunden werden, indem Gleichung (8.15) lokal für jeden individuellen Kontaktknoten erfüllt wird. Die entsprechende Bedingung lautet dann:⁷

$$\sum_{j=1}^{n_c^s} \left[A^{ij}(\mathbf{p}_\nu)_i (\mathbf{p}_\nu)_j \right] + b^i (\mathbf{p}_\nu)_i + c^i (z_\nu)_i = 0, \quad \forall i \in \gamma_c^{(1)h}. \quad (8.17)$$

7. Die Gleichungen (8.17)–(8.22) beziehen sich jeweils auf einen einzigen Slave-Knoten, weshalb die Einsteinsche Summenkonvention in diesen Gleichungen *nicht* gilt.

Nach Umformung dieser Bedingung entsteht eine einfache quadratische Form

$$A^{ii}(p_\nu)_i^2 + \underbrace{\left[\sum_{j=1, j \neq i}^{n_c^s} A^{ij}(p_\nu)_j + b^i \right]}_{B^i} (p_\nu)_i + c^i(z_\nu)_i = A^{ii}(p_\nu)_i^2 + B^i(p_\nu)_i + c^i(z_\nu)_i = 0, \quad (8.18)$$

die zwei reale Lösungen besitzt, vorausgesetzt die Diskriminante

$$(B^i)^2 - 4A^{ii}c^i(z_\nu)_i \stackrel{!}{>} 0 \quad (8.19)$$

ist positiv. Da B^i von den Knotenimpulsen $(p_\nu)_i$ abhängt, kann $(B^i)^2$ den minimalen Wert von Null annehmen. Die Hauptdiagonaleinträge A^{ii} berechnen sich aus quadrierten Termen, einem positiven Eintrag der invertierten Massenmatrix und der Konstante R_4 . Da R_4 immer negativ ist (Gl. (8.16)₁), sind auch die Hauptdiagonaleinträge A^{ii} stets kleiner Null. Die Existenz von realen Lösungen hängt also von dem Vorzeichen des Produktes $c^i(z_\nu)_i$ ab. Werden die Definitionen der Gleichungen (7.10) und (7.36) in Gleichung (8.16)₃ eingesetzt, ergibt sich c^i mit:

$$c^i = \begin{cases} (\Delta \tilde{d}_\nu^S)_i & \text{falls Ein-Körper-Kontakt} \\ [\Delta \tilde{d}_\nu]_i & \text{falls Zwei-Körper-Kontakt} \end{cases} \quad (8.20)$$

Darin sind $[\Delta \tilde{d}_\nu]_i$ bzw. $(\Delta \tilde{d}_\nu^S)_i$ die gewichteten (Relativ-)Verschiebungen eines Slave-Knotens $i \in \Gamma_c$ in Richtung seiner Normalen ν_i innerhalb eines Zeitschrittes Δt . Zur Untersuchung des Wertebereichs von $c^i(z_\nu)_i$ sind vier mögliche Zustände zu betrachten:

- Knoten i befindet sich während des gesamten Zeitschrittes Δt *nicht* in Kontakt:
 $(z_\nu)_i = 0 \quad \rightarrow \quad c^i(z_\nu)_i = 0$
- Knoten i kommt innerhalb des Zeitschrittes Δt in Kontakt:
 $(\Delta \tilde{d}_\nu^S)_i > 0$ bzw. $[\Delta \tilde{d}_\nu]_i > 0$ und $(z_\nu)_i > 0 \quad \rightarrow \quad c^i(z_\nu)_i > 0$
- Knoten i verliert innerhalb des Zeitschrittes Δt den Kontakt:
 $(\Delta \tilde{d}_\nu^S)_i < 0$ bzw. $[\Delta \tilde{d}_\nu]_i < 0$ und $(z_\nu)_i = 0 \quad \rightarrow \quad c^i(z_\nu)_i = 0$
- Knoten i befindet sich während des gesamten Zeitschrittes Δt *in* Kontakt:
 $(\Delta \tilde{d}_\nu^S)_i = 0$ bzw. $[\Delta \tilde{d}_\nu]_i = 0$ und $(z_\nu)_i > 0 \quad \rightarrow \quad c^i(z_\nu)_i = 0$

Die Diskriminante aus Gleichung (8.19) wird also nie negativ, so dass für jede quadratische Gleichung zwei denkbare, reelle Lösungen resultieren. Insgesamt ergeben sich daraus 2^{n_c} unterschiedliche Möglichkeiten für den Lösungsvektor \mathbf{p}_ν , so dass eine sinnvolle Auswahl der jeweiligen Ergebnisse getroffen werden muss. Hierzu wird ein Zeitschritt betrachtet, indem ein bestimmter Slave-Knoten in Kontakt gerät. Die zugehörige Kontaktkraft und damit auch der positive Dissipationsterm $c^i(z_\nu)_i$ sollen sehr klein sein. Damit lassen sich die beiden Lösungen der lokalen quadratischen Gleichung (8.18) bestimmen:

$$\begin{aligned}
(p_\nu)_i &= \frac{-B^i \pm \sqrt{(B^i)^2 - 4A^{ii}c^i(z_\nu)_i}}{2A^{ii}} = \frac{-B^i \pm (|B^i| + \varepsilon)}{2A^{ii}} \\
&= \frac{\text{sign}(B^i)}{2A^{ii}} \{\varepsilon, - (2|B^i| + \varepsilon)\} \quad \text{mit} \quad \varepsilon > 0 .
\end{aligned} \tag{8.21}$$

Da die Berechnung eines korrigierenden Impulses $(p_\nu)_i$ nur im Falle eines positiven Dissipationssterms $c^i(z_\nu)_i$ notwendig ist, muss gelten:

$$(p_\nu)_i \rightarrow 0 \quad \text{falls} \quad c^i(z_\nu)_i \rightarrow 0 \quad (\hat{=} \varepsilon \rightarrow 0) . \tag{8.22}$$

Dies ist nur erfüllt, wenn die erste Lösung aus Gleichung (8.21) gewählt wird. Da $A^{ii} < 0$ ist, wird diese Lösung von $(p_\nu)_i$ stets das umgekehrte Vorzeichen wie B^i haben, wohingegen die zweite Lösung immer dasselbe Vorzeichen wie B^i haben wird. Eine eindeutige Lösung für das Problem aus Gleichung (8.18) kann somit durch die Einhaltung der Bedingung

$$\text{sign}((p_\nu)_i) = - \text{sign}(B^i) \tag{8.23}$$

garantiert werden.

Ist der Vektor der Knotenimpulse \mathbf{p}_ν bestimmt, werden mit Hilfe von Gleichung (8.14) die diskreten Kontakt-Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}^c$ berechnet und dem Vektor $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^s$ der „glatten“ Knoten-Geschwindigkeiten hinzuaddiert.

Anmerkung: Der Dissipationsterm $c^i(z_\nu)_i$ ist nur dann ungleich Null, wenn der Slave-Knoten innerhalb des betrachteten Zeitintervalls Δt in Kontakt kommt. Deshalb müssen nur in diesen „kritischen“ Zeitschritten entsprechende Knotenimpulse \mathbf{p}_ν und die daraus folgenden Kontakt-Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}^c$ berechnet werden.

8.3 Modellbeispiel

Anhand eines einfachen, zweidimensionalen Modellbeispiels werden die Auswirkungen der vorgestellten „Velocity-Update“-Methode auf die zeitliche Entwicklung der totalen Energie untersucht. Zusätzlich dazu wird das Auftreten von oszillierenden Kontaktkräften erläutert und die notwendigen Modifikationen für die Aktive-Mengen-Strategie vorgestellt.

8.3.1 Versuchsaufbau

Ein ebener, quadratischer Block wird mit einer gleichmäßig verteilten, horizontalen Flächenlast $p(t)$ belastet. Bevor der Körper das starre Hindernis berührt, wird die Last wieder entfernt, so dass der Block mit konstanter Geschwindigkeit gegen das Hindernis prallt. Geometrie, Materialdaten und die Lastkurve sind in der Abbildung 8.2 dargestellt. Die räumliche Diskretisierung erfolgt mit einem bilinearen, ebenen Scheibenelement mit der Annahme eines ebenen Spannungszustandes.

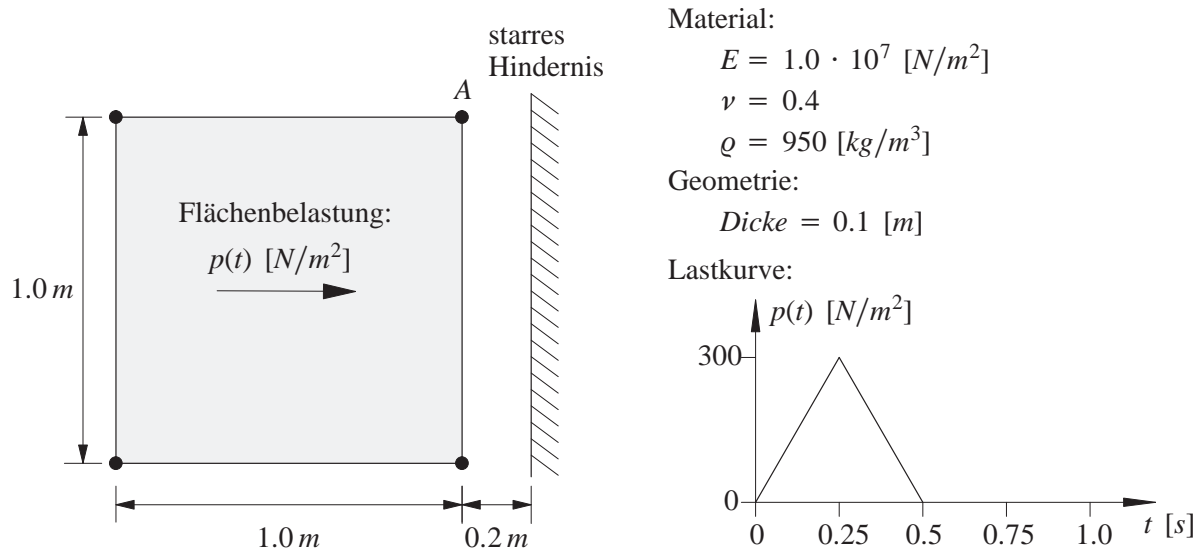


Abb. 8.2: Modellbeispiel: Geometrie, Materialdaten und Belastung

Für dieses Beispiel lässt sich die durch die äußere Belastung zugeführte gesamte Energie leicht bestimmen. Da die Belastung flächenhaft wirkt, werden alle Teile des Körpers gleichmäßig beschleunigt, so dass hierdurch zunächst keine Formänderungsenergie entsteht. Die gesamte Energie des Systems besteht also ausschließlich aus kinetischer Energie. Diese berechnet sich mit

$$E^{kin} = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 . \quad (8.24)$$

Darin ist M die gesamte Masse und \dot{u} die Geschwindigkeit des Körpers. Die Geschwindigkeit berechnet sich mit

$$\dot{u} = \frac{I}{M} , \quad (8.25)$$

wobei mit I der aufgebrauchte Impuls bezeichnet ist. In diesem konkreten Fall ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} I &= 300 \text{ [N/m}^2\text{]} \cdot 1 \text{ [m}^2\text{]} \cdot \frac{1}{2} \cdot 0.5 \text{ [s]} = 75 \text{ [Ns]} , \\ M &= 950 \text{ [kg/m}^3\text{]} \cdot 1 \text{ [m}^2\text{]} \cdot 0.1 \text{ [m]} = 95 \text{ [kg]} , \\ \dot{u} &= \frac{I}{M} = \frac{75 \text{ [Ns]}}{95 \text{ [kg]}} = 0.78947 \text{ [m/s]} , \\ E^{tot} = E^{kin} &= \frac{1}{2} M \dot{u}^2 = \frac{1}{2} 95 \text{ [kg]} (0.78947 \text{ [m/s]})^2 = 29.605 \text{ [Nm} \hat{=} \text{ J]} . \end{aligned} \quad (8.26)$$

8.3.2 Oszillationen und Einfluss auf die Aktive-Mengen-Strategie

Zunächst wird die Berechnung ohne Berücksichtigung eines Korrekturterms für die Knoten-Geschwindigkeiten durchgeführt. Hierzu wird die GEMM mit einem Spektralradius von $\rho_\infty = 1.0$ eingesetzt. Es werden zwei unterschiedliche Zeitschrittweiten $\Delta t_1 = 5 \text{ ms}$ und $\Delta t_2 = 1 \text{ ms}$ untersucht. In Abbildung 8.3 sind die Verläufe der Geschwindigkeit, der Beschleunigung

nigung und der Normalkontaktkraft des Knotens A dargestellt. Der Zeitbereich, indem sich der Körper mit dem starren Hindernis in Kontakt befindet, ist darin grau hinterlegt. Die Betrachtung des Geschwindigkeitsverlaufs zeigt, dass der Körper zunächst auf die analytisch berechnete Geschwindigkeit von $\dot{u} \approx 0.79 \text{ [m/s]}$ beschleunigt wird. Danach bewegt sich der Körper mit dieser konstanten Geschwindigkeit auf das Hindernis zu. Sobald der Körper mit dem Hindernis in Kontakt kommt, wird der Kontaktknoten erwartungsgemäß schlagartig abgebremst. Die Knotengeschwindigkeit ändert sogar ihr Vorzeichen. Während sich der Körper in Kontakt befindet, oszilliert

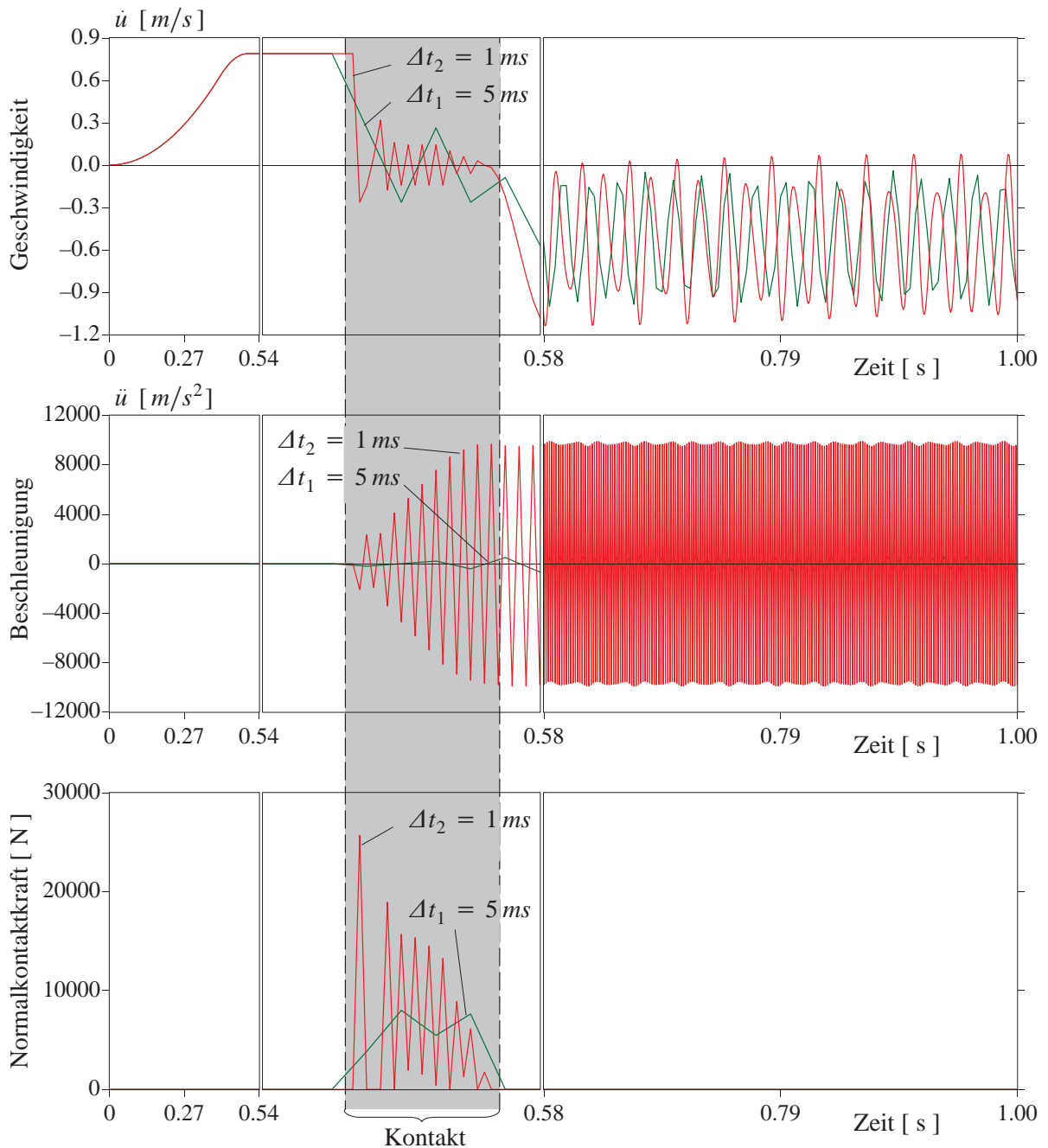


Abb. 8.3: Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Normalkontaktkraft-Verlauf von Knoten A

liert die Knotengeschwindigkeit um den Nullpunkt. Dadurch beginnt auch die Knotenbeschleunigung zu oszillieren, was schließlich zu einer oszillierenden Normalkontaktkraft führt. Dabei ist festzustellen, dass mit kleiner werdendem Zeitschritt die Amplituden im Beschleunigungs- und Normalkontaktkraft-Verlauf stark anwachsen. Für die Berechnung mit der Zeitschrittweite $\Delta t_2 = 1 \text{ ms}$ sind die Oszillationen im Normalkontaktkraft-Verlauf so stark, dass sie teilweise sogar negativ werden könnten. Da dies unter Verwendung einer Aktiven-Mengen-Strategie jedoch nicht zulässig ist, wird der Knoten in diesem Zeitschritt inaktiv gesetzt. Die Konsequenz daraus ist, dass es zu abwechselnden Kontakt-/Nicht-Kontakt-Zuständen des Knotens A auf dem Kontaktrand kommt. Unter Umständen kann dies soweit führen, dass die Schleife über die jeweilige Aktive-Menge innerhalb eines Zeitschrittes überhaupt nicht konvergiert. Bevor Möglichkeiten zur Behebung dieser Probleme vorgestellt werden, werden die Ursachen für das Auftreten der Oszillationen dargelegt.

Die Verwendung der GEMM fordert die Auswertung des dynamischen Gleichgewichtes zu einem generalisierten Zwischenzeitpunkt. Wird der Spektralradius $\rho_\infty = 1.0$ gewählt, fällt die GEMM mit der EMM zusammen, und der Zwischenzeitpunkt ist genau in der Mitte der Zeitintervallgrenzen. Ohne Berücksichtigung von Dämpfungstermen und äußeren Lasten führt das zu erfüllende dynamische Gleichgewicht in einem Zeitintervall auf

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_{n+1/2} + \hat{\mathbf{K}}_T^{\text{eff}}\mathbf{d}_{n+1/2} + \mathbf{B}^c\mathbf{z}_{n+1/2} = \mathbf{0} . \quad (8.27)$$

Die Anwendung der Newmark Approximationen (Kapitel 4) liefert für die Beschleunigungen in der Zwischenkonfiguration

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t}(\dot{\mathbf{d}}_{n+1} - \dot{\mathbf{d}}_n) . \quad (8.28)$$

Die darin enthaltenen Geschwindigkeitsterme sind wiederum über die Verschiebungen mit

$$\frac{1}{2}(\dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \dot{\mathbf{d}}_n) = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_n) = \frac{1}{\Delta t}\Delta\mathbf{d} \quad (8.29)$$

gekoppelt. Befindet sich ein Knoten i während des gesamten Zeitschrittes in Kontakt, dann gilt

$$(\Delta d_v)_i = 0 . \quad (8.30)$$

Mit Gleichung (8.29) folgt dann direkt:

$$(\dot{d}_v)_i \Big|_{n+1} = -(\dot{d}_v)_i \Big|_n . \quad (8.31)$$

Die Knotengeschwindigkeiten eines Knotens i in Richtung der Kontaktnormalen beginnen zu oszillieren. Als Folge daraus wachsen die approximierten Knotenbeschleunigungen der Zwischenkonfiguration (Gl. (8.28))

$$(\ddot{d}_v)_i \Big|_{n+1/2} = \pm \frac{2}{\Delta t} (\dot{d}_v)_i \Big|_n \quad (8.32)$$

für $\Delta t \rightarrow 0$ über alle Grenzen und wechseln von Zeitschritt zu Zeitschritt das Vorzeichen. Um das dynamische Gleichgewicht aus Gleichung (8.27) zu erfüllen, müssen folglich auch die dis-

kreten Werte der Lagrange-Multiplikatoren oszillieren. Die absoluten Werte sind dabei analog zu den Beschleunigungen direkt von der gewählten Zeitschrittweite abhängig und haben somit keine Aussagekraft.

Das Auftreten von oszillierenden Lagrange-Multiplikatoren hat zwei Nachteile zur Folge: Einerseits lassen sich keinerlei quantifizierende Aussagen über die auftretenden Kontaktkräfte machen. Andererseits kann es zu Problemen bei der Anwendung der Aktiven-Mengen-Strategie kommen, indem eigentlich aktive Kontaktknoten aufgrund eines negativen Wertes des zugehörigen Lagrange-Multiplikators inaktiv gesetzt werden.

Eine einfache, zugleich effektive Möglichkeit, beide Probleme zu beheben, ist die Mittelung der jeweiligen Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren. Zur Entscheidung, ob ein Knoten aktiv oder inaktiv ist, wird anstatt $(z_\nu)_i|_{n+1/2}$ der gemittelte Wert

$$(z_\nu)_i|_n = \frac{1}{2} \left[(z_\nu)_i|_{n+1/2} + (z_\nu)_i|_{n-1/2} \right] \quad (8.33)$$

verwendet. Für die beiden untersuchten Zeitschrittweiten ist in Abbildung 8.4 der Verlauf der Normalkontaktkraft für den Knoten A dargestellt. Hierin wurde die Entscheidung über die Aktive-Menge mit den gemittelten Werten der Lagrange-Multiplikatoren durchgeführt. Die gemittelten Verläufe der Normalkontaktkraft zeigen, dass die Knotenwerte des Lagrange-Multiplikators um den „wahren Wert“ oszillieren. Mit zunehmend kleinerer Zeitschrittweite konvergieren die Mittelwerte der Normalkontaktkraft.

Das Auftreten der Oszillationen wurde der Anschaulichkeit halber hier für einen gewählten Spektralradius von $\rho_\infty = 1.0$ erläutert. Für kleinere Werte von ρ_∞ ergeben sich prinzipiell die gleichen Phänomene, so dass im allgemeinen Fall mit den gemittelten Werten der Lagrange-Multiplikatoren

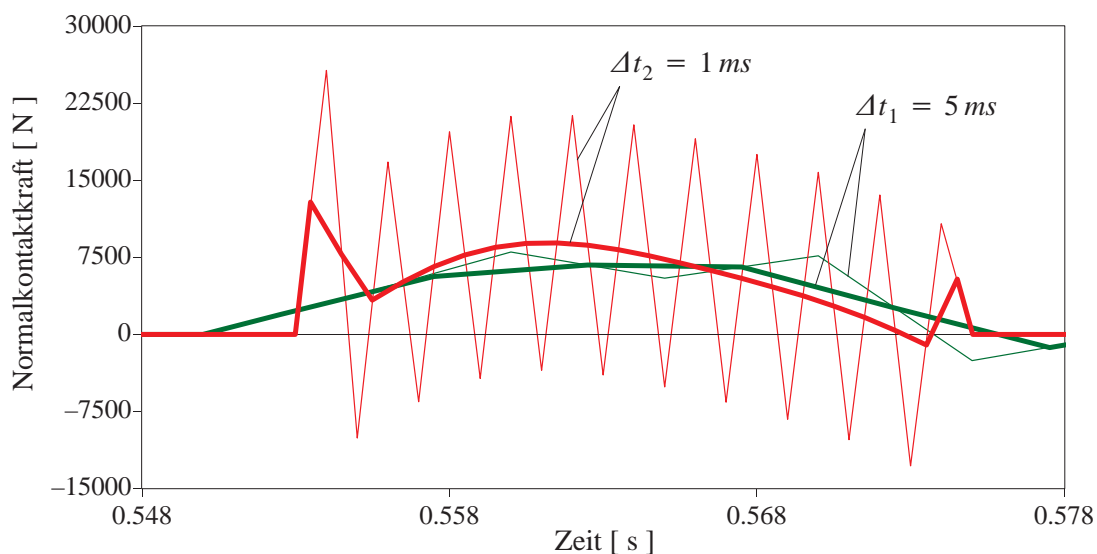


Abb. 8.4: Normalkontaktkraft-Verlauf von Knoten A: gemittelte Lagrange-Multiplikatoren

$$(z_v)_i|_{n+1/2-\alpha_f} = \frac{1}{2} \left[(z_v)_i|_{n+1-\alpha_f} + (z_v)_i|_{n-\alpha_f} \right], \quad (8.34)$$

ausgewertet zu den generalisierten Zwischenkonfigurationen, gearbeitet werden muss.

Die Mittelung der diskreten Lagrange-Multiplikatoren stellt eine einfache Möglichkeit dar, die durch die oszillierenden Kontaktkräfte hervorgerufenen Probleme in der Anwendung der Aktiven-Mengen-Strategie zu vermeiden. Allerdings können dadurch die ursächlichen unphysikalischen Oszillationen der Kontaktkräfte nicht behoben werden. Deshalb wurden in jüngster Vergangenheit verschiedene Methoden entwickelt, um dieses numerische Defizit zu bewältigen. Sowohl Khenous et al. (2006a, 2006b) als auch Hager et al. (2006) befreien die Kontaktknoten von ihrer Masse. Dadurch wird der oszillierende Massenträgheitsterm aus dem dynamischen Gleichgewicht entfernt. Um dennoch die Massenerhaltung im System zu gewährleisten, werden unterschiedliche Strategien zur Integration der modifizierten Massenmatrix angewandt. Eine Voraussetzung für die erfolgreiche Umverteilung der Einträge in der Massenmatrix ist das Vorhandensein ausreichend vieler FE-Knoten im Inneren des kontaktierenden Körpers. Die Anwendung dieser Methoden für die Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen unter Verwendung einschichtiger Schalenelemente ist also nicht möglich. Eine Diskretisierung mit zwei Elementen über die Schalendicke wäre zwar prinzipiell möglich, würde aber die Anzahl der Freiheitsgrade im System deutlich erhöhen. Nach Ansicht des Autors ist dieser numerische Mehraufwand zur Vermeidung der Oszillationen der Kontaktkräfte nicht motivierbar, weshalb in dieser Arbeit auf eine Umverteilung der Massenterme verzichtet wird.

8.3.3 Entwicklung der totalen Energie

Im Weiteren wird die Auswirkung der „Velocity-Update“-Methode auf die zeitliche Entwicklung der totalen Energie untersucht. In Abbildung 8.5 sind die Verläufe der totalen, kinetischen und potentiellen Energie dargestellt. Die Berechnungen wurden wiederum für zwei unterschiedliche Zeitschrittweiten, jeweils mit der GEMM und einem Spektralradius von $\rho_\infty = 1.0$, durchgeführt. Bevor der Körper mit dem starren Hindernis in Kontakt kommt, verhalten sich alle vier Varianten erwartungsgemäß identisch. Der analytisch berechnete Wert der totalen Energie $E^{tot} = 29.605 [J]$ wird genau dargestellt. Mit dem Zeitschritt, indem der Körper in Kontakt gerät, werden die Unterschiede deutlich. Wird kein „Velocity-Update“ eingesetzt, geht genau in diesem Zeitschritt Energie verloren. Dies hängt damit zusammen, dass die inkrementelle Verschiebung des Kontaktknotens in diesem Zeitschritt noch von Null verschieden ist und gleichzeitig eine Normalkontaktkraft entsteht. Befindet sich der Körper einmal in Kontakt, geht keine weitere Energie mehr verloren, da die inkrementellen Verschiebungen jetzt Null sind. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Betrag des Energieverlustes in diesem kritischen Zeitschritt mit einem kleineren Δt abnimmt. Wird Δt kleiner, steigt die Wahrscheinlichkeit, mit einem diskreten Zeitschritt genau den Zeitpunkt des ersten Kontaktes zu treffen. Im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ wird die Energie auch ohne Anwendung der „Velocity-Update“-Methode erhalten bleiben. Die beiden unteren Diagramme in Abbildung 8.5 zeigen, dass die Erhaltung der totalen Energie mit Hilfe

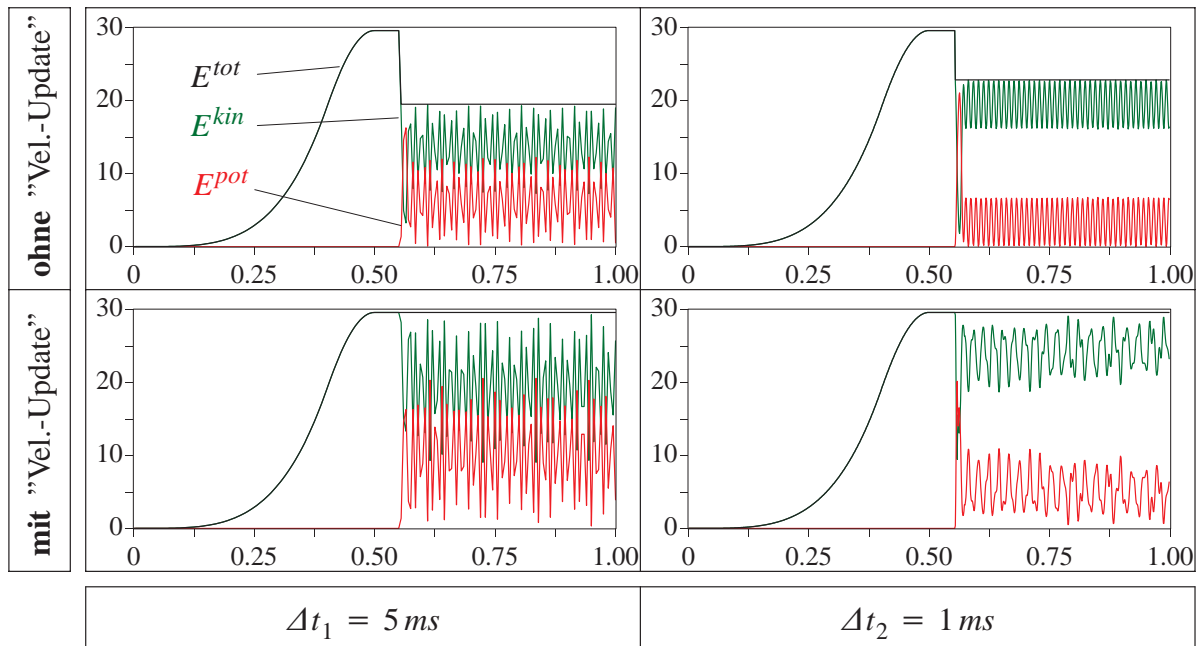


Abb. 8.5: Energien [Nm=J] vs Zeit [s]: **Mit** und **ohne** „Velocity-Update“-Methode der „Velocity-Update“-Methode garantiert werden kann, und zwar unabhängig von der Größe des Zeitschrittes.

