

✓

**TRAGVERHALTEN UND FORMFINDUNG
VERSTEIFTER KUPPELSCHALEN
ÜBER QUADRATISCHEM GRUNDRISS
AUF EINZELSTÜTZEN**

von

HANS-GÜNTHER BERG



Bericht Nr. 79 - 2

aus dem Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Direktor: Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Stuttgart 1979

Dieser Bericht wurde unter dem Titel 'Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen' als Dissertation von Herrn Hans-Günther Berg dem Fachbereich 11, Konstruktiver Ingenieurbau, der Universität Stuttgart am 7.7.1977 vorgelegt. Diese Dissertation entstand aufbauend auf einem von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsvorhaben, das zum Ziel hatte, das Tragverhalten versteifter Kuppelschalen auf Einzelstützen mit nicht rotations-symmetrischem Grundriß zu untersuchen. Die mündliche Doktorprüfung fand am 1. Februar 1979 statt.

Berichter waren:

Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer

Professor Dr.-Ing. N. S. Dimitrov

Berichte können durch das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Postfach 560, 7000 Stuttgart 1, bezogen werden.

KURZFASSUNG:

Das Tragverhalten von horizontal unverschieblichen punktgestützten Kugel-, Ellipsoid-, Paraboloid- und Membranschalen über quadratischem Grundriß unter Eigengewichts-, Schnee- und Windlasten wird in Abhängigkeit einiger Parameter, wie

- Scheitelhöhe der Schale
 - Auflagerbreite der punktförmigen Lager
 - Krümmungsverhältnis im Auflagerbereich
 - Verdickung der Schale in Auflagernähe, entlang der Diagonalen oder entlang des Randes
 - Stützung des Randes durch rechteckige Randträger
- untersucht.

Mit der Verwendung von Membranschalen nähert man sich einer 'idealen' Schalenform, da bei der Lastabtragung in den Schalen geringe Verformungen und Spannungen entstehen. Auf zusätzliche Konstruktionselemente wie Randversteifung, weitere Einzelstützen entlang des Randes, Vorspannen des Schalenrandes oder Angleichen der Schalenkrümmung im Auflagerbereich an die Neigung der größten Auflagerkraft kann bei Membranschalen verzichtet werden. 'Unverformte' Gleichgewichtslagen punktgelagerter Membranen können für eine achsensymmetrische Lastgruppe aus Eigengewicht und konstante oder veränderliche Schneelast oder für eine antimetrische konstante oder veränderliche Flächenlast mit der Pucher'schen Differentialgleichung gefunden werden (Bild 4.16-4.19, 4.26-4.31).

SUMMARY:

The bearing capacity of horizontal nondisplaceable pointsupported dome-shaped-shells which are sections out of spheres, ellipsoids, paraboloids and membrane shells above a quadratic plan loaded by dead weight, snow- and windloads, is studied varying the following parameters:

- height of the vertex of the shell
- width of the supports
- the curvature of the shell near to the supports
- thickness of the shell near to the supports, along the diagonals or along the border
- additional support of the border by rectangular girders

Using membrane shells in construction one gets closer to the 'ideal' dome-shaped shells because these shells show very small deformations carrying those loads.

Further details in constructions can be dropped, like stiffening, prestressing or an additional supporting of the border of the shell or assimilating the curvature of the shell with the gradient of the forces at the supports. 'Undeformed' equilibrium configurations of point supported membranes can be found with Pucher's differential equation for axial symmetrical groups of loads - dead weight and constant or variable snow load - or for antimetrical constant or variable distributed loads (picture 4.16-4.19, 4.26-4.31).

RESUME:

Le mécanisme de résistance des coques sur un plan quadratique appuyées par points fixés horizontalement et verticalement dont les plans moyens sont formés par des sphères, des ellipsoïdes, des paraboloides et des coques à membranes, chargés de poids mort ou de neige et de vent est étudié par une variation des paramètres

- hauteur du coque
- largeur des appuis
- rayon de raccordement dans la région d'appui
- épaisseur de la région d'appui, du long de la diagonale et du bord
- appui du bord par des poutres rectangulaires

Si on utilise des coques à membranes en construction on s'approche des dômes 'idéales', parce que ces coques chargés de poids mort ou de neige et de vent présentent des très faibles déformations. D'autres détails de constructions ne sont plus nécessaires, comme des bords raidis et précontraints, des bords appuyés par points ou une coordination de rayons de raccordement de la coque avec l'inclinaison de puissances des supports ponctuels. On peut trouver des configurations à membranes en équilibres, appuyées par points et 'non déformées' pour un groupement des charges symétriques (du poids propre et une charge de neige constante ou variable) ou asymétriques (des charges distribuées constantes ou variables) avec l'équation différentielle du Pucher (illustration 4.16-4.19, 4.26-4.31).

RESUMEN:

En el siguiente estudio se analiza la influencia de diversos parámetros sobre el comportamiento estático de las cáscaras de proyección cuadrada con apoyos puntuales fijos. Se estudian cáscaras esféricas, elipsoides y paraboloides, bien como cáscaras membranales. Son consideradas las cargas de peso propio, de

nieve y de viento. Los parametros analizados son:

- altura libre de la cáscara
- largura de los apoyos puntuales
- rayo de curvatura en los apoyos
- variación de la espesura en las zonas de apoyo, a lo largo de las diagonales o de los bordes
- apoyo de los bordes libres en vigas de contorno

Mediante el empleo de cáscaras membranales, se logra una aproximación a las cáscaras de forma 'ideal': por que las cáscaras presentan pocas deformaciones bajo la influencia de las cargas anteriormente mencionadas. En el caso de dichas cáscaras membranales, pueden omitirse ciertos elementos constructivos, como apoyos puntuales adicionales en diversos puntos de los bordes, refuerzos a lo largo de los mismos, o el pretensado de dichos refuerzos. Asimismo, no es necesario cambiar la forma de la cáscara en el entorno del apoyo, adaptando su inclinación en la cáscara sin deformar, sobre apoyos puntuales, pueden ser calculados con la ecuación diferencial de Pucher para el caso de cargas axialmente simétricas debidas a peso propio, carga de nieve, o bien para una carga distribuida antisimétrica, uniforme o variable (estampa 4.16-4.19, 4.26-4.31).

INHALTSVERZEICHNIS	Seite
Schrifttum	9
1. Einführung	23
1.1 Überblick	23
1.1.1 Probleme der Formgebung bei Kuppelschalen	25
1.1.2 Methoden der Formfindung	26
1.1.3 Statische Berechnung und statische Formprobleme verschiedener Kuppelschalen	29
2. Arbeitsprogramm	34
2.1 Angewandte Berechnungsmethode	35
2.2 Angaben zu den Schalen und den Materialkennwerten	45
2.3 Angaben zu den Lastfällen	47
2.4 Parametervariationen	50
2.4.1 Scheitelhöhen	50
2.4.2 Grundrißabmessungen	52
2.4.3 Variation der Form	52
2.4.4 Variation der Schalendicke	60
2.4.5 Lagerungen	63
2.5 Diskretisierung und Genauigkeit der Rechenergebnisse	65
3. Tragverhalten horizontal unverschieblich, punktförmig gelagerter Rotationsschalen über quadratischem Grundriß	68
3.1 Verformungen und Schnittgrößen einer Kugelschale unter Eigengewicht und Windlast	69
3.2 Angaben zu den nachfolgenden Tabellen und den Ergebnisblättern	76
3.3 Unversteifte Kuppelschalen (Ellipsoid-, Kugel- und Paraboloidschalen)	78
3.4 Verbreiterung des punktförmigen Auflagers	80
3.5 Lineare Zunahme der Schalendicke im Auflagerbereich	86
3.6 Variation der Kugelschalenkrümmung im Auflagerbereich	95
3.7 Tragverhalten von Ellipsoid- und Paraboloidschalen im Vergleich zur Kugelschale	101
3.8 Stützung des Schalenrandes	103
3.8.1 Versteifung des Schalenrandes durch ein stufenweises Ansteigen der Schalendicke	109

	Seite
3.8.2 Stützung des Randes durch einen Randträger	121
3.8.3 Stützung des Schalenrandes durch Fassadenstützen	137
3.9 Versteifung der Kugelschale entlang der Diagonalen durch ein stufenweises Ansteigen der Schalendicke	137
3.10 Versteifung der Kugelschale entlang der Diagonalen durch ein stufenweises Ansteigen der Schalendicke und am Schalenrand durch einen rechteckigen Randträger	140
4. Tragverhalten horizontal unverschieblich, punktförmig gelagerter achsensymmetrischer Membranschalen über quadratischem Grundriß	143
4.1 Einleitung und verwendete Bezeichnungen	143
4.2 Angewandte Methode	146
4.2.1 Einführung	146
4.2.2 Randbedingungen der Spannungsfunktion für randträgerlose Schalen	149
4.2.3 Die Form der Schale entlang der Ränder	150
4.2.4 Auflagerkräfte für eine achsensymmetrische, vertikale Belastung (z.B. konstante Schneelast p)	150
4.3 Spannungsfunktion und Formen von Membranschalen für den Lastfall konstante, vertikale Flächenlast p	151
4.3.1 Die Spannungsfunktion	151
4.3.2 Die Bedeutung der Parameter K und C der Spannungsfunktion	151
4.3.3 Die Formen des Schalenrandes	156
4.3.4 Die Formen der Schalenmittelfläche im Inneren	157
4.4 Membranschalen für den antimetrischen Lastfall konstante, vertikale Flächenlast p	163
4.4.1 Randbedingungen für die Spannungsfunktion	163
4.4.2 Die Form der antimetrischen Membranschalen entlang des Randes und im Schaleninneren	164
4.5 Membranschalen für die symmetrischen Lastgruppen aus Eigengewicht und konstanten oder veränderlichen, vertikalen Flächenlasten (Schneelasten)	171
4.5.1 Verschiedene Formen von Membranschalen	174
4.5.2 Genäherte Beschreibung der Membranschalenmittelfläche durch einen Polynomansatz	183
4.6 Vergleich der möglichen Gleichgewichtslagen 'unverformter' und geometrisch nichtlinear verformter Membranen	187

	Seite
4.6.1 Gleichgewichtslage der 'unverformten' zweidimensionalen Membran (z.B. Seil)	188
4.6.2 Gleichgewichtslage der geometrisch nichtlinear verformten zweidimensionalen Membran aus einem linear elastischen, isotropen Material	189
4.6.3 Gleichgewichtslage der 'unverformten' dreidimensionalen Membran	191
4.6.4 Gleichgewichtslage der geometrisch nichtlinear verformten dreidimensionalen Membran aus einem linear elastischen, isotropen Material	194
4.6.5 Vergleich zwischen der Form einer Membranschale und der Gleichgewichtslage einer, aus einer ebenen Ausgangslage geometrisch nichtlinear verformten, linear elastischen, isotropen Membran	195
4.6.6 Gleichgewichtslagen in den Ecken horizontal unverschieblich punktförmig gelagerter Membranen mit Falten	198
4.7 Tragverhalten von randträgerlosen Membranschalen, deren Mittelflächen durch eine achsensymmetrische Lastgruppe bestimmt werden	199
4.7.1 Unversteifte Membranschalen	203
4.7.2 Lineare Zunahme der Schalendicke im Auflagerbereich	204
4.7.3 Tragverhalten von punktgestützten Kuppelschalen, deren Schalenmittelflächen von den Membranformen nicht affin abweichen	206
4.7.4 Vergleich von Kugel-, Ellipsoid-, Paraboloid- und Membranschalen hinsichtlich ihrer Konstruktionselemente	211
4.8 Tragverhalten von randträgerlosen Membranschalen, deren Mittelflächen durch eine antimetrische Lastgruppe bestimmt werden	211
5. Zusammenfassung	216
5.1 Kuppelschalen, deren Mittelflächen durch Ausschnitte aus Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen gewonnen werden (Abschnitt 3)	216
5.2 Achsensymmetrische Membranschalen (Abschnitt 4)	217
Anhang	219

SCHRIFTUMSVERZEICHNIS:

1. Eine Auswahl ausgeführter Kuppelschalen über polygonalem Grundriß:

- [1.1] Beck, H.: Die tragende Konstruktion der Festhalle der Farbwerke Hoechst AG.
Der Bauingenieur 38, 1963, Heft 3, S. 95.
- [1.2] Dimitrov, N. S.: Vom Bau des Forschungsreaktors bei München.
VDI-Zeitschrift Bd. 102 (1960) Nr. 24,
S. 1140/48, VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf.
- [1.3] Doganoff, J.: UL-Kuppelschalen, System Doganoff,
Die Bautechnik, 1975, H. 1, S. 33.
- [1.4] Isler, H.: Die Buckelschale, ein interessantes Bauelement.
Schweizerische Bauzeitung Nr. 23, 1955.
- [1.5] Joedicke, J.: Dokumente der modernen Architektur.
Karl-Krämer-Verlag Stuttgart.
- [1.6] Kupfer, H.: Spannungszustand von Kugelschalen mit lotrecht
gestützten Rändern über beliebigem Grundriß,
erläutert am Beispiel der Schalenkuppel des
Auditorium maximum der Universität Hamburg.
Proc. of the Coll. 'Simplified Calculation
Methods of Shell Structures',
Brüssel 1961, S. 191/205, North-Holland-Publ.-
Comp., Amsterdam, 1962.
- [1.7] Leonards, L.: Neubau des Hörsaalgebäudes der Naturwissenschaft-
lichen Fakultät der Johannes-Gutenberg-Universität
Mehmel, A. Mainz.
Der Bauingenieur 44, 1969, S. 87.
- [1.8] Mahr, D.: Schalenbauten, konstruktiver Ingenieurbau,
Gorny, P. Berichte, Heft 6, Institut für konstruktiven
Rothert, H. Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum.

- [1.9] Mehmel, A.: Einige Ergebnisse einer modellstatistischen Stabilitätsuntersuchung der Kuppel der Festhalle der Farbwerke Hoechst AG.
Der Bauingenieur 38, 1963, Heft 3, S. 106.
- [1.10] Mehmel, A.: Über einige Grundlagen des modernen Massivbaues.
Der Bauingenieur 42, 1967, S. 77.
- [1.11] Otto, F.: Das hängende Dach.
Bauwelt Verlag der Ullstein A.G. Berlin, 1954.
- [1.12] Otto, F.: Zugbeanspruchte Konstruktionen Bd. 1 und Bd. 2,
Trostel, R. Ullstein A.G. Berlin, 1962.
- [1.13] Rühle, H.: Räumliche Dachtragwerke Konstruktion und Ausführung.
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1969,
Verlagsgesellschaft Rudolf Müller, Köln-Braunsfeld.
- [1.14] Schmitz, H.: Das Schalentragerwerk der Städtischen Bühnen Dortmund, Konstruktion und Ausführung.
Beton- und Stahlbetonbau 60, 1965, S. 133.
- [1.15] Torroja, E.: Logik der Form.
Verlag Georg D. W. CALLWEY, München 1961.
- [1.16] Weidemann, H.: Das Planetarium der Stadt Bochum.
Beton- und Stahlbetonbau 58, 1963, S. 177.
- [1.17] Zerna, W.: Zur Festigkeitsuntersuchung des Schalentragerwerks der Städtischen Bühnen Dortmund.
Krätzig, W. Beton- und Stahlbetonbau 59, 1964, S. 193.
Twelmeier, H.

2. Allgemeine Grundlagen der Schalentheorie:

- [2.1] Flüge, W.: Stresses in Shells.
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York,
3. Auflage 1966.

- [2.2] Gravina, P.B.J.: Theorie und Berechnung der Rotationsschalen.
Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg,
1961.
- [2.3] Hampe, E.: Statik rotationssymmetrischer Flächentragwerke.
- Insbesondere Band 3: Kegelschale, Kugelschale.
VEB-Verlag für Bauwesen, Berlin, 2. Auflage 1966.
- [2.4] Kalnins, A.: Analysis of shells of revolution subjected to
symmetrical and nonsymmetrical loads.
Trans. ASME, J. of Applied Mechanics Sept. 1964,
S. 467/476.
- [2.5] Kraus, H.: Thin Elastic Shells.
J. Wiley, New York, London, Sydney, 1962.
- [2.6] Novoshilov, V.V.: Thin Shell Theory.
P. Noordhoff, Groningen, The Netherlands,
2. Auflage, 1964.
- [2.7] Pucher, A.: Über den Spannungszustand in doppelt gekrümmten
Flächen.
Beton und Eisen 33 (1934), pp. 298-304.
- [2.8] Szmodits, K.: Statik der Schalenkonstruktionen.
B.G. Teubner-Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1966.
- [2.9] Wlassow, W.S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendung in
der Technik.
Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
- [2.10] Wunderlich, W.: Differentialsystem und Übertragungsmatrizen der
Biegetheorie allgemeiner Rotationsschalen.
Schriftenreihe des Lehrstuhls für Stahlbau der
TH Hannover, Heft 4, 1966.

3. Kuppelschalen mit nicht rotationssymmetrischer Berandung

- [3.1] Aas Jakobsen, A.: Kugelschalen über vier- und vieleckigem Grundriß. Abhd1. IVBH, 1937/38, S. 1/17.
- [3.2] Becker, M.: Beitrag zur Schalenberechnung nach einem verallgemeinerten Variationsprinzip und nach der überbestimmten Kollokation. Dissertation Universität Stuttgart 1972.
- [3.3] Csonka, P.: Membranschalen. Bauingenieur-Praxis, Heft 16, Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin, München 1966.
- [3.4] Conner, J.J.: Automatic solution of Pucher's equation. Lamar, S. Proc.Americ.Soc.Civ.Engrs. (ASCE, J.Struct.Div.) Wolf, J.P. 93, 1967 Nr. St. 2, S. 359.
- [3.5] Conway, H.D.: Application of the Point-Matching Method to Leissa, A.W. Shallow-Spherical-Shell-Theory. Trans. ASME, J. Appl. Mech. 29 (1962) 4, S. 745/747.
- [3.6] Doganoff, J.: Berechnung von Kugelschalen über rechteckigem Grundriß. Werner-Verlag, Düsseldorf, 1962.
- [3.7] Fischer, L.: Kreisparaboloidschale und Seifenblasen-Analogie. Die Bautechnik, 42, 1965, S. 229.
- [3.8] Hotzler, H.: Schnittgrößen und Formänderung der flachen, dünnen, elastischen Kugelschale über rechteckigem Grundriß unter dem Einfluß von linear veränderlichen Flächenlasten und Temperaturbeanspruchungen. Die Bautechnik, 42, 1965, H.1, S. 13.
- [3.9] Kollár, L.: Schalenkonstruktionen. Beton-Kalender II, 1974, W. Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf.

- [3.10] Krstič, M.: Berechnung der elastischen sphärischen Schale über gleichseitigem Dreiecksgrundriß. Bautechnik 4 (1961) S. 134/136.
- [3.11] Lederer, F.: Kugelschalen über vieleckigem Grundriß. Proc. of The Symposium on Shell Research, Delft 1961. North-Holland-Publ.-Comp. Amsterdam.
- [3.12] Oravas, G.-A.: Stress and Strain in Thin Shallow Spherical Calotte Shells. Abhandl. IVBH 17 (1957) S. 139/160.
- [3.13] Oravas, G.-A.: Analysis of Thin Elastic Shallow Segmental Shells Abhandl. IVBH 18 (1958) S. 201/214.
- [3.14] Ramm, E.: Beitrag zur praktischen Berechnung dünner Kugelschalen bei nicht rotationssymmetrischer Berandung nach der linearen Biegetheorie. Dissertation Universität Stuttgart 1972.
- [3.15] Spierig, S.: Beitrag zur Lösung von Scheiben-, Platten- und Schalenproblemen mit Hilfe von Gitterrostmodellen. Dissertation, Fak.f. Maschinenwesen, TH Hannover, Juli 1963; vgl. auch: Abh. d. Braunsch. wiss. Ges. XV, 1963.
- [3.16] Walkinshaw, D.S.: On Thin Shallow Elastic Shells over Polygonal Bases. Riley, G.E. Siddal, J.N. Oravas, G.-A. Abhandl. IVBH 28, II, (1968) S. 175/192.
- [3.17] Zimmer, V.H.: Ein Beitrag zur Berechnung der randversteiften Kugelschale über rechteckigem Grundriß. Wiss. Z. Techn. Uni. Dresden 16 (1967) 4, S. 1083/1092.
- [3.18] Zimmer, V.H.: Die randversteifte flache Kugelschale über rechteckigem Grundriß. Bauplanung - Bautechnik 23 (1969) 7, S. 340/344.

- [3.19] Zimmer, V.H.: Schnittkraftdiagramme für flache Kugelschalen über rechteckigem Grundriß.
Bauplanung - Bautechnik 23 (1969) 8, S. 399/401.
- [3.20] Zimmer, V.H.: Die flache Kugelschale über rechteckigem Grundriß.
Wiss. Z. Techn. Uni. Dresden 18 (1969) 5, S. 983/991.
- [3.21] Zimmer, V.H.: Berechnungsverfahren für flache Kugelschalen über rechteckigem Grundriß.
Bauplanung - Bautechnik 24 (1970) 11, S. 553/556.

4. Formgebung bei Kuppelschalen und Membrankonstruktionen

- [4.1] Bienert, G.: Statische Formprobleme der Gewölbe und Schalenkuppeln.
Bauplanung und Bautechnik 7, 1953, H. 6, S. 251.
- [4.2] Csonka, P.: Ein Beitrag zur zweckmäßigen Formgebung der Kappenschalen über rechteckigem Grundriß.
Int. Vereinigung Brücken- und Hochbau, Abhandlungen 16, 1956, Seite 71
Bauplanung - Bautechnik 11, 1957, H. 11, S. 149.
- [4.3] Csönka, P.: Special Boundary Conditions in Membrane Shells.
Concrete and Constructional Engineering 59 (1964) pp 327-331, 375-377.
- [4.4] Csonka, P.: Membranschalen,
Bauingenieur-Praxis H. 16, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin-München 1966.
- [4.5] Csonka, P.: Membrane Shells with Point Supports.
Proceedings of the LASS Pacific Symposium, Part I, Honolulu, Hawaii, October 11-15, 1971.

- [4.6] Csonka, P.: Point-Supported Shells with free Boundary.
Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae,
Tomus 75 (1-4), pp 121-136 (1973).
- [4.7] Csonka, P.: Ribless Membrane Shells above a Regular Polygonal
Base.
Soertryk af Bygningstatiske Meddelelser Vol. 46,
No. 4. pp 109-143 (1975).
- [4.8] Isler, H.: Experimental shell design.
Shell research 1961, Delft.
- [4.9] Isler, H.: Schalen für Repräsentativ- und Industriebauten
(Schalen in Beton und Kunststoff, Entwurf,
Bemessung, Ausführung).
Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin 1970,
97-129.
- [4.10] Isler, H.: Schalenbau - Tendenzen und Grenzen,
Internationales Symposium 'Weitgespannte Flächen-
tragwerke' Stuttgart, April 1976.
- [4.11] Issler, W.: Membranschalen gleicher Festigkeit
Ingenieur-Archiv, 33, 1964, H. 5, S. 330.
- [4.12] Korda, J.: Ribless Membrane Shells with Point Supports at
the Corners.
International Symposium on Shell Structures in
Engineering Practice, Budapest Hungary,
31st August to 3rd September 1954, Vol. I:
Design, pp. 179-190.
- [4.13] Nyffeler, H.: Eine interessante Translationsschale.
Schweizerische Bauzeitung 76, 1958, H. 49,
S. 735.

- [4.14] Otto, F.: a) IL 1, Minimalnetze / Minimal Nets (1969)
b) IL 2, Stadt in der Arktis / City in the Arctic (1971)
c) IL 3, Biologie und Bauen / Biology and
IL 4, Building (1971)
IL 6,
d) IL 7, Shadow in the Desert (1972)
e) IL 8, Netze in Natur und Technik / Nets in Nature and Technics
f) IL10, Gitterschalen / Grid Shells (1974)
g) IL12, Wandelbare Pneus / Convertible Pneus (1975)
h) IL14, Anpassungsfähiges Bauen / Adaptable Architecture (1975)
i) IL16, Zelte / Tents (1976)
Mitteilungen des Instituts für leichte Flächen-tragwerke, Universität Stuttgart.
- [4.15] Ramaswamy, G.S.: A new form of doubly curved shell für roofs and floors.
Bulletin no. 1, I.A.S.S. 1960.
- [4.16] Ramaswamy, G.S.: Design and Construction of Concrete Shell Roofs.
McGraw-Hill Book Company, New York, London, Sydney 1968.
- [4.17] Röntsch, G.: Ein Beitrag zum Formproblem von drehsymmetrischen Membranen.
Wissenschaftliche Zeitschrift der Hochschule für Verkehrswesen Dresden, 3, 1955, S. 205.
- [4.18] Smith, P.G.: Membrane Shapes for Shell Structures.
Dissertation in the Graduate Division of the University of California, Berkeley, 1969.
- [4.19] Tölke, F.: Über Rotationsschalen gleicher Festigkeit für konstanten Innen- oder Aussendruck.
Z. angew. Math. Mech. (ZAMM) Bd. 19, Nr. 6, S. 328, 1939.

5. Randversteifungen bei Kuppelschalen

- [5.1] Bandel, H.: Das statische Verhalten der randverstärkten Betonkugelschale mit schlaff bewehrtem oder vorgespanntem Zugring bei rotationssymmetrischer Belastung und Berücksichtigung der Kriech- und Schwindverformung.
Der Bauingenieur, 36, 1961, H. 2, S. 46.
- [5.2] Csonka, P.: Composite Shells Polygonal in Plan with Free Front Edge and Unbent Dividing Ribs.
Aus Theorie und Praxis des Stahlbetonbaues (Franz-Festschrift). W. Ernst & Sohn, Berlin, München, 1969.
- [5.3] Diaz, E.: Membrantheorie und Berechnung für Schalenflächen zweiter Ordnung mit neuartigen Randformen.
Dissertation 1963, TH Hannover.
- [5.4] Doganoff, J.: Der Zweigelenbogen mit parabelförmiger Achse unter Wirkung von Schalenlasten.
Bautechnik 34, 1957, S. 49.
- [5.5] Doganoff, J.: Der Zweigelenbogen mit kreisbogenförmiger Achse unter Wirkung von Schalenlasten.
Bautechnik 36, 1959, S. 235.
- [5.6] Dulácska, E.: Die Berechnung von durch tangential, verteilte Kräfte belasteten Parabelbögen.
Mélyépítéstudományi Szemle 11, 1961, S. 332.
- [5.7] Gohle, H.: Bogenförmige Randglieder an Schalenträgwerken.
Der Bauingenieur 42, 1967, H. 3, S. 91.
- [5.8] Haas, A. M.: Entwurf und Konstruktion dünner Betonschalen.
Werner Verlag. Düsseldorf, 1969.
- [5.9] Krstić, M.: Die in Randträgern eingespannte doppelt gekrümmte Schale.
Bautechnik 38, 1961, S. 279.

- [5.10] Leonards, L.: Neubau eines Hörsaalgebäudes (Universität Mainz)
Mehmel, A. Der Bauingenieur 44, 1969, H. 3, S. 87.
- [5.11] Lundgren, H.: Cylindrical Shells, Vol. I. Cylindrical Roofs.
Danish Technical Press, Copenhagen, 1960.
- [5.12] Schlaich, J.: Zum Tragverhalten von Hyparschalen mit nicht-
unterstützten Randträgern.
Beton- und Stahlbetonbau 65, 1970, S. 54.
- [5.13] Zimmer, V.H.: Die randversteifte Kugelschale über recht-
eckigem Grundriß.
Bauplanung - Bautechnik 23, 1969, H. 7, S. 340.

6. Tragwerksberechnungen mit finiten Elementen

- [6.1] Argyris, J.H.: Energy theorems and structural analysis.
Butterworth Scientific Publications, London,
1960.
- [6.2] Becker, M.: Schlußbericht zum DFG-Forschungsvorhaben
Berg, H.-G. Bo 184/14/17, 1976.
Deutsche Forschungsgemeinschaft, Bonn-
Bad-Godesberg.
- [6.3] Buck, K.E.: Finite Elemente in der Statik, 1973.
Scharpf, D.W. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München,
Stein, W. Düsseldorf.
Wunderlich, W.
- [6.4] Bufler, H.: Erweiterung des Prinzips der virtuellen Ver-
schiebungen und des Prinzips der virtuellen
Kräfte.
ZAMM 50 (1970), T104-T108.
- [6.5] Bufler, H.: Zur Plattenberechnung mittels finiter Elemente.
Stein, E. Ing.-Archiv 39 (1970), S. 248-260.

- [6.6] Desai, G.S.: Introduction to the Finite Element Method. 1972, Van Nostrand Reinhold Company, New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne.
- [6.7] Fette, H.: Gekrümmte finite Elemente zur Berechnung von Schalenträgwerken. Heft 1, Werner Verlag, Düsseldorf.
- [6.8] Galerkin, B.G.: Reihenentwicklungen für einige Fälle des Gleichgewichts von Platten und Balken. Wjestnik Ingenerow, Petrograd 1915, H. 10 (russisch).
- [6.9] Hilber, H. M.; Parisch, H.: ASKA UM 204, SHEBA family of shell Elements. 1972, ISD, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- [6.10] Prato, C.A.: Shell finite element method via Reißner's principle. Int. J. Solids Structures, 5 (1969), S. 1119-1133.
- [6.11] Reißner, E.: On a variational theorem in elasticity. J. Math. Phys. 29 (1950), S. 90-95 und 32 (1953), S. 129.
- [6.12] Ritz, W.: Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik. J. reine angew. Math. 135 (1908), S. 1-61.
- [6.13] Stein, E.: Notz Specht
Schlußbericht zum DFG-Forschungsvorhaben Bo 184/11/16, 1976. Deutsche Forschungsgemeinschaft, Bonn-Bad-Godesberg.
- [6.14] Tottenham, H.: Brebbia, C.
Finite Element Techniques in structural Mechanics. Stress Analysis Publishers, Southampton, 1971.

- [6.15] Trefftz, E.: Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren.
Verh. Int. Kongr. techn. Mech., Zürich 1926,
S. 131-137.
- [6.16] Veubeke, Fraeijs de: Matrix methods of structural analysis.
(Hrsg) Pergamon Press, Oxford 1964
Siehe hierzu besonders: Argyris, J.H.:
Recent advances in matrix methods of structural
analysis.
- [6.17] Zienkiewicz, O.C.: The finite element method in structural and
continuum mechanics. 2. Aufl.,
McGraw Publ. Comp., London, 1971.

7. Zusätzlich ausgewähltes Schrifttum

- [7.1] Baumann, Th.: Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsnetze
beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus
Stahlbeton.
DAfStb., H. 217, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1972.
- [7.2] de Boor, C.: 'CADRE: An algorithm for numerical quadrature'.
Academic Press, 1971, Chapter 7, ed. J.R. Rice,
New York.
- [7.3] Bronstein-
Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik
Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/M, Zürich 1964.
- [7.4] Deutscher Ausschuß Bemessung von Beton- und Stahlbetonbauteilen.
für Stahlbeton: Heft 220, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton,
Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, München,
Düsseldorf.
- [7.5] Deutscher Ausschuß Betonkalender 1978
für Stahlbeton: Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, München,
Düsseldorf.

- [7.6] Ebner, F.: Über den Einfluß der Richtungsabweichung der Bewehrung von der Hauptspannungsrichtung auf das Tragverhalten von Stahlbetonplatten. Diss. TH Karlsruhe, 1963.
- [7.7] Falkner, H.: Zur Frage der Ribbildung durch Eigen- und Zwängungsspannungen infolge Temperatur in Stahlbetonteilen. Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Heft 208, Berlin, W. Ernst & Sohn, 1969.
- [7.8] Grasser, E.: Hilfsmittel zur Berechnung der Schnittgrößen und Formänderungen von Stahlbetontragwerken. Heft 240, Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf.
- [7.9] Leonhardt, F.: Wasserturm ohne Wärmedämmung, Abminderung von Zwangskräften und Rissebeschränkung. Beton- und Stahlbetonbau 6/1969. Verlag W. Ernst & Sohn.
- [7.10] Leonhardt, F.: Rissebeschränkung. Vorträge auf dem Betontag 1975, Deutscher Beton-Verein e.V.
- [7.11] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau, Teil 1-4. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1975.
- [7.12] Peter, J.: Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen für Hauptspannungen schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung. Diss. TH Stuttgart 1964 und Die Bautechnik 43 (1966), H. 5, S. 149-154, H. 7, S. 240-248.

- [7.13] Peter, J.: Zur Statik, Konstruktion und Ausführung eines
Lochner, G. Klinkerrundlagers - Hinweise für die Berechnung
von Silowänden.
Beton- und Stahlbetonbau Heft 5, 1977,
S. 127-133.
- [7.14] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und
finite Elemente. Bericht Nr. 76-2 aus dem
Institut für Baustatik der Universität
Stuttgart.
- [7.15] Rehm, G.: Zur Frage der Ribbegrenzung im Stahlbetonbau.
Martin, H. Beton- und Stahlbetonbau 8/1968,
Verlag W. Ernst & Sohn.
- [7.16] Rostásy, F.I.: Zur Mindestbewehrung für Zwang von Außenwänden
Koch, R. aus Stahlleichtbeton.
Leonhardt, F. Schriftenreihe des Deutschen Ausschusses für
Stahlbeton, H. 267, Berlin, W. Ernst & Sohn,
1976.
- [7.17] Zurmühl, R.: Praktische Mathematik für Ingenieure und
Physiker.
Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York,
1965.

1. EINFÜHRUNG

1.1 Überblick

Das Bestreben große Flächen möglichst stützenfrei zu überspannen, führte in jüngster Zeit zu immer vielfältigeren Formen von Dachkonstruktionen. Seilnetzdächer, Zelte und pneumatische Membrankonstruktionen überdachen Sportplätze, Hallenbäder, Freilichttheater, Ausstellungspavillons und Fabrik- oder Flugzeughallen [4.14]. Im In- und Ausland wurden in den letzten 20 Jahren auch Kuppelschalen auf Einzelstützen mit nichtrotationssymmetrischem Grundriß zur Überdachung großflächiger Bauten erstellt [1.1 - 1.17].

Anthologie:

Auditorium Maximum der Universität Hamburg, Baujahr 1958

Der Radius der Kugelschale beträgt 65 m, die Grundrißfläche von 2 500 m² erinnert an ein gleichschenkliges Dreieck. Die 13 cm dicke Schale ist in Ortbeton hergestellt und im Randbereich vorgespannt. Die Konstruktion wird durch eine Randversteifung und durch schlanke Einzelstützen fortlaufend unterstützt.

Kresge Auditorium, Massachusetts Institute of Technologie, Cambridge, Mass./USA Baujahr 1954/55

Das sphärische Kugeldreieck, Radius 34,14 m, lagert auf 3 Stützpunkten, die 48,77 m voneinander entfernt liegen. Die Dicke der Schale beträgt 8,9 cm, sie verstärkt sich zu den Rändern hin auf 14 cm, zum Auflager hin auf 50 cm. Das linienförmige Kipplager der Ortbetonschale ist 84 cm breit. Am Schalenrand sind Überzüge mit einem Querschnitt von etwa $b/d = 30/90$ cm angeordnet.

Jahrhunderthalle der Farbwerke Hoechst AG, Baujahr 1961

Die Kugelschale mit einem Radius von 50 m lagert auf den Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks, dessen Seitenlänge 43,3 m beträgt. Die Schale ist 13 cm dick. Sie wächst zum Rand bis auf 25 cm und in der Auflagerspitze bis auf 60 cm an. Zusätzlich stützt sich die Kugelschale auf einem Randträger mit einem Querschnitt von $b/d = 0,5/1,6$ m ab.

Das Schalentragsystem der Städtischen Bühnen Dortmund, Baujahr 1964

Die Kuppelschale hat die Form eines Rotationsellipsoids über dreieckigem Grundriß mit einer Seitenlänge von 54 m. Im Scheitel beträgt der Radius ca. 43 m. Die Schale ist 8,5 cm dick. Sie verstärkt sich im Scheitel des Randes

innerhalb eines zwei Meter breiten Streifens auf 20 cm und im Bereich des Lagers auf 100 cm. Das Randglied der Ortbetonschale mit einem Querschnitt $b/d = 0,6/1,2$ m ist auf die ganze Länge vorgespannt. Für etwa zwei Drittel der herzustellenden Fläche der dünnen Schale wurde nur ein Drittel der Gesamtbetommenge benötigt. Der Rest wurde für Randglieder und den versteiften Auflagerbereich verwendet.

Das Planetarium der Stadt Bochum, Baujahr 1962

In 3,5 m Höhe geht der untere Teil der Paraboloidschale in eine Kegelschale über. Ihr Durchmesser beträgt in der Ebene der Fußpunkte 39,34 m. Die Schale ist im Bereich vom 14,5 m hohen Scheitel bis 7,04 m über O.K. Fußboden 8 cm dick. Zwischen den 3 Auflagerpunkten, die durch vorgespannte Zugbänder verbunden sind, schließt die Schale durch schräg liegende Bögen ab. Im Scheitel sind die Bögen 50 cm dick, im Auflagerbereich dagegen 85 cm.

Hörsaalgebäude der naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Mainz, Baujahr 1967

Die auf drei Punkten gelagerte Kuppelschale wölbt sich über einem gleichseitigen Dreieck mit einer Seitenlänge von 55,7 m. Die Schale besteht aus drei gleichen, doppelt gekrümmten Flächen, die durch eine Basisseite und zwei Grate der Kuppel begrenzt werden. Die 30 cm dick ausgebildeten Gratbögen sind mit einem Radius von 45,48 m kreisförmig. Die Scheitelhöhe der Gratbögen beträgt 10,12 m. Die Schale zählt damit zu den flachsten dreipunktgelagerten Kuppeln. Die Schalendicke von 10 cm vergrößert sich in Randnähe auf 30 bis 40 cm. Den Randträgern, mit einem Querschnitt b/d ca. $0,2/1,1$ m, sollten keine statischen Funktionen übertragen werden [1.7, 1.10].

Garten-Center in Solothurn, Ausstellungs- und Verkaufshalle

Die 8 cm dicke Translationschale über einem 20 x 24 m großen, rechteckigem Grundriß lagert in den Ecken auf vier Punkten. Ein Kreis bewegt sich, zu sich selbst parallel auf einem zweiten. Die Fassaden sind im Grundriß leicht gekrümmt und an der Schale aufgehängt. Schaleninnenfläche, Vordachuntersicht und Glas schneiden sich in einer Linie. Die Vordächer sind Ausschnitte von Kegeln und wurden am freien Rand nicht verstärkt [4.9].

Die 'Buckelschale'

Diese von Isler entwickelte Schale braucht nur an den Eckpunkten abgestützt zu werden und wird meist über quadratischem oder rechteckigem Grundriß gebaut.

Die Spannweiten liegen in der Regel bei 15 m, 20 m oder 30 m. Die Grenzspannweite der unverstärkten Buckelschale dürfte bei über 100 m liegen. Dieses Bauelement erlaubt die Überdachung beliebiger Grundrißkomplexe mit wenigen Stützen. Die Formgebung der Schale, sowie die in die Ränder eingeleitete Vorspannung ist so gewählt, daß die Schale nirgends Zugspannungen aufweist. Der Beton wird in einem Guß aufgebracht und mit Oberflächenvibratoren lückenlos verdichtet. Die Schalendächer sind deshalb ohne Nachbehandlung und ohne Dachbelag dicht [1.4].

Vorgefertigte unterkonstruktionslose Kuppelschalen

Die vorgefertigten, unterkonstruktionslosen Kuppelschalen sind 4 bis 5 cm dicke, sehr flache, bis etwa 150 m² große, zweifach gekrümmte Schalen. Die Schalenfertigteile über quadratischem oder rechteckigem Grundriß mit geneigten niedrigen, dünnwandigen Randgliedern lagern an den vier Eckpunkten auf kleinen ebenen Lagerflächen [1.3].

1.1.1 Probleme der Formgebung bei Kuppelschalen

Die Schale als Konstruktionselement der Architektur:

Die Architektur beschäftigt sich nicht nur mit Fragen konstruktiver Art, wie z.B. das Einhalten der erforderlichen Raumhöhen, die Angleichung der Einbauten, das Einhalten der strömungstechnischen Gesetzmäßigkeiten von Luftbewegungen, die Erzeugung guter Licht- und Akustikverhältnisse und das Erreichen genügender Isolationswerte. Wesentlich ist auch die Erfüllung ästhetischer Forderungen der Raumgestaltung und des Formenausdruckes. Dazu nachfolgend einige Sätze aus dem Buch 'Dokumente der modernen Architektur' [1.5].

'Die Betonung der Konstruktionsform kann jedoch noch eine andere Ursache haben. Unsere Zeit steht dem Problem des Symbolgehaltes der Form hilflos gegenüber. Die betonte Verwendung konkav und konvex geschwungener, interessanter Konstruktionsformen ist oft nichts anderes als der - unbewußte - Versuch, die Inhaltslosigkeit der Aussage durch einprägsame Konstruktionsformen zu überspielen. Die Erscheinung, eine vermeintlich neutrale Form durch manirierte Gestaltungen, durch Bizarrerien oder durch plastische Kurvungen interessanter zu machen, ist heute allgemein. Angesichts dieser Fehlentwicklungen muß wieder daran erinnert werden, daß jede Form Teil einer Ganzheit ist; die Form hat nicht nur eine Funktion zu erfüllen oder richtig konstruiert zu sein, sie muß darüber hinaus ausdrücken, was als Idee im Bauwerk lebt.

Die Schale ist eine der ausgeprägtesten Konstruktionsformen, die dem Architekten zur Verfügung stehen. Nur eine Form, die nicht allein das Wesen der

gestellten Aufgabe ausdrückt, sondern auch auf den Kräftefluß bezogen ist, hat Anspruch darauf, gültig zu sein. Es ist Aufgabe des Architekten, aus der großen Fülle der Möglichkeiten jene Konstruktion zu finden, die für die gestellte Aufgabe geeignet ist. Nur so ist es möglich, die Identität von Raum, Gestalt, Funktion und Konstruktion wiederzufinden, die eines der vornehmsten Kriterien der Modernen Architektur ist.'

Technische Formprobleme der Schalen

Den architektonischen Forderungen stehen die technischen Gesetzmäßigkeiten der Schalenkonstruktion gegenüber. Die auftretenden Kräfte aus dem Eigengewicht der Schale und den Auflasten, die Drücke von Wind- und Schneelasten, Kräfte aus den Materialverformungen, die von Auflagerverschiebungen, Bewegungen infolge Schwingungen oder aus Dehnungen und Zwängungen des Temperatur- oder Alterungsverhaltens herrühren, müssen alle sicher durch die Schalenkonstruktion in die Auflagerpunkte eingeleitet werden.

Neben den Forderungen nach sicherem Standvermögen sind noch weitere technische Bedingungen zu erfüllen:

Die Schale sollte rationell und wirtschaftlich erstellt werden können.

Neigungs- und Krümmungsverhältnisse sind so zu wählen, daß das Material an allen Stellen die notwendige Festigkeit erreicht und Regenwasser rasch abgeleitet wird. Die Schale sollte möglichst wenig Unterhalt erfordern und ein hohes Alter erreichen [4.9].

1.1.2 Methoden der Formfindung:

Reguläre Flächen:

Durch Ausschnitte aus Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen gelangt man zu Schalenformen, deren doppelte gekrümmte Mittelflächen mathematisch in impliziter, expliziter, Parameter- oder Vektorform festgelegt sind.

Physikalische Gleichnisse:

Es gibt in der Physik vorkommende Funktionen mit denen sich Schalenformen ableiten lassen. Zu dieser Kategorie gehören z.B. gewisse Spannungs- und Strömungsfunktionen (Torsionsspannung, Plattengleichung, Pucher'sche Differentialgleichung, bestimmte elektrische Felder, Funktionen, die einen Fließvorgang beschreiben).

Ausgehend von der Pucher'schen Differentialgleichung findet Korda für den Lastfall konstante vertikale Grundrißlast (z.B. Schneelast) [4.12] eine in den

Ecken horizontal unverschieblich, punktgestützte Kuppelschale über rechteckigem Grundriß. Diese Schalenform erlaubt, daß die äußere Last überwiegend durch Membrankräfte abgetragen wird.

Membranschalen gleicher Festigkeit [2.1, 4.11] :

Für eine bestimmte Form und Belastung entstehen in einer Membranschale gleicher Festigkeit in jedem Punkt die gleichen Spannungen. Die Gestalt eines Behälters wird angegeben, der unter dem, mit der Tiefe zunehmenden Innendruck der Flüssigkeit, überall die gleichen, vom Ort unabhängigen Meridian- und Ringkräfte erhält. Der Behälter hat die Gestalt eines auf ebener Unterlage ruhenden Flüssigkeitstropfens. Er ist bei kleinem Volumen fast kugelförmig und wird mit wachsendem Inhalt flacher. Erfahrungsgemäß bildet ein großer Tropfen auf einer ebenen Platte eine flache Pfütze von fast konstanter Tiefe. Deshalb würde ein Behälter mit großem Fassungsvermögen so flach, daß er leer unter der Last seines Eigengewichtes nicht mehr standsicher wäre. Ohne Überdruck ist diese Behälterform nicht möglich: Der Druck im Scheitel wäre Null, somit gäbe es dort keine von Null verschiedenen Längskräfte.

Die Forderung nach gleicher Festigkeit führt für den Lastfall Eigengewicht auf eine paraboloidähnlich gekrümmte Kuppel, deren Form und Größe durch das Verhältnis aus zulässiger Spannung und spezifischem Gewicht des verwendeten Materials bestimmt werden. Die Schalendicke dieser Rotationsschale wächst dabei vom Scheitel in Auflagerrichtung nach einer Exponentialfunktion so schnell an, daß eine technische Verwertung der Lösung nicht mehr möglich ist.

Tölke [4.19] findet für den Lastfall konstanten Innendruck 'unverformte' Gleichgewichtslagen rotationssymmetrischer Membranen gleicher Festigkeit. Die Kugel ist dabei die einzige Lösungsform, die auf eine geschlossene Fläche führt. Eine weitere Grenzfläche stellt der Zylinder dar.

Experimentelle Methoden:

Unter möglichst wirklichkeitsnaher Nachahmung der tatsächlichen Beanspruchung werden dreidimensionale Schalenmittelflächen erzeugt.

Ein klassisches Beispiel ist die hängende Kettenlinie, deren Umkehrung schon im Altertum zum statisch vollkommenen Bogenbau verwendet wurde. Zahllose günstige Schalenformen erhält man, wenn statt der Kette ein Kettennetz oder ein elastisches Gewebe verwendet wird.

Von 1946-1949 führte Frei Otto modelltechnische Hängeversuche mit Geweben durch, um Formen für Überwölbungen zu finden, die aus Trümmerziegeln einfach und billig herzustellen waren. Frei Otto entwickelte 1950/51 ein Kettennetzmodell, dessen Kettenglieder aufeinander abrollen, sich jedoch nicht vonein-

ander lösen können. Wird das Kettennetz belastet, nimmt es in Abhängigkeit der Lagerung, von selbst die Form der günstigsten Stützfläche ein, die sich an den Berührungspunkten der Kettenglieder markiert. So können nicht nur für eine Eigengewichtsbelastung, sondern auch für einseitige Belastungen Gleichgewichtslagen des verformten Netzes gefunden werden [1.12, 4.14].

Ramaswamy hat Tuch verwandt, das kettenseilartig in einem quadratischen Rahmen aufgehängt, betoniert wird. Das ganze wird dann umgedreht und an Ort und Stelle aufgestellt [4.15, 4.16].

Mit diesen Methoden werden durch die Umkehrung der hängenden (zugbeanspruchten) Form zur stehenden (druckbeanspruchten) Form brauchbare Kuppelschalen gefunden. Pneumatische Experimente, z.B. aufgeblasene elastische Membranen liefern günstige und reizvolle Schalenformen.

Eine interessante Variante hierzu ist von Bini entwickelt worden. Ausgehend von einer flachen Basis, wird Luft mit Druck unter eine Folie geblasen, über die dann der Beton gegossen wird [4.9].

Eine ältere Variante der Formfestlegung besteht darin, daß man einen Erdhügel aufschüttet, um ihn als Ersatz für Schalungen zu benutzen. Nur in der Randzone werden Schaltafeln aus Holz verwendet. Nach dem Betonieren der Schale wird der Erdhügel ausgebaggert [1.5].

Frei Otto schlägt vor, gekrümmte, vorgespannte Membranen, pneumatische Konstruktionen oder vorgespannte Seilnetze zu verwenden, um beliebig berandete Grundrisse vielgestaltig zu überdachen [1.11, 4.4]. Eine gekrümmte Membran kann nur dann allseitig vorgespannt sein, wenn sie an jedem Punkt 'gegengekrümmt' ist, d.h. in der Tragrichtung ist sie negativ (durchhängend) und in der Spannrichtung positiv gekrümmt. Zitat [1.12]: 'Als pneumatisch gelten solche Konstruktionen, bei denen Druckunterschiede die Formgebung und die Stabilisierung bewirken oder wesentlich dazu beitragen. Der bekannte Luftballon kann als Prototyp gelten: Eine schlaffe Hülle wird durch Gasdruck stabilisiert und somit fähig, nicht nur den Gasdruck selbst, sondern auch andere Belastungen aufzunehmen.'

Nach der pneumatischen Formgebungsmethode wurde von Isler die 'Buckelschale' entwickelt. Die Schale, benannt nach den ähnlich geformten Buckelblechen des Stahlbaues, ist über quadratischem oder rechteckigem Grundriß stetig doppelt gekrümmt, weist gerade, oder vorgespannte Ränder auf und lagert punktförmig in den vier Ecken [1.4]. Die Markthalle in Bellinzona, das Garten-Center bei Paris und der Fabrikationsraum in Recherswil sind von Isler entwickelte, auf Einzelstützen gelagerte Kuppelschalen [4.9]. Alle drei sind Rotationsformen. Der

rotierende Meridian ist aus einem Fließformversuch entnommen worden. Es ist interessant, daß die drei verschieden aussehenden Schalen Ausschnitte aus ein und derselben Form sind und auch auf dem gleichen Gerüst erstellt wurden. Bei zwei dieser Schalen wurden erstmals Ränder ohne jegliche Rippen oder Verdickungen ausgeführt. Da die Form bei der Markthalle Bellinzona aus architektonischen Gründen nicht der 'Idealform' entsprechend gewählt werden konnte, fügte man Abspannungen ein, die hinter den Fassadenprofilen unauffällig angebracht wurden [4.8].

Isler verwendet druckbelastete Gummimembranen, um eine Schalenform zu finden. Die Formfindungsmethode macht es möglich, schwache Stellen der Form zu erkennen und sofort zu korrigieren, indem man die Krümmung ändert oder die Schalendicke abwandelt. Ist die Entscheidung hinsichtlich der endgültigen Form gefallen, wird ein Plexiglas-Modell in größerem Maßstab gebaut, das mehrere Zwecke erfüllt: Es ermöglicht exakte Messungen am Modell, um die Schale zu dimensionieren, außerdem können Tests hinsichtlich der auftretenden Spannungen und Formveränderungen durchgeführt werden.

1.1.3 Statische Berechnung und statische Formprobleme verschiedener Kuppelschalen

Für rotationssymmetrische Kuppelschalen und für Rotationsschalen mit nicht rotationssymmetrischer Berandung u.a. auf Einzelstützen, können für gleichmäßige Flächenlasten die Schnittgrößen mit den Angaben von [2.1 - 2.10,] [3.1 - 3.28] und [5.1 - 5.13] berechnet werden.

Ein Beitrag zum Formproblem rotationssymmetrischer Membranen

Die Differentialgleichung der von Bienert [4.1] definierten 'ringspannungsfreien Stützfläche' wird in [4.17] für verschiedene rotationssymmetrische Belastungsfälle integriert.

Für eine Paraboloidschale z.B., erzeugt durch eine Parabel 3. Ordnung, entstehen unter einer konstanten, vertikalen Flächenlast keine Spannungen in Ringrichtung (Tab. 1.2).

Im Scheitel der Paraboloidschalen 3. und 4. Ordnung liefert die Membrantheorie infolge der zu geringen Mittelflächenkrümmung unendlich große Normalkräfte.

Die einem Belastungsfall zugeordnete ringspannungsfreie Stützfläche (Bild 1.1) ist eine wichtige Grenzfläche für die Beurteilung von rotationssymmetrischen Kuppelschalen. Liegt die Schalenmittelfläche oberhalb dieser Stützfläche, dann treten Ringzugspannungen auf; Ringdruckspannungen entstehen bei Schalen mit

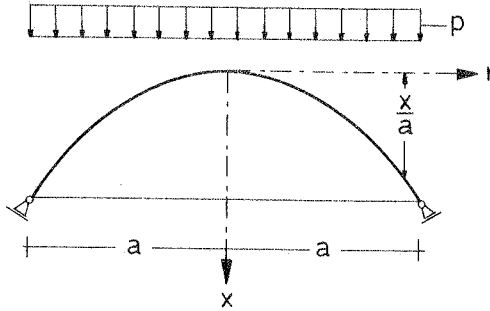


Bild 1.1: Schalengeometrie und Belastung

x/a	Kugel		Parabol. 2.0.		Parabol. 3.0		Parabol. 4. 0.	
	N_m kN/m	N_r kN/m	N_m kN/m	N_r kN/m	N_m kN/m	N_r kN/m	N_m kN/m	N_r kN/m
0,00	- 5,00	- 5,00	- 2,50	- 2,50	- ∞	-	- ∞	+ ∞
0,0001	- 5,00	- 5,00	- 2,50	- 2,50	- 35,91	0	-125,00	125,00
0,001	- 5,00	- 4,98	- 2,50	- 2,50	- 16,67	0	-39,54	39,52
0,01	- 5,00	- 4,80	- 2,55	- 2,45	- 7,81	0	-12,60	12,40
0,02	- 5,00	- 4,60	- 2,60	- 2,41	- 6,29	0	- 9,04	8,65
0,03	- 5,00	- 4,41	- 2,65	- 2,36	- 5,58	0	- 7,51	6,93
0,04	- 5,00	- 4,22	- 2,69	- 2,32	- 5,16	0	- 6,64	5,88
0,05	- 5,00	- 4,03	- 2,74	- 2,28	- 4,88	0	- 6,07	5,15
0,10	- 5,00	- 3,10	- 2,96	- 2,11	- 4,28	0	- 4,85	3,22
0,15	- 5,00	- 2,23	- 3,16	- 1,98	- 4,11	0	- 4,48	2,32
0,20	- 5,00	- 1,40	- 3,35	- 1,86	- 4,08	0	- 4,36	1,79
0,25	- 5,00	- 0,63	- 3,54	- 1,77	- 4,11	0	- 4,33	1,44
0,50	- 5,00	2,50	- 4,34	- 1,44	- 4,49	0	- 4,56	0,69
0,75	- 5,00	4,38	- 5,00	- 1,25	- 4,90	0	- 4,87	0,43
1,00	- 5,00	5,00	- 5,58	- 1,12	- 5,27	0	- 5,15	0,30

Tabelle 1.2: Meridiankräfte N_m und Ringkräfte N_r für Kugel- und Paraboloid-schalen mit dem Radius $a = 10,0$ m im Grundriß. Lastfall: Schnee- bzw. konstante vertikale Grundrißlast $p = 1,0$ kN/m².

unterhalb liegenden Mittelflächen. Schneidet eine Mittelfläche diese Stützfläche, so wechseln die Ringspannungen das Vorzeichen.

Der Verlauf der Meridian- und Ringkräfte rotationssymmetrischer Membranen, (Kugel-, Kegel-, Ellipsoid-, Paraboloidschalen) unter rotationssymmetrischer Belastung (Eigengewicht, Schneelast und einer Belastung mit parabolischem Verlauf) wird in [4.17] angegeben. Die günstigste Verteilung der Schnittkräfte aus einer Schneelast weist von den untersuchten Schalen das Paraboloid auf (erzeugt durch eine Parabel 2. Ordnung), da die Ringkräfte nur 20-50% und die Meridiankräfte im Scheitel nur 50% im Vergleich zur Kugelschale betragen. Im Vergleich zu den Paraboloidschalen gehören Ellipsoid- und Kugelschalen bei diesem Lastfall zu den Schalen mit den ungünstigeren Ringdruck- und Ringzugkräften. Auf die Biegebeanspruchung aus den Randstörungen wurde in [4.17] nicht eingegangen.

Zum Formproblem der Kuppelschale über quadratischem, rechteckigem und polygonalem Grundriß

In [4.13] sind Schalenformen mit kontinuierlicher Lagerung entlang des Randes angegeben, die für stetige Flächenlasten einfach zu ermittelnde Membrankräfte entstehen lassen. In den Ecken der Schale erreichen diese Schubkräfte im Gegensatz zu anderen Schalenformen endliche Werte.

Ein weiteres Beispiel der einfach zu berechnenden Kuppelschalen ist die abgeflachte Paraboloidschale. Die mit den Ebenen der Randbögen parallelen Schnitte der Mittelfläche bilden bei dieser Schale Parabeln 2. Grades mit vertikaler Achse. Gegen die Mitte der Schale werden diese Parabeln immer flacher.

Der genäherte Schnittkraftverlauf für konstante vertikale Flächenlasten und davon abweichende stetige Flächenlasten werden in [4.2] angegeben. Auf die Biegebeanspruchung aus den Randstörungen wurde in [4.2, 4.13] nicht eingegangen.

Die Schalenmittelfläche von Kuppelschalen wird für eine vertikale Flächenlast mit der Pucher'schen Differentialgleichung durch Differenzenrechnung ermittelt, wenn die Projektionen der kontinuierlich gelagerten Ränder gerade sind [3.4].

Die Gestaltung des Randes punktgestützter Kuppelschalen, deren Mittelflächen durch Ausschnitte aus Rotationschalen erzeugt werden

Die Ränder dieser Schalen werden durch Eigengewicht, Schnee- und Windlasten weit stärker verformt als das Gebiet im Inneren.

Die Spannungen im Schaleninneren und am Rand werden durch eine Verdickung der Schale entlang des Randes verringert. Sie können auch durch einen deutlich

ausgeprägten Randträger verkleinert werden [2.2, 2.3, 2.8, 5.1 - 5.13] .

Der Rand sollte auch noch gestalterischen Gesichtspunkten genügen, z.B. Verwendung als Regenrinne, Schatten- und Regenschutz der darunterliegenden Flächen, Anschluß der Fassade oder einer untergehängten Decke ; er sollte auch der formal gestalteten Schale ein ansprechendes Aussehen geben.

Mehmel geht sogar soweit, den Randträger seiner 'statischen' Funktion ganz zu entbinden [1.10] . Deshalb wurden bei der Formgebung der 'Mainzer Schale' die Kräfte aus der Schale nicht über dem Umweg über Randglieder, sondern auf dem kürzesten Weg durch die Schale selbst in die Lager abgeleitet. Da der kürzeste Weg entlang der Winkelhalbierenden verläuft, wurde dieser Bereich vom Auflager bis in Scheitelhöhe versteift. Diese Versteifung sollte den Scheitel des Schalenrandes genügend entlasten, so daß der Randträger dieser Schale hauptsächlich als Dachrinne zur Entwässerung dienen würde. Bei gleichen Spannweiten der Kuppelschalen wurde er schmaler ausgebildet als der der Dortmunder Schale [1.7, 1.10] . Er hat aber die gleiche Randträgerhöhe und verringert dennoch durch seinen relativ großen Biege widerstand die vertikale Durchbiegung des Schalenrandes erheblich (Bild 1.3).

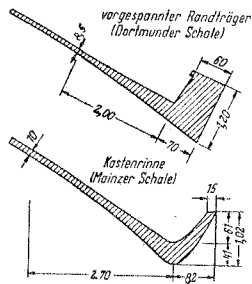


Bild 1.3: Randausbildung der Dortmunder und Mainzer Schale [1.10] .

1.2 Aufgabenstellung der Arbeit

Die Spannweiten der erwähnten Stahlbetonschalen betragen ca. 50 m. Da sie sich jedoch in den Abmessungen der Randverdickungen beträchtlich voneinander unterscheiden, stellen sich folgende Fragen:

1. Bis zu welchen Querschnittsabmessungen verringert eine versteifte Randzone oder ein rechteckiger Randträger die Verformungen und Spannungen von punktgestützten Kuppelschalen über quadratischem Grundriß wesentlich?

2. Wie sollte der Randträger am Schalenrand befestigt werden, um die Schale wirkungsvoll zu stützen?
3. Kann der Randträger entfallen, wenn die Schale nur entlang der Diagonalen versteift oder der Rand zusätzlich punktweise gestützt wird?
4. Gibt es punktförmig gelagerte, randträgerlose Kuppelschalen, die Belastungen von Lastgruppen aus Eigengewicht, Schnee und Wind sicher abtragen können?

Aus diesen Fragen ergibt sich die Aufgabenstellung.

Seit längerer Zeit werden punktförmig gelagerte Kuppelschalen mit im Grundriß konkav, gerade oder konvex ausgeschnittenen Rändern entworfen und gebaut. Sie weisen zur Aufnahme austretender Schnittgrößen und zur Verminderung großer Randverschiebungen Randaussteifungen auf, die entweder in Form eines besonderen Randträgers oder durch erhebliche Zunahme der Schalendicke zum Rand hin, zur Verbesserung des Tragverhaltens der Schale beitragen. Gleichzeitig werden auch punktförmig gelagerte Kuppelschalen über quadratischem Grundriß gebaut, bei denen durch eine geeignete Wahl der Schalenform auf eine Randversteifung vollständig verzichtet werden kann [4.8 - 4.10].

Zu den wichtigsten Entwurfsfaktoren gehört, neben den architektonischen Forderungen - Raumprogramm, Höhen, Licht, Akustik, Isolation, Erfüllung ästhetischer Forderungen des Formenausdruckes -, folgendes Kriterium:

Es ist eine Schalenform zu finden, die, bei der Verwendung von Stahlbeton als Schalenmaterial, äußere Lasten aus Eigengewicht, Schnee, Wind etc. überwiegend durch geringe Membrandruck- oder Zugkräfte sicher in die Auflagerpunkte leitet.

Das Kernproblem im Schalenbau ist die Wahl der richtigen Form. Aus der unbegrenzten Vielfalt von überhaupt möglichen Formen ist nur eine begrenzte Anzahl statisch brauchbar. Diese Anzahl ist jedoch immer noch sehr groß. Zwei Formfindungsmethoden werden in dieser Arbeit beschrieben:

1. Methode:

An typischen Schalen, deren Mittelflächen sich durch Ausschnitte aus Rotationschalen ergeben, z.B. Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen sollen unter baupraktisch vorkommenden Belastungen die Spannungs- und Verschiebungszustände in Abhängigkeit einiger Parameter wie

- Scheitelhöhe der Schale
- Auflagerbreite der punktförmigen Lager
- zusätzliche punktförmige Lager entlang des Randes
- Krümmungsverhältnisse im Auflagerbereich

- Verdickung der Schale in Auflagernähe, entlang der Diagonalen oder entlang des Randes
- Stützung des Randes durch rechteckige Randträger dargestellt werden.

Durch Variation bestimmter geometrischer Abmessungen soll das Zusammenwirken von Schale und Randträger bei gleichzeitiger Ausarbeitung von Richtwerten für die Dimensionierung der Randversteifung untersucht werden.

2. Methode:

Aufbauend auf einem von Korda [4.12] und Csonka [4.4 - 4.7] vorgeschlagenem Verfahren, sollen für Lastgruppen aus Eigengewicht und Schneelast unterschiedliche, durch die Punktlagerung erzwungene Membranschalenformen gefunden werden. Diese Schalen sollen auch imstande sein andere Flächenlasten, z.B. Wind- oder halbseitige Schneelasten, überwiegend durch Membrankräfte abzutragen. Auf eine Versteifung des freien Randes oder eine Stützung des Randes durch Träger oder zusätzliche Lager soll dabei verzichtet werden.

Bei der Untersuchung des Tragverhaltens sollen die folgenden Parameter

- Schalenform
- Spannweite der Schale
- Auflagerbreite der punktförmigen Lager
- Schalendicke im Auflagerbereich

variiert und gleichzeitig Richtwerte für die Dimensionierung der Schalendicke in Auflagernähe erarbeitet werden.

2. A R B E I T S P R O G R A M M

Die Verformungen und Schnittgrößen jeder in dieser Arbeit untersuchten Kuppelschale wurden mit der Methode der finiten Elemente für Lastfälle aus Eigengewicht, Schnee, Wind oder horizontale Stützenverschiebung (Abschnitt 2.3) ermittelt.

Stabilitätsuntersuchungen wurden nicht durchgeführt.

2.1 Angewandte Berechnungsmethode

Einleitung

Die Methode der finiten Elemente (FEM) wurde aus dem folgenden Konzept heraus entwickelt:

Ein Tragwerk beliebiger Form wird durch Zerlegen in eine größere Anzahl einfacher zu berechnende Teilbereiche (Elemente) idealisiert, wobei man die in den Schnitten wirkenden Verschiebungen oder Spannungen als Unbekannte ansetzt. Aus der Bedingung, daß beim Wiederausammenfügen die Elemente sowohl in ihrem Kräfte- als auch in ihrem Verformungszustand möglichst gut zusammenpassen müssen, folgt die angenäherte Lösung des Problems.

Dieser Weg wurde nur durch den Einsatz elektronischer Rechenanlagen möglich, womit die entstehenden Gleichungssysteme auch mit mehreren tausend Unbekannten lösbar wurden.

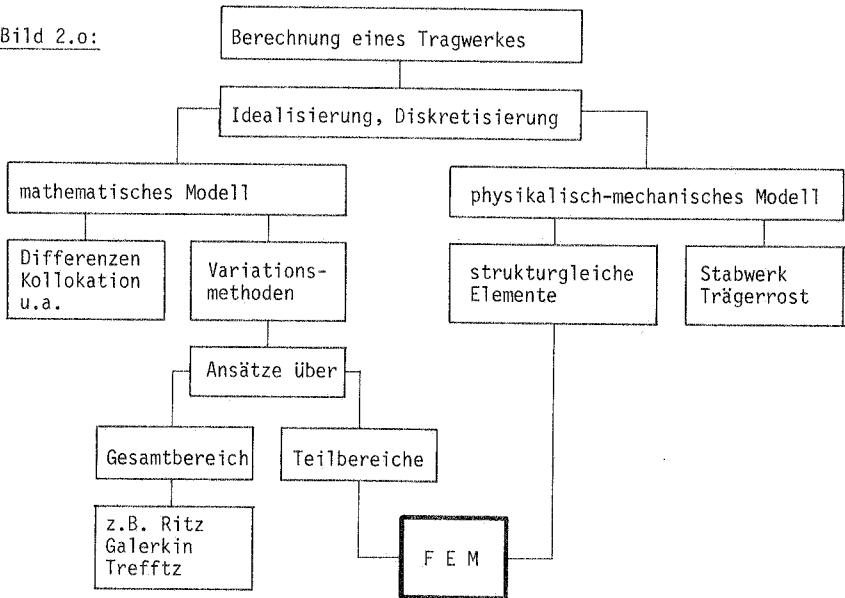
Die Berechnung von Scheiben, Platten, Schalen und anderer Körper führt im Rahmen der Elastostatik auf die Lösung von partiellen Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der vorhandenen Randbedingungen. Das Ersetzen der exakt nur in Sonderfällen lösbaren partiellen Differentialgleichungen durch ein System algebraischer Gleichungen (Diskretisieren) kennzeichnet nicht nur die FEM, sondern ebenso die meisten mathematischen Näherungsverfahren, vergleiche Bild 2.0. Die Differenzenrechnung beruht ebenso auf Modellvorstellungen mathematischer Natur wie die direkten Variationsmethoden der Mechanik, deren Funktionsansätze im klassischen Sinn nach Ritz über den Gesamtbereich des betrachteten Körpers gewählt werden und deren anfangs unbekannte Freiwerte aus Extremalforderungen der verwendeten Variationsprinzipie folgen. Dagegen benutzt die FEM mehr physikalisch-mechanische Ersatzmodelle. Dies wird vor allem am Stabwerkmodell sehr deutlich, bei dem der tatsächliche Aufbau - z.B. eines Flächen-tragwerkes - durch ein statisch äquivalentes Stabwerk ersetzt wird. Die Elemente der FEM im engeren Sinne haben dagegen meist dieselben physikalischen Eigenschaften wie das Original-Tragwerk. Die Näherung liegt hier im Erfüllen der Gleichgewichts- oder/und der Verträglichkeitsbedingungen, die bei den baustatischen Methoden ebenso wie die Gleichungen der Variationsmethoden aus Extremalforderungen folgen. Unbekannte des Gleichungssystems sind die Freiwerte von Ansätzen, die sich jetzt aber nur über Teilbereiche - die Elemente - erstrecken. Außerdem werden in der FEM die Freiwerte mechanisch sinnvoll als unbekannte Werte bestimmter Zustandsgrößen an Knoten bzw. Elementgrenzen gewählt. Mit der Aufteilung eines Tragwerkes in Elemente und bereichsweisen Ansätzen kommt man zu einem gut konditionierten bandförmigen Gleichungssystem,

dessen Bandbreite von der Numerierung der Knoten abhängt. Die Berechnung eines Tragwerks zerfällt also im wesentlichen in zwei Teile: Zunächst sind die Anteile der einzelnen Elemente - die sogenannten Steifigkeitsmatritzen - zu bestimmen. Danach wird der Zusammenbau zum Gesamttragwerk durch Erfüllen der Gleichgewichts- bzw. Verträglichkeitsbedingungen an den Knoten bzw. Elementengrenzen erreicht.

