

# Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen

Von der Fakultät Bauingenieur- und Vermessungswesen  
der Universität Stuttgart  
zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)  
genehmigte Abhandlung

vorgelegt von  
TOMAS ALEJANDRO KOMPFFNER  
aus Buenos Aires, Argentinien

Hauptberichter: Prof. Dr.-Ing. E. Ramm  
Mitberichter: Prof. Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer  
Prof. Dr.-Ing. G. Mehlhorn

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Dezember 1983

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

1983

Gedruckt mit Unterstützung des  
Deutschen Akademischen Austauschdienstes.

Gesamtherstellung: **aku**-Fotodruck GmbH, 8600 Bamberg

## Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während eines vierjährigen Aufenthaltes am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart.

Herrn Professor Dr.-Ing. E. Ramm gilt mein herzlicher Dank für die Betreuung dieser Arbeit. Seine stete Unterstützung bei den auftretenden Schwierigkeiten sowohl im Fachlichen als auch im Persönlichen hat meine Arbeit erst möglich gemacht.

Herrn Professor Dr.-Ing. F. W. Bornscheuer gilt mein aufrichtiger Dank für die freundliche Aufnahme in das Institut und die Übernahme des Mitberichts.

Für die intensive Auseinandersetzung mit meiner Arbeit und die bereitwillige Übernahme des Mitberichts möchte ich mich besonders bei Herrn Professor Dr.-Ing. G. Mehlhorn bedanken.

Herrn Professor Dr. D. W. Murray aus Edmonton, Kanada, danke ich für die Anregungen zu Beginn dieser Arbeit.

Meinen Kollegen am Institut für Baustatik möchte ich herzlichst für die entgegengebrachte Freundschaft sowie für die Mühe bei den sprachlichen Korrekturen danken.

Weiterhin danke ich dem Deutschen Akademischen Austauschdienst für seine finanzielle Unterstützung.

Tomás A. Kompfner

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein finites Element zur Untersuchung von Stahlbetonschalen bei Kurzzeitbelastung vorgestellt. Das eingesetzte finite Schalenelement ist ein isoparametrisches, aus der dreidimensionalen Theorie degeneriertes Element. Das Element ist für große Verformungen ausgelegt.

Beton und Stahleinlagen werden gemeinsam in einem Element erfaßt. Für den Beton wird in Dickenrichtung ein Schichtenmodell verwendet. Das biaxiale Betonwerkstoffmodell wirkt in der Elementebene und enthält die folgenden Effekte: Reißen, nicht-lineare Spannungs-Dehnungs-Beziehung im Druckbereich, Druckbruch, Festigkeitserhöhung durch biaxialen Druck und Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ("Tension Stiffening"). Die Stahleinlagen werden mit verschmierten Stahlschichten idealisiert, indem ein einachsiges elasto-plastisches Verhalten mit isotroper Verfestigung zugrunde gelegt wird.

Das Konzept wird an sechs Beispielen angewandt, jeweils an zwei Balken-, Platten- und Schalenproblemen. Dabei wird sowohl die geometrische als auch die physikalische Nichtlinearität berücksichtigt. Insbesondere werden die Einflüsse der Zugfestigkeit und der Mitwirkung des Betons nach dem Reißen untersucht.

Ein Überblick über vorhandene Betonmodelle findet sich im Anhang.

## Summary

The object of this thesis is to present a finite element model to describe the behaviour of reinforced concrete shells under short term loading. An isoparametric degenerated shell element is chosen for the analysis. Large deformations are considered.

To account for the material nonlinearities a layered model throughout the thickness of the element is used. The concrete is modelled with a biaxial formulation that acts in the shell surface and includes the following effects: cracking, nonlinear stress-strain relationship in compression, compression failure, strength increase in biaxial compression and tension stiffening.

The re-bars are idealised with smeared layers. A multilinear elasto-plastic material model with isotropic hardening is implemented for the steel.

The thesis presents six numerical examples: two beam, two plate and two shell problems. Material and geometrical nonlinearities are included in the analysis. The influence of the tensile strength and the tension stiffening effect are studied.

A state-of-the-art review of concrete models is given in the appendix.

### Resumen

En este trabajo se desarrolla un elemento finito destinado al cálculo de cáscaras de hormigón armado bajo cargas de corta duración. El elemento finito que se emplea es un elemento finito de cáscara, isoparamétrico, obtenido por degeneración. Se tienen en cuenta grandes desplazamientos.

A fin de considerar el comportamiento no lineal del material se divide el espesor del elemento en capas. Para el hormigón se implementa un modelo de material biaxial actuante en el plano tangente a la cáscara. Los efectos que se consideran son: fisuración, curva de tensión - deformación no lineal en compresión, rotura en compresión, aumento de la tensión de rotura debido a compresión biaxial y rigidez del hormigón entre fisuras. Las barras de acero son idealizadas mediante capas; para el material se incorpora un comportamiento elasto-plástico multilíneal con endurecimiento isotrópico.

Se presentan 6 ejemplos calculados con el citado elemento finito: 2 vigas, 2 placas y 2 cáscaras. Las no linealidades de origen geométrico y del material se incluyen en el análisis. En particular se estudian la influencia de la variación de la tensión de rotura y de la contribución del hormigón entre las fisuras.

En el anexo se presenta un resumen de los modelos de hormigón existentes.

# INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
BEZEICHNUNGEN, ABKÜRZUNGEN	8
1 EINLEITUNG	13
1.1 Problemstellung und Lösungsweg	13
1.2 Übersicht über die Lösungsmöglichkeiten	15
1.3 Inhalt der Arbeit	21
2 INKREMENTELLE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN DER KONTINUUMS- MECHANIK	23
2.1 Allgemeine Bemerkungen	23
2.2 Bezeichnungen und Verformungsvorgang	23
2.3 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen	25
2.4 Spannungs- und Verzerrungsdefinitionen	26
2.5 Inkrementelle Form des P.d.v.V.	26
2.6 Linearisierung	27
3 EINGESETZTE WERKSTOFFMODELLE	28
3.1 Beton	28
3.1.1 Theoretische Grundlagen	29
3.1.1.1 Das Darwin/Pecknold-Modell	29
3.1.1.2 Umformung des Darwin/Pecknold-Modells für die Erfassung nichtproportionaler Beanspruchung	38
3.1.1.3 Reiß- und Nachrißverhalten	42
3.1.2 Verarbeitung im Programm	46
3.1.3 Vergleich des Modells mit den KHR-Versuchen	50
3.2 Stahl	53
4 NICHTLINEARE FE UND GEWÄHLTES FE	56
4.1 Interpolation und Diskretisierung	56
4.2 Lösung des nichtlinearen Problems	59
4.2.1 Lösungsverfahren	59
4.2.2 Konvergenz	64

	Seite
4.3 Gewähltes finites Element	65
4.3.1 Konzept der Degeneration	66
4.3.2 Vor- und Nachteile der Degeneration	67
4.3.3 Beschreibung des Elements	68
4.3.3.1 Darstellung von Geometrie und Verschiebungen	68
4.3.3.2 Interpolationsfunktionen	71
4.3.3.3 Integration	71
4.3.3.4 Elementmatrizen	74
5 EINBAU DER MATERIALMODELLE IN DAS FINITE ELEMENT	75
5.1 Transformation der Werkstoffe und Integration	75
5.1.1 Definition der benutzten Koordinatensysteme	75
5.1.2 Eingeschlagene Transformationswege	77
5.1.3 Transformationen für den Betonanteil	78
5.1.4 Transformationen für den Stahlanteil	84
5.1.5 Integration des Betonanteils	88
5.1.6 Integration des Stahlanteils	88
5.2 Programmablauf	90
5.2.1 Integration im Element	90
5.2.2 Rechenprogramm	92
6 NUMERISCHE ANWENDUNG	94
6.1 Balken ohne Schubbewehrung	94
6.1.1 Versuchskörper	94
6.1.2 FE-Idealisierungen	95
6.1.3 Parameterstudien	98
6.1.4 Spannungs- und Reißbilder	104
6.2 Rechteckige Stahlbetonplatte	110
6.2.1 Versuchskörper	110
6.2.2 FE-Idealisierung	112
6.2.3 Ergebnisse der Untersuchung	113
6.3 Beulen einer Stahlbetonplatte	121
6.3.1 Versuchsplatte und Idealisierung	121
6.3.2 Ergebnisse der Untersuchung	122
6.4 Kippen eines Stahlbetonträgers	130
6.4.1 Versuchsbalken und Idealisierung	130
6.4.2 Ergebnisse	132

	Seite	
6.5	Tonnenschale	141
6.5.1	Versuchsschale und Idealisierungen	141
6.5.2	Ergebnisse	144
6.6	Hyperbolisches Paraboloid (HP-Schale)	152
6.6.1	Schale und Idealisierung	152
6.6.2	Ergebnisse	156
7	ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK	163
	Schrifttumsverzeichnis	167
	Anhang A - Betonwerkstoffgesetze - Überblick	180
A.1	Verhalten im Versuch	181
A.1.1	Einachsiges Verhalten	181
A.1.2	Zweiachsiges Verhalten	183
A.1.3	Dreiachsiges Verhalten	187
A.2	Versagenstheorien	188
A.2.1	Invarianten	188
A.2.2	Versagenskriterien	190
A.3	Elastizitätsmodelle	199
A.3.1	Elastizitätsmatrix	201
A.3.2	Einachsige Modelle	203
A.3.3	Zweiachsige Modelle	203
A.3.4	Dreiachsige Modelle	209
A.4	Plastizitätsmodelle	215
A.5	Endochrone Theorie	229
A.5.1	Prinzip	229
A.5.2	Erweiterung auf drei Dimensionen	230
A.5.3	Formeln für $dz$ , $d\lambda$ , $K$ und $G$	231
A.5.4	Iteratives Lösungsverfahren	235
	Anhang B - Interpolationsfunktionen und Elementmatrizen	238

## BEZEICHNUNGEN, ABKÜRZUNGEN

### Bemerkungen

- 1) Im Abschnitt 3 und Anhang A - Werkstoffmodelle - wird keine Unterscheidung zwischen linearen und nichtlinearen Verzerrungen, bzw. Spannungen, getroffen. Daher entstehen für einige Größen unterschiedliche Symbole für dieselben Begriffe, je nachdem, ob sie in diesen Abschnitten auftreten oder anderswo.
- 2) Im Anhang A - Überblick über Betonwerkstoffgesetze - werden die Bezeichnungen von den jeweiligen Verfassern übernommen.
- 3) Die Bezeichnungen der in dieser Arbeit verwendeten Koordinatensysteme finden sich in Abschnitt 5.1.1

### INDIZIERUNG

links	oben	m	Wirkungszustand
	unten	n	Referenzzustand
rechts	oben	k	Knotennummer
	unten	$i, j, k$	Komponenten des kartesischen Koordinatensystems ( $i, j, k = 1, 2, 3$ )
		$, j$	Ableitung nach der $j$ -ten Koordinate

### GEOMETRIE, VERSCHIEBUNGEN, VERZERRUNGEN

$X, x_i$	kartesische Koordinaten
$dv, V$	Differential- bzw. Gesamtvolumen
$da, A$	Differential- bzw. Gesamtfläche
$U, u_i$	Verschiebungen
$x_{i,j}$	Deformationsgradient
$u_{i,j}$	Verschiebungsgradient
${}^m\epsilon, {}^m\epsilon_{ij}$	Green-Lagrange-Verzerrungen
$e, e_{ij}$	linearer Anteil von $\epsilon_{ij}$
$\eta, \eta_{ij}$	nichtlinearer Anteil von $\epsilon_{ij}$

## STATISCHE GRÖSSEN

$\hat{t}_i$	Oberflächenkräfte
$\hat{q}_i$	Volumenkräfte
$m_\rho$	spezifische Masse des Körpers
$m_s, m_{s_{ij}}$	Kirchhoff-Piola-2-Spannungen
$m_m \tau, m_m \tau_{ij}$	Cauchy-Spannungen
$m_c, m_{c_{ijkl}}$	konstitutive Matrix

## WERKSTOFF-GRÖSSEN

### Verzerrungen:

$\epsilon, \epsilon_{ij}$	Verzerrungen (sechs Komponenten)
$\gamma, \gamma_{ij}$	Verzerrungen, bei denen ( $\gamma_{ii} = \epsilon_{ii}$ und $\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}$ für $i \neq j$ )
$e_v$	Volumenänderung
$e, e_{ij}$	deviatorische Verzerrungen
$\epsilon_o$	Oktaedernormalverzerrung
$\gamma_o$	Oktaederschubverzerrung
$\epsilon_1, \epsilon_2, \text{ allg. } \epsilon_i$	einachsige Verzerrung
$\epsilon_{1u}, \epsilon_{2u}, \text{ allg. } \epsilon_{iu}$	äquivalente einachsige Verzerrung (ÄEV)
$\epsilon_c$	Verzerrung, die zum Versuchswert $f'_c$ gehört
$\epsilon_{cu}$	äquivalente einachsige Betonbruchverzerrung
$\epsilon_{ut}$	Maximale Verzerrung für "Tension Stiffening"
$\epsilon_{1c}, \epsilon_{2c}, \text{ allg. } \epsilon_{ic}$	äquivalente einachsige Verzerrung, die zu $\sigma_{ic}$ gehört
$c w_1, c w_2, \text{ allg. } c w_i$	Rißbreiten

### Spannungen:

$\sigma, \sigma_{ij}$	Spannungen (sechs Komponenten)
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptspannungen

$\alpha$	Hauptspannungsverhältnis $\sigma_1/\sigma_2$
$\sigma_m$	hydrostatischer Druck
$\mathbf{S}, S_{ij}$	deviatorische Spannungen
$\sigma_o$	Oktaedernormalspannungen
$\tau_o$	Oktaederschubspannung
$\beta_d, f_{cu}, f'_c$	einachsige Druckfestigkeit des Betons
$f_t$	Betonzugfestigkeit
$\sigma_{1c}, \sigma_{2c}, \text{allg } \sigma_{ic}$	Extremwert der Druckspannungen im äquivalenten einachsigen $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm
$\sigma_{t1}, \sigma_{t2}, \text{allg } \sigma_{ti}$	verbleibende Zugfestigkeit normal zu beiden Rißrichtungen nach Rißbildung

Invarianten:

$I_1^i, I_2^i, I_3^i$	Invarianten des Verzerrungstensors
$J_1^i, J_2^i, J_3^i$	Invarianten des Verzerrungsdeviators
$I_1, I_2, I_3$	Invarianten des Spannungstensors
$J_1, J_2, J_3$	Invarianten des Spannungsdeviators

konstitutive Größen:

$E$	Elastizitätsmodul
$E_1, E_2$	E-Moduli in beiden Hauptrichtungen
$E_o$	Anfangs-E-Modul
$E_s$	Sekanten-E-Modul
$G$	Schubmodul
$K$	Kompressionsmodul
$\nu$	Querdehnzahl
$\nu_o$	Anfangsquerdehnzahl
$\nu_1, \nu_2$	orthotrope Querdehnzahlen
$\mathbf{C}, C_{ijkl}$	konstitutive Matrix

FINITE ELEMENT-BEZEICHNUNGEN

$\phi$	Interpolationsfunktionen
${}^m\hat{B}$	Operatormatrix für Verschiebungsableitungen
${}^mB$	Operatormatrix für lineare Verzerrungen
${}^m\bar{u}^e$	Knotenverschiebungen eines Elements
${}^m\bar{u}$	gesamte Knotenverschiebungen
$d$	Verschiebungsableitungen $u_{i,j}$
${}^mR$	äußere Kräfte
${}^mF$	innere Kräfte
${}^mK^e$	inkrementelle Elementsteifigkeitsmatrix
${}^mK$	inkrementelle Steifigkeitsmatrix
${}^mK_g^e$	geometrische Elementsteifigkeitsmatrix
${}^mK_g$	geometrische Steifigkeitsmatrix
${}^mJ$	Jakobi-Matrix
$M$	Gesamtzahl der Knoten an einem Element
$r, s, t$	krummlinige Elementkoordinaten
$h^k$	Elementdicke am Knoten $k$
${}^m\psi_i^k$	Winkel der Normale in $k$ gegenüber Koordinate $i$
${}^m\phi^k$	Winkel zur Beschreibung der Normale in $k$
${}^m\alpha^k, {}^m\beta^k$	Winkeländerung (Rotationsfreiheitsgrade) in $k$
$E$	Transformationsmatrix definiert in Gl. (5.2)
${}^\circ T$	Transformationsmatrix definiert in Gl. (5.4) (5.5)
${}^\circ A$	Transformationsmatrix definiert in Gl. (5.6)
${}^\circ G$	Transformationsmatrix definiert in Gl. (5.8) (5.9)
${}^\circ GT$	Transformationsmatrix ${}^\circ G \cdot {}^\circ T^{-1}$ (Bild 5.4)
${}^\circ\beta$	Winkel zwischen $x_{1L}$ und $x_1'$ (s. Tafel 5.1 u. Bild 5.3)
$\alpha_{st}$	Winkel zwischen Stahleinlage und $x_{1L}$ Achse
$\rho$	Winkel zwischen Stahleinlage und $x_1'$ Achse

## ABKÜRZUNGEN

TL	Totale Lagrange-Formulierung
UL	"Updated" Lagrange-Formulierung
ÄEV	äquivalente einachsige Verzerrung
TS	"Tension Stiffening"-Effekt
NR	Newton-Raphson-Methode
KB	Verfahren der konstanten Bogenlänge
VK	verschiebungskontrolliertes Verfahren
WA	Arbeitsspeicher für das Werkstoffgesetz (Working Array)

# 1 EINLEITUNG

## 1.1 Problemstellung und Lösungsweg

Der übliche Weg zur Bemessung von Stahlbetonstrukturen ist:

- 1) Ermittlung der Schnittgrößen mit einer linear elastischen Rechnung
- 2) Bemessung des Stahlbetons unter Berücksichtigung der Werkstoffnichtlinearitäten.

Dabei wird nicht berücksichtigt, daß die Werkstoffnichtlinearitäten auf die Struktur zurückwirken, so daß im Gebrauchszustand Kräfteumlagerungen stattfinden, welche die linear elastische Lösung verändern. Dieses Vorgehen ist dennoch berechtigt, da eine "genaue" nichtlineare Lösung auch heute noch mit den zur Verfügung stehenden Großrechenanlagen teuer und schwierig ist.

In dieser Arbeit wird dieses nichtlineare Problem für den Fall der Schalenstrukturen mit Hilfe der Finiten Element Methode behandelt. Dabei soll der Begriff "Schalen" als Überbegriff für Balken, Platten und Schalen benutzt werden. Die nichtlinearen Eigenschaften sowohl des Werkstoffs (Beton + Stahl) als auch der Geometrie werden berücksichtigt.

Ziel der Arbeit ist es nicht, ein Werkzeug für die tägliche Ingenieurpraxis anzubieten, dies wäre wirtschaftlich noch nicht vertretbar, sondern:

- 1) die Bemessung spezieller Probleme zu ermöglichen (z.B. Schalen im Kernkraftwerksbau),
- 2) Problemkreise zu behandeln, bei denen eine nichtlineare Berechnung erforderlich ist (z.B. Schalenbeulen, Imperfektionsanfälligkeit usw.),
- 3) ein Forschungswerkzeug anzubieten, um:
  - a) aufwendige Versuche zu ersetzen oder zu ergänzen (mit einer Parameterstudie kann man leicht mehrere Versuche simulieren),
  - b) das Tragverhalten von Strukturen zu untersuchen.

Zur Lösung dieser Probleme wird von einem finiten Schalenelement ausgegangen, das durch ein nichtlineares Werkstoffgesetz ergänzt wird. Der Begriff "Werkstoffgesetz" wird in dieser Arbeit - dem üblichen Sprachgebrauch nach - für eine gewählte mathematische Formulierung des Werkstoffverhaltens eingesetzt. Es ist nicht als ein allgemein gültiges physikalisches Gesetz zu interpretieren. Das Element basiert auf Verschiebungsansätzen und ist in der Lage, geometrisch nichtlineare Vorgänge zu beschreiben.

Das nichtlineare Stoffgesetz wird im Abschnitt 3 beschrieben. Die hierzu notwendigen Ergänzungen, die im Rahmen dieser Arbeit hinzugefügt wurden, sind:

- 1) nichtlineare Spannungs-Dehnungsbeziehung des Betons
- 2) Reißen des Betons
- 3) Druckversagen des Betons
- 4) Verbundwirkung zwischen Beton und Stahl
- 5) nichtlineares Verhalten der Stahleinlagen (Fließen).

Die ersten vier Effekte werden in Form eines dem Beton angepaßten Stoffgesetzes eingebracht. Diese Beziehung wird in den Integrationspunkten des Elements erstellt.

In der Elementebene sind dies die Gaußpunkte; in Dickenrichtung wird eine Einteilung in Schichten vorgenommen, wobei in jeder dieser Schichten das Materialverhalten entsprechend dem Verzerungszustand und der Vorgeschichte ausgewertet wird. Das Element wird durch seine Mittelfläche beschrieben, die Normale zur Schale bleibt während des Vorgangs gerade, muß aber nicht normal zur Mittelfläche bleiben (Berücksichtigung der Schubverformung). Ein diskreter Knick im Element, der durch das Reißen auftritt, kann somit nicht erfaßt werden. Da die Materialwerte über die Dicke veränderlich sind, können die Steifigkeitsmatrizen das Durchschnittsverhalten gut beschreiben. Die veränderte Lage der Nulllinie in Dickenrichtung wird berücksichtigt.

Die Stahleinlagen werden als Schichten idealisiert, die nur in einer Richtung wirken und sehr dünn gegenüber dem Betonquerschnitt sind, d.h., die lokale Biegung, Dübel- oder Schubwirkung wird vernachlässigt. Die Wirkung der Bewehrung wird dem Beton überlagert. Im gerissenen Zustand ist die Integration wirklichkeitsnah.

Nach dem Zusammenbau der Elemente zur Gesamt-Struktur wird das linearisierte Gleichungssystem inkrementell-iterativ gelöst. Durch das Reißen entsteht ein stark nichtlineares Verhalten, das mit dem Newton-Raphson-Verfahren nicht ermittelt werden kann. Es sind Iterationsmethoden erforderlich, die im Last-Verschiebungs-Raum arbeiten.

## 1.2 Übersicht über die Lösungsmöglichkeiten

Stahlbeton besteht aus zwei Komponenten: Stahl und Beton, die im Verbund miteinander stehen. Diese Eigenschaft ist die Grundlage der im folgenden aufgeführten bekannten Formulierungen, die mit unterschiedlichen Konzepten die Beschreibung des Gesamtverhaltens anstreben:

- A) Stahl und Beton werden gemeinsam in einem Element erfaßt oder getrennt behandelt.
- B) Die Risse werden im Modell "verschmiert", oder sie treten diskret auf.
- C) Der Verbund wird als ideal starr angenommen, oder ein Schlupf ist erlaubt.
- D) Die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen wird berücksichtigt oder vernachlässigt.
- E) Das Gesamtverhalten wird mit Spannungsergebnisierenden (Integralmodellen) oder mittels einer Integration von Schichten (Schichtenmodellen) erfaßt.

Die ersten Untersuchungen idealisierten den Stahl und den Beton mit unterschiedlichen Elementen (Punkt A) und beschränkten sich auf die Analyse von Balken (siehe Scordelis [1], [2], Franklin [3]). In den Arbeiten wurde der Beton mit Scheibenelementen idealisiert. Der Stahl wurde mit Balken-Elementen oder ebenfalls mit Scheiben-Elementen eingefügt. Stahl- und Betonelemente wurden starr oder elastisch über Verbundelemente miteinander verknüpft. Cervenka/Gerstle [4] führten ein Scheibenelement ein, wobei die Gesamtsteifigkeit durch Addition der Anteile bei-

der Komponenten hergeleitet wurde. Dies ist auch heute noch der übliche Weg für die Lösung von Schalenproblemen.

Die Modelle mit diskreten Rissen (Punkt B) finden Anwendung, wenn im wirklichen System nur ein diskreter Riß oder wenige, sehr breite Risse zu vermuten sind. Scordelis [1] hat eine Balkenuntersuchung mit einem einzigen Riß durchgeführt, wobei der Rißverlauf von Versuchen schon vorher bekannt war. Die Ausbreitung des Risses wurde durch Änderung des FE-Netzes erzielt. Sáouma/Ingraffea [5] entwickelten ein Programm, in dem das FE-Netz, ausgehend von der Bruchmechanik, nach jedem Schritt neu generiert wird. Dabei treten sehr unübersichtliche Netze auf. Die Ergebnisse des untersuchten Balkens sind nicht überzeugender als die Resultate, die in der vorliegenden Arbeit (siehe Abschnitt 6.1) mit einem verschmierten Riß-Verfahren erzielt wurden. Blaauwendraad u.a. [6], [7] stellen ein Verfahren vor, bei dem diskrete Risse durch das Element verlaufen können. Dadurch wird eine neue Aufstellung des Elementnetzes vermieden. Die Risse im Beton verursachen keine zusätzlichen Freiheitsgrade, da die Risse über Verzerrungen eingeleitet werden. Wenn aber die Dübelwirkung vom Stahl mitberücksichtigt wird, treten die Knicke im Stab als neue Unbekannte auf.

In den meisten Arbeiten werden die Risse "verschmiert", das heißt, sie stellen ein Durchschnittsverhalten zwischen den Integrationspunkten dar, das durch die numerische Integration über die Elemente global erfaßt wird.

Man spricht von starrem Verbund (Punkt C), wenn die Verschiebungen an der Oberfläche des Stahls denen des benachbarten Betons gleich gesetzt werden. Zur wirklichkeitsnäheren Beschreibung ist eine relative Verschiebung zuzulassen, die bestimmte Verbundspannungen hervorrufen. Nilson [8] benutzte hierzu Feder-Elemente parallel zur Bewehrung, die einer Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung in Form einer konvexen Parabel gehorchen. Ferner werden Federelemente normal zur Bewehrung eingeführt, die von den Tangentialfedern entkoppelt sind. Auf diese direkte Form der Erfassung vom Verbundverhalten wird auch in der Arbeit von Dinges u.a.[123]

eingegangen. Dort wird ein Kontaktverbundelement mit linearem Verschiebungsansatz vorgestellt. Die vier Knoten dieses Elements verbinden jeweils zwei Betonknoten mit den benachbarten Punkten des Stahls. Im dreidimensionalen Fall sind drei Relativverschiebungen an jedem Knotenpaar möglich, eine parallel zur Bewehrung und zwei normal zu ihr. Die zugehörigen Kräfte und Steifigkeiten werden mittels einer numerischen Integration über die Länge des Elements ermittelt. Die für diese Integration notwendigen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehungen sind in [123] angegeben. Da die Wechselwirkung zwischen den Normal- und Tangentialverbundspannungen noch unzureichend erforscht ist, werden diese Spannungen im Element unabhängig voneinander behandelt.

Man kann das Mitwirken des Betons zwischen den Rissen auch indirekt erfassen. Dabei wird so vorgegangen, daß noch verbleibende Spannungen bei der Berechnung von inneren Kräften berücksichtigt werden. Es bieten sich drei Möglichkeiten an:

1. Die Spannungen werden dem Beton zugewiesen. Dieser Weg wurde von Scanlon [9] zum ersten Mal eingeschlagen. Hier wird dem Integrationspunkt in einer gerissenen Zone eine Spannung zugewiesen, die das Durchschnittsverhalten in deren Umgebung wieder spiegeln soll (Bild 1.1). Diese Wirkung wird im englischen Sprachraum als "Tension Stiffening" bezeichnet.

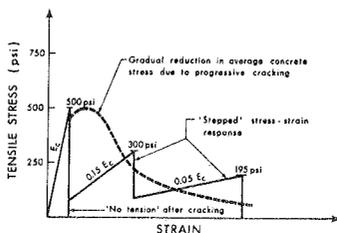


Bild 1.1: "Tension Stiffening" aus Scanlon [9]

Da diese Versteifung in Wirklichkeit nicht auftritt, wenn kein Stahl vorhanden ist, haben Gilbert/Warner [10] die in Bild 1.1 angegebenen Beziehungen abgemindert (siehe Bild 1.2). Dabei wird der Versteifungseffekt umso kleiner, je weiter die betrachtete Betonschicht vom Stahl entfernt ist. Diese Variante hat die Vorteile, daß die Spannungen normal zu den Rissen wirken und die

geometrische Lage des Stahls berücksichtigt wird. Bei der numerischen Analyse an einer Platte [10] schneidet das Vorgehen nach Bild 1.2a und Bild 1.2c sehr gut ab; es wird jedoch eine große Zahl von Iterationen zur Konvergenz benötigt. Ein Vergleich mit Studien ohne die Abminderung der Versteifung zeigt bei den letzteren zu steife Ergebnisse.

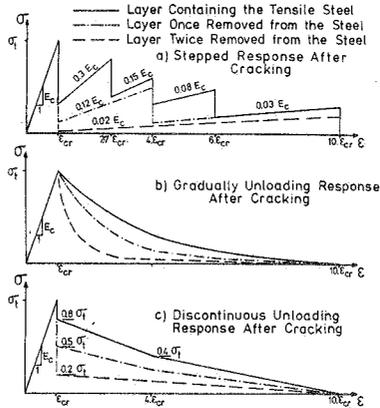
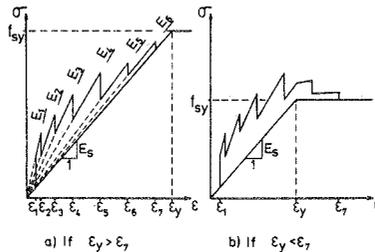


Bild 1.2: Tension Stiffening nach Gilbert/Warner [10]

2. Die Spannungen werden dem Stahl zugewiesen. Im Beitrag von Gilbert/Warner [10] findet sich der Vorschlag, dem Stahl an Stelle des reißen den Betons erhöhte Steifigkeiten und innere Spannungen zuzuweisen, die Mitwirkung des Betons aber nicht zu berücksichtigen (Bild 1.3).



Material Modelling Law :

$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\epsilon_3$	$\epsilon_4$	$\epsilon_5$	$\epsilon_6$	$\epsilon_7$
$\epsilon_{cr}$	$1.5 \epsilon_{cr}$	$3 \epsilon_{cr}$	$5 \epsilon_{cr}$	$8 \epsilon_{cr}$	$11 \epsilon_{cr}$	$14 \epsilon_{cr}$
$E_1$	$E_2$	$E_3$	$E_4$	$E_5$	$E_6$	$E_7$
$4.0 E_s$	$27 E_s$	$20 E_s$	$16 E_s$	$15 E_s$	$10.5 E_s$	

Bild 1.3: Modifizierte Spannungs-Dehnungs-Beziehungen für Stahleinlagen aus [10]

Obwohl jetzt die Versteifungsspannung ohne Rücksicht auf die Rißanordnung in Richtung der Stahleinlagen wirkt, liefert dieses Vorgehen für das Plattenbeispiel in [10] bessere Ergebnisse im Vergleich zur Versteifung über den Beton. Dabei werden erheblich weniger Iterationen gebraucht.

Van Greunen [11] stellt beide Möglichkeiten gegenüber, ohne jedoch die Abminderung des Versteifungseffekts im Fall 1) entsprechend der Entfernung der Stahleinlagen vorzunehmen. Die Berechnungen mit Versteifung im Stahl liefern hier die besseren Ergebnisse.

3. In den inkrementellen FE-Gleichungen werden "tension stiffening"-Faktoren eingebracht, die losgelöst von den Werkstoffgesetzen vom Stahl und Beton die unterschiedlichen Einflüsse berücksichtigen.

Diese Faktoren hängen nach Mang/Floegl [12], [13], [14], [15] von folgenden Einflüssen ab:

- a) durchschnittliche Verbundspannung zwischen zwei Rissen
- b) Winkel zwischen Riß und Stahleinlagen
- c) Rißausbreitung in Dickenrichtung
- d) Ausmaß der Sekundärrißbildung.

Als Eingabeparameter muß der voraussichtliche Rißabstand angegeben werden.

Der Punkt E bezieht sich auf die Formulierung der konstitutiven Gleichungen: Die meisten Platten- und Schalenelemente teilen die Dicke in Schichten auf und verwenden in jeder Schicht die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung, um die inneren Kräfte zu ermitteln. Die Integralmodelle arbeiten dagegen mit Momenten-Krümmungs-Beziehungen. Beispiele hierzu finden sich in [16], [17], [18].

Abschließend werden in Tafel 1.1 einige Schrifttumshinweise zu den verschiedenen Behandlungsmöglichkeiten gegeben. Eine ausführlichere Angabe ist von Kolmar/Mehlhorn [19] vorgelegt worden, worauf hier verwiesen wird.

fel 1.1: Literaturhinweise zu unterschiedlichen Beschreibungen für Stahlbetonprobleme mittels FE

Verfasser	Schrifttum Nr.	Stahl + Beton in einem Element	verschmierte Risse	Verbundelemente	Tension Stiffening	Dickenrichtung	untersucht Strukturen
ordellis a.	[1]	nein, Scheibenelemente in Stahl und Beton	nein, einziger RiB mit Verzahnungselementen	ja	nein	Mehrelementmodell	Balken ohne mit Schub
auwendraad a.	[7], [6]	nein, Scheibenelemente Beton, Stabelemente für Stahl	nein diskreter RiB im Element. Verzahnung	mit zusätzlichen Freiheitsgraden eingebracht	nein	Mehrelementmodell	Scheiben
ouma u.a.	[5]	nein	nein, automatische Netzgenerierung gemäß RiBbildung	Mit Verbundelementen nach Nilsson	nein	Mehrelementmodell	Balken
nessen	[20]	ja	ja	nein, starrer Verbund	nein	Integrierendes Modell	Schalen
n	[21]	ja	ja	nein, starrer Verbund	dem Beton zugeordnet	Integrierendes Modell	Schalen
friet/Neice	[18]	ja	ja	nein, starrer Verbund	Berücksichtigung durch "äquivalenten Stahlquerschnitt" normal zum RiB	Integralmodell	Platten
igner	[17]	ja	ja	nein, starrer Verbund	ja, über M- $\kappa$ -Beziehung	Integralmodell	Platten
rg	[22]	ja	ja	nein, starrer Verbund	nein	Integrierendes Modell	Platten
jii	[16]	ja	ja	nein, starrer Verbund	nein	Integralmodell	Platten
und u.a.	[23]	ja	ja	nein, starrer Verbund	nein	Integrierendes Modell	Schalen
bir	[24]	ja	ja	nein, starrer Verbund	dem Beton zugeordnet	Integrierendes Modell	Schalen
ng u.a.	[12], [13], [14], [15]	ja	ja	nein, starrer Verbund	über Tensionstiffening-Faktoren	Integrierendes Modell	Schalen
in Greunen	[11]	ja	ja	nein, starrer Verbund	1) dem Beton oder 2) dem Stahl zugeordnet	Integrierendes Modell	Platten
istjansson	[25]	ja	ja	nein, starrer Verbund	nein	Integrierendes Modell	Platten
liberty/arnner	[10]	ja	ja	nein, starrer Verbund	1) dem Beton oder 2) dem Stahl zugeordnet	Integrierendes Modell	Platten

### 1.3 Inhalt der Arbeit

Die weiteren sechs Abschnitte der Arbeit haben den folgenden Aufbau:

Der zweite Abschnitt befaßt sich mit den element- und werkstoffunabhängigen Gleichungen, die einen nichtlinearen Verformungsvorgang beschreiben. Dabei wird von dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen ausgegangen und die in den Verschiebungsinkrementen nichtlinearen inkrementellen Beziehungen für die totale Lagrange-Formulierung hergeleitet. Abschließend wird die Linearisierung der Arbeitsausdrücke erläutert.

Im dritten Abschnitt wird auf die in dieser Arbeit verwendeten Materialgesetze für die Werkstoffe Beton und Stahl eingegangen. Beim Beton wird das hier berücksichtigte nichtlineare biaxiale Werkstoffgesetz vorgestellt. Bei den Stahleinlagen werden drei unterschiedliche einachsige Modelle berücksichtigt: linear-elastisch, bilinear-elastisch, multilinear-elasto-plastisch.

Der vierte Abschnitt beschäftigt sich mit der nichtlinearen FE-Theorie. Nach der Einführung in die FE-Technik werden die Lösungsverfahren (Iterationsmethoden) vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit Anwendung finden. Iterationsverfahren, die von anderen Autoren für die Berechnung von Stahlbetonproblemen eingesetzt werden, sind anschließend kurz erwähnt. Der Abschnitt schließt mit der Beschreibung des eingesetzten FE-Modells ab.

Im fünften Abschnitt wird der Einbau von Beton und Stahl in einem Element beschrieben. Hier sind für den Beton- und Stahlanteil die notwendigen Matrizentransformationen vorgestellt. Die numerische Integration wird in Form von Flußdiagrammen verdeutlicht.

Im sechsten Abschnitt werden durch numerische Beispielberechnungen die Annahmen des Rechenmodells überprüft. Zunächst wird eine Parameterstudie für einen Balken ohne Schubbewehrung durchgeführt. Es folgt ein Plattenproblem, das ebenso wie der Balken geometrisch linear, aber stofflich nichtlinear durchgerechnet wird. Danach

werden beide Nichtlinearitäten an den Beispielen des Plattenbeulens und des seitlichen Auskippens eines Balkens zusammen untersucht. Schließlich werden noch die Rechenergebnisse von zwei Schalenuntersuchungen angegeben: eine Tonnenschale und ein hyperbolisches Paraboloid, beide mit Randträgern. Bei der Tonnenschale wurde die geometrische Nichtlinearität mitberücksichtigt.

Im siebten Abschnitt werden Schlußfolgerungen aus dieser Arbeit und Anregungen für weitere Studien angegeben.

Zwei Anhänge schließen die Arbeit ab. Im Anhang A wird ein Überblick über Betonwerkstoffgesetze geboten. Anhang B beinhaltet die Interpolationsfunktionen und Elementmatrizen des angewandten finiten Elements.

2.1 Allgemeine Bemerkungen

Zur Formulierung der Gleichgewichtszustände zwischen äußeren und inneren Kräften wird in dieser Arbeit vom Prinzip der virtuellen Verschiebungen Gebrauch gemacht.

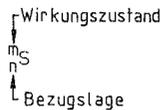
Für Systeme mit kleinen Verzerrungen, aber endlichen Verschiebungen bieten sich zwei Möglichkeiten an, um den Verformungsvorgang zu beschreiben. Entweder wird ein "konvektives Koordinatensystem" eingeführt, das die Starrkörperverschiebungen mitmacht und als Bezugssystem für die Verzerrungen dient (siehe z.B. Murray/Wilson [26]), oder es wird ein festes Koordinatensystem eingeführt, in dem objektive Verzerrungsmaße definiert sind.

Letzteres Vorgehen wird hier übernommen und ist in den Arbeiten von Ramm [27], Bathe/Ramm/Wilson [28] sowie in [29], [30] ausführlich behandelt. Die kontinuumsmechanischen Grundgleichungen können Malvern [31], Bufler [32], Murray [33] und Tottenham/Brebbia [34] entnommen werden.

2.2 Bezeichnungen und Verformungsvorgang

Für die Beschreibung des nichtlinearen Vorgangs wird eine inkrementelle Form des P.d.v.V. verwendet. Dadurch ist es notwendig, mehrere Zustände mit einer eindeutigen Bezeichnung zu unterscheiden.

Die Größen, die nur durch die Lage definiert sind (Volumen, Flächen, Koordinaten usw.) werden mit einem linken Kopfzeiger charakterisiert. Muß noch eine Bezugslage definiert werden (Spannungen, Verzerrungen), wird dies durch einen linken Fußzeiger angegeben. Bei inkrementellen Größen entfällt der Kopfzeiger,



$${}^m X_{i,j} = \frac{\partial {}^m X_i}{\partial {}^n X_j}$$

Der Bewegungsvorgang ist im Bild 2.1 schematisch dargestellt. Die Ausgangslage 0 ist bekannt, die Lage 1 bereits ermittelt, die Lage 2 ist gesucht.

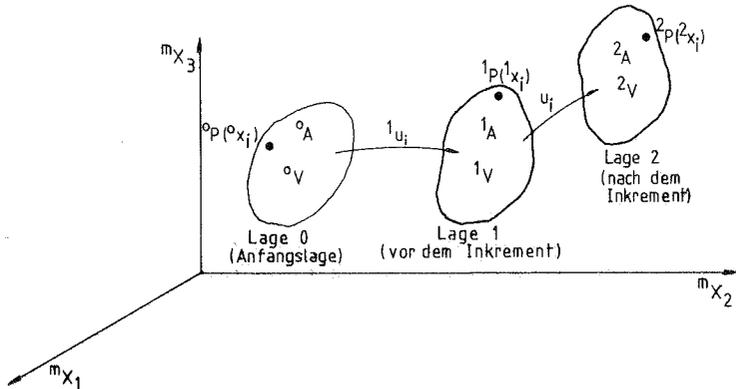


Bild 2.1: Bewegungsvorgang

Die Koordinaten von  $2_P(2_{x_1}, 2_{x_2}, 2_{x_3})$  werden als Euler-Koordinaten (oder momentane Koordinaten) und die von  $0_P(0_{x_1}, 0_{x_2}, 0_{x_3})$  oder  $1_P(1_{x_1}, 1_{x_2}, 1_{x_3})$  als Lagrangesche Koordinaten (oder materielle Koordinaten) bezeichnet. Nimmt man, wie in dieser Arbeit, die Koordinaten von  $0_P$  oder  $1_P$  für die Beschreibung des Vorgangs, so wird von einer Lagrange-Darstellung gesprochen.

In der Lagrange-Darstellung sind zwei Formulierungen möglich, die "Totale Lagrange (T.L.)" oder die "Mitgehende Lagrange (U.L.)"-Darstellung. Die TL-Formulierung bezieht sich auf die Koordinaten von  $0_P$ , die UL auf die Koordinaten von  $1_P$ .

In dieser Arbeit wird nur die TL-Formulierung weiterverfolgt. Für diesen Fall kann der linke Fußzeiger fallen gelassen werden, da die Bezugslage immer die Anfangslage ist.

Die Koordinaten von  $2_P$  können somit folgendermaßen beschrieben werden:

$${}^2x_i = {}^0x_i + {}^1u_i + u_i \quad (2.1)$$

mit  ${}^m x_i$ : Koordinaten

${}^m u_i$ : Verschiebungen.

Es gilt außerdem

$${}^2u_i = {}^1u_i + u_i \quad (2.2)$$

### 2.3 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das P.d.v.V. als äquivalente Gleichgewichtsaussage für den Zustand 2 lautet (siehe z.B. [27]):

$$\underbrace{-\int_{{}^2V} {}^2\tau_{ij} \cdot \delta {}^2u_{i,j} \cdot d^2v}_{{}^2\delta W_{(i)}} + \underbrace{\int_{{}^2A} {}^2\hat{t}_i \cdot \delta u_i \cdot d^2a + \int_{{}^2V} {}^2\hat{q}_i \cdot \delta u_i \cdot d^2v}_{{}^2\delta W_{(a)}} = 0 \quad (2.3)$$

wobei  ${}^2v, {}^2v, {}^2a, {}^2A$ ; Volumen bzw. Flächen in Zustand 2

$\delta u_i$ ; virtuelle Verschiebungen

$\delta {}^2u_{i,j}$ ; Verschiebungsableitung (gegenüber Koord. von  ${}^2P$ )

${}^2\tau_{ij}$ ; Cauchy Spannungen (Wirken in Zustand 2 bezogen auf Flächen in Lage 2)

${}^2\hat{t}_i$ ; Oberflächenkräfte (Wirken in Zustand 2 bezogen auf Flächen in Lage 2)

${}^2\hat{q}_i$ ; Volumenkräfte (Wirken in Zustand 2 bezogen auf Volumen in Lage 2)

## 2.4 Spannungs- und Verzerrungsdefinitionen

Die Bezugslage von Gl. (2.3) ist die unbekannte Lage 2. Es werden Umformungen vorgenommen, so daß die Ausgangslage als Bezugslage gewählt werden kann.

Für die Spannungen entstehen somit die Kirchhoff-Piola<sup>2</sup>-Spannungen [27], [32]:

$${}^2S_{ij} = \frac{{}^0\rho}{{}^2\rho} \cdot {}^0X_{i,k} \cdot {}^0X_{j,l} \cdot {}^2T_{kl} \quad (2.4)$$

Für das Verzerrungsmaß werden die Green-Lagrange-Verzerrungen eingeführt [32]:

$${}^2E_{ij} = \frac{1}{2} ({}^2X_{k,i} \cdot {}^2X_{k,j} - \delta_{ij}) = \frac{1}{2} ({}^2U_{i,j} + {}^2U_{j,i} + {}^2U_{k,i} \cdot {}^2U_{k,j}) \quad (2.5)$$

Mit den Definitionen von Gl. (2.4) und Gl. (2.5) kann die innere Arbeit im Zustand 2 folgendermaßen umgeschrieben werden [29]:

$$-{}^2\delta W_{(i)} = \int_{\mathcal{b}_V} {}^2S_{ij} \cdot \delta {}^2E_{ij} \cdot d^0v \quad (2.6)$$

## 2.5 Inkrementelle Form des P.d.v.V.

Es wird ein Ausdruck angestrebt, in dem die bekannten Variablen von Zustand 1 getrennt von den unbekanntem inkrementellen Größen auftreten. Dazu werden die Spannungen und Verzerrungen wie folgt aufgespalten:

$${}^2S_{ij} = {}^1S_{ij} + s_{ij} \quad (2.7)$$

$${}^2E_{ij} = {}^1E_{ij} + \epsilon_{ij} = {}^1E_{ij} + e_{ij} + \eta_{ij} \quad (2.8)$$

mit

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} \cdot u_{k,j} + u_{k,j} \cdot u_{k,i})$$

(linearer Anteil der Verzerrungszinkremente)

$$\eta_{ij} = \frac{1}{2} u_{k,i} \cdot u_{k,j}$$

(nichtlinearer Anteil der Verzerrungszinkremente)

Mit Hilfe von Gln. (2.6) bis (2.8) kann das P.d.v.V. wie folgt umgeschrieben werden:

$$\int_{\sigma_V} s_{ij} \cdot \delta \epsilon_{ij} \cdot d^{\circ}v + \int_{\sigma_V} {}^1s_{ij} \cdot \delta \eta_{ij} \cdot d^{\circ}v = {}^2\delta W_{(a)} - \int_{\sigma_V} {}^1s_{ij} \cdot \delta e_{ij} \cdot d^{\circ}v \quad (2.9)$$

## 2.6 Linearisierung

Wird in Gl. (2.9) die konstitutive Beziehung  $s_{ij} = C_{ijrs} \epsilon_{rs}$  eingesetzt, so wird der erste Term dieser Gleichung nichtlinear in den Verzerrungszinkrementen (Anteil  $\eta_{ij}$ ). Dieser Term wird linearisiert, indem  $\epsilon_{ij}$  durch  $e_{ij}$  ersetzt wird. Der daraus entstehende Fehler muß iterativ gelöst werden. Die linearisierte Gleichung lautet:

$$\int_{\sigma_V} C_{ijrs} \cdot e_{rs} \cdot \delta e_{ij} \cdot d^{\circ}v + \int_{\sigma_V} {}^1s_{ij} \cdot \delta \eta_{ij} \cdot d^{\circ}v = {}^2\delta W_{(a)} - \int_{\sigma_V} {}^1s_{ij} \cdot \delta e_{ij} \cdot d^{\circ}v \quad (2.10)$$

Die FE-Analyse einer Struktur erfordert die Kenntnis der inneren Kräfte und Steifigkeiten. Im vorliegenden Fall werden diese Werte durch Beiträge des Betons, des Stahls und des Verbunds zwischen beiden Stoffen bestimmt. Auf Werkstoffebene werden diese Zusammenhänge mit den konstitutiven Gleichungen definiert. Sie werden getrennt für Stahleinlage und Beton ermittelt.

Die FE-Formulierung wird ausführlich im Abschnitt 4 erläutert. In diesem Abschnitt werden die verwendeten Werkstoffgesetze für Beton und Stahl vorgestellt und ihre Möglichkeiten und Grenzen gezeigt. Im Anhang A findet sich ein Überblick über andere Werkstoffgesetze des Betons.

### 3.1 Beton

Für eine wirklichkeitsnahe Untersuchung eines Betontragwerks bedarf es einer nichtlinearen Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen im Werkstoff Beton. Die Merkmale des Stoffverhaltens sind:

- 1 - Reißen
- 2 - nichtlineare  $\sigma - \epsilon$  Beziehung im Druckbereich
- 3 - Erhöhung der Festigkeit durch biaxialen Druck
- 4 - Druckversagen
- 5 - Zeiteffekte (Kriechen und Relaxation) und Umwelteinflüsse (Schwinden und Temperatur)

Hierzu kommen die Nichtlinearitäten aus dem Zusammenwirken von Beton und Stahl:

- 6 - Schlupf (Bond Slip)
- 7 - Dübelwirkung (Dowel Action)
- 8 - Reibung an den Rißufern (Aggregate Interlock)

In dieser Arbeit wurden nur die ersten vier Nichtlinearitäten berücksichtigt. Diese sind die wichtigsten Effekte für eine Kurzzeitbelastung, die durch die Punkte 1-4 und 6-8 beschrieben

wird. Der Schlupf kann allerdings bei Stahleinlagen mit schlechten Verbundeigenschaften auch eine große Rolle spielen.

Das in dieser Arbeit verwendete Betongesetz basiert auf dem Werkstoffmodell von Darwin/Pecknold [35],[36],[37]. Dieses Modell beschreibt das biaxiale Kurzzeitverhalten des Betons (Punkte 1,2,3,4) und wurde bereits angewendet ([11],[24],[35]), auch bei zyklischer Belastung.

Zur Erfassung nichtproportionaler Beanspruchung sowie der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen ("Tension Stiffening") wurde das Modell von Darwin/Pecknold in dieser Arbeit modifiziert.

Das Grundmodell (D/P) sowie die Änderungen werden im folgenden ausführlich dargestellt.

### 3.1.1 Theoretische Grundlagen

#### 3.1.1.1 Das Darwin/Pecknold - Modell

##### a) Orthotrope Beziehungen

Das Modell kann stichwortartig als inkrementell, nichtlinear, inelastisch, orthotrop eingestuft werden. Die Notwendigkeit zur Wahl eines orthotropen Modells wird aus Bild A.4 ersichtlich. Hier zeigt sich, daß die Elastizitätsmoduli in beiden aufgetragenen Richtungen unterschiedlich sind.