8.4 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde die „Velocity-Update“-Methode von Laursen und Love (2002) vorgestellt, für die Anwendung mit der in dieser Arbeit dargelegten Kontaktformulierung entsprechend modifiziert und im Sinne der GEMM verallgemeinert. Anhand eines einfachen, zweidimensionalen Beispiels wurde auf die Problematik auftretender Oszillationen der Kontaktkräfte hingewiesen und die Ursachen hierfür erläutert. Eine Möglichkeit, die negativen Auswirkungen dieser unphysikalischen Oszillationen zu vermeiden, besteht in der Mittelung der diskreten Lagrange-Multiplikatoren. Die numerischen Ergebnisse haben gezeigt, dass sowohl die Mittelung der Lagrange-Multiplikatoren als auch die Anwendung der „Velocity-Update“-Methode geeignete Verfahren für die Analyse von dynamischen Kontaktproblemen darstellen.

9 Numerische Beispiele

Anhand einiger ausgewählter numerischer Beispiele wird im folgenden Kapitel die Leistungsfähigkeit der in dieser Arbeit weiterentwickelten Kontaktformulierung untersucht. Dazu werden sowohl zwei- als auch dreidimensionale, statische und dynamische Problemstellungen betrachtet. Für alle Beispielrechnungen wird das lineare St. Venant-Kirchhoff Materialgesetz verwendet.

9.1 Zweidimensionale Beispiele

9.1.1 Hertzscher Kontakt – Signorini Problem

Um die Genauigkeit der vorgestellten Kontaktformulierung zu überprüfen, wird der Hertzsche Kontakt (Hertz (1881)) eines unendlich langen, linear elastischen Halbzylinders untersucht. Der Zylinder ruht auf einem ebenen, starren Untergrund und wird durch eine gleichförmige Last p entlang der Oberseite belastet. Da für die analytische Lösung die Annahme sehr kleiner Verformungen zugrunde liegt, werden nur geringe Lasten angesetzt. Geometrie, Materialdaten und Belastung sind in Anlehnung an Yang et al. (2005) gewählt und können der Abbildung 9.1 entnommen werden. Der analytische Verlauf des Kontaktdrucks ist in Kikuchi und Oden (1988) angegeben:

$$t_c = \frac{2P}{\pi b^2} \sqrt{(b^2 - x^2)} . \quad (9.1)$$

Darin ist P die Auflast je Längeneinheit, die sich hier zu $P = 2Rp = 10.0 \text{ [N/mm]}$ ergibt. Der Parameter b stellt die halbe Breite der Kontaktfläche dar und berechnet sich mit

Geometrie:	Material:	Belastung:
$R = 8.0 \text{ [mm]}$	$E = 200.0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$	$p = 0.625 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
$L = \infty$	$\nu = 0.3$	

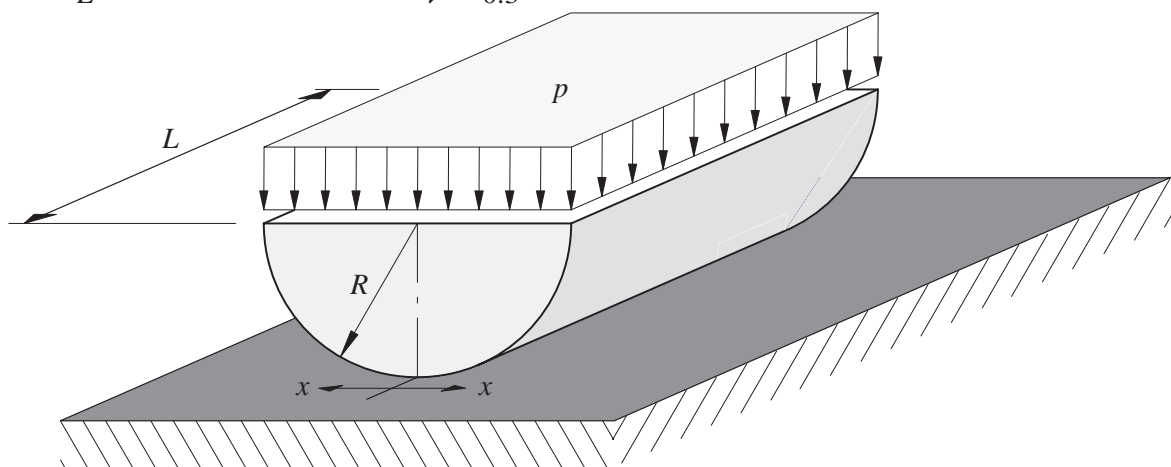
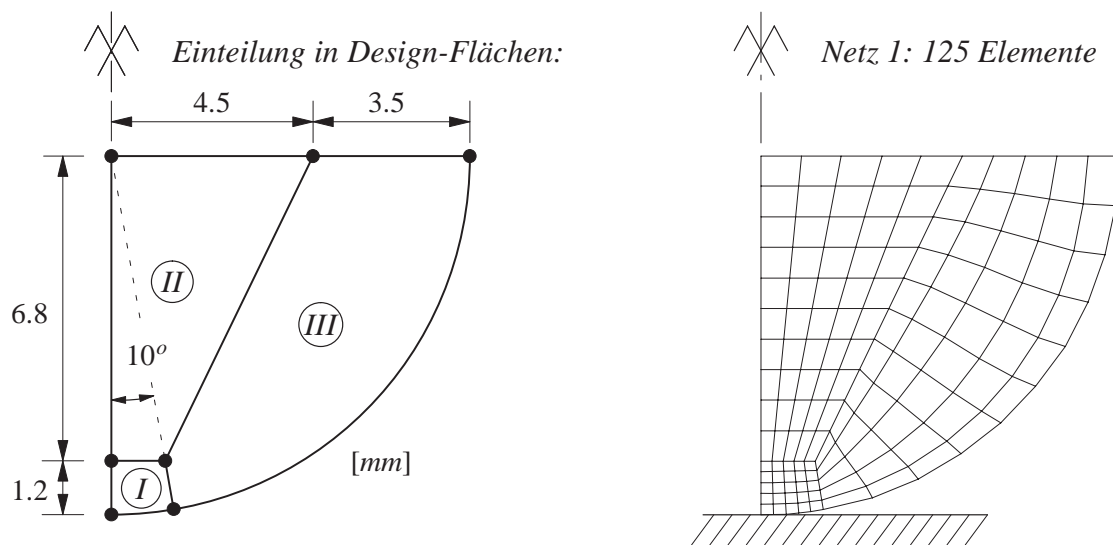


Abb. 9.1: Hertzches Kontaktproblem

$$b = 2 \sqrt{\frac{PR(1 - \nu^2)}{E\pi}} = 0.6808 \text{ mm} . \quad (9.2)$$

Die Laufvariable x beschreibt den Abstand von der Zylinderachse nach außen (Abb. 9.1).

Aufgrund der unendlich langen Ausdehnung in Längsrichtung liegt offensichtlich ein ebener Verzerrungszustand vor, so dass dieses Problem mit zweidimensionalen Finiten Elementen untersucht werden kann. Zudem kann von einem quasi statischen Zustand und von geometrisch linearem Verhalten ausgegangen werden. Zur Abbildung des Kontaktdruckverlaufs entlang der kleinen Kontaktfläche (Gl. (9.2)) muss dieser Bereich relativ fein vernetzt werden. Es werden vier unterschiedlich feine FE-Netze untersucht, wobei es aufgrund der Symmetrie genügt, nur eine Hälfte des Halbzylinders zu diskretisieren. Die verwendeten FE-Netze sind in Abbildung 9.2 dargestellt.



FE-Netze: Unterteilung der Design-Flächen und Gesamtanzahl der Finiten Elemente

Netz	Ⓘ	Ⓜ	Ⓜ	Σ Elemente
1	5×5	5×10	5×10	125
2	10×10	10×20	10×20	500
3	20×20	20×40	20×40	2000
4	40×40	40×80	40×80	8000

Abb. 9.2: FE-Netze für Hertz'schen Kontakt (halbes System)

In Abbildung 9.3 ist der Verlauf des Kontaktdrucks für die verwendeten Diskretisierungen der analytischen Lösung nach Hertz gegenübergestellt. Für die Darstellung werden zwei verschiedene Arten der Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren durchgeführt. Werden die ermittelten Knotenwerte $(z_\nu)_i$ der Lagrange-Multiplikatoren mit den diskontinuierlichen dualen Ansatzfunktionen ϕ_i^D interpoliert, ergeben sich die in Abbildung 9.3a) visualisierten Verläufe. Aufgrund der diskontinuierlichen Ansatzfunktionen entstehen Sprünge im interpolierten Verlauf des Kontaktdrucks. Der Betrag dieser Sprünge nimmt mit wachsendem x sukzessive zu, da

hier der Gradient des Kontaktdrucks stetig größer wird. Der „sägezahn“-ähnliche Verlauf gibt die wahre Verteilung des Kontaktdrucks nur unbefriedigend wieder, weshalb die Knotenwerte $(z_v)_i$ der Lagrange-Multiplikatoren in Abbildung 9.3b) linear interpoliert werden. Dies entspricht dem in Hüeber et al. (2005) beschriebenen Vorgehen. Die dadurch erhaltenen Verläufe sind kontinuierlich und nähern sich mit feiner werdendem Netz an die analytische Kontaktdruckverteilung an. Es lässt sich mathematisch zeigen, dass die Ordnung des Fehlers für beide Arten der Interpolation äquivalent ist.

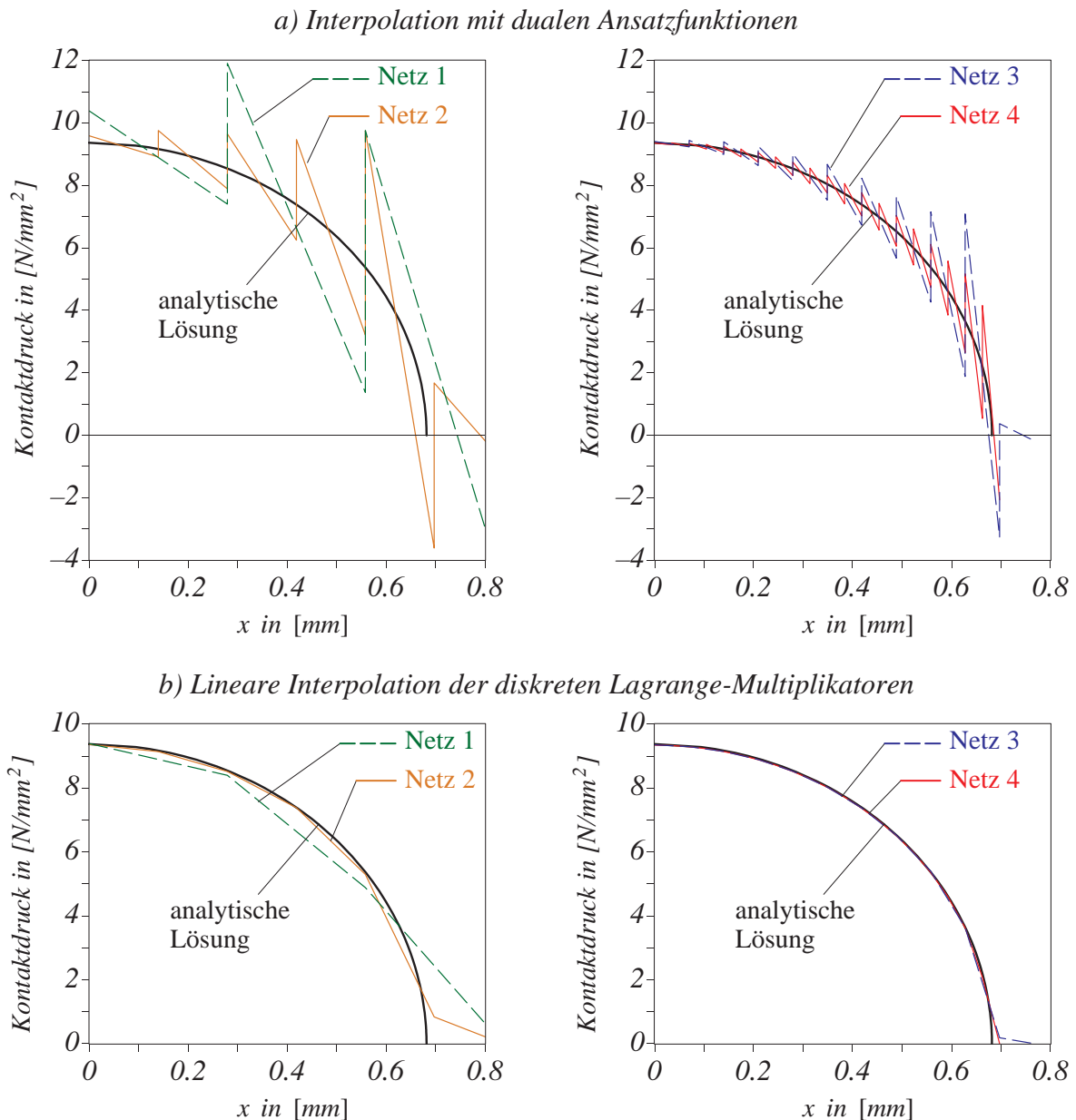


Abb. 9.3: Verlauf des Kontaktdrucks

Bei Betrachtung der kontinuierlichen Interpolation (Abb. 9.3b)) fällt auf, dass bereits mit dem relativ groben Netz 2 eine sehr gute Approximation des wahren Kontaktdruckverlaufs erhalten wird. Die Lösungen mit den feineren Netzen 3 und 4 unterscheiden sich kaum noch und repräsentieren

tieren die analytische Kontaktdruckverteilung sehr gut. Lediglich im äußersten Bereich der Kontaktfläche ($x > 0.65 \text{ mm}$) sind geringe Unterschiede zwischen den numerischen und dem analytischen Verlauf erkennbar. Diese sind darauf zurückzuführen, dass die Größe der approximierten Kontaktfläche von der Lage der diskreten FE-Knoten abhängt. Es ist deshalb sehr unwahrscheinlich, dass ein diskreter Knoten exakt an der analytisch berechneten Kontaktgrenze ($x = 0.6808 \text{ mm}$) positioniert ist.

9.1.2 Dünner Ring auf starres Hindernis

Anhand dieses Beispiels soll der Einfluss der unterschiedlichen Zeitdiskretisierungsverfahren auf die Systemantwort untersucht werden. Dieses System wurde in ähnlicher Form bereits von Wriggers et al. (1990) und Laursen (2002) untersucht. Ein elastischer Ring wird mit einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit in einem Winkel von 45° auf ein ebenes, starres Hindernis geworfen. Die Anfangsgeschwindigkeit erhält der Ring, indem er mit einer gleichmäßig verteilten Flächenlast $p(t)$ während der ersten 4 ms belastet wird. Danach bewegt sich der Ring mit konstanter Geschwindigkeit auf das starre Hindernis zu. Die genaue Geometrie, die Materialdaten sowie die Lastkurve sind der Abbildung 9.4 zu entnehmen. Der Ring wird mit 64 zweidimensionalen, bilinearen Q1-Elementen diskretisiert. Für die Berechnung wird die Annahme eines ebenen Spannungszustandes zu Grunde gelegt und eine Einheitsdicke von 1 mm gewählt. Untersucht wird ein Zeitintervall von $T = 50 \text{ ms}$, wobei für die Berechnung jeweils eine konstante Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.1 \text{ ms}$ angesetzt wird.

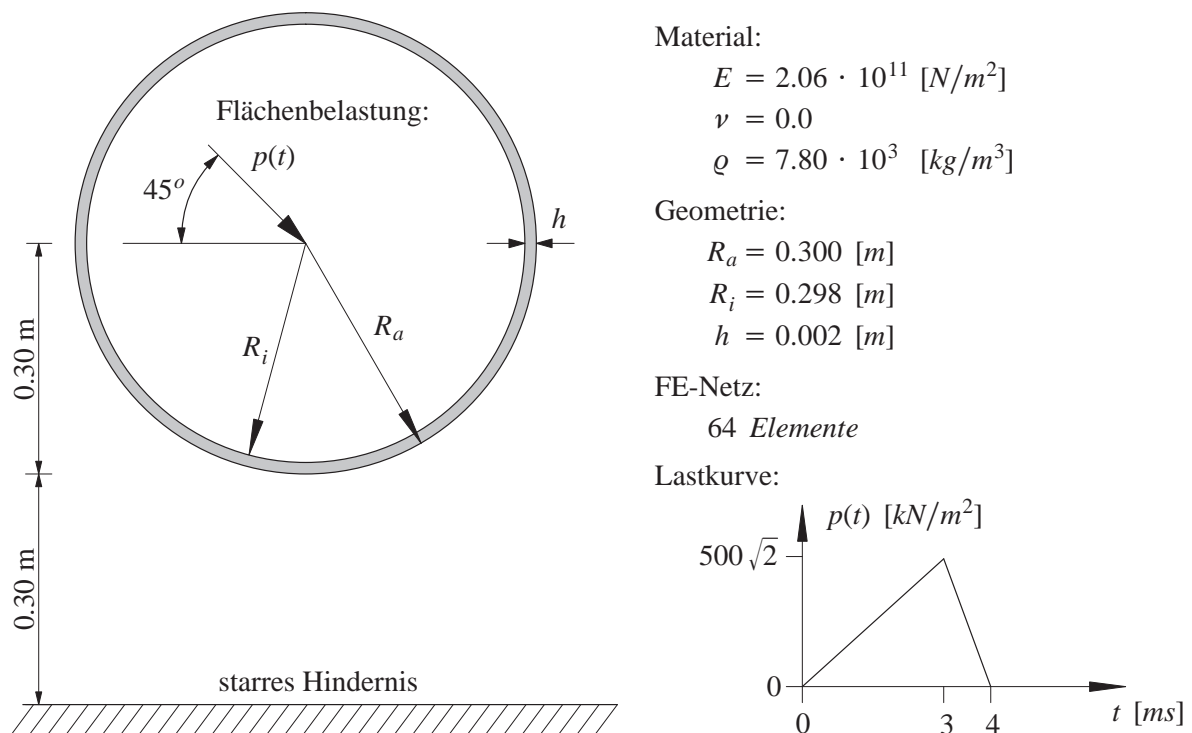


Abb. 9.4: Dünner Ring: Material, Geometrie, Diskretisierung und Belastung

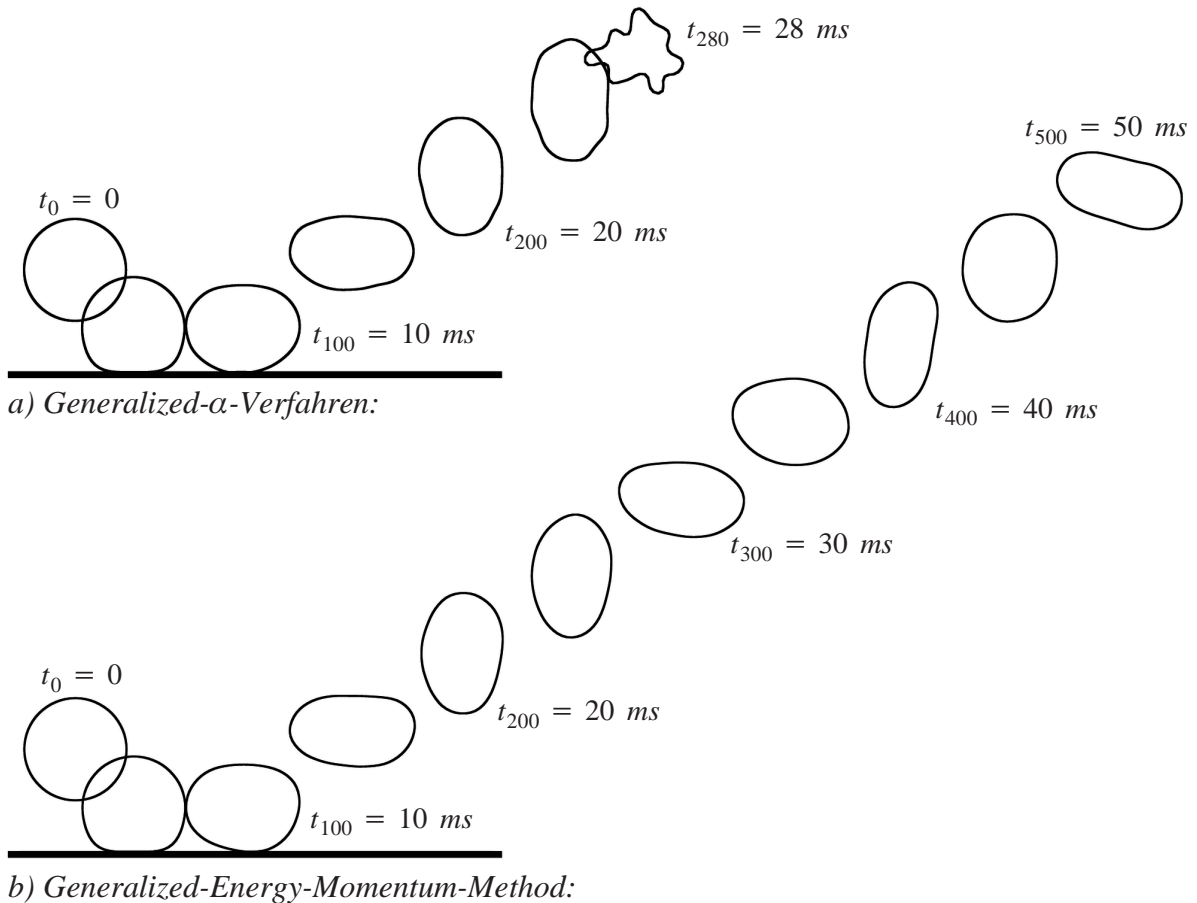


Abb. 9.5: Dünner Ring: Bewegungsvorgang ($\rho_\infty = 1.0$)

Die Berechnung wird sowohl mit dem „Generalized- α “-Verfahren (Gen $_\alpha$) in unmodifizierter Form als auch mit der „Generalized-Energy-Momentum-Method“ (GEMM) durchgeführt. Allerdings wird für die GEMM die „Velocity-Update“-Methode eingesetzt. In Abbildung 9.5 ist der berechnete Bewegungsvorgang des dünnen Rings für die beiden Zeitintegrationsverfahren dargestellt. Der Spektralradius wurde hierfür in beiden Fällen zu $\rho_\infty = 1.0$ gewählt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Verwendung des Gen $_\alpha$ -Verfahrens zu instabilen Lösungen führt. Nach einem berechneten Zeitintervall von $T = 28 \text{ ms}$ konvergiert das Verfahren nicht mehr. Die auf-

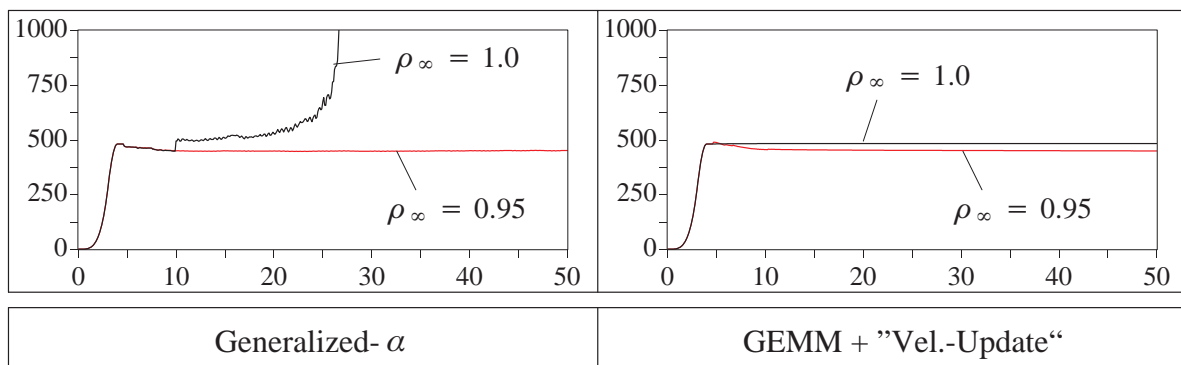


Abb. 9.6: Dünner Ring: Totale Energie [Nm=J] vs Zeit [ms]

treten Instabilität dieses Verfahrens ist gleichzeitig mit einem sehr starken Anwachsen der totalen Energie verbunden (Abb. 9.6_{links}). Eine einfache Möglichkeit, das Gen $_{\alpha}$ -Verfahren zu stabilisieren, ist die Wahl eines kleineren Spektralradius und das damit verbundene Einbringen von numerischer Dissipation. Bereits mit $\rho_{\infty} = 0.95$ liefert das Gen $_{\alpha}$ -Verfahren für dieses Beispiel stabile Lösungen, was mit einem Verlust von etwa 6.5% der totalen Energie verbunden ist. Im Gegensatz dazu stellt die GEMM in Verbindung mit der „Velocity-Update“-Methode, unabhängig vom gewählten Spektralradius, ein stabiles Zeitintegrationsverfahren dar (Abb. 9.6_{rechts}).

9.1.3 Kontakt-Patchtest

Eine Kontaktformulierung sollte in der Lage sein, ein räumlich konstantes Spannungsfeld entlang nicht konform diskretisierter Kontaktflächen exakt von einem Körper auf den anderen zu übertragen. Dieses wird mit dem sogenannten Kontakt-Patchtest (Simo et al. (1985)) überprüft.