Die FEM kann also als eine Kombination des ingenieurmäßig entstandenen Gedankens der Aufteilung in Elemente mit der Anwendung direkter Variationsverfahren verstanden werden, vgl. Bild 2.o.

Die Begründung des Verfahrens kann demnach mit Hilfe der Variationsprinzipie der Mechanik erfolgen, in die jetzt lokal begrenzte Ansätze einzusetzen sind [6.1 - 6.17] .

Bild 2.o:



Die Verformungs- und Schnittgrößen der Kuppelschalen wurden mit dem am Institut für Baustatik in Stuttgart entwickelten finiten Elementprogramm FELEM berechnet [6.2]. Das Rechenprogramm enthält ein Faltwerk- und ein Randträgerelement, deren Verschiebungsansätze nachfolgend beschrieben werden:

a) Faltwerkelement:

Das Element entstand während der Bearbeitung des DFG-Forschungsauftrages BO 184/11/16 [6.13] .

Mit einem ebenen dreieckigen Faltwerkelement wird die Form der Schale angenähert, wobei die Eckpunkte der Mittel­fläche des Dreiecks die Schalen­mittel­fläche direkt berühren. Jede beliebig gekrümmte Kuppelschale wird so durch ein Vielflach angeglichen, wobei jedes Element unterschiedlich dick sein kann.

Das Element stellt die Kombination aus Scheiben- und Plattenzuständen dar, wobei diese Wirkungen entkoppelt sind. Konstante Dicke und konstanter Elastizitätsmodul werden über die Elemente vorausgesetzt. Pro Knoten werden 6 Freiheitsgrade definiert: 3 Verschiebungen u , v , w entlang den positiven Achsen des lokalen Koordinatensystems und 3 Verdrehungen ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z um diese Achsen (Bild 2.1).

Die Ausgabe der Schnittkräfte erfolgt im Dreiecksschwerpunkt (Bild 2.4).

Verschiebungsansatz:

Der Verschiebungsansatz des Faltwerkelementes besteht aus zwei getrennten Ansätzen, einer für den Scheibenzustand, ein anderer für den Plattenzustand.

Der Scheibenansatz ist linear. Für u und v in der Elementebene gilt:

$$u = u_k \phi_k + u_l \phi_l + u_m \phi_m$$

$$v = v_k \phi_k + v_l \phi_l + v_m \phi_m$$

mit den Koordinaten $\phi_k = F_k/F$, $\phi_l = F_l/F$, $\phi_m = F_m/F$

und der Elementfläche $F = F_k + F_l + F_m$ (Bild 2.1)

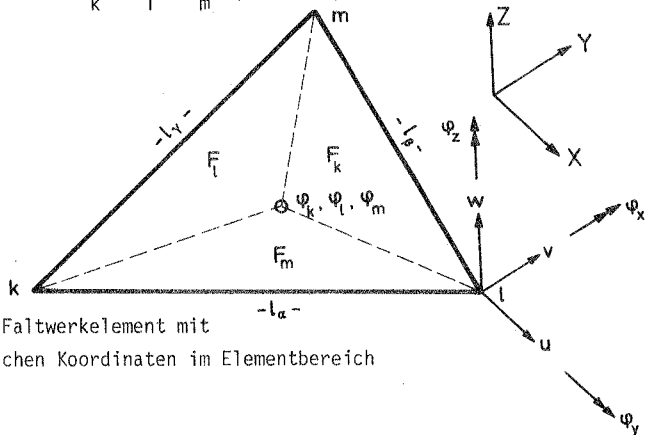


Bild 2.1: Ebenes Faltwerkelement mit natürlichen Koordinaten im Elementbereich

Der Verschiebungsansatz w für die Platte ist dritten Grades. Er wird aufgeteilt in eine Starrkörperverschiebung w_0 und in eine 'natürliche' Verschiebung w_n .

$$w = w_0 + w_n \quad \text{mit}$$

$$w_0 = w_k \phi_k + w_l \phi_l + w_m \phi_m \quad \text{und}$$

$$w_n = \sum_{i=1}^6 w_{M_i} \omega_i$$

Hierin sind w_{M_i} die lokalen Knotenverdrehungen entlang der Elementränder nach Bild 2.2.

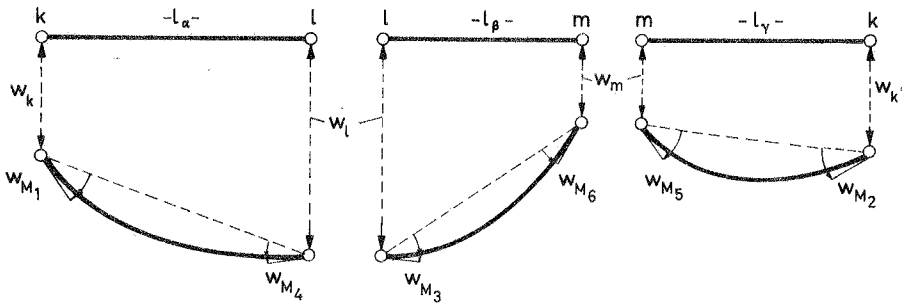


Bild 2.2: Ideale Knotenverdrehung w_{M_i} des Plattenansatzes

Die lokalen Freiwerte des Verschiebungsansatzes der Platte sind die den w_{M_i} zugeordneten Einheitsverschiebungszustände ω_i über dem Elementdreieck.

Definition der ω_i -Funktionen:

$$\omega_1 = \phi_k^2 \phi_l + 0,5 \omega_0 - 1,5 \mu_\alpha \omega_A - 0,5 \omega_B + 0,5 \omega_C$$

$$\omega_2 = \phi_k^2 \phi_m + 0,5 \omega_0 + 0,5 \omega_A - 0,5 \omega_B + 1,5 \mu_\gamma \omega_C$$

$$\omega_3 = \phi_l^2 \phi_m + 0,5 \omega_0 + 0,5 \omega_A - 1,5 \mu_\beta \omega_B - 0,5 \omega_C$$

$$\omega_4 = \phi_l^2 \phi_k + 0,5 \omega_0 + 1,5 \mu_\alpha \omega_A + 0,5 \omega_B - 0,5 \omega_C$$

$$\omega_5 = \phi_m^2 \phi_k + 0,5\omega_0 - 0,5\omega_A + 0,5\omega_B - 1,5\mu_Y \omega_C$$

$$\omega_6 = \phi_m^2 \phi_l + 0,5\omega_0 - 0,5\omega_A + 1,5\mu_B \omega_B + 0,5\omega_C$$

mit

$$\omega_0 = \phi_k \phi_l \phi_m \qquad \omega_A = \frac{\phi_k^2 \phi_l^2 \phi_m^2}{(\phi_l + \phi_m) (\phi_m + \phi_k)}$$

$$\omega_B = \frac{\phi_l^2 \phi_m^2 \phi_k}{(\phi_m + \phi_k) (\phi_k + \phi_l)} \qquad \omega_C = \frac{\phi_m^2 \phi_k^2 \phi_l}{(\phi_k + \phi_l) (\phi_l + \phi_m)}$$

$$\mu_\alpha = \frac{l_\gamma^2 - l_\beta^2}{l_\alpha^2} \quad ; \quad \mu_\beta = \frac{l_\alpha^2 - l_\gamma^2}{l_\beta^2} \quad ; \quad \mu_\gamma = \frac{l_\beta^2 - l_\alpha^2}{l_\gamma^2}$$

Durch die Zusatzfunktionen ω_A , ω_B und ω_C wird die Kompatibilität bezüglich der Querneigung entlang den Elementrändern erreicht. Der qualitative Verlauf der ω_1 und ω_A -Funktionen ist in Bild 2.3 dargestellt.

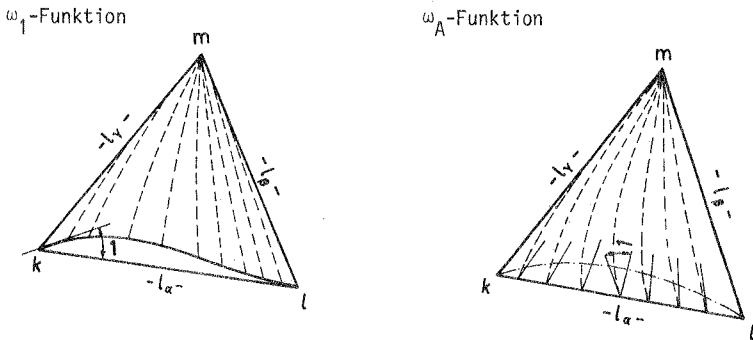


Bild 2.3: Qualitativer Verlauf der ω_1 und der ω_A -Funktionen

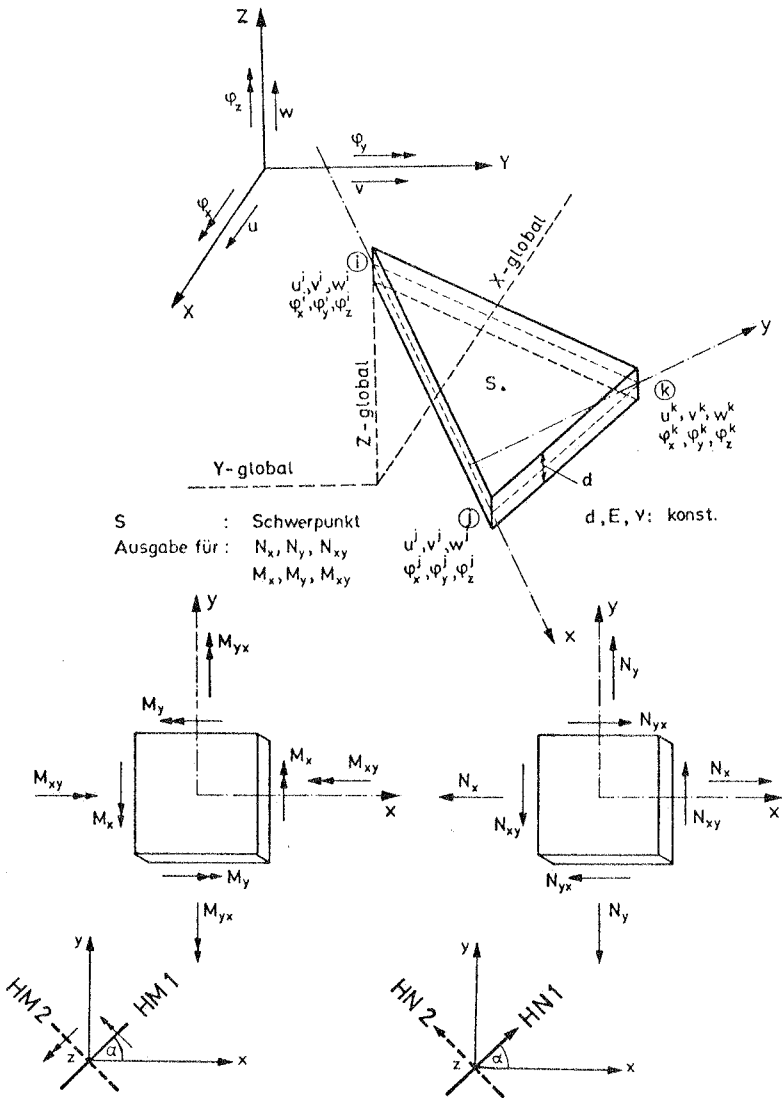


Bild 2.4: Normalkräfte N_x, N_y, N_{xy} , Hauptnormalkräfte $HN1, HN2$ und Biegemomente M_x, M_y, M_{xy} , Hauptbiegemomente $HM1, HM2$ im lokalen Koordinatensystem

b) Randträgerelement

Die Steifigkeitsmatrix des Randträgerelementes ist die eines geraden, räumlichen Balkens mit konstantem Elastizitätsmodul, konstanter Querschnittsfläche, Biege- und Torsionssteifigkeit.

Pro Knoten werden 6 Freiheitsgrade definiert, 3 Verschiebungen u , v , w , entlang den positiven Achsen des lokalen Koordinatensystems und 3 Verdrehungen ϕ_x , ϕ_y , ϕ_z um diese Achsen (Bild 2.5). Durch eine Kongruenztransformation wird die Steifigkeitsmatrix zunächst auf die Anschnittsline des Faltwerkelementes und dann auf die globale Koordinaten-Richtung bezogen. Das Randträgerelement wird auf der Schwerlinie in Richtung der globalen Koordinaten durch eine konstante Last je Elementlänge p_x , p_y , p_z (kN/m) belastet. Die Schnittgrößen werden auf den Schwerpunkt bezogen und in lokalen Koordinaten-Richtungen angegeben.

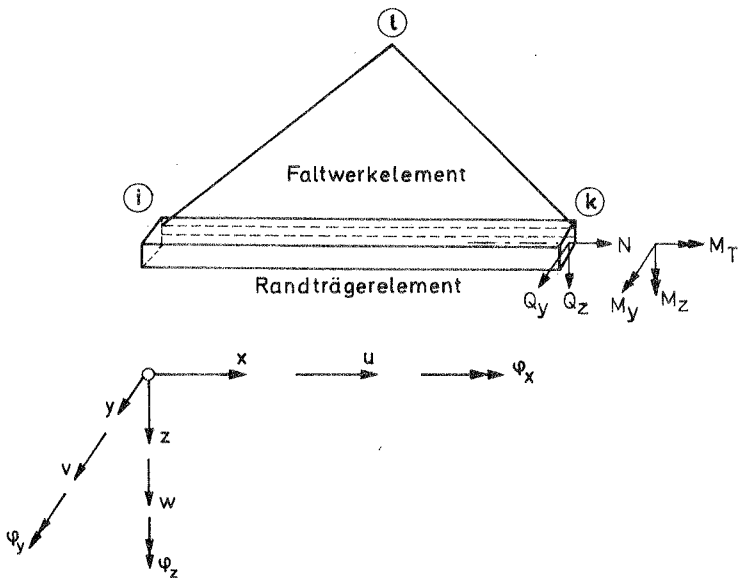


Bild 2.5: Lage, Verformungen und Schnittgrößen des Randträgerelementes

Verschiebungsansatz:

Die Einheitsverschiebungszustände des Balkenelementes werden durch Hermite'sche Interpolationspolynome von höchstens dritter Ordnung wiedergegeben. Die axiale Verschiebung u und die Torsionsverdrehung ϕ_x werden durch einen linearen Ansatz,

die Verschiebungen v , w und die Verdrehungen ϕ_y , ϕ_z durch ein kubisches Polynom erfaßt.

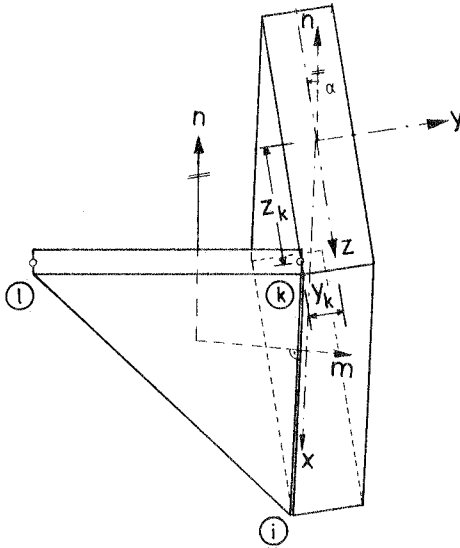


Bild 2.6: Anschluß des Randträgers an das Faltelement

Kompatibilität zum Faltelement

Die Verschiebungsansätze des Randträger- und des Faltelementes sind bezüglich der Verschiebung u , w (Bild 2.5) kompatibel. Der Ansatz für die Verschiebung v ist für den Randträger zwei Grade höher als derjenige, der im Faltelement den Scheibenzustand beschreibt. Diese Inkompatibilität ist hier sinnvoll, da sich die Annahme für das Faltelement, eine Verdrehung in Normalenrichtung verursache keine Momente, nicht auf das Randträger-Element übertragen läßt.

Die Tangentenquerneigung ändert sich höchstens linear über den Rand $i - k$ (Bild 2.6) und kann daher eindeutig aus den Endtangentenquerneigungen bestimmt werden. Da auch der Randträger-Ansatz nur eine lineare Änderung der Querneigung zuläßt, ist die Kompatibilität gewährleistet.

Die Rechenergebnisse des Faltelementes werden mit den sehr genauen Werten verglichen, die das Schalelement 'SHEBA6' aus dem Programmsystem ASKA [6.9] für Kugelschalen unter konstantem Außendruck liefert.

Das Schalenelement 'SHEBA6'

Das finite Element 'SHEBA6' ist ein gekrümmtes dreieckiges Schalenelement nach der Kirchhoff'schen Schalentheorie mit 21 Freiheitsgraden pro Knoten. Mit ihm können beliebig berandete und beliebig gelagerte Schalen berechnet werden, deren Oberfläche in einer Parameterdarstellung gegeben ist, (z.B. Kugelschalen, Paraboloidschalen, Ellipsoidschalen) oder durch Transformation aus einer anderen Darstellung gewonnen werden kann.

Es ist günstig, die Parameter so zu wählen, daß die Schalenränder Geraden in der Abbildungsebene ξ^1, ξ^2 sind (Bild 2.7). 'SHEBA6' ist ein Verschiebungsmodell; konstante Dicke und konstanter Elastizitätsmodul werden über die Elementfläche vorausgesetzt. Die Ausgabe der Verschiebungen und Schnittkräfte erfolgt in den Knoten des Elementes bezogen auf das globale oder lokale Koordinatensystem.

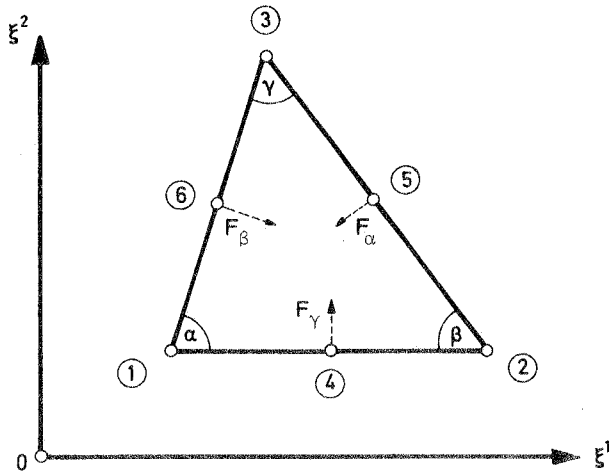


Bild 2.7: Die drei Freiheitsgrade F in den Mittelpunkten der Dreieckseiten

Verschiebungsansatz:

Für jede Komponente des Verschiebungsvektors wird ein vollständiges Polynom fünfter Ordnung gewählt. Mit diesem Ansatz erhält man volle kinematische Verträglichkeit zwischen den benachbarten Elementen. Wesentlich ist auch, daß die Verträglichkeit der Geometrie der Mittelfläche an den Elementrändern gewähr-

leistet ist. Sie wird durch die Verwendung desselben Interpolationsschemas wie für die Verschiebungen erzwungen. 'Nulldehnungen' bei einer Starrkörperverschiebung des Elementes werden so garantiert.

Mit Q wird eine beliebige Komponente der Verschiebungen oder der Koordinaten bezeichnet, die innerhalb des Dreiecks als Polynom fünfter Ordnung in ξ^1, ξ^2 dargestellt wird, wozu man 21 Konstanten a_{ij}^k pro Knoten k benötigt.

$$Q = F(\xi^1, \xi^2) = \sum_{k=1}^{21} a_{ij}^k (\xi^1)^i (\xi^2)^j, \quad i, j \geq 0, \quad i+j \leq 5$$

Die 21 Knotenpunktwerte von Q müssen garantieren, daß die Funktion Q und ihre ersten Ableitungen über die Ränder hinweg stetig verlaufen. In den Eckpunkten 1, 2, 3 werden der Wert der Funktion Q , sowie alle ersten und zweiten Ableitungen gebraucht. Mit den drei Ableitungen in den Mittelpunkten 4, 5, 6 besitzt man dann 21 Größen. Die drei Freiheitsgrade in den Mittelpunkten der Dreiecksseiten werden eliminiert, indem die erste Ableitung des Verschiebungsvektors senkrecht zu den Rändern (Bild 2.7) in der Dreiecksebene nach einem Polynom dritten Grades verläuft und deshalb durch entsprechende Ableitungen der zugehörigen Elementecken dargestellt werden kann. Dies führt zu einer Vergrößerung der Elementsteifigkeit, die jedoch vernachlässigbar ist.

Die Freiheitsgrade des Verschiebungsvektors $v = (v^1 \ v^2 \ v^n)$ am Knoten k bezüglich des lokalen Koordinatensystems $e_1 \ e_2 \ e_n$ lauten:

$$v_k = (v^1 \ v^2 \ v^n \ v_{,1}^1 \ v_{,1}^2 \ v_{,1}^n \ v_{,2}^1 \ v_{,2}^2 \ v_{,2}^n \ v_{,11}^1 \ v_{,11}^2 \ v_{,11}^n \ v_{,12}^1 \ v_{,12}^2 \ v_{,12}^n \ v_{,22}^1 \ v_{,22}^2 \ v_{,22}^n)$$

und in dem Mittelknoten der Elementkante

$$v_m = (v_{,F\mu}^1 \ v_{,F\mu}^2 \ v_{,F\mu}^n)$$

wobei $v_{,F\mu}^i$ die Ableitung der Verschiebungskomponente v^i senkrecht zu der Elementkante innerhalb der Dreiecksebene und $v_{,1}^1$ die erste Ableitung der Verschiebungskomponente zur Richtung e_1 des lokalen Koordinatensystems bedeuten [6.9].

2.2 Angaben zu den Schalen und den Materialkennwerten

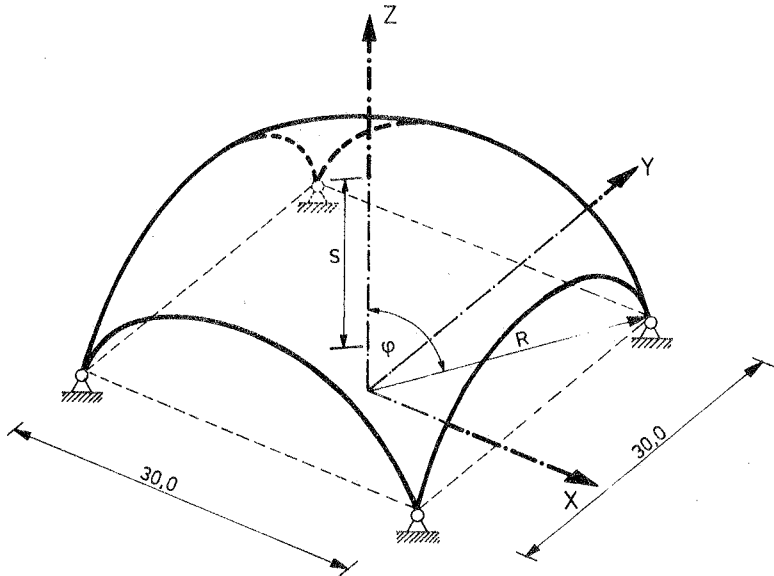


Bild 2.8: Abmessungen der Schale

Scheitelhöhe der untersuchten Kuppelschalen	S [m]
Radius bei Kugelschalen	R [m]
Öffnungswinkel bei Kugelschalen	φ [Grad]
Material	Stahlbeton B35
Elastizitätsmodul E	$34 \cdot 10^6$ [kN/m ²]
Querdehnzahl ν	1/6
Schalendicke t	0,08 [m]
Spezifisches Gewicht γ	25,0 [kN/m ³]

Die Grundrißabmessungen 30 x 30 m werden für Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloid-schalen unverändert beibehalten. Die Grundrißabmessungen von Membranschalen werden variiert (Abschnitt 2.4.2).

Materialkennwerte und Bemessung

Für die Untersuchung wird ein Stahlbeton der Güte B35 mit einem Elastizitätsmodul $E = 3\,400\,000\text{ N/cm}^2$ und ein Betonrippenstahl BSt 420/500 angenommen. Die kleinste Schalendicke wurde für diese Untersuchung auf $t = 8\text{ cm}$ festgelegt.

Die Schalen werden nach Abschnitt 24.4 der DIN 1045 bemessen. Dabei ist der Sicherheitsabstand zwischen Gebrauchslast und Bruchlast ausreichend, wenn unter Gebrauchslast die Hauptdruckspannungen im Beton den Rechenwert $\beta_R/2,1$ (Tab. 13 der DIN 1045, z.B. für B35 ist $\beta_R/2,1 = 1095\text{ N/cm}^2$) und die Hauptzugspannungen im Stahl den Rechenwert der Fließgrenze $\beta_S/1,75$ bzw. 24 kN/cm^2 nicht überschreiten. Die Schalenabschnitte mit Nutzhöhen $h < 10\text{ cm}$ werden nach Abschnitt 17.2.1 der DIN 1045 für $15/(h+5)$ -fache Schnittgrößen bemessen. Um bei der Bemessung der Schalen (Biegung mit Längskraft) die zulässige Tragkraft von Stahl und Beton voll auszunutzen und damit auch wirtschaftlich zu bemessen, wird der k_h -Wert in dieser Arbeit nach unten begrenzt (z.B. B35, BSt 420/500, $k_h \cong 1,65$ bei einer Druckdehnung von Beton $\epsilon_{b1} = 3,5\%$ und einer Zugdehnung von Stahl $\epsilon_e = 5\%$, Tafel 3a, Seite 706 von [7.5]) und auf eine Druckbewehrung des Schalenquerschnittes verzichtet.

Die Hauptzugspannungen aus Hauptnormalkräften im Schaleninneren oder aus Hauptnormalkräften und Hauptbiegemomenten am Rand- und im Auflagerbereich der Schalen werden durch beidseitige, in Richtung der Hauptspannungen geführte, Bewehrungsnetze aufgenommen. Weicht die Bewehrungsrichtung stellenweise um mehr als 10° (Abschnitt 24.4 der DIN 1045) von der Hauptspannungsrichtung ab, wird die Bewehrung entsprechend verstärkt [7.1, 7.5, 7.6, 7.11, 7.12].

Die in der Schalenmittelfläche wirkenden Hauptzugspannungen werden in Anlehnung an DIN 1045, Abschnitt 24.4 auf $\sigma_H \leq 0,35 \sqrt[3]{\beta_{WN}^2}$ (z.B. B35, $\sigma_H \leq 173\text{ N/cm}^2$) begrenzt, um Spannungumlagerungen und Verformungen durch den Übergang des Stahlbetons vom Zustand I in Zustand II klein zu halten.

Die Ribbreite des Stahlbetons kann durch eine geeignete Wahl des Bewehrungsgrades, des Stabdurchmessers und des Stababstandes verringert werden. Diagramme zur Ribbreitenbeschränkung sind in [7.7, 7.10, 7.11, 7.13, 7.16] angegeben. Für genäherte Ribbreiten kann mit ihnen bei gegebenem Bewehrungsgrad μ_z der größtmögliche Stabdurchmesser bestimmt werden.

Die Risse des Stahlbetons werden in dieser Arbeit nach DIN 1045, Abschnitt 17.6.2 auf eine 'sehr geringe' Breite beschränkt, um Spannungumlagerungen im gerissenen Beton klein zu halten.

Für die zulässige Druckspannung bei einer Teilflächenbelastung an den Auflagern gilt Absatz 17.3.3 der DIN 1045. Es wird angenommen, daß die Spaltzugkräfte einer Teilflächenbelastung durch eine horizontale Vorspannung des Auflagerbereiches aufgenommen werden, um z.B. bei der Auflagerkrafteinleitung Risse im Beton zu verhindern.

Auf Kriech- und Schwindverformungen des Betons wird in dieser Untersuchung nicht eingegangen.

2.3 Angaben zu den Lastfällen

Lastfall Nr. 1 Eigengewicht

Schnitt 1-1:

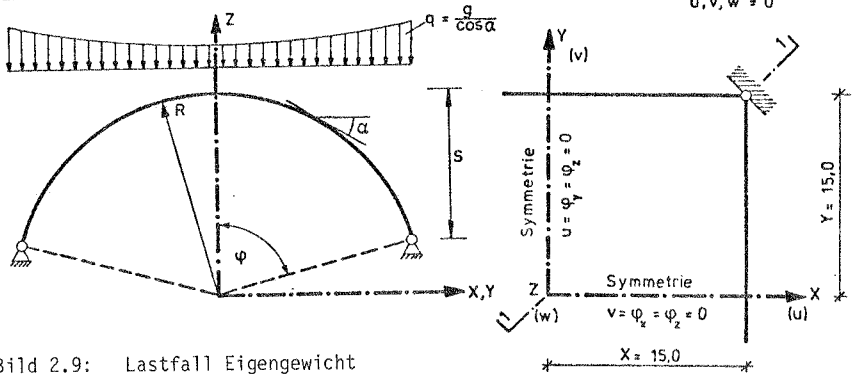


Bild 2.9: Lastfall Eigengewicht

Lastfall Nr. 2 Schneelast

Es wird für die nachfolgende Untersuchung eine über dem Grundriß konst. vertik. Flächenlast $p_{s,2} = 1,0 \text{ kN/m}^2$ zugrundegelegt.

Lastfall Nr. 3 Windlast

Zur angenäherten Erfassung der Windlast wird eine antisymmetrische Lastverteilung mit einer Außendrucklast $p_{w,3} = p \cdot \sin \phi \cdot \cos \vartheta$ festgelegt. Als Staudruck wird in dieser Arbeit $p = 1,0 \text{ kN/m}^2$ angenommen.

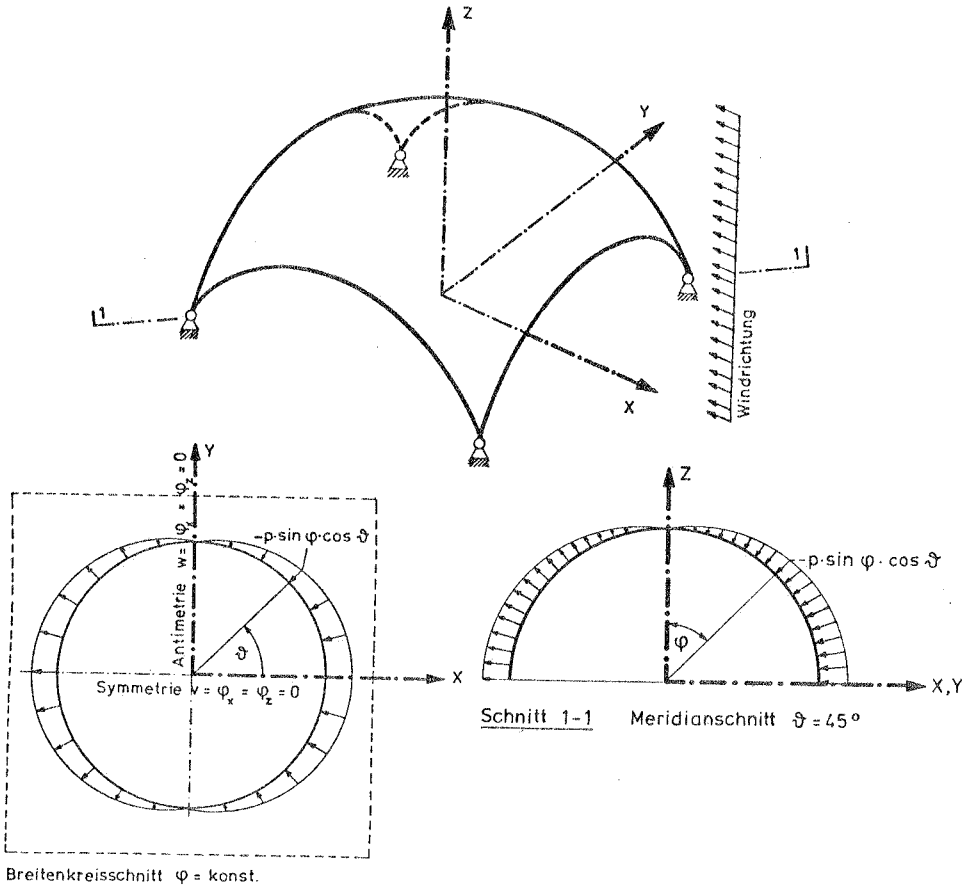


Bild 2.10: Lastfall Windlast

Lastfall Nr. 4 Horizontale Stützenverschiebung

Es wird angenommen, daß die horizontale Stützenverschiebung an jedem Lager zur selben Zeit auftritt. Die resultierende Verschiebung u_d wird in Richtung der Diagonalen des Grundrisses angesetzt, z.B. $u = v = 0,01 \text{ m}$ (Bild 2.11).

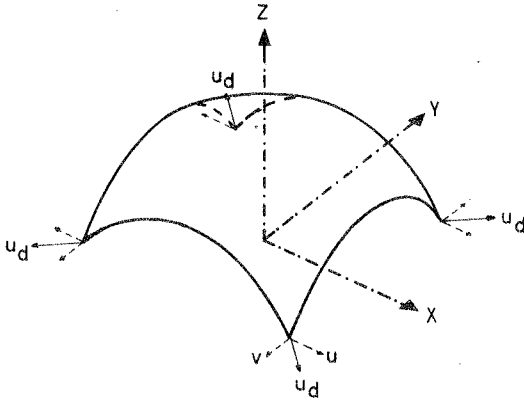


Bild 2.11: Horizontale Stützenverschiebung

Kombinierte Lastfälle:

Lastfall Nr. 5 Kombiniertes antisymmetrischer Lastfall p_5

In Anlehnung an DIN 1055 Teil 5 [7.5] wird in dieser Arbeit ein Lastfall p_5 angenommen, dessen Lasten sich aus überlagerten Wind- und einseitigen Schneelasten zusammensetzen.

Einseitige halbe Schneelast $p_s = 0,50 \text{ kN/m}^2$ tritt in Verbindung mit der halben Windlast auf. Staudruck der Windlast $p = 0,50 \text{ kN/m}^2$.

Lastfall $p_5 = 0,50 (p_{s,2} + p_{w,3}) \text{ kN/m}^2$ (Bild 2.12)

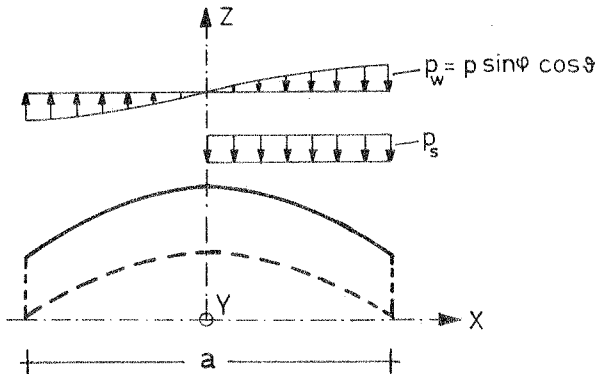


Bild 2.12: Einseitige halbe Schneelast p_s und halbe Windlast p_w im Schnitt:

$$y = 0, \quad -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$$

Lastfall Nr. 6 Kombiniertes achsensymmetrischer Lastfall

Eigengewicht:	$0,08 \cdot 25 \text{ kN/m}^2 =$	$g = 2,0 \text{ kN/m}^2$
Schneelast (konstante vertikale Flächenlast)		$p = 1,0 \text{ kN/m}^2$
Scheitellast		$q = 3,0 \text{ kN/m}^2$

Lastfall Nr. 7 Kombiniertes achsensymmetrischer Lastfall

Eigengewicht:	$0,08 \cdot 25 \text{ kN/m}^2 =$	$g = 2,0 \text{ kN/m}^2$
Dachhaut, Dämmplatten und Einbauten		$g = 2,0 \text{ kN/m}^2$
Schneelast (konstante vertikale Flächenlast)		$s = 1,0 \text{ kN/m}^2$
radial gerichtete Windersatzlast, die die Wirkung des Eigengewichtes erhöht (in Anlehnung an DIN 1045, Abschnitt 24.2.2).		$p = 1,0 \text{ kN/m}^2$
Scheitellast		$q = 6,0 \text{ kN/m}^2$

Bei diesem ideellen Lastfall sind verschiedene Lastarten integriert. Er wird zu Vergleichszwecken herangezogen.

2.4 Parametervariationen

In den Abschnitten 3 und 4 wird detailliert angegeben, welche Werte die einzelnen Parameter annehmen.

2.4.1 Scheitelhöhen

$3,74 \text{ m} \leq S \leq 23,0 \text{ m}$ (Bild 2.8)

Bei Kugelschalen:

Scheitelhöhe								
S [m]	3,74	5,68	7,72	9,89	12,25	14,85	17,80	
Radius								
R [m]	62,023	42,426	33,002	27,692	24,495	22,575	21,54	
Öffnungswinkel								
[Grad]	20	30	40	50	60	70	80	

Abgrenzungen für niedrige Kuppelschalen

niedrige Kugelschalen:	Öffnungswinkel	$20^\circ \leq \phi \leq 40^\circ$
niedrige Paraboloidschalen und Ellipsoidschalen:	Scheitelhöhe	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 7,72 \text{ m}$
niedrige Membranschalen	Scheitelhöhe	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 7,72 \text{ m}$



Bild 2.13: Niedrige Kugelschale über quadratischem Grundriß
Öffnungswinkel $\phi = 20^\circ$

Abgrenzungen für hohe Kuppelschalen:

hohe Kugelschalen:	Öffnungswinkel $60^\circ < \phi < 80^\circ$
hohe Paraboloidschalen und Ellipsoidschalen:	Scheitelhöhe $12,25 \text{ m} < S < 17,8 \text{ m}$
hohe Membranschalen:	Scheitelhöhe $12,25 \text{ m} < S < 23,0 \text{ m}$

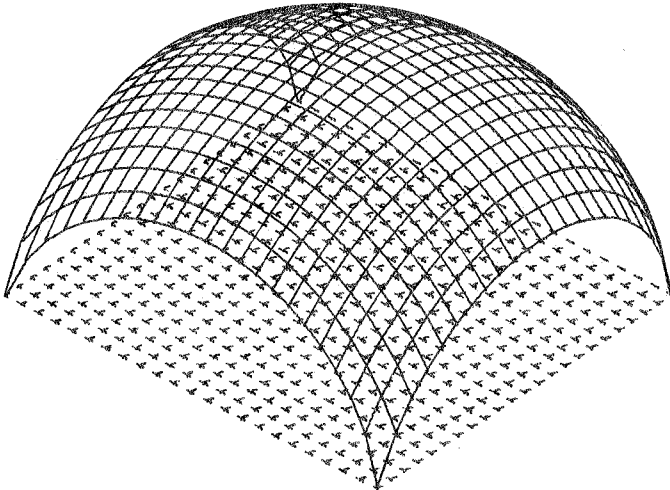


Bild 2.14: Hohe Kugelschale über quadratischem Grundriß
Öffnungswinkel $\phi = 80^\circ$

2.4.2 Grundrißabmessungen

Die Grundrißabmessungen 30 x 30 m werden für Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloid-schalen unverändert beibehalten. Die Grundrißabmessungen von Membranschalen werden wie folgt variiert:

Seitenlänge des
Grundrißquadrates [m] : 20 30 45 60

2.4.3 Variation der Form

a) Kuppelschalen mit abgeflachter Krümmung im Auflagerbereich

Die Mittelflächenkrümmung einer Kuppelschale im Auflagerbereich wird durch eine Übergangsfläche so bestimmt, daß die Auflagerkraft für einen speziellen Lastfall (Eigengewicht oder Schnee oder Wind) annähernd tangential eingeleitet wird. Die Übergangsfläche wird durch die Rotation des Bogenabschnittes einer hyperbolischen Spirale $\rho = b/\phi$ um die Z-Achse erzeugt (Bild 2.15). Die hyperbolische Spirale hat sich in diesem Fall als für die Rechnung zweckmäßige Kurve erwiesen.

In Abschnitt 3.6 wird die Reichweite dieser Übergangsfläche variiert (Variation von 15,0 m $\geq X_K \geq$ 10,0 m, Bild 2.15).

Beispiel: Kugelschale mit abgeflachter Krümmung im Auflagerbereich

Der Kreis als Erzeugende der Kugel geht in Randnähe der Schale stetig in den Kurvenabschnitt der hyperbolischen Spirale über. Am Berührungspunkt stimmen die Krümmungsradien beider Bögen überein. Die Größe X_K ist die in die Grundrißebene projizierte Länge des Kreisbogens ($0 < X_K \leq 15 \sqrt{2}$). Zusammen mit dem Neigungswinkel α der Tangente am Lager A bestimmt sie die Form der Schale. Der Winkel α wird iterativ gefunden.

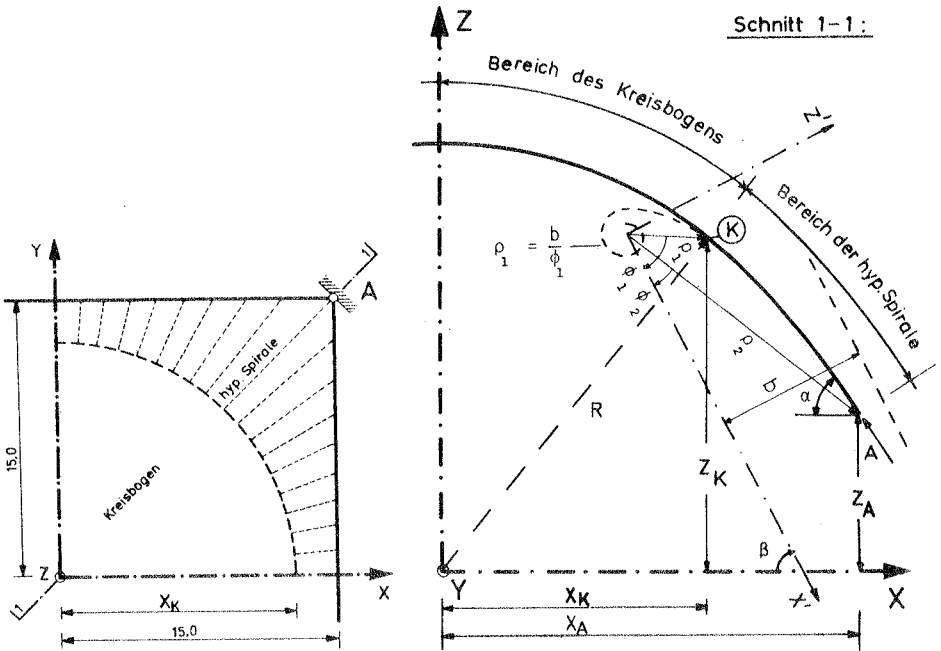


Bild 2.15: Variation der Krümmung im Rand- und Auflagerbereich

b) Vergleich der unterschiedlichen Mittelflächenformen, die durch Ausschnitte aus fünf Rotationsschalen über quadratischem Grundriß gefunden werden

Kugelschale: (Bild 2.16)

Schalenoberfläche mit konstanter Krümmung
(Abkürzung im Text und auf Bildern KU)

Ellipsoidschale: (Bild 2.16, 2.2o)

Die Krümmung der Schalenoberfläche nimmt vom Scheitel zum freien Rand und in Richtung Auflager stetig zu. Es wird der ungünstigste Fall der vollständigen Ellipse betrachtet.

(Abkürzung im Text und auf Bildern EL)

Paraboloidschalen:

Die Krümmung der Schalenmittelflächen nimmt vom Scheitel in Richtung Auflager stetig ab.

Die Paraboloidschalen entstehen durch Rotation

- einer quadratischen Parabel um die Z-Achse (Bild 2.16, 2.18)
(Abkürzung im Text und auf Bildern PA2)
- oder einer kubischen Parabel um die Z-Achse (Bild 2.19)
(Abkürzung im Text und auf Bildern PA3)

Abgeflachte Paraboloidschale (Bild 2.20, [4.2])

(Abkürzung im Text und auf Bildern PAFL)

Die mit den Ebenen der Randbögen parallelen Schnitte der Mittelfläche bilden Parabeln zweiten Grades mit vertikaler Achse.

In Bild 2.16 sind die Schalen mit der Scheitelhöhe $S = 17,80$ m (hoher Bereich) und $S = 5,68$ m (niedriger Bereich) exemplarisch dargestellt.

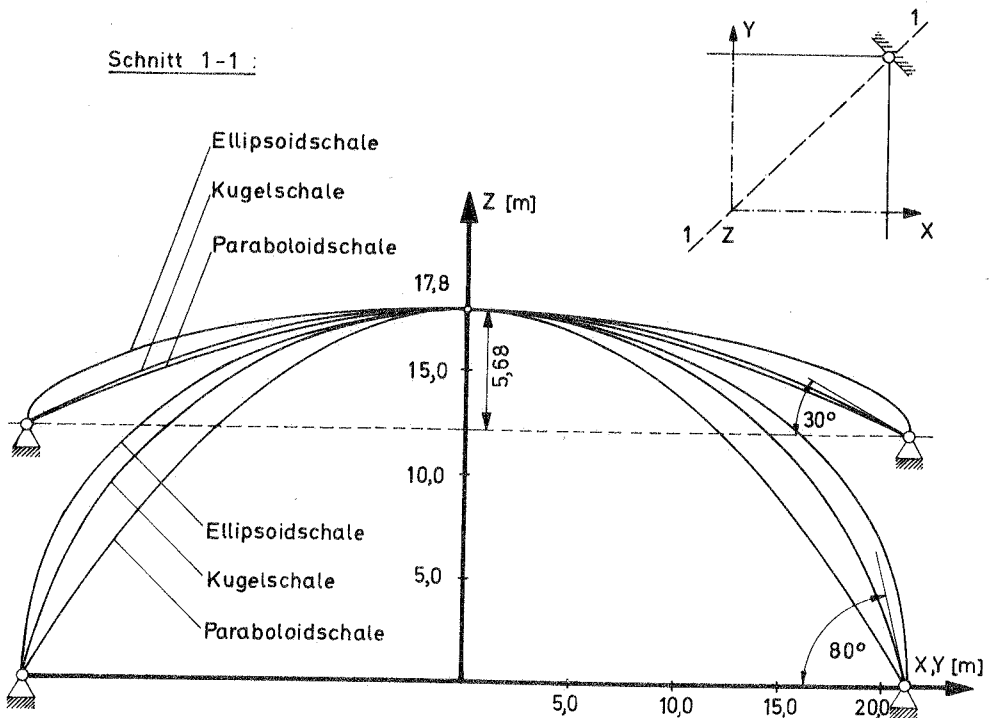
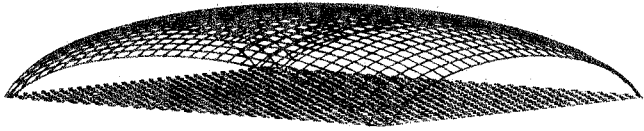


Bild 2.16: Mittelflächenformen niedriger und hoher Kuppelschalen

Niedrige Ellipoidschale (EL)



Hohe Ellipoidschale (EL)

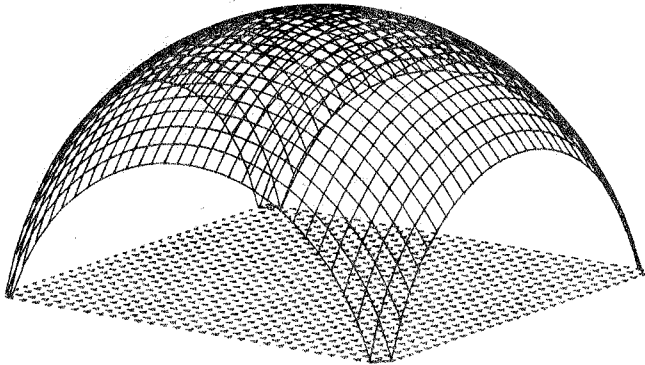
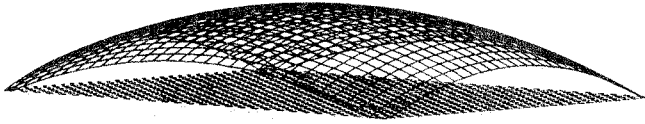


Bild 2.17: Niedrige und hohe Ellipoidschalen (EL)

Niedrige Paraboloidschale (PA2)



Hohe Paraboloidschale (PA2)

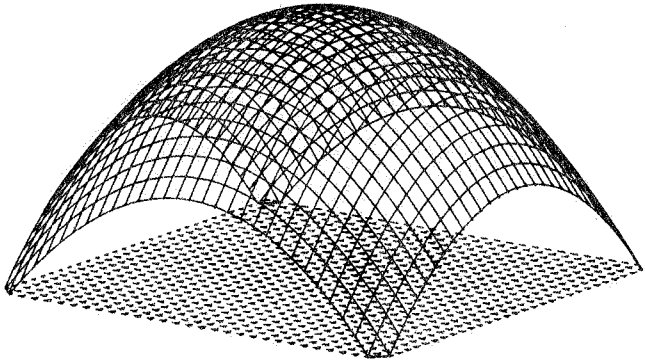
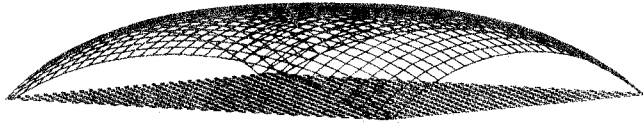


Bild 2.18: Niedrige und hohe Paraboloidschalen (PA2)

Niedrige kubische Paraboloidschale (PA3)



Hohe kubische Paraboloidschale (PA3)

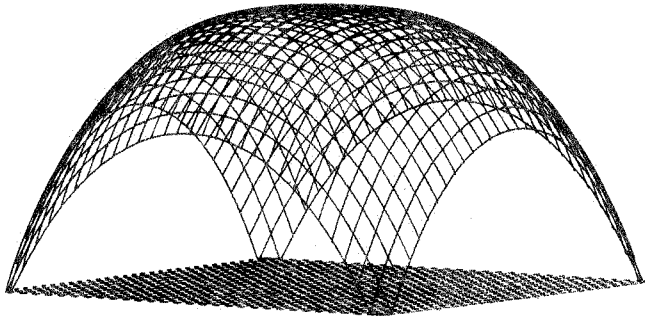
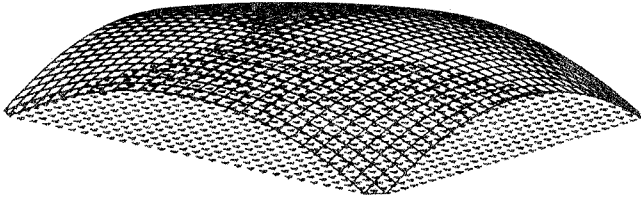


Bild 2.19: Niedrige und hohe kubische Paraboloidschalen (PA3)

Niedrige abgeflachte Paraboloidschale (PAFL)



Hohe abgeflachte Paraboloidschale (PAFL)

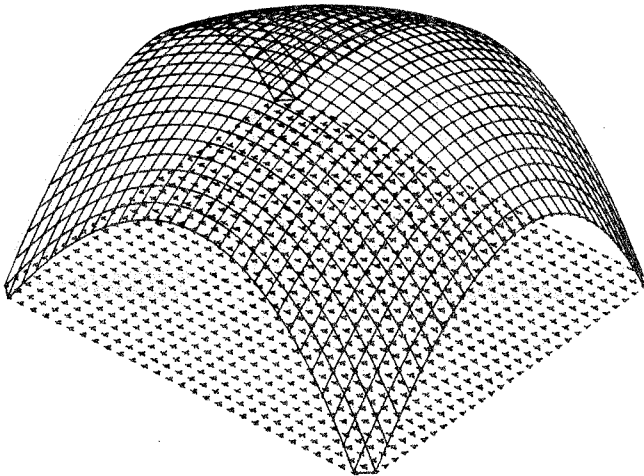


Bild 2.20: Niedrige und hohe abgeflachte Paraboloidschalen (PAFL)

c) Vergleich unterschiedlicher Formen von Membranschalen

'Unverformte' Gleichgewichtslagen punktgelagerter Membranen werden für eine achsensymmetrische Lastgruppe aus Eigengewicht und konstanter Schneelast oder für eine antimetrische Flächenlastgruppe durch Auflösen der Pucher'schen Differentialgleichung [2.7] nach den Z-Koordinaten (Form) gefunden. (Abschnitt 4).

Diese Membranformen bilden dann die Mittelflächen von Membranschalen, deren Tragverhalten für verschiedene Flächenlasten untersucht werden.

Die Schalen werden in dieser Arbeit Membranschalen oder 'unverformte' Gleichgewichtslagen punktgelagerter Membranen genannt, weil die Formen nur aus einer Membrankräftegleichgewichtsbedingung für vorgegebene Spannungsfunktionen durch die Lagerung erzwungen werden (vgl. Abschnitt 4.6).

Dabei entstehen Schalen, deren ganze Mittelfläche positiv gekrümmt ist (Bild 2.21 (a)) oder Schalen mit positiv gekrümmtem Scheitelbereich und negativer Krümmung entlang des freien Randes (Bild 2.21 (b)).

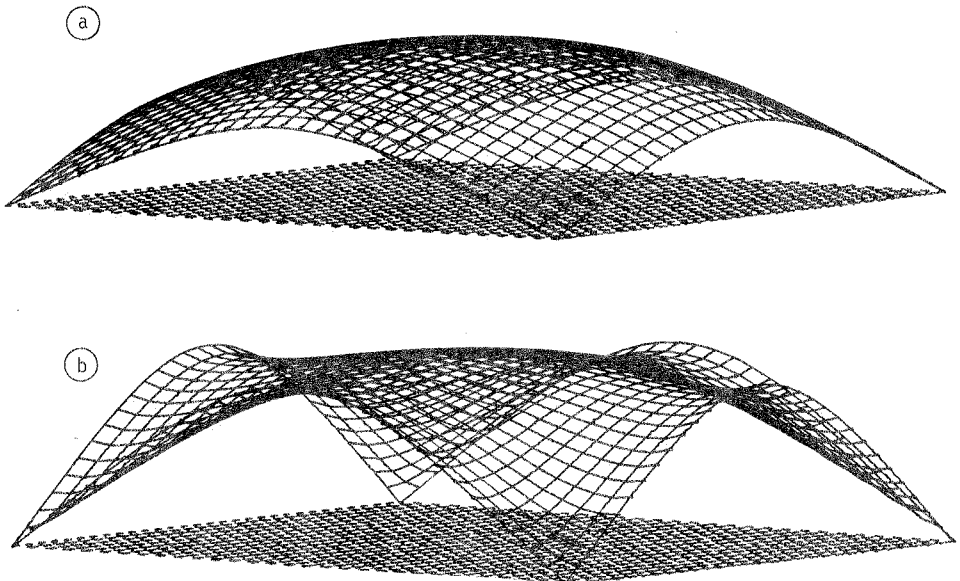


Bild 2.21: Punktgelagerte Membranschalen

2.4.4 Variation der Schalendicke

a) Variation der Schalendicke in Auflagernähe

Die Schalendicke $t_M = 0,08$ m nimmt im Auflagerbereich (Breite b') stufenförmig zu ($i = t_R/t_M$, $1,0 \leq i \leq 14,0$).

Die Breite b' beträgt bei Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen $b' = a/3$ m, bei Membranschalen $b' = a/5$ m.

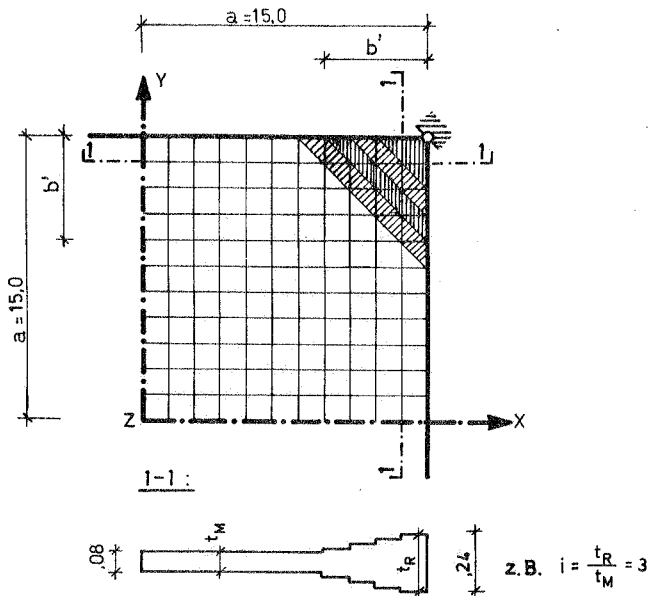


Bild 2.22: Lineare Zunahme der Dicke im Auflagerbereich

b) Variation der Schalendicke entlang des Randes und in Auflagernähe

Die Schalendicke $t_M = 0,08$ m steigt am Rand und im Auflagerbereich stufenförmig an ($i = t_R/t_M$, $1,0 \leq i \leq 7,0$).

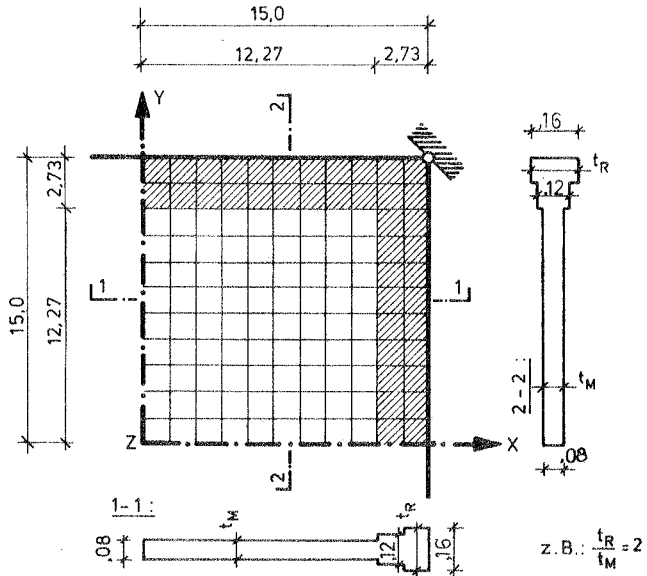


Bild 2.23: Lineare Zunahme der Dicke im Randbereich

c) Randträger

Der Randträger ist 0,3 m breit. Seine Achse z neigt sich gegenüber der Vertikalen um den Winkel β nach außen. Der Winkel α zwischen der Normalen n des Schalenrandes und der Achse z des unverwundenen Randträgers ist längs des Randes variabel (Bild 2.24).

Gewählte Dicken der Kuppelschalen: im Auflagerbereich entlang des Schalenrandes

bei Paraboloidschalen	3-fach	1,5-fach
bei Kugelschalen	4-fach	1,5-fach

(Bild 2.24)

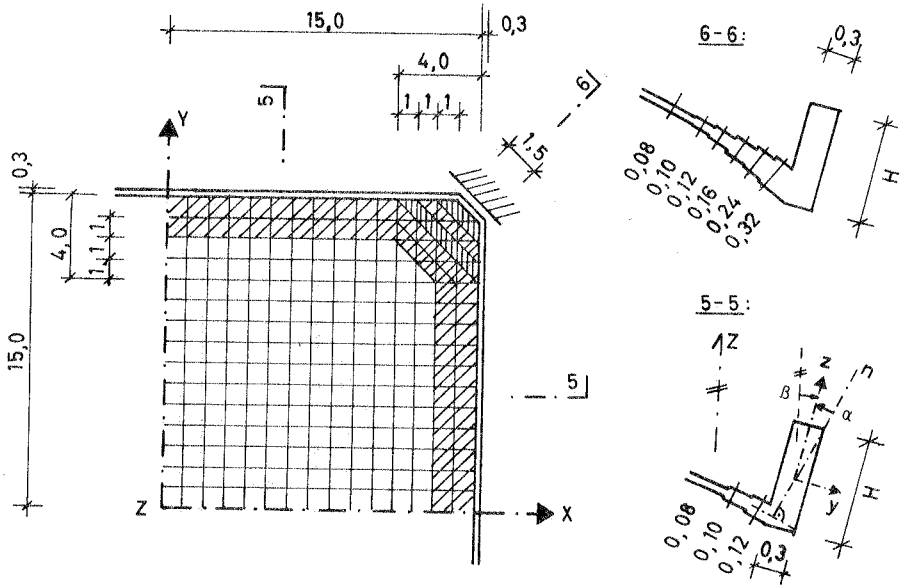


Bild 2.24: Schalendicke im Rand- und Auflagerbereich, Randträgerabmessungen

d) Variation der Schalendicke entlang der Diagonalen vom Auflager bis zum Scheitel bei gleichzeitiger Stützung des Schalenrandes durch einen rechteckigen Randträger (Bild 2.25)

Die längere Seite H des Randträgers liegt normal zum Schalenrand. Der Randträger ist längs seiner Achse verwunden. Seine Höhe beträgt $H = 0,8$ m.

Die Schalendicke $t_M = 0,08$ m steigt im Bereich der Diagonalen stufenförmig an ($i = t_D/t_M, 1 \leq i \leq 6$).

e) Variation der Schalendicke entlang der Diagonalen vom Auflager bis zum Scheitel

Die Schalendicke $t_M = 0,08$ m steigt im Bereich der Diagonalen stufenförmig an ($i = t_D/t_M, 1 \leq i \leq 6$).

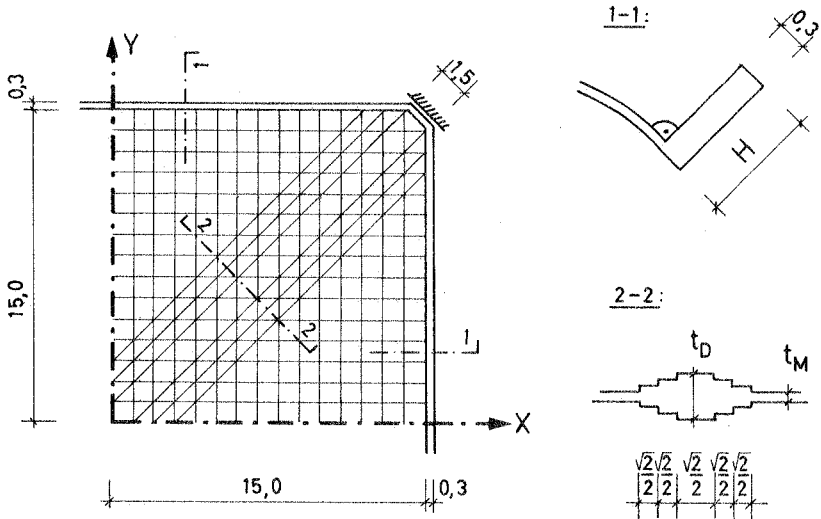


Bild 2.25: Versteifung der Schale entlang der Diagonalen und am Rand

2.4.5 Lagerungen

1. Horizontal unverschiebliche 'Punktlagerung' in den Ecken des Quadrates mit einer minimalen Lagerbreite $b = 0,2$ m (Randbedingungen $u = v = w = 0$).
2. Horizontal unverschiebliches Linienlager in den Ecken des Quadrates mit den Auflagerbreiten $0,2 \text{ m} \leq b \leq 2,0 \text{ m}$.
3. Horizontal unverschiebliches Linienlager in den Ecken des Quadrates mit einer Lagerbreite $b = 1,50$ m. Unterstützung des Schalenrandes durch Pendelstützen in Abständen von $5,0$ m (Bild 2.26, 2.27).

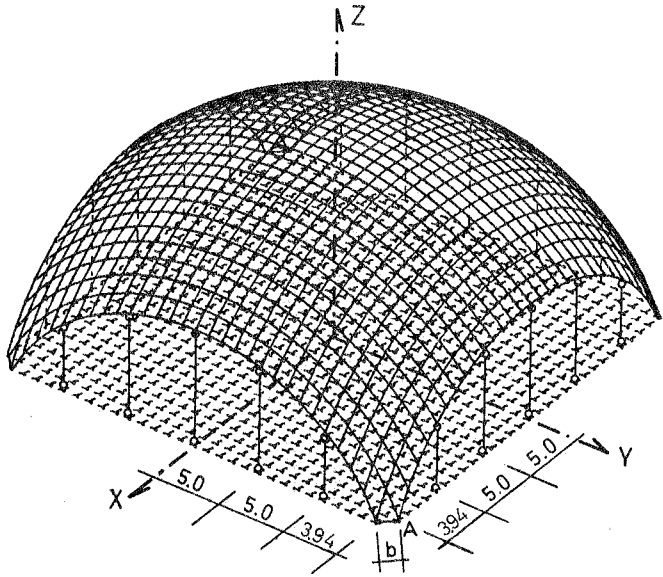


Bild 2.26: Randbedingungen: Linienlager mit der Breite $b = 1,50$ m und Pendelstützen entlang des Randes.

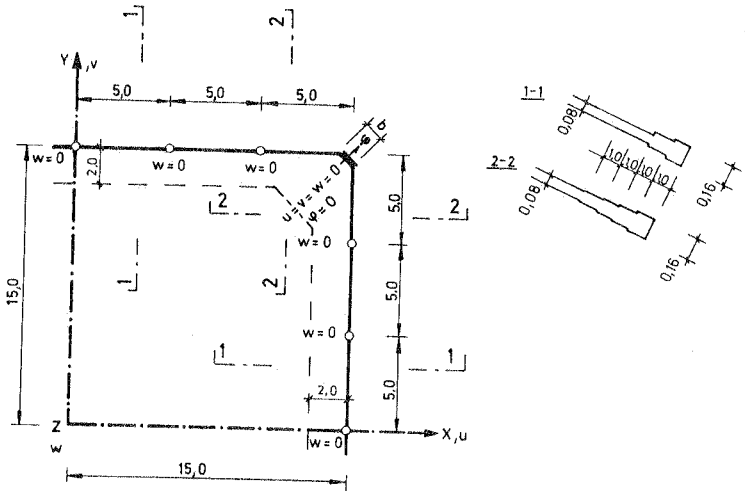


Bild 2.27: Schalendicke entlang des Randes und im Auflagerbereich, wenn der Rand zusätzlich durch Pendelstützen unterstützt wird.

2.5 Diskretisierung und Genauigkeit der Rechenergebnisse

Für jede Serie von niedrigen und hohen Kuppelschalen wird bei einer Parameter-variation (z.B. Auflagerbreite) die gleiche - beispielsweise die von Bild 2.28 - Elemententeilung angenommen. Die Verformungen und Schnittgrößen werden an einem Viertel der Schale ermittelt.