Wird in der orthotropen Beziehung Gl. (A.31b) der Schubterm weggelassen, so erhält man für die Hauptspannungen:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_1 \cdot \nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_2 \cdot E_1 \\ \nu_2 \cdot E_1 & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Darwin/Pecknold [35] führen für die Querdehnzahl den Wert  $v^2 = v_1 \cdot v_2$  ein. Diese Annahme hat - von der theoretischen Seite aus gesehen - keine Berechtigung; sie scheint aber durch den geringen Einfluß auf die Rechenergebnisse gerechtfertigt zu sein, zumal sie eine bedeutende Vereinfachung mit sich bringt. Mit dieser Beziehung kann Gl. (3.1) umgeformt werden:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-v^2} \begin{bmatrix} E_1 & v\sqrt{E_1 E_2} \\ v\sqrt{E_1 E_2} & E_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Außerdem muß noch ein Ausdruck für die Schubterme gefunden werden. Da hierzu keine genaueren Informationen vorliegen, wird der Wert G aus der Forderung der Invarianz des Schubmoduls gegen Drehung des Hauptachsensystems berechnet. Hier soll zunächst Gl. (3.2) um den Schubanteil erweitert werden:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-v^2} \begin{bmatrix} E_1 & v\sqrt{E_1 E_2} & 0 \\ v\sqrt{E_1 E_2} & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & (1-v^2)G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$(d\sigma = C \cdot dY)$$

Diese Gleichung ist in den Hauptrichtungen geschrieben, die im allgemeinen um den Winkel  $\theta$  gegenüber einem beliebigen Referenzsystem gedreht ist. Um Gl. (3.3) im Referenzsystem zu benutzen, muß sie mit der Matrix T transformiert werden.

$$T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & cs \\ s^2 & c^2 & -cs \\ -2cs & 2cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$c = \cos \vartheta ; s = \sin \vartheta$$

Die Transformation liefert eine neue Matrix C' als Funktion von  $\theta$ :

$$C' = T^T \cdot C \cdot T \quad (3.5)$$

Nach dieser Transformation wird die schon erwähnte Forderung gestellt, daß der Term (3/3) aus  $\left[ \right]$  gleich Term (3/3) von  $\left[ \right]'$  sein soll:

$$(1-\nu^2)G' = \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\vartheta \cdot (E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1 E_2}) + (\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)^2 \cdot G \cdot (1-\nu^2) \quad (3.6)$$

und  $G = G'$ .

Nach Auflösung dieser Gleichung erhält man den Ausdruck für  $G$ :

$$G = G' = \frac{1}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1 E_2}) \quad (3.7)$$

Bisher wurde die orthotrope Beziehung nur formal aufgestellt. Es muß noch erläutert werden, wie die Werte  $E_1, E_2, \nu$  bestimmt werden.

#### b) Äquivalente einachsige Verzerrung

Die Werte  $E_1$  und  $E_2$  sind während des Belastungsvorgangs im allgemeinen veränderlich. Der Einfluß der Querdehnzahl soll bei der Bestimmung von  $E_1$  und  $E_2$  nicht enthalten sein, da der Querdehneffekt durch Gl. (3.3) selbst berücksichtigt wird. Ein Weg, um dieses zu ermöglichen, ist die Einführung einer "äquivalenten einachsigen Verzerrung" (ÄEV) (Equivalent Uniaxial Strain), die den zweiachsigen Spannungszustand unter Vernachlässigung des Querdehneffekts zum einachsigen reduziert. Es kann dadurch mit einachsigen  $\sigma - \epsilon$  Diagrammen gearbeitet werden. Dieses Konzept wird an einem linear elastischen Material erläutert.

Die Steigung der "zweiachsigen" Funktion aus Bild 3.1 entsteht, indem man die aufgebrauchte Spannung  $\sigma_2$  durch die wirkliche Verzerrung  $\epsilon_2$  teilt. Setzt man nun die Spannung  $\sigma_1$  zu Null, so wird das Material in Richtung 2 "weicher", und man erhält für die gleiche Spannung  $\sigma_2$ , die Verzerrung  $\epsilon_{2u} > \epsilon_2$ .  $\epsilon_{2u}$  ist die ÄEV, die für die Spannung  $\sigma_2$  in der betrachteten Richtung keine Anteile aus dem  $\nu$ -Effekt aufweist.

Demnach ist die ÄEV in einer Richtung:

$$\epsilon_{iu} = \frac{\sigma_i}{E_i} \quad (3.8)$$

Hier bedeutet  $i$  die Hauptspannungsrichtung (1 bzw. 2).

Dieses Konzept wird für ein nichtlineares Stoffverhalten erweitert, indem inkrementell vorgegangen wird:

$$\epsilon_{iu} = \int d\epsilon_{iu} = \int \frac{d\sigma_i}{E_i} \approx \sum \frac{\Delta\sigma_i}{E_i} \quad (3.9)$$

Hier sind  $E_i$  die Tangentenmoduli und  $\Delta\sigma_i$  der Zuwachs der Hauptspannungen.

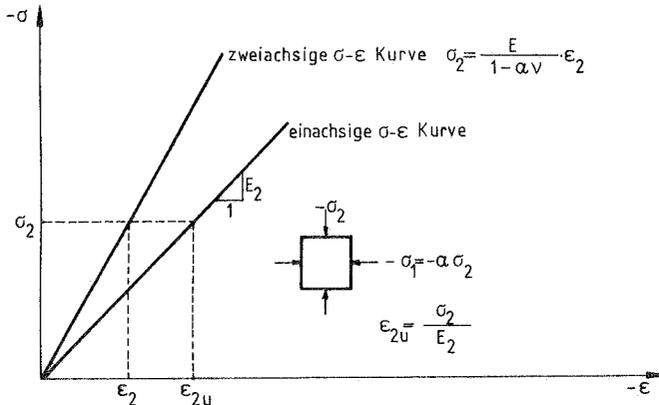


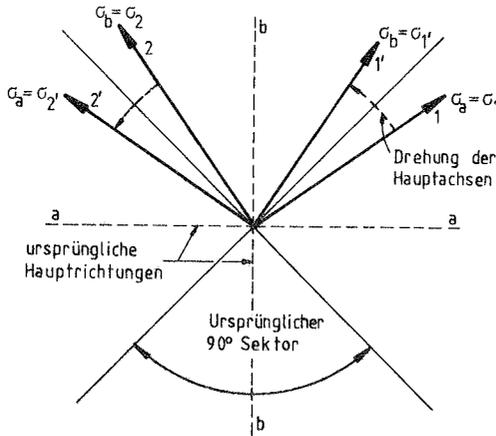
Bild 3.1: Äquivalente einachsige Verzerrung (ÄEV)

Der Zuwachs der ÄEV kann explizit geschrieben werden:

$$\Delta\epsilon_{iu} = \frac{\sigma_i^{\text{neu}} - \sigma_i^{\text{alt}}}{E_i^{\text{alt}}} \quad (3.10)$$

$\sigma_i^{\text{neu}}$  und  $\sigma_i^{\text{alt}}$  sind die Hauptspannungen in der entsprechenden Richtung (1,2) nach Aufbringen des Inkrements bzw. davor. Bei Rotation der Hauptachsen sind die Werte  $\sigma_i$  immer die aktuellen Hauptspannungen. Hielte man die Achsen fest, würde dies bedeuten, daß die Schubspannungen vernachlässigt werden, was sich dahingehend auswirken würde, daß frühzeitige Mikrorißbildungen nicht erfaßt werden. Die ÄEV sind auch ein Maß der Zerstörung des Betons. Von daher sollten ÄEV, die in einer Richtung entstanden sind, das Werkstoffverhalten in dieser Richtung kontrollieren. D/P schlagen vor, die ÄEV einem 90°-Sektor zuzuordnen (Sektor a bzw. b).

Drehen sich die Hauptachsen um mehr als  $\pm 45^\circ$  aus der Anfangslage, so wirken die Hauptspannungen innerhalb des neuen Sektors, in dem sie nun liegen. Dies wird anhand von Bild 3.2 erläutert.



Vor der Drehung

Nach der Drehung

Achse 1 wird dem Sektor a zugeordnet  
 Achse 2 wird dem Sektor b zugeordnet

Achse 1' wird dem Sektor b zugeordnet  
 Achse 2' wird dem Sektor a zugeordnet

Bild 3.2: Drehung der Hauptachsen außerhalb des Ursprungsektors

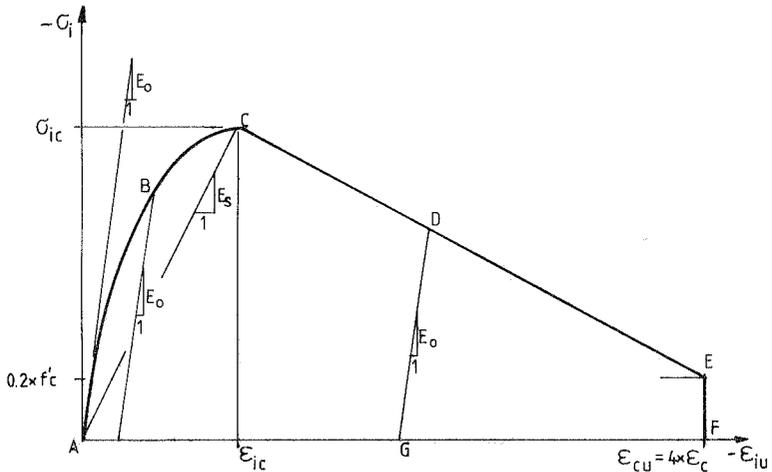
Mit den aus Gl. (3.9) gefundenen  $\varepsilon_{iu}$  können jetzt die  $E_1$ -,  $E_2$ -Werte aus der einachsigen Spannungsverzerrungs-Beziehung ermittelt werden.

c) Einachsige Spannungs-Verzerrungs-Beziehung

Der einachsige Spannungszustand wird im Bereich AC im Druckbereich (Bild 3.3) mit der Saenz(1)-Kurve [38] beschrieben

$$\sigma_i = \frac{E_0 \cdot \varepsilon_{iu}}{1 + \left(\frac{E_0}{E_s} - 2\right) \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} + \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^2} \quad (3.11)$$

Die einzelnen Terme sind in Bild 3.3 erläutert.



$f'_c$  bzw.  $\epsilon_c$  sind die Festigkeit bzw. die dazugehörige Verzerrung für den einachsigen Spannungszustand.

Bild 3.3: Äquivalente einachsige Spannungs-Verzerrungsbeziehung

Nach dem Erreichen des maximalen Wertes wird ein lineares Verhalten CDE angenommen.

Bei monotonem Verzerrungszuwachs folgen die Spannungen dem Weg ABCDEF. Wird an einem Punkt B entlastet, so geschieht dies mit dem Anfangs-Elastizitätsmodul  $E_0$ . Wird ein Rückgang der Spannungen in einem Punkt D (nach C) vorgenommen, so folgen sie dem Weg DG oder DE, abhängig davon, ob die Verzerrungen ab- oder zunehmen. Das ursprüngliche Modell von Darwin/Pecknold ist auch für zyklische Belastung ausgelegt.

#### d) Zweiachsige Wirkung

Wie im Anhang A.1.2 anhand von Bild A.3 gezeigt wird, bewirkt der biaxiale Spannungszustand eine Erhöhung der Betonfestigkeit im Druck-Druck-Bereich. Der Wert dieser Festigkeit ( $\sigma_{ic}$ ) wird

in diesem Modell benötigt, um den Sekantenmodul  $E_s = \sigma_{ic}/\epsilon_{ic}$  im Punkt C berechnen zu können. Als Versagenskurve werden die von Kupfer/Gerstle [39] vorgeschlagenen Beziehungen benutzt (siehe Bild 3.4).

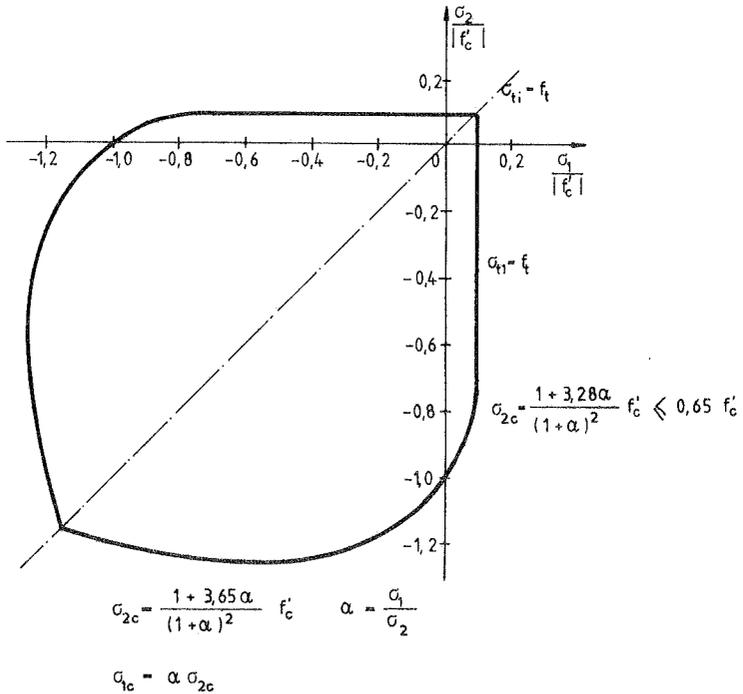


Bild 3.4: Biaxiale Versagenskurve aus [39]

Für  $\sigma_1 \geq \sigma_2$  kann man die Kurven folgendermaßen ausdrücken:

Druck-Druck-Bereich:

$$\sigma_{2c} = \frac{1 + 3,65\alpha}{(1+\alpha)^2} f'_c \quad (3.12a)$$

$$\sigma_{1c} = \alpha \sigma_{2c} \quad (3.12b)$$

mit  $\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$

Zug-Druck-Bereich:

$$\sigma_{t1} = f_t \quad (3.13a)$$

$$\sigma_{2c} = \frac{1+3,28\alpha}{(1+\alpha)^2} f'_c \leq 0,65 f'_c \quad (3.13b)$$

Der Wert 3,28 in Gl. (3.13b) gilt für ein Verhältnis  $f_t/|f'_c| = 0,09$ . In diesem Bereich wird eine konstante Zugfestigkeit angenommen, obwohl sich in den Versuchen [39] mit zunehmender Druckbelastung ein fast linearer Abfall der Zugfestigkeit zeigt. Diese größer angenommene Zugfestigkeit liefert bessere Ergebnisse, wenn man das Modell für eine FE-Berechnung einsetzt. Eine Begründung dafür liefern Sturman/Shah/Winter. In [40] zeigen sie, daß in Versuchen mit veränderlichem Verzerrungsverlauf über den Querschnitt größere Verzerrungen (und dadurch größere Spannungen) aufnehmbar sind als bei konstantem Verzerrungsverlauf.

Zug-Zug-Bereich:

$$\sigma_{t1} = \sigma_{t2} = f_t \quad (3.14)$$

Um Gl. (3.11) aufzustellen, werden die Verzerrungen  $\epsilon_{ic}$  bei dem Extremwert der Druckspannung  $\sigma_{ic}$  benötigt. Diese Verzerrungen werden aus Versuchen durch lineare Interpolation von zwei Spannungszuständen ( $\alpha = 0$ ;  $\alpha = 1$ ) gewonnen. Die ÄEV am kritischen Punkt C wird für  $\alpha = 1$  durch Division der gemessenen Verzerrungen durch  $(1-\nu)$  ausgerechnet. Damit wird der Wert R ermittelt:

$$R = \frac{\frac{\epsilon_{ic}(\alpha=1)}{\epsilon_{cu}} - 1}{\frac{\sigma_{ic}(\alpha=1)}{f'_c} - 1} \quad (3.15)$$

Danach kann eine Interpolationsformel angegeben werden

$$\epsilon_{ic} = \epsilon_c \left[ \frac{\sigma_{ic}}{f'_c} \cdot R - (R-1) \right] \quad (3.16)$$

Der Wert R wird in Übereinstimmung mit [35] mit 3 angenommen.

Diese Formel ist für  $|f'_c| < |\sigma_{ic}|$  gedacht. Darwin/Pecknold schlagen für  $|\sigma_{ic}| < |f'_c|$  eine andere Formel vor:

$$\epsilon_{ic} = \epsilon_c \left[ -1,6 \left( \frac{\sigma_{ic}}{f'_c} \right)^3 + 2,25 \left( \frac{\sigma_{ic}}{f'_c} \right)^2 + 0,35 \left( \frac{\sigma_{ic}}{f'_c} \right) \right] \quad (3.17)$$

Es wird darüber hinaus kontrolliert, daß bei sehr kleinen  $\epsilon_{ic}$  die Beziehung  $E_o/E_s$  nicht kleiner als 2 wird, weil sich dann u.U. das Vorzeichen der im Bild 3.3 angegebenen Krümmung der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung umdreht. Ergibt sich  $E_o/E_s < 2$ , wird  $\epsilon_{ic}$  so angesetzt, daß  $E_o/E_s$  den Wert 2 liefert. Mit den so ermittelten Werten  $\sigma_{ic}$ ,  $\epsilon_{ic}$  lassen sich einige einachsige  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehungen im Druckbereich aufstellen. Sie sind im Bild 3.5 gezeigt.

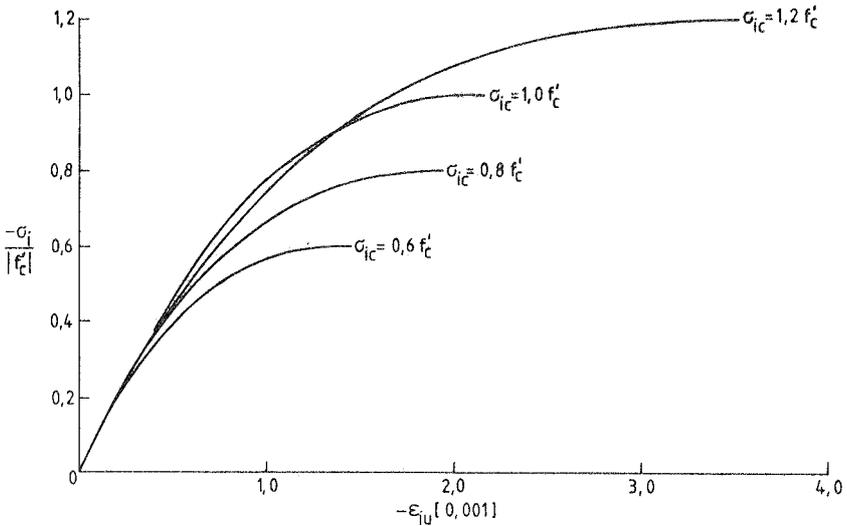


Bild 3.5: Äquivalente einachsige  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurven

### e) Inkrementelle Querdehnzahl

Für die Druck-Druck- und Zug-Zug-Bereiche wird  $\nu = \nu_0$  angenommen. Für den Zug-Druck-Bereich sowie bei einachsigen Druck zeigt sich bei hoher Beanspruchung eine große Dilatation. Wie im Abschnitt A.3.3c gezeigt wird, kann man diese Wirkung durch eine Zunahme der Querdehnzahl wiedergeben:

$$\nu = \nu_0 + 0,6(1,2 - \nu_0) \left( \frac{\sigma_2}{f_c} \right)^4 + 0,4(1,2 - \nu_0) \left( \frac{\sigma_1}{f_t} \right)^4 \ll 0,99 \quad (3.18)$$

Liegt  $\epsilon_{iu}$  im Druckbereich und ist  $|\epsilon_{iu}| > |\epsilon_{ic}|$ , so wird  $\nu = 0$  gesetzt. Dies beruht auf dem Gedanken, daß nach dem Versagen des Betons beide Richtungen annähernd unabhängig verformbar sind. Obwohl diese Erklärung nicht ganz befriedigend ist, kann man sich vorstellen, daß der Beton nach dem Druckversagen "weicher" wird und dies mit einem Wert  $\nu = 0$  erreicht werden kann.

#### 3.1.1.2 Umformung des Darwin/Pecknold-Modells für die Erfassung nichtproportionaler Beanspruchung

Das Darwin/Pecknold-Modell - sowie die meisten Werkstoffformulierungen des Betons - sind für proportionale Beanspruchung gedacht. Fehlende Versuchsergebnisse im Bereich der nichtproportionalen Beanspruchung lassen bis heute noch keine endgültige Formulierung zu. In dieser Arbeit ist diese Art der Beanspruchung zugelassen, obwohl nicht der Versuch gemacht wird, ein Werkstoffgesetz für nichtproportionale Beanspruchung zu entwickeln. Um die dennoch auftretende nichtproportionale Beanspruchung erfassen zu können, muß das Darwin/Pecknold-Modell geringfügig verändert werden.

Aus der Diskussion im vorherigen Abschnitt sieht man, daß unendlich viele einachsige  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurven existieren, abhängig vom Spannungsverhältnis  $\alpha$  (siehe Bild 3.5). Während des Belastungsvorgangs ändert sich aber  $\alpha$  auf Materialebene, so daß die einachsigen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehungen von Schritt zu Schritt unterschiedlich sind. Dies hat zur Folge, daß die Punkte, die in einem Schritt "1" auf einer  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve liegen, im nächsten Schritt "2" sich außerhalb dieser befinden (z.B. Punkte A, B in Bild 3.6).

Gemäß der Arbeit von Darwin/Pecknold [35] würde der E-Modul im Punkt A bei Schritt "2" die Tangente in A1 sein, entsprechend der

ÄEV  $\epsilon_{iu}(A)$ . In dieser Arbeit wird dieses Vorgehen so geändert, daß der E-Modul mit der Tangente in A2 ( $E_i(A2)$ ) angegeben wird. Somit läßt sich das Problem eines Punktes B (Bild 3.6) lösen, der über der maximalen Spannung  $\sigma_{ic}$  liegt. Punkt B liegt außerhalb der Bruchkurve (Bild 3.4) und sollte deswegen Spannungen abbauen. Nach D/P würde er aber einen positiven E-Modul bekommen und somit weiter ansteigen. In der vorliegenden Arbeit wird in B für die Spannungsberechnung der E-Modul eingesetzt, der aus der Verbindung von B mit C resultiert. Für die Stoffmatrix zur Berechnung der Tangentensteifigkeitsmatrix wird  $E_i(B) = 0$  gesetzt.

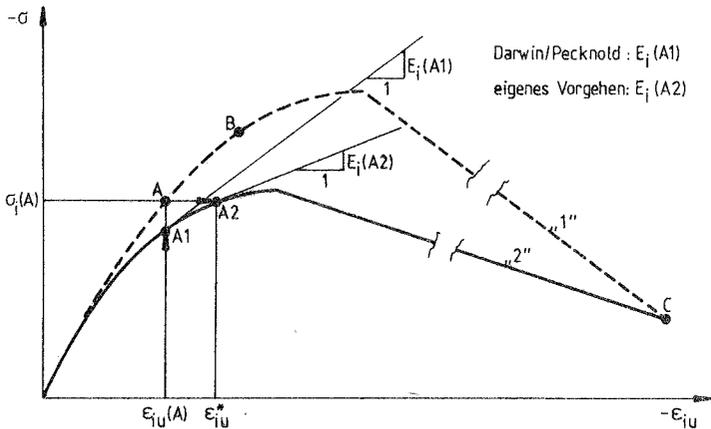


Bild 3.6: Ermittlung des E-Moduls

Um dieses Vorgehen in Programm einzubringen, wird Gl. (3.11) nach  $\epsilon_{iu}$  umgeformt:

$$\epsilon_{iu}^* = \frac{-\left(\frac{\sigma_i \cdot A}{E_{ic}} - E_0\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_i \cdot A}{E_{ic}} - E_0\right)^2 - \frac{4\sigma_i^2}{E_{ic}^2}}}{\frac{2\sigma_i}{E_{ic}^2}} \quad (3.19)$$

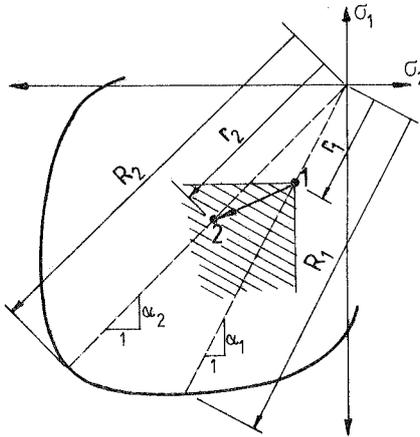
mit  $A = E_0/E_s - 2$ .

Durch Ableitung der Gl. (3.11) nach  $\epsilon_{iu}$  erhält man den zugehörigen Tangentenmodul  $E_i$ , wobei für  $\epsilon_{iu}$  der Ausdruck nach Gl. (3.19) einzusetzen ist.

$$\epsilon_i = \frac{d\sigma_i}{d\epsilon_{iu}} = E_0 \left[ \frac{1 - \left(\frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}}\right)^2}{\left(1 + A\left(\frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}}\right) + \left(\frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}}\right)^2\right)^2} \right] \quad (3.20)$$

mit  $A = E_0/E_s - 2$  .

Die Bedeutung des Vorgehens wird anhand Bild 3.7 verdeutlicht.



**Bild 3.7:** Bedeutung des Vorgehens bei nichtproportionaler Beanspruchung

In diesem Bild sind  $r_1$ ,  $r_2$  die Entfernungen der Punkte 1, 2 (vor bzw. nach dem Schritt) zum Ursprung.  $R_1$ ,  $R_2$  sind die Entfernungen der Bruchzustände von 1 bzw. 2 zum Ursprung. Die E-Moduli für beide Richtungen sind eine Funktion von  $r_1/R_1$  und  $\alpha_1$  für den Zustand 1 und eine Funktion von  $r_2/R_2$  und  $\alpha_2$  für Zustand 2. Der Werkstoff hat in diesem Modell also kein "Gedächtnis" im Druck-Druck-Bereich.

Das Modell funktioniert im schraffierten Bereich von Bild 3.7 ohne zusätzliche Maßnahme, da dort keine Entlastung stattfindet.

Für den Fall der Entlastung wird mit dem anfänglichen E-Modul gearbeitet. Bei Wiederbelastung werden die E-Moduli als Funktionen von  $r_m/R_m$  und  $\alpha_m$  angenommen. Dieser Vorgang ist im Bild 3.8 anhand einer einachsigen  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung dargestellt.

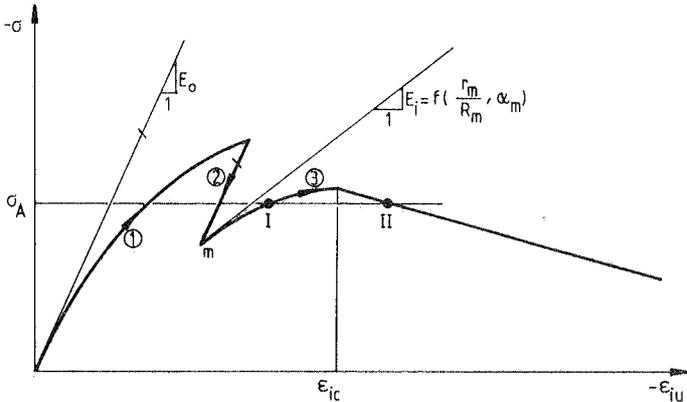


Bild 3.8: Entlastung und Wiederbelastung

Die ÄEV wird bei diesem Modell immer mitgerechnet, um das Erreichen der Bruchverzerrung  $\epsilon_{ic}$  zu erkennen. Bei einem Spannungsniveau  $\sigma_A$  (Bild 3.8) wird mit  $|\epsilon_{iu}| < |\epsilon_{ic}|$  der Punkt I angenommen, andernfalls Punkt II auf dem abfallenden Ast.

In Bild 3.9 ist ein Vergleich in Parameterdarstellung zwischen dem beschriebenen und dem von Link in [41] vorgeschlagenen Modell vorgenommen.

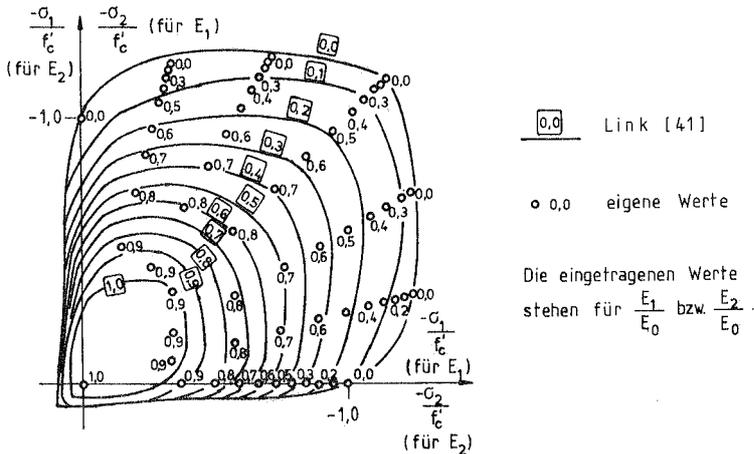


Bild 3.9: Vergleich der E-Moduli des eigenen Modells mit denen nach Link [41]

### 3.1.1.3 Riß- und Nachrißverhalten

Im gewählten Modell wird ein Hauptspannungs-Rißbruch-Kriterium angewandt. Bei Überschreitung der Zugfestigkeit entsteht ein Riß senkrecht zur Hauptspannung, und der E-Modul in der konstitutiven Matrix wird für diese Richtung zu Null gesetzt. Ist bereits ein Riß vorhanden, kann sich noch ein zweiter bilden, der gegenüber dem ersten offenen Riß um  $90^\circ$  gedreht ist. Hat sich der Riß geschlossen, richtet sich der zweite gemäß der maximalen Hauptzugspannung aus. Bei zwei offenen Rissen wird die konstitutive Matrix zu Null gesetzt.

Hier soll auf eine Inkonsistenz hingewiesen werden. Bei einem offenen Riß bleibt nach Gl. (3.7) ein Schubmodul von  $G = E/4$  erhalten. Demnach sollte sich anstelle des orthogonalen Rißbildes ein schiefer Riß bilden. Dennoch wird die obige Annahme mit senkrechter Rißausbildung beibehalten. Die Mitnahme von  $G$  ist erforderlich, weil die Vernachlässigung zu numerischen Schwierigkeiten führt (siehe Lin [21]). Dieses Kriterium wird von Darwin und Pecknold übernommen. Andere Arbeiten, z.B. die von

Kristjansson [25] lassen schiefwinklige Rißbildung zu, was anhand von Versuchen als realistischer anzusehen ist.

Es handelt sich hier entsprechend der Unterteilung des Abschnitts 1 um ein Modell mit "verschmierten Rissen". Das Konzept der "Rißbreite" wird eingeführt, um zu kontrollieren, wann ein Riß wieder geschlossen ist. Es stellt auch ein Maß für den "Tension Stiffening"-Effekt (TS) dar. Der TS - obwohl keine eigentliche Materialeigenschaft (siehe Abschnitt 1) - wird an dieser Stelle eingeführt, weil dieser Versteifungseffekt im gewählten Modell dem Beton zugeordnet wird.

Der TS soll (siehe Abschnitt 1.2) die Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen beschreiben. Diese Mitwirkung entsteht durch die Stahleinlagen, die die Risse verbinden. Die Spannungen im Beton zwischen zwei benachbarten Rissen, die durch die Stahleinlagen verbunden sind, werden nicht Null, obwohl die Normalspannungen am Riß selbst verschwinden. Dies ist dem Verbund zwischen Stahl und Beton zu verdanken. Bei globaler Betrachtung dieses Phänomens ist festzustellen, daß der Beton im Durchschnitt weniger Spannung aufnimmt als vor dem Reißen. Würde man aber annehmen, daß der Beton zwischen den Rissen spannungslos ist, erhält man ein zu weiches Gesamtverhalten. Bei zunehmender Beanspruchung treten neue Risse zwischen den beiden ursprünglichen auf. Somit fällt die Mitwirkung zwischen den Rissen ab, bis die Risse so dicht nebeneinander liegen, daß der Beton keinen Einfluß mehr auf das Gesamtverhalten hat.

Dieses Gesamtverhalten soll das FE beschreiben können. In dieser Arbeit wird die Spannung zwischen den Rissen so erfaßt, daß der Beton - der die Eigenschaften der Risse und deren Umgebung beschreibt - nach dem Reißen immer noch Spannungen aufnimmt (Bild 3.10).

In Bild 3.10 wachsen die Spannungen linear von B bis D, wo der erste Riß auftritt. Nehmen die Verzerrungen weiter zu, so wird dem Weg DFG gefolgt. Von D bis F bilden sich ständig weitere Risse, die Mitwirkung baut sich ab. Nach F wird angenommen, daß der Beton nicht mehr mitwirkt. Nehmen die Verzerrungen in einem Punkt E ab, so wird ein konstanter Spannungsverlauf angenommen,



$$C_{wi②} = C_{wi①} + \Delta C'_{wi} + \Delta C^e_{wi} \quad (3.22)$$

Dieses ist im Bild 3.10 dargestellt. Sind beide Risse offen, so wird ähnlich verfahren. Der Unterschied besteht darin, daß jetzt der Querdehnanteil entfällt:

$$\Delta C'_{wi} = \Delta \epsilon_i \quad (i=1, 2) \quad (3.23)$$

Wird die Rißbreite negativ, so gilt der Riß als geschlossen. Es wird in diesem Modell angenommen, daß der Übergang vom zweiachsigen (Punkt D) zum einachsigen (Punkt F) Spannungszustand nicht schlagartig erfolgt, sondern über eine lineare Interpolation. Entsprechend soll der Spannungs- und Verzerrungszustand in Richtung  $j$  zum einachsigen Fall übergehen. Nachdem Punkt F (Bild 3.10) erreicht ist, bleibt in Richtung  $j$  nur noch der einachsige Zustand maßgebend. Wie diese Reduktion zum einachsigen Zustand erfolgt, wird anhand von Bild 3.11 erläutert.

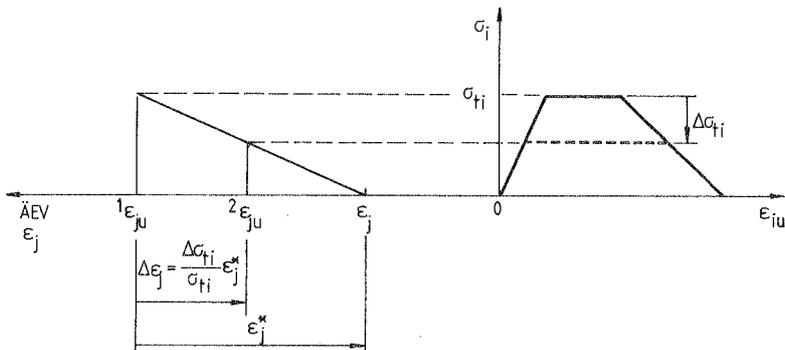


Bild 3.11: Behandlung der Verzerrungen in Richtung  $j$  während des Reißens in Richtung  $i$

In diesem Bild bedeuten die linken Kopfzeiger 1 und 2 die Zustände jeweils vor bzw. nach dieser Reduktion.  $1\epsilon_{ju}$  ist die ÄEV in  $j$ -Richtung, bevor der Spannungsabfall  $\Delta\sigma_{ti}$  auftritt.  $\epsilon_j$  ist die tatsächliche Verzerrung in  $j$ . Würde ein einachsiger Zustand in  $j$  auftreten, so geht  $1\epsilon_{ju}$  in  $\epsilon_j$  über, macht also einen Sprung  $\epsilon_j^*$  durch. In diesem Modell tritt dieser Sprung nicht schlagartig auf, sondern es wird ein Verzerrungsverhalten angenommen, das pro-

portional zum Spannungsverlust in Richtung  $i$  ist. Die Verzerrungen in  $j$  werden graduell um  $\Delta\varepsilon_j$  (Bild 3.11) vermindert.

Dieser neue Verzerrungszustand in  $j$  ( ${}^2\varepsilon_{ju}$ ) entspricht einem neuen Spannungszustand. Dabei wird angenommen, daß der Verzer-rungsrückgang elastisch erfolgt. Somit wird ein Spannungsinkrement

$$\Delta\sigma_j = -E_0 \cdot \Delta\varepsilon_j \quad (3.24)$$

dem vorhandenen Spannungszustand überlagert.

Nach Überschreitung des Punkts D (Bild 3.10) wird der Tangen-tenmodul in der entsprechenden Richtung aus numerischen Gründen zu Null gesetzt, obwohl ein negativer Wert eingesetzt werden sollte. Dies kann jedoch bei geringer Steifigkeit der Stahlein-lagen numerische Schwierigkeiten mit sich bringen, da die Gesamt-steifigkeit von Stahl und Beton einen positiven Wert ergeben muß.

### 3.1.2 Verarbeitung im Programm

Die konstitutive Matrix des vorgestellten Werkstoffgesetzes soll auf eine Form gebracht werden, welche die Eigenschaften des gewählten Elements berücksichtigt (siehe Abschnitt 4.3). Hierzu sollen folgende Bemerkungen gemacht werden:

- 1) Das finite Element berücksichtigt Schubverformungen in Dicken-richtung. Da das biaxiale Werkstoffmodell Zustände in der Schalenebene beschreibt, muß eine zusätzliche Annahme für die Schubterme in Dickenrichtung getroffen werden: Hierzu wird derselbe Schubmodul angenommen, der in der Schalenebene wirkt. Eine genauere Aussage ist nur mit einem dreiachsigen Werkstoff-gesetz möglich.
- 2) Die Spannung und Dehnung in Dickenrichtung werden im Element unterdrückt. Die entsprechende Reihe und Spalte wird in der konstitutiven Matrix zu Null gesetzt.
- 3) Gl. (3.3) ist in den Hauptrichtungen geschrieben. Im allge-meinen ist das Hauptachsensystem um den Winkel  $\theta$  gegenüber

einem festen elementbezogenen Koordinatensystem gedreht. Dieses System, mit dem Index ( )<sub>L</sub> bezeichnet, wird in Abschnitt 5.1.1 definiert. Hier sei nur gesagt, daß die Stoffmatrix bezüglich dieses in der Schalenebene liegenden Systems definiert wird.

Unter Berücksichtigung dieser drei Punkte kann die folgende Beziehung aufgestellt werden (für Bezeichnungen siehe Tafel 5.1):

$$\sigma_L = C_L \cdot \Delta Y_L \quad (3.25)$$

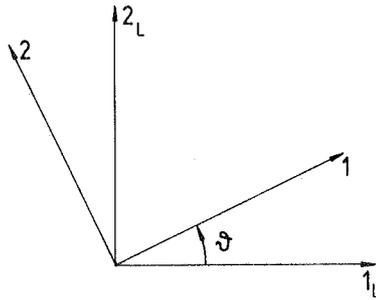
wobei  $C_L$  in Bild 3.12 angegeben ist.

Das Ablaufschema des Modells im Programm wird anhand des Flußdiagramms von Bild 3.13 verdeutlicht.

Das Verhalten einer Struktur mit diesem Stoffgesetz ist wegabhängig, so daß in jedem Integrationspunkt nach Ablauf des Vorgangs von Bild 3.13 alle Zustandswerte gespeichert werden müssen. Diese befinden sich in einem Vektor WA (Working Array). Der Vektor WA wird bei jedem Aufruf der Stoffroutinen erstellt, wird aber nur gespeichert, nachdem Konvergenz erzielt worden ist. Er enthält die Werte:

$Y_L$ aktueller Verzerrungszustand	(5 Werte)
$\sigma_L$ aktueller Spannungszustand	(5 Werte)
Rißwinkel	(2 Werte)
Rißbreiten	(2 Werte)
$\epsilon_{iu}$	(2 Werte)
$\sigma_{t_1}, \sigma_{t_2}$ Zugspannung über beide Risse	(2 Werte)
Winkel des Ursprungssektors	(1 Wert)
Winkel der $\epsilon_{iu}$	<u>(1 Wert)</u>
	zusammen 20 Werte
	je Integrationspunkt.

Bei der Speicherung der Vektoren  $Y_L$  und  $\sigma_L$  brauchen nur 5 Werte berücksichtigt zu werden, da  $\epsilon_{33}$  und  $\sigma_{33}$  gleich Null sind.



$1_L, 2_L$  festes lokales System  
 $1, 2$  Hauptspannungssystem

$$c = \cos \varphi \quad ; \quad s = \sin \varphi$$

$$(1 - \nu^2) G = 0,25 (E_1 + E_2 - 2\nu\sqrt{E_1 E_2})$$

$\frac{1}{1 - \nu^2}$	$c^2 E_1 + s^2 E_2$	$\nu\sqrt{E_1 E_2}$	0	$0,5sc(E_1 - E_2)$	0	0
		$s^2 E_1 + c^2 E_2$	0	$0,5sc(E_1 - E_2)$	0	0
			0	0	0	0
				$(1 - \nu^2) G$	0	0
					$(1 - \nu^2) G \xi$	0
						$(1 - \nu^2) G \xi$

$\xi = 5/6$  (Formfaktor für Schubspannungen bei Rechteckquerschnitten)

Bild 3.12: Stoffmatrix im lokalen Elementsystem ( $C_L$ )

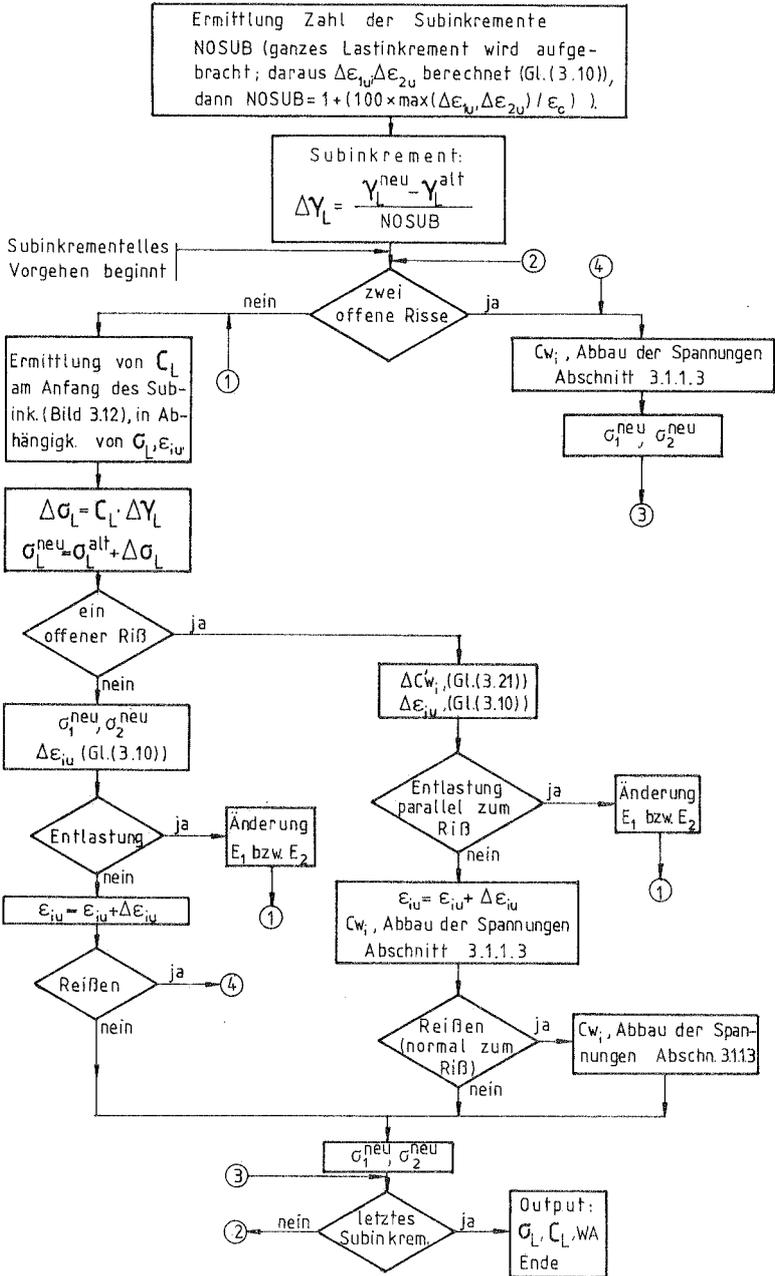


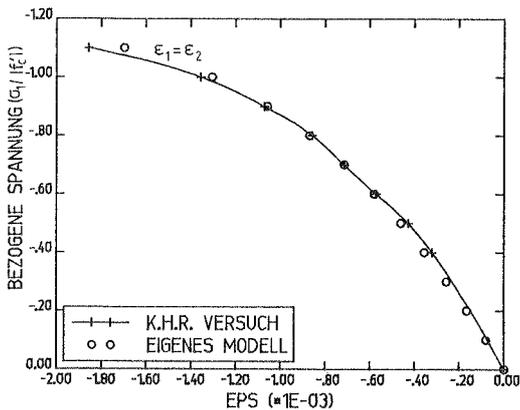
Bild 3.13: Flußdiagramm des Stoffgesetzes

### 3.1.3 Vergleich des Modells mit den KHR-Versuchen

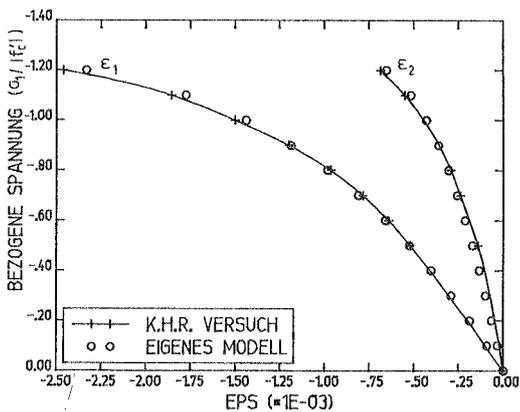
In den folgenden sechs Bildern werden die Spannungs-Verzerrungs-Kurven des eigenen Modells mit den Versuchen von Kupfer, Hilsdorf und Rüschi [42] verglichen.

Da die Formulierung für ein Verschiebungselement geschrieben ist - sie erwartet Verzerrungen als Eingabe und liefert die zugehörigen Spannungen und die Stoffmatrix -, muß ein Programm erstellt werden, welches das inverse Problem behandelt, nämlich Verzerrungen aus vorgegebenen Spannungen zu ermitteln. Die so entstandene nichtlineare Aufgabe mit zwei Freiheitsgraden  $\epsilon_1, \epsilon_2$  wird mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst und arbeitet mit proportionaler Spannungssteigerung.

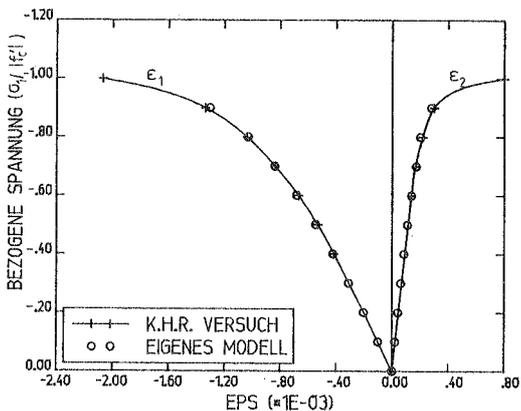
Die Bruchspannungen im Zug-Zug-Bereich liegen über denen des Versuchs. Dieses ist auf die Zugfestigkeit des Betons zurückzuführen, die bei einem niedrigen Ansatz zu einem früheren Versagen führt. Die Zugfestigkeit ist ein Eingabeparameter, dessen Einfluß auf das Systemverhalten im Abschnitt 6 untersucht wird.



$$a) \alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1,00}{-1,00}$$

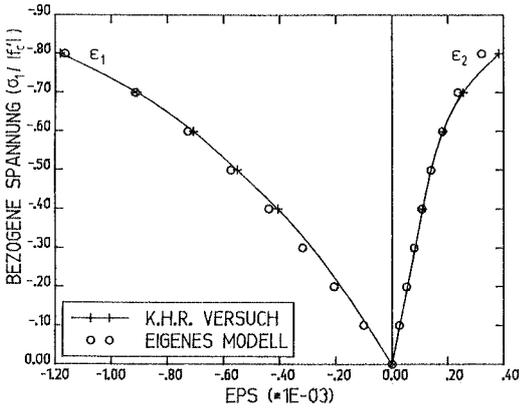


$$b) \alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1,00}{-0,52}$$

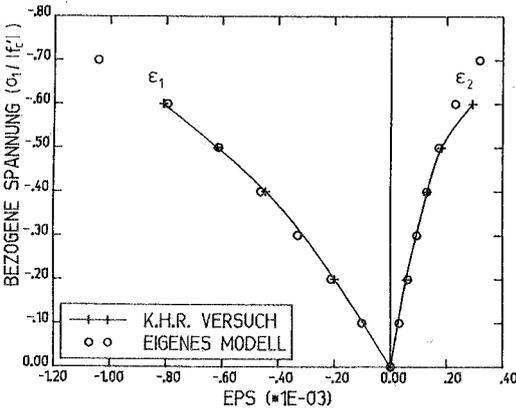


$$c) \alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1,00}{0,00}$$

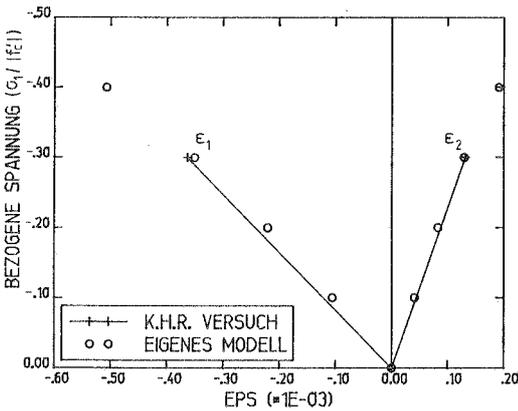
Bild 3.14: Vergleich zwischen dem eigenen Modell und den K.H.R. Versuchen



$$d) \alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1,00}{+0,052}$$



$$e) \alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1,00}{+0,103}$$



$$f) \alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1,00}{+0,204}$$

Bild 3.14: (Fortsetzung)

### 3.2 Stahl

Wie im Abschnitt 5 näher erläutert, wird in dieser Arbeit das Konzept der "verschmierten Stahlschicht" benutzt. Diese Schicht wirkt in der Elementebene und hat nur einachsige Eigenschaften, d.h., sie weist keinen Querdehneffekt auf. Ebenfalls wird die Schubverformung vernachlässigt, so daß nur eine einachsige  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung benötigt wird. Daraus geht hervor, daß in dieser Arbeit die Wirkung der Größe und Verteilung der einzelnen Stäbe nicht untersucht werden kann.