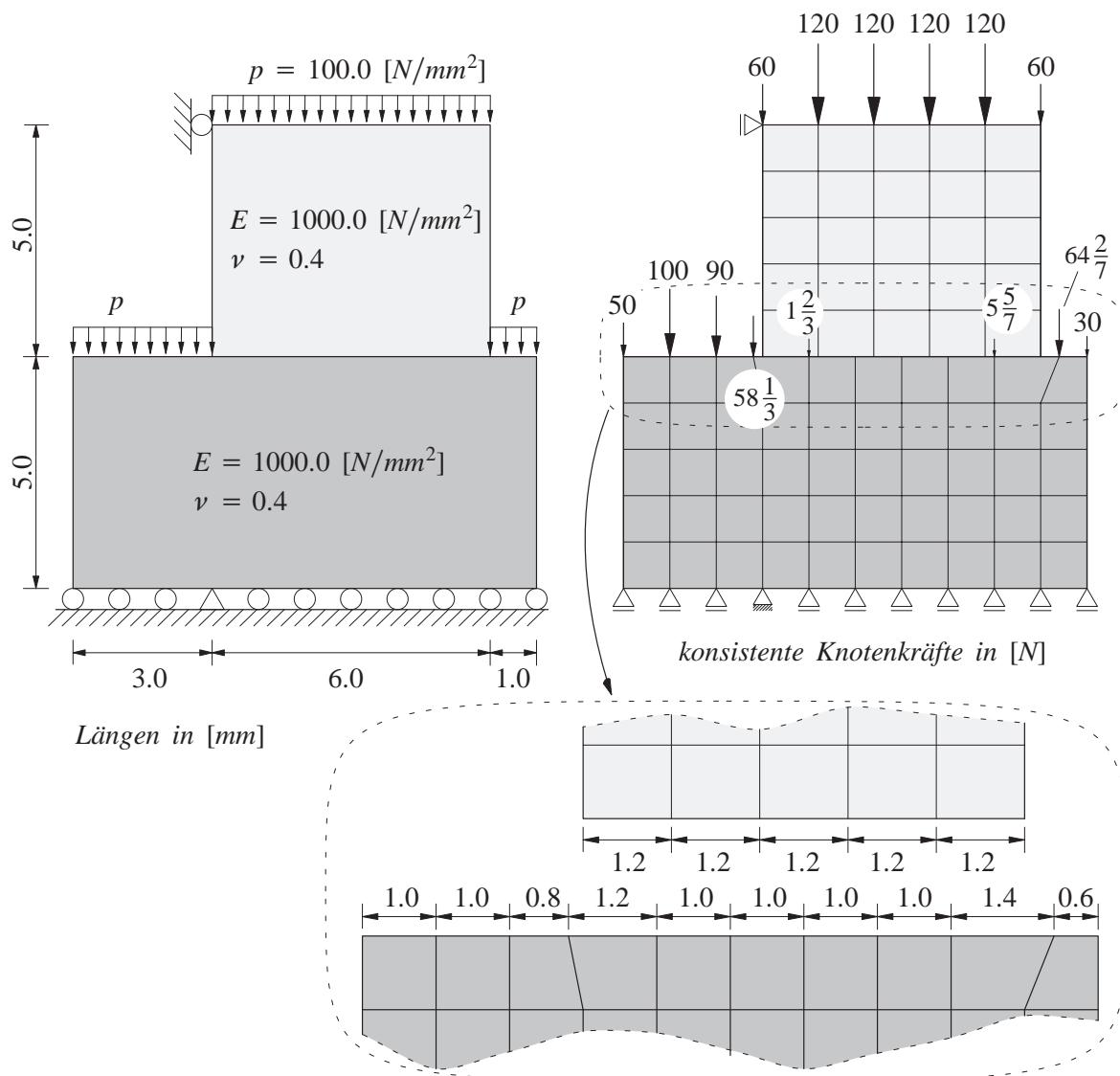


Abb. 9.7: Geometrie, Materialdaten, Diskretisierung und konsistente Knotenkräfte

Als Testbeispiel wird das in Yang et al. (2005) vorgeschlagene Problem untersucht. Ein elastischer Körper wird mit einer konstanten Belastung auf einen ebenfalls elastischen Block gedrückt. Zur Verallgemeinerung des Problems wird der obere Körper leicht exzentrisch auf den unteren angeordnet. Ein gleichmäßig verteilter Druck von $p = 100.0 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ wird auf die Oberseiten der beiden Körper aufgebracht, so dass eine konstante Spannungsverteilung in der Kontaktfläche entsteht. Die Geometrie, die elastischen Materialparameter, die gewählte Diskretisierung sowie die anzusetzenden, konsistenten Knotenkräfte sind in Abbildung 9.7 dargestellt. Die Berechnung erfolgt unter Verwendung von 75 zweidimensionalen, bilinearen Q1-Elementen und der Annahme eines ebenen Spannungszustandes. Für die betrachteten Scheiben wird die Einheitsdicke von 1 mm angesetzt. Wie der Abbildung 9.7 zu entnehmen ist, wird die Diskretisierung so gewählt, dass entlang des Kontaktrandes zwei nicht konforme FE-Netze aufeinander treffen.

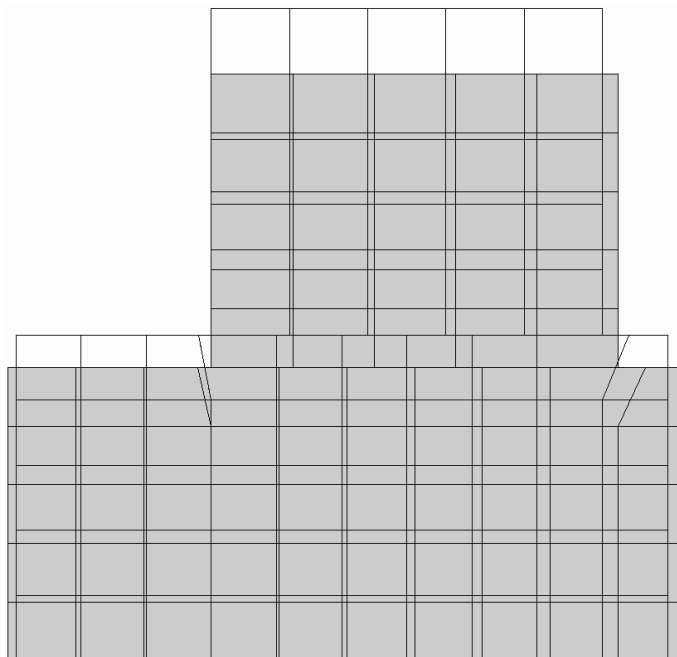


Abb. 9.8: Unverformtes und verformtes FE-Netz für den Kontakt-Patchtest

Der konstante Spannungszustand wird exakt von einem Körper auf den anderen übertragen. Alle diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren in Normalenrichtung ergeben sich exakt zu 100 N . In Abbildung 9.8 ist das unverformte und das verformte FE-Netz abgebildet. Es zeigt sich, dass sich die beiden Körper gleichmäßig in vertikaler Richtung verformen. Die vorgestellte Kontaktformulierung erfüllt somit den Kontakt-Patchtest für beliebige nicht konforme Netze entlang des Kontaktrandes.

9.1.4 Ironing Problem

Als letztes zweidimensionales Beispiel wird das sogenannte „Ironing Problem“ untersucht. Ein elastischer Block wird in eine ebenfalls elastische Scheibe eingedrückt und anschließend in horizontaler Richtung verschoben. Die Geometrie- und Materialdaten sind in Anlehnung an Yang

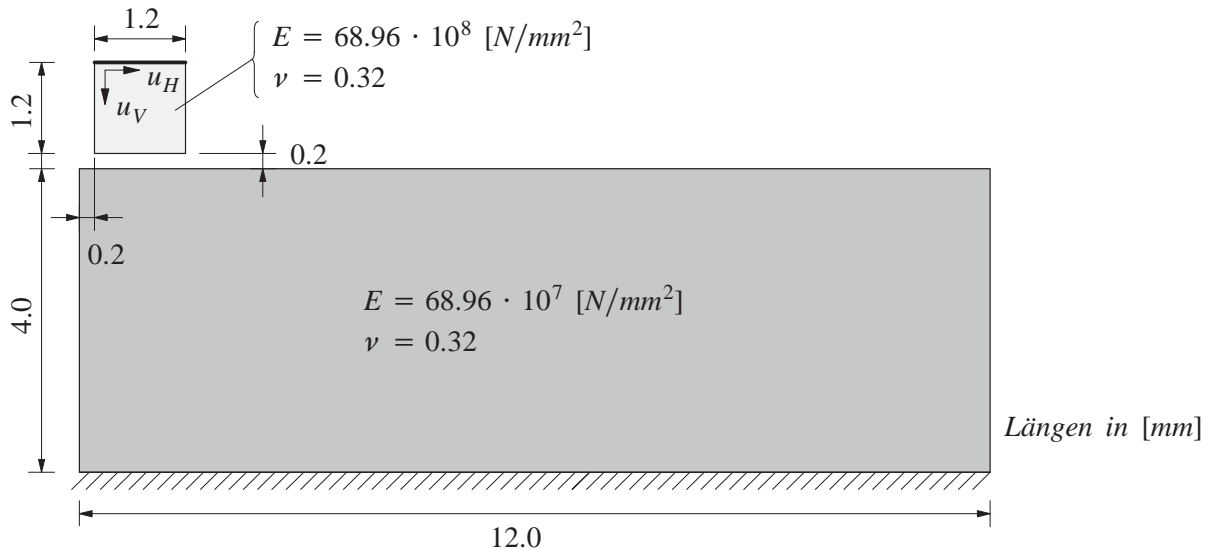


Abb. 9.9: Ironing Problem: Geometrie und Materialdaten

et al. (2005) gewählt und in Abbildung 9.9 dargestellt. Die Oberkante des Blocks wird zunächst um $u_V = 0.8 \text{ mm}$ in vertikaler Richtung nach unten und anschließend um $u_H = 10.0 \text{ mm}$ in horizontaler Richtung nach rechts verschoben. Für die quasi statische verschiebungsgesteuerte Berechnung wird die Annahme eines ebenen Spannungszustandes zu Grunde gelegt. Es wird bewusst eine sehr grobe Diskretisierung mit nur 49 bilinearen Q1-Elementen gewählt, um die Auswirkungen der integralen Erfüllung der Nichtdurchdringungsbedingung besonders zu verdeutlichen. In Abbildung 9.10 sind einige Verformungszustände der Berechnung dargestellt. Darin wird offensichtlich, wie die FE-Knoten des Blocks in das diskretisierte Gebiet der Scheibe eindringen. Dies ist eine direkte Konsequenz der integralen Nichtdurchdringungsbedingung. Zusätzlich zeigt dieses Beispiel, dass die vorgestellte Kontaktformulierung in der Lage ist, große tangentielle Relativverschiebungen zweier kontaktierender Körper abzubilden.

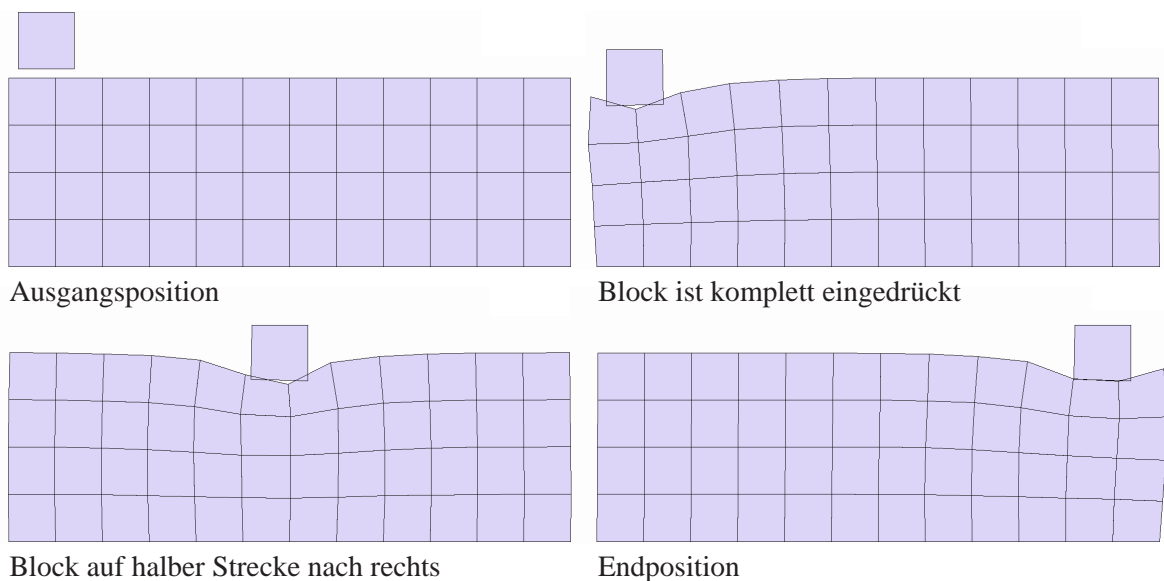


Abb. 9.10: Ironing Problem: Verformungszustand zu unterschiedlichen „Zeitpunkten“

9.2 Dreidimensionale Beispiele

9.2.1 Rohr

Als erstes dreidimensionales Beispiel wird ein dünnes, elastisches Rohr betrachtet, das durch zwei gegenüberliegende starre Platten zusammengedrückt wird. Die untere Platte ist fest gelagert und die obere wird durch die Gesamlast P gleichmäßig nach unten gedrückt. Die Abmessungen des Rohrs sowie die verwendeten Materialdaten sind in Abbildung 9.11 dargestellt. Aufgrund der Symmetrie des Systems wird lediglich eine Hälfte des Rohrs diskretisiert. Hierzu werden 1080 trilineare oberflächenorientierte hybride Schalelemente verwendet.

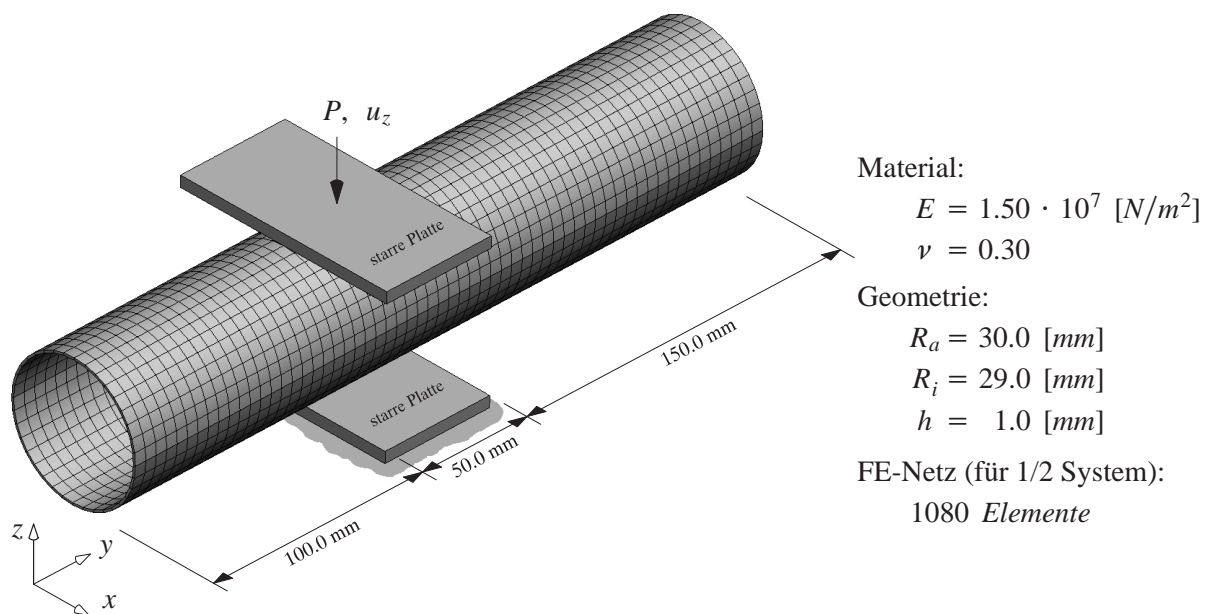


Abb. 9.11: Rohr: Material, Geometrie, Diskretisierung und Belastung

Es wird eine statische verschiebungsgesteuerte Berechnung durchgeführt, indem die obere Platte in 130 äquivalenten Verschiebungsincrementen von $\Delta u_z = 0.4 \text{ mm}$ insgesamt um $u_z = 52.0 \text{ mm}$ nach unten geschoben wird.

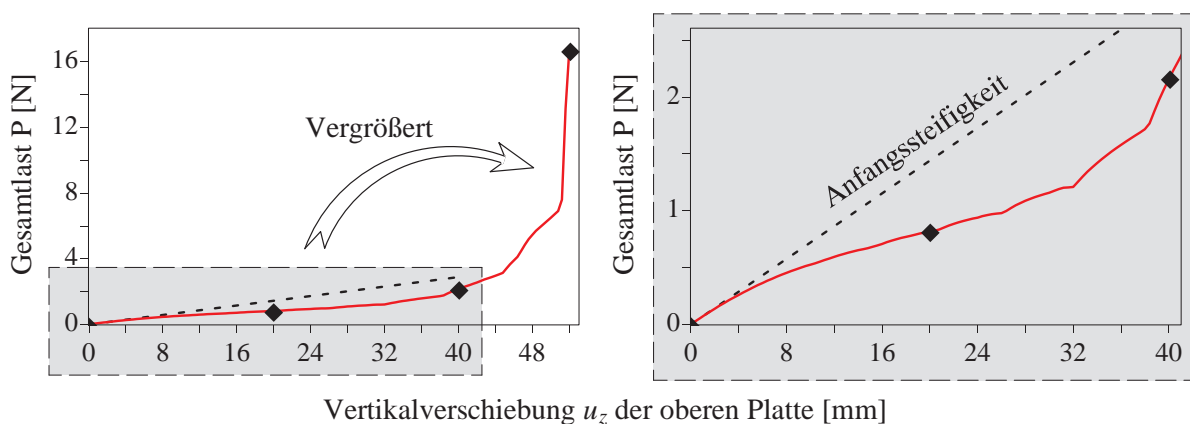


Abb. 9.12: Rohr: Last-Verschiebungs-Kurve

In Abbildung 9.12 ist die Last-Verschiebungs-Kurve für die Vertikalverschiebung der oberen starren Platte dargestellt. Eine Vergrößerung zeigt, dass die Steifigkeit des Systems aufgrund der aufgezwungenen Verformung zunächst deutlich abnimmt. Erst ab einer Vertikalverschiebung der oberen Platte von $u_z > 32 \text{ mm}$ wird in etwa wieder die Anfangssteifigkeit erreicht. Danach steigt die Steifigkeit des Systems mit weiterer Steigerung von u_z rapide an. Für die in Abbildung 9.12 markierten Stellen der Last-Verschiebungs-Kurve sind die zugehörigen Verformungszustände für drei verschiedene Ansichten in Abbildung 9.13 dargestellt. Bei Betrachtung des Rohr- endquerschnittes lässt sich folgendes Phänomen erkennen: Der zunächst kreisrunde Querschnitt wird zu Beginn der aufgebrachtten Verschiebung in horizontaler Richtung ovalisiert ($u_z = 20.0 \text{ mm}$). Bei weiterer Steigerung der Vertikalverschiebung der oberen starren Platte wird der Endquerschnitt wieder nahezu kreisrund ($u_z = 40.0 \text{ mm}$), bevor er sich schließlich in vertikaler Richtung ovalisiert ($u_z = 52.0 \text{ mm}$). Die Schnitte in Längs- und Querrichtung zeigen, wie sich die aktiven Kontaktknoten während der Berechnung verändern. Während sich am Anfang im wesentlichen die mittleren Bereiche des Rohrs in Kontakt mit den starren Platten befinden, wandern die Kontaktbereiche mit zunehmendem u_z sukzessive nach aussen.

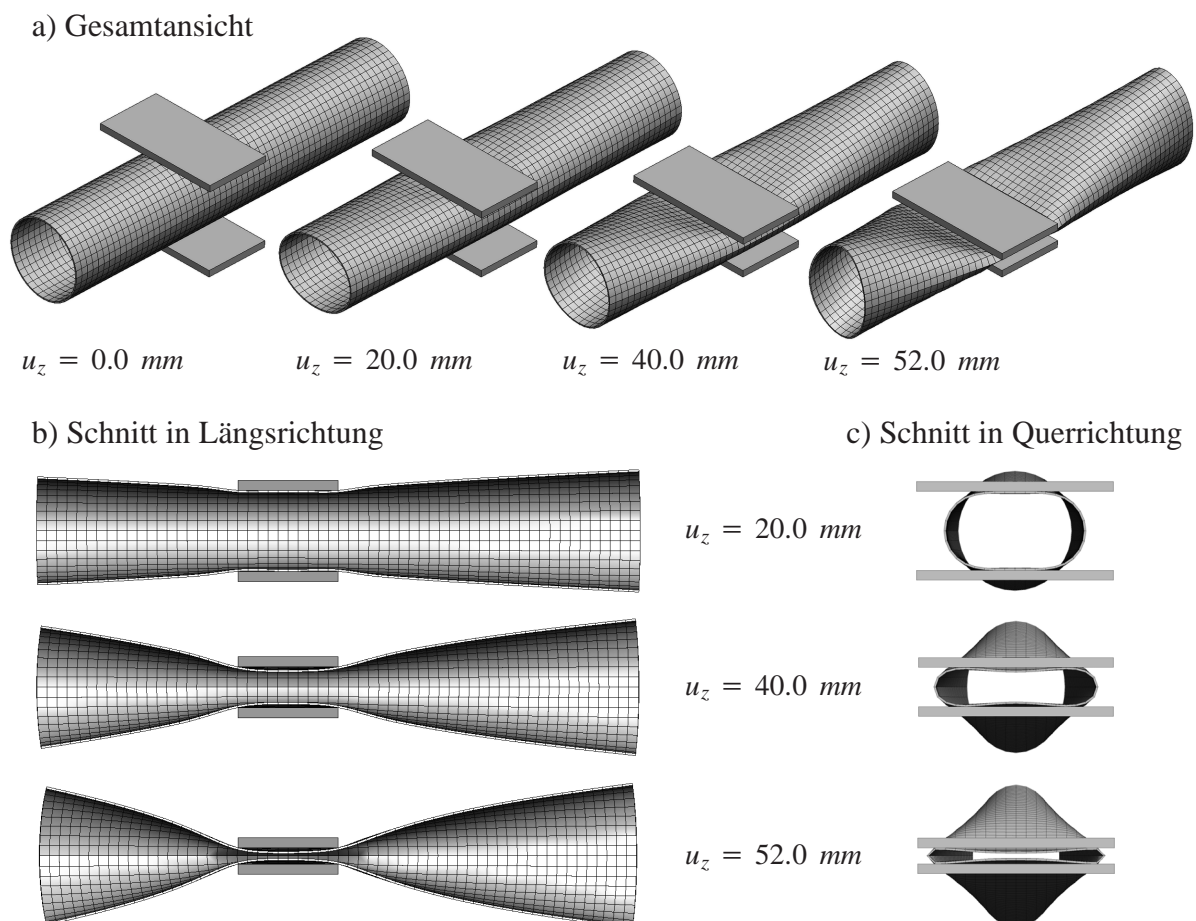


Abb. 9.13: Rohr: Verschiedene Verformungszustände

Die angewandte Kontaktformulierung stellt sich hierbei als äußerst robust und stabil heraus. Trotz der großen Verformungen des Rohrs und der damit verbundenen ständigen Veränderung der aktiven Kontaktknoten konvergiert die Aktive-Mengen-Strategie jeweils in weniger als fünf Schritten.

9.2.2 Ball

Das folgende Beispiel dient zur Verdeutlichung der Notwendigkeit eines geeigneten Verfahrens zur algorithmischen Erhaltung der totalen Energie im Falle von dynamischem Kontakt. Hierzu wird ein elastischer Ball untersucht, der im Wechsel auf zwei starre Hindernisse prallt. In Abbildung 9.14 sind die verwendeten Materialparameter, die Geometrie, die Diskretisierung sowie die Belastung dargestellt. Für die Diskretisierung des Balls werden 216 trilineare oberflächenorientierte hybride Schalelemente verwendet. Die Belastung wird derart aufgebracht, dass sich eine Rotation des Balls um alle drei Raumachsen ergibt. Hierzu wird die äußere Oberfläche des Balls jeweils zur Hälfte in positiver und negativer Koordinatenrichtung belastet. Eine Rotation um die globale y-Achse entsteht beispielsweise durch die Flächenbelastung der oberen bzw. unteren Kugelhälfte von $+f_x$ bzw. $-f_x$. Zusätzlich zu diesen, eine reine Rotation des Balls verursachenden

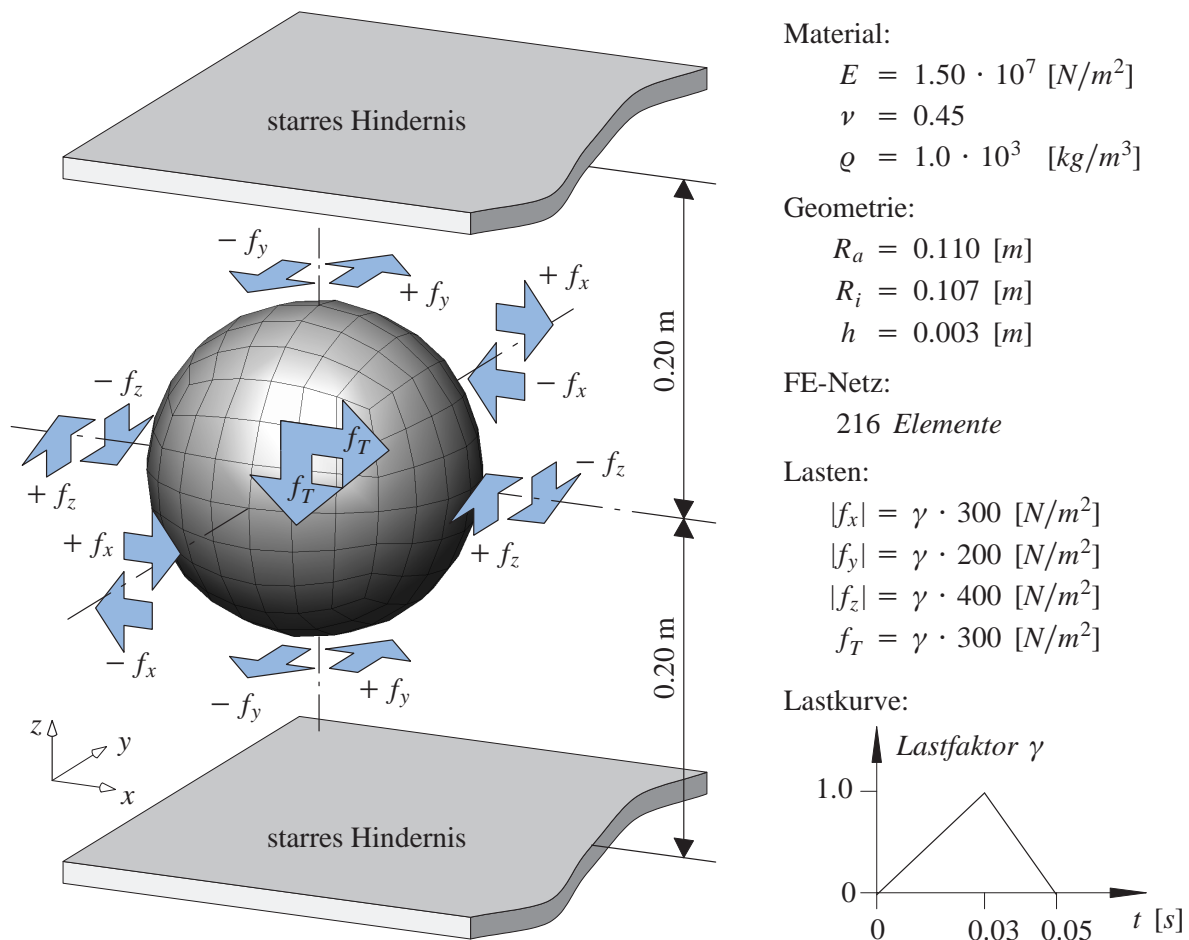


Abb. 9.14: Ball: Material, Geometrie, Diskretisierung und Belastung

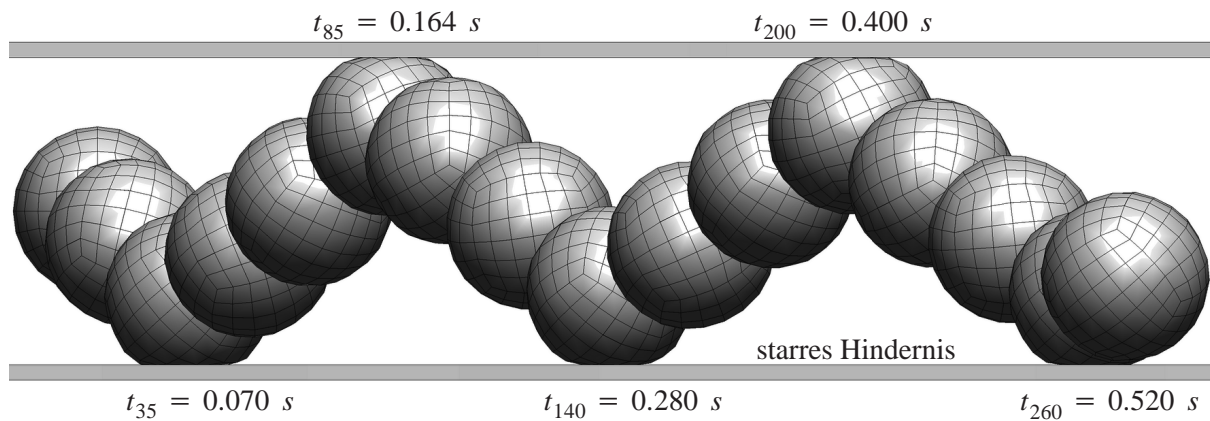


Abb. 9.15: Ball: Bewegungsvorgang – GEMM mit „Velocity-Update“-Methode ($\rho_\infty = 1.0$)

Lasten wird die Kugel durch zwei translatorische Flächenlasten f_T , die auf die gesamte Kugeloberfläche wirken, in x - und z -Richtung beschleunigt. Dadurch prallt der Ball unter einem Winkel von 45° zunächst auf das untere Hindernis.

Die Berechnungen werden mit der GEMM mit und ohne Berücksichtigung der „Velocity-Update“-Methode und einer konstanten Zeitschrittweite von $\Delta t = 2 \text{ ms}$ durchgeführt. Es wird der Zeitraum untersucht, indem der Ball fünf Mal mit einem starren Hindernis in Kontakt kommt. Abbildung 9.15 zeigt den berechneten Bewegungsvorgang unter Verwendung der „Velocity-Update“-Methode mit einem gewählten Spektralradius $\rho_\infty = 1.0$. In Abbildung 9.16 sind die Verläufe der totalen, kinetischen und potentiellen Energie dargestellt, die sich durch die Anwendung der GEMM mit unterschiedlichen Spektralradien ergeben.

Die Verläufe *ohne* Berücksichtigung der „Velocity-Update“-Methode zeigen deutlich, dass für jeden neuen Kontaktfall sukzessive Energie verloren wird. Verglichen mit dem durch Kontakt induzierten Energieverlust spielt die eingebrachte numerische Dissipation durch die Wahl von $\rho_\infty < 1.0$ nur eine untergeordnete Rolle. Die Energieverläufe für unterschiedlich gewählte Spektralradien unterscheiden sich nur unmerklich voneinander. Im betrachteten Zeitraum von $T = 0.55 \text{ s}$ werden unabhängig von der Wahl des Spektralradius etwa 22 % der totalen Energie verloren.