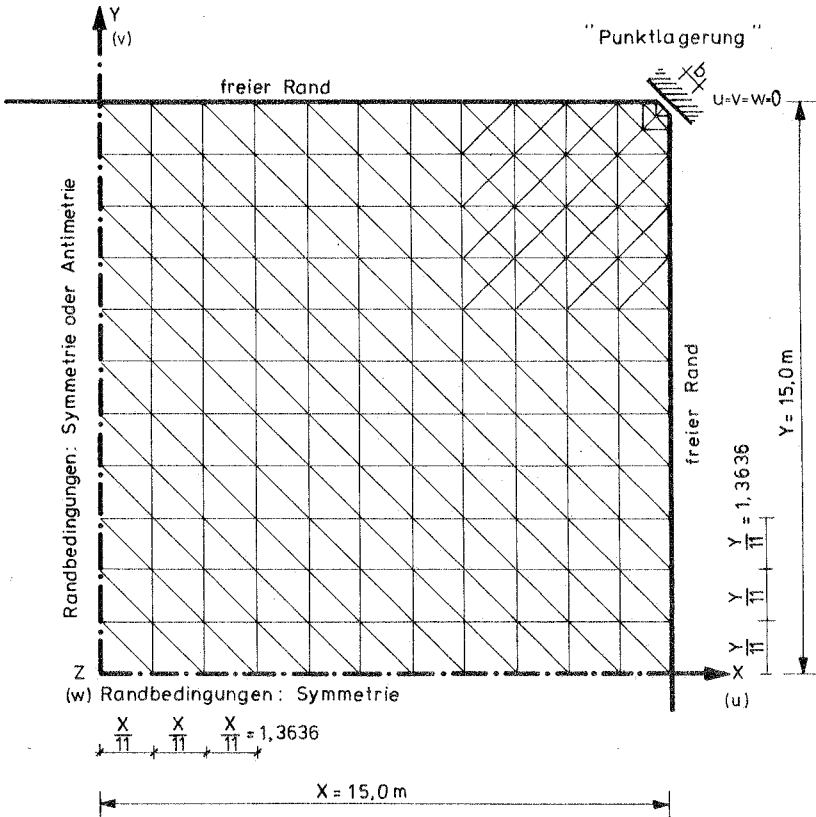


Bild 2.28: Elemententeilung im Grundriß, Anzahl der vertikalen und horizontalen Gitterlinien $n_x = n_y = 12$.

Genauigkeit der Ergebnisse

Für eine Genauigkeitsstudie werden drei Kugelschalen über quadratischem Grundriß mit folgenden Abmessungen ausgewählt:

Seitenlänge des Quadrates:	30,0 m		
Öffnungswinkel ϕ [Grad] :	20	50	80
Schalendicke t [m] :	0,08	0,08	0,08
'Punktlagerung' in den Ecken des Quadrates, Lagerbreite b [m] :	0,2	0,2	1,0
Elastizitätsmodul E [kN/m ²]:	$34 \cdot 10^6$		
Querdehnzahl ν :	1/6		
Lastfall konstanter Außendruck:	1,0 kN/m ²		

Die Rechenergebnisse des Faltwerkelementes werden mit den sehr genauen Werten verglichen, die das Schalenelement 'SHEBA6' aus dem Programmsystem ASKA [6.9] (Abschnitt 2.1) für den Lastfall konstanten Außendruck $p = 1,0$ kN/m² bei niedrigen und hohen Kugelschalen liefert.

Bei einer Gitterliniendichte $n_x = n_y = 16$ werden die Verschiebungen mit dem Faltwerkelement bis zu 96% und die Schnittkräfte bis zu 93% genau berechnet (Tabelle 2.29). Diese feine Elementeteilung ($n_x = n_y = 16$) führt auf der Rechenanlage CDC 6600 zu sogenannten 'Longjobs', die wegen ihrer hohen Rechenzeit überwiegend an den Wochenenden gerechnet wurden. Auf diese Weise konnten monatlich nur 8-10 Computerläufe erreicht werden. Da bei der geringeren Gitterliniendichte $n_x = n_y = 12$ nur die Hälfte der Rechenzeit erforderlich war, konnte die Anzahl der Rechenläufe - jetzt im 'Normaljob'-bereich - auf das 6- bis 8-fache erhöht werden. Im Hinblick auf den Fortschritt der Parameterstudie und die Rechenzeiterparnis wurde auch mit einer Gitterliniendichte $n_x = n_y = 12$ gerechnet. Die Genauigkeit der Verformungs- und Spannungszustände genügte bei dieser Elementdichte, um das Tragverhalten der Schalen zu beschreiben, wie aus der Gegenüberstellung in Tabelle 2.29 hervorgeht.

Öffnungswinkel der Kugelschale	20 Grad	50 Grad	80 Grad
Randbedingung Punktlagerung in den Ecken	Lagerbreite in den Ecken b = 0,2 m	Lagerbreite in den Ecken	Lagerbreite in den Ecken b = 1,0 m
Gitterlinienanzahl	12	12	12
Elementanzahl	280	280	276
Knotenanzahl	165	165	162
Knotenunbekannte	909	909	891
Genauigkeit der Verformungen (bezogen auf Extremwerte)	92 %	88 %	90 %
Genauigkeit der Schnittgrößen (bezogen auf Extremwerte)	87 %	85 %	87 %
		93 %	95 %
		89 %	91 %

Tabelle 2.29: Vergleich des Falterkelementes mit dem SHEBA6-Element (= 100 %)

3. TRAGVERHALTEN HORIZONTAL UNVERSCHIEBLICH, PUNKTFÖRMIG GELAGERTER ROTATIONS-SCHALEN ÜBER QUADRATISCHEM GRUNDRISS

Schilderung der Lastabtragung

Die Mittelflächen der in diesem Abschnitt untersuchten Ellipsoid- und Paraboloidschalen stellen für die Lastfälle Eigengewicht, Schnee- und Windlasten und die punktförmige Lagerung keine Membranform dar, bei der die äußeren Lasten überwiegend durch Membrankräfte im Gleichgewicht gehalten werden können (Abschnitt 4).

Nur in der Scheitelnähe einer punktgestützten, dünnen Kuppelschale über quadratischem Grundriß, die durch Flächenlasten ohne große Veränderlichkeit (Welligkeit) belastet wird, ist eine Lastabtragung ausschließlich über Membrankräfte möglich. Für diesen Spannungszustand läßt sich die Membrantheorie anwenden. Auch die Verformungsbedingungen am Element sind durch die Membranlösung näherungsweise gewährleistet. Die Normalkräfte können deshalb im Umkreis des Scheitels mit einem Radius von ungefähr 15-20% der Grundrißseite mit Lösungen der Membrantheorie bestimmt werden.

Am Schalenrand benötigt man Querkräfte, um das Kräftegleichgewicht herzustellen. Da die Kuppelschalen wegen ihrer geringen Dicke nur eine kleine Biegesteifigkeit besitzen, verformen sich die ungestützten Ränder erheblich (Bild 3.1, 3.2). Die Biegestörungen des freien Randes pflanzen sich bis in das Schaleninnere fort. Die Kuppelschale erleidet zusätzlich eine Biegestörung, weil die resultierende Auflagerkraft nicht parallel zur Tangente der Schalenfläche am Lager eingeleitet wird. Diese sich überlagernden Biegestörungen bestimmen Größe und Richtung der Biegespannungen stetig belasteter Kuppelschalen. Biegespannungen belasteter Schalenkonstruktionen sollten jedoch den Charakter von Nebenspannungen haben und durch konstruktive Maßnahmen so niedrig wie möglich gehalten werden.

In den folgenden Abschnitten wird dargelegt, wie durch

- ein verbreitertes punktförmiges Auflager
 - geänderte Krümmungsverhältnisse im Auflagerbereich
 - Variation der Schalendicke im Rand- und Auflagerbereich und entlang der Diagonalen
 - Stützung des Randes mit rechteckigen Randträgern
 - eine horizontale Stützenverschiebung nach innen
- das Tragverhalten von Kuppelschalen wesentlich verbessert werden kann.

3.1 Verformungen und Schnittgrößen einer Kugelschale unter Eigengewicht und Windlast

Abmessungen der Kugelschale:

Öffnungswinkel:	$\phi = 50^\circ$
Schalendicke:	0,08 m (konstant)
Lagerung:	punktförmig in den Ecken, Lagerbreite $b = 0,2$ m
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 16$ (Abschnitt 2.5)

Schilderung der Verformung:

Die Totalverschiebungen in Bild 3.2 und die vertikalen Verschiebungen w in Bild 3.3a der durch ihr Eigengewicht belasteten Kugelschale zeigen, daß der Auflagerbereich und der freie Rand erheblich verbogen werden. Eine antimetrische Windlast verdreht besonders bei hohen und steilen Schalen den sehr schmalen, dünnen Auflagerstreifen durch ungleiche horizontale Membrankräfte in x - und y -Richtung und durch Biegemomente beträchtlich um die vertikale, globale Z -Achse (Bild 3.3b). Kuppelschalen sind insbesondere für antimetrische Lasten nahezu kinematisch gelagert, da sich der schmale Auflagerstreifen durch ein Kippen der Auflagerspitze um die globale Z -Achse auf dem kugelgelenkartigen Lager beträchtlich verformt (Bild 3.1).

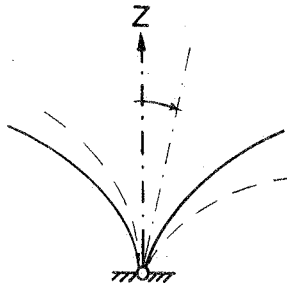


Bild 3.1: Karikierte Systemskizze der Punktlagerung von Kuppelschalen

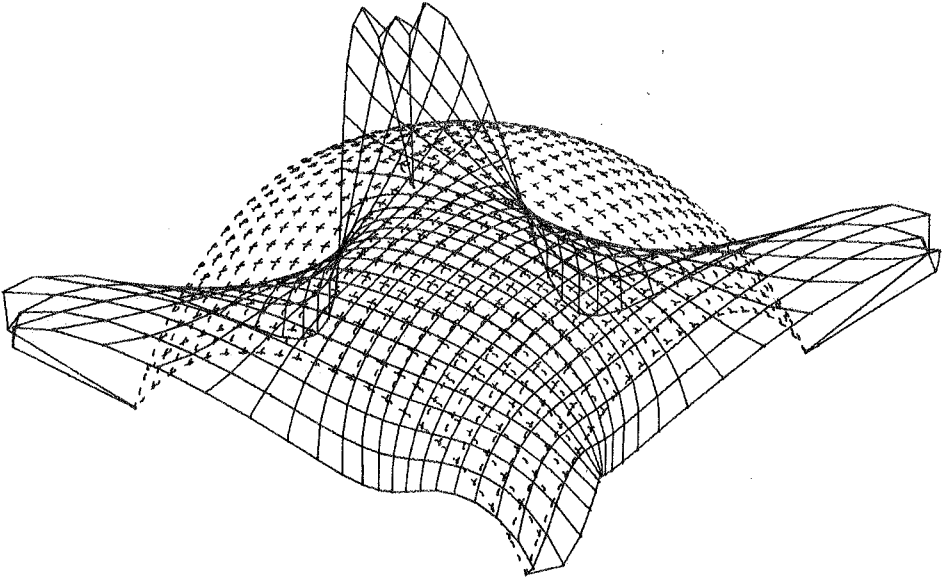


Bild 3.2: Unter Eigengewichtslasten verformte, unversteifte Kugelschale, quantitativer Verlauf der Totalverschiebungen, Gitterliniendichte $n_x = n_y = 12$

Schilderung der Schnittgrößen unter

a) Eigengewichtslast

Geringe Membrandruckkräfte von ca. 25-30 kN/m entstehen im Bereich des Scheitels. Parallel zum freien Rand verlaufende Zugkräfte betragen ca. 240-260 kN/m. Im Auflagerbereich wachsen die Ringzugkräfte auf 140-150 kN/m an und die Druckkräfte in Meridianrichtung auf 750-800 kN/m (Bild 3.5, 3.7b). Der Scheitelbereich der Schale ist frei von Biegemomenten. Entlang des freien Randes jedoch steigen die Biegemomente auf 12 kNm/m an und im Auflagerbereich bis auf 15-17 kNm/m (Bild 3.6, 3.7a).

b) antimetrischer Windlast

Die Kugelschale verhält sich hinsichtlich des Tragverhaltens ähnlich wie unter dem Lastfall Eigengewicht: Geringe Membrankräfte im Scheitelbereich ca. 15-20 kN/m, relativ hohe Ringzugkräfte parallel zum Schalenrand und im Auflagerbereich ca. 140-160 kN/m, Biegemomente von ungefähr 9-12 kNm/m entlang des Randes und im Auflagerbereich.

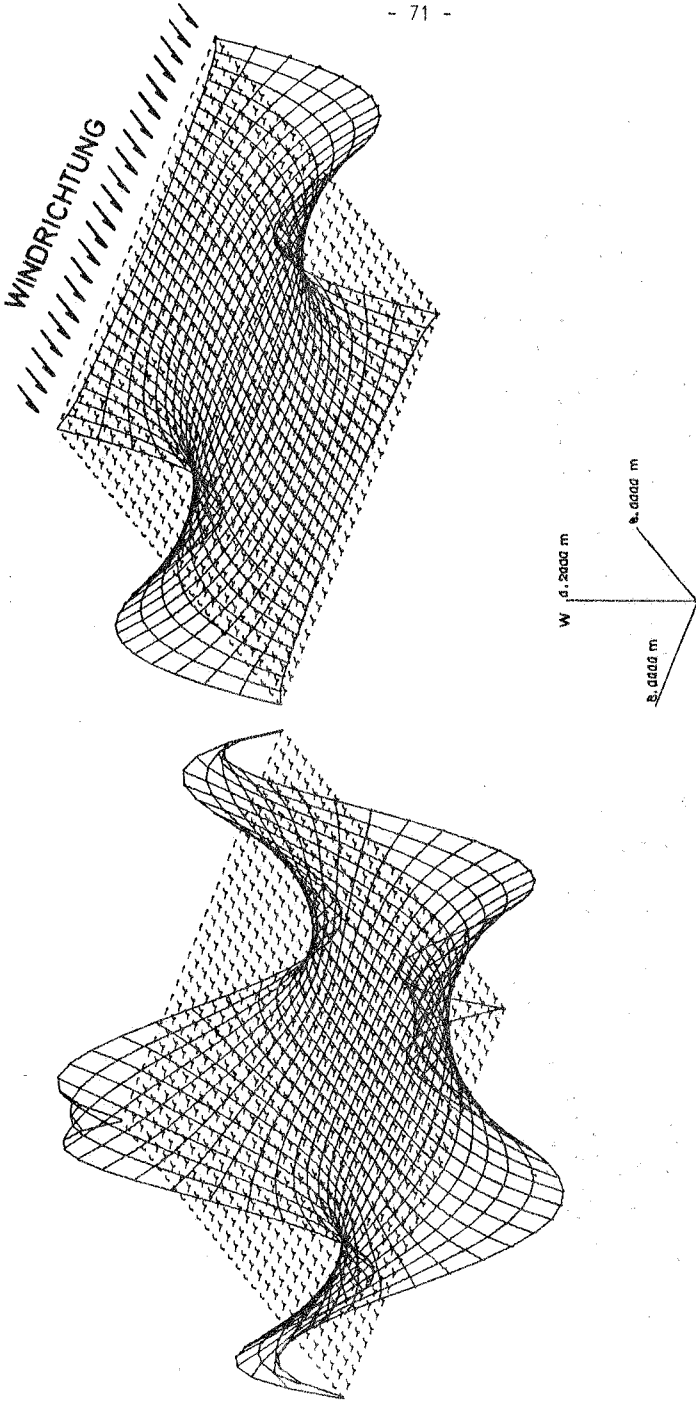
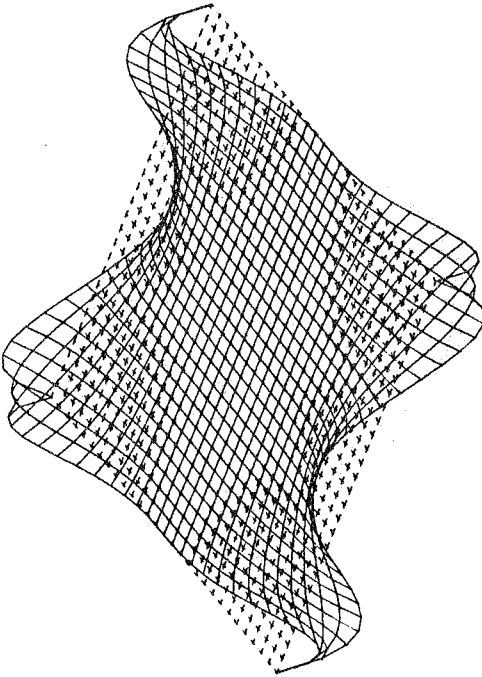
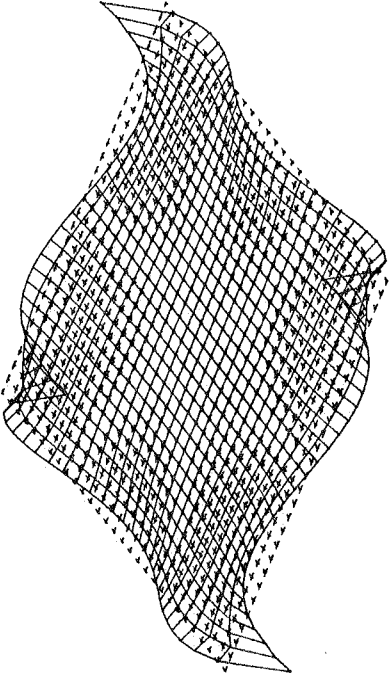


Bild 3.3a: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2 \text{ m}$, konstante Schalendicke $t = 0,08 \text{ m}$, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, vertikale Verschiebungen w

Bild 3.3b: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2 \text{ m}$, konstante Schalendicke $t = 0,08 \text{ m}$, Lastfall Nr. 3 Wind, vertikale Verschiebungen w



U 0.1000 m 0.0000 m
Y X



φ 0.2000 0.0000 m

Bild 3.4a: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2$ m, konstante Schalendicke $t = 0,08$ m, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, horizontale Verschiebungen u

Bild 3.4b: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2$ m, konstante Schalendicke $t = 0,08$ m, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, Verdrehungen ϕ_x

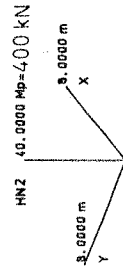
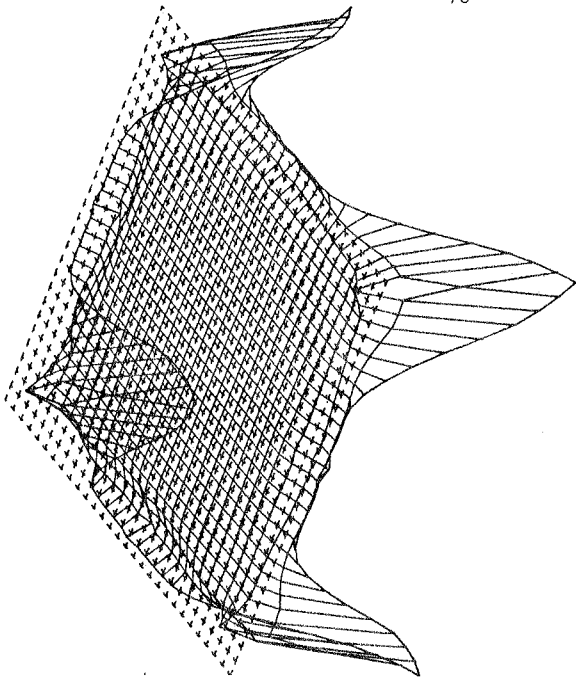


Bild 3.5b: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2$ m, konstante Schalendicke $t = 0,08$ m, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, Schnittkraft HN2

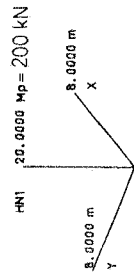
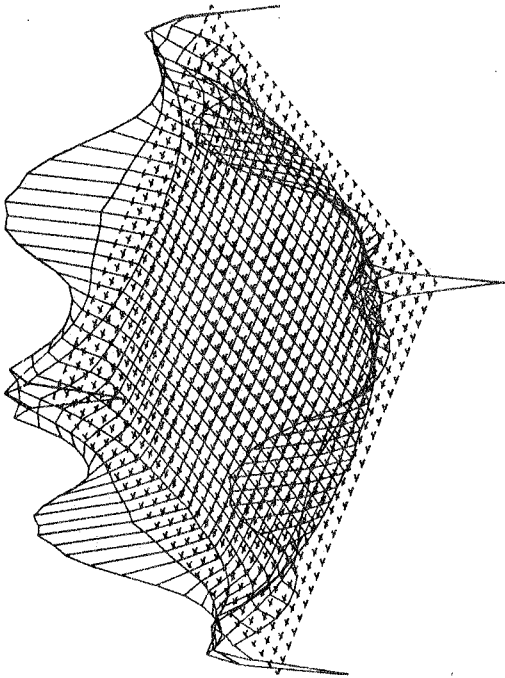


Bild 3.5a: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2$ m, konstante Schalendicke $t = 0,08$ m, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, Schnittkraft HN1

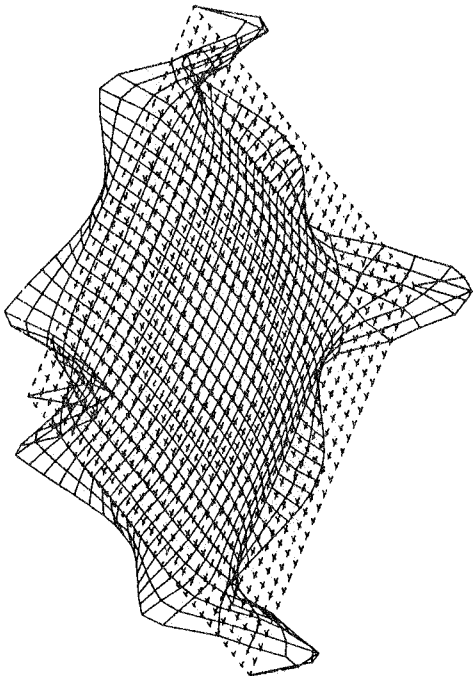


BILD 3.6

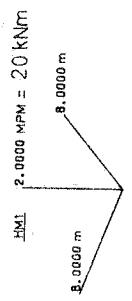


Bild 3.6a: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2$ m, konstante Schalendicke $t = 0,08$ m, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, Schnittgröße HM1

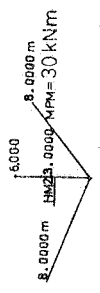
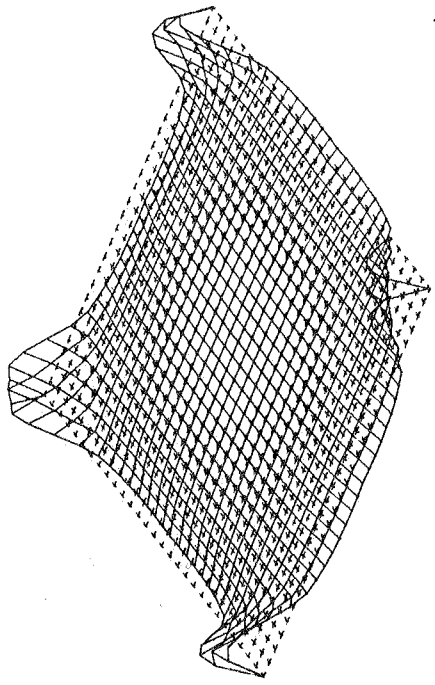


Bild 3.6b: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2$ m, konstante Schalendicke $t = 0,08$ m, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, Schnittgröße HM2

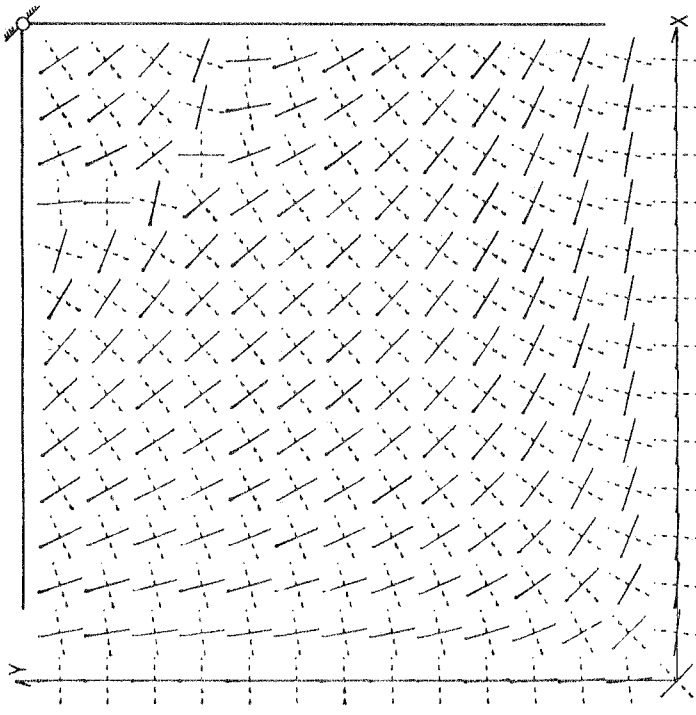


Bild 3.7a: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2$ m, konstante Schalendicke $t = 0,08$ m, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, Richtung HM1 und HM2



Bild 3.7b: Kugelschale über quadratischem Grundriß, Öffnungswinkel $\phi = 50^\circ$, Lagerbreite $b = 0,2$ m, konstante Schalendicke $t = 0,08$ m, Lastfall Nr. 1 Eigengewicht, Richtung HN1 und HN2

3.2 Angaben zu den nachfolgenden Tabellen und den Ergebnisblättern

Um das Tragverhalten der einzelnen Kuppelschalen zu vergleichen, werden Schnitt- und Verformungsgrößen an definierten Punkten gegenübergestellt (Bild 3.8).

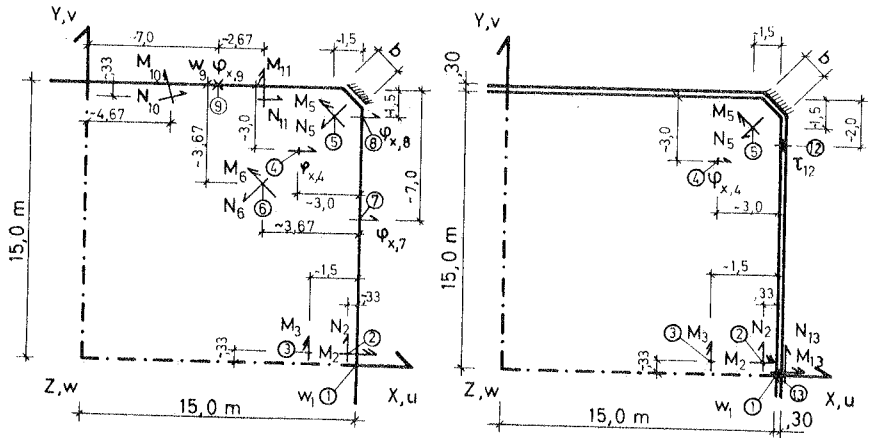


Bild 3.8: Verformungen und Schnittgrößen, die dem Vergleich zugrunde liegen

- Punkt 1: Die maximale vertikale Verformung w am Rand der Kuppelschale bei achsensymmetrischen Lastfällen
- Punkt 2: Die \sim parallel zum Rand verlaufenden Hauptspannungen σ , die zugehörigen größten Hauptnormalkräfte N und die Hauptbiegemomente M bei achsensymmetrischen Lastfällen
- Punkt 3: Das größte Hauptbiegemoment M längs der Symmetrielinie bei achsensymmetrischen Lastfällen
- Punkt 4: Verdrehung ϕ_x oder ϕ_y des Auflagerbereiches bei achsensymmetrischen und antisymmetrischen Lastfällen
- Punkt 5, 6: Die \sim parallel zur Diagonalen verlaufenden Hauptspannungen σ und die zugehörigen Hauptnormalkräfte N und Hauptbiegemomente M bei achsensymmetrischen und antisymmetrischen Lastfällen
- Punkt 7, 8: Die Verdrehung ϕ_x des Randes bei achsensymmetrischen und antisymmetrischen Lastfällen
- Punkt 9: Die maximale vertikale Verformung w und die dazugehörige Verfor-

- mung ϕ_x am Rand der Kuppelschale bei antimetrischen Lastfällen
- Punkt 10, 11: Hauptspannungen σ und die dazugehörigen Hauptnormalkräfte N und Hauptbiegemomente M in Randnähe bei antimetrischen Lastfällen
- Punkt 12: Schubspannungen τ im Randträger bei achsensymmetrischen und antimetrischen Lastfällen aus Torsion
- Punkt 13: Spannungen σ und die dazugehörigen Normalkräfte N und Biegemomente M im Randträger bei achsensymmetrischen und antimetrischen Lastfällen

Die Öffnungswinkel $20^\circ \leq \phi \leq 80^\circ$ oder die Scheitelhöhen $3,74 \text{ m} \leq S \leq 17,8 \text{ m}$ entsprechender Kugelschalen sind auf den Ergebnisblättern entlang der Abszisse aufgetragen. Auf der Ordinate sind dargestellt:

1. Verformungs- und Schnittgrößen (w, ϕ_x, M, N, σ)
2. Verhältniswerte von Verformungs- und Schnittgrößen (z.B. $w/w^{i=1}, \phi_x/\phi_x^{i=1}, M/M^{i=1}$, etc.) in festgelegten Punkten 1-13 der Schale (Bild 3.8).

Dabei ist der Parameter i das Verhältnis der Schalendicke am Rande (t_R) bzw. der Randträgerhöhe H (Bild 2.24) zur Schalendicke (t_M) in der Schalenmitte ($i = t_R/t_M$ bzw. $i = H/t_M$, Abschnitt 2.4 des Arbeitsprogramms).

$w^{i=1}, \phi_x^{i=1}, M^{i=1}$ sind Vergleichswerte der entsprechenden Verformungen und Schnittgrößen bei $i = 1,0$, d.h. der nicht verdickten Schale vom jeweiligen Öffnungswinkel.

Weitere Parameter der Ergebnisblätter sind:

1. Die Lagerbreite b des Auflagers in den Ecken des quadratischen Grundrisses.
2. Die Strecke X_K als Radius des Breitenkreises, bei dem die Kugelschale in einen flacher gekrümmten Schalenbereich übergeht, deren Erzeugende eine hyperbolische Spirale ist (Bild 2.15). Je kleiner X_K wird, desto ausgedehntere flacher gekrümmte Gebiete entstehen um das Auflager herum. Die Auflagerkraft wird dabei näherungsweise tangential in die Schale eingeleitet.
3. Fünf unterschiedlich gekrümmte Mittelflächenformen (Abschnitt 2.4.3b).

Die zusätzliche gestrichelte Linie ----- zeigt eine Grenze an, ab der der Vertrauensbereich der Berechnung nicht mehr gewährleistet ist, da die Verformungen dieser Schalen die Voraussetzungen der linearen Schalentheorie verletzen.

3.3 Unversteifte Kuppelschalen (Ellipsoid-, Kugel- und Paraboloidschalen)

Parametervariationen:

Punktlagerung: In den Ecken des Quadrates

Minimale Lagerbreite: $b = 0,2 \text{ m}$

Scheitelhöhe: $3,74 \leq S \leq 17,8 \text{ m}$

Lastfälle:

- a) achsensymmetrisch: Nr. 1 Eigengewicht
Nr. 6 Eigengewicht und Schnee
- b) antimetrisch: Nr. 3 Wind

Der freie Rand und der Auflagerbereich hoher Kuppelschalen verformen sich bei punktförmiger Lagerung so sehr (Abschnitt 3.1), daß die Voraussetzungen der linearen Schalentheorie nicht mehr zutreffen. Die in Abschnitt 2.2 festgelegten Grenzen der Spannungen werden beträchtlich überschritten.

Niedrige Kuppelschalen verformen sich geringer als hohe, trotzdem überschreiten die Spannungen im Auflager- und Randbereich noch die festgelegten Zug- und Druckspannungen (Tab. 3.9).

Hohe und niedrige Kuppelschalen eignen sich bei punktförmiger Lagerung nicht zur Lastabtragung von Eigengewicht-, Schnee- oder Windlasten.

~ Punkt 2 Scheitel des Randes (Bild 3.8)	M kNm/m	N kN/m	b / d / h cm/cm/cm	$\frac{15}{h+5}$	k_h grenz	k_h vorh	k_h^*	überschrittene Materialgrenzen von Abschnitt 2.2
Hohe Kugelschale Scheitelhöhe S = 17,8 m	43,0	+630,0	100/ 8/ 5	1,5	$1,65 \geq$	$0,66 \leq$	1,5	Betondruckfestigkeit ist überschritten $k_h \text{ vorh} \leq k_h^*$, Druckbewehrung erforderlich $\sigma_{HN} \text{ vorh} = 787,5 \text{ N/cm}^2 \geq \sigma_{HN}^{\text{grenz}} = 173 \text{ N/cm}^2$ Große Rißbreiten im Beton
niedrige Kugel- schale Scheitelhöhe S = 5,68 m	9,8	+ 5,0	100/ 8/ 5	1,5	$1,65 \geq$	$1,3 \leq$	1,5	$\sigma_{HN}^{\text{vorh}} = 6,25 \text{ N/cm}^2 \leq \sigma_{HN}^{\text{grenz}} = 173 \text{ N/cm}^2$ sonst wie oben
hohe Paraboloid- schale (PAZ) Scheitelhöhe S = 17,8 m	8,8	+ 18,5	100/ 8/ 5	1,5	$1,65 \geq$	$1,38 \leq$	1,5	$\sigma_{HN}^{\text{vorh}} = 23,1 \text{ N/cm}^2 \leq \sigma_{HN}^{\text{grenz}} = 173 \text{ N/cm}^2$ sonst wie oben
niedrige Paraboloidschalen: Die Schnittgrößen sind geringfügig günstiger als bei niedrigen Kugelschalen								

Tab. 3.9: Bemessung am Schalenrand (~ Punkt 2, Bild 3.8) von Kugel- und Paraboloidschalen, Lagerbreite b = 0,2 m, Lastfall: Eigengewicht Nr. 1

3.4 Verbreiterung des punktförmigen Auflagers

Parametervariationen:

Mittelflächen:	Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen
Scheitelhöhe:	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 17,8 \text{ m}$
Lagerbreite:	$0,2 \text{ m} \leq b \leq 2,0 \text{ m}$ (Bild 3.10)
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 12$
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee Nr. 6 Eigengewicht und Schnee
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

In den Ecken der Kuppelschalen entstehen durch die Verbreiterung horizontal unverschiebliche Linienkiplager. Verformungs- und Schnittgrößen von Schalen mit einem 0,2 m breiten Auflager werden bei der Variation der Lagerbreite b zum Vergleich herangezogen.

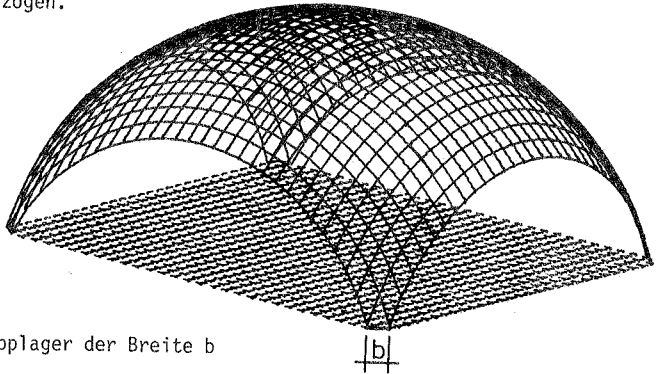


Bild 3.10: Linienkiplager der Breite b

Die Verbesserung des Tragverhaltens von Kuppelschalen durch eine Verbreiterung des 'punktförmigen' Lagers wird im folgenden für die Kugelschale exemplarisch dargestellt.

Verformungen

Die Verformungen der ganzen Kugelschale nehmen bei einer Verbreiterung des minimal 0,2 m breiten Lagers auf 1,5 m stark ab.

Beispielsweise geht die Durchbiegung w_1 in Punkt 1 bei 1,5 m Lagerbreite für den Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, auf 53-67% und für den antimetrischen Lastfall

Nr. 3, Wind, auf 25-46% des Wertes der 0,2 m breit gelagerten Kugelschale zurück. Größere Lagerbreiten als 1,5 m lassen die Verformungen nicht mehr maßgeblich weiter zurückgehen (Bild 3.11).

Schnittgrößen im mittleren Schalenviertel, am Schalenrand und im Auflagerbereich

a) achsensymmetrischer Lastfall: Nr. 1 Eigengewicht

Die zum Rand parallel verlaufenden Hauptzugkräfte N_2 und das zugehörige Hauptbiegemoment M_2 in Punkt 2 der Kugelschale nehmen bei einem 1,5 m breiten Lager auf 73-76% der Werte von Schalen mit einer Lagerbreite $b = 0,2$ m ab (Bild 3.12).

Die Ringzugkräfte in Auflagernähe werden bei steilen Kugelschalen durch ein 1,5 m breites Linienlager auf die Hälfte, bei flachen Schalen auf 70-80% abgebaut.

b) antimetrischer Lastfall: Nr. 3 Wind

Die zum Rand parallel verlaufende Hauptzugkraft N_{11} in Punkt 11 der Kugelschalen verringert sich z.B. für den Lastfall Wind bei einer auf 1,5 m anwachsenden Lagerbreite auf ungefähr 31-38%, das zugehörige Hauptbiegemoment M_{11} auf 38-48%. Die Hauptzugkraft N_{11} einer Kugelschale mit dem Öffnungswinkel $\phi = 53^\circ$ geht sogar bis auf 18% zurück (Bild 3.13).

Das Hauptbiegemoment M_6 im mittleren Schalenviertel vermindert sich auf 15-33% des Wertes einer 0,2 m breit gelagerten Schale.

Die Ringzugkräfte des Auflagerbereiches gehen bei steilen Kugelschalen durch ein 1,5 m breites Lager auf 50-60%, bei flachen Kugelschalen auf 75-85% zurück.

Die Ergebnisse der Parametervariation sind in Tabelle 3.14 zusammengefaßt. Aus Tabelle 3.14 erkennt man, daß die maximalen Verformungen und Schnittgrößen von Kuppelschalen für antimetrische Lastfälle (Wind, halbseitiger Schnee) durch eine Verbreiterung des Lagers von 0,2 m auf 1,5 m stärker abgebaut werden, als für achsensymmetrische Lastfälle (Eigengewicht, Schnee).

So verringern sich die größten vertikalen Durchbiegungen w_1 am Rand hoher Kuppelschalen bei einer Lagerbreite $b = 1,5$ m für achsensymmetrische Lastfälle auf 50-60%, die Hauptschnittgrößen in Punkt 2 auf 65-75%, für antimetrische Lastfälle dagegen vermindern sich die Durchbiegungen w_9 am Rand auf 25-30%, die Hauptschnittgrößen in Punkt 11 auf 20-30% bzw. 40-50% der Werte einer Schale mit einem 0,2 m breiten Lager (Tab. 3.14).

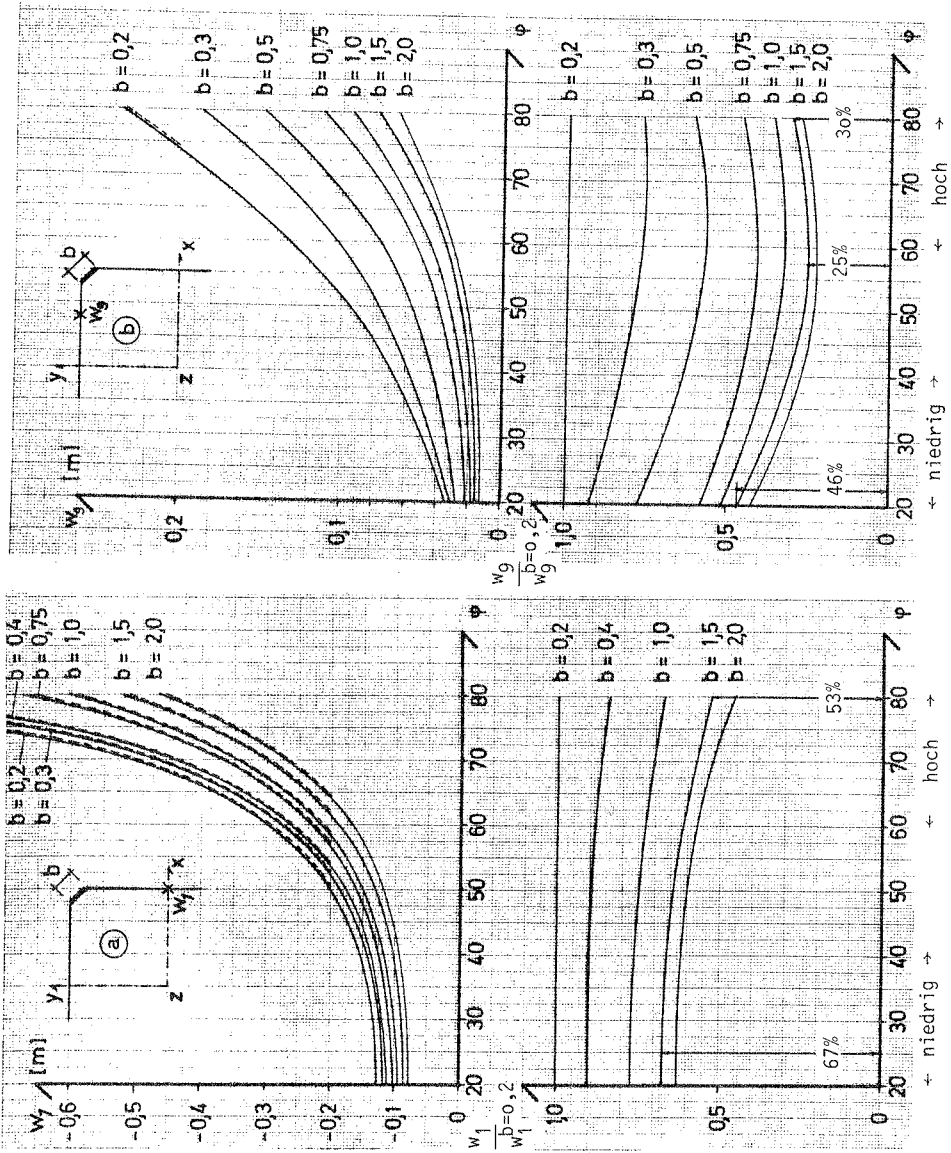


Bild 3.11: Im Auflagerbereich verbreiterte Kugelschale ($0,2 \text{ m} \leq b \leq 2,0 \text{ m}$)

- (a) Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, vertikale Durchbiegung w_1 in Punkt 1
- (b) Lastfall Nr. 3, Wind, vertikale Durchbiegung w_9 (vgl. Bild 3.8)

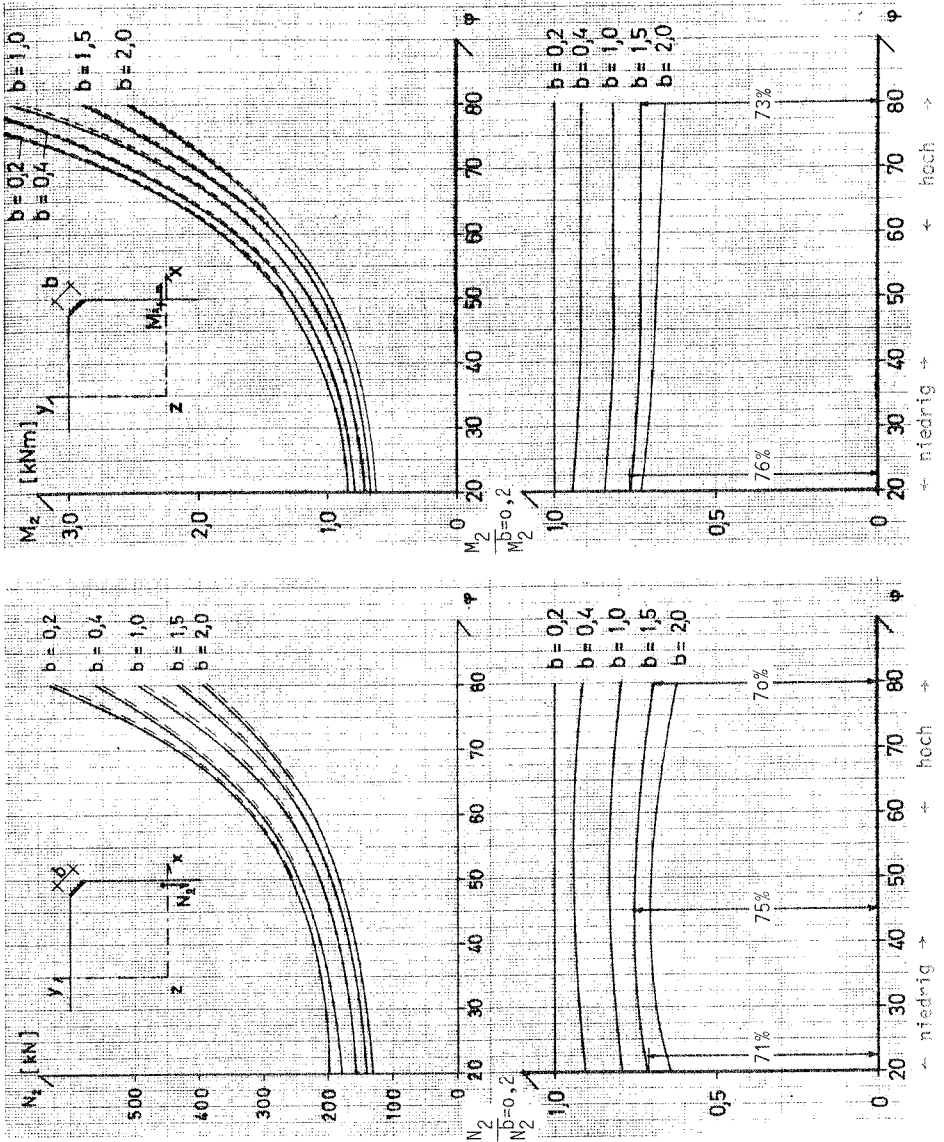


Bild 3.12: Im Auflagerbereich verbreiterte Kugelschale ($0,2 \text{ m} \leq b \leq 2,0 \text{ m}$)
 Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, Hauptnormalkraft N_2 und Hauptbiegemoment M_2 in
 Punkt 2 (vgl. Bild 3.8)

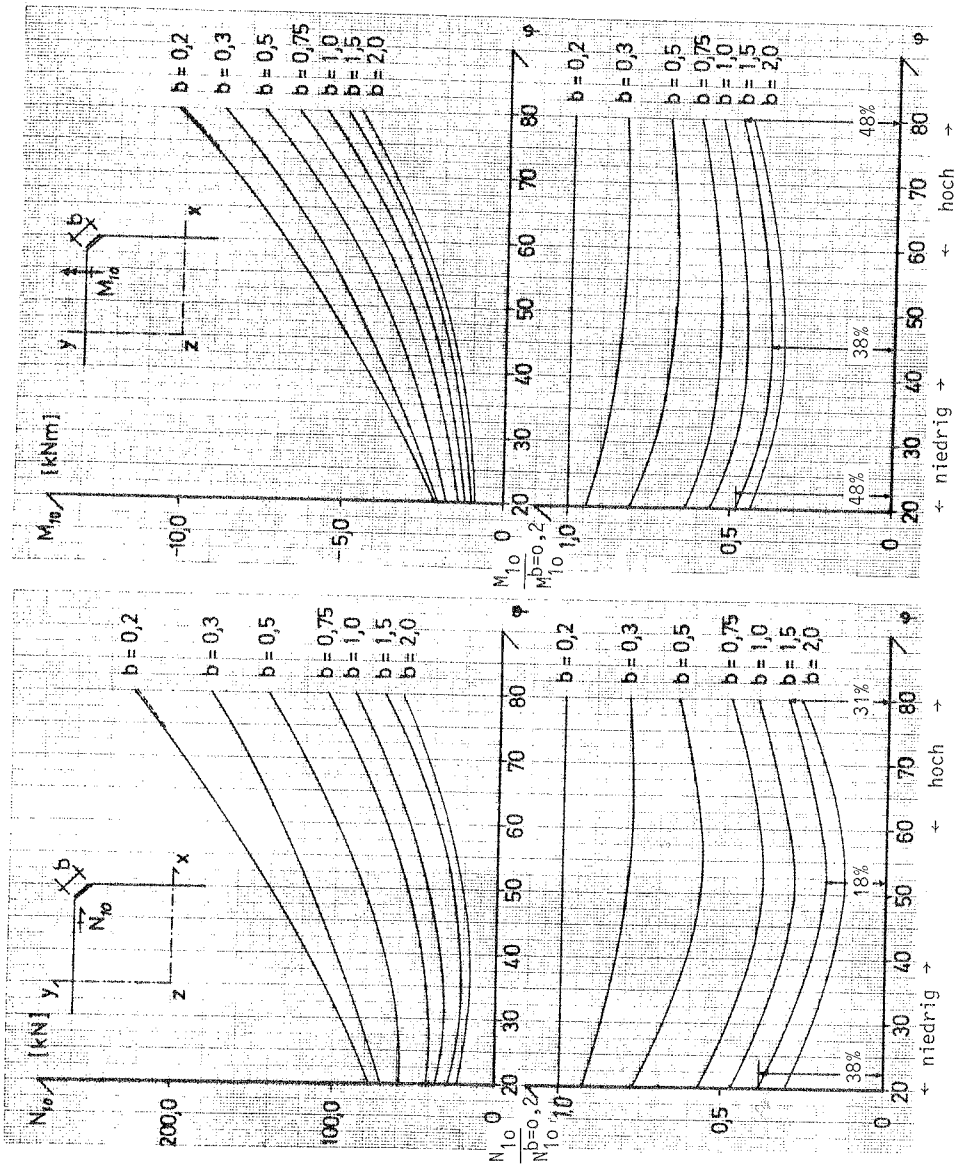


Bild 3.13: Im Auflagerbereich verbreiterte Kugelschale ($0,2 \text{ m} \leq b \leq 2,0 \text{ m}$)
 Lastfall Nr. 3, Wind, Hauptnormalkraft N_{10} und Hauptbiegemoment M_{10} in Punkt 10
 (vgl. Bild 3.8)

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee				antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee				
max w_1	Kugel-, Ellipsoid-, Paraboloidschale		$\phi_{x,4}$	max w_g	Kugel-, Ellipsoid-, Paraboloidschale		hoch	
	niedrig	hoch			niedrig	hoch		$\phi_{x,9}$
$b=1,0$ m	75-80%	65-75%			40-50%	30-37%	40-50%	35-40%
$b=1,5$ m	65-70%	<u>50-60%</u>			30-46%	<u>25-30%</u>	30-40%	25-30%
N_2			M_2	N_{11}				
$b=1,0$ m	80-85%	75-85%			35-45%	30-40%	45-55%	45-55%
$b=1,5$ m	70-75%	<u>70-75%</u>			25-35%	<u>20-30%</u>	35-50%	<u>40-50%</u>
N_5			M_5	N_6				
$b=1,0$ m	~100%	~100%			~100%	~100%	35-45%	20-30%
$b=1,5$ m	~105%	~101%			~100%	~100%	20-35%	15-20%

Tab. 3.14: Abbau der maximalen vertikalen Durchbiegungen w_1 , w_g der Verdrehungen $\phi_{x,1}$, $\phi_{x,9}$ in den Punkten 1 und 9, der Hauptnormalkräfte und zugehörigen Hauptbiegemomente in den Punkten 2, 5, 6 und 11 (Bild 3.8) einer Kuppelschale mit der Lagerbreite $b = 0,2$ m, wenn das Punktlager auf $b = 1,0$ m oder $b = 1,5$ m verbreitert wird.

3.5 Lineare Zunahme der Schalendicke im Auflagerbereich

Parametervariationen:

Mittelflächen:	Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen
Scheitelhöhe:	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 17,8 \text{ m}$
Lagerbreite:	$b = 0,2 \text{ m}, b = 1,5 \text{ m}$
Schalendicke:	(Abschnitt 2.4.4a)
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 12$
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee Nr. 6 Eigengewicht und Schnee
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Die Verbesserung des Tragverhaltens von Kuppelschalen durch einen verdickten Auflagerbereich wird nachfolgend anhand der Kugelschale dargestellt.

Mittelfläche: Kugelschale

Lagerbreite: $b = 0,2 \text{ m}$

Maximale vertikale Verschiebungen w_1 in Punkt 1 und w_9 in Punkt 9

Während die Verschiebungen w_1 hoher Kugelschalen durch eine vierfache ($i=4,0$) Schalendicke im Auflagerbereich für die achsensymmetrischen Lasten Eigengewicht oder Schnee auf 10-15% des Wertes unverteifter Schalen verringert werden, baut sich die Verschiebung w_9 am Schalenrand für die antimetrische Last Wind nur auf 20-40% ab. Eine Steigerung des Dickenverhältnisses im Auflagerbereich niedriger Kugelschalen $i_{\text{grenz}} > 3-4$, und hoher Schalen $i_{\text{grenz}} > 6-7$ vermindert die Verformungen der Schalen nicht mehr maßgeblich (Bild 3.16).

Schnittgrößen entlang des Randes, im Schaleninneren und im Auflagerbereich

a) achsensymmetrischer Lastfall: Nr. 1 Eigengewicht

Eine zweifache Schalendicke der Auflagerzone ($i = 2,0$) vermindert bereits die zum Rand parallel verlaufende Hauptzugkraft N_2 und das zugehörige Hauptbiegemoment M_2 ungefähr auf die Hälfte, eine vierfache Schalendicke ($i = 4,0$) verringert das Hauptbiegemoment M_2 auf 25-40% (Bild 3.17).

Eine Vergrößerung des Querschnittes der Kugelschalen in Auflagernähe auf das

Vierfache ($i = 4,0$) läßt das Hauptbiegemoment M_6 im unversteiften mittleren Schalenviertel (Punkt 6) bis auf 15-25% des ursprünglichen Wertes zurückgehen. Die Hauptnormalkraft in Meridianrichtung N_6 (Punkt 6) vergrößert sich leicht (um ca. 10%) durch die Gewichtszunahme der dicker werdenden Auflagerzone (Tab. 3.19).

Die Ringzugkräfte im Auflagerbereich (Punkt 6) werden durch die Verdickung der Kugelschale ($i = 4,0$) auf ca. 45-55% der Werte unversteifter Schalen abgebaut.

Während die Biegemomente entlang des unversteiften Schalenrandes und im Schaleninneren sehr stark abnehmen, erhöhen sie sich im verdickten ($i = 4,0$) Auflagergebiet bei niedrigen Schalen um das Zweifache, bei hohen Schalen um das Dreifache der Werte der ursprünglichen Kugelschalen. Die dazugehörenden Spannungen jedoch vermindern sich schneller als die Biegemomente anwachsen und werden ab einem Dickenverhältnis $i \sim 4,0$ im Auflagerbereich niedriger Schalen, ($i \sim 7$) bei hohen Schalen, nicht mehr maßgeblich weiter verringert.

b) antimetrischer Lastfall: Nr. 3 Wind

Eine Verdickung des Auflagerbereiches ($1,5 \leq i \leq 4,0$) erhöht die zum Rand parallel verlaufende Hauptzugkraft N_{11} um 3-6%. Das zugehörige Hauptbiegemoment M_{11} in Punkt 11 wird bei einer vierfachen Schalendicke auf 60-85% der unversteiften Kugelschale verringert (Bild 3.18). Eine Versteifung des Auflagerbereiches vermindert die Spannungen des freien Randes durch Eigengewichtslasten vergleichsweise zwei- bis dreimal stärker als durch diese antimetrischen Lasten.

Die Schnittgrößen des mittleren Schalenviertels werden im Vergleich zum Schalenrand durch die verdickte Auflagerzone stärker beeinflusst. Das Hauptbiegemoment z.B. in Punkt 6 (Bild 3.8) wird bei einer vierfachen Schalendicke ($i = 4,0$) bei hohen Schalen auf 45-40%, bei flachen Schalen auf 60-75% der Werte der ursprünglichen Kugelschale abgebaut. Die dazugehörenden Normalkräfte verringern sich auf 84-95% (Tab. 3.19).

Mittelflächen: Ellipsoid- und Paraboloidschalen

Das Tragverhalten dieser Kuppelschalen verbessert sich durch eine lineare Zunahme der Schalendicke (i) im Auflagerbereich in gleicher Weise wie das der Kugelschalen. Es werden jedoch andere Grenzbereiche i_{grenz} ermittelt, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der Schalen nicht mehr maßgeblich verbessert (Tab. 3.15).

Die Ergebnisse der Parameterstudie sind in Tabelle 3.15, 3.19, 3.20 zusammengefaßt.

Ein übermäßig verformter Auflagerbereich bewirkt die beträchtlichen Verformungen der Kuppelschalen unter Eigengewicht-, Schnee- und Windlasten. Eine vergrößerte Schalendicke dieses Bereiches verbessert bei achsensymmetrischen Lastfällen das Tragverhalten der untersuchten Schalen wesentlich.

Die Tendenzen sollen an der steilen Kugelschale mit Lagerbreite $b = 0,2$ m exemplarisch aufgezeigt werden: Eine vier- bis siebenfache Zunahme der Schalendicke im Auflagerbereich beeinflußt bei allen Lastfällen entscheidend die Verformungen der ganzen Kugelschale. Für die Lastfälle Eigengewicht und Schneelast verringern sich die Biegemomente entlang des Randes (z.B. Punkt 2) und im mittleren Schalenviertel (z.B. Punkt 6) hoher Kugelschalen ($i = 5$) maximal auf 10-25% der Werte unversteifter Schalen. Dagegen werden für den Lastfall Wind Biegemomente am Schalenrand (z.B. Punkt 11, $i = 6$) weniger beeinflußt und im Schaleninneren (z.B. Punkt 6) höchstens bis auf 40-45% abgebaut; die Membrankräfte im Schaleninneren und in Scheitelnähe werden durch den dickeren Auflagerbereich kaum verändert (Tab. 3.19).

In Abhängigkeit der Art und Belastung zeigt die Verhältniszahl i_{grenz} (größte Schalendicke t_R im Auflagerbereich im Verhältnis zur Dicke t_M der unversteiften Schale, $i_{\text{grenz}} = t_R/t_M$, Bild 2.22) der Tabelle 3.15 Grenzbereiche der Schalendicke auf, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der Kuppelschalen nicht mehr maßgeblich verbessert.

Lastfälle	symmetrisch Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee Nr. 6 Eigengewicht und Schnee	antimetrisch Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee
Lagerbreite	b = 0,2 m	b = 0,2 m
hohe Kugelschale	i = 6 - 7	i = 7 - 8
niedrige Kugelschale	i = 4 - 5 *)	i = 5 - 6
hohe Ellipsoidschale	i = 7 - 8	i = 10 - 11
niedrige Ellipsoidschale	i = 10 - 11	i = 12 - 14
hohe Paraboloidschale	i = 4 - 5	i = 6 - 7
niedrige Paraboloidschale	i = 3 - 4 *)	i = 5 - 6
Lagerbreite	b = 1,5 m	b = 1,5 m
hohe Kugelschale	i = 4 - 5	i = 6 - 7
niedrige Kugelschale	i = 2 - 3	i = 4 - 5
hohe Ellipsoidschale	i = 5 - 6	i = 8 - 9
niedrige Ellipsoidschale	i = 8 - 9	i = 11 - 13
hohe Paraboloidschale	i = 3 - 4	i = 5 - 6
niedrige Paraboloidschale	i = 2 - 3	i = 4 - 5

Tab. 3.15: Grenzbereiche der Schalendicke i_{grenz} in Auflagernähe, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der Schalen nicht mehr ausschlaggebend verbessert (Schalendicke $i = t_M/t_R$, Bild 2.22)

*) Die Lagerbreite b muß bei den Lastfällen Nr. 1 und Nr. 6 auf $b = 0,3-0,5$ m erhöht werden, damit bei der Auflagerkrafteinleitung in die Schale die in Abschnitt 2.2 festgelegten Betonfestigkeiten nicht überschritten werden.

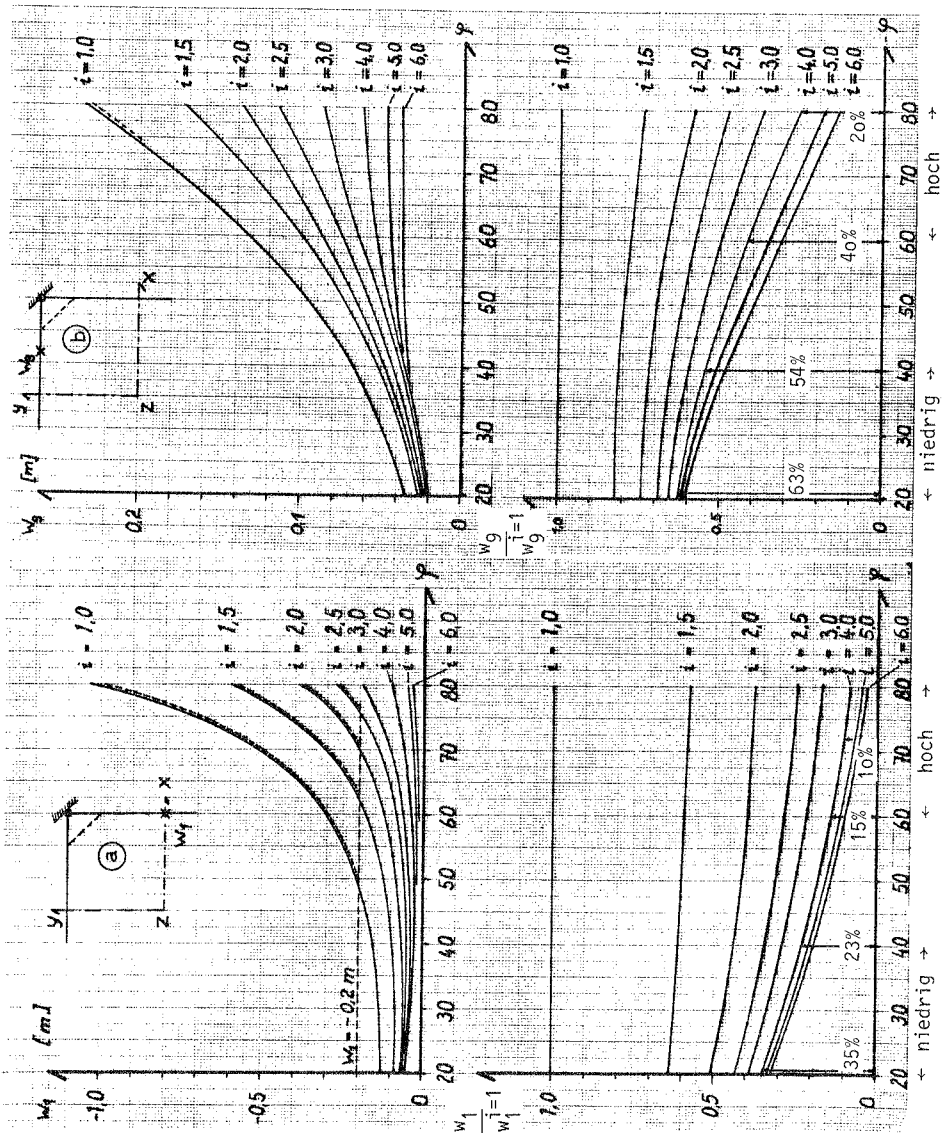


Bild 3.16: Im Auflagerbereich verdickte Kugelschale ($1,0 \leq i \leq 6,0$, Bild 2.22), Lagerbreite $b = 0,2 \text{ m}$

- (a) Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, max. vertikale Durchbiegung w_1 in Punkt 1
- (b) Lastfall Nr. 3, Wind, max. vertikale Durchbiegung w_9 in Punkt 9 (vgl. Bild 3.8)

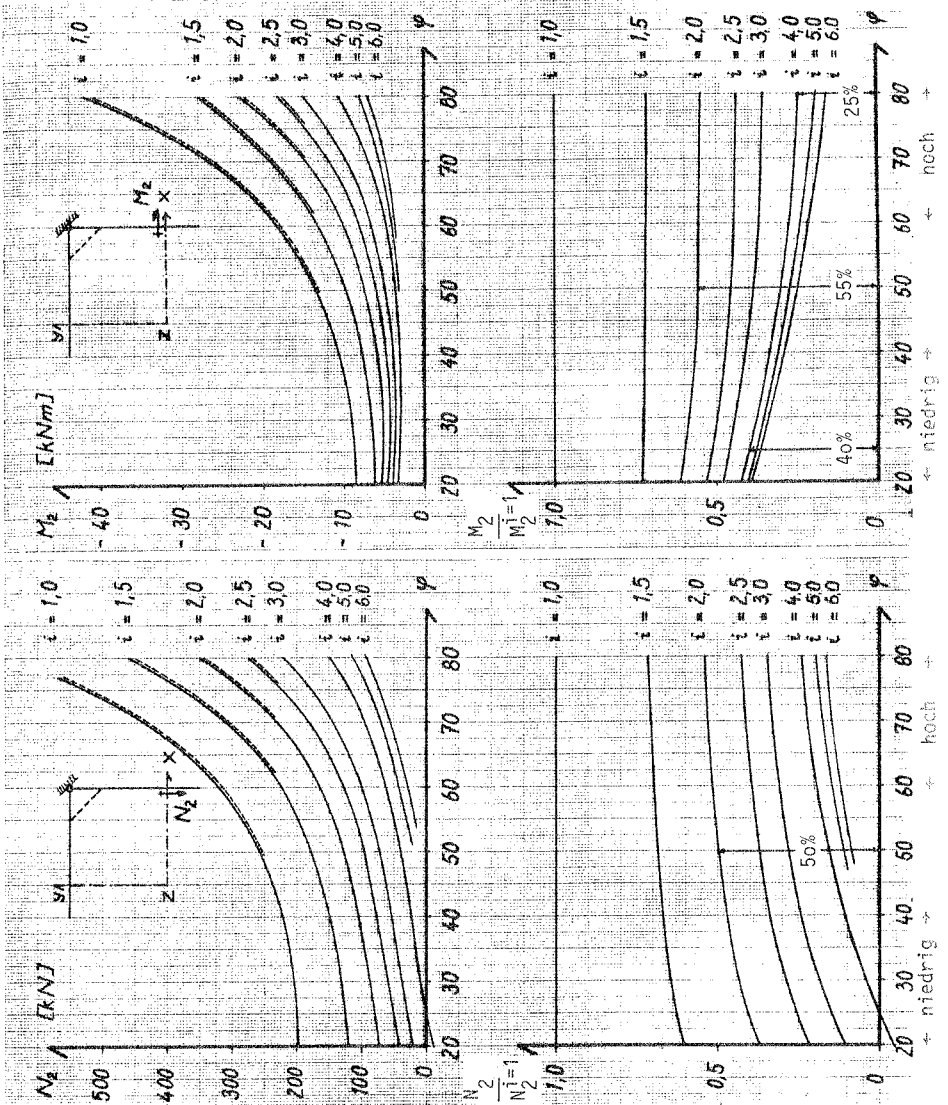


Bild 3.17: Im Auflagerbereich verdickte Kugelschale ($1,0 \leq i \leq 6,0$, Bild 2.22), Lagerbreite $b = 0,2$ m, Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, Hauptnormalkraft N_2 und Hauptbiegemoment M_2 in Punkt 2 (vgl. Bild 3.8).

