

# **Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen**

von

**Roman Etlender**

Bericht Nr. 57

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

Professor Dr.-Ing. habil. M. Bischoff

2012



*Berichte können bezogen werden über:*  
Institut für Baustatik und Baudynamik  
Universität Stuttgart  
Pfaffenwaldring 7  
70550 Stuttgart

Tel.: 0711 - 685 66123  
Fax: 0711 - 685 66130  
E-Mail: [sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de](mailto:sekretariat@ibb.uni-stuttgart.de)  
<http://www.ibb.uni-stuttgart.de/>

*Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten.  
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, diesen Bericht ganz oder  
teilweise auf photomechanischem, elektronischem oder sonstigem Wege zu kom-  
merziellen Zwecken zu vervielfältigen.*

D93 - Dissertation an der Universität Stuttgart  
ISBN 978-3-00-037587-3

# **Modellierung und Simulation der Wellenausbreitung in flexiblen hydraulischen Leitungen**

Von der Fakultät für Bau- und Umweltingenieurwissenschaften  
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines  
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

**Roman Etlender**

aus Tiraspol (Rep. Moldau)

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. habil.  
Manfred Bischoff, Stuttgart

Mitberichter: Prof. Dr. rer.nat.  
Claus-Dieter Munz, Stuttgart

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Januar 2012

Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

2012



*Meinem Sohn Nathan*



---

*Wissenschaft hat etwas Faszinierendes an sich. So eine geringfügige  
Investition an Fakten liefert so einen reichen Ertrag an Voraussagen.*

Mark Twain (\*1835, †1910)

# Urheberrechtserklärung

Für die Anfertigung dieser Arbeit wurden folgende Software-Anwendungen verwendet:

- MATLAB – © The MathWorks, Inc.,
- AMESIM – © LMS International,
- VISUAL C++ – © Microsoft,
- GCC – GNU Lizenzierung,
- GSL, PETSc, NUMERICAL RECEPIES – GNU Lizenzierung,
- T<sub>E</sub>X, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X – GNU Lizenzierung.

Die im Lauf der Anfertigung der Dissertation konstruierten Quellcodes, implementierten Submodelle und Programmbibliotheken sowie Simulationsmodelle zur Berechnung unterschiedlicher Hydraulik-Komponenten sind zum Anfertigungszeitpunkt der Arbeit Eigentum der Robert Bosch GmbH.

Ich versichere an Eides Statt, dass ich die vorliegende Arbeit, abgesehen von den genannten Quellen und Anregungen, selbständig angefertigt habe.

Roman Etlender  
Stuttgart, 22. Februar 2012

# Kurzfassung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines physikalischen Modells sowie einer passenden numerischen Berechnungsmethode zur Vorhersage der Wellenbewegungen innerhalb von flexiblen hydraulischen Leitungen. Ziel ist es ein Rechenmodell zu konstruieren, welches innerhalb von Simulationen komplexer hydraulischer Systeme eingesetzt werden kann. Aus diesem Grund liegt besonderer Fokus der Untersuchungen auf Effizienz des Modells bezüglich der Rechenzeiten.

Das physikalische Modell basiert auf Erhaltungsgleichungen für das Fluid unter Hinzunahme der Bewegungsgleichungen für die Leitungswand. Für die entstehende quasi-zweidimensionale Formulierung werden mehrere numerische Schemata zur Berechnung entwickelt. Die Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen basiert auf einer Godunov-Typ Methode zweiter Ordnung, wobei, ausgehend von unterschiedlichen Formulierungen der Erhaltungsgleichungen verschiedene numerische Schemata erarbeitet und gegenübergestellt werden. Für die Einbindung eines Berechnungsschemas für die Wandbewegung in das Strömungsberechnungsschema werden eine sequentielle, eine iterativ-gestaffelte und eine direkte Kopplungsmethode konstruiert. Zur Abbildung der Wandbewegung werden sowohl einfache Modelle betrachtet, deren Beziehungen zwischen dem Zustand in der Leitung und der momentanen Dehnung durch algebraische Abhängigkeiten ausgedrückt werden, wie auch Modelle, die die Schwingungen der Leitung in radiale und axiale Richtungen berücksichtigen.

Für die entwickelten numerische Schemata wird eine Randbehandlung vorgestellt, welche es ermöglicht, das konstruierte Simulationsmodell an weitere Berechnungsmodelle hydraulischer Elemente zu koppeln, unabhängig von numerischen Methoden, die innerhalb dieser Modelle eingesetzt werden. Hierdurch wird eine Möglichkeit für den Einsatz des Berechnungsverfahrens

---

innerhalb von Systemsimulationen geschaffen. Erhaltungsbedingungen bleiben hierbei bestehen. Eine Implementierung des Modells innerhalb einer Systemsimulationsumgebung wird zur Verifizierung- und Validierungszwecken verwendet. Bei der Verifizierung werden sowohl theoretische Aufgaben gerechnet wie auch die Simulation eines für die Vermessung der Leitungen konstruierten Prüfstands durchgeführt. Zusätzlich zum Abgleich am Prüfstand wird das Modell innerhalb von Berechnungen des Verhaltens einer vorher vermessenen Hochdruckpumpe eingesetzt.

# Abstract

## Modeling and Simulation of Transient Wave Propagation in Flexible Hydraulic Lines

The subject of this work is the development of a physical model together with an appropriate numerical calculation method for the prediction of transient wave propagation in flexible hydraulical lines. The main target consists in construction of a model, which is applicable within calculations of complex hydraulic systems. Therefore efficiency of the numerical model is an important factor of the conducted research.

The physical model itself is based on the conservation laws of the fluid, regarding wall motion of a line. For the emerging quasi two-dimensional form multiple calculation schemes are developed. The discretization of conservation laws is based on a Godunov-type method of second order, whereat schemes developed started from different formulations are discussed and compared. For the integration of a calculation scheme for the wall motion in the flow calculation scheme following methods are introduced: sequential, iteratively-staggered and directly coupled. For modeling of wall motion either simple approaches are used, which reflect relations between the fluid states and strain of the line by algebraic dependencies, as well as models that take into account vibrations of the pipe in radial and axial directions.

For the constructed numerical schemes a treatment of boundary conditions is presented, which allows a realization of a coupling between line model and a further element in within one calculation. The coupling scheme fulfills conservation and is independent from the discretization method so that neighbour model can use any type of numerics. This allows an application of the constructed models within simulation of complex hydraulic systems. An

---

implementation of the line models within a simulation environment is provided and used for verification and validation. Verification is performed on some theoretical tasks as well as on calculations of a constructed experimental setup for measurement of pulse propagation within hydraulical pipes. Additionally simulations of a test bench for measurement of high-pressure pumps according to previously executed experiments are performed using the implemented models for representation of flexible hoses of the setup.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner dreijährigen Beschäftigung als Doktorand im Bereich *Forschung und Vorausbildung* der Firma Robert Bosch GmbH in Gerlingen bei Stuttgart. Dabei wurde ich von zahlreichen Personen unterstützt, bei denen ich mich an dieser Stelle bedanken möchte.

An erster Stelle bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Manfred Bischoff, für die wissenschaftliche Betreuung dieser Arbeit und zahlreiche Hilfestellungen bei der Anfertigung. Herrn Prof. Dr. Claus-Dieter Munz danke ich für die Übernahme der Mitberichterstattung.

Desweiteren bedanke ich mich sehr herzlich bei Herrn Dr.rer.nat. Dr.-Ing. Uwe Iben, der diese Arbeit erst möglich machte und für die zahlreichen fruchtbaren Diskussionen sowohl in Bereichen der Modellierung und der Numerik, wie auch im Bereich der experimentellen Untersuchungen. Herrn Dr.-Ing. Markus Jungemann danke ich für die Hilfestellungen bei der Implementierung der entwickelten Modelle sowie für ihre BOSCH-weite Zurverfügungstellung.

Bei Herrn Dr.rer.nat. Anselm Berg bedanke ich mich für die Diskussionen im Bezug auf Randbedingungen und bei Frau Dipl.Math Nina Bretz für die Übernahme der Weiterentwicklung und Supports der konstruierten Modelle. Bei Herrn Dipl.Ing Michael Bauer bedanke ich mich für die Hilfestellungen beim Testen der Modelle in Berechnungen vermessener hydraulischer Systeme.

Ich bedanke mich ferner bei Dipl.Ing Erik Thorwirt für die zahlreichen Hinweise im Bezug auf Konstruktion effizienter Programmcodes. Bei Herrn Dr.-Ing. Ronny Leonhard und Herrn Dr.-Ing. Robert Gitzendanner-Thoben

---

bedanke ich mich für Hilfestellungen in Applikation experimenteller Untersuchungen.

Bei Herren Dr.-Ing. Christoph Senft, Dipl.Math Merten Lampe und Dipl.Ing Marco Beier bedanke ich mich sehr für viele Hinweise bezüglich der Anfertigung der Arbeit, zahlreiche Ermutigungen und die moralische Unterstützung während der gesamten Zeit.

Ein sehr großer Dank gilt meinem Bruder, meinen Eltern, sowie meinen Großeltern für Beistand und Unterstützung jeglicher Art während der Anfertigung und ganz besonders bedanke ich mich bei meiner Frau Maria für das Haltgeben währen der Zeit des Schreibens und die Aufmunterungen zum weitermachen. Ohne die Unterstützung durch meine Familie wäre das alles nicht möglich gewesen.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XV</b>
<b>Abkürzungsverzeichnis</b>	<b>XVIII</b>
<b>1 Einführung</b>	<b>1</b>
1.1 Hydraulische Systeme und ihre numerische Simulation im industriellen Entwicklungsprozess . . . . .	1
1.2 Stand der Forschung, Aufgabenstellung und Ziele der Arbeit .	4
1.3 Aufbau der Arbeit . . . . .	7
<b>2 Mathematische Modellierung einer Schlauchleitung</b>	<b>9</b>
2.1 Erhaltungsgleichungen der Strömung in flexiblen Leitungen .	11
2.2 Schließung und Reduktion des Systems . . . . .	15
2.3 Alternative Formulierungen . . . . .	24
2.4 Mathematische Modelle zur Beschreibung der Leitungsdehnung	25
2.5 Hilfskonstrukte zur Beschreibung der Wellenausbreitung . . .	41
2.6 Effiziente Modellierung der Reibungskräfte in hydraulischen Leitungen . . . . .	44
<b>3 Numerische Methoden zur Behandlung der Strömungsgleichungen</b>	<b>54</b>
3.1 Eigenschaften und Lösungstheorie der Erhaltungsgleichungen	54
3.2 Numerische Methoden für Erhaltungsgleichungen . . . . .	58
3.3 Lösungsverfahren für das Riemann-Problem . . . . .	68
<b>4 Diskretisierung des gekoppelten Problems</b>	<b>73</b>
4.1 Numerische Behandlung der Wandbewegungsgleichungen . . .	73
4.2 FVM-Diskretisierung der Strömungsgleichungen der Leitung .	79

4.3	Lösungsansatz mit direkter Kopplung und Gesamtschema zweiter Ordnung . . . . .	87
4.4	Konstruktion numerischer Randbedingungen . . . . .	90
4.5	Konstruktion der Anfangswerte und Behandlung des Reibungsterms . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Hydrauliksimulationsumgebung AMESim</b>	<b>95</b>
5.1	Konzept und Aufbau der Simulationsumgebung . . . . .	96
5.2	Einbindung hydraulischer Leitungsmodelle in die Simulationsumgebung . . . . .	99
<b>6</b>	<b>Verifizierung und Validierung</b>	<b>106</b>
6.1	Analyse des Berechnungsmodells anhand idealisierter Stoßprobleme . . . . .	106
6.2	Validierung an einem charakteristischen Testaufbau . . . . .	113
6.3	Anwendung des Modells in praxisbezogenen Rechnungen . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Mathematische Ergänzungen</b>	<b>130</b>
A.1	Funktionalanalytische Definitionen . . . . .	130
A.2	Voigt'sche Notation . . . . .	132
A.3	Banach'scher Fixpunktsatz . . . . .	132
A.4	Nullstellenverfahren von Brent und Dekker . . . . .	133
<b>B</b>	<b>Physikalische Ergänzungen</b>	<b>135</b>
B.1	Gewichtsfunktion $W_Z$ nach Zielke . . . . .	135
<b>C</b>	<b>Graphiken und Tabellen</b>	<b>136</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>137</b>
	<b>Lebenslauf</b>	<b>148</b>

# Abbildungsverzeichnis

1.1 Vereinfachte Darstellung eines Dieselinjektors in der Simulationsumgebung AMESim. . . . .	3
2.1 Koordinaten der Fluidsäule der Leitung. . . . .	10
2.2 Leitungsabschnitt. . . . .	11
2.3 Stoffeigenschaften von Prüföl nach ISO4113 . . . . .	21
2.4 Blasenbehaftete Rohrströmung . . . . .	22
2.5 Dichte und Schallgeschwindigkeit von ISO4113 . . . . .	23
2.6 Spannungs-Dehnungs-Verlauf für einen einachsigen Spannungszustand. . . . .	27
2.7 Schematische Darstellung der Konstruktion eines Dehnungsmodells . . . . .	28
2.8 Schematische Darstellungen mehrschichtiger Schlauchleitungen	29
2.9 Vernachlässigbare Deformationen einer Schlauchleitung. . . .	30
2.10 Leitungswandelement. . . . .	33
2.11 Dickwandiges und dünnwandiges Leitungswandelement. . . .	34
2.12 Gemessene Kraft-Dehnung Abhängigkeiten für die axiale Dehnung der Leckölleitungen. . . . .	39
2.13 Axiale Kraft-Dehnung Kurve einer Leitung mit Metallgewebe als Druckträgerschicht . . . . .	40
2.14 Stoßversuch: Schnelles Öffnen und schnelles Schließen eines Ventils. . . . .	42
2.15 Zielkes Gewichtsfunktion . . . . .	48
2.16 Faktor der instationären Reibung nach Brunone et al. . . . .	49
2.17 Vergleich der Reibungsmodelle anhand eines Stoßversuchs . . .	52
2.18 Verhältnis der Druckamplituden einer geschlossenen Leitung bei sinusförmiger Druckanregung für unterschiedliche Ansätze zur Reibungsberechnung. . . . .	53

3.1	Charakteristiken einer klassischen Lösung der Anfangswertaufgabe. . . . .	56
3.2	Ausbreitung einer Verdünnung und eines Stoßes . . . . .	58
3.3	Integrationsgebiet bei Konstruktion eines FVM-Schemas . . .	62
3.4	Stückweise konstante Approximation von $\mathbf{u}$ zum diskreten Zeitpunkt $t_n$ . . . . .	64
3.5	Lineare Rekonstruktionen in der Zelle $i$ . . . . .	65
3.6	Stückweise lineare Approximation von $\mathbf{u}$ zum diskreten Zeitpunkt $t_n$ nach MUSCL. . . . .	66
3.7	Schematische Darstellung des MUSCL-Verfahrens . . . . .	67
3.8	Struktur der HLL-Näherungslösung. . . . .	69
4.1	Vollständiger Zeitschritt bei sequentieller Kopplung beim Kopeln der Struktur über Quellterme. . . . .	82
4.2	Vollständiger Zeitschritt bei iterativ-gestaffelter Kopplung über die Quellterme. . . . .	84
4.3	Vollständiger Zeitschritt bei iterativ-gestaffelter Kopplung über die Flussterme. . . . .	86
4.4	Vollständiger Zeitschritt bei der direkten Kopplung. . . . .	88
4.5	Vollständiger Zeitschritt bei der direkten Kopplung 2ter Ordnung. . . . .	90
4.6	Stoßausbreitung über dem Rand bei einem Zeitschritt innerhalb FVM. . . . .	91
5.1	Beispiel eines AMESim Modell-Sketchs . . . . .	97
5.2	Parameter-Eingabemaske des AMESim-Untermodells GOD-TYPE51 . . . . .	99
5.3	Parameter-Eingabemaske des AMESim-Untermodells GOD-FLEX50 . . . . .	100
5.4	Beispiel einer nicht-monotonen Folge der Abfragen der Flüsse am Leitungsrand durch die Simulationsumgebung. . . . .	101
5.5	Verlauf des Flusses über Leitungsrand bei einer sinusförmigen Druckerregung . . . . .	104
6.1	Druckverteilungen in der Leitung nach dem Öffnen des Ventils . . . . .	108
6.2	Geschwindigkeitsveilungen in der Leitung nach dem Öffnen des Ventils . . . . .	109
6.3	Schematischer Aufbau des Druckpulszeugers. . . . .	113
6.4	Druckpulszeuger. . . . .	114
6.5	Sketch des Druckpulszeugers in AMESim. . . . .	115
6.6	Pulsversuch mit einer Stahlleitung als Prüfling . . . . .	116

6.7	Pulsversuch 1 mit einer PVC-Leitung als Prüfling . . . . .	117
6.8	Pulsversuch 2 mit einer PVC-Leitung als Prüfling . . . . .	118
6.9	Vergleich der Wandbewegungsmodelle anhand Berechnung der Pulsausbreitung . . . . .	119
6.10	Pulsversuch 1 mit einer PVC-Leitung als Prüfling . . . . .	120
6.11	Schematischer Aufbau der Vermessung einer Hochdruckpumpe (HDP). . . . .	121
6.12	Ausgewählte Druckverläufe im Vergleich zwischen einer Ver- messung und einer Berechnung der Hochdruckpumpe bei 1000 U/min bei Verwendung des Modells für starre Leitung. . . . .	122
6.13	Ausgewählte Druckverläufe bei der Vermessung der Hoch- druckpumpe bei 1000 U/min. . . . .	123
6.14	Ausgewählte Druckverläufe bei der Vermessung der Hoch- druckpumpe bei 2000 U/min. . . . .	124
C.1	Approximationsfunktion des Wandwiederstandbeiwerts $\lambda$ . . .	136

# Abkürzungsverzeichnis

Symbol	Beschreibung	Einheit
<b>Allgemeine Abkürzungen</b>		
$\phi$	Azimutalwinkel der Leitung	rad
$\mathbf{n}$	Äußere normierte Normale eines Gebiets	–
$A$	Querschnitt der Leitung	$m^2$
$L$	Leitungslänge	$m$
$M$	Mantelfläche eines Abschnitts der Fluidsäule	$m^2$
$R$	Impulsverlust-Term der Modellgleichung	$kg/s^2$
$r$	Radius der Leitung	$m$
$r_0$	Radius der Leitung im entspannten Zustand	$m$
$s$	Wanddicke der Leitung	$m$
$t$	Zeitkoordinate	s
$x, y, z$	Orthogonale Ortskoordinaten	$m$
$x_{kl}$	Länge des (starren) linken Leitungsanschlusses	$m$
$x_{kr}$	Länge des (starren) rechten Leitungsanschlusses	$m$
FDM	'Finite-Differenzen-Methode'	–
FEM	'Finite-Elemente-Methode'	–
FSI	'Fluid-Struktur Interaktion'	–
FVM	'Finite-Volumen-Methode'	–
HLL	'Harten, Lax und van Leer' Methode	–
MUSCL	'Monotone Upstream-centred Schemes for Conservation Laws'	–

Symbol	Beschreibung	Einheit
--------	--------------	---------

### Größen zur Beschreibung des Fluids

$K_{Ax}$ ,		
$K_{Bru}$ ,	Reibungsfaktoren nach Axworthy, Brunone und Shuy	–
$K_{Shuy}$		
$\kappa_i$	Isentroper Kompressibilitätskoeffizient	$1/Pa$
$\nu_f$	Kinematische Viskosität des Fluids	$m^2/s$
$\rho$	Fluidichte	$kg/m^3$
$\tau_W^s$	Stationärer Anteil der Wandschubspannung	$Pa$
$\tau_W^u$	Instationärer Anteil der Wandschubspannung	$Pa$
$\tau_W$	Wandschubspannung	$Pa$
$\tau$	Tensor der viskosen Spannung des Fluids	$Pa$
$c$	Schallgeschwindigkeit des Fluids	$m/s$
$c_{sys}$	Signalausbreitungsgeschwindigkeit einer Leitung ('System-Schallgeschwindigkeit')	$m/s$
$e$	Spezifische innere Energie des Fluids	$J/K$
$E_f$	Kompressionsmodul der Flüssigkeit	$Pa$
$h$	spezifische Enthalpie, $h \equiv e + \frac{p}{\rho}$	$J/kg$
$p$	Druck in der Leitung	$Pa$
$Re$	Reynoldszahl	–
$S$	Entropie der Flüssigkeit	$J/K$
$S$	Entropie des Fluids	$J/K$
$T$	Temperatur des Fluids	$K$
$v$	Fluidgeschwindigkeit	$m/s$

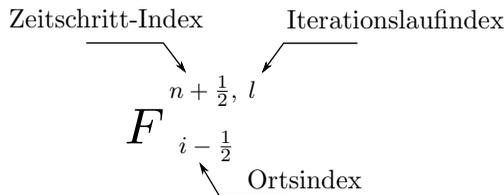
### Größen zur Beschreibung der Wandbewegung

$\lambda_L, \mu_L$	Lamè-Konstanten	$N/m^2$
$\nu$	Querkontraktionszahl (Poisson-Zahl)	–
$\rho_M$	Dichte der Leitungswand	$kg/m^3$
$\sigma_x, \sigma_r, \sigma_{xz}$	Lokale Spannungen in der Leitungswand	$N/m^2$
$\varepsilon_x, \varepsilon_r, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_\gamma$	Lokale Dehnungen der Leitungswand	–
$E$	Youngsches Elastizitätsmodul eines Feststoffs	$N/m^2$
$G$	Schubmodul	$N/m^2$

Symbol	Beschreibung	Einheit
$I$	Flächenträgheitsmoment	$m^4$
$w_\gamma$	Lokaler Winkel der Leitungswand in axiale Richtung	$rad$
$w_r$	Radiale Verschiebung der Leitungswand	$m$
$w_x$	Axiale Verschiebung der Leitungswand	$m$
$E_x, E_r, E_\phi$	Spannungs-Dehnungs-Verhältnis in $x$ -, $z$ -, $\phi$ -Richtungen. (Richtungsabhängiger Elastizitätsmodul)	$N/m^2$

### Analytische und numerische Bezeichnungen

$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$	Partielle Ableitung nach $t$ bzw. $x$	–
$\frac{D}{Dt}$	$= \left( \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right)$ Materielle Ableitung	–
$\mathbb{1}$	Einheitsmatrix	–
$\Omega_i^n$	$= [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$ , Raum-Zeit Würfel	–
$\mathbf{A}_{Roe}$	Roe-Approximande der Jacobi-Matrix eines Riemann-Problems	–
$C_{CFL}$	Courant-Friedrichs-Levy Zahl, $C_{CFL} \in (0, 1)$	–
$P_x$	Projektion einer Vektorgröße auf die $x$ -Achse	–



Verwendete Indizierung.



# Einführung

## 1.1 Hydraulische Systeme und ihre numerische Simulation im industriellen Entwicklungsprozess

Das Wort Hydraulik (vom griechischen *hýdor* „das Wasser“ und *aulós* „das Rohr“, „die Flöte“) wird oft als ein Zweig der Wissenschaft, der sich mit den praktischen Anwendungen von Flüssigkeit in Bewegung beschäftigt, definiert. Die ersten Untersuchungen von hydraulischen Wirkungszusammenhängen gehen auf Aristoteles (384-322 v. Chr.) und Archimedes (287-212 v. Chr.) zurück. Als Begründer der technischen Hydraulik gilt Joseph Bramah (1748-1814), der verschiedene mit Druckwasser arbeitende Maschinen konstruierte, die die eingebrachte Kraft um ein Vielfaches verstärkten. Einige seiner Erfindungen sind unter anderem Pumpen für Wasserwerke, eine hydraulische Presse und die Zapfanlage. Trotz der Tatsache, dass viele hydraulische Wirkzusammenhänge bereits vor Jahrhunderten entdeckt wurden, begannen die ersten detaillierten Untersuchungen hydraulischer Komponenten erst zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts. Die Entwicklung leistungsfähiger Verdränger-Pumpen in den zwanziger Jahren des zwanzigsten Jahrhunderts war schließlich der Ausgangspunkt für den Einzug hydraulischer Systeme in fast alle Bereiche der Technik. Hydraulische Kraftübertragung erlaubt nicht nur ein Arbeiten mit sehr hohen Kräften, sondern garantiert oft exakte Bewegungsabläufe und ein „weiches Arbeiten“.

Heute wird die rasante Weiterentwicklung hydraulischer Komponenten vor allem durch die Entwicklung der modernen Kraftfahrzeug- und Nutzfahrzeugtechnik vorangetrieben. So funktionieren heute fast alle Lenk- und Bremssysteme sowie alle Vorrichtungen zum Heben und Senken von Lasten

bei mobilen Bau- und Landmaschinen hydraulisch. Zu weiteren Systemen, deren Auslegung präzises Wissen der hydraulischen Gesetzmäßigkeiten erfordert, zählen die Einspritzsysteme von Verbrennungsmotoren.

Mit steigender Komplexität der modernen Hydraulikkomponenten und steigenden Anforderungen an deren Präzision und, zusammen mit immer kürzer werdenden Schaltzeiten und hohem Wirkungsgrad, wird es immer schwieriger, nur anhand von Zeichnungen, Handrechnungen und Mustererprobungen alle während des Betriebs auftretende Effekte zu erfassen und zu verstehen. Seit über zehn Jahren wird daher die sogenannte eindimensionale (1-D) Hydrauliksimulation innerhalb eines Entwicklungsprozesses neuer Komponenten zu Hilfe genommen. Die Grundidee der entsprechenden Tools zur Systemsimulation ist das Abbilden des Systems durch das Zusammensetzen und Parametrisieren von Untermodellen - physikalischen Modellen für einzelne Wirkungszusammenhänge, wie beispielsweise Bewegung einer Masse oder Durchströmung einer Drossel.<sup>1</sup> Bei virtueller Abbildung hydraulischer Komponenten wird hierbei ausgenutzt, dass die Strömung prinzipiell von eindimensionalem Charakter ist, so dass hydraulische Pfade modellhaft abbildbar sind.<sup>2</sup> Als ein Beispiel skizziert Abbildung 1.1 eine sehr vereinfachte Darstellung des eindimensionalen Modells eines Dieselinjektors innerhalb der Simulationsumgebung AMESim.<sup>3,4</sup> Im realen Entwicklungsprozess werden Modelle benutzt, deren Komplexität um ein Vielfaches größer ist, so dass auch viele kleinere physikalische Effekte in den Rechnungen mitberücksichtigt werden können. Ferner werden simulativ immer öfter nicht nur ein einzelner Injektor oder eine Pumpe betrachtet, sondern komplette Einspritzsysteme. Dennoch sind, dank des Einsetzens von effizienten Methoden zur Berechnung der Einzelelemente die Rechenzeiten überschaubar. Aus diesem Grund geht die Tendenz in den letzten Jahren weg vom Benutzen von Simulationsmodellen nur als ein Analyse-Werkzeug hin zu einem festen Bestandteil der Musterentwicklung. So können heute viele Designs noch vor der Musterfertigung und Erprobung simuliert und bewertet werden. Ferner werden dank relativ kurzer Rechenzeiten viele Designoptimierungen bereits

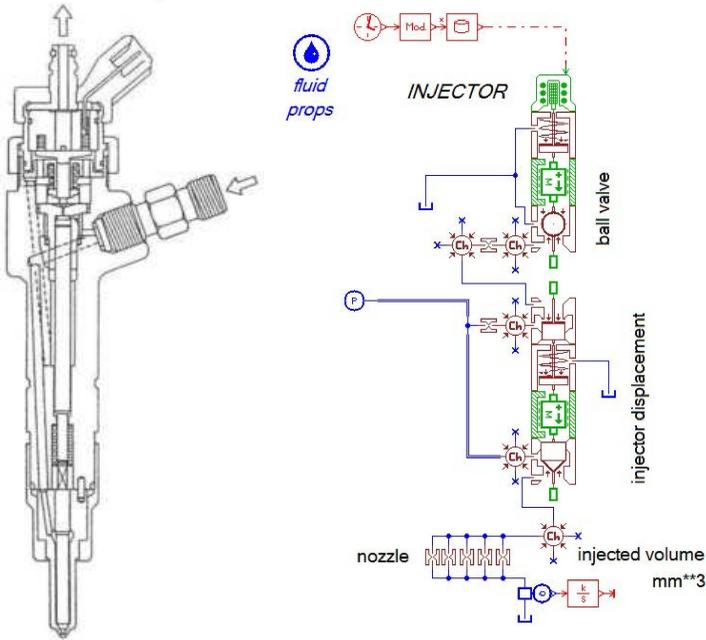
---

<sup>1</sup>Zum überwiegenden Teil basieren einzelne Untermodelle auf geschlossene Lösungen oder gewöhnliche Differentialgleichungen. Im ursprünglichen Sinn spricht man von 1-D Modellen, die aus 0-D Untermodellen, sogenannten *Modellen mit konzentrierten Parametern*, zusammengesetzt werden.

<sup>2</sup>Diese bestehen größtenteils aus hydraulischen Volumina, Leitungen und Widerständen.

<sup>3</sup>AMESim steht als Abkürzung für „Adaptive Modeling Environment for Simulation“ und ist heute das meist verbreitete Tool zur Berechnung komplexer mechanischer und hydraulischer Systeme. Entwickelt wurde die Umgebung von LMS.IMAGINE.

<sup>4</sup>Entnommen aus AMESim User Manual, [Int08].



**Abbildung 1.1:** Vereinfachte Darstellung eines Dieselinjektors in der Simulationsumgebung AMESim.

anhand der Berechnungsmodelle vorgenommen.

Das Entwickeln und Optimieren anhand virtueller Prototypen ist jedoch nur beim Vorhandensein physikalisch fundierter, numerisch effizient umgesetzter und validierter Untermodelle möglich. Innerhalb der letzten Jahre sind im Rahmen unterschiedlicher wissenschaftlicher Arbeiten zahlreiche Untermodelle erarbeitet worden. Einige Modelle befinden sich noch in der Entwicklungsphase, so dass noch nicht alle Bereiche der Hydraulik simulativ in zufriedenstellender Qualität erfasst sind. Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Konstruktion und Umsetzung eines neuen Modells für eindimensionale Hydrauliksimulationen.

## 1.2 Stand der Forschung, Aufgabenstellung und Ziele der Arbeit

Ausgangspunkt für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen ist die Suche nach einem Konzept eines effizient rechnenden und flexibel einsetzbaren Modells zur Simulation der Wellenbewegungen innerhalb von Schlauchleitungen, welches innerhalb der Simulationen hydraulischer Systeme verwendet werden kann.

Modelle zur Vorhersage der Wellenausbreitung in hydraulischen Leitungen haben eine etwa hundertjährige Geschichte. Die ersten in sich geschlossenen Modelle für starre Leitungen entstanden in den Arbeiten von Prandtl und Nikuradze (vgl. [Oer02]). Sie dienten primär zur Beschreibung der Verluste innerhalb einer Leitung sowie des allgemeinen Durchflussverhaltens mit geschlossenen Formeln. Die ersten Untersuchungen einer flexiblen Leitung gehen auf Korteweg zurück (vgl. [Kor78]). Diese analysierten den wichtigsten aus empirischen Beobachtungen bekannten Einfluss der Wandelastizität - die starke Änderung der Signalausbreitungsgeschwindigkeit und stellten diese Änderung in eine Beziehung zu den physikalischen Größen der Leitungswand.

Erst in den 1990er Jahren mit der Entstehung der Berechnungstools für komplexe hydraulische Systeme wurden effiziente Modelle wieder aufgegriffen und weiterentwickelt. An erster Stelle sind dabei die Arbeiten [JE89], [JE91] und [SRLJ93] zu nennen<sup>5</sup>, die den Grundstein der hydraulischen Bibliothek in AMESim bilden. Bei der effizienten Leitungsmodellierung ist ferner die Arbeit von M. Beck ([Bec03]) hervorzuheben. Hier wurde zur Berechnung von Strömungen mit Phasenübergang ein eindimensionales Leitungsmodell für ideal starre Leitungen vorgestellt, welches mit einem Godunov-Typ Verfahren arbeitet und innerhalb einer Systemsimulation verwendbar ist. Seit der Version 2007 sind auch in der Bibliothek von LMS.IMAGINE eine sogenannte „Lax-Wendroff-Leitung“, sowie eine „Godunov-Leitung“ für starre Leitungen verfügbar. Dort wurde die Lax-Wendroff Methode beziehungsweise die (original-)Godunov-Methode zur Bestimmung der Wellenausbreitung herangezogen.<sup>6</sup>

---

<sup>5</sup>Weitere in dieser Reihe durchgeführten Arbeiten an der Universität Bath sind in den genannten Publikationen referenziert.

<sup>6</sup>Aktuelle Implementierungen zeigen bislang leider eine Reihe von Schwierigkeiten bei Rechnungen mit Phasenübergang, wie in [EBJ08] festgestellt wurde.

Die Godunov-Typ Methoden sind zwar bereits seit über 50 Jahren in der Entwicklung und seit den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts sind auch stabil funktionierende Verfahren höherer Ordnung bekannt, jedoch findet ihr Übertragen von akademischen Aufgabestellungen in universelle Berechnungsmodelle nur sehr langsam statt. Die Anpassung der numerischen Verfahren an reale Modellgleichungen und reale Randbedingungen stellt sich als schwierig heraus.

Für flexible hydraulische Leitungen sind bislang keine Modelle bekannt, die mit der Godunov-Numerik arbeiten. Dies liegt im Wesentlichen daran, dass die Modellgleichungen für die quasi-zweidimensionale Strömung zusammen mit der Ergänzung durch die Gleichungen für die Wanddehnung eine Aufgabe bilden, auf welche als Gesamtgleichungssystem ein Godunov-Typ-Verfahren nicht ohne Weiteres anwendbar ist. Möglichkeiten zur Kopplung eines allgemeinen Struktur-Lösers an ein Godunov-Typ-Schema, mit welchem ein Teil des Gleichungssystems diskretisiert wird sowie Konstrukte zur Erzeugung eines effizienten numerischen Gesamtverfahrens, werden unter anderem erst im Laufe dieser Arbeit vorgestellt. Die meisten bis dato existierenden Modelle zur Berechnung der Wellenbewegung in Schlauchleitungen basieren entweder auf Untersuchungen im Frequenzbereich oder operieren mit numerischen Methoden, die auf Strömungsgleichungen in nicht erhaltender Form angewendet werden.

Prinzipiell lässt sich das Problem einer transienten Wellenausbreitung mittels Fourier-Transformation in den Frequenzbereich übertragen und die Lösungen aus dem Frequenzbereich können anschließend durch eine inverse Fourier-Transformation im Zeitbereich betrachtet werden. Dieses Vorgehen ist jedoch für die Implementierung innerhalb einer Simulationsumgebung ungeeignet und kann höchstens zu Validierungszwecken oder zur Parameteridentifikation einer Leitung verwendet werden. Eine ausführliche Analyse der Schlauchleitungsmodelle im Frequenzbereich wurde in Verbindung mit zahlreichen experimentellen Untersuchungen in der zu dieser Arbeit parallel stattfindenden Arbeit [Leo08] vorgenommen.

Einige weitere Untersuchungen der Modellierungsmöglichkeiten für flexible Leitungen entstanden in den letzten Jahren im Zusammenhang mit Analysen akustischer Vorgänge in der Hydraulik. Hervorzuheben sind die Arbeiten [Mae06, GF07] sowie weitere Untersuchungen gleicher Autoren, die in diesen Arbeiten referenziert sind. Bei diesen Rechenmodellen wird jedoch fast ausschließlich von inkompressiblen Vorgängen ausgegangen. Erweiterungen und

Adaptionsmöglichkeiten in Systemsimulationen sind Gegenstand aktueller Untersuchungen.

Im Rahmen einer Hydraulik-Simulationsumgebung wird fast immer zwischen Modellen für Rechnungen von isentropen und nicht isentropen Prozessen unterschieden. Die Philosophie der Simulation lässt sich dabei wie folgt ausdrücken: Werden lediglich sehr kurze Vorgänge simuliert, wie zum Beispiel ein oder mehrere Einspritzvorgänge eines Dieselinjektors, oder Systeme, die von der Umgebung abgekoppelt sind, so kann der Entropieaustausch mit der Umgebung vernachlässigt werden.<sup>7</sup> In diesem Fall kann es angenommen werden, dass sich das simulierte System nur innerhalb von adiabatisch äquivalenten Zuständen bewegt und die Zustandsgleichung des Fluids durch die Gleichung  $\rho = \rho(p, T_0)$  approximiert werden kann (vgl. [LMS07]). In AMESim sind daher die hydraulischen Komponenten in zwei Bibliotheken aufgeteilt: „*Hydraulic Component Design*“ und „*Thermo-Hydraulic Component Design*“. Die Untermodelle aus den beiden Bibliotheken sind a priori nicht miteinander koppelbar und sind a priori nicht innerhalb eines Simulationsmodells zu verwenden. Die Unterschiede in der Rechenzeit der Modelle mit Komponenten aus den beiden Bibliotheken sind teilweise sehr groß. Die Hydraulik-Bibliothek beinhaltet zusätzlich einige Komponenten, die in der Thermo-Hydraulik-Bibliothek, entweder aus Gründen der Numerik oder Modell-Komplexität, nicht implementiert sind. Ferner gibt es zu bemerken, dass innerhalb der Robert Bosch GmbH bereits einige sehr effiziente Untermodelle für isentrope Simulationen entstanden sind, die in einem sehr breitem Spektrum von Berechnungen eingesetzt werden.

Das primäre Ziel dieser Arbeit besteht in einer vollständigen Beschreibung und Konstruktion eines isentrop rechnenden numerischen Modells einer flexiblen hydraulischen Leitung, welches innerhalb der Simulationen hydraulischer Komponenten beziehungsweise ganzer hydraulischer Systeme oder Prüfstände einsetzbar ist.<sup>8,9</sup> Vorgreifend sei an dieser Stelle gesagt, dass im Laufe der Arbeit dabei klargestellt wird, dass hierzu die Konstruktion eines neuen numerischen Schemas notwendig ist, welches entweder eine effiziente

---

<sup>7</sup>Wichtige Annahme hierbei ist, dass die Druckschwankungen im berechnetem System „klein“ bleiben. „Klein“ definiert sich hierbei gerade durch die Vernachlässigbarkeit der Entropieänderung und kann beispielsweise für Diesel-Einspritzsysteme „unter 300 bar“ bedeuten.

<sup>8</sup>Die Aussagekraft eines solchen Modells ist dabei im Vorfeld zu untersuchen.

<sup>9</sup>Die Effizienz des Modells und der numerischen Umsetzung sind von zentraler Bedeutung.

Kopplung zwischen dem Struktur-Löser und der Godunov-Methode realisiert oder eine Godunov-Typ-Diskretisierung insofern erweitert, dass einige Gleichungen des Gesamtsystems innerhalb der Diskretisierung von einem externen Löser bearbeitet werden können.<sup>10</sup> Ferner wird die Entwicklung einer Randbehandlung benötigt, die die Integration des numerischen Schemas in zentral gesteuerte Systemsimulationen möglich macht, unabhängig davon mit welchen Modellen und numerischen Verfahren die benachbarten Elemente der Leitung interagieren. Schließlich ist die Verifizierung und Validierung eines jeden entworfenen Leitungsmodells unabdingbar für den Einsatz innerhalb der entwicklungsrelevanten Berechnungen.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Grundsätzlich bildet die Struktur der Arbeit einen Pfad zur Konstruktion eines numerischen Rechenmodells zur Abbildung der Wellenbewegung in Schlauchleitungen, welches innerhalb von Systemsimulationen einsetzbar ist. Hierzu werden nacheinander Modellansätze sowie Theorie der Modellierung, numerischer Zugang zu Gleichungen, Analyse der Implementierung in Systemsimulationen und Validierung des Modells vorgestellt.

Das erste Kapitel erläutert die dieser Arbeit zugrunde liegende Fragestellung und veranschaulicht den heutigen Stand der Entwicklung im behandelten Bereich.

Im zweiten Kapitel werden die zur Modellerstellung vorgenommenen Annahmen erläutert und Modellgleichungen werden hergeleitet. Hierbei wird separat auf die Erhaltungsgleichungen der Flüssigkeit, die Wandbewegungsgleichungen und Reibungsmodellierung Bezug genommen. Durch die Analyse wird ein quasi-zweidimensionales Modell zur Berechnung der Wellenausbreitung in flexiblen Leitungen konstruiert, welches in Verbindung mit unterschiedlichen Wandbewegungsmodellen verwendet werden kann.

Im folgenden dritten Kapitel werden Eigenschaften der Fluid-Gleichungen untersucht und numerische Schemata zur Konstruktion diskreter Berechnungsvorschriften zur Lösung der Erhaltungsgleichungen werden vorgestellt und auf das im zweiten Kapitel konstruierte Problem angepasst.

---

<sup>10</sup>Im Verlauf der Arbeit werden beide Vorgehensweisen analysiert und entsprechende Lösungen werden vorgestellt.

Das vierte Kapitel behandelt Methodiken zur Konstruktion eines Gesamtalgorithmus zur Lösung des gekoppelten Problems. Hierbei werden zunächst die Schemata zur Diskretisierung der Wandbewegungsgleichungen konstruiert und anschließend werden unterschiedliche Möglichkeiten der Einbindung des Gleichungslösers in das Finite-Volumen-Schema entwickelt und untersucht.

Im anschließenden fünften Kapitel werden die entwickelten Ansätze zur Einbindung des Rechenmodells in eine Simulationsumgebung zur Berechnung hydraulischer Systeme dargestellt. Es wird eine Methode zur Kopplung eines Randelements eines Finite-Volume-Schemas an ein weiteres Element der Systemsimulation, welches mit einem beliebigen numerischen Verfahren arbeiten kann, entwickelt.

Im sechsten Kapitel wird das Modell verifiziert und validiert, sowohl anhand theoretischer Aufgaben, als auch durch Berechnungen real gemessener Vorgänge.

Das siebte Kapitel fasst die Ergebnisse der Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliche weitere Untersuchungen.

# Mathematische Modellierung einer Schlauchleitung

Zur Beschreibung der instationären Strömung sind viele Modellierungsansätze bekannt. Den allgemeinsten Ansatz stellen die Navier-Stokes-Gleichungen dar, welche das Verhalten einer dreidimensionalen Strömung für ein viskoses kompressibles Fluid beschreiben. In für praktische Anwendungen relevanten Rechnungen werden meistens Vereinfachungen getroffen, so dass das reduzierte Modell kürzere Rechenzeiten aufweist und dabei die wichtigsten Effekte der abgebildeten realen Vorgänge erfasst. Die Annahmen, die bereits an dieser Stelle getroffen werden, resultieren direkt aus dem angestrebten Einsatzgebiet der zu entwickelnden Leitungsmodelle.

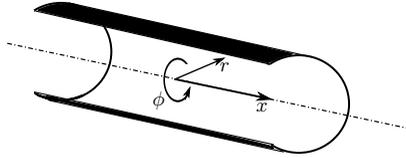
Das hier angestrebte Modell lässt sich als ein quasi-zweidimensionales Modell klassifizieren und basiert auf der integralen Form der Erhaltungsgleichungen, die für einen Ausschnitt der hydraulischen Leitung als Kontrollvolumen aufgestellt werden. Da das Modell unter anderem auch für Rechnungen mit Druckänderungen von über hundert bar benutzbar sein soll, ist die Flüssigkeit als kompressibel zu betrachten. Die Aufstellung der Erhaltungsgleichungen erfolgt unter Hinzunahme folgender Konventionen:

1. Die Leitung ist vollständig mit Fluid gefüllt.
2. Die Schlauchwand soll durch die Druckänderungen nur kleine Dehnungen erfahren, so dass die Strömung im Allgemeinen vom eindimensionalen Charakter ist.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup>Bei der Rohrströmung wird im Allgemeinen dazu gefordert, dass der lokale Aufweitungswinkel der Wand, beziehungsweise die lokale Änderung des Leitungsradiuses, stets 10 Grad nicht überschreitet, vgl. [BG97].

3. Die Krümmung der Leitung im Raum ist vernachlässigbar klein.
4. Die äußeren Einflüsse, wie die Gravitation, magnetische Kräfte und Druckschwankungen des Atmosphären-Drucks, können vernachlässigt werden.



**Abbildung 2.1:** Koordinaten der Fluidsäule der Leitung.

Zur Beschreibung der Leitungsströmung wird, unter der Verwendung der Koordinatendarstellung aus Abbildung 2.1, folgende Notation verwendet:

$A(x, t)$	Rohrquerschnitt
$r_0$	Innendurchmesser der entspannten Leitung
$L$	Länge der entspannten Leitung
$\rho(r, \phi, x; t)$	Lokale Dichte im Leitungsinnenen
$p(r, \phi, x; t)$	Lokaler Druck im Leitungsinnenen
$e(r, \phi, x; t)$	Lokale Energiedichte im Leitungsinnenen
$\mathbf{v}(r, \phi, x; t)$	Lokaler Geschwindigkeitsvektor des Fluids.

Ferner werden als Berechnungsgrößen die über den Leitungsquerschnitt  $A$  gemittelten Größen verwendet:

$$\begin{aligned}
 \bar{\rho}(x, t) &:= \frac{1}{A(x, t)} \int_A \rho(r, \phi, x; t) dA \\
 \bar{v}(x, t) &:= \frac{1}{A(x, t)} \int_A P_x [\mathbf{v}(r, \phi, x; t)] dA \\
 \bar{p}(x, t) &:= \frac{1}{A(x, t)} \int_A p(r, \phi, x; t) dA. \\
 \bar{e}(x, t) &:= \frac{1}{A(x, t)} \int_A e(r, \phi, x; t) dA.
 \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

Diese integral-gemittelten Zustandsgrößen seien stetig differenzierbare Funktionen in Ort und Zeit im gesamten Definitionsbereich:  $(x, t) \in ([0, L] \times [0, \infty))$ ,

so dass eine differentielle Darstellung der Größen stets möglich ist.<sup>12</sup>

## 2.1 Erhaltungsgleichungen der Strömung in flexiblen Leitungen

Zur Beschreibung der Strömung in einer flexiblen Leitung unter den oben eingeführten Vereinbarungen werden für einen infinitesimalen Leitungsabschnitt die Massen-, Impuls- und Energiebilanz aufgestellt.

Es bezeichnen  $x_0$  und  $x_1 := x_0 + \Delta x$  die linke und die rechte Grenze des betrachteten Abschnitts. Mit  $\mathbf{n}_0$  und  $\mathbf{n}_1$  werden die entsprechenden äußeren Normalen zu den Schnittflächen der Leitung gekennzeichnet (vgl. Abb. 2.2). Man beachte an dieser Stelle, dass aufgrund der oben getroffenen Annahmen die Schlauchwand symmetrisch zu der Längsachse der Leitung ist. Ferner bezeichne  $M$  die Mantelfläche des betrachteten Fluidgebiets und  $\mathbf{n}_M$  die äußere Normale von  $M$ .

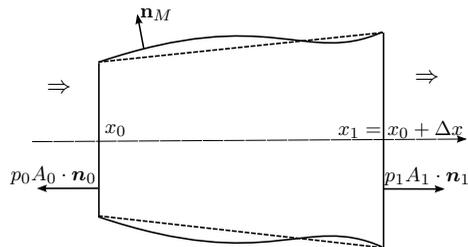


Abbildung 2.2: Leitungsabschnitt.