Im Gegensatz dazu lassen die Verläufe *mit* Berücksichtigung der „Velocity-Update“-Methode einen deutlichen Einfluss des gewählten Spektralradius erkennen. Der Fall $\rho_\infty = 1.0$ garantiert erwartungsgemäß die exakte Erhaltung der totalen Energie. Mit abnehmendem Spektralradius scheint sich jedoch auch die Auswirkung der „Velocity-Update“-Methode zu verringern. Für einen gewählten Spektralradius von $\rho_\infty = 0.95$ unterscheiden sich die Energieverläufe *mit* und *ohne* Anwendung der „Velocity-Update“-Methode nur noch um etwa 0.7 %. Auffallend ist lediglich, dass die Verläufe der totalen Energie durch die Berücksichtigung der „Velocity-Update“-Methode deutlich glatter verlaufen.

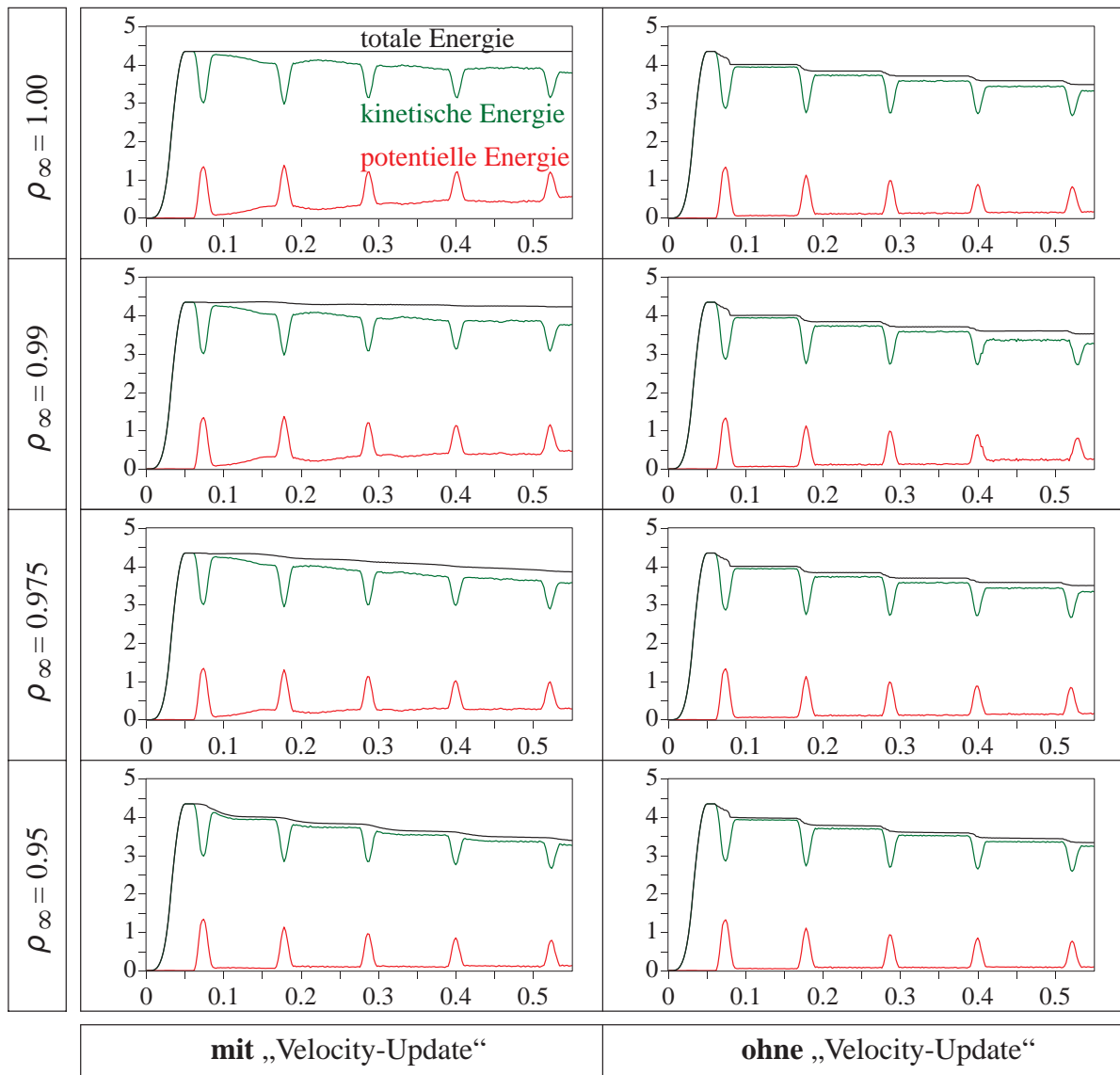


Abb. 9.16: Ball: Energien [Nm=J] vs Zeit [s] für GEMM

9.2.3 Das „geworfene Lineal“

Anhand des Beispiels des „geworfenen Lineals“ wurde in Kapitel 4.5 das jeweilige Verhalten der vorgestellten Zeitintegrationsverfahren verdeutlicht. Dieses Beispiel wird nun erneut aufgegriffen, um die Wirkungsweise der „Velocity-Update“-Methode zu untersuchen. Dazu wird dem freien Flug des „Lineals“ eine ebene starre Wand als Hindernis in den Weg gestellt. Die Abmessungen des Lineals sowie die aufgebrachten Lasten entsprechen exakt denjenigen aus Kapitel 4.5. Sie sind zusammen mit der Angabe der Position der starren Wand nochmals in Abbildung 9.17 dargestellt. Zur Diskretisierung werden wiederum 30 trilineare oberflächenorientierte hybride Schalenelemente verwendet, so dass die entsprechenden Linienlasten gleichmäßig auf die jeweiligen Schalenoberflächen verteilt werden. Unter Verwendung einer konstanten Zeitschrittweite von $\Delta t = 50\mu s$ wird ein Zeitintervall von $T = 100\text{ ms}$ untersucht.

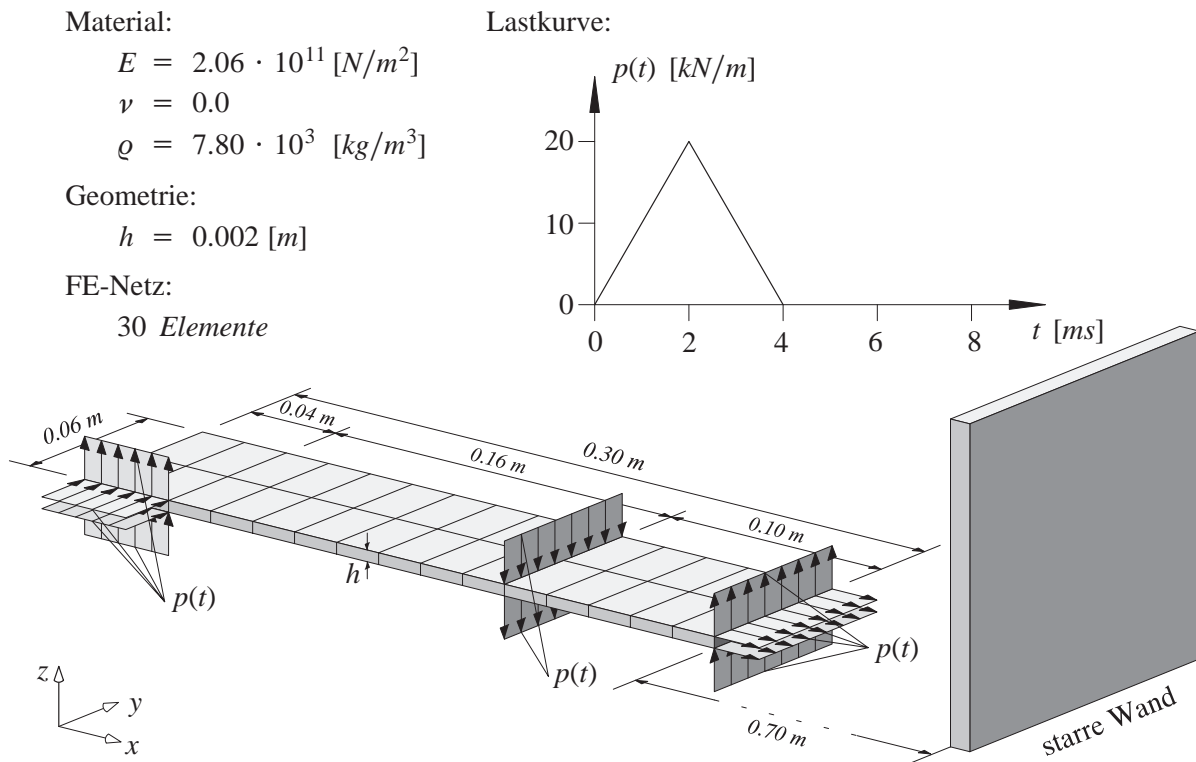


Abb. 9.17: Geworfenes Lineal: Material, Geometrie, Diskretisierung und Belastung

Der Bewegungsvorgang des Lineals ist in Abbildung 9.19 dargestellt. Es zeigt sich, dass die zunächst komplexe Flugbahn des Lineals in eine vorwiegend rotierende Bewegung nach dem Kontakt mit der starren Wand übergeht. Dies lässt sich auch aus den Darstellungen der jeweiligen Energieverläufe in Abbildung 9.18 entnehmen. Nach dem Kontakt des Lineals mit der starren Wand verringern sich die Amplituden der kinetischen und potentiellen Energie schlagartig.

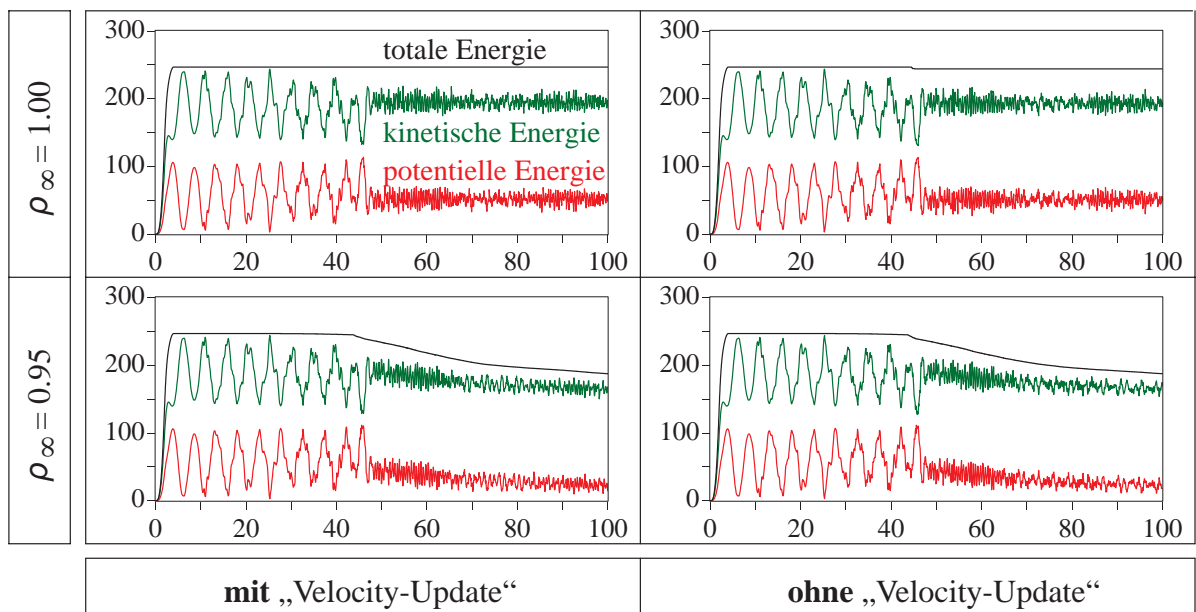


Abb. 9.18: Geworfenes Lineal: Energien [Nm=J] vs Zeit [ms] für GEMM

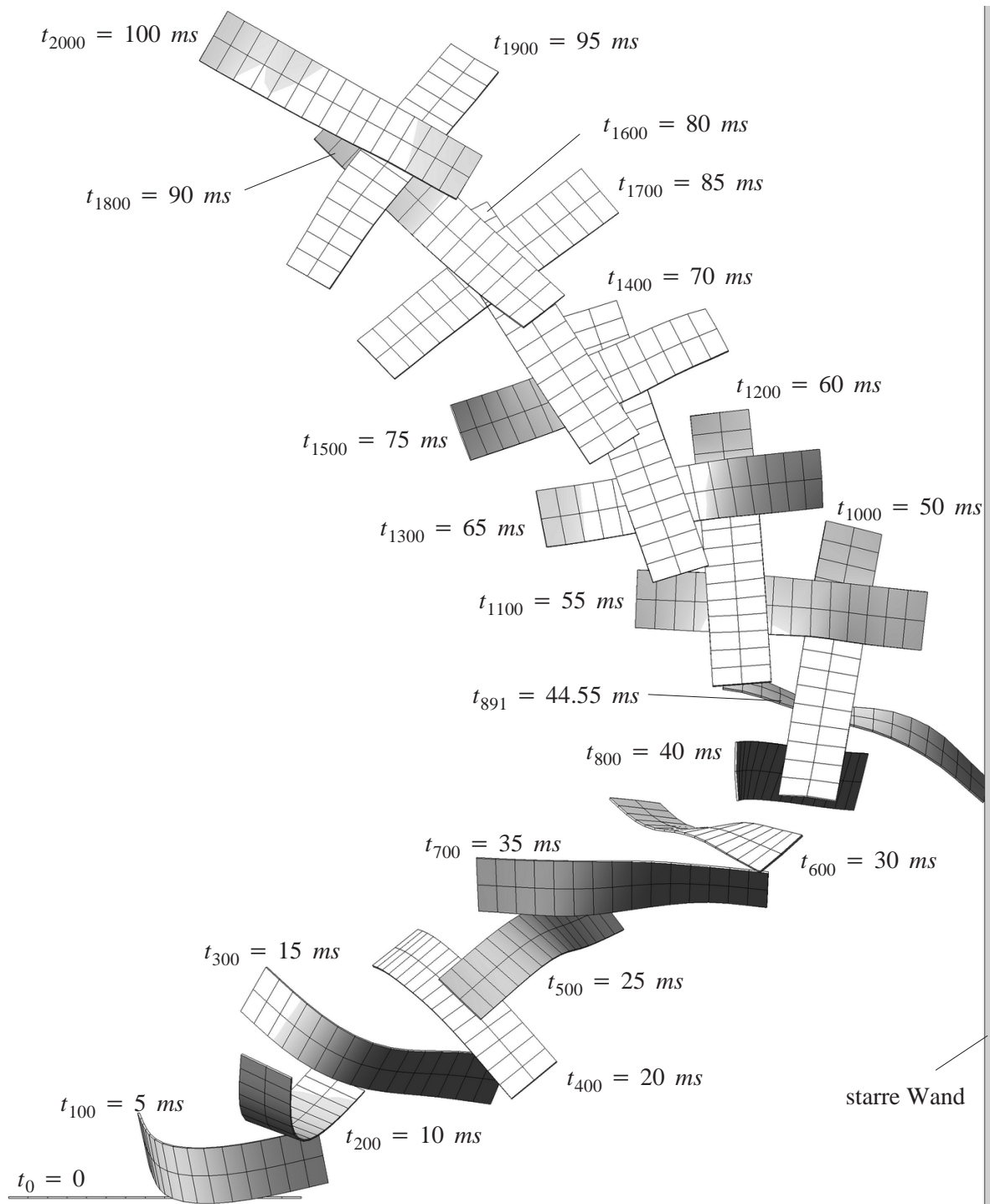


Abb. 9.19: Geworfenes Lineal: Bewegungsvorgang – GEMM mit „Vel-Upd“ ($\rho_\infty = 1.0$)

Die Auswirkung der algorithmischen Energieerhaltung im dynamischen Kontaktfall wird in diesem Beispiel erst bei genauerer Betrachtung sichtbar. In Abbildung 9.20 sind die Verläufe der totalen Energie zum Zeitpunkt des Kontaktes für zwei unterschiedlich gewählte Spektralradien mit und ohne Anwendung der „Velocity-Update“-Methode vergrößert dargestellt. Für die Berechnungen mit $\rho_\infty = 1.0$ ohne Verwendung der „Velocity-Update“-Methode ist deutlich zu erkennen, dass immer dann Energie verloren wird, wenn während eines Zeitschrittes Kontakt

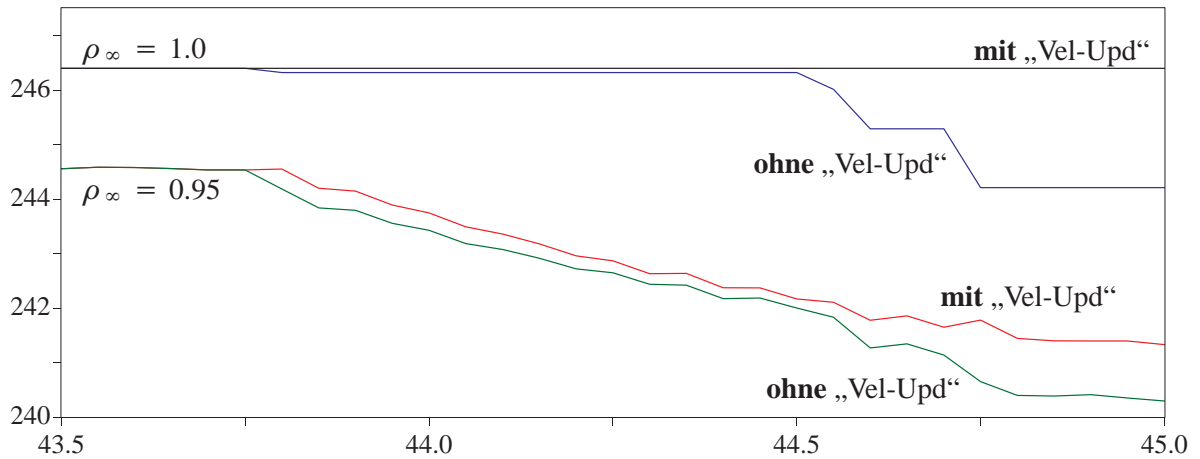


Abb. 9.20: Geworfenes Lineal: Totale Energien [Nm=J] vs Zeit [ms] für GEMM – Gezoomt zwischen einem Knoten und der starren Wand entsteht. Aufgrund der geringen Zeitschrittweite und der Tatsache, dass in diesem Beispiel nur sehr wenige FE-Knoten mit der starren Wand kontaktieren, beträgt der resultierende Energieverlust jedoch nur 1.05 %. Der Einfluss der „Velocity-Update“-Methode ist deshalb auch für die Berechnungen mit $\rho_\infty = 0.95$ nur schwach zu erkennen.

9.2.4 Torus mit und ohne Haftreibung

Abschließend wird mit diesem Beispiel gezeigt, wie die in dieser Arbeit vorgestellte Kontaktformulierung relativ einfach für die Berechnung von reibungsbehafteten Kontaktproblemen erweitert werden kann. Hierzu wird der Rollkontakt eines dünnwandigen, elastischen Rings für den Sonderfall reiner Haftreibung untersucht. Die einzuhaltende Haftbedingung wird lediglich in Rollrichtung ($\hat{= t^{\xi}}$, Abb. 9.21) formuliert. Senkrecht zu dieser Bewegungsrichtung (t^{η}) wird weiterhin von reibungsfreien Kontaktbedingungen ausgegangen. Zur algorithmischen Umsetzung der einzuhaltenden Haftbedingungen wird die vierte Zeile des reduzierten, inkrementellen Strukturgleichungssystems aus Gleichung (7.25) in einen Anteil in t^{ξ} - und in t^{η} -Richtung aufgespalten. Während der Anteil in t^{η} -Richtung unverändert bleibt, wird zur Einhaltung der Haftbedingung der Anteil in t^{ξ} -Richtung durch

$$\mathbf{T}_{A_l} \left(\mathbf{K}_T^{eff} \right)_{A_l A_l} \Delta \mathbf{d}^{A_l} = \mathbf{0} \quad (9.3)$$

ersetzt. Dadurch wird die inkrementelle Tangentialverschiebung eines aktiven Kontaktknotens in Richtung der Rollbewegung unterdrückt.

Zur Veranschaulichung der Wirkungsweise dieser einfachen Modifikation wird der Abrollvorgang eines Torus betrachtet. Dieser wird mit 384 trilinearen hybriden oberflächenorientierten Schalenelementen diskretisiert. Die verwendeten Materialparameter, die Geometrie und die aufgebrachte Belastung sind in Abbildung 9.22 dargestellt. Zunächst wird der Torus in eine reine Rotationsbewegung versetzt. Hierzu werden die Flächenlasten f_R an insgesamt acht, gleichmä-

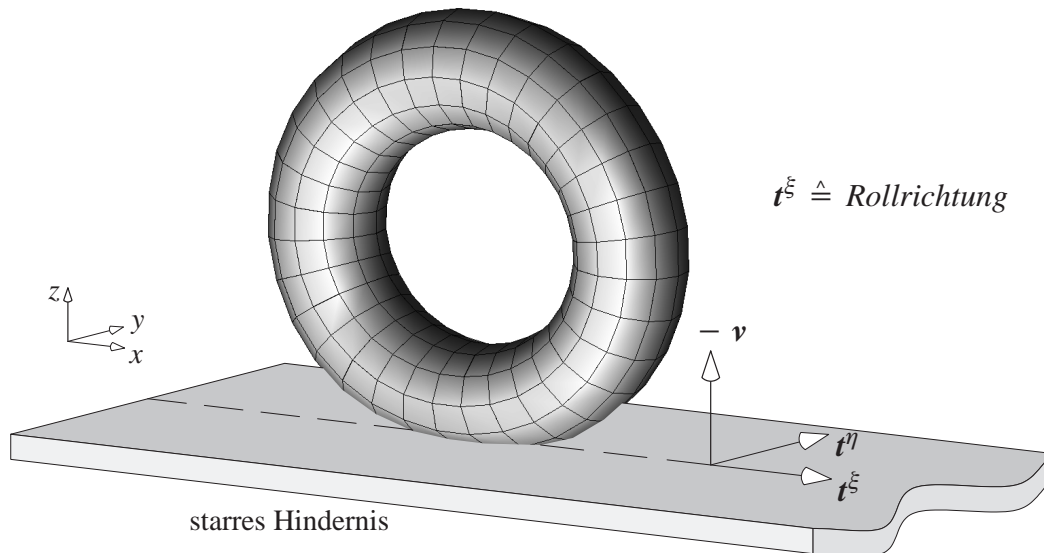


Abb. 9.21: Torus: Definition der Tangentialrichtungen

big verteilten Querschnittsflächen des Torus jeweils in tangentialer Richtung aufgebracht. Danach werden die inneren Oberflächen des Torus durch die Flächenlast f_T belastet, so dass der Torus unter einem Winkel von 22.5° in Richtung des starren Hindernisses beschleunigt wird. Die Berechnung erfolgt unter Verwendung der GEMM mit einem Spektralradius von $\rho_\infty = 1.0$ und der Berücksichtigung der „Velocity-Update“-Methode. Unter Verwendung einer konstanten Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.0125 \text{ s}$ wird ein Zeitintervall von $T = 2.5 \text{ s}$ betrachtet. Es werden zwei Berechnungen durchgeführt; einmal *mit* und einmal *ohne* Berücksichtigung der Haftbedingung in Rollrichtung.

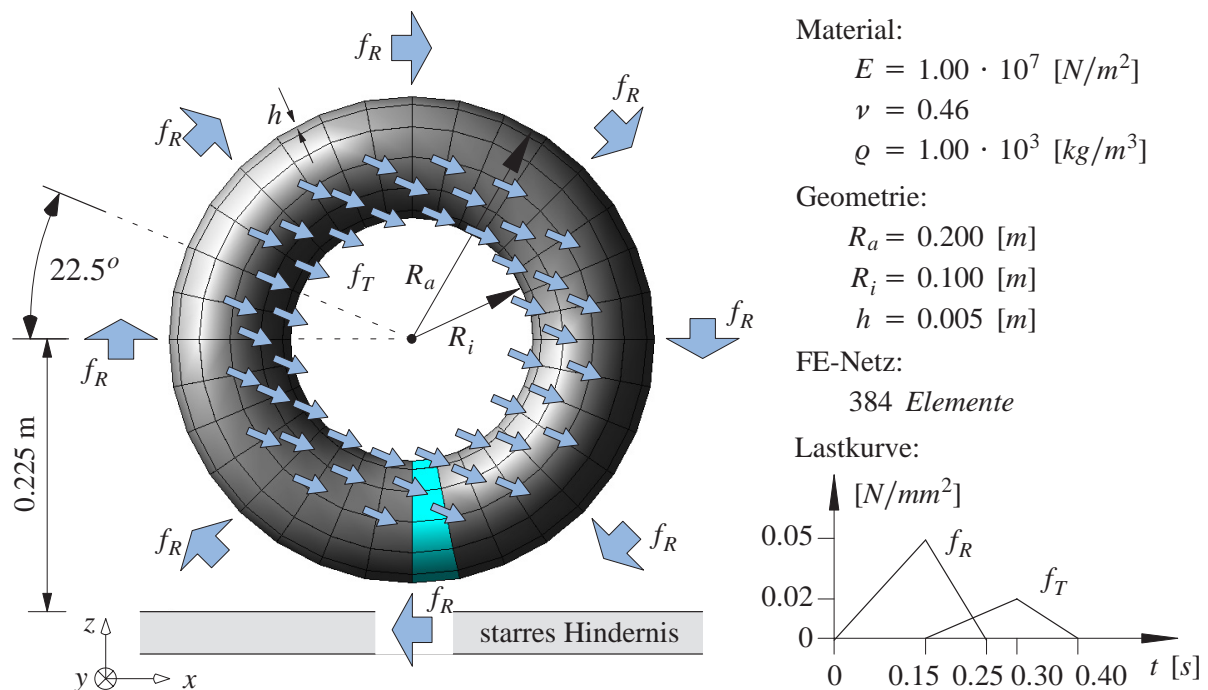


Abb. 9.22: Torus: Material, Geometrie, Diskretisierung und Belastung

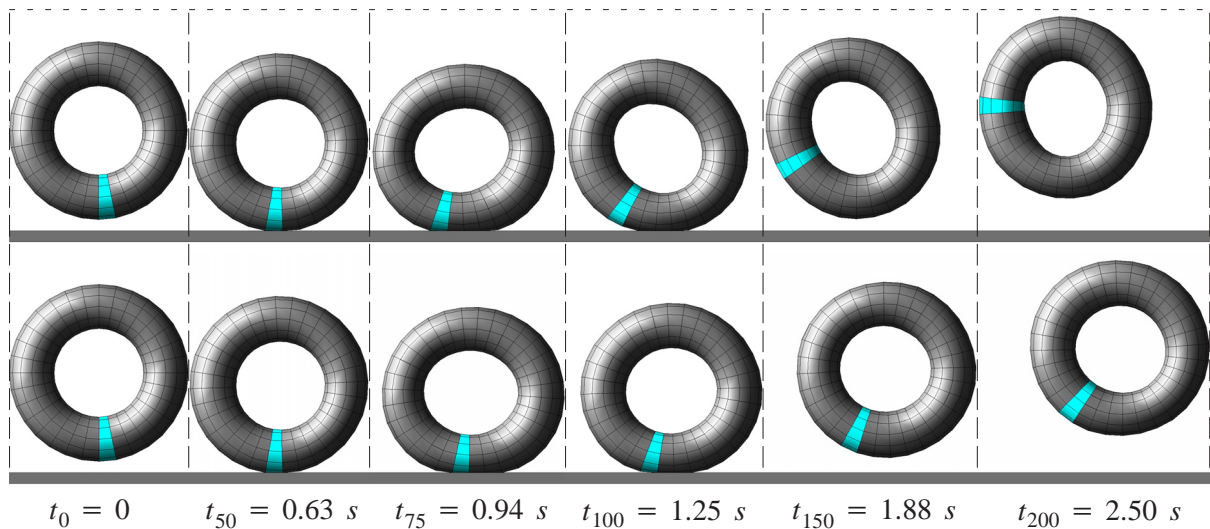


Abb. 9.23: Torus: Bewegungsvorgang – GEMM mit „Vel-Upd“ ($\rho_\infty=1.0$)
oben: mit Haftbedingung – unten: ohne Haftbedingung

In Abbildung 9.23 ist der jeweilige Bewegungsvorgang des Torus dargestellt. Zur Verdeutlichung der unterschiedlichen Systemantworten wurde jeweils eine Elementreihe des Torus farblich hervorgehoben. Es ist zu erkennen, dass die rotierende Bewegung des Torus durch die Berücksichtigung der Haftbedingung in Rollrichtung deutlich verstärkt wird. Am Ende des untersuchten Zeitintervalls ($t_{200} = 2.50 \text{ s}$) unterscheiden sich die markierten Elementreihen um etwa 55° . Zusätzlich zeigt sich, dass die horizontale Bewegung des Torus durch die Berücksichtigung der Haftbedingung deutlich abgebremst wird. Verglichen mit dem reibungsfrei berechneten Bewegungsverlauf ergibt sich eine Differenz der Horizontalverschiebung von etwa 0.13 m am Ende der durchgeführten Simulation. Dabei ergeben sich unter Verwendung des Zeitintegrationsverfahrens (GEMM, $\rho_\infty = 1.0$, „Vel-Upd“) für beide Berechnungen stabile Lösungen, welche die exakte Erhaltung der totalen Energie garantieren.