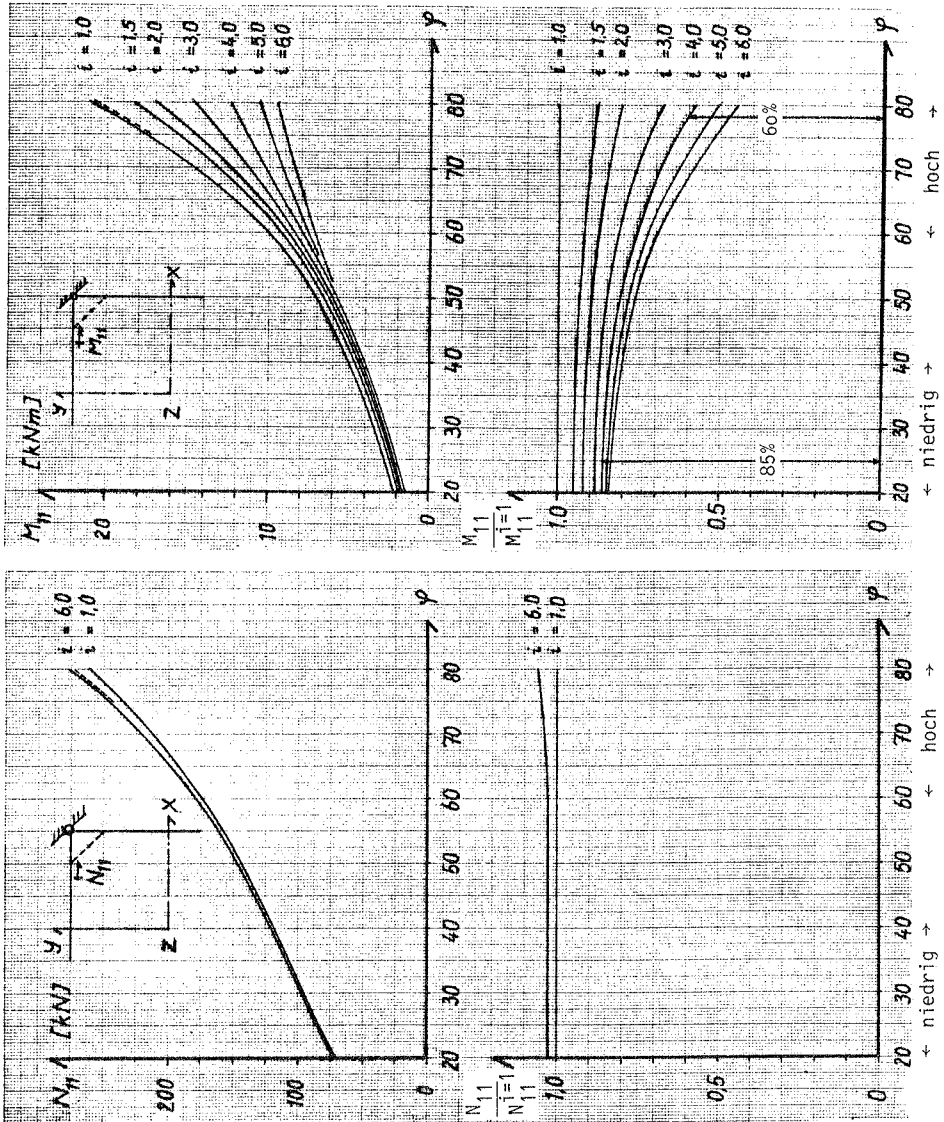


Bild 3.18: Im Auflagerbereich verdickte Kugelschale ($1,0 \leq i \leq 6,0$, Bild 2.22), Lagerbreite $b = 0,2$ m, Lastfall Nr. 3, Wind, Hauptnormalkraft N_{11} und Hauptbiegemoment M_{11} in Punkt 11 (vgl. Bild 3.8)

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht, Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee					antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbeitiger Schnee					
max w_1	Kugelschale		$\phi_{x,4}$	Kugelschale		max w_g	Kugelschale		Kugelschale	
	niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch	niedrig	hoch
$i = 2$	40-50%	35-40%		40-50%	35-40%		70-75%	60-65%	65-75%	55-65%
$i = 4$	20-35%	10-20%		20-35%	10-15%		55-65%	30-40%	50-60%	40-50%
$i = 5$	18-23%	5-10%		20-30%	10-15%		50-55%	15-25%	45-55%	30-40%
N_2			M_2			N_{11}			M_{11}	
$i = 2$	40-50%	50-55%		55-60%	53-55%		101-103%	104-105%	90-95%	80-85%
$i = 4$	10-15%	20-25%		30-45%	25-30%		101-103%	104-106%	80-85%	60-75%
$i = 5$	8-15%	15-20%		28-40%	20-25%		101-103%	104-106%	80-85%	55-70%
N_6			M_6			N_6			M_6	
$i = 2$	105%	105%		35-40%	37-40%		95-98%	90-95%	70-80%	50-65%
$i = 4$	110%	110%		20-25%	15-20%		92-95%	84-90%	60-75%	45-50%
$i = 5$	112%	112%		20-25%	10-15%		90-93%	83-88%	60-75%	40-45%

Tab. 3.19: Kugelschalen, Verminderung der max. vertikalen Durchbiegungen w_1, w_g , der Verdrehungen $\phi_{x,4}, \phi_{x,9}$ in den Punkten 1, 4 und 9, Veränderung der Hauptnormalkräfte und zugehörigen Hauptbiegemomente in den Punkten 2, 6, 10 (Bild 3.8), bei einer i -fachen Schalendicke im Auflagerbereich im Vergleich zur unversteiften Schale, Lagerbreite $b = 0,2 \text{ m}$

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht, Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee				antisymmetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee					
max w_1	Paraboloidschale		$\phi_{x,4}$	max w_9	Paraboloidschale		$\phi_{x,9}$	Paraboloidschale	
	niedrig	hoch			niedrig	hoch		niedrig	hoch
i = 3	30-40%	25-30%			50-60%	20-35%		50-60%	20-35%
i = 4	20-35%	10-20%			48-55%	15-30%		47-59%	15-30%
i = 5	20-35%	5-10%			47-58%	10-30%		46-59%	15-30%
N_2			M_2	N_{11}				M_{11}	
i = 3	25-30%	35-45%			102-103%	104-105%		80-85%	50-70%
i = 4	15-20%	20-25%			102-106%	104-106%		78-85%	45-65%
i = 5	15-20%	15-20%			102-106%	104-106%		78-85%	43-65%
N_6			M_6	N_6				M_6	
i = 3	115%	115%			90-95%	80-90%		60-75%	50-70%
i = 4	120%	120%			88-93%	83-87%		58-70%	45-60%
i = 5	123%	123%			87-93%	82-87%		57-68%	45-55%

Tab. 3.20: Paraboloidschalen, Verminderung der max. vertikalen Durchbiegungen w_1, w_9 , der Verdrehungen $\phi_{x,4}, \phi_{x,9}$ in den Punkten 1, 4 und 9, Veränderung der Hauptnormalkräfte und zugehörigen Hauptbiegemomente in den Punkten 2, 6, 10 (Bild 3.8), bei einer i-fachen Schalendicke im Auflagerbereich im Vergleich zur unversteiften Schale, Lagerbreite $b = 0,2 m$

3.6 Variation der Kugelschalenkrümmung im Auflagerbereich

Parametervariationen:

Mittelfläche:	Kugelschale
Scheitelhöhe:	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 17,8 \text{ m}$
Lagerbreite:	$b = 0,2 \text{ m}$
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 12$
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 6 Eigengewicht und Schnee
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind

Die Übergangsfläche wird so gewählt, daß die Auflagerkraft eines Lastfalles fast tangential eingeleitet wird (Abschnitt 2.4.3a).

Die Reichweite der die Krümmung des Auflagerbereiches bestimmenden Übergangsfläche wird variiert (Bild 2.15, Variation von $15,0 \text{ m} \leq X_K \leq 10,0 \text{ m}$).

Das Tragverhalten der Kugelschale wird im folgenden anhand der Lastfälle Nr. 1 und Nr. 3 beschrieben.

Maximale vertikale Verschiebungen w_1 in Punkt 1 und w_9 in Punkt 9

Die größten vertikalen Verschiebungen des freien Randes niedriger Schalen verringern sich bei dem achsensymmetrischen Lastfall Eigengewicht in Punkt 1 auf 55-85% und dem antimetrischen Lastfall Wind in Punkt 9 nur geringfügig auf 83-90%, wenn die Krümmungen des Auflagerbereiches und des freien Randes ($X_K=10$) durch eine Übergangsfläche vermindert werden. Die vertikalen Verschiebungen des Randes hoher Schalen dagegen gehen beim Lastfall Wind auf 40-68%, beim Lastfall Eigengewicht sogar bis auf 10-24% zurück (Bild 3.21).

Schnittgrößen entlang des Schalenrandes, im Schaleninneren und im Auflagerbereich

a) achsensymmetrischer Lastfall: Nr. 1 Eigengewicht

Die zum Rand parallel verlaufende Hauptzugkraft N_2 in Punkt 2 und das zugehörige Hauptbiegemoment M_2 vermindern sich durch einen weniger gekrümmten Auflagerbereich ($X_K = 15,0 \text{ m}$) bei niedrigen Schalen auf 80-90%, bei hohen Schalen auf 55-65% der Werte der ursprünglichen Kugelschalen. Die Zugkraft N_2 hoher Schalen wird noch wesentlich weiter auf 10-28% und das zugehörige Biegemoment M_2 auf 18-38% verringert, wenn die Krümmungen des Auflagerbereiches und des freien Randes ($X_K = 10 \text{ m}$) durch eine Übergangsfläche vermindert werden (Bild 3.22).

Die Ringzugkräfte im Auflagerbereich der flachen Schale werden bei $X_K = 10$ m auf 75-90%, die der steilen Schalen auf 30-50% des Wertes der Kugelschale abgebaut.

Die Hauptmembrankräfte des Schaleninneren (z.B. in Punkt 6) in meridionaler Richtung vergrößern sich durch die Krümmungsänderung im Auflagerbereich und am Rand leicht um 5-10%, während sich die zugehörigen Hauptbiegemomente etwa in gleichem Maße wie am Rand (z.B. in Punkt 2) verringern.

b) antimetrischer Lastfall: Nr. 3 Wind

Die zum Rand parallel verlaufende Hauptzugkraft N_{11} und das zugehörige Hauptbiegemoment M_{11} in Punkt 11 nehmen durch einen gegenüber der Kugelschale weniger gekrümmten Auflager- und Randbereich ($X_K = 10$ m) bei niedrigen Schalen auf 85-95%, bei hohen Schalen auf 48-72% der Werte von ursprünglichen Kugelschalen ab (Bild 3.23).

Die Ringzugkräfte im Auflagerbereich der niedrigen Schalen werden ($X_K = 10$) auf 85-95%, die der hohen Schalen auf 70-80% der ursprünglichen Werte verringert.

Hauptbiegemomente im Schaleninneren (Punkt 6) verringern sich durch eine verminderte Krümmung ungefähr im gleichen Verhältnis wie am Rand (Punkt 11), während die Membrankräfte in Punkt 6 in meridionaler Richtung kaum beeinflusst werden.

Die Ergebnisse der Parametervariation sind in Tabelle 3.24 zusammengefaßt.

Das Tragverhalten der Kuppelschalen kann für die untersuchten Lastfälle wesentlich verbessert werden, wenn die Krümmung der Schalenmittelfläche im Auflagerbereich so verringert wird, daß die Auflagerkraft tangential eingeleitet werden kann. Die Hauptbiegemomente des Lastfalles Eigengewicht und Schnee werden beispielsweise am Schalenrand (Punkt 2) und im Schaleninneren (Punkt 6) hoher Kugelschalen durch eine nahezu tangentiale Krafteinleitung ($X_K = 10$) auf 10-40%, in niedrigen Schalen nur auf 60-80% der Werte von Kugelschalen mit unveränderter Krümmung abgebaut.

Eine nahezu membrangerechte Auflagerkrafteinleitung ($X_K = 10$) verringert die Biegemomente am Schalenrand (Punkt 11) und im Schaleninneren (Punkt 6) hoher, windbelasteter Kugelschalen nur auf 50-70%, in niedrigen Kugelschalen nur auf 85-90%.

Die Druckkräfte in Meridianrichtung (Punkt 6) werden durch eine fast tangentiale Auflagerkrafteinleitung in die Schale kaum verändert (Tab. 3.24).

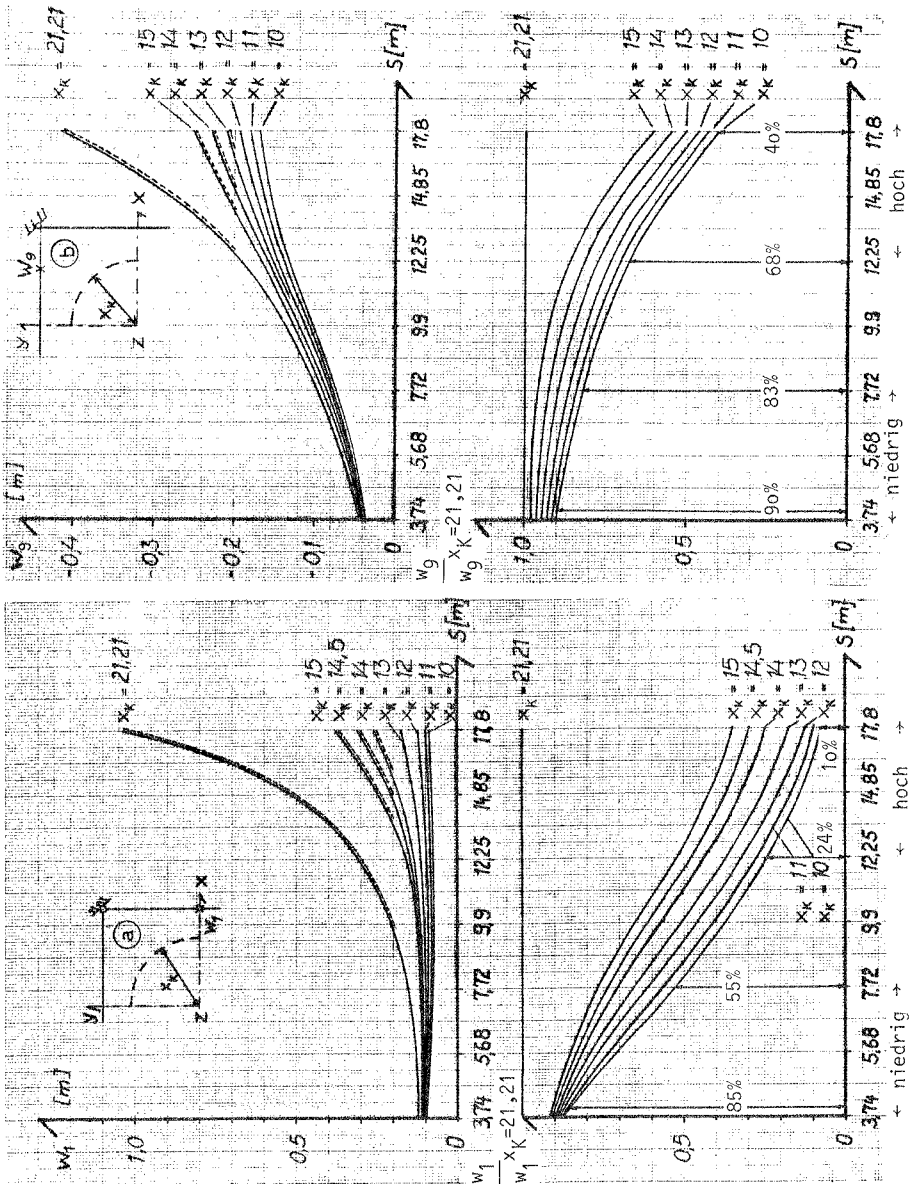


Bild 3.21: Im Auflagerbereich und entlang des Randes weniger gekrümmte Kugelschalen (Abschnitt 2.4.3a, Bild 2.15)

- a Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, max. vertikale Durchbiegung w_1 in Punkt 1
- b Lastfall Nr. 3, Wind, max. vertikale Verschiebung w_9 in Punkt 9 (vgl. Bild 3.8)

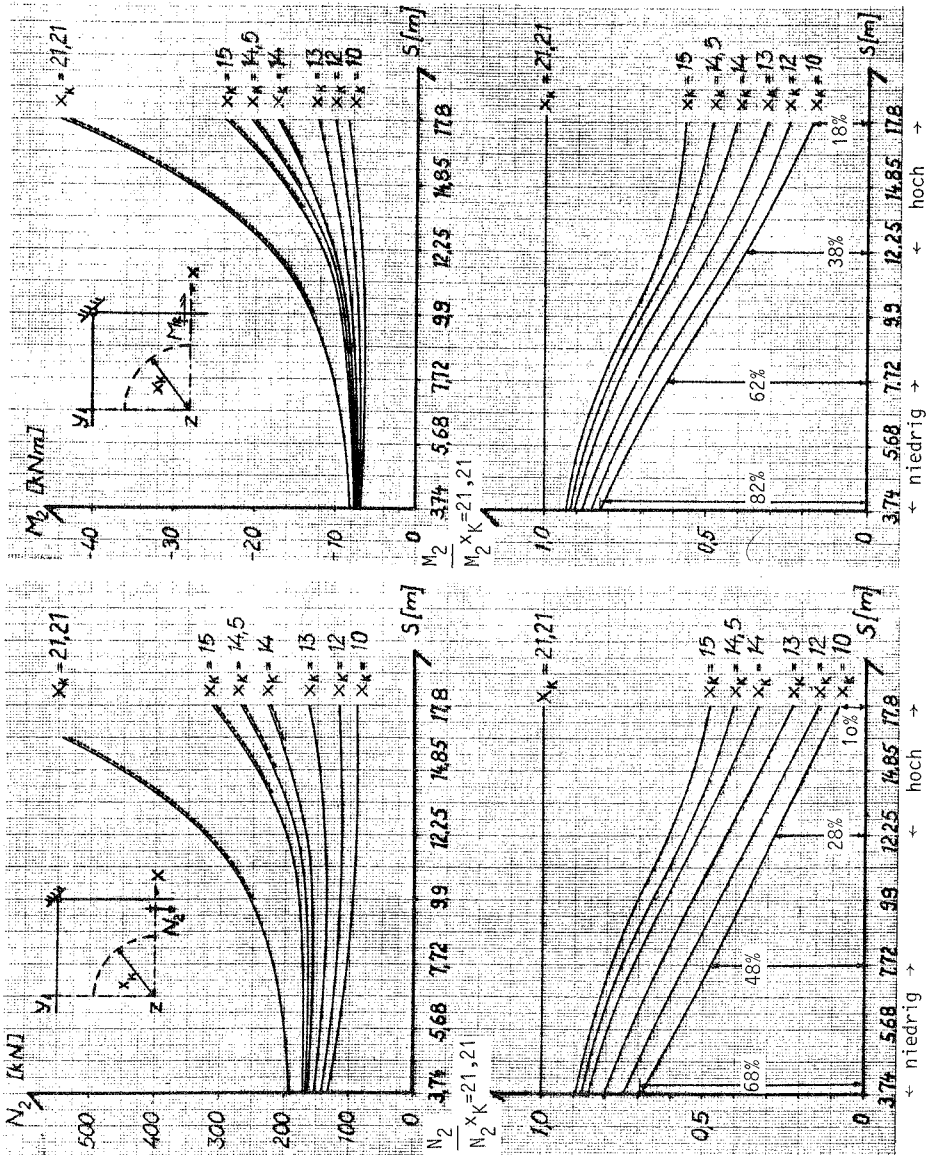


Bild 3.22: Im Auflagerbereich und entlang des Randes weniger gekrümmte Kugelschalen (Abschnitt 2.4.3a, Bild 2.15), Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, Hauptnormalkraft N_2 und Hauptbiegemoment M_2 in Punkt 2 (vgl. Bild 3.8)

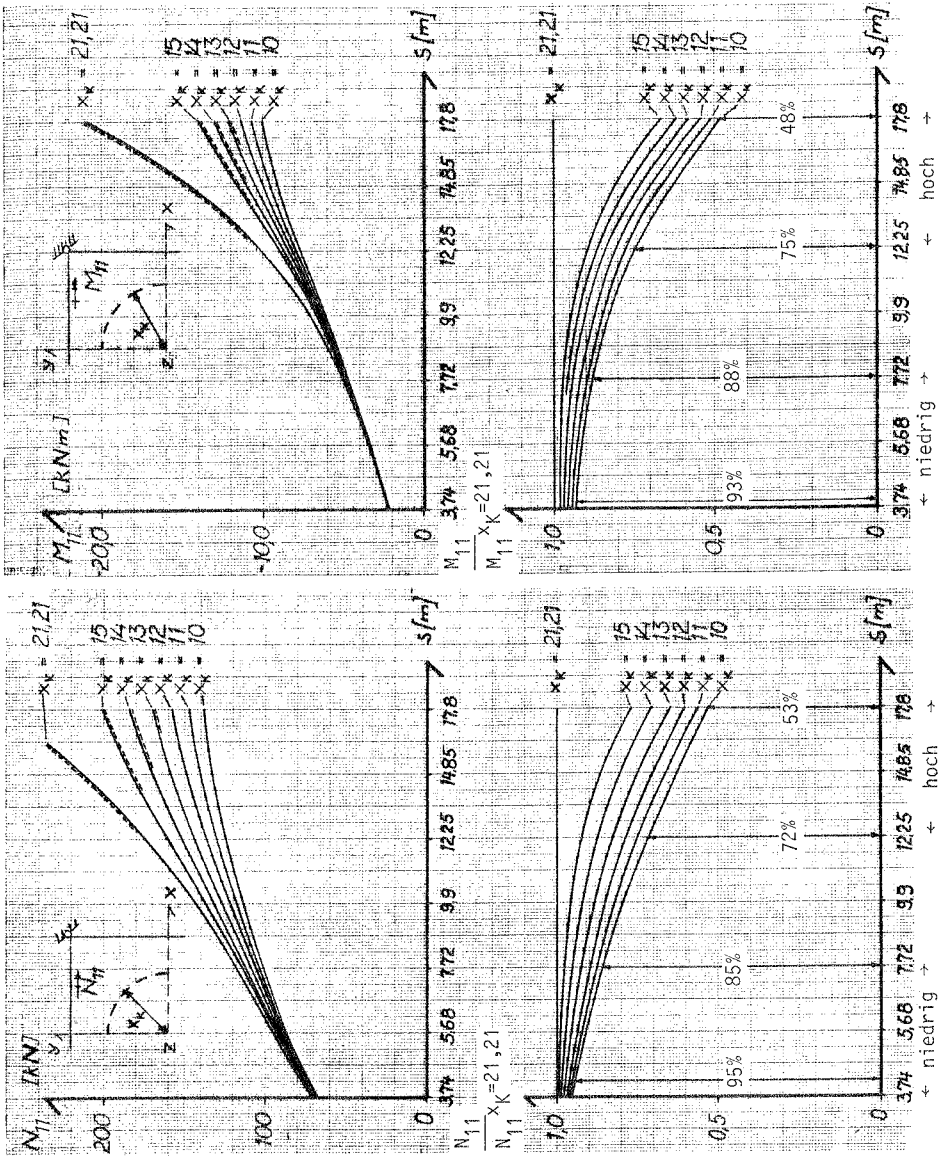


Bild 3.23: Im Auflagerbereich und entlang des Randes weniger gekrümmte Kugelschalen (Abschnitt 2.4.3a, Bild 2.15), Lastfall Nr. 3, Wind, Hauptnormalkraft N_{11} und Hauptbiegemoment M_{11} in Punkt 11 (vgl. Bild 3.8)

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht, Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee				antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee						
max w_1	Kugelschale		$\phi_{x,7}$	Kugelschale		max w_g	Kugelschale		$\phi_{x,9}$	
	niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch	niedrig	hoch
$X_K = 15$	75-90%	30-50%		niedrig	hoch		niedrig	hoch		
$X_K = 10$	50-85%	10-30%		75-90%	40-60%		95-98%	60-85%		95-98%
				60-70%	20-40%		80-90%	40-70%		85-94%
N_2			M_2			N_{11}				M_{11}
$X_K = 15$	80-90%	50-60%		85-95%	55-65%		95-98%	70-93%		95-98%
$X_K = 10$	45-70%	10-25%		60-80%	10-40%		85-95%	50-70%		85-90%
N_6			M_6			N_6				M_6
$X_K = 15$	102-103%	103-105%		80-95%	45-60%		97-98%	94-95%		95-98%
$X_K = 10$	104-105%	108-110%		60-85%	10-30%		96-97%	92-93%		90-95%

Tab. 3.24: Verminderung der maximalen vertikalen Durchbiegungen w_1, w_g , der Verdrehungen $\phi_{x,7}, \phi_{x,9}$ in den Punkten 1, 7 und 9, der Hauptnormalkräfte und zugehörigen Hauptbiegemomente in den Punkten 2, 6, 11 (Bild 3.8), wenn nur der Auflagerbereich ($X_K = 15$ m) oder wenn der Auflagerbereich und Gebiete entlang des freien Randes ($X_K = 10$ m) von Kugelschalen durch eine Übergangsfläche weniger gekrümmt werden

3.7 Tragverhalten von Ellipsoid- und Paraboloidschalen im Vergleich zur Kugelschale

Parametervariationen:

Mittelflächen:	(Abschnitt 2.4.1 und 2.4.3b)
Scheitelhöhe:	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 17,8 \text{ m}$
Lagerbreite:	$b = 1,5 \text{ m}$
Schalendicke:	sechsfach im Auflagerbereich (Abschnitt 2.4.4a)
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 12$
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Das Tragverhalten von Ellipsoid- und Paraboloidschalen wird im folgenden exemplarisch für den Lastfall Eigengewicht und den Lastfall Wind mit dem der Kugelschale verglichen.

a) achsensymmetrischer Lastfall: Nr. 1 Eigengewicht

Verformungen

Paraboloidschalen (PA2), sowohl hohe als auch niedrige, verformen sich im Vergleich zu den anderen untersuchten Kuppelschalen (KU, EL, PA3, PAFL) am geringsten.

Die größte vertikale Durchbiegung w_1 in Punkt 1 z.B. ist bei der steilen Paraboloidschale (PA2) kleiner als ein Zentimeter (Bild 3.25).

Schnittgrößen im Schaleninneren, entlang des Randes und im Auflagerbereich

Membrankräfte

Scheitelbereich:

Die Membranhauptspannungen von Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen werden im Umkreis des Scheitels (Radius ca. 20-25% der Grundrißseite a), nicht durch die Randstörungen der Lagerung beeinflusst.

Scheitelbereich des freien Randes (Punkt 2)

In niedrigen Ellipsoidschalen (EL, Paraboloidschalen, PA3 und PAFL) erreichen die zum Rand parallel gerichteten Hauptzugkräfte N_2 mehr als doppelt so große Werte wie in flachen Kugelschalen.

Erst in hohen Paraboloidschalen (PA3 und PAFL) gehen diese Hauptzugkräfte unter 40% der Werte vergleichbarer Kugelschalen zurück. Am kleinsten sind die Zugkräfte

entlang des freien Randes hoher und niedriger Paraboloidschalen (PA2, Bild 3.26).

Mittleres Schalenviertel und Auflagerbereich:

Die Ringzugkräfte niedriger Paraboloidschalen (PAFL), niedriger und hoher Ellipsoidschalen übersteigen in Punkt 6 die Zugkräfte vergleichbarer Kugelschalen um mehr als das Doppelte. Die Ringzugkräfte niedriger Paraboloidschalen (PA3) sind nahezu gleich groß wie die flacher Kugelschalen. Sie sinken bei steilen Schalen (PA3) jedoch auf die Hälfte des Wertes steiler Kugelschalen ab. In steilen Paraboloidschalen (PAFL) dagegen, sind sie nur um 10-20% kleiner als in steilen Kugelschalen.

Die Ringzugkräfte niederer Paraboloidschalen (PA2) erreichen nur ein Drittel der Werte flacher Kugelschalen. Erst in steilen Schalen (PA2) entstehen überwiegend Ringdruckkräfte, die im mittleren Schalenviertel ungefähr den 1,5- bis 1,8-fachen Wert steiler Kugelschalen annehmen.

Die meridional gerichteten Membrankräfte hoher Ellipsoidschalen und hoher Paraboloidschalen (PA3 und PAFL) sind um 10-20% größer als die steiler Kugelschalen. In niederen Ellipsoidschalen, niederen Paraboloidschalen (PA3 und PAFL) betragen sie nur 50-80% der Werte flacher Kugelschalen.

Biegemomente aus Randstörungen entlang des freien Randes (Punkt 2) und im Auflagerbereich (Punkt 5)

In niederen Ellipsoidschalen, Paraboloidschalen (PAFL und PA3) weichen die resultierenden Auflagerkräfte erheblich von der Tangentenrichtung der Schalenmittelfläche ab. Die Biegemomente im Auflagerbereich dieser Schalen sind deshalb mehr als doppelt so groß wie in Auflagernähe flacher Kugelschalen. Erst in hohen Schalen (EL, PAFL, PA3) entstehen im Auflagerbereich durch eine membrangerechtere Auflagerkrafteinleitung kleinere Biegemomente die 40-80% der Werte steiler Kugelschalen betragen.

Die Hauptbiegemomente dieser drei Schalenformen erreichen entlang des Randes ähnlich große Werte (z.B. Punkt 2, Bild 3.26). Die Biegemomente hoher Paraboloidschalen (PA2) dagegen betragen nur 5-20% der Werte hoher Kugelschalen.

b) antimetrischer Lastfall: Nr. 3 Wind

Paraboloidschalen (PA3, PAFL) werden für diese Lastfälle nicht mehr untersucht, da ihr Tragverhalten wesentlich schlechter ist als unter den achsensymmetrischen Lasten Eigengewicht und Schnee.

Verformungen

Der Rand niedriger Ellipsoidschalen verformt sich mehr als doppelt so stark wie

der flacher Kugelschalen. Der Rand niedriger und hoher Paraboloidschalen (PA2) in Punkt 9 dagegen verschiebt sich nur um 10-25% mehr als der vergleichbarer Kugelschalen (Bild 3.27).

Membrankräfte entlang des Schalenrandes und im Auflagerbereich

Entlang des Randes (Punkt 10) niedriger Ellipsoidschalen bauen sich zwei- bis dreifach so große Hauptzugkräfte N_{10} wie in niedrigen Kugelschalen auf. Bei flachen Kugelschalen und niedrigen Paraboloidschalen sind sie ungefähr gleich groß. Erst in steilen Paraboloidschalen (PA2) sinken diese Kräfte auf 80-90% der Werte steiler Kugelschalen (Bild 3.28).

Im Auflagerbereich (Punkt 5) erreichen die Ringzugkräfte der hohen Paraboloidschalen (PA2) die kleinsten Werte (70-80% von KU).

Biegemomente im Rand- und Auflagerbereich

Größere Biegemomente M_{10} entstehen entlang des freien Randes und im Auflagerbereich. In niedrigen Ellipsoidschalen sind sie 200-300%, in niedrigen Paraboloidschalen dagegen nur um 10-15% größer als in niedrigen Kugelschalen.

Auch in hohen Paraboloidschalen (PA2) entstehen in diesen Bereichen Biegemomente, die die Momente steiler Kugelschalen um 20-25% übersteigen (Bild 3.28).

Die Ergebnisse der Parametervariation sind in Tabelle 3.29 zusammengestellt.

Ellipsoidschalen, Paraboloidschalen PA3 und PAFL weisen gegenüber Kugelschalen ein ungünstigeres Tragverhalten auf. Verformungen, Biegemomente und Zugkräfte niedriger Schalen, deren Schalenrand und Auflagerbereich wesentlich stärker gekrümmt sind als bei Kugelschalen, können bis über das Doppelte der Werte niedriger Kugelschalen ansteigen (Tab. 3.29).

Paraboloidschale (PA2), Kugelschale:

Die maximalen Durchbiegungen am Schalenrand, die größten Biegemomente im Auflagerbereich und die Ringzugkräfte im mittleren Schalenviertel hoher Paraboloidschalen erreichen bei den Lastfällen Eigengewicht und Schnee nur 10-25% der Werte hoher Kugelschalen. Niedrige Paraboloidschalen dagegen zeigen nur ein geringfügig besseres Tragverhalten als niedrige Kugelschalen, da sie sich geometrisch kaum unterscheiden. Ihre Verformungen und Hauptspannungen betragen 80-90% der Werte niedriger Kugelschalen. Bei einer Wind- und halbseitigen Schneebelastung betragen die Verformungen und Biegemomente niedriger und hoher Paraboloidschalen das 1,1- bis 1,45-fache der Werte entsprechender Kugelschalen. Kugelschalen besitzen bei diesem Lastfall ein günstigeres Tragverhalten (Tab. 3.29).

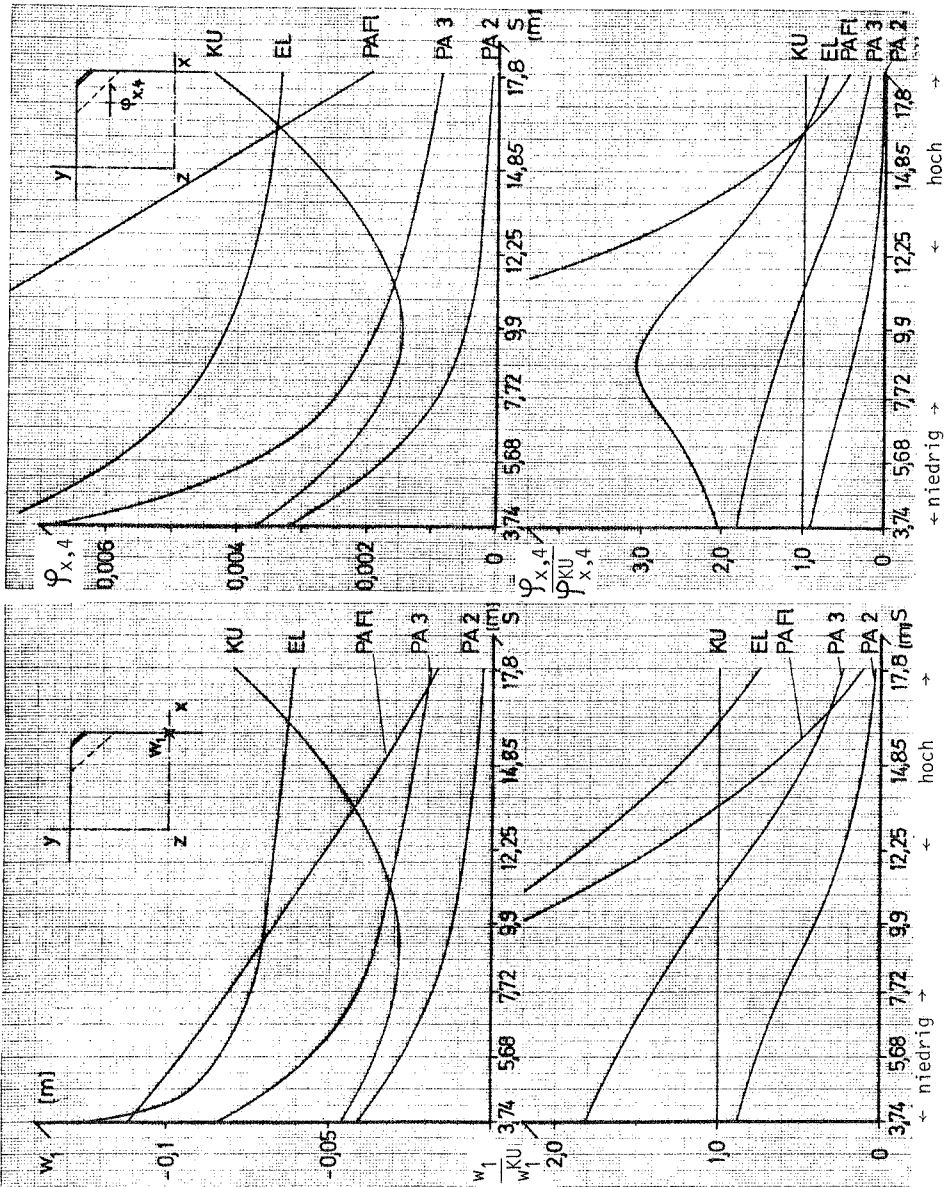


Bild 3.25: Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, Tragverhalten von fünf verschiedenen Kuppelschalen (Bild 2.16 - 2.20), mit einem 1,5 m breitem Auflager und verdicktem Auflagerbereich ($i = 4,0$, Bild 2.22), vertikale Durchbiegung w_1 in Punkt 1 und Verdrehung $\varphi_{x,4}$ in Punkt 4 (Bild 3.8)

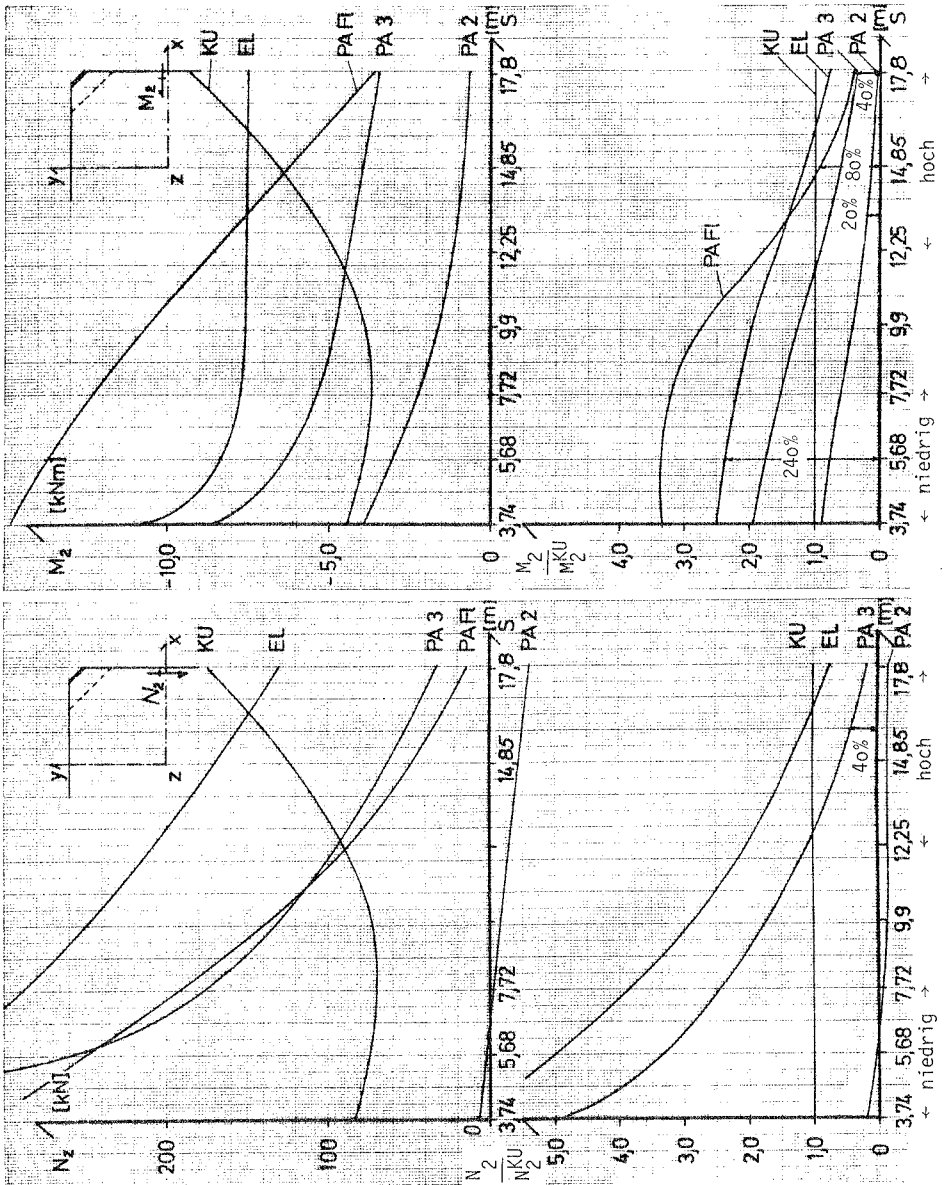


Bild 3.26: Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, Tragverhalten von fünf verschiedenen Kuppelschalen (Bild 2.16 - 2.20) mit einem 1,5 m breitem Auflager und verdicktem Auflagerbereich ($i = 4$, Bild 2.22), Hauptnormalkraft N_2 und Hauptbiegemoment M_2 in Punkt 2 (Bild 3.8)

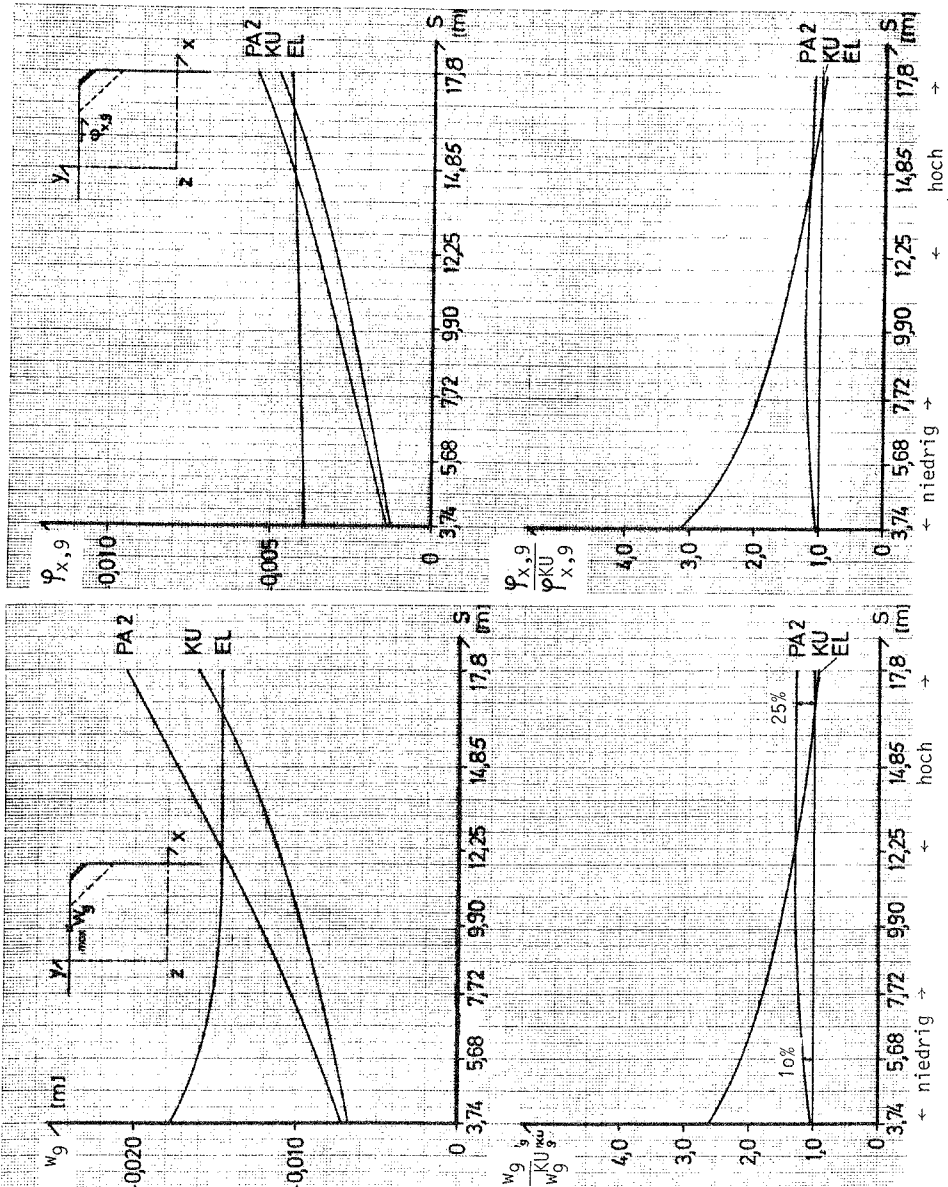


Bild 3.27: Lastfall Nr. 3, Wind, Tragverhalten von drei verschiedenen Kuppelschalen (Bild 2.16 - 2.18) mit einem 1,5 m breitem Auflager und verdicktem Auflagerbereich ($i = 4$, Bild 2.22), maximale vertikale Verschiebung w_g und Verdrehung $\varphi_{x,9}$ in Punkt 9 (Bild 3.8)

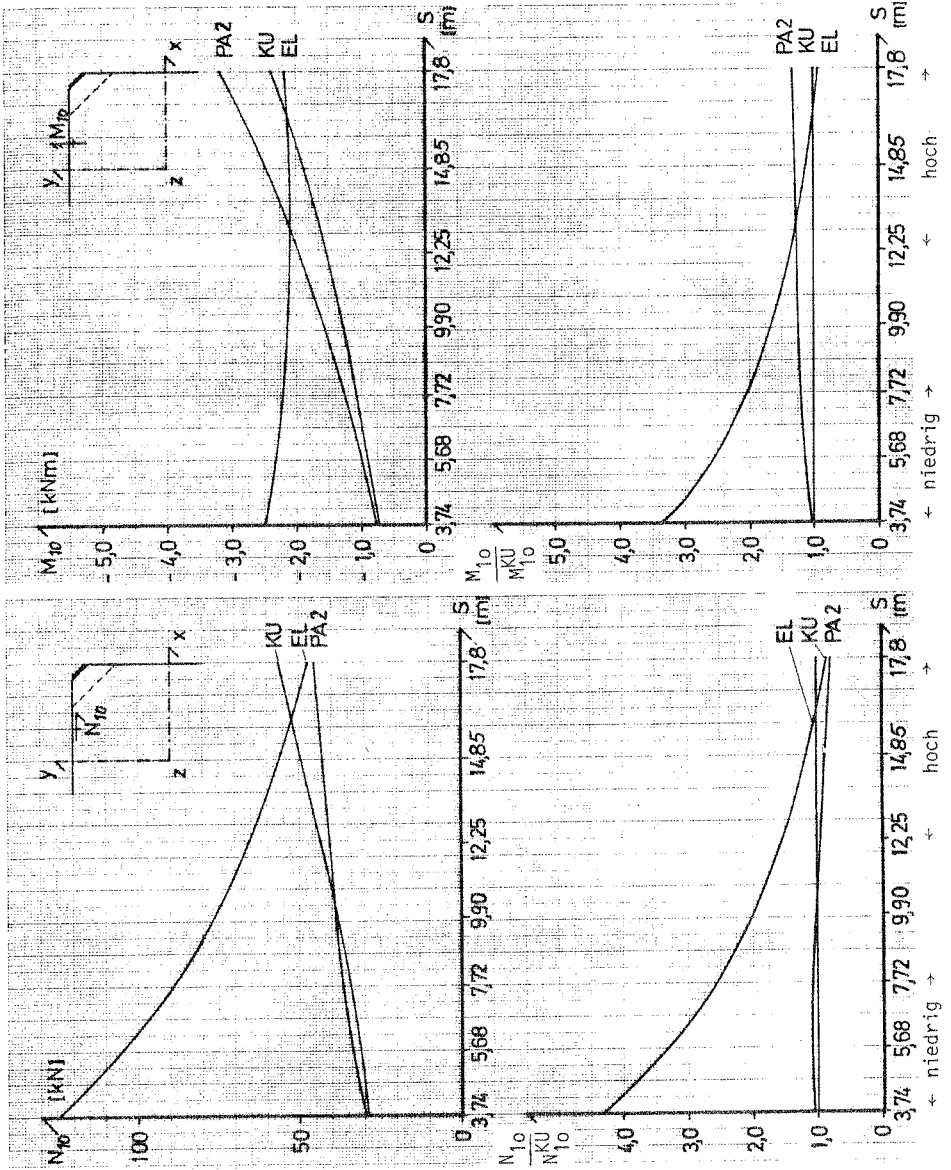


Bild 3.28: Lastfall Nr. 3, Wind, Tragverhalten von drei verschiedenen Kuppelschalen (Bild 2.16 - 2.18) mit einem 1,5 m breitem Auflager und verdicktem Auflagerbereich ($i = 4,0$, Bild 2.22), Hauptnormalkraft N_{10} und Hauptbiegemoment M_{10} in den Punkten 9 und 10 (Bild 3.8).

max w_1	achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht, Nr. 2 Schnee					antisymmetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee					
	Kuppelschale		$\phi_{x,4}$	Kuppelschale		max w_9	Kuppelschale		$\phi_{x,9}$	Kuppelschale	
	niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch
Kugelschale (KU)	100%	100%		100%	100%		100%	100%		100%	100%
Ellipsoidschale (EL)	> 200%	100-120%		> 200%	100-120%		> 200%	90-110%		> 200%	90-110%
Paraboloidschale (PA2)	80-90%	5-10%		80-90%	5-10%		105-110%	115-125%		105-110%	115-125%
Paraboloidschale (PA3)	150-180%	30-50%		150-180%	30-50%						
Paraboloidschale (PAFL)	> 200%	40-80%		> 200%	60-120%						
N_2			M_2			N_{10}			M_{10}		
Kugelschale (KU)	100%	100%		100%	100%		100%	100%		100%	100%
Ellipsoidschale (EL)	> 200%	90-110%		> 200%	90-110%		> 200%	80-110%		> 200%	80-120%
Paraboloidschale (PA2)	5-10%	ca. 3%		60-80%	5-15%		105%	80-90%		100-115%	125-140%
Paraboloidschale (PA3)	> 200%	20-80%		> 200%	40-80%						
Paraboloidschale (PAFL)	> 200%	20-80%		> 200%	70-110%						
N_5			M_5			N_6			M_6		
Kugelschale (KU)	100%	100%		100%	100%		100%	100%		100%	100%
Ellipsoidschale (EL)	80-90%	90-110%		> 200%	90-110%		70-90%	90-115%		> 200%	90-125%
Paraboloidschale (PA2)	100-120%	150-180%		60-80%	5-15%		105%	90-100%		105-110%	115-145%
Paraboloidschale (PA3)	80-90%	100-110%		> 200%	40-80%						
Paraboloidschale (PAFL)	50-80%	100-120%		> 200%	80-120%						

Tab. 3.29: Maximale vertikale Durchbiegungen w_1 , w_9 und Verdrehungen $\phi_{x,4}$, $\phi_{x,9}$ in den Punkten 1, 4 und 9. Hauptnormalkräfte N und zugehörige Hauptbiegemomente M in den Punkten 2, 5, 6 und 10 von Ellipsoid- und Paraboloidschalen (EL, PA2, PA3, PAFL, Bild 2.17 - 2,20) im Vergleich zu Kugelschalen, Lagerbreite $b = 1,5$ m, vierfache Schalendicke im Auflagerbereich ($i = 4$, Bild 2.22)

3.8 Stützung des Schalenrandes

3.8.1 Versteifung des Schalenrandes durch ein stufenweises Ansteigen der Schalendicke

Parametervariationen:

Mittelflächen:	Kugel- und Paraboloidschalen (PA2)
Scheitelhöhe:	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 17,8 \text{ m}$
Lagerbreite:	$b = 0,2 \text{ m}, b = 1,5 \text{ m}$
Schalendicke:	(Abschnitt 2.4.4b)
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 12$
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee Nr. 6 Eigengewicht und Schnee
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Eine Verbreiterung des punktförmigen Auflagers, tangentialer Auflagerkräfteleitung und eine Versteifung der Kuppelschalen im Auflagerbereich verringern die Spannungen am unversteiften Schalenrand nicht so weit, daß z.B. für die Lastkombination aus

- Eigengewicht und Schnee (Nr. 6)
 - Eigengewicht (Nr. 1) mit Wind und halbseitig auftretendem Schnee (Nr. 5, vgl. Tab. 3.39)
 - Eigengewicht, Schnee und Winddruck (Nr. 7)
- die in Abschnitt 2.2 festgelegten Grenzspannungen eingehalten werden können.

Die Verbesserung des Tragverhaltens von Kugelschalen durch eine Verdickung des Schalenrandes und des Auflagerbereiches wird nachfolgend exemplarisch dargestellt.

a) achsensymmetrischer Lastfall: Nr. 1 Eigengewicht

Mittelfläche:	Kugelschale
Lagerbreite:	$b = 0,2 \text{ m}$

Verformung des Schalenrandes

Die größten vertikalen Verschiebungen des Schalenrandes z.B. w_1 in Punkt 1 vermindern sich schon bei einer zweifachen ($i = 2$) Schalendicke entlang des

Randes auf 20-28% des Wertes unversteifter Kugelschalen (Bild 3.30). Ab einer vier- bis fünffachen Schalendicke nehmen die Verschiebungen nur noch wenig weiter ab.

Schnittgrößen entlang des Randes, im Schaleninneren und im Auflagerbereich

Die zum Rand parallel verlaufende Hauptzugkraft N_2 in Punkt 2 wird durch eine doppelte Schalendicke des Randes ($i=2$) bei Kugelschalen um mehr als die Hälfte verringert. Das zugehörige Hauptbiegemoment M_2 steigt gleichzeitig fast um das Zweifache an. Die Hauptspannungen σ_2 aus beiden Schnittgrößen verringern sich dabei auf 25-50% des ursprünglichen Wertes (Bild 3.32).

Ab einer drei- bis vierfachen Dicke des Schalenrandes ($i=3-4$) verringern sich die Hauptspannungen in Punkt 2 am Rand und in Punkt 6 im Auflagerbereich bei flachen Kugelschalen nicht mehr maßgeblich weiter, bei steilen Schalen ab einer vier- bis fünffachen Schalendicke (Bild 3.32).

Die Druckkräfte des Schaleninneren in meridionaler Richtung verändern sich kaum durch die Versteifung des Schalenrandes. Die Biegemomente im mittleren Schalenviertel (Punkt 6) und im Auflagerbereich (Punkt 5) werden ab einer drei- bis fünffachen Schalendicke entlang des Randes nur noch wenig vermindert (vgl. Tab. 3.34).

b) antimetrischer Lastfall: Nr. 3, Wind

Verformung des Schalenrandes

Die größten vertikalen Verschiebungen w_9 , z.B. in Punkt 9, vermindern sich bereits bei einer zweifachen Schalendicke entlang des Randes ($i=2$) auf 21-25% des Wertes unversteifter Schalen; bei einer vier- bis fünffachen Schalendicke gehen die Verschiebungen bis auf 5-10% zurück (Bild 3.30).

Schnittgrößen entlang des Randes, im Schaleninneren und im Auflagerbereich

Die zum Rand parallel verlaufende Hauptzugkraft N_{11} in Punkt 11 verringert sich durch eine zweifache Schalendicke ($i=2$) bei flachen und steilen Schalen auf 75-90% des ursprünglichen Wertes. Das zugehörige Hauptbiegemoment M_{11} vergrößert sich ungefähr auf den doppelten Wert. Die Hauptspannungen aus beiden Schnittgrößen werden jedoch auf 40-50% des Wertes der unversteiften Schale verringert. Diese Hauptspannungen (Punkt 11) werden bei flachen Kugelschalen ab einer vier- bis fünffachen Schalendicke, bei steilen Kugelschalen ab einer fünf- bis sechsfachen Schalendicke nicht mehr maßgeblich weiter vermindert (Bild 3.33).

Die Ringzugkräfte im Schaleninneren (Punkt 5, 6) und im Auflagerbereich werden, nachdem sie auf 50-65% des ursprünglichen Wertes gesunken sind, ab einer vier- bis fünffachen Schalendicke entlang des Randes flacher Schalen und ab einer

fünf- bis sechsfachen Schalendicke entlang des Randes steiler Schalen nicht mehr ausschlaggebend weiter verringert.

Die meridional gerichteten Druckkräfte z.B. in Punkt 6, flacher und steiler Kugelschalen nehmen bei einer fünffachen Schalendicke am Rand auf 80-90% ab, während die zugehörigen Biegemomente auf 10-20% abgeklungen sind (Tab. 3.34).

Mittelflächen: Paraboloidschale (PA2)

Lastfälle:

- | | |
|-----------------------|------------------------------------|
| a) achsensymmetrisch: | Nr. 1 Eigengewicht |
| | Nr. 2 Schnee |
| | Nr. 6 Eigengewicht und Schnee |
| b) antimetrisch: | Nr. 3 Wind |
| | Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee |

Eine lineare Zunahme der Schalendicke entlang des Randes und im Auflagerbereich verbessert das Tragverhalten auf dieselbe Art wie das flacher und steiler Kugelschalen. Es ergeben sich jedoch geringere Grenzbereiche der Schalendicke i_{grenz} bei deren Überschreitung die Verformungen und Spannungen in der Schale nicht mehr ausschlaggebend weiter zurückgehen (Tab. 3.36).

Die Ergebnisse der Parametervariation sind in den Tabellen 3.34 und 3.35 zusammengefaßt

Ein stufenweises Anwachsen der Schalendicke auf das Drei- bis Sechsfache bei Kugelschalen und das Zwei- bis Vierfache bei Paraboloidschalen läßt Verformungen z.B. Punkt 1 und 9, und Hauptspannungen z.B. Punkt 2 und 11, entlang des Schalenrandes und im Auflagerbereich auf 5-20% der Werte der unverteiften Schalen zurückgehen. Die Hauptbiegemomente im mittleren Schalenviertel, z.B. in Punkt 6, sind dann nahezu ganz abgeklungen. Die meridional gerichteten Druckkräfte (Punkt 6) werden durch eine Verdickung des Schalenrandes ($i=4$) nur auf 80-90% verringert (Tab. 3.34, 3.35).

In Abhängigkeit von der Art der Belastung entstehen Grenzbereiche der Schalendicke i_{grenz} entlang des Randes und im Auflagerbereich bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten von Kugel- und Paraboloidschalen nur noch wenig verbessert (Tab. 3.36).

In Tab. 3.37 werden Grenzbereiche der Schalendicke $i_{\text{grenz},b}$ für eine Lastkombination aus Eigengewicht, Schnee und Windlast angegeben, bei den in Kugel- und Paraboloidschalen die in Abschnitt 2.2. festgelegten Grenzspannungen des gewählten Stahlbetons eingehalten werden.