Die Erhaltung der Masse lässt sich für einen Leitungsabschnitt als Gleichgewicht zwischen der Massenänderung im Gebiet und der Konvektion über die Abschnittsgrenzen aufschreiben:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} \int_{A(x,t)} \rho \, dA \, dx = \int_{A(x_0,t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_0 \, dA - \int_{A(x_0+\Delta x,t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1 \, dA. \quad (2.1.1)$$

Mit der oben eingeführten Notation ergibt sich für die integrale Massener-

<sup>12</sup>In Hinsicht auf die Lösbarkeit des aus dem Modell resultierenden Gleichungssystems wird diese Bedingung an der entsprechenden Stelle abgeschwächt.

haltungsgleichung für einen Leitungsabschnitt:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} A\rho \, dx = A(x_0, t)\rho(x_0, t)v(x_0, t) - A(x_0 + \Delta x, t)\rho(x_0 + \Delta x, t)v(x_0 + \Delta x, t). \quad (2.1.2)$$

Die Bildung des Grenzwertes  $\Delta x \rightarrow 0$  liefert die differentielle Darstellung der Massenerhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} (A\rho) - \frac{\partial}{\partial x} (A\rho v) = 0. \quad (2.1.3)$$

Die zeitliche Änderung der Projektion des Impulses  $\rho\mathbf{v}$  auf die  $x$ -Achse erfolgt nach den vereinbarten Konventionen lediglich durch die Einwirkung der Druckkräfte und der Spannung am Rande des Gebiets. Es bezeichne  $\boldsymbol{\tau}$  den Tensor der viskosen Schubspannungen, so dass die Cauchy-Spannungen im Fluid,  $\boldsymbol{\sigma}_F$ , sich als

$$\boldsymbol{\sigma}_F = \boldsymbol{\tau} - p\mathbf{1} \quad (2.1.4)$$

schreiben lassen. Mit  $\mathbf{1}$  wird hierbei der Einheitstensor notiert.

Die integrale Impulsbilanz für den betrachteten Abschnitt der Fluid-Säule lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} \int_{A(x,t)} \rho\mathbf{v} \, d\phi \, dx &= \int_{A(x_0)} (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{1}) \cdot \mathbf{n}_0 \, d\phi \, dr + \int_{A(x_1)} (\boldsymbol{\tau} - p\mathbf{1}) \cdot \mathbf{n}_1 \, d\phi \, dr \\ &+ \int_M (\boldsymbol{\tau} - (p - p_a)\mathbf{1}) \cdot \mathbf{n}_M \, dM. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Dabei bezeichnet  $p_a$  den Druck außerhalb der Fluidsäule der Leitung. Für unendlich steife Leitungen wird für  $p_a$  der Umgebungsdruck angenommen und der Term wird fast immer vernachlässigt. Für flexible Leitungen ist  $p_a = p_a(x, t)$  der Druck in der Leitungswand, genauer gesagt an ihrem inneren Rand.<sup>13</sup> Die Anwendung des Transportsatzes (vgl. Anhang A.1.) auf die

---

<sup>13</sup>In den Voruntersuchungen zu dieser Arbeit, [Eis04], wurde eine andere Herleitung der Impulserhaltung durchgeführt, bei der der Term  $(p_a \frac{\partial}{\partial x} A)$  vernachlässigt wurde. Dies führt jedoch teilweise zu einer starken Unterschätzung der Wellendämpfung.

linke Seite der Gleichung und des Integralsatzes von Gauß auf die Integrale über  $\tau$  liefert:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (A\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (A\rho v \cdot v) \right] dx &= -A(x_1)p(x_1) + A(x_0)p(x_0) \\ &\quad - \int_M ((p - p_a)\mathbf{1}) \cdot \mathbf{n}_M dM \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} \int_{A(x)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\phi dr \, dx. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Ferner wird die Gleichung mit  $\frac{1}{\Delta x}$  multipliziert, es wird der Grenzübergang  $\Delta x \rightarrow 0$  gebildet. Für die Abschätzung des zweiten Integrales der rechten Seite wird Folgendes ausgenutzt: Für sehr kleine  $\Delta x$  kann der Verlauf der Schlauchwand mit einer linearen Funktion über  $x$  angenähert werden (vgl. Abb. 2.2). Bei dieser Betrachtung wird der dargestellte Abschnitt der Fluidsäule zu einem Kegel und die äußere Normale des Integrationsgebiets wird zu einer Konstante. Mit der oben vorausgesetzten Glattheit von  $p$  kann der Grenzwert gebildet werden. Die Fläche des Integrationsgebiets kann dabei mit der Formel für die Mantelfläche eines Kegels,  $|M| = \pi(r(x_0) + r(x_1))\sqrt{(r(x_1) - r(x_0))^2 + \Delta x^2}$ , bestimmt werden. Dadurch ergibt sich für den Wert des dritten Terms der rechten Seite  $(p - p_a)\frac{\partial}{\partial x} A$  und die Gleichung (2.1.6) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial}{\partial t} (A\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (A\rho v \cdot v) = -\frac{\partial}{\partial x} (Ap) + (p - p_a)\frac{\partial}{\partial x} A + \int_{A(x)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\phi dr,$$

beziehungsweise zu

$$\frac{\partial}{\partial t} (A\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (A\rho v^2) + A\frac{\partial}{\partial x} p = \int_{A(x)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\phi dr - p_a\frac{\partial}{\partial x} A. \quad (2.1.7)$$

Der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung, der sogenannte Reibungsterm, wird an dieser Stelle nicht weiter vereinfacht oder approximiert. Der Bestimmung dieses Terms ist im Rahmen der Arbeit ein separater Abschnitt gewidmet, siehe 2.4.

Zur besseren Übersicht wird in weiteren Umformungen die gesamte rechte Seite durch die Bezeichnung

$$R := \int_{A(x)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\phi dr - p_a\frac{\partial}{\partial x} A \quad (2.1.8)$$

abgekürzt.

Die Formulierung der Energieerhaltung erfolgt analog zu der Aufstellung der Impulserhaltung. Es wird davon ausgegangen, dass die Fluidsäule der Leitung während der simulierten Vorgänge keine inneren Wärmequellen besitzt. Damit ändert sich die Gesamtenergie in einem Leitungsabschnitt, die sich als Summe der inneren Energie und der kinetischen Energie darstellen lässt, nur aufgrund der Druckkräfte, der Reibung und der Wärmeübertragung aus der Leitungswand  $\mathbf{q}$ . Analog zu der Definition (2.0.1) sei  $q$  der integrale Mittelwert der Projektion von  $\mathbf{q}$  auf die  $x$ -Achse.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_1} \int_{A(x,t)} \rho e + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 d\phi dr dx &= \int_{A(x_0)} (-\mathbf{v}p + \boldsymbol{\tau}\mathbf{v} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}_0 d\phi dr \\
 &+ \int_{A(x_1)} (-\mathbf{v}p + \boldsymbol{\tau}\mathbf{v} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}_1 d\phi dr \\
 &+ \int_M (-\mathbf{v}(p - p_A) + \boldsymbol{\tau}\mathbf{v} + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}_M dM.
 \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Multipliziert man die Gleichung (2.1.9) mit  $\frac{1}{\Delta x}$  und führt die Grenzwertbetrachtung durch, so erhält man die differentielle Form der Energieerhaltung. Die Approximation des Integrals über die Mantelfläche des Gebiets erfolgt dabei analog zu der obigen Vorgehensweise bei der Herleitung der Impulsgleichung.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} (A\rho(e + \frac{1}{2}v^2)) + \frac{\partial}{\partial x} (A\rho v(e + \frac{1}{2}v^2)) &= -\frac{\partial}{\partial x} (Avp) + v(p - p_A) \frac{\partial}{\partial x} A \\
 &+ \int_{A(x)} \nabla(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}) d\phi dr.
 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Eine genauere Darstellung des letzten Terms der Gleichung wird an dieser Stelle ebenfalls ausgelassen. Die Terme, die den äußeren Einfluss auf die Zustandsgrößen beschreiben, werden mit der Bezeichnung

$$Q := \int_{A(x)} \nabla(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q}) d\phi dr - vp_a \frac{\partial}{\partial x} A \tag{2.1.11}$$

abgekürzt. Ferner wird mit der Einführung der spezifischen Enthalpie  $h = e + p/\rho$  und durch die Zusammenfassung des zweiten und dritten Terms der rechten Seite der Gleichung die Darstellung vereinfacht:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\rho(e + \frac{1}{2}v^2)) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v(h + \frac{1}{2}v^2)) - vp\frac{\partial}{\partial x}A = Q. \quad (2.1.12)$$

Eine vektorielle Zusammenfassung der differentiellen Erhaltungsgleichungen erlaubt die Darstellung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A\rho \\ A\rho v \\ A\rho(e + \frac{1}{2}v^2) \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} A\rho v \\ A\rho v^2 \\ A\rho v(h + \frac{1}{2}v^2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A\frac{\partial}{\partial x}p \\ -vp\frac{\partial}{\partial x}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ R \\ Q \end{bmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Die obere Form des hergeleiteten Gleichungssystems kann als quasi-konservative Darstellung bezeichnet werden. Für eine Leitung mit einer starren Wand entfällt der Term  $\frac{\partial}{\partial x}A$ . Ferner ist dadurch die Fläche  $A$  eine Konstante und kann aus den jeweiligen Differentialen herausgezogen werden. Multiplikation der Gleichung mit  $\frac{1}{A}$  ergibt eine Gleichung, die sich lediglich durch die Quellterme von der Euler-Gleichung unterscheidet. Für vernachlässigbar kleine Quellterme ist sie hyperbolisch und streng konservativ bezüglich der Fluid-Zustandsgrößen  $\rho$ ,  $\rho v$  und  $\rho(e + \frac{1}{2}v^2)$ .

## 2.2 Schließung und Reduktion des Systems

Die im vorherigen Abschnitt hergeleiteten Erhaltungsgleichungen zur Beschreibung des Fluids stellen noch kein abgeschlossenes Gleichungssystem dar. Zum einen fehlt noch eine Gleichung, die eine algebraische Beziehung zwischen Druck, Dichte und Temperatur ausdrückt. Diese beschreibt die Eigenschaften des Fluids in der Leitung und wird daher als Zustandsgleichung bezeichnet. Zum anderen sind die Erhaltungsgleichungen durch zusätzliche Gleichungen zu ergänzen, die die Änderung des Leitungsquerschnitts in Abhängigkeit von dem Zustand des Fluids beschreiben. Ferner wird ein Modell zur Berechnung der Wandschubspannung benötigt, auf welches im Rahmen dieser Arbeit in Abschnitt 2.6 eingegangen wird.

Das Aufstellen der Zustandsgleichungen für reale Flüssigkeiten wurde bereits in vielen Arbeiten untersucht. Es bleibt jedoch, vor allem was den

Phasenübergang und den Ausgasungsprozess betrifft, zum Teil bis heute ein Thema für weitere experimentelle und modelltheoretische Analysen.

Das Zustandsverhalten eines Fluids lässt sich durch eine thermische Zustandsgleichung

$$\rho = \rho(p, T) \tag{2.2.1}$$

und einer energetischen Zustandsgleichung

$$e = e(p, T) \tag{2.2.2}$$

vollständig beschreiben. Beide Funktionen seien invertierbar bezüglich jeder Variablen. Ferner sei eine algebraische oder eine differentiell-algebraische Beziehung existent, die den Zusammenhang zwischen den Zustandsvariablen des Fluids und der Querschnittfläche der Leitung herstellt. Diese modelliert die Bewegung der Leitungswand und wird in dieser Arbeit in der Form

$$\begin{cases} A = \pi(r_0 + w)^2 \\ F^{flex}(w, \rho, v, e; t) = 0 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

dargestellt. Dabei ist  $F^{flex}$  das Dehnungsmodell und  $w = w(x; t)$  die Funktion der Wanddehnung.  $F^{flex}$  sei dabei so aufgestellt, dass für beliebige feste  $(\rho, v, e; t)$  die Funktion  $w$  differenzierbar ist. Es wird angenommen, dass damit die Aufgabenstellung bestehend aus den Gleichungen (2.1.13), (2.2.1), (2.2.2) und (2.2.3) stets eine eindeutige Lösung hat.

Das System der Erhaltungsgleichungen (2.1.13) wird weiter umgeformt. Dazu sei vermerkt, dass  $\rho$  und  $A$  stets streng positiv sind. Zur besseren Übersicht wird der Begriff der materiellen Zeitableitung<sup>14</sup> eingeführt, definiert durch

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}. \tag{2.2.4}$$

Unter Beachtung der obigen Bemerkung lässt sich die Massenerhaltungsgleichung wie folgt schreiben:

$$\frac{1}{A\rho} \frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x} v + \frac{v}{A\rho} \frac{\partial}{\partial x}(A\rho) = 0.$$

---

<sup>14</sup>Prinzipiell handelt es sich dabei um die Anwendung der verallgemeinerten Kettenregel auf Funktionen, die zeitlicher und örtlicher Abhängigkeit unterliegen:  $\frac{\partial}{\partial t} f(t; x(t)) = \frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial x} f \cdot \frac{\partial}{\partial t} x(t)$ .

In der eingeführten Notation der materiellen Zeitableitung lautet sie somit

$$A\rho \cdot \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{A\rho} \right) - \frac{\partial}{\partial x} v = 0. \quad (2.2.5)$$

Analog dazu wird mit der Impulsgleichung verfahren. Sie wird mit der Kontinuitätsgleichung erweitert:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\rho v) - v \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v) \right)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v^2) + p \frac{\partial}{\partial x} A = R$$

und es ergibt sich folgende Darstellung:

$$A\rho \frac{D}{Dt} v + p \frac{\partial}{\partial x} A = R. \quad (2.2.6)$$

Die Energiegleichung lässt sich mit mehrfacher Anwendung der partiellen Ableitung in dieselbe Form bringen:

$$A\rho \frac{\partial}{\partial t} \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v) \right)}_{=0} + \frac{\partial}{\partial x}(A v p) - v p \frac{\partial}{\partial x} A = Q$$

und weiter vereinfacht:

$$A\rho \frac{D}{Dt} \left( e + \frac{1}{2} v^2 \right) + A \frac{\partial}{\partial x}(v p) = Q. \quad (2.2.7)$$

Es werden noch weitere Umformungen der Energiegleichung vorgenommen. Das Aufteilen des ersten Terms und das Einsetzen der Gleichung (2.2.6) in (2.2.7) liefert:

$$A\rho \frac{D}{Dt} e - v p \frac{\partial}{\partial x} A + A\rho \frac{\partial}{\partial x} v + A v \frac{\partial}{\partial x} p = Q - v R.$$

Ferner wird auch der dritte Term der linken Seite entsprechend der Form (2.2.5) der Kontinuitätsgleichung ersetzt:

$$\frac{D}{Dt} e + A\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{A\rho} \right) - \frac{v p}{A\rho} \frac{\partial}{\partial x} A + \frac{v}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p = \frac{1}{A\rho} (Q - v R).$$

Weitere Vereinfachungen ergeben schließlich eine Gleichung der Form

$$\frac{D}{Dt} e + p \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) = \frac{p}{A\rho} \frac{D}{Dt} A + \frac{v p}{A\rho} \frac{\partial}{\partial x} A - \frac{v}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} p + \frac{1}{A\rho} (Q - v R),$$

deren linke Seite mit Hilfe der Relation von Gibbs

$$\frac{D}{Dt}e + p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = T\frac{D}{Dt}S \quad (2.2.8)$$

durch das Produkt der Temperatur und Entropieänderung ersetzt werden kann. Die dadurch entstehende Gleichung

$$T\frac{D}{Dt}S = \frac{p}{A\rho}\frac{\partial}{\partial t}A + 2\frac{p}{A\rho}\frac{\partial}{\partial x}A - \frac{v}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p + \frac{1}{A\rho}(Q - vR) \quad (2.2.9)$$

lässt folgenden Gedankengang zu: Die Entropie der Flüssigkeit ändert sich nur dann signifikant, falls eine der folgenden Behauptungen zutrifft:

- a. Die Querschnittfläche  $A$  macht eine relativ große zeitliche Änderung im Vergleich zu ihrer Nominalgröße. Dies könnte zum Beispiel aufgrund des Dehnungsmodells der Fall sein oder aufgrund der Einwirkung großer externer Kräfte auf die Leitungswand.
- b. Die Querschnittfläche  $A$  weist räumlich große Sprünge auf.
- c. Es herrschen starke Druckunterschiede in der Leitung.
- d. Die Leitung unterliegt einem starken Wärmeaustausch mit der Umgebung oder die Reibungskräfte sind so groß, dass sie einen nennenswerten Beitrag zur Entropieänderung leisten können.

Die Gleichung (2.2.9) beschreibt mathematisch aus empirischen Beobachtungen bekannte Phänomene, die zu einer langfristigen Temperaturänderung der Flüssigkeit in einem hydraulischen Pfad mit einer variablen Durchflussfläche führen können: Eine quasi-zweidimensionale Strömung, die keine Drosselstellen beinhaltet, nur schwachen Wärmeaustausch mit der Umgebung erfährt und keiner permanenten Druckpulsation ausgesetzt ist, unterliegt nur sehr schwachen Entropieschwankungen.

Es kann gezeigt werden, dass im Rahmen des Modells und unter Beachtung der Konventionen aus dem Abschnitt 1.2, Seite 6, eine Änderung der Entropie der Rohrströmung als sehr klein angenommen werden kann. Dazu werden die genannten Punkte einzeln betrachtet: Für die betrachtete Klasse der hydraulischen Leitungen können die Behauptungen a.) b.) ausgeschlossen werden. Die Punkte c.) und d.) werden aufgrund der Form des angestrebten Modells ausgeklammert. Aus empirischen Beobachtungen weiß man, dass stationäre Strömungen ohne zusätzlicher externer Energiezufuhr nur zu einer geringen Wärmeentwicklung des Fluids einer Leitung führen.

Aus der Sicht der Modellbildung sind, vor allem die Punkte a.) und b.), jedoch genauer zu betrachten.

Es werden im Laufe dieser Arbeit Modelle zur Berechnung der Wanddehnung vorgestellt, die für akademische Beispiele sowohl Sprünge in der Zeit wie auch im Ort erzeugen können. Allerdings wird aufgrund der Annahme der Eindimensionalität der Strömung stets nur mit kleinen Maximaldehnungen gearbeitet, so dass für das Arbeiten mit praxisrelevanten Fällen die entsprechenden Terme stets klein bleiben. Die numerischen Schemata werden trotzdem konsistent ausgelegt, so dass das Rechnen auch auf beliebig kleinen Skalen ermöglicht wird. Die numerische Stabilität wird an der entsprechenden Stelle diskutiert.<sup>15</sup>

Der im Punkt c.) erwähnte Term kann tatsächlich zu einer lokalen Änderung der Entropie führen, falls sich ein Stoß in der Leitung ausbreitet. Dieser Effekt ist lokal sehr beschränkt, trotzdem muss er bei gewissen Rechnungen, zum Beispiel bei sehr großen Amplituden, beachtet werden. Für den Einsatz innerhalb der isentropen Simulationen kann aber auch dessen Einfluss sowie die der Einfluss der Effekte aus dem Punkt d.), vernachlässigt werden, ohne großen Einfluss auf die Genauigkeit des Modells zu nehmen<sup>16</sup> (vgl. Kap. 1.2).

Für die Modellierung der Leitung kann somit eine Annahme über die Konstanz der Entropie

$$\frac{D}{Dt}S \approx 0$$

der Strömung vereinbart werden. Dadurch kann die Dichte des Fluids als eine Funktion des Drucks geschrieben werden.

$$\rho = \rho(p, S) = \rho(p, S(p_0, T_0)) \quad (2.2.10)$$

Es wird also mit einem barotropen Fluid gerechnet. Die Energieerhaltung ist somit stets erfüllt und muss bei der Modellbildung nicht weiter berücksichtigt werden.

Die Annahme der Konstanz der Entropie hat rein praktische Gründe, die im Kapitel 1 genannt wurden. Aus modelltechnischer und später auch aus

---

<sup>15</sup>S. Abschnitt 3.2.

<sup>16</sup>Bei Anwendung des entstehenden Modells ist darauf genau zu achten, dass es entsprechend c.) und d.) nur in den Rechnungen einsetzbar ist, bei welchen Entropieschwankungen der Fluidsäule durch Wärmeaustausch und Druckpulsation vernachlässigt werden können.

numerischer Sicht gibt es, bis auf die Effizienz, keine Einschränkungen, die grundsätzlich das Mitberücksichtigen der Energiegleichung verhindern könnten. Auf die Nuancen der Modellierung wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Als Referenz wird die Arbeit [Ber06] angegeben, die sich mit dem entsprechenden Thema auseinandersetzt. In der referenzierten Arbeit wird im Gegensatz zu den vorliegenden Untersuchungen jedoch die Wellenausbreitung innerhalb starrer Leitungen analysiert. Es ist wichtig zu bemerken, dass die obige Einschränkung eine physikalische Grenze des reduzierten Modells bildet und für die Simulationen außerhalb des Gültigkeitsbereichs eine Erweiterung notwendig ist.

Ferner wird die reduzierte Zustandsgleichung genauer betrachtet. Zur Approximation der Stoffeigenschaften realer Flüssigkeiten wurden in den Arbeiten [Jun05] und [Leo08] weitgehende Untersuchungen gemacht. Für die Simulationen mit konstruierten Modellen wurden die in AMESim implementierten Stoffdaten benutzt.

Zur Vervollständigung der Beschreibung der Fluideigenschaften werden weitere thermodynamische Größen vorgestellt, die sich anhand der Zustandsgleichung errechnen lassen. Als Erstes wird der Begriff der Schallgeschwindigkeit eines Fluids eingeführt. Diese wird mit  $c$  bezeichnet und ihre Definition ergibt sich unter der obigen Annahme der Isentropie durch die Gleichung

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\partial \rho}{\partial p}. \quad (2.2.11)$$

Weiterhin werden der isentrope Kompressibilitätskoeffizient  $\kappa_i$  und der Volumenelastizitätsmodul der Flüssigkeit  $E_f$  eingeführt:

$$\kappa_i = -\rho \frac{\partial v}{\partial p}, \quad E_f = \rho c^2. \quad (2.2.12)$$

Neben den Zustandsgrößen ist zur Beschreibung einer reibungsbehafteten Strömung die Kenntnis der dynamischen Viskosität notwendig, die den molekularen Impulstransport charakterisiert. „Die Viskosität ist die am stärksten von Druck und Temperatur abhängige Stoffeigenschaft und darf keinesfalls als konstant angenommen werden.“<sup>17</sup> Für die Bestimmung der dynamischen Viskosität kann die empirische Formel

$$\eta = b_1 e^{\frac{b_2 \rho}{b_3(1+a_4 T) - \rho}}. \quad (2.2.13)$$

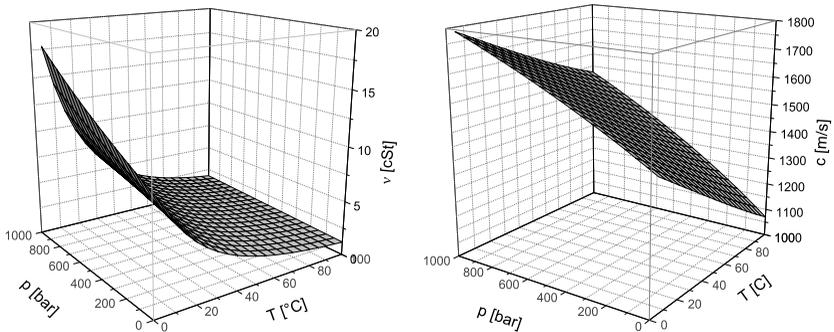
---

<sup>17</sup>[Jun05], S. 24.

benutzt werden. Vergleiche dazu [Jun05]. Die Koeffizienten  $b_1 \dots b_4$  sind dabei stoffspezifische Größen, die für ein Fluid mittels Messdaten aus dem interessierenden  $(p, T)$ -Raum bestimmt werden müssen.

Durch das Normieren der dynamischen Viskosität mit der Dichte ergibt sich die kinematische Viskosität  $\nu_f$  eines Fluids:

$$\nu_f = \frac{\eta}{\rho}. \quad (2.2.14)$$



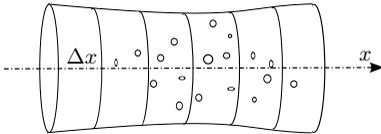
**Abbildung 2.3:** Kinematische Viskosität und Schallgeschwindigkeit von Prüföl nach ISO4113.

Abbildung 2.3 demonstriert die Abhängigkeit der Viskosität und der Schallgeschwindigkeit des hydraulischen Prüföls<sup>18</sup> von Druck und Temperatur.

Die aufgestellten Erhaltungsgleichungen setzen voraus, dass die Leitung vollständig mit einem einphasigen Fluid gefüllt ist. Bei realen technischen Vorgängen ist diese Annahme nicht zwangsläufig erfüllt. Es ist viel mehr davon auszugehen, dass das Fluid in der Leitung zweiphasig ist. Einerseits besteht die Möglichkeit, dass in einem an die Leitung angeschlossenen Element

<sup>18</sup>Prüföl nach ISO4113 ist ein Fluid, das in seinen Eigenschaften dem Diesel-Kraftstoff sehr ähnlich ist. Es wird bei fast allen Versuchen aus Sicherheitsgründen dem Diesel vorgezogen. Auch bei allen innerhalb dieser Arbeit durchgeführten empirischen Untersuchungen wurde ISO4113 verwendet.

Ausgasung stattfindet und die Gasbläschen in die Leitung hinein transportiert werden. Andererseits kann es vorkommen, dass für gewisse Konfigurationen lokal ein Druckabfall stattfindet, so dass das Fluid sich zeitweise im Phasenübergang befindet.



**Abbildung 2.4:** Blasenbehaftete Rohrströmung

Die Berücksichtigung der Zweiphasigkeit wird mithilfe des homogenen Gemischmodells ermöglicht. Bei diesem Ansatz wird keine explizite Betrachtung der Stoffeigenschaften beider Phasen vorgenommen. Vielmehr wird mit geeignet gesetzten Gemischgrößen gearbeitet. Für das Leitungsmodell ist das Gemisch somit ein

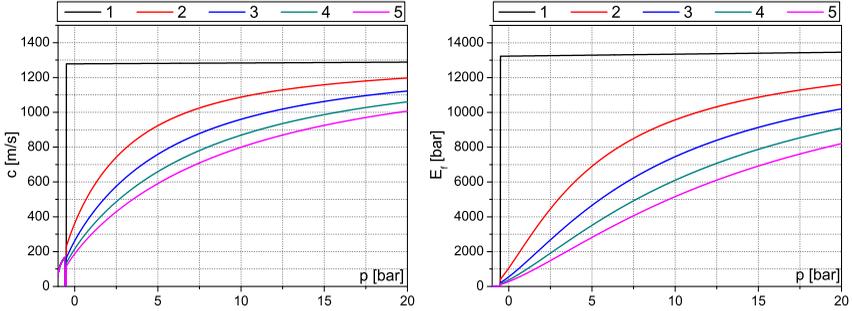
Pseudofluid, welches eigene Stoffeigenschaften besitzt und den integralen Erhaltungsgleichungen der einphasigen Strömung genügt. Die Voraussetzung für die Gültigkeit des homogenen Gemischmodells ist die Annahme, dass Impuls-, Masse- und Wärmeaustausch zwischen beiden Phasen so schnell verlaufen, dass beide Phasen sich stets im Gleichgewicht befinden. Für eine Leitungsströmung gilt sie annähernd, wenn die Gasphase in Form kleiner Bläschen sich in der Flüssigphase homogen verteilt. Bezeichnet  $\alpha = \frac{V_{Gas}}{V}$  den volumetrischen Anteil der Gasphase am Gesamtvolumen des Gemischs, so kann die Dichte des Gemischs mit einem linearen Ansatz wie folgt bestimmt werden:

$$\rho = \alpha \rho_{Gas} + (1 - \alpha) \rho_{Liq}, \quad \text{mit } 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (2.2.15)$$

Genauere Betrachtungen der Zweiphasenströmung und Kavitationsmodellierung findet man in [Ibe04].

In der 1-D Simulationsumgebung AMESim beginnt die Modifikation der Fluidgrößen, sobald ein kritischer Druck unterschritten wird. Die Modellierung der Luftausgasung ist zum heutigen Stand mangels validierter Modelle nicht vorhanden. Für das Fluid wird am Anfang einer Berechnung ein fester Anteil an ungelöster Luft vorgegeben und die Stoffeigenschaften werden entsprechend modifiziert (vgl. [LMS06a] und [LMS06b]). Dieser Anteil bleibt während der gesamten Simulation im gesamten Modell konstant. Teilweise hat dieser jedoch einen sehr großen Einfluss auf die Eigenschaften des Gemischs (vgl. Abb. 2.5). Modelle zur Berechnung der Ausgasung befinden sich

momentan in der Entwicklungsphase. Dementsprechend wird das Leitungsmodell von sich aus keine Modifikation des Luftanteils im Fluid vornehmen - dieser Punkt muss in weiterführenden Untersuchungen analysiert werden.



**Abbildung 2.5:** Approximanden der Schallgeschwindigkeit und des Kompressibilitätsmoduls von Prüföl bei  $T=40^{\circ}\text{C}$  unter Normaldruck:

1: ohne ungelöste Luft, 2: Luftanteil 0.25%,

3: Luftanteil 0.50%, 4: Luftanteil 0.75%, 5: Luftanteil 1.00%.

Eine der Anforderungen an das endgültige numerische Modell, die sich aus dem möglichen Auftreten des Phasenübergangs ergibt, ist das stabile Rechnen bei plötzlichen starken Änderungen der Dichtefunktion  $\rho$ , und somit aller anderen Stoffeigenschaften.

Zusammengefasst lautet das Gleichungssystem zur Berechnung der Wellenbewegung unter der Annahme von isentropen Änderungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v) \\ \frac{\partial}{\partial t}(A\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v^2) + A \frac{\partial}{\partial x} p \\ A \\ F^{flex}(w, \rho, v; t) \\ \rho \end{array} \right. \begin{array}{l} = 0 \\ = R \\ = \pi(r_0 + w)^2 \\ = 0 \\ = \rho(p; p_0, T_0) \end{array} \quad (2.2.16)$$

mit noch zu definierender Approximation für  $R$  (vgl. 2.1.8), Wanddehnungsmodell  $F^{flex}$  sowie den Randbedingungen, die passend zur Aufgabenstellung zu konstruieren sind.

## 2.3 Alternative Formulierungen

Im nächsten Schritt werden unterschiedliche Formen der ersten beiden Gleichungen des reduzierten Modells (2.2.16) untersucht. Es wird sich im Laufe der Arbeit herausstellen, dass die numerische Handhabung der Gleichungen stark von der Gestalt der Ausgangsformulierung abhängt.

Durch Anwendung der partiellen Differentiation lassen sich folgende zwei Darstellungen formulieren:

- QUELLTERM-FORM:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = -\frac{\rho}{A} \left( \frac{\partial}{\partial t} A + v \frac{\partial}{\partial x} A \right) \quad (2.3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) = -\frac{\rho v}{A} \left( \frac{\partial}{\partial t} A + v \frac{\partial}{\partial x} A \right) + \frac{R}{A}.$$

Die linke Seite der Gleichung beinhaltet keine Terme, die die Dehnung der Leitung repräsentieren. Sie ist identisch mit den Gleichungen für die ideal starre Leitung. Die Flexibilität der Wand wird in dieser Form ausschließlich als Quelle dargestellt.

- QUASI-ERHALTUNGSFORM:

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v) = 0 \quad (2.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(A\rho v^2 + Ap) = p \frac{\partial}{\partial x} A + R.$$

Diese Darstellung kann als konservative Form bezüglich  $\rho A$  und  $\rho v A$  aufgefasst werden mit einer dehnungsabhängigen Quelle in der Impulserhaltungsgleichung.

Eine weitere alternative Formulierung entsteht, wenn das Gleichungssystem bezüglich ihrer natürlicher Variablen  $p$  und  $v$  aufgestellt wird. Diese werden oft auch als *primitive Variablen* bezeichnet. Dazu wird auf die Quellterm-Form (2.3.1) ein weiteres Mal die partielle Ableitungsregel angewendet

$$\frac{D}{Dt}\rho + \rho \frac{\partial}{\partial x} v = -\frac{\rho}{A} \left( \frac{\partial}{\partial t} A + v \frac{\partial}{\partial x} A \right)$$

$$\rho \frac{D}{Dt} v + \frac{\partial}{\partial x} p = -v \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial x} \rho \right) - \frac{\rho v}{A} \left( \frac{\partial}{\partial t} A + v \frac{\partial}{\partial x} A \right) + \frac{R}{A}.$$

Das Einsetzen der ersten Gleichung in die Zweite liefert weiter:

- PRIMITIVE FORM:

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt}\rho + \rho \frac{\partial}{\partial x}v &= -\frac{\rho}{A} \frac{D}{Dt}A \\ \frac{D}{Dt}v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}p &= -\frac{1}{\rho}R.\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

## 2.4 Mathematische Modelle zur Beschreibung der Leitungsdehnung

Bevor einige effiziente Modelle für die Berechnung der Wandbewegung vorgestellt werden, wird an dieser Stelle zunächst ein kurzer Überblick über die allgemeine Konstruktion mathematischer Modelle in der Elastizitätstheorie gegeben.<sup>19</sup>

Die wesentliche Aufgabe eines elastizitätstheoretischen Modells ist, den Zusammenhang zwischen den äußeren Kräften und dem Verformungszustand zu beschreiben. Die Hauptbestandteile der Modellierung werden durch *kinematische Beziehungen*, *Gleichgewichtsbedingungen* und *Stoffgesetzen* gebildet (vgl. [Bra03]).

- Als kinematische Gleichungen bezeichnet man in der Strukturmechanik die Gleichungen, die Zusammenhänge zwischen Verzerrungen  $\epsilon$  und Verschiebungen  $\mathbf{w}$  beschreiben, ohne dabei die Ursachen (Kräfte und Energien) zu betrachten. Diese Gleichungen bilden die Geometrie eines Körpers als Funktion der Zeit ab.
- Unter den Materialgesetzen oder Stoffgesetzen versteht man die Gleichungen, die Beziehungen zwischen statischen und kinematischen Größen herstellen. Diese Beziehungen müssen stets experimentell bestimmt werden. Die gebräuchlichen modellhaften Abhängigkeiten zur Beschreibung der kleinen Verformungen von Festkörpern lassen sich in folgende Kategorien unterteilen:

---

<sup>19</sup>Zwecks genauerer Studien sind [TG70, MH83, Cia88] empfehlenswert.

*elastisch* Nach der Entspannung kommt der Werkstoff in die Ausgangslage zurück und der momentane Verformungszustand hängt nur vom momentanen Spannungszustand ab.

*viskoelastisch* Nach der Entspannung kommt der Werkstoff in die Ausgangslage zurück, die Beziehung zwischen dem Spannungs- und dem Verformungszustand ist jedoch zeitabhängig, so dass die Be- und Entlastung stets zeitabhängige Prozesse bilden.

Abbildung 2.6 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Verläufe der genannten Klassen für den eindimensionalen Fall. Dabei bezeichnet  $\sigma$  den Spannungstensor.<sup>20</sup>

Für elastische Materialien lässt sich die Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit als eine algebraische Funktion schreiben. Diese wird auch als Antwortfunktion bezeichnet. Ist die Antwortfunktion linear, so spricht man von einem linear-elastischen Stoffgesetz. Zur Beschreibung der Proportionalität wird in der Literatur häufig das Paar  $E$  (Elastizitätsmodul) und  $\nu$  (Querkontraktionszahl, Poisson-Zahl) verwendet. In der mathematischen Literatur werden alternativ die *Lamé-Konstanten*

$$\lambda_L := \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu_L := \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.4.1)$$

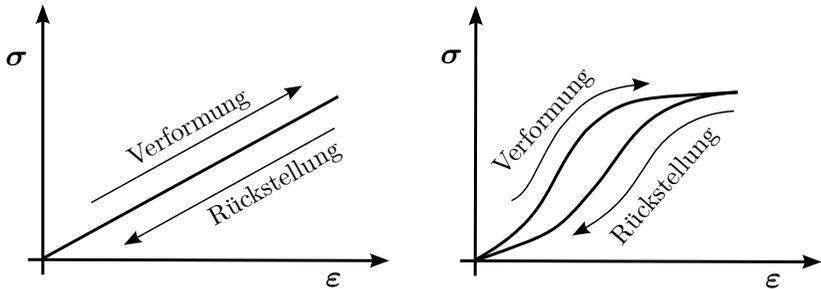
benutzt.

- Die Gleichgewichtsbedingungen, auch *statische Gleichungen* genannt, beschreiben die Beziehungen zwischen äußeren und inneren Kräften. Diese basieren auf einem zentralen Axiom der Mechanik, welches besagt, dass sich in einem Gleichgewichtszustand alle Kräfte beziehungsweise alle Momente zu Null addieren.<sup>21</sup> Die wichtigste Folgerung aus dem Axiom ist der Satz von Cauchy, welcher die Symmetrie des Spannungstensors zeigt und die Abhängigkeit zwischen Kräften und Spannungen als eine partielle Differentialgleichung formuliert.

---

<sup>20</sup>Genauere Beschreibung findet man in [Cia88], Abschnitt 2.2.

<sup>21</sup>Vgl. Axiom 2.2-1 in [Cia88].

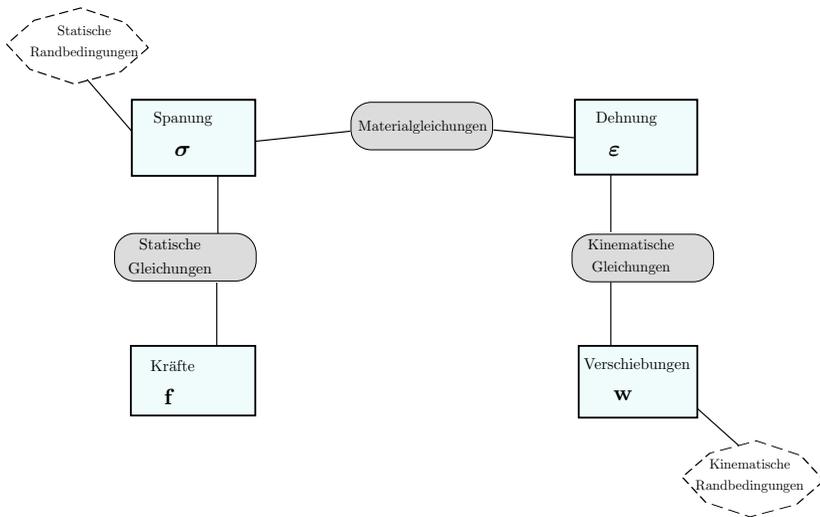


**Abbildung 2.6:** Spannungs-Dehnungs-Verlauf für einen einachsigen Spannungszustand.  
(links: ideal elastisch, rechts: ideal viskoelastisch)

Die Zusammensetzung der drei oben genannten Modellierungsbestandteile muss durch *statische* und *kinematische Randbedingungen* vervollständigt werden. Die auf diese Weise konstruierten Beziehungen stellen eine vollständige Beschreibung der Zusammenhänge zwischen den auf einen Körper wirkenden Kräfte und den Verformungen des Körpers dar. Das Schema in Abbildung 2.7 veranschaulicht die Abhängigkeiten zwischen den Größen bei der Konstruktion eines Modells zur Berechnung von Verformungen eines Körpers.

In praktischen Anwendungen ist eine Schlauchleitung für gewöhnlich zwischen zwei weiteren hydraulischen Elementen eingespannt, die anwendungsspezifische Positionen im Raum einnehmen. Daher stellt nicht nur die Analyse der Strömung, sondern auch die der Wandbewegung, ein dreidimensionales Problem dar. Eine vollständige dreidimensionale Analyse der Festkörperbewegung ist, jedoch innerhalb einer Simulation eines hydraulischen Systems aus Rechenzeitgründen, nicht vertretbar. Die Konstruktion eines effizienten und dennoch genauen Modells erfordert gewisse Vereinfachungen und Vernachlässigungen unwesentlicher physikalischer Effekte der Bewegung. Um allgemeine Thesen zur Konstruktion eines Dehnungsmodells zu treffen, wird der Aufbau einer flexiblen Leitung genauer betrachtet.

Die in hydraulischen Systemen eingesetzte Leitungen variieren in ihrem Design, abhängig vom Einsatzgebiet sehr stark. Es werden sowohl Komponenten aus homogenen Materialien wie auch mehrschichtige Schlauchleitungen verwendet. Bei den monoschichtigen Leitungen werden vor allem Leitun-



**Abbildung 2.7:** Tonti-Diagramm: Schematische Darstellung der Konstruktion eines Dehnungsmodells.

gen aus Acryl oder Kautschuk eingesetzt, wodurch die Leitungswand als flexibel angesehen werden muss. Für höhere Druckniveaus können auch die Stahlleitungen nicht mehr als ideal steif betrachtet werden.

Der Aufbau der mehrschichtigen Leitungen lässt sich nach Funktionalität in drei Lagen unterteilen:

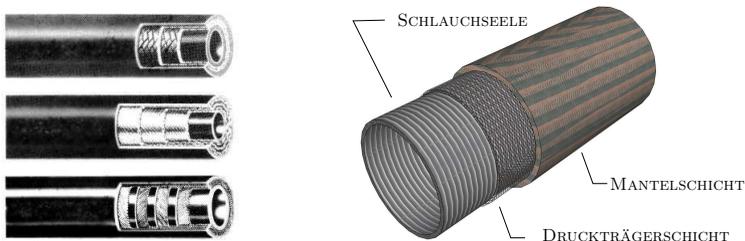
*Schlauchseele*

Innere Schicht der Leitung, die für das Abgrenzen des Arbeitsmediums nach außen sorgt. Sie wird typischerweise aus weichen Materialien, wie zum Beispiel Styrol-Butadien-Kautschuk oder Chloropren-Kautschuk, gefertigt.

*Druckträgerschicht* Besteht im Allgemeinen aus einer oder mehreren Lagen und ist als Geflecht, Gestrick oder Wicklung konstruiert. In Abhängigkeit vom Einsatzdruckbereich werden Baumwolle, Polyester oder Stahldrähte zur Fertigung verwendet.

*Mantelschicht* schützt primär die Leitung vor äußeren Einflüssen und kann sowohl aus weichen Materialien wie Kautschucken, als auch aus Baumwolle oder Kunststoffen bestehen.

Abbildung 2.8 skizziert die oben beschriebene Struktur einer mehrschichtigen Leitung.

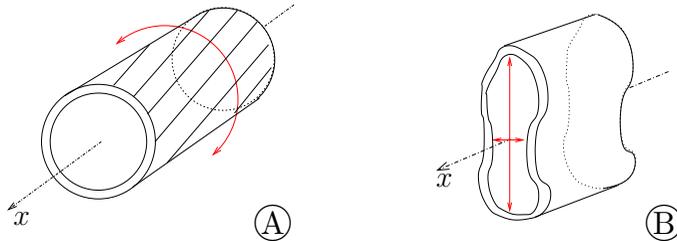


**Abbildung 2.8:** Schematische Darstellungen mehrschichtiger Schlauchleitungen.

Zur Modellierung der Wandbewegung wird in den folgenden Betrachtungen stets von einem Wandmaterial ausgegangen, das für die Ausdehnungen im betrachteten Bereich keine irreversiblen Verformungen aufweist. Zwar können bei einer Schlauchleitung plastische Verformungen auftreten, jedoch zeigen zum einen gängige Be- und Entlastungsexperimente, dass nach einer gewissen Anzahl von Be- und Entlastungszyklen das inelastische Materialverhalten der Schlauchleitungswand stark abklingt. Zusätzlich werden in dieser Arbeit nur Belastungen betrachtet, die kleine Dehnungen hervorrufen, so dass plastische Effekte marginal sind und vernachlässigt werden können.

Ferner wird, analog zur Abbildung der Leitungsströmung von einer Rotationssymmetrie der Schlauchleitung und deren Bewegung bezüglich der Mitte-

lache des Schlauchs ausgegangen. Somit entfällt zum einen die Möglichkeit zur Abbildung der Bewegung der Leitung mit der Achse selber und, zum anderen die zur Abbildung der oval-förmigen Deformationen des Schlauchs (vgl. Abb. 2.9,Ⓐ). Ebenso wird die Verschiebung der Leitungspunkte entlang des Rotationswinkels der Leitung nicht berücksichtigt (Abb. 2.9,Ⓑ). Ist diese Verformung ideal rotationssymmetrisch, so erzeugt sie keine Änderung der Querschnittfläche und hat somit keine direkte Auswirkung auf die im vorhergehenden Abschnitt hergeleiteten Strömungsgleichungen.



**Abbildung 2.9:** Vernachlässigbare Deformationen einer Schlauchleitung.

Eine weitere Annahme ist die der Homogenität und der richtungsabhängigen Isotropie des Wandmaterials.<sup>22</sup> Aus anwendungstechnischen Gründen sollte die Modellierung und Simulation einzelner Schichten vermieden werden, daher wird die Wand als ein aus einem einzelnen Werkstoff bestehendes Gebilde betrachtet. Der lineare Parameter, der für kleine Verschiebungen die Abhängigkeit zwischen der Spannung und der Dehnung beschreibt, wird hier als *Misch-Elastizitätsmodul* (Misch-E-Modul) bezeichnet. Ferner wird zur Analyse eine Idee aus [YK95] und [YK98] verwendet: das Misch-E-Modul wird als richtungsabhängig betrachtet. Die Idee hinter dieser Modellierungsweise besteht darin, den strukturellen Aufbau der Leitungswand in die mathematische Konstruktion miteinzubeziehen. Die dünnen Geflechschichten modifizieren Materialgesetze der Schlauchwand und zwar unterschiedlich in Abhängigkeit von der betrachteten Richtung, daher ist eine differenzierte Analyse an dieser Stelle sinnvoll.  $E_x$  beschreibt das Spannungs-Dehnungs-Verhältnis in die axiale Richtung,  $E_r$  das in die radiale Richtung und  $E_\phi$  das in die tangentielle Richtung.

**Bemerkung 2.1.** Das Misch-Elastizitätsmodul ist bei dieser Betrachtungsweise keine Stofffunktion mehr, sondern eher ein Modellparameter, der das

<sup>22</sup>Das Material kann als *orthotrop* bezeichnet werden.

Verhältnis zwischen den tatsächlich auftretenden Spannungen und Dehnungen beschreibt. Dieser kann also nicht aus Stoffdaten der Leitungswandkomponenten, beispielsweise durch eine Mittlung, errechnet werden, sondern muss in einer experimentellen Anordnung bestimmt werden. Im Gegensatz zu den oben referenzierten Quellen wird dieser Parameter als reell angesehen, da Dämpfungseffekte mit Hilfe anderer Terme abgebildet werden.

Mit einer analogen Argumentation wird eine *Misch-Querkontraktionszahl*  $\nu$  eingeführt.