Es werden drei verschiedene Stahlmodelle im Programm eingeführt. Diese werden aus der Arbeit von Murray [43] übernommen:

- 1) unbegrenzt linear elastisch

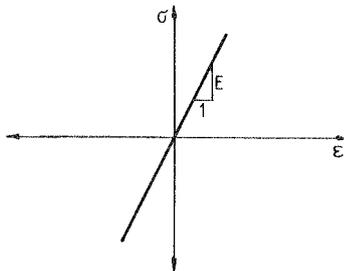


Bild 3.15: Linear elastischer Stahl

## 2) Bilinear elastisch

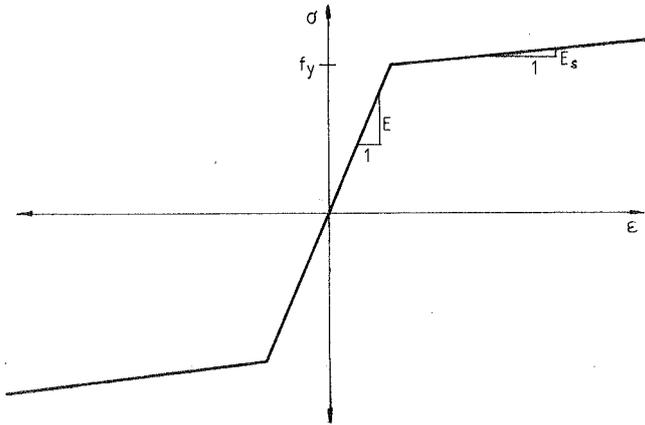


Bild 3.16: Bilinear elastischer Stahl

Dieser Stahl geht bei Be- und Entlastung die gleichen Wege (hyperelastisch), zeigt aber an, ob die Fließgrenze überschritten wurde. Zur Eingabe werden die Werte  $E$ ,  $f_y$ ,  $E_s$  benötigt.

## 3) Multilinear elasto-plástisch

Die Definition dieser  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung erfolgt durch die Koordinaten der Punkte  $(\epsilon_i, \sigma_i)$  (Bild 3.17). Für Entlastung gilt der E-Modul des ersten Astes. Im plastischen Bereich wird eine isotrope Verfestigung zugrunde gelegt. Der Bauschinger Effekt wird nicht berücksichtigt, da keine zyklische Belastung vorgesehen ist. Wie sich ein einmaliger Lastzyklus im Modell auswirken würde, ist am Zyklus ABCDEFGHI in Bild 3.17 verdeutlicht.

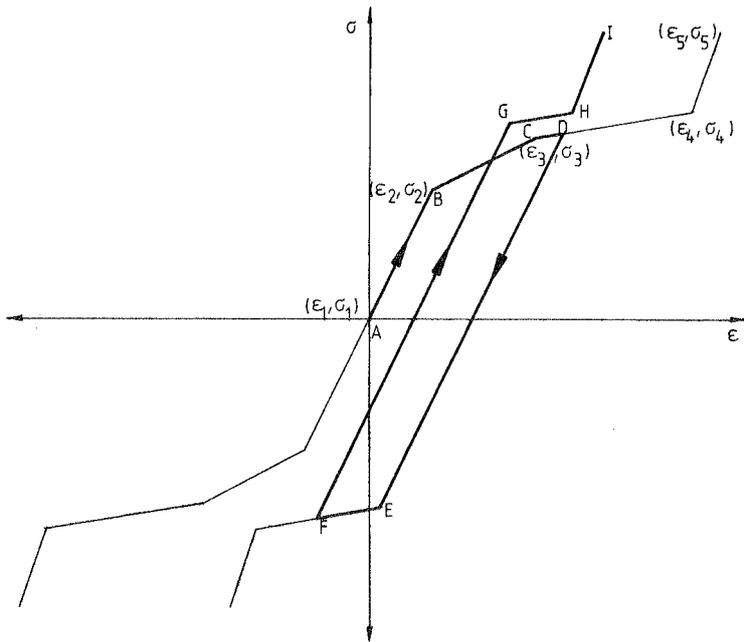


Bild 3.17: Multilinear elasto-plastischer Stahl

Die Methode der finiten Elemente ist heute der meist verbreitete Weg zur Analyse von Strukturen aller Art. Die Grundlagen dieser Methode sollen hier als bekannt vorausgesetzt werden; sie können aus den Büchern von Zienkiewicz [44] und Oden [45] (für nicht-lineare Probleme) entnommen werden.

#### 4.1 Interpolation und Diskretisierung

Die FEM kann als ein Ritz-Verfahren in Teilbereichen angesehen werden [34]. Das heißt, es werden lokale Ansätze für Strukturteile gewählt, die den Ritzschen Anforderungen genügen. Demzufolge sind die Integrale der Gl. (2.10) auf einen Teil der Struktur zu beziehen. Die gesamte Struktur wird dann aus einer Summation dieser Teilbereiche zusammengesetzt.

Um von Gl. (2.10) zu einem computergerechten Rechenkonzept zu gelangen, werden Interpolationsfunktionen eingeführt, deren Parameter die Unbekannten des Problems sind. Im Sinne einer isoparametrischen Formulierung werden (in Anlehnung an Ramm [27]) Geometrie und Verschiebungen gleichwertig interpoliert.

$$\text{Geometrie:} \quad \bar{x} = \phi \cdot \bar{x}^e \quad (4.1)$$

$$\text{Verschiebung:} \quad \bar{u} = \phi \cdot \bar{u}^e \quad (4.2)$$

$$\text{Verschiebungsinkremente:} \quad u = \phi \cdot \bar{u}^e \quad (4.3)$$

Die Bezeichnungen  $(\bar{\quad})$  bzw.  $(\quad)^e$  bedeuten Knotenwerte bzw. der Bezug auf das Element.

Durch Ableiten der Gl. (4.3) gewinnt man folgende Beziehungen:

$$e = {}^1B \cdot \bar{u}^e \quad (4.4)$$

$$d = {}^1\hat{B} \cdot \bar{u}^e \quad (4.5)$$

wobei  $\mathbf{e}$  der lineare Anteil des Verzerrungsinkrementes gemäß Gl. (2.8)

$$\mathbf{e}^T = \langle e_{11} \quad e_{22} \quad e_{33} \quad 2e_{12} \quad 2e_{13} \quad 2e_{23} \rangle \quad (4.6)$$

und  $\mathbf{d}$  das Inkrement des Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{d}^T = \langle u_{11} \quad u_{12} \quad u_{13} \quad u_{2,1} \quad u_{2,2} \quad u_{2,3} \quad u_{3,1} \quad u_{3,2} \quad u_{3,3} \rangle \quad (4.7)$$

ist.

Um Gl. (2.10) auf Matrixschreibweise umzuformen, werden ein Spannungsvektor  ${}^1\mathbf{s}$  und eine Spannungsmatrix  ${}^1\mathbf{S}$  eingeführt:

$${}^1\mathbf{s}^T = \langle {}^1s_{11} \quad {}^1s_{22} \quad {}^1s_{33} \quad {}^1s_{12} \quad {}^1s_{13} \quad {}^1s_{23} \rangle \quad (4.8)$$

$${}^1\mathbf{S} = \begin{bmatrix} {}^1s_{11} & {}^1s_{12} & {}^1s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & {}^1s_{22} & {}^1s_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & {}^1s_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & {}^1s_{11} & {}^1s_{12} & {}^1s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & {}^1s_{22} & {}^1s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & {}^1s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{symm.} & & & & {}^1s_{11} & {}^1s_{12} & {}^1s_{13} \\ & & & & & & & {}^1s_{22} & {}^1s_{23} \\ & & & & & & & & {}^1s_{33} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Die Terme von Gl. (2.10) können jetzt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_V} C_{ijrs} \cdot e_{rs} \cdot \delta e_{ij} \cdot d\Omega_V &\longrightarrow \delta \bar{\mathbf{u}}^T \left( \sum_{\text{elem.}} \int_{\Omega_V^e} {}^1\mathbf{B}^T \cdot {}^1\mathbf{C} \cdot {}^1\mathbf{B} \cdot d\Omega_V^e \right) \cdot \bar{\mathbf{u}} = \\ &= \delta \bar{\mathbf{u}}^T \left( \sum_{\text{elem.}} {}^1\mathbf{K}^e \right) \cdot \bar{\mathbf{u}} = \delta \bar{\mathbf{u}}^T \cdot {}^1\mathbf{K} \cdot \bar{\mathbf{u}} \quad (4.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{ov}} {}^1s_{ij} \cdot \delta \eta_{ij} \cdot d^0v &\longrightarrow \delta \bar{u}^T \left( \sum_{\text{elem.}} \int_{\text{ov}^e} {}^1\hat{B}^T \cdot {}^1s \cdot {}^1\hat{B} \cdot d^0v^e \right) \cdot \bar{u} = \\
 &= \delta \bar{u}^T \left( \sum_{\text{elem.}} {}^1K_g^e \right) \cdot \bar{u} = \delta \bar{u}^T \cdot {}^1K_g \cdot \bar{u} \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{ov}} {}^1s_{ij} \cdot \delta e_{ij} \cdot d^0v &\longrightarrow \delta \bar{u}^T \left( \sum_{\text{elem.}} \int_{\text{ov}^e} {}^1B^T \cdot {}^1s \cdot d^0v^e \right) = \\
 &= \delta \bar{u}^T \left( \sum_{\text{elem.}} {}^1F^e \right) = \delta \bar{u}^T \cdot {}^1F \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

In Gln. (4.10) bis (4.12) sind die Variablen mit ( )<sup>e</sup> auf das Element und die restlichen Variablen auf das ganze System bezogen.

Da die virtuellen Verschiebungen ungleich Null sind, entsteht für Gl. (2.10) unter Verwendung von Gln. (4.10) bis (4.12)

$$\left( {}^1K + {}^1K_g \right) \cdot \bar{u} = {}^2R - {}^1F \quad (4.13)$$

Hiermit ist

- ${}^1K$  inkrementelle Steifigkeitsmatrix
- ${}^1K_g$  geometrische Steifigkeitsmatrix (Beitrag der vorhandenen Spannungen zur Steifigkeit)
- $\bar{u}$  verallgemeinerte Verschiebungsinkremente
- ${}^2R$  verallgemeinerte äußere Gesamtlasten
- ${}^1F$  verallgemeinerte innere Kräfte im Zustand 1.

Das Gleichungssystem (4.13) ist die Grundlage des angewandten FE-Konzepts. Die Freiheitsgrade wurden von unendlich Gl. (2.10) auf eine finite Zahl reduziert; diese Zahl ist die Größe des Vektors  $\bar{u}$ .

## 4.2 Lösung des nichtlinearen Problems

In der vorliegenden Formulierung ist die angestrebte Lösung ein Verschiebungsvektor, der Gl. (2.9) näherungsweise erfüllt. Da diese Gleichung zu einem nichtlinearen Gleichungssystem führt, wurde eine Linearisierung vorgenommen, die Gl. (4.13) lieferte. Es ist damit festzuhalten, daß der mit Gl. (4.13) ermittelte Vektor  $\bar{u}$  nicht die Lösung des nichtlinearen Problems ist; es ist lediglich ein "Schritt in die richtige Richtung". Gl. (4.13) kann auch als der erste Term einer Taylorreihenentwicklung des exakten Gleichungssystems gedeutet werden.

Im Falle der stofflichen Nichtlinearität kommt hinzu, daß eine geschlossene Darstellung der rechten Seite von Gl. (2.9) nicht möglich ist; sie kann während des Weges ① → ② Sprünge enthalten. So kann beispielsweise Reißen des Betons, wenn kein TS verwendet wird, eine schlagartige Abnahme der inneren Kräfte verursachen.

Ein kurzer Überblick über den Lösungsweg zur Erfassung der nichtlinearen Einflüsse, unter besonderer Berücksichtigung der Probleme des Stahlbetons, ist im folgenden Abschnitt enthalten.

### 4.2.1 Lösungsverfahren

Ramm [27] klassifiziert die Lösungsverfahren in inkrementelle, iterative oder kombinierte Methoden. Die größte Aufmerksamkeit genießen die kombinierten Methoden, die im folgenden ausschließlich weiterbehandelt werden. Hier soll aber erwähnt werden, daß Kröplin [46] ein iteratives Relaxationsverfahren entwickelt, das die Aufbringung der vollen Last in einem Schritt erlaubt. Durch entsprechend eingebaute Dämpfung kriecht die Struktur zum richtigen Verformungszustand hin. Dieses Verfahren wurde für elasto-plastische Platten und Balken sowie für Schalenbeulprobleme angewandt.

Von den inkrementell-iterativen Verfahren ist die Newton-Raphson-Methode (NR) in ihre Standard- und modifizierte Version am weitesten verbreitet. Erläuterungen zu diesem Vorgehen können bei Stricklin/Haisler [47], [29] oder [27] entnommen werden.

In letzter Zeit wurden neue Iterationsverfahren entwickelt, die im Last-Verschiebungsraum arbeiten und eine schnellere Konvergenz gegenüber der NR-Methode aufweisen. Ein Überblick wird von Ramm/Stegmüller in [48] gegeben. Eine genaue Beschreibung kann aus Crisfield [49] entnommen werden.

Zwei von diesen Verfahren sind in dieser Arbeit angewendet worden: die Methode der konstanten Bogenlänge (KB) und das verschiebungskontrollierte Verfahren (VK).

Die Methode der konstanten Bogenlänge, oder Riks/Wempner-Verfahren, ist in der Version von Ramm [50] übernommen worden. Im Gegensatz zu der NR-Methode - bei der ein festes Lastinkrement vorgegeben wird, um daraus die Verschiebungen zu errechnen - wird bei den KB-Methoden eine Bogenlänge angegeben, um daraus die zugehörigen Verschiebungen und Lastparameter auszurechnen. Dieser Lastparameter ist ein Proportionalitätsfaktor, mit dem - um die endgültigen Lasten zu bekommen - der Grundlastvektor  $\mathbf{P}$  zu multiplizieren ist.

In Bild 4.1 sind zwei Iterationswege angegeben: die Iteration in einer Ebene und die Iteration auf einer Kugelfläche.

In der vorliegenden Arbeit ist der Weg ①, Iteration in einer Ebene, verfolgt worden. Die Bogenlänge wird mit

$$\Delta\lambda^{(n)2} + \Delta\mathbf{u}^{(n)\top} \Delta\mathbf{u}^{(n)} = ds^2 \quad (4.14)$$

definiert.

Hier ist  $\Delta\lambda^{(1)}$  das Lastfaktorinkrement und  $\Delta\mathbf{u}^{(1)}$  sind die Verschiebungsinkremente im ersten Schritt. Ramm [50] läßt den Term  $\Delta\lambda^{(1)2}$  in Gl. (4.14) weg, so daß diese Gleichung homogen in den Einheiten bleibt. Der so ermittelte Wert  $ds$  bleibt während der Iteration konstant.

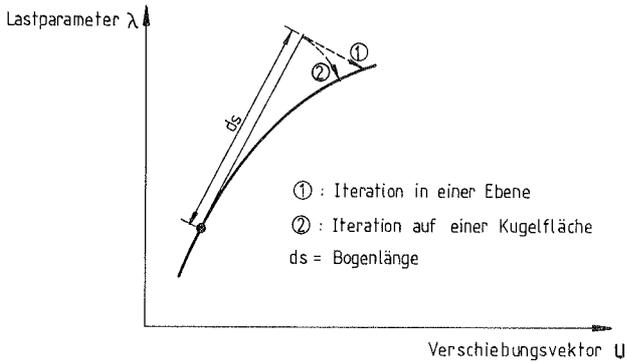


Bild 4.1: Methode der konstanten Bogenlänge

Bei Problemen, wo ein Freiheitsgrad bei sehr kleinen Lastinkrementen eine sehr große Verschiebung erfährt (z.B. das seitliche Auskippen des Balkens, Abschnitt 6.4), traten Schwierigkeiten bei der Anwendung des KB-Verfahrens auf. Basierend auf der Arbeit von Ramm [50] wurde ein verschiebungskontrolliertes Verfahren eingebracht, das einen vorab anzugebenden Freiheitsgrad  $k$  inkrementiert und im Iterationsverlauf festhält, während sich die anderen Verschiebungen in die Gleichgewichtslage einpendeln.

Das Vorgehen wird mit Hilfe von Bild 4.2 - in dem auch die im weiteren benutzten Bezeichnungen angegeben sind - erläutert. Bild 4.2a zeigt den Iterationsweg für die kontrollierte Verschiebung  $k$ , Bild 4.2b für einen anderen Freiheitsgrad  $i$ .

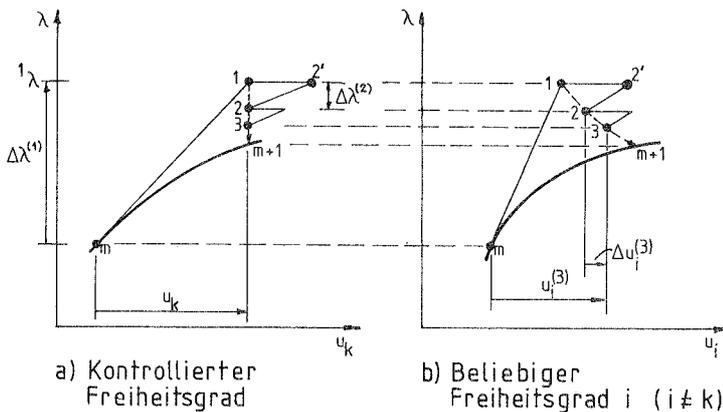


Bild 4.2: Verschiebungskontrolliertes Verfahren

In diesem Bild und im folgenden zeigen die Kopfzeiger in Klammern den Iterationsschritt an.

Zunächst wird im ersten Schritt das Gleichungssystem mit  $\Delta\lambda = 1$  gelöst. Anschließend wird der Vektor der Verschiebungsinkremente mit einem Faktor  $\alpha$  skaliert, so daß die Kontrollverschiebung  $\Delta u_k^{(1)}$  gleich dem Sollwert  $u_k$  wird. Damit wird  $\Delta\lambda^{(1)} = \alpha$ .

Um das Verschiebungsinkrement im Schritt 2  $\Delta u^{(2)}$  zu erreichen, ohne die Bandbreite und Symmetrie der Gleichgewichtsgleichungen zu zerstören, wird der Weg  $1 \rightarrow 2' \rightarrow 2$  von Bild 4.2 abgefahren. Somit lautet das gesamte Verschiebungsinkrement:

$$\Delta u^{(2)} = \Delta\lambda^{(2)} \Delta u^{(2)I} + \Delta u^{(2)II} \quad (4.15)$$

Die Komponenten der rechten Seite lassen sich mit den Gleichungen:

$$K \cdot \Delta\lambda^{(2)} \Delta u^{(2)I} = \Delta\lambda^{(2)} P \quad (4.16a)$$

$$K \cdot \Delta u^{(2)II} = {}^1R - {}^1F \quad (4.16b)$$

ermitteln. Hier ist  $P$  der Grundlastvektor und  ${}^1R, {}^1F$  der Vektor der Ungleichgewichtskräfte nach Schritt 1, wobei  ${}^1R = {}^1\lambda \cdot P$  ist.

Für den kontrollierten Freiheitsgrad im Schritt  $j$  ist - weil das Gesamtverschiebungsinkrement  $u_k$  unverändert bleiben soll -  $\Delta u_k^{(j)} = 0$ . Das ist die Bedingung zur Bestimmung des neuen Lastinkrementes  $\Delta\lambda^{(j)}$

$$\Delta\lambda^{(j)} \cdot \Delta u_k^{(j)I} + \Delta u_k^{(j)II} = 0 \quad (4.17)$$

Hieraus folgt

$$\alpha^{(j)} = \frac{\Delta\lambda^{(j)}}{\Delta\lambda^{(1)}} = - \frac{\Delta u_k^{(j)II}}{\Delta\lambda^{(1)} \Delta u_k^{(j)I}} \quad (4.18)$$

Dieser Ausdruck ist beim modifizierten NR-Verfahren weiter zu vereinfachen. Aus Gleichung (4.16a) ist zu erkennen, daß  $\Delta u^{(j)I}$  der Verschiebungsvektor für  $\Delta\lambda = 1$  ist. Im MNR-Verfahren wird die Matrix  $K$  nicht verändert, und somit bleibt  $\Delta u^{(j)I}$  während der Iteration konstant. Da  $\Delta\lambda^{(1)}$  bereits so skaliert wurde, daß  $\Delta\lambda^{(1)} \cdot \Delta u_k^{(1)I} = u_k$  wird und weil  $\Delta u_k^{(1)I} = \Delta u_k^{(j)I}$  ist, kann die folgende Beziehung aufgestellt werden:

$$\Delta\lambda^{(1)} \cdot \Delta u_k^{(j)I} = u_k \quad (4.19)$$

Damit lässt sich für das MNR-Verfahren die Gl. (4.18) wie folgt umschreiben

$$\alpha^{(j)} = - \frac{\Delta u_k^{(j)II}}{u_k} \quad (4.20)$$

Das Lastinkrement und die Verschiebungsinkremente für den Schritt  $j$  können jetzt zusammengefasst werden

$$\Delta \lambda^{(j)} = \alpha^{(j)} \cdot \Delta \lambda^{(1)} \quad (4.21a)$$

$$\Delta u^{(j)} = \Delta \lambda^{(j)} \cdot \Delta u^{(j)I} + \Delta u^{(j)II} \quad (4.21b)$$

Bei der Anwendung dieses Verfahrens war die Konvergenz langsam oder überhaupt nicht erreichbar. Deshalb wurden Dämpfungskoeffizienten bei alternierenden  $\alpha^{(j)}$ -Werten eingeführt, um die Lösung zu stabilisieren. Die Werte  $\Delta \lambda^{(j)}$  und  $\Delta u^{(j)}$  aus Gl. (4.21) werden mit dem Dämpfungsfaktor, dessen Wert von der Iterationsgeschichte abhängt, multipliziert. Im Bild 4.3 sind die Dämpfungskoeffizienten je nach Verlauf der Iteration in den Schritten  $i-3$  bis  $i-1$  für die Iteration  $i$  angegeben. Bei monotonem Verlauf in der Iterationsgeschichte wird der Faktor gleich 1 gesetzt.

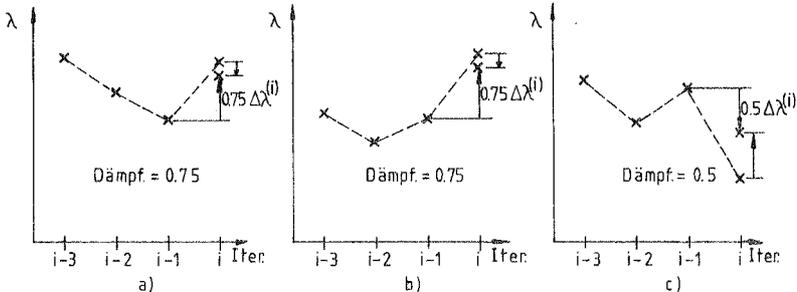


Bild 4.3: Dämpfungskoeffizienten für die Iteration  $i$

Zwei weitere Algorithmen werden von anderen Autoren bei der FE-Berechnung von Stahlbetonschalen eingesetzt: das BFGS-Vorgehen und die "Line Searches". Das BFGS-Verfahren ([51],[52],[49]) lässt sich in die Quasi-Newton- oder Sekantenverfahren einreihen. In einen Schritt  $i$  wird bei diesem Verfahren - ausgehend von der Matrix  $^{i-1} K^{-1}$  - eine verbesserte Matrix  $^i K^{-1}$  ausgerechnet.

Hierfür werden die inneren Kräfte in den Schritten  $i-1$  und  $i$  sowie die Verschiebungsinkremente vom Schritt  $i-1$  miteingezogen.

Bei dem "Line Search"-Algorithmus werden die Verschiebungsinkremente in einem Schritt  $i$  mit einem einzigen Faktor  $\eta_{i-1}$  skaliert. Dieser Faktor wird so gewählt, daß der Energieausdruck

$$S_i = \Delta u^{(i)T} \cdot \Psi_i(\eta_{i-1}) \quad (4.22)$$

minimiert wird. In Gl. (4.22) sind  $\Psi$  die Ungleichgewichtskräfte.

Crisfield [53], Hinton [51], Cope [54] untersuchten die Eignung dieser neuen Methoden für die Berechnung von Stahlbetonplatten, bei denen die entscheidende Nichtlinearität durch das Reißen im Beton gegeben ist.

Crisfield befürwortet das BFGS-Verfahren bzw. die NR-Methoden mit zusätzlichem "Line Search" für die Berechnung von Fällen ohne "Tension Stiffening". Die NR-Methode sowie das Vorgehen mit konstanter Bogenlänge (KB) seien für diese Fälle unzuverlässig bzw. unwirtschaftlich. Eine Kopplung des KB-Verfahrens mit den "Line Search"-Algorithmen soll - insbesondere zur Überwindung von kritischen Punkten - effektiv sein. In [51] berichtet Hinton über die erfolgreiche Anwendung des BFGS-Verfahrens. Er befürwortet - im Gegensatz zu Crisfield - die Anwendung des KB-Verfahrens. Cope/Rao vergleichen in [54] die Rechenzeiten zwischen Berechnungen mit und ohne BFGS. Dabei schneidet das BFGS-Verfahren bei gleicher Konvergenzgenauigkeit um den Faktor 2 besser ab.

#### 4.2.2 Konvergenz

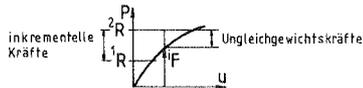
Bei einer Verschiebungsformulierung ist die Annahme sinnvoll, die Konvergenz der Lösung an der Größe des Verschiebungsinkrements zu orientieren. Das Konvergenzmaß kann dann entweder global - wenn die absolute oder euklidische Norm bewertet wird - oder lokal - bei der Bewertung der maximalen Größe - bestimmt werden.

In dieser Arbeit wird die euklidische Norm der Zuwächse des Verschiebungsinkrements während der  $i$ -ten Iteration mit der euklidischen Norm des gesamten Verschiebungsinkrements  $U$  bis zum Schritt  $i$  verglichen:

$$\frac{\|\Delta U^{(i)}\|}{\|U^{(i)}\|} < RTOL \quad (4.23)$$

Gl. (4.23) definiert das Konvergenzkriterium. RTOL wurde bei den Beispielen zu 0,01 gesetzt.

Ein Divergenzkriterium, welches im Programmsystem enthalten ist, bricht die Berechnung ab, wenn die Ungleichgewichtskräfte nach Überschreitung der Hälfte der Anzahl der zugelassenen Iterationen größer als die inkrementellen Kräfte werden.



Bei der Anwendung dieser Kriterien können auch bei einem ausiterierten Zustand relativ große Ungleichgewichtskräfte vorhanden sein. Die Erfahrung hat aber gezeigt, daß die Ausiterierung dieser Ungleichgewichtskräfte sehr viele Iterationen zusätzlich benötigt, ohne eine bedeutende Verbesserung der Ergebnisse herbeizuführen.

Bathe/Cimento [55] überprüfen die Konvergenz anhand einer Energienorm, in der die Energie aus dem Produkt der Ungleichgewichtskräfte mit den zugehörigen Verschiebungen gebildet wird.

Crisfield [49] bevorzugt eine Bewertung der Ungleichgewichtskräfte allein.

#### 4.3 Gewähltes finites Element

Das Basiselement, das in dieser Arbeit weiterentwickelt wurde, ist dem Programmsystem NISA [56] entnommen. Es handelt sich um ein isoparametrisches, aus der dreidimensionalen Theorie degeneriertes Schalenelement. Das Konzept der Degeneration wurde von Ahmad u.a. [57] eingeführt und von Ramm [27] für geometrisch nichtlineare Probleme, von Sättele [58] für elastoplastisches Werkstoffverhalten erweitert.

Zahlreiche Anwendungsbeispiele dieses Elements finden sich in folgenden Arbeiten: In [27], [59], [60] werden geometrisch nicht-lineare Probleme untersucht; in [58], [61] werden Systeme mit großen Verformungen und elastoplastischem Werkstoffverhalten studiert. In [62] werden ins Element Eigenspannungen eingebracht, und in [63] wird das Element zur Erfassung verformungsabhängiger Belastung erweitert.

Im folgenden werden die theoretischen Grundlagen des Elements vorgestellt, Vor- und Nachteile hervorgehoben. Abschließend wird das Schalenelement beschrieben. Die in dieser Arbeit vorgenommenen Ergänzungen des Konzepts sind im Abschnitt 5 erläutert.

#### 4.3.1 Konzept der Degeneration

Als Konzepte für die Herleitung eines finiten Schalenelements sollen das klassische und degenerierte Vorgehen gegenübergestellt werden [27].

- a) Das klassische Konzept geht von einer Theorie aus, die schon vor der FE-Diskretisierung das dreidimensionale zu einem zweidimensionalen Problem reduziert hat. Dabei sind bereits in der Theorie die kinematischen mit den statischen Größen der Referenzfläche verknüpft.
- b) Das degenerierte Vorgehen hingegen geht von einer räumlichen Theorie aus. Die kinematischen und statischen Größen werden mit einer Integration über das Volumen ermittelt. Die Schaleneigenschaften werden in die Integration eingebracht.

Hieraus ergibt sich ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Konzepten: Die Integration über die Dicke wird in a) analytisch, in b) in der Regel numerisch durchgeführt.

Die direkte numerische Integration der dreidimensionalen Gleichungen führt jedoch, bei abnehmender Tragwerksdicke, aus folgenden Gründen zu Schwierigkeiten:

- 1) Starkes Ansteigen der Steifigkeit in Dickenrichtung.
- 2) Über die Querdehnzahl ist der Einfluß der Normalspannungen in Dickenrichtung auf die Normalspannungen in Schalenrichtung zu groß.

Mit der Degeneration werden zwei Annahmen eingeführt, um diese Erscheinungen zu vermeiden:

- I Die Schalennormale dehnt und krümmt sich nicht. Dies wirkt dem Punkt 1) entgegen.
- II Die Normalspannungen in Dickenrichtung werden durch Einführung eines anisotropen Stoffgesetzes in der Integration unterdrückt. Punkt 2) wird somit ausgeglichen.

Diese Annahmen bewirken, daß im Grunde dieselbe Formulierung wie bei einer klassischen Schalentheorie vorliegt. Im verwendeten Element wird die Rotation der Normalen als von der Querverschiebung unabhängige Variable eingeführt. Dies bedeutet die Mitnahme der Schubverformung im Energieausdruck.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß bei stofflicher Nichtlinearität, z.B. bei Reißen des Betons, eine Krümmung der Normalen eintritt, deren Berücksichtigung aber zu mehr Freiheitsgraden führen und für vorwiegend biegebeanspruchte Tragwerke einen nicht vertretbaren Mehraufwand bewirken würde.

#### 4.3.2 Vor- und Nachteile der Degeneration

Vorteile:

- 1) Komplizierte Schalentheorie wird umgangen.
- 2) Einsatz für dünne und mäßig dicke Schalen ohne Verwendung von Körperelementen; die Schale wird nur durch ihre Mittelfläche beschrieben.
- 3) Es werden Spannungen explizit integriert. Bei stofflicher Nichtlinearität integrieren allerdings die Elemente mit der klassischen Vorgehensweise auch über die Dicke, wo aber zwi-

schen Biege- und Membrananteile unterschieden wird (siehe [21], [23]). Eine andere Möglichkeit dieser Elemente ist die Benutzung von Integralmodellen (Jofriet/McNiece [18]).

Nachteil:

Für die Bewertung des Tragverhaltens mit Begriffen, wie Biege- oder Membranbeanspruchung ist, eine nachträgliche Integration der Spannungen über die Dicke durchzuführen.

#### 4.3.3 Beschreibung des Elements

Die folgende Beschreibung bezieht sich auf die vier Elementtypen die im Bild 4.4 dargestellt sind. Diese basieren auf den im vorherigen Abschnitt beschriebenen Eigenschaften und unterscheiden sich lediglich in der Interpolationsordnung.

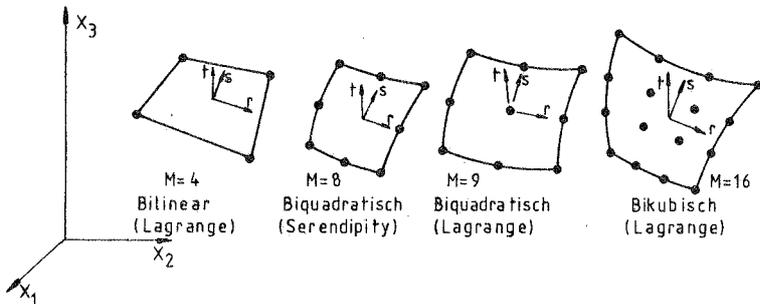


Bild 4.4: Elementtypen

##### 4.3.3.1 Darstellung von Geometrie und Verschiebungen

Geometrie und Verschiebungen werden mit denselben Interpolationsfunktionen erfasst. Die von Zienkiewicz [44] geforderten Bedingungen für Stetigkeit und Konvergenz werden von den Interpolationsfunktionen erfüllt.

Die kartesischen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Schale im Zustand  $m$  können folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\begin{bmatrix} m_{x_1} \\ m_{x_2} \\ m_{x_3} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^M \phi^i(r,s) \cdot \begin{bmatrix} m_{x_1}^i \\ m_{x_2}^i \\ m_{x_3}^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sum_{i=1}^M \phi^i(r,s) \cdot h^i \cdot \begin{bmatrix} \cos^m \psi_1^i \\ \cos^m \psi_2^i \\ \cos^m \psi_3^i \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Hierbei bedeuten:

$m_{x_k}^i$  = Kartesische Koordinate  $\underline{k}$  des Knotens  $\underline{i}$  der Mittelfläche

$\phi^i(r,s)$  = Interpolationsfunktion des Knotens  $\underline{i}$  für einen Punkt  $(r,s)$

$r,s$  = normierte Koordinaten in der Elementebene ( $-1 \leq r/s \leq 1$ )

$t$  = normierte Entfernung des Punktes von der Mittelfläche ( $-1 \leq t \leq 1$ )

$M$  = Knotenanzahl im Element

$h^i$  = Elementdicke am Knoten  $i$

$\cos^m \psi_k^i$  = Richtungskosinus  $\underline{k}$  der "Normalen" am Knoten  $i$ .

Die Verschiebungen werden durch die Differenz der Koordinaten der Lage  $m$  und der Lage  $0$  gewonnen.

$$\begin{bmatrix} m_{u_1} \\ m_{u_2} \\ m_{u_3} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^M \phi^i(r,s) \cdot \begin{bmatrix} m_{u_1}^i \\ m_{u_2}^i \\ m_{u_3}^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sum_{i=1}^M \phi^i(r,s) \cdot h^i \cdot \begin{bmatrix} \cos^m \psi_1^i - \cos^0 \psi_1^i \\ \cos^m \psi_2^i - \cos^0 \psi_2^i \\ \cos^m \psi_3^i - \cos^0 \psi_3^i \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

In der vorliegenden FE-Formulierung werden die Winkel  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  durch zwei unabhängige Winkel  $\psi_1, \varphi$  ersetzt (Bild 4.5).

Damit werden die Richtungskosinus

$$\cos \psi_1^i \quad (4.26a)$$

$$\cos \psi_2^i = \sin \psi_1^i \cdot \cos \varphi^i \quad (4.26b)$$

$$\cos \psi_3^i = \sin \psi_1^i \cdot \sin \varphi^i \quad (4.26c)$$

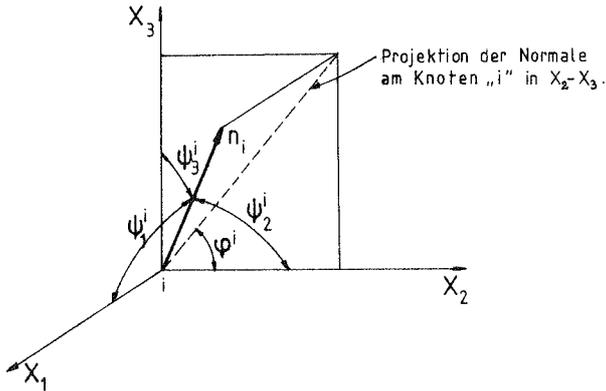


Bild 4.5: Beschreibung der Lage der Normalen

Die Rotation der Normalen wird mit der Änderung dieser neuen Variablen beschrieben (Bild 4.6)

$${}^m\alpha^i = {}^m\varphi^i - {}^o\varphi^i \quad (4.27a)$$

$${}^m\beta^i = {}^m\psi_1^i - {}^o\psi_1^i \quad (4.27b)$$

Setzt man die Beziehungen (4.27) in (4.26) ein, und drückt man den zweiten Term der rechten Seite von Gl. (4.25) durch die Unbekannten  $\alpha$  und  $\beta$  aus, so erhält man für die Verschiebungsinkremente nach der Linearisierung:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^M \phi^i(r,s) \cdot \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_3^i \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sum_{i=1}^M \phi^i(r,s) \cdot h^i \cdot \begin{bmatrix} m_{F_{11}}^i & m_{F_{12}}^i \\ m_{F_{21}}^i & m_{F_{22}}^i \\ m_{F_{31}}^i & m_{F_{32}}^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^i \\ \beta^i \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$m_{F_{11}}^i = 0$$

$$m_{F_{21}}^i = -\sin^m\psi_1^i$$

$$m_{F_{21}}^i = -\sin^m\varphi^i \cdot \sin^m\psi_1^i$$

$$m_{F_{22}}^i = \cos^m\varphi^i \cos^m\psi_1^i$$

$$m_{F_{31}}^i = \cos^m\varphi^i \cdot \sin^m\psi_1^i$$

$$m_{F_{32}}^i = \sin^m\varphi^i \cos^m\psi_1^i$$

mit  $u_1^i, u_2^i, u_3^i, \alpha^i, \beta^i$  inkrementellen Verschiebungsgrößen

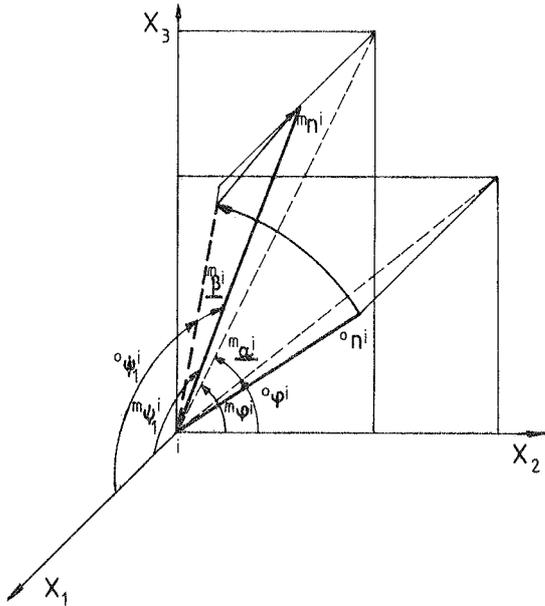


Bild 4.6: Beschreibung der Rotation der Normalen

Die linearisierte Gl. (4.28) wird für die Ermittlung der Steifigkeitsmatrix benutzt. Die Berechnung der inneren Kräfte erfolgt für bereits ermittelte Lagen aus dem Verschiebungszustand über Gl. (4.25).

#### 4.3.3.2 Interpolationsfunktionen

In den Tafeln B1 und B2 des Anhangs B sind die Interpolationsfunktionen für alle Elemente dargestellt. Es sind Lagrange-Interpolationen, mit Ausnahme des 8-knotigen Elements aus der Familie der Serendipity-Elemente (siehe [44]).

#### 4.3.3.3 Integration

Es werden nun die Elementsteifigkeitsmatrizen und inneren Kräfte aus den Gl. (4.10) bis (4.12) mit Hilfe der Interpolationsfunktionen gebildet.

Die in Gln. (4.10) bis (4.12) angegebene Integration über das Volumen des Elements erfolgt numerisch. Da die Formulierung des Elements in den normierten Koordinaten  $r, s, t$  angegeben ist, wird in diesen Koordinaten integriert. Die Umrechnung der Integrale auf das Volumen geschieht mit Hilfe der Jakobi-Determinanten. Da in der TL-Formulierung immer über das unverformte Volumen integriert wird, bleibt die Jakobi-Determinante für jede Integrationsstelle während des Verformungsvorgangs konstant.

Die Jakobi-Matrix wird definiert durch:

$$m_j = \begin{bmatrix} m_{X_{1,r}} & m_{X_{2,r}} & m_{X_{3,r}} \\ m_{X_{1,s}} & m_{X_{2,s}} & m_{X_{3,s}} \\ m_{X_{1,t}} & m_{X_{2,t}} & m_{X_{3,t}} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Die Anteile werden durch Ableiten aus Gl. (4.24) gewonnen:

$$\begin{aligned} m_{X_{k,r}} &= \sum_{i=1}^M \Phi_{,r}^i \cdot m_{X_k}^i + \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sum_{i=1}^M \Phi_{,r}^i \cdot h^i \cdot \cos^m \psi_k^i \\ m_{X_{k,s}} &= \sum_{i=1}^M \Phi_{,s}^i \cdot m_{X_k}^i + \frac{1}{2} \cdot t \cdot \sum_{i=1}^M \Phi_{,s}^i \cdot h^i \cdot \cos^m \psi_k^i \\ m_{X_{k,t}} &= 0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^M \Phi^i \cdot h^i \cdot \cos^m \psi_k^i \end{aligned} \quad (4.30)$$

Damit lautet das Volumen in beiden Koordinatensystemen:

$$d^0v = d^0x_1 \cdot d^0x_2 \cdot d^0x_3 = \det^0 j \cdot dr \cdot ds \cdot dt \quad (4.31)$$

Die Integrale in Gl. (4.10) bis (4.12) werden über die numerische Integration durch Summen ausgedrückt. Für ein Element:

$${}^1K^e = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p w_i \cdot w_j \sum_{k=1}^q w_k \cdot {}^1B^T \cdot {}^1C \cdot {}^1B \cdot \det^0 j \left| \begin{array}{l} r=r_i \\ s=s_j \\ t=t_k \end{array} \right. \quad (4.32)$$

$${}^1K_g^e = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p w_i \cdot w_j \sum_{k=1}^q w_k \cdot {}^1\hat{B}^T \cdot {}^1s \cdot {}^1\hat{B} \cdot \det^{\circ j} \Big|_{\substack{r=r_i \\ s=s_j \\ t=t_k}} \quad (4.33)$$

$${}^1F^e = \underbrace{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p w_i \cdot w_j}_{\hat{=} \int dF} \underbrace{\sum_{k=1}^q w_k \cdot {}^1B^T \cdot {}^1s \cdot \det^{\circ j}}_{\hat{=} \int dh} \Big|_{\substack{r=r_i \\ s=s_j \\ t=t_k}} \quad (4.34)$$

Mit  $w_i, w_j, w_k$  = Integrationsgewichte in den Stellen  $i, j, k$   
 $i, j, k$  = Indizes der Integrationsstellen

Die Flächenintegration wird mit der Gauß-Quadratur durchgeführt (siehe [44] oder [64]). Um den Energieausdruck vollständig integrieren zu können, muß die Integrationsordnung hoch genug sein. Beispielsweise ist beim bikubischen Element der Term mit der höchsten Ordnung in  ${}^1B \cdot r^3 \cdot s^3$ . Damit wird aufgrund Gl. (4.32) der höchste Term im Energieausdruck  $r^6 \cdot s^6$ ; es ist somit eine 4x4 Gauß-Integration erforderlich. Auch die richtige Erfassung des Rißzustandes beeinflusst die Auswahl der Stützstellenzahl. Daher sollte an Stellen, an denen Risse zu erwarten sind, die Integrationsordnung erhöht oder das Elementnetz verfeinert werden.

Für den Betonanteil wird in Dickenrichtung eine Simpson-Integration vorgenommen, wie sie auch von Sättele [58] benutzt wird. Dieses Verfahren hat zwei Vorteile gegenüber der Gauß-Integration. Es erlaubt eine gleichmäßige Verteilung der Stützstellen über die Dicke, und es können Stützstellen an den Oberflächen angesetzt werden. Das Vorgehen ist in Bild 4.7 erläutert.

Die Variable  $t$  erscheint im Energieausdruck des elastischen Falls quadratisch. Es kann deshalb mit zwei Gauß-Punkten integriert werden. Im nichtlinearen Fall hingegen muß das stark variierende Werkstoffverhalten beschrieben werden, was mehr Integrationspunkte erfordert. Diese hohe Zahl der Integrationsstellen in Dickenrichtung ist für die großen CP-Zeiten bei der Aufstellung der Steifigkeitsmatrix verantwortlich, da diese proportional

mit der Anzahl der Integrationspunkte steigt. Zudem wächst der Speicherplatzbedarf, wodurch kleinere Elementgruppen erforderlich werden. Die Folge ist, daß die IO-Zeiten für das Herein- und Herausschreiben der Gruppen auf externen Speicher erhöht werden.

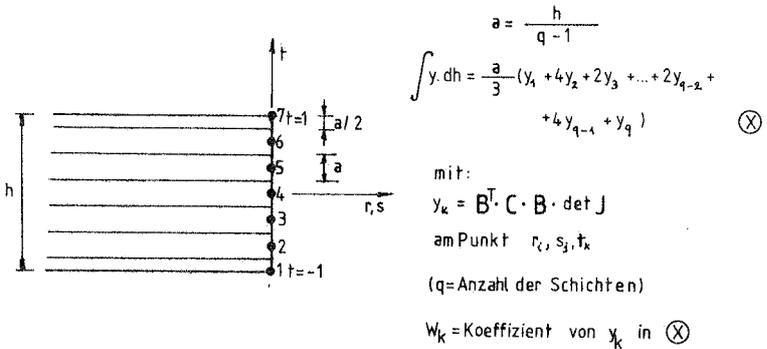


Bild 4.7: Integration in Dickenrichtung

#### 4.3.3.4 Elementmatrizen

In den Tafeln B3 und B4 vom Anhang B sind die Matrizen  ${}^1\mathbf{B}$  und  ${}^1\hat{\mathbf{B}}$  wiedergegeben, die für die Auflösung der Integrale (4.32) bis (4.34) benötigt werden. Sie entstehen - unter Verwendung der Verschiebungsfelder Gl. (4.25) bzw. (4.28) - aus den Definitionsgleichungen (4.4) und (4.5).

Im Abschnitt 1.2 wurde bereits auf die Idealisierungsmöglichkeiten für Stahlbetonschalen eingegangen. In diesem Abschnitt soll das eigene Konzept ausführlich dargestellt werden. Nach der Einteilung, die im Abschnitt 1.2 vorgenommen wurde, kann das vorliegende Modell folgendermaßen eingeordnet werden:

- Punkt A) Stahl und Beton gemeinsam in einem Element
- Punkt B) Verschmierung der Risse
- Punkt C) Verbund durch "Tension Stiffening" approximiert
- Punkt D) Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen mit "Tension Stiffening" im Beton
- Punkt E) Numerische Integration über die Dicke (Schichtenmodell).

In diesem Abschnitt wird das Vorgehen in den Punkten A) und E) erläutert; es wird mit einigen Flußdiagrammen und Angaben zum Rechenprogramm abgeschlossen.

## 5.1 Transformation der Werkstoffe und Integration

### 5.1.1 Definition der benutzten Koordinatensysteme

Um die numerische Integration für den Stahl und den Beton mit den Gln. (4.32) bis (4.34) durchführen zu können, werden die Matrix  ${}^1C$  und der Vektor  ${}^1s$  benötigt. Diese müssen in einem raumfesten, elementunabhängigen Koordinatensystem, dem globalen System  $\textcircled{G}$ , formuliert werden. Bevor die hierzu notwendigen Transformationen erläutert werden, wird in Tafel 5.1 eine Zusammenfassung der Bezeichnungen der unterschiedlichen Koordinatensysteme gegeben. Der in diesem Abschnitt verwendete linke obere Index  ${}^0( )$  zeigt den unverformten Zustand an.

Tafel 5.1.1: Bezeichnung der Koordinatensysteme

System	Global	$\psi_1, \psi$ (Bild 5.2)	elementbezogenes System (Bild 5.2)	Hauptachsen des Betons	Stahleinlagenachsen
Abschnitt	Ⓒ	Ⓜ	Ⓛ		(st)
3-Werkstoffgesetz	-	-	( ) <sub>L</sub> Transformation mit Gl. (3.4)	Spannungen und Verzerrungen ohne zusätzliche Bezeichnung	Spannungen und Verzerrungen ohne zusätzliche Bezeichnung
4-Finite Element-Beschreibung	Spannungen und Verzerrungen ohne zusätzliche Bezeichnung	-	-	-	-
5-Stahlbetonelement	Spannungen und Verzerrungen ohne zusätzliche Bezeichnung. Transformation mit Gl. (5.7) Transformation mit Gl. (5.10)	( )'	( ) <sub>L</sub> Transformation mit Gl. (5.3) Transformation mit Gl. (5.10)	-	( ) <sub>st</sub>
				Transformation mit Gl. (5.30)	

### 5.1.2 Eingeschlagene Transformationswege

In diesem Abschnitt wird angenommen, daß das Werkstoffgesetz für Beton im elementbezogenen System  $\textcircled{L}$ , für Stahl im System  $\textcircled{st}$ , aufgestellt wird. Da diese Gesetze von den lokal definierten Verzerrungen abhängen, müssen zunächst die Verzerrungen des globalen Systems in die Systeme  $\textcircled{L}$  bzw.  $\textcircled{st}$  transformiert werden. Nach der Ermittlung der konstitutiven Matrix und den Spannungen in den Systemen  $\textcircled{L}$  bzw.  $\textcircled{st}$  muß für die Integration auf das System  $\textcircled{G}$  rücktransformiert werden. Dieser Vorgang ist in Bild 5.1 angegeben.

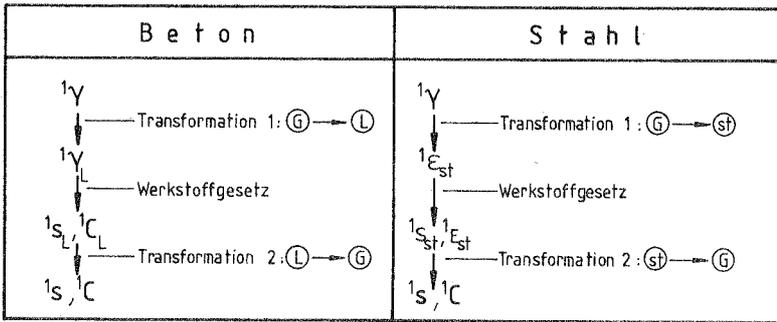


Bild 5.1: Transformationsablauf für Stahl und Beton

Die Bedeutung der Transformation 1 kann anhand der Definition der Green-Lagrange-Verzerrungen erläutert werden. Ein Term aus  ${}^1\epsilon$ , z.B.  ${}^1\epsilon_{11}$ , stellt die Dehnung im Zustand "1" eines Linienelements dar, das in der Lage "0" die Richtung der globalen "1"-Achse hatte.

$${}^1\epsilon_{11} = \frac{{}^1l_1^2 - {}^0l_1^2}{2 \cdot {}^0l_1^2} \quad (5.1)$$

Das Schichtenmodell benötigt hingegen die Dehnung einer Faser in der Schalenfläche, muß also auf ein Koordinatensystem transformiert werden, das zwei Achsen in der Schalenfläche besitzt. Von den unendlich vielen Systemen, die diese Bedingung erfüllen,

wird für den Betonanteil das elementbezogene  $\textcircled{L}$  System gewählt, da dieses bei der praktischen Anwendung leicht zu handhaben ist. Für den Stahlanteil kann nur ein System in Frage kommen, das eine Achse in Richtung der Stahleinlage besitzt  $\textcircled{st}$ .