9.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurden zur Untersuchung der Leistungsfähigkeit der weiterentwickelten Kontaktformulierung jeweils vier zwei- und dreidimensionale numerische Experimente analysiert.

- Zweidimensionale Beispiele:

Anhand eines Hertzschen Kontaktproblems, für das eine analytische Lösung existiert, wurde die Genauigkeit der vorgeschlagenen Verfahren gezeigt. Der exakte Verlauf des Kontaktdrucks konnte bereits mit einer relativ groben Diskretisierung sehr gut abgebildet werden.

Mit dem zweiten Beispiel wurde die Notwendigkeit stabiler Zeitintegrationsverfahren für die Analyse dynamischer Kontaktprobleme verdeutlicht: Die GEMM stellt in Verbindung mit der „Velocity-Update“-Methode ein stabiles Zeitintegrationsverfahren dar und garantiert bei geeigneter Parameterwahl ($\rho_\infty = 1.0$) die exakte Erhaltung der totalen Energie.

Die Eigenschaft der Kontaktformulierung, einen homogenen Spannungszustand entlang nicht konform vernetzter Teilgebietsränder zweier deformierbarer Körper exakt übertragen zu können, wurde mit der Erfüllung des Kontakt-Patchtestes gezeigt.

Zur Verdeutlichung der Auswirkungen einer integralen Erfüllung der Inpenetrabilitätsbedingung wurde das „Ironing-Problem“ mit einer sehr groben Diskretisierung untersucht. Zusätzlich konnte mit diesem Beispiel gezeigt werden, dass sich die vorgestellte Kontaktformulierung auch für die Analyse von Problemstellungen mit großen, tangentiellen Relativverschiebungen zweier deformierbarer Körper eignet.

- **Dreidimensionale Beispiele:**

Die statische Analyse eines elastischen Rohrs, das durch zwei starre Platten zusammengedrückt wird, verdeutlichte die Robustheit und Stabilität der verwendeten Kontaktformulierung. Obwohl sich die Anzahl der aktiven Kontaktknoten aufgrund der großen Verformungen ständig ändert, erwies sich die eingesetzte Aktive-Mengen-Strategie als sehr zuverlässig.

Mittels der dynamischen Untersuchung eines mehrfachen Kontaktes eines dünnen Balls wurde die erforderliche algorithmische Energieerhaltung erläutert. Es ließ sich zeigen, dass der unmodifizierte Einsatz eines impliziten Zeitintegrationsverfahrens bei jedem neu entstehenden Kontakt zu Energieverlusten des Systems führt. Der Einsatz der GEMM in Kombination mit der „Velocity-Update“-Methode erwies sich auch für dieses Beispiel als geeignete Strategie.

Das bereits in Kapitel 4.5 untersuchte Experiment des „geworfenen Lineals“ wurde in etwas modifizierter Form einer Kontaktanalyse unterzogen. Dabei konnte erneut die Zuverlässigkeit des Kontaktalgorithmus sowie die Wirkungsweise der „Velocity-Update“-Methode verdeutlicht werden.

Anhand des Rollkontaktes eines dünnen Torus zeigte sich die Erweiterungsmöglichkeit der vorgestellten Kontaktformulierung im Hinblick auf reibungsbehafteten Kontakt. Für den Fall reiner Haftung wurden die notwendigen Modifikationen vorgestellt und durch die numerische Untersuchung verifiziert.

10 Zusammenfassung und Ausblick

10.1 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Lösungsstrategie zur numerischen Simulation von Kontaktproblemen dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen erarbeitet, detailliert vorgestellt und bewertet. Eine zentrale Rolle spielte dabei die Weiterentwicklung einer reibungsfreien, mortar-basierten Kontaktformulierung. Diese konnte in den Rahmen einer impliziten Zeitintegration eingebettet und mit geeigneten Finiten Elementen zur räumlichen Diskretisierung kombiniert werden.

Zur räumlichen Diskretisierung schalenartiger Strukturen wurden im Hinblick auf eine geeignete Verknüpfung mit einer möglichst elementunabhängigen Kontaktformulierung zwei volumenorientierte Finite Elemente implementiert und untersucht. Basierend auf einer dreidimensionalen 7-Parameter-Schalenformulierung (Büchter und Ramm (1992a)) erfolgte die Entwicklung eines trilinearen oberflächenorientierten Volumen-Schalen-Elementes durch eine Reparametrisierung der Geometriebeschreibung. Zur Steigerung der Effizienz kam eine hybride Elementformulierung auf Basis der Enhanced-Assumed-Strain-Methode (Simo und Rifai (1990)) und der Assumed-Natural-Strain-Methode (Hughes und Tezduyar (1981), Bathe und Dvorkin (1985)) zum Einsatz. Zusätzlich zu diesem Volumen-Schalen-Element konnte in Anlehnung an die Arbeit von Weissman (1996) ein trilineares geometrisch nichtlineares Volumenelement auf Grundlage des Prinzips von Hu-Washizu hergeleitet werden. Numerische Experimente bestätigten das sehr gute Verhalten beider FE-Formulierungen. Aufgrund der geringeren Anzahl interner Parameter erwies sich das oberflächenorientierte Schalenelement jedoch als robuster und effizienter, weshalb es für die weiteren numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit ausgewählt wurde.

Für die zeitliche Diskretisierung ließen sich zwei implizite Zeitintegrationsverfahren analysieren. Zusätzlich zu dem bereits bestehenden „Generalized- α “-Verfahren (Gen_α) wurde die „Generalized-Energy-Momentum-Method“ (GEMM) implementiert. Hierzu waren zusätzliche Modifikationen in den Elementroutinen notwendig. Die Auswertung eines numerischen Experimentes zeigte, dass die GEMM, im Gegensatz zum Gen_α -Verfahren, unabhängig vom gewählten Spektralradius unbedingt stabil ist.

Aufbauend auf der Arbeit von Hübner und Wohlmuth (2005) konnte die dort vorgestellte Mortar-Kontaktformulierung auf den geometrisch nichtlinearen Fall erweitert werden. Der Grundidee der Mortar-Methode folgend wurde hierfür die geometrische Inpenetrabilitätsbedingung in einem schwachen integralen Sinne formuliert. Dazu waren kontinuierlich approximierten Lagrange-Multiplikatoren einzuführen, die physikalisch den Druck in der Kontaktfuge repräsentieren. Ein wesentliches Merkmal der vorgestellten Formulierung ist die Verwendung von dualen

Ansatzräumen (Wohlmuth (2000)) zur Interpolation der eingeführten Lagrange-Multiplikatoren. Dadurch ist es in Kombination mit einer geeigneten Aktiven-Mengen-Strategie möglich, die diskreten Knotenwerte der eingeführten Lagrange-Multiplikatoren aus dem resultierenden inkrementellen effektiven Strukturgleichungssystem zu eliminieren. Diese werden in einer Nachlaufrechnung variationell konsistent in Abhängigkeit der Verschiebungen berechnet. Mit Hilfe einer entsprechenden Basistransformation lässt sich die algebraische Struktur des allgemeinen Kontaktfalls zweier deformierbarer Körper in eine dem Kontakt eines deformierbaren Körpers mit einem starren Hindernis äquivalente Form bringen. Damit kann ein allgemeines Zwei-Körper-Kontaktproblem formal identisch wie ein vergleichsweise einfacheres Ein-Körper-Kontaktproblem behandelt werden. Im Vergleich zu anderen numerischen Lösungsverfahren für Kontaktprobleme zeichnet sich die vorgestellte Kontaktformulierung durch zwei wesentliche Aspekte aus:

- Die Größe des abschließend zu lösenden inkrementellen Strukturgleichungssystems bleibt konstant.
- Es ist kein benutzerdefinierter Parameter (z.B. Penalty-Parameter) notwendig.

Die numerischen Untersuchungen dynamischer Kontaktprobleme haben die Notwendigkeit zusätzlicher algorithmischer Energieerhaltungsstrategien verdeutlicht. Deshalb wurde die von Laursen und Love (2002) vorgestellte „Velocity-Update“-Methode für die Kombination mit der in dieser Arbeit weiterentwickelten Kontaktformulierung überarbeitet und entsprechend der GEMM verallgemeinert. Diese Strategie zeichnet sich gegenüber anderen energieerhaltenden Verfahren (Laursen und Chawla (1997), Armero und Petöcz (1998)) dadurch aus, dass die exakte Energieerhaltung bei gleichzeitiger Erfüllung der geometrischen Inpenetrabilitätsbedingung gewährleistet wird.

Ein weiterer Aspekt konnte durch die detaillierte Analyse der vorgestellten Kontaktformulierung verdeutlicht werden. Aufgrund der exakten Erfüllung der Inpenetrabilitätsbedingung im schwachen Sinne entstehen in Verbindung mit den verwendeten impliziten Zeitintegrationsverfahren unphysikalische Oszillationen der diskreten Knotenwerte der Lagrange-Multiplikatoren. Dies kann zu Problemen in der Anwendung der Aktiven-Mengen-Strategie führen. Zur Vermeidung der ungünstigen Auswirkungen wurde eine Mittelung der diskreten Lagrange-Multiplikatoren vorgeschlagen. Damit konnte der Algorithmus der Aktiven-Mengen-Strategie stabilisiert werden.

Mit zwei- und dreidimensionalen, statischen und dynamischen, numerischen Experimenten konnte die Robustheit und Stabilität der vorgestellten Lösungsstrategie bestätigt werden. Die Kontaktformulierung ist in der Lage den Verlauf der Kontaktspannungen genau abzubilden und besteht den Kontakt-Patchtest für beliebig, nicht konform vernetzte Kontaktränder. Die Kombination der GEMM mit der verallgemeinerten „Velocity-Update“-Methode liefert ein stabiles Zeitintegrationsverfahren, das für $\rho_\infty = 1.0$ die exakte Erhaltung der totalen Energie garantiert. Anhand des Rollkontaktes eines dünnen Torus wurde die mögliche Erweiterung der Kontaktformulierung für den Fall reiner Haftreibung gezeigt.

10.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit stellt einen wissenschaftlichen Beitrag auf der Suche nach universellen robusten und effizienten Kontaktformulierungen im Rahmen der Finite-Element-Methode dar. Für eine abschließende Bewertung der vorgeschlagenen Strategien sind noch weitergehende Forschungsarbeiten notwendig. Die Verknüpfung der vorgeschlagenen Kontaktformulierung mit realistischen Reibgesetzen spielt dabei eine ebenso wichtige Rolle wie die Entwicklung geeigneter Verfahren zur Vermeidung der unphysikalischen Oszillationen bei der Modellierung dynamischer Kontaktprobleme. Für die Berücksichtigung von möglichem Selbstkontakt müssen die vorgestellten Methoden weiter verallgemeinert werden und mit leistungsfähigen Algorithmen zur Kontaktsuche kombiniert werden. Durch die Anwendung einer inexakten Aktiven-Mengen-Strategie in Verbindung mit iterativen Lösern kann die numerische Effizienz deutlich gesteigert werden (Hüeber und Wohlmuth (2005), Brunssen et al. (2006)). Neben der Berücksichtigung von geometrisch nichtlinearen Effekten im Sinne großer Deformationen ist für eine realistischere numerische Analyse auch materiell nichtlineares Verhalten zu modellieren.

Literatur

- Alart, P., Curnier, A. (1991):** „A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **92**, 353–375.
- Altenbach, J., Altenbach, H. (1994):** „Einführung in die Kontinuumsmechanik“, Teubner-Verlag, Stuttgart.
- Andelfinger, U. (1991):** „Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächen-tragwerke“, Dissertation, Bericht Nr. 13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Armero, F., Petöcz, E. (1998):** „Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **158**, 269–300.
- Basar, Y., Ding, Y. (1992):** „Finite-Rotation Shell Elements for the Analysis of Finite-Rotation Shell Problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 165–169.
- Bathe, K.J. (2002):** „Finite-Element-Methoden, 2. Auflage“, Springer-Verlag, Berlin.
- Bathe, K.J., Dvorkin, E.N. (1985):** „A Four-Node Plate Bending Element Based on Mindlin/Reissner Theory and a Mixed Interpolation“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **21**, 367–383.
- Belgacem, F.B., Hild, P., Laborde, P. (1998):** „The mortar finite element method for contact problems“, *Mathematical and Computer Modelling*, **28**, 263–271.
- Belytschko, T., Schoeberle, D.F. (1975):** „On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics“, *Journal of Applied Mechanics*, **42**, 865–869.
- Benson, D.J., Hallquist, J.O. (1990):** „A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **78**, 141–163.
- Bernardi, C., Debit, N., Maday, Y. (1990):** „Coupling Finite Elements and Spectral Methods: First Results“, *Mathematics of Computation*, **54**, 21–39.
- Bernardi, C., Maday, Y., Patera, A.T. (1993):** „Domain decomposition by the mortar element method“, in: (H.G. Kasper und M. Garbey, eds.): *Asymptotic and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Niederlande, 269–286.
- Bernardi, C., Maday, Y., Patera, A.T. (1994):** „A new nonconforming approach to domain decomposition: the mortar element method“, in: (H. Brezis und J.L. Lions, eds.): *Nonlinear partial differential equations and their applications – Collège de France Seminar Volume XI*, Longman, Harlow, 13–51.
- Betsch, P., Stein, E. (1996):** „A Nonlinear Extensible 4-Node Shell Element Based on Continuum Theory and Assumed Strain Interpolations“, *Journal of Nonlinear Science*, **6**, 169–199.
- Betten, J. (1993):** „Kontinuumsmechanik“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.
- Bischoff, M. (1999):** „Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung“, Dissertation, Bericht Nr. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Bischoff, M., Ramm, E. (1997):** „Shear Deformable Shell Elements for Large Strains and Rotations“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 4427–4449.
- Bischoff, M., Ramm, E. (2000):** „On the Physical Significance of Higher Order Kinematic and Static Variables in a Three-Dimensional Shell Formulation“, *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 6933–6960.
- Bischoff, M., Wall, W.A., Bletzinger, K.-U., Ramm, E. (2004):** „Chapter 3: Models and Finite Elements for Thin-Walled Structures“, in: (E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, eds): *Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 2: Solids and Structures*, John Wiley & Sons, Ltd.
- Bletzinger, K.-U., Bischoff, M., Ramm, E. (2000):** „A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements“, *Computers and Structures*, **75**, 321–334.
- Brank, B., Peric, D., Damjanic, F.B. (1995):** „On implementation of a nonlinear four node shell finite element for thin multilayered elastic shells“, *Computational Mechanics*, **16**, 341–359.

- Braun, M. (1995):** „Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken“, Dissertation, Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Braun, M., Bischoff, M., Ramm, E. (1994):** „Nonlinear Shell Formulations for Complete Three-Dimensional Constitutive Laws Including Composites and Laminates“, *Computational Mechanics*, **15**, 1–18.
- Brunssen, S., Schmid, F., Schäfer, M., Wohlmuth, B. (2006):** „A fast and robust method for contact problems by combining a primal-dual active set strategy and algebraic multigrid methods“, *Zur Veröffentlichung angenommen beim International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- Büchter, N., Ramm, E. (1992a):** „3d-Extension of Nonlinear shell Equations Based on the Enhanced Assumed Strain Concept“, in: (C. Hirsch, ed.): *Computational Methods in Applied Sciences*, Elsevier Science Publishers B.V.
- Büchter, N., Ramm, E. (1992b):** „Shell Theory versus Degeneration – a Comparison in Large Rotation Finite Element Analysis“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 39–59.
- Büchter, N., Ramm, E., Roehl, D. (1994):** „Three-Dimensional Extension of Nonlinear Shell Formulation Based on the Enhanced Assumed Strain Concept“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 2551–2568.
- Bufler, H. (1983):** „On the Work Theorems for Finite and Incremental Elastic Deformations with Discontinuous Fields: a Unified Treatment of Different Versions“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **36**, 95–124.
- Bufler, H. (1990):** „Energiermethoden“, Manuskript zur gleichnamigen Vorlesung, Institut für Mechanik (Bauwesen), Universität Stuttgart.
- Cao, Y.P., Hu, N., Lu, J., Fukunaga, H., Yao, Z.H. (2002):** „A 3D brick element based on Hu-Washizu variational principle for mesh distortion“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, 2529–2548.
- Cao, Y.P., Hu, N., Fukunaga, H., Lu, J., Yao, Z.H. (2003):** „A highly accurate brick element, based on a three-field variational principle for elasto-plastic analysis“, *Finite Elements in Analysis and Design*, **39**, 1155–1171.
- Cao, Y.P., Hu, N., Lu, J., Fukunaga, H., Yao, Z.H. (2004):** „A new scheme for designing the penalty factor in 3-D penalty-equilibrating mixed elements“, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **20**, 455–464.
- Chung, J., Hulbert, G.M. (1993):** „A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α method“, *Journal of Applied Mechanics*, **60**, 371–375.
- Christensen, P.W., Klarbring, A., Pang, J.S., Strömberg, N. (1998):** „Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **42**, 145–173.
- Cichosz, T. (2006):** „Simulation von inkrementellen Blechumformprozessen“, Diplomarbeit, Institut für Baustatik und Baudynamik, Universität Stuttgart.
- El-Abbasi, N., Bathe, K.-J. (2001):** „Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm“, *Computers and Structures*, **79**, 1473–1486.
- Erhart, T. (2004):** „Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten“, Dissertation, Bericht Nr. 44, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Felippa, C.A. (2000):** „On the Original Publication of the General Canonical Functional of Linear Elasticity“, *Journal of Applied Mechanics*, **67**, 217–219.
- Fischer, K.A. (2005):** „Mortar Type Methods Applied to Nonlinear Contact Mechanics“, Dissertation, Research Report F 05/2, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Fischer, K.A., Wriggers, P. (2005):** „Frictionless 2D Contact formulations for finite deformations based on the mortar method“, *Computational Mechanics*, **36**, 226–244.
- Fischer, K.A., Wriggers, P. (2006):** „Mortar based frictional contact formulation for higher order interpolations using the moving friction cone“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 5020–5036.

- Flemisch, B., Wohlmuth, B. (2005):** „Stable Lagrange multipliers for quadrilateral meshes of curved interfaces in 3D“, *IANS Preprint 2005/005, Universität Stuttgart*.
- Fraeijs de Veubeke, B.M. (1951):** „Diffusion des inconnues hyperstatiques dans les voilures à longeron couplés“, *Bull. Serv. Technique de L’Aéronautique*, **24**, Imprimerie Marcel Hayez, Bruxelles, 56pp.
- Gee, M. (2004):** „Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik“. Dissertation, Bericht Nr. 43, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Gee, M., Wall, W.A., Ramm, E. (2005):** „Parallel multilevel solution of nonlinear shell structures“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 2513–2533.
- Gruttmann, F., Wagner, W. (2005):** „A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 4279–4300.
- Hager, C., Hüeber, S., Wohlmuth, B. (2006):** „A stable energy conserving approach for frictional contact problems based on quadrature formulas“, *Preprint SFB 404, 2006/11, Universität Stuttgart*.
- Hallquist, J.O. (1979):** „An implicit, finite-deformation, finite element code for analysing the static and dynamic response of two-dimensional solids“, *Technical Report UCRL-52678, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory*.
- Hallquist, J.O., Goudreau, G.L., Benson, D.J. (1985):** „Sliding interfaces with contact-impact in large-scale lagrangian computations“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **51**, 107–137.
- Harnau, M. (2004):** „Finite Volumen-Schalenelemente für große Deformationen und Kontakt“. Dissertation, Institut für Mechanik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH).
- Hartmann, S., Brunssen, S., Ramm, E., Wohlmuth, B. (2007):** „Unilateral non-linear dynamic contact of thin-walled structures using a primal-dual active set strategy“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **70**, 883–912.
- Hauret, P., Le Tallec, P. (2006):** „Energy-controlling time integration methods for nonlinear elastodynamics and low-velocity impact“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 4890–4916.
- Hertz, H. (1881):** „Über die Berührung fester elastischer Körper“, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **92**, 156–171.
- Hild, P. (2000):** „Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **184**, 99–123.
- Hintermüller, M., Ito, K., Kunisch, K. (2003):** „The primal-dual active set strategy as a semismooth newton method“, *SIAM Journal on Optimization*, **13-3**, 865–888.
- Holzappel, G.A. (2000):** „*Nonlinear Solid Mechanics*“, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Hüeber, S., Mair, M., Wohlmuth, B.I. (2005):** „A priori error estimates and an inexact primal-dual active set strategy for linear and quadratic finite elements applied to multibody contact problems“, *Applied Numerical Mathematics*, **54**, 555–576.
- Hüeber, S., Wohlmuth, B.I. (2005):** „A primal-dual active set strategy for non-linear multibody contact problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 3147–3166.
- Hughes, T.J.R., Caughey, T.K., Liu, W.K. (1978):** „Finite-element methods for nonlinear elastodynamics which conserve energy“, *Journal of Applied Mechanics*, **45**, 366–370.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., Kanoknukulchai, W. (1977a):** „A finite element method for large displacement contact and impact problems“, in: (K.J. Bathe, ed.): *Formulations and Computational Algorithms in FE Analysis*, MIT Press, Boston, 468–495.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., Kanoknukulchai, W. (1977b):** „A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, 1529–1543.
- Hughes, T.J.R., Taylor, R.L., Sackman, J.L., Curnier, A., Kanoknukulchai, W. (1976):** „A finite element method for a class of contact-impact problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **8**, 249–276.

- Hughes, T.J.R., Tezduyar, T. (1981):** „Finite Elements Based Upon Mindlin Plate Theory with Particular Reference to the Four-Node Isoparametric Element“, *Journal of Applied Mechanics*, **48**, 587–596.
- Karakostas, C., Talaslidis, D., Wempner, G. (1993):** „Triangular C^0 bending elements based on the Hu-Washizu principle and orthogonality conditions“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 181–200.
- Kasper, E.P., Taylor, R.L. (2000a):** „A mixed-enhanced strain method, Part I: Geometric linear problems“, *Computer and Structures*, **75**, 237–250.
- Kasper, E.P., Taylor, R.L. (2000b):** „A mixed-enhanced strain method, Part I: Geometric nonlinear problems“, *Computer and Structures*, **75**, 251–260.
- Kasper, E.P., Taylor, R.L. (2002):** „Mixed-enhanced formulation for geometric linear axisymmetric problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**, 2337–2361.
- Khan, A.S., Huang, S. (1995):** „*Continuum Theory of Plasticity*“, John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Khenous, H., Laborde, P., Renard, Y. (2006a):** „On the discretization of contact problems in elastodynamics“, *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, **27**, 31–38.
- Khenous, H., Laborde, P., Renard, Y. (2006b):** „Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics“, *Preprint, INSA de Toulouse*.
- Kikuchi, N., Oden, J.T. (1988):** „*Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*“, SIAM, Philadelphia.
- Klinkel, S., Gruttmann, F., Wagner, W. (1999):** „A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures“, *Computers and Structures*, **71**, 43–62.
- Klinkel, S. (2000):** „*Theorie und Numerik eines Volumen-Schalen-Elementes bei finiten elastischen und plastischen Verzerrungen*“, Dissertation, Bericht Nr. 7, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe (TH).
- Koschnick, F. (2004):** „*Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*“, Dissertation, Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München.
- Koschnick, F., Bischoff, M., Camprubí, N., Bletzinger, K.-U. (2005):** „The discrete strain gap method and membrane locking“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 2444–2463.
- Kuhl, D. (1996):** „*Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke*“, Dissertation, Bericht Nr. 22, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Kuhl, D., Crisfield, M.A. (1999):** „Energy-Conserving and Decaying Algorithms in Non-Linear Structural Dynamics“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45**, 569–599.
- Kuhl, D., Ramm, E. (1996):** „Constraint Energy Momentum Algorithm and its Application to Nonlinear Dynamics of Shells“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **136**, 293–315.
- Kuhl, D., Ramm, E. (1999):** „Generalized Energy-Momentum Method for non-linear adaptive shell dynamics“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**, 343–366.
- Laursen, T.A. (1992):** „*Formulation and Treatment of Frictional Contact Problems using Finite Elements*“, PhD-Thesis, Technical Report No. 92-6, Stanford University, USA.
- Laursen, T.A. (2002):** „*Computational Contact and Impact Mechanics*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, Deutschland
- Laursen, T.A., Chawla, V. (1997):** „Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, 863–886.
- Laursen, T.A., Love, G.R. (2002):** „Improved implicit integrators for transient impact problems – geometric admissibility within the conserving framework“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, 245–274.
- Laursen, T.A., Simo, J.C. (1993a):** „Algorithmic symmetrization of coulomb frictional problems using augmented Lagrangians“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **108**, 133–146.
- Laursen, T.A., Simo, J.C. (1993b):** „A continuum-based finite element formulation for the implicit solution of multibody, large deformation frictional contact problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 3451–3485.

- Lubliner, J. (1990):** „*Plasticity Theory*“, Macmillan Publishing Company, New York.
- Luenberger, D.G. (1984):** „*Linear and Nonlinear Programming*“, Addison-Wesley, Reading, Mass., second edition.
- Malvern, L.E. (1969):** „*Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*“, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- McDevitt, T.W., Laursen, T.A. (2000):** „A mortar-finite element formulation for frictional contact problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 1525–1547.
- Mok, D.P. (2001):** „*Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturmechanik und der Fluid-Struktur-Interaktion*“, Dissertation, Bericht Nr. 36, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Mok, D.P., Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1999):** „Algorithmic aspects of deformation dependent loads in non-linear static finite element analysis“, *Engineering Computations*, **16**, 601–618.
- Newmark, N.M. (1959):** „A Method of Computation for Structural Dynamics“, *Journal of the Engineering Mechanics Division*, **85**, 67–94.
- Özdemir, I. (2003):** „*An Approach to Contact in Computational Structural Dynamics*“, Master Thesis, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Oden, J.T., Reddy, J.N. (1976):** „*Variational Methods in Theoretical Mechanics*“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, Deutschland.
- Padmanabhan, V., Laursen, T.A. (2001):** „A framework for development of surface smoothing procedures in large deformation frictional contact analysis“, *Finite Elements in Analysis and Design*, **37**, 173–198.
- Papadopoulos, P., Taylor, R.L. (1992):** „A mixed formulation for the finite element solution of contact problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **94**, 373–389.
- Parisch, H. (1991):** „An investigation of a finite rotation four node assumed strain shell element“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 1855–1883.
- Parisch, H. (1995):** „A Continuum-Based Shell Theory for Non-Linear Applications“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **31**, 127–150.
- Peng, X., Crisfield, M.A. (1992):** „A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **35**, 1829–1847.
- Pian, T.H.H., Chen, D.P. (1982):** „Alternative Ways for Formulation of Hybrid Stress Elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **18**, 1679–1684.
- Pian, T.H.H., Sumihara, K. (1984):** „Rational Approach for Assumed Stress Finite Elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **20**, 1685–1695.
- Pian, T.H.H., Tong, P. (1986):** „Relations between incompatible displacement model and hybrid stress model“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **22**, 173–181.
- Puso, M.A., Laursen, T.A. (2002):** „A 3D contact smoothing method using Gregory patches“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54**, 1161–1194.
- Puso, M.A., Laursen, T.A. (2004a):** „A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 601–629.
- Puso, M.A., Laursen, T.A. (2004b):** „A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **193**, 4891–4913.
- Ramm, E., Bischoff, M., Braun, M. (1994):** „Higher Order Nonlinear Shell Formulation – a Step Back into Three Dimensions“, in: (K. Bell, ed.) *From Finite Elements to the Troll Platform*, Ivar Holand 70th Anniversary, Norwegian Institute of Technology, 65–88, Trondheim.
- Ramm, E., Braun, M., Bischoff, M. (1995):** „Higher Order Nonlinear Shell Formulations: Theory and Application“, *Bulletin of the IASS* **36**, 145–152.
- Rebel, G., Park, K.C., Felippa, C.A. (2002):** „A contact formulation based on localized Lagrange multipliers: formulation and application to two-dimensional problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **54**, 263–297.