Diese Vereinbarungen sowie die obige These der Rotationssymmetrie erlauben nun die Konstruktion von Bewegungsgleichungen entsprechend der Abbildung 2.7. Die Komplexität der Modelle hängt dabei von der Komplexität der gewählten statischen und kinematischen Beziehungen ab. Für das Materialmodell wird eine lineare Beziehung, das Hooksche Gesetz, verwendet. Solange man nur mit kleinen Dehnungen arbeitet, was in Anwendungen der Hydraulik typischerweise der Fall ist, ist dieser Ansatz legitim.<sup>23</sup>

Die Anbindung von hydraulischen Leitungen an benachbarte Elemente erfolgt in der Regel durch Klemmen oder Schraub-anbringung, so dass der Anbindungsbereich dehnungsfrei bleibt. Die modellhafte Abbildung dieses Sachverhaltes erfolgt durch Betrachtung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten für die Wandbewegung nur im „inneren“ Bereich der Leitung. Seien hierzu  $x_{kl}$  und  $x_{kr}$  die Längen des linken, beziehungsweise des rechten Anschlusses:  $A(x, t) = A(x, 0) = const, \forall x \in [0, x_{kl}] \cup [x_{kr}, L]$ .

Der Vektor  $\mathbf{w} = (w_x, w_\phi, w_r)$  bezeichne die räumliche Verschiebung eines Materialpunktes der Leitungswand, wobei  $w_x$  die axiale,  $w_\phi$  die tangentielle und  $w_r$  die radiale Komponente von  $\mathbf{w}$  beschreibt. Zur besseren Übersicht wird ferner die Voigt-Notation<sup>24</sup> zur Darstellung der Spannungen und Verzerrungen der Wand benutzt. Entsprechend der eingeführten Koordinaten-Systematik kann in der Voigt-Schreibweise die Dehnung allgemein als Vektor  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_\phi, \varepsilon_r, \varepsilon_{\phi r}, \varepsilon_{xr}, \varepsilon_{x\phi})$  und die Spannung als  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_\phi, \sigma_r, \sigma_{r\phi}, \sigma_{xr}, \sigma_{x\phi})$  dargestellt werden.

Durch die bereits vereinbarten Symmetriebedingungen sind jedoch Scherungen in der  $(\phi, r)$  und der  $(x, \phi)$ -Ebene ausgeschlossen, so dass die Gleichungen  $\sigma_{r\phi} = \sigma_{x\phi} = 0$  und  $\varepsilon_{r\phi} = \varepsilon_{x\phi} = 0$  gelten. Ferner führt die Vernachlässigung

---

<sup>23</sup>Die daraus resultierende Form der Materialgleichungen kann zum Beispiel in [Bra03], §3 nachgeschlagen werden.

<sup>24</sup>Eine genauere Erläuterung befindet sich im Anhang A.2.

der unsymmetrischen Deformationen (vgl. Abbildung 2.9) auf die Bedingung  $w_\phi = \text{konst.}$ , so dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Verschiebungen in  $\phi$ -Richtung gleich Null gesetzt werden können. Die Bewegung eines Massenpunktes wird somit durch  $\mathbf{w} = (w_x, w_r)$  vollständig beschrieben. Die entsprechende Spannung und Dehnung beschreibenden Vektoren reduzieren sich somit zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= (\varepsilon_x, \varepsilon_\phi, \varepsilon_r, \varepsilon_{xr}) \\ \boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_x, \sigma_\phi, \sigma_r, \sigma_{xr}).\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

Zur Charakterisierung der Volumenkräfte bezeichne ferner  $\rho_s$  die mittlere Dichte der Leitungswand.

Eine allgemeine Formulierung des Wandverhaltens ergibt sich, wenn die oben genannten differentiellen Beziehungen für jeden materiellen Punkt der Leitungswand aufgestellt werden:

• KINEMATISCHE GLEICHUNGEN:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} w_x \\ \varepsilon_\phi &= \frac{(r+w_r)\phi - r\phi}{r\phi} = \frac{w_r}{r} \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial}{\partial r} w_r \\ 2 \cdot \varepsilon_{xr} &= \frac{\partial}{\partial r} w_x + \frac{\partial}{\partial x} w_r,\end{aligned}\tag{2.4.3}$$

mit  $(x, \phi, r) \in [x_{kl}, L - x_{kr}] \times [0, 2\pi] \times [r_0, r_0 + s]$ .

• MATERIALGLEICHUNGEN:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} (\sigma_x - \nu(\sigma_\phi + \sigma_r)) \\ \varepsilon_\phi &= \frac{1}{E_\phi} (\sigma_\phi - \nu(\sigma_x + \sigma_r)) \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E_r} (\sigma_r - \nu(\sigma_x + \sigma_\phi)) \\ \varepsilon_{xr} &= \frac{(1+\nu)}{(E_x + E_r)/2} \sigma_{xr},\end{aligned}\tag{2.4.4}$$

$(x, \phi, r) \in [x_{kl}, L - x_{kr}] \times [0, 2\pi] \times [r_0, r_0 + s]$ .

• STATISCHE GLEICHUNGEN

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_{xr}) + \frac{\partial}{\partial x} (r\sigma_x) &= -r \left( \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_x - k_D \frac{\partial}{\partial t} w_x \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma_r) + \frac{\partial}{\partial x} (r\sigma_{xr}) - \sigma_\phi &= -r \left( \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r - k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r \right)\end{aligned}\tag{2.4.5}$$

wobei  $k_D$  die Dämpfungsfunktion des Wandmaterials beschreibt.

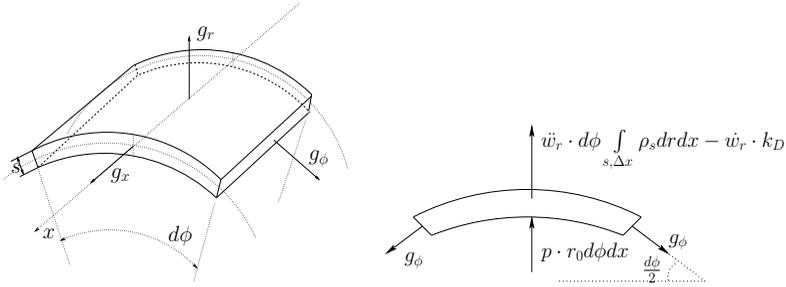


Abbildung 2.10: Leitungswandelement.

Das Gleichungssystem, bestehend aus den Gleichungen (2.4.3), (2.4.4) und (2.4.5), ist ferner durch die geometrischen Randbedingungen der Schlauchleitung zu ergänzen:

$$\begin{aligned} w_x(x_{kl}, r) &= w_r(x_{kl}, r) = 0 \\ w_x(L - x_{kr}, r) &= w_r(L - x_{kr}, r) = 0 \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

sowie durch die Kräfte randbedingungen, die die Rückkopplung der Fluidgleichungen an das Wandbewegungsmodell darstellen<sup>25</sup>:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, r_0 + w_r) &= 2\pi(r_0 + w_r) \cdot P_x(\tau_W) \\ \sigma_r(x, r_0 + w_r) &= p(x, t) \\ \sigma_x(x, r_0 + w_r + s) &= 0 \\ \sigma_r(x, r_0 + w_r + s) &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

Zur Konstruktion schlanker Beziehungen zwischen dem Druck in der Leitung und der Dehnung der Wand werden einige Vereinfachungen getroffen. Es wird an dieser Stelle vorausgesetzt, dass die radiale Spannungskomponente deutlich kleiner als die axiale und die tangentiale ist:  $\sigma_x \gg \sigma_r$  und  $\sigma_\phi \gg \sigma_r$ , so dass  $\sigma_r$  in ferner vernachlässigt werden kann. Diese Bedingung wird von denjenigen Leitungen erfüllt, die entweder eine Wanddicke haben, die deutlich kleiner als der Durchmesser der Leitung ist oder eine Druckträgerschicht besitzen, die in der Nähe der inneren Leitungswand liegt. Zwar betrifft dies die meisten Leitungen, bei Kreisläufen mit kleinen Drücken werden jedoch auch Leitungen eingesetzt, die sowohl dickwandig sind als auch eine dicke und weiche Schlauchseele besitzen. Modellierungen

<sup>25</sup>Die Einwirkung des Umgebungsdrucks auf die Leitungswand wird vernachlässigt.

und Untersuchungen dieser Spezialfälle werden in dieser Arbeit ausgelassen, da die Kopplung eines Wandmodells an den Strömungslöser an sich als primäres Untersuchungsziel verfolgt wird. Diese Aufgabe muss in weiterführenden Arbeiten genauer analysiert werden. (vgl. Kapitel 7) Abbildung 2.11 skizziert den Unterschied zwischen dem allgemeinem Modell der Leitung und dem Modell mit vernachlässigter radialer Spannung.

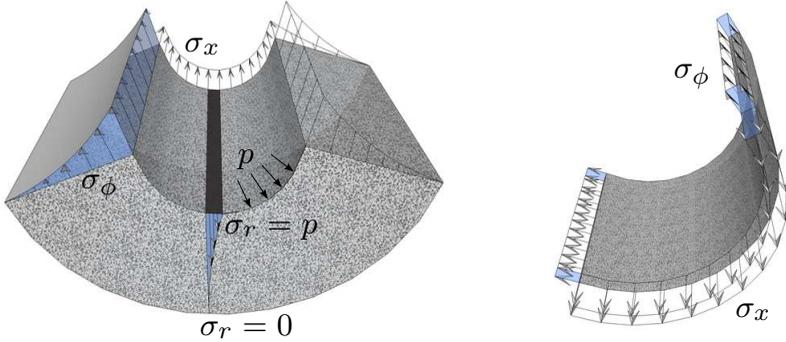


Abbildung 2.11: Dickwandiges und dünnwandiges Leitungswandelement.

Bei oben beschriebener Betrachtung liegt in der Mantelfläche der Leitung näherungsweise ein ebener Spannungszustand in der  $(x, \phi)$ -Ebene vor. Die Reduktion und die Umformung der Materialgleichungen (2.4.4) nach den Spannungen führen auf die Form:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_x \varepsilon_x + E_\phi \nu \varepsilon_\phi}{1 - \nu^2} = \frac{E_x}{1 - \nu^2} \left( \varepsilon_x + \frac{E_\phi}{E_x} \nu \varepsilon_\phi \right) \\ \sigma_\phi &= \frac{E_\phi \varepsilon_\phi + E_x \nu \varepsilon_x}{1 - \nu^2} = \frac{E_\phi}{1 - \nu^2} \left( \varepsilon_\phi + \frac{E_x}{E_\phi} \nu \varepsilon_x \right) \\ \sigma_{xr} &= \frac{E_x + E_r}{2(1 + \nu)} \varepsilon_{xr}.\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

Das sukzessive Einsetzen der Gleichungen (2.4.3) in (2.4.8) und anschließend in (2.4.5) liefert für jedes Paar  $(x, r) \in [x_{kl}, L - x_{kr}] \times [r_0, r_0 + s]$ , das zu lösende Gleichungssystem zur Bestimmung der Wanddehnung  $(w_x, w_r)$  zu einer gegebenen Funktion des Leitungsdrucks  $p(x)$  und einer gegebenen

Verteilung der Wandschubspannung  $\tau_W$  in der Leitung:

$$\begin{aligned}
 & \frac{r(E_x + E_r)}{4(1 + \nu)} \left( \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} w_x + \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_r \right) \\
 & - \frac{E_\phi}{1 - \nu^2} \left( \frac{w_r}{r} + \frac{E_x}{E_\phi} \nu \frac{\partial}{\partial x} w_x \right) = -r \left( \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_x - k_D \frac{\partial}{\partial t} w_x \right) \\
 & \frac{(E_x + E_r)}{4(1 + \nu)} \left( r \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_r + r \frac{\partial^2}{\partial x \partial r} w_x \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial x} w_r + \frac{\partial}{\partial r} w_x \right) \\
 & + \frac{E_x}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_x + \frac{E_\phi}{E_x} \nu \frac{\partial}{r \partial x} w_r \right) = -r \left( \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r - k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r \right).
 \end{aligned} \tag{2.4.9}$$

Im nächsten Schritt werden weitere vereinfachte Modelle zur Berechnung der Wandbewegung erzeugt, indem nach und nach einige Terme der Modellgleichungen vernachlässigt werden.

Als Erstes kann die Verformung durch die Scherung gegenüber den Dehnungen in radiale und axiale Richtung als klein angesehen und außer Acht gelassen werden. Diese Vereinfachung erlaubt eine Beschreibung der gesamten Bewegung der Leitungswand durch die Abbildung der Verschiebung eines einzelnen Punktes in einem infinitesimalen Schnitt eines Leitungselements. Die Wandbewegung in Gleichung 2.4.9 muss nur noch in Abhängigkeit von  $x$  und  $t$  betrachtet werden.

Nimmt man den Punkt  $r = r_0$  als Referenzpunkt und benutzt die Approximation  $r_0 + w_r \approx r_0$ , so reduzieren sich die statischen Gleichungen und Materialgleichungen zu

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial}{\partial x} w_x, & \sigma_x &= \frac{E_x}{1 - \nu^2} \left( \varepsilon_x + \nu \frac{E_\phi}{E_x} \varepsilon_\phi \right), \\
 \varepsilon_\phi &= \frac{w_r}{r_0}, & \sigma_\phi &= \frac{E_\phi}{1 - \nu^2} \left( \varepsilon_\phi + \nu \frac{E_x}{E_\phi} \varepsilon_x \right).
 \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Das Kräftegleichgewicht für einen gesamten Leitungsabschnitt ergibt sich hiermit zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x &= \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_x - k_D \frac{\partial}{\partial t} w_x + \frac{2\pi r_0}{s} \cdot P_x(\tau_W) \\ s \cdot \sigma_\phi &= r_0 \cdot \left( p + s \cdot \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r + s \cdot k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r \right). \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Die Zusammenfassung der Gleichungen ergibt eine Wellengleichung als das zu lösende Gleichungssystem für das Wandbewegungsmodell:

$$\begin{aligned} \frac{E_x}{1 - \nu^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_x + \frac{\nu E_\phi}{(1 - \nu^2) \cdot r_0} \frac{\partial}{\partial x} w_r &= \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_x - k_D \frac{\partial}{\partial t} w_x + \frac{2\pi r_0}{s} P_x(\tau_W) \\ \frac{E_\phi}{(1 - \nu^2) \cdot r_0} w_r + \frac{\nu E_x}{(1 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial x} w_x &= \frac{r_0}{s} p + r_0 \left( \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r + k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r \right) \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

mit den geometrischen Randbedingungen

$$\begin{aligned} w_x(0, t) &= w_r(0, t) = 0 \\ w_x(L, t) &= w_r(L, t) = 0, \end{aligned} \quad \forall t > t_0 \quad (2.4.13)$$

und der Anfangsbedingung

$$(w_x(x, t_0), w_r(x, t_0)) = (w_x^0(x), w_r^0(x)). \quad (2.4.14)$$

Vereinfacht man weiter die Bewegungsgleichungen, so lassen sich noch kompaktere Berechnungsmodelle gewinnen. Verzichtet man auf die Schwingungsübertragung entlang der  $x$ -Achse, so ergibt sich ein lokales Masse-Feder-Dämpfer Modell für die Dehnung der Leitungswand:

$$\frac{E_\phi}{(1 - \nu^2) \cdot r_0} w_r = \frac{r_0}{s} p + r_0 \left( \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r + k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r \right). \quad (2.4.15)$$

Vernachlässigt man ferner die Massenträgheit und die Dämpfung der Leitungswand, so erhält man einen sehr einfachen algebraischen Zusammenhang zwischen dem Druck in der Leitung und der Schlauchwanddehnung:<sup>26</sup>

$$w_r = p \cdot r_0^2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{s E_\phi}. \quad (2.4.16)$$

---

<sup>26</sup>Anschaulich repräsentiert der Term  $(1 - \nu^2)$  das Einbinden der Randbedingung (2.4.13), welche eine fest eingespannte Leitung beschreibt, in das lokale Dehnungsmodell.

Modelle, die die Massenträgheit der Leitungswand nicht berücksichtigen, werden ferner als statische Modelle bezeichnet.

**Bemerkung 2.2.** Das lokale statische Modell (2.4.16) zeigt zwar die einfachste Möglichkeit auf, die Dehnung zu bestimmen, stellt jedoch später bei der numerischen Behandlung der Fluid-Gleichungen die größten Anforderungen an das Berechnungsschema. Der Grund dafür ist der sehr schnelle Wandzustandswechsel mit dem das Modell zum Beispiel auf einen Stoß, reagiert. Es werden lokal große Gradienten sowohl in der Zeit wie auch im Raum produziert, die das numerische Schema stark belasten. Dieser Effekt ist nicht zu vernachlässigen, da das einfache Modell den Grenzwert aller anderen Modelle bildet. Für  $s \rightarrow 0$  und auch für  $E_x \rightarrow 0$  verhalten sich alle Modelle analog zu dem lokalen statischen Modell.

Zusätzlich zu den oben vorgestellten Modellen wird an dieser Stelle eine Beschreibung der Wandbewegung vorgestellt, die sich der Ansätze der Balkentheorie bedient. Die Projektion der Leitungswand auf die  $x$ -Achse wird als ein Balken vorgestellt, für welchen entsprechende Modellgleichungen aufgestellt werden. Hierzu werden als bewegungsbeschreibende Größen nicht die Verschiebungen  $(w_x, w_r)$  gewählt, sondern  $(w_r, \gamma)$ . Hierbei bezeichnet  $w_r$ , analog zu obigen Schreibweise, lokale Verschiebung eines Punktes des Balkens senkrecht zur  $x$ -Achse und  $\gamma$  den lokalen Winkel des Balkens auf die Projektionsachse. Die zugehörigen Größen der relativen Änderungen werden mit

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial}{\partial x} \gamma \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{\partial}{\partial x} w_r + \gamma \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

notiert. Ferner wird mit  $\mathcal{M}$  das Biegemoment des die Wand abbildenden Balkens bezeichnet und mit  $Q$  die Querkraft. Entsprechend den eingeführten Schreibweise lauten die Materialgleichungen in diesem Fall<sup>27</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= E_x I_s \cdot \varepsilon_r \\ Q &= G A_s \cdot \varepsilon_\gamma, \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

mit dem Schubmodul  $G = \frac{E_\phi}{2(1 + \nu)}$ , dem Flächenträgheitsmoment  $I_s$ , das

---

<sup>27</sup>Vgl. [GHS02].

sich für die Leitungsröhre mit  $I_s = \pi \frac{(r_0 + w_r)^4 - r_0^4}{4}$  berechnen lässt und der Querschnittfläche der Leitungswand  $A_s = \pi \left( (r_0 + s)^2 - r_0^2 \right)$ .

Unter der Berücksichtigung der Wandträgeit in die radiale Richtung und des Drucks in der Leitung als äußere Kräfte auf den Balken lautet das Kräftegleichgewicht (vgl. Abbildung 2.10):

$$-\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{Q} = \frac{r_0}{s} \cdot \left( p - \frac{E_\phi s}{r_0^2} w_r - \rho_s \cdot s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r + k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r \right) \quad (2.4.19)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} = \mathcal{Q}.$$

Die komplette Bewegungsgleichung lässt sich somit wie folgt formulieren:

$$GA_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_r + GA_s \frac{\partial}{\partial x} \gamma = \frac{r_0}{s} \left( p - \frac{E_\phi s}{r_0^2} w_r - \rho_s s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r + k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r \right)$$

$$GA_s \frac{\partial}{\partial x} w_r + E_x I_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} \gamma + GA_s \gamma = 0. \quad (2.4.20)$$

Verwendet man zusätzlich die Bernoulli-Hypothese für einen Balken, die besagt, dass alle Querschnitte des Balkens bei einer Verformung stets eben und senkrecht zur Biegeachse bleiben, so erhält man die Beziehung

$\gamma = -\frac{\partial}{\partial x} w_r$  und das Gleichungssystem 2.4.20 geht in die Gleichung

$$E_x I_s \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_r = \frac{r_0}{s} \left( p - \frac{E_\phi s}{r_0^2} w_r - \rho_s \cdot s \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r + k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r \right) \quad (2.4.21)$$

über.

Die Balkenmodelle müssen ferner durch die geometrischen Randbedingungen  $(w_r, \gamma) = (0, 0)$  für  $x = x_{kl}$  und  $x = L - x_{kr}$ , beziehungsweise

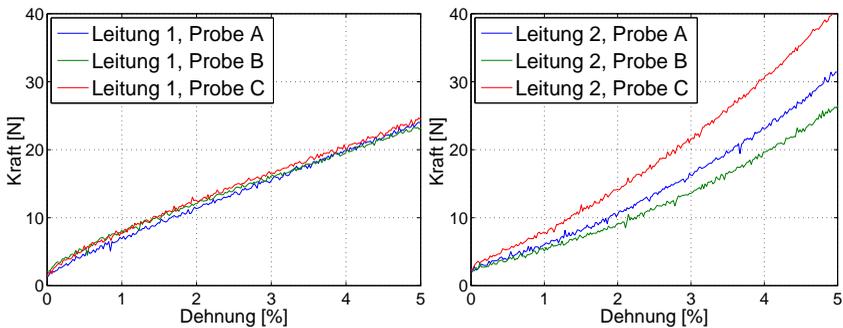
$(w_r, \frac{\partial}{\partial x} w_r) = (0, 0)$  für  $x = x_{kl}$  und  $x = L - x_{kr}$ , ergänzt werden.

**Bemerkung 2.3.** Auch aus den Balkenmodellen lassen sich, durch Vernachlässigung der Massenträgheits- und Dämpfungseffekte, rein statische Modelle erzeugen. Die Gleichung (2.4.21) reduziert sich dabei beispielsweise zu

$$E_x I_s \frac{\partial^4}{\partial x^4} w_r = \frac{r_0}{s} p - \frac{E_\phi}{r_0} w_r. \quad (2.4.22)$$

Bei der Simulation der Dehnung realer Leitungen ist die Bestimmung physikalischer Konstanten, beziehungsweise Modellparameter, von zentraler Bedeutung. Dies gilt sowohl für grobe als auch für detaillierte Modelle. Insbesondere ist die Initialisierung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung in radialer Richtung, aufgrund des oben genannten strukturellen Aufbaus hydraulischer Leitungen, nicht trivial.

Zur Validierung des linearen Ansatzes sowie zur allgemeinen Untersuchung des Verlaufs der axialen Spannungs-Dehnungs-Abhängigkeit einer typischen Leitung wurde die axiale Kraft-Dehnung Kurve für zwei Typen von häufig eingesetzten Leckölleitungen in einer experimentellen Anordnung bestimmt. Dabei wurde auf Leitungen mit der Gesamtlänge  $L = 1\text{ m}$  eine vordefinierte Zugkraft angebracht. Im mittleren Bereich der Leitung wurde die Dehnung der Leitung gemessen.<sup>28</sup> Die Erhöhung des Kraftbetrages wurde sehr langsam durchgeführt, so dass dynamische Effekte vernachlässigbar waren.

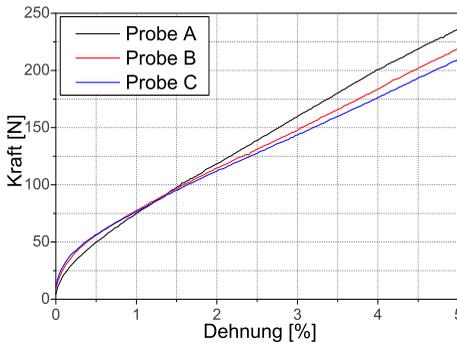


**Abbildung 2.12:** Gemessene Kraft-Dehnung Abhängigkeiten für die axiale Dehnung der Leckölleitungen.

Es wurden zwei Leitungstypen vermessen. Leitung 1 war dreilagig aufgebaut. Die äußere und die innere Schicht bestanden aus weichem Kautschuk. Die mittlere Schicht, der Druckträger, war ein dünnes Geflecht aus Baumwolle. Leitung 2 war zweischichtig. Die innere Schicht bestand aus Kautschuk, die äußere Schicht, die sowohl als Druckträger wie auch als Mantelschicht diente, bestand aus einem dicken und sehr engem Geflecht aus

<sup>28</sup>Es wurde die Ausdehnung eines Abschnitts mit der Länge von  $0,1\text{ m}$  in der Mitte der Leitung vermessen, um den Einfluss der Einspanneffekte zu minimieren.

Baumwolle und Nylon. Beide Leitungstypen werden sehr häufig in den Niederdruckbereichen der modernen Einspritzsysteme eingesetzt. Die Messergebnisse (vgl. Abbildung 2.12)<sup>29</sup> zeigen, dass in beiden Fällen eine Linearisierung der  $(\sigma - \varepsilon)$ -Abhängigkeit für kleine Dehnungen auch für mehrschichtige Leitungen legitim ist. Durch die Bestimmung der mittleren Steigung der Messkurven lässt sich, unter der Annahme der Konstanz der Leitungswanddicke, eine Näherung von  $E_x$  konstruieren. Zu beachten ist allerdings die Exemplarstreuung bei der Leitung 2. Sie ist ein Indiz dafür, dass das Ausrichten der Geflechtsfasern einen Einfluss auf das Dehnungsverhalten hat, welches bei diesem Leitungstyp aufgrund äußerer Einflüsse variiert.



**Abbildung 2.13:** Axiale Kraft-Dehnung Kurve einer Leitung mit Metallgewebe als Druckträgerschicht.

In numerischen Testbeispielen, die im Verlauf dieser Arbeit untersucht wurden, stellte sich heraus, dass das Einsetzen der auf diese Weise bestimmten Werte für die radiale Abhängigkeit ( $E_\phi = E_x$ ) stets zu ungenügenden Simulationsergebnissen führte. Der Einfluss der Struktur auf die Richtungsabhängigkeit der Spannungs-Dehnungs-Zusammenhänge lässt sich sehr gut an der Messung einer weiteren Leitung am

selben Aufbau verdeutlichen. Hierbei handelt es sich um eine Leitung mit einer Druckträgerschicht, die in Form eines Metallgeflechts ausgeführt ist, und einer Stoffummantlung. Das Aufbringen einer kleinen axialen Last auf eine solche Leitung erzeugt eine unproportional kleine Dehnung (vgl. Abbildung 2.13). Dieses Phänomen beruht auf der Ausrichtung der Metallfasern und der Reibkräfte im Geflecht. Bei der radialen Dehnung spielen diese Effekte eine untergeordnete Rolle, da die Verformung im Betrieb zum überwiegenden Teil in der Schlauchseele stattfindet.

Da die Güte jedes konstruierten Modells in der Anwendung durch die Gü-

<sup>29</sup>Der „Offset“ in der Kraft, der keine Dehnung erzeugt, hat keinen physikalischen Hintergrund, sondern ergibt sich aus dem Messverfahren.

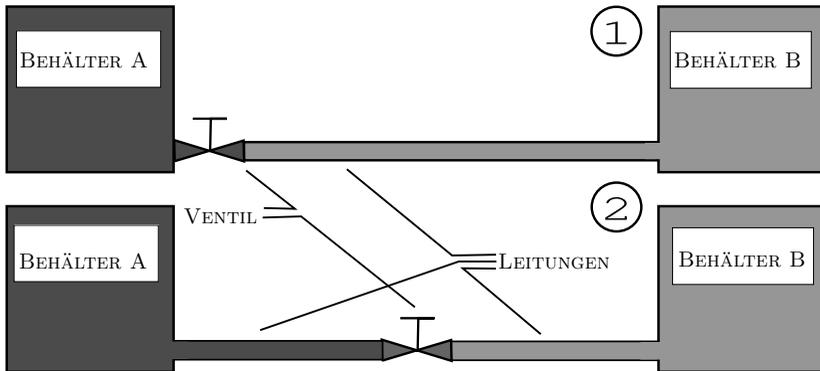
te der initialisierten Parameter mitbestimmt wird, ist es sowohl für den praktikablen Einsatz als auch für die Validierung der effizienten Modelle essentiell den radialen Anteil des Misch-Elastizitätsmoduls,  $E_\phi$ , bestimmen zu können. Eine Möglichkeit dies anhand dynamischer Messungen durchzuführen, welche auf harmonische Anregungen der Fluidsäule der Leitung basieren, wurde in [Leo08] detailliert erläutert. Eine weitere Möglichkeit der Parameteridentifikation kann mittels einer statischen Volumenmessung der Leitung realisiert werden. Hierzu muss eine geschlossene Leitung mit einem Fluid gefüllt und druckbeaufschlagt werden. Bestimmt man zu jedem eingestellten Druckniveau das sich in der Leitung befindende Volumen, so kann eine  $(\sigma - \varepsilon)$ -Abhängigkeit konstruiert werden. Besonders zu beachten ist bei dieser Vorgehensweise der Einfluss der Einspannungseffekte.

Für den Einsatz im Entwicklungsprozess bedeuten beide oben genannte Vorgehensweisen, jedoch Konstruktion spezieller Messvorrichtungen und aufwendige Vermessungen der Wandelastizität für jeden einzelnen Leitungstyp. Da dies oft nicht möglich ist, wird in dieser Arbeit eine effizientere Methode zur Identifikation der Leitungswandparameter vorgestellt. Diese basiert auf Approximationen der Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Stoßes in hydraulischen Leitungen. Innerhalb unterschiedlicher Messungen an hydraulischen Komponenten fällt sehr oft die Ausbreitungszeit eines Stoßes als Nebenprodukt ab oder lässt sich mit kleinem Aufwand an vorhandenen Vorrichtungen bestimmen. Diese Daten können zur Parameteridentifikation verwendet werden. Die Grundidee des Ansatzes wird im nächsten Abschnitt genauer erörtert.

## 2.5 Hilfskonstrukte zur Beschreibung und Analyse der Wellenausbreitung in flexiblen Leitungen

Zum besseren Verständnis der Effekte, die man bei der Konstruktion des Leitungsmodells gerne abbilden möchte, werden an dieser Stelle einige bekannte Konzepte zur Beschreibung der wichtigsten Phänomene der Strömung in flexiblen Leitungen sowie geeignete Verifizierungstests vorgestellt. Ferner wird das so genannte *Stoßproblem* als theoretische Aufgabe zur Analyse von Leitungsmodellen präsentiert. Bei diesem Gedankenexperiment werden zwei große flüssigkeitsgefüllte Behälter mit unterschiedlichen Druckniveaus betrachtet. Diese sind durch eine Leitung verbunden, die einen im Vergleich zu ihrer Länge relativ kleinen Querschnitt besitzt. An einer vordefinierten

Stelle wird ein Ventil oder eine Blende angebracht. Hierbei werden zwei Fälle betrachtet: ① Das Ventil befindet sich an einer Mündung der Leitung und ist im Ausgangszustand geschlossen. ② Das Ventil befindet sich im Ausgangszustand in der Leitungsmitte und ist offen, so dass eine konstante Strömung sich innerhalb der Leitung ausgebildet hat.



**Abbildung 2.14:** Stoßversuch: Schnelles Öffnen ① und schnelles Schließen ② eines Ventils.

Im Fall ① wird nun das Ventil schlagartig geöffnet, so dass ein Stoß oder eine Verdünnungswelle, abhängig von den Ausgangsdruckniveaus in beiden Behältern, sich in der Leitung ausbreitet. Im Fall ② wird das Ventil unendlich schnell geschlossen, so dass sich ein Stoß in eine Richtung ausbreitet und eine Verdünnungswelle in die andere. Zu bestimmen ist in beiden Stoßexperimenten das Verhalten des Fluids in der Leitung nach dem Öffnungs- beziehungsweise Schließvorgang.<sup>30</sup> Die Abbildung 2.14 skizziert die beschriebene Aufgabenstellung. Anhand dieser Tests lassen sich später sowohl Modellvariationen als auch numerische Verfahren vergleichen.

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Störung durch die Leitung beim Stoßtest ① ausbreitet, ist für eine ideal starre Leitung gleich der oben definierten Schallgeschwindigkeit des Fluids. Für eine Schlauchleitung ändert

<sup>30</sup>Ein experimentelles Analogon zum in Abbildung 2.14 dargestellten Problem geht auf Holmboe und Rouleau zurück, [HR66].

sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit von den Eigenschaften der Leitungswand. Für die mittlere Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung wurden in einigen Arbeiten geschlossene Formeln aufgestellt. Für die nachfolgende Beschreibung werden die in dem vorhergehenden Abschnitt eingeführten Bezeichnungen verwendet.

Nach Korteweg, [Kor78], ergibt sich für die mittlere Geschwindigkeit der Signalausbreitung,  $c_{sys}$ :

$$c_{sys} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{2E_f}{E_\phi} \cdot \frac{r_0}{s}}} \quad (2.5.1)$$

In der Arbeit [Kuh53] erweiterte Kuhl diese Formel zu

$$c_{sys} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{2E_f}{E_\phi} \cdot \frac{(r_0 + s)^2/s^2 + 1}{(r_0 + s)^2/s^2 - 1}}} \quad (2.5.2)$$

und validierte diese an Wasserleitungen verschiedener Dicke.

Die Herleitung von Kuhl bedient sich der Annahme der linearen Spannungsverteilung über die Dicke der Leitungswand, was nur für sehr dünnwandige Leitungen angenommen werden kann. Eine Formulierung für dickwandige Leitungen<sup>31</sup> findet man in [KS81]:

$$c_{sys} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{2E_f}{E_\phi} \cdot \frac{(1 + \nu)(r_0 + s)^2 + (1 - 2\nu)r_0}{(r_0 + s)^2 - r_0^2}}} \quad , \quad (2.5.3)$$

wobei  $\nu$  die Querdehnzahl der Leitungswand aus homogenem Material bezeichnet. Für eine mehrschichtige Leitung wäre an dieser Stelle die Misch-Querkontraktionszahl zu verwenden.

Bis heute gelten die Formeln als sehr gute Abschätzungen für die mittlere Geschwindigkeit der Störungsausbreitung in Leitungen. Für das oben beschriebene Stoßexperiment ① kann durch die Approximation die Verzögerung gegenüber einer ideal starren Leitung bestimmt werden.

**Bemerkung 2.4.** Die Approximationen lassen sich sehr gut zur Bestimmung des Misch-Elastizitätsmoduls  $E_\phi$  verwenden, indem zu einer, an einem

---

<sup>31</sup>Die Autoren geben  $\left(\frac{r}{r+s} < 1.1\right)$  als Gültigkeitsgrenze an.

Stoßexperiment gemessenen, Verzögerung der Ausbreitung einer Störung, ein entsprechender Wert von  $E_\phi$  durch das Umformen der Gleichung (2.5.1) oder (2.5.2) errechnet wird.

## 2.6 Effiziente Modellierung der Reibungskräfte in hydraulischen Leitungen

Modellierung der Verluste des Impulses in hydraulischen Leitungen ist ein komplexes Thema, welches bis heute nur teilweise untersucht wurde. Es existieren zwar weitgehend akzeptierte Ansätze, diese basieren jedoch stets auf Untersuchungen von starren Leitungen.

Als Verlustterm wird der in der Gleichung (2.1.8) definierte Term  $R$  bezeichnet. Für eine starre Leitung reduziert sich dieser zu  $\int_{A(x)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\phi dr$ , vgl. (2.1.7) und (2.1.8). Grundsätzlich kann also dieser Anteil von  $R$  für kleine Dehnungen sowohl mit experimentell aufgestellten Modellen für Gesamtverluste einer starren Leitung als auch mit theoretisch hergeleiteten Approximationen für  $\boldsymbol{\tau}$  angenähert werden. Kleine Ungenauigkeiten sind dennoch zu erwarten, da in einer flexiblen Leitung, im Vergleich zu einer starren, im Allgemeinen sich abweichende Strömungsprofile ausbilden.<sup>32</sup> Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird die Analyse des Verlustterms zunächst unabhängig vom numerischen Zugang zu den Modellgleichungen vorgenommen. Numerische Behandlung und daraus resultierende Restriktionen werden weiter im Abschnitt 4.4 behandelt.

Zur Beschreibung der Reibungsmodelle wird eine weitere Größe benötigt, welche die Strömung charakterisiert. Diese ist die dimensionslose Reynolds-Zahl  $Re$ , die für Leitungsströmungen durch die Gleichung

$$Re = \frac{2r \cdot \rho |v|}{\eta} = \frac{2r \cdot |v|}{\nu_f} \quad (2.6.1)$$

definiert wird. Sie stellt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften dar.

Prinzipiell ist die viskose Spannung  $\boldsymbol{\tau}$  eine Funktion der Fluidgeschwindigkeit und deren räumlichen Ableitungen. Für Newton'sche Fluide gilt

---

<sup>32</sup>Pezzinga und Brunone formulieren dies bei Analyse moderner Reibungsmodelle in [PB07] wie folgt: „The problem of different velocity profiles in elastic and viscoelastic pipes is open and should be examined by means of experiments and theoretical future studies“ (S. 231).

zum Beispiel  $\boldsymbol{\tau} \sim \nabla \mathbf{v}$ , mit  $\mathbf{v}$  - dreidimensionaler Geschwindigkeitsvektor. Innerhalb einer quasi-zweidimensionalen Modellierung wird jedoch mit einer integralen Mittelung der Fluid-Größen über dem Leitungsquerschnitt gerechnet. Somit lässt eine numerische Analyse der entstandenen Gleichungen keine Rekonstruktion der dreidimensionalen Größen in der Leitung zu. Daher müssen die Beziehungen zwischen der viskosen Spannung und den dreidimensionalen Fluid-Größen durch Modell-Gleichungen ersetzt werden. Man spricht an dieser Stelle stets von Reibungsmodellierung. In der Integralform der Impulserhaltung wird dabei die Spannung in der Leitung mit Hilfe des Satzes von Gauß auf die Spannung an der Leitungswand überführt. Es wird folgende Abkürzung eingeführt:

$$\tau_W := \frac{1}{2\pi r} \int_{A(x)} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\phi dr = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial A(x)} \mathbf{n}_{\partial A} \cdot \boldsymbol{\tau} \, d\phi \quad (2.6.2)$$

und die Approximande  $\tau_W$  wird ferner als Wandschubspannung bezeichnet. Zur Konstruktion von Modellgleichungen wird sie wie folgt aufgeteilt:

$$\tau_W = \tau_W^s + \tau_W^u. \quad (2.6.3)$$

Hierbei bezeichnet  $\tau_W^s$  den stationären Anteil von  $\tau_W$ , und  $\tau_W^u$  den instationären.

Der stationäre Reibungsanteil ist der, der den Verlust einer vollausgebildeten Rohrströmung angibt. Dieser wird durch das Umformen des Ansatzes von Darcy und Weissbach für einen Totaldruckverlust in einer Leitung (vgl. [Tru89]) berechnet:

$$\tau_W^s = -\frac{\lambda}{4 \cdot r} \rho |v| v, \quad (2.6.4)$$

wobei  $\lambda$  den dimensionslosen Wandwiderstandsbeiwert bezeichnet. Er ist abhängig von der Reynoldszahl und der Strömungsform.

Für laminare Rohrströmung ergibt sich für  $\lambda$  nach Hagen-Poiseuille

$$\lambda = \frac{64}{Re}. \quad (2.6.5)$$

Für eine turbulente Strömung existieren mehrere Ansätze, die anhand von empirischen Untersuchungen aufgestellt wurden. Für hydraulisch glatte Rohre<sup>33</sup> kann  $\lambda$  nach dem Ansatz von Prandtl berechnet werden:

$$\frac{1}{\lambda} = 2 \cdot \log(Re \cdot \sqrt{\lambda}). \quad (2.6.6)$$

---

<sup>33</sup>Eine Leitung wird als hydraulisch glatt bezeichnet, wenn für die Wandrauigkeit  $k_r$  die Gleichung  $(64 \cdot \frac{2r}{k_r}) > Re$  gilt. ( $k_r \approx 0$ )

Durch ihre implizite Darstellung ist die Formel unhandlich, und wird daher durch den Ansatz von Blasius ersetzt, der eine explizite Approximation an (2.6.6) darstellt:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{0,3164}{Re^{1/4}} & (2300 < Re < 10^5) \\ \frac{0,309}{(\lg(Re/7))^2} & (Re \geq 10^5). \end{cases} \quad (2.6.7)$$

Als Identifikationsgröße für den Umschlag der Rohrströmung vom laminaren zum turbulenten Fall gilt das Überschreiten des Wertes 2300 durch die Reynoldszahl. An diesem Punkt macht  $\lambda$  eine sprunghafte Änderung. Wie jedoch bereits in der Arbeit [Jun05] diskutiert, sprechen experimentelle Beobachtungen für das Existieren eines kleinen Übergangsbereichs. Analog zu dem Ansatz aus dieser Arbeit wird für  $\lambda$  eine zusammengesetzte Funktion benutzt, die einen stetig differenzierbaren Übergang zwischen den genannten Bereichen erlaubt<sup>34</sup>:

$$\lambda = \begin{cases} \frac{64}{Re}, & Re < 1900 \\ \frac{1}{2}(1 - \xi_1) \frac{64}{Re} + \frac{1}{2}(1 + \xi_1) \frac{0,3164}{Re^{0,25}}, & 1900 \leq Re < 3500 \\ \frac{0,3164}{Re^{0,25}}, & 3500 \leq Re < 90000 \\ \frac{1}{2}(1 - \xi_2) \frac{0,3164}{Re^{0,25}} + \frac{1}{2}(1 + \xi_2) \frac{1,6382}{\left(\lg\left(\frac{Re}{7}\right)\right)^2}, & 90000 \leq Re < 110000 \\ \frac{1,6382}{\left(\lg\left(\frac{Re}{7}\right)\right)^2}, & 110000 \leq Re \end{cases} \quad (2.6.8)$$

mit  $\xi_1 := \tanh\left(\frac{Re - 2700}{40}\right)$  und  $\xi_2 := \tanh\left(\frac{Re - 100000}{500}\right)$ . Der Verlauf der Approximierenden des Widerstandbeiwerts ist im Anhang (Abb. C.1) in einem Moody-Diagramm dargestellt.

---

<sup>34</sup>Die Darstellung weicht etwas von der Originaldarstellung in [Jun05] ab, die Unterschiede beruhen auf eingehender Diskussionen mit dem Autor (s. [EBJ08]).

Reale hydraulische Leitungen können oft als glatt vorausgesetzt werden, es sind jedoch Ausnahmen zu beachten. Für Gummidruckschläuche, Kunststoffleitungen und Leitungen aus Leichtmetallen, die als „technisch glatt“ (vgl. [BG97]) bezeichnet werden, werden für die Rauigkeit, je nach Herstellungsqualität, Werte zwischen 0,0005 und 0,0015 mm angegeben. Dies bedeutet, dass einige (speziell sehr dünne) Leitungen für sehr große Reynoldszahlen nicht mehr als „hydraulisch glatt“ angesehen werden können. In diesem Fall ist die Berechnung von  $\lambda$ , um einen weiteren Bereich entsprechend der Formel von Colebrook oder der von Nikuradse (vgl. [BG97]) zu erweitern.

Für die Berechnung des instationären Anteils des Reibungsterms werden der frequenzabhängige Ansatz sowie die in letzten Jahren entstandenen Modelle für den beschleunigungsabhängigen Impulsverlust einer Leitung benutzt. Diese basieren stets auf Untersuchungen der Dämpfung eines Stoßes in einer sehr langen Leitung und eignen sich aus physikalischer Sicht sehr gut zur Simulation hochdynamischer Vorgänge. Deren Vorstellung und Anpassung an die Modellgleichungen erfolgt zunächst ebenfalls nur mit Analyse der numerischen Bestimmung des Terms selber und ungeachtet der Implementierungsmöglichkeiten und Umsetzung innerhalb des Gesamtschemas.

Die erste modellhafte Beschreibung der instationären Reibung geht zurück auf Zielke (vgl. [Zie68]). Hierbei wird die Laplace-Transformation auf die radiale Komponente der inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial r} - \frac{1}{\nu} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\nu \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.6.9)$$

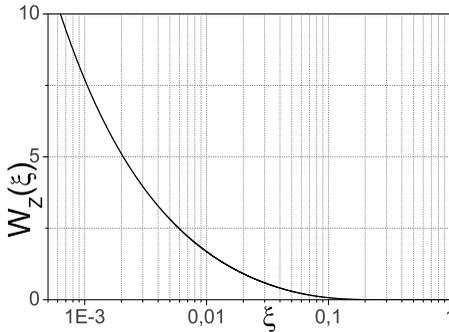
angewendet. Für die Lösung der entstehenden gewöhnlichen Differentialgleichung wird ein geschlossener Ausdruck aufgestellt. Die Transformation der mittleren Geschwindigkeit  $v$  und die Zusammensetzung der Gleichungen liefert die Abhängigkeit der Wandschubspannung von der mittleren Geschwindigkeit im Frequenzbereich. Dank dieses Ansatzes wird bis heute der instationäre Wandschubspannungsanteil  $\tau_W^u$  oft als *frequenzabhängige Reibung* bezeichnet.

Durch die inverse Laplace-Transformation der Lösung erhielt Zielke folgenden Ausdruck für die Approximation im Zeitbereich:

$$\tau_W^{u,Zielke} = \tau_W^{u,Zielke} \left( \rho, v, r, t; \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \frac{4\rho \cdot \nu}{r^2} \cdot \int_0^t \frac{\partial}{\partial \xi} v(x, \xi) W_Z(t-\xi) d\xi. \quad (2.6.10)$$

Hierbei ist die Funktion  $W_Z$  „eine Gewichtsfunktion, mit der vergangene Werte der Volumenstromänderung hinsichtlich ihrer Bedeutung für den augenblicklichen Druckabfall bewertet werden“<sup>35</sup>. Genauer gesagt, gewichtet  $W_Z$  die vergangenen Geschwindigkeitsvariationen innerhalb der Berechnung des aktuellen Impulsverlusts und muss aus physikalischer Sicht in der Zeit exponentiell abklingend sein.

$W_Z(\xi)$  wurde für  $\xi \geq 0.02$  als die Summe einiger Exponentialfunktionen und für  $\xi < 0.02$  als Summe einiger Wurzel-Funktionen dargestellt. Die genaue Zusammensetzung der Funktion  $W_Z$  kann im Anhang B.1 nachgeschlagen werden, die Abbildung 2.15 skizziert ihren Verlauf.



**Abbildung 2.15:** Zielkes Gewichtsfunktion  $W_Z$ .

Durch den stark abklingenden Verlauf von  $W_Z$  kann für das Faltungsintegral in (2.6.10) das endliche Integral  $\int_{t-\Delta t}^t (...)d\xi$ , für  $\Delta t$  groß genug, als gute Näherung benutzt werden. Das endliche Integral kann in diesem Fall bestimmt werden, was eine Implementierung in eine numerische Methode ermöglicht. Dieser Ansatz geht auf [Tri75] zurück, wobei die Arbeiten [The83] und [Hab02] gezeigt haben, dass bei der

Implementierung sowohl die Wahl von  $\Delta t$  als auch die Anzahl der Integralstützstellen größer, als die in der Originalarbeit, zu wählen sind. Das diskrete Zielke-Modell eignet sich gut für das angestrebte effiziente Modell, da es mit den Größen des quasi-zweidimensionalen Modells auskommt, jedoch bedeutet die Auswertung vieler Exponentialfunktionen zur Berechnung der Integrale einen für Systemsimulationen nicht zu vernachlässigenden Zeitaufwand.