In der TL Formulierung beziehen sich die Verzerrungen  ${}^1\epsilon_L$  und  ${}^2\epsilon_L$  immer auf die unverformte Lage. Die inkrementellen Verzerrungen können somit durch die Differenz  ${}^2\epsilon_L - {}^1\epsilon_L$  gebildet werden. Die Formulierung des Stoffgesetzes mit Hilfe des 2-ten Kirchhoff-Piola-Spannungstensors und Green-Lagrange-Verzerrungen ist auf kleine Verzerrungen begrenzt. Unter dieser Bedingung kann das Spannungsinkrement mit  ${}^2s_L - {}^1s_L$  ermittelt werden [25].

### 5.1.3 Transformationen für den Betonanteil

In Bild 5.2 werden die Koordinatensysteme mit der Bezeichnung  $\textcircled{M}$  und  $\textcircled{L}$  gemäß Tafel 5.1 definiert. Die Richtung  $x_3^1 \equiv x_{3L}$  ist normal zur Schalenmittelfläche, die Richtungen  $x_1^1, x_2^1$  bzw.  $x_{1L}, x_{2L}$  liegen in der Mittelfläche. Die Richtung  $x_{1L}$  stellt im Punkt P die Tangente der krummlinigen Koordinate  $r$  dar.

Verzerrungen und Spannungen sind die Komponenten von Tensoren zweiter Stufe ( $s_{ij}, \epsilon_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ )). Aufgrund der Symmetrieeigenschaft  $s_{ij} = s_{ji}$  kann der Spannungstensor mit sechs Komponenten beschrieben werden. Entsprechend wird der Verzerrungstensor  $\epsilon$  mit sechs Komponenten ausgedrückt. Die Transformationsmatrizen sind für Spannungen und Verzerrungen gleich.

Für die nun folgenden Herleitungen wird eine Matrix  $E$  eingeführt, welche die Tensorverzerrungen  $\epsilon$  mit den ingenieurmäßig definierten Verzerrungen  $\gamma$  verknüpft:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 2 & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{23} \end{bmatrix} = E \cdot \epsilon \quad (5.2)$$

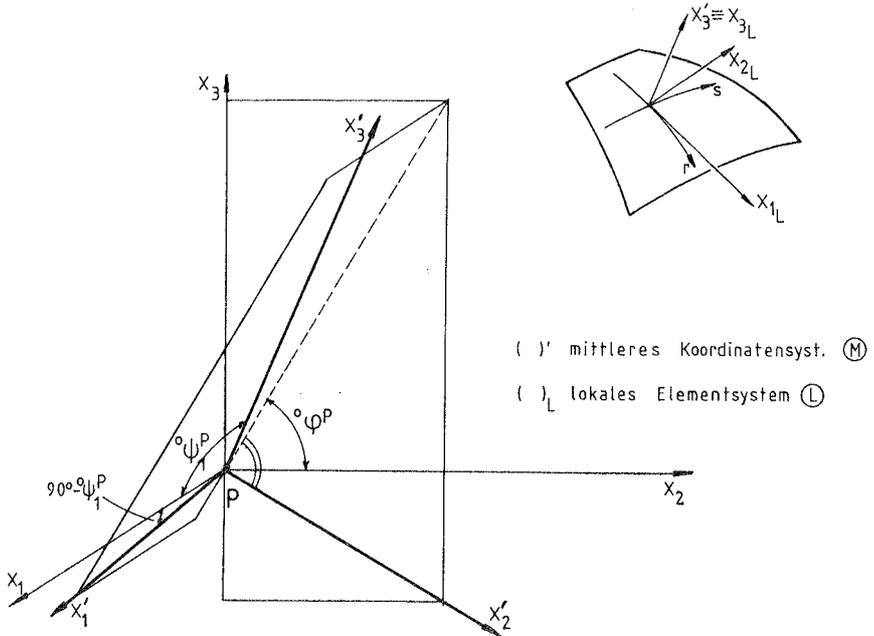


Bild 5.2: Definition der Koordinatensysteme (M) und (L)

a) Transformation von (M)  $\rightarrow$  (L)

Das Koordinatensystem (L) sei in der Tangentialebene um den Winkel  $\beta$  gegenüber dem Koordinatensystem (M) gedreht (Bild 5.3) Unter Verwendung dieses Winkels  $\beta$  und dem Tensortransformationsgesetz können folgende Beziehungen aufgestellt werden (Bezeichnungen in Tafel 5.1):

$$s_L = {}^{\circ}T \cdot s' \quad (5.3)$$

$$\epsilon_L = {}^{\circ}T \cdot \epsilon' \quad (5.4)$$

mit

$${}^0T = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 0 & -2cs & 0 & 0 \\ s^2 & c^2 & 0 & 2cs & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ cs & -cs & 0 & c^2s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

$$c = \cos \beta \quad ; \quad s = \sin \beta$$

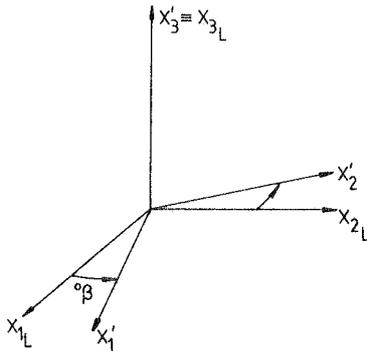


Bild 5.3: Definition des Winkels  ${}^0\beta$

b) Transformation von  $\textcircled{M} \rightarrow \textcircled{G}$

Um diese Transformation durchzuführen, werden die Richtungs-cosinus des Systems  $\textcircled{M}$  zum globalen System benötigt. Diese können anhand Bild 5.2 hergeleitet werden und lauten (Bezeichnungen in Tafel 5.1):

$${}^0x' = {}^0A \cdot {}^0x = \begin{bmatrix} \sin {}^0\psi_1 & -\cos {}^0\psi_1 \cos {}^0\varphi & -\cos {}^0\psi_1 \sin {}^0\varphi \\ 0 & \sin {}^0\varphi & -\cos {}^0\varphi \\ \cos {}^0\psi_1 & \sin {}^0\psi_1 \cos {}^0\varphi & \sin {}^0\psi_1 \sin {}^0\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} {}^0x_1 \\ {}^0x_2 \\ {}^0x_3 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Es kann somit eine Tensortransformation durchgeführt werden:

$$\mathbf{s} = {}^0\mathbf{G} \cdot \mathbf{s}' \quad (5.7)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^0\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (5.8)$$

mit

$${}^0\mathbf{G} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline {}^0A_{11}^2 & {}^0A_{21}^2 & {}^0A_{31}^2 & 2 {}^0A_{11}^0 {}^0A_{21}^0 & 2 {}^0A_{11}^0 {}^0A_{31}^0 & 2 {}^0A_{21}^0 {}^0A_{31}^0 \\ \hline {}^0A_{12}^2 & {}^0A_{22}^2 & {}^0A_{32}^2 & 2 {}^0A_{12}^0 {}^0A_{22}^0 & 2 {}^0A_{12}^0 {}^0A_{32}^0 & 2 {}^0A_{22}^0 {}^0A_{32}^0 \\ \hline {}^0A_{13}^2 & {}^0A_{23}^2 & {}^0A_{33}^2 & 2 {}^0A_{13}^0 {}^0A_{23}^0 & 2 {}^0A_{13}^0 {}^0A_{33}^0 & 2 {}^0A_{23}^0 {}^0A_{33}^0 \\ \hline {}^0A_{11}^0 {}^0A_{12}^0 & {}^0A_{21}^0 {}^0A_{22}^0 & {}^0A_{31}^0 {}^0A_{32}^0 & {}^0A_{11}^0 {}^0A_{22}^0 + {}^0A_{21}^0 {}^0A_{12}^0 & {}^0A_{11}^0 {}^0A_{32}^0 + {}^0A_{31}^0 {}^0A_{12}^0 & {}^0A_{21}^0 {}^0A_{32}^0 + {}^0A_{31}^0 {}^0A_{22}^0 \\ \hline {}^0A_{11}^0 {}^0A_{13}^0 & {}^0A_{21}^0 {}^0A_{23}^0 & {}^0A_{31}^0 {}^0A_{33}^0 & {}^0A_{11}^0 {}^0A_{23}^0 + {}^0A_{21}^0 {}^0A_{13}^0 & {}^0A_{11}^0 {}^0A_{33}^0 + {}^0A_{31}^0 {}^0A_{13}^0 & {}^0A_{21}^0 {}^0A_{33}^0 + {}^0A_{31}^0 {}^0A_{23}^0 \\ \hline {}^0A_{12}^0 {}^0A_{13}^0 & {}^0A_{22}^0 {}^0A_{23}^0 & {}^0A_{32}^0 {}^0A_{33}^0 & {}^0A_{12}^0 {}^0A_{23}^0 + {}^0A_{22}^0 {}^0A_{13}^0 & {}^0A_{12}^0 {}^0A_{33}^0 + {}^0A_{32}^0 {}^0A_{13}^0 & {}^0A_{22}^0 {}^0A_{33}^0 + {}^0A_{32}^0 {}^0A_{23}^0 \\ \hline \end{array}$$

(5.9)

c) Zusammenfassung der Transformationen  $\textcircled{L} \longleftrightarrow \textcircled{G}$

Unter Verwendung der Gln. (5.3) und (5.7) kann die erste Beziehung, die in der Transformation 2 von Bild 5.1 benutzt wird, hergestellt werden:

$$\mathbf{s} = {}^0\mathbf{G}\mathbf{T} \cdot \mathbf{s}_L \quad (5.10)$$

mit

$${}^0\mathbf{G}\mathbf{T} = {}^0\mathbf{G} \cdot {}^0\mathbf{T}^{-1} \quad (5.11)$$

${}^0\mathbf{G}\mathbf{T}$  ist Bild 5.4 zu entnehmen.

Für die Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und  $\boldsymbol{\gamma}$  gilt:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^0\mathbf{G}\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_L \quad (5.12)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{E} \cdot {}^0\mathbf{G}\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^{-1} \cdot \boldsymbol{\gamma}_L \quad (5.13)$$

Bei der Transformation 1 von Bild 5.1 wird die inverse Beziehung von Gl. (5.13) benötigt. Daß die Inverse des Ausdrucks  $(E \cdot {}^0G_T \cdot E^{-1})$  gleich  ${}^0G_T^T$  ist, kann dadurch bewiesen werden, daß bei einer virtuellen Verschiebung die geleistete Arbeit im globalen und lokalen System gleich sein muß:

$$s_L^T \cdot \delta Y_L = s^T \cdot \delta Y = s_L^T \cdot {}^0G_T^T \cdot E \cdot {}^0G_T \cdot E^{-1} \cdot \delta Y_L \quad (5.14)$$

Hieraus folgt:

$${}^0G_T^T = (E \cdot {}^0G_T \cdot E^{-1})^{-1} = E \cdot {}^0G_T^{-1} \cdot E^{-1} \quad (5.15)$$

Somit kann die Beziehung (5.13) invertiert werden:

$$\boxed{Y_L = {}^0G_T^T \cdot Y} \quad (5.16)$$

Für die Transformation der Stoffmatrix wird zunächst die konstitutive Beziehung im Lokalsystem  $\textcircled{L}$  aufgestellt:

$$s_L = C_L \cdot Y_L \quad (5.17)$$

${}^0G_{11} \cdot c^2$	${}^0G_{11} \cdot s^2$	${}^0G_{13}$	${}^0G_{11} \cdot 2 \cdot c \cdot s$	$c \cdot {}^0G_{15}$	$s \cdot {}^0G_{15}$
${}^0G_{21} \cdot c^2 + {}^0G_{22} \cdot s^2 - c \cdot s \cdot {}^0G_{24}$	${}^0G_{21} \cdot s^2 + {}^0G_{22} \cdot c^2 + {}^0G_{24} \cdot c \cdot s$	${}^0G_{23}$	$2 \cdot c \cdot s ({}^0G_{21} - {}^0G_{22}) + {}^0G_{24} (c^2 - s^2)$	${}^0G_{25} \cdot c - {}^0G_{26} \cdot s$	$s \cdot {}^0G_{25} + c \cdot {}^0G_{26}$
${}^0G_{31} \cdot c^2 + {}^0G_{32} \cdot s^2 - c \cdot s \cdot {}^0G_{34}$	${}^0G_{31} \cdot s^2 + {}^0G_{32} \cdot c^2 + {}^0G_{34} \cdot c \cdot s$	${}^0G_{33}$	$2 \cdot c \cdot s ({}^0G_{31} - {}^0G_{32}) + {}^0G_{34} (c^2 - s^2)$	${}^0G_{35} \cdot c - {}^0G_{36} \cdot s$	$s \cdot {}^0G_{35} + c \cdot {}^0G_{36}$
${}^0G_{41} \cdot c^2 - c \cdot s \cdot {}^0G_{44}$	${}^0G_{41} \cdot s^2 + {}^0G_{44} \cdot c \cdot s$	${}^0G_{43}$	${}^0G_{41} \cdot 2 \cdot c \cdot s + {}^0G_{44} (c^2 - s^2)$	${}^0G_{45} \cdot c - {}^0G_{46} \cdot s$	$s \cdot {}^0G_{45} + c \cdot {}^0G_{46}$
${}^0G_{51} \cdot c^2 - c \cdot s \cdot {}^0G_{54}$	${}^0G_{51} \cdot s^2 + {}^0G_{54} \cdot c \cdot s$	${}^0G_{53}$	${}^0G_{51} \cdot 2 \cdot c \cdot s + {}^0G_{54} (c^2 - s^2)$	${}^0G_{55} \cdot c - {}^0G_{56} \cdot s$	$s \cdot {}^0G_{55} + c \cdot {}^0G_{56}$
${}^0G_{61} \cdot c^2 + {}^0G_{62} \cdot s^2 - c \cdot s \cdot {}^0G_{64}$	${}^0G_{61} \cdot s^2 + {}^0G_{62} \cdot c^2 + {}^0G_{64} \cdot c \cdot s$	${}^0G_{63}$	$2 \cdot c \cdot s ({}^0G_{61} - {}^0G_{62}) + {}^0G_{64} (c^2 - s^2)$	${}^0G_{65} \cdot c - {}^0G_{66} \cdot s$	$s \cdot {}^0G_{65} + c \cdot {}^0G_{66}$

wo:  $c = \cos \beta$  ;  $s = \sin \beta$  .

Bild 5.4: Transformationsmatrix  ${}^0G_T$

Setzt man die Gln. (5.10) und (5.16) in diese Gleichung ein, so erhält man den Ausdruck im globalen Koordinatensystem:

$$\boxed{
 \begin{array}{c}
 \mathbf{s} = \underbrace{{}^{\circ}\text{GT} \cdot \mathbf{C}_L \cdot {}^{\circ}\text{GT}^T}_{\mathbf{C}} \cdot \boldsymbol{\gamma} \\
 \downarrow \\
 \mathbf{C}
 \end{array}
 } \quad (5.18)$$

Es fehlt noch die Ermittlung des Winkels  ${}^{\circ}\beta$ . Dazu werden die Richtungskosinus der Vektoren  ${}^{\circ}\vec{x}'_1$  und  ${}^{\circ}\vec{x}'_{1L}$  benötigt. Die Richtungskosinus von  ${}^{\circ}\vec{x}'_1$  zum globalen System sind die Elemente der ersten Zeile von Matrix  ${}^{\circ}\mathbf{A}$  aus Gl. (5.6). Die Bezeichnung  $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$  stellt den Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  dar.

$$\begin{aligned}
 \cos \sphericalangle({}^{\circ}\vec{x}'_1, \vec{x}_1) &= \sin {}^{\circ}\psi_1 \\
 \cos \sphericalangle({}^{\circ}\vec{x}'_1, \vec{x}_2) &= -\cos {}^{\circ}\psi_1 \cdot \cos {}^{\circ}\varphi \\
 \cos \sphericalangle({}^{\circ}\vec{x}'_1, \vec{x}_3) &= -\cos {}^{\circ}\psi_1 \cdot \sin {}^{\circ}\varphi
 \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die Richtungskosinus von  ${}^{\circ}\vec{x}'_{1L}$  zum globalen System sind proportional zu den Verschiebungsableitungen des Feldes  ${}^{\circ}\mathbf{x}$  nach  $r$  (Gl. (4.30)),

$$\begin{aligned}
 \cos \sphericalangle({}^{\circ}\vec{x}'_{1L}, \vec{x}_1) &= {}^{\circ}x_{1,r} / \|x_{r}\| \\
 \cos \sphericalangle({}^{\circ}\vec{x}'_{1L}, \vec{x}_2) &= {}^{\circ}x_{2,r} / \|x_{r}\| \\
 \cos \sphericalangle({}^{\circ}\vec{x}'_{1L}, \vec{x}_3) &= {}^{\circ}x_{3,r} / \|x_{r}\|
 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Aus dem Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{x}'_1$  und  $\vec{x}'_{1L}$  erhält man unter Verwendung von Gln. (5.19) und (5.20):

$$\cos {}^{\circ}\beta = \frac{\sin {}^{\circ}\psi_1 \cdot {}^{\circ}x_{1,r} - \cos {}^{\circ}\psi_1 \cdot \cos {}^{\circ}\varphi \cdot {}^{\circ}x_{2,r} - \cos {}^{\circ}\psi_1 \cdot \sin {}^{\circ}\varphi \cdot {}^{\circ}x_{3,r}}{\|x_{r}\|} \quad (5.21)$$

Die Werte der Funktion arccos zur Berechnung von  ${}^{\circ}\beta$  werden von den Funktionsroutinen nur im Bereich  $0^{\circ}$  bis  $180^{\circ}$  geliefert. Für

die Ermittlung des Vorzeichens von  ${}^{\circ}\beta$  werden zwei Vektoren gebildet: der Rotationsvektor  ${}^{\circ}\vec{\beta}$  und der Normalenvektor  ${}^{\circ}\vec{X}_{3L}$ :

$${}^{\circ}\vec{\beta} = {}^{\circ}\vec{X}_{1L} \times {}^{\circ}\vec{X}'_1 \quad (5.22)$$

$${}^{\circ}\vec{X}_{3L} = {}^{\circ}\vec{X}_{1L} \times {}^{\circ}\vec{S}$$

${}^{\circ}\vec{S}$  = Tangentenvektor zur krummlinigen Koordinate s)

Diese beiden Vektoren haben die gleiche Wirkungslinie auf der Normalen, können aber unterschiedliche Richtungen aufweisen. Nach der Vereinbarung von Bild 5.3 ist  ${}^{\circ}\vec{\beta}$  positiv, wenn das Skalarprodukt der Vektoren  ${}^{\circ}\vec{\beta}$  und  ${}^{\circ}\vec{X}_{3L}$  positiv ist, so daß

$$\text{Vorzeichen}({}^{\circ}\beta) = \text{Vorzeichen}({}^{\circ}\vec{\beta} \cdot {}^{\circ}\vec{X}_{3L}) \quad (5.23)$$

#### 5.1.4 Transformationen für den Stahlanteil

Die Bewehrungsstäbe werden als einachsrig wirkende Komponenten eingelegt. Dadurch wird eine Anisotrope ins System eingebracht, die durch die Eingabe der Stabrichtungen geregelt wird. Es ist grundsätzlich möglich, mehrere Stahlschichten einzusetzen, in diesem Abschnitt werden jedoch nur die Transformationen an einer Schicht erläutert. Bei den anderen Schichten ist analog vorzugehen.

Die Stabrichtung  $X_{st}$  wird mit dem Winkel  $\alpha_{st}$  zwischen den Bewehrungsstäben und der Tangente  ${}^{\circ}X_{1L}$  an die krummlinige Koordinate r definiert (Bild 5.5).

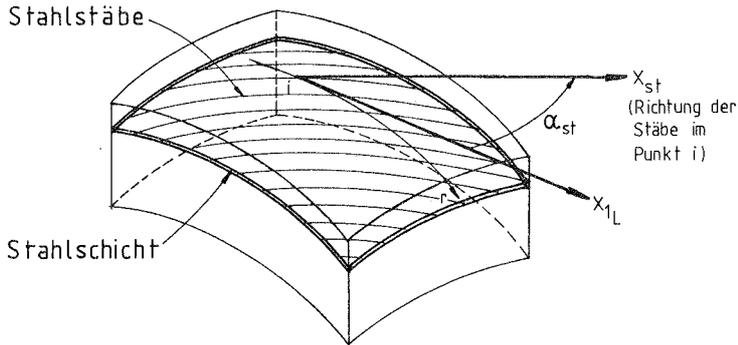


Bild 5.5: Richtung der Stahleinlage

Im allgemeinen ist der Winkel  $\alpha_{st}$  von Integrationspunkt zu Integrationspunkt verschieden. In dieser Arbeit werden zwei Sonderfälle behandelt:

① Die Stabrichtungen fallen mit den krummlinigen Koordinaten  $r$  und  $s$  zusammen. Dieser Fall wird für doppelt gekrümmte Schalen gebraucht, wenn z.B. Stahlstäbe parallel zu den Rändern der Schale angeordnet werden. In diesem Fall ist der Winkel  $\alpha_{st}$  für die Stäbe in  $s$ -Richtung von einem Integrationspunkt zum anderen unterschiedlich. In Bild 5.6 ist dies am Beispiel einer HP-Schale verdeutlicht.

Es sollte beachtet werden, daß die Anordnung der Stahleinlagen durch die Form des Elements gegeben wird, denn  $r$  und  $s$  sind krummlinige Koordinatenachsen, die aus den Knotenkoordinaten am Integrationspunkt interpoliert werden. So sind die Bewehrungsstäbe an den äußersten Integrationspunkten fast parallel zu den Elementrändern; in den inneren folgen sie der Richtung der inneren Knoten.

Der Winkel  $\alpha_{st}$  wird aus dem Skalarprodukt  $\vec{o}_{X,r} \cdot \vec{o}_{X,s}$  gebildet; das Vorzeichen ist immer positiv. Dieser Winkel ist in jedem Integrationspunkt zu ermitteln.

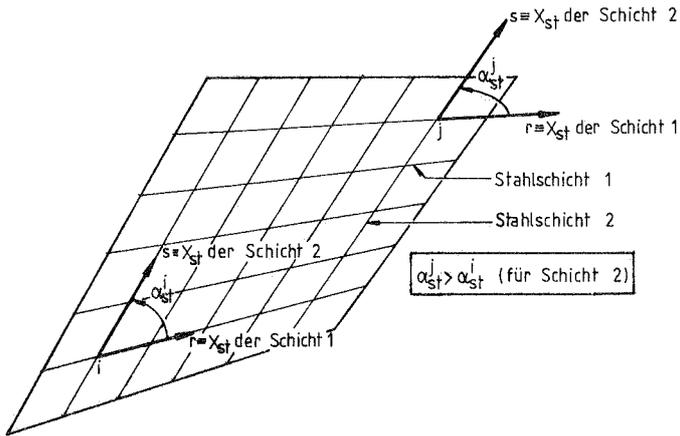


Bild 5.6: Unterschiedliche Winkel  $\alpha_{st}$  am Beispiel der HP-Schale

② Es wird ein konstanter Winkel  $\alpha_{st}$  für das ganze Element vorgegeben. Wird  $\alpha_{st}$  gleich null gesetzt, so entspricht dies einer Einlage in r-Richtung.

Mit den fest vorgegebenen oder ermittelten Winkeln  $\alpha_{st}$  kann man zur eigentlichen Transformation übergehen.

Um die lokale Verzerrung  $\epsilon_{st}$  zu ermitteln, wird zunächst mit Hilfe von Gl. (5.8) vom System ③ zum System ④ transformiert (Bezeichnungen in Tafel 5.1).

$$\mathbf{Y}' = {}^0\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{Y} \quad (5.24)$$

Von  $\mathbf{Y}'$  werden nur die Terme  $\epsilon'_{11}$ ,  $\epsilon'_{22}$ ,  $\gamma'_{12}$  benötigt, da nur diese in der Schalenfläche wirken. Gegenüber dem System ④ sind die Stahleinlagen um einen Winkel  $\rho$  gedreht. Dieser Winkel ist zu berechnen mit

$$\rho = \alpha_{st} - \beta \quad (5.25)$$

$\beta$  ist in Bild 5.3,  $\alpha_{st}$  in Bild 5.5 definiert.

Die Transformation zur Stahllachse  $(st)$  wird mit Hilfe der Matrix  ${}^0T$  Gl. (5.5) vorgenommen, wobei  $\beta$  durch  $\rho$  ersetzt wurde  ${}^0T(\rho)$ . Die Verzerrung  $\varepsilon_{st}$  lautet somit:

$$\varepsilon_{st} = \cos^2 \rho \cdot \varepsilon'_{11} + \sin^2 \rho \cdot \varepsilon'_{22} + \cos \rho \cdot \sin \rho \cdot \gamma'_{12} \quad (5.26)$$

Damit ist die Transformation 1 nach Bild 5.1 abgeschlossen.

Zur Transformation 2 nach Bild 5.1 wird ebenfalls die Matrix  ${}^0T(\rho)$  herangezogen. Zunächst soll das Elastizitätsmodul in Matrixform geschrieben werden:

$$C_{st} = E_{st} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Jetzt kann auf das System  $(M)$  transformiert werden.

$$C' = {}^0T(\rho) \cdot C_{st} \cdot {}^0T(\rho)^T = E_{st} \cdot \begin{bmatrix} c^4 & c^2 s^2 & 0 & c^3 s & 0 & 0 \\ s^2 c^2 & s^4 & 0 & c s^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^3 s & c s^3 & 0 & c^2 s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

$c = \cos \rho ; \quad s = \sin \rho$

Durch Vor- und Nachmultiplizieren mit  ${}^{\circ}G$  aus Gl. (5.9) gewinnt man nun die Stoffmatrix  $C$  für die Stahlschicht im globalen System  $(G)$ :

$$C = {}^{\circ}G \cdot C' \cdot {}^{\circ}G^T \quad (5.29)$$

Bei den Spannungen wird ähnlich vorgegangen. Die Stoffmatrix im System  $(M)$  wird mit Hilfe von  ${}^{\circ}T(\rho)$  gewonnen, wobei im System  $(st)$  nur der Wert  $S_{11st}$  besetzt ist. Es entsteht der Vektor  $s'$ :

$$s' = \begin{bmatrix} s'_{11} \\ s'_{22} \\ s'_{33} \\ s'_{12} \\ s'_{13} \\ s'_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \rho \\ \sin^2 \rho \\ 0 \\ \cos \rho \cdot \sin \rho \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot S_{11st} \quad (5.30)$$

Dieser Vektor  $s'$  kann durch direkte Anwendung der Gl. (5.7) in das globale System transformiert werden.

#### 5.1.5 Integration des Betonanteils

Die Integration des Betonanteils erfolgt in Schichten. Das Vorgehen ist in Abschnitt 4.3.3.3 erläutert.

#### 5.1.6 Integration des Stahlanteils

Bild 5.7 stellt den Querschnitt des Schalenelements mit einer Stahlschicht dar.

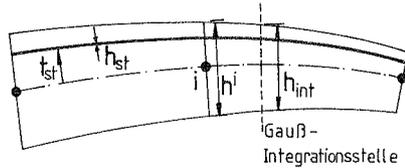


Bild 5.7: Kennzeichnung einer Stahlschicht

Die Stahlschicht ist durch die dimensionslose Koordinate  $t_{st}$  ( $-1 \leq t_{st} \leq 1$ ) und die Dicke  $h_{st}$  gekennzeichnet. Die Einheit von  $h_{st}$  ist wegen der Verschmierung der Stahlschicht (Längeneinheit)<sup>2</sup> / (Längeneinheit), also z.B.  $\text{cm}^2$  der Bewehrung pro  $\text{cm}$  der Schale. Hier soll eine solche Schicht - deren Matrix  ${}^1C$  und Vektor  ${}^1s$  bereits bekannt sind - so formuliert werden, daß sie in das Integrationsschema von Gl. (4.32) - (4.34) eingebracht werden kann. Die Stahlschichten werden zusätzlich dem Beton überlagert, weil im allgemeinen die Dicken  $h_{st}$  sehr klein gegenüber der Dicke  $h$  der Schale ausfallen. Der Summationsindex  $k$  (Gl. (4.32) - (4.34)) läuft jetzt von 1 bis  $q + \text{Anzahl der Stahlschichten}$ .

Die Gewichte  $w_i, w_j$  für die Integration in Flächenrichtung gelten auch für den Stahl. Die Matrizen  ${}^1B, {}^1\hat{B}$  sowie  $\det {}^0J$  müssen für die Koordinate  $t_{st}$  aufgestellt werden. In Dickenrichtung läuft die Einheitskoordinate  $t$  von  $-1$  bis  $+1$  über den Integrationsbereich 2. Damit wird das Integrationsgewicht der Stahlschicht mit der Dicke  $h_{st}$  in Dickenrichtung:

$$w_k = \frac{2 \cdot h_{st}}{h_{int}} \quad (5.31)$$

Die Dicke  $h_{int}$  an der Integrationsstelle wird mit Hilfe der Interpolationsfunktionen aus den Dicken an den Knotenpunkten gewonnen:

$$h_{int}(r,s) = \sum_{i=1}^M \phi^i(r,s) \cdot h^i \quad (5.32)$$

mit  $M = \text{Anzahl der Knoten}$ .

## 5.2 Programmablauf

### 5.2.1 Integration im Element

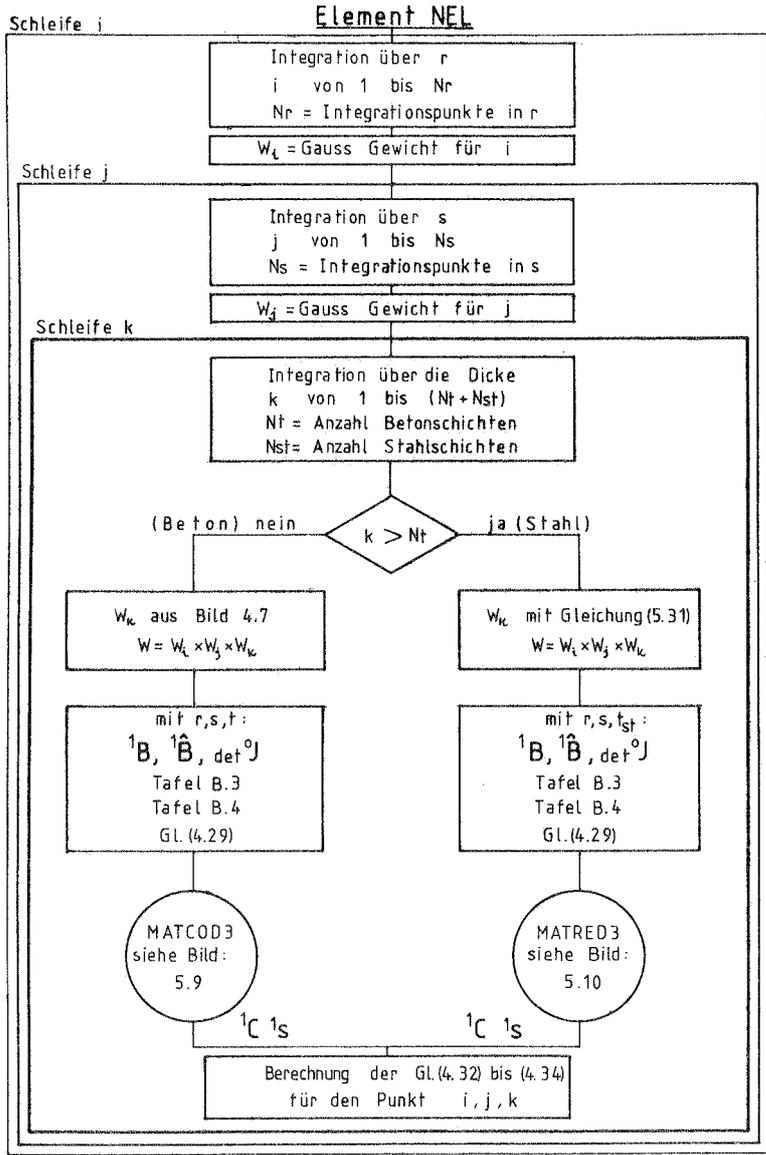


Bild 5.8 Berechnung von  ${}^1K^e, {}^1K_g^e, {}^1F^e$  eines Elements.

In Bild 5.8 ist der Integrationsvorgang über ein Element in Form eines Flußdiagramms angegeben.

Die Unterprogramme MATCOD3 und MATRED3 ermitteln die Werkstoffeigenschaften von Beton bzw. Stahl. Der Ablauf dieser Berechnungen ist in den Bildern 5.9 und 5.10 angegeben. Diese Bilder sind folgendermaßen zu interpretieren: Die benötigten Daten zur Ermittlung von  $C$  und  $S$  sind rechts oben angegeben. Das Ergebnis befindet sich links oben. Das Programm wird dann im Gegenurzeigersinn durchlaufen, der Datentransfer ist mit Pfeilen angegeben, auf denen die entsprechenden Daten aufgetragen sind. Die gestrichelten Linien trennen unterschiedliche Werkstoffmodelle voneinander.

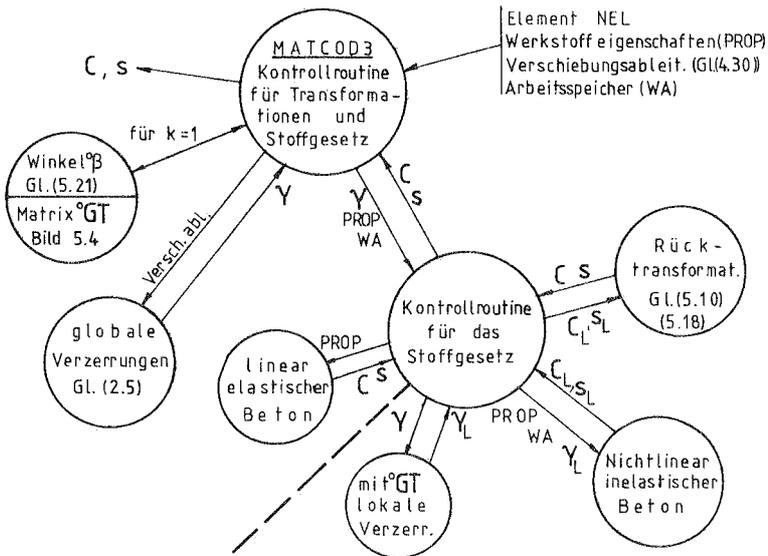


Bild 5.9: Rechnungsablauf der Werkstoffeigenschaften von Beton

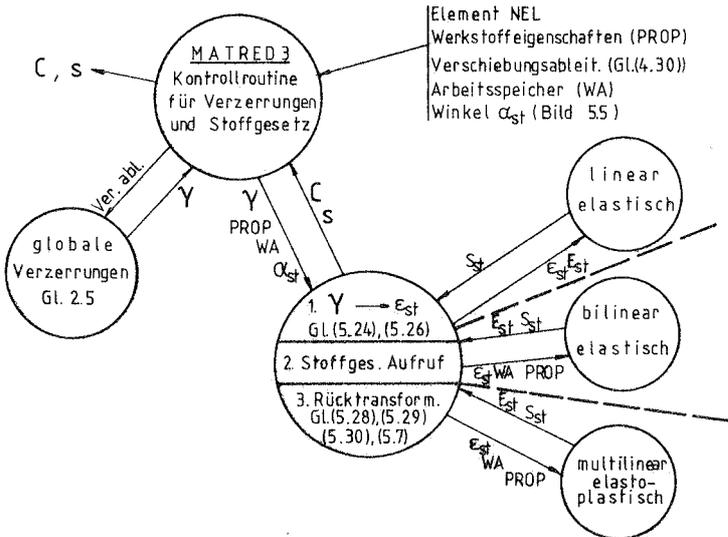


Bild 5.1o: Rechnungsablauf der Werkstoffeigenschaften von Stahleinlagen

### 5.2.2 Rechenprogramm

Das vorgestellte Konzept wurde in das Programmsystem NISA des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart eingebracht. NISA ist eine Weiterentwicklung einer Version des Programms NONSAP [65]. Die Beschreibungen finden sich in [56] und [66]. Das Programm ist in FORTRAN IV geschrieben, einige Verwaltungsroutinen (für I/O) liegen in ASSEMBLER vor. Die Rechnungen wurden auf den Maschinen CD 6600 und CYBER 174 des Rechenzentrums der Universität Stuttgart durchgeführt.

Beschränkung des Kernspeichers beschränkt die Problemgröße nicht, da die Steifigkeitsmatrix auf einem externen Speicher liegt und blockweise in den Hauptspeicher geholt und verarbeitet wird. Die Elementinformation liegt in sequentiellen Files auf Extern-

speichern und wird gruppenweise aufgerufen. Die Anzahl der Elementgruppen muß vom Benutzer bei der Dateneingabe festgelegt werden. Wenn Elemente mit dem entwickelten Stoffgesetz und einer 4x4-Gauß-Integration, 7 Betonschichten und zwei elasto-plastischen Stahleinlagen verwendet werden, kann eine Gruppe maximal drei Elemente enthalten.

Die Fähigkeit des Programms, von einem schon erreichten Verschiebungs- und Spannungszustand weiterzurechnen (RESTART), wurde auf das Stahlbetonelement erweitert. Dadurch besteht keine Zeitbegrenzung für die einzelnen Läufe. Bei Abbruch des Rechenvorgangs, z.B. durch fehlende Konvergenz, wird der letzte konvergierte Schritt festgehalten.

6.1 Balken ohne Schubbewehrung

In diesem Abschnitt soll die Gültigkeit des entwickelten Verfahrens getestet werden, indem die Ergebnisse von Versuchen am Balken ohne Schubbewehrung der numerischen Lösung gegenübergestellt werden. Gleichzeitig werden die Möglichkeiten und Grenzen des Rechenmodells untersucht.

Die ausgewählten Versuche wurden von Bresler und Scordelis in Berkeley (1964) vorgenommen (Versuche XOB-1 und OB-1). Sie wurden hier aus der Arbeit von Franklin [3] entnommen.

6.1.1 Versuchskörper

Die Geometrie des Versuchsbalkens ist im Bild 6.1 dargestellt. Die geometrischen und physikalischen Maße sind in amerikanischen Einheiten angegeben.

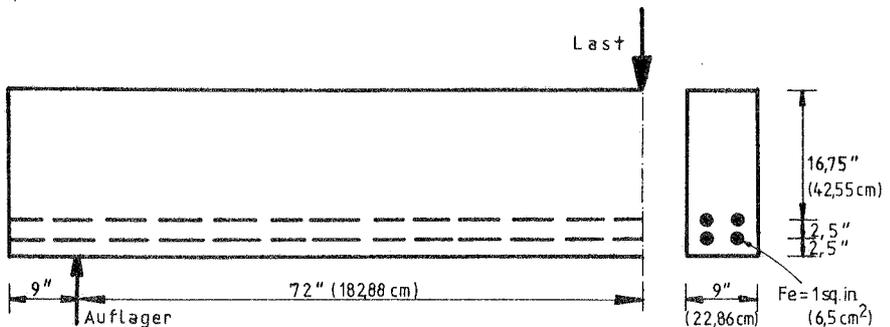


Bild 6.1: Versuchsbalken

In Bild 6.2 sind die Werkstoffeigenschaften dargestellt. Hier ist zu bemerken, daß der von Franklin angegebene Wert für die Betondruckfestigkeit (3500) reduziert wurde. Grund hierfür ist die Forderung des angewandten Stoffgesetzes, wonach  $E_0/E_S \geq 2$  sein soll. Die Wirkung bei diesem Problem ist aber unbedeutend, da der maßgebende Parameter hier die Zugfestigkeit ist.

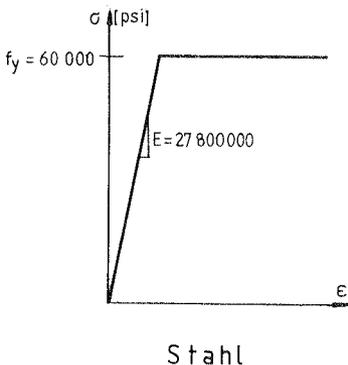
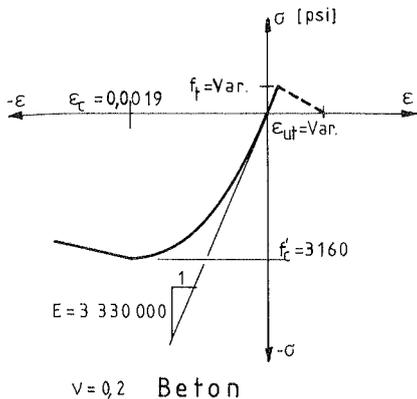


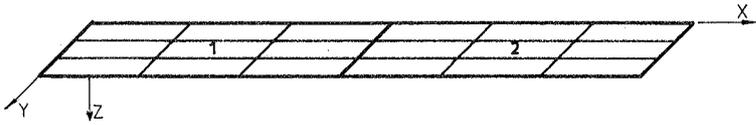
Bild 6.2: Werkstoffeigenschaften

Die Werte für die Zugfestigkeit  $f_t$  und Tension Stiffening Parameter  $\epsilon_{ut}$  wurden im Verlauf der Studie variiert.

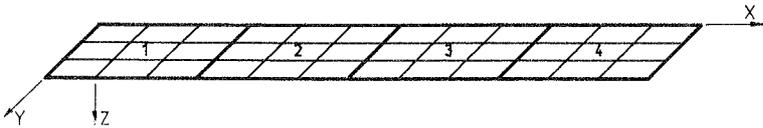
### 6.1.2 FE-Idealisierungen

Der Balken wird durch unterschiedliche Anordnung des Schalenelements als Balken, Platte oder Scheibe idealisiert, wobei aus Symmetriegründen nur das halbe System untersucht wird.

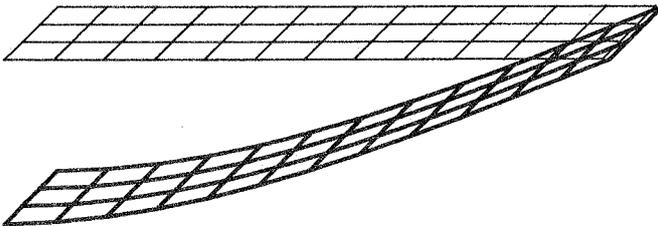
- Balken (Bild 6.3): Die Verschiebungen in x- und z-Richtung und Rotationen um die y-Achse nebeneinander liegender Knoten werden einander gleich gesetzt. Alle anderen Freiheitsgrade werden unterdrückt. Die Querdehnnzahl im Stoffgesetz wird gleich null gesetzt. Der Stahl wird mit zwei Schichten im Element idealisiert.
- Platte (Bild 6.3): Hier werden die Freiheitsgrade nebeneinander liegender Knoten nicht gekoppelt,  $v = 0,2$ . Stahl wird ebenfalls mit zwei Schichten im Element idealisiert.
- Scheibe (Bild 6.4): Hier werden die Elemente in die x-z-Ebene gelegt. Verschiebungen in y-Richtung sowie die Rotationen um die x- und z-Achse werden unterdrückt,  $v = 0,2$ . Der Stahl wird - wie in den Bildern angedeutet - mit Fachwerkstabelementen idealisiert.



a) zwei Elemente

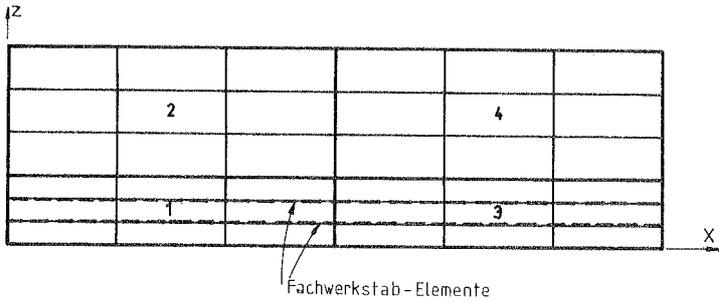


b) vier Elemente

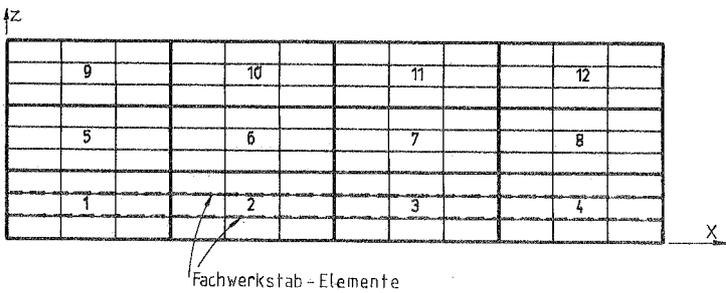


c) Verschiebungsfigur

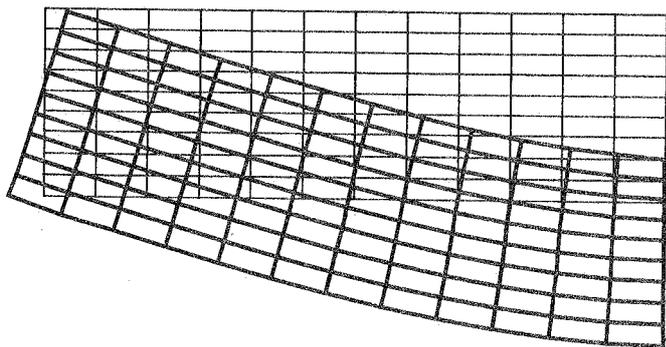
Bild 6.3: Balken- und Plattenidealisierung



a) vier Elemente



b) zwölf Elemente



c) Verschiebungsfigur

Bild 6.4: Scheibenidealisationen

### 6.1.3 Parameterstudien

- Erster untersuchter Parameter ist der Einfluß der Idealisierung auf die Verformung und die Bruchlast. Die Ergebnisse sind in Bild 6.5 dargestellt.

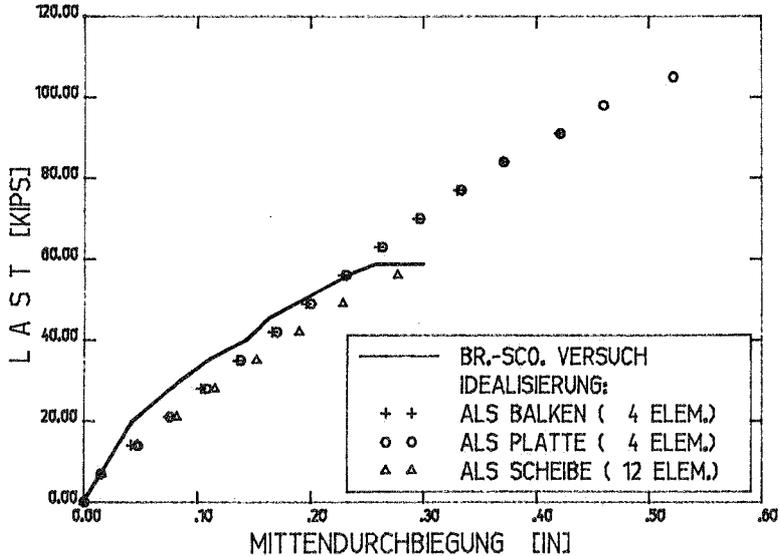


Bild 6.5: Einfluß der Idealisierung

Hier wird ersichtlich, daß die Bruchlasten bei der Platten- und Balkenidealisation sehr überschätzt werden. Die Bruchlast wird in den hier untersuchten Fällen - bei denen es kein abfallender Ast in der Last-Verschiebungskurve gibt - als der Zustand, in dem auch bei Verkleinerung der Lastschritte keine Konvergenz zu erzielen ist, definiert. Dabei kann es sein, daß die Verschiebungsinkremente von Iteration zu Iteration nur sehr langsam kleiner werden. In den meisten Fällen jedoch werden die Verschiebungsinkremente von Schritt zu Schritt größer.

Ursache dieser unterschiedlichen Bruchlasten ist, daß der Balken durch einen Schubbruch versagt. Dieses ist durch ein Element in Dickenrichtung nicht zu erfassen, da sich die biaxiale

Wirkung in der Ebene des Elements abspielt. Wird das Element als Scheibe eingesetzt, kann es den Schubbruch gut erfassen und die Bruchlast richtig voraussagen.

Bei der Platten- und Balkenidealisierung wird die Bruchlast nur durch Überschreiten der Druckspannungen in Balkenmitte bestimmt. Diese liegt bei der Platte höher, da die biaxiale Druck-Druck-Wirkung die Druckfestigkeit am oberen Rand erhöht.

Der Verlauf der Last-Verschiebungskurve des Scheibenmodells folgt dem Versuchsergebnis besser als die Kurven der Platte und des Balkens. Grund dafür ist die unterschiedliche Berücksichtigung des Gleitmoduls  $G$  (Gl. (3.7)), der aus den Spannungsverhältnissen in Elementebene berechnet wird. Dieses ist bei den Balken/Platten-Idealisierungen die Breitenrichtung. In der Scheibenidealisierung hingegen wirkt der biaxiale Zustand in Höhenrichtung.

Um sicherzustellen, daß das Fehlverhalten an den Platten- und Balkenmodellen nicht auf ein zu grobes Elementnetz zurückzuführen ist, wurden die Rechnungen mit zwei verschiedenen Netzen durchgeführt: nach Bild 6.3a) mit 7 Schichten, nach Bild 6.3b) mit 13 Schichten. Die Ergebnisse stimmten weitgehend überein.

- Da nur das Scheibenmodell das richtige Verhalten beschreibt, wird im folgenden nur diese Idealisierung behandelt. Die Ergebnisse für zwei verschiedene Elementnetze werden in Bild 6.6 gezeigt.

Das 4-Element-Modell ist unfähig, die Bruchlast zu bestimmen. Dies kann der zu groben Integration angelastet werden, die das Ribbild nicht genau genug erfaßt.

- Mit dem 12-Element-Modell wird der Einfluß der Zugfestigkeit untersucht (Bild 6.7).