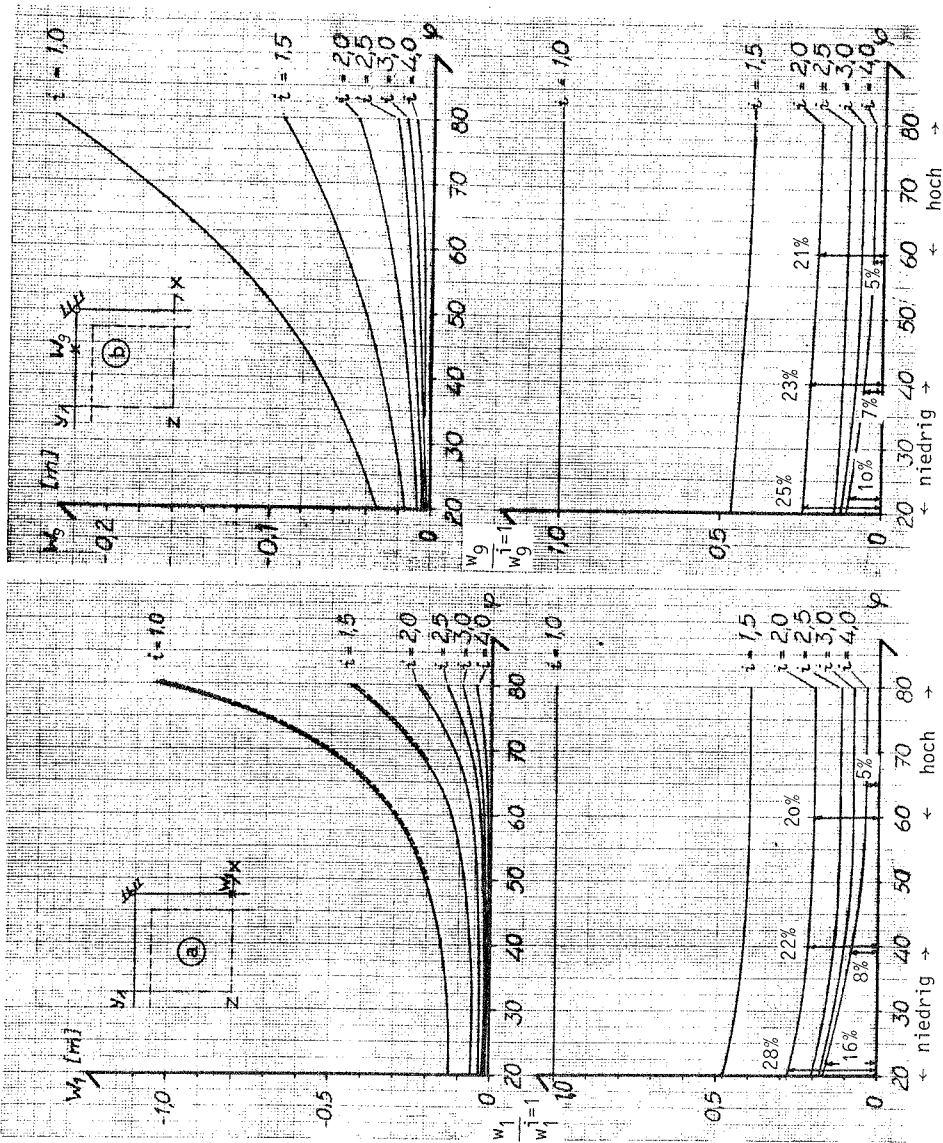


Bild 3.30: Im Auflagerbereich und entlang des Randes verdickte Kugelschale ($1,0 \leq i \leq 4,0$, Bild 2.23), Lagerbreite $b = 0,2$ m

- (a) Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, max. vertikale Durchbiegung w_1 in Punkt 1
- (b) Lastfall Nr. 3, Wind, max. vertikale Verschiebung w_9 in Punkt 9 (vgl. Bild 3.8)

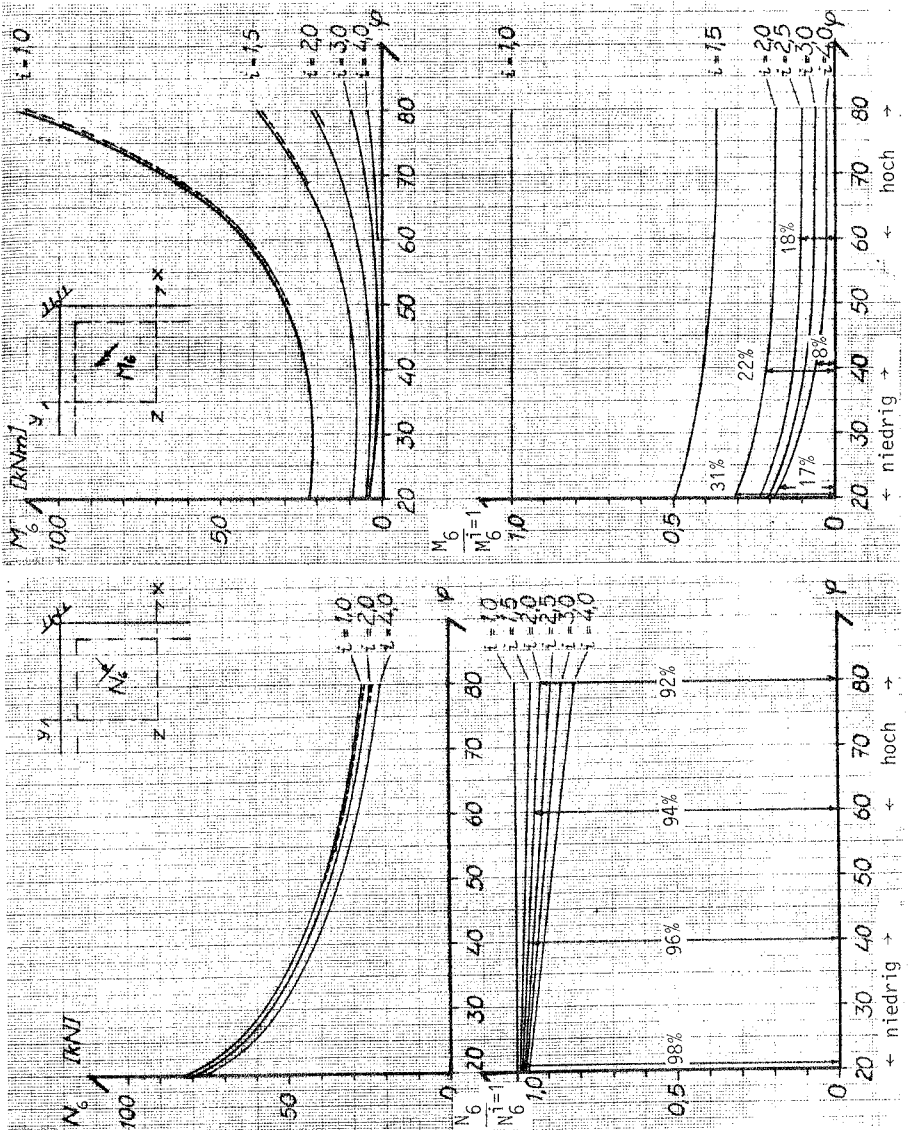


Bild 3.31: Im Auflagerbereich und entlang des Randes verdickte Kugelschale ($1,0 \leq i \leq 4,0$, Bild 2.23), Lagerbreite $b = 0,2$ m, Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, Hauptnormalkraft N_6 und Hauptbiegemoment M_6 in Punkt 6 (Bild 3.8)

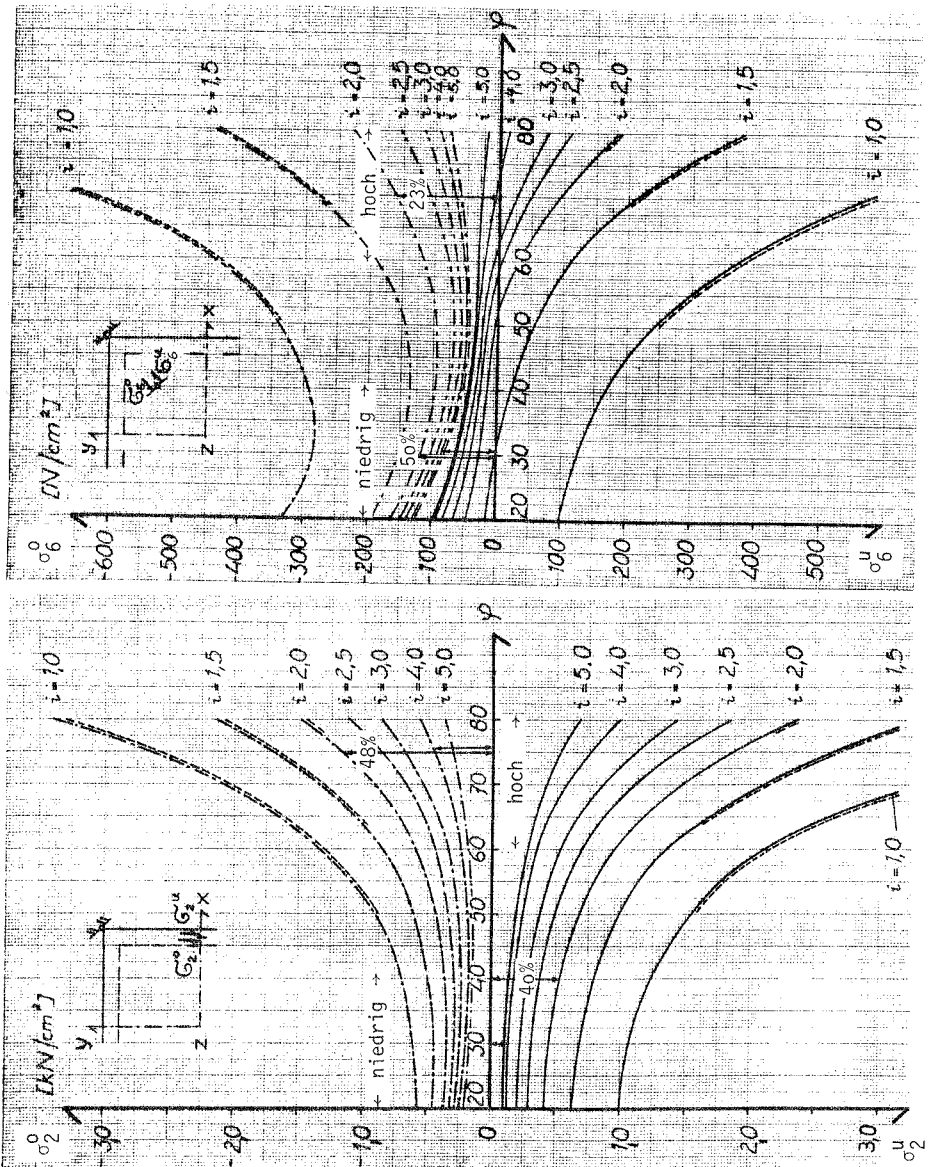


Bild 3.32: Im Auflagerbereich und entlang des Randes verdickte Kugelschale ($1,0 \leq i \leq 5,0$, Bild 2.23), Lagerbreite $b = 0,2$ m, Lastfall Nr. 1, Eigengewicht, obere Hauptspannung σ^o , untere Hauptspannung σ^u in Punkt 2 und in Punkt 6 (Bild 3.8)

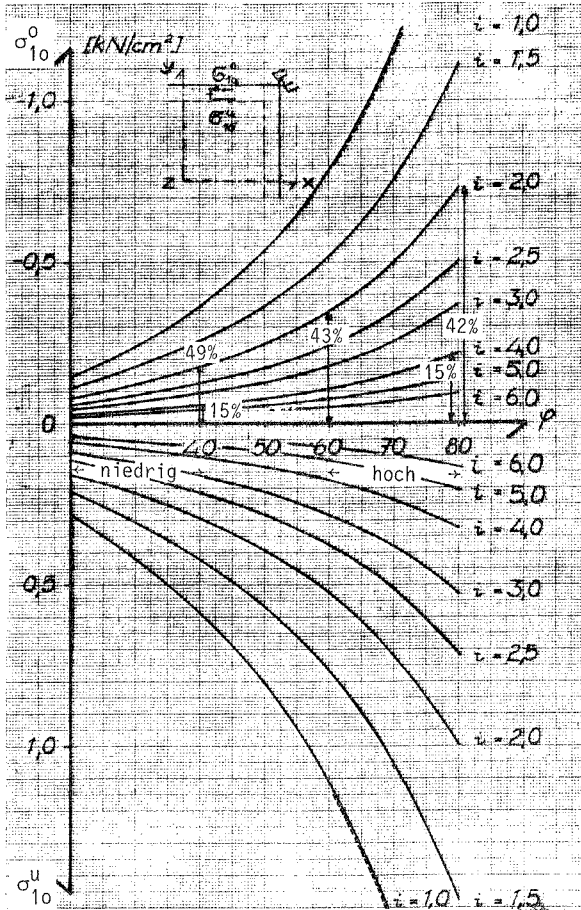


Bild 3.33: Im Auflagerbereich und entlang des Randes verdickte Kugelschale ($1,0 \leq i \leq 6,0$, Bild 2.23), Lagerbreite $b = 0,2$ m, Lastfall Nr. 3, Wind, obere Hauptspannung σ^0 , untere Hauptspannung σ^u in Punkt 10 (Bild 3.8)

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht, Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee		Kugelschale		$\phi_{x,7}$	Kugelschale		max w_9	Kugelschale		antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee	
		niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch	niedrig	hoch
$i = 2$	20-30%	20-25%			20-30%	20-25%		20-30%	20-25%		
$i = 4$	8-20%	3-5%			10-20%	5-8%		5-10%	4-7%		
$i = 5$	6-15%	2-3%			10-20%	5-8%		5-10%	4-7%		
N_2				σ_2			N_{11}				σ_{11}
$i = 2$	30-45%	50-70%			40-50%	30-40%		90-95%	85-90%		
$i = 4$	10-20%	20-35%			10-20%	20-25%		75-80%	70-75%		
$i = 5$	10-20%	10-20%			8-18%	10-20%		75-80%	60-65%		
N_6				M_6			N_6				M_6
$i = 2$	95-100%	90-95%			30-40%	20-25%		95-98%	90-95%		
$i = 4$	90-95%	80-90%			10-20%	5-10%		90-95%	85-90%		
$i = 5$	90-95%	75-80%			10-20%	5-10%		90-95%	80-85%		

Tab. 3.34: Abbau der max. vertikalen Durchbiegungen w_1 , w_9 , der Verdrehungen $\phi_{x,7}$, $\phi_{x,9}$ in den Punkten 1, 7 und 9 der Hauptnormalkräfte und zugehörigen Hauptbiegemomente in den Punkten 2, 6 und 11 (Bild 3.8) bei einer i-fachen Schalendicke entlang des Randes und im Auflagerbereich im Vergleich zur versteiften Schale, Lagerbreite $b = 0,2$ m

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht, Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee				antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee					
max w_1	Paraboloidschale		$\phi_{x,7}$	Paraboloidschale		max w_9	$\phi_{x,9}$	Paraboloidschale	
	niedrig	hoch		niedrig	hoch			niedrig	hoch
i = 2	30-40%	25-35%		20-40%	24-36%			25-35%	30-35%
i = 3	20-30%	15-25%		20-30%	14-25%			15-20%	20-25%
i = 4	20-25%	15-20%		20-24%	14-20%			12-20%	20-25%
N_2			σ_2			N_{11}	σ_{11}		
i = 2	43-54%	60-70%		40-50%	30-40%			90-95%	45-55%
i = 3	28-38%	45-55%		20-30%	20-30%			75-80%	25-40%
i = 4	25-30%	35-45%		10-18%	18-25%			73-76%	25-35%
N_6			M_2			N_6	M_6		
i = 2	95-100%	92-95%		30-40%	20-25%			95-98%	35-40%
i = 3	93-97%	84-90%		15-20%	18-20%			90-95%	15-20%
i = 4	90-95%	80-90%		10-17%	5-10%			88-93%	14-18%

Tab. 3.35: Abbau der max. vertikalen Durchbiegungen w_1 , w_9 , der Verdrehungen $\phi_{x,7}$, $\phi_{x,9}$ in den Punkten 1, 7 und 9, der Hauptnormalkräfte und zugehörigen Hauptbiegemomente in den Punkten 2, 6, 11 (Bild 3.8) bei einer i-fachen Schalendicke entlang des Randes und im Auflagerbereich im Vergleich zur versteiften Schale, Lagerbreite $b = 0,2 m$

Lastfälle	symmetrisch Nr. 1, 2, 6	antimetrisch Nr. 3, 5
Lagerbreite	$b^{*}) = 0,2 \text{ m}$	$b = 0,2 \text{ m}$
hohe Kugelschale	$i = 4 - 5$	$i = 5 - 6$
niedrige Kugelschale	$i = 3 - 4$	$i = 4 - 5$
hohe Paraboloidschale	$i = 3 - 4$	$i = 4 - 5$
niedrige Paraboloidschale	$i = 3 - 4$	$i = 4 - 5$
Lagerbreite	$b = 1,5 \text{ m}$	$b = 1,5 \text{ m}$
hohe Kugelschale	$i = 3 - 4$	$i = 4 - 5$
niedrige Kugelschale	$i = 2 - 3$	$i = 3 - 4$
hohe Paraboloidschale	$i = 2 - 3$	$i = 3 - 4$
niedrige Paraboloidschale	$i = 2 - 3$	$i = 3 - 4$

Tab. 3.36: Grenzbereiche der Schalendicke i_{grenz} entlang des Randes und im Auflagerbereich von Kuppelschalen, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der Schalen nicht mehr maßgeblich weiter verbessert

Lastkombination: Eigengewicht (Nr. 1), mit Wind und halbseitigem Schnee (Nr. 5)			
Lagerbreite	$b^{*}) = 0,2 \text{ m}$		$b = 1,5 \text{ m}$
	Schalendicke entlang des Randes	Schalendicke im Auflagerbereich	Schalendicke entlang des Randes und im Auflagerbereich
hohe Kugelschale	$i = 3 - 4$	$i = 4 - 5$	$i = 3 - 4$
niedrige Kugelschale	$i = 3 - 4$	$i = 4 - 5$	$i = 2 - 3$
hohe Paraboloidschale	$i = 2 - 3$	$i = 3 - 4$	$i = 2 - 3$
niedrige Paraboloidschale	$i = 2 - 3$	$i = 3 - 4$	$i = 2 - 3$

Tab. 3.37: Grenzbereiche der Schalendicke im Auflager- und Randbereich i_{grenz}, b für eine Lastkombination, bei der die in Abschnitt 2.2 festgelegten Grenzspannungen eingehalten werden (vgl. Tab. 3.38)

*) Die Lagerbreite muß für niedrige Schalen auf $b = 0,3$ bis $0,4 \text{ m}$ erhöht werden, damit bei der Auflagerkrafteinleitung in die Schale die in Abschnitt 2.2 festgelegte Betonfestigkeit nicht überschritten wird.

hohe Kugelschale Öffnungswinkel $\phi = 80^\circ$	M	N	b / d / h cm/cm/cm	i_1	k_h	$\frac{2}{k_h} k_h$	k_s	Fe cm ²	eingehaltene Materialgrenzen des Abschnittes 2.2 Betondruckfestigkeit wird eingehalten
~ Punkt 2 Scheitel des Randes	239	+355	100/28/25	<u>3,5</u>		1,76 > 1,65	4,85	53,58 46Ø12/m unten in 2 Lagen	$\sigma_{HN}^{vorh} = 126,7 \text{ N/cm}^2 \leq$ $\sigma_H^{vorgrenz} = 173 \text{ N/cm}^2$ Ribbreite: 'sehr gering'
~ Punkt 4 mittleres Schalen- viertel	2,3	- 55	100/ 8/ 5	<u>1,0</u>		2,5 > 1,65	4,55	1,34 konstruktiv	Ribbreite: 'sehr gering'
niedrige Kugelschale Öffnungswinkel $\phi = 30^\circ$									
~ Punkt 2 Scheitel des Randes	79	+103	100/18/15	<u>2,25</u>		1,75 > 1,65	4,85	27,83 26Ø12/m unten	$\sigma_{HN}^{vorh} = 129 \text{ N/cm}^2 \leq$ $\sigma_{HN}^{vorgrenz} = 173 \text{ N/cm}^2$ Ribbreite 'sehr gering'
~ Punkt 4 mittleres Schalen- viertel	3,5	-137,5	100/ 8/ 5	<u>1,0</u>		2,26 > 1,65	4,59	- 1,25 konstruktiv	Ribbreite: 'sehr gering'

Tab. 3.38: Bemessung am Schalenrand (~Punkt 2) und im Schaleninneren (~Punkt 4, Bild 3.8) einer entlang des Randes und im Auflagerbereich verdickten hohen und niedrigen Kugelschale, Lagerbreite b = 1,5 m, Lastkombination: Eigengewicht (Nr. 1) und Wind mit halbseitigem Schnee (Nr. 5)

1) $i = i$ -faches Verhältnis der Schalendicke am Rand und im Auflagerbereich zur Schalendicke im Inneren

~ Punkt 2 Scheitel des Randes (Bild 3.8)	M kNm/m	N kN/m	b / d / h cm/cm/cm	$\frac{15}{h+5}$	i ¹⁾	k _h ^{grenz}	k _h ^{vorh}	k _h [*]	überschrittene Materialgrenzen von Abschnitt 2.2
hohe Kugelschale Scheitelhöhe S = 17,80 m	28,8	+386,0	100/ 8/ 5	1,5	1,0	1,65	> 0,80	< 1,5	Betondruckfestigkeit ist überschritten $k_{vh} \leq k_h^*$, Druckbewehrung erforderlich $\sigma_{vh} = 482,5 \text{ N/cm}^2 \geq \sigma_{H \text{ grenz}} = 173 \text{ N/cm}^2$ große Ribbreiten im Beton
niedrige Kugel- schale Scheitelhöhe S = 5,68 m	18,7	+166,0	100/ 8/ 5	1,5	1,0	1,65	> 0,97	< 1,50	$\sigma_{vh} = 207,5 \text{ N/cm}^2 \geq \sigma_{H \text{ grenz}} = 173 \text{ N/cm}^2$ sonst wie oben
hohe Paraboloid- schale (PA2) Scheitelhöhe S = 14,85 m	16,6	+158,0	100/ 8/ 5	1,5	1,0	1,65	> 1,03	< 1,50	$\sigma_{vh} = 197,5 \text{ N/cm}^2 \geq \sigma_{H \text{ grenz}} = 173 \text{ N/cm}^2$ sonst wie oben

Tab. 3.39: Bemessung am Schalenrand (~ Punkt 2, Bild 3.8) von im Auflagerbereich verdickten (i = 5) Kugel- und Paraboloidschalen, Lagerbreite b = 1,5 m, Lastkombination: Eigengewicht (Nr. 1) und Wind mit halbeitigem Schnee (Nr. 5)

1) i-fache Schalendicke

3.8.2 Stützung des Randes durch einen Randträger

Parametervariationen:

Mittelflächen:	Kugelschale, Paraboloidschale (PA2) (Abschn. 2.4.3b)
Scheitelhöhe:	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 17,8 \text{ m}$
Lagerbreite:	$b = 1,5 \text{ m}$
Schalendicke:	(Abschn. 2.4.4c)
Randträgerhöhe:	$0,2 \text{ m} \leq H \leq 1,46 \text{ m}$ (Abschn. 2.4.4c, Bild 2.24)
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 16$
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee Nr. 6 Eigengewicht und Schnee Nr. 4 Horizontale Stützenverschiebung nach innen Nr. 7 Kombinerter Lastfall aus Eigengewicht, Schnee, radial gerichtete Zusatzlast
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Variation des Winkels α zwischen der Hauptträgheitsachse z des Randträgers und der Flächennormalen n des Schalenrandes (Bild 3.4o)

Die Verformungen der Schalen sind am geringsten, wenn die längere Seite des Randträgers senkrecht zum Schalenrand steht ($\alpha = 0$). Biegemomente und Normalkräfte entlang des Schalenrandes und im Auflagerbereich erreichen dann ihre kleinsten Werte.

Weicht der Winkel α um 30° von der Neigung der Flächennormalen ab, vergrößern sich Verformungen und Biegemomente flacher und steiler Schalen auf das 1,1- bis 1,2-fache der Werte von Schalen, deren vertikale Randträgerachse z parallel zur Flächennormalen am Schalenrand ($\alpha = 0$) verläuft (Bild 3.4o).

Mitwirkende Breite des Schalenrandes

Mittelfläche:	Kugel-, Paraboloidschale (PA2)
Lagerbreite:	$b = 1,5 \text{ m}$
verwundener Randträger ($\alpha = 0$, Bild 2.24) mit der Randträgerhöhe:	} $H_{\text{Kugel}} = 0,96 \text{ m}$, $H_{\text{PA2}} = 0,72 \text{ m}$

Die Schalenränder erfahren bei der Lastabtragung des Randträgereigengewichtes

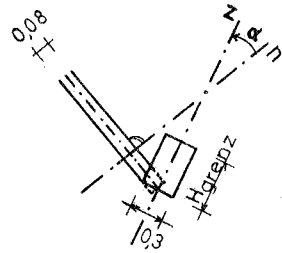
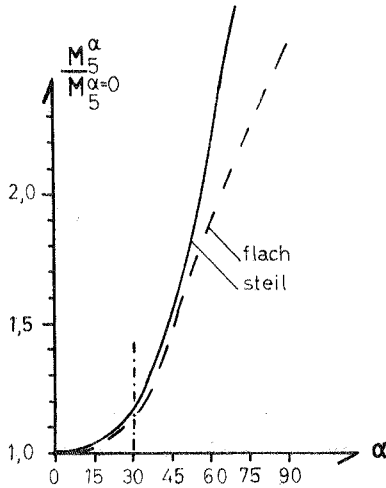


Bild 3.4o: Biegemoment M_5 im Punkt 5 (Bild 3.8) flacher und steiler Kuppel-schalen bei unterschiedlich geneigtem (α) Randträger im Verhältnis zu den Werten bei einer Randträgerneigung $\alpha = 0$ Grad, Lastfall Nr. 1, Eigengewicht.

allein eine sehr geringe Biegestörung. Die Biegemomente, die durch eine Unver-träglichkeit der Verschiebungen zwischen Randträger und Schalenrand entstehen, betragen entlang des Randes ca. 0,2 - 0,4 kN/m. Zugehörige geringe Membranzug-, -druck- und -schubkräfte sind nach einer Schalenbreite von ca. 2-4% der Seiten-länge a des Quadrates im Grundriß abgeklungen.

Bei der Lastabtragung von Eigengewichts-, Schnee- und Windlasten treten am Rand ebenfalls relativ geringe Biegestörungen auf. Die größten Biegemomente belaufen sich auf 4,0-5,0 kN/m und sind nach der gleichen Schalenbreite (2-4% von a) nahezu ganz abgebaut. Die Biegestörungen des freien Randes von nur im Auflager-bereich verdickten Schalen betragen bei den gleichen Lastfällen das Drei- bis Siebenfache.

Die mitwirkende Breite des durch einen Randträger gestützten Schalenrandes be-trägt bei diesen untersuchten, steilen Schalen 3-5%, bei flachen Schalen 5-7% der Seitenlänge des Grundrißquadrates.

Im folgenden wird das Tragverhalten niedriger und hoher Paraboloidschalen bei einer Variation der Randträgerhöhe für die Lastfälle Nr. 7 und Nr. 3 exemplarisch aufgezeigt. Die längere Seite des Randträgers verläuft dabei parallel zur Normalen des Randes ($\alpha = 0$, Bild 2.24). Der Randträger ist längs des Randes verwunden:

Größte vertikale Verschiebung w_1, w_9 in den Punkten 1 und 9

Die größten vertikalen Verschiebungen des Randes w_1 und w_9 von Paraboloidschalen gehen bei achsensymmetrischen (Lf.-Nr. 7) und antimetrischen (Lf.-Nr. 3) Lasten bereits bis auf 39-60% der Verschiebungen von Schalen ohne Randträger zurück, wenn die Randträgerhöhe die fünffache ($i = 5$) Schalendicke erreicht hat. Steigt die Randträgerhöhe auf $i = 8-9$, verringern sich die Verschiebungen des Randes bis auf 20-35% des ursprünglichen Wertes (Bild 3.41, Tab. 3.47). Ein weiteres Ansteigen der Randträgerhöhe läßt die Verformungen der ganzen Schalen nur noch wenig weiter zurückgehen.

Schnittgrößen entlang des Randes, im Randträger und im Auflagerbereich

a) achsensymmetrischer Lastfall: Nr. 7 Kombiniertes Lastfall

Das Hauptbiegemoment M_2 in Randnähe geht bei einem Höhenverhältnis des Randträgers zur Schalendicke $i = 5$ auf 39-44% zurück. Die zugehörigen Zugkräfte N_2 steigen dabei um das Zwei- bis Dreifache an. Die Spannungen σ_2 aus beiden Schnittgrößen verringern sich jedoch und nehmen bei einer größeren Randträgerhöhe ($i > 8-9$) nicht mehr maßgeblich weiter ab (Bild 3.44).

Die Biegemomente im mittleren Schalenviertel (Punkt 6) sind bei dieser Randträgerhöhe ($i = 9$) fast ganz und im Auflagerbereich (Punkt 5, Bild 3.42) auf 25-35% der Werte der unversteiften Schale abgeklungen. Die dazugehörige Normalkraft N_5 vergrößert sich dabei auf 120-134% (Bild 3.42). Die Hauptspannungen σ_5 in Punkt 5 verringern sich ab einer Randträgerhöhe $i = 8-9$ nicht mehr maßgeblich (Bild 3.44a).

Die Normalkraft N_{13} des Randträgerscheitels in Punkt 13 steigt bei zunehmender Randträgerhöhe um das Zwei- bis Dreifache an und vergrößert sich ab dem Dickenverhältnis $i = 9$ nur noch wenig. Das zugehörige Biegemoment M_{13} ist bei dieser Randträgerhöhe ($i = 9$) ungefähr 5-6mal so groß wie bei dem Randträger mit dem 'Höhe-Dicke-verhältnis' $i = 3$ (Bild 3.43). Die Spannung aus beiden Schnittgrößen σ_{13} verringert sich bei zunehmender Randträgerhöhe ab einem Dickenverhältnis $i = 9$ nicht mehr maßgeblich weiter (Bild 3.45). Die Schubspannung τ_{12} im Auflagerbereich des Randträgers, entstanden durch das Torsionselement im Träger, wird

ebenfalls ab einer größeren Randträgerhöhe ($i > 9$) nur noch wenig weiter abgebaut (Bild 3.45).

b) antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind

Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Die Hauptzugkraft N_{11} in Punkt 11 des Schalenrandes verringert sich bei $i = 9$ nur auf 80-90% des Wertes der unversteiften Schale. Das zugehörige Hauptbiegemoment M_{11} dagegen wird bis auf 10-20% des Wertes der Schale ohne Randträger abgebaut (Tab. 3.46). Die meridional gerichteten Membrankräfte (z.B. N_6 in Punkt 6), die durch eine zunehmende Randträgerhöhe kaum beeinflusst werden, vermindern sich nur auf 90-95%. Die zugehörigen Hauptbiegemomente jedoch (z.B. M_6) werden nahezu ganz abgebaut (Tab. 3.46).

Die Ergebnisse der Parameteruntersuchung sind in den Tabellen 3.46 und 3.47 zusammengefaßt.

Aus Tabelle 3.46 und 3.47 erkennt man, daß bei Paraboloidschalen (PA2) unter achsensymmetrischen Lasten die Verformungen des Schalenrandes bei einer Randträgerhöhe $i = 9$ auf 20-35%, bei Kugelschalen ($i = 10$) auf 5-25% des Wertes der nicht ausgesteiften Schale zurückgehen.

Bei Kugel- und Paraboloidschalen (PA2) werden die Biegemomente in der ganzen Schale durch einen verwundenen Randträger ($\alpha = 0$, Bild 2.24) mit einer Höhe $H = 8-12$ fache Schalendicke nahezu ganz abgebaut.

In Abhängigkeit der Belastung und der Randträgerneigung β gegenüber der Vertikalen (Bild 2.24) ergeben sich bei Kugel- und Paraboloidschalen (PA2) unterschiedliche Grenzhöhen H_{grenz} des Randträgers, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der beiden Kuppelschalen nicht mehr maßgeblich verbessert (Tab. 3.48).

Die Tragfähigkeit des Randträgers wird bei Kuppelschalen am besten genutzt, wenn die Randträgerachse z (Bild 2.24) parallel zur Normalen des Schalenrandes verläuft ($\alpha = 0$ Grad). Der Randträger ist dann jedoch verwunden.

Es wird deshalb empfohlen, den Randträger so anzubringen, daß die Neigung der Trägerachse z nicht mehr als $\alpha = \pm 30^\circ$ von der Neigung der Flächennormalen des Schalenrandes abweicht, da sonst Verformungen und Spannungen der Schalen nicht mehr wesentlich vermindert werden (Bild 3.40).

Die mitwirkende Schalenbreite beträgt bei randträgerunterstützten steilen Kuppelschalen (verwundener Randträger ($\alpha = 0$) mit der Höhe H_{grenz} , Tab. 3.46) ca. 3-5%, bei flachen Schalen ca. 5-7% der Seitenlänge des Grundrißquadrates.

Tabelle 3.49 gibt für eine Lastzusammenstellung aus Eigengewicht, Schnee und Windlast Grenzbereiche der Randträgerhöhe $H_{\text{gr,b}}$ an, bei denen in Kugel- und Paraboloidschalen die in Abschnitt 2.2 festgelegten Grenzspannungen des gewählten Stahlbetons (B35) eingehalten werden. Die Randträgerhöhen H_{grenz} der Tab. 3.46, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der Schalen nicht mehr verbessert, sind bei hohen Schalen um 30-40% und bei niedrigen Schalen bis zu 30% größer als die Höhen $H_{\text{gr,b}}$ der Randträger von Tab. 3.46. Diese Randträgerhöhen $H_{\text{gr,b}}$ können bei der o.g. Lastkombination noch um 10-20% weiter verringert werden, wenn die Auflager ca. um $u_d = 1,4-2,1$ cm bei Paraboloidschalen und um $u_d = 4-7$ cm bei Kugelschalen nach innen (Lf.-Nr. 4) verschoben werden (Bild 2.11). Durch diese Auflagerverschiebung werden die Biegemomente am Schalenrand und im Randträger, die Ringzugkräfte im Schaleninneren des in der o.g. Lastzusammenstellung enthaltenen Lastfalles Eigengewicht nahezu ganz abgebaut. Die Druckkräfte jedoch werden dabei im Randträgerscheitel um 20-30% erhöht. (Tab. 3.50, $H_{\text{gr,b,u_d}}$, vgl. Tab. 3.52 mit Tab. 3.53).

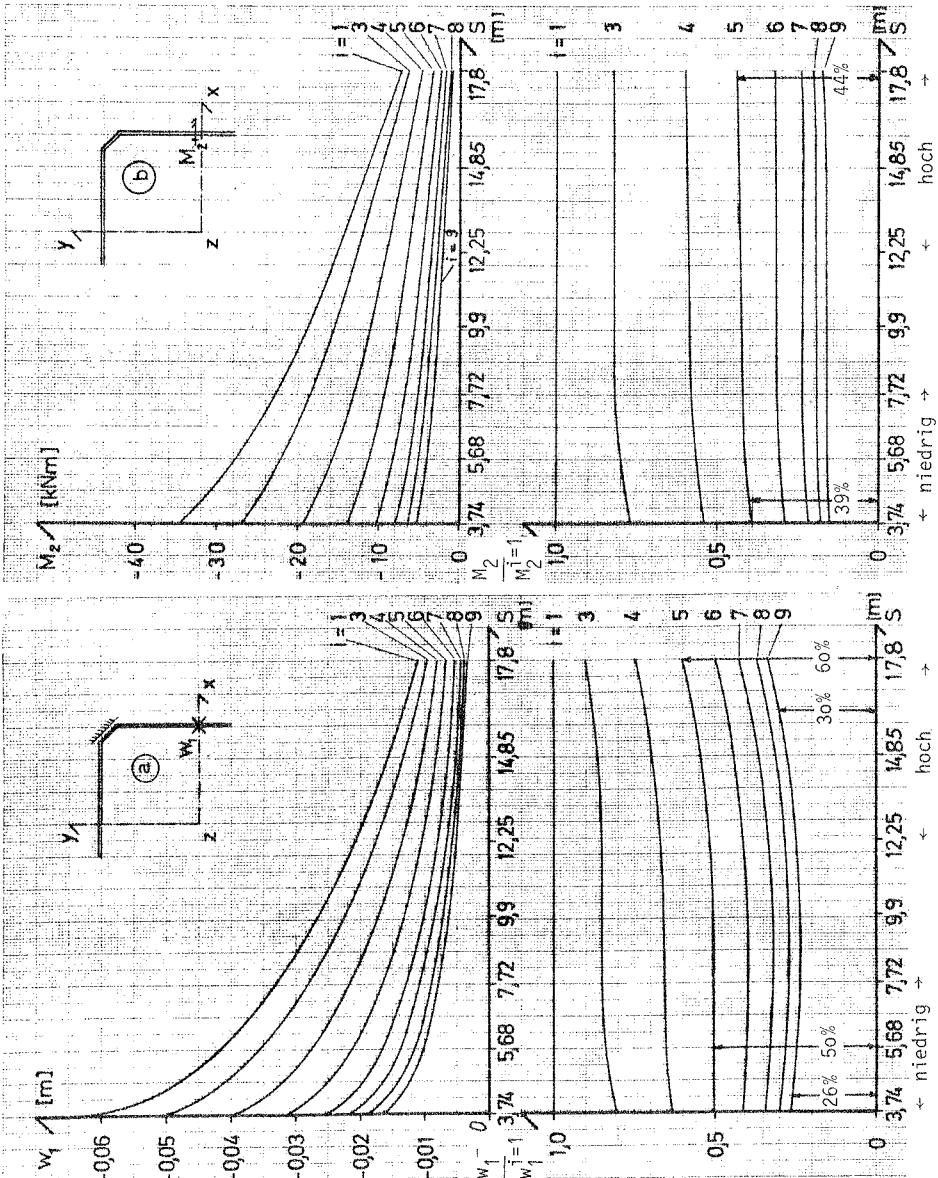


Bild 3.41: Paraboloidschale mit rechteckigem Randträger, 0,24 m ($i = 3$) \times Randträgerhöhe \times 0,72 m ($i = 9$), verwundener Randträger ($\alpha = 0$, Bild 2.24), Lagerbreite $b = 1,5$ m, Lastfall Nr. 7:

- (a) vertikale Durchbiegung w_1 in Punkt 1
- (b) Hauptbiegemoment M_2 in Punkt 2 (Bild 3.8)

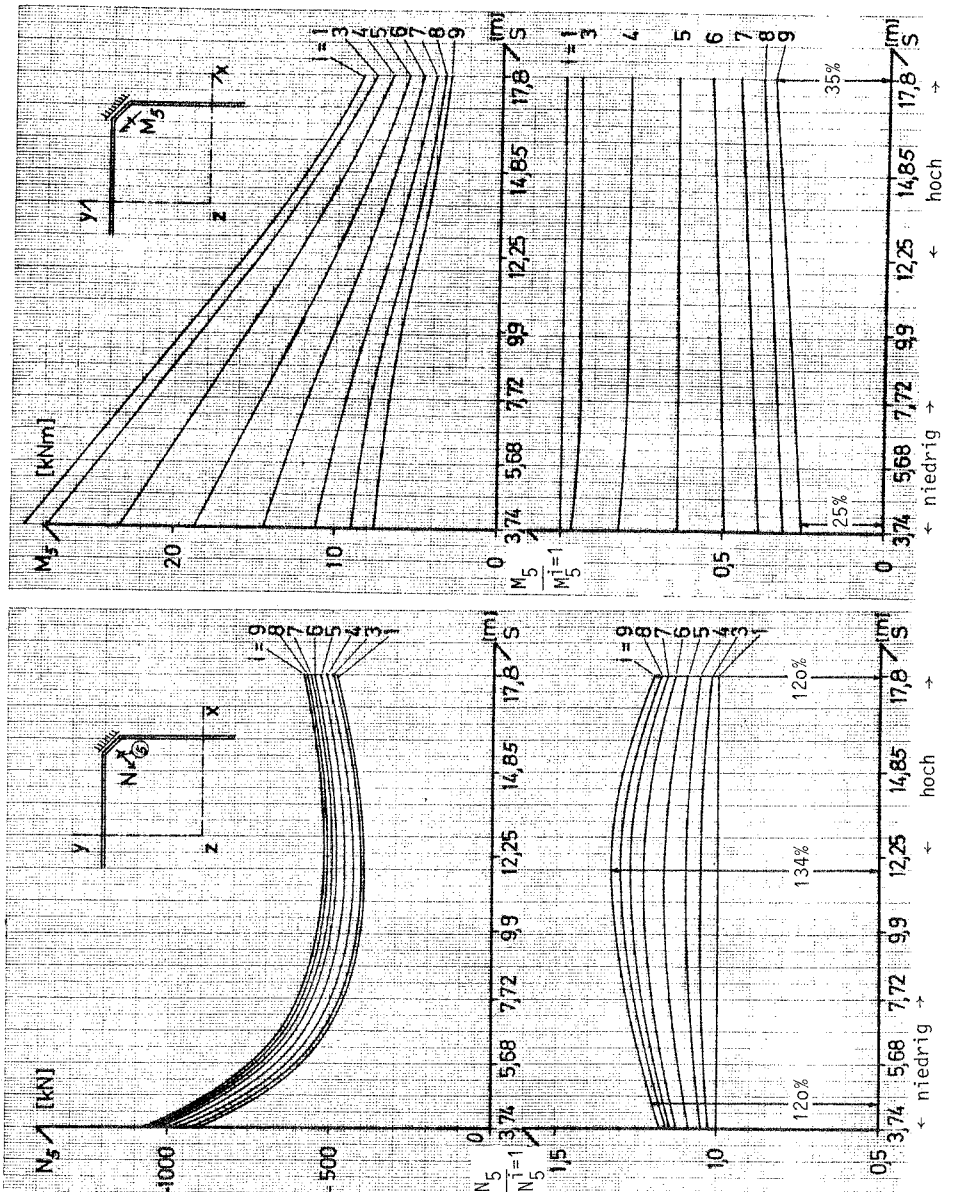


Bild 3.42: Paraboloidschale mit rechteckigem Randtrager, $0,24 \text{ m} (i = 3) \leq \text{Randtragerhohe} \leq 0,72 \text{ m} (i = 9)$, verwendeter Randtrager ($\alpha = 0$, Bild 2.24), Lagerbreite $b = 1,5 \text{ m}$, Lastfall Nr. 7, Hauptbiegemoment M_5 und Hauptnormalkraft N_5 in Punkt 5 (Bild 3.8)

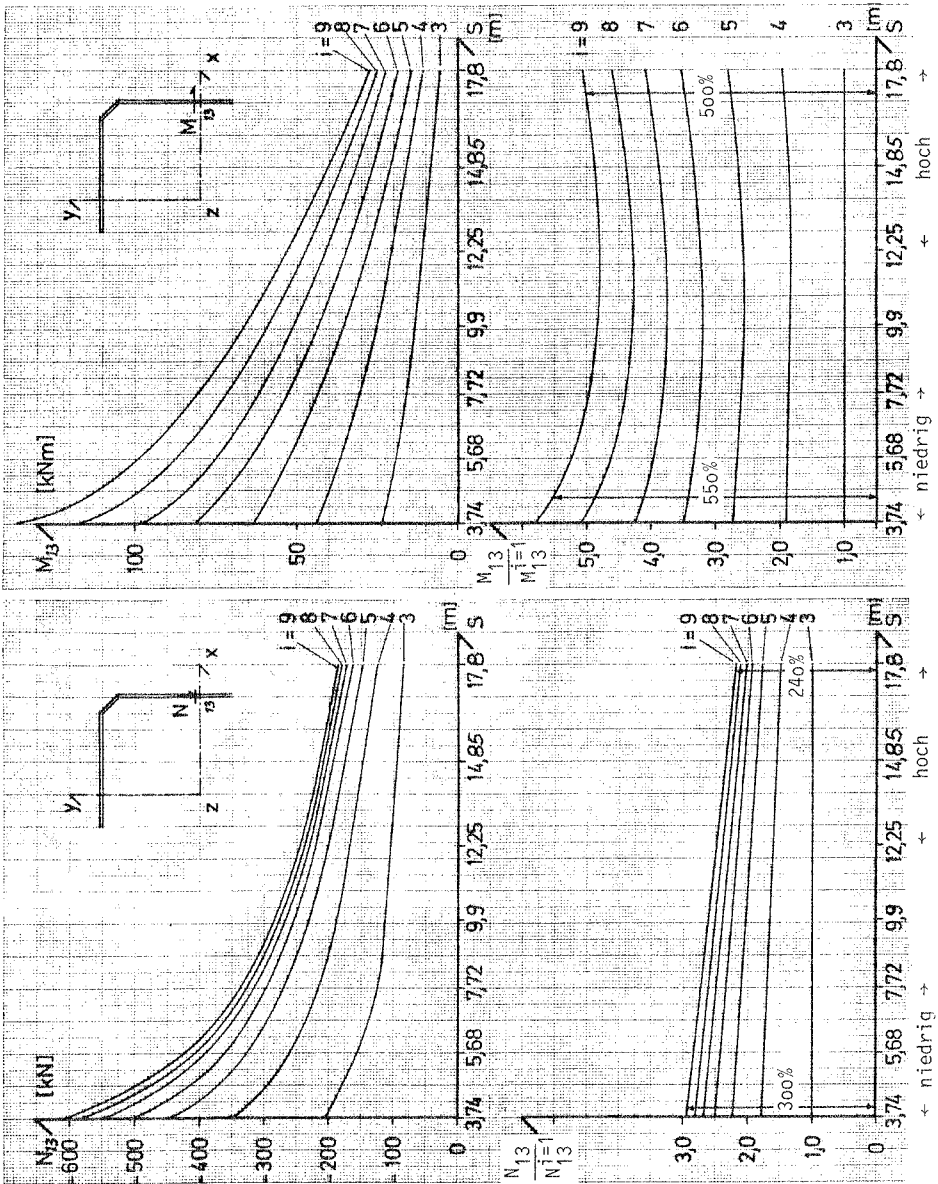


Bild 3.43: Paraboloidschale mit rechteckigem Randträger, $0,24 \text{ m } (i = 3) \leq \text{Randträgerhöhe} \leq 0,72 \text{ m } (i = 9)$, verwundener Randträger ($\alpha = 0$, Bild 2.24), Lagerbreite $b = 1,5 \text{ m}$, Lastfall Nr. 7, Normalkraft N_{13} und Biegemoment M_{13} in Punkt 13 des Randträgers (Bild 3.8)

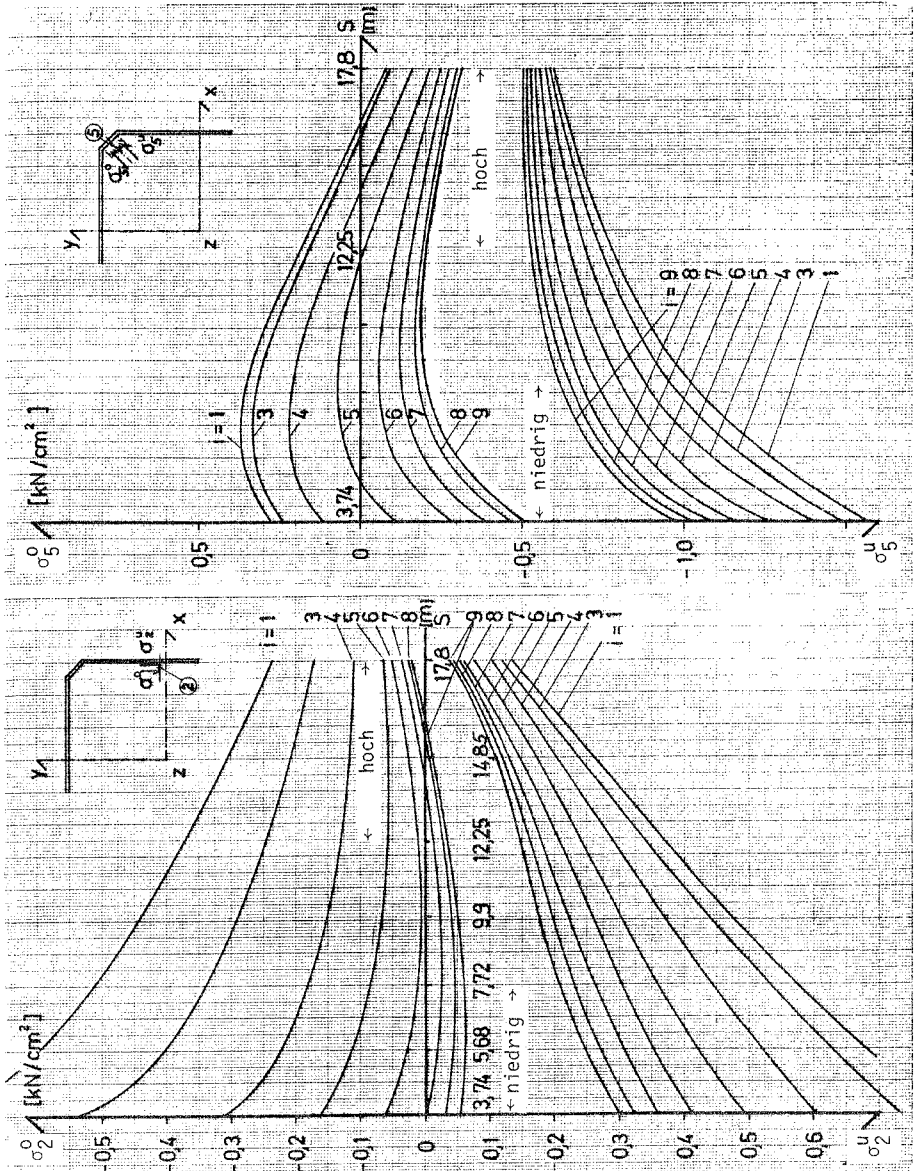


Bild 3.44: Paraboloidschale mit rechteckigem Randträger, $0,24 \text{ m } (i = 3) \leq \text{Randträgerhöhe} \leq 0,72 \text{ m } (i = 9)$, verwundener Randträger ($\alpha = 0$, Bild 2.24), Lagerbreite $b = 1,5 \text{ m}$, Lastfall Nr. 7, obere und untere Hauptspannung - σ_o^0, σ_u^0 - in Punkt 2 und Punkt 5

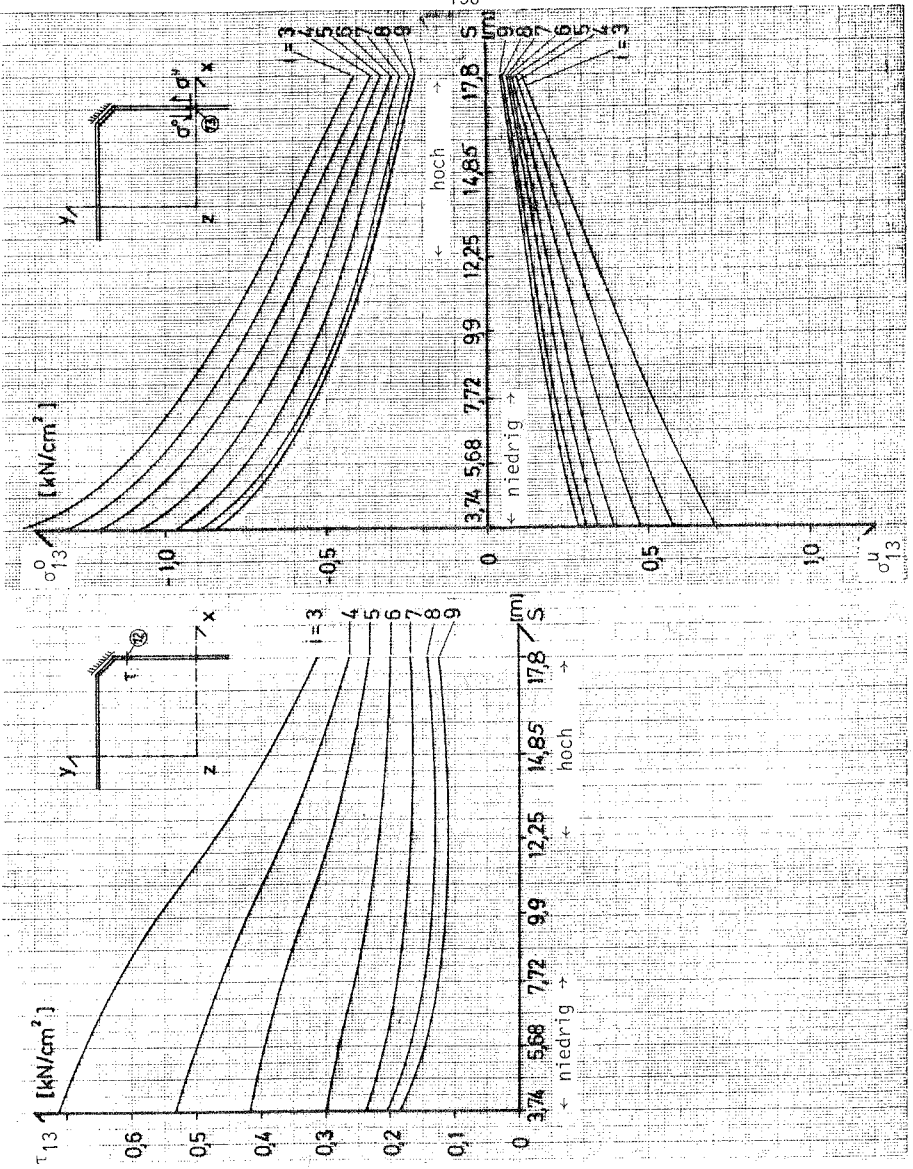


Bild 3.45: Paraboloidschale mit rechteckigem Randträger, 0,24 m ($i = 3$) \leq Randträgerhöhe \leq 0,72 m ($i = 9$), verwundener Randträger ($\alpha = 0$, Bild 2.24), Lagerbreite $b = 1,5$ m, Lastfall Nr. 7, Schubspannung τ aus der Torsionsbelastung des Randträgers in Punkt 12, obere und untere Hauptspannung - σ^0 , σ^u - des Randträgers in Punkt 13

achsensymmetr. Lastfälle: Nr.1 Eigengew., Nr.2 Schnee, Nr.6 Eigengew. u. Schnee, Nr.7 komb. Lastfall		antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee																		
		Parab.schale (PA2)				$\phi_{x,4}$	max w_g	Parab.schale (PA2)				$\phi_{x,9}$								
		niedrig	hoch	niedrig	hoch			niedrig	hoch	niedrig	hoch									
max w_1																				
i = 3	80-85%	85-90%	93-95%	90-92%		75-80%	80-85%													
i = 5	45-50%	55-60%	55-60%	50-55%		40-45%	50-55%													
i = 8	25-30%	35-40%	40-45%	35-40%		15-20%	30-35%													
i = 9	20-25%	30-35%	35-40%	30-35%		15-20%	25-30%													
σ_2					M_2			N_{11}												
i = 3	90-95%	90-95%	75-85%	85-90%		90-95%	85-90%													
i = 5	61-66%	58-67%	40-44%	45-49%		85-90%	80-95%													
i = 8	35-43%	34-42%	15-20%	20-25%		80-85%	80-90%													
i = 9	30-35%	29-36%	10-15%	15-20%		80-85%	80-90%													
N_5					M_5			N_6												
i = 3	105-110%	105-110%	90-95%	90-95%		95-98%	95-98%													
i = 5	110-115%	110-115%	60-70%	60-70%		90-95%	90-95%													
i = 8	115-130%	120-130%	30-40%	30-40%		90-95%	90-95%													
i = 9	118-132%	122-132%	25-35%	25-35%		90-95%	90-95%													

Tab. 3.46: Abbau der max. vertikalen Verschiebungen w_1 , w_g , der Verdrehungen $\phi_{x,4}$, $\phi_{x,9}$ in den Punkten 1, 4 und 9. Veränderung der Hauptnormalkräfte und zugehörigen Hauptbiegemomente in den Punkten 2, 6, 11 (Bild 3.8), Verminderung der Hauptspannung in Punkt 2 bei einer i-fachen Höhe des rechteckigen verwundenen Randträgers ($\alpha = 0$, Bild 2.24) im Vergleich zur unversteiften Schale, Lagerbreite $b = 1,5$ m.

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht,				antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und							
Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee				halbseitiger Schnee							
max w ₁	Kugelschale		φ _{x,4}	Kugelschale		max w ₉	Kugelschale		φ _{x,9}	Kugelschale	
	niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch
i = 5	35-45%	45-50%		35-47%	45-54%		40-45%	50-55%		40-45%	50-55%
i = 10	5-14%	15-25%		5-15%	20-25%		5-17%	14-25%		5-16%	13-24%
i = 11	5-13%	15-20%		5-14%	15-20%		5-16%	13-20%		5-16%	13-20%
i = 12	5-13%	15-18%		5-14%	15-20%		5-16%	12-18%		5-16%	12-18%
σ ₂			M ₂			N ₁₁			M ₁₁		
i = 5	60-66%	58-69%		38-45%	45-50%		84-92%	80-96%		40-45%	45-52%
i = 10	30-35%	35-42%		5-15%	20-25%		80-84%	80-85%		10-15%	10-20%
i = 11	29-34%	32-38%		5-14%	15-20%		79-83%	78-83%		9-14%	15-16%
i = 12	28-34%	29-36%		5-14%	14-18%		78-82%	77-82%		9-14%	5-15%
N ₅			M ₅			N ₆			M ₆		
i = 5	104-112%	104-112%		40-55%	55-60%		95-98%	95-99%		40-45%	45-50%
i = 10	115-126%	115-127%		4-15%	22-27%		90-95%	90-95%		5-12%	15-21%
i = 11	115-128%	120-130%		4-14%	14-22%		90-95%	90-95%		5-10%	12-16%
i = 12	115-130%	122-132%		4-24%	14-20%		90-95%	90-95%		5-10%	9-15%

Tab. 3.47: Abbau der max. vertikalen Verschiebungen w₁, w₉, der Verdrehungen φ_{x,4}, φ_{x,9} in den Punkten 1, 4 und 9. Veränderung der Hauptnormalkräfte und zugehörigen Hauptbiegemomente in den Punkten 2, 6, 11, Verminderung der Hauptspannung in Punkt 2 (Bild 3.8), bei einer i-fachen Höhe des rechteckigen, verwundenen Randträgers (α = 0, Bild 2.24) im Vergleich zur unversteiften Schale, Lagerbreite b = 1,5 m

Lastfälle: symmetrisch: Nr. 1, Eigengewicht, Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee, Nr. 7 kombinierter Lastfall					
antimetrisch: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee					
Neigungswinkel β des Randträgers gegenüber der Vertikalen (Bild 2.24)	Randträgerhöhe $H_{gr,ez}$	Kugelschale		Paraboloidschale (PA2)	
		niedrig	hoch	niedrig	hoch
a) $\beta = 0^\circ$	[m] i	0,80-0,88 10-11	siehe *)	0,72-0,80 9-10	siehe *)
b) $\beta = 30^\circ$	[m] i	0,96-1,12 12-14	1,28-1,46 16-18	0,80-0,88 10-11	0,80-0,88 10-11
c) $\alpha = 0^\circ$ vertikale Achse z senkrecht zum Schalenrand, verwendener Randträger	[m] i	0,72-0,80 9-10	0,88-0,96 11-12	0,64-0,72 8-9	0,64-0,72 8-9

Tab. 3.48: Grenzbereiche der Randträgerhöhe $H_{gr,ez}$ von Kuppelschalen, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der Schalen nicht mehr maßgeblich weiter verbessert, Lagerbreite $b = 1,5 \text{ m}$

Lastfall: Lastkombination aus Eigengewicht (Nr. 1) mit Wind u. halbseitigem Schnee (Nr. 5)					
verwendener Randträger, vertikale Achse steht senkrecht zum Schalenrand ($\alpha = 0$, Bild 2.24)	Randträgerhöhe $H_{gr,b}$	Kugelschale		Paraboloidschale (PA2)	
		niedrig	hoch	niedrig	hoch
	[m] i	0,72-0,80 9-10	0,88-0,88 10-11	0,48-0,56 6-7	0,32-0,40 4-5

Tab. 3.49: Grenzbereiche der Randträgerhöhe $H_{gr,b}$ von Kuppelschalen, bei denen für die o.g. Lastkombination die in Abschnitt 2.2 festgelegten Betonfestigkeiten eingehalten werden (vgl. Tab. 3.51, 3.52)

Lastfall: Lastkombination Eigengewicht Nr. 1 und Wind mit halbseitigem Schnee (Nr.5) wird überlagert mit Lastfall Nr.4 horizontale Stützenverschiebung nach innen, u_d					
verwendener Randträger, vertikale Achse steht senkrecht zum Schalenrand ($\alpha = 0$, Bild 2.24)	Randträgerhöhe H_{gr,b,u_d}	Kugelschale		Paraboloidschale (PA2)	
		niedrig	hoch	niedrig	hoch
	[m] i	$u_d = 4-5 \text{ cm}$ 0,56-0,64 7-8	$u_d = 6-7 \text{ cm}$ 0,64-0,72 8-9	1,3-1,6 cm 0,40-0,48 5-6	1,8-2,1 cm 0,24-0,32 3-4

Tab. 3.50: Grenzbereiche der Randträgerhöhe H_{gr,b,u_d} von Kugelschalen, bei denen für die o.g. Lastkombination die in Abschnitt 2.2 festgelegten Betonfestigkeiten eingehalten werden (vgl. Tab. 3.51)

*) Da die Neigung α zwischen Trägerachse z und der Normalen n des Randes wesentlich größer als 30° ist, wird der Schalenrand durch den Randträger kaum entlastet.

hohe Kugelschale Öffnungswinkel $\phi = 80^\circ$	M kNm/m	N kN/m	b / d / h cm/cm/cm	H_i ¹⁾	k_h vorh? $k_h > k_h$	$k_{s, \text{grenz}}$	Fe cm ²	eingehaltene Materialgrenzen des Abschnittes 2.2 Betondruckfestigkeit wird eingehalten
Randträger ~ Punkt 13	495	-655	30/84/80	10,5	1,61 ~ 1,65	0,51	20,13 18Ø12 unten	Ribbreite: 'gering'
Schaleninnere ~ Punkt 6 in Umfangrichtung	2,5	+ 63	100/ 8/ 5		2,83 > 1,65	0,45	5,43 7Ø10/m	σ_{HN} vorh = 79 N/cm ² ≤ σ_{HN} grenz = 173 N/cm ² Ribbreite: 'sehr gering'
niedrige Kugelschale Öffnungswinkel $\phi = 30^\circ$								
Randträger ~ Punkt 13	187	-1211	30/76/72	9,5	1,61 ~ 1,65	0,51	- 8,04 konstruktiv 2Ø12 unten	Ribbreite: 'sehr gering'
Schaleninnere ~ Punkt 6 in Umfangrichtung	2,9	137	100/ 8/ 5		2,90 > 1,65	0,45	8,39 11Ø10/m	σ_{HN} vorh = 171,2 N/cm ² ≤ σ_{HN} grenz = 173 N/cm ² Ribbreite: 'gering'

Tab. 3.51: Bemessung des Randträgerscheitels in Punkt 13 und ungefähr in Punkt 6 (Bild 3.8) im Schaleninneren einer hohen und einer niedrigen Kugelschale, Lagerbreite b = 1,5 m, Lastkombination: Eigengewicht (Nr. 1) und Wind mit halbeitigem Schnee (Nr. 5).

1) H_i = i-faches Verhältnis aus Randträgerhöhe zur Schalendicke

Hohe Paraboloid- schale	M	N	b / d / h	H _i ¹⁾	k_h ^{vorh} ≥ k_h ^{grenz}	k _s	Fe	eingehaltene Materialgrenzen des Abschnittes 2.2 Betondruckfestigkeit wird eingehalten
Scheitelhöhe S = 14,85 m								
~ Punkt 13 des Randträgers	65,0	-145	30/32/28	4	1,69 ≥ 1,65	5,0	8,67 6ø14 unten	Riöbreite: 'sehr gering'
Schaleninnere ~ Punkt 6 in Umfangrichtung	3,4	57	100/ 8/50		2,35 ≥ 1,65	4,6	6,54 9ø10 pro Meter	$\sigma_{HN}^{vorh} = 71,3 \text{ N/cm}^2 \leq$ $\sigma_{HN}^{grenz} = 173 \text{ N/cm}^2$ Riöbreite: 'sehr gering'
Niedrige Paraboloid-								
schale								
Scheitelhöhe S = 5,68 m								
~ Punkt 13 des Randträgers	157	-445	30/56/52	Z	1,75 ≥ 1,65	4,95	6,57 6ø12 unten	Riöbreite: 'sehr gering'
Schaleninnere ~ Punkt 6 in Umfangrichtung	3,8	112,5	100/ 8/ 5		2,34 ≥ 1,65	4,6	8,9 12ø10 / m	$\sigma_{HN}^{vorh} = 153,1 \text{ N/cm}^2 \leq$ $\sigma_{HN}^{grenz} = 173 \text{ N/cm}^2$ Riöbreite: 'sehr gering'

Tab. 3.52: Bemessung des Randträgerscheitels in Punkt 13 und ungefähr in Punkt 6 (Bild 3.8) im Schaleninneren einer hohen und einer niedrigen Paraboloidschale, Lagerbreite b = 1,5 m, Lastkombination: Eigengewicht (Nr. 1) und Wind mit halbseitigem Schnee (Nr. 5)

1) H_i = i-faches Verhältnis aus Randträgerhöhe zur Schalendicke

hohe Paraboloid- schale (PA2) Scheitelhöhe S = 14,85 m	M kNm/m	N kN/m	b / d / h cm/cm/cm	H_i 1)	u_d cm	k_h vorh k_h ? k_h grenz	k_s	Fe cm ²	eingehaltene Materialgrenzen des Abschnittes 2.2 Betondruckfestigkeit wird eingehalten
~ Punkt 13 des Randträgers	49,0	-173,0	30/28/24	3,5	-1,8	1,62 ~ 1,65	5,1	6,88 6Ø12 unten	Riöbreite: 'sehr gering'
~ Punkt 6 des Schaleninneren in Umfangrichtung	1,5	26,0	100/ 8/ 5		-1,8	3,15 \geq 1,65	4,45	3,32 7Ø8/m	$\sigma_{HN}^{vorh} = 32,5 \text{ N/cm}^2 \leq$ $\sigma_{HN}^{grenz} = 173 \text{ N/cm}^2$ Riöbreite: 'sehr gering'
niedrige Paraboloid- schale (PA2) Scheitelhöhe S = 5,68 m									
~ Punkt 13 des Randträgers	106,0	-515,0	30/48/44	6	-1,4	1,67 ~ 1,65	5,05	2,53 4Ø10 unten	Riöbreite: 'sehr gering'
~ Punkt 6 des Schaleninneren in Umfangrichtung	1,8	44,0	100/ 8/ 5		-1,4	2,82 > 1,65	4,5	4,66 10Ø8/m	$\sigma_{HN}^{vorh} = 55 \text{ N/cm}^2 \leq$ $\sigma_{HN}^{grenz} = 173 \text{ N/cm}^2$ Riöbreite: 'sehr gering'

Tab. 3.53: Bemessung des Randträgerscheitels in Punkt 13 und ungefähr in Punkt 6 (Bild 3.8) im Schaleninneren einer hohen und einer niedrigen Paraboloidschale (PA2), Lagerbreite b = 1,5 m, Lastzusammenstellung: Eigengewicht (Nr. 1) und Wind mit halbseitigem Schnee (Nr. 5) und horizontale Stützenverschiebung u_d nach innen (Nr. 4)

1) H_i = i-faches Verhältnis aus Randträgerhöhe zur Schalendicke

3.8.3 Stützung des Schalenrandes durch Fassadenstützen

Parametervariationen:

Mittelflächen:	Kugel-, Paraboloidschale
Scheitelhöhe:	$3,74 \text{ m} \leq S \leq 17,8 \text{ m}$
Lagerbedingungen:	(Abschnitt 2.4.5, Bild 2.26, 2.27)
Schalendicke:	(Abschnitt 2.4.5, Bild 2.26, 2.27)
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 16$
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee Nr. 6 Eigengewicht und Schnee
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Wenn die Kuppelschalen mit einem Fassadenabschluß versehen werden, können die Fassadenstützen den Randträger ersetzen; es genügen geringe Randverdickungen.

Stützenabstand der Fassade von z.B. 5 m: Eine zwei- bis dreifache Schalendicke entlang des Randes genügt bei niedrigen und hohen Paraboloid- (PA2) und Kugelschalen, um Eigengewicht-, Schnee- und Windlasten abzutragen. Die Stützmomente über den Pendelstützen sind in diesem Beispiel bereits nach 3 Metern Entfernung von den Stützen nahezu abgeklungen. Die Biegemomente im Auflagerbereich sind gering.

3.9 Versteifung der Kugelschale entlang der Diagonalen durch ein stufenweises Ansteigen der Schalendicke

Parametervariationen:

Mittelfläche:	Kugelschale (Abschnitt 2.4.1)
Öffnungswinkel:	$20^\circ \leq \phi \leq 80^\circ$
Lagerbreite:	$b = 1,5 \text{ m}$
Schalendicke:	Verdickung entlang der Diagonalen (Abschnitt 2.4.4e), $1 \leq i \leq 6$
Gitterliniendichte:	$n_x = n_y = 16$
behandelte Lastfälle:	
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee Nr. 6 Eigengewicht und Schnee
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Tab. 3.54 zusammengefaßt.

Größte vertikale Verschiebung und Verdrehung des freien Randes

Die größten vertikalen Verschiebungen des freien Schalenrandes z.B. in Punkt 1 und 9 (Bild 3.8) werden durch eine sechsfache Schalendicke ($i = 6$) entlang der Diagonalen nur unwesentlich auf 79-88% der Werte der nur im Auflagerbereich ($i = 5$) versteiften Kugelschale verringert. Auch eine größere Versteifung der Diagonalen läßt die Verformungen der Ränder nicht mehr maßgeblich weiter zurückgehen (Tab. 3.54).

Schnittgrößen im Schaleninneren und entlang des freien Randes

Die Biegemomente M_2 am freien Schalenrand und die zugehörigen Membranzugkräfte N_2 werden für die o.g. Lastfälle durch eine Versteifung der Diagonalen ($i = 6$) nur auf 83-93% der ursprünglichen Werte abgebaut (Tab. 3.54).

Die Meridiankräfte N_6 und die Ringzugkräfte im verdickten Schaleninneren entlang der Diagonalen erhöhen sich um das Drei- bis Fünffache der Werte der nur im Auflagerbereich versteiften Kugelschale. Diagonalbereiche der Schale, die vor der Versteifung momentenfrei waren, werden jetzt durch erhebliche Biegemomente belastet.

Die zugehörigen Hauptspannungen σ_6 im Punkt 6 vergrößern sich ($i = 5$) auf 220-330% und erhöhen sich bei einer weiteren Verdickung ($i = 6$) noch auf 240-360% (Tab. 3.54).

Der Schalenrand von Kugelschalen wird durch eine Verdickung entlang der Diagonalen ($i = 6$) nur unwesentlich 'entlastet', da Verformungen entlang des Randes nur auf 79-92% und Schnittgrößen nur auf 86-94% einer nur im Auflagerbereich verdickten Kugelschale ($i = 5$) abgebaut werden (Tab. 3.54).

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht, Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee				antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und halbsseitiger Schnee							
max w ₁	Kugelschale		φ _{x,7}	Kugelschale		max w _g	Kugelschale		φ _{x,9}	Kugelschale	
	niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch
i = 5	85-90%	80-85%		85-90%	80-85%		88-94%	85-90%		88-95%	86-91%
i = 6	83-88%	79-82%		84-88%	79-83%		86-92%	84-89%		87-94%	85-90%
N ₂			M ₂			N ₁₁			M ₁₁		
i =	90-95%	85-90%		90-95%	85-90%		92-96%	90-94%		91-95%	89-93%
i = 6	88-93%	83-87%		89-93%	83-88%		90-94%	87-91%		90-94%	87-91%
N ₆			σ ₆			N ₆			σ ₆		
i = 5	430-480%	480-550%		250-310%	280-330%		300-350%	320-370%		220-260%	250-290%
i = 6	450-460%	420-480%		280-340%	310-360%		330-380%	360-410%		240-280%	270-320%

Tab. 3.54: Verminderung der max. vertikalen Durchbiegungen w₁, w_g, der Verdrehung φ_{x,7}, φ_{x,9} in den Punkten 1, 7 und 9, der Hauptnormalkräfte N und zugehörigen Biegemomente M, Hauptspannungen aus M und N in den Punkten 2, 6, 11 (Bild 3.8), wenn die Schalendicke der Kugelschale mit einem 5fach verdicktem Auflagerbereich (Bild 2.22) entlang der Diagonalen auf das i-fache erhöht wird (Bild 2.25), Lagerbreite b = 1,5 m

3.1o Versteifung der Kugelschale entlang der Diagonalen durch ein stufenweises Ansteigen der Schalendicke und am Schalenrand durch einen rechteckigen Randträger

Parametervariationen:

Mittelfläche:	Kugelschale (Abschnitt 2.4.1)
Öffnungswinkel:	$20^\circ \leq \phi \leq 80^\circ$
Lagerbreite:	$b = 1,5 \text{ m}$
Schalendicke:	Verdickung entlang der Diagonalen (Abschnitt 2.4.4d) $1 \leq i \leq 6$
Randträger:	Breite $b_R = 0,3 \text{ m}$, Höhe $H = 0,8 \text{ m}$ Vertikale Achse steht senkrecht zum Schalenrand $\alpha = 0^\circ$ (Abschnitt 2.4.4d, Bild 2.24, 2.25)
Gitterliniendichte: behandelte Lastfälle:	$n_x = n_y = 16$
a) achsensymmetrisch:	Nr. 1 Eigengewicht Nr. 2 Schnee Nr. 6 Eigengewicht und Schnee
b) antimetrisch:	Nr. 3 Wind Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Die Ergebnisse der Untersuchung sind in Tab. 3.55 zusammengefaßt.

GröÙte vertikale Verschiebung und Verdrehung des Randes

Die größten vertikalen Verschiebungen und die Verdrehungen des Schalenrandes in Punkt 1 und 9 (Bild 3.8) werden durch den Randträger auf 3-13% des Wertes der nur im Auflagerbereich verdickten ($i = 5$) Kugelschale verringert, nahezu unabhängig davon ob die Schalendicke entlang der Diagonalen auf $i = 3$ oder $i = 6$ angewachsen ist (Tab. 3.55).

SchnittgröÙen im Schaleninneren und entlang des Randes

Die Biegemomente M_2 am Schalenrand und die zugehörigen Membranzugkräfte N_2 werden durch die zusätzliche Versteifung des Randträgers auf 10-25% der nur im Auflagerbereich verdickten Kugelschale ($i = 5$) verringert. Diese Verminderung der SchnittgröÙen in Punkt 2 geschieht fast unabhängig von der Schalendicke entlang der Diagonalen (Tab. 3.55). Durch eine Schalendicke $i = 5$ entlang der

Diagonalen werden in Punkt 6 (mittleres Schalenviertel) die Druckkräfte auf 200-400% erhöht, die Spannungen σ_6 jedoch, im Gegensatz zu Abschnitt 3.9, auf 30-55% verringert, da die zugehörigen Biegemomente sich nur geringfügig erhöhen. Eine weitere Verdickung der Schale ($i = 6$) vermindert diese Spannungen σ_6 nicht mehr maßgeblich (Tab. 3.54, 3.55).

Vergleicht man das Tragverhalten von Kugelschalen, die nur entlang der Diagonalen versteift worden sind (Abschnitt 3.9) mit Schalen, die zusätzlich zur Diagonalversteifung entlang des Randes durch Randträger gestützt werden (Abschnitt 3.10), ergeben sich folgende Ergebnisse:

Der Schalenrand wird durch eine Versteifung der Schale entlang der Diagonalen (sechsfache Schalendicke, $i = 6$) ungenügend entlastet, da seine Verformungen, Membrankräfte und Biegemomente nur auf 79-94% des ursprünglichen Wertes der im Auflagerbereich versteiften Kugelschale ($i = 6$) zurückgehen (Tab. 3.54).

Erst ein schmaler, hoher Randträger (Bild 2.25) z.B. mit einer Höhe $H = 0,80$ m ($i = 10$) verbessert das Tragverhalten der Schalen entscheidend (Tab. 3.55). Selbst der versteifte Diagonalbereich der Schalen wird durch den Randträger so entlastet, daß nur geringe Biegemomente entstehen.

Auf eine Verdickung entlang der Diagonalen kann verzichtet werden, wenn zur Aussteifung der Schalen z.B. Randträger mit den in Tab. 3.48 angegebenen Höhen verwendet werden (z.B. $i = 9-12$) oder die Schalendicke entlang des Randes stufenförmig auf die in Tab. 3.36 angegebenen Werte (z.B. $i = 3-5$) anwächst.