Ein effizienterer Ansatz, der die instationäre Reibung berücksichtigt, ist der der beschleunigungsabhängigen Reibung. Die ersten Untersuchungen dazu,

<sup>35</sup>[The83], S.27.

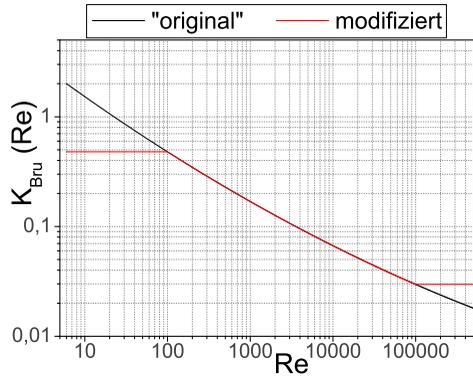
die gute Übereinstimmungen mit experimentellen Ergebnissen lieferten, gehen auf Brunone et al. zurück: [BGG91b, BGG91a] und etwas erweitert in [BGG95, BKMF00]. Aus dem Ansatz lässt sich in der Schreibweise der vorliegenden Arbeit folgende Darstellung gewinnen:

$$\tau_W^{u, Bru} = \tau_W^{u, Bru} \left( \rho, v, r, t; \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x} \right) = K_{Bru} \frac{\rho r}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (2.6.11)$$

mit Schallgeschwindigkeit  $c$ , definiert durch (2.2.11). Für den Koeffizienten der instationären Reibung  $K_{Bru}$  wurde anhand empirischer Daten der Ausdruck ermittelt.

$$K_{Bru} = 2 \cdot \sqrt{\frac{7,41}{Re^\chi}}, \quad \text{mit } \chi = \log \left( \frac{14,3}{Re^{0,05}} \right) \quad (2.6.12)$$

Die Aufstellung des  $Re$ -abhängigen Modells anhand von Messungen impliziert gewisse Einschränkungen des Gültigkeitsbereichs. Spätere Implementierung des Modells in das numerische Gesamtschema hat gezeigt, dass der Verlustterm durch den exponentiellen Verlauf der Funktion  $K_{Bru}$  (vgl. Abb. 2.16) zum einen für kleine Reynoldszahlen eine unrealistische Größe annimmt und zum anderen für sehr große Reynoldszahlen den instationären Anteil fast vollständig verliert. Daher wird an dieser Stelle eine leichte Modifikation des Ansatzes entwickelt:



**Abbildung 2.16:** Faktor der instationären Reibung nach Brunone et al.

$$\tilde{K}_{Bru}(Re) = \begin{cases} K_{Bru}(100), & \text{falls } Re \leq 100 \\ K_{Bru}(Re), & \text{falls } 100 < Re \leq 10^5 \\ K_{Bru}(10^5), & \text{falls } Re > 10^5. \end{cases} \quad (2.6.13)$$

Ein weiteres semi-empirisches Modell, welches viele Diskussionen hervorgerufen hat, ist der Ansatz von Shuy, [Shu96]:

$$\tau_W^{u,Shuy} = \tau_W^{u,Shuy} \left( \rho, v, r, t; \frac{\partial v}{\partial t} \right) = K_{Shuy} \cdot \frac{\rho r}{2} \cdot \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right). \quad (2.6.14)$$

mit

$$K_{Shuy} = \begin{cases} -0,0165, & \text{falls } \frac{\partial v}{\partial t} > 0 \\ -0,26, & \text{falls } \frac{\partial v}{\partial t} \leq 0. \end{cases} \quad (2.6.15)$$

Die experimentelle Bestimmung des Koeffizienten  $K_{Shuy}$  aus der Originalarbeit wurde jedoch infrage gestellt (vgl. z.B. [AGM00, PB07]) und bedarf genauerer Analyse, da die vorgeschlagenen Werte implizieren, dass der Reibungsterm in abgebremsten Flüssen steigt und in beschleunigten fällt.<sup>36</sup>

Die theoretische Grundlage der beschleunigungsabhängigen Reibungsmodellierung, und somit eine Verallgemeinerung der bekannten Ansätze, liefert die Arbeit von Axworthy et al., [AGM00]. Hier wird unter gewissen Prämissen eine physikalische Herleitung für den Zusammenhang:

$$\tau_W^u = K_{Ax}(t, x) \cdot \frac{\rho r}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.6.16)$$

konstruiert. Die Funktion  $K_{Ax}$  wird dabei als eine phänomenologische Funktion, die positive Relaxierungszeit repräsentiert, bezeichnet. Diese kann analytisch nicht hergeleitet werden und muss empirisch gewonnen werden. Für die Validierung benutzten die Autoren eine anhand mehrerer Stoßexperimente ermittelte Treppenfunktion

$$K_{Ax} \approx \begin{cases} 0,039, & \text{falls } \frac{\partial v}{\partial t} > 0 \\ 0, & \text{falls } \frac{\partial v}{\partial t} \leq 0 \end{cases} \quad (2.6.17)$$

---

<sup>36</sup>Der Grund dafür sind die Langzeiteffekte in der Strömung bei den Experimenten, auf deren Basis die Koeffizienten bestimmt wurden, s. [VJ97, AGM00]. Dies ist ein eindeutiges Indiz dafür, dass die beschleunigungsbasierten Ansätze nur für kurzzeitige, instationäre Prozesse physikalische Gültigkeit haben und für längere Zeitskalen lediglich eine Modellanpassung an experimentelle Ergebnisse bilden. Jedoch aufgrund teilweise sehr guter Ergebnisse ist das Shuy-Modell heute noch aktuell und wurde, parallel zu den anderen Ansätzen, in die Applikation der Leitungsmodelle übernommen.

als eine Näherung und erzielten gute Übereinstimmungen zu weiteren Experimenten.

Analog zu dem stetigen Anteil der Wandschubspannung, werden die Modelle in dieser Arbeit um glatten Übergang vervollständigt. Der Übergangsbereich in der Sprungumgebung,  $\partial v / \partial t \approx 0$ , wird hierbei klein gewählt. Als Anhaltspunkt für die Glättung vom beschleunigten zum abgebremsten Fall wird dabei ein Hundertstel der Erdbeschleunigung verwendet.

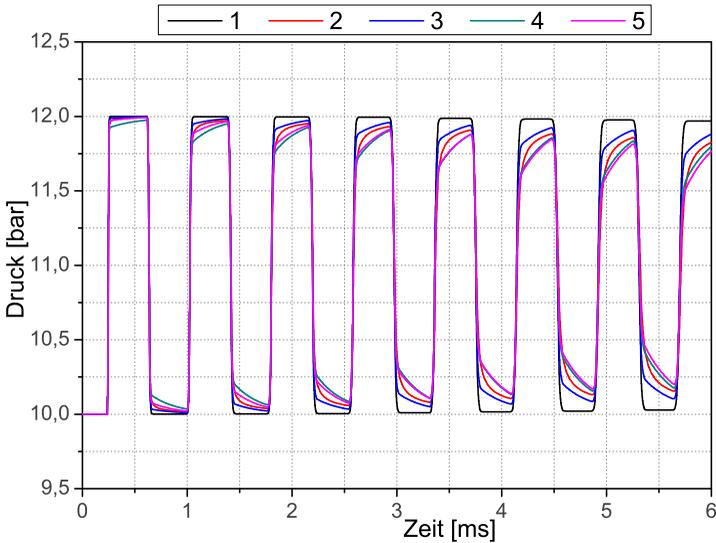
Mit  $\xi_3 := \tanh\left(\frac{\partial v / \partial t - 0,049}{0,00245}\right)$  lauten die modifizierten Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{Shuy} &= \begin{cases} 0,0165, & \frac{\partial v}{\partial t} > 9,8 \cdot 10^{-2} \\ \frac{1}{2}(1 - \xi_3) \cdot 0,0165 + \frac{1}{2}(1 + \xi_3) \cdot 0,26, & 0 < \frac{\partial v}{\partial t} \leq 9,8 \cdot 10^{-2} \\ 0,26, & \frac{\partial v}{\partial t} \leq 0 \end{cases} \\ \tilde{K}_{Ax} &= \begin{cases} 0,039, & \frac{\partial v}{\partial t} > 9,8 \cdot 10^{-2} \\ \frac{1}{2}(1 - \xi_3) \cdot 0,039, & 0 < \frac{\partial v}{\partial t} \leq 9,8 \cdot 10^{-2} \\ 0, & \frac{\partial v}{\partial t} \leq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.6.18)$$

Die Abbildung 2.17 zeigt den zeitlichen Verlauf des Drucks in der Mitte der Leitung beim Stoßexperiment mit dem Prüföl nach ISO4113 als Fluid und 10 bar, beziehungsweise 12 bar als Ursprungsdruckniveaus in beiden Behältern. Die simulierte Leitung ist 0.5 m lang und hat einen Durchmesser von 3 mm. Um den Einfluss des Reibungsmodells zu separieren, wurde in diesem Fall mit einer starren Leitung gerechnet.

Im Stoßexperiment sowie in vielen „realen“ dynamischen Rechnungen liefert die schlankere beschleunigungsabhängige Reibung ähnlich gute und teilweise bessere Ergebnisse als die rechenzeit-intensivere frequenzabhängige Reibung.<sup>37</sup> Deren Schwäche besteht in einer schlechteren Abbildung langzeitiger Strömungseffekte. Dieser Punkt kann anhand von Simulationen periodischer Vorgänge veranschaulicht werden. Hierzu wird die Berechnung folgender Situation angestoßen: Eine an einem Ende geschlossene Leitung wird am gegenüberliegenden Ende einer periodischen sinusförmigen Druckanregung ausgesetzt. Befindet sich die Frequenz des Anregers unmittelbar in

<sup>37</sup>In [EJB08] wurde mehrfach berichtet, dass die Zielke-Reibung bei Vorgängen mit starken Druckschwankungen den Impulsverlust oft unterschätzt. Dies liegt an der numerischen Approximation des Integrals in (2.6.10) und lässt sich nur unter weiteren Rechenzeitverlusten verbessern.



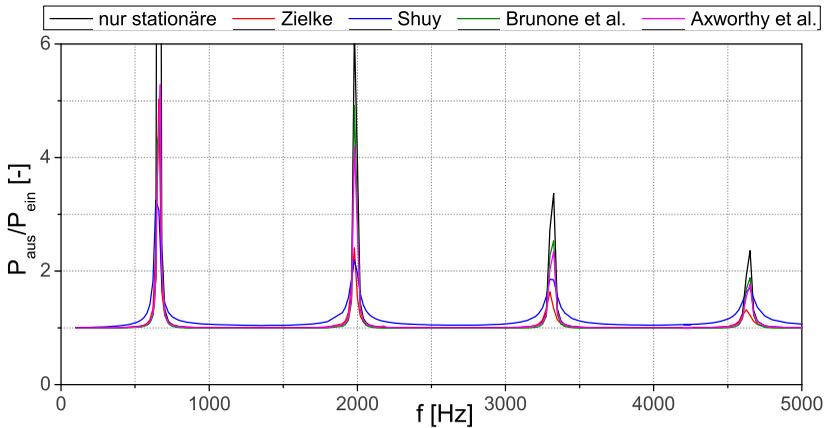
**Abbildung 2.17:** Druck in der Mitte der Leitung beim Stoßversuch:  
**1:** nur stationäre Reibung, **2:** Zielke-Reibung,  
**3:** Shuy-Reibung, **4:** Brunone et al. - Reibung,  
**5:** Axworthy et al. - Reibung.

der Nähe einer der Eigenfrequenzen der Leitung, so unterschätzen die Modelle von Brunone und Axworthy den Impulsverlust. Die Abbildung 2.18 veranschaulicht das angesprochene Phänomen.

Prinzipiell besteht bei der Anwendung der Reibungsmodelle innerhalb eines Berechnungscodes eine einfache Möglichkeit, im Eigenfrequenz-Bereich zusätzliche Dämpfung zu erzeugen. Hierzu muss das Durchlaufen der einer Eigenschwingung entsprechender Zustände zur Simulationszeit identifiziert werden und für die Fälle die Dämpfung künstlich angehoben werden. Die Erkennung des Zustandes kann beispielsweise durch Prüfung der Bedingung

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t} p(x)}{\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(x)} = - \frac{\cos(\frac{n}{2L} c_{sys})}{\sin(\frac{n}{2L} c_{sys})}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.6.19)$$

erfolgen. Harmonische Druckverläufe  $p(x) = p_0(x) + p_{amp}(x) \cdot \sin(\frac{n}{2L} c_{sys})$



**Abbildung 2.18:** Verhältnis der Druckamplituden einer geschlossenen Leitung bei sinusförmiger Druckanregung für unterschiedliche Ansätze zur Reibungsberechnung.

würden stets identifiziert werden und zusätzliche Dämpfung kann appliziert werden.

Diese Vorgehensweise ist jedoch problematisch, nicht nur wegen der Schwierigkeit der Bestimmung der Höhe der zusätzlichen Impulsreduktion für semiempirische Modelle, sondern und vor allem wegen des Fehlens einer physikalisch begründeten Basis der Methode. Prinzipiell handelt es sich hierbei um Anpassung eines Ansatzes für kurzzeitige Rechnungen an beobachtete Effekte bei periodischen Vorgängen.

Als Alternative werden in dieser Arbeit numerische Schemata verwendet, welche die Verwendung des Gesamtmodells mit beiden Reibungsansätzen erlauben.

# Numerische Methoden zur Behandlung der Strömungsgleichungen

## 3.1 Eigenschaften und Lösungstheorie der Erhaltungsgleichungen

Bevor eine numerische Methode zur Lösung der Strömungsgleichungen konstruiert wird, werden zunächst allgemeine Eigenschaften der Modellgleichungen und deren Lösungen diskutiert. Grundsätzlich haben die Gleichungen (2.3.1) und (2.3.2) die Form<sup>38</sup>

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{q}_F(\mathbf{u}). \quad (3.1.1)$$

Später wird gezeigt, dass der Schlüssel zum numerischen Zugang zur Gleichung (3.1.1) durch die Lösung des homogenen Anteils des Systems gebildet wird. Für (3.1.1) wird als solches das Gleichungssystem bezeichnet, bei welchem die rechte Seite Null ist. Daher wird bei der Analyse der Eigenschaften der Erhaltungsgleichungen und ihrer Lösungen vom homogenen Fall ausgegangen.

Vernachlässigt man die Terme der rechten Seiten in den Gleichungssystemen (2.3.1) beziehungsweise (2.3.2), so kann die zu lösende Aufgabe grundsätzlich wie folgendes Anfangswertproblem formuliert werden:

---

<sup>38</sup>Wobei für die Modellgleichungen einer Schlauchleitung  $\mathbf{f}$  über die thermische Zustandsgleichung gegeben ist.

„Finde ein  $\mathbf{u}(x, t)$ , so dass gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= 0 & \forall (x, t) \in [0, L] \times [t_0, t_{end}] \\ \mathbf{u}(x, t_0) &= \mathbf{u}_0(x) & \forall x \in [0, L]. \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Werden dabei die Operationen  $\frac{\partial}{\partial t}$  und  $\frac{\partial}{\partial x}$  als klassische Ableitungen verstanden und wird eine Lösung aus dem Raum der stetig differenzierbaren Funktionen gesucht, so heißt eine Funktion  $\mathbf{u}$ , die die Beziehung (3.1.2) erfüllt, eine klassische Lösung des Anfangswertproblems. Solche Lösungen existieren im Allgemeinen nur bis zur einer kritischen Zeit. Dieses kann wie folgt veranschaulicht werden.

Zur besseren Übersicht wird die Darstellung im folgenden Abschnitt auf den skalaren Fall beschränkt. Für  $u$  - eine klassische Lösung von (3.1.2) wird die Kurve  $(\gamma(t), t)$  als Charakteristik bezeichnet, falls

$$\gamma' = f'(u(\gamma(t), t)) \quad \forall t > 0 \quad (3.1.3)$$

gilt. Wegen der Beziehung

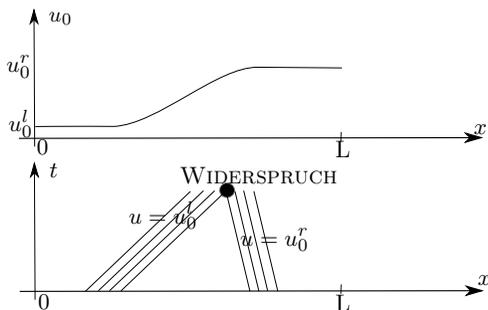
$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} u(\gamma(t), t) &= \gamma'(t) \frac{\partial}{\partial x} u(\gamma(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} u(\gamma(t), t) \\ &\stackrel{(3.1.3)}{=} f'(u(\gamma(t), t)) \frac{\partial}{\partial x} u(\gamma(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} u(\gamma(t), t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} f(u(\gamma(t), t)) + \frac{\partial}{\partial t} u(\gamma(t), t) \\ &\stackrel{(3.1.2)}{=} 0 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

folgt, dass  $u$  entlang einer Charakteristik konstant ist. Ferner hat dies zur Folge, dass  $\gamma$  stets eine Gerade ist, denn es gilt

$$\gamma'(t) = f'(u(\gamma(t), t)) = f'(u(\gamma(t_0), t_0)) = f'(u_0(\gamma(t_0))) = \text{const.}$$

Da im Allgemeinen  $f$  keine konstante Funktion ist, entsteht im Schnittpunkt zweier Charakteristiken mit unterschiedlichen Anfangswerten ein Widerspruch. Dies passiert auch, wenn  $u_0$  glatt ist. Die Abbildung 3.1 stellt diese Problematik graphisch dar.

Um die Lösbarkeit des Anfangswertproblems zu garantieren, muss der Lösungsbegriff erweitert werden. Die Ableitungen aus (3.1.2) sind daher, im distributionellen (schwachen) Sinn zu verstehen und es werden im weiteren Verlauf schwache Lösungen des Anfangswertproblems betrachtet. Definitionen des Begriffs und zugehörige Theorie kann [BS07] entnommen werden.



**Abbildung 3.1:** Charakteristiken einer klassischen Lösung der Anfangswertaufgabe.

Ferner wird von der Lösung eine zusätzliche Eigenschaft gefordert, die Erfüllung der sogenannten Lax-Entropiebedingung entlang aller Unstetigkeiten. Diese Forderung hat zum einen einen physikalischen Hintergrund, und sichert die Eindeutigkeit der Lösung. Vor der Einführung dieses Begriffs wird, zur Veranschaulichung der Ei-

genschaften der gesuchten Lösungen, zunächst die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung definiert. Hierfür wird zusätzlich zur Anfangswertaufgabe eine Kurve  $(\sigma(t), t)$ ,  $\sigma \in C^1[t_0, \infty)$  betrachtet, die den Raum  $\mathbb{R} \times [t_0, \infty)$  in  $\Omega_L$  und  $\Omega_R$  teilt. Für eine Funktion  $u$  bezeichnen  $u_R$  und  $u_L$  deren Einschränkungen auf  $\Omega_L$  beziehungsweise  $\Omega_R$ . Auf  $(\sigma(t), t)$  erfüllt  $u$  die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung genau dann, wenn die Beziehung

$$(u_R(\sigma(t), t) - u_L(\sigma(t), t)) \sigma'(t) = f(u_R(\sigma(t), t)) - f(u_L(\sigma(t), t)) \quad (3.1.5)$$

für alle  $t > t_0$  gültig ist.

Unter der Benutzung des Begriffs der schwachen Form kann gezeigt werden, dass mit der obigen Definition die Funktion  $u := \begin{cases} u_L & \text{in } \Omega_L \\ u_R & \text{in } \Omega_R \end{cases}$  genau dann eine schwache Lösung von (3.1.2) ist, wenn  $u_L$  und  $u_R$  in den jeweiligen Teilgebieten klassische Lösungen von (3.1.2) sind und  $u$  auf der die Teilgebiete trennenden Kurve  $(\sigma(t), t)$  die Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung

erfüllt.<sup>39</sup>  $\sigma'(t)$  wird als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Unstetigkeit  $(\sigma(t), t)$  bezeichnet.

Zur Definition der Entropiebedingung von Lax wird für ein  $(x_0, t_0) \in (\sigma(t), t)$  zusätzlich folgende Bezeichnung eingeführt:

$$s_{sh} := \frac{f\left(\lim_{\delta \rightarrow 0} u(x_0 - \delta, t_0)\right) - f\left(\lim_{\delta \rightarrow 0} u(x_0 + \delta, t_0)\right)}{u(x_0 - \delta, t_0) - u(x_0 + \delta, t_0)}. \quad (3.1.6)$$

Die Funktion  $u$  erfüllt die Lax-Entropiebedingung in  $(x_0, t_0)$  genau dann, wenn die Ungleichung

$$f'\left(\lim_{\delta \rightarrow 0} u(x_0 + \delta, t_0)\right) < s_{sh} < f'\left(\lim_{\delta \rightarrow 0} u(x_0 - \delta, t_0)\right) \quad (3.1.7)$$

gilt. Eine Unstetigkeit, die die Gleichung (3.1.7) erfüllt und der Rankine-Hugoniot-Sprungbedingung genügt, heißt eine *Stoßwelle*. Ferner wird  $s_{sh}$  als die Schockgeschwindigkeit bezeichnet.

Betrachtet man nur noch schwache Lösungen von (3.1.2), die entlang aller Unstetigkeiten die Lax-Entropiebedingung erfüllen, so ist für konvexe  $f$  die Eindeutigkeit der Lösung gegeben.<sup>40</sup>

Aus der obigen Forderung ergibt sich eine für praktische Aufgaben mit einer konvexen Flussfunktion bedeutsame Eigenschaft der Lösung, die sich wie folgt umschreiben lässt: Enthält die Anfangsbedingung von (3.1.2) Unstetigkeiten, so können sich in der Raum-Zeit Ebene nur solche von denen ausbreiten, die die Lax-Bedingung erfüllen. Sie werden in dieser Arbeit als *Stöße* bezeichnet. Verletzt eine Unstetigkeit die Lax-Bedingung, so ist die Lösung unmittelbar nach  $t_0$  im entsprechenden Bereich stetig und wird ferner in dieser Arbeit als *Verdünnungswelle* bezeichnet. Die Abbildung 3.2 veranschaulicht die Struktur der Lösungen der Aufgabe (3.1.2) mit unstetigen Anfangsbedingungen.

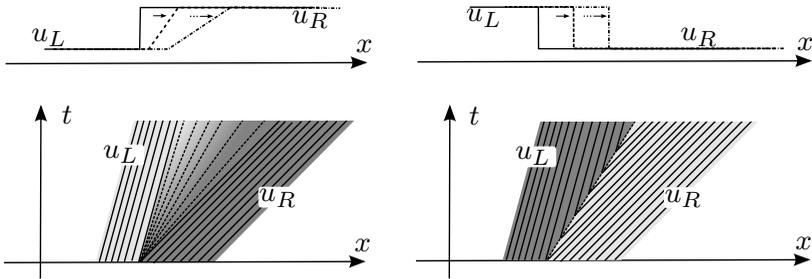
Die hier skizzierte Aufgabe wird in der Literatur als *Riemann-Problem* bezeichnet, welches in allgemeiner vektorieller Form wie folgt definiert wird:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= 0 & \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, t_{end}] \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

---

<sup>39</sup>Beweis kann in [Krö97] nachgeschlagen werden.

<sup>40</sup>Beweis kann in [Smo83], S. 283 nachgeschlagen werden.



**Abbildung 3.2:** Ausbreitung einer Verdünnung und eines Stoßes.

Das Lösen des Riemann-Problems bildet die Basis für eine breite Klasse von modernen numerischen Verfahren in Erhaltungform. Die im weiteren Verlauf dieser Arbeit zur Lösung der Modellgleichungen der Strömung konstruierten Schemata beruhen ebenfalls darauf. Eine nähere Analyse folgt im Abschnitt 3.3.

### 3.2 Numerische Methoden für Erhaltungsgleichungen

In diesem Abschnitt wird der numerische Zugang zu den Modellgleichungen der Strömung anhand des homogenen Problems (3.1.2) erklärt, dabei liegt der Schwerpunkt auf Finite-Volumen-Methoden (FVM), und zwar speziell auf der Klasse von FVM, deren Flussberechnung auf der Lösung des Riemann-Problems basiert.

Eine grundlegende Forderung an jedes diskrete Schema zur Lösung eines PDG-Systems ist die Forderung nach *Konsistenz*, *Stabilität* und *Konvergenz*. Definitionen und Bedeutung dieser Begriffe wird an dieser Stelle ausgelassen, diese kann in ausführlicher Form in [OL03] nachgelesen werden. Schemata zur Bestimmung einer Näherungslösung von Erhaltungsgleichungen werden mit weiteren Forderungen belegt, was zu einer Einschränkung der Wahl eines Diskretisierungsverfahren führt. Die Tatsache, dass Erhaltungsgleichungen im Allgemeinen und insbesondere die Gleichungen, die sich für das Leitungsmodell ergeben, nichtlinearer Natur sind, stellt eine gewisse Herausforderung an numerische Schemata dar: Nicht nur Unstetigkeiten in den Randbedingungen, sondern auch die Nichtlinearität von  $\mathbf{f}$  führen zu Unstetigkeiten der Lösung, welche im Fall der Modellgleichungen

für die Leitung Sprünge in der Dichtefunktion beziehungsweise Druckfunktion bedeuten. Viele Verfahren zeigen Schwierigkeiten in der Auflösung der Unstetigkeiten der Strömung, so dass die numerische Lösung oft unphysikalische Oszillationen aufweist (vgl. [Krö97]). Weiterhin stellt sich die Frage nach der numerischen Approximation der „richtigen“ Lösung, da das Zulassen der Unstetigkeiten dem Übergang zum Begriff der schwachen Lösung der Differentialgleichung entspricht. Eindeutigkeit ist damit erst unter Hinzunahme zusätzlicher Bedingungen (vgl. Abschnitt 3.1) gegeben, welche nicht notwendigerweise von einem numerischen Verfahren erfasst werden.<sup>41</sup>

Aus der obigen Diskussion ergeben sich zwei Forderungen an ein numerisches Verfahren für Erhaltungsgleichungen:

1. Das Verfahren soll *konservativ* sein. Das bedeutet zum einen, dass bei der Anwendung des Schemas auf eine Gleichung in konservativer Form die Summe aller Beiträge, die diskrete Approximationen der inneren Flüsse<sup>42</sup> bilden, Null ergibt. Zum anderen soll das Schema bei der Anwendung auf eine Aufgabe mit unstetiger Lösung als Ergebnis die schwache Lösung approximieren, die die Lax-Entropiebedingung erfüllt.
2. Das Verfahren soll die *TVD-Eigenschaft*<sup>43</sup> besitzen. Dies bedeutet, dass die Totale Variation<sup>44</sup> der diskreten Lösung in der Zeit nicht zunehmen darf.

Im Folgenden wird zur Beschreibung numerischer Schemata folgende Notation verwendet:

- Die Leitung sei entlang der  $x$ -Achse in  $N$  äquidistante Abschnitte unterteilt. Die Länge eines Abschnitts wird mit  $\Delta x$  und der Mittelpunkt jedes Abschnitts mit  $x_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) bezeichnet.
- Es bezeichnen  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  diskrete Zeitpunkte, zu denen die numerische Lösung bestimmt wird. Ferner sei  $\Delta t := t_{n+1} - t_n$  die aktuelle Zeitschrittweite.

---

<sup>41</sup>In der Terminologie vom Abschnitt 3.1 bedeutet dies, dass die bei der Wahl eines ungünstigen numerischen Schemas gefundenen Approximanden die Lax-Entropiebedingung verletzen kann.

<sup>42</sup>Alle Terme, die numerische Flüsse darstellen, bis auf die am Rand.

<sup>43</sup>Von **T**otal **V**ariation **D**imishing.

<sup>44</sup>Definition des Begriffs kann im Anhand A.1 nachgeschlagen werden.

- Es notiere  $\mathbf{A} := \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{f}(\xi)$  die Jacobi-Matrix von  $\mathbf{f}$ . Die Darstellung

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{A}(\mathbf{u}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} = 0 \quad (3.2.1)$$

von(3.1.2) wird ferner als die *quasilineare Form* der Erhaltungsgleichungen bezeichnet.

Die älteste Klasse numerischer Verfahren zur Bestimmung von Näherungslösungen von Erhaltungsgleichungen bilden die Finite-Differenzen-Verfahren (FDM). Die Grundidee dieser Methoden liegt in der Approximation der Ableitungsoperatoren an jedem betrachteten diskreten Punkt durch so genannte *Differenzensterne*. Als solche bezeichnet man Summen gewichteter Werte der zu differenzierenden Funktion in den diskreten Punkten aus der Umgebung des entsprechenden Punktes. Die Konstruktion der Differenzensterne erfolgt aus der Auswertung der Taylor-Entwicklungen (um den Punkt  $x_i$ ) der zu differenzierenden Funktion an weiteren Punkten des festgelegten diskreten Gitters. Zum Beispiel können aus den Entwicklungen

$$\mathbf{u}(x_i - \Delta x, t) = \mathbf{u}(x_i, t) - \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(x_i, t) - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}(x_i, t) - \dots \quad (3.2.2)$$

$$\mathbf{u}(x_i + \Delta x, t) = \mathbf{u}(x_i, t) + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(x_i, t) + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{u}(x_i, t) + \dots$$

durch Vernachlässigung der Terme zweiter und höherer Ordnung und anschließender Umformung der Gleichungen nach  $\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u}(x_i, t)$  je Vorwärts- beziehungsweise Rückwärts-Differenzen-Schemata gewonnen werden. Alternativ kann durch die Summation beider Gleichungen und anschließende Vernachlässigung aller Terme ab dritter Ordnung das *Zentrale-Differenzen-Schema* erzeugt werden.

Es existieren viele weitere klassische Schemata zur Diskretisierung von Erhaltungsgleichungen, die auf FDM basieren. Zu den bekanntesten symmetrischen expliziten Schemata zählen dabei das Lax-Friedrich Schema:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_{i-1}^n + \mathbf{u}_{i+1}^n \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n) \right] \quad (3.2.3)$$

und das Lax-Wendroff-Schema:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n & - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n)] \\ & + \frac{(\Delta t)^2}{2(\Delta x)^2} \left[ \mathbf{A}(\mathbf{u}_{i+1/2}) \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n)) \right. \\ & \quad \left. - \mathbf{A}(\mathbf{u}_{i-1/2}) \cdot (\mathbf{f}(\mathbf{u}_i^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1}^n)) \right], \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

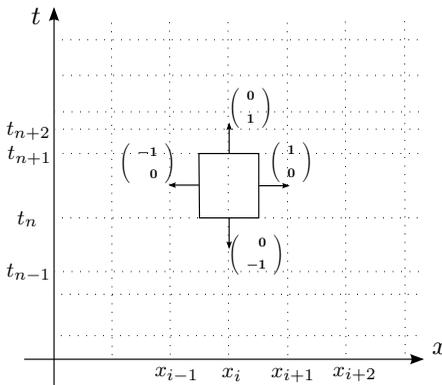
wobei im Finite-Differenzen Kontext  $\mathbf{u}_i^n$  den approximierten Wert der Funktion  $\mathbf{u}$  an der Stelle  $(x_i, t_n)$  repräsentiert. Neben den symmetrischen Methoden haben sich die Upwind-Methoden etabliert, welche als Grundidee das Schalten zwischen den linksseitigen und rechtsseitigen Differenzen in Abhängigkeit von den Eigenwerten der Jacobi-Matrix  $\mathbf{A}$  beinhalten. Der Ursprung dieser Methoden und gleichzeitig das bekannteste Schema ist das CIR-Verfahren.<sup>45</sup> Am einfachsten ist die Vorgehensweise am skalaren Fall darzustellen:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \begin{cases} f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n), & \text{falls } a(u_i^n) < 0 \\ f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n), & \text{falls } a(u_i^n) > 0. \end{cases} \quad (3.2.5)$$

Es existiert eine Reihe weiterer klassischer Verfahren von beiden Typen. Die prinzipielle Problematik der numerischen Behandlung hyperbolischer Gleichungen lässt sich wie folgt vereinfacht formulieren: Verfahren erster Ordnung „verschmieren“ stark die auftretenden Unstetigkeiten der Lösung und viele der Verfahren höherer Ordnung erzeugen starke Oszillationen in den Umgebungen der Unstetigkeiten. Der Satz von Godunov (vgl. [God59], Seite 277) postuliert, dass es nicht möglich ist, ein Schema mit konstanten Koeffizienten zu konstruieren, welches von Ordnung 2 oder höher wäre und keine Oszillationen erzeugen würde. Daher werden gewisse Strategien zur Stabilisierung von Verfahren höherer Ordnung verwendet. Da jedoch fast alle wichtige Schemen sich auch aus dem Finite-Volumen-Methoden Kontext erzeugen lassen, wird an dieser Stelle auf FDM zweiter Ordnung nicht weiter eingegangen.

---

<sup>45</sup>Courant, Isaacson, Rees (1952).



**Abbildung 3.3:** Integrationsgebiet bei Konstruktion eines FVM-Schemas.

Der grundlegende Unterschied zwischen Finite-Volumen- und Finite-Differenzen-Verfahren liegt darin, dass anstatt die differentielle Form der Ausgangsgleichung zu diskretisieren, im ersten ihre Integralform den Startpunkt zum numerischen Zugang zur Lösung bildet. Oft gleichen die aus FVM resultierenden Schemata den Methoden aus dem FDM Kontext, und ferner können Finite-Volumen-Verfahren erster Ordnung als eine Unterklasse von Finite-Elemente-Methoden betrachtet werden (vgl. [KA00]).

Am homogenen Problem (3.1.2) lässt sich die Vorgehensweise wie folgt beschreiben: Legt man über die  $(x, t)$ -Ebene ein kartesisches Gitter mit der oben eingeführten Notation und integriert die Ausgangsgleichung über jeden Würfel  $\Omega_i^n := [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}] \times [t_n, t_{n+1}]$ , so erhält man die Gleichung

$$\int_{\Omega_i^n} (\mathbf{u} - \mathbf{f}) \, d\Omega_i^n = 0, \tag{3.2.6}$$

so dass die Anwendung des Satzes von Gauß auf die Darstellung

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t_{n+1}) \, dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) \, dt \\ & - \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t_n) \, dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) \, dt = 0 \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

führt.

In dem FVM Kontext werden nun die integralen Mittelwerte jeder Zelle  $[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  als diskrete Werte aufgefasst, die im Lauf der numerischen

Berechnung bestimmt werden. Im gesamten weiteren Verlauf der Untersuchungen wird folgende Schreibweise verwendet:

$$\mathbf{u}_i^n := \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}(x, t_n) dx \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} := \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f} \left( \mathbf{u}(x_{i+\frac{1}{2}}, t) \right) dt. \quad (3.2.9)$$

Die Terme  $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$  werden als *numerische Flüsse* bezeichnet. Sie sind als integraler Mittelwert über der Zeit der physikalischen Flüsse definiert. Deren Bestimmung bildet den Hauptunterschied zwischen einzelnen Finite-Volumen-Methoden. Die allgemeine Vorschrift zur Durchführung eines Zeitschritts lautet

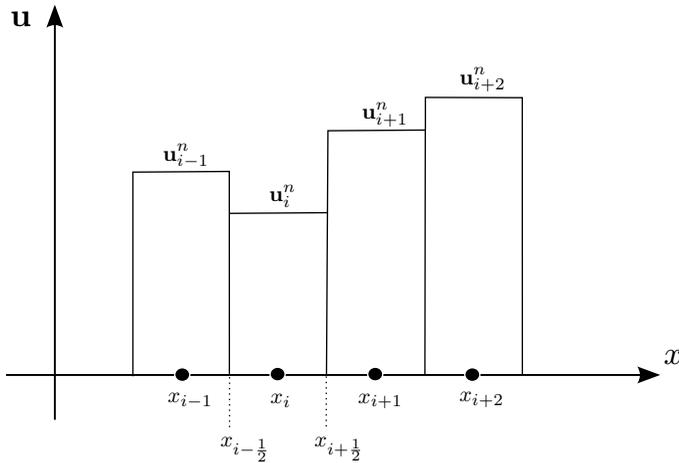
$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} \right]. \quad (3.2.10)$$

Als Einleitung zur Beschreibung des Grundgedankens zur Bestimmung numerischer Flüsse sei an dieser Stelle [RM67], §12.15 zitiert: „In 1959, Godunov described an ingenious method for one-dimensional problems with shocks“. Godunovs Ansatz besteht darin, zu jedem betrachteten diskreten Zeitpunkt den Zustand an der Grenze zwischen je zwei Zellen als Anfangswertproblem eines Riemann-Problems zu betrachten. Die ursprüngliche Methode ging von einer Approximation der Werte von  $\mathbf{u}$  innerhalb jeder Zelle durch eine konstante Funktion mit dem Wert  $\mathbf{u}_i^n$  aus (vgl. Abbildung 3.4), so dass das an einer Zellengrenze entstehende Riemann-Problem (hier am Beispiel von  $x_{i-1/2}$ ) lautet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}) &= 0, & (x, t) \in [x_{i-1}, x_i] \times [t_n, t_{n+1}] \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{u}_{i-1}^n, & x < x_{i-\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{u}_i^n, & x > x_{i-\frac{1}{2}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Ist eine exakte Lösung des Riemann-Problems gefunden (sei diese mit  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)$  bezeichnet), so kann der entsprechende numerische Fluss wie folgt ermittelt werden:

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{f} \left( \mathbf{u}^*(x_{i+1/2}, t) \right) dt. \quad (3.2.12)$$



**Abbildung 3.4:** Stückweise konstante Approximation von  $\mathbf{u}$  zum diskreten Zeitpunkt  $t_n$ .

Das Problem am Zellenrand reduziert sich dabei auf die Bestimmung von  $\mathbf{u}^*$  über dem Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}]$ , auf welchem die Lösung eines jeden Riemann-Problems konstant ist, solange benachbarte Riemann-Probleme innerhalb eines Zeitschritts keine Interaktion erfahren.

Die von Godunov vorgestellte Methode benutzte die Konstruktion der exakten Lösung des Riemann-Problems. Diese Vorgehensweise ist jedoch sehr Rechenzeit intensiv und nicht für jedes Gleichungssystem möglich. Es hat sich weitgehend das Einsetzen einer Näherungslösung innerhalb des Godunov-Schemas etabliert. Die entsprechende Methodik wird im Abschnitt 3.3 diskutiert.

Das oben vorgestellte Verfahren zur Diskretisierung von Erhaltungsgleichungen ist von erster Ordnung in Zeit und Raum. Eine Möglichkeit, die Ordnung in beide Richtungen auf zwei zu erhöhen, bildet der sogenannte MUSCL<sup>46</sup>-Ansatz. Zur Konstruktion der Anfangswerte für das Riemann-Problem an den Zellengrenzen wird dabei ein linearer Verlauf von  $\mathbf{u}$  innerhalb jeder Zelle angenommen. Bezeichnet  $\mathbf{s}_i$  den Vektor der Steigungen in der  $i$ -ten Zelle, so lauten die rekonstruierten Werte an ihrem linken und

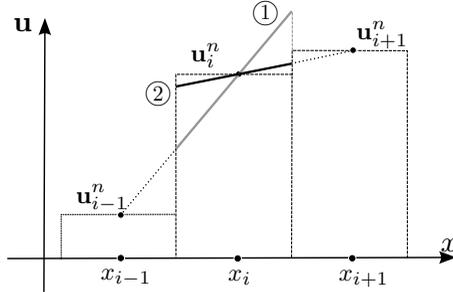
---

<sup>46</sup>Von Monotone Upstream-centred Scheme for Conservation Laws.

rechten Rand:

$$\mathbf{u}_{i;\pm 1/2}^n = \mathbf{u}_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} \mathbf{s}_i^n. \quad (3.2.13)$$

Da im Allgemeinen der rekonstruierte Wert von  $\mathbf{u}$  aus der Zelle  $i$  an die benachbarte Zellengrenze  $i + 1/2$  ungleich dem rekonstruierten Wert aus der Zelle  $i + 1$  an dieselbe Zellengrenze ist, wird zur Verdeutlichung die Schreibweise  $\mathbf{u}_{i+1/2}$  verwendet. Ferner bezeichne  $\tilde{\mathbf{u}}$  die stückweise lineare Funktion, die in jeder Zelle gleich der jeweiligen Rekonstruktion ist.



**Abbildung 3.5:** Lineare Rekonstruktionen in der Zelle  $i$ :

- ① - unter Zunahme der  $\text{TV}(\tilde{\mathbf{u}})$ ,
- ② - ohne Zunahme von  $\text{TV}(\tilde{\mathbf{u}})$ .

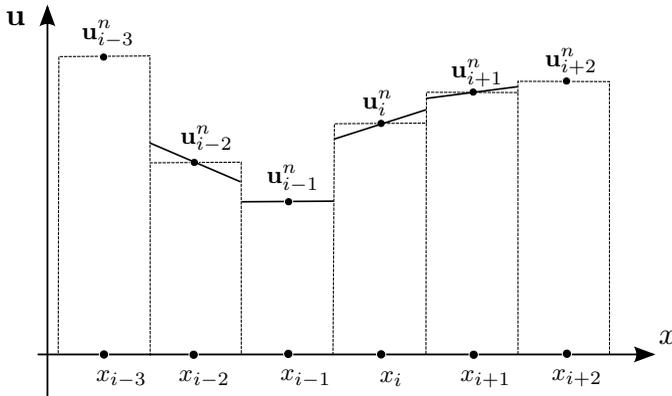
Zur Bestimmung von  $\mathbf{s}_i^n$  kann bei einer inneren Zelle der Leitung  $i$  sowohl die linke als auch die rechte Nachbarzelle hinzugezogen werden. Um die Totalvariation der Rekonstruierten,  $\tilde{\mathbf{u}}$ , gegenüber der Godunov-Rekonstruierten nicht zu erhöhen, muss vermieden werden, dass durch die Rekonstruktionsprozedur neue lokale Maxima und Minima entstehen (vgl. Abbildung 3.5). Hierzu wird innerhalb des MUSCL-Ansatzes der sogenannte MinMod-Limiter verwendet:

$$\text{MinMod}(\kappa_1, \kappa_2) := \frac{1}{2} (\text{sgn}(\kappa_1) + \text{sgn}(\kappa_2)) \cdot \min(|\kappa_1|, |\kappa_2|). \quad (3.2.14)$$

Für jede Zelle wird

$$\mathbf{s}_i^n = \text{MinMod} \left( \frac{\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n}{\Delta x} \right) \quad (3.2.15)$$

gesetzt, so dass, falls beide betrachtete Gradienten gleiches Vorzeichen aufweisen, stets der kleinere zur linearen Rekonstruktion verwendet wird. Bei gegensätzlichen Vorzeichen wird eine konstante Funktion als Rekonstruierende verwendet (vgl. Abbildung 3.6).



**Abbildung 3.6:** Stückweise lineare Approximation von  $\mathbf{u}$  zum diskreten Zeitpunkt  $t_n$  nach MUSCL.

Zur Erhöhung der Ordnung des Verfahrens in der Zeit werden die rekonstruierten Erhaltungsgrößen an den Zellenrändern für einen halben Zeitschritt berechnet, bevor sie als Anfangswerte zur Lösung des lokalen Riemann-Problems verwendet werden. Hierzu wird ihre Taylor-Entwicklung in der Zeit betrachtet:

$$\mathbf{u}_{i;\pm 1/2}^{n+1/2} = \mathbf{u}_{i;\pm 1/2}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}_{i;\pm 1/2}^n + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.2.16)$$

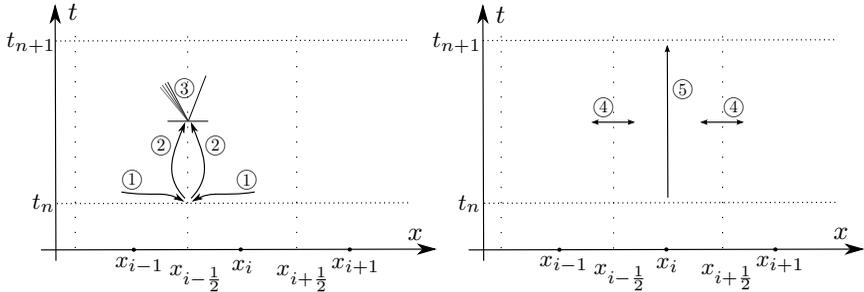
Nach (3.1.2) kann der zweite Term der rechten Seite durch  $-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i;\pm 1/2}^n)$  ersetzt werden<sup>47</sup> und die Ortsableitung von  $\mathbf{f}$  wird mittels einseitiger Differenz in der Zelle  $i$  approximiert. Die Vorschrift zur Bestimmung der Anfangswerte des Riemann-Problems an den Zellengrenzen lautet bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung:

$$\mathbf{u}_{i;\pm 1/2}^{n+1/2} = \mathbf{u}_{i;\pm 1/2}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i-1/2}^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2}^n) \right]. \quad (3.2.17)$$

Dieser Schritt wird als *Evolution* bezeichnet.

<sup>47</sup>Das Ersetzen der Zeitableitungen durch Ortsableitungen wird als Cauchy-Kovalevskaya-Prozedur bezeichnet, vgl. [LO].

Die Abbildung 3.7 präsentiert die graphische Darstellung des Ablaufs der numerischen Berechnung bei Durchführung eines Zeitschritts nach dem MUSCL-Ansatz.



**Abbildung 3.7:** Schematische Darstellung eines Zeitschritts im

MUSCL-Verfahren: ① - Rekonstruktion,

② - Evolution,

③ - Lösung des RP,

④ - Bestimmung numerischer Flüsse,

⑤ - Durchführung des FV-Schritts.