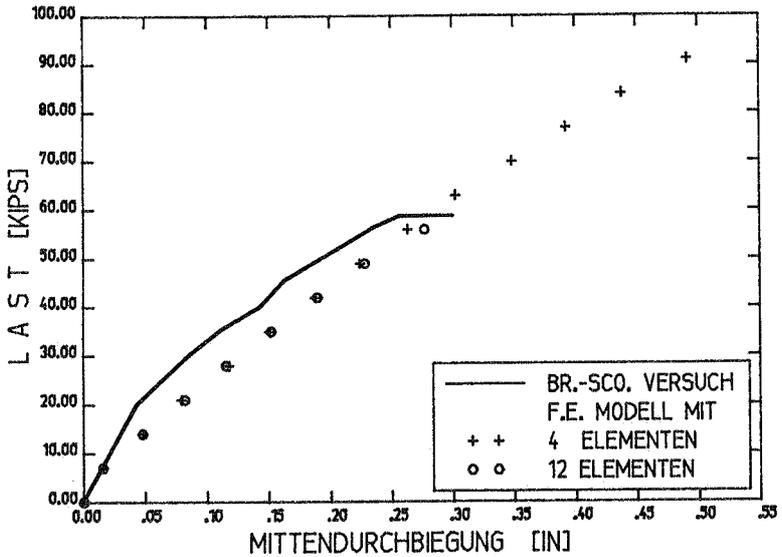


Bild 6.6: Einfluß des Elementnetzes (Scheibenidealisierung)

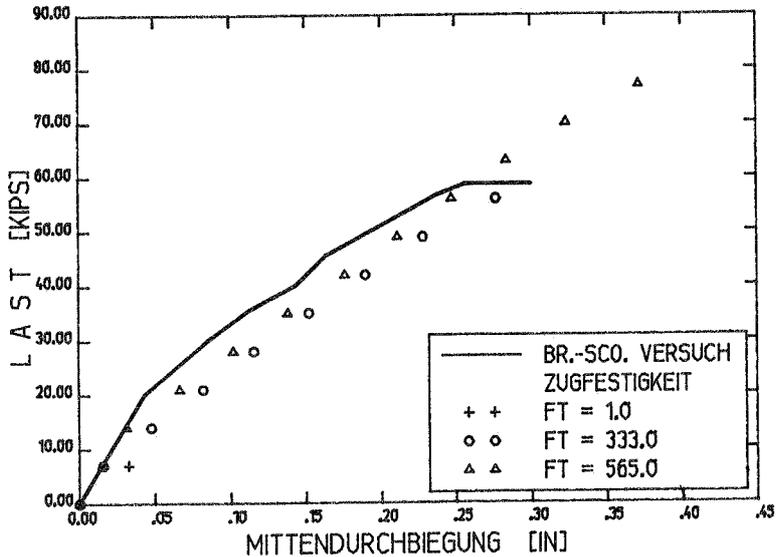


Bild 6.7: Einfluß der Zugfestigkeit

Der Vergleich zeigt deutlich, daß dieser Parameter beim Balken ohne Schubbewehrung äußerst wichtig ist. Die Bruchlast steigt mit Zunahme dieses Wertes, nicht aber die Steifigkeit, deren Verlauf in beiden Fällen gut mit der Versuchskurve übereinstimmt. Bei der Berechnung mit  $f_t = 1,0$  wurde der "Tension Stiffening-Effekt" (TS) mitgenommen ( $\epsilon_{ut} = 0,0001$ ). Nimmt man diesen nicht mit, erreicht man nur die Last 2,0. Dies ist ein Ausnahmefall, bei dem der TS einen Einfluß auf die Bruchlast hat, was auf die relativ kleinen Verzerrungen beim Versagen zurückzuführen ist.

- Bei einer Zugfestigkeit  $f_t = 333$  wird der TS-Parameter  $\epsilon_{ut}$  variiert (Bild 6.8).

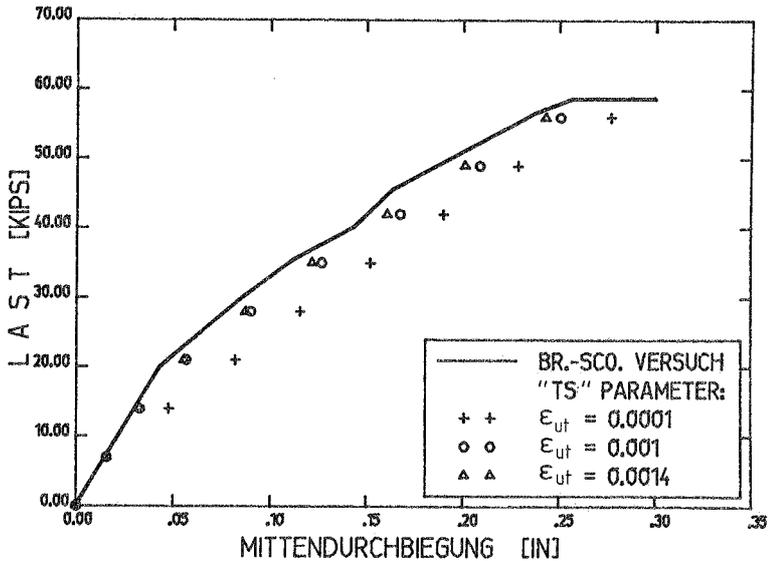


Bild 6.8: Einfluß des "Tension Stiffening"-Effekts

Dieser Effekt wird ausschließlich in den unteren Elementen 1 bis 4 (Bild 6.4b), in deren Bereich die Fachwerkstäbe wirken, berücksichtigt. Die Bedeutung des Parameters  $\epsilon_{ut}$  ist in Bild 6.2 verdeutlicht. Zwei Ergebnisse sind hier besonders zu bemerken: Mit Ausnahme des obengenannten Falles extrem klei-

ner Zugfestigkeit und großem  $\epsilon_{ut}$  wird die Bruchlast durch Mitnahme des Effekts nicht beeinflusst, und das Last-Verschiebungsverhalten verbessert sich mit diesem Parameter erheblich.

Das erste Phänomen erklärt sich dadurch, daß die Mitwirkung des Betons im Zugbereich bei großen Verzerrungen im Bereich der Bruchlast in den meisten Integrationspunkten bereits erschöpft ist. Daher ist die Wahl des Parameters  $\epsilon_{ut}$  unerheblich. Das zweite Phänomen kommt zustande, weil die Ungleichgewichtskräfte durch Mitnahme von Betonspannungen nach dem Reißen kleiner werden und deswegen bei der Lösung der inkrementellen Gleichgewichtsgleichungen kleinere Verschiebungszuwächse entstehen. Dies wirkt sich außerdem positiv auf die Zahl der Iterationen aus, da die Konvergenz von der Größe der Verschiebungsinkremente abhängt.

Diese letzte Eigenschaft gilt aber nur uneingeschränkt für solche Fälle, bei denen sich während der Belastung kontinuierlich neue Risse bilden. In den Fällen, bei denen die Risse schlagartig auftreten, erfordert die Überwindung des Zustands der schlagartigen Rißbildung, bei Vernachlässigung des TS ebenfalls mehr Iterationen als bei Mitnahme dieses Effekts. Im darauffolgenden Schritt jedoch werden für die Idealisierung mit TS mehr Iterationen benötigt.

Im Bild 6.9 wird ein Vergleich für die Anzahl der Iterationen angestellt (Modifiziertes Newton-Raphson-Verfahren).

- Um den Einfluß der Lastschrittgröße zu untersuchen, wurde dasselbe System mit zwei unterschiedlichen Bogenlängen nach dem KB-Iterationsverfahren untersucht. In Bild 6.10, in dem alle errechneten Lastschritte aufgetragen sind, ist zu erkennen, daß die zu große Lastinkrementierung zu falschen Bruchlasten führt. Dies ist der Wegabhängigkeit während des Iterationsvorgangs anzulasten. Die Wegabhängigkeit ist durch die Rißbildung bedingt. Bei der Aufbringung von zu großen Lastinkrementen werden die Zwischenzustände - in denen sich die Topologie des Systems verändert hat - übersprungen.

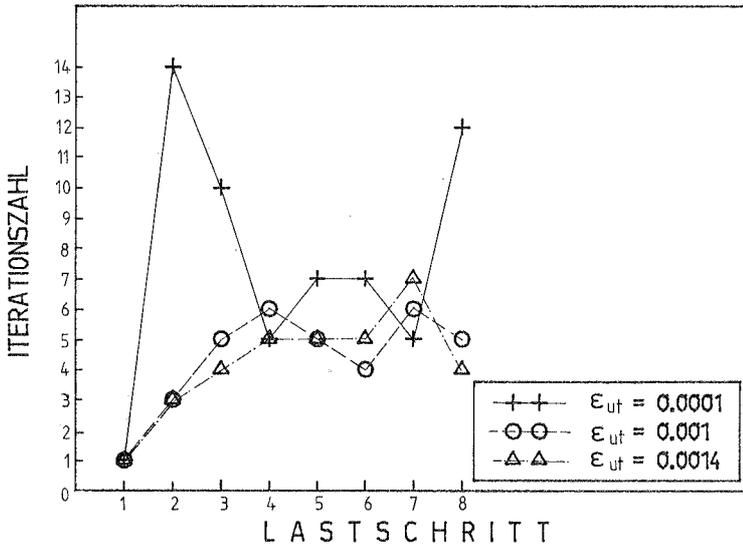


Bild 6.9: Einfluß des "TS" auf die Iterationszahl

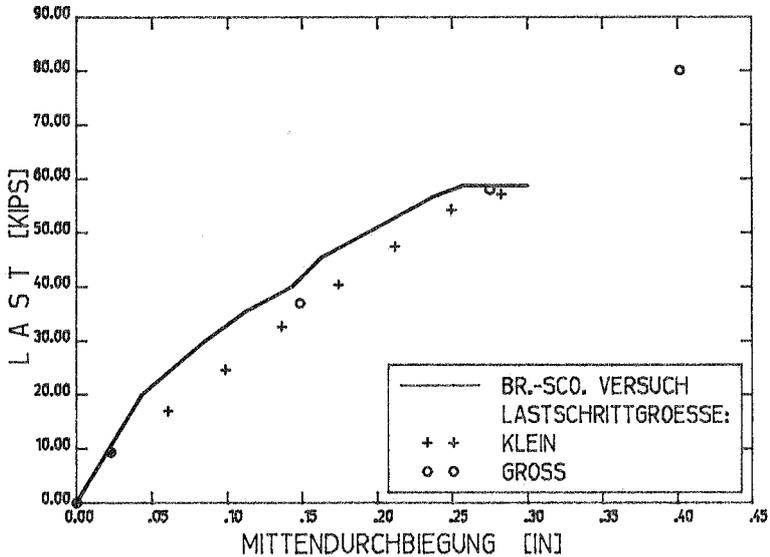


Bild 6.10: Einfluß der Lastschrittgröße

Zum Abschluß dieses Abschnitts wird in Bild 6.11 ein Vergleich der eigenen Rechnung mit der von Franklin [3] gegeben. Franklin benutzte hierfür rechteckige Scheibenelemente mit linearem Verzerrungsverhalten. Zwei Rißkriterien wurden dort verwendet: a) Maximale Hauptverzerrung und b) die linearisierte Bresler-Pister-Bruchkurve (siehe [3]). Der Stahl wurde mit Verbundelementen aus linearen Federn an den Beton angeschlossen. Die Festigkeit dieser Federn wurde aus den Versuchen von Nilson [8] hergeleitet. Mit einer Reduzierung dieser Festigkeit um 60% gelingt es Franklin, eine Bruchlast von 45 Kips zu erreichen.

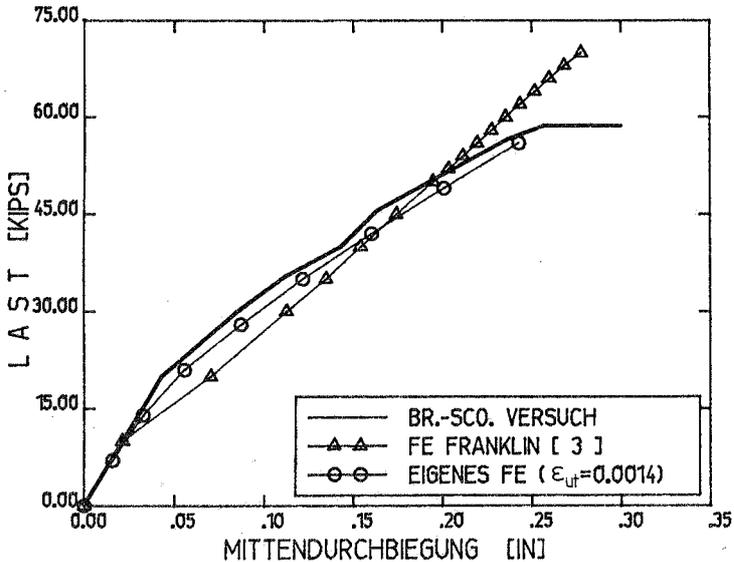
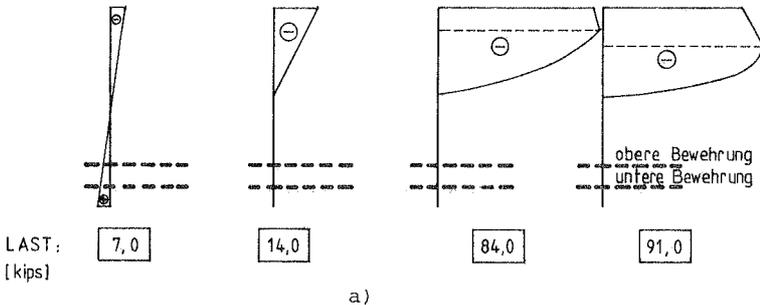


Bild 6.11: Vergleich mit Rechnung Franklin

#### 6.1.4 Spannungs- und Rißbilder

In Bild 6.12a sind die Normalspannungen des Balkenmodells für vier verschiedene Belastungen aufgetragen. Bei der Last von 91 Kips erkennt man den klassischen Spannungsverlauf vor dem Biegeversagen, bei dem die äußeren Fasern schon im abfallenden Ast der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve liegen und die maximale Spannung innerhalb des Querschnitts liegt. Die äußeren Fasern tragen dennoch Last, da sie von tragfähigem Beton eingeschlossen sind, der den Druck auf die "zerstörten" Teile überträgt. Dieser Druck nimmt aber mit der Entfernung vom "gesun-

den" Stoff ab. Dieses ist im Grund die Bedeutung des abfallenden Astes im  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm. Zu bemerken ist auch die sprunghafte Zunahme der Spannungen bei Verdopplung der Last von 7,0 auf 14,0 Kips. Dabei wird die Stahlspannung verfünffacht, und die Betonspannung nimmt mit dem Faktor 2,5 zu.



LAST [kips]	7,0	14,0	84,0	91,0
Max. Betonspannung [psi]	319,6	860,2	3159,9	3156,2
Spann. Obere Bew. [psi]	1084,8	5830,0	44043,0	48777,9
Spann. Untere Bew. [psi]	1645,9	7791,0	59959,1	68115,3

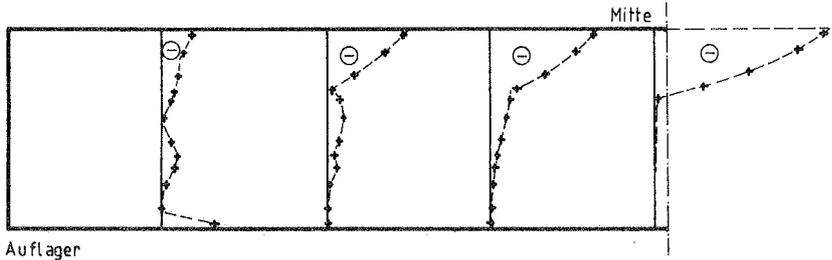
b)

Bild 6.12: Spannungen Balkenmodell

Bilder 6.13a) und c) zeigen die Normal- und Schubspannungen bei der Scheibenidealisierung kurz vor dem Bruchzustand (Last = 56 Kips). Die Normalspannungen in Balkenmitte liegen wegen der biaxialen Wirkung über den Bruchspannungen des einachsigen Falles. Sie könnten sogar noch weiter anwachsen, d.h., das Versagen wird nicht durch die Normalspannungen verursacht, sondern durch Schubrißbildung.

Ein Vergleich dieser Spannungen mit den ausführlichen Berechnungen von Scordelis [1] ist mit Bildern 6.13b) und d) möglich.

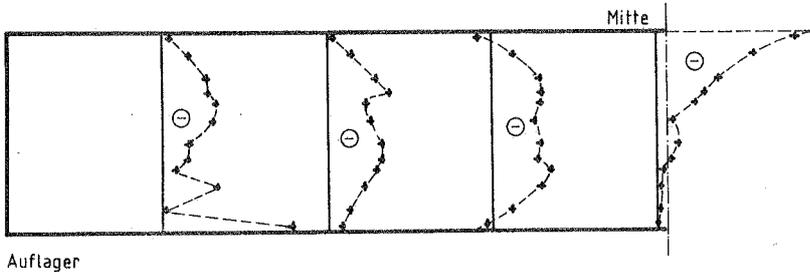
In [1] wurde derselbe Balken unter der Annahme linearer Elastizität als Scheibe untersucht. Stahl und Beton sind mit unterschiedlichen E-Moduli idealisiert, Verbundelemente sind eingebracht, und ein diskreter Riß mit vorgegebenem Verlauf wird an-



a) Normalspannungen Scheibenmodell ( $P = 56$  Kips)



b) Normalspannungen mit "aggregate interlock"-Effekt aus [1]



c) Schubspannungen Scheibenmodell ( $P = 56$  Kips)



d) Schubspannungen mit "aggregate interlock"-Effekt aus [1]

Bild 6.13: Spannungen Scheibenmodell

genommen. Die Länge dieses Risses wird variiert, indem die dem Riß benachbarten Knoten gelöst werden. In den aufgetragenen Fällen wurde die Reibung an den Rißufern mitberücksichtigt.

Um die Bilder 6.13a) und b) bzw. c) und d) zu vergleichen, muß man beachten, daß Scordelis für den Beton kein Reißen einführte und daher der Beton unterhalb des diskreten Ries Zugspannungen übernimmt. Zieht man diese Spannungen ab, so entsteht - unter Beachtung, daß der Rißverlauf in den Bildern b) und d) nicht voll durchgezogen ist - eine gute Übereinstimmung mit den errechneten Verläufen.

Die Stahlspannungen für die Scheibenidealisation bei Bruchlast sind in Bild 6.14a) aufgetragen.

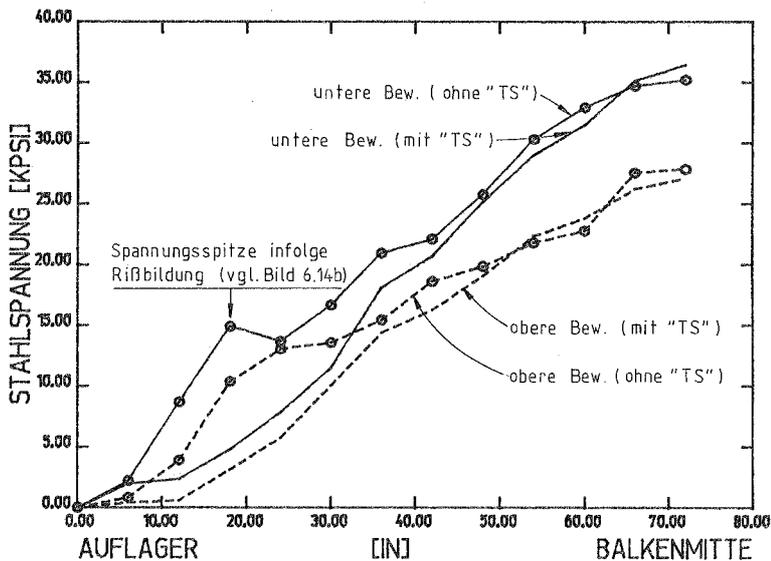


Bild 6.14a): Stahlspannungen Scheibenidealisation

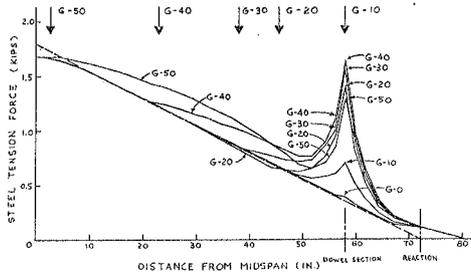


Bild 6.14b): Stahlspannungen aus [1]

Hier macht sich der "Tension Stiffening"-Effekt klar bemerkbar. In Balkenmitte verschwindet der TS-Effekt infolge großer Dehnungen, so daß die Spannungen in beiden Fällen sehr nahe beieinander liegen. In Auflagernähe dagegen liegen die Spannungen für den Fall ohne TS wesentlich höher. Der Beton übernimmt in diesem Bereich keine Zugspannungen.

Der Vergleich mit den Berechnungen von Scordelis (Bild 6.14b)) zeigt die Spannungsspitze an derselben Stelle. Scordelis übernahm die diskrete Rißlage aus den Versuchen. Hier ist die Lage aufgrund des verschmierten Rißmodells nicht so scharf markiert.

Abschließend werden einige Rißbilder gezeigt, zunächst das Balkenmodell (Bild 6.15), bei dem der schraffierte Bereich die gerissene Zone bei einer Last von 91 kips darstellt. Diese Risse sind senkrecht zur Balkenachse angeordnet, d.h., es sind Biegerisse.

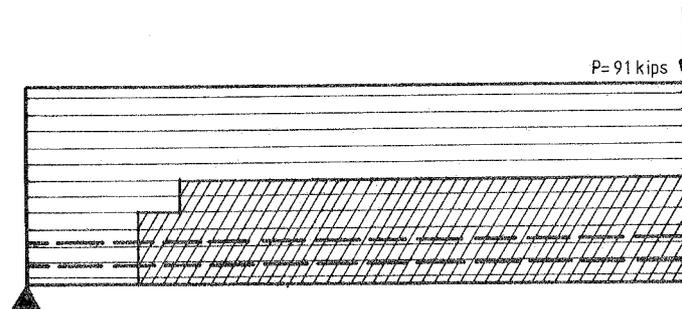
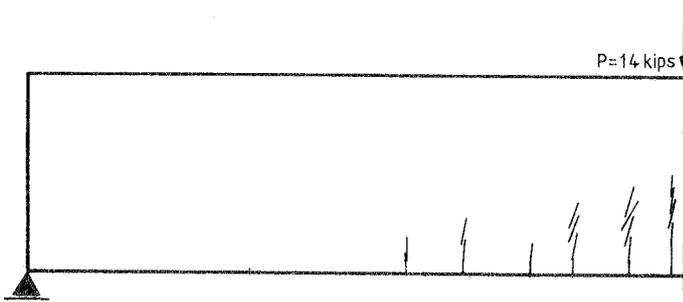
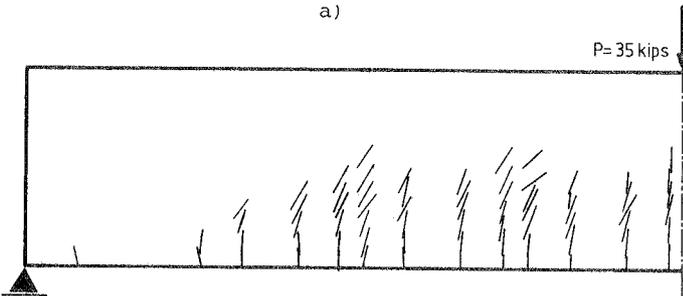


Bild 6.15: Rißbild Balkenmodell

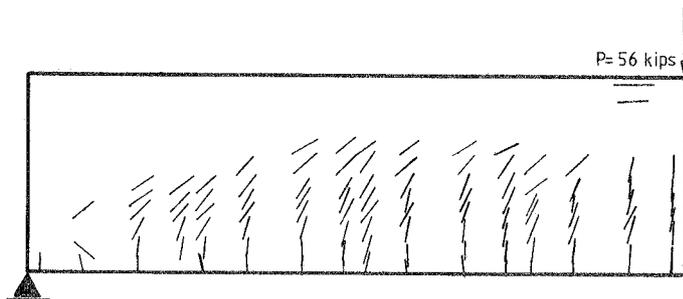
Mehr der Wirklichkeit entsprechend sind die Rißbilder der Scheibenidealisierung (Bild 6.16a bis c)). Diese Rißbilder müssen im Sinne des "verschmierten Riß"-Konzepts und nicht wie diskrete Risse aufgefaßt werden. Zum Vergleich sind im Bild 6.16 d) und e) die Rißbilder des Versuchs aufgetragen.



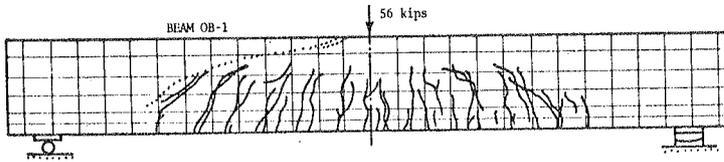
a)



b)

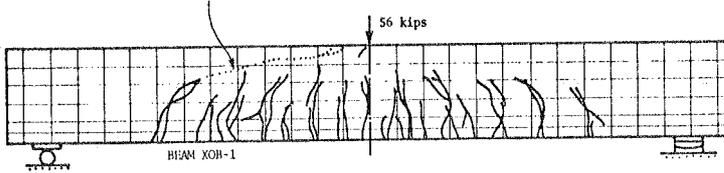


c)



d) aus [3]

Typical cracking at failure load



e) aus [3]

Bild 6.16: Reißbilder von Rechnung ((a) bis (c)) und Versuch (d) und e)

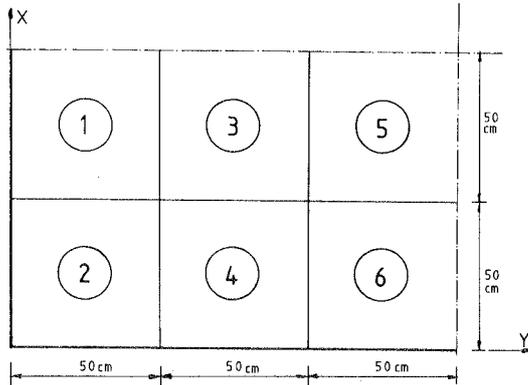
## 6.2 Rechteckige Stahlbetonplatte

Nachdem im Abschnitt 6.1 die Schwächen des entwickelten Verfahrens für die Wiedergabe eines Schubversagens quer zur Elementmittelfläche festgestellt wurde, soll jetzt an einem dafür geeigneten Beispiel die Güte des Modells für überwiegende Biegezustände überprüft werden.

Dieses wird am Beispiel einer rechteckigen, frei drehbar gelagerten Stahlbetonplatte durchgeführt. Als Vergleichsgrundlage dient der Versuch von Franz [67], der auch von Schäfer u.a. [68] nachgerechnet wurde. Es handelt sich um eine der Praxis entsprechende schwach bewehrte Platte unter gleichmäßig verteilter Querlast.

### 6.2.1 Versuchskörper

Bild 6.17 stellt die von Franz untersuchte Platte dar. In Bild 6.18 sind die Werkstoffeigenschaften angegeben.



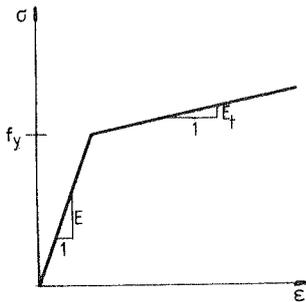
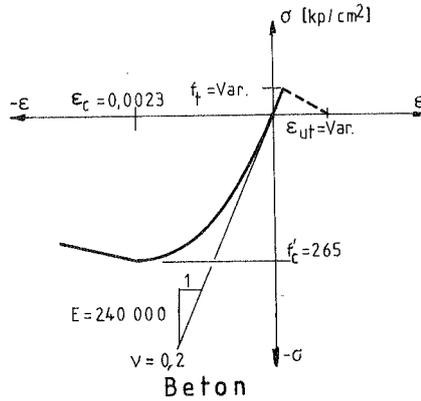
a) Draufsicht (Viertelplatte)



Element Nr.	Schicht Nr.	$F_{e_x}$ [cm]	$F_{e_y}$ [cm]	Stahlgüte BSt
1 bis 6	1	0,0559	—	III K
1 bis 6	2	—	0,0251	III K
2	3	—	0,0251	III K
2	4	0,0559	—	III K
1	5	0,0064	—	IVR
1	6	—	0,0092	IVR
4, 6	7	—	0,0064	IVR
4, 6	8	0,0092	—	IVR

b) Stahleinlagen

Bild 6.17: Versuchsplatte



Stahlgüte	III K	IV R
E [kp/cm <sup>2</sup> ]	2 100 000	2 100 000
f <sub>y</sub> [kp/cm <sup>2</sup> ]	4 200	5 000
E <sub>t</sub> [kp/cm <sup>2</sup> ]	8 163	6 441

## S t a h l

Bild 6.18: Werkstoffeigenschaften

### 6.2.2 FE-Idealisierung

Die Platte wurde, wie in Bild 6.17 dargestellt, mit sechs bikubischen Elementen idealisiert. Die Stahlschichten wurden entsprechend der Tafel in Bild 6.17b) eingesetzt. Es wurden sieben Betonschichten eingeführt, was anhand des Beispiels aus Abschnitt 6.1 als hinreichend erkannt wurde.

### 6.2.3 Ergebnisse der Untersuchung

In Bild 6.19 sind die Verschiebungen des Mittelpunkts für unterschiedliche TS-Parameter aufgetragen. Die gestrichelte Versuchs-kurve (1) entspricht der Erstbelastung; anschließend wurde drei-mal ent- und belastet. Der erneute Belastungsvorgang ist durch die durchgezogene Linie (2) angegeben.

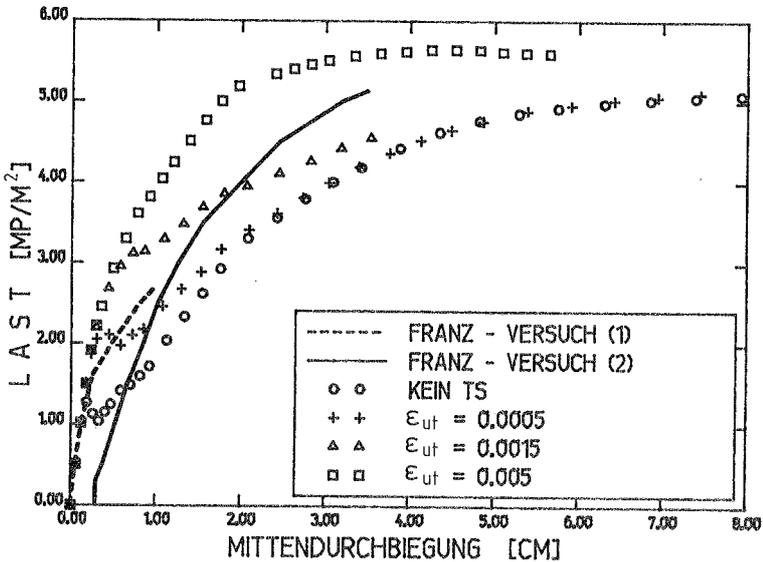


Bild 6.19: Einfluß des "Tension Stiffening"

Bei niedriger Belastung ist die Last-Verschiebungskurve für alle TS-Parameter gleich. Es schließt sich ein abfallender Ast an, der abhängig vom TS-Parameter ist. Dieser zeigt das Reißen in Plattenmitte an. Dieses Phänomen wird anhand von Bild 6.2o er-läutert.

Dort wird schematisch das Verhalten einer beliebigen bewehrten Stahlbetonfaser gezeigt, wobei das Einzelverhalten von Beton und Stahl berücksichtigt wird. Die überlagerten Last-Dehnungs-kurven zeigen in a) und b) einen abfallenden Ast, der in der

Rechnung nur mit einem verschiebungskontrollierten Verfahren oder dem Bogenlängen-Verfahren nach Riks/Wempner nachvollziehbar ist.

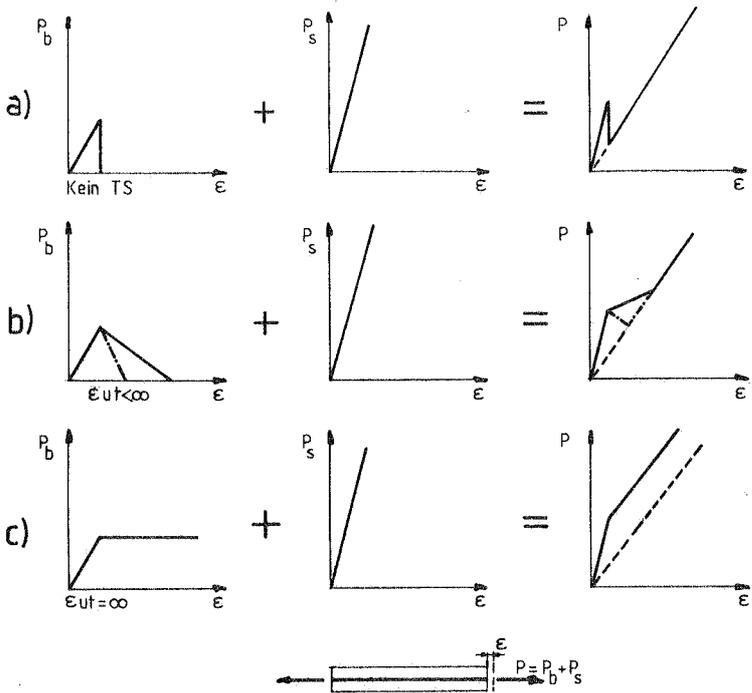


Bild 6.2o: Verhalten einer Faser aus Stahlbeton

Anhand zweier Fasern mit unterschiedlichen Dehnungen (Bild 6.21) kann gezeigt werden, daß der abfallende Ast auch ohne TS nicht schlagartig auftritt: Da das Reißen der Fasern bei unterschiedlichen Dehnungen zu verschiedenen Lastniveaus stattfindet, ergibt sich eine "Glättung" des abfallenden Astes.

Aus diesen zwei Bildern ist auch zu entnehmen, daß bei hohem TS-Parameter kein abfallender Ast zu erwarten ist (Bild 6.2oc)). Dieses ist in Bild 6.19 deutlich zu erkennen.

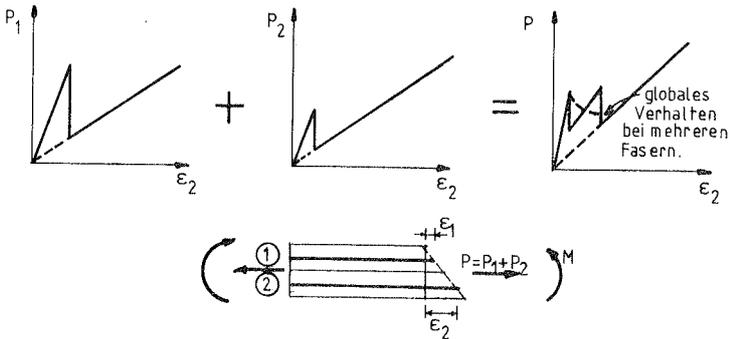


Bild 6.21: Verhalten zweier Fasern aus Stahlbeton

Außerdem zeigt sich in diesem Beispiel, daß der TS-Parameter wenig Einfluß auf die Bruchlast hat. Er sollte jedoch nicht zu groß gewählt werden ( $\epsilon_{ut} = 0,005$  in Bild 6.19), da dies zu einer geringen Überschätzung der Bruchlast führt. In diesem Beispiel entspricht die Verzerrung  $\epsilon_{ut} = 0,005$  der 40-fachen Reißverzerrung. Faktor 30 - 35 wäre wünschenswert.

Man kann anhand Bild 6.19 auch erkennen, daß die Last-Verschiebungskurve des Versuchs am besten bei der Berechnung mit hohem TS-Parameter nachvollzogen wird. Das Beispiel zeigt, daß mit dem TS der versteifende Einfluß der Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen berücksichtigt werden kann. Zusätzlicher Vorteil des TS ist die geringere Zahl der benötigten Iterationen (45 bei  $\epsilon_{ut} = 0,005$ ; 69, wenn kein TS). Der größte Anteil der Iterationen tritt in den abfallenden Ästen des Last-Verschiebungsdiagramms auf, die bei hohem TS nicht auftreten.

In Bild 6.22 wird der Einfluß der Zugfestigkeit gezeigt, die bei diesem Problem, im Gegensatz zum Balken aus Abschnitt 6.1 keine Auswirkung auf die Bruchlast hat. Dieses ist auf den Versagensmodus zurückzuführen, der hier durch Fließen der Bewehrung eintritt. Dieser Zustand führt zu großen Verzerrungen, so daß der Beton in diesem Zustand bereits gerissen ist. Unterschiede sind bei niedrigen Lastniveaus zu erkennen, da die Anfangsrißlasten verschieden sind.

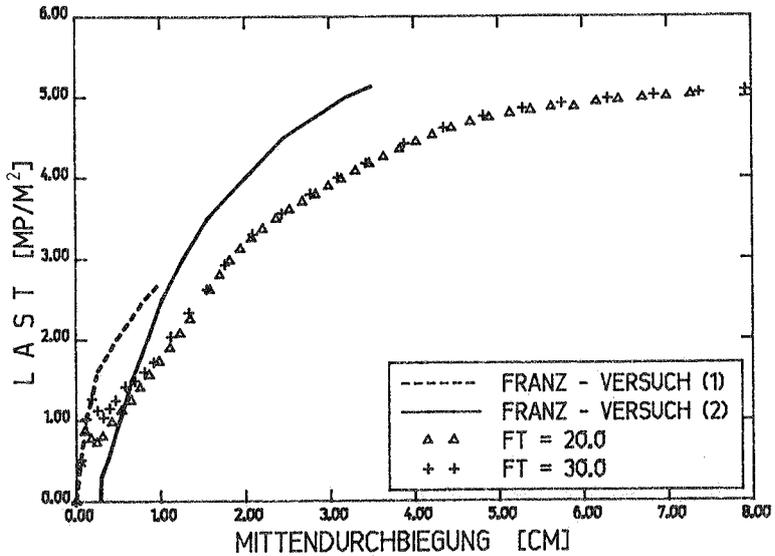


Bild 6.22: Einfluß der Zugfestigkeit des Betons

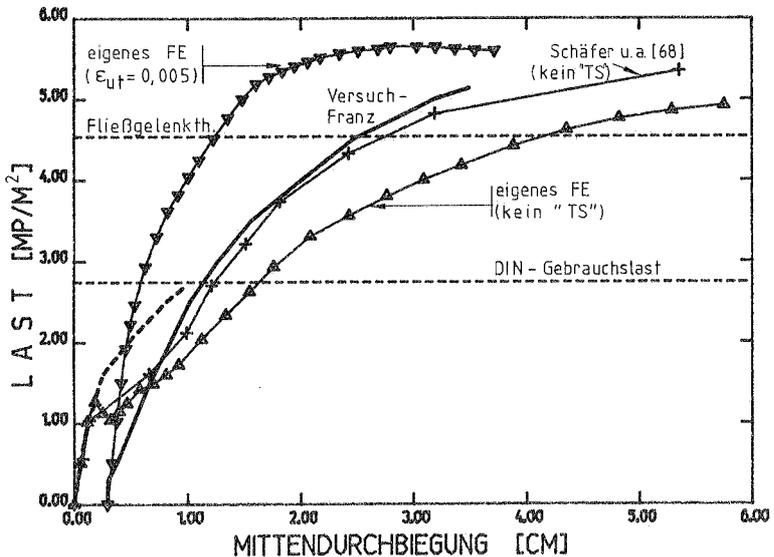
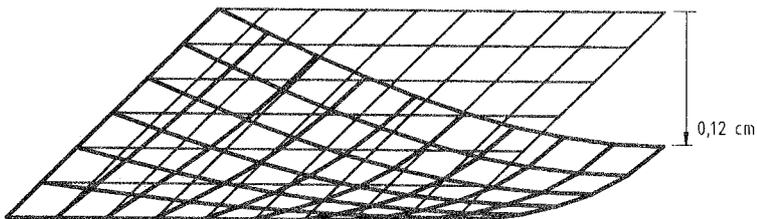


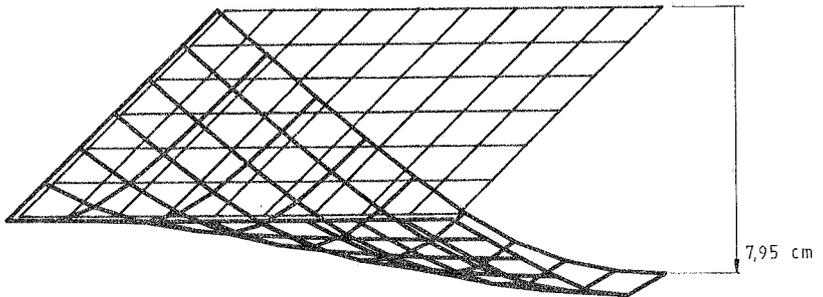
Bild 6.23: Vergleich mit Rechnung Schäfer u.a. [68]

Der Vergleich mit Schäfer u.a. [68] (Bild 6.23) zeigt bei diesen ein steiferes Verhalten und eine höhere Bruchlast als die eigene Rechnung an. Schäfer benutzte 12 Dreieckselemente mit je 33 Freiheitsgraden in seiner Untersuchung. Das Werkstoffmodell von Link [41] wurde eingesetzt, und Schubübertragung über zwei offene Risse wurde zugelassen. Der Tension Stiffening-Effekt wurde nicht berücksichtigt. Das steifere Verhalten und die höhere Bruchlast gegenüber der eigenen Rechnung ist auf die Zahl und Anordnung der Integrationspunkte zurückzuführen. Schäfer bewertet die Stoffmatrix im Schwerpunkt jedes Elements, also insgesamt 12 Integrationspunkte in der Viertelplatte. Da diese Punkte weiter entfernt von den Symmetrieachsen liegen als die Integrationspunkte der eigenen Rechnung, werden die meist beanspruchten Stellen nicht erfaßt, und damit verhält sich das System steifer und fester.

In folgendem Bild sind zwei Verschiebungsfiguren der Mittelfläche der Viertelplatte vor und nach dem Reißen dargestellt. Bild b) zeigt eine Verschiebung der Mittelfläche nach außen. Dieses wird durch die Verschiebung der Spannungsnulllinie nach oben verursacht, die durch die Rißbildung im unteren Bereich der Platte zu erwarten ist.



a) Last =  $1,00 \text{ Mp/m}^2$

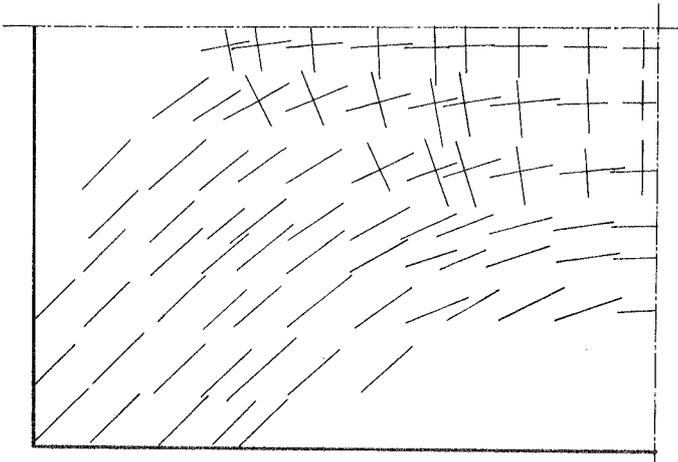


b) Last =  $5.16 \text{ Mp/m}^2$

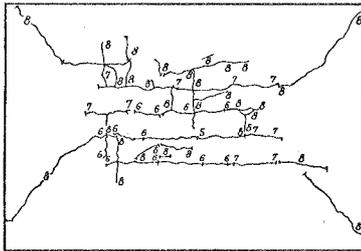
Bild 6.24: Verschiebungsfiguren der Mittelfläche der Viertelplatte

Zuletzt werden einige Rißbilder in Bild 6.25 dargestellt. Bild a) zeigt die Unterseite der Platte bei einer Last von  $2.18 \text{ Mp/m}^2$  für die Rechnung, Bild b) für den Versuch. Die Rechnung gibt eine größere Rißzahl an. Hier ist jedoch zu beachten, daß diese Risse nicht diskret sind. Sie geben nach einer numerischen Integration (Verschmierung) das globale Verhalten wieder. Außerdem werden in der Rechnung Spannungen über die Risse hinweg übertragen, was beim wirklichen System nicht der Fall ist. Es müssen daher in der Rechnung mehr Risse auftreten, um im Durchschnitt denselben Effekt zu erzielen.

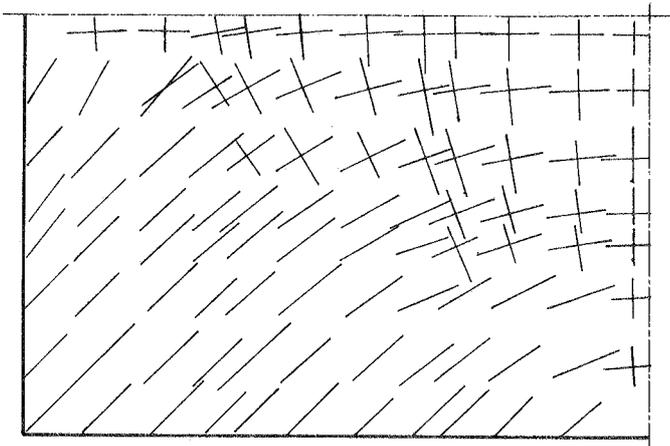
In Bild 6.25 c) bzw. d) werden die Rißbilder bei Bruchlast gezeigt. Zum Vergleich ist auch das im Versuch auftretende Rißbild (Bild e)) angegeben. Die gestrichelten Risse von Bild d) haben sich bei diesem Lastniveau wieder geschlossen.



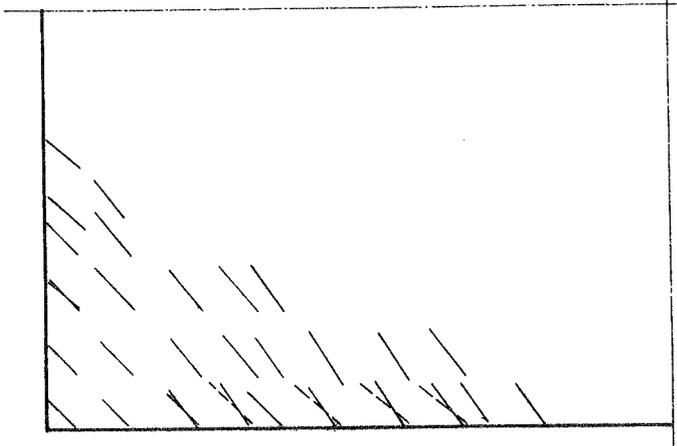
a) Rechnung - Unterseite - Last =  $2.18 \text{ Mp/m}^2$



b) Versuch - Unterseite - Last =  $2.18 \text{ Mp/m}^2$

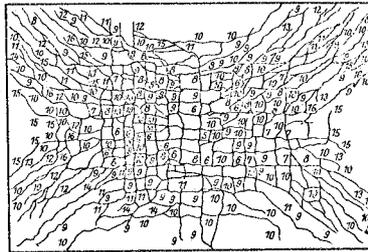


c) Rechnung - Unterseite - Last =  $5.10 \text{ Mp/m}^2$



----- geschlossene Risse

d) Rechnung - Oberseite - Last =  $5.10 \text{ Mp/m}^2$



e) Versuch - Unterseite - Last =  $4.35 \text{ Mp/m}^2$

Bild 6.25: Rißbilder

Bei der Durchrechnung dieses Beispiels hat sich die in Abschnitt 6.1.3 beschriebene Regel bezüglich Konvergenzschnelligkeit bestätigt: Bei hohen TS-Parametern ist die Konvergenz schnell, ohne TS sind viele Iterationen notwendig. Nur bei der Bruchlast mit fast horizontalem Verlauf der Last-Verschiebungs-Kurve ist es umgekehrt, weil hier im Fall ohne TS fast alle Risse offen sind und die Ungleichgewichtskräfte mit den daraus entstehenden Verschiebungen sehr klein sind.

### 6.3 Beulen einer Stahlbetonplatte

Die Untersuchung des Beulens einer in ihrer Ebene auf Druckspannungen beanspruchten Platte erfordert die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität. Bei Mitnahme der geometrischen Nichtlinearität wächst bei einer imperfekten Platte infolge der Belastung der Hebelarm überproportional, wodurch größere Verschiebungen gegenüber einer linearen Rechnung zu erwarten sind.

In diesem Abschnitt wird eine Stahlbetonplatte auf diesen Effekt hin untersucht. Als Vergleichsgrundlage dienen eine Platte aus den Versuchen von Swartz, Rosebraugh, Berman [69] und eine Nachrechnung dieser Platte von Kristjansson [25].

#### 6.3.1 Versuchsplatte und Idealisierung

Aus der Versuchsreihe [69] wird der Versuch No. 11 für die Berechnung ausgewählt. Da die Platte mit einer Halbwelle in beiden Richtungen ausbeulte, wird nur ein Viertel idealisiert. Die Platte ist gelenkig, verschieblich gelagert. In Bild 6.26 ist die Geometrie dargestellt und die Idealisierung - mit sechs Elementen - durch dicke Linien hervorgehoben.

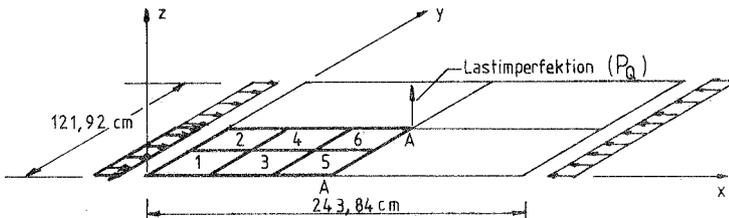


Bild 6.26: Geometrie und Idealisierung

Die Bewehrung ist in Bild 6.27 dargestellt, die Werkstoffdaten sind Bild 6.28 zu entnehmen.

Auch hier wird das nichtlineare Verhalten des Betons mit 7 Schichten in Dickenrichtung integriert, während für den elastischen

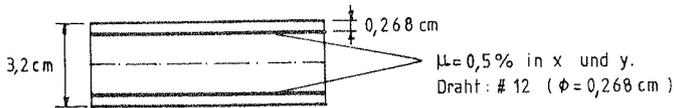


Bild 6.27: Bewehrung

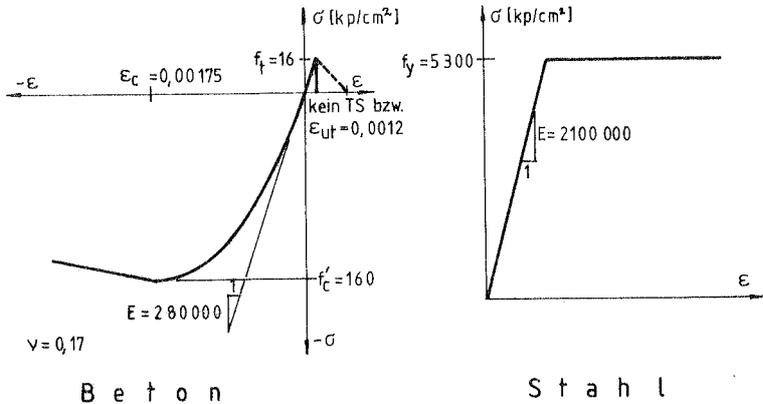


Bild 6.28: Werkstoffdaten

Fall zwei Punkte ausreichen. In allen Fällen wurde das 16-knotige Element mit einer 4x4 Gauss-Integration über die Fläche verwendet.

