

# Die Berechnung von Parallelogrammplatten unter Verwendung modifizierter Steifigkeitsmatrizen

Von der Universität Stuttgart (TH) zur Erlangung der  
Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr. -Ing.) genehmigte  
Abhandlung

vorgelegt von  
Mohan G. Tamhankar  
geboren zu Kolhapur/Indien

Hauptberichter: Prof. Dr. -Ing. F. W. Bornscheuer

Mitberichter: Prof. Dr. -Ing. H. Bufler

Tag der Einreichung: 10. Juli 1968

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Januar 1969

1969



13.09.2006

2



## V o r w o r t

Die vorliegende Arbeit entstand während meines Aufenthaltes in der Bundesrepublik Deutschland. Diese Arbeit diente dem Studium der auf dem Gebiet des Brückenbaus auftretenden Probleme.

Als erstes möchte ich an dieser Stelle Herrn Professor Dr.-Ing. F.W. Bornscheuer für seine freundliche Unterstützung meinen aufrichtigen Dank aussprechen und für das Interesse, das er dieser Arbeit stets entgegengebracht hat.

Herr Professor Dr.-Ing. H. Bufler übernahm die Mühe des Korreferates und hat durch seine fruchtbare Kritik zur besseren Fassung der Arbeit beigetragen. Für seine wichtigen Hinweise und Anregungen möchte ich ihm meinen verbindlichsten Dank zum Ausdruck bringen.

Herr Dr.-Ing. E. Stein förderte von Anfang an diese Arbeit und hat durch seine wertvollen Hinweise dazu beigetragen, ihr die gegenwärtige Form zu verleihen. Ihm bin ich für die Anteilnahme an dieser Arbeit meinen besten Dank schuldig.

Für die vielseitigen Unterstützungen und Ratschläge während der Studien, die zur beruflichen Fortbildung von großem Nutzen waren, bin ich Herrn Professor Dr.-Ing. F. Leonhardt zu großem Dank verpflichtet.

Herrn Privatdozent Dr.-Ing. R.K. Müller möchte ich herzlichen Dank dafür aussprechen, daß er mir die Einrichtungen des Instituts für Modellstatik und Spannungsoptik zur Verfügung gestellt hat. Für die wertvollen Anregungen bei der Versuchsdurchführung bin ich ihm und den Mitarbeitern des Instituts dankbar.

Für die Durchsicht der Arbeit und die dabei gegebenen wertvollen Hinweise möchte ich Herrn Dipl.-Ing. W. Riehle herzlich danken.

Schließlich gilt mein Dank dem Deutschen Akademischen Austauschdienst, der mir den Aufenthalt in Deutschland durch ein Stipendium ermöglicht hat.

M.G. Tamhankar



INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
Schrifttumsverzeichnis	7
Abkürzungsverzeichnis	10
Einleitung	16
1. Überblick über die bekannten Elementmethoden	18
1.1 Grundgedanken und die Anwendung des Variationsprinzips	18
1.2 Ansätze und Methoden zur Gewinnung von Steifigkeitsmatrizen	20
1.2.1 Auf der Annahme der Biegefläche beruhende Verfahren	20
1.2.2 Auf der Annahme der Elementrandschnittkräfte beruhende Verfahren	28
1.2.3 Auf der Annahme der Biegefläche und der Randschnittkräfte des Plattenelements beruhende Verfahren	30
2. Finite Elementmethode nach Methode I und Methode II	33
2.1 Herleitung des Potentials der inneren Kräfte eines Parallelogrammelements nach Methode I	33
2.2 Herleitung des Potentials der inneren Kräfte eines Parallelogrammelements nach Methode II	39
3. Zusammenbau der Elemente und die Programmierung	60
3.1 Grunddefinitionen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix	60
3.2 Ermittlung der Gesamtsteifigkeitsmatrix	65
3.3 Lagerbedingungen	70
3.4 Schrittweise Bildung der Matrix $[k^*]$ für die Programmierung	70
3.5 Lösung des linearen Gleichungssystems	75
3.6 Berechnung der Hauptmomente	76
3.7 Berücksichtigung einer geänderten Anzahl der Elemente	80
3.8 Verfeinerung des Elementsystems	83
3.9 Modifizierte Knotenlasten	84
4. Rechenbeispiele	89
4.1 Untersuchungsbereich	89

	Seite
4.2 Die Konvergenzuntersuchungen bei der Methode II	89
4.3 Vergleich zwischen den Ergebnissen nach den Methoden I und II	96
4.4 Vergleich zwischen früheren Arbeiten und der Methode II	100
5. Experimentelle Untersuchung einer schiefwinkligen Platte	112
5.1 Lagerungen	112
5.2 Vorrichtung für die Lasten	112
5.3 Meßtechnik	116
5.4 Lastfälle und Messungen	116
5.5 Vergleich zwischen den Modellmessungen und den Ergebnissen nach Methode II	117
6. Zusammenfassung	119
7. Anhang (Programmprotokolle)	
7.1 Anhang A: Programm zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix eines Parallelogrammelements nach Methode I	121
7.2 Anhang B: Programm zur Berechnung der modifizierten Steifigkeitsmatrix eines Parallelogrammelements nach Methode II	123

SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

=====

- [1] Turner, M.J., Clough, R.W.,  
Martin, H.C. und Topp, L.J.: Stiffness and deflection analysis  
of complex structures.  
Journal of Aeronautical Sciences  
23 Nr. 9 (1956), S. 805/23
- [2] Melosh, R.J.: A stiffness matrix for the  
analysis of thin plates in  
bending.  
Journal of the Aerospace Sciences  
Nr. 1 (1961), S. 34/42
- [3] Melosh, R.J.: Basis for derivation of matrices  
for the direct stiffness method.  
Journal of AIAA 1, Nr. 7 (1963),  
S. 1631/37
- [4] Zienkiewicz, O.C. und  
Cheung, Y.K.: The finite element method for  
analysis for elastic isotropic  
and orthotropic slabs.  
Proceedings Inst. Civ. Engg. 28  
(1964), S. 471/88
- [5] Argyris, J.H.: Matrix displacement analysis of  
plates and shells.  
Ingenieur-Archiv 35 (1966),  
S. 102/42
- [6] Ramstadt, H., und  
Holand, I.: The finite element method for ana-  
lysis of skew plates in bending  
by use of parallelogram elements.  
International symposium in the  
use of electronic digital  
computers in structural engineering,  
Uni. of Newcastle upon Tyne (1965)
- [7] Fraeijs de Veubeke, B.: Displacement and equilibrium  
models in the finite element  
method.  
Kapitel 9, Stress Analysis  
S. Wiley and Sons Ltd. (1965)
- [8] Pian, T.H.H.: Derivation of element stiffness  
matrices by assumed stress distri-  
butions.  
Journal of AIAA, Technical notes,  
2, Nr. 7 (1964), S. 1333/36
- [9] Severn, R.T. u.  
Taylor, P.R.: The finite element method for  
flexure of slabs when stress  
distributions are assumed.  
Proc. Inst. of Civil Engg. 34  
(1966), S. 153/70

- [10] Jones, R.E.: A generalisation of the direct stiffness method of structural analysis. Journal of AIAA 2, Nr. 5 (1964), S. 821/26
- [11] Reissner, E.: On a variational theorem in elasticity. Journal of Math.Phys. 29 (1950), S. 90/95
- [12] Herrmann, L.R.: A bending analysis for plates. Zu: Proceedings of Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Air Force Inst. of Techn. Wright Patterson A.F. Base, Ohio (1965)
- [13] Schaefer, H.: Eine einfache Konstruktion von Koordinatenfunktionen für die numerische Lösung zweidimensionaler Randwertprobleme nach Rayleigh-Ritz. Ing.-Archiv 35 (1966), S. 73/81
- [14] Zienkiewicz, O.C. und Cheung, Y.K.: The finite element method in structural and continuum mechanics. Mc Graw-Hill, London (1967)
- [15] Bufler, H. und Stein, E.: Zur Plattenberechnung mittels finiter Elemente, Ing.-Archiv 39 (1970) S. 248/60
- [16] Homberg, H. und Marx, W.R.: Schiefe Stäbe und Platten. Werner-Verlag, Düsseldorf (1958)
- [17] Peglow, M.: Meßmethoden zum Autokollimationsfernrohr. Institut für Techn. Optik der TH Stuttgart (1964)
- [18] Morley, L.S.D.: Skew plates and structures. International series of monographs in aeronautics and astronautics Vol. 5, Pergamon Series (1963)
- [19] Knorr, E.: Spannungsoptische Untersuchung von Biegeplatten mit Hilfe von schiefer Durchstrahlung. Bautechnik 41 (1964), S.333/337, 387/391, 407/413
- [20] Rushton, K.R.: Electrical analogue solutions for the deformations of skew plates. The Aero.Quart. (1964) S. 169



[21] Robinson, K.E.:

The behaviour of simply supported skew bridge slabs under concentrated loads.  
Cement and Concrete Association, London, Research Report No. 8

[22] Giencke, E.:

Über die Berechnung schiefwinkliger Flächentragwerke.  
Jahrbuch der wissenschaftlichen Gesellschaft für Luft- und Raumfahrt E.V. (WGLR) (1967),  
S. 392/407

BEZEICHNUNGSVERZEICHNIS  
=====

Geometrie und Beiwerte

x, y	Kartesische Koordinaten der Mittelflächenpunkte einer Platte
$\xi, \eta$	Schiefwinklige Koordinaten der Mittelflächenpunkte einer Platte
z	Koordinate in Richtung der Normalen zur Plattenmittelfläche
a	Seitenlänge eines Plattenelements in Richtung $\xi$
b	Seitenlänge eines Plattenelements in Richtung $\eta$
$\emptyset$	Winkel zwischen den Achsen $\xi$ und $\eta$
$L_\xi$	Seitenlänge der Platte in Richtung $\xi$
$L_\eta$	Seitenlänge der Platte in Richtung $\eta$
h	Plattendicke
s	$\sin \emptyset$
c	$\cos \emptyset$
p	Seitenverhältnis eines Plattenelements a/b
E	Elastizitätsmodul des verwendeten Werkstoffes
$\mu$	Querdehnungszahl
$\mu'$	$2(1-\mu)$
K	$= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ Plattensteifigkeit
$A_1$	$= \mu \cdot s^2 + c^2$
$A_2$	$= 1 + c^2 - \mu s^2$
$\pi$	Gesamtpotential eines Plattenelements
U	Potential der inneren Kräfte eines Plattenelements
W	Potentielle Energie der äußeren Kräfte
$\bar{\pi}$	Gesamtpotential einer Platte

Verschiebungsgrößen

- $w(\xi, \eta)$  Verschiebung der Mittelfläche eines Plattenelements in Richtung  $z$
- $W_{(1)}$  Durchbiegung der Plattenelementecke 1 in Richtung  $z$
- $W_{(1)}^i$  Durchbiegung der Ecke 1 des Plattenelements  $i$
- $W'_{(1)}, W''_{(1)}$  a.  $\frac{\partial w}{\partial \xi}$  bzw. b.  $\frac{\partial w}{\partial \eta}$  Neigung der Plattenelementecke 1 in Richtung  $\xi$  bzw.  $\eta$
- $W''_{(1)}$  ab  $\cdot \partial^2 w / \partial \xi \partial \eta$  der Plattenelementecke 1

$$\{W^+\}^i = \begin{vmatrix} W_{(1)} \\ W'_{(1)} \\ W''_{(1)} \\ W'_{(1)} \\ \text{---} \\ W_{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ W''_{(4)} \end{vmatrix}^i$$

Spaltenmatrix der Eckverschiebungsgrößen unter Verwendung von sog. Hermiteschen Interpolationspolynomen für ein Plattenelement  $i$ .

Werden die Eckverwindungen  $W''$  nicht eingeführt, heißt die Spaltenmatrix  $\{W\}^i$ .

$\{\bar{W}^+\}$  Spaltenmatrix der Knotenverschiebungsgrößen  $\bar{W}$ ,  $\bar{W}'$ ,  $\bar{W}''$  und der Verwindung  $\bar{W}''$  der Gesamtplatte

$$\{u\} = \begin{vmatrix} W(\xi) \\ W'(\xi) \\ W''(\xi) \end{vmatrix}$$

Spaltenmatrix der Verschiebungsgrößen eines Plattenelementrandes  $\eta = \text{konst.}$

Verzerrungsgrößen

$$\{\chi_k\}, \{\chi_s\} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{vmatrix}$$

Spaltenmatrix der Krümmungen der ausgebogenen Plattenmittelfläche in kartesischen Koordinaten bzw. in schiefwinkligen Koordinaten

$$\{\epsilon\} = \begin{vmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{vmatrix}$$

Spaltenmatrix der Dehnungen längs der Linien x, y und der Schubverzerrungen

Spannungsgrößen

$$\{\sigma\} = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{vmatrix}$$

Spaltenmatrix der Spannungsgrößen am Randquerschnitt eines Plattenelements

Kraftgrößen

$$m_x, m_y$$

Plattenbiegemomente

$$m_{xy}$$

Drillmoment

$$\{m\}$$

$$= \begin{vmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Spaltenmatrix der Momente in} \\ \text{einem Punkt x,y eines Platten-} \\ \text{elementes} \end{array}$$

$$M^I, M^{II}$$

Hauptmomente

$$\psi$$

Winkel zwischen y-Achse und der Richtung des größten Hauptmoments

$$M_{(1)}^\xi, M_{(1)}^\eta$$

An der Ecke 1 des statisch äquivalenten Plattenelements angreifende Momente

$$M_{(1)}^{\xi i}$$

Moment in Richtung  $\xi$  an der Ecke 1 des Elementes i

$R_{(1)}$  An der Ecke 1 eines Plattenelements angreifende Eckkraft in z-Richtung

$R_{(1)}^i$  Vertikale Eckkraft an der Ecke 1 des Elements i

$$\{F^+\}^i = \begin{pmatrix} R_{(1)}^i \\ \frac{1}{\alpha} M_{(1)}^\xi \\ \frac{1}{b} M_{(1)}^\eta \\ \frac{1}{\alpha b} X_{(1)} \\ \dots \\ R_{(2)} \\ \dots \\ \frac{1}{b} M_{(4)}^\eta \\ \frac{1}{\alpha b} X_{(4)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Modifizierte Spaltenmatrix der} \\ \text{Eckkräfte eines Plattenelements i} \\ \\ \text{Die höheren Kraftsingularitäten } X_{(1)}^i, \\ X_{(2)}^i, \dots \text{ sind den Verwindungen} \\ W_{(1)}^i, W_{(2)}^i, \dots \text{ zugeordnet.} \\ \\ \text{Bei nicht vorhandenen } X_{(v)}^i \text{ heißt} \\ \text{die Spaltenmatrix } \{F^+\}^i \end{array}$$

$\{F_G^+\}^i$  Die Spaltenmatrix der Eckkräfte des Elements i in erweiterter und umgeordneter Form günstig für die Programmierung. Numerierung wie bei  $\{W^+\}$

$\bar{M}_1^\xi, \bar{M}_1^\eta$  Am Knotenpunkt 1 der Platte angreifende äußere Momente in schiefwinkligen Koordinaten

$\bar{R}_1$  Am Knotenpunkt 1 der Platte angreifende äußere Last in Richtung z

$$\{\bar{F}^+\} = \begin{pmatrix} \bar{R}_1 \\ \frac{1}{\alpha} \bar{M}_1^\xi \\ \frac{1}{b} \bar{M}_1^\eta \\ \dots \\ \bar{R}_2 \\ \vdots \\ \dots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{modifizierte Spaltenmatrix der an den} \\ \text{Knotenpunkten einer Platte angreifenden} \\ \text{äußeren Kräfte} \end{array}$$

$\{s\}$  =  $\begin{pmatrix} Q^\xi(\xi) \\ M^\xi(\xi) \\ M^\eta(\xi) \end{pmatrix}$  Spaltenmatrix der am Rand (in Richtung  $\xi$ ) eines Plattenelements wirkenden inneren Kräfte

q Gleichmäßig verteilte Last ( $Mp/m^2$ ) in Richtung z

Transformationsmatrizen

- $[k^+], [k]$       Rechteckmatrix der Steifigkeit eines Plattenelements gemäß  $\{F^+\} = [k^+]\{W^+\}$  bzw.  $\{F\} = [k]\{W\}$
- $[\bar{k}]$             Rechteckmatrix der Gesamtsteifigkeit einer Platte gemäß  $\{\bar{F}\} = [\bar{k}]\{\bar{W}\}$
- $[H]$              Rechteckmatrix, welche die Momente und die Krümmungen in kartesischen Koordinaten verknüpft gemäß  $\{m\} = K [H]\{\chi_k\}$
- $[n], [m]$         Rechteckmatrizen, welche die Spaltenmatrizen  $\{\sigma\}$  und  $\{\epsilon\}$  verknüpfen (gemäß  $\{\sigma\} = [m]\{\epsilon\}$  und  $\{\epsilon\} = [n]\{\sigma\}$ )
- $[L]$              Rechteckmatrix, welche die Spaltenmatrizen der Randverschiebungen und Eckverschiebungen eines Plattenelements verknüpft, gemäß  $\{u\} = [L]\{W\}$
- $\{a\}$              Spaltenmatrix der unbekanntenen Konstanten
- $\{f(\xi) \ g(\eta)\}$     Spaltenmatrix der Produkte der Funktionen  $f(\xi)$  und  $g(\eta)$
- $[B]$              Rechteckmatrix, welche die Eckverschiebungen und unbekanntene Konstanten verknüpft gemäß  $\{W\} = [B]\{a\}$
- $[S]$              Rechteckmatrix, welche die Krümmungen in schiefwinkligen Koordinaten und die unbekanntenen Konstanten verknüpft gemäß  $\{\chi_s\} = [S]\{a\}$
- $[R]$              Rechteckmatrix, welche die Spaltenmatrizen der Randkräfte eines Plattenelements und die unbekanntenen Konstanten verknüpft gemäß  $\{s\} = [R]\{a\}$

[ c ]            Rechteckmatrix, welche die Transformation der Plattenelementgrößen in globale Koordinaten ermöglicht

$$\text{z.B. } \{f_G\}^i = [c^T]^i \{f\}^i$$

[ T ]            Rechteckmatrix, welche die Spaltenmatrizen der Krümmungen in kartesischen und schiefwinkligen Koordinaten verknüpft gemäß  $\{\kappa_k\} = [T] \{\kappa_s\}$

## E i n l e i t u n g

Die finite Elementmethode ("Finite element method", hier kurz Elementmethode genannt), die ursprünglich für die Berechnungen der Flugzeugkonstruktionen entwickelt wurde, hat in den letzten Jahren für die im Bauwesen auftretenden Schnittkraft-Berechnungen der Stab- und Flächentragwerke Anwendung gefunden. Sie bietet die Möglichkeit einer allgemeinen Formulierung der Aufgabe in Matrixschreibweise. Die gleichzeitige Entwicklung der grossen und schnellen Rechenmaschinen ermöglicht die Anwendung der Elementmethode für praktische Aufgaben.

Die vorliegende Arbeit untersucht die vorhandenen Methoden, die sich in großer Zahl im Schrifttum finden. Zum Überblick werden diese Methoden je nach der Grundannahme in drei Gruppen eingeteilt und die sich dabei ergebenden Ungenauigkeiten besprochen.

Vorschläge zur Verfeinerung der Elementmethode werden gemacht. Als Anwendungsbeispiel wird eine schiefwinklige Parallelogrammplatte ausgewählt, bei der die Berechnung der Schnittgrößen grössere Schwierigkeiten bereitet als z.B. bei einer rechtwinkligen Platte. Zunächst wird die Steifigkeitsmatrix eines Parallelogrammelements zur Herstellung einer Beziehung zwischen den Eckverschiebungen und den entsprechenden Eckkräften berechnet. Hierzu wird zunächst die konventionelle Methode (Methode I) angewandt, nämlich die Verwendung eines Polynomansatzes für die Biegefläche in schiefen Koordinaten. Die einzelnen Elemente werden dann zusammengesetzt, wobei die Verschiebungs- und Gleichgewichtsbedingungen nur an den Verknüpfungspunkten (Eckpunkten) genau erfüllt sind.

Anschließend werden die Ansätze für die Biegefläche eines Elements so ausgewählt, daß die vollständige geometrische Kontinuität längs der Ränder der Elemente beim Zusammenbau erfüllt ist (Methode II). Dazu werden die kubischen Hermiteschen Polynome nach Schaefer [13] angewandt, die pro Elementecke 4 Verschiebungsgrößen einschliesslich der Verwindung beinhalten. Diese Polynome bedingen demnach 16 Freiheitsgrade eines Elements, während die ursprüngliche Elementmethode entsprechend den 3 Kraftgrößen an einem Knotenpunkt



nur 12 Freiheitsgrade zuläßt. Die Anwendung des Prinzips von Minimum des Gesamtpotentials auf ein Einzelelement reduziert die Zahl der Freiheitsgrade [14] auf 12 und führt zur Elementssteifigkeitsmatrix der Ordnung 12. Will man dagegen die 16 Freiheitsgrade belassen, so hat man den Ritz-Prozeß global auf die Gesamtplatte anzuwenden und kommt damit zum Schaefer'schen Verfahren der bereichsweise angegebenen Ansatzfunktionen mit geometrischer Kontinuität. Dieses Verfahren hat formale Analogien zur Elementmethode [15] und führt zu Matrizen der Ordnung 16, die als modifizierte Steifigkeitsmatrizen bezeichnet werden (Methode II).

Um die Genauigkeit dieser Methode II zu untersuchen, wurden die Rechenprogramme in ALGOL 60 für die beiden Lösungswege (Methode I und II) geschrieben und eine große Anzahl von Beispielen auf der Rechenmaschine TR-4 der Universität Stuttgart durchgerechnet. Hierzu wurden die Beispiele in 3 Gruppen eingeteilt: eine, um die Konvergenzfrage bei der Methode II zu studieren, eine zweite, um die Methode I mit der Methode II zu vergleichen. Mit der dritten Gruppe wurde schließlich die Genauigkeit der Methode II im Vergleich zu den bekannten experimentellen [16, 19, 20, 21] Ergebnissen untersucht.

Ferner wurde eine punktgelagerte schiefwinklige Platte aus Aluminium auf modellstatischem Wege untersucht. Die Modellmessungen wurden mit Hilfe des Autokollimationsfernrohrs und der Meßuhr durchgeführt. Verschiebungen des Modells werden mit den Ergebnissen nach Methode II verglichen.

## 1. Überblick über die bekannten Elementmethoden

### 1.1 Grundgedanken und die Anwendung des Variationsprinzips

Im letzten Jahrzehnt wurde eine große Anzahl von Arbeiten auf dem Gebiet der Elementmethoden veröffentlicht. Das Interesse an den Elementmethoden entspringt hauptsächlich dem Wunsch, möglichst allgemeine Berechnungsmethoden bei Verwendung von großen und schnellen Rechenmaschinen zu entwickeln.

Zunächst werden die wichtigsten Arbeiten über Plattenbiegung besprochen. Es erscheint sinnvoll, die Entwicklung der Methoden nicht in zeitlicher Folge darzustellen, sondern sie nach den zugrunde liegenden Prinzipien zu gliedern.

Der Grundgedanke der Elementmethode besteht darin, das kontinuierliche System in eine große Anzahl von Elementen zu zerlegen und den Spannungs- und Verschiebungszustand jedes Elements zu untersuchen. In diesem Zusammenhang ist erwünscht, die folgenden Bedingungen möglichst gut zu erfüllen:

1. Die Biegefläche des idealisierten System soll die tatsächliche Plattenbiegung annähern, und bei weiterer Verfeinerung des Elementsystems soll Konvergenz eintreten.
2. Die Randverschiebungsgrößen (Durchsenkungen, Neigungswinkel) der Elemente sollen stetig ineinander übergehen (geometrische Verträglichkeit).
3. Die Kontinuität der Spannungen zwischen den Elementen soll vorhanden sein.
4. Aus Gründen des Rechenaufwandes soll das idealisierte System aus einer möglichst kleinen Zahl von Elementen bestehen, und es sollen wenige Grundtypen von Elementen verwendet werden.

Mit der Elementmethode ist es nicht möglich, alle oben angegebenen Forderungen zu erfüllen. Normalerweise können die Verträglichkeitsbedingungen der Verschiebungsgrößen an den Knotenpunkten leicht erfüllt werden. Hierzu wählt man einen Polynomansatz für die Biegefläche eines Elements mit den Knotenverschiebungsgrößen als den unbekanntem Parametern. Die Verträglichkeit der Verschiebungsgrößen längs der Elementkanten wird hierbei nur teilweise erreicht.

Um Beziehungen zwischen den Eckverschiebungen und den entsprechenden Eckkräften zu ermitteln, kann man das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie auf ein Element anwenden, wobei das innere Potential in den Verzerrungen ausgedrückt wird. Damit sind die Eckkräfte im Gleichgewicht mit den Randschnittgrößen und der Belastung.

Beim Zusammenbau der Elemente werden die unbekanntes Knotenverschiebungen mit Hilfe der Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen berechnet. Aus den Knotenverschiebungen sind die Verzerrungen und schließlich die Spannungen in jedem Element ermittelbar. Dies Verfahren liefert aber nicht die Spannungskontinuität zwischen den Elementen. Die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen an den Knotenpunkten garantiert nur das Gleichgewicht des Gesamtsystems. Um die Spannungskontinuität zwischen den Elementen zu erreichen, kann man anstelle der Annahme einer Biegefläche von den Polynomansätzen für die Spannungen im Element ausgehen. Dazu verwendet man das Prinzip vom Minimum der Komplementärenergie, wobei das innere Potential des Elements in den Spannungsgrößen ausgedrückt wird.

Um die Kontinuität sowohl der Spannungen als auch der Verschiebungen zwischen den Elementen zu erreichen, kann man das innere Potential der Platte als die Summe der einzelnen Elementpotentiale, ausgedrückt in Verzerrungen, und der Arbeit der Elementrandschnittgrößen ausdrücken. Damit werden die Verträglichkeitsbedingungen längs der Elementränder näherungsweise erfüllt. Hierbei werden die Ansätze für die Biegefläche und für die Randschnittgrößen angenommen.

Anhand der hier erwähnten drei Berechnungswege zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrizen erkennt man, daß die bekannten Elementmethoden in die folgenden drei Gruppen gegliedert werden können:

1. Annahme der Biegefläche des Elements
2. Annahme der Elementrandschnittkräfte und Randverschiebungen
3. Annahme der Biegefläche und der Randschnittkräfte des Plattenelements.

## 1.2. Ansätze und Methoden zur Gewinnung von Steifigkeitsmatrizen

### 1.2.1 Auf der Annahme der Biegefläche beruhende Verfahren

Im Jahr 1956 wurde eine allgemeine Methode von Turner, Clough, Martin und Topp [1] vorgeschlagen, die als Basis zur weiteren Entwicklung diente. Hierin werden die Steifigkeitsmatrizen von rechteckigen und dreieckigen Scheibenelementen hergeleitet. Der Aufsatz zeigt einen für die Rechenmaschine geeigneten Weg, die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $[\bar{k}]$  durch aufeinander folgende Addition der einzelnen transformierten Steifigkeitsmatrizen der Elemente zu ermitteln.

$$[\bar{k}] = \sum_{i=1}^N [c^T]^i [k]^i [c]^i \quad (1.1)$$

wobei N die Zahl der Plattenelemente ist.

Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Plattenbiegung wurde von Melosh [2], [3] und Zienkiewicz [4] kurz danach durchgeführt. Hierzu wird für die Biegefläche ein Polynomansatz verwendet, und die Kontinuitätsbedingungen der Verschiebungen werden an den Knotenpunkten erfüllt. Der Polynomansatz in kartesischen Koordinaten für das rechteckige Element mit Eckverschiebungen als den Unbekannten nach Melosh lautet (Bild 1.1)

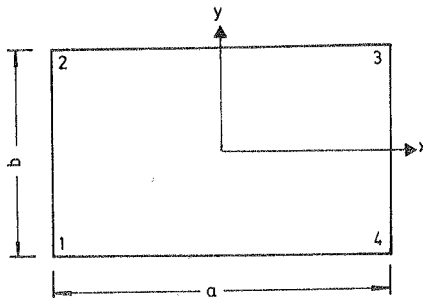


Bild 1.1: Rechteckiges Element

$$\begin{aligned}
 32 w = & X_m Y_m \left\{ 2(X_m Y_m - X_p Y_p) W_1 - 4 X_p X_m \right. \\
 & \left. (W_1' + W_1) - 4 Y_p Y_m (W_1'' + W_1) \right\} + X_m Y_p \\
 & \left\{ 2 (X_m Y_p - X_p Y_m) W_2 + 4 X_m X_p (W_2' + W_2) \right. \\
 & \left. - 4 Y_p Y_m (W_2'' - W_2) \right\} + X_p Y_p \left\{ 2 (X_p Y_p - \right. \\
 & \left. Y_m X_m) W_3 + 4 X_p X_m (W_3' - W_3) \right. \\
 & \left. + 4 Y_p Y_m (W_3'' - W_3) \right\} + X_p Y_m \left\{ 2 (X_p Y_m \right. \\
 & \left. - X_m Y_p) W_4 - 4 X_p X_m (W_4' - W_4) + \right. \\
 & \left. 4 Y_p Y_m (W_4'' + W_4) \right\} , \tag{1.2}
 \end{aligned}$$

worin

$$X_p = (2x + a)/a, \quad X_m = (2x - a)/a,$$

$$Y_p = (2y + b)/b, \quad Y_m = (2y - b)/b$$

Der Polynomansatz für die Biegefläche des rechteckigen Plattenelements mit den unbekanntenen Konstanten  $\{a\}$  nach Zienkiewicz lautet

(Bild 1.1)

$$\begin{aligned}
 w = & a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \\
 & + a_7 x^3 + a_8 x^2 y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^3 y \\
 & + a_{12} xy^3 \tag{1.3}
 \end{aligned}$$

Die unbekanntenen Konstanten  $\{a\}$  sind mit den Knotenverschiebungen  $\{w\}$  durch eine Transformationsmatrix verknüpft. Inzwischen wurde von Argyris [5] eine neue Möglichkeit zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrix vorgeschlagen. Statt der Wahl eines Polynoms zur Beschreibung der Elementsverschiebung werden die sog. natürlichen

Verzerrungszustände des Elements angenommen. Die resultierende Durchbiegung eines schiefwinkligen Plattenelements, die aus den 12 unabhängigen natürlichen Verschiebungszuständen besteht, lautet nach Superposition (Bild 1.2)

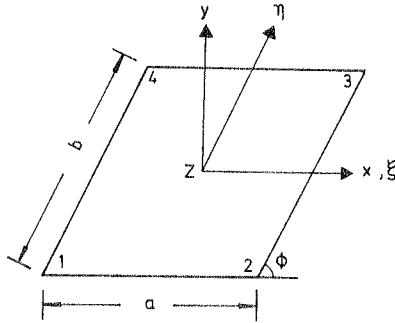


Bild 1.2: Schiefwinkliges Element

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{a_1}{16} [ a^2 - 4\xi^2 ] + \frac{a_2}{16} [ b^2 - 4\eta^2 ] + \frac{a_3}{8} [ \frac{\xi(a^2 - 4\xi^2)}{a^2} ] + \frac{a_4}{8} [ \frac{\eta(b^2 - 4\eta^2)}{b^2} ] \\
 & + \frac{a_5}{16} [ \frac{\eta(a^2 - 4\xi^2)(3b^2 - 4\eta^2)}{ab^3} ] + \frac{a_6}{16} [ \frac{\xi(b^2 - 4\eta^2)(3a^2 - 4\xi^2)}{ba^3} ] \\
 & + \frac{a_7}{8} [ \frac{\xi\eta(a^2 - 4\xi^2)(3b^2 - 4\eta^2)}{a^2 b^3} ] + \frac{a_8}{8} [ \frac{\xi\eta(b^2 - 4\eta^2)(3a^2 - 4\xi^2)}{b^2 a^3} ] \\
 & + a_9 \frac{\xi\eta}{ab} + a_{10} \frac{1}{4} + a_{11} \frac{\xi}{4} + a_{12} \frac{\eta}{4}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Ausgehend von den angenommenen Formen der Verschiebungen wird zunächst die sog. natürliche Steifigkeitsmatrix und schließlich die Steifigkeitsmatrix eines Elements berechnet. Mit der allgemeinen Formulierung lassen sich die Steifigkeitsmatrizen der Elemente verschiedener Formen ermitteln. Ein ähnliches Verfahren wurde von Ramstad [6] für das schiefwinklige Element vorgelegt, in dem die Grundformen der Verschiebungen angenommen werden. Der Ausdruck der Biegefläche nach Ramstad lautet (Bild 1.2)

$$\begin{aligned}
 w = & \frac{a_1}{4} \left[ \frac{4\xi^2 - a^2}{a} \right] + \frac{a_2}{2} \left[ \frac{\eta(4\xi^2 - a^2)}{ab} \right] \\
 & + \frac{a_3}{2} \left[ \frac{\xi(4\xi^2 - a^2)}{a^2} \right] + \frac{a_4}{1} \left[ \frac{\xi\eta(4\xi^2 - a^2)}{a^2 b} \right] \\
 & + \frac{a_5}{4} \left[ \frac{4\eta^2 - b^2}{b} \right] + \frac{a_6}{2} \left[ \frac{\xi(4\eta^2 - b^2)}{ab} \right] \\
 & + \frac{a_7}{2} \left[ \frac{\eta(4\eta^2 - b^2)}{b^2} \right] + a_8 \left[ \frac{\xi\eta(4\eta^2 - b^2)}{ab^2} \right] \\
 & + \frac{4a_9\xi\eta}{ab} + \frac{2a_{10}\xi}{a} + \frac{2a_{11}\eta}{b} + a_{12}
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Herleitung der Steifigkeitsmatrix eines Plattenelements bei Annahme einer Biegefläche

Es gibt zwei Verfahren, die Steifigkeitsmatrix herzuleiten. Im folgenden wird über die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix mit Hilfe virtueller Verschiebungen berichtet. Die ausführliche Behandlung zur Ermittlung der Steifigkeitsmatrix nach dem Castiglianoschen Satz findet sich in den Kapiteln 2 und 3, in denen die Durchführung am schiefwinkligen Element dargestellt wird.

Bild 1.3 zeigt ein aus dem kontinuierlichen System herausgeschnittenes finites Element mit den wirklichen Rand- und Flächen-

lasten. Die Schnittkräfte an den Schnitten 1-2, 2-3 usw. des Elements sind die Kräfte, die von benachbarten Elementen auf

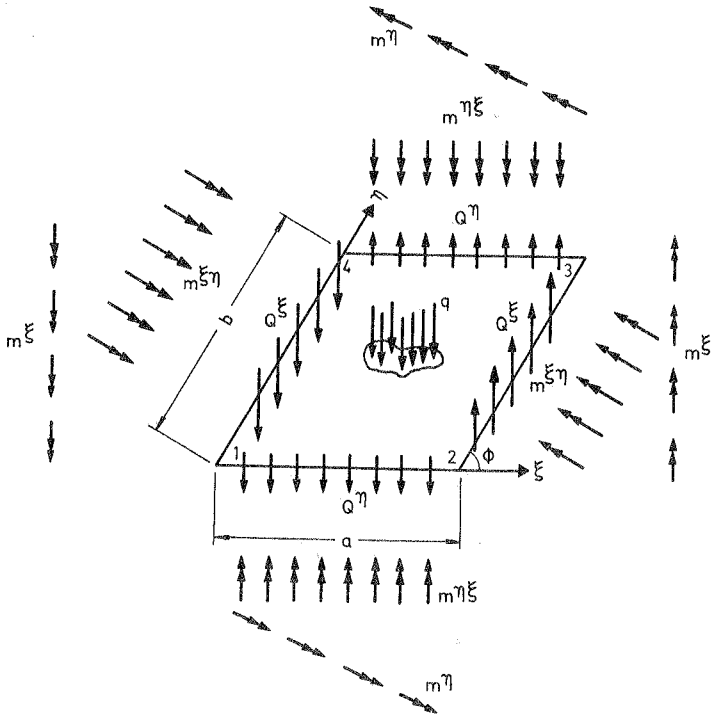


Bild 1.3: Aus der Platte herausgeschnittenes Element mit den wirklichen Rand- und Flächenlasten

das Element 1-2-3-4 ausgeübt werden. Sie wirken also nun mit der äußeren Belastung als äußere Lasten am Element. Das Element mit nur Ecklasten, die das Gleichgewicht mit den Lasten aus dem Bild 1.3 herstellen, wird im Bild 1.4 gezeigt. Zu den Ecklasten zugehörige Eckverschiebungen des Elements werden in Bild 1.5 gezeigt.



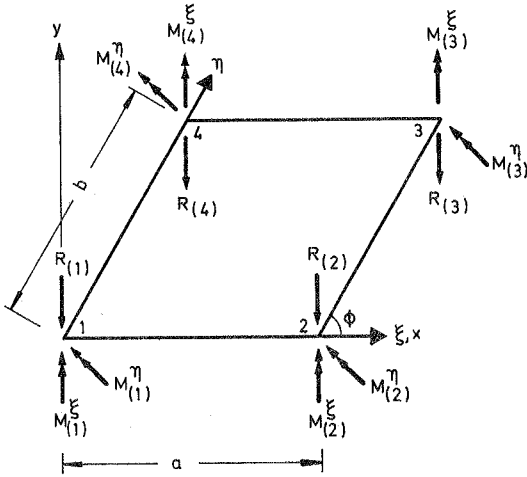


Bild 1.4: Plattenelement mit statisch äquivalenten fiktiven Eckkräften

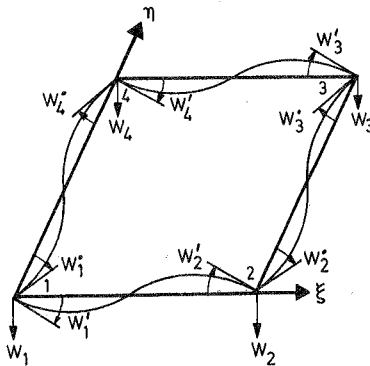


Bild 1.5: Positive Richtungen der Verschiebungen  
Perspektivische Darstellung

Der Ansatz für die Biegefläche lautet:

$$w = \{ \psi (\xi, \eta) \}^T \{ a \} , \quad (1.6)$$

wobei  $\{ a \}$  die Spaltenmatrix der unbekanntenen Konstanten ist. Durch Einsetzen der Koordinaten der Eckpunkte in den Ansatz der Biegefläche erhält man eine Verknüpfung zwischen  $\{ W \}$  und  $\{ a \}$ ,

$$\text{also } \{ W \} = [ B ] \{ a \} \quad (1.7)$$

$$\text{und } w = \{ \psi (\xi, \eta) \}^T [ B ]^{-1} \{ W \} \quad (1.8)$$

Die Krümmungen in kartesischen Koordinaten  $\mathcal{X}_k$  werden aus Gl.(1.7) ermittelt

$$\begin{aligned} \{ \mathcal{X}_k \} &= [ T ] [ S ] \{ a \} \\ &= [ T ] [ S ] [ B ]^{-1} \{ W \} , \end{aligned} \quad (1.9)$$

wobei

$$\{ \mathcal{X}_k (x, y) \} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}$$

Der Index  $k$  bedeutet Darstellung in kartesischen Koordinaten. Die Matrix  $[ T ]$  ermöglicht die Transformation zwischen kartesischen und schiefwinkligen Koordinaten. Die Matrix  $[ S ]$  verknüpft die Krümmungen in schiefwinkligen Koordinaten und die unbekanntenen Konstanten  $\{ a \}$ .

Mit dem Hookeschen Werkstoffgesetz erhält man die Schnittmomente nach der Kirchhoffschen Theorie zu:

$$\{ m \} = K [ H ] \{ \mathcal{X}_k \} , \quad (1.10)$$

wobei

$$K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad \text{und} \quad \{m\} = \begin{vmatrix} m_x \\ m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{vmatrix}$$

oder

$$\{m\} = K [H][T][S][B]^{-1} \{W\} \quad (1.11)$$

Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird eine beliebige virtuelle Eckverschiebung  $\delta\{\{W\}\}$  an beiden Elementen eingeleitet und die virtuelle Arbeit verglichen. Daraus folgt:

$$\delta(\{W\}^T) \{F\} = \int_A \delta(\{\mathcal{K}_k\}^T) \{m\} \quad dA \quad (1.12)$$

Die Arbeit der physikalisch eingeprägten äußeren Last  $q$  wird nicht berücksichtigt, weil  $q$  durch Elementecklasten ( $\frac{q_{abs} \sin \phi}{4}$ ) ersetzt werden kann. Diese äußeren Lasten werden erst beim Zusammenbau erfaßt und hierbei durch Einzelkräfte in den Knotenpunkten ersetzt. Die Oberflächenkräfte  $\bar{q}$ , die sich mit dem Ansatz  $w$  für die Biegefläche aus  $K\Delta w = \bar{q}$  ergeben, sofern  $w$  nicht die homogene Plattengleichung erfüllt, haben Eckkräfte  $\{\bar{F}\}$  zur Folge, die im Vektor  $\{F\}$  in Gl. (1.12) enthalten sind. Aus Gl. (1.8) und (1.9) sind die virtuellen Verschiebungen und Krümmungen darstellbar als:

$$\delta(w) = \{\psi(\xi, \eta)\}^T [B]^{-1} \delta(\{W\})$$

und

$$\delta(\{\mathcal{K}_k\}) = [T][S][B]^{-1} \delta(\{W\}) \quad (1.13)$$

Durch Einsetzen von Gl. (1.13) in (1.12) ergibt sich:

$$\delta(\{W\}^T) \{F\} = \delta(\{W\}^T) \int_A [B^{-1}]^T [S]^T [T]^T \{m\} \quad dA \quad (1.14)$$

oder

$$\{F\} = \int_A [B^{-1}]^T [S]^T [T]^T \{m\} \quad dA \quad (1.15)$$

Durch Einsetzen von Gl. (1.11) in Gl. (1.15) erhält man:

$$\{F\} = K \{W\} \int_A [B^{-1}]^T [S]^T [T]^T [H][T][S][B^{-1}] dA \quad (1.16)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix wird also

$$[k] = \int_A [B^{-1}]^T [S]^T [T]^T [H][T][S][B^{-1}] dA \quad (1.17)$$

### 1.2.2 Auf der Annahme der Elementrandschnittkräfte und der Randverschiebungen beruhende Verfahren

Die Untersuchungen über die mögliche Spannungskontinuität zwischen Elementen wurden von De Veubeke [7] eingeleitet. Er stellte den Unterschied zwischen den Verfahren unter Berücksichtigung der sog. "Verschiebungsmodelle" und der Spannungsmodelle" dar. Pian [8] wendete dieses Prinzip zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix eines rechteckigen Scheibenelements an. Severn und Taylor [9] erweiterten das Verfahren auf die rechteckige Biegeplatte. Für die an den Rändern wirkenden Spannungen lauten die angenommenen Polynomansätze

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2) 8z/h \\ \sigma_y &= (a_7 + a_8x + a_9y + a_{10}x^2 + a_{11}xy + a_{12}y^2) 8z/h \\ \tau_{xy} &= (a_{13} + a_{14}x + a_{15}y + a_{16}x^2 + a_{17}xy + a_{18}y^2) 8z/h \quad (1.18) \\ \tau_{zx} &= (a_{19} + a_{20}x + a_{21}y) (1-4 z^2/h^2) \\ \tau_{zy} &= (a_{22} + a_{23}x + a_{24}y) (1-4 z^2/h^2) \end{aligned}$$

Also wird  $\{\sigma\} = [P] \{a\}$  angenommen, wobei  $\{\sigma\}$  die Spaltenmatrix der Spannungsgrößen ist. Außer der Annahme der Spannungsgrößen werden die Randverschiebungen  $\{u\}$  des Elements angenommen, z.B. für den Rand 1-2 des Elements (Bild 1.5)

$$w = W_1 (1-3 \xi^2 + 2 \xi^3) + W_2 (3 \xi^2 - 2 \xi^3) + W_1' (-\xi + 2\xi^2 - \xi^3) + W_2' (\xi^2 - \xi^3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{6}{a} (W_1 - W_2) (\xi - \xi^2) + \frac{W_1'}{a} (1-4\xi + 3\xi^2) + \frac{W_2'}{a} (-2\xi + 3\xi^2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = \frac{W_1'}{b} (1 - \xi) + \frac{W_2'}{b} \xi$$

also

$$\{u\} = [L] \{W\} \quad (1.19)$$

Herleitung der Steifigkeitsmatrix eines Elements bei Annahme der Spannungsgrößen und der Randverschiebungen

Das Gesamtpotential eines Elements ist

$$\pi = U - W \quad (1.20)$$

wobei U das Potential der inneren Kräfte und W die potentielle Energie der äußeren Kräfte ist.

Durch Einsetzen der Beziehung zwischen den Spannungs- und Verzerrungsgrößen (gemäß  $\{\epsilon\} = [n] \{\sigma\}$ ) erhält man:

$$U = 1/2 \int_A \{\sigma\}^T [n] \{\sigma\} dA \quad (1.21)$$

Die Annahme für die Spannungsgrößen lautet:

$$\{\sigma\} = [P] \{a\} \quad (1.22)$$

Die Randschnittkräfte  $\{s\}$  können in  $\{a\}$  ausgedrückt werden

$$\{s\} = [R] \{a\} \quad (1.23)$$

Durch Einsetzen von Gl. (1.19), Gl. (1.21) und Gl. (1.23) in Gl. (1.20) ergibt sich das Gesamtpotential

$$\pi = 1/2 \int_A \{a\}^T [P]^T [n] [P] \{a\} dA - \{a\}^T [R] [L] \{W\} \quad (1.24)$$

Die Minimalbedingungen führen zu

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial a} \right\} = \{ 0 \} = [P]^T [n][P] \{ a \} - [R]^T [L] \{ W \} \quad (1.25)$$

Daraus folgt:

$$\{ a \} = \left[ [P]^T [n][P] \right]^{-1} [R]^T [L] \{ W \} \quad (1.26)$$

Durch Einsetzen von  $\{ a \}$  in U folgt:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{ W \}^T \left[ [R]^T [L] \right]^T \left[ [P]^T [n][P] \right]^{-1} \left[ [R]^T [L] \right] \{ W \} dA \quad (1.27)$$

U ausgedrückt in  $\{ \chi_k \}$  lautet:

$$U = K/2 \int_A \{ \chi_k \}^T [H] \{ \chi_k \} dA \quad (1.28)$$

Durch Einsetzen von Gl. (1.10) und Gl. (1.17) in Gl. (1.28) folgt:

$$U = \frac{K}{2} \{ W \}^T [k] \{ W \} \quad (1.29)$$

Durch den Vergleich zwischen den Gl. (1.27) und Gl. (1.29) ergibt sich die Steifigkeitsmatrix zu:

$$[k] = \int_A \left[ [R]^T [L] \right]^T \left[ [P]^T [n][P] \right]^{-1} \left[ [R]^T [L] \right] dA \quad (1.30)$$

### 1.2.3 Auf der Annahme der Biegefläche und der Randschnittkräfte des Plattenelements beruhende Verfahren

Im Abschnitt 1.2.1 Gl. (1.8) werden die Biegeflächen der einzelnen Elemente mit den Knotenverschiebungen als den unbekanntem Parametern angenommen.

$$w = \{ \psi(\xi, \eta) \}^T [B]^{-1} \{ W \}$$

Daraus folgt die Beziehung  $\{F\} = [k]\{W\}$ , die für jedes einzelne Element gilt. Mit Hilfe der Gleichgewichts- und Knotenkontinuitätsbedingungen ergibt sich eine Beziehung zwischen den Knotenlasten und Knotenverschiebungen

$$\{\bar{F}\} = [\bar{k}]\{\bar{W}\}, \quad (1.31)$$

die sich über die gesamte Platte erstreckt und zu einem linearen Gleichungssystem führt. Dies kann man auch nach dem Ritzschen Verfahren formulieren. Bei dem üblichen Ritz-Prozeß erstrecken sich die Ansatzfunktionen, im Gegensatz zur Elementmethode, über den Bereich der ganzen Platte. R.E. Jones [10] verwendete beim Ritzschen Verfahren Ansatzfunktionen, die sich nur über den Bereich der einzelnen Elemente erstrecken. Er gab eine allgemeine Formulierung des Potentials der Platte analog zur Elementmethode an. Sein hier gekürzt wiedergegebenes Funktional lautet:

$$\bar{\pi} = \sum_{i=1}^N U^i + \int_s \alpha (w^I - w^{II}) ds + \int \beta (w^I - w^{II}) ds + \{\bar{F}\}^T \{\bar{W}\} \quad (1.32)$$

$U^i$  ist das Potential der inneren Kräfte des Elements  $i$ ,  $s$  ist die Kante zwischen den Elementen,  $(w^I - w^{II}), (w^I - w^{II})$  ist die Differenz der Verschiebungen bzw. der Querneigungen längs des Randes  $s$  zwischen den Elementen I und II,

$\alpha, \beta$  sind die Kraftgrößen entsprechend den Verschiebungen.

Das zweite und das dritte Glied in Gl. (1.32) liefern die erforderliche Kontinuität zwischen den Elementen. Dieses Verfahren wurde von Herrmann [12] weiter entwickelt. Ausgehend von der Reissnerschen Variationsgleichung [11], in der die Momente  $m_x, m_y, m_{xy}$ , die Schubkräfte  $Q_x, Q_y$  und Verschiebungen  $u, v, w$  variiert werden, hat Herrmann für den Fall der reinen Plattenbiegung eine vereinfachte Variationsgleichung angegeben. Für die variierten Funktionen  $m_x, m_y, m_{xy}$  und  $w$  werden Ritzansätze im betrachteten Plattenbereich eingeführt. Das Variationsprinzip liefert ein lineares Gleichungssystem für die Ritzkonstanten.

Dies führt zur Anwendung der Hermiteschen Polynome, die sich über den Elementbereich erstrecken (siehe auch [13]). Da die Kontinuität zwischen den Elementen dann völlig erfüllt wird, reduziert sich die Gl. (1.32) zu:

$$\bar{\pi} = \sum_{i=1}^N U^i + \{ \bar{F} \}^T \{ \bar{w} \} \quad (1.33)$$

Durch die Variation von  $\bar{\pi}$  führt die Gl. (1.32) zur Beziehung  $\{ \bar{F} \} = [ \bar{k} ] \{ \bar{w} \}$  wie bei der Gl. (1.31). Die Herleitung der modifizierten Steifigkeitsmatrizen unter Verwendung von Hermiteschen Polynomen wird im 2. und 3. Kapitel ausführlich angegeben.



## 2. Finite Elemente nach Methode I<sup>+) und Methode II<sup>+)</sup></sup>

Aus den im letzten Kapitel erwähnten drei Verfahren wird das erste, nämlich die Annahme der Biegefläche, gewählt, um dieses weiter zu verfeinern. Das Elementsystem wird so idealisiert, daß die gewählte Biegefläche eine gute Annäherung der tatsächlichen Plattenbiegefläche darstellt, sowie daß die geometrischen Kontinuitätsbedingungen längs des ganzen Randes erfüllt werden. Hierzu wählt man eine Ansatzfunktion für die Biegefläche eines Elements. Bei den Verfahren der ersten und zweiten Gruppe wird die Kontinuität der Verschiebungen hauptsächlich nur an den Verknüpfungspunkten erfüllt (Methode I). Im folgenden wird eine Lösung angestrebt, bei der die vollständige Kontinuität der Verschiebungen und der Neigungen längs der Ränder erfüllt wird (Methode II).

Um einen Vergleich zwischen den beiden Methoden machen zu können, werden die beiden Lösungen ausführlich angegeben.

### 2.1 Herleitung des Potentials der inneren Kräfte eines Parallelogrammelements nach Methode I

Es wird ein Polynomansatz in  $\xi$  und  $\eta$  mit 12 Termen in schiefwinkligen Koordinaten für die Biegefläche des Elements gewählt. Die Anzahl der unabhängigen Verschiebungsgrößen an jeder Ecke des Elements ist 3, nämlich  $W$ ,  $W'$  und  $W''$ . Zur Vereinfachung werden dimensionslose Koordinaten  $\xi/a$  und  $\eta/b$  benutzt (siehe Bild 1.4 und 1.5).

$$w = a_1 \frac{\xi^3}{a^3} + a_2 \frac{\xi^2}{a^2} + a_3 \frac{\eta^3}{b^3} + a_4 \frac{\eta^2}{b^2} + a_5 \frac{\xi^3 \eta}{a^3 b} + a_6 \frac{\xi \eta^3}{ab^3} + a_7 \frac{\xi^2 \eta}{a^2 b} \\ + a_8 \frac{\xi \eta^2}{ab^2} + a_9 \frac{\xi \eta}{ab} + a_{10} \frac{\eta}{b} + a_{11} \frac{\xi}{a} + a_{12}$$

$$\text{oder } w = \{ \psi(\xi, \eta) \}^T \{ a \} \quad (2.1)$$

<sup>+) Die Elementmethode bei der nur die Kontinuität der Verschiebungen nicht aber die Kontinuität der Querneigungen längs der Ränder erfüllt ist, wird abkürzend als Methode I bezeichnet. Die Elementmethode bei der die Kontinuität der Verschiebungen und der Querneigungen längs der Ränder erfüllt ist, wird als Methode II bezeichnet.</sup>

Die Beziehungen zwischen den schiefwinkligen und kartesischen Koordinaten nach Bild 1.4 lauten:

$$\xi = x - y \cot \phi$$

$$\eta = y / \sin \phi$$

also

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \cot^2 \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{2 \cot \phi}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{\sin^2 \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \quad (2.2)$$

und

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\cot \phi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$$

Gl. (2.2) in Matrixenschreibweise lautet

$$\{ \kappa_k \} = [T] \{ \kappa_s \} \quad (2.3)$$

wobei

$$\{ \kappa_k \} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}, \quad \{ \kappa_s \} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{vmatrix}$$

und

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cot^2 \phi & + \frac{1}{\sin^2 \phi} & -\frac{2 \cot \phi}{\sin \phi} \\ -\cot \phi & 0 & + \frac{1}{\sin \phi} \end{bmatrix}$$

Die zweiten Ableitungen von  $w = \{g(\xi, \eta)\}^T \{a\}$  nach  $\xi$  und  $\eta$  sind die Krümmungen in den schiefen Koordinaten, die in Gl. (2.4) in Matrixschreibweise angegeben sind:

$$\{\chi_s\} = [S] \{a\}$$

Aus Gl. (2.4) und (2.3) erhält man die Krümmungen in kartesischen Koordinaten, die in Matrixschreibweise in Gl. (2.5) angegeben sind:

$$\{\chi_k\} = [T][S] \{a\}$$

Aus dem Hookeschen Werkstoffgesetz und den Kirchhoffschen Annahmen erhält man die Schnittmomente zu:

$$\begin{aligned} m_x &= -K \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ m_y &= -K \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ m_{xy} &= -K (1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad \{m\} = -K [H] \{\chi_k\} \quad (2.6)$$

wobei

$$\{m\} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad [H] = \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu) \end{bmatrix}$$

Mit Gl. (1.28) lautet das Potential  $U$  der inneren Kräfte eines Plattenelements, ausgedrückt in den Krümmungen  $\{\chi_k\}$ :

$$U = \frac{K}{2} \iint \{\chi_k\}^T [H] \{\chi_k\} dx dy$$

Nun wird  $U$  in schiefwinklige Koordinaten transformiert. Daraus folgt:

$$U = \frac{K}{2} \sin \vartheta \int_0^a \int_0^b \{a\}^T [S]^T [T]^T [H] [T] [S] \{a\} d\xi d\eta \quad (2.9)$$

Die Matrizen  $[S]^T [T]^T [H]$  und  $[S]^T [T]^T [H] [T] [S]$  =  $[C]$  werden auf der Seite 37 und 38 angegeben.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\frac{6\xi}{a^3} & +\frac{2}{a^2} & 0 & 0 & +\frac{6\xi\eta}{a^3 b} & 0 & +\frac{2\eta}{a^2 b} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{6\eta}{b^3} & +\frac{2}{b^2} & 0 & +\frac{6\xi\eta}{ab^3} & 0 & +\frac{2\xi}{ab^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{3\xi^2}{a^3 b} & +\frac{3\eta^2}{ab^3} & +\frac{2\xi}{a^2 b} & +\frac{2\eta}{ab^2} & +\frac{1}{ab} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

GL(2.4)  $\{x_s\} = [S] \{a\}$  oder  $\{x_s\} = [T] [S] \{a\}$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{s^2} \cdot \begin{bmatrix} +\frac{6s^2\xi}{a^3} & +\frac{2s^2}{a^2} & 0 & 0 & +\frac{6s^2\xi\eta}{a^3 b} & 0 & +\frac{2s^2\eta}{a^2 b} & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{6c^2\xi}{a^3} & +\frac{2c^2}{a^2} & +\frac{6\eta}{b^3} & +\frac{2}{b^2} & \frac{1}{ab^3}(6c^2\xi\eta - 6c\xi^2) & \frac{1}{ab^3}(2c^2\eta - 4c\xi) & \frac{1}{ab^2}(2c\xi - 4c\eta) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6sc\xi}{a^3} & -\frac{2sc}{a^2} & 0 & 0 & \frac{1}{ab^3}(-6c^2\xi\eta + 3s\eta^2 + 3\xi^2) & \frac{1}{ab^3}(-2sc\eta + 2s\xi) & \frac{2s\eta}{ab^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_{12} \end{bmatrix}$$

GL(2.5)  $\{x_k\} = [T] [S] \{a\}$

s = sin φ  
c = cos φ

$\frac{K}{s}$

$\frac{1}{a^3} (6 s^2 \xi + 6 \mu c^2 \xi)$	$\frac{1}{a^3} (6 \mu s^2 \xi + 6 c^2 \xi)$	$\frac{1}{a^3} [-12(1-\mu) s c \xi]$
$\frac{1}{a^2} (2 s^2 + 2 \mu c^2)$	$\frac{1}{a^2} (2 \mu s^2 + 2 c^2)$	$\frac{1}{a^2} [-4(1-\mu) s c]$
$\frac{6 \mu \eta}{b^3}$	$\frac{6 \eta}{b^3}$	0
$\frac{+2 \mu}{b^2}$	$\frac{+2}{b^2}$	0
$\frac{1}{a^3 b} [6 s^2 \xi \eta + \mu (6 c^2 \xi \eta - 6 c \xi^2)]$	$\frac{1}{a^3 b} (6 \mu s^2 \xi \eta + 6 c^2 \xi \eta - 6 c \xi^2)$	$\frac{1}{a^3 b} [(1-\mu)(-12 c s \xi \eta + 6 s \xi^2)]$
$\frac{1}{ab^3} [\mu (6 \xi \eta - 6 c \eta^2)]$	$\frac{1}{ab^3} (6 \xi \eta - 6 c \eta^2)$	$\frac{1}{ab^3} [6 s \eta^2 (1-\mu)]$
$\frac{1}{a^2 b} [2 s^2 \eta + \mu (2 c^2 \eta - 4 c \xi)]$	$\frac{1}{a^2 b} (2 \mu s^2 \eta + 2 c^2 \eta - 4 c \xi)$	$\frac{1}{a^2 b} [(1-\mu)(-4 s c \eta + 4 s \xi)]$
$\frac{1}{ab^2} [\mu (2 \xi - 4 c \eta)]$	$\frac{1}{ab^2} (2 \xi - 4 c \eta)$	$\frac{1}{ab^2} [4(1-\mu) s \eta]$
$\frac{-2 c \mu}{ab}$	$\frac{-2 c}{ab}$	$\frac{1}{ab} [+2 s (1-\mu)]$
0	0	0
0	0	0
0	0	0

Matrix  $[S]^T [T]^T [H]$



Nach der Integration jedes Elements der Matrix [C] erhält man eine Matrix, die auf der Seite 40 angegeben ist.

Durch Einsetzen der Koordinaten der Eckpunkte in Gl. (2.1) und in die Ableitungen ( $a \frac{\partial w}{\partial \xi}$  und  $b \frac{\partial w}{\partial \eta}$ ) der Gl. (2.1) erhält man die Eckverschiebungen als Funktionen der unbekanntenen Konstanten {a}.

$$\text{Also } \{W\} = [B]\{a\} \quad (2.10)$$

Matrix [B] wird in Gl. (2.11) angegeben.

Durch Einsetzen von Gl. (2.11) in Gl. (2.9) erhält man

$$U = \frac{K}{2S^3}_{ab} \left[ \{W\}^T [B^{-1}]^T \cdot \iint [C][B^{-1}]\{W\} \right] \quad (2.12)$$

Durch Einsetzen von  $[B^{-1}]^T \cdot \iint [C] \cdot [B^{-1}] = [k]$  in Gl. (2.12) erhält man

$$U = \frac{K}{2S^3}_{ab} \{W\}^T [k]\{W\} \quad (2.13)$$

Matrizenmultiplikationen  $[B^{-1}]^T \iint [C] \cdot [B^{-1}]$

werden mit Hilfe der Rechenmaschine durchgeführt (siehe Anhang A: Programm zur Berechnung der Matrix [k] eines Parallelogrammelements nach Methode I).

## 2.2 Herleitung des Potentials der inneren Kräfte eines Parallelogrammelements nach Methode II

Im vorigen Abschnitt wurde ein Polynomansatz in  $\xi$  und  $\eta$  für die Biegefläche eines Plattenelements verwendet. Die dabei entstehende geometrische Kontinuität zwischen den Elementen wird nun untersucht.

Bild 2.1 zeigt einen Zusammenbau von 4 Elementen mit ihren eigenen Koordinatensystemen.







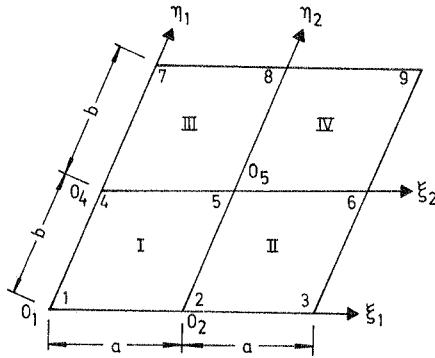


Bild 2.1 : Zusammenbau von 4 Elementen mit lokalen Koordinatensystemen

Für das Element I nehmen wir den Polynomansatz für die Biegefläche nach Gl. (2.1) an. Der Verlauf der Durchsenkung des Randes 4-5 wird also

$$\begin{aligned}
 w &= \left[ \frac{a_1}{a^3} + \frac{a_5}{a^3} \right] \xi^3 + \left[ \frac{a_2}{a^2} + \frac{a_7}{a^2} \right] \xi^2 \\
 &+ \left[ \frac{a_6}{a} + \frac{a_8}{a} + \frac{a_9}{a} + \frac{a_{11}}{a} \right] \xi \\
 &+ \left[ a_3 + a_4 + a_{10} + a_{12} \right]
 \end{aligned}$$

$$\text{oder } w = A_1 \xi^3 + A_2 \xi^2 + A_3 \xi + A_4 \quad (2.16)$$

Die erste Ableitung nach  $\xi$  liefert

$$w' = 3 A_1 \xi^2 + 2 A_2 \xi + A_3 \quad (2.17)$$

Nun betrachten wir das Element III und den Rand 4-5 mit den Achsen  $\eta_1 \xi_2$

Der Polynomansatz für die Biegefläche lautet:

$$\begin{aligned}
 w = & b_1 \frac{\xi^3}{a^3} + b_2 \frac{\xi^2}{a^2} + b_3 \frac{\eta^3}{b^3} + b_4 \frac{\eta^2}{b^2} \\
 & + b_5 \frac{\xi^3 \eta}{a^3 b} + b_6 \frac{\xi \eta^3}{a b^3} + b_7 \frac{\xi^2 \eta}{a^2 b} \\
 & + b_8 \frac{\xi \eta^2}{a b^2} + b_9 \frac{\xi \eta}{a b} + b_{10} \frac{\eta}{b} + b_{11} \frac{\xi}{a} \\
 & + b_{12}
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Durchsenkung des Randes 4-5 wird also

$$w = b_1 \frac{\xi^3}{a^3} + b_2 \frac{\xi^2}{a^2} + b_{11} \frac{\xi}{a} + b_{12}$$

$$\text{oder} \quad = B_1 \xi^3 + B_2 \xi^2 + B_3 \xi + B_4 \tag{2.19}$$

Die erste Ableitung nach  $\xi$  liefert:

$$w' = 3 B_1 \xi^2 + 2 B_2 \xi + B_3 \tag{2.20}$$

Um die 4 Unbekannten  $A_1 \dots A_4$  zu bestimmen, braucht man 4 Verschiebungsgrößen am Ende des Randes 4-5.

Die 4 Eckverschiebungen  $W_4, W'_4, W_5$  und  $W'_5$  sind vorhanden und also können die Unbekannten  $A_1 \dots A_4$  in  $W_4 \dots W'_5$  ausgedrückt werden.

Die gleichen Überlegungen gelten für den Rand 4-5 des Elements III. Da die Eckverschiebungen und ihre Ableitungen  $W_4, W'_4, W_5, W'_5$  für die beiden benachbarten Elemente gleich sind, ist der Übergang der Durchbiegung und der Neigung in Richtung  $\xi$  des Randes 4-5 stetig.

Die Ableitung der Gl. (2.16) nach  $\eta$  für den Rand 4-5 des Elements I lautet:

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = w^* = \frac{3a_3}{b} + \frac{2a_4}{b} + \frac{a_5 \xi^3}{a^3 b} + \frac{a_6}{a} + a_7 \frac{\xi^2}{a^2} + 2a_8 \frac{\xi}{ab} + \frac{a_9 \xi}{a} + \frac{a_{10}}{b}$$

$$\text{oder} \quad = c_1 \xi^3 + c_2 \xi^2 + c_3 \xi + c_4 \quad (2.21)$$

Um die vier unbekanntenen Konstanten zu bestimmen, braucht man wieder vier Eckverschiebungen. Da nur zwei Neigungen  $W_4^*$  und  $W_5^*$  an den Enden des Randes 4-5 vorhanden sind, verläuft die Querneigung zwischen zwei Elementen nicht stetig.

Die verschiedenen Möglichkeiten zur Erzielung der vollen geometrischen Kontinuität, nämlich die Kontinuität der Verschiebungen und Neigungen zwischen den Elementen, werden im folgenden diskutiert.

Annahme eines linearen Verlaufs der Querneigung:

Vier Verschiebungsgrößen sind für die Enden 4 und 5 des Randes 4-5 bekannt. Also kann man gemäß Gl. (2.16) einen Polynomsatz mit vier unbekanntenen Konstanten für den Rand annehmen:

$$w = A_1 \xi^3 + A_2 \xi^2 + A_3 \xi + A_4 \quad (2.22)$$

Weil nur zwei Randbedingungen in der Querrichtung bekannt sind, kann man eine lineare Funktion mit zwei unbekanntenen Konstanten annehmen, also

$$w^* = A_5 \xi + A_6 \quad (2.23)$$

Nach Einsetzen der Eckverschiebungen in Gl. (2.22) und Gl. (2.23) ergibt sich

$$\begin{aligned}
 w &= w_4 (1 - 3 \xi^2 + 2 \xi^3) + w_5 (3 \xi^2 - 2 \xi^3) \\
 &+ a w_4' (-\xi + 2 \xi^2 - \xi^3) + a w_5' (\xi^2 - \xi^3) \\
 w' &= \frac{6}{a} (w_4 - w_5) (\xi - \xi^2) + w_4' (1 - 4\xi + 3 \xi^2) \\
 &+ w_5' (-2\xi + 3 \xi^2) \\
 w'' &= w_4'' (1 - \xi) + w_5'' \xi \qquad (2.24)
 \end{aligned}$$

Es können vier Ansätze in der Art von Gl. (2.24) für alle vier Ränder hergeleitet werden. Solche Formen der Randverschiebungen wurden von Severn und Taylor [9] angewandt. Jedoch ist  $\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$  mit dieser Behandlung nicht eindeutig ermittelbar, weil keine einzelne Funktion für die gesamte Biegefläche des Elements beschrieben werden kann.

Die Gleichung (2.21) lautet:

$$w'' = c_1 \xi^3 + c_2 \xi^2 + c_3 \xi + c_4$$

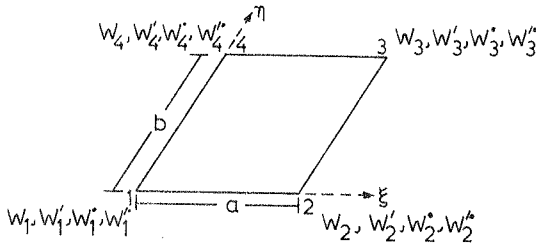
Setzt man außer den zwei vorhandenen Bedingungen für die Querneigungen auch  $w'' = \alpha b \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}$  an den Ecken gleich null, dann kann die Verträglichkeit der  $w$ ,  $w'$  und  $w''$  erfüllt werden, jedoch ergibt sich damit eine Ungenauigkeit wegen der Voraussetzung

$$w'' = 0.$$

Diese Überlegungen führen schließlich zur Berücksichtigung von  $w''$  als einer unabhängigen Variablen neben  $w$ ,  $w'$  und  $w''$ . Es ist dann möglich, einen Ansatz mit 16 hermiteschen Polynomen für die Biegefläche eines Parallelogrammelements zu finden, der dem Ansatz entspricht, den Schaefer [13] für ein Rechteckelement im Zusammenhang mit der Lösung des Randwertproblems unter Verwendung des Ritzschen Verfahrens angegeben hat.

Durch die Verwendung der hermiteschen Polynome höherer Ordnung kann auch die Kontinuität der Krümmungen ( $w''$ ,  $w''$ ) gesichert werden. Jedoch vergrößert sich der Rechenaufwand dadurch erheblich.

Der Ansatz für die Biegefläche mit 16 hermiteschen Polynomen lautet:



$$\begin{aligned}
 w = & W_1 \left[ 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + 1 \right] \left[ 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + 1 \right] \\
 & + W'_1 \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{a}\right) \right] \left[ 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + 1 \right] \\
 & + W''_1 \left[ 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + 1 \right] \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right) \right] \\
 & + W'''_1 \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{a}\right) \right] \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right) \right] \\
 & + W_2 \left[ -2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] \left[ 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + 1 \right] \\
 & + W'_2 \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] \left[ 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + 1 \right] \\
 & + W''_2 \left[ -2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right) \right] \\
 & + W'''_2 \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+W_3 \left[ -2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] \left[ -2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right] \\
 &+W_3' \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] \left[ -2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right] \\
 &+W_3'' \left[ -2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right] \\
 &+W_3''' \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right] \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right] \\
 &+W_4 \left[ 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + 1 \right] \left[ -2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right] \\
 &+W_4' \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{a}\right) \right] \left[ -2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right] \\
 &+W_4'' \left[ 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + 1 \right] \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right] \\
 &+W_4''' \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{a}\right) \right] \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

Abkürzend lautet dieser Ansatz

$$w = \sum_{i=1}^{16} W_i f(\xi) g_i(\eta)$$

oder in Matrixschreibweise

$$w = \{f(\xi) g(\eta)\}^T \{W^*\} \quad (2.25)$$

wobei die Spaltenmatrix der Eckverschiebungen  $\{W^*\}$  lautet:

$$\{W^*\} = \begin{bmatrix} w_1 \\ aw_1^* \\ bw_1^* \\ abw_1^* \\ w_2 \\ \vdots \\ abw_4^* \end{bmatrix}$$

Aus Gl. (2.25) erkennt man, daß

$$f_1(\xi) = f_3(\xi) = f_{13}(\xi) = f_{15}(\xi) = \left[ 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + 1 \right]$$

$$f_2(\xi) = f_4(\xi) = f_{14}(\xi) = f_{16}(\xi) = \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi}{a}\right) \right]$$

$$f_5(\xi) = f_7(\xi) = f_9(\xi) = f_{11}(\xi) = \left[ -2\left(\frac{\xi}{a}\right)^3 + 3\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right]$$

$$f_6(\xi) = f_8(\xi) = f_{10}(\xi) = f_{12}(\xi) = \left[ \left(\frac{\xi}{a}\right)^3 - \left(\frac{\xi}{a}\right)^2 \right]$$

$$g_1(\eta) = g_2(\eta) = g_5(\eta) = g_6(\eta) = \left[ 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + 1 \right]$$

$$g_3(\eta) = g_4(\eta) = g_7(\eta) = g_8(\eta) = \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - 2\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{b}\right) \right]$$

$$g_9(\eta) = g_{10}(\eta) = g_{13}(\eta) = g_{14}(\eta) = \left[ -2\left(\frac{\eta}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right]$$

$$g_{11}(\eta) = g_{12}(\eta) = g_{15}(\eta) = g_{16}(\eta) = \left[ \left(\frac{\eta}{b}\right)^3 - \left(\frac{\eta}{b}\right)^2 \right]$$

Die 16 Polynome in  $\xi$  und  $\eta$  kommen also nur in 4 verschiedenen Formen vor.



Die durch Verwendung dieses Ansatzes entstehende geometrische Kontinuität zwischen den Elementen wird für das Beispiel nach Bild 2.1 geprüft. Der Verlauf der Durchbiegung des Randes 4-5 für das Element I lautet nach der Gl. (2.25):

$$\begin{aligned} w &= W_5 \cdot f_9(\xi) + W_5' f_{10}(\xi) + W_4 f_{13}(\xi) + W_4' f_{14}(\xi) \\ &= W_5 \cdot f_5(\xi) + W_5' f_6(\xi) + W_4 f_1(\xi) + W_4' f_2(\xi) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Aus Gl. (2.26) ergibt sich  $w'$  zu:

$$w' = \frac{\partial w}{\partial \xi} = W_5 f_5'(\xi) + W_5' f_6'(\xi) + W_4 f_1'(\xi) + W_4' f_2'(\xi) \quad (2.27)$$

Der Verlauf der Querneigung am Rand 4-5 lautet aus Gl. (2.25)

$$\begin{aligned} w' &= \frac{\partial w}{\partial \eta} = [W_5' f_{11}(\xi) + W_5'' f_{12}(\xi) + W_4' f_{15}(\xi) + W_4'' f_{16}(\xi)]^{1/b} \\ &= [W_5' f_5(\xi) + W_5'' f_6(\xi) + W_4' f_1(\xi) + W_4'' f_2(\xi)]^{1/b} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die Ausdrücke der Verschiebungsgrößen für den Rand 4-5 des Elements III sind:

$$w = W_4 f_1(\xi) + W_4' f_2(\xi) + W_5 f_5(\xi) + W_5' f_6(\xi) \quad (2.29)$$

$$w' = W_4 f_1'(\xi) + W_4' f_2'(\xi) + W_5 f_5'(\xi) + W_5' f_6'(\xi) \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} w &= [W_4' f_3(\xi) + W_4'' f_4(\xi) + W_5' f_7(\xi) + W_5'' f_8(\xi)]^{1/b} \\ &= [W_4' f_1(\xi) + W_4'' f_2(\xi) + W_5' f_5(\xi) + W_5'' f_6(\xi)]^{1/b} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Die rechten Seiten der Gl. (2.26) und Gl. (2.29) sind identisch. Die Verschiebung  $w$  längs der Kante zwischen den Elementen I und III ist also stetig. Analog bemerkt man aus Gl. (2.27 und 2.30) und Gl. (2.28 und 2.31), daß  $w'$  und  $w''$  zwischen den Elementen I und III stetig sind.

Berechnung des Potentials U der inneren Kräfte eines Elements

Die Annahme der Biegefläche lautet:  
(Gl. 2.25)

$$w = \{ f(\xi) \quad g(\eta) \}^T \{ w^+ \}$$

Die Herleitung des Potentials U vereinfacht sich, weil keine Transformationsmatrix [B] wie in Gl. (2.11) in der Berechnung vorkommt. Die Biegefläche wird direkt in den Eckverschiebungen und ihren Ableitungen ausgedrückt und damit sind die Elemente der Matrix  $[k^+]$  einfacher ermittelbar.

Wie bei der Methode I werden die Verzerrungsgrößen in schiefen Koordinaten und dann in kartesischen Koordinaten (Gl. (2.32) und (2.33)) ausgedrückt.

$$\text{Also } \{ \chi_s \} = [S^+] \{ w^+ \}$$

$$\text{und } \{ \chi_k \} = [T][S^+] \{ w^+ \}$$

Analog Gl. (2.12) schreibt man

$$U = \frac{K}{2s_{ab}^3} \left[ \{ w^+ \}^T \int \int [C^+] \cdot \{ w^+ \} \right],$$

$$\text{wobei } \int \int [C^+] = \int_0^b \int_0^a [S^+]^T [T]^T [H][T][S^+] \, d\xi d\eta$$

Die Matrizen  $[S^+]$  und  $[T][S^+]$  sind in Gl. (2.32) und (2.33) angegeben.

Die Matrizenmultiplikation  $[S^+]^T [T]^T [H]$  erfolgt wie bei der Methode I. Sie wird auf Seite 52 angegeben.

---

Die bei der Methode I verwendeten Bezeichnungen werden in der Methode II mit + bezeichnet.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1''(\xi) g_1(\eta) & f_2''(\xi) g_2(\eta) & f_3''(\xi) g_3(\eta) & \dots & f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) \\ f_1(\xi) g_1''(\eta) & f_2(\xi) g_2''(\eta) & f_3(\xi) g_3''(\eta) & \dots & f_{16}(\xi) g_{16}''(\eta) \\ f_1(\xi) g_1(\eta) & f_2(\xi) g_2(\eta) & f_3(\xi) g_3(\eta) & \dots & f_{16}(\xi) g_{16}(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_1' \\ W_1'' \\ \dots \\ W_1^{(L)} \end{bmatrix}$$

$$\text{oder } \{x_s\} = [S^*] \{W^*\}$$

Gl.(2.32)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1''(\xi) g_1(\eta) & f_2''(\xi) g_2(\eta) & \dots & f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) \\ \left[ \frac{c^2}{s^2} f_1''(\xi) g_1(\eta) + \frac{1}{s^2} f_1(\xi) g_1''(\eta) - \frac{2c}{s^2} f_1'(\xi) g_1'(\eta) - \frac{c}{s} f_1''(\xi) g_1(\eta) + \frac{1}{s} f_1'(\xi) g_1'(\eta) \right] & \left[ \frac{c^2}{s^2} f_2''(\xi) g_2(\eta) + \frac{1}{s^2} f_2(\xi) g_2''(\eta) - \frac{2c}{s^2} f_2'(\xi) g_2'(\eta) - \frac{c}{s} f_2''(\xi) g_2(\eta) + \frac{1}{s} f_2'(\xi) g_2'(\eta) \right] & \dots & \left[ \frac{c^2}{s^2} f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) + \frac{1}{s^2} f_{16}(\xi) g_{16}''(\eta) - \frac{2c}{s^2} f_{16}'(\xi) g_{16}'(\eta) - \frac{c}{s} f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) + \frac{1}{s} f_{16}'(\xi) g_{16}'(\eta) \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_1' \\ W_1'' \\ \dots \\ W_1^{(L)} \end{bmatrix}$$

$$\text{oder } \{x_k\} = [T][S^*][W^*]$$

Gl.(2.33)

$$\begin{aligned}
 & f_1''(\xi) g_1(\eta) + \frac{\mu c^2}{S^2} f_1''(\xi) g_1(\eta) \\
 & + \frac{\mu}{S^2} f_1(\xi) g_1''(\eta) - \frac{2\mu c}{S^2} f_1'(\xi) g_1'(\eta) \\
 & f_2''(\xi) g_2(\eta) + \frac{\mu c^2}{S^2} f_2''(\xi) g_2(\eta) \\
 & + \frac{\mu}{S^2} f_2(\xi) g_2''(\eta) - \frac{2\mu c}{S^2} f_2'(\xi) g_2'(\eta) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) + \frac{\mu c^2}{S^2} f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) \\
 & + \frac{\mu}{S^2} f_{16}(\xi) g_{16}''(\eta) - \frac{2\mu c}{S^2} f_{16}'(\xi) g_{16}'(\eta)
 \end{aligned}
 \begin{aligned}
 & \mu f_1''(\xi) g_1(\eta) + \frac{c^2}{S^2} f_1''(\xi) g_1(\eta) \\
 & + \frac{1}{S^2} f_1(\xi) g_1''(\eta) - \frac{2c}{S^2} f_1'(\xi) g_1'(\eta) \\
 & \mu f_2''(\xi) g_2(\eta) + \frac{c^2}{S^2} f_2''(\xi) g_2(\eta) \\
 & + \frac{1}{S^2} f_2(\xi) g_2''(\eta) - \frac{2c}{S^2} f_2'(\xi) g_2'(\eta) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \mu f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) + \frac{c^2}{S^2} f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) \\
 & + \frac{1}{S^2} f_{16}(\xi) g_{16}''(\eta) - \frac{2c}{S^2} f_{16}'(\xi) g_{16}'(\eta)
 \end{aligned}
 \begin{aligned}
 & - \frac{c\mu'}{S} f_1''(\xi) g_1(\eta) \\
 & + \frac{\mu'}{S} f_1'(\xi) g_1(\eta) \\
 & - \frac{c\mu'}{S} f_2''(\xi) g_2(\eta) \\
 & + \frac{\mu'}{S} f_2'(\xi) g_2(\eta) \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & - \frac{c\mu'}{S} f_{16}''(\xi) g_{16}(\eta) \\
 & + \frac{\mu'}{S} f_{16}'(\xi) g_{16}(\eta)
 \end{aligned}$$

$\mu' = 2(1 - \mu)$       Matrix  $[S^{-1}]^T [T]^T [H]$

Aus den Matrizen  $[S^+]^T [T]^T [H]$  und  $[T][S^+]$  ergibt sich ein Element  $C^+_{ik}$  der Matrix  $[C^+]$ .  $C^+_{ik}$  wird in Gl. (2.34) angegeben.

$$\begin{aligned}
 C^+_{ik} = & \frac{K}{\text{abs}^3} \int_0^b \int_0^a \left\{ \left[ f''_i(\xi) f''_k(\xi) g_i(\eta) g_k(\eta) \right] \right. \\
 & + A_1 \left[ f''_i(\xi) f_k(\xi) g_i(\eta) g^*_{k'}(\eta) \right] \\
 & - 2c \left[ f''_i(\xi) f'_k(\xi) g_i(\eta) g^*_{k'}(\eta) \right] \\
 & + 2A_2 \left[ f'_i(\xi) f'_k(\xi) g^*_i(\eta) g_k(\eta) \right] \\
 & - 2c \left[ f'_i(\xi) f''_k(\xi) g^*_i(\eta) g_k(\eta) \right] \\
 & + A_1 \left[ f_i(\xi) f''_k(\xi) g^*_{i'}(\eta) g_k(\eta) \right] \\
 & + \left[ f_i(\xi) f_k(\xi) g^*_{i'}(\eta) g^*_{k'}(\eta) \right] \\
 & - 2c \left[ f_i(\xi) f'_k(\xi) g^*_{i'}(\eta) g^*_{k'}(\eta) \right] \\
 & \left. - 2c \left[ f'_i(\xi) f_k(\xi) g_i(\eta) g^*_{k'}(\eta) \right] \right\} d\xi d\eta
 \end{aligned}$$

(2.34)

Hierbei ist

$$A_1 = \mu s^2 + c^2$$

$$A_2 = 1 + c^2 - \mu s^2$$

Nach Umordnung läßt sich  $C_{ik}^+$ , wie folgt, ausdrücken:

$$C_{ik}^+ = \frac{K}{\text{abs}^3} \{P_{ik}\}^T [D] \{Q_{ik}\} \quad (2.35)$$

Hierbei sind

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2C & & & & & & & \\ 0 & \dots & +A_1 & & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & -2C & & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & +2A_2 & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & -2C & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & +A_1 & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -2C & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & +1 \end{bmatrix}$$

$$\{P_{ik}\}_{9,1} = \begin{bmatrix} \int_a^b f_i(\xi) f_k(\xi) d\xi \\ \int_a^b f_i'(\xi) f_k(\xi) d\xi \\ \int_a^b f_i''(\xi) f_k(\xi) d\xi \\ \int_a^b f_i(\xi) f_k'(\xi) d\xi \\ \int_a^b f_i'(\xi) f_k'(\xi) d\xi \\ \int_a^b f_i''(\xi) f_k'(\xi) d\xi \\ \int_a^b f_i(\xi) f_k''(\xi) d\xi \\ \int_a^b f_i'(\xi) f_k''(\xi) d\xi \\ \int_a^b f_i''(\xi) f_k''(\xi) d\xi \end{bmatrix}$$

$$\{Q_{ik}\}_{9,1} = \begin{bmatrix} \int_a^b g_i''(\eta) g_k(\eta) d\eta \\ \int_a^b g_i'(\eta) g_k''(\eta) d\eta \\ \int_a^b g_i(\eta) g_k''(\eta) d\eta \\ \int_a^b g_i'(\eta) g_k'(\eta) d\eta \\ \int_a^b g_i(\eta) g_k'(\eta) d\eta \\ \int_a^b g_i''(\eta) g_k(\eta) d\eta \\ \int_a^b g_i'(\eta) g_k(\eta) d\eta \\ \int_a^b g_i(\eta) g_k(\eta) d\eta \end{bmatrix}$$

In  $\{P_{i,k}\}$  und  $\{Q_{i,k}\}$  nehmen  $i$  und  $k$  die Werte 1 bis 16 an. Also sind 256 Spaltenmatrizen von  $\{P\}$  oder  $\{Q\}$  zu berechnen. Die 16 Funktionen  $f_i(\xi)$  und  $g_i(\eta)$  kommen aber nur in 4 verschiedenen Formen vor. Dies folgt aus der Eigenschaft der hermiteschen Polynome. Dies beschränkt die Zahl der untereinander verschiedenen Matrizen  $\{P\}$  oder  $\{Q\}$  auf 16 ( $\{P_1\}$  bis  $\{P_{16}\}$  und  $\{Q_1\}$  bis  $\{Q_{16}\}$ ). In der Tabelle (2.1) ist angegeben, wie die Elemente  $C_{ik}^+$  mit Hilfe dieser Spaltenmatrizen  $\{P_n\}$  und  $\{Q_n\}$  berechnet werden können. Damit zeigt die Tabelle auch die Zuordnung zwischen den  $\{P_{ik}\}$  und  $\{P_n\}$  bzw.  $\{Q_{ik}\}$  und  $\{Q_n\}$ . Ferner kann man feststellen, daß eine Beziehung zwischen den Spalten-

matrizen  $\{P_n\}$  und  $\{Q_n\}$  besteht, da die Formen der Polynome  $f_n(\xi)$  und  $g_i(\eta)$  gleich sind, d.h. es genügt  $f$ ,  $f'$  und  $f''$  zu berechnen.

In Tabelle (2.2) Seite 57 werden die Integrale der Produkte zwischen  $f$ ,  $f'$  und  $f''$  ( $\int_a^{\alpha} f \cdot f'$ ,  $\int_a^{\alpha} f' \cdot f''$ ,  $\int_a^{\alpha} f'' \cdot f$ ) für vier verschiedene Funktionen angegeben. Sie gelten auch für  $g(\eta)$ , wenn  $a$  durch  $b$  ersetzt wird. Mit Hilfe der Tabelle (2.1) werden 16 Spaltenmatrizen  $\{P\}$  ausgerechnet, die auf der Seite 58 angegeben werden.

Es ist günstiger, die in den Spaltenmatrizen  $\{P\}$  und  $\{Q\}$  erscheinenden Seitenlängen  $a$  bzw.  $b$  aus den Matrizen zu nehmen und zusammen mit dem Faktor  $a \cdot b$  der Gl. (2.35) in  $p$  ( $= a/b$ ) auszudrücken. Die Elemente der Spaltenmatrizen auf der Seite 58 sind also feste Zahlen.

Man ermittelt die Spaltenmatrizen  $\{Q\}$  mit Hilfe folgender Verknüpfung zwischen  $\{P_n\}$  und  $\{Q_n\}$ .

$$\{P_{n_i}\} = \{Q_{n_{10-i}}\}$$

$$\text{z.B. } \{P_1\} = \begin{vmatrix} + 13/35 \\ - 1/2 \\ - 6/5 \\ - 1/2 \\ + 6/5 \\ 0 \\ - 6/5 \\ 0 \\ + 12 \end{vmatrix} \quad \text{und } \{Q_1\} = \begin{vmatrix} + 12 \\ 0 \\ - 6/5 \\ 0 \\ + 6/5 \\ - 1/2 \\ - 6/5 \\ - 1/2 \\ + 13/35 \end{vmatrix}$$

Durch Einsetzen von  $\{P\}$  und  $\{Q\}$  und  $[D]$  in der Gl. (2.35) erhält man die Matrix  $[k^+]_{16,16}$ , die auf Seite 59 angegeben wird.

Die Elemente der Matrix  $[k^+]$  werden programmiert. Die vom Computer berechneten Werte der Matrix  $[k^+]$  sind noch mit  $K/\sin^3\phi$  zu multiplizieren (siehe Anhang B: Programm-Protokoll zur Berechnung der Matrix  $[k^+]$  nach Methode II).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>															
2	P <sub>2</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>														
3	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>11</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>													
4	P <sub>2</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>2</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>												
5	P <sub>3</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>	P <sub>6</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>	P <sub>3</sub> <sup>Q</sup> <sub>11</sub>	P <sub>6</sub> <sup>Q</sup> <sub>11</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>					Symmetrie !						
6	P <sub>4</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>	P <sub>7</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>	P <sub>4</sub> <sup>Q</sup> <sub>11</sub>	P <sub>7</sub> <sup>Q</sup> <sub>11</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>1</sub>										
7	P <sub>3</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>6</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>3</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>	P <sub>6</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>16</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>									
8	P <sub>4</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>7</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>4</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>	P <sub>7</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>2</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>5</sub>								
9	P <sub>3</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>6</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>3</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>6</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>16</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>16</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>							
10	P <sub>4</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>7</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>4</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>7</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>						
11	P <sub>3</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>6</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>3</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>6</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>16</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>16</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>16</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>8</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>					
12	P <sub>4</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>7</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>4</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>7</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>9</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>	P <sub>10</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>				
13	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>11</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>11</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>12</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>14</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>12</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>14</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>12</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>	P <sub>14</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>	P <sub>12</sub> <sup>Q</sup> <sub>16</sub>	P <sub>14</sub> <sup>Q</sup> <sub>16</sub>	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>			
14	P <sub>2</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>2</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>13</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>3</sub>	P <sub>13</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>6</sub>	P <sub>13</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>	P <sub>13</sub> <sup>Q</sup> <sub>16</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>16</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>8</sub>			
15	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>11</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>11</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>12</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>14</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>12</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>14</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>12</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>14</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>12</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>	P <sub>14</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>1</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>		
16	P <sub>2</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>2</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>13</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>4</sub>	P <sub>13</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>7</sub>	P <sub>13</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>13</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>	P <sub>15</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>9</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>	P <sub>5</sub> <sup>Q</sup> <sub>10</sub>	



$\frac{2\xi^3 - 3\xi^2}{a^3} + 1$	$\frac{6\xi^2 - 6\xi}{a^3} - \frac{6\xi}{a^2}$	$\frac{12\xi}{a^3} - \frac{6\xi}{a^2}$	$\frac{6\xi^3}{a^3} - \frac{6\xi^2}{a^2} + \frac{1}{a^3}$	$\frac{4\xi}{a^3} - \frac{4\xi}{a^2}$	$\frac{2\xi^3}{a^3} + \frac{3\xi^2}{a^2}$	$\frac{6\xi^2}{a^3} + \frac{6\xi}{a^2}$	$\frac{12\xi}{a^3} + \frac{6\xi}{a^2}$	$\frac{6\xi^3}{a^3} - \frac{\xi^2}{a^2}$	$\frac{3\xi^2}{a^3} - \frac{2\xi}{a^2}$	$\frac{6\xi^3}{a^3} - \frac{2}{a^2}$
$\frac{6\xi^2}{a^3} - \frac{6\xi}{a^2} + 1$	$-\frac{1}{2} + \frac{6}{5 \cdot a}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$\frac{12\xi}{a^3} - \frac{6}{a^2}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$\frac{6\xi^2}{a^3} - \frac{2\xi^2}{a^2} + \frac{\xi}{a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$
$\frac{3\xi^2}{a^3} - \frac{4\xi}{a^2} + \frac{1}{a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$
$\frac{6\xi}{a^3} - \frac{4}{a^2}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$	$-\frac{2}{15 \cdot a}$
$\frac{2\xi^3}{a^3} - \frac{3\xi^2}{a^2} + \frac{9\xi}{70}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$
$\frac{6\xi^2}{a^3} - \frac{6\xi}{a^2} + \frac{1}{2}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$	$-\frac{6}{5 \cdot a}$
$\frac{12\xi}{a^3} + \frac{6}{a^2}$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$\frac{\xi^3}{a^3} - \frac{\xi^2}{a^2}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$
$\frac{3\xi^2}{a^3} - \frac{2\xi}{a^2}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$
$\frac{6\xi}{a^3} - \frac{2}{a^2}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$	$-\frac{1}{10} + \frac{1}{10 \cdot a}$

Symmetrie!

Tabelle 2.2: Integrale der Produkte zwischen  $f$ ,  $f'$  und  $f''$  ( $\int f \cdot f'$ ,  $\int f' \cdot f''$ ,  $\int f'' \cdot f$ ) für vier verschiedene Funktionen

$\{P_1\}$	$\{P_2\}$	$\{P_3\}$	$\{P_4\}$	$\{P_5\}$	$\{P_6\}$	$\{P_7\}$	$\{P_8\}$
$+\frac{13}{35}$	$+\frac{11}{210}$	$+\frac{9}{70}$	$-\frac{13}{420}$	$\frac{1}{105}$	$+\frac{13}{420}$	$-\frac{1}{140}$	$+\frac{13}{35}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{60}$	$+\frac{1}{2}$
$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$+\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{15}$	$+\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{30}$	$-\frac{6}{5}$
$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	0	$+\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{60}$	$+\frac{1}{2}$
$+\frac{6}{5}$	$+\frac{1}{10}$	$-\frac{6}{5}$	$+\frac{1}{10}$	$+\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$+\frac{6}{5}$
0	- 1	0	+ 1	$-\frac{1}{2}$	- 1	$+\frac{1}{2}$	0
$-\frac{6}{5}$	$-\frac{11}{10}$	$+\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{15}$	$+\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{30}$	$-\frac{6}{5}$
0	+ 1	0	- 1	$-\frac{1}{2}$	+ 1	$-\frac{1}{2}$	0
+ 12	+ 6	- 12	+ 6	+ 4	- 6	+ 2	+ 12

$\{P_9\}$	$\{P_{10}\}$	$\{P_{11}\}$	$\{P_{12}\}$	$\{P_{13}\}$	$\{P_{14}\}$	$\{P_{15}\}$	$\{P_{16}\}$
$-\frac{11}{210}$	$+\frac{1}{105}$	$+\frac{11}{210}$	$+\frac{9}{70}$	$+\frac{13}{420}$	$-\frac{13}{420}$	$-\frac{1}{140}$	$-\frac{11}{210}$
$-\frac{1}{10}$	0	$+\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{60}$	$+\frac{1}{10}$
$+\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{11}{10}$	$+\frac{6}{5}$	$+\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{30}$	$+\frac{11}{10}$
$+\frac{1}{10}$	0	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{60}$	$-\frac{1}{10}$
$-\frac{1}{10}$	$+\frac{2}{15}$	$+\frac{1}{10}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{30}$	$-\frac{1}{10}$
- 1	$+\frac{1}{2}$	+ 1	0	+ 1	- 1	$-\frac{1}{2}$	+ 1
$+\frac{11}{10}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{10}$	$+\frac{6}{5}$	$+\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	$+\frac{1}{30}$	$+\frac{1}{10}$
+ 1	$+\frac{1}{2}$	- 1	0	- 1	+ 1	$+\frac{1}{2}$	- 1
- 6	+ 4	+ 6	- 12	- 6	+ 6	+ 2	- 6

Spaltenmatrizen  $\{P_1\}$  bis  $\{P_{16}\}$



### 3. Zusammenbau der Elemente und die Programmierung

#### 3.1 Grunddefinitionen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix

Im vorigen Kapitel wurden die Matrizen  $[k]$  und  $[k^+]$  berechnet. Damit ist es möglich, das innere Potential  $U$  eines Plattenelements gemäß

$$U = \frac{K}{2s^3 ab} \{W\}^T [k] \{W\}$$

oder 
$$= \frac{K}{2s^3 ab} \{W^+\}^T [k^+] \{W^+\} \quad \text{auszudrücken.}$$

Nun wird der Zusammenbau von Elementen betrachtet, die miteinander an den Knotenpunkten verknüpft sind. Bei der Methode I wird die Kontinuität der vertikalen Verschiebungen zwischen den Elementen gesichert. Die vollständige Kontinuität (Verschiebungen und Neigungen) ist bei der Methode II zu erwarten. Die Problemstellung des Zusammenbaus wird anhand des Beispiels einer Platte besprochen, die aus vier Elementen besteht (Bild 3.1 a).

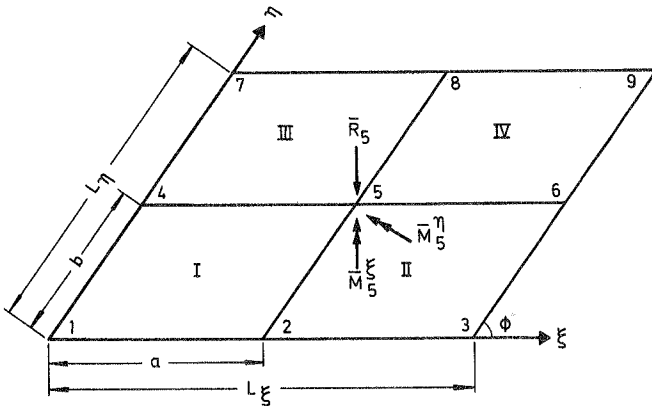


Bild 3.1 a: Zusammenbau der vier Elemente mit Knotenlasten

In Bild 3.1 b werden die am Knotenpunkt 5 auftretenden äußeren Lasten und die an den Elementecken wirkenden fiktiven Eckkräfte gezeigt. Unter "Lasten" sind die vertikalen äußeren Kräfte und die äußeren Momente zu verstehen.  $\{\bar{F}\}$  und  $\{\bar{W}\}$  sind die Spaltenmatrizen der an den Knotenpunkten auftretenden äußeren Lasten bzw. der Knotenverschiebungen. Das Ziel ist, eine Beziehung zwischen  $\{\bar{F}\}$  und  $\{\bar{W}\}$  zu gewinnen oder - mit anderen Worten - die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $[\bar{k}]$  zu ermitteln.

Im Zusammenhang mit der Gesamtsteifigkeitsmatrix werden folgende Spaltenmatrizen eingeführt: (siehe Bild 3.1 a für die Numerierung der Knotenpunkte).

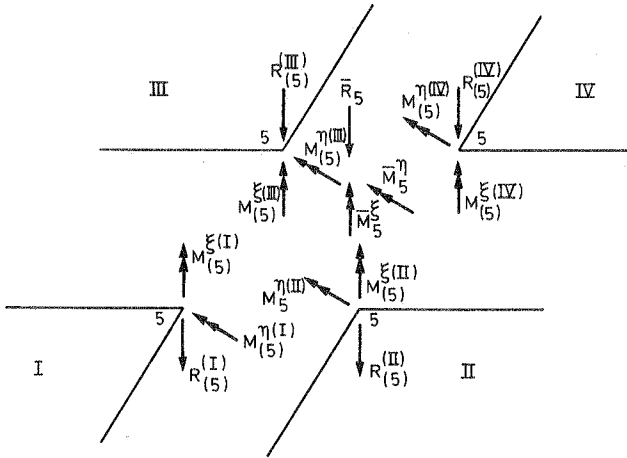
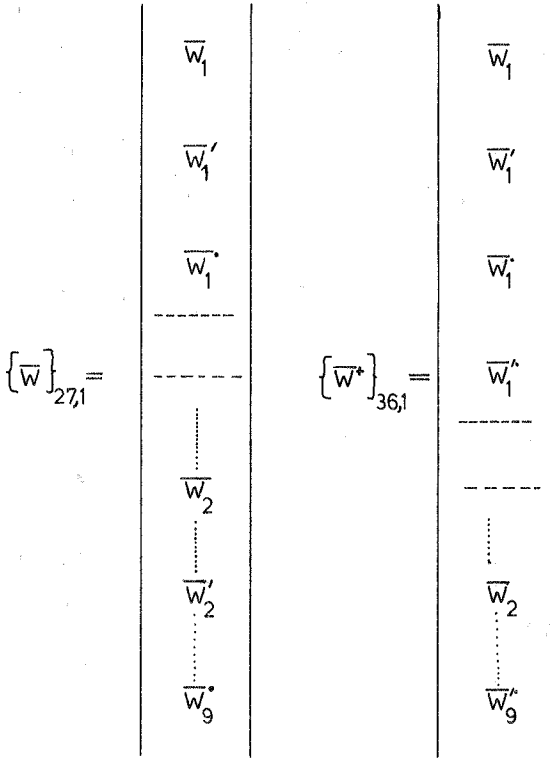


Bild 3.1 b: Äußere Lasten und die inneren Elementeckkräfte am Knotenpunkt 5

Für das Element 1-2-5-4

$$\{F\}_{12,1}^I = \begin{array}{|c} R_{(1)} \\ \frac{1}{a} M_{(1)}^E \\ \frac{1}{b} M_{(1)}^n \\ \dots \\ R_{(2)} \\ \frac{1}{a} M_{(2)}^E \\ \vdots \\ \dots \\ R_{(5)} \\ \vdots \\ \dots \\ R_{(4)} \\ \frac{1}{b} M_{(4)}^n \end{array}, \{F^*\}_{16,1}^I = \begin{array}{|c} R_{(1)} \\ \frac{1}{a} M_{(1)}^E \\ \frac{1}{b} M_{(1)}^n \\ \frac{1}{ab} X_{(1)} \\ \dots \\ R_{(2)} \\ \vdots \\ \dots \\ R_{(5)} \\ \vdots \\ \dots \\ R_{(4)} \\ \frac{1}{b} M_{(4)}^n \\ \frac{1}{ab} X_{(4)} \end{array}, \{W\}_{12,1}^I = \begin{array}{|c} W_{(1)} \\ W'_{(1)} \\ W''_{(1)} \\ \dots \\ W_{(2)} \\ W'_{(2)} \\ \vdots \\ \dots \\ W_{(5)} \\ W'_{(5)} \\ \vdots \\ \dots \\ W_{(4)} \\ W'_{(4)} \\ \vdots \\ \dots \\ W_{(4)} \\ W'_{(4)} \end{array}$$

$$\{W^*\}_{16,1}^I = \begin{array}{|c} W_{(1)} \\ W'_{(1)} \\ W''_{(1)} \\ W'''_{(1)} \\ \dots \\ W_{(2)} \\ \vdots \\ \dots \\ W_{(5)} \\ \vdots \\ \dots \\ W_{(4)} \\ W'_{(4)} \end{array}, \{F\}_{27,1} = \begin{array}{|c} R_1 \\ \frac{1}{a} M_1^E \\ \frac{1}{b} M_1^n \\ \dots \\ R_2 \\ \frac{1}{a} M_2^E \\ \frac{1}{b} M_2^n \\ \vdots \\ \dots \\ \frac{1}{b} M_9^n \end{array}, \{F^*\}_{36,1} = \begin{array}{|c} R_1 \\ \frac{1}{a} M_1^E \\ \frac{1}{b} M_1^n \\ 0 \\ \dots \\ R_2 \\ \vdots \\ \dots \\ \frac{1}{b} M_9^n \\ 0 \end{array}$$



Der Strich (z.B. bei  $\bar{F}$ ,  $\bar{W}$ ) bezeichnet die äußeren Knotenlasten bzw. die Knotenverschiebungen. Die Plattenelementecken werden in Klammern bezeichnet (z.B. bei  $R_{(1)}$ ,  $W_{(1)}$ ) und die Plattenknotenpunkte werden ohne Klammern bezeichnet (z.B. bei  $\bar{R}_1$ ,  $\bar{W}_1$ ). Der

Spaltenvektor mit Stern (z.B. bei  $w^+$ ,  $F^+$ ) bezeichnet den verallgemeinerten Spaltenvektor der Verschiebungen bzw. der Eckkräfte eines Plattenelements nach Methode II.

Die Spaltenmatrix  $\{w^+\}$  enthält außer den Verschiebungen ( $w$ ,  $w'$  und  $w''$ ) auch  $w''$ .

Ebenso enthält die Spaltenmatrix  $\{F^+\}$  außer den Eckkräften ( $R$ ,  $M^L$ ,  $M^N$ ) Terme wie  $X_1 = (\frac{\partial U}{\partial w_1^+})$ ,  $X_2 = (\frac{\partial U}{\partial w_2^+})$  usw.

Transformation in globale Koordinaten:

Aus Bild 3.1 a erkennt man, daß die Reihenfolge der Numerierung für das Element und für den Zusammenbau nicht gleich ist. Für die Programmierung ist es günstig, wenn man alle Größen in gleicher Form ausdrückt. Die Transformation der Matrix  $\{F\}^i$  des Elements  $i$  in globale Koordinaten  $\{F_G\}^i$  erfolgt mit der Transformationsmatrix  $[c]$ .

$$\{F_G\}_{27,1}^i = [c^T]^i_{27,12} \{F\}_{12,1}^i \quad (\text{bei Methode I})$$

$$\{F_G^+\}_{36,1}^i = [c^{+T}]^i_{36,16} \{F^+\}_{16,1}^i \quad (\text{bei Methode II})$$

Zur Ermittlung der Matrix  $[c]$  gilt die folgende Regel:

Soll ein Element  $l$  der Matrix  $\{F\}^i$  in ein Element  $m$  der Matrix  $\{F_G\}^i$  übergehen, dann ist  $c[1,m] = 1$ , die restlichen Elemente der  $l$ -ten Zeile sind null. In jeder Zeile steht also ein Element 1.

Für das Beispiel aus Bild 3.1 hat die Matrix  $[c]$ , also die Ordnung  $12 \times 27$  (bei Methode I) oder  $16 \times 36$  (bei Methode II).

Die Kontinuitätsbedingungen  $w_{(5)}^I = w_{(5)}^{II} = w_{(5)}^{III} = w_{(5)}^{IV} = \bar{w}_5$  usw. kann auch mit Hilfe der Matrix  $[c]$  in Matrixschreibweise ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \{w\}^I &= [c]^I \{\bar{w}\} \\ \text{oder} \quad \{w^+\}^I &= [c^+]^I \{\bar{w}^+\} \end{aligned} \quad (3.2)$$



### 3.2 Ermittlung der Gesamtsteifigkeitsmatrix

Bei der Formulierung eines Problems nach der Elementmethode versucht man, das ganze Verfahren in Matrizenschreibweise darzustellen, weil diese für die Programmierung besonders geeignet ist. Wie im Abschnitt 1.2.3 erwähnt, kann man die Steifigkeitsmatrizen nach dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie mit Hilfe der Variation des Gesamtpotentials der Platte ermitteln. Dieser Weg eignet sich besonders bei den Fällen, in denen die Spaltenmatrix der Eckverschiebungen außer  $W, W', W''$  auch höhere Ableitungen von  $w$  enthält. Bei der Methode II gibt es an jedem Knotenpunkt vier Unbekannte ( $W, W', W'', W'''$ ). Von den nach dem Ritzschen Verfahren an jedem Knotenpunkt sich ergebenden 4 Gleichungen entsprechen 3 den Knotengleichgewichtsbedingungen der eigentlichen Elementmethode [15]. Ausgehend vom Gesamtpotential  $\bar{\pi}$  der Platte wird zunächst das lineare Gleichungssystem mit den Knotenverschiebungen als Unbekannten ermittelt. Anschließend werden die modifizierten Steifigkeitsmatrizen dargestellt.

#### 3.2.1 Die Variation des Gesamtpotentials $\bar{\pi}$ einer Platte:

Für die Platte aus Bild 3.1 wird nun das Gesamtpotential berechnet:

$$\begin{aligned} \bar{\pi} = U^I + U^{II} + U^{III} + U^{IV} + \bar{R}_1 \bar{w}_1 + \bar{M}_1^{\xi} \bar{w}_1' + \bar{M}_1^{\eta} \bar{w}_1'' + \bar{R}_2 \bar{w}_2 + \dots \dots \dots \\ \dots \dots + \bar{M}_9^{\eta} \bar{w}_9'' \end{aligned} \quad (3.3)$$

Da die Kontinuität der Verschiebungen und Neigungen längs der Elementränder bei der Methode II völlig erfüllt wird, kann das innere Potential der Platte als die Summe der einzelnen Elementpotentiale  $U^i$  ausgedrückt werden.

Bei der Methode I sind die Unterschiede der Querneigungen zwischen den Elementen möglich. Daher kann das Gesamtpotential als die Summe der einzelnen Potentiale der Elemente nicht ausgedrückt werden.

Durch Einsetzen von Gl. (2.13) in Gl. (3.3) folgt:

$$\bar{\pi} = \frac{K}{2s^3 ab} \left[ \sum_{i=1}^{IV} \{W^{+T}\}^i [k^+]^i \{W^+\}^i \right] + \{\bar{F}^+\}^T \{\bar{W}^+\} \quad (3.4)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.2) in (3.4) folgt:

$$\bar{\pi} = \frac{K}{2s^3 ab} \left\{ \bar{W}^+ \right\}^T \left[ \sum_{i=1}^{IV} [c^{+T}]^i [k^+]^i [c^+]^i \right] \left\{ \bar{W}^+ \right\} + \{\bar{F}^+\}^T \{\bar{W}^+\} \quad (3.5)$$

Nun wird  $\bar{\pi}$  nach  $\{\bar{W}^+\}$  differenziert

$$\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \bar{W}_1} = \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \bar{W}_1} = \dots = 0$$

Man schreibt in Matrixschreibweise  $\frac{\partial \bar{\pi}}{\partial \{\bar{W}^+\}_{36,1}} = \{0\}_{36,1}$   
 Insgesamt für 9 Knotenpunkte +)

$$\{0\}_{36,1} = \frac{K}{s^3 ab} \left[ \sum_{i=1}^{IV} [c^{+T}]^i [k^+]^i [c^+]^i \right]_{36,36} \{\bar{W}^+\}_{36,1} + \{\bar{F}^+\}_{36,1} \quad (3.6)$$

### 3.22 Die Formulierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix bei der Elementmethode

Nach dem Castiglianoschen Satz sind die partiellen Ableitungen des Potentials nach den Verschiebungsgrößen gleich den zugehörigen Kraftgrößen. Damit erhält man für die Kraftgrößen an den Elementecken:

$$\frac{\partial U}{\partial w_1} = R(1), \quad \frac{\partial U}{\partial w_1'} = M(1)/a, \quad \frac{\partial U}{\partial w_1''} = M(1)/b \quad \text{usw.}$$

+) Für die Ableitung einer quadratischen Form A nach einem Vektor  $\{C\}$  gilt:

mit  $A = \{C\}^T [M] \{C\}$ , wobei  $[M] = [M]^T$

$$\frac{\partial A}{\partial \{C\}} = 2 [M] \{C\}.$$

Bei der Methode I wird also

$$\frac{\partial U}{\partial \{W\}_{12,1}} = \{F\}_{12,1} \quad ,$$

wobei

$$\{F\}_{12,1} = \begin{array}{|l} R_1 \\ M_{1/a}^{\xi} \\ M_{1/b}^n \\ \dots \\ R_2 \\ \vdots \\ M_{4/b}^n \end{array}$$

Bei der Methode II schreibt man analog

$$\frac{\partial U}{\partial \{W^+\}_{16,1}} = \{F^+\}_{16,1} \quad ,$$

$$\frac{\partial U}{\partial w_i^+} = X_i \quad \text{und} \quad \{F^+\}_{16,1} = \begin{array}{|l} R_1 \\ M_{1/a}^{\xi} \\ M_{1/b}^n \\ X_{1/ab} \\ \dots \\ R_2 \\ \vdots \\ X_{4/ab} \end{array} \quad (3.7)$$

Nach Gl. (2.13) ist:

$$U = \frac{K}{2s^3 ab} \{W^+\}^T [k^+] \{W^+\}$$

Daraus folgt mit Gl. (3.7)

$$\{F^+\}_{16,1} = \frac{K}{s^3 ab} [k^+] \{W^+\}$$

Die Gleichgewichts- und Kontinuitätsbedingungen werden nun auf den Knotenpunkten erfüllt. Die Vorzeichendefinition wird in Bild 3.1 b gezeigt.

Die Gleichgewichtsbedingungen am Knotenpunkt 5:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_5 + R_{(5)}^I + R_{(5)}^{II} + R_{(5)}^{III} + R_{(5)}^{IV} &= 0 \\ \bar{M}_5^\xi + M_{(5)}^{\xi I} + M_{(5)}^{\xi II} + M_{(5)}^{\xi III} + M_{(5)}^{\xi IV} &= 0 \\ \bar{M}_5^\eta + M_{(5)}^{\eta I} + M_{(5)}^{\eta II} + M_{(5)}^{\eta III} + M_{(5)}^{\eta IV} &= 0 \end{aligned} \right\} (3.8)$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die übrigen Knotenpunkte.

Die Kontinuität der Verschiebungen und ihrer Ableitungen am Knotenpunkt 5:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_5 &= w_{(5)}^I = w_{(5)}^{II} = w_{(5)}^{III} = w_{(5)}^{IV} \\ \bar{w}'_5 &= w'_{(5)}^I = w'_{(5)}^{II} = w'_{(5)}^{III} = w'_{(5)}^{IV} \\ \bar{w}''_5 &= w''_{(5)}^I = w''_{(5)}^{II} = w''_{(5)}^{III} = w''_{(5)}^{IV} \\ \bar{w}'''_5 &= w'''_{(5)}^I = w'''_{(5)}^{II} = w'''_{(5)}^{III} = w'''_{(5)}^{IV} \end{aligned} \right\} (3.9)$$

Entsprechende Gleichungen gelten für die übrigen Knotenpunkte.

In der Matrizenschreibweise wird also

$$\{\bar{w}^+\}^I = [c^+]^I \{\bar{w}^+\}$$

Eine zusätzliche Gleichung in X wird eingeführt

$$X_{(5)}^I + X_{(5)}^{II} + X_{(5)}^{III} + X_{(5)}^{IV} = 0 \quad (3.10)$$

Schreibt man die Gl. (3.8) und Gl. (3.10) zusammen in Matrizenschreibweise für alle Knotenpunkte, dann wird

$$\{\bar{F}^+\}_{36,1} + \{F_G^+\}_{36,1}^I + \{F_G^+\}_{36,1}^{II} + \{F_G^+\}_{36,1}^{III} + \{F_G^+\}_{36,1}^{IV} = \{0\} \quad (3.11)$$

Die Gl. (3.1) lautet

$$\{F_G^+\}_{36,1}^i = [c^{+T}]_{36,16}^i \{F^+\}_{16,1}^i$$

Aus Gl. (3.7) und Gl. (2.13) folgt für das Element I

$$\{F^+\}^I = \frac{K}{s_{ab}^3} [k^+]^I \{W^+\}^I \quad (3.12)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.12) in Gl. (3.1) ergibt sich zu:

$$\{F_G^+\}^I = \frac{K}{s_{ab}^3} [c^{+T}]^I [k^+]^I \{W^+\}^I \quad (3.13)$$

Aus Gl. (3.9) wird  $\{W^+\}^I$  durch  $\{\bar{W}^+\}$  in Gl. (3.13) ersetzt, also

$$\{F_G^+\}^I = \frac{K}{s_{ab}^3} [c^{+T}]^I [k^+]^I [c^+]^I \{\bar{W}^+\} \quad (3.14)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.14) in Gl. (3.11) folgt:

$$\{\bar{F}^+\}_{36,1} + \frac{K}{s_{ab}^3} \left[ \sum_{i=1}^{IV} [c^{+T}]^i [k^+]^i [c^+]^i \right]_{36,36} \{W^+\}_{36,1} = \{0\}_{36,1} \quad (3.15)$$

Die Gl. (3.15) und Gl. (3.6) sind identisch.

Man schreibt die Gl. (3.15) abkürzend wie folgt:

$$\{\bar{F}^+\}_{36,1} = [\bar{k}^+]_{36,36} \{\bar{W}^+\}_{36,1} \quad (3.16)$$

wobei Matrix  $[\bar{k}^+]$  den Zusammenhang zwischen den verallgemeinerten Spaltenmatrizen der Knotenlasten und Knotenverschiebungen darstellt. Die Matrix  $[\bar{k}^+]$  wird also die verallgemeinerte Gesamtsteifigkeitsmatrix genannt.

Man erkennt aus Gl. (3.15), daß die Matrix  $[\bar{k}^+]$  durch die Summe der transformierten Elementsteifigkeitsmatrizen gebildet ist.

### 3.3 Lagerbedingungen

Die Beziehung zwischen der Spaltenmatrix der äußeren Lasten  $\{\bar{F}^+\}$  und der Spaltenmatrix der Knotenverschiebungen  $\{\bar{W}^+\}$  ist aus Gl. (3.16) bekannt. Durch die Lagerung werden einige Verschiebungen verhindert, die in Gl. (3.16) zu null gesetzt werden.

Gl. (3.16) läßt sich nach Umordnung wie folgt ausdrücken:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{c} \bar{F}_1^+ \\ \dots \\ \bar{F}_2^+ \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccc} \bar{k}_1^+ & \dots & \bar{k}_2^+ \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{k}_3^+ & \dots & \bar{k}_4^+ \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} \bar{W}_1^+ \\ \dots \\ 0 \end{array} \right| \end{array}$$

daraus folgt

$$\{\bar{F}_1^+\} = [\bar{k}_1^+] \{\bar{W}_1^+\} \quad (3.18)$$

wobei  $\{\bar{F}_1^+\}$  und  $\{\bar{W}_1^+\}$  die reduzierten Spaltenmatrizen sind und  $[\bar{k}_1^+]$  die reduzierte Gesamtsteifigkeitsmatrix ist.

Durch Streichen der Spalten und Zeilen, die den Knotenverschiebungen entsprechen, die gleich null sind, wird die reduzierte Matrix  $[\bar{k}_1^+]$  ermittelt.

### 3.4 Die schrittweise Bildung der Matrix $[\bar{k}_k^+]$ für die Programmierung

Für den Zusammenbau der Plattenelemente werden Rechenprogramme in ALGOL 60 aufgestellt. Sie müssen die Speichermöglichkeiten der TR-4 Rechenanlage der Universität Stuttgart berücksichtigen. Je nach der Zahl der Elemente und der Unbekannten (3 oder 4 pro Knotenpunkt für Methode I oder Methode II) ändert sich die Ordnung der  $[\bar{k}_k^+]$  Matrix, z.B. ein Zusammenbau von 6 x 12 Plattenelementen (mit 91 Knotenpunkten) führt nach Methode II zu einer (364 x 364) Matrix. Anordnung und Numerierung der Plattenelemente folgt aus Bild 3.2. Die direkte Summierung nach Gl. (3.15) eignet sich nicht für die Benützung der Rechenanlage TR-4, da die

Kernspeicherkapazität für das vorliegende Problem zu klein ist. Die Ausgangsgleichung für die Programmierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix ist:

$$\begin{aligned} \{\bar{F}^+\} &= \frac{K}{s^3_{ab}} \left[ \sum_{i=1}^N [c^{+T}]^i [k^+]^i [c^+]^i \right] \{\bar{w}^+\} \\ &= \frac{K}{s^3_{ab}} \left[ \sum_{i=1}^N [k_G^+]^i \right] \{\bar{w}^+\} \end{aligned}$$

Für den Fall von 6 x 12 Plattenelementen nach Bild 3.2 wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix

$$[\bar{k}^+]_{364,364} = \frac{K}{s^3_{ab}} \left[ \sum_{i=1}^{72} [c^{+T}]^i_{364,16} [k^+]^i_{16,16} [c^+]^i_{16,364} \right]$$

Man erkennt dabei, daß die Gesamtsteifigkeitsmatrix in zwei Schritten gebildet wird:

1. Die Bildung der transformierten Steifigkeitsmatrizen einzelner Elemente gemäß

$$[k_G^+]^i_{364,364} = \begin{bmatrix} [c^{+T}]^i & & \\ & [k^+]^i & \\ & & [c^+]^i \end{bmatrix}_{16,16}$$

und

2. die Summierung der Matrizen  $[k_G^+]^i$ .