Das Tragverhalten der Mainzer Schale (Bild 1.3, [1.10]) wird durch ihren schmalen hohen Randträger entscheidend verbessert, da er bezüglich seiner horizontalen Trägerachse eine große Biegesteifigkeit besitzt. Da die längere Seite des Randträgers ungefähr normal zum Schalenrand angeordnet ist, wird der Randträger zur Unterstützung des Schalenrandes am wirkungsvollsten genutzt (vgl. Abschnitt 3.8.2).

achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1 Eigengewicht, Nr. 2 Schnee, Nr. 6 Eigengewicht und Schnee				antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind, Nr. 5 Wind und Nr. 6 halbeitiger Schnee							
max w_1	Kugelschale		$\phi_{x,7}$	Kugelschale		max w_g	Kugelschale		$\phi_{x,9}$	Kugelschale	
	niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch		niedrig	hoch
i = 5	4-6%	6-12%		4-5%	4-9%		4-8%	10-15%		4-8%	6-11%
i = 6	3-5%	5-10%		3-4%	4-8%		3-8%	8-13%		3-7%	5-10%
σ_2			M_2			σ_{11}			M_{11}		
i = 5	12-17%	12-17%		8-13%	13-18%		6-17%	15-25%		6-12%	12-17%
i = 6	10-15%	15-25%		5-10%	10-15%		3-14%	13-23%		4-10%	10-15%
N_6			σ_6			N_6			σ_6		
i = 5	330-350%	350-400%		40-45%	45-55%		200-250%	230-280%		30-35%	35-43%
i = 6	320-340%	340-380%		35-40%	39-44%		220-270%	260-310%		30-35%	35-40%

Tab. 3.55: Verminderung der maximalen vertikalen Durchbiegung w_1 , w_g , der Verdrehung $\phi_{x,7}$, $\phi_{x,9}$ in den Punkten 1, 7 und 9, der Hauptnormalkräfte N und zugehörigen Biegemomente M , Hauptspannungen aus M und N in den Punkten 2, 6, 11 (Bild 3.8), wenn die Schalendicke der Kugelschale mit einem 5-fach verdicktem Auflagerbereich entlang der Diagonalen auf das i -fache erhöht wird, zusätzliche Stützung des Schalenrandes durch einen verwendeten ($\alpha = 0$, Bild 2.24) rechteckigen Randträger mit einer Höhe $H = 0,8$ m ($i = 10$), Lagerbreite $b = 1,5$ m

4. TRAGVERHALTEN HORIZONTAL UNVERSCHIEBLICH, PUNKTFÖRMIG GELAGERTER ACHSEN-SYMMETRISCHER MEMBRANSCHALEN ÜBER QUADRATISCHEM GRUNDRISS

4.1 Einleitung und verwendete Bezeichnungen

Das zentrale Problem des Schalenbaus, die Wahl der richtigen Form, wurde durch die Anwendung von Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen für die untersuchten Belastungen und Lagerungsbedingungen nur näherungsweise erfüllt.

In Abschnitt 3 wurde gezeigt, daß zusätzliche Konstruktionselemente wie

- Verbreiterung der 'punktförmigen' Auflager
- Neigungsänderung der Schalenmittelfläche in Auflagernähe
- Versteifung des Auflagerbereiches durch Rippen oder größere Schalendicke
- Versteifung des Randes durch eine erhöhte Schalendicke oder Randträger
- Vorspannen des Schalenrandes, z.B. durch horizontales Verschieben der Lager nach innen

benötigt werden, um die großen Biegemomente und Membranzugspannungen in den untersuchten Kuppelschalen zu verringern.

In diesem Abschnitt soll eine Möglichkeit aufgezeigt werden, mit der es gelingt Schalen zu finden, die sich unter den Lasten Eigengewicht, Schnee und Wind bei einer 'punktförmigen' Lagerung in den Ecken des Quadrates weniger verformen als Kugel-, Ellipsoid- oder Paraboloidschalen. Diese Schalen tragen o.g. Flächenlasten überwiegend durch geringe Druckkräfte und unerhebliche Biegemomente am freien Rand ab.

Verzeichnis der Abkürzungen zu den Abschnitten 4.2 - 4.5

Geometrie

a		halbe Seitenlänge des Quadrates in der x, y-Ebene (Bild 4.1, 4.2)
$\xi = x/a$	}	normierte x, y-Koordinaten
$\eta = y/a$		
$z = f(x,y)$		z-Koordinate der Schalenmittelfläche als Funktion der Grundrißkoordinaten
$z_x = \partial z / \partial x$	}	Ableitungen der z-Koordinaten
$z_{xx} = \partial^2 z / \partial x^2$		
$z_y = \partial z / \partial y$		
$z_{yy} = \partial^2 z / \partial y^2$		
$z_{xy} = \partial^2 z / \partial x \partial y$		

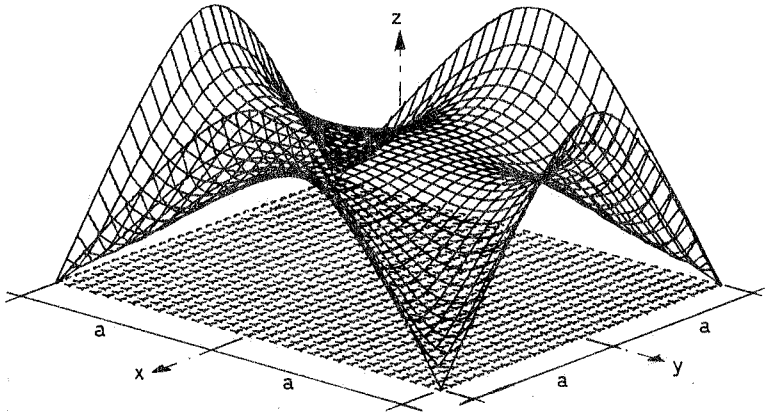


Bild 4.1: Punktgelagerte Membran für einen zur x - und y -Achse symmetrischen Lastfall

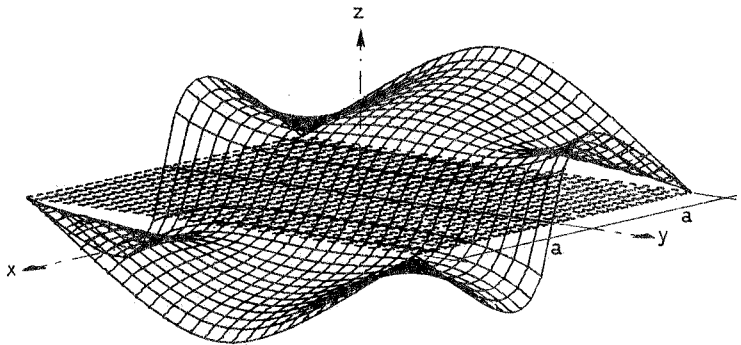


Bild 4.2: Punktgelagerte Membran für einen zur x -Achse symmetrischen und zur y -Achse antimetrischen Lastfall

Spannungsfunktion

$$F = F(x,y)$$

$$F_x = \partial F / \partial x$$

$$F_{xx} = \partial^2 F / \partial x^2$$

$$F_y = \partial F / \partial y$$

$$F_{yy} = \partial^2 F / \partial y^2$$

$$F_{xy} = \partial^2 F / \partial x \partial y$$

Spannungsfunktion

Ableitungen der Spannungsfunktion

Statische Größen

$$\bar{N}_x$$

$$\bar{N}_y$$

$$\bar{N}_{xy}$$

Projektionen der Membrankräfte in der x-y-Ebene
(Bild 4.3)

$$\bar{p}_z = \bar{p}_z(x,y)$$

Auf die Einheit der Grundrißfläche in der x-y-Ebene bezogene, veränderliche, vertikale Flächenlast

$$p$$

Auf die Einheit der Grundrißfläche in der x-y-Ebene bezogene, konstante, vertikale Flächenlast

Vektoren, Matrizen

$$\bar{z}_{i,1}$$

Lösungsvektoren der z-Ordinaten

$$\bar{p}_{i,1}$$

Lastvektor einer konstanten, vertikalen Flächenlast

$$\bar{b}_{i,1}$$

Lösungsvektor der Ansatzkonstanten

$$\bar{a}_{m,m}$$

quadratische Koeffizientenmatrix

$$\bar{a}_{i,j}$$

rechteckige Koeffizientenmatrix

$$\bar{a}_{j,i}^T$$

transformierte, rechteckige Koeffizientenmatrix einer Gauß'schen Transformation

Zu Abschnitt 4.6

Geometrie

y	$= f(x)$	Funktion einer ebenen Kurve
y_x	$= \partial y / \partial x$	} Ableitungen einer ebenen Kurve
y_{xx}	$= \partial^2 y / \partial x^2$	
R, R_0		Krümmungsradius der Kurve $y = f(x)$
K		Krümmung der Kurve $y = f(x)$

Kinematische Größen

ϵ	große Dehnungen einer zweidimensionalen Membran
------------	---

Statische Größen

N, N_0 [kN]	Normalkräfte
dN	differentieller Zuwachs der Normalkraft
p_r [kN/m]	radial gerichtete Linienlast

Material- und Querschnittswerte

E [kN/m ²]	Elastizitätsmodul eines isotropen Materials
ν [1]	Querdehnzahl des o.g. Materials
t [m]	Membrandicke
F [m ²]	Querschnittsfläche

4.2 Angewandte Methode

4.2.1 Einführung

Csonka [4.4 - 4.7] beschreibt die Formen punktförmig gelagerter Schalen, die eine gleichmäßig verteilte vertikale Last (z.B. Schneelast) überwiegend durch Membrankräfte abtragen. Als Ausgangspunkt dient ihm die Pucher'sche Differentialgleichung (1):

$$z_{xx} F_{yy} - 2z_{xy} F_{xy} + z_{yy} F_{xx} + \bar{p}_z = 0 \quad (1)$$

Die Pucher'sche Differentialgleichung [2.7] entsteht aus der Gleichgewichtsbeziehung zwischen Komponenten einer Flächenlast in Richtung der drei Achsen x , y , z und den Projektionen der Schnittkräfte am Flächenelement nach diesen drei Achsrichtungen. Das Element der zu untersuchenden Fläche

$$z = f(x,y) \quad (2)$$

ist auf das feste Koordinatensystem x , y , z bezogen und wird so gewählt, daß es sich in der Grundrißebene x , y als Rechteck abbildet.

Mit den Ableitungen der Spannungsfunktion F nach der x - und y -Richtung

$$F = F(x,y) \quad (3)$$

beschreibt die Differentialgleichung den Spannungszustand der Fläche $z=f(x,y)$ unter den Komponenten \bar{p}_z einer bestimmten Flächenlast

$$\bar{p}_z = \bar{p}_z(x,y) \quad (4)$$

Zwischen den Ableitungen der Spannungsfunktion und den Projektionen der Schnittkräfte des Flächenelementes in die x - y -Ebene bestehen folgende Beziehungen:

$$N_x = F_{yy} \quad , \quad N_y = F_{xx} \quad , \quad N_{xy} = F_{xy} \quad (5)$$

Die Pucher'sche Differentialgleichung wurde bisher für bestimmte Belastungszustände (z.B. konstante, vertikale Flächenlast) doppelt gekrümmter Flächen (z.B. membrangerecht gelagerte Rotationsparaboloide) integriert, um die Spannungsverläufe in den Schalen zu ermitteln. Die Differentialgleichung gilt für alle Schalenformen, deren Mittelflächen unter endlichen Winkeln ϕ und ψ geneigt sind (Bild 4.3). Das erste Glied in (1)

$$F_{yy} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = F_{yy} \frac{\partial}{\partial x} (\tan\phi) \quad (5a)$$

ist die Änderung der Vertikalkomponente der Längskraft in der x -Richtung infolge der Winkeländerung mit x . Analog können auch die anderen Glieder gedeutet werden. Die Summe der Vertikalkomponenten der Schnittkräfte steht dann im Gleichgewicht mit der auf das Element wirkenden äußeren vertikalen Belastung \bar{p}_z [2.7].

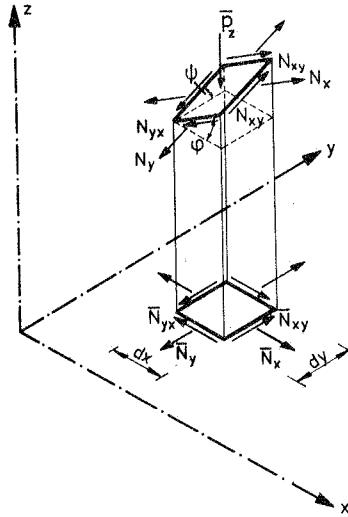


Bild 4.3: Komponenten der Membrankräfte und ihre Projektion im Grundriß

Korda [4.12] schlug vor, eine Spannungsfunktion F , die die Randbedingungen befriedigt, im voraus zu bestimmen und für eine Belastung oder eine Lastgruppe die Form z der Schale durch Integration der Differentialgleichung zu gewinnen. Spannungsfunktionen $F(x,y)$ vom Typ

$$F(x,y) = K \frac{g(x,y)}{C g(x,y) + h(x,y)} \quad (6)$$

eignen sich dafür am besten [4.7] .

Der Faktor K ist ein Proportionalitätsfaktor. Die Bedeutung des Faktors C wird später angegeben.

Die Spannungsfunktion und die Schale erfüllen die gleichen Symmetriebedingungen. Außerdem müssen die Randbedingungen (7a-7d) und (8a,b) eingehalten werden. Es gibt unendlich viele Spannungsfunktionen (6) die diese Randbedingungen erfüllen.

4.2.2 Randbedingungen der Spannungsfunktion für randträgerlose Schalen

Entlang des Randes $x = a$ (Bild 4.1)

$$(F_{yy})_{x=a} = 0 \quad (7a)$$

$$(F_{xy})_{x=a} = 0 \quad (7b)$$

Für den Rand $y=a$ gelten die entsprechenden Beziehungen

$$(F_{xx})_{y=a} = 0 \quad (7c)$$

$$(F_{xy})_{y=a} = 0 \quad (7d)$$

Die Randbedingungen (7a,b) werden erfüllt für

$$(F)_{x=a} = 0 \quad \text{und} \quad (F_x)_{x=a} = \text{konstant} \quad (8a,b)$$

Am Auflager der Schale, $x=a, y=a$ sollte die Funktion F wegen der auftretenden Einzelkräfte singulär sein. Die Membrantheorie ist dann durch die singuläre Spannungsfunktion in den Lagerpunkten verletzt. In der für eine bestimmte Flächenlast \bar{p}_z gefundenen Membranschale entstehen deshalb bei Belastung der Schale durch die Last \bar{p}_z in Auflagernähe Membran- und Biegespannungen.

Die Randbedingung 8(a,b) wird erfüllt, wenn für die Funktion $g(x,y)$ z.B. das Produkt aus den Gleichungen der Polygonseiten des quadratischen Grundrisses gewählt wird:

$$g(x,y) = (a-x)(a+x)(a-y)(a+y) \quad (8c)$$

Die Randbedingung (8b), konstanter Wert der ersten Ableitung der Spannungsfunktion entlang den Polygonseiten und unbestimmter Wert im Eckpunkt wird durch die zusätzliche Funktion $h(x,y)$ im Nenner der Spannungsfunktion erfüllt:

$$h(x,y) = \frac{1}{2}(x-a)(x+a) + \frac{1}{2}(y-a)(y+a) \quad (8d)$$

Die erste Ableitung der Spannungsfunktion $F(x,y)$ wird mit Gleichung (6) zu

$$F_x = K \frac{(h + Cg) g_x - g (h_x + Cg_x)}{(Cg + h)^2} = K \frac{hg_x - gh_x}{(Cg + h)^2}$$

da $(g)_{x=a}$ Null ist, ergibt Gleichung (8b) $(F_x)_{x=a} = K \frac{g_x}{(h)}_{x=a} = \text{const}$

4.2.3 Die Form der Schale entlang der Ränder

Da entlang des Randes $x=a$ (oder $y=a$) die Bedingungen (7a) und (7b) (bzw. (7c) und (7d)) erfüllt werden müssen, vereinfacht sich die Differentialgleichung (1) zu:

$$z_{yy} F_{xx} + \bar{p}_z = 0$$

Die Höhe des Schalenrandes bestimmt sich dann zu

$$z = - \int \int \frac{\bar{p}_z}{F_{xx}} dy dy \quad (9)$$

4.2.4 Auflagerkräfte für eine achsensymmetrische konstante vertikale Belastung (z.B. konstante Schneelast p)

Die vertikale Auflagerkraft ergibt sich aus der Gleichgewichtsbedingung in z-Richtung zu

$$V = \frac{\Sigma p}{n}, \quad n = \text{Anzahl der Ecken} \quad (10)$$

Die Gleichgewichtsbedingung in x-Richtung liefert die horizontale Komponente H_x (Bild 4.4).

$$H_x - \int \frac{n}{l} \bar{N}_x dy - \int \frac{m}{l} \bar{N}_{yx} dx = 0 \quad \text{und mit (5)}$$

$$H_x = \int \frac{n}{l} F_{yy} dy - \int \frac{m}{l} F_{xy} dx = F_y \Big|_l^n - F_y \Big|_l^m = F_y \Big|_n^m \quad (11)$$

Die horizontale Komponente H_y der Lagerreaktion ergibt sich zu

$$H_y = \int \frac{m}{l} F_{xx} dx - \int \frac{n}{l} F_{xy} dy = F_x \Big|_l^m - F_x \Big|_l^n = F_x \Big|_n^m \quad (12)$$

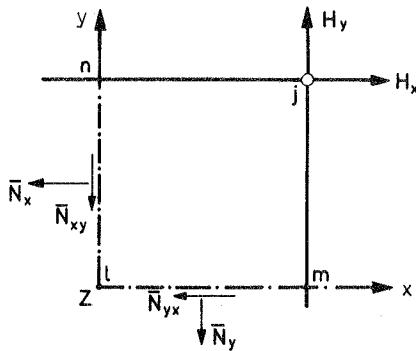


Bild 4.4: Horizontale Lagerreaktionen der Schale

4.3 Spannungsfunktion und Formen von Membranschalen für den Lastfall konstante vertikale Flächenlast p

4.3.1 Die Spannungsfunktion

Mit den Gleichungen (8c) und (8d) und mit $\xi = \frac{x}{a}$, $\eta = \frac{y}{a}$ werden

$$g(\xi, \eta) = (1 - \xi^2) (1 - \eta^2)$$

$$h(\xi, \eta) = 0,5\xi^2 + 0,5\eta^2 - 1$$

und die Spannungsfunktion (6)

$$F(\xi, \eta) = K \frac{(1-\xi^2) (1-\eta^2)}{C (1-\xi^2) (1-\eta^2) + 0,5\xi^2 + 0,5\eta^2 - 1} \quad (13)$$

Die zweite partielle Ableitung der Spannungsfunktion nach x an der Stelle $\xi = 1$ ist

$$(F_{xx})_{\xi=1} = \frac{4K}{a^2} \frac{5 - 8C - (1-8C)\eta^2}{1 - \eta^2} \quad (14)$$

4.3.2 Die Bedeutung der Parameter K und C der Spannungsfunktion

Durch Variation des Proportionalitätsfaktors K in den Gleichungen (13) - (18) entstehen affine Spannungszustände. Er kann z.B. dazu verwendet werden, um die Scheitelhöhe des Schalenrandes festzulegen.

Z.B. Schalentyp für den Parameter der Spannungsfunktion $C = 1/8$ und Scheitelhöhe des Randbogens $z_{\xi=1,0}; \eta=0 = z_r$ ergibt

$$K = \frac{5pa^4}{48z_r}$$

(Abschnitt 4.3.3, Fall 2)

Mit dem Parameter C können unendlich viele Spannungsfunktionen (6) definiert werden, die alle die gleichen Randbedingungen (7) von Membranschalen befriedigen. Da jeder einzelnen Spannungsfunktion eine Schalenform zugeordnet werden kann, gehen für einen Lastfall (konstante, vertikale Grundrißlast oder Eigengewicht etc.) unendlich viele Schalenformen aus der Differentialgleichung (1) hervor. Die Schalenformen sind vom Betrag p eines Lastfalles unabhängig, jedoch nicht vom Betrag q einer Lastgruppe (z.B. $q = g + p$ aus Eigengewicht g und Schneelast p).

Um für einen Lastfall oder eine Lastgruppe die unendlich vielen, möglichen Schalenformen auf eine Form zu reduzieren, müßte noch eine weitere Bedingung festgelegt werden, z.B. gleiche Druck- oder Zugspannung an jeder Stelle der Schale oder eine begrenzte Spannung $\max \sigma$ an einem Punkt der Schale.

Verlauf der Spannungsfunktion in Abhängigkeit des Parameters C

a) Parameter $-\infty < C \leq -10,0$

Die Ableitungen F_{xx} , F_{yy} , F_{xy} der Spannungsfunktion (13) sind im Schaleninneren sehr klein (z.B. $|F_{xx}| < 5 \cdot 10^{-5}$ in den Lagerpunkten in den Ecken dagegen unendlich groß. Die z-Ordinaten der Membranschalen im Schaleninneren streben gegen unendlich.

b) Parameter $-10 \leq C < 0,625$

Die Ableitungen F_{xx} , F_{yy} der Spannungsfunktion besitzen negative, die Ableitung F_{xy} positive Werte. Sie verlaufen im Schaleninneren stetig. In den Lagerpunkten sind sie unendlich groß (Bild 4.5). In Verbindung mit der Pucher'schen Differentialgleichung findet man stetig gekrümmte punktförmig gelagerte Membranschalen (Bild 4.26 - 4.31).

c) Parameter $0,625 < C \leq 1,0$

Die Ableitungen F_{xy} sind negativ und verlaufen ähnlich wie die des Abschnittes (b). Die Beträge der Ableitungen F_{xx} und F_{yy} sind im Schaleninneren positiv und nur entlang zweier Ränder negativ (Bild 4.6). Die durch die Ableitungen der

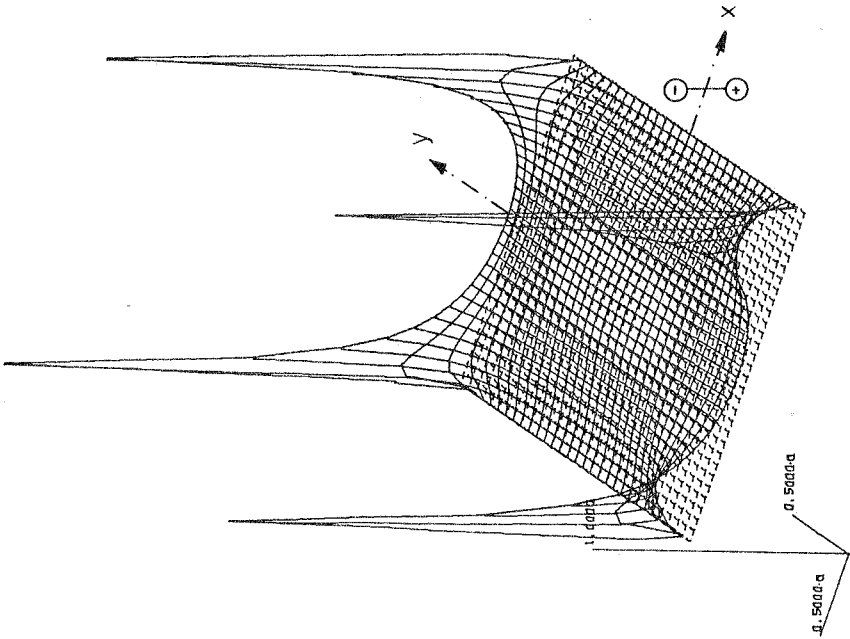


Bild 4.5a: Quantitativer Verlauf der zweiten Ableitung der Spannungsfunktion nach y , F_{yy} , Parameter C ist gültig von $+\frac{5}{8}$ bis ~ -10

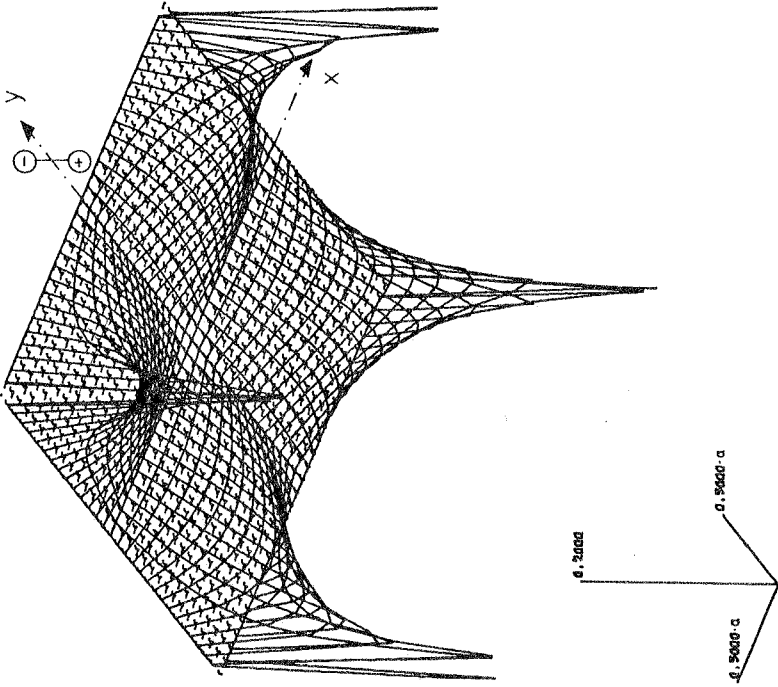


Bild 4.5b: Quantitativer Verlauf der zweiten Ableitung der Spannungsfunktion nach x und y , F_{xy} , Parameter C ist gültig von $+\frac{5}{8}$ bis ~ -10

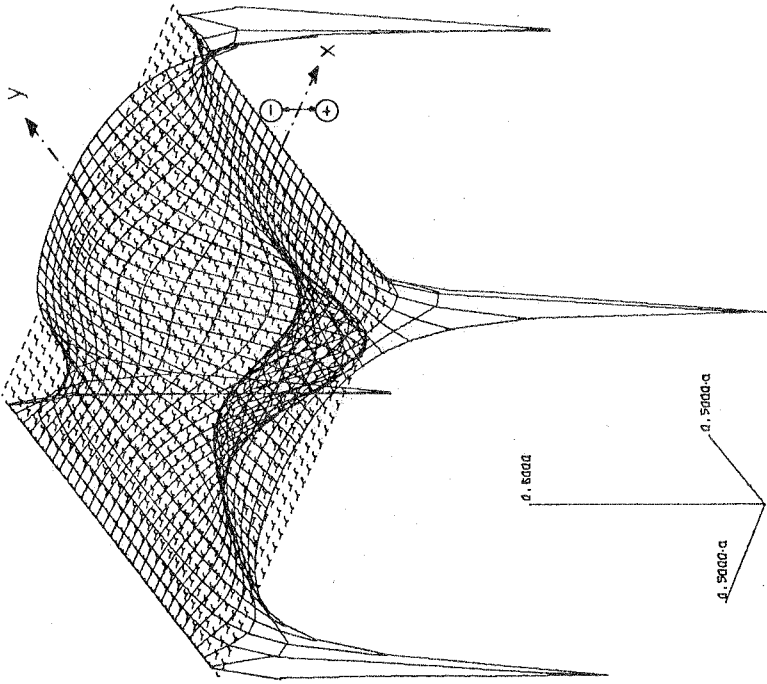


Bild 4.6a: Quantitativer Verlauf der zweiten Ableitung der Spannungsfunktion nach y , F_{yy} , Parameter $C = 0,85$

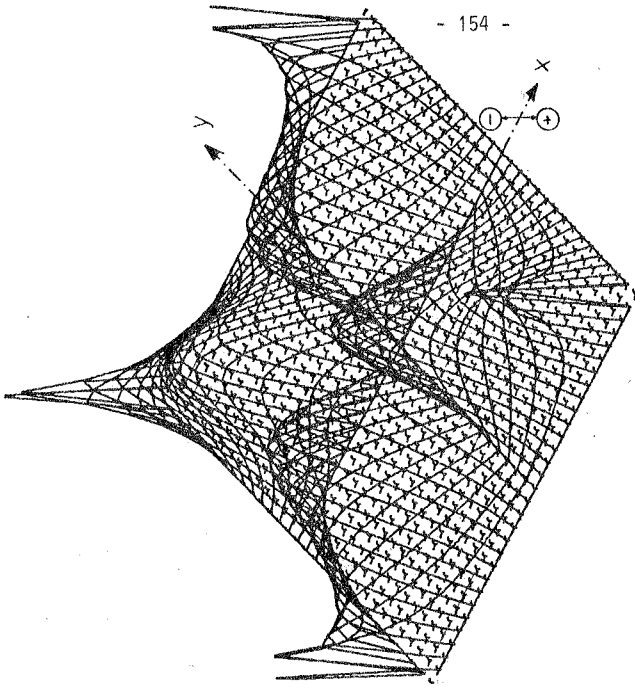


Bild 4.6b: Quantitativer Verlauf der zweiten Ableitung der Spannungsfunktion nach x und y , F_{xy} , Parameter $C = 0,85$

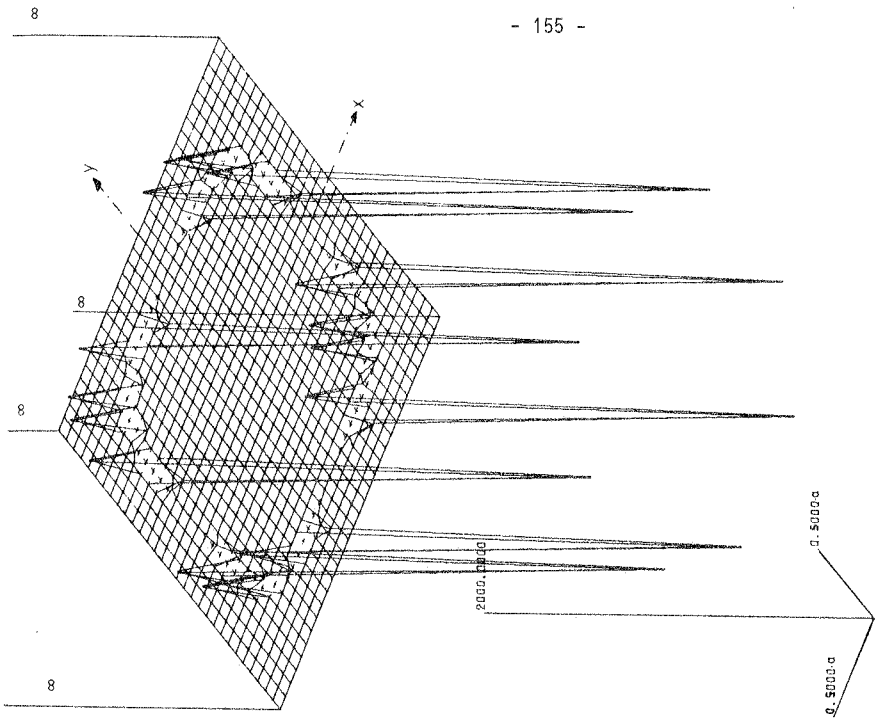


Bild 4.7b: Quantitativer Verlauf der zweiten Ableitung der Spannungsfunktion nach x und y , F_{xy} , Parameter $C = 1,50$

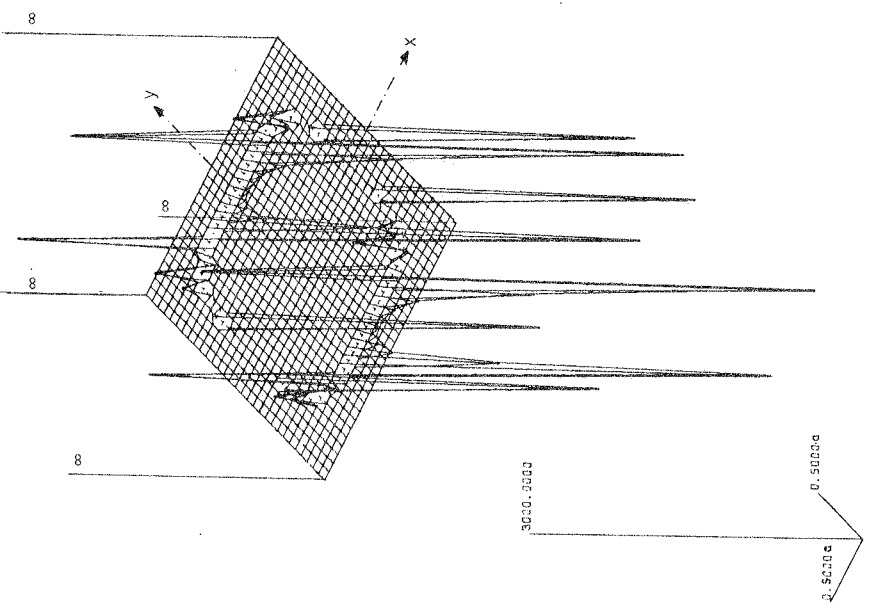


Bild 4.7a: Quantitativer Verlauf der zweiten Ableitung der Spannungsfunktion nach y , F_{yy} , Parameter $C = 1,50$

Spannungsfunktion und der Differentialgleichung (1) festgelegten Gleichgewichtslagen von Membranformen weisen im Auflagerbereich faltenähnliche Gebiete auf (Abschnitt 4.6.6 und Bilder 4.42, 4.43).

d) Parameter $1.0 \leq C \leq 3.0$

Die Ableitungen F_{xx} , F_{yy} , F_{xy} der Spannungsfunktion (13) haben nicht nur in den Lagerpunkten, sondern auch im Schaleninneren parallel zum Rand Unstetigkeitsstellen $|F_{xx}| = |F_{yy}| = |F_{xy}| \gg 1000$, (Bild 4.7).

Dementsprechend findet man Gleichgewichtslagen von Membranen, die parallel zum Rand eine horizontal unverschiebliche, linienförmige Lagerung aufweisen.

e) Parameter $3.0 < C < \infty$

Die Ableitungen F_{xx} , F_{yy} , F_{xy} sind wie im Fall (a) sehr klein. Die z-Ordinaten der Membranschalen im Schaleninneren streben gegen $-\infty$.

4.3.3 Die Formen des Schalenrandes

Die Höhe z des Schalenrandes ergibt sich mit (9) und (14) zu

$$z_{\xi=1} = - \frac{a^4 p}{4 K} \int \int \frac{1-\eta^2}{5-8C - (1-8)\eta^2} d\eta d\eta \quad (15)$$

Gleichung (24) kann unmittelbar integriert werden, wenn die Bedingung

$$5-8C > 0 \quad \text{oder} \quad C < \frac{5}{8} \quad \text{eingehalten wird.}$$

Die Höhe des Schalenrandes ist von der Wahl des Parameters C abhängig. Vier verschiedene Bereiche können dabei unterschieden werden:

Fall 1: $-\infty < C < 1/8$

Die Höhe $z_{\xi=1}$ am Rand der Membranschale ergibt sich zu

$$z_{\xi=1} = - \frac{p a^4}{16 K} (1-m^2)^2 \left(- \frac{\eta}{m} \operatorname{artanh} \frac{\eta}{m} + \frac{1}{m} \operatorname{artanh} \frac{1}{m} - 0,5 \ln \frac{\eta^2-m^2}{1-m^2} + 0,5 \frac{1-\eta^2}{1-m^2} \right) \quad (16)$$

mit

$$m = \sqrt{\frac{8C-5}{8C-1}}$$

Fall 2: $C = 1/8$

Bei dieser Bedingung wird die Höhe

$$z_{\xi=1} = - \frac{p \cdot a^4}{16 K} \left(- \frac{\eta^4}{3} + 2\eta^2 - \frac{5}{3} \right) \quad (17)$$

Fall 3: $1/8 < C < 5/8$

Die Höhe entlang des Schalenrandes beträgt

$$z_{\xi=1} = - \frac{p \cdot a^4}{16 K} (1+m^2)^2 \left(\frac{\eta}{m} \arctan \frac{\eta}{m} - \frac{1}{m} \arctan \frac{1}{m} - 0,5 \eta \frac{\eta^2+m^2}{1+m^2} + 0,5 \frac{1+\eta^2}{1+m^2} \right) \quad (18)$$

mit

$$m = \sqrt{\frac{5 - 8C}{8C - 1}}$$

Fall 4: $5/8 \leq C < \infty$

Das Integral muß mit einem numerischen Verfahren gelöst werden, z.B. [7.2] .

4.3.4 Die Formen der Schalenmittelfläche im Inneren

Die Mittelfläche der Schale im Inneren kann punktweise z.B. mit dem einfachen Differenzenverfahren [7.3, 7.17] ermittelt werden.

Das kontinuierliche Gebiet wird mit einem Linienraster überzogen. Die Differentialgleichung (1) wird ersetzt durch die algebraischen Beziehungen zwischen den Funktionswerten an den Knoten der Gitterlinien.

Ersetzt man die Differentialoperatoren in der Gleichung (1) durch die Differenzenausdrücke eines quadratischen Rasters (Bild 4.8), entsteht folgende Differenzendarstellung:

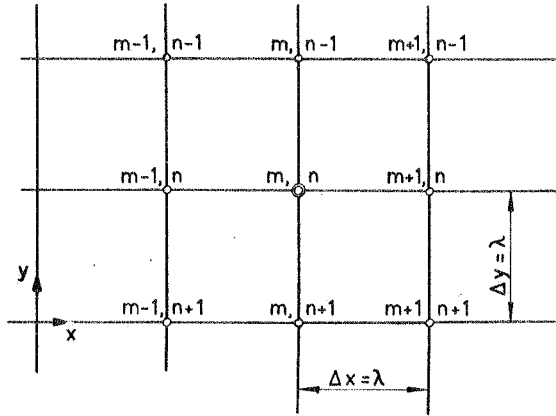


Bild 4.8: Quadratisches Raster $\Delta x = \Delta y = \lambda = \text{konst.}$

Die Differentialgleichung (1) wird in Punkt m, n umgeformt zu

$$-F_{yy}(z_{xx})_{m,n} + 2F_{xy}(z_{xy})_{m,n} - F_{xx}(z_{yy})_{m,n} = (p)_{m,n} \quad (18)$$

Die Differenzenausdrücke am Rasterpunkt m, n

$$(z_{xx})_{m,n} = \frac{1}{\lambda^2} (z_{m-1,n} - 2z_{m,n} + z_{m+1,n})$$

$$(z_{xy})_{m,n} = \frac{1}{4\lambda^2} (z_{m+1,n+1} - z_{m+1,n-1} + z_{m-1,n+1} + z_{m-1,n-1})$$

$$(z_{yy})_{m,n} = \frac{1}{\lambda^2} (z_{m,n-1} - 2z_{m,n} + z_{m,n+1})$$

werden in die Gleichung (18) eingesetzt:

$$\begin{aligned} & (2F_{xx} + 2F_{yy})_{m,n} z_{m,n} - (F_{xx})_{m,n} (z_{m,n+1} + z_{m,n-1}) - (F_{yy})_{m,n} (z_{m-1,n} + z_{m+1,n}) - \\ & \left(\frac{1}{2}F_{xy}\right)_{m,n} (z_{m-1,n+1} + z_{m+1,n-1}) + \left(\frac{1}{2}F_{xy}\right)_{m,n} (z_{m+1,n+1} + z_{m-1,n-1}) = (p)_{m,n} \cdot \lambda^2 \end{aligned} \quad (19)$$

Die Koeffizienten der z-Ordinaten der Schalenmittelfläche werden symbolisch im 'Differenzenstern' dargestellt (Bild 4.9a,b).

Man erhält ein lineares Gleichungssystem für die i z-Koordinaten, wenn die Differenzengleichungen in i Knotenpunkten des Rasters erstellt werden.

$$\bar{A}_{i,i} \bar{z}_{i,1} = \bar{p}_{i,1} \quad (20)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems ergibt den Vektor der unbekannt z-Koordinaten.

$$\bar{z}_{i,1} = \bar{A}_{i,i}^{-1} \bar{p}_{i,1}$$

Genauigkeit der Differenzenmethode

Die Scheitelhöhe z_s verschiedener Schalentypen wird bei ($0,2 < C < 0,625$, Bild 4.11-4.13) mit einem veränderten Gitterlinienabstand λ ermittelt. Die Scheitelhöhe H des Schalenrandes ist bei allen Schalen gleich der halben Grundrißlänge ($H = 0,5a$)

Der Gitterlinienabstand λ_g , ab dem sich die Scheitelhöhe z_s der Schalen nur noch unwesentlich ändert, ist in Abhängigkeit des Schalenparameters C in Bild 4.10 aufgetragen. Dieser Grenzabstand λ_g liegt bei den untersuchten Schalen zwischen den Werten $\frac{1}{24} a < \lambda_g < \frac{1}{15} a$.

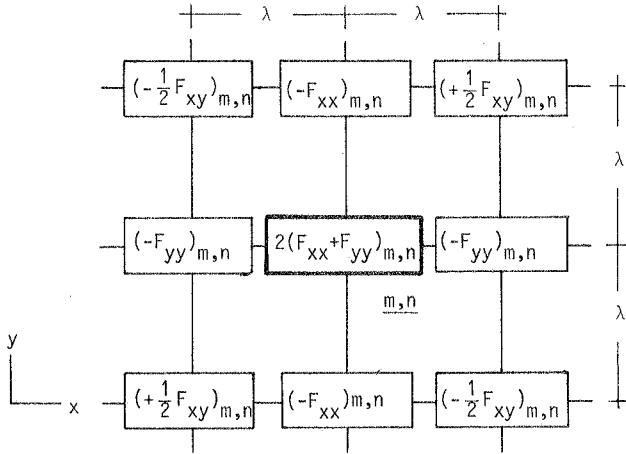


Bild 4.9a: Differenzenstern für die z-Koordinate der Schalenmittelfläche im Inneren der Schale, Punkt m, n

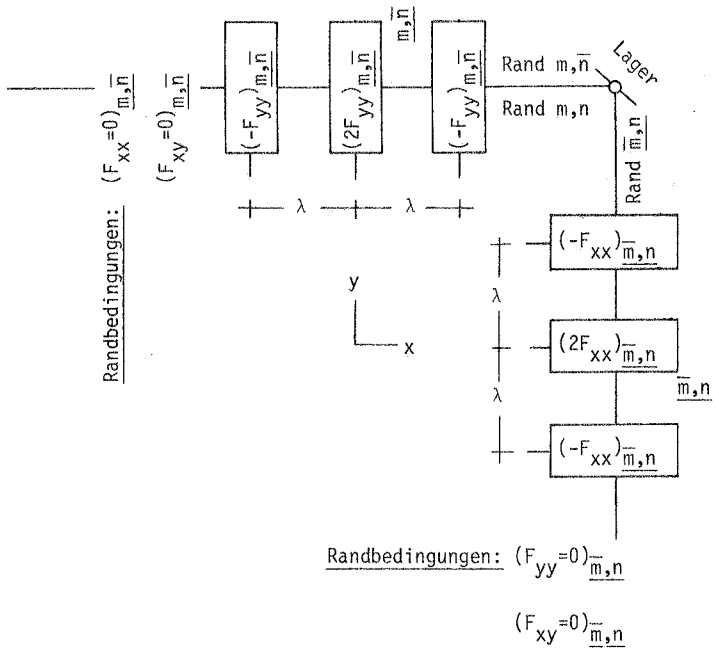


Bild 4.9b: Differenzenstern für die z-Koordinate der Schalenmittelfläche an den Rändern \bar{m}, n und m, n

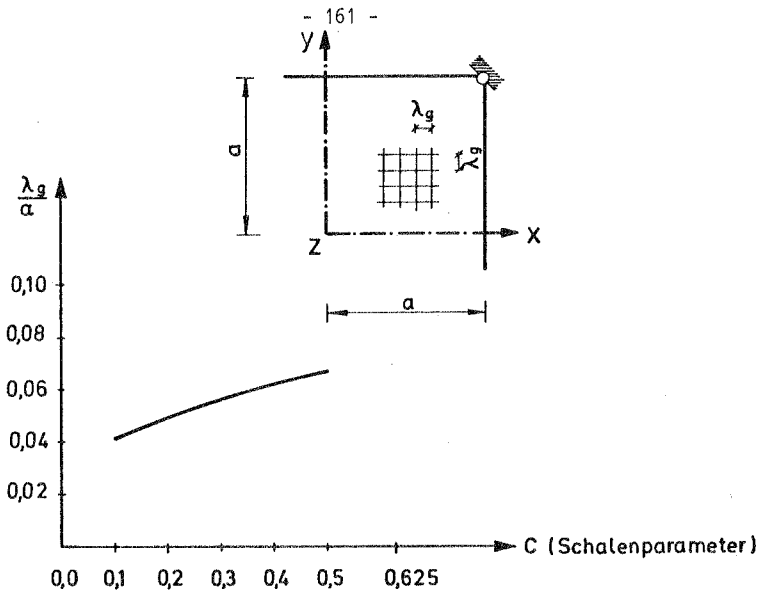


Bild 4.10: Grenzabstand λ_g der Rasterlinien, ab dem die Scheitelhöhen z_s verschiedener Schalentypen, gekennzeichnet durch den Schalenparameter C , nur noch unwesentlich genauer ermittelt werden können.

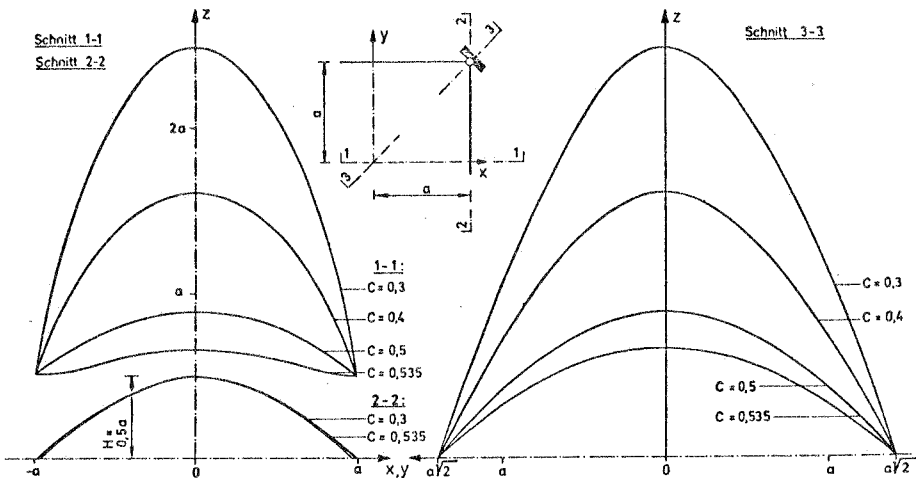


Bild 4.11: Schalenformen bei Variation des Parameters C : $0,2 \leq C \leq 0,535$, Lastfall konstante vertikale Last p , Scheitelhöhe des Randes $H = 0,5 a$.

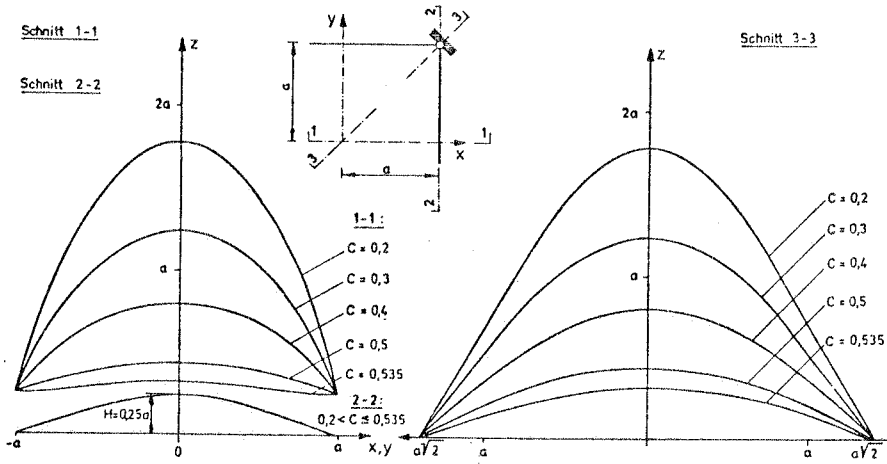


Bild 4.12: Schalenformen bei Variation des Parameters C : $0,2 \leq C \leq 0,535$, Lastfall konstante vertikale Last p , Scheitelhöhe des Randes $H = 0,25 a$.

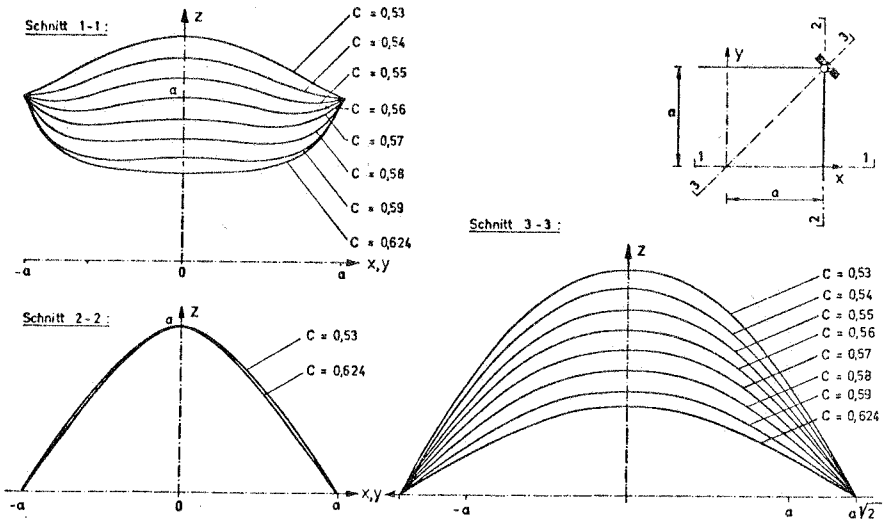


Bild 4.13: Schalenform bei Variation des Parameters C : $0,53 \leq C \leq 0,624$, Lastfall konstante, vertikale Last p , Scheitelhöhe des Randes $H = a$

4.4 Membranschale für den antimetrischen Lastfall konstante vertikale Flächenlast p

Es wird die Form einer in den Ecken punktförmig gelagerten Membranschale über quadratischem Grundriß für eine konstante vertikale antimetrische Belastung (Bild 4.9) bestimmt. Die antimetrische Last soll bei dieser Schale überwiegend durch Membrankräfte abgetragen werden.

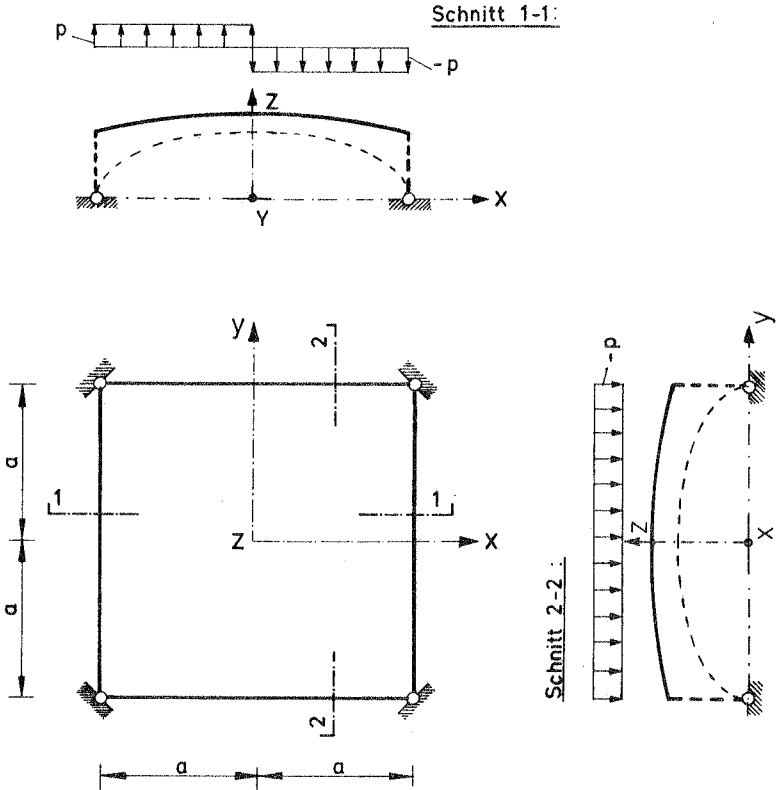


Bild 4.14: Gleichmäßig verteilte Flächenlast p , symmetrisch zur x -Achse, antimetrisch zur y -Achse.

4.4.1 Randbedingungen für die Spannungsfunktion

Die gleichen Randbedingungen (7) wie bei einer symmetrischen Belastung gelten entlang des freien Randes .

Die Membrankräfte und die Belastung verlaufen antimetrisch zur y -Achse und springen deshalb entlang dieser Achse durch Null.

Die zweiten Ableitungen der Spannungsfunktion erfüllen an dieser Stelle folgende Bedingungen:

$$F_{xx} = 0, \quad F_{yy} = 0, \quad F_{xy} = 0 \quad (21)$$

Eine Überlagerung der zweiten Ableitungen der Spannungsfunktion (6) mit der antimetrischen Funktion (Bild 4.15)

$$f(x) = x \quad (22)$$

ergibt

$$f(x) F_{xx} = x F_{xx}, \quad f(x) F_{yy} = x F_{yy}, \quad f(x) F_{xy} = x F_{xy} \quad (23)$$

Die Bedingungen (21) können erfüllt werden, ohne daß die Symmetrie der Spannungsfunktion $F(x,y)$ zur x -Achse verloren geht.

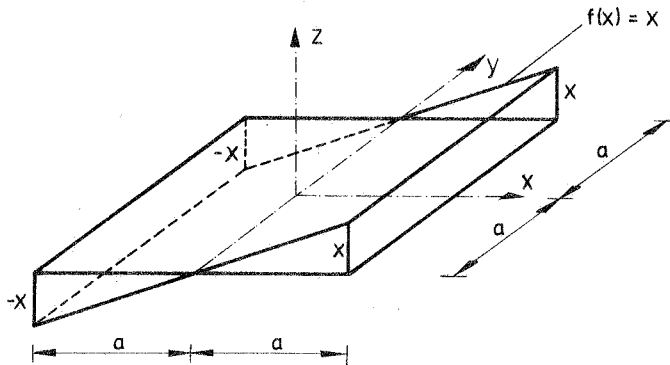


Bild 4.15: Zur y -Achse antimetrische Funktion $f(x)=x$

4.4.2 Die Form der antimetrischen Membranschalen entlang des Randes und im Schaleninneren

Die z -Ordinaten entlang des Randes $x=a$ sind die gleichen, wie beim symmetrischen Lastfall (Gleichungen (16) - (18)). Die Höhe z entlang des Schalenrandes $y=a$

ergibt sich mit (9) und (23)

$$z_{\eta=1} = - \frac{a^4 p}{4 K} \int \int \frac{(1-\xi^2)}{(5-8C)\xi - (1-8C)\xi^3} d\xi d\xi \quad (24)$$

Gleichung (24) kann unmittelbar integriert werden, wenn die Bedingung

$$2-16C \geq 0 \quad \text{oder} \quad C \leq \frac{1}{8} \quad \text{eingehalten wird.}$$

Fall 1: $-\infty < C < \frac{1}{8}$

Die Höhe $z_{\eta=1}$ am Rand der Membranschale ergibt sich zu

$$z_{\eta=1} = - \frac{a^4 p (1-m^2)^2}{16 K m^2} \left[- \frac{\xi \ln \xi}{(1-m^2)} + \frac{1}{2} \xi \{ (m+\xi) \ln(m+\xi) - (m-\xi) \ln(m-\xi) \} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \{ (m+1) \ln(m+1) - (m-1) \ln(m-1) \} \right] \quad (25)$$

mit $m = \sqrt{\frac{8C-5}{8C-1}}$

Fall 2: $C = \frac{1}{8}$

Die Höhe $z_{\eta=1}$ beträgt bei dieser Bedingung

$$z_{\eta=1} = - \frac{a^4 p}{16 K} \left(\xi \ln \xi - \frac{1}{6} \xi^3 + \frac{1}{6} \xi \right) \quad (26)$$

Fall 3: $\frac{1}{8} < C < +\infty$

Das Integral $z_{\eta=1}$ der Höhe des Schalenrandes muß mit einem numerischen Verfahren gelöst werden [7.2].

Der Proportionalitätsfaktor K in den Gleichungen (25) und (26) kann wie bei der symmetrischen Belastung dazu verwendet werden, um die Höhe $z_{\eta=1}$ des Randbogens an einer Stelle festzulegen.

Der Parameter C definiert unendlich viele Spannungsfunktionen, die die Randbedingungen (7), (21) und die Differentialgleichung (1) erfüllen.

Es können daher unendlich viele Schalenformen für diesen antimetrischen Lastfall gefunden werden, die unabhängig vom Betrag der Last sind. Die Schalenformen sind wie die Belastung und die Spannungsfunktion symmetrisch zur x-Achse und antimetrisch zur y-Achse. Die z-Ordinaten dieser Schalen gehen entlang der Antimetrieachse durch Null.

Je kleiner der Parameter C gewählt wird, desto höher und steiler werden die Schalen. Antimetrische Membranschalen mit ausgeprägter negativer Krümmung des Schalenrandes entstehen, wenn $0,5 < C < 0,625$ ist (Bild 4.16-4.19).

Mit den über der Grundrißebene liegenden Teilen der antimetrischen Membranschalen können rechteckige Grundrisse mit dem Seitenverhältnis $b/a=2$ überdacht werden. Diese Schalen weisen entlang der längeren Rechteckseite b horizontal und vertikal unverschiebliche Linienlager auf und lagern punktförmig nur in den der Seite b gegenüberliegenden beiden Ecken (Abschnitt 4.8).

Die antimetrischen Formen können auch so zusammengefügt werden, daß wieder achsensymmetrische Gebilde entstehen. Diese Schalen besitzen in den vier Ecken des quadratischen Grundrisses 'punktförmige' Lager. Sie lagern jedoch dann entlang einer Symmetrieachse linienförmig.

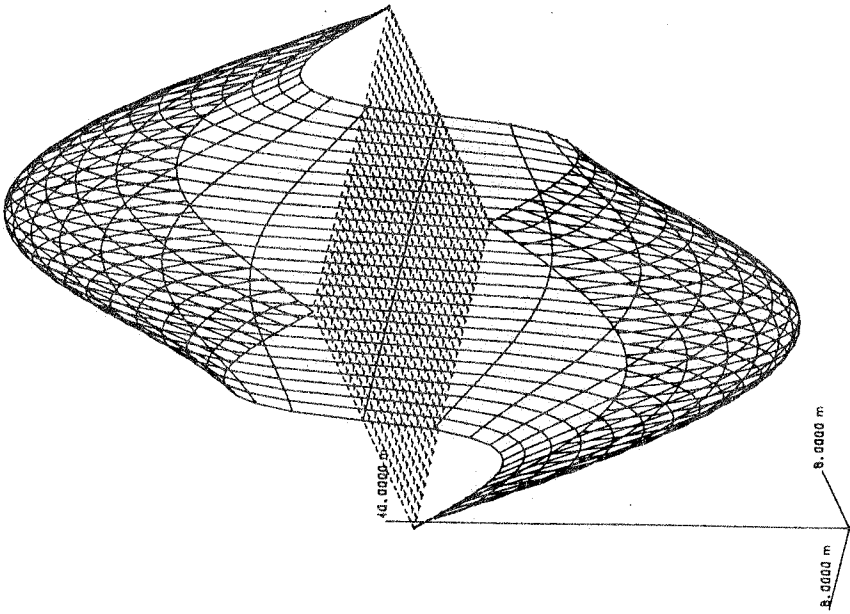


Bild 4.16a: Randträgerlose Kuppelschale für den anti-metrischen Lastfall konstante, vertikale Flächenlast, Parameter $C = 0.45$, Seitenlänge des Quadrates = 30,0 m größte Höhe am Schalenrand $z = 15,0$ m

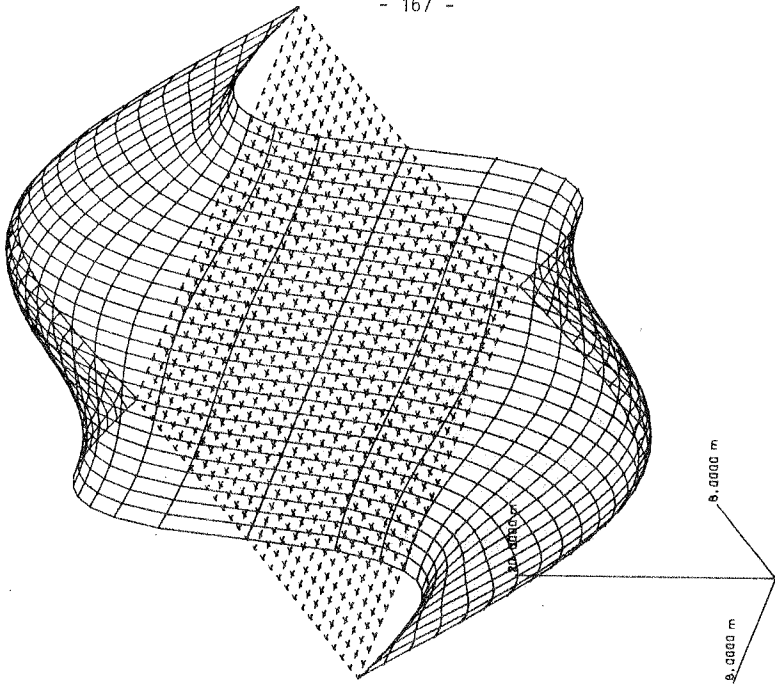


Bild 4.16b: Randträgerlose Kuppelschale für den anti-metrischen Lastfall konstante, vertikale Flächenlast, Parameter $C = 0.53$, Seitenlänge des Quadrates = 30,0 m, größte Höhe am Schalenrand $z = 7,5$ m

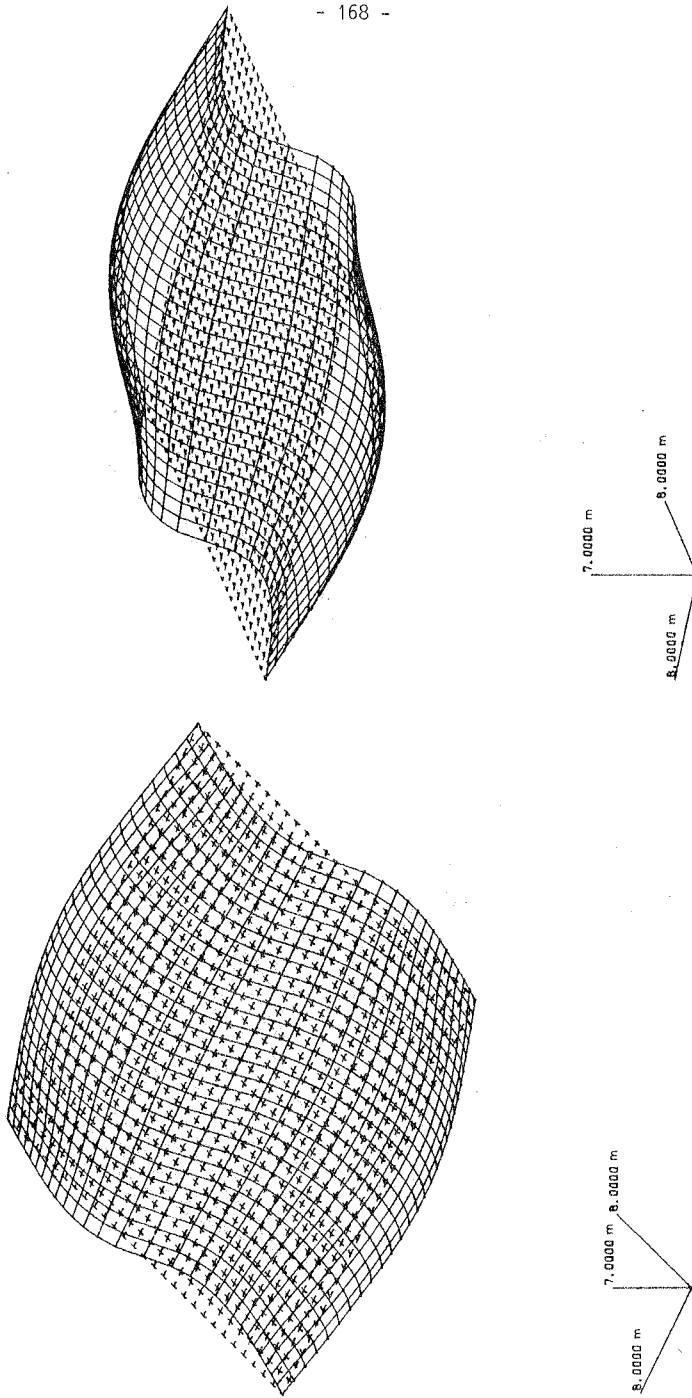


Bild 4.17: Randträgerlose Kuppelschale für den antimetrischen Lastfall konstante vertikale Flächenlast, Parameter $C = 0,50$, Seitenlänge des Quadrates $= 30,0$ m, größte Höhe am Schalenrand $Z = 4,0$ m

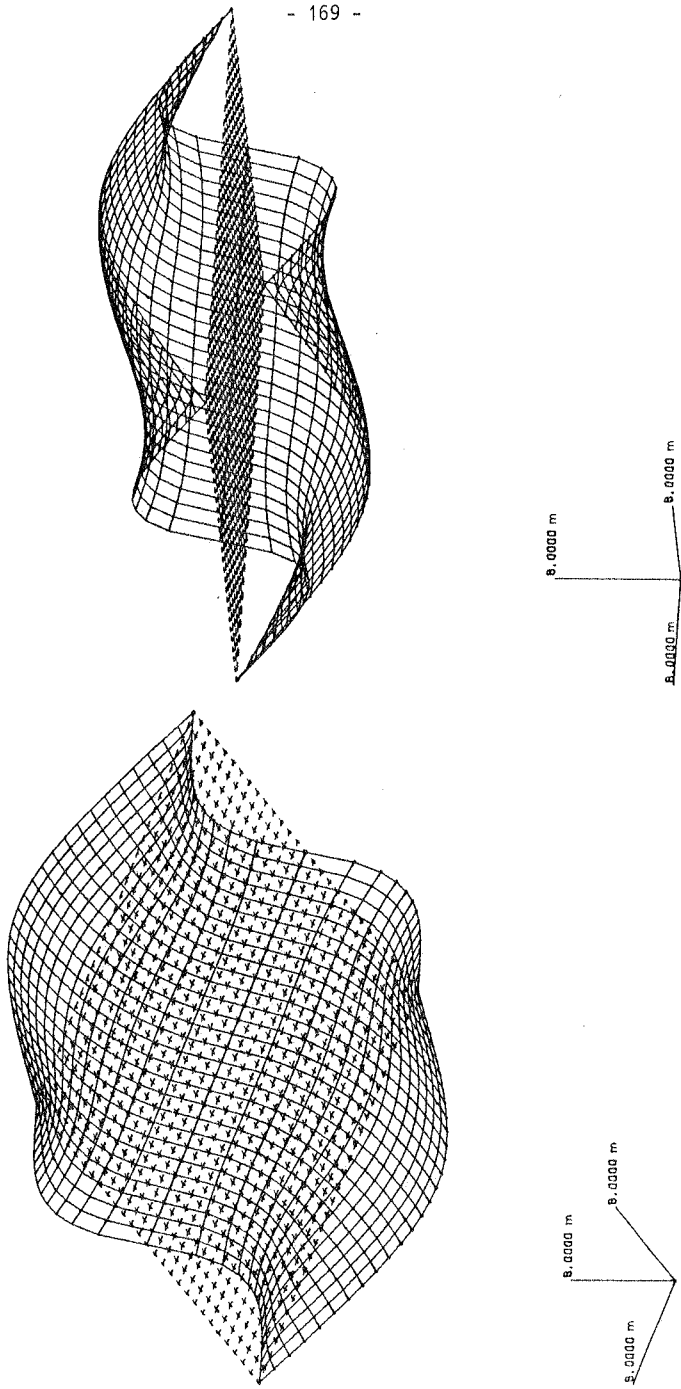


Bild 4.18: Randträgerlose Kuppelschale für den antisymmetrischen Lastfall konstante vertikale Flächenlast, Parameter $C = 0,55$, Seitenlänge des Quadrates = 30,0 m, größte Höhe am Schalenrand $z = 7,5$ m

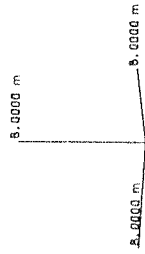
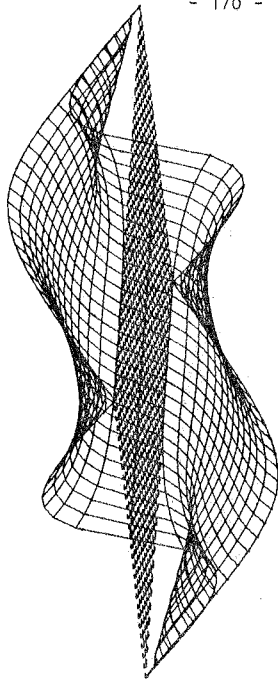
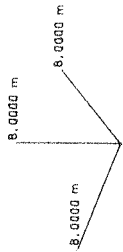
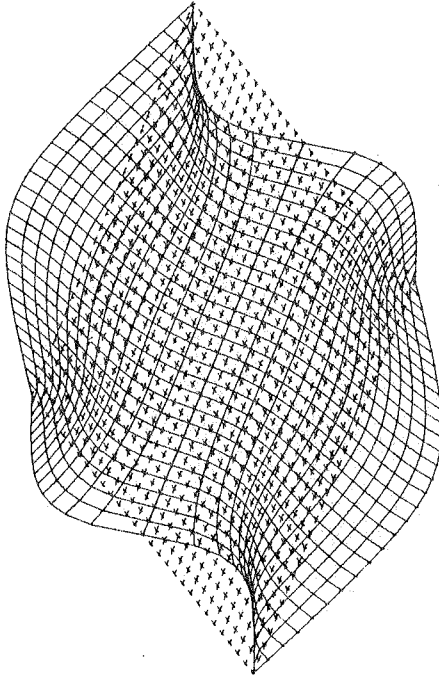


Bild 4.19: Randträgerlose Kuppelschale für den antimetrischen Lastfall konstante vertikale Flächenlast, Parameter $C = 0,58$, Seitenlänge des Quadrates = 30,0 m, größte Höhe am Schalenrand $z = 7,5$ m

4.5 Membranschalen für die symmetrischen Lastgruppen aus Eigengewicht und konstanten oder veränderlichen, vertikalen Flächenlasten (Schneelasten)

Die Form der Schale wird für zwei Lastgruppen bestimmt:

Lastgruppe 1: Eigengewicht und über dem Grundriß konstante Schneelast (Bild 4.20)

Lastgruppe 2: Eigengewicht und über dem Grundriß veränderliche Schneelast (Bild 4.21)

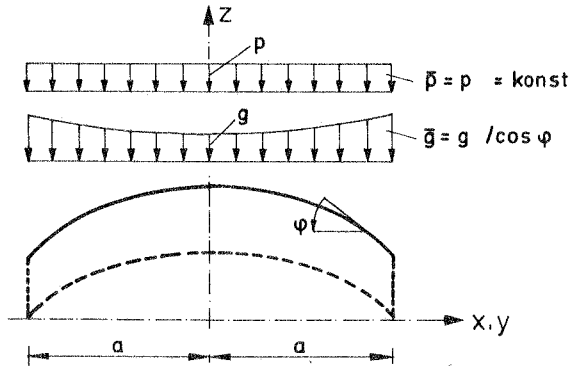


Bild 4.20: Belastung der Schale durch Eigengewicht und konstanter Schneelast im Schnitt $-a \leq x \leq a$, $y = 0,0$

Der Cosinus des Neigungswinkels ϕ einer Fläche $z = f(x,y)$ bestimmt sich zu

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} \quad (27)$$

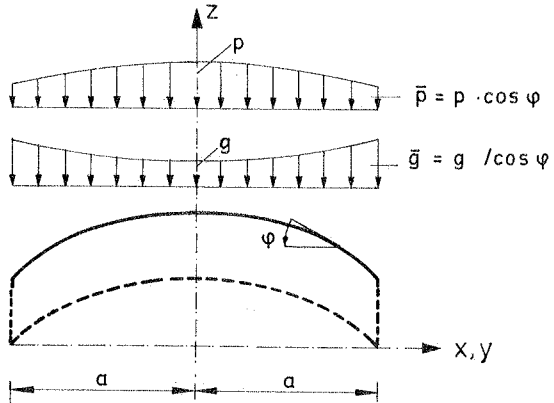


Bild 4.21: Belastung der Schale durch Eigengewicht und veränderliche Schneelast im Schnitt $-a \leq x \leq a$, $y=0,0$

Da die lineare Pucher'sche Differentialgleichung (1) für alle endlichen Mittelflächenneigungen gültig ist, geht sie für die erste Lastgruppe über in die folgende nichtlineare Differentialbeziehung:

$$z_{xx} F_{yy} - 2z_{xy} F_{xy} + z_{yy} F_{xx} + p + g \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 0 \quad (28)$$

oder für die zweite Lastgruppe in

$$z_{xx} F_{yy} - 2z_{xy} F_{xy} + z_{yy} F_{xx} + \frac{p}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} + g \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 0 \quad (29)$$

Die Differentialgleichungen (28) und (29) können durch das Differenzenverfahren in Verbindung mit einem numerischen iterativen Verfahren für nichtlineare algebraische Systeme gelöst werden. Das modifizierte Newton-Raphson-Verfahren, wird als numerisches Lösungsverfahren gewählt. Weitere Hinweise zu anderen numerischen Lösungsverfahren können [7.14] entnommen werden.

Für eine konstante Last $q = g + p$ wird mit den linearen Differenzgleichungen (20) eine 'Ausgangsform' der Schale ermittelt. Wenn auf diese Schalenform, die in Differenzenbeziehungen umgewandelten Gleichungen (28) oder (29) angewandt werden, ergeben sich Ungleichgewichtskräfte. In einem Lastschritt Δq_1 wird die Form der Schale iterativ solange verändert, bis die Ungleichgewichtskräfte ver-

schwunden sind und die Summe aller absoluten Zuwächse Δz der z-Koordinaten einen gewünschten Betrag erreicht haben (Bild 4.22).

Bei allen Iterationen wird die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems (20) der 'Ausgangsform' beibehalten.

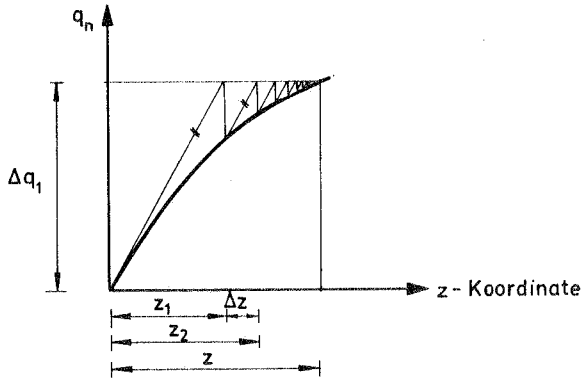


Bild 4.22: Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren mit konstanter Systemmatrix

Die Anzahl der Iterationen, bis der Zuwachs Δz je z-Koordinate $\Delta z \leq 0,0001$ m ist, hängt von der größten Neigung der gesuchten Schalenmittelfläche ab.

Bei Membranschalen, deren Parameter C der Spannungsfunktion $0,5 \leq C < 0,625$ und deren z-Ordinate im Scheitel kleiner als die halbe Seitenlänge des Quadrates ($z_s < a$) sind, genügen ungefähr 10 Iterationen, um die o.g. Zuwachsrates Δz der z-Koordinaten zu erreichen. Die Anzahl der Iterationen wächst auf über 30 an, wenn die Form noch höherer und steilerer Schalen ($C < 0,5$, $z_s > a$) mit dieser iterativen Methode gefunden werden soll.

Der Grenzabstand λ_g der Gitterlinien des Differenzverfahrens ab dem die z-Ordinaten nur noch geringfügig genauer bestimmt werden können, bleibt wie beim Lastfall konstante vertikale Last (Bild 4.10) ungefähr der gleiche.

4.5.1 Verschiedene Formen von Membranschalen

Durch den Parameter C der Spannungsfunktion können die Membranschalen hinsichtlich der Form in drei Gruppen eingeteilt werden:

1. Gruppe: Parameter $-\infty < C < 0,50$ (Bild 4.26, 4.27)

Schalen ohne negativ gekrümmtem freien Rand. Die Mittelfläche dieser flachen und steilen Schalen ist positiv gekrümmt. Sie sehen Paraboloidschalen sehr ähnlich.

2. Gruppe: Parameter $0,5 \leq C \leq 0,55$ (Bild 4.28, 4.29)

Schalen mit mäßig negativ gekrümmtem, freien Rand. Ausgedehnte Gebiete um den Scheitel der Schalen weisen eine positive Krümmung auf. Nur in Randnähe bildet sich eine negativ gekrümmte Schalenmittelfläche.

3. Gruppe: Parameter $0,55 < C < 0,625$ (Bild 4.30, 4.31)

Schalen mit auffällig negativ gekrümmtem, freien Rand. Der Scheitelpunkt der Schalen ist durch eine geringe positive Krümmung gekennzeichnet. Der freie Rand dagegen wird durch Mittelflächen mit einer ausgeprägten negativen Krümmung geformt.

Die z -Ordinaten der Schalen sind vom Betrag einer Last z.B. Eigengewicht g , konstanter Flächenlast p oder $p \cos \phi$ unabhängig. Für eine Lastgruppe $g + p$ (Bild 4.20, 4.21) jedoch wird durch eine Spannungsfunktion bei jedem Verhältnis p/g eine neue Schalenform festgelegt.

Die z -Ordinaten z_g steiler Schalen, die durch den Lastfall Eigengewicht g festgelegt werden, übersteigen die Ordinaten z_p , die durch den Lastfall konstante vertikale Flächenlast p bestimmt werden, um mehr als 80%. Bei flachen Schalen beträgt dieser Unterschied etwa 8%. Bei diesem Vergleich werden gleiche Beträge der Eigengewichtslasten und konstanten vertikalen Flächenlasten im Scheitel, sowie gleiche Parameter C und K der Spannungsfunktion F vorausgesetzt. Die z -Ordinaten z_{g+p} von Schalen für eine Lastgruppe aus Eigengewicht g und einer konstanten Flächenlast p liegen zwischen den beiden Werten z_g und z_p (Bild 4.23, 4.24). Es wird deshalb empfohlen, daß der Nutzlastanteil p beim Entwurf steiler Membranschalen für die Lastgruppe q aus ständig auftretenden Flächenlasten g und Flächenlasten p verringert wird, z.B. $q = g + 0,5 p$ oder $q = g + 0,75 p$. Der Unterschied der vorhandenen z -Ordinaten $z_{g+p/2}$ zwischen den erforderlichen Ordinaten z_g oder z_{g+p} wäre dann geringer als der Unterschied zwischen den z.B. vorhandenen Ordinaten z_{g+p} und den erforderlichen Ordinaten z_g (Bild 4.23).

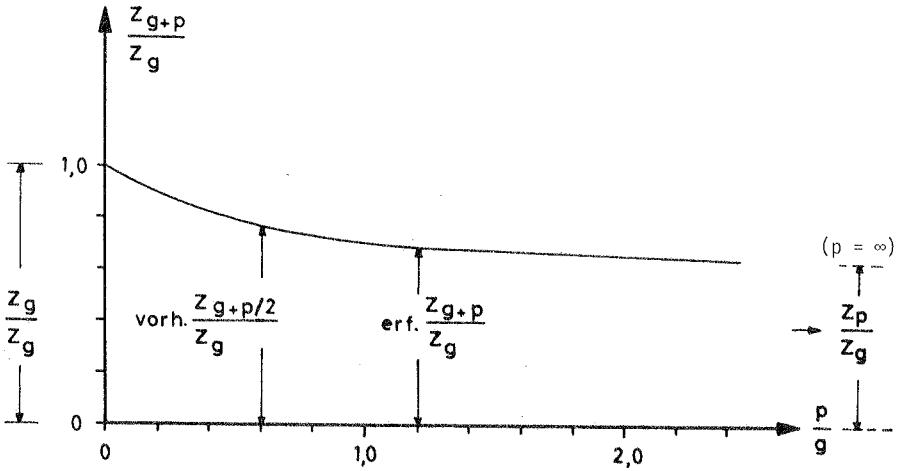


Bild 4.23: Verhältnis der z-Ordnaten z_{g+p} (Lastfall Eigengewicht g und konstante vertikale Flächenlast p) zu der z-Ordinate z_g (Lastfall Eigengewicht g) im Scheitel der Membranschale von Bild 4.25 in Abhängigkeit des Lastverhältnisses p/g

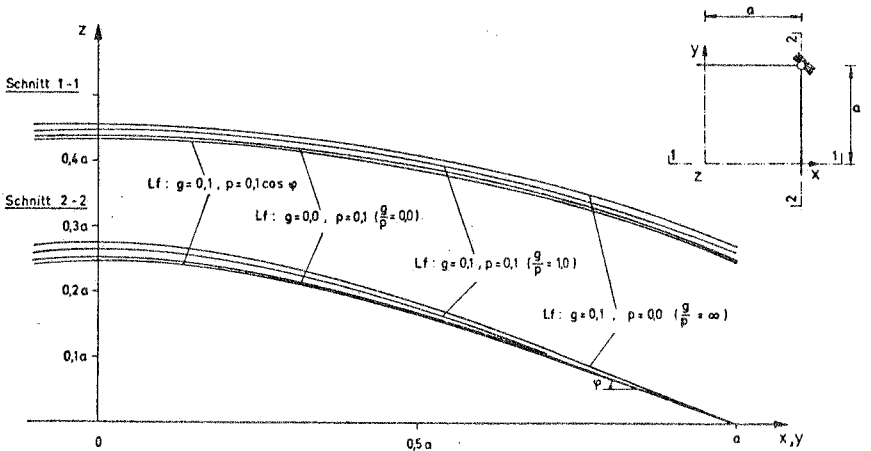


Bild 4.24: Membranschalen verschiedener Lastkombinationen aus Eigengewicht g und konstanter p oder veränderlicher vertikaler Flächenlast $p \cos \phi$, Parameter $C = 0,5$, Scheitelhöhe des Randes $H = 0,5a$ bei $g/p = 0$

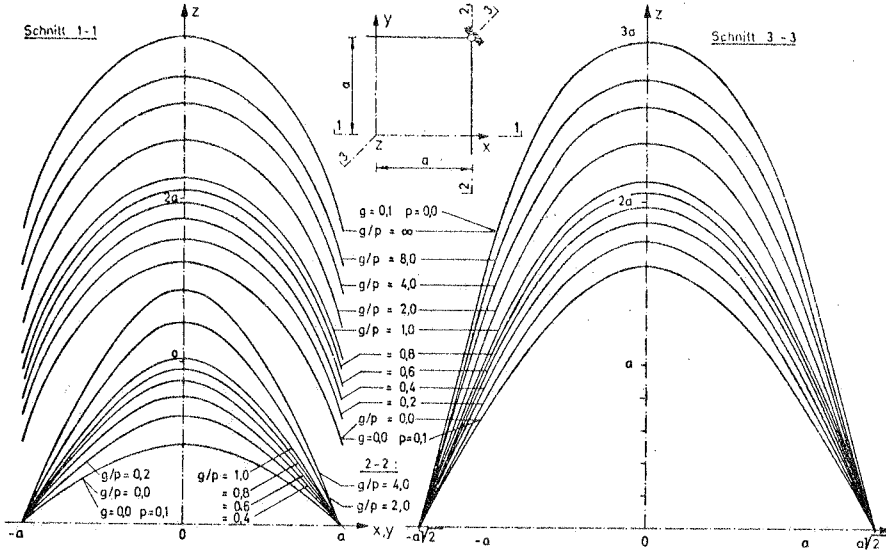


Bild 4.25: Membranschalen verschiedener Lastkombinationen aus Eigengewicht g und konstanter vertikaler Flächenlast p , Parameter $C = 0,4$, Scheitelhöhe des Schalenrandes $H = 0,5a$ bei $g/p = 0$

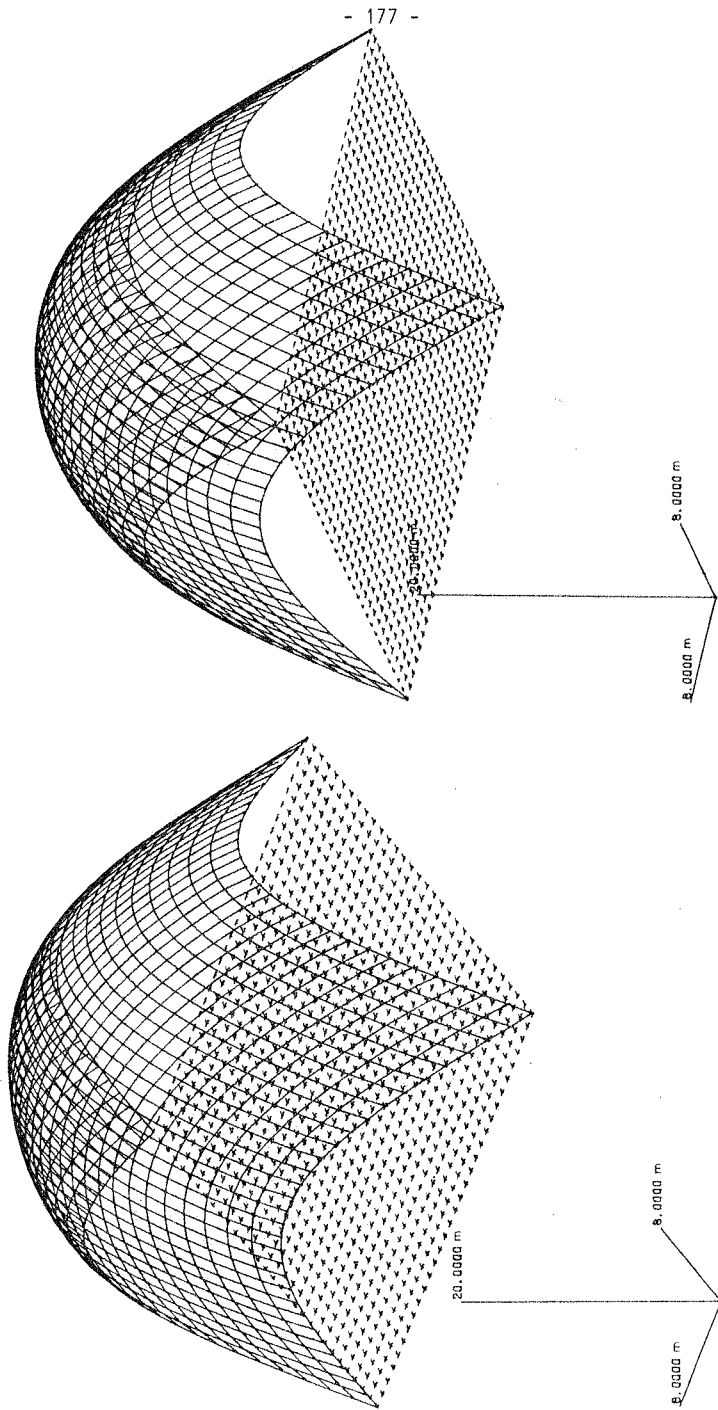


Bild 4.26: Randträgerlose Kuppelschale entworfen für die Lastgruppe Eigengewicht $g = 2,0 \text{ kN/m}^2$ und konstante, vertikale Flächenlast $p = \text{kN/m}^2$, Parameter $C = 0,45$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0 \text{ m}$, Scheitelhöhe = $23,0 \text{ m}$, maximale Höhe am Schalenrand = $12,97 \text{ m}$

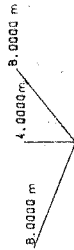
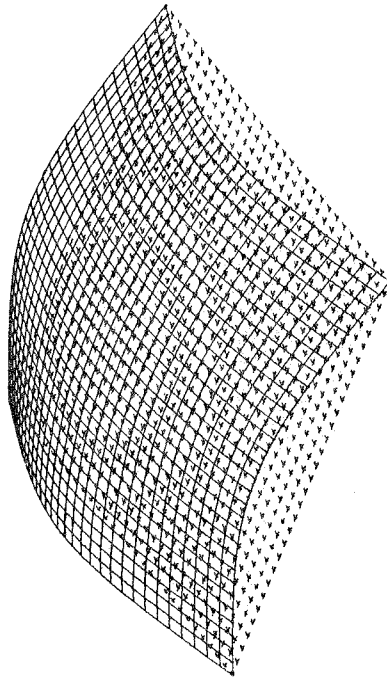


Bild 4.27: Randträgerlose Kuppelschale entworfen für die Lastgruppe Eigengewicht $g = 0,2 \text{ kN/m}^2$ und konstante, vertikale Flächenlast $p = 0,75 \text{ kN/m}^2$, Parameter $C = 0,50$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0 \text{ m}$, Scheitelhöhe = $7,22 \text{ m}$, maximale Höhe am Schalenrand = $4,30 \text{ m}$

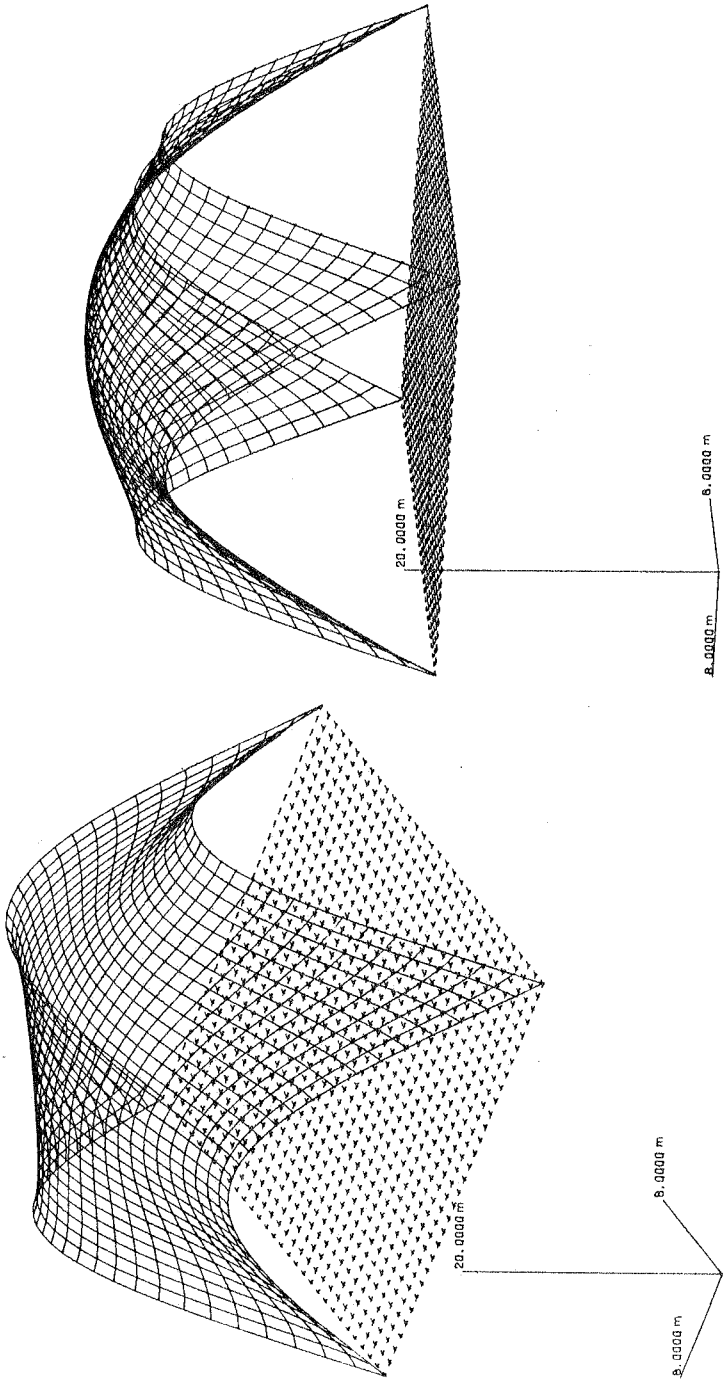


Bild 4.28: Randträgerlose Kuppelschale entworfen für die Lastgruppe Eigengewicht $g = 2,0 \text{ kN/m}^2$ und konstante, vertikale Flächenlast $p = 0,75 \text{ kN/m}^2$, Parameter $C = 0,54$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0 \text{ m}$, Scheitelhöhe = $21,85 \text{ m}$, maximale Höhe am Schalenrand = $17,84 \text{ m}$

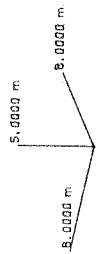
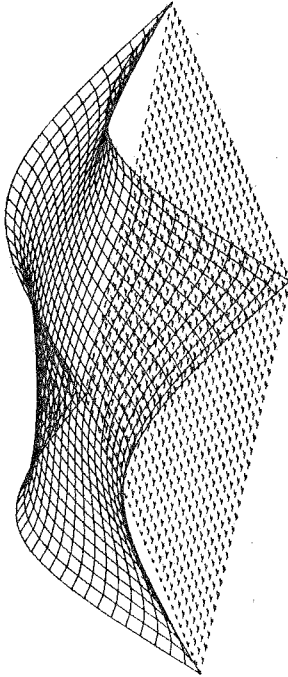
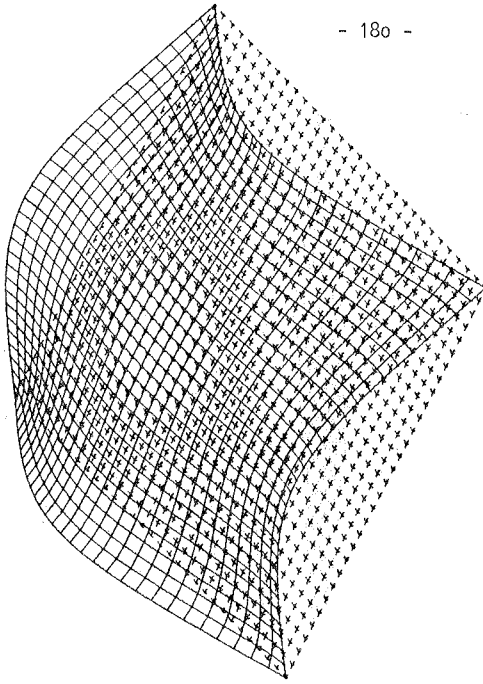


Bild 4.29: Randträgerlose Kuppelschale entworfen für die Lastgruppe Eigengewicht $g = 2,0 \text{ kN/m}^2$ und konstante, vertikale Flächenlast $p = 0,75 \text{ kN/m}^2$, Parameter $C = 0,55$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0 \text{ m}$, Scheitelhöhe = $8,62 \text{ m}$, maximale Höhe am Schalenrand = $8,02 \text{ m}$

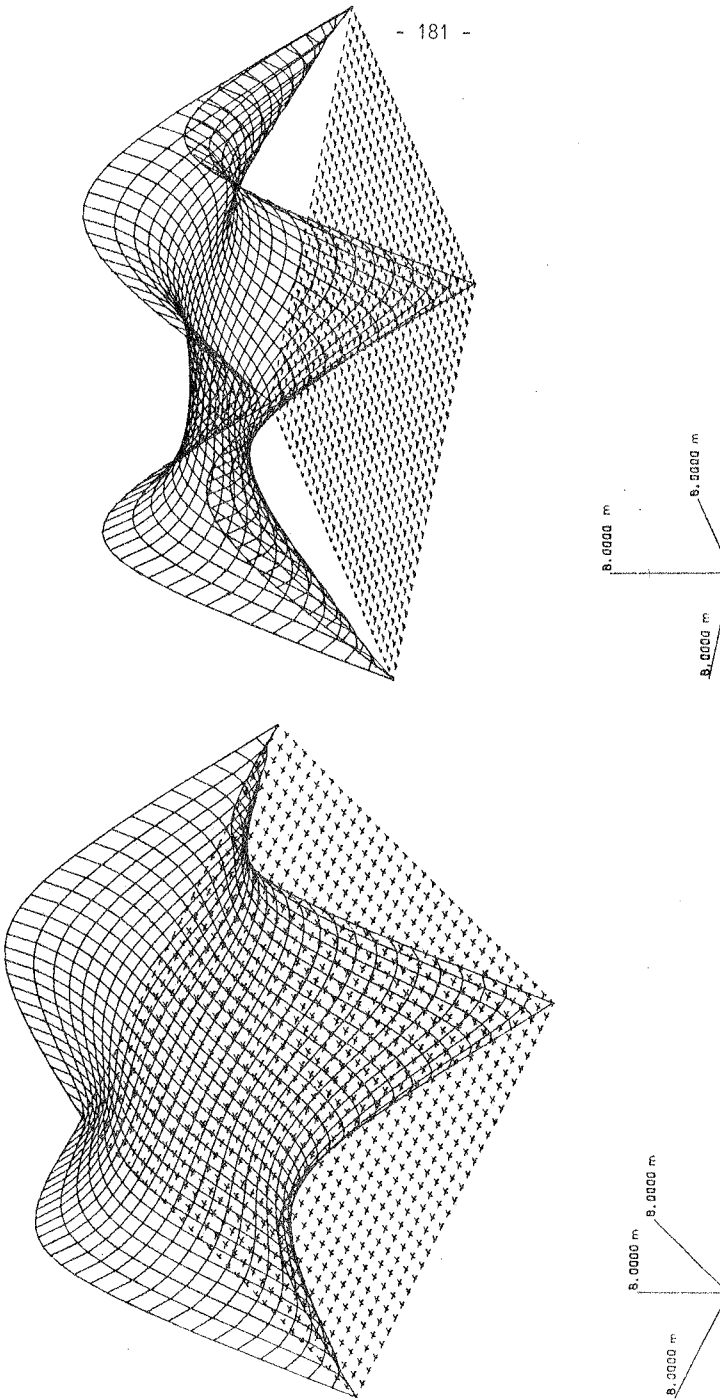


Bild 4.30: Randträgerlose Kuppelschale entworfen für die Lastgruppe Eigengewicht $g = 2,0 \text{ kN/m}^2$ und konstante, vertikale Flächenlast $p = 0,75 \text{ kN/m}^2$, Parameter $C = 0,58$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0 \text{ m}$, Scheitelhöhe = $11,04 \text{ m}$, maximale Höhe am Schalenrand = $15,0 \text{ m}$

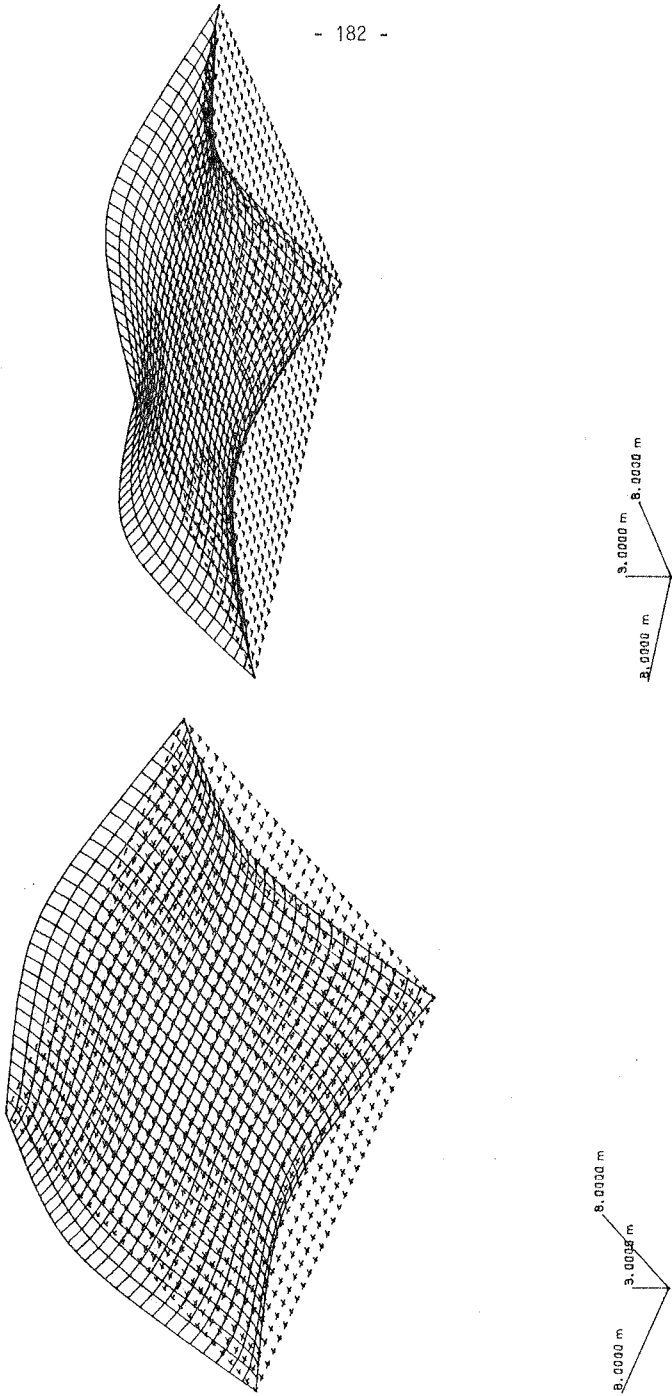


Bild 4.31: Randträgerlose Kuppelschale entworfen für die Lastgruppe Eigengewicht $g = 2,0 \text{ kN/m}^2$ und konstante, vertikale Flächenlast $p = 0,75 \text{ kN/m}^2$, Parameter $C = 0,58$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0 \text{ m}$, Scheitelhöhe = $2,99 \text{ m}$, maximale Höhe am Schalenrand = $4,50 \text{ m}$

4.5.2 Genäherte Beschreibung der Membranschalenmittelfläche durch einen Polynomansatz

Die Schalenmittelfläche kann näherungsweise durch ein symmetrisches Polynom vierten Grades dargestellt werden.

$$\begin{aligned}
 z(x,y) = & B(1) x^4 y^4 + B(2) x^4 y^3 + B(3) x^4 y^2 + B(4) x^4 \\
 & + B(5) x^3 y^4 + B(6) x^3 y^3 + B(7) x^3 y^2 + B(8) x^3 \\
 & + B(9) x^2 y^4 + B(10) x^2 y^3 + B(11) x^2 y^2 + B(12) x^2 \\
 & + B(13) y^4 + B(14) y^3 + B(15) y^2 + B(16)
 \end{aligned} \quad (30)$$

Die Randbestimmungen entlang der x-Achse ($z_y = 0$) und entlang der y-Achse ($z_x = 0$) werden durch diesen Ansatz erfüllt. Die Ansatzkonstanten $B(i)$ können bestimmt werden, wenn die Gleichung (30) für $n = 16$ notwendige Punkte $P(x,y,z)$ erfüllt wird. Folgendes lineare Gleichungssystem muß dann gelöst werden:

$$A_{i,j} B_{i,j} - z_{i,j} = 0, \quad i = 1, m, \quad j = 1, n, \quad m = n \quad (31)$$

Nachstehende Werte für die Ansatzkonstanten $B(i)$ ergeben sich, wenn die Schalenform, die in Bild 4.30 (3. Gruppe, $C = 0,58$) dargestellt ist, durch diesen Polynomansatz beschrieben wird.

ANSATZWERTE B(I)

	1	2	3	4
1	-.284689333E+03	.391148696E+03	-.123978403E+03	.102069000E+02
2	.391148696E+03	-.583623225E+03	.220376419E+03	-.333283500E+01
3	-.123978403E+03	.220376419E+03	-.125744126E+03	-.291080500E+01
4	.102069000E+02	-.333283500E+01	-.291080500E+01	.110367400E+02

Die mit dem Polynomansatz gefundene Schalenmittelfläche weicht jedoch im Rand- und Auflagerbereich von der wirklichen Membranschale bis zu $\pm 5\%$ der ursprünglichen Höhe ab.

Die Abweichungen können mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate [7.14, 3.14] verringert werden, wenn mehr als die gerade notwendige Anzahl von n

Punkten $P(x,y,z)$ der Mittelfläche zur Bestimmung der Ansatzkonstanten $B(i)$ existieren.

Die Bedingung, daß die Fehlerquadratsumme ein Minimum ist, wird durch Vormultiplikation des linearen Gleichungssystems (31) mit der transponierten Koeffizientenmatrix $A_{j,i}^T$ (Gauss'sche Transformation) erreicht.

$$A_{j,i}^T A_{i,j} B_{i,1} - A_{j,i}^T z_{i,1} = 0 \quad , \quad i = 1,m \quad j = 1,n \quad m > n \quad (32)$$

Die 16 Ansatzkonstanten $B(i)$ verändern sich wie folgt, wenn 64 Punkte $P(x,y,z)$ zur Verfügung stehen um sie zu bestimmen:

ANSATZWERTE B(I)

	1	2	3	4
1	-.473447505E+03	.721570859E+03	-.273230770E+03	.187586514E+02
2	.721570853E+03	-.115804021E+04	.476852987E+03	-.173966248E+02
3	-.273230764E+03	.476852981E+03	-.237952951E+03	.272119397E+01
4	.187586508E+02	-.173966240E+02	.272119370E+01	.109756659E+02

Die größte Abweichung der z-Ordinaten von der wirklichen Schalenform beträgt dann $\pm 3,5\%$ (Bild 4.33).

Stehen 256 Punkte zur Verfügung, um mit der Methode des kleinsten Fehlerquadrates die 16 Konstanten B zu bestimmen, verringert sich die größte Abweichung der z-Koordinaten auf $\pm 2,7\%$ des ursprünglichen Wertes.

Die Konstanten $B(i)$ nehmen dann folgende Werte an:

ANSATZWERTE B(I)

	1	2	3	4
1	-.427927256E+03	.645572274E+03	-.240633431E+03	.170101817E+02
2	.645572271E+03	-.103251149E+04	.423261159E+03	-.147649845E+02
3	-.240633428E+03	.423261156E+03	-.215239331E+03	.169479083E+01
4	.170101815E+02	-.147649842E+02	.169479074E+01	.109131110E+02

Da die z-Koordinaten der mit einem Polynomansatz vierten Grades angenäherten Fläche im günstigsten Fall um 2,7% von Koordinaten der wirklichen Schalenmittelfläche abweichen, werden symmetrische Polynomansätze fünften (33) und sechsten (34) Grades mit einer größeren Anzahl von Ansatzkonstanten $B(i)$ untersucht.

$$\begin{aligned} z(x,y) = & B(1) x^5 y^5 + B(2) x^5 y^4 + B(3) x^5 y^3 + B(4) x^5 y^2 + B(5) x^5 \\ & + B(6) x^4 y^5 + B(7) x^4 y^4 + B(8) x^4 y^3 + B(9) x^4 y^2 + B(10) x^4 \\ & + B(11) x^3 y^5 + B(12) x^3 y^4 + B(13) x^3 y^3 + B(14) x^3 y^2 + B(15) x^3 \\ & + B(16) x^2 y^5 + B(17) x^2 y^4 + B(18) x^2 y^3 + B(19) x^2 y^2 + B(20) x^2 \\ & + B(21) y^5 + B(22) y^4 + B(23) y^3 + B(24) y^2 + B(25) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} z(x,y) = & B(1) x^6 y^6 + B(2) x^6 y^5 + B(3) x^6 y^4 + B(4) x^6 y^3 + B(5) x^6 y^2 + B(6) x^6 \\ & + B(7) x^5 y^6 + B(8) x^5 y^5 + B(9) x^5 y^4 + B(10) x^5 y^3 + B(11) x^5 y^2 + B(12) x^5 \\ & + B(13) x^4 y^6 + B(14) x^4 y^5 + B(15) x^4 y^4 + B(16) x^4 y^3 + B(17) x^4 y^2 + B(18) x^4 \\ & + B(19) x^3 y^6 + B(20) x^3 y^5 + B(21) x^3 y^4 + B(22) x^3 y^3 + B(23) x^3 y^2 + B(24) x^3 \\ & + B(25) x^2 y^6 + B(26) x^2 y^5 + B(27) x^2 y^4 + B(28) x^2 y^3 + B(29) x^2 y^2 + B(30) x^2 \\ & + B(31) y^6 + B(32) y^5 + B(33) y^4 + B(34) y^3 + B(35) y^2 + B(36) \end{aligned} \quad (34)$$

In der nachstehenden Tabelle 4.32 sind die größten Abweichungen $\max \Delta z$ von der durch Polynome vierten, fünften und sechsten Grades genäherten Anzahl von Punkten zur Bestimmung der Polynomansatzkonstanten dargestellt. Dabei werden die Abweichungen der z-Koordinaten von der wirklichen Schalenfläche mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate verringert, wenn mehr als die gerade notwendige Anzahl von Punkten der Fläche zur Bestimmung der Ansatzkonstanten vorhanden sind.

	Symmetrische Polynome								
	4. Grades 16 Ansatz- konstante			5. Grades 25 Ansatz- konstante			6. Grades 36 Ansatz- konstante		
Anzahl der Punkte zur Bestimmung der Konstanten $B(i)$	16	64	256	25	64	256	36	64	256
Größte Abweichung Δz in % der ursprünglichen Höhe	5,0	3,54	2,7	2,8	1,9	0,8	1,5	1,0	0,4

Tab. 4.32: Größte Abweichung max Δz von der durch Polynome vierten, fünften und sechsten Grades angenäherten Schalenmittelfläche (Bild 4.30) bei einer unterschiedlichen Anzahl von Punkten $P_i(x,y,z)$ zur Bestimmung der Ansatzkonstanten $B(i)$.

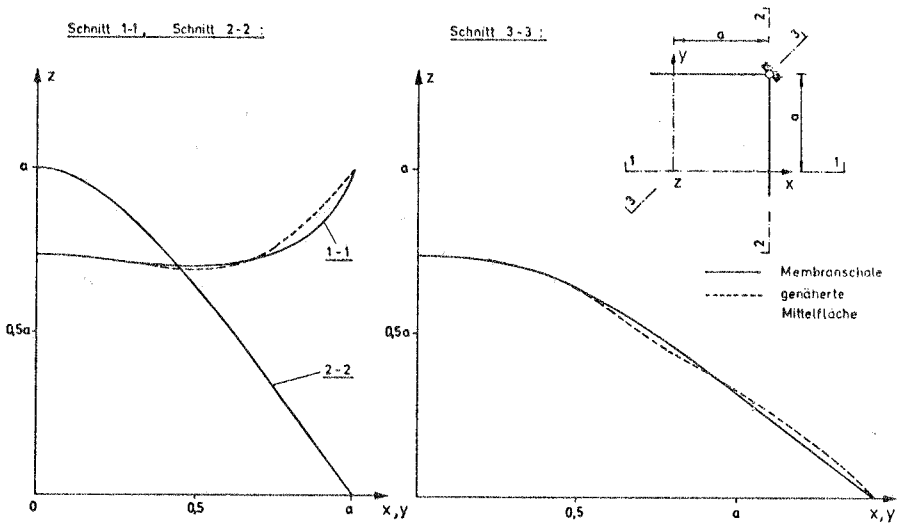


Bild 4.33: Näherung der Membranschalenmittelfläche ($C = 0,58$, Bild 4.30) durch ein Polynom 4. Grades (16 Stützpunkte, Abschnitt 4.5.2)

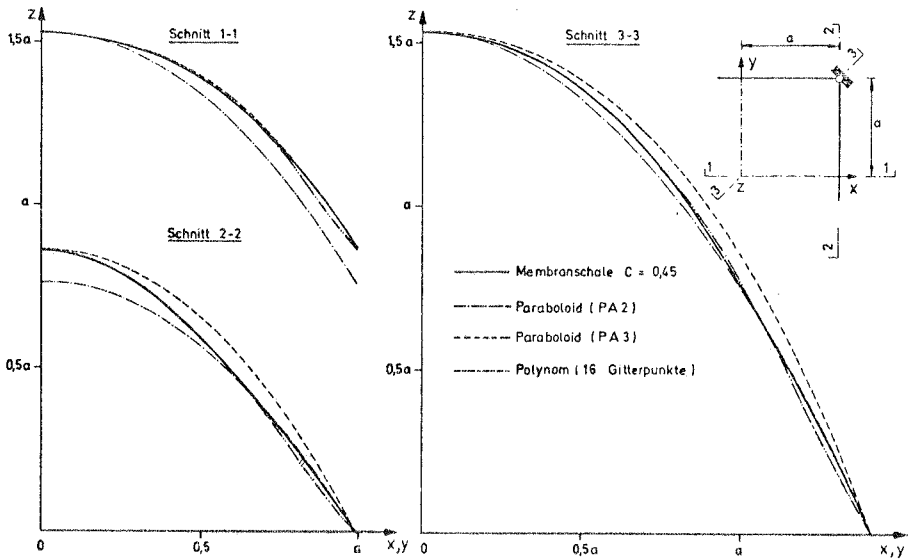


Bild 4.34: Näherung der Membranschalenmittelfläche ($C = 0,45$, Bild 4.26) durch ein Polynom 4. Grades (16 Stützpunkte, Abschn. 4.5.2) und durch Paraboloid (Bild 2.18, 2.19).

4.6 Vergleich der möglichen Gleichgewichtslagen 'unverformter' und geometrisch nichtlinear verformter Membranen

Für eine zwei- und dreidimensionale Membran soll gezeigt werden, daß die Gleichgewichtslage der 'unverformten' Membran mit der Gleichgewichtslage einer, aus einer Ausgangslage nicht linear verformten Membran eines linear elastischen, isotropen Materials für den gleichen Lastfall und die gleichen Lagerungsbedingungen formal übereinstimmen können.

Die Membranen werden 'unverformt' genannt, wenn ihre Gleichgewichtslagen direkt aus einer Kräftegleichgewichtsbeziehung und nicht durch eine geometrisch nichtlineare Verformung der belasteten Membran aus einer Ausgangslage heraus, gefunden werden.

Gleichgewichtslagen geometrisch nichtlinear verformter, zwei- oder mehrdimensionaler Membranen unter Eigengewichts- oder konstanten Flächenlasten bei punkt- oder linienförmiger Lagerung werden in [1.11, 1.12; 4.14] aufgezeigt.

4.6.1 Gleichgewichtslage der 'unverformten' zweidimensionalen Membran
(z.B. Seil)

Lastfall: Radial gerichtete Linienlast p_r (kN/m)

Lagerungsbedingungen: Freie Lagerung

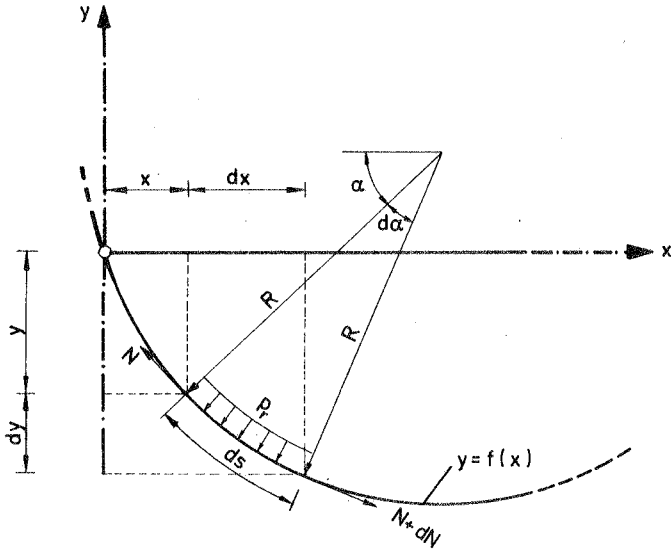


Bild 4.35: Gleichgewichtslage des 'unverformten' Seiles

Gleichgewichtsbedingungen am 'unverformten' Seil

in tangentialer Richtung:

$$N = R(N + dN)$$

$$dN = 0 \quad \text{oder} \quad N = N_0 = \text{Konstant} \quad (35)$$

in radialer Richtung:

$$p_r ds = 2 N \frac{d\alpha}{2} = N d\alpha$$

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{N}{p_r} = \frac{N_0}{p_r} \quad (36)$$

Geometrische Beziehungen:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{y_{xx}}{\sqrt{(1+y_x^2)^3}} \quad (37)$$

$$ds = r \, d\alpha \quad (38)$$

Mit den Gleichungen (36), (37) und (38) erhält man die Gleichgewichtsbedingungen einer 'unverformten' Membran für eine radiale Belastung p_r .

$$y_{xx} - \sqrt{(1+y_x^2)^3} \frac{p_r}{N_0} = 0 \quad (39)$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist der Kreis $y = f(x)$

$$y^2 + x^2 = R^2 \quad (40)$$

mit dem Radius $R = \frac{N_0}{p_r}$

4.6.2 Gleichgewichtslage der geometrisch nichtlinear verformten zweidimensionalen Membran aus einem linear elastischen, isotropen Material

Lastfall:

Radial gerichtete Linienlast p_r (kN/m)

Lagerungsbedingungen:

Freie Lagerung

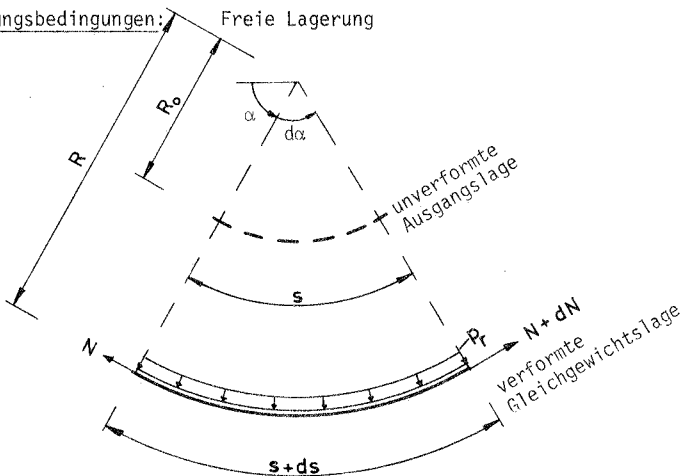


Bild 4.36: Gleichgewichtslage der aus einer Ausgangslage heraus geometrisch nichtlinear verformten, zweidimensionalen Membran.

Gleichgewicht an der verformten Membran:

in tangentialer Richtung:

$$R N = R (N + dN)$$

$$dN = 0 \quad \text{oder}$$

$$N = N_0 = \text{Konstant} \quad (35)$$

in radialer Richtung:

$$p_r (s + ds) = 2 N \frac{d\alpha}{2} = N d\alpha \quad \text{oder}$$

$$p_r R = N = N_0 \quad (41)$$

Geometrische Beziehung:

$$s = R_0 d\alpha \quad (42)$$

Kinematische Gleichung:

$$s + ds = R_0 d\alpha$$

$$ds = R d\alpha - s = R d\alpha - R_0 d\alpha$$

$$\epsilon_x = \frac{R d\alpha - R_0 d\alpha}{R_0 d\alpha} = \frac{R}{R_0} - 1 \quad (43)$$

Lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung:

eines isotropen Materials

$$\sigma = \epsilon E = \frac{N}{F} \quad \text{oder} \quad \epsilon = \frac{N}{E F} \quad (44)$$

mit Gleichung (41), (42) und (43) erhält man

$$\frac{p_r R}{E F} = \frac{R}{R_0} - 1 \quad \text{oder}$$

$$R = \frac{R_0 E F}{E F - p_r R_0} \quad (45)$$

Der Radius R (45) der verformten Membran wird bei einer linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung unendlich groß, wenn die äußere Drucklast den Wert

$$p_r = \frac{E F}{R_0} \quad \text{erreicht.}$$

Die Gleichgewichtslage der unter einer radialgerichteten Linienlast p_r (kN/m) verformten Membran ist ein Kreisbogen mit dem Radius

$$R = \frac{R_0 E F}{E F - p_r R_0}$$

Die Gleichgewichtslage einer 'unverformten' zweidimensionalen Membran ist für den Lastfall konstante radialgerichtete Streckenlast ein Kreisbogen. Der Kreisbogen ist ebenfalls die Gleichgewichtslage einer geometrisch nichtlinear verformten, linear elastischen Membran für den gleichen Lastfall. Beide Gleichgewichtslagen stimmen hinsichtlich der Form überein.

4.6.3 Gleichgewichtslage der 'unverformten' dreidimensionalen Membran

Die Gleichgewichtsbedingungen der Membrantheorie liefern für Rotationsschalen unter rotationssymmetrischer Belastung folgende Differentialgleichungen [2.2] :

$$\frac{d}{d\phi}(r N_\phi) - r_1 N_\theta \cos\phi = - p_\phi r r_1 \quad (46)$$

$$\frac{d}{d\phi}(r N_{\phi\theta}) + r_1 N_{\theta\phi} \cos\phi = - p_\theta r r_1 \quad (47)$$

$$N_\phi r_2 + N_\theta r_1 = p_r r_1 r_2 \quad (48)$$

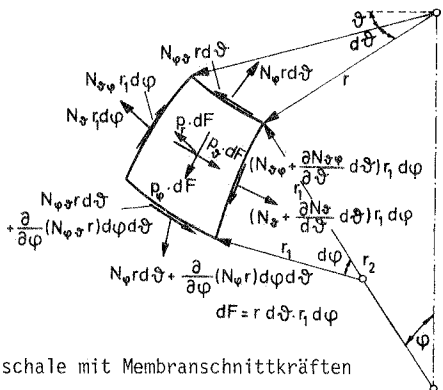


Bild 4.37: Element einer Rotationsschale mit Membranschnittkräften

Gleichung (47) enthält nur die Schubkraft $N_{\theta\phi}$. Sie stellt eine Art Torsion der Schale um ihre Achse für die rotationssymmetrische Belastung p_θ in Ringrichtung dar. Diese Differentialgleichung 1. Ordnung kann gesondert gelöst werden. Da beim Lastfall konstanter Druck $p_\theta = 0$ ist, werden die Schubkräfte $N_{\theta\phi} = 0$. Mit (48) wird N_θ aus (46) eliminiert und man erhält eine Differentialgleichung erster Ordnung zur Berechnung von N_ϕ . Durch Integration wird die gesuchte Schnittkraft N_ϕ gefunden:

$$N_\phi = \frac{1}{r_2 \sin^2 \phi} \left\{ \int r_1 \cdot r_2 (p_r \cos \phi - p_\phi \sin \phi) \sin \phi \, d\phi + C \right\} \quad (49)$$

N_θ wird mit (48) zu:

$$N_\theta = r_2 \left(p_r - \frac{N_\phi}{r_1} \right) \quad (50)$$

Lastfall konstanter Druck: $p_\phi = 0$, $p_r = \text{konstant}$

Lagerungsbedingung: Freie Lagerung

Die Konstante C wird Null, um im Scheitel ($\phi = 0$) eine endliche Normalkraft N zu erhalten. Die Normalkräfte ergeben sich dann mit (49) und (50) zu

$$N_\phi = \frac{p_r r_1}{2} \quad (51)$$

$$N_\theta = \frac{p_r r_2}{2} \quad (52)$$

Für eine geschlossene kugelförmige Membran mit dem Krümmungsradius $r_1 = r_2 = R$ werden die Membrankräfte (51, 52) gleich groß:

$$N_\phi = N_\theta = p_r R/2 \quad (53)$$

Die Kugel ist für diesen Lastfall eine Membran gleicher Festigkeit.

Die Differentialgleichung für weitere 'unverformte' Gleichgewichtslagen rotationssymmetrischer Membranen unter konstantem Druck findet Tölke [4.19] bei geeigneter Zusammenfassung der Kräftegleichgewichtsbeziehung am Schalenelement mit der Bedingung einer Schale gleicher Festigkeit ($N_\phi = N_\theta = N_0$). Er führt die Lösung dieser Differentialgleichung auf ein Integral zurück, das sich durch Legendre'sche Normalintegrale erster und zweiter Gattung [7.3] darstellen läßt.

Die Kugel ist bei diesen Gleichgewichtslagen die einzige Lösungsform, die auf eine geschlossene Fläche führt (Bild 4.38). Eine weitere Grenzfläche stellt der

Zylinder dar. Die zwischen Zylinder und Kugel liegenden Erzeugenden münden alle mit lotrechter Tangente in ihre Endlage $x = x_{\min}$ ein; zwischendurch findet ein Krümmungswechsel statt. Innerhalb der Kugel steigt die innere Kurvenschar zunächst an, erreicht dann ein Maximum und fällt zum Schluß wieder ab. Auch diese Kurvenschar hat eine vertikale Tangente im Endpunkt. Wendepunkte der oberen und Maximalstellen der unteren Kurvengruppe stimmen lagemäßig überein. Der Grenzlage der inneren Kurvenschar ist ein Kreis um den Punkt $\xi = 1, \eta = 0$ mit unendlich kleinem Halbmesser, also ein Punkt zugeordnet; demgemäß artet die Rotationsfläche in einen Punktreifen aus.

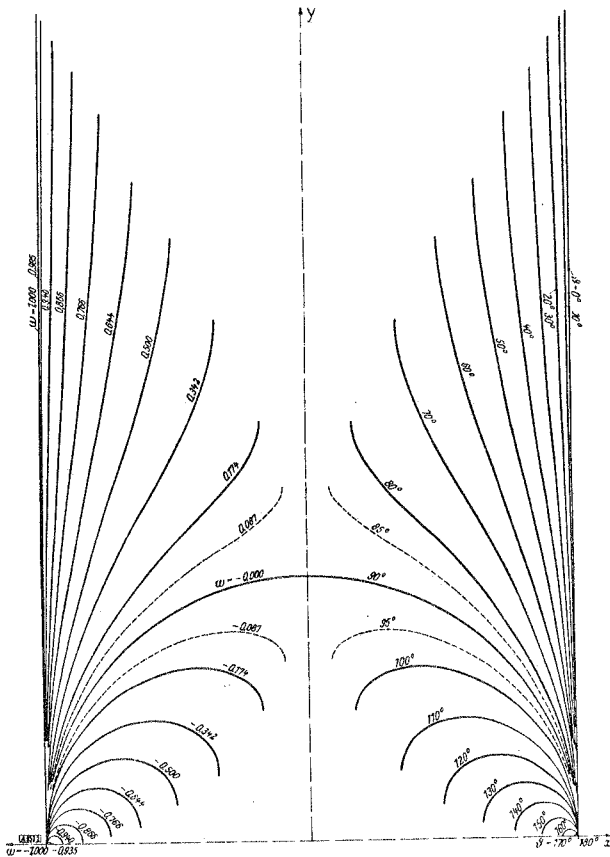


Bild 4.38: 'Unverformte' Gleichgewichtslagen von Rotationsschalen gleicher Festigkeit für konstanten Innen- oder Aussendruck [4.19].

4.6.4 Gleichgewichtslage der geometrisch nichtlinear verformten dreidimensionalen Membran aus einem linear elastischen, isotropen Material

Lastfall: Konstanter Innen- oder Außendruck p_r (kN/m²)

Lagerungsbedingung: Freie Lagerung

Die verformte Gleichgewichtslage der ursprünglichen Vollkugelmembran mit dem Anfangsradius R_0 wird in [1.12] aufgezeigt.

Der Verformungszustand ist kugelsymmetrisch, sodaß für den Verschiebungsvektor folgt:

$$V = V_R \bar{e}_R = (R - R_0) \bar{e}_R \quad (54)$$

R bezeichnet den Radius nach der Verformung und \bar{e}_R den Einheitsvektor eines kartesischen Koordinatensystems in Richtung der Flächennormalen.

Die Verzerrungen ϵ_1 und ϵ_2 des Flächenelementes entlang den Hauptdehnungslinien sind bei diesem Lastfall gleich groß:

$$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{R}{R_0} - 1 \quad (55)$$

Die Gleichheit der von den Winkeln θ und ϕ (Bild 4.37) unabhängigen Dehnungen bedingt auch konstante und gleiche Membranschnittlasten $N_\phi = N_\theta = N_0$, für die man aus den Gleichgewichtsbedingungen am verformten System

$$N_0 = \frac{p_r R}{2} \quad (56)$$

findet. Mit der linear elastischen, Spannungs-Dehnungs-Beziehung gewinnt man den Zusammenhang zwischen den Kugelradien R der verformten Membran und der Belastung p_r .

$$N_0 = \frac{p_r R}{2} = \frac{E t}{1-\nu^2} (\epsilon_1 + \nu \epsilon_2) = \frac{E t}{1-\nu} \left(\frac{R}{R_0} - 1 \right) \quad (57)$$

Die Gleichgewichtslage der Kugel mit dem Radius R der nichtlinear verformten Membran, der Belastung p_r und dem Radius R_0 der unverformten kugelförmigen Membran ergibt sich mit dem Elastizitätsmodul E eines isotropen Materials und der Membrandicke t zu:

$$R = \frac{2 E t R_0}{2 E t - p_r R_0 (1-\nu)} \quad (58)$$

Der Radius R der verformten Membran wird bei einer linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung unendlich groß, wenn die äußere Drucklast den Wert

$$p_r = \frac{2 E t}{R_0 (1-\nu)} \quad (59)$$

erreicht (Bild 4.39).

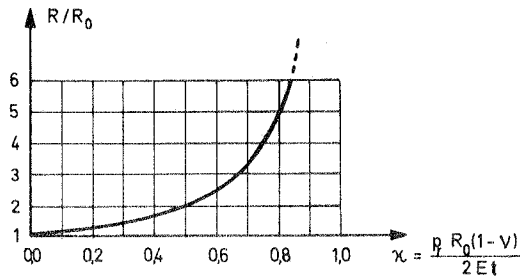
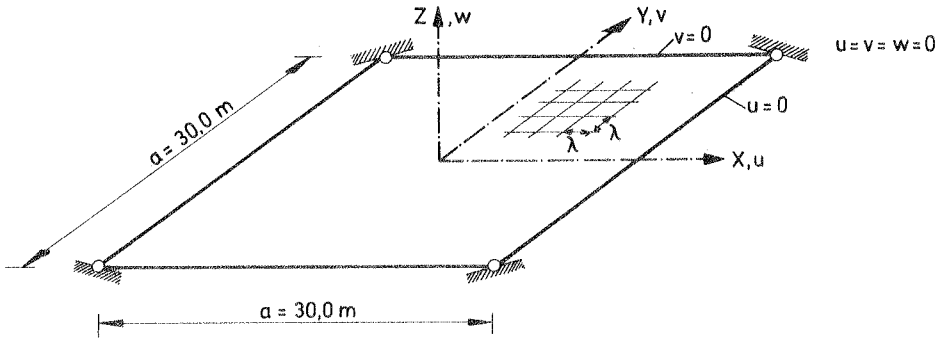


Bild 4.39: Gleichgewichtslagen (R/R_0) geometrisch nichtlinear verformter, linear elastischer Membranen für den Lastfall konstanter Innendruck p_r .

4.6.5 Vergleich zwischen der Form einer Membranschale und der Gleichgewichtslage einer, aus einer ebenen Ausgangslage geometrisch nichtlinear verformten, linear elastischen, isotropen Membran

Eine quadratische, linear elastische Membran wird in den Ecken horizontal unverschieblich gelagert. Der freie Rand kann sich in Richtung der X- oder Y-Achse horizontal nicht verschieben (Bild 4.40).

Die Gleichgewichtslage der nicht durch Innendruck, sondern hier durch ihr Eigengewicht verformten Membran wurde mit einem geometrisch nichtlinearen finiten, rechteckigen Membranelement [4.18] ermittelt.



Seitenlänge des Quadrates	$a = 30,0 \text{ m}$
Gitterlinienabstand	$\lambda = 1,5 \text{ m}$
Membrandicke	$t = 0,4 \text{ m}$
Elastizitätsmodul	$E = 1200 \text{ kN/m}^2$
Eigengewicht	$g = 0,60 \text{ kN/m}^2$

Bild 4.40: Ausgangslage der unverformten, linear elastischen, isotropen Membran.

Wenn die Form einer durch ihr Eigengewicht geometrisch nichtlinear verformten, linear elastischen, isotropen Membran umgekehrt wird, stimmt sie mit der Form einer Membranschale im wesentlichen überein (Bild 4.41 a,b). Die Form der Membranschale geht für den Parameter $C = 0,5273$ der Spannungsfunktion (13) aus der Differentialgleichung (1) für beliebige Beträge der Eigengewichtslasten hervor. Die z -Ordnaten beider Gleichgewichtslagen unterscheiden sich im Scheitel und entlang des Randes nur um Millimeterbeträge. Im Auflagerbereich weichen sie um einige Zentimeter voneinander ab.

Die unwesentlichen Abweichungen beider Formen entstehen, weil beide Gleichgewichtslagen durch eine numerische Berechnung gefunden werden. Außerdem wird die Gleichgewichtslage der Membranschale durch Kräfte- und Randbedingungen, die Gleichgewichtslage der geometrisch nichtlinear verformten Membran durch Verschiebungs- und Randbedingungen festgelegt.

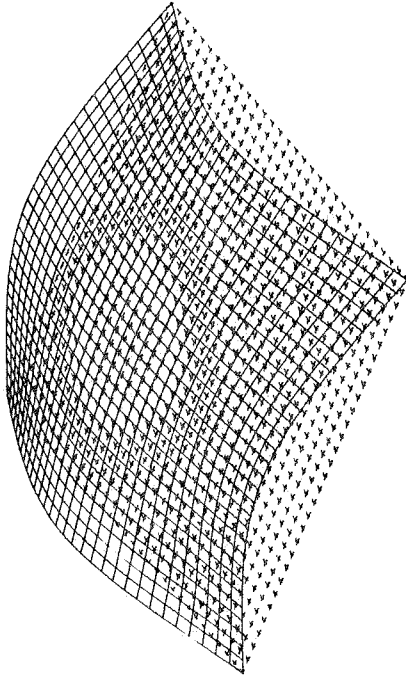


Bild 4.41a: Randträgerlose Kuppelschale, entworfen für den Lastfall Eigengewicht g (N/m^2), beliebige Lastordinate, Parameter $C = 0,5273$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0$ m, Scheitelhöhe = $6,72$ m, maximale Höhe am Schalenrand = $4,87$ m

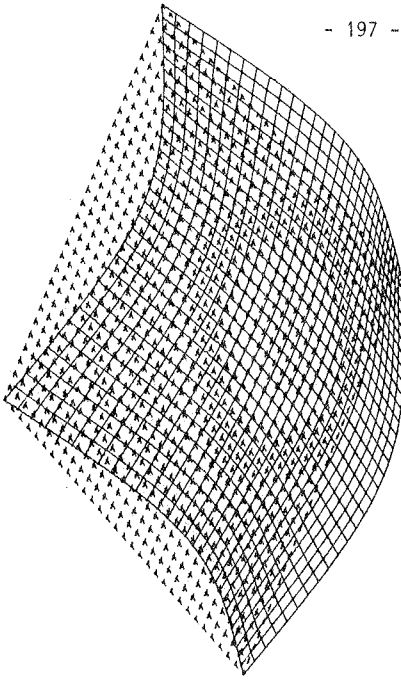


Bild 4.41b: An den Ecken unverschieblich gelagerte, verformte Membran, Lastfall Eigengewicht $g = 600$ N/m^2 , Elastizitätsmodul = 120 N/cm^2 , konstante Dicke = 40 cm, Seitenlänge des Quadrates = $30,0$ m, maximale, vertikale Verschiebung in der Mitte = $6,72$ m, am Rand = $4,87$ m

4.6.6 Gleichgewichtslagen in den Ecken horizontal unverschieblich, punktförmig gelagerter Membranen mit Falten

Lastfälle: Konstante vertikale Flächenlast mit beliebigem Betrag p oder Lastgruppe q mit beliebigem Betrag aus Eigengewicht g und konstanter vertikaler Flächenlast p (z.B. $g = 2,0 \text{ kN/m}^2$, $p = 0,75 \text{ kN/m}^2$).

Parameter C der Spannungsfunktion (6): $C \geq 0,625$

Diese Parameter C verändern vollständig das Aussehen der bisher verwendeten Spannungsfunktion (Abschnitt 4.3.2c) und gefundenen Membranschalen. Die z-Ordinate des Schalenscheitels erhält ein negatives Vorzeichen und wandert unter die x-y-Ebene, während sich in Auflagernähe entlang der Diagonalen faltenähnliche Gebiete bilden, deren z-Ordinaten negative und positive Vorzeichen aufweisen (Bild 4.42 und 4.43).

Für vorgespannte Membranformen, deren Gleichgewichtslagen mit der geometrisch nichtlinearen Membrantheorie bestimmt werden, gibt Trostel in [1.12] folgende Bedingung an, die verhindert, daß z.B. in der Membran bei Zusammenwirkung der äußeren Lasten und der Innendruckbelastung keine größeren Faltungserscheinungen auftreten:

An keiner Stelle der Membran sollen Druckspannungen auftreten. Die minimale Hauptspannung σ_2 muß noch eine Zugspannung sein.

$$\sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0$$

Diese Bedingung wurde auch durch Versuche bestätigt.

Neben Faltungserscheinungen, die auf Nichterfüllung der Hauptspannungsbedingung zurückzuführen sind, entstehen im allgemeinen im Randbereich der Membranen kleinere Faltungen, die für die Standsicherheit des Tragwerkes unerheblich sind. Diese Falten entstehen, weil sich der Verformungszustand der Membran innerhalb eines kleinen Randbereiches an denjenigen eines Randgliedes oder an Lagerungsbedingungen anpassen muß.

a) Gleichgewichtslage einer Membran für den Parameter $C = 0,63$ der Spannungsfunktion (Bild 4.42)

Lastfall: Konstante Grundrißlast p

Die Gleichgewichtslage besitzt relativ geringe Normalkrümmungen in Faltenlängsrichtung und einen mehrmaligen Vorzeichenwechsel der Normalkrümmung in Falten-

querrichtung.

Im Scheitelbereich der Membran treten in beiden Richtungen Hauptzugspannungen auf. Dieses Gebiet der Membran weist deshalb keine Falten auf.

Im Auflagerbereich wachsende Hauptzugspannungen σ_1 verlaufen entlang der Diagonalen. Senkrecht zu diesen Hauptzugspannungen σ_1 sind im Auflagerbereich Hauptdruckspannungen σ_2 vorhanden, deren Größe ca. 1/10 bis 1/20 der Beträge der Hauptzugspannungen ausmachen (Bild 4.44 und 4.45). Dieser Spannungsverlauf bewirkt, daß die dazugehörenden Gleichgewichtslagen der Membran in Auflagernähe faltenähnliche Gebiete bilden [vgl. 1.12] .

b) Gleichgewichtslage einer Membran für den Parameter $C = 0,65$ der Spannungsfunktion (Bild 4.43).

Lastfall: Lastgruppe aus Eigengewicht $g = 2,0 \text{ kN/m}^2$ und $p = 0,75 \text{ kN/m}^2$ (Bild 4.20)

Der im Gegensatz zu Abschnitt 4.6.6.1 leicht vergrößerte Faktor $C = 0,65$ bewirkt, daß diese Membran in Scheitelnähe ein kleineres faltenfreies Gebiet aufweist. Der Verlauf der Hauptspannungen σ_1, σ_2 zeigt jedoch die gleichen Tendenzen.

4.7 Tragverhalten von randträgerlosen Membranschalen, deren Mittelflächen durch eine achsensymmetrische Lastgruppe bestimmt werden

Punktförmig in den Ecken gelagerte Membranschalen über quadratischem Grundriß werden für folgende Lastfälle untersucht (vgl. Abschnitt 2.3):

- | | |
|---------------------------------|------------------------------------|
| a) achsensymmetrische Lastfälle | Nr. 1 Eigengewicht |
| | Nr. 2 Schnee |
| | Nr. 6 Eigengewicht und Schnee |
| b) antimetrische Lastfälle | Nr. 3 Wind |
| | Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee |

Bei der Formfindung der Membranschalen soll der Lastfall Nr. 6 zugrunde gelegt werden. Der Nutzlastanteil p der Schneelast wird zur Bestimmung der Schalenform in Anlehnung an Abschnitt 4.5 von $p = 1,0 \text{ kN/m}^2$ auf $p = 0,75 \text{ kN/m}^2$ verringert.

Mit der Pucher'schen Differentialgleichung können nur Membranspannungen, nicht aber die 'Nebenspannungen' aus zusätzlich auftretenden Momenten berechnet werden. Die Schnittgrößen aller nachfolgend untersuchten Membranschalen werden deshalb durch eine finite Elementberechnung (Abschnitt 2.1) ermittelt.

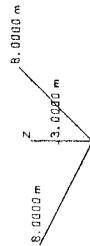
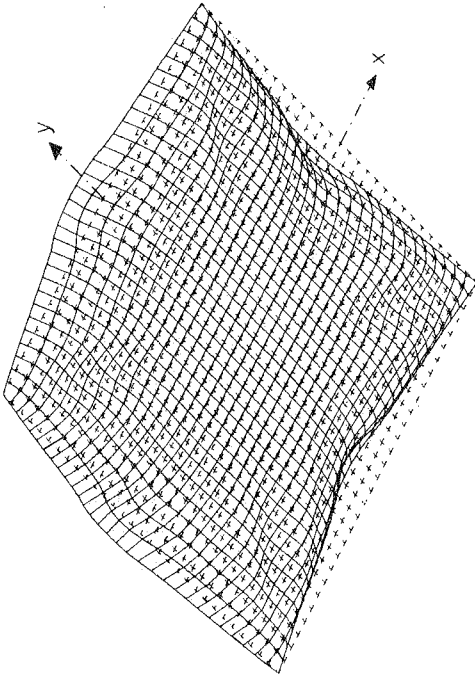


Bild 4.42: 'Unverformte' Gleichgewichtslage einer Membran, entworfen für den Lastfall konstante, vertikale Flächenlast p (beliebige Ordinate), Parameter $C = 0,63$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0$ m, Scheitelhöhe = $1,18$ m, maximale Höhe am Rand = $3,0$ m

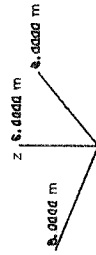
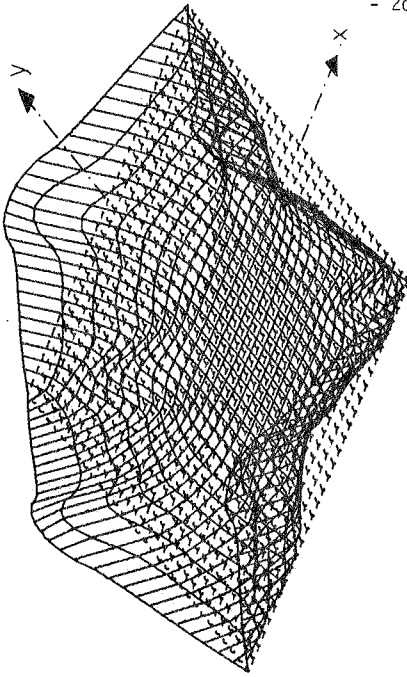


Bild 4.43: 'Unverformte' Gleichgewichtslage einer Membran, entworfen für den Lastfall Eigengewicht $g = 2,0$ kN/m² und konstante, vertikale Flächenlast $p = 0,75$ kN/m², Parameter $C = 0,65$, Seitenlänge des Quadrates = $30,0$ m, Scheitelhöhe = $-2,95$ m, maximale Höhe am Rand = $7,54$ m

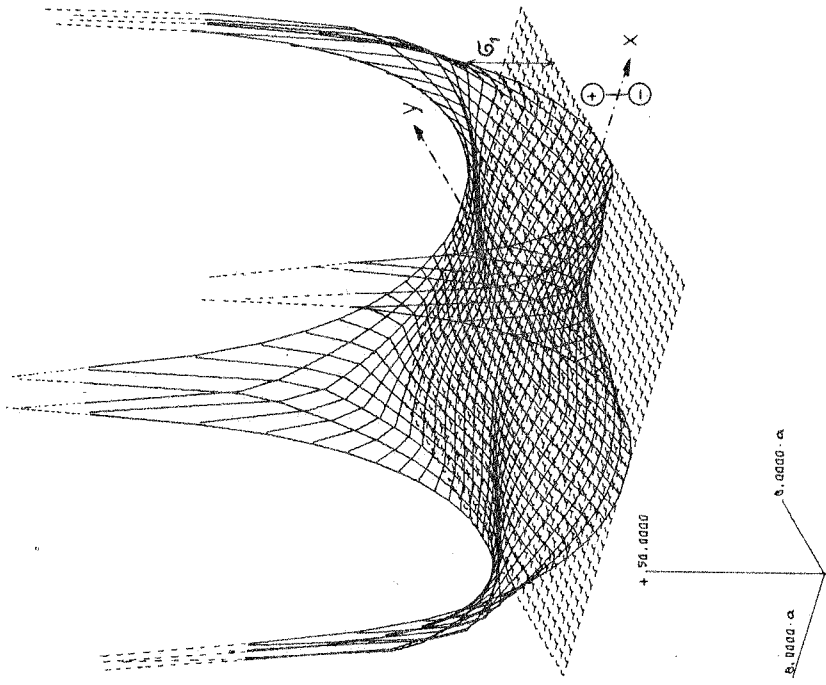


Bild 4.44a: Quantitativer Verlauf der Hauptspannung σ_1 , Lastfall konstante, vertikale Flächenlast bei der Gleichgewichtslage einer Membran mit Falten, Parameter der Spannungsfunktion $C = 0.63$

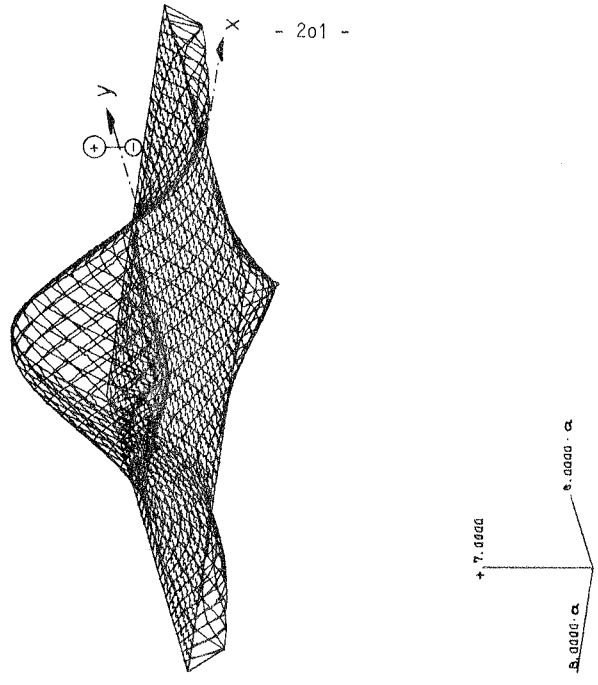


Bild 4.44b: Quantitativer Verlauf der Hauptspannung σ_2 , Lastfall konstante, vertikale Flächenlast bei der Gleichgewichtslage einer Membran mit Falten, Parameter der Spannungsfunktion $C = 0.63$

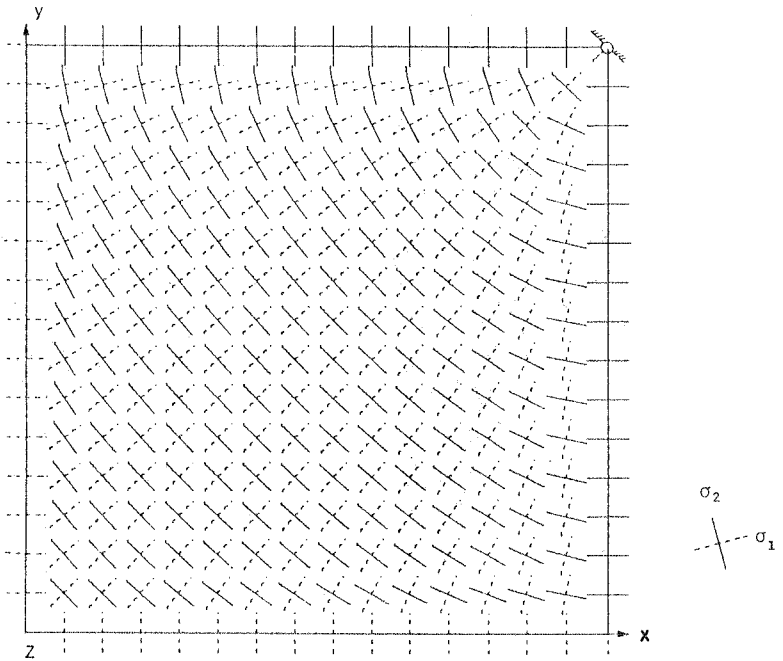


Bild 4.45: Richtungen der Hauptspannungen σ_1 und σ_2 , Lastfall konstante vertikale Flächenlast, Gleichgewichtslage einer Membran mit Falten, Parameter der Spannungsfunktion $C = 0,63$.

Vergleich der Spannungen belasteter Membranschalen aus dem für die Formfindung verwendeten Spannungsansatzes mit den Spannungen aus einer 'finiten Elementberechnung' (Fachwerkelement, Gitterliniendichte $n_x = n_y = 16$, Abschnitt 2.1): Die Schnittgrößen, die für eine Lastgruppe aus Eigengewicht und Schnee gefundenen, 'punktförmig' gelagerten Membranschalen, werden für die gleiche Belastung nachgerechnet. Die Hauptmembranspannungen im Scheitelbereich der Schalen stimmen mit den Hauptmembranspannungen aus dem für die Formfindung benutzten Spannungsansatzes (13) überein. Im Gebiet um den Scheitel des freien Randes sind die Hauptmembranspannungen aus der finiten Elementberechnung um ca. 8-15% geringer.

Da bei der Formfindung der Membranschalen nur Kräfte- und Randbedingungen und keine Verschiebungsrandbedingungen berücksichtigt werden können, verletzt die horizontal unverschiebliche, 'punktförmige' Lagerung der Membranschalen die durch die Membrantheorie geforderte Verträglichkeit der Formänderungen zwischen

Schalenrand und Lagerungsbedingungen. Die finite Elementberechnung liefert deshalb in der Lagernähe zusätzliche Biegespannungen von ungefähr 500 - 2000 N/cm², die jedoch rasch abklingen.

4.7.1 Unversteifte Membranschalen

Parametervariationen:

Schalenformen: Gruppe 1, 2, 3 (Parameter $-\infty < C < 5/8$ der Spannungsfunktion, Abschnitt 4.5.1)

Neigungswinkel

am Auflager: $20^\circ \leq \phi_A \leq 80^\circ$

Lagerbreite: $b = 0,2 \text{ m}, 1,5 \text{ m}$

Seitenlänge \bar{a} des

Quadrates im Grundriß: $20 \text{ m} \leq \bar{a} \leq 60 \text{ m}$

Lastfälle:

a) achsensymmetrisch: Nr. 1 Eigengewicht

Nr. 2 Schnee

Nr. 6 Eigengewicht und Schnee

b) antimetrisch: Nr. 3 Wind

Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Gitterliniendichte: $n_x = n_y = 16$

Geringe Membrandruckspannungen ($\sigma_{\perp} \approx -200 \text{ N/cm}^2$) treten in Scheitelnähe und am Scheitel des Randbogens unter den achsensymmetrischen Lasten auf. Die in Abschnitt 2.2 festgelegten Grenzen der Betonfestigkeiten werden auch im mittleren Schalenviertel und entlang des Randes eingehalten, da z.B. Ringzugspannungen 30 N/cm^2 kaum überschreiten und die Biegemomente sehr klein sind. Durch die konzentrierte Krafteinleitung und durch auftretende Biegemomente entstehen jedoch im Auflagerbereich Spannungen ($> 2000 \text{ N/cm}^2$), die die Zug- und Druckfestigkeit des Betons (Abschnitt 2.2) wesentlich überschreiten.

Der Auflagerstreifen steiler Schalen verformt sich bei einer kleinen Lagerbreite ($b = 0,2 \text{ m}$) sehr stark durch die ungleichen horizontalen Membrankräfte in x- und y-Richtung der antimetrischen Belastungen (vgl. Abschnitt 3.1). Im Scheitel des freien Randes entstehen durch diese Verformungen noch Hauptzugspannungen von über 700 N/cm^2 .

Eine Verbreiterung der 'punktförmigen' Lager genügt nicht, um durch Membranschalen Eigengewichts- und Schneelasten sowie antimetrische Lasten aus Schnee und Wind abtragen zu können. Die Lagerbereiche müssen noch zusätzlich verdickt werden.

4.7.2 Lineare Zunahme der Schalendicke im Auflagerbereich

Parametervariationen:

Schalenformen: Gruppe 1, 2, 3 (Parameter der Spannungsfunktion
- $-\infty < C < 5/8$, Abschnitt 4.5.1)

Neigungswinkel am

Auflager: $20^\circ \leq \phi_A \leq 80^\circ$

Lagerbreite: $b = 0,2, 0,3, 1,0, 1,5 \text{ m}$

Schalendicke: Abschnitt 2.4.4a

Seitenlänge \bar{a} des

Quadrates im Grundriß: $20 \text{ m} \leq \bar{a} \leq 60 \text{ m}$

Lastfälle:

a) achsensymmetrisch: Nr. 1 Eigengewicht
Nr. 2 Schnee
Nr. 6 Eigengewicht und Schnee

b) antimetrisch: Nr. 3 Wind
Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Gitterliniendichte: $n_x = n_y = 16$

Im folgenden werden die Tendenzen des Tragverhaltens für steile Membranschalen mit der Seitenlänge des Grundrisses $\bar{a} = 30 \text{ m}$ aufgezeigt.

Achsensymmetrische Lastfälle: Nr. 1, 2, 6

Lagerbreite: $b = 0,2 \text{ m}$, vierfache Schalendicke im Auflagerbereich ($i = 4$)

Formengruppe 1 ohne negativ gekrümmten Rand (Bild 4.26, 4.27):

Bei einer vierfachen Schalendicke im Auflagerbereich biegt sich der Schalenrand vertikal um 7-9 Millimeter durch. Geringe Hauptdruckspannungen überwiegen im mittleren Schalenviertel (- 40 bis - 80 N/cm²) und entlang des Randes (- 140 bis -200 N/cm², Punkt 2, Tab. A2). Die Membranzugspannungen im Auflagerbereich steigen bis etwa 80 N/cm² an. Die Hauptzugspannungen im Randbereich (Punkt 2) betragen 115 - 130 N/cm², die Hauptdruckspannungen (Punkt 14) im Auflager-

bereich -300 bis -400 N/cm² (Tab. A2 im Anhang).

Formengruppe 2 mäßig negativ gekrümmter Rand (Bild 4.28, 4.29)

Der Schalenrand verformt sich vertikal um ungefähr 4-6 Millimeter, wenn die Schalendicke im Auflagerbereich auf das Vierfache ($i = 4$) anwächst. Im mittleren Schalenviertel und am Rand entstehen ungefähr die gleichen Druckspannungen wie bei der ersten Schalengruppe. Die Membranzugspannungen im Auflagerbereich wachsen auf ungefähr 50-60 N/cm² an. Die größten Hauptzugspannungen im Randbereich (Punkt 2) erreichen mit 105-115 N/cm² etwa um 10% geringere Werte als die der Schalengruppe 1. Sie sind jedoch doppelt so groß wie die entsprechenden Hauptspannungen der 3. Formengruppe (Tab. A3 im Anhang).

Formengruppe 3 auffällig negativ gekrümmter Rand (Bild 4.30, 4.31)

Die größte vertikale Durchbiegung des Schalenrandes geht durch eine vierfache Schalendicke im Auflagerbereich auf weniger als einen Millimeter zurück. In den Schalen herrschen überwiegend Membrandruckspannungen (-60 bis -100 N/cm²) vor. Die größten Membranzugspannungen im Auflagerbereich betragen 30-40 N/cm² und die größten Membrandruckspannungen -400 bis -500 N/cm². Die Hauptzugspannungen im Auflager- und Randbereich (Punkt 14) liegen unter 100 N/cm² (Tab. A4 im Anhang).

Antimetrische Lastfälle: Nr. 3 Wind

Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Lagerbreite:

$b = 0,2$ m, vierfache Schalendicke im Auflagerbereich
($i = 4$)

Formengruppe 1: ohne negativ gekrümmten Rand (Bild 4.26, 4.27)

Die größten Hauptzugspannungen am Rande der Schale (Punkt 10, Tab. A2) wachsen auf 450-500 N/cm² und in Lagernähe (Punkt 14) auf 250-300 N/cm² an. Die größten Membranzugspannungen am Rand betragen ungefähr 250-300 N/cm². Ein breiteres Lager ($b \geq 1,0$ m) oder eine größere Schalendicke in Auflagernähe ($i > 8-10$) lassen die größten Hauptzugspannungen am Rand (Punkt 10) auf 150-170 N/cm² abklingen (Tab. A2 im Anhang, Tab. 4.46). Die maximalen Hauptdruckspannungen im Auflagerbereich betragen dann -400 bis -450 N/cm².

Formengruppe 2: mäßig negativ gekrümmter Rand (Bild 4.28, 4.29)

Die größten Hauptzugspannungen der Schalen wachsen am Rand (Punkt 10, Tab. A3) auf 400-450 N/cm² und im Auflagerbereich (Punkt 14) auf 200-250 N/cm² an. Die

Membranzugspannungen erreichen am Rand 250 N/cm^2 . Erst ein breiteres Lager ($b \geq 1,0 \text{ m}$) oder eine sieben- bis neunfache Schalendicke im Auflagerbereich verringern die größten Hauptzugspannungen am Rand (Punkt 10) auf $130\text{-}150 \text{ N/cm}^2$. (Tab. A3 im Anhang, Tab. 4.46) Die Hauptdruckspannungen in Auflagernähe erreichen dann -350 bis -400 N/cm^2 .

Formengruppe 3: auffällig negativ gekrümmter Rand (Bild 4.30, 4.31)

Die maximalen Hauptzugspannungen am Rand (Punkt 10, TAB A4) steigen bis auf $300\text{-}350 \text{ N/cm}^2$ und im Auflagerbereich (Punkt 14) auf $90\text{-}125 \text{ N/cm}^2$ an. Die Membranzugspannungen am Schalenrand wachsen auf $180\text{-}200 \text{ N/cm}^2$ an. Durch ein breiteres Lager $b \geq 1,0 \text{ m}$ oder eine sechs- bis achtfache Schalendicke in Auflagernähe werden die Hauptzugspannungen am Rand (Punkt 10) auf $110\text{-}130 \text{ N/cm}^2$ verringert (Tab. A4 im Anhang, Tab. 4.46). Die Hauptdruckspannungen des Auflagerbereiches betragen dann -250 bis -300 N/cm^2 .

Als Ergebnis der Parameteruntersuchung kann folgendes festgehalten werden:

Im Auflagerbereich verdickte Membranschalen der 3. Formengruppe mit auffällig negativ gekrümmten Rändern (Bild 4.30, 4.31) zeigen für die untersuchten achsensymmetrischen und antimetrischen Lastfälle gegenüber den Schalen der Formengruppe 1 und 2 (Bild 4.26 - 4.29) das günstigste Tragverhalten, da sie die geringsten Verformungen und Spannungen aufweisen.

Für die erforderliche Dicke der Membranschalen im Auflagerbereich ergeben sich in Abhängigkeit der Belastung, der Spannweite und der Lagerbreite b , Grenzbereiche i_{grenz} des Dickenverhältnisses (Bild 2.22) bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten nicht mehr maßgeblich verbessert (Tab. 4.46).

4.7.3 Tragverhalten von punktgestützten Kuppelschalen, deren Mittelflächen von den Membranformen nicht affin abweichen

Ungenauigkeiten einer baupraktischen Ausführung sollen durch großflächige Abweichungen der z-Koordinaten von der genauen Schalenform, die nicht affin zur ursprünglichen Membranform verlaufen, simuliert werden. Große Krümmungsabweichungen von der exakten Schalenmittelflächenkrümmung werden in dieser Arbeit nicht untersucht.

	Seitenlänge des Grundrisses 20 m				Seitenlänge des Grundrisses 45 m			
	Lastfall- Nr. 3, 5 antimetrisch	Lastfall- Nr. 1, 2, 6 achsensymmetrisch	Lastfall- Nr. 1, 2, 6 i + 5 achsensymmetrisch	Lastfall- Nr. 3, 5 antimetrisch	Lastfall- Nr. 3, 5 antimetrisch	Lastfall- Nr. 1, 2, 6 achsensymmetrisch	Lastfall- Nr. 1, 2, 6 i + 5 antimetrisch	Lastfall- Nr. 1, 2, 6 i + 5 achsensymmetrisch
Lastfall Nr. 1, 2, 3, 5, 6	$b = 0,3 \text{ m}$	$b^*) = 0,3 \text{ m}$	$b = 1,0 \text{ m}$	$b = 0,3 \text{ m}$	$b = 0,3 \text{ m}$	$b^*) = 0,3 \text{ m}$	$b = 2,5 \text{ m}$	$b = 2,5 \text{ m}$
	flach	$i = 4 - 5$	$i = 2 - 3$	$i = 2 - 3$	$i = 7 - 8$	$i = 6 - 7$	$i = 6 - 7$	$i = 6 - 7$
Lagerbreite b	steil	$i = 5 - 6$	$i = 2 - 3$	$i = 2 - 3$	$i = 8 - 9$	$i = 5 - 6$	$i = 7 - 8$	$i = 7 - 8$
	flach	$i = 4 - 5$	$i = 2 - 3$	$i = 3 - 5$	$i = 8 - 9$	$i = 6 - 7$	$i = 7 - 8$	$i = 7 - 8$
Formengruppe 1: Membranschalen ohne negativ gekrümmten Rand, $-\infty < C \leq 0,5$ (Bild 4.26, 4.27)	steil	$i = 6 - 7$	$i = 2 - 3$	$i = 3 - 5$	$i = 10 - 11$	$i = 6 - 7$	$i = 9 - 10$	$i = 9 - 10$
	flach	$i = 5 - 6$	$i = 3 - 4$	$i = 3 - 4$	$i = 10 - 12$	$i = 5 - 6$	$i = 7 - 8$	$i = 7 - 8$
Formengruppe 3: Membranschalen mit auffällig negativ gekrümmtem Rand, $0,55 < C < 0,625$, (Bild 4.30, 4.31)	steil	$i = 6 - 7$	$i = 3 - 4$	$i = 3 - 4$	$i = 12 - 14$	$i = 5 - 6$	$i = 8 - 9$	$i = 8 - 9$
	flach	$i = 5 - 6$	$i = 4 - 5$	$i = 5 - 6$	$i = 14 - 16$	$i = 6 - 7$	$i = 9 - 10$	$i = 9 - 10$
Formengruppe 1: Membranschalen ohne negativ gekrümmten Rand $-\infty < C \leq 0,5$ (Bild 4.26, 4.27)	steil	$i = 7 - 8$	$i = 4 - 5$	$i = 5 - 6$	$i = 16 - 18$	$i = 6 - 7$	$i = 11 - 13$	$i = 11 - 13$
	flach	$i = 5 - 6$	$i = 3 - 4$	$i = 3 - 4$	$i = 10 - 12$	$i = 5 - 6$	$i = 7 - 8$	$i = 7 - 8$

Tab. 4.46: Grenzbereiche der Schalendicke $i = i_{\text{grenz}}$ (Bild 2.22) im Auflagerbereich, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten verschiedener Membranschalen nicht mehr maßgeblich verbessert.

*) Bei flachen Membranschalen muß die Lagerbreite b auf $0,4-0,5 \text{ m}$ erhöht werden, damit bei der Kräfteinleitung in die Schale, die in Abschnitt 2.2 festgelegten Betonfestigkeiten nicht überschritten werden.

Parametervariationen

a) Membranformen ($0,55 < C < 0,625$) mit ausgeprägt negativ gekrümmtem Rand

Achsensymmetrische Schalenmittelflächen, die den Spannungsfunktionen (13) mit den Konstanten $0,55 < C < 0,625$ zugeordnet sind, (Bild 4.30, 4.31) werden durch Polynomansätze 4. und 6. Grades (16 oder 36 Ansatzkonstante) dargestellt. Die größten Unterschiede der z-Koordinaten betragen bei der Näherung durch den Polynomansatz 4. Grades ca. 5%, durch den Polynomansatz 6. Grades ca. 1% des genauen Wertes (Abschnitt 4.5.2, Tab. 4.32, Bild 4.33).

Neigungswinkel

am Auflager: $20^\circ \leq \phi_A \leq 80^\circ$

Lagerbreite: $b = 0,2 \text{ m}, 1,0 \text{ m}$

Schalendicke: Abschnitt 2.4.4a, (Schalendicke i_{grenz} der Tab. 4.46)

Seitenlänge \bar{a}

des Grundrisses: $\bar{a} = 30,0 \text{ m}$

Lastfälle:

a) achsensymmetrisch: Nr. 6 Eigengewicht und Schnee

b) antimetrisch: Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee

Gitterliniendichte: $n_x = n_y = 16$

Weicht die Schalenmittelfläche um maximal $\pm 5\%$ in der Höhe (Bild 4.33) von der Membranform ab, so steigen die vertikalen Verformungen des Schalenrandes achsensymmetrisch belasteter (Nr. 6), steiler Schalen von 1,2 mm auf 4,5 mm an, die Hauptzugspannungen im Randbereich (Punkt 2, Bild A1) vergrößern sich von 44 N/cm² auf über 100 N/cm². Membrankräfte in Meridianrichtung wachsen im Auflagerbereich (Punkt 6, Bild A1) von 34 kN/m auf 83 kN/m an, die Hauptzugspannungen von 77 N/cm² auf 291 N/cm² (Tab. A5 im Anhang). Das Tragverhalten dieser Schalen verschlechtert sich erheblich.

Verformungen und Spannungen vergrößern sich nur um 15-30%, wenn der Unterschied der z-Ordinaten zwischen genäherter Mittelfläche und 'exakter' Form ca. 0,5-1% beträgt. Am Schalenrand steiler Schalen (Punkt 2) vergrößern sich die Hauptzugspannungen von 44 N/cm² auf ungefähr 57 N/cm².

Bei antimetrischer Belastung (Nr. 5) nehmen Verformungen und Spannungen in der Schale bei gleicher Ungenauigkeit in der Schalenhöhe (ca. $\pm 1\%$) um 25-35% zu. Die Hauptzugspannungen am Schalenrand (Punkt 10) steigen von 327 N/cm² auf 442 N/cm² an.

b) Membranformen (C = 0,45) ohne negativ gekrümmten Rand

Schalenmittelflächen, die den Spannungsfunktionen (13) mit den Konstanten $C = 0,45$ zugeordnet sind (Bild 4.26, 4.27), werden durch Polynomansätze und Paraboloiden (PA2 und PA3, Abschnitt 2.4.3b) angenähert. Die größten Abweichungen von den z-Koordinaten der Membranschale betragen am Rand und im Auflagerbereich bei Paraboloiden und bei Polynomansätzen 4. Grades (16 Stützpunkte, Poly 16):

(vgl. Bild 4.34	PA2	PA3	Poly 16
in Randnähe	max. 15%	ca. 1-3%	4 - 5%
im Auflagerbereich	ca. 3-4%	max. 16%	7 - 10%

Sonstige Parameter wie unter Abschnitt a).

Die größten vertikalen Verformungen des freien Randes beim Lastfall Nr. 6 von steilen Paraboloidschalen PA2 betragen ca. 140% und die größten Hauptzugspannungen 150-200% der Werte der Membranschale. In Randnähe (z.B. Punkt 2, Bild A1) betragen die Hauptzugspannungen der steilen PA2 165 N/cm^2 , die der steilen Membranschale 87 N/cm^2 . Im Auflagerbereich (Punkt 6, Bild A1) erreichen die Hauptzugspannungen bei steilen Paraboloidschalen PA2 110 N/cm^2 , die der steilen Membranschalen dagegen nur 73 N/cm^2 (Tab. A6 im Anhang).

Die Hauptzugspannungen des Randes der Paraboloidschale PA3 sind um das 2- bis 3fache, die Hauptzugspannungen des Randes der durch den Polynomansatz genähereten Schalenmittelfläche (Poly 16) sogar um das 5-6fache größer als entsprechende Spannungen in Membranschalen. Die Hauptzugspannungen am Rand steiler PA3 (Punkt 2) betragen ca. 212 N/cm^2 , bei Poly 16 sogar 433 N/cm^2 , die der steilen Membranschalen ungefähr nur 87 N/cm^2 (Tab. A6 im Anhang).

Da sich die Unterschiede der Verformungen und Spannungen bei antisymmetrischen Lastfällen (z.B. Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee) noch vergrößern, werden diese Lastfälle nicht weiter verfolgt.

Die Form der Membranschale ist beim Entwurf oder bei der Ausführung genauestens einzuhalten. Die Verformungen und Spannungen in dieser Schale bei Eigengewicht-, Schnee- und Windlasten vergrößern sich um ca. 15-35%, wenn die z-Ordinaten stellenweise bis zu $\pm 1\%$ (entspricht $\Delta z = \pm 10 \text{ cm}$, bei 10 m Schalenhöhe) von der exakten Form abweichen. Beträgt die nicht affine Abweichung der z-Ordinaten

Form der Mittelfläche	Kugel-, Ellipsoidschalen (niedrig und hoch)	Parabolooidschalen (PA2) (niedrig und hoch)	Membranschalen (niedrig und hoch)
1. Angleichen von Schalenneigung im Auflagerbereich und Neigung der Auflagerkraft	erhebliche Verbesserung des Tragverhaltens	geringe Verbesserung des Tragverhaltens	im wesentlichen bereits erfüllt
2. Stützung des Schalensrandes (Randträger oder zusätzliche Einzelstützen)	hohe rechteckige Randträger $H \sim 1,0 \text{ m}$ (Tab. 3.49)	mittelhohe Randträger (Tab. 3.49)	entfällt
3. Verbreiterung des Punktlagers auf ca. 5% der Seitenlänge des Grundrißquadrates	erhebliche Verbesserung des Tragverhaltens	erhebliche Verbesserung des Tragverhaltens	erhebliche Verbesserung des Tragverhaltens bei unsymmetrischen Lasten
4. Verdickung des Auflagerbereiches	wesentliche Verbesserung des Tragverhaltens, große Schalendicke (Tab. 3.15)	wesentliche Verbesserung des Tragverhaltens, geringe Schalendicke (Tab. 3.15)	wesentliche Verbesserung des Tragverhaltens, geringe Schalendicke (Tab. 4.46)
5. Biegemomente	hoch	gering	gering, nur im Auflagerbereich
6. Hauptzugspannungen, am Rande und im Schaleninneren	hoch	gering	gering, nur im Auflagerbereich
7. Vorspannung entlang des Schalensrandes zur Rissicherung des Stahlbetons	wird empfohlen	wird empfohlen	entfällt

Tab. 4.47: Verschiedene Konstruktionselemente, die zusammenwirken sollten, um bei Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen die Lastabtragung von Eigengewicht-, Schnee- und Windlasten zu ermöglichen

großflächig bis zu $\pm 5\%$ (entspricht $\Delta z = \pm 50$ cm bei 10 m Schalenhöhe) von der genauen Schalenform, können Verformungen und Spannungen auf das Vier- bis Fünffache ansteigen.

Membranschalen können also trotz der Bedingung einer möglichst genauen Einhaltung der vorgegebenen Form ausgeführt werden, da eine Toleranz $\pm 1\%$ beim Einhalten der erforderlichen Schalenhöhe baupraktisch erreichbar ist.

4.7.4 Vergleich von Kugel-, Ellipsoid-, Paraboloid- und Membranschalen hinsichtlich ihrer Konstruktionselemente

Da in Membranschalen bei der Lastabtragung die geringsten Verformungen und Spannungen auftreten, besitzen sie im Vergleich zu Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen für die untersuchten Lastfälle aus Eigengewicht, Wind und Schnee das günstigste Tragverhalten. Membranschalen brauchen nur noch im Auflagerbereich versteift werden. Auf eine Stützung des Schalenrandes durch zusätzliche Randträger oder Einzelstützen kann bei ihnen verzichtet werden.

In Tabelle 4.47 werden verschiedene Konstruktionselemente angegeben, die zusammenwirken sollten, um bei Kuppelschalen die Lastabtragung von Eigengewicht, Schnee und Wind zu ermöglichen.

4.8 Tragverhalten von randträgerlosen Membranschalen, deren Mittelflächen durch eine antimetrische Lastgruppe bestimmt werden

Es werden Kuppelschalen über rechteckigem Grundriß untersucht, die in zwei Ecken 'punktförmig' gelagert und entlang der längeren Rechteckseite horizontal unverschieblich liniengelagert sind. Die Mittelflächenform besteht aus dem über der x-y-Ebene entstandenen Abschnitt einer Membranschale, die für eine zur y-Achse antimetrischen und zur x-Achse symmetrischen Flächenlastgruppe $q = q_0/\cos\phi + p = 2,0/\cos\phi + 0,75$ kN/cm² (Bild 4.49) mit dem in Abschnitt 4.4 veränderten Spannungsansatz (6) in Verbindung mit der Gleichung (28) (Abschnitt 4.5) gefunden werden (Bild 4.48).

Bei der Variation der Konstanten C des Spannungsansatzes $-\infty < C < 5/8$ entstehen wie bei Membranschalen für achsensymmetrische Lastfälle (Abschn. 4.5) Schalenformen mit unterschiedlich gekrümmten Schalenrändern. Sie können hinsichtlich der Form ebenfalls in 3 Gruppen eingeteilt werden (vgl. Abschn. 4.51, Bild 4.16-4.19):

1. Gruppe: Schalen ohne negativ gekrümmten freien Rand
2. Gruppe: Schalen mit mäßig negativ gekrümmtem freien Rand
3. Gruppe: Schalen mit auffällig negativ gekrümmtem freien Rand

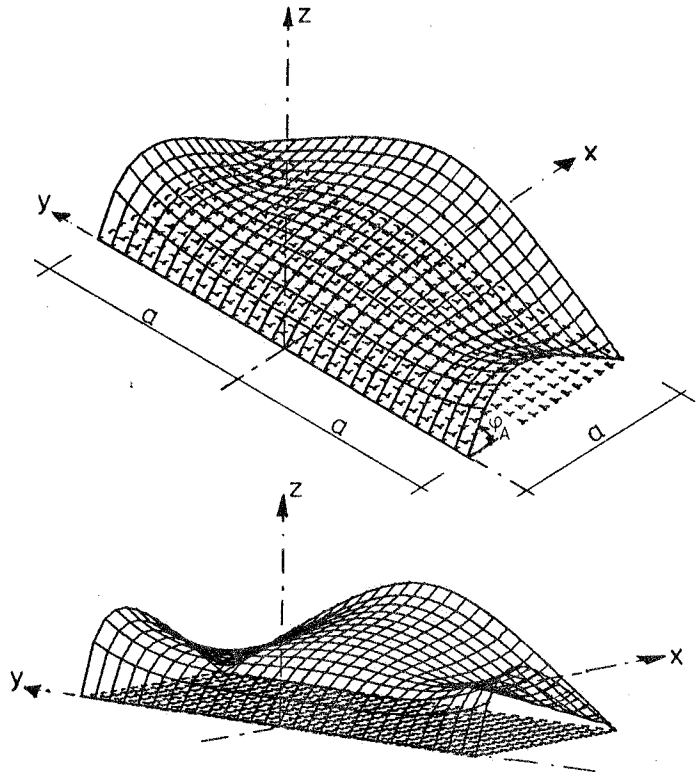


Bild 4.48: Membranschale über rechteckigem Grundriß, in zwei Ecken punktförmig gelagert, entlang der längeren Rechteckseite liniengelagert, Parameter der Spannungsfunktion (13) $C = 0,57$.

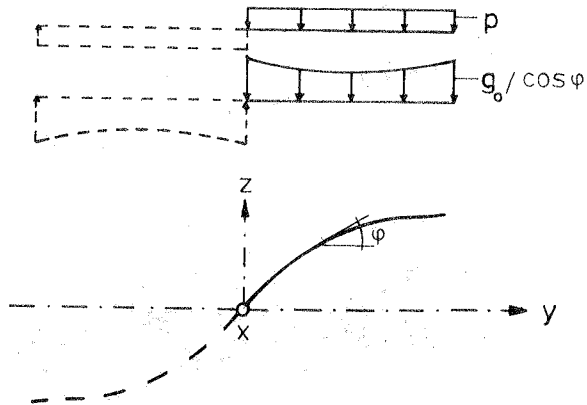


Bild 4.49: Lastgruppe $q = g_0 / \cos \phi + p$ im Schnitt $x = 0$ ($g_0 = 25 \text{ kN/m}^2 \cdot 0,08 \text{ m}$) die zur Formfindung einer über der x - y -Ebene liegenden Abschnittes einer antisymmetrischen Membranschale verwendet wird.

Im Auflagerbereich verdickte Membranschalen der 3. Formengruppe zeigen ebenso wie die achsensymmetrischen Membranschalen (Abschn. 4.7.2) gegenüber den Schalen der Formengruppen 1 und 2 das günstigste Tragverhalten, da sie unter Eigengewicht, Schnee- und Windlasten die geringsten Verformungen und Spannungen aufweisen. Im folgenden wird deshalb nur noch das Tragverhalten von im Auflagerbereich verdickten Schalen der Gruppe 3 mit auffällig negativ gekrümmtem freien Rand geschildert.

Schalenformen: Gruppe 3, (Parameter $0,55 < C < 5/8$ der Spannungsfunktion)

Neigungswinkel ϕ_A am Linienlager (Bild 4.48): $20^\circ \leq \phi_A \leq 80^\circ$

Lagerbreite der Punktlager: $b = 0,2 \text{ m}, b = 1,0 \text{ m}$

Linienlager: horizontal unverschieblich ($u = v = w = 0$)

Länge der kürzeren Seite a des rechteckigen Grundrisses: $20 \text{ m} \leq a \leq 30 \text{ m}$

Behandelte Lastfälle:

- | | |
|-----------------------------|--|
| a) achsensymmetrisch: | Nr. 1 Eigengewicht |
| (zur x -Achse, Bild 4.48) | Nr. 2 Schnee |
| | Nr. 6 Eigengewicht und Schnee |
| b) antisymmetrisch: | Nr. 3 Wind p_w |
| (zur x -Achse, Bild 4.50) | Nr. 5 Wind p_w und halbseitiger Schnee p_s |

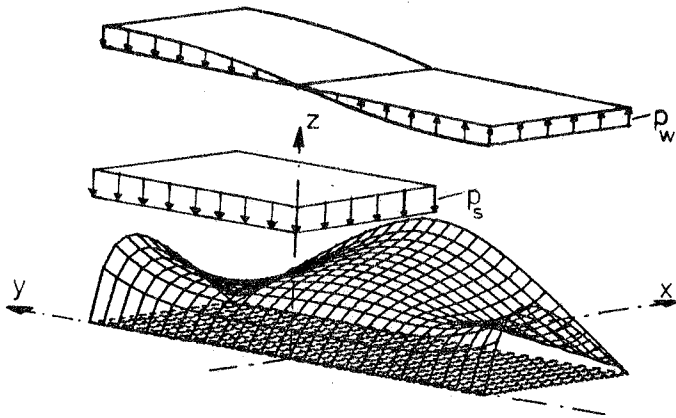


Bild 4.5o: Zur x-Achse antimetrisch belastete Membranschale, Parameter der Spannungsfunktion (13) $C = 0,57$, Lastfall Nr. 5

Im folgenden werden die Tendenzen des Tragverhaltens für steile Membranschalen mit der kürzeren Seitenlänge des rechteckigen Grundrisses $a = 30$ m aufgezeigt. Die größten vertikalen Durchbiegungen betragen im punktförmigen Auflagerbereich 2,0 - 2,5 mm, im Bereich des Linienlagers 1,5 - 2,0 mm, entlang der freien Ränder ungefähr 1,0 - 1,4 mm.

Geringe Membrandruckspannungen treten in Scheitelnähe und am Scheitel der Randbögen auf ($\sigma_d = -120$ bis -200 N/cm²). Die größten Hauptzugspannungen entlang der freien Ränder betragen 80-100 N/cm², im punktförmigen Auflagerbereich ungefähr 120-180 N/cm².

Die Hauptdruckspannungen entlang des Linienlagers erreichen 250-350 N/cm² und in der Nähe des 'punktförmigen' Lagers ungefähr 300-500 N/cm². Die am freien Rand und an den Lagern auftretenden Biegemomente sind unbedeutend.

Grenzbereiche des Schalendickenverhältnisses i_{grenz} in Punktlagnähe, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der Membranschalen nur noch wenig verbessert, können der Tabelle 4.51 entnommen werden. Sie sind ebenso groß wie die Grenzbereiche i_{grenz} der achsensymmetrischen Membranschalen in Tabelle 4.46.

Eine zwei- bis dreifache Schalendicke entlang des Linienlagers genügt dort, um die Hauptspannungen aufzunehmen.

Lastfall Nr. 1, 2, 3, 5, 6	kürzere Seite a des rechteckigen Grundrisses, a = 20 m			
		Lastfall-Nr. Nr. 5 antimetrisch	Lastfall-Nr. 1, 2, 6 symmetrisch	Lastfall 1+5, antimetrisch + symmetrisch
Lagerbreite b		b = 0,3 m	b ^{*)} = 0,3 m	b = 1,0 m
Formengruppe 3: Membranschalen mit auffällig negativ gekrümm- tem Rand $0,55 < C < 0,625$ (Bild 4.19, 4.48)	flach	i = 4 - 5	i = 2 - 3	i = 2 - 3
	steil	i = 5 - 6	i = 2 - 3	i = 2 - 3
Formengruppe 1: Membranschalen ohne negativ gekrümmten Rand $-\infty < C \leq 0,5$ (Bild 4.16b, 4.17)	flach	i = 4 - 5	i = 2 - 3	i = 3 - 5
	steil	i = 6 - 7	i = 2 - 3	i = 3 - 5
		kürzere Seite a des rechteckigen Grundrisses, a = 30 m		
Formengruppe 3: Membranschalen mit auffällig negativ gekrümm- tem Rand $0,55 < C < 0,625$ (Bild 4.19, 4.48)	flach	i = 5 - 6	i = 3 - 4	i = 3 - 4
	steil	i = 6 - 7	i = 3 - 4	i = 3 - 4
Formengruppe 1: Membranschalen ohne negativ gekrümmten Rand $-\infty < C \leq 0,5$ (Bild 4.16b, 4.17)	flach	i = 5 - 6	i = 4 - 5	i = 5 - 6
	steil	i = 7 - 8	i = 4 - 5	i = 5 - 6

Tab. 4.51: Grenzbereiche der Schalendicke $i = i_{\text{grenz}}$ (Bild 2.22) im Auflagerbereich, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten verschiedener Membranschalen nicht mehr maßgeblich verbessert.

*) Bei flachen Membranschalen muß die Lagerbreite b auf 0,4 bis 0,5 m erhöht werden, damit bei der Krafteinleitung in die Schale die in Abschnitt 2.2 festgelegten Betonfestigkeiten nicht überschritten werden.

5. ZUSAMMENFASSUNG

Es wurde das Tragverhalten versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß (Seitenlänge 30 m) auf Einzelstützen unter achsensymmetrischer Eigengewicht- und Schneebelastung und unter antimetrischer Wind- und Schneebelastung untersucht. Dabei wurde auf zwei Formfindungsmethoden von Schalen näher eingegangen.

5.1 Kuppelschalen, deren Schalenmittelflächen durch Ausschnitte aus Kugel-, Ellipsoid- und Paraboloidschalen gewonnen werden (Abschnitt 3)

Eine Vergrößerung der Auflagerbreite von 0,2 m auf 1,5 m und ein lineares Ansteigen der Schalendicke im Auflagerbereich und entlang des Randes verringern bei allen Lastfällen entscheidend die Verformungen und Spannungen in der ganzen Schale. Abhängig von der Geometrie der Schale gibt es Grenzbereiche für Auflagerbreite und Schalendicke im Auflagerbereich und am Rand, bei deren Überschreitung sich das Tragverhalten der Kuppelschalen nicht mehr maßgeblich verbessert (Tab. 3.36).

Die Tragfähigkeit eines Randträgers mit rechteckigem Querschnitt wird am besten genutzt, wenn die längere Querschnittseite normal zum Schalenrand liegt. Der Randträger ist dann längs seiner Achse verwunden (Bild 2.24). Grenzbereiche, bei deren Überschreitung sich das von der Geometrie abhängige Tragverhalten der Schalen nicht mehr ausschlaggebend verbessert, sind in Tabelle 3.48 aufgezeigt.

Eine Aussteifung der Kuppelschalen durch eine größere Schalendicke entlang der Diagonalen bis zum Scheitel verbessert ihr Tragverhalten nur unwesentlich, weil die Schalenränder dabei ungenügend entlastet werden (Abschnitt 3.9).

In hohen Kuppelschalen, deren Auflagerbereich durch eine 'Übergangsfläche' so geneigt ist, daß die Auflagerkraft fast tangential eingeleitet wird, vermindern sich die Spannungen am Schalenrand und in der Mitte des Schalenviertels wesentlich für achsensymmetrische Eigengewicht- und Schneelasten, weniger jedoch für antimetrische Windlasten. Die Spannungen niedriger achsensymmetrisch oder antimetrisch belasteter Kuppelschalen werden dagegen nur geringfügig abgebaut. Die Neigung der Schalenmittelfläche sollte deshalb am Lager der Auflagerkraftneigung des Lastfalles Eigengewicht und Schnee angepaßt werden (Abschnitt 3.6).

Von den fünf untersuchten Kuppelschalen besitzen hohe und niedrige Paraboloidschalen, deren Mittelflächen durch quadratische Parabeln erzeugt werden, das beste Tragverhalten.

5.2 Achsensymmetrische Membranschalen (Abschnitt 4)

Die Membranformen können mit Spannungsfunktionen, die im Schaleninneren stetig verlaufen und bestimmte Randbedingungen erfüllen, in Verbindung mit der Pucher'schen Differentialgleichung gefunden werden. Die Formen stellen für Lastgruppen aus Flächenlasten 'unverformte' Gleichgewichtslagen punktförmig gelagerter Membranen dar, da sie nur in Verbindung mit einer Spannungsfunktion aus einer Kräftegleichgewichtsbeziehung abgeleitet werden. Diese Membranformen können mit den Gleichgewichtslagen übereinstimmen, die aus einer gewählten Ausgangslage heraus, nichtlinear verformte Membranen eines linear elastischen, isotropen Materials für die gleiche Lastgruppe einnehmen.

Die für eine Lastgruppe aus Eigengewicht- und konstanter vertikaler Flächenlast bestimmten Schalen werden in drei Formgruppen eingeteilt:

1. Gruppe: (Bild 4.26, 4.27)

Schalen mit positiver Krümmung der Schalenmittelfläche

2. Gruppe: (Bild 4.28, 4.29)

Schalen mit positiv gekrümmtem Scheitelbereich und mäßig negativ gekrümmtem freien Rand.

3. Gruppe: (Bild 4.30, 4.31)

Schalen mit positiv gekrümmtem Scheitelbereich und auffällig negativ gekrümmtem freien Rand.

Abhängig von der Geometrie und der Belastungsart der Schalen gibt es Grenzbereiche für die Schalendicke im Auflagerbereich, bei deren Überschreitung das Tragverhalten nicht mehr maßgeblich gesteigert wird (Tab. 4.46). Eine drei- bis vierfache Schalendicke im Auflagerbereich steiler Schalen z.B. verringert die Spannungen in der ganzen Schale (3. Formengruppe, Lagerbreite $b = 0,3$ m, Seitenlänge des Quadrates im Grundriß beträgt 30 m), daß achsensymmetrische Flächenlasten (Eigengewicht oder Schnee) ohne weiteres abgetragen werden können. Treten unsymmetrische Lasten auf (einseitige Schneelasten, Windlasten etc.), muß die Schalendicke im Auflagerbereich auf das Sechs- bis Siebenfache erhöht werden.

Bei diesen Membranschalen treten entlang des freien Randes, entgegen Kugel- und Ellipsoidschalen, nur geringe Membrankräfte für die untersuchten symmetrischen und antimetrischen Lastfälle aus Eigengewicht-, Schnee- und Windlasten auf. Die Biegemomente entlang der Ränder sind unbedeutend.

Membranschalen brauchen bei o.g. Belastungen entlang ihres freien Randes nicht mehr versteift oder zusätzlich unterstützt werden. Die für eine dieser Lastgruppen definierten Membranformen sollten beim Entwurf jedoch genauestens eingehalten werden. Beträgt eine großflächige, nicht affine Abweichung der Höhenordinate z von der ganzen Membranform stellenweise mehr als $\Delta z = \pm 1\%$ (z.B. $z = 10 \text{ m}$, $\Delta z = \pm 10 \text{ cm}$), verschlechtert sich das Tragverhalten der Membranschalen wesentlich (Abschnitt 4.7.3).

Membranschalen der dritten Formengruppe (auffällig negativ gekrümmter Rand) besitzen von den untersuchten Schalen das günstigste Tragverhalten, da in ihnen besonders bei antimetrischen Schnee- und Windlasten die kleinsten Membran- und Biegespannungen auftreten.

A N H A N G

Das Tragverhalten der Membranschalen (Abschnitt 4.7) wird durch Schnittgrößen und Hauptspannungen in bestimmten Punkten ausgewählter Schalen charakterisiert.

Bei dieser Auswahl beschreiben die Lastfälle Nr. 1, Eigengewicht und Schnee, das Tragverhalten achsensymmetrisch belasteter (Abschnitt 2.3) Membranschalen. Die Tendenzen im Tragverhalten antimetrisch belasteter Schalen werden exemplarisch durch den Lastfall Nr. 5, Wind und halbseitiger Schnee, aufgezeigt.

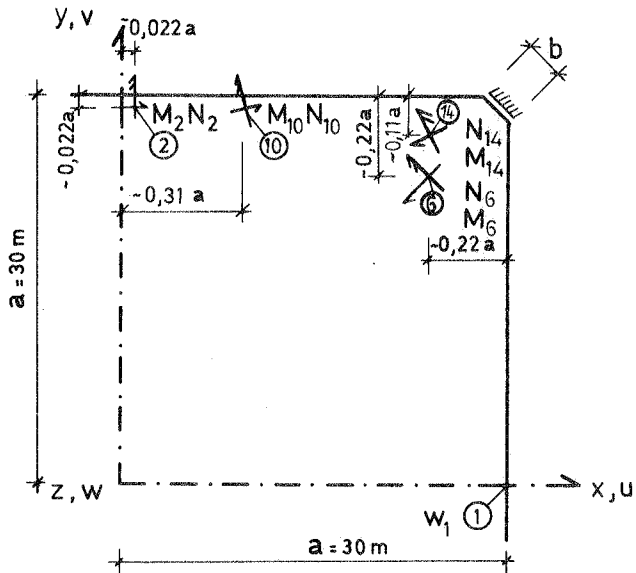


Bild A1: Schnittgrößen von Membranschalen, die in den Tabellen A2 - A6 dargestellt sind.

		lokale Schnittgrößen (Bild 2.4)						Hauptspannungen, oben, unten					
		Bild A1 Punkt	n_x [kN]	n_y [kN]	n_{xy} [kNm]	m_x [kNm]	m_y [kNm]	m_{xy} [kNm]	σ_{H1}^{oben} [N/cm ²]	σ_{H2}^{oben} [N/cm ²]	σ_{H1}^{unten} [N/cm ²]	σ_{H2}^{unten} [N/cm ²]	
$b = 0,2$ [m], Lf.-Nr. 6	2	-53,48	- 8,58	- 2,98	-0,219	-0,983	0,725	-12,71	-156,19	126,76	- 70,09		
$b = 0,2$ [m], Lf.-Nr. 1	2	-44,49	8,30	3,73	-0,214	-0,949	0,692	- 7,61	-146,76	122,39	- 58,49		
$b = 1,0$ [m], Lf.-Nr. 5	10	-26,09	- 4,88	15,31	-1,684	0,950	1,318	143,93	-215,42	166,89	-136,85		
$b = 0,2$ [m], Lf.-Nr. 5	10	-50,90	- 7,73	42,10	-4,12	1,98	3,88	384,01	-657,75	468,41	-341,25		
$b = 0,2$ [m], Lf.-Nr. 6	14	-98,13	-162,01	-115,22	0,251	0,807	-0,889	114,87	-340,75	-122,58	-301,87		
$b = 0,2$ [m], Lf.-Nr. 1	14	-83,86	-137,67	- 93,82	0,199	0,675	-0,858	190,58	-295,52	-112,46	-246,46		
$b = 1,0$ [m], Lf.-Nr. 5	14	- 2,18	- 32,29	- 12,88	0,962	0,117	-0,597	121,82	- 63,71	- 27,20	-117,09		
$b = 0,2$ [m], Lf.-Nr. 5	14	-53,56	- 10,25	1,18	2,19	0,45	-1,75	255,89	- 88,15	34,83	-362,12		

Es bedeuten: b = Lagerbreite

Lf.-Nr. 1 \equiv Lastfall Nr. 1 Eigengewicht $g = 2,0$ kN/m² (achsensymmetrisch)

Lf.-Nr. 6 \equiv Lastfall Nr. 6 Eigengewicht und Schnee $g+p = 2,75$ kN/m² (achsensymmetrisch)

Lf.-Nr. 5 \equiv Lastfall Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee (Bild 2.12)

Tab. A2: Lokale Schnittgrößen und Hauptspannungen in verschiedenen Punkten einer Membranschale, Formengruppe 1

(Bild 4.26), Schattenparameter $C = 0,45$, Scheitelhöhe $S = 23$ m, Schalendicke in Auflagenhöhe $i = 4,0$ (Bild 2.22)

	lokale Schnittgrößen (Bild 2.4)							Hauptspannungen, oben, unten			
	Bild A1 Punkt	n_x [kN]	n_y [kN]	n_{xy} [kN]	m_x [kNm]	m_y [kNm]	m_{xy} [kNm]	σ_{H1}^{oben} [N/cm ²]	σ_{H2}^{oben} [N/cm ²]	σ_{H1}^{unten} [N/cm ²]	σ_{H2}^{unten} [N/cm ²]
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 6	2	- 23,61	- 7,12	27,62	0,43	0,166	1,30	96,24	- 78,88	111,12	-205,30
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 1	2	- 18,87	- 6,58	26,97	0,38	0,15	-1,23	90,96	- 72,38	109,48	-191,68
b = 1,0 [m], Lf.-Nr. 5	10	- 33,96	0,01	8,94	-1,12	-0,86	-0,86	15,82	-212,31	142,13	1,12
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 5	10	-135,17	6,14	- 6,15	-4,00	-3,01	1,91	-191,25	-627,78	440,14	56,32
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 6	14	- 46,75	-91,64	-60,38	-0,076	-1,31	0,274	- 52,21	-250,89	84,04	-126,93
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 1	14	- 32,03	-71,52	-43,82	-0,058	-1,225	0,253	- 40,63	-210,13	79,19	- 89,31
b = 1,0 [m], Lf.-Nr. 5	14	- 12,21	-26,31	-18,19	-0,22	-0,875	0,28	- 35,73	-115	81,21	- 26,11
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 5	14	- 24,18	- 9,20	14,73	-0,447	-2,343	0,781	-272,7	- 30,27	222,14	- 2,59

Es bedeuten: b = Lagerbreite
Lf.-Nr. 1 ≡ Lastfall Nr. 1 Eigengewicht $g = 2,0$ kN/m² (achsensymmetrisch)
Lf.-Nr. 6 ≡ Lastfall Nr. 6 Eigengewicht und Schnee $g+p = 2,75$ kN/m² (achsensymmetrisch)
Lf.-Nr. 5 ≡ Lastfall Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee (Bild 2.12)

Tab. A3: Lokale Schnittgrößen und Hauptspannungen in verschiedenen Punkten einer Membranschale, Formengruppe 2 (Bild 4.28), Schalenparameter $C = 0,54$ Scheitelhöhe $S = 21,85$ m, Schalendicke in Auflagenhöhe $i=4,0$ (Bild 2.22)

	lokale Schnittgrößen (Bild 2.4)										Hauptspannungen, oben, unten			
	Bild A1 Punkt	n_x [kN]	n_y [kN]	n_{xy} [kN]	m_x [kNm]	m_y [kNm]	m_{xy} [kNm]	$\sigma_{H1}^{\text{oben}}$ [N/cm ²]	$\sigma_{H2}^{\text{oben}}$ [N/cm ²]	$\sigma_{H1}^{\text{unten}}$ [N/cm ²]	$\sigma_{H2}^{\text{unten}}$ [N/cm ²]			
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 6	2	-32,22	- 6,72	7,99	0,230	0,538	0,013	43,71	- 20,32	-52,56	- 68,15			
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 1	2	-26,87	- 5,72	6,26	0,204	0,464	0,022	38,25	- 16,32	-45,88	- 57,52			
b = 1,0 [m], Lf.-Nr. 5	10	-31,2	-18,16	-31,55	0,522	0,691	-0,706	127,65	- 75,63	-66,22	-109,20			
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 5	10	- 3,62	- 9,76	-32,38	1,79	1,12	-1,76	336,96	- 80,22	-17,46	-272,73			
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 6	14	-34,36	-88,64	-93,33	-0,130	0,424	-0,249	77,14	-203,36	-20,26	-201,56			
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 1	14	-27,20	-60,72	-74,50	-0,111	0,352	-0,216	69,73	-157,07	18,21	-150,69			
b = 1,0 [m], Lf.-Nr. 5	14	- 8,69	-38,47	-19,67	-0,209	-0,923	0,246	-30,50	-134,72	73,59	- 26,29			
b = 0,2 [m], Lf.-Nr. 5	14	- 3,22	-11,0	2,49	-0,313	1,23	0,541	-37,92	-160,92	119,02	- 28,36			

Es bedeuten: b = Lagerbreite

Lf.-Nr. 1 \equiv Lastfall Nr. 1 Eigengewicht $g = 2,0$ kN/m² (achsensymmetrisch)

Lf.-Nr. 6 \equiv Lastfall Nr. 6 Eigengewicht und Schnee $g+p = 2,75$ kN/m² (achsensymmetrisch)

Lf.-Nr. 5 \equiv Lastfall Nr. 5 Wind und halbseitiger Schnee (Bild 2.12)

Tab. A4: Lokale Schnittgrößen und Hauptspannungen in verschiedenen Punkten einer Membranschale, Formengruppe 3 (Bild 4.2), Schalenparameter $C = 0,58$, Scheitelhöhe $S = 11,04$ m, Schalendicke in Auflagenhöhe $i=4,0$ (Bild 2.22)

Seitenlänge des Grundrisses = 30 m, Scheitelhöhe S = 11,04 m, Lagerbreite b = 0,2 m, Schalendicke im Auflagerbereich i = 4,0 Lastfall Nr. 6, Eigen- gewicht und Schnee	Lokale Schnittgrößen (Bild 2.4)										Hauptspannungen, oben, unten			
	Ort Bild A1	n_x [kN]	n_y [kN]	n_{xy} [kN]	m_x [kNm]	m_y [kNm]	m_{xy} [kNm]	oben σ_{H1} [N/cm ²]	oben σ_{H2} [N/cm ²]	unten σ_{H1} [N/cm ²]	unten σ_{H2} [N/cm ²]			
Membranschale C = 0,58 (Bild 4.30)	2	-32,22	- 6,72	7,99	0,23	0,538	0,013	43,71	- 20,71	- 52,56	- 68,15			
Näherung der Schalennittefläche d. Polynom 4. Ordnung 16 Stützpunkte (Abschnitt 4.5.2)	2	-36,33	9,93	5,15	0,99	0,78	0,256	102,38	30,49	- 56,90	-141,98			
Membranschale C = 0,58 (Bild 4.30)	~ 6	-34,36	- 88,64	- 93,33	-0,130	0,424	-0,249	77,14	-203,36	- 20,26	-201,56			
Näherung der Schalennittefläche d. Polynom 4. Ordnung 16 Stützpunkte (Abschnitt 4.5.2)	6	-83,45	-237,95	-114,20	1,76	4,30	-0,681	290,81	-124,73	-255,32	-714,27			

Tab. A5: Lokale Schnittgrößen und Hauptspannungen in verschiedenen Punkten einer Membranschale (Bild 4.30), größte Abweichung der z-Koordinaten $\Delta z = \pm 5\%$ der ursprünglichen Höhe (Tab. 4.32)

Seitenlänge des Grundrisses = 30 m, Scheitelhöhe S = 22,99 m, Lagerbreite b = 1,0 m, Schalendicke im Auflagerbereich i = 4,0, Eigenlastfall Nr. 6, Eigengewicht und Schnee	lokale Schnittgrößen (Bild 2.4)							Hauptspannungen, oben, unten			
	Ort Bild A1 Punkt	n_x [kN]	n_y [kN]	n_{xy} [kN]	m_x [kNm]	m_y [kNm]	m_{xy} [kNm]	σ_{H1} [N/cm ²]	σ_{H2} [N/cm ²]	σ_{H1} [N/cm ²]	σ_{H2} [N/cm ²]
Membranschale C = 0,45, (Bild 4.26)	2	2,78	- 33,61	- 2,98	0,889	1,01	0,08	52,66	- 80,06	87,48	137,16
Paraboloidschale (PA2, Bild 2.19)	2	2,51	- 20,06	- 6,42	-0,449	-1,92	-0,468	-33,62	-298,62	165,57	34,56
Paraboloidschale (PA3, Bild 2.19)	2	8,14	- 49,22	- 4,65	-0,51	-2,91	-0,198	59,56	-336,32	212,40	- 38,35
Näherung der Schalenteilfläche d. Polynomansatz (Abschn. 4.5.2, 16 Stützpunkte, Poly 16, Bild 4.34)	2	- 3,73	- 41,93	- 15,06	1,499	4,65	1,48	432,76	87,27	- 83,78	-550,43
Membranschale C = 0,45, (Bild 4.26)	6	-129,94	-129,94	-108,97	-0,517	-0,517	0,543	73,21	-301,13	-125,60	-296,20
Paraboloidschale (PA2, Bild 2.18)	6	- 97,01	- 97,01	-101,28	-0,672	-0,672	0,445	- 99,38	-269,14	110,05	-226,57
Paraboloidschale (PA3, Bild 2.19)	6	- 70,79	- 70,78	- 78,9	-0,506	-0,506	0,775	-109,98	-161,91	130,26	-212,31
Näherung der Schalenteilfläche d. Polynomansatz (Abschn. 4.5.2, 16 Stützpunkte, Poly 16, Bild 4.34)	6	-213,4	-213,4	-167,45	-0,311	-0,311	-1,01	7,78	-599,88	-122,8	-352,43

Tab. A6: Lokale Schnittgrößen und Hauptspannungen in verschiedenen Punkten von Kuppelschalen und Membranschalen

Folgende Berichte sind bereits erschienen:

- 74-1 M. Becker, J. Bühler, G. Lang-Lendorff,
K. Papailiou, J. Sättele:
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74-2 G. Werner:
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Er-
mittlung des Tragverhaltens biege- und verdrehbeanspruch-
ter Stäbe mit I-Querschnitt.
- 74-3 K. Tompert:
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Un-
terlage.
- 74-4 W. Riehle:
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und
ihre Anwendung bei der Methode der finiten Plattenele-
mente.
- 75-1 G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele,
K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil I/A, I/B, I/C.
- 75-2 G. Müller:
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissner-
schen Plattentheorie nach einer diskretisierten und er-
weiterten Trefftz-Methode.
- 75-3 E. A. Castrillón O. :
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger
Träger unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76-1 W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb,
G. Müller, J. Müller, K. -H. Reineck, J. Schlaich,
K. H. Schweizerhof, F. Seible:
Platten - Theorie, Berechnung, Bemessung.
Teil II/A, II/B, II/C, II/D.

- 76-2 E. Ramm:
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77-1 B. -M. Sulke:
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78-1 F. Fujii:
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten.
- 79-1 B. Brendel:
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.