- Reddy, J.N., Arciniega, R.A. (2006):** „Nonlinear Analysis of Composite and FGM Shells using Tensor-Based Shell Finite Elements“, in: (C.A. Mota Soares, J.A.C. Martins, H.C. Rodrigues, J.A.C. Ambrósio, eds.) *Computational Mechanics - Solids, Structures and Coupled Problems*, III European Conference on Computational Mechanics, Instituto Superior Técnico, Lisbon, Portugal.
- Sansour, C., Bocko, J. (1998):** „On hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain finite element formulations for a geometrically exact shell theory with drilling degrees of freedom“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**, 175–192.
- Sansour, C., Bufler, H. (1992):** „An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **34**, 73–115.
- Sansour, C., Kollmann, F.G. (2000):** „Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory. An assessment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain elements“, *Computational Mechanics*, **24**, 435–447.
- Schlebusch, R. (2005):** „*Theorie und Numerik einer oberflächenorientierten Schalenformulierung*“, Dissertation, Institut für Mechanik und Flächentragwerke, Universität Dresden.
- Schoop, H. (1986):** „Oberflächenorientierte Schalentheorien endlicher Verschiebungen“, *Ingenieur Archiv*, **56**, 427–437.
- Schweizerhof, K., Ramm, E. (1984):** „Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analysis“, *Computers and Structures*, **18**, 1099–1114.
- Simo, J.C., Hughes T.J.R. (1998):** „*Computational Inelasticity. Interdisciplinary Applied Mathematics*“, Vol. 7, Springer-Verlag, New York, Inc.
- Simo, J.C., Laursen, T.A. (1992):** „An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction“, *Computers and Structures*, **42**, 97–116.
- Simo, J.C., Rifai, S. (1990):** „A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29**, 1595–1638.
- Simo, J.C., Tarnow, N. (1992):** „The Discrete Energy-Momentum Method. Conserving Algorithms for Nonlinear Elastodynamics“, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **43**, 757–792.
- Simo, J.C., Tarnow, N. (1994):** „A New Energy and Momentum Conserving Algorithm for the Nonlinear Dynamics of Shells“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 2527–2549.
- Simo, J.C., Wriggers, P., Taylor, R.L. (1985):** „A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of contact problems“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **50**, 163–180.
- Stadler, M., Holzapfel, G.A. (2004):** „Subdivision schemes for smooth contact surfaces of arbitrary mesh topology in 3D“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **60**, 1161–1195.
- Stander, N., Matzenmiller, A., Ramm, E. (1989):** „An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis“, *Engineering Computation*, **6**, 58–66.
- Stein, E. (1964):** „*Beiträge zu den direkten Variationsverfahren in der Elastostatik der Balken und Flächentragwerke*“, Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Stein, E., Barthold, F.J. (1996):** „Elastizitätstheorie“, in: *Der Ingenieurbau*, Ernst & Sohn, Berlin.
- Sze, K.Y., Liu, X.H., Lo, S.H. (2004):** „Popular Benchmark Problems for Geometric Nonlinear Analysis of Shells“, *Finite Elements in Analysis and Design*, **40**, 1551–1569.
- Sze, K.Y., Yao, L.-Q., Pian, T.H.H. (2002):** „An eighteen-node hybrid-stress solid-shell element for homogenous and laminated structures“, *Finite Elements in Analysis and Design*, **38**, 353–374.
- Talasilidis, D., Wempner, G.A. (1993):** „The linear isoparametric triangular element: Theory and application“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **103**, 375–397.
- Taylor, R.L., Papadopoulos, P. (1993):** „On a finite element method for dynamic contact/impact problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 2123–2140.
- Taylor, R.L., Wriggers, P. (1999):** „Smooth surface discretization for large deformation frictionless contact“, *Technical Report UCB/SEMM-99-04*, University of California, Berkeley.

- Toncar, A. (2006):** „Zum Verhalten von Volumen-(Schalen-)Elementen bei der nichtlinearen Analyse dünnwandiger Strukturen“, Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Tonti, E. (1975):** „On the formal structure of physical theories“, Monograph of the Italian National Research Council.
- Weissman, S.L. (1992):** „A Mixed Formulation of Nonlinear-Elastic Problems“, *Computers and Structures*, **44**, 813–822.
- Weissman, S.L. (1996):** „High-accuracy low-order three-dimensional brick elements“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**, 2337–2361.
- Weissman, S.L., Taylor, R.L. (1992):** „Treatment of Internal Constraints by Mixed Finite Element Methods: Unification of Concepts“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **33**, 131–141.
- Willner, K. (2003):** „Kontinuums- und Kontaktmechanik“, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg.
- Wohlmuth, B.I. (2000):** „A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier“, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **38**, 989–1012.
- Wohlmuth, B.I. (2001):** „Discretization Methods and Iterative Solvers Based on Domain Decomposition“, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Wohlmuth, B., Krause, R. (2003):** „Monotone methods on non-matching grids for non linear contact problems“, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **25**, 324–347.
- Wriggers, P. (2001):** „Nichtlineare Finite-Element-Methoden“, Springer-Verlag, Heidelberg.
- Wriggers, P. (2002):** „Computational Contact Mechanics“, John Wiley & Sons, Chichester, UK.
- Wriggers, P., Gruttmann, F. (1993):** „Thin shells with finite rotations formulated in Biot stresses: theory and finite element formulation“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **36**, 2049–2071.
- Wriggers, P., Krstulovic-Opara, L., Korelc, J. (2001):** „Smooth c1-interpolations for two-dimensional frictional contact problems“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**, 1469–1495.
- Wriggers, P., Miehe, C. (1992):** „On the Treatment of Contact Constraints within Coupled Thermomechanical Analysis“, in: (D. Besdo und E. Stein, eds.) *Finite Inelastic Deformations – Theory and Applications*, Proc. of IUTAM Symposium Hannover/Germany 1991 – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1992.
- Wriggers, P., Miehe, C. (1994):** „Contact constraints within coupled thermomechanical analysis – a finite element model“, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **113**, 301–319.
- Wriggers, P., Simo, J., Taylor, R.L. (1985):** „Penalty and augmented lagrangian formulations for contact problems“, in: (J. Middleton und G. Pande, eds.): *Proceedings of NUMETA Conference*, Balkema, Rotterdam.
- Wriggers, P., Vu Van, T., Stein, E. (1990):** „Finite Element Formulation of large deformation impact-contact problems with friction“, *Computers and Structures*, **37**, 319–331.
- Wriggers, P., Zavarise, G. (2004):** „Chapter 6: Computational Contact Mechanics“, in: (E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes, eds): *Encyclopedia of Computational Mechanics, Volume 2: Solids and Structures*, John Wiley & Sons, Ltd.
- Yang, B., Laursen, T.A., Meng, X. (2005):** „Two dimensional mortar contact methods for large deformation frictional sliding“, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **62**, 1183–1225.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L. (2000):** „The Finite Element Method, Fifth Edition, Volume 2: Solid Mechanics“, Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor R.L., Zhu, J.Z. (2005):** „The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals, Sixth Edition“, Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford.
- Zavarise, G., Wriggers, P. (1998):** „A Segment-to-Segment Contact Strategy“, *Mathematical and Computer Modelling*, **28**, 497–515.

Anhang

A Finite Elemente

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich vierknotige Viereckselemente und achtknotige Volumenelemente mit bi- bzw. trilinearen Ansatzfunktionen zur Diskretisierung verwendet. Die entsprechenden Definitionen der Formfunktionen und Elementmatrizen sowie die Lage der Gauß-Punkte für die unterschiedlichen Elementformulierungen werden nachfolgend gegeben. Tensorielle Größen werden im Rahmen der Finiten-Element-Methode in Form von Vektoren und Matrizen dargestellt, wobei die *Voigt Notation*⁸ verwendet wird.

A.1 Mittelflächenorientiertes Schalenelement

Nachfolgend werden die Definitionen der benötigten Vektoren und Matrizen für die Diskretisierung des 7-Parameter-Schalenmodells basierend auf einer zweidimensionalen Referenzfläche (Schalenmittelfläche) angegeben. Auf eine Herleitung der einzelnen Größen wird hier verzichtet und auf die Arbeit von Bischoff (1999) verwiesen. Das lokale Elementkoordinatensystem ξ, η, ζ wird mit dem krummlinigen Koordinatensystem θ^i identifiziert.

In Abbildung A.1 ist für das mittelflächenorientierte Schalenelement (Kap. 3.3.1) die Geometrie, die Knotennummerierung und die Lage der Gauß-Punkte dargestellt.

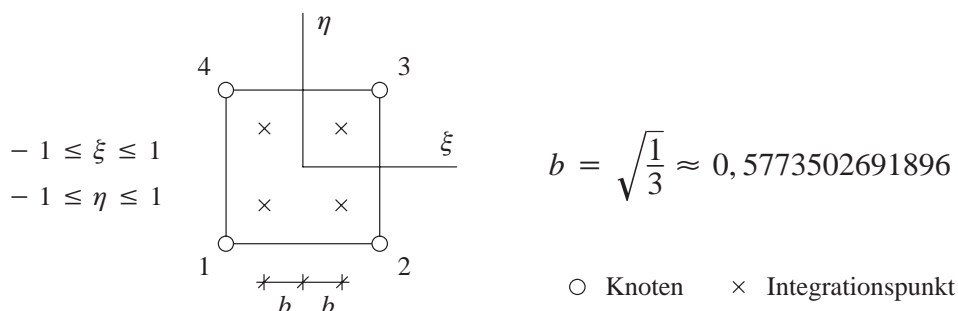


Abb. A.1: Knotennummerierung und Gauß-Punkte eines vierknotigen Elementes

Formfunktionen:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) ; & N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) ; \\
 N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) ; & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) .
 \end{aligned}
 \tag{A.1}$$

8. Woldemar Voigt (1850-1919) war Professor für theoretische Physik in Göttingen.

Voigt Notation: Ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe wird in der Voigt Notation als 6-dimensionaler Vektor geschrieben:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \epsilon_{33}, \epsilon_{23}, \epsilon_{13}, \epsilon_{12}]^T .$$

Abkürzung für die Ableitungen der Formfunktionen nach den krummlinigen Koordinaten:

$$N_{K,\alpha} = \frac{\partial N_K}{\partial \theta^\alpha} \quad \Rightarrow \quad N_{K,1} = \frac{\partial N_K}{\partial \xi} ; \quad N_{K,2} = \frac{\partial N_K}{\partial \eta} . \quad (\text{A.2})$$

Basisvektoren in der Schalenmittelfläche:

$$\mathbf{A}_\alpha = N_{K,\alpha} \mathbf{R}^K ; \quad \mathbf{a}_\alpha = N_{K,\alpha} \mathbf{R}^K + N_{K,\alpha} \mathbf{v}^K ; \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{A}_3 = N_K \mathbf{A}_3^K ; \quad \mathbf{a}_3 = N_K \mathbf{A}_3^K + N_K \mathbf{w}^K ; \quad \mathbf{a}_{3,\alpha} = N_{K,\alpha} \mathbf{w}^K . \quad (\text{A.4})$$

Diskretisierung:

$$\mathbf{R} = N_K \mathbf{R}^K ; \quad \mathbf{v} = N_K \mathbf{v}^K ; \quad \mathbf{w} = N_K \mathbf{w}^K ; \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w} = \mathbf{N} \mathbf{d} . \quad (\text{A.6})$$

Matrix der Interpolationsfunktionen und Vektor der Elementfreiheitsgrade:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \xi N_1 & 0 & 0 & \dots & N_4 & 0 & 0 & \xi N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \xi N_1 & 0 & \dots & 0 & N_4 & 0 & 0 & \xi N_4 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \xi N_1 & \dots & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & \xi N_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 24} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{d} = \left[v_x^1, v_y^1, v_z^1, w_x^1, w_y^1, w_z^1, \dots, v_x^4, v_y^4, v_z^4, w_x^4, w_y^4, w_z^4 \right]^T \in \mathbb{R}^{24 \times 1} \quad (\text{A.8})$$

$$\ddot{\mathbf{d}} = \left[\ddot{v}_x^1, \ddot{v}_y^1, \ddot{v}_z^1, \ddot{w}_x^1, \ddot{w}_y^1, \ddot{w}_z^1, \dots, \ddot{v}_x^4, \ddot{v}_y^4, \ddot{v}_z^4, \ddot{w}_x^4, \ddot{w}_y^4, \ddot{w}_z^4 \right]^T \in \mathbb{R}^{24 \times 1} \quad (\text{A.9})$$

Vektor der verschiebungsabhängigen kinematischen Variablen:

$$\mathbf{E}_h^u = \left[\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 2\alpha_{23}, 2\alpha_{13}, 2\alpha_{12}, \beta_{11}, \beta_{22}, 0, 2\beta_{23}, 2\beta_{13}, 2\beta_{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 1} \quad (\text{A.10})$$

B-Operator Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{E}_{h,d}^u$:

$$\mathbf{E}_{h,d}^u = \left[\mathbf{a}'_{11}, \mathbf{a}'_{22}, \mathbf{a}'_{33}, 2\mathbf{a}'_{23}, 2\mathbf{a}'_{13}, 2\mathbf{a}'_{12}, \boldsymbol{\beta}'_{11}, \boldsymbol{\beta}'_{22}, \mathbf{0}, 2\boldsymbol{\beta}'_{23}, 2\boldsymbol{\beta}'_{13}, 2\boldsymbol{\beta}'_{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 24} \quad (\text{A.11})$$

Die Einträge des B-Operators für einen Knoten K ergeben sich zu

$$\mathbf{a}'_{ij} = \left[\mathbf{a}'_{ij}{}^1, \mathbf{a}'_{ij}{}^2, \mathbf{a}'_{ij}{}^3, \mathbf{a}'_{ij}{}^4 \right] \in \mathbb{R}^{1 \times 24} ; \quad \boldsymbol{\beta}'_{ij} = \left[\boldsymbol{\beta}'_{ij}{}^1, \boldsymbol{\beta}'_{ij}{}^2, \boldsymbol{\beta}'_{ij}{}^3, \boldsymbol{\beta}'_{ij}{}^4 \right] \in \mathbb{R}^{1 \times 24} \quad (\text{A.12})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_{11}{}^K &= \begin{bmatrix} N_{K,1} a_{1x} \\ N_{K,1} a_{1y} \\ N_{K,1} a_{1z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T ; & \mathbf{a}'_{22}{}^K &= \begin{bmatrix} N_{K,2} a_{2x} \\ N_{K,2} a_{2y} \\ N_{K,2} a_{2z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T ; & \mathbf{a}'_{33}{}^K &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_K a_{3x} \\ N_K a_{3y} \\ N_K a_{3z} \end{bmatrix}^T ; \\ 2\mathbf{a}'_{23}{}^K &= \begin{bmatrix} N_{K,2} a_{3x} \\ N_{K,2} a_{3y} \\ N_{K,2} a_{3z} \\ N_K a_{2x} \\ N_K a_{2y} \\ N_K a_{2z} \end{bmatrix}^T ; & 2\mathbf{a}'_{13}{}^K &= \begin{bmatrix} N_{K,1} a_{3x} \\ N_{K,1} a_{3y} \\ N_{K,1} a_{3z} \\ N_K a_{1x} \\ N_K a_{1y} \\ N_K a_{1z} \end{bmatrix}^T ; & 2\mathbf{a}'_{12}{}^K &= \begin{bmatrix} N_{K,2} a_{1x} + N_{K,1} a_{2x} \\ N_{K,2} a_{1y} + N_{K,1} a_{2y} \\ N_{K,2} a_{1z} + N_{K,1} a_{2z} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T ; \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}'_{11} &= \begin{bmatrix} N_{K,1} a_{3x,1} \\ N_{K,1} a_{3y,1} \\ N_{K,1} a_{3z,1} \\ N_{K,1} a_{1x} \\ N_{K,1} a_{1y} \\ N_{K,1} a_{1z} \end{bmatrix}^T; & \boldsymbol{\beta}'_{22} &= \begin{bmatrix} N_{K,2} a_{3x,2} \\ N_{K,2} a_{3y,2} \\ N_{K,2} a_{3z,2} \\ N_{K,2} a_{2x} \\ N_{K,2} a_{2y} \\ N_{K,2} a_{2z} \end{bmatrix}^T; \\
2\boldsymbol{\beta}'_{23} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_K a_{3x,2} + N_{K,2} a_{3x} \\ N_K a_{3y,2} + N_{K,2} a_{3y} \\ N_K a_{3z,2} + N_{K,2} a_{3z} \end{bmatrix}^T; & 2\boldsymbol{\beta}'_{13} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_K a_{3x,1} + N_{K,1} a_{3x} \\ N_K a_{3y,1} + N_{K,1} a_{3y} \\ N_K a_{3z,1} + N_{K,1} a_{3z} \end{bmatrix}^T; & 2\boldsymbol{\beta}'_{12} &= \begin{bmatrix} N_{K,1} a_{3x,2} + N_{K,2} a_{3x,1} \\ N_{K,1} a_{3y,2} + N_{K,2} a_{3y,1} \\ N_{K,1} a_{3z,2} + N_{K,2} a_{3z,1} \\ N_{K,1} a_{2x} + N_{K,2} a_{1x} \\ N_{K,1} a_{2y} + N_{K,2} a_{1y} \\ N_{K,1} a_{2z} + N_{K,2} a_{1z} \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Partielle Ableitung des B-Operators nach den Verschiebungsfreiheitsgraden $\mathbf{B}_{,d} = \mathbf{E}_{h,dd}^u$:

$$\mathbf{E}_{h,dd}^u = \left[\mathbf{a}'_{11}, \mathbf{a}'_{22}, \mathbf{a}'_{33}, 2\mathbf{a}'_{23}, 2\mathbf{a}'_{13}, 2\mathbf{a}'_{12}, \boldsymbol{\beta}'_{11}, \boldsymbol{\beta}'_{22}, \mathbf{0}, 2\boldsymbol{\beta}'_{23}, 2\boldsymbol{\beta}'_{13}, 2\boldsymbol{\beta}'_{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 1} \tag{A.15}$$

Die Einträge der partiellen Ableitung des B-Operators ergeben sich zu

$$\mathbf{a}''_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{11} & A_{ij}^{12} & A_{ij}^{13} & A_{ij}^{14} \\ A_{ij}^{21} & A_{ij}^{22} & A_{ij}^{23} & A_{ij}^{24} \\ A_{ij}^{31} & A_{ij}^{32} & A_{ij}^{33} & A_{ij}^{34} \\ A_{ij}^{41} & A_{ij}^{42} & A_{ij}^{43} & A_{ij}^{44} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\beta}''_{ij} = \begin{bmatrix} B_{ij}^{11} & B_{ij}^{12} & B_{ij}^{13} & B_{ij}^{14} \\ B_{ij}^{21} & B_{ij}^{22} & B_{ij}^{23} & B_{ij}^{24} \\ B_{ij}^{31} & B_{ij}^{32} & B_{ij}^{33} & B_{ij}^{34} \\ B_{ij}^{41} & B_{ij}^{42} & B_{ij}^{43} & B_{ij}^{44} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \tag{A.16}$$

mit

$$\mathbf{A}_{ij}^{KM} = \begin{bmatrix} aa & 0 & 0 & aA & 0 & 0 \\ 0 & aa & 0 & 0 & aA & 0 \\ 0 & 0 & aa & 0 & 0 & aA \\ \hline Aa & 0 & 0 & AA & 0 & 0 \\ 0 & Aa & 0 & 0 & AA & 0 \\ 0 & 0 & Aa & 0 & 0 & AA \end{bmatrix}_{ij}^{KM}; \quad \mathbf{B}_{ij}^{KM} = \begin{bmatrix} bb & 0 & 0 & bB & 0 & 0 \\ 0 & bb & 0 & 0 & bB & 0 \\ 0 & 0 & bb & 0 & 0 & bB \\ \hline Bb & 0 & 0 & BB & 0 & 0 \\ 0 & Bb & 0 & 0 & BB & 0 \\ 0 & 0 & Bb & 0 & 0 & BB \end{bmatrix}_{ij}^{KM} \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned}
aa_{\alpha\beta}^{KM} &= \frac{1}{2}(N_{K,\alpha} N_{M,\beta} + N_{K,\beta} N_{M,\alpha}); & aA_{\alpha\beta}^{KM} &= Aa_{\alpha\beta}^{KM} = 0; & AA_{\alpha\beta}^{KM} &= 0 \\
aa_{\alpha 3}^{KM} &= 0; & aA_{\alpha 3}^{KM} &= Aa_{\alpha 3}^{KM} = \frac{1}{2}(N_K N_{M,\alpha} + N_{K,\alpha} N_M); & AA_{\alpha 3}^{KM} &= 0 \\
aa_{33}^{KM} &= 0; & aA_{33}^{KM} &= Aa_{33}^{KM} = 0; & AA_{33}^{KM} &= N_K N_M
\end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
bb_{\alpha\beta}^{KM} &= 0; & bB_{\alpha\beta}^{KM} &= Bb_{\alpha\beta}^{KM} = \frac{1}{2}(N_{K,\alpha} N_{M,\beta} + N_{K,\beta} N_{M,\alpha}); & BB_{\alpha\beta}^{KM} &= 0 \\
bb_{\alpha 3}^{KM} &= 0; & bB_{\alpha 3}^{KM} &= Bb_{\alpha 3}^{KM} = 0; & BB_{\alpha 3}^{KM} &= \frac{1}{2}(N_K N_{M,\alpha} + N_{K,\alpha} N_M) \\
bb_{33}^{KM} &= 0; & bB_{33}^{KM} &= Bb_{33}^{KM} = 0; & BB_{33}^{KM} &= 0
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Vektor der verschiebungsabhängigen statischen Variablen:

$$\mathbf{S}_h^u = \left[n^{11}, n^{22}, n^{33}, n^{23}, n^{13}, n^{12}, m^{11}, m^{22}, 0, m^{23}, m^{13}, m^{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 1}. \tag{A.20}$$

Vektor der approximierten zusätzlichen kinematischen Variablen:

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \tilde{\beta}_{33}, 0, 0, 0 \right]^T = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{a} \quad \in \mathbb{R}^{12 \times 1} . \quad (\text{A.21})$$

Ansatzfunktionen für die zusätzlichen kinematischen Variablen und Verzerrungsparameter:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} = \left[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \tilde{\beta}_{33,\alpha}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \right]^T = \tilde{\mathbf{M}} \quad \in \mathbb{R}^{12 \times 4} ; \quad (\text{A.22})$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad (\text{A.23})$$

$$\mathbf{a} = \left[\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \right]^T \quad \in \mathbb{R}^{4 \times 1} . \quad (\text{A.24})$$

Vektor der zu $\tilde{\mathbf{E}}_h$ energetisch konjugierten statischen Variablen:

$$\tilde{\mathbf{S}}_h = \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m_{33}, 0, 0, 0 \right]^T \quad \in \mathbb{R}^{12 \times 1} . \quad (\text{A.25})$$

A.2 Oberflächenorientiertes Schalelement

Wird für die Diskretisierung des 7-Parameter-Schalenmodells der gesamte dreidimensionale Schalenkörper über entsprechende FE-Knoten auf den Schalenoberflächen diskretisiert, müssen einige Vektoren und Matrizen die im Abschnitt A.1 angegeben wurden, neu definiert werden.

Basisvektoren in der Schalenmittelfläche:

$$\mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{2} N_{K,\alpha} (\mathbf{X}^{K_o} + \mathbf{X}^{K_u}) ; \quad \mathbf{a}_\alpha = \frac{1}{2} N_{K,\alpha} (\mathbf{X}^{K_o} + \mathbf{X}^{K_u}) + \frac{1}{2} N_{K,\alpha} (\mathbf{v}^{K_o} + \mathbf{v}^{K_u}) ; \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{2} N_K (\mathbf{X}^{K_o} - \mathbf{X}^{K_u}) ; \quad \mathbf{a}_3 = \frac{1}{2} N_K (\mathbf{X}^{K_o} - \mathbf{X}^{K_u}) + \frac{1}{2} N_K (\mathbf{v}^{K_o} - \mathbf{v}^{K_u}) ; \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{a}_{3,\alpha} = \frac{1}{2} N_{K,\alpha} (\mathbf{v}^{K_o} - \mathbf{v}^{K_u}) . \quad (\text{A.28})$$

Diskretisierung:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} N_K (\mathbf{X}^{K_o} + \mathbf{X}^{K_u}) ; \quad \mathbf{v} = \frac{1}{2} N_K (\mathbf{v}^{K_o} + \mathbf{v}^{K_u}) ; \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2} N_K (\mathbf{v}^{K_o} - \mathbf{v}^{K_u}) ; \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{v} + \theta^3 \mathbf{w} = \frac{1}{2} N_K (\mathbf{v}^{K_o} + \mathbf{v}^{K_u}) + \frac{1}{2} \theta^3 N_K (\mathbf{v}^{K_o} - \mathbf{v}^{K_u}) = \mathbf{N} \mathbf{d} . \quad (\text{A.30})$$

Matrix der Interpolationsfunktionen und Vektor der Elementfreiheitsgrade:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \xi_o N_1 & 0 & 0 & \xi_u N_1 & 0 & 0 & \dots & \xi_o N_4 & 0 & 0 & \xi_u N_4 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_o N_1 & 0 & 0 & \xi_u N_1 & 0 & \dots & 0 & \xi_o N_4 & 0 & 0 & \xi_u N_4 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_o N_1 & 0 & 0 & \xi_u N_1 & \dots & 0 & 0 & \xi_o N_4 & 0 & 0 & \xi_u N_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 24} \quad (\text{A.31})$$

$$\text{mit} \quad \xi_o = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad \text{und} \quad \xi_u = \frac{1}{2}(1 - \xi) ;$$

$$\mathbf{d} = \left[v_x^{1_o}, v_y^{1_o}, v_z^{1_o}, v_x^{1_u}, v_y^{1_u}, v_z^{1_u}, \dots, v_x^{4_o}, v_y^{4_o}, v_z^{4_o}, v_x^{4_u}, v_y^{4_u}, v_z^{4_u} \right]^T \in \mathbb{R}^{24 \times 1}; \quad (\text{A.32})$$

$$\ddot{\mathbf{d}} = \left[\ddot{v}_x^{1_o}, \ddot{v}_y^{1_o}, \ddot{v}_z^{1_o}, \ddot{v}_x^{1_u}, \ddot{v}_y^{1_u}, \ddot{v}_z^{1_u}, \dots, \ddot{v}_x^{4_o}, \ddot{v}_y^{4_o}, \ddot{v}_z^{4_o}, \ddot{v}_x^{4_u}, \ddot{v}_y^{4_u}, \ddot{v}_z^{4_u} \right]^T \in \mathbb{R}^{24 \times 1}. \quad (\text{A.33})$$

Vektor der verschiebungsabhängigen, kinematischen Variablen:

$$\mathbf{E}_h^u = \left[\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{33}, 2\alpha_{23}, 2\alpha_{13}, 2\alpha_{12}, \beta_{11}, \beta_{22}, 0, 2\beta_{23}, 2\beta_{13}, 2\beta_{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 1}. \quad (\text{A.34})$$

B-Operator Matrix $\mathbf{B} = \mathbf{E}_{h,d}^u$:

$$\mathbf{E}_{h,d}^u = \left[\mathbf{a}'_{11}, \mathbf{a}'_{22}, \mathbf{a}'_{33}, 2\mathbf{a}'_{23}, 2\mathbf{a}'_{13}, 2\mathbf{a}'_{12}, \boldsymbol{\beta}'_{11}, \boldsymbol{\beta}'_{22}, \mathbf{0}, 2\boldsymbol{\beta}'_{23}, 2\boldsymbol{\beta}'_{13}, 2\boldsymbol{\beta}'_{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 24}. \quad (\text{A.35})$$

Die Einträge des B-Operators für einen Knoten K ergeben sich zu

$$\mathbf{a}'_{ij} = \left[\mathbf{a}'_{ij}{}^1, \mathbf{a}'_{ij}{}^2, \mathbf{a}'_{ij}{}^3, \mathbf{a}'_{ij}{}^4 \right] \in \mathbb{R}^{1 \times 24}; \quad \boldsymbol{\beta}'_{ij} = \left[\boldsymbol{\beta}'_{ij}{}^1, \boldsymbol{\beta}'_{ij}{}^2, \boldsymbol{\beta}'_{ij}{}^3, \boldsymbol{\beta}'_{ij}{}^4 \right] \in \mathbb{R}^{1 \times 24} \quad (\text{A.36})$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'_{11}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{1x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{1y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{1z}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{1x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{1y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{1z}) \end{bmatrix}^T; & \mathbf{a}'_{22}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{2x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{2y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{2z}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{2x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{2y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{2z}) \end{bmatrix}^T; & \mathbf{a}'_{33}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_K a_{3x}) \\ \frac{1}{2}(N_K a_{3y}) \\ \frac{1}{2}(N_K a_{3z}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3x}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3y}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3z}) \end{bmatrix}^T \\ 2\mathbf{a}'_{23}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3x} + N_K a_{2x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3y} + N_K a_{2y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3z} + N_K a_{2z}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3x} - N_K a_{2x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3y} - N_K a_{2y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3z} - N_K a_{2z}) \end{bmatrix}^T; & 2\mathbf{a}'_{13}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3x} + N_K a_{1x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3y} + N_K a_{1y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3z} + N_K a_{1z}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3x} - N_K a_{1x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3y} - N_K a_{1y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3z} - N_K a_{1z}) \end{bmatrix}^T; & 2\mathbf{a}'_{12}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{1x} + N_{K,1} a_{2x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{1y} + N_{K,1} a_{2y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{1z} + N_{K,1} a_{2z}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{1x} + N_{K,1} a_{2x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{1y} + N_{K,1} a_{2y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{1z} + N_{K,1} a_{2z}) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}'_{11}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3x,1} + N_{K,1} a_{1x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3y,1} + N_{K,1} a_{1y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3z,1} + N_{K,1} a_{1z}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3x,1} - N_{K,1} a_{1x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3y,1} - N_{K,1} a_{1y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3z,1} - N_{K,1} a_{1z}) \end{bmatrix}^T; & \boldsymbol{\beta}'_{22}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3x,2} + N_{K,2} a_{2x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3y,2} + N_{K,2} a_{2y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3z,2} + N_{K,2} a_{2z}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3x,2} - N_{K,2} a_{2x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3y,2} - N_{K,2} a_{2y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,2} a_{3z,2} - N_{K,2} a_{2z}) \end{bmatrix}^T; & 2\boldsymbol{\beta}'_{23}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_K a_{3x,2} + N_{K,2} a_{3x}) \\ \frac{1}{2}(N_K a_{3y,2} + N_{K,2} a_{3y}) \\ \frac{1}{2}(N_K a_{3z,2} + N_{K,2} a_{3z}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3x,2} + N_{K,2} a_{3x}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3y,2} + N_{K,2} a_{3y}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3z,2} + N_{K,2} a_{3z}) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\boldsymbol{\beta}'_{13}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_K a_{3x,1} + N_{K,1} a_{3x}) \\ \frac{1}{2}(N_K a_{3y,1} + N_{K,1} a_{3y}) \\ \frac{1}{2}(N_K a_{3z,1} + N_{K,1} a_{3z}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3x,1} + N_{K,1} a_{3x}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3y,1} + N_{K,1} a_{3y}) \\ -\frac{1}{2}(N_K a_{3z,1} + N_{K,1} a_{3z}) \end{bmatrix}^T; & 2\boldsymbol{\beta}'_{12}{}^K &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3x,2} + N_{K,2} a_{3x,1} + N_{K,1} a_{2x} + N_{K,2} a_{1x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3y,2} + N_{K,2} a_{3y,1} + N_{K,1} a_{2y} + N_{K,2} a_{1y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3z,2} + N_{K,2} a_{3z,1} + N_{K,1} a_{2z} + N_{K,2} a_{1z}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3x,2} + N_{K,2} a_{3x,1} - N_{K,1} a_{2x} - N_{K,2} a_{1x}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3y,2} + N_{K,2} a_{3y,1} - N_{K,1} a_{2y} - N_{K,2} a_{1y}) \\ \frac{1}{2}(N_{K,1} a_{3z,2} + N_{K,2} a_{3z,1} - N_{K,1} a_{2z} - N_{K,2} a_{1z}) \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Partielle Ableitung des B-Operators nach den Verschiebungsfreiheitsgraden $\mathbf{B}_{,d} = \mathbf{E}_{h,dd}^u$:

$$\mathbf{E}_{h,dd}^u = \left[\alpha''_{11}, \alpha''_{22}, \alpha''_{33}, 2\alpha''_{23}, 2\alpha''_{13}, 2\alpha''_{12}, \beta''_{11}, \beta''_{22}, \mathbf{0}, 2\beta''_{23}, 2\beta''_{13}, 2\beta''_{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 1}. \quad (\text{A.39})$$