### 6.3.2 Ergebnisse der Untersuchung

In Bild 6.29 sind die Ergebnisse der Untersuchung dargestellt. Die Imperfektion in der Platte wurde durch Aufbringen einer Querkraft  $P_Q$  in Plattenmitte von  $1/1560$  der Gesamtdrucklast erreicht. Die vier untersuchten Fälle sind in Bild 6.29 beschrieben. Hier bedeuten LIN bzw. NL die Vernachlässigung bzw. Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität. Zum Vergleich sind drei Grenzlaster in gestrichelten Linien angegeben: Bruchlast im Versuch ( $P_B^V = 63,68 \text{ Mp}$ ), die von Kristjansson ermittelte kritische Last ( $P_{Kr}^{Krist} = 57,60 \text{ Mp}$ ) - die an sich als Bruchlast in seiner Berechnung anzusehen ist - und die kritische Last im Versuch ( $P_{Kr}^V = 53,58 \text{ Mp}$ ), die als die Last definiert wird, bei der die Verzer-

rungsinkremente auf der konvexen Seite in Plattenmitte ihr Vorzeichen ändern. Die Quetschlast für diese Platte ist nicht aufgetragen; sie beträgt  $P_{Qu} = 76,76 \text{ Mp}$ .

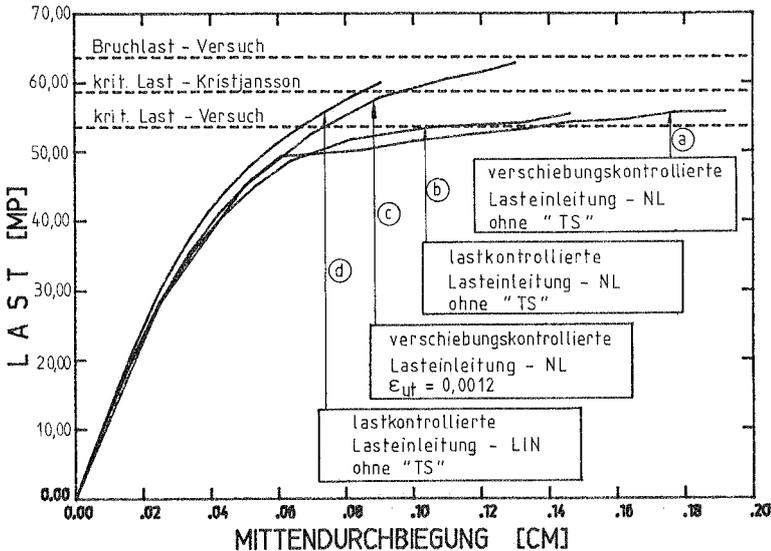


Bild 6.29: Last-Verschiebungskurven-Stahlbetonplatte

Die beste Näherung der Bruchlast liefert der Fall (c). Im Versuchsbericht [69] ist die Art der Lasteinleitung nicht angegeben, es wird vermutet, daß sie verschiebungsgesteuert eingeleitet wird. Durch den Vergleich der Fälle (a) und (c) kann festgestellt werden, daß die Mitnahme des TS-Effekts für das hier untersuchte Problem einen Einfluß auf die Bruchlast hat. Im Fall (a) werden die Verschiebungen nach dem Reißen zu groß. Da die Mittendurchbiegung die Exzentrizität der Lasten in Plattenmitte bestimmen, entsteht bei gleicher Last ein größerer Hebelarm für (a) als für (c) und dadurch eine geringere Bruchlast für (a). Für den Fall (b) wird eine geringere Bruchlast erreicht als bei den Berechnungen mit verschiebungsgesteuerter Lasteinleitung. Die Vergleiche zwischen den berechneten Werten der Bruchlast und den Versuchswerten liefern [Mp]:

$$\begin{aligned} P_B^{(a)} / P_B^V &= 55,73/63,68 = 0,88 \\ P_B^{(b)} / P_B^V &= 55,50/63,68 = 0,87 \\ P_B^{(c)} / P_B^V &= 62,77/63,68 = 0,99 \\ P_B^{(d)} / P_B^V &= 59,94/63,68 = 0,94 \\ P_{Kr}^{Krist} / P_B^V &= 57,60/63,68 = 0,90 \end{aligned}$$

Die Rechnung (d), geometrisch linear erzeugt - wie erwartet - kleinere Durchbiegungen als die anderen Fälle; sie nähert sich jedoch gut an die Versuchsbruchlast an. Dies deutet auf ein Materialversagen des Betons im Druckbereich und nicht auf ein Instabilitätsversagen hin. Anhand von den Bildern 6.30 und 6.31, die Verschiebungsfigur bzw. Rißbild bei Bruchlast für den Fall (b) darstellen, kann dies bestätigt werden. Man erkennt hier eine im Vergleich zur Querausbiegung beachtliche Verkürzung der Platte und ein nicht sehr ausgeprägtes Rißbild.

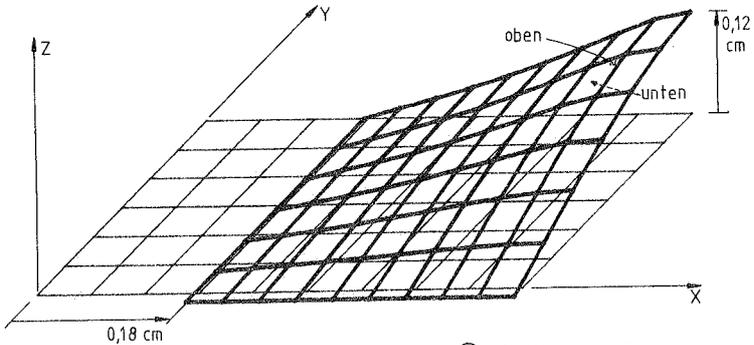


Bild 6.30: Verschiebungsfigur Fall (b) bei Bruchlast

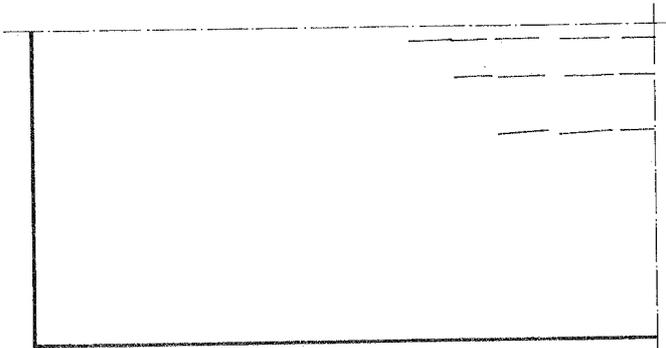


Bild 6.31: Rißbild Fall (b) bei Bruchlast (oben)

Im Bild 6.32 sind die Beton- und Stahlspannungen ( $\sigma_b$  bzw.  $\sigma_s$ ) entlang der Mittellinie aufgetragen. Hier ist zu erkennen, daß die Spannungen  $\sigma_b$  unten ( $-153 \text{ kp/cm}^2$ ) sehr nahe an die Betonbruchspannung von  $160 \text{ kp/cm}^2$  herankommen. In diesem Bild ist

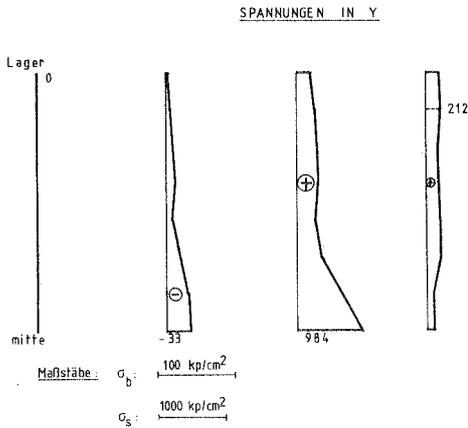
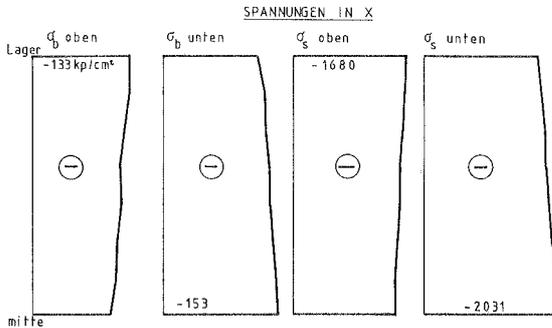


Bild 6.32: Spannungen bei Bruchlast (Fall (b)) entlang Schnitt A-A (Mittellinie)

oben die konvexe, unten die konkave Seite wiedergegeben. In x-Richtung sind - wie zu erwarten - die Druckspannungen auf der Oberseite kleiner als auf der Unterseite der Platte, da die Platte nach oben ausbeult. In y-Richtung ist deutlich zu sehen, wie die obere Bewehrung Zugspannungen aufnimmt, während der Beton dort fast spannungslos ist. Auf der unteren Seite nimmt die Betonspannung dagegen zur Mitte hin zu (Druckbereich der Beule), während die Spannung beim Stahl vom Lager aus abnimmt.

Die Spannungen des Stahls in y-Richtung am Lager ergeben sich aus dem v-Effekt, die Änderungen in der Mitte werden durch das Reißen und Ausbeulen verursacht.

Ein Vergleich mit der linear elastischen Beullast  $P_{el}^k$  zeigt die Unzulässigkeit dieses Vorgehens und bekräftigt die Aussage, daß es sich hier primär um ein Materialversagen handelt und nicht um elastische Instabilität:

$$P_{el}^k = 255 \text{ Mp} ; \text{ also } P_{el}^k / P_B^y = 4 !$$

Um diesen Wert zu bestätigen und auch, um das FE-Modell zu überprüfen, wird eine geometrisch nichtlineare, stofflich jedoch lineare Berechnung durchgeführt. Die stoffliche Linearität wurde durch sehr hohe Zug- und Druckbruchspannungen erzwungen. Das Ergebnis ist in Bild 6.33 dargestellt.

Zuletzt wurde versucht, ein Instabilitätsversagen in einer Stahlbetonplatte zu erreichen, indem die Dicke der schon untersuchten Platte noch weiter auf 1/5 der ursprünglichen Dicke reduziert wurde. Entsprechend wurden auch die Stahlschichten abgemindert. Die dazugehörige elastische Beullast hat nun einen Wert von  $P_{el}^k = 2,04 \text{ Mp}$ . In der geometrisch und stofflich nichtlinearen FE-Berechnung wurde ein Maximalwert von 1,5 Mp erreicht, was einem Verhältnis ( $P_{el}^k / P_{el}^k$  rechnerisch) von 1,36 entspricht. Aus Bild 6.34 ist zu erkennen, daß die Ausbeulung in diesem Fall viel deutlicher ist als die Zusammendrückung. Dementsprechend fällt die Last-Verschiebungskurve (Bild 6.35) aus. Sie hat einen un stetigen Verlauf, weil die Platte durch die großen seitlichen Verschiebungen einem ständigen Reißen ausgesetzt ist. Die Ent-

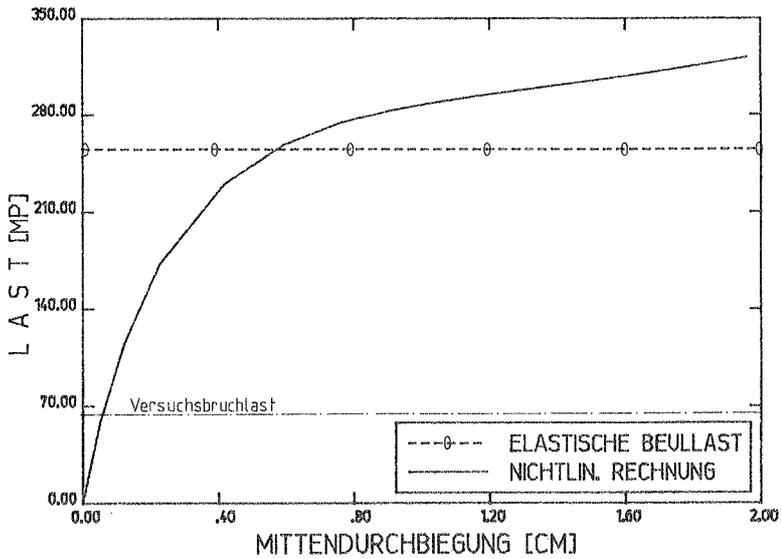


Bild 6.33: Geometrisch nichtlineare, stofflich lineare Rechnung

wicklung der Rißmuster ist im Bild 6.36 dargestellt. Der Unterschied zur dicken Platte (Bild 6.31) ist deutlich zu erkennen.

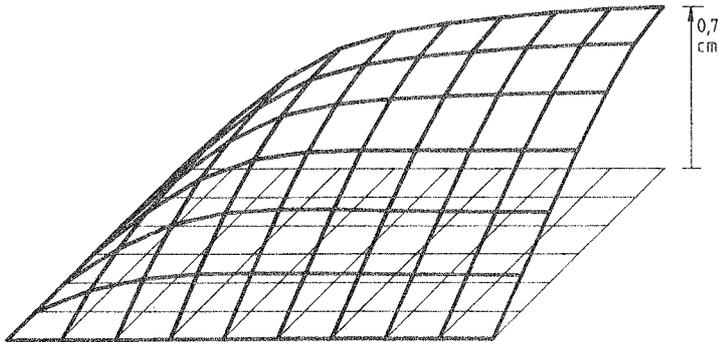


Bild 6.34: Verformungsfigur dünner Stahlbetonplatte (Last = 1,45 Mp)

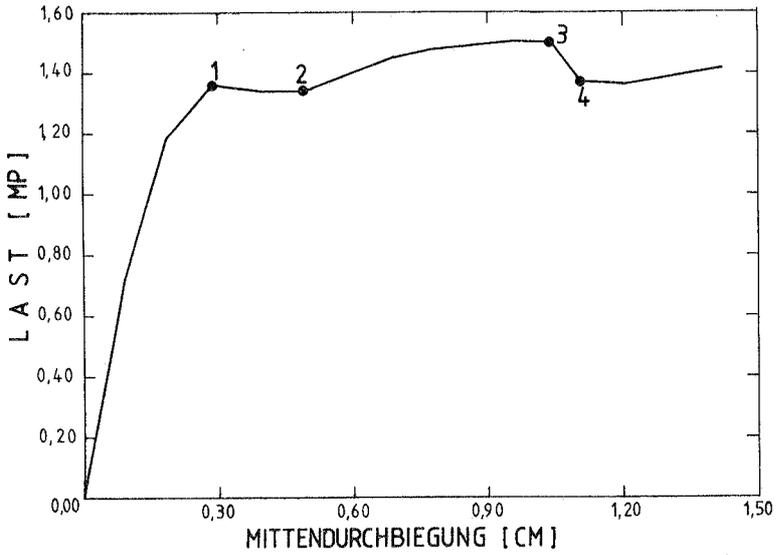
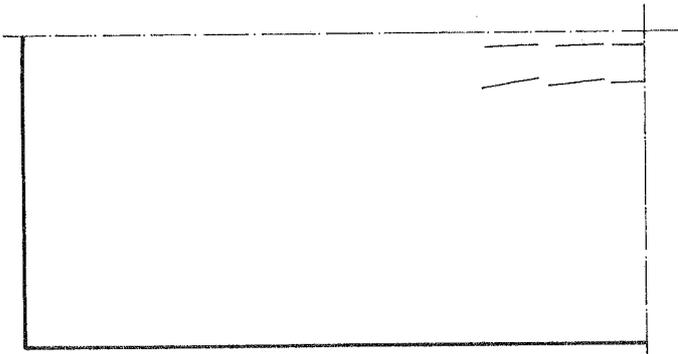
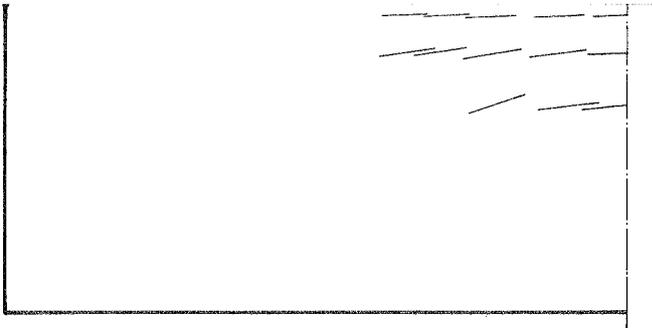


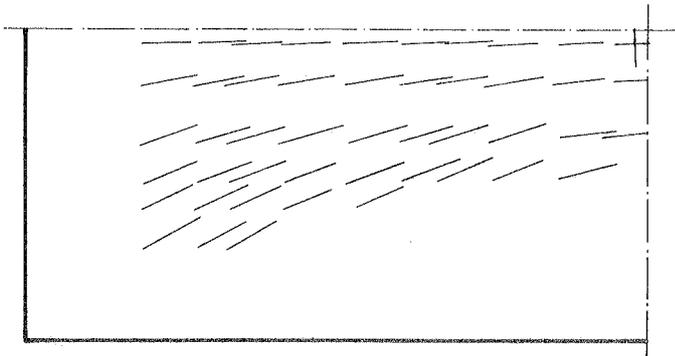
Bild 6.35: Last-Durchbiegungskurve der dünnen Stahlbetonplatte



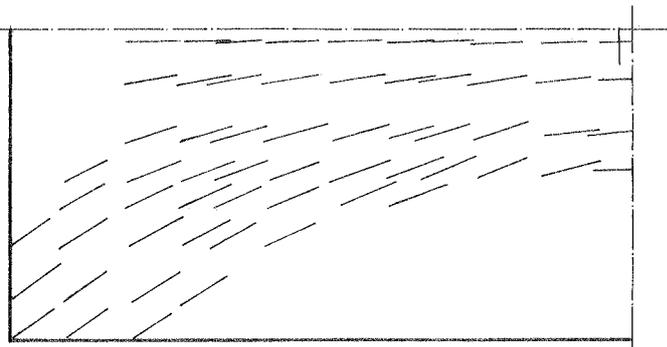
a) Punkt 1



b) Punkt 2



c) Punkt 3



d) Punkt 4

Bild 6.36: Rißbilder der dünnen Stahlbetonplatte

## 6.4 Kippen eines Stahlbetonträgers

Das folgende Beispiel soll zusätzlich über die Fähigkeit Aufschluß geben, wie die kombinierte Nichtlinearität aus geometrischen und physikalischen Anteilen mit dem entwickelten Modell zu erfassen ist. Das Balkenkippen ist ein Phänomen, das durch die Druckgurtbeanspruchung eines Balkens hervorgerufen wird, während der Zuggurt eine stabilisierende Wirkung aufweist. Hansell/Winter in [70] testeten Balken mit einem Verhältnis Länge zu Breite  $L/b$  bis 86,4, ohne daß diese kippten. Diese "Schlankheiten" entsprechen nicht denen der üblichen Stahlbetonpraxis. Bei Fertigteilkonstruktionen, bei denen die Gebrauchsspannungen relativ hoch liegen, kann die Gewährleistung der Kippstabilität allerdings maßgebend werden. Dies tritt besonders dann auf, wenn der Druckgurt auch im Endzustand nicht gegen Ausweichen seitlich gesichert ist.

Für eine Vergleichsrechnung wird ein Balken der Versuchsreihe von Sant/Bletzacker [71] ausgewählt. Diese Versuche wurden trotz mangelhafter Dokumentierung dennoch ausgewählt, weil sie die einzigen Versuche sind, bei denen Balken mit Rechteckquerschnitt durch Auskippen versagen. Sant/Bletzacker untersuchten 12 Balken mit vier verschiedenen Höhen, die alle ein Verhältnis  $L/b = 96$  aufwiesen. Der gedrungeinste Balken dieser Reihe versagte ohne Instabilität, die anderen durch Kippen. Dies zeigt, daß das Verhältnis  $d/b$  ( $d$  = Nutzhöhe des Querschnitts) einen Einfluß auf den Versagensmodus hat.

### 6.4.1 Versuchsbalken und Idealisierung

Aus der Veröffentlichung [71] wurde der Balken B-30 ( $h = 30''$ ) nachgerechnet, der im Versuch gekippt ist. Der Grund dieser Wahl liegt darin, daß nur am Balken B-30 Lage und Durchmesser der Hauptbewehrung bekannt waren. Die Maße und die Bewehrung sind in Bild 6.37 angegeben. Da keine Angaben über die Bügelbewehrung vorlagen, wurde ein Bewehrungsgrad von 0,25% des Querschnitts in Längs- und Querrichtung angesetzt.

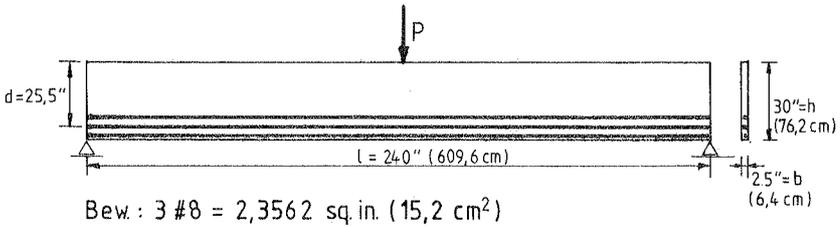


Bild 6.37: Versuchsbalcken

Die Werkstoffdaten lagen nur unvollständig vor, so daß die fehlenden Angaben für die FE-Rechnung angenommen werden mußten. Von daher sind die hier erzielten Rechenergebnisse mit Unbekannten vorbelastet, so daß ein Vergleich zum Versuch nur eingeschränkt hergestellt werden kann. Für den Balken war lediglich die Druckfestigkeit bekannt. Als E-Modul wurde ein Wert angesetzt, wie er bei der theoretischen Behandlung in [71] durch die Lyses-Formel hergeleitet wurde; für  $f'_c = 5860$  psi:

$$E_0 = 1\,800\,000 + 460 f'_c \approx 4\,500\,000 \text{ psi} \quad (6.1)$$

Für den Stahl sind die Fließspannung und die Verzerrung bei Fließbeginn angegeben. Als Quotient dieser Werte erhält man den E-Modul. In Bild 6.38 sind die vollständigen Werkstoffdaten angegeben, die der Berechnung zugrunde liegen. Der TS-Effekt wurde nur in der untersten Elementreihe berücksichtigt.

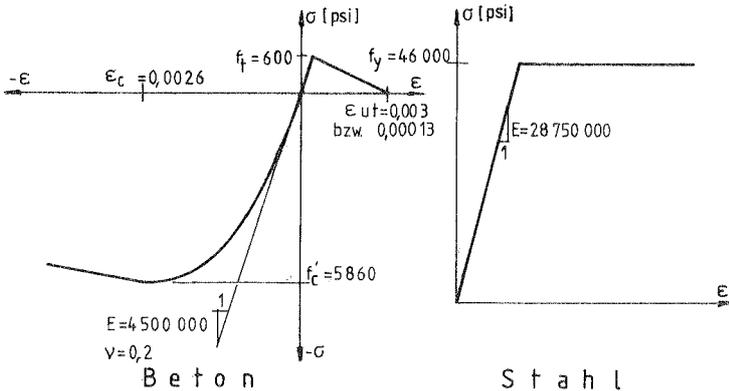


Bild 6.38: Werkstoffdaten

Der Balken ist in Längsrichtung gelenkig gelagert, in der Quer-  
 richtung ist er an den Enden festgehalten (Gabelagerung), wo-  
 bei eine Rotation um die z-Achse zugelassen ist (Bild 6.39).

Aufgrund der symmetrischen seitlichen Ausbiegung mit einer Halb-  
 welle wurde das halbe System mit 16 Elementen S 16 idealisiert  
 (Bild 6.39). Die Hauptbewehrung wurde mit einer Stahlschicht  
 idealisiert die in der Mitte der untersten Elementreihe konzen-  
 triert wurde. Die Bügelbewehrung wurde in sämtlichen Elementen  
 mit zwei Schichten (beide Schichten haben die gleichen Dickenko-  
 ordinaten) pro Seite des Balkens berücksichtigt. Die Höhe der  
 untersten Elementreihe wurde so bestimmt, daß der Schwerpunkt der  
 Hauptbewehrung der Versuchsanordnung entspricht (9" von unten).

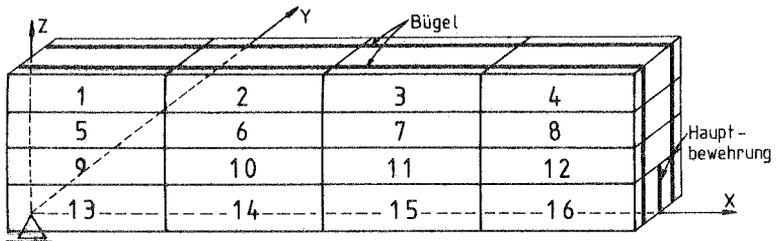


Bild 6.39: FE-Idealisierung

#### 6.4.2 Ergebnisse

Die Berechnung wurde unter Berücksichtigung der geometrischen  
 und physikalischen Nichtlinearität durchgeführt. Um eine seitliche  
 Ausbiegung zu erhalten, wurde eine kleine horizontale Last  
 von 1/10 000 der vertikalen Last am oberen Rand angebracht. Die  
 Ergebnisse sind im Bild 6.40 zusammengefaßt.

In diesem Bild sind die vertikalen und horizontalen Verschiebun-  
 gen in Balkenmitte aufgetragen. Als Bruchlast wird die maximal  
 erreichte Last angenommen, die in der FE-Berechnung 21,0446 kips  
 betrug. Bis zu diesem Lastniveau weicht der Balken fast parallel

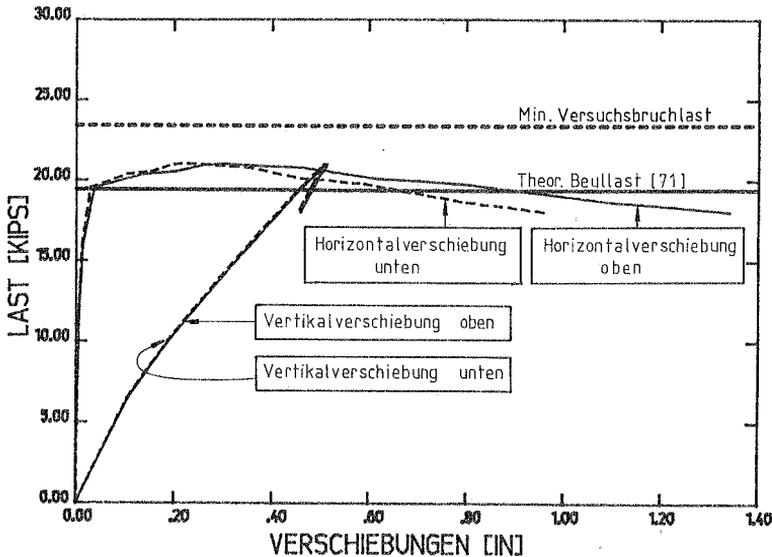


Bild 6.4o: Ergebnisse der nichtlinearen Berechnung

zur Ursprungslage aus; bei weiterer Laststeigerung nimmt auch die Rotation deutlich zu. Der abfallende Teil dieser Kurven ist dadurch zu erklären, daß weitere Gleichgewichtslagen nur unter Abnahme der Lasten zu erreichen sind. Ein entsprechender Versuch müßte verschiebungsgesteuert gefahren werden. Im Falle eines lastkontrollierten Versuchs würde der Balken bei Abnahme der Last annähernd auf demselben Weg zurückkehren, den er bei Belastung beschritten hat. Der abfallende Ast zeigt das sogenannte Stabilitätsversagen ohne Gleichgewichtsverzweigung an. In der FE-Berechnung wurde auch verschiebungskontrolliert vorgegangen (siehe Abschnitt 4), was sich von der iterationstechnischen Seite gegenüber dem KB-Verfahren in einigen Schritten als vorteilhaft erwies. Kontrolliert wurde hierbei die Ausbeulung am oberen Rand in Balkenmitte. Man erkennt in Bild 6.4o, daß dabei die Vertikalverschiebungen infolge der verminderten Last mit der Anfangsneigung abnehmen.

In Bild 6.41 sind zwei Verschiebungsfiguren vom Balken vor und nach dem Kippen ( $P = 20,06$  bzw.  $P = 18,23$  kips) aufgezeichnet. Die Drehung des Mittelquerschnitts ist in Bild b) deutlich zu erkennen.

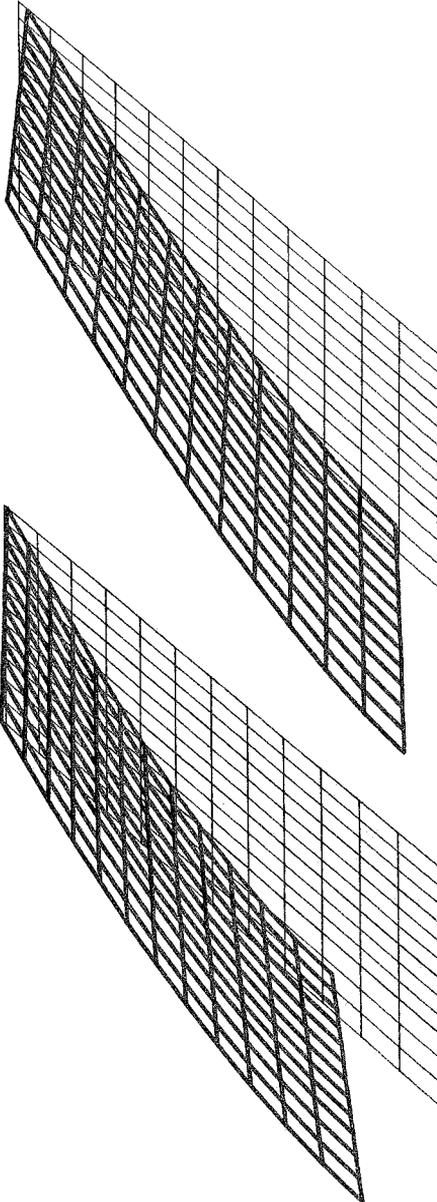
Die Ergebnisse werden anschließend mit Versuchen und analytischen Formeln verglichen. Zunächst wird die linear elastische Kippplast bestimmt (aus Roark [72]).

$$P_{el}^k = \frac{2,82 b^3 d \sqrt{(1-0,63\frac{b}{d})EG}}{l^2} \left[ 1 - \frac{1,74 a}{l} \sqrt{\frac{E}{G(1-0,63\frac{b}{d})}} \right] \quad (6.2)$$

In dieser Formel gibt  $a$  die Lage der Last in Balkenhöhe an ( $-\frac{d}{2} \leq a \leq \frac{d}{2}$ ). Durch Einsetzen der entsprechenden Werte ergibt sich die unter der Voraussetzung linear elastischen Werkstoffverhaltens errechnete Kippbelastung zu  $P_{el}^k = 53,66$  kips. Sie liegt somit 2,5mal höher als der maximale Wert der FE-Rechnung, was die Unzulänglichkeit des elastischen Vorgehens anzeigt.

Sant/Bletzacker entwickelten eine Formel, die mehrere Faktoren berücksichtigt:

- Der Beton ist bis  $0,5 f'_c$  linear elastisch und bis  $0,85 f'_c$  nichtlinear elastisch, die Entlastung linear.
- Der Beton wird bei Biegebeanspruchung eine größere Verzerrung zugemutet als bei einachsiger Druckbelastung.
- $\nu = 0,25$  mit  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .
- Der Beton unterhalb des Hauptbewehrungsschwerpunkts wird über die Balkenbreite vernachlässigt.



a) vor dem  
Kippen  
( $P = 20,06$  kips)

b) nach dem  
Kippen  
( $P = 18,23$  kips)

Bild 6.41: Verschiebungsfiguren

Damit gelangt man zum kritischen Moment:

$$M_{SB}^k = 0,447 E_r \left( \frac{d b^3}{l} \right) \left( 1 - \frac{2,75 a}{l} \right) \quad (6.3)$$

wobei  $E_r$  ein reduzierter E-Modul ist. Unter Berücksichtigung der Veränderung des E-Moduls über den Querschnitt wird in [71]  $E_r = 0,687 E_o$  gesetzt. Nach Einführung eines Beiwertes  $j = 0,96$  wird Gl. (6.3) umgeschrieben.

$$\frac{M_{SB}^k}{b^3 j} = 1\,310\,000 \frac{d/b}{l/b} \left( 1 - 11,52 \times 10^{-3} a \right) \quad (6.4)$$

Die hiermit erreichte Last beträgt  $P_{SB}^k = 19,3667$  kips und liegt - wie erwartet - unter den Werten der Berechnung und des Versuchs (siehe Bild 6.4o).

In Bild 6.42 ist die Formel (6.4) zusammen mit der Kurve (Gl.6.5) für Biegeversagen für verschiedene  $d/b$ -Verhältnisse ausgewertet

$$\frac{M_{SB}^b}{b^3 j} = \mu f_y \left( \frac{d}{b} \right)^2 \frac{1}{b^3} \quad (6.5)$$

In Bild 6.42 erkennt man, daß die gedrunghenen Balken ( $h = 12''$ ) durch Fließen der Bewehrung versagen, während bei den schlanken Balken Kippen maßgebend ist. Die FE-Rechnung liegt im schraffierten Versuchsstrebereich. Die hohen Werte der Bruchlast bei zwei von drei Versuchen der Reihe mit  $h = 30''$  ist nur so erklärbar, daß während des Versuchs eine ungewollte geringe Behinderung der seitlichen Verschiebung stattfand und dies die Bruchlast in die Nähe der Biegebruchlast brachte. Daß die hier berechnete Last trotzdem geringfügig unter der minimalen Versuchslast liegt, kann folgendermaßen erklärt werden: Das verwendete Schalenelement beschreibt keine Dehnung in Dickenrichtung. Es ist deshalb nicht möglich, geschlossene Bügel in das FE-Modell einzubringen. Bei der Torsionsbeanspruchung bilden sich Betondruckstreben und Stahlzugstäbe (siehe Leonhardt [73], Band 3), die im Modell nicht erfaßt sind. Aus diesem Grunde verliert das Element seine Torsionssteifigkeit früher als in Wirklichkeit und weicht aus. Trotzdem ist der Unterschied zum Versuch gering, was auf eine geringe Bedeutung einer Torsionsbewehrung für diesen Fall hinweist.

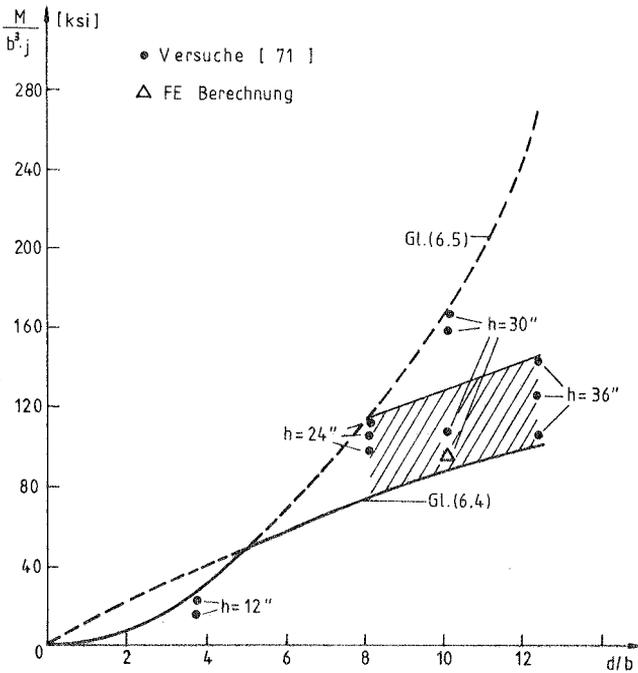
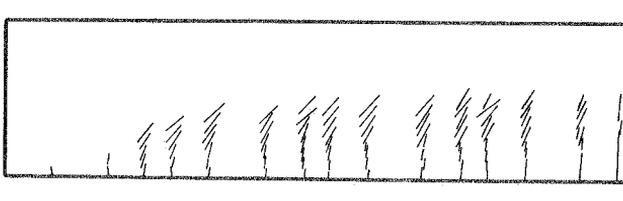


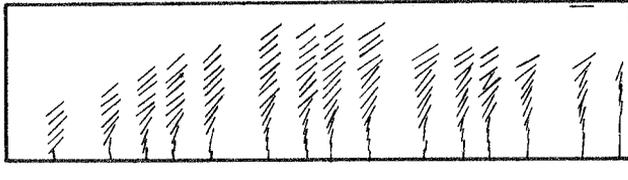
Bild 6.42: Biege-Kippversagen aus [71]

Die Vernachlässigung des TS in den oberen Elementen trägt auch zur Bruchlastverringern bei (siehe Abschnitt 6.3): zum einen, weil damit stabilisierende Zugspannungen unterdrückt werden, zum anderen, weil damit die größeren Verschiebungen im Obergurt instabilisierend wirken.

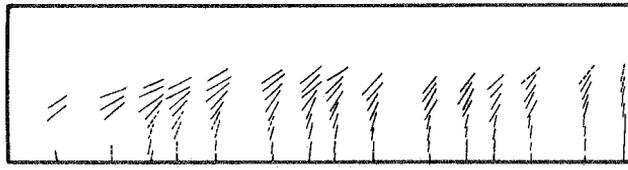
Im Bild 6.43 sind einige Rißbilder dargestellt.



a) Konvexe Seite - Bruchlast ( $P = 21,04$  kips)



b) Konvexe Seite - Nachbruchzustand ( $P = 18,04$  kips)



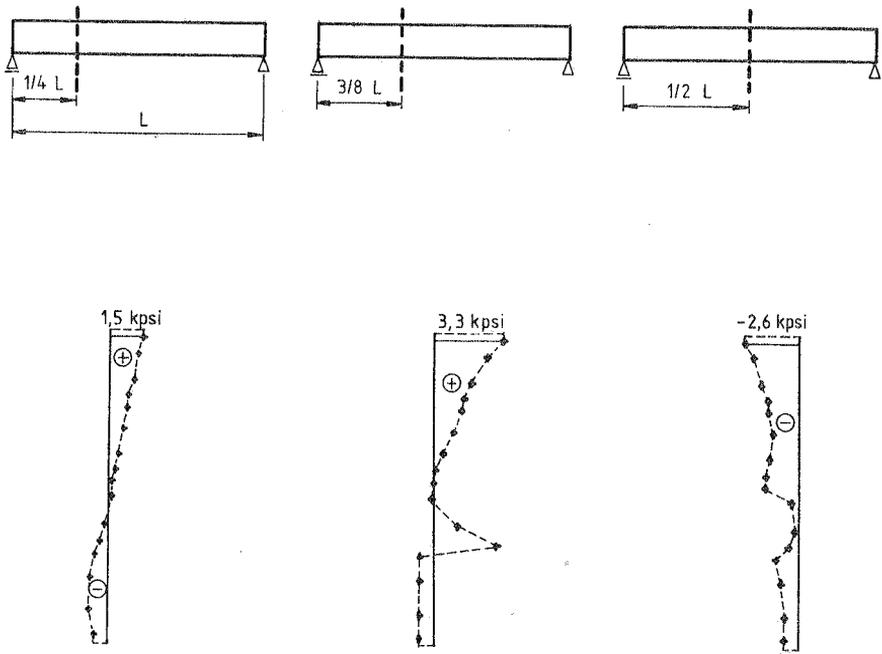
----- geschlossene Risse

c) Konkave Seite - Nachbruchzustand ( $P = 18,04$  kips)

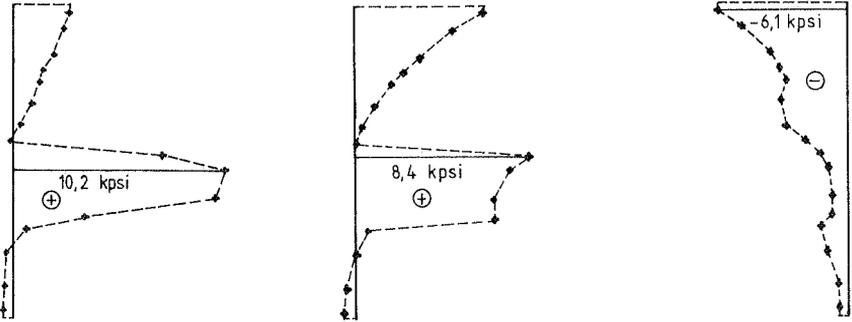
Bild 6.43: Rißbilder

In Bild a) sieht man die konvexe Seite bei Bruchlast ( $P = 21,04$  kips). Hier zeigt sich das typische Rißbild eines Biegebalkens, während in b) - am Ende des abfallenden Astes des Last-Verschiebungs-Diagramms - das Muster infolge Drehung der Querschnitte völlig anders aussieht. Die im Versuch beobachteten niedrigen Stahlspannungen treten auch hier auf, nicht aber der Bruch ohne Biegerisse. Die Rißbreiten der Rechnung sind jedoch klein ( $c_w = 0,0015$ ), so daß man sie im Versuch nur schwer erkennen könnte. Sie beeinflussen jedoch die Steifigkeit beachtlich. Ergänzend ist im Bild c) die zu Bild b) gehörende konkave Seite gezeichnet. Hier erkennt man zwei Rißgruppen, die sich wieder geschlossen haben. Die eine Gruppe, die sich infolge der abnehmenden Beanspruchung schließt, liegt nahe am Auflager. Die andere Gruppe ist in Balkenmitte angeordnet. Hier schließen sich die Risse infolge Biegung um die z-Achse (konkave Seite).

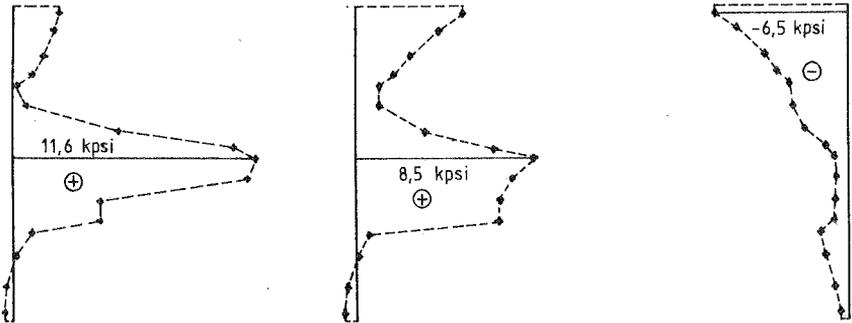
Abschließend sind die Spannungsbilder der Bügelbewehrung für verschiedene Laststufen aufgezeichnet (Bild 6.44). Hieraus zeigt sich in Auflagernähe sehr deutlich die Übernahme von Zugspannungen durch die Bügel nach dem Reißen des Betons. In Balkenmitte dagegen erhalten die Bügel im Bereich unterhalb der Last Druckspannungen, die sich im untersten Teil abbauen. Da sich die Risse in Balkenmitte fast senkrecht zum Rand ausbilden, sind die Bügel hier wirkungslos.



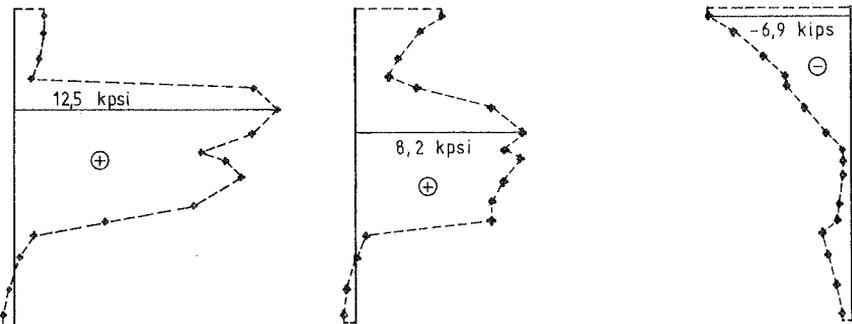
a)  $P = 11,91 \text{ kips}$



b)  $P = 21,04$  kips



c)  $P = 19,80$  kips (abnehmender Ast)



d)  $P = 18,04$  kips (abnehmender Ast)

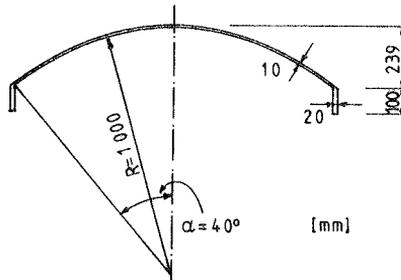
Bild 6.44: Stahlspannungen der Bügel (konvexe Seite)

## 6.5 Tonnenschale

In diesem Abschnitt wird das Verfahren am Beispiel einer Tonnenschale getestet. Als Modell dient einer der Versuche von Van Riel/Beranek/Bouma [74],[75], im Schrifttum mit A2 bezeichnet. Diese Schale wurde auch von Arnesen [20] berechnet, dessen Rechnung auch zum Vergleich herangezogen wird. Die Berechnungen werden sowohl geometrisch linear als auch nichtlinear durchgeführt.

### 6.5.1 Versuchsschale und Idealisierungen

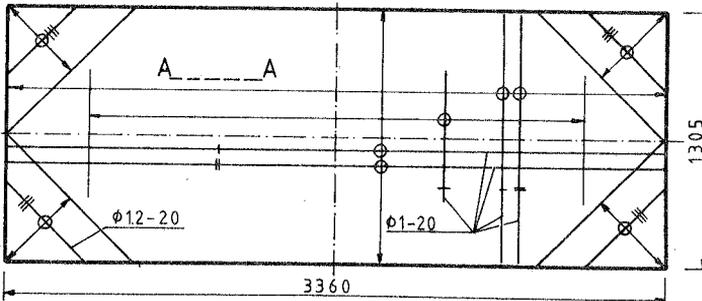
In Bild 6.45 ist die Ausführung der Tonnenschale angegeben, wie sie im Versuch bearbeitet wurde. Die Schale ist an beiden Enden mit Querscheiben verbunden. Das System ist an den vier Ecken gestützt.



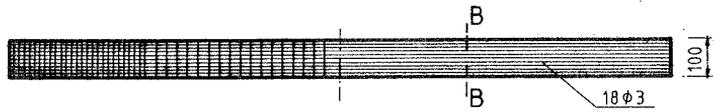
Querschnitt

Alle Maße in [mm]

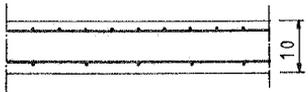
- +— obere Bewehrung
- ||— untere "
- #— mittige "



Draufsicht



Seitenansicht (Randträger)



Schnitt A-A



Schnitt B-B

Bild 6.45: Tonnenschale-Versuchsausführung  
Die Werkstoffdaten sind in Bild 6.46 angegeben.

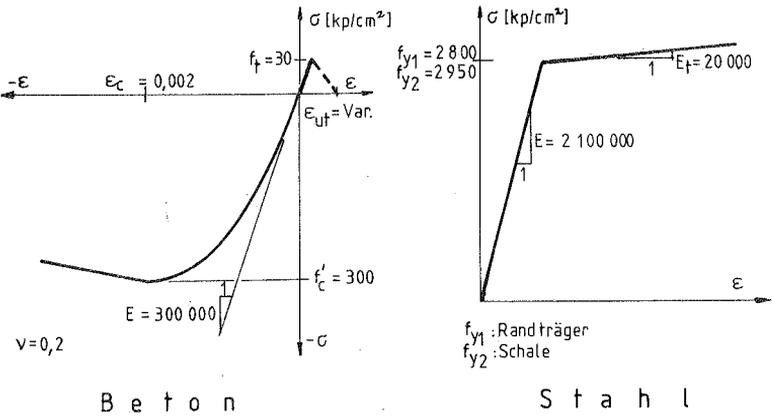


Bild 6.46: Werkstoffdaten

Die Schale ist mit einer gleichförmig über den Grundriß verteilten Last beansprucht und hat zwei Symmetrieachsen, wodurch nur ein Viertel des Systems für die Berechnung idealisiert werden muß. Die Endscheiben sind nicht mitidealisiert worden, sondern die Schale ist an dieser Stelle gelenkig, mit nur in Längsrichtung verschieblichen Lagern gestützt (Bild 6.47).

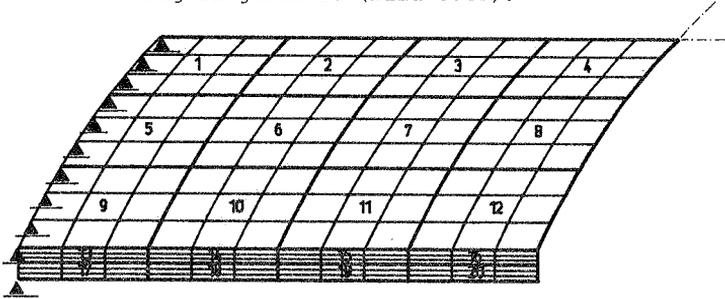


Bild 6.47: Idealisierung

Die gewählte Idealisierung von Bild 6.47 besteht aus 20 bikubischen Elementen, zwölf für die Schale, acht für den Randträger. Die Schalenelemente werden mit sieben Simpson-Punkten in Dickenrichtung integriert, die Randträgererelemente mit zwei. Vorstudien mit fünf Elementen in Längsrichtung, zur Mitte hin verdichtet, vier Schalenelemente in Querrichtung und drei Randträgererelementreihen, ebenfalls mit sieben Integrationspunkten in Dickenrichtung ergaben nur geringe Unterschiede in den Ergebnissen.

In Bild 6.48 sind die eigenen Idealisierungen des Randträgers Vorschlägen von Arnesen, die im nächsten Abschnitt untersucht werden, gegenübergestellt.

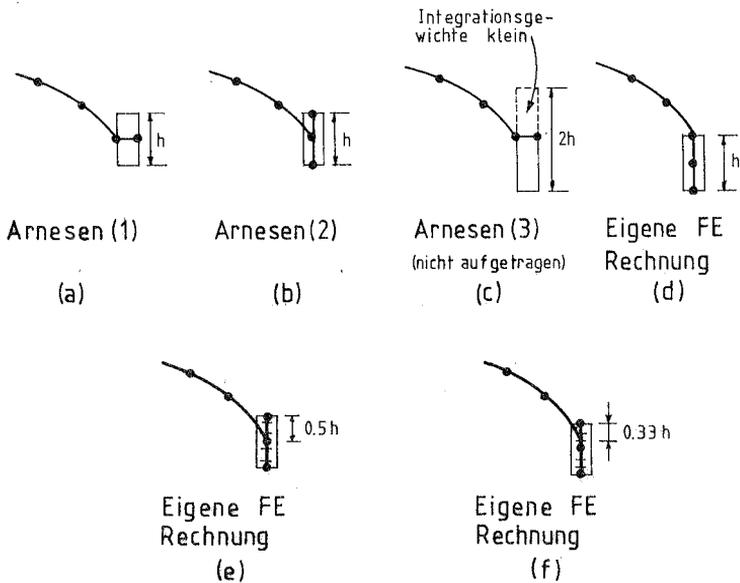


Bild 6.48: Modellierung des Randträgers

### 6.5.2 Ergebnisse

Im Bild 6.49 ist die Last über der Mittendurchbiegung des Randträgers aufgetragen. Die dicken Linien entsprechen dem Versuch, die dünnen den Ergebnissen von Arnesen und die gestrichelten stellen die eigenen Ergebnisse dar. Die angebrachten Indizes beziehen sich auf die Idealisierung des Randträgers gemäß Bild 6.48; NL bezeichnet die zusätzliche Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearität.