Wie bereits angedeutet, ist es bei dem vorgestellten expliziten Godunov-Typ-Verfahren notwendig sicherzustellen, dass die lokalen Riemann-Probleme innerhalb eines Zeitschritts keine Interaktion erfahren. Notiert  $\lambda_{i;max}^n$  den betragsmäßig größten Eigenwert der Jacobi-Matrix  $\mathbf{A}$  in der Zelle  $i$  im Zeitintervall  $[t_n, t_{n+1}]$ , so kann daraus folgende Bedingung zur Bestimmung der Zeitschrittweite abgeleitet werden:

$$\Delta t_n := t_{n+1} - t_n < \frac{\Delta x}{\max_{i=1, \dots, N} \left\{ |\lambda_{i;max}^n| \right\}}. \quad (3.2.18)$$

Üblicherweise erfolgt die Sicherstellung dieser Bedingung innerhalb eines numerischen Schemas durch die Verwendung eines Parameters

$$C_{CFL} \in (0, 1), \quad (3.2.19)$$

der sogenannten Courant-Friedrichs-Lewy Zahl und der Wahl der aktuellen Zeitschrittweite durch

$$\Delta t_n = C_{CFL} \cdot \frac{\Delta x}{\max_{i=1, \dots, N} \left\{ |\lambda_{i;max}^n| \right\}}. \quad (3.2.20)$$

Die Bestimmung oder Abschätzung der lokalen maximalen Signalgeschwindigkeiten  $|\lambda_{i;max}^n|$  kann innerhalb der Lösung der Riemann-Probleme erfolgen. Eine Methodik zur Bestimmung dieser Lösung wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

### 3.3 Lösungsverfahren für das Riemann-Problem

Zur Reduktion des numerischen Aufwands bei der Lösung der lokalen Riemann-Probleme existieren zahlreiche Ansätze zur Konstruktion einer expliziten Näherung, die eine einfache Struktur besitzen. Der bekannteste Ansatz ist der von Roe, bei welchem das lokale Riemann-Problem linearisiert wird. Die Aufgabe (3.1.8) wird nach diesem Ansatz durch folgendes Problem ersetzt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + \mathbf{A}_{Roe} \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Die Matrix  $\mathbf{A}_{Roe}$  ist dabei eine Approximande der Jacobi-Matrix, welche ausgehend von den Anfangswerten des Problems konstruiert wird:

$\mathbf{A}_{Roe} = \mathbf{A}_{Roe}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$ . Nach Roe soll eine geeignete Methode zur Bestimmung der Approximande eine Matrix mit folgenden drei Eigenschaften liefern:

1.  $\mathbf{A}_{Roe}$  ist diagonalisierbar mit reellen Eigenwerten,
2. Für  $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R \rightarrow \mathbf{u}$  gilt  $\mathbf{A}_{Roe}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) \rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{u})$ ,
3.  $\mathbf{A}_{Roe}$  erfüllt die Mittelwertseigenschaft:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) = \mathbf{A}_{Roe} \cdot (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L). \quad (3.3.2)$$

In diesem Fall wird  $\mathbf{A}_{Roe}$  als Roe-Matrix bezeichnet. Die naheliegenden Mittelungen,  $(\mathbf{A}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{A}(\mathbf{u}_R))/2$  und  $\mathbf{A}\left(\frac{\mathbf{u}_L + \mathbf{u}_R}{2}\right)$ , zur Berechnung der Approximande verletzen im Allgemeinen die dritte Bedingung, so dass der Ansatz von Roe von einer Auswertung von  $\mathbf{A}$  an einem gewissen Mittelwert  $\bar{\mathbf{u}}$  ausgeht:

$$\mathbf{A}_{Roe} = \mathbf{A}(\bar{\mathbf{u}}), \quad \text{mit } \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R). \quad (3.3.3)$$

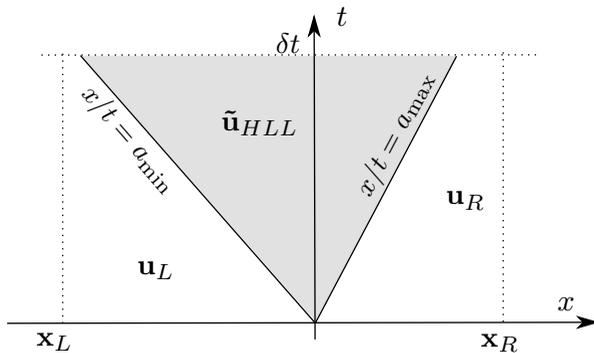
Die Bestimmung der Roe-Mittelwerte ist im Allgemeinen gerade wegen der dritten Bedingung aufwendig, für Euler-Gleichungen sind diese jedoch bekannt (vgl. [Tor99]).

Eine sehr einfache und effiziente Methode zur Konstruktion einer Näherungslösung für ein Riemann-Problem bildet das HLL-Verfahren<sup>48</sup>, welches auch in dieser Arbeit hauptsächlich zum Einsatz kommt. Hierbei wird von einem konstanten mittleren Zustand  $\tilde{\mathbf{u}}_{HLL}$  ausgegangen, welcher sich zwischen der schnellsten Welle, die sich in positive Richtung ausbreitet, und der schnellsten Welle, die sich in negative Richtung ausbreitet, einstellt.

Es bezeichnen  $a_{\min}$  und  $a_{\max}$  die obere und die untere Schranken für die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen. Diese Werte seien vorzeichenbehaftet. Die näherungsweise Gesamtlösung des Riemann-Problems lautet mit diesen Bezeichnungen:

$$\mathbf{u}_{HLL} = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & \text{für } x/t < a_{\min} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{HLL}, & \text{für } a_{\min} \leq x/t \leq a_{\max} \\ \mathbf{u}_R, & \text{für } x/t > a_{\max} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Die Abbildung 3.8 skizziert die Struktur der HLL-Näherungslösung.



**Abbildung 3.8:** Struktur der HLL-Näherungslösung des Riemann-Problems.

Der mittlere Zustand des HLL-Verfahrens kann durch das Integrieren der Erhaltungsgleichungen über einen Würfel  $[x_L, x_R] \times [0, \delta t]$  gewonnen werden,

<sup>48</sup>Harten, Lax und van Leer, 1983.

wobei  $x_L$  und  $x_R$  so zu wählen sind, dass  $x_L \leq \delta t \cdot a_{\min}$  und  $x_R \geq \delta t \cdot a_{\max}$  gilt:

$$\int_{x_L}^{x_R} \mathbf{u}(x, \delta t) dx - \int_0^{\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_L, t)) dt - \int_{x_L}^{x_R} \mathbf{u}(x, 0) dx + \int_0^{\delta t} \mathbf{f}(\mathbf{u}(x_R, t)) dt = 0. \quad (3.3.5)$$

Das Einsetzen der HLL-Näherungsfunktion und die Auswertung der Integrale entlang entsprechender Strecken liefern (vgl. [Tor99], S. 317-319) folgenden Ausdruck für den mittleren Zustand:

$$\tilde{\mathbf{u}}_{HLL} = \tilde{\mathbf{u}}_{HLL}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \frac{a_{\max} \mathbf{u}_R - a_{\min} \mathbf{u}_L - \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_L)}{a_{\max} - a_{\min}}. \quad (3.3.6)$$

Durch die Betrachtung analoger integraler Beziehungen auf den Würfeln  $[x_L, 0] \times [0, \delta t]$  und  $[0, x_R] \times [0, \delta t]$  und durch das Einsetzen des gewählten Näherungsansatzes kann auch eine Näherung des Flusses entlang der  $t$ -Achse gewonnen werden. Dieser sei mit  $\mathbf{F}_{HLL}$  bezeichnet. Das Einsetzen von (3.3.6) in eine der beiden resultierenden Beziehungen

$$\mathbf{F}_{HLL} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + a_{\min} (\tilde{\mathbf{u}}_{HLL} - \mathbf{u}_L) \quad (3.3.7)$$

$$\mathbf{F}_{HLL} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) + a_{\max} (\tilde{\mathbf{u}}_{HLL} - \mathbf{u}_R) \quad (3.3.8)$$

liefert die gesuchte Approximation des Flusses:

$$\mathbf{F}_{HLL} = \frac{a_{\max} \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) - a_{\min} \mathbf{f}(\mathbf{u}_R) + a_{\min} a_{\max} (\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)}{a_{\max} - a_{\min}}. \quad (3.3.9)$$

**Bemerkung 3.1.** Die dargestellte Herleitung des HLL-Flusses ist nur gültig, falls  $a_{\min}$  und  $a_{\max}$  unterschiedliche Vorzeichen aufweisen. Im anderen Fall ist  $\mathbf{F}_{HLL}$  gleich  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_L)$  zu setzen, falls  $a_{\min} \leq 0$ , beziehungsweise gleich  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_R)$ , falls  $0 \leq a_{\max}$  gilt.

**Bemerkung 3.2.** Es wird innerhalb des Verfahrens vorausgesetzt, dass die Abschätzungen für die Signalgeschwindigkeiten  $a_{\min}$  und  $a_{\max}$  bekannt sind. Unberücksichtigt bleibt dabei, ob es sich bei den beiden Wellen um Stöße oder Verdünnungswellen handelt.

Ein für die numerische Untersuchungen dieser Arbeit wichtiges System von Erhaltungsgleichungen sind die *Euler-Gleichungen*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p) &= 0.\end{aligned}\tag{3.3.10}$$

Zu den Modellgleichungen haben sie folgenden Bezug: Sie entstehen, beispielsweise, aus der Formulierung (2.3.1) für den Fall  $A = \textit{konst}$ , für alle  $x \in [0, L]$  und alle  $t \geq 0$  bei Vernachlässigung der Reibung in der Leitung. Euler-Gleichungen repräsentieren die eindimensionale reibungsfreie Wellenausbreitung in einer Flüssigkeit oder einem Gas.

Durch folgende Umformung lassen sich die Gleichungen in ihre charakteristische Form bringen: Die erste Gleichung wird mit dem Term  $1/\rho c$  erweitert. Ferner werden aus der resultierenden Formulierung durch anschließende Subtraktion beziehungsweise Addition der zweiten Gleichung von (3.3.10) zwei neue Gleichungen erzeugt. Somit erhält (3.3.10) die Darstellung:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}v + (v + c)\frac{\partial}{\partial x}v + \frac{1}{\rho c}\left[\frac{\partial}{\partial t}p + (v + c)\frac{\partial}{\partial x}p\right] &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}v + (v - c)\frac{\partial}{\partial x}v + \frac{1}{\rho c}\left[\frac{\partial}{\partial t}p + (v - c)\frac{\partial}{\partial x}p\right] &= 0.\end{aligned}\tag{3.3.11}$$

Charakteristiken dieses Systems werden durch die Beziehungen

$$\begin{aligned}C^+ : \quad \frac{\partial x}{\partial t} &= v + c \\ C^- : \quad \frac{\partial x}{\partial t} &= v - c\end{aligned}\tag{3.3.12}$$

beschrieben.

Innerhalb des oben dargestellten HLL-Verfahrens werden an jeder Zellengrenze Werte für die Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Wellen,  $a_{\min}$  und  $a_{\max}$ , benötigt. Ein bekannter Ansatz<sup>49</sup> ist die Verwendung der Eigenwerte der Roe-Matrix, (3.3.1). Für das Gleichungssystem (3.3.10) ergibt sich demnach<sup>50</sup>

$$a_{\min} = \tilde{v} - \tilde{c}, \quad a_{\max} = \tilde{v} + \tilde{c},\tag{3.3.13}$$

---

<sup>49</sup>Nach Davis und Einfeldt, vgl. [Tor99], Kap. 10.5.

<sup>50</sup>S. [Bec03].

mit

$$\tilde{v} = \frac{\sqrt{\rho_R} v_R + \sqrt{\rho_L} v_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \quad \text{und} \quad \tilde{c} = \sqrt{\frac{p_L - p_R}{\rho_L - \rho_R}}. \quad (3.3.14)$$

Analog zu [Bec03] wird hier eine Beschränkung der Ausbreitungsgeschwindigkeit durch jeweils den Wert auf dem entsprechenden Teilintervall innerhalb der Anfangsbedingung des Riemann-Problems verwendet:

$$a_{\min} = \min(\tilde{v} - \tilde{c}, v_L - c_L) \quad a_{\max} = \min(\tilde{v} + \tilde{c}, v_R + c_R). \quad (3.3.15)$$

**Bemerkung 3.3.** Wichtig bei der Abschätzung der Ausbreitungsgeschwindigkeiten ist die Vermeidung einer Unterschätzung der Ausbreitungsgeschwindigkeit sowohl bei den Stößen wie auch bei den Verdünnungswellen. Bei den Stößen führt solche im Allgemeinen zu Oszillationen im Verlauf der numerischen Lösung um den Stoß herum und bei der Verdünnung kann sie zu einer Erzeugung von unphysikalischen Verdünnungsstößen führen. Mit der Abschätzung (3.3.15) wird dies jedoch verhindert.

# Diskretisierung des gekoppelten Problems

In diesem Kapitel werden mehrere Gesamtalgorithmen präsentiert, welche, ausgehend von den vorgestellten mathematischen Modellen, numerische Berechnungsmethoden zur Simulation der Wellenausbreitung darstellen. Hierzu wird zunächst der numerische Zugang zu der Lösung der vorgestellten Wandbewegungsgleichungen aufgezeigt. Anschließend wird auf das Einbinden der Dehnungsmodelle in die Finite-Volumen-Schemata eingegangen. Die wichtigste Frage bei der Konstruktion eines Gesamtverfahrens bleibt, an welcher Stelle innerhalb des Schemas die Gleichung für die Querschnittfläche der Leitung gelöst werden soll.

## 4.1 Numerische Behandlung der Wandbewegungsgleichungen

Die im Kapitel 2 eingeführten Modellgleichungen für die Wandbewegung bedürfen, je nach ihrer Komplexität, unterschiedlicher numerischer Behandlung. Bei dem einfachsten Modell (2.4.16) ist die Beziehung zwischen dem Druck in der Leitung und ihrer Dehnung explizit gegeben und benötigt, bei bekannten Druckwerten, keine zusätzliche numerische Behandlung. Für Modelle, welche differenzielle Beziehungen in  $x$ -Richtung beinhalten, wird Diskretisierung nach der Methode der Finiten Elementen (FEM) vorgenommen. Für die Gleichungen jener Modelle (vgl. (2.4.12), (2.4.20) und (2.4.21)), die die Massenträgheit und die Dämpfung berücksichtigen und

somit Zeitableitungen aufweisen, wird ein diskretes Schema zur Behandlung der Gleichungssysteme nach dem Prinzip der Semidiskretisierung konstruiert. Es wird eine Ortsdiskretisierung mit FEM durchgeführt, und das entstehende System gewöhnlicher Differentialgleichungen wird anschließend mit Hilfe eines impliziten Verfahrens in die Zeitrichtung aufgelöst.

Die Methodik wird direkt anhand ihrer Anwendung auf die Gleichungen des detailliertesten Modells, (2.4.12), erörtert.<sup>51</sup>

Unter Verwendung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} c_1 &:= \frac{E_x}{1-\nu^2}, & c_2 &:= \frac{\nu E_\phi}{(1-\nu^2)r_0}, & \mathcal{F}_1 &:= -\frac{2\pi r_0}{s} P_x(\tau_W), \\ c_3 &:= \frac{\nu E_x}{(1-\nu^2)}, & c_4 &:= \frac{E_\phi}{(1-\nu^2)r_0}, & \mathcal{F}_2 &:= \frac{r_0}{s} \cdot p \end{aligned}$$

lässt sich das Gleichungssystem (2.4.12) wie folgt schreiben:

$$\begin{cases} \rho_M \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_x & - k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r & - c_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} w_x & - c_2 \frac{\partial}{\partial x} w_r & = & \mathcal{F}_1 \\ r_0 \rho_M \frac{\partial^2}{\partial t^2} w_r & - r_0 k_D \frac{\partial}{\partial t} w_r & & - c_3 \frac{\partial}{\partial x} w_x & - c_4 w_r & = & \mathcal{F}_2. \end{cases} \quad (4.1.1)$$

Die Multiplikation der ersten Gleichung mit einer Testfunktion  $\tilde{v}_x$  und der zweiten mit  $\tilde{v}_r$  und anschließende Integration über  $[0, L]$  führt auf die sogenannte *schwache Formulierung* des Gleichungssystems. Zur einfacheren Darstellung werden folgende Abkürzungen verwendet:

$$(\xi_1, \xi_2) := \int_0^L \xi_1 \xi_2 dx, \quad \dot{\xi} := \frac{\partial}{\partial t} \xi, \quad \ddot{\xi} := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi. \quad (4.1.2)$$

Die schwache Form von (4.1.1) lautet<sup>52</sup>: „Finde ein  $w_x$  und ein  $w_r$ , so dass

---

<sup>51</sup>Die Theorie der Galerkin-Verfahren wird an dieser Stelle ausgelassen, genauere Analysen können in [Bra03], [KA00], [Sch91] nachgeschlagen werden.

<sup>52</sup>Man beachte die Null-Randbedingungen der Lösung.

die Gleichungen

$$\begin{aligned} \rho_M(\ddot{w}_x, \tilde{v}_x) - k_D(\dot{w}_x, \tilde{v}_x) + c_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} w_x, \frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}_x \right) + c_2 \left( w_r, \frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}_x \right) &= (\mathcal{F}_1, \tilde{v}_x) \\ r_0 \rho_M(\ddot{w}_r, \tilde{v}_r) - k_D(\dot{w}_r, \tilde{v}_r) + c_3 \left( w_x, \frac{\partial}{\partial x} \tilde{v}_r \right) - c_4 (w_r, \tilde{v}_r) &= (\mathcal{F}_2, \tilde{v}_r) \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

für alle  $v_x$  und alle  $v_r$  aus den Testräumen  $V_x$  und  $V_r$  gelten“. In dem betrachteten Fall sind  $V_x$  und  $V_r$  gleich dem Raum aller schwach differenzierbarer Funktionen an  $[x_{kl}, L - x_{kr}]$ , welche auf beiden Enden des Intervalls verschwinden. Dieser wird mit  $H_0^1([x_{kl}, L - x_{kr}])$  notiert.

Die Kernidee der Methode besteht in dem Ersetzen von  $V_x$  und  $V_r$  durch endlichdimensionale Teilräume<sup>53</sup>  $V_{x,h} \subset V_x$  und  $V_{r,h} \subset V_r$  und anschließender Darstellung der gesuchten Funktionen als Linearkombinationen der Basen der gewählten Räume. Das sukzessive Einsetzen der Basisfunktionen als Testfunktionen überführt die stetige Gleichung in ein diskretes System. Die Methode der Finiten Elemente konstruiert die endlichdimensionalen Ansatzräume durch eine Unterteilung des Grundgebiets der Differentialgleichung in kleine Teilgebiete und Definition endlichdimensionaler Räume auf jeweiligen Teilgebieten. Durch die Zusammensetzung der lokalen Ansätze zum globalen Ansatzraum wird die globale Basis erzeugt, auf deren Grundlage das diskrete Gleichungssystem zusammengesetzt wird.

Die Übertragung der Vorgehensweise auf die Gleichung (4.1.3) wird folgendermaßen durchgeführt<sup>54</sup>: Das Gebiet  $[0, L]$  wird in  $N$  gleichlange Teilintervalle der Länge  $\Delta x$  aufgeteilt. Mit  $x_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , werden die Endpunkte der entstehenden Abschnitte bezeichnet. Die Bereiche der Anbindung der Leitung bleiben, zur Erhaltung einer einheitlichen Schreibweise, zunächst unberücksichtigt. Nach der Konstruktion der diskreten Gleichungen wird das entstehende System um triviale Gleichungen reduziert.

Die Wahl der lokalen Ansatzfunktionen erfolgt in eindimensionaler Analogie zu dem sogenannten MINI-Element.<sup>55</sup> Für  $V_{r,h}$  wird der Raum der, entspre-

---

<sup>53</sup>Dieses Vorgehen wird in der Literatur als *gemischte Methode* bezeichnet.

<sup>54</sup>Die Diskretisierung der Leitungswand erfolgt grundsätzlich analog zur Diskretisierung der Modellgleichungen der Strömung.

<sup>55</sup>Der statische Anteil der Gleichung (4.1.3) ähnelt sehr einem allgemeinen Sattelpunktproblem (vgl. [Bra03], s. 123), daher wird auch der dafür übliche gemischte Ansatz auf die Modellgleichungen angewendet.

chend der Intervallteilung, stückweise-linearen Funktionen verwendet, für  $V_{x,h}$  wird ebenfalls der Raum der stückweise-linearen Funktionen als Ausgangspunkt benutzt, jedoch wird dieser, aus Stabilitätsgründen, mit den sogenannten *Bubble-Funktionen* ergänzt. Diese sind quadratische Funktionen, die im Schwerpunkt des Intervalls ihr Maximum besitzen und an den Rändern des Elements gleich Null sind.

Auf einem Referenzgebiet  $[0, 1]$  lautet der Satz der lokalen Ansatzfunktionen:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(\xi) &= \xi, \\ [\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3; \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_3], \quad \text{mit } \mathcal{N}_2(\xi) &= \xi(\xi - 1), \quad \xi \in [0, 1]. \\ \mathcal{N}_3(\xi) &= 1 - \xi, \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Der Übergang von der stetigen Form (4.1.3) zu einem diskreten System von Gleichungen erfolgt, indem  $w_x$  und  $w_r$  als Linearkombinationen der Basisfunktionen entsprechender Ansatzräume dargestellt werden und ferner jede Basisfunktion als Testfunktion in (4.1.3) eingesetzt wird.

Aufgrund der eindimensionalen räumlichen Betrachtung lässt sich die Diskretisierung direkt global vornehmen. Für eine übersichtliche Darstellung werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- $T_{[a,b]}$  bezeichne die lineare Transformation  $[a, b] \rightarrow [0, 1]$ :

$$T_{[a,b]}(x) = (a - x) \cdot \frac{b}{a - b}.$$

- $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, 2N-1}$  sei Basis für  $V_{x,h}$ , die wie folgt definiert ist:

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \mathcal{N}_1 \left( T_{[x_{i-1}, x_i]}(x) \right), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \mathcal{N}_3 \left( T_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \right), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{falls } i - \text{gerade.} \quad (4.1.5)$$

$$\phi_i(x) := \begin{cases} \mathcal{N}_2 \left( T_{[x_{i-1}, x_i]}(x) \right), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \text{falls } i - \text{ungerade.} \quad (4.1.6)$$

Analog hierzu sei  $\{\psi_r^i\}_{i=1,\dots,N-1}$  Basis für  $V_{r,h}$ , definiert durch

$$\psi_i(x) := \begin{cases} \mathcal{N}_1 \left( T_{[x_{i-1}, x_i]}(x) \right), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \mathcal{N}_3 \left( T_{[x_i, x_{i+1}]}(x) \right), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.1.7)$$

- $\begin{pmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (w_{x;i})_{i=1,\dots,2N-1} \\ (w_{r;j})_{j=1,\dots,N-1} \end{pmatrix}$  notiere den Vektor der Approximierenden von  $\begin{pmatrix} w_x \\ w_r \end{pmatrix}$  im Raum  $V_{x,h} \times V_{r,h}$  bezüglich der oben eingeführten Basis:

$$\begin{pmatrix} w_x \\ w_r \end{pmatrix} (x) \approx \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{2N-1} w_{x;i} \phi_i(x) \\ \sum_{j=1}^{N-1} w_{r;j} \psi_j(x) \end{pmatrix}, \quad (4.1.8)$$

wobei  $w_{x;i}$  den  $i$ -ten Eintrag von  $\mathbf{w}_x$  und  $w_{r;j}$  den  $j$ -ten von  $\mathbf{w}_r$  bezeichnen. Ferner sei Vektor  $\mathbf{f}_h$  wie folgt definiert:

$$\mathbf{f}_h := \begin{pmatrix} \{(\mathcal{F}_1, \phi_i)\}_{i=1,\dots,2N-1} \\ \{(\mathcal{F}_2, \psi_j)\}_{j=1,\dots,N-1} \end{pmatrix}. \quad (4.1.9)$$

- Weiterhin wird folgende Matrizen Schreibweise verwendet:

$$\mathbf{A} := \left\{ c_1 \left( \frac{\partial}{\partial x} \phi_i, \frac{\partial}{\partial x} \phi_j \right) \right\}_{i,j=1,\dots,2N-1} \quad (4.1.10)$$

$$\mathbf{B} := \left\{ \left( \phi_i, \frac{\partial}{\partial x} \psi_j \right) \right\}_{i=1,\dots,N-1, j=1,\dots,2N-1} \quad (4.1.11)$$

$$\mathbf{M}_1 := \{ \rho_M (\phi_i, \phi_j) \}_{i,j=1,\dots,2N-1} \quad (4.1.12)$$

$$\mathbf{M}_2 := \{ r_0 \rho_M (\psi_i, \psi_j) \}_{i,j=1,\dots,N-1} \quad (4.1.13)$$

Das Ersetzen von  $V_x \times V_r$  durch  $V_{x,h} \times V_{r,h}$  reduziert die Gleichung (4.1.3)

zum folgenden System gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
 & \overbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}}{=: \mathbf{M}} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{w}}_x \\ \ddot{\mathbf{w}}_r \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{k_d}{\rho} \mathbf{M}_1 & 0 \\ 0 & \frac{k_d}{r_0 \rho} \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}}{=: \mathbf{D}} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{w}}_x \\ \dot{\mathbf{w}}_r \end{pmatrix} \\
 & + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{A} & c_2 \mathbf{B} \\ -c_3 \mathbf{B}^T & -\frac{c_4}{r_0 \rho M} \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}}{=: \mathbf{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{w}_x \\ \mathbf{w}_r \end{pmatrix}}{=: \mathbf{w}} = \mathbf{f}_h.
 \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

Für jene Ansatzfunktionen  $\phi_i$  und  $\psi_j$ , die ihren Träger ausschließlich im Bereich der Anbindung der Leitung besitzen, gilt für entsprechende Gewichte  $w_{x,i} = 0$  und  $w_{r,j} = 0$ , so dass das System um triviale Gleichungen für den Anbindungsbereich reduziert wird.

Die Diskretisierung des Systems (4.1.14) in der Zeit erfolgt mit klassischem Newmark- $\beta$ -Verfahren. Bezeichnen  $t^n$  diskrete Zeitpunkte, zu welchen gesuchte Verschiebungsgrößen berechnet werden, und sind diese mit  $\mathbf{w}_x^n$  und  $\mathbf{w}_r^n$  notiert, so berechnen sich diese zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$ , ausgehend von ihren Werten zum Zeitpunkt  $t^n$ , indem folgende gewichtete Mittelwerte in Zeit vorgenommen werden:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^{n+1} &= \mathbf{w}^n + \Delta t^n \dot{\mathbf{w}}^n + \frac{1}{2} (\Delta t^n)^2 \left( (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{w}}^n + 2\beta \ddot{\mathbf{w}}^{n+1} \right) \\
 \dot{\mathbf{w}}^{n+1} &= \dot{\mathbf{w}}^n + \Delta t^n \left( (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{w}}^n + \gamma \ddot{\mathbf{w}}^{n+1} \right).
 \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

Anschließend wird die Gleichung (4.1.14) zum Zeitpunkt  $t^{n+1}$  betrachtet:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{w}}^{n+1} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{w}}^{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{f}_h^{n+1} \tag{4.1.16}$$

und nach  $\ddot{\mathbf{w}}_{n+1}$  aufgelöst. Entsprechend dem klassischen Newmark-Ansatz werden die beiden Gewichte folgendermaßen gesetzt:  $\beta = \frac{1}{4}$  und  $\gamma = \frac{1}{2}$ . Für die Effizienz des Verfahrens wird eine konstante Zeitschrittweite:  $\Delta t^n = \Delta t$ ,  $n = 1, 2, \dots$  für die Berechnung verwendet. Dadurch hat das aus der

Gleichung (4.1.16) entstehende Gleichungssystem zum jeden diskreten Zeitpunkt dieselbe linke Seite. Die Invertierung der entsprechenden Matrix kann im Vorfeld einer Berechnung vorgenommen werden, wodurch der Aufwand zur Durchführung eines Zeitschritts für die Wandbewegungsgleichungen sich zu einer Matrix-Vektor-Multiplikation reduziert.

Bei den Modellgleichungen, welche die dynamischen Effekte vernachlässigen, wie zum Beispiel (2.4.21), reduzieren sich die diskreten Gleichungen, bei Anwendung gleicher Diskretisierungsmethodik, zu

$$\mathbf{K}\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{f}_h^{n+1}, \quad (4.1.17)$$

so dass zur Berechnung der Leitungsdehnung in einem Zeitschritt genau eine Matrix-Vektor Multiplikation benötigt wird.

Die Erstellung der diskreten Form der Gleichung (2.4.21) erfolgt analog zu der oben beschriebenen Vorgehensweise: Für den Satz der lokalen Ansatzfunktionen werden auf dem Gebiet  $[0, 1]$  folgende Polynomfunktionen verwendet:

$$[\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, \mathcal{N}_3, \mathcal{N}_4], \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \mathcal{N}_1(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, \\ \mathcal{N}_2(\xi) &= \xi - 2\xi^2 + \xi^3, \\ \mathcal{N}_3(\xi) &= 3\xi^2 - 2\xi^3, \\ \mathcal{N}_4(\xi) &= -\xi^2 + \xi^3, \end{aligned} \quad \xi \in [0, 1], \quad (4.1.18)$$

so dass der Ansatzraum in diesem Fall der Raum der kubischen Polynome auf  $[0, 1]$  ist. Die Transformation ist wieder durch  $T_{[a,b]}(x) = (a - x) \cdot \frac{b}{a - b}$  gegeben. Die Matrix  $\mathbf{K}$  ist hier gegeben durch  $k_{ji} = \left( E_x I \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_i, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi_j \right)$ .

## 4.2 Finite-Volumen-Diskretisierung der Strömungsgleichungen einer flexiblen Leitung und gestaffelte Lösungsschemata

Die räumliche Diskretisierung der Strömungsgleichungen erfolgt analog zur Diskretisierung der Wandbewegungsgleichung: Intervall  $[0; L]$  wird in  $N$  Abschnitte der Länge  $\Delta x$  aufgeteilt. Für die Bezeichnungen der gesuchten diskreten Größen wird die Notation aus dem Abschnitt 3.2 verwendet. Man beachte an dieser Stelle, dass im Unterschied zu diskreten Gleichungen der

Leitungswand, mit  $x_i$  der Mittelpunkt des  $i$ -ten Intervalls bezeichnet wird und mit  $x_{i-\frac{1}{2}}$  und  $x_{i+\frac{1}{2}}$  seine Ränder.

Die Anwendung der FV-Methode kann sowohl ausgehend vom Gleichungssystem (2.3.1) als auch ausgehend von der Formulierung (2.3.2) vorgenommen werden. An dieser Stelle werden beide Vorgehensweisen erläutert, da sie diskrete Gleichungen entstehen lassen, welche in Hinsicht auf das Gesamtproblem sowohl unterschiedliche Komplexität als auch unterschiedliche Eigenschaften der numerischen Lösung aufweisen. Im jeweiligen Kontext werden mit  $\mathbf{F}_{n+1/2}^{i-1/2}$  die aus den Schemata resultierende numerische Flüsse bezeichnet. Sie sind im Folgenden, stets entsprechend den diskutierten Diskretisierungsansätzen zu verstehen.

Im Abschnitt 3.2 wurde skizziert, wie mittels FVM eine homogene Erhaltungsgleichung diskretisiert wird. Zur numerischen Behandlung von quelltermbehafteten Gleichungen der Form (3.1.1) wird die *Splitting* Methodik verwendet. Hierbei wird für einen Zeitschritt  $\Delta t$  zunächst die Lösung der homogenen Gleichung, hier mittels einer Godunov-Typ Methode, bestimmt. Im Anschluss wird diese als Anfangsbedingung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} = \mathbf{q}_F(\mathbf{u}), \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \quad (4.2.1)$$

verwendet. Die Lösung zum Zeitpunkt  $t_{n+1}$  lautet somit

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^{n+1, hom} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{q}_F(x_i, t, \mathbf{u}) dt. \quad (4.2.2)$$

Aus Stabilitätsgründen muss das numerische Verfahren zur Bestimmung des Zeitintegrals mindestens die gleiche Ordnung besitzen wie die Methode zur Bestimmung der homogenen Lösung (vgl. [LeV02]).

Zur Approximation des Integrals wird hier das Prädiktor-Korrektor Verfahren nach Heun verwendet. Es ist ein Verfahren zweiter Ordnung aus der Klasse der Runge-Kutta-Verfahren, welches zur Integralapproximation die Trapez-Regel verwendet. Im Prädiktor-Schritt wird die erste Näherung für  $\mathbf{u}_i^{n+1}$  mittels des Euler-Verfahrens gesetzt:

$$\mathbf{u}_i^{n+1; pre} = \mathbf{u}_i^{n, hom} + \Delta t \mathbf{q} \left( x_i, t^n, \mathbf{u}_i^{n, hom} \right) \quad (4.2.3)$$

und im Korrektor-Schritt wird mit Hilfe der Integralnäherung gesetzt:

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^{n, hom} + \frac{\Delta t}{2} \left( \mathbf{q} \left( x_i, t^n, \mathbf{u}_i^{n, hom} \right) + \mathbf{q} \left( x_i, t^{n+1}, \mathbf{u}_i^{n, pre} \right) \right). \quad (4.2.4)$$

Die konstruierte Approximation  $\mathbf{u}_i^{n+1}$  kann wieder als Prädiktor verwendet werden und die Korrektor-Prozedur kann mehrmals wiederholt werden, bis ein geeignetes Abbruchkriterium erreicht ist.

Die Konstruktion diskreter Gleichungen ausgehend von (2.3.1) bietet die Möglichkeit der Behandlung der Dehnung ausschließlich als innere Quelle jeder diskreten Zelle. Die Anwendung des Splitting-Ansatzes und der Diskretisierung des homogenen Anteils der Gleichung nach (2.3.1) liefert folgendes Schema:

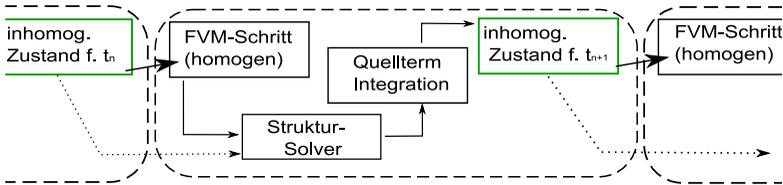
$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_i^{n+1, hom} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \overbrace{\begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}^{\mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}} - \overbrace{\begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}^{\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}} \right). \quad (4.2.5)$$

Sie entspricht der FVM-Diskretisierung der Euler-Gleichungen, (3.3.10), so dass zur Bestimmung von  $F_{i\pm 1/2}^{n\pm 1/2}$  sowohl der MUSCL-Ansatz aus dem Abschnitt 3.2 wie auch die Lösungsstrategie für das Riemann-Problem aus dem Abschnitt 3.3 in unveränderter Form übernommen werden können. Die numerische Lösung der Gesamtgleichung erhält man, analog zu (4.2.2), durch das anschließende Auflösen des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} -\frac{\rho}{A} \left( \frac{\partial}{\partial t} A + v \frac{\partial}{\partial x} A \right) \\ -\frac{\rho v}{A} \left( \frac{\partial}{\partial t} A + v \frac{\partial}{\partial x} A \right) + \tau_M \end{pmatrix}_i, \quad t \in (t_n, t_{n+1}) \quad (4.2.6)$$

mit der homogenen Lösung als Anfangswert. Zur Auswertung der Quellen werden die vorher bestimmten homogenen Werte  $(\rho, \rho v)_i^{n+1, hom}$  eingesetzt.

Verwendet man für die Intergration der Quellterme die Werte für  $A$ , die im letzten Zeitschritt bestimmt wurden, so kann die Vorgehensweise als *sequenzielle Kopplung* der Solver bezeichnet werden. Die Struktur des vollständigen numerischen Schritts ist in der Abbildung 4.1 dargestellt.



**Abbildung 4.1:** Vollständiger Zeitschritt bei sequentieller Kopplung beim Koppeln der Struktur über Quellterme.

Der oben dargestellte Ansatz setzt voraus, dass die numerischen Flüsse die dominanten Größen innerhalb des Schemas bilden. Somit ist ein Fehler, der durch die Quellterm-Auswertung zustande kommt, innerhalb eines vollständigen Schrittes stets klein. Diese Voraussetzung wird verletzt bei Rechnungen, bei denen  $A \gg v \frac{\partial}{\partial x} A$  und  $A \gg \frac{\partial}{\partial t} A$  nicht überall gültig ist. Besonders bei den Rechnungen mit einfachen Wandmodellen kann aber genau dies beim Auftreten von Stößen oder hochfrequenten Anregungen der Fall sein. Im Allgemeinen lässt sich folgern, dass das Verfahren nur dort einsetzbar ist, wo ein Auftreten der hochfrequenten Signale ausgeschlossen ist.

Eine Erweiterung des Verfahrens kann durch die Rückkopplung des Struktur-Solvers in das Finite-Volumen-Schema vorgenommen werden. Die Beobachtung, dass zur Auflösung des zeitlichen Integrals der Gleichung (4.2.6) die Werte von  $A$  aus dem aktuellen Zeitschritt benötigt werden, führt auf den Ansatz der mehrfachen Bestimmung des numerischen Quellterms unter der Verwendung der aktualisierten Approximationen der Leitungswanddehnung. Diese Lösungsstrategie wird als *iterativ-gestaffelte Kopplung* bezeichnet. Es notiere  $RQ_{A_i}$  die Operation der Bestimmung von  $(\rho, \rho v)_i^{n+1}$  zur bekannten Flächengröße  $A_i$  gemäß der Gleichung (4.2.6). Für die exakte

Lösung des Gleichungssystems gilt:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix} = RQ_{A_i[\rho, \rho v]} \left[ \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix} \right]. \quad (4.2.7)$$

Bei dem vorliegenden Problem handelt es sich um eine Fixpunktaufgabe und die Lösung kann entsprechend dem Satz von Banach<sup>56</sup> mittels iterativen Einsetzens der Approximationen beliebig genau bestimmt werden. Bezeichnet  $l$  den Iterationsindex, so lautet die Berechnungsvorschrift

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}^{l+1} = RQ_{A_i[\rho, \rho v]}^l \left[ \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}^l \right]. \quad (4.2.8)$$

Die praktische Umsetzung erfolgt durch das Einsetzen der Näherungslösungen in die Berechnungskette (Fluid-Werte)  $\rightarrow$  (Wandbewegung)  $\rightarrow$  (Quellen)  $\rightarrow$  (Fluid-Werte)  $\rightarrow$ .... Die Startapproximation erhält man durch die Applikation eines Schritts auf die homogene Lösung, analog zum sequenziellen Ansatz.

Die Iteration konvergiert nur dann gegen den Fixpunkt, wenn die rechte Seite der Fixpunktaufgabe eine Kontraktion bildet. Um dies für alle innerhalb der Simulation auftretenden lokalen Aufgabenstellungen sicherzustellen, wird die Relaxation der Iterierten verwendet:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}^{l+1} &= \alpha_F \cdot RQ_{\{\alpha_S A_i(\rho, \rho v)^l + (1-\alpha_S) A_i(\rho, \rho v)^{l-1}\}} \left[ \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}^l \right] \\ &+ (1 - \alpha_F) RQ_{\{\alpha_S A_i(\rho, \rho v)^l + (1-\alpha_S) A_i(\rho, \rho v)^{l-1}\}} \left[ \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}^{l-1} \right]. \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Dabei bezeichnet  $\alpha_S$  den Relaxierungsfaktor der Approximanten der Wandbewegung und  $\alpha_F$  den der Approximanten der Fluid-Zustände:

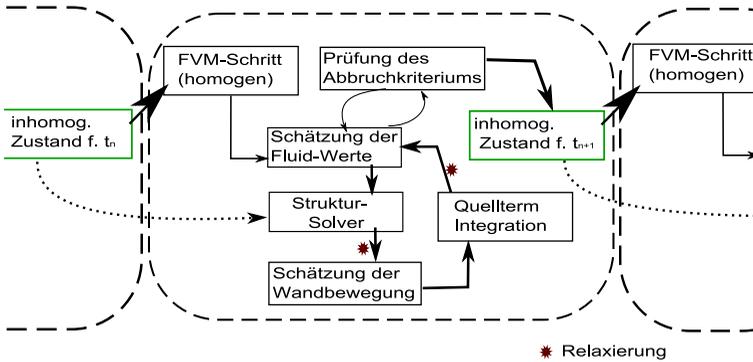
$\alpha_S, \alpha_F \in (0, 2)$ . Prinzipiell ist es ausreichend, nur die Fluid- oder Wand-Approximanten zu relaxieren. Die zweifache Relaxierung erlaubt jedoch den

---

<sup>56</sup>Vgl. Anhang A.3.

Einsatz deutlich größerer Relaxierungsparameter, was zur schnelleren Konvergenz der Iteration führt. Als Abbruchkriterium wird ein maximaler relativer Fehler in  $\rho$  verwendet, welcher am Anfang einer Rechnung festgesetzt wird.

Die Abbildung 4.2 zeigt schematisch die Vorgehensweise bei der Durchführung eines kompletten Zeitschritts mit Hilfe der iterativ-gestaffelten Kopplung über die Quellterme.



**Abbildung 4.2:** Vollständiger Zeitschritt bei iterativ-gestaffelter Kopplung über die Quellterme.

Trotz des Einsatzes einer Finite-Volumen-Methode sind die Erhaltungseigenschaften bei dem oben konstruierten Schema nicht a priori gegeben. Der Grund dafür liegt in der quelltermbehafteten Formulierung der Gleichungen. Eine neutrale Massenbilanz, beispielsweise innerhalb eines diskreten Zeitschritts ist nur dann gegeben, wenn die Summe über allen diskreten Quellen und Senken der Kontinuitätsgleichung innerhalb des Schritts Null ergibt:

$$\sum_{i=1}^N \left( \frac{\rho}{A} \left( \frac{\partial}{\partial t} A + v \frac{\partial}{\partial x} A \right) \right)_i^n = 0, \quad \text{für alle Zeitschritte } n = 1, 2, \dots \quad (4.2.10)$$

Diese Bedingung wird aber für ein allgemeines Modell für die Wandbewegung verletzt. Bei den lokalen Modellen (2.4.16) sind beispielsweise  $A_i$  und  $A_j$  in den Zellen  $i$  und  $j$  ( $i \neq j$ ) voneinander unabhängig. Auch bei komplexeren Modellen entsprechen die Abhängigkeiten keineswegs der Erhaltung,

denn bei der Herleitung eines Struktur-Modells bleiben im Allgemeinen die Fluid-Quellen unbetrachtet.

Ein erhaltendes Schema kann erzeugt werden, wenn die Finite-Volumen Diskretisierung auf die Darstellung (2.3.2) angewendet wird, und anschließend die oben dargestellte Idee zur Kopplung angewendet wird. Die Aufteilung der Leitung in diskrete Abschnitte erfolgt wie oben und die indexbehafteten Größen seien wieder im Kontext von (3.2.8) und (3.2.9) zu verstehen. Es wird ferner folgende Näherung verwendet:

$$\begin{pmatrix} A\rho \\ A\rho v \end{pmatrix}_i^n \approx A_i^n \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_i^n. \quad (4.2.11)$$

Die Integration der stetigen Gleichung (2.3.2) über eine Zelle und einem Zeitschritt, analog zu (3.2.7), liefert die Darstellung

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_i^{n+1, hom} = \frac{A_i^n}{A_i^{n+1}} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_i^n + \frac{1}{A_i^{n+1}} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} A\rho v \\ A\rho v^2 + Ap \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}_{\mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2}} - \underbrace{\begin{pmatrix} A\rho v \\ A\rho v^2 + Ap \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}_{\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}} \right] \quad (4.2.12)$$

für den homogenen Anteil der Lösung. Mittels Integration des verbleibenden Quellterms der Impulsgleichung,

$$\frac{1}{A_i^{n+1}} \left( p \frac{\partial}{\partial x} A + A\tau_M \right)_i, \quad (4.2.13)$$

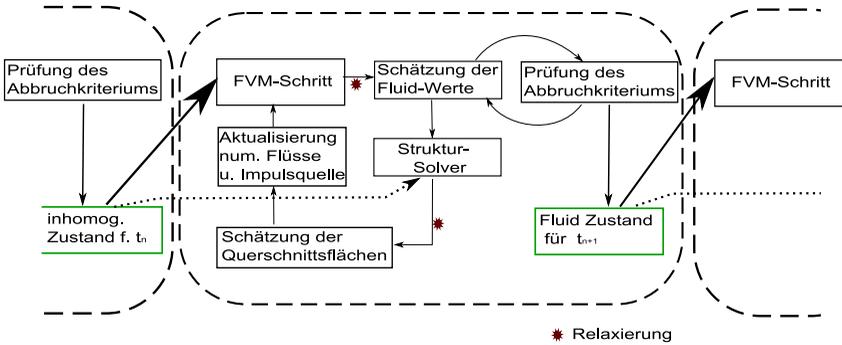
wird die inhomogene Lösung der Differentialgleichung erzeugt.

Die Approximationen der räumlichen Ableitungen der Querschnittfläche innerhalb der Impulsquelle werden mittels einer Finite-Differenzen-Näherung

erzeugt. Für die Werte der Querschnittflächen aus dem nachfolgenden Zeitschritt ( $A_i^{n+1}$  und  $A_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$ ) werden die im Laufe des Iterationsprozesses konstruierten Näherungen verwendet. Die Bestimmung numerischer Flüsse erfolgt unter der Verwendung der Näherung (4.2.11) und anschließender Applikation der MUSCL-Prozedur auf  $\rho$  und  $\rho v$  sowie Lösung des Riemann-Problems, entsprechend der im Abschnitt 3.2 beschriebenen Vorgehensweise:

$$\mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2} = A_{i-1/2}^{n+1/2} \cdot \mathbf{F}_{HLL} \left( \left( \begin{array}{c} \rho \\ \rho v \end{array} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n-1;+1/2}, \left( \begin{array}{c} \rho \\ \rho v \end{array} \right)_{i-\frac{1}{2}}^{n;-1/2} \right). \quad (4.2.14)$$

Der Ablauf der Berechnungen innerhalb eines Zeitschritts bei dem oben dargestellten Ansatz ist in der Abbildung 4.3 skizziert.



**Abbildung 4.3:** Vollständiger Zeitschritt bei iterativ-gestaffelter Kopplung über die Flussterme.

**Bemerkung 4.1.** Das iterativ-gestaffelte Schema mit Kopplung über die Fluss-Terme kann mit einem beliebigen Modell für die Wanddehnung appliziert werden. Der Nachteil der Methode ist die Anzahl der Iterationen, die innerhalb eines Zeitschritts durchgeführt werden müssen. Bei starken Druckvariationen in der Leitung werden teilweise sehr viele Iterationsschritte benötigt, so dass der Rechenaufwand zur Durchführung eines Zeitschritts innerhalb der Simulation stark ansteigt.

### 4.3 Lösungsansatz mit direkter Kopplung und Gesamtschema zweiter Ordnung

Auch wenn das iterativ-gestaffelte Schema universell einsetzbar ist, sind die entstehenden Rechenmodelle auch für sehr einfache Wanddehnungsmodelle sehr rechenzeitintensiv.<sup>57</sup> Die Rechenzeit des numerischen Gesamtmodells kann für statische Modelle, bei welchen die lokale Dehnung explizit aus dem lokalen Fluid-Zustand berechnet wird, stark reduziert werden, indem folgende Vorgehensweise gewählt wird: Anstatt die Rechnung in den Größen  $(\rho, \rho v, A)$  durchzuführen, wird ein Zeitschritt in den Variablen  $(\rho A, \rho v A, A)$  vorgenommen:

$$\begin{pmatrix} A\rho \\ A\rho v \end{pmatrix}_i^{n+1, hom} = \begin{pmatrix} A\rho \\ A\rho v \end{pmatrix}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \begin{pmatrix} A\rho v \\ A\rho v^2 + Ap \end{pmatrix}_{i-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \begin{pmatrix} A\rho v \\ A\rho v^2 + Ap \end{pmatrix}_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right]. \quad (4.3.1)$$

Der zu integrierende Quellterm der Impulsgleichung lautet hierfür

$$p \frac{\partial}{\partial x} A + A\tau_M. \quad (4.3.2)$$

Für die Bestimmung der numerischen Flüsse in (4.3.1) mit dem Ansatz (3.3.13) wird eine Entkopplung der Struktur-Variablen benötigt. Bei der Verwendung von lokalen expliziten Modellen für Leitungsdehnung können die gesuchten Approximationen der Fluid-Zustände mittels Modellgleichungen für die Dehnung aus den gekoppelten Variablen erzeugt werden. Der Hintergrund dafür ist, dass bei einem statischen Modell  $\rho$  und  $A$  nur über eine algebraische Beziehung zueinander in Abhängigkeit stehen. Mit Hilfe eines Verfahrens zur Nullstellenbestimmung können die Dichten und die Querschnittflächen aus  $\rho A$ -Werten ermittelt werden. Für das Modell (2.4.16)

---

<sup>57</sup>Der praktischer Einsatz des Modells zeigte, dass durch die hohe Zunahme der Simulationszeit das Rechenmodell nur für ausgewählte Untersuchungen sich eignet, vgl. Kapitel 6. Ein breiter einsetzbares numerisches Modell erfordert zwingend eine schnellere Berechnungsmethode.

lautet die in der  $i$ -ten Zelle nach dem Ausführen des  $n$ -ten Zeitschritts entstehende Aufgabe:

„finde  $\tilde{\rho}$  mit

$$[A\rho]_i^n - \tilde{\rho}\pi \cdot \left( r_0 + p(\tilde{\rho}) \cdot r_0^2 \cdot \frac{1 - \nu^2}{sE_\phi} \right)^2 = 0. \quad (4.3.3)$$

Die Ermittlung der Nullstelle erfolgt mithilfe der Brent-Dekker-Methode.<sup>58</sup> Es ist eines der sogenannten „ableitungsfreien“ Einschachtelungsverfahren und ist von Ordnung 2. Eine genauere Beschreibung der Methode befindet sich im Anhang A.4.

**Bemerkung 4.2.** Der Einsatz eines Einschachtelungsverfahrens ermöglicht die Bestimmung der Lösung der algebraischen Gleichung unabhängig von den Eigenschaften der Funktion  $p(\rho)$ .

Nach dem Lösen der Nullstellenaufgaben werden  $\rho$  und  $\rho v$  in der im Abschnitt 3.2 beschriebenen Weise rekonstruiert und evaluiert. Folgend wird die Flussbestimmung mittels HLL-Verfahrens durchgeführt, vgl. Abschnitt 3.3. Anschließend wird durch das Ausführen eines FVM-Schritt gemäß (4.3.1) die homogene Lösung erzeugt. Die Integration der Impulsquelle vervollständigt einen Zeitschritt nach dem Schema, welches hier als *direkte Kopplung* bezeichnet wird. Abbildung 4.4 skizziert die Struktur eines vollen Zeitschritts nach der oben dargestellten Methode. Das oben beschriebene nu-

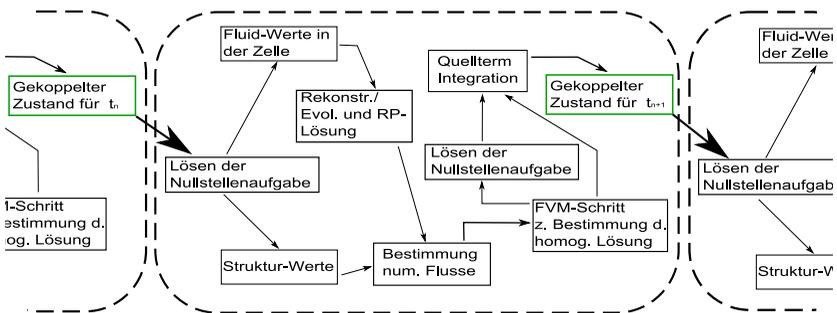


Abbildung 4.4: Vollständiger Zeitschritt bei der direkten Kopplung.

<sup>58</sup>Entwickelt von T.Dekker, 1969 und erweitert von R.Brent, 1973.

### 4.3 Lösungsansatz mit direkter Kopplung und Gesamtschema zweiter Ordnung

---

merische Schema lässt sich insofern erweitern, als dass die Rekonstruktion-Evolution Prozedur ebenfalls in den Variablen  $A\rho$  und  $A\rho v$  durchgeführt werden kann. Die Rekonstruktion beider Größen an den Zellengrenzen erfolgt entsprechend (3.2.13):

$$\begin{aligned} (A\rho)_{i;\pm 1/2}^n &= (A\rho)_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} \text{MinMod} \left( \frac{(A\rho)_i^n - (A\rho)_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{(A\rho)_{i+1}^n - (A\rho)_i^n}{\Delta x} \right) \\ (A\rho v)_{i;\pm 1/2}^n &= (A\rho v)_i^n \pm \frac{\Delta x}{2} \text{MinMod} \left( \frac{(A\rho v)_i^n - (A\rho v)_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{(A\rho v)_{i+1}^n - (A\rho v)_i^n}{\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Für die anschließend durchzuführende Evolution ist für die rekonstruierten Werte die Aufgabe (4.3.3) zur Ermittlung der Fluid-Werte zu lösen: Zu den rekonstruierten Werten  $(A\rho)_{i\pm 1/2}^n$  werden  $A_{i;\pm 1/2}^n$  und  $\rho_{i;\pm 1/2}^n$  ermittelt, so dass durch

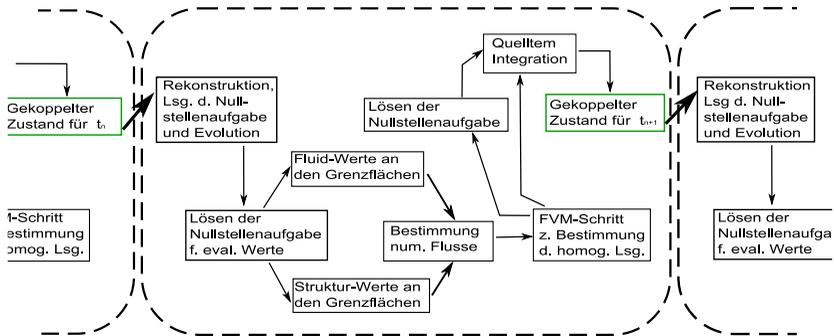
$$p_{i;\pm 1/2}^n = p \left( \rho_{i;\pm 1/2}^n \right) \quad (4.3.4)$$

den Rekonstruierten eine entsprechende Druckapproximante definiert werden kann. Ferner folgt, analog zu (3.2.17), der Evolutionsschritt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A\rho \\ A\rho v \end{pmatrix}_{i;\pm 1/2}^{n+1/2} &= \begin{pmatrix} A\rho \\ A\rho v \end{pmatrix}_{i;\pm 1/2}^n + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \begin{pmatrix} A\rho v \\ A\rho v^2 + A\rho p \end{pmatrix}_{i;-1/2}^n \right. \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} A\rho v \\ A\rho v^2 + A\rho p \end{pmatrix}_{i;+\frac{1}{2}}^n \right]. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

Aus den nach der Evolution entstandenen Werten werden durch das erneute Lösen der Nullstellenaufgabe die Zustände  $(\rho, \rho v)_{i\pm 1/2}^{n+1/2}$  bestimmt, und nach dem HLL-Ansatz, vgl. (3.3.13), werden Fluid-Werte an den Zellengrenzen und ferner numerische Flüsse berechnet. Somit kann ein Finite-Volumen Schritt zur Bestimmung der homogenen Lösung durchgeführt werden. Der Ablauf der Berechnung ist in der Abbildung 4.5 schematisch dargestellt.

**Bemerkung 4.3.** Das obere Schema lässt sich wie folgt interpretieren: Die Funktion  $A(p(\rho))$  übernimmt die Rolle einer zusätzlichen Zustandsfunktion. Die Schritte, die nach der Evolutionsprozedur erfolgen, bilden



**Abbildung 4.5:** Vollständiger Zeitschritt bei der direkten Kopplung 2ter Ordnung.

eine Konstruktion der Riemann-Problem-Lösung an Zellengrenzen für die Gleichung (2.3.2) bezüglich  $(A\rho, A\rho v)$ . Sie beruht auf der Bestimmung der Fluid-Größen und des HLL-Ansatzes für die Euler-Gleichung.

Durch das Rekonstruieren und Evolutionieren jener Variablen, in welchen auch der FVM-Schritt durchgeführt wird, konnte bei diesem Ansatz die numerische Dämpfung stark reduziert werden, wie spätere Tests verdeutlichen werden (vgl. Kapitel 6). Dies wurde auf Kosten des Lösen von zwei zusätzlichen Nullstellenaufgaben realisiert.

**Bemerkung 4.4.** Im Vergleich zur iterativ-gestaffelten Kopplung mit gleichem Strukturmodell, (2.4.16) stellt die oben beschriebene Vorgehensweise im Allgemeinen eine starke Reduktion der Rechenzeit dar, da das Ausführen eines Zeitschritts keinen iterativen Prozess bildet, sondern eine feste Anzahl an numerischen Operationen beinhaltet. Ferner erlaubt eine bessere Auflösung von Stößen die Applikation von Rechnungen mit größerer räumlicher Auflösung, bei gleicher Qualität der Ergebnisse, was nach der Beziehung (3.2.18) auch größere FVM-Zeitschrittweite bedeutet.

## 4.4 Konstruktion numerischer Randbedingungen

Die Randbedingungen für die Simulation hydraulischer Leitungen werden durch ihre Anbringung an benachbarte Elemente beeinflusst. Es wird an die-

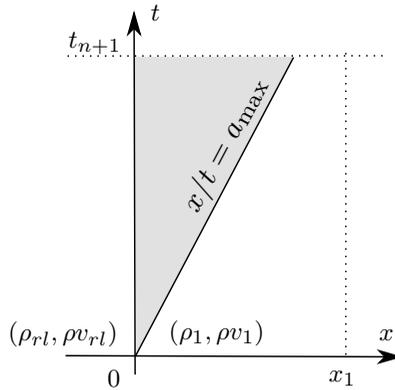
ser Stelle vorausgesetzt, dass die räumliche Diskretisierung der Gleichungen bei der Verwendung des Modells so fein gewählt wird, dass der dehnungsfreie Anbindungsbereich stets größer als  $2 \cdot \Delta x$  ist. Somit gilt für die linke und die rechte Randzelle  $A = konst$  und somit  $\frac{\partial}{\partial x} A = 0$ , wodurch die, durch die Anwendung der FVM entstehende, diskrete Gleichungen sowohl nach (4.2.12) wie auch nach (4.3.5), sich zur folgenden diskreten Formulierung

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_i^{n+1, hom} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}_{i-1/2}^{n+1/2} - \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}_{i+1/2}^{n+1/2} \right], \quad (4.4.1)$$

$i = 0$ ,  $i = N$  reduziert. Dies entspricht der FVM-Diskretisierung der ein-dimensionalen Euler-Gleichungen, vgl. (3.3.10). Durch die Reduktion wird für die Randzellen lediglich eine einmalige Durchführung eines Zeitschritts benötigt.

Innerhalb von Systemsimulation werden die Randbedingungen eines Leitungsmodells durch jene Zustände gebildet, die von benachbarten Elementen zur Laufzeit zur Verfügung gestellt werden. In dieser Arbeit wird die sogenannte Druck-Randbedingung untersucht, bei welcher die Vorgabe des Drucks am Leitungsrand als den oben genannten Zustand erfolgt.

Zur Konstruktion numerischer Flüsse an den Rändern der Leitung muss am jeweiligen Rand ein „unvollständiges“ Riemann-Problem gelöst werden. Gemeint ist hiermit die räumliche Einschränkung eines Riemann-Problems auf das Gebiet rechts, beziehungsweise links von der Unstetigkeit bei  $t = 0$  und entsprechend die Einschränkung auf einen einseitig laufenden Stoß, beziehungsweise Verdünnungswelle.



**Abbildung 4.6:** Stoßausbreitung über dem Rand bei einem Zeitschritt innerhalb FVM.

Zur Vereinfachung der Darstellung wird ferner stets der linke Leitungsrand betrachtet. Die Herleitung des numerischen Flusses für den rechten Rand erfolgt analog.

Die Anfangswerte des Riemann-Problems am linken Rand werden zum Zeitschritt  $t_n$  durch

$$\mathbf{u} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho v \\ 1 \end{pmatrix}^n, & \text{für } x > 0 \\ \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ r_l \end{pmatrix}^n, & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \quad (4.4.2)$$

beschrieben. Hierbei wird mit dem Index  $(\cdot)_{rl}$  der Zustand am Leitungsrand notiert.

Die Geschwindigkeit  $v_{rl}^n$  ist a priori nicht bekannt. In [Tor99] wird, beispielsweise, eine Vervollständigung der Zustände an äußeren Gebietsgrenzen vorgeschlagen, und somit eine Vervollständigung der Riemann-Probleme. Übertragen auf den hier betrachteten Fall lautet die Vervollständigung

$$v_{rl}^n = v_1^n \quad (4.4.3)$$

für eine nicht-reflektierende Randbedingung. Dies erlaubt ein Behandeln des äußeren Randes identisch zu einer inneren Grenze zwischen zwei Zellen. Die Erzeugung des numerischen Flusses kann mittels der Anwendung des HLL-Ansatzes, wie im Abschnitt 3.3 dargestellt, erfolgen. Diese Vorgehensweise wird oft als ein *Erzeugen von fiktiven Zellen* („ghost cells“) bezeichnet, da hier der mit  $(\cdot)_{rl}$  notierte Zustand als Zustand in einer Zelle jenseits des Gebietsrandes vorgestellt werden kann.

Eine alternative Möglichkeit zur Konstruktion des numerischen Flusses am Rand bietet sich durch die charakteristische Entwicklung der Modellgleichungen. Hierzu werden die Euler-Gleichungen an den äußeren Grenzen der Randzellen in ihrer charakteristischen Form betrachtet, vgl. (3.3.11).

Für das oben vorgestellte unvollständige Riemann-Problem gilt, für den Fall eines in die Leitung hinein laufenden Stoßes, für diesen die Rankine-Hugoniot Sprungbedingung, (3.1.5). Bezeichnet  $a_l$  seine Ausbreitungsge-

schwindigkeit, so lautet die Sprungbedingung

$$\left( \begin{array}{c} \rho v \\ \rho v^2 + p \end{array} \right)_{rl}^n - \left( \begin{array}{c} \rho v \\ \rho v^2 + p \end{array} \right)_1^n = a_l \cdot \left( \left( \begin{array}{c} \rho \\ \rho v \end{array} \right)_{rl}^n - \left( \begin{array}{c} \rho \\ \rho v \end{array} \right)_1^n \right). \quad (4.4.4)$$

Durch die Umformung der ersten Gleichung nach  $a_l$  und dem anschließenden Einsetzen in die zweite lässt sich  $v_{rl}$  aus dem obigen Gleichungssystem gewinnen:

$$v_{rl}^n = v_1^n \pm \sqrt{\frac{(p_{rl}^n - p_1^n)(\rho_{rl}^n - \rho_1^n)}{p_{rl}^n \cdot p_1^n}}. \quad (4.4.5)$$

Liegt am äußeren Rand der Leitung ein kleinerer Druck vor als in der ersten Zelle, so dass in die Leitung eine Verdünnungswelle hineinläuft, so wird die charakteristische Darstellung der Euler-Gleichungen, (3.3.11), verwendet, um den Wert der Geschwindigkeit am Rand zu bestimmen. Integriert man die zweite Gleichung von (3.3.11) entlang der charakteristischen Kurve  $(x(t), t)$  mit  $\frac{dx}{dt} = c - v$ ,  $x(t_n) = x_{1-1/2}$ , so erhält man die Darstellung

$$v_{rl}^n - v_1^n - \int_{p_1^n}^{p_{rl}^n} \frac{1}{\rho c} dp, \quad (4.4.6)$$

wodurch insgesamt folgende Vorschrift zur Konstruktion der Geschwindigkeit am Leitungsrand erzeugen lässt:

$$v_{rl}^n = \begin{cases} v_1^n + \sqrt{\frac{(p_{rl} - p_1)(\rho_{rl}^n - \rho_1^n)}{p_{rl}^n \cdot p_1^n}}, & p_{rl}^n > p_1^n \\ v_1^n + \int_{p_1^n}^{p_{rl}^n} \frac{1}{\rho c} dp, & p_{rl}^n \leq p_1^n. \end{cases} \quad (4.4.7)$$

Das anschließendes direktes Einsetzen der Randwerte in  $\mathbf{f}$  liefert den gesuchten numerischen Fluss über den Leitungsrand,  $\mathbf{F}_{1-1/2}^{n+1/2}$ .

## 4.5 Konstruktion der Anfangswerte und Behandlung des Reibungsterms

Eine typische Anfangsbedingung für eine Leitung zur Simulation der Wellenausbreitung in einem hydraulischen System ist die Vorgabe von in der

Leitung herrschendem Druckniveau zum Zeitpunkt  $t_0$ . Unter der Annahme, dass es sich bei den Rechnungen um einen stationären Zustand handelt, kann für jedes Leitungswandmodell entsprechende Anfangsdehnung bestimmt werden. Bei rein statischen Modellen, die keine zeitlichen Ableitungen der Wandposition beinhalten, genügt das einmalige Auswerten der Wandposition. Für Gleichungen mit Massenträgheit und Dämpfung werden, entsprechend der obigen Annahme der Stationarität der Zustände, die zeitlichen Ableitungen der Wandfunktion fallen gelassen und entstehende statische Gleichungen gelöst.

Die Berechnung des Impulsverlusts durch die Reibung wird entsprechend dem allgemeinen Ansatz zur Behandlung der Quellterme innerhalb der Finite-Volumen-Methoden, (4.2.4), durchgeführt. Die Bestimmung der lokalen Werte der Quellterme erfolgt für die beschleunigungsabhängigen Ansätze mittels Finiten Differenzen: Für den Axworthy Ansatz lautet die diskrete Form:

$$\{\tau_W^u\}_i^n = \begin{cases} K_{Ax} \cdot \frac{\rho_i^n r_i^n}{2} \left( \frac{v_i^n - v_i^{n-1}}{\Delta t_n} + v_i^n \cdot \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{\Delta x} \right), & v > 0 \\ K_{Ax} \cdot \frac{\rho_i^n r_i^n}{2} \left( \frac{v_i^n - v_i^{n-1}}{\Delta t_n} + v_i^n \cdot \frac{v_i^n - v_{i-1}^n}{\Delta x} \right), & v \leq 0, \end{cases} \quad (4.5.1)$$

wobei  $(\cdot)_i^n$  an dieser Stelle die Prädiktor-Werte der entsprechenden Größen bezeichnen, vgl. (4.2.4).

Für den frequenzabhängigen Reibungsansatz wird der benötigte Wert für das Zeitintegral mittels zusammengesetzter Trapezregel erzeugt. Bei Verwendung von  $M$  Stützstellen lautet die Rechenvorschrift

$$\begin{aligned} \int_0^{t_n} \frac{\partial}{\partial \xi} v(x_i, \xi) W_Z(t_n - \xi) d\xi &\approx \int_{t_{n-M}}^{t_n} \frac{\partial}{\partial \xi} v(x_i, \xi) W_Z(t - \xi) d\xi \\ &\approx \sum_{j=n-M+1 \dots n} \frac{\Delta t_j}{2} \left( \frac{\partial}{\partial t} v(x_i, t_j) W_Z(t_n - t_j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial t} v(x_i, t_{j-1}) W_Z(t_n - t_{j-1}) \right). \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Für die Approximation der räumlichen Ableitung der Geschwindigkeit werden analog zur obigen Formulierung Finite Differenzen verwendet.

# Hydrauliksimulationsumgebung AMESim

Wie bereits im Kapitel 1 erörtert, ist ein wichtiges Thema der vorliegenden Arbeit die Anwendbarkeit der konstruierten Schemata in Simulationen moderner hydraulischer Komponenten und Systeme. Das Einbinden der Modelle in eine Simulationsumgebung bietet zwar große Vorteile in späteren Anwendungen, jedoch bringt es Restriktionen in der Modellierung mit sich und erfordert gewisse Anpassungen der numerischen Schemata.

In dieser Arbeit wurde eine Umsetzung gewählt, die das Verwenden der Modelle in der von LMS Imagine.Lab programmierten Simulationsumgebung AMESim erlaubt<sup>59</sup>. AMESim stellt heute die am weitesten verbreitete Plattform zur sogenannten 1-D Modellierung dar und wird in zahlreichen Unternehmen als „Standartentwicklungswerkzeug“ zur Konzeption und Optimierung neuer Produkte eingesetzt. Durch den modularen Aufbau des Tools bietet der Hersteller gute Möglichkeiten zur Implementierung eigener Untermodelle<sup>60</sup>, die in dieser Arbeit genutzt wurden. Im Folgenden wird genauer auf die Eckpunkte der Implementierung eingegangen.

---

<sup>59</sup>Prinzipiell stellt das Einbinden eines Leitungsmodells in andere Simulationsumgebungen, aus der Sicht der Numerik, den Entwickler vor ähnliche Herausforderungen. Die in diesem Kapitel beschriebenen Problematiken zeigen grundsätzliche Schwierigkeiten und Lösungsstrategien auf.

<sup>60</sup>Umsetzung in ANSI-C.

## 5.1 Konzept und Aufbau der Simulationsumgebung

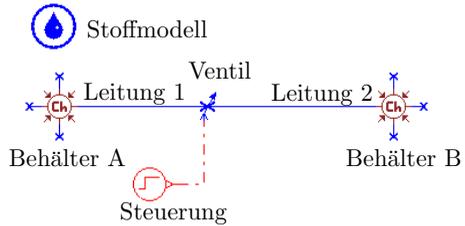
Für den Benutzer stellt AMESim eine modular aufgebaute Simulationsumgebung dar, mit der das physikalische Verhalten von Multi-Domain-Systemen berechnet werden kann. Modular heißt in diesem Kontext, dass das Erstellen eines Modells aus gemeinsamen Grundelementen, den bereits erwähnten Untermodellen, erfolgt. In unterschiedlichen Untermodell-Bibliotheken sind hydraulische, mechanische, pneumatische und elektromagnetische Komponenten zusammengefasst. Das Aufstellen eines Modells und die anschließende Durchführung einer Rechnung erfolgt in vier Schritten:

- Im ersten Schritt wird in der graphischen Oberfläche durch Verknüpfen der graphischen Icons ein Gerüst des Modells, auch *Sketch* genannt, erzeugt. Als ein Beispiel zeigt die Abbildung 5.1 ein Sketch des Modells, welches den Aufbau des untersuchten Testbeispiels repräsentiert, das in der Abbildung 2.14 dargestellt ist.
- Im nächsten Schritt wird für jedes einzelne Element ein numerisches Untermodell ausgewählt und AMESim erzeugt das eigentliche ausführbare Simulationsprogramm, welches das angelegte System repräsentiert.
- Anschließend, im dritten Schritt, werden die Untermodelle mit Modellparametern belegt.
- Schließlich, im vierten Schritt, nimmt der Anwender Einstellungen an dem Rechenkern des Programms vor und die Simulation wird durchgeführt.

Das Konzept, auf dem die Umgebung basiert, wird in der Literatur als *Bond Graph* bezeichnet. Ohne innerhalb dieser Arbeit genauer auf die Theorie und den Aufbau des Tools einzugehen, werden an dieser Stelle nur die Anforderungen an die Untermodelle erläutert.

Zwei benachbarte Elemente haben stets zueinander konjugierte Übergabegrößen als Ein- und Ausgabevariablen. Für eine Leitung, die an ein Volumen gekoppelt ist, sind beispielsweise Druck als Ein- und Fluss als Ausgabegröße definiert. Das angekoppelte Volumen hat dementsprechend Fluss als Eingabe- und Druck als Ausgabegrößen.

Die Simulation eines Systems stellt prinzipiell Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen durch den sogenannten *zentralen Integrator* der Umgebung dar. Die Gleichungen entstehen durch Definition der Zustände durch Untermodelle des Systems und Vorgabe der rechten Seite in Abhängigkeit von aktuellen Ein- und Ausgabegrößen des jeweiligen Un-



**Abbildung 5.1:** Beispiel eines AME-Sim Modell-Sketchs.

termodells. Durch eine Kontrollfunktion erfolgt zu gewissen Zeitpunkten eine Abfrage der Ausgabegrößen eines Modells zu gewissen vorgegebenen Eingabewerten. Ein Untermodell muss daher zu jedem Zeitpunkt und jeder Vorgabe der Randbedingung einen physikalisch sinnvollen Wert als Ausgabe am Rand liefern. Die Zeitpunkte der Abfrage sowie die Vorgabe der Randbedingungen, werden vom Integrator gesteuert, wobei jedoch die Abfragen keine zeitliche Folge bilden, sondern auch zur Bestimmung der Koeffizienten des verwendeten Integrationsverfahrens dienen können.

Der Integrator ist ein zentral angelegter Löser für Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen sowie für differential-algebraische Gleichungssysteme, der allen Untermodellen zur Verfügung steht. Benutzt ein Untermodell gewöhnliche Differentialgleichungen zur Beschreibung physikalischer Gesetzmäßigkeiten, so kann der zentrale Löser mitbenutzt werden. In der Simulationsumgebung ist ein Löser vom Typ LSODA<sup>61</sup> (vgl. [LMS02]) umgesetzt. Er verfügt unter anderem über eine interne Schrittweitensteuerung und führt einen Integrationsschritt entsprechend der zum momentanen Zeitpunkt bestimmten Steifigkeit des zusammengesetzten Gleichungssystems aus.

Für die Konstruktion eines Untermodells ist ein wichtiger Punkt in der Arbeitsweise des Integrators, sowohl aus der Sicht der Modellierung, wie auch aus der Sicht der Implementierung, die sogenannte „Unstetigkeitsbehand-

<sup>61</sup>„Livermore Solver for Ordinary Differential Equations“, eine auf Rückwärts-Differenzen-Verfahren basierende Methode. Theorie und Beschreibung kann in [RH93] nachgelesen werden.

lung“.<sup>62</sup> Hinter diesem Begriff steckt ein Mechanismus zur Beeinflussung der Zeitschrittsteuerung, der in der erster Linie dazu dient der Simulationsumgebung den Zeitpunkt mitzuteilen, zu dem die rechte Seite einer gewöhnlichen Differentialgleichung einen Sprung vollzieht. Für die numerische Integration der rechten Seite einer gewöhnlichen Differentialgleichung ist dies insofern notwendig, als dass beim Auftreten eines Sprungs eine stetige Approximation (wie zum Beispiel oft verwendete Polynomapproximation) der rechten Seite nicht mehr legitim ist. Ein explizites Aufrufen einer Unstetigkeit durch ein Untermodell in AMESim zu einem Zeitpunkt  $\tilde{t}$  erzwingt einen Neustart der Integration durch den Solver und verbietet zusätzlich die Abfragen der Untermodelle, die einem vorhergehenden Zeitpunkt,  $t < \tilde{t}$ , entsprechen. Modell-technisch entspricht diese Vorgehensweise der Aufstellung einer neuen physikalischen Aufgabe, wobei die Modellgleichungen gleich bleiben und lediglich die Anfangswerte entsprechend dem Zustand des Gesamtmodells zu dem Zeitpunkt der Unstetigkeit neu gesetzt werden. Die Zeitschrittweite des Integrators wird nach einem Aufrufen einer Unstetigkeit stark herabgesetzt. Aus diesem Grund ist der oben beschriebene Prozess stets mit einem Anstieg der Rechenzeit verbunden.

Bei der Konstruktion eines numerischen Untermodells mit einem auf einem diskreten Zeitgitter operierenden internen Solver ist also immer zu beachten, dass die an die benachbarten Untermodelle übergebenen Größen stetig bezüglich der Zeit sind. Im Allgemeinen kann nicht ausgeschlossen werden, dass jene Größen zur Konstruktion der rechten Seite einer Differentialgleichung verwendet werden, die vom zentralen Solver integriert werden.<sup>63</sup> Zusätzlich müssen, bei Verwendung des zentralen Solvers zur Lösung der Teilaufgaben des Untermodells, Sprünge der Eingangsdaten verhindert werden. In beiden Fällen ist die Forderung gleichbedeutend mit einer Forderung nach einer Interpolation der Daten zwischen den diskreten Stützstellen in der Zeit, sowie einer hierzu konsistenten Extrapolation der Daten in der Zeit, für die Aufrufe durch die Simulationsumgebung, die zwischen dem Zeitpunkt der aktuellen Berechnung und dem Zeitpunkt der nächsten diskreten Stützstelle in der Zeit liegen.

---

<sup>62</sup>Dieser Punkt betrifft nicht nur die Simulationsumgebung AMESim, in die das Modell im Laufe dieser Arbeit implementiert wurde, sondern alle zentral gesteuerte Simulationstools im Allgemeinen, die eine Kopplung von Untermodellen erlauben, welche mit unterschiedlichen numerischen Methoden arbeiten dürfen.

<sup>63</sup>Im Besonderen in AMESim bildet dieser Fall häufig die Regel.

## 5.2 Einbindung hydraulischer Leitungsmodelle in die Simulationsumgebung

Unter der Beachtung der im vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Einschränkungen wird eine Methodik zu Implementierung der entwickelten Leitungsmodelle in AMESim skizziert.

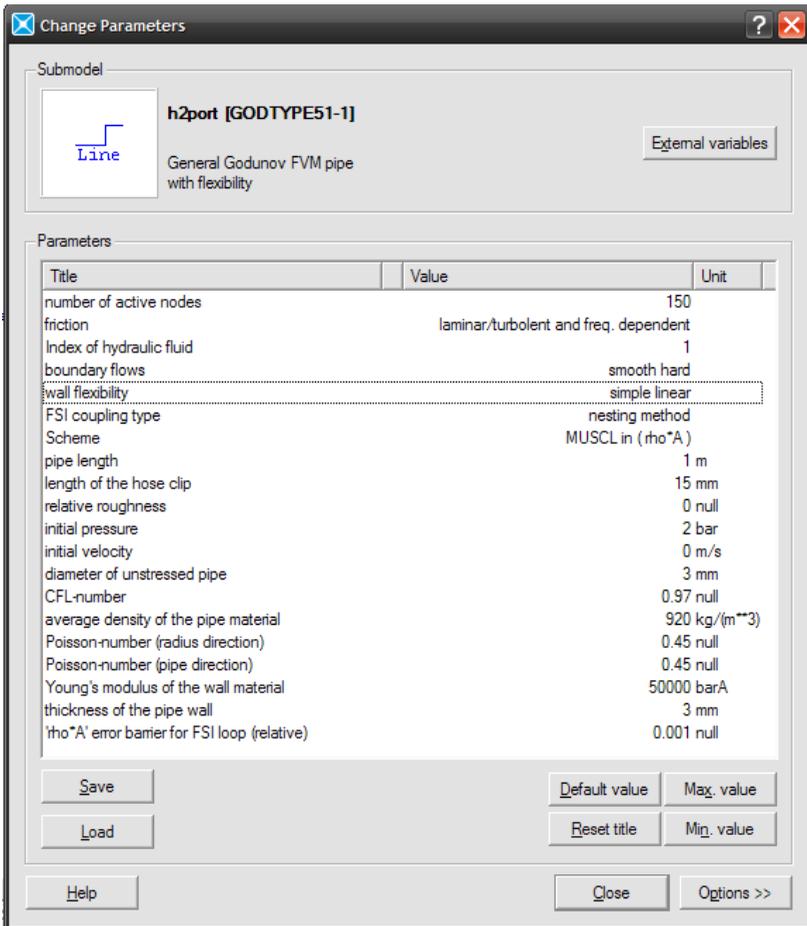
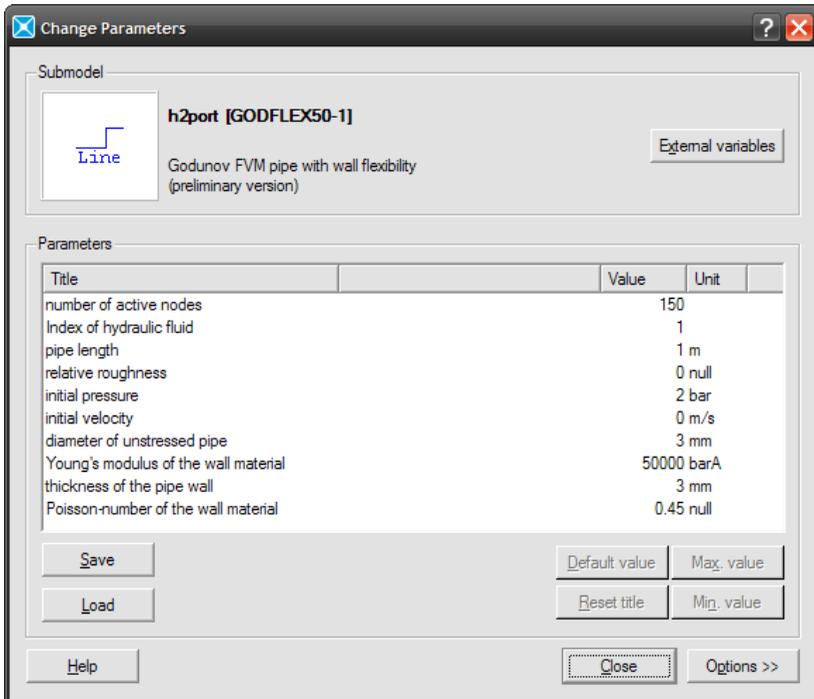


Abbildung 5.2: Parameter-Eingabemaske des AMESim-Untermodells  
GODTYPE51

Im Rahmen der Arbeit wurden zwei AMESim-Untermodule, GODTYPE51 und GODFLEX50, erstellt. Das erste Untermodell beinhaltet dabei sowohl die Möglichkeit auf der User-Ebene zwischen den Wandbewegungsmodellen zu schalten, wie auch erlaubt es Einstellungen zu numerischen Schemata vorzunehmen. Das zweite beinhaltet nur das in (2.4.16) beschriebene Modell mit nach der im Abschnitt 4.3 organisierten Numerik. Der einzige auf die Berechnungsmethode bezogene Parameter, der vom Benutzer zu setzen ist, ist die Anzahl der Knoten zu Diskretisierung der Leitung.

Die Eingabemasken für die Parameter der jeweiligen Modelle innerhalb der Simulationsumgebung sind in den Abbildungen 5.2 und 5.3 dargestellt.

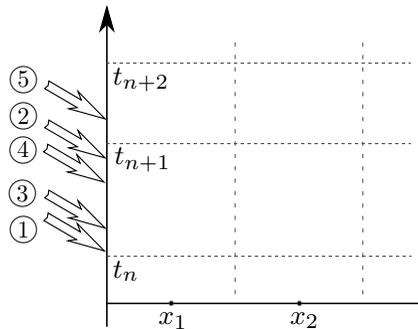


**Abbildung 5.3:** Parameter-Eingabemaske des AMESim-Untermodells GODFLEX50

Zur Sicherstellung der „Konsistenz“ in der Kommunikation zwischen dem

Leitungsmodell und der Umgebung muss ein gewisser Eingriff in die im Abschnitt 4.4 dargestellte Randbehandlung erfolgen, der im Folgenden erläutert wird. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird hier auf den linken Rand der Leitung eingegangen. Die Behandlung des rechten Rands erfolgt analog.

Die Kontrolle der Durchführung interner Zeitschritte erfolgt folgendermaßen: Nach einem FVM-Schritt wird mittels CFL-Bedingung (vgl. (3.2.18)) der nächste diskrete Zeitpunkt bestimmt, zu welchem diskrete Zustände in der Leitung zu berechnen sind. Dieser sei mit  $t_{n+1}$  notiert. Erfolgt eine Abfrage des Submodells durch den Integrator der Simulationsumgebung zu einem Punkt  $t \in (t_n, t_{n+1})$ , so wird der zugehörige Zustand am Rand ausgehend von aktuellen Daten erzeugt, nach der unten folgenden Vorgehensweise. Sobald eine Abfrage zu einem Zeitpunkt  $t > t_{n+1}$  stattfindet, wird ein FVM-Schritt durchgeführt und der zentrale Integrator wird mittels eines Unstetigkeitsaufrufs „resetet“, so dass Abfragen zu Zeitpunkten vor der letzten Berechnung verhindert werden.



**Abbildung 5.4:** Beispiel einer nicht-monotonen Folge der Abfragen der Flüsse am Leitungsrand durch die Simulationsumgebung.

Da einige Abfragen am Rand seitens der Simulationsumgebung, wie bereits erwähnt, zur internen Berechnung der Koeffizienten der Integrationsmethode dienen, besteht die Gefahr, dass zur Durchführung eines FVM-Schritts ein unphysikalischer Wert als Druck am Rand verwendet werden könnte, falls lediglich die übergebene Werte direkt eingesetzt werden. Um dies zu vermeiden, wird eine einmalige Durchführung der charakteristischen Entwicklung am Rand, (4.4.7), durch Entwicklungen zur jeder Abfrage ersetzt und anschließend ein integraler Mittelwert über die errechneten Flüsse gebildet.

Eine einfache Möglichkeit besteht in der Verwendung einer Quadraturfor-

mel, wie zum Beispiel der Trapezregel:

$$\mathbf{F}_{1-1/2}^{n+1/2} = \sum_{t_n < t_j < t_{n+1}} \frac{1}{2} (t_{j+1} - t_j) \left( \mathbf{f}(\mathbf{u}(0, t_{j-1}), t_{j-1}) + \mathbf{f}(\mathbf{u}(0, t_j), t_j) \right), \quad (5.2.1)$$

wobei  $t_j$  die diskreten Zeitpunkte bezeichnen, zu welchen Werte der Zustandsgrößen innerhalb der Umgebung bestimmt werden<sup>64</sup>. Die Werte für  $\mathbf{f}(\mathbf{u}(0, t), t)$  sind hierbei durch (4.4.7) zu erzeugen. Es gilt jedoch zu beachten, dass lediglich die Abfragen berücksichtigt werden dürfen, die tatsächliche Zeitschritte der Simulationsumgebung repräsentieren. Ein eleganterer Ansatz zur Bestimmung des numerischen Randflusses ist das Lösen der Differentialgleichung

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}(0, t), t), \quad t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \tilde{\mathbf{f}}(t_n) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(0, t_n), t_n) \end{array} \right. \quad (5.2.2)$$

mithilfe des zentralen Integrators. Der numerische Fluss ergibt sich durch  $\mathbf{F}_{1-1/2}^{n+1/2} = \tilde{\mathbf{f}}(t_{n+1})$ . Diese Vorgehensweise vermeidet zum einen die Verwendung zeitaufwendiger Prüfroutinen und stellt zum anderen sicher, dass die Bestimmung des Randflusses mindestens von der gleichen Ordnung ist, wie die Berechnung der Zustände in Nachbar-Elementen der Leitung.

Zusätzlich zur Konstruktion eines numerischen Flusses über den Leitungsrand ist, wie bereits oben angedeutet, bei jeder Anfrage der Umgebung ein „momentaner“ physikalischer Fluss zurückzugeben. Der Wert für den Fluss unmittelbar nach einem Zeitschritt ergibt sich wieder durch die charakteristische Entwicklung am Rand. Für die Antworten auf die Anfragen der Kontrollfunktion zwischen zwei diskreten FVM-Zeitebenen ( $t_n, t_{n+1}$ ) sind solche Randflusswerte zu erzeugen, welche eine Interpolation zwischen den Flüssen zu den jeweiligen diskreten Zeitebenen bilden. Da der Wert für  $\mathbf{F}_{1-1/2}^{n+1/2}$  zu den Zeitpunkten der Anfragen nicht zur Verfügung steht, muss eine Extrapolation vorgenommen werden. Der nachfolgende Ansatz stammt aus Diskussionen mit Dr. Jungemann und Dr. Dr. Iben innerhalb von [EJ08] und [EBI08].

---

<sup>64</sup>Im Allgemeinen richtet sich die Zeitschrittweite des Integrators nach der Änderung des kleinsten Zustandes, wodurch sie üblicherweise um eine Größenordnung kleiner ist als  $\Delta t$ .

Zur Veranschaulichung der Erstellung eines Randflusses zwischen zwei diskreten FVM-Zeitebenen des numerischen Leitungsmodells sei eine Abfrage zum Zeitpunkt  $\tilde{t} \in (t_n, t_{n+1})$  betrachtet. Die Konstruktion des Flusses erfolgt mit Hilfe einer Vorausberechnung des Zustandes in der Randzelle für den nächsten Zeitschritt. Hierzu wird im ersten Schritt durch die Anwendung der Rekonstruktion (3.2.13), der Evolution (3.2.17) und der Approximation der Riemann-Problem-Lösung (3.3.4) der numerische Fluss zwischen der ersten und der zweiten Zelle bestimmt. Im zweiten wird mittels der Auflösung von (5.2.2) für  $t = \tilde{t}$  der Wert des numerischen Flusses für einen Schritt  $t_n \rightarrow \tilde{t}$  ermittelt. Anschließend wird mittels der Extrapolation

$$\mathbf{F}_{1-1/2}^{n+1/2} \approx \mathbf{F}_{1-1/2}^{approx; \tilde{t}} = \frac{(\tilde{\mathbf{f}}(\tilde{t}) - \tilde{\mathbf{f}}(t_n)) \cdot (t_{n+1} - t_n)}{\tilde{t} - t_n} \quad (5.2.3)$$

eine Approximation des numerischen Flusses am Leitungsrand für den nachfolgenden FVM-Schritt erstellt. Ausführung von (3.2.7) für  $i = 1$  liefert eine Approximation von  $\mathbf{u}_1^{n+1}$ , so dass für ein bekanntes  $p_{Rand}^{n+1}$  mittels (4.4.7) eine Schätzung für jenen Fluss errechnet werden kann, welcher sich am Rand nach dem nächsten Zeitschritt ergeben würde. Anschließende Interpolation zwischen den Flüssen in den Zeitebenen  $t_n$  und  $t_{n+1}$  liefert den gesuchten Fluss für  $\tilde{t}$ .

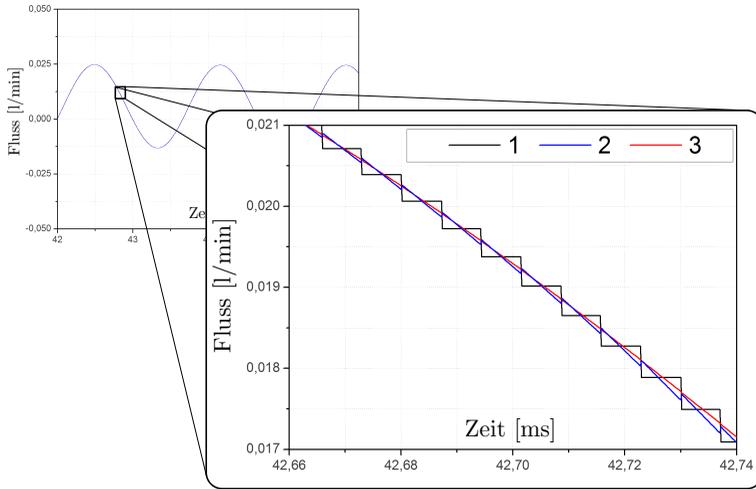
Zur Erstellung einer Schätzung von  $p_{Rand}^{n+1}$  ist es aus Rechenzeitgründen sinnvoll, analog zur obigen Flussbestimmung auf den zentralen Integrator zurückgegriffen: An ihn wird die Aufgabe

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{p} = p(0, t) - p_{1-1/2}^n, & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \tilde{p}(t_n) = 0 \end{cases} \quad (5.2.4)$$

übergeben und mithilfe der Lösung für  $\tilde{t}$  wird, analog zur obigen Extrapolation des Flusses, eine Approximation für  $t_{n+1}$  konstruiert:

$$p_{Rand}^{n+1/2} \approx p_{Rand}^{approx; \tilde{t}} = \frac{(\tilde{p}(\tilde{t}) - \tilde{p}(t_n)) \cdot (t_{n+1} - t_n)}{\tilde{t} - t_n}. \quad (5.2.5)$$

**Bemerkung 5.1.** Ein weniger rechenintensiver Ansatz zur Erstellung eines Flusses zum Zeitpunkt  $\tilde{t}$  ist die naheliegende Vorgehensweise der Evolution



**Abbildung 5.5:** Verlauf des Flusses über Leitungsrand bei einer sinusförmigen Druckerregung:

- 1: Ohne spezielle Randbehandlung,
- 2: Extrapolation durch Evolution des Zustandes am Leitungsrand,
- 3: Extrapolation durch Vorausberechnung des Druckvorgabe und des Zustandes in der Randzelle.

des Zellenzustandes um  $\tilde{t} - t_n$

$$\mathbf{u}_1^{\tilde{t}} = \mathbf{u}_1^n - \frac{1}{2} \frac{\tilde{t} - t_n}{\Delta x} \cdot \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{u}_1^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{1+1/2}^n) & , \quad \text{falls } p_{1/2}^n < p_{1+1/2}^n \\ \mathbf{f}(\mathbf{u}_1^n) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_{1/2}^n) & , \quad \text{falls } p_{1/2}^n \geq p_{1+1/2}^n \end{cases} \quad (5.2.6)$$

wobei  $p_{1/2}^n$  und  $p_{1+1/2}^n$  durch das Auflösen entsprechender Riemann-Probleme zu bestimmen sind, und einer anschließenden einmaligen Auflösung des Riemann-Problems am Leitungsrand in der Zeitebene  $\tilde{t}$ . Problematisch bei dieser Methode ist jedoch, dass die Werte des errechneten Flusses am Leitungsrand im Allgemeinen keine Stetigkeit an den Zeitpunkten der FVM-Schritte aufweisen. Zwar erhält man durch den Ansatz genauere Fluss-Werte zwischen den diskreten Schritten, jedoch bleibt die Problematik der Anregung der Nachbar-Elemente der Leitung in der Systemsimulation durch die

## *5.2 Einbindung hydraulischer Leitungsmodelle in die Simulationsumgebung*

---

Unstetigkeiten bestehen. Die Abbildung 5.5 veranschaulicht die Wirkung verschiedener Fluss-Konstruktionen am Beispiel einer sinusförmigen Druckanregung.

# Verifizierung und Validierung

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der Absicherung des Einsatzes des konstruierten Modells und entwickelten numerischen Schemata innerhalb von Systemsimulationen. Die Verifizierung des Modells wurde durch das Berechnen theoretischer Aufgaben mit dem konstruierten Simulationswerkzeug realisiert. Ferner wurde ein Prüfstand aufgebaut, mit dessen Hilfe sich das Ausbreitungsverhalten von Druckpulsen innerhalb unterschiedlicher Leitungen experimentell untersuchen lässt. Die Validierung erfolgte hierbei durch das rechnerische Nachbilden der Versuche unter der Verwendung des erstellten Leitungsmodelles. Im weiteren Verlauf werden in diesem Kapitel Ergebnisse von Simulationen des Prüfstandes, an welchem eine Hochdruckpumpe aus dem Produktprogramm der Robert Bosch GmbH vermessen wurde, mit entsprechenden Messergebnissen verglichen. Im Aufbau des Prüfstandes wurden an mehreren Stellen flexible Leitungen eingesetzt, so dass innerhalb der Berechnungen das konstruierte Modell mehrfach verwendet wurde.

## 6.1 Analyse des Berechnungsmodells anhand idealisierter Stoßprobleme

Die erste theoretische Prüfung der konstruierten Modelle erfolgt mittels Berechnungen zur Ausbreitung eines idealen Stoßes in einer Leitung. Anhand dieser kann zum einen Stabilität und numerische Dissipation eines Modells analysiert werden, zum anderen kann ein Vergleich der Rechenergebnisse mit bekannten expliziten Ansätzen zur Berechnung einer Stoßausbreitung, vgl. Abschnitt 2.5, erstellt werden.

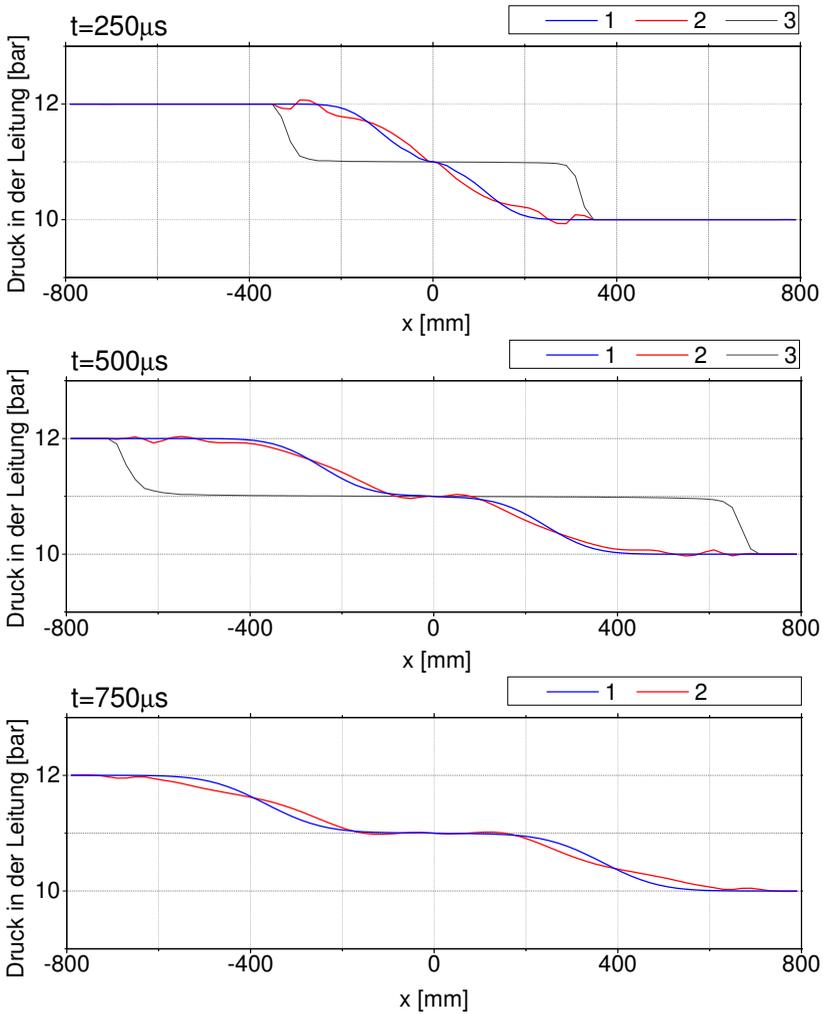
Zur Analyse eines Stoßes wird ein Analogon zu dem Versuch von Holmboe und Rouleau, vgl. Abschnitt 2.5, simulativ untersucht. Es werden Rechnungen zu dem in der Abbildung 2.14 skizzierten Aufbau durchgeführt. Das Modell beinhaltet dabei zwei Leitungen, die durch eine Blende getrennt sind. Es werden folgende Maße für die Analyse verwendet:

Länge der linken Leitung	$L$	800 mm,
Länge der rechten Leitung	$L$	800 mm,
Durchmesser der Leitung	$d$	5 mm,
Dicke der Leitungswand	$w$	2 mm,
Elastizitätsmodul der Leitungswand	$E$	$5 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ ,
Querdehnzahl	$\mu$	0.45,
Dichte der Leitungswand	$\rho_M$	$920 \text{ kg/m}^3$ .

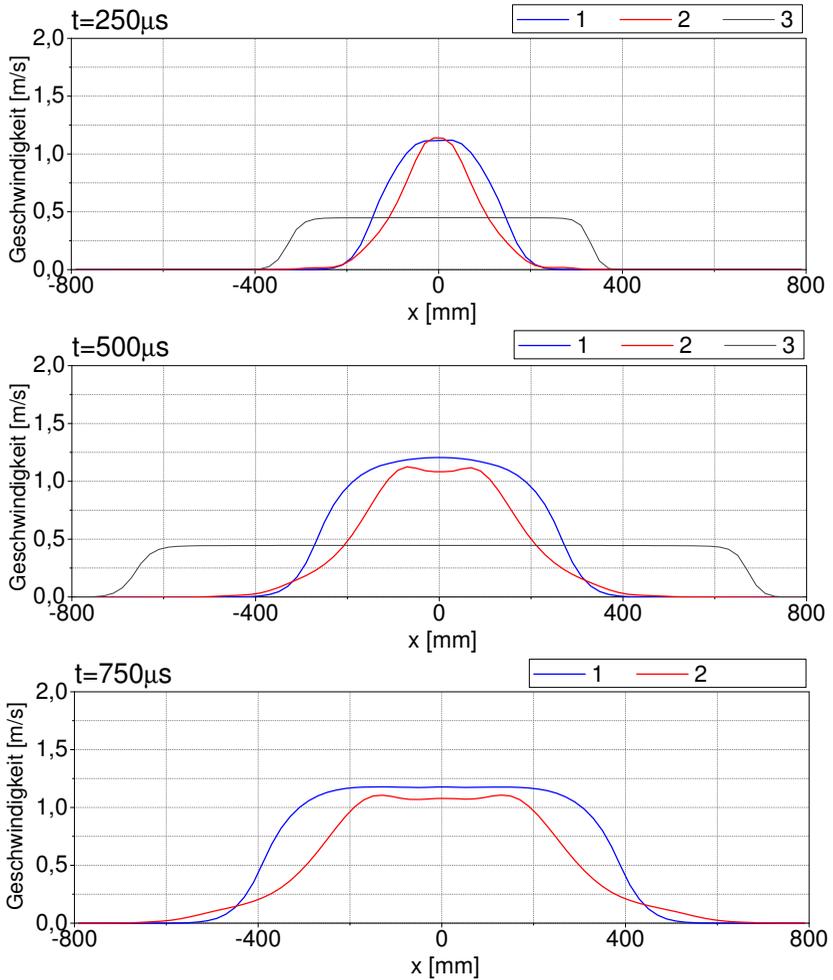
Als Stoffdaten für die Zustandsgleichung wurden in den Rechnungen, die im Abschnitt 2.2 vorgestellte Daten für ISO 1404 eingesetzt und die Diskretisierung erfolgte für jede Rechnung mit  $\Delta x = 2 \text{ mm}$ . Die Abbildung 6.1 stellt die Verteilungen der Druckfunktion in der Leitung und Abbildung 6.2 die Geschwindigkeitsverteilungen, für einen 12 bar zu 10 bar Stoß als Anfangsbedingung, zu drei ausgewählten Zeitpunkten, 250 ms, 500 ms und 750 ms, dar.

Erkennbar in den Ergebnissen sind zum einen eine deutlich stärkere „Verschmierung“ der Wellenfront und zum anderen eine stark sinkende Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen gegenüber der starren Leitung, was ebenfalls aus den Formeln von Korteweg und Kuhl, vgl. Abschnitt 2.5 hervorgeht. Ferner ist eine Ungleichheit in der Ausbreitung der Störung zwischen dem rein statisch und lokal rechnenden Dehnungsmodell und der Modellierung der Wandbewegung mittels einer Wellengleichung zu beobachten. Beim zweiten Modell gehen dem nach links laufenden Stoß, beziehungsweise der nach rechts laufenden Verdünnungswelle, kleinere Störungen voraus. Der Effekt beruht auf der Berücksichtigung der Massenträgheit der Wand innerhalb der Berechnungen.

Um die Güte des Modells bezüglich der wichtigsten Charakteristik, der starken Änderung der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit, zu quantifizieren werden für unterschiedliche Leitungen die Laufzeiten der Störungen ermittelt. Zur Erzeugung einer Vergleichbarkeit mit (2.5.1) und (2.5.2), wird hierbei nur eine sehr kleine Stoßamplitude betrachtet, so dass die Schall-



**Abbildung 6.1:** Druckverteilungen in der Leitung nach dem Öffnen des Ventils: **1:** Lokales Dehnungsmodell, **2:** 2-Parameter Dehnungsmodell mit Wandträgheit nach (2.4.12). **3:** Referenz - starre Leitung.



**Abbildung 6.2:** Geschwindigkeitsveilungen in der Leitung nach dem Öffnen des Ventils:

- 1: Lokales Dehnungsmodell,
- 2: 2-Parameter Dehnungsmodell mit Wandträgheit nach (2.4.12).
- 3: Referenz - starre Leitung.

geschwindigkeit des Fluids,  $c$ , nahezu konstant ist<sup>65</sup>: es wird bei dem oben beschriebenen Setup ein Sprung im Druck von 0.001 bar bei einem Grundniveau von 10 bar angelegt. Für Leitungen mit unterschiedlichen Elastizitätsmodulen der Leitungswand sind die Ergebnisse in der Tabelle 6.1.2 zusammengefasst.

	Elastizitätsmodul [N/mm <sup>2</sup> ]	Laufzeit nach Korteweg [ms]	Laufzeit nach Kuhl [ms]	⋮	Simulierte Laufzeit ( $\mu = 0.3$ ) [ms]	Simulierte Laufzeit ( $\mu = 0.45$ ) [ms]
1	5 000	1.72	1.86	⋮	1.78	1.69
2	1 000	3.66	3.99	⋮	3.81	3.58
3	500	5.15	5.62	⋮	5.37	5.05
4	100	11.44	12.50	⋮	11.94	11.24
5	50	16.17	17.67	⋮	17.06	16.06

**Tabelle 6.1.2:** Errechnete Laufzeiten der Stoßausbreitung für Leitungen mit unterschiedlichen Elastizitätsmodulen.

Weiterhin wird als zusätzliche Gegenüberstellung eine Variation der Wanddicke durchgeführt und jeweils die Ausbreitungszeit der Störung bestimmt. Die Ergebnisse sind in der Tabelle 6.1.3 dargestellt.

Anhand beider Vergleiche wird nochmals deutlich erkennbar, dass abhängig von der Wandelastizität, der innerhalb eines Aufbaus eingesetzter Leitungen, Ausbreitung transienter Wellen stark variieren kann, was zur Änderung des Verhaltens hydraulischer Systeme führen kann und bei der Simulation zu berücksichtigen ist. Die Verzögerung der Stoßausbreitung wird vom Simulationsmodell sehr gut erfasst, so dass bereits an dieser Stelle erkennbar ist, dass auch durch den Einsatz einer einfachen Beziehung, (2.4.16) zwischen dem Leitungsdruck und der Wanddehnung ein Modell entsteht, welches die

<sup>65</sup>Für das in den Rechnungen verwendete Öl nach ISO 1404 beträgt bei  $T = 25^\circ\text{C}$  ihr Wert 1035 m/s.

	Wanddicke der Leitung [mm]	Laufzeit nach Korteweg [ms]	Laufzeit nach Kuhl [ms]	⋮	Simulierte Laufzeit [ms]
1	3.0	4.21	5.00	⋮	4.08
2	2.5	4.61	5.30	⋮	4.54
3	2.0	5.15	5.62	⋮	5.05
4	1.5	5.93	5.93	⋮	6.64
5	1.0	7.25	6.24	⋮	7.88

**Tabelle 6.1.3:** Errechnete Laufzeiten der Stoßausbreitung für eine Leitung mit  $E = 500 \text{ N/mm}^2$  bei unterschiedlichen Wanddicken.

Hauptcharakteristik der Wellenbewegung in flexiblen Leitungen gut abbildet.

Wie bereits im Abschnitt 4.3 angemerkt, variieren durch den Einsatz unterschiedlicher Kopplungsansätze, die Rechenzeiten der Modelle teilweise stark. Zur Veranschaulichung werden an dieser Stelle die an einem Desktop-Rechner<sup>66</sup> sich für die Simulation ergebenden Rechenzeiten für die konstruierte Implementierungen der entwickelten Modelle gegenübergestellt. Hier werden, um den Effekt des Kopplungsschemas zu separieren, die Anwendungen unterschiedlicher Kopplungsansätze auf das Modell (2.4.16) gegenübergestellt. Das Rechenmodell beinhaltet zwei Leitungen, die in zwei Tests jeweils mit  $\Delta x = 5 \text{ mm}$  und  $\Delta x = 10 \text{ mm}$  diskretisiert werden. Es werden in jedem Test 10 ms simuliert. Die resultierenden Rechenzeiten sind in der Tabelle 6.1.4 zusammengefasst.

Der Vergleich der Rechenzeiten legt nahe, dass der größte Gewinn bezüglich der Rechenzeit sich nicht aufgrund der Modellierung ergibt, sondern auf-

<sup>66</sup>Es wurde, repräsentativ für heute in modellbasierter Produktentwicklung zum Einsatz kommende Rechner, ein PC mit 2.2 GHz 4-Kern Opteron CPU eingesetzt.

		Sim. Zeit für $\Delta x = 10 \text{ mm}$ [s]	Sim. Zeit für $\Delta x = 5 \text{ mm}$ [s]
1	Starre Leitung mit Axworthy- Reibung	10.5	20.8
2	Starre Leitung mit freq.-abhängiger Reibung	13.2	26.3
3	Flex. Leitung mit iterativ-gest. Kopplung	562.5	2239.9
4	Flex. Leitung mit direkter Kopplung	41.2	77.2
5	Flex. Leitung mit direkter Kopplung 2ter Ordnung	45.5	97.9

**Tabelle 6.1.4:** Rechenzeiten bei der Simulation des Stoßproblems von Holmboe und Rouleau für 10 ms Laufzeit und unterschiedlichen Diskretisierungen.

grund des verwendeten Kopplungsschemas. Es ist erkennbar, dass schon bei der Verwendung eines einfachen Modells für die Wandbewegung die Rechenzeiten bei der iterativ-gestaffelten Kopplung stark ansteigen.<sup>67</sup> Aus heutiger Sicht lässt sich sagen, dass die Modelle, die nicht auf lokale Beziehungen wie in Gleichung (2.4.12) oder (2.4.21) zurückgreifen um die Wandbewegung zu beschreiben, sich lediglich für ausgewählte Rechnungen eignen, bei welchen beispielsweise die simulierte Zeit kurz ist und keine große Anzahl von Simulationen notwendig ist.<sup>68</sup> Für allgemeinen Einsatz im industriellen Entwicklungsprozess ist primär die Modellierung, die den Einsatz der entwickelten

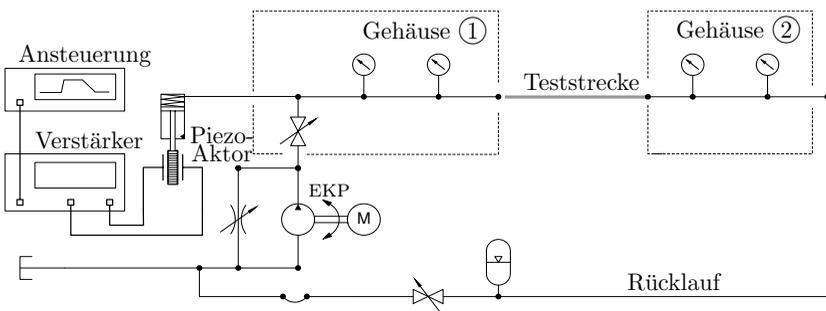
<sup>67</sup>Es sei an dieser Stelle nochmals betont, dass bei Rechnungen mit mehreren Leitungen innerhalb eines Systems der Rechenaufwand deutlich steigt.

<sup>68</sup>Typischerweise entsteht ein großer Bedarf an Rechnungen nicht nur durch simulation unterschiedlicher Auslegungsvarianten eines Systems, sondern auch durch Interesse an Berechnungen zum Verhalten in Verschiedenen Betriebsmodi, vgl. Abschnitt 6.3.

direkten Kopplung erlaubt, von Interesse, auch unter der Prämisse genauere Modelle für die Wandbewegung nicht anwenden zu können.

## 6.2 Validierung an einem charakteristischen Testaufbau

Ein Analogon zu dem theoretischen Stoßproblem wurde im Rahmen dieser Arbeit an einem Testaufbau erstellt. Das Ziel bestand nicht nur in der Konstruktion eines Validierungsbeispiels, sondern auch in Entwicklung einer Möglichkeit die in der Entwicklung verwendeten Schlauchleitungen zu charakterisieren und deren Modelle parametrisieren zu können. Der prinzipielle Aufbau des als Druckpulsgeber bezeichneten Prüfstands gestaltet sich folgendermaßen: eine Leitung wird zwischen zwei Gehäuse eingespannt. Jedes Gehäuse verfügt über je eine Bohrung, die in beiden Fällen Verlängerungen der eingespannten Leitung bilden. Im *vorderen Gehäuse* (Gehäuse ①, Abb. 6.4) befindet sich ein Piezo-Aktor, der einen in der Bohrung platzierten gefederten Kolben bewegen kann. Das *hintere Gehäuse* (Gehäuse ②, Abb. 6.4) besitzt eine Durchgangsbohrung, am dessen hinteren Ende eine starre Leitung angebracht ist. Diese ist spiralförmig und 21 Meter lang. Sie dient als Auslauf für die erzeugten Drucksignale und verzögert ihre Reflektionen. Das Ende der langen Leitung führt zurück in den Tank und wird während eines Tests verschlossen. Ferner ist hinter der spiralförmigen Rückleitung ein Druckausgleichsbehälter angebracht.

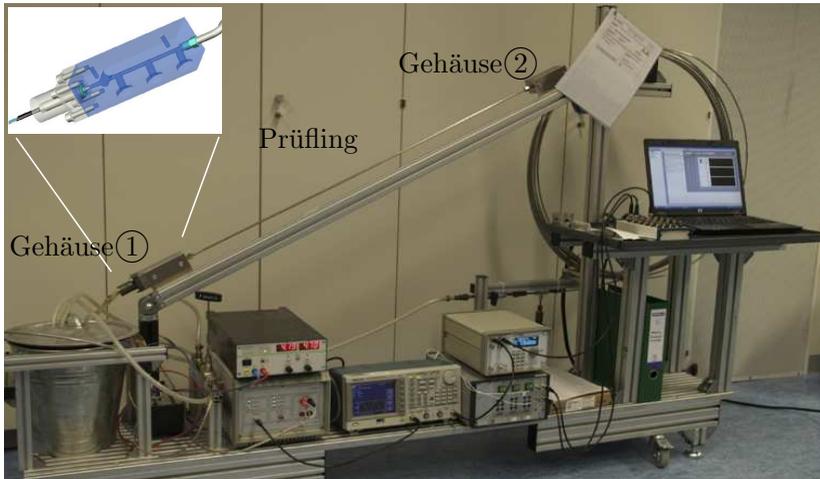


**Abbildung 6.3:** Schematischer Aufbau des Druckpulszeugers.

Um die Teststrecke spülen und von Luftblasen befreien zu können, ist am vorderen Gehäuse eine elektrische Kraftstoffpumpe (EKP) angeschlossen.

Während eines Tests wird die Zulaufleitung verschlossen. Der Verschluss ist so konzipiert, dass nach dem Verschließen keine Verzweigung zwischen der Zulaufleitung und der Bohrung im vorderen Gehäuse mehr vorhanden ist.

Für alle experimentelle Untersuchungen wurde als Fluid ISO 1404 eingesetzt. Der Prüfstand ist in den Abbildungen 6.3 und 6.4 dargestellt.



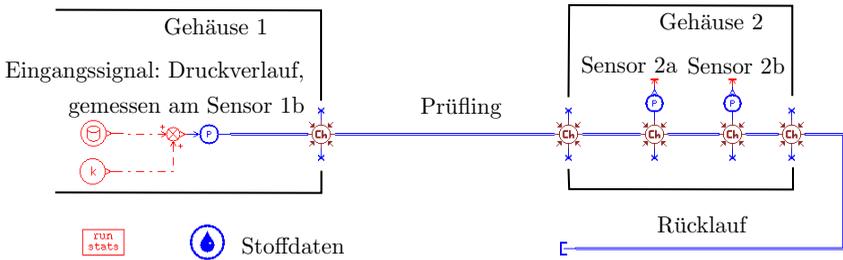
**Abbildung 6.4:** Druckpulserzeuger.

Der Pulstest wird wie folgt durchgeführt: Nach dem Entlüften werden die Ventile verschlossen, so dass der gesamte hydraulische Pfad frei von Querschnittsprüngen ist.<sup>69</sup> Durch die Ansteuerung des Piezo-Aktors mit einer schnell ansteigenden Spannungsflanke wird dieser zum raschen Ausdehnen gebracht. Der dadurch in Bewegung gebrachte Kolben erzeugt einen kurzen Druckpuls, der sich durch die Leitung ausbreitet. Mit Sensoren im vorderen Gehäuse wird das Eingangssignal erfasst und mit denen im hinteren Gehäuse das Ausgangssignal. Durch den einheitlichen Querschnitt des hydraulischen Pfades können Reflektionen ausgeschlossen werden. Dies erlaubt die folgende Vereinfachung in der Modellierung des Pulsversuchs. Statt die Ausdehnung des Aktors und die Bewegung des Kolbens abzubilden, wird der

---

<sup>69</sup>Die Bohrungen in den Gehäusen sowie die Rücklaufleitung haben einen Durchmesser von 3 mm, so dass für Prüflinge mit 3 mm Durchmesser der hydraulische Pfad eine einheitliche Querschnittsfläche besitzt. Konzeption eines Prüfstandes für andere Prüflinge wurde im Anschluss an die vorliegende Arbeit aufgenommen, vgl. Kap. 7.

im vorderen Gehäuse gemessene Druckverlauf als Eingangssignal im Simulationsmodell verwendet und innerhalb der Berechnungen wird nur der Teil des Prüfstandes berücksichtigt, der sich hinter dem entsprechenden Sensor befindet. Die Abbildung 6.5 zeigt den Sketch des Simulationsmodells des Pulsversuchs.

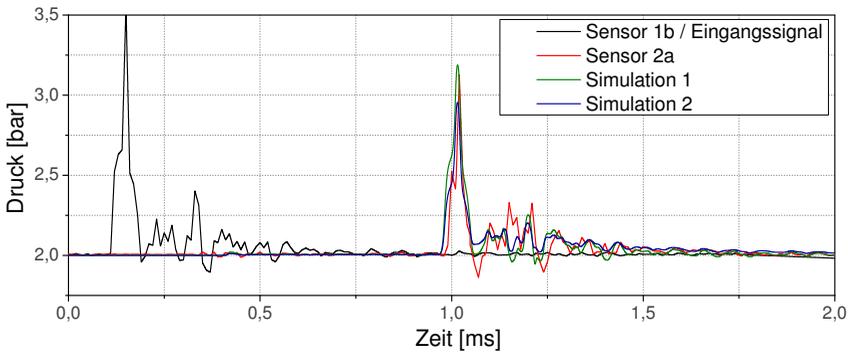


**Abbildung 6.5:** Sketch des Druckpulsenerzeugers in AMESim.

Für die Validierung des Referenz-Modells selbst, sowie für den Test des Strömungslösers und der Reibungsmodellierung eignet sich ein Test mit einer Stahlleitung. Für den Bereich der am Prüfstand applizierten Drücke, 0 - 4 bar, kann ihre Dehnung vernachlässigt werden. Für eine 1100 mm lange Leitung, die im Modell mit 220 Punkten diskretisiert wurde, zeigt die Abbildung 6.6 den gemessenen und den berechneten Druckverlauf am ersten Drucksensor in dem hinteren Gehäuse. Bei den Messdaten handelt es sich dabei um eine Mittlung aus 50 Einzelmessungen. Auf einem 2.2 GHz Opteron betrug die Rechenzeit für das Modell ohne Flexibilität und ausgestattet mit frequenzabhängiger Reibung 19 Sekunden, und ausgestattet mit beschleunigungsabhängigen Reibungsansätzen ungefähr 16 Sekunden.

Sehr gute Übereinstimmungen der Druckverläufe zeigen, dass die Modellierung des Aufbaus prinzipiell richtig ist und dass die konstruierte Implementierung der Godunov-Typ Methode zur Berechnung der Strömungsgleichungen gewünschte Güte aufweist. Der Einfluss der Reibung ist an der Differenz der Spitzendrücke der gemessenen Ein- und Ausgabesignale erkennbar. Wie erwartet, erfasst der beschleunigungsabhängige Ansatz in diesem hochdynamischen Fall die Form des Stoßes etwas besser als der frequenzabhängige.

Zur Validierungszwecken wurden die Pulsausbreitungen in Kunststoffleitungen unterschiedlicher Wandstärken, sowie in mehrschichtigen Schlauch-



**Abbildung 6.6:** Pulsversuch mit einer Stahlleitung als Prüfling.  
**Simulation 1:** Starre Leitung mit frequenzabhängiger Reibungsbesimmung,  
**Simulation 2:** Starre Leitung mit beschleunigungsabhängiger Reibungsbesimmung nach Axworthy et al.

leitungen, die im Abschnitt 2.4 beschrieben sind, gemessen. Vorweggenommen sei an dieser Stelle bereits gesagt, dass der wichtigste erwartete Effekt, die Verzögerung des Pulses in Abhängigkeit von der Wandflexibilität, aus den Versuchen klar hervorging.

Große Schwierigkeit beim Vergleich der Rechenergebnisse mit den Messungen sind solche Berechnungen, bei welchen für Elastizitätsmodul für homogene Leitungen Literatur-Werte und für mehrschichtige Leitungen die durch Längsbelastung bestimmten Werte<sup>70</sup> eingesetzt werden, lieferten jedoch stets ungenügende Ergebnisse. Diese, bereits angesprochene Problematik der Bestimmung des effektiven Elastizitätsmoduls kann, für entwicklungsrelevante Berechnungen, anhand der aufgebauten Versuchsanordnung gelöst werden. Durch eine Anpassung des effektiven Elastizitätsmoduls anhand eines Pulsversuchs mittels der Korteweg- beziehungsweise Kuhl-Formel, vgl. Abschnitt 2.5, kann eine Parametrisierung des Leitungsmodells erfolgen und zur Simulation hydraulischer Systeme eingesetzt werden. Diese Vorgehensweise erwies sich in der Praxis als sehr erfolgreich und wird hier etwas genauer erläutert.

<sup>70</sup>Vgl. Abschnitt 2.4.

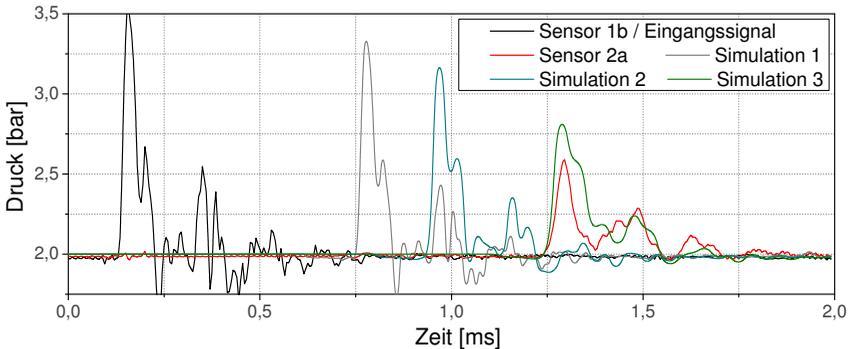
Werden innerhalb einer gewissen hydraulischen Anordnung Leitungen verwendet, für die es den effektiven Elastizitätsmodul zu bestimmen gilt, so kann dies anhand von Vermessungen der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung und anschließendem Einsetzen dieser in die Gleichung (2.5.2) erfolgen. Umformung des entstehenden Gleichnisses nach  $E_\phi$  liefert den gesuchten Wert. Hierzu erfolgt das Approximieren der Signalausbreitungsgeschwindigkeit direkt anhand der Messung:

$$c_{sys} \approx \frac{\Delta x_{sens}}{\Delta t_{mess}}, \quad (6.2.1)$$

mit  $\Delta x_{sens}$  - Abstand zwischen den Drucksensoren und  $\Delta t_{mess}$  gemessene Verzugszeit. Anschließendes Einsetzen in (2.5.2) liefert

$$E_\phi = \frac{2 E_f}{\left( \left( c \frac{\Delta t_{mess}}{\Delta x_{sens}} \right)^2 - 1 \right)} \cdot \frac{(r_0 + s)^2 / s^2 + 1}{(r_0 + s)^2 / s^2 - 1}, \quad (6.2.2)$$

wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit des Fluids bei dem an der Anordnung eingestellten Druckniveau bezeichnet und  $E_f$  entsprechend sein Kompressionsmodul.



**Abbildung 6.7:** Pulsversuch mit einer 755 mm langen PVC-Leitung mit 3 mm Wandstärke als Prüfling.

**Simulation 1:** Referenz - starre Leitung,

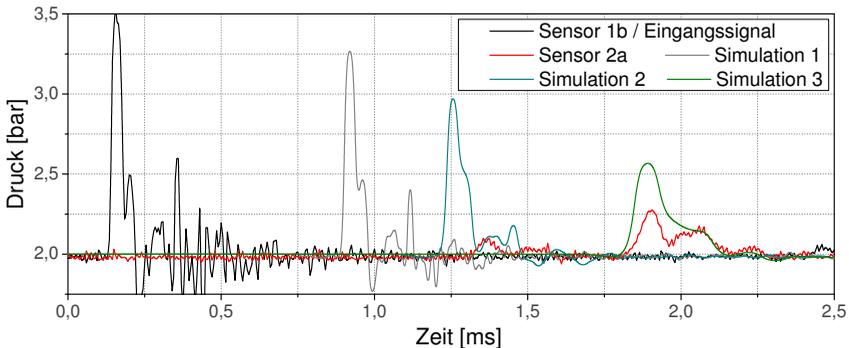
**Simulation 2:**  $E = 2700 \text{ N/mm}^2$

**Simulation 3:**  $E = 690 \text{ N/mm}^2$ .

Mit dem auf diese Weise ermittelten Wert für den effektiven Elastizitätsmodul kann das Leitungsmodell parametrisiert werden. Als Beispiel veran-

schaulich die Abbildung 6.7 die Ergebnisse der Simulationen der Pulsausbreitung mit dem Einsatz des physikalischen und des errechneten Elastizitätsmoduls für eine PVC-Leitung mit 3 mm Wandstärke und stellt diese dem durchgeführten Experiment gegenüber. Bei der Messung handelt es sich wieder um eine Mittlung aus 60 Einzelversuchen. Der nach (6.2.2) errechnete Elastizitätsmodul beträgt hierbei  $690 \text{ N/mm}^2$ .

Das Einsetzen des errechneten Parameters in das entwickelte Simulationsmodell erzeugt Rechenergebnisse, die die Messung sehr gut reproduzieren. Es lässt sich daraus schließen, dass Leitungsmodelle in Berechnungen von hydraulischen Systemen, bei welchen diese Einsatz finden, durch eine einmalige Vermessung der Pulsausbreitung in ihnen parametrisiert werden können.



**Abbildung 6.8:** Pulsversuch mit einer 945 mm langen PVC-Leitung mit 2 mm Wandstärke als Prüfling.

**Simulation 1:** Referenz - starre Leitung,

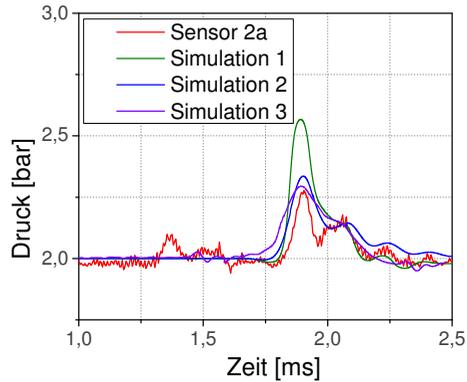
**Simulation 2:**  $E = 2700 \text{ N/mm}^2$

**Simulation 3:**  $E = 460 \text{ N/mm}^2$ .

Es werden ferner die Ergebnisse der Vermessungen einer zur aus der Abbildung 6.7 analog strukturierten Leitung mit kleinerer Wandstärke vorgestellt. Der nach (2.5.2) aus der Messung (vgl. Abbildung 6.8) resultierende Wert für das effektive Elastizitätsmodul<sup>71</sup> lautet  $460 \text{ N/mm}^2$ .

<sup>71</sup>Wegen des analogen Aufbaus ergibt sich ein ähnlicher Wert zu der oben erwähnten Leitung, der sich wieder stark vom physikalischen E-Modul des verwendeten Kunststoffes unterscheidet ( $2700 \text{ N/mm}^2$ ).

Auch hier, beim Vorhandensein einer relativ großen Verzögerung in der Signalausbreitung, scheint das Modell den gemessenen Druckverlauf gut abzubilden. Man bemerke jedoch die steigende Abweichung in der Amplitude des Drucksignals zwischen der Rechnung und dem Experiment. Das Einsetzen komplexerer Modelle für die Wandbewegung<sup>72</sup> zeigt bezüglich dieses Punkts deutlich bessere Ergebnisse. Zum Vergleich sind drei Berechnungen unter der Verwendung der Modelle (2.4.16) (Simulation 1), (2.4.21) (Simulation 2) und (2.4.12) (Simulation 3) in der Abbildung 6.9 gegenübergestellt.



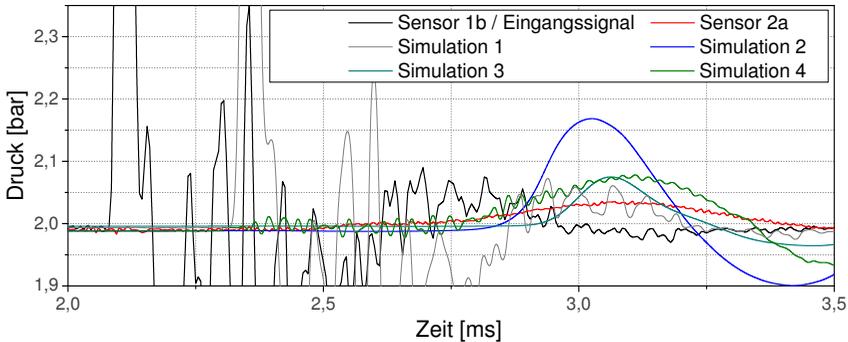
**Abbildung 6.9:** Vergleich der Wandbewegungsmodelle anhand Berechnung der Pulsausbreitung in einer PVC-Leitung.

Die Anwendung detaillierterer Modelle erlaubt offensichtlich eine bessere Voraussage bezüglich der Pulsamplitude am hinteren Gehäuse. Für Leitungen, die größere Dehnungen beim Übertragen des erzeugten Pulses erfahren, als die oben erwähnten PVC-Leitungen, ist der Effekt der Unterschätzung der Pulsamplitude am zweiten Gehäuse durch einfache Dehnungsmodellierung noch stärker ausgeprägt. Zur Veranschaulichung wird an dieser Stelle ein Vergleich zwischen der Messung und den Rechnungen für die mehrschichtige Gummi-Leitung aus dem Abschnitt 2.4 präsentiert.<sup>73</sup> Die Ergebnisse sind in der Abbildung 6.10 zusammengefasst. Das Einsetzen der Modelle nach (2.4.21) beziehungsweise nach (2.4.12) verbessert zwar wieder die Genauigkeit der Rechnung, die Amplitude des ankommenden Pulses bleibt jedoch in der Rechnung stets über der Gemessenen.

Es ist zu erkennen, dass mit dem auf Gleichung (2.4.12) basierenden Modell das „Zerlaufen“ des Pulses gut erfasst wird. Der maximal erreichte Druck übersteigt jedoch auch beim Einsetzen dieses Modells in der Rechnung den

<sup>72</sup>Unter der Verwendung des Schemas aus der Abbildung 4.3 zur Kopplung der Löser.

<sup>73</sup>Vgl. Abbildung 2.12.



**Abbildung 6.10:** Pulsversuch mit einer 250 mm langen mehrschichtigen Gummi-Leitung mit 3 mm Wandstärke als Prüfling.

**Simulation 1:** Referenz - Starre Leitung,

**Simulation 2:** Modell nach (2.4.16)

**Simulation 3:** Modell nach (2.4.21)

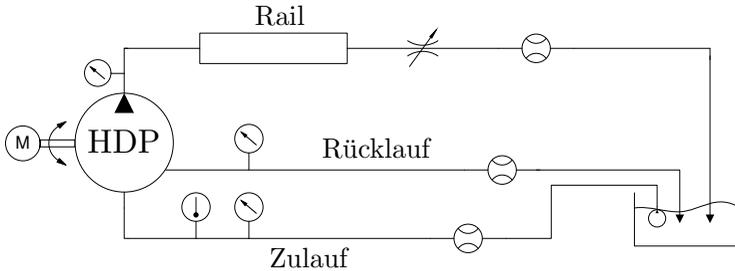
**Simulation 4:** Modell nach (2.4.12).

maximalen Druck aus dem Versuch. Der Grund für diese Unterschätzung der Dämpfung liegt an den Ansätzen für den Impulsverlust in der Leitung. Sowohl die Modellierung unter der Verwendung der frequenzabhängigen Reibung nach Zielke, (vgl. (2.6.10)), wie auch der beschleunigungsabhängigen nach Axworthy et. al (vgl. (2.6.16)) bildet Ansätze, die auf Untersuchungen zur starren Leitungen ihren Ursprung nehmen. Konstruktion neuer Modelle zur Approximation der Impulsverluste in flexiblen Leitungen ist zum heutigen Zeitpunkt Gegenstand laufender Untersuchungen, vgl. Kapitel 7.

### 6.3 Anwendung des Modells in praxisbezogenen Rechnungen

Abschließende Validierungsrechnungen zur Bewertung des konstruierten Simulationsmodells wurden anhand von Simulationen einer Hochdruckpumpe (HDP) aus der Produktpalette der Robert Bosch GmbH durchgeführt. Die Vermessung wurde innerhalb des in der Abbildung 6.11 dargestellten Aufbaus durchgeführt. Der Aufbau präsentiert einen Prototypen eines Einspritzsystems, in welchem typischerweise die vorliegende Hochdruckpumpe

eingesetzt wird. Lediglich wurde bei der Vermessung auf den Einsatz der Einspritzdüsen verzichtet. Sowohl der Zulaufpfad, wie auch der Rücklaufpfad des Aufbaus bestehen aus mehreren flexiblen Leitungen<sup>74</sup>, so dass der Einsatz des entwickelten Berechnungsmodells möglich und notwendig ist.



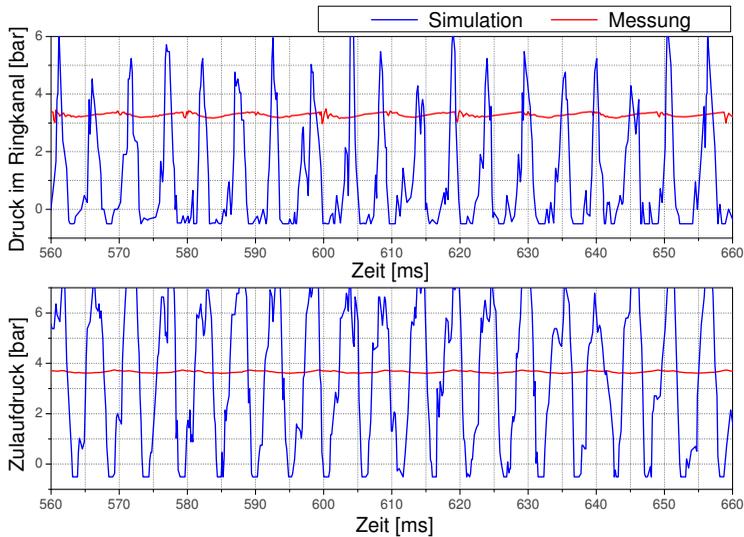
**Abbildung 6.11:** Schematischer Aufbau der Vermessung einer Hochdruckpumpe (HDP).

Vor der Implementierung des im Lauf dieser Arbeit entwickelten Modells wurden analoge hydraulische Anordnungen ohne Berücksichtigung der Flexibilität der Leitungen rechnerisch abgebildet. Der hier dargestellte Fall stellt jedoch ein Beispiel für ein System dar, bei welchem durch diese Vereinfachung hervorgerufene Ungenauigkeiten in der Berechnung der Wellenausbreitung zu einer starken Verfälschung der Rechenergebnisse der Gesamtsimulation führen, so dass ein Abbilden des gemessenen Verhaltens nicht möglich ist. Großen Einfluss auf die Ergebnisse der Gesamtrechnung hat die Nähe des Betriebsdrucks am Phasenübergang, so dass Überschätzungen eines Druckeinbruchs im Zulauf, beispielsweise durch leichte Überschätzung der Druckamplituden, zu einem rechnerisch ermittelten Zustand führen, der lokal Gasphase im System darstellt. Dies führt oft zu Ausbreitung starker unphysikalischer Schwingungen im System und verfälscht die Simulationsergebnisse. Zur Veranschaulichung der Problematik sind in der Abbildung 6.12 ausgewählte Ergebnisse einer Rechnung dargestellt, die ohne den Einsatz der entwickelten Leitungsmodelle durchgeführt wurden<sup>75</sup>, sondern bei welchen auf das Rechenmodell einer starren Leitung zurückgegriffen wurde.

---

<sup>74</sup>Sowohl Zu- wie auch Rücklaufpfad beinhalten bei dem Aufbau je drei Abschnitte, die durch flexible Schlauchleitungen realisiert sind.

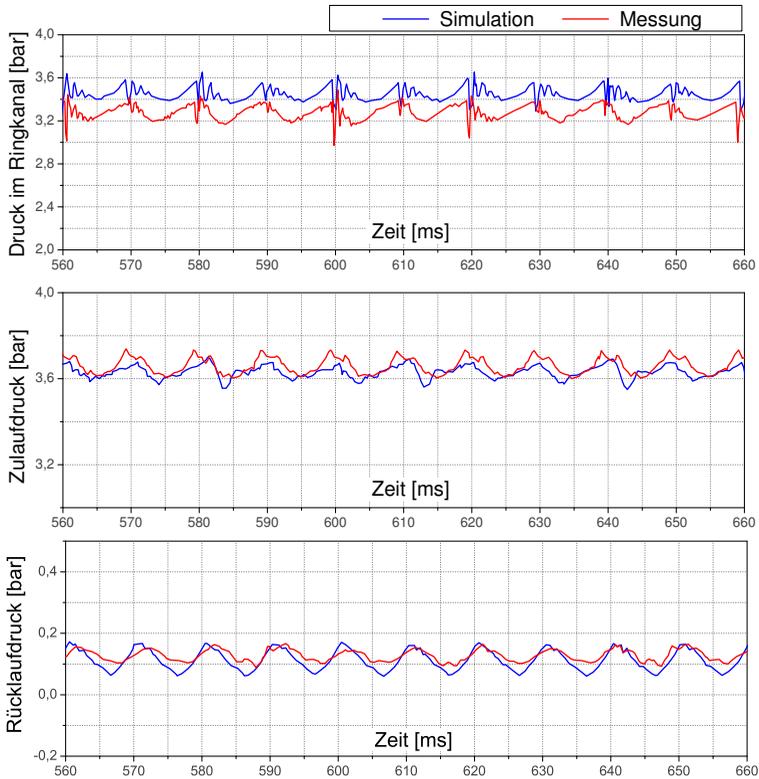
<sup>75</sup>Vorhandensein solcher Ergebnisse im Bezug auf den Vergleich zwischen Experimenten und Berechnungen bei einigen Systemen waren der Ausgangspunkt für die vorliegende Arbeit, vgl. Kapitel 1.



**Abbildung 6.12:** Ausgewählte Druckverläufe im Vergleich zwischen einer Vermessung und einer Berechnung der Hochdruckpumpe bei 1000 U/min bei Verwendung des Modells für starre Leitung.

Die im Niederdruckbereich des Prüfstandes errechnete Schwingungen beeinflussen auch die Ergebnisse im Hochdruckbereich, so dass keine Vorhersage über das Verhalten der Pumpe möglich ist. Dem gegenüber sind in den Abbildungen 6.13 und 6.14 Rechenergebnisse präsentiert, die mittels Simulation unter der Verwendung des Wandbewegungsmodells nach (2.4.16) und der in der in der Arbeit entwickelten Numerik mit direkter Kopplung, vgl. Abbildung 4.4, erzeugt wurden.

Die errechneten Druckverläufe für den 1000 U/min Betriebspunkt sind als sehr gut im Vergleich zu den gemessenen zu bewerten. Die erreichte Qualität ist hier in erster Linie auf das präzise Abbilden der Signalausbreitungsgeschwindigkeit in den Leitungen, und somit auch der Eigenfrequenz des Systems, zurückzuführen. Für den 2000 U/min Betriebspunkt scheinen vor allem im Rücklauf bei den gemessenen Verläufen kurze Druckpeaks aufzutreten, welche in der Rechnung nicht erfasst werden. Diese beruhen auf stärkere Ausgasungsvorgänge, die in der Pumpe bei höheren Drehzahlen

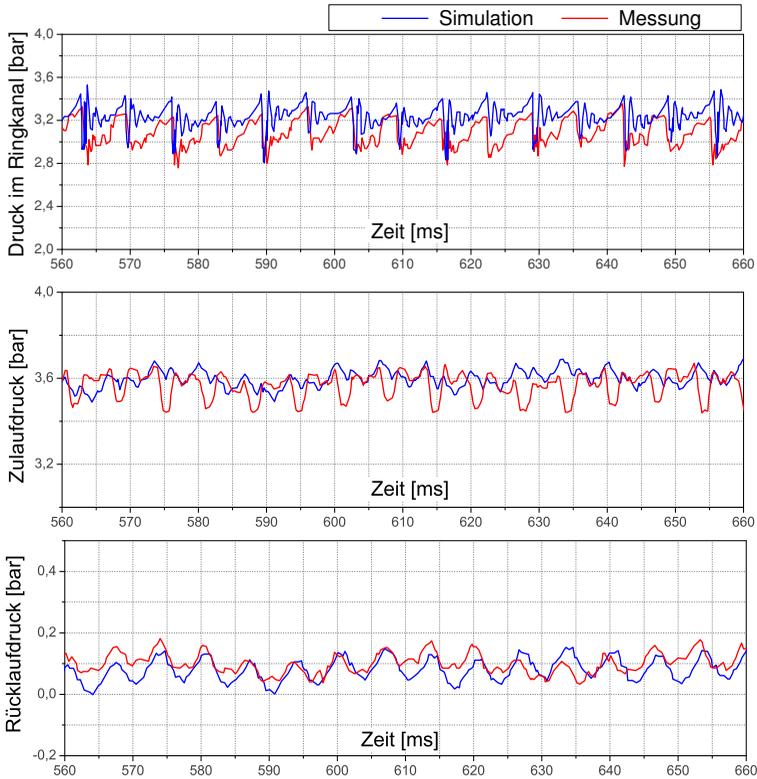


**Abbildung 6.13:** Ausgewählte Druckverläufe bei der Vermessung der Hochdruckpumpe bei 1000 U/min.

identifiziert wurden.<sup>76</sup> Komplexe dynamische Modelle zur Abbildung solcher Vorgänge sind zur Zeit der Untersuchung Gegenstand der Forschung. Zum Einsatz innerhalb der Pumpenberechnung liegen Modelle entsprechend dem homogenen Gemischmodell (vgl. Abschnitt 2.2) vor, welche entsprechende Ungenauigkeiten in den Rechnungen erzeugen.

Zusammenfassend lässt sich aus den Validierungsrechnungen postulieren, dass bei den Berechnungen, welche zyklische Vorgänge abbilden der Ein-

<sup>76</sup>Identifikation erfolgte mittels Hochgeschwindigkeitsaufnahmen durch einen optischen Zugang.



**Abbildung 6.14:** Ausgewählte Druckverläufe bei der Vermessung der Hochdruckpumpe bei 2000 U/min.

satz des vereinfachten Modells für die Wandbewegung nach (2.4.16) mit der hierzu entwickelten Numerik ((4.3.1), (4.3.5)) als geeignet anzusehen ist. Die erste Priorität bei diesen Rechnungen bildet das Erfassen der realen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung innerhalb von Leitungen, was beim Einsatz des Modells gegeben ist. Sind gewisse Stoßvorgänge in einem System simulativ abzubilden, wie beispielsweise ein Absteuervorgang an einem Ventil, so bringt das Verwenden des lokalen Modells Ungenauigkeiten im Bezug auf die Veränderung des Signals. Bei solchen Rechnungen erzeugt im Allgemeinen das eindimensionale Dehnungsmodell mit Berücksichtigungen der Massenträgheit nach (2.4.12) genauere Ergebnisse.

# Zusammenfassung und Ausblick

Leitfaden der Arbeit war die Entwicklung eines Modells zur Berechnung des transienten Verhaltens flexibler hydraulischer Leitungen. Hierzu wurden einige Einschränkungen bezüglich des abzubildenden Verhaltens getroffen, auf deren Basis Modellgleichungen hergeleitet wurden, die mittels quasi-zweidimensionaler Formulierung die Wellenausbreitung innerhalb einer Leitung beschreiben. Es wurden dabei zum einen detaillierte Analysen der Eigenschaften der Zustandsgleichung durchgeführt und zum anderen wurden einige bekannte Modelle zur Berechnung der Reibungsverluste in Leitungen präsentiert und so angepasst, dass diese innerhalb der im Lauf der Arbeit konstruierten numerischen Schemata einsetzbar waren. Die Charakterisierung der Bewegung der Leitungswand wurde mit mehreren unterschiedlichen Ansätzen modelliert, so dass abhängig von deren Struktur geeignete Schemen zur Behandlung des gesamten Gleichungssystems notwendig wurden. Der numerische Zugang zu den Erhaltungsgleichungen der Strömung wurde mittels einer Godunov-Typ-Methode zweiter Ordnung realisiert, so dass die Schlüsselfrage nach der Konstruktion eines numerischen Schemas zur Diskretisierung des Gesamtsystems primär sich durch die Fragestellung nach der Einbindung der Wandbewegungslöser in ein Godunov-Typ-Verfahren definierte. Als essentiell für die Erhaltungseigenschaften des Rechenschemas stellte sich die verwendete Ausgangsformulierung heraus, auf deren Basis die Diskretisierung des Systems erzeugt wurde.

Die Einbindung der Lösungsalgorithmen für Strukturgleichungen in das Berechnungsschema für die Strömungsgleichungen wurde zunächst sequentiell und iterativ-gestaffelt realisiert. Im ersten Ansatz wurde nach jedem FVM-Schritt der Verlauf der Leitungswandbewegung für den entsprechenden Zeitschritt bestimmt, wobei der Fluid-Zustand als Randbedingung ver-

wendet wurde. Beim gestaffelten Ansatz wurde die gleiche Vorgehensweise abwechselnd auf die Fluid- und die Strukturgleichungen angewendet und der Zeitschritt wurde immer wieder neu durchgeführt. In der Implementierung zeigte sich, dass der sequenzielle Ansatz jedoch nicht stabil und der iterativ-gestaffelte sehr rechenintensiv ist, sogar für einfache Modelle für die Wandbewegung. Zur Konstruktion eines Modells, welches von den Rechenzeiten her in einen breiteren Anwendungsgebiet innerhalb von Berechnungen komplexer hydraulischer Systeme applizierbar ist, wurde für einfache Dehnungsmodelle, die nur lokale Beziehungen zwischen dem Druck in der Leitung und der Wandbewegung berücksichtigen, die sogenannte direkte Kopplung entwickelt. Diese beruht auf Transformation der oben genannten lokalen Beziehungen auf ein Nullstellenproblem und transportiert die Berechnung der Wandzustände in das Finite-Volumen-Schema hinein. Ausgehend von diesem Ansatz wurde ein Gesamtalgorithmus zweiter Ordnung konstruiert, indem, entsprechend dem verwendeten MUSCL-Ansatz innerhalb des FVM-Schemas, innerhalb der Rekonstruktion- und Evolutionsprozedur aktuelle Werte für die Wandposition konstruiert wurden. Hierdurch entstand ein numerisches Rechenmodell, welches sowohl die Haupteigenschaften der Wellenbewegung in Schläuchen abbildet wie auch vom Rechenaufwand her sehr gut für den Einsatz innerhalb von Systemsimulationen geeignet ist.

Es wurde ferner ein Ansatz erarbeitet, die entwickelten numerischen Modelle in Berechnungstools umzusetzen, welche innerhalb von Berechnungen hydraulischer Systeme einsetzbar sind. Anschließend wurde eine Implementierung in Simulationsumgebung AMESim durchgeführt.<sup>77</sup> Zur Sicherstellung der Umsetzbarkeit der Modelle in Tools mussten numerische Randbedingungen konstruiert werden, die eine konsistente Interaktion zwischen einem FVM-Schema und einem stetig in der Zeit arbeitenden Verfahren erlauben. Durch diese Randbedingungen wurde eine konsistente Interaktion zwischen den Leitungsmodellen und einem weiteren Element ermöglicht, welches mit der Numerik nach einem beliebigen Ansatz appliziert sein kann. Zur Verifizierung der Modelle wurde ein Prüfstand zur Vermessung der Ausbreitung eines Pulses innerhalb hydraulischer Leitungen aufgebaut und ein Vergleich zwischen vermessenen und berechneten Druckverläufen für ausgewählte Leitungen durchgeführt. Zusätzlich wurde eine Möglichkeit vorgestellt mit Hilfe

---

<sup>77</sup>Unter den Umsetzungen wurde speziell jenes Modell hervorgehoben, welche das Schema mit direkter Kopplung realisiert, da es seit 2008 das Standardwerkzeug zur Abbildung von Schlauchleitungen in modellbasierter Produktentwicklung der Robert Bosch GmbH bildet.

---

des Prüfstandes das effektive Elastizitätsmodul realer Leitungen zur Parametrisierung des Modells zu bestimmen. Ferner wurde eine Simulation eines Prüfstandes zu Pumpenvermessung unter der Verwendung des entwickelten Modells durchgeführt und mit Messungen verglichen, um weitere Charakterisierungen der Modelleigenschaften vorzunehmen.

Diese Arbeit bildet eine Basis für weiterführende Untersuchungen, die in mehrere Richtungen gehen können. Die erste Richtung beinhaltet die Weiterentwicklung der Leitungsmodellierung an sich. Die primär zu erwähnende Erweiterung wäre die Entwicklung der Numerik, die auf direkter Kopplung (vgl. Abschnitt 4.3) basiert und mit einem statischen Wandbewegungsmodell, wie beispielsweise (2.4.21), operiert. Hierzu ist eine effiziente Methode zur Nullstellenbestimmung einer  $N$ -dimensionalen Funktion innerhalb des Schemas aus der Abbildung 4.5 zu implementieren. Die Applizierbarkeit des resultierenden Modells innerhalb von Berechnungen hydraulischer Systeme ist, hinsichtlich der Rechenzeit nachzuweisen. Zusätzlich muss die Modellierung der Impulsverluste in flexiblen Leitungen anhand weiterer experimenteller und theoretischer Untersuchungen erweitert werden. Im Abschnitt 6.2 dieser Arbeit wurde anhand der Vermessung von Pulsausbreitungen in flexiblen Leitungen und Vergleiche der Ergebnisse mit Berechnungen gezeigt, dass für steigende Dehnung der Leitung die Modellierung der Impulsverluste die reale Verluste unterschätzt. Dies wurde bereits [PB07] vermutet. Daraus folgt, dass die Reibungsbehandlung für das Leitungsmodell weiterentwickelt werden muss. Ein naheliegender Ansatz ist eine Konstruktion komplexerer Funktionen für die Gewichtungen  $K_{Bru}$  beziehungsweise  $K_{Ax}$  innerhalb der beschleunigungsabhängigen Modellierungen (2.6.16) beziehungsweise (2.6.11), so dass diese um Abhängigkeiten von lokalen Querschnittflächen erweitert werden. Zum Anfertigungszeitpunkt der Arbeit werden an der Robert Bosch GmbH Untersuchungen experimenteller Natur zur dieser Frage durchgeführt.

Weiterer Punkt des möglichen Ausbaus durchgeführter Modellierungsuntersuchungen ist die Übertragung der in Abschnitten 4.2 und 4.3 konstruierten numerischen Berechnungsschemata auf eine, aus heutiger Sicht der größten Herausforderung in Simulation hydraulischer Systeme - Berücksichtigung des Einflusses der Luftausgasung auf transiente Wellenausbreitung innerhalb der Systemsimulationen. Der Ansatz hierfür ist die Beobachtung, dass beim Vorhandensein einer Gasphase in der Leitung getrennt von der Fluidsäule, die eindimensionale Erhaltungsgleichungen (2.2.16) noch immer zur Abbildung der transienten Wellenausbreitung in der Fluidsäule verwen-

det werden können. Dies bedeutet, dass beim Vorhandensein eines Ausgansmodells und einer Beziehung für die Querschnittfläche der Fluidsäule in Abhängigkeit vom Druck und vom Gasanteil eine analoge Vorgehensweise zum Schema aus der Abbildung 4.4, beziehungsweise 4.5, zur Berechnung der Fluidzustände in der Leitung verwendet werden kann. Die Reibungsmodellierung muss jedoch hierfür neu entwickelt werden, da die Gasphase üblicherweise in der Fluidphase verteilt ist und somit das Geschwindigkeitsprofil des Fluids beeinflusst. Der Schlüsselpunkt bei diesen Untersuchungen bleibt die Entwicklung von Modellen für die Bildung und den Transport der Gasphase, die innerhalb von Systemsimulationen verwendet werden können.

Schließlich gilt zu erwähnen, dass analog zu der konstruierten Behandlung der Randbedingung zur Integration der Leitungsmodelle in Systemsimulationsumgebung, eine Schnittstelle zwischen einem 3-D Finite-Volumen-Verfahren Code und einem Systemsimulationstool entwickelt werden kann. Dieses Thema wird zum momentanen Zeitpunkt in Nachfolgeuntersuchungen betrachtet.

Die Entwicklung eines universell einsetzbaren und schnellen Berechnungsmodells zur Abbildung der transienten Wellenbewegungen in flexiblen Leitungen, die in dieser Arbeit vorgenommen wurde, ist ein wichtiger Schritt im Bereich der Berechnungen hydraulischer und mechatronischer Systeme. Um so wichtiger scheint es aus heutiger Sicht eine konsequente Weiterentwicklung der Modellierung und der Berechnungsschemata an den oben angesprochenen Punkten zu sein. Nur durch möglichst genaue rechnerische Abbildung der Vorgänge in Gesamtsystemen lässt sich ein tieferes Verständnis in der Produktentwicklung gewinnen und moderne Produktentwicklungsprozesse lassen sich optimieren.



# A Mathematische Ergänzungen

## A.1 Funktionalanalytische Definitionen

**Definition A.1** (Totale Variation). Für eine auf  $\mathbb{R}$  definierte Treppenfunktion

$$Q(x) = Q_i, \quad \text{für } x \in [x_i, x_{i+1}) \quad (\text{A.1.1})$$

wird die *Totale Variation* wie folgt definiert:

$$TV(Q) := \sum_{i=-\infty}^{\infty} |Q_i - Q_{i-1}|. \quad (\text{A.1.2})$$

Für eine beliebige Funktion  $q$  ist die Totale Variation durch folgende Gleichung gegeben:

$$TV(q) := \sup \sum_{j=1}^N |q(\xi_j) - q(\xi_{j-1})|, \quad (\text{A.1.3})$$

wobei der Supremum über alle Unterteilungen der reellen Zahlen genommen wird:  $-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_N = \infty$ .

**Satz A.1** (Reynolds'scher Transportsatz). *Es sei  $\rho : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetig differenzierbare Dichtefunktion, und  $\phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar. Dann gilt für jedes beschränkte Kontrollvolumen die Gleichung:*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} = \int_{\Omega(t)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{y}, t) + \operatorname{div} \left( (\rho(\mathbf{y}, t) \mathbf{v}(\mathbf{y}, t)) \right) \right] \, d\mathbf{y}. \quad (\text{A.1.4})$$

*Beweis.* Es notiere  $J(\mathbf{x}, t) := \det \nabla_{\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}, t)$ . Es wird zunächst folgende Umformung durchgeführt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega(0)} \rho(\phi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega(0)} \frac{d}{dt} \left[ \rho(\phi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) \right] \, d\mathbf{x} \tag{A.1.5} \\
 &= \int_{\Omega(0)} \left[ \frac{d}{dt} \rho(\phi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) + \rho(\phi(\mathbf{x}, t), t) \frac{d}{dt} J(\mathbf{x}, t) \right] \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Weiterhin wird die Kettenregel auf beide differentielle Terme der rechten Seite angewendet:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \rho &= \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial \phi_j} \rho \frac{\partial}{\partial t} \phi_j + \frac{\partial}{\partial t} \rho \tag{A.1.6} \\
 &= \nabla_{\mathbf{y}} \rho \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial t} \rho,
 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{v}. \tag{A.1.7}$$

Durch das Einsetzen der beiden letzten Gleichungen in (A.1.5) erhält man

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y} &= \int_{\Omega(0)} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_{\mathbf{y}} \rho \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div} \mathbf{v} \right] J(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) \, d\mathbf{y} \\
 &= \int_{\Omega(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) \right) \, d\mathbf{y}
 \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

## A.2 Voigt'sche Notation

Die Voigt'sche Notation ist eine modifizierte Schreibweise der symmetrischen Tensoren der zweiten oder höherer Stufe durch das Ausnutzen der Symmetrie. Hierbei werden die Koeffizienten mit ungleichen Indizes nur einmal notiert. Die Reihenfolge wird bei dieser Schreibweise ebenfalls angepasst:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 1/2\varepsilon_6 & 1/2\varepsilon_4 \\ & \varepsilon_2 & 1/2\varepsilon_4 \\ & & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}. \tag{A.2.1}$$

## A.3 Banach'scher Fixpunktsatz

**Satz A.2.** *Ist  $A \subseteq V$  eine abgeschlossene und nicht leere Menge in einem vollständigen normierten Raum  $V$ , und ist  $g : A \rightarrow A$  eine Abbildung mit*

$$\|g(x) - g(y)\| \leq q \|x - y\|, \quad \text{für alle } x, y \tag{A.3.1}$$

*für ein  $0 \leq q < 1$ , dann besitzt  $g$  genau einen Fixpunkt, d.h. es existiert genau ein  $x \in A$  mit  $g(x) = x$ .*

*Beweis.* Sei  $x_0 \in A$  beliebig gewählt. Die Folge  $(x_n)_{n=0}^\infty$  sei rekursiv definiert durch  $x_{n+1} = g(x_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Es gilt

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \|g(x_n) - g(x_{n-1})\| \leq q \|x_n - x_{n-1}\|. \tag{A.3.2}$$

Induktiv erhält man

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_1 - x_0\|. \tag{A.3.3}$$

Für  $1 \leq n < m$  gilt damit

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k - x_{k-1}\| \leq \left( \sum_{k=n+1}^m q^{k-1} \right) \|x_1 - x_0\| \\ &\leq \left( q^n \sum_{k=n+1}^m q^k \right) \|x_1 - x_0\| = \frac{q^n}{1-q} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \tag{A.3.4}$$

Wegen  $q_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  ist  $(x_n)$  somit eine Cauchy-Folge. Diese ist aufgrund der Vollständigkeit von  $V$  konvergent. Ferner gilt wegen der Abgeschlossenheit von  $A$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n \in A$ .

Da  $g$  stetig ist, gilt:

$$\tilde{x} := \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_{n-1}) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = g(\tilde{x}). \tag{A.3.5}$$

Somit ist  $\tilde{x}$  ein Fixpunkt von  $g$ .

Ist  $\hat{x}$  ein weiterer Fixpunkt, so folgt aus

$$\|\tilde{x} - \hat{x}\| = \|g(\tilde{x}) - g(\hat{x})\| \leq q \|\tilde{x} - \hat{x}\| \tag{A.3.6}$$

Die Gleichheit von  $\hat{x}$  und  $\tilde{x}$ :

$$\|\tilde{x} - \hat{x}\| = 0, \tag{A.3.7}$$

womit auch die Eindeutigkeit des Fixpunktes gezeigt ist. □

**Bemerkung A.1.** Wichtige Folgerung aus der Beweisführung des Satzes von Banach ist die Konvergenz der rekursiv konstruierten Folge  $x_{n+1} = g(x_n)$  gegen den Fixpunkt von  $g$ .

## A.4 Nullstellenverfahren von Brent und Dekker

Das Brent-Dekker-Verfahren ist eine Methode zur Nullstellenbestimmung, welche eine Kombination der Ansätze des Bisektionsverfahrens und des Sekantenverfahrens bildet. An dieser Stelle wird nur ein kurzer Überblick über die Funktionsweise der Methode am Beispiel der Nullstellenbestimmung von  $f(x)$  gegeben<sup>78</sup>, mehr zu Randbedingungen und Konvergenzordnung kann in [QSS02] nachgeschlagen werden.

---

<sup>78</sup>Die Stetigkeit von  $f$  im Bereich der Nullstelle wird vorausgesetzt.

Der Algorithmus führt eine Iteration aus, bei welcher drei Approximanden der Nullstelle vorkommen. In den Bezeichnungen hier ist  $b$  die letzte Iterierte, die die beste Approximation der Nullstelle darstellt.  $a$  ist die vorherige Iterierte und  $c$  eine ältere Iterierte, die so gewählt sind, dass  $f(a)$  und  $f(c)$  unterschiedliche Vorzeichen haben. Ferner werden zwei Hilfsgrößen verwendet:  $d$  - eine Korrektur von  $b$  und  $\epsilon$  - vorgegebene Toleranz. Zum Start des Verfahrens wird  $c = b$  gesetzt und die Bedingung  $f(b) \neq 0$  überprüft. Beim Nichterfüllen ist  $b$  die gesuchte Nullstelle und das Verfahren terminiert. Anderenfalls werden folgende Schritte durchgeführt:

1. Gilt  $f(b)f(c) > 0$ , so wird  $c := a$ ,  $d := b - a$  und  $e := d$  gesetzt.
2. Gilt  $|f(c)| < |f(b)|$ , so wird der Austausch  $c := a$ ,  $d := b - a$  und  $c := a$  durchgeführt.
3. Setze  $\delta := 2\epsilon \max(|b|, 1)$  und  $m = \frac{c-b}{2}$ . Gilt  $|m| \leq \delta$  oder  $f(b) = 0$ , so wird der Algorithmus abgebrochen und  $b$  wird als Näherung der Nullstelle von  $f$  zurückgegeben.
4. Wähle Bisektion oder Interpolation:
  - a.) Falls  $|\epsilon| < \delta$  oder  $|f(a)| < |f(b)|$  gilt, so führe einen Bisektionsschritt durch: setze  $d := m$  und  $\epsilon := m$ .
  - b.) • Gilt  $a = c$ , führe eine lineare Interpolation durch: Berechne die Nullstelle der Geraden durch  $(b, f(b))$  und  $(c, f(c))$ . Der errechnete Wert stellt die Korrektur von  $b$  dar. Dies ist ein Schritt des Sekantenverfahrens auf dem Intervall mit  $b$  und  $c$  als Endpunkten.  
 • Gilt  $a \neq c$ , führe inverse quadratische Interpolation aus: konstruiere Polynom zweiten Grades in  $y$ , dass die Punkte  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  und  $(c, f(c))$  interpoliert. Dessen Wert in  $y = 0$  ist die neue Iterande von  $b$ .
5. Aktualisiere die Iterierte: setze  $a := b$  und wenn  $|d| > \delta$  gilt,  $b := b + d$ , anderenfalls  $b := b + \delta \operatorname{sign}(m)$ .

# B Physikalische Ergänzungen

## B.1 Gewichtsfunktion $W_Z$ nach Zielke

Die Approximation der Gewichtsfunktion  $W(\xi)$  wird entsprechend der Arbeit [Hab02] angegeben:

$$W(\xi) \approx \begin{cases} 0.2821 \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi}} - 1.2500 + 1.0579 \sqrt{\xi} + 0.9375 \xi \\ + 0.3967 \sqrt{\xi^3} - 0.3516 \xi^2 & \text{für } \xi \leq 0.02 \\ e^{-26.3744\xi} + e^{-70.8493\xi} + e^{-135.0198\xi} \\ + e^{-218.9216\xi} + e^{-322.5544\xi} & \text{für } \xi > 0.02. \end{cases} \quad (\text{B.1.1})$$

## C Graphiken und Tabellen

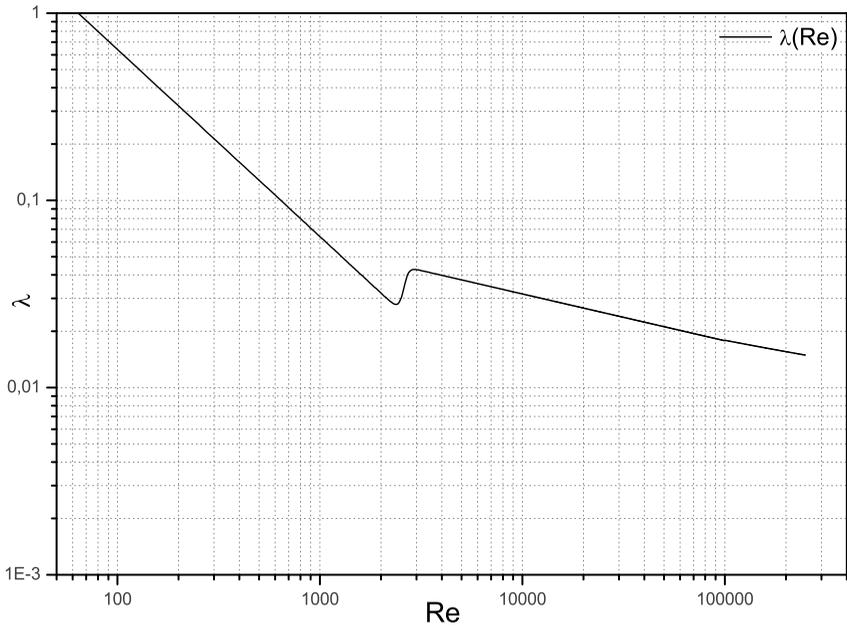


Abbildung C.1: Approximationsfunktion  
des Wandwiderstandsbeiwerts  $\lambda$

# Literaturverzeichnis

- [AGM00] AXWORTHY, David H. ; GHIDAOU, Mohamed S. ; MCINNIS, Duncan A.: Extended Thermodynamics Derivation of Energy Dissipation in Unsteady Pipe Flow. In: *Journal of Hydraulic Engineering* (2000), S. 276–287
- [And02] ANDERSON, John: *Modern Compressible Flow: With Historical Perspective*. McGraw-Hill, 2002
- [BAF85] BEN-ARTZI, Natania ; FALCOVITZ, Joseph: A High-Resolution Upwind Scheme for quasi 1-D Flows. (1985), S. 66–83
- [Bec03] BECK, Mathias: *Modellierung und Simulation der Wellenbewegung in kavitierenden Hydraulikleitungen*. VDI Fortschritt-Berichte, 2003
- [Ber06] BERG, Anselm: *Simulation transienter Leitungsströmungen realer Fluide*, Universität Kassel, Diss., 2006
- [BG97] BEITZ, W. ; GROTE, K.H.: *Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, 19. Auflage*. Springer Verlag: Berlin, Heidelberg, New York, 1997
- [BGG91a] BRUNONE, B. ; GOLIA, U. M. ; GRECO, M.: Modelling of fast transients by numerical methods. In: *Proc. Int. Conference on Hydr. Transients with water column separation* (1991), S. 273–280
- [BGG91b] BRUNONE, B. ; GOLIA, U. M. ; GRECO, M.: Some Remarks on the Momentum Equation for Fast Transients. In: *Proc. Int. Conference on Hydr. Transients with water column separation* (1991), S. 201–209

- [BGG95] BRUNONE, B. ; GOLIA, U. M. ; GRECO, M.: Effects of Two - Dimensionality on Pipe Transients Modeling. In: *Journal of Hydraulic Engineering* (1995), S. 906–912
- [BKMF00] BRUNONE, Bruno ; KARNEY, Brian W. ; MECARELLI, Michele ; FERRANTE, Marco: Velocity Profiles and Unsteady Pipe Friction in Transient Flow. In: *Journal of Water Resources Planning and Management* (2000), S. 236–244
- [Bos06] BOSSEMEYER, H.-G.: Druckwellendämpfung in Schläuchen / Robert Bosch GmbH. 2006. – Forschungsbericht
- [Bra03] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente: Theorie, Schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, 2003
- [BS07] BRENNER, Susanne C. ; SCOTT, L. R.: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, 2007
- [BTW04] BALBÁS, Jorge ; TADMOR, Eitan ; WU, Cheng C.: Non-oscillatory central schemes for one- and two-dimensional MHD equations: I. In: *Journal of Computational Physics* 201 (2004), S. 261–285
- [CB03] CHAPELLE, Dominique ; BATHE, Klaus-Jurgen: *The Finite Element Analysis of Shells - Fundamentals*. Springer, 2003
- [CFL28] COURANT, R. ; FRIEDRICHSAND, K.O. ; LEWY, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. In: *Mathematische Annalen* 100 (1928), S. 32–74
- [Cia88] CIARLET, Philippe G.: *Mathematical Elasticity. Vol. I: Three-Dimensional Elasticity*. North-Holland, 1988
- [Cia90] CIARLET, Philippe G.: *Plates and Junctions in Elastic Multi-Structures*. Masson/Springer, 1990
- [EB07] ETLENDER, Roman ; BAUER, Michael: *Besprechungen des Einsatzes des Leitungsmodells in der Simulation der Hochdruckpumpe CP1H*. 2007
- [EBI08] ETLENDER, Roman ; BRETZ, Nina ; IBEN, Uwe: *Mündliche Diskussionen bezüglich Theorie und Implementierung der Leitungsmodelle*. 2005-2008

- [EBJ08] ETLENDER, Roman ; BERG, Anaselm ; JUNGEMANN, Markus: *Reviews des Projekts ARH-138 und Diskussionen der Leitungsmodelle*. 2005-2008
- [EIB07] ETLENDER, Roman ; IBEN, Uwe ; BISCHOFF, Manfred: Simulation of wave propagation in flexible hoses. In: *Fluid Structure Interaction and Moving Boundary Problems IV*, 2007, S. 131–141
- [Ein88] EINFELD, Bernd: On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 25, No. 2 (1988), S. 294–328
- [Eis04] EISENBEISS, Falk: *Modellierung und Simulation der Wellenbewegung in schwachelastischen Hydraulikleitungen*, Institut für Aerodynamik und Gasdynamik, Universität Stuttgart, Diplomarbeit, 2004
- [Eng02] ENGEL, Martin: *Numerische Simulation von Strömungen in zeitabhängigen Gebieten und Anwendung auf Fluid-Struktur-Wechselwirkungsprobleme*, Institut für Angewandte Mathematik, Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, Diplomarbeit, 2002
- [Gee04] GEE, Michael: *Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik*, Universität Stuttgart, Diss., 2004
- [GF07] GAUL, Lothar ; FISCHER, Martin: Fast multipole boundary element method for the simulation of acoustic-structure interaction. In: *Fluid Structure Interaction and Moving Boundary Problems IV* (2007), S. 313–320
- [GHS02] GROSS, Dietmar ; HAUGER, Werner ; SCHNELL, Walter: *Technische Mechanik 2. Statik; Technische Mechanik 2: Elastostatik*. Springer-Verlag GmbH, Auflage 6, 2002
- [God59] GODUNOV, SERGEJ K. (ГОДУНОВ, Сергей К.) : Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Мат. сборник, 47(89) (1959), S. 271 – 306
- [Gos] GOSSE, Laurent: A nonconservative numerical approach for hyperbolic systems with source terms: the Well-Balanced schemes. In: *internal print: Università degli Studi di Pavia (...)*

- [Hab02] HABR, Klaus: *Gekoppelte Simulation hydraulischer Gesamtsysteme unter Einbeziehung von CFD*, Universität Darmstadt, Diss., 2002
- [Har04] HARNAU, Matthias: *Finite Volumen-Schalenelemente für große Deformationen und Kontakt*, Universität Karlsruhe, Diss., 2004
- [HR66] HOLMBOE, E.L. ; ROULEAU, W.T. ; MECHANICAL ENGINEERS, American S. (Hrsg.): *The effect of viscous shear on transients in liquid lines*. ASME, 1966 (American Society of Mechanical Engineers)
- [Ibe04] IBEN, Uwe: *Entwicklung und Untersuchung von Kavitationsmodellen im Zusammenhang mit transienten Leitungsströmungen*. VDI Fortschritt-Berichte, 2004
- [II99] IBEN, Hans K. ; IBEN, Uwe: *Starthilfe Strömungslehre*. B.G.Teubner Stuttgart · Leipzig, 1999
- [Int08] INTERNATIONAL, LMS: *LMS Imagine.Lab AMESim User Manual*. , 2008
- [IT00] IBEN, Uwe ; TADMOR, Ethian.: High resolution schemes for conservation laws in simulation of injection systems. In: *internal print: Institut für Analysis und Numerik* (2000)
- [JE89] JOHNSTON, D. N. ; EDGE, K. A.: Simulation of the pressure ripple characteristics of hydraulic circuits. In: *Proc. Instn Mech. Engrs.* 203 (C4) (1989), S. 275–282
- [JE91] JOHNSTON, D.N. ; EDGE, K.A.: The Impedance Characteristics of Fluid Power Components: Restrictor and Flow Control Valves. (1991)
- [JLD94] JOHNSTON, N. ; LONGMORE, K. ; DREW, E.: A Technique for the Measurment of the Transfer Matrix Characteristics of Twoport Hydraulic Components. In: *Fluid Power Systems and Technology* 1 (1994), S. 25–33
- [JLL<sup>+</sup>98] JIANG, G.-S. ; LEVY, D. ; LIN, C.-T. ; OSHER, S. ; TADMOR, E.: High-resolution nonoscillatory central schemes with nonstaggered grids for hyperbolic conservation laws. In: *Journal of Numer. Anal.* 35 (1998), Nr. 6, S. 2147–2168

- [Jun05] JUNGEMANN, Markus: *1D-Modellierung und Simulation des Durchflussverhaltens von Hydraulikkomponenten bei sehr hohen Drücken unter Beachtung der thermodynamischen Zustandsgrößen von Mineralöl*, Universität Magdeburg, Diss., 2005
- [KA00] KNABNER, Peter ; ANGERMANN, Lutz: *Numerik partieller Differentialgleichungen. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag, Berlin, 2000
- [Kor78] KORTEWEG, D.J.: Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Röhren. In: *Annalen der Physik* 241 (1878), Nr. 12, S. 525–542
- [Krö97] KRÖNER, Dietmar: *Numerical Schemes for Conservation Laws*. Wiley, Teubner, 1997
- [KS81] KOTTMANN, A. ; SCHUBERT, W.: Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Druckwellen in Wasserleitungen aus Kunststoffrohren. In: *3R International: Rohre, Rohrleitungsbau, Rohrleitungstransport* 20/4 (1981), S. 184–193
- [KT97] KURGANOV, Alexander ; TADMOR, Eitan: Stiff Systems of Hyperbolic Conservation Laws: Convergence and Error Estimates. In: *Journal of Math. Anal.* 28 (1997), S. 1446–1456
- [KT00] KURGANOV, Alexander ; TADMOR, Eitan: New High-Resolution Central Schemes for Nonlinear Conservation Laws and Convection - Diffusion Equations. In: *Journal of Computational Physics* 160 (2000), S. 241–282
- [Kuh53] KUHLE, Walter: Die Eigenschaften wassergefüllter Rohre für Widerstands- und Schallgeschwindigkeitsmessungen. In: *Acustica* 3 (1953), S. 111–123
- [Leo08] LEONHARDT, Ronny: *Dynamische Untersuchungen von Hydraulikkomponenten*, Universität Karlsruhe, Diss., 2008
- [LeV98] LEVEQUE, Randall J.: Balacing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propogation Algorithm. In: *internal print: University of Washington* (1998), S. 1–17

- [LeV02] LEVEQUE, R. J.: Finite volume methods for hyperbolic problems - Source Terms and Balance Laws. 2002, S. 375–417
- [LMS02] LMS.IMAGINE: The Integration Algorithms used in AMESim. In: *Technical Bulletin* 102 (2002)
- [LMS06a] LMS.IMAGINE: HYD Advanced Fluid Properties. In: *Imagine Technical Bulletin* 117 (2006)
- [LMS06b] LMS.IMAGINE: HYD Robert Bosch Fuel Properties. In: *Imagine Technical Bulletin* 118 (2006)
- [LMS07] LMS.IMAGINE: AMESim Dokumentation. 2007. – Forschungsbericht
- [LN03] LIE, Knut A. ; NOELLE, Sebastian: On the artificial compression method for second-order nonoscillatory central difference schemes for systems of conservation laws. In: *Journal of Sci. Comput.* 24 (2003), Nr. 4, S. 1157–1174
- [LO] LIU, Xu D. ; OSHER, Stanley: Nonoscillatory High Order Accurate Sel-Similar Maximum Principle Satisfying Shock Capturing Schemes I. In: *internal print: Department of Mathematics, UCLA (...)*, S. 1–33
- [LT98] LIU, Xu D. ; TADMOR, Eitan: Third order nonoscillatory central scheme for hyperbolic conservation laws. In: *Journal of Numer. Math.* 79 (1998), S. 397–425
- [LW03] LISKA, Richard ; WENDROFF, Burton: Comparison of several differences schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations. In: *Journal Sci. Comput.* 25 (2003), Nr. 3, S. 995–117
- [Mae06] MAESS, Matthias: *Methods for Efficient Acoustic-Structure Simulation of Piping Systems*, University of Stuttgart, Diss., 2006
- [MH83] MARSDEN, Jerold E. ; HUGHES, Thomas J.: *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, 1983
- [MHG07] MAES, Matthias ; HERRMANN, Jan ; GAUL, Lothar: Finite element analysis of guided waves in fluid-filled corrugated pipes. In: *J. Acoustical Society of America* 121 (2007), S. 1313–1323

- [Mok03] MOK, Daniel P.: *Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion*, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, Diss., 2003
- [MP89] MENIKOFF, R. ; PLOR, B.J.: The Riemann problem for fluid flow of real materials. In: *Reviews of Modern Physics* 61 (1989), S. 75–130
- [Mül04] MÜLLER, Siegfried: Einführung in die Theorie und Numerik hyperbolischer Erhaltungsgleichungen. In: *Bericht Nr. 96, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik, RWTH Aachen* (2004)
- [Mun92] MUNZ, Claus-Dieter: Godunov-Typ Verfahren für die Gleichungen der kompressiblen Strömungsmechanik. In: *KfK-Bericht 5058* (1992). – Habilitationsschrift
- [Oer02] OERTEL, H.: *Prandtl-Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg Verlag: Braunschweig, 2002
- [OL03] OERTEL, Herbert ; LAURIEN, Eckart: *Numerische Strömungsmechanik. Grundgleichungen - Lösungsmethoden - Softwarebeispiele*. Vieweg Verlag, 2003
- [PB07] PEZZINGA, G. ; BRUNONE, B.: Turbulence, friction, and energy dissipation in transient pipe flow. In: BROCCINI, M. (Hrsg.) ; TRIVELLATO, F. (Hrsg.): *Vorticity and Turbulence Effects in Fluid Structure Interaction, Chapter 9*. Southampton : WIT Press, 2007, S. 213–236
- [QSS02] QUARTERONI, A. ; SACCO, R. ; SALERI, F.: *Numerische Mathematik 1*. Springer, 2002
- [RH93] RADHAKRISHNAN, Krishnan ; HINDMARSH, Alan C.: Description and Use of LSODE, the Livermore Solver for Ordinary Differential Equations / Lawrence Livermore National Laboratory report, Band 1327 von NASA reference publication. 1993. – Forschungsbericht
- [Rid99a] RIDER, William J.: An adaptive Riemann solver using a two-shock approximation. In: *Computers & Fluids* 28 (1999), S. 741–777

- [Rid99b] RIDER, William J.: Revisiting Wall Heating. In: *Journal of Computational Physics* 162 (1999), S. 395–410
- [RM67] RICHTMYER, R. ; MORTON, K. W.: *Difference Methods for Initial-Value Problems*. Interscience, John Wiley, 1967
- [Rob99] ROBERT BOSCH GMBH: Diesel-Speichereinspritzsystem Common Rail. 1998/1999. – Forschungsbericht
- [SA98] SAUREL, R. ; ABGRALL, R.: A simple method for compressible multifluid flows. In: *SIAM J. Scientific Computing* 21 (1998), S. 1115–1145
- [SAC97] SILVA-ARAYA, Walter F. ; CHAUDHRY, M. H.: Computation of Energy Dissipation in Transient Flow. In: *Journal of Hydraulic Engineering* (1997), S. 108–115
- [SBE97] SHU, J-J. ; BURROWS, C. R. ; EDGE, K. A.: Pressure pulsations in reciprocating pump piping systems. In: *Proc. Instn. Mech. Engrs.* 211 Part I (1997), S. 229–237
- [Sch91] SCHWARZ, Hans R.: *Methode der finiten Elemente*. Teubner Verlag, 1991
- [Shu96] SHUY, E.B.: Wall shear stress in accelerating and decelerating turbulent pipe flows. In: *Journal of Hydraulic Research* 34(2) (1996), S. 173–183
- [Smo83] SMOLLER, Joel: *Shock Waves And Reaction-Diffusion Equations*. Springer-Verlag, New York, 1983
- [SRLJ93] SANADA, K. ; RICHARDS, C.W. ; LONGMORE, D.K ; JOHNSTON, D.N.: A finite element model of hydraulic pipelines using an optimized interlacing grid systems. In: *Proc. Instn Mech. Engrs, Part I: J. Systems and Control Engineering* Bd. 207(14), 1993, S. 213–222
- [Swe84] SWEBY, P.K.: High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 21 (1984), S. 995–1011
- [Tad91] TADMOR, Eitan: Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations. In: *Journal of Numer. Anal.* 28 (1991), Nr. 4, S. 891–906

- [Tad03] TADMOR, Eitan: Entropy stability theory for difference approximations of nonlinear conservation laws and related time - dependent problems. In: *Acta Numerica* (2003), S. 451–512
- [TG70] TIMOSHENKO, S.P. ; GOODIER, J.N.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, 1970
- [TH96] TANG, H. S. ; HUANG, D.: A Second-Order Accurate Capturing Scheme for 1D Inviscid Flows of Gas and Water with Vacuum Zones. In: *Journal of Computational Physics* 128 (1996), S. 301–318
- [The83] THEISSEN, Heinrich: *Die Berücksichtigung Instationärer Rohrströmung bei der Simulation Hydraulischer Anlagen*, Technische Hochschule Aachen, Diss., 1983
- [Tor99] TORO, Eleuterio F.: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction*. Springer, 1999
- [Tor01] TORO, E. F.: *Godunov Methods: Theory and Applications*. Springer, 2001
- [Tri75] TRIKHA, A.K.: An Efficient Method for Simulating Frequency-Dependent Friction in Transition Liquid Flow. In: *Journal of Fluids Engineering* (1975), S. 97–105
- [Tru89] TRUCKENBRODT, E.: *Fluidmechanik, Bd.1*. Springer, 1989
- [TS99] TANG, H.S. ; SOTIROPOULOS, F.: A second-order Godunov method for wave problems in coupled solid-water-gas systems. In: *Journal of Computational Physics* 151 (1999), S. 790–815
- [Tse99] TSENG, Ming H.: Verification of 1-D Transcritical Flow Model in Channels. In: *Proc. Natl. Sci. Counc.* 23 (1999), Nr. 5, S. 654–664
- [TT05] TORO, E. F. ; TITAREV, V. A.: Derivative Riemann Solvers for Systems of Conservation Laws and ADER Methods. In: *internal print: University of Trento, Italy* (2005), 1-20. <http://www.ing.unitn.it/toro>
- [VJ97] VARDY, A.E. ; J.BROWN: Discussion of 'Wall shear stress in accelerating and decelerating turbulent pipe flows' by E.B.Shuy. In: *Journal of Hydraulic Researches* 35(1) (1997), S. 137–139

- [Wal99] WALL, Wolfgang A.: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*, Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, Diss., 1999
- [XS05] XING, Yulong ; SHU, Chi-Wang: High order finite differences WENO schemes with the exact conservation property for the shallow water equations. In: *Journal of Computational Physics* 208 (2005), S. 206–227
- [XS06] XING, Yulong ; SHU, Chi-Wang: A New Approach of High Order Well-Balanced Finite Volume WENO Schemes and Discontinuous Galerkin Methods for a Class of Hyperbolic Systems with Source Terms. In: *Communications in Computational Physics* 1 (2006), Nr. 1, S. 101–135
- [YK95] YU, Jinghong ; KOJIMA, Eiichi: Dynamic Response of Unhomogeneously Viscoelastic Fluid Lines. In: *Proceedings of the American Control Conference*, 1995
- [YK98] YU, Jinghong ; KOJIMA, Eiichi: Wave propagation in fluids contained in finite-length anisotropic viscoelastic pipes. In: *Journal of Acoustical Society of America* 104, No. 6 (1998)
- [Zie68] ZIELKE, W.: Frequency-Dependent Friction in Transient Pipe Flow. In: *Journal of Basic Engineering* (1968), S. 109–115
- [Zü03] ZÜRCHER, Lukas: *Simulation der Strömung in der menschlichen Aorta*, Fakultät Maschinenbau, Universität Karlsruhe, Diss., 2003



# Lebenslauf

Name	Roman Etlender
Geburtsdatum	10. September 1980
Geburtsort	Tiraspol (Rep. Moldau)
Eltern	Juri und Maia Etlender, geb. Rabinovitch
Staatsangehörigkeit	deutsch
Familienstand	verheiratet mit Maria Etlender, 1 Kind, Nathan Etlender

1987 - 1992	Besuch der Grund- und Mittelschule Nr. 16 in Tiraspol
1992 - 1995	Besuch des Gymnasiums Nr. 6 in Tiraspol
1995 - 1996	Besuch des Gymnasiums Bad Nenndorf in Bad Nenndorf
1996 - 2000	Besuch des Gymnasiums Bismarckschule in Hannover
27.06.2000	Abitur
2000 - 2005	Studium der Mathematik an der TU Clausthal
02.09.2005	Diplom
2005 - 2008	Doktorand an der Robert Bosch GmbH
seit 2008	Angestellter der Robert Bosch GmbH

Stuttgart, 22. Februar 2012

# Berichte des Instituts für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart

- 1 (1983) **P. Osterrieder:**  
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983) **T.A. Kompfner:**  
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983) **A. Diack:**  
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyklinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984) **A. Burmeister, F.W. Bornscheuer, E. Ramm:**  
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.
- 5 (1985) **H. Stegmüller:**  
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit „degenerierten“ Schalenelementen.
- 6 (1987) **A. Burmeister:**  
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.

- 7 (1987) **G. Kammler:**  
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) **A. Matzenmiller:**  
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) **D. Tao:**  
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) **K.M. Weimar:**  
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längssteifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) **K.-U. Bletzinger:**  
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) **S. Kimmich:**  
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) **U. Andelfinger:**  
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finiten Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) **N. Büchter:**  
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) **T.J. Hofmann:**  
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) **D. de Mesquita Roehl:**  
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) **R. Reitinger:**  
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.

- 18 (1995) R.L.M. Suanno:**  
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**  
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**  
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**  
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**  
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**  
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**  
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**  
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Tragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**  
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Cirak:**  
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**  
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.

- 29 (1999) H. Menrath:**  
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**  
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.
- 31 (1999) W.A. Wall:**  
Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen.
- 32 (2000) E. Kuhl:**  
Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien.
- 33 (2001) A. Maute:**  
Fehlerkontrolle bei Finite-Element-Methoden in der linearen Strukturdynamik.
- 34 (2001) S. Schwarz:**  
Sensitivitätsanalyse und Optimierung bei nichtlinearem Strukturverhalten.
- 35 (2001) A. Haufe:**  
Dreidimensionale Simulation bewehrter Flächentragwerke aus Beton mit der Plastizitätstheorie.
- 36 (2001) D.P. Mok:**  
Partitionierte Lösungsansätze in der Strukturdynamik und der Fluid-Struktur-Interaktion.
- 37 (2002) H. Steeb:**  
Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien.
- 38 (2002) K. Krausz:**  
Tragverhalten gemauerter Tonnengewölbe mit Stichkappen.
- 39 (2002) M. Hörmann:**  
Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundstrukturen.

- 40 (2003) **V. Gravemeier:**  
The Variational Multiscale Method for Laminar and Turbulent Incompressible Flow.
- 41 (2004) **R. Kemmler:**  
Stabilität und große Verschiebungen in der Topologie- und Formoptimierung.
- 42 (2004) **G.A. D’Addetta:**  
Discrete Models for Cohesive Frictional Materials.
- 43 (2004) **M. Gee:**  
Effiziente Lösungsstrategien in der nichtlinearen Schalenmechanik.
- 44 (2004) **T. Erhart:**  
Strategien zur numerischen Modellierung transienter Impaktvorgänge bei nichtlinearem Materialverhalten.
- 45 (2005) **M. Leukart:**  
Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien.
- 46 (2006) **F. Huber:**  
Nichtlineare dreidimensionale Modellierung von Beton- und Stahlbetontragwerken.
- 47 (2007) **A. Lipka:**  
Verbesserter Materialeinsatz innovativer Werkstoffe durch die Topologieoptimierung.
- 48 (2007) **A.S. Hund:**  
Hierarchische Mehrskalenmodellierung des Versagens von Werkstoffen mit Mikrostruktur.
- 49 (2007) **S. Hartmann:**  
Kontaktanalyse dünnwandiger Strukturen bei großen Deformationen.
- 50 (2007) **T.M. Hettich:**  
Diskontinuierliche Modellierung zur Versagensanalyse von Verbundmaterialien.

- 51 (2007) C. Förster:**  
Robust methods for fluid-structure interaction with stabilised finite elements.
- 52 (2009) M. von Scheven:**  
Effiziente Algorithmen für die Fluid-Struktur-Wechselwirkung.
- 53 (2010) J. Kato:**  
Material Optimization for Fiber Reinforced Composites applying a Damage Formulation.
- 54 (2010) C.F. Hilchenbach:**  
Optimierung von Mehrphasenstrukturen mit lokalem Schädigungsverhalten.
- 55 (2011) I. Bruss:**  
Dreidimensionale Schädigungsmodellierung heterogener Materialien.