Die Einträge der partiellen Ableitung des B-Operators ergeben sich zu

$$\alpha''_{ij} = \begin{bmatrix} A_{ij}^{11} & A_{ij}^{12} & A_{ij}^{13} & A_{ij}^{14} \\ A_{ij}^{21} & A_{ij}^{22} & A_{ij}^{23} & A_{ij}^{24} \\ A_{ij}^{31} & A_{ij}^{32} & A_{ij}^{33} & A_{ij}^{34} \\ A_{ij}^{41} & A_{ij}^{42} & A_{ij}^{43} & A_{ij}^{44} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24}; \quad \beta''_{ij} = \begin{bmatrix} B_{ij}^{11} & B_{ij}^{12} & B_{ij}^{13} & B_{ij}^{14} \\ B_{ij}^{21} & B_{ij}^{22} & B_{ij}^{23} & B_{ij}^{24} \\ B_{ij}^{31} & B_{ij}^{32} & B_{ij}^{33} & B_{ij}^{34} \\ B_{ij}^{41} & B_{ij}^{42} & B_{ij}^{43} & B_{ij}^{44} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{24 \times 24} \quad (\text{A.40})$$

mit

$$\mathbf{A}_{ij}^{KM} = \begin{bmatrix} aa & 0 & 0 & aA & 0 & 0 \\ 0 & aa & 0 & 0 & aA & 0 \\ 0 & 0 & aa & 0 & 0 & aA \\ \hline Aa & 0 & 0 & AA & 0 & 0 \\ 0 & Aa & 0 & 0 & AA & 0 \\ 0 & 0 & Aa & 0 & 0 & AA \end{bmatrix}_{ij}^{KM}; \quad \mathbf{B}_{ij}^{KM} = \begin{bmatrix} bb & 0 & 0 & bB & 0 & 0 \\ 0 & bb & 0 & 0 & bB & 0 \\ 0 & 0 & bb & 0 & 0 & bB \\ \hline Bb & 0 & 0 & BB & 0 & 0 \\ 0 & Bb & 0 & 0 & BB & 0 \\ 0 & 0 & Bb & 0 & 0 & BB \end{bmatrix}_{ij}^{KM} \quad (\text{A.41})$$

$$\begin{aligned} aa_{\alpha\beta}^{KM} &= \frac{1}{8}(N_{K\alpha}N_{M\beta} + N_{K\beta}N_{M\alpha}); & aA_{\alpha\beta}^{KM} &= Aa_{\alpha\beta}^{KM} = \frac{1}{8}(N_{K\alpha}N_{M\beta} + N_{K\beta}N_{M\alpha}); & AA_{\alpha\beta}^{KM} &= \frac{1}{8}(N_{K\alpha}N_{M\beta} + N_{K\beta}N_{M\alpha}) \\ aa_{\alpha 3}^{KM} &= \frac{1}{8}(N_{K\alpha}N_M + N_KN_{M\alpha}); & aA_{\alpha 3}^{KM} &= Aa_{\alpha 3}^{KM} = \frac{1}{8}(N_{K\alpha}N_M - N_KN_{M\alpha}); & AA_{\alpha 3}^{KM} &= -\frac{1}{8}(N_{K\alpha}N_M + N_KN_{M\alpha}) \\ aa_{33}^{KM} &= \frac{1}{4}(N_KN_M); & aA_{33}^{KM} &= Aa_{33}^{KM} = -\frac{1}{4}(N_KN_M); & AA_{33}^{KM} &= \frac{1}{4}(N_KN_M) \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} bb_{\alpha\beta}^{KM} &= \frac{1}{4}(N_{K\alpha}N_{M\beta} + N_{K\beta}N_{M\alpha}); & bB_{\alpha\beta}^{KM} &= Bb_{\alpha\beta}^{KM} = 0; & BB_{\alpha\beta}^{KM} &= -\frac{1}{4}(N_{K\alpha}N_{M\beta} + N_{K\beta}N_{M\alpha}) \\ bb_{\alpha 3}^{KM} &= \frac{1}{8}(N_KN_{M\alpha} + N_{K\alpha}N_M); & bB_{\alpha 3}^{KM} &= Bb_{\alpha 3}^{KM} = -\frac{1}{8}(N_KN_{M\alpha} + N_{K\alpha}N_M); & BB_{\alpha 3}^{KM} &= \frac{1}{8}(N_KN_{M\alpha} + N_{K\alpha}N_M) \\ bb_{33}^{KM} &= 0; & bB_{33}^{KM} &= Bb_{33}^{KM} = 0; & BB_{33}^{KM} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

Vektor der verschiebungsabhängigen, statischen Variablen:

$$\mathbf{S}_h^u = \left[n^{11}, n^{22}, n^{33}, n^{23}, n^{13}, n^{12}, m^{11}, m^{22}, 0, m^{23}, m^{13}, m^{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 1}. \quad (\text{A.44})$$

Vektor der approximierten, zusätzlichen kinematischen Variablen:

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \tilde{\beta}_{33}, 0, 0, 0 \right]^T = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{12 \times 1}. \quad (\text{A.45})$$

Ansatzfunktionen für die zusätzlichen kinematischen Variablen und Verzerrungsparameter:

$$\tilde{\mathbf{E}}_{h,\alpha} = \left[\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \tilde{\beta}_{33,\alpha}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0} \right]^T = \tilde{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{12 \times 4}; \quad (\text{A.46})$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\text{A.47})$$

$$\mathbf{a} = \left[\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4 \right]^T \in \mathbb{R}^{4 \times 1} . \quad (\text{A.48})$$

Vektor der zu $\tilde{\mathbf{E}}_h$ energetisch konjugierten, statischen Variablen:

$$\tilde{\mathbf{S}}_h = \left[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m_{33}, 0, 0, 0 \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 1} . \quad (\text{A.49})$$

A.3 ANS-Methode

Mit Hilfe der ANS-Methode werden ganz gezielt einzelne Einträge in der B-Operatormatrix verändert, weshalb diese Methode auch häufig als B-bar-Methode bezeichnet wird. In der vorliegenden Arbeit wird diese eingesetzt, um das *Querschublocking* und das *curvature thickness locking* für die beiden vorgestellten Schalenelemente zu reduzieren. Dafür wird der B-Operator in verschiedene Anteile aufgespalten:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_q^\xi + \mathbf{B}_q^\eta + \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_x . \quad (\text{A.50})$$

Darin enthalten \mathbf{B}_q^ξ und \mathbf{B}_q^η die zur Berechnung der Querschubverzerrungen notwendigen Ausdrücke, \mathbf{B}_T die zur Berechnung der Quernormalverzerrungen und \mathbf{B}_x alle übrigen, nicht zu modifizierenden Terme.

- Querschublocking

Unter Verwendung von \mathbf{B}_q^ξ und \mathbf{B}_q^η werden diskrete Querschubverzerrungen an den jeweiligen Kollokationspunkten (Koordinaten ξ_K, η_K) berechnet:

$$\alpha_{13}^K = \mathbf{B}_q^\xi(\xi_K, \eta_K) \mathbf{d} \quad \text{und} \quad \alpha_{23}^K = \mathbf{B}_q^\eta(\xi_K, \eta_K) \mathbf{d} . \quad (\text{A.51})$$

Die Kollokationspunkte werden so gewählt, dass die parasitären Schubverzerrungen dort verschwinden. Für die beiden vorgestellten Schalenelemente trifft dies auf den jeweiligen Seitenmitten zu (Abb. 3.8), so dass folgende Kollokationspunkte verwendet werden:

$$\begin{aligned} \text{für } \alpha_{13} : \quad & (\xi_1, \eta_1) = (0, -1) , \quad (\xi_2, \eta_2) = (0, 1) , \\ \text{für } \alpha_{23} : \quad & (\xi_1, \eta_1) = (-1, 0) , \quad (\xi_2, \eta_2) = (1, 0) . \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

Die diskreten Verzerrungswerte α_{13}^K und α_{23}^K aus Gleichung (A.51) werden nun mit Hilfe von entsprechend gewählten Ansatzfunktionen über das gesamte Element interpoliert:

$$\alpha_{13} = \sum_{K=1}^2 \bar{N}_K^\xi \alpha_{13}^K \quad \text{und} \quad \alpha_{23} = \sum_{K=1}^2 \bar{N}_K^\eta \alpha_{23}^K , \quad (\text{A.53})$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{N}_1^\xi &= \frac{1}{2}(1 - \eta) , & \bar{N}_1^\eta &= \frac{1}{2}(1 - \xi) , \\ \bar{N}_2^\xi &= \frac{1}{2}(1 + \eta) , & \bar{N}_2^\eta &= \frac{1}{2}(1 + \xi) . \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Damit lassen sich schließlich die Querschubverzerrungen über einen modifizierten B-Operator ausdrücken:

$$\alpha_{13} = \sum_{K=1}^2 \left[\bar{N}_K^{\xi} \mathbf{B}_q^{\xi}(\xi_K, \eta_K) \right] \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}}_q^{\xi} \mathbf{d} , \quad (\text{A.55})$$

$$\alpha_{23} = \sum_{K=1}^2 \left[\bar{N}_K^{\eta} \mathbf{B}_q^{\eta}(\xi_K, \eta_K) \right] \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}}_q^{\eta} \mathbf{d} .$$

- Curvature Thickness Locking

Zur Vermeidung dieses Locking-Effektes werden die Quernormalverzerrungen α_{33} entsprechend modifiziert interpoliert. Da die parasitären Normalverzerrungen in Dickenrichtung an den Knotenpunkten Null sind, werden diese als Kollokationspunkte gewählt:

$$\text{für } \alpha_{33}^K : \quad \begin{aligned} (\xi_1, \eta_1) &= (-1, -1) , & (\xi_2, \eta_2) &= (+1, -1) , \\ (\xi_3, \eta_3) &= (+1, +1) , & (\xi_4, \eta_4) &= (-1, +1) . \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Um die diskreten Quernormalverzerrungen über das Element zu interpolieren, werden die gewöhnlichen Lagrange-Polynome gewählt, die auch für die Interpolation der Verschiebungen verwendet werden (Gl. (A.1)). Damit ergeben sich die neuen Quernormalverzerrungen zu

$$\alpha_{33} = \sum_{K=1}^4 \left[N_K \mathbf{B}_T(\xi_K, \eta_K) \right] \mathbf{d} = \bar{\mathbf{B}}_T \mathbf{d} . \quad (\text{A.57})$$

Die Berechnung der modifizierten B-Operatoren kann analytisch erfolgen, weshalb der zusätzliche numerische Aufwand gegenüber reinen Verschiebungselementen vernachlässigbar ist.

A.4 EAS-Methode

Der für ein asymptotisch korrektes Schalenmodell notwendige siebte Parameter wird in dieser Arbeit mit Hilfe der EAS-Methode eingebracht. Die Herleitung der daraus resultierenden modifizierten Steifigkeitsmatrix ist in Abschnitt 3.3.3 dargestellt. Zur Vermeidung diverser Locking-Phänomene lassen sich analog hierzu auch weitere Verzerrungsanteile anreichern. Dabei verändert sich lediglich die Anzahl der internen Verzerrungsparameter α^i sowie die zugehörige Matrix der Ansatzfunktionen $\tilde{\mathbf{M}}$. Nachfolgend werden die in dieser Arbeit verwendeten Matrizen angegeben.

- Membranverzerrungen

Zur Reduzierung von Schublocking, volumetrischem Locking und Membranlocking werden die verschiebungsabhängigen Membranverzerrungen α_{11} , α_{22} und α_{12} durch

$$\tilde{\mathbf{E}}_h = \left[\tilde{\alpha}_{11}, \tilde{\alpha}_{22}, 0, 0, 0, 2\tilde{\alpha}_{12}, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right]^T = \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{a} \in \mathbb{R}^{12 \times 1} \quad (\text{A.58})$$

mit

$$\tilde{\mathbf{M}}^T = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

erweitert. Damit sind fünf zusätzliche, interne Verzerrungsparameter notwendig. Werden sowohl der siebte Parameter als auch die Membranverzerrungen erweitert, müssen die entsprechenden Matrizen der Ansatzfunktionen $\tilde{\mathbf{M}}$ zusammengefasst werden. Insgesamt werden neun zusätzliche, interne Verzerrungsparameter benötigt.

- Biegeverzerrungen

Die zusätzliche Erweiterung der Biegeverzerrungen liefert, verglichen mit dem numerischen Mehraufwand, nur geringfügige Elementverbesserungen (Bischoff und Ramm (1997), Toncar (2006)). Deshalb werden in dieser Arbeit keine zusätzlichen Verzerrungsansätze für diese Verzerrungsterme verwendet.

Anmerkung: Da sich die Ansätze für die zusätzlichen Verzerrungen auf die natürlichen Elementkoordinaten und damit auf eine i.d.R. veränderliche Metrik beziehen, können konstante Spannungsansätze nur realisiert werden, indem die Metrik innerhalb eines Elementes ebenfalls als konstant angesetzt wird (Bischoff (1999)). Bei EAS-Formulierungen werden deshalb die Ansätze $\tilde{\mathbf{M}}$ auf die Metrik am Elementmittelpunkt bezogen.

A.5 Hu-Washizu-Volumenelement

Nachfolgend werden die Definitionen der benötigten Vektoren und Matrizen für die Diskretisierung des achtknotigen Hu-Washizu-Volumenelementes angegeben und einige wichtige Beziehungen hergeleitet.

In Abbildung A.2 ist für das in Kapitel 3.6 beschriebene achtknotige Hu-Washizu-Volumenelement, die Knotennummerierung und die Lage der Gauß-Punkte dargestellt.

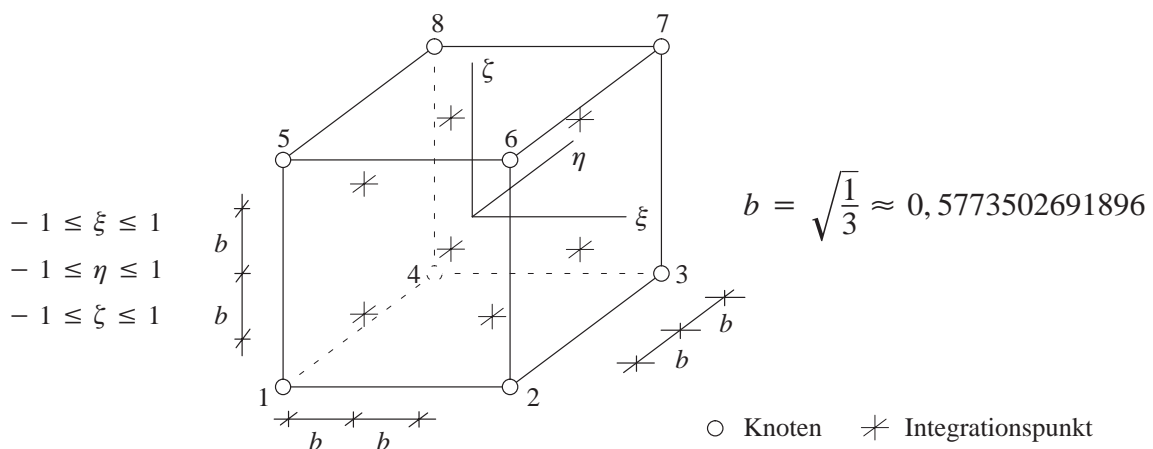


Abb. A.2: Knotennummerierung und Gauß-Punkte eines achtknotigen Volumenelementes

Ansätze für die Verschiebungen:

$$\mathbf{u}_h = \mathbf{N} \mathbf{d} , \quad (\text{A.60})$$

mit

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 24} ; \quad (\text{A.61})$$

$$\mathbf{d} = \left[v_x^1, v_y^1, v_z^1, \dots, v_x^8, v_y^8, v_z^8 \right]^T \in \mathbb{R}^{24 \times 1} \quad (\text{A.62})$$

und

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) ; & N_5 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) ; \\ N_2 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) ; & N_6 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) ; \\ N_3 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) ; & N_7 &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) ; \\ N_4 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) ; & N_8 &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) . \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

Ansätze für die Verzerrungen:

$$\mathbf{E}_h = \mathbf{M}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{M}_2 \mathbf{a}_2 = \mathbf{F}_0^{-T} \mathcal{M}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{F}_0^{-T} \mathcal{M}_2 \mathbf{a}_2 \quad (\text{A.64})$$

mit

$$\mathbf{E}_h = \left[E_{11}, E_{22}, E_{33}, 2E_{23}, 2E_{13}, 2E_{12} \right]^T \in \mathbb{R}^{6 \times 1} ; \quad (\text{A.65})$$

$$\mathcal{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\zeta \end{bmatrix} ; \quad (\text{A.66})$$

$\in \mathbb{R}^{6 \times 18}$

$$\mathbf{a}_1 = \left[\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots, \alpha_1^{17}, \alpha_1^{18} \right]^T \in \mathbb{R}^{18 \times 1} ; \quad (\text{A.67})$$

$$\mathcal{M}_2 = \begin{bmatrix} \xi & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta & \eta\zeta & \eta\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta & \zeta\xi & \zeta\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\eta & 2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi & 2\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\xi & 2\eta & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad (\text{A.68})$$

$\in \mathbb{R}^{6 \times 15}$

$$\mathbf{a}_2 = \left[\alpha_2^1, \alpha_2^2, \dots, \alpha_2^{14}, \alpha_2^{15} \right]^T \in \mathbb{R}^{15 \times 1} . \quad (\text{A.69})$$

Ansätze für die Spannungen:

$$\mathbf{S}_h = \mathbf{P}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{F}_0 \mathcal{P}\boldsymbol{\beta} \quad (\text{A.70})$$

mit

$$\mathbf{S}_h = [S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{23}, S_{13}, S_{12}]^T \in \mathbb{R}^{6 \times 1}; \quad (\text{A.71})$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & \xi\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}; \quad (\text{A.72})$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{17}, \beta^{18}]^T \in \mathbb{R}^{18 \times 1}. \quad (\text{A.73})$$

Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren:

$$\boldsymbol{\lambda}_h = \mathbf{M}_z \mathbf{z} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{M}_2 \mathbf{z} \quad (\text{A.74})$$

mit

$$\boldsymbol{\lambda}_h = [\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}, 2\lambda_{23}, 2\lambda_{13}, 2\lambda_{12}]^T \in \mathbb{R}^{6 \times 1}; \quad (\text{A.75})$$

$$\mathbf{z} = [z^1, z^2, \dots, z^{14}, z^{15}]^T \in \mathbb{R}^{15 \times 1}. \quad (\text{A.76})$$

Die Ansätze für die Verzerrungen ($\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$) und Spannungen (\mathcal{P}) beziehen sich auf die natürlichen Elementkoordinaten, weshalb sie mit einer geeigneten Transformation auf das globale Koordinatensystem bezogen werden müssen. Um konstante Spannungs- und Verzerrungsansätze realisieren zu können, wird die Metrik innerhalb eines Elementes als konstant angesetzt. Analog zur EAS-Methode wird auch hier die Metrik am Elementmittelpunkt gewählt. Es ergibt sich die Transformationsmatrix zu

$$\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} F_{11}F_{11} & F_{12}F_{12} & F_{13}F_{13} & F_{12}F_{13} + F_{13}F_{12} & F_{11}F_{13} + F_{13}F_{11} & F_{11}F_{12} + F_{12}F_{11} \\ F_{21}F_{21} & F_{22}F_{22} & F_{23}F_{23} & F_{22}F_{23} + F_{23}F_{22} & F_{21}F_{23} + F_{23}F_{21} & F_{21}F_{22} + F_{22}F_{21} \\ F_{31}F_{31} & F_{32}F_{32} & F_{33}F_{33} & F_{32}F_{33} + F_{33}F_{32} & F_{31}F_{33} + F_{33}F_{31} & F_{31}F_{32} + F_{32}F_{31} \\ F_{21}F_{31} & F_{22}F_{32} & F_{23}F_{33} & F_{22}F_{33} + F_{23}F_{32} & F_{21}F_{33} + F_{23}F_{31} & F_{21}F_{32} + F_{22}F_{31} \\ F_{11}F_{31} & F_{12}F_{32} & F_{13}F_{33} & F_{12}F_{33} + F_{13}F_{32} & F_{11}F_{33} + F_{13}F_{31} & F_{11}F_{32} + F_{12}F_{31} \\ F_{11}F_{21} & F_{12}F_{22} & F_{13}F_{23} & F_{12}F_{23} + F_{13}F_{22} & F_{11}F_{23} + F_{13}F_{21} & F_{11}F_{22} + F_{12}F_{21} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.77})$$

wobei

$$F_{i1} = \frac{\partial x_i}{\partial \xi}, \quad F_{i2} = \frac{\partial x_i}{\partial \eta}, \quad F_{i3} = \frac{\partial x_i}{\partial \zeta} \quad (\text{A.78})$$

die entsprechenden Einträge des Deformationsgradienten, ausgewertet am Elementmittelpunkt ($\xi = \eta = \zeta = 0$), darstellen.

- Herleitung des diskretisierten, variierten Funktionals von Gleichung (3.65)

Startpunkt ist das modifizierte, variierte Funktional aus Gleichung (3.57). Durch das Einsetzen der entsprechenden Ansätze für die Lagrange-Multiplikatoren entsteht ein Zusammenhang zwischen den internen Verzerrungsparametern \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 (Kap. 3.6.3):

$$\mathbf{a}_2 = - \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_z^T \mathbb{C} \mathbf{M}_2 d\Omega \right]^{-1} \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_z^T \mathbb{C} \mathbf{M}_1 d\Omega \right] \mathbf{a}_1 = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{a}_1 . \quad (\text{A.79})$$

Dieser Zusammenhang wird zusammen mit den restlichen Ansätzen in Gleichung (3.57) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_h &= \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega^h} (\mathbf{E}_{h,d}^u)^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} \\ &+ \delta \boldsymbol{\alpha}_1^T \int_{\Omega^h} \mathbf{M}_1^T \left[\mathbb{C} (\mathbf{M}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{a}_1 - \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} + \mathbb{C} \mathbf{M}_z \mathbf{z}) \right] d\Omega \\ &+ \delta \boldsymbol{\alpha}_1^T \int_{\Omega^h} \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M}_2^T \left[\mathbb{C} (\mathbf{M}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{a}_1 - \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} + \mathbb{C} \mathbf{M}_z \mathbf{z}) \right] d\Omega \\ &+ \delta \boldsymbol{\beta}^T \int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \left[\mathbf{E}_h^u - \mathbf{M}_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{a}_1 \right] d\Omega - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{ext} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Weiteres Zusammenfassen liefert:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_h &= \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega^h} (\mathbf{E}_{h,d}^u)^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} \\ &+ \delta \boldsymbol{\alpha}_1^T \left[\int_{\Omega^h} (\mathbf{M}_1^T + \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M}_2^T) \mathbb{C} \mathbf{M}_1 d\Omega \mathbf{a}_1 + \int_{\Omega^h} (\mathbf{M}_1^T + \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M}_2^T) \mathbb{C} \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{A}} d\Omega \mathbf{a}_1 \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega^h} (\mathbf{M}_1^T + \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M}_2^T) \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} + \int_{\Omega^h} (\mathbf{M}_1^T + \tilde{\mathbf{A}}^T \mathbf{M}_2^T) \mathbb{C} \mathbf{M}_z d\Omega \mathbf{z} \right] \\ &+ \delta \boldsymbol{\beta}^T \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{E}_h^u d\Omega - \int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{A}}) d\Omega \mathbf{a}_1 \right] - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{ext} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

Mit Einführung der Abkürzung

$$\mathbf{M}_n := \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_z^T \mathbb{C} \mathbf{M}_2 d\Omega \right]^{-1} \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_z^T \mathbb{C} \mathbf{M}_1 d\Omega \right] \quad (\text{A.82})$$

und der Tatsache, dass

$$\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbb{C} \mathbf{M}_z d\Omega z = \mathbf{0} \quad (\text{A.83})$$

die Orthogonalitätsbedingung erfüllt, resultiert schließlich die diskretisierte schwache Form aus Gleichung (3.65):

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HW}^{LM} \approx \delta \Pi_h(\mathbf{d}, \mathbf{a}_1, \boldsymbol{\beta}) &= \delta \mathbf{d}^T \int_{\Omega^h} (\mathbf{E}_{h,d}^u)^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} \\ &+ \delta \mathbf{a}_1^T \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbb{C} \mathbf{M}_n d\Omega \mathbf{a}_1 - \int_{\Omega^h} \mathbf{M}_n^T \mathbf{P} d\Omega \boldsymbol{\beta} \right] \\ &+ \delta \boldsymbol{\beta}^T \left[\int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{E}_h^u d\Omega - \int_{\Omega^h} \mathbf{P}^T \mathbf{M}_n d\Omega \mathbf{a}_1 \right] - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}^{ext} = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

B Mortar-Methode und Kontaktformulierung

B.1 Gebietszerlegung: Statische Kondensation

Ausgangspunkt ist das Gleichungssystem (5.28). Unter Verwendung von dualen Ansatzfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren reduziert sich die Kopplungsmatrix \mathbf{M}_S auf eine Diagonalmatrix \mathbf{D}_S . Das Gleichungssystem lautet dann:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NM} & \mathbf{K}_{NS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{MN} & \mathbf{K}_{MM} & \mathbf{K}_{MS} & -\mathbf{M}_M^T \\ \mathbf{K}_{SN} & \mathbf{K}_{SM} & \mathbf{K}_{SS} & \mathbf{D}_S \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M}_M & \mathbf{D}_S & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^N \\ \mathbf{d}^M \\ \mathbf{d}^S \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{ext} \\ \mathbf{f}_M^{ext} \\ \mathbf{f}_S^{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Da die Verschiebungen auf dem Slave- und dem Master-Rand über die Gleichung (5.26) miteinander gekoppelt sind, lassen sich die Verschiebungen auf dem Slave-Rand mittels der Kopplungsmatrizen $\mathbf{M}_S \rightarrow \mathbf{D}_S$ und \mathbf{M}_M in Abhängigkeit der Verschiebungen auf dem Master-Rand ausdrücken:

$$\mathbf{d}^S = (\mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{M}_M) \mathbf{d}^M = \hat{\mathbf{M}} \mathbf{d}^M. \quad (\text{B.2})$$

Wird dies in die erste Zeile von Gleichung (B.1) eingesetzt, ergibt sich

$$\mathbf{K}_{NN} \mathbf{d}^N + \mathbf{K}_{NM} \mathbf{d}^M + \mathbf{K}_{NS} (\hat{\mathbf{M}} \mathbf{d}^M) = \mathbf{K}_{NN} \mathbf{d}^N + (\mathbf{K}_{NM} + \mathbf{K}_{NS} \hat{\mathbf{M}}) \mathbf{d}^M = \mathbf{f}_N^{ext}. \quad (\text{B.3})$$

Auflösung der dritten Zeile liefert die diskreten Werte für die Lagrange-Multiplikatoren

$$\mathbf{z} = \mathbf{D}_S^{-1} \left[\mathbf{f}_S^{ext} - \mathbf{K}_{SN} \mathbf{d}^N - \mathbf{K}_{SM} \mathbf{d}^M - \mathbf{K}_{SS} \mathbf{d}^S \right], \quad (\text{B.4})$$

so dass die dritte Zeile aus dem Gleichungssystem (B.1) gestrichen werden kann. Das Einsetzen von (B.4) und (B.2) in die zweite Zeile von (B.1) ergibt