Zunächst wurde die Idealisierung (d) berechnet, die auf den ersten Blick als das realistischere Modell erscheint. Sie wurde mit zwei unterschiedlichen TS-Werten  $\epsilon_{ut}$  untersucht. Wie aus Bild 6.49 zu erkennen ist, sind diese Lösungen zu steif. Hinzu kommen große Konvergenz-Schwierigkeiten im mittleren Bereich der Kurve, in dem die Risse im Randträger die Schale erreichen. Jedoch liefern diese Lösungen die beste Abschätzung der Bruchlast.

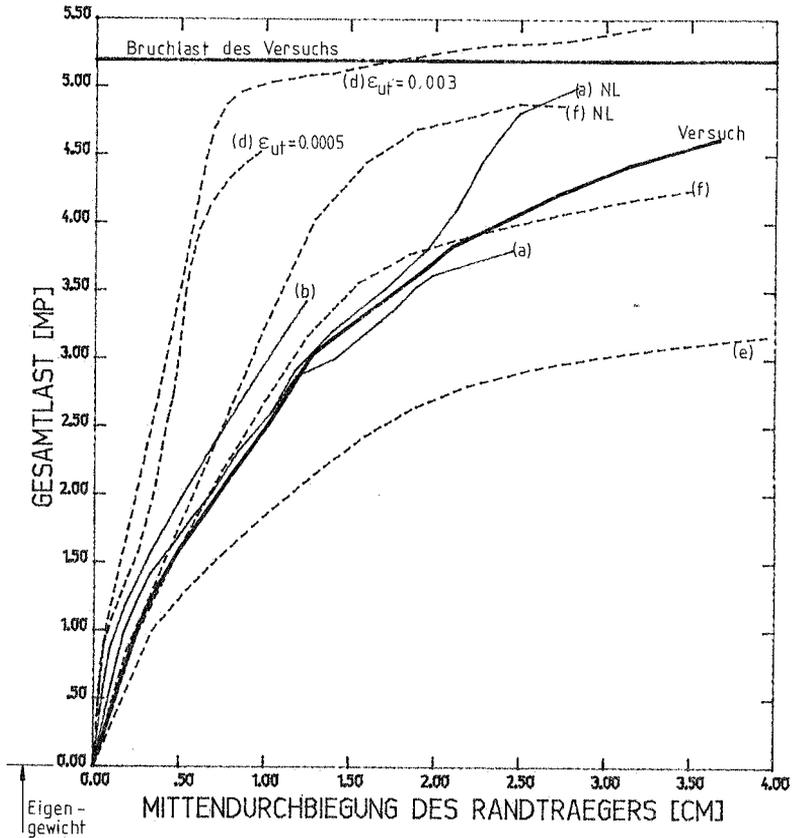


Bild 6.49: Mittendurchbiegung des Randträgers

Dieses zu steife Verhalten wurde bei niedrigen Lastzuständen mit weiteren Vergleichsrechnungen untersucht. Elastische Berechnungen sind mit dem FE-Programm NISA [66] und dem Faltwerkprogramm MULTPL [76] durchgeführt worden und in Tafel 6.1 gegenübergestellt. Mit diesen Programmen wurden Lösungen ohne Stahl und mit äquivalentem Stahlquerschnitt  $\Delta A = A_{\text{stahl}} \times \frac{E_{\text{stahl}}}{E_{\text{beton}}}$  durchgeführt. In einer weiteren elastischen Berechnung mit NISA sind die Stahleinlagen im Randträger durch Fachwerkstabelemente idealisiert.

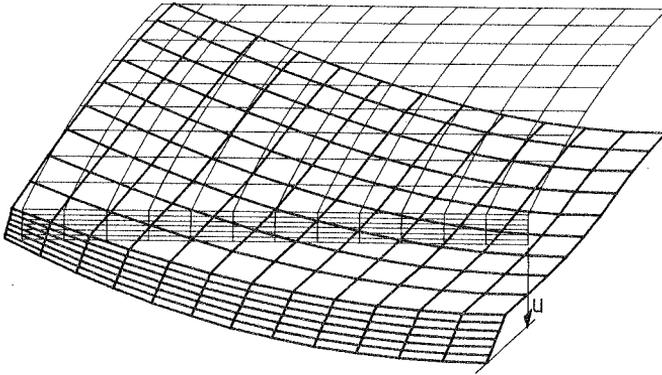
Die Werte der Tafel 6.1 bestätigen die FE-Rechnung mit dem Stahlbetonelement. Lösungen 1 und 5 ohne Stahl zeigen eine gleichmäßige Verformung des Mittelquerschnitts, die Berechnungen 2, 3, 4 und 6 deuten wegen der Mitberücksichtigung des Stahls auf eine Versteifung des Randträgers gegenüber dem Scheitel hin. Lösungen 7 und 8 (Arnesen) liegen näher beim Versuchsergebnis als die eigenen Werte. Die FE-Idealisierung dieser Lösungen entspricht aber nicht der Wirklichkeit (Bild 6.48(a) bzw.(b)). Die realistischere Berechnung von Arnesen (Bild 6.48(c) wurde bei 1,8 Mp instabil und daraufhin abgebrochen.

	M o d e l l		Durchbiegung Scheitel[cm]	Durchbiegung Randtr.[cm]
1	N I S A Elastisch [ 66 ]	Ohne Stahl	0,072	0,070
2		Äquiv. Stahlquerschnitt	0,069	0,050
3		Stahl mit Fachwerkel.	0,070	0,043
4	NISA - Stahlbetonelem. - Lsg. (d)		0,069	0,050
5	M U L T P L [ 76 ]	Ohne Stahl	0,073	0,073
6		Äquiv. Stahlquerschnitt	0,064	0,054
7	A r n e s e n [ 20 ]	(1) - Idealis. (a)	—	0,120
8		(2) - Idealis. (b)	—	0,077
9	Versuch [ 74 ], [ 75 ]		—	0,180

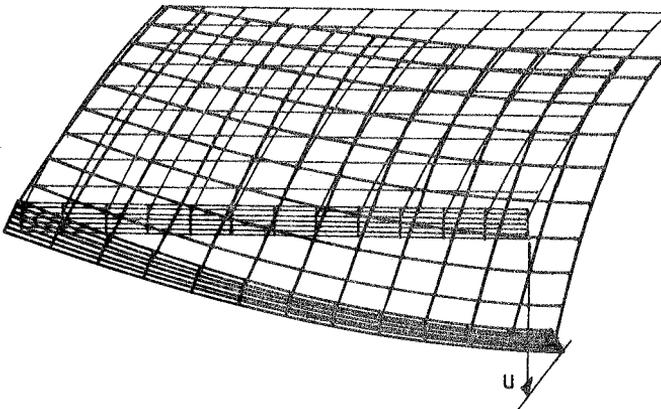
Tafel 6.1: Durchbiegungswerte für einen niedrigen Lastzustand ( $\sigma, 85 \text{ Mp}$ )

Die Berechnung mit dem Modell (e), dessen Randträgeraufbau wie bei Arnesen (2) ist, liefert ein gegenüber diesem und dem Versuch zu weiches System. Dies zeigt, daß das verwendete FE-Netz nicht der Wirklichkeit entspricht. Berechnung (f) liefert für den Randträger eine recht gute Übereinstimmung mit dem Versuch. Die beiden Rechnungen (d) und (e) sind mit hohem TS-Faktor  $\epsilon_{ut}$  ausgeführt worden. Bei Herabsetzung dieses Wertes wird ein weicherer Verhalten erwartet.

Bild 6.5o zeigt die Verschiebungsfigur für einen niedrigen Lastwert von 1,0 Mp für die Lösungen (d) und (f)



Lösung (d)



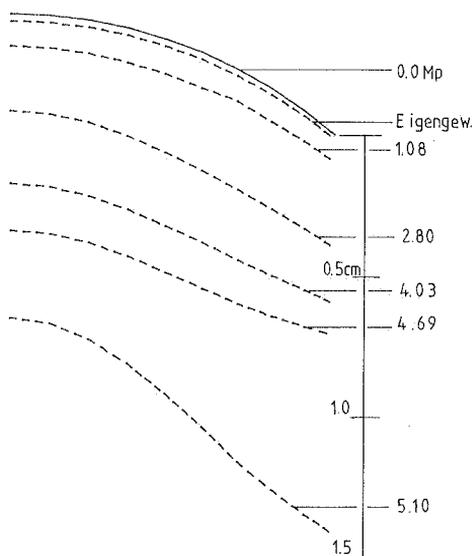
Lösung (f)

Bild 6.5o: Verschiebungsfiguren für niedrigen Lastwert (1,0 Mp)

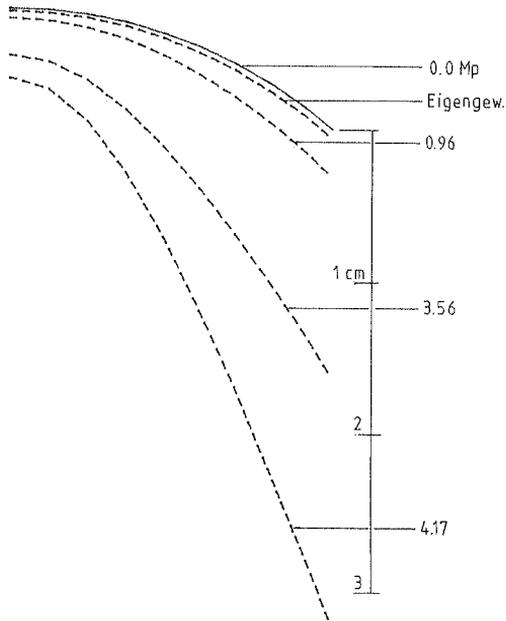
Ein qualitativer Unterschied wird hier ersichtlich. Bei der Lösung (d) hat der Mittelquerschnitt einen Wendepunkt, was auf Risse an der Oberfläche des Scheitels und an der Unterseite der Schale nahe am Randträger hindeutet; bei Lösung (f)

sind Risse nur oben am Scheitel zu erwarten. Die Richtung der horizontalen Verschiebung des Randträgers ist in beiden Fällen unterschiedlich. Dieser Sachverhalt wird bei der Analyse der Ribbilder noch weiter verfolgt.

In Bild 6.51 sind die Verformungen des Mittelquerschnitts der Lösungen (d) und (f) für verschiedene Laststufen angegeben. Bei der Lösung (d) bilden sich am Randträger zwischen 0,75 Mp und 1,08 Mp die ersten Risse, die im Versuch bei 0,95 Mp auftreten. Bis dahin ist die Durchbiegung des Randträgers kleiner als die des Scheitels. Ab dann wird der Randträger weicher als die Schale, bis zu einer Last von 2,8 Mp, bei der sich die Risse in Längsrichtung an der Unterseite der Schale nahe am Randträger bilden. Dieses wirkt wie ein Gelenk am Schalenlängsrand. Die Schale



a) Lösung (d)



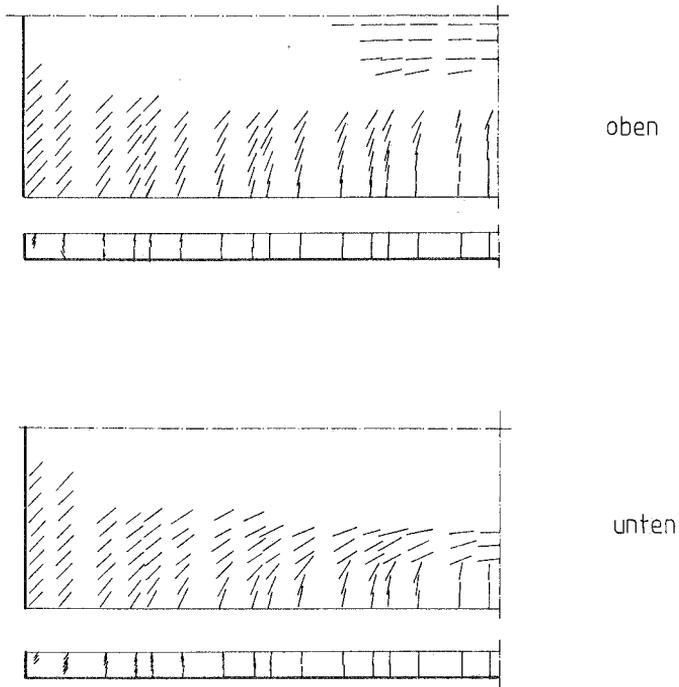
b) Lösung (f)

Bild 6.51: Verformungen des Mittelquerschnitts

wird nun weicher, bis zu einer Last von 4,8 Mp als der Randträger. Von dieser Laststufe an biegt sich der Randträger mehr durch als der Scheitel, da sich die Risse jetzt an der Oberseite des Scheitels bilden. Der Rißbildungsvorgang war im Versuch umgekehrt; zuerst traten die Risse am Scheitel, dann in der Schale nahe am Randträger aus. Bei der Lösung (f) findet eine Rißbildung in Längsrichtung nur am Scheitel statt, was auf einen zu weichen Randträger hindeutet.

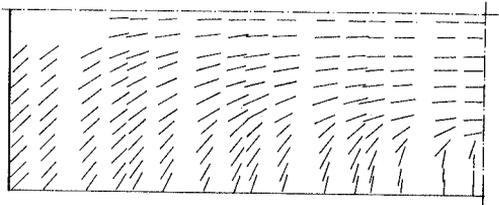
Abschließend sind in Bild 6.52 die Rißbilder für die Lösungen (d), (f) und (f)NL sowie des Versuchs aus [74] bei Bruchlast dargestellt. Die Lösung (d) liefert an der Unterseite eine gute Übereinstimmung des Rißbildes mit dem Versuch, an der Oberseite treten jedoch am Scheitel zu wenig Risse auf. Die Lösung (f) hingegen zeigt ausgeprägte Risse am Scheitel, aber keinen Längsriß unten.

Die Lösung (f)NL (Bild (e)) liefert eine bessere, jedoch nicht befriedigende Rißbildung an der Unterseite. Hieraus kann man schließen, daß die beste Idealisierung des Randträgers zwischen den Lösungen (d) und (f) mit einem kleineren TS-Faktor liegen muß. Diese Lösung wird einen steiferen Randträger liefern als die Lösung (f), so daß unten ein Längsriß erscheint. Der Randträger würde jedoch nicht so steif ausfallen wie bei der Lösung (d) und somit die Rißbildung am Scheitel begünstigen.

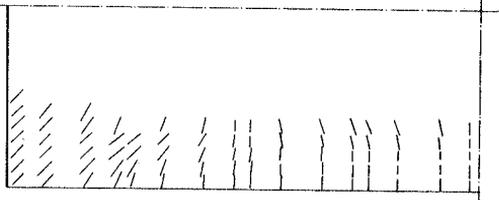


a) Lösung (d)

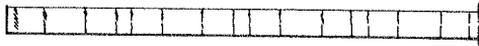
Bild 6.52: Rißbilder im Bruchzustand



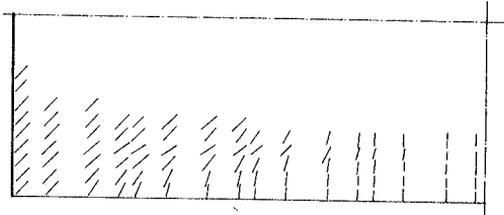
oben



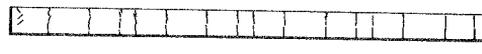
unten



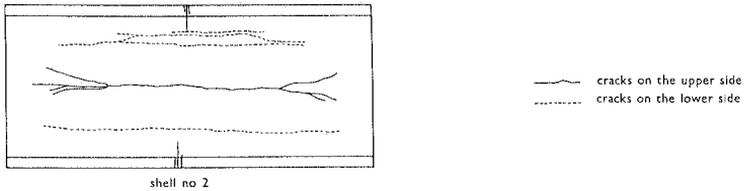
b) Lösung (f)



unten



c) Lösung (f) geometrisch nichtlinear



d) Versuch

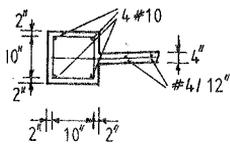
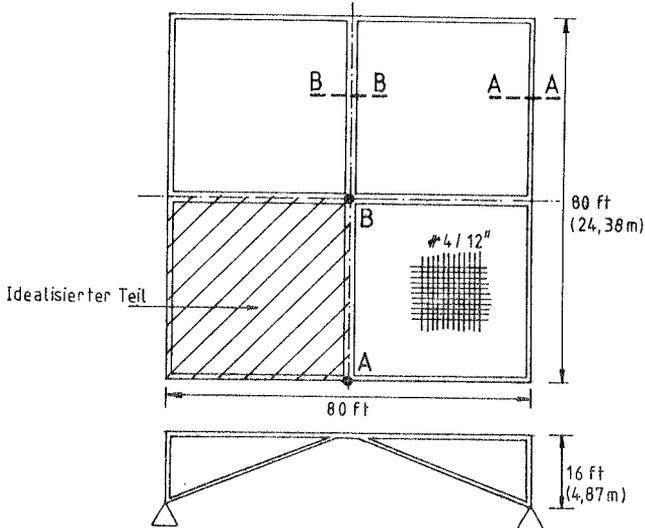
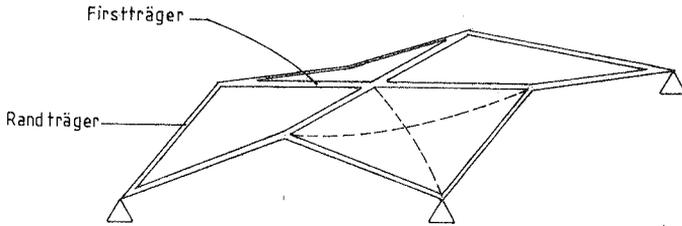
Bild 6.52: Rißbilder im Bruchzustand

## 6.6 Hyperbolisches Paraboloid (HP-Schale)

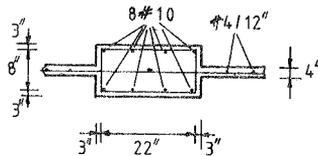
Das Schalensystem (HP-Schale mit Randträgern) wurde aus den Berechnungen von Müller [77], [78] übernommen. Die Berechnung wurde unter der Annahme geometrischer Linearität durchgeführt.

### 6.6.1 Schale und Idealisierung

Bild 6.53 zeigt die zu untersuchende Schale. Die Abmessungen sind der Arbeit [78] entnommen.



Schnitt A-A



Schnitt B-B

#4  $\approx$  0,2 sq. in.  
 #10  $\approx$  1,27 sq. in.

**Bild 6.53:** Ansicht, Draufsicht, Seitenansicht und Randträger der HP-Schale

Die angenommenen Werkstoffkennwerte sind in Bild 6.54 angegeben.

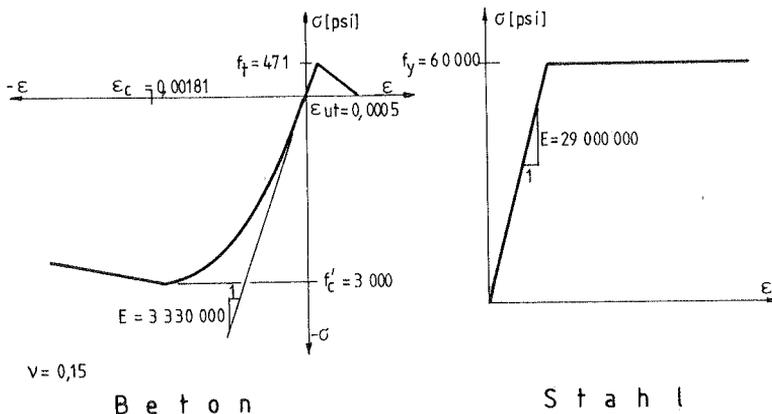


Bild 6.54: Werkstoffeigenschaften

Bild 6.53 zeigt die Idealisierung eines Viertels der Schale. Um die Dichte des FE-Netzes herauszufinden, wurde eine lineare Parameterstudie für das HP-Feld ohne Randträger mit Rastern von 3x3 bis 6x6 bikubischen Elementen durchgeführt. Bei dieser Untersuchung wurde die Viertelschale an den vier Eckpunkten gestützt. Dabei wurden für gleiche Laststufen bei Netzverdichtung höhere Spannungen an den Integrationspunkten erhalten, da die Integrationspunkte für die dichteren FE-Netze näher an das Auflager heranrückten. Ursache ist die Singularität in den Spannungen, die bei einer punktförmigen Stützung auftritt. Ein FE-Modell liefert bei einer weiteren Verdichtung immer höhere Spannungen, so daß der erste Riß am Auflager immer früher auftritt. Für die Verschiebungen ergibt bereits das 3x3-Netz brauchbare Werte.

In Bild 6.55 ist die schließlich gewählte FE-Idealisierung dargestellt. Für die Schale wurde ein 3x3-Raster benutzt; der Randträger wurde auch mit Schalenelementen idealisiert.

Ein ausschlaggebendes Detail ist das Eckelement. Im Laufe der Untersuchung wurde festgestellt, daß die Art der Stützung sowie

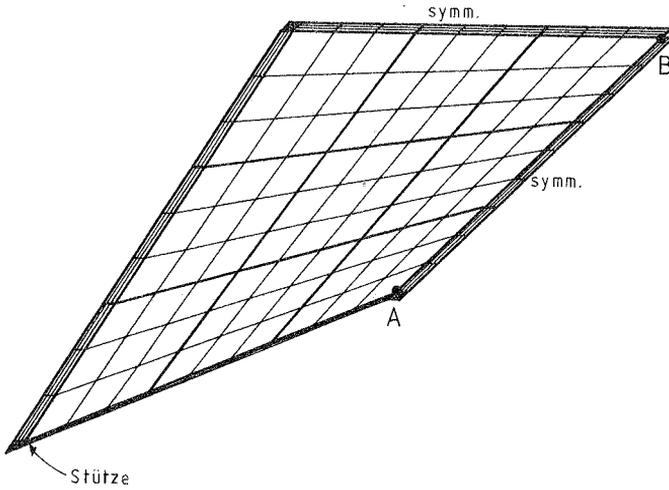
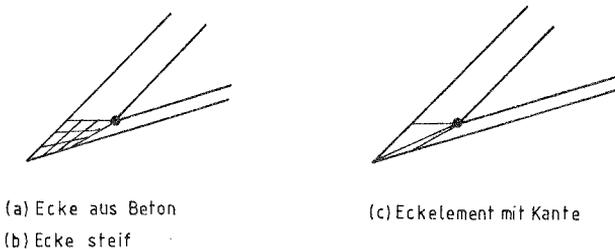


Bild 6.55: FE-Idealisierung 3x3

die Form dieses Teils das Verhalten der ganzen Schale kontrollieren. In [78] wurde die Analyse für ein Achtel der Schale mit Dreieckselementen durchgeführt. Das Eckelement ist dort eben und stellt eine Verlängerung des Randträgers dar. Diese Idealisierung wurde hier ebenfalls untersucht. Dabei entsteht ein Viereckelement mit einer scharfen Kante auf der Elementdiagonalen (Bild 6.56(c)). Dabei konnte schon bei niedrigen Lastwerten aus numerischen Gründen keine Konvergenz erzielt werden. Das Eckelement wurde deshalb ebenfalls HP-förmig ausgebildet, einmal aus Beton (a) und einmal aus linear-elastischem Material mit hohem E-Modul (b), was einer Eckaussteifung entspricht (Bild 6.56).



(a) Ecke aus Beton  
 (b) Ecke steif

(c) Eckelement mit Kante

Bild 6.56: Idealisierung der Stützungen

### 6.6.2 Ergebnisse

In Bild 6.57 sind die Last-Verschiebungskurven für die Lösungen (a) und (b) aus Bild 6.56 der Berechnung von Müller gegenübergestellt. Die Verschiebungsfigur ist in Bild 6.58 gezeichnet. Die Lage der Punkte A und B ist in Bild 6.55 angegeben.

Zunächst wurde das Eigengewicht aufgebracht (spezifisches Gewicht = 150 pcf = 2400 kp/m<sup>3</sup>), dann die Nutzlast gesteigert. Die Nutzlasteinheit ist 20 psf ( $P_O = 20 \text{ psf}$ ;  $P_N = \alpha \cdot P_O$ ).

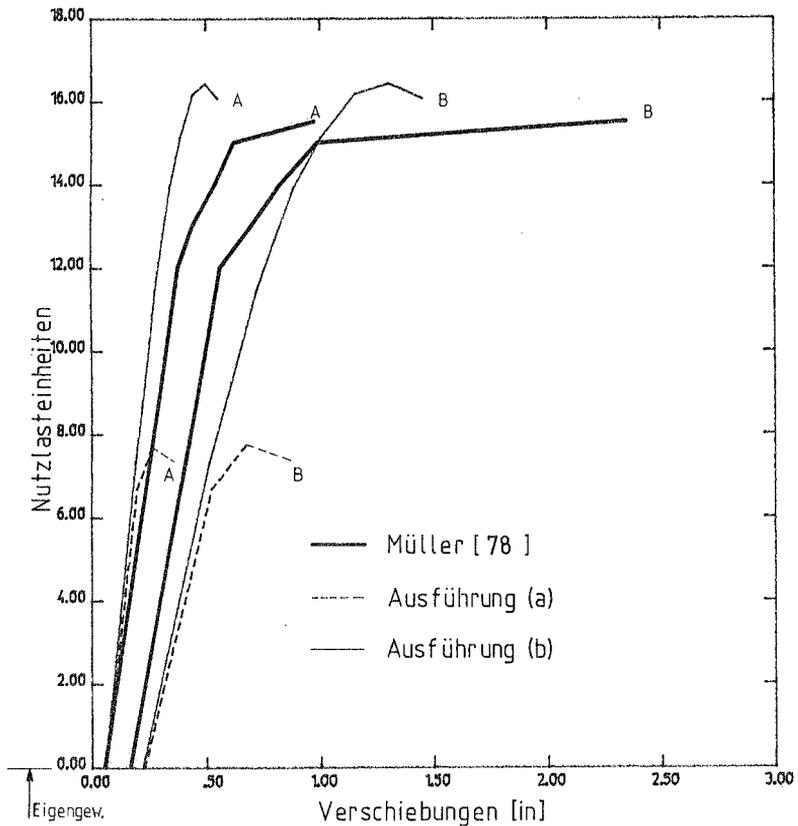


Bild 6.57: Last-Verschiebungsdiagramm

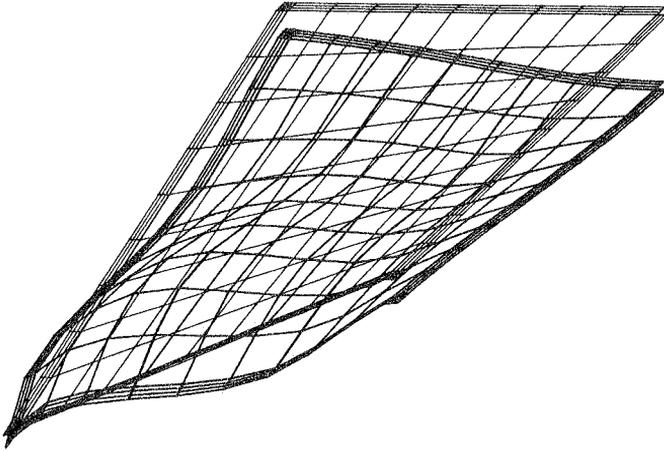


Bild 6.58: Verschiebungsfigur

Das Eckelement aus Beton (Ausführung (a)) liefert eine deutlich kleinere Bruchlast. Ursache dafür ist das Abplatzen des Betons am Eckelement infolge konzentrierter Lasteinleitung. Vermutlich hat Müller ein steifes, elastisches Element in die Ecke eingesetzt, ebenso wie Kabir [24] es in seiner Arbeit getan hat. In seinen Reißbilddiagrammen ist in jedem Fall dieser Eckbereich nicht dargestellt. Für die Ausführung (b) stimmt die errechnete Bruchlast ( $\alpha = 16,44$ ) sehr gut mit dem Wert von Müller ( $\alpha = 15,5$ ) überein.

Bereits bei Eigengewicht weisen die Verschiebungen Unterschiede zu [78] auf. Einige Gründe sind:

- Das Eckelement - als bedeutender Faktor bereits erwähnt - wird von Müller flach eingesetzt; hier wurde ein HP-Element gewählt. Darüber hinaus ist aus [78] nicht klar herauszulesen, wie die Stützbedingungen der Schale an diesem Eckelement angesetzt wurden.
- Die Schale wird in [78] mit flachen Dreieckselementen idealisiert; hier ist die Form durch kubische-isoparametrische Elemente genau erfaßt.

- Die Stahleinlagen in der Schale sind hier parallel zu den Rändern eingelegt und bilden kein orthogonales Netz. Vermutlich sind sie in [78] orthogonal angesetzt.

Trotz dieser Unterschiede zeigen die Last-Verschiebungskurven eine ausreichende Übereinstimmung.

Der Unterschied in dem Versagensmechanismus zwischen der Ausführung (a) und (b) ist in den Reißbildern 6.59 bzw. 6.60 verdeutlicht. Bei der Ausführung (a) ist das ECKELEMENT schon bei einer Nutzlast von  $\alpha = 7,85$  zerstört. Der Beton "fließt" dort, d.h., er befindet sich im abfallenden Druckbereich des Stoffgesetzes. Zusätzlich haben sich Risse gebildet, und die Bewehrung fließt, so daß der Teil für die Lastabtragung ausfällt. Dagegen ist die Schale selbst wenig gerissen.

Schlüssel zu den Bildern 6.59 und 6.60:

- Risse oben
- - - Risse unten
- + geschlossene Risse
- Druckversagen („Fliesen“) des Betons, oben
- Druckversagen („Fliesen“) des Betons, unten
- + Fliesen der Bewehrung, unten

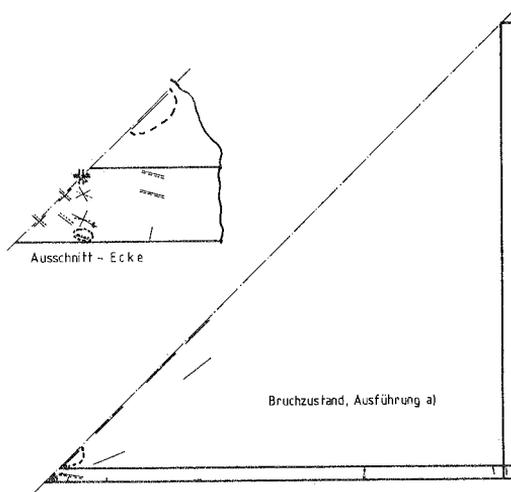
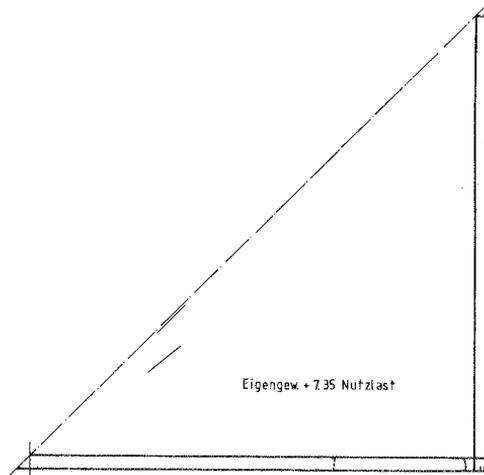


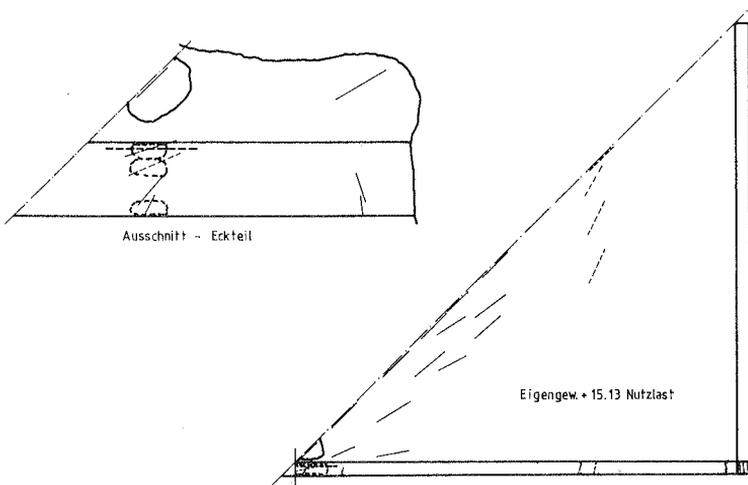
Bild 6.59: Bruchzustand, Ausführung (a)

Für den Fall der versteiften Ecke tritt das Versagen viel später auf (Bild 6.6o). Bei einer Nutzlast von 15,13 Einheiten ist der Beton der Schale im Bereich der Stütze oben ins "Fließen" geraten, kann aber unten wegen des biaxialen Druckzustands weiterhin Last aufnehmen. Ebenfalls kann die Bewehrung am Randträger noch Last aufnehmen, da sie nicht völlig durchplastiziert ist.

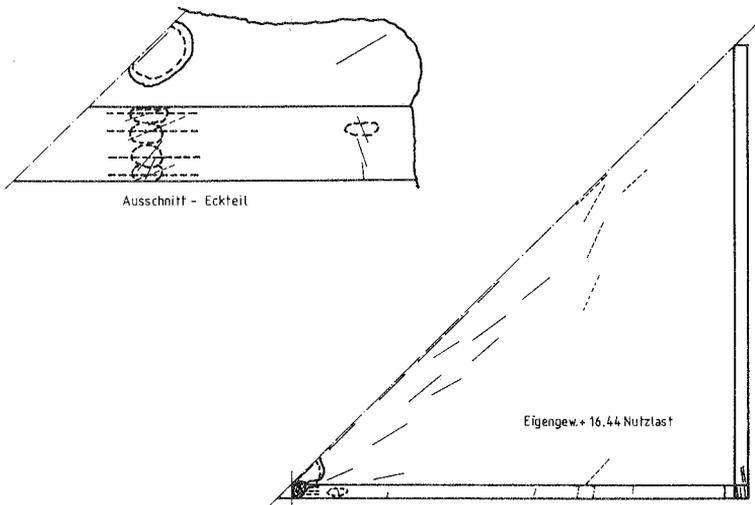
Bei der eigentlichen Bruchlast ( $\alpha = 16,44$ ) ist die unterste Betonschicht der Schale am Auflager, ebenso wie die Bewehrung an der Unterseite des Randträgers im Fließbereich. Der Nachbruchzustand ( $\alpha = 16,07$ ) zeigt noch ausgeprägtere "Fließzonen", obwohl insgesamt nur eine niedrigere Last aufnehmbar ist. Dieser letzte Zustand ist nur mit einer verschiebungs- oder bogenlängekontrollierten Iterationsmethode zu erreichen. Zum Vergleich werden in Bild 6.6o e) und f) die Rißbilder aus der Arbeit von Müller angegeben.



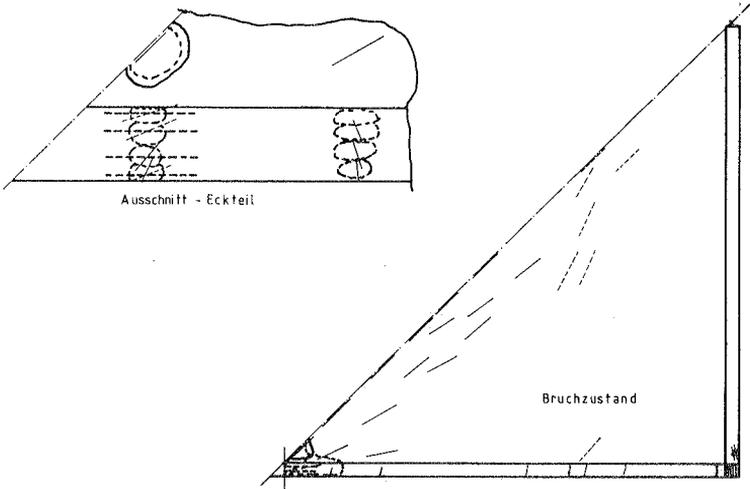
(a)



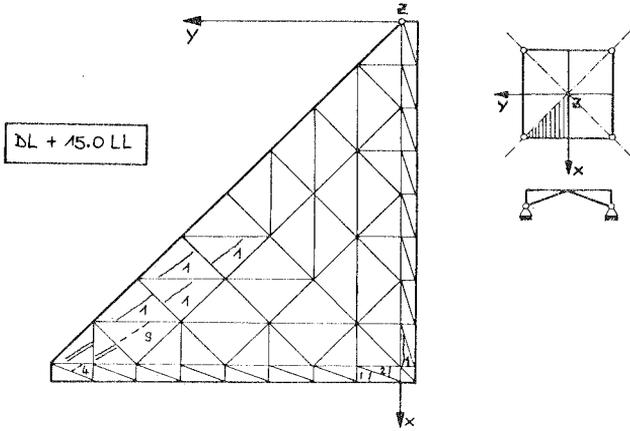
b)



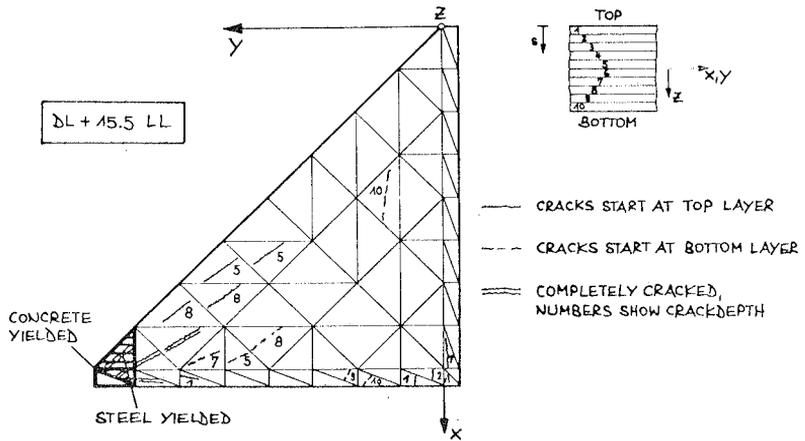
c)



d)



e)



f)

Bild 6.60: Rißbilder der Ausführung (b) (Bilder a) bis d))  
 Rißbilder Berechnung Müller [78] (Bild e) und f))

In dieser Arbeit wurde ein finites Elementmodell zur nichtlinearen Berechnung von Schalen aus Stahlbeton vorgestellt. Beide Materialanteile, Stahl und Beton, werden in diesem Elementmodell gemeinsam erfaßt. Für die Beschreibung der geometrischen Nichtlinearität wird eine totale Lagrange-Formulierung verwendet.

Das eingesetzte Schalenmodell ist ein degeneriertes Element, das aus dem 3-dimensionalen Kontinuum durch Einführung der Schalenbedingungen abgeleitet wurde, wobei Schubverformungen enthalten sind.

Das Betonverhalten ist mit einem biaxialen Werkstoffgesetz erfaßt, das mit den Spannungen in der Schalenebene definiert ist und über die Dicke in Schichten variiert. Die Integration dieser Schichten erfolgt mit der Simpson-Regel. Der Werkstoff basiert auf dem Modell von Darwin und Pecknold, in das zusätzlich das "Tension Stiffening"-Verhalten eingebracht wurde. Weiterhin ermöglicht es, nichtproportionale Belastung zu erfassen. Die Stahleinlagen werden ebenfalls als Schichten idealisiert, wirken aber nur in einer Richtung. Beton und Stahlsteifigkeiten werden überlagert.

Zur Lösung des nichtlinearen Problems werden Newton-Raphson-Verfahren herangezogen. Dabei wird neben den Standardverfahren mit konstantem Lastniveau die Methode nach Riks-Wempner mit konstanter Bogenlänge sowie das verschiebungskontrollierte Vorgehen eingesetzt.

Die Arbeit schließt mit einem numerischen Teil ab, indem das entwickelte Modell an Balken-, Platten- und Schalenbeispielen eingesetzt wird. Dabei wird sowohl die geometrische als auch die physikalische Nichtlinearität berücksichtigt.

Aus der numerischen Anwendung lassen sich folgende Folgerungen ableiten:

- 1) Das entwickelte Modell ist als Forschungswerkzeug gedacht. Es ist allerdings heute noch zu aufwendig, um breite Anwendung in der Praxis zu finden. Der Hauptanteil der Kosten entsteht bei der Erstellung der Steifigkeitsmatrix und ist durch die zur Erfassung der Materialeigenschaften notwendige große Zahl von Integrationspunkten bedingt.
- 2) Die wichtigste Ursache der Nichtlinearität ist das Reißen des Betons. Der nichtlineare Spannungsverlauf im Druckbereich spielt im allgemeinen bei den untersuchten Tragwerken eine geringere Rolle. Das Fließen der Stahleinlagen ist ebenso ein wichtiger Anteil der Nichtlinearität.
- 3) Es fehlt noch an Erfahrung für die Bestimmung der Werkstoffparameter, insbesondere die Zugfestigkeit des Betons und des TS-Wertes. In der Arbeit wurden diese Parameter im Hinblick auf ein durch Vergleichsuntersuchungen bekanntes Ergebnis gewählt. Bei einem unbekanntem Systemverhalten ist dieses Vorgehen nicht möglich, so daß nur Grenzwerte angegeben werden können.
- 4) Die Wirkung des TS-Parameters auf die Bruchlast ist problemabhängig. Im allgemeinen kann gesagt werden, daß bei Stabilitätsproblemen die Mitnahme des TS-Effekts für die Bestimmung der Bruchlast erforderlich ist. In den anderen Fällen hat der TS-Parameter nur geringen Einfluß auf die Bruchlast. Ist nur die Bruchlast von Interesse, kann in den letzteren Fällen ein hoher TS-Wert eingesetzt werden. Die Berechnung benötigt dann weniger Iterationen. Die Verschiebungen fallen allerdings zu klein aus.
- 5) Numerische Schwierigkeiten traten in den Fällen mit exzentrisch an Schalen anschließenden Randträgern auf. Bei der Berechnung der Tonnenschale konnte dieses Problem durch ein Höhersetzen des Randträgers gelöst werden.
- 6) In beiden behandelten Stabilitätsproblemen hat sich gezeigt, daß linear elastische Analysen in diesen Fällen nicht ausrei-

chen. Die kritischen Lasten liegen bei der nichtlinearen Analyse bedeutend niedriger als die linearen Stabilitätslasten.

Das vorgestellte FE-Konzept ist noch verbesserungs- und erweiterungsbedürftig. In diesem Sinne sollen einige Anregungen gegeben werden:

- 1) Zur Auffindung wirklichkeitsnaher Werkstoffkennwerte für die Rechnung ist eine vergleichende Studie mit Versuchen sinnvoll, wobei die Werkstoffeigenschaften von Beton und Stahl variiert werden.
- 2) Das FE-Modell kann hinsichtlich Wirtschaftlichkeit verbessert werden. Die jeweilige Zahl der Schichten über die Dicke kann automatisch erzeugt werden, so daß eine Anpassung an die jeweilige materielle Nichtlinearität über die Dicke erfolgt.
- 3) Obwohl die Iterationsverfahren nach Riks/Wempner sowie über eine Verschiebungskontrolle erfolgreich eingesetzt werden, können "Line Search"- und "BFGS"-Algorithmen Verbesserungen ermöglichen.
- 4) Einige Arbeiten ordnen den TS-Effekt dem Stahl zu, wobei sie weniger Iterationen benötigen.
- 5) Ein 3-dimensionales Stoffgesetz erhöht den Anwendungsbereich dieses FE-Modells. Da dieses Element Schubverformungen berücksichtigt, sind schräge Risse über die Dicke zu erfassen.
- 6) Eine Erweiterung auf Vorspannung ist möglich. Dazu werden dem Stahl Anfangsspannungen zugeordnet. Der zugehörige Gleichgewichtszustand der Schale ist dann iterativ zu ermitteln.
- 7) Folgende weitere Effekte können noch in die Werkstoffgesetze eingebracht werden:
  - Beton: Schlupf, Dübelwirkung, Reibung an den Rißufern, Kriechen, Schwinden, eine genauere Erfassung nichtmonotoner, nichtproportionaler Beanspruchung, zyklische Beanspruchung
  - Stahl: Bauschinger Effekt.

- 8) Eine sinnvolle Ergänzung zur Berechnung von Schalensystemen, ist die Erstellung eines Balkenelements, das zentrisch bzw. exzentrisch an die Schale angeschlossen ist.

## SCHRIFTTUMSVERZEICHNIS

- [1] Scordelis, A.C.; Schnobrich, W.C.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Structures. Recent Developments. CDC-Seminar, Munich, 1981.
- [2] Ngo, D.; Scordelis, A.C.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. ACI-Journal, V. 64, Nr. 3, 1967.
- [3] Franklin, H.A.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames and Panels, Report No. SESM 70-5. Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1970.
- [4] Cervenka, V.; Gerstle, K.H.: Inelastic Analysis of Reinforced Concrete panels. IVBH, Vol. 31-II, 1971.
- [5] Saouma, V.E.; Ingraffea, A.R.: Fracture Mechanics Analysis of Discrete Cracking, in [15].
- [6] Blaauwendraad, J., Grootenboer, H.J.: Essentials for Discrete Crack Analysis, in [15].
- [7] Grootenboer, H.J.; Leijten, S.E.C.; Blaauwendraad, J.: Numerical models for reinforced concrete structures in plane stress. Heron, Vol. 26, 1981, no. 1c.
- [8] Nilson, A.H.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method. ACI Journal, Vol.65, 1968, 757/766.
- [9] Scanlon, A.; Murray, D.: Time Dependent Reinforced Concrete Slab deflections. ASCE, ST9, September 1974, 1911/1924.
- [10] Gilbert, R.I.; Warner, R.F.: Tension Stiffening in Reinforced Concrete Slabs. ASCE, Structural Division, ST12, December 1978, 1885/1900.

- [11] Van Greunen, J.: Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Slabs and Panels. Report No. UCSESM 79-3, Structures and Materials Research, Dept. of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1979.
- [12] Mang, H.A.; Floegl, H.; Trappel, F.; Walter, H.: Wind-Loaded Reinforced Concrete Cooling Towers: Buckling or Ultimate Load? Institut für Baustatik und Festigkeitslehre, TU Wien.
- [13] Mang, H.A., Floegl, H.: Analytical Prediction of Short-Term behaviour of Reinforced Concrete Panels, Slabs and Shells, ASCE-Preprint 81-103, 1981.
- [14] Floegl, H.: Traglastermittlung dünner Stahlbetonschalen mittels der Methode der Finiten Elemente unter Berücksichtigung wirklichkeitsnahen Werkstoffverhaltens sowie geometrischer Nichtlinearität. Dissertation TU Wien, Mai 1981.
- [15] IABSE COLLOQUIUM DELFT 1981: Advanced Mechanics of Reinforced Concrete. Final Report.
- [16] Fujii, F.: Anwendung der Methode der Finiten Elemente auf die Berechnung von Stahlbetonplatten. Bericht Nr. 78-1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1978.
- [17] Wegner, R.: Tragverhalten von Stahlbetonplatten mit nicht-linearen Materialgesetzen im gerissenen Zustand Finite-Element Methode. Bericht Nr. 74-11, Institut für Statik, TU Braunschweig, 1974.
- [18] Jofriet, J.C.; McNiece, G.M.: Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs. ASCE, ST3, March 1971, 785/806.
- [19] Kolmar, W.; Mehlhorn, G.: Untersuchung verschiedener Elementsteifigkeitsmatrizen auf ihre Eignung zur Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen. Erster Zwischenbericht zum Forschungsvorhaben. Institut für Massivbau, TH Darmstadt, 1981.

- [20] Arnesen, A.: Analysis of Reinforced Concrete Shells Considering Material and Geometric Nonlinearities. Division of Struct. Mech., Norwegian Inst. of Tech., University of Trondheim, Norway (Report No. 79-1, July 1979).
- [21] Lin, C.S.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs and Shells. Dept. of Civil Engineering, University of California, Berkeley (Report No. UC-SESM 73-7, April 1973).
- [22] Berg, S.: Nonlinear Element Analysis of Reinforced Concrete Plates. Div. of Structural Mechanics, Norwegian Institut of Technology, University of Trondheim, Norway (Report No. 73-1, February 1973).
- [23] Hand, F.R., Pecknold, D.A., Schnobrich, W.C.: A Layered Finite Element Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Plates and Shells. Civil Engineering Studies (Structural Research Series No. 389), University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, August 1972.
- [24] Kabir, A.F.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Panels, Slabs and Shells for Time dependent effects. College of Engineering, Office of Research Services, University of California, Berkeley, December 1976.
- [25] Kristjansson, R.: Physikalisch und geometrisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonplatten mit Hilfe Finiter Elemente. Dissertation, TH Darmstadt, 1977.
- [26] Murray, D.W.; Wilson, E.L.: Finite Element large deflection analysis of Plates. ASCE, EM1, February 1969, 143/165.
- [27] Ramm, E.: Geometrisch nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente. Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976.

- [28] Bathe, K.J.; Ramm, E.; Wilson, E.L.: Finite Element Formulations for Large Deformation Dynamic Analysis. Int. Journal for Num. Meth. Eng., Vol. 9, 1975, 353/386.
- [29] "Nichtlineare Finite Element Rechnung", Institut internes Seminar, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1982.
- [30] Brendel, B.; Häfner, L.; Ramm, E; Sättele, J.M.: Theoretische Grundlagen zur Berechnung geometrisch nichtlinearer Probleme. Interner Bericht, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [31] Malvern, L.E.: Introduction to the mechanics of a continuous medium. Prentice Hill, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [32] Bufler, H.: Einführung in die Elastizitätstheorie. Vorlesungsskript des Kurses WS 77/78, Universität Stuttgart.
- [33] Murray, D.W.: Finite Element Analysis. Vorlesungsskript des Kurses SS/80 vom Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- [34] Tottenham, H.; Brebbia, C.: Finite Element Techniques in Structural Mechanics. Proceedings Seminar at University of Southampton, April 1970.
- [35] Darwin, D.; Pecknold, D.: Inelastic model for Cyclic Biaxial Loading of Reinforced Concrete. Civil Engineering Studies (Structural Research Series No. 409) University of Illinois at Urbana-Champaign, Illinois, July 1974.
- [36] Darwin, D.; Pecknold, D.: Analysis of Cyclic Loading of Plane R/C Structures. Computers and Structures, Vol. 7, 137/147.
- [37] Darwin, D.; Pecknold, D.: Nonlinear Biaxial Stress-Strain Law for Concrete. ASCE, EM2, April 1977, 229/241.

