

# **Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien**

von

**Ingrid Bruss**

Bericht Nr. 55

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2011



© Ingrid Bruss

*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123  
Fax: 0711 - 685 66130  
E-Mail: sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de  
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kommerziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-035167-9

# **Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien**

Von der Fakultät Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktors der Ingenieurwissenschaften (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Ingrid Bruss**

aus Tartlau/Rumänien

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Dr. h.c. Ekkehard Ramm, Stuttgart  
Mitberichter: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr. Günter Hofstetter, Innsbruck  
Mitberichter: Jun.-Prof. Dr.-Ing. Julia Mergheim, Erlangen  
Tag der mündlichen Prüfung: 12. Mai 2011

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2011



## Kurzfassung

Diese Arbeit setzt sich mit der dreidimensionalen Modellierung heterogener, kohäsiver Reibungsmaterialien auseinander. Exemplarisch beziehen sich die Untersuchungen auf Beton und textildaserverstärkten Beton, die ein ausgeprägt nichtlineares Materialverhalten aufweisen. Mikromechanische Versagensmechanismen wie Delamination zwischen Faser und Matrix sowie Mikrorisse und Mikroporen im Beton führen auf Strukturebene zu schmalen Versagensbereichen, in denen die Dehnungen lokalisieren. Aufgrund dieser irreversiblen Versagensprozesse wird Energie dissipiert und es kommt zur Abminderung der elastischen Materialeigenschaften. Die Breite der Prozesszone ist typischerweise mehrere Größenordnungen kleiner als die Strukturabmessungen, was Verschiebungen auf unterschiedlichen Skalen impliziert. Die Auflösung dieser Verschiebungen sowie der großen Gradienten in der Lösungsfunktion erfordern entweder eine sehr feine Diskretisierung oder eine Erweiterung des Approximationsraumes. Zur detaillierten numerischen Analyse der Delamination in Faserverbundwerkstoffen und der Rissentwicklung in Beton wird im Hauptteil dieser Arbeit eine erweiterte Finite-Elemente-Methode vorgestellt. Im zweiten Teil wird zur Berücksichtigung feinskaliger Versagensphänomene im makroskopischen Verhalten eine Zweiskalenmethode entwickelt.

Im Rahmen der erweiterten Finite-Elemente-Methode können starke und schwache Diskontinuitäten unabhängig von der Diskretisierung modelliert werden. Mechanisch entfestigendes Materialverhalten in schmalen Versagenszonen kann dabei durch das Konzept kohäsiver Risse berücksichtigt werden. Die schmalen Lokalisierungszonen werden dafür mit fiktiven Rissflächen angenähert, die bis zur vollständigen Trennung der Rissufer Spannungen übertragen können. Mit diskreten, schädigungsbasierten Materialmodellen, die in Form von Spannungs-Rissöffnungs-Gesetzen in den Rissflächen formuliert werden, kann das gemischte Versagen materieller Grenzflächen auf Zug und Schub sowie das zugdominante Versagen von Matrixrissen abgebildet werden. So lassen sich Delamination und Rissfortschritt bis zum vollständigen Versagen simulieren. Im Bereich der diskontinuierlichen Versagensmodellierung liegt der Schwerpunkt in der Erarbeitung von Rissverfolgungsalgorithmen, mit denen sich kontinuierliche, beliebig gekrümmte Risspfade im dreidimensionalen Raum verfolgen lassen.

Der zweite Teil dieser Arbeit befasst sich mit einem variationsbasierten Zweiskalenmodell für dreidimensionale Strukturen mit entfestigendem Materialverhalten. Das grobskalige Verschiebungsfeld wird im Sinne eines volumenkoppelnden Skalenübergangs hierarchisch angereichert. Mikromechanische Effekte des heterogenen Materials werden in die Makroskala der Struktur eingebunden, wodurch sich große Gradienten in der Lösungsfunktion wiedergeben lassen. Zur effizienten Lösung des entstehenden Gleichungssystems wird ein Lösungsalgorithmus basierend auf Verfahren der Gebietzerlegung vorgestellt, wobei aufgrund der Gebietzerlegung zusätzlich Nebenbedingungen an den Kopplungsflächen formuliert werden müssen. Auf beiden Skalen wird zur Wiedergabe nichtlinearen Materialversagens ein regularisierendes Kontinuumsschädigungsmodell eingesetzt, mit dem über das Gebiet weit ausgebreitetes, lokalisiertes Versagen abgebildet werden kann.

## Abstract

This thesis deals with three-dimensional modeling of heterogeneous cohesive materials. The investigations focus exemplarily on concrete and fiber-reinforced concrete as composite materials, which exhibit highly non-linear material behavior. Micro-mechanical failure phenomena like delamination of fibers in a matrix as well as microcracks and micropores in concrete result in narrow failure zones where strains localize and energy dissipation occurs. The elastic material stiffness is reduced due to localized damage and discrete evolving cracks. The width of the failure process zone is typically several orders of magnitude smaller than the structural dimensions, which implies displacements of multiple scales. Resolving these displacements and the high gradients in the solution functions requires either a very fine discretization or an enhancement of the approximation space. The main part of this study concentrates on a detailed numerical analysis of delamination in fiber-reinforced composites and crack evolution in concrete by means of the extended finite element method. In the second part a two-scale method is proposed that incorporates the effect of fine scale failure phenomena in the macroscopic structural behavior.

The framework of the extended finite element method allows for modeling of weak and strong discontinuities independent of the underlying discretization. Material softening can be considered through the concept of cohesive zones. The evolving narrow localization zones can be approximated by fictitious cracks, which are able to transfer stresses until the crack faces are completely separated. The mixed-mode failure of material interfaces as well as the traction dominated failure of concrete can be represented by means of damage-based discrete material models formulated as traction-separation-laws at the crack surface. Thus, delamination and crack propagation can be simulated far beyond the ultimate load until structural collapse. The emphasis of discontinuous failure modeling lies particularly on the development of crack tracking algorithms that can handle continuous arbitrary curved crack paths in three-dimensional space.

The second part addresses a variational two-scale model for three-dimensional structures that exhibit material softening behavior. Micro-mechanical effects in the heterogeneous material are considered at structural scale, so that high gradients in the solution function can be reproduced. The coarse scale displacement field is enriched hierarchically in terms of volumetric scale coupling. A solution algorithm is presented in order to efficiently solve the resulting system of equations. In this regard, the domain is decomposed by means of domain decomposition techniques while additional conditions on coupling surfaces have to be formulated in order to assure accuracy of the solution. Both scales use a regularized continuum damage model to represent nonlinear material failure, so that diffuse failure and damage over widespread parts of the domain can be handled.

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>vii</b>
<b>Abkürzungen und Bezeichnungen</b>	<b>xi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.2 Modellierungs- und Diskretisierungsstrategien quasispröden Materialversagens . . . . .	3
1.3 Zielsetzung . . . . .	9
1.4 Gliederung . . . . .	10
<b>2 Kontinuumsmechanik und ihre diskontinuierliche Erweiterung</b>	<b>13</b>
2.1 Materiell nichtlineare Kontinuumsmechanik und Finite-Elemente-Methode	13
2.1.1 Quasistatisches Randwertproblem der Kontinuumsmechanik . . .	13
2.1.2 Schwache Form des Randwertproblems . . . . .	14
2.1.3 Diskretisierung . . . . .	15
2.1.4 Linearisierung . . . . .	17
2.2 Erweiterte Finite-Elemente-Methode . . . . .	18
2.2.1 Kinematische Anreicherung . . . . .	20
2.2.2 Diskontinuierliches Randwertproblem . . . . .	22
2.2.3 Variationsformulierung . . . . .	23
2.2.4 Diskretisierung . . . . .	24
2.2.5 Linearisierung . . . . .	29
<b>3 Versagensmodellierung heterogener Materialien</b>	<b>33</b>

3.1	Einführung zu Faserverbundwerkstoffen . . . . .	33
3.2	Auswahl quasispröder, heterogener Werkstoffe . . . . .	34
3.2.1	Textilfaserverstärkter Beton mit gerichteter Faserbewehrung . . .	34
3.2.2	Unbewehrter Beton . . . . .	37
3.3	Konzepte unelastischer Materialformulierung . . . . .	38
3.3.1	Konzept kohäsiver Risse . . . . .	38
3.3.2	Regularisierte isotrope Elasto-Schädigung . . . . .	43
3.3.3	Eingesetzte Materialformulierungen . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Diskontinuierliche Modellierung des Grenzflächenversagens</b>	<b>51</b>
4.1	Beschreibung der Faser- und Rissgeometrie über Level-Set-Funktionen . .	51
4.2	Schädigungsmodelle für Grenzflächenrisse . . . . .	54
4.2.1	Schädigungsmodell mit anfangs perfektem Verbund . . . . .	56
4.2.2	Versagenkriterium . . . . .	58
4.2.3	Schädigungsmodell mit anfangs nachgiebigem Verbund . . . . .	58
4.3	Testbeispiele . . . . .	61
4.3.1	Bimaterial-Patchtest . . . . .	61
4.3.2	Vergleich der kohäsiven Rissmodelle . . . . .	64
4.3.3	Faserverstärkter Probekörper . . . . .	65
<b>5</b>	<b>Diskontinuierliche Modellierung von Matrixrisen</b>	<b>71</b>
5.1	Versagenkriterium und Rissrichtung . . . . .	71
5.2	Schädigungsmodell Matrixriss . . . . .	73
5.3	Rissverfolgungsstrategien für dreidimensionale Versagensanalysen . . . .	74
5.3.1	Rissverfolgung mit der Level-Set-Methode . . . . .	75
5.3.2	Globale Rissverfolgungsstrategien . . . . .	76
5.3.3	Lokale Rissverfolgungsstrategien . . . . .	77
5.3.4	Nichtlokale Rissverfolgungsstrategien . . . . .	79
5.4	Rissverfolgungsstrategien zur Modellierung kontinuierlicher, beliebig ge- krümmter Rissflächen . . . . .	80
5.4.1	Rissverfolgung mit Level-Sets in Teilbereichen . . . . .	80
5.4.2	Lokale Rissfortpflanzung . . . . .	83
5.5	Integration und Visualisierung gerissener Elemente . . . . .	85
5.6	Modellbeispiel Dreipunktbiegebalken . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Zweiskalenmodell mit starker Kopplung</b>	<b>93</b>
6.1	Einführung . . . . .	93
6.2	Überblick zur Mehrskalenmodellierung . . . . .	95
6.2.1	Homogenisierungsbasierte Mehrskalenmethoden . . . . .	95
6.2.2	Mehrskalenmethoden mit volumenkoppelndem Skalenübergang . .	98

6.2.3	Gebietzerlegungsmethoden . . . . .	100
6.3	Zweiskalenmodell für nichtlineares Materialverhalten . . . . .	101
6.3.1	Additive Zerlegung des Verschiebungsfeldes und Begrenzung des Zweiskalengebietes . . . . .	102
6.3.2	Variationsformulierung . . . . .	104
6.3.3	Diskretisierung . . . . .	105
6.4	Lösung des Zweiskalenproblems . . . . .	106
6.4.1	Annahme lokaler Träger . . . . .	106
6.4.2	Schwache Form . . . . .	108
6.4.3	Linearisierung . . . . .	108
6.4.4	Algorithmische Umsetzung . . . . .	110
6.5	Nebenbedingungen an die feinskaligen Variablen . . . . .	111
6.5.1	Nullrandbedingung . . . . .	111
6.5.2	Lagrange-Multiplikator-Methode . . . . .	112
6.6	Elastische Testprobleme . . . . .	115
<b>7</b>	<b>Numerische Anwendungsbeispiele</b>	<b>119</b>
7.1	Einzelfaser-Auszugversuch . . . . .	119
7.2	Vierpunktbiegebalken mit Kerbe . . . . .	122
7.3	Gekerbter Torsionsbalken . . . . .	126
7.4	Dicker Balken mit geschwächter Mittelschicht . . . . .	130
7.5	Betondübel unter Querbelastung . . . . .	132
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>137</b>
8.1	Zusammenfassung . . . . .	137
8.2	Ausblick . . . . .	139
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>141</b>



---

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Diskretisierter Körper $\Omega$ und isoparametrische Abbildung. . . . .	16
2.2	Gebiete, Ränder und Diskontinuitäten im Körper $\Omega$ . . . . .	21
2.3	Einflussbereich eines Knotens und Knotenanreicherungen. . . . .	28
2.4	Knotenanreicherungen in der Nähe der Rissfront. . . . .	29
3.1	Links/rechts: Textilfasergelege und deren lagenweise Einbettung in Feinbeton. Mitte: Schnitt durch Glasfasern in Betonmatrix, Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme aus LANGE U. A. (2009). . . . .	35
3.2	Versagensphänomene in Textilbeton unter Längszug und Querszug, nach ZASTRAU U. A. (2003). . . . .	37
3.3	a) - c) Vergleich relativer Ausdehnungen der Bruchprozesszone und der Zone unelastischer Deformationen. d) kohäsive Zone in quasispröder Matrix. . . . .	39
3.4	Lineare, trilineare, kubische und exponentielle Spannungs-Rissöffnungs-Gesetze in effektiver Spannung $t^*$ und effektiver Rissöffnung $\eta$ , normiert auf Festigkeit $f_t$ und charakteristische Rissöffnung $\kappa_c$ . . . . .	41
3.5	a) Konzept effektiver Spannungen/Hypothese der Verzerrungsäquivalenz b) schematische eindimensionale Spannungs-Dehnungs-Beziehung. . . . .	46
4.1	Parametrisierung der Zylindermantelfläche. . . . .	53
4.2	Komponenten des Verschiebungssprungvektors und Spannungsvektors im lokalen Koordinatensystem am Riss. . . . .	55
4.3	Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz bei perfektem Verbund in der Normalenrichtung und den Tangentialrichtungen. . . . .	57

---

4.4	Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz bei nachgiebigem Verbund für reines Zugversagen bzw. reines Schubversagen. . . . .	59
4.5	Versagenszonen in der Grenzfläche zwischen Matrix und Faser, nach ZA- STRAU U. A. (2003). . . . .	60
4.6	Bimaterial-Patchtest: Geometrie, Randbedingungen, Materialverteilung und unterschiedlich strukturierte Vernetzung. . . . .	61
4.7	Bimaterial-Patchtest: $u_1$ -Verschiebungsverläufe. . . . .	62
4.8	Bimaterial-Patchtest: Geometrie, Randbedingungen, modifizierte Mate- rialverteilung und Normalspannungsverlauf $\sigma_1$ . . . . .	63
4.9	Bimaterial-Patchtest: Spannungslastfall mit Verschiebungen $u_1$ , Schub- spannungen $\sigma_{12}$ und Normalspannungen $\sigma_{11}$ . . . . .	64
4.10	Vergleich der Last-Verschiebungs-Kurven: anfangs elastisches - anfangs starres Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz. . . . .	65
4.11	Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter im Zugtest und im Schubtest. . . . .	65
4.12	Hauptspannungen $\sigma_I$ , Verschiebungen $u_1$ und Zugnormalspannungen $t_n$ der Einzelfaser im Zugtest. . . . .	67
4.13	Hauptspannungen $\sigma_I$ , Verschiebungssprung $[[u]]_n$ sowie Zugnormalspan- nungen $t_n$ und Spannungen $t_s$ der Einzelfaser im Schubtest. . . . .	69
5.1	a) Risspfadbeschreibung mit Level-Set-Funktionen. b) Globale Rissverfolgung in 2D mit Isoflächen als potentielle Risspfade. .	76
5.2	Inkonsistenz bei hexaederweise ebenen Rissflächen und Eindeutigkeit bei 2D-Elementen. . . . .	78
5.3	Unterscheidung verschiedener Fälle bei der Berechnung neuer Level-Set- Werte. . . . .	83
5.4	Rissfläche durch Untertetraeder mit Bedingungen an Kontinuität. . . . .	84
5.5	Oben: Aufteilung der Hexaeder in sechs Untertetraeder und Darstellung einer mit Facetten angenäherten, gekrümmten Rissfläche. Unten: Zerle- gung eines Untertetraeders in vier bzw. sechs Integrationselemente. . . .	86
5.6	Globales Koordinatensystem $\mathbf{x}$ , lokaler Parameterraum $\boldsymbol{\xi}$ eines Hexaeder- elementes mit Schnittpunkt $\mathbf{x}^s$ auf Kante K-L und Integrationselemente mit Gaußpunkten eines einzelnen gerissenen Untertetraeders im Parame- terraum $\boldsymbol{\alpha}$ . . . . .	88
5.7	Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter des Dreipunktbie- gebalkens mit zwei Rissinitiationspositionen. . . . .	89
5.8	Rissöffnung, Rissnormalspannung und Hauptnormalspannung im Last- schritt 186 und deformierte Struktur vor totalem Versagen. . . . .	89
5.9	Last-Verschiebungs-Kurven des Dreipunktbiegebalkens bei gerader und gekrümmter Rissfläche. . . . .	90

5.10	Geöffnete gekrümmte Rissfläche für beide Rissfortschrittsalgorithmen. . .	91
6.1	Unterschiede beim Skalenübergang zwischen homogenisierungsbasierten und hierarchischen Mehrskalmethoden, nach HUND (2007). . . . .	96
6.2	Begrenzung des Zweiskalengebietes und Definition der Randbedingungen auf den Grenzen der Grob- und Feinskalengebiete. . . . .	103
6.3	Grob- und feinskalige Diskretisierung, Bezeichnung der Freiheitsgrade. . .	107
6.4	Knotenweise Kopplung mit Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_j$ zwischen Grobkalenelementen $m$ und $s$ . Kopplung von vier Feinskalenknoten. . . . .	112
6.5	Geometrie, Randbedingungen, grob- und feinskalige Diskretisierung und Materialparameter des Mehrskalens-Konsistenztests und elastischen Biegeproblems. . . . .	116
6.6	Hauptspannungen $\sigma_I$ und $\sigma_{III}$ im Vergleich mit der Referenzlösung sowie feinskalige Verschiebungen $u'_1$ und $u'_2$ . . . . .	117
7.1	Geometrie und Randbedingungen des Einzelfaser-Auszugversuchs und Diskretisierung eines Viertels der Probe mit strukturiertem FE-Netz. . . . .	120
7.2	Verlauf der Tangentialspannung $t_t$ in der Grenzfläche, der Schubspannung $\sigma_{yz}$ und der Normalspannung $\sigma_{zz}$ in den Schritten 45, 55, 65, 75. . . . .	121
7.3	Verschiebung $u_z$ an der Rückseite bei $z = 0$ im Schritt 50 und Verschiebungsgrößen $u_z$ und $[[u]]_t$ im Schritt 80 nach vollständiger Delamination. .	122
7.4	Geometrie und Randbedingungen des Vierpunktbiegebalkens mit Kerbe. . . . .	123
7.5	Last-Verformungs-Verhalten des Vierpunktbiegebalkens. . . . .	124
7.6	Vergleich der numerischen Risspfade mit experimentellem Rissmuster. . .	125
7.7	Ansichten der doppelt gekrümmten Rissfläche und deformierter Balken. .	125
7.8	Verlauf des Verschiebungssprungs $[[u]]_n$ und der horizontalen Verschiebung $u_x$ in den Zuständen 1 - 4. . . . .	127
7.9	Geometrie und Randbedingungen des gekerbten Torsionsbalkens. . . . .	128
7.10	Rissgeometrie für den lokalen Rissfortschrittsalgorithmus. . . . .	128
7.11	Rissgeometrie für die Level-Set-Methode in Teilbereichen aus unterschiedlichen Perspektiven und deformierter Balken. . . . .	129
7.12	Vergleich der Last-Rissöffnungs-Kurven und Teilbruchstücke des Experiments von BARR UND BROKENSHIRE (1996). . . . .	130
7.13	Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter des Balkens. . . . .	130
7.14	Vergleich der Last-Verschiebungs-Kurven und Diskretisierung des Balkens mit 2 Grobskalenelementen und je $10 \times 10 \times 5$ Feinskalenelementen. . . .	131
7.15	Vergleich der Schädigungsverteilung $D$ und Normalspannung $\sigma_{11}$ . . . . .	132
7.16	Geometrie, Randbedingungen, Materialparameter sowie grob- und feinskalige Diskretisierung des halben Betonkörpers. . . . .	133

7.17	Links: Vergleich der Last-Verschiebungs-Kurven der Feinskalenlösung (DNS fein) und der Zweiskalenlösung (VMS FETI). Rechts: Verschiebungsverlauf $u_1$ der Feinskalenberechnung auf deformiertem Körper. . . . .	134
7.18	Links: experimentelle Last-Verschiebungs-Kurven einzelner Befestigungen am Bauteilrand bei Belastung senkrecht zum Rand. Rechts: sichtbare Rissbildung sowie Betonausbruchkegel. Aus HOFMANN (2004). . . . .	135
7.19	Vergleich von Schädigung $D$ und äquivalenter Verzerrung $\varepsilon_v$ der Feinskalenlösung und der Zweiskalenlösung (FETI). Verschiedene Ansichten der Schädigungsverteilung auf Schnittebenen durch den Körper. . . . .	136

---

# Abkürzungen und Bezeichnungen

## Abkürzungen

FEM	.....	Finite-Elemente-Methode
X-FEM	.....	erweiterte Finite-Elemente-Methode
FETI	.....	finite element tearing and interconnecting
LEFM	.....	linear-elastische Bruchmechanik
RVE	.....	repräsentatives Volumenelement
VMS	.....	variationsbasierte Mehrskalermethode

## Mathematische Notationen

$\cup$	.....	Assemblierungsoperator
$\nabla$	.....	Gradientenoperator
$\Delta(\bullet)$	.....	Inkrement einer Größe
$\langle \bullet \rangle$	.....	Macauley-Klammern
$[[ \ ]]$	.....	Sprungoperator
$dA$	.....	differentielles Flächenelement
$(\bullet)^{\text{dev}}$	.....	deviatorischer Anteil eines Tensors
$\text{div}$	.....	Divergenzoperator
$dV$	.....	differentielles Volumenelement
$e, \exp$	.....	Eulersche Zahl, Exponentialfunktion
$\mathcal{H}$	.....	Heaviside-Funktion
$\mathbb{H}^1$	.....	Sobolew-Raum
$I_1, J_2$	.....	erste bzw. zweite Invariante eines Tensors bzw. Deviators
$\mathbf{1}, \mathbf{I}$	.....	zwei- bzw. vierstufiger Einheitstensor

$\lim$ .....	Grenzwert
$\text{Lin}(\bullet)$ .....	Linearisierte Größe
$\ln$ .....	natürlicher Logarithmus
$\mathbb{R}^n$ .....	n-dimensionaler Euklidischer Raum
$(\bullet)^s$ .....	symmetrischer Anteil einer Größe
$(\bullet)^T$ .....	Transponierte einer Größe
$\text{tr}(\bullet)$ .....	Spur eines Tensors
$\delta(\bullet)$ .....	virtuelle Variable, Variation oder Testfunktion einer Variablen
$\delta_c$ .....	Delta-Distribution
$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{B}}, (\mathbf{A})_{,\mathbf{B}}$ .....	partielle Ableitung von $\mathbf{A}$ nach $\mathbf{B}$

### Lateinische Buchstaben

$A_0$ .....	ungeschädigte Ausgangsquerschnittsfläche
$A_d$ .....	geschädigte Querschnittsfläche
$\mathbf{a}$ .....	gewöhnliche Verschiebungsfreiheitsgrade
$\bar{\mathbf{b}}$ .....	Volumenkräfte
$\mathbf{b}_i$ .....	erweiterte Freiheitsgrade assoziiert mit Grenzflächen
$\mathbf{B}$ .....	B-Operator
$\bar{\mathbf{B}}_{b,i}$ .....	B-bar-Operator assoziiert mit Grenzflächen
$\bar{\mathbf{B}}_{c,j}$ .....	B-bar-Operator assoziiert mit Rissen
$c_n$ .....	Zugfestigkeit in materieller Grenzfläche
$c_t$ .....	Schubfestigkeit in materieller Grenzfläche
$\mathbf{c}_j$ .....	erweiterte Freiheitsgrade assoziiert mit Rissen
$\mathbf{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}}$ .....	elasto-geschädigte Sekantensteifigkeit
$\mathbf{C}_{\text{tan}}^{\text{ed}}$ .....	elasto-geschädigte Tangentensteifigkeit
$\mathbf{C}^{\text{el}}$ .....	elastischer Materialtensor
$\mathbf{C}_{\text{tan}}$ .....	Materialtangentialtensor
$d_n$ .....	elastische Kontaktsteifigkeit
$d_T$ .....	Anfangsschubsteifigkeit
$d_{\kappa=1,0}$ .....	Schubsteifigkeit bei $\kappa = 1,0$
$D$ .....	skalarwertiger Schädigungsparameter
$\mathcal{D}$ .....	Dissipation
$\mathbf{d}$ .....	Verschiebungsvektor im Element
$\hat{\mathbf{d}}_e$ .....	Elementverschiebungsvektor der Grobskala
$\mathbf{d}'_{e'}$ .....	Elementverschiebungsvektor der Feinskala
$\mathbf{D}$ .....	Verschiebungsvektor des Systems
$\hat{\mathbf{D}}$ .....	assemblierter Verschiebungsvektor der Grobskala
$\mathbf{D}'_e$ .....	assemblierter Verschiebungsvektor der Feinskala auf Makroebene
$E$ .....	Elastizitätsmodul

$f$ .....	Belastungsfunktion bzw. Schädigungskriterium
$f_t$ .....	Zugfestigkeit des Matrixmaterials
$\mathbf{f}^e$ .....	Elementlastvektor
$\mathbf{F}$ .....	Systemlastvektor
$G_f$ .....	Bruchenergie
$\mathbf{G}_{m/s}, \tilde{\mathbf{G}}$ .....	Kopplungsmatrizen
$h_e$ .....	charakteristische Elementgröße
$h_T$ .....	Parameter zur Anpassung der Anfangsschubsteifigkeit
$\mathcal{I}$ .....	Menge aller Knoten in $\Omega$
$I_b$ .....	Anzahl bekannter Level-Set-Werte im Element
$\mathcal{J}_i$ .....	Menge aller Knoten deren Einflussbereich von $\Gamma_{m,i}$ durchtrennt ist
$J_u$ .....	Anzahl unbekannter Level-Set-Werte im Element
$\mathbf{J}$ .....	Jacobi-Matrix
$k$ .....	Gewichtungparameter im Schädigungsmodell
$k_0, k_1, k_2$ .....	Parameter im Schädigungsmodell
$\mathcal{K}_j$ .....	Menge aller Knoten deren Einflussbereich von $\Gamma_{c,j}$ durchtrennt ist
$K_n$ .....	Steifigkeit in Normalenrichtung
$K_T$ .....	Steifigkeit in Tangentialrichtung
$\mathbf{k}_e$ .....	Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{k}_{\text{red}}^{\hat{e}}$ .....	reduzierte Elementsteifigkeitsmatrix nach statischer Kondensation
$\mathbf{K}$ .....	Systemsteifigkeitsmatrix
$L_{\text{fein}}$ .....	charakteristische Länge der Mikroskala
$L_{\text{grob}}$ .....	charakteristische Länge der Makroskala
$\mathbf{L}$ .....	Differentialoperator
$\mathbf{m}$ .....	Richtungsvektor eines Faserbündels
$n_c$ .....	Anzahl diskreter Risse
$n'_{\text{dof}}^{\hat{e}}$ .....	Anzahl der Feinskalenfreiheitsgrade im Grobskalenelement $\hat{e}$
$n_{\text{ele}}$ .....	Anzahl aller finiten Elemente
$\hat{n}_{\text{ele}}$ .....	Anzahl aller Grobskalenelemente $\hat{e}$ in $\Omega$
$\hat{n}_{\text{ele}}^{\hat{\Omega}}$ .....	Anzahl aller Grobskalenelemente $\hat{e}$ in $\hat{\Omega}$
$\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}$ .....	Anzahl aller Grobskalenelemente $\hat{e}$ in $\Omega'$
$n'_{\text{ele}}$ .....	Anzahl aller Feinskalenelemente $e'$ im Zweiskalengebiet $\Omega'$
$n'_{\text{ele}}^{\hat{e}}$ .....	Anzahl aller Feinskalenelemente $e'$ in einem Grobskalenelement $\hat{e}$
$n_{\text{iel}}$ .....	Anzahl der Knoten in einem finiten Element
$n_{\Gamma}^{\hat{e}}$ .....	Anzahl der Kopplungsränder eines Grobskalenelements
$n_{\lambda}^{\Gamma}$ .....	Anzahl der Freiheitsgrade $\lambda$ auf einem Kopplungsrand $\Gamma'_{ms}$
$n_m$ .....	Anzahl materieller Grenzflächen
$nn$ .....	Anzahl der Verschiebungsknoten der Feinskala auf allen Kopplungs- rändern $\Gamma'_{\text{int}}$

$nn_{\hat{e}}$ .....	Anzahl der Verschiebungsknoten der Feinskala auf allen Kopplungs- rändern eines Grobskalenelements
$nn_{\Gamma}$ .....	Anzahl der Verschiebungsknoten der Feinskala auf einem Kopplungs- rand $\Gamma'_{ms}$
$N$ .....	Formfunktion
$\mathbf{n}$ .....	Normalenvektor
$\mathbf{n}^*$ .....	Normalenvektor aus Level-Set-Beschreibung
$\mathbf{n}_{c,j}$ .....	Normalenvektor auf Rissfläche
$\mathbf{n}_{m,i}$ .....	Normalenvektor auf materielle Grenzfläche
$\mathbf{n}_{\sigma}$ .....	Normalenvektor aus nichtlokaler Hauptspannungsberechnung
$\mathbf{n}_p$ .....	Projektion der Rissnormalen
$\mathbf{p}$ .....	Punkt auf der Zylinderachse eines Faserbündels
$\mathbf{q}$ .....	Vektor interner Geschichtsvariablen
$r$ .....	Radius eines Faserbündels
$R_{nl}$ .....	Radius um Risspitze für nichtlokale Spannungsberechnung
$\mathbf{r}_e$ .....	Elementresiduum
$\mathbf{r}_{red}^{\hat{e}}$ .....	reduziertes Elementresiduum nach statischer Kondensation
$\mathbf{R}$ .....	Systemresiduum
$\hat{\mathbf{R}}$ .....	Residuum der Grobskala
$\mathbf{R}'^{\hat{e}}$ .....	Residuum der Feinskala in einem Grobskalenelement $\hat{e}$
$\mathbf{R}'_{NB}$ .....	Residuum assoziiert mit Nebenbedingungen eines Grobskalenelements
$\mathbf{R}_{\Lambda}$ .....	Residuum assoziiert mit Lagrange-Multiplikatoren eines Grobska- lenelements
$t$ .....	äquivalente Spannung
$t_0$ .....	Laufkoordinate entlang einer Elementkante
$t^*$ .....	effektive Spannung
$t_n$ .....	Normalenanteil des Spannungsvektors
$t_t$ .....	Wert der effektiven Spannung vor Entlastung
$\mathbf{t}$ .....	Spannungsvektor
$\bar{\mathbf{t}}$ .....	externe Randlast
$\mathbf{t}_{c,j}$ .....	Spannungsvektor auf Rissfläche
$\mathbf{t}_T$ .....	Tangentialanteile des Spannungsvektors
$\mathbf{T}_p$ .....	Projektionstensor
$\mathbf{T}_{sec}$ .....	zweistufiger Sekantenmodul
$\mathbf{T}_{tan}$ .....	zweistufiger Tangentenmodul
$[[u]]_n$ .....	Normalenanteil des Verschiebungssprungs
$\mathbf{U}$ .....	Raum der Lösungsfunktionen
$\mathbf{u}$ .....	Verschiebungsvektor
$\bar{\mathbf{u}}$ .....	vorgeschriebene Randverschiebung
$\hat{\mathbf{u}}$ .....	gewöhnlicher bzw. grobskaliger Verschiebungsanteil

$\mathbf{u}'$ .....	feinskaliger Verschiebungsanteil
$\mathbf{u}'_{m/s}$ .....	feinskalige Verschiebungen am Kopplungsrand $\Gamma'_{m/s}$
$\tilde{\mathbf{u}}_i$ .....	erweiterter Verschiebungsanteil assoziiert mit materiellen Grenzflächen
$\tilde{\mathbf{u}}_j$ .....	erweiterter Verschiebungsanteil assoziiert mit Rissen
$\mathbf{u}^{+/-}$ .....	Verschiebungen auf getrennten Rissflächen
$[[\mathbf{u}]]_{c,j}$ .....	Verschiebungssprung über Rissfläche $j$
$[[\mathbf{u}]]_T$ .....	Tangentialanteile des Verschiebungssprungs
$V_{\text{sup}}, V_{\text{sup}}^{+/-}$ ...	Einflussbereich eines Knotens, rechts bzw. links der Diskontinuität
$\mathbb{V}$ .....	Raum der Testfunktionen
$w_c$ .....	Rissbandbreite
$\mathbf{x}$ .....	Platzierung im Euklidischen Raum
$\mathbf{x}_c$ .....	Punkt auf Rissfront
$\mathbf{x}^S$ .....	Schnittpunkte der Rissfläche mit Elementkanten

### Griechische Buchstaben

$\alpha$ .....	Elementkoordinatensystem in Tetraederelement
$\beta$ .....	Verhältnis Schub- zu Zugfestigkeit in materieller Grenzfläche
$\Gamma$ .....	gesamter Rand des Körpers $\Omega$
$\Gamma'$ .....	Begrenzung des Zweiskalengebiets
$\Gamma'_{\text{int}}$ .....	alle internen Ränder zwischen Grobskalenelementen im Zweiskalengebiet
$\Gamma_{c,j}$ .....	diskrete Rissfläche
$\Gamma_{c,j}^{+/-}$ .....	voneinander getrennte Rissflächen
$\Gamma_{m,i}$ .....	materielle Grenzfläche
$\Gamma'_{ms}$ .....	Rand zwischen zwei benachbarten Grobskalenelementen $m$ und $s$
$\Gamma_t$ .....	Neumannrand
$\Gamma_u$ .....	Dirichletrand
$\varepsilon_v$ .....	äquivalente Verzerrung
$\varepsilon$ .....	Verzerrungstensor
$\hat{\varepsilon}$ .....	gewöhnlicher bzw. grobskaliger Verzerrungsanteil
$\varepsilon'$ .....	feinskaliger Verzerrungsanteil
$\tilde{\varepsilon}_i$ .....	erweiterter Verzerrungsanteil assoziiert mit materiellen Grenzflächen
$\tilde{\varepsilon}_j$ .....	erweiterter Verzerrungsanteil assoziiert mit Rissen
$\ \zeta\ $ .....	Entfernung von der Risspitze
$\eta$ .....	äquivalenter Verschiebungssprung
$\theta$ .....	Pseudotemperaturverteilung
$\kappa$ .....	interne GeschichtsvARIABLE
$\kappa_0$ .....	Schädigungsschwellenwert

$\kappa_c$ .....	charakteristische Rissöffnung
$\kappa_u$ .....	maximale Bruchdehnung
$\lambda$ .....	1. Lamékonstante
$\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Lambda}$ .....	Lagrange-Multiplikator-Freiheitsgrade
$\mu$ .....	2. Lamékonstante
$\nu$ .....	Querdehnzahl
$\boldsymbol{\xi}$ .....	Elementkoordinatensystem in Hexaederelement
$\Pi$ .....	Gesamtenergie
$\sigma_I$ .....	maximale Hauptspannung
$\boldsymbol{\sigma}$ .....	Cauchy-Spannungstensor
$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ .....	effektive Spannungen bzw. nichtlokaler Spannungstensor
$\phi$ .....	kontinuierliche Level-Set-Funktion
$\phi_I$ .....	Level-Set-Wert eines angereicherten Knotens
$\chi_{m,i}$ .....	Anreicherungsfunktion materieller Grenzflächen
$\chi_{c,j}$ .....	Anreicherungsfunktion diskontinuierlicher Rissflächen
$\psi$ .....	Level-Set-Funktion für Rissfront
$\tilde{\psi}$ .....	freies kohäsives Energiepotential
$\omega$ .....	Gaußsche Verteilungsfunktion
$\Omega$ .....	Gebiet
$\hat{\Omega}$ .....	gesamtes Grobskalengebiet
$\Omega'$ .....	gesamtes Zweiskalengebiet
$\Omega_a$ .....	Gebiet des Fasermaterials
$\Omega_b$ .....	Gebiet des Matrixmaterials
$\Omega_{c,j}^{+/-}$ .....	Gebiet links bzw. rechts eines Matrixrisses
$\Omega^e$ .....	Gebiet eines finiten Elements
$\Omega_{\hat{e}}$ .....	Feinskalenregion entsprechend dem Gebiet eines Grobskalenelements
$\Omega_\omega$ .....	Integrationsgebiet um Risspitze

### Spezifikationen

$(\hat{\bullet}), (\bullet)^{\hat{\Omega}}$ ....	Größe bezogen auf Grobskalendiskretisierung
$(\bullet)', (\bullet)^{\Omega'}$ ....	Größe bezogen auf Feinskalendiskretisierung
$(\bullet)^{\hat{e}}$ .....	Größe bezogen auf Grobskalenelement
$(\bullet)^{e'}$ .....	Größe bezogen auf Feinskalenelement
$(\bullet)_a$ .....	Größe assoziiert mit Freiheitsgraden <b>a</b>
$(\bullet)_b, (\bullet)_c$ .....	Größe assoziiert mit erweiterten Freiheitsgraden <b>b</b> bzw. <b>c</b>
$(\bullet)_{c,j}$ .....	Größe assoziiert mit Rissfläche
$(\bullet)_{m,i}$ .....	Größe assoziiert mit materieller Grenzfläche
$(\bullet)_{\text{int}}, (\bullet)_{\text{ext}}$ ..	externer bzw. interner Anteil einer Größe
$(\bullet)^i, (\bullet)^{i+1}$ ...	Größe im Iterationsschritt $i$ bzw. $i + 1$

---

# Einleitung

---

## 1.1 Motivation

Die numerische Simulation bruchmechanischer Vorgänge ist bei der Planung tragender Strukturen von großer Bedeutung. Robustheit und Genauigkeit der Vorhersagen sind wichtige Voraussetzungen, um numerische Methoden bei der Entwicklung neuer Bauteile zu verwenden. Computergestützte Berechnungsverfahren, die beispielsweise auf der Finite-Elemente-Methode (FEM) basieren, nehmen seit vielen Jahren einen immer höheren Stellenwert im Ingenieuralltag ein und liefern in den verschiedensten Bereichen des Ingenieurwesens zuverlässige Vorhersagen. Kommt es bei einer gegebenen Problemstellung zu Materialversagen, weist die Lösung in lokalen Bereichen des Untersuchungsgebietes große Gradienten in den Zustandsvariablen auf. Dies kann sich in Form von Diskontinuitäten oder Spannungskonzentrationen äußern. In der Festkörpermechanik treten zum Beispiel bei vielen natürlichen und technischen Materialien Spannungs- und Verzerrungssprünge entlang materieller Grenzflächen, Gleitfugen oder Scherbänder auf. Diese lokalisierten Versagensformen werden auch als schwache Diskontinuitäten bezeichnet. Entlang von Rissen, die auch als starke Diskontinuitäten bezeichnet werden, sind Verschiebungen und Verzerrungen diskontinuierlich. Für viele Ingenieuranwendungen werden leistungsfähige technische Materialien wie Verbundwerkstoffe aufgrund ihrer, im Vergleich zu konventionellen Baustoffen, besseren mechanischen Eigenschaften eingesetzt. Zur realitätsnahen Simulation ist eine präzise Modellierung des komplexen Materialverhaltens der einzelnen Bestandteile und ihres Verbundes eine unverzichtbare Voraussetzung.

Beispielhaft wird im Rahmen dieser Arbeit das entfestigende Materialverhalten quasispröder zementgebundener Werkstoffe wie Beton und textilfaserverstärkter Beton betrachtet. In dem Verbundwerkstoff aus spröden Fasern und einer spröden Matrix ergeben sich Festigkeit und Duktilität nur durch den Verbund zwischen den Materialien und den

Filamenten der Faserbündel. Die wirklichkeitsnahe Erfassung ausgeprägter physikalischer Nichtlinearitäten, die beim Verhalten dieser Werkstoffe zu beobachten sind, ist sehr anspruchsvoll und keineswegs als abgeschlossen anzusehen. Das postkritisch entfestigende Materialverhalten wird durch mikromechanische Versagensmechanismen wie Delamination zwischen Faser und Matrix sowie Matrixrisse bestimmt. Eine detaillierte numerische Analyse der Delamination in Faserverbundwerkstoffen und der Rissentwicklung in Beton ist deshalb für viele Problemstellungen unerlässlich und Thema dieser Arbeit.

Anhand dieser kurzen Einführung wird bereits deutlich, dass die numerische Modellierung von Rissen und die Analyse gerissener Strukturen aus heterogenen Materialien oder Verbundwerkstoffen eine anspruchsvolle Aufgabe darstellt. Diese Problemstellung ist seit vielen Jahrzehnten Gegenstand internationaler Forschungstätigkeiten, wobei für die Simulation komplexen Versagens klassischerweise die Finite-Elemente-Methode verwendet wird. Anfangs wurden vor allem kontinuumsmechanische Modelle basierend auf Plastizitäts- oder Schädigungsformulierungen eingesetzt. Im Zusammenhang mit Material- und Strukturversagen müssen dabei angemessene Regularisierungsstrategien berücksichtigt werden, damit die FEM auch im postkritischen Bereich zuverlässig objektive Ergebnisse liefert. Eine Regularisierung ist erforderlich, da mit Einsetzen lokalisierter Verzerrungen die partielle Differentialgleichung degeneriert. Dies führt zu einem schlecht gestellten Problem, dessen Lösung mit der verschiebungsbasierten FEM von der Diskretisierung abhängig ist. Nimmt die Lokalisierungszone im Grenzfall die Breite Null ein, versagt das Material ohne jegliche Energiedissipation, was höchst unphysikalisch ist. Parallel zur Entwicklung regularisierender Kontinuumsmodelle entstanden auch diskrete Rissmodelle, die starke Diskontinuitäten zwischen einzelnen finiten Elementen einbringen. Risse werden dabei explizit vernetzt, um die Diskontinuität im Verschiebungsfeld über die Rissflächen hinweg darstellen zu können. Damit ist eine Knotenverdopplung an den Risskanten sowie eine aufwendige Neuvernetzung verbunden, falls der Riss nicht auf die vorhandene Diskretisierung beschränkt sein soll. Nach jedem Rissfortschritt muss das Netz neu erstellt werden, was die Rechenzeit wesentlich verlängert. Um diese Einschränkungen zu umgehen, wurden zusätzlich Methoden zur Darstellung von Rissen als in finite Elemente eingebettete Diskontinuitäten entwickelt. Darunter gibt es elementbasierte Formulierungen wie den Ansatz starker Diskontinuitäten und knotenbasierte Formulierungen wie die erweiterte Finite-Elemente-Methode (X-FEM). Letztere ist in der Lage, die Kinematik diskontinuierlicher Verschiebungsansätze im Rahmen der FEM korrekt abzubilden.

Die exakte Darstellung des Risspfades hat großen Einfluss auf die Genauigkeit der gesamten Simulation, unabhängig davon welches Verfahren zur Modellierung starker Diskontinuitäten genutzt wird. In diesem Zusammenhang ist insbesondere die Wahl eines ausgereiften Rissrichtungskriteriums wichtig, weil damit direkt die Topologie des fort-

schreitenden Risses ermittelt wird. Dies ist bei der Bestimmung kontinuierlicher Rissflächen besonders entscheidend, da die Rissgeometrie während der Simulation unverändert bleibt. Eine Untersuchung verschiedener Risskriterien im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik findet sich beispielsweise in BOUCHARD U. A. (2003). Bezüglich der X-FEM wurde speziell in DUMSTORFF UND MESCHKE (2007) die Bedeutung einer korrekten Ermittlung der Rissrichtung herausgearbeitet. Die geometrische Repräsentation der Rissfläche und die Verfolgung fortschreitender Risse sind direkt mit dem Rissrichtungskriterium verbunden. Insbesondere für dreidimensionale Aufgabenstellungen ist die Darstellung einer kontinuierlichen, beliebig gekrümmten Rissfläche sehr anspruchsvoll. Eine sehr gute Übersicht und Einteilung verschiedener Rissverfolgungsalgorithmen ist in JÄGER (2009) zu finden. Wird ein lokaler Algorithmus verwendet, bei dem die Rissrichtung nur vom mechanischen Zustand des betrachteten Elements und seinen unmittelbaren Nachbarn abhängt, hat die Wahl des Risskriteriums großen Einfluss auf das gesamte Rissbild, was für zweidimensionale Probleme in DUMSTORFF UND MESCHKE (2007) verdeutlicht wurde. Erfolgt die Rissverfolgung mit globalen Algorithmen, werden zur Bestimmung der Rissrichtung Informationen zum mechanischen Zustand des gesamten Untersuchungsgebietes berücksichtigt.

## 1.2 Modellierungs- und Diskretisierungsstrategien quasispröden Materialversagens

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über verbreitete Methoden zur Modellierung quasispröden Materialversagens in kohäsiven Reibungsmaterialien gegeben. Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf Finite-Elemente-Formulierungen.

Es soll zunächst aufgezeigt werden, wie sich die Versagensmuster in quasispröden Materialien auf den verschiedenen Beobachtungsebenen äußern und ineinander übergehen, um besondere Anforderungen an die Modellierung zu verdeutlichen. Auf mikroskopischer Ebene sind bei Einsetzen der Schädigung Mikrorisse und Mikroporen zu erkennen. Diese Mikrodefekte wachsen zu mesoskopischen Risssegmenten zusammen, von denen sich die dominanten Segmente zu Makrorissen vereinigen. Als Folge dieses irreversiblen Versagensprozesses wird Energie dissipiert und die Materialsteifigkeit auf Strukturebene reduziert. Die auftretenden Versagenszustände können in drei Kategorien eingeteilt werden. So wird von diffusem Versagen gesprochen, wenn die Deformationen noch homogen verteilt sind. Der Übergang zu schwachen Diskontinuitäten geht mit der Lokalisierung großer Dehnungen in begrenzten, schmalen Bereichen einher. Werden diese Teilbereiche immer schmaler, stellen sich starke Diskontinuitäten ein. Die Größe der Prozesszone, in der sich Mikrorisse und andere unelastische Prozesse konzentrieren, hängt von Material

und Belastung ab, wobei die Breite der Zone typischerweise mehrere Größenordnungen kleiner ist als die Strukturabmessungen.

Die Finite-Elemente-Methode ist für die Approximation physikalischer Probleme mit glatten Lösungen sehr gut geeignet. Dieser Sachverhalt beruht auf den Approximationseigenschaften der bereichsweise kontinuierlichen, polynomialen Funktionsräume. Zur Abbildung diffusen Materialversagens mit glatten Verschiebungsfeldern sind klassische Kontinuumsmodelle wie die Schädigungstheorie gut geeignet und werden deshalb häufig eingesetzt. Mittels äquivalenter Materialeigenschaften kann der Effekt eines Risses im Verzerrungsfeld integriert werden, anstatt den Riss direkt zu berücksichtigen. Schädigungsmodelle haben jedoch den Nachteil, dass die über diffuses Materialversagen hinausgehenden Phänomene, wie zum Beispiel diskrete Risse, deren Ausbreitung und mehrere sich kreuzende Risse, nicht abgebildet werden können. Das Verschiebungsfeld bleibt kontinuierlich und kann per Definition keine Diskontinuitäten darstellen, die stattdessen über ein gewisses Volumen verschmiert werden. Sobald das Versagen lokalisiert und sich schwache Diskontinuitäten bilden, weist die numerische Lösung Abhängigkeiten von der räumlichen Diskretisierung auf und es kann zu unphysikalischen Ergebnissen mit vollständigem Versagen ohne Energiedissipation kommen. Mithilfe von Regularisierungsstrategien, die zumeist eine interne Längenskala als Materialparameter einführen, können schwache Diskontinuitäten erfasst und objektive Ergebnisse gewährleistet werden. Somit lassen sich gute Ergebnisse bei zuverlässiger Abbildung des globalen Last-Verschiebungs-Verhaltens erzielen. Ein Überblick zu diesen Strategien wird in Kapitel 3.3.2 gegeben.

Im Gegensatz zu verschmierten Rissmodellen können mit diskreten Rissmodellen starke Diskontinuitäten abgebildet werden. Die schmale Versagenszone, die eigentlich erst im Laufe des Versagensprozesses zu einer Fläche konvergiert, wird direkt von einem ungeschädigt elastischen Zustand in einen diskreten Riss überführt, in dem sich die Dehnungen konzentrieren. Ein zusätzliches Konstitutivgesetz erfasst den Entfestigungsprozess in der Lokalisierungszone, während ein Standard-Konstitutivgesetz in allen anderen Bereichen gültig bleibt. Die dissipierte Energie ist immer ungleich Null und unabhängig von Größe sowie Orientierung der finiten Elemente. Mit einem diskreten Rissmodell lässt sich das lokale Strukturverhalten mit sämtlichen Risspfaden detailliert modellieren. Die numerische Umsetzung kann beispielhaft durch Knotenverdopplung mit adaptiver Neuvernetzung, Einführung von Interface-Elementen oder mit eingebetteten Diskontinuitäten erfolgen.

Weist die Lösung Knicke, Sprünge, Singularitäten oder andere spezielle Lösungscharakteristiken auf, ist die Erzeugung eines an die Diskontinuitäten angepassten Netzes durch Einführung doppelter Knoten eine naheliegende Strategie. Die Elementkanten müssen mit den Diskontinuitäten übereinstimmen und das Netz muss in Bereichen, in

denen singuläre Lösungen oder große Gradienten zu erwarten sind, verfeinert werden. Dabei sollte die Geometrie in jedem Schritt, in dem ein Riss fortschreitet oder sich eine Grenzfläche bewegt, automatisch neu vernetzt werden (BOUCHARD U. A. 2000). Dies erfordert die Projektion der Feldvariablen auf das neue Netz, wodurch das Verfahren bei vorher unbekanntem Risspfad sehr umständlich wird. Ein schwerwiegender Nachteil ist vor allem die Neuvernetzung bei fortschreitenden Diskontinuitäten im dreidimensionalen Raum, da das Vernetzen anspruchsvoller Geometrie an sich schwierig und mit großem Aufwand verbunden ist. Alternativ zur Spaltung von Elementen mit Knotenverdopplung, die hauptsächlich im Bereich der linear-elastischen Bruchmechanik eingesetzt wird, können auch kohäsive Risselemente eingeführt werden. Diese werden in Form von Interface-Elementen ohne Ausdehnung in Dickenrichtung bei vorher bekanntem Rissverlauf an die entsprechenden Stellen zwischen den Elementkanten eingefügt, siehe ROTS (1988), oder adaptiv dort wo nötig. Generell sollte auch bei adaptiver Einführung kohäsiver Risselemente das Netz neu erstellt werden, um Diskretisierungsabhängigkeiten der Lösung zu verringern. Ist die Rissgeometrie völlig unbekannt, können die kohäsiven Elemente auch von Anfang an zwischen allen Kontinuumelementen eingeführt werden, vergleiche CAROL U. A. (2001) oder CAMACHO UND ORTIZ (1996), müssen dann aber eine hohe elastische Anfangssteifigkeit aufweisen, um unphysikalische Rissöffnungen zu vermeiden. In einer weiteren Variante werden gerissene Elemente einfach aus der Elementliste eliminiert, was vor allem in der Industrie für dynamische Simulationen beliebt ist.

Insbesondere für veränderliche Diskontinuitäten, wie bei Rissfortschritt oder beweglichen Grenzflächen zwischen zwei Materialien, ist die Erhaltung eines adäquaten Netzes durch Verschieben der Knoten oder durch Neuvernetzen schwierig und mit erheblichem Aufwand verbunden. Deshalb wurden auch Methoden zur Modellierung beliebiger Diskontinuitäten innerhalb finiter Elemente bei unveränderlichem Netz entwickelt. Zur Auflösung des diskontinuierlichen Verschiebungsfeldes innerhalb finiter Elemente bedarf es einer Sprungfunktion im Verschiebungsfeld und einer Dirac-Distribution im Verzerrungsfeld, wofür die Interpolationseigenschaften der Standard-FE-Approximation erweitert werden müssen. Im Wesentlichen lassen sich die Verfahren zur elementinternen Modellierung lokalisierten Versagens in elementbasierte und knotenbasierte Methoden unterscheiden.

Dem elementbasierten Konzept liegt der Enhanced-Assumed-Strain-Ansatz zugrunde. Ohne weitere Maßnahmen ergeben sich über Elementränder diskontinuierliche Risspfade. Der Verschiebungssprung wird lokal in ein Element entlang der Rissrichtung eingebettet. Die damit verbundenen, zusätzlichen Freiheitsgrade können auf Elementebene eliminiert werden, wodurch die Erweiterung keinen Einfluss auf das globale Gleichungssystem und die Nachbarelemente hat. Diese Methode eingebetteter starker Diskontinuitäten (strong discontinuity approach) aus SIMO U. A. (1993) ist aufgrund der geringen erforderlichen

Änderungen im Programmcode beliebt und durch eine Vielzahl von Elementtypen weit verbreitet. In der zweiteiligen Arbeit OLIVER (1996) werden sowohl theoretische als auch numerische Aspekte dieses Konzepts diskutiert, das als eine Verbindung kontinuumsmechanischer und diskreter Ansätze aufgefasst werden kann. Ein umfassender Überblick zu verschiedenen Formulierungen finiter Elemente mit eingebetteten Diskontinuitäten wird in JIRÁSEK (2000) gegeben. Die Erweiterung auf dreidimensionale Elemente, siehe MOSLER UND MESCHKE (2003) sowie WELLS (2001), und die Entwicklung robuster Modellierungstechniken zur Darstellung kontinuierlicher, räumlich gekrümmter Rissflächen aus OLIVER U. A. (2002) oder FEIST UND HOFSTETTER (2007), haben der Methode zu mehr Bedeutung verholfen. Auch die Reduktion von Locking-Effekten durch Methoden mit rotierenden Rissen oder multipler Rissbildung, wie in MOSLER (2005) vorgeschlagen, stellt einen wichtigen Schritt in der Entwicklung des Konzepts dar.

Im Zusammenhang mit dem knotenbasierten Ansatz werden an den Knoten, die einen Riss oder eine materielle Grenzfläche umgeben, zusätzlich globale Freiheitsgrade eingeführt und mit entsprechenden Ansatzfunktionen interpoliert, um schwache und starke Diskontinuitäten innerhalb betroffener Elemente abzubilden. Dazu wird der Approximationsraum mit speziellen, vorher bekannten Lösungseigenschaften in jenen Bereichen lokal angereichert, die Knicke oder Sprünge in der Lösung aufweisen. Diese lokale Anreicherung des Approximationsraumes wird mithilfe der Partition-of-Unity ermöglicht, siehe MELENK UND BABUŠKA (1996) sowie BABUŠKA UND MELENK (1997). Die erweiterte Finite-Elemente-Methode aus MOËS U. A. (1999), die auf einer knotenweisen Anreicherung aufbaut, erzielt genaue Ergebnisse und kann beliebige Diskontinuitäten wie Risse, Einschlüsse oder Löcher abbilden, ohne diese explizit zu vernetzen, vergleiche auch BELYTSCHKO U. A. (2001). Aus dem Englischen kommend wird sie abkürzend auch als X-FEM (extended finite element method) bezeichnet. Im Unterschied zum Ansatz eingebetteter starker Diskontinuitäten, ist der Verlauf einer Diskontinuität aufgrund des globalen Charakters der zusätzlichen Freiheitsgrade a priori über die Elementgrenzen hinweg kontinuierlich. Eine vergleichende Studie in JIRÁSEK UND BELYTSCHKO (2002) zeigt die Überlegenheit kinematischer Eigenschaften und numerischer Robustheit der X-FEM gegenüber dem Ansatz eingebetteter starker Diskontinuitäten. In einem späteren Vergleich der beiden Methoden (OLIVER U. A. 2006) stellt sich die längere Rechenzeit der X-FEM als wesentlicher Unterschied heraus, was bei Verfolgung mehrerer Risse immer deutlicher auftritt. Dies liegt zum Einen daran, dass die zusätzlichen Freiheitsgrade globale Variablen sind, die auf Elementebene nicht kondensiert werden können, und zum Anderen eine höhere Integrationsordnung erforderlich ist.

Nennenswert ist die große Ähnlichkeit zwischen der X-FEM und anderen Methoden, die auf der Partition-of-Unity beruhen. Dazu gehören die Partition-of-Unity-Methode selbst (MELENK UND BABUŠKA (1996), BABUŠKA UND MELENK (1997)), die generalisierte FEM (STROUBOULIS U. A. (2000a), STROUBOULIS U. A. (2000b), STROUBOULIS

U. A. (2001)), die Finite-Cover-Methode (TERADA U. A. (2003), ISHII U. A. (2006)) und die hp-clouds-Methode (DUARTE UND ODEN (1996a), DUARTE UND ODEN (1996b)). Herausragende Leistungsmerkmale dieser Verfahren sind die völlige Unabhängigkeit des Netzes von der zugrunde liegenden Geometrie sowie die Anreicherung der Lösung mit beliebigen Funktionen bei Wahrung der Partition-of-Unity. Die Anreicherung kann sowohl mit analytisch exakten Funktionen als auch mit numerisch berechneten Näherungen erfolgen, siehe DUARTE UND KIM (2008). Unter den auf der Partition-of-Unity basierenden Finite-Elemente-Formulierungen sind die etwa gleichzeitig konzipierten Methoden der generalisierten FEM und der X-FEM am weitesten entwickelt. Sie wurden seit ihrer Einführung erfolgreich eingesetzt, um eine Reihe von bruchmechanischen Problemen zu lösen, sind jedoch nicht auf solche Problemstellungen beschränkt.

Abgesehen von der Finite-Elemente-Methode und ihren oben vorgestellten Varianten, kann auch die Randelemente-Methode zur Simulation fortschreitender Diskontinuitäten genutzt werden. Darin werden Risse als Ränder des Körpers interpretiert, die sich durch Einführung zusätzlicher Randelemente ausbreiten können. Im Gegensatz zur FEM ist die Randelemente-Methode für nichtlineare Problemstellungen jedoch nicht geeignet. Alternativ können auch netzfreie Methoden herangezogen werden, wie zum Beispiel die elementfreie Galerkin-Methode (BELYTSCHKO U. A. (1994), BELYTSCHKO U. A. (1996)) oder die bereits erwähnte hp-clouds-Methode. Bei diesen Verfahren wird auf die besonders in 3D teils kostspielige Erstellung eines Netzes verzichtet und stattdessen eine Menge von über das beliebig geformte Untersuchungsgebiet verteilten Knoten verwendet. Netzfreie Methoden sind allerdings mit erheblichem Rechenaufwand verbunden, insbesondere an Lasträndern, in Grenzflächenbereichen und Rissprozesszonen. Des Weiteren bereitet die Behandlung mehrerer Risse große Herausforderungen an die Implementierung. Eine weitere netzfreie Variante ist die Diskrete-Elemente-Methode zur Simulation des dynamischen Verhaltens von Systemen diskreter, interagierender Körper, siehe beispielsweise CUNDALL UND HART (1992) oder BIĆANIĆ (2005). Einzelne starre oder deformierbare Partikel beliebiger Form repräsentieren als diskrete Elemente das vorhandene Material. Numerisch interessant wird die Methode insbesondere bei Annahme starrer Partikel, da mit relativ einfachen Kontaktformulierungen zwischen den Partikeln granulares Materialverhalten effektiv abgebildet werden kann. Werden die Partikel durch Balken und Federn miteinander verbunden und damit zusätzliche Interaktionsgesetze berücksichtigt, können auch Festkörper mit beliebigem Materialverhalten dargestellt werden. Mit der Diskrete-Elemente-Methode lassen sich komplexe Versagensvorgänge in heterogenen Proben simulieren, für eine praxisrelevante Simulation ganzer Strukturen sind jedoch so viele diskrete Elemente notwendig, dass solch eine Berechnung extrem teuer wird. Dabei ist insbesondere die automatische Kontaktsuche sehr aufwendig.

Eine problematische Eigenschaft lokalisierter Verzerrungen ist, dass die Breite der Versagenszone einige Dimensionen kleiner ist als die Strukturabmessungen, weshalb dieser

Bereich entsprechend fein diskretisiert werden muss. Lokalisierte Verzerrungen führen zu Verschiebungen auf verschiedenen Skalen innerhalb der Versagenszone, deren exakte Abbildung im Allgemeinen sehr anspruchsvoll ist. Die allmähliche Einführung erweiterter Freiheitsgrade im Rahmen der X-FEM kann unter anderem als eine Art adaptives, mehrskaliges Verfahren betrachtet werden, bei dem eine feinskalige Kinematik durch erweiterte Verschiebungen in die Lösung der groben Skala eingebracht wird. Wie in GARIKIPATI UND HUGHES (1998) gezeigt, kann dem mit lokalisierten Verzerrungen assoziierten Problem auch mit Mehrskalmethoden begegnet werden. Durch direkte Berücksichtigung der Mikrostruktur in einem Mehrskalmodell, kann der regularisierende Effekt alternativer Formulierungen nachgestellt werden. Im Zuge einer additiven Aufteilung der Verschiebungen in der Lokalisierungszone kann der feinen Skala eine eigene Deformationskomponente zugeordnet werden, welche die großen Gradienten in der Lösung abbilden kann. So lassen sich mit Mehrskalmethoden diskretisierungsunabhängige Lösungen für Problemstellungen mit schwachen und starken Diskontinuitäten erzielen. Eine Übersicht zur Mehrskalmodellierung findet sich in Kapitel 6.2.

Die Wahl der Modellierungstechnik hängt stark vom untersuchten Material ab. In spröden Materialien treten bei Erreichen der Festigkeit sofort diskrete Risse auf, wohingegen sich der Verschiebungssprung bei duktilen Materialien erst weit nach Erreichen der Höchstlast ausbildet. Für allgemeine Belastungen können in quasispröden Materialien sowohl Regionen diffusen als auch lokalisierten Versagens auftreten. Deshalb sollte ein realistisches Berechnungsmodell nicht nur Beginn und Wachstum der Schädigung bis zur Entstehung von Makrorissen sondern auch deren folgende Ausbreitung vorhersagen können, was bei Beschränkung auf eine Modellklasse nicht möglich ist. Zu diesem Zweck können Übergangsmodelle, als Kombinationen verschiedener kontinuumsmechanischer und diskreter Modelle, eingesetzt werden. Soll insbesondere das Verhalten bis zum vollständigen Versagen simuliert werden, ist die Verwendung diskreter Rissmodelle erforderlich. So wurde beispielsweise in den Arbeiten AREIAS UND BELYTSCHKO (2005) und COMI U. A. (2007) der Übergang von einem regularisierten Schädigungsmodell mit Berücksichtigung viskoser Terme zu einem diskreten Modell mit kohäsiven Rissen vorgestellt. In SIMONE U. A. (2003) erfolgt der Wechsel von einem gradientenerweiterten Schädigungsmodell zu einem spannungsfreien Riss bei fast vollständiger Schädigung. Eine andere Variante, die im Artikel JIRÁSEK UND ZIMMERMANN (2001) beschrieben wird, sieht den Übergang von einem verschmierten Rissmodell zu einem kohäsiven Riss vor, sobald die Verzerrung im Rissband einen kritischen Wert erreicht.

## 1.3 Zielsetzung

Diese Arbeit widmet sich der mechanischen und numerischen Modellierung heterogener Materialien unter Berücksichtigung des materiell nichtlinearen Verhaltens, das sich in Form von diffuser Schädigung, Lokalisierung mit hohen Gradienten in der Lösungsfunktion und diskreten, fortschreitenden Rissen ausdrückt. Ziel der Arbeit ist die detaillierte Modellierung dieser verschiedenen Versagensformen, die sich makroskopisch in materieller Entfestigung äußern, sowie die Entwicklung numerischer Methoden zur effizienten Auflösung der mehrskaligen Lösungsfunktion. Für die Modellierung eignen sich sowohl verbesserte Finite-Elemente-Methoden als auch Mehrskalmethoden, die beide Gegenstand dieser Forschungsarbeit sind.

Schwerpunktmäßig werden methodische Konzepte für die nichtlineare Berechnung von kohäsiven Reibungsmaterialien vorgestellt. Exemplarisch werden Beton und textiltaserverstärkter Beton untersucht. Die Versagensbereiche sind in diesen Werkstoffen meist um mehrere Größenordnungen kleiner als das gesamte Untersuchungsgebiet, ferner wird das makroskopische Verhalten durch die Materialeigenschaften der kleineren Skalen mitbestimmt. Dies erfordert eine angemessene Beschreibung der schwachen und starken Diskontinuitäten sowie eine geeignete Mehrskalmodellierung, die in dieser Arbeit getrennt voneinander erarbeitet werden. Die Untersuchungen beziehen sich allesamt auf dreidimensionale Problemstellungen, was nicht nur die geometrische Modellierung und die damit verbundene Programmierung aufwendig macht, sondern auch die Löserzeiten drastisch erhöht. Deshalb beschränken sich die Untersuchungen auf eine einfache dreidimensionale Geometrie mit strukturierten Netzen.

Der Hauptteil dieser Arbeit behandelt die Entwicklung und numerische Umsetzung einer erweiterten Finite-Elemente-Methode zur diskretisierungsunabhängigen Simulation von Rissfortschritt bis zum vollständigen Versagen der betrachteten Strukturen. Zur Abbildung der diskontinuierlichen Kinematik an materiellen Grenzflächen und Rissflächen werden entsprechende Anreicherungen in Form von Grat- und Sprungfunktionen in die Verschiebungsapproximation der Formulierung eingebracht. Das Randwertproblem erfährt dadurch eine angemessene Regularisierung im postkritischen Bereich und bleibt gut gestellt. Außerdem kann sich der Risspfad unabhängig vom zugrunde liegenden FE-Netz ausbreiten. Das mechanisch entfestigende Materialverhalten wird mit kohäsiven Rissen beschrieben. Für das zugdominante Versagen der untersuchten Beispielmaterialien wird ein schädigungsbasiertes, diskretes Materialmodell auf der Grenz- bzw. Rissfläche eingesetzt, das in Kontaktspannungen und Verschiebungssprüngen formuliert ist. Ein Schwerpunkt der Arbeit liegt in der geometrischen Modellierung kontinuierlicher, beliebig gekrümmter Risspfade durch achtknotige Volumenelemente. Damit ist sowohl die Bestimmung der Rissrichtung als auch die Entwicklung eines stabilen Rissverfol-

gungsalgorithmus verbunden. So muss zum Einen bei Bruchbeginn eine genaue Richtung bestimmt werden, zum Anderen muss der Algorithmus selbst bei groben Netzen funktionsfähig sein und eine genaue Rissgeometrie liefern. Ziel ist es also einen Algorithmus bereitzustellen, der diese Kriterien erfüllt und das globale Strukturverhalten gut wiedergeben kann. Die Robustheit und Leistungsfähigkeit soll anhand repräsentativer Beispiele demonstriert werden.

Im zweiten Teil der Arbeit wird ein Zweiskalenmodell erarbeitet, das nichtlineare Effekte der feinen Skala durch einen volumenkoppelnden Skalenübergang in der globalen Strukturantwort berücksichtigt. Vorgestellt wird eine volumenverbindende, simultane Lösungsstrategie, aufbauend auf der variationsbasierten Mehrskalenmethode. Das Verschiebungsfeld wird dazu in einen grobskaligen und feinskaligen Anteil zerlegt. Der feinskalige Anteil wird zur effizienten Lösung des entstehenden Feinskalenproblems jeweils auf das Gebiet eines Grobskalenelementes beschränkt, wodurch sich diskontinuierliche Verschiebungen ergeben können. Mithilfe von Gebietzerlegungsstrategien wird die Kompatibilität des Verschiebungsfeldes über die Ränder der Grobskalenelemente wiederhergestellt. Auf beiden Skalen wird zur Wiedergabe nichtlinearen Materialversagens ein regularisierendes Kontinuumsschädigungsmodell eingesetzt, mit dem weit ausgebreitetes, lokalisiertes Versagen abgebildet werden kann.

Insgesamt ist zu betonen, dass das Hauptaugenmerk beider Aufgabenteile in der Entwicklung methodischer Konzepte zur nichtlinearen Berechnung heterogener Materialien liegt und nicht im Einsatz für großformatige Probleme.

### 1.4 Gliederung

Die vorliegende Arbeit besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil wird eine erweiterte Finite-Elemente-Methode zur Modellierung diskreten Versagens in dreidimensionalen Strukturen quasispröden Materials entwickelt. Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Herleitung einer variationsbasierten Zweiskalenmethode zur Abbildung diffusen Versagens in entfestigenden Materialien.

In Kapitel 2 wird zuerst das Randwertproblem für strukturmechanische Probleme mit nichtlinearem Materialverhalten aufgestellt und die Finite-Elemente-Methode als numerisches Lösungsverfahren vorgestellt. Danach wird im Rahmen der erweiterten Finite-Elemente-Methode die Verschiebungsapproximation zur Abbildung diskontinuierlicher Lösungsfunktionen kinematisch angereichert. Die zugrunde liegenden Gleichungen werden in beiden Fällen mit einem inkrementell-iterativen Verfahren gelöst.

Zu Beginn des Kapitels 3 werden die betrachteten kohäsiven Reibungsmaterialien und Faserverbundwerkstoffe präsentiert und ihre charakteristischen Versagensphänomene er-

läutert. Anschließend werden das Konzept kohäsiver Risse zur Modellierung diskreter Risse sowie eine regularisierende Kontinuumsschädigungsformulierung zur Abbildung diffusen Versagens vorgestellt.

Für das Versagen materieller Grenzflächen wird in Kapitel 4 ein Schädigungsmodell aufgestellt, das gemischtes Versagen auf Zug und Schub berücksichtigt. Dabei wird mit einer Level-Set-Funktion nicht nur die Faser- und Rissgeometrie beschrieben, sondern auch die Anreicherungsfunktionen zur Auflösung der Diskontinuitäten innerhalb finiter Elemente berechnet. In einfachen Tests werden zwei unterschiedliche Varianten des Verbundverhaltens untersucht.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit der Modellierung von Matrixrissen in quasispröden Materialien. Dazu wird ein Versagenskriterium und Rissrichtungskriterium definiert und ein entsprechendes Schädigungsmodell für zugdominantes Versagen aufgestellt. Der Schwerpunkt dieses Kapitels liegt in der Erarbeitung von Rissverfolgungsalgorithmen, mit denen sich kontinuierliche, beliebig gekrümmte Rissflächen im dreidimensionalen Raum verfolgen lassen. Dazu werden einige in der Literatur verbreitete Verfahren sowie eigene Entwicklungen dargestellt. Daraufhin folgen einige Aspekte der Implementierung.

Thema des Kapitels 6 und gleichzeitig zweiter Hauptbestandteil der Arbeit ist das Aufstellen eines variationsbasierten Zweiskalenmodells für dreidimensionale Strukturen mit entfestigendem Materialverhalten. Anfangs werden verschiedene Mehrskalenmethoden skizziert, um die vorgestellte Methode besser einordnen zu können. Zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems wird ein effizienter Lösungsalgorithmus basierend auf Verfahren der Gebietzerlegung vorgestellt, wobei aufgrund der Gebietzerlegung zusätzlich Nebenbedingungen an den Kopplungsflächen formuliert werden müssen. Anhand einfacher Beispiele kann die Genauigkeit der Ergebnisse demonstriert werden.

Schließlich werden in Kapitel 7 beide numerischen Methoden auf ihre Leistungsfähigkeit hin untersucht. Anhand ausgewählter, strukturmechanischer Testprobleme wird das erweiterte Finite-Elemente-Modell geprüft und die Lösung mit verfügbaren experimentellen Ergebnissen verglichen. Die Ergebnisse des Zweiskalenmodells werden in zwei anwendungsnahen Beispielen numerischen Referenzlösungen gegenübergestellt.

In Kapitel 8 wird die Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf mögliche weiterführende Entwicklungen der vorgestellten numerischen Modelle gegeben.



---

# Kontinuumsmechanik und ihre diskontinuierliche Erweiterung

---

## 2.1 Materiell nichtlineare Kontinuumsmechanik und Finite-Elemente-Methode

Zuerst werden die Grundlagen der Kontinuumsmechanik für ein physikalisch nichtlineares Randwertproblem bei kleinen Verzerrungen und die Finite-Elemente-Methode dargestellt. Dies ist Basis und Ausgangspunkt für die darauf folgende diskontinuierliche Erweiterung. Das nichtlineare Strukturverhalten wird in dieser Arbeit auf materielle Nichtlinearitäten beschränkt, also auf nichtlineare Zusammenhänge zwischen dem Spannungszustand und dem aktuellen sowie den vorherigen Verzerrungszuständen.

### 2.1.1 Quasistatisches Randwertproblem der Kontinuumsmechanik

Ein materieller Körper ist ein physikalisches Objekt, dessen materielle Punkte mit den Platzierungen  $\mathbf{x}$  ein gewisses Gebiet  $\Omega$  im Euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$  einnehmen,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Die Bewegung des Körpers wird durch das vektorwertige Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  beschrieben. Im Rahmen der hier betrachteten, geometrisch linearen Theorie bei kleinen Verzerrungen ergibt sich der Verzerrungstensor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  als symmetrischer Anteil des Verschiebungsgradienten.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega \tag{2.1}$$

Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  drückt die mechanische Beanspruchung im Körper aus. Ein materialspezifisches Konstitutivgesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) \quad \text{in } \Omega \quad (2.2)$$

definiert in einer lokalen Formulierung die punktweise Berechnung der Spannungen als nichtlineare Funktion der Verzerrungen und möglichen internen Geschichtsvariablen, die im Vektor  $\mathbf{q}$  zusammengefasst sind. Es ist anzumerken, dass in dieser Arbeit kein ratenabhängiges Materialverhalten betrachtet wird. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  erfüllt die lokale Form der Impulsbilanz unter Vernachlässigung der Trägheitsterme für die in dieser Arbeit betrachteten quasistatischen Probleme mit Volumenkräften  $\bar{\mathbf{b}}$ .

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \quad (2.3)$$

Aus Erhaltung des Drehimpulses ergibt sich die Symmetrie des Cauchy-Spannungstensors  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$ . Das punktweise formulierte Randwertproblem wird durch die Definition der Randbedingungen vervollständigt. Hierfür kann der gesamte Rand  $\Gamma$  des Körpers  $\Omega$  in disjunkte Untermengen  $\Gamma_{u_i}$  und  $\Gamma_{t_i}$  mit  $\Gamma_{u_i} \cap \Gamma_{t_i} = \emptyset$  aufgeteilt werden. An jedem Punkt des Randes kann in jeder räumlichen Richtung  $i$  entweder eine Verschiebung  $\bar{u}_i$  als Dirichlet-Randbedingung oder eine Spannung  $\bar{t}_i$  als Neumann-Randbedingung vorgegeben werden.

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{auf } \Gamma_{u_i} \\ t_i &= \bar{t}_i & \text{auf } \Gamma_{t_i} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dabei berechnet sich der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  über das Cauchy-Theorem aus dem Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und der Normalen  $\mathbf{n}$  der Schnittfläche  $\Gamma_t$ .

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_t \quad (2.5)$$

Die Gleichungen (2.1) bis (2.5) repräsentieren die starke Form des Randwertproblems und stellen die Felder  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\sigma}$  durch Kinematik, Konstitutivgesetz und Gleichgewichtsbedingung zueinander in Beziehung.

### 2.1.2 Schwache Form des Randwertproblems

Da die starke Form für allgemeine Problemstellungen in der Regel nicht exakt analytisch gelöst werden kann, wird sie mithilfe der Methode der gewichteten Residuen in eine schwache Form überführt. Basierend auf einer Verschiebungsformulierung werden hierzu die Gleichgewichtsbedingung (2.3) und statische Randbedingung (2.4)<sub>2</sub> mit einer vektorwertigen Testfunktion  $\delta \mathbf{u}$  gewichtet und über das Gebiet  $\Omega$  bzw. den Rand  $\Gamma_t$

integriert,

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot [\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}}] \, dV + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dA = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.6)$$

wobei die Testfunktionen  $\delta \mathbf{u}$  die Nullrandbedingung  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$  auf  $\Gamma_u$  erfüllen sollen. Somit wird das Gleichgewicht nicht mehr punktweise, sondern nur noch in integralem Sinne erfüllt. Die Verschiebung ist dabei die primäre Variable, wohingegen die Spannungen und Verzerrungen weiterhin über die konstitutive und kinematische Gleichung punktweise als Funktionen der Verschiebungen berechnet werden. Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes, partieller Integration und Einsetzen der Kinematik und Randbedingungen, lässt sich nach einigen Umformungen die schwache Form reformulieren.

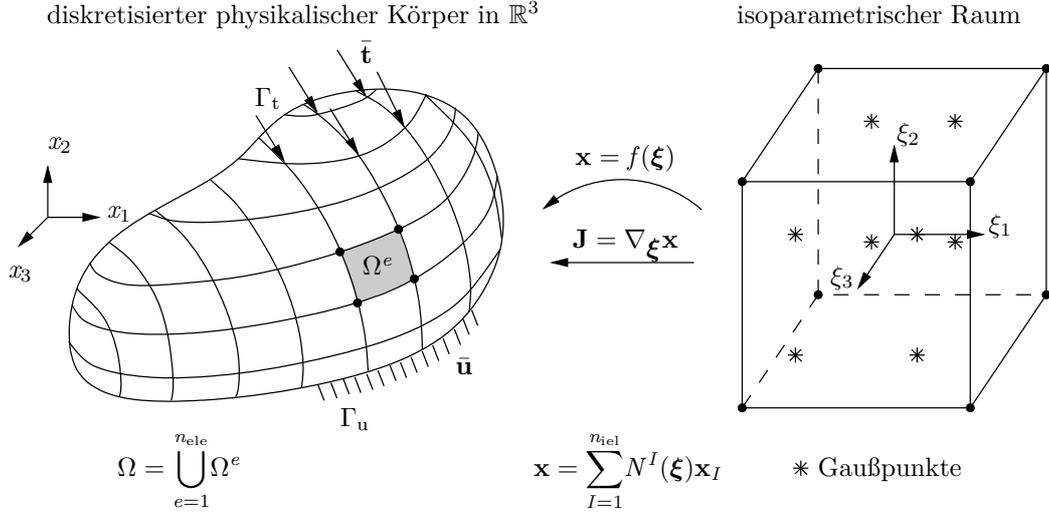
$$\delta \Pi = \underbrace{\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{q}) \, dV}_{\delta \Pi_{\text{int}}} - \underbrace{\int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA}_{-\delta \Pi_{\text{ext}}} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (2.7)$$

Werden die Testfunktionen  $\delta \mathbf{u}$  als virtuelle Verschiebungen interpretiert, entspricht diese Form dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Nach diesem Prinzip muss die virtuelle Arbeit  $\delta \Pi$  als Differenz der virtuellen inneren  $\delta \Pi_{\text{int}}$  und virtuellen äußeren Arbeiten  $\delta \Pi_{\text{ext}}$  verschwinden. Für einen Überblick über andere Variationsprinzipien zur Herleitung alternativer Formulierungen, wie beispielsweise Mehrfeldprinzipien oder auch gemischte Prinzipien, sei auf FELIPPA (1994) verwiesen.

### 2.1.3 Diskretisierung

Die schwache Form des Gleichgewichts wird nun mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) diskretisiert. Andere beliebte Diskretisierungsmethoden sind die Randelemente-Methode und die Finite-Differenzen-Methode. Allgemein kann die FEM als mächtiges Werkzeug zur Lösung beliebiger partieller Differentialgleichungen verwendet werden. Umfassende Werke zur FEM sind unter vielen anderen die Bücher HUGHES (2000), BELYTSCHKO U. A. (2000) sowie ZIENKIEWICZ U. A. (2005).

Im Rahmen der Diskretisierung wird das Untersuchungsgebiet  $\Omega$  in eine endliche Anzahl  $n_{\text{ele}}$  finiter Elemente  $\Omega^e$  zerlegt,  $\Omega \approx \Omega^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \Omega^e$ . Jedes Element besitzt  $n_{\text{iel}}$  Knoten, denen unbekannte Verschiebungsfreiheitsgrade zugeordnet werden. Der Verschiebungsverlauf  $\mathbf{u}$  wird nicht exakt bestimmt, sondern nur über eine endliche Anzahl unbekannter Verschiebungsgrößen  $\mathbf{d}_I$  an den Elementknoten approximiert, die mit polynomialen Formfunktionen  $N$  interpoliert werden. Im Sinne eines Bubnov-Galerkin-Verfahrens wer-



**Abbildung 2.1:** Diskretisierter Körper  $\Omega$  und isoparametrische Abbildung.

den dieselben Interpolationen für die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  verwendet.

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{N}^e \mathbf{d}^e; \quad \delta \mathbf{u} \approx \delta \mathbf{u}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{N}^e \delta \mathbf{d}^e \quad (2.8)$$

In der Matrix  $\mathbf{N}^e$  sind die Formfunktionen, in dem Verschiebungsvektor  $\mathbf{d}^e$  die Knotenfreiheitsgrade eines Elementes zusammengefasst. Die kinematische Gleichung liefert die Approximation der diskreten und virtuellen Verzerrungen, ausgedrückt durch den B-Operator, der die räumlichen Gradienten der Formfunktionen eines Elementes enthält.

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \boldsymbol{\varepsilon}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{B}^e \mathbf{d}^e; \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon} \approx \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{B}^e \delta \mathbf{d}^e \quad (2.9)$$

Dabei ist anzumerken, dass ohne Änderung der Notation von einer Tensor- auf eine Matrixformulierung gewechselt wurde und im Rahmen dieser Arbeit alle diskretisierten Felder in Voigt-Notation angegeben werden. Für die Berechnung des B-Operators  $\mathbf{B} = \mathbf{N}_{,\mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}_{,\boldsymbol{\xi}}$  wird die Kettenregel verwendet, indem die Formfunktionen partiell nach den isoparametrischen Elementkoordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  abgeleitet und mit der Inversen der Jacobi-Matrix multipliziert werden. Im Rahmen des isoparametrischen Konzepts wird die Geometrie innerhalb einzelner Elemente mit denselben Funktionen parametrisiert wie die Verschiebungen,  $\mathbf{x} = \sum_{I=1}^{n_{\text{iel}}} N^I \mathbf{x}_I$ . Die Jacobi-Matrix stellt die Verbindung zwischen den Elementkoordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  und globalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  her,  $\mathbf{J} = \partial \mathbf{x} / \partial \boldsymbol{\xi}$ .

Durch Einsetzen der diskretisierten Verschiebungsverläufe (2.8) und Verzerrungsverläufe (2.9) in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (2.7) ergibt sich die diskretisierte

schwache Form des Gleichgewichts,

$$\delta\Pi^h = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \delta\mathbf{d}^T \left[ \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{d}, \mathbf{q}) \, dV}_{\mathbf{f}_{\text{int}}^e} - \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} \, dV - \int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, dA}_{-\mathbf{f}_{\text{ext}}^e} \right] = 0 \quad \forall \delta\mathbf{d} \quad (2.10)$$

in der schon berücksichtigt ist, dass  $\delta\mathbf{d}$  keine Funktion der räumlichen Koordinaten ist und aus dem Integral herausgezogen werden kann. Das Symbol  $\cup$  steht für die Assemblierung der einzelnen Elementbeiträge  $\mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{d})$  und  $\mathbf{f}_{\text{ext}}^e$  zu den globalen Vektoren der internen  $\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D})$  und externen Kräfte  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  nach der direkten Steifigkeitsmethode unter Berücksichtigung der Konnektivität. Auf den Index  $h$  zur Unterscheidung kontinuierlicher und diskreter Größen wird im Folgenden verzichtet. Gemäß dem Fundamentalsatz der Variationsrechnung muss Gleichung (2.10) für beliebige  $\delta\mathbf{d}$  erfüllt sein, was auf nachfolgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der globalen Knotenverschiebungen  $\mathbf{D} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{d}^e$  führt.

$$\mathbf{R}(\mathbf{D}) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) - \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

$$\text{mit } \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}) = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{f}_{\text{int}}^e(\mathbf{d}) ; \quad \mathbf{F}_{\text{ext}} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{f}_{\text{ext}}^e$$

Bei Verwendung nichtlinearer Materialformulierungen handelt es sich dabei um ein hochgradig nichtlineares Gleichungssystem.

### 2.1.4 Linearisierung

Zur numerischen Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems (2.11) wird ein inkrementell iteratives Newton-Raphson-Verfahren verwendet. Das Residuum muss dafür linearisiert werden, was hier durch Entwicklung in einer Taylor-Reihe um den unbekanntem Lösungspunkt des Iterationsschrittes  $i + 1$  mit einem linearen Glied geschieht.

$$\text{Lin}\mathbf{R}(\mathbf{D}^{i+1}) = \mathbf{R}(\mathbf{D}^i) + \left. \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}^i} \Delta \mathbf{D}^{i+1} = \mathbf{0} \quad \text{mit } \Delta \mathbf{D}^{i+1} = \mathbf{D}^{i+1} - \mathbf{D}^i \quad (2.12)$$

Das Residuum  $\mathbf{R}(\mathbf{D})$  bezeichnet dabei Ungleichgewichtskräfte und wird im Laufe der Iteration zu Null. Unter Annahme deformationsunabhängiger Lasten kann in dieser Gleichung  $\left. \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}^i} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{D}} \right|_{\mathbf{D}^i}$  als die globale Tangentensteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^i$  identifiziert werden. Damit ergibt sich ein linearisiertes, globales Gleichungssystem für die inkremen-

telle Änderung des Verschiebungsvektors  $\Delta \mathbf{D}^{i+1}$ .

$$\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} = \mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{D}^i) = -\mathbf{R}(\mathbf{D}^i) \quad (2.13)$$

Die globale Tangentensteifigkeitsmatrix und das Residuum resultieren aus den einzelnen Elementbeiträgen während des Assemblierungsprozesses.

$$\mathbf{K}^i = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{k}_e^i = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{int}}^e}{\partial \mathbf{d}} \right|_{\mathbf{d}^i} = \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{C}_{\text{tan}}^i \mathbf{B} \, dV \quad (2.14)$$

Der Materialtangentialtensor  $\mathbf{C}_{\text{tan}}^i = \partial \boldsymbol{\sigma}^i / \partial \boldsymbol{\varepsilon}^i$  ist durch die partielle Ableitung des Spannungstensors nach dem Verzerrungstensor definiert. Die in dieser Arbeit verwendeten Materialformulierungen, die den Spannungstensor und somit auch den Materialtangentialtensor sowie den internen Kraftvektor definieren, werden in Kapitel 3.3 vorgestellt. Die numerische Integration der Kraftvektoren und Steifigkeitsmatrizen wird elementweise mit einer Gauß-Quadratur durchgeführt. In den betrachteten Hexaederelementen werden dafür  $2 \times 2 \times 2$  Gaußpunkte benutzt, die auch in Abbildung 2.1 markiert sind.

## 2.2 Erweiterte Finite-Elemente-Methode

Die erweiterte Finite-Elemente-Methode geht auf die Arbeiten BELYTSCHKO UND BLACK (1999) sowie MOËS U. A. (1999) zurück. Durch Hinzufügen diskontinuierlicher Anreicherungsfunktionen zur verschiebungsbasierten Finite-Elemente-Approximation, konnte in diesen Arbeiten der Rissfortschritt im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik völlig unabhängig vom zugrunde liegenden Netz dargestellt werden. Die X-FEM nutzt dabei die Eigenschaft der Partition-of-Unity aus, um vorherige Kenntnisse über die partielle Differentialgleichung und ihre analytische Lösung in den Ansatzraum mit einzubringen. Diese Eigenschaft, die auch der gewöhnlichen FEM innewohnt, wurde in BABUŠKA UND MELENK (1997) sowie MELENK UND BABUŠKA (1996) angeführt. Im Rahmen der X-FEM wird die gewöhnliche Approximation in einem kritischen Bereich lokal durch zusätzliche Formfunktionen in Verbindung mit zusätzlichen Freiheitsgraden an bestehenden Knoten angereichert. Damit können beliebige geometrische Merkmale modelliert werden, was in DAUX U. A. (2000) exemplarisch für einzelne und sich verzweigende Risse, Löcher sowie Inhomogenitäten im Material gezeigt wurde. Die eingebetteten Anreicherungsfunktionen werden gemäß der Physik des zugrunde liegenden Problems gewählt. So kann beispielsweise mit einer diskontinuierlichen Funktion der Verschiebungssprung über einen Riss hinweg abgebildet werden, der zudem über die Elementgrenzen hinweg kontinuierlich ist.

In SUKUMAR U. A. (2001) wurde zum ersten Mal vorgestellt, wie die X-FEM in Kombination mit der Level-Set-Methode aus OSHER UND SETHIAN (1988) genutzt werden kann, um Löcher und Einschlüsse im Material zu modellieren. Mithilfe der Level-Set-Methode lässt sich die Lage interner Grenzflächen definieren und gleichzeitig die lokale Anreicherungsfunktion aufstellen. Dies erleichtert erheblich die Vernetzung bei anspruchsvoller Geometrie, da das Netz nicht mit den physikalischen Flächen übereinstimmen muss. Jedoch sollte das Netz trotzdem fein genug sein, um die Geometrie der verschiedenen Flächen zu erfassen. Darauf wird in Abschnitt 4.1 näher eingegangen. Durch explizite Konstruktion eines an die Physik angepassten Approximationsraums können so Diskontinuitäten im Primärfeld oder dessen Ableitung unabhängig vom Netz modelliert werden. In den Arbeiten WELLS (2001) und WELLS UND SLUYS (2001) wurde die X-FEM erstmals angewendet, um Risse in quasispröden Materialien mithilfe eines kohäsiven Rissmodells zu modellieren. In MOËS UND BELYTSCHKO (2002) wurde ebenfalls ein kohäsives Rissmodell in die X-FEM eingebracht, aber im Vergleich zu WELLS UND SLUYS (2001) sind die Lagen der Rissspitzen nicht auf Elementränder beschränkt.

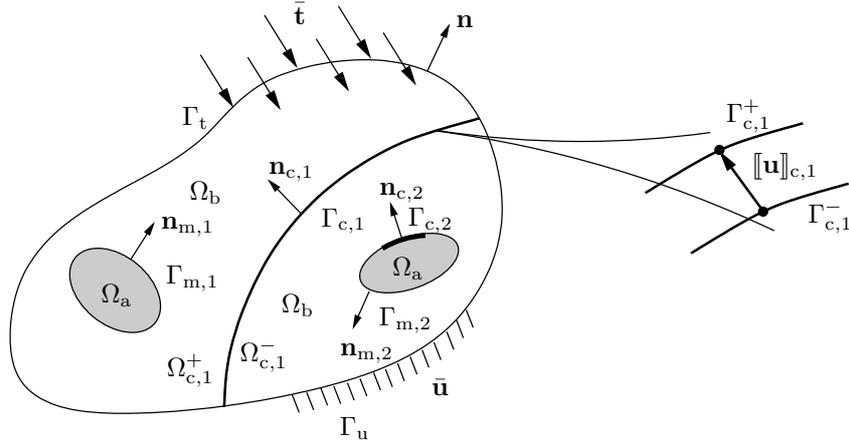
Seither wurde die X-FEM von vielen Wissenschaftlern untersucht und auf eine Vielzahl von Problemstellungen angewandt, wovon an dieser Stelle nur eine kleine Auswahl aufgelistet wird. Viele Probleme der Bruchmechanik konnten mit der X-FEM für unterschiedliche Elementtypen, wie Schalen-, Platten- und Kontinuumselemente, erfolgreich gelöst werden. Für zweidimensionale Problemstellungen sei außer den bisher genannten die Arbeit BUDYN U. A. (2004) erwähnt, zur dreidimensionalen Rissmodellierung SUKUMAR U. A. (2000), MOËS U. A. (2002), GRAVOUIL U. A. (2002) sowie AREIAS UND BELYTSCHKO (2005). Kohäsive Risse wurden auch in ZI UND BELYTSCHKO (2003), MERGHEIM U. A. (2005) oder HETTICH UND RAMM (2006) untersucht. Dynamischer Rissfortschritt ist Thema der Arbeiten BELYTSCHKO U. A. (2003), RÉTHORÉ U. A. (2005) und CHESSA UND BELYTSCHKO (2004). Ein umfangreicher Überblick zu Finite-Elemente-Methoden, die die Partition-of-Unity für bruchmechanische Probleme ausnutzen, findet sich in KARIHALOO UND XIAO (2003). Ein Open-Source-Code sowie eine ausführliche Literaturübersicht zur X-FEM ist in BORDAS U. A. (2007) zusammengestellt. Reibungsbehafteter Kontakt im Zusammenhang mit der X-FEM wurde in LIU UND BORJA (2008) und DOLBOW U. A. (2001) bearbeitet. Das Wachstum von Biofilmen (DUDDU U. A. 2008) sowie Untersuchungen der Fluid-Struktur Interaktion (ZILIAN UND LEGAY (2008), WANG U. A. (2008)) mit dem damit verbundenen Aufbringen elementinterner Randbedingungen sind weitere Themen, die mit der X-FEM behandelt werden können, siehe JI UND DOLBOW (2004), MOËS U. A. (2006), MOURAD U. A. (2007) oder ZILIAN UND FRIES (2009). Auch die Anwendung von Fehlerschätzern (DUFLOT UND BORDAS 2008) und ihre Ausnutzung für adaptive Verfahren (PANNACHET U. A. 2009) sind aktuelle Forschungsinteressen.

Ähnlich zur X-FEM wurden in HANSBO UND HANSBO (2004) zwei unabhängige, kontinuierliche Verschiebungsapproximationen in den diskontinuierlichen Elementen zusammen mit zusätzlichen Verschiebungsfreiheitsgraden vorgeschlagen. Nach Untersuchungen aus AREIAS UND BELYTSCHKO (2006) resultieren dieselben Ansatzräume wie für die X-FEM. Der Sprung im Verschiebungsfeld ergibt sich als Differenz der beiden kontinuierlichen Verschiebungsverläufe ausgewertet an der Rissfläche. Es ist eine strikt lokale Formulierung, die nur reine Verschiebungsfreiheitsgrade und polynomiale Ansatzfunktionen verwendet.

Im Sinne der Philosophie der X-FEM kann die numerische Simulation von Diskontinuitäten auf fixen, einfach strukturierten Netzen durchgeführt werden. Bei der Erzeugung des Netzes kann also die Existenz bzw. Entstehung von Rissen und anderen internen Rändern und Flächen ignoriert werden. Diese werden erst durch die Anreicherung der FE-Approximation mit zusätzlichen Funktionen modelliert. Ein weiterer Vorteil ist, dass das Netz in der Nähe der Risspitze nicht verfeinert werden muss, was die Anzahl an Freiheitsgraden gegenüber klassischen Finite-Elemente-Methoden reduziert. Dadurch ist es im Allgemeinen möglich, mit gröberen Netzen dieselbe Genauigkeit zu erzielen. Mit der Anreicherung werden zusätzliche globale Freiheitsgrade ins Gesamtsystem eingeführt, weshalb sich bei fortschreitenden Rissen die Dimension der Steifigkeitsmatrix ständig ändert, was für die Implementierung und Programmstruktur einen gewissen Nachteil darstellt. Generell ist es wünschenswert, die Anreicherung nur auf einen kleinen Bereich zu beschränken, um die Anzahl der Unbekannten klein zu halten und die Konditionierung des Systems zu verbessern. Im Großteil des Untersuchungsgebietes werden also weiterhin gewöhnliche finite Elemente verwendet, wohingegen die angereicherten Elemente nur in Bereichen mit speziellen Lösungseigenschaften zum Einsatz kommen.

### 2.2.1 Kinematische Anreicherung

Im Folgenden wird die in Abschnitt 2.1 für homogene Festkörper aufgestellte Formulierung auf heterogene Festkörper erweitert. Die Gleichungen sollen zweiphasige Festkörper mit ungeschädigten Grenzflächen  $\Gamma_{m,i}$  zwischen den Phasen  $\Omega_a$  und  $\Omega_b$ , sowie diskrete Risse  $\Gamma_{c,j}$  an diesen Grenzflächen und Risse im Festkörpermaterial abbilden können. Dabei werden zur Vereinfachung der geometrischen Approximation keine interagierenden Risse behandelt, sondern jede Grenz- bzw. Rissfläche für sich. Alle Grenzflächen und Risse stellen innere Flächen dar, an denen die Verschiebung oder ihre Ableitung diskontinuierlich sein darf. Bei ungeschädigten Grenzflächen wird in vielen Arbeiten angenommen, dass zwei Festkörperphasen  $\Omega_a$  und  $\Omega_b$  anfangs perfekt miteinander verbunden sind. Für diesen Fall einer schwachen Diskontinuität ist die Verschiebung selbst kontinuierlich, der Gradient der Verschiebung jedoch diskontinuierlich. Im Gegensatz dazu ergibt sich bei Rissen an Grenzflächen oder im Festkörpermaterial eine diskon-



**Abbildung 2.2:** Gebiete, Ränder und Diskontinuitäten im Körper  $\Omega$ .

tinuierliche Verschiebung. Die Abbildungsfunktion muss dabei in der Lage sein, einen materiellen Punkt, durch den der Riss verläuft, auf zwei damit assoziierte Punkte abzubilden. Die Differenz der Verschiebungen  $\mathbf{u}^+$  und  $\mathbf{u}^-$  zwischen den beiden Punkten auf den voneinander getrennten Rissflächen  $\Gamma_{c,j}^+$  und  $\Gamma_{c,j}^-$  wird als Verschiebungssprung  $[[\mathbf{u}]]_{c,j}$  oder auch starke Diskontinuität bezeichnet.

$$[[\mathbf{u}]]_{c,j} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^- \quad \text{auf } \Gamma_{c,j} \quad (2.15)$$

Die Aufteilung des Körpers  $\Omega$  in seine unterschiedlichen Materialphasen, Ränder und durch Risse getrennte Bereiche ist in Abbildung 2.2 mit den eingeführten Bezeichnungen skizziert. Um den vorgestellten kinematischen Anforderungen gerecht zu werden, wird das Verschiebungsfeld erweitert. Dabei sollen  $n_m$  voneinander unabhängige materielle Grenzflächen und  $n_c$  sich nicht überschneidende Risse dargestellt werden können.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j}(\mathbf{x}) \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j(\mathbf{x}, t) \quad (2.16)$$

Das Verschiebungsfeld besteht aus dem gewöhnlichen Anteil  $\hat{\mathbf{u}}$  und  $n_m$  zusätzlichen kontinuierlichen Feldern  $\tilde{\mathbf{u}}_i$ , die mit materiellen Grenzflächen  $\Gamma_{m,i}$  assoziiert werden, und  $n_c$  zusätzlichen Feldern  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$ , assoziiert mit diskreten Rissen  $\Gamma_{c,j}$ .  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  und  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$  werden mit skalarwertigen Funktionen  $\chi_{m,i}$  und  $\chi_{c,j}$  multipliziert, um diskontinuierliche Verzerrungen bzw. Verschiebungen abbilden zu können. Die Vorzeichenfunktion  $\chi_{c,j}$  kann aus der Heaviside-Funktion  $\mathcal{H}$  abgeleitet werden.

$$\chi_{c,j}(\mathbf{x}) = 2 \mathcal{H}(\mathbf{x}) - 1 = \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_{c,j}^+ \\ -1 & \text{für } \mathbf{x} \in \Omega_{c,j}^- \end{cases} \quad (2.17)$$

Die Funktion ist also über den Riss hinweg diskontinuierlich und auf jeder Seite des Risses konstant. Die Funktionen  $\chi_{m,i}$  stellen sogenannte Gratfunktionen dar, die in Abschnitt 2.2.4 spezifiziert werden. Das Verschiebungsfeld  $\tilde{\mathbf{u}}_j$  lässt sich als die Hälfte des Verschiebungssprungs  $[[\mathbf{u}]]_{c,j}$  identifizieren

$$\frac{1}{2}[[\mathbf{u}]]_{c,j}(\mathbf{x},t) = \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x},t) \quad (2.18)$$

und stellt somit die relevante kinematische Größe am Riss  $\Gamma_{c,j}$  dar. Das Verzerrungsfeld  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ergibt sich für eine geometrisch lineare Theorie bei kleinen Verzerrungen aus dem symmetrischen Gradienten des Verschiebungsfeldes.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x},t) &= \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} + \tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \\ &= \nabla^s \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) + \sum_{i=1}^{n_m} \nabla^s [\chi_{m,i}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x},t)] + \sum_{j=1}^{n_c} \nabla^s [\chi_{c,j}(\mathbf{x}) \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x},t)] \end{aligned} \quad (2.19)$$

Dieses Verzerrungsfeld setzt sich aus dem gewöhnlichen Teil  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , einem diskontinuierlichen Teil  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$  und dem Teil  $\tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  zusammen, der weiter in einen begrenzten aber diskontinuierlichen und einen unbegrenzten Term zerlegt werden kann.

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x},t) = \sum_{j=1}^{n_c} \left\{ \underbrace{\chi_{c,j}(\mathbf{x}) \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x},t)}_{\text{begrenzt}} + \underbrace{2 \delta_c(\mathbf{x}) [\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x},t) \otimes \mathbf{n}_{c,j}(\mathbf{x})]^s}_{\text{unbegrenzt}} \right\} \quad (2.20)$$

Die Ableitung der Heaviside-Funktion ist durch  $\nabla \mathcal{H} = \delta_c \mathbf{n}_{c,j}$  gegeben, wobei  $\mathbf{n}_{c,j}$  die Rissnormale repräsentiert und  $\delta_c$  die Delta-Distribution ist.

## 2.2.2 Diskontinuierliches Randwertproblem

An dieser Stelle werden die Feldgleichungen aus Abschnitt 2.1.1 wiederholt und durch zusätzliche Bedingungen für zweiphasige Körper mit schwachen und starken Diskontinuitäten ergänzt. Die Impulsbilanz kann durch Annahme verschwindender Volumenkräfte  $\bar{\mathbf{b}}$  weiter vereinfacht werden. Randbedingungen auf den Verschiebungs- und Spannungsrändern gelten in unveränderter Form.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_u \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_t \end{aligned} \quad (2.21)$$

Zusätzlich zu den äußeren Rändern  $\Gamma_u$  und  $\Gamma_t$  werden an den inneren Flächen  $\Gamma_{m,i}$  und  $\Gamma_{c,j}$  Gleichgewichtsaussagen getroffen. So soll der Spannungsvektor an ungeschädigten

Grenzflächen  $\Gamma_{m,i}$  kontinuierlich sein.

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{m,i} \rrbracket = \mathbf{0} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{m,i} \quad (2.22)$$

An den einzelnen Rissflächen  $\Gamma_{c,j}$  wird von einem kohäsiven Versagen ausgegangen. Das heißt, dass die Risse bis zu einer bestimmten Rissöffnung Spannungen  $\mathbf{t}_{c,j}$  über die Rissfläche hinweg übertragen können. Diese Fähigkeit nimmt mit fortschreitender Rissöffnung ab und wird in Form eines sogenannten Spannungs-Rissöffnungs-Gesetzes in den Kapiteln 4.2 und 5.2 definiert. Der Spannungsvektor berechnet sich nach dem Cauchy-Theorem

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_{c,j} = \mathbf{t}_{c,j} \quad \text{auf} \quad \Gamma_{c,j} \quad (2.23)$$

und ist über den Riss hinweg kontinuierlich. Mit den inneren Flächen setzt sich der gesamte Rand  $\Gamma$  des Untersuchungsgebietes aus den Flächen  $\Gamma_u, \Gamma_t, \Gamma_m$  und  $\Gamma_c$  zusammen, wobei es keine Schnittmengen zwischen den einzelnen Randflächen gibt.

### 2.2.3 Variationsformulierung

Das gesuchte Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}$  muss die wesentliche Randbedingung (2.21)<sub>2</sub> und die gewöhnlichen Forderungen der Glattheit im Gebiet  $\Omega$  erfüllen. Über die Rissflächen hinweg sind im Lösungsraum  $\mathbb{U}$  diskontinuierliche Funktionen erlaubt.

$$\mathbb{U} = \left\{ \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_j \mid \hat{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_i, \tilde{\mathbf{u}}_j \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}_i|_{\Gamma_u} = \tilde{\mathbf{u}}_j|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\} \quad (2.24)$$

Der Sobolew-Raum  $\mathbb{H}^1$  enthält Funktionen, die quadratisch integrierbare Ableitungen besitzen. Die vorgegebenen Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$  am Dirichletrand  $\Gamma_u$  werden nur dem regulären Teil der Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  zugeschrieben. Gemäß der Bubnov-Galerkin-Methode werden die Testfunktionen  $\delta \mathbf{u}$  auf gleiche Weise wie  $\mathbf{u}$  in Gleichung (2.16) erweitert,

$$\delta \mathbf{u} = \delta \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i}(\mathbf{x}) \delta \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t) + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j}(\mathbf{x}) \delta \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x}, t) \quad (2.25)$$

womit sich auch der Gradient der erweiterten Testfunktion  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$  bestimmen lässt.

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\varepsilon} = & \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^{n_m} \nabla^s [\chi_{m,i}(\mathbf{x}) \delta \tilde{\mathbf{u}}_i(\mathbf{x}, t)] \\ & + \sum_{j=1}^{n_c} \left\{ \chi_{c,j}(\mathbf{x}) \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x}, t) + 2 \delta_c(\mathbf{x}) \left[ \delta \tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{n}_{c,j}(\mathbf{x}) \right]^s \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Der Raum der zulässigen Testfunktionen ist gegeben durch

$$\mathbb{V} = \left\{ \delta \hat{\mathbf{u}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}_i, \delta \tilde{\mathbf{u}}_j \mid \delta \hat{\mathbf{u}}, \delta \tilde{\mathbf{u}}_i, \delta \tilde{\mathbf{u}}_j \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \text{ und } \delta \hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_u} = \delta \tilde{\mathbf{u}}_i|_{\Gamma_u} = \delta \tilde{\mathbf{u}}_j|_{\Gamma_u} = \mathbf{0} \right\}. \quad (2.27)$$

Die schwache Form des Gleichgewichts (2.7) ohne eingeprägte Volumenkräfte lautet

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V}. \quad (2.28)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes für die erweiterten Testfunktionen (2.25) und deren Gradient (2.26) ergibt sich folgende Gleichgewichtsaussage:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} \nabla^s [\chi_{m,i} \delta \tilde{\mathbf{u}}_i] + \sum_{j=1}^{n_c} \left\{ \chi_{c,j} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_j + 2 \delta_c [\delta \tilde{\mathbf{u}}_j \otimes \mathbf{n}_{c,j}]^s \right\} \right] : \boldsymbol{\sigma} \, dV \\ = \int_{\Gamma_t} \left[ \delta \hat{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \delta \tilde{\mathbf{u}}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \delta \tilde{\mathbf{u}}_j \right] \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad . \quad (2.29) \end{aligned}$$

Der Term mit der Delta-Distribution ist unbegrenzt und kann mithilfe eines Integralsatzes in ein Oberflächenintegral über den Riss transformiert werden.

$$\int_{\Omega} 2 \delta_c [\delta \tilde{\mathbf{u}}_j \otimes \mathbf{n}_{c,j}]^s : \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_{\Gamma_{c,j}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{t}_{c,j} \, dA \quad (2.30)$$

Der Spannungsvektor  $\mathbf{t}_{c,j}$  wirkt auf die Rissflächen  $\Gamma_{c,j}^+$  und  $\Gamma_{c,j}^-$  und wird durch eine äquivalente Kraft in den getrennten Teilen des Körpers  $\Omega_{c,j}^+$  und  $\Omega_{c,j}^-$  im Gleichgewicht gehalten. Die schwache Form lässt sich in insgesamt  $1 + n_m + n_c$  Variationsaussagen umformen, welche über das nichtlineare Spannungsfeld  $\boldsymbol{\sigma}$  miteinander gekoppelt sind.

$$\int_{\Omega} \nabla^s \delta \hat{\mathbf{u}} : \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_{\Gamma_t} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad (2.31)$$

$$\int_{\Omega} \nabla^s [\chi_{m,i} \delta \tilde{\mathbf{u}}_i] : \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_{\Gamma_t} \chi_{m,i} \delta \tilde{\mathbf{u}}_i \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad \text{für } i = 1 \dots n_m$$

$$\int_{\Omega} \chi_{c,j} \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_j : \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\Gamma_{c,j}} 2 \delta \tilde{\mathbf{u}}_j \cdot \mathbf{t}_{c,j} \, dA = \int_{\Gamma_t} \chi_{c,j} \delta \tilde{\mathbf{u}}_j \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad \text{für } j = 1 \dots n_c$$

Gleichungen (2.31)<sub>2</sub> und (2.31)<sub>3</sub> stellen jeweils die schwache Form der Spannungskontinuität über einzelne materielle Grenzflächen bzw. Risse dar.

## 2.2.4 Diskretisierung

Bei der erweiterten Finite-Elemente-Formulierung ist die Partition-of-Unity unverändert gültig, nach der die Summe aller mit einem diskreten Knoten assoziierten Formfunktio-

nen Eins ergibt.

$$\sum_{o \in \mathcal{I}} N_o(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (2.32)$$

Diese Eigenschaft ist wichtig, um beispielsweise ein konstantes Verschiebungs- oder Verzerrungsfeld zu repräsentieren, was im Patchtest gefordert wird und eine Notwendigkeit für die Konvergenz der Methode darstellt. Die Menge  $\mathcal{I}$  beinhaltet alle diskretisierten Knoten des Gebietes  $\Omega$ . Für die Konsistenz der Formulierung sind mindestens  $C^0$ -kontinuierliche Ansätze der Feldvariablen erforderlich. Dazu ist es mindestens notwendig, die Verschiebungen für dreidimensionale achtknotige Elemente mit trilinearen Formfunktionen  $N$  zu interpolieren.

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}^h = \sum_{o \in \mathcal{I}} N_o \mathbf{a}_o + \sum_{i=1}^{n_m} \sum_{p \in \mathcal{J}_i} \chi_{m,i} N_p \mathbf{b}_{p,i} + \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{q \in \mathcal{K}_j} \chi_{c,j} N_q \mathbf{c}_{q,j} \quad (2.33)$$

Der Vektor  $\mathbf{a}_o$  enthält alle gewöhnlichen Verschiebungsfreiheitsgrade am Knoten  $o$ , die multipliziert mit der Formfunktion  $N_o$  den gewöhnlichen Verschiebungsanteil  $\hat{\mathbf{u}}$  ergeben. Die Menge  $\mathcal{J}_i \subset \mathcal{I}$  enthält alle Knoten  $p$  jener Elemente, durch die eine materielle Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  verläuft. Diese Knoten werden mit den zusätzlichen Freiheitsgraden  $\mathbf{b}_{p,i}$  angereichert, die multipliziert mit der Anreicherungsfunktion  $\chi_{m,i}$  und der Formfunktion  $N_p$  den Verschiebungsanteil  $\tilde{\mathbf{u}}_i$  ergeben. Die Menge  $\mathcal{K}_j \subset \mathcal{I}$  enthält die Knoten, deren Einflussbereich vollständig von einem Riss  $\Gamma_{c,j}$  durchtrennt wird. Dabei ist der Einflussbereich eines Knotens durch die Summe aller Elemente, die mit dem Knoten verbunden sind, definiert. Diese Knoten werden mit den zusätzlichen Freiheitsgraden  $\mathbf{c}_{q,j}$  angereichert, die multipliziert mit der Anreicherungsfunktion  $\chi_{c,j}$  und der Formfunktion  $N_q$  den diskontinuierlichen Verschiebungsanteil  $\tilde{\tilde{\mathbf{u}}}_j$  ergeben. An dieser Stelle sei angemerkt, dass in FRIES UND BELYTSCHKO (2006) eine intrinsische Formulierung der X-FEM ohne zusätzliche globale Knotenfreiheitsgrade aufgestellt wurde, bei der jedoch die Formfunktionen entsprechend angepasst werden müssen, um die diskontinuierliche Kinematik abzubilden. Mit der Anreicherung einzelner Knoten kann die Lösung ohne Veränderungen des ursprünglichen Finite-Elemente-Netzes verbessert werden. Die Funktion  $\chi_{m,i}$  kann als Gratfunktion betrachtet werden. In durchtrennten Elementen nimmt sie ihren Maximalwert auf der diskretisierten materiellen Grenzfläche  $\Gamma_{m,i}$  an und den Wert Null in allen anderen Elementen, siehe MOËS U. A. (2003).

$$\chi_{m,i}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_{iel}} N^I |\phi_{i,I}| - \left| \sum_{I=1}^{n_{iel}} N^I \phi_{i,I} \right| \quad (2.34)$$

Alternativ zu der Gratfunktion können auch Blendingelemente verwendet werden, siehe zum Beispiel FRIES (2008) oder GRACIE U. A. (2008). Als weitere Variante für Probleme mit eingebetteten Grenzflächen zeigen DOLBOW UND HARARI (2009) ein Ver-

fahren basierend auf der Nitsche-Methode. In ihren Untersuchungen erweist sich dieses Verfahren effizienter als die Gratanreicherung und in der Implementierung einfacher als Blendingelemente. Die Verschiebungsapproximation (2.33) kann durch Zusammenfassen der Elementfreiheitsgrade kompakt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{N}_a^e \mathbf{a}^e + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^e \mathbf{b}_i^e + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \mathbf{N}_c^e \mathbf{c}_j^e \\ \delta \mathbf{u}^h &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{N}_a^e \delta \mathbf{a}^e + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \sum_{i=1}^{n_m} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^e \delta \mathbf{b}_i^e + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \sum_{j=1}^{n_c} \chi_{c,j} \mathbf{N}_c^e \delta \mathbf{c}_j^e. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Die in Gleichung (2.20) auftretende Delta-Distribution liefert für Punkte neben dem Riss keinen Anteil zum Verzerrungstensor, auf dem Riss selbst ist sie nicht definiert. Das diskrete Verzerrungsfeld ergibt sich mit dieser Eigenschaft von  $\delta_{c,j}$  zu:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^h &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{B}_a^e \mathbf{a}^e + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \sum_{i=1}^{n_m} \underbrace{(\mathbf{L} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^e + \chi_{m,i} \mathbf{B}_b^e)}_{\bar{\mathbf{B}}_{b,i}^e} \mathbf{b}_i^e + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \sum_{j=1}^{n_c} \underbrace{(\chi_{c,j} \mathbf{B}_c^e)}_{\bar{\mathbf{B}}_{c,j}^e} \mathbf{c}_j^e \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon}^h &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \mathbf{B}_a^e \delta \mathbf{a}^e + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \sum_{i=1}^{n_m} \underbrace{(\mathbf{L} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^e + \chi_{m,i} \mathbf{B}_b^e)}_{\bar{\mathbf{B}}_{b,i}^e} \delta \mathbf{b}_i^e + \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \sum_{j=1}^{n_c} \underbrace{(\chi_{c,j} \mathbf{B}_c^e)}_{\bar{\mathbf{B}}_{c,j}^e} \delta \mathbf{c}_j^e \end{aligned} \right\} \forall \mathbf{x} \notin \Gamma_{c,j}. \quad (2.36)$$

In den Vektoren  $\mathbf{a}^e$ ,  $\mathbf{b}_i^e$  und  $\mathbf{c}_j^e$  sind alle gewöhnlichen Freiheitsgrade eines Elements, alle erweiterten Elementfreiheitsgrade der materiellen Grenzflächen  $i$  bzw. alle erweiterten Elementfreiheitsgrade der Risse  $j$  enthalten. Die Matrix  $\mathbf{L}$  enthält Differentialoperatoren und bestimmt die Anordnung der Verzerrungskomponenten im Verzerrungsvektor in Voigt-Notation. Der Verschiebungssprung auf dem Riss  $\Gamma_{c,j}$  lässt sich explizit über

$$\frac{1}{2} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{c,j} \approx \mathbf{N}_c \mathbf{c}_j \quad (2.37)$$

diskretisieren. Nach Einsetzen der Diskretisierung kann das Gleichungssystem (2.31) in folgender Form angegeben werden.

$$\begin{aligned}
 \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \boldsymbol{\sigma} \, dV}_{\mathbf{f}_{\text{int},a}^e} &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}_a^T \bar{\mathbf{t}} \, dA}_{\mathbf{f}_{\text{ext},a}^e} \\
 \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV}_{\mathbf{f}_{\text{int},b,i}^e} &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Gamma_t^e} \chi_{m,i} \mathbf{N}_b^T \bar{\mathbf{t}} \, dA}_{\mathbf{f}_{\text{ext},b,i}^e} \quad \text{für } i = 1 \dots n_m \\
 \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \boldsymbol{\sigma} \, dV + \int_{\Gamma_{c,j}^e} 2\mathbf{N}_c^T \mathbf{t}_{c,j} \, dA}_{\mathbf{f}_{\text{int},c,j}^e} &= \bigcup_{e=1}^{n_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Gamma_t^e} \chi_{c,j} \mathbf{N}_c^T \bar{\mathbf{t}} \, dA}_{\mathbf{f}_{\text{ext},c,j}^e} \quad \text{für } j = 1 \dots n_c
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

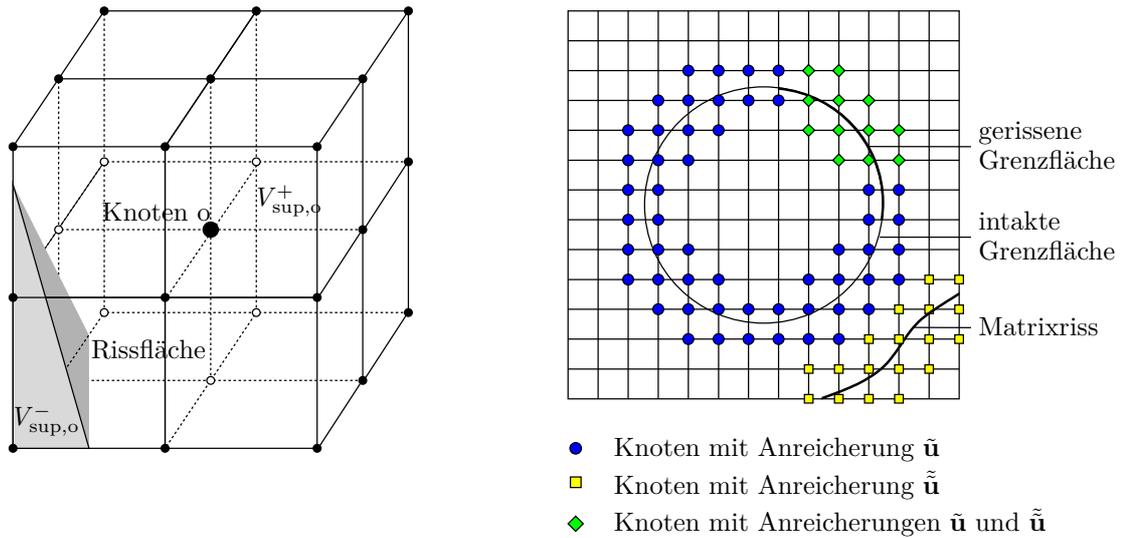
Aufgrund des Fundamentallemmas der Variationsrechnung müssen die Gleichgewichtsaussagen für jede beliebige Variation der Knotenverschiebungen  $\delta \mathbf{a}$ ,  $\delta \mathbf{b}$  bzw.  $\delta \mathbf{c}$  gelten, weshalb diese bereits aus den Integralen herausgezogen und eliminiert wurden. Die Integrale auf der linken Seite stellen jeweils die internen Kräfte dar, auf der rechten Seite stehen die externen Kräfte. Das Residuum, als Differenz der internen und externen Kräfte, muss in jeder der Gleichungen verschwinden.

### Anmerkungen zur Knotenanreicherung

Allgemein werden nur solche Knoten angereichert, deren Einflussbereich von einer Grenzfläche oder einem Riss vollständig durchtrennt wird. Dies ist beispielhaft in Abbildung 2.3 links dargestellt. Handelt es sich um einen Knoten einer Randfläche bzw. Randkante oder um einen Eckknoten, besteht der Einflussbereich aus entsprechend weniger Elementen. Ein Knoten dessen Einflussbereich fast vollständig auf einer Seite der Diskontinuität liegt, wird nicht angereichert und aus der Menge  $\mathcal{J}_i$  bzw.  $\mathcal{K}_j$  entfernt. Dies wird anhand folgender Abfrage überprüft:

$$\frac{\min(V_{\text{sup},o}^-, V_{\text{sup},o}^+)}{V_{\text{sup},o}} > \text{tol} \Rightarrow o \in \mathcal{J}_i \vee o \in \mathcal{K}_j. \tag{2.39}$$

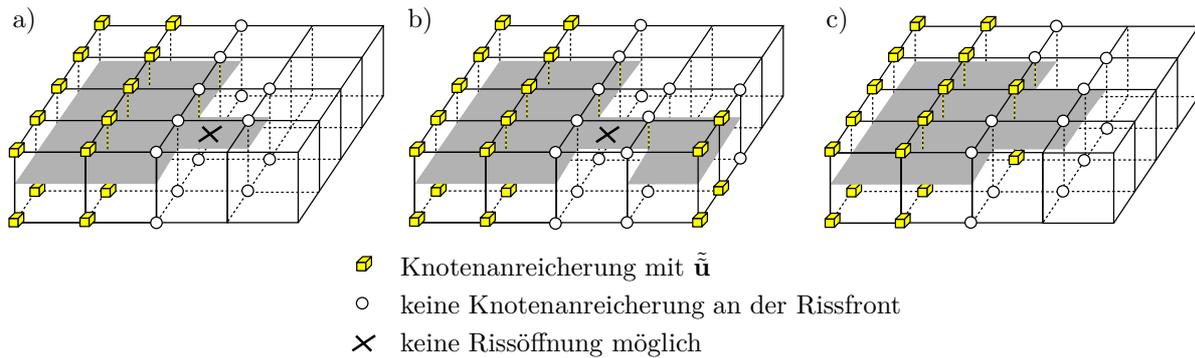
Hier wird auf die in SUKUMAR UND PRÉVOST (2003) angegebene Grenze von  $\text{tol} = 10^{-4}$  zurückgegriffen. Ohne diesen Eingriff kann es zu einem Rangabfall im Gleichungssystem kommen, da die Anreicherungsfunktion bei numerischer Integration nicht mehr von einer konstanten Funktion zu unterscheiden ist und sich lineare Abhängigkeiten einschleichen. Liegt eine materielle Grenzfläche auf einer Elementseitenfläche, werden die Knoten der Fläche nicht angereichert. In Abbildung 2.3 rechts ist für den zweidimensionalen Fall zu erkennen, dass jene Knoten, die an einer gerissenen Grenzfläche liegen, sowohl mit



**Abbildung 2.3:** Einflussbereich eines Knotens und Knotenanreicherungen.

$\tilde{u}$  als auch mit  $\tilde{\tilde{u}}$  angereichert werden. Weiterhin ist anzumerken, dass in dieser Arbeit die Rissfront darauf beschränkt wird, an einem Elementrand zu liegen zu kommen. Ein Element reißt bei Rissfortschritt also immer komplett durch. Dies hat zur Folge, dass Knoten an Randflächen der Rissfront nicht angereichert werden, damit der Riss dort geschlossen bleibt. Es sei aber darauf hingewiesen, dass es speziell entwickelte Rissspitzenelemente gibt, in denen die Rissspitze eine beliebige Position einnehmen darf. Dazu zählen die in den Arbeiten MOËS U. A. (1999), ZI UND BELYTSCHKO (2003) sowie MOËS U. A. (2002) entwickelten Elemente mit asymptotischer Rissspitzenanreicherung und speziellen Integrationsverfahren. In dieser Arbeit wird auf die Anreicherung mit Rissspitzenfunktionen verzichtet, was in WELLS (2001) damit begründet wurde, dass ein Großteil der Energie durch Rissöffnung und nicht nur durch Rissfortschritt dissipiert wird. Es werden also nur vollständig gerissene Elemente betrachtet, was die ohnehin schwierige Aufgabe der Elementunterteilung für die Integration, die in Kapitel 5.5 behandelt wird, etwas leichter macht. Eine weitere Einschränkung ist das separate Auftreten von Matrix- und Grenzflächenrissen. Ein Zusammenwachsen von Rissen soll bei der hier betrachteten dreidimensionalen Modellierung nicht berücksichtigt werden. Für zweidimensionale Problemstellungen gibt es hingegen Arbeiten, die verzweigende und zusammenwachsende Risse behandeln, wie zum Beispiel DAUX U. A. (2000), BUDYN U. A. (2004) oder HETTICH (2007). In diesen Fällen besitzen Elemente in denen sich Risse kreuzen noch mehr Freiheitsgrade, denn es wird für jeden der ankommenden Risse extra angereichert.

Ein weiteres Problem, das sich im dreidimensionalen Raum stellt, ist die Anreicherung der Rissfront. Je nachdem wie viele Elemente sie umfasst, können sich Situationen er-



**Abbildung 2.4:** Knotenanreicherungen in der Nähe der Rissfront.

geben, in denen einige Knoten nicht angereichert werden und sich der Riss somit nicht öffnen kann. Dieses Detail wurde in REMMERS (2006) erwähnt und soll in Abbildung 2.4 an einer ebenen Elementreihe veranschaulicht werden. Damit sich der Riss öffnen kann, müssen wie im Fall c) mindestens zwei Elemente nebeneinander an der Rissfront liegen. Fälle a) und b) sind zu vermeiden, da sich der Riss hier in dem markierten Element nicht öffnen kann, weil seine Knoten nicht angereichert werden. Deshalb wurde in REMMERS (2006) vorgeschlagen, den Spannungszustand in einem Element nur in den Ecken zu beobachten und den Riss bei Erfüllung des Kriteriums gleich in allen Elementen, die an die Risskante anschließen, weiterzuführen. Somit können die kritischen Fälle vermieden werden.

### Berechnung der Lastvektoren

Im Gegensatz zur Arbeit WELLS UND SLUYS (2001), in der an Stellen mit natürlichen und wesentlichen Randbedingungen keine Anreicherung vorgenommen wird, soll hier die Anreicherung auch an Neumannrändern vorgenommen werden. Folglich entstehen zusätzliche Terme im Vektor der externen Kräfte  $\mathbf{f}_{\text{ext}}^e$  in Gleichung (2.38). Dabei ergibt sich der Lastvektor  $\mathbf{f}_{\text{ext},b,i}^e$  nur, wenn äußere Lasten direkt an einem Grenzflächenelement angreifen. Der Lastvektor  $\mathbf{f}_{\text{ext},c,j}^e$  hingegen tritt nicht nur für ein belastetes, gerissenes Randelement selbst auf, sondern auch bei belasteten Nachbarelementen mit angereicherten Knoten.

### 2.2.5 Linearisierung

Aufgrund der Annahme nichtlinearen Materialverhaltens der Festkörperkomponenten und der materiellen Grenzflächen, erfolgt die Lösung hier mit dem Newton-Raphson-Verfahren. Die konstitutiven Gleichungen im Festkörper und an den materiellen Grenz-

flächen werden dazu in Ratenform angegeben.

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{C}_{\text{tan}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\mathbf{t}}_{c,j} &= \mathbf{T}_{\text{tan},j} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket_{c,j}\end{aligned}\quad (2.40)$$

Darin bildet der vierstufige Tangentenmodul  $\mathbf{C}_{\text{tan}}$  den Zusammenhang zwischen der aktuellen Spannungs- und Verzerrungsrate, der zweistufige Tangentenmodul  $\mathbf{T}_{\text{tan}}$  verknüpft die aktuellen Raten des Spannungsvektors und des Verschiebungssprungs. Die Linearisierung erfolgt wie in Abschnitt 2.1.4 und führt auf das zu lösende Gleichungssystem  $\mathbf{K}^i \Delta \mathbf{D}^{i+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{D}^i)$ . Auf Elementbasis nimmt die Steifigkeitsmatrix folgende Struktur an,

$$\mathbf{k}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{aa} & \mathbf{k}_{ab_1} & \cdots & \mathbf{k}_{ab_{n_m}} & \mathbf{k}_{ac_1} & \cdots & \mathbf{k}_{ac_{n_c}} \\ \mathbf{k}_{b_1a} & \mathbf{k}_{b_1b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_1b_{n_m}} & \mathbf{k}_{b_1c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_1c_{n_c}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{k}_{b_{n_m}a} & \mathbf{k}_{b_{n_m}b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_{n_m}b_{n_m}} & \mathbf{k}_{b_{n_m}c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{b_{n_m}c_{n_c}} \\ \mathbf{k}_{c_1a} & \mathbf{k}_{c_1b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_1b_{n_m}} & \mathbf{k}_{c_1c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_1c_{n_c}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{k}_{c_{n_c}a} & \mathbf{k}_{c_{n_c}b_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_{n_c}b_{n_m}} & \mathbf{k}_{c_{n_c}c_1} & \cdots & \mathbf{k}_{c_{n_c}c_{n_c}} \end{bmatrix}\quad (2.41)$$

wobei sich die einzelnen Anteile der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{k}^e$  über

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{aa} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \mathbf{B}_a \, dV \quad ; \quad \mathbf{k}_{ab_i} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \, dV \\ \mathbf{k}_{ac_j} &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_a^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, dV \quad ; \quad \mathbf{k}_{b_ia} = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \mathbf{B}_a \, dV \\ \mathbf{k}_{b_ib_r} &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \bar{\mathbf{B}}_{b,r} \, dV \quad ; \quad \mathbf{k}_{b_ic_j} = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{b,i}^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, dV \\ \mathbf{k}_{c_ja} &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \mathbf{B}_a \, dV \quad ; \quad \mathbf{k}_{c_jb_i} = \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \bar{\mathbf{B}}_{b,i} \, dV \\ \mathbf{k}_{c_jc_j} &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \bar{\mathbf{B}}_{c,j} \, dV \quad + \quad \int_{\Gamma_{c,j}^e} 4 \mathbf{N}_c^T \mathbf{T}_{\text{tan},j} \mathbf{N}_c \, dA \quad \text{für } j = j \\ \mathbf{k}_{c_jc_s} &= \int_{\Omega^e} \bar{\mathbf{B}}_{c,j}^T \mathbf{C}_{\text{tan}} \bar{\mathbf{B}}_{c,s} \, dV \quad \text{für } j \neq s\end{aligned}\quad (2.42)$$

berechnen. Dazu muss der Tensor  $\mathbf{C}_{\text{tan}}$  durch Anwendung der Voigt-Notation in Matrixschreibweise überführt werden. Die Struktur des Vektors der Freiheitsgrade und der

rechten Seite ergibt sich analog zu:

$$\Delta \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{b}_{n_m} \\ \Delta \mathbf{c}_1 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{c}_{n_c} \end{bmatrix} ; -\mathbf{r}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\text{ext},a}^e & - & \mathbf{f}_{\text{int},a}^e \\ \mathbf{f}_{\text{ext},b_1}^e & - & \mathbf{f}_{\text{int},b_1}^e \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{ext},b_{n_m}}^e & - & \mathbf{f}_{\text{int},b_{n_m}}^e \\ \mathbf{f}_{\text{ext},c_1}^e & - & \mathbf{f}_{\text{int},c_1}^e \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{ext},c_{n_c}}^e & - & \mathbf{f}_{\text{int},c_{n_c}}^e \end{bmatrix} . \quad (2.43)$$



---

# Versagensmodellierung heterogener Materialien

---

Heterogene Materialien bestehen aus mindestens zwei verschiedenen Phasen. Als Beispiele seien die in dieser Arbeit betrachteten kohäsiven Reibungsmaterialien wie Beton und der Faserverbundwerkstoff, textilfaserverstärkter Beton, genannt. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird eine allgemeine Einführung zu Faserverbundwerkstoffen gegeben. Darauf folgend werden die in dieser Arbeit betrachteten Beispielmaterialien, textilfaserverstärkter Beton und unbewehrter Feinbeton, vorgestellt sowie ihre besonderen Versagensformen und deren Modellierung diskutiert. Anschließend werden die Konzepte der verwendeten Materialformulierungen zur Modellierung diffusen und diskreten Versagens der Werkstoffe aufgearbeitet.

## 3.1 Einführung zu Faserverbundwerkstoffen

Faserverbundwerkstoffe werden speziell für bestimmte Ansprüche gefertigt. Die Verstärkungsphase aus Fasern ist in die Phase des Grundmaterials, die als Matrix bezeichnet wird, eingebettet. Der gesamte Werkstoff muss dem Verbundversagen an den Grenzflächen zwischen Fasern und Matrix, sowie Faserbrüchen und Matrixrissen widerstehen können. Die Fasern übernehmen einen wesentlichen Teil der Lastabtragung und Spannungsübertragung, da sie in der Regel steifer und fester als das stützende sowie schützende Matrixmaterial sind. So ergibt sich ein leistungsfähiger Werkstoff mit besseren Eigenschaften als die der Einzelkomponenten, vorausgesetzt, die Fasern haben eine größere Festigkeit und Steifigkeit als die Matrix (SCHULTZ 1996).

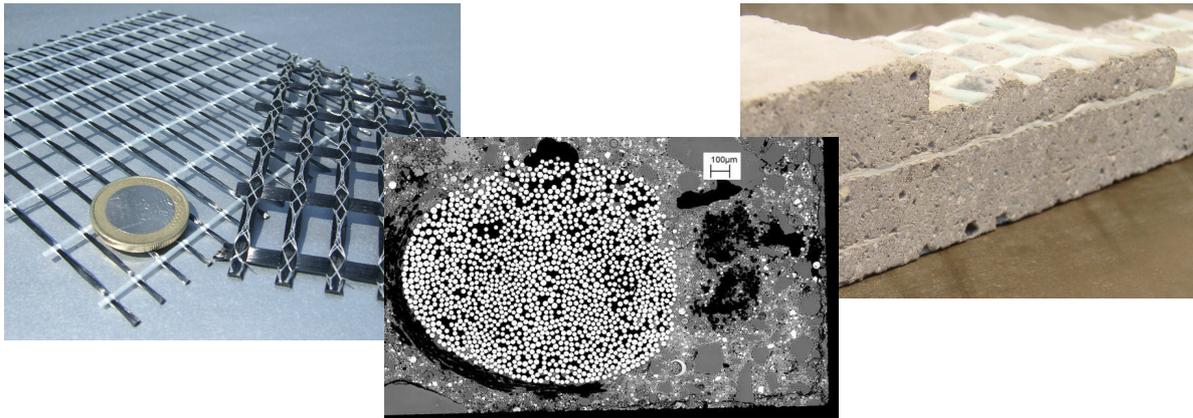
Für die unterschiedlichen Disziplinen, in denen Faserverbundwerkstoffe eingesetzt werden, wie zum Beispiel der Luft- und Raumfahrt, dem Automobilbau, dem Bauwesen, der

Sportgeräteherstellung und der Humanmedizin, gibt es entsprechend vielfältige Materialkombinationen. Als Matrix werden unter anderem Polymere, Metalle, Keramik und Beton verwendet, für die Fasern kommen metallische, organische oder keramische Materialien wie Stahl, Kevlar, Karbon oder Glas zum Einsatz (HERAKOVICH 1998). Wie in KATO u. A. (2009), KATO (2010) und HILCHENBACH (2010) gezeigt wurde, lässt sich durch eine geschickte Kombination sich gut ergänzender Einzelkomponenten und ihrer optimalen Anordnung im Entwurfsraum, ein Verbundwerkstoff mit niedrigem spezifischem Gewicht bei gleichzeitig hoher Festigkeit, Steifigkeit und Duktilität erzielen. Die Anordnung der Fasern im Matrixmaterial kann im Wesentlichen auf zwei verschiedene Weisen erfolgen. Zum Einen können die einzelnen Faserbündel oder Fasergelege entsprechend den zu erwartenden Hauptspannungsrichtungen in einzelnen Schichten uni- oder bidirektional angeordnet werden. In diesem Fall ist es möglich die verschieden orientierten Einzelschichten durch Verkleben zu Laminaten und Sandwich-Konstruktionen zusammenzubauen, um gezielt transversal isotropes, anisotropes und orthotropes Materialverhalten zu erzeugen (HERAKOVICH 1998). Zum Anderen lassen sich Kurzfasern zufällig im Matrixmaterial verteilen. Bei beliebiger Anordnung kurzer Fasern ist zwar keine optimale Aufnahme von Kräften in einer bestimmten Richtung gewährleistet, dafür ergibt sich aber durch die hohe spezifische Oberfläche ein sehr feines Rissbild. Für gerichtete Einwirkungen bei lastabtragenden Strukturen ist diese zufällige Anordnung relativ ineffizient. In solchen Fällen ist es sinnvoller eine gezielte Einbettung der Fasern zu wählen, wodurch auch mit geringem Faservolumenanteil eine bessere Lastabtragung erzielt werden kann.

## 3.2 Auswahl quasispröder, heterogener Werkstoffe

### 3.2.1 Textilfaserverstärkter Beton mit gerichteter Faserbewehrung

Als Beispielmateriale eines Faserverbundwerkstoffes wird in der vorliegenden Arbeit textilfaserverstärkter Beton untersucht. Dieser Verbundwerkstoff besteht aus einer Feinbetonmatrix und einer oftmals mehrlagigen textilen Bewehrung aus beliebig langen Hochleistungsgarnen. Da im Unterschied zu anderen Verbundwerkstoffen sowohl die Matrix als auch die Bewehrung heterogen sind, besitzt Textilbeton eine hochgradig heterogene Materialstruktur. Die Faserbündel bestehen aus mehreren hundert bis tausend einzelnen Filamenten unter Verbundkontakt mit sehr kleinem Durchmesser. Mithilfe der Textiltechnik lassen sich die Fasern zu flächigen oder räumlichen Strukturen formen, wie in Abbildung 3.1 links zu sehen. Danach werden sie lagenweise in die Matrix aus Feinbeton eingebettet, welche meistens einen Volumenanteil von 95 bis 99% einnimmt.



**Abbildung 3.1:** Links/rechts: Textilfasergelege und deren lagenweise Einbettung in Feinbeton. Mitte: Schnitt durch Glasfasern in Betonmatrix, Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme aus LANGE U. A. (2009).

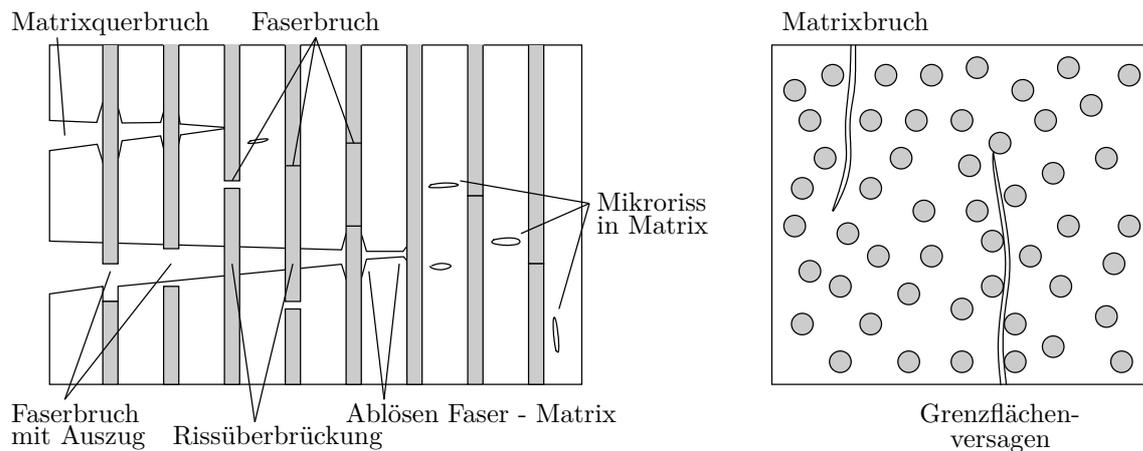
Mit Textilbeton sind Bauteildicken zwischen 10 - 30 mm möglich, da die Fasern aus alkaliresistentem Glas (AR-Glas) oder Karbon keinen Korrosionsschutz benötigen und zur Einleitung der Verbundkräfte eine geringe Betondeckung ausreicht (JESSE 2004). Dies verringert die Dimensionen, insbesondere in Dickenrichtung, im Vergleich zum Stahlbetonbau um eine Größenordnung auf etwa ein Zehntel. Durch die Vorteile eines geringen spezifischen Eigengewichts, eine gute Formbarkeit zur Anpassung an die teilweise komplexe Geometrie, sowie eine flächige Krafteinleitung, gilt Textilbeton als äußerst leistungsfähige Ergänzung herkömmlicher Baustoffe und hat insbesondere als Verstärkungs- und Instandsetzungssystem für Stahlbetontragwerke ein großes Potenzial, siehe WEILAND UND CURBACH (2009). So werden bestehende Tragwerke zunehmend mit Textilbetonplatten anstatt mit etablierten faserverstärkten Polymerplatten oder Polymerstreifen ertüchtigt, um Duktilität und Tragfähigkeit zu erhöhen. Ausführungsbeispiele sind in CURBACH U. A. (2007) und SCHLADITZ U. A. (2009) dokumentiert. Mit diesem Werkstoff erschließen sich für Beton neue Anwendungsbereiche hin zu schlankeren bewehrten Bauteilen, wie beispielsweise Fassadenelemente als dünne, selbsttragende Alternative zu herkömmlichen Fertigbetonelementen (HEGGER U. A. 2007). Weitere Hinweise zu Herstellung und Konstruktion werden unter anderem in CURBACH UND JESSE (2009) gegeben.

Durch die geschickte Kombination der spröden Werkstoffe Beton und Glasfasern ergibt sich ein duktileres, pseudoplastisches Material. Die hohe Duktilität von Textilbeton resultiert hauptsächlich aus sukzessivem Ablösen der Faserbündel von der Matrix (JESSE 2004). Das gesamte Materialverhalten lässt sich nicht allein aus den Spannungs-Dehnungs-Kurven der einzelnen Ausgangsstoffe ableiten. Vielmehr wird das makroskopische Materialverhalten durch die mechanischen Eigenschaften der Komponenten und ihren Interaktionen an der Grenzfläche, also den Verbundeigenschaften, bestimmt. Des-

halb müssen die materiellen Grenzflächen für sich charakterisiert werden. Es konnte in ZASTRAU U. A. (2003) gezeigt werden, dass das Verbundverhalten von vielen Faktoren beeinflusst wird und aufgrund der Vielfalt verfügbarer Faserprodukte in einem großen Wertebereich liegt. Einflussfaktoren sind beispielsweise die Oberflächentextur der Filamente, Form und Neigung des Verstärkungsquerschnitts, die Geometrie des Körpers und der Bewehrungsgrad. Besonders die Frage, ob die Faserbündel imprägniert und dabei vorgespannt sind oder nicht, hat großen Einfluss auf die Verbundeigenschaften. Wie in KRÜGER U. A. (2002) festgestellt wurde, wirkt sich eine Imprägnierung mit Epoxidharz positiv auf Verbundfestigkeit und Steifigkeit aus. Eine zusätzliche Vorspannung beim Imprägnieren erhöht den Reibverbund noch weiter, was auf den Bündelungseffekt beim Vorspannen und die erhöhte innere Reibung zwischen einzelnen Filamenten zurückzuführen ist. Voraussetzung für eine vollständige Krafteinleitung in die textile Bewehrungsstruktur ist ein funktionierender Verbund zwischen Fasern und Matrix und innerhalb der Fasern. Der Verbund kann aber aufgrund von Herstellungsfehlern geschwächt sein, wie in der mikroskopischen Aufnahme in Abbildung 3.1 Mitte zu sehen ist. Um die Faserbündel bildet sich eine poröse Zementmatrixschicht, weshalb die Annahme perfekt verbundener Materialien anzuzweifeln ist. Stattdessen kann angenommen werden, dass bereits Schubspannungen unterhalb der Festigkeit der Grenzfläche mit Relativverschiebungen von Matrix und Faser verbunden sind.

Grundsätzlich können je nach Belastung und Faserorientierung unterschiedliche Versagensvorgänge in Faserverbundwerkstoffen auftreten, je nachdem ob Zug oder Druck in Faserrichtung oder quer dazu wirkt. Zu den wichtigsten Versagensformen gehören die Entwicklung von Mikrorissen und deren Anwachsen zu Makrorissen in der Matrix, das Ablösen der Fasern von der umgebenden Matrix, das Abgleiten und die Reibung zwischen den Filamenten im Textilgarn bzw. zwischen Matrix und Faser, sowie Faserbruch mit folgendem Faserauszug (HERAKOVICH 1998). Im Allgemeinen setzt sich das Endversagen des Verbundwerkstoffes aus einer Kombination verschiedener Versagensformen zusammen, welche in Abbildung 3.2 in Anlehnung an ZASTRAU U. A. (2003) zusammenfassend dargestellt sind. Die zwei bedeutendsten sind Delamination und Matrixrisse. Beim Belasten eines Probekörpers treten zuerst viele Matrixrisse auf, die infolge der Spannungskonzentration an freien Rändern und Löchern unter Umständen zu Delamination führen. Interagieren und verstärken sich beide Phänomene gegenseitig, kann die Lastabtragungskapazität der Struktur deutlich abgemindert werden.

Die Modellierung von Textilbeton kann prinzipiell auf verschiedenen Skalen erfolgen, auf denen auch unterschiedliche Versagensformen zu beobachten und abzubilden sind. Klassischerweise kann zwischen einer Modellierung auf der Mikro-, Meso- und Makroebene unterschieden werden. Auf der Mikroskala ist es notwendig, die einzelnen Filamente in den Faserbündeln, die Matrix mit ihrem heterogenen Aufbau und die Interaktion zwischen Filamenten und Matrix explizit zu modellieren. Für große Strukturen ist solch eine



**Abbildung 3.2:** Versagensphänomene in Textilbeton unter Längs- und Querspannung, nach ZASTRAU U. A. (2003).

detaillierte Modellierung ohne Verwendung von Mehrskalmethoden jedoch nicht effizient. Eine Betrachtungsebene höher muss das Verhalten der Mikrostruktur nicht mehr detailgetreu aufgelöst werden, so dass Fasern und Matrix auf dem Mesolevel als jeweils homogene Materialien modelliert werden können und nur die Interaktionen dazwischen abgebildet werden müssen. Auf der Makroebene kann der gesamte Verbundwerkstoff mit einem verschmierten Modell wiedergegeben werden, was für große Strukturen sehr effizient ist. Die Modellierung auf der Mesoskala stellt einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Effizienz dar, weshalb sich die in Kapitel 4 folgenden Untersuchungen auf diese Skala beziehen. Dabei wird vereinfachend auf die Modellierung des Übergangs der Delamination in einen Matrixbruch und umgekehrt verzichtet.

### 3.2.2 Unbewehrter Beton

Für die betrachteten textilfaserverstärkten Betone wird als Matrixmaterial Feinbeton verwendet. Dieser enthält mit den zwei Hauptphasen Zementstein und Zuschlagstoffe im Wesentlichen dieselben Bestandteile wie ein üblicher Beton, das in JESSE (2004) angegebene Mischungsverhältnis ist jedoch ein anderes. Der wesentliche Unterschied liegt im kleineren Größtkorndurchmesser, welcher nur 1 – 4 mm beträgt, um die sehr feine Textilbewehrung gut zu umhüllen. Beton gilt als quasisprödes Material, das aufgrund seiner Heterogenität zahlreiche Mikrorisse und Mikroporen an den Grenzflächen zwischen Zementstein und Zuschlag aufweist. Zugbeanspruchungen sind die vorrangige Versagensursache, weshalb Druckversagen bei der Materialmodellierung in dieser Arbeit ausgeschlossen wird. SPECK (2008) gibt eine Reihe von Bruchkriterien für Beton im dreiaxialen Spannungsraum an und stellt sie graphisch in verschiedenen Verzerrungs-

räumen und -ebenen dar. Darunter sind Ein-Parameter-Modelle, wie das hier verwendete Rankine-Kriterium, bis hin zu Fünf-Parameter-Modellen aufgeführt. Die Feinbetonmatrix wird auf mesoskopischer Ebene als homogener Werkstoff mit verschmierten Materialeigenschaften modelliert, weshalb kein expliziter Unterschied zwischen den Zuschlagstoffen und der Zementmatrix gemacht wird.

## 3.3 Konzepte unelastischer Materialformulierung

Im Folgenden werden die in dieser Arbeit verwendeten schadigungsbasierten Materialmodelle beschrieben. Dabei beruht das in Abschnitt 3.3.1 behandelte diskrete Materialmodell zur Beschreibung materieller Grenzflächen und Matrixrisse auf dem Konzept kohäsiver Risse. Des Weiteren wird in Abschnitt 3.3.2 eine Kontinuumsschädigungsformulierung vorgestellt, die im Zusammenhang mit entfestigendem Materialverhalten in Zweiskalensimulationen verwendet wird. Thermische Einflüsse, viskose Effekte oder irreversible Dehnungen werden nicht berücksichtigt.

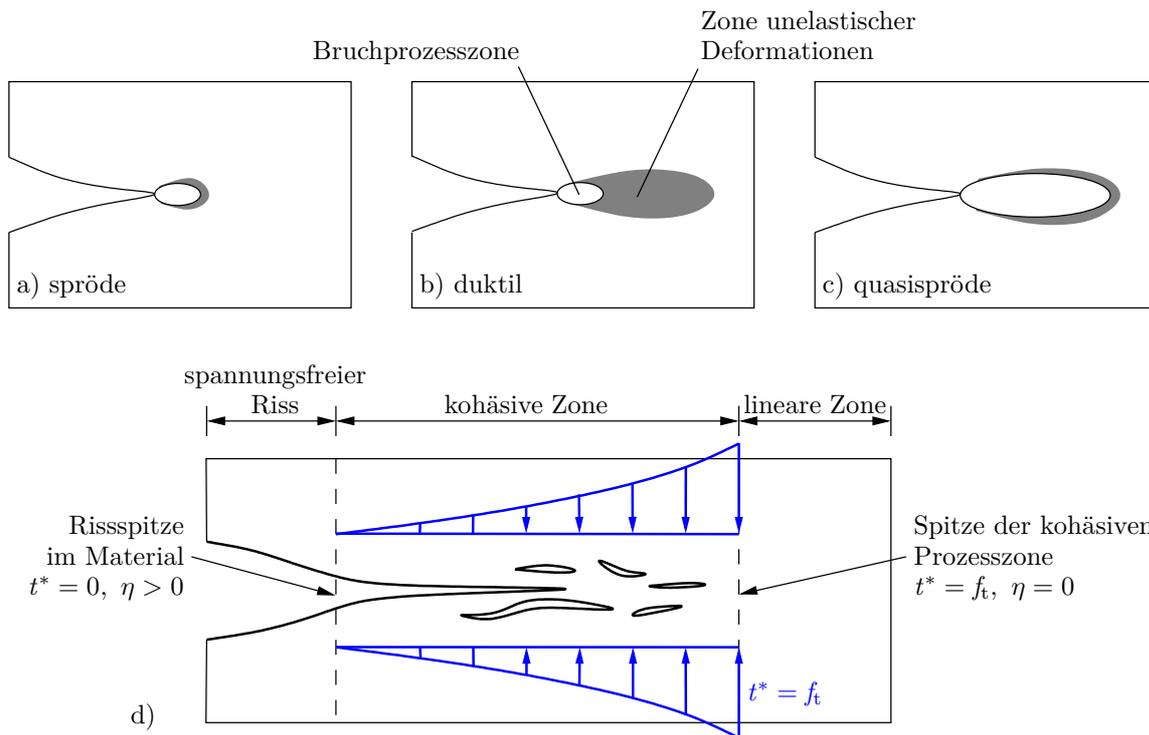
Bis zum Einsetzen der Schädigung sollen alle Materialpunkte einem linear-elastischen Materialgesetz folgen, danach soll dies nur noch in ungeschädigten Bereichen gelten. Das einfachste Beispiel einer Spannungs-Dehnungs-Beziehung ist das Hookesche Gesetz für lineare isotrope Elastizität, das mit nur zwei Materialparametern, den Lamé-Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , beschrieben werden kann.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{\text{el}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}^{\text{el}} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad (3.1)$$

Hierin sind  $\mathbf{1}$  und  $\mathbf{I}$  zwei- bzw. vierstufige Einheitstensoren. Sollen auch diskontinuierliche Eigenschaften abgebildet werden, lässt sich diese kontinuierliche Beschreibung in kritischen Bereichen durch ein Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz ergänzen, als Beziehung zwischen den Spannungsvektoren  $\mathbf{t}_{c,j}$  und dem Verschiebungssprung  $[[\mathbf{u}]]_{c,j}$ .

### 3.3.1 Konzept kohäsiver Risse

Das Bruchverhalten von Beton unterscheidet sich erheblich vom Verhalten, das im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik (LEFM) angenommen wird. Die Bruchprozesszone vor der Rissspitze ist im Vergleich zur Risslänge sowie anderen Strukturabmessungen eines Probekörpers aufgrund der relativ groben Körnung der Zuschlagstoffe sehr groß und kann nicht mehr vernachlässigt werden, vergleiche BAŽANT UND OH (1983) sowie BAŽANT UND PLANAS (1998). In Abbildung 3.3 oben sind die Ausdehnungen der Bruchprozesszone für sprödes, duktileres und quasisprödes Versagen qualitativ dargestellt. Der Bereich nichtlinearer Effekte, in dem es zu unelastischen Deformationen



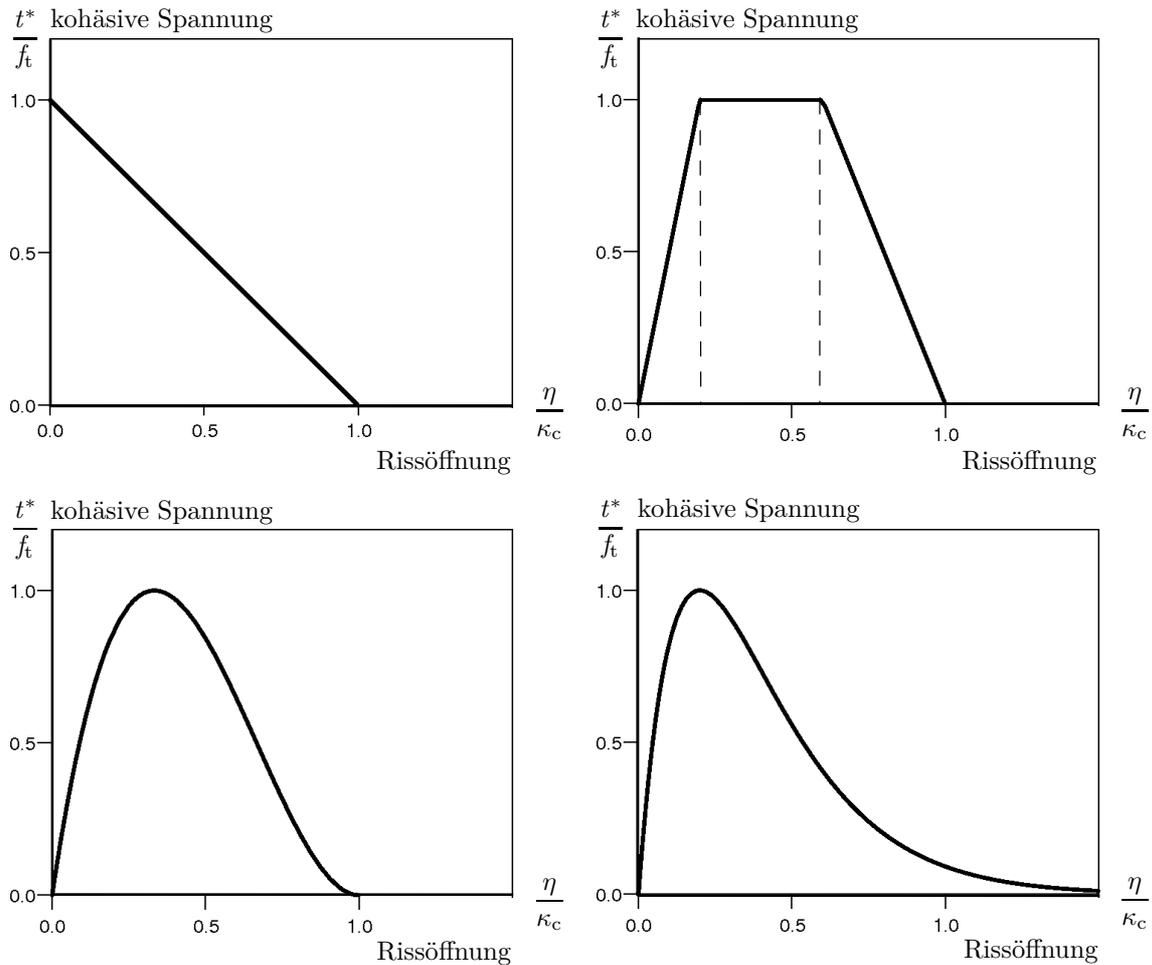
**Abbildung 3.3:** a) - c) Vergleich relativer Ausdehnungen der Bruchprozesszone und der Zone unelastischer Deformationen. d) kohäsive Zone in quasispröder Matrix.

kommt, umhüllt die Bruchprozesszone und ist schraffiert gekennzeichnet. Die LEFM beruht auf der Annahme, dass beide Zonen klein sind, was für spröde Materialien gültig ist. Diese Annahme geht mit der Einführung spannungsfreier Risse im elastischen Körper einschließlich einer singulären Spannungsverteilung an der Risspitze einher. Nichtlineare Bruchtheorien für Metalle sagen ein duktiler Versagen vorher. Dabei liegen die Ränder der Bruchprozesszone und der Zone unelastischer Deformationen weit voneinander entfernt. Bei quasispröden Materialien sind plastische Deformationen vor dem Riss vernachlässigbar klein und der Rand der Bruchprozesszone stimmt beinahe mit dem Rand der nichtlinearen Zone überein. Deshalb reißen Proben aus quasisprödem Material in einem reinen Zugversuch bevor wesentliches plastisches Fließen und Einschnüren auftritt.

In den grundlegenden Veröffentlichungen DUGDALE (1960) und BARENBLATT (1962) wurde zum ersten Mal auf die in der LEFM vorhandene Spannungssingularität an der Risspitze verzichtet und der Riss in einen spannungsfreien Bereich und einen mit endlichen kohäsiven Spannungen belasteten Bereich unterteilt. Wie in Abbildung 3.3 d) skizziert, kann die Bruchprozesszone wesentlich breiter und länger als die Zone sein, in denen sichtbare Mikrorisse auftreten. Deshalb wurde in BAŽANT UND OH (1983) der

Rand der Bruchprozesszone nicht als sichtbarer Rand der Mikrorisse definiert, sondern als Rand der mechanischen Entfestigungszone. Das Konzept kohäsiver Risse wurde im Rahmen der FEM erstmals in HILLERBORG U. A. (1976) zur Modellierung quasispröden Versagens in Beton angewendet. Die Schwächung des Materials tritt nur in einer schmalen kohäsiven Zone auf, sodass die Breite der Zone in einem mathematischen Modell vernachlässigt werden kann. Der gesamte Bruchprozess konzentriert sich auf eine imaginäre Rissverlängerung vor der eigentlichen Risspitze, womit nur die Länge der Lokalisierungszone berücksichtigt wird. Die Schlüsselannahme des Konzepts kohäsiver Risse liegt in der Übertragung von Zugspannungen in der kohäsiven Zone zwischen den fiktiven Rissflächen. Anders als in der LEFM üblich, führt das fiktive Rissmodell anstelle eines spannungsfreien Risses kohäsive Rissufer ein, die mit kohäsiven Spannungen zusammengehalten werden. Ein Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz beschreibt den allmählichen Verlust der Kohäsion über die Rissfläche und somit den Entfestigungsprozess. Die Lage der Bruchprozesszone wird durch zwei Spitzen charakterisiert: eine mathematische, an der die effektive kohäsive Spannung  $t^*$  maximal und die Rissöffnung  $\eta$  gleich Null sind und eine physikalische, an der die effektive kohäsive Spannung  $t^*$  Null und die Rissöffnung  $\eta$  größer Null sind, vergleiche Abbildung 3.3 d). Geht ein Riss beispielsweise von einer Kerbe aus, sind diese Spitzen vor der Lastaufbringung identisch. Sobald die Festigkeit des Materials erreicht wird, können überall kohäsive Risse entstehen, selbst wenn noch kein Makroriss sichtbar ist. Somit vereint das Konzept kohäsiver Risse in einem einfachen Modell die Möglichkeiten von Rissinitiierung und Risswachstum, was insbesondere bei der Simulation von Strukturen ohne Anfangsrisse wichtig ist. Die kohäsiven Rissufer können beispielsweise interne Ränder zwischen zwei Materialien oder die Reduktion schmaler Lokalisierungszone bzw. Scherbänder auf eine Fläche sein.

In der einfachsten und auch gebräuchlichsten Formulierung des kohäsiven Rissmodells bleibt der gesamte Körper elastisch, während entfestigendes, nichtlineares Materialverhalten nur über ein eigenständiges kohäsives Materialgesetz entlang der Rissfläche eingebracht wird. Das Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz definiert die Evolution der Spannungen, wobei jedes Material eine charakteristische Entfestigungskurve hat, die aus Experimenten ermittelt werden sollte. Denkbar sind beispielsweise lineare, trilineare, kubische oder exponentielle Kurven, die in Anlehnung an die Arbeiten ORTIZ UND PANDOLFI (1999), TVERGAARD UND HUTCHINSON (1992) sowie NEEDLEMAN (1987) in Abbildung 3.4 schematisch dargestellt sind. Ein Überblick zu bestehenden Spannungs-Rissöffnungs-Gesetzen wird in CHANDRA U. A. (2002) gegeben. In den Arbeiten ALFANO (2006), ALFANO U. A. (2007) und CHANDRA U. A. (2002) wurde die Auswirkung der Form verschiedener Entfestigungskurven auf die Materialantwort untersucht. Dabei wurde beobachtet, dass die Form, die bei Verbundmaterialien insbesondere vom Verhältnis der Grenzflächenzähigkeit zur Steifigkeit des Grundmaterials abhängt, entscheidend die Genauigkeit



**Abbildung 3.4:** Lineare, trilineare, kubische und exponentielle Spannungs-Rissöffnungs-Gesetze in effektiver Spannung  $t^*$  und effektiver Rissöffnung  $\eta$ , normiert auf Festigkeit  $f_t$  und charakteristische Rissöffnung  $\kappa_c$

der Ergebnisse beeinflusst. Eine exponentielle Form lieferte in allen Untersuchungen die beste Annäherung.

Mit kohäsiven Rissmodellen lässt sich eine große Spanne irreversibler bruch- und schädigungsbasierter Phänomene für eine Vielzahl von Materialien und Verbundwerkstoffen beschreiben. So konnten kohäsive Risse zum Beispiel in NEEDLEMAN (1987) für duktile Materialien und in DE ANDRÉS U. A. (1999) zur Modellierung von Ermüdungsbrüchen eingesetzt werden. Das Konstitutivgesetz in der Rissfläche muss die Form der Entfestigungskurve berücksichtigen und geeignete Materialparameter wie die Bruchenergie und Festigkeit des Materials oder eine kritische Rissöffnung beinhalten. Auch die Wiedergabe des Verhaltens während der Ent- und Wiederbelastung muss korrekt formuliert werden, damit sich teilweise geschädigtes Material bei Entlastung nicht selbst repariert, siehe

TVERGAARD (1990). Im Rahmen dieser Arbeit wird das Versagen in gemischten Versagensformen auf Zug und Schub untersucht, weshalb das Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz sowohl vom Verschiebungssprung in Normalen- als auch in Tangentialrichtung abhängen muss. Die individuellen Komponenten des Verschiebungssprungs haben eine klare physikalische Bedeutung, sodass versagensinduzierte Anisotropie implizit berücksichtigt wird. Für gemischte Zug-Schub-Beanspruchungen gibt es keine allgemein anerkannte Formulierung. In XU UND NEEDLEMAN (1993) sowie CAMACHO UND ORTIZ (1996) wurden beispielsweise auf einem Potential basierende Modelle vorgestellt, welche die normalen und tangentialen Beziehungen berücksichtigen. Des Weiteren wurde in ALFANO UND CRISFIELD (2001) ein Gesetz für gemischte Modi in geschlossener Form vorgeschlagen. Ebenso interessant ist die Frage nach dem Verhalten komplett geschlossener Risse mit möglicher Reibung, welche beispielsweise in CHABOCHE U. A. (1997a) und CHABOCHE U. A. (1997b) konsistent für Interface-Elemente zur Modellierung der Delamination im Faser-Matrix-Verbund behandelt wurde. Dabei ist anzumerken, dass im Kontext der Bruchmechanik Delamination üblicherweise als ein rissartiger Effekt interpretiert wird.

Im Wesentlichen existieren zwei unterschiedliche numerische Diskretisierungsansätze zur Anwendung des Konzepts kohäsiver Risse im Rahmen der FEM. Prinzipiell ist es möglich, die Verschiebungsdiskontinuität nur zwischen benachbarten Elementen einzuführen oder sie an beliebiger Stelle innerhalb finiter Elemente zuzulassen. Im ersten Fall können sogenannte Interface-Elemente ohne Ausdehnung in Dickenrichtung von Anfang an entlang bekannter Risspfade oder auch zwischen allen Elementen, als Netzwerk kohäsiver Elemente, eingeführt werden. Alternativ erfolgt die Einführung adaptiv in Schritten, in denen Risswachstum angezeigt wird. Werden die kohäsiven Interface-Elemente im Rahmen einer intrinsischen Formulierung zu Beginn einer Simulation zwischen den Kontinuums-elementen eingebracht, wird eine anfangs nachgiebige kohäsive Zone angenommen. Dies kann mit der Annahme einer geschwächten Grenzschicht zwischen zwei Materialien statt eines perfekten Verbundes physikalisch motiviert werden oder aus numerischen Gründen erfolgen. Für die Anfangssteifigkeit wird ein hoher Strafparameter angenommen, um ein möglichst gutes Verhalten im ungeschädigten Bereich zu liefern. Der Wert darf allerdings nicht zu groß gewählt werden, da sich sonst ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem ergibt. Die letzten drei Kurven in Abbildung 3.4 verhalten sich anfangs nachgiebig und können mit dem intrinsischen Modell eingesetzt werden. Intrinsische Modelle sind für Simulationen bereits bekannter Risspfade und materieller Grenzflächen geeignet, jedoch nicht wenn der Risspfad völlig unbekannt ist. In diesem Zusammenhang besteht die Möglichkeit, die kohäsiven Elemente extrinsisch einzubringen, um die künstliche Nachgiebigkeit zu eliminieren. Die Elemente werden im Laufe der Berechnung nach Versagensbeginn adaptiv zwischen den jeweiligen Elementen eingeführt, siehe CAMACHO UND ORTIZ (1996), wobei gegebenenfalls eine Neuvernetzung und Netzverfeinerung an der Risspitze sinnvoll ist. Das Konzept kohäsiver Risse wird

oft zur numerischen Simulation von Delaminationsvorgängen in Verbundwerkstoffen angewendet. Die meisten Formulierungen basieren auf gewöhnlichen finiten Elementen und der Anpassung des Netzes an die Geometrie. Für geschichtete Lamine, die zum Beispiel in DE BORST UND SCHIPPEREN (2002), ALFANO UND CRISFIELD (2001) sowie ALLIX U. A. (2011) untersucht wurden, ist dies durchaus sinnvoll, da das entsprechende Netz einfach zu erstellen ist. Treten in diesen Verbundwerkstoffen jedoch auch transversale Matrixrisse auf oder sollen generell unbekannte Risspfade ermittelt werden, wird das Einführen von Interface-Elementen sehr aufwendig.

Um die damit verbundenen Schwierigkeiten zu umgehen, kann auf die zweite Kategorie zurückgegriffen werden. Zu ihr zählen der Ansatz eingebetteter starker Diskontinuitäten und die X-FEM. Der Verlauf der kohäsiven Zone kann unabhängig vom FE-Netz modelliert werden, was viel flexibler ist und das häufige Neuvernetzen bei Rissfortschritt überflüssig macht. Im Rahmen dieser Diskretisierungsansätze wird meistens ein anfangs starres extrinsisches Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz verwendet, welches sicherstellt, dass die Rissöffnung bei Erreichen der Festigkeit noch Null ist, siehe beispielsweise CAMACHO UND ORTIZ (1996), WELLS UND SLUYS (2001) oder HETTICH UND RAMM (2006). In dieser Arbeit werden kohäsive Risse innerhalb finiter Elemente mit der X-FEM modelliert. Für die Simulation von Matrixrissen und deren Wachstum in Beton wird ein extrinsisches Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz eingesetzt, für die Simulation des Ablösens von Faser und Matrix in Textilbeton wird alternativ dazu auch ein intrinsisches verwendet. Wie in Abschnitt 3.2.1 gezeigt, ist das Auftreten von Verschiebungssprüngen vor Erreichen der Festigkeit in Textilbeton durchaus physikalisch begründet. Die entsprechenden Spannungs-Rissöffnungs-Gesetze werden in den Kapiteln 4.2 und 5.2 definiert. Für den Fall einer adaptiven Einführung kohäsiver Elemente, muss zusätzlich ein Initiierungs- und Ausbreitungskriterium definiert und die Rissrichtung ermittelt werden. Da die kohäsiven Spannungs-Rissöffnungs-Gesetze endliche Spannungen an der Rissspitze liefern und die singuläre Spannungsverteilung eliminieren, kann zur Ermittlung des Status im ungerissenen Körper ein spannungsbasiertes Versagens- bzw. Ausbreitungskriterium verwendet werden.

#### 3.3.2 Regularisierte isotrope Elasto-Schädigung

Im Folgenden wird ein Kontinuumsschädigungsmodell vorgestellt, das in dieser Arbeit im Zusammenhang mit der Modellierung diffusen Versagens in einem dreidimensionalen Zweiskalenmodell verwendet wird. Die Kontinuumsschädigungsmechanik stellt eine Theorie dar, welche die Lücke zwischen der Elastizitätstheorie und der Bruchmechanik schließt. Mikromechanische Modelle werden herangezogen, um die physikalischen Mechanismen hinter der Entstehung von Mikrorissen, deren Wachsen und Zusammenschluss zu Makrorissen und Rissbändern in Materialien mit heterogener Mikrostruktur zu erklä-

ren (KRAJČINOVIC 1996). Diese Veränderungen in der Mikrostruktur in weiten Teilen des Gebiets führen bei fortschreitender Belastung zu einer progressiven Schwächung der elastischen Materialeigenschaften, die auf der Makroskala durch Entfestigung beobachtet werden kann. Am Ende kommt es zum völligen Verlust der Materialsteifigkeit, wobei die Dehnungen bei vollständiger Entlastung zum Ursprung zurückgehen und keine irreversiblen Verformungen verbleiben, siehe Abbildung 3.5 b). Das beschriebene Versagensverhalten findet auf unterschiedlichen Ebenen statt und motiviert eine Mehrskalensmodellierung. Das Konzept der Kontinuumsschädigungsmechanik wurde erstmals in der Arbeit KACHANOV (1958) zur Untersuchung von Kriechbrüchen eingeführt. Seither wurden etliche Schädigungsmodelle entwickelt, um die verschiedensten Versagensphänomene wie Ermüdungsschäden bei niedrigen und großen Lastspielzahlen, Kriechschädigung, duktile plastische Schädigung, viskose Schädigung oder auch Schädigung in spröden Materialien zu modellieren (SIMO UND JU 1987). Eine Aufstellung verschiedener Modelle findet sich beispielsweise in den Büchern KRAJČINOVIC (1996), LEMAITRE (1996) und KACHANOV (1990). Ein guter Überblick zur geschichtlichen Entwicklung der Kontinuumsschädigungsmechanik wird in KUHL (2000) und LEMAITRE (2002) gegeben.

Kontinuumsschädigungsmodelle basieren auf thermomechanisch irreversiblen Prozessen und der Theorie interner Zustandsvariablen, die den aktuellen physikalischen Zustand in einem isolierten System beschreiben. Hier wird die einfachste Version eines isotropen Schädigungsmodells mit nur einem internen, skalarwertigen Schädigungsparameter  $D$  vorgestellt. Dieser Parameter lässt sich als Verhältnis der geschädigten Fläche  $A_d$  zur ungeschädigten Ausgangsfläche  $A_0$  eines repräsentativen Volumens angeben oder auch als effektive Flächendichte von Mikrodefekten in einer Schnittebene durch das repräsentative Volumen interpretieren.

$$D = 1 - \frac{A_0 - A_d}{A_0} = \frac{A_d}{A_0} \quad \text{mit } 0 \leq D \leq 1 \quad (3.2)$$

$D$  nimmt minimal den Wert Null und maximal den Wert Eins an, wobei Null den ungeschädigten Zustand und Eins das lokal vollständig geschädigte Material darstellt. Dieses einfache Modell beruht auf der Annahme, dass die Steifigkeit isotrop abnimmt und somit das Verhalten der Mikrorisse und Mikroporen unabhängig von deren Ausrichtung ist. Ein allgemeines isotropes Schädigungsmodell sollte prinzipiell auf zwei unabhängigen Schädigungsvariablen aufbauen, die den beiden unabhängigen elastischen Materialkonstanten zugeordnet sind. Hier wird die zusätzliche Annahme getroffen, dass die Querdehnzahl  $\nu$  von der Schädigung nicht betroffen ist und der Parameter  $D$  nur die Degradation des Elastizitätsmoduls  $E$  repräsentiert. Im Rahmen dieser Arbeit soll nur dieses einfache Ein-Parameter-Modell betrachtet werden. Für die Darstellung komplexer Belastungs- und Versagenszustände müssen anisotrope Modelle, basierend auf vektorwertigen Schädigungsvariablen oder höherwertigen Schädigungstensoren, verwen-

det werden. Diese höherwertigen Schädigungsvariablen implizieren, dass es im Material bereits vorherrschende Richtungen gibt, entlang derer sich Mikrorisse und Mikroporen ausbreiten (KRAJČINOVIC 1996). In JU (1990) wird beispielsweise sowohl für isotrope als auch für anisotrope Schädigung ein vierstufiger Schädigungstensor vorgeschlagen.

Im Weiteren wird eine verzerrungsbasierte Schädigungsformulierung vorgestellt, die auf dem Konzept effektiver Spannungen (RABOTNOV 1963) und der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz (LEMAITRE 1985) beruht. Das Konzept der effektiven Spannungen besagt, dass sich die effektiven Spannungen  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  aus den nominalen Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  bezogen auf die abgeminderte effektive Querschnittsfläche  $A_0 - A_d$  ergeben.

$$\boldsymbol{\sigma} A_0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}} (A_0 - A_d) \rightarrow \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{1 - D} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.3)$$

Gemäß diesem Zusammenhang sind die effektiven, im Material herrschenden Spannungen offensichtlich größer als die nominalen, außen anliegenden Spannungen. Nach der Hypothese der Verzerrungsäquivalenz sind die mit dem geschädigten Zustand unter den nominalen Spannungen assoziierten Verzerrungen äquivalent zu den mit dem ungeschädigten Zustand unter den effektiven Spannungen assoziierten Verzerrungen.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}})^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{C}^{\text{el}})^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.4)$$

Daraus lässt sich die totale Spannungs-Dehnungs-Beziehung als Grundbestandteil des Schädigungsmodells aufstellen.

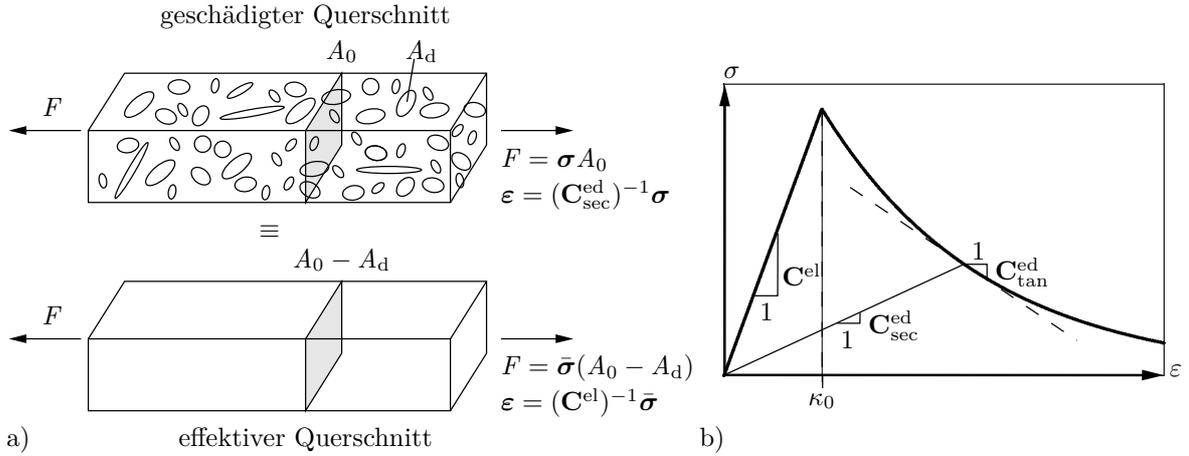
$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D) \mathbf{C}^{\text{el}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.5)$$

Der geschädigte Sekantensteifigkeitstensor  $\mathbf{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}}$  verbindet dabei die totalen Verzerrungen mit den totalen Spannungen. Um das elastische, ungeschädigte Gebiet zu spezifizieren und von den Bereichen, in denen die Schädigung wächst, zu trennen, wird eine verzerrungsbasierte Schädigungsfunktion eingeführt. Ein Schädigungskriterium überprüft den Zustand der Schädigung im Material und ist als Funktion des aktuellen Verzerrungszustandes und einer zusätzlichen Geschichtsvariablen  $\kappa$  gegeben.

$$f(\boldsymbol{\varepsilon}, \kappa) = \varepsilon_v - \kappa \quad (3.6)$$

Diese Geschichtsvariable stellt die maximal erreichte äquivalente Verzerrung  $\varepsilon_v$  in der bisherigen Deformationsgeschichte des Materials dar.

$$\kappa(t) = \max\{\kappa_0, \max_{0 \leq \tau < t} \varepsilon_v(\tau)\} \quad (3.7)$$



**Abbildung 3.5:** a) Konzept effektiver Spannungen/Hypothese der Verzerrungsäquivalenz  
 b) schematische eindimensionale Spannungs-Dehnungs-Beziehung.

Mit  $\kappa_0$  kann ein materialspezifischer Grenzwert für das Einsetzen der Schädigung definiert werden. Zustände in denen  $f(\varepsilon, \kappa) < 0$  ist, liegen unterhalb des aktuellen Schädigungsschwellenwertes und somit innerhalb des elastischen Bereichs. Die Schädigung kann nur wachsen, wenn der aktuelle Zustand den Rand des elastischen Gebiets erreicht hat,  $f = 0$ . Das Schädigungskriterium kann mit den Be- und Entlastungsbedingungen in Karush-Kuhn-Tucker-Form

$$f(\varepsilon, \kappa) \leq 0, \quad \dot{\kappa} \geq 0, \quad \dot{\kappa} f(\varepsilon, \kappa) = 0 \quad (3.8)$$

und der Konsistenzbedingung  $\dot{f} \dot{\kappa} = 0$  vervollständigt werden. Die skalarwertige äquivalente Verzerrung  $\varepsilon_v$ , als Projektion des mehraxialen Verzerrungszustandes auf einen skalaren Wert, beeinflusst direkt die Form des elastischen Gebiets und kann je nach zugrunde liegendem Materialmodell unterschiedlich gewählt werden. Wird  $\varepsilon_v$  als Funktion der Energiefreisetzungsrates definiert, ergibt sich ein im Verzerrungsraum symmetrischer elastischer Bereich. Hierbei handelt es sich um ein assoziiertes Modell, da die Normale auf die Schädigungsfläche parallel zur effektiven Spannung ist, siehe CAROL U. A. (1994). Modelle, welche diese Eigenschaft nicht besitzen und in denen  $\varepsilon_v$  nur vom Verzerrungstensor abhängt, werden nicht-assoziierte Schädigungsmodelle genannt, vergleiche MAZARS UND PIJAUDIER-CABOT (1989) oder DE VREE U. A. (1995). Sie gestatten unterschiedliches Verhalten im Zug- und Druckbereich, was insbesondere bei der Modellierung von Beton und Böden interessant ist. Hier sei zum Beispiel die Definition nach DE VREE U. A. (1995) als modifiziertes von-Mises-Modell aufgeführt,

$$\varepsilon_v = k_0 I_1 + \sqrt{k_1^2 I_1^2 + k_2 J_2} \quad \text{mit } k_0 = k_1 = \frac{k-1}{2k(1-2\nu)} \quad \text{und } k_2 = \frac{3}{k(1+\nu)^2} \quad (3.9)$$

worin der Wichtungsparemeter  $k$  das Verhältnis von Druck- und Zugfestigkeit ausdrückt, das für Beton zirka 10 : 1 beträgt.  $I_1$  und  $J_2$  stellen die erste bzw. zweite Invariante des Verzerrungstensors bzw. des Verzerrungsdeviators dar. Eine graphische Darstellung dieser Schadigungsflache im Raum der Hauptverzerrungen findet sich in HUBER (2006). Die Evolution der Schädigung hängt direkt von der Geschichte der äquivalenten Verzerrungen ab. In einaxialen Tests lässt sich die Form der Schadigungsevolution eines Materials ermitteln. Eine graphische Darstellung verschiedener Schädigungsmodelle im Hauptverzerrungsraum findet sich beispielsweise in PEERLINGS (1999). In der vorliegenden Arbeit findet eine einfache lineare Schadigungsfunktion Anwendung, deren Wert sich nur im Bereich zwischen  $\kappa_0$  und  $\kappa_u$  ändert, wobei  $\kappa_u$  die maximale Bruchdehnung ist.

$$D = \begin{cases} 0 & \kappa \leq \kappa_0 \\ \frac{\kappa_u}{\kappa} \frac{\kappa - \kappa_0}{\kappa_u - \kappa_0} & \kappa_0 < \kappa < \kappa_u \\ 1 & \kappa \geq \kappa_u \end{cases} \quad (3.10)$$

Für die FE-Implementierung wird die elasto-geschädigte Tangentensteifigkeit benötigt, welche mithilfe der Beziehung zwischen der Spannungs- und Verzerrungsrate ermittelt werden kann.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - D)\mathbf{C}^{\text{el}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\mathbf{C}^{\text{el}} : \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}_{\text{tan}}^{\text{ed}} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.11)$$

Die Ableitung des Schadigungsparameters nach den Verzerrungen kann mithilfe der Kettenregel berechnet werden  $\frac{\partial D}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial D}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_v} \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  und verdeutlicht, dass der Tangentenmodul sowohl von der Definition der äquivalenten Verzerrung als auch von der Evolution der Schädigung abhängt. Insbesondere beruht die Gestalt des Tangentenmoduls direkt auf der Definition der äquivalenten Verzerrung und kann je nach Wahl zu einem symmetrischen oder unsymmetrischen Tensor führen. Eine wichtige Eigenschaft der verzerrungskontrollierten Schädigungsentwicklung ist, dass Spannungen und Materialtangente bei Kenntnis des Verzerrungszustands und der Belastungsgeschichte direkt berechnet werden können.

Die oben beschriebene klassische Kontinuumsschadigungsformulierung führt bei lokalisierten Verzerrungen zu pathologischen Eigenschaften der FEM. Unter dem Begriff Lokalisierung ist die Ausbildung schmaler Versagenszonen zu verstehen, in denen sich die Deformationen mit sehr hohen Verzerrungsgradienten konzentrieren, während der Rest der Struktur möglicherweise eine Entlastung erfährt (KUHL 2000). Die numerischen Ergebnisse sind stark netzabhängig, was sich unter anderem darin äußert, dass sich die numerische Entfestigungszone nur über eine Elementbreite erstreckt. Je nach Netzgröße ist diese Zone unendlich klein und die gesamte Energie, die während des

Versagens dissipiert wird, verschwindet. Mathematisch betrachtet hängen diese nachteiligen Eigenschaften mit dem Verlust der Elliptizität der Feldgleichungen zusammen, weil das Randwertproblem mit den ursprünglich ausreichenden Randbedingungen zu einem schlechtgestellten Problem wird und keine eindeutige Lösung mehr besitzt. Numerisch gesehen manifestiert sich dies im postkritischen Bereich in einer Abhängigkeit der klassischen lokalen Kontinuumslösung von der gewählten Diskretisierung (DE BORST 1986). Veränderungen in der Mikrostruktur können als Ursache für den Verlust der Elliptizität betrachtet werden, die bereits vor Erreichen vollständiger Schädigung eintreten kann (LEMAITRE 2002). Durch Berücksichtigung einer internen Länge in den Konstitutivgleichungen lässt sich dieser Typwechsel der Differentialgleichung vermeiden, verschiedene Varianten dafür werden in einigen Beiträgen in MÜHLHAUS (1995) angeführt und verglichen.

Diese sogenannten Regularisierungsmethoden stellen sicher, dass die mathematische Formulierung gutgestellt bleibt. Die einfachste Variante erfolgt durch Anpassung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms an die Elementgröße, was unter den Begriffen Methode des netzadaptierten Entfestigungsmoduls, Rissbandmethode sowie Methode der verschmierten Rissbildung bekannt ist und in den Arbeiten PIETRUSZCZAK UND MRÓZ (1981), BAŽANT UND OH (1983) bzw. WILLAM (1984) vorgeschlagen wurde. Für das üblicherweise angeführte Modellproblem des Zugstabs lässt sich die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Diskretisierung zeigen, siehe zum Beispiel HUND (2007). Die Grundidee steht in engem Zusammenhang mit Methoden der Bruchmechanik, in denen die Energie, die zur Erzeugung eines Risses mit Einheitsfläche nötig ist, als materialspezifischer Parameter angesehen wird, vergleiche HILLERBORG U. A. (1976). Durch Skalieren des postlokalisierenden Teils der Spannungs-Dehnungs-Kurve unter Einbeziehen der Elementgröße  $h_e$ , wird die korrekte Energiedissipation sichergestellt. Über einen Vergleich der Bruchenergie  $G_f$  bei linearer Entfestigung für den diskretisierungsabhängigen und den -unabhängigen Fall

$$G_f = \frac{1}{2} E \kappa_0 \kappa_u h_e = \frac{1}{2} E \kappa_0 \bar{\kappa}_u w_c \rightarrow \kappa_u(h_e) = \bar{\kappa}_u \frac{w_c}{h_e} \quad (3.12)$$

kann die maximale Bruchdehnung  $\kappa_u$  berechnet werden. Im diskretisierungsunabhängigen Fall wird die Bruchenergie aus der Rissdehnung  $\bar{\kappa}_u$  und der Rissbandbreite  $w_c$  berechnet. Die tatsächliche Rissbandbreite darf bei Anwendung dieser Anpassung der Bruchenergie allerdings nicht größer als die Elementbreite sein. Die Elementbreite  $h_e$  kann als interner Längenparameter interpretiert werden und sollte in der Diskretisierung entsprechende Abmessungen haben. Die Steigung des Entfestigungsmoduls im postkritischen Bereich wird mit dieser Modifikation der Bruchdehnung entsprechend angepasst.

Alternativ zur Rissbandmethode wurden noch weitere Regularisierungsmethoden eingeführt, die hier nur kurz skizziert werden. Eine Klasse dieser Verfahren beruht auf

dem Konzept eines nichtlokalen Integralkontinuums (PIJAUDIER-CABOT UND BAŽANT 1987), bei dem im Wesentlichen die Variablen, welche die Schädigung kontrollieren, durch ihre nichtlokalen Versionen ersetzt werden. Diese ergeben sich aus einer gewichteten Mittelbildung über ein gewisses Volumen an jedem Punkt des Untersuchungsgebietes. Spannungen und Verzerrungen in den konstitutiven Gleichungen bleiben aber weiterhin lokal definiert. Eine differentielle Form dieses nichtlokalen Modells findet sich in verschiedenen gradientenerweiterten Kontinuumsmodellen wieder, wobei die Nichtlokalität durch Gradienten höherer Ordnung in die konstitutiven Gleichungen eingebracht wird, siehe PEERLINGS U. A. (1996), PEERLINGS (1999) oder WELLS U. A. (2004). Weitere Regularisierungsstrategien finden sich zum Beispiel in DE BORST U. A. (1993) oder KUHLE (2000) und basieren auf mikropolaren Theorien oder der Berücksichtigung viskoser Effekte. All diese Methoden sind durch Einführung einer intrinsischen Längenskala in der Lage, Lokalisierungszonen endlicher bzw. diskretisierungsunabhängiger Breite abzubilden. BAŽANT UND PLANAS (1998) und JIRÁSEK (2009) geben einen guten Überblick dazu.

#### 3.3.3 Eingesetzte Materialformulierungen

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird zur Modellierung nichtlinearen Materialverhaltens in materiellen Grenzflächen und diskreten Rissen das Konzept kohäsiver Risse verwendet. Dabei werden für materielle Grenzflächen sowohl intrinsische als auch extrinsische Rissmodelle untersucht, beim Versagen des Matrixmaterials wird immer ein extrinsisches Rissmodell eingesetzt. Eine regularisierende isotrope Schädigungsformulierung, basierend auf der Methode des netzadaptierten Entfestigungsmoduls, kommt im Zusammenhang mit entfestigendem Materialverhalten in den durchgeführten Zweiskalenberechnungen zum Einsatz.



---

# Diskontinuierliche Modellierung des Grenzflächenversagens

---

Bei der Modellierung von textilfaserverstärktem Beton auf der Mesoebene werden, wie in Kapitel 3.2.1 erwähnt, die zwei Phasen Feinbeton und Faserbündel als homogene, linear-elastische Materialien angesehen. Veränderungen der Materialstruktur auf der Mikroebene dieser Phasen führen auf der Mesoebene zum Ablösen der Fasern von der Matrix und somit zur Rissbildung in der Grenzfläche. Diese diskreten Versagensphänomene in der Grenzfläche werden im Folgenden mithilfe der X-FEM modelliert.

## 4.1 Beschreibung der Faser- und Rissgeometrie über Level-Set-Funktionen

Ursprünglich wurde die Level-Set-Methode (OSHER UND SETHIAN 1988) als numerisches Verfahren zur Verfolgung und Modellierung sich bewegender Grenzflächen entwickelt. Dabei konnten Veränderungen der Topologie durch Zusammenwachsen getrennter Bereiche und Aufspalten in solche modelliert werden. Inzwischen wird die Level-Set-Methode in vielen Bereichen erfolgreich eingesetzt (SETHIAN 2001), so zum Beispiel in der Fluid- und Festkörpermechanik, der Materialkunde, der Bildbearbeitung und für Computeranimationen. Als konkrete Anwendungen seien exemplarisch die Simulation fortschreitender Risse (STOLARSKA U. A. 2001), die Modellierung von Hohlstellen und Einschlüssen (SUKUMAR U. A. 2001), die Form- und Topologieoptimierung (SETHIAN UND WIEGMANN (2000), WANG U. A. (2003)), das Wachstum von Biofilmen (DUDDU U. A. 2008) sowie die Bildsegmentierung im medizinischen Bereich für komplexe, dreidimensionale anatomische Strukturen (MAGEE U. A. 2001) erwähnt. Auf Anwendungen

zur Modellierung unbekannter Risspfade in zwei- und dreidimensionalen Strukturen wird in Kapitel 5.3.1 noch genauer eingegangen.

Die mathematische Beschreibung einer sich kontinuierlich entwickelnden Grenzfläche  $\Gamma_m$  wird durch das Nullniveau einer hyperbolischen Funktion  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die sich in Raum und Zeit verändert, repräsentiert.

$$\Gamma_m = \Gamma_m(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \phi(\mathbf{x}, t) = 0\} \quad (4.1)$$

Damit ergibt sich eine  $n - 1$  dimensionale Grenzfläche im  $n$ -dimensionalen Raum. Die vorzeichenbehaftete implizite Abstandsfunktion  $\phi$  liefert für jeden Materialpunkt  $\mathbf{x}$  den Abstand zum nächstgelegenen Punkt auf der Grenzfläche. Für den hier betrachteten quasistatischen Fall bleibt die Grenzfläche  $\Gamma_m$ , welche sowohl als Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Festkörperbestandteilen oder als Diskontinuitätsfläche innerhalb eines Festkörpers verwendet werden kann, unveränderlich.

Zur geometrischen Modellierung der Faserbündel in Textilbeton kann ihr Querschnitt vereinfachend als zylindrisch angenommen werden, obwohl es während der Produktion auch zu anderen Formen kommen kann. Die Mantelfläche eines Zylinders im dreidimensionalen Raum wird durch einen Punkt  $\mathbf{p}$  auf der Zylinderachse, den Richtungsvektor  $\mathbf{m}$  und den Radius  $r$  parametrisiert, siehe auch Abbildung 4.1 links.

$$\|(\mathbf{x} - \mathbf{p})\|^2 = r^2 + ((\mathbf{x} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{m})^2 \quad \text{mit } \|\mathbf{m}\| = 1 \quad (4.2)$$

Mit der Annahme, dass alle Fasern nur unidirektional in globaler  $x_3$ -Richtung orientiert sind, lässt sich die Lage der Fasern vereinfachend mit den  $x_1, x_2$  - Koordinaten beschreiben,

$$\phi(\mathbf{x}) = \min(\phi_i) = \min \left( \sqrt{(x_1 - p_{i,1})^2 + (x_2 - p_{i,2})^2} - r_i \right) \quad \text{für } i = 1, \dots, n_m \quad (4.3)$$

mit dem Vektor  $\mathbf{p}_i$  zur  $i$ -ten Faserachse und dem Radius  $r_i$  der entsprechenden Faser bei insgesamt  $n_m$  betrachteten Fasern in der Mikrostruktur, vergleiche Abbildung 4.1 rechts.  $\phi$  ist der kleinste aller Werte  $\phi_i$  und gibt den Abstand eines Punktes zur nächsten Faser an. Die Mikrostruktur umfasst die Einheit aller Fasergebiete  $\Omega_a = \bigcup_i^{n_m} \Omega_{a,i}$  und das Gebiet der umschließenden Matrix  $\Omega_b$ . Bestehen alle Fasern aus dem gleichen Material, gibt  $\phi$  an, welches Material einem Punkt  $\mathbf{x}$  zugeordnet ist, definiert also die Verteilung der Fasern in der Feinbetonmatrix. Für  $\phi < 0$  liegt  $\mathbf{x}$  innerhalb der Faser, für  $\phi > 0$  in der umgebenden Matrix und für  $\phi = 0$  auf der materiellen Grenzfläche. Die nach außen orientierte Einheitsnormale  $\mathbf{n}_{m,i} = \nabla\phi / \|\nabla\phi\|$  an der Grenzfläche steht senkrecht zur Isokontur  $\phi = 0$  und zeigt in Richtung ansteigender  $\phi$ -Werte.

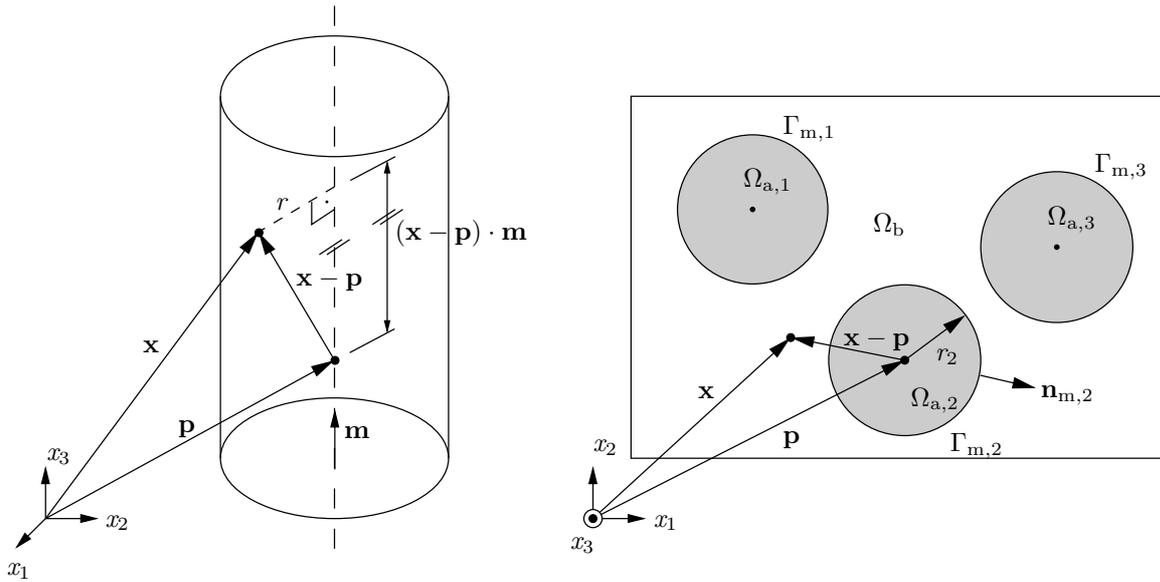


Abbildung 4.1: Parametrisierung der Zylindermantelfläche.

Zur numerischen Modellierung der kontinuierlichen Level-Set-Funktion und der Grenzfläche  $\phi = 0$  im Untersuchungsgebiet wird für jeden FE-Knoten  $I$  der Level-Set-Wert  $\phi_I = \phi(\mathbf{x}_I)$  nach Gleichung (4.3) berechnet. Eine FE-Interpolation mit den Formfunktionen  $N_I$  ermöglicht die approximative Ermittlung von  $\phi$  für einen beliebigen Punkt  $\mathbf{x}$  im Gebiet  $\Omega^e$  eines Elements.

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_{iel}} N_I \phi_I \quad (4.4)$$

Mit dieser vorzeichenbehafteten Funktion lässt sich die Materialverteilung für beliebig viele Fasern in der Matrix darstellen. Das Materiallayout kann mit der Level-Set-Methode beliebig variiert werden, insbesondere durch Verwendung alternativer Funktionen in Gleichung (4.3) ist beispielsweise eine elliptische oder polygonale Grenzflächengeometrie möglich, vergleiche dazu SUKUMAR U. A. (2001).

Die Level-Set-Darstellung der materiellen Grenzflächen vereinfacht nicht nur die Auswahl anzureichernder Knoten, sondern erleichtert auch die Berechnung der lokalen Anreicherungsfunktion. Diese Funktion  $\chi_{m,i}$ , welche den Sprung im Verzerrungsfeld innerhalb eines Elements liefert, wird nach Gleichung (2.34) berechnet, indem für  $\phi_{i,I}$  die Level-Set-Werte der Knoten eingesetzt werden. Mithilfe der X-FEM muss das Netz bekanntlich nicht mit der Grenzfläche übereinstimmen, es muss jedoch fein genug sein, um die Grenzfläche präzise zu lokalisieren und das Verschiebungsfeld genau genug aufzulösen. In dieser Arbeit wird die Grenzfläche in dreidimensionale, achtknotige finite Elemente eingebettet und aufgrund der Annahme unidirektional orientierter Fasern in-

nerhalb eines Elements als ebene Fläche angenähert. Dadurch entsteht eine facettierte Approximation der kontinuierlichen Grenzfläche und folglich geometrische und numerische Fehler, die jedoch beide bei Netzverfeinerung kleiner werden (MOËS U. A. 2003).

## 4.2 Schädigungsmodelle für Grenzflächenrisse

In diesem Kapitel werden zwei unterschiedliche kohäsive Rissmodelle für das sukzessive Versagen des adhäsiven Verbundes in den Grenzflächen vorgestellt. Für die Definition der Spannungs-Rissöffnungs-Gesetze gibt es, wie in Kapitel 3.2.1 erläutert, diverse Möglichkeiten. Das diskrete Materialmodell wird in einem lokalen Koordinatensystem in der Rissfläche formuliert, hierin zeigt der Index  $n$  die Normalenrichtung an,  $s$  und  $t$  die Tangentialrichtungen. Der Verschiebungssprung sowie die Spannungen über die Rissfläche werden in die Komponenten dieses Koordinatensystems zerlegt, siehe Abbildung 4.2. Entsprechend ergibt sich eine skalare Komponente  $[[u]]_n$  bzw.  $t_n$  in Normalenrichtung und eine vektorielle Komponente  $[[\mathbf{u}]]_T$  bzw.  $\mathbf{t}_T$  in der Tangentialebene des Risses, welche sich durch Linearkombination der Tangentialrichtungen berechnet.

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u}]] &= [[u]]_n \mathbf{n} + [[\mathbf{u}]]_T \\ \mathbf{t} &= t_n \mathbf{n} + \mathbf{t}_T \quad \text{mit } \mathbf{t}_T = t_s \mathbf{s} + t_t \mathbf{t} \end{aligned} \tag{4.5}$$

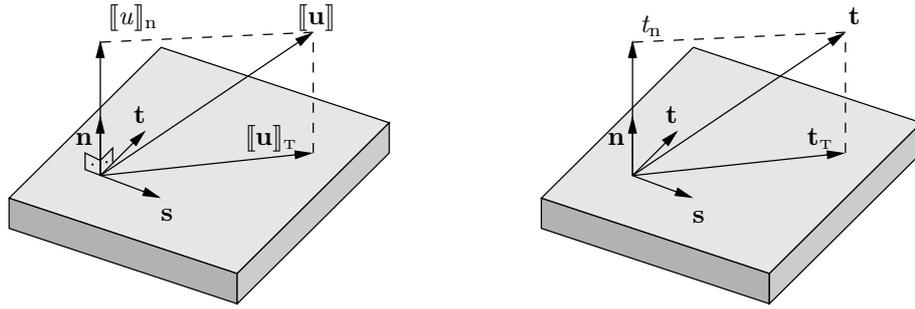
Die Komponenten des Verschiebungssprungs resultieren aus Projektionen von  $[[\mathbf{u}]]$  in die jeweiligen Richtungen der Rissfläche.

$$[[u]]_n = [[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n} ; \quad [[\mathbf{u}]]_T = (\mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot [[\mathbf{u}]] \tag{4.6}$$

Da bei Faserablösungen von einem gemischten Versagensverhalten ausgegangen wird, können die verschiedenen Versagensmodi durch Einführung einer skalarwertigen äquivalenten Rissöffnung miteinander gekoppelt werden. Somit kann ein einziges Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz normal und tangential zur Rissrichtung benutzt werden, anstatt jede Richtung an der Grenzfläche separat zu betrachten. Schädigung in einer Richtung führt also automatisch zur Schwächung des Materials in den anderen Richtungen. Für gemischtes Zug-Schub-Versagen wird ein skalarer äquivalenter Verschiebungssprung  $\eta$  definiert, siehe CAMACHO UND ORTIZ (1996),

$$\eta = \sqrt{\langle [[u]]_n \rangle^2 + \beta^2 ||[[\mathbf{u}]]_T||^2} \tag{4.7}$$

wobei der Parameter  $\beta$  die Komponenten des Verschiebungssprungs in der Grenzfläche gewichtet.  $\beta$  ermöglicht die Berücksichtigung unterschiedlicher Festigkeiten in den ver-



**Abbildung 4.2:** Komponenten des Verschiebungssprungvektors und Spannungsvektors im lokalen Koordinatensystem am Riss.

schiedenen Richtungen und gibt dabei das Verhältnis von Schub- zu Zugfestigkeit in der Grenzfläche wieder  $\beta = c_t/c_n$ . Durch die Macauley-Klammern  $\langle \bullet \rangle$  werden nur positive Verschiebungssprünge  $[[u]]_n > 0$  in Normalenrichtung berücksichtigt, da eine Druckbelastung nicht zur Schädigung beitragen soll. Für die korrekte Darstellung eines Entlastungsprozesses ist eine interne Variable nötig, hierfür wird die in der Belastungsgeschichte maximal erreichte äquivalente Rissöffnung  $\kappa$  gewählt. Um festzustellen, ob sich der Riss in einer Ent- bzw. Wiederbelastungsphase befindet oder ob die Dekohäsion in der Grenzfläche fortschreitet, wird außerdem eine Belastungsfunktion, als Differenz des äquivalenten Verschiebungssprungs und der Geschichtsvariablen, definiert.

$$f = \eta - \kappa \leq 0 ; \quad \kappa = \max_{0 \leq \tau < t} (\eta(\tau)) \quad (4.8)$$

Für den Fall einer Belastung gilt  $f = 0$ ,  $\eta = \kappa$  und  $\dot{\eta} \geq 0$ .

Mit dem Verschiebungssprung und der internen Variable kann ein freies kohäsives Energiepotential  $\tilde{\psi}$  postuliert werden, das mit dem unelastischen Verhalten materieller Punkte auf einer Diskontinuität assoziiert ist, siehe auch ARMERO (1999) oder ORTIZ UND PANDOLFI (1999).

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}([u]_n, [[\mathbf{u}]]_T, \kappa) \quad (4.9)$$

Im Weiteren wird in der Tangentialfläche isotropes Verhalten angenommen. Das kohäsive Konstitutivgesetz ergibt sich nach Anwendung thermodynamischer Prinzipien (COLEMAN UND NOLL 1963) als partielle Ableitung des freien kohäsiven Energiepotentials nach dem Verschiebungssprung und liefert den Vektor der kohäsiven Spannungen  $\mathbf{t}$  als thermodynamisch konjugierte Größe des Verschiebungssprungs  $[[\mathbf{u}]]$ .

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial [[\mathbf{u}]]} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial [u]_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial [[\mathbf{u}]]_T} = K_n [u]_n \mathbf{n} + K_T [[\mathbf{u}]]_T \quad (4.10)$$

$K_n$  und  $K_T$  bezeichnen hierin die Steifigkeiten in normaler bzw. tangentialer Rissrichtung. Sie sind von der internen Variable  $\kappa$  abhängig und immer größer oder gleich Null. Gleichung (4.10) lässt sich durch Einführung des Sekantenmoduls  $\mathbf{T}_{\text{sec}}$  und eines Projektionstensors  $\mathbf{T}_p$  in kompakter Schreibweise angeben.

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}_{\text{sec}} \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad \text{mit} \quad \mathbf{T}_{\text{sec}} = K_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + K_T \mathbf{T}_p \quad \text{und} \quad \mathbf{T}_p = \mathbf{1} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (4.11)$$

Der kohäsive Spannungsvektor geht im Rahmen der X-FEM in den Ausdruck der internen Knotenkräfte  $\mathbf{f}_{\text{int},c,j}^e$  aus Gleichung (2.38) ein. Zusätzlich muss der zweistufige Tangentenmodul  $\mathbf{T}_{\text{tan}}$  für die Ratenbeziehung zwischen dem Spannungs- und Verschiebungssprungvektor ermittelt und in den Steifigkeitsanteil  $\mathbf{k}_{c,j}$  aus Gleichung (2.42) assembliert werden.

$$\mathbf{T}_{\text{tan}} = \mathbf{T}_{\text{sec}} + \left[ \frac{\partial K_n}{\partial \kappa} \llbracket u \rrbracket_n \mathbf{n} + \frac{\partial K_T}{\partial \kappa} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T \right] \otimes \frac{\partial \kappa}{\partial \eta} \left[ \frac{\partial \eta}{\partial \llbracket u \rrbracket_n} \mathbf{n} + \frac{\partial \eta}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T} \mathbf{T}_p \right] \quad (4.12)$$

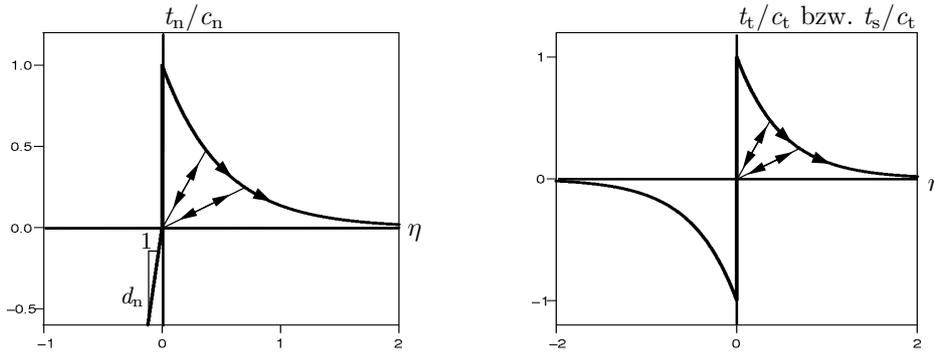
Bei Ent- bzw. Wiederbelastung verhält sich die interne Variable  $\kappa$  wie eine Konstante, wodurch in diesen Zuständen die partielle Ableitung  $\partial \kappa / \partial \eta$  verschwindet und somit der Tangenten- gleich dem Sekantenmodul ist. Es ist nochmals zu betonen, dass ein wirklicher Riss erst eingeführt wird, sobald die kohäsive Rissöffnung groß genug und die Lastübertragung vernachlässigbar klein sind. Der Einfachheit halber wird aber die kohäsive Zone selbst schon als Riss bezeichnet.

### 4.2.1 Schädigungsmodell mit anfangs perfektem Verbund

Beim ersten der beiden betrachteten kohäsiven Rissmodelle wird davon ausgegangen, dass das Versagen bei Erreichen der Zugfestigkeit der Grenzfläche beginnt und die Spannungen in der Grenzfläche dann gemäß einem vorher definierten Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz abgebaut werden. Eine lineare Variante für solch ein extrinsisches Gesetz wurde bereits in Kapitel 3.3.1 vorgestellt. Der Verlauf der skalaren effektiven Spannung  $t^*$  soll für die Grenzfläche im Textilbeton einem exponentiellen Entfestigungsgesetz folgen.

$$t^* = c_n \exp\left(-\frac{c_n}{G_f} \kappa\right) \quad (4.13)$$

Kohäsive Rissmodelle werden üblicherweise in mindestens zwei verschiedenen Materialparametern formuliert. In diesem Fall sind das die Zugfestigkeit  $c_n$  der Grenzfläche und die Bruchenergie  $G_f$ , die bis zum Entstehen eines spannungsfreien Risses mit Einheitsfläche dissipiert wird. Mit der effektiven Spannung  $t^*$  lassen sich die in Abbildung 4.3 skizzierten Spannungskomponenten in der Normalenrichtung und der Tangentialebene



**Abbildung 4.3:** Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz bei perfektem Verbund in der Normalenrichtung und den Tangentialrichtungen.

berechnen.

$$\begin{aligned}
 t_n &= K_n \llbracket u \rrbracket_n = \frac{t^*}{\kappa} \llbracket u \rrbracket_n = c_n \exp\left(-\frac{c_n}{G_f} \kappa\right) \frac{1}{\kappa} \llbracket u \rrbracket_n \quad \text{für } \llbracket u \rrbracket_n \geq 0 \\
 t_n &= K_n \llbracket u \rrbracket_n = d_n \llbracket u \rrbracket_n \quad \text{für } \llbracket u \rrbracket_n < 0 \\
 \mathbf{t}_t &= K_T \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T = \beta^2 \frac{t^*}{\kappa} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T = \beta^2 c_n \exp\left(-\frac{c_n}{G_f} \kappa\right) \frac{1}{\kappa} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Um ein Durchdringen gegenüberliegender Rissflächen zu verhindern, wird für den Fall negativer Rissöffnungen  $\llbracket u \rrbracket_n < 0$  eine lineare Strafterm-Funktion mit der elastischen Kontaktsteifigkeit  $d_n$  eingebracht. Diese Formulierung kann aufgrund der unstetigen Steigung am Nullpunkt zu numerischen Problemen führen. Bei einem Vorzeichenwechsel von  $\llbracket u \rrbracket_n$  ändert sich die Steifigkeit sprunghaft, was im iterativen Lösungsprozess von Iteration zu Iteration auftreten kann und dann zu verlangsamter Konvergenz oder Divergenz führt. Die Problematik tritt insbesondere bei Einführung neuer Rissegmente auf. In HILLE (2009) wird ein extrinsisches Modell mit einer glatten Spannungs-Rissöffnungs-Kurve vorgeschlagen. Die glatte, am Nullpunkt differenzierbare Kurve wird bei Einführung der kohäsiven Zone entsprechend des Spannungszustandes entlang der Verschiebungssprungachse verschoben, um die Sprünge in der Steifigkeit zu eliminieren. Ähnliche Konvergenzprobleme treten bei Steifigkeitssprüngen infolge eines Wechsels von Be- zu Entlastungszuständen oder umgekehrt auf. Diese lassen sich allerdings nicht gänzlich ausschließen. Nur durch eine an jedem Risspunkt monoton ansteigende Belastung kann dieser Fall verhindert werden, solch eine Charakteristik tritt allerdings nur bei einfachen Problemstellungen auf.

### 4.2.2 Versagenskriterium

Wie bereits in Abschnitt 3.3.1 erläutert, muss für den anfangs starr modellierten Riss zusätzlich ein Versagenskriterium angegeben werden. Erst nach Erfüllen dieses Kriteriums werden zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt und das unelastische Verhalten in der Grenzfläche durch Gleichung (4.14) beschrieben. Zur Prüfung des Grenzflächenzustandes vor dem Versagen wird das quadratische Delaminationskriterium nach BREWER UND LAGACE (1988) verwendet.

$$t = \sqrt{\langle t_n \rangle^2 + \beta^{-2} \mathbf{t}_T^2} > c_n \quad (4.15)$$

Es ist darauf hinzuweisen, dass Druckspannungen in Normalenrichtung nicht zum äquivalenten Wert  $t$  des Spannungsvektors beitragen. Ein Parameter  $\beta > 1$  stellt sicher, dass für reines Schubversagen entsprechend hohe Schubspannungen in der Grenzfläche nötig sind. Eine Darstellung der damit assoziierten Versagensfläche findet sich beispielsweise in HETTICH (2007).

### 4.2.3 Schädigungsmodell mit anfangs nachgiebigem Verbund

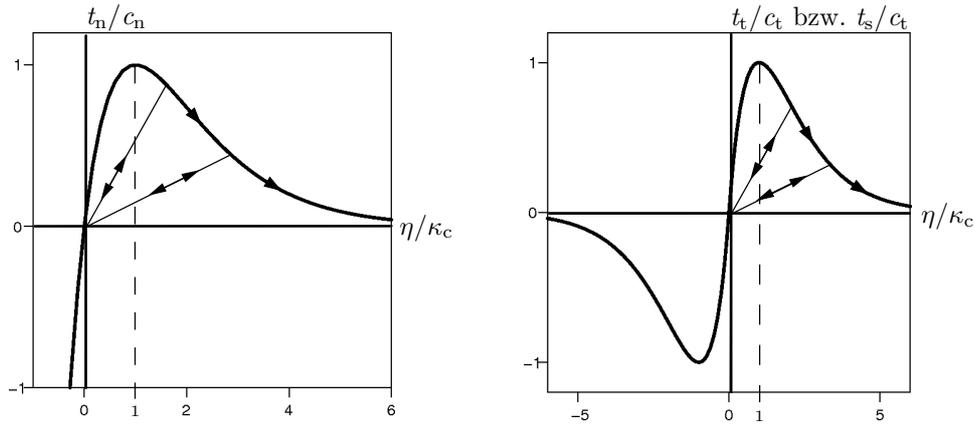
Für das zweite in dieser Arbeit behandelte kohäsive Rissmodell wird ein anfangs elastischer Verbund zwischen Faser und Matrix angenommen. Die Problematik der extrinsischen Formulierung kann verhindert werden, indem die Steifigkeit um den Nullpunkt des Spannungs-Rissöffnungs-Gesetzes kontinuierlich definiert wird. Das verwendete kohäsive Gesetz wird in Anlehnung an die Arbeit ORTIZ UND PANDOLFI (1999) aufgestellt. Als exponentielles kohäsives Energiepotential wird jenes aus XU UND NEEDLEMAN (1993) benutzt, das sich zu

$$\tilde{\psi} = ec_n \kappa_c \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\eta}{\kappa_c} \right) \exp \left( -\frac{\eta}{\kappa_c} \right) \right] \quad (4.16)$$

vereinfachen lässt. Der Parameter  $\kappa_c$  stellt die charakteristische Rissöffnung dar, bei deren Erreichen sich die maximale kohäsive Normalspannung  $t_n$  einstellt, siehe Abbildung 4.4 links. Für den Belastungsprozess sollen die effektiven Spannungen dem allgemeinen Gesetz nach Smith und Ferrante folgen, siehe ROSE U. A. (1981).

$$t^* = ec_n \frac{\eta}{\kappa_c} \exp \left( -\frac{\eta}{\kappa_c} \right) \quad \text{wenn } \eta = \kappa \text{ und } \dot{\eta} \geq 0 \quad (4.17)$$

In diesem exponentiellen intrinsischen Rissmodell steigt die Spannung bei wachsender Rissöffnung erst bis zum Maximalwert an, bevor sie wieder abfällt und asymptotisch



**Abbildung 4.4:** Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz bei nachgiebigem Verbund für reines Zugversagen bzw. reines Schubversagen.

gegen Null geht. Bei Ent- oder Wiederbelastungsprozessen gilt

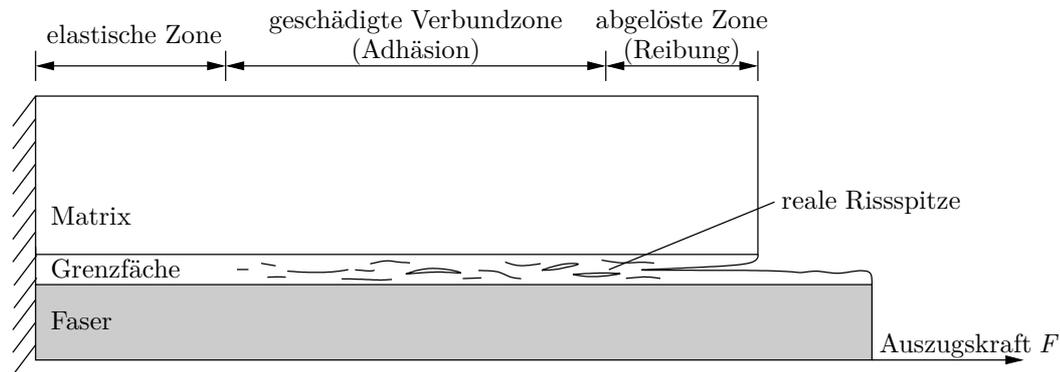
$$t^* = \frac{t_r}{\kappa} \eta \quad \text{wenn } \eta < \kappa \text{ oder } \dot{\eta} < 0 \quad (4.18)$$

wobei  $t_r$  die Spannung ist, die vor Entlastung am Materialpunkt erreicht wurde. Es tritt also schon vor Erreichen der maximalen Spannung eine Schädigung auf, so dass bereits vom nichtlinear ansteigenden Ast zum Ursprung hin entlastet wird. Bei Verwendung dieser Entfestigungskurve lässt sich nach ORTIZ UND PANDOLFI (1999) eine Beziehung zwischen der charakteristischen Rissöffnung  $\kappa_c$ , der Zugfestigkeit  $c_n$  und der Bruchenergie angeben:  $G_f = e c_n \kappa_c$ . Die Komponenten des Spannungsvektors berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} t_n &= K_n \llbracket u \rrbracket_n = \frac{t^*}{\kappa} \llbracket u \rrbracket_n = c_n \frac{\eta}{\kappa_c} \exp\left(1 - \frac{\eta}{\kappa_c}\right) \frac{1}{\kappa} \llbracket u \rrbracket_n & \text{für } \llbracket u \rrbracket_n \geq 0 \\ t_n &= K_n \llbracket u \rrbracket_n = \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{t^*}{\kappa} \llbracket u \rrbracket_n = \frac{c_n}{\kappa_c} e \llbracket u \rrbracket_n & \text{für } \llbracket u \rrbracket_n < 0 \\ \mathbf{t}_T &= K_T \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T = \beta^2 \frac{t^*}{\kappa} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T = \beta^2 c_n \frac{\eta}{\kappa_c} \exp\left(1 - \frac{\eta}{\kappa_c}\right) \frac{1}{\kappa} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T \end{aligned} \quad (4.19)$$

Im Falle einer negativen Rissöffnung wird nicht eine beliebige Penalty-Steifigkeit eingeführt, sondern die Steigung der Entfestigungskurve bei  $\eta \rightarrow +0$  angenommen, womit sich die zuvor in 4.2.1 beschriebenen Probleme verhindern lassen. Für reines Versagen auf Zug bzw. Schub sind die Spannungs-Rissöffnungs-Beziehungen in Abbildung 4.4 dargestellt.

Dies eben aufgestellte Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz soll für den in dieser Arbeit betrachteten textildaserverstärkten Beton verwendet werden, wozu noch die nötigen Ma-



**Abbildung 4.5:** Versagenszonen in der Grenzfläche zwischen Matrix und Faser, nach ZASTRAU U. A. (2003).

terialparameter zu ermitteln sind. Im Allgemeinen werden experimentelle Faserauszugversuche zur Bestimmung der Verbundcharakteristik zwischen einem einzelnen, monolithischen Verstärkungselement und der umgebenden Matrix eingesetzt. Jedoch sind die Faserbündel keine monolithischen Elemente, sondern bestehen selbst aus einer Vielzahl einzelner Filamente. Durch ihren ungleichmäßigen Charakter und ihre zufällige Umhüllung mit Beton ist die Mikrostruktur dieses Verbundwerkstoffes sehr variabel und führt somit zu einer beträchtlichen Streuung der Ergebnisse in Faserauszugversuchen, siehe BANHOLZER (2006). Bislang war es nicht möglich, eine Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung direkt aus einer experimentell gewonnenen Kraft-Weg-Beziehung analytisch zu bestimmen (BANHOLZER U. A. 2004). Stattdessen werden Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen meist durch Ausgleichskurven ermittelt, wobei Abweichungen zwischen simulierten und experimentellen Verläufen in einem direkten Problem minimiert werden. In BANHOLZER U. A. (2006) wurde festgestellt, dass die Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung als Grenzflächencharakteristik zwischen Matrix und Faser eine reine Materialeigenschaft und somit unabhängig von der Geometrie ist. Abbildung 4.5 stellt schematisch einen Faserauszugversuch dar, wobei drei unterschiedliche Zonen erkennbar sind. Dem intakten elastischen Bereich folgen die geschädigte Grenzschicht, in der noch Adhäsion zwischen den Materialien besteht, und schließlich die abgelöste Zone, in der bei Faserquerdruck Reibung herrscht. Die in dieser Arbeit verwendeten Materialparameter entsprechen im Wesentlichen denen des Feinbetons, welcher das schwächste Glied an der Grenzfläche ist und somit das Verbundverhalten bestimmt. Mit den Werten der Bruchenergie  $G_f$  und der Zugfestigkeit  $c_n$  lässt sich die charakteristische Rissöffnung  $\kappa_c$  bestimmen, über eine Auswertung von Versuchsdaten kann das Verhältnis  $\beta$  von Schub- zu Zugfestigkeit ermittelt werden. Die in den Beispielen verwendeten Materialparameter stammen aus den Arbeiten KRÜGER (2004) und HEGGER U. A. (2008), bzw. lassen sich daraus ableiten. Dort finden sich auch Auflistungen elastischer Materialkennwerte verschiedener Textilfasern und Feinbetone.

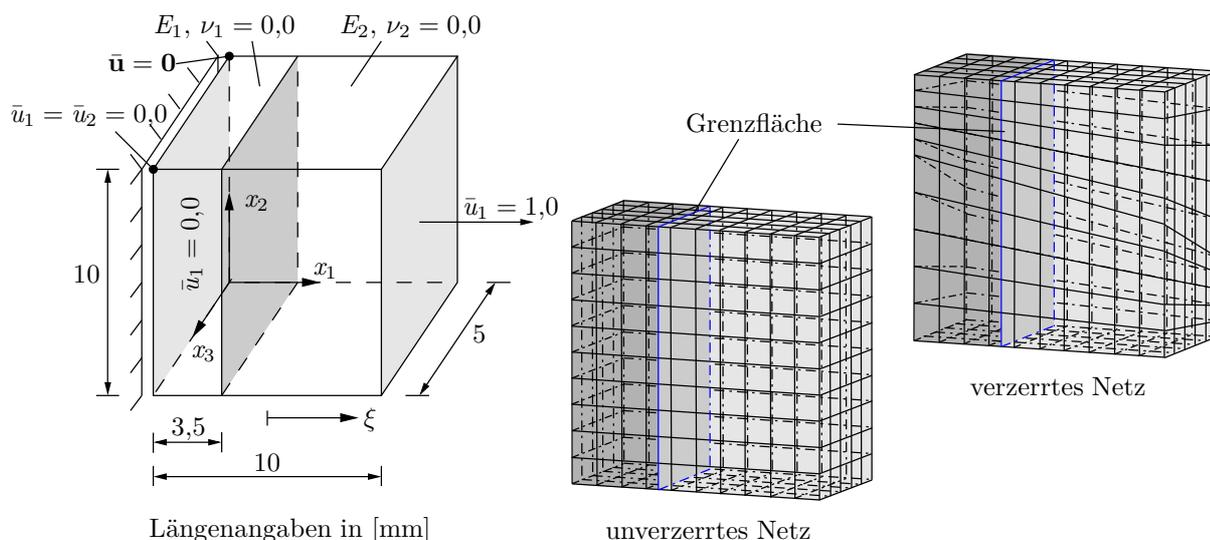


Abbildung 4.6: Bimaterial-Patchtest: Geometrie, Randbedingungen, Materialverteilung und unterschiedlich strukturierte Vernetzung.

## 4.3 Testbeispiele

### 4.3.1 Bimaterial-Patchtest

In diesem Abschnitt wird ein Patchtest an einem Körper aus zwei unterschiedlichen Materialien durchgeführt. Der Aufbau des Beispiels orientiert sich an SUKUMAR U. A. (2001), wo ein ähnliches Problem mit einem strukturiert unverzerrten Netz im zweidimensionalen Raum behandelt wurde. Hier wird dieses Beispiel im dreidimensionalen Raum mit strukturiert unverzerrten und verzerrten Netzen untersucht, vergleiche Abbildung 4.6. Für das verzerrte Netz wurden die Elemente entlang einer schrägen Ebene orientiert. In Abbildung 4.6 links sind die geometrischen Abmessungen des Körpers, die Lage der Grenzfläche und die Verschiebungsrandbedingungen angegeben. Eine Level-Set-Funktion beschreibt die materielle Grenzfläche, die mitten durch eine Elementreihe verläuft. Die exakte Lösung des eindimensionalen Problems für die  $u_1$ -Verschiebung kann in Abhängigkeit der Elastizitätsmodulen  $E_1$  und  $E_2$  sowie der Lage der Grenzfläche  $\xi_m$  in der Einheitskoordinate  $\xi \in [-1,1]$  angegeben werden,

$$u_1(\xi) = \begin{cases} (1 + \xi)\alpha & \text{für } -1 \leq \xi \leq \xi_m \\ 1 + \frac{E_1}{E_2}(\xi - 1)\alpha & \text{für } \xi_m < \xi \leq 1 \end{cases} \quad (4.20)$$

mit  $\alpha = E_2 / (E_2(1 + \xi_m) - E_1(\xi_m - 1))$ , vergleiche SUKUMAR U. A. (2001). Für beide Netze wurden jeweils zwei Fälle untersucht. Im ersten Fall besitzen beide Teilkörper das

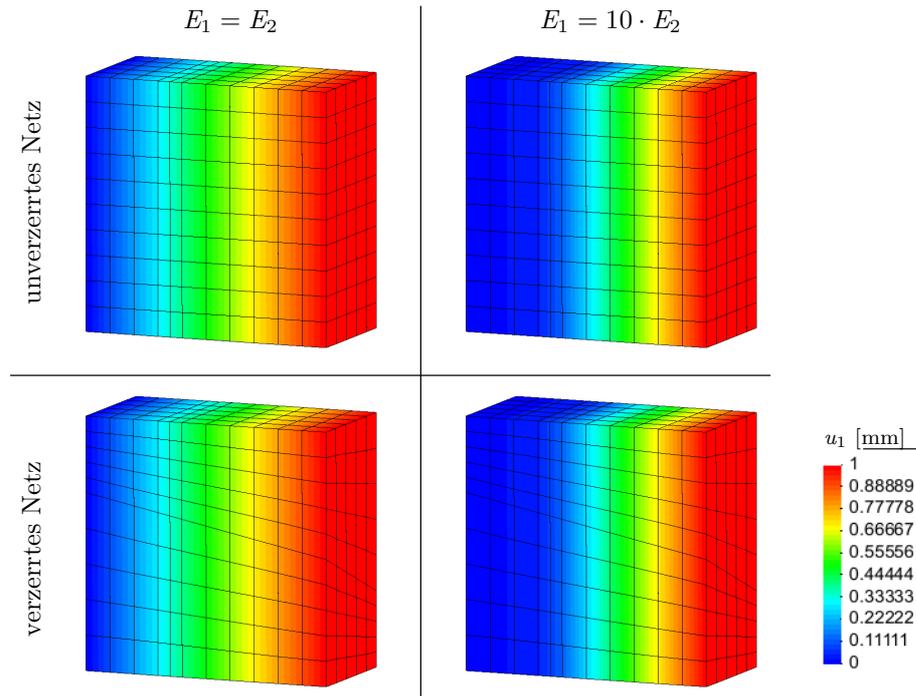
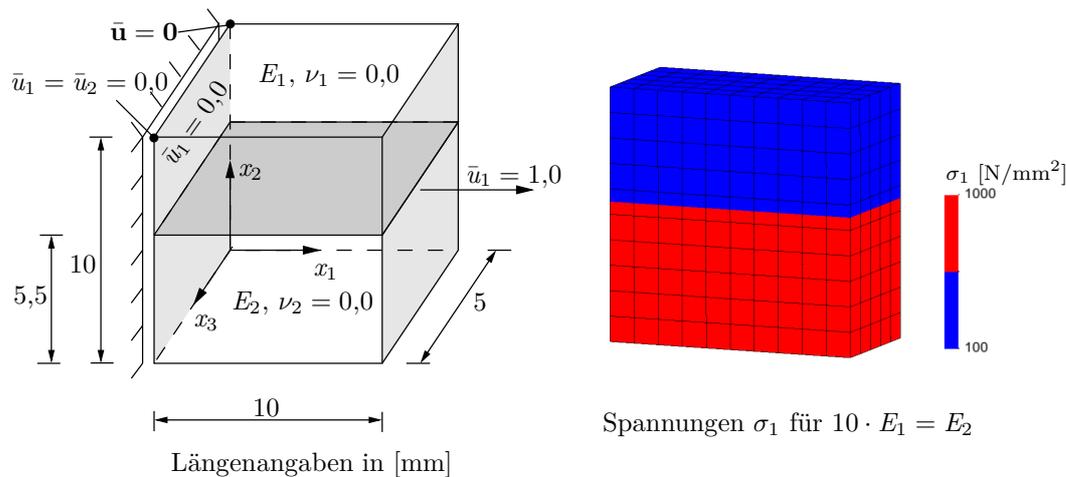


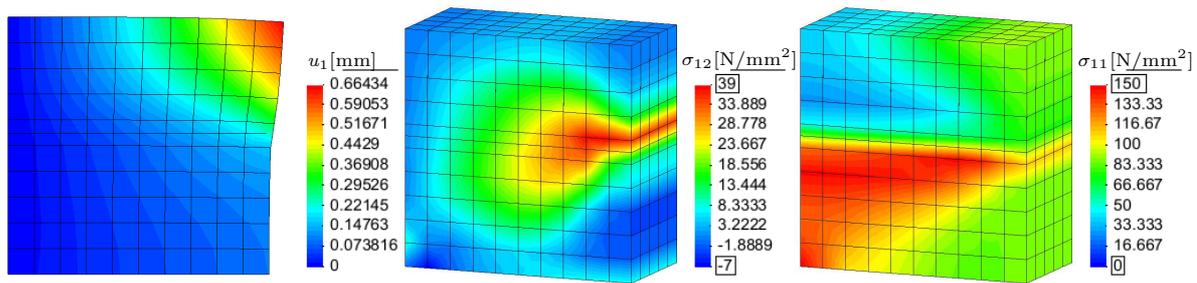
Abbildung 4.7: Bimaterial-Patchtest:  $u_1$ -Verschiebungsverläufe.

gleiche Material mit  $E_1 = E_2 = 1000 \text{ N/mm}^2$ , im zweiten Fall werden verschiedene Materialien mit  $E_1 = 10 \cdot E_2 = 10000 \text{ N/mm}^2$  zugeordnet. Die numerisch berechnete Lösung folgt exakt der analytischen Vorgabe und ist für die  $u_1$ -Verschiebungen in Abbildung 4.7 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass im Falle gleichen E-Moduls (linke Spalte) die Verschiebungen über die gesamte Breite linear verlaufen, wohingegen der Verschiebungsgradient bei unterschiedlichem E-Modul (rechte Spalte) im steifen Material klein ist, im weicheren Material aber groß sein muss, um die Randbedingungen einzuhalten. Die Spannungen in  $x_1$ -Richtung sind jeweils über den gesamten Körper konstant und besitzen für  $E_1 = E_2$  den Wert  $\sigma_1 = 100 \text{ N/mm}^2$ , für  $E_1 = 10 \cdot E_2$  ist  $\sigma_1 = 146 \text{ N/mm}^2$ . Alle Ergebnisse stammen jeweils aus Berechnungen eines einzigen elastischen Schritts bei perfektem Verbund. Es wurde also nur die Anreicherung der Knoten mit  $\chi_{m,i}$  verwendet. Im Fall gleichen E-Moduls, ist der Verschiebungsgradient konstant, weshalb die zusätzlichen Freiheitsgrade nicht aktiviert werden und  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  gilt. Im zweiten Fall entsteht ein Knick im Verschiebungsverlauf bzw. ein Sprung im Verschiebungsgradienten, wodurch die zusätzlichen Freiheitsgrade  $\tilde{\mathbf{u}} \neq \mathbf{0}$  aktiviert werden. Die Ergebnisse zeigen, dass die Anreicherungsfunktionen an der Grenzfläche den Verschiebungsraum korrekt repräsentieren können. Bei den Untersuchungen in SUKUMAR U. A. (2001) wurde festgestellt, dass die Anreicherung in allen Elementen ohne Grenzfläche konstant sein muss, was für die verwendete Anreicherung aus Gleichung (2.34) zutrifft.



**Abbildung 4.8:** Bimaterial-Patchtest: Geometrie, Randbedingungen, modifizierte Materialverteilung und Normalspannungsverlauf  $\sigma_1$ .

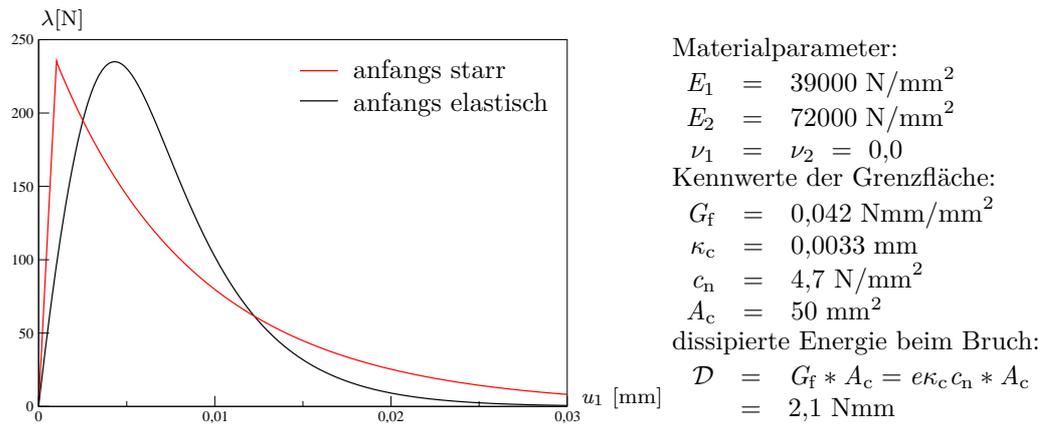
In einer zweiten Problemstellung wird nun für das unverzerrte Netz ein Materialwechsel in  $x_2$ -Richtung bei variierendem E-Modul untersucht, die Grenzfläche liegt nun in der Ebene  $x_2 = 5,5$  mm. Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter bleiben gegenüber der vorherigen Untersuchung unverändert, siehe Abbildung 4.8 links. Erwartungsgemäß ergeben sich bei gleichem E-Modul in beiden Teilen die gleichen Verschiebungen und Spannungen, bei unterschiedlichem E-Modul ist die Spannung  $\sigma_1$  im steiferen Material um das 10-fache größer, siehe Abbildung 4.8 rechts. Für den beschriebenen Verschiebungslastfall ist der Verschiebungsgradient konstant, weshalb die zusätzlichen Freiheitsgrade nicht aktiviert werden  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ . Alternativ soll diese zweite Problemstellung unter Lastkontrolle untersucht werden, indem auf der rechten Randfläche eine konstante Last aufgebracht wird. Bei gleichem E-Modul gibt es wie zu erwarten keinen Unterschied zur Verschiebungskontrolle. Bei unterschiedlichem E-Modul resultiert jedoch ein gekrümmter Verschiebungsverlauf an der rechten Randfläche, weil das steifere Material der Last mehr Widerstand entgegengesetzt, was zu geringeren Verschiebungen führt, siehe Abbildung 4.9 links. Der Verschiebungsgradient ist nicht mehr konstant und es entwickeln sich Schubspannungen  $\sigma_{12}$  im gesamten Probekörper, die in der Nähe der Grenzfläche am größten sind. Am Normalspannungsverlauf  $\sigma_{11}$  zeigt sich, dass das steife Material mehr Last abträgt und hier höhere Spannungen als im weichen Material auftreten.



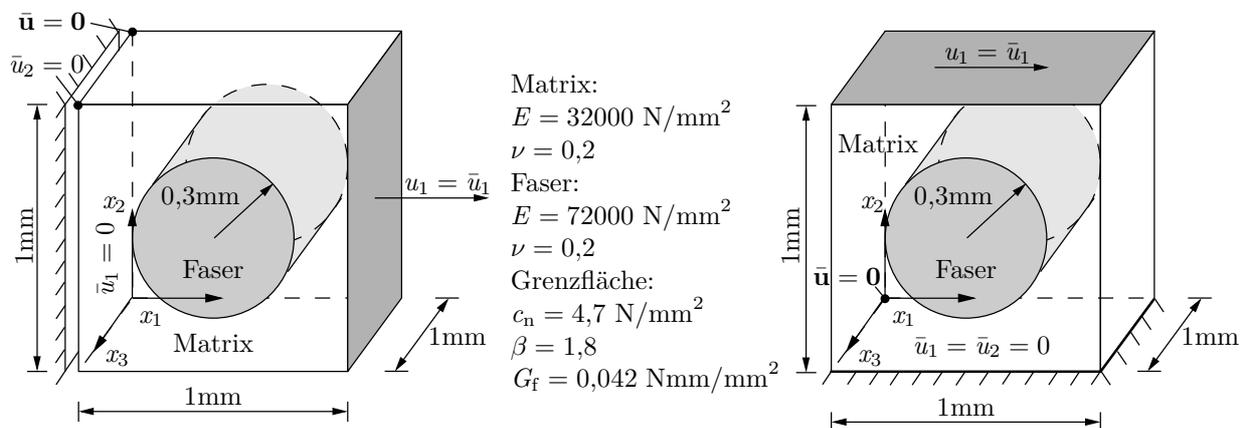
**Abbildung 4.9:** Bimaterial-Patchtest: Spannungslastfall mit Verschiebungen  $u_1$ , Schubspannungen  $\sigma_{12}$  und Normalspannungen  $\sigma_{11}$ .

### 4.3.2 Vergleich der kohäsiven Rissmodelle

Im Folgenden werden die vorgestellten intrinsischen und extrinsischen kohäsiven Rissmodelle in einer Simulation miteinander verglichen. Dazu wird ein Probekörper bei gleicher Geometrie, Grenzflächenposition und Randbedingungen wie beim Patchtest aus Abbildung 4.6 mit vertikaler Grenzfläche betrachtet. Die Berechnung wird aber nicht nach einem elastischen Schritt gestoppt, sondern bis zum vollständigen Versagen der Grenzfläche weitergeführt. Die Materialparameter sind alle in Abbildung 4.10 angegeben und so gewählt, dass für beide Rissmodelle dieselbe Energie während des Versagens dissipiert wird. Dies geschieht über die Anpassung der charakteristischen Rissöffnung  $\kappa_c$  an die Bruchenergie  $G_f$  und die Zugfestigkeit  $c_n$  der Grenzfläche nach der Formel  $G_f = e\kappa_c c_n$ . In Abbildung 4.10 werden die Last-Verschiebungs-Kurven beider Modelle miteinander verglichen. Zu Beginn verhält sich das anfangs starre extrinsische Modell wie zu erwarten linear und steifer als das intrinsische, da die Materialien an der Grenzfläche noch perfekt miteinander verbunden sind und ein linear-elastisches Materialverhalten vorgegeben ist. Erst nach Einführung der Rissfreiheitsgrade fällt die Kurve exponentiell ab, jedoch nicht so steil wie im anfangs elastischen, intrinsischen Modell. Das intrinsische Modell zeigt ein weiches Verhalten, da von Anfang an ein Verschiebungssprung über die Grenzfläche hinweg auftritt. Beide Kurven erreichen das gleiche Lastniveau und durch Integration der Flächen unter beiden Kurven lässt sich zeigen, dass die dissipierte Energie in beiden Fällen gleich dem analytisch ermittelten Wert von  $\mathcal{D} = 2,1$  Nmm ist. Anzumerken ist, dass die Diskretisierungen mit unverzerrten und verzerrten Elementen dieselben Last-Verschiebungs-Kurven liefern. Abgesehen vom folgenden Modellbeispiel wird für die Anwendungen in dieser Arbeit nur noch das anfangs elastische Modell verwendet, da es sich bei den Simulationen aufgrund der kontinuierlichen Steifigkeit des Spannungs-Rissöffnungs-Gesetzes um den Nullpunkt stabiler verhält.



**Abbildung 4.10:** Vergleich der Last-Verschiebungs-Kurven: anfangs elastisches - anfangs starres Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz.



**Abbildung 4.11:** Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter im Zugtest und im Schubtest.

### 4.3.3 Faserverstärkter Probekörper

Dieses Unterkapitel widmet sich der Prüfung des anfangs starren und des anfangs elastischen kohäsiven Rissmodells in zwei Testproblemen. Dazu wird ein quaderförmiger Probekörper mit einer einzelnen eingebetteten Faser betrachtet. Der Probekörper wird zwei verschiedenen Belastungen ausgesetzt, eine reine Zug- bzw. eine reine Schubbelastung. Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter sind für beide Belastungen in Abbildung 4.11 gegeben. Die zwei vorgestellten Rissmodelle verhalten sich für beide Belastungen sehr ähnlich, weshalb die Ergebnisse nicht direkt miteinander verglichen werden. Für den Zugtest soll nur das anfangs starre, für den Schubtest nur das anfangs elastische Rissmodell verwendet und die jeweiligen charakteristischen Merkmale veranschaulicht werden.

Für den Zugtest wird die Verschiebung in  $x_1$ -Richtung an der linken Randfläche komplett festgehalten und weitere statisch bestimmte Punktagerungen angebracht, um eine Kinematik in der  $x_2 - x_3$ -Ebene zu verhindern. An der rechten Randfläche werden gleichförmige Verschiebungen in  $x_1$ -Richtung vorgegeben, die in der quasistatischen Berechnung in jedem Lastschritt inkrementell um 0,0001 mm gesteigert werden. Bei Verwendung des starren Rissmodells werden die zusätzlichen Freiheitsgrade  $\tilde{\mathbf{u}}$  erst nach Erreichen der Festigkeit der Grenzfläche eingeführt. Aufgrund dessen sind insbesondere die ersten Lastschritte der Simulation gut geeignet, um die Kräfteumlagerungen während des Risswachstums zu veranschaulichen. In Abbildung 4.12 sind spaltenweise die Hauptspannungen  $\sigma_I$  und die Verschiebungen  $u_1$  jeweils in den Lastschritten vor Einführung der nächsten Rissfreiheitsgrade dargestellt. Dabei sind die Ergebnisgrößen für eine bessere Darstellung nicht einheitlich skaliert, Maximalwerte sind rot, Minimalwerte blau gekennzeichnet. Die Hauptspannungen  $\sigma_I$  sind zu Beginn im mittleren Bereich der Struktur am größten, weil die steife Faser einen Großteil der Spannungen auf sich zieht, während am Rand gelegene Matrixbereiche kaum Lasten ausgesetzt sind. Sobald sich aber aufgrund des Versagenskriteriums im mittleren Bereich Risse an der Grenzfläche bilden, verschiebt sich die Lastabtragung in die äußeren Bereiche. Anhand der Sequenz ist ersichtlich, welche Elemente von Schritt zu Schritt reißen werden. Nach vollständiger Rissbildung werden die Lasten nur noch von der Matrix abgetragen, welche in den Untersuchungen nicht reißen darf. Am Verlauf der Verschiebungen  $u_1$  sind die Effekte der Lastumlagerung ebenfalls zu erkennen. Während sich die Faser anfangs noch elastisch deformiert, gehen diese Deformationen infolge der Entlastung zurück, woraufhin sich die Faser gegen Ende wie ein Starrkörper verhält. In der rechten Spalte sind die Zugnormalspannungen in der Grenzfläche zu sehen, jedoch für eine andere Schrittfolge als die vorherigen Ergebnisse. Zu erkennen ist der schrittweise Abbau der Spannungen bei fortschreitender Rissöffnung. Im oberen und unteren Bereich der Grenzfläche ergeben sich hohe Drucknormalspannungen. Diese resultieren aus der Bestrafung sich gegenseitig durchdringender Rissflächen mit einer großen Kontaktsteifigkeit, weshalb diese Spannungswerte nicht dargestellt sind.

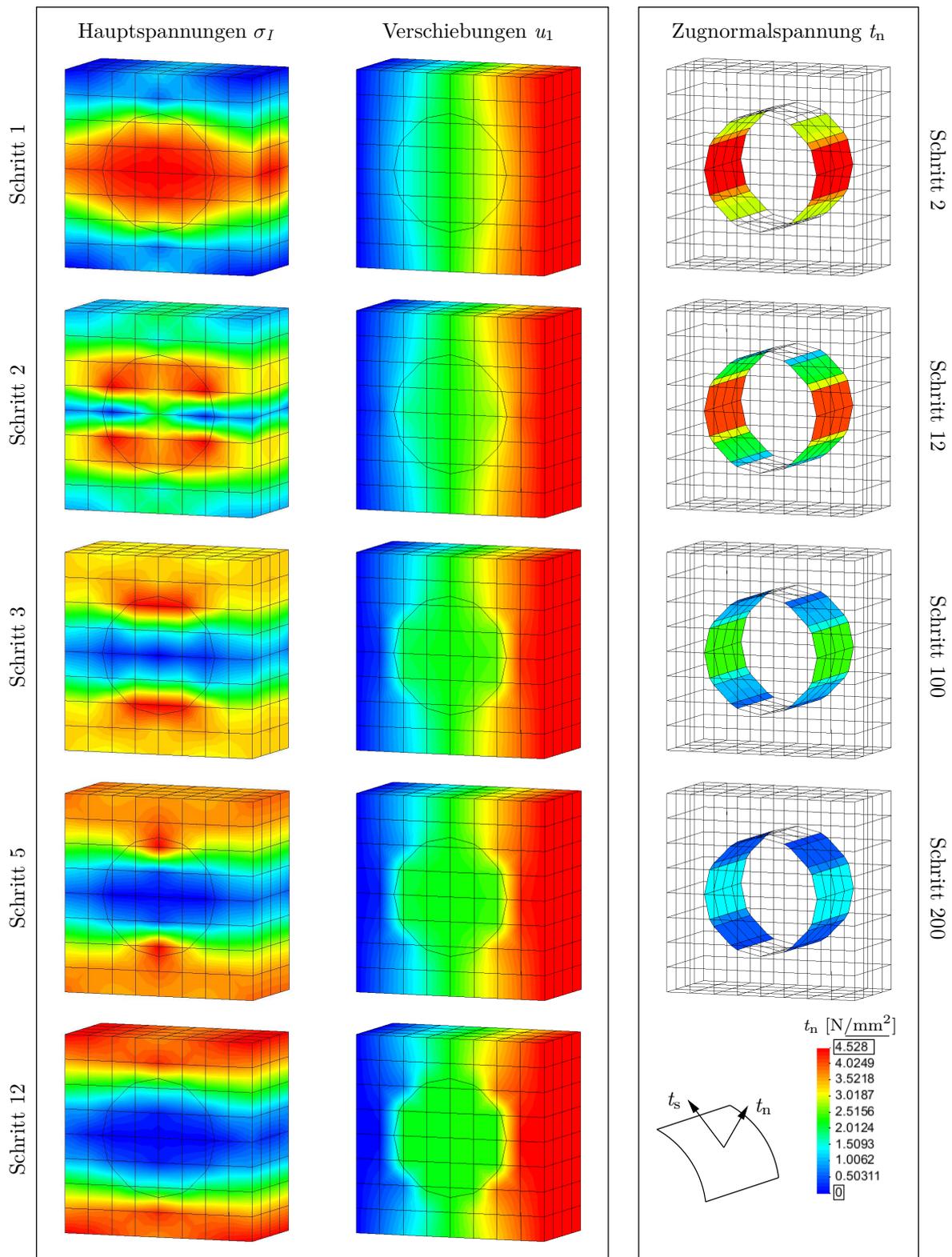
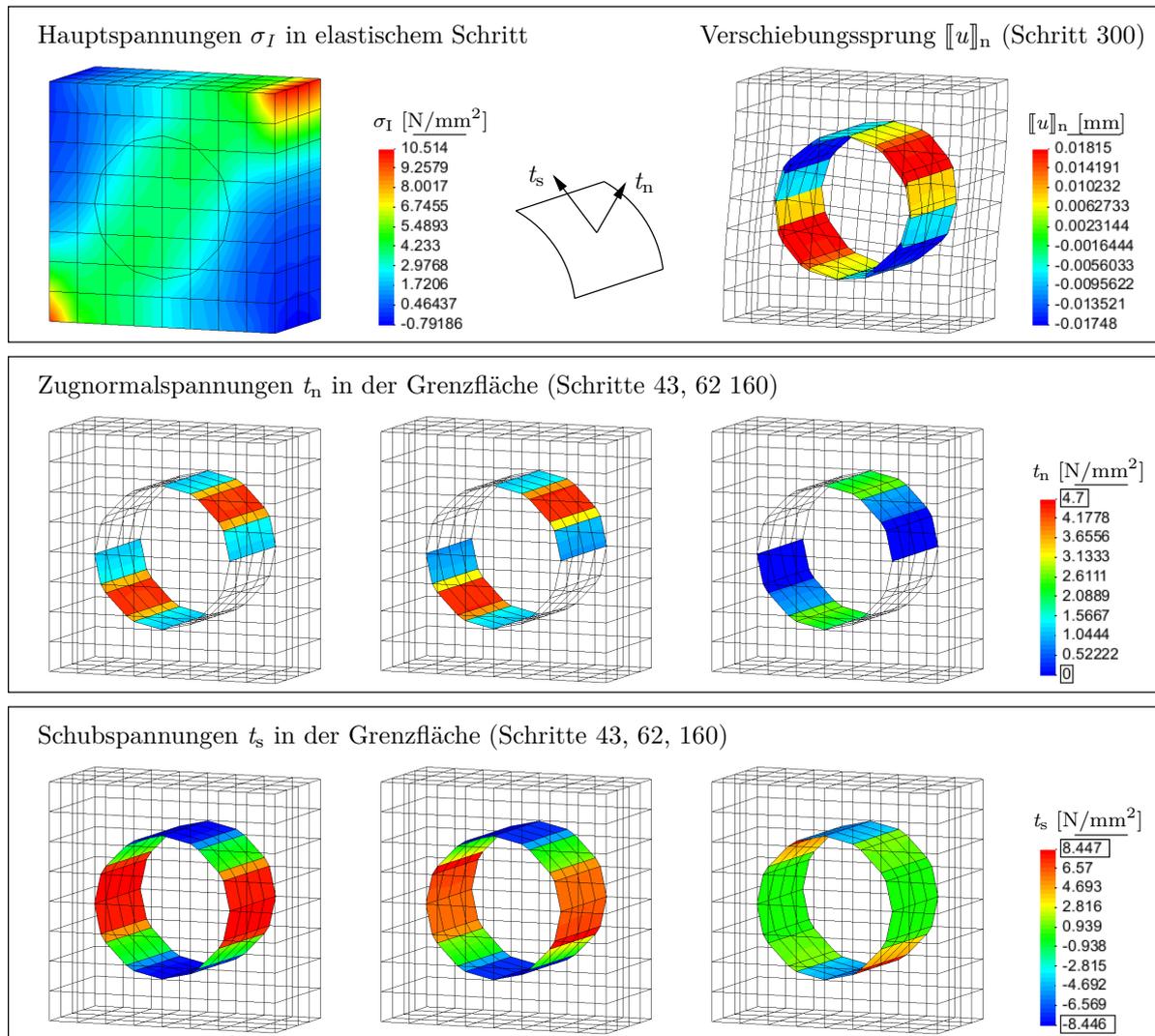


Abbildung 4.12: Hauptspannungen  $\sigma_I$ , Verschiebungen  $u_1$  und Zugnormalspannungen  $t_n$  der Einzelfaser im Zugtest.

In einem zweiten Belastungszustand wird eine reine Schubdeformation aufgebracht. Hierzu wird eine gleichmäßige Verschiebung an der oberen Randfläche der Probe in  $x_1$ -Richtung vorgegeben, während der untere Rand in  $x_1$  und  $x_2$ -Richtung sowie durch ein zusätzliches Punktlager zur Vermeidung von Starrkörperbewegungen festgehalten wird. Auch hier wird die Verschiebung wieder pro Lastschritt inkrementell um 0,0001 mm gesteigert. Für diese Beanspruchung wird wie oben erwähnt nur das anfangs elastische Rissmodell untersucht. Mit diesem Beispiel soll gezeigt werden, dass die Grenzfläche an manchen Stellen in einem gemischten Modus versagt, und nicht nur auf reinen Zug oder Schub. Infolge der aufgetragenen Schubbelastung bildet sich über eine Diagonale ein Zugband aus, während über die andere Diagonale Druck und Schub herrscht, siehe Abbildung 4.13 oben. In den Sequenzen darunter ist das Versagensverhalten anhand verschiedener Spannungszustände gut zu erkennen. Im Bereich des Zugbandes sind die Normalspannungen am größten, wobei dort kaum Schub auftritt und die Grenzfläche nur auf Zug versagt. Umgekehrt erreichen die Schubspannungen dort ihren Maximalwert, wo die Normalspannungen klein bzw. negativ sind, und führen so zum Versagen der Grenzfläche. Die Schubspannungen sind so ausgerichtet, dass sie große Deformationen der Faser verhindern. In den Bereichen dazwischen erreicht keine der Spannungskomponenten ihren Maximalwert, aber durch die Kombination von Zug und Schub reichen kleinere Spannungen in beiden Komponenten zum Versagen aus. Anhand der deformierten Struktur ist zu erkennen, dass die Durchdringung der Rissflächen im Druckbereich in etwa dieselbe Größenordnung besitzt wie die Rissöffnung im Zugbereich. Dies impliziert, dass aufgrund der kontinuierlichen Fortsetzung des Spannungs-Rissöffnungs-Gesetzes im Druckbereich, siehe Gleichung (4.19), die Kontaktsteifigkeit zu gering ist, um die Durchdringung der Rissflächen ausreichend zu verhindern. Da in einem realistischen Versuch der Grenzflächenriss vor Auftreten solch großer Durchdringungen in einen Matrixriss übergehen würde, kann die geringe Kontaktsteifigkeit als unproblematisch angesehen werden. Die Interaktion von Grenzflächenrissen und Matrixrissen wird in dieser Arbeit nicht behandelt.



**Abbildung 4.13:** Hauptspannungen  $\sigma_I$ , Verschiebungssprung  $[[u]]_n$  sowie Zugnormalspannungen  $t_n$  und Spannungen  $t_s$  der Einzelfaser im Schubtest.



---

# Diskontinuierliche Modellierung von Matrixrissen

---

## 5.1 Versagenskriterium und Rissrichtung

In diesem Abschnitt werden Versagenskriterien für die Entstehung von Matrixrissen und die Berechnung der Rissrichtung vorgestellt. Damit lässt sich die Frage wann ein Riss entsteht bzw. wann er sich in welcher Richtung ausbreitet beantworten. Die Berechnung der Rissrichtung ist nur von Bedeutung, wenn sich der Riss in beliebiger Richtung ausbreiten kann, was bei Verwendung von Neuvernetzungsalgorithmen oder elementinternen Rissen zutrifft. Im Rahmen der X-FEM werden Diskontinuitäten als kontinuierliche, durch finite Elemente fortschreitende Flächen repräsentiert. Aufgrund der geforderten Risspfadkontinuität ist die akkurate Bestimmung des Risspfades ein wesentlicher Bestandteil der Zuverlässigkeit und der Robustheit numerischer Versagensanalysen. Sobald ein Riss vorliegt, wird die Topologie der Risssegmente nicht mehr verändert. Ist die vorhergesagte Ausbreitungsrichtung nicht korrekt, tritt Locking auf, was wiederum zu unphysikalischen Ergebnissen führt, siehe DUMSTORFF UND MESCHKE (2007).

Aufgabe des Versagenskriteriums ist es, den Zeitpunkt anzugeben, bei dem am Materialpunkt von einer kontinuumsmechanischen Materialformulierung auf ein Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz übergegangen wird. Dies geschieht bei Bildung erster Mikrorisse, die eventuell zu Makrorissen anwachsen. Es gibt eine Vielzahl verschiedener Versagenskriterien, die auf einer bruch- oder kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise basieren. Sie können weiter eingeteilt werden in energie- oder spannungsbasierte Kriterien. Da es bei Einführung eines kohäsiven Risses zu begrenzten, berechenbaren Spannungen vor der Risspitze kommt, wird für die Entstehung und den Fortschritt kohäsiver Matrixrisse die Hauptspannungshypothese verwendet. Als spannungsbasiertes Kriterium beruht die Hypothese auf den Eigenwerten  $\sigma_i$  des Cauchy-Spannungstensors, welche aus einer

Spektralzerlegung berechnet werden.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=I}^{III} \sigma_i \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \quad (5.1)$$

Erreicht oder überschreitet der größte der drei Eigenwerte  $\sigma_I > 0$  des Spannungstensors die Zugfestigkeit  $f_t$  des Materials, wird ein Matrixriss ein- bzw. weitergeführt. Bei der Hauptspannungshypothese wird davon ausgegangen, dass allein die maximale Hauptspannung  $\sigma_I$  für das Materialversagen verantwortlich ist, unabhängig vom Betrag der anderen Hauptspannungen. Im Rahmen der X-FEM wurde die Hauptspannungshypothese für kohäsive Risse beispielsweise auch in WELLS UND SLUYS (2001) und JÄGER (2009) eingesetzt. Der Vollständigkeit halber sollte erwähnt werden, dass keine Rissinitiierung auf Druckversagen behandelt wird.

Im Weiteren ist zu klären, in welcher Richtung ein Matrixriss fortschreitet. Hierzu wird wiederum das spannungsbasierte Versagenskriterium benutzt. Die Rissnormale wird entsprechend der Richtung der maximalen Hauptspannung gewählt, sollte aber nach WELLS UND SLUYS (2001) besser aus einem nichtlokalen Spannungstensor  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  bestimmt werden, weil die Spannungen an der Risspitze nicht exakt berechnet werden können. Der nichtlokale Spannungstensor, als gewichtetes Mittel der Spannungen, ergibt sich aus dem lokalen Spannungsfeld multipliziert mit einer Gaußschen Verteilungsfunktion und anschließender Integration über ein bestimmtes Gebiet um die Risspitze.

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}_c) = \int_{\Omega_\omega} \omega(\|\boldsymbol{\zeta}\|) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_c + \boldsymbol{\zeta}) \, d\Omega \quad \text{mit} \quad \omega(\|\boldsymbol{\zeta}\|) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R_{nl}^3} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{\zeta}|^2}{2R_{nl}^2}\right) \quad (5.2)$$

Die Gaußsche Verteilungsfunktion  $\omega$  nimmt mit wachsender Entfernung  $\|\boldsymbol{\zeta}\|$  von der Risspitze  $\mathbf{x}_c$  ab und spiegelt den geringeren Einfluss entfernter Punkte wider. Integriert wird über ein Gebiet mit dem Radius  $R_{nl}$  um die Risspitze, womit sich das Maß der Nichtlokalität steuern lässt. Dieses Vorgehen impliziert keine Nichtlokalitäten im Modell, sondern soll nur die Spannungen für einen realistischeren Verlauf der Diskontinuitäten glätten. Die Integration in Gleichung (5.2) wird numerisch durchgeführt, weshalb nur Informationen jener Gaußpunkte einfließen, die innerhalb des Radius liegen. Dieser wiederum wird in der Literatur zumeist proportional zu einer charakteristischen Elementgröße  $h_e$  gewählt und beispielsweise in WELLS (2001) zu  $R_{nl} = 3h_e$  angegeben. An diesem Wert orientieren sich auch die in den Beispielen dieser Arbeit verwendeten Radien. Für den Fall, dass zwei oder alle drei Eigenwerte des nichtlokalen Spannungstensors etwa denselben Wert haben, ist das vorgestellte Versagenskriterium nicht mehr eindeutig. Dann wird jene Rissnormale gewählt, welche die geringste Abweichung zu den Normalenrichtungen der Nachbarschaft um die aktuelle Rissfront hat, vergleiche auch GASSER UND HOLZAPFEL (2006).

Laut SUKUMAR U. A. (2008) gibt es bislang noch kein allgemein anerkanntes Rissausbreitungskriterium für dreidimensionale Strukturen. Bruchkriterien basieren auf theoretischen Modellen und treffen Aussagen über die makroskopische Rissentwicklung. Diskrete Rissmodelle der linear-elastischen Bruchmechanik verwenden meist Energiekriterien, wohingegen bei verschmierten Rissmodellen der Kontinuumsmechanik die Bruchkriterien aus dem Spannungs- oder Verzerrungszustand abgeleitet werden. Im Rahmen der X-FEM wurde in MESHKE U. A. (2006), DUMSTORFF UND MESHKE (2007) sowie UNGER U. A. (2007) eine vergleichende Studie verschiedener Rissausbreitungskriterien durchgeführt. So kann die Richtung beispielsweise auch über ein lokales Kriterium der maximalen Umfangsspannung aus der linear-elastischen Bruchmechanik, über ein globales Modell auf Basis von Einhüllenden potentieller Rissausbreitungsrichtungen und über ein energiebasiertes, globales Rissausbreitungskriterium ermittelt werden. Zum Teil erfordern diese Kriterien jedoch weitere Freiheitsgrade pro Knoten oder Gaußpunkt. Ein weiterer, sehr erfolgsversprechender Ansatz ist die Bestimmung der Rissrichtung nach dem Konzept materieller Kräfte. So wurde beispielsweise in den Arbeiten HEINTZ (2006) und GÜRSES (2007) der Riss in Richtung sogenannter materieller, fiktiver Kräfte weitergeführt, die mit Änderungen der potentiellen Energie aufgrund von Variationen der Lage einer Diskontinuität assoziiert sind. Der Betrag dieser fiktiven Kraft entspricht dem  $J$ -Integral und die Richtung ergibt sich aus der maximalen Energiefreisetzungsrate.

## 5.2 Schädigungsmodell Matrixriss

Bei der Modellierung von Matrixrissen in Feinbeton wird davon ausgegangen, dass das Versagen auf Zug entsteht, anschließend aber auch eine Rissöffnung in gemischtem Modus möglich ist. Im Allgemeinen wird die Annahme kohäsiver Rissinitiierung in Modus 1 zumindest für solche Materialien getroffen, die makroskopisch als homogen und isotrop angesehen werden (PLANAS U. A. 2003). Es gelten dieselben Annahmen, die in Kapitel 4.2 für die Aufteilung des Verschiebungssprungvektors  $[[\mathbf{u}]]$  und des Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  getroffen wurden. Abweichend vom Schädigungsmodell für Grenzflächenrisse wird der äquivalente Verschiebungssprung nun als positive Rissnormalöffnung definiert.

$$\eta = [[u]]_n \quad (5.3)$$

Die effektiven Spannungen sind wie in Gleichung (4.13) zu berechnen, jedoch wird die Festigkeit der Grenzfläche  $c_n$  durch die Zugfestigkeit des Matrixmaterials  $f_t$  ersetzt.

$$t^* = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad (5.4)$$

In Abhängigkeit der Komponenten des Verschiebungssprungs lassen sich die Spannungskomponenten in der Rissfläche mit diesem anfangs starren Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz wie folgt angeben:

$$\begin{aligned} t_n &= K_n \llbracket u \rrbracket_n = \frac{f_t}{\kappa} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \llbracket u \rrbracket_n \\ \mathbf{t}_T &= K_T \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T = d_T \exp(h_t \kappa) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_T \end{aligned} \quad (5.5)$$

Der Parameter  $d_T$  stellt die Anfangsschubsteifigkeit dar, der Parameter  $h_T$  wurde in WELLS UND SLUYS (2001) als natürlicher Logarithmus des Verhältnisses der Schubsteifigkeit bei  $\kappa = 1,0$  zur Anfangsschubsteifigkeit definiert,  $h_T = \ln(d_{\kappa=1,0}/d_T) \leq 0$ . Das Spannungs-Rissöffnungs-Gesetz (5.5)<sub>1</sub> ist nur für den Bereich positiver Rissöffnungen gültig. Der Fall eines Durchdringens der Rissflächen wird formal ausgeschlossen, wobei die numerische Umsetzung wieder durch Bestrafung negativer Rissöffnungen mit einer Penalty-Steifigkeit erfolgt. In den numerischen Simulationen hat sich gezeigt, dass bei sprunghaften Wechseln von offenen zu geschlossenen Rissen und umgekehrt das Konvergenzverhalten stark beeinträchtigt ist.

### 5.3 Rissverfolgungsstrategien für dreidimensionale Versagensanalysen

Die exakte Modellierung dreidimensionaler Risse ist aufgrund der komplexen geometrischen Situation generell eine anspruchsvolle Aufgabe. Abhängig von der eingesetzten Rissverfolgungsstrategie und der verwendeten Diskretisierung ergibt sich eine andere Rissgeometrie. Neuvernetzungsalgorithmen der Rissfläche sind zum Beispiel mit einem sehr hohen Aufwand verbunden, insbesondere wenn mehrere wachsende Risse behandelt werden und diese entlang der Elementkanten orientiert sein sollen. Vor allem bei Elementverfeinerungen um die Rissspitze ist es schwierig, die Rissgeometrie explizit zu modellieren. Im Allgemeinen werden Hexaederelemente aufgrund ihrer besseren Approximationseigenschaften gegenüber Tetraederelementen bevorzugt und auch in dieser Arbeit eingesetzt. Bei Verwendung von Hexaederelementen und Neuvernetzungsalgorithmen treten zusätzliche Probleme auf, weil die Vernetzung beliebiger Geometrie mit Hexaederelementen noch nicht ausgereift ist (ZIENKIEWICZ U. A. 2005).

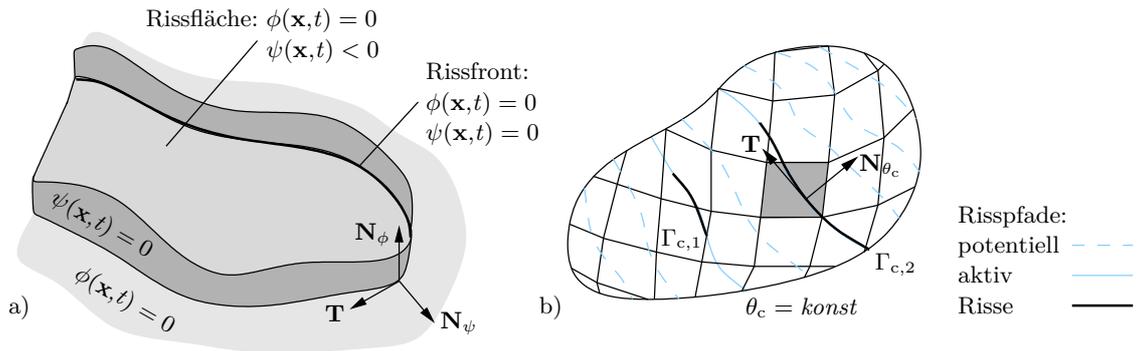
Mithilfe der X-FEM kann auf die Neuvernetzung verzichtet werden, jedoch hängt ihr Erfolg stark von der Effizienz, Robustheit und Genauigkeit der Lösung des entstehenden Geometrieproblems ab. Im Zusammenhang mit der X-FEM ist es sehr wichtig, den Pfad der Diskontinuität präzise zu ermitteln, da die diskontinuierlichen Deformationen von der Lage der Rissfläche in den Elementen abhängen. Ein Problem, das besonders bei

der Modellierung kontinuierlicher elementinterner Rissflächen auftritt, ist der Konflikt zwischen der geforderten Risspfadkontinuität und dem Risskriterium. Unterliegt die Orientierung der Rissfläche geometrischen Zwängen, kommt es zu Widersprüchen, denn die Rissnormale sollte nur vom mechanischen Zustand des Körpers abhängen und nicht von der Rissfläche in Nachbarelementen. Auf diesen Konflikt wird in diesem Kapitel noch genauer eingegangen.

Nun werden einige Algorithmen zur Verfolgung beliebig gekrümmter Rissflächen bei anfangs unbekanntem Risspfad beschrieben. Bislang erfolgte die Rissmodellierung im Rahmen der X-FEM beispielsweise mit der Level-Set-Methode sowie mit lokalen, nicht-lokalen und globalen Rissausbreitungsalgorithmen, die jeweils kurz erläutert werden. Weitere Algorithmen und Referenzen, die nicht nur die X-FEM betreffen, werden zum Beispiel in JÄGER U. A. (2008) angegeben.

### 5.3.1 Rissverfolgung mit der Level-Set-Methode

Die Kombination der X-FEM mit der Level-Set-Methode führt zu einer sehr eleganten Formulierung, da zur vollständigen geometrischen Beschreibung der Risse und zur Anreicherung der finiten Elemente nur Level-Set-Werte an den Elementknoten erforderlich sind. Mithilfe der Level-Set-Methode aus OSHER UND SETHIAN (1988) konnten im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik Rissverläufe in 2D (STOLARSKA U. A. 2001) und 3D (MOËS U. A. (2002), GRAVOUIL U. A. (2002), SUKUMAR U. A. (2008)) erfolgreich dargestellt werden. Für die Repräsentation eines Risses werden zwei vorzeichenbehaftete Abstandsfunktionen  $\phi(\mathbf{x}, t)$  und  $\psi(\mathbf{x}, t)$  benötigt, die senkrecht zueinander sind. Die eindimensionale Rissfront ergibt sich als Schnittmenge der Nullflächen beider Funktionen, die Rissfläche selbst ist durch  $\phi(\mathbf{x}, t) = 0, \psi(\mathbf{x}, t) < 0$  definiert. Abbildung 5.1 zeigt schematisch beide Nullflächen sowie die Rissfläche und die Rissfront. Im Rahmen der Simulation ist es ausreichend, die Level-Set-Funktion nur in einem gewissen Bereich um die Rissfront aufzustellen, was Speicherbedarf und Rechenaufwand entsprechend reduziert. Die Anfangsbedingungen beim Aufstellen der Level-Set-Funktion ergeben sich üblicherweise aus dem vorzeichenbehafteten Abstand der Knoten zur Diskontinuität  $\phi(\mathbf{x}, t) = \pm \min \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\|$ , wobei das Vorzeichen über die Funktion  $\text{sign}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)]$  bestimmt wird. Die Einheitsnormale der Rissfläche zeigt in den positiven Bereich von  $\phi$ . Die Level-Set-Werte der Knoten werden mit denselben Formfunktionen wie die Verschiebungen interpoliert, was die Kontinuität der Rissfläche sicherstellt. Für die Aktualisierung der Level-Set-Werte wird eine Hamilton-Jacobi-Gleichung aufgestellt und gelöst. Mithilfe der Rissausbreitungsgeschwindigkeit können die neue Lage der Rissfront berechnet und danach die Level-Set-Werte knotenweise aktualisiert werden, wozu allerdings die Geschwindigkeit an der Rissfront über ein Bruchkriterium berechenbar oder vorgegeben sein muss. Im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik ist es möglich,



**Abbildung 5.1:** a) Risspfadbeschreibung mit Level-Set-Funktionen.  
 b) Globale Rissverfolgung in 2D mit Isoflächen als potentielle Risspfade.

Betrag und Richtung der Geschwindigkeit an der Rissfront zu bestimmen, für einen nichtlinearen Zustand sind jedoch keine Lösungen bekannt (JÄGER 2009). Aus diesem Grund ist die gewöhnliche Level-Set-Methode für die Modellierung fortschreitender Risse in quasispröden Materialien nicht geeignet. Ein weiterer Nachteil der gewöhnlichen Level-Set-Methode ist der Umstand, dass bei Beschreibung von Risswachstum die Level-Set-Werte bereits erweiterter Knoten nicht mehr verändert werden dürfen.

Alternativ kann eine Vektor-Level-Set-Methode verwendet werden (VENTURA U. A. 2003), die pro Knoten in 3D nur vier zusätzliche Werte erfordert. Dazu gehören das Vorzeichen der Level-Set-Funktion und die Komponenten des Vektors, der auf den nächstliegenden Punkt der Rissfläche zeigt. Diese Methode ist viel einfacher als die gewöhnliche Level-Set-Methode, da zur Aktualisierung keine zusätzlichen partiellen Differentialgleichungen, sondern nur wenige algebraische Gleichungen gelöst werden müssen.

### 5.3.2 Globale Rissverfolgungsstrategien

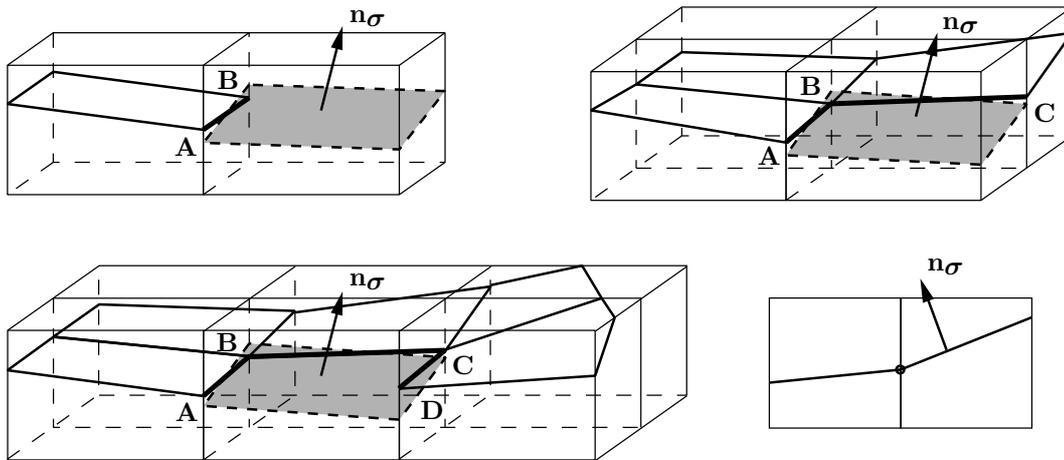
Im Zusammenhang mit globalen Rissverfolgungsstrategien sind vor allem die Arbeiten OLIVER U. A. (2002) und OLIVER U. A. (2004) zu nennen, die als Ursprung des globalen Rissverfolgungsalgorithmus gelten. Im Rahmen des Ansatzes eingebetteter starker Diskontinuitäten wurde damit eine Strategie vorgestellt, mit der sich alle potentiellen Rissausbreitungsrichtungen für das gesamte Untersuchungsgebiet auf einmal ermitteln lassen. Ziel des Algorithmus ist es, ein skalares Feld  $\theta(\mathbf{x})$  aufzustellen, dessen Isoflächen mögliche Diskontinuitäten repräsentieren. Es besteht eine Ähnlichkeit zum vorzeichenbehafteten skalaren Feld  $\phi$  der Level-Set-Methode, im Gegensatz dazu kann aber im Feld  $\theta(\mathbf{x})$  jeder Level eine Diskontinuität darstellen. Die Basis nötiger Informationen bildet ein globales Rissausbreitungsfeld, das an jedem Punkt zu jeder Zeit die Normale zur Rissausbreitungsebene angibt. Diese Informationen lassen sich in ein wärmelei-

tungsartiges Problem umschreiben, welches adiabatische Randbedingungen und keine inneren Quellterme besitzt. Zusätzliche unbekannte Knotenwerte  $\theta_I$  repräsentieren die Pseudotemperaturverteilung in der untersuchten Struktur. Die isothermen Flächen des berechneten Temperaturfeldes stellen alle potentiellen Risspfade der Struktur dar und sind aufgrund der Interpolation mit  $C^0$ -kontinuierlichen Funktionen in jedem Fall  $C^0$ -kontinuierlich. Eine Skizze dieser Isoflächen, bzw. Isolinien in 2D, ist in Abbildung 5.1 rechts gegeben, in der sowohl potentiell neue Risspfade als auch aktive Risspfade dargestellt sind. Die aktiven Risspfade lassen sich in einen entfestigenden kohäsiven Riss und eine mögliche Weiterführung bei Rissfortschritt unterteilen, wobei sich die Weiterführung bis zur tatsächlichen Fortsetzung des Risses je nach Belastung noch ändern kann. Da in jedem Zeitschritt ein lineares Wärmeproblem aufgestellt und gelöst werden muss, ist dieser Ansatz sehr kostspielig, jedoch können damit alle potentiellen Diskontinuitätspfade gleichzeitig verfolgt werden. Dieser Algorithmus wurde zum Beispiel in DUMSTORFF UND MESCHKE (2007) sowie JÄGER U. A. (2008) im Rahmen der X-FEM implementiert und nach einem Vergleich mit anderen Verfahren zur Rissverfolgung als sehr gut bewertet, da die experimentellen Rissmuster sehr gut reproduziert werden konnten.

Ein weiterer globaler Ansatz ist das in DUMSTORFF UND MESCHKE (2007) entwickelte energiebasierte Rissausbreitungskriterium. Fortsetzungswinkel und Länge des neuen Rissegmentes ergeben sich aus Minimierung der totalen Energie des Körpers und werden als zusätzliche Unbekannte eingeführt. In einem iterativen Prozess wird gleichzeitig für die unbekanntenen Verschiebungen und Verschiebungssprünge sowie unbekanntene Risslängen und Fortsetzungswinkel gelöst. Bislang wurde dieses Vorgehen nur auf zweidimensionale Probleme angewendet. Eine dreidimensionale Erweiterung erfordert eine genaue Definition des Fortsetzungswinkels, der dann als Eulerwinkel die Orientierung im Raum beschreiben muss.

### 5.3.3 Lokale Rissverfolgungsstrategien

Lokale Rissverfolgungsstrategien sind sehr einfach, robust und zuverlässig wenn es darum geht, nur einen Riss zu verfolgen. Sie werden auch als Fortpflanzungsalgorithmen bezeichnet und als Verallgemeinerung zweidimensionaler Verfahren angesehen. Sollen mehrere Diskontinuitäten verfolgt werden, die sich möglicherweise gegenseitig beeinflussen und zusammenwachsen, führt der Algorithmus zu einer umständlichen Programmstruktur und zu einem erhöhten Implementierungsaufwand. Grundgedanke des Algorithmus ist es, die Rissfront mit Informationen zur Rissrichtung geometrisch fortzuführen und dabei elementweise ebene Risselemente einzubauen. Für den zweidimensionalen Fall stellt dieses Vorgehen kein Problem dar, da die Risslinie mit dieser Fortschrittsmethode immer eindeutig zu bestimmen ist, egal ob Dreiecks- oder Viereckselemente verwendet werden, siehe auch Abbildung 5.2 rechts unten. Von der Rissspitze auf der Elementkan-



**Abbildung 5.2:** Inkonsistenz bei hexaederweise ebenen Rissflächen und Eindeutigkeit bei 2D-Elementen.

te wird der Riss einfach in die vorgegebene Richtung weitergeführt. In 3D ist dies bei Einsatz von Hexaederelementen nicht mehr so einfach. Selbst wenn nur eine Risskante  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  (Abbildung 5.2 links oben) durch ein gerissenes Nachbarelement feststeht, kann entweder die Kontinuität oder die Rissnormale nicht erfüllt werden, da im Allgemeinen die Rissnormale nicht orthogonal zu der vorhandenen Risskante ist. Für die Skizze wurde angenommen, dass die schraffierte Fläche mit der Normalen  $\mathbf{n}_\sigma$  durch den Mittelpunkt der Risskante  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  verläuft. Bei zwei vorgegebenen Risskanten  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  und  $\mathbf{B} - \mathbf{C}$  (Abbildung 5.2 rechts oben) besteht bei ebenen Rissflächen in den einzelnen Hexaederelementen überhaupt keine Wahl, die Fläche wird dann nur durch die beiden Risskanten mit der Normalen  $\mathbf{n}_c = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) \times (\mathbf{B} - \mathbf{C})$  bestimmt. In Fällen, in denen drei Risskanten  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{B} - \mathbf{C}$  und  $\mathbf{C} - \mathbf{D}$  (Abbildung 5.2 rechts oben) aus benachbarten Elementen vordefiniert sind, ist die entstehende Fläche möglicherweise verwunden statt eben, da die drei Risskanten eventuell nicht in einer Ebene liegen. Für Tetraederelemente kann mit diesem lokalen Fortschreiten der Rissfläche trotz den beschriebenen Problemen eine kontinuierliche Rissfläche erzeugt werden. Sobald Risskanten von Nachbarelementen vorgegeben sind, ist dies jedoch nur durch Modifikation der Normalenrichtung realisierbar, was in AREIAS UND BELYTSCHKO (2005) erfolgreich umgesetzt wurde und später im Abschnitt 5.4.2 beschrieben wird. Die nötige Modifikation kann allerdings zu erheblichen Abweichungen der Rissnormale vom Spannungszustand führen.

Die konkurrierenden Aspekte von Risspfadkontinuität und Erfüllung der Risskriterien werden auch in DUAN U. A. (2009) aufgegriffen und behandelt. In dem Artikel wird eine elementlokale Level-Set-Methode vorgestellt, die für Hexaederelemente zu diskontinuierlichen Rissflächen führt. Die elementweise definierten Level-Set-Werte werden durch

eine Fehlerquadratminimierung berechnet, wobei die Rissnormale und die Kontinuität der Rissfläche zu den Nachbarelementen bestmöglich erfüllt werden. Mithilfe eines Parameters können die Kriterien stärker oder schwächer gewichtet werden. Im Gegensatz zur konventionellen Level-Set-Methode werden keine Geschwindigkeiten an der Rissfront benötigt und es können vielzählige Versagenskriterien verwendet werden.

Ein weiteres lokales Verfahren, das bewusst keine kontinuierliche Rissfläche liefern soll, ist die Methode kohäsiver Risssegmente. In den Arbeiten REMMERS U. A. (2003) und REMMERS (2006) werden kohäsive Segmente über mehrere Elemente reichend, an beliebigen Stellen mit frei wählbarer Orientierung eingefügt. Die Segmente können sich dabei überlappen und bilden eine gewollt diskontinuierliche Rissfläche, die bei diffusen Versagensbildern mit einer verteilten Rissbildung und vielen interagierenden Mikrorissen durchaus realitätsnah ist.

### 5.3.4 Nichtlokale Rissverfolgungsstrategien

In Anlehnung an die globale Rissverfolgung nach OLIVER U. A. (2002) wurde in FEIST UND HOFSTETTER (2006) sowie FEIST UND HOFSTETTER (2007) ein Algorithmus für Tetraederelemente vorgeschlagen, der nur in einem Teilgebiet der untersuchten Struktur angewendet wird. Dabei wird das skalare Feld  $\theta(\mathbf{x})$  nur in jenen Bereichen aufgestellt, die bereits von Diskontinuitäten oder Isoflächen aktiver Risspfade beeinflusst sind, also direkt vor der aktuellen Rissfront liegen. Ähnlich zur oben vorgestellten elementlokalen Level-Set-Methode wird der Riss von Element zu Element fortgeführt, wobei sich die unbekannt Knotenwerte der Pseudotemperaturverteilung  $\theta$  aus einem Minimierungsproblem ergeben. Ziel ist es, die Abweichung des Normalenvektors zur Isofläche vom Normalenvektor des Risskriteriums zu minimieren. Im Gegensatz zu DUAN U. A. (2009) sind die skalaren Knotenwerte global definiert, weshalb am Ende eine über Elementkanten kontinuierliche Rissfläche entsteht. Dieses Vorgehen der Rissverfolgung in Teilbereichen wird in der vorliegenden Arbeit für Hexaederelemente entsprechend fortgeführt und in Abschnitt 5.4.1 ausführlich behandelt.

Ein weiterer nichtlokaler Algorithmus, der allerdings keine kontinuierliche Rissfläche sicherstellen kann, wurde in GASSER UND HOLZAPFEL (2006) und GASSER (2007) vorgestellt. Mithilfe einer Fehlerquadratminimierung wird die existierende Rissfläche so glatt wie möglich weitergeführt. In einem Prädiktorschritt werden in einem neuen Risselement der Normalenvektor und ein Punkt der Rissfläche berechnet. In vielen Fällen passt die dadurch definierte Fläche jedoch nicht mit vorher bekannten Risspunkten zusammen, weshalb noch ein Korrektorschritt durchgeführt wird. Dabei werden zusätzlich Schnittpunkte der Rissfläche mit den Elementkanten genutzt, um die Rissfläche bestmöglich an diese Schnittpunkte anzugleichen. Wie bereits angedeutet, treten bei dieser  $C^{-1}$ -

kontinuierlichen Darstellung Sprünge zwischen den Rissflächen einzelner Elemente auf. Die Rissrichtung wird bei diesem Mittelungsprozess überhaupt nicht verwendet, was zu Verletzungen des Bruchkriteriums führen kann.

### **5.4 Rissverfolgungsstrategien zur Modellierung kontinuierlicher, beliebig gekrümmter Rissflächen**

Nach dem Überblick zu verschiedenen Rissverfolgungsstrategien werden nun jene Methoden vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit implementiert und getestet wurden. Bei der Rissmodellierung in Beton ist zu berücksichtigen, dass die Rissflächen sehr uneben und aufgrund der ausgeprägten Heterogenität nur im Schnitt senkrecht zur Hauptspannungsrichtung orientiert sind. Dieser Effekt kann jedoch für numerische Simulationen mit homogenisiertem Materialverhalten vernachlässigt und der Riss als abschnittsweise eben angenommen werden. Um bei den verwendeten achtknotigen Volumenelementen trotz der vorher dargestellten Problematik insgesamt eine beliebig gekrümmte und kontinuierliche Rissfläche zu erreichen, müssen bereits in den einzelnen Elementen gekrümmte Rissflächen möglich sein. Nur für Elemente, in denen ein Riss initiiert, wird eine ebene Fläche mit der Rissnormalen aus dem Hauptspannungskriterium durch den Volumenmittelpunkt geführt. In AREIAS UND BELYTSCHKO (2005) oder auch JÄGER U. A. (2008) wurde gezeigt, dass bei Verwendung von Tetraederelementen eine doppelt gekrümmte Rissfläche durch eine facettierte Fläche angenähert werden kann. Folglich werden die gerissenen Hexaederelemente zur Darstellung der gekrümmten Rissfläche und zur Integration der schwachen Form jeweils in sechs Untertetraeder geteilt, was bereits in MOËS U. A. (2002) für die Level-Set-Darstellung der Rissfront vorgeschlagen wurde und in Abbildung 5.5 links oben skizziert ist. Die entstehende Rissgeometrie wird als  $C^0$ -kontinuierliche Fläche angenähert und aus der Einheit aller Dreiecke und Vierecke, die jeden gerissenen Untertetraeder teilen, gebildet. Die Rissfront besteht aus geraden Liniensegmenten, die die Schnittpunkte der Rissfläche mit den Elementkanten verbinden. Weiterhin ist anzumerken, dass die Winkelabweichung zwischen den Normalen benachbarter Tetraederelemente, zur Vermeidung eines beliebigen Zick-Zack-Musters, unter einem bestimmten Wert gehalten werden sollte, vergleiche auch JÄGER U. A. (2008).

#### **5.4.1 Rissverfolgung mit Level-Sets in Teilbereichen**

Bei der Rissverfolgung mit der Level-Set-Methode in Teilbereichen handelt es sich um eine nichtlokale Rissfortschrittsmethode, bei der im Gegensatz zur gewöhnlichen Level-Set-Methode keine Hamilton-Jacobi-Gleichung zu lösen ist. Die Rissfläche wird in jedem

Element implizit durch eine vorzeichenbehaftete Abstandsfunktion definiert. Durch Interpolation der Knotenwerte  $\phi_I$  mit den trilinearen Formfunktionen  $N_I$  resultiert eine kontinuierliche Approximation der Rissfläche im Hexaederelement.

$$\phi(\mathbf{x}) \approx \phi^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_{\text{iel}}} N_I(\mathbf{x}) \phi_I \quad (5.6)$$

Der Normalenvektor  $\mathbf{n}_c$  zur Rissfläche ergibt sich aus Ableitung der Level-Set-Funktion  $\phi$  nach den globalen Koordinaten  $\mathbf{x}$ :  $\mathbf{n}_c = \nabla \phi = \partial \phi / \partial \mathbf{x} = \sum_{I=1}^{n_{\text{iel}}} \partial N_I / \partial \mathbf{x} \phi_I$ . Die zuvor in Abschnitt 5.3.1 vorgestellte Level-Set-Methode ist im Dreidimensionalen nicht direkt auf Probleme mit gekrümmten Rissen in kohäsiven Materialien übertragbar. Deshalb wird hier eine modifizierte Variante vorgestellt. Dabei bleiben die Level-Set-Werte an den Knoten bereits gerissener Elemente unverändert, während die zusätzlichen Knotenwerte mit einer Fehlerquadratminimierung bestimmt werden. Die Level-Set-Werte sind also nicht wie bei DUAN U. A. (2009) aus Kapitel 5.3.3 elementweise definiert, sondern es gibt pro Knoten nur einen globalen Wert, welcher für alle anliegenden Elemente gültig ist. Bei der folgenden Variante wird die Abweichung der Normalen  $\mathbf{n}^*$  von der Normalen  $\mathbf{n}_\sigma$  aus dem Risskriterium minimiert, wobei  $\mathbf{n}^*$  als Funktion der Knotenwerte  $\phi_I$  in Elementmitte bei  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$  ausgewertet wird.

$$\frac{1}{2} \left( \mathbf{n}_\sigma - \mathbf{n}^*|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}}(\phi_I) \right)^2 = \min \quad (5.7)$$

Ein Teil von  $\mathbf{n}^*$  ist bereits durch  $I_b$  gegebene  $\phi_I$ -Werte der gerissenen angrenzenden Elemente bekannt, der andere Teil des betrachteten Elements hängt von  $J_u$  zu bestimmenden  $\phi_J$ -Werten ab.

$$\mathbf{n}^* = \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{I=1}^{I_b} \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} \phi_I + \sum_{J=1}^{J_u} \frac{\partial N_J}{\partial \mathbf{x}} \phi_J \quad (5.8)$$

Die erste Variation des Ausdrucks

$$\frac{1}{2} \left( \mathbf{n}_\sigma - \sum_{I=1}^{I_b} \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} \phi_I - \sum_{J=1}^{J_u} \frac{\partial N_J}{\partial \mathbf{x}} \phi_J \right)^2 \Big|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} = \min \quad (5.9)$$

muss also verschwinden, was für beliebige Variationen  $\delta \phi_J$  auf ein Gleichungssystem der Größe  $J_u$  führt.

$$-\frac{\partial \mathbf{n}^*(\phi_I, \phi_J)}{\partial \phi_J} (\mathbf{n}_\sigma - \mathbf{n}^*(\phi_I, \phi_J)) = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

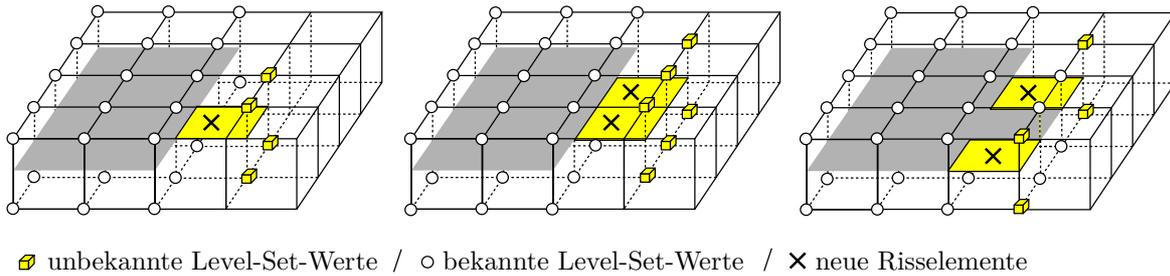
Der Term  $\mathbf{n}_{,\phi}^*$  nimmt nur konstante Werte an und wird über

$$\frac{\partial \mathbf{n}^*(\phi_I, \phi_J)}{\partial \phi_J} = \frac{\partial \left( \sum_{J=1}^{J_u} \frac{\partial N_J}{\partial \boldsymbol{\xi}} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mathbf{x}} \phi_J \right)}{\partial \phi_J} = (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}_{,\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{\phi})_{,\phi} \quad (5.11)$$

berechnet. Die Lösung des Problems (5.7) minimiert den Fehler in der Abweichung der Normalen  $\mathbf{n}^*$  von der Normalen  $\mathbf{n}_\sigma$  aus dem Risskriterium.

Gleichung (5.10) könnte für jedes neue Risselement separat aufgestellt und gelöst werden, wobei jeweils drei Bedingungen für die Komponenten der Rissnormale in Elementmitte zu erfüllen sind. Ist allerdings nur eine Risskante durch ein gerissenes Nachbarelement vorgegeben, sind nur vier der acht Level-Set-Werte bekannt, was auf ein nicht eindeutig lösbares, unterbestimmtes Gleichungssystem führt. Diese Situation ist in Abbildung 5.3 links skizziert. In 2D ist die Gleichung immer eindeutig lösbar, da es für die zwei unbekannt Werte genau zwei Bedingungen an die Normale gibt. Dies entspricht im Wesentlichen dem lokalen Fortschrittsalgorithmus aus Kapitel 5.3.3. Eine Möglichkeit der beschriebenen Situation in 3D zu entgehen besteht darin, mit der Einteilung in Untertetraeder fortzufahren und die Gleichung für jeden Untertetraeder in dem reißen Hexaeder aufzustellen und zu lösen. Pro Untertetraeder ist bei einer vorgegebenen Risskante nur ein Level-Set-Wert unbekannt, in dessen Berechnung Informationen aller drei Normalenkomponenten einfließen. Die Lösung des überbestimmten Problems führt gewöhnlich nicht zur exakten Erfüllung der Rissnormalen, nähert sie aber gut an. Der Rissfortschrittsalgorithmus in Teilbereichen aus den Arbeiten FEIST UND HOFSTETTER (2007) sowie FEIST (2004) basiert ebenfalls auf tetraederweisem Vorgehen. Die dort berechnete skalarwertige Funktion, deren Isoflächen alle potentiellen Diskontinuitäten repräsentieren, ist äquivalent zu der hier verwendeten Level-Set-Funktion. Der Unterschied zwischen beiden Funktionen liegt darin, dass bei der Level-Set-Funktion  $\phi$  nur der Nulllevel Rissflächen darstellt, bei der Pseudotemperaturverteilung  $\theta$  kann dagegen jeder Level eine Diskontinuität darstellen. Der Wert der skalaren Funktion spielt im zweiten Fall keine Rolle, sondern nur die Verteilung, welche die Form der Isoflächen bestimmt. Gleichung (5.10) wird nur für jene Teilbereiche in  $\Omega$  ausgewertet, die von aktiven Diskontinuitäten beeinflusst sind. Im Kontext der FEM sind das diejenigen Elemente, die bereits von einem aktiven Riss durchtrennt oder potentielle Kandidaten dafür sind. So werden nach Einführen neuer Risssegmente die Nachbarelemente, die eine angerissene Seitenfläche besitzen, als potentielle Risselemente markiert.

Alternativ kann das Gleichungssystem zur Bestimmung der Level-Set-Werte auch für alle Elemente, die in einem Laststeigerungsschritt reißen, auf einmal aufgestellt und gelöst werden. Wenn also beispielsweise zwei nebeneinanderliegende Elemente an der Rissfront reißen und sechs neue Level-Set-Werte zu bestimmen sind, siehe Abbildung 5.3 Mitte,



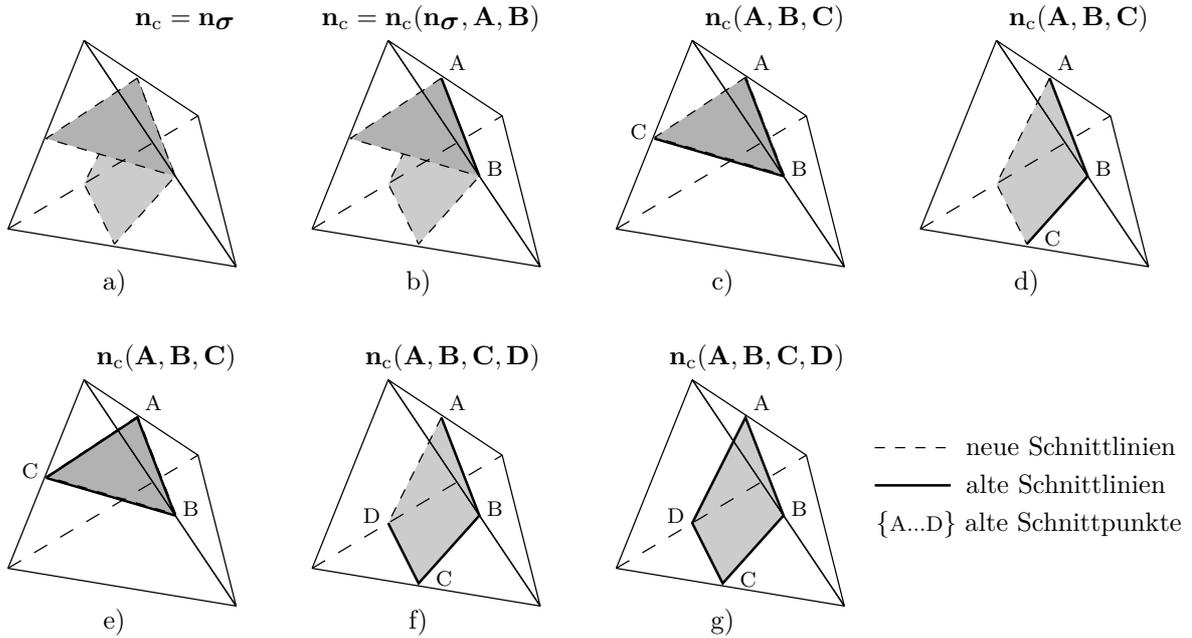
**Abbildung 5.3:** Unterscheidung verschiedener Fälle bei der Berechnung neuer Level-Set-Werte.

kann dies in einem Schritt erfolgen. Sind mehr Bedingungen vorhanden als freie Werte zu bestimmen, wird die Normale nur noch bestmöglich angenähert und entspricht im Zweifelsfall nicht der Normalen, die sich aus der nichtlokalen Hauptspannungsberechnung ergibt. Liegt ein unterbestimmtes Problem vor, wird wie oben beschrieben mit Untertetraedern fortgefahren. Reißen mehrere Elemente in einem Laststeigerungsschritt, die aber voneinander räumlich getrennt sind und keine gemeinsamen Seitenflächen besitzen (Abbildung 5.3 rechts), wird das Gleichungssystem nicht für alle zusammen aufgestellt, sondern nur für zusammenhängende Bereiche.

### 5.4.2 Lokale Rissfortpflanzung

Bei dieser Variante wird in jedem gerissenen Hexaederelement ein Algorithmus ähnlich dem aus AREIAS UND BELYTSCHKO (2005) angewandt. Die Hexaederelemente werden beim Reißen in sechs Untertetraeder geteilt und die Rissfläche Tetraeder für Tetraeder durch den Hexaeder geführt. Dabei entstehen je nach Anzahl und Lage bereits bekannter Risskanten unterschiedliche Konfigurationen, die in Abbildung 5.4 skizziert sind. Fall a) kann nur bei Rissinitiierung auftreten, ist in dieser Arbeit aber nicht von Bedeutung, da in diesem Fall die Rissfläche eben durch den Mittelpunkt des Hexaederelementes geführt wird. Bei Rissausbreitung sind die Fälle b) bis g) möglich. In den Fällen a) und b) kann, wie in Abbildung 5.4 skizziert, je nach Rissnormale  $\mathbf{n}_c$  entweder eine drei- oder viereckige Rissfläche entstehen. Für die Fälle c) bis g) ist die Normale bereits durch die Rissgeometrie in den Nachbartetraedern vorbestimmt. Deshalb wird erst überprüft, ob in den sechs Untertetraedern nicht zuerst einer der Fälle g) bis c) auftritt. Dabei berechnet sich die Rissnormale  $\mathbf{n}_c$  ausschließlich aus bekannten Schnittpunkten der Rissfläche in Nachbartetraedern mit den Tetraederkanten, wodurch Informationen des mechanischen Zustandes nicht berücksichtigt werden.

$$\mathbf{n}_c = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} - \mathbf{B}) \quad (5.12)$$



**Abbildung 5.4:** Rissfläche durch Untertetraeder mit Bedingungen an Kontinuität.

Nur im Fall b) muss die ermittelte Rissnormale  $\mathbf{n}_\sigma$  modifiziert werden, um eine kontinuierliche Rissfläche zu gewährleisten. Dafür wird die Normale  $\mathbf{n}_c$  in Abhängigkeit der Koordinaten bereits vorhandener Risspunkte  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sowie der Normalen  $\mathbf{n}_\sigma$  ermittelt.

$$\mathbf{n}_c = \mathbf{n}_\sigma - \mathbf{n}_p \quad \text{mit} \quad \mathbf{n}_p = \left[ \frac{\mathbf{n}_\sigma \cdot (\mathbf{A} - \mathbf{B})}{(\mathbf{A} - \mathbf{B})^2} \right] (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \quad (5.13)$$

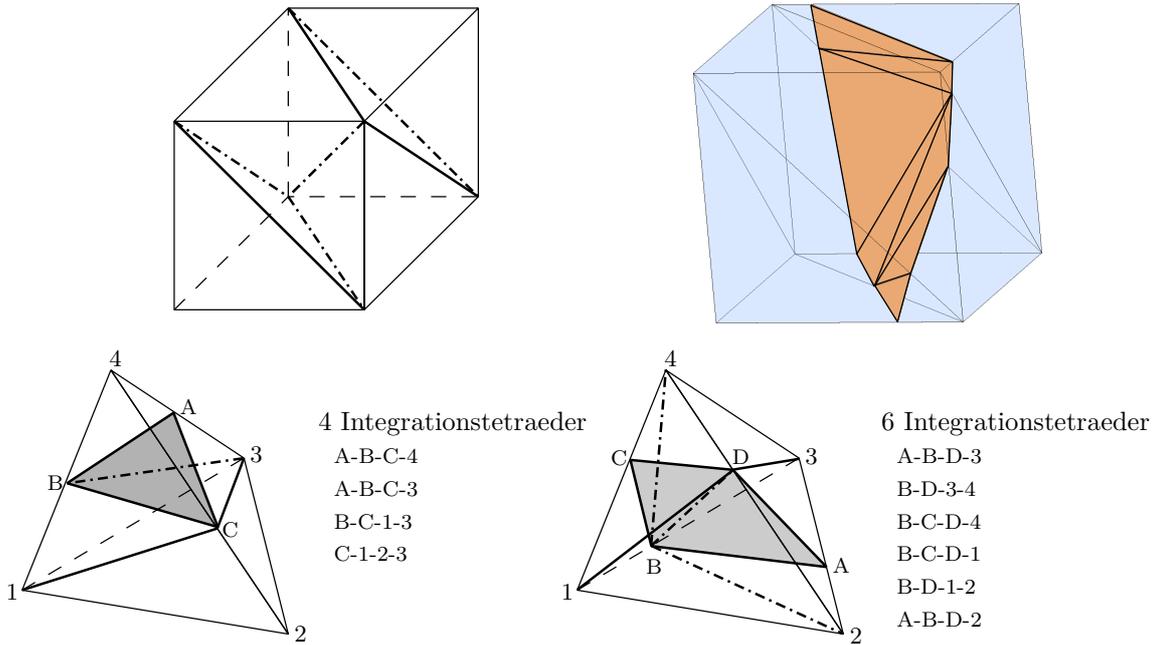
$\mathbf{n}_p$  stellt eine senkrechte Projektion der Rissnormalen  $\mathbf{n}_\sigma$  auf die Richtung der vorhandenen Risskante  $\mathbf{A} - \mathbf{B}$  dar. Der resultierende modifizierte Normalenvektor  $\mathbf{n}_\sigma - \mathbf{n}_p$  steht nach dieser Orthogonalisierung senkrecht auf  $(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ . Durch diese Modifikation der Rissnormalen in den einzelnen Untertetraedern können die in Abbildung 5.2 skizzierten Inkonsistenzen vermieden werden und es entsteht immer eine kontinuierliche Rissfläche. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, dass es bei grober Vernetzung der Risszone zu diskretisierungsabhängigen Risspfaden kommen kann, bei entsprechend feiner Vernetzung tritt dies nicht auf. Außerdem spiegelt die resultierende Rissfläche den Spannungszustand aufgrund geometrischer Zwänge womöglich nur schlecht oder überhaupt nicht wider.

Im Weiteren werden die modifizierte Level-Set-Methode in Teilbereichen sowie die lokale Rissfortpflanzung verwendet, wobei in beiden Verfahren die gerissenen Hexaederelemente in sechs Untertetraeder geteilt werden. Bei Verwendung der Level-Set-Methode wird

also immer die Einteilung in Tetraeder benutzt, unabhängig davon, wie viele Unbekannte zu ermitteln sind.

## 5.5 Integration und Visualisierung gerissener Elemente

Elemente mit Rissen und Grenzflächen erfordern eine gesonderte Behandlung bei der numerischen Auswertung der Steifigkeitsanteile. Über die durch eine Schnittfläche entstehenden, beliebig geformten Polyeder, kann nicht direkt mit einer Gauß-Quadratur numerisch integriert werden. Ist die Integration der diskontinuierlichen Funktion von der einer konstanten Funktion nicht zu unterscheiden, kann sich ein Rangabfall in den Systemgleichungen ergeben. Dies ist im Falle der Anreicherung mit der Vorzeichenfunktion möglich und tritt auf, wenn alle Integrationspunkte auf der gleichen Seite der Diskontinuität liegen. Deshalb muss die Integrationsregel angepasst werden, um den Beitrag zur Steifigkeit auf beiden Seiten der Diskontinuität korrekt auszuwerten. Dazu wird eine Aufteilung in integrierbare Elemente durchgeführt, welche die Grenz- oder Rissfläche als internen Rand berücksichtigt. Für die Integration der dreidimensionalen Risselemente wurden die Überlegungen für zweidimensionale Probleme aus MOËS U. A. (1999) sinngemäß weitergeführt. Die vorgestellte Integrationsregel gilt wohlgemerkt sowohl für Grenzflächen- als auch für Matrixrisse. Zur Integration werden gerissene Hexaederelemente in je sechs Untertetraeder eingeteilt und letztere wiederum für eine einheitliche Integration bei einer dreieckigen Rissfläche in vier weitere Integrationstetraeder zerlegt, bei einer viereckigen Rissfläche in sechs Integrationstetraeder. Diese Integrationstetraeder ergeben sich bei der lokalen Rissfortschrittsvariante (Kapitel 5.4.2) direkt im Algorithmus, bei der Level-Set-Variante (Kapitel 5.4.1) werden die Knotenwerte genutzt, um die Schnittpunkte der Rissfläche mit den Kanten der Untertetraeder zu bestimmen. Mit dieser Unterteilung ist wohlgemerkt keine Einführung neuer Freiheitsgrade verbunden. Eine typische Unterteilung in Integrationstetraeder für drei- bzw. viereckige Rissflächen ist in Abbildung 5.5 unten dargestellt. Die viereckige Rissfläche wird anschließend für eine einheitliche Integration der Steifigkeitsanteile über die Rissfläche in zwei Dreiecke A-B-D und B-C-D geteilt, die mit den Flächen der Integrationstetraeder übereinstimmen. Bei trilinearer Interpolation der Level-Set-Werte, wie sie bei materiellen Grenzflächen verwendet wird, kann es zu gekrümmten Rissflächen und zu Volumenelementen mit gekrümmten Seitenflächen kommen. In der vorliegenden Arbeit werden beide nur linearisiert verwendet. Die Wiederherstellung dieser gekrümmten Integrationselemente wird in MAYER U. A. (2009) besprochen. Darin werden die Hexaederelemente zuerst in sechs Untertetraeder aufgeteilt und ausgehend von den damit verbundenen, ebenen Flächen lassen sich die gekrümmten Integrationselemente wiederherstellen.



**Abbildung 5.5:** Oben: Aufteilung der Hexaeder in sechs Untertetraeder und Darstellung einer mit Facetten angenäherten, gekrümmten Rissfläche. Unten: Zerlegung eines Untertetraeders in vier bzw. sechs Integrationselemente.

Bei Verwendung der modifizierten Level-Set-Methode in Teilbereichen ergeben sich die Schnittpunkte der Rissfläche mit den Kanten der Untertetraeder aus der Bedingung, dass auf der Rissfläche, also auch an den Schnittpunkten, der Level-Set-Wert gleich Null ist. Für jede Hexaederkante ergibt sich der Schnittpunkt aus den Level-Set-Werten der anliegenden Knoten  $K$  und  $L$ , siehe auch SUKUMAR U. A. (2001).

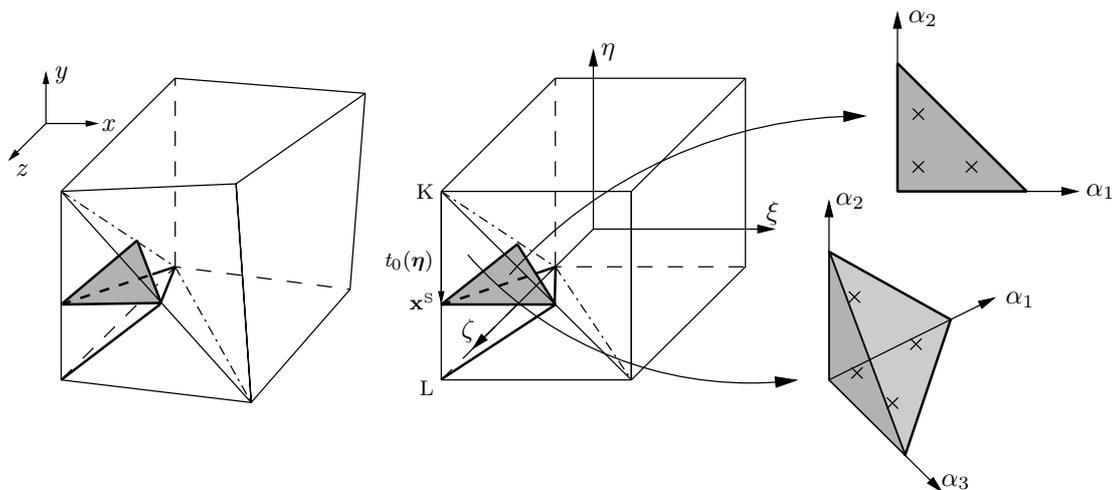
$$\mathbf{x}^s = \mathbf{x}_K + t_0(\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K) \quad \text{mit} \quad t_0 = -\frac{\phi_K}{\phi_L - \phi_K}, \quad t_0 \in [0,1] \quad (5.14)$$

Abhängig von der betrachteten Kante drückt  $t_0$  die Variabilität in einer der Elementkoordinaten  $\{\xi, \eta, \zeta\}$  aus. Für die Kanten der Untertetraeder, die diagonal in den Hexaederflächen liegen, ist die Berechnung des Schnittpunktes von allen vier Level-Set-Werten der Seitenfläche abhängig. Die Bestimmung von  $\mathbf{x}^s$  ist in dem Fall nur über die Lösung einer quadratischen Gleichung möglich. Beim Schnittpunkt der Raumdiagonalen mit der Rissfläche ist eine kubische Gleichung zu lösen. Die endgültige Rissfläche ergibt sich aus der Summe aller Dreiecke und Vierecke, wobei die letzteren, wie schon erwähnt, weiter aufgeteilt werden. Diese Rissflächenelemente werden im Postprocessing zur besseren Darstellung als zusätzliche Elemente eingefügt, während die dazugehörigen Hexaederelemente beibehalten werden. Für die dreieckigen Rissflächenelemente werden außer den Knotenverschiebungen zusätzliche Informationen wie Verschiebungssprung- und Span-

nungskomponenten ausgegeben. Eine mögliche gekrümmte Risskonfiguration innerhalb eines Hexaeders ist in Abbildung 5.5 rechts oben approximativ in facettierter Form dargestellt. Alternativ könnten die Hexaederelemente im Postprocessing eliminiert und durch entsprechende Tetraederelemente mit doppelten Knoten auf der Rissfläche ersetzt werden, was in JÄGER (2009) umgesetzt wurde.

Die Anzahl der Gaußpunkte pro Integrationstetraeder ist entsprechend der notwendigen Integrationsordnung zu wählen. Dabei ist zu beachten, dass für den Fall einer materiellen Grenzfläche je nach Rissorientierung im Element ein Polynom 12. Ordnung zu integrieren ist. Dies ergibt sich aus der Anreicherung des Verschiebungsfeldes mit dem Term  $\chi_{m,i} \mathbf{N}_b \mathbf{b}$ , der die Polynomordnung in der Steifigkeitsmatrix entsprechend erhöht. In den Elementsteifigkeitsmatrizen (2.42) und den Elementlastvektoren (2.38) sind infolge der Anreicherung zusätzliche Terme, zum Teil über die Rissfläche hinweg, zu integrieren. Da die Rissfläche als abschnittsweise eben definiert wird, können die gebräuchlichen 2D-Integrationsregeln für Dreiecke verwendet werden. Für die Integration über die Rissfläche und die Teilgebiete auf beiden Seiten der Diskontinuität sind mehrere Koordinatentransformationen erforderlich. So müssen zum Einen die in globalen Koordinaten  $\mathbf{x}$  definierten Integrationsgebiete aller Elemente auf die Elementkoordinaten  $\boldsymbol{\xi}$  transformiert werden, da die zu integrierenden Terme darin ausgedrückt sind. Zum Anderen muss für gerissene Elemente zusätzlich das Integrationsgebiet zerlegt und den Integrationselementen angepasst werden. Im Rahmen dessen müssen auch die Koordinaten  $\boldsymbol{\alpha}$  der Gaußpunkte in den Integrationselementen im lokalen Koordinatensystem  $\boldsymbol{\xi}$  des Hexaeders bestimmt werden. Eine Darstellung der globalen und lokalen Koordinatensysteme findet sich in Abbildung 5.6, wobei die Rissfläche und die Unterteilung in Integrationstetraeder nur für einen der sechs Untertetraeder gezeigt wird. Bei der Integration über die Flächen und Volumen werden die gekennzeichneten Gaußpunkte verwendet. Weitere Koordinatentransformationen sind bei Ermittlung der lokalen Verschiebungssprünge  $[[\mathbf{u}]]_{c,j}$  aus den Knotenfreiheitsgraden  $\mathbf{c}_j$  und der Projektion der Spannungen  $\mathbf{t}$  im kohäsiven Riss zurück ins globale Koordinatensystem durchzuführen.

Eine weitere Möglichkeit ist die Gauß-Integration nach einer Octree-Zerlegung, bei der das Ausgangselement so weit hierarchisch verfeinert wird, bis mit allen Gaußpunkten eines Unterelements ein Materialtyp bzw. eine Seite des Risses assoziiert ist, siehe SUKUMAR U. A. (2001). Diese rekursive Verfeinerung in nichtkonforme Zellen erfordert eine variable Anzahl an Integrationspunkten und kann sehr aufwendig werden. In einem weiteren Ansatz aus VENTURA (2006) wird die Unterelementierung gänzlich vermieden. Dabei wird die Integration mithilfe der Standard-Gaußformeln nach einer Umformung des Integranden in eine kontinuierliche, polynomiale Funktion exakt durchgeführt. Diese Methode ist sehr stark an die Level-Set-Darstellung der Diskontinuität gebunden, da das äquivalente Polynom in diesen Werten definiert wird. Für Dreiecks- und Tetraederelemente reproduziert das Integral exakt die diskontinuierlichen Funktionen der X-FEM.

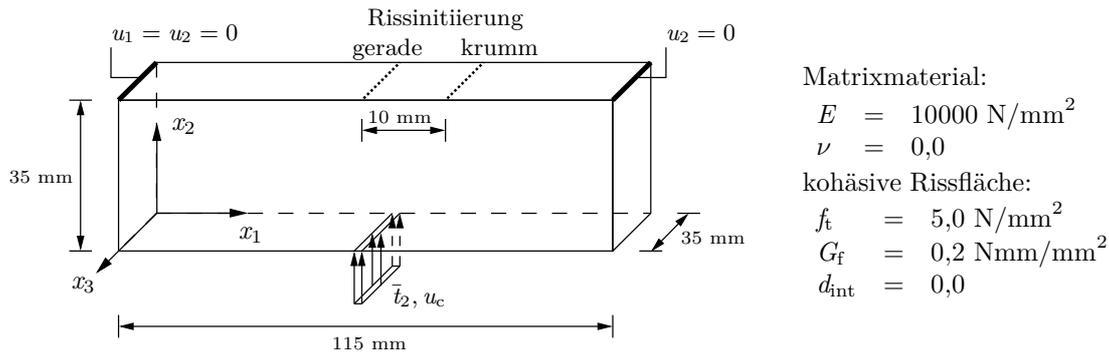


**Abbildung 5.6:** Globales Koordinatensystem  $\mathbf{x}$ , lokaler Parameterraum  $\xi$  eines Hexaederelementes mit Schnittpunkt  $\mathbf{x}^s$  auf Kante K-L und Integrationselemente mit Gaußpunkten eines einzelnen gerissenen Untertetraeders im Parameterraum  $\alpha$ .

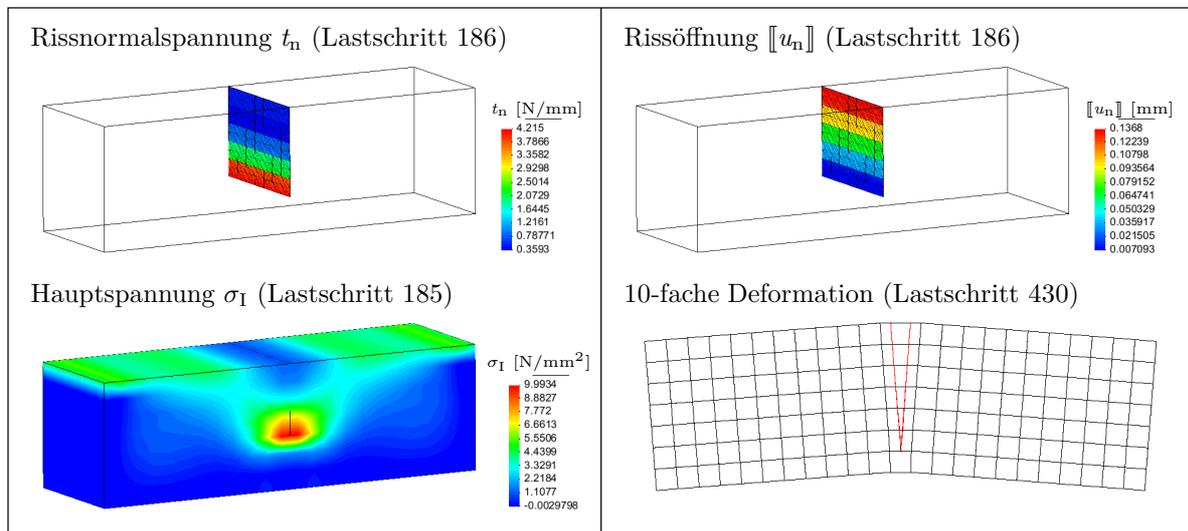
In HOLDYCH U. A. (2008) wird eine Integrationsregel mit unveränderlicher Anzahl fest verteilter Integrationspunkte präsentiert, bei der nur noch die Gewichtungen der Integrationspunkte kontinuierlich von den Level-Set-Werten der Knoten abhängen. Für die in dieser Arbeit verwendeten Hexaederelemente wurden allerdings keine Untersuchungen durchgeführt.

## 5.6 Modellbeispiel Dreipunktbiegebalken

Im folgenden Modellbeispiel wird ein Dreipunktbiegebalken mit zwei verschiedenen Rissinitiationspositionen untersucht. Dabei entstehen in den zwei betrachteten Fällen entweder ein gerader oder ein einfach gekrümmter Riss, was prinzipiell auch mit einem zweidimensionalen Modell untersucht werden kann. Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter des Balkens sind in Abbildung 5.7 angegeben. Zwei Randkanten sind wie dargestellt gelagert, die Last  $\bar{t}_2$  wird symmetrisch in Balkenmitte als Flächenlast über eine Elementbreite aufgebracht. In einer quasistatischen Berechnung unter Verschiebungskontrolle wird die Verschiebung  $u_c$  inkrementell in jedem Lastschritt um 0,001 mm gesteigert. Für die Rissinitiation werden die entsprechenden äußeren Elementreihen etwas geschwächt. Es werden zwei unterschiedliche Elementunterteilungen betrachtet, wobei jedes Element der groben Diskretisierung im Rissbereich eine Kantenlänge von 5 mm hat, bei der feineren Variante 2,5 mm.

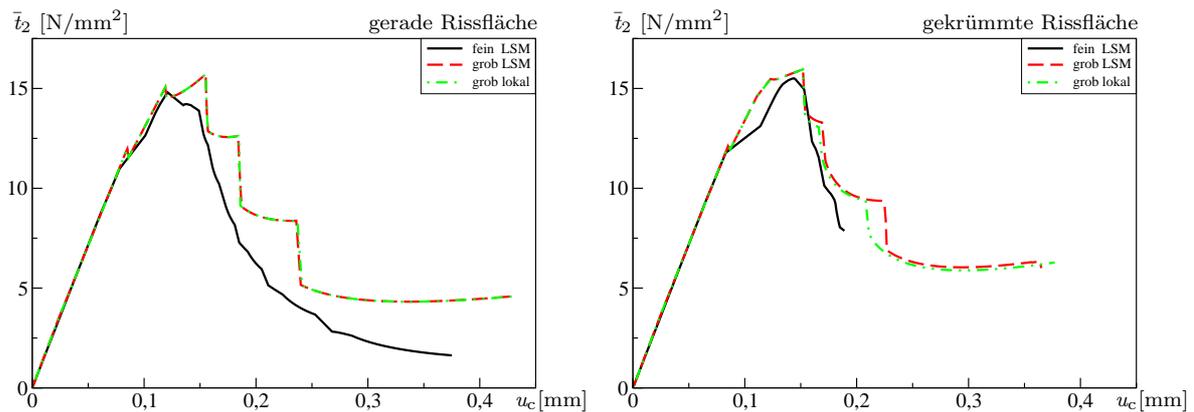


**Abbildung 5.7:** Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter des Dreipunktbiegebalkens mit zwei Rissinitiierungspositionen.



**Abbildung 5.8:** Rissöffnung, Rissnormalspannung und Hauptnormalspannung im Lastschritt 186 und deformierte Struktur vor totalem Versagen.

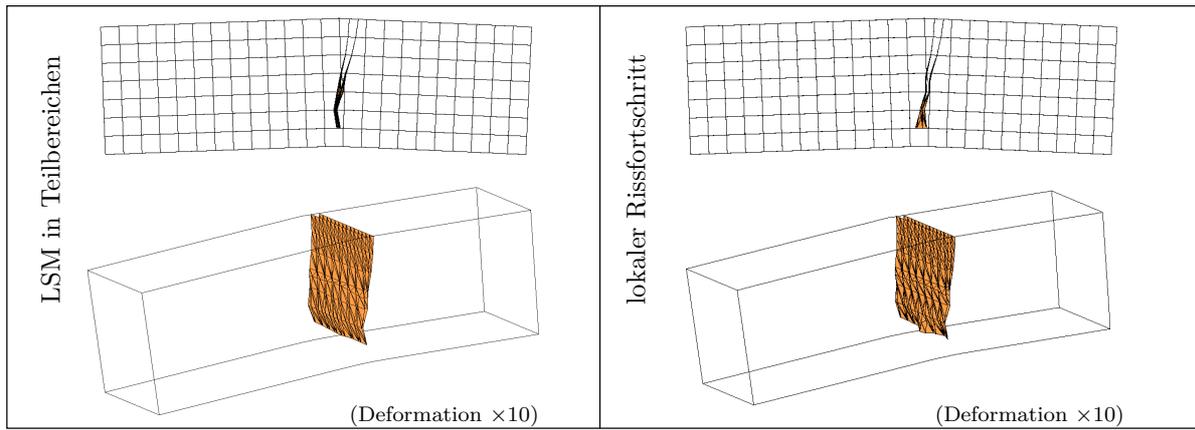
Im ersten Fall der mittigen Rissinitiierung wächst der Riss in einer ebenen Fläche durch den gesamten Balken. Dabei öffnet sich der Riss stetig in Normalenrichtung, so dass die deformierte Figur eine keilförmige Rissöffnung über den Balken aufweist, siehe Abbildung 5.8 rechts unten. Beide untersuchten Rissverfolgungsstrategien aus den Abschnitten 5.4.1 und 5.4.2 erzielen für diese einfache Konfiguration fast identische Ergebnisse, weshalb in Abbildung 5.8 nur die Ergebnisse der modifizierten Level-Set-Methode in Teilbereichen für das grobe Netz dargestellt werden. Zu sehen sind die Rissnormalöffnung  $[[u]]_n$  und Normalspannung  $t_n$  in der Rissfläche zum Lastschritt 186 sowie die Verteilung der Hauptnormalspannung  $\sigma_I$  im Schritt 185 vor Weiterführung der Rissfront um eine Elementreihe.



**Abbildung 5.9:** Last-Verschiebungs-Kurven des Dreipunktbiegebalkens bei gerader und gekrümmter Rissfläche.

Die Last-Verschiebungs-Kurven beider Diskretisierungen verhalten sich wie in Abbildung 5.9 links zu sehen ähnlich, wobei die der feinen Diskretisierung insgesamt glatter verläuft. Dies kommt daher, dass sich der Riss bei der feineren Diskretisierung öfters in kleineren Inkrementen ausbreitet und dabei jeweils weniger Energie dissipiert wird als beim Reißen durch ein größeres Element. Für die grobe Diskretisierung sind Punkte des Rissfortschritts am steilen Abfall der Last-Verschiebungs-Kurven zu erkennen. Der Rissfortschritt findet innerhalb weniger Lastschritte über die gesamte Balkenbreite statt. Danach kann die Last jeweils durch Umlagerungen in ungeschädigte Bereiche ein wenig gesteigert werden, bevor es zu erneutem Rissfortschritt kommt. Es sei angemerkt, dass der gezackte Verlauf sehr stark von der Bruchenergie abhängt. Ist diese sehr klein, z.B.  $G_f = 0,05 \text{ Nmm/mm}^2$ , kann in den ungeschädigten Bereichen mehr Last übernommen werden, als Energie durch weitere Rissöffnung dissipiert wird, was sich in einem starken Anstieg nach jedem Lastabfall äußert. Ist sie hingegen groß, z.B.  $G_f = 0,5 \text{ Nmm/mm}^2$ , fällt die Last auch nach Rissfortschritt kontinuierlich weiter ab, da mehr Energie durch Rissöffnung dissipiert wird als durch zusätzlich Lastaufnahme aufgebaut werden kann.

Um einen gekrümmten Rissverlauf zu erzielen, wird die geschwächte Elementreihe im Dreipunktbiegebalken nun mit 10 mm Abstand zur Mitte angeordnet. Für dieses Beispiel mit exzentrischer Rissinitiierung liefern beide Rissfortschrittmethoden leicht unterschiedliche Ergebnisse, die anhand der entstehenden Rissflächen diskutiert werden. Abbildung 5.10 zeigt die deformierten, gerissenen Balken in 10-facher Überhöhung. Der lokale Rissverfolgungsalgorithmus liefert eine scheinbar weniger glatte Rissfläche als die modifizierte Level-Set-Methode in Teilbereichen mit größeren Ausreißern aus einem glatten Risspfad vor allem im unteren Bereich des Balkens. Die Last-Verschiebungs-Kurve ist in Abbildung 5.9 rechts für die gekrümmte Rissfläche zu sehen. Im Vergleich zur geraden Rissfläche kann eine höhere Traglast erzielt werden, da die gekrümmte Fläche



**Abbildung 5.10:** Geöffnete gekrümmte Rissfläche für beide Rissfortschrittsalgorithmen.

auch auf Schub beansprucht wird und sich etwas verhakt. Die vorherigen Bemerkungen zum gezackten Verlauf gelten auch für diesen Fall.



---

## Zweiskalenmodell mit starker Kopplung

---

### 6.1 Einführung

Das Strukturverhalten und die Versagensprozesse vieler heterogener Materialien des Ingenieurwesens werden durch verschiedene unelastische Phänomene auf unterschiedlichen Skalen beschrieben. Versagensmechanismen, die sich auf einer feinen Skala, beispielsweise im  $\mu\text{m}$ -Bereich, entwickeln, haben oft einen großen Einfluss auf das makroskopische Verhalten der untersuchten Struktur, deren charakteristische Länge im cm-Bereich liegen kann. Schädigungsbeginn und -fortschritt finden auf verschiedenen, miteinander gekoppelten Skalen statt, weshalb das Versagen an sich ein mehrskaliges Phänomen ist. Im Grunde sind alle Materialien auf einer beliebig kleinen Skala heterogen, weshalb physikalische Vorgänge der Feinskala bei der Entwicklung zuverlässiger Verhaltensmodelle in der grobskaligen Formulierung zu berücksichtigen sind. Heutzutage kommen komplex geformte Strukturen und Verbundwerkstoffe mit mehrskaligem Charakter immer häufiger für Anwendungen in Hochleistungsbereichen zum Einsatz, weshalb ihre mehrskaligen Versagensprozesse zuverlässig wiederzugeben sind.

Die Verwendung von Mehrskalenmethoden ist sinnvoll, wenn die feine Skala viel kleiner als die grobe Skala des Problems ist. In diesen Fällen ist es nicht möglich, die Mikroeffekte im gesamten Untersuchungsgebiet fein aufzulösen, denn solch mikroskopische Berechnungen sind oft komplex und aufgrund der sehr großen Anzahl an Freiheitsgraden und den damit verbundenen Rechenzeiten zu aufwändig. Mehrskalenmethoden machen solche Berechnungen durchführbar, in denen die charakteristischen Eigenschaften des mikroskopischen Materialaufbaus abgebildet werden. Sie ermöglichen den Transfer detaillierter Kenntnisse über materiellen Aufbau und Versagensmechanismen von der Mikroskala auf die Makroskala. Dabei werden makro- und mikroskopische Modelle miteinander gekoppelt, um die Vorteile der Einfachheit und Effizienz der Makromodelle sowie die Genauigkeit der Mikromodelle auszunutzen. Das Ziel der Mehrskalenmetho-

den liegt also in der Reduktion des Rechen- und Speicheraufwands im Vergleich zu einer feinskaligen Lösung im gesamten Gebiet sowie in einer gleichzeitig möglichst genauen Vorhersage der globalen Antwort.

Die Untersuchungen numerischer Simulationen können sich auf verschiedene Beobachtungsebenen beziehen. Liegt das Hauptaugenmerk auf dem gesamten Strukturverhalten, erfolgen die Untersuchungen auf der Makroskala, deren charakteristische Größe den Strukturabmessungen entspricht. Sollen die Struktureffekte vernachlässigt und stattdessen feinskalige Effekte wie das Entstehen und Wachsen kleiner Risse abgebildet werden, wird die Mikroskala herangezogen. Die Größenordnung dieser Skala kann als charakteristische Länge der Heterogenitäten angenommen werden. Alternativ können sich Untersuchungen auch auf die Mesoskala beziehen, welche einen guten Kompromiss zwischen Genauigkeit und Effizienz darstellt. Im Rahmen des betrachteten Zweiskalenmodells werden nur die Begriffe makro und mikro verwendet, wobei mit Makroskala immer die grobe Skala entsprechend den Strukturabmessungen bezeichnet wird und mit Mikroskala immer eine feinere Skala, unabhängig von ihren Abmessungen im physikalischen Raum.

Liegen sehr große Unterschiede in den charakteristischen Längen  $L_{\text{grob}}$  und  $L_{\text{fein}}$  der Makroskala bzw. Mikroskala vor, kann die Annahme der Skalenseparation mit vollständig voneinander getrennten Skalen getroffen werden (NEMAT-NASSER UND HORI 1999). Damit ist die Idee verbunden, dass die grobskaligen Feldgrößen in einem repräsentativen Ausschnitt der Mikrostruktur konstant sind. Die im Fokus dieser Arbeit liegenden kohäsiven Reibungsmaterialien weisen ein weit ausgedehntes Versagen auf, das sich über große Teile des Untersuchungsgebietes in mechanischer Entfestigung und diskreten Rissen äußert. In diesem Fall kann nicht mehr von einer Skalenseparation ausgegangen werden, welche die Basis der in Abschnitt 6.2.1 angeführten Homogenisierungsmethoden ist. Stattdessen können superpositionsbasierte Mehrskalmethoden zum Einsatz kommen. In diesem Kapitel wird eine effiziente Lösungsmethode vorgestellt, die den physikalisch begründeten, mehrskaligen Charakter der auftretenden Schädigungsphänomene ausnutzt. Es wird ein hierarchisches Zweiskalenmodell zur mechanischen und numerischen Modellierung makroskopischer Strukturen unter direkter Berücksichtigung mikroskopischer Phänomene formuliert. Das vorgestellte Modell stellt eine Erweiterung des Modells aus HUND (2007) und HUND UND RAMM (2007) auf den dreidimensionalen Raum dar und basiert auf der Anreicherung der gewöhnlichen Lösung mit einer feinskaligen Komponente. Es soll insbesondere der methodische Aspekt der Arbeit betont werden, weshalb die Lösung großformatiger Problemstellungen nicht im Vordergrund steht. Der entwickelte Algorithmus kann als volumenkoppelnde, simultane Lösungsstrategie bezeichnet werden. Hierin ist es wichtig, die Effizienz gegenüber einer Feinskalenlösung zu erhöhen, ohne dabei an Genauigkeit zu verlieren.

Der folgende Abschnitt soll einen Überblick zu verschiedenen Mehrskalenmethoden geben, um die verwendete Formulierung in die vorhandenen Methoden zur Lösung mehrskaliger Strukturprobleme einordnen zu können. Danach wird das Zweiskalenmodell aufgearbeitet und die Spezifikationen für die dreidimensionale Modellierung diskutiert.

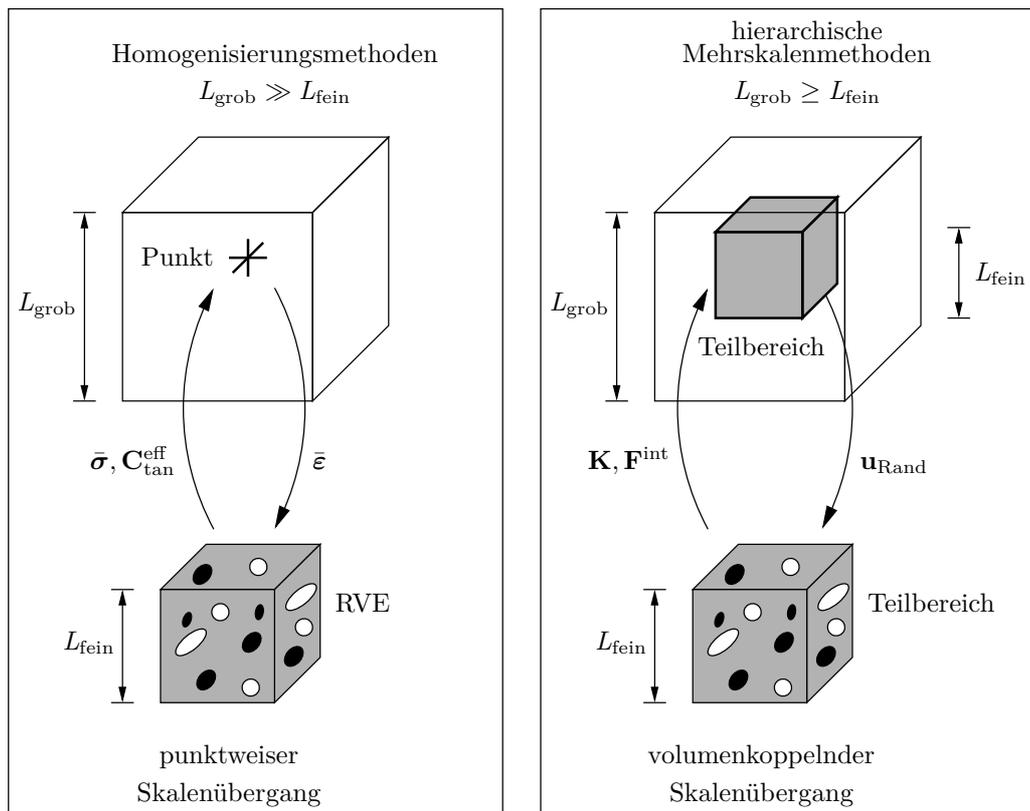
## 6.2 Überblick zur Mehrskalenmodellierung

Mehrskalenmethoden können grundsätzlich in zwei Gruppen klassifiziert werden, je nachdem, ob die Annahme der Skalenseparation gültig ist oder nicht. Diese Annahme kann allerdings im Laufe der Beanspruchung ihre Gültigkeit verlieren. Homogenisierungsmethoden werden verwendet, wenn die Annahme der Skalenseparation zutrifft und der Skalenübergang punktweise erfolgen kann. Ist dies nicht möglich, kommen hierarchische Mehrskalenmethoden mit einem volumenverbindenden Skalenübergang zur Anwendung, siehe auch Abbildung 6.1 für eine schematische Veranschaulichung.

### 6.2.1 Homogenisierungsbasierte Mehrskalenmethoden

Bei homogenisierungsbasierten Methoden wird das heterogene Material auf der Mikroskala durch ein homogenes effektives Ersatzmaterial, im Sinne einer idealisierten Beschreibung als Kontinuum, ersetzt. Durch Mittelungsbildung charakteristischer Feldgrößen über ein statistisch repräsentatives Volumenelement (RVE) der Mikrostruktur werden die konstitutiven Eigenschaften des Ersatzmaterials bestimmt, siehe beispielsweise HILL (1963), HASHIN (1983) oder NEMAT-NASSER UND HORI (1999). Für jeden Punkt des Kontinuums ist solch ein materielles Volumenelement definiert, das genug Heterogenitäten umfassen muss, um statistisch repräsentativ zu sein. Der Skalenübergang erfolgt punktweise, wie in Abbildung 6.1 links dargestellt. Das Spannungs-Verzerrungsverhalten eines infinitesimalen Punktes auf der Grobskala wird durch das Verhalten des RVE beschrieben, für welches eine Reihe von Randwertproblemen mit verschiedenen Testlasten zu lösen ist.

Bisher wurde eine Vielzahl von Theorien entwickelt, um das makroskopische Materialverhalten abzubilden. Bei elastischem Verhalten und kleinen Deformationen existieren teils analytische Lösungen zur Ermittlung effektiver Materialtensoren, ansonsten werden numerische Verfahren wie Mischungsregeln oder andere Näherungen verwendet. Insbesondere Homogenisierungsmethoden basierend auf einem RVE haben sich für lineares Materialverhalten seit langer Zeit etabliert. Aktuelle Forschungsaktivitäten untersuchen numerische Aspekte der Homogenisierung, wobei in den letzten Jahrzehnten vor allem Theorien für nichtlineare Materialantworten immer ausgereifter wurden. Einen um-



**Abbildung 6.1:** Unterschiede beim Skalenübergang zwischen homogenisierungsbasierten und hierarchischen Mehrskalmethoden, nach HUND (2007).

fassenden Überblick zur computerorientierten Homogenisierung findet sich in NEMAT-NASSER UND HORI (1999) sowie ZOHDI UND WRIGGERS (2001).

Eine Variante homogenisierungsbasierter Methoden ist die ungekoppelte numerische Homogenisierung. Zweck dieses Verfahrens ist es, Ersatzigenschaften des heterogenen Materials zu bestimmen und daraus ein grobskaliges Werkstoffgesetz zu formulieren, vergleiche SUQUET (1987) und ZOHDI U. A. (1998). Der Vorteil ungekoppelter Homogenisierungsverfahren besteht darin, dass die Bestimmung der Ersatzigenschaften nur ein einziges Mal durch Auswertung unabhängiger Belastungszustände am RVE vorgenommen werden muss. Bei nichtlinearen Problemen ist die Herleitung makroskopischer Werkstoffgesetze aus dem mechanischen Verhalten des RVE schwierig. Durch Einführen interner Variablen zur phänomenologischen Erfassung nichtlinearer Vorgänge auf der feinen Skala, womit gleichzeitig Annahmen über das nichtlineare makroskopische Verhalten getroffen werden, können diese Schwierigkeiten gelöst werden. So konnten in DÖBERT (2001) mittels einer Parameteridentifikation die effektiven Materialparameter und internen Variablen bestimmt und mit der numerisch effektiven Antwort des RVE in Bezug gesetzt werden.

Kann kein adäquates, effektives Werkstoffgesetz für die Grobskala gefunden werden, kommen numerisch gekoppelte Homogenisierungsverfahren zum Einsatz. Dabei wird auf die Formulierung eines grobskaligen Materialmodells in geschlossener Form und somit auf die Berechnung homogenisierter Materialparameter verzichtet, siehe SCHRÖDER (1996) oder MIEHE UND KOCH (2002). Mittels einer sogenannten Mikro-Makro-Modellierung wird an jedem Integrationspunkt der Grobskala zu jedem Belastungszustand ein lokales, nichtlineares Randwertproblem mit detaillierter Mikrostrukturmodellierung im RVE gelöst. Die momentan effektiven Spannungen und die effektive Materialtangente der Grobskala ergeben sich durch Homogenisierung der entsprechenden Größen im RVE. Dieses Verfahren weist viele Vorteile auf. So sind keine Annahmen bezüglich des konstitutiven Modells auf der Makroskala notwendig, wodurch beliebiges Materialverhalten abbildbar ist. Insbesondere können große Deformationen sowohl auf Mikro- als auch auf Makroebene behandelt werden. Einen weiteren Vorteil bietet die Berücksichtigung detaillierter Informationen der Mikrostruktur in der Makroanalyse. Ein erheblicher Nachteil besteht jedoch darin, dass dieses Verfahren wesentlich aufwändiger ist als die ungekoppelte Homogenisierung. Für die Lösung des Randwertproblems in den RVEs und auf der Grobskala können beliebige Verfahren verwendet werden. So unterscheiden sich die in der Literatur vorgestellten Methoden vor allem in den Modellen, die auf den verschiedenen Ebenen benutzt werden. Als eine unter vielen Varianten sei die sogenannte  $FE^2$ -Methode erwähnt, die sowohl auf der groben Strukturskala als auch auf der feinen Skala ein FE-Modell verwendet, siehe beispielsweise MIEHE UND KOCH (2002) oder FEYEL (2003). Eine weitere Form der Homogenisierung repräsentiert die Homogenisierung zweiter Ordnung. Dazu zählt die Arbeit KOUZNETSOVA U. A. (2002), in der ein gradientenerweitertes Homogenisierungsverfahren vorgestellt wird, mit dem sich auch mikromechanische Größeneffekte und hohe Gradienten der makroskopischen Größen abbilden lassen.

Während eines Homogenisierungsverfahrens werden die im Folgenden beschriebenen Schritte durchgeführt. Zuerst muss das RVE definiert werden, wobei darauf zu achten ist, dass es statistisch repräsentativ ist. Es muss also groß genug sein, um genügend Informationen der Mikrostruktur zu beinhalten, und gleichzeitig klein genug, um noch als Punkt der Grobskala aufgefasst werden zu können. Im nächsten Schritt müssen geeignete Randbedingungen, die den Belastungszustand auf der Grobskala widerspiegeln, an das RVE übermittelt werden. Dazu werden zumeist Verschiebungs-, Spannungs- oder periodische Randbedingungen auf das RVE aufgebracht. In diesem Schritt des Skalenübergangs werden Informationen von der Grob- zur Feinskala transferiert. Danach wird das Randwertproblem im RVE gelöst und die effektiven Variablen durch Mittelung berechnet. Die Homogenisierung der Informationen der feineren Skala stellt den Skalenübergang von der Fein- zur Grobskala dar.

In letzter Zeit wurden auch einige Ansätze für die mehrskalige Versagensmodellierung fortschreitender Risse vorgeschlagen, darunter auch Kopplungen der X-FEM mit Mehrskalmethoden. So wurde in WYART U. A. (2008) und GUIDAULT U. A. (2008) eine mehrskalige, erweiterte Finite-Elemente-Methode verwendet, welche die Mikro-Makro-Methode aus LADEVÈZE U. A. (2001) mit der X-FEM verbindet. Die Mikro-Makro-Methode basiert auf der Zerlegung des Gebietes in Substrukturen und Kopplungsflächen sowie der Zerlegung des betrachteten Zeitintervalls. Mithilfe der LATIN-Methode (LADEVÈZE 1999) wird das entstehende Mehrskalproblem effizient gelöst. Eine weitere Methode, die Homogenisierungstechniken mit diskreter Rissmodellierung koppelt, ist die in LÖHNERT UND BELYTSCHKO (2007) eingeführte Mehrskal-Projektionsmethode, die später in LÖHNERT UND MÜLLER-HOEPPE (2008) auf dreidimensionale Berechnungen erweitert wurde. Darin wird der Einfluss von Mikrorissen an der Spitze eines Makrorisses auf die Entwicklung des Makrorisses untersucht. Im feinskaligen Modell wird die Interaktion der Mikro- und Makrorisse detailliert modelliert, um die Antwort auf die grobe Skala zu projizieren, welche somit Effekte der Mikrorisse berücksichtigt. Die feinskaligen Berechnungen können dabei unabhängig voneinander durchgeführt werden. Auch die kürzlich in den Arbeiten BELYTSCHKO U. A. (2008) und BELYTSCHKO UND SONG (2010) entwickelte MAD-Methode (multiscale aggregating discontinuities) behandelt die Auswirkungen von Mikrorissen auf die Makroskala mit Homogenisierungsmethoden. Auf Basis perforierter Einheitszellen, welche materielle Instabilitäten auf der Mikroskala ausschließen, können äquivalente Diskontinuitäten in der groben Skala eingeführt werden. Informationen zu Richtung und Größe der Diskontinuität werden zusammen mit den Spannungen in der Einheitszelle an das Makroelement übergeben. Wie der Name der Methode bereits andeutet, werden bei diesem Verfahren mehrere Diskontinuitäten in der Einheitszelle zu einer einzelnen Diskontinuität in der Grobskala vereinigt.

### **6.2.2 Mehrskalmethoden mit volumenkoppelndem Skalenübergang**

Mehrskalmethoden mit einem volumenkoppelnden Skalenübergang werden eingesetzt, wenn die Annahme der ausreichenden Skalenseparation nicht gültig ist. So können beispielsweise sich auf der Mikroskala initiierte Versagenszonen während der Belastungsgeschichte zu makroskopischen Phänomenen wie schmalen Lokalisierungszonen oder diskreten Rissen entwickeln. Weitere skalenübergreifende Phänomene sind Schockfronten bei dynamischen Prozessen sowie turbulente Strömungen. Insbesondere aufgrund der Entwicklung leistungsfähiger Verbundwerkstoffe lassen sich die Skalen häufiger nicht mehr komplett voneinander trennen. Ist die Skalenseparation nicht gültig, sollten die mehrskaligen Phänomene auf beiden Skalen explizit modelliert werden. Das heißt die Mikrostruktur ist in Teilbereichen des Untersuchungsgebiets durch hierarchisches Verfei-

nern genau aufzulösen und auf den relevanten Skalen sollten Modelle eingesetzt werden, welche die wesentlichen Mikroeffekte genau abbilden können. Dabei ist es grundsätzlich möglich, in Regionen unterschiedlicher Auflösung verschiedene Modelle zu verwenden. Im Folgenden werden einige hierarchische Mehrskalenmethoden vorgestellt.

Die in den Arbeiten HUGHES (1995) und HUGHES U. A. (1998) entwickelte variationsbasierte Mehrskalenmethode (VMS) stellt die methodische Grundlage für eine effektive Mehrskalenmethode zur Lösung einer Vielzahl von Mehrskalenproblemen in der Struktur- und Fluidmechanik bereit. Grundidee ist, dass die grobe räumliche Diskretisierung nicht ausreicht, um alle bedeutenden Eigenschaften der Lösung hervorzubringen. Insbesondere liegen die feinskaligen Lösungsanteile außerhalb der Auflösungskapazitäten der groben Diskretisierung und können deshalb nicht hinreichend abgebildet werden. Diese Idee führte zur additiven Anreicherung der grobskaligen Lösung mit einem feinskaligen Lösungsanteil, wobei dieser mit dem Fehler der groben Diskretisierung assoziiert werden kann und somit die Gesamtlösung verbessert. Lösungsanteile, die einen großen Gradienten aufweisen, können der feinskaligen Lösung zugeschrieben werden. So konnte in GARIKIPATI UND HUGHES (1998) sowie GARIKIPATI UND HUGHES (2000) das Konzept der VMS für ein- und mehrdimensionale Lokalisierungsprobleme in homogenen, entfestigenden Materialien angewendet werden und in GRAVEMEIER (2003) für turbulente Strömungssimulationen inkompressibler Fluide. In HUND UND RAMM (2007) und HETTICH U. A. (2008) wurde die VMS für nichtlineares Verhalten heterogener Werkstoffe formuliert, um Schädigung und Rissfortschritt auf zwei Skalen zu simulieren. Eine Erweiterung auf große Deformationen wurde in MERGHEIM (2009) vorgestellt. In den zuletzt genannten Arbeiten konnte gezeigt werden, dass eine Kopplung der Skalen insbesondere für die Simulation von Lokalisierungsproblemen und diskreten Versagensphänomenen wichtig ist.

Hierarchische Mehrskalenmethoden unterscheiden sich vor allem durch die Modelle der groben und feinen Skala und der damit verbundenen Diskretisierung der Lösungsvariablen. Weitere Unterscheidungsmerkmale sind die Größe der Zweiskalengebiete, die Formulierung von Randbedingungen auf den Rändern dieser Gebiete und schließlich der Lösungsalgorithmus des global-lokalen Gleichungssystems. Die Wahl der Modelle zur Abbildung grob- und feinskaliger Lösungen hängt von der Problemstellung ab. Das grobskalige Verhalten kann zumeist durch ein Kontinuumsmodell beschrieben und mit finiten Elementen diskretisiert werden. Für die Modellierung des feinskaligen Verhaltens kann unabhängig davon ein breites Spektrum verschiedener Modelle verwendet werden. In BELYTSCHKO UND XIAO (2003) wurde beispielsweise ein atomares Modell eingesetzt, es können aber auch kontinuumsmechanische oder detaillierte diskrete Modelle, die das Verhalten der einzelnen Materialkomponenten erfassen, herangezogen werden. Exemplarisch sind dafür die X-FEM, Partikelmethoden oder wenn verfügbar analytische Lösungen verwendbar.

Abgesehen von der VMS gibt es noch weitere sogenannte superpositionsbasierte Methoden, die alle auf einer Anreicherung der Grobskalenlösung mit einem feinskaligen Lösungsanteil basieren (FISH UND SHEK 2000). Die in FISH (1992) entwickelte *s*-Version der FEM mit einer hierarchischen Mehrlevel-Struktur gehört auch zu dieser Klasse. Dabei werden in kritischen Bereichen beliebiger Form, zusätzlich zum zugrunde liegenden Grobskalennetz, hierarchische Elemente höherer Ordnung eingeführt. Durch Erhöhung des Polynomgrades wird die Genauigkeit der Lösung verbessert und die Auflösung lokaler, feinskaliger Merkmale ermöglicht, ohne das Grobskalenmodell zu verändern. Ein Vorteil der Methode ist, dass die beiden aufeinanderliegenden Netze an den Knoten nicht übereinstimmen müssen und die Gesamtverschiebung sich aus der Summe der Verschiebungen beider Approximationen ergibt. Kombinationen der X-FEM mit der *s*-Version der FEM für Risswachstum wurden beispielsweise in LEE U. A. (2004) und NAKASUMI U. A. (2008) behandelt. Eine Art  $FE^2$ -Methode bei starker Kopplung der Skalen ohne Skalenseparation wurde in MARKOVIC UND IBRAHIMBEGOVIĆ (2004) sowie MARKOVIC U. A. (2005) vorgestellt. Im Gegensatz zu der in Kapitel 6.2.1 erwähnten  $FE^2$ -Methode aus FEYEL (2003) wird die mikroskopische Berechnung auf Ebene einzelner grobskaliger Elemente statt auf Integrationspunktebene durchgeführt. Eine FE-Berechnung auf der Mikroskala liefert hierin die Residuen und Steifigkeiten für jedes Makroelement. Alternativ zu FE-Berechnungen auf beiden Skalen wird in GHOSH U. A. (2001) das Modell der Mikroebene durch eine Voronoi-Zellen-Methode ausgetauscht.

Bezüglich des Lösungsalgorithmus können partitionierte und simultane Lösungsstrategien voneinander unterschieden werden. Partitionierte Lösungsalgorithmen lösen das Zweiskalenproblem für die Grobskala im gesamten Gebiet und für das detaillierte Problem in zweiskaligen Bereichen voneinander entkoppelt. Das in IBRAHIMBEGOVIĆ UND MARKOVIČ (2003) beschriebene Operator-Split-Verfahren ist ein Beispiel solch eines Algorithmus. Bei schwacher Kopplung werden die Lösungen des letzten Iterationsschrittes zwischen den Feldern der verschiedenen Skalen in Form von Randbedingungen übergeben. Ist das Zweiskalenproblem hingegen stark gekoppelt, sollte die Lösung simultan erfolgen. Hierfür haben sich Gebietzerlegungsmethoden, die im nächsten Abschnitt vorgestellt werden, und effiziente Gleichungslöser bewährt, welche den Lösungs- und Speicheraufwand gegenüber einer Feinskalenlösung erheblich reduzieren. Traditionelle Mehrskalmethoden wie die Multigrid-Methode sind effektive Mikroskalenlöser, die alle Details im Mikroskalenmodell auflösen.

### 6.2.3 Gebietzerlegungsmethoden

Die vielen Mehrskalmethoden zugrunde liegende Strategie ist Gebietzerlegungsmethoden sehr ähnlich. Diese bieten Strategien zur effizienten Lösung großer Probleme und können als fortgeschrittene, parallele Lösungsmethoden klassifiziert werden. Die Effizi-

enz von Gebietzerlegungsmethoden resultiert aus der Aufteilung des Untersuchungsgebietes, wodurch das große Gleichungssystem in viele kleine, entkoppelte Teilprobleme zerlegt wird, die parallel gelöst werden können und einen geringeren Rechen- und Speicheraufwand erfordern. Ein wichtiger Aspekt, in dem sich Gebietzerlegungsmethoden unterscheiden, ist die Wahl der Randbedingungen an den Kopplungsändern zwischen einzelnen Teilgebieten. Generell kann die Kopplung in einem überlappenden Bereich oder bei nichtüberlappenden Gebietzerlegungsmethoden nur über den Kopplungsrand selbst erfolgen. Der Ursprung nichtüberlappender Gebietzerlegungsmethoden ist in der Substrukturtechnik zu finden, siehe zum Beispiel WILSON (1974). Dabei stellt jedes Teilgebiet ein Superelement dar, dessen innere, lokale Freiheitsgrade durch statische Kondensation eliminiert werden können. Nur die globalen Freiheitsgrade auf dem Rand der Superelemente verbleiben im Gleichungssystem, womit dessen Größe reduziert wird.

Eine weit verbreitete Gebietzerlegungsmethode ist die FETI-Methode (finite element tearing and interconnecting) aus FARHAT UND ROUX (1991). Das entscheidende Merkmal besteht in der Aufteilung des Untersuchungsgebietes in nichtüberlappende Teilgebiete, die über Lagrange-Multiplikatoren miteinander verbunden bleiben, um die Kontinuität der Primärvariable über den Kopplungsrand zu erzwingen. Die FETI-Methode ist eine der erfolgreichsten Methoden zur parallelen Lösung großer Gleichungssysteme, welche sich bei der Diskretisierung partieller Differentialgleichungen ergeben (FARHAT U. A. 2001).

Gebietzerlegungsmethoden sind eng mit Mehrskalen- und Mehrfeldproblemen verbunden. So besteht eine Ähnlichkeit zwischen Gebietzerlegungsmethoden und superpositionsbasierten Mehrskalenmethoden unter anderem in der Kopplung des Mehrskalengebietes mit der restlichen Struktur. Bei Gebietzerlegungsmethoden erfolgt die Kopplung nur über den Rand, wohingegen bei additiver Aufteilung des Lösungsraums eine volumetrische Kopplung im Mehrskalengebiet besteht.

## 6.3 Zweiskalenmodell für nichtlineares Materialverhalten

Im Folgenden wird ein Zweiskalenmodell vorgestellt, dessen Skalen zum Einen als Grob- und Feinskala aber auch als Makro- und Mikroskala bezeichnet werden. Die Makroskala stellt jene Skala dar, auf der das globale Strukturverhalten untersucht wird. Die kleinere Skala wird Mikroskala genannt. Nichtlineares Materialverhalten wird auf beiden Skalen durch eine regularisierte isotrope Schädigungsformulierung berücksichtigt, siehe Kapitel 3.3.2. Exemplarisch werden quasispröde Einphasenmaterialien untersucht, wobei das Zweiskalenmodell mit dieser Materialformulierung auch im entfestigenden Bereich eingesetzt werden kann.

### 6.3.1 Additive Zerlegung des Verschiebungsfeldes und Begrenzung des Zweiskalengebietes

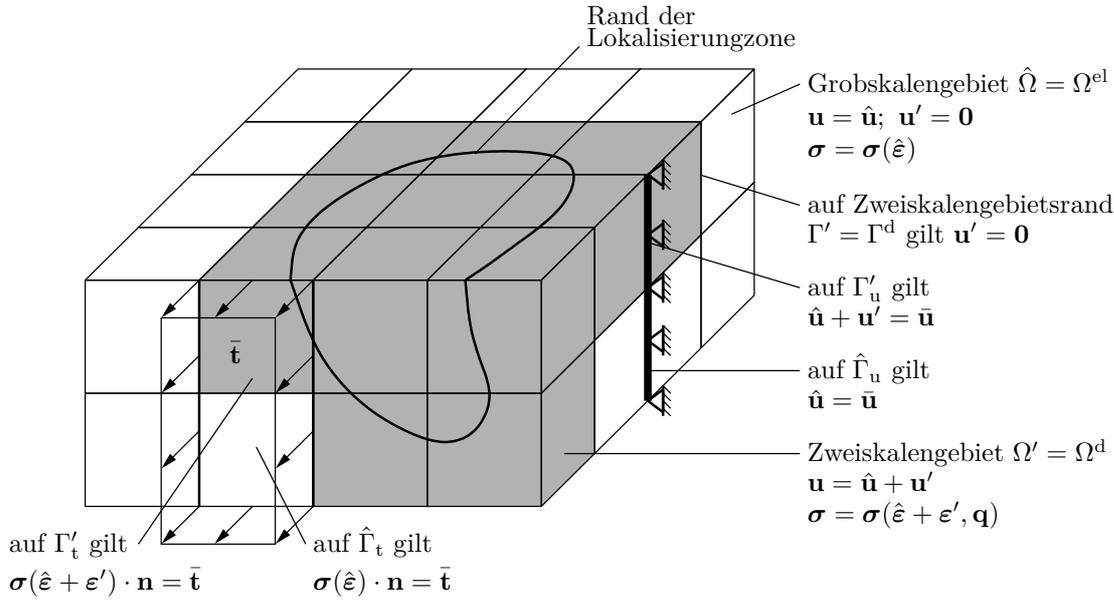
Im Rahmen der superpositionsbasierten Mehrskalenmethode wird ein additiver Splitt des Verschiebungsfeldes  $\mathbf{u}$  in einen makroskopischen Anteil  $\hat{\mathbf{u}}$  und einen mikroskopischen Anteil  $\mathbf{u}'$  angenommen. Die gleiche Aufteilung erfolgt für die Testfunktionen  $\delta\mathbf{u}$ .  $\hat{\mathbf{u}}$  repräsentiert die niederfrequente, gemittelte Antwort und  $\mathbf{u}'$  Schwankungen der kleinen Skala im Zweiskalengebiet. Der Verschiebungsgradient und die entsprechende virtuelle Größe werden in gleicher Weise additiv zerlegt.

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' ; & \boldsymbol{\varepsilon} &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}' \\ \delta\mathbf{u} &= \delta\hat{\mathbf{u}} + \delta\mathbf{u}' ; & \delta\boldsymbol{\varepsilon} &= \delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta\boldsymbol{\varepsilon}'\end{aligned}\tag{6.1}$$

Das Gebiet  $\Omega$  wird in zwei Bereiche aufgeteilt. Der Bereich  $\Omega^{\text{el}}$  bedarf keiner feinen Auflösung, weshalb vernachlässigbar kleine mikroskopische Verschiebungen  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  angenommen werden können. Im Bereich  $\Omega^{\text{d}}$  setzt sich die Gesamtlösung nach Gleichung (6.1) aus zwei Komponenten zusammen. Das makroskopische Verschiebungsfeld  $\hat{\mathbf{u}}$  ist demnach überall definiert. Die Nichtlinearitäten, die sich in Fluktuationen der Gesamtlösung  $\mathbf{u}' \neq \mathbf{0}$  äußern, entstehen durch lokale Steifigkeitsunterschiede infolge Mikrorissen im Material oder Heterogenitäten in der Mikrostruktur. In den feinskaligen Regionen  $\Omega^{\text{d}}$  ist eine höhere Auflösung der Feldvariablen nötig, um beispielsweise den lokalen, mikroskopischen Strukturaufbau abzubilden und die relevanten Versagensprozesse zu erfassen.

In Abbildung 6.2 ist das Randwertproblem einer geschädigten Struktur skizziert. Die hellen Elemente markieren das gesamte Grobskalengebiet  $\Omega^{\text{el}} = \hat{\Omega}$ , in welchem das linear-elastische Materialgesetz unter Annahme kleiner Verzerrungen gültig ist. Die grauschattierten Elemente kennzeichnen das Zweiskalengebiet  $\Omega^{\text{d}} = \Omega'$ , in dem es zu nichtlinearem Materialverhalten kommen kann und somit ein entsprechendes Materialgesetz zu verwenden ist. Das Zweiskalengebiet umfasst alle Grobskalenelemente, die von der Lokalisierungszone betroffen sind, wobei die Randfläche  $\Gamma^{\text{d}} = \Gamma'$  des Zweiskalengebiets die beiden Bereiche  $\hat{\Omega}$  und  $\Omega'$  verbindet. Die Kompatibilität der Verschiebungen am Rand  $\Gamma'$  des Einflussbereiches feinskaliger Effekte wird mit der Annahme  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  garantiert. Das Feinskalengebiet muss so groß gewählt werden, dass diese Annahme gerechtfertigt und der feinskalige Lösungsanteil bis zum Übergang abgeklungen ist. Liegt ein Teil des Dirichletrandes  $\Gamma'_{\text{u}}$  im Zweiskalengebiet, so gilt dort  $\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' = \bar{\mathbf{u}}$ . Auch auf dem Neumannrand  $\Gamma'_{\text{t}}$  ist  $\mathbf{u}'$  frei, weshalb hier  $\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}') \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$  zu erfüllen ist.

Um eine Steigerung der Effizienz gegenüber einer Feinskalenlösung im ganzen Gebiet zu erreichen, kann anfangs von elastischem Materialverhalten und einer groben Diskretisierung mit Makroelementen ausgegangen werden. Allerdings sollte die grobe Diskretisie-



**Abbildung 6.2:** Begrenzung des Zweiskalengebietes und Definition der Randbedingungen auf den Grenzen der Grom- und Feinskalengebiete.

rung so verfeinert werden, dass der Fehler entsprechend klein ist. Die feine Skala wird adaptiv nur in jenen Gromskalenelementen zugeschaltet, in denen die Genauigkeit der Gromskalenerlösung nicht ausreicht oder Interesse an einer detaillierteren Lösung besteht. Diese Verfeinerung der räumlichen Diskretisierung kann als Netzadaptivität bezeichnet werden. Bei unelastischem Materialverhalten sollte nicht nur das Netz, sondern auch das Modell verfeinert werden, mit dem auf der Feinskala die relevanten mikromechanischen Effekte abgebildet werden können. Erkennt das Gromskalenermodell die Notwendigkeit zur Verfeinerung, kann die adaptive Umwandlung eines Gromskalenelementes zum Feinskalengebiet beispielsweise mithilfe eines äquivalenten Verzerrungswertes gesteuert werden. Sobald ein verzerrungsbasiertes Kriterium an einem Integrationspunkt des Gromskalenelementes erfüllt und somit der Beginn nichtlinearen Verhaltens angezeigt wird, vergrößert sich das Feinskalengebiet. Bei den Beispielen dieser Arbeit wird der Einfachheit halber auf eine adaptive Zuordnung gromskaliger Elemente zum Feinskalengebiet und damit auf optimale Effizienz verzichtet und von Anfang an jedes Gromskalenelement a priori dem Feinskalengebiet zugeordnet, sodass verzerrungsbasierte Kriterien oder Fehlerindikatoren nicht nötig sind. Das im weiteren Verlauf des Kapitels aufgestellte Modell bezieht sich jedoch auf den allgemeinen Fall mit adaptiver Vergrößerung des Zweiskalengebietes.

### 6.3.2 Variationsformulierung

Für das Zweiskalenmodell wird der additive Verschiebungs- und Verzerrungssplitt (6.1) in die schwache Form des Gleichgewichts (2.7) aus Kapitel 2.1 eingesetzt, was einem Testen der Bilanzgleichung mit grob- und feinskaligen Testfunktionen entspricht. Dabei wird ohne Verlust der Allgemeinheit die Annahme verschwindender Volumenlasten  $\bar{\mathbf{b}}$  getroffen.

$$\int_{\Omega} (\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta \boldsymbol{\varepsilon}') : \boldsymbol{\sigma} \, dV = \int_{\Gamma_t} (\delta \hat{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}') \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad \forall (\delta \hat{\mathbf{u}}, \delta \mathbf{u}') \in \mathbb{V} \quad (6.2)$$

Die Funktionen  $\hat{\mathbf{u}}$  sind im Raum  $\hat{\mathbb{U}}$  enthalten, die Funktionen  $\mathbf{u}'$  im Raum  $\mathbb{U}'$ , wobei eine direkte Summendekomposition des Lösungsraums im Feinskalengebiet vorgenommen wird.

$$\mathbb{U} = \hat{\mathbb{U}} \oplus \mathbb{U}' = \left\{ \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}' \mid \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u}' \in \mathbb{H}^1(\Omega) \quad \text{und} \quad (\hat{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')|_{\Gamma_u} = \bar{\mathbf{u}} \right\} \quad (6.3)$$

Der Raum der Testfunktionen wird entsprechend in  $\mathbb{V} = \hat{\mathbb{V}} \oplus \mathbb{V}'$  aufgeteilt, wobei die Testfunktionen  $\delta \hat{\mathbf{u}}$  und  $\delta \mathbf{u}'$  auf dem Rand  $\Gamma_u$  verschwinden müssen. Für linear unabhängige Testfunktionen  $\delta \hat{\mathbf{u}}$  und  $\delta \mathbf{u}'$  zerfällt die schwache Form (6.2) in zwei nichtlineare Gleichungen.

Grobskalenproblem in  $\Omega$  :

$$\int_{\hat{\Omega}} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \, dV + \int_{\Omega'} \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{q}) \, dV = \int_{\Gamma_t} \delta \hat{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad \forall \delta \hat{\mathbf{u}} \in \hat{\mathbb{V}} \quad (6.4)$$

Feinskalenproblem in  $\Omega'$  :

$$\int_{\Omega'} \delta \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{q}) \, dV = \int_{\Gamma_t'} \delta \mathbf{u}' \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dA \quad \forall \delta \mathbf{u}' \in \mathbb{V}'$$

Da die Materialantwort beider Skalen über ein Konstitutivgesetz beschrieben wird, sind diese Gleichungen über die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}', \mathbf{q})$ , als Funktion des gesamten Verschiebungszustandes und der internen Variablen, einfach miteinander gekoppelt. Dabei stellen die Spannungen die Kommunikation zwischen den Skalen sicher und definieren den volumenverbindenden Skalenübergang. Für die folgende Diskretisierung werden die eingeführten tensoriellen Größen wieder in Matrixschreibweise verwendet, ohne dafür die Bezeichnung zu ändern.

### 6.3.3 Diskretisierung

In dem vorgestellten volumenkoppelnden Zweiskalenmodell werden zur Diskretisierung der grob- und feinskaligen Probleme jeweils finite Elemente verwendet. Das gesamte Untersuchungsgebiet wird mit grobskaligen Elementen diskretisiert. In den feinskaligen Regionen wird die Mikrostruktur detailliert aufgelöst und jedes Grobskalenelement mit einer beliebigen Anzahl an Feinskalenelementen verfeinert. Im Sinne einer Bubnov-Galerkin-Approximation werden für die Approximation der Lösungsfunktionen und der Testfunktionen die gleichen Formfunktionen verwendet.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &\approx \hat{\mathbf{u}}^h = \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}} \hat{\mathbf{N}}^{\hat{e}} \hat{\mathbf{d}}^{\hat{e}} ; & \mathbf{u}' &\approx \mathbf{u}'^h = \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}}} \mathbf{N}'^{e'} \mathbf{d}'^{e'} \\ \delta \hat{\mathbf{u}} &\approx \delta \hat{\mathbf{u}}^h = \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}} \hat{\mathbf{N}}^{\hat{e}} \delta \hat{\mathbf{d}}^{\hat{e}} ; & \delta \mathbf{u}' &\approx \delta \mathbf{u}'^h = \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}}} \mathbf{N}'^{e'} \delta \mathbf{d}'^{e'}\end{aligned}\quad (6.5)$$

Die Verzerrungen ergeben sich damit zu:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &\approx \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^h = \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}} \hat{\mathbf{B}}^{\hat{e}} \hat{\mathbf{d}}^{\hat{e}} ; & \boldsymbol{\varepsilon}' &\approx \boldsymbol{\varepsilon}'^h = \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}}} \mathbf{B}'^{e'} \mathbf{d}'^{e'} \\ \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &\approx \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^h = \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}} \hat{\mathbf{B}}^{\hat{e}} \delta \hat{\mathbf{d}}^{\hat{e}} ; & \delta \boldsymbol{\varepsilon}' &\approx \delta \boldsymbol{\varepsilon}'^h = \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}}} \mathbf{B}'^{e'} \delta \mathbf{d}'^{e'}.\end{aligned}\quad (6.6)$$

Im Verschiebungsvektor  $\hat{\mathbf{d}}$  werden die grobskaligen Elementfreiheitsgrade zusammengefasst, in  $\mathbf{d}'$  die feinskaligen Elementfreiheitsgrade. Für die Stabilität der Formulierung ist es notwendig, dass die Ansatzräume für  $\hat{\mathbf{u}}$  und  $\mathbf{u}'$  linear unabhängig sind. Um dies zu gewährleisten, ist es ausreichend  $C^0$ -kontinuierliche, trilineare Polynome für  $\hat{\mathbf{N}}$  zu wählen und sicherzustellen, dass die feinskaligen Anteile an den Eckknoten der Grobskalenelemente verschwinden. Die Diskretisierungsansätze (6.5) und (6.6) führen auf ein diskretes Gleichungssystem sowohl für das Grobskalenproblem im gesamten Gebiet  $\Omega$  als auch für das Feinskalenproblem im Zweiskalengebiet  $\Omega'$ .

Grobskalenproblem in  $\Omega$  :

$$\bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega}} \underbrace{\int_{\Omega_{\hat{e}}} \hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{d}}) \, dV}_{\hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^{\hat{e}}} + \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Omega_{e'}} \hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{D}', \mathbf{q}) \, dV}_{\hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^{e'}} - \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Gamma_{t,\hat{e}}} \hat{\mathbf{N}}^T \bar{\mathbf{t}} \, dA}_{\hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{\hat{e}}} = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

Feinskalenproblem in  $\Omega'$  :

$$\bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Omega_{e'}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{D}', \mathbf{q}) \, dV}_{\mathbf{f}'_{\text{int}}{}^{e'}} - \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}}} \underbrace{\int_{\Gamma'_{t,e'}} \mathbf{N}'^T \bar{\mathbf{t}} \, dA}_{\mathbf{f}'_{\text{ext}}{}^{e'}} = \mathbf{0}$$

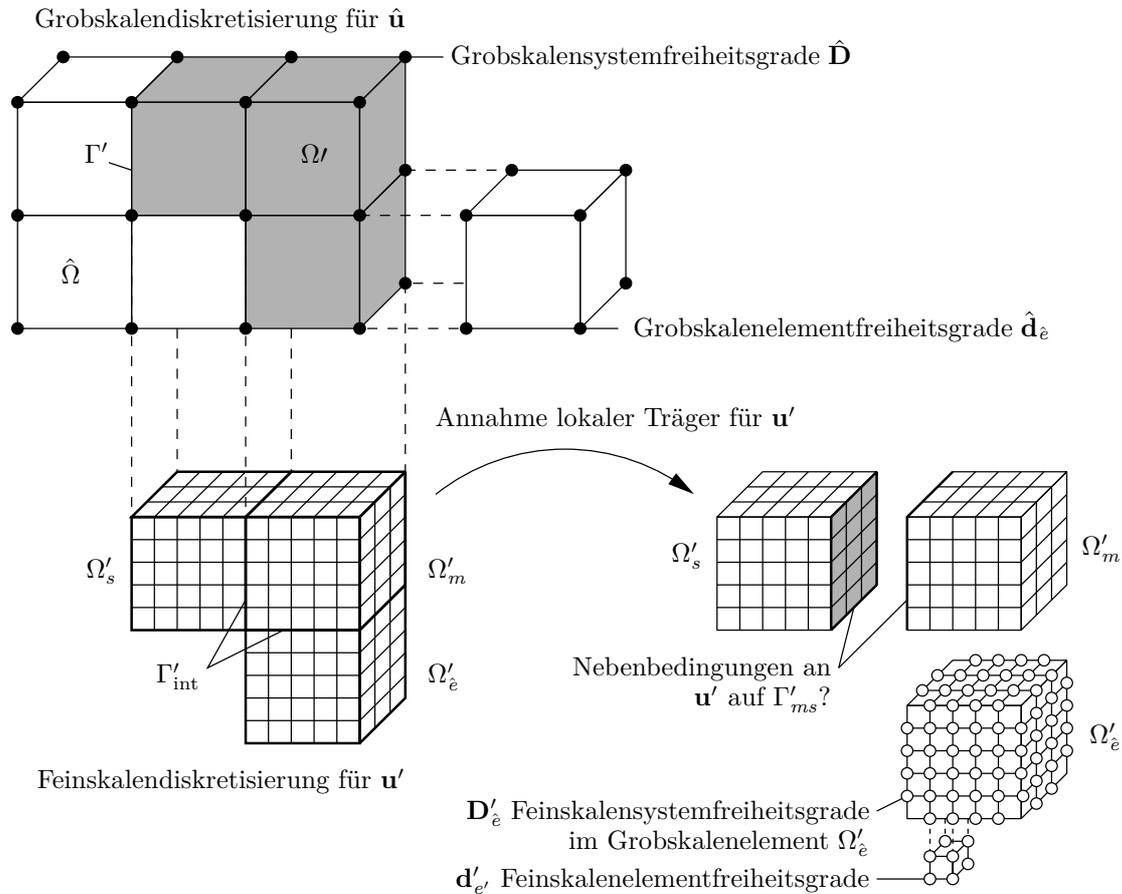
Die Assemblierungsoperatoren  $\bigcup_{\hat{e}}$  und  $\bigcup_{e'}$  zeigen eine Assemblierung bezüglich der grob- bzw. feinskaligen Diskretisierung an.  $\hat{n}_{\text{ele}}$  ist die Anzahl aller Grobskalenelemente  $\hat{e}$  in  $\Omega$ , wovon sich  $\hat{n}_{\text{ele}}^{\hat{\Omega}}$  in  $\hat{\Omega}$  und  $\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}$  in  $\Omega'$  befinden.  $n'_{\text{ele}}$  ist die Anzahl aller Feinskalenelemente  $e'$  im Feinskalengebiet  $\Omega'$ . Die Definition der Freiheitsgrade auf den verschiedenen Skalen ist zur Verdeutlichung in Abbildung 6.3 dargestellt. In  $\hat{\mathbf{D}} = \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}} \hat{\mathbf{d}}_{\hat{e}}$  sind die grobskaligen Systemfreiheitsgrade zusammengefasst, in  $\mathbf{D}'_{\hat{e}} = \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}}^{\hat{e}}} \mathbf{d}'_{e'}$  die feinskaligen Freiheitsgrade eines Grobskalenelementes. Dabei ist  $n'_{\text{ele}}^{\hat{e}}$  die Anzahl der Feinskalenelemente pro Grobskalenelement  $\hat{e}$ .

## 6.4 Lösung des Zweiskalenproblems

Aufgrund der starken Kopplung der Skalen werden die Gleichungen (6.7) am besten simultan gelöst, was mit der iterativen Newton-Raphson-Methode in effektiver Weise möglich ist. Alternativ kann, wie in Abschnitt 6.2.2 beschrieben, auch ein partitionierter Lösungsalgorithmus eingesetzt werden.

### 6.4.1 Annahme lokaler Träger

Um einen effizienten Lösungsalgorithmus für das Feinskalenproblem zu erreichen, werden für die feinskaligen Verschiebungen  $\mathbf{u}'$  und deren Testfunktionen  $\delta \mathbf{u}'$  lokale Träger angenommen. Diese entsprechen jeweils einem Grobskalenelement, was zu  $\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}$  sich nichtüberlappenden Teilgebieten  $\Omega'_{\hat{e}}$  in der Feinskalenregion führt,  $\Omega' = \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}} \Omega'_{\hat{e}}$ . Die grobskaligen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  bleiben global definiert. Mit dieser Annahme zerfällt die Feinskalengleichung (6.7)<sub>2</sub> in  $\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}$  voneinander entkoppelte, parallel lösbare Teilprobleme in jedem Grobskalenelement. Diese Annahme kompakt unterstützter, feinskaliger



**Abbildung 6.3:** Grob- und feinskalige Diskretisierung, Bezeichnung der Freiheitsgrade.

Verschiebungen innerhalb eines Grobkalenelements ist für die Effizienz des Lösungsalgorithmus wichtig, von der nachvollziehbaren Feststellung ausgehend, dass die Lösung der einzelnen Teilprobleme weniger Rechenzeit erfordert als die Lösung des gesamten Feinskalenproblems. Einfluss auf Effizienz und Genauigkeit haben verständlicherweise auch die Auflösung der groben Skala und die Anzahl der Feinskalenelemente innerhalb eines Grobkalenelements. Dazu werden im Rahmen dieser Arbeit allerdings keine Untersuchungen durchgeführt, sondern nur auf die zweidimensionalen Untersuchungen in HUND (2007) verwiesen.

Die Annahme der Lokalität erzeugt interne Ränder  $\Gamma'_{int}$  zwischen den Grobkalenelementen, die durch angemessene Nebenbedingungen miteinander gekoppelt bleiben sollen, siehe Abbildung 6.3 zur Veranschaulichung. In Kapitel 6.5 werden geeignete Nebenbedingungen an die feinskaligen Verschiebungen  $\mathbf{u}'$  in Form von Rand- und Übergangsbedingungen an den Grenzflächen  $\Gamma'_{ms}$  zwischen zwei Grobkalenelementen  $m$  und  $s$  formuliert. Die Bedingungen haben großen Einfluss auf Effizienz und Genauigkeit der Zweiskalenfor-

mulierung. So müssen sie den Informationsfluss über den Rand hinweg sicherstellen und dabei möglichst wenig zusätzliche Freiheitsgrade einführen. In der Arbeit HUND (2007) wurden einige Annahmen für die Rand- und Übergangsbedingungen untersucht und im Hinblick auf Genauigkeit, Implementierungsaufwand, Rechenzeit und Anwendungstauglichkeit getestet. Einige superpositionsbasierte Mehrskalenmethoden gehen auf den Grobkalenelementrändern von  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  aus und eliminieren den feinskaligen Lösungsanteil mittels statischer Kondensation auf Ebene eines Grobkalenelementes, womit die Annahme eines abklingenden lokalen Charakters von  $\mathbf{u}'$  verbunden ist.

### 6.4.2 Schwache Form

Zunächst soll auf allen Kopplungsrändern  $\Gamma'_{\text{int}}$  die Nullrandbedingung mit  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  verwendet werden; die Annahme wird später in Abschnitt 6.5 aufgehoben. Dies ist die einfachste Annahme, die bezüglich der Kontinuität der Feinskalenlösung getroffen werden kann. Das Grobkalenproblem bleibt von der Lokalisationsannahme unberührt und ist im gesamten Gebiet  $\Omega$  durch Gleichung (6.7)<sub>1</sub> gegeben. Die Feinskalengleichung (6.7)<sub>2</sub> bleibt jedoch nicht für das gesamte Feinskalengebiet formuliert, sondern gilt nur noch innerhalb einzelner Grobkalenelemente  $\Omega'_{\hat{e}} \subset \Omega'$ .

$$\bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}} \hat{e}} \int_{\Omega_{e'}} \mathbf{B}'^T \boldsymbol{\sigma}(\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{D}', \mathbf{q}) \, dV - \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}} \hat{e}} \int_{\Gamma'_{t,e'}} \mathbf{N}'^T \bar{\mathbf{t}} \, dA = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega'_{\hat{e}} \quad (6.8)$$

Die Skalen bleiben nach wie vor durch die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  des nichtlinearen Werkstoffverhaltens miteinander gekoppelt, auch wenn dies nur noch lokal in jedem Grobkalenelement zutrifft. Gleichungen (6.7)<sub>1</sub> und (6.8) lassen sich vereinfachend in residualer Form, als Differenz der internen und externen Kräfte, schreiben, wobei die Feinskalengleichungen hier nur noch lokal für jedes Grobkalenelement separat aufgestellt werden.

$$\begin{aligned} \text{GS: } \hat{\mathbf{R}} &= \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}} \Omega} \hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^{\hat{e}} + \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}} \hat{e}} \hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^{e'} - \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}} \Omega} \hat{\mathbf{f}}_{\text{ext}}^{\hat{e}} = \mathbf{0} \\ \text{FS: } \mathbf{R}'^{\hat{e}} &= \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}} \hat{e}} \mathbf{f}'_{\text{int}}{}^{e'} - \bigcup_{e'=1}^{n'_{\text{ele}} \hat{e}} \mathbf{f}'_{\text{ext}}{}^{e'} = \mathbf{0} \quad \text{für } \Omega'_{\hat{e}} \subset \Omega' \end{aligned} \quad (6.9)$$

### 6.4.3 Linearisierung

Durch Linearisierung der diskreten Residuen (6.9) ergibt sich ein Gleichungssystem für die inkrementellen Änderungen der globalen und lokalen Freiheitsgrade  $\Delta \hat{\mathbf{D}}^{i+1}$  bzw.

$\Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}}{}^{i+1}$  im aktuellen Iterationsschritt von  $i$  nach  $i+1$ .

$$\begin{aligned} \text{GS} : \quad & \mathbf{K}_{\hat{D}\hat{D}}^i \Delta \hat{\mathbf{D}}^{i+1} + \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}} \mathbf{k}_{\hat{d}D'}^{\hat{e},i} \Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}}{}^{i+1} = -\hat{\mathbf{R}}^i \\ \text{FS} : \quad & \mathbf{k}_{D'\hat{d}}^{\hat{e},i} \Delta \hat{\mathbf{d}}_{\hat{e}}^{i+1} + \mathbf{k}_{D'D'}^{\hat{e},i} \Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}}{}^{i+1} = -\mathbf{R}'^{\hat{e},i} \quad \text{für } \Omega'_{\hat{e}} \subset \Omega' \end{aligned} \quad (6.10)$$

Die Feinskalengleichungen (6.10)<sub>2</sub> können lokal in jedem Grobskalenelement gelöst werden. Dies entspricht der Anwendung nichtüberlappender Gebietzerlegungsmethoden zur Lösung des Feinskalenproblems. Im Weiteren soll auf den oberen Index für den Iterationsschritt für eine bessere Lesbarkeit verzichtet werden. Die Steifigkeiten berechnen sich über

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\hat{D}\hat{D}} &= \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega}} \int_{\Omega_{\hat{e}}} \underbrace{\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}^{\text{el}} \hat{\mathbf{B}}}_{=\mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}, \text{el}}} \text{dV} + \bigcup_{e'=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}} \int_{\Omega_{e'}} \underbrace{\hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}} \hat{\mathbf{B}}}_{=\mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}, \text{ed}}} \text{dV} \\ \mathbf{k}_{\hat{d}D'}^{\hat{e}} &= \bigcup_{e'=1}^{\hat{n}'_{\text{ele}}{}^{\hat{e}}} \int_{\Omega_{e'}} \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}} \mathbf{B}' \text{dV} \\ \mathbf{k}_{D'\hat{d}}^{\hat{e}} &= \bigcup_{e'=1}^{\hat{n}'_{\text{ele}}{}^{\hat{e}}} \int_{\Omega_{e'}} \mathbf{B}'^T \mathbf{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}} \hat{\mathbf{B}} \text{dV} \\ \mathbf{k}_{D'D'}^{\hat{e}} &= \bigcup_{e'=1}^{\hat{n}'_{\text{ele}}{}^{\hat{e}}} \int_{\Omega_{e'}} \mathbf{B}'^T \mathbf{C}_{\text{sec}}^{\text{ed}} \mathbf{B}' \text{dV} \end{aligned} \quad (6.11)$$

wobei die Elementanteile  $\mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}}$  je nach Zugehörigkeit zum Grob- oder Zweiskalengebiet unterschiedlich ermittelt werden. Im Zweiskalengebiet  $\Omega'$  sind in jedem Iterationsschritt sämtliche Steifigkeiten und internen Kräfte zu bestimmen. Zur numerischen Integration der Beiträge einzelner Feinskalenelemente zu  $\hat{\mathbf{f}}_{\text{int}}^{e'}$  sowie zu  $\mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}, \text{ed}}$ ,  $\mathbf{k}_{\hat{d}D'}^{\hat{e}}$  und  $\mathbf{k}_{D'\hat{d}}^{\hat{e}}$  müssen sowohl die Matrix grobskaliger Formfunktionen  $\hat{\mathbf{N}}$  als auch der B-Operator  $\hat{\mathbf{B}}$  an den Integrationspunkten der Feinskalenelemente ausgewertet werden. Dazu ist es notwendig, die natürlichen Koordinaten  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  der Grobskalenelemente an den Integrationspunkten der Feinskala zu bestimmen. Durch Inversion des Ansatzes  $\mathbf{x} = \sum_{I=1}^{\hat{n}_{\text{iel}}} \hat{N}_I(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{x}_I$  ist dies möglich. Für trilineare Ansätze führt dies auf eine kubische Gleichung, die bei Beschränkung auf rechtwinklige Elemente mit bekannten Koordinaten  $\mathbf{x}_I$  der Knoten der Feinskalenelemente direkt gelöst werden kann.

### 6.4.4 Algorithmische Umsetzung

Die simultane Lösung der grob- und feinskaligen Gleichungen ist erforderlich, um einen kontinuierlichen Informationsaustausch zwischen den Skalen zu gewährleisten. Zur Lösung des linearisierten, stark gekoppelten Gleichungssystems werden die feinskaligen Verschiebungsinkremente  $\Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}}$  aus dem Grobkalenproblem eliminiert. Dazu wird das Gleichungssystem (6.10) in jedem hierarchisch verfeinerten Grobkalenelement  $\hat{e}$  aufgestellt.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}, \text{ed}} & \mathbf{k}_{\hat{d}D'}^{\hat{e}} \\ \mathbf{k}_{D'\hat{d}}^{\hat{e}} & \mathbf{k}_{D'D'}^{\hat{e}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{d}}_{\hat{e}} \\ \Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}^{\hat{e}} \\ \mathbf{R}'^{\hat{e}} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Daraus werden die feinskaligen Verschiebungsinkremente innerhalb eines Lastschrittes zum Iterationsschritt  $i + 1$  statisch kondensiert. Damit ergibt sich ein erweitertes Grobkalenproblem in jedem Grobkalenelement des Zweiskalengebiets mit reduzierten Elementsteifigkeitsmatrizen und reduzierten Elementresiduen.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\text{red}}^{\hat{e}} &= \mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}, \text{ed}} - \mathbf{k}_{\hat{d}D'}^{\hat{e}} (\mathbf{k}_{D'D'}^{\hat{e}})^{-1} \mathbf{k}_{D'\hat{d}}^{\hat{e}} \\ \mathbf{r}_{\text{red}}^{\hat{e}} &= \hat{\mathbf{r}}^{\hat{e}} - \mathbf{k}_{\hat{d}D'}^{\hat{e}} (\mathbf{k}_{D'D'}^{\hat{e}})^{-1} \mathbf{R}'^{\hat{e}} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Diese reduzierten Elementbeiträge werden danach in das globale Grobkalenproblem assembliert, welches somit nur noch in den grobkaligen Verschiebungen formuliert ist.

$$\left( \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\hat{\Omega}}} \mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}, \text{el}} + \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}} \mathbf{k}_{\text{red}}^{\hat{e}} \right) \Delta \hat{\mathbf{D}} = - \begin{bmatrix} \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\hat{\Omega}}} \hat{\mathbf{r}}^{\hat{e}} + \bigcup_{\hat{e}=1}^{\hat{n}_{\text{ele}}^{\Omega'}} \mathbf{r}_{\text{red}}^{\hat{e}} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Das globale Gleichungssystem setzt sich aus den Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}, \text{el}}$  und Elementresiduen  $\hat{\mathbf{r}}^{\hat{e}}$  der Elemente in  $\hat{\Omega}$  und den reduzierten Elementsteifigkeitsmatrizen  $\mathbf{k}_{\text{red}}^{\hat{e}}$  und Elementresiduen  $\mathbf{r}_{\text{red}}^{\hat{e}}$  der Elemente in  $\Omega'$  zusammen und beinhaltet die Auswirkung der feinen auf die grobe Skala. Das globale, reduzierte Gleichungssystem (6.14) kann nun für grobskalige Verschiebungsinkremente  $\Delta \hat{\mathbf{D}}$  gelöst werden. Danach wird für jedes Grobkalenelement das Inkrement des Elementverschiebungsvektors  $\Delta \hat{\mathbf{d}}_{\hat{e}}$  aus  $\Delta \hat{\mathbf{D}}$  extrahiert und damit zu den feinskaligen Inkrementen  $\Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}}$  zurückgerechnet.

$$\Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}} = (\mathbf{k}_{D'D'}^{\hat{e}})^{-1} \left[ -\mathbf{R}'^{\hat{e}} - \mathbf{k}_{D'\hat{d}}^{\hat{e}} \Delta \hat{\mathbf{d}}_{\hat{e}} \right] \quad (6.15)$$

Durch Entkopplung der Feinskalengleichungen zwischen den Grobkalenelementen ist dieser Ansatz auch zur Parallelisierung geeignet.

## 6.5 Nebenbedingungen an die feinskaligen Variablen

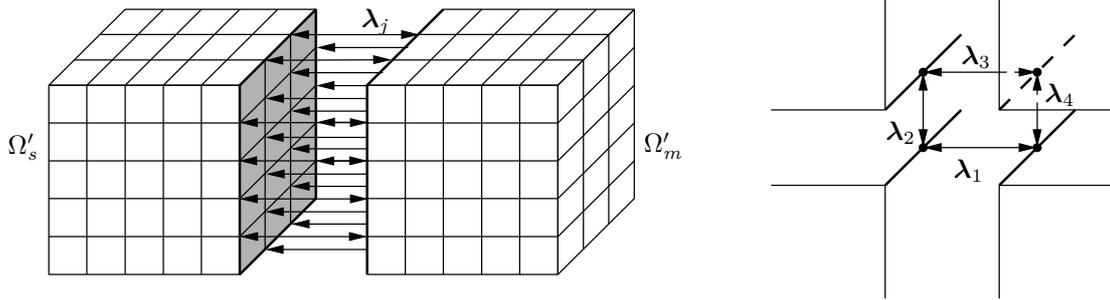
Wie oben erläutert, müssen aufgrund der Einführung lokaler Träger für die feinskaligen Variablen zusätzliche Bedingungen an den Kopplungsrändern eingehalten werden, um Einflüsse der Nachbarelemente zu berücksichtigen. Ein umfassender Überblick verschiedener Möglichkeiten zur Erfüllung der Kompatibilität an den Kopplungsrändern wird in den Arbeiten HUND UND RAMM (2007) sowie HUND (2007) gegeben. Darin wurden die Eigenschaften der Nebenbedingungen untersucht und im Hinblick auf Anwendungsbeispiele mit Lokalisierungsphänomenen bewertet. Im Folgenden werden hier die zwei Konzepte vorgestellt, welche sich in den genannten Arbeiten zum Einen als sehr effizient und einfach in der Umsetzung und zum Anderen als sehr genau herauskristallisiert haben.

### 6.5.1 Nullrandbedingung

Die Nullrandbedingung als Verschiebungsrandbedingung fordert, dass feinskalige Verschiebungen auf allen Rändern der Grobskalenelemente verschwinden, was zumindest  $\mathbf{u}'$  auf diesen Rändern kompatibel macht. Jedoch verhindert die Randbedingung  $\mathbf{u}' = \mathbf{0}$  den Informationsaustausch über die internen Kopplungsränder  $\Gamma'_{\text{int}}$  hinweg. Klingt die feinskalige Lösung sehr schnell von der Störstelle ab, scheint diese Annahme angemessen zu sein. Deswegen wird die Nullrandbedingung in der Literatur superpositionsbasierter Mehrskalmethoden gelegentlich verwendet. Abgesehen davon ist die Implementierung am einfachsten und der Lösungsaufwand gering. Die bisherigen Gleichungen aus Abschnitt 6.4 wurden für diese einfache Randbedingung aufgestellt.

Die Nullrandbedingung kann auch in integralem Sinne statt punktweise erfüllt werden. Diese Idee resultiert aus der Annahme, dass die feinskalige Lösung als Fluktuation der Grobskalenlösung im Mittel über die Kopplungsränder verschwindet. In MARKOVIC UND IBRAHIMBEGOVIC (2004) wurde diese Variante umgesetzt. Die eingeführten Lagrange-Multiplikatoren, welche die Ränder der Mikronetze mit dem Rahmen verbinden, der von den Makroelementen gebildet wird, können dabei als Kräfte interpretiert werden. Wie in PARK UND FELIPPA (2000) sowie PARK U. A. (2002) definiert, sind die Lagrange-Multiplikatoren lokale Variablen der einzelnen Grobskalenelemente. Nachteile dieser Variante, die in HUND UND RAMM (2007) bei der numerischen Umsetzung beobachtet wurden, sind unphysikalische Oszillationen und der Verlust numerischer Robustheit.

Die starke sowie die schwache Nullrandbedingung verhindern den Informationsfluss über Kopplungsränder und schränken die Kinematik ein. Dies führt bei Anwendungen wie Rissfortschritt oder Lokalisierung zu sehr ungenauen Ergebnissen, da sich die Strukturen



**Abbildung 6.4:** Knotenweise Kopplung mit Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_j$  zwischen Grob- und Feinskalenelementen  $m$  und  $s$ . Kopplung von vier Feinskalen-knoten.

in der Regel zu steif verhalten. Aus diesem Grund kann die vorgestellte Nullrandbedingung nur eine obere Schranke der Last-Verschiebungs-Antwort liefern und die Traglast sowie Duktilität des Systems weit übertreffen.

### 6.5.2 Lagrange-Multiplikator-Methode

Abgesehen von der Nullrandbedingung wird in dieser Arbeit auch eine Übergangsbedingung umgesetzt, welche die Kontinuität der Kinematik über interne Ränder  $\Gamma'_{\text{int}}$  sicherstellt. Kontinuität der Kinematik bedeutet, dass die Differenz der feinskaligen Verschiebungen zwischen benachbarten Grobkalenelementen  $m$  und  $s$  gleich dem Nullvektor ist  $[[\mathbf{u}']] = \mathbf{u}'_m - \mathbf{u}'_s = \mathbf{0}$ . Dies ermöglicht den direkten Austausch von Informationen, was für weit ausgebreitete feinskalige Lösungen wichtig ist. Insbesondere für fortschreitende Lokalisierungsphänomene und Risse verbreitet sich auch die Feinskalenlösung  $\mathbf{u}'$  und verschwindet weder innerhalb noch auf den Rändern der Grobkalenelemente. Erst mit zunehmender Entfernung von der Lokalisierungszone kann  $\mathbf{u}'$  vernachlässigt werden.

Die in Kapitel 6.3 eingeführte Zweiskalenformulierung mit der Lokalitätsannahme aus Kapitel 6.4 wird durch eine Nebenbedingung an  $\mathbf{u}'$  erweitert. Die Übergangsbedingung wird durch zusätzliche Gleichungen mithilfe von Lagrange-Multiplikatoren punktweise auf den Rändern  $\Gamma'_{\text{int}}$  eingebracht. Dadurch entstehen an allen feinskaligen Knoten zwischen zwei Grobkalenelementen zusätzlich globale Freiheitsgrade, die physikalisch als Randkräfte zur Erfüllung der Kontinuitätsbedingung identifiziert werden können. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass die feinskaligen Knoten benachbarter Grobkalenelemente auf dem Rand geometrisch kompatibel sind, vergleiche Abbildung 6.4. Die Lagrange-Multiplikatoren und die damit assoziierten Testfunktionen werden mit  $\lambda$  und  $\delta\lambda$  gekennzeichnet. Die Nebenbedingungen können in starker Form als Lagrange-

Funktional geschrieben werden,

$$\Pi_{\text{NB}}(\mathbf{d}', \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{j=1}^{nn} (\boldsymbol{\lambda}^T \llbracket \mathbf{d}' \rrbracket)_j \quad (6.16)$$

wobei  $nn$  die Anzahl aller Knoten der Feinskala auf sämtlichen Kopplungsrändern  $\Gamma'_{\text{int}}$  ist. Nach Variation dieses zusätzlichen Energieausdrucks entsteht ein weiterer Term in der schwachen Form der Feinskalengleichung (6.9)<sub>2</sub> pro Grobskalenelement  $\hat{e}$  in  $\Omega'$

$$\delta_{\mathbf{u}'} \Pi_{\text{NB}}^{\hat{e}} := \sum_{j=1}^{nn_{\hat{e}}} (\pm \delta \mathbf{u}'^T \boldsymbol{\lambda})_j \quad (6.17)$$

sowie eine zusätzliche Gleichung im Gleichungssystem, welche nur die Nebenbedingung betrifft und für jede Kopplungsfläche  $\Gamma'_{ms}$  aufgestellt werden kann.

$$\delta_{\boldsymbol{\lambda}} \Pi_{\text{NB}} := \sum_{j=1}^{n_{\Gamma}} (\delta \boldsymbol{\lambda}^T \llbracket \mathbf{u}' \rrbracket)_j = 0 \quad (6.18)$$

Die Anzahl der Feinskalenverschiebungsknoten auf allen Kopplungsflächen eines Grobskalenelementes  $\hat{e}$  wird mit  $nn_{\hat{e}}$  bezeichnet, die Anzahl der feinskaligen Verschiebungsknoten auf einer einzelnen Randfläche  $\Gamma'_{ms}$  mit  $nn_{\Gamma}$ . Außer an Eckknoten der Grobskalenelemente erhält jeder Knoten  $j$  auf internen Kopplungsflächen  $n_{\text{dim}}$  Lagrange-Multiplikator-Freiheitsgrade, siehe Abbildung 6.4. Schließen mehrere Grobskalenelemente an eine interne Kopplungskante an, so sind entsprechend mehrere Lagrange-Multiplikator-Freiheitsgrade anzusetzen. Bei vier Grobskalenelementen an einer Kopplungskante werden vier voneinander linear abhängige Lagrange-Multiplikatoren eingeführt. Diese Abhängigkeit wird nicht eliminiert, da es bei Verwendung eines direkten Gleichungslösers keine Probleme mit dem Rangabfall im Gleichungssystem gibt. Das Plus-Minus-Zeichen im Zusatzterm der Feinskalengleichung (6.17) resultiert aus dem Sprungterm in (6.16). Auf der Seite des Grobskalenelements  $m$  wird das positive Vorzeichen verwendet, im Grobskalenelement  $s$  das negative Vorzeichen.

Das linearisierte Gleichungssystem setzt sich nun aus drei Gleichungssätzen zusammen. Die Gleichung für die Grobskala (6.10)<sub>1</sub> bleibt unverändert und wird in allen Elementen des Untersuchungsgebietes ausgewertet. Die Gleichung der Feinskala erweitert sich in jedem Grobskalenelement  $\hat{e}$  in  $\Omega'$  um die unterstrichenen Anteile:

$$\mathbf{k}_{D'\hat{d}}^{\hat{e},i} \Delta \hat{\mathbf{d}}_{\hat{e}}^{i+1} + \mathbf{k}_{D'D'}^{\hat{e},i} \Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}}^{i+1} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_{\Gamma}^{\hat{e}}} (\tilde{\mathbf{G}}^T \Delta \boldsymbol{\Lambda}^{i+1})_{\Gamma'_{ms,j}}}_{\text{}} = -\mathbf{R}'^{\hat{e},i} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n_{\Gamma}^{\hat{e}}} (\mathbf{R}'_{\text{NB}})^i_{\Gamma'_{ms,j}}}_{\text{}}. \quad (6.19)$$

Ein dritter Gleichungssatz enthält die Nebenbedingung auf allen Rändern  $\Gamma'_{ms}$  zwischen benachbarten Elementen  $m$  und  $s$ .

$$\mathbf{G}_m \Delta \mathbf{D}'_m{}^{i+1}|_{\Gamma'_{ms}} + \mathbf{G}_s \Delta \mathbf{D}'_s{}^{i+1}|_{\Gamma'_{ms}} = -\mathbf{R}_\Lambda^i \quad (6.20)$$

$n_\Gamma^{\hat{e}}$  ist die Anzahl der Kopplungsränder eines Grobskalenelements und  $\Delta \mathbf{D}'_{m/s}|_{\Gamma'_{ms}}$  das Inkrement des feinskaligen Verschiebungsvektors der Elemente  $m$  bzw.  $s$  auf  $\Gamma'_{ms}$ . Obwohl Feinskalenverschiebungen benachbarter Grobskalenelemente durch die zusätzliche Bedingungsgleichung gekoppelt sind, bleiben aufgrund des globalen Charakters der Lagrange-Multiplikatoren die Feinskalenprobleme lokal und können unabhängig voneinander gelöst werden. Gleichung (6.20) zählt mit dem Grobskalenproblem zu den globalen Gleichungen. Die Matrizen  $\mathbf{G}_{m/s}$  der Dimension  $[n_\lambda^\Gamma \times 3 \, nn_\Gamma]$  enthalten bei punktwiser Erfüllung der Nebenbedingung die Einträge  $\pm 1$  in den Spalten der Freiheitsgrade  $\mathbf{D}'_{m/s}$  auf  $\Gamma'_{ms}$  in der Zeile des zugehörigen Lagrange-Freiheitsgrades, ansonsten nur Nullen.  $n_\lambda^\Gamma$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade  $\lambda$  auf einem einzelnen Rand  $\Gamma'_{ms}$ . Die Matrix  $\tilde{\mathbf{G}}$  der Dimension  $[n_\lambda^\Gamma \times n'_{\text{dof}}{}^{\hat{e}}]$  entsteht aus  $\mathbf{G}_{m/s}$  durch Erweiterung mit Nullspalten auf alle Feinskalenverschiebungsfreiheitsgrade  $\mathbf{D}'_{\hat{e}}$  des Grobskalenelements. Die Residuen  $\mathbf{R}'_{\text{NB}}$  der Dimension  $[n'_{\text{dof}}{}^{\hat{e}} \times 1]$  enthalten die Werte der Freiheitsgrade  $\pm \lambda$  in den Zeilen der Feinskalenknotten die auf  $\Gamma'_{ms}$  liegen, sonst Nullen. Das Residuum  $\mathbf{R}_\Lambda$  der Dimension  $[n_\lambda^\Gamma \times 1]$  enthält die Einträge  $[[\mathbf{d}']]$  in den Zeilen der zu dieser Verschiebung gehörenden Lagrange-Multiplikator-Freiheitsgrade.

Das Gleichungssystem auf Grobskalenelementebene vor statischer Kondensation ergibt sich mit den Steifigkeiten und Residuen zu:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{\hat{d}\hat{d}}^{\hat{e}, \text{ed}} & \mathbf{k}_{\hat{d}D'}^{\hat{e}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{k}_{D'\hat{d}}^{\hat{e}} & \mathbf{k}_{D'D'}^{\hat{e}} & \mathbf{k}_{D'L} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{LD'} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{d}}_{\hat{e}} \\ \Delta \mathbf{D}'_{\hat{e}} \\ \Delta \Lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}^{\hat{e}} \\ \mathbf{R}'^{\hat{e}} + \sum_{j=1}^{n_\Gamma^{\hat{e}}} (\mathbf{R}'_{\text{NB}})_{\Gamma'_{ms,j}} \\ \mathbf{R}_\Lambda \end{bmatrix}. \quad (6.21)$$

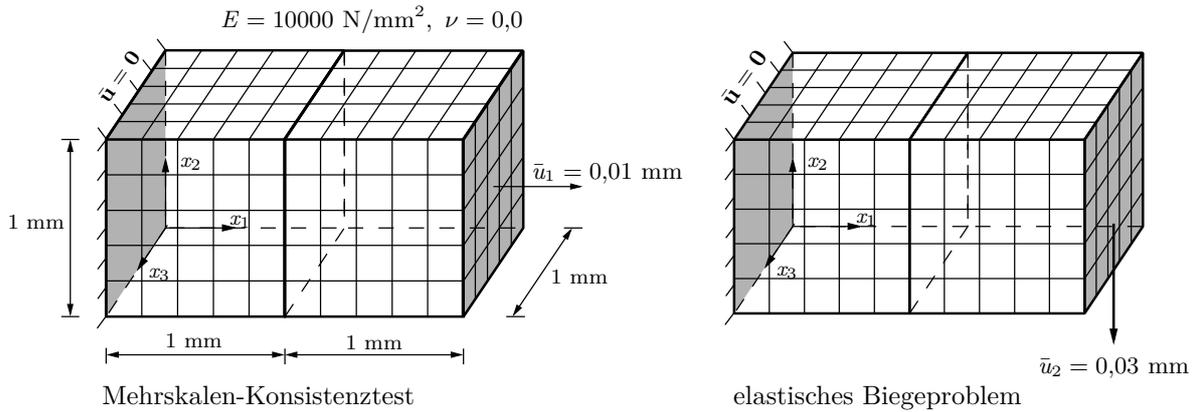
Die Tangentematrizen  $\mathbf{k}_{D'L}$  und  $\mathbf{k}_{LD'}$  enthalten wie die Matrizen  $\mathbf{G}_{m/s}$  und  $\tilde{\mathbf{G}}$  nur  $\pm 1$  an den entsprechenden Stellen und definieren die Projektion zwischen den Lagrange-Multiplikatoren und dem feinskaligen Verschiebungsfeld. Die Lagrange-Multiplikator-Freiheitsgrade zählen zu den globalen Variablen und können im Gegensatz zu  $\mathbf{u}'$  nicht kondensiert werden. Sobald das Grobskalenproblem und die Nebenbedingung mithilfe des Algorithmus aus Abschnitt 6.4.4 gelöst sind, kann die feinskalige Lösung in der Feinskalenregion berechnet werden. Im Vergleich zu Substrukturtechniken, die alle Freiheitsgrade auf den Kopplungsrändern als globale Freiheitsgrade behalten und nur die inneren eliminieren, vergleiche Abschnitt 6.2.3, werden im betrachteten Fall auch die feinskaligen Freiheitsgrade  $\mathbf{D}'_{\hat{e}}$  auf den Kopplungsrändern statisch kondensiert, wodurch sich die Größe des globalen Gleichungssystems weiter reduziert.

Der Lösungsalgorithmus bei dieser punktwisen Erfüllung der Nebenbedingung mit Lagrange-Multiplikatoren entspricht der FETI-Methode aus FARHAT UND ROUX (1991) bzw. der FETI-DP-Methode aus den Arbeiten FARHAT U. A. (2000) und FARHAT U. A. (2001). Die FETI-DP-Methode kann als Mehrskalenbetrachtung eines fein aufgelösten Problems interpretiert werden. Wie bei der eben vorgestellten Methodik zählen die Verschiebungen der Eckknoten einzelner Teilbereiche ebenso wie die Lagrange-Multiplikatoren an den restlichen Verbindungsknoten zwischen den Teilbereichen zu den globalen Freiheitsgraden. Die Verschiebungen der internen Knoten gehören zu den Feinskalenfreiheitsgraden und werden durch Schur-Komplemente eliminiert. Dabei entsteht ein Gleichungssystem, das nur noch die dualen Variablen, also die mit den Lagrange-Multiplikatoren assoziierten, und die primären Variablen an den Eckknoten enthält, daher der Name Dual-Primal-FETI. In dem Artikel MOBASHER AMINI U. A. (2009) wird eine mikro-makro FETI-DP-Methode vorgestellt, deren Struktur Ähnlichkeiten zu der hier behandelten variationsbasierten Zweiskalenmethode bei Umsetzung der Nebenbedingung mit Lagrange-Multiplikatoren aufweist. Darin wird anfangs das ganze Untersuchungsgebiet fein diskretisiert und danach in unkritischen Bereichen auf eine grobe Diskretisierung gewechselt, deren Antwort durch Homogenisierung bestimmt wird. Damit ergeben sich unterschiedlich fein diskretisierte Regionen, zwischen denen die Übergangsbedingungen zur Bewahrung perfekter Kontinuität diskutiert werden.

Neben der Lagrange-Multiplikator-Methode gibt es weitere Ansätze, mit denen die Kompatibilität der feinskalgigen Verschiebungen auf Kopplungsrandern sichergestellt werden kann. Dazu gehören die Penalty-Methode sowie die Augmented-Lagrange-Methode. All diese Methoden sind auch als numerische Verfahren zur Umsetzung von Kontaktbedingungen bekannt. Die Penalty-Methode ist als primäre Methode nur in Verschiebungen formuliert, weshalb keine zusätzlichen Freiheitsgrade eingeführt werden. Im Gegensatz dazu wird die Lagrange-Multiplikator-Methode als duale Methode bezeichnet, worin die Multiplikatoren als Reaktionskräfte am Kopplungsrand interpretiert werden können. Die Augmented-Lagrange-Methode führt zu einer gemischten Formulierung mit Unbekannten in den Verschiebungen und Kräften.

## 6.6 Elastische Testprobleme

Zur Überprüfung der Konsistenz der vorgestellten Zweiskalenformulierung wird ein einfacher Test durchgeführt. Grundidee ist, dass die Feinskalenlösung für einen homogenen Spannungszustand in einem Körper aus homogenem, elastischem Material verschwinden muss. Mit diesem Mehrskalen-Konsistenztest wurde in GARIKIPATI UND HUGHES (2000) geprüft, ob das in der genannten Arbeit für Verzerrungslokalisierung entwickelte, lineare Dreieckselement diesen Anforderungen genügt. Nun soll diese Anforderung an einem



**Abbildung 6.5:** Geometrie, Randbedingungen, grob- und feinskalige Diskretisierung und Materialparameter des Mehrskalen-Konsistenztests und elastischen Biegeproblems.

sehr einfachen Fallbeispiel für die Nullrandbedingung und Übergangsbedingung überprüft werden. Dazu wird ein Probekörper, bestehend aus zwei Grobskalenelementen des gleichen Materials, die jeweils mit  $5 \times 5 \times 5$  Feinskalenelementen diskretisiert sind, in einen linearen Verschiebungszustand in  $x_1$ -Richtung gebracht. Geometrie, Randbedingungen, grob- und feinskalige Diskretisierung sowie Materialparameter sind in Abbildung 6.5 links gegeben. Wie zu erwarten, verschwinden die feinskaligen Verschiebungsgrößen im Rahmen der numerischen Genauigkeit im gesamten Untersuchungsgebiet für beide in Kapitel 6.5 vorgestellten Nebenbedingungen, womit die Anforderungen des Tests erfüllt sind.

In einem zweiten Testfall soll der Probekörper des Konsistenztests einer Biegebelastung ausgesetzt werden. Alle Knoten der rechten Randfläche werden nun um denselben Betrag in  $x_2$ -Richtung verschoben und somit ein Biegezustand erzeugt. Abbildung 6.5 zeigt rechts die Randbedingungen des an sich zweidimensionalen Problems. Die Zweiskalenlösungen beider Nebenbedingungen werden mit einer Feinskalenlösung im gesamten Gebiet bei gleicher Auflösung verglichen. In Abbildung 6.6 ist zu erkennen, dass die Nullrandbedingung, im Gegensatz zur Übergangsbedingung, selbst für diesen einfachen Fall nur eines Kopplungsrandes den Spannungszustand nicht korrekt wiedergeben kann. Außerdem sind die Werte der feinskaligen Verschiebungen  $u'_1$  und  $u'_2$ , die in einzelnen Schnitten durch den Körper dargestellt sind, im gesamten Gebiet viel zu klein, weshalb sich der Probekörper unter dieser Belastung zu steif verhält. Nur durch die Übergangsbedingung mit Lagrange-Multiplikatoren lassen sich die feinskaligen Freiheitsgrade richtig aktivieren, da sie am Rand der Grobskalenelemente nicht Null sein müssen, sondern dort, wie in Abbildung 6.6 zu sehen, signifikante Werte annehmen. Die Spannungsverteilungen der ersten und dritten Hauptspannungen sind in diesem Fall nicht von der Referenzlösung zu unterscheiden, womit sich die Genauigkeit des Verfahrens bestätigt.

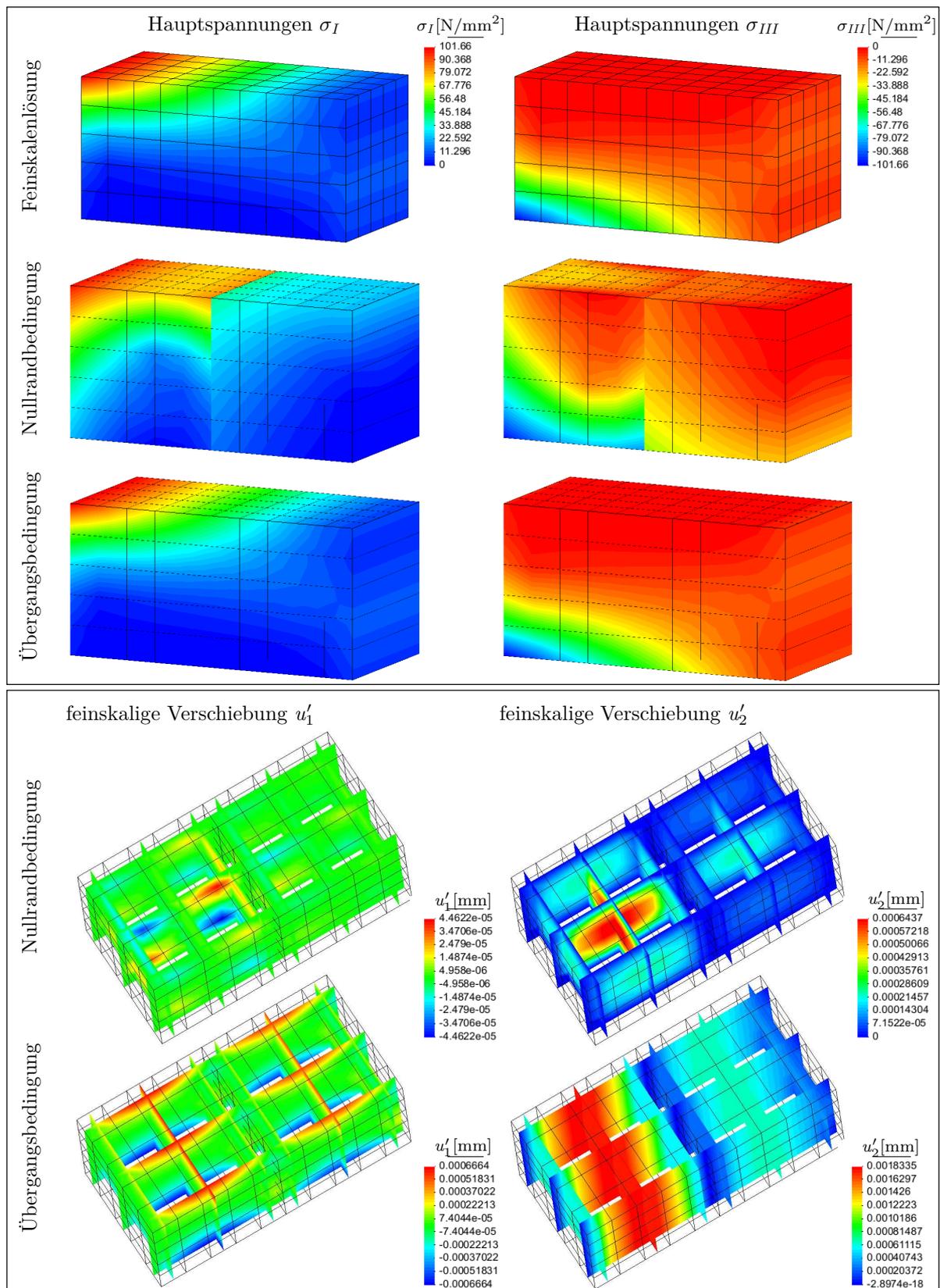


Abbildung 6.6: Hauptspannungen  $\sigma_I$  und  $\sigma_{III}$  im Vergleich mit der Referenzlösung sowie feinskalige Verschiebungen  $u'_1$  und  $u'_2$ .



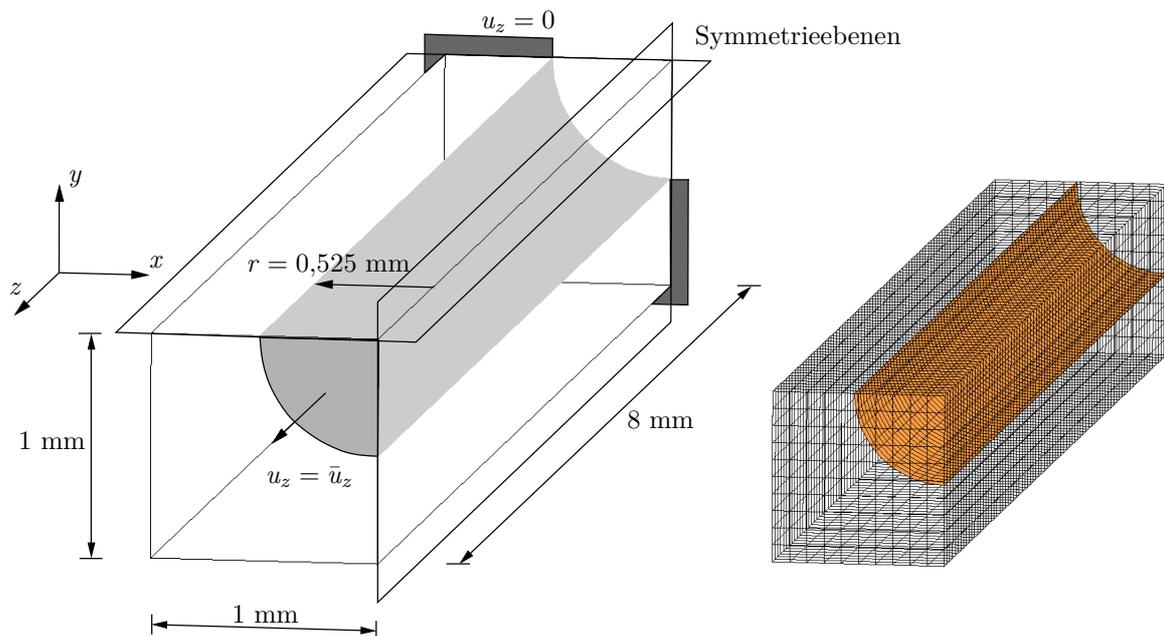
---

# Numerische Anwendungsbeispiele

---

## 7.1 Einzelfaser-Auszugversuch

Das in Kapitel 4 vorgestellte Modell für Grenzflächenversagen wird nun auf ein Beispiel angewendet, das einer dreidimensionalen Modellierung bedarf. Der Einzelfaser-Auszugversuch wurde als mikromechanischer Test zur Bestimmung der Verbundqualität zwischen zwei Materialien eingeführt. In der Literatur werden für diesen Versuch verschiedene Randbedingungen diskutiert, wobei meistens eine der zwei folgenden verwendet wird. In einer versuchstechnisch einfachen Variante wird die Faser gegen ein Widerlager aus der Matrix gezogen, in der zweiten Version wird die Matrix an einer Seite festgehalten, während auf der anderen Seite an der Faser gezogen wird. Die beschriebene vorder- oder rückseitige Lagerung, auch als Pull-Push- bzw. Pull-Pull-Test bezeichnet, hat laut BRAMESHUBER U. A. (2000) keinen signifikanten Einfluss auf die zu erwartenden Ergebnisse. Für die vorliegende Studie wurde die sogenannte Pull-Pull-Randbedingung mit hinten frei beweglicher Faser gewählt, während vorne eine gleichförmige Verschiebung  $\bar{u}_z$  aufgebracht wird, die in jedem Lastschritt inkrementell um 0,00005 mm gesteigert wird. In Abbildung 7.1 sind neben dieser Randbedingung auch die Strukturabmessungen und die verwendete Diskretisierung angegeben. Aus Symmetriegründen kann die Berechnung am Viertelsystem durchgeführt werden. Bei Anwendung der X-FEM kann dieses Viertelsystem ohne Berücksichtigung der Grenzfläche strukturiert vernetzt werden. Für das Matrixmaterial wurden die Parameter  $E = 39000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0,2$ , für die Textilfaser die Werte  $E = 72000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0,2$  und für die Grenzfläche zwischen Matrix und Faser die Parameter  $c_n = 4,7 \text{ N/mm}^2$ ,  $\beta = 1,8$  und  $\kappa_c = 0,00014$  angenommen, siehe Gleichung (4.19). Es wird das intrinsische Kohäsivzonenmodell aus Kapitel 4.2.3 verwendet. In Abbildung 7.2 ist der Verlauf verschiedener Spannungskomponenten zu den Lastschritten 45, 55, 65 und 75 dargestellt. Die Tangentialspannung  $t_t$ , als Schubspannung in der Grenzfläche, nimmt ihren Maximalwert in der Prozesszone



**Abbildung 7.1:** Geometrie und Randbedingungen des Einzelfaser-Auszugversuchs und Diskretisierung eines Viertels der Probe mit strukturiertem FE-Netz.

an, in welcher der Ablösevorgang zwischen Faser und Matrix stattfindet. Der Verlauf der Schubspannung  $\sigma_{yz}$  ist in der Mitte von Abbildung 7.2 angegeben; dabei wird sie an der rechten Symmetrieebene bei  $x = 1,0$  mm dargestellt. Die Schubspannung  $\sigma_{yz}$  kommt in dieser Symmetrieebene in den geschnittenen Elementen im Wesentlichen der Tangentialspannung  $t_t$  auf der Grenzfläche gleich. Entsprechend verhält es sich mit der Schubspannung  $\sigma_{xz}$  an der oberen Symmetrieebene des diskretisierten Körpers, deren Verlauf analog aussieht. Abgesehen vom Lasteinleitungsbereich befindet sich das Maximum in jenen Bereichen, in denen die Delamination fortschreitet. Die untere Bildfolge zeigt den Verlauf der Normalspannung  $\sigma_{zz}$ . Es ist zu erkennen, dass sich die Prozesszone immer dort befindet, wo die Konturlinien der Spannung die Grenzfläche kreuzen. An allen Sequenzen der drei Spannungen lässt sich der zügig fortschreitende Ablösevorgang in der Prozesszone beobachten. Die unterschiedlichen Bereiche der Lasteinleitung, intakten Grenzfläche, kohäsiven Zone sowie der vollständigen Delamination sind gut voneinander zu unterscheiden. Aufgrund der Pull-Pull-Randbedingung entsteht nicht nur im vorderen Bereich Schlupf, sondern auch hinten am freien Ende der Faser. Wie in Abbildung 7.3 links zu sehen, wird die Faser bereits in frühen Lastzuständen an der Rückseite herausgezogen, während die Matrix in Längsrichtung unbeweglich bleibt. Durch diese Verschiebungsrandbedingung und die radiale Kontraktion des freien Faserendes entsteht auch im hinteren Bereich eine Prozesszone, die sich bei vollständiger Delamination mit der im Laufe der Simulation von vorne nach hinten durchwandernden Prozesszone vereint.

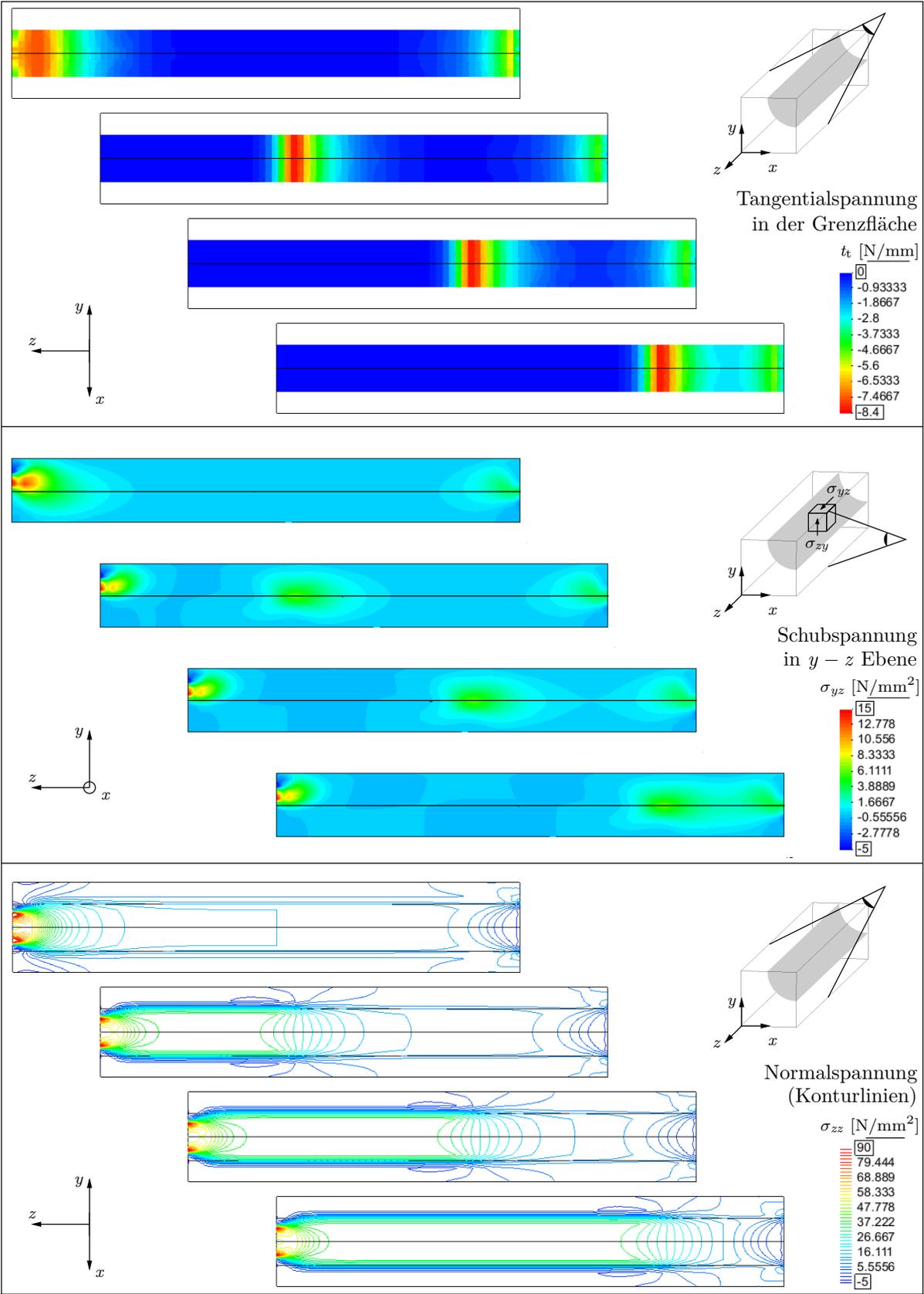
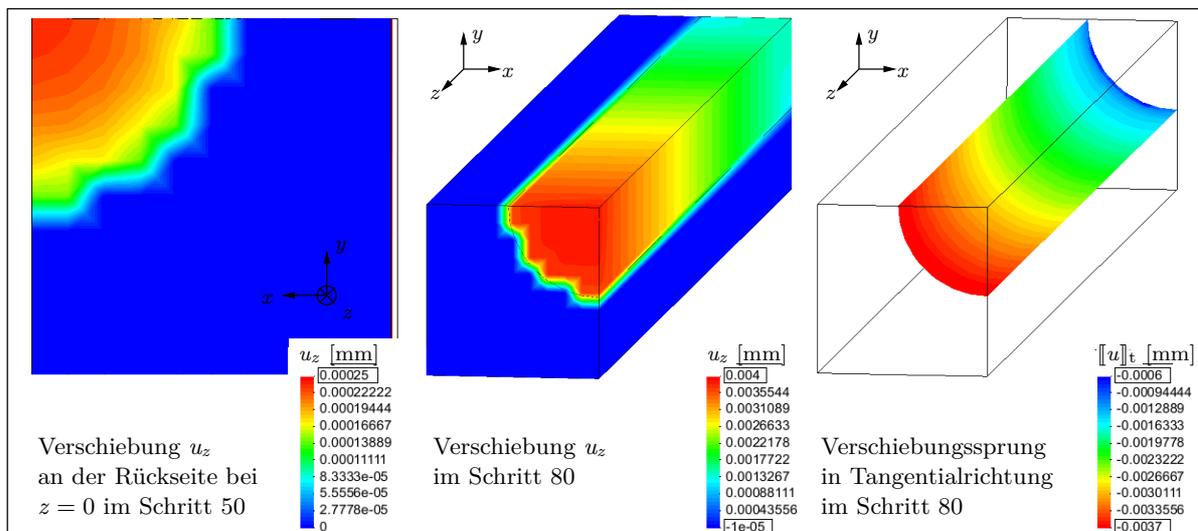


Abbildung 7.2: Verlauf der Tangentialspannung  $t_t$  in der Grenzfläche, der Schubspannung  $\sigma_{yz}$  und der Normalspannung  $\sigma_{zz}$  in den Schritten 45, 55, 65, 75.

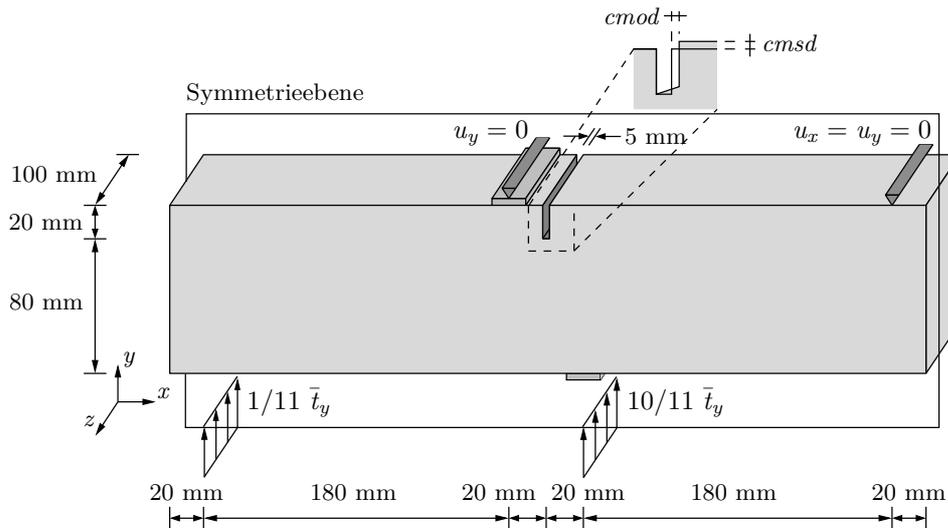


**Abbildung 7.3:** Verschiebung  $u_z$  an der Rückseite bei  $z = 0$  im Schritt 50 und Verschiebungsgrößen  $u_z$  und  $[[u]]_t$  im Schritt 80 nach vollständiger Delamination.

Die Verschiebungsgrößen  $u_z$  und  $[[u]]_t$  sind für den Zustand nach vollständiger Delamination in Abbildung 7.3 mittig und rechts dargestellt und lassen die losgelöste Faser erkennen. Nach vollständigem Ablösen herrschen in wenigen Bereichen der Grenzfläche zwischen Faser und Matrix Druckspannungen bei gleichzeitigem Faserauszug. Für diesen Fall des Versagens in Modus 2 sollte, wie in LIU UND BORJA (2008) angemerkt, Reibkontakt in der Kontaktformulierung explizit berücksichtigt werden. Bezüglich der Randbedingungen ist anzumerken, dass diese nicht exakt der Fasergeometrie folgen, sondern nur elementweise angenähert wurden. Aufgrund dessen treten im Lasteinleitungsbereich Störungen sowohl im Spannungsverlauf, siehe  $\sigma_{yz}$  und  $\sigma_{zz}$  in Abbildung 7.2, als auch im Verschiebungsverlauf, vergleiche  $u_z$  in Abbildung 7.3, auf. Da die Grenzfläche mitten durch Elemente verläuft, müssten zur exakten Aufbringung der Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen weitere Überlegungen angestellt werden. Diese Problematik wurde beispielsweise in JI UND DOLBOW (2004), MOËS U. A. (2006) oder auch MOURAD U. A. (2007) behandelt, aber hier nicht weiter betrachtet.

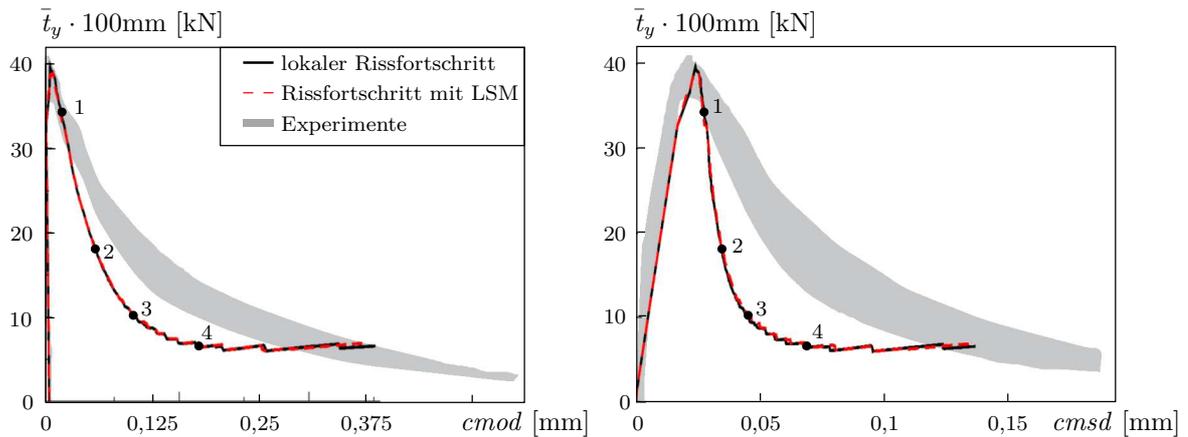
## 7.2 Vierpunktbiegebalken mit Kerbe

Ein in der Literatur weit verbreiteter Benchmark-Test ist der einseitig gekerbte Balken im Vierpunkt-Biegeversuch, auch als single edge notched beam (SEN beam) bezeichnet. Anhand dieses Testproblems wurden viele kontinuumsmechanische Modelle und diskrete Rissmodelle getestet. Dazu wurden zweidimensionale Berechnungen im ebenen Spannungszustand beispielsweise in WELLS UND SLUYS (2001), HETTICH (2007) sowie



**Abbildung 7.4:** Geometrie und Randbedingungen des Vierpunktbiegebalkens mit Kerbe.

LÖBLEIN (2004) durchgeführt, dreidimensionale Simulationen in WELLS (2001), OLIVER U. A. (2004) sowie AREIAS UND BELYTSCHKO (2005). Die hier zum Vergleich herangezogenen experimentellen Ergebnisse stammen aus der Arbeit SCHLANGEN (1993), in deren Rahmen eine umfassende Versuchsreihe an verschiedenen Betonbalken durchgeführt wurde. Die geometrischen Abmessungen des Betonbalkens und die Randbedingungen sind in Abbildung 7.4 dargestellt, die Kerbenbreite beträgt 5 mm. Für die numerische Untersuchung werden beide Lager an der Oberseite vereinfachend als Linienlager angenommen, rechts oben werden die Verschiebungen in  $x$ - und  $y$ -Richtung festgehalten, am mittigen Auflager nur in  $y$ -Richtung. Die Linienlasten an der Unterseite stehen im Verhältnis 1/10, wobei die mittige Last über eine starre, 20 mm breite Platte in den Balken eingeleitet wird. Die Laststeuerung erfolgt wegen des komplexen Verhaltens über eine indirekte Verschiebungskontrolle, wozu im Lösungsalgorithmus die vertikale Relativverschiebung zwischen zwei Knoten an der Oberkante der Kerbe verwendet wird. Die horizontale und vertikale Differenzverschiebung, auch als sogenannte crack mouth opening und crack mouth sliding Verschiebungen ( $cmod$  bzw.  $cmsd$ ) bezeichnet, sind in Abbildung 7.4 vereinfacht zweidimensional skizziert. Da der experimentelle Rissverlauf auf der Vorder- und Rückseite des Balkens nahezu gleich ist, kann der Balken in Dickenrichtung für die numerische Berechnung auf die Hälfte reduziert werden. Für die Simulation wird die hintere Hälfte des Balkens mit insgesamt 3464 Elemente räumlich strukturiert diskretisiert. Alle Knoten auf der Symmetrieebene bei  $z = 50$  mm sind in  $z$ -Richtung festgehalten. Um dreidimensionale Effekte in der Rissfläche abzubilden, werden für die Hälfte des Balkens zwei Elementreihen in Dickenrichtung verwendet. Innerhalb der Versagenszone ist eine höhere Elementdichte mit einer charakteristischen Elementgröße von  $h_e = 5,38$  mm vorgesehen. Der Radius zur Bestimmung der nichtlo-



**Abbildung 7.5:** Last-Verformungs-Verhalten des Vierpunktbiegebalkens.

kalen Spannungen wird zu  $R_{nl} = 2,8 h_e$  gewählt. Die Simulation wird auf einen einzigen Riss beschränkt, da anderweitig auftretende Sekundärrisse von untergeordneter Bedeutung sind. Für den unverstärkten Betonbalken werden die elastischen Materialparameter der Experimente verwendet, welche mit  $E = 35000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0,15$  angegeben sind. Der Elastizitätsmodul der Last- und Auflagerplatten im mittleren Bereich beträgt das 10-fache davon. Im Modell für kohäsive Matrixrisse aus Kapitel 5.2, siehe Gleichung (5.5), beträgt die Bruchenergie  $G_f = 0,01 \text{ Nmm/mm}^2$ , die Zugfestigkeit der Matrix  $f_t = 3,7 \text{ N/mm}^2$  und die anfängliche Schubsteifigkeit  $d_{int} = 10,0 \text{ N/mm}^2$ . Durch Festlegung des Parameters  $h_t = -6,908/\text{mm}$  sollen Schubspannungen in der Rissfläche bei fortschreitender Rissöffnung nur noch begrenzt übertragbar sein.

In Abbildung 7.5 ist das Last-Verformungs-Verhalten des Vierpunktbiegebalkens dargestellt, indem die Traglast über beiden charakteristischen Verformungsmodi aufgetragen wird. Die Traglast kann gut erfasst werden, wohingegen das Nachbruchverhalten zu spröde ist und die numerische Lösung somit im Vergleich zum Experiment eine geringere Duktilität aufweist. Es ist anzumerken, dass die Schubsteifigkeit auf die Traglast fast keinen Einfluss hat, wohl aber auf die Duktilität im nachkritischen Bereich. Wird eine konstante Schubsteifigkeit gewählt, ist die Materialtangente zwar symmetrisch, die Strukturantwort aber meist zu spröde. Bei veränderlicher Schubsteifigkeit ( $h_t \neq 0$ ) kann die Last-Verschiebungs-Kurve im nachkritischen Bereich besser angenähert werden. Die experimentelle Resttragfähigkeit kann ausreichend genau wiedergegeben werden, jedoch steigt sie nach dem dargestellten Punkt 4 weiter an, weil der Riss nahe der Lasteinleitungsplatte abknickt, statt vertikal nach unten zu wachsen. An diesem Punkt sagt das Risskriterium eine andere Richtung vorher, weil die Eigenwerte der nichtlokalen Spannungen fast identisch sind und in diesem Fall die „falsche“ Richtung gewählt wird. Dieses Abknicken ist für beide Rissfortschrittsalgorithmen in Abbildung 7.6 erkennbar.

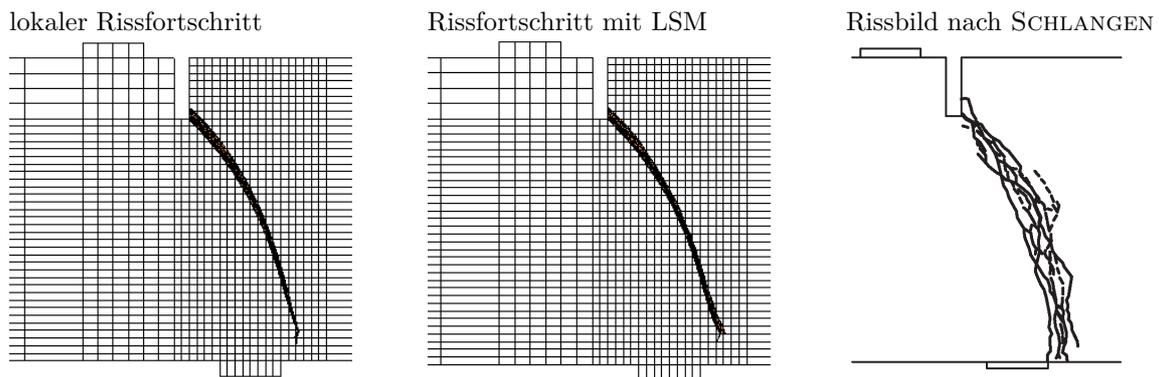


Abbildung 7.6: Vergleich der numerischen Risspfade mit experimentellem Rissmuster.

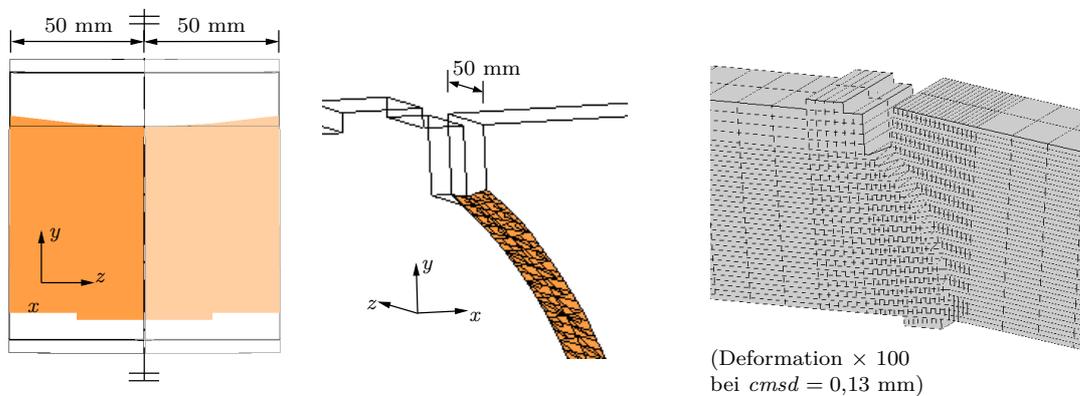


Abbildung 7.7: Ansichten der doppelt gekrümmten Rissfläche und deformierter Balken.

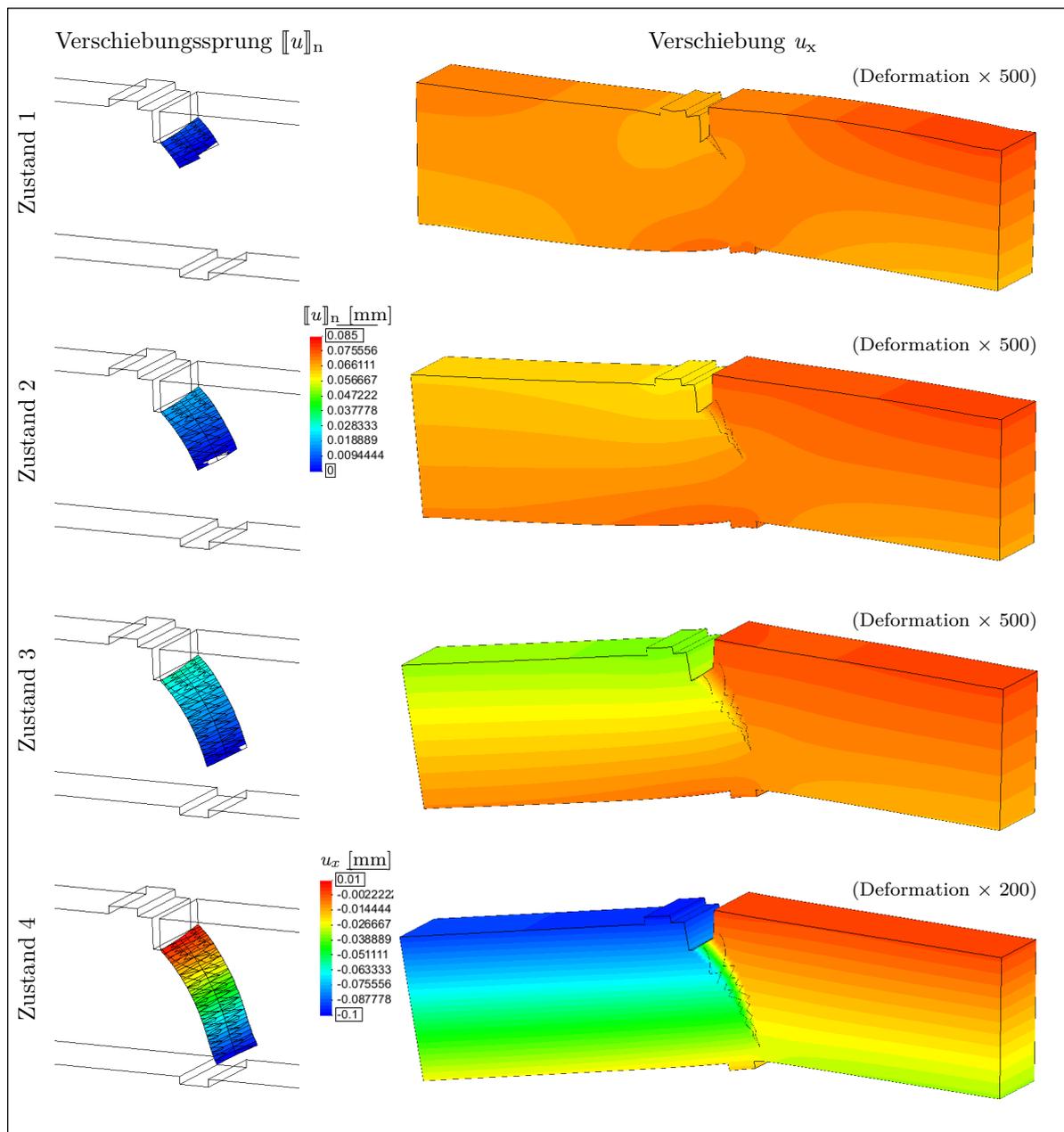
Insgesamt zeigt das entstehende Rissbild eine gute Übereinstimmung mit den experimentellen Risspfaden aus SCHLANGEN (1993), die in der gleichen Abbildung gegenübergestellt sind. Infolge der Schubbelastung wird der Riss in der Kerbe rechts unten initiiert und wächst anfangs unter einem Winkel von  $45^\circ$ . Im Laufe der Belastung verändert sich die Krümmung und der Riss wächst gegen Ende immer steiler zum rechten Rand der Lastplatte, wobei es sich dabei nur noch um reines Zugversagen handelt. Der Rissverlauf ist in sich relativ glatt und doppelt gekrümmt. Die Krümmung über die Balkendicke ist in den Ansichten in Abbildung 7.7 links und mittig gut zu erkennen. Daneben ist die deformierte Struktur bei einer vertikalen Relativverschiebung von  $cmsd = 0,13$  mm in 100-facher Überhöhung dargestellt. Die beiden verwendeten Rissfortschrittsalgorithmen verhalten sich für dieses Beispiel sehr ähnlich und sind kaum voneinander zu unterscheiden. Deshalb wird in der folgenden Abbildung nur die modifizierte Level-Set-Methode in Teilbereichen diskutiert. Dazu ist in Abbildung 7.8 der Verlauf verschiedener Verschiebungen zu den in der Last-Verschiebungs-Kurve markierten Zuständen 1-4 (vergleiche Abbildung 7.5) dargestellt. Zustand 1 stellt den Zeitpunkt dar, an dem die Rissöffnung erstmals einen signifikanten Wert annimmt und der Riss im Weiteren zügig fortschreitet.

Bis dahin erfolgt die Lastabtragung fast nur über Biegung, was anhand der Krümmung des linken und rechten Balkenendes der deformierten Figur des Zustands 1 gut zu sehen ist. Danach schreitet der Riss schnell fort und öffnet sich stetig, wodurch sich die Biegung im Balken verringert. Dies zeigt sich in den folgenden Zuständen durch das Absenken des linken Balkenendes. Außerhalb der Risszone entlastet das System, während sich die Deformation im Riss konzentriert. Insbesondere an der Verschiebung  $u_x$  ist der Sprung über den Riss gut zu erkennen. Wie mit diesem Beispiel gezeigt werden konnte, sind beide untersuchten Rissfortschrittsalgorithmen zur Abbildung mäßig gekrümmter Rissflächen brauchbar. Nach der zugdominanten Rissinitiierung kommt es im kohäsiven Riss auch zur tangentialen Rissöffnung, die mit dem Schädigungsmodell gut wiedergegeben werden kann.

### 7.3 Gekerbter Torsionsbalken

Mit diesem numerischen Beispiel soll das Verhalten eines gekerbten Balkens unter Torsionsbelastung untersucht werden. In BARR UND BROKENSHIRE (1996) wurde dazu eine Reihe von Versuchen an Probekörpern unterschiedlicher Geometrie und Betonfestigkeit durchgeführt. Aus dieser Versuchsreihe wird für die numerische Untersuchung ein gekerbter Betonbalken quadratischen Querschnitts mit einer relativen Kerbtiefe von 0,5 herangezogen. Die Kerbe verläuft im Winkel von  $45^\circ$  zur Längsachse des Balkens und weist eine nominale Breite von 5 mm auf. Der Versuchsaufbau ist samt geometrischen Abmessungen und Randbedingungen schematisch in Abbildung 7.9 dargestellt. An den Balkenenden ist der Probekörper von einem Stahlrahmen umschlossen, um den Körper zu lagern und die Last aufzubringen. Dabei werden drei Enden der Rahmenkonstruktion wie in Abbildung 7.9 gezeigt gelagert, während die Belastung auf das vierte Rahmenende aufgebracht wird. Eine detaillierte Beschreibung der experimentellen Untersuchung und numerischen Modellierung ist in JEFFERSON U. A. (2004) zu finden, numerische Berechnungen wurden beispielsweise auch von GASSER UND HOLZAPFEL (2006), GÜRSES (2007) sowie JÄGER (2009) durchgeführt. Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel kann dieses nicht auf zwei Dimensionen reduziert werden, sondern bedarf einer vollen dreidimensionalen Analyse. Die Materialparameter des Betonbalkens werden zu  $E = 35000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0,2$  angenommen, die des Stahlrahmens zu  $E = 200000 \text{ N/mm}^2$  und  $\nu = 0,2$  und für das kohäsive Rissmodell des Kapitels 5.2 werden die Parameter  $G_f = 0,08 \text{ Nmm/mm}^2$ ,  $f_t = 2,3 \text{ N/mm}^2$ ,  $d_{\text{int}} = 1,0 \text{ N/mm}^2$  und  $h_T = -13,9/\text{mm}$  gewählt.

Für dieses Beispiel ergeben sich mit den verwendeten Rissverfolgungsalgorithmen sehr unterschiedliche Ergebnisse. Der lokale, tetraederweise Rissfortpflanzungsalgorithmus kann die Rissfläche nicht bis zum vollständigen Versagen verfolgen. Die Rissgeometrie



**Abbildung 7.8:** Verlauf des Verschiebungssprungs  $[[u]]_n$  und der horizontalen Verschiebung  $u_x$  in den Zuständen 1 - 4.

konnte nach dem Zustand, der in Abbildung 7.10 zu sehen ist, nicht bestimmt werden, weshalb die Berechnung an dieser Stelle abgebrochen wurde. Bis zu diesem Zustand ist die Rissfläche gerade einmal durch zwei Elementreihen gewandert. Mit der modifizierten Level-Set-Methode in Teilbereichen hingegen kann die Rissfläche durch den gesamten Balken verfolgt werden. In Abbildung 7.11 sind dazu einige Perspektiven der komplex gekrümmten, dreidimensionalen Rissfläche zu sehen. Ausgehend von der Kerbe verläuft

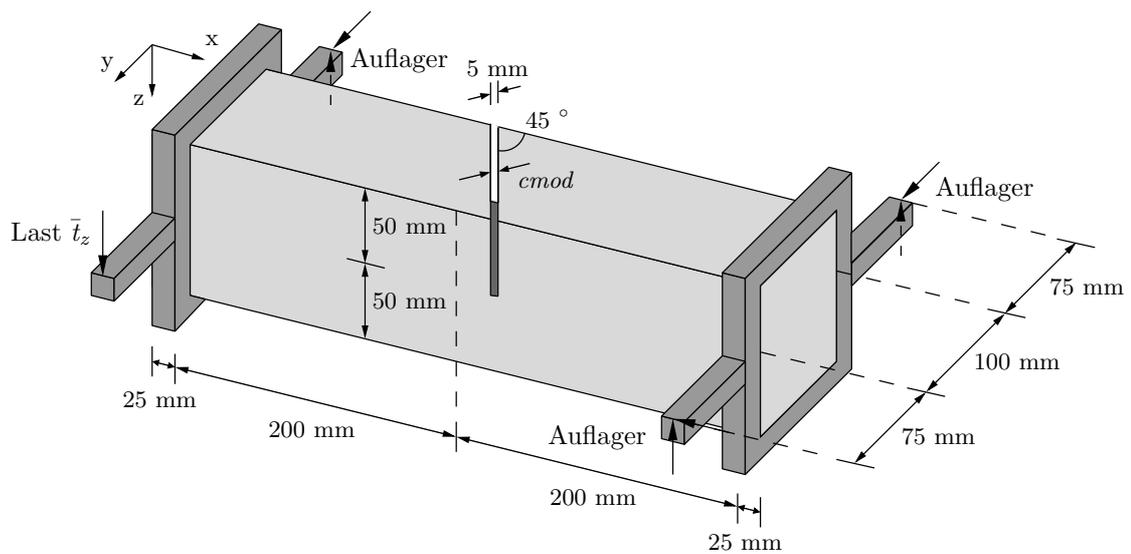


Abbildung 7.9: Geometrie und Randbedingungen des gekerbten Torsionsbalkens.

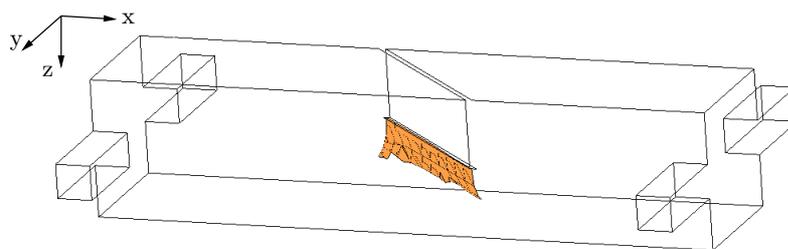
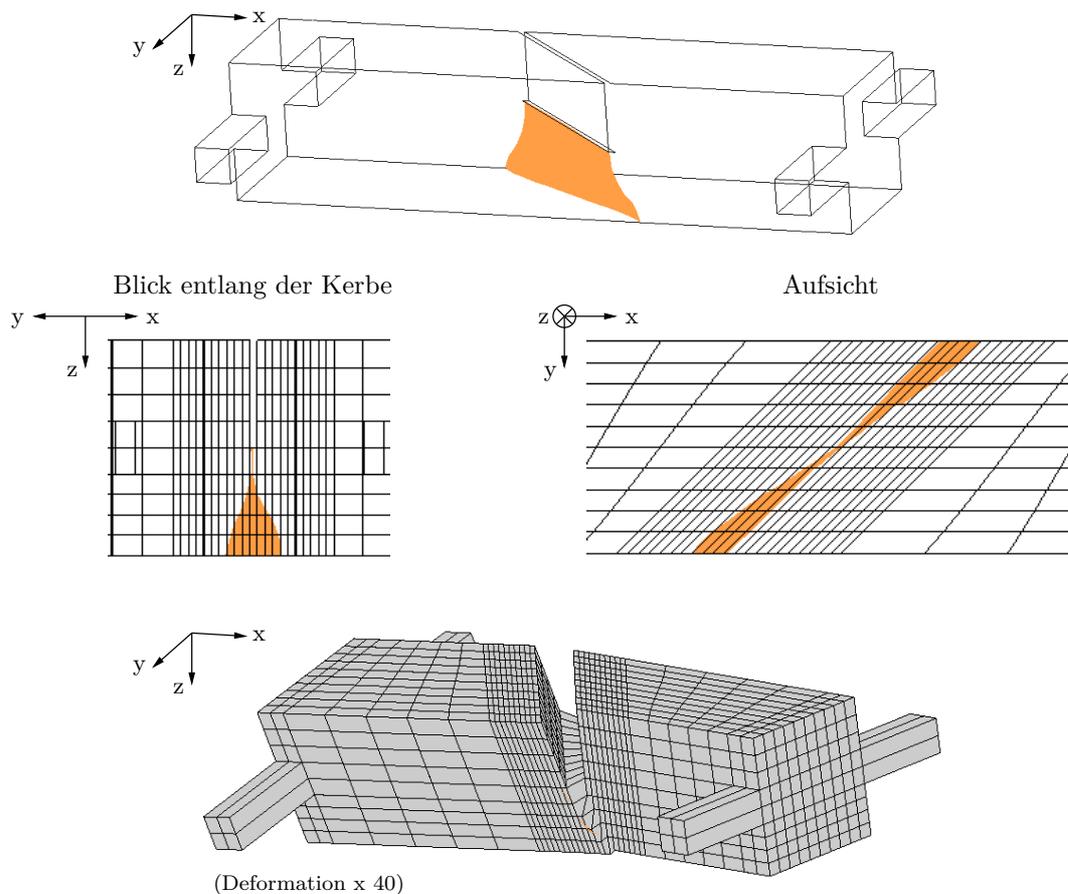


Abbildung 7.10: Rissgeometrie für den lokalen Rissfortschrittsalgorithmus.

die Rissfläche diagonal durch die Seitenflächen, wobei sich die Austrittspunkte immer weiter voneinander weg bewegen. Die entstehende Rissfläche weist auch in Dickenrichtung des Balkens einen Krümmungswechsel auf, der gut abgebildet werden kann. An der deformierten Struktur sind das Aufreißen der Kerbe und die Ausbildung zweier Teilbruchstücke zu erkennen. Dieses Versagensbild passt sehr gut mit jenem der experimentellen Untersuchungen aus BARR UND BROKENSHERE (1996) zusammen, das in Abbildung 7.12 rechts dargestellt ist. Links daneben ist ein Vergleich der berechneten Last-Rissöffnungs-Verläufe mit denen des Experiments dargestellt. Dabei wird die Last über die Rissnormalöffnung in Balkenmitte ( $c_{mod}$ ) aufgetragen, mit der der Verformungszustand kontrolliert wird. Die Traglast kann mit dem vorgestellten Verfahren sehr gut wiedergegeben werden, wobei das Nachbruchverhalten nicht exakt abgebildet werden kann. Dies liegt insbesondere an der relativ groben Diskretisierung und der Annahme, dass Elemente immer komplett durchreißen. Dadurch findet kein kontinuierlicher Rissfortschritt statt, sondern dieser erfolgt immer sehr abrupt, weshalb sich, wie in den Modellbeispielen des Abschnitts 5.6, gezackte Kurven ergeben. In Zuständen, in denen



**Abbildung 7.11:** Rissgeometrie für die Level-Set-Methode in Teilbereichen aus unterschiedlichen Perspektiven und deformierter Balken.

die Lastkurve ansteigt, wird mehr Energie durch Lastumlagerungen aufgebaut, als durch weitere Öffnung des Risses dissipiert wird, was unrealistisch ist. Dies liegt auch daran, dass die Elemente der untersten Reihe nur nach und nach reißen, weil an den Gaußpunkten dieser Elemente teilweise Druckspannungen herrschen und somit das Versagen erst sehr spät angezeigt wird.

Anhand dieses Beispiels konnte gezeigt werden, dass es mit dem vorgestellten numerischen Modell möglich ist, Risse in beliebiger Weise, ganz unabhängig von der Diskretisierung, durch finite Elemente zu führen. Die Objektivität bestätigt sich darin, dass die numerische Lösung unabhängig von der Orientierung der finiten Elemente ist und das Strukturverhalten des gekerbten Balkens mit diesem Modell zufriedenstellend abgebildet werden kann. Dabei wurde diese Vorhersage mit einem relativ groben Netz mit 3126 Elementen erzielt, was im Vergleich zur Simulation aus GASSER UND HOLZAPFEL (2006) mit 40610 Elementen sehr wenig ist.

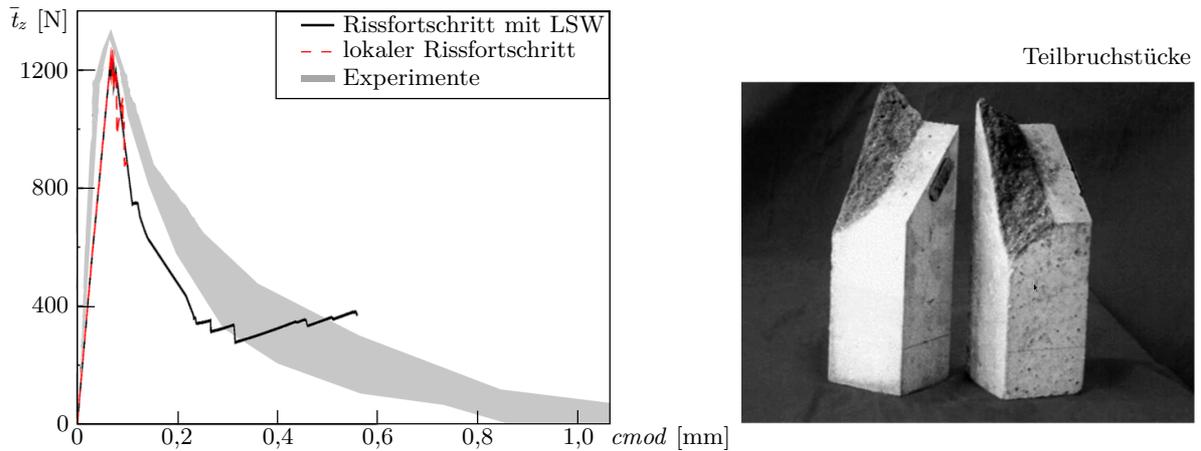


Abbildung 7.12: Vergleich der Last-Rissöffnungs-Kurven und Teilbruchstücke des Experiments von BARR UND BROKENSHERE (1996).

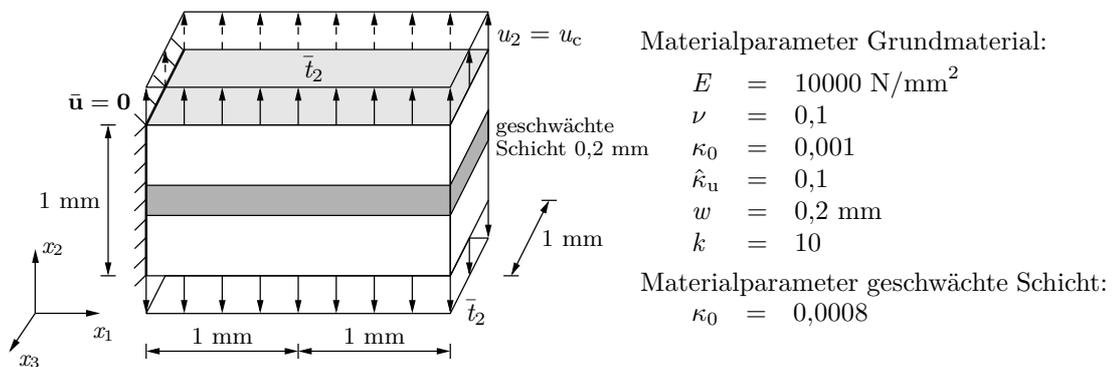
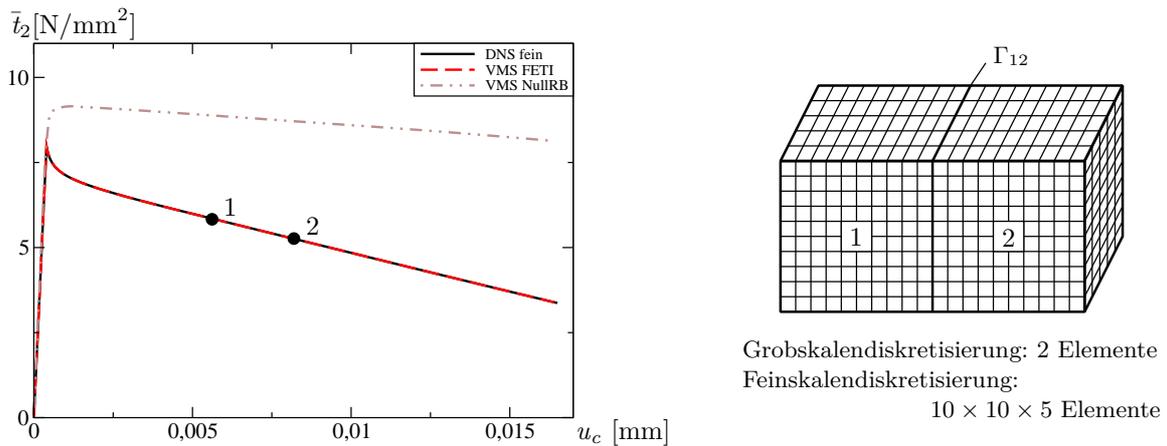


Abbildung 7.13: Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter des Balkens.

## 7.4 Dicker Balken mit geschwächter Mittelschicht

Dieses numerische Beispiel soll die Leistungsfähigkeit der Zweiskalenformulierung für nichtlineares, schädigendes Materialverhalten unter Beweis stellen. Dazu wird ein dicker Balken aus homogenisiertem Reibungsmaterial untersucht. In Abbildung 7.13 sind Geometrie, Randbedingungen und die verwendeten Materialparameter angegeben. Das linke Balkenende ist eingespannt, während die oberen und unteren Randflächen durch eine gleichmäßige Flächenlast auseinandergezogen werden, was im Wesentlichen einem Delaminationslastfall entspricht. In der Mittelschicht des Balkens ist der Schädigungsschwellenwert herabgesetzt, so dass die Entfestigung dort zuerst einsetzt. Die Simulation auf Basis des Zweiskalenmodells erfolgt mit zwei Grobskalenelementen, die jeweils mit  $10 \times 10 \times 5$  Feinskalenelementen weiter diskretisiert sind. Es tritt nur eine Koppelfläche auf, über die sich das Schädigungsband infolge der Beanspruchung senkrecht



**Abbildung 7.14:** Vergleich der Last-Verschiebungs-Kurven und Diskretisierung des Balkens mit 2 Grobskalenelementen und je  $10 \times 10 \times 5$  Feinskalenelementen.

ausbreiten soll. Die Feinskalenlösung als direkte numerische Simulation (DNS) dient im Vergleich als Referenzlösung, weshalb dafür die Variablen so fein aufgelöst werden wie die feinskaligen Variablen der Zweiskalenlösung. Abbildung 7.14 zeigt die verwendete Diskretisierung und die damit erzielten Last-Verschiebungs-Kurven. Zwischen den Last-Verschiebungs-Kurven der Feinskalenlösung (DNS fein) und der Zweiskalenlösung mit der FETI-Übergangsbedingung (VMS FETI) herrscht eine sehr gute Übereinstimmung. Die Last-Verschiebungs-Kurve der Zweiskalenlösung mit der Nullrandbedingung (VMS NullRB) verhält sich hingegen viel zu steif, folglich wird die aufnehmbare Last deutlich überschätzt. Die Nullrandbedingung kann die Kinematik auf dem Kopplungsrand nicht genau erfassen, weshalb dafür keine weiteren Ergebnisse gezeigt werden. Abbildung 7.15 dient als Vergleich des lokalen Verhaltens der Feinskalenlösung mit der FETI-Zweiskalenlösung. Dabei werden die Schädigungsverteilung  $D$  in zwei verschiedenen in Abbildung 7.14 markierten Zuständen sowie die Normalspannungsverteilung  $\sigma_{11}$  dargestellt. Am rechten Balkenende setzt die Schädigung zuerst in der geschwächten Schicht ein und breitet sich schnell in dieser Schicht nach links aus, wobei das eingespannte Balkenende nicht erreicht wird. Nahe der Einspannung dehnt sich die Lokalisierungszone in vertikaler Richtung aus. Dieses Verhalten lässt sich damit begründen, dass ein Großteil des Balkens in diesem Zustand gedanklich in zwei Kragarme geteilt werden kann, die nach oben bzw. unten durchgebogen werden. Am Spannungsverlauf  $\sigma_{11}$  in Zustand 2 zeigen sich Zugspannungen an den inneren Kragarmseiten und Druckspannungen an den äußeren. Durch den Gewichtungparameter  $k = 10$ , siehe Gleichung (3.9), ist die äquivalente Verzerrung im Zugbereich größer, weshalb dort die Schädigung zunimmt und den lastübertragenden Querschnitt verkleinert. Insgesamt kann sich die Schädigung gut über den Kopplungsrand zwischen den Elementen ausbreiten, weshalb kein Unterschied zwischen der Fein- und Zweiskalenlösung am Kopplungsrand zu erkennen ist.

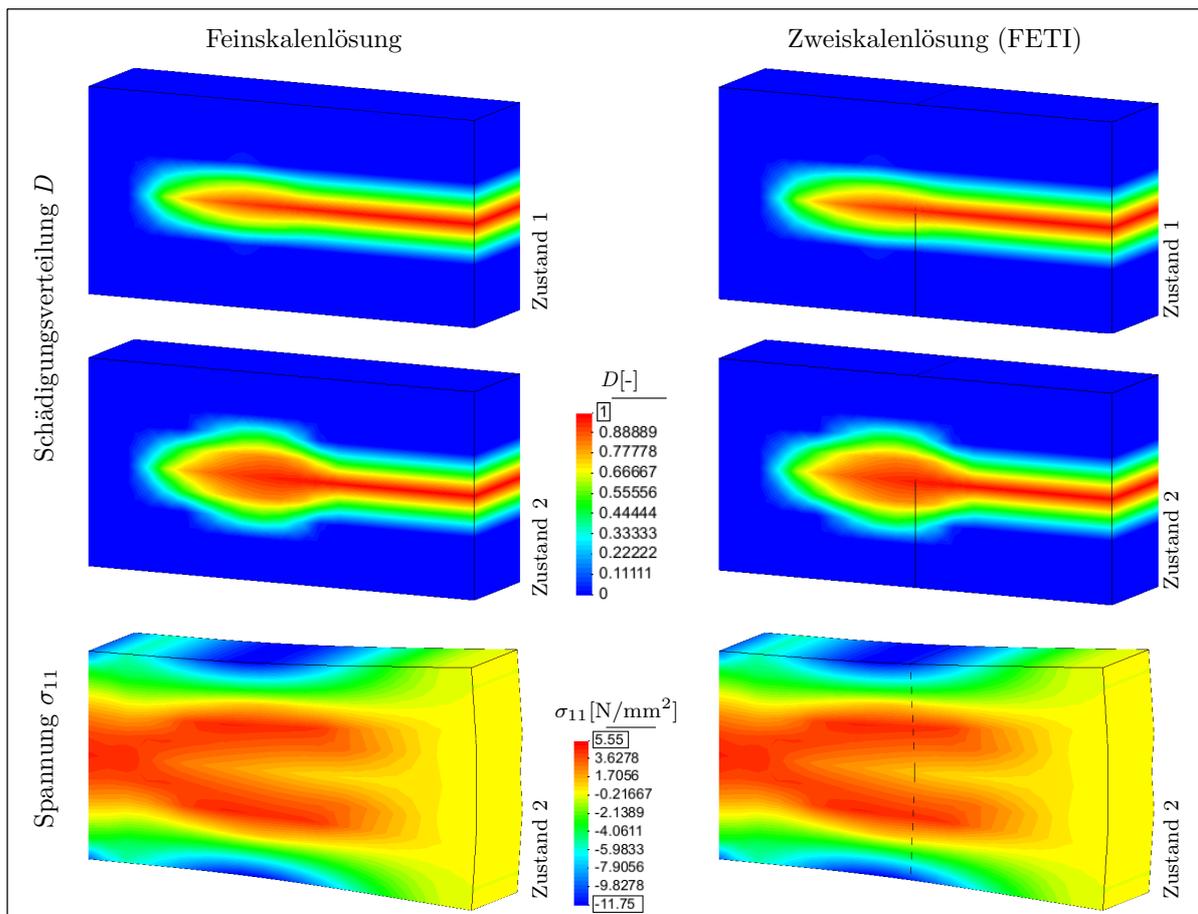
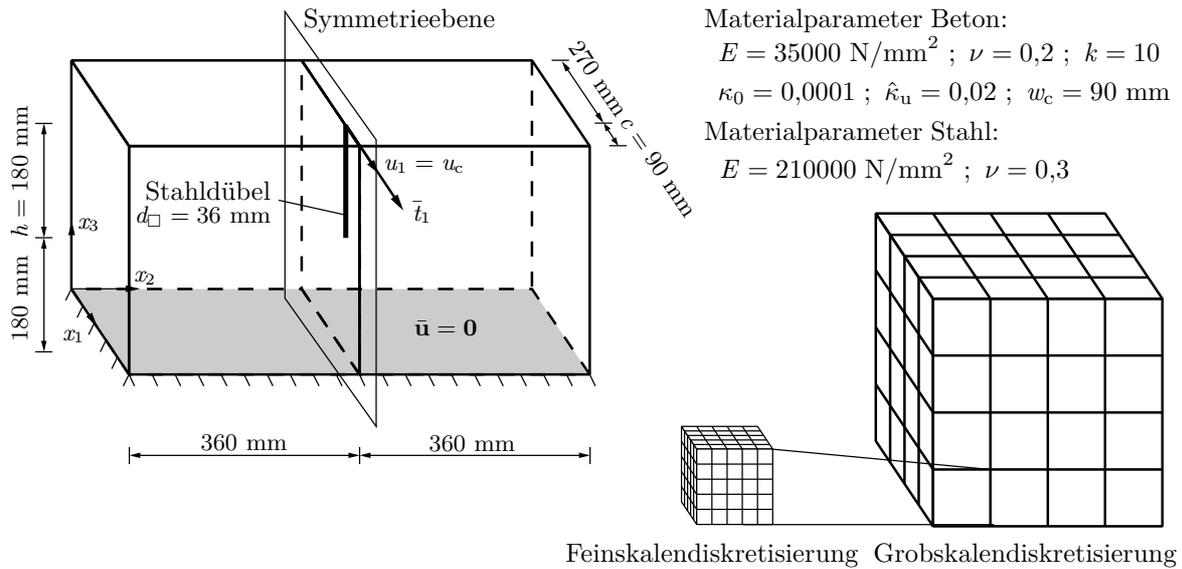


Abbildung 7.15: Vergleich der Schädigungsverteilung  $D$  und Normalspannung  $\sigma_{11}$ .

## 7.5 Betondübel unter Querbelastung

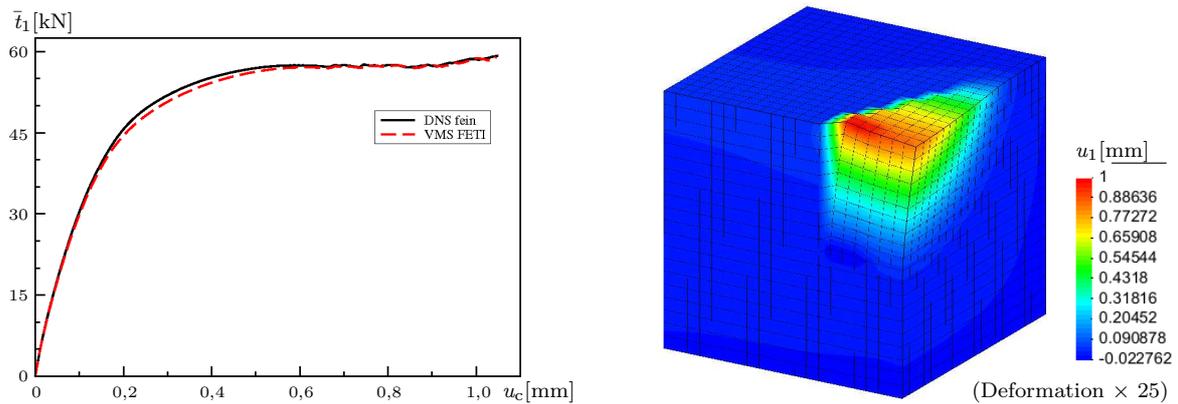
Im letzten Beispiel wird ein Betonkörper mit einem randnahen Stahldübel untersucht. Dieser Dübel wird quer zu seiner Achse, senkrecht zum freien Rand belastet. Der in dieser Arbeit behandelte Problemfall wurde in HOFMANN (2004) sowohl experimentell als auch numerisch untersucht. Die geometrischen Abmessungen des Betonkörpers sowie die Materialparameter für das regularisierte Schädigungsmodell des Kapitels 3.3.2 sind in Abbildung 7.16 angegeben. In der Arbeit HOFMANN (2004) wurden verschiedene Lagerungsarten untersucht und miteinander verglichen, wovon hier die einfachste Randbedingung verwendet wird. Dazu werden alle Knoten der Unterseite bei  $x_3 = 0$  festgehalten und auf eine Druckabstützung an der Vorderfläche seitlich vor dem Dübel verzichtet. Die Abmessungen des Körpers wurden so gewählt, dass sie mit experimentellen Aufbauten vergleichbar sind. So nehmen der Randabstand mit  $c = 90$  mm und die Verankerungstiefe mit  $h = 180$  mm typische Werte an, womit gleichzeitig die Ab-



**Abbildung 7.16:** Geometrie, Randbedingungen, Materialparameter sowie grob- und feinskalige Diskretisierung des halben Betonkörpers.

messungen der Grobskalenelemente definiert sind. Der Stahlbübel wird vereinfacht mit einem quadratischen Querschnitt mit einer Kantenlänge von  $d_{\square} = 36 \text{ mm}$  modelliert, anstatt ihn als runden Dübel explizit zu vernetzen. Die Einzellast  $\bar{t}_1$  greift am oberen Ende des Bübels an, wobei die Kontrollverschiebung  $u_c$  in einer quasistatischen Berechnung schrittweise um  $0,005 \text{ mm}$  erhöht wird. Aufgrund der Symmetrie von Geometrie und Belastung kann das numerische Modell auf die Hälfte reduziert werden. Die grob- und feinskalige Diskretisierung des halben Körpers ist in Abbildung 7.16 skizziert.

Dieses Beispiel bietet eine gute Möglichkeit, die in Kapitel 6 vorgestellte Zweiskalenmethode anzuwenden und die sich entwickelnden Versagensbilder mit denen einer direkten numerischen Simulation zu vergleichen. Im Folgenden wird also kein direkter Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen angestrebt, sondern nur ein Vergleich der Feinskalen- mit der Zweiskalenlösung. Dabei ist insbesondere auch darauf zu achten, dass sich die erwartete Schädigung auch schräg über Kopplungsränder hinweg ausbreiten kann. Die Last-Verschiebungs-Kurven der direkten numerischen Simulation (DNS fein) und der Zweiskalensimulation (VMS FETI) in Abbildung 7.17 links zeigen eine sehr gute Übereinstimmung. Nach Erreichen des ersten Hochpunktes fallen die Kurven leicht ab, bevor die Last noch weiter gesteigert werden kann. Dabei wird die Last entlang der Verankerungstiefe in den noch ungeschädigten Beton umgelagert. Der Verlauf der Kurven ist sehr plausibel und auch mit den experimentellen Verläufen aus HOFMANN (2004) vergleichbar. Wie in Abbildung 7.18 zu sehen, lässt sich die Last in den Experimenten meist bis zu einer Bruchverschiebung von 2-3 mm steigern. Nach Erreichen der Höchstlast kann sich, wie an der roten und grünen Kurve erkennbar, sogar ein

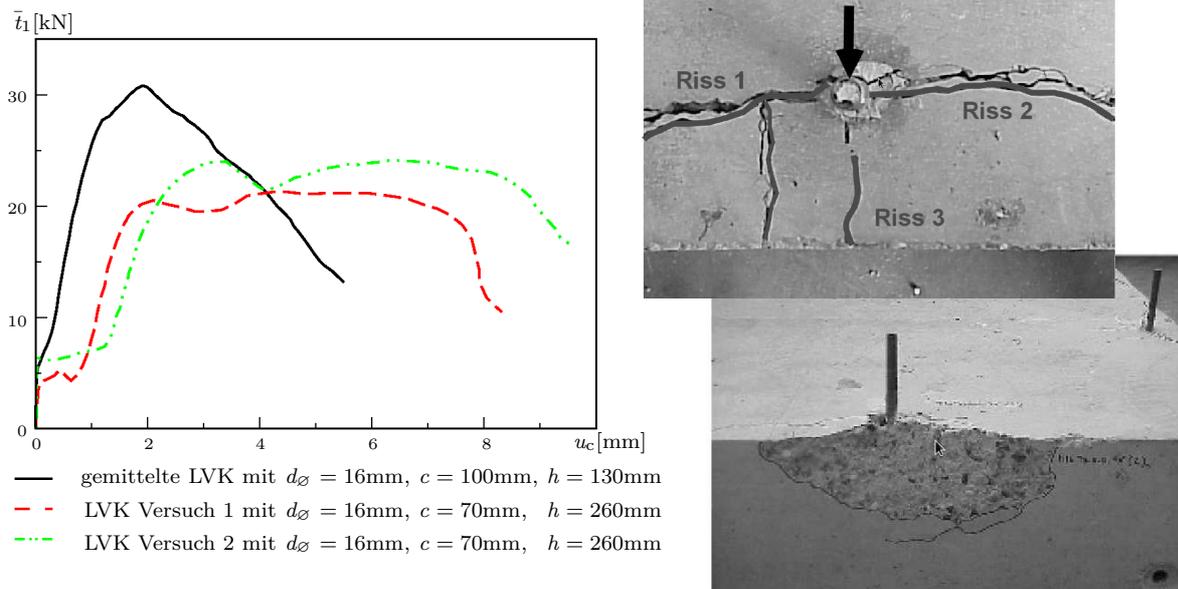


**Abbildung 7.17:** Links: Vergleich der Last-Verschiebungs-Kurven der Feinskalenlösung (DNS fein) und der Zweiskalenlösung (VMS FETI). Rechts: Verschiebungsverlauf  $u_1$  der Feinskalenberechnung auf deformiertem Körper.

ausgeprägtes Lastplateau mit weiterer Laststeigerung entwickeln. Leider war es nicht möglich, die Simulation bis zu einem deutlichen Abfall der Last-Verschiebungs-Kurven weiterzuführen. Ab einer Bruchverschiebung von etwa 1 mm konnte kein Gleichgewicht im Iterationsprozess mehr gefunden werden, weshalb die Berechnung schließlich abgebrochen wurde. Der Verschiebungsverlauf  $u_1$  ist für den Zustand bei  $u_c = 1$  mm in Abbildung 7.17 rechts dargestellt, wobei die Deformation des Körpers 25-fach überhöht wurde.

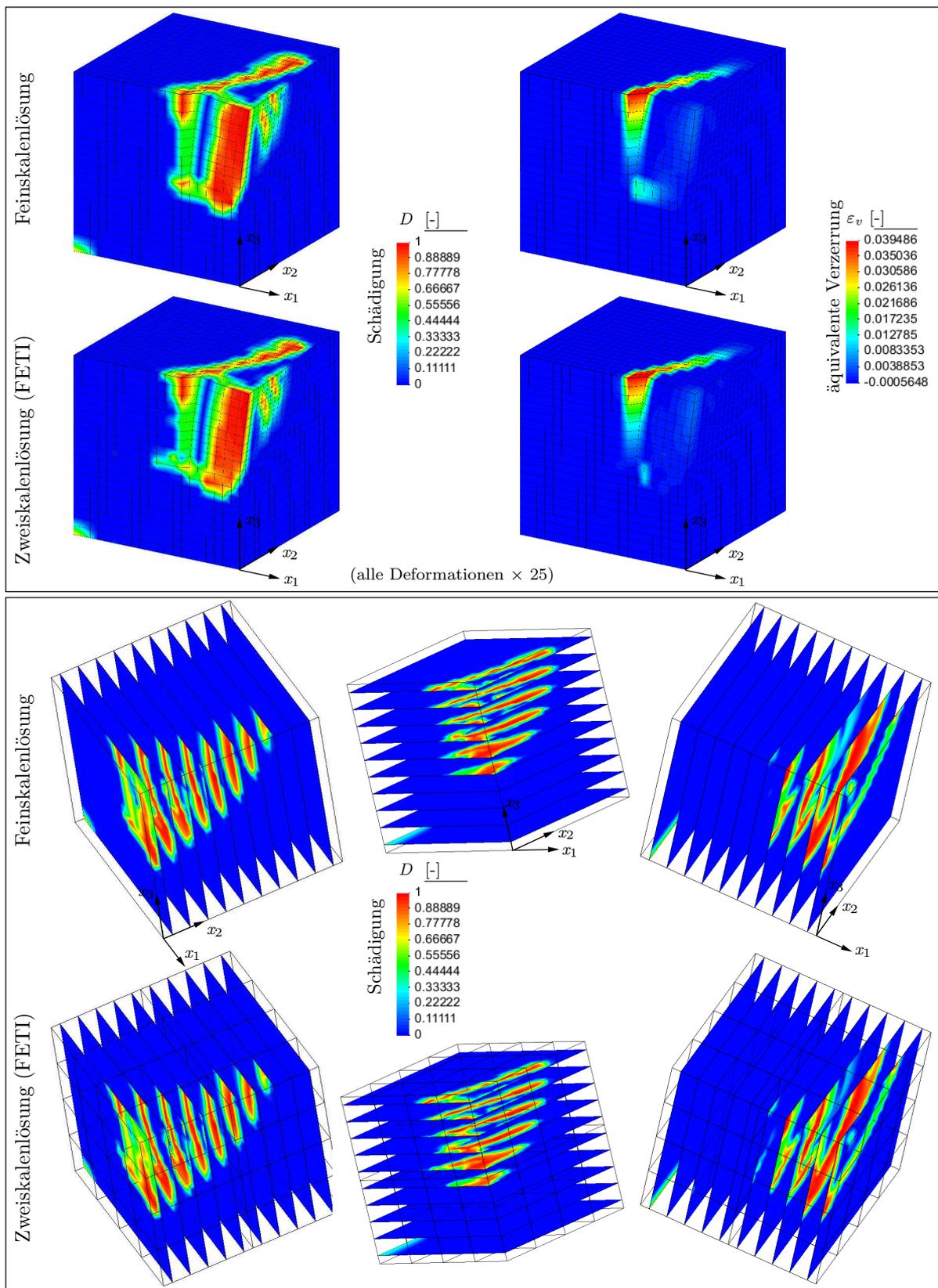
In Abbildung 7.19 werden die Schädigung und äquivalente Verzerrung beider Berechnungen für den Zustand  $u_c = 1$  mm einander gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, dass die Zweiskalenlösung den Schädigungs- und Verzerrungszustand sehr gut wiedergeben kann und die Ergebnisse fast identisch sind. Die Form des sich bildenden Betonausbruchkegels lässt sich insbesondere an den Schnittbildern durch einzelne Ebenen des Körpers deutlich erkennen. Dieser Betonausbruchkegel deckt sich auch mit dem Bruchkörper der experimentellen Ergebnisse. Das Versagen tritt in den Experimenten durch einen sogenannten Betonkantenbruch ein, vergleiche Abbildung 7.18 rechts. Dabei bilden sich schräg zum freien Rand laufende Risse 1 und 2 sowie am freien Rand Riss 3, der durch Zugspannungen an diesem Rand entsteht und als Spaltriss vom freien Rand aus zum Dübel wächst. Die Schädigungsverteilung in Abbildung 7.19 repräsentiert genau dieses Rissbild, in dem die Risse 1-3 aus Abbildung 7.18 klar wiederzuerkennen sind.

Abgesehen von der Schädigungsverteilung stimmen auch andere Ergebnisse wie Verschiebungs- und Spannungsverläufe zwischen beiden Lösungen sehr gut überein. Mit diesem Beispiel konnte also gezeigt werden, dass das Zweiskalenmodell auch für anspruchsvolle Versagensmuster mit gekrümmten Betonausbruchkegeln gut geeignet ist. Wie in Abbildung 7.19 zu sehen, kann sich die Schädigung auch schräg über Kopplungsflächen hinweg



**Abbildung 7.18:** Links: experimentelle Last-Verschiebungs-Kurven einzelner Befestigungen am Bauteilrand bei Belastung senkrecht zum Rand. Rechts: sichtbare Rissbildung sowie Betonausbruchkegel. Aus HOFMANN (2004).

ausbreiten, was bei diesen flachen Bruchkegeln wichtig ist. Um die Berechnung jedoch weiter in den Versagensbereich zu führen, könnte beispielsweise eine nichtlokale gradientenbasierte Schädigungsformulierung verwendet werden oder bei fortgeschrittener Schädigung ein Wechsel zu einem diskreten Rissmodell stattfinden.



**Abbildung 7.19:** Vergleich von Schädigung  $D$  und äquivalenter Verzerrung  $\varepsilon_v$  der Feinskalenlösung und der Zweiskalenlösung (FETI). Verschiedene Ansichten der Schädigungsverteilung auf Schnittebenen durch den Körper.

---

# Zusammenfassung und Ausblick

---

## 8.1 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit konnten sowohl diffuses als auch diskretes Versagen in dreidimensionalen Strukturen aus heterogenen Reibungsmaterialien erfolgreich modelliert werden. Dabei befasste sich der erste Teil mit der diskontinuierlichen Modellierung ein- und zweiphasiger quasispröder Materialien, der zweite mit der Zweiskalenmodellierung entfestigender Materialien mit lokalisiertem Versagensbild. Die vorgestellten Modelle sind jeweils für quasistatische Berechnungen bei Annahme kleiner Verschiebungen gültig.

Die in Bereichen konzentrierter Belastung entstehenden schmalen Versagenszonen mit diskreten Rissen wurden mit dem Konzept kohäsiver Risse modelliert. Durch Anreicherung der gewöhnlichen kinematischen Beschreibung können kohäsive Risse, als interne Flächen in einphasigen Festkörpern oder materielle Grenzflächen in zweiphasigen Körpern, beliebig innerhalb finiter Elemente positioniert sein. Mit der erweiterten Finite-Elemente-Methode konnten die kinematischen Anforderungen schwacher und starker Diskontinuitäten erfüllt und somit diskontinuierliches Versagen modelliert werden. Infolge dessen konnte auf die gewöhnlichen Vorgehensweisen zur Modellierung diskreter Risse und materieller Grenzflächen mithilfe von Interface-Elementen und Neuvernetzungsalgorithmen verzichtet werden. Die vorgestellte Variante der X-FEM ermöglicht eine netzunabhängige Diskretisierung diskreter Risse und materieller Grenzflächen mit einem unveränderten, strukturierten Netz.

Bei dem verwendeten kohäsiven Rissmodell wurde davon ausgegangen, dass sich das unelastische Materialverhalten auf die kohäsiven Risse beschränkt, während sich der Rest der Struktur elastisch verhält und mit klassischen, kontinuumsmechanischen Konstitutivgesetzen wiedergegeben werden kann. Im Zusammenhang mit der bruchmechani-

schen Materialmodellierung konnten Versagenskriterien formuliert werden, die Rissentstehung sowie Rissfortschritt anzeigen. Bei der Modellierung von Matrixrissen in kohäsiven Reibungsmaterialien wurde zugdominantes Versagen angenommen und in diesem Zusammenhang ein Hauptzugspannungskriterium verwendet. Für das Versagen materieller Grenzflächen in textilibewehrtem Beton wurde die Annahme eines gemischten Zug-Schub-Versagens getroffen. Das konstitutive Verhalten materieller Punkte auf der Rissfläche konnte mit schädigungsbasierten Spannungs-Rissöffnungs-Gesetzen beschrieben werden. Darin fließen die effektive Spannung und die äquivalente Rissöffnung ein, welche sich jeweils aus den Komponenten des Verschiebungssprungs und des Spannungsvektors am Riss in der Normalenrichtung und den Tangentialrichtungen eines lokalen Koordinatensystems in der Rissfläche berechnen.

Einen Schwerpunkt der Arbeit stellte die Bestimmung der Rissfläche dar, die für dreidimensionale Strukturen beliebig gekrümmt sein kann aber gleichzeitig kontinuierlich sein muss. Während die Lage eines Grenzflächenrisses bereits durch die Verteilung der Festkörperphasen vorgegeben ist, müssen Lage und Orientierung von Matrixrissen anderweitig bestimmt werden. Die Normale eines Grenzflächenrisses wurde über eine Level-Set-Beschreibung der Grenzfläche berechnet. Dabei konnte mit der Level-Set-Funktion nicht nur die Geometrie der internen Flächen beschrieben, sondern auch die Anreicherungsfunktion für das erweiterte Finite-Elemente-Modell aufgestellt werden. Für Matrixrisse ist die geometrische Bestimmung der Rissfläche nicht eindeutig, da ein Kompromiss zwischen zwei Anforderungen zu schließen ist. Zum Einen muss die Rissfläche den Spannungszustand im Material wiedergeben, zum Anderen muss sie über Elementgrenzen hinweg kontinuierlich verlaufen. Im Zuge dessen wurden verschiedene Strategien zur Ermittlung beliebig gekrümmter, kontinuierlicher Rissflächen im dreidimensionalen Raum untersucht. Darunter sind eine modifizierte Level-Set-Methode in Teilbereichen sowie ein lokales Rissfortpflanzungsverfahren, die beide mit Subtetraedern arbeiten.

Im zweiten Teil der Arbeit wurde ein Mehrskalenmodell zur effizienten Lösung dreidimensionaler strukturmechanischer Probleme bei diffusem Versagen entwickelt. Die Herleitung erfolgte exemplarisch für Anwendungen auf quasispröde Reibungsmaterialien, wobei zur Beschreibung des Materialverhaltens ein regularisiertes isotropes Schädigungsmodell verwendet werden konnte.

Es wurde ein hierarchisches Zweiskalenmodell vorgestellt, das auf der additiven Zerlegung der Gesamtlösung in einen grob- und einen feinskaligen Anteil beruht. Der grobskalige Lösungsanteil kann als mittlere Verschiebung eines Punktes interpretiert werden, der feinskalige Anteil als Fluktuation aufgrund von Heterogenitäten und mehrskaligen Effekten. Die Skalenunterschiede bei Lokalisierung sind aufgrund des weit ausgebreiteten Versagens in den betrachteten Materialien so gering, dass die Annahme der Skalenseparation nicht gültig ist. Stattdessen wurde im Rahmen einer variationsbasierten Zwei-

skalenmethode ein volumenverbindender Skalenübergang angenommen. Dafür wurde die grobskalige Lösung hierarchisch mit einem feinskaligen Lösungsanteil angereichert.

Für praxisbezogene Anwendungen ergibt sich ein sehr großes Gleichungssystem, weshalb insbesondere das Feinskalenproblem, welches den größten Teil der Gesamtrechnzeit in Anspruch nimmt, effizient zu lösen ist. Durch Annahme lokaler Träger konnte das Feinskalengebiet räumlich zerlegt werden, wobei ein lokaler Träger dem Gebiet eines Grobskalenelementes entspricht. Die Feinskalengleichungen entkoppeln sich so zu lokalen, unabhängigen Gleichungen, wodurch sich die feinskaligen Variablen innerhalb eines Grobskalenelementes statisch kondensieren lassen. Aufgrund der Lokalisannahme mussten auf den Kopplungsflächen Nebenbedingungen an die feinskaligen Verschiebungen gestellt werden, um die Kompatibilität der Kinematik zu erfüllen. In einfachen Tests konnte gezeigt werden, dass Nullrandbedingungen nicht geeignet sind und die Formulierung von Übergangsbedingungen unverzichtbar ist. Die punktweise Umsetzung der Übergangsbedingung mit der Lagrange-Multiplikatoren-Methode hat sich sowohl für elastisches als auch schädigendes Materialverhalten mit mehrskaligem Charakter hinsichtlich der Genauigkeit der Ergebnisse als sehr gut erwiesen. Zum Vergleich wurde als Referenzlösung das gesamte Untersuchungsgebiet so fein wie im Zweiskalenmodell aufgelöst. Für dreidimensionale Problemstellungen ergeben sich bei weit ausgebreiteten Versagenszonen oder der in dieser Arbeit der Einfachheit halber vorgenommenen kompletten Auflösung der Feinskala sehr viele zusätzliche Lagrange-Multiplikator-Freiheitsgrade, was die Effizienz der Berechnung beeinträchtigt.

## 8.2 Ausblick

Bei Anwendung der erweiterten Finite-Elemente-Methode lag das Hauptaugenmerk auf der Modellierung beliebig gekrümmter Rissflächen in dreidimensionalen Strukturen. Vereinfachend wurden nur einzelne Risse verfolgt, um die geometrische Beschreibung der Rissflächen nicht zu komplex zu machen. Da Untersuchungen praxisnaher Anwendungsbeispiele nicht nur einen Riss aufweisen, sollten mehrere Risse sowohl in der Matrix als auch an den Grenzflächen sowie deren Zusammenspiel berücksichtigt werden. So wäre es in einer Weiterführung der Arbeit wünschenswert, die Interaktionen zwischen beiden Rissformen zuzulassen, was vor allem zu geometrischen Problemen bei der Beschreibung sich verzweigender und zusammenwachsender Rissflächen führen kann. Für diesen Fall ist zu empfehlen, von Beginn an Tetraederelemente zu verwenden und die Rissflächen entweder mit dem globalen Rissfortschrittsalgorithmus oder der entwickelten Level-Set-Methode in Teilbereichen zu verfolgen.

Auch die Modellierung des Verhaltens kohäsiver Risse könnte verbessert werden. In den numerischen Simulationen konnten oftmals Druckspannungen in den Rissflächen beobachtet werden, wobei das damit verbundene Durchdringen der Rissflächen nur mit einem Strafparameter behindert wurde. Insbesondere wenn komplexe Belastungszustände untersucht werden sollen, bei denen eine monotone Rissöffnung nicht garantiert werden kann, sollte das Rissflächenverhalten auch unter Druckbeanspruchung und Reibung genauer modelliert werden.

Im Rahmen weiterer Forschungstätigkeiten kann das vorgestellte diskontinuierliche Versagensmodell in die Zweiskalenmethode eingebettet werden, so dass auf der Feinskala anstelle des kontinuumsmechanischen Schädigungsmodells ein diskretes Rissmodell verwendet wird. Im Zusammenhang mit dem Zweiskalenmodell lassen sich auf den verschiedenen Skalen generell auch andere kontinuierliche und diskrete Modelle miteinander kombinieren, wodurch sich die Flexibilität steigern lässt.

Bezüglich des Zweiskalenmodells wurde bislang die Möglichkeit der adaptiven Einführung und Erweiterung des Zweiskalengebietes nicht ausgenutzt, was in weiterführenden Arbeiten durchaus berücksichtigt werden sollte. Damit lassen sich dann auch Untersuchungen zur Effizienz des Zweiskalenmodells gegenüber einem Feinskalenmodell vornehmen, wie es in HUND (2007) und HUND UND RAMM (2007) für zweidimensionale Probleme durchgeführt wurde. In der vorliegenden Arbeit lag der Fokus auf der Implementierung des Zweiskalenmodells für dreidimensionale Problemstellungen und der Untersuchung von zwei Kopplungsbedingungen für die Feinskalenbereiche. Um die Effizienz der Nebenbedingungen zu prüfen, könnte auch der lokale Träger der feinskaligen Variablen verändert werden. So lässt sich dieser nicht nur auf Grobskalenelemente beschränken, sondern kann auch größere Bereiche einnehmen. Insbesondere bei Verwendung der Lagrange-Multiplikatoren-Methode zur Erfüllung der Kontinuität der Feinskalenlösung ist eine gröbere Einteilung denkbar, da die Anzahl der zusätzlichen Freiheitsgrade im Vergleich zur Anzahl der grobskaligen Freiheitsgrade sonst sehr hoch ist. Des Weiteren könnte die Parallelität der entkoppelten Feinskalenprobleme ausgenutzt werden, um auf mehreren Prozessoren gleichzeitig zu rechnen und somit die Effizienz weiter zu steigern. Damit ließen sich die Kosten der numerischen Berechnung auch wesentlich reduzieren.

---

## Literaturverzeichnis

- ALFANO 2006 Alfano, G.: On the influence of the shape of the interface law on the application of cohesive-zone models. In: *Composites Science and Technology* 66 (2006), S. 723–730
- ALFANO UND CRISFIELD 2001 Alfano, G.; Crisfield, M.A.: Finite element interface models for the delamination analysis of laminated composites: mechanical and computational issues. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), S. 1701–1736
- ALFANO U. A. 2007 Alfano, M.; Furgiele, F.; Leonardi, A.; Maletta, C.; Paulino, G.H.: Fracture analysis of adhesive joints using intrinsic cohesive zone models. In: *Atti del Congresso IGF19*, 2007, S. 77–84
- ALLIX U. A. 2011 Allix, O.; Gosselet, P.; Kerfriden, P.: Improved multiscale computational strategies for delamination. In: Borst, R. de; Ramm, E. (Hrsg.): *Multiscale Methods in Computational Mechanics* Bd. 55. Berlin/Heidelberg: Springer, 2011, S. 261–279
- DE ANDRÉS U. A. 1999 Andrés, A. de; Pérez, J.; Ortiz, M.: Elastoplastic finite element analysis of three-dimensional fatigue crack growth in aluminum shafts subjected to axial loading. In: *International Journal of Solids and Structures* 36 (1999), S. 2231–2258
- AREIAS UND BELYTSCHKO 2005 Areias, P.M.A.; Belytschko, T.: Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63 (2005), S. 760–788

- AREIAS UND BELYTSCHKO 2006 Areias, P.M.A.; Belytschko, T.: A comment on the article “A finite element method for simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics” by A. Hansbo and P. Hansbo [Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 193 (2004) 3523-3540]. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 1275–1276
- ARMERO 1999 Armero, F.: Large-scale modeling of localized dissipative mechanisms in a local continuum: applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids. In: *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 4 (1999), S. 101–131
- BABUŠKA UND MELENK 1997 Babuška, I.; Melenk, J.M.: The partition of unity method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 40 (1997), S. 727–758
- BANHOLZER 2006 Banholzer, B.: Bond of a strand in a cementitious matrix. In: *Materials and Structures* 39 (2006), S. 1015–1028
- BANHOLZER U. A. 2004 Banholzer, B.; Brameshuber, W.; Geus, J.; Jung, W.: Bestimmung eines Verbundgesetzes auf Basis von Einzelfaser-Pull-Out-Versuchen. In: *Bautechnik* 81 (2004), S. 806–812
- BANHOLZER U. A. 2006 Banholzer, B.; Brameshuber, W.; Jung, W.: Analytical evaluation of pull-out tests - The inverse problem. In: *Cement & Concrete Composites* 28 (2006), S. 564–571
- BARENBLATT 1962 Barenblatt, G.I.: The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In: *Advances in Applied Mechanics* 7 (1962), S. 55–129
- BARR UND BROKENSHERE 1996 Barr, B.I.G.; Brokenshire, D.R.: Torsion fracture tests. In: *BRE Digest*. (1996)
- BAŽANT UND OH 1983 Bažant, Z.P.; Oh, B.H.: Crack band theory for fracture of concrete. In: *Materials and Structures* 16 (1983), S. 155–177
- BAŽANT UND PLANAS 1998 Bažant, Z.P.; Planas, J.: *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. Boca Raton: CRC Press, 1998
- BELYTSCHKO UND BLACK 1999 Belytschko, T.; Black, T.: Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 45 (1999), S. 601–620
- BELYTSCHKO U. A. 2003 Belytschko, T.; Chen, H.; Xu, J.; Zi, G.: Dynamic crack propagation based on loss of hyperbolicity and a new discontinuous enrichment. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), S. 1873–1905

- BELYTSCHKO U. A. 1996 Belytschko, T.; Krongauz, Y.; Organ, D.; Fleming, M.; Krysl, P.: Meshless methods: An overview and recent developments. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (1996), S. 3–47
- BELYTSCHKO U. A. 2000 Belytschko, T.; Liu, W.K.; Moran, B.: *Nonlinear Finite Element Analysis for Continua and Structures*. Chichester; John Wiley & Sons, Ltd., 2000
- BELYTSCHKO U. A. 2008 Belytschko, T.; Löhnert, S.; Song, J.-H.: Multiscale aggregating discontinuities: A method for circumventing loss of material stability. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008), S. 869–894
- BELYTSCHKO U. A. 1994 Belytschko, T.; Lu, Y.Y.; Gu, L.: Element-free Galerkin methods. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), S. 229–256
- BELYTSCHKO U. A. 2001 Belytschko, T.; Moës, N.; Usui, S.; Parimi, C.: Arbitrary discontinuities in finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), S. 993–1013
- BELYTSCHKO UND SONG 2010 Belytschko, T.; Song, J.-H.: Coarse-graining of multiscale crack propagation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 81 (2010), S. 537–563
- BELYTSCHKO UND XIAO 2003 Belytschko, T.; Xiao, S.P.: Coupling methods for continuum model with molecular model. In: *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 1 (2003), S. 115–126
- BIĆANIĆ 2005 Bićanić, N.: *Discrete element methods*. Kap. 9, S. 245–277. In: Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. (Hrsg.): *The finite element method for solid and structural mechanics*, Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005
- BORDAS U. A. 2007 Bordas, S.; Nguyen, P.V.; Dunant, C.; Guidoum, A.; Nguyen-Dang, H.: An extended finite element library. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 71 (2007), S. 703–732
- DE BORST 1986 Borst, R. de: *Non-linear analysis of frictional materials*, Technische Universiteit Delft, Dissertation, 1986
- DE BORST UND SCHIPPEREN 2002 Borst, R. de; Schipperen, J.H.A.: Computational methods for delamination and fracture in composites. In: Allix, O.; Hild, F. (Hrsg.): *Continuum damage mechanics of materials and structures*. Amsterdam: Elsevier, 2002, S. 325–352

- DE BORST U. A. 1993 Borst, R. de; Sluys, L.J.; Mühlhaus, H.-B.; Pamin, J.: Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. In: *Engineering Computations* 10 (1993), S. 99–121
- BOUCHARD U. A. 2003 Bouchard, P.O.; Bay, F.; Chastel, Y.: Numerical modelling of crack propagation: automatic remeshing and comparison of different criteria. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 3887–3908
- BOUCHARD U. A. 2000 Bouchard, P.O.; Bay, F.; Chastel, Y.; Tovenar, I.: Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 189 (2000), S. 723–742
- BRAMESHUBER U. A. 2000 Brameshuber, W.; Banholzer, B.; Brümmer, G.: Ansatz für eine vereinfachte Auswertung von Faser-Ausziehversuchen. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 95 (2000), S. 702–706
- BREWER UND LAGACE 1988 Brewer, J.C.; Lagace, P.A.: Quadratic stress criterion for initiation of delamination. In: *Journal of Composite Materials* 22 (1988), S. 1141–1155
- BUDYN U. A. 2004 Budyn, É.; Zi, G.; Moës, N.; Belytschko, T.: A method for multiple crack growth in brittle materials without remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), S. 1741–1770
- CAMACHO UND ORTIZ 1996 Camacho, G.T.; Ortiz, M.: Computational modelling of impact damage in brittle materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 33 (1996), S. 2899–2938
- CAROL U. A. 2001 Carol, I.; López, C.M.; Roa, O.: Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52 (2001), S. 193–215
- CAROL U. A. 1994 Carol, I.; Rizzi, E.; Willam, K.: A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface. In: *International Journal of Solids and Structures* 31 (1994), S. 2835–2865
- CHABOCHE U. A. 1997A Chaboche, J.L.; Girard, R.; Levasseur, P.: On the interface debonding models. In: *International Journal of Damage Mechanics* 6 (1997), S. 220–257
- CHABOCHE U. A. 1997B Chaboche, J.L.; Girard, R.; Schaff, A.: Numerical analysis of composite systems by using interphase/interface models. In: *Computational Mechanics* 20 (1997), S. 3–11

- CHANDRA U. A. 2002 Chandra, N.; Li, H.; Shet, C.; Ghonem, H.: Some issues in the application of cohesive zone models for metal-ceramic interfaces. In: *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), S. 2827–2855
- CHESSA UND BELYTSCHKO 2004 Chessa, J.; Belytschko, T.: Arbitrary discontinuities in space-time finite elements by level sets and X-FEM. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), S. 2595–2614
- COLEMAN UND NOLL 1963 Coleman, B.D.; Noll, W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 13 (1963), S. 167–178
- COMI U. A. 2007 Comi, C.; Mariani, S.; Perego, U.: An extended FE strategy for transition from continuum damage to mode I cohesive crack propagation. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31 (2007), S. 213–238
- CUNDALL UND HART 1992 Cundall, P.A.; Hart, R.D.: Numerical modelling of discontinua. In: *Engineering Computations* 9 (1992), S. 101–113
- CURBACH U. A. 2007 Curbach, M.; Hauptenbuchner, B.; Ortlepp, R.; Weiland, S.: Textilbewehrter Beton zur Verstärkung eines Hyparschalentragwerks in Schweinfurt. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 102 (2007), S. 353–361
- CURBACH UND JESSE 2009 Curbach, M.; Jesse, F.: Eigenschaften und Anwendung von Textilbeton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 104 (2009), S. 9–16
- DAUX U. A. 2000 Daux, C.; Moës, N.; Dolbow, J.; Sukumar, N.; Belytschko, T.: Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), S. 1741–1760
- DÖBERT 2001 Döbert, C.: *Meso- Makromechanische Modellierung von Faserverbundwerkstoffen mit Schädigung*, Universität Hannover, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Dissertation, 2001
- DOLBOW UND HARARI 2009 Dolbow, J.; Harari, I.: An efficient finite element method for embedded interface problems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78 (2009), S. 229–252
- DOLBOW U. A. 2001 Dolbow, J.; Moës, N.; Belytschko, T.: An extended finite element method for modeling crack growth with frictional contact. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), S. 6825–6846

- DUAN U. A. 2009 Duan, Q.; Song, J.-H.; Menouillard, T.; Belytschko, T.: Element-local level set method for three-dimensional dynamic crack growth. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 80 (2009), S. 1520–1543
- DUARTE UND KIM 2008 Duarte, C.A.; Kim, D.-J.: Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), S. 487–504
- DUARTE UND ODEN 1996A Duarte, C.A.; Oden, J.T.: An h-p adaptive method using clouds. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (1996), S. 237–262
- DUARTE UND ODEN 1996B Duarte, C.A.; Oden, J.T.: H-p clouds – An h-p meshless method. In: *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 12 (1996), S. 673–705
- DUDDU U. A. 2008 Duddu, R.; Bordas, S.; Chopp, D.; Moran, B.: A combined extended finite element and level set method for biofilm growth. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 74 (2008), S. 848–870
- DUFLOT UND BORDAS 2008 DufLOT, M.; Bordas, S.: A posteriori error estimation for extended finite elements by an extended global recovery. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76 (2008), S. 1123–1138
- DUGDALE 1960 Dugdale, D.: Yielding of steel sheets containing slits. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 8 (1960), S. 100–104
- DUMSTORFF UND MESCHKE 2007 Dumstorff, P.; Meschke, G.: Crack propagation criteria in the framework of the X-FEM-based structural analyses. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31 (2007), S. 239–259
- FARHAT U. A. 2001 Farhat, C.; Lesoinne, M.; LeTallec, P.; Pierson, K.; Rixen, D.: FETI-DP: a dual-primal unified FETI method - part I: A faster alternative to the two-level FETI method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), S. 1523–1544
- FARHAT U. A. 2000 Farhat, C.; Lesoinne, M.; Pierson, K.: A scalable dual-primal domain decomposition method. In: *Numerical Linear Algebra with Applications* 7 (2000), S. 687–714
- FARHAT UND ROUX 1991 Farhat, C.; Roux, F.-X.: A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 32 (1991), S. 1205–1227

- FEIST 2004 Feist, C.: *A numerical model for cracking in plain concrete based on the strong discontinuity approach*, Universität Innsbruck, Institut für Baustatik, Festigkeitslehre und Tragwerkslehre, Dissertation, 2004
- FEIST UND HOFSTETTER 2006 Feist, C.; Hofstetter, G.: An embedded strong discontinuity model for cracking of plain concrete. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 7115–7138
- FEIST UND HOFSTETTER 2007 Feist, C.; Hofstetter, G.: Three-dimensional fracture simulations based on the SDA. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 31 (2007), S. 189–212
- FELIPPA 1994 Felippa, C.A.: A survey of parametrized variational principles and application to computational mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 113 (1994), S. 109–139
- FEYEL 2003 Feyel, F.: A multilevel finite element method (FE<sup>2</sup>) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 3233–3244
- FISH 1992 Fish, J.: The s-version of the finite element method. In: *Computers & Structures* 43 (1992), S. 539–547
- FISH UND SHEK 2000 Fish, J.; Shek, K.L.: Multiscale analysis of large scale nonlinear structures and materials. In: *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering* 1 (2000), S. 79–90
- FRIES 2008 Fries, T.-P.: A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75 (2008), S. 503–532
- FRIES UND BELYTSCHKO 2006 Fries, T.-P.; Belytschko, T.: The intrinsic XFEM: a method for arbitrary discontinuities without additional unknowns. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 68 (2006), S. 1358–1385
- GARIKIPATI UND HUGHES 1998 Garikipati, K.; Hughes, T.J.R.: A study of strain localization in a multiple scale framework - The one-dimensional problem. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 159 (1998), S. 193–222
- GARIKIPATI UND HUGHES 2000 Garikipati, K.; Hughes, T.J.R.: A variational multiscale approach to strain localization formulation for multidimensional problems. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188 (2000), S. 39–60
- GASSER 2007 Gasser, T.C.: Validation of 3D crack propagation in plain concrete. Part II: Computational modeling and predictions of the PCT3D test. In: *Computers and Concrete* 4 (2007), S. 67–82

- GASSER UND HOLZAPFEL 2006 Gasser, T.C.; Holzapfel, G.A.: 3D Crack propagation in unreinforced concrete. A two-step algorithm for tracking 3D crack paths. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 5198–5219
- GHOSH U. A. 2001 Ghosh, S.; Lee, K.; Raghavan, P.: A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001), S. 2335–2385
- GRACIE U. A. 2008 Gracie, R.; Wang, H.; Belytschko, T.: Blending in the extended finite element method by discontinuous Galerkin and assumed strain methods. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 74 (2008), S. 1645–1669
- GRAVEMEIER 2003 Gravemeier, V.: *The variational multiscale method for laminar and turbulent incompressible flow*, Bericht Nr. 40, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Dissertation, 2003
- GRAVOUIL U. A. 2002 Gravouil, A.; Moës, N.; Belytschko, T.: Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part II: Level set update. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), S. 2569–2586
- GUIDAULT U. A. 2008 Guidault, P.-A.; Allix, O.; Champaney, L.; Cornuault, C.: A multiscale extended finite element method for crack propagation. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), S. 381–399
- GÜRSES 2007 Gürses, E.: *Aspects of energy minimization in solid mechanics: Evolution of inelastic microstructures and crack propagation*, Universität Stuttgart, Institut für Mechanik im Bauwesen, Dissertation, 2007
- HANSBO UND HANSBO 2004 Hansbo, A.; Hansbo, P.: A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), S. 3523–3540
- HASHIN 1983 Hashin, Z.: Analysis of composite materials - A survey. In: *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983), S. 481–505
- HEGGER U. A. 2007 Hegger, J.; Horstmann, M.; Voss, S.; Will, N.: Textilbewehrter Beton: Tragverhalten, Bemessung und Anwendung. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 102 (2007), S. 362–370
- HEGGER U. A. 2008 Hegger, J.; Will, N.; Voss, S.: Textilbewehrter Beton - Tragverhalten und Bemessung. In: *VDI Jahrbuch Bautechnik*, 2008, S. 467–480
- HEINTZ 2006 Heintz, P.: On the numerical modelling of quasi-static crack growth in linear elastic fracture mechanics. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 65 (2006), S. 174–189

- HERAKOVICH 1998 Herakovich, C.T.: *Mechanics of fibrous composites*. New York: Wiley, 1998
- HETTICH 2007 Hettich, T.: *Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien*, Bericht Nr. 50, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik und Baudynamik, Dissertation, 2007
- HETTICH U. A. 2008 Hettich, T.; Hund, A.; Ramm, E.: Modeling of failure in composites by X-FEM and level sets within a multiscale framework. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 197 (2008), S. 414–424
- HETTICH UND RAMM 2006 Hettich, T.; Ramm, E.: Interface material failure modeled by the extended finite-element method and level sets. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 4753–4767
- HILCHENBACH 2010 Hilchenbach, C.F.: *Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten*, Bericht Nr. 54, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik und Baudynamik, Dissertation, 2010
- HILL 1963 Hill, R.: Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), S. 357–372
- HILLE 2009 Hille, T.S.: *Lifetime modeling of thermal barrier coatings*, Technische Universiteit Delft, Dissertation, 2009
- HILLERBORG U. A. 1976 Hillerborg, A.; Modéer, M.; Petersson, P.-E.: Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. In: *Cement and Concrete Research* 6 (1976), S. 773–781
- HOFMANN 2004 Hofmann, J.E.: *Tragverhalten und Bemessung von Befestigungen unter beliebiger Querbelastrung in ungerissenem Beton*, Universität Stuttgart, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Dissertation, 2004
- HOLDYCH U. A. 2008 Holdych, D.J.; Noble, D.R.; Secor, R.B.: Quadrature rules for triangular and tetrahedral elements with generalized functions. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 73 (2008), S. 1310–1327
- HUBER 2006 Huber, F.: *Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken*, Bericht Nr. 46, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Dissertation, 2006
- HUGHES 1995 Hughes, T.J.R.: Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 127 (1995), S. 387–401

- HUGHES 2000 Hughes, T.J.R.: *The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis*. Mineola: Dover Publications, Inc., 2000
- HUGHES U. A. 1998 Hughes, T.J.R.; Feijóo, G.R.; Mazzei, L.; Quincy, J.-B.: The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 166 (1998), S. 3–24
- HUND UND RAMM 2007 Hund, A.; Ramm, E.: Locality constraints within multiscale model for non-linear material behaviour. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70 (2007), S. 1613–1632
- HUND 2007 Hund, A.S.: *Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur*, Bericht Nr. 48, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik und Baudynamik, Dissertation, 2007
- IBRAHIMBEGOVIĆ UND MARKOVIČ 2003 Ibrahimbegović, A.; Markovič, D.: Strong coupling methods in multi-phase and multi-scale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 3089–3107
- ISHII U. A. 2006 Ishii, T.; Terada, K.; Kyoya, T.: Failure analysis of quasi-brittle materials involving multiple mechanisms on fractured surfaces. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67 (2006), S. 960–988
- JÄGER 2009 Jäger, P.: *Theory and numerics of three-dimensional strong discontinuities at finite strains*, Technischen Universität Kaiserslautern, Fachbereich Maschinenbau und Verfahrenstechnik, Dissertation, 2009
- JÄGER U. A. 2008 Jäger, P.; Steinmann, P.; Kuhl, E.: Modeling three-dimensional crack propagation - A comparison of crack path tracking strategies. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76 (2008), S. 1328–1352
- JEFFERSON U. A. 2004 Jefferson, A.D.; Barr, B.I.G.; Bennett, T.; Hee, S.C.: Three dimensional finite element analysis of fracture tests using the Craft concrete model. In: *Computers and Concrete* 1 (2004), S. 261–284
- JESSE 2004 Jesse, F.: *Tragverhalten von Filamentgarnen in zementgebundener Matrix*, Technische Universität Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen, Dissertation, 2004
- JI UND DOLBOW 2004 Ji, H.; Dolbow, J.E.: On strategies for enforcing interfacial constraints and evaluating jump conditions with the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 61 (2004), S. 2508–2535

- JIRÁSEK 2000 Jirásek, M.: Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 188 (2000), S. 307–330
- JIRÁSEK 2009 Jirásek, M.: *Numerical modeling of concrete cracking*. CISM course on ‘Numerical modeling of concrete cracking’ in Udine. Mai 2009
- JIRÁSEK UND BELYTSCHKO 2002 Jirásek, M.; Belytschko, T.: Computational resolution of strong discontinuities. In: Mang, H.A.; Rammerstorfer, F.G.; Eberhardsteiner, J. (Hrsg.): *Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Wien, 2002
- JIRÁSEK UND ZIMMERMANN 2001 Jirásek, M.; Zimmermann, T.: Embedded crack model: I. Basic formulation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), S. 1269–1290
- JU 1990 Ju, J.W.: Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics. In: *Journal of Engineering Mechanics* 116 (1990), S. 2764–2770
- KACHANOV 1958 Kachanov, L.M.: On creep rupture time. In: *Izvestiya Akademii Nauk SSSR* 8 (1958), S. 26–31
- KACHANOV 1990 Kachanov, L.M.: *Introduction to continuum damage mechanics*. Dordrecht: Kluwer, 1990
- KARIHALOO UND XIAO 2003 Karihaloo, B.L.; Xiao, Q.Z.: Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing: a state-of-the-art review. In: *Computers and Structures* 81 (2003), S. 119–129
- KATO 2010 Kato, J.: *Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation*, Bericht Nr. 53, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik und Baudynamik, Dissertation, 2010
- KATO U. A. 2009 Kato, J.; Lipka, A.; Ramm, E.: Multiphase material optimization for fiber reinforced composites with strain softening. In: *Structural and Multidisciplinary Optimization* 39 (2009), S. 63–81
- KOUZNETSOVA U. A. 2002 Kouznetsova, V.; Geers, M.G.D.; Brekelmans, W.A.M.: Multi-scale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54 (2002), S. 1235–1260
- KRAJČINOVIC 1996 Krajcinovic, D.: *Damage Mechanics*. Amsterdam: Elsevier, 1996
- KRÜGER 2004 Krüger, M.: *Vorgespannter textiltbewehrter Beton*, Universität Stuttgart, Institut für Werkstoffe im Bauwesen, Dissertation, 2004

- KRÜGER U. A. 2002 Krüger, M.; Xu, S.; Reinhardt, H.-W.; Ožbolt, J.: Experimental and numerical studies on bond properties between high performance fine grain concrete and carbon textile using pull out tests. In: *Beiträge aus der Befestigungstechnik und dem Stahlbetonbau (Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr.-Ing. R. Eligehausen)*, 2002, S. 151–164.
- KUHL 2000 Kuhl, E.: *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*, Bericht Nr. 32, Universität Stuttgart, Institut für Baustatik, Dissertation, 2000
- LADEVÈZE 1999 Ladevèze, P.: *Nonlinear Computational Structural Mechanics. New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. New-York: Springer, 1999 (Mechanical Engineering Series)
- LADEVÈZE U. A. 2001 Ladevèze, P.; Loiseau, D.; Dureisseix, D.: A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 52 (2001), S. 121–138
- LANGE U. A. 2009 Lange, J.; Focke, I.; Benning, W.: Zwei- und dreidimensionale Vermessung textiler Bewehrung in Beton. In: *Messtechnik im Bauwesen* 1/2009 (2009), S. 108–109
- LEE U. A. 2004 Lee, S.-H.; Song, J.-H.; Yoon, Y.-C.; Zi, G.; Belytschko, T.: Combined extended and superimposed finite element method for cracks. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 59 (2004), S. 1119–1136
- LEMAITRE 1985 Lemaitre, J.: A continuous damage mechanics model for ductile fracture. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 107 (1985), S. 83–89
- LEMAITRE 1996 Lemaitre, J.: *A course on damage mechanics*. Berlin: Springer, 1996
- LEMAITRE 2002 Lemaitre, J.: Introduction to continuum damage mechanics. In: Allix, O. (Hrsg.): *Continuum damage mechanics of materials and structures*. Amsterdam: Elsevier, 2002, S. 235–258
- LIU UND BORJA 2008 Liu, F.; Borja, R.I.: A contact algorithm for frictional crack propagation with the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76 (2008), S. 1489–1512
- LÖBLEIN 2004 Löblein, J.: *Ein Modell zur Beschreibung finiter anisotroper elastoplastischer Deformationen unter Berücksichtigung diskreter Rissausbreitung*, Universität Duisburg-Essen, Institut für Mechanik, FB Bauwissenschaften, Dissertation, 2004
- LÖHNERT UND BELYTSCHKO 2007 Löhnert, S.; Belytschko, T.: A multiscale projection method for macro/microcrack simulations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 71 (2007), S. 1466–1482

- LÖHNERT UND MÜLLER-HOEPPE 2008 Löhnert, S.; Müller-Hoeppe, D.S.: Multiscale methods for fracturing solids. In: *gacm Report* 5 (2008), S. 30–34
- MAGEE U. A. 2001 Magee, D.; Bulpitt, A.; Berry, E.: Level set methods for the 3D segmentation of CT images of abdominal aortic aneurysms. In: *Medical Image Understanding and Analysis (MIUA)*, 2001, S. 141–144
- MARKOVIC UND IBRAHIMBEGOVIC 2004 Markovic, D.; Ibrahimbegovic, A.: On micro-macro interface conditions for micro scale based FEM for inelastic behavior of heterogeneous materials. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), S. 5503–5523
- MARKOVIC U. A. 2005 Markovic, D.; Niekamp, R.; Ibrahimbegovic, A.; Matthies, H.G.; R.L., Taylor.: Multi-scale modeling of heterogeneous structures with inelastic constitutive behaviour. Part I – physical and mathematical aspects. In: *Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software* 22 (2005), S. 664–683
- MAYER U. A. 2009 Mayer, U.M.; Gerstenberger, A.; Wall, W.A.: Interface handling for three-dimensional higher-order XFEM-computations in fluid-structure interaction. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), S. 846–869
- MAZARS UND PIJAUDIER-CABOT 1989 Mazars, J.; Pijaudier-Cabot, G.: Continuum damage theory - application to concrete. In: *Journal of Engineering Mechanics* 115 (1989), S. 345–365
- MELLENK UND BABUŠKA 1996 Melenk, J.M.; Babuška, I.: The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 139 (1996), S. 289–314
- MERGHEIM 2009 Mergheim, J.: A variational multiscale method to model crack propagation at finite strains. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 80 (2009), S. 269–289
- MERGHEIM U. A. 2005 Mergheim, J.; Kuhl, E.; Steinmann, P.: A finite element method for the computational modelling of cohesive cracks. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63 (2005), S. 276–289
- MESCHKE U. A. 2006 Meschke, G.; Dumstorff, P.; Fleming, W.; Jox, S.: Computational failure analysis of concrete structures using the extended finite element method. In: Ruge, P.; Graf, W. (Hrsg.): *10. Dresdner Baustatik-Seminar, Neue Bauweisen - Trends in Statik und Dynamik*. Dresden : Technische Universität Dresden, 2006, S. 395–408

- MIEHE UND KOCH 2002 Miehe, C.; Koch, A.: Computational micro-to-macro transitions of discretized microstructures undergoing small strains. In: *Archive of Applied Mechanics* 72 (2002), S. 300–317
- MOBASHER AMINI U. A. 2009 Mobasher Amini, A.; Dureisseix, D.; Cartraud, P.: Multi-scale domain decomposition method for large-scale structural analysis with a zooming technique: Application to plate assembly. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), S. 417–443
- MOËS U. A. 2006 Moës, N.; Béchet, E.; Tourbier, M.: Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 67 (2006), S. 1641–1669
- MOËS UND BELYTSCHKO 2002 Moës, N.; Belytschko, T.: Extended finite element method for cohesive crack growth. In: *Engineering Fracture Mechanics* 69 (2002), S. 813–833
- MOËS U. A. 2003 Moës, N.; Cloirec, M.; Cartraud, P.; Remacle, J.-F.: A computational approach to handle complex microstructure geometries. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 3163–3177
- MOËS U. A. 1999 Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T.: A finite element method for crack growth without remeshing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 46 (1999), S. 131–150
- MOËS U. A. 2002 Moës, N.; Gravouil, A.; Belytschko, T.: Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets - Part I: Mechanical model. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), S. 2549–2568
- MOSLER 2005 Mosler, J.: On advanced solution strategies to overcome locking effects in strong discontinuity approaches. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63 (2005), S. 1313–1341
- MOSLER UND MESHKE 2003 Mosler, J.; Meschke, G.: 3D modelling of strong discontinuities in elastoplastic solids: fixed and rotating localization formulations. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57 (2003), S. 1553–1576
- MOURAD U. A. 2007 Mourad, H.M.; Dolbow, J.; Harari, I.: A bubble-stabilized finite element method for Dirichlet constraints on embedded interfaces. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69 (2007), S. 772–793
- MÜHLHAUS 1995 Mühlhaus, H.-B. (Hrsg.): *Continuum models for materials with microstructure*. Chichester: Wiley, 1995

- NAKASUMI U. A. 2008 Nakasumi, S.; Suzuki, K.; Ohtsubo, H.: Crack growth analysis using mesh superposition technique and X-FEM. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75 (2008), S. 291–304
- NEEDLEMAN 1987 Needleman, A.: A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. In: *Journal of Applied Mechanics* 54 (1987), S. 525–531
- NEMAT-NASSER UND HORI 1999 Nemat-Nasser, S.; Hori, M.: *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*. Amsterdam: Elsevier, 1999
- OLIVER 1996 Oliver, J.: Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. Part 2: Numerical simulation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), S. 3575–3623
- OLIVER U. A. 2002 Oliver, J.; Huespe, A.E.; Samaniego, E.; Chaves, E.W.V.: On strategies for tracking strong discontinuities in computational failure mechanics. In: Mang, H.A.; Rammerstorfer, F.G.; Eberhardsteiner, J. (Hrsg.): *Fifth World Congress on Computational Mechanics*. Wien. 2002
- OLIVER U. A. 2004 Oliver, J.; Huespe, A.E.; Samaniego, E.; Chaves, E.W.V.: Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. In: *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 28 (2004), S. 609–632
- OLIVER U. A. 2006 Oliver, J.; Huespe, A.E.; Sánchez, P.J.: A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (2006), S. 4732–4752
- ORTIZ UND PANDOLFI 1999 Ortiz, M.; Pandolfi, A.: Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 44 (1999), S. 1267–1282
- OSHER UND SETHIAN 1988 Osher, S.; Sethian, J.A.: Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. In: *Journal of Computational Physics* 79 (1988), S. 12–49
- PANNACHET U. A. 2009 Pannachet, T.; Sluys, L.J.; Askes, H.: Error estimation and adaptivity for discontinuous failure. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 78 (2009), S. 528–563
- PARK UND FELIPPA 2000 Park, K.C.; Felippa, C.A.: A variational principle for the formulation of partitioned structural systems. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47 (2000), S. 395–418

- PARK U. A. 2002 Park, K.C.; Felippa, C.A.; Rebel, G.: A simple algorithm for localized construction of non-matching structural interfaces. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 53 (2002), S. 2117–2142
- PEERLINGS 1999 Peerlings, R.H.J.: *Enhanced damage modelling for fracture and fatigue*, Technische Universiteit Eindhoven, Dissertation, 1999
- PEERLINGS U. A. 1996 Peerlings, R.H.J.; Borst, R. de; Brekelmans, W.A.M.; Vree, J.H.P. de: Gradient enhanced damage for quasi-brittle materials. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 39 (1996), S. 3391–3403
- PIETRUSZCZAK UND MRÓZ 1981 Pietruszczak, S.; Mróz: Finite element analysis of deformation of strain-softening materials. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17 (1981), S. 327–334
- PIJAUDIER-CABOT UND BAŽANT 1987 Pijaudier-Cabot, G.; Bažant, Z.P.: Nonlocal damage theory. In: *Journal of Engineering Mechanics* 113 (1987), S. 1512–1533
- PLANAS U. A. 2003 Planas, J.; Elices, M.; Guinea, G.V.; Gómez, F.J.; Cendón, D.A.; Arbilla, I.: Generalizations and specializations of cohesive crack models. In: *Engineering Fracture Mechanics* 70 (2003), S. 1759–1776
- RABOTNOV 1963 Rabotnov, Y.N.: On the equations of state for creep. In: *Progress in applied mechanics - The Prager anniversary volume*, New York: Mac Millan, 1963, S. 307–315
- REMMERS 2006 Remmers, J.J.C.: *Discontinuities in materials and structures. A unifying computational approach*, Technische Universiteit Delft, Dissertation, 2006
- REMMERS U. A. 2003 Remmers, J.J.C.; Borst R. de; Needleman, A.: A cohesive segment method for the simulation of crack growth. In: *Computational Mechanics* 31 (2003), S. 69–77
- RÉTHORÉ U. A. 2005 Réthoré, J.; Gravouil, A.; Combescure, A.: An energy-conserving scheme for dynamic crack growth using the eXtended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 63 (2005), S. 631–659
- ROSE U. A. 1981 Rose, J.H.; Ferrante, J.; Smith, J.R.: Universal binding energy curves for metals and bimetallic interfaces. In: *Physikal Review Letters* 47 (1981), S. 675–678
- ROTS 1988 Rots, J.G.: *Computational modeling of concrete fracture*, Technische Universiteit Delft, Dissertation, 1988

- SCHLADITZ U. A. 2009 Schladitz, F.; Lorenz, E.; Jesse, F.; Curbach, M.: Verstärkung einer denkmalgeschützten Tonnenschale mit Textilbeton. In: *Beton- und Stahlbetonbau* 104 (2009), S. 432–437
- SCHLANGEN 1993 Schlangen, E.: *Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete*, Technische Universiteit Delft, Dissertation, 1993
- SCHRÖDER 1996 Schröder, J.: *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*, Universität Stuttgart, Instituts für Mechanik im Bauwesen, Dissertation, 1996
- SCHULTZ 1996 Schultz, R.: *Nichtlineare Struktur- und Versagensanalyse von Faserverbundsystemen mit Mehrschichten-Schalenelementen*, Ruhr-Universität Bochum, Institut für konstruktiven Ingenieurbau, Dissertation, 1996
- SETHIAN 2001 Sethian, J.A.: *Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, computer-aided design, optimal control, and materials sciences*. Cambridge University Press, 2001
- SETHIAN UND WIEGMANN 2000 Sethian, J.A.; Wiegmann, A.: Structural boundary design via level set and immersed interface methods. In: *Journal of Computational Physics* 163 (2000), S. 489–528
- SIMO UND JU 1987 Simo, J.C.; Ju, J.W.: Strain- and stress-based continuum damage model - I. Formulation. In: *International Journal of Solids and Structures* 23 (1987), S. 821–840
- SIMO U. A. 1993 Simo, J.C.; Oliver, J.; Armero, F.: An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. In: *Computational Mechanics* 12 (1993), S. 277–296
- SIMONE U. A. 2003 Simone, A.; Wells, G.N.; Sluys, L.J.: From continuous to discontinuous failure in a gradient-enhanced continuum damage model. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 4581–4607
- SPECK 2008 Speck, K.: *Beton unter mehraxialer Beanspruchung: Ein Materialgesetz für Hochleistungsbetone unter Kurzzeitbelastung*, Technische Universität Dresden, Fakultät Bauingenieurwesen, Dissertation, 2008
- STOLARSKA U. A. 2001 Stolarska, M.; Chopp, D.L.; Moës, N.; Belytschko, T.: Modeling crack growth by level sets in the extended finite element method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51 (2001), S. 943–960

- STROUBOULIS U. A. 2000A Strouboulis, T.; Babuška, I.; Copps, K.: The design and analysis of the generalized finite element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 181 (2000), S. 43–69
- STROUBOULIS U. A. 2000B Strouboulis, T.; Copps, K.; Babuška, I.: The generalized finite element method: an example of its implementation and illustration of its performance. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 47 (2000), S. 1401–1417
- STROUBOULIS U. A. 2001 Strouboulis, T.; Copps, K.; Babuška, I.: The generalized finite element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), S. 4081–4193
- SUKUMAR U. A. 2008 Sukumar, N.; Chopp, D.L.; Béchet, E.; Moës, N.: Three-dimensional non-planar crack growth by a coupled extended finite element and fast marching method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 76 (2008), S. 727–748
- SUKUMAR U. A. 2001 Sukumar, N.; Chopp, D.L.; Moës, N.; Belytschko, T.: Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (2001), S. 6183–6200
- SUKUMAR U. A. 2000 Sukumar, N.; Moës, N.; Moran, B.; Belytschko, T.: Extended finite element method for three-dimensional crack modelling. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48 (2000), S. 1549–1570
- SUKUMAR UND PRÉVOST 2003 Sukumar, N.; Prévost, J.-H.: Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method. Part I: Computer implementation. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), S. 7513–7537
- SUQUET 1987 Suquet, P.M.: Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In: Sanchez-Palencia, E.; Zaoui, A. (Hrsg.): *Homogenization techniques for composite media*. Berlin/Heidelberg: Springer, 1987 (Lecture Notes in Physics 272), S. 193–278
- TERADA U. A. 2003 Terada, K.; Asai, M.; Yamagishi, M.: Finite cover method for linear and non-linear analyses of heterogeneous solids. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), S. 1321–1346
- TVERGAARD 1990 Tvergaard, V.: Effect of fibre debonding in a whisker-reinforced metal. In: *Materials Science and Engineering: A* 125 (1990), S. 203–213
- TVERGAARD UND HUTCHINSON 1992 Tvergaard, V.; Hutchinson, J.W.: The relation between crack growth resistance and fracture process parameters in elastic-plastic solids. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 40 (1992), S. 1377–1397

- UNGER U. A. 2007 Unger, J.F.; Eckardt, S.; Könke, C.: Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (2007), S. 4087–4100
- VENTURA 2006 Ventura, G.: On the elimination of quadrature subcells for discontinuous functions in the eXtended Finite-Element Method. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 66 (2006), S. 761–795
- VENTURA U. A. 2003 Ventura, G.; Budyn, E.; Belytschko, T.: Vector levels sets for description of propagating cracks in finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 58 (2003), S. 1571–1592
- DE VREE U. A. 1995 Vree, J.H.P. de; Brekelmans, W.A.M.; Gils, M.A.J.: Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics. In: *Computers and Structures* 55 (1995), S. 581–588
- WANG U. A. 2008 Wang, H.; Chessa, J.; Liu, W.K.; Belytschko, T.: The immersed/fictitious element method for fluid-structure interaction: Volumetric consistency, compressibility and thin members. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 74 (2008), S. 32–55
- WANG U. A. 2003 Wang, M.Y.; Wang, X.; Guo, D.: A level set method for structural topology optimization. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 192 (2003), S. 227–246
- WEILAND UND CURBACH 2009 Weiland, S.; Curbach, M.: Eine äußerst sinnvolle Ergänzung. Für das Bauen im Bestand wird textiltbewehrter Beton immer bedeutungsvoller. In: *Deutsches IngenieurBlatt* 09 (2009), S. 17–23
- WELLS 2001 Wells, G.N.: *Discontinuous modelling of strain localisation and failure*, Technische Universiteit Delft, Dissertation, 2001
- WELLS U. A. 2004 Wells, G.N.; Garikipati, K.; Molari, L.: A discontinuous Galerkin formulation for a strain gradient -dependent damage model. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (2004), S. 3633–3645
- WELLS UND SLUYS 2001 Wells, G.N.; Sluys, L.J.: A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50 (2001), S. 2667–2682
- WILLAM 1984 Willam, K.J.: Experimental and computational aspects of concrete fracture. In: Damjanić, F.; Hinton, E.; Owen, D.R.J.; Bićanić, N.; Simović, V. (Hrsg.): *International Conference Computer-Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Swansea: Pineridge Press, 1984, S. 33–70

- WILSON 1974 Wilson, E.L.: The static condensation algorithm. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 8 (1974), S. 198–203
- WYART U. A. 2008 Wyart, E.; Dufloy, M.; Coulon, D.; Martiny, P.; Pardoën, T.; Remacle, J.-F.; Lani, F.: Substructuring FE–XFE approaches applied to three-dimensional crack propagation. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 215 (2008), S. 626–638
- XU UND NEEDLEMAN 1993 Xu, X.-P.; Needleman, A.: Void nucleation by inclusion debonding in a crystal matrix. In: *Modelling and Simulation in Material Science and Engineering* 1 (1993), S. 111–132
- ZASTRAU U. A. 2003 Zastrau, B.; Richter, M.; I., Lepenies.: On the analytical solution of pullout phenomena in textile reinforced concrete. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 125 (2003), S. 38–43
- ZI UND BELYTSCHKO 2003 Zi, G.; Belytschko, T.: New crack-tip elements for XFEM and applications to cohesive cracks. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 57 (2003), S. 2221–2240
- ZIENKIEWICZ U. A. 2005 Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L.; Zhu, J.Z.: *The Finite Element Method. Its Basis and Fundamentals*. Oxford: Elsevier Butterworth-Heinemann, 2005
- ZILIAN UND FRIES 2009 Zilian, A.; Fries, T.-P.: A localized mixed-hybrid method for imposing interfacial constraints in the extended finite element method (XFEM). In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 79 (2009), S. 733–752
- ZILIAN UND LEGAY 2008 Zilian, A.; Legay, A.: The enriched space-time finite element method (EST) for simultaneous solution of fluid-structure interaction. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 75 (2008), S. 305–334
- ZOHDİ U. A. 1998 Zohdi, T.; Feucht, M.; Gross, D.; Wriggers, P.: A description of macroscopic damage through microstructural relaxation. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 43 (1998), S. 493–506
- ZOHDİ UND WRIGGERS 2001 Zohdi, T.I.; Wriggers, P.: Computational micro-macro material testing. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 8 (2001), S. 131–228

## Lebenslauf

### Studium und Promotion:

10/2000 - 09/2005	Studium des Bauingenieurwesens an der Universität Stuttgart
09/2005	Abschluss als Diplom-Ingenieur
09/2005 - 08/2007	Stipendiatin und Promotionsstudentin am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart
09/2007 - 08/2010	wissenschaftliche Mitarbeiterin am Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart



---

## Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T.A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stutzen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.

- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K.M. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axial-belasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T.J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.
- 18 (1995) **R.L.M. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) **M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.

- 20 (1996) **N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) **C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) **D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) **H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhausstragwerken.
- 24 (1998) **H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) **K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) **B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) **F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) **M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) **H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) **M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.

- 31 (1999) **W.A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) **E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) **A. Maute:**  
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik.
- 34 (2001) **S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) **A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) **D.P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) **H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) **K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) **M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.
- 40 (2003) **V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) **R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.

- 42 (2004) **G.A. D'Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) **M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) **T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A.S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T.M. Hettich:**  
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.
- 51 (2007) **C. Förster:**  
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) **M. von Scheven:**  
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.

**53 (2010) J. Kato:**

Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.

**54 (2010) C.F. Hilchenbach:**

Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.