Die Numerierung der Elemente und der Knotenpunkte ist im Bild 3.2 angegeben. Am Beispiel des Plattenelements 1 ( $i = 1$ ) erkennt man, daß von den 364 Spalten der Matrix  $[c^+]^1$  nur 36 Spalten Elemente ungleich null enthalten. Im Hinblick auf die begrenzte Kernspeicherkapazität elektronischer Rechenanlagen ist es von Vorteil, die Matrix  $[c^+]^1_{16,364}$  in Untermatrizen der Ordnung 16 x 36 zu unterteilen. Die gleichen Überlegungen gelten für die Matrix  $[c^{+T}]^1_{364,16}$ . Nach dieser Unterteilung in Untermatrizen erkennt man, daß der

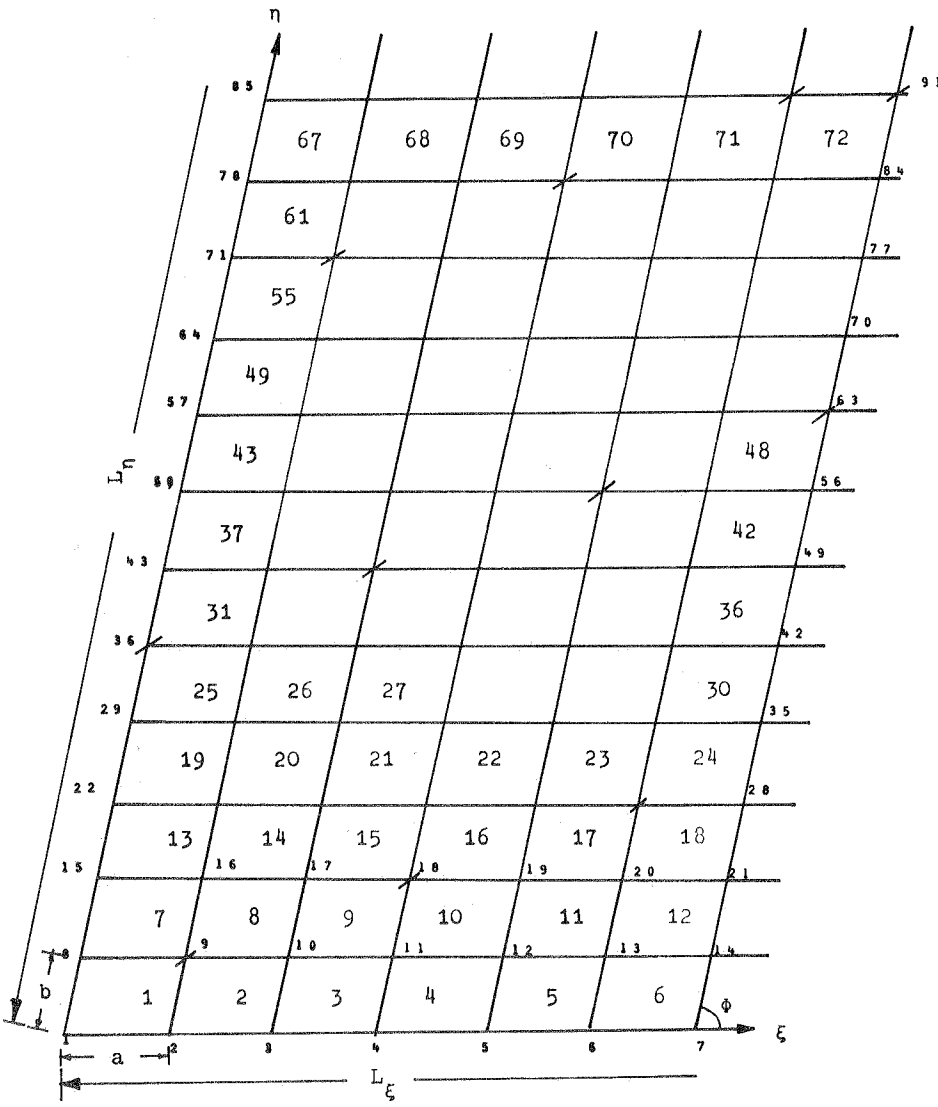


Bild 3.2: Anordnung und Numerierung der Elemente und der Knotenpunkte



Anteil des Elements 1  $[k_G^+]^1$  an der Gesamtsteifigkeitsmatrix nur in den ersten 36 Zeilen und Spalten Elemente ungleich null enthält. Es ist also vorteilhaft, die Matrix  $[k_G^+]^1$ , entsprechend der Matrix  $[c^+]^1$ , in Untermatrizen aufzuteilen. Im folgenden zeigt sich, daß für die Matrizen  $[c^+]^i, [c^{+T}]^i$  und  $[k_G^+]^i$  der übrigen Plattenelemente die gleiche Unterteilung geeignet ist.

Das Bild 3.3 zeigt diese Unterteilung der Matrizen  $[c^+]^i, [c^{+T}]^i$  und  $[k_G^+]^i$ . Die Untermatrizen der Matrix  $[k_G^+]^i$ , die für jedes Plattenelement  $i$  Nullmatrizen sind, werden nicht nummeriert. Die übrigen Untermatrizen von  $[k_G^+]^i$  werden als  $[p_m]^i$  bezeichnet. Die Matrix  $[c^+]^i$  ist im Bild 3.3 in 11 Untermatrizen -  $[c_1^+]^i$  bis  $[c_{10}^+]^i$  der Ordnung  $16 \times 36$  und eine Matrix  $[c_{11}^+]^i$  der Ordnung  $16 \times 4$ -unterteilt. Entsprechend wird die Matrix  $[c^{+T}]^i$  auch in 11 Untermatrizen unterteilt. Bei der Bildung der Matrix  $[k_G^+]^i$  erkennt man nun, daß nur die Untermatrizen  $[c_1^+]^i, [c_1^{+T}]^i$  und  $[P_1]^i$  belegt sind. Bei einigen Plattenelementen kommt es vor, daß diejenigen Spalten der Matrix  $[c^+]_{16,364}^i$ , die 'eins' enthalten, in aufeinander folgenden zwei Untermatrizen liegen; z.B. für das Plattenelement 2 (Bild 3.2) liegen die 'eins' enthaltenden Spalten zwischen der 5. und 40. Spalte der Matrix  $[c^+]_{16,364}^2$  (d.h. innerhalb der Untermatrizen  $[c_1^+]^2$  und  $[c_2^+]^2$ ). Es ist deshalb erforderlich, Kernspeicherplätze für zwei aufeinander folgende Untermatrizen  $[c_\ell^+]^i$  und  $[c_{\ell+1}^+]^i$ , für die entsprechenden zwei Untermatrizen  $[c_\ell^{+T}]^i, [c_{\ell+1}^{+T}]^i$  und vier Untermatrizen  $[P_m]^i, [P_{m+1}]^i, [P_{m+2}]^i$  und  $[P_{m+3}]^i$  zu reservieren, um die Matrix  $[k_G^+]^i$  des Plattenelements  $i$  berechnen zu können.

Um die Summierung der Matrizen  $[k_G^+]^i$  mit Hilfe der Rechenanlage durchführen zu können, muß man wissen, welche Untermatrizen  $[P_m]^i$  für die Matrix  $[k_G^+]^i$  benötigt werden. Man erkennt nach Bild 3.2, daß für die Plattenelemente  $i = 1$  bis 9 nur die Untermatrizen  $[P_1]^i, [P_2]^i, [P_3]^i$  und  $[P_4]^i$  belegt werden (siehe Bild 3.3). Man geht nun so vor, daß man im Kernspeicher Platz für vier Matrizen  $[P_1], [P_2], [P_3]$  und  $[P_4]$  reserviert und in diesen Matrizen die Anteile der einzelnen Plattenelemente ( $i = 1$  bis 9) aufsummiert. Anschließend werden diese vier Untermatrizen auf dem Magnetband abgespeichert. Aus Bild 3.3 ersieht



man, daß auch die übrigen Plattenelemente in Gruppen eingeteilt werden können, die jeweils nur vier Untermatrizen  $[P_m^+]$ ,  $[P_{m+1}^+]$ ,  $[P_{m+2}^+]$  und  $[P_{m+3}^+]$  benötigen und die deshalb in gleicher Weise wie die Plattenelemente 1 bis 9 behandelt werden. Einige in der Diagonale der Matrix  $[k^+]$  liegende Untermatrizen  $[P_m^+]$  werden von zwei Plattenelementgruppen benötigt und müssen daher beim zweiten Mal zuerst vom Band abgerufen werden.

Die bisherigen Betrachtungen galten für den Fall von 6 x 12 Plattenelementen, wobei die Zahl der Plattenelemente in Richtung  $\xi$  6 war. Um eine veränderliche Zahl von Plattenelementen in Richtung  $\xi$  berücksichtigen zu können, wird ein Parameter G eingeführt und wie folgt definiert:

$$G = 12 - \text{Zahl der Plattenelemente in Richtung } \xi$$

Die Plattenelementgruppen, die zu einem bestimmten Paar von Untermatrizen  $[c_{\ell}^+]$ ,  $[c_{\ell+1}^+]$  gehören, bei denen einige Elemente ungleich null sind, hängen von diesem Parameter G ab. Die Tabelle 3.1 zeigt die Unterteilung der Plattenelemente für  $G = 2, 3, 4, 5$  und 6. Die Anzahl der Zeilen der Matrix  $[c_1^+]$  ist dann  $S = 60 - 4 \cdot G$ .

Um die reduzierte Matrix  $[\bar{k}_1^+]$  zu ermitteln, werden im Falle von 6·12 Elementen die 31 Untermatrizen (36 x 36)  $[P_m^+]$  nacheinander vom Band aufgerufen und die nicht benötigten Spalten und entsprechenden Zeilen null gesetzt. Um das Reduzieren mit Hilfe der Rechenanlage durchführen zu können, werden die Knotenpunkte des Elementsystems (Bild 3.2) in 11 Gruppen (Zahl der Knotenpunkte in jeder Gruppe wird gleich die Zahl der Spalten in Untermatrizen  $[c_1^+]$  siehe Bild 3.3) eingeteilt. Die auf diese Weise reduzierten Untermatrizen werden wieder auf dem Band abgespeichert.

### 3.5 Lösung des linearen Gleichungssystems

Die Zahl der endgültigen Gleichungen bei der Elementmethode ist normalerweise so groß, daß die Lösung eine besondere Behandlung benötigt. Je nach der Anzahl der Elemente, dem Verfahren (Methode I, II) und der zu null gesetzten Verschiebungen führt das Problem zu einem linearen Gleichungssystem verschiedener Größe.

Die Lösung wird durch die Verwendung der Computerbibliotheksprozedur "Groggle" durchgeführt.

Die Prozedur benötigt zwei Bänder und erfordert die Eingabe der Elemente der reduzierten Matrix  $[\bar{k}_1^+]$  in einer bestimmten Reihenfolge. Zu diesem Zweck wird eine zusätzliche Eingabeprozedur geschrieben, welche die Elemente der Matrix  $[\bar{k}_1^+]$  aus den 31 reduzierten Blöcken zeilenweise anordnet. Aus der Lösung des Gleichungssystems ergeben sich die Werte der Elemente der reduzierten Spaltenmatrix  $\{\bar{w}_1^+\}$ .

Durch Einzufügen der "Nullverschiebungen" an den entsprechenden Stellen erhält man die vollständige Spaltenmatrix der Knotenverschiebungen  $\{\bar{w}^+\}$ .

### 3.6 Berechnung der Hauptmomente

Aus der Spaltenmatrix  $\{\bar{w}^+\}$  werden die Eckverschiebungen eines Elements  $\{w^+\}^i$  bestimmt. Mit Hilfe der Gl. (2.33) sind die Krümmungen in kartesischen Koordinaten (gemäß  $\{\chi_k\} = [T][S^+]\{w^+\}$ ) ermittelbar. Aus den Krümmungen können die Biegemomente in kartesischen Koordinaten unter Verwendung von Gl. (2.6) ( $\{m\} = -K[H]\{\chi_k\}$ ) ermittelt werden.

Die Verwendung der Hermiteschen Polynome ermöglicht es, die Momente direkt in kartesischen Koordinaten zu ermitteln. Bei der Methode I muß man die Spaltenmatrix der Konstanten  $\{a\}$  für jedes Element zuerst berechnen.

Für einen zahlenmäßigen Vergleich der Ergebnisse sind die Hauptmomente von besonderem Interesse. Ihre Berechnung wird daher in die Programme einbezogen. Ein Plattenelement ist in Bild 3.4 durch die Punkte 1, 2, 3, 4 festgelegt. Die Koordinaten der Ecken 1, 2, 3 und 4 mit Ursprung in 1 sind:

Punkt	$\xi$	$\eta$
1	0	0
2	a	0
3	a	b
4	0	b

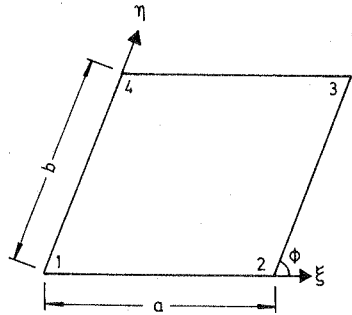


Bild 3.4: Ein Plattenelement

Nach Gl. (2.32) erhält man für die Ecke 1

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = -\frac{6w_1}{a^2} + \frac{6w_2}{a^2} - \frac{4w_3 \cdot a}{a^2} - \frac{2w_4 \cdot a}{a^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = -\frac{6w_1}{b^2} + \frac{6w_4}{b^2} - \frac{4w_3 \cdot b}{b^2} - \frac{2w_2 \cdot b}{b^2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{w_3 \cdot ab}{ab}$$

(3.19)

Es ist dabei zu beachten, daß die Spaltenmatrix der Eckverschiebungen  $\{w^*\}$  in dem Ansatz für die Biegefläche nach Gl. (2.25) die Verschiebungen in der Form  $w, aw', bw', abw'$  enthalten.

Unter Verwendung von Gl. (2.2) werden die Krümmungen in kartesische Koordinaten transformiert.

Die von der Rechenmaschine angegebenen Verschiebungen sind noch mit dem Faktor  $\left[ \frac{\sin^3 \theta}{E h^3} \quad 12 (1 - \mu^2) \right]$  zu multiplizieren, um die wirklichen Verschiebungen des idealisierten Systems zu erhalten.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{-6 w_1}{a^2} + \frac{6 w_2}{a^2} - \frac{4 w'_1}{a} - \frac{2 w'_2}{a} \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \cot^2 \phi \left[ -\frac{6 (w_1 + w_2)}{a^2} - \frac{2}{a} (2 w'_1 + w'_2) \right] \\
 &\quad - \frac{2 \cot \phi}{\sin \phi} w'_1 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \left[ -\frac{6}{b^2} (w_1 - w_4) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{b} (2 w'_1 + w'_4) \right] \\
 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= -\cot \phi \left[ -\frac{6}{a^2} (w_1 - w_2) - \frac{2}{a} (2 w'_1 + w'_2) \right] \\
 &\quad + \frac{w'_1}{\sin \phi}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Nach Gleichung (2.6) ergeben sich die Momente zu:

$$\begin{aligned}
 m_x &= \left[ -\frac{6}{a^2} (w_1 - w_2) - \frac{2}{a} (2 w'_1 + w'_2) + \mu \left\{ \cot^2 \phi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left( -\frac{6}{a^2} (w_1 + w_2) - \frac{2}{a} (2 w'_1 + w'_2) \right) - 2 \frac{\cot \phi}{\sin \phi} w'_1 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\sin^2 \phi} \left( -\frac{6}{b^2} (w_1 - w_4) - \frac{2}{b} (2 w'_1 + w'_4) \right) \right\} \right] \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \\
 m_y &= \left[ \cot^2 \phi \left( -\frac{6}{a^2} (w_1 + w_2) - \frac{2}{a} (2 w'_1 + w'_2) \right) \right. \\
 &\quad - \frac{2 \cot \phi}{\sin \phi} w'_1 + \frac{1}{\sin^2 \phi} \left( -\frac{6}{b^2} (w_1 - w_4) - \frac{2}{b} (2 w'_1 + w'_4) \right) \\
 &\quad \left. + \mu \left( -\frac{6 w_1}{a^2} + \frac{6 w_2}{a^2} - \frac{4 w'_1}{a} - \frac{2 w'_2}{a} \right) \right] \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)} \\
 m_{xy} &= \left[ (1-\mu) \left\{ -\cot \phi \left( \frac{6}{a^2} (w_1 - w_2) - \frac{2}{a} (2 w'_1 + w'_2) \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{w'_1}{\sin \phi} \right\} \right] \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Die Hauptmomente  $M^I$  und  $M^{II}$  sind nach Bild 3.5

$$M^I, M^{II} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(m_x - m_y)^2 + 4 m_{xy}^2}}{2}$$

und  $\tan 2 \psi = \frac{2 m_{xy}}{m_x - m_y}$

(3.22)

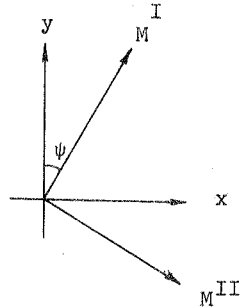


Bild 3.5

Analog lassen sich die Ausdrücke für die Hauptmomente am Punkt 2 ( $\xi = a, \eta = 0$ ), Punkt 3 ( $\xi = a, \eta = b$ ) und am Punkt 4 ( $\xi = 0, \eta = b$ ) mit Hilfe von Gl. (2.32), (2.2), (2.6) und (3.22) herleiten.

Bei den Elementmethoden wird nur die Kontinuität der Verschiebungen an den Knotenpunkten gesichert. Unterschiede in den Krümmungen an den Knotenpunkten sind jedoch zu erwarten, d.h., die an einem Knotenpunkt berechneten vier Werte des Moments können unterschiedlich sein. Bei solchen Fällen nimmt man den Mittelwert der Momente ( $m_x$  bzw.  $m_y, m_{xy}$ ), dann werden die Hauptmomente nach Gl. (3.22) berechnet.

Für das Beispiel aus Bild 3.1 bedeutet es, daß für den Knotenpunkt 5

$$m_{x,5} = \frac{m_{x,(5)}^I + m_{x,(5)}^{II} + m_{x,(5)}^{III} + m_{x,(5)}^{IV}}{4}$$

$$m_{y,5} = \frac{m_{y,(5)}^I + m_{y,(5)}^{II} + m_{y,(5)}^{III} + m_{y,(5)}^{IV}}{4}$$

$$m_{xy,5} = \frac{m_{xy,(5)}^I + m_{xy,(5)}^{II} + m_{xy,(5)}^{III} + m_{xy,(5)}^{IV}}{4}$$

(3.23)

Nach Gl. (3.22)

$$M_5^I = \frac{m_{x,5} + m_{y,5}}{2} - \frac{\sqrt{(m_{x,5} - m_{y,5})^2 + 4 m_{xy,5}^2}}{2}$$

$$M_5^{II} = \frac{m_{x,5} + m_{y,5}}{2} + \frac{\sqrt{(m_{x,5} - m_{y,5})^2 + 4 m_{xy,5}^2}}{2}$$

$$\text{und } \tan 2 \psi_{,5} = \frac{2 m_{xy,5}}{m_{x,5} - m_{y,5}} \quad (3.24)$$

Um die Hauptmomente mit Hilfe der Rechenanlage zu berechnen, soll das Programm so aufgebaut werden, daß die Rechenanlage für jeden Knotenpunkt die entsprechenden Plattenelemente wählt und die Berechnungen nach Gl. (3.22) und (3.23) durchführt (siehe Anhang C: Programm zur Berechnung der Biegemomente).

### 3.7 Berücksichtigung einer geänderten Anzahl der Elemente

Das Zusammenbauprogramm (Anhang E) geht stets von 108 (9 x 12) Plattenelementen aus, sieht jedoch die Möglichkeit vor, die Zahl der Elemente zu variieren (Plattenelemente in Richtung  $\xi \leq 9$  und in Richtung  $\eta \leq 12$ ). Durch die Kapazität des Kernspeichers der TR-4 wird die Zahl der Elemente in einer Richtung  $\xi$  zu neun beschränkt. Hierzu werden die folgenden Größen definiert (siehe Bild 3.2 und 3.3 und Anhang E).

	Im Programm verwendete Bezeichnungen
1. Gesamtzahl der Elemente	EL
2. Anzahl der Plattenelemente in Richtung $\xi$	12 - G
3. Anzahl der Untermatrizen der Matrix $[c^+]$ (siehe Bild 3.2)	11 - Q



4. Die zu je zwei Untermatrizen  
( $c_1^+ + c_2^+$ ,  $c_2^+ + c_3^+$  usw.) gehörenden  
Plattenelemente (siehe Bild 3.2)

[ZAHL]

Die Verteilung der Plattenelemente  
für  $G = 6, 5, 4, 3, 2$  wird in  
Tabelle 3.1 angegeben.

5. Die Knotenpunkte des Elementsystems  
werden in 11 Gruppen eingeteilt  
(siehe Bild 3.2) Zahl der Knoten-  
verschiebungen in jeder Gruppe von  
Knotenpunkten, die ungleich null  
sind.

$N [1], N [2], \dots N [11]$

6. Geometrie und Querdehnungszahl  
der Platte

$L_x, L_y, M, E$

7. Die verhinderten und die unverhinderten  
Knotenverschiebungen werden als null  
bzw. als eins angegeben.

$WE [I]$

8. An den Knotenpunkten auftretende  
äußere Lasten

$B [I]$

Das Programm liefert die Knotenverschiebungen  
( $w, w', w''$  und  $w'''$ ), die Biegemomente an den  
Elementecken und die Hauptmomente an den  
Knotenpunkten.

	G = 2	G = 3	G = 4	G = 5	G = 6
ZAHL [0,1]	1	1	1	1	1
ZAHL [0,2]	13	12	11	10	9
ZAHL [1,1]	14	13	12	11	10
ZAHL [1,2]	25	23	21	19	16
ZAHL [2,1]	26	24	22	20	17
ZAHL [2,2]	37	34	31	28	24
ZAHL [3,1]	38	35	32	29	25
ZAHL [3,2]	49	45	40	36	31
ZAHL [4,1]	50	46	41	37	32
ZAHL [4,2]	60	55	50	45	40
ZAHL [5,1]	61	56	51	46	41
ZAHL [5,2]	72	66	60	54	47
ZAHL [6,1]	73	67	61	55	48
ZAHL [6,2]	84	77	70	63	55
ZAHL [7,1]	85	78	71	64	56
ZAHL [7,2]	96	88	80	71	62
ZAHL [8,1]	97	89	81	72	63
ZAHL [8,2]	108	99	89	80	71
ZAHL [9,1]	109	100	90	81	72
ZAHL [9,2]	120	108	96	84	72

Tabelle 3.1: Werte der Elemente der Matrix[ZAHL] in Abhängigkeit von G (G = 12 - Zahl der Plattenelemente in Richtung  $\xi$ ). Diese Zahlen werden vom Programm als Eingabe angefordert.

### 3.8 Verfeinerung des Elementsystems

Aus Gl. (3.21) erkennt man, daß die Plattenmomente von den Knotenverschiebungen abhängig sind. Es wird also sinnvoll sein, das Elementsystem in einem bestimmten Bereich zu verfeinern, in dem

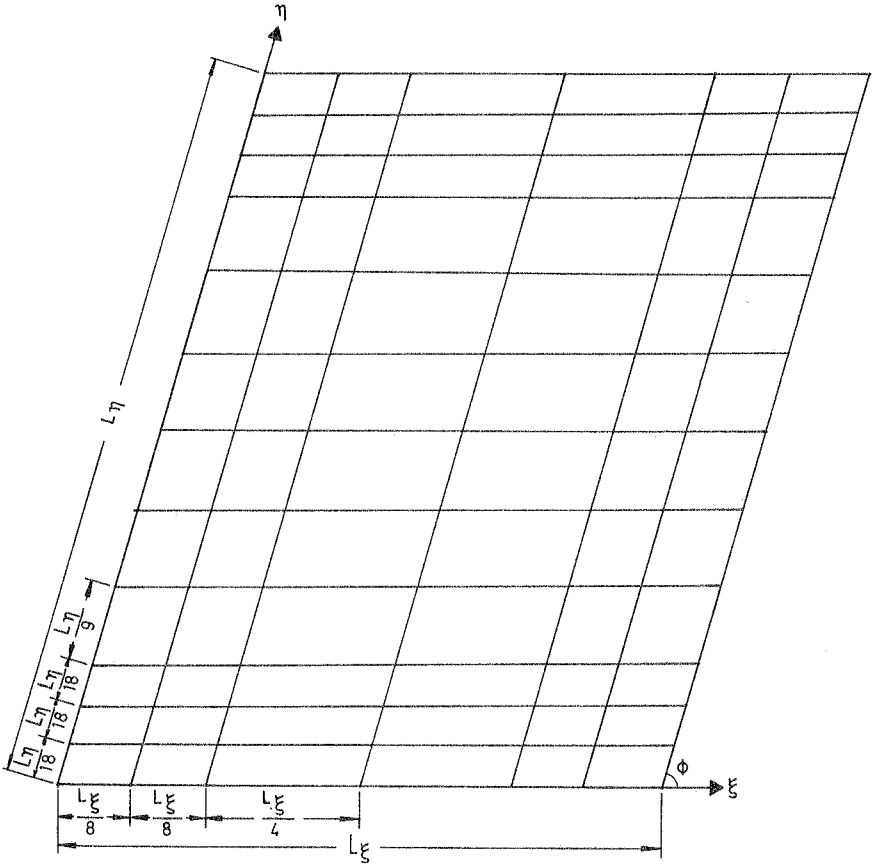


Bild 3.6

die Änderungen der Verschiebungen verhältnismäßig groß sind. An den Kanten zwischen zwei ungleichen Elementen wird jedoch die Kontinuität der Verschiebungen nicht gesichert. Die Verfeinerung erfordert Änderungen im Rechenprogramm, weil die Matrizen  $[k^+]$  der Elemente nicht mehr gleich sind. Zur Verfeinerung werden die

Elemente nach Bild 3.6 in vier Typen eingeteilt. Ohne Beachtung der Folge der Elemente wird die Berechnung von  $\Sigma [c^{+T}]^i [k^+]^i [c^+]^i$  für die Elemente eines Typs zusammen durchgeführt.

### 3.9 Modifizierte Knotenlasten

Tritt eine gleichmäßig verteilte Last  $q$  auf, verteilt man sie auf die Knotenpunkte des Elementsystems als direkte Knotenlasten gemäß  $R = (qab \sin \phi) / 4$ . Um die einheitliche Herleitung im Rahmen der Elementmethode durchzuführen, kann man die gleichmäßig verteilte Last  $q$  in 12 (bei Methode I) oder 16 (bei Methode II) Ecklasten wie folgt transformieren.

Die Transformation wird auf zwei Wegen durchgeführt:

1. Unter Betrachtung eines Plattenelements wie im Abschnitt 1.2.1

und 2. unter Betrachtung der Gesamtplatte wie im Abschnitt 3.2.1

#### 3.9.1 Betrachtung eines Plattenelements

In der Gl. (1.12) werden die physikalisch ausgeprägten äußeren Lasten  $q$  nicht berücksichtigt. Die modifizierten Ecklasten  $\{\bar{F}^+\}^i$  des Elements  $i$ , die die Lasten  $q$  ersetzen, können mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in Erweiterung der Gl. (1.12) ermittelt werden.

Um die äquivalenten Ecklasten  $\{\bar{F}^+\}^i$  zu ermitteln, betrachtet man zwei Elemente: Das erste Element mit der wirklichen gleichmäßig verteilten Last  $q$  und das zweite mit den entsprechenden äquivalenten Ecklasten. Nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen wird eine beliebige virtuelle Eckverschiebung  $\delta \{W^+\}$  an beiden Elementen eingeleitet und die virtuellen Arbeiten verglichen. Daraus folgt:

$$\delta (\{W^+\}^T) \{\bar{F}^+\}^i = \sin \phi \int_0^b \int_0^a q \cdot \delta (w) d \xi d \eta \quad (3.25)$$

Durch Einsetzen von

$$\delta(w) = \delta(\{W^+\}^T) \{f(\xi)g(\eta)\}$$

in Gl. (3.25) folgt:

$$\delta(\{W^+\}^T) \{\bar{F}^+\}^i = q \cdot \sin\phi \cdot \delta(\{W^+\}^T) \iint_0^a \iint_0^b f(\xi)g(\eta) d\xi d\eta \quad (3.26)$$

oder

$$\{\bar{F}^+\}^i = q \cdot \sin\phi \iint_0^a \iint_0^b \{f(\xi)g(\eta)\}_{16.1} d\xi d\eta \quad (3.27)$$

Man erkennt aus Gl. (3.27), daß nun die zur Eckverwindung ( $W^*$ ) entsprechende äußere Last ermittelt werden kann.

### 3.9.2 Betrachtung der Gesamtplatte

In der Gl. (3.3) werden die äußeren Lasten als reine Knotenlasten angenommen. Die Beziehung zwischen den gleichmäßig verteilten äußeren Lasten  $q$  und den Knotenlasten  $\{\bar{F}^+\}$  kann mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen hergeleitet werden. Man betrachtet die aus 4 Elementen bestehende Platte nach Bild (3.1a).

$$\delta(\{\bar{W}^+\}^T) \{\bar{F}^+\}^i = \sum_{i=I}^{IV} \left[ \iint_0^a \iint_0^b q \cdot \delta(w) d\xi d\eta \right]^i \quad (3.28)$$

Durch Einsetzen von

$$w = \{W^+\}^T \{f(\xi)g(\eta)\}$$

und

$$\{W^+\}^i = [c^+]^i \{\bar{W}^+\}^i \quad \text{folgt:}$$

$$\delta(\{\bar{W}^+\}^T)\{\bar{F}^+\} = \delta(\{\bar{W}^+\}) \sum_{i=I}^{IV} (q \sin \phi [c^{+T}]^i \iint_{\sigma}^b \{f(\xi) g(\eta)\} d\xi d\eta)^i \quad (3.29)$$

Nach Gl. (3.11) und (3.1) folgt:

$$\{\bar{F}^+\} = \sum_{i=I}^{IV} \{\bar{F}_G^+\}^i = \sum_{i=I}^{IV} ([c^{+T}]^i \{\bar{F}^+\}^i) \quad (3.30)$$

Durch Einsetzen von Gl. (3.30) in Gl. (3.29) ergibt sich zu:

$$\delta(\{\bar{W}^+\}^T) \sum_{i=I}^{IV} ([c^{+T}]^i \{\bar{F}^+\}^i) = \delta(\{\bar{W}^+\}) \sum_{i=I}^{IV} (q \cdot \sin \phi [c^{+T}]^i \iint_{\sigma}^b \{f(\xi) g(\eta)\} d\xi d\eta)^i$$

oder

$$\{\bar{F}^+\}_{16,1}^i = q \cdot \sin \phi \left\{ \iint_{\sigma}^b \{f(\xi) g(\eta)\} d\xi d\eta \right\}_{16,1} \quad (3.31)$$

Man erkennt, daß die Gl. (3.27) und (3.31) gleich sind.

Die auf diese Weise ermittelten 16 Ecklasten  $\bar{F}_1$  bis  $\bar{F}_{16}$  werden im folgenden angegeben.



Die Änderungen in den Ergebnissen, die sich aus der Verwendung direkter und modifizierter Knotenlasten und aus der Verfeinerung des Elementsystems nach Abschnitt 3.8 ergeben, wurden in einem Rechenbeispiel untersucht. Die Ergebnisse dieses Beispiels werden in der Tabelle 4.13 angegeben.



#### 4. Rechenbeispiele

##### 4.1 Untersuchungsbereich

In den Rechenbeispielen werden folgende Fragen untersucht:

1. Die Konvergenz der Methode II
2. Vergleich der Ergebnisse nach Methode I und Methode II
3. Vergleich der Resultate nach Methode II mit den Ergebnissen früherer Arbeiten [6], [16], [18], [19], [20], [21].

Insgesamt wurden 18 Beispiele auf der Rechenanlage durchgerechnet. Die Programme sind so geschrieben, daß in einem Rechenablauf die Ergebnisse bis zu den Hauptmomenten ermittelt werden können. Das Programm verlangt folgende Eingabewerte:

Gesamtzahl der Elemente

Zahl der Elemente in Richtung  $\xi$

Länge und Breite der Platte ( $L_\xi, L_\eta$ )

Querdehnungszahl ( $\mu$ )

Winkel zwischen den Seiten ( $\phi$ )

Zahl der Gleichungen nach Einsetzen der Randbedingungen

Knoten mit zu null gesetzten Verschiebungen

Knotenlasten

Elastizitätsmodul  $E$  und Plattendicke  $h$  werden bei der Berechnung mit dem Computer nicht benötigt. Über die Art der Computereingabe wird im Abschnitt 3.7 ausführlich berichtet.

##### 4.2 Die Konvergenzuntersuchungen bei der Methode II

Bei der Konvergenzuntersuchung treten die folgenden Fragen auf:

1. Ist bei wachsender Anzahl der Elemente eine Konvergenz der Ergebnisse gegen einen Grenzwert festzustellen?
2. Ist die Konvergenz gut oder schlecht?
3. Stimmt der Grenzwert mit der wahren Lösung überein?

Oft kommt es vor, daß eine Lösung sehr langsam konvergiert. Außerdem ist es möglich, daß die Ergebnisse nicht gegen die wahre Lösung konvergieren. Da die Methode II eine äquivalente Formulierung des Ritz-Prozesses ist, wobei das Gesamtpotential der Platte in

den Knotenverschiebungen ausgedrückt wird, kann man die Konvergenz zur wahren Lösung erwarten. Bei der Methode I jedoch kann wegen der Unstetigkeit der Querneigungen die Konvergenz zur wahren Lösung nicht gewährleistet werden.

Im folgenden soll an Rechenbeispielen die Konvergenz bei Methode II untersucht werden. Da bei Methoden I und II das Gesamtpotential, dessen Minimum gesucht wird, in den Knotenverschiebungen ausgedrückt wird, ist es naheliegend, die Konvergenz der Verschiebungsgrößen zu untersuchen.

Es wird eine rhombusförmige Platte (nach Bild 4.1) unter gleichmäßig verteilter Last  $q$  berechnet. Als ein Grenzfall wird auch eine rechtwinklige Platte betrachtet. Die Eingabewerte der Beispiele sind in Tabelle 4.1 angegeben. Die Platte wurde in gleichgroße Elemente eingeteilt und direkte Knotenlasten gemäß

$$R = \frac{q \cdot a \cdot b \cdot \sin\phi}{4}$$

Beispiel	Zahl EL der Elemente	$L_{\xi}$ (M)	$L_{\eta}$ (M)	$\mu$	$\phi$ (Grad)	$q$ (Mp/m <sup>2</sup> )
1	36 ( 6x6)	5,0	5,0	0,30	45	2,83
2	54 ( 6x9)	5,0	5,0	0,30	45	2,83
3	72 ( 6x12)	5,0	5,0	0,30	45	2,83
4	36 ( 6x6)	5,0	5,0	0,30	90	2,83
5	54 ( 6x9)	5,0	5,0	0,30	90	2,83
6	72 ( 6x12)	5,0	5,0	0,30	90	2,83
7	288 (12x24)	5,0	5,0	0,30	90	2,83

Tabelle 4.1

angenommen. Die Konvergenz wird nicht in Plattenmitte, sondern an 6 äquidistanten Punkten untersucht, deren Lage aus Bild 4.2 hervorgeht. Einzelheiten über den Konvergenzverlauf werden in den Tabellen 4.2 und 4.3 und in den Kurven Bild 4.2 und 4.3 angegeben. Die entsprechenden Ergebnisse für die rechtwinklige Platte sind in den Tabellen 4.4 und 4.5 angegeben.

Die in den Tabellen 4.2 bis 4.5 angegebenen Werte sind mit  $\frac{\sin^3\phi}{K}$  zu multiplizieren, um die wirklichen Verschiebungen zu erhalten.

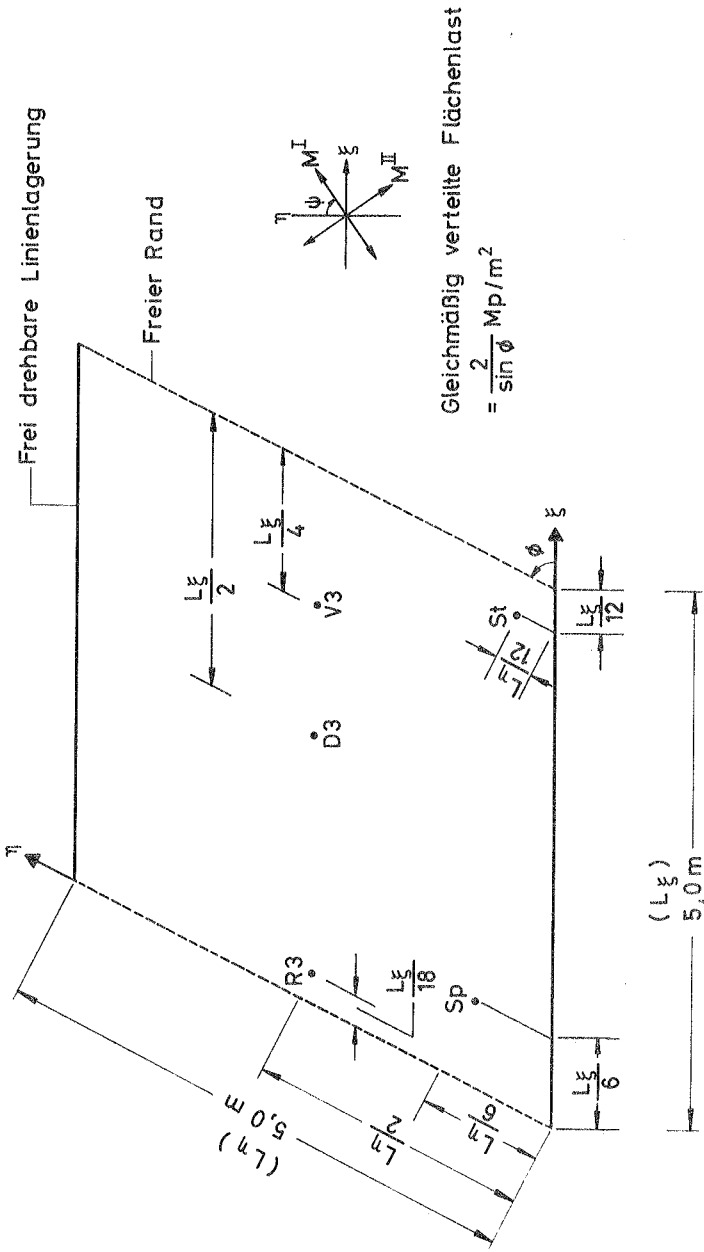


Bild 4.1

Zahl der Elemente	Punkt						
	a	b	c	d	e	f	g
36	+22,983	+20,218	+17,860	+16,533	+16,667	+19,140	+25,468
54	+23,678	+20,749	+18,242	+16,812	+16,946	+19,657	+26,244
72	+23,996	+20,998	+18,428	+16,954	+17,096	+19,898	+26,608

Tabelle 4.2: Vertikale Verschiebung an der Gerade:  $n = \frac{L_n}{3}$   
bei der Methode II (siehe Bild 4.2)

Zahl der Elemente	Punkt						
	a	b	c	d	e	f	g
36	-3,267	-3,232	-2,314	-0,799	+1,255	+5,140	+9,942
54	-3,458	-3,416	-2,471	-0,872	+1,375	+5,449	+10,260
72	-3,541	-3,496	-2,540	-0,908	+1,443	+5,588	+10,407

Tabelle 4.3: Die Neigung ( $w'$ ) an der Geraden  $n = \frac{L_n}{3}$   
bei der Methode II (siehe Bild 4.3)

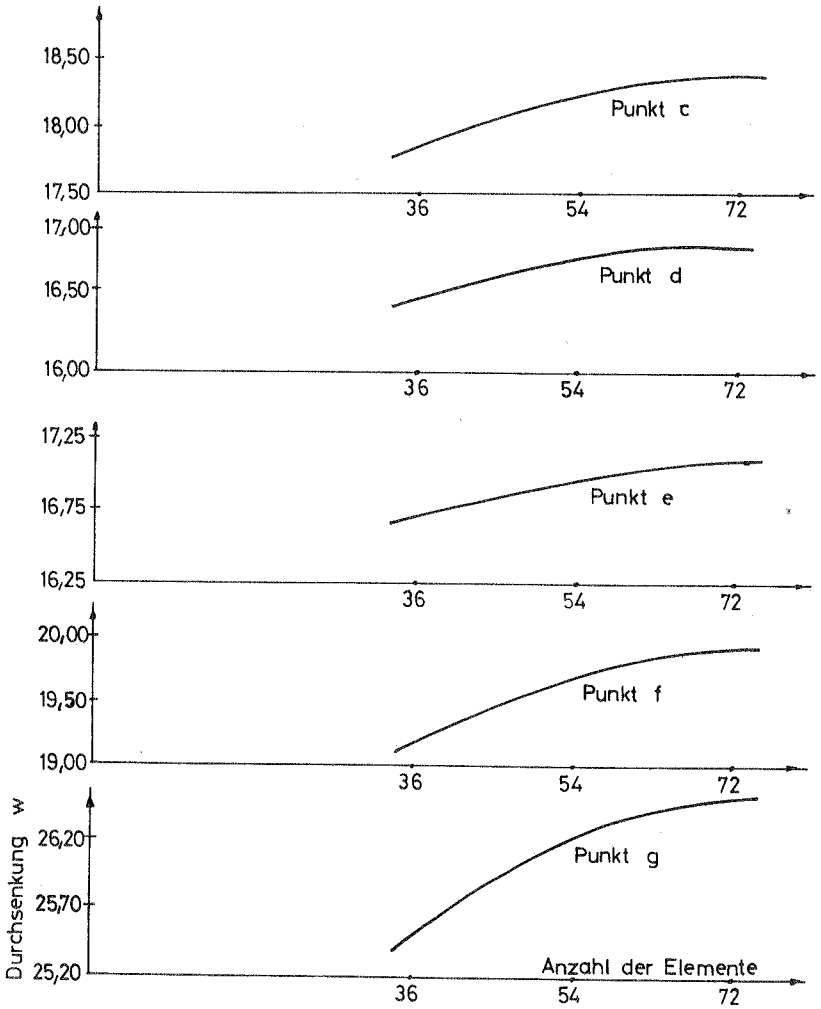
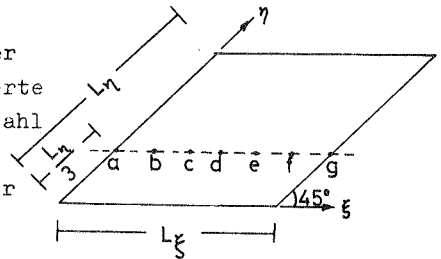


Bild 4.2: Abhängigkeit der Verschiebungswerte ( $w$ ) von der Anzahl der Platten-elemente bei der Methode II



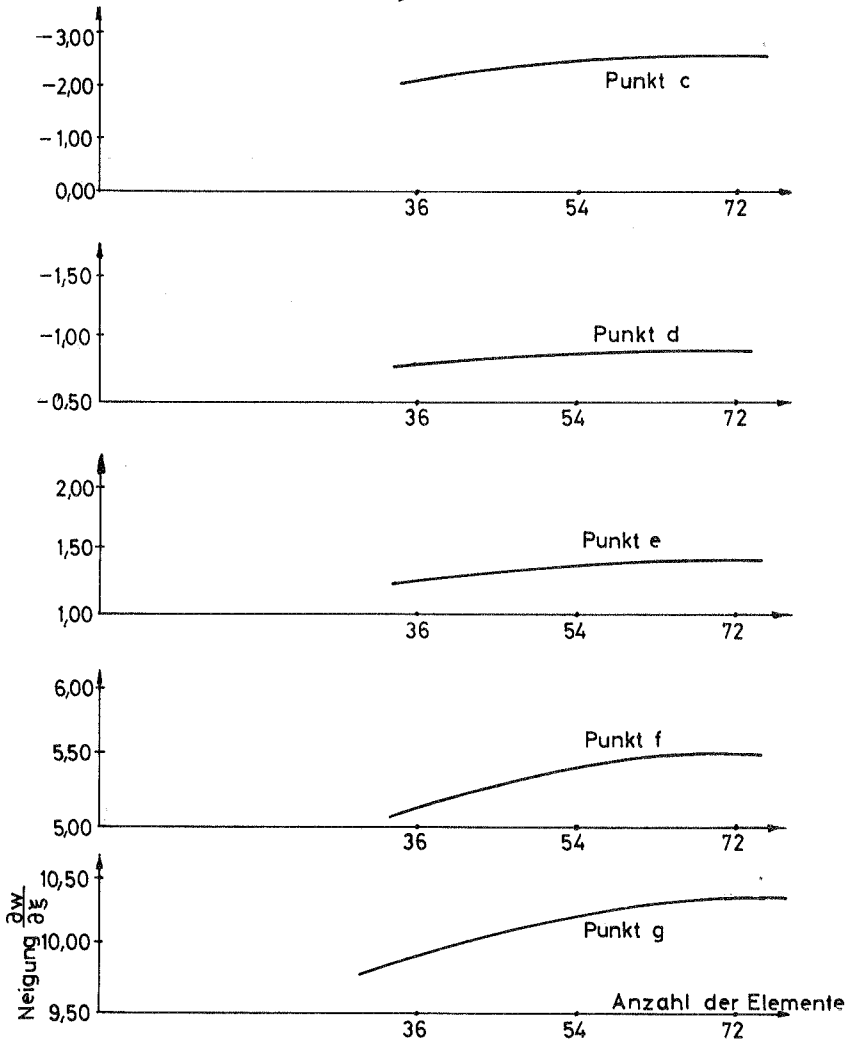
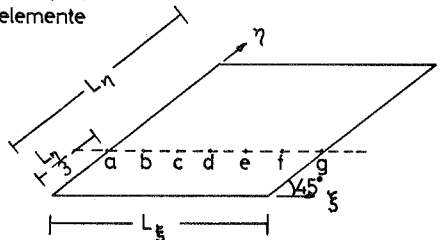


Bild 4.3 Abhängigkeit der Neigungswerte ( $w'$ ) von der Anzahl der Plattenelemente bei der Methode II

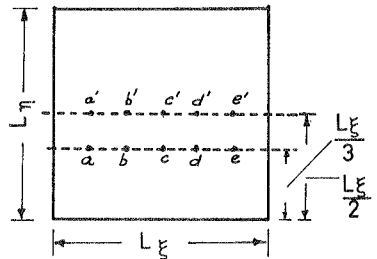


Zahl der Elemente \ Punkt	a	b	c	d	e
36	+14,693	+14,094	+13,926	+14,094	+14,693
54	+14,884	+14,268	+14,095	+14,268	+14,884
72	+14,983	+14,361	+14,186	+14,361	+14,983
288	+15,005	+14,408	+14,240	+14,408	+15,005

Tabelle 4.4: Durchsenkung  $W$  an der Geraden  $n = \frac{L_\eta}{3}$

Zahl der Elemente \ Punkt	a'	b'	c'	d'	e'
36	+16,919	+16,224	+16,029	+16,224	+16,919
72	+17,245	+16,526	+16,323	+16,526	+17,245
288	+17,268	+16,579	+16,384	+16,579	+17,268

Tabelle 4.5: Durchsenkung  $W$  an der Geraden  $n = \frac{L_\eta}{2}$



Aus den Tabellen 4.2 bis 4.5 erkennt man, daß die zunehmende Zahl der Elemente zur Konvergenz der Verschiebungen führt. Aus Tabelle 4.2 erkennt man, daß die Zunahme der Durchsenkung an der Linie  $\eta = L_\eta/3$  bei Änderung der Zahl der Elemente von 36 auf 54 zwischen 3,03 % und 1,68 % beträgt. Dieser Prozentsatz nimmt in der Nähe der freien Ränder zu. Bei weiterer Verfeinerung auf 72 Elemente nimmt die Durchsenkung zwischen 1,34 % und 0,845 % zu. Die Zunahme ist also am Rand größer als in der Mitte. Aus Tabelle 4.3 folgt, daß die Zunahme der Neigung  $\frac{\partial W}{\partial \xi}$  in der Linie  $\eta = \frac{L_\eta}{3}$  bei Änderung der Zahl der Elemente von 36 auf 54 zwischen 9,8 % und 3,2 % beträgt. Bei weiterer Verfeinerung auf 72 Elemente nehmen die Neigungen zwischen 4,94 % und 1,43 % zu. Ähnliches folgt aus den Tabellen 4.4 und 4.5.

#### 4.3 Vergleich zwischen den Ergebnissen nach Methode I und Methode II

Das Beispiel aus Abschnitt 4.2 wird nach Methode I mit 36,54 und 72 Elementen nach Programm Anhang D gerechnet. In diesem Fall gelten auch die Eingabewerte von Tabelle 4.1. Die sich ergebenden Verschiebungen für die Fälle von 36, 54 und 72 Elementen sind in den Tabellen 4.6 und 4.7 angegeben. Der Vergleich wird in Bild 4.4 und Bild 4.5 gezeigt.

Die Tabellen 4.6 und 4.7 zeigen die Tendenz zur Konvergenz wie bei der Methode II. Aus dem Vergleich zwischen den Tabellen 4.2, 4.3 und Tabellen 4.6 und 4.7 erkennt man, daß die Werte der Verschiebungen bei der Methode I kleiner sind als die entsprechenden Werte bei der Methode II. Die Ergebnisse mit 72 Elementen nach Methode I und die entsprechenden Werte mit 36 Elementen nach Methode II sind etwa gleich. Dies erkennt man auch im folgenden Abschnitt, in dem die Werte der Hauptmomente verglichen werden.



Zahl der Elemente \ Punkt	a	b	c	d	e	f	g
36	+22,316	+19,582	+17,310	+16,108	+16,299	+18,535	+24,247
54	+23,011	+20,152	+17,735	+16,381	+16,557	+19,022	+25,100
72	+23,316	+20,402	+17,932	+16,518	+16,686	+19,255	+25,465

Tabelle 4.6: Vertikale Verschiebung an der Geraden  $\eta = \frac{L_n}{3}$  bei der Methode I (siehe Bild 4.4)

Zahl der Elemente \ Punkt	a	b	c	d	e	f	g
36	-3,229	-3,189	-2,154	-0,714	+1,303	+4,366	+9,361
54	-3,408	-3,318	-2,366	-0,816	+1,369	+4,882	+9,686
72	-3,484	-3,373	-2,441	-0,869	+1,417	+5,058	+9,823

Tabelle 4.7: Die Neigung ( $w'$ ) an der Geraden  $\eta = \frac{L_n}{3}$  bei der Methode I (siehe Bild 4.5)

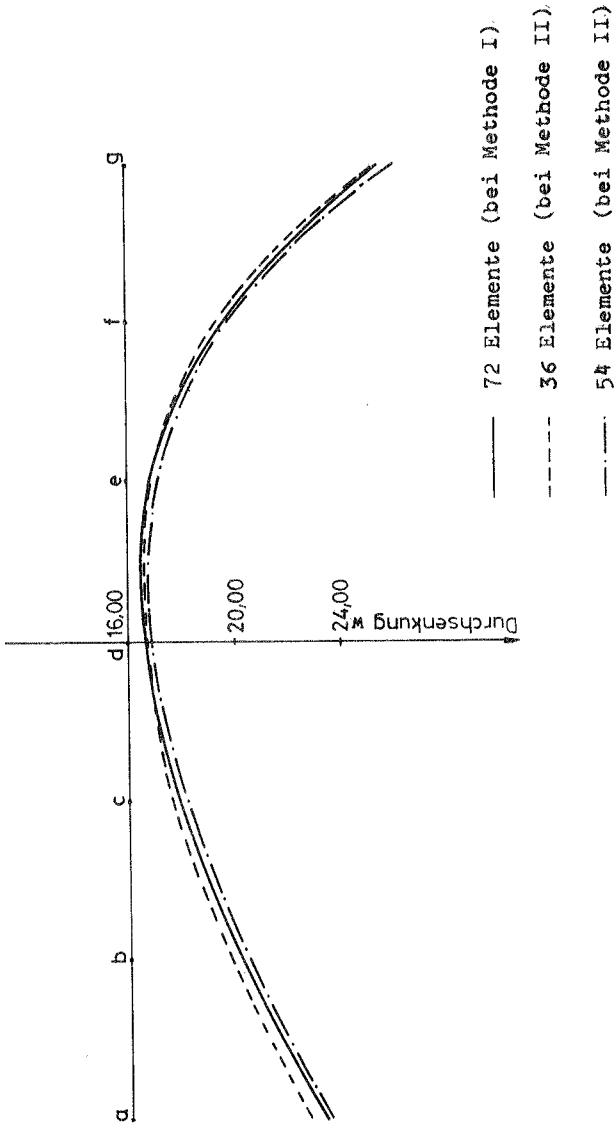


Bild 4.4: Verlauf der Verschiebungen (w) an der Geraden  $\eta = \frac{L_n}{3}$  bei den Methoden I und II

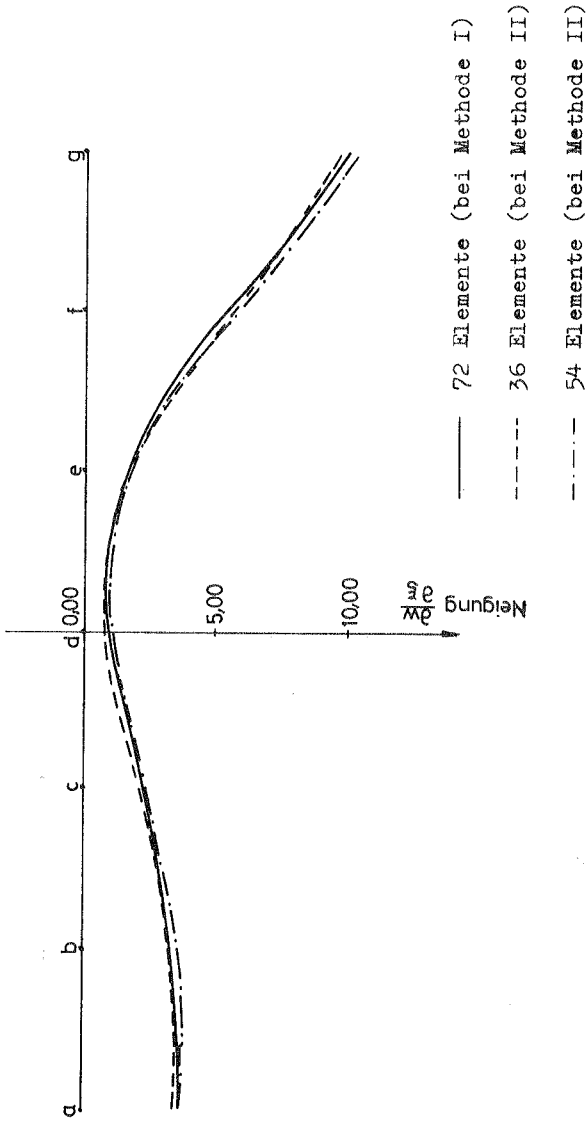


Bild 4.5: Verlauf der Neigungen ( $w'$ ) an der Geraden  $\eta = \frac{L_1}{3}$  bei den Methoden I und II

#### 4.4 Vergleich zwischen früheren Arbeiten und der Methode II

Acht Beispiele wurden untersucht. Die Variationen in den folgenden Parametern werden berücksichtigt:

1. Randbedingungen
2. Geometrie der Platte ( $L_{\xi}$ ,  $L_{\eta}$ ,  $\phi$ )
3. Art und Lage der Last

Die Eingabewerte der Beispiele werden in Tabelle 4.8 angegeben.

Beispiel Nr. 11 (Bild 4.6)

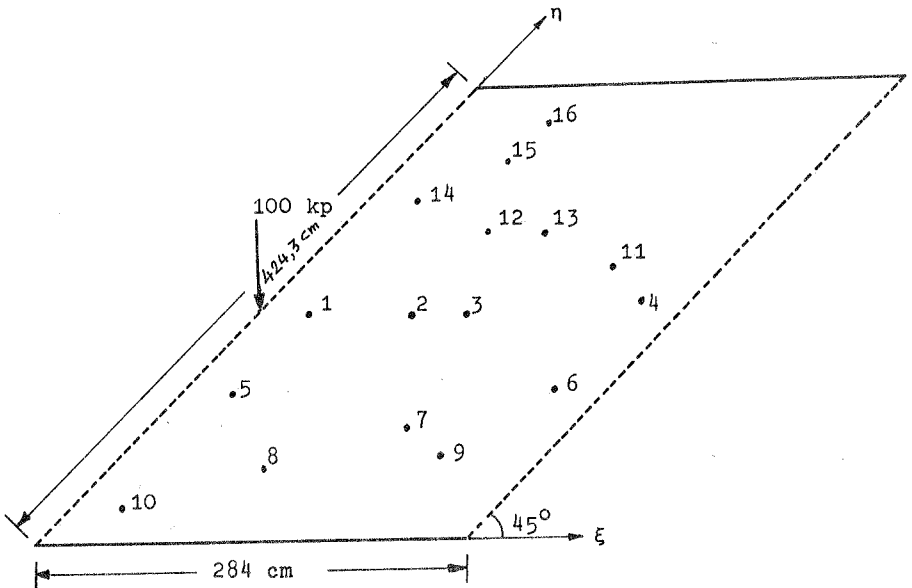


Bild 4.6: Beispiel Nr. 11  
Koordinaten der Punkte sind in Tabelle 4.9  
angegeben.

Knorr [19] hat eine Platte unter Einzellast am freien Rand experimentell mit Hilfe schiefer Durchstrahlung untersucht. Diese

Platte wurde nach Methode II berechnet. Sie wurde in (8x12) Elemente eingeteilt. Die 16 untersuchten Punkte gehen aus Bild 4.6 hervor. Der Vergleich zwischen den Hauptmomenten ist in Tabelle 4.9 angegeben. Die in Klammern stehenden Werte sind die Versuchsergebnisse.

#### Beispiel Nr. 12, 13 und 14 (Bild 4.7 bis 4.9)

Die Durchsenkung und die Hauptmomente in Plattenmitte werden verglichen. Die untersuchten Platten werden in Bild 4.7, 4.8 und 4.9 gezeigt und die Ergebnisse sind in Tabelle 4.10 zusammengestellt. (Giencke [22] hat die Platten (Beispiel 13, 14) mit einem Kraftgrößenverfahren berechnet, wobei er sowohl Parallelogrammelemente als auch Rechteckelemente in Kombination mit Dreieckelementen verwendet hat). Die Platten wurden in 8x12 (für Beispiel Nr. 12) und 9x9 (für Beispiel 13, 14) Elemente eingeteilt.

#### Beispiele 15 bis 18

Es wurde eine schiefwinklige Platte nach Bild 4.1 mit gleichmäßig verteilter Last untersucht. Der Winkel zwischen den Seiten wurde von  $30^\circ$  bis  $90^\circ$  in den Schritten 30, 45, 60 und 90 variiert. Zur Lösung nach Methode II wurde die Platte in 72 Elemente (6x12) eingeteilt, wobei in Randnähe das Elementsystem nach Bild 3.6 verfeinert wurde. Die untersuchten Punkte gehen aus Bild 4.1 hervor. Der Vergleich zwischen den Hauptmomenten nach Methode II, Ramstad [6] und Homberg [16] ist in den Bildern 4.10 bis 4.13 angegeben. Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen ( $M^I$ ,  $M^{II}$  in den auf der Linie  $\eta = \frac{r_n}{2}$  liegenden Punkten) nach Methode II und den Modellmessungen nach Homberg sind in der Tabelle 4.11 angegeben.

Aus den Tabellen 4.9 und 4.10 erkennt man, daß die Ergebnisse nach Methode II mit den Ergebnissen nach Robinson, Knorr, Rushton und Morley gut übereinstimmen. Aus den Bildern 4.10 bis 4.12 erkennt man, daß die Ergebnisse nach Methode II zwischen den Modell-Ergebnissen [Homberg] und den Ergebnissen nach Methode I [Ramstad] liegen. Aus dem Bild 4.13 erkennt man, daß die Werte der Hauptmomente in der stumpfen Ecke nach Methode I und II von den Modell-

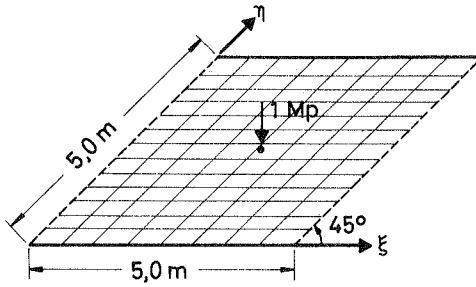


Bild 4.7: Beispiel Nr. 12

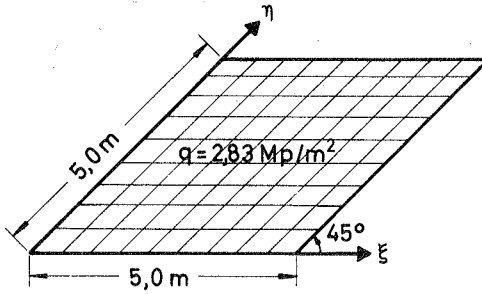


Bild 4.8: Beispiel Nr. 13

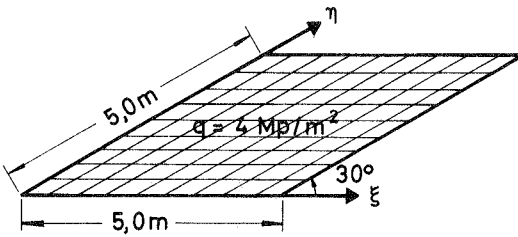


Bild 4.9: Beispiel Nr. 14

Beispiel Nr.	$L_{\xi}$ (M)	$L_{\eta}$ (M)	$\phi$ (Grad)	$\mu$	Last Mp/m <sup>2</sup> bzw. Mp	Randbedingungen	Quellenangabe
11	2,84	4,24	45	0,39	Einzellast 0,1 Mp in der Mitte des freien Randes	$n = 0$ $\eta = L_{\eta}$ geilert $\xi = 0$ Frei $\xi = L_{\xi}$	Knorr [19] Spannungsop- tische Unter- suchungen
12	5,00	5,00	45	0,30	Einzellast 1 Mp in Plattenmitte	$n = 0$ $\eta = L_{\eta}$ gelagert $\xi = 0$ Frei $\xi = L_{\xi}$	Robinson [21] Modellstati- sche Unter- suchungen
13	5,00	5,00	45	0,30	Gleichmäßig verteilte Last 2,83 Mp/m <sup>2</sup>	Alle Ränder- linien ge- lagert	Rushton [20] Analog Rechner
14	5,00	5,00	30	0,30	Gleichmäßig verteilte Last 4 Mp/m <sup>2</sup>	Alle Ränder- linien ge- lagert	Morley [18] Differenzen- verfahren
15	5,00	5,00	90	0,30	Gleichmäßig verteilte Last $2/\sin\phi$ Mp/m <sup>2</sup>	$n = 0$ $\eta = L_{\eta}$ gelagert $\xi = 0$ Frei $\xi = L_{\xi}$	Homberg [16] Modellstati- sche Unter- suchungen
16	"	"	60	"	"	"	"
17	"	"	45	"	"	"	"
18	"	"	30	"	"	"	"

Tabelle 4.8: Die Eingabewerte zu den Beispielen 11 bis 18

Punkt	Koordinaten	$M^I$	$M^{II}$
1	$L_{\xi/8}, L_{\eta/2}$	60,31 (64,00)	-14,18 (-4,00)
2	$3L_{\xi/8}, L_{\eta/2}$	31,64 (32,00)	-13,38 (-11,25)
3	$L_{\xi/2}, L_{\eta/2}$	23,98 (23,00)	-11,33 (-11,50)
4	$7L_{\xi/8}, L_{\eta/2}$	9,57 (8,34)	-5,25 (-9,00)
5	$L_{\xi/8}, L_{\eta/3}$	39,14 (45,00)	-1,90 (-1,80)
6	$7L_{\xi/8}, L_{\eta/3}$	16,43 (16,00)	-4,87 (-5,00)
7	$5/8L_{\xi}, L_{\eta/4}$	27,24 (26,00)	-9,81 (-10,00)
8	$3L_{\xi/8}, L_{\eta/6}$	25,70 (25,00)	-7,17 (-15,00)
9	$3L_{\xi/4}, L_{\eta/6}$	24,29 (20,00)	-8,05 (-10,00)
10	$L_{\xi/8}, L_{\eta/12}$	7,35 (7,50)	-0,07 (-3,00)
11	$3L_{\xi/4}, 7L_{\eta/12}$	9,89 (9,50)	-6,02 (-11,30)
12	$3L_{\xi/8}, 2L_{\eta/3}$	19,95 (21,00)	-15,80 (-16,00)
13	$L_{\xi/2}, 2L_{\eta/3}$	15,37 (15,00)	-10,84 (-14,34)
14	$L_{\xi/8}, 3L_{\eta/4}$	35,18 (35,00)	-25,85 (-18,30)
15	$L_{\xi/4}, 5L_{\eta/6}$	13,60 (17,30)	-21,50 (-22,25)
16	$L_{\xi/4}, 11L_{\eta/12}$	11,86 (12,00)	-16,65 (-22,50)

Tabelle 4.9: Hauptmomente zu Beispiel Nr. 11  
Die Werte in Klammern sind die Ergebnisse  
aus schiefer Durchstrahlung [19]



Beispiel Nr.	Durchsenkung in Plattenmitte	$M^I$ in Plattenmitte	$M^{II}$ in Plattenmitte
12	0,265 [0,248]	0,412 [0,354]	0,275 [0,254]
13	2,26 (2,36)	2,30 (2,24)	1,53 (1,53)
14	0,913 <0,965>	1,92 <1,92>	0,96 <0,98>

Tabelle 4.10: Durchsenkungen und Hauptmomente in Plattenmitte für die Beispiele Nr. 12, 13, 14

[        ]     Versuche nach Robinson [21]

(        )     Versuche nach Rushton [20]

<       >     Differenzenverfahren nach Morley [18]

Die in der Tabelle gegebenen Durchsenkungswerte sind durch  $Eh^3/12(1-\mu^2)$  zu dividieren, um die wirklichen Durchsenkungen zu erhalten.

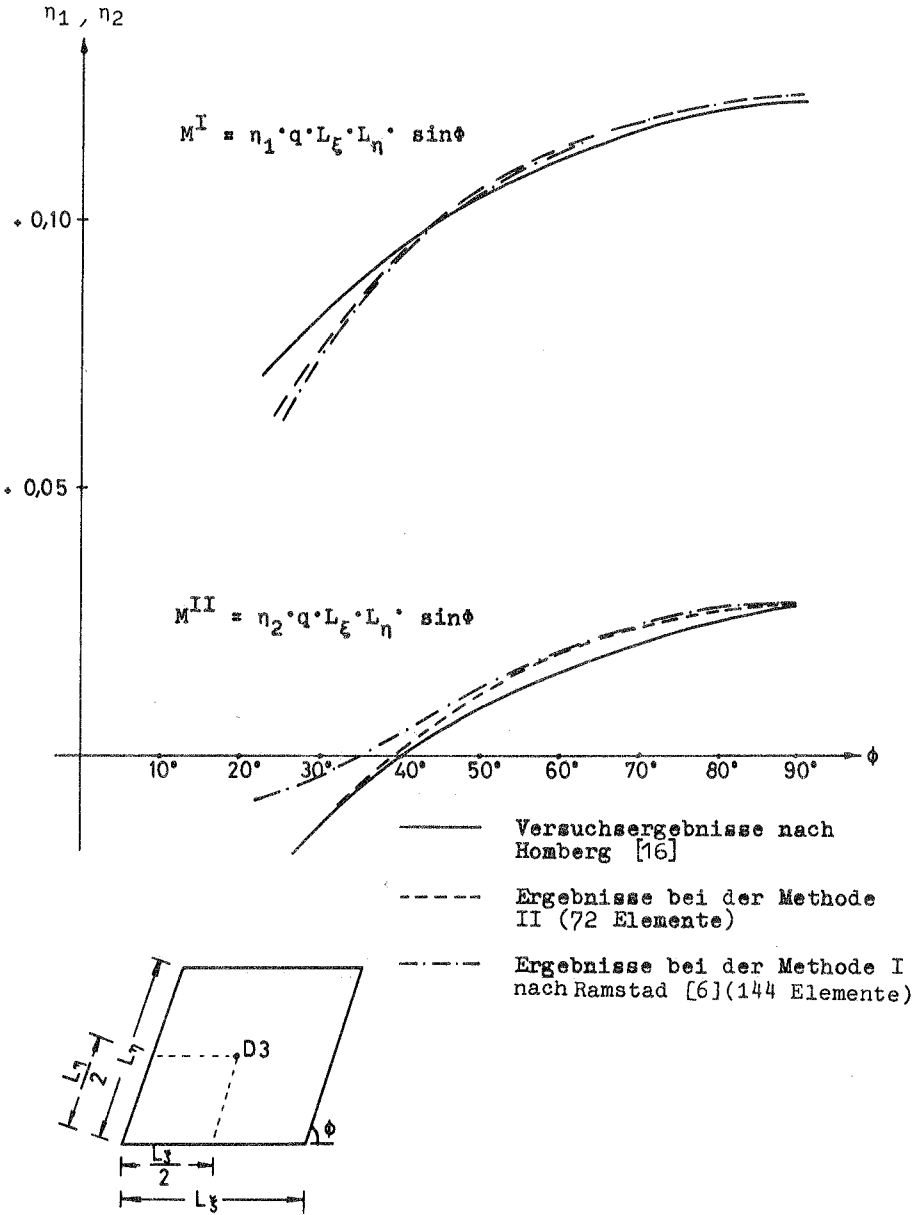


Bild 4.10: Hauptmomente am Punkt D 3

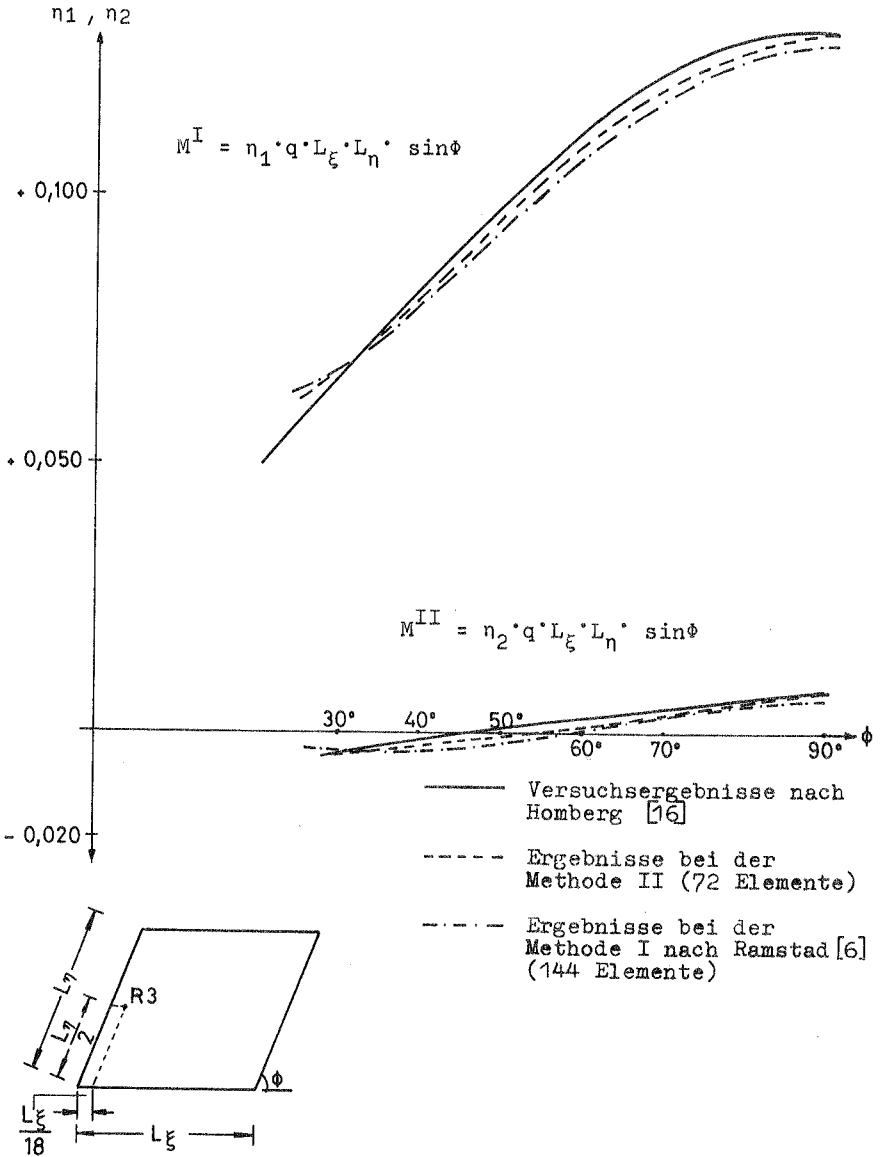


Bild 4.11: Hauptmomente am Punkt R3

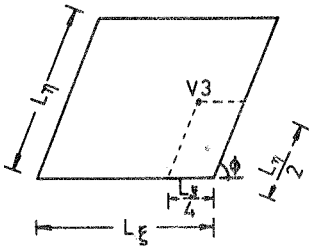
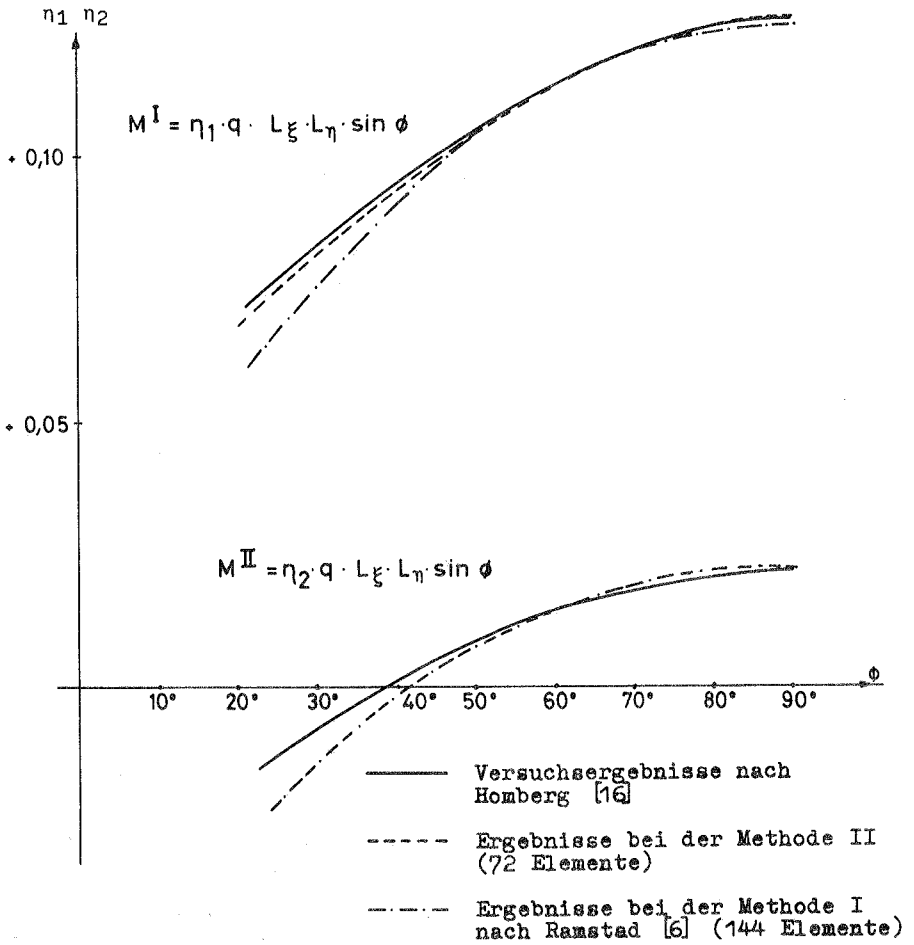
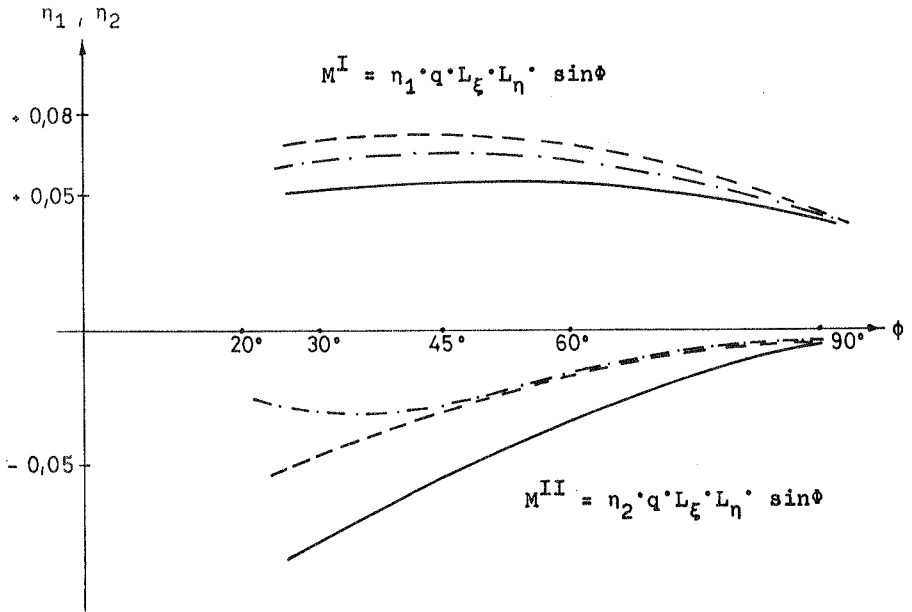


Bild 4.12: Hauptmomente am Punkt V3



- Versuchsergebnisse nach Homberg [6]
- Ergebnisse bei der Methode II (72 Elemente)
- · - · - Ergebnisse bei der Methode I nach Ramstad [6] (144 Elemente)

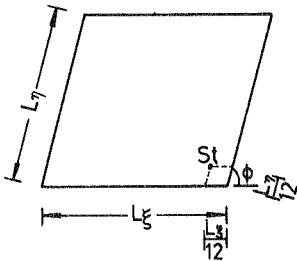


Bild 4.13: Hauptmomente am Punkt St

$\vartheta^\circ$	Punkt	$M^I$ (Mp·M)	$M^{II}$ (Mp·M)
90°	R 3	(6,578)	(0,385)
		[6,575]	[0,375]
		(6,22)	(1,42)
	D 3	[6,08]	[1,40]
		(6,31)	(1,14)
	V 3	[6,25]	[1,10]
60°	R 3	(5,55)	(0,021)
		[5,70]	[0,10]
		(5,64)	(0,96)
	D 3	[5,50]	[0,80]
		(5,69)	(0,69)
	V 3	[5,63]	[0,70]
45°	R 3	(4,47)	(-0,22)
		<4,39>	<-0,37>
		[4,59]	[-0,04]
	D 3	(4,89)	(0,33)
		<4,85>	<0,40>
		[4,85]	[0,25]
		(4,93)	(0,17)
		<4,81>	<0,10>
		V 3	[4,91]
30°	R 3	(3,41)	(0,221)
		[3,35]	[0,225]
		(3,60)	(-0,61)
	D 3	[4,00]	[-0,60]
		(3,94)	(-0,52)
	V 3	[4,10]	[-0,35]

Tabelle 4.11: Hauptmomente zu den Beispielen 15 bis 18  
(Bild 4.1) an der Geraden  $\eta = L\eta/2$

- ( ) Ergebnisse nach Methode II mit verfeinertem Elementsystem (6x12) nach Bild 3.6 und den modifizierten Knotenlasten nach Abs. 3.9
- [ ] Versuchsergebnisse nach Homberg [16]
- < > Ergebnisse nach Methode II mit gleichen Elementen (6x12) und den direkten Knotenlasten

ergebnissen abweichen. Es ist bekannt, daß die nach analytischen Verfahren im Rahmen der Kirchhoffschen Theorie berechneten Werte der Momente in der stumpfen Ecke von den Modellmessungen abweichen [18]. Die hier entwickelten Elementmethoden gehen ebenfalls von der Kirchhoffschen Plattentheorie aus.

Außerdem sei bemerkt, daß die Ansätze für die Biegefläche nach Methode I oder II (Gl. 2.1 und 2.25) die homogene Plattengleichung

$$\frac{1}{\sin^4 \phi} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right] + \left[ \frac{2}{\sin^4 \phi} + \frac{4 \cot^2 \phi}{\sin^2 \phi} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} - \frac{4 \cot \phi}{\sin^3 \phi} \left[ \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^3 \partial \eta} + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^3} \right] = 0 \quad (4.1)$$

nicht erfüllen.

Die zusätzlichen Ungenauigkeiten der Elementmethode beruhen auf dem Ersetzen der Linienlagerung durch Einzelstützungen an den Knotenpunkten und dem Ersetzen der gleichmäßig verteilten Belastung durch Knotenlasten.

## 5. Experimentelle Untersuchung einer schiefwinkligen Platte

Im vierten Kapitel wurden einige Zahlenbeispiele nach Methode II durchgerechnet und die Ergebnisse mit den verschiedenen früheren Arbeiten verglichen. Der Vergleich war hauptsächlich zwischen den Momenten möglich. Die Plattenränder waren entweder liniengelagert oder frei. Im durchgeführten Experiment wurde eine Parallelogrammplatte aus Aluminium (65,64 cm x 65,64 cm, 3 mm dick) mit einem Winkel von  $45^\circ$  untersucht (Bild 5.1), die auf einzelnen Stützungen gelagert war. Die Einzellasten ( $\bar{R}$ ,  $\bar{M}^E$ ,  $\bar{M}^N$ ) wurden an den gewählten Punkten angebracht, deren Verschiebungen ( $\bar{w}$ ,  $\bar{w}'$ ,  $\bar{w}''$ ) direkt gemessen werden konnten.

Normalerweise mißt man Durchsenkungen ( $w$ ) und die Dehnungen um das Verhalten eines Modells zu bestimmen. Die dazu verwendbaren Meßverfahren sind also besser entwickelt als die für Neigungsmessungen. Sie müssen zudem noch an den Punkten durchgeführt werden, an denen vertikale Lasten oder Momente eingreifen. Es mußte deshalb eine Vorrichtung gewählt werden, die es gestattet, auch an den Lasteinleitungsstellen den Neigungswinkel zu messen. Die verwendete Methode erforderte die Messung von Winkel  $\leq 1/2^\circ$ .

### 5.1 Lagerungen

Es wurden Lagerböcke nach Bild 5.2 verwendet, die in der Höhe mit einem Gewinde verstellbar waren. Sie wurden mit Schraubzwingen an den Trägern befestigt. Die Platte wurde durch zwei Muttern und einen Gewindestift mit den Lagern verbunden. Die Lagervorrichtung erfüllte also die Lagerbedingungen  $\bar{w} = \bar{w}' = \bar{w}'' = 0$  an den gewählten Punkten.

### 5.2 Vorrichtung für die Lasten

Die Belastungsvorrichtung (Bild 5.3) muß es ermöglichen, zwei Spiegel und eine Meßuhr am belasteten Punkt zu montieren. Die Gewichte hingen an einem Bügel, der an der Laststelle eingehängt war. Mit Hilfe eines Preßluftzylinders und des Steuergerätes wurden die Be- und Entlastungen durchgeführt. Um die Momentenbelastung anzubringen wurde an der Laststelle eine Gewindestange in ein Loch



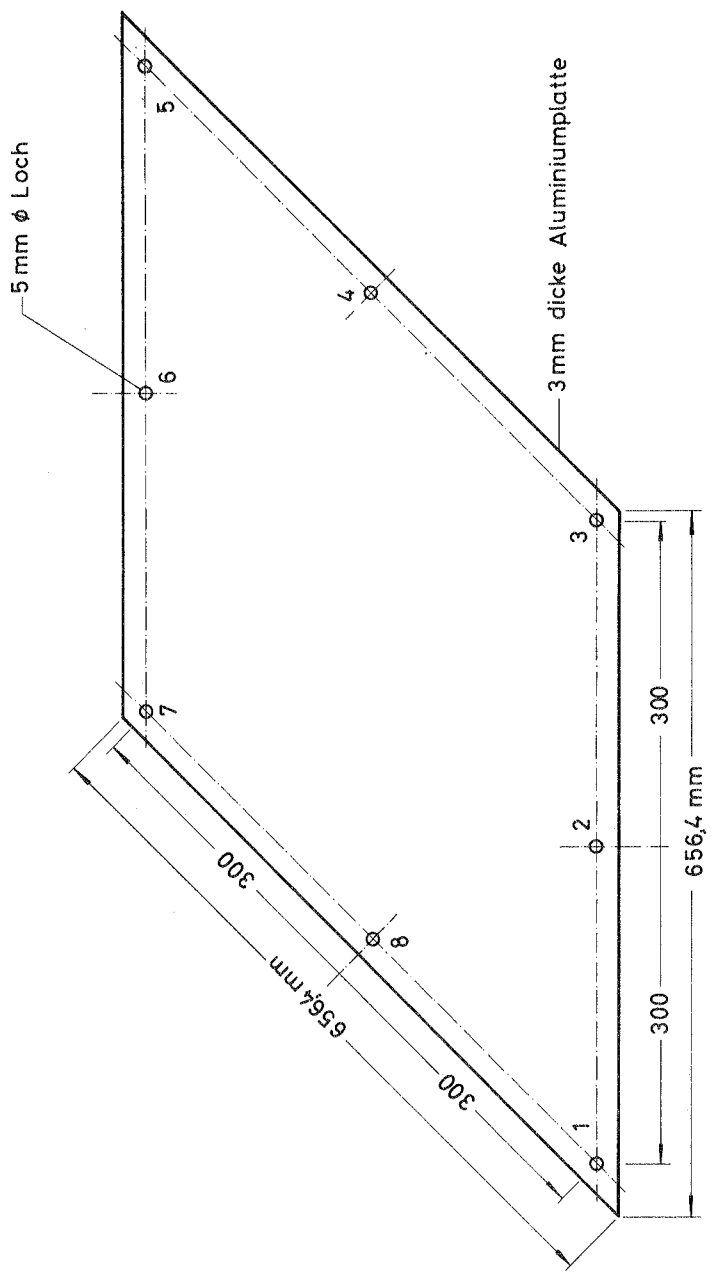


Bild 5.1: Modellplatte

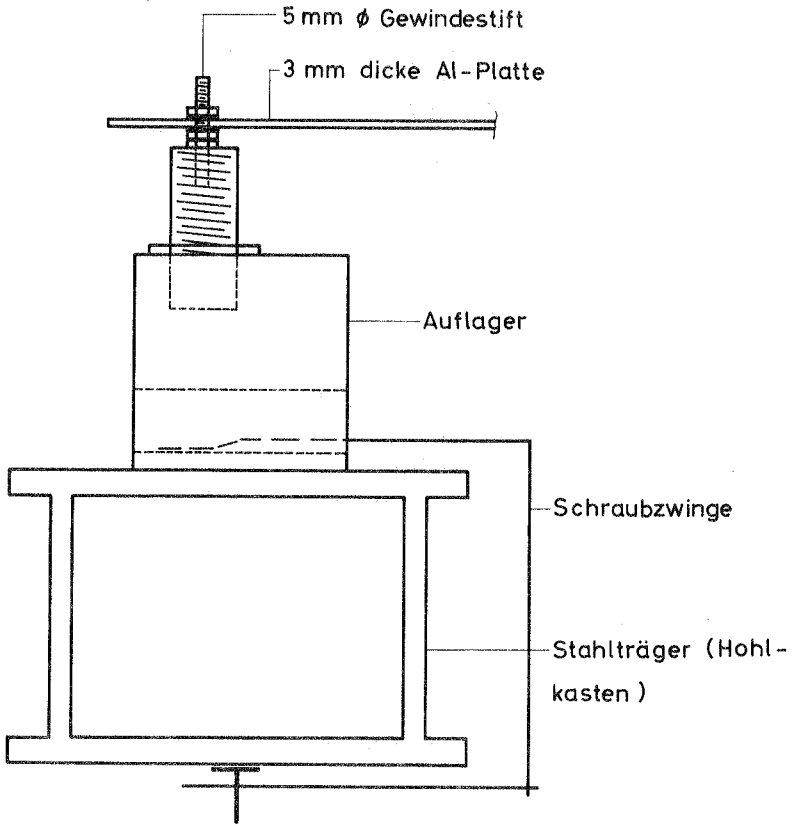


Bild 5.2: Auflager-Einrichtung

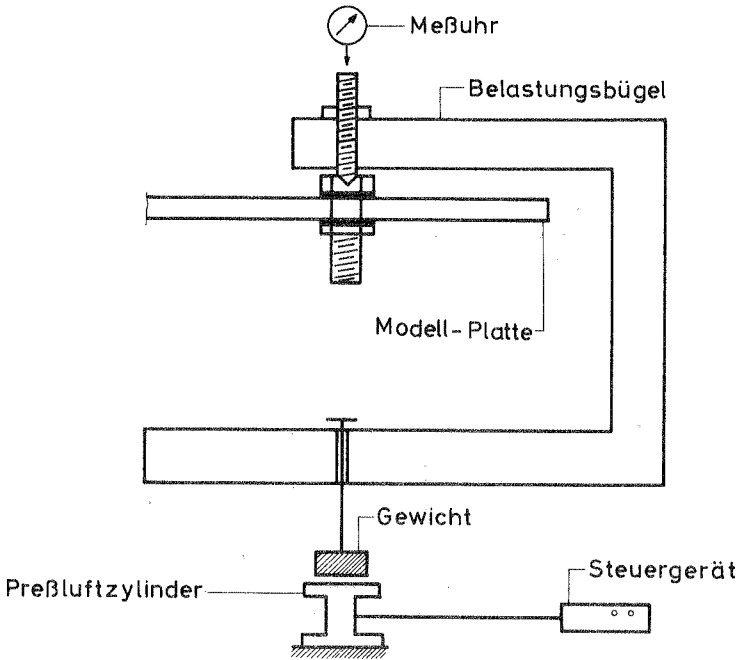


Bild 5.3: Einrichtung für die Vertikallast

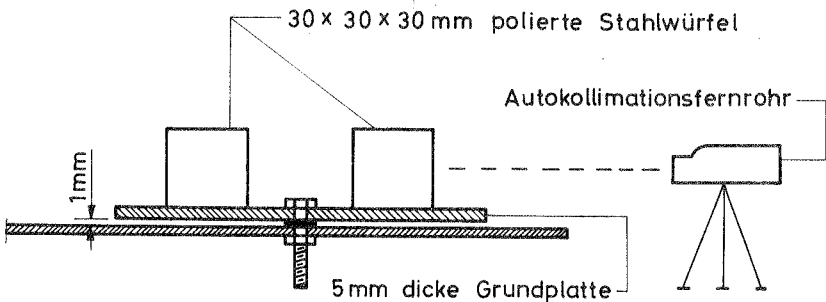


Bild 5.4: Vorrichtung zur Neigungsmessung

eingeschraubt, an deren Enden (unter und über der Platte) horizontal verlaufende Seile ein Kräftepaar einleiteten. Die Seile wurden über Rollen durch Gewichte belastet.

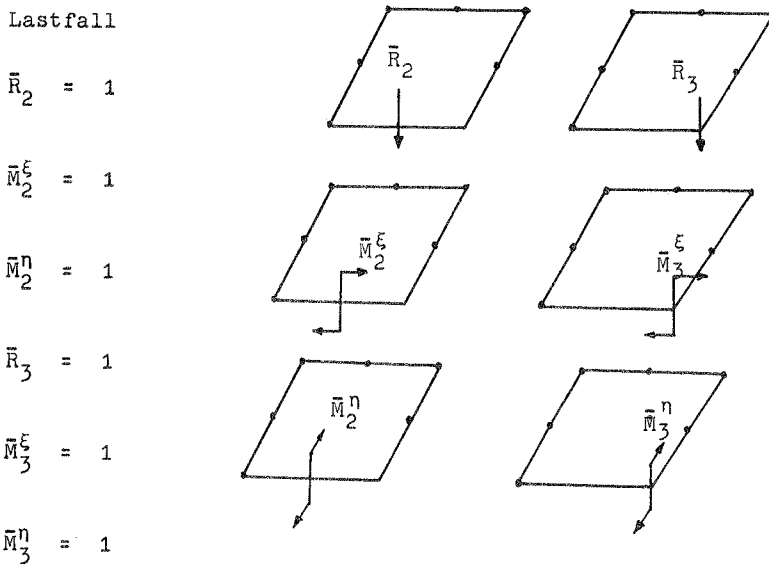
### 5.3 Meßtechnik

Die Durchsenkungen wurden an einer Meßuhr und die Neigungen an einem Autokollimationsfernrohr [17] abgelesen. Im Fernrohr befinden sich eine Lichtquelle, ein Strichkreuz und eine Skala. Als Spiegel wurde ein polierter Würfel verwendet, der an der Meßstelle stand. Der vom Spiegel reflektierte Lichtstrahl gab die Änderung der Neigung an der Meßstelle an. Bild 5.4 zeigt die Meßeinrichtung für das Fernrohr. Um die Neigungen in zwei Richtungen zu messen, wurden zwei Spiegel benutzt. Sie standen auf einer Platte, die von der Modellplatte durch eine Unterlagscheibe getrennt und nur an der Meßstelle mit ihr verschraubt war. Das Fernrohr war beweglich auf einem Stativ befestigt.

### 5.4 Lastfälle und Messungen

Die Platte war an 6 Punkten gelagert (Bild 5.1). Die Punkte 2 und 3 (Mitte des Randes und die stumpfe Ecke) sind frei. Sechs Lastfälle wurden untersucht.

Lastfall



Für jeden Lastfall wurden die resultierenden Verschiebungen ( $\bar{w}$ ,  $\bar{w}'$ ,  $\bar{w}''$ ) an den Punkten (2 und 3) abgelesen. Die Verschiebungen infolge einer Einheitslast oder eines Einheitsmomentes wurden aus den Messungen berechnet. Die Meßgenauigkeit wurde mit Hilfe des Betti-Maxwellschen Satzes überprüft. Danach gilt:

$$\left( \bar{R}_m \right) \left( \bar{w}_m \text{ infolge } \bar{M}_n^\xi \right) = \left( \bar{M}_n^\xi \right) \left( \bar{w}_n' \text{ infolge } \bar{R}_m \right)$$

Die Übereinstimmung der Modellmessungen mit diesem Satz hängt von den Messungen mit Fernrohr und Meßuhr, den Belastungseinstellungen für die vertikale Last und Momente, sowie von der Erfüllung der Voraussetzungen für die Gültigkeit des Betti-Maxwellschen Satzes ab.

Der Vergleich der Arbeitsprodukte ergab Unterschiede von 1 bis 8 %. Die auf modellstatischem Wege ermittelten Verschiebungen sind in Tabelle 5.1 in Klammern angegeben. Der Elastizitätsmodul  $E = 779\,600 \text{ kg/cm}^2$  für die Modellplatte wurde mit Hilfe eines Zugversuchs festgestellt.

#### 5.5 Vergleich zwischen den Modellmessungen und den Ergebnissen nach Methode II

Zum Vergleich wurde die analytische Lösung nach Methode II verwendet. Die Platte wurde in 64 (8x8) Elemente eingeteilt. Die für die Lastfälle  $\bar{R}_2 = 1$ ,  $\bar{M}_2^\xi = 1$ ,  $\bar{M}_2^\eta = 1$ ,  $\bar{R}_3 = 1$ ,  $\bar{M}_3^\xi = 1$ ,  $\bar{M}_3^\eta = 1$  ermittelten Verschiebungen ( $\bar{w}$ ,  $\bar{w}'$  und  $\bar{w}''$ ) werden in der Tabelle 5.1 angegeben. In Klammern stehen die Ergebnisse aus dem Versuch. Man erkennt aus der Tabelle 5.1 eine gute Übereinstimmung zwischen den beiden Ergebnissen.

Lastfall	$\bar{w}_2$ (cm)	$\bar{w}_2^1$	$\bar{w}_2^*$	$\bar{w}_3$ (cm)	$\bar{w}_3^1$	$\bar{w}_3^*$
$\bar{R}_2 = 1$	0,0674 (0,0675)	0,000944 (0,00123)	-0,00199 (-0,00158)	0,0473 (0,0465)	-0,00133 (-0,00121)	-0,00243 (-0,00232)
$\bar{M}_2^\xi = 1$	0,000944 (0,00142)	0,000314 (0,000366)	0,000192 (0,000212)	0,00246 (0,00281)	-0,0000536 (-0,0000564)	-0,000112 (-0,000124)
$\bar{M}_2^\eta = 1$	-0,00199 (-0,00160)	0,000192 (0,000221)	0,000347 (0,000369)	0,000220 (0,000246)	0,0000060 (0,0000084)	0,0000075 (0,0000074)
$\bar{R}_3 = 1$	0,0473 (0,05086)	0,00246 (0,00242)	0,000220 (0,000200)	0,1134 (0,1105)	0,00028 (0,00043)	-0,00363 (-0,00323)
$\bar{M}_3^\xi = 1$	-0,00133 (-0,00141)	-0,0000536 (-0,0000533)	0,0000060 (0,0000098)	0,00028 (0,00037)	0,000465 (0,000426)	0,000330 (0,000288)
$\bar{M}_3^\eta = 1$	-0,00243 (-0,00264)	-0,000112 (-0,000125)	0,0000075 (0,0000064)	-0,00363 (-0,00375)	0,000330 (0,000298)	0,000452 (0,000521)

Tabelle 5.1: Vergleich zwischen den Modellmessungen und den Ergebnissen nach Methode II

## 6. Z u s a m m e n f a s s u n g

Die Elementmethode ist ein Näherungsverfahren, in dem die Platte aus vielen einzelnen finiten Elementen zusammengesetzt wird. Der Grad der Annäherung hängt von der Zahl der Elemente, der Wahl der Biegefläche der Elemente und der Art der Verbindung zwischen den Elementen ab. Bei Erzielung der vollständigen Kontinuität der Verschiebungen zwischen den Elementen stellt die Elementmethode eine äquivalente Formulierung des Problems vom Minimum des Gesamtpotentials dar.

Aus den im 1. Kapitel zusammengefassten drei Gruppen von Elementmethoden wurde eine Kombination von erster und dritter Gruppe, nämlich das Problem der vollständigen Verschiebungskontinuität zwischen den Elementen in der vorliegenden Arbeit behandelt. In diesem Zusammenhang wurde eine verallgemeinerte Steifigkeitsmatrix entwickelt, welche die vollständige Kontinuität der Verschiebungen und Neigungen längs der Kanten der Elemente gewährleistet. (Methode II). Die verbesserte Steifigkeitsmatrix wurde in schiefwinkligen Koordinaten für ein schiefwinkliges Plattenelement hergeleitet, um sie bei den schiefwinkligen Platten anwenden zu können. Als Grenzfall ist die Erweiterung auf rechtwinklige Platten möglich.

Durch die Verwendung von Hermiteschen Polynomen reduziert sich die Transformationsmatrix zu einer Einheitsmatrix. Deswegen ist es möglich, die Steifigkeitsmatrix  $[k^+]$  mit Hilfe der angegebenen Tabellen in einfacher Weise zu ermitteln. Die schrittweise Bildung der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $[k^+]$  ermöglicht ein grosses Elementsystem, mit Hilfe von Rechenmaschinen mit Magnetbändern und verhältnismässig kleiner Speicherkapazität berechnen zu können.

Um den Vergleich zwischen der Methode II und der konventionellen Methode (Methode I) machen zu können, wurde die Methode I auf schiefwinklige Platten angewandt. Im

Rahmen der untersuchten Beispiele erkennt man, dass im Vergleich mit der Methode I die Methode II eine geringere Zahl von Plattenelementen benötigt, um die gleiche Genauigkeit der Verschiebungen zu erzielen. Ausser dieser Verbesserung ist die dabei folgende Stetigkeit der Verschiebungen von grösserer Bedeutung. Denn damit wird die durch Verwendung der Elementmethode entstehende Ungenauigkeit verkleinert.

Die Elementmethode stellt im Rahmen der Kirchhoff'schen Theorie ein günstiges Verfahren zur statischen Berechnung von Plattenproblemen dar. Die Genauigkeit der Methode hängt jedoch von der Geometrie des Tragwerks, der Belastungsart, den Randbedingungen, den Formen und der Zahl von Plattenelementen und der Wahl der Steifigkeitsmatrix ( $k, k^+$ ) ab. Mit der Vergrösserung der Zahl von Elementen kann der Fehlereinfluss der Steifigkeitsmatrizen vermindert werden. Man nimmt dann aber den grossen Rechenaufwand in Kauf. Aus den untersuchten Beispielen erkennt man, dass mit einer begrenzten Zahl von Elementen (z.B.  $6 \times 12$ ,  $9 \times 9$ ,  $8 \times 8$ ,  $8 \times 12$ ) unter Verwendung von verbesserten Steifigkeitsmatrizen der Elemente befriedigende Ergebnisse erzielt werden können.



Anhang A

Programm zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix eines Parallelo-  
grammelements nach Methode I

```
ADIVB          WAS PRODUCED
  ENTRY INTO THE TEMPORARY LIBRARY

ALGOR TR4 (2)   MV 11, AUG 68 ,  MODE 6
'PROCEDURE'STEI'MA(X,Y,M,E,H,MAMU,MAMUAT);
'REAL'X,Y,M,E;
'ARRAY'H;
'PROCEDURE'MAMU;
'PROCEDURE'MAMUAT;
'BEGIN'
'PROCEDURE'ADIVB(A,B,C,EPS,SING);
'VALUE'EPS;'REAL'EPS;'ARRAY'A,B,C;'LABEL'SING;'CODE'
'REAL'W,L,V,S;
'INTEGER'I,K;
'ARRAY'B,C,D,AR,AE[1:12,1:12];
V:=X*X;W:=Y*Y;L:=M*SIN(E)*SIN(E)+COS(E)*COS(E);
S:=1+COS(E)*COS(E)-M*SIN(E)*SIN(E);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'12'DO'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'12'DO'
B[I,K]:=C[I,K];=0;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'12'DO'
'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'12'DO'
AB[I,K]:=AE[I,K];=0;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'12'DO'AB[I,I];=1;
B[1,11]:=B[10,11];=B[3,9];=B[12,9];=-X;
B[4,11]:=B[7,11];=B[6,9];=B[9,9];=-X;
B[1,10]:=B[4,10];=B[2,9];=B[5,9];=-Y;
B[7,10]:=B[10,10];=B[8,9];=B[11,9];=+Y;
B[1,9]:=B[7,9];=X*Y;
B[4,9]:=B[10,9];=-X*Y;
B[2,8]:=B[5,8];=B[8,8];=B[11,8];=W;
B[1,8]:=B[10,8];=-X*W;B[4,8];=B[7,8];=X*W;
B[3,8]:=B[9,8];=2*X*Y;B[6,8];=B[12,8];=-2*X*Y;
B[3,7]:=B[6,7];=B[9,7];=B[12,7];=V;
B[1,7]:=B[4,7];=-V*Y;B[7,7];=B[10,7];=V*Y;
B[2,7]:=B[8,7];=2*X*Y;B[5,7];=B[11,7];=-2*X*Y;
B[2,6]:=B[5,6];=B[1,3];=B[4,3];=-W*Y;
B[8,6];=B[11,6];=B[7,3];=B[10,3];=W*Y;
B[1,6]:=B[7,6];=X*W*Y;B[4,6];=B[10,6];=-X*W*Y;
B[3,6]:=B[12,6];=-3*W*X;B[6,6];=B[9,6];=3*W*X;
B[3,5]:=B[12,5];=B[1,1];=B[10,1];=-X*V;
B[6,5];=B[9,5];=B[4,1];=B[7,1];=X*V;
B[1,5];=B[7,5];=V*X*Y;B[4,5];=B[10,5];=-V*X*Y;
B[2,5];=B[5,5];=-3*V*Y;B[8,5];=B[11,5];=3*V*Y;
B[1,4]:=B[4,4];=B[7,4];=B[10,4];=W;
B[3,4];=B[6,4];=-2*Y;B[9,4];=B[12,4];=2*Y;
B[3,3]:=B[6,3];=B[9,3];=B[12,3];=3*W;
B[1,2]:=B[4,2];=B[7,2];=B[10,2];=V;
```

```
B[2,2]:=B[1,2]:=-2*X;B[5,2]:=B[8,2]:=2*X;
B[2,1]:=B[5,1]:=B[8,1]:=B[11,1]:=3*V;
B[1,12]:=B[2,11]:=B[3,10]:=B[4,12]:=B[5,11]:=1;
B[6,10]:=B[7,12]:=B[8,11]:=B[9,10]:=B[10,12]:=1;
B[11,11]:=B[12,10]:=1;
C[1,1]:=48*V*X*Y;C[7,1]:=-32*V*X*Y*COS(E);
C[2,2]:=16*X*Y;C[5,2]:=-16*V*X*Y*COS(E);
C[6,2]:=-16*W*Y*X*COS(E);C[9,2]:=-16*X*Y*COS(E);
C[5,5]:=16*V*W*X*Y+(72*V*V*X*Y*S)/5;
C[9,6]:=8*W*Y*X*S;C[7,7]:=(32*V*X*Y*S)/3+(16*W*Y*X)/3;
C[8,7]:=(-32*X*W*Y*COS(E))/3-(32*Y*V*X*COS(E))/3;
C[3,3]:=48*W*Y*X;C[4,4]:=16*X*Y;
C[6,6]:=(72*X*W*W*Y*S)/5+16*V*W*X*Y;
C[8,8]:=(32*W*X*Y*S)/3+(16*V*X*Y)/3;
C[9,9]:=8*X*Y*S;
C[8,1]:=16*V*X*Y*L;C[4,2]:=16*X*Y*L;
C[7,3]:=16*X*W*Y*L;
C[8,3]:=-32*X*W*Y*COS(E);C[5,4]:=-16*Y*V*X*COS(E);
C[6,4]:=-16*X*W*Y*COS(E);C[9,4]:=-16*X*Y*COS(E);
C[6,5]:=8*V*W*X*Y*(2*L*S);C[9,5]:=8*V*X*Y*S;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'12'DO' 'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'12'DO'
C[I,K]:=C[K,I];
ADIVB(AB,B,AE,-8,SING);
MAMUAT(AE,C,D);
MAMU(D,AE,H);
'GOTO'REG;
SING;
PRINT('MATRIX B SINGULAER');
REG;
'END';
```

Anhang B

Programm zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix eines Parallelo-  
grammelements nach Methode II

```

ALCOR TR4 (2) MV 11. AUG 68 , MODE 6
'PROCEDURE STEIFMA(X,Y,M,E,H)'REAL'X,Y,M,E,J'ARRAY'H;
'BEGIN'
'REAL'P,A,B,C,D,F,G,O,J,N,L,Q,R;'INTEGER'I,K;
P:=X/Y/A;M:=M*SIN(E)*SIN(E)*COS(E)*COS(E);B:=1+COS(E)*M*SIN(E)*
SIN(E);C:=P*P-1/(P*P);D:=B*6*A;F:=4*COS(E)*(P+1/P)/16;G:=A+B;
N:=COS(E)*(P/3+1/P)/5;O:=COS(E)/P;L:=COS(E)*(P+1/(3*P))/5;J:=P*
COS(E);Q:=P*P;R:=1/(P*P)
H[1,1]:=H[5,5];H[9,9]:=H[13,13];:=156*O/35*72*G/25;
H[2,1]:= H[6,5];:= H[10,9];:=H[14,13];:=132*Q/210*78*R/35+12*D/50;
H[3,1]:=H[7,5];:= H[11,9];:= H[15,13];:=78*Q/35+132*R/210+12*D/50;
H[4,1]:=H[12,9];:=11*C/35*F+(8+11*A)/50;H[5,1]:=H[13,9];:=108*
Q/70-156*R/35-72*G/25;H[6,1]:=H[14,9];:=156*Q/420+78*R/35+12*G/50;
H[7,1]:= H[15,9];:= (54*Q-44*R)/70+2*J-12*D/50;H[8,1]:= H[16,9];:=
-(39*Q-66*R)/210+D/50-F;H[9,1]:=H[13,5];:=108*C/70+72*G/25;
H[10,1]:= H[9,2];:= (+26*Q+54*R)/70-12*G/50-2*O;H[11,1]:= H[9,3]
:= (54*Q+26*R)/70-12*G/50-2*J;H[12,1]:=H[9,4];:=78*C/420+G/50+F;
H[13,1]:=H[9,5];:=(-156*Q+54*R)/35-72*G/25;H[14,1]:= H[9,6];:=
(-44*Q+54*R)/70-12*D/50+2*O;H[15,1]:= H[9,7];:= H[13,3];:=H[11,5]
:= (78*Q-13*R)/35+12*G/50;H[16,1]:= H[14,3];:= H[11,6];:=H[9,8];:=
(66*Q-39*R)/210+D/50-F;H[2,2]:=H[10,10];:=12*Q/105+52*R/35+24*G/75+O
;H[3,2]:=H[11,10];:=66*C/210-F*(B+61*A)/50;H[4,2]:= H[12,10];:=
H[8,6];:= H[16,14];:=2*Q/35+22*R/105+2*D/75;H[5,2]:= H[13,10];:=
39*Q/105-78*R/35-12*G/50;H[6,2]:=H[14,10];:=(-*Q+26*R)/35-12*G/150
;H[7,2]:=H[15,10];:= (39*Q-66*R)/210-D/50-F;H[8,2]:= H[16,10];:=
-6*Q/140+22*R/210-D/150-N;H[10,2]:= (6*Q+18*R)/70+12*G/150+O;
H[11,2]:=H[10,3];:=78*C/420+G/50-F;H[12,2]:= H[10,4];:= -6*Q/140-
26*R/420-G/150+N;H[13,2]:= H[10,5];:=(-44*Q+54*R)/70-12*D/50-2*O;
H[14,2]:=H[10,6];:= -12*Q/105+36*R/70-24*G/75;H[15,2]:= H[13,4]
:= H[12,5];:=H[10,7];:= (66*Q-39*R)/210+D/50-F;H[16,2]:= H[14,4];:=
H[12,6];:= H[10,8];:= (6*Q-13*R)/105+4*G/150;
H[3,3]:=H[11,11];:=52*Q/35+12*R/105+24*G/75-J;H[4,3]:= H[12,11]
:= H[8,7];:=H[16,15];:=22*Q/105+2*R/35+2*D/75;H[5,3]:= H[13,11];:=
27*Q/35-132*R/210-2*J-6*D/25;H[6,3]:=H[14,11];:=(-39*Q+66*R)/210+D
/50+F;H[7,3]:=H[15,11];:= (18*Q-4*R)/35-24*G/75;H[8,3]:= H[16,11]
:= -(13*Q-6*R)/105+4*G/150;H[11,3]:= (18*Q+6*R)/70+12*G/150-J;H[12,3]
:= H[11,4];:= -26*Q/420+6*R/140-G/150+L;H[15,3]:=H[11,7];:= (26*Q-3
*R)/35-12*G/150;H[16,3];:= H[11,8];:=22*Q/210-6*R/140-D/150+L;
H[4,4]:=H[8,8];:=H[12,12];:=H[16,16];:=4*C/105+8*G/225;H[5,4];:=
H[13,12];:= (39*Q-66*R)/210-F*D/50;H[6,4]:=H[14,12];:= -6*Q/140*R
*22/210-D
/150+N;H[7,4];:= H[15,12];:= (13*Q-6*R)/105-4*G/150;H[8,4];:=H[16,1
2];:= -4*Q/140+2*R/105+4*G/450;H[12,4];:=C/78+G/450+F/12;H[15,4];:=
H[12,7];:=22*Q/210-6*R/140-D/150+L;H[16,4];:=H[12,8];:=2*Q/105+4*R
/140-4*G/450;H[8,5];:=H[16,13];:= -(11*A+8)/50-66*C/210+F;

```

```
H(14,5):= H(13,6):=(26*Q+54*R)/70-12*G/50+2*0;H(15,
5):= H(13,7):=(54*Q+26*R)/70-12*G/50+2*J;H(15,6):=H(14,7):=-78
*C/420*G/50-F;H(6,6):=H(14,14):=12*Q/105+52*R/35+24*Q/75+0;H(7,6
):=H(15,14):=-66*C/210-F*(B+61*A)/50;H(14,6):=(6*Q+18*R)/70+12*G/15
0
+0;H(16,5):=H(13,8):=78*C/420-G/50+F;H(16,6):= H(14,8):=-6*Q
/140-26*R/420-G/150-N;H(7,7):=H(15,15):=(52*Q+4*R)/35+J+24*G/75;
H(15,7):=(18*Q+6*R)/70+12*G/150+J;H(16,7):= H(15,8):=-26*Q/420-
6*R/140-L-G/150;H(16,8):=-C/70-F/12+G/450;
H(6,5):=-H(6,5);H(10,9):=-H(10,9);H(11,9):=-H(11,9);
H(12,7):=-H(12,7);H(15,13):=-H(15,13);
H(14,9):=-H(14,9);H(15,9):=-H(15,9);H(9,2):=-H(9,2);
H(9,3):=-H(9,3);H(9,6):=-H(9,6);H(9,7):=-H(9,7);
H(13,3):=-H(13,3);H(14,3):=-H(14,3);H(11,6):=-H(11,6);
H(12,10):=-H(12,10);H(16,14):=-H(16,14);H(13,10):=-H(13,10
);H(16,10):=-H(16,10);H(10,4):=-H(10,4);H(10,5):=-H(10,5
);H(13,4):=-H(13,4);H(12,5):=-H(12,5);H(14,4):=-H(14,4
);H(10,8):=-H(10,8);H(12,11):=-H(12,11);H(8,7):=-H(8,7);
H(13,11):=-H(13,11);H(16,11):=-H(16,11);H(11,4):=-H(11,4
);H(11,8):=-H(11,8);H(14,12):=-H(14,12);H(15,12):=-H(15,12
);H(14,5):=-H(14,5);H(13,7):=-H(13,7);H(14,8):=-H(14,8)
;
H(16,7):=-H(16,7);
'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO''FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO'H(I,K):=H
(K,I);
'FOR'K:=2'STEP'4'UNTIL'14'DO''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO'
H(I,K):=H(I,K)*X;
'FOR'K:=3'STEP'4'UNTIL'15'DO''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO'
H(I,K):=H(I,K)*Y;
'FOR'K:=4'STEP'4'UNTIL'16'DO''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO'
H(I,K):=H(I,K)*X*Y;
'FOR'K:=2'STEP'4'UNTIL'14'DO''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO'
H(K,I):=H(K,I)*X;
'FOR'K:=3'STEP'4'UNTIL'15'DO''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO'
H(K,I):=H(K,I)*Y;
'FOR'K:=4'STEP'4'UNTIL'16'DO''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO'
H(K,I):=H(K,I)*X*Y;
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO''FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'16'DO'
H(I,K):=H(I,K)/(X*Y);
'END';
```

Anhang C

Programm zur Berechnung der Biegemomente aus den  
Knotenverschiebungen  $\{\bar{w}\}$

```
ALCOR TR4 (2)    MV 11, AUG 68 ,  MODE 8
'PROCEDURE'BIEGEMOMENT(X,Y,M ,E,WEL,ØM,MAMU);
'REAL'X,Y,M,E;'ARRAY'WEL,ØM;'PROCEDURE'MAMU;
'BEGIN' 'INTEGER'I;'ARRAY'M1,M2,M3,M4,M11,M22,M33,M44,M111,M222,
M333,M444[1:3,1:1];'ARRAY'KO,ST[1:3,1:3];
KO[1,1]:=1;KO[1,2]:=KO[1,3]:=KO[3,2]:=Ø;
KO[2,1]:=COS(E)*COS(E)/(SIN(E)*SIN(E));
KO[2,2]:=1/(SIN(E)*SIN(E)); KO[2,3]:=-2*ØØS(E)/(SIN(E)*SIN(E));
KO[3,1]:=-COS(E)/SIN(E);KO[3,3]:=1/SIN(E);
ST[1,1]:=ST[2,2]:=1;ST[1,2]:=ST[2,1]:=M;
ST[1,3]:=ST[2,3]:=ST[3,1]:=ST[3,2]:=Ø;ST[3,3]:=2*(1-M);
M1[1,1]:=6*(-WEL[1,1]*WEL[5,1])/(X*X)+2*(-2*WEL[2,1]-WEL[6,
1])/X;M1[2,1]:=6*(-WEL[1,1]*WEL[13,1])/(Y*Y)+2*(-2*WEL[3,1]-
WEL
[15,1])/Y;M1[3,1]:=WEL[4,1];
MAMU(KO,M1,M11);MAMU(ST,M11,M111);
M2[1,1]:=6*(WEL[1,1]-WEL[5,1])/(X*X)+2*(WEL[2,1]+2*WEL[6,1])
/X;
M2[2,1]:=6*(-WEL[5,1]+WEL[9,1])/(Y*Y)+2*(-2*WEL[7,1]-WEL[11,1]
);
/Y;M2[3,1]:=WEL[8,1];
MAMU(KO,M2,M22);MAMU(ST,M22,M222);
M3[1,1]:=6*(-WEL[9,1]+WEL[13,1])/(X*X)+2*(2*WEL[10,1]+WEL[14,1]
);
/X;M3[2,1]:=6*(WEL[5,1]-WEL[9,1])/(Y*Y)+2*(WEL[7,1]+2*WEL[11,
1]
)/Y;M3[3,1]:=WEL[12,1];
MAMU(KO,M3,M33);MAMU(ST,M33,M333);
M4[1,1]:=6*(WEL[9,1]-WEL[13,1])/(X*X)+2*(-WEL[10,1]-2*WEL[14,1]
);
/X;M4[2,1]:=6*(WEL[1,1]-WEL[13,1])/(Y*Y)+2*(WEL[3,1]+2*WEL[15
,1]
)/Y;M4[3,1]:=WEL[16,1];
MAMU(KO,M4,M44);MAMU(ST,M44,M444);
'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'3'DO'
'BEGIN'
BM[I ,1]:=-M1[I,1]*(SIN(E)*SIN(E)*SIN(E));
BM[3+I,1]:=-M22[I,1]*(SIN(E)*SIN(E)*SIN(E));
BM[6+I,1]:=-M333[I,1]*(SIN(E)*SIN(E)*SIN(E));
BM[9+I,1]:=-M444[I,1]*(SIN(E)*SIN(E)*SIN(E));
'END';
'FOR'I:=Ø'STEP'3'UNTIL'9'DO'BM[3+I,1]:=(BM[3+I,1])/2;
'END';
```

## L e b e n s l a u f

Am 28. Oktober 1936 wurde ich in Kolhapur/Indien als Sohn des Arztes G.A. Tamhankar und seiner Ehefrau Sumatibai geboren. Nach zwölfjährigem Schulbesuch erwarb ich im Jahre 1953 mein Reifezeugnis (Secondary School Certificate). Zwei Jahre danach studierte ich am Rajaram College, Kolhapur, wo ich die Abschlußprüfung (Intermediate Science) ablegte. Im Jahr 1955 immatrikulierte ich mich am Walchand College of Engineering, Sangli in der Fachrichtung Bauingenieurwesen und erwarb im Mai 1958 den akademischen Grad Bachelor of Engineering. Ich setzte mein Studium im Jahr 1961 in der Fachrichtung Konstruktiver Ingenieurbau an der Universität Roorkee fort und erwarb den akademischen Grad Master of Engineering.

Im Jahr 1958 begann ich mit meiner praktischen Tätigkeit als Bauingenieur an einer Baustelle in Gujerat. Seit 1960 war ich am Forschungsinstitut für Konstruktiven Ingenieurbau in Roorkee zunächst für zwei Jahre als Forschungsstipendiat (Senior Research Fellow) und anschließend als wissenschaftlicher Angestellter bis Mai 1966 tätig.

Seit Wintersemester 1966 bin ich als Stipendiat mit wissenschaftlicher Arbeit am Lehrstuhl für Baustatik und am Lehrstuhl für Massivbau beschäftigt.