- [38] Saenz, L.P.: Disc. of "Equation for the Stress-Strain Curve of Concrete", by Desayi and Krishnan. Journal ACI, Proc. Vol. 61, No. 9, September 1964, 1229/1235.
- [39] Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H.: Behaviour of Concrete under Biaxial Stresses. ASCE, EM4, August 1973, 853/866.
- [40] Sturman, G.M.; Shah, S.P.; Winter, G.: Effects of Flexural Strain Gradients of Microcracking and Stress-Strain Behaviour of Concrete", AC Journal, Vol. 62, No. 7, July 1965.
- [41] Link, J.: Eine Formulierung des zweiaxialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten. Deutscher Ausschub für Stahlbeton, Heft 270, Berlin, 1976.
- [42] Kupfer, H., Hilsdorf, H.K.; Rüsç, H.: Behaviour of Concrete Under Biaxial Stresses. ACI-Journal, August 1969 - Title no. 66-52.
- [43] Murray, D.W.: NISA Extensions for Axisymmetric Reinforced Concrete Shells. - A progress Report - Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, July 1980.
- [44] Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, Third Edition, McGraw-Hill, 1972.
- [45] Oden, J.T.: Finite Elements of Nonlinear Continua, McGraw-Hill, 1972.
- [46] Kröplin, B.H.: Postbuckling Instability Analysis of Shells Using the Mixed Method. Buckling of Shells Colloquium, Universität Stuttgart, Mai 1982.
- [47] Stricklin, J.A.; Haisler, W.E.: Formulations and Solution Procedures for Nonlinear Structural Analysis, Computers and Structures, Vol. 7, 1977, 125/136.

- [48] Ramm, E.; Stegmüller, H.: The Displacement Finite Element Method in Nonlinear Buckling Analysis of Shells. Buckling of Shells Colloquium, Universität Stuttgart, Mai 1982.
- [49] Crisfield, M.A.: Incremental/Iterative Solution Procedures for Non-linear Structural Analysis. Proceed. Conf. Numerical Methods for Non-Linear Problems, University College Swansea, 1980.
- [50] Ramm, E.: Strategies for Tracing Nonlinear Response Near Limit Points, Europe-US Workshop "Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics", Juli 28-31, 1980, Bochum.
- [51] Hinton, E.; Abdel Rahman, H.H.; Zienkiewicz, O.C.: Computational Models for Reinforced Concrete Slab Systems. Dept. of Civil Engineering, Swansea, Wales, U.K. in [15].
- [52] Argyris, J.H.; Faust, G.; Willam, K.J.: Finite Element Modelling of Reinforced Concrete Structures. In [79].
- [53] Crisfield, M.A.: Accelerated Solution Techniques and Concrete Cracking. Paper presented at FENOMECH 1981, Conference Universität Stuttgart.
- [54] Cope, R.J.; Rao, P.V.: Non-Linear Finite Element Strategies for Bridge Slabs, in [15].
- [55] Bathe, K.J.; Cimento, A.P.: Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations. Computer Methods in App. Mech. and Engr., 22, 1980.
- [56] Brendel, B.; Häfner, L.; Ramm, E.; Sättele, J.M.: Programm-dokumentation, Programmsystem NISA, Bericht Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1977.
- [57] Ahmad, S.; Irons, B.M.; Zienkiewicz, O.C.: Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axisymmetric Problems. Proc. 2nd Conf. "Matrix Methods in Structural Mechanics", AFFDL-TR-68-150 (1968), 539/571.

- [58] Sättele, J.M.: Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität. (Diss.) Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1980.
- [59] Brendel, B.: Geometrisch nichtlineare Elasto-Stabilität. Bericht 79-1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1979.
- [60] Brendel, B.; Häfner, L.; Ramm, E.; Sättele, J.M.: Analysis and Response of a Thin Glassfiber Reinforced Concrete Shell. Vorbericht zum Kolloquium des 2. Internationalen Symposiums "Weitgespannte Flächentragwerke" des Sonderforschungsbereichs 64 der Universität Stuttgart, Mai 1979.
- [61] Sättele, J.M.; Ramm, E.; Fischer, M.: Traglastkurven einachsiger gedrückter Rechteckplatten mit Seitenverhältnissen  $\alpha \leq 1$  bei vorgegebenen geometrischen Imperfektionen. Der Stahlbau 7/1981, 205/210.
- [62] Häfner, L.: Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyllinders. Diss. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1982.
- [63] Schweizerhof, K.: Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen. Diss. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1982.
- [64] Bathe, K.S.; Wilson, E.L.: Numerical Methods in finite Element Analysis. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- [65] Bathe, K.S.; Wilson, E.L.; Iding, R.H.: Nonsap - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of nonlinear Systems. SESM Report No. 74-3, Dept. Civil Eng., University of California, Berkeley (1974).

- [66] Häfner, L.; Ramm, E.; Sättele, J.M.; Stegmüller, H.: NISA80 Programmdokumentation-Programmsystem. Bericht Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1981.
- [67] Franz, G.: Über die Beanspruchung der Bewehrung bei kreuzweise bewehrten Rechteckplatten aus Stahlbeton. Forschungsbericht F5o5, Karlsruhe, 197o.
- [68] Schäfer, H.; Link, J.; Mehlhorn, G.: Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbetonplatten mit der Finite-Element-Methode. Beton- und Stahlbetonbau 11/1975, 265/273.
- [69] Swartz, S.E.; Rosebraugh, V.H.; Berman, M.Y.: Buckling Tests on Rectangular Concrete Panels. ACI-Journal, January 1974.
- [7o] Hansell, W.; Winter, G.: Lateral Stability of Reinforced Concrete Beams. ACI-Journal, Vol. 56, Title No. 56-14, Sept. 1959.
- [71] Sant, J.K.; Bletzacker, R.W.: Experimental Study of Lateral Stability of Reinforced Concrete Beams. ACI-Journal, Vol. 58, title no. 58-33, Dec. 1961.
- [72] Roark, R.S.: Formulas for Stress and Strain. McGraw-Hill Book Company, Fourth Edition, 1965.
- [73] Leonhardt, F.: Vorlesungen über Massivbau. Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg-New York), Dritte Auflage.
- [74] Van Riel, A.C.; Beranek, W.J.; Bouma, A.L.: Tests on Shell Roof Models of Reinforced Mortar. Proceedings of 2nd Symposium on Concrete Shell Roof Construction, 1-3 July 1957, Teknisk Ukeblad Oslo (organisiert von The Norwegian Engineering Society).
- [75] Bouma, A.L.; van Riel, A.C.; van Koten, H.; Beranek, W.J.: Investigations on Models of Eleven Cylindrical Shells Made of Reinforced and Prestressed Concrete. Proceedings Symposium on Shell Research (RILEM-IASS) Delft 1961, North-Holland Publishing Co .. Amsterdam.

- [76] Lo, Kam-Shing: MULTPL Analysis of Cellular Folded Plate Structures by the Elasticity Method, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, October 1965.
- [77] Müller, G.: Numerical Problems in Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete. Report No. UC-SESM 77-5, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1977.
- [78] Müller, G.: Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Hyperbolic Paraboloid Shells . Report No. UC-SESM 77-6, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley, 1977.
- [79] IABSE COLLOQUIUM DELFT 1981: Advanced Mechanics of Reinforced Concrete. Introductory Report.
- [80] State-of-The-Art Report on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, ASCE, June 1981.
- [81] Murray, D.W.: Nonlinear Concrete Analysis. Seminarscript. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1980.
- [82] Bazant, Z.P.: Advances in Deformation and Failure Models for Concrete, in [79].
- [83] Bazant, Z.P.; Schnobrich, W.C.; Scordelis, A.C.: Analisi Delle Strutture in cemento armato mediante il metodo degli elementi finiti - Seminario 20-23 giugno 1978 - Politécnico di Milano.
- [84] Chen, ACT, Chen WF.: Constitutive Equations and Punch Indentation of Concrete, ASCE, EM6, December 1975, 889/906.
- [85] Chen, WF, Ting, EC.: Constitutive Models for Concrete Structures, ASCE, EM1, February 1980, 1/19.

- [86] Winter, G.: The Role of Microcracking in Inelasticity and Fracture of Concrete. Stahlbetonbau, Berichte aus Forschung und Praxis, Festschrift Rüsck, Wilh. Ernst u. Sohn., Berlin 1969, 47/59.
- [87] Shah, S.P.; Winter, G.: Inelastic Behaviour and Fracture of Concrete, Causes, Mechanism and Control of Cracking in Concrete. ACI Publication SP-20, 1968, 5/28.
- [88] Richart, F.E.; Brandzaeg, A., Brown, L.: A Study of the Failure of Concrete Under Combined Compressive Stresses. Bulletin No. 185, University of Illinois Engineering Experiment Station, Urbana Ill., April 1929.
- [89] Collins, M.P.; Vecchio, F.: Stress-Strain Characteristics of Reinforced Concrete in Pure Shear, in [15].
- [90] Kotsovos, M.D.; Newman, J.B.: Generalized Stress-Strain Relations for Concrete. ASCE,EM4, August 1978, 845/856.
- [91] Salencon, J.: Applications of the Theory of Plasticity in Soil Mechanics. J. Wiley & Sons, 1977.
- [92] Willam, K.S.; Warnke, E.P.: Constitutive Model for the Triaxial Behaviour of Concrete. IABSE, Seminar on Concrete Structures Subjected to Triaxial Stresses, Paper III-1, Bergamo, 1974.
- [93] Argyris, J.H.; Faust, G.; Szimmat, J.; Warnke, E.P.; Willam, K.S.: Recent Developments in the Finite Element Analysis of Prestressed Concrete Reactor Vessels. ISD-Report No. 151, Universität Stuttgart, 1973.
- [94] Ottosen, N.S.: A failure Criterion for Concrete. ASCE,EM 4, August 1977, 527/535.

- [95] Fung, Y.C.: Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- [96] Popovics, S.: A Review of Stress-Strain Relations for Concrete, ACI Journal, Vol. 67, No. 3, March 1970.
- [97] Murray, D.W.: Octahedral based Incremental Stress-Strain Matrices. ASCE, EM4, August 1979, 501/513.
- [98] Cedolin, L.; Crutzen, Y.R.J.; Dei Poli, S.: "Triaxial Stress-Strain Relationship for Concrete". ASCE, Vol. 103, EM3, June 1977, 423/439.
- [99] Liu, T.C.Y.; Nilson, A.H.; Slate, F.O.: Biaxial Stress-Strain Relations for Concrete. ASCE, ST5, May 1972, 1025/1034.
- [100] Coon, M.D.; Evans, R.J.: Incremental Constitutive Laws and their Associated failure Criteria with Application to plain Concrete. Int. Journal of Solids & Struct., 1972, Vol. 8, 1169/1183.
- [101] Elwi, A.A.; Murray, D.W.: A 3D-Hypoelastic Concrete Constitutive Relationship. ASCE, EM4, August 1979, 623/641.
- [102] Ottosen, N.S.; Constitutive Model for Short-Time Loading of Concrete. ASCE, EM1, February 1979, 127/141.
- [103] Kotsovos, M.D.; Newman, J.B.: Mathematical Description of Deformational Behaviour of Concrete under Generalized Stress Beyond Ultimate Strength. ACI-Journal - Title no. 77-37.
- [104] Bazant, Z.; Tsubaki, T.: Total Strain Theory and Path-Dependence of Concrete. ASCE, EM6, December 1980, 1151/1173.
- [105] Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press (1960).

- [106] Bazant, Z.; Kim, S.S.: Plastic-Fracturing Theory for Concrete ASCE,EM3, June 1979, 407/428.
- [107] Murray, D.W.; Chitnuyanondh, L.; Wong, C.: Implementation of an Elastic-Plastic Concrete Relationship. Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Canada T6G267.
- [108] Murray, D.W.; Chitnuyanondh, L.; Rijub-Agha, K.; Wong, C.: Concrete Plasticity Theory for Biaxial Stress Analysis. ASCE,EM6, December 1979, 989/1006.
- [109] Epstein, M.; Rijub-Agha, K.; Murray, D.W.: A two-parameter Concrete Constitutive Law for Axisymmetric Shell Analysis. Paper Presented at the Symposium on Application of Comp. Meth. in Engineering, University of Southern Cal., Aug. 23-26, 1977.
- [110] Chen, A.C.T.; Chen, W.F.: Constitutive Relations for Concrete ASCE,EM4, August 1975, 465/481.
- [111] Chen, W.F.; Suzuki, H.: Constitutive Models for Concrete. Computers and Structures, Vol. 12, 23/32. 1980.
- [112] Wu, H.C.: Dual Failure Criterion for Plain Concrete. ASCE,EM4 December 1974, 1167/1181.
- [113] Chen, E.Y.T., Schnobrich, W.: Material Modelling of Plain Concrete, IABSE Colloquium Delft 1981, in [15].
- [114] Budiansky, B.; O'Connell, R.J.: Elastic Moduli of a Cracked Solid. Int. J. of Solids Structures, 1976, Vol. 12, 81/97.
- [115] Dougill, J.W.: On Stable Progressively Fracturing Solids. Journal of Applied Mathematics and Physics. Vol. 27, 1976, 423/437.

- [116] Il'iushin, A.A.: On the Postulate of Plasticity. Journal of App. Math. and Mech., Vol. 25, 1961, 746/752
- [117] Valanis, K.C.: A Theory of Viscoplasticity without a Yield Surface. Archiwum Mechaniki Stosowanej, Vol. 23, 1971, 517/551.
- [118] Bazant, Z.P.: A New Approach to Inelasticity and Failure of Concrete, Sand and Rock: Endochronic Theory. Proceedings Society of Engineering Science, 11th Annual Meeting, Duke University, Durham N.C., Nov. 1974, 1/93.
- [119] Bazant, Z.P.: Endochronic Inelasticity and Incremental Plasticity. Int. J. of Solids Structures, Vol. 14, 691/714, 1978.
- [120] Bazant, Z.P.; Bhat, P.D.: Endochronic Theory of Inelasticity and Failure of Concrete, Journal ASCE, EM4, August 1976, 701/722.
- [121] Bennet, E.W.; Raju, N.K.: Cumulative Fatigue Damage of Plain Concrete in Compression. Proc. Symp. on Structure, Solid Mech. and Engineering Design. University of Southampton, England, 1089/1102, 1969.
- [122] Shah, S.P.; Chandra, S.: Mechanical Behavior of Concrete Examined by Ultra-Sonic Measurements. Journal of Materials, ASTM, Vol. 5, No. 3, 1970, 550/563.
- [123] Dinges, D.; Keuser, M.; Kolmar, W.; Mehlhorn, G.: Untersuchung verschiedener Elementsteifigkeitsmatrizen auf ihre Eignung zur Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen. Zweiter Zwischenbericht zum Forschungsvorhaben. Institut für Massivbau, TH Darmstadt, 1982.

A N H A N G A

Betonwerkstoffgesetze - Überblick

## A BETONWERKSTOFFGESETZE - ÜBERBLICK

Dieser Abschnitt befaßt sich mit der Beschreibung des Werkstoffs Beton und dessen Formulierungen in Stoffgesetze. Es werden dabei die zeitunabhängigen Stoffgesetze behandelt (siehe Abschnitt 3). Die Erläuterung folgt dabei in etwa dem Schema der Arbeit [80]. Andere Überblicke über Betonwerkstoffgesetze finden sich in [81], [82], [83], [84], [85], [41].

### A.1 Verhalten im Versuch

#### A.1.1 Einachsiges Verhalten

In Bild A.1 ist das  $\sigma$ - $\epsilon$  Diagramm vom einachsigen Betonversuch dargestellt.

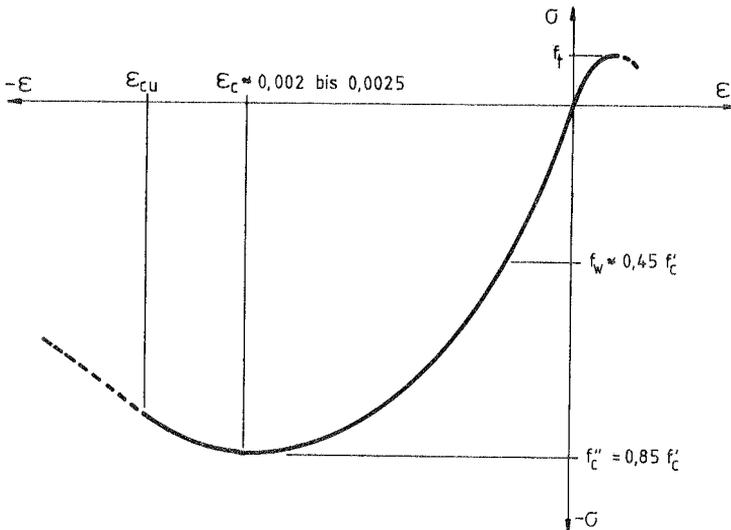


Bild A.1: Einachsige Spannungs-Verzerrungskurve aus [81]

Bis zu einer Spannung von ca. 30% der Festigkeit im Druckbereich ist das Verhalten fast linear, dann tritt die Wirkung der Mikrorisse ein, die als die Hauptursache des weiteren nichtlinearen Verlaufs angesehen wird [16], [21], [86], [87]. Diese Mikrorisse, die sich meist zwischen dem Zementmörtel und den Zuschlagkörnern

bilden und bereits im unbelasteten Zustand existieren, werden durch Spannungen verursacht, die durch die Volumenänderung des Zementmörtels entstehen. Hier tritt ein entscheidender Unterschied zwischen Metallen und Beton auf; die Nichtlinearitäten im Beton treten nicht aufgrund einer Plastizierung des Mörtels oder des Zuschlags auf, sondern durch die Vermehrung der Mikrorisse. Diese Mikrorisse sind auch ein wichtiger Faktor, weshalb die Betonzugfestigkeit so niedrig ist.

Bei einer Spannung von ca. 80% der kritischen Druckspannung  $f'_c$  tritt eine plötzliche Vergrößerung des Volumens auf (siehe Bild A.2), die Brandzaeg [88] auf interne Zerstörung zurückführte. Winter [86] fand später, daß sich die Mikrorisse bei dieser Laststufe verbinden und kontinuierliche Risse erzeugen.

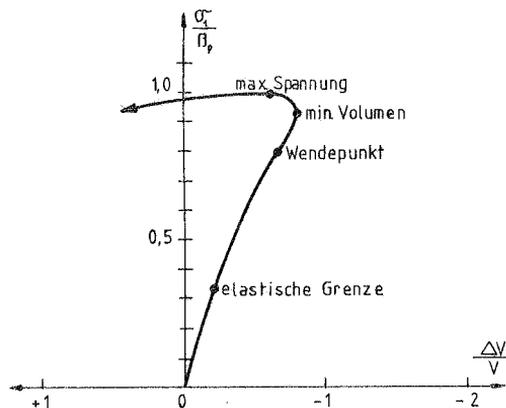


Bild A.2: Volumenänderung unter Druckbelastung im einachsigen Versuch aus K-H-R [42]

Der Wert  $f'_c$  hängt von mehreren Faktoren ab: Wasser-Zement-Faktor, Alter des Betons, Geschichte und Form des Prüfkörpers usw.. Für Langzeitbelastung wird  $f'_c = 0,85 f'_c$  angenommen, wobei  $f'_c$  die Festigkeit eines 28 Tage alten Zylinders von 15 x 30 cm ist.

Die maximal erreichbare Dehnung  $\epsilon_{cu}$  ist von der Prüfmaschine abhängig. Man nimmt an, daß dieser Wert in wirklichen Tragwerken

größer ist, als es der zentrische Druckversuch angibt. Die Existenz des abfallenden Astes kann in Biegeversuchen bestätigt werden, wo die benachbarten Teile der Struktur als Stützung für das betrachtete Teil dienen. Rüschi erreichte in Versuchen an Balken mit dreieckigem Querschnitt Verzerrungen bis  $0,007$ , bei Stützen hingegen wurden nur Verzerrungen bis  $\epsilon_c$  ( $0,002$ ) erreicht.

Es sollte erwähnt werden, daß die Spannungen unter Gebrauchslasten ungefähr bei  $f_w \approx 0,45 f'_c$  liegen und der E-Modul normalerweise über den Sekantenmodul zu dieser Spannung definiert wird.

Die Zugfestigkeit des Betons ist gering. Ihre Berücksichtigung ist bei Biegeproblemen von untergeordneter Bedeutung, wenn nur Bruchlasten interessieren. Allerdings könnten bei Verzicht auf die Zugfestigkeit auch keine Schubspannungen aufgenommen werden, wodurch die Ergebnisse in mehraxialen Analysen verfälscht werden. Ist man an Verformungen interessiert, muß die Zugfestigkeit des Betons mit in die Rechnung einbezogen werden.

#### A.1.2 Zweiachsiges Verhalten

Eine grundlegende Arbeit für das biaxiale Verhalten wurde von Kupfer, Hilsdorf und Rüschi [42] geleistet. Von den Autoren wurden quadratische Scheiben unter verschiedenen Lastverhältnissen untersucht und die Last mit einer "Belastungsbürste" eingeleitet. Diese neuartige Belastungsvorrichtung war deswegen wichtig, weil sie die Lasteinleitung mit geringer Querbehinderung erlaubte. Bisher hatte man verschiedene Verfahren angewandt, die mehr oder weniger eine Querbehinderung des Betons herbeiführten und einen Teil der Betonlast übernahmen. Dies führte zu einer Überschätzung der Steifigkeit und Festigkeit des Betons.

Kupfer u.a. [42] untersuchten drei verschiedene Betonarten mit unterschiedlicher Festigkeit und stellten deren Versagenskurven im Hauptspannungsraum dar (Bild A.3)

Wichtig ist die Art, in der das Versagen auftritt. In [42] er-

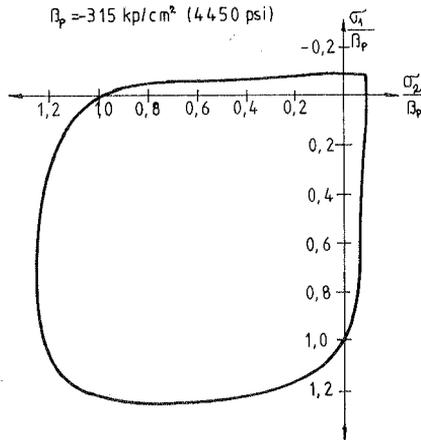


Bild A.3: Biaxiale Versagenskurve nach [42]

kannte man, daß im einachsigen Druckversuch - nach Bildung von Mikrorissen in Richtung der Last - beim Versagen ein größerer Riß mit  $30^\circ$  gegenüber der Lastrichtung auftrat. Bei biaxialem Druck gab es Mikrorisse in der Ebene der Scheibe, ebenso wie im Zug-Druck-Bereich bis zum betragsmäßigen Verhältnis Zug/Druck von  $1/15$ . In diesem Fall kam es beim Versagen zu Makrorissen mit einer Neigung von  $18 - 27$  Grad gegenüber der Scheibenebene. Im restlichen Zug-Druck-Bereich und im Zug-Zug-Bereich trat das Versagen mit einem einzigen Riß in Richtung der maximalen Hauptspannung auf.

Um eine Beschreibung des Kurzzeitverhaltens des Betons vorzunehmen, ist es unentbehrlich, die Spannungs-Verzerrungskurven zu kennen. In Bild A.4 sind diese Kurven für verschiedene Hauptspannungsverhltnisse aufgetragen. Man kann beobachten, daß im Vergleich zur einachsigen Wirkung die biaxiale Beanspruchung größere Bruchspannungen und -verzerrungen hervorruft. Es ist auch bemerkt worden, daß das Materialverhalten im Zugbereich bei allen untersuchten Spannungsverhältnissen dem Hookeschen Gesetz folgt.

Vecchio/Collins [89] untersuchten Scheiben unter reiner Schubwirkung. Dabei benutzten sie eine Einrichtung, wie sie in Bild A.5

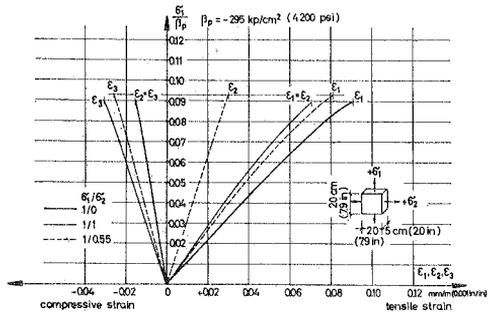
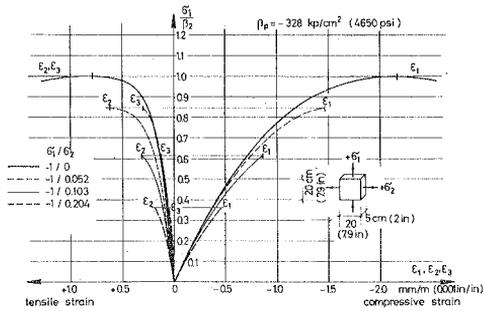
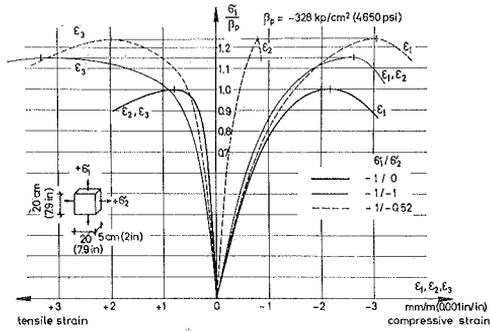


Bild A.4: Biaxiale Spannungs-Verzerrungskurven (aus [42])

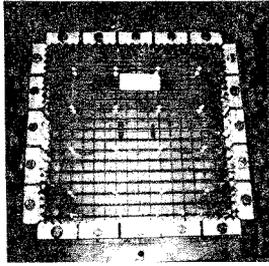


Fig. 1 Specimen Ready for Casting

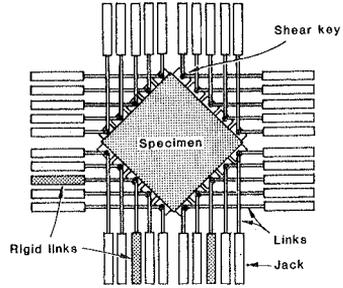


Fig. 2 Hydraulic Jack and Link Assembly

Bild A.5: Einrichtung für einen Schubversuch (von Collins/Vecchio [89])

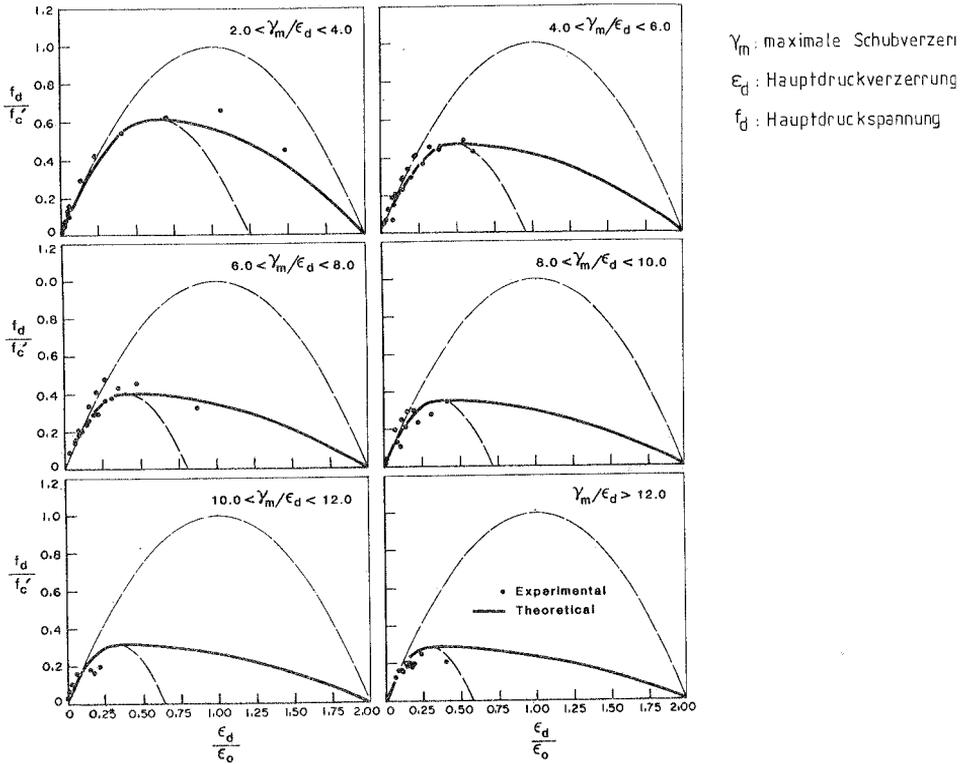


Bild A.6: Einfluß der maximalen Schubverzerrung auf die Spannungs-Verzerrungskurve (von Collins/Vecchio [89])



wachsenden, rein deviatorischen Spannungszustand nicht nur Oktaederverzerrungen auftraten, sondern auch eine Volumenänderung zustande kam. Eine große Duktilität und Festigkeit bei hohem hydrostatischem Druck wurde ebenfalls beobachtet.

Man sieht an Bild A.7 für den zweiachsigen Sonderfall, daß die zugehörige Ebene die 3-dimensionale Fläche in einem sehr flachen Winkel schneidet. Die Form der Schnittkurve ist deshalb sehr empfindlich.

## A.2 Versagenstheorien

Zwei grundsätzlich verschiedene Versagensarten kann man im Beton erkennen: 1) Zugbruch (diskreter Riß, sprödes Verhalten), 2) Druckbruch (mehrere kleine Risse, Duktilität).

Beim ersten Fall tritt das Versagen nur in einer Richtung auf, d.h., der Beton verliert die Fähigkeit, Normalspannungen über den Riß zu übertragen, während er zunächst noch alle anderen Spannungen übernehmen kann. Beim Druckversagen hingegen wird die Tragfähigkeit beim Beton in alle Richtungen beeinträchtigt. Das Verhalten nach dem Versagen wird bei der Beschreibung der jeweiligen Stoffgesetze erläutert.

### A.2.1 Invarianten

Zur Beschreibung der Versagenkriterien wird Gebrauch von den Spannungs- und Verzerrungsinvarianten gemacht [80]:

Spannungsinvarianten

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{ii} \\ I_2 &= \frac{1}{2}(I_1 - \sigma_{ij} \sigma_{ij}) \\ I_3 &= \frac{1}{6} e_{ijk} e_{pqr} \sigma_{ip} \sigma_{jq} \sigma_{kr} = \det(\sigma) \end{aligned} \tag{A.1}$$

mit dem Permutationssymbol  $e_{ijk}$  = 0 wenn 2 Indizes gleich sind  
= 1 wenn  $ijk = 1,2,3$  oder Permutationen von  $1,2,3$  sind  
= -1 in allen anderen Fällen

Verzerrungsinvarianten

$$\begin{aligned}
 I'_1 &= \epsilon_{ii} \\
 I'_2 &= (I'_1 - \epsilon_{ij} \epsilon_{ij}) \\
 I'_3 &= \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} \epsilon_{ip} \epsilon_{jq} \epsilon_{kr} = \det(\boldsymbol{\epsilon})
 \end{aligned}
 \tag{A.2}$$

Man kann die Spannungs- und Verzerrungstensoren in einen hydrostatischen und einen deviatorischen Anteil aufspalten. Der erste Anteil stellt beim Spannungstensor den hydrostatischen Druck, beim Verzerrungstensor die Volumenänderung dar. Der zweite Anteil beschreibt die Schubspannungen bzw. die Formänderung.

$$\text{hydrostatischer Anteil} \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \tag{A.3}$$

$$\text{deviatorischer Anteil} \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m \tag{A.4}$$

Die Invarianten des Spannungsdeviators:

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 0 \\
 J_2 &= \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \\
 J_3 &= \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = \det(\mathbf{s})
 \end{aligned}
 \tag{A.5}$$

Der räumliche Spannungszustand kann alternativ durch die Oktaedernormalspannungen und -schubspannungen beschrieben werden. Diese sind die Normal- und Tangentialspannungen in der Deviator-ebene.

$$\sigma_0 = \sigma_m \quad (\text{Oktaedernormalspannung}) \tag{A.6}$$

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 \quad (\text{Oktaederschubspannung})$$

Es ist bei manchen Versagensflächen notwendig, die Richtung von  $\tau_0$  zu kennen. Dies wird mit dem Winkel  $\vartheta$  (Bild A.7) angegeben.

$$\cos 3\vartheta = \frac{\sqrt{2} J_3}{\tau_0^3} \tag{A.7}$$

wobei  $0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{3}$

Verzerrungen:

$$\text{Volumenänderung:} \quad e_v = \epsilon_{ii} \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Formänderung:} \quad e_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_v \delta_{ij} \quad (\text{A.9})$$

Invarianten:

$$J'_1 = 0$$

$$J'_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \quad (\text{A.10})$$

$$J'_3 = \frac{1}{3} e_{ij} e_{jk} e_{ki} = \det(\mathbf{e})$$

Ebenso wie bei den Spannungen werden die Oktaedernormalverzerrungen und -schubverzerrungen definiert:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} \epsilon_{ii} \quad (\text{Oktaedernormalverzerrung}) \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{2}{3} J'_2} \quad (\text{Oktaederschubverzerrung})$$

### A.2.2 Versagenskriterien

#### a) Maximale Hauptspannungshypothese

Dieses Kriterium von Rankine (1876) besagt, daß das Versagen auftritt, wenn eine der Hauptspannungen einen Grenzwert erreicht. Im dreidimensionalen Spannungsraum ist die Versagensfläche in Bild A.8 abgebildet.

Das Kriterium wird häufig für die Beschreibung des Verhaltens des Betons im Zugbereich benutzt, wobei die Ergebnisse durchaus gut sind.

#### b) Maximale Hauptverzerrungshypothese

Das Versagen tritt in diesem Fall auf, wenn eine der Hauptverzerrungen einen Grenzwert erreicht. Dieses Kriterium wird für die Bemessung von Stahlbetontragwerken im Bruchzustand benutzt. Es

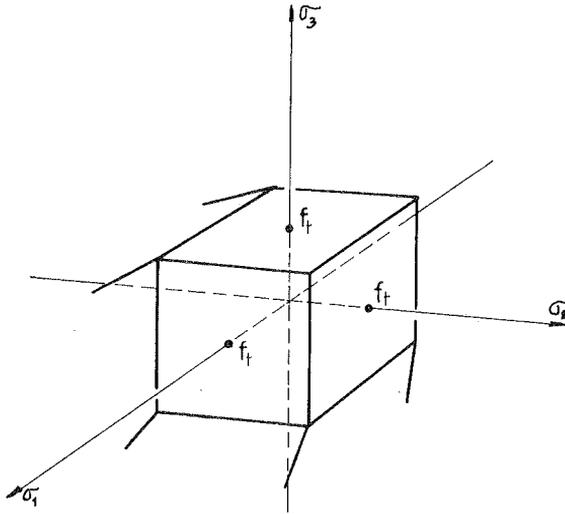


Bild A.8: Maximale Hauptspannungshypothese

führt für die Fälle mit einachsigen Spannungszustand zu guten Ergebnissen. Für mehrachsige Spannungszustände hingegen gibt es große Streuungen im Vergleich zwischen Theorie und Versuchsergebnissen (siehe dazu [80,41]).

c) Schubspannungshypothese (innere Reibung)

Die von Coulomb (1773) erstmals vorgeschlagene Hypothese besagt, daß die aufnehmbare Schubspannung umso größer ist, je größer die Normalspannung ist. Die Beziehung wurde zunächst linear angegeben:

$$\tau = c - \sigma_n \cdot \tan \varphi \quad (\text{A.12})$$

c: Kohäsion

$\varphi$ : Winkel der inneren Reibung

Mohr (1882) erweiterte diese Theorie, indem er die Gerade durch eine Kurve ersetzte. Sie ist die Einhüllende aller Spannungskreise, die einen Bruchzustand erzeugen. Die mathematische Formulierung lautet:

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = g(\sigma_1 + \sigma_3); \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \quad (\text{A.13})$$

Diese beiden Theorien vernachlässigen die mittlere Hauptspannung, da für den maximalen Spannungskreis nur die extremen Hauptspannungen gebraucht werden. Deshalb wird die Festigkeitserhöhung durch biaxialen Druck nicht erfaßt. Trotzdem können diese Theorien für mäßige Spannungszustände benutzt werden, wenn sie durch eine Theorie der maximalen Hauptspannung oder -verzerrung im Zugbereich ergänzt wird.

Diese beiden Theorien sind im Bild A.9 dargestellt (siehe auch [91]).

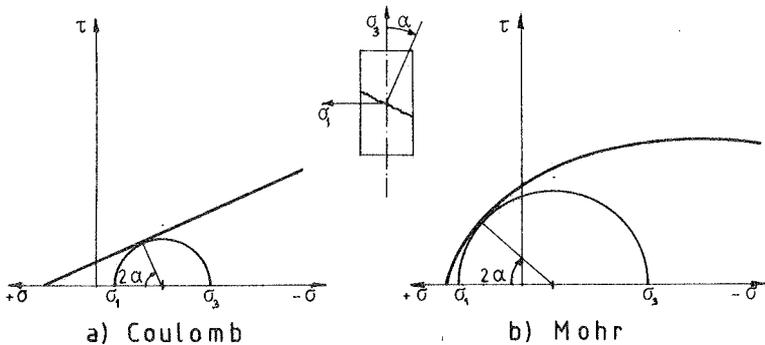


Bild A.9: Schubspannungshypothesen

#### d) Oktaederschubspannungskriterium

Dieses Kriterium besagt, daß die Oktaederschubfestigkeit eines Materials konstant ist. Versagen tritt auf, wenn dieser Wert überschritten wird. Da die Oktaederschubspannung proportional zur zweiten Invariante des Deviators ist, lautet das Gesetz:

$$J_2 - k^2 = 0 \quad (\text{A.14})$$

Dieses Kriterium ist auch als v. Mises-Kriterium oder Hypothese von der maximalen Gestaltänderungsenergie bekannt. Dabei wird die mittlere Hauptspannung miteinbezogen, aber die Abhängigkeit von der ersten und dritten Invariante wird nicht mitberücksichtigt. Dazu kommt, daß im einachsigen Fall keine Unterscheidung zwischen Zug- und Druckzuständen gemacht wird, was beim Beton notwendig ist. Ferner wird die Umschlingungsfestigkeit im Druck-Druck-Bereich unterschätzt.

Eine Verallgemeinerung ist das Drucker-Prager-Kriterium, in das die erste Invariante eingeht.

$$f = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \quad (\text{A.15})$$

Dies bedeutet, daß die aufnehmbare Oktaederschubspannung umso größer wird, je größer die erste Invariante und damit der hydrostatische Druck ist [80,41,91].

Beide Kriterien sind in Bild A.10 dargestellt.

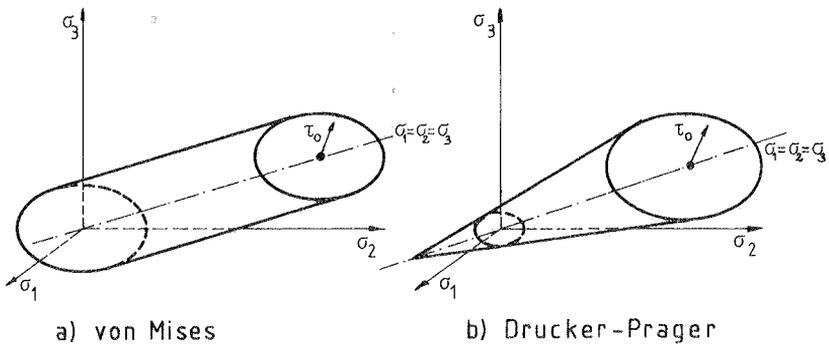


Bild A.10: Oktaederschubspannungskriterium

#### e) Biaxiale Versagenskurven

Ziel dieser Kurven ist es, die im Experiment gefundenen Punkte der Grenzzustände im biaxialen Spannungsraum mathematisch zu beschreiben.

Die meisten Formulierungen approximieren die Kurve von Kupfer, Hilsdorf, Rüsç (Bild A.3); hier sollen einige erwähnt werden:

Kupfer/Gerstle [39] (Bild A.11) entwickelten eine häufig benutzte Formulierung, die auch in dieser Arbeit Anwendung fand.

Für  $\sigma_2 > \sigma_1$  ist der Druck-Druck-Bereich

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_{cu}} + \frac{\sigma_2}{f_{cu}}\right)^2 + \frac{\sigma_1}{f_{cu}} + 3.65 \frac{\sigma_2}{f_{cu}} = 0 \quad (\text{A.16})$$

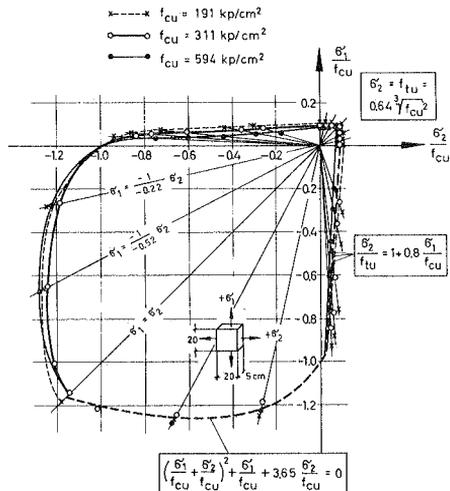


Bild A.11: Kupfer/Gerstle Bruchkurve

Zug-Druck-Bereich

$$\frac{\sigma_2}{f_{tu}} = 1 + 0.8 \frac{\sigma_1}{f_{cu}} \quad (\text{A.17})$$

Zug-Zug-Bereich

$$\sigma_2 = f_t \quad (\text{A.18})$$

Link [41] zeichnete biaxiale Spannungs- und Verzerrungsbruchkurven für drei verschiedene Betonarten auf. Er stellte fest, daß bei Bezug auf die Bruchfestigkeit bzw. Bruchverzerrungen im ersten Fall die Linien für die unterschiedlichen Betonsorten gut übereinstimmen, während bei der Verzerrungsformulierung eine

große Streuung entsteht. Auf Grund dieser Überlegung wählte er eine Spannungsformulierung für seine Bruchkurve. In Bild A.12 sind diese beiden Formulierungen gegenübergestellt. Diese Kurven entstanden durch Interpolation von Versuchen von Kupfer mit Polynomen 7. Ordnung (für Spannungen) und 6. Ordnung (für Verzerrungen) unter Verwendung des Verfahrens vom Fehlerquadratminimum.

#### f) Dreiachsige Versagenskurven

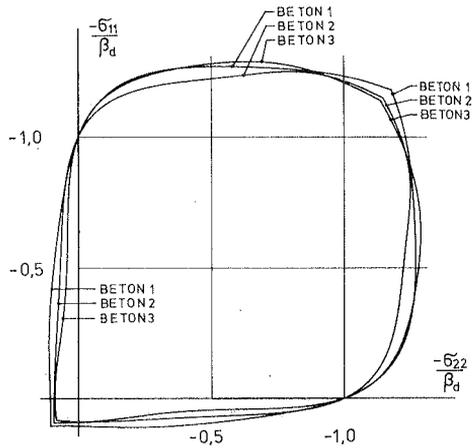
Das dreiachsige Bruchverhalten des Betons wurde im allgemeinen in Versuchen untersucht, bei denen zwei der drei Hauptspannungen konstant waren ( $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ;  $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ). Aus den Versuchen wurden Grenzwerte für alle Spannungsverhältnisse gewonnen ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ). Die Form solcher Kurven ist in Bild A.7 dargestellt. Sie wurden von mehreren Autoren mathematisch beschrieben. Hier werden zwei Modelle von Willam/Warnke [92] [93] und Ottosen [94] behandelt.

Willam/Warnke schlugen zwei Flächen mit drei bzw. fünf Parametern vor. Die Flächen erfüllen folgende Kriterien:

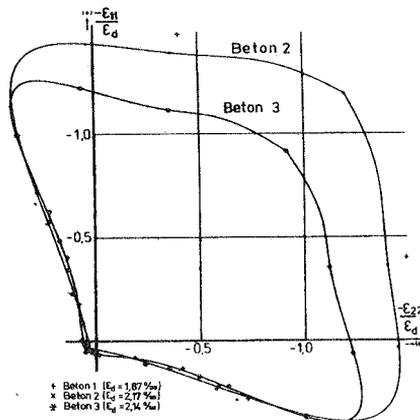
1. gute Übereinstimmung mit Versuchen;
2. einfache Deutung der Parameter aus den üblichen Versuchen;
3. sie sollen zur eindeutigen Definition der plastischen Verzerrungen glatt sein;
4. Konvexität in den deviatorischen und hydrostatischen Ebenen zur Erfüllung der Druckerschen Stabilitätspostulate.

In beiden Flächen wird der Versagenszustand Fließ- bzw. Bruchzustand durch die drei Invarianten in Form von  $\sigma_o, \tau_o, \theta$  ausgedrückt (Gl. (A.6) und (A.7)).

Das 3-Parameter-Modell zeigt in einer hydrostatischen Ebene zwei gerade Meridiane, einen oberen Druckmeridian und einen unteren Zugmeridian. In der deviatorischen Ebene ist die Schnittlinie eine elliptische Funktion. Diese Schnittlinie ist für  $1/6$  der deviatorischen Fläche definiert und mündet stetig in die angrenzende Kurve ein (Bild A.13).



a)



b)

Bild A.12: Vergleich Formulierungen des biaxialen Bruchzustands in Abhängigkeit von  
 a) Spannungen  
 b) Verzerrungen  
 für drei verschiedene Betontypen nach Link [41]

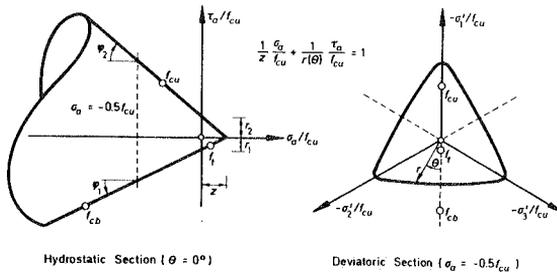


Bild A.13: Willam/Warnke 3-Parameter-Modell

Die Form dieser Kurve lautet:

$$\frac{\tau_0}{f_{cu}} = \left(1 - a \frac{\sigma_0}{f_{cu}}\right) / \left(b - c \cdot \cos 3\theta\right) \quad (\text{A.19})$$

Der Versagenszustand ist eine Funktion der Oktaedergrößen  $\sigma_0, \tau_0, \theta$  und den Stoffwerten  $a, b, c$ . Diese Werte  $a, b, c$  werden mit  $f_t, f_c, f_{cb}$  verknüpft, wobei  $f_t$  = Zugfestigkeit,  $f_c$  = Druckfestigkeit,  $f_{cb}$  = Umschlingungsfestigkeit.

Mit  $\alpha_z = f_t/f_c$ ;  $\alpha_u = f_{cb}/f_c$  werden:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha_u - \alpha_z}{\alpha_u \alpha_z} \\ b &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{1 + \alpha_z}{\alpha_z} \\ c &= \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{1 - \alpha_z}{\alpha_z} - \frac{a}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Diese Fläche degeneriert zum Drucker-Prager-Kriterium, wenn die dritte Invariante nicht berücksichtigt wird ( $\cos 3\theta = 0$ ),

$$\tau_0 = \frac{1}{b} - \frac{a}{b} \sigma_0 \quad (\text{A.21})$$

Wenn ferner  $\sigma_0$  außer acht gelassen wird, entsteht die von Mises Fläche.

Das 3-Parameter-Modell zeigt gute Übereinstimmung mit Versuchen im niedrigen Spannungsbereich, nicht aber bei hohen Werten. Es

hat sich auch gezeigt, daß die üblichen Werkstoffkennwerte des Betons in der Umgebung des Druckmeridians der Fläche zu konkaven Bereichen führen.

Um dieser Nebenwirkung zu begegnen, wurde von Willam/Warnke ein 5-Parameter-Modell vorgeschlagen. Hier werden dieselben drei Parameter wie beim zuvor beschriebenen Modell benötigt ( $f_c, f_t, f_{cb}$ ), die durch zwei Materialwerte im Bereich mit hohem Druck ergänzt werden. Die Mantellinie wird durch eine Parabel mit unterschiedlichen Koeffizienten für den Druck- und Zugmeridian angegeben (Bild A.14).

$$\frac{\rho_1}{|f'_c|} = a_0 + a_1 \frac{\sigma_0}{|f'_c|} + a_2 \frac{\sigma_0^2}{|f'_c|^2} \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\rho_2}{|f'_c|} = b_0 + b_1 \frac{\sigma_0}{|f'_c|} + b_2 \frac{\sigma_0^2}{|f'_c|^2}$$

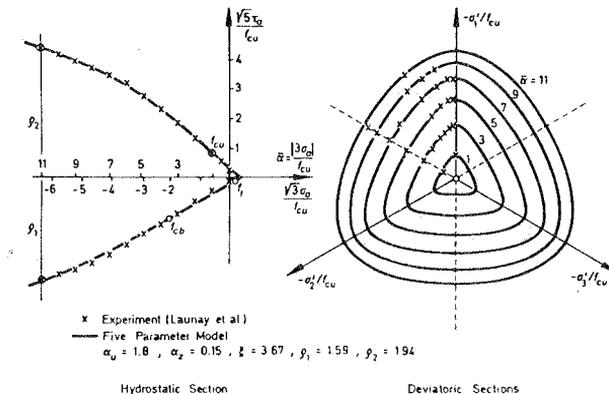


Bild A.14: Willam/Warnke: 5-Parameter-Modell

Die Variation der Schubspannung in der deviatorischen Ebene:

$$\sqrt{5} \cdot \tau_a = \frac{2 \cdot \rho_2 (\rho_2^2 - \rho_1^2) \cos^2 \vartheta + \rho_2 (2\rho_1 - \rho_2) [4(\rho_2^2 - \rho_1^2) \cos^2 \vartheta + 5\rho_1^2 - 4\rho_1 \rho_2]^{\frac{1}{2}}}{4(\rho_2^2 - \rho_1^2) \cos^2 \vartheta + (\rho_2 - 2\rho_1)^2} \quad (\text{A.23})$$

mit  $\tau_a = \sqrt{\frac{3}{5}} \tau_0$

Es soll bemerkt werden, daß diese Fläche geschlossen ist, d.h., sie beschreibt auch ein Versagen für hohen hydrostatischen Druck (Kappenmodell).

Ottosen entwickelte ein 4-Parameter-Modell unter Berücksichtigung derselben Kriterien der zuvor beschriebenen Modelle. