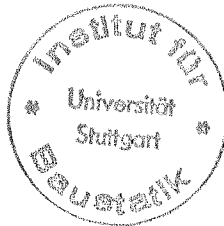


Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck

von

ALIOU DIACK



Bericht Nr. 3 (1983)

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. E. Ramm

Stuttgart 1983

Dieser Bericht wurde vom Autor unter dem gleichnamigen
Titel als Dissertation der Fakultät Bauingenieur- und
Vermessungswesen vorgelegt.

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Dezember 1983

Hauptberichter: Professor Dr. -Ing. E. Ramm

Mitberichter: Professor Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Professor Dr. -Ing. H. Schmidt

Berichte können über das Institut für Baustatik
der Universität Stuttgart, Pfaffenwaldring 7,
7000 Stuttgart 80, bezogen werden.

Gesamtherstellung: Dissertations-Druck, F. u. T. Müllerbader
7024 Filderstadt 4 (Plattenhardt) Forststraße 18
Tel. 0711/77 15 67

ZUSAMMENFASSUNG

Diese Arbeit beschäftigt sich mit dem Beulverhalten von längsversteiften (Rechtecksteifen) Kreiszyllindern im Bauwesen und der Offshore-Technik mit kleinem R/t -Verhältnis ($R/t = 360$). Angewandt wird eine Finite-Element-Analyse mit beliebig großen Verschiebungen und Rotationen unter Einbeziehung der physikalischen Nichtlinearität. Die Einflüsse verschiedener Parameter auf das Beulen werden untersucht: Steifenschlankheit, Lasteinleitung, R/t -Verhältnis, Imperfektionsamplituden und Formen. Ergebnisse der numerischen Traglastberechnungen werden mit Versuchsergebnissen und Normwerten verglichen.

Außerdem wird ein dreidimensionales isoparametrisches Stabelement entwickelt, welches mit einem dreidimensionalen degenerierten Schalenelement kompatibel ist; dieses, für die Steifen-Idealisierungen eingesetzte Stabelement bringt erhebliche Kostensparnisse in der Rechenzeit.

Schließlich werden Innen- und Außenversteifung beim Lokalbeulen verglichen und das Globalbeulen bei Innenversteifung behandelt.

RESUME

Cette thèse traite le problème du voilement de coques cylindriques raidies longitudinalement avec des raidisseurs à section rectangulaire. On rencontre ces coques, avec $R/t = 360$, fréquemment dans le génie civil et les constructions Off-shore. Le chargement est axial.

L'analyse s'effectue avec une méthode d'éléments finis, permettant de grands déplacements et rotations, en tenant compte des imperfections géométriques et physiques.

Les influences de différents paramètres sur les forces critiques ont été analysées: l'élançement des raidisseurs, le mode de chargement, le rapport R/t du rayon moyen et de l'épaisseur de la coque, l'amplitude des imperfections et leur forme.

Les résultats des calculs numériques des forces ultimes sont comparés aux résultats expérimentaux et aux normes.

En outre, un élément-barre spatial, isoparamétrique, est développé, que l'on peut combiner comme raidisseur et sans difficultés de compatibilité avec un élément-coque spatial.

Une idéalisation des raidisseurs à l'aide de cet élément-barre permet un amortissement substantiel du coût des calculs sur ordinateur.

Finalement, une étude comparative est faite entre raidisseurs intérieurs et extérieurs pour le voilement local; le voilement global pour les raidisseurs intérieurs est également considéré.

1. EINLEITUNG, PROBLEMSTELLUNG, ZIEL DER ARBEIT
 - 1.1 Stabilität
 - 1.2 Stabilitätsverhalten des isotropen Kreiszylinders
 - 1.3 Der längsversteifte Kreiszylinder: Problemstellung, Ziel der Arbeit
2. STAND DER FORSCHUNG BEI LÄNGSVERSTEIFTEN ZYLINDERN
 - 2.1 Allgemeines
 - 2.2 Forschung im Bauwesen und in der Offshore-Technik
 - 2.3 Beularten versteifter Zylinder unter reinem Axialdruck
 - 2.4 Experimentelle Untersuchungen über längsversteifte Zylinder
 - 2.5 Berechnungsmethoden für längsversteifte Kreiszylinder-schalen
 - 2.5.1 Verschmierungskonzepte für das Globalbeulen
 - 2.5.1.1 Die klassische orthotrope Theorie und das MILLER'sche Berechnungskonzept
 - 2.5.1.2 Berechnungskonzept von WALKER/SRIDHARAN
 - 2.5.1.3 Vergleich der Berechnungskonzepte
 - 2.5.2 Diskretes Beulen
 - 2.5.3 Bemessungsmethoden für längsversteifte Kreiszylinder-schalen
 - 2.6 Fragen der Imperfektionen
3. BESCHREIBUNG DES FINITE-ELEMENTPROGRAMMS NISA80
4. DEFINITION EINER GRENZSCHLANKHEIT FÜR RECHTECKSTEIFEN
 - 4.1 Grenzschlankheit
 - 4.1.1 Beullast eines unversteiften Kreiszylinderfeldes unter Axialdruck
 - 4.1.2 Maßgebende Beullast eines längsversteiften Zylinders
 - 4.2 Idealisierungskonzept für Berechnungen mit der Finite-Elementmethode
5. PARAMETERSTUDIEN, TRAGVERHALTEN, TRAGLASTEN
 - 5.1 Beullast in Abhängigkeit von der Schlankheit der Rechtecksteifen

- 5.2 Nichtlinear elastisches Tragverhalten
 - 5.2.1 Wahl der geometrischen Imperfektion
 - 5.2.2 Ergebnisse
- 5.3 Zur Frage der geometrischen Imperfektionsanfälligkeit
- 5.4 Die radialen Verschiebungen
- 5.5 Art der Lastaufbringung
- 5.6 Traglastberechnungen
 - 5.6.1 Ergebnisse
 - 5.6.2 Vergleich zwischen Versuch und Finite-Element-Berechnung am Beispiel von "Specimen UC8" aus (110)
 - 5.6.2.1 Versuchsergebnisse
 - 5.6.2.2 Ergebnisse der FE-Berechnung
 - 5.6.2.3 Einfluß der Eigenspannungen auf die Traglast
- 5.7 Einfluß der Imperfektionsamplitude auf die Traglast und Wirksamkeit von Längssteifen
- 5.8 Übergang vom Zylinder zur ebenen Platte
 - 5.8.1 Ergebnisse
 - 5.8.2 Vergleich des elastisch imperfekten Tragverhaltens zwischen Zylinder UC8 und zugehöriger Platte
 - 5.8.3 Traglastvergleich zwischen Zylinder und Platte
- 6.1 Konzept und Anwendungsmöglichkeit
- 6.2 Eigenschaften des Elementes
- 6.3 Nichtlineare Kontinuumsgleichungen und Finite-Element-diskretisierung
- 6.4 Formulierung
- 6.5 Geometrie und Verschiebungsfeld
 - 6.5.1 Interpolationsfunktionen
 - 6.5.2 Elementmatrizen
- 6.6 Testbeispiele
 - 6.6.1 Kragarm mit Einzel- oder Gleichlast
 - 6.6.2 I-Träger

- 6.6.3 Geschlossener Querschnitt
- 6.6.4 Längsversteifte Kragplatte mit Linienlast
- 6.6.5 Biegetorsion
- 6.6.6 Kragarm unter Endmoment
- 6.6.7 Stabilitätsfälle
- 6.7 Lokalbeulen längsversteifter Zylinder
 - 6.7.1 Außenliegende Steife beim Lokalbeulen
- 6.8 Globalbeulen
 - 6.8.1 Globalbeulen bei außenliegenden Steifen
- 7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNGEN

BEZEICHNUNGEN

| | |
|---------------------------|---|
| $\checkmark_{ki,zyl}$ | = klassische Beulspannung des isotropen unversteiften Zylinders |
| $\checkmark_{ki,global}$ | = klassische Beulspannung des versteiften Zylinders bei Anwendung eines Verschmierungskonzepts |
| $\checkmark_{ki,pl}$ | = klassische Beulspannung einer Navier-gelagerten rechteckigen Platte |
| $\checkmark_{ki,st}$ | = klassische Beulspannung einer Längssteife, als ebene Platte mit drei gelenkig gelagerten und einem freien Rand |
| $\checkmark_{ki,zyl}$ | = $\alpha \cdot \checkmark_{ki,zyl}$ (abgeminderter Wert der klassischen Beulspannung) |
| $\checkmark_{ki,zf}$ | = linear elastische Beulspannung am perfekten Zylinderfeld |
| $\rho_{ki,zyl}$ | = klassische Beullast des isotropen unversteiften Zylinders ($\rho_{ki,zyl} = \checkmark_{ki,zyl} \times \text{Gesamtfläche}$) |
| $\rho_{ki,s}$ (FEM) | = linear elastische Beullast am perfekten längsversteiften Zylinder (Lokalbeulen) nach der FE-Methode |
| ρ (\checkmark_F) | = Quetschlast (= $\checkmark_F \times \text{Gesamtfläche}$) |
| ρ_u (FEM, perfekt) | = Traglast des perfekten längsversteiften Kreiszylinders mit der FE-Methode |
| ρ_u (FEM, imperfekt) | = Traglast des imperfekten längsversteiften Zylinders mit der FE-Methode |
| ρ_u, zyl (imperfekt) | = Traglast des imperfekten isotropen unversteiften Zylinders mit der FE-Methode |
| Ω | = MARGUERRE'scher Krümmungsparameter |
| Θ | = KOITER'scher Krümmungsparameter |

1. EINLEITUNG, PROBLEMSTELLUNG, ZIEL DER ARBEIT

1.1 Stabilität

In seinem Habilitationsvortrag sagte Yavuz BAZAR (7): "Der Begriff Stabilität ist so alt wie ARISTOTELES und hat in der Technik und Wissenschaft eine sehr verbreitete Anwendung. Man spricht z.B. von der Stabilität von Planeten, von Regelsystemen und nicht zuletzt von Tragwerken".

Bei der Stabilität von Bauwerken oder Tragsystemen interessiert den Ingenieur aus mechanischer Sicht hauptsächlich, inwieweit eine Struktur unter bestimmten äußeren Störungen labil oder stabil bleibt.

Das Beulproblem ist eines der kompliziertesten Tragverhaltensphänomene, dessen Beherrschung an Rechner und Konstrukteur hohe Anforderungen stellt. Diese Versagensart hat in der Vergangenheit spektakuläre Schadensfälle verursacht, die auf verschiedene Einflüsse zurückzuführen sind (84): Mangelndes Verständnis für Stabilitätsprobleme beim Montagepersonal auf den Baustellen, unzureichende Beulvorschriften, fehlerhafte Beulnachweise, Mängel im konstruktiven Detail. Die größte Schwierigkeit dürfte jedoch in der Unkenntnis der Beulphänomene liegen.

1.2 Stabilitätsverhalten des isotropen Kreiszylinders

Die ersten Ansätze zur Lösung des Beulproblems der isotropen Kreiszylinderschale wurden im Jahre 1908 bekannt und stammen von LORENZ (59). Sein Vorgehen zur Bestimmung der klassischen Beullast $\sigma_{ki,zyl}$ soll kurz erläutert werden, ohne im einzelnen auf die Differentialgleichungen einzugehen.

Bei rotationssymmetrischer Längsbeanspruchung einer Kreiszylinderschale werden von den Tragwirkungen lediglich zwei aktiviert: Die Biegesteifigkeit $K = E \cdot t^3 / 12(1 - \mu^2)$ in Längsrichtung und die Dehnsteifigkeit $D = E \cdot t$ in Umfangsrichtung (39). Bei Annahme

einer gleichfalls rotationssymmetrischen Beulfigur (Bild 1.1) kann man die gesamte Schale in Längs- und Ringstreifen der Breite "1" zerlegen. Auf diese Weise wird das Beul- und Tragverhalten des Zylinders durch das eines gebetteten Balkens der Biegesteifigkeit K idealisiert, dessen Bettungsziffer C mit der Federsteifigkeit eines Elementarringes der Einheitsbreite identisch ist.

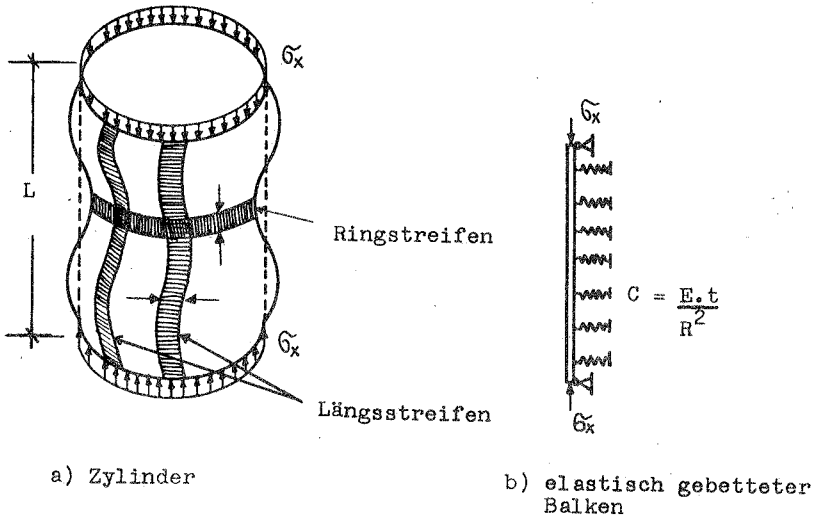


Bild 1.1 Rotationssymmetrische Belastung mit rotationssymmetrischem Beulen eines isotropen Kreiszylinders

Aus dieser Analogie ergibt sich die ideale Beulspannung des Zylinders aus der idealen Knickspannung $\sigma_{ki,zyl} = 2/t \sqrt{C \cdot EJ}$ des beidseitig gelenkig gelagerten gebetteten Balkens (siehe auch (95)). Mit $C = E \cdot t$ und $EJ = K$ ergibt sich die klassische Beulspannung zu

$$\bar{\sigma}_{ki,zyl} = 0.605 \frac{E \cdot t}{R} \quad \text{für } \mu = 0.3 \quad (1.1)$$

Zwei Jahre später (1910) erhielt TIMOSHENKO (99) die gleiche Beulspannung durch Gleichsetzen der aufgewendeten äußeren Arbeit und der beim Beulen entstehenden elastischen Formänderungsenergie.

Die Ringbeulform, wie sie bei LORENZ angenommen wurde, tritt praktisch nur bei dickwandigen Zylindern (kleines R/t-Verhältnis) im plastischen Bereich auf. Bei mittellangen, schlanken Zylindern mit großem R/t stellt sich dagegen meist die sogenannte Schachbrettform als Primärbeulform ein. Trotzdem hat die oben angeführte Gleichung bis heute nichts von ihrer Gültigkeit verloren: Es stellte sich nämlich später heraus, daß Berechnungssätze sowohl mit rotationssymmetrischem Ringbeulen als auch mit dem Schachbrettmuster zur gleichen klassischen idealen Beulspannung $\bar{\sigma}_{ki,zyl}$ führten (33), (95).

Eine Vorausbestimmung des zu erwartenden Beulmusters ist für zu treffende konstruktive Maßnahmen und Berechnungsmodelle (z.B. Finite Elementidealisation) von größter Bedeutung. Auf klassischem Wege läßt sich ein eindeutiges Beulmuster nicht angeben (man erhält nur ein Verhältnis zwischen Breite und Länge der einfallenden Beulen, nicht deren tatsächliche Abmessungen). Dies gelingt aber mit der sogenannten "vollständigen FLÜGGE'schen Theorie" (32). Diese liefert eine Lösung des Eigenwertproblems bei Minimierung der Beullast in Abhängigkeit von der Beulwellenzahl in Längs- und Umfangsrichtung mit Einbeziehung der Länge des Zylinders. Eine Darstellung in Diagrammform ist in Bild 1.2 zu sehen.

Experimente an Zylindern zur Untermauerung der klassischen Beullasten ergaben sehr große Diskrepanzen zur klassischen Theorie (12), (85), (98): Die Ergebnisse wiesen zum Teil nur 20 bis 30 % der berechneten Beulspannung $\bar{\sigma}_{ki,zyl}$ auf. Versuche von FLÜGGE in (31) und DONNELL (27), dieses Phänomen zu begründen, blie-

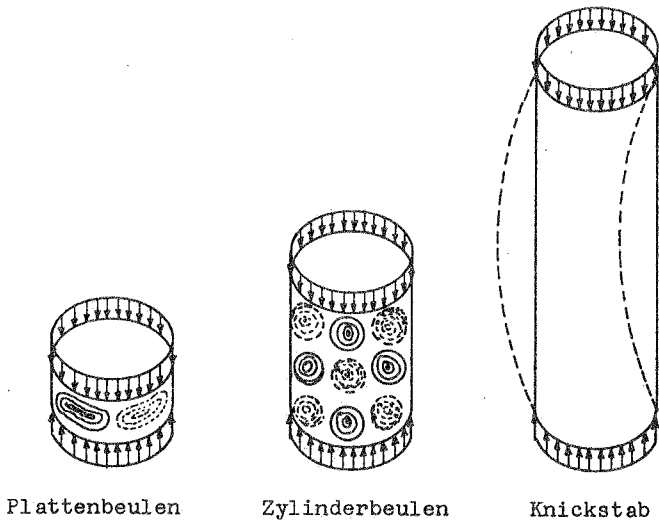
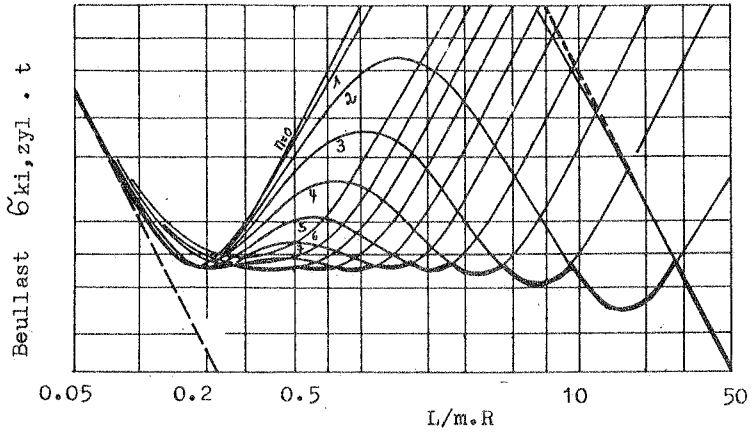


Bild 1.2 Stabilitätsgrenze für axiale Belastung als Funktion der Zylinderlänge (aus (32)).

ben ohne Erfolg. Die Wende kam erst im Jahre 1941, als VON KARMAN und TSIEN (52) erkannten, daß der Beulvorgang mit einem Über-

springen von einem primären (Schachbrett- bzw. Ringbeulen) zu einem sekundären Beulen (Rautenbeulen) und zusätzlich mit einem drastischen Abfall der Axiallast verbunden war. Mit der Rautenbeulform in Bild 1.3 a, die als Endzustand des Beulvorgangs angesehen wird und in zahlreichen Versuchen beobachtet wurde, machte VON KARMAN erstmalig einen Berechnungsansatz für die Beulverschiebungen im überkritischen Bereich. So heißt auch die dadurch ermittelte minimale Last im Nachbeulbereich die KARMAN'sche Last (Bild 1.3 b). Über die Zweckmäßigkeit der KARMAN'schen Last für Bemessungszwecke wird heute noch diskutiert (30).

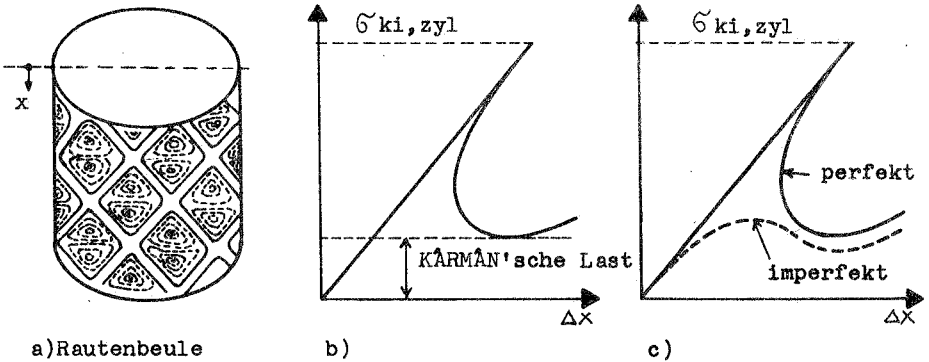


Bild 1.3 Beulen im überkritischen Bereich

Der entscheidende Durchbruch in der Berechnung des isotropen Zylinders kam jedoch im Jahre 1950 von DONNELL und WAN (28), die in die nichtlineare Theorie nach KARMAN und TSIEN geometrische Imperfektionen einführten. Sie zeigten, daß die Beullast schon bei geringen Imperfektionen im Zehntelbereich der Wanddicke des Zylinders nur noch einen Bruchteil der klassischen Stabilitätslast ausmachte. Bild 1.3 c zeigt schematisch einen möglichen Verschiebungsverlauf eines imperfekten Zylinders unter Axialdruck.

Die Forschung auf dem Gebiet des Zylinderbeulens (auch bei versteiften Zylindern) konzentriert sich deshalb auf die Imperfektionen, weil man in ihnen weiterhin die entscheidende Ursache für die Diskrepanz zwischen Theorie und Versuch sieht. Fragen von ungünstigsten geometrischen Imperfektionen spielen dabei eine entscheidende Rolle.

1.3 Der längsversteifte Kreiszyylinder: Problemstellung, Ziel der Arbeit

Versteifte Kreiszyylinder finden in der Luft- und Raumfahrt, im Behälter- und Rohrleistungsbau und in der Offshore-Technik als Plattformbeine eine breite Anwendung. Die Versteifung von Kreiszyinderschalen erfüllt hauptsächlich zwei Aufgaben:

a) die Erhöhung der Instabilitätslasten (Beul- und Traglast) gegenüber denen der isotropen Ausführung und

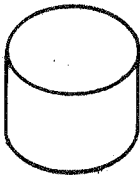
b) die Verminderung oder sogar Beseitigung der Empfindlichkeit gegenüber geometrischen Imperfektionen (50).

Schon Anfang der zwanziger Jahre hatte man beim Bau von Tauchbooten das vorteilhafte tragfähigkeitsverbessernde Prinzip der Aussteifung von Schalen (damals nur für Außendruck) erkannt und angewandt (83), (101). Über ein halbes Jahrhundert später wurden am "University College London" und an der "Glasgow University" Versuche an längsversteiften Kreiszyindern unter Axialdruck durchgeführt; bei den untersuchten Fällen zeigte sich, daß die Tragfähigkeit eines isotropen unversteiften Zylinders um das 3.3 bis 8.9-fache durch Anordnung von Längssteifen gesteigert werden kann, ohne daß dadurch eine wesentliche Querschnittsvergrößerung durch die Steifen herbeigeführt wird. Der Anteil der Längssteifen am Gesamtquerschnitt lag zwischen 18 % und 51 % (vergl. (38), (110)).

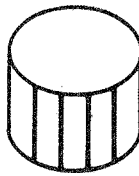
Mit gleichem Materialaufwand erreichten STEINHARDT und PFEIFFER (95) allein durch Anordnung von V-förmigen Längssteifen rechnerische Traglasten, die 4-mal höher lagen als die klassische Beullast des isotropen Zylinders.

Die Längsversteifung unter reiner Längsbelastung ist in der Praxis selten anzutreffen. Oft ist eine Interaktion mit Außen- oder Innendruck vorhanden, die jedoch sehr schwierig zu behandeln ist, weil man das kritische Verhältnis von Umfangs- und Axialdruck nicht eindeutig bestimmen kann. Aus diesem Grunde beschränkt man sich in den meisten Fällen zunächst auf übersichtliche Geometrien (z.B. reine Längsversteifung) und Belastungsfälle (z.B. reine Längsbelastung), die auch experimentell mit angemessenem Aufwand realisiert werden können.

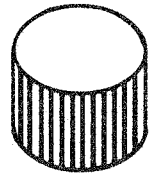
In der Behandlung axialbelasteter Kreiszyylinder sind drei Forschungsbereiche zu unterscheiden (81) (vgl. Bild 1.4) : Zum einen gilt die isotrope unversteifte Kreiszylinderschale aufgrund der bislang großen Anzahl rechnerischer und experimenteller Ergebnisse und der Festlegung halbempirischer Abminderungsfaktoren (für Bemessungszwecke) unter Bezug auf die klassische Verzweigungsspannung $\sigma_{ki,zyl}$ (13), (14) als ausreichend bekannt. Zum anderen kann die Erforschung engversteifter Zylinder, wie sie seit langem in der Luft- und Raumfahrt sowohl theoretisch als auch experimentell betrieben wird, als weit fortgeschritten angesehen werden (11), (35), (36), (37), (50), (70), (88), (89), (95), (96), (97), (98). Schließlich trifft man besonders bei Axialdruck im Bauwesen und in der Offshore-Technik gedrungene Zylinder (kleines R/t-Verhältnis), die aufgrund wirtschaftlicher Überlegungen und Herstellungsforderungen relativ wenig Längsstei-



unversteift
(gut erforscht)



breit versteift
(wenig erforscht)



eng versteift
(gut erforscht)

Bild 1.4 Forschungsgebiete bei Kreiszyindern

fen besitzen. Die Erforschung des Beul- und Tragverhaltens derartiger Schalen ist noch "Neuland" und gestaltet sich wegen der gegenseitigen Beeinflussung von Steifen und Schalenhaut besonders schwierig.

Ziel dieser Arbeit ist es deswegen, einen Beitrag zum Verständnis des Tragverhaltens von Kreiszyklindern im letztgenannten Bereich zu liefern. Als Rechenverfahren wird die Methode der Finiten Elemente eingesetzt. Die dem Verfahren zugrunde liegende Theorie erlaubt die Berücksichtigung aller möglichen Beularten, da sowohl die Schalenhaut als auch die hier untersuchten rechteckigen Steifen als Platten- bzw. Scheibenelemente idealisiert werden. Außerdem werden geometrische und werkstoffliche Nichtlinearitäten sowie beliebig große Verschiebungen und Rotationen zugelassen.

Die Gliederung der Arbeit wird folgendermaßen vorgenommen: Zunächst wird im zweiten Abschnitt über den Stand der Forschung berichtet. Dann wird im dritten Abschnitt auf das angewandte Finite-Element-Programm eingegangen. Im vierten Abschnitt wird eine Formel vorgeschlagen, die zumindest für die Vordimensionierung eine Wahl konservativer Steifenschlankheiten ermöglicht; damit sollen ungünstige Instabilitätsbereiche (z.B. imperfektionsanfällige Bereiche oder zu dünne Rechtecksteifen) vermieden werden. Den Kern der Arbeit bilden Stabilitätsuntersuchungen am längsversteiften Kreiszyklinder im fünften Abschnitt; hier werden Parameterstudien im elastischen und elastoplastischen Bereich durchgeführt und fremde Versuchsergebnisse mit den eigenen Berechnungen nach der Methode der finiten Elemente verglichen. Außerdem wird der Nutzlastverlust eines Zylinders angegeben, wenn man ihn wie in manchen Vorschriften als ebene Platte berechnet.

Schließlich wird im sechsten Abschnitt ein Steifenelement mit einem rechteckigen Querschnitt in isoparametrischer Darstellung entwickelt. Dies ist vor allem aus Gründen der Rechenzeiterparnis erstrebenswert, um für weitere Rechnungen die hohen Kosten bei der Idealisierung der Steife als Platte bzw. Scheibe zu vermeiden. Das Steifenelement ist als gekrümmter dreidimensionaler Stab konzipiert worden und kann ohne Kompatibilitätsschwierigkeiten mit dem Schälenelement gekoppelt werden.

2. STAND DER FORSCHUNG BEI LÄNGSVERSTEIFTEN KREISZYLINDERN

2.1 Allgemeines

Jahrzehntelang wurden in der Luft- und Raumfahrt Erfahrungen gesammelt, Aufsätze veröffentlicht und Experimente über längsversteifte Zylinder durchgeführt (11), (36), (50), (81), (89), (98). Die hierüber gewonnenen Erkenntnisse scheinen jedoch nicht risikolos auf versteifte Zylinder des Bauwesens und der Offshore-Technik übertragbar zu sein, und zwar aus folgenden Gründen:

a) In der Luft- und Raumfahrt werden Aluminium-Legierungen mit niedrigem E-Modul und hochfeste Stähle mit großem R/t-Verhältnis verwendet. Außerdem sind die Herstellungsverfahren automatisiert (Ergebnis: geringe Imperfektionen) und die Steifen sehr eng angeordnet.

b) Im Bauwesen und im Offshore-Bereich werden dagegen herkömmliche Baustähle verwendet; Schlankheitsverhältnisse von $R/t = 10$ bis 400 (siehe (48), (87), (109)) sind bei axialbelasteten Schalen üblich. Manuelle und halbautomatische Schweißverfahren werden bei der Herstellung überwiegend eingesetzt, und die Steifen haben aus wirtschaftlichen Gründen größere Abstände zueinander.

Als Konsequenz aus diesen Punkten versagen Zylinder der Luft- und Raumfahrt in der Regel global und im elastischen Bereich, wogegen Zylinder im Bauwesen und in der Offshore-Technik vor Erreichen ihrer Traglast im allgemeinen plastizieren ("Werkstoffinstabilität").

Aufgrund des relativ großen Abstands der Steifen kommt hier dem Lokalbeulen und der Berücksichtigung der Interaktion zwischen Steifen und Schalenhaut eine bedeutende Rolle zu (110). Wegen der unterschiedlichen Herstellungsverfahren sind die geometrischen Imperfektionen sowie die Eigenspannungen in ihrer Form und Größe verschieden: Sie sind im Offshore/Bauwesen-Bereich immer größer (62) und beeinflussen stärker das Beul- und Tragverhalten.

2.2 Forschung im Bauwesen und in der Offshore-Technik

Die Forschungstätigkeit in diesen Gebieten hat erst Anfang der siebziger Jahre einen Aufschwung erfahren, als man bei umfangreichen Bauobjekten besonders im Offshore-Bereich die im Abschnitt 2.1 erwähnten Unterschiede zu Konstruktionen der Luftfahrt erkannte.

Eine Anpassung von Normen bzw. Vorschriften der Luft- und Raumfahrt an das Bauwesen und die Offshore-Technik ist trotz umfangreichen Schrifttums jedoch noch nicht gelungen. Bemessungsvorschriften bzw. Normen wie API (N1), Asme-Code (N3), Det norske Veritas (N6) oder Önorm (N9) bezeichnet HERZOG in (49) zum Beispiel als eine Quelle von "bedeutender Fehlergefahr, da die zugrunde liegenden Begründungen meist nicht augenfällig sind".

Die Anstrengungen in der gegenwärtigen Forschung gehen deshalb dahin, für den Konstrukteur im Hinblick auf die Bemessung übersichtliche normfähige Berechnungsmodelle zu entwickeln, die gleichzeitig das physikalische Tragverhalten eines Zylinders unter Berücksichtigung wesentlicher Parameter veranschaulichen.

Dieses Vorhaben läßt sich bei speziellen Versteifungs- und Belastungsarten, beispielsweise der reinen Längsversteifung mit reinem Axialdruck durchaus realisieren, wie Berechnungsmodelle von WALKER und SRIDHARAN (110) zeigen.

Unter diesem Aspekt sind zu nennen:

a) Die beabsichtigte Neuerstellung der DIN 18800 unter Einarbeitung der auf versteifte Kreiszyylinder zu erweiternden DAST-Ri 013 als Teil 4 (siehe hierzu (14), (15), (N5); die DAST-Ri 013 behandelt augenblicklich nur isotrope, unversteifte Kreiszyylinder) und

b) die Beschäftigung der Arbeitsgruppe "TWG 8/4-Shell-Stability" der ECCS (N8), (N10) mit längsversteiften Kreiszyindern unter Axialdruckbelastung.

2.3 Beularten versteifter Zylinder unter reinem Axialdruck

Bei Stabilitätsuntersuchungen von versteiften Kreiszyklinderschalen ist die Frage des Beulmusters entscheidend, da es eine mechanisch sinnvolle Bezugsgröße ist und unter Umständen Aufschluß über den zu erwartenden Schaden gibt. Ein vereinfachtes Berechnungsmodell läßt sich erst dann finden, wenn vorher Voraussagen darüber getroffen worden sind, wie eine Struktur tatsächlich beult: Lokal, global oder interaktiv.

Beulkonfigurationen, wie sie bei versteiften Zylindern unter reiner Axiallast auftreten können, sind in den Bildern 2.1 und 2.2 dargestellt.

Die Tabellen 2.1 und 2.2. zeigen, wie diese Beularten im Schrifttum unterschiedlich klassifiziert werden.

G L O B A L B E U L A R T E N

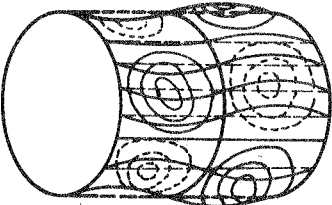
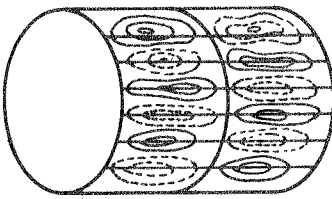
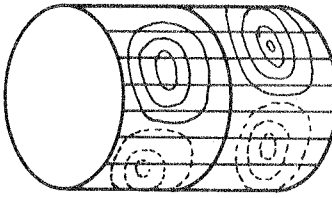
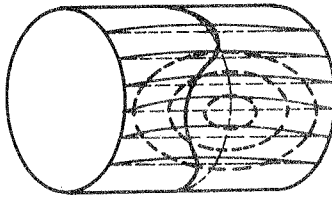
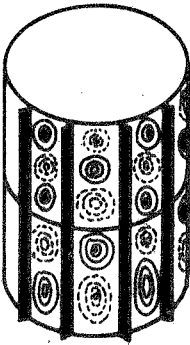
| | | | |
|--|--|--|---|
|  |  |  |  |
| <p style="text-align: center;">GB 1</p> <p>...llen eines Teils der ...ngsteifen allein, wenn ...e Ringe steif genug sind. ...de Halbbeulwelle in Um- ...ngsrichtung schließt 3, 4 ...rmehr Längssteifen ein.</p> | <p style="text-align: center;">GB 2</p> <p>Knicken der einzelnen Steifen als Eulerstäbe. Jede Halbbeulwelle er- faßt nur eine Längs- steife.</p> | <p style="text-align: center;">GB 3</p> <p>Alle Längssteifen beteiili- gen sich am Beulen. D.h., es gibt im ganzen Umfang keine lokal ungestörte Meridianrichtung. Die Ringssteifen beteiligen sich nicht.</p> | <p style="text-align: center;">GB 4</p> <p>Sowohl die Ring- als auch die Längssteifen werden beim Beulvorgang deformiert Bildung einer einzigen Hal- beulwelle in Längsrichtung und mehrerer im Umfang.</p> |

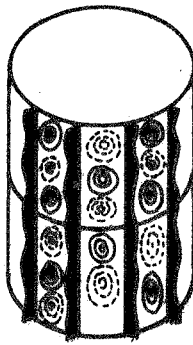
Bild 2.1 Globalbeulen

LOKALBEULARTEN



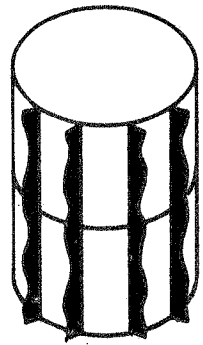
LB 1

Beulen der Schalenhaut allein ohne Beteiligung der Ring- oder Längssteifen (bei gedregenen Steifen).



LB 2

Längssteifen und Schalenhaut beulen gleichzeitig (Interaktion). Die Verbindungslinien zwischen Längssteifen und Schale bleiben gerade. Die Ringsteifen bleiben ungestört.



LB 3

Längssteifen beulen allein, wenn sie gegenüber der Schalenhaut sehr schlank sind. Ringsteifen bleiben weiterhin ungestört.

Bild 2.2 Lokalbeulen

| Autor/ Norm | globale Beulart | Bezeichnung | Aufsatz |
|--|------------------|---|----------------|
| Miller | GB 1 | Stringer-Beulen | (63) |
| | GB 4 | Globalbeulen | |
| Walker / Sridharan | GB 1 | Globalbeulen | (110) |
| Samuelson/ Vestergren, Groth, H. | GB 2 | Stringer Beulen: Wird als "zweite lokale Beulart" neben dem "Schalenbeulen" aufgeführt | (81) |
| | GB 3 | Globalbeulen | (40) |
| ASME-Code | GB 1 GB 4 | von Miller (63) übernommen | (N4) |
| ECCS | GB 1 und GB 4 | unter dem Begriff "Globale Instabilität" in einer Gruppe zusammengefaßt | (N8) , (82) |
| Det norske Veritas (DnV) | GB 1 | Globalbeulen (vergl. auch Tabelle A ₂ im Anhang) | (N6) (N7) |

Tabelle 2.1 Klassifizierung der Globalbeularten im Schrifttum.

| Autor / Norm | lokale Beulart | Bezeichnung | Aufsatz |
|--------------------------|----------------|---|--------------|
| Miller | LB 1 | Lokalbeulen | (63) |
| Walker / Sridharan | LB 2 | Lokalbeulen | (110) |
| Samuelson/ Vestergren | LB 1 | Lokales Schalen- beulen | (81) |
| Groth | | | (40) |
| ASME-Code | LB 1 | Lokalbeulen | (N4) |
| ECCS | LB 1 LB 3 | Lokales Schalen- beulen Stringer-Lokal- beulen | (N8) (82) |
| Det norske Veritas | LB 1 LB 3 | Schalenbeulen Lokales Stringerbeulen | (N6) (N7) |


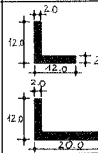
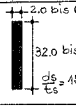
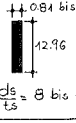
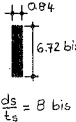
Tabelle 2.2 Klassifizierung der Lokalbeularten im Schrifttum.

2.4 Experimentelle Untersuchungen über längsversteifte Zylinder

In Tabelle 2.3 sind die wichtigsten Versuche zusammengefaßt, die in verschiedenen Anstalten während des letzten Jahrzehnts durchgeführt wurden. Angaben über ältere Untersuchungen findet man in (90). Der Schwerpunkt der Betrachtungen liegt auf dem Gebiet des Bauwesens und der Offshore-Konstruktionen. Daneben finden jedoch auch Versuche aus Raum- und Luftfahrt Berücksichtigung.

Tabelle 2.4 zeigt Forschungsprojekte im Rahmen der Det norske Veritas (N7). Die DnV-Regeln werden heute als Standardwerk für die Bemessung von Offshore-Konstruktionen angesehen. Ihre Formeln basieren jedoch zum großen Teil noch auf Untersuchungen, die SINGER (89) für die Luft- und Raumfahrt durchführte. Dies ist auch der Grund dafür, daß die DnV seit 1974 eine Vielzahl von Versuchen an verschiedene Anstalten in Auftrag gegeben hat.

Tabelle 2.3 Versuche über längsversteifte Kreiszyylinder unter Axialbelastung

| Versuchszentrum bzw. Land | Jahr | Werkstoff | Fließspannung σ_F (N/mm ²) | Hautdicke t (mm) | Schlankheit R/t | Länge L (mm) | L ä n g e Q u e r s c h n i t t f o r m |
|--|----------------------|---------------------------|---|-------------------|-----------------------|------------------------|---|
| Versuch in den USA (62) | 1974 | Stahl | 225.0 | 2.07 | 253.8 | 380.4 |  |
| GROTH (40) (Schweden) | 1979 | Aluminium | nur elastisch | 0.7 | 357.0 bis 393.0 | 760 |  |
| Glasgow-University Ver- suche "GU-Serie" (64) (Großbritannien) | 1980 | Stahl | 234.0 bis 420.0 | 2.0 bis 6.0 | 95.0 bis 205.0 | 760.0 bis 1950.0 |  |
| University-College Versuche "UC-Serie" (108) (110) (Großbritannien) | 1980 | Stahl | 281.0 bis 340.0 | 0.81 | 200 bis 360 | 65.0 bis 530.0 |  |
| Imperial-College-Ver- suche "IC-Serie" (29) (Großbritannien) | 1982 | Stahl | 348.0 | 0.84 | 190 | 74.0 bis 203.0 |  |
| Technion-Institut (Israel) RWTH-Aachen-Versuche (91), (92) (Bundesrepublik Deutsch- land) | etwa seit 1971 | Stahl und Aluminium | | | 460 bis 590 | | |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|--|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|---|--|---|--|-----------------------------------|--|---|---|---------------------|
| <p>stungsart</p> <p>elast über</p> <p>re kreisförmige</p> <p>platte</p> | <p>störung mit</p> <p>KN-Hydraulik</p> <p>hine</p> | <p>störung mit</p> <p>elastisches</p> <p>Lokalbeulen</p> | <p>Veruch, den Bereich zwischen dem unverteiften und dem engversteiften Zylinder (Interaktionbereich) zu erfassen</p> | <p>1) gute Überbestimmung mit ECCS-Vorschlag</p> <p>2) Reine Längserfassen sind auch bei mittleren langen Zylindern wirksam, vorausgesetzt die Stellen sind gedungen.</p> | <p>Überprüfen (mittels Großmodellen im Maßstab 1:8 bzw. 1:3, ob Übertragung von Versuchsergebnissen mit kleinen Modellen auf reale Konstruktionen vertretbar ist.</p> | <p>kein Traglastunterschied zu kleinen Modellen im Maßstab 1:20 aber erhebliche Diskrepanzen im Tragverhalten</p> | <p>gute Rechenmodelle (für Aufnahme in DNV-Regeln vorgeschlagen), Herleitungsvorgehen</p> <p>geeignet für Industrie</p> | <p>chmßige</p> <p>Übertragung</p> <p>mm/sec</p> | <p>Lokal- und</p> <p>Interaktiv-</p> <p>beulen</p> | <p>Entwicklung von Lastungs-fähigen Rechenmodellen für Offshore-Rechenkonstruktionen und eines neuen Herleitungsvorgehens für Längsversteifte Zylinder (Modellmaßstab 1:20)</p> | <p>chmßige</p> <p>Übertragung</p> | <p>Lokal- und</p> <p>Interaktiv-</p> <p>beulen</p> | <p>Vergleich eines eigenen Herstellungsverfahrens mit dem in (132), (133), (136), entwickelten</p> | <p>chmßige</p> <p>Übertragung</p> | <p>Lokal- und</p> <p>Interaktiv-</p> <p>beulen</p> | <p>gute Übereinstimmung mit tatsächlichen Beullasten und mit Theorie 4 bis 16 % Unterschied</p> | <p>störung von</p> <p>Übertragung durch</p> <p>in Abtator an</p> <p>undermaltet</p> | <p>Globalbeulen</p> | <p>Näherungsweise Bestimmung der tatsächlichen Randbedingungen der Zylinderenden und Zerstörungsgrenze, direkte Ermittlung von elastischen globalen Beullasten (Luftfahrt) - Überprüfung der Gültigkeit der entwickelten Schwingungsmodelle auch für Bauweisen und Offshore und für einen Einsatz in der Industrie</p> | <p>Globalbeulen</p> | | |
| <p>stungsart</p> | <p>störung mit</p> | <p>Veragenart</p> | <p>Grund für die Untersuchungen</p> | <p>Ergebnisse und Schub-folgerungen</p> | <p>Näherungsweise Bestimmung der zu erwartenden Traglast der realen Konstruktion</p> | <p>zuerst Lokalbeulen durch Materialfließen, dann Globalbeulen</p> | <p>Stimulierung des Tragverhaltens eines Standardins einer Plattenform mit einem Großmodell im Maßstab 1 : 5</p> | <p>1) gute Überbestimmung mit ECCS-Vorschlag sind auch bei mittleren langen Zylindern wirksam, vorausgesetzt die Stellen sind gedungen.</p> | <p>Überprüfen (mittels Großmodellen im Maßstab 1:8 bzw. 1:3, ob Übertragung von Versuchsergebnissen mit kleinen Modellen auf reale Konstruktionen vertretbar ist.</p> | <p>kein Traglastunterschied zu kleinen Modellen im Maßstab 1:20 aber erhebliche Diskrepanzen im Tragverhalten</p> | <p>gute Rechenmodelle (für Aufnahme in DNV-Regeln vorgeschlagen), Herleitungsvorgehen</p> <p>geeignet für Industrie</p> | <p>chmßige</p> <p>Übertragung</p> <p>mm/sec</p> | <p>Lokal- und</p> <p>Interaktiv-</p> <p>beulen</p> | <p>Entwicklung von Lastungs-fähigen Rechenmodellen für Offshore-Rechenkonstruktionen und eines neuen Herleitungsvorgehens für Längsversteifte Zylinder (Modellmaßstab 1:20)</p> | <p>chmßige</p> <p>Übertragung</p> | <p>Lokal- und</p> <p>Interaktiv-</p> <p>beulen</p> | <p>Vergleich eines eigenen Herstellungsverfahrens mit dem in (132), (133), (136), entwickelten</p> | <p>chmßige</p> <p>Übertragung</p> | <p>Lokal- und</p> <p>Interaktiv-</p> <p>beulen</p> | <p>gute Übereinstimmung mit tatsächlichen Beullasten und mit Theorie 4 bis 16 % Unterschied</p> | <p>störung von</p> <p>Übertragung durch</p> <p>in Abtator an</p> <p>undermaltet</p> | <p>Globalbeulen</p> |

| | | | | | | | | | | |
|-----|--|---|--|---|--|---|--------------------|--------------------|--------------------|--------------|
| Bed | Herstellungsverfahren | Imperfektionen | Eigenspannungen | Randbedingungen der Zylinderenden | volle Einspannung durch Anschweißen der Zylinderenden an sehr steifen Kopfkappen | Zylinderenden in Mittellage Araldit in Stahlringen einbetten. RB nach an voller Einspannung | glatte Oberflächen | glatte Oberflächen | glatte Oberflächen | Kontrollplan |
| | Innen | Innen | Innen und außen | außen | | | | | | |
| | Handschweißen | nicht gemessen | nicht gemessen | nicht berücksichtiglich | berücksichtiglich | berücksichtiglich | | | | |
| | Maschine II, Stufen an Zylinderhaut genietet | Maschine II, genaue Genauigkeit mit + 0,05 mm | Durch Spannungsarmgüben weitgehend abgebaut und vernachlässigt | volle Einspannung: Ränder an steifen Anschweißungen | volle Einspannung: Ränder an steifen Anschweißungen | volle Einspannung durch Aufsichten Ränder an steifen Stahlring an | | | | |
| | Zusammenrollen von ebenen Platten in gewünschter Zylinderform und Anschweißen der Stringer | Zusammenrollen von Platten mit vorgelagerten Kreis- "Panels" | Durch Spannungsarmgüben weitgehend abgebaut und vernachlässigt | volle Einspannung durch Aufsichten Ränder an steifen Stahlring an | volle Einspannung durch Aufsichten Ränder an steifen Stahlring an | volle Einspannung durch Aufsichten Ränder an steifen Stahlring an | | | | |
| | Innen | Innen | Innen | Innen | Innen | Innen | | | | |
| | Anschweißen aller Platten auf ebene Zylinder dann zu gewünschten Durchmesser zusammenrollen werden | Zusammenrollen aller Platten auf ebene Zylinder dann zu gewünschten Durchmesser zusammenrollen werden | nicht gemessen, nachdem Spannungsarmgüben erfolgte | volle Einspannung der Zylinder in Stahlring mittels Harz und Sand | volle Einspannung der Zylinder in Stahlring mittels Harz und Sand | volle Einspannung der Zylinder in Stahlring mittels Harz und Sand | | | | |
| | Innen | Innen | Innen | Innen | Innen | Innen | | | | |
| | Zum größten Teil Maschine II, Stufen angeschweißelt oder genietet | gemessen | gemessen | gemessen | nicht gemessen | nicht gemessen | | | | |
| | äußen | äußen | äußen | äußen | äußen | äußen | | | | |

| Projektname | Jahr | Ziel | Ergebnisse |
|--|-------|--|--|
| Beulen von Kreis- zylinderschalen: Experimente an längs- und ringver- steiften Kreis- zylinderschalen | 74/76 | | DnV-Berichte (41), (42) |
| Instabilität von stählernen Off- shore-Strukturen | 77/78 | Verbesserung von Bemessungs- methoden und Kriterien für das Beulen und die Tragfähig- keit von Off- shore-Konstruk- tionen | DnV-Berichte (19), (20), (21), (26), (66), (67), Aufsätze: (22), (65), (102) |
| Rationale Bemessung von stählernen Offshore-Strukturen gegen Instabilität | 79/81 | Verbesserung von vorliegenden Methoden und Daten, um eine einfachere, besser optimierte Bemessung zu erhalten | DnV-Berichte (53) Aufsätze: (23), (24), (34), (86), (103), (104) |

Tabelle 2.4 Forschungsaktivitäten in der DnV

2.5 Berechnungsmethoden für längsversteifte Kreiszyinderschalen

2.5.1 Verschmierungskonzepte für das Globalbeulen

Bei der Beulanalyse versteifter Kreiszyinder unter Axialdruck muß unterschieden werden zwischen der diskreten Versteifung, bei der die Schalenhaut zwischen den Steifen beult und der integralen Versteifung, bei der aufgrund der kleinen Steifenabstände ein Globalbeulen zu erwarten ist.

Die klassische Beultheorie orthotroper Kreiszyinderschalen unter Axialdruck beschränkt sich wie beim isotropen Zylinder auf die Bestimmung der ersten linearen Verzweigungslast. Dabei wird die DONNELL'sche Theorie schwach gekrümmter Schalen oder die FLÜGGE'sche Theorie (78) vorausgesetzt und die Vorbeuldeformationen vernachlässigt. Es wird von der sogenannten "mittigen Orthotropie" ausgegangen, d.h. man vernachlässigt die (bei zur Schalenhautmittelfläche nicht symmetrischer Anordnung der Steifen vorhandenen) Einflüsse der Membranschnittgrößen auf die Biegemomente. Außerdem wird mit verschmierten Steifigkeiten und klassischen Randbedingungen $SS3$ ($M_x = V = W = N_x = 0$) gerechnet.

In (98) hat THIELEMANN den Beweis erbracht, daß die klassische orthotrope Theorie im Gegensatz zur klassischen isotropen nicht eindeutig ist. Je nach Verhältnis der Steifigkeiten in Längs- und Umfangsrichtung wird aus drei möglichen Verzweigungslasten der für den Fall maßgebende kleinste Beulwert ausgewählt; eine längs- bzw. überwiegend längsversteifte, ring- bzw. überwiegend ringversteifte oder gleichmäßig längs- und ringversteifte Kreiszyinderschale liefert somit jeweils eine andere Beullast. Alle anderen Theorien, die sich mit diesem Thema befassen, bestimmen jedoch nur eine Verzweigungslast, so daß man sie als "Sonderfall" der THIELEMANN'schen Theorie ansehen kann.

Über die Methode der verschmierten Steifigkeiten existieren zahlreiche Arbeiten, z.B. (11), (50), (63), (71), (108), wobei zwei

Hauptrichtungen zu unterscheiden sind: Zum einen Verschmierungsmethoden, welche die diskrete Eigenschaft der Schale ignorieren - diese sind die gebräuchlicheren - und zum anderen Methoden, die das vorzeitige Lokalbeulen der Schalenhaut vor Eintreten des Globalbeulens in Rechnung stellen (Schalenhaut trägt nicht voll mit! Nur mitwirkende Schale wird bei der Berechnung der Beullasten in Rechnung gestellt).

2.5.1.1 Die klassische orthotrope Theorie und das MILLER'sche Berechnungskonzept (11), (63), (82)

Ausgangspunkt bildet folgende Theorie von BLOCK, CARD und MIKULAS (11) für längs- und ringversteifte Zylinder unter kombinierter Belastung. Darin werden folgende Annahmen getroffen:

- a) DONNELL'sche Schalentheorie
- b) äquidistante Rechtecksteifen (Biegestäbe)
- c) große Schubsteifigkeit der Schalenhaut in Dickenrichtung
- d) Zylinderhaut kann selbst orthotrop sein.

Für die Ableitung der Beulgleichung wird die Energiemethode angewandt.

Bild 2.3 zeigt einen versteiften Zylinder mit Geometrie und Koordinatensystem, dessen Beullast zu bestimmen ist.

Verzerrungs- Verschiebungsbeziehungen

a) für die Schale

Nach der linearen DONNELL'schen Theorie lauten die Verzerrungen jedes Punktes der Schalenhaut:

$$\begin{aligned} \epsilon_x, \text{ Schale} &= \epsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y, \text{ Schale} &= \epsilon_y - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy}, \text{ Schale} &= \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \end{aligned} \quad (2.1)$$

mit $\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}$, $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$.

U, V, W sind die durch das Beulen aktivierten Verschiebungen.

b) für die Steifen

$$\epsilon_{x, s} = \epsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\epsilon_{x, r} = \epsilon_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

(2.2)

$\epsilon_{x, s}$ für Stringer, $\epsilon_{x, r}$ für Ringsteife

Gleichung (2.2) drückt die Linearität der Verzerrungen über die Steifenhöhen aus (Steifen als Stäbe) und die Erfüllung der Kompatibilität der Beulverschiebungen an den Verbindungslinien zwischen Schale und Steifen. In dieser Kompatibilitätsbedingung verbirgt sich der Einfluß der Steifenexzentrizität auf die Beullast.

Gesamte potentielle Energie des belasteten Zylinders, Beulgleichung

Die Änderung Π des Gesamtpotentials während des Beulens setzt sich zusammen aus den Energien Π_{Schale} , Π_s (Stringer), Π_r (Ringsteifen) und Π_l (äußere Lasten).

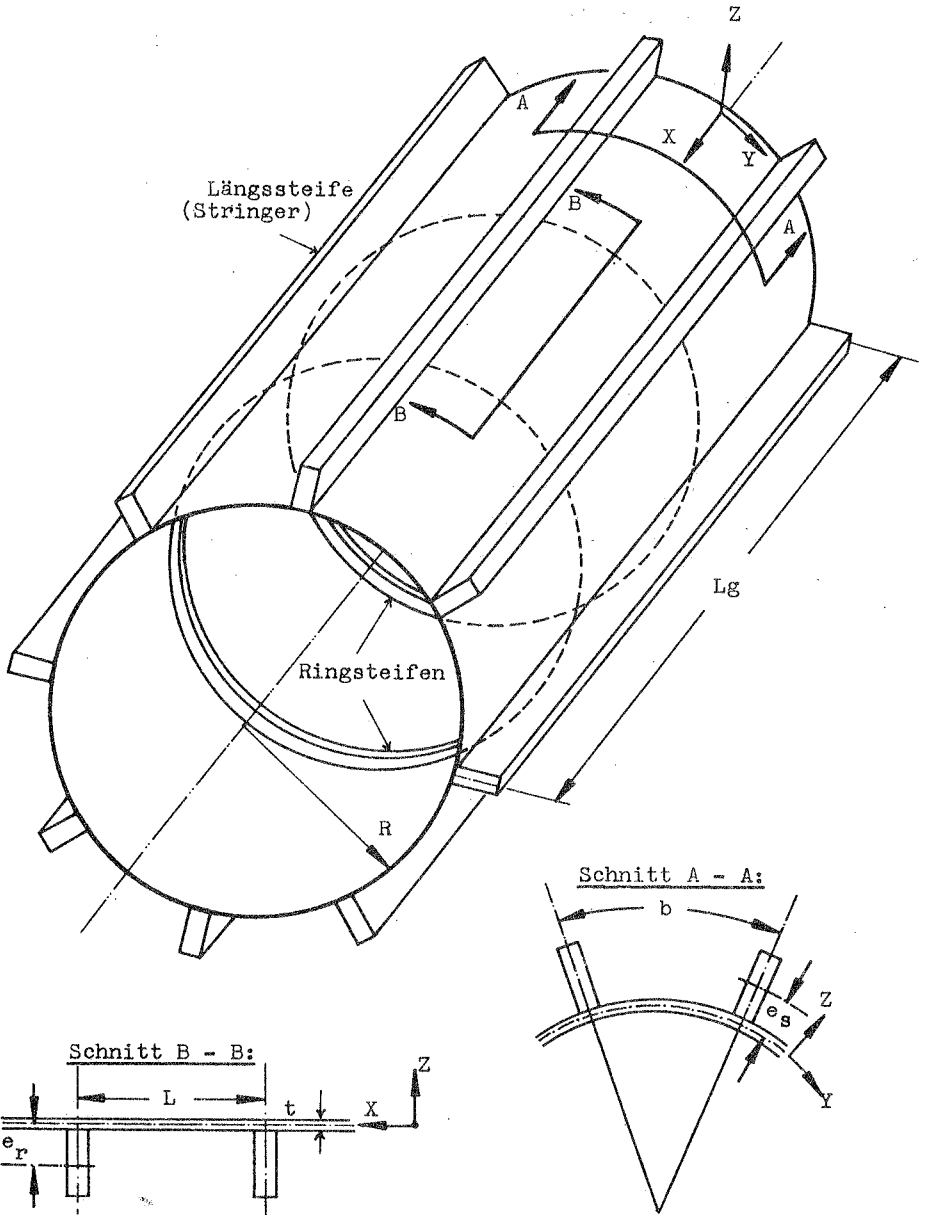


Bild 2.3 Geometrie und Koordinatensystem eines orthogonal längs- und ringsversteiften Zylinders

a) Potentielle Energie der Schale

Aus den Membran-, Biege- und Schubkraftresultierenden in der Schalenmittelfläche ergibt sich mit

$$\Pi_{\text{Schale}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(N_x \cdot \epsilon_x + N_{xy} \cdot \gamma_{xy} + N_y \cdot \epsilon_y - M_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \cdot M_{xy} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} - M_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (2.3)$$

mit

$$N_x = \frac{E_x}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} (\epsilon_x + \mu'_y \cdot \epsilon_y)$$

$$N_y = \frac{E_y}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} (\epsilon_y + \mu'_x \cdot \epsilon_x); N_{xy} = G_{xy} \cdot \gamma_{xy}$$

$$M_x = \frac{-D_x}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu'_y \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

$$M_y = \frac{-D_y}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu'_x \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Unter Berücksichtigung von Gl.(2.4) und (2.1) lautet Gl. (2.3)

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Schale}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L & \left[\frac{E_x}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\mu'_y \cdot E_x + \mu'_x \cdot E_y}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) \right. \\ & + G_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{E_y}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right)^2 + \frac{D_x}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & \left. + \frac{\mu'_y \cdot D_x + \mu'_x \cdot D_y}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \cdot D_{xy} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)^2 + \frac{D_y}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy \quad (2.5) \end{aligned}$$

b) Potentielle Energie der Steifen

$$\Pi_S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left(\int_{A_S} \frac{E_S \cdot \epsilon_S^2}{b} dA_S + \frac{G_S \cdot J_{TS}}{b} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)^2 \right) dx dy \quad (2.6)$$

Der erste Term von Gl. (2.6) ist die übliche Form der Biege- und Dehnenergie eines Stabes. Der zweite Term gilt der Torsionsenergie und setzt voraus, daß die Verwindung der Steife gleich dem Rotationswinkel der Schale an ihrer Verbindungsstelle ist. Die Division beider Terme durch b deutet auf die "Verschmierung" hin. Bei Integration des ersten Integranden unter Berücksichtigung von Gl. (2.2) erhält man

$$\pi_s = \frac{1}{2b} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[E_s A_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2 e_s E_s A_s \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + E_s I_{os} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + G J_{Ts} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.7)$$

mit e_s = Exzentrizität der Steife (positiv nach außen),
 I_{os} = Biegesteifigkeit der Steife um die Mittelfläche der Schale.

Auf die gleiche Weise erhält man auch die Energie der Ringsteifen, die in Längsrichtung verschmiert werden:

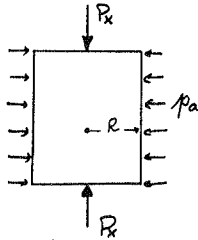
$$\pi_r = \frac{1}{2L} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[E_r A_r \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right)^2 - 2 e_r E_r A_r \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E_r I_{or} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + G_r J_{Tr} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \cdot \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.8)$$

c) Potentielle Energie der äußeren Lasten

Unter Annahme eines Membranzustands als Grundzustand ist

$$\pi_L = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left[\bar{N}_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \bar{N}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{N}_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.9)$$

\bar{N}_x und \bar{N}_y sind gleichmäßig verschmierte Kräfte (positiv als Druckkräfte). Für einen geschlossenen Zylinder unter Axiallast (Druck) und Außendruck ist



$$\bar{N}_x = + \frac{P_x}{2\pi \cdot R} \quad (\text{positiv, weil Druck})$$

$$\bar{N}_y = + p_a \cdot R \quad (\text{Kesselformel})$$

Gleichgewichtsbeziehungen

Die gesamte Änderung der potentiellen Energie lautet schließlich
 $\Pi = \Pi_{\text{Schale}} + \Pi_s + \Pi_r + \Pi_L$ (2.10)

Eine Variation des Funktionals bezüglich des Verschiebungsfeldes ergibt ein Minimum der potentiellen Energie.

(vgl. auch (17)). Man erhält auf diese Weise die drei folgenden Gleichungen:

Aus Variation von U:

$$\frac{E_x}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E_s \cdot A_s}{b} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - e_s \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) + \frac{\mu'_y \cdot E_x}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + G_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \cdot \partial y} \right) = 0 \quad (2.11 a)$$

aus Variation von V:

$$\frac{E_y}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{E_r \cdot A_r}{l} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} - e_r \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) + \frac{\mu'_x \cdot E_y}{1 - \mu'_x \cdot \mu'_y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} + G_{xy} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (2.11 b)$$

aus Variation von W:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{Dx}{1-\mu'_x \mu'_y} + \frac{E_s \cdot I_{os}}{b} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + \left(\frac{\mu'_y \cdot Dx}{1-\mu'_x \mu'_y} + 2 \cdot Dxy + \frac{\mu'_x \cdot Dy}{1-\mu'_x \mu'_y} \right. \\
 & + \frac{G_s \cdot J_{Ts}}{b} \quad \left. \frac{G_r \cdot J_{Tr}}{l} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \left(\frac{Dy}{1-\mu'_x \mu'_y} + \frac{E_r \cdot I_{or}}{l} \right) \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \quad (2.11 \text{ c}) \\
 & + \frac{1}{R} \cdot \frac{E_y}{1-\mu'_x \mu'_y} \left(\mu'_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) - \frac{E_s \cdot A_s}{b} \cdot e_s \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\
 & - \frac{E_r \cdot A_r}{l} \cdot e_r \left(\frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \right) + \frac{E_r \cdot A_r}{R \cdot l} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} \right) \\
 & + \bar{N}_x \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2 \cdot \bar{N}_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial x \cdot \partial y} + \bar{N}_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0
 \end{aligned}$$

Lösung des Differentialgleichungssystems 2.11

$\bar{N}_{xy} = 0$, weil wegen rotationssymmetrischer Geometrie und Belastung keine Schubbeanspruchung vorhanden ist. Als kompatible Randbedingung (17) zum Variationsproblem wird SS3 angenommen. Dazu werden folgende Ansatzfunktionen gewählt:

$$\begin{aligned}
 u &= \bar{u} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n y}{R} \\
 v &= \bar{v} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n y}{R} \\
 w &= \bar{w} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n y}{R}
 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Das Einsetzen dieser Funktionen in Gl. (2.11) liefert ein Gleichungssystem, dessen nicht triviale Lösung für \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} eine Nulldeterminante des Systems verlangt. Aus dieser Bedingungen geht die Stabilitätsgleichung (2.13) hervor:

(2.13)

$$\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \bar{N}_x + \left(\frac{n}{R}\right)^2 \bar{N}_y = A_{33} + \left(\frac{A_{12} \cdot A_{23} - A_{13} \cdot A_{22}}{A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2}\right) \cdot A_{13} \\ + \left(\frac{A_{12} \cdot A_{13} - A_{11} \cdot A_{23}}{A_{11} \cdot A_{22} - A_{12}^2}\right) \cdot A_{23}$$

Bei Annahme einer isotropen Schalenhaut und eines gleichen Materials für Schale und Steifen ist

$$\mu_x = \mu_y = \mu'_x = \mu'_y = \mu$$

$$D_x = D_y = E \cdot t^3 / 12$$

$$D_{xy} = G \cdot t / 6 \quad (2.14)$$

$$E_x = E_y = E \cdot t \quad ; \quad G_{xy} = G \cdot t$$

Die Koeffizienten A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) in der Beulgleichung ergeben sich dann mit $A_{ij} = A_{ji}$ zu :

$$A_{11} = \left(\frac{E \cdot t}{1 - \mu^2} \cdot \frac{b_e}{b} + \frac{E \cdot A_s}{b}\right) \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \frac{G \cdot t}{2} \left(\frac{b_e}{b} + \frac{L_e}{L}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^2$$

$$A_{12} = \left(\frac{\mu \cdot E \cdot t}{1 - \mu^2} + \frac{G \cdot t}{2} \left(\frac{b_e}{b} + \frac{L_e}{L}\right)\right) \left(\frac{m\pi}{L}\right) \left(\frac{n}{R}\right)$$

$$A_{22} = G \cdot t \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{E \cdot t}{1 - \mu^2} + \frac{E \cdot A_r}{L}\right) \left(\frac{n}{R}\right)^2$$

$$A_{23} = \frac{1}{R} \left(\frac{E \cdot t}{1-\mu^2} \cdot \frac{L_e}{L} + \frac{E \cdot A_r}{l} \right) \left(\frac{n}{R} \right) + \frac{E \cdot A_r}{l} \cdot e_r \left(\frac{n}{R} \right)^3 \quad (2.15)$$

$$A_{13} = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu \cdot E \cdot t}{1-\mu^2} \right) \left(\frac{m\pi}{L} \right) + \frac{E \cdot A_s}{b} \cdot e_s \left(\frac{m\pi}{L} \right)^3$$

$$A_{33} = \left(\frac{E \cdot t^3}{12(1-\mu^2)} \frac{b_e}{b} + \frac{E I_{os}}{b} \right) \left(\frac{m\pi}{L} \right)^4 + \left(\frac{\mu \cdot E \cdot t^3}{6(1-\mu^2)} + \frac{G \cdot t^3}{3 \times 2} \left(\frac{b_e}{b} + \frac{L_e}{L} \right) \right) \\ + \frac{G \cdot J_{Ts}}{b} + \frac{G \cdot J_{Tr}}{l} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 + \left(\frac{E \cdot t^3}{12(1-\mu^2)} \frac{L_e}{L} + \frac{E I_{or}}{l} \right) \left(\frac{n}{R} \right)^4 \\ + \frac{1}{R^2} \left(\frac{E \cdot t}{1-\mu^2} \frac{L_e}{L} + \frac{E \cdot A_r}{l} \right) + 2 \frac{E \cdot A_r}{l} \cdot e_r \cdot \frac{n^2}{R^3}$$

Um der diskreten Eigenschaft der Schalenhaut Rechnung zu tragen, erweiterte MILLER (63) die Formeln (2.13) bzw. (2.15) durch Heranziehung einer "mitwirkenden Blechbreite" b_e bzw. "mitwirkenden Blechlänge" L_e . Die Modifikation ist durch die unterstrichenen Terme in Gl.(2.15) gekennzeichnet. In der geänderten Form ist die Beulgleichung für Bemessungszwecke in die ECCSRichtlinien (N8) und in den ASME-Code (N4) aufgenommen worden.

Eine Berechnung der kritischen Beullasten $\bar{N}_{x,ki}$ und $\bar{N}_{y,ki}$ mit dem zugehörigen Beulmuster erfolgt numerisch auf iterative Weise durch Minimierung bezüglich m und n . Die mitwirkende Breite wird empirisch angegeben (63). Für L_e wird L bei "Stringer"- oder L_g bei "Globalbeulen" (nach MILLER's Definition) angesetzt.

2.5.1.2 Berechnungskonzept von WALKER und SRIDHARAN

Wie das MILLER'sche Konzept baut dieses ebenfalls auf der klassischen Theorie von CARD und MIKULAS auf. Von Anfang an wird hier aber der maßgebende Versagensmechanismus aufgrund von Versuchsbeobachtungen auf die Länge L beschränkt und die Anzahl der Halbwellen in Längsrichtung mit $m = 1$ festgelegt. Es erfolgt deshalb eine Minimierung der Beullast nur nach der Anzahl der Beulwellen

in Umfangsrichtung. Außerdem wird im Gegensatz zu MILLER weder die diskrete Eigenschaft der Schale noch die Torsionssteifigkeit der Stringer in Rechnung gestellt. Auf eine Wiedergabe der WALKER-Formeln wird wegen des Umfangs verzichtet; sie sind in (110) ausführlich dargestellt.

2.5.1.3 Vergleich der Berechnungskonzepte

Eine Auswertung einiger Verschmierungskonzepte ist am Beispiel des Versuchszyllinders UC9 aus (110) in Bild 2.4 vorgenommen worden. Dieser weist folgende Werte auf: $R/t = 360$, $t = 0.81$ mm, $L = 323.7$ mm und 40 Längssteifen mit Rechteckquerschnitten. Der Unterschied zwischen der MILLER- und ECCS-Kurve besteht, obwohl beide die gleiche Beulformel (2.15) zugrunde legen, in der unterschiedlichen Bestimmung der mitwirkenden Breite b_e . Während MILLER b_e auf empirischem Wege als Funktion der Fließgrenze angibt, beschränkt man sich bei den ECCS-Richtlinien auf den elastischen Bereich.

Die konservativen Werte nach WALKER ergeben sich aus der Vernachlässigung des ST. VENANT'schen Torsionswiderstands der Längssteifen. Für alle drei Methoden ergibt sich ein kritisches Beulmuster m/n von 1/9.

Für eine angenommene Umfangswellenzahl von $n = 10$ und SS3 Randbedingungen wurde die Beullast von UC9 auch mit dem Finite-Element Programm NISA (43) berechnet. Ein Vergleich mit den Verschmierungskonzepten zeigt eine passable Übereinstimmung in den Beullasten.

Im Hinblick auf die Bemessung sind die aufgeführten Konzepte in ihrem Aussagewert beschränkt, da sie lediglich ideale Beullasten liefern. Bekanntlich greift man in den Normen und Vorschriften zu Abminderungsfaktoren, um die Diskrepanz zwischen idealen Beullasten und reellen Traglasten auszugleichen. Um eine genauere Erfassung des Tragverhaltens zu bekommen sind nichtlineare

Berechnungskonzepte unerlässlich. Diese sind jedoch aufgrund des Rechenaufwands bisher kaum vorhanden. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhang eine von PFEIFFER in (70) entwickelte und für Bemessungszwecke geeignete Methode, die jedoch nur bei rein ring- bzw. überwiegend ringversteiften Zylindern unter Axiallast anwendbar ist. Für eine genauere Erfassung von Tragverhalten und Traglast, werden deshalb z.B. in den DnV-Regeln (N7) und dem ASME-Code (N4) nichtlineare Berechnungen mit der Methode der Finiten Elemente empfohlen.

2.5.2 Diskretes Beulen

Unter diskretem Beulen wird das Beulen der Schalenhaut zwischen den Steifen verstanden. Dies wird häufig als Lokalbeulen bezeichnet, wobei von der möglichen Steifeninstabilität keine Notiz genommen wird. Im Schrifttum und in den Vorschriften (z.B. (81)) wird häufig nur von zwei lokalen Beularten gesprochen:

a) das "Plattenbeulen" der Schalenhaut, wenn die Längssteifen eng beieinander liegen und die Krümmung vernachlässigt werden kann:

$$\tilde{\sigma}_{ki, pl} = \frac{\pi^2 \cdot E}{3(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 \quad (2.16) \quad (\text{für Navier-Lagerung})$$

b) das "Zylinderbeulen" bei größerem Abstand der Steifen:

$$\tilde{\sigma}_{ki, zyl} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{t}{R} \quad (2.17) \quad (\text{klassische Beulspannung})$$

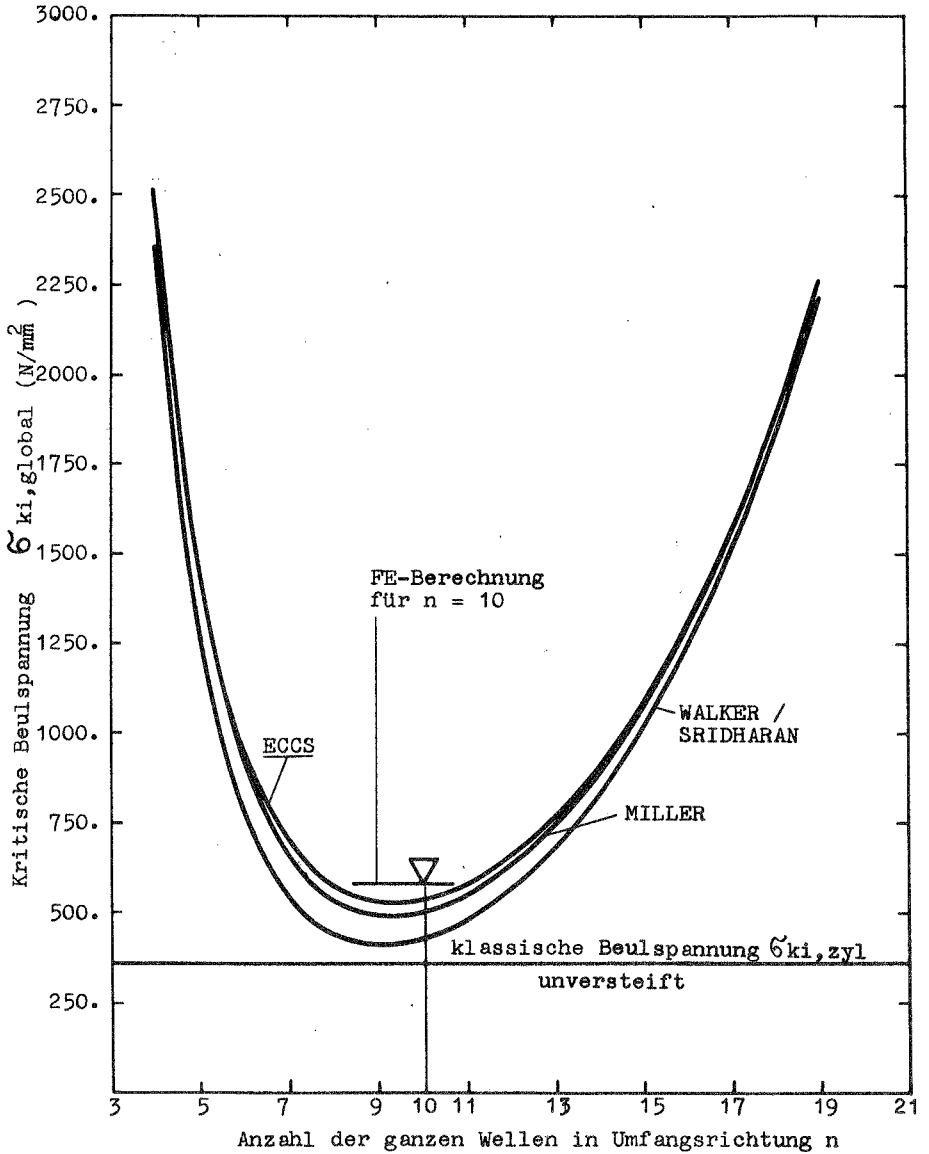


Bild 2.4 Globalbeulspannungen nach dem "Verschmierungskonzept" für SS3 - Randbedingungen für Versuchszylinder UC9 nach (110)

2.5.3 Bemessungsmethoden für längsversteifte Kreiszyinderschalen

Die heute gängigen Bemessungsvorschriften sind die DnV- (N7), die ECCS-(N8), die API- (N2) und die ASME-Code- (N4) Regeln. Aufgrund ihres gemeinsamen Ursprungs in der Luft- und Raumfahrt sind sie sich im Aufbau und in den Formeln ähnlich. Deswegen wird im Anhang lediglich auf zwei von ihnen, die DnV-Regeln und den ASME-Code eingegangen.

Die Fließdiagramme in den Tabellen A.1 und A.2 zeigen die Bemessungskonzepte beider Vorschriften.

2.6 Fragen der Imperfektionen

Imperfektionen werden generell in die zwei folgenden Kategorien unterteilt:

a) geometrische Imperfektionen:

Stellen herstellungsbedingte Abweichungen von den Sollmaßen der Konstruktionszeichnungen dar.

b) strukturelle Imperfektionen:

Beim Schweißen ergeben sich durch örtlich und kurzfristig eingebrachte Wärme schnell erkaltende kleine Schmelzbäder, wobei unter Umständen auch Zusatzwerkstoffe eingebracht werden. Unter dem Begriff "strukturelle Imperfektionen" werden die Auswirkungen des Gesamtgefüges (unbeeinflusster Grundwerkstoff, Wärmeeinflußzone und Naht), der Randbedingungen, Lasten, Eigenspannungen verstanden.

Die Wechselbeziehung der zwei genannten Imperfektionsarten ist so komplex, daß nach Auffassung von STEINHARDT und LOHSE (94) grundsätzlich nur eine beseitigt werden kann. In Berechnungsmodellen wird deswegen meist eine sogenannte "äquivalente geometrische Imperfektion" gewählt, welche für alle auftretenden Abweichungen

stellvertretend sein soll. Dabei stellen sich zwei wesentliche Fragen:

1. Welche geometrische Imperpektionsform ist am ungünstigsten für eine Struktur? und
2. welche Imperpektionsamplitude vermag sowohl die geometrischen als auch die strukturellen Imperpektionen sinnvoll zusammenzufassen?

An diesen Fragen ist bislang der Versuch gescheitert, das Stabilitätsproblem durch eine geometrisch und physikalisch nichtlineare Last-Verformungsberechnung zur Ermittlung der Durchschlagslast und deren Verwendung im Beulsicherheitsnachweis zu ersetzen (vgl. (114)). Im Entwurfsstadium ist dem Bemessungsingenieur im Regelfall Größe und Verteilung der Imperpektionen nicht bekannt.

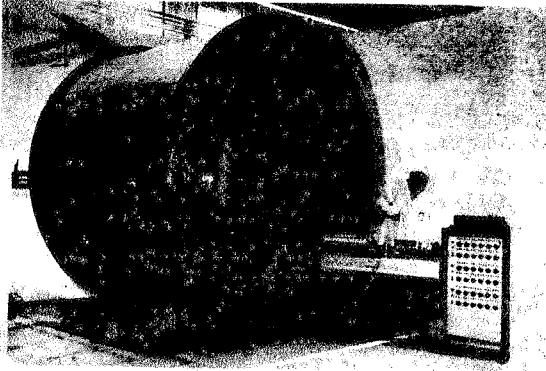
In (95) werden in Anlehnung an die DAST-Ri 013 Formeln für äquivalente Imperpektionen orthotroper Kreiszylinderschalen unter Axialdruck in Form (axialsymmetrischer Sinusansatz) und Größe angegeben. Dabei werden theoretisch hergeleitete Beziehungen an im nachhinein durchgeführte Experimente angepaßt.

Ein Weg zur Bestimmung von ungünstigsten geometrischen Imperpektionen und deren Amplituden bei Schalen wird von WITTEK (114) unter Anwendung der DONNELL/MARGUERRE'schen Schalentheorie vorgeschlagen. Von Vergleichsstudien oder experimentellen Untersuchungen wird in (114) nicht berichtet.

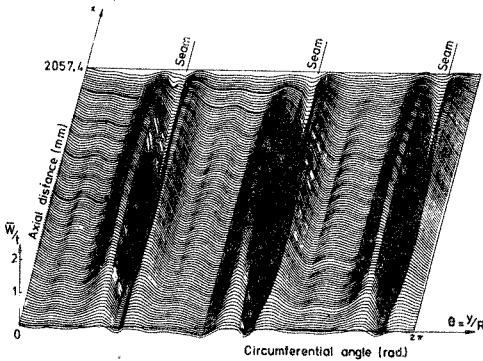
Seit kurzem werden neue Wege zur Lösung der geometrischen Imperpektionsfrage beschritten, die im Zusammenhang mit der Entwicklung der EDV-Anlagen reelle Chancen besitzen, sich durchzusetzen (siehe dazu (4), (29), (38), (92), (105)): An Versuchskörpern, die in Geometrie und Herstellung für reelle Strukturen repräsentativ sind, werden die geometrischen Imperpektionen gemessen, gespeichert und mittels zu diesem Zweck entwickelter Programme (112) zu den Koordinaten der perfekten Schalen, um sie in einer nichtlinearen Berechnung anzuwenden, addiert. Bild 2.5 zeigt eine

standardisierte, topographische Darstellungsform für gemessene Imperfektionen an versteiften Kreiszyinderschalen. Auf die hierfür entwickelten Meßmethoden wird z.B. auf (3), (5), (6), (90) und (91) verwiesen.

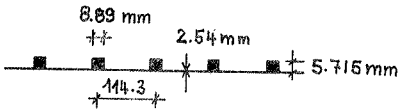
Derzeit existiert eine internationale Datenbank für Imperfektionen mit Zweigstellen in Delft (Niederlande) und Haifa (Israel). Diese Bank koordiniert die Forschung über die Entwicklung von Meßmethoden von Imperfektionen und sorgt für deren Darstellung in der von ARBOCZ und WILLIAMS (3) im Jahr 1977 eingeführten oben erwähnten Standardform.



Meßeinrichtung für die Imperfektionen eines integral versteiften Zylinders in NASA-Langley



Details für Ringsteifen:



Details für Längssteifen:

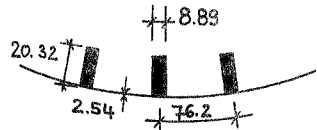


Bild 2.5 Die Langley-Schale LA.1 und ihre gemessenen geometrischen Imperfektionen (aus (3))

3. BESCHREIBUNG DES FINITE ELEMENT-PROGRAMMS NISA80 (43)

Die Berechnungen in den Abschnitten 4 und 5 sind mit einem degenerierten dreidimensionalen Schalenelement durchgeführt worden. Dieses Schalenelement ist im Programm NISA80 (Nichtlineare Struktur Analyse) (43) implementiert und ist in der Lage große Verschiebungen und große Rotationen zu beschreiben.

Das nichtlineare Problem liegt in zwei Formulierungen vor:

- a) eine "Total-Lagrange"-Formulierung (T.L.), bei der der Verschiebungszustand auf den Ausgangszustand bezogen wird und
- b) eine "mitgehende oder Updated-Lagrange"-Formulierung (U.L.) mit Bezug auf den zuletzt erreichten Zustand.

Die Ableitung der Steifigkeitsmatrizen erfolgt für die Verschiebungsmethode mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Die Lösung nichtlinearer Probleme erfolgt inkrementell auf iterative Weise. Zum Einsatz kommen folgende Iterationsmethoden:

- 1) Modifiziertes NEWTON-RAPHSON-Verfahren,
- 2) Standard NEWTON-RAPHSON,
- 3) RIKS-WEMPNER Methode (besonders geeignet für die Überwindung von Verzweigungs- und Durchschlagspunkten (75) und
- 4) die Kombination der genannten Iterationsverfahren.

Begleitende Eigenwertuntersuchungen sind mit Hilfe der Bedingung des indifferenten Gleichgewichts möglich. Das statische Stabilitätskriterium für die Stabilität gilt sowohl für das Verzweigungs- wie für das Durchschlagsproblem.

Das elasto-plastische Werkstoffgesetz wird durch ein Schichtmodell (79) von mindestens 7 Integrationspunkten über die Schalendicke berücksichtigt.

Eine ausführliche theoretische Behandlung der geometrischen und physikalischen Nichtlinearität ist aus (74) und (79) zu entnehmen. Auch in (16), (43), (44) wird dieses Thema behandelt.

4. DEFINITION EINER GRENZSCHLANKHEIT FÜR RECHTECKSTEIFE UND FINITE ELEMENT-IDEALISIERUNG

4.1 Grenزشlankheit

Beim Lokalbeulen ist es von größter Bedeutung, Aussagen über das Verhältnis der Beullasten des Zylinderschalenfeldes zwischen den Steifen und der Steifen selbst zu bekommen.

Im folgenden soll ein Konzept entwickelt werden, mit dem unerwünschte Lokalbeularten (z.B. vorzeitiges Beulen der Steife oder gleichzeitiges Beulen dieser und der Schalenhaut) ausgeschaltet werden sollen. Des weiteren wird eine Formel für die maximale Schlankheit für Flachsteifen unter Verwendung verschiedener linearer Theorien (FLÜGGE (33), MARGUERRE (61), REDDY (76), SOBEL (93)) vorgeschlagen.

4.1.1 Beulspannung eines unversteiften Kreiszyylinderfeldes unter Axialdruck

Beim Lokalbeulen wird die Beulspannung der Gesamtstruktur mit der des Zylinderabschnitts zwischen den Steifen identifiziert. Oft wird näherungsweise auf der sicheren Seite mit einer Navier-gelagerten Platte für das Schalenfeld gerechnet.

Der Vergleich einer Platte mit einem Zylinderfeld gleicher Abmessungen in Bild 4.1 (55) zeigt jedoch, daß bei dieser Näherung beachtliche Tragreserven, auch bei Präsenz von Imperfektionen, unberücksichtigt bleiben, wenn die Platten-Idealisierung gewählt wird (vgl. auch späterer Traglastvergleich in Bild 5.39).

Eine bessere Lösung ergibt sich durch Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung zwischen Schale und Steife (elastische Einspannung der "Platte" in der Steife). Es ist jedoch schwierig, die richtigen Einspanngrade festzulegen. Um dieses zu umgehen, geht HARDING (47) bei der nichtlinearen Berechnung von längsversteiften Zylindern unter

Axialdruck folgendermaßen vor: Zunächst wird eine Steife allein nichtlinear berechnet. Dann werden die zu den Verschiebungen zugehörigen Reaktionskräfte an der (späteren) Verbindungslinie ermittelt (für eine Verdrehung ψ wird z.B. ein Biegemoment $m=f(\psi)$ ermittelt, usw.). Schließlich werden diese Kräfte als Belastung auf die Schale aufgebracht.

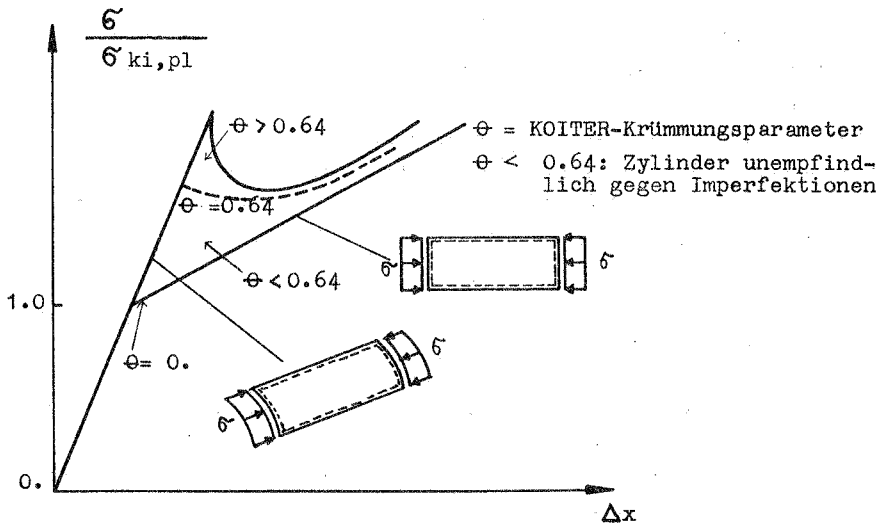


Bild 4.1 Vergleich von Platte und Zylinderfeld mit gleichen Abmessungen (55)

Wichtiger als die richtige Erfassung der Randbedingungen an den Längsrändern bei "Platten"-Analyse ist die Frage nach der für das Zylinderfeld näherungsweise einzusetzenden Beulspannung: "Platten"-oder Zylinderbeulspannung.

Eine von SOBEL (93) durchgeführte Arbeit, deren Basis die MARGUERRE'sche Theorie (61) darstellt, gibt Aufschluß darüber.

In (93) sind acht Lagerungsfälle von Längsrändern behandelt worden. Diese sind in Bild 4.2 dargestellt. Auf eine Berücksichtigung unterschiedlicher Randbedingungen der gekrümmten Ränder wurde verzichtet, da diese vielfach in der Literatur behandelt worden sind. Für sämtliche gekrümmten Ränder wird SS3 angesetzt.

Die Studie in (93), wie auch eine ähnliche von REHFELD/HALLAUER (77), sagt aus: Gleichgültig wie die Längsränder gelagert sind und welche Größe der Öffnungswinkel φ hat, so ist die lineare Beulspannung des Kreiszyylinderfeldes immer größer oder mindestens gleich der klassischen Beulspannung des vollständigen zugehörigen Zylinders. Eine Ausnahme bildet lediglich SS1.

Für SS3 gibt MARGUERRE (61) folgende Gleichungen an:

$$\tilde{\sigma}_{ki,zf} = \tilde{\sigma}_{ki,pl} \left(1 + \frac{\Omega^2}{4}\right) \quad \text{für } \Omega < 2.0 \quad (4.1)$$

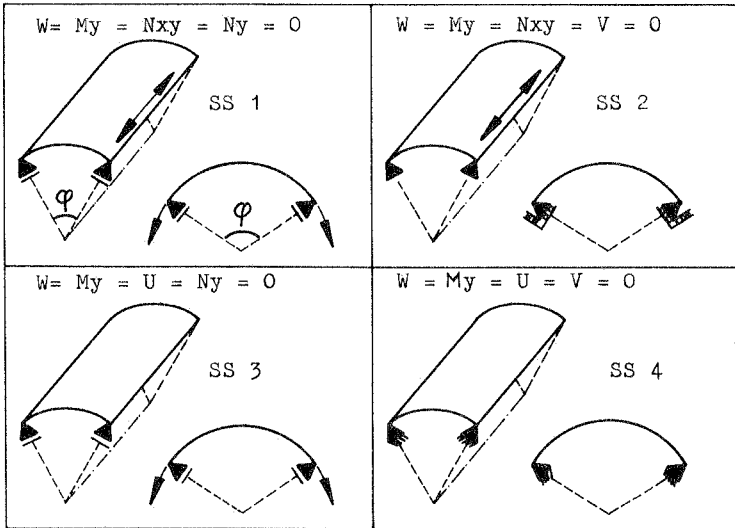
$$\tilde{\sigma}_{ki,zf} = \tilde{\sigma}_{ki,zyl} \quad \text{für } \Omega \geq 2.0$$

$\tilde{\sigma}_{ki,zf}$ = lineare Beulspannung des perfekten Zylinderschalenfeldes

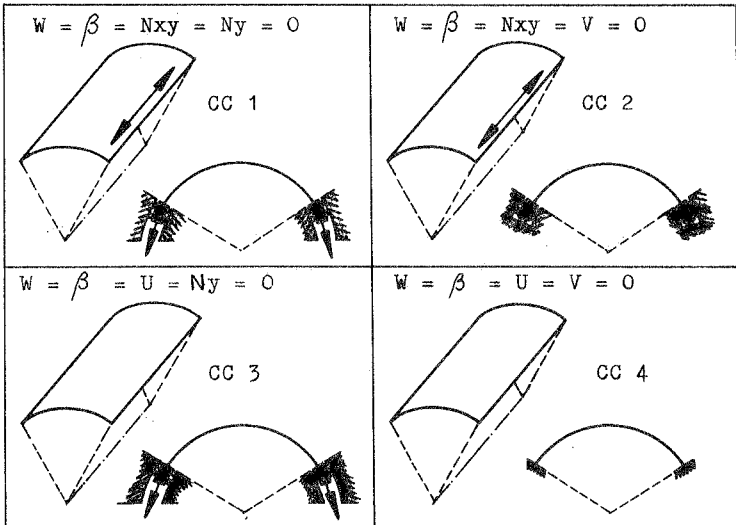
$\tilde{\sigma}_{ki,pl}$ = lineare Beulspannung einer Platte mit Navier-Lagerung

$\tilde{\sigma}_{ki,zyl}$ = klassische Beulspannung des Zylinders

$$\Omega = \frac{\tilde{\sigma}_{ki,zyl}}{\tilde{\sigma}_{ki,pl}} = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{3(1-\mu^2)} \frac{b^2}{Rt} = \frac{1}{\pi^2} \sqrt{3(1-\mu^2)} \frac{R}{t} \varphi^2$$



gelenkig gelagert



eingespannt

Bild 4.2 Unversteiftes Schalenfeld: Lagerungsbedingungen

Ω ist ein Krümmungsparameter, der Aufschluß darüber gibt, ob ein Zylinderfeld in der Lage ist, das Beulmuster in Umfangsrichtung eines zugehörigen vollständigen Zylinders zu beschreiben. Für $\Omega=2$ ist diese Bedingung erfüllt.

Bild 4.3 zeigt Ergebnisse von verschiedenen Untersuchungen (aus (93)). Die Fälle SS2 und CC2 sind nicht dargestellt, weil sie mit SS4 bzw. CC4 fast identisch verlaufen. Auf der Abszisse ist Ω aufgetragen, mit dessen Zunahme eine allmähliche Vergrößerung des Öffnungswinkels φ bei $R/t = \text{Const}$ verbunden ist. ξ auf der Ordinate steht für das Verhältnis der Beulspannung des Zylinderfeldes zu der des vollständigen Zylinders (klassische Beulspannung). Die Tendenz aller Kurvenläufe ist mit Ausnahme von SS1 gleich: Für kleine Ω -Werte, d.h. schmale Steifen, ist ξ größer als $\xi_{ki, \text{zyl}}$, weil sich ein natürliches Beulmuster in Umfangsrichtung noch nicht einstellen kann, was einer "Zwängung" bzw. "Versteifung" der Struktur gleichkommt. Bei Zunahme von Ω nimmt der Zwang ab, bis sich in Umfangsrichtung Wellen der gleichen Länge wie beim vollständigen Zylinder ausbilden können. Ist diese Bedingung einmal erfüllt, so unterscheiden sich beide Beullasten kaum noch nennenswert. Dies drückt sich im asymptotischen Verlauf der Kurven zu $\xi = 1.0$ aus. Für einen Zylinderabschnitt mit $R/t = 500$ sind für $\Omega = 2.0$ und 5.70 die Beullasten nach einer eigenen Berechnung mit der Finite Elementmethode in Bild 4.3 angegeben.

Der hier untersuchte Ω -Bereich ist relativ klein ($\Omega = 5$ entspricht z.B. für $R/t = 360$ einem Öffnungswinkel φ von 8.3°). SOBEL (93) erweiterte deswegen die Parameterstudie bis $\varphi = 360$ (vollständiger Zylinder!) und stellte fest, daß die klassische Last auch hier mit Ausnahme von SS1 nirgends unterschritten wird. Bild 4.4 zeigt die Ergebnisse dieser Studie.

Zylinderfelder eines längsversteiften Zylinders besitzen Längsrandbedingungen je nach Steifenstärke zwischen SS3 und CC4. Nach den Studien in (93), (77) ist anzunehmen, daß anstatt einer "Platten"-Beulspannung in jedem Fall die klassische Beulspannung des vollständigen isotropen Zylinders in Rechnung gestellt werden kann.

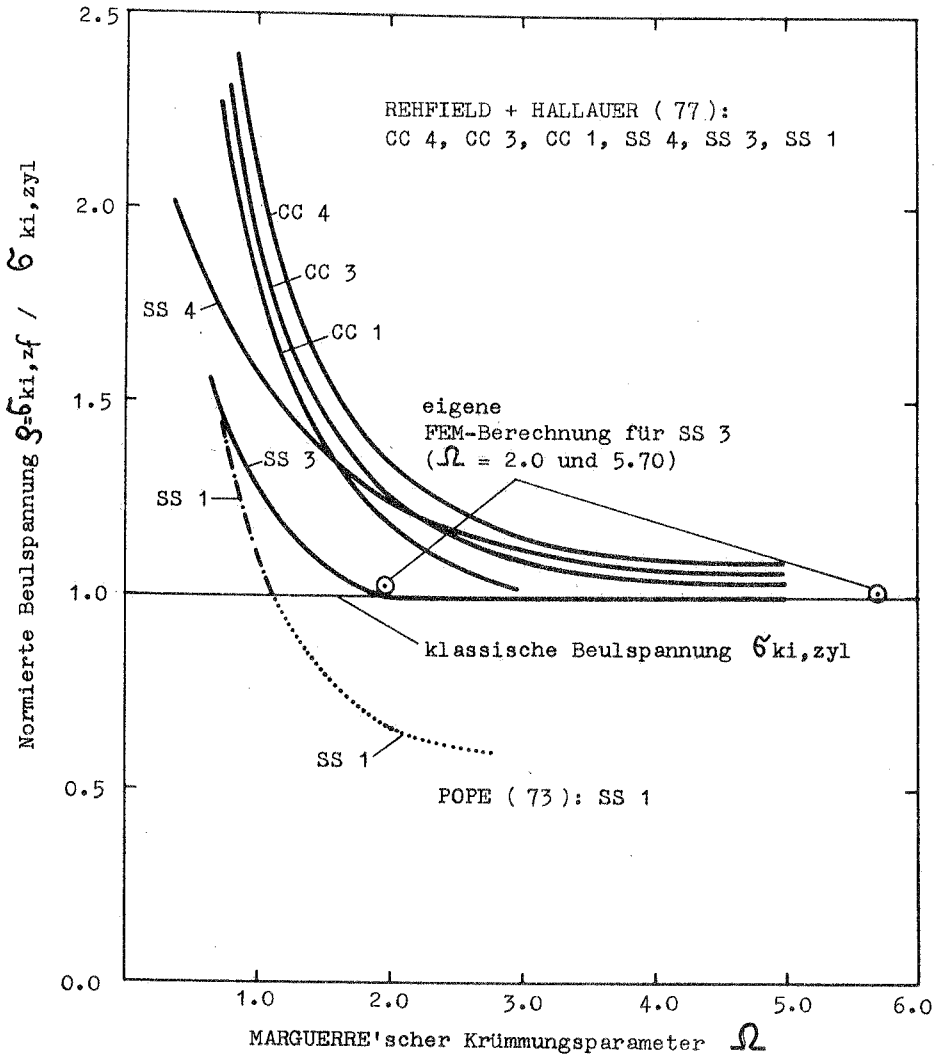


Bild 4.3 Elastische Beulspannungen perfekter kreiszylindrischer Felder (aus 93)

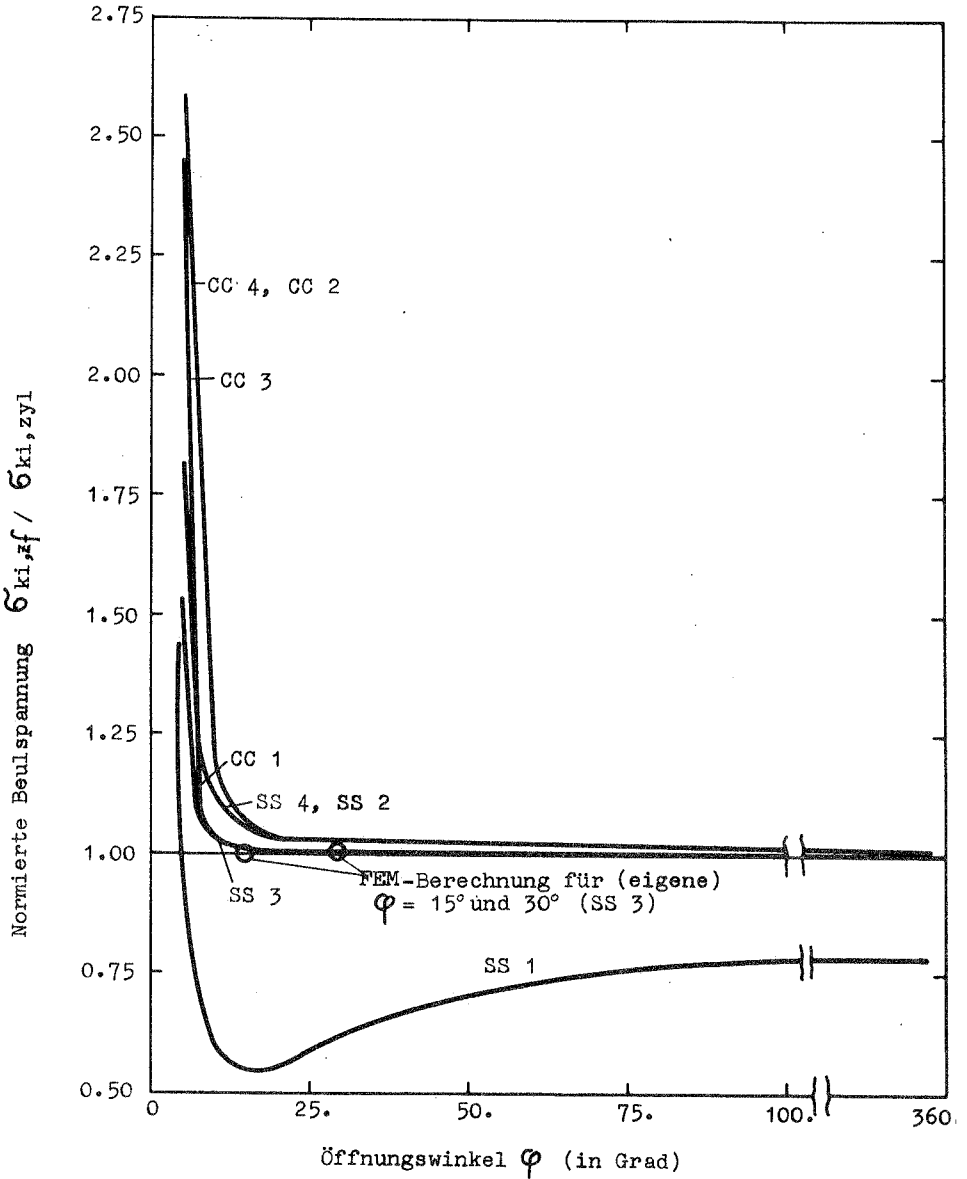


Bild 4.4 Elastische Beulspannungen kreiszylindrischer Felder in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel und den Längsrandbedingungen (aus (93)).

4.1.2 Maßgebende Beulspannung eines längsversteiften Zylinders

Als maßgebend für das Lokalbeulen wird hier die niedrigste Verzweigungsspannung, die sich aus dem Vergleich zwischen der Beulspannung der Schalenhaut allein und der Beulspannung der Steife allein ergibt, angesehen. Insgesamt können drei Beulmuster auftreten:

Beulmuster 1: Alleiniges Beulen der Schalenfelder bei sehr dicken Steifen

Beulmuster 2: Gleichzeitiges Beulen von Schalenfeldern und Steifen bei mitteldicken Steifen

Beulmuster 3: Alleiniges Beulen der Steifen bei dünnen Steifen.

Nach (51) kann die lokale Beulspannung eines zusammengesetzten Querschnitts in der Regel näherungsweise wie folgt bestimmt werden: Jede einzelne Komponente der Struktur wird als auf ihre Nachbarin gelenkig gelagert angenommen. Die auf diese Weise berechnete Minimalspannung wird als Bemessungswert zugrunde gelegt. Dieser Gedankengang wird auch beim versteiften Zylinder angewandt (vergl. Bild 4.5). Die Längssteife kann als lange, dreiseitig gelagerte Platte mit einem freien Rand behandelt werden, deren Beulspannung bekanntlich lautet (z.B. (76)):

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ki, st} &= \frac{0.75 \cdot E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{t_s}{d_s}\right)^2 \\ &\approx 0.45 \cdot \frac{E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t_s}{d_s}\right)^2 \\ &= K_{\sigma} \cdot \tilde{\sigma}_e\end{aligned}\tag{4.2}$$

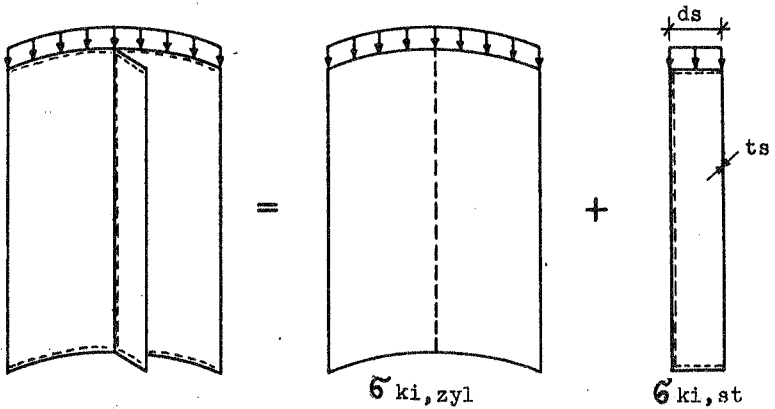


Bild 4.5 Vereinfachtes Gedankenmodell für das Lokalbeulen eines zusammengesetzten Querschnitts

Um einen Anhaltspunkt über das zu erwartende Beulen zu bekommen, werden $\sigma_{ki, st}$ und $\sigma_{ki, zyl}$ verglichen:

- a) $\sigma_{ki, st} > \sigma_{ki, zyl}$ bedeutet Beulmuster 1,
- b) $\sigma_{ki, st} < \sigma_{ki, zyl}$ bedeutet Beulmuster 3,
- c) $\sigma_{ki, st} = \sigma_{ki, zyl}$ ist der Übergangsbereich zwischen a) und b)

Der Bereich c) ist charakterisiert durch seine Imperfektionsanfälligkeit. Man kann ihn durch Angabe einer konservativen Höchstschlankheit ds/ts der Steife in Abhängigkeit von der Schlankheit R/t ausschließen (Fall b wird dann automatisch ausgeschlossen).

$$\tilde{\sigma}_{ki, st} = \frac{0.75 \cdot E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{t_s}{d_s}\right)^2 = \frac{E}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \frac{t}{R} \cdot \alpha = \bar{\sigma}_{ki, zyl}^* \quad (4.3)$$

$\bar{\sigma}_{ki, zyl}^*$ ist der aufgrund nachfolgender Überlegung abgeminderte Wert von $\tilde{\sigma}_{ki, zyl}$.

Bei der Gegenüberstellung der Beulspannungen des Kreiszylinders und der ebenen Platte ist es erforderlich, die hohe Imperfektionsanfälligkeit des Zylinders in Rechnung zu stellen. Dies geschieht in Gl. (4.3) durch den Faktor α . Hier wird die Beulspannung des Zylinders abgemindert, weil dies einen auf der sicheren Seite liegenden Grenzwert für d_s/t_s ergibt.

Der α -Wert kann z.B. aus der DAST - Ri 013 entnommen werden.

Durch Umformung ergibt sich für $\mu = 0.3$ eine Grenzschlankheit von:

$$\left(\frac{d_s}{t_s}\right)_{\max} = S = 0.83 \sqrt{\frac{R}{t}} \cdot \sqrt{\alpha} \quad (4.4)$$

4.2 Idealisierungskonzept für Berechnungen mit der Finiten Elementmethode

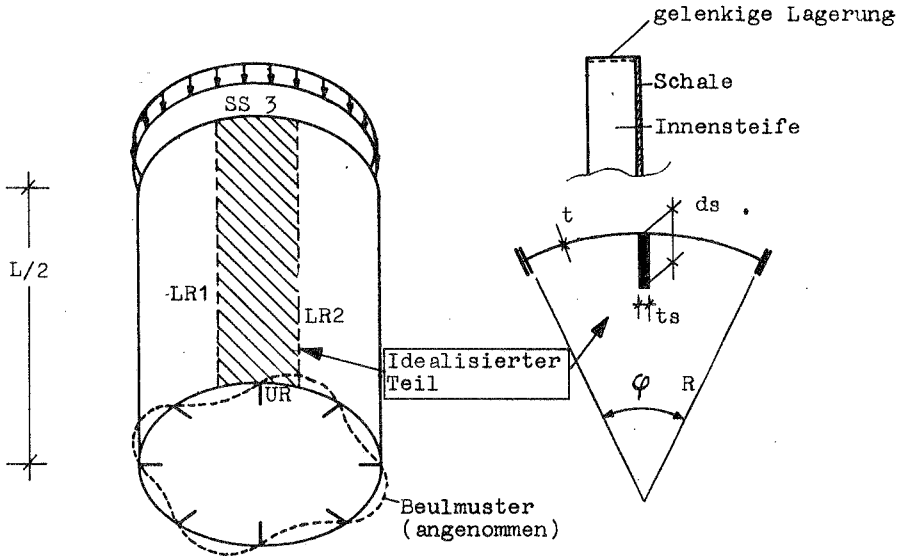


Bild 4.6 Zylinderausschnitt als idealisiertes Ersatzsystem

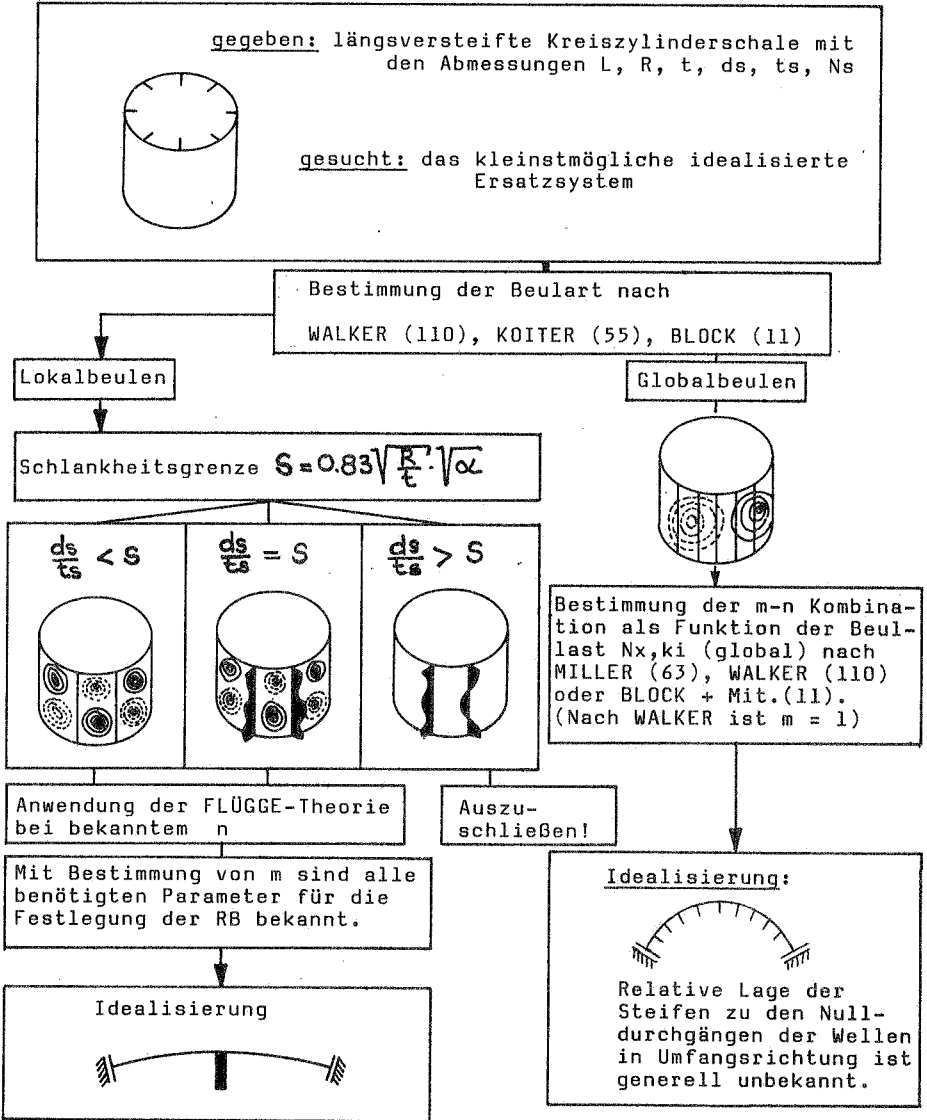
Wegen der Beschränktheit von Speichermöglichkeiten von Rechenanlagen und vor allen Dingen aus Kostengründen werden komplexere Systeme möglichst nicht in ihrer Gesamtheit berechnet, sondern lediglich Teilsysteme, die jedoch in der Lage sein müssen, die Eigenschaften der vollständigen Struktur zumindest näherungsweise zu beschreiben. Solch eine Idealisierung nutzt Symmetriebedingungen des Beulmusters, welche aber nicht willkürlich angesetzt werden dürfen.

Alle im Abschnitt 5 berechneten Zylinder sind nach Bild 4.6, dem Schema in Tabelle 4.1 und Bild 4.7 idealisiert worden.

Die Längsrandbedingungen LR1 und LR2 sind aus der Definition LB2 des Lokalbeulens nach Bild 2.2 abgeleitet worden. Sie befinden sich am Maximalpunkt der zu erwartenden Beulverschiebungen und werden als volle Einspannungen angenommen. Die Randbedingung des unteren Randes UR in Zylinderhalbhöhe wird nach der vollständigen FLÜGGE'schen-Theorie ((33), (42), (44)) bestimmt: Mit der festen Anzahl der Umfangswellen (s. Lokalbeulart LB2) wird die Beullast in Abhängigkeit von den Längswellen minimiert (s. Bild 1.2). UR ist in dieser Arbeit auch eine starre Drehlagerung, weil die ermittelte Anzahl der halben Längswellen die ungerade Zahl neun ist.

Für die Einleitungsbereiche der Axiallasten wird die klassische (im allgemeinen mit konstanter Längsverschiebung) Randbedingung SS3 für die Schale und eine NAVIER'sche Lagerung für die Steifen angenommen (vgl. Bild 4.6 und 4.7).

Tabelle 4.1 Flußdiagramm für die sinnvolle Finite-Element-Idealisierung eines längsversteiften Kreiszyinders



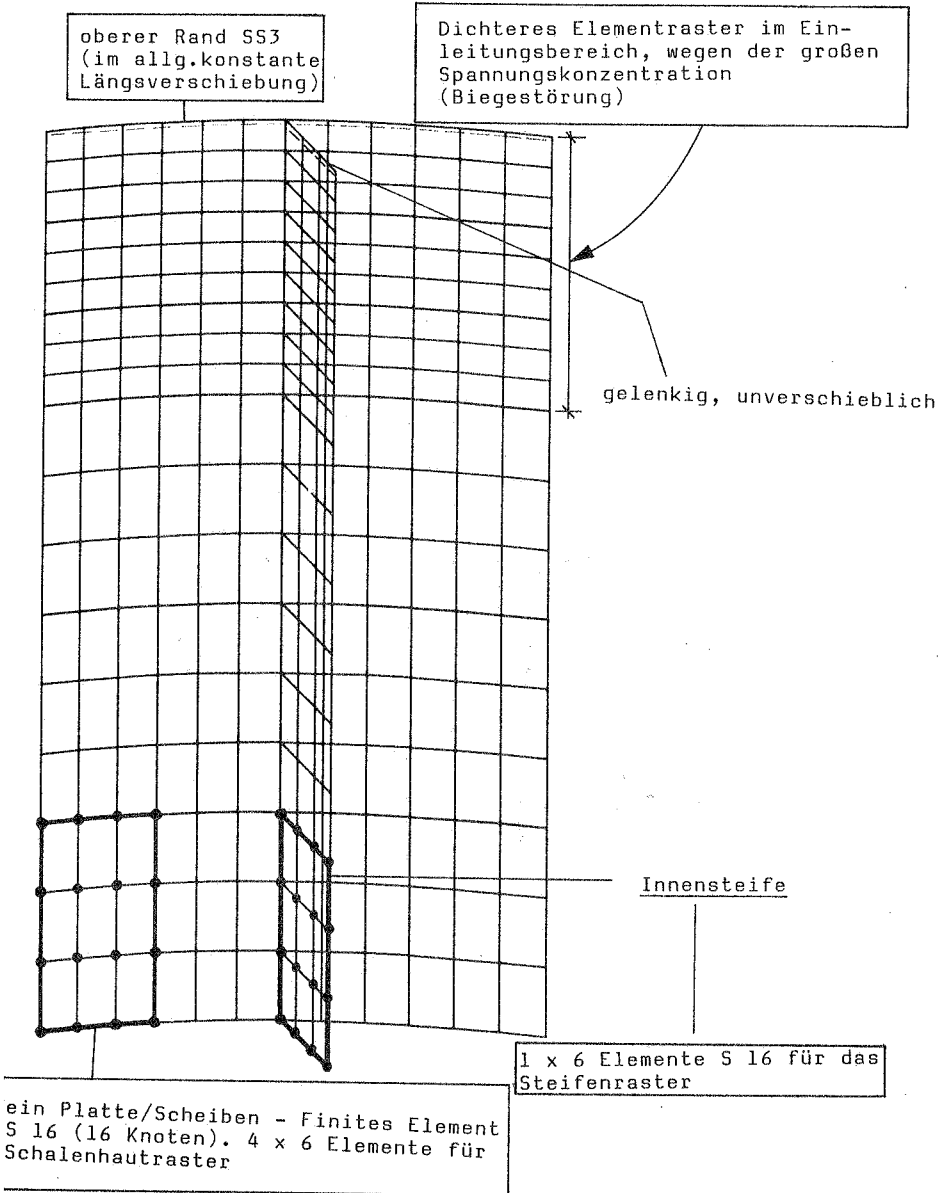


Bild 4.7 Finite-Element-Aufteilung des idealisierten Ersatzsystem

5. PARAMETERSTUDIEN, TRAGVERHALTEN, TRAGLASTEN

Das Beul- und Tragverhalten längsversteifter Kreiszyylinder ist von zahlreichen Parametern abhängig. Hiervon seien einige aufgezählt: R/t , L/R , Steifenform bzw. Abmessungen, Innen- oder Außenversteifung, Art der Lastaufbringung, Randbedingungen, Steifen- bzw. Lastexzentrizität, Steifenzahl, Materialeigenschaften und Imperfektionen. Es würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, würde man versuchen, auf all diese Einflüsse im einzelnen einzugehen. Deswegen werden die Untersuchungen lediglich auf einige beschränkt: Auswirkungen der Steifenabmessungen, Art der Lastaufbringung, Imperfektionen und R/t -Verhältnis.

Vorbemerkungen:

Für die Kennzeichnung der Belastung werden in dieser Arbeit hauptsächlich zwei Begriffe gebraucht:

- a) die "verschiebungsgesteuerte" und
- b) die "lastgesteuerte" Belastung

Unter "Verschiebungssteuerung" wird hier die Anbringung einer über den Zylinderrand konstanten Axialverschiebung verstanden. Diese Bedingung ist bei Versuchen näherungsweise erfüllt, wenn an den Zylinderenden sehr steife Kopfplatten angebracht werden, die sich während der Belastung nicht verdrehen. Die "Laststeuerung" hingegen soll gelten, wenn um den ganzen Zylinderrand eine konstante Axialspannung wirkt.

Für die Beurteilung des Tragverhaltens der versteiften Kreiszyinderschalen werden in dieser Arbeit Beul- und Traglasten statt Beul- und Traglastnennspannungen verwendet. Diese Vorgehensweise erlaubt in der Regel eine bessere Abschätzung der wirklichen kritischen Lasten, besonders bei verschiebungsgesteuerter Belastung. Bei der quantitativen Beurteilung der hier erzielten Ergebnisse, ist es deshalb notwendig die unterschiedlichen Querschnittsflächen zu berücksichtigen.

5.1 Beullast in Abhängigkeit von der Schlankheit der Rechtecksteifen

Aus wirtschaftlichen Überlegungen ist man bestrebt, den Aussteifungsgrad so gering wie möglich zu halten. Hieraus ergibt sich die Gefahr der Anordnung von zu dünnen Steifen. Des weiteren ist zu befürchten, daß imperfektionsanfällige Bereiche erfaßt werden.

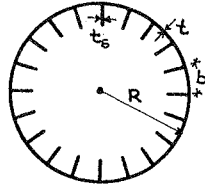
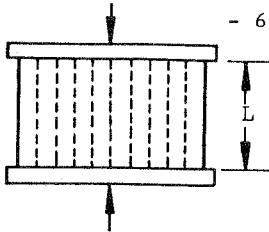
Folgende Parameterstudie soll die Auswirkungen untersuchen, die eine Variierung der Steifenschlankheit mit sich bringt.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist der Versuchskörper UC8 aus der Versuchsserie in (110). In den Bildern 5.1 und 5.2 sind die geometrischen Parameter, Werkstoffeigenschaften, Randbedingungen, Imperfektionen und das Versagensbild des Versuchskörpers zu sehen.

Unter Beibehaltung aller sonstigen geometrischen Größen wird die Dicke t_s der Steife variiert. Ein ähnlicher Effekt auf das Stabilitätsproblem hätte auch mit der Variierung der Steifenhöhe d_s allein erreicht werden können: Ausschlaggebend ist nicht der Zuwachs oder die Abnahme des Gesamtquerschnitts, sondern lediglich das Verhältnis d_s/t_s , das den entscheidenden Einfluß auf die Beulspannung der Steife ausübt (vgl. Gl (4.2) und (4.4)).

Ergebnisse

Für fünf d_s/t_s -Verhältnisse wurde für das perfekte Schalenfeld mit einer Steife eine lineare Eigenwertuntersuchung durchgeführt. Bezugslast für alle Fälle bildet die klassische Beullast des isotropen Zylinders. Bild 5.3 zeigt für $d_s/t_s = 6, 16$ und 24 drei der fünf Fälle. ξ ist ein Lastparameter, der bei Stabilitätsuntersuchungen üblicherweise benutzt wird, um die äußeren Lasten auf ein bestimmtes Lastniveau zu beziehen. $\xi = 1.00$ ist in diesem Beispiel identisch mit der klassischen Beullast des unversteiften Zylinders.



Geometrische Parameter:

- R = mittlerer Radius der Zylinderhaut
- t = Dicke der Schalenhaut
- b = Abstand zweier benachbarter Längssteifen
- Ns = Anzahl der Längssteifen
- ts = Dicke einer Längssteifen

$R/t = 360$
 $t = ts = 0.81 \text{ mm}$
 $ds/ts = 16.0$
 $Ns = 20$
 $L/R = 1.11$

Badtdorf-Parameter für ver-
steifte Zylinder

$Zs = \sqrt{(1-\mu^2)} \cdot \frac{b^2}{R \cdot t_s^2} = 33.9 > 7.0$

d.h. es liegt breite Aus-
steifung vor (105).

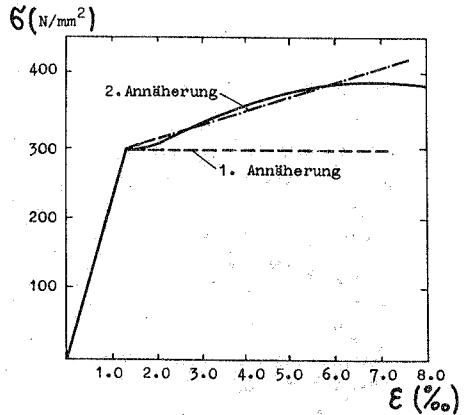
Werkstoffkennwerte

- $\sigma_F = 309 \text{ N/mm}^2$
- $E = 201000 \text{ N/mm}^2$
- $Eh = 40000 \text{ N/mm}^2$
- $\mu = 0.3$

Imperfektionen:

Eine Übersicht der gemessenen Imperfektionen ist in Bild 5.2 zu sehen. Die maximale lokale Imperfektion beträgt

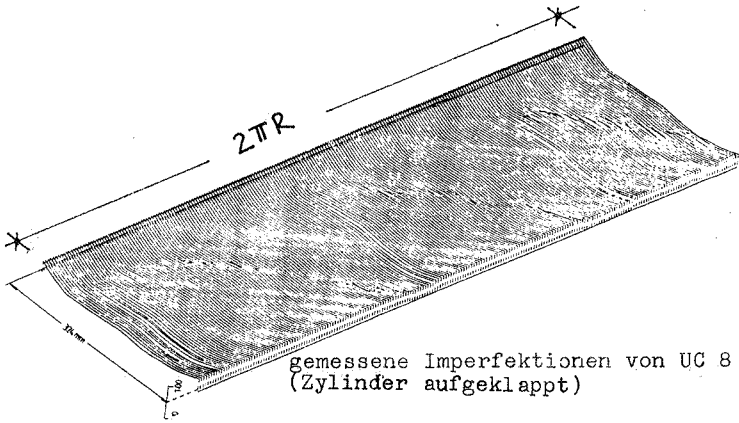
$W_o = 0.80 \text{ mm} (W_o/t = 0.988)$



Randbedingungen: Einspannung der Ränder in Deckplatten

Bemerkung: Mit den Werkstoffkennwerten $\sigma_F = 309 \text{ N/mm}^2$ und $E = 201000 \text{ N/mm}^2$ wird nur beim Vergleich der FE-Berechnung mit dem Experiment gerechnet. Ansonsten wird Stahl 37 mit $\sigma_F = 240 \text{ N/mm}^2$ und $E = 210000 \text{ N/mm}^2$ verwendet.

Bild 5.1 Versuchsdaten des Zylinders UC8 aus (110).



Endzustand beim Versuch für UC 8

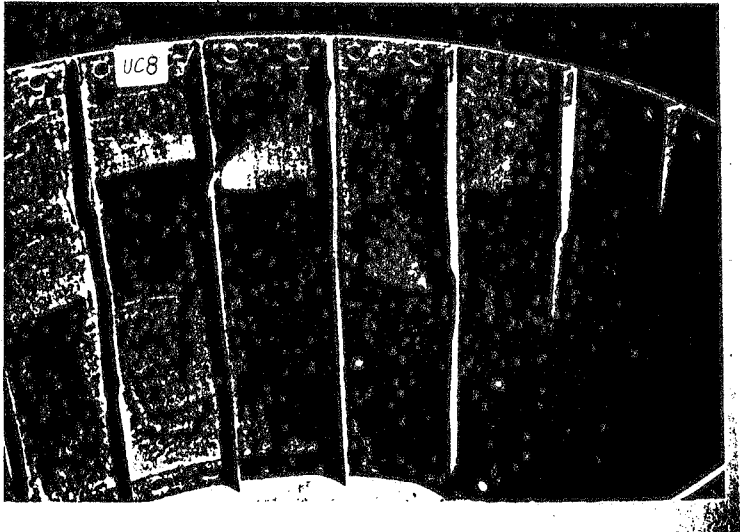
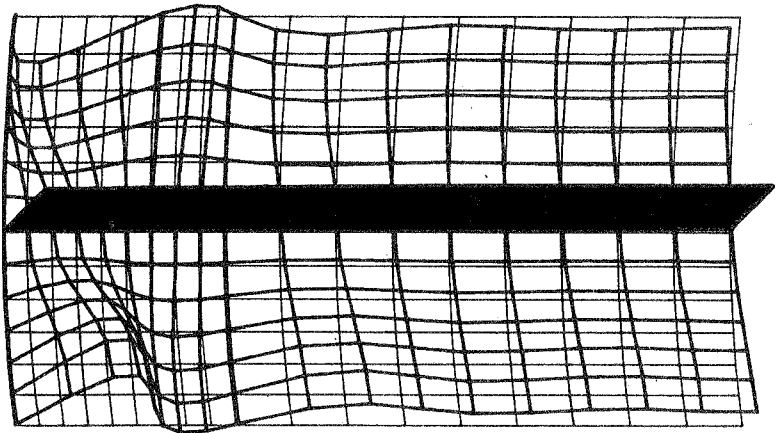


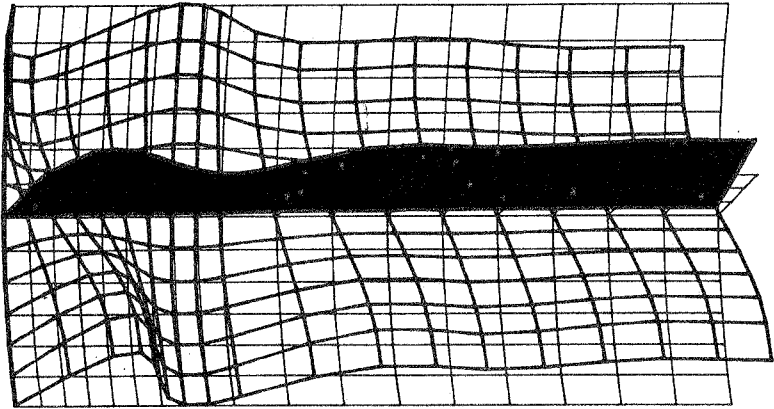
Bild 5.2 Imperfektionen und Versagensbild von UC8 aus (113)

$ds/ts = 6$



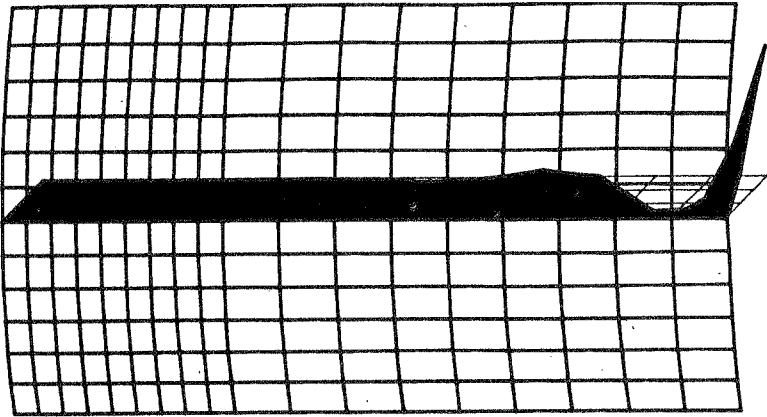
$S_{FEM} = 1.46$

$ds/ts = 16$



$S_{FEM} = 1.19$

$ds/ts = 24$



$S_{FEM} = .87$

Bild 5.3 Feinformen für die Verzweimundlasten

Es soll nun mit Hilfe der vorgeschlagenen Gleichung (4.4) versucht werden, diese drei Beulfälle zu erläutern. Der Einfachheit halber wird $\alpha = 1.0$ gesetzt.

Fall $ds/ts = 6$

Aus Gl. (4.4) erhält man eine Grenzschlankheit $S = 0.83\sqrt{360} = 15.75$.

Dieser Grenzwert ist 2.6-fach grösser als das ds/ts -Verhältnis des vorliegenden Zylinders. Der MARGUERRE'sche Krümmungsparameter hat einen Wert von 5.96 deutlich über 2.0, wodurch sich die Anwendung der klassischen Beullast für die Schalenhaut rechtfertigt (s und Ω sind für die hier untersuchten Zylinder konstante Werte). $\sigma_{ki,zyl}$ ergibt sich zu 352.9 N/mm^2 und $\sigma_{ki,st}$ der Steife allein zu 2403.8 N/mm^2 , also um den Faktor 6.8 größer als $\sigma_{ki,zyl}$, was auf ein früheres Versagen der Schalenhaut hindeutet. Diese Erkenntnis findet ihren Ausdruck auch im Beulmuster der FE-Berechnung: Deutlich erkennbar ist, daß allein die Schale am Beulvorgang beteiligt ist. Die Steife behält dagegen ihre ursprüngliche Konfiguration und bildet eine quasi volle Einspannung für die Schalenhaut. Man beachte, daß die Verbindungslinie zwischen Steife und Schale gerade geblieben ist. Die numerische Eigenwertlösung ergibt einen β -Wert von 1.46 deutlich höher als die klassische Beullast. Dieser günstige Effekt ist der Einspannung zuzuschreiben.

Fall $ds/ts = 16$: "Specimen UC8" (vgl. (109), (110), (111))

Die Schlankheit $ds/ts = 16$ ist fast identisch mit S . Ein gleichzeitiges Beulen von Schale und Steife ist deswegen zu erwarten. $\sigma_{ki,st} = 338.0 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_{ki,zyl} = 352.9 \text{ N/mm}^2$ fallen fast zusammen.

Der vorausgesagte Beulmechanismus hat sich in der Finite-Elementberechnung eingestellt, wobei Schalenhaut und Steife die gleiche Halbwellenzahl in Längsrichtung aufweisen ($n = 4 \frac{1}{2}$ für die Zylinderhälfte). Die Verbindungsgerade ist auch hier gerade geblieben. Unter der Einwirkung von Zug- bzw. Druckspannungen in Um-

fangsrichtung hat sie sich in tangentialer Richtung V geringfügig verschoben (siehe Bild 5.4.)

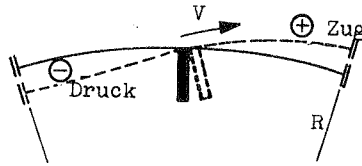


Bild 5.4 Membrankräfteeinwirkung auf die Verbindungslinie zwischen Schalenhaut und Steife

Fall $ds/ts = 24$

Der Grenzwert für die Schlankheit ist in diesem Fall deutlich überschritten. Für die lokalen Instabilitätslasten bekommt man: $\sigma_{ki,st} = 150.2 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_{ki,zyl} = 352.9 \text{ N/mm}^2$. Im Gegensatz zu den anderen zwei vorstehenden Beispielen wird die Stabilität (zumindest im elastischen Bereich) allein durch das Verhalten der Steifen bestimmt. Das Beulmuster ist dem im überkritischen Bereich beobachteten typischen Steifenbeulen sehr ähnlich: Bildung eines Knicks in Zylindermitte bei mittleren Längen (vgl. z.B. Bild 5.5).

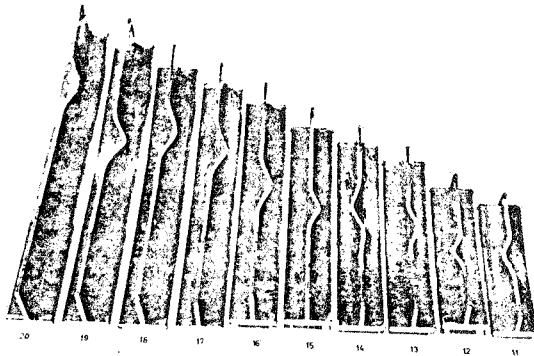


Bild 5.5 Beulmodi flacher Steifen mit unterschiedlichen Längen aus (105).

Die Schalenhaut ist am Beulvorgang überhaupt nicht beteiligt. In Diagrammform dargestellt sind in Bild 5.6 die Verzweigungslasten in Abhängigkeit von den Steifenschlankheiten ds/ts , wobei ds konstant gehalten wird.

Das Diagramm kann in drei Bereiche aufgeteilt werden:

| | | | |
|-----------|---|-------------------|--------------------------|
| Bereich 1 | : | $0 < ds/ts < 10$ | dicke Versteifung, |
| Bereich 2 | : | $10 < ds/ts < 20$ | mittlere Versteifung und |
| Bereich 3 | : | $ds/ts > 20$ | dünne Versteifung. |

Für jeden Bereich ist auch die charakteristische Beulkonfiguration dargestellt.

Die nach Gleichung (4.4) ermittelte Grenزشlankheit (ds/ts) ist ebenfalls dargestellt und liegt auf der sicheren Seite.

Bemerkungen zu den Ergebnissen

Die dünne Versteifung (Bereich 3) ist im elastischen Bereich die ungünstigste von allen, weil der versteifte Kreiszyylinder nicht einmal die klassische Beullast des isotropen Zylinders erreicht.

Bei Berücksichtigung des Materialverhaltens bedeutet ein frühzeitiges Beulen der Steifen nicht unbedingt die Erschöpfung der Tragreserven, es bringt jedoch zusätzliche geometrische Imperfektionen in Form von Biegung in die Schalenhaut hinein und beschleunigt das Versagen.

5.2 Nichtlinear elastisches Tragverhalten

Die in Bild 5.6 ermittelten Beullasten stellen ideale Werte dar. Sie bedeuten zwar häufig noch kein Zusammenbrechen des Tragwerks, werden jedoch von den meisten Vorschriften als Grenzlast angesehen (siehe z.B. (82)). Da laut KOITER (56) nichts von Interesse ist, was "after the disaster" geschieht, bilden solche idealen Beullasten auch Richtwerte für jede Bemessung.

Eine Betrachtung des nichtlinearen Tragverhaltens im überkritischen Bereich soll bei den hier behandelten längsversteiften Schalen (Bild 5.3) zeigen, daß noch große Tragreserven vorhanden sind.

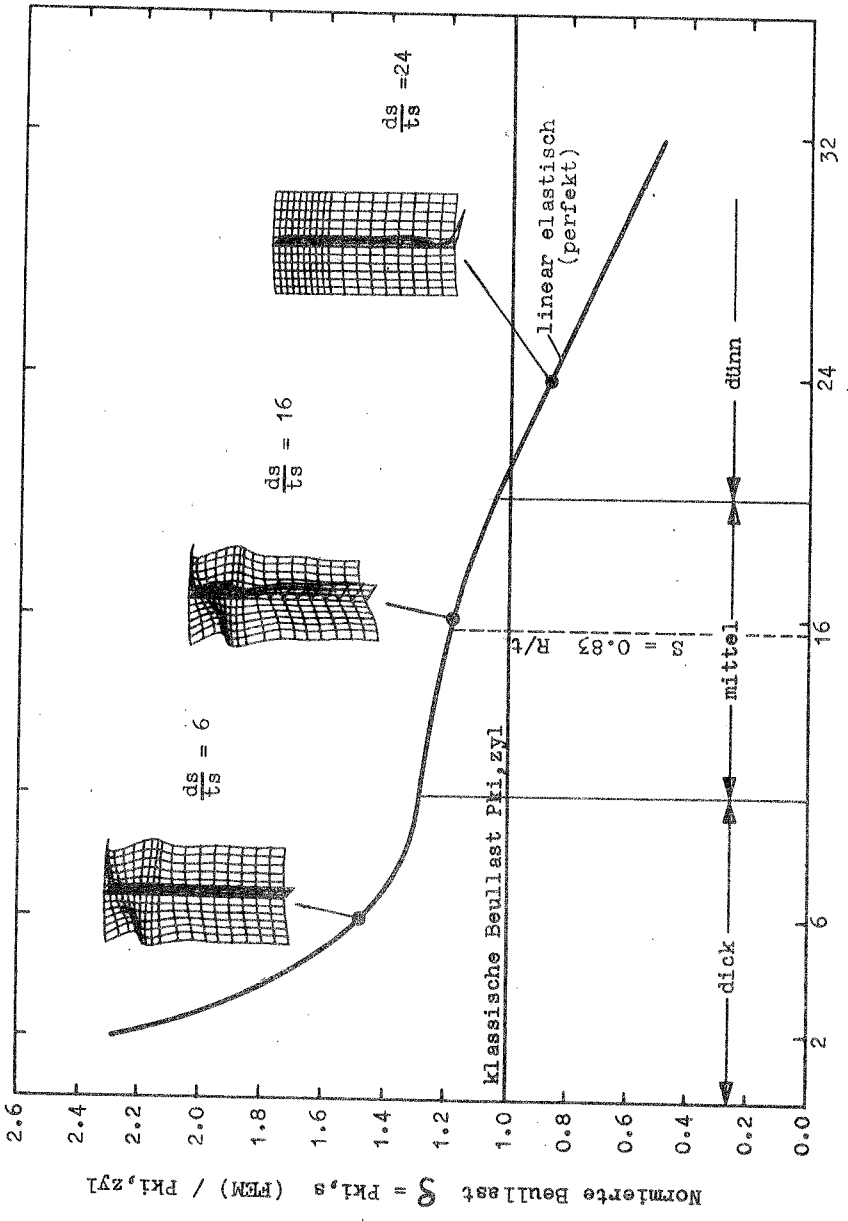


Bild 5.6 Erste lineare elastische Verzweigungslasten in Abhängigkeit von der Steifenschlankheit ds/ts ($ds = \text{konst.}$)

5.2.1 Wahl der geometrischen Imperfektion

Als Imperfektion (für alle untersuchten Zylinder!) für die nichtlinearen Berechnungen wird das Beulmuster gewählt, welches zum niedrigsten Eigenwert des Zylinders UC8 mit $ds/ts = 16$ gehört (s. Bild 5.3).

Es wird aus folgenden Erkenntnissen angenommen, daß diese beulaffine Imperfektion die ungünstigste ist (auch für die übrigen Fälle mit Einbeziehung des isotropen Zylinders):

a) Dieses Beulmuster vermag alle Komponenten der Struktur (Schale und Steife) gleichzeitig zu aktivieren.

b) Das Versagensmuster eines unter Axialdruck belasteten Zylinders ist der geometrischen Imperfektion oft sehr ähnlich (29), (38). Das bedeutet, daß eine solche Schale ihre Ausgangsform, abgesehen von untergeordneten Umgestaltungen im Nachbeulbereich, wenig ändert. Bild 5.7 zeigt ein experimentelles Beispiel aus (38).

Aus Bild 5.3 ist ersichtlich, daß das Beulmuster für $ds/ts = 16$ mehr Biegeenergie enthält als die anderen. Eine Schale mit ähnlicher Imperfektion bekommt bei schon relativ kleinen Lastniveaus große Biegespannungen, die für das Versagen verantwortlich sind. Die beiden anderen Beulmodi sind weniger "weich".

Zur Kontrolle dieser Aussage ist für $ds/ts = 6$ eine nichtlineare Berechnung mit zwei Imperfektionsformen durchgeführt werden: Einmal mit dem eigenen Beulmuster und anschließend mit dem gewählten Beulmuster, jeweils mit der gleichen Amplitude W_0 (W_0 bezeichnet die Imperfektion in radialer Richtung). Es zeigt sich, daß letzteres Muster deutlich ungünstiger ist (s. Bild 5.8). In Abschnitt 5.8.3 ist eine gleiche Kontrollbehandlung auch für eine ebene Platte mit dem gleichen Ergebnis angestellt worden (vgl. Bild 5.36).

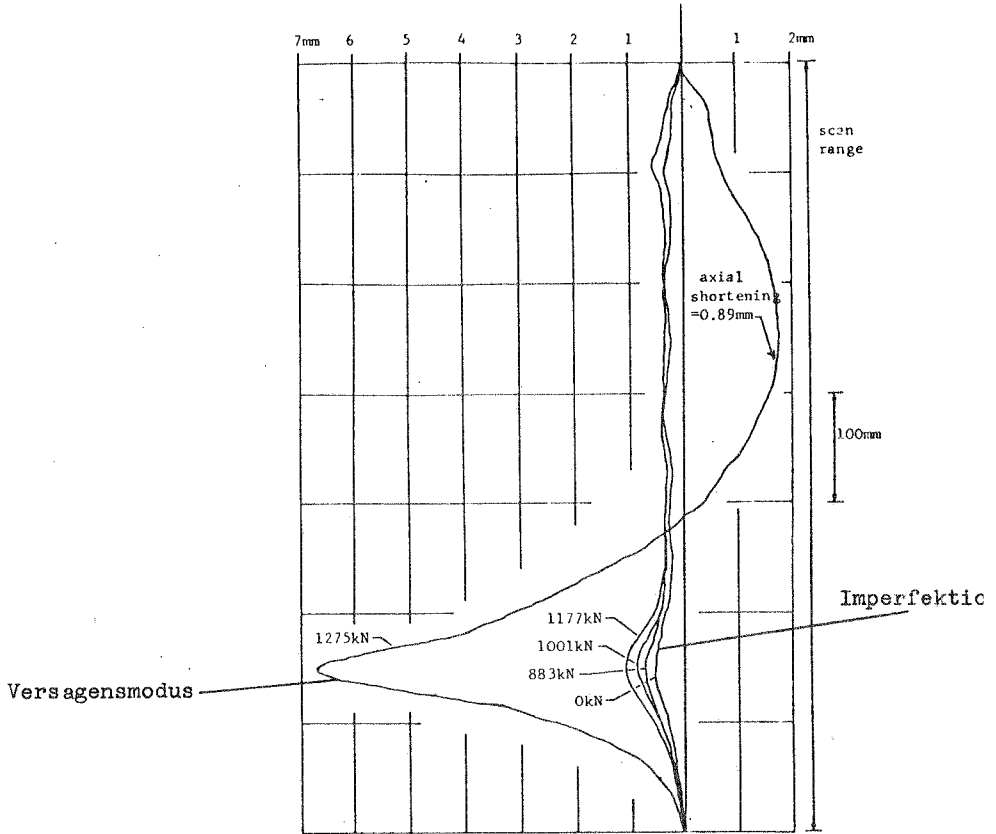


Bild 5.7 Glasgower Versuche: Zylinder Gul (aus 38),
Ähnlichkeit von Versagensform und Imperfektion

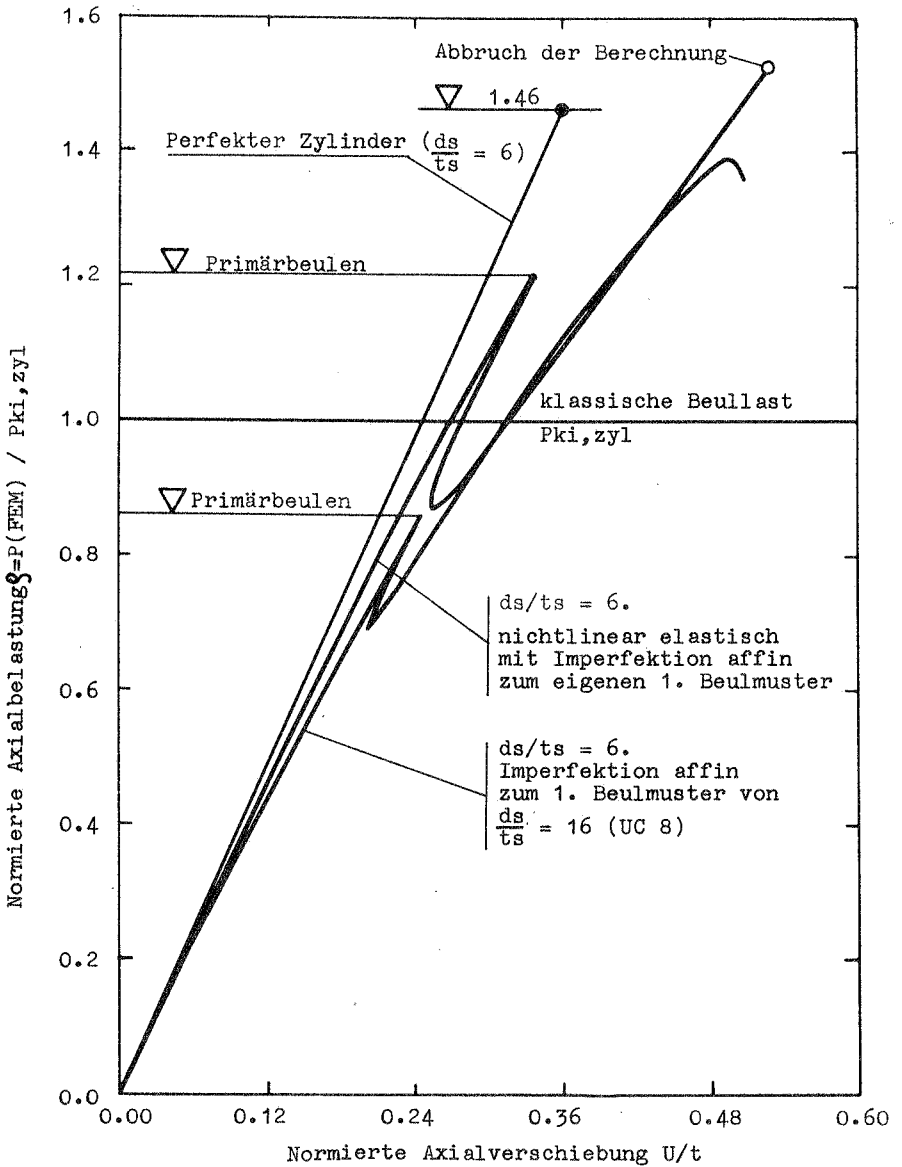


Bild 5.8 Ungünstigste geometrische Imperfektion für $ds/ts = 6$. Geometrisch nichtlineare elastische Last-Stauchungskurven für $\max W_0/t = 1.0$

5.2.2 Ergebnisse

Für die Berechnungen ist eine auf die Wanddicke der Zylinder normierte Imperfektionsamplitude von $W_0/t = 1.0$ gewählt worden. Angaben für eine zweckmäßige Wahl von W_0/t sind in (25), (108) und (110) enthalten. In den DnV-Regeln ist für diese Zylinder $(W_0/t)_{\max} = 1.8$ zulässig. Die Belastung wurde in diesem Fall verschiebungsgesteuert angesetzt. Bild 5.9 zeigt für vier Fälle (zusätzlich zu den drei versteiften Zylindern ist auch ein isotroper für Vergleichszwecke herangezogen) die Ergebnisse der nichtlinearen Berechnungen.

Am Beispiel des dickversteiften Zylinders ($d_s/t_s = 6$) wird das ähnliche Verhalten der versteiften Strukturen erläutert:

Im Vorbeulbereich verläuft die Kurve fast linear. Bei $\xi = 0.86$ beult die Schalenhaut (Primärbeulen). Dieses Beulen ist bei der verschiebungsgesteuerten Belastung ein schneller, dynamischer Knallvorgang (110), bei dem zahlreiche instabile Gleichgewichtslagen durchlaufen werden (abfallender Ast). Lastanteile, die von der ausgebeulten Schale nicht mehr aufgenommen werden können, gehen auf die Steifen über (Steifigkeit zieht Kräfte an). Nach Erreichen eines neuen stabilen Gleichgewichts steigt die Kurve erneut mit einer niedrigeren Tangentensteifigkeit, weil ein Teil der Schalenhaut nicht mehr mitträgt. Die Steife mit der "mitwirkenden Schalenbreite" verhält sich weiter wie ein gebetteter Stab, der bei $\xi = 1.39$ versagt (Sekundärbeulen). Ähnlich sind die Kurven für $d_s/t_s = 16$ und 24 .

Die Kurvenverläufe vermitteln den Eindruck perfekter Systeme, weil sie trotz relativ bedeutender Imperfektionen kein Durchschlagen, sondern ein verzweigungsähnliches Verhalten zeigen. Eine Erklärung für dieses Verhalten sieht WALKER (110) im Zusammenwirken von der Verschiebungssteuerung mit bestimmten Imperfektionsarten. Bei zahlreichen Versuchen mit Verschiebungssteuerung (38), (81) ist dieses Phänomen auch beobachtet worden.

Bild 5.10 zeigt die Spannungsumlagerungen für verschiedene Last-

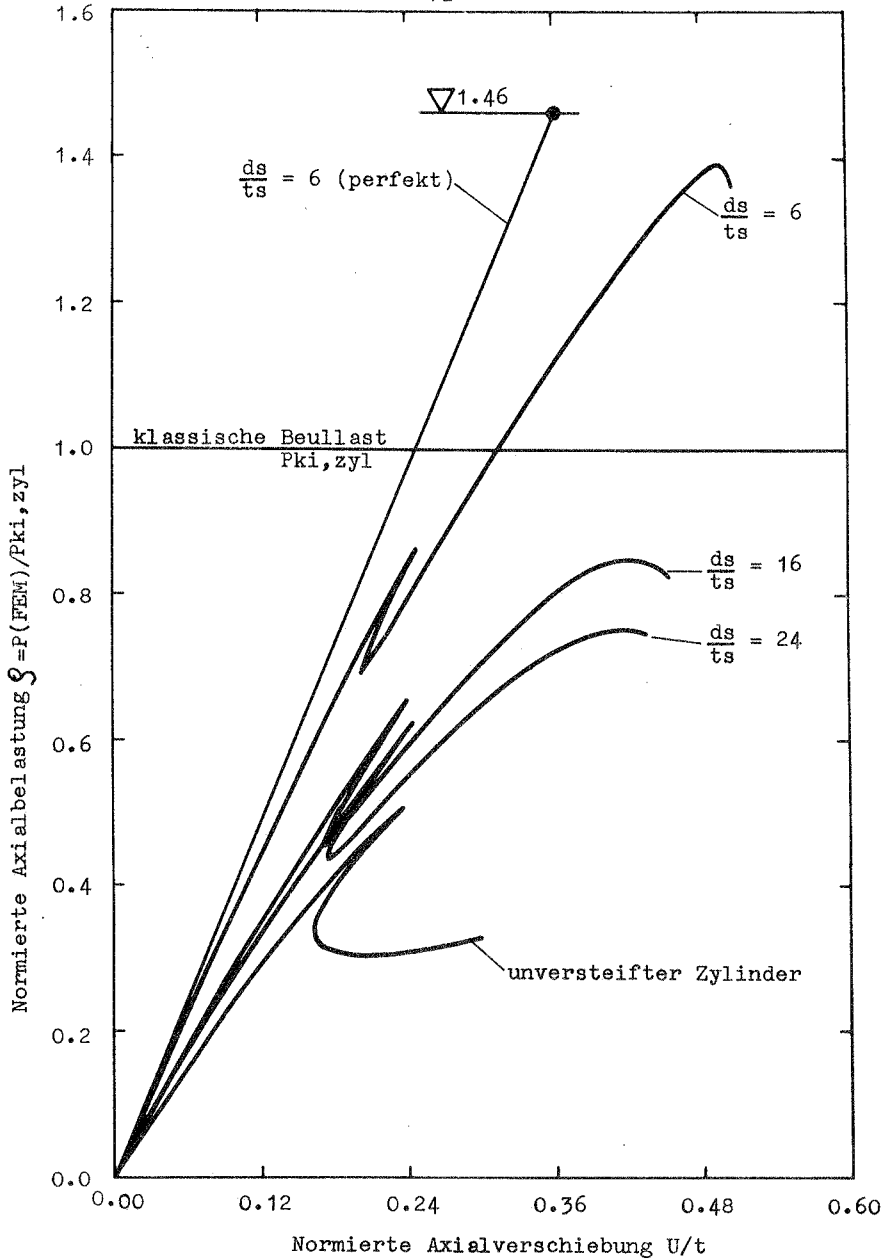


Bild 5.9 Geometrisch nichtlineare elastische Laststauchungskurven für eine maximale Imperfektion $\dot{w}_0/t = 1.0$

niveaus und verdeutlicht das Konzept der "mitwirkenden Schalenbreite".

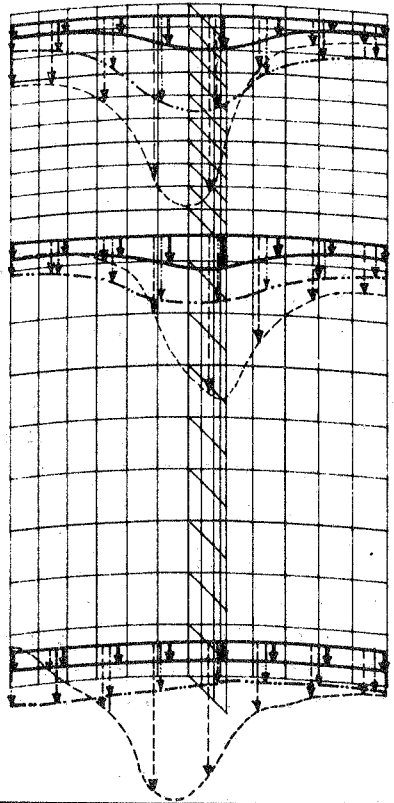
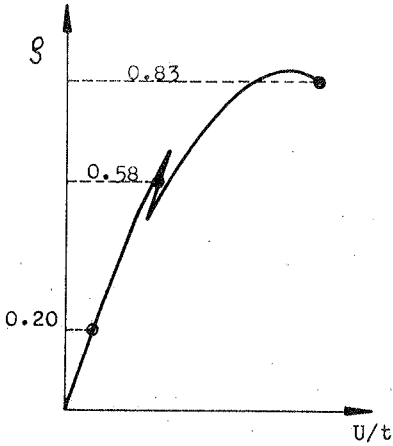
Die Ähnlichkeit zwischen Imperfektion (Bild 5.3) und Verschiebungsfeld ist auch hier deutlich erkennbar.

Bemerkenswert ist in Bild 5.9, daß alle Zylinder unabhängig vom Aussteifungsgrad bei der gleichen Stauchung $U/t = 0.24$ erstmalig beulen. Vermutlich gibt es bei Zylindern mit fester Geometrie "kritische Stauchungen"; hiervon wird in (30) von ESSLINGER berichtet. Aufgrund des näherungsweise linearen Verlaufs der Kurven im Vorbeulbereich ist es möglich nach einem Rechenschritt, d.h. einer Bestimmung der Anfangstangente, die lokale Beullast sofort zu extrapolieren.

Für den Zylinder mit dünnen Steifen ($d_s/t_s = 24$) ist mittels einer begleitenden Eigenwertuntersuchung kurz nach dem Primärbeulen festgestellt worden, daß nicht die Steifen, wie aufgrund des Verhaltens der perfekten Schale zu erwarten wäre, zuerst ausbeulen, sondern die imperfekte Schalenhaut. Eine Erklärung hierfür liegt wahrscheinlich darin, daß die Steifen als "Plattensysteme" weniger imperfektionsempfindlich sind als die Schalenhaut und daß sich deren Beulen verzögert.

Aus den Kurven ist außerdem abzulesen, daß mit dem Anwachsen des Versteifungsgrads die "Entlastungsverschiebung" abnimmt. Dabei soll der Begriff "Entlastungsverschiebung" den maximalen Abbau der kritischen Stauchung nach dem Primärbeulen bezeichnen (vgl. Bild 5.11).

Für die isotrope Kreiszylinderschale erstreckt sich die Entlastungsverschiebung (s. Bild 5.9) zwischen $U/t = 0.24$ und 0.16 , für $d_s/t_s = 6$ dagegen nur zwischen 0.24 und 0.20 . Dies bedeutet, daß die versteiften Zylinder eine kürzere Instabilitätsphase besitzen: Sie "erholen" sich schneller nach dem Primärbeulen. Diese Erkenntnis ist für die Imperfektionsempfindlichkeit von Bedeutung.



Längsspannungsverteilung
in Schalenmittelfläche bei:

- $g = 0.20$
- ⋯ $g = 0.58$
- - - $g = 0.83$

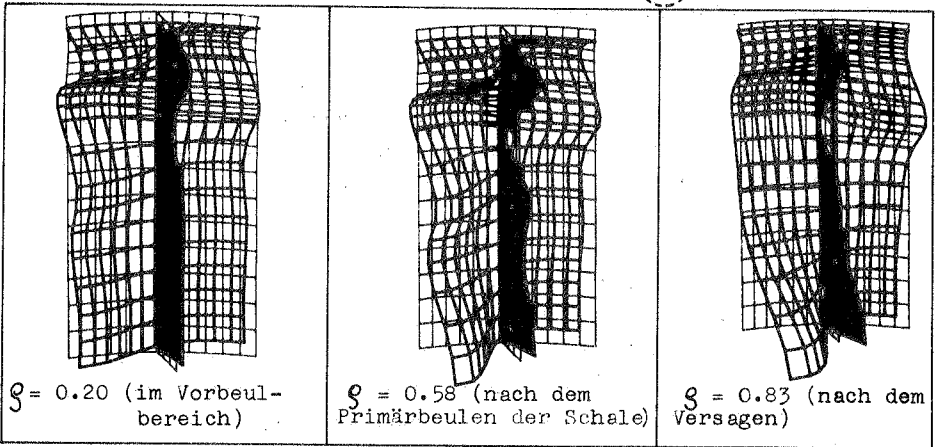
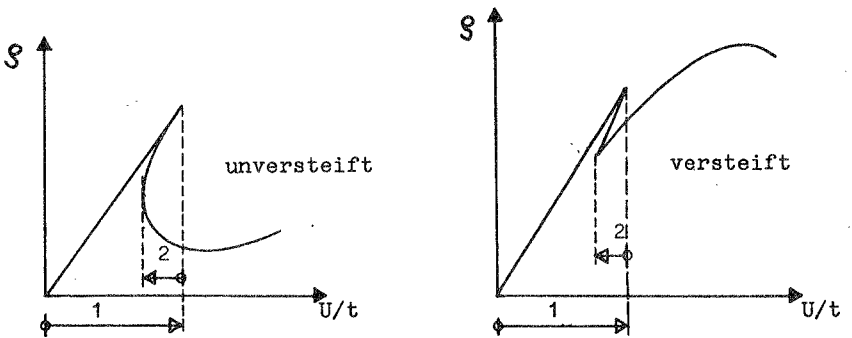


Bild 5.10 Verschiebungsfelder und Längsspannungsverteilung für $d_s/t_s = 16$ bei verschiebungsgesteuerter Belastung und $\max W_o/t = 1.0$



1 = kritische Verschiebung, 2 = Entlastungsverschiebung

Bild 5.11 Entlastungsverschiebungen

Die Tragreserven sind nach dem Primärbeulen beachtlich: Für einen Zylinder mit $ds/ts = 6$, der bei $Q = 0.86$ primär beult und bei $Q = 1.39$ versagt, betragen sie 62 %, für $ds/ts = 16$ immerhin noch 31 %.

In der Luftfahrttechnik wird das Primärbeulen bewußt in Kauf genommen, um die großen Tragreserven auszunutzen. Die hierdurch entstehenden Systeme werden als Stabwerksysteme (die Längs- und Ringsteifen bilden die Stäbe) oder Falwerke berechnet (35).

5.3 Zur Frage der geometrischen Imperfektionsanfälligkeit

Für engversteifte Zylinder mit Globalbeulen ist bekannt, daß sie wenig empfindlich sind gegen geometrische Imperfektionen, bei ihnen sind vor allem die Randbedingungen von größter Bedeutung (91). Breitversteifte Zylinder dagegen sollen ähnliche Eigen-

schaften besitzen wie isotrope (97), (107), (108). Der theoretische Beweis hierfür wurde von TIMOSHENKO/GERE (100) und KOITER (55) erbracht.

Ergebnisse

In Bild 5.12 ist der Abfall der idealen Beullasten bei Präsenz von Imperfektionen ($\max W_0/t = 1.0$) dargestellt. Aufgetragen ist der Wert des Primärbeulens.

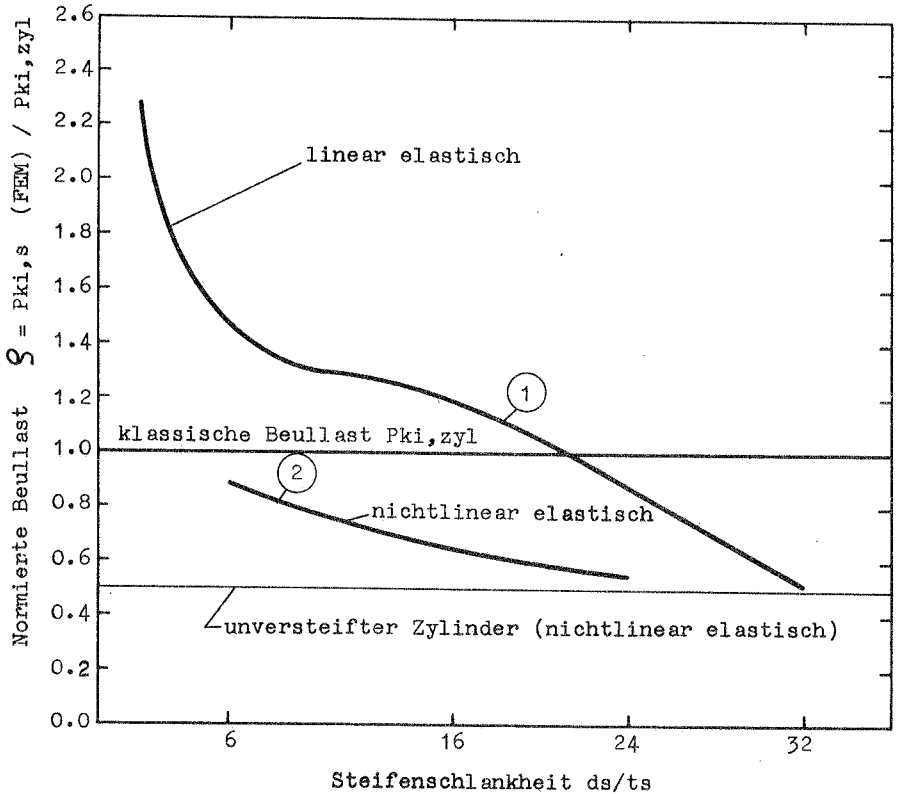


Bild 5.12 Abfall der Beullasten gegenüber den idealen Beullasten bei einer maximalen geometrischen Imperfektion von $W_0/t = 1.0$

Wenn die ideale Beullast des jeweiligen Zylinders als dessen Vergleichsbasis (= 100%) angesehen wird, ist beim isotropen Zylinder, der auch die beulaffine Imperfektion von UC8 besitzt, für die vorliegende Schlankheit eine Einbuße von 50% zu verzeichnen. Für die versteiften Zylinder betragen die Verluste (Abfall von Kurve 1 zu Kurve 2 in Bild 5.12) bei $ds/ts=16$ 46 %, bei $ds/ts = 6$ 40% und bei $ds/ts=24$ 38 %.

Insgesamt können zwei Tragverhaltenseffekte beobachtet werden:

a) Die breitversteiften Zylinder schneiden besser ab als der isotrope. Dies wird bei Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität und gleichzeitiger Zunahme der Imperfektionsamplitude noch deutlicher (vgl. Abschnitt 5.7)

b) Die breitversteiften Schalen sind trotzdem auch empfindlich gegen die geometrische Imperfektion (vgl. auch (55), (97), (100), (107), (108)).

5.4 Die radialen Verschiebungen

Für den Zylinder mit der dicken Versteifung ($ds/ts = 6$) sind in Bild 5.13 die radialen Verschiebungen dreier markanter Punkte in Zylinderhalbhöhe dargestellt. Punkt 1 befindet sich an der negativen Kulminationsstelle einer Umfangsbeulwelle (Innenbeule), Punkt 2 dagegen an der positiven (Außenbeule). Punkt 3 ist der Nulldurchgang der Beulwelle und befindet sich gleichzeitig auf der Verbindungsgerade von Schalenhaut und Steife.

Im Gegensatz zu den Längsstauchungen in Bild 5.9 zeigt sich beim Beulen der Schale in diesen Verschiebungen kein verzweigungsähnliches Verhalten sondern eine ausgeprägte Nichtlinearität mit Durchschlagen. Aufgrund der Affinität der Imperfektion zum idealen Beulmuster haben Punkt 1 und 2 Anfangswerte von $W_o/t = 0.84$ (die maximale Imperfektion $W_o/t = 1.0$ tritt in einem Punkt unterhalb des Einleitungsbereichs auf) und Punkt 3 keine Abweichung in Radialrichtung. Auf dem Diagramm in Bild 5.13 und den folgenden sind jedoch nur die aus der Belastung herrührenden Verschie-

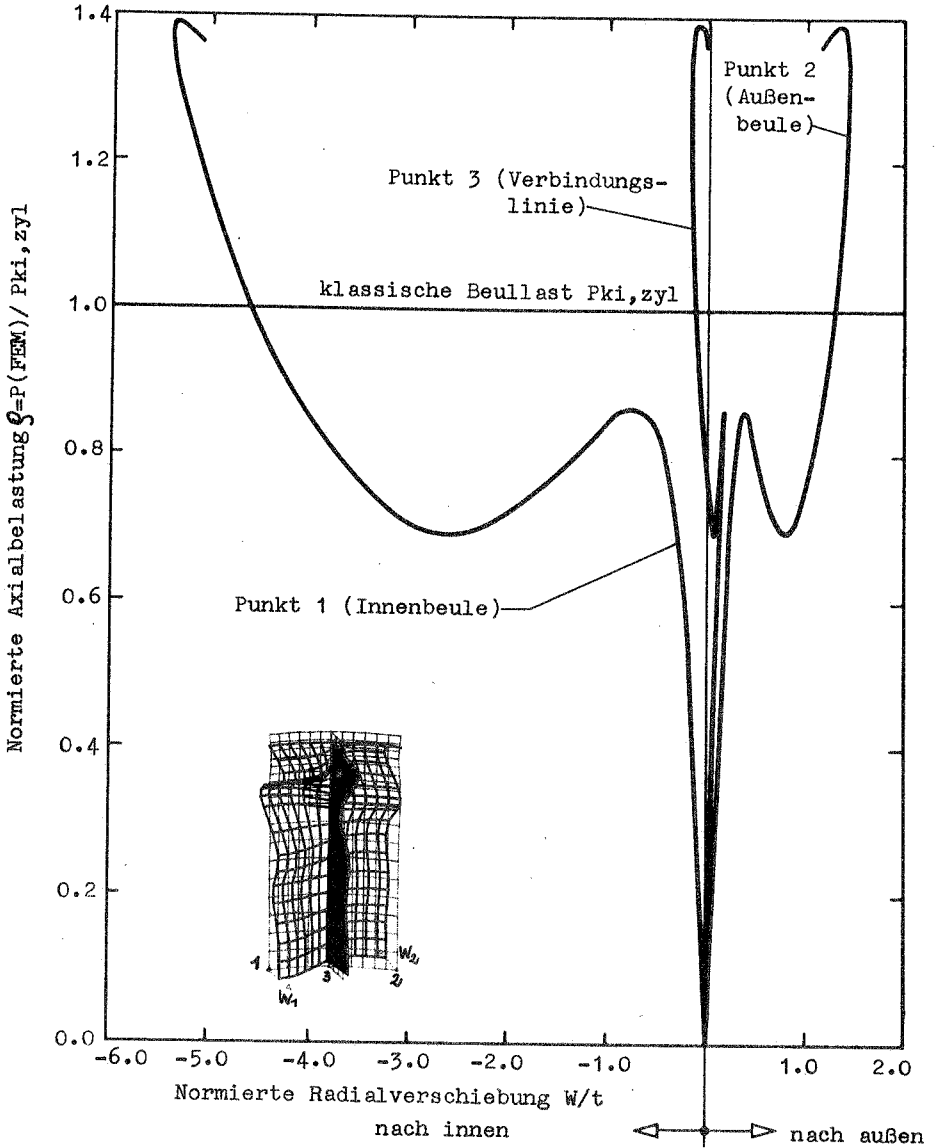


Bild 5.13 Geometrisch nichtlineare elastische Last-Verschiebungskurven für $ds/ts = 6$ und max $W_0/t = 1.0$

bungen W/t dargestellt. Eine Einbeziehung der Imperfektion durch $(W_o + W)/t$ ist durch Verschiebung des Koordinatenursprungs zu erreichen. Am Diagramm für Punkt 3 sieht man, daß sich die Steife im Vorbeulbereich zunächst nach außen verschiebt und dadurch eine Unsymmetrie in den Verschiebungen von 1 und 2 verursacht. Wegen des Steifenwiderstands erfährt Punkt 2 kleinere Verschiebungen.

Nach Erreichen der primären Beullast schlägt die Steife nach der Zylinderinnenseite durch und beschleunigt ganz wesentlich die Verschiebungen von Punkt 1 (Zunahme der Innenbeulen an Größe und Abnahme der Außenbeulen). Dieses Durchschlagen der Steifen nach innen (bei Innenversteifung) wurde bei zahlreichen Experimenten (38), (91), (110) auch beobachtet.

Für die übrigen versteiften Zylinder ($ds/ts = 16$ und 24) ergeben sich ähnliche Zustände, jedoch stellt man eine gewisse Angleichung der Verschiebungen (im Vorbeulbereich) von Punkt 1 und 2 (annähernde Antimetrie) fest, je schwächer die Steife wird. Bild 5.14 zeigt dies z.B. für $ds/ts = 24$. Auf eine Wiedergabe des Diagramms für $ds/ts = 16$ wurde verzichtet.

Beim isotropen Zylinder ist zwischen 1 und 2 im Vorbeulbereich eine vollständige Antimetrie vorhanden (s. Bild 5.15), während 3 bis zum Primärbeulen keine radiale Verschiebung erfährt.

In Bild 5.16 sind für alle vier Fälle die maximal auftretenden Radialverschiebungen (Amplituden der Innenbeulen) dargestellt.

Im Gegensatz zu den Längsverschiebungen sind die Anfangstangenten fast alle gleich. Wie Bild 5.16 zeigt erfolgt das Primärbeulen der Zylinder nicht nur bei der gleichen Stauchung (vgl. 5.2.2), sondern auch bei der gleichen Radialverschiebung ($W/t = 0.85$ in Bild 5.16) in der Größenordnung der Zylinderwanddicke ("kritische Radialverschiebung").

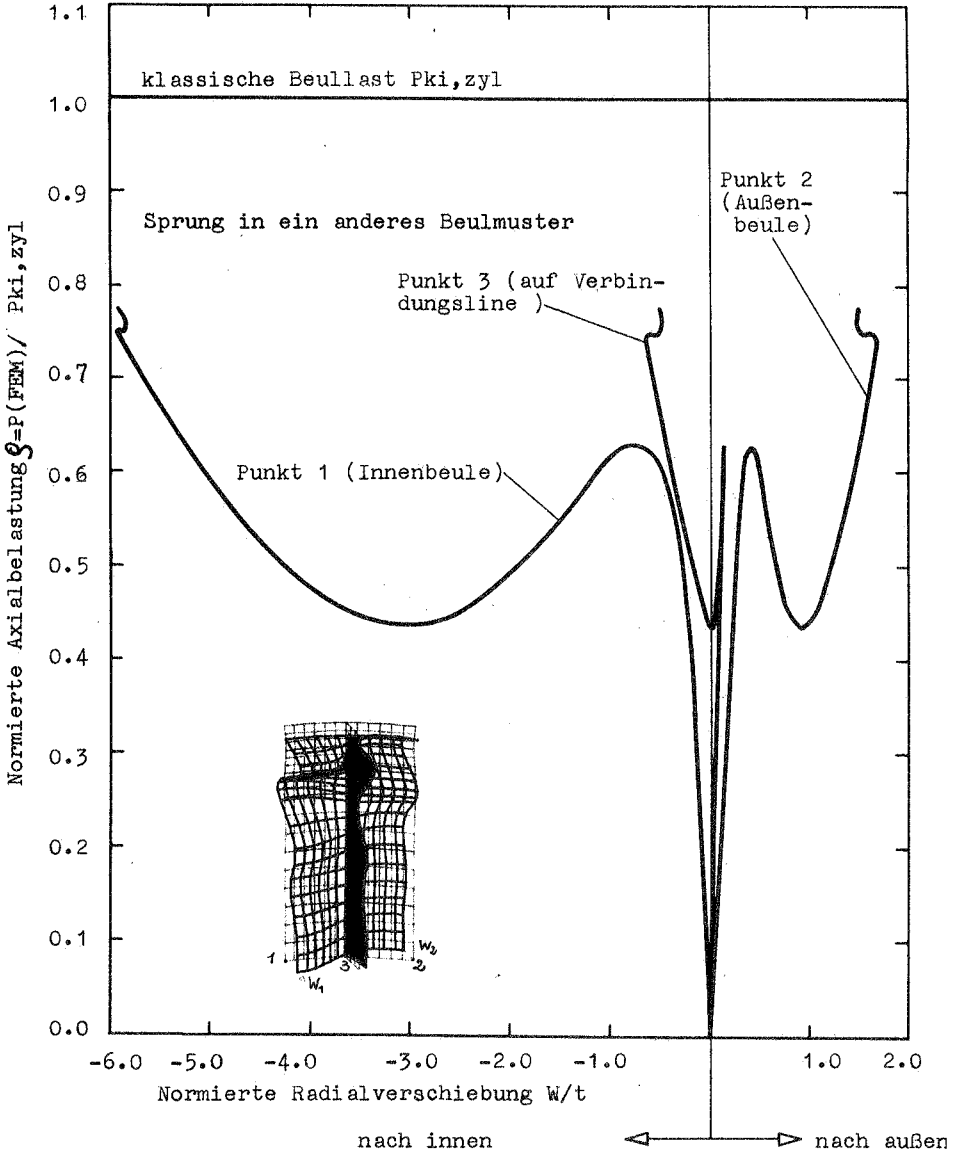


Bild 5.14 Geometrisch nichtlineare elastische Lastverschiebungskurven für $ds/ts = 24$ und $\max W_0/t = 1.0$

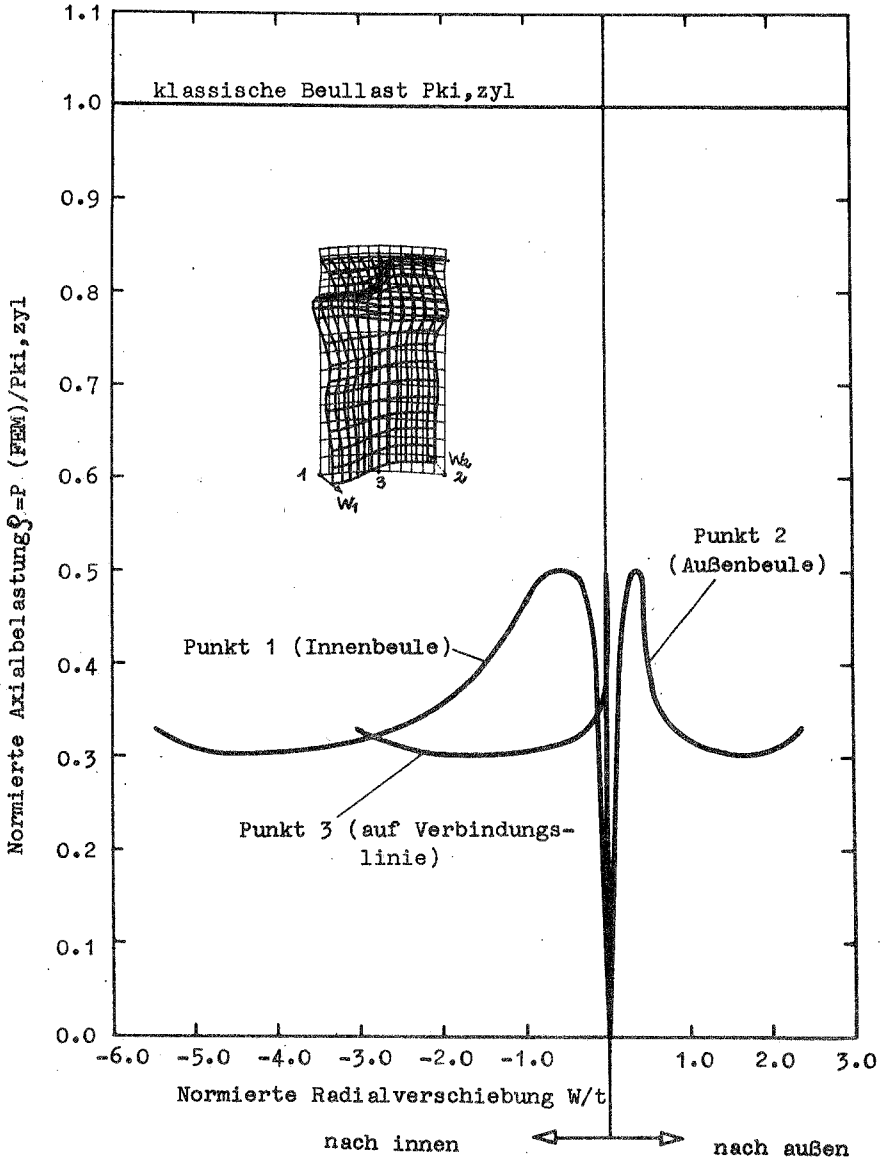


Bild 5.15 Geometrisch nichtlineare elastische Lastverschiebungskurven für den unversteiften Zylinder und $\max W_0/t = 1.0$

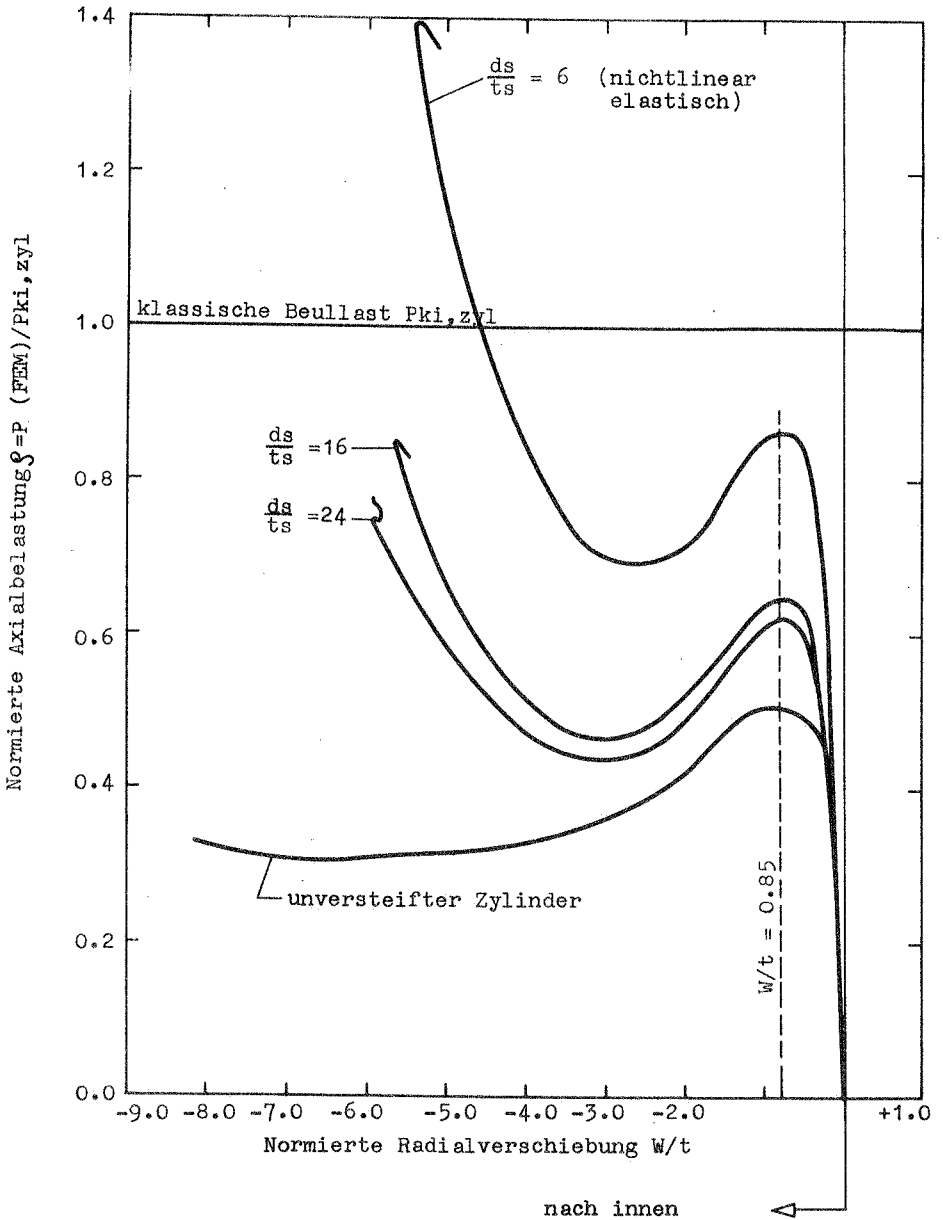


Bild 5.16 Maximale Radialverschiebungen im elastischen Bereich für $\max W_0/t = 1.0$

5.5 Art der Lastaufbringung

Die Art der Lastaufbringung auf Tragwerke ist für deren Tragverhalten und Versagensform von großer Bedeutung. Untersuchungen von SÄTTELE, RAMM und FISCHER (96) an rechteckigen Platten mit Seitenverhältnissen $\alpha \leq 1$ zeigen besonders im überkritischen Bereich starke Einflüsse der Art der Lasteinleitung mit Unterschieden bis zu 162% in den Durchschlagslasten.

Ergebnisse

Eine Gegenüberstellung beider Lastaufbringungsarten (vgl. "Vorbermerkungen" am Anfang des 5. Abschnittes) ist für den Zylinder mit $ds/ts = 16$ (UC8 aus (110) in Bild 5.7 zu sehen. Beide Fälle haben die gleiche Imperfektionsamplitude $W_0/t = 1.0$. Die Verschiebungsdiagramme der elastischen Rechnung zeigen starke Unterschiede im Tragverhalten. Die Merkmale bei der Laststeuerung sind folgende:

a) Das Primärbeulen tritt früher ein als bei der Verschiebungssteuerung. Die primäre Beullast ist um 44% niedriger.

b) Eine deutliche Nichtlinearität der Längsverschiebungen auch im Vorbeulbereich verbunden mit einem eindeutigen Durchschlagen liegt vor.

c) Es ist kein überkritisches Tragvermögen festzustellen, während bei der verschiebungsgesteuerten Belastung durch die Steife 88% mehr Tragreserven vorhanden sind.

Für die Erläuterung dieses Sachverhalts ist Bild 5.18 zu betrachten: Bei Laststeuerung findet zumindest im belasteten Rand keine Spannungsumlagerung statt, wie es bei der verschiebungsgesteuerten Belastung der Fall ist (vgl. Bild 5.10). Die Längsspannungen sind hier gleichmäßig über den ganzen Einleitungsbereich verteilt. Dies bedeutet für die von der Steife weitentfernten Bereiche eine besondere Beulgefahr, weil sie keine Unterstützung mehr erfahren (vgl. Bild 5.19): Von dort aus wird auch das frühzeitige Beulen eingeleitet.

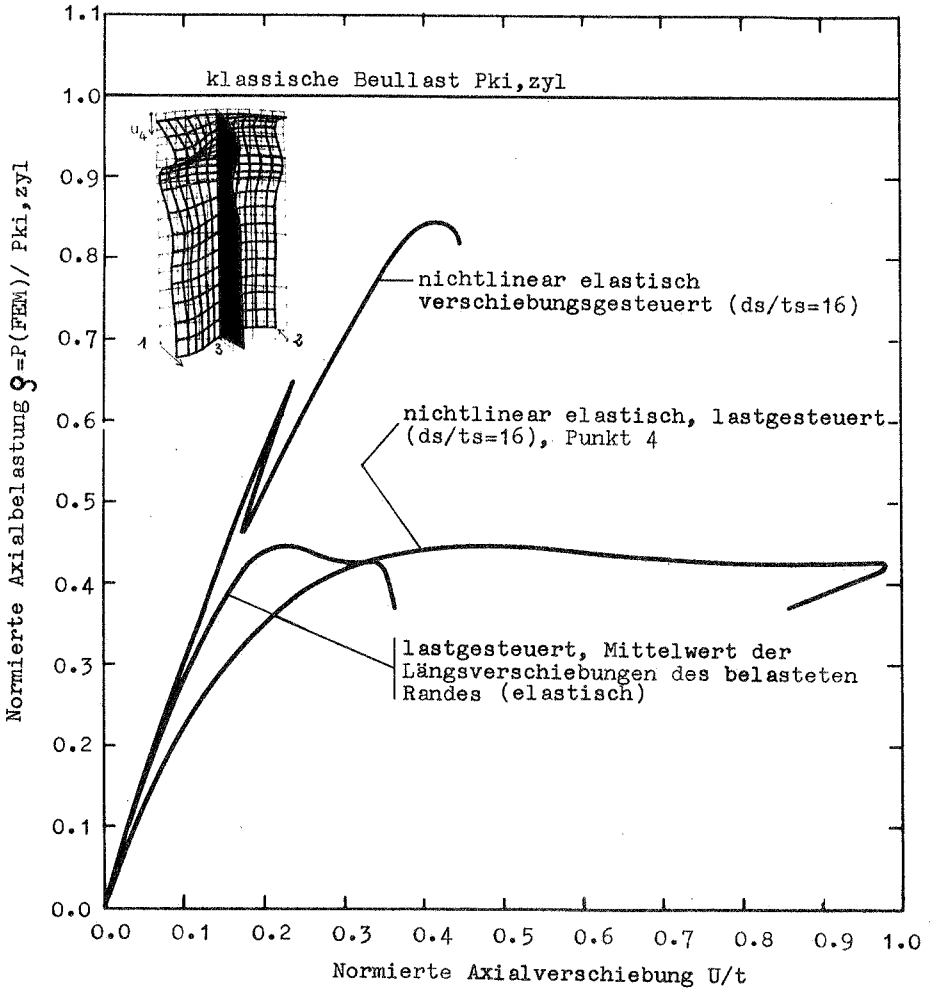
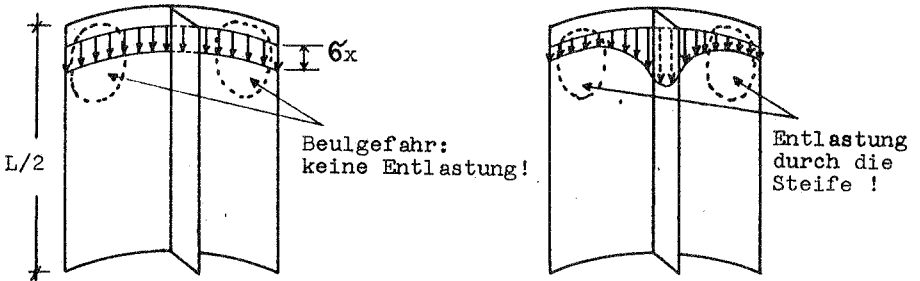


Bild 5.17 Vergleich zwischen verschiebungsgesteuerter und lastgesteuerter Belastung für $ds/ts = 16$ und $\max W_0/t = 1.0$



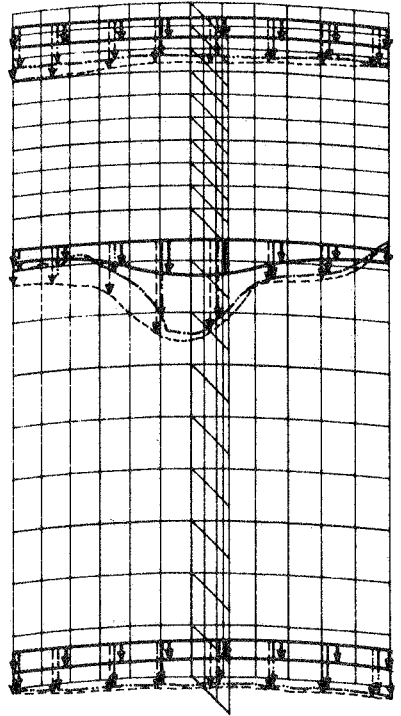
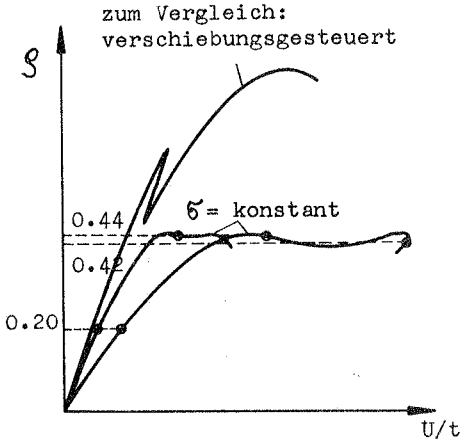
a. lastgesteuert

b. verschiebungsgesteuert

Bild 5.18 Unterschied im Beulverhalten bei lastgesteuerter und verschiebungsgesteuerter Belastung (schematisch)

Nach dem Primärbeulen (keine Umlagerung möglich) ist die gebeulte Schale weder in der Lage, Spannungen über die kritischen hinaus zu tragen, noch vermag sie sie umzulagern. Eine Laststeigerung ist deswegen nicht möglich.

Bei der Laststeuerung ist außerhalb des St. VENANT'schen Störbereichs ebenfalls eine Spannungsumlagerung erkennbar (s. zweiten Schnitt im oberen Drittel des Zylinders in Bild 5.19), weil sich die Art der Lastenteilung nicht mehr auswirkt.



Längsspannungsverteilung in
Schalenmittelfläche bei:

- $\xi = 0.20$
- - - - - $\xi = 0.42$
- $\xi = 0.44$

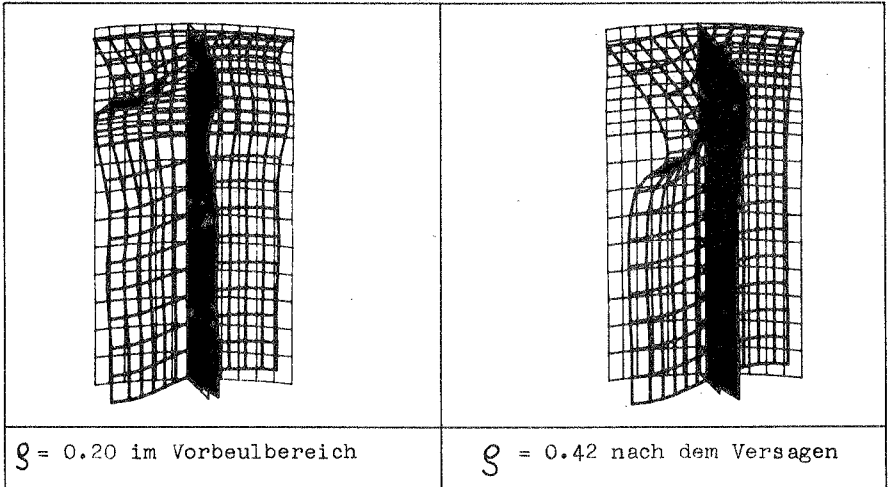


Bild 5.19 Verschiebungsfelder und Längsspannungen für
 $ds/ts = 16$ bei lastgesteuerter Belastung und
 $\max W_o/t = 1.0$

5.6 Traglastberechnungen

Die Tragfähigkeit läßt sich mit Hilfe einer nichtlinearen Berechnung gut annähern, wenn die wichtigsten Parameter (geometrische Imperfektionen, stoffliche Nichtlinearitäten, Randbedingungen, Eigenspannungen, Lastexzentrizitäten) realistisch berücksichtigt werden. Auch in diesem Fall stellt die Art der Lasteinleitung einen wesentlichen Parameter dar. Im folgenden wird jedoch nicht mehr darauf eingegangen, sondern nur mit der verschiebungsge- steuerten Belastung weiter gerechnet.

5.6.1 Ergebnisse

Das Ergebnis der elastoplastischen Berechnung für den Zylinder mit $ds/ts = 6$ ist in Bild 5.20 dargestellt. Ein Vergleich mit der elastischen Berechnung zeigt ein frühes Versagen vor Erreichen der primären elastischen Beullast. Als Werkstoff ist Stahl 37 mit einem linearelastischen, idealplastischen Spannungsdehnungsdiagramm gewählt worden ($\sigma_F = 240 \text{ N/mm}^2$, $E = 210\,000 \text{ N/mm}^2$, $\mu = 0.3$ (vgl. "Bemerkung" in Bild 5.1 unten)). Es liegt das sogenannte "werkstoffbedingte Stabilitätsproblem" vor (vgl. auch (84)). Für vorliegende Geometrie, R/t -Verhältnis und Streckgrenze ist plastisches Versagen maßgebend. Bei höherer Fließgrenze wäre das Versagen jedoch durch das elastische Primärbeulen eingeleitet, bevor es zum Plastizieren käme.

Zum Zweck eines Vergleichs ist außerdem die Quetschlast, die sich aus der Fließspannung ergibt, aufgeführt. Sie liefert im Regelfall keine zuverlässige Aussage über die tatsächliche Traglast, obwohl sie hier diesen Eindruck erweckt (die Traglast beträgt hier 97 % der Quetschlast, weil die Steifen gedrun- gen sind): Maßgebend sind für das Versagen die wirklichen Spannungen in der Schale. Außerdem sind die zulässige Last nach den ECCS-Regeln (N8) und die Traglast nach dem Berechnungskonzept von WALKER (110) wiedergegeben.

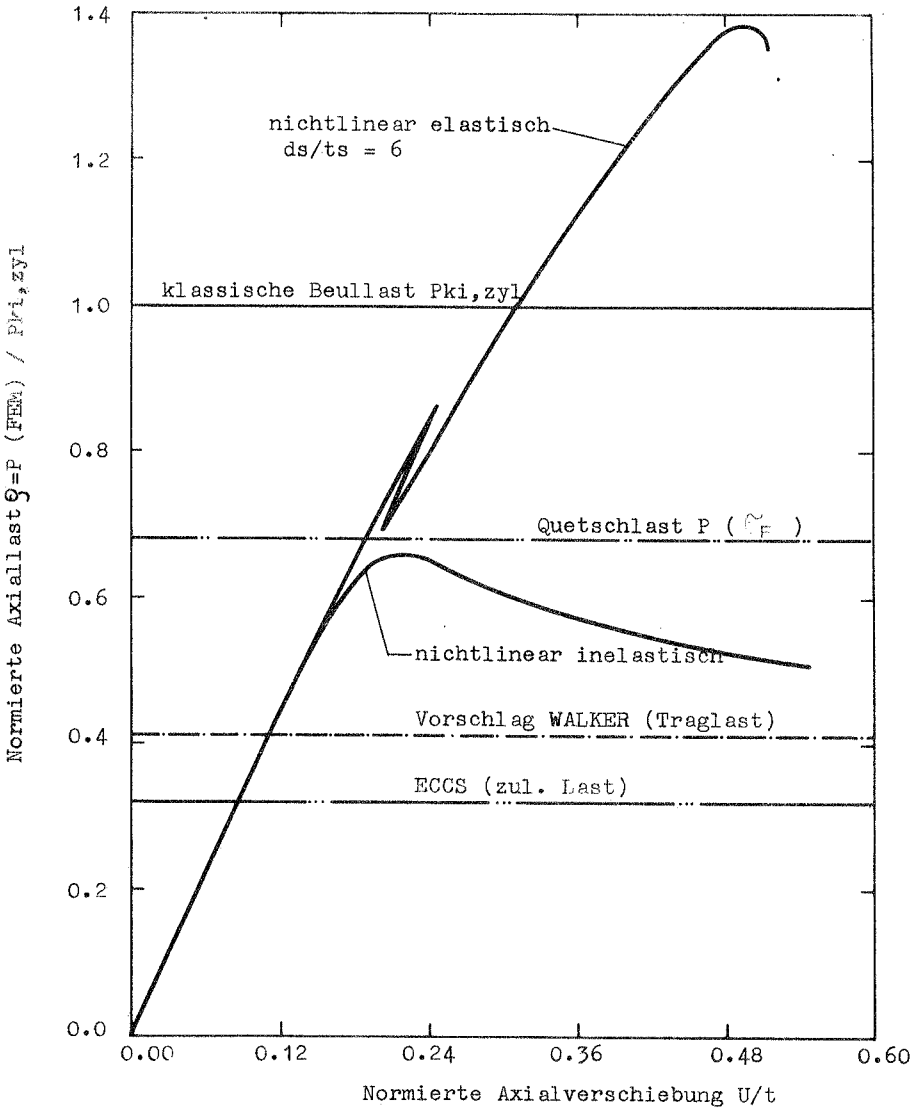


Bild 5.20 Geometrisch und werkstofflich nichtlineare Laststauchungskurven für den Zylinder mit $ds/ts = 6$ und $\max W_0/t = 1.0$

Versagensmechanismus

Die Ausbreitung der Fließzonen ist in Bild 5.21 a, 5.22 und 5.23 erkennbar; sie erfaßt ausschließlich den Einleitungsbereich. Diese Zone ist wegen der Überlagerung von POISSON'schem Effekt und großen Biegestörungen gefährdet.

Versuche an isotropen Kreiszyklindern im plastischen Bereich (1), (13), (15) zeigten als Versagensmechanismen wulstartige rotationsymmetrische Randbeulen im Einleitungsbereich. Dieser Mechanismus wurde auch rechnerisch bei allen hier berechneten Zylindern erhalten.

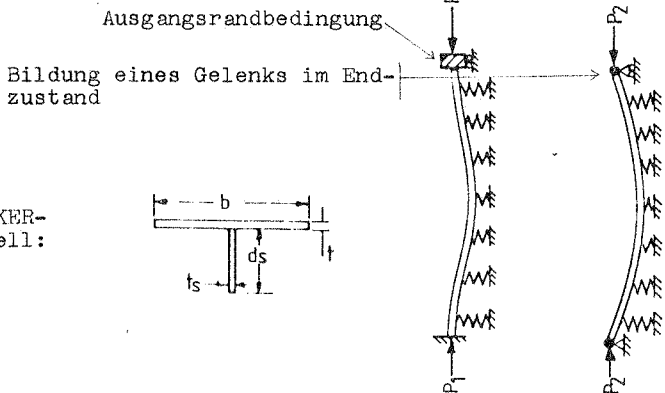
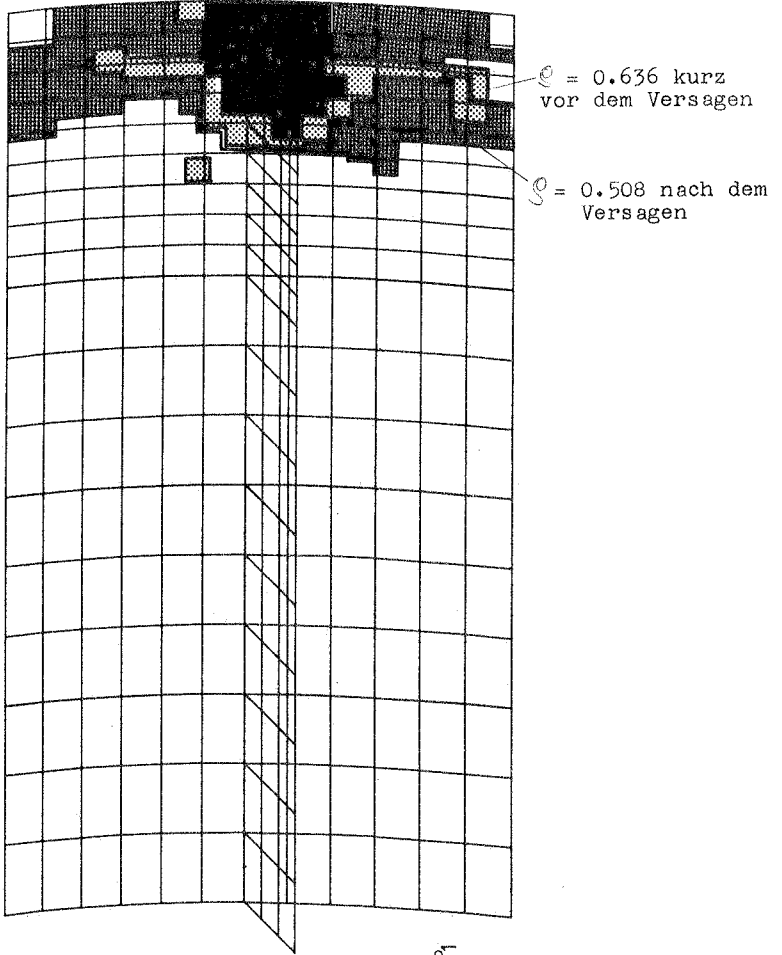
Die Fließvorgänge lassen erkennen, daß sich an den Enden der Zylinder plastische Gelenklinien bilden. Dies war für WALKER und SRIDHARAN (110) der Anlaß für die Entwicklung ihres Rechenmodells: Sie schlagen vor, die Traglastberechnung nur auf die Untersuchung eines imperfekten, gelenkig gelagerten, elastisch gebetteten Balkens mit linearer Federsteifigkeit zu beschränken. Das Modell ist in Bild 5.21 b zu sehen; es setzt sich aus einer Steife mit einer mitwirkenden Blechbreite zusammen, welche unter Berücksichtigung von Eigenspannungen ermittelt wird. Der Stab soll durch das Maximum einer Innenhalbbeulwelle des maßgebenden Beulmusters verlaufen. Das Maß für die Bettung ist aus der Analogie zur Beullast einer ebenen Platte mit der Zylinderlänge und Breite der kritischen Halbwelle in Umfangsrichtung zu ermitteln, d.h. die kritische Last des Stabmodells ist mit der Beullast der beschriebenen Platte gleichzusetzen. Der stabilisierende Effekt aus W/R wird vernachlässigt, wird jedoch bei der Bestimmung der mitwirkenden Schalenbreite berücksichtigt.

5.6.2 Vergleich zwischen Versuch und Finite-Element-Berechnung am Beispiel von "Specimen UC8" aus (110)

Über die Versuche von WALKER/SRIDHARAN ist bereits im vorherigen und in Abschnitt 2 berichtet worden. Von allen Zylindern der UC-Serie hatte UC8 den größten Steifenabstand. In Bild 5.1 sind die Schalenkennwerte wiedergegeben. Die gemessenen Imperfektionen

- 90 - $\rho = 0.50$ Fließanfang

a)



b) WALKER-
Modell:

Bild 5.21 Fließausbreitung in Schalenmittelfläche

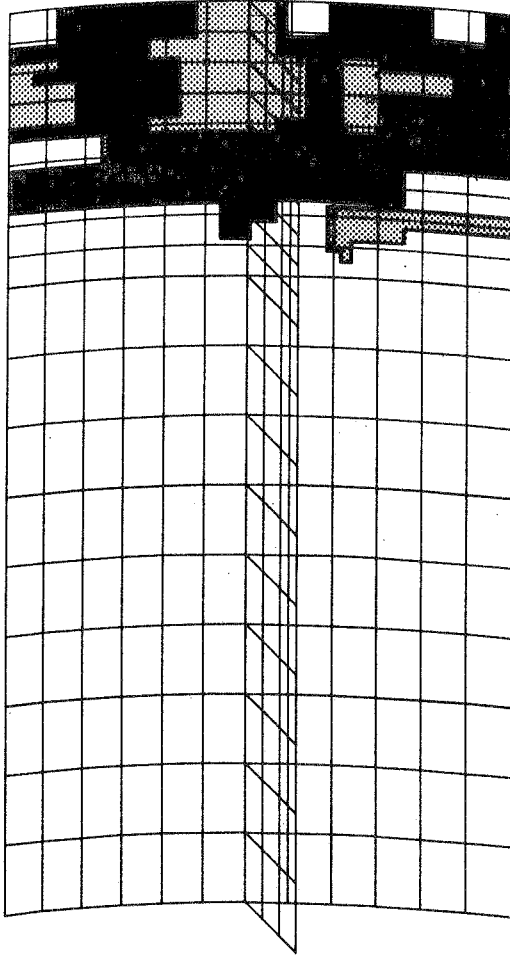


Bild 5.22 Fließausbreitung in der inneren Fläche des Zylinders

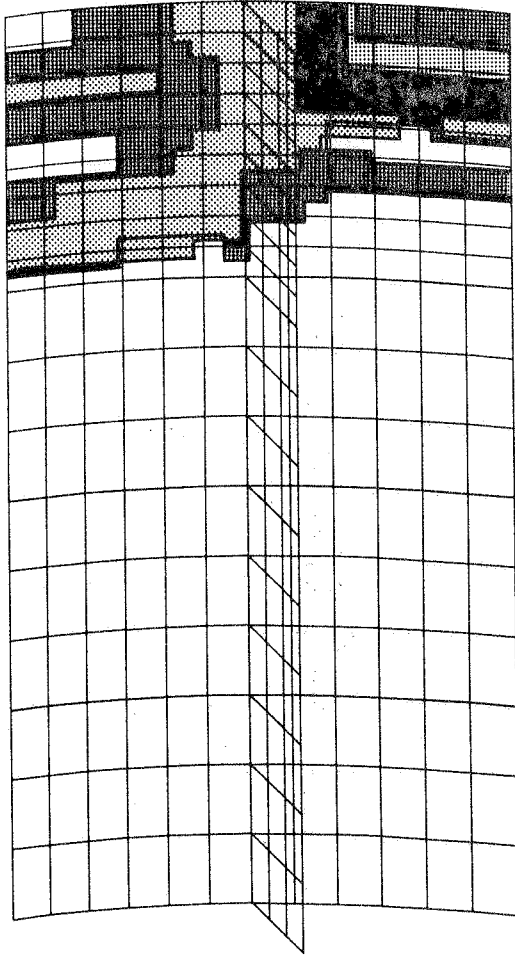


Bild 5.23 Fließausbreitung in der Außenfläche des Zylinders

sind in Bild 5.2 aufgeführt. Bei der Finite-Element-Berechnung wurde mit $\max W_o/t = 1.0$ gerechnet, wobei wieder eine eigenform-affine Imperfektion angesetzt wurde.

5.6.2.1 Versuchsergebnisse

Es herrschte volle Einspannung an den Zylinderrändern, die Belastung erfolgte unter gesteuerten Verschiebungen. Die Verschiebungsgeschwindigkeit betrug 0,01 mm/sec. Dies bedeutete, eine fünffache Fließdehnung pro Stunde anzubringen, um die Beulvorgänge genau beobachten und photographieren zu können. Das Versagen wurde durch örtliche Fließvorgänge im Material eingeleitet, gefolgt von einem sukzessiven Lokalbeulen der Schalenfelder (zackiger Verlauf in Versuchskurve - vgl. Bild 5.24 -).

5.6.2.2 Ergebnisse der FE-Berechnung ohne Eigenspannungen

Zwei Spannungsdehnungsdiagramme wurden für die Rechnung zugrunde gelegt: Mit und ohne Materialverfestigung (vgl. Bild 5.1). Experiment und rechnerische Ergebnisse können in Bild 5.24 verglichen werden. Die Längsstauchungen $\epsilon = \Delta L/L$ sind auf die Fließdehnung $\epsilon_F = \sigma_F / E$ bezogen (Abszisse), während die über die ganze Fläche gleichmäßig verteilten Längsspannungen auf σ_F bezogen werden (Ordinate).

Die Berechnung zeigt, daß die Vernachlässigung der verfestigenden Eigenschaft ein unbefriedigendes überkritisches Tragverhalten liefert (kein Wiederanstieg der Kurve), während ihre Berücksichtigung zwar eine noch höhere Traglast liefert, jedoch dem tatsächlichen Tragverhalten qualitativ näher kommt.

Die Traglastunterschiede zum Versuchswert ergeben sich zu + 6 % ohne Materialverfestigung und + 17 % mit Verfestigung.

Zum Vergleich sind die Bemessungswerte nach den DnV-Regeln (N6) und ECCS-Richtlinien (N8) angegeben. Der DnV-Wert ist sehr konservativ, weil das "Torsionsbeulen" der Steife im vorliegenden

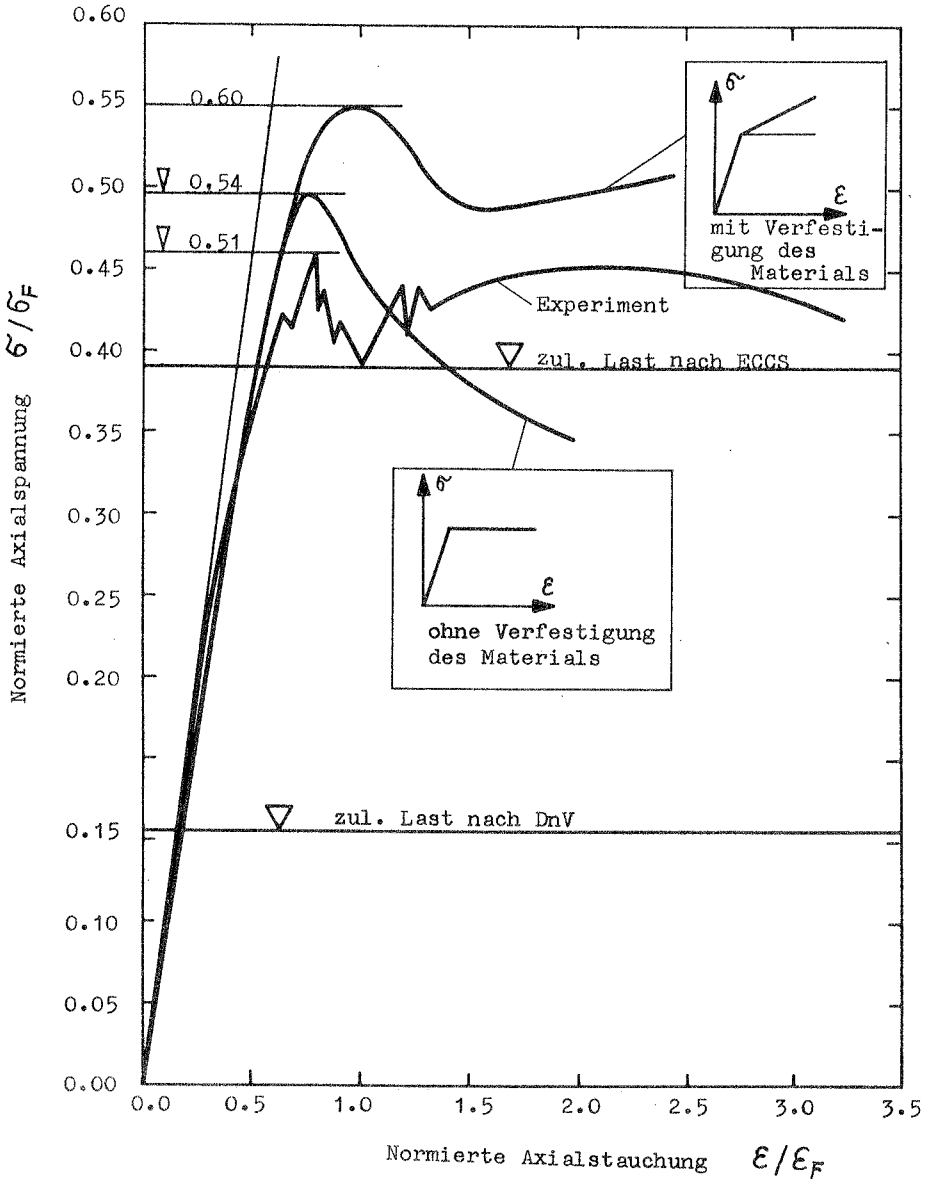


Bild 5.24 Vergleich zwischen Versuch und Finite-Element-Berechnung für Zylinder UC 8 in (110) (ohne Eigenspannungen).

Fall maßgebend ist. Auf der anderen Seite erlauben die DnV-Regeln größere Imperfektionen ($\max W_0/t = 1.8$). Dies würde zu kleineren Traglasten führen. Für $W_0/t = 2.0$ ist die Traglast z.B. nur noch $\sigma/\sigma_F = 0.42$ (vgl. Abschnitt 5.7.1 Bild 5.29).

Auch der Vorschlag der ECCS-Richtlinien liegt unterhalb der Traglast.

5.6.2.3 Einfluß der Eigenspannungen auf die Traglast

Im Schrifttum wird vielfach die Auffassung vertreten, daß Eigenspannungen wenig Einfluß auf die Traglast haben (38), (44), (45), (46), (91).

Bei geschweißten Zylindern mit Rechtecksteifen ergeben sich jedoch aus dem Eigenspannungszustand große Längsdruckspannungen auf der Steife, was zu ihrem früheren Kippen führen kann (vgl. Bild 5.25).

Bei der Versuchsserie in (110) wurden für UC8 die Eigenspannungen nur in einem Bereich der Schalenhaut gemessen (s. Bild 5.25). In unmittelbarer Nähe der Steifen, wo die Fließgrenze erreicht wird und in der Steife selbst sind keine Messungen durchgeführt worden. Diese Bereiche sind für die Berechnung durch Erfahrungswerte (68), (69), (105) ergänzt worden (gestrichelte Linie in Bild 5.25).

Das Ergebnis der Berechnung mit Verfestigung des Materials ist in Bild 5.26 zu sehen. Die Übereinstimmung der Traglast mit dem Versuchswert ist jetzt fast hundertprozentig (1 % Unterschied!). Es muß jedoch betont werden, daß die gewählte Imperfektion ein "Glückstreffer" ist. Die zweite Feststellung ist, daß die Eigenspannungen die Traglast um immerhin 18 % herabgesetzt haben. Würde man in Steifennähe nicht $2/3 \cdot \sigma_F$, sondern die volle Fließgrenze einsetzen, wäre dieser Einfluß noch größer.

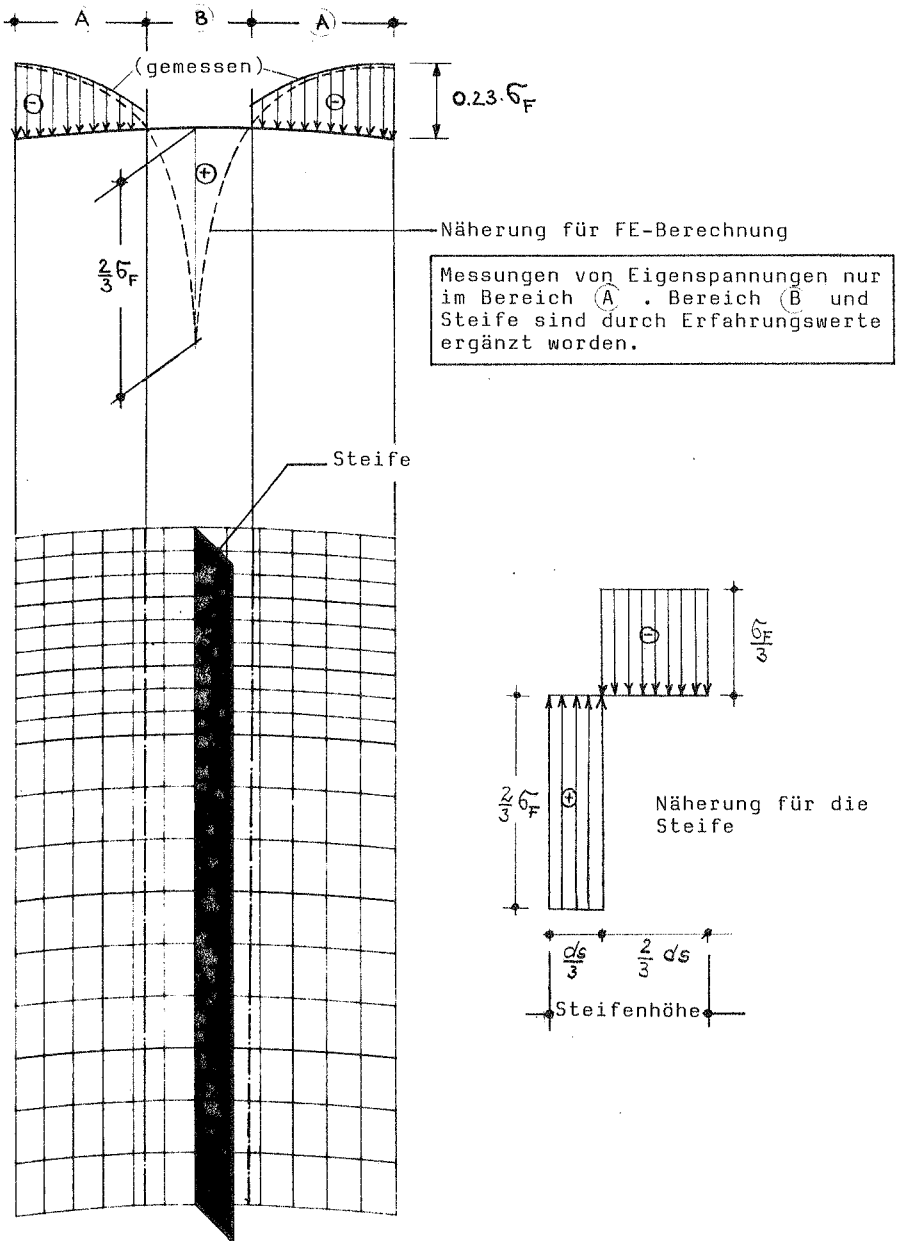


Bild 5.25 Eigenspannungen von UC 8. Gemessene Werte und Näherungen für die FE-Berechnung. Über die ganze Länge sind die Eigenspannungen konstant angenommen.

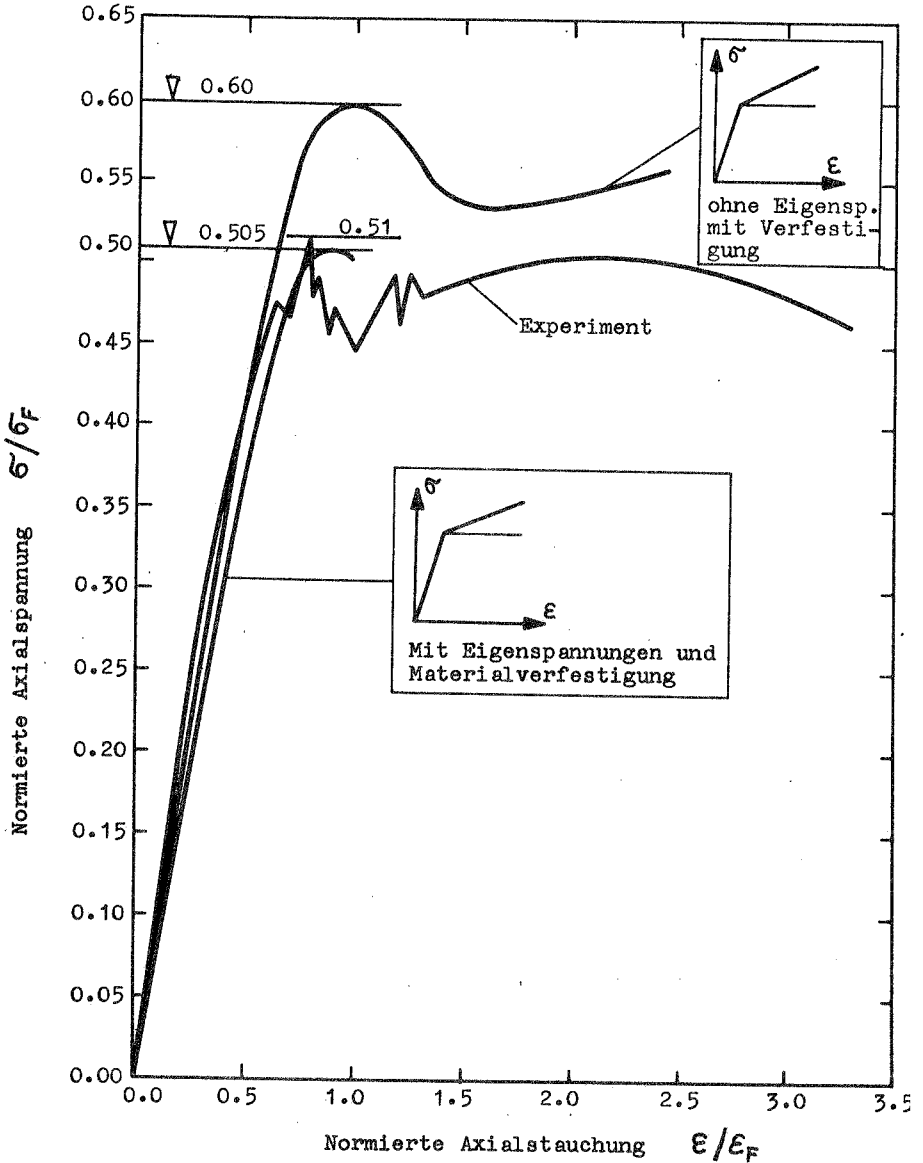


Bild 5.26 Einfluß der Eigenspannungen auf die Traglast des Versuchszyinders UC8

5.7 Einfluß der Imperfektionsamplitude auf die Traglast und Wirksamkeit von Längssteifen

Bei der Untersuchung von versteiften Kreiszyklindern unter Axialdruck kam ESSLINGER (30) zu der Schlußfolgerung, daß eine Aussteifung nur wirksam ist, wenn Längs- und Ringsteifen vorhanden sind, und daß Längssteifen allein nur bei kurzen Zylindern von Vorteil sind. Zu diesem Zweck wurde dort eine Definition dreier Kategorien von Zylindern in Abhängigkeit von einem Längenparameter \bar{L} angegeben:

$$\bar{L} = \sqrt{3(1-\mu^2)} \cdot L / \sqrt{Rt}$$

$\bar{L} = < 5$ bedeutet kurzer Zylinder,
 $5 < \bar{L} < 2.4 R/t$ mittellanger und
 $\bar{L} > 2.4 R/t$ länger Zylinder

In diesem Abschnitt soll der Einfluß der Imperfektionsgrösse auf die Traglasten und die Wirksamkeit von Längssteifen allein untersucht werden. Alle in dieser Arbeit behandelten Zylinder befinden sich mit $\bar{L} = 35$ im Bereich mittlerer Länge.

Es wurden Imperfektionsamplituden bis zu $W_0/t = 3.0$ gewählt. Diese großen Werte können bei Schadensfällen (z.B. bei Transport oder Montage) auftreten. Deswegen wurde beispielsweise in (108) vor einem Versuch an einem Zylinder absichtlich eine örtliche Imperfektion von $W_0/t = 2.0$ angebracht.

Um die Imperfektionsanfälligkeit zu beurteilen, werden die Traglasten der imperfektionsbehafteten Zylinder mit der Traglast an der perfekten Schale verglichen. Auch hier werden die vier Zylinder von Bild 5.9 betrachtet. Für die Traglastberechnungen wurde ein linear elastisch-idealplastisches Material mit denselben Kennwerten $\sigma_F = 309 \text{ N/mm}^2$ und $E = 201\,000 \text{ N/mm}^2$ zugrunde gelegt (vgl. Bild 5.1).

Ergebnisse

Bild 5.27 zeigt (am Beispiel des Zylinders mit $ds/ts = 24$), wie

die Imperfektionsempfindlichkeit ermittelt wird. Die an der perfekten Schale berechnete Traglast (für $ds/ts = 24$ beträgt sie z.B. 67 % der klassischen Beullast des isotropen Kreiszyinders) wird als Einheitslast oder 100 % gesetzt. Danach wird (für die beulaffine Imperfektion von $ds/ts = 16$) mit $\max Wo/t = 1.0, 2.0$ und 3.0 jeweils die Traglast berechnet und mit der oben beschriebenen Traglast verglichen. Der Quotient wird als Maß für die Imperfektionsempfindlichkeit bezeichnet.

Die Ergebnisse dieser Parameterstudie sind in Bild 5.28 gezeigt. Auf der Ordinate sind die Traglasten auf ihre "Einheitstraglasten" bezogen.

Die isotrope Schale erfährt starke Verluste. Bei der maximalen Imperfektion hat sie schon 64 % ihrer ursprünglichen Traglast eingebüßt. Beim Zylinder mit den gedrungeusten Steifen ($ds/ts = 6$) beträgt der maximale Abfall dagegen nur 39 %. Die prozentuale Abnahme der Traglast ist für alle Zylinder in Tabelle 5.1 zusammengestellt. Eine alternative Darstellung der Ergebnisse von Bild 5.28 ergibt sich durch Beziehung der Traglasten auf die klassische Beullast $P_{ki,zyl}$ des isotropen unverteiften Zylinders (siehe Bild 5.29).

| bezogene geom. Imperfektion Wo/t | Traglasteinbuße in % | | | |
|--|----------------------|-------------------|------------|---------|
| | $ds/ts=6$ | $ds/ts=16$ UC8 | $ds/ts=24$ | isotrop |
| 0.0 (perfekt) | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 1.0 | 23.00 | 35.00 | 35.00 | 42.00 |
| 2.0 | 34.00 | 49.00 | 49.20 | 56.00 |
| 3.0 | 39.00 | 55.00 | 50.00 | 64.00 |

Tabelle 5.1 Traglasteinbuße bezogen auf den Wert der perf. Schale

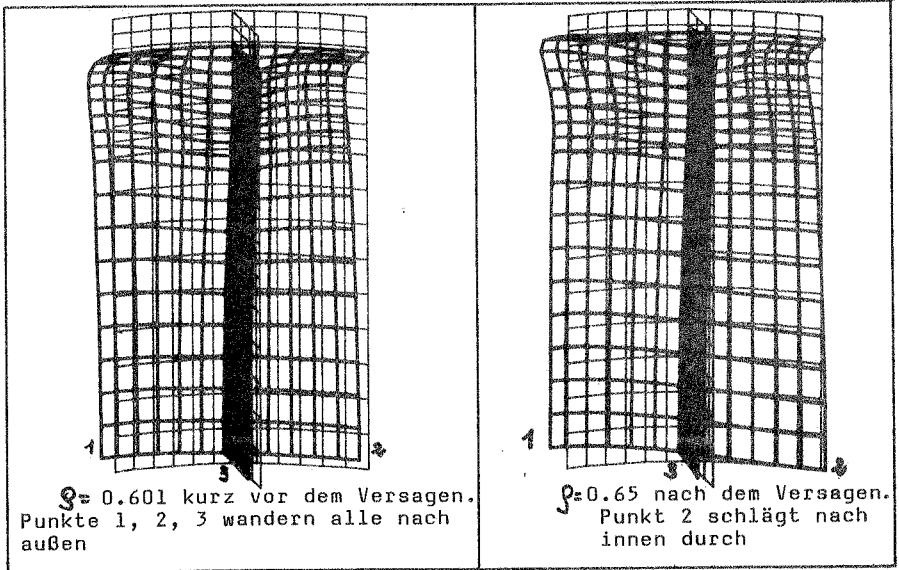
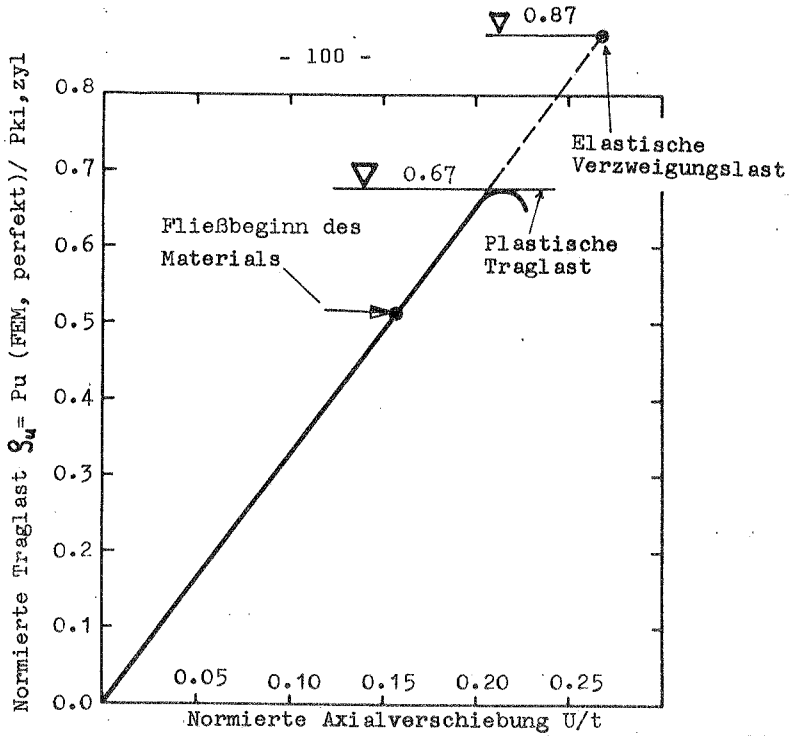


Bild 5.27 Laststauchungskurve eines perfekten Zylinders
(Fall $d_s/t_s = 24$)

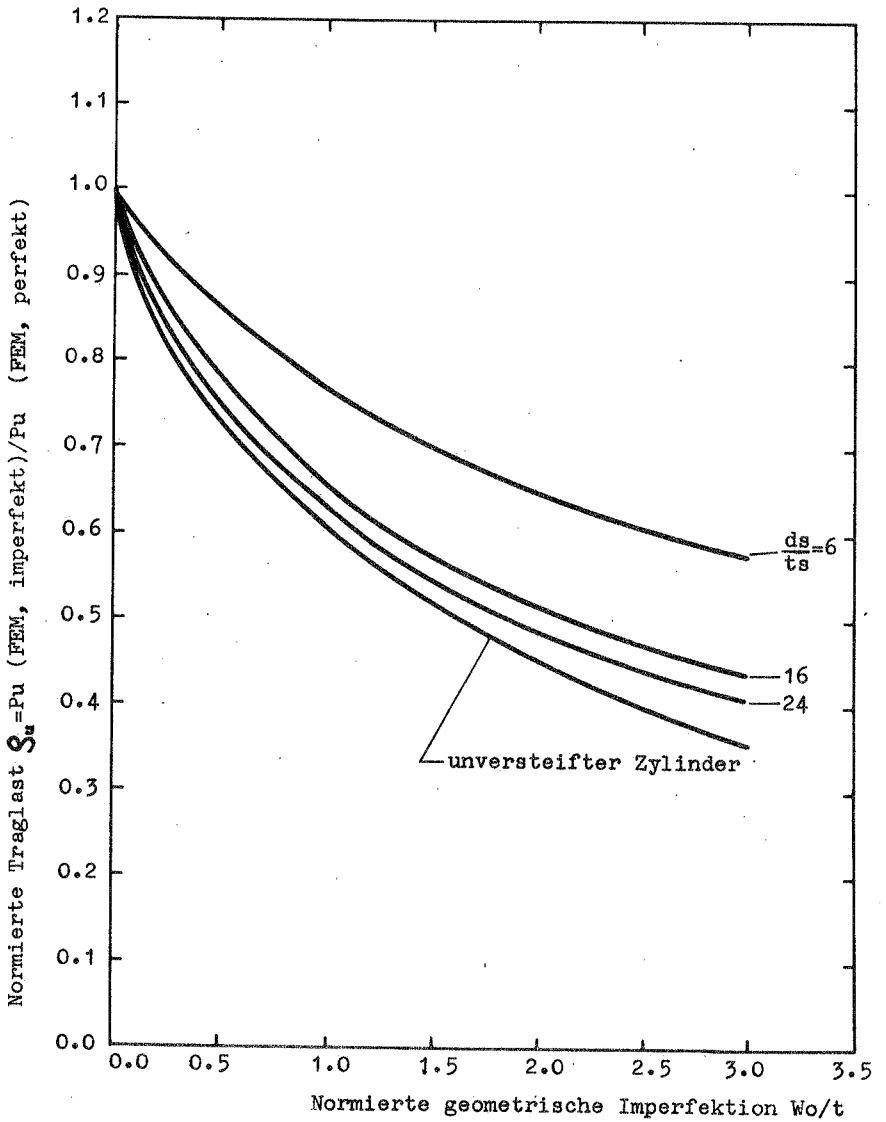


Bild 5.28 Imperfektionsempfindlichkeit: Traglasten des imperfekten, versteiften Zylinders, auf Traglast ohne Imperfektion bezogen.

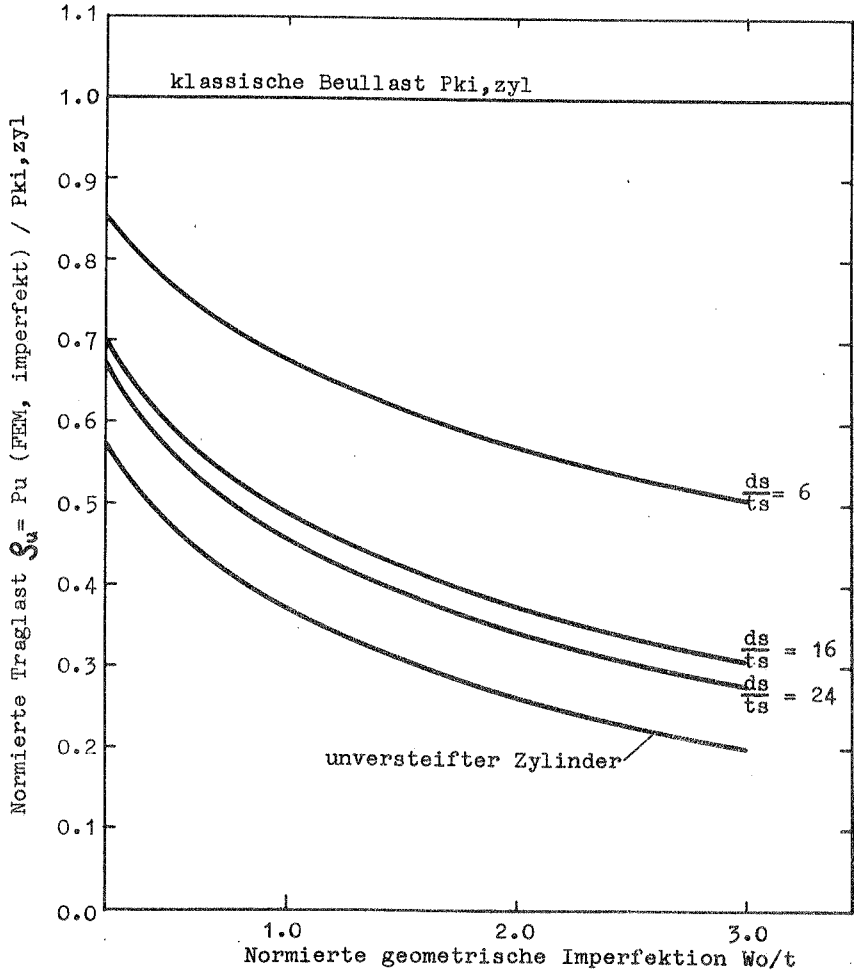


Bild 5.29 Imperfektionsempfindlichkeit: Traglasten der imperfekten, versteiften Zylinder, auf klassische Beullast des unversteiften Zylinders bezogen

Wirksamkeit der Längssteifen

Um den Vorteil der Längssteifen beurteilen zu können, ist es notwendig, zu wissen, um welchen Betrag die Tragfähigkeit der isotropen Kreiszyinderschale durch die Aussteifung gesteigert wird. Zum Vergleich werden deshalb die Traglasten des versteiften Zylinders und die des isotropen Zylinders bei identischen Imperfektionen gegenübergestellt. Bild 5.30 zeigt die Vergleichsergebnisse. Hierbei wird die Traglast $P_{u,zyl}$ des imperfekten isotropen unversteiften Kreiszyinders jeweils gleich 100 % ($S_u = 1.0$) angesetzt, um die Traglastdifferenzen besser zu verdeutlichen. Tabelle 5.2 ist eine Zusammenstellung der Ergebnisse.

| Zylinder \ max $\frac{W_0}{t}$ | Traglasten in (%) | | | | Zusätzliches Material durch die Steifen (%) |
|--------------------------------|-------------------|-----|-----|-----|---|
| | 0. | 1.0 | 2.0 | 3.0 | |
| isotrop | 100 | 100 | 100 | 100 | 0.0 |
| ds/ts=24 | 117 | 124 | 130 | 134 | 9.4 |
| ds/ts=16 | 123 | 134 | 144 | 150 | 14.2 |
| ds/ts= 6 | 149 | 190 | 220 | 243 | 37.7 |

Tabelle 5.2 Wirksamkeit von Längssteifen

In Tabelle 5.2 und Bild 5.30 sind Tendenzen erkennbar und zwar

- a) ein starker prozentualer Gewinn durch die Versteifung und
- b) die Abnahme der Imperfektionsanfälligkeit durch die Versteifung und dies umso stärker die Steifen werden.

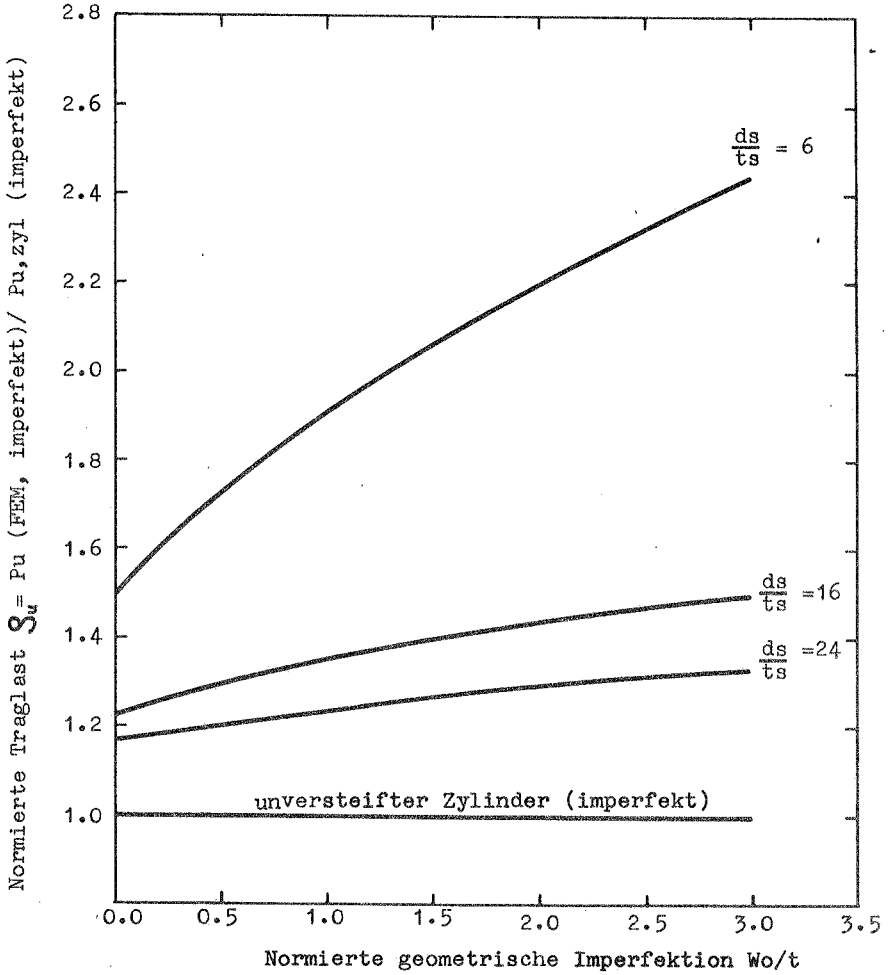


Bild 5.30 Traglastgewinn von längsversteiften Zylindern gegenüber ihrer isotropen Ausführung gleicher Wanddicke.

Um einen Eindruck von den tatsächlichen Lastunterschieden zu gewinnen, wurden die Traglasten auf Großausführungen umgerechnet.

Die hier behandelten Zylinder sind Abbildungen von typischen Off-shore-Konstruktionen im Maßstab 1:20, deren Geometrie vom englischen "Department of Energy" bei der Vergabe der Forschungsprojekte festgelegt wurde (vgl. (38) und (110)). Die Dimensionen der Großausführung von UC8 z.B. lauten: $R = 5832$ mm, $t = t_s = 16.20$ mm, $d_s = 259.2$ mm und $L = 6415.2$ mm.

Tabelle 5.3 gibt die Traglasten wieder

| | | Traglasten in (KN) | | | |
|----------------------|--|--------------------|-------|-------|-------|
| $\max \frac{W_o}{t}$ | | 0.0 | 1.0 | 2.0 | 3.0 |
| Zylinder | | | | | |
| isotrop | | 7070. | 4216. | 3080. | 2607. |
| ds/ts=24 | | 8270. | 5230. | 4004. | 3490. |
| ds/ts=16 | | 8700. | 5650. | 4435. | 3910. |
| ds/ts= 6 | | 10534. | 8010. | 6776. | 6334. |

Tabelle 5.3 Traglasten für Großausführungen

Bemerkungen zu den Ergebnissen

Die starken Traglastgewinne gegenüber der isotropen Schale in dieser Parameterstudie zeigen, daß Längssteifen allein nicht nur bei kurzen Zylindern wirksam sind (30), (54), sondern wohl auch bei mittellangen Zylindern (Dies wurde auch in (40) festgestellt). Vergrößerungsfaktoren bis zu 2.43 sind hier erzielt worden. Bei den Londoner und Glasgower Versuchen (39), (110) wurden für ähnliche Zylindergeometrien sogar Faktoren von 3.3 bis 8.9 erzielt (die Steifenanzahl betrug teilweise 40 und der zusätzliche Stahlaufwand 18 bis 51 %).

In Bild 5.31 sind die mit den für die Rechnung angenommenen Imperfektionen berechneten "wirklichen" Traglasten dargestellt.

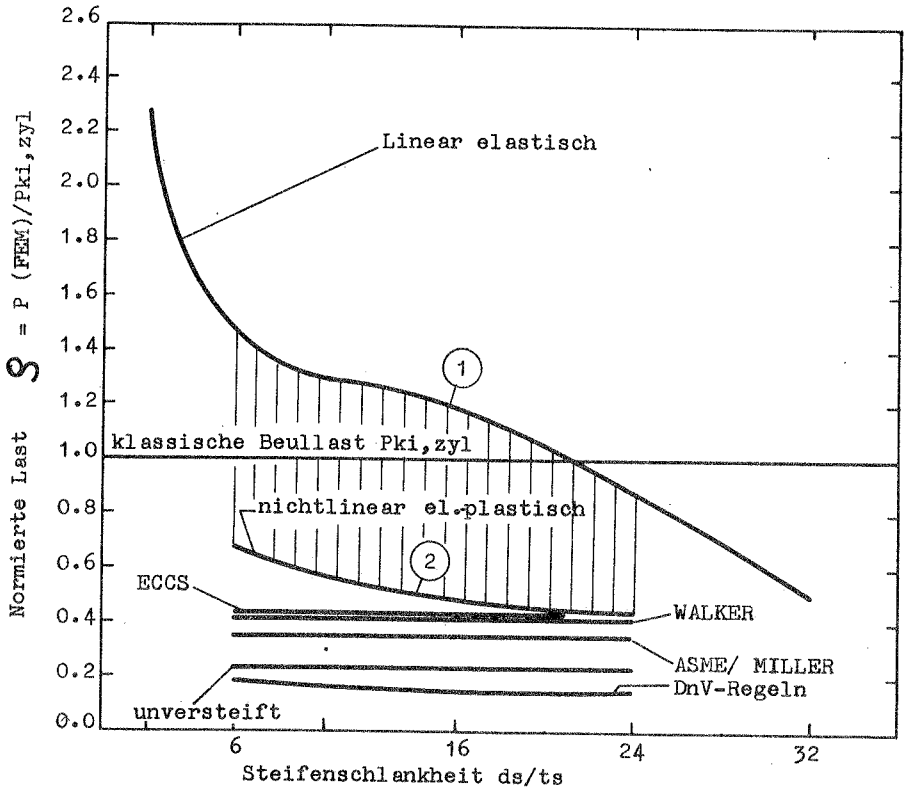


Bild 5.31 Ideale Beullasten und Traglasten.

Zwischen den idealen Beullasten (Kurve 1) und den "wirklichen" Versagenslasten (Kurve 2) für $\max W_0/t = 1.0$ liegt eine in Bild 5.31 schraffierte "Gefahrenzone", welche sämtliche Vorschriften und Normen mit empirischen Abminderungs- und Sicherheitsfaktoren zu überwinden versuchen.

Die zulässigen Traglasten nach den DnV-, ASME-Code- und ECCS-Regeln befinden sich für $\max W_0/t = 1.0$ (Kurve 2) alle auf der sicheren Seite. Die ECCS-Vorschrift liefert hier eine bessere Ausnutzung des Materials. Für $\max W_0/t = 3.0$ oder auch 2.0 ist die ECCS nicht mehr auf der sicheren Seite.

Die DnV-Regeln sind zu sehr auf der sicheren Seite, weil das sogenannte "Torsionsbeulen" maßgebend (für Fälle $d_s/t_s = 16$ und 24) ist.

Das von WALKER vorgeschlagene Rechenmodell ist wie der ECCS-Vorschlag auch für übliche Imperfektionen ($\max W_0/t = 1.0$) wirtschaftlich und auf der sicheren Seite.

5.8 Übergang vom Zylinder zur ebenen Platte

Bei der folgenden Parameterstudie steht das Verhältnis der Beullast zu R/t nicht im Vordergrund (diese sind hinreichend bekannt, (vgl. z.B. (57)), sondern der Übergang vom Zylinder zur Platte gleicher Abmessungen. Dieser Übergang wird durch allmähliche Verkleinerung der GAUSS'schen Krümmung geschaffen, während sonstige geometrische Größen unverändert bleiben (siehe Bild 5.32).

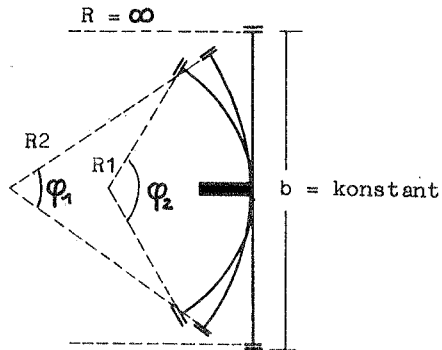


Bild 5.32 Übergang vom verbleibenden Kreiszyklinderfeld zur ebenen verbleibenden Platte

Dies kann als Vergrößerung des Zylinderumfangs verbunden mit einer Erhöhung der Steifenanzahl interpretiert werden.

Die Studie ist am Zylinder UC8 mit $ds/ts = 16$ durchgeführt worden, wobei drei gewählte R/t -Verhältnisse von 600, 1000 und 1500 jeweils mit einem MARGUERRE'schen Krümmungsparameter Ω größer als 2.0 berechnet wurden.

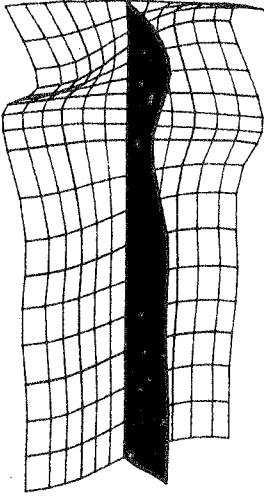
5.8.1 Ergebnisse

Die Ergebnisse der Eigenwertuntersuchungen für die linearen Beullasten sind in Bild 5.33 dargestellt. Alle Beullasten sind auf die klassische Beullast der isotropen Ausführung des Ausgangszylinders UC8 bezogen.

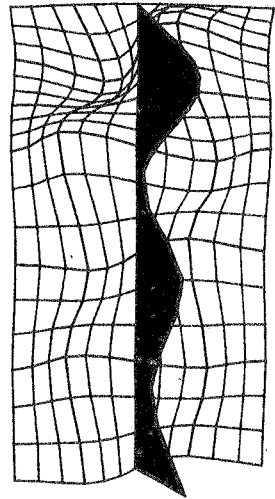
Die Umfangsbeulwellenzahl für $R/t = 600, 1000$ und 1500 hat sich gegenüber UC8 verdreifacht ($1\ 1/2$ Halbwellen anstatt $1/2$). Dies liegt offensichtlich in der Zylinderschlankheit R/t begründet: Ein Zylinder, der seine Länge bei Anwachsen von R/t nicht ändert, muß nach der FLÜGGE'schen Theorie zwangsläufig sein Schachbrettmuster in Umfangsrichtung verfeinern.

Außerdem sind die Längswellen über die ganze Länge hinweg deutlich ausgeprägt (bei UC8 sind sie im Mittelbereich weitgehend abgeklungen). Ursache dafür sind die Biegestörungen vom Einleitungsbereich: In der Tat sind die drei Zylinder mit $L/R = 0.67, 0.40$ und 0.27 so kurz, daß die Abklinglänge ihrer gedämpften Biegestörungen größer ist als $L/2$.

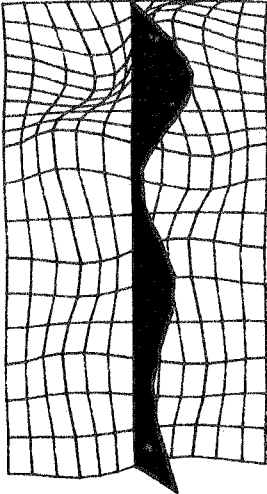
Für die ebene Platte ($R/t = \infty$) ist die Beulform des ersten Eigenwerts in Bild 5.34 zu sehen.



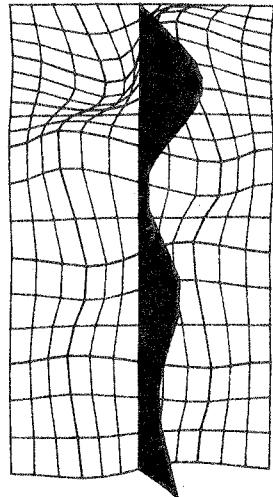
$R/t = 360$ (UC 8), $\xi = 1.19$



$R/t = 600$, $\xi = .90$

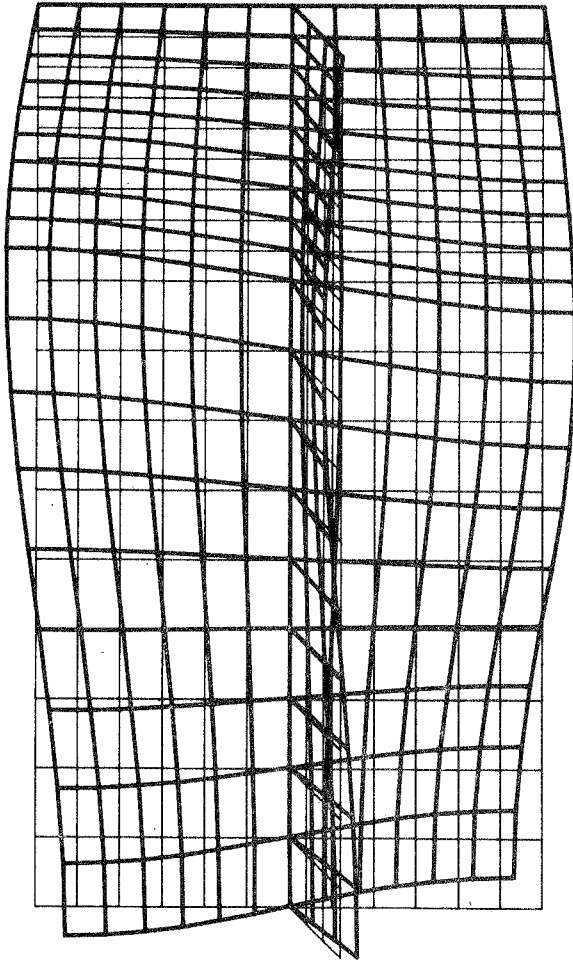


$R/t = 1000$, $\xi = .82$



$R/t = 1500$, $\xi = .79$

Bild 5.33 Erste Eigenformen für die ersten linearen Verzweigungslasten



$$\vartheta = 0.15$$

Bild 5.34 Erste Eigenform für versteifte Platte ($R/t = \infty$)

Aus Bild 5.35 ist eine Darstellung der Ergebnisse in Diagrammform zu entnehmen. Ein Vergleich zwischen UC8 und der zugehörigen Platte zeigt, daß letztere eine 8-mal kleinere ideale Beullast aufweist.

5.8.2 Vergleich des elastisch imperfekten Tragverhaltens zwischen Zylinder UC8 und zugehöriger Platte

Nach dem Vergleich der idealen Beullasten erfolgt eine Gegenüberstellung unter Einwirkung von geometrischen Imperfektionen. Die Imperfektionsamplitude beträgt $\max W_0/t = 1.0$. Für die ebene Platte ("aufgeklappter" Zylinder UC8) werden zur Bestimmung der ungünstigsten Imperfektionen zwei beulformaffine Imperfektionen zugrunde gelegt: Zum einen die erste Eigenform von UC8 wie bisher und zum anderen das eigene Beulmuster in Bild 5.34.

Ergebnisse

Die Last-Stauchungskurven im Bild 5.36 zeigen starke Unterschiede zwischen Zylinder und Platte:

a) Wegen des Wegfalls der Krümmung bei der versteiften Platte (Einfluß von W/R gleich null, wenn $R = \infty$) ist der Widerstand in Umfangsrichtung geringer, d.h. die Radialverschiebungen wachsen schneller an, was wiederum größere Längsstauchungen zur Folge hat.

b) Bei der imperfekten Platte wird in beiden Fällen bei Erreichen der Verzweigungslast bei $Q = 0.15$ überhaupt keine Instabilität registriert, dagegen ist an dieser Stelle eine Abnahme der Steifigkeit festzustellen. Dieses gutmütige Verhalten trotz Imperfektion ist eine typische Platteneigenschaft.

c) Für die Platte ist das eigene eigenformaffine Beulmuster als Imperfektion offensichtlich nicht maßgebend. Während mit dem eigenen Beulmuster als Imperfektion ein Primärbeulen bei $Q = 0.67$ erreicht wird, beträgt sie für die Imperfektionsform nach UC8 nur noch 0.43. Auch im überkritischen Bereich ist die Imperfektion von UC8 ungünstiger.

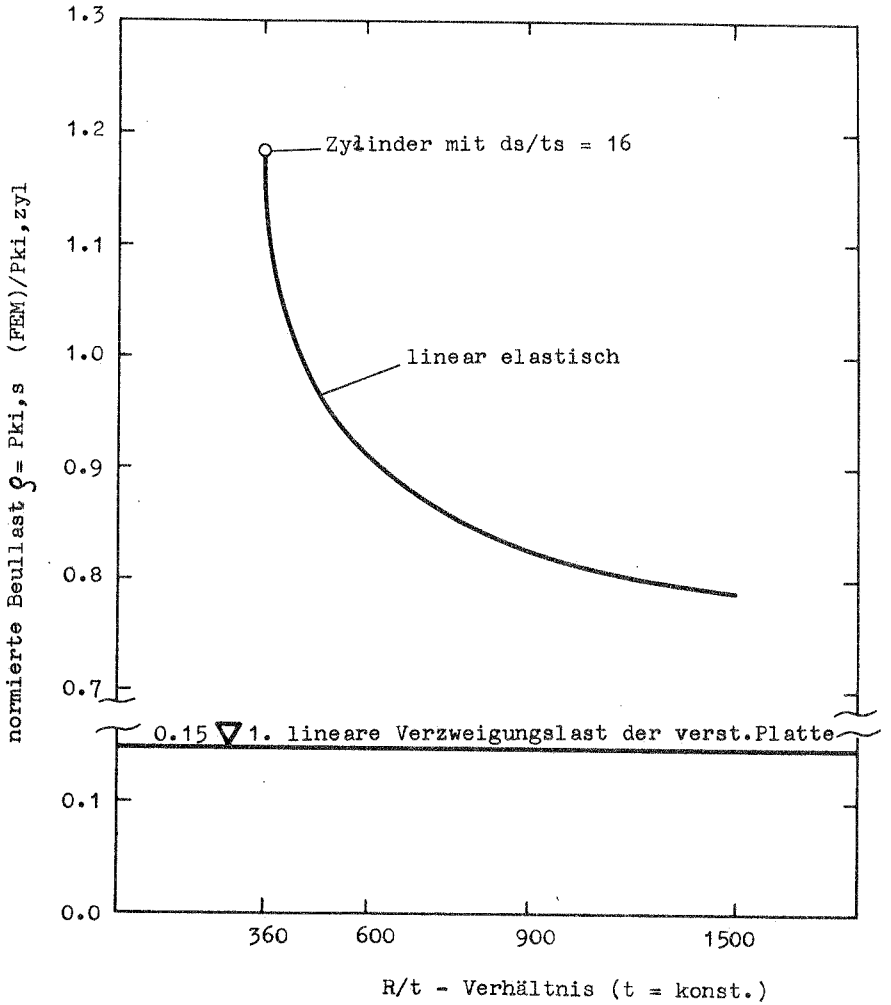


Bild 5.35 Kreiszyllindrische Schale und ebene Platte im Vergleich

Für die Platte mit eigenem Beulmuster als Imperfektion können in Bild 5.36 und 5.37 die Beulmechanismen verfolgt werden: Bei $\varrho = 0.20$ (Bild 5.37 a) ist die Verschiebungsfigur dem Beulmuster (Imperfektion) ähnlich. Bei $\varrho = 0.67$ (Punkt A in Bild 5.36) erfolgt ein Sprung in ein neues Muster (Bild 5.37 b). Die Anzahl der Halbwellen in Längsrichtung hat sich von $1 \frac{1}{2}$ auf $2 \frac{1}{2}$ erhöht. Bei Punkt B erfolgt wieder eine Umgestaltung (Bild 4.37 c), wobei die Wellenlängen sich angleichen. Punkt 1 springt von außen nach innen und 2 von innen nach außen, d.h. Innen- und Außenbeulwellen tauschen in Plattenmitte die Positionen. Nach einem anschließenden stabilen Bereich ist bei C eine nochmalige "Verzweigung" zu verzeichnen. Über C hinaus können höhere Lasten aufgebracht werden, jedoch wurde die Berechnung aus Kostengründen an dieser Stelle abgebrochen.

Für die Platte mit dem Beulmuster von UC8 als Imperfektion können in Bild 5.38 ebenfalls die Änderungen der Beulkonfiguration beobachtet werden.

5.8.3 Traglastvergleich zwischen Zylinder und Platte

Für die Traglastberechnung sind für Zylinder und Platte die gleichen Kennwerte gewählt worden (elastisch, idealplastisches Material mit $\bar{\sigma}_F = 309 \text{ N/mm}^2$, $E = 201000 \text{ N/mm}^2$, $\mu = 0.3$). Die geometrische Imperfektion ist für beide Fälle die beulaffine Imperfektion zum Muster von UC8, $\max W_0/t = 1.0$.

Ergebnisse

Bild 5.39 zeigt das Resultat. Wegen der größeren Verschiebungen treten ebenfalls größere Biegespannungen bei der versteiften Platte auf. Dies führt früher zum Fließen des Materials.

Die Platte versagt bei $\bar{\sigma}/\bar{\sigma}_F = 0.37$, UC8 bei 0.54. Dies bedeutet für den Zylinder eine um + 46 % höhere Traglast. Man beachte auch hier, daß Zylinder und Platte bei der gleichen Stauchung $\epsilon/\epsilon_F = 0.75$ versagen.

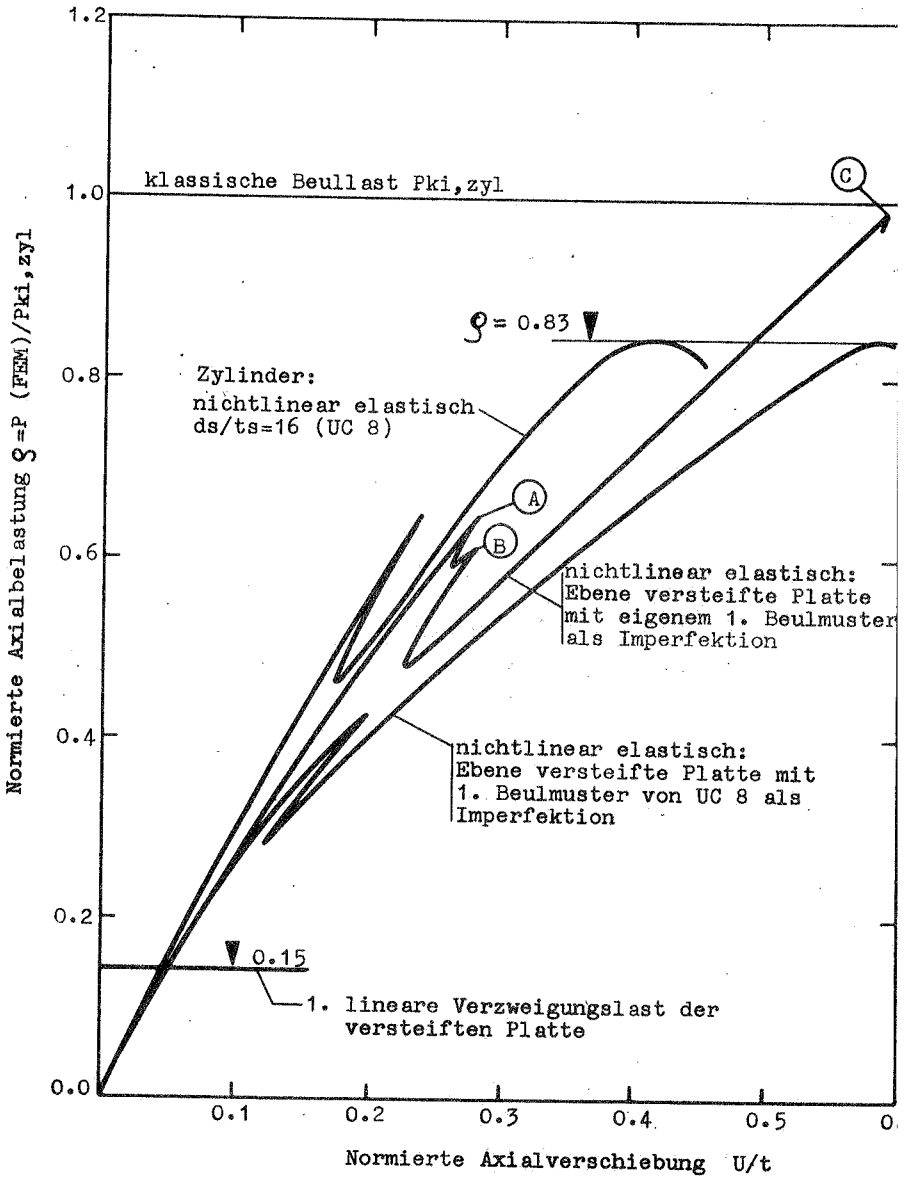
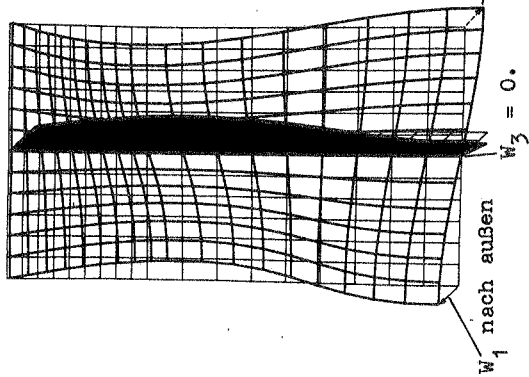


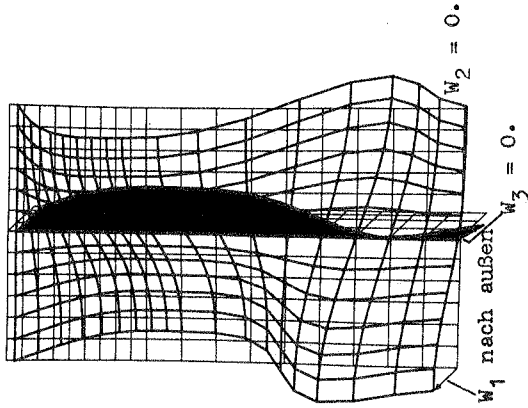
Bild 5.36 Geometrisch nichtlinear elastische Last-Stauchungskurven für Kreiszyylinder und ebene Platte beide mit Steife. $\max W_0/t = 1.0$ für alle Fälle.

Lastniveau $\xi = 0.20$



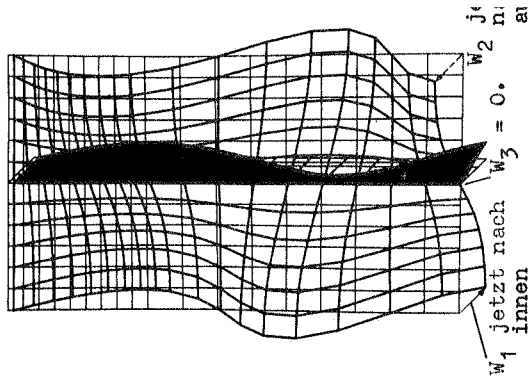
a)

$\xi = 0.627$



b)

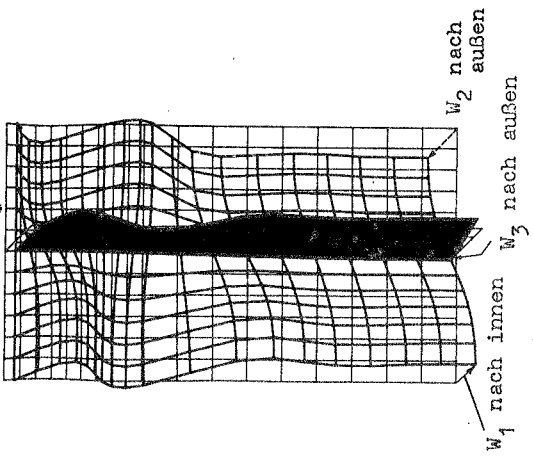
$\xi = 0.489$



c)

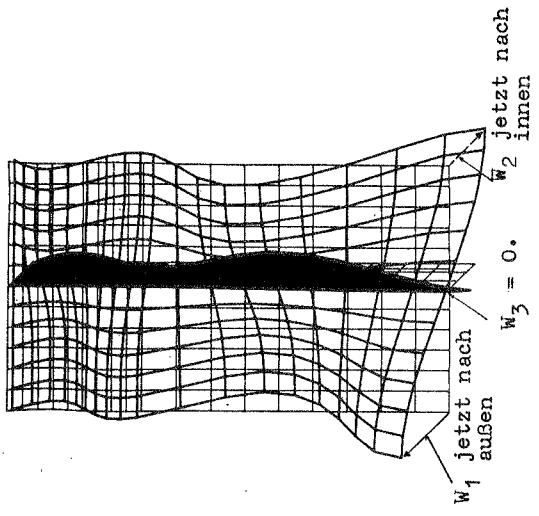
Bild 5.37 Verschiebungsfelder für die ebene versteifte Platte mit eigenem Beulmuster als geometrische Imperfektion. max. $W_0/t = 1.0$ (elastisch).

Lestniveau $\xi = 0.20$



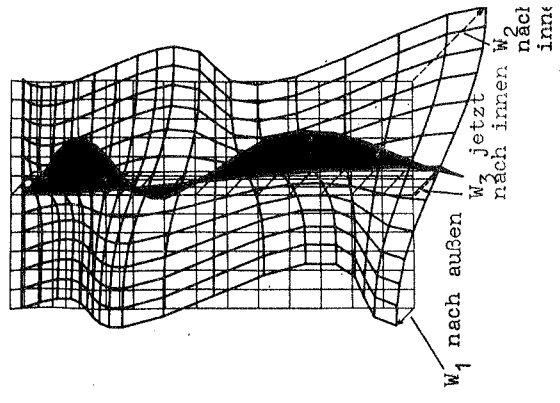
a)

$\xi = 0.305$



b)

$\xi = 0.844$



c)

Bild 5.38 Verschiebungsfelder für die ebene versteifte Patte mit Imperfektion affin zum Beulmuster von Zylinder UC8. max $W_0/t = 1.0$ (elastisch).

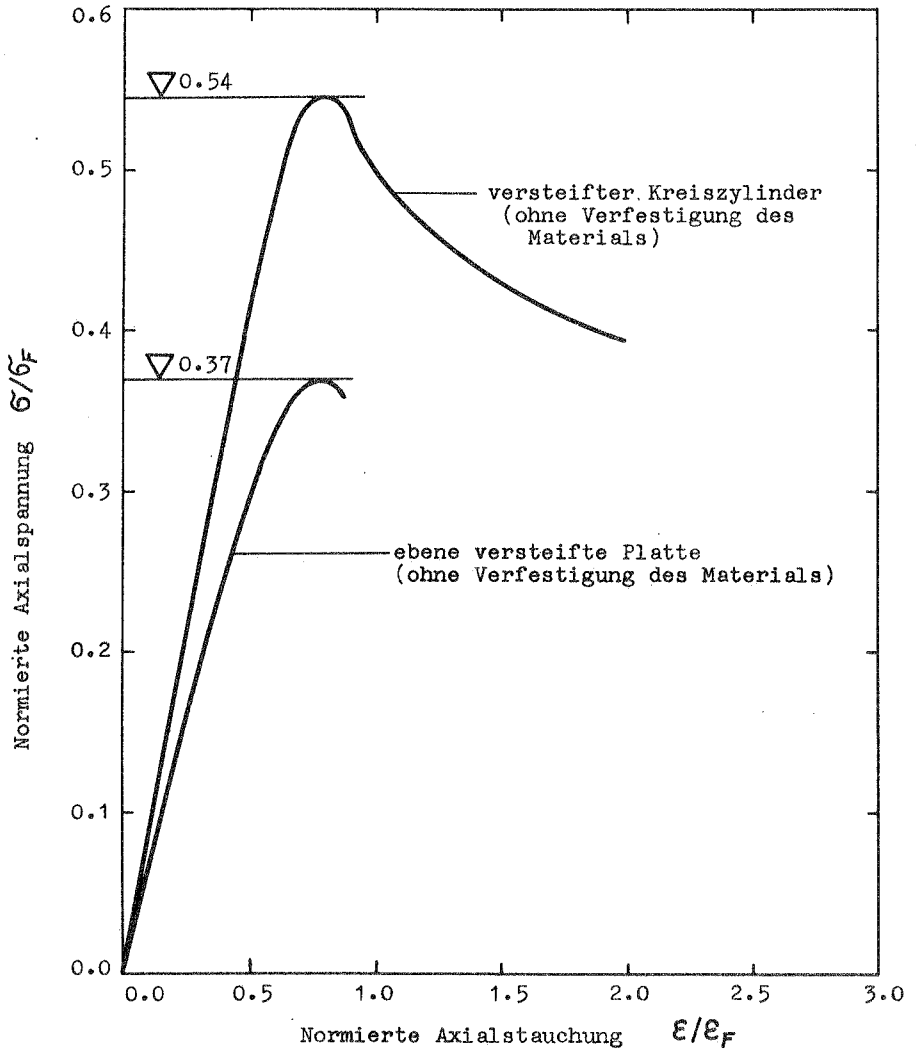


Bild 5.39 Traglastvergleich zwischen Zylinder und ebener Platte (beide versteift) mit gleichen geometrischen Imperfektionen und gleichem Material. $\max W_0/t = 1.0$

6. ENTWICKLUNG EINES ISOPARAMETRISCHEN 3 D-STABELEMENDES

Eine Idealisierung der Längssteifen als Schalen, wie sie in den vorherigen Abschnitten vorgenommen wurde, ermöglicht zwar einen weitgehenden Einblick in das Beul- und Tragverhalten der versteiften Kreiszylinderschale; sie ist jedoch rechentechnisch gesehen relativ aufwendig. Außerdem ist es in den Verschmierungskonzepten üblich, die Steifen stets als Stäbe zu berechnen.

Die Entwicklung dieses Stabelementes erfolgt deswegen in erster Linie aus Gründen der Ersparnis von Rechenzeit.

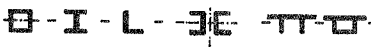
6.1 Konzept und Anwendungsmöglichkeit

Das Element liegt in isoparametrischer Darstellung vor. Die Elementmatrizen für die Lösung linearer, geometrisch nichtlinearer sowie von Stabilitätsproblemen werden mittels des Prinzips der virtuellen Verschiebungen hergeleitet. Die Interpolation des Elementes geschieht mit Hilfe der kartesischen Koordinaten und der "Normalen" einer willkürlichen gekrümmten räumlichen Linie.

Für die Berechnung von versteiften Schalenkonstruktionen kann das Element als Steife mit dem Schalenelement von NISA80 (43) ohne Verletzung der Kompatibilität gekoppelt werden, da es nach demselben Prinzip hergeleitet wurde.

6.2 Eigenschaften des Elementes

Das in Bild 6.1 dargestellte Element hat folgende Eigenschaften:

- linear elastisches Werkstoffgesetz
- beschränkt große Verschiebungen und Rotationen
- wahlweise lineare, quadratische oder kubische Interpolation
- zentrisch bzw. beliebig exzentrisch
- Möglichkeit der Bildung offener oder geschlossener Profile
(z.B. -Querschnitte)

- wahlweise Total-Lagrange (T.L) oder mitgehende Lagrange (U.L)-Formulierung
- Schubverzerrung in 2 Richtungen erfaßbar
- St. VENANT'sche Torsion möglich
- Wölbkrafttorsion nicht möglich.

Ein ähnliches Stabelement ist 1978 von BURAGOHAIN und Mit. (18) in supraparametrischer Darstellung entwickelt worden. Hiervon stellen BATHE und BOLOURCHI in (10) eine isoparametrische Formulierung vor. Beide Elemente sind zentrisch (vgl. auch (8)).

6.3 Nichtlineare Kontinuumsgleichungen und Finite Elementdiskretisierung

In Tabelle 6.1 ist eine kurze Zusammenfassung für die Herleitung der inkrementellen Gleichgewichtsgleichung zur Lösung nichtlinearer Probleme gegeben.

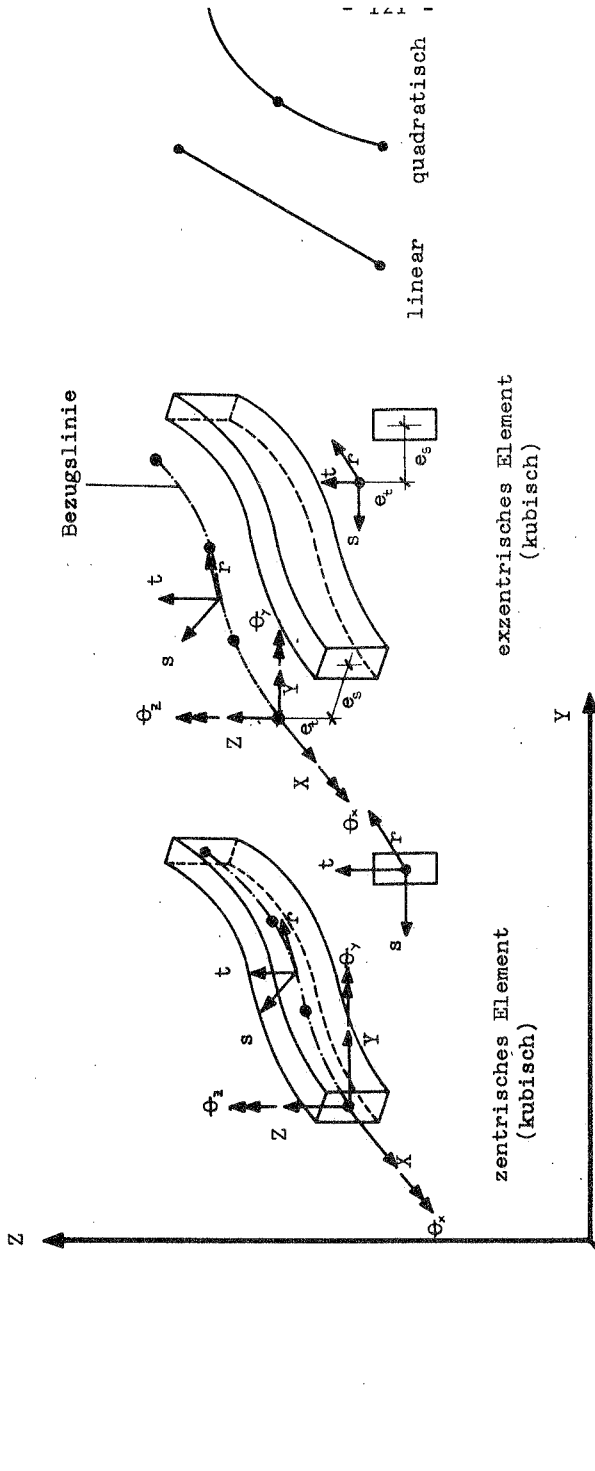
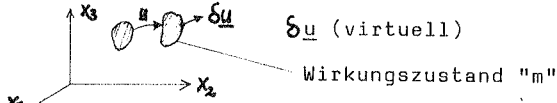


Bild 6.1 Isoparametrisches dreidimensionales Stabelement

Tabelle 6.1 Steifigkeiten, Lastverschiebungskurven, begleitende Eigenwertprobleme

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

a) für kleine Verformungen:



$$\delta W_a = \int_A \hat{t}_i \delta u_i dA + \int_V f_i \delta u_i dV$$

δW_a = äußere Arbeit, \hat{t} = Oberflächenkräfte, A = Oberfläche
V = Volumen, f = Volumenkräfte

Nach Umformungen:

$$\delta W_a = \int_V \tau_{ji} \delta \epsilon_{ij} dV = -\delta W_i \quad (6.1) \rightarrow \text{Äußere Arbeit} = \text{innere Arbeit}$$

b) für große Verformungen:

Integration über den unbekanntem Zustand "m": $\delta^m W_a = \int_V \tau_{ij}^m \delta \epsilon_{ij}^m dV = -\delta^m W_i$

Durch Umformungen und Anwendung des GAUSS-Integralsatzes wird unbekannter Zustand "m" auf den bekannten "0" transformiert:

$$\delta^m W_a = \int_{\sigma^m} S_{jk}^m \delta \epsilon_{jk}^m d\sigma^m = -\delta^m W_i \quad (6.2)$$

Kirchhoff-Piola Spannung 2. Art

Green-Lagrange-Verzerrung

Werkstoffgesetz: Setzt die Existenz eines inneren elastischen Potentials voraus.

$$(6.3) \quad {}^m S_{ij} = {}^m C_{ijkl} {}^m \epsilon_{kl}$$

Transformation ergibt

$${}^m \tau_{ij} = {}^m C_{ijkl} {}^m \epsilon_{kl}$$

CAUCHY-Spannung ALMANSI-Verzerrung

Inkrementelle virtuelle Arbeit

$$\int_{nV} \epsilon_n^T c_n \delta \epsilon_n dv + \int_{nV} s_n \eta_n dv = \delta W_a - \int_{nV} s_n \epsilon_n dv$$

Linearisierung der Verzerrungen für den Iterationsprozess, da sonst kubische Gleichungen in den Verschiebungskrementen entstehen.

$$\int_{nV} e_n^T c_n \delta e_n dv$$

Nach Diskretisierungsprozeß und Linearisierung

$$\left({}^1_n K_i + {}^1_n K_G \right) u = {}^2 P - {}^1 F \quad (6.4)$$

- ${}^n e$ = linearer Anteil der inkrementellen Verzerrung
- ${}^n \eta$ = nichtlinearer Anteil von ϵ , d.h. $\epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij}$
- ${}^1_n c$ = inkrementeller Materialtensor für den Zustand (1) (s. Bild 6.2)
- ${}^2 \delta W_a$ = äußere Arbeit
- ${}^1_n K_i$ = inkrementelle elastische Steifigkeitsmatrix
- ${}^1_n K_G$ = geometrische Steifigkeitsmatrix (Eigenspannungen)
- ${}^1_n K_i + {}^1_n K_G = {}^1_n K$ = Tangentensteifigkeitsmatrix
- u = inkrementeller Verschiebungsvektor
- ${}^2 P - {}^1 F = {}^2 R$ = Ungleichgewichtskräfte des Zustands (2) (s. Bild 6.2) am Beginn der Inkrementierung
- ${}^2 P$ = äußere Kräfte in (2), ${}^1 F$ = innere Kräfte in (1)
- n bezeichnet den Bezugszustand $n = 0$ (Total-Lagrange)
 $n = 1$ (Updated-Lagrange)

Berechnung der Last-Verschiebungskurven durch iterative Lösung von Gl. (6.4) mit Hilfe

- a) des modifizierten NEWTON-RAPHSON-Verfahrens
- b) des Standard-NEWTON-RAPHSON-Verfahrens und
- c) RIKS-WEMPNER-Verfahrens (besonders geeignet für die Überwindung von Verzweigungs- bzw. Durchschlagspunktes (75). Eine Kombination dieser Verfahren ist auch möglich.

Stabilitätsuntersuchung:

Aus dem statischen Stabilitätskriterium ergibt sich die Bedingung des indifferenten Gleichgewichts $\det({}^1_n K) = 0$. Das Kriterium gilt für Verzweigungs- bzw. Durchschlagslasten. Die im NISA-Programm vorgesehenen Eigenwertprobleme sind in unterer Tabelle zusammengefaßt:

| Eigenwertproblem | T.L-Formulierung | U.L-Formulierung |
|---|--|---|
| Vergrößerung der Anfangsspannungen | $\det({}^0_0 K_0 + {}^1_0 K_u + \lambda {}^1_0 K_G) = 0$ | $\det({}^1_1 K_0 + \lambda {}^1_1 K_G) = 0$ |
| Vergrößerung der Anfangsspannungen und Anfangsver-schiebungen | $\det({}^0_0 K_0 + \lambda ({}^0_0 K_u + {}^1_0 K_G)) = 0$ | |

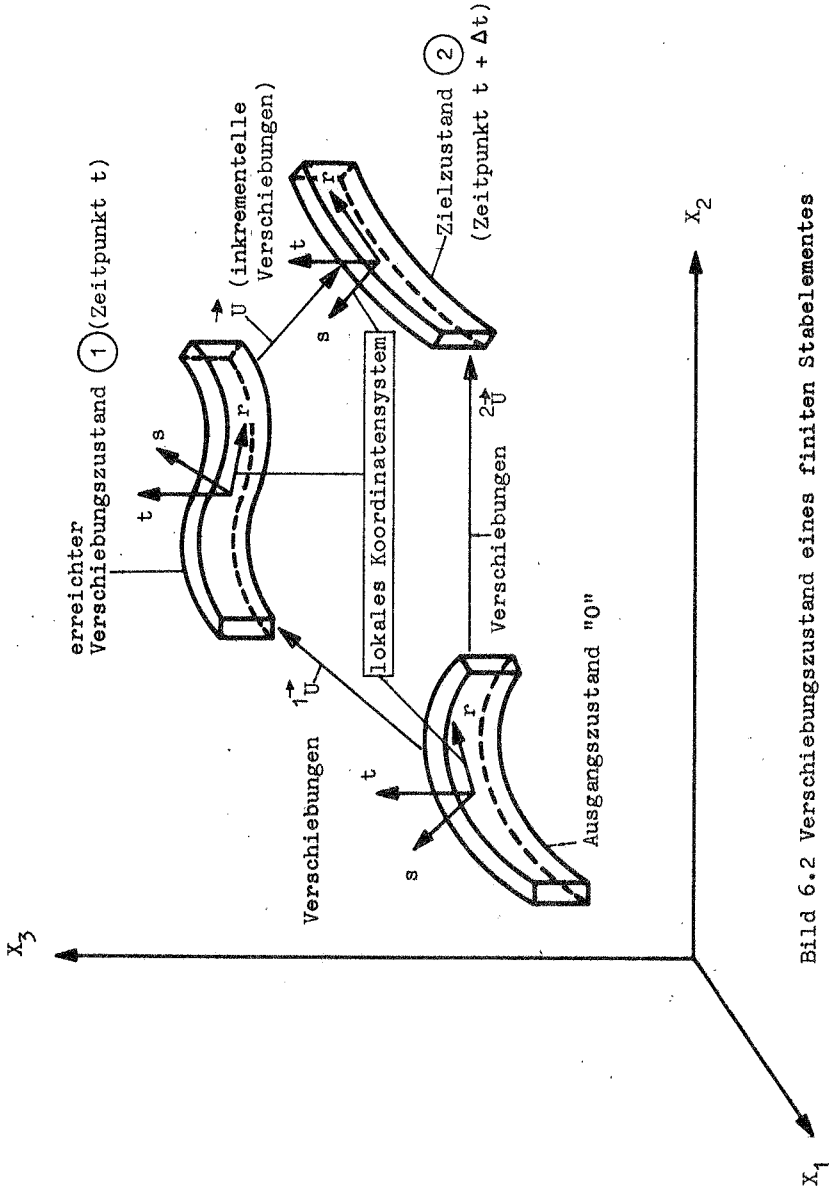


Bild 6.2 Verschiebungszustand eines finiten Stabelementes

6.4 Formulierung

Bei der Formulierung werden folgende Annahmen getroffen :

- der Querschnitt ist immer rechteckig. Breite und Höhe können innerhalb eines Elementes variieren, so daß z.B. Pyramidenstümpfe oder Pontons beschrieben werden können. Durch mehrere zusammengesetzte Elemente können weitere Querschnitte behandelt werden.

- Die zwei definierten "Normalen" \vec{t} und \vec{s} bleiben während der Deformation gerade und dehnungslos. Sie brauchen nicht senkrecht auf der Bezugslinie zu stehen, sodaß die Schubdeformationen berücksichtigt werden.

6.5 Geometrie und Verschiebungsfeld

Die isoparametrische Elementdarstellung wird zugrunde gelegt, d.h. Ausgangs- und Verschiebungsgeometrie werden in der gleichen Weise interpoliert.

Die kartesischen Koordinaten ${}^m X_k$ ($k = 1, 2, 3$) eines beliebigen Stabpunktes außerhalb der Bezugslinie im Zustand m werden ausgedrückt durch:

$$\begin{bmatrix} {}^m X_1 \\ {}^m X_2 \\ {}^m X_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^M \phi^i(\eta) \begin{bmatrix} {}^m X_1^i \\ {}^m X_2^i \\ {}^m X_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(t-e_s) \sum \phi^i(\eta) \cdot H_k^i \begin{bmatrix} \cos^m \psi_1^i \\ \cos^m \psi_2^i \\ \cos^m \psi_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(s-e_s) \sum_{l=1}^M \phi^l(\eta) \cdot H_s^l \begin{bmatrix} \cos^m \theta_1^l \\ \cos^m \theta_2^l \\ \cos^m \theta_3^l \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

hierhin bedeuten:

${}^m X_k^i$ = kartesische Koordinaten der Knotenpunkte i der Bezugslinie

$\phi^i(r)$ = Interpolationsfunktionen entsprechend zum Knoten i

r = normierte lokale Koordinate des Elementes auf der Bezugslinie ($-1 \leq r \leq 1$)

t, s die entsprechenden Koordinaten der "Normalen".
 $t = e_t \pm 1.0$ und $s = e_s \pm 1.0$ definieren die Außenflächen des Stabes. (e_s, e_t = Exzentrizitäten)

M = Gesamtzahl der Elementknoten

H_t^i = die Stabhöhe (gemessen auf der "Normalen" \vec{t}) am Knoten i

H_s^i = die Stabbreite (gemessen auf der "Normalen" \vec{s}) am Knoten i

${}^m\psi_k^i, {}^m\theta_k^i$ die Winkel der "Normalen" zu den drei Koordinatenachsen ($\cos {}^m\psi_k^i, \cos {}^m\theta_k^i$ = Richtungskosini) (vgl. Bild 6.3)

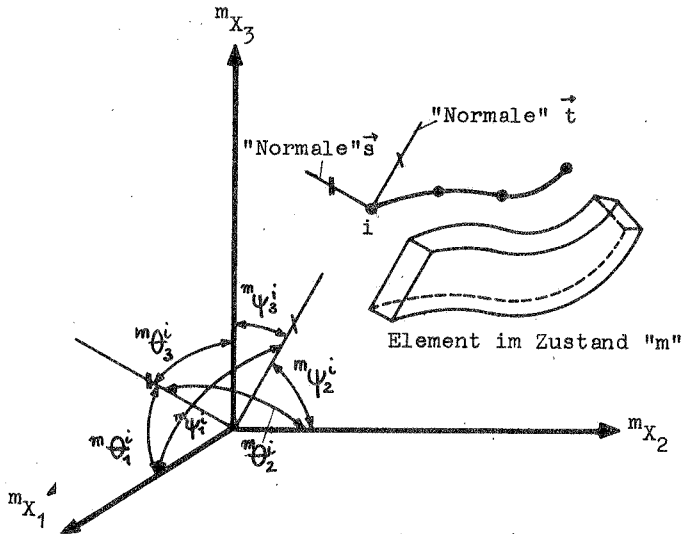


Bild 6.3: Definition der Winkel ${}^m\psi_k^i$ und ${}^m\theta_k^i$ und der "Normalen"

Das Gesamtverschiebungsfeld zur Ermittlung der inneren Kräfte (Gl. 6.4) zwischen den Zuständen "0" und "m" folgt gemäß dem isoparametrischen Konzept:

$$\begin{bmatrix} {}^m u_1 \\ {}^m u_2 \\ {}^m u_3 \end{bmatrix} = \sum \phi^i(r) \begin{bmatrix} {}^m u_1 \\ {}^m u_2 \\ {}^m u_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(t-e_t) \sum \phi^i(r) H_t^i \begin{bmatrix} \cos^m \psi_1^i - \cos^0 \psi_1^i \\ \cos^m \psi_2^i - \cos^0 \psi_2^i \\ \cos^m \psi_3^i - \cos^0 \psi_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(s-e_s) \sum \phi^i(r) H_s^i \begin{bmatrix} \cos^m \theta_1^i - \cos^0 \theta_1^i \\ \cos^m \theta_2^i - \cos^0 \theta_2^i \\ \cos^m \theta_3^i - \cos^0 \theta_3^i \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

${}^m u_k^i (k=1, 2, 3)$ = Verschiebungen der Knotenpunkte der Bezugslinie

$$\begin{aligned} \cos^m \psi_1^i \\ \cos^m \psi_2^i &= \sin^m \psi_1^i \cdot \cos^m \varphi^i \\ \cos^m \psi_3^i &= \sin^m \psi_1^i \cdot \sin^m \varphi^i \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \cos^m \theta_1^i \\ \cos^m \theta_2^i &= \sin^m \theta_1^i \cdot \cos^m \varrho^i \\ \cos^m \theta_3^i &= \sin^m \theta_1^i \cdot \sin^m \varrho^i \end{aligned}$$

Die drei Rotationen eines Knotenpunktes werden nicht als physikalische Größen gewählt. Vielmehr wird aus der unendlichen Anzahl der Möglichkeiten zur Beschreibung der Rotationen die Winkel ${}^m \psi_1^i$, ${}^m \varphi^i$ und ${}^m \theta_1^i$ als unabhängige Variablen ausgewählt. Diese Wahl ist von großer Bedeutung im Hinblick auf die spätere Kopplung mit dem Schalenelement in NISA80, wo für die "Normale \vec{t} " die gleichen Rotationen definiert wurden (74).

${}^m \psi_1^i$ = Winkel zur Koordinatenachse ${}^m x_1$ der "Normalen \vec{t} "

${}^m\varphi^i$ = Winkel zwischen der in die ${}^mX_2 - {}^mX_3$ -Ebene projizierten "Normalen \vec{t} " und der mX_2 -Achse

${}^m\theta_1^i$ = Winkel zur Koordinatenachse mX_1 der "Normalen \vec{s} " und der mX_1 -Achse

${}^m\Omega^i$ = Winkel zwischen der in die ${}^mX_2 - {}^mX_3$ -Ebene projizierten "Normalen s " und der mX_2 -Achse.

$${}^m\psi_1^i = {}^o\psi_1^i + {}^m\beta^i$$

$${}^m\varphi^i = {}^o\varphi^i + {}^m\alpha^i$$

$${}^m\theta_1^i = {}^o\theta_1^i + {}^m\omega^i$$

$${}^m\Omega^i = {}^o\Omega^i + {}^m\gamma^i$$

(6.8)

${}^m\alpha^i, {}^m\beta^i, {}^m\omega^i$ und ${}^m\gamma^i$ sind die unbekanntenen Winkeländerungen, die man als Rotationen identifiziert (vgl. Bild 6.4).

${}^m\alpha^i$ = Rotation um die mX_1 -Achse: Bewegung I in Bild 6.4

${}^m\beta^i$ = Veränderung des Winkels ${}^m\psi_1^i$ zur mX_1 -Achse (Richtungskosinus): Bewegung II in Bild 6.4.

${}^m\gamma^i$ = Veränderung des Winkels ${}^m\Omega^i$ zur mX_2 - Achse
: Bewegung III in Bild 6.4.

${}^m\omega^i$ = Veränderung des Winkels ${}^m\theta_1^i$ zu mX_1 -Achse: Bewegung IV in Bild 6.4. (Richtungskosinus)

Die Reihenfolge der Bewegungen I bis IV ist unbedingt einzuhalten (keine Vektoreigenschaften!).

Die Richtung der "Normalen" \vec{t} und \vec{s} darf im Ausgangszustand nicht mit der mX_1 -Achse zusammenfallen (${}^o\psi_1, {}^o\theta_1 \neq 0$ und 180° !); sonst versagt die Auswahl der Unbekannten.

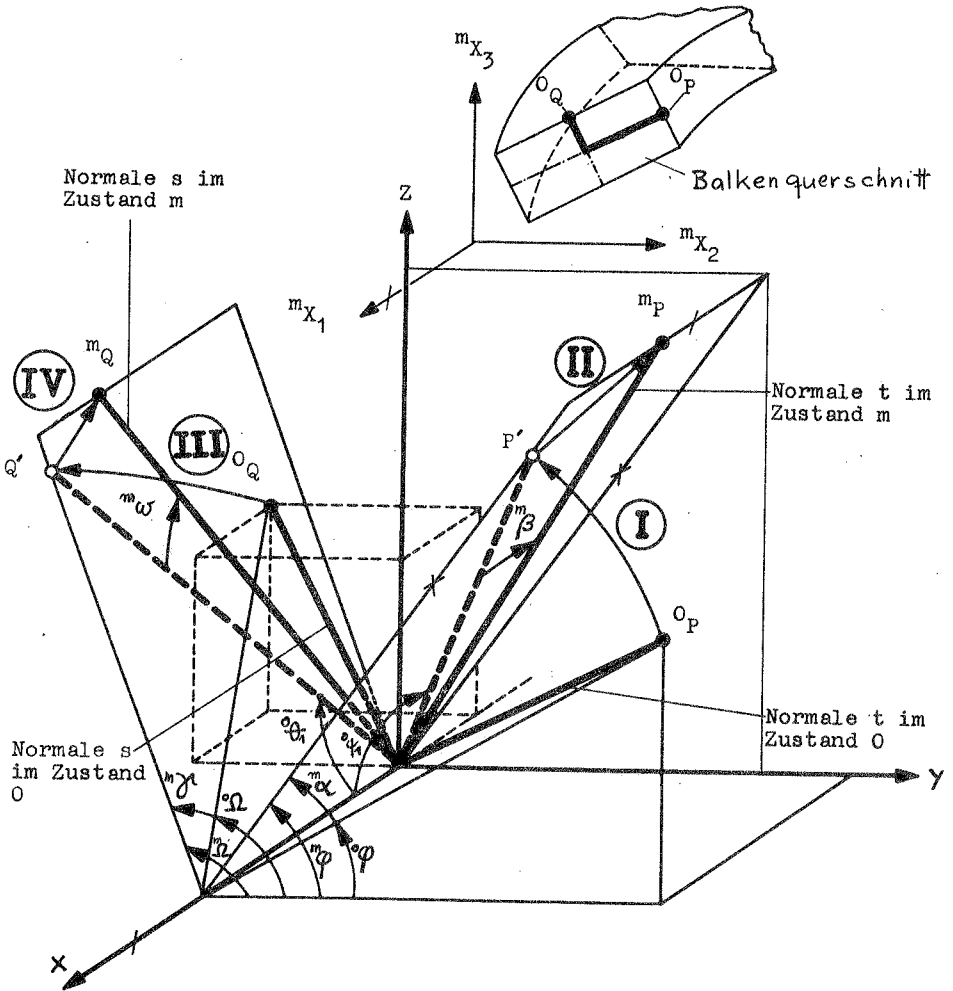


Bild 6.4 Rotationen der "Normalen" im Raum

Die voneinander unabhängigen Winkeländerungen ${}^m\alpha^i$, ${}^m\beta^i$, ${}^m\omega^i$ und ${}^m\gamma^i$ ergeben mit den drei Verschiebungen ${}^mU_1^i$, ${}^mU_2^i$ und ${}^mU_3^i$ für jeden Punkt des Stabelementes sieben Freiheitsgrade. Da man jedoch nur sechs Freiheitsgrade haben darf, ist es notwendig, eine Zwangsbedingung zu formulieren, die eine der Winkeländerungen mit den Übrigen koppelt. Diese Zwangsbedingungen wird dadurch erreicht, daß man im Zustand m nach den Inkrementierungen verlangt, daß der Winkel zwischen den "Normalen" \vec{s} und \vec{t} 90° bleibt (Rechteckquerschnitt undeformierbar!).

Das Skalarprodukt von \vec{s} und \vec{t} im Zustand m lautet:

$$\vec{s} \cdot \vec{t} = |\vec{s}| |\vec{t}| \cdot \cos \nabla$$

Für $\nabla = 90^\circ$, muß das Skalarprodukt verschwinden. Mit den Richtungskosini von \vec{s} und \vec{t}

| | mX_1 | mX_2 | mX_3 |
|-----------|-----------------------|---|---|
| \vec{s} | $\cos {}^m\theta_1^i$ | $\sin {}^m\theta_1^i \cdot \cos {}^m\Omega^i$ | $\sin {}^m\theta_1^i \cdot \sin {}^m\Omega^i$ |
| \vec{t} | $\cos {}^m\psi_1^i$ | $\sin {}^m\psi_1^i \cdot \cos {}^m\varphi^i$ | $\sin {}^m\psi_1^i \cdot \sin {}^m\varphi^i$ |

erhält man in Gl. 6.9 den Ausdruck für das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \cos {}^m\theta_1^i \cos {}^m\psi_1^i + \sin {}^m\theta_1^i \cdot \cos {}^m\Omega^i \cdot \sin {}^m\psi_1^i \cos {}^m\varphi^i \\ + \sin {}^m\theta_1^i \cdot \sin {}^m\Omega^i \cdot \sin {}^m\psi_1^i \cdot \sin {}^m\varphi^i = 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Aus dieser Gleichung, die ${}^m\alpha^i$, ${}^m\beta^i$, ${}^m\omega^i$ und ${}^m\gamma^i$ beinhaltet (vgl. Gl.6.8) kann eine der unbekanntenen Variablen als Funktion der drei anderen angegeben werden. Dies bedeutet, daß letzten Endes nur drei von einander unabhängige Winkeländerungen übrig bleiben. Wird beispielsweise ${}^m\gamma^i = f({}^m\alpha^i, {}^m\beta^i, {}^m\omega^i)$ festgelegt, so ist ${}^m\Omega^i$ auch eine Funktion von ${}^m\alpha^i$, ${}^m\beta^i$ und ${}^m\omega^i$.

Gleichung (6.6) ist für beliebig große Winkeländerungen gültig. Dies gilt auch für die Verschiebungsinkremente (Gl. 6.10). Die gewählten Winkeländerungen sind (vgl. Gl. 6.6) nicht mehr linear sondern in den trigonometrischen Funktionen enthalten. Bei der inkrementellen iterativen Lösung wird der Verschiebungsansatz für die Inkremente ebenfalls linearisiert (Näherung für die Steifigkeitsbestimmung). Das bedeutet, die trigonometrischen Funktionen, die ${}^m\alpha^i$, ${}^m\beta^i$ und ${}^m\omega^i$ enthalten mit dem 1. Reihenglied genähert werden (s. Gl. 6.10):

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^M \phi^i(r) \begin{bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \\ U_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(t-e_t) \sum_{i=1}^M \phi^i(r) H_t^i \begin{bmatrix} {}^m F_{11}^i & {}^m F_{12}^i \\ {}^m F_{21}^i & {}^m F_{22}^i \\ {}^m F_{31}^i & {}^m F_{32}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m \alpha^i \\ {}^m \beta^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(s-e_s) \sum_{i=1}^M \phi^i(r) H_s^i \begin{bmatrix} {}^m D_{11}^i & {}^m D_{12}^i & {}^m D_{13}^i \\ {}^m D_{21}^i & {}^m D_{22}^i & {}^m D_{23}^i \\ {}^m D_{31}^i & {}^m D_{32}^i & {}^m D_{33}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m \alpha^i \\ {}^m \beta^i \\ {}^m \omega^i \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Die in diesem Kapitel behandelten Rechenbeispiele sind Stabilitätsprobleme mit kleinen Rotationen und Verschiebungen sowie ebene Probleme mit beliebig großen Verschiebungen und Rotationen. Für diese Fälle ist die Heranziehung der oben beschriebenen Zwangsbedingung für die Winkeländerungen nicht notwendig. Man kann - wie hier geschehen - eine andere Zwangsbedingung einführen indem man ${}^m\alpha^i$ und ${}^m\delta^i$ gleichsetzt; d.h. die Bewegungen I und III in Bild 6.4 sind identisch.

Gl. (6.10) reduziert sich somit zu

$$\begin{bmatrix} U \\ U \\ U \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^M \phi^i(r) \begin{bmatrix} U_1^i \\ U_2^i \\ U_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(t-e_t) \sum_{i=1}^M \phi^i(r) H_t^i \begin{bmatrix} {}^m F_{11}^i & {}^m F_{12}^i \\ {}^m F_{21}^i & {}^m F_{22}^i \\ {}^m F_{31}^i & {}^m F_{32}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m \alpha^i \\ {}^m \beta^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(s-e_s) \sum_{i=1}^M \phi^i(r) H_s^i \begin{bmatrix} {}^m G_{11}^i & {}^m G_{12}^i \\ {}^m G_{21}^i & {}^m G_{22}^i \\ {}^m G_{31}^i & {}^m G_{32}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^m \alpha^i \\ {}^m \omega^i \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

mit m = erreichter Zustand zwischen 1 und 2 im inkrementellen Prozess.




$$\begin{aligned}
 {}^m F_{11}^i &= \sigma & {}^m F_{12}^i &= -\sin^m \psi_i \\
 {}^m F_{21}^i &= -\sin^m \varphi_i \cdot \sin^m \psi_i & {}^m F_{22}^i &= \cos^m \varphi_i \cdot \cos^m \psi_i \\
 {}^m F_{31}^i &= \cos^m \varphi_i \cdot \sin^m \psi_i & {}^m F_{32}^i &= \sin^m \varphi_i \cdot \cos^m \psi_i \\
 {}^m G_{11}^i &= \sigma & {}^m G_{12}^i &= -\sin^m \theta_i \\
 {}^m G_{21}^i &= -\sin^m \Omega_i \cdot \sin^m \theta_i & {}^m G_{22}^i &= \cos^m \Omega_i \cdot \cos^m \theta_i \\
 {}^m G_{31}^i &= \cos^m \Omega_i \cdot \sin^m \theta_i & {}^m G_{32}^i &= \sin^m \Omega_i \cdot \cos^m \theta_i
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Die Ableitungen, die für die JAKOBI-Matrix gebraucht werden lauten:

$$\begin{aligned}
 {}^n X_{k,r} &= \sum_{i=1}^M \phi_{i,r}^i \cdot x_k^i + \frac{1}{2} (t - e_t) \sum_{i=1}^M \phi_{i,r}^i \cdot H_i \cdot \cos^m \psi_k^i + \frac{1}{2} (s - e_s) \sum_{i=1}^M \phi_{i,r}^i \cdot H_i^i \cdot \cos^m \theta_k^i \\
 {}^n X_{k,s} &= \sigma + \sigma + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \phi_{i,s}^i \cdot H_i^i \cdot \cos^m \theta_k^i \\
 {}^n X_{k,t} &= \sigma + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \phi_{i,t}^i \cdot H_i^i \cdot \cos^m \psi_k^i + \sigma
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

6.5.1 Interpolationsfunktionen

Für die drei Elementordnungen sind Interpolationsfunktionen aus (9) zu entnehmen:

|  1 2 linear |  1 2 3 quadratisch |  1 2 3 4 kubisch |
|--|---|--|
| $\vartheta^1 = \frac{1}{2} (1-r)$ $\vartheta^2 = \frac{1}{2} (1+r)$ | $\vartheta^1 = \frac{1}{2} (1-r) - \frac{1}{2} (1-r)^2$ $\vartheta^2 = 1-r^2$ $\vartheta^3 = \frac{1}{2} (1+r) - \frac{1}{2} (1-r)^2$ | $\vartheta^1 = \frac{1}{16} (1-r)(3r+1)(3r-1)$ $\vartheta^2 = \frac{9}{16} (1-r)(1+r)(3r-1)$ $\vartheta^3 = \frac{9}{16} (1-r)(1+r)(3r+1)$ $\vartheta^4 = \frac{1}{16} (1+r)(3r+1)(3r-1)$ |

Die Ansatzfunktionen ϕ^i sind nur in der lokalen Linienkoordinate r definiert.

6.5.2 Elementmatrizen

Die benötigten Steifigkeitsbeziehungen sind in Tabelle A3 im Anhang wiedergegeben. Durch Heranziehung der Gleichungen (6.5) bzw. (6.6) erhält man die Matrizen m_0B bzw. ${}^m_1\hat{B}$ in Tabelle A4, m_0B in Tabelle A5 und m_1B in Tabelle A6 (siehe Anhang).

Die Ermittlung der Ableitungen der Gesamtverschiebungen ${}^m_n U_{i,j}$ (Vektor ${}^m_n d$) geht von den Gesamtwinkeländerungen ${}^m_n \alpha_i, {}^m_n \beta_i, {}^m_n \omega_i$ aus. Entsprechend werden die Gesamtverzerrungen ${}^m_n \epsilon$ errechnet. Aus Tabelle A4 ist ersichtlich, daß bei der Total-Lagrange Formulierung auch die Matrix 1_0B_1 und somit die gewöhnliche elastische Steifigkeitsmatrix 1_0K_e vom jeweiligen Verschiebungszustand abhängen.

Für die Festlegung eines anisotropen Werkstoffgesetzes zur Elimination der Energieanteile der Normalspannungen in Stabhöhen- bzw. Dickenrichtung wird ein lokales kartesisches Koordinatensystem ${}^m X' - {}^m Y' - {}^m Z'$ im Zustand m auf der Bezugslinie wie in (74) definiert (s. Bild 6.5), um die dort gegebene Formulierung auch hier einsetzen zu können. Die Matrix ${}^m A$ der Richtungskosini dieses in (74) definierten Dreibeins lautet:

| | ${}^m X_1$ | ${}^m X_2$ | ${}^m X_3$ |
|-----------|-----------------|--|---------------------------------------|
| ${}^m X'$ | $\sin^m \psi_1$ | $-\cos^m \psi_1 \cdot \cos^m \epsilon$ | $\cos^m \psi_1 \cdot \sin^m \epsilon$ |
| ${}^m Y'$ | 0 | $\sin^m \epsilon$ | $-\cos^m \epsilon$ |
| ${}^m Z'$ | $\cos^m \psi_1$ | $\sin^m \psi_1 \cdot \cos^m \epsilon$ | $\sin^m \psi_1 \cdot \sin^m \epsilon$ |

Tabelle 6.2 : Matrix ${}^m A$ der Richtungskosini des lokalen Koordinatensystems ${}^m X' - {}^m Y' - {}^m Z'$.

Das Werkstoffgesetz des Stabelementes ist im lokalen r-s-t-System definiert, welches durch eine Drehung mit dem Winkel δ um die "Normale" \vec{t} in das ${}^m X'$ - ${}^m Y'$ - ${}^m Z'$ übergeht (siehe Bild 6.5). Das Werkstoffgesetz wird entsprechend der Tensortransformationsmatrix 4. Ordnung auf das globale System überführt:

$$C_{pqrs} = {}^m T^m A_{ip}^m A_{jq}^m A_{kr}^m A_{ls}^m C'_{ijkl} \quad (6.14)$$

mit ${}^m T$ = Transformationsmatrix aus der Drehung mit (siehe Gl. 6.15). ${}^m A$ = Richtungskosini des lokalen Systems.

Das Werkstoffgesetz im lokalen System lautet:

$${}^m \sigma = {}^m C' {}^m \varepsilon'$$

bzw.

$${}^m \tau = {}^m C' {}^m \varepsilon'$$

$${}^m T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline c^2 & s^2 & 0 & -2s.c & 0 & 0 \\ \hline s^2 & c^2 & 0 & -2s.c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline s.c & -s.c & 0 & c^2 - s^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \\ \hline \end{array} \quad (6.15)$$

$c = \cos \delta \quad s = \sin \delta$

Der Winkel δ wird mittels eines Skalar - und eines Vektorprodukts von \vec{s} und \vec{v}' (vgl. Bild 6.5) bestimmt.

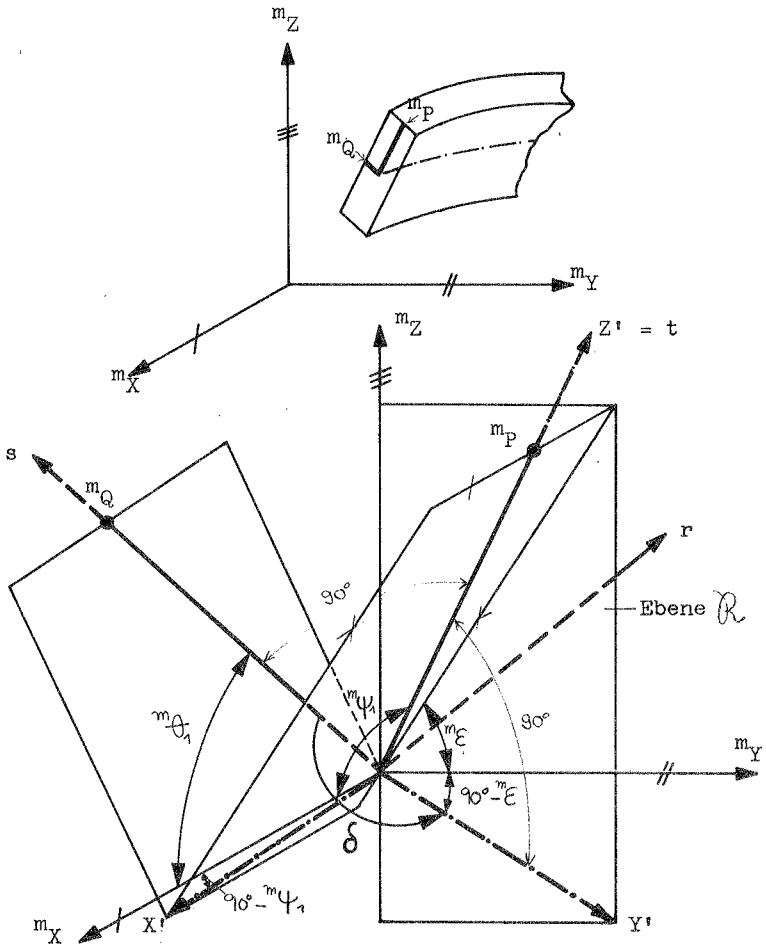


Bild 6.5: Lokales Koordinatensystem $m_X' - m_Y' - m_Z'$

Für ein "isotropes" HOOKE'sches Material ist

$${}^m_n C' = \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \kappa_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \kappa_Q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

E = Elastizitätsmodul

μ = Querdehnungszahl (hier gleich null zu setzen)

κ_Q = Faktor zur Verbesserung des Verformungsverhaltens infolge Schub, = 1.2 für Rechteck

Das Transformationsgesetz (6.14) läßt sich ausdrücken durch

$${}^m_n C = {}^n W {}^m_n C' {}^n W^T \quad (\text{für } n = 0 \text{ bzw. } m)$$

W ist eine Transformationsmatrix, die eine Beziehung zwischen den Spannungen ${}^m_n C'_{ik}$ bzw. ${}^m_n S'_{ik}$ im lokalen System und den Spannungen ${}^m_n C_{ik}$ bzw. ${}^m_n S_{ik}$ im globalen System herstellt.

Die Matrix W ist in Tabelle 6.3 dargestellt (vgl. auch (58)). Mit den definierten Werkstoffbeziehungen werden Spannungen berechnet, die für die geometrische Steifigkeitsmatrix ${}^m_n K_g$ oder den Vektor ${}^m_n F$ der inneren Kräfte benötigt werden.

Das Element ist in das NISA-Programm implementiert.

$W =$

| | | | | | |
|--|--|---|--|-----------------------------------|-----------------------------------|
| $G_1 \cdot C^2$ | $G_{11} \cdot S^2$ | 0 | $G_4 \cdot 2 \cdot C \cdot S$ | $C \cdot G_{15}$ | $S \cdot G_{15}$ |
| $G_{21} \cdot C^2 + G_{22} \cdot S^2 - C \cdot S \cdot G_{24}$ | $G_{21} \cdot S^2 + G_{22} \cdot C^2 + G_{24} \cdot C \cdot S$ | 0 | $2 \cdot C \cdot S \cdot (G_{21} - G_{22}) + (C^2 - S^2) \cdot G_{24}$ | $C \cdot G_{25} - S \cdot G_{26}$ | $S \cdot G_{25} + C \cdot G_{26}$ |
| $G_{31} \cdot C^2 + G_{32} \cdot S^2 - C \cdot S \cdot G_{34}$ | $G_{31} \cdot S^2 + G_{32} \cdot C^2 + G_{34} \cdot C \cdot S$ | 0 | $2 \cdot C \cdot S \cdot (G_{31} - G_{32}) + (C^2 - S^2) \cdot G_{34}$ | $C \cdot G_{35} - S \cdot G_{36}$ | $S \cdot G_{35} + C \cdot G_{36}$ |
| $G_{41} \cdot C^2 - C \cdot S \cdot G_{44}$ | $G_{41} \cdot S^2 + G_{44} \cdot C \cdot S$ | 0 | $2 \cdot C \cdot S \cdot G_{41} + (C^2 - S^2) \cdot G_{44}$ | $C \cdot G_{45} - S \cdot G_{46}$ | $S \cdot G_{45} + C \cdot G_{46}$ |
| $G_{51} \cdot C^2 - C \cdot S \cdot G_{54}$ | $G_{51} \cdot S^2 + G_{54} \cdot C \cdot S$ | 0 | $2 \cdot C \cdot S \cdot G_{51} + (C^2 - S^2) \cdot G_{54}$ | $C \cdot G_{55} - S \cdot G_{56}$ | $S \cdot G_{55} + C \cdot G_{56}$ |
| $G_{61} \cdot C^2 + G_{62} \cdot S^2 - C \cdot S \cdot G_{64}$ | $G_{61} \cdot S^2 + G_{62} \cdot C^2 + G_{64} \cdot C \cdot S$ | 0 | $2 \cdot C \cdot S \cdot (G_{61} - G_{62}) + (C^2 - S^2) \cdot G_{64}$ | $C \cdot G_{65} - S \cdot G_{66}$ | $S \cdot G_{65} + C \cdot G_{66}$ |

$$S = \sin \delta$$

$$C = \cos \delta$$

G_{ij} ($i = 1, 6, j = 1, 6$) sind in (74) Tabelle 7.6 definiert

Tabelle 6.3 Transformationsmatrix W

6.6 Testbeispiele

Testbeispiele werden nur für das kubische Stabelement aufgeführt, weil die zwei anderen (lineares und quadratisches Element) in dieser Arbeit nicht zum Einsatz kommen.

6.6.1 Kragarm mit Einzel- oder Gleichlast

Dieses einfache Beispiel soll lediglich die Leistungsfähigkeit des Stabelementes demonstrieren. In Bild 6.6 ist die Zusammenstellung des Systems, der gewählten Abmessungen und Werkstoffwerte und der FE-Idealisierung erfolgt.

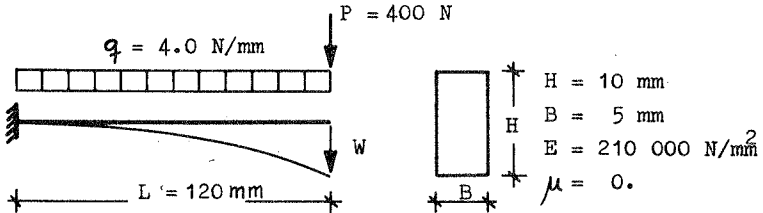


Bild 6.6 System, Werkstoff und Idealisierung

Die Idealisierung wird mit einem kubischen Element vorgenommen. für die Integrationsordnung werden in Längsrichtung vier GAUSS-punkte, für die Breiten- und Höhenrichtung jeweils zwei gewählt. Dies geschieht auch in allen anderen Beispielen.

Die bekannte analytische Lösung für die lineare Durchbiegung lautet für eine Einzellast P :

$$\begin{aligned} W_B &= \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad (\text{Biegungsanteil}) && = 2.633143 \text{ mm} \\ W_Q &= \frac{2}{3} \cdot \frac{P \cdot L}{E \cdot F} \quad (\text{Schubanteil}) && = 0.010907 \text{ mm} \end{aligned}$$

Die Gesamtverschiebung ergibt sich somit zu $W = 2.644050 \text{ mm}$, einem Wert, den die numerische Lösung exakt liefert, weil die kubische Biegelinie vom kubischen Element auch genau beschrieben werden kann.

Für eine Gleichlast von $q = 4.0 \text{ N/mm}$ ergibt sich dagegen ein Unterschied zwischen Analyse und numerischer Lösung von 1.4 %, was darauf zurückzuführen ist, daß die Biegelinie 4. Ordnung mit einem kubischen Ansatz angenähert wird. Mit zwei kubischen Elementen anstatt einem erhält man den exakten Verschiebungswert der analytischen Lösung.

6.6.2 I-Träger

Diese und die zwei folgenden Beispiele sollen zeigen, wie mit dem

vorliegenden Stabelement zusammengesetzte Querschnitte berechnet werden können.

Ober-, Untergurt und Steg des **I**-Trägers im Bild 6.7 werden jeweils mit einem kubischen Element idealisiert. Die Koordinaten und Rotationen der Punkte aller drei Elemente werden auf das dick gezeichnete Lokalsystem r - s - t in Bild 6.7 bezogen. Das bedeutet, daß das Lokalsystem r - s - t des Obergurtes um das Exzentrizitätsmaß e_t^o nach unten und r - s - t des Untergurtes um e_t^u nach oben verschoben wird.

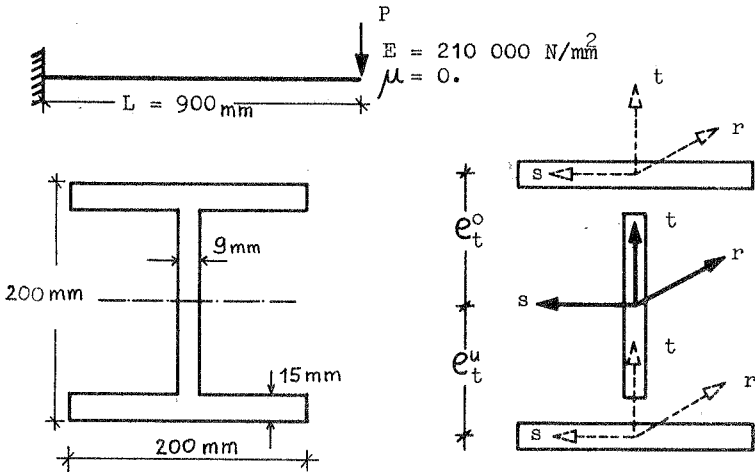


Bild 6.7 Aus exzentrischen Stäben zusammengesetzter I-Querschnitt

Für einen IPB 200-Träger der Länge $L = 900 \text{ mm}$ ergibt sich für $P = 150\,000 \text{ N}$ eine Diskrepanz zwischen analytischer und numerischer Lösung von 10.3% für die Endverschiebung W . Dies kommt daher, weil der Stab gedungen ist. Im vorliegenden Fall liegt der Anteil der Schubverzerrungen an der gesamten Durchbiegung W bei 16% ! Bei schlanker werdendem Träger wird der Schub- gegenüber dem Biegungsanteil vernachlässigbar klein. Bei Verdoppelung der

Trägerlänge auf beispielsweise $L = 1800 \text{ mm}$ beträgt der Schubanteil nur noch 1.3% der Gesamtverschiebung W und die numerische Lösung weicht von der theoretischen nur noch um 0.25% ab.

6.6.3 Geschlossener Querschnitt

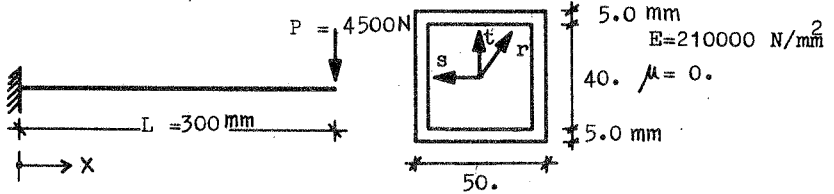


Bild 6.8 Geschlossener Querschnitt aus vier Stäben

Nach dem gleichen Prinzip wie im vorigen Beispiel werden die vier kubischen Elemente dieses zusammengesetzten Querschnittes auf das r - s - t -System bezogen, welches durch den Schwerpunkt verläuft (Bild 6.8). Die Idealisierung erfolgt jeweils mit einem kubischen Element in Längsrichtung.

Die numerische Lösung für die Verschiebung W des Schwerpunktes liegt 2.2% unterhalb des theoretischen Wertes.

Die Längsspannungen σ_x aus der Stabtheorie sind an der Stelle $x = 21.0 \text{ mm}$, einem GAUSS'schen Integrationspunkt, mit denen aus der numerischen Lösung im Bild 6.9 gegenübergestellt und stimmen sehr gut überein.

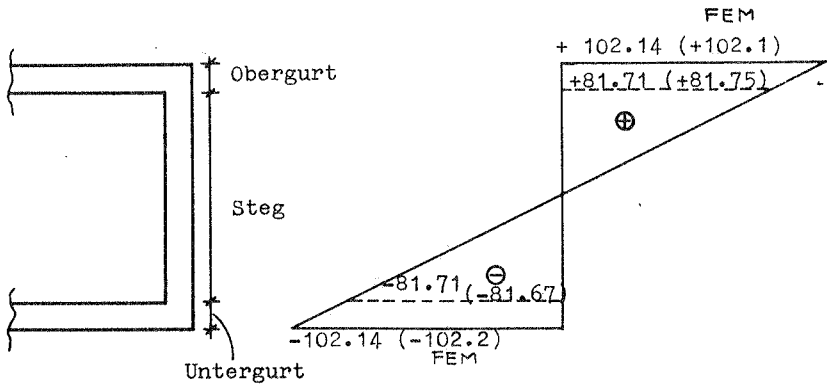


Bild 6.9 Längsspannungen (bei $X = 21$ mm) über die Trägerhöhe

6.6.4 Längsversteifte Kragplatte mit Linienlast

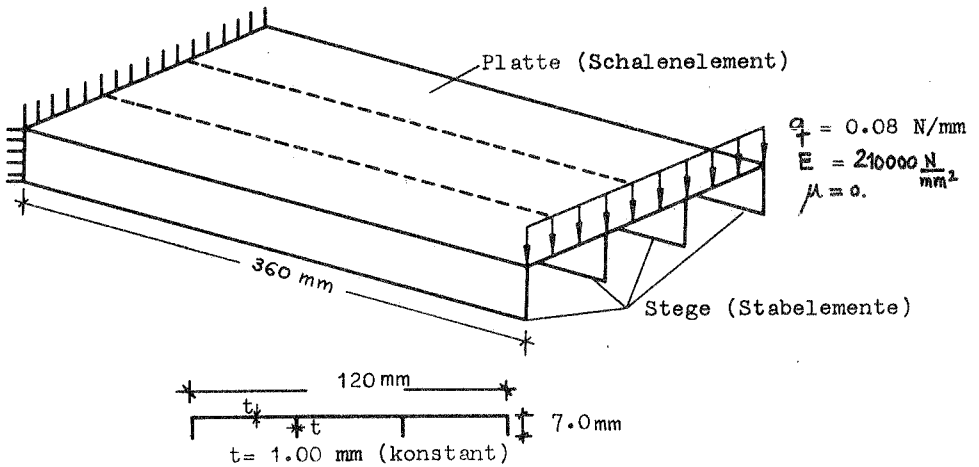


Bild 6.10 Kombination von Schalen- und Stabelement

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich wie die Kopplung des Stabelementes mit dem Schalelement in NISA erfolgt.

Die obere Platte dieser Struktur ist mit einem 16-knötigen Schalelement idealisiert, während die Stege aus vier exzentrischen Stabelementen bestehen. Mit $\mu = 0$ wird bei der Platte der POISSON'SCHE Effekt eliminiert sodaß die Balkentheorie angewandt werden kann. Das Bezugssystem r-s-t liegt hier in der Plattenmittelfläche. Die Möglichkeit, die Exzentrizitäten zu variieren macht eine Überlappung von Querschnittsteilen, wie sie z.B. bei der üblichen Kopplung von Schalelement mit Schalelement bekannt ist, überflüssig.

Die Durchbiegung ist über den belasteten Rand konstant und wird mit der Stabtheorie bestimmt. Es liegt zwischen analytischer und FE-Berechnung eine sehr gute Übereinstimmung vor (0.86 % Unterschied). Auch die Längsspannungen aus Biegung fallen zusammen (vgl. Bild 6.11).

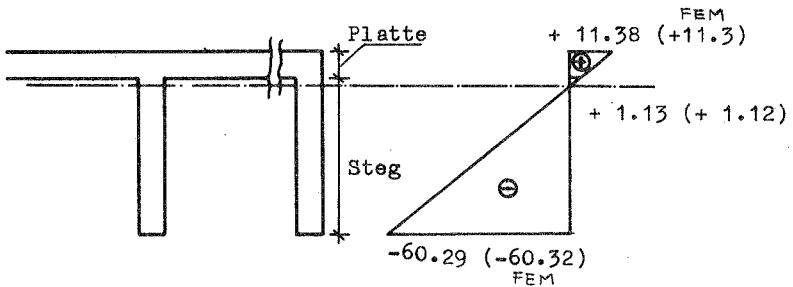
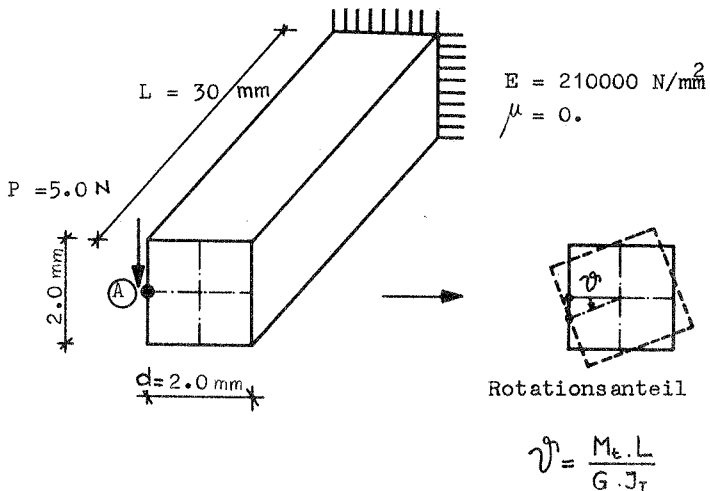


Bild 6.11 Längsspannungen in Stegen und Platte bei
 $X = 25 \text{ mm}$

6.6.5 Biegetorsion

Wenn, wie in Bild 6.12 geschehen, das Lokalsystem r-s-t vom Schwerpunkt zum linken Rand verschoben wird, wird mit einer Last P parallel zum Rand der gerade Stab auf Biegung und Torsion belastet. P in Stablängsrichtung r gäbe z.B. eine Kombination von Normalkraft und Biegemoment.



$$W_1 = PL / 3 \cdot EI + .PL/EF = 0.160928 \text{ mm (Biegung und Querkraft)}$$

$$W_2 = .d/2 = 0.000638 \text{ mm (Torsion)}$$

$$\text{Gesamtverschiebungswert } W_G = 0.161566 \text{ mm}$$

Bild 6.12 Biegetorsion bei exzentrischer Belastung

Die Verschiebung des Punktes A in Lastrichtung ergibt sich aus Biegungs-, Schub- und Rotationsanteil aus der Torsionsbeanspruchung (vgl. Bild 6.12). Der Verschiebungswert von A der analytischen Lösung wird von der numerischen Lösung exakt wiedergegeben.

6.6.6 Kragarm unter Endmoment

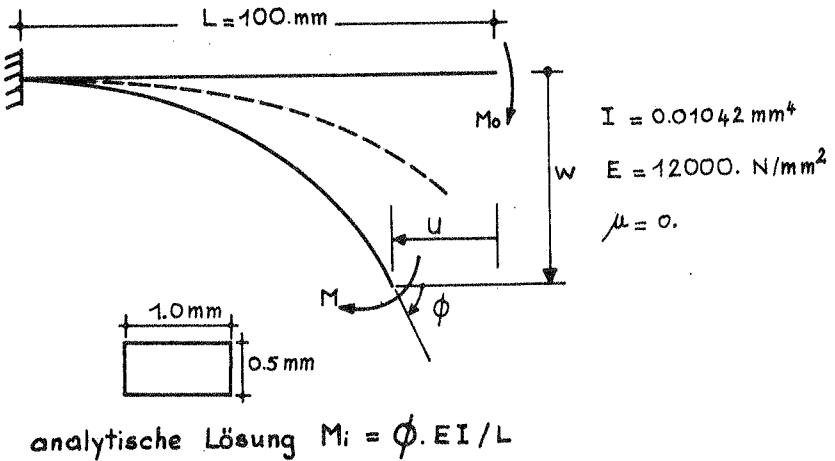


Bild 6.13 System, Querschnittswerte, Werkstoff

Dieses bekannte Beispiel soll die Leistungsfähigkeit des Stabelementes bei großen Verschiebungen und Rotationen in der Ebene unter Beweis stellen. In (8) ist dieses Beispiel mit dem ADINA-FE-Programm gerechnet worden, wobei 20 dreidimensionale gerade Stäbe für die Idealisierung verwendet wurden. Das Beispiel wurde in 90 Schritten mit dem inkrementellen EULER-Verfahren gerechnet, bei dem keine Iteration vorgenommen wird, sondern nur die Tangentensteifigkeitsmatrix für jeden Schritt neu aufgestellt wird.

Hier werden für die Idealisierung fünf kubische Stabelemente ge-

wählt und für die numerische Lösung das "echte NEWTON-RAPHSON"-
Iterationsverfahren.

In Bild 6.14 sind beide numerische Lösungen der analytischen ge-
genübergestellt. Die vollständige Last-Verschiebungskurve ist in
Bild 6.15 dargestellt.

6.6.7 Stabilitätsfälle

In den Tabellen 6.1 und 6.2 sind einige Stabilitätsfälle von Stä-
ben und Rahmentragwerken zusammengestellt.

Bei der numerischen Eigenwertuntersuchung werden jeweils nur die
ersten Eigenwerte und Eigenformen bestimmt.

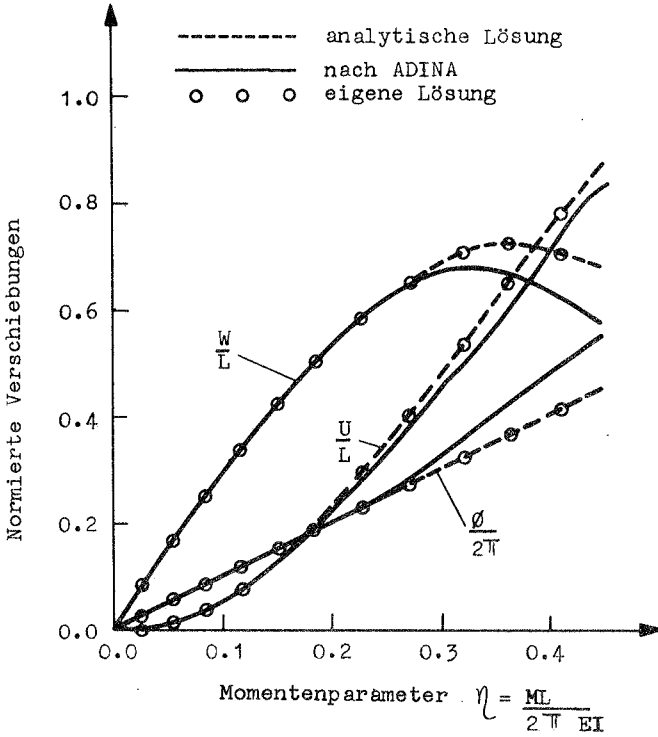


Bild 6.14 Lastverschiebungs-Diagramme

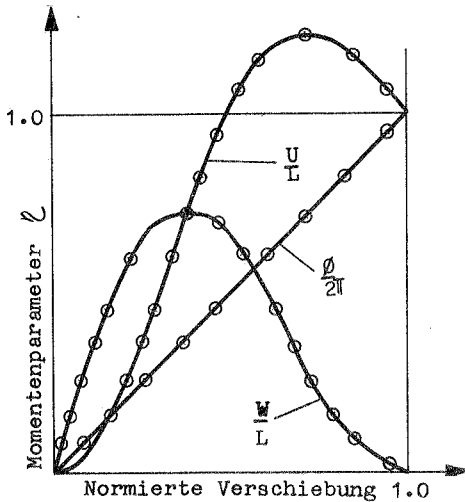

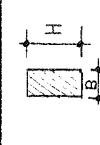





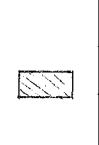
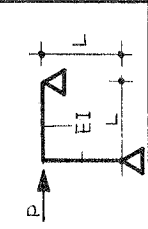
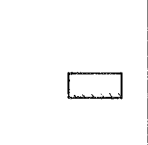
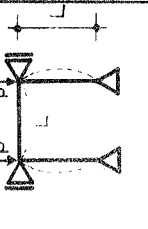
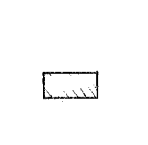


Bild 6.15 Lastverschiebungs-Diagramme

| Stabilitätsfall | Querschnitt | Anzahl der kubischen Elemente für Idealisierung | Analytische Lösung | Unterschied Analyse / Numerik |
|---|---|---|---|-------------------------------|
|  |  | 2 | $P_{ki} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ | -0.7 % |
|  |  | 2 | $P_{ki} = 4 \cdot \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ | -1.6 % |
|  |  | 2 | $P_{ki} = 2.04 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ | +0.5 % |
|  |  | 2 | $P_{ki} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ | -0.9 % |
|  |  | 2 für Stiel 2 für Gurt | $P_{ki} = 1.406 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ | +0.4 % |
|  |  | 2 für Stiel 2 für Gurt | $P_{ki} = 1.302 \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ | +0.6 % |

6.7 Lokalbeulen längsversteifter Zylinder

Die im fünften Abschnitt (vgl. Bild 5.3 und 5.6) berechneten Zylinder werden in diesem Kapitel erneut behandelt, um zum Einen die "Grenzen" der Leistungsfähigkeit des Stabelementes hinsichtlich der Beschreibung des Lokalbeulens zu verdeutlichen und zum Anderen, um die Rechenzeiterparnis zu bestimmen. Die Längssteifen werden deswegen nicht mehr als Schalen-, sondern als Stabelemente idealisiert.

Die Idealisierung der Zylinderhaut ist mit dem in Bild 4.7 identisch. Folgende Zylinder werden berechnet: $ds/ts = 6, 16, 24$ und 32 .

Die linear elastischen ersten Verzweigungslasten am perfekten System sind mit ihren Beulmustern in Bild 6.16 zu sehen. Zum Vergleichszweck sind die Ergebnisse von Bild 5.6 ebenfalls aufgeführt.

Im Bereich dicker bzw. mitteldicker Steifen (hier bis $ds/ts = 16$) stimmen sowohl die Beullasten als auch die Beulmuster in beiden Idealisierungsarten sehr gut überein. Der Unterschied in den Beullasten beträgt maximal 5%, dabei benötigt man bei der Idealisierung der Längssteifen als Stäbe nur 50 bis 56% der bei ihrer Idealisierung als Schalenelemente notwendigen Rechenzeit. Die gute Übereinstimmung ergibt sich aus der Tatsache, daß das isoparametrische Stabelement die im genannten Bereich (bis $ds/ts = 16$) auftretenden Beularten genauso gut beschreiben kann wie das Schalenelement als Steife.

Hingegen ergeben sich im Bereich dünner Steifen ($ds/ts > 16$) große Diskrepanzen zwischen beiden Idealisierungsarten der Steifen (37% z.B. bei $ds/ts = 24$ und 132% bei $ds/ts = 32$!). Diese Abweichungen wachsen umso schneller an, je dünner die Steifen werden. Die Erklärung für dieses Verhalten ergibt sich aus dem Unvermögen des Stabelementes das sogenannte "lokale Stringerbeulen" zu beschreiben. Wegen der Balkenannahmen mit Erhaltung des

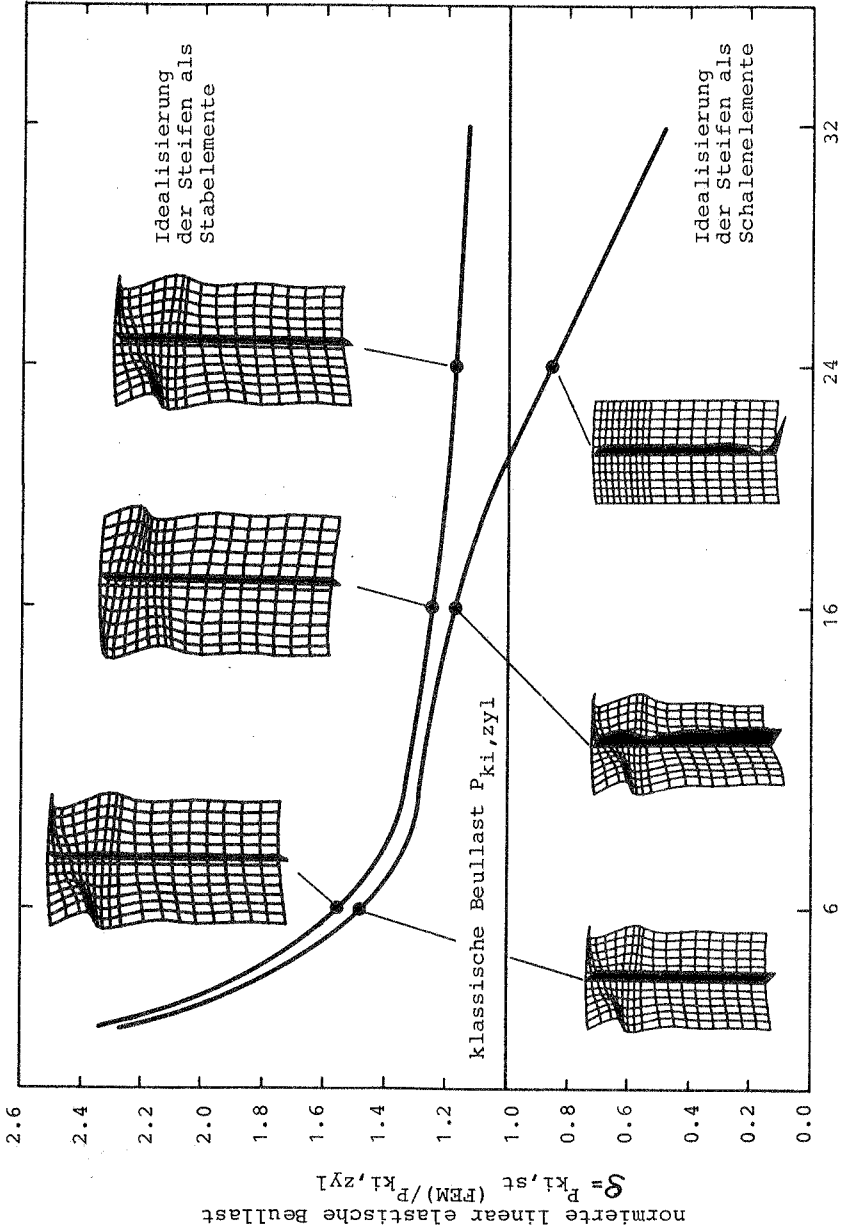


Bild 6.16: Elastische Beullasten: Gegenüberstellung der Steifenidealisierung mit Schalen- bzw. Stabelement

Stabquerschnitts resultiert, daß die Schalenhaut beim Beulvorgang immer aktiviert wird: Somit kann die klassische Beullast des unversteiften Zylinders nicht unterschritten werden, so dünn die Steifen auch sein mögen. Die Beulkurve für die Idealisierung der Steifen als Stabelemente verläuft deshalb asymptotisch zur klassischen Beullast des unversteiften Zylinders (vgl. Bild 6.16).

6.7.1 Außenliegende Steife beim Lokalbeulen

Für $d_s/t_s=16$ ist die linear elastische Beullast am perfekten Zylinder bei außenliegender Steife ermittelt worden (Steife als Stabelement idealisiert), um dem Einfluß der Steifenordnung nachzugehen.

Für die Außenversteifung ist das Beulmuster in Bild 6.17 dargestellt. Die Beullast beträgt $\xi = 1.27$ und ist nur um 1.6% größer als die Verzweigungslast $\xi = 1.25$ bei Innenversteifung. Diese Erscheinung ist nicht verwunderlich, da während des Beulvorgangs die Verbindungslinie zwischen Steife und Schalenhaut gerade bleibt und es deshalb unwesentlich ist (zumindest für die Verzweigungslast), ob die Steife innen oder außen angeordnet ist: Der Torsionswiderstand um die Verbindungslinie ändert sich dadurch nicht.

Die Steifenanordnung ist nur beim Globalbeulen von Bedeutung, wenn die Steifen bei ihrer radialen Verschiebung die Exzentrizitäten (innere oder äußere) wecken (vgl. nächsten Abschnitt).

Wenn nichtlineare Einflüsse berücksichtigt werden, ist jedoch anzunehmen, daß sich auch beim Lokalbeulen erhebliche Differenzen zwischen Außen- und Innenversteifung ergeben.

6.8 Globalbeulen

Für die Untersuchung des Globalbeulens ist es notwendig, einen größeren Zylinderabschnitt mit der Einbeziehung mehrerer, enger liegenden Steifen heranzuziehen. Zu diesem Zweck ist die Anzahl

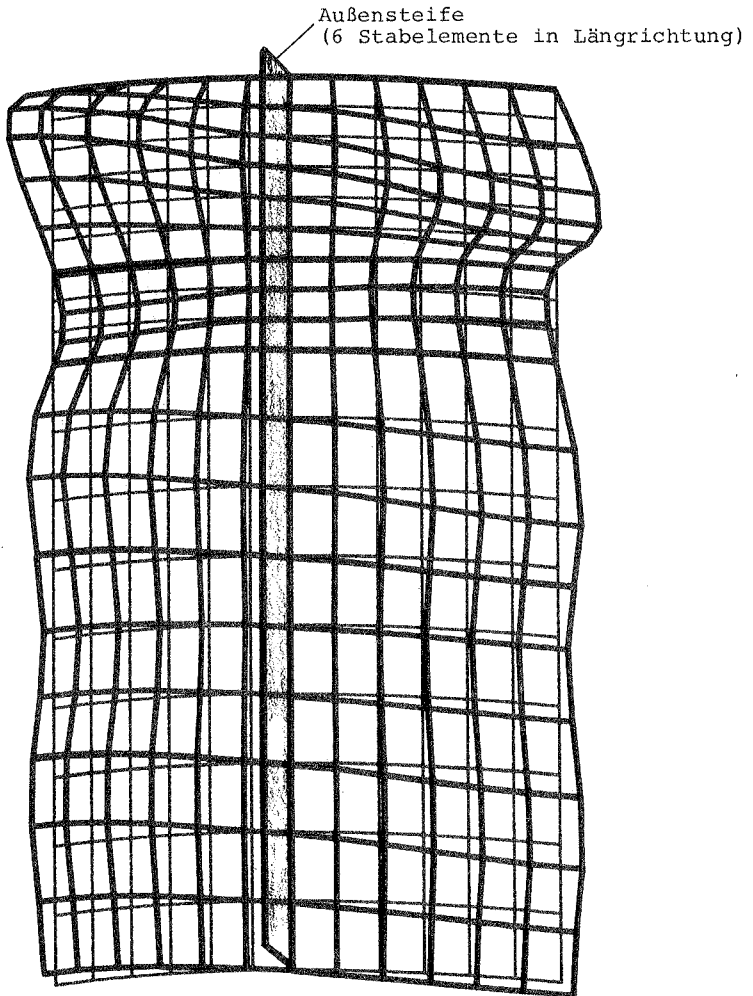


Bild 6.17 Erstes Beulmuster des perfekten lokal beulenden
Zylinders mit Außensteifen $d_s/t_s = 16$
($\xi = 1.25$ bzw. $\xi = 1.27$)

der Steifen für UC8 ($d_s/t_s = 16$) von 20 auf 40 verdoppelt worden. Der hierdurch entstandene Zylinder ist identisch mit dem Specimen UC9 aus (110). Idealisiert wird ein Viertel des Zylinders mit insgesamt 10 Steifen (vgl. Bild 6.18).

In Längsrichtung werden für Schalenhaut und Steifen jeweils 5 Elemente gewählt (Zylinderhälfte), die für eine zu erwartende halbe Sinuswelle ausreichen. Die Schalenhaut wird in Umfangsrichtung mit 10 Schalenelementen idealisiert.

Für eine gelenkige Lagerung der gekrümmten Ränder (SS3-Randbedingung) zeigt Bild 6.19 die Eigenform für die erste lineare Verzweigungslast (am perfekten Zylinder) der numerischen Lösung.

Die Beulkonfiguration ist eindeutig globalen Charakters. In Umfangsrichtung haben sich $2\frac{1}{2}$ ganze Wellen, d.h. 10 für den gesamten Zylinder gebildet, wobei jede Halbwelle eine Steife einschließt. Die Anzahl der Umfangswellen beträgt 9 nach dem Verschmierungskonzept von WALKER / SRIDHARAN und MILLER.

Die resultierende globale Beullast $P_{ki,global}$ liegt 2.46-fach höher als die entsprechende Last $P_{ki,zyl}$ der unversteiften Kreiszyklinderschale.

Nach den beiden genannten Berechnungskonzepten beträgt die globale Beullast 1.60 $P_{ki,zyl}$ (WALKER / SRIDHARAN) und 1.82 $P_{ki,zyl}$ (MILLER).

Diese Unterschiede zur numerischen Lösung bestehen, weil das WALKER / SRIDHARAN-Konzept auf der einen Seite ohne den Torsionswiderstand der Steifen operiert, während das MILLER-Konzept andererseits einen Teil der vorausbeulenden Schalenhaut als nicht mittragend ausschließt. Die ausschlaggebende Erklärung aber ist, daß die numerische Lösung keine "Verschmierung" vornimmt, sondern die "echte" Verzweigungslast bestimmt. Außerdem ist die Beulkonfiguration mit neuen Beulwellen im ganzen Umfang durch die Einführung der Symmetriebedingungen für die Längsränder (am Zylinderviertel) ausgeschlossen worden.

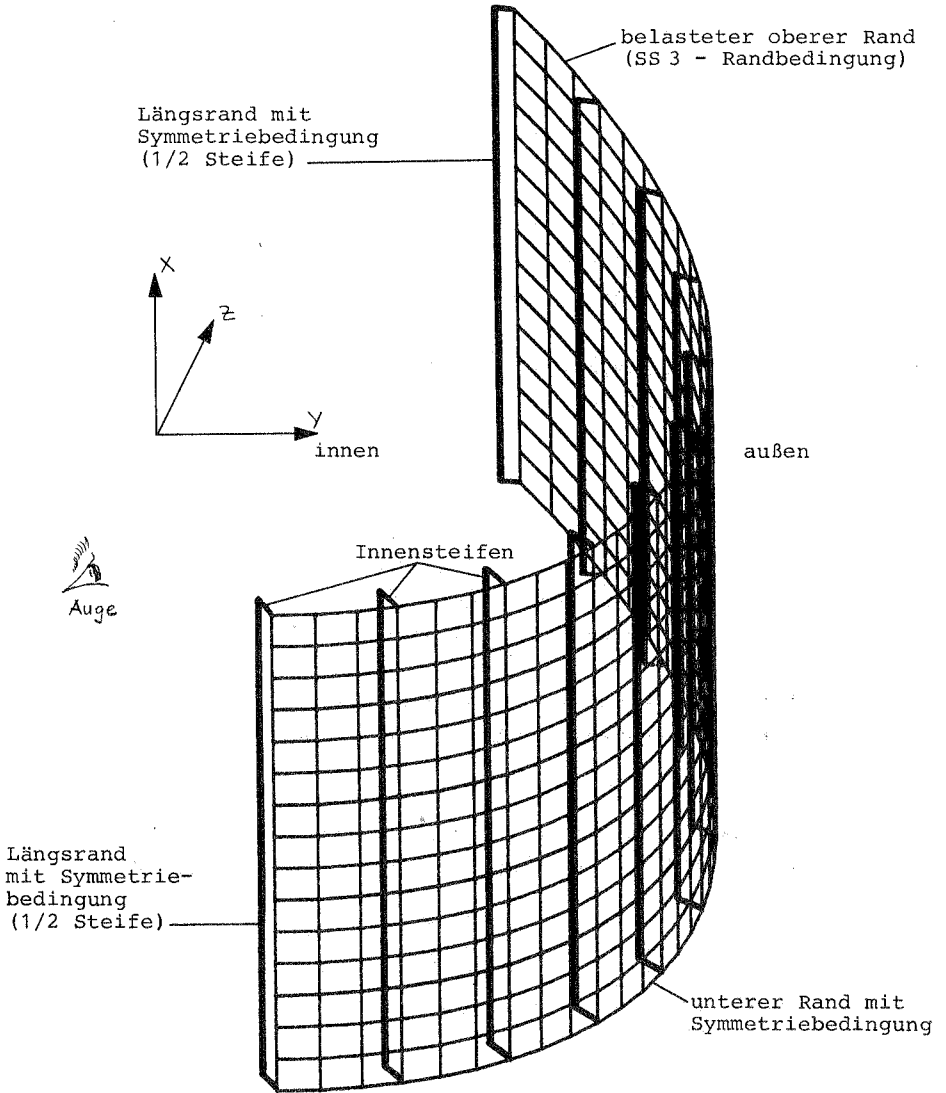


Bild 6.18 : Finite Element-Idealisierung für ein Zylinderviertel (90° - Abschnitt)

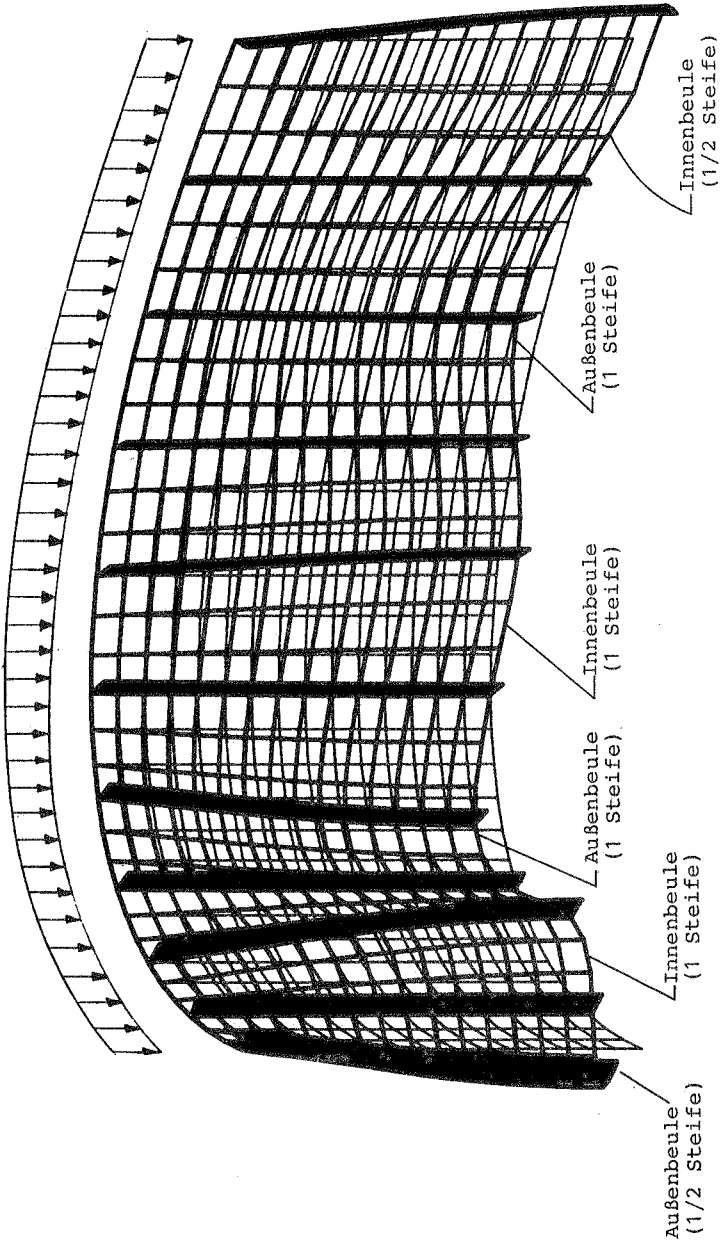


Bild 6.19: Eigenform für die erste lineare Verzweigungslast des Kreiszylinders $d_s/t_s = 16$ mit 40 Innensteifen (Ansicht von innen) ($\rho = 2.46$)

6.8.1 Globalbeulen bei außenliegenden Steifen

Beim Lokalbeulen wurde festgestellt, daß die Anordnung der Steifen innen oder außen für die Verzweigungslast unwesentlich ist. Für das Globalbeulen soll dieser Sachverhalt mit dem folgenden Beispiel ebenfalls überprüft werden.

Das Ergebnis der numerischen Eigenwertuntersuchung ist für den Zylinder UC9 mit 40 Außensteifen in Bild 6.20 dargestellt (Steifen dickgestrichen).

Das globale Beulbild ist hier eindeutiger als bei der Innenversteifung, weil alle Steifen am Beulvorgang beteiligt sind.

Die Innenbeulen sind größer und schließen jeweils 3 Längssteifen ein, während die kleineren Außenbeulen 2 Längssteifen mitnehmen. Die Beobachtung, daß die Innenbeulen generell größer sind als die Außenbeulen, wird auch bei Versuchen gemacht. In Bild 6.20 ist auch ein bei den Versuchen in (110) beobachtetes Globalbeulen bei Innenversteifung wiedergegeben. Dieses Globalbeulbild wird hier von der Außenversteifung besser approximiert.

Die Anzahl der Beulwellen in Umfangsrichtung beträgt wie bei der Innenversteifung 10; im Fall der Außenversteifung ist sie jetzt identisch mit den Werten aus den oben genannten Verschmierungskonzepten.

Die globale Beullast aus der FE-Berechnung ergibt mit 5.62 Pki,zyl das 2.3-fache der Beullast bei Innenversteifung. Dieser Effekt der Beullaststeigerung durch Verlegung der Steifen nach außen (beim Globalbeulen!) wurde schon im Jahre 1947 von VAN DER NEUT (106) aufgedeckt, der eine Erhöhung der Beullast um einen Faktor 2 bis 3 bestimmte.

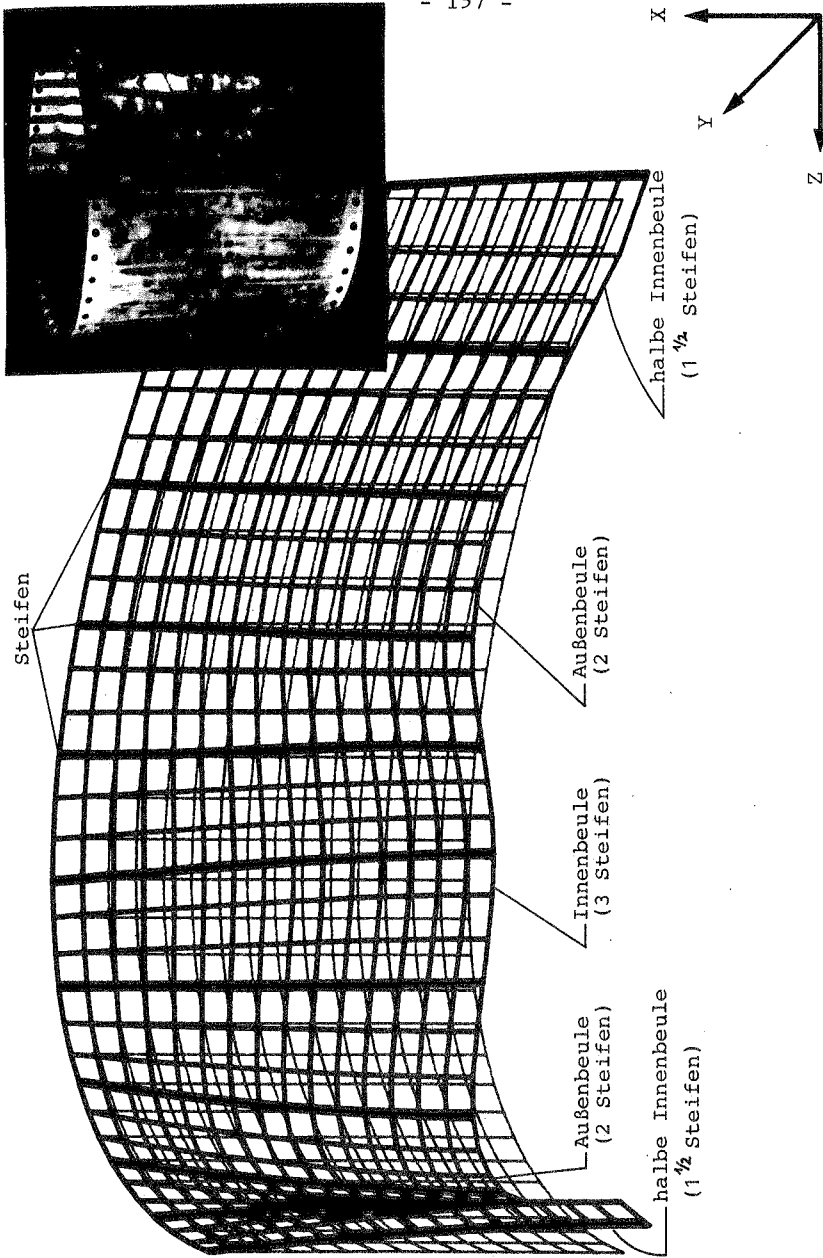


Bild 6.20 Eigenform für die erste lineare Verzweigungslast des Zylinders $d_s/t_s = 16$ mit 40 Außensteifen (Ansicht von innen) ($\rho = 5.62$)

7. ZUSAMMENFASSUNG UND SCHLUSSFOLGERUNGEN

Die vorliegende Arbeit befaßt sich im ersten Teil eingehend mit dem Stand der Forschung über längsversteifte Kreiszyinderschalen unter Axialdruck. Hier werden verschiedene Definitionen von Beularten präsentiert, sowie Experimente in verschiedenen Forschungsanstalten. Aus der Mannigfaltigkeit der Beulkonfigurationen, die von der Aussteifungs- und Belastungsart, sowie der Geometrie und den Materialeigenschaften stark abhängen, resultiert die Schwierigkeit, Beulbegriffe ("Lokalbeulen", "Stringer-Beulen", "Schalenbeulen", "Globalbeulen", "lokales Stringer-Beulen" usw..) frei von jeglicher Subjektivität zu definieren. Aus praxisbezogenen Beobachtungen scheinen die von WALKER / SRIDHARAN (110) angegebenen Beuldefinitionen sinnvoll zu sein.

Im zweiten Teil wird mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente das Beul- und Tragverhalten mittellanger Kreiszyylinder des Bauwesens und der Offshore-Technik, die noch relativ wenig erforscht sind, behandelt.

Eine ausführliche Behandlung des Lokalbeulens wird unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen Schalenhaut und Steifen vorgenommen. Für Rechtecksteifen wird ein einfaches, für die Vordimensionierung der Steifen theoretisches Konzept vorgeschlagen, um gefährliche Schlankheitsbereiche zu vermeiden (vgl. Gleichung (4.4)).

Anschließende Vergleiche im elastischen und plastischen Bereich zeigen, daß breitversteifte Zylinder ein günstigeres Tragverhalten aufweisen als unversteifte, besonders wenn die geometrischen Imperfektionen zunehmen. Außerdem sind die Zylinder mit dünnen bzw. mittleren Steifen empfindlicher gegen Imperfektionen als Zylinder mit dicken Steifen.

Weiterhin wird festgestellt, daß der Zylinder mit mittleren Steifen ($d_s/t_s=16$), bei dem die Schalenhaut und die Steifen gleichzeitig beulen, eine deutliche Neigung zur Imperfektionsanfälligkeit

keit zeigt: Die zu dessen erstem Eigenbeulmuster affinen geometrischen Imperfektionen scheinen auch für die anderen Zylinderschalen die ungünstigsten darzustellen.

Ferner stellt sich die Frage der Lasteinleitung als von größter Bedeutung heraus. Eine Belastung mit schlaffen über den Zylinderrand konstanten Lasten ergibt ein wesentlich niedrigeres Tragvermögen als bei der Anbringung einer gleichmäßigen Verschiebung.

Ein anschließender Vergleich zwischen Versuch und Finite-Element-Analyse zeigt, daß mit den vorliegenden numerischen Methoden und einem vertretbaren Aufwand eine genügend genaue Erfassung der Traglast erreicht werden kann, wenn man realistische Imperfektionen (geometrische und strukturelle) zugrunde legt. Hierbei ist anzumerken, daß die sich ergebende Abminderung der Traglast durch die Eigenspannungen (- 18%) im Gegensatz zur vielfach im Schrifttum verbreiteten Meinung nicht vernachlässigbar klein ist.

Außerdem wird festgestellt, daß Längssteifen allein auch bei den hier untersuchten mittellangen Zylindern wirksam sind wie es GROTH (40) ebenfalls feststellte: Bis zu 143% mehr Traglast gegenüber dem isotropen Zylinder bei einem Mehraufwand an Stahl von etwa 38%.

Es wird auf die Sicherheit eingegangen, welche durch Ersetzen eines kreiszylindrischen Feldes durch eine zugehörige ebene Platte gleicher Abmessungen angestrebt wird. Eine Traglastdiskrepanz von + 46% zu Gunsten des Zylinders deutet auf eine Unwirtschaftlichkeit dieser Vorgehensweise hin.

Die Ergebnisse der Traglaststudien werden mit den zulässigen Traglasten von Vorschriften (ASME-Code, Det norske Veritas, ECCS) und Berechnungskonzepten (WALKER/SRIDHARAN und MILLER (identisch mit ASME-Code!)) verglichen (vgl. Bild 5.31).

Für Imperfektionsgrößen bis zu $\max W_0/t = 1.0$ erweisen sich die ECCS-Vorschrift und das WALKER-Konzept als wirtschaftlich. Bei größeren Imperfektionen sind sie jedoch nicht mehr auf der sicheren Seite. Die ASME-Code- und DnV-Regeln sind zu sehr auf der

sicheren Seite und deswegen unwirtschaftlich. Die Ursachen hierfür sind, daß einerseits die ASME-Code-Regeln größere Sicherheitsfaktoren verlangen und die DnV-Regeln nicht nur große Sicherheitsfaktoren vorschreiben, sondern auch das ungünstige Torsionsbeulen der Steifen berücksichtigen.

Ein isoparametrisches finites Stabelement wird im Hinblick auf die Wirtschaftlichkeit (Rechenzeiterparnis) entwickelt, welches mit dem dreidimensionalen degenerierten Schalenelement im NISA-Programm kompatibel ist. Mit diesem Stabelement können Versteifungsbereiche von praktischer Bedeutung (gedrungene bis mittelschlanke Steifen) gut beschrieben und viel Rechenzeit gespart werden.

Ferner wird festgestellt, daß ein Verlegen der Längssteifen von innen nach außen keinen Vorteil im Hinblick auf eine Steigerung der linearen Beullast mit sich bringt, solange eine lokale Beulart vorliegt.

Schließlich wird das Globalbeulen behandelt und die Erkenntnis gewonnen, daß das sogenannte Verschmierungskonzept die globale Beullast einer Struktur unterschätzt. Hier spielt im Gegensatz zum Lokalbeulen die Anordnung der Steifen eine große Rolle: Übereinstimmend mit den Untersuchungen VAN DER NEUTs (106) wird auch festgestellt, daß eine Verlegung der Steifen nach außen mindestens die doppelte lineare Beullast liefert wie bei der Innenversteifung (hier wird ein Faktor 2.3 berechnet). Bei einer elasto-plastischen Berechnung ergibt sich ein anderes Verhältnis.

Weitere Untersuchungen bei Berücksichtigung der großen Verformungen und Materialnichtlinearität sind für das Globalbeulen noch erforderlich.

Es soll darauf hingewiesen werden, daß die oben stehenden Schlußfolgerungen aus einem speziellen Fall für $R/t=360$ gewonnen wurden. Für Zylinder mit wesentlich davon abweichenden R/t -Verhältnissen, sind deshalb diese Erkenntnisse mit Vorsicht zu genießen.

NORMEN UND VORSCHRIFTEN

- (N1) API American Petroleum Institute,
Specification 2 B for fabricated
Structural Pipes.
Second Edition, New York (1972)
- (N2) API Recommended Practice for Planning,
Designing and Constructing fixed
Offshore Platforms API RP. 2 A,
Eleventh Edition (Jan. 1980)
- (N3) ASME-Code Boiler and Pressure Vessel Code,
Section III: unfired Pressure
Vessels. American Society of
Mechanical Engineers, New York (1975)
- (N4) ASME Case N-284. Metal containment shell
Buckling Design Methods (1980)
- (N5) DAST-Ri 013 Beulsicherheitsnachweis für Schalen.
Deutscher Ausschuss für Stahlbau.
Richtlinie 013, Ausgabe Juli 1980, 1/16
- (N6) DnV Rules for the Design, Construction and
Inspection of Offshore Structures.
Det norske Veritas, 2nd Edition Oslo
(1977)
- (N7) DnV Rules for the Design, Construction
and Inspection of Offshore Structures.
Appendix C-Steel Structures. Det norske
Veritas, Oslo (1977) Reprints with
Corrections (1979).

- (N8) ECCS Manual on the Stability of Steel Structures (Draft). European Convention for Constructional Steelwork, Liege (1977)
- (N9) ÖNORM Beulung von Kreiszyinderschalen
B 4650, Wien (Nov. 1977)
Teil 4
- (N10) TWG 8/4 Protokoll des Treffens der Arbeits-
der ECCS gruppe TWG 8/4.
Stuttgart, 5. Mai (1982), Seite 2.

- (7) BASAR Yaruz Zum allgemeinen Begriff der Stabilität und zur Stabilitätstheorie von Schalen. Habilitationsvortrag vom 6. April 1973
- (8) BATHE K.J.
BOLOURCHI S. Large Displacement Analysis of three-Dimensional Beam structures. Int. J. Num. Meth. in Engng. vol.14, pp 961-986 (1976)
- (9) BATHE K.J.
WILSON E.L. Numerical Methods in Finite Elemente Analysis. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey (1976)
- (10) BATHE K.J.
BOLOURCHI S. A geometric and material Non-linear plate and Shell Element. Computers & Structures vol. 11, pp. 23 - 48 (1980)
- (11) BLOCK D.L.,
CARD M.F. and
MIKULAS Jr. M.M. Buckling of eccentrically stiffened orthotropic cylinders. NASA TN D - 2960 (1964)
- (12) BORNSCHEUER F.W. Zur Berechnung und Konstruktion druckbeanspruchter Schalen aus Stahl. Bericht aus Forschung und Entwicklung des Deutschen Ausschusses für Stahlbau (DASt) 4 (1977), S. 3/9
- (13) BORNSCHEUER F.W. Plastisches Beulen von Kreiszyklinderschalen unter Axialbelastung. Der Stahlbau 50 (1981), H.9, S. 257/262

- (14) BORNSCHEUER F.W. Beulsicherheitsnachweise für Schalen. DASt-Richtlinie 013. Baustatik-Baupraxis, Darmstadt (1981) Tagungsheft BB 1, S. 237/252 und die Bautechnik 58 (1981) S. 313/317
- (15) BÖRNSCHEUER F.W. To the Problem of Buckling Safety of shells in the plastic Range. Buckling of Shells. A State-of-the Art Colloquium, Vol. 2, S. 19.1/19.19 Held: at Stuttgart, May 6-7 (1982)
- (16) BRENDEL B. Geometrisch Nichtlineare Elastostabilität. Dissertation, Universität Stuttgart (1979)
- (17) BUFLER H. Energiemethode II Vorlesungsskript WS 1976 - 77. Universität Stuttgart
- (18) BURAGOHAIN D.N. A Matching superparametric Beam
AGRAWAL S.B. Element for Shell Beam systems
AYYAR R.S. Computer & Structures, vol. 9, pp 175 - 182 (1978)
- (19) CARLSEN C.A., Tests on Compressive Strength and
FREDHEIM S. post Buckling Behaviour of Columns, Part I. Det norske Veritas, Report No. 78-501 (1978)
- (20) CARLSEN C.A. Collapse Analysis of Stiffeners subjected to Compression and hydrostatic lateral load. Det norske Veritas, Report No.78-549 (1978)

- (21) CARLSEN C.A., Comparison of Computer programmes for non-linear static Analysis of thin Shell Structures. Det norske Veritas, Report No.78-650 (1978)
- (22) CARLSEN C.A. A Parametric Study of collapse of Stiffened Plates in Compression. The Structural Engineer 588 (1980), No. 2, pp 33-40
- (23) CARLSEN C.A. Experimental and theoretical
SHAO W.J. Analysis of Post Buckling Strength
FREDHEIM S. of flat bar Stiffeners subject to Tripping. Det norske veritas, Report No.80-149 (1980) (Progress Report No. 1)
- (24) CARLSEN C.A. Torsional Buckling of flat bar Stiffeners. Part 1, Progress Report No. 3 (1980). Det norske Veritas, Report No.80-0562 (1980)
- (25) CROLL J.G.A. Explicit lower Bounds for the Buckling of Axially loaded Cylinders and BATISTA R.C. International Journal of Mech. Sci. 23 (1981), No. 6, pp 331/343
- (26) CZUJKO J. Collapse of Web Firders with Web Cutouts. Report I: Yield limit Load. Det norske Veritas, Report No.78-668 (1978)
- (27) DONNELL L.H. A new Theory for Buckling of thin Cylinders under axial Compression

and Bending.

Trans. ASME 56 (1934), pp 795/806

- (28) DONELL L.H.
WAN C.C. Effect of Imperfections on Buckling of thin Cylinders and Columns under axial Compression. Journal of Appl. Mech. 17 (1950), No. 1, pp 73
- (29) DOWLING P.J.
HARDING J.E. Experimental Behaviour of Ring and Stringer Stiffened Shells. Buckling of Shells in Offshore Structures. HARDING J.E., DOWLING P.J. and AGELIDIS N. (Editors) Granada, London, Toronto, Sydney, New York (1982), pp 73/107
- (30) ESSLINGER M. Versteifte und abgesetzte Schalen. Stabilitätsuntersuchungen an dünnwandigen Kreiszyklindern unter axial-symmetrischer Belastung. Chemie-Ingenieur-Technik 45 (1973), H.M., S. 770/776
- (31) FLÜGGE W. Statik und Dynamik der Schalen. Springer-Verlag Berlin (1934)
- (32) FLÜGGE W. Statik und Dynamik der Schalen. Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962, 3. Auflage
- (33) FLÜGGE W. Stresses in Shells. Springer-Verlag Berlin (1973)
- (34) FOSS G.
HORNE J.E. Buckling of Beam Columns in braced Structures OCT. 3903 (1980), pp. 479/490

- (35) GEIER B. Beullasten versteifter Kreiszylin-
derschalen.
Sonderdruck aus dem Jahrbuch 1965
der WGLR, S. 440/447 (siehe Dis-
kussionsbeitrag von CZERWENKA G.)
- (36) GEIER B. Das Beulverhalten versteifter
Zylinderschalen.
Bericht aus dem Institut für Flug-
zeugbau der Deutschen Forschungs-
anstalt für Luft- und Raumfahrt
(DFL).
Zeitschrift für Flugwiss. 14 (1966)
H. 7
- (37) GEIER B. Das Beulen orthotroper Kreiszylin-
derschalen unter gleichzeitiger Wir-
kung von Druckkräften in Längs- und
Umfangsrichtung.
Institut für Flugzeugbau = DFL -
Mitteilungen (1967), H. 6, S. 257/263
- (38) GREEN D.R. Compression Tests on large-Scale
NELSON H.M. Stringer Stiffened Tubes.
Buckling of Shelles in Offshore
Structures HARDING J.E., DOWLING
P.J., AGELIDIS N. (Editors) Granada,
London, Toronto, Sydney, New York
(1982), pp. 25/43
- (39) GREINER R. Ingenieurmäßige Berechnung dünnwan-
diger Kreiszyinderschalen.
Institut für Stahlbau, Holzbau und
Flächentragwerke, Heft 1 - 1980,
Universität Graz

- (40) GROTH H. Buckling of cylinders with longitudinal Stiffeners subjected to axial compression.
FLYGTEKNISKA FÖRSÖKSANSTALTEN (FFA)
The aeronautical Research institute of Sweden
Technical Note HU - 2184
- (41) GROVE T. Buckling Experiments on 4 large
DIDRIKSEN T. Axial Stiffened and 1 Ring Stiffened
Cylindrical Shells.
Det norske Veritas, Report No.76-432
(1976)
- (42) GROVE T. Buckling Experiments on 4 large
DIDRIKSEN T. axial stiffened cylindrical Shells
subjected to axial compression and
lateral pressure.
Det norske Veritas, Report No.77-431 (1976)
- (43) HÄFFNER L. NISA80 Programm-Dokumentation
RAMM E. Institut für Baustatik
SÄTTELE J.M. Universität Stuttgart (1980)
STEGMÜLLER H.
- (44) HÄFFNER L. Einfluß einer Rundschweißnaht auf
die Stabilität und Traglast des
axialbelasteten Kreiszyllinders.
Dissertation, Universität Stuttgart
(1982)
- (45) HARDING J.E. The elastoplastic Analysis of imperfect
Cylinders.
Proc. Instn. Civ. Engrs 65 (1978),
Part 2, pp 875/892
- (46) HARDING J.E. Buckling Tests on Stiffened Shells.
Imperial College London Report (1981)

- (47) HARDING J.E. Analytical Results for the Behaviour of Ring and Stringer Stiffened Shells. Buckling of Shells in Offshore Structures. HARDING J.E., DOWLING P.J. & AGELIDIS N. (Editors) Granada, London, Toronto, Sydney, New York (1982), pp 231/256
- (48) HARDING J.E. Buckling of Shells in Offshore-
DOWLING P.J. Structures.
AGELIDIS, N. Granada, London, Toronto, Sydney,
(Editors) New York (1982)
- (49) HERZOG M. Die Tragfähigkeit unversteifter und
versteifter Kreiszyinderschalen 1
aus Baustahl.
Der Stahlbau 2 (1981), H.2., S.50/54
- (50) HUTCHINSON J.W. Imperfection Sensitiy of Eccentri-
AMAZIGO J.C. cally stiffened cylindrical Shells.
AIAA-Journal 5 (1967), No.3,
pp. 392/401
- (51) JOHNSON B.G. Guide of Stability Design.
Criteria for Metal Structures.
Local Buckling of Plates.
- (52) KARMAN T.H. VON The Buckling of thin cylindrical
TSIEN H.S. Shells under axial Compression.
Journal of Aeronaut. Sei. 8 (1941),
8, pp 303
- (53) KJEOY H. Pilot Test on the Compressive
FOSS G. Strength of an internal Ring
Stiffener.
Progrss Report No. 6
Det norske Veritas, Report No.80-0625
(1980)

- (54) KLAPP E. Apparate- und Anlagentechnik.
Planung, Berechnung, Bau und Betrieb
stoff- und energiewandelnder Systeme
auf konstruktiver Grundlage.
Springer-Verlag Berlin, Heidelberg,
New York (1980), S. 375/386
- (55) KOITER W.T. Buckling and Postbuckling Behaviour
of a cylindrical Panel under axial
Compression. NRL Report 5476,
Reports and Transactions, National
Aeronautical Research Institute 20
(1956) Amsterdam, ARM 11, 1958,
Reo. 819
- (56) KOITER W.T. The Application of des initial
Postbuckling Analysis to Shells.
Buckling of Shells. A State-of-the
Art Colloquium, Vol. 1, pp 1.1-1.15
Held at: Stuttgart, Mai 6-7 (1982)
Springer-Verlag (1982)
- (57) KOLLAR L. Schalenbeulung
DULACSKA Werner-Verlag, Düsseldorf (1975)
- (58) KOMPFFNER T.A. Ein Finites Elementmodell für die
geometrisch und physikalisch nicht-
lineare Berechnung von Stahlbeton-
schalen. Dissertation, Stuttgart (1983)
- (59) LORENZ, R. Achsensymmetrische Verzerrungen
in dünnwandigen Hohlzylindern.
VDI-Zeitschrift 52 (1908), H. 43,
S. 1706/1713
- (60) MARGUERRE K. Zur Theorie der gekrümmten Platte

großer Formänderung. Jahrbuch 1939.
Deutsche Luftfahrtforschung,
S. I 413/418
Proc. 5th Intern. Congr. Appl. Mech.
(1939), pp 93/101

- (61) MARGUERRE K. Über den Einfluß der Lagerungsverhältnisse auf die Stabilität gedrückter gekrümmter Platten. Lilienthal Ges. Luftfahrtforschung, Bericht 119 (1939)
- (62) MILLER C.D. Summary of Buckling Tests on fabricated Steel Cylindrical Shells in the USA. Buckling of Shells in Offshore Structures. HARDING, DOWLING, AGELIDIS (Editors). Granada, London, Toronto, Sydney, New York (1982), pp. 429/471
- (63) MILLER C.D. Buckling Stresses of Ring and Stringer Stiffened cylindrical Shells under axial Compressive Load (1977)
- (64) NELSON H.M.
GREEN D.R.
PHILLIPS D.V. Buckling Studies of large Diameter stiffened Tubes. University of Glasgow Report (April 1980)
- (65) ODLAND J. Buckling Resistance of unstiffened and Stiffened curcular cylindrical Shells Structures. Norwegian Maritime Research 6 (1978), No. 3, pp 2/22

- (66) ODLAND J. Buckling of slightly curved Panels subject to axial Compression. Det norske Veritas, Report No.78-679 (1978)
- (67) ODLAND J. General Buckling of Stringer Stiffened cylindrical Shells. Det norske Veritas, Report No.79-0042 (1979)
- (68) OSTAPENKO A. Local buckling of Tubular Steel Columns, Proc. of the Nat. Structur. Engineer. Conf. of ASCE, Methods of Structural Analysis. Vol. 2, Published by ASCE, New York, N.Y. 10017 (1976)
GUNZELMANN S.X.
- (69) OSTAPENKO A. Local Buckling tests on Three Steel Large-Diameter Tubular Columns. Fourth Int. Specialty Conference on Cold-Formed Steel Structures, Recent Research and Developments in Cold-Formed Steel Structures June 1-2 (1978)
GUNZELMANN S.X.
- (70) PFEIFFER M. Ein Berechnungsverfahren für rotationssymmetrische orthotrope Kreiszyklinderschalen im Stahlbau. Dissertation, Universität Karlsruhe (1981)
- (71) PFEIFFER M. Tragsicherheitsnachweise für axial-belastete orthotrope Kreiszyklinderschalen
Stahlbau-Handbuch S. 567 - 578
Stahlbau-Verlags-GmbH Köln (1982)
- (72) PFLÜGER A. Stabilitätsprobleme der Elastostatik. 2. Auflage.
Springer-Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, New York (1964)

- (73) POPE G.G. On the axial Compression of long, slightly curved Panels. British A.R.C., R & M., No. 3392 (1963)
- (74) RAMM E. Geometrisch Nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente. Habilitationsschrift, Universität Stuttgart (1976)
- (75) RAMM E. Strategies for Tracing the Non-linear Response Near Limit Points. Proc. Europe-U.S. Workshop on "Nonlinear Finite Element Analysis in structural Mechanics". Bochum (1980), Springer-Verlag (1981)
- (76) REDDY B.D. Buckling of elastic-plastic discretely Stiffened Cylinders in axial Compression. Int. Journal of Solids & Structures 16 (1980), pp. 313/328
- (77) REHFELD L.W.
HALLAUER W.L. Edge Restraint effect on Buckling of compressed curuld Panels. AIAA-Journal 6 (1968), No. 1, pp. 187/189
- (78) ROSEN A.
SINGER J. Vibrations of axially loaded stiffened cylindrical Shells with elastic Restraints. International Journal of Solids & Structures 12 (1976), pp. 577/588
- (79) SÄTTELE J.M. Ein Finites Elementkonzept zur Be-

rechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nicht-linearität.

Dissertation, Stuttgart (1980)

- (80) SÄTTELE J.M.
RAMM E.
FISCHER M. Traglastkurven einachsig gedrückter Rechteckplatten mit Seitenverhältnissen < 1 bei vorgegebenen geometrischen Imperfektionen.
Der Stahlbau 7 (1981), S. 205/210
- (81) SAMUELSON Å.
VESTERGREN P. Analysis of axially loaded Stringer Stiffened circular Cylinders. Flygtekniska Försöksansalten (FFA). The Aeronautical Research Institute of Sweden.
Technical Note HU-2134, Stockholm (1979)
- (82) SAMUELSON Å. Practical Analysis Methods for Design of circular Cylinders with longitudinal Stiffeners and subject to axial Compression. Buckling of Shells. A State-of-the Art Colloquium, Vol 2, pp.20.1/20.24
Held at: Stuttgart, May 6-7 (1982)
- (83) SANDEN K.V.
GÜNTHER K. Über das Festigkeitsproblem quer-
versteifter Hohlzylinder unter all-
seitig gleichmäßigem Außendruck.
Werft und Reederei 1 (1920), H.8,
S. 163/168; H. 9, S. 189/198; H.10,
S. 216/221 und 2 (1921), H. 17,
S. 505/510
- (84) SCHMIDT H. Stabilitätstheorie Flächentragwerke
FMPA Baden-Württemberg, "Otto-Graf-
Institut". Vorlesung Universität
Stuttgart (1980/1981)

- (85) SCHULZ U. Der Stabilitätsnachweis von Schalen. Bericht der Anstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Friederica-na, Karlsruhe.
Herausgeber: BÄHRE R., EHLBECK J. (1981)
- (86) SHAO W.J. Effects of large Deflections and
CHEN T.Y. initial Imperfections on the general plastic stability of circular cylindrical Shells reinforced by closely spaced Rings under hydrostatic pressure.
Det norske Veritas, Report No.80-0130 (1980)
- (87) SHERMAN D.R. Tests of circular Tubes in Bending
ASCE Journal. Structural Division 102 (1976), ST 11, pp.2181/2195
- (88) SINGER J. Buckling of integrally stiffened cylindrical Shells.
Review of Experiment and Theory.
NTIS Index (March 1973)
- (89) SINGER J. Buckling, Vibrations and Postbuckling of stiffened cylindrical Shells. BOSS, Internat. Conference, Norwegian Institute of Technology, Trondheim (1976)
- (90) SINGER J. Buckling Experiments on Shells. A Review of recent Developpements. Presented at Euromech Colloquium No. 128 "Stability Buckling and Postbuckling Behaviour, Foundations and Analysis". Delft, March 31 - April 2 (1980).

Also, TAE Report 403, Dept. of Aeronautical Engineering, Technion, Israel Institute of Technology (April 19

- (91) SINGER J. The Status of experimental Buckling Investigation of Shells. Buckling of Shells. A State-of-the Art Colloquium, Vol 1, pp. 9.1/9.33 Held at: Stuttgart May 6-7 (1982)
- (92) SINGER J. Vibration Correlation Techniques for improved Buckling Predictions of imperfect Stiffened Shells. Buckling of Shells in Offshore Structures. HARDING, DOWLING, AGELIDIS (Editors). Granada, London, Toronto, Sydney, New York (1982), pp. 285/329
- (93) SOBEL L.H.
WELLER T.
AGARWAL B.L. Buckling of cylindrical Panels under axial Compression. Computers & Structures 6 (1976), pp. 29/35
- (94) STEINHARDT O.
LOHSE W. Über wirklichkeitsnahe Tragmechanismen bei geschweißten Metallkonstruktionen. Schweißen und Schneiden 29 (1977) H. 4, S. 121/125
- (95) STEINHARDT O.
PFEIFFER M. Stabilitätsuntersuchungen an orthotroper Kreiszyinderschalen unter einfacher Axialbelastung sowie bei gleichzeitigem Innendruck. Beitrag in "Festschrift Otto Jungbluth- 60 Jahre", Darmstadt (1978)

- (96) STEINHARDT O. Über die Traglast axialdruckbe-
PFEIFFER M. lasteter orthotroper Kreiszyliner-
 schalen.
 Der Bauingenieur 55 (1980), S.281/284
- (97) SYNGELLAKIS S. Elastic local Buckling of
WALKER A.C. longitudinally stiffened Cylinders.
 Conference on Stability Problems in
 Engng. Structures and Components,
 Cardiff (1978)
- (98) THIELEMANN W.F. New Developpements in the Nonlinear
 Theories of Buckling of thin cylin-
 rical Shells.
 Aeronautics and Astronautics. Perga-
 mon Press Oxford London, New York,
 Paris (1960), pp. 76/119
- (99) TIMOSHENKO S.P. Einige Stabilitätsprobleme aus der
 Elastizitätstheorie.
 Zeitschrift für Mathematik und
 Physik 58 (1910), H. 4, S. 378
- (100) TIMOSHENKO S.P. Theory of Elastic Stability. Second
GERE J.M. Edition. MC GRAW-HILL Co., Inc.
 New York, Toronto, London (1961)
- (101) TOKUGAWA T. Model Experiments on the Elastic
 Stability of closed and cross-stif-
 fened circular Cylinders under
 uniform external Pressure.
 Pressure. Proc. World Engineering
 Congress Tokyo (1929), Band 29,
 Paper No. 651, pp. 249/279
- (102) VALSGÄRD S. Numerical Design Prediction of the

Capacity of Plates in Biaxial in-plane
Compression.
Intern. Journal of Solids & Structures
12 (1980), pp. 729 / 739

- (103) VALSGÄRD S.
SHAO W.J.
STEEN E. Data Collection on Geometry and
Design Loads for stiffened
cylindrical Shells in Marine
Structures.
Det norske Veritas, Report No. 80-0156
(1980) Progress Report No. 2
- (104) VALSGÄRD S.
STEEN E. Simplified Strength Analysis of
narrow pannelled Stringer stiffened
Cylinders under axial Compression
and lateral Load.
Det norske Veritas, Report No. 80-0590
(1980). Progress Report No. 4
- (105) VALSGÄRD S.
FOSS G. Buckling Research in Det norske
Veritas.
Buckling of Shells in Offshore-
Structures. HARDING, DOWLING,
AGELIDIS (Editors).
Granada, London, Toronto, Sydney,
New York (1982), pp. 491/548
- (106) VAN DER NEUT A. General instability of stiffened
cylindrical Shells under axial
Compression.
National Luchtvaartlaboratorium,
Holland, Vol. 13, Rept. S. 314
(1947)
- (107) WALKER A.C.
KEMP K.O. Buckling of Stringer stiffened
welded Steel Cylinders.
Discussion of BOSS Conference,
Norwegian, Institute of Technology,
Trondheim (1976)

- (108) WALKER A.C.
DAVIS P. The collapse of stiffened Cylinders Steel Plated Structures. An International Symposium. DOWLING, HARDING, FRIEZE (Editors). Crosby Lockwood Staples London (1976), pp. 791/801
- (109) WALKER A.C.
SRIDHARAN S. Buckling of compressed, longitudinally stiffened cylindrical Shells. BOSS '79 Second International Conference on Behaviour of Offshore Structures. Held at: Imperial College of Science and Technology London, August 28-31 (1979), Part 2, Paper 72 pp. 341/356
- (110) WALKER A.C.
SRIDHARAN S. Analysis of the Behaviour of axially Compressed stringer-stiffened cylindrical Shells. Proc. Instn. Civ. Engrs (1980), Part 2, Paper 69, pp.447/472
- (111) WALKER A.C.
ANDRONOCOU A.
SRIDHARAN S. Theoretical Analysis of Stringer and Ring Stiffened Shells. Buckling of Shells in Offshore Structures. HARDING, DOWLING, AGELIDIS (Editors). Granada, London, Toronto, Sydney, New York (1982) pp. 183/208
- (112) WALKER A.C.
ANDRONICOU A.
SRIDHARAN S. Experimental Investigation of the Buckling of stiffened Shells using small Scale Models. Buckling of Shells in Offshore Structures. HARDING, DOWLING; AGELIDIS (Editors) Granada, London, Toronto, Sydney, New York (1982) pp. 45/72

- (113) WALKER A.C. Versuche am University College,
London
(unveröffentlicht) (vgl. auch (109)
und (110)
- (114) WITTEK U. Kriterium für ungünstigste
geometrische Imperfektionen der
Schalenbeulung.
ZAMM 61 (1981, T 7173

A N H A N G

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial operations.

2. The second part of the document outlines the various methods and techniques used to collect and analyze data. It highlights the need for consistent and reliable data collection processes to support effective decision-making.

3. The third part of the document focuses on the analysis and interpretation of the collected data. It discusses the various statistical and analytical tools used to identify trends, patterns, and insights from the data.

4. The fourth part of the document discusses the application of the findings and insights derived from the data analysis. It emphasizes the importance of using the data to inform strategic decisions and improve operational efficiency.

5. The fifth part of the document discusses the challenges and limitations associated with data collection and analysis. It highlights the need for ongoing monitoring and evaluation to ensure the effectiveness of the data-driven approach.

6. The sixth part of the document discusses the future prospects and opportunities for data-driven decision-making. It highlights the potential for leveraging advanced technologies and techniques to further enhance the accuracy and effectiveness of data analysis.

7. The seventh part of the document discusses the importance of data security and privacy. It emphasizes the need for robust security measures to protect sensitive data and ensure compliance with relevant regulations.

8. The eighth part of the document discusses the role of data in driving innovation and growth. It highlights the potential for using data to identify new market opportunities and develop innovative products and services.

9. The ninth part of the document discusses the importance of data literacy and skills. It emphasizes the need for individuals and organizations to develop the necessary skills and knowledge to effectively use and interpret data.

10. The tenth part of the document discusses the importance of data governance and ethics. It emphasizes the need for clear policies and procedures to ensure the responsible and ethical use of data.

1. Schritt: Bestimmung der linearen Beulspannungen (Verzweigungslasten)

Lokalbeulen (s. Definition von MILLER) $M_i \geq 1.5$ ($i = x, \phi$)

$\sigma_{ki, lokal} = C \cdot \frac{E \cdot t}{R}$

Fall a) i "Plattenbeulen" bei kleinem Abstand der Stringer. Die Konstante C lautet

$C = \frac{3.6}{M_0^2} + 0.0253 \frac{M_0^2}{M_x^2}$ für $1.5 < M_0 < 3.46$
 mit $M_0 = b/\sqrt{Rt}$

Fall b) i "Zylinderbeulen"

$C = 0.605$ (klassische Beullast für $\mu = 0.3$)

Eine Diagrammendarstellung von C ist in Bild Bl. für $M_0 \geq 2 M_x$ (mit $M_x = L/\sqrt{Rt}$) gilt:

$C = \frac{0.904}{M_x^2} + 0.1013 M_x$ für $1.5 \leq M_x < 1.73$
 $C = 0.605$ für $M_x \geq 1.73$

"Stringerbeulen" und "Globalbeulen" (nach MILLER):
 $\sigma_{ki, global}$ errechnet sich aus der MILLER-Formel (2.13)

für "Stringerbeulen" wird $L = l$ gesetzt und für "Globalbeulen" $L = Lg$. Außerdem werden A_{St} (Streifenquerschnitt) und J_{St} (Trägheitsmoment der Steifen) gleich Null gesetzt.

Die Mitwirkende Breite $b_e = 1.90 t \cdot q (1 - 0.415 \frac{t \cdot q}{b})$

mit $q = \sqrt{\frac{E}{\sigma_{ki, global} \cdot \sigma_{global}}} \gg \sqrt{\frac{E}{\sigma F}}$

$\alpha_{global} =$ Abminderungsfaktor im elastischen Bereich

2. Schritt. Bestimmung der Abminderungsfaktoren $\alpha_{lokal}, \alpha_{global}$ (elastisch)

a) R/t = Einfluß auf Beullast

$\alpha_{lokal} = 0.207$ für $R_t \geq 600$

$\alpha_{lokal} = 1.52 - 0.473 \log (R/t)$ für $R_t < 600$
 (kleinerer Wert maßgebend)

b) Einfluß der Länge auf die Beullast:

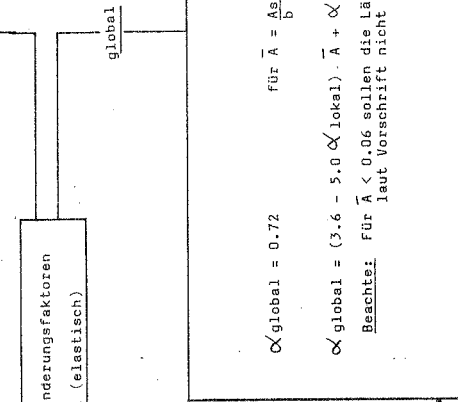
$\alpha_{lokal} = 0.837 - 0.14 M_x$ für $1.5 \leq M_x < 1.73$
 $\alpha_{lokal} = 0.826/M_x^{0.6}$ für $1.73 \leq M_x < 10$
 $\alpha_{lokal} = 0.207$ für $M_x \geq 10$

Maximaler Wert aus a und b gilt als α_{lokal}

$\alpha_{global} = 0.72$ für $\bar{A} = \frac{Asteife}{b \cdot t} \geq 0.20$

$\alpha_{global} = (3.6 - 5.0 \alpha_{lokal}) \cdot \bar{A} + \alpha_{lokal}$ für $0.06 < \bar{A} < 0.20$

Beachte: Für $\bar{A} < 0.06$ sollen die Längssteifen laut Vorschrift nicht effektiv sein.



α_{lokal} ist in Diagrammform in Bildern B2 und B3

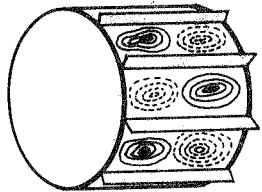
$\alpha_{\text{lokal}} \cdot \tilde{\sigma}_{\text{ki,lokal}} > \tilde{\sigma}_F$?

nein

3. Schritt: Bemessung im elastischen

Bereich: $\tilde{\sigma}_{x,\text{max}} \leq \tilde{\sigma}_{\text{zul.}} = \frac{\alpha_{\text{lokal}} \cdot \tilde{\sigma}_{\text{ki,lokal}}}{FS}$

FS = Sicherheitsfaktor



Lokalbeulen

ja

3. Schritt: Plastische Abminderung mit notwendig

$\eta = 1.0$ für $\frac{\tilde{\sigma}_{x,\text{max}} \cdot FS}{\tilde{\sigma}_F} < 0.55$

$\eta = \frac{0.18}{1 - 0.49 \frac{\tilde{\sigma}_{x,\text{max}} \cdot FS}{\tilde{\sigma}_F}}$ für $0.55 < \frac{\tilde{\sigma}_{x,\text{max}} \cdot FS}{\tilde{\sigma}_F} < 0.738$

$\eta = 1.31 - 1.15 \frac{\tilde{\sigma}_{x,\text{max}} \cdot FS}{\tilde{\sigma}_F}$ für $0.738 < \frac{\tilde{\sigma}_{x,\text{max}} \cdot FS}{\tilde{\sigma}_F} < 1.0$
ist in Bild B4 dargestellt

4. Schritt: Bemessung im plastischen Bereich

$\tilde{\sigma}_{x,\text{max}} < \tilde{\sigma}_{\text{zul.}} = \eta \cdot \alpha \cdot \tilde{\sigma}_{\text{ki}}$

für α bzw. $\tilde{\sigma}_{\text{ki}}$ sind jeweils die globalen bzw. lokalen Werte einzusetzen. In η ist der Sicherheitsfaktor FS enthalten.

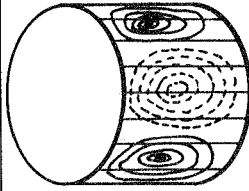
$\alpha_{\text{global}} \cdot \tilde{\sigma}_{\text{ki,global}} > \tilde{\sigma}_F$?

nein

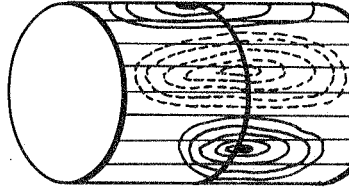
3. Schritt: Bemessung im elastischen

Bereich: $\tilde{\sigma}_{x,\text{max}} < \tilde{\sigma}_{\text{zul.}} = \frac{\alpha_{\text{global}} \cdot \tilde{\sigma}_{\text{ki,global}}}{FS}$

FS = Sicherheitsfaktor



Stringer-Beulen



Globalbeulen

Tabelle A1 Bemessungskonzept für längsversteifte Kreis-zylinderschalen nach den ASME-Code-Regeln.

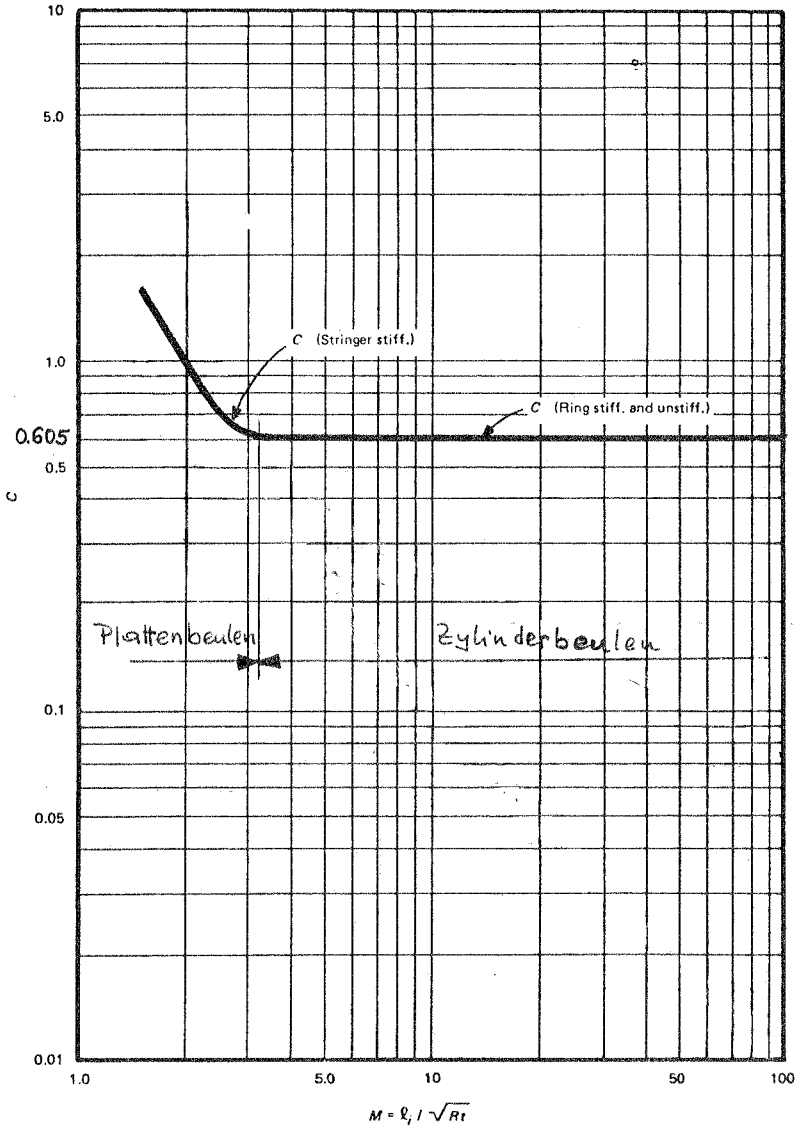


Bild B1 C-Beiwert für Lokalbeulen nach den ASME-Code-Regeln (aus (N4)). Man beachte die Analogie zum FLÜGGE'schen Diagramm für isotrope Zylinder in Bild 1.2

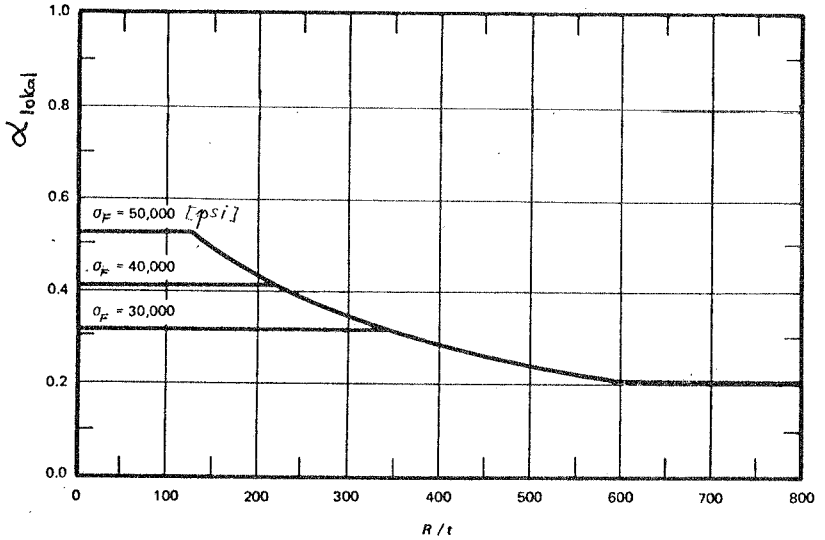


Bild B2 Abminderungsfaktor lokal infolge des Einflusses der Zylinderschlankheit R/t aus (N4)

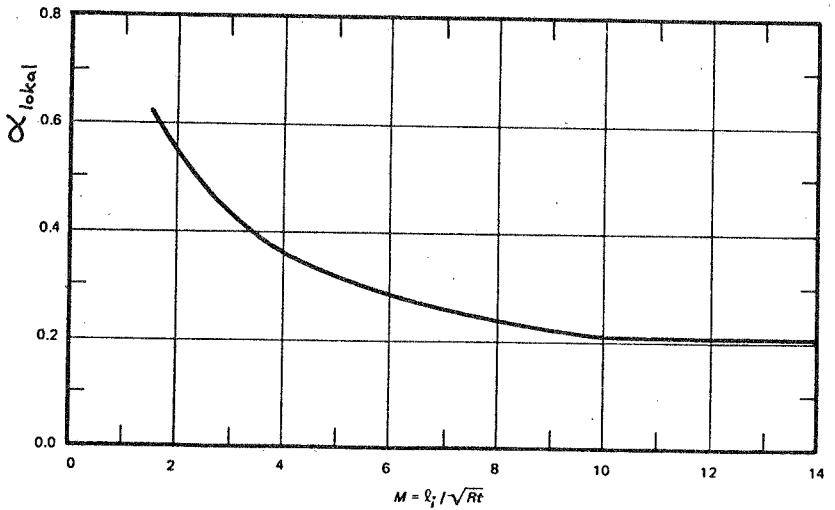


Bild B3 Abminderungsfaktor lokal infolge des Einflusses der Zylinderlänge (aus (N4))

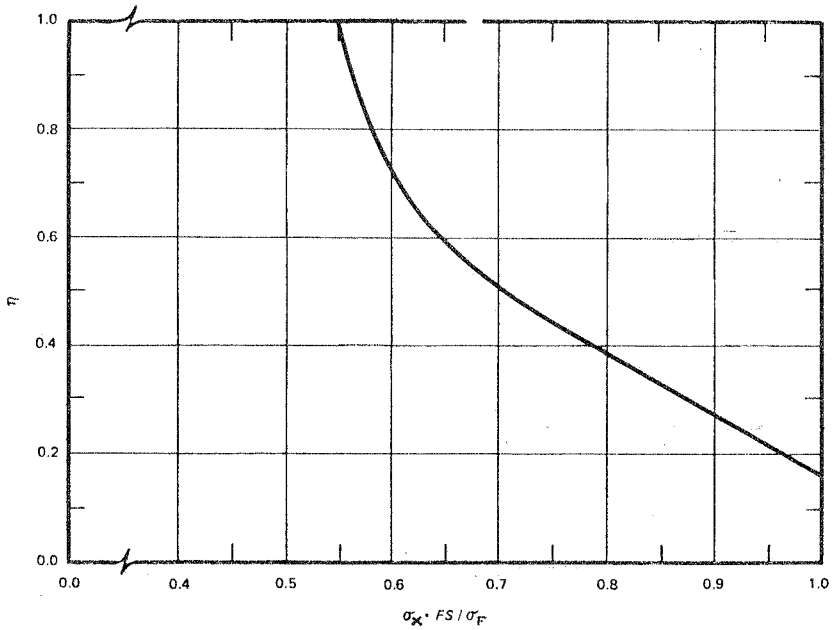


Bild B4 Abminderungsfaktor im plastischen Bereich (aus (N4))

[

]

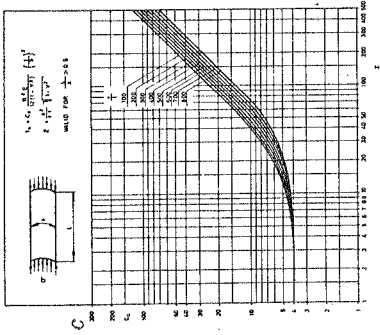
1. Schritt: Bestimmung der linearen Beulspannungen

Schalenbeulen (s. Definition MILLER):

Beulung der Schalenhaut allein (s. Beulbild ganz unten rechts)

$$\sigma_{ki} = C \frac{\pi^2 E}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2$$

C ist im Diagramm unten dargestellt.

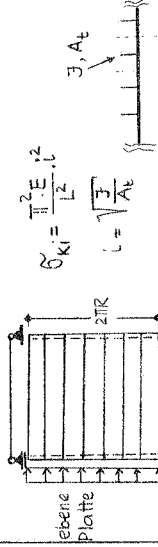


Globalbeulen

Der Begriff schließt gleichzeitig das "Stringer-" und "Globalbeulen" nach MILLER ein. Bei ring- und längsversteiften Zylindern zunächst die Beullast σ_{ki} errechnet, wobei die Stringer vernachlässigt werden. Diese wird in einem zweiten Rechenschritt benützt (Interaktion) um die endgültige "Globalbeullast" zu bestimmen (Ringversagen).

Für reine Längsversteifung

Zylinder wird aufgeklappt und als ebene Platte berechnet (Krümmungseffekt vernachlässigt).



Es ist zulässig σ_{ki} auch nach der klassischen orthotropen Verschmierungstheorie zu bestimmen.

Stabbeulen (Knicken)

Bei langen Zylindern

$$\sigma_{ki} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_k^2}$$

λ_k = Schlankheit des "Knickstabes"

Wenn die reduzierte Schlankheit des Knickstabes $\lambda_k = \sqrt{\frac{L^2}{I_k}} > 0.2$ muß eine

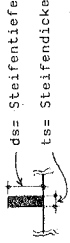
Interaktion zwischen Lokalen Beulen der Schalenhaut und Knickbeulen in Rechnung gestellt werden. (siehe hierzu (N7) Abschnitt D.3.6.1)

Lokales Stringerbeulen

Darunter sind Torsionsbeulen bzw. Plattenbeulen von Flansch oder Steg zu verstehen.

Diese Beularten sind konstruktiv oder durch folgende Gleichung auszuschließen:

$$\frac{d_s}{t_s} \leq 0.4 \sqrt{\frac{E}{\sigma_F}}$$



Bei Nichterfüllung der Gleichung wird vorgeschlagen, die für die Schalenhaut ermittelte k_1 (siehe Schalenbeulen) abzumindern.

Bestimmung der als gleichmäßig auf die Steifen und Schalenhaut angenommen wirkenden Längsspannung (auf empirischem Weg):

$$\sigma_{ki}^{(new)} = \frac{(1 + \delta + \eta) - \sqrt{(1 + \delta + \eta)^2 - 4\delta}}{2\delta} \cdot \frac{A_{te}}{A_t} \cdot \sigma_F$$

$\delta = \sigma_F / \sigma_{ki}$, A_{te} = mitwirkender Querschnitt (Schale/Steife)
 A_t = Gesamtquerschnitt (Schale/Steife)

η = Parameter mit dem die mitwirkende Plattenbreite bestimmt wird. ist für innere bzw. äußere Steifenanordnung verschieden.

Wegen des Umfangs wird auf die Wiedergabe der Formeln für η verzichtet.

2. Schritt: Kontrolle für die maximalen Spannungen

$$\sigma_v \leq \sigma_{zul} = \frac{\alpha \cdot \sigma_{ki}}{\gamma_w} \quad (\alpha \cdot \sigma_{ki} = \sigma_F)$$

$$\gamma_m = 1.15$$

σ_v = Vergleichsspannung nach der VON MISES-Formel

3. Schritt: Stabilitätskontrolle

$$\sigma_{x,max} \leq \sigma_{zul} = \frac{\sigma_{ki} \cdot \psi}{\gamma_m \cdot \chi}$$

$\gamma_m = 1.15$ (elastisch)

$\gamma_m = 1.30$ (plastisch)

ψ = Faktor, der das Nachbeulen berücksichtigt (siehe Tabelle unten):

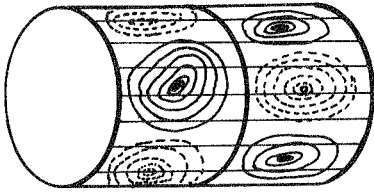
| Längsspannungen | |
|-----------------|---|
| $\psi = 1.0$ | wenn spätere Spannungumlagerungen möglich |
| $\psi = 0.9$ | wenn Umlagerungen nicht möglich. |

χ = Schlankheitsfaktor (siehe unten)

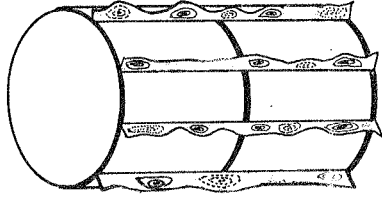
$$\chi^4 = 1.0 \quad \alpha = 0.6 \chi_k = 1.3$$

$$\chi_k = \sqrt{\sigma_F / \sigma_{ki}}$$

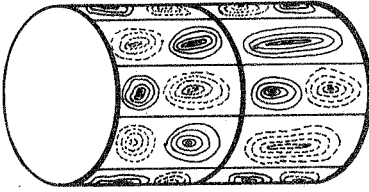
Bei wiederholter Belastung ist außerdem der "Shake down"-Effekt nachzuweisen.



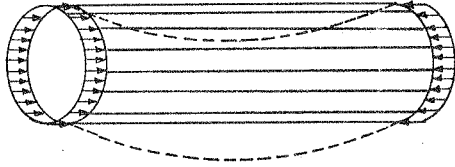
Globaibeulen



lokales Stringerbeulen



Schalenbeulen



Stabknicken

| totale Lagrange-Darstellung | | mitgehende Lagrange-Darstellung | |
|--|---|--|---|
| | Gleichgewichts-ausdruck | entsprechender Ausdruck im P.d. v.V. | Gleichgewichts-ausdruck |
| | | entsprechender Ausdruck im P.d. v.V. | |
| inkrementelle elastische Steifigkeitsmatrix ${}^1K_n^e$ | $\int_{\Omega_V} {}^1B_0^T C_0 B_0 d(\Omega_V)$ | $\int_{\Omega_V} \delta^0 c_{ijrs} \delta^0 x_{i,s} \delta^0 u_{r,j} \delta^0 u_{k,j} \delta_0 u_{k,j} d(\Omega_V)$ ----- oder $\int_{\Omega_V} \delta^0 c_{ijrs} \delta_0^r s \delta_0 e_{ij} d(\Omega_V)$ | $\int_{\Omega_V} {}^1C_{ijrs} u_{s,r} \delta_1 u_{ij} d(\Omega_V)$ ----- oder $\int_{\Omega_V} {}^1C_{ijrs} \tau_{rs} \delta_1 e_{ij} d(\Omega_V)$ |
| geometrische Steifigkeitsmatrix ${}^1K_n^g$ | $\int_{\Omega_V} {}^1\hat{B}_0^T S_0 \hat{B}_0 d(\Omega_V)$ | $\int_{\Omega_V} {}^1s_{ij} \delta^0 u_{k,j} \delta_0 u_{k,j} d(\Omega_V)$ ----- oder $\int_{\Omega_V} {}^1s_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d(\Omega_V)$ | $\int_{\Omega_V} {}^1\tau_{ij} u_{k,j} \delta_1 u_{k,i} d(\Omega_V)$ ----- oder $\int_{\Omega_V} {}^1\tau_{ij} \delta_1 \eta_{ij} d(\Omega_V)$ |
| verallgemeinerte innere Kräfte 1F_n | $\int_{\Omega_V} {}^1B_0^T s_0 d(\Omega_V)$ | $\int_{\Omega_V} {}^1s_{ij} \delta^0 x_{k,j} \delta_0 u_{k,j} d(\Omega_V)$ ----- oder $\int_{\Omega_V} {}^1s_{ij} \delta_0 e_{ij} d(\Omega_V)$ | $\int_{\Omega_V} {}^1\tau_{ij} \delta_1 u_{j,i} d(\Omega_V)$ ----- oder $\int_{\Omega_V} {}^1\tau_{ij} \delta_1 e_{ij} d(\Omega_V)$ |

TABELLE A3 : Steifigkeitsausdrücke (aus 43)

TABELLE A 4

Matrix $\overset{m}{B}$ (Ausschnitt des Knotens i)

| d | KNOTEN i | | | | | | w_i |
|-------------|---------------------|---------------------|---------------------|---|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| | u_i^1 | u_i^2 | u_i^3 | α_i^1 | β_i^1 | w_i | |
| $n u_{4,1}$ | ${}_n \Phi_{1,1}^i$ | 0 | 0 | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{11}^i + \Phi_{1,1}^i \cdot G_{11}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{12}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{12}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot G_{12}^i$ |
| $n u_{4,2}$ | ${}_n \Phi_{2,2}^i$ | 0 | 0 | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{21}^i + \Phi_{2,2}^i \cdot G_{21}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{22}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{22}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot G_{22}^i$ |
| $n u_{4,3}$ | ${}_n \Phi_{3,3}^i$ | 0 | 0 | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{31}^i + \Phi_{3,3}^i \cdot G_{31}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{32}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{32}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot G_{32}^i$ |
| $n u_{2,1}$ | 0 | ${}_n \Phi_{1,1}^i$ | 0 | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{21}^i + \Phi_{1,1}^i \cdot G_{21}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{22}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{22}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot G_{22}^i$ |
| $n u_{2,2}$ | 0 | ${}_n \Phi_{2,2}^i$ | 0 | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{21}^i + \Phi_{2,2}^i \cdot G_{21}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{22}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{22}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot G_{22}^i$ |
| $n u_{2,3}$ | 0 | ${}_n \Phi_{3,3}^i$ | 0 | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{21}^i + \Phi_{3,3}^i \cdot G_{21}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{22}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{22}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot G_{22}^i$ |
| $n u_{3,1}$ | 0 | 0 | ${}_n \Phi_{1,1}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{31}^i + \Phi_{1,1}^i \cdot G_{31}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{32}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot F_{32}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot G_{32}^i$ |
| $n u_{3,2}$ | 0 | 0 | ${}_n \Phi_{2,2}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{31}^i + \Phi_{2,2}^i \cdot G_{31}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{32}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot F_{32}^i$ | $\bar{\Phi}_{2,2}^i \cdot G_{32}^i$ |
| $n u_{3,3}$ | 0 | 0 | ${}_n \Phi_{3,3}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{31}^i + \Phi_{3,3}^i \cdot G_{31}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{32}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot F_{32}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot G_{32}^i$ |

mit ${}_n \Phi_{j,i}^i = \sum_{r=1}^n \Phi_{j,r}^i \cdot \Phi_{r,i}^i$; $\bar{\Phi}_{j,i}^i = \frac{h_i^i}{2} ({}^n \Phi_{j,i}^i + t \cdot \Phi_{j,i}^i)$; $\Phi_{j,i}^i = \frac{h_i^i}{2} (s \cdot \Phi_{j,i}^i + s \cdot \Phi_{j,i}^i)$

TABELLE A 5

Matrix ${}^m\mathbb{B}$ (Ausschnitt des Knotenanteils i)

| KNOTEN i | | | | | | |
|------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---|---|---------------------------------------|
| $\circ e$ | u_1^i | u_2^i | u_3^i | α^i | β^i | ω^i |
| $\circ e_{11}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{11}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{21}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{31}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{11} + \Phi_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{11}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{12}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{12}$ |
| $\circ e_{22}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{12}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{22}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{32}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{21} + \Phi_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{21}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{22}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{22}$ |
| $\circ e_{33}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{13}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{23}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{33}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{31} + \Phi_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{31}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{32}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{32}$ |
| $2 \circ e_{12}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{11}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{21}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{31}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{11} + \Phi_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{11}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{12}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{12}$ |
| | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{12}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{22}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{32}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{21} + \Phi_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{21}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{22}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{22}$ |
| $2 \circ e_{13}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{11}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{21}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{31}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{11} + \Phi_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{11}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{12}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{12}$ |
| | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{13}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{23}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot L_{33}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{31} + \Phi_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{31}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{32}$ | $\Phi_{\circ,1}^i \cdot \bar{L}_{32}$ |
| $2 \circ e_{23}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{12}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{22}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot L_{32}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{21} + \Phi_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{21}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{22}$ | $\Phi_{\circ,3}^i \cdot \bar{L}_{22}$ |
| | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{13}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{23}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot L_{33}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{31} + \Phi_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{31}$ | $\bar{\Phi}_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{32}$ | $\Phi_{\circ,2}^i \cdot \bar{L}_{32}$ |

$L_{jk} = \circ U_{j,k} + \delta_{jk}$ ($\circ U_{j,k}$ = Verschiebungsableitung, δ_{jk} = Kronecker Symbol)

$\bar{L}_{jk} = {}^m F_{1k}^i \cdot L_{1j} + {}^m F_{2k}^i \cdot L_{2j} + {}^m F_{3k}^i \cdot L_{3j}$; $\bar{L}_{jk} = {}^m G_{1k}^i \cdot L_{1j} + {}^m G_{2k}^i \cdot L_{2j} + {}^m G_{3k}^i \cdot L_{3j}$

TABELLE A 6

| | | KNOTEN i | | | | | | |
|-----------|--|----------------|----------------|----------------|--|--|--|--|
| | | u_4^i | u_2^i | u_3^i | α^i | β^i | w_i | |
| $1e$ | | | | | | | | |
| $1e_{41}$ | | $\Phi_{1,1}^i$ | 0 | 0 | $\bar{\Phi}_{3,4}^i \cdot {}^m F_{41}^i + \Phi_{3,1}^i \cdot {}^m G_{41}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot {}^m F_{12}^i$ | $\Phi_{1,1}^i \cdot {}^m G_{12}^i$ | |
| $1e_{22}$ | | 0 | $\Phi_{1,2}^i$ | 0 | $\bar{\Phi}_{3,2}^i \cdot {}^m F_{24}^i + \Phi_{3,2}^i \cdot {}^m G_{24}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,2}^i \cdot {}^m F_{22}^i$ | $\Phi_{1,2}^i \cdot {}^m G_{22}^i$ | |
| $1e_{33}$ | | 0 | 0 | $\Phi_{1,3}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot {}^m F_{34}^i + \Phi_{3,3}^i \cdot {}^m G_{34}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,3}^i \cdot {}^m F_{32}^i$ | $\Phi_{1,3}^i \cdot {}^m G_{32}^i$ | |
| $2e_{12}$ | | $\Phi_{1,2}^i$ | $\Phi_{1,1}^i$ | 0 | $\bar{\Phi}_{3,2}^i \cdot {}^m F_{41}^i + \Phi_{3,2}^i \cdot {}^m G_{41}^i$ $\bar{\Phi}_{3,1}^i \cdot {}^m F_{24}^i + \Phi_{3,1}^i \cdot {}^m G_{24}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,2}^i \cdot {}^m F_{12}^i$ $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot {}^m F_{22}^i$ | $\Phi_{1,2}^i \cdot {}^m G_{12}^i$ $\Phi_{1,1}^i \cdot {}^m G_{22}^i$ | |
| $2e_{13}$ | | $\Phi_{1,3}^i$ | 0 | $\Phi_{1,1}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot {}^m F_{41}^i + \Phi_{3,3}^i \cdot {}^m G_{41}^i$ $\bar{\Phi}_{3,1}^i \cdot {}^m F_{34}^i + \Phi_{3,1}^i \cdot {}^m G_{34}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,3}^i \cdot {}^m F_{12}^i$ $\bar{\Phi}_{1,1}^i \cdot {}^m F_{32}^i$ | $\Phi_{1,3}^i \cdot {}^m G_{11}^i$ $\Phi_{1,1}^i \cdot {}^m G_{32}^i$ | |
| $2e_{23}$ | | 0 | $\Phi_{1,3}^i$ | $\Phi_{1,2}^i$ | $\bar{\Phi}_{3,3}^i \cdot {}^m F_{24}^i + \Phi_{3,3}^i \cdot {}^m G_{24}^i$ $\bar{\Phi}_{3,2}^i \cdot {}^m F_{34}^i + \Phi_{3,2}^i \cdot {}^m G_{34}^i$ | $\bar{\Phi}_{1,3}^i \cdot {}^m F_{22}^i$ $\bar{\Phi}_{1,2}^i \cdot {}^m F_{32}^i$ | $\Phi_{1,3}^i \cdot {}^m G_{22}^i$ $\Phi_{1,2}^i \cdot {}^m G_{32}^i$ | |

Matrix ${}^m B$ mit $n=1$ (Ausschnitt des Knotenanteils i)

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. M. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur
Ermittlung des Tragverhaltens biege- und verdreh-
beanspruchter Stäbe mit I - Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszyklindrischer Silos auf elastischer
Unterlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale
und ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plat-
tenelemente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und
Reissnerschen Plattentheorie nach einer diskreti-
sierten und erweiterten Trefftz - Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O. :
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger drei-
zelliger Träger unter Berücksichtigung der Profil-
verformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K.-H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II.

- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B.-M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Faltwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.
- 79-2 H.-G. Berg:
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppel-
schalen über quadratischem Grundriß auf Einzel-
stützen.
- 79-3 F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner,
E. Ramm, J. M. Sättele:
Fallstudien zu Schalentragwerken (in englischer
Sprache).
- 80-1 R. I. Del Gaizo:
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf
Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2 R. W. Rembold:
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Platten-
tragwerke unter Berücksichtigung der Reissnerschen
Theorie und der Methode der gemischten finiten
Elemente.
- 80-3 J. M. Sättele:
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von
Platten und Schalen bei stofflicher und geometri-
scher Nichtlinearität.

- 82-1 L. Häfner:
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität
und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders.
- 82-2 K. Schweizerhof:
Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter ver-
formungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 1 (1983) P. Osterrieder:
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei
großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) T. A. Kompfner:
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und
physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbeton-
schalen.