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{MN} \mathbf{d}^N + \mathbf{K}_{MM} \mathbf{d}^M + \mathbf{K}_{MS} \mathbf{d}^S - \underbrace{\mathbf{M}_M^T \mathbf{D}_S^{-1} \left[\mathbf{f}_S^{ext} - \mathbf{K}_{SN} \mathbf{d}^N - \mathbf{K}_{SM} \mathbf{d}^M - \mathbf{K}_{SS} \mathbf{d}^S \right]}_{\hat{\mathbf{M}}^T} = \mathbf{f}_M^{ext} \\ \Rightarrow & \left(\mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} \right) \mathbf{d}^N + \left(\mathbf{K}_{MM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} \right) \mathbf{d}^M + \underbrace{\left(\mathbf{K}_{MS} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \right) \mathbf{d}^S}_{\hat{\mathbf{M}} \mathbf{d}^M} = \mathbf{f}_M^{ext} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S^{ext} \\ & \qquad \qquad \qquad \left(\mathbf{K}_{MS} + 2 \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \right) \mathbf{d}^S - \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \mathbf{d}^S \\ \Rightarrow & \left(\mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} \right) \mathbf{d}^N + \left(\mathbf{K}_{MM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} + \mathbf{K}_{MS} \hat{\mathbf{M}} + 2 \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} \right) \mathbf{d}^M - \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \mathbf{d}^S = \mathbf{f}_M^{ext} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S^{ext}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Um ein symmetrisches Gleichungssystem zu erhalten, wird die vierte Zeile von (B.1) mit $(\mathbf{K}_{SS}\mathbf{D}_S^{-1})$ vormultipliziert:

$$-\left(\mathbf{K}_{SS}\mathbf{D}_S^{-1}\mathbf{M}_M\right)\mathbf{d}^M + \left(\mathbf{K}_{SS}\mathbf{D}_S^{-1}\mathbf{D}_S\right)\mathbf{d}^S = -\left(\mathbf{K}_{SS}\hat{\mathbf{M}}\right)\mathbf{d}^M + \mathbf{K}_{SS}\mathbf{d}^S = \mathbf{0} . \quad (\text{B.6})$$

Zusammenfassen der Gleichungen (B.3), (B.5) und (B.6) liefert schließlich das symmetrische Gleichungssystem aus (5.30):

$$\left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{K}_{NN} & & \\ \mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} & \mathbf{K}_{NM} + \mathbf{K}_{NS} \hat{\mathbf{M}} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{MM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} + \mathbf{K}_{MS} \hat{\mathbf{M}} + 2\hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} & -\hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \\ & -\mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} & \mathbf{K}_{SS} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{d}^N \\ \mathbf{d}^M \\ \mathbf{d}^S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{ext} \\ \mathbf{f}_M^{ext} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S^{ext} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

B.2 Kontakt mit starrem Hindernis: Statische Kondensation

Ausgehend von Gleichung (7.22) werden hier die notwendigen Schritte dargestellt, die schließlich auf das kondensierte reduzierte Gleichungssystem (7.25) führen. Zur übersichtlicheren Darstellung wird folgende Notation vereinbart: Die effektive tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T^{eff} wird mit \mathbf{K} , der effektive Lastvektor \mathbf{f}^{eff} wird mit \mathbf{f} bezeichnet und der Zähler l der Schleife über die Aktive-Menge wird weggelassen. Auf die Kennzeichnung der Dimension der Einheitsmatrix wird ebenso verzichtet. Mit diesen Vereinbarungen lautet Gleichung (7.22):

$$\left[\begin{array}{ccccc} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NI} & \mathbf{K}_{NA} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{IN} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IA} & \mathbf{D}^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{AN} & \mathbf{K}_{AI} & \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{0} & \mathbf{D}^A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}_A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_A \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^I \\ \Delta \mathbf{d}^A \\ \mathbf{z}^I \\ \mathbf{z}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_A \\ \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{g}}_A \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (\text{B.8})$$

Aus der vierten Zeile ist ersichtlich, dass $\mathbf{z}^I = \mathbf{0}$ sein muss. Deshalb kann die vierte Zeile ebenso wie die vierte Spalte aus (B.8) gestrichen werden. Dieses ergibt:

$$\left[\begin{array}{cccc} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NI} & \mathbf{K}_{NA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{IN} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{AN} & \mathbf{K}_{AI} & \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{D}^A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_A \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^I \\ \Delta \mathbf{d}^A \\ \mathbf{z}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{f}_A \\ \tilde{\mathbf{g}}_A \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (\text{B.9})$$

Nun wird die dritte Zeile von (B.9) mit \mathbf{T}_A vormultipliziert:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NI} & \mathbf{K}_{NA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{IN} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IA} & \mathbf{0} \\ \mathbf{T}_A \mathbf{K}_{AN} & \mathbf{T}_A \mathbf{K}_{AI} & \mathbf{T}_A \mathbf{K}_{AA} & \mathbf{T}_A \mathbf{D}^A \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}_A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{T}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^I \\ \Delta \mathbf{d}^A \\ \mathbf{z}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{T}_A \mathbf{f}_A \\ \tilde{\mathbf{g}}_A \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Mit der Bedingung aus der fünften Zeile $\mathbf{T}_A \mathbf{z}^A = \mathbf{0}$ folgt, dass auch $\mathbf{T}_A \mathbf{D}^A \mathbf{z}^A = \mathbf{0}$ gelten muss, so dass auch die vierte Spalte und die fünfte Zeile eliminiert werden können:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NI} & \mathbf{K}_{NA} \\ \mathbf{K}_{IN} & \mathbf{K}_{II} & \mathbf{K}_{IA} \\ \mathbf{T}_A \mathbf{K}_{AN} & \mathbf{T}_A \mathbf{K}_{AI} & \mathbf{T}_A \mathbf{K}_{AA} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^I \\ \Delta \mathbf{d}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_I \\ \mathbf{T}_A \mathbf{f}_A \\ \tilde{\mathbf{g}}_A \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Das Vertauschen der dritten und vierten Zeile und das Einfügen der entsprechenden Indizes führt zu dem reduzierten System aus Gleichung (7.25):

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{NN} & (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{NI_l} & (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{NA_l} \\ (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{I_l N} & (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{I_l I_l} & (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{I_l A_l} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{N}}_{A_l} \\ \mathbf{T}_{A_l} (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{A_l N} & \mathbf{T}_{A_l} (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{A_l I_l} & \mathbf{T}_{A_l} (\mathbf{K}_T^{\text{eff}})_{A_l A_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^{I_l} \\ \Delta \mathbf{d}^{A_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N^{\text{eff}} \\ \mathbf{f}_{I_l}^{\text{eff}} \\ \tilde{\mathbf{g}}_{A_l} \\ \mathbf{T}_{A_l} \mathbf{f}_{A_l}^{\text{eff}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

B.3 Kontakt zweier deformierbarer Körper: Basistransformation

Ausgehend von Gleichung (6.30) werden die notwendigen Schritte dargestellt, die schließlich auf das modifizierte effektive Strukturgleichungssystem (7.39) führen. Der Übersichtlichkeit halber werden zur Herleitung wiederum einige Indizes weggelassen (Anhang B.2), so dass sich Gleichung (6.30) zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN} & \mathbf{K}_{NM} & \mathbf{K}_{NS} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{MN} & \mathbf{K}_{MM} & \mathbf{K}_{MS} & -\mathbf{M}_M^T \\ \mathbf{K}_{SN} & \mathbf{K}_{SM} & \mathbf{K}_{SS} & \mathbf{D}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^M \\ \Delta \mathbf{d}^S \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_M \\ \mathbf{f}_S \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

ergibt. Mit der Definition des inkrementellen Sprungs aus Gleichung (7.35) folgt eine Beziehung für die inkrementellen Verschiebungen der Slave-Knoten $\Delta \mathbf{d}^S$ in Abhängigkeit des inkrementellen Sprungs und der inkrementellen Verschiebungen der Master-Knoten:

$$[\Delta \mathbf{d}] = \Delta \mathbf{d}^S - \hat{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{d}^M \quad \rightarrow \quad \Delta \mathbf{d}^S = [\Delta \mathbf{d}] + \hat{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{d}^M, \quad (\text{B.14})$$

mit der Abkürzung

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{D}_S^{-1} \mathbf{M}_M . \quad (\text{B.15})$$

Das Einsetzen der Beziehung für $\Delta \mathbf{d}^S$ (Gl. (B.14)_{rechts}) in die erste bzw. dritte Zeile von (B.13) liefert:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{NN} \Delta \mathbf{d}^N + \mathbf{K}_{NM} \Delta \mathbf{d}^M + \mathbf{K}_{NS} \left([\Delta \mathbf{d}] + \hat{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{d}^M \right) = \mathbf{f}_N \\ \Rightarrow & \mathbf{K}_{NN} \Delta \mathbf{d}^N + \left(\mathbf{K}_{NM} + \mathbf{K}_{NS} \hat{\mathbf{M}} \right) \Delta \mathbf{d}^M + \mathbf{K}_{NS} [\Delta \mathbf{d}] = \mathbf{f}_N \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

und

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}_{SN} \Delta \mathbf{d}^N + \mathbf{K}_{SM} \Delta \mathbf{d}^M + \mathbf{K}_{SS} \left([\Delta \mathbf{d}] + \hat{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{d}^M \right) + \mathbf{D}_S \mathbf{z} = \mathbf{f}_S \\ \Rightarrow & \mathbf{K}_{SN} \Delta \mathbf{d}^N + \left(\mathbf{K}_{SM} + \mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} \right) \Delta \mathbf{d}^M + \mathbf{K}_{SS} [\Delta \mathbf{d}] + \mathbf{D}_S \mathbf{z} = \mathbf{f}_S . \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Um den Kopplungsterm $(-\mathbf{M}_M^T)$ aus der zweiten Zeile von (B.13) loszuwerden, wird die dritte Zeile von (B.13) mit $(\hat{\mathbf{M}}^T)$ vormultipliziert und zur zweiten Zeile hinzuaddiert:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} \right) \Delta \mathbf{d}^N + \left(\mathbf{K}_{MM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} \right) \Delta \mathbf{d}^M + \\ & + \left(\mathbf{K}_{MS} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \right) \Delta \mathbf{d}^S + \underbrace{\left(-\mathbf{M}_M^T + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{D}_S \right) \mathbf{z}}_{-\mathbf{M}_M^T + \mathbf{M}_M^T \mathbf{D}_S^{-T} \mathbf{D}_S = -\mathbf{M}_M^T + \mathbf{M}_M^T = \mathbf{0}} = \mathbf{f}_M + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

$$\Rightarrow \left(\mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} \right) \Delta \mathbf{d}^N + \left(\mathbf{K}_{MM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} \right) \Delta \mathbf{d}^M + \left(\mathbf{K}_{MS} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \right) \Delta \mathbf{d}^S = \mathbf{f}_M + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S .$$

Wird im Weiteren die Beziehung für $\Delta \mathbf{d}^S$ (Gl. (B.14)_{rechts}) in diese Gleichung eingesetzt, ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} \right) \Delta \mathbf{d}^N + \left(\mathbf{K}_{MM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} \right) \Delta \mathbf{d}^M + \\ & + \left(\mathbf{K}_{MS} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \right) \left([\Delta \mathbf{d}] + \hat{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{d}^M \right) = \mathbf{f}_M + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \left(\mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} \right) \Delta \mathbf{d}^N + \left(\mathbf{K}_{MM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} + \mathbf{K}_{MS} \hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} \right) \Delta \mathbf{d}^M + \\ & + \left(\mathbf{K}_{MS} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \right) [\Delta \mathbf{d}] = \mathbf{f}_M + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S . \end{aligned}$$

Zusammengefasst lautet damit das modifizierte Gleichungssystem:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{K}_{NN} & & & & & \\ \mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} & & & & & \\ & & & & & \\ \mathbf{K}_{SN} & & & & & \\ \hline & \mathbf{K}_{NM} + \mathbf{K}_{NS} \hat{\mathbf{M}} & & & & \\ \mathbf{K}_{MN} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SN} & \mathbf{K}_{MM} + \mathbf{K}_{MS} \hat{\mathbf{M}} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SM} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} & & \mathbf{K}_{MS} + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{K}_{SS} & & \\ & & & & & \\ & \mathbf{K}_{SM} + \mathbf{K}_{SS} \hat{\mathbf{M}} & & \mathbf{K}_{SS} & & \\ & & & & \mathbf{D}_S & \\ \hline & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{0} \\ & & & & & \mathbf{D}_S \end{array} \right] \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}^N \\ \Delta \mathbf{d}^M \\ [\Delta \mathbf{d}] \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N \\ \mathbf{f}_M + \hat{\mathbf{M}}^T \mathbf{f}_S \\ \mathbf{f}_S \end{bmatrix} . \quad (\text{B.20})$$

B.4 Konstruktion diskreter dualer Ansatzfunktionen

Zur besseren Veranschaulichung des in Kapitel 6.3.3 erläuterten Verfahrens zur Konstruktion der diskreten dualen Ansatzfunktionen für die Interpolation der Lagrange-Multiplikatoren wird das Vorgehen anhand eines Beispiels gezeigt (Abb. B.1):

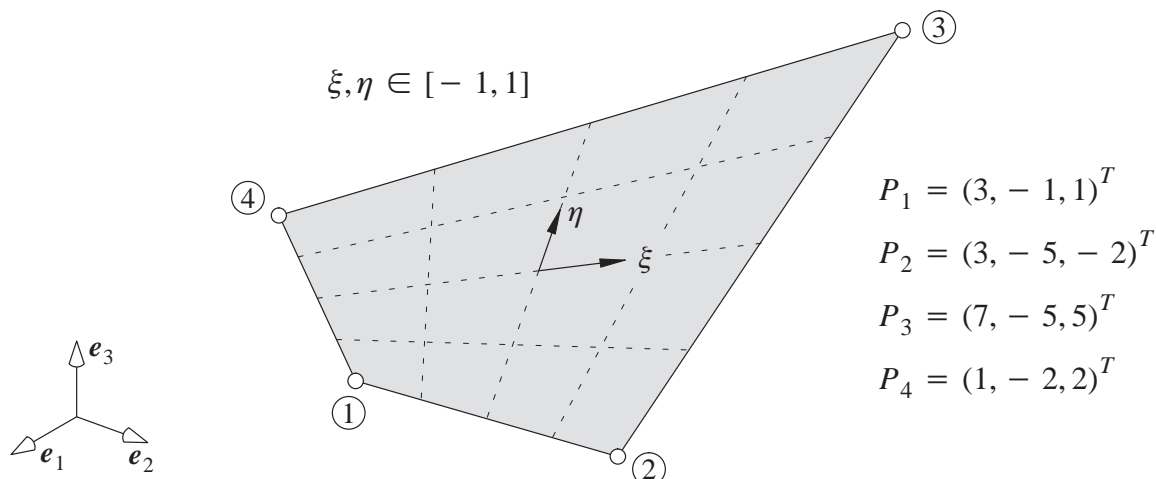


Abb. B.1: Beispiel eines Kontaktflächenelementes im dreidimensionalen Raum

Die Positionen der Eckknoten P_1 bis P_4 sind im kartesischen Koordinatensystem, das von den orthonormierten Basisvektoren $e^i = e_i$ aufgespannt wird, gegeben. Unter Verwendung der gewöhnlichen bilinearen Ansatzfunktionen N_i^S (Abb. 6.5links) ergibt sich die Position eines beliebigen Punktes innerhalb des dargestellten Flächenelementes zu

$$P(\mathbf{x}) = P(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(14 + 6\xi + 2\eta + 6\xi\eta) \\ \frac{1}{4}(-13 - 7\xi - \eta + \xi\eta) \\ \frac{1}{4}(6 + 8\eta + 6\xi\eta) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Die kovarianten Basisvektoren (Gl. (2.2)), die zur Transformation eines differentiellen Flächenelementes vom physikalischen Raum in den Parameterraum notwendig sind, berechnen sich damit zu

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\eta \\ -\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\eta \\ \frac{3}{2}\eta \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\xi \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi \\ 2 + \frac{3}{2}\xi \end{bmatrix}. \quad (\text{B.22})$$

Folgend kann die Integration über den Kontakttrand in eine Integration im Parameterraum überführt werden. Die Wichtungsfaktoren w_{ii} der Diagonalmatrix und die Einträge M_{ij} der „Massenmatrix“ berechnen sich dann mit

$$w_{ii} = \int_{\gamma_{c,e}^{(1)h}} N_i^S(\xi, \eta) d\gamma = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i^S(\xi, \eta) |\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| d\xi d\eta \quad (\text{B.23})$$

und

$$M_{ij} = \int_{\gamma_{c,e}^{(1)h}} N_i^S(\xi, \eta) N_j^S(\xi, \eta) d\gamma = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} N_i^S(\xi, \eta) N_j^S(\xi, \eta) |\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2| d\xi d\eta . \quad (\text{B.24})$$

Diese Ausdrücke werden mit einer 2x2 Gauß-Integration (Abb. A.1) numerisch ausgewertet, was schließlich zu den folgenden Matrizen führt:

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} 3.7481 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.0645 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.4931 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.2777 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

und

$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} 1.3467 & 1.0637 & 0.5718 & 0.7659 \\ 1.0637 & 2.9082 & 1.5212 & 0.5718 \\ 0.5718 & 1.5212 & 3.1767 & 1.2234 \\ 0.7659 & 0.5718 & 1.2234 & 1.7167 \end{bmatrix} . \quad (\text{B.26})$$

Daraus ergibt sich schließlich die Transformationsmatrix zu

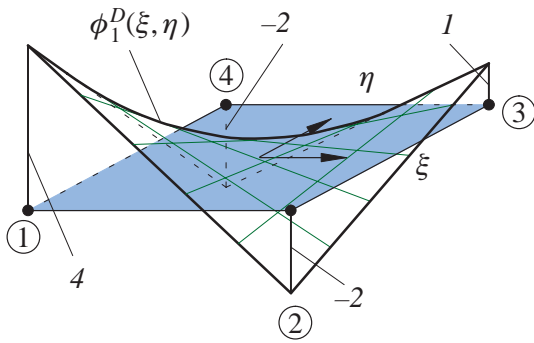
$$\mathbf{A}_e = \mathbf{D}_e \mathbf{M}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 5.2495 & -1.9174 & 0.8672 & -2.3213 \\ -3.1026 & 3.9158 & -1.8572 & 1.4033 \\ 1.5024 & -1.9883 & 3.7608 & -2.6880 \\ -2.6493 & 0.9898 & -1.7709 & 4.6060 \end{bmatrix} . \quad (\text{B.27})$$

Mit den Einträgen dieser Transformationsmatrix können nun die diskreten dualen Ansatzfunktionen für das in Abbildung B.1 dargestellte Kontaktflächenelement konstruiert werden. Beispielsweise ergibt sich die erste Interpolationsfunktion ϕ_1^D , indem die Einträge der ersten Zeile aus \mathbf{A}_e mit den entsprechenden Ansatzfunktionen N_i^S für die Approximation der Verschiebungen auf dem Kontaktrand multipliziert und aufsummiert werden:

$$\phi_1^D(\xi, \eta) = 5.2495 N_1^S(\xi, \eta) - 1.9174 N_2^S(\xi, \eta) + 0.8672 N_3^S(\xi, \eta) - 2.3213 N_4^S(\xi, \eta) . \quad (\text{B.28})$$

In Abbildung B.2_{rechts} ist die diskrete Ansatzfunktion $\phi_1^D(\xi, \eta)$ für das hier besprochene konkrete Beispiel dargestellt. Dabei zeigt sich, dass sich die Absolutwerte der Ansatzfunktion an den Stützstellen gegenüber der entsprechenden Ansatzfunktion für eine regelmäßige Elementgeometrie (Abb. B.2_{links}) deutlich verändern, die prinzipielle Struktur der Interpolationsfunktion jedoch erhalten bleibt.

duale Ansatzfunktion $\phi_1^D(\xi, \eta)$
für regelmäßige Elementgeometrie:



duale Ansatzfunktion $\phi_1^D(\xi, \eta)$
für dieses konkrete Beispiel:

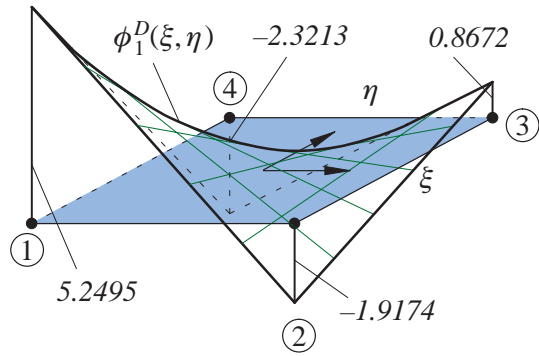


Abb. B.2: Gegenüberstellung einer dualen Ansatzfunktion:
regelmäßige Elementgeometrie – konkretes Beispiel

Index

7-Parameter-Modell, 3, 4, 27, 32, 42, 56, 162, 172, 175

A

Abstandsfunktion, 17

Adhäsion, 16

Aktive-Mengen-Strategie, 3, 5, 75, 89, 98, 111, 112, 113, 118, 123, 137, 153, 163, 164

Aktive-Mengen-Strategie (exakt), 113

Aktive-Mengen-Strategie (inexakt), 113

ANS-Methode, 4, 41, 42, 43, 56, 66, 67, 162, 178

asymptotisch korrekte Formulierung, 27, 29, 42, 179

Augmented-Lagrange-Methode, 5, 73, 78, 80, 88

B

Basistransformation, 5, 90, 122, 187

Basisvektoren, 8, 21, 28, 29, 189

B-bar-Methode, 42, 178

Bilinearform, 84

Biorthogonalitätsbedingung, 84, 92, 99, 100, 101, 118, 119

B-Operator, 42, 66, 67, 173, 174, 176, 177, 178, 179

Bubnov-Galerkin-Verfahren, 47, 85

C

Cauchy-Spannungen, 9, 10, 91

closest point projection, 16

Constraint-Energy-Method, 59

Constraint-Energy-Momentum-Algorithm, 59

Coulombsches Reibgesetz, 19, 74

curvature thickness locking, 41, 42, 56, 66, 178, 179

D

Dämpfungsmatrix, 24

Degenerationskonzept, 35

Dickenlocking, 41

Dimensionsreduktion, 26, 28

Direktor, 28, 33, 35, 39, 41

Discrete-Strain-Gap, 43

Diskretisierungsknicke, 32, 33, 35, 36, 104

Diskriminante, 135

DSG-Methode, 43

duale Ansatzfunktionen, 3, 5, 84, 92, 99, 185, 189

E

EAS-Methode, 4, 12, 27, 31, 42, 56, 162, 179, 180, 182
Elastizitätsmodul, 10
Energy-Momentum-Method, 59, 131
Euklidischer Raum, 7

F

Fließfunktion, 19
Fließregel, 20
Fundamentallemma der Variationsrechnung, 34
Funktional von Hu-Washizu, 44, 56

G

Galerkin-Verfahren, 76, 110
gap, 17
Gâteaux-Ableitung, 48
Gauß-Integration, 102, 106, 119, 128, 190
Gauß-Punkte, 102, 119, 172, 180
Gaußscher Integralsatz, 12, 31, 44, 75
Gebietszerlegung, 2, 5, 73, 82, 88, 185
Gleitfunktion, 19
Green-Lagrange-Verzerrungstensor, 8, 9, 29

H

Hertzscher Kontakt, 143
hybride Spannungselemente, 13

I

Impuls, 137
inf-sup Bedingung, 82
inkrementeller Sprung, 121, 122, 124, 126, 187
isoparametrisches Konzept, 108

J

Jacobi-Determinante, 9, 99, 100, 103, 107, 129

K

kartesische Koordinaten, 7, 189
Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen, 18, 122
KKT-Bedingungen, 18, 74, 77
Klaffung, 17, 22, 80, 91
Knoten-Segment (node-to-segment – NTS) Diskretisierung, 2
Kollokationsmethode, 2, 79
Kollokationspunkt, 41, 42, 43, 178

Konsistenzbedingung, 20
Kontakt-Patchtest, 79, 88, 89, 148, 149, 163
Kontakt-Segment, 81
Kontakt-Segmente, 80
konvektives Koordinatensystem, 20
Kronecker-Delta, 84
krummlinige Koordinaten, 7, 32, 172
Kuhn-Tucker Bedingungen, 19

L

Lagrange-Multiplikator-Methode, 4, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 82, 83, 87, 88, 89
Lagrangesche Beschreibung, 7
Lame-Konstanten, 10
Linearform, 84
Locking, 26, 39, 41, 42, 49, 179

M

Macauley-Klammer, 78
Massenmatrix, 24, 34, 135
Materialtensor, 9
materieller Deformationsgradient, 8, 9, 10
Membranlocking, 40, 179
Methode der gewichteten Residuen, 12
Metrik, 180, 182
Metriktensor (Einheitstensor), 8
Mittelung des Direktors, 33, 36
modifiziertes Prinzip von Hu-Washizu, 12, 13, 27, 31
Mortar-Methode, 2, 5, 73, 81, 82, 83, 85, 88, 89, 91, 108, 116, 162, 185

N

Newmark Algorithmus, 60
Newmark Approximation, 60, 61, 93, 132
Newmark-Parameter, 62
Newton-Iteration, 62
Newton-Raphson-Verfahren, 25, 34
NTN-Diskretisierung, 73
NTS-Diskretisierung, 2, 73, 79, 80, 89
NTS-Kontaktformulierung, 26

O

orthogonale Projektion, 16
Orthogonalitätsbedingung, 184

P

partielle Ableitung, 38, 65, 109, 120, 174, 177
Penalty-Methode, 4, 73, 76, 77, 78, 88, 89
Penalty-Parameter, 3, 77, 78, 88, 116, 126, 163
Perturbed-Lagrange-Methode, 80
Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (1. Art), 10, 17
Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (2. Art), 9, 10
Piola-Kirchhoff-Spannungstensor (2.Art), 8
plastischer Multiplikator, 20
Plastizitätstheorie, 20
Poisson-Dickenlocking, 29, 37, 39, 40, 42
Poisson-Gleichung, 81
Poissonzahl, 10, 40
Prädiktor-Korrektor-Verfahren, 25, 62
Prinzip der virtuellen Verschiebungen, 11, 12, 23, 26
Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie, 75
Prinzip von Fraeijs de Veubeke, 11
Prinzip von Hellinger-Reissner, 11, 12, 43
Prinzip von Hu-Washizu, 3, 4, 11, 13, 43, 162
Produktregel, 44
Projektionspunkt, 22, 91, 104

Q

Q1-Elemente, 99, 149, 150
Querdehnzahl, 10
Querschublocking, 39, 40, 66, 178

R

Reibung, 18, 80, 88
Reibungskoeffizient, 19
Reissner-Mindlin-Kinematik, 27
Residuum, 25, 68, 94
Rückwärtstransformation (pull back), 9, 91

S

Sattelpunktformulierung, 83
Sattelpunktproblem, 82, 84, 88
Schalenshifter, 30
Schublocking, 40, 179
Selbstkontakt, 164
Semidiskretisierung, 26
smooth-contact, 2

Sprungfunktion, 83

St. Venant-Kirchhoff-Material, 9, 64, 143

STS-Diskretisierung, 2, 73, 80, 89

STS-Kontaktformulierung, 26

T

Taylor-Reihe, 25, 62, 94

Trapezregel, 58

U

Unterintegration, 42

Uzawa-Algorithmus, 78

V

Verzerrungsenergiedichtefunktion, 9

virtuelle Arbeit, 22

Voigt Notation, 172

volumetrisches Locking, 40, 179

Vorwärtstransformation (push forward), 9

Z

zero-energy-mode, 42

Lebenslauf

Name: *Stefan Alexander Hartmann*

Geburtsdatum: *20. August 1974 in Kempten (Allgäu)*

Eltern: *Hermann und Christa Hartmann, geb. Wüstner*

Familienstand: *Seit 25.10.2002 verheiratet mit Mareike Marx
Sohn Jannes Leo Marx geboren am 09.10.2001
Sohn Jona Benjamin Marx geboren am 29.3.2003
Tochter Lara Marie Marx geboren am 18.12.2005*

1981 – 1985 *Besuch der Grundschule (Nordschule) in Kempten (Allgäu)*

1985 – 1994 *Besuch des Allgäu-Gymnasiums in Kempten (Allgäu)*

Mai 1994 *Abitur*

1994 – 1996 *Ausbildung zum Zimmermann in Kempten (Allgäu)*

1996 – 2002 *Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart*

1999 – 2000 *Stipendiat im Rahmen des Integrierten Auslandsstudiums des DAAD
an der University of Calgary, Kanada*

Februar 2002 *Abschluss als Diplom-Ingenieur*

Oktober 2002 *Preis der Freunde der Universität Stuttgart für herausragende
wissenschaftliche Leistungen in der Diplomarbeit*

seit April 2002 *angestellt als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für
Baustatik (und Baudynamik) der Universität Stuttgart*

Berichte des Instituts für Baustatik (und Baudynamik) der Universität Stuttgart

- 1 (1983) P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.

- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.

- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W. A. Wall:**
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**
Adaptive Finite-Element-Methoden in der Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2002) D.P. Mok:**
Partitionierte Lösungsverfahren in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**
Nichtlineare Versagensanalysen von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) V. Gravemeier:**
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) R. Kemmler:**
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) G. D'Addetta:**
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) M. Gee:**
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) T. Erhart:**
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) M. Leukart:**
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.

- 46 (2006) F. Huber:**
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) A. Lipka:**
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) A. S. Hund:**
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.



Universität Stuttgart

ISBN 978-3-00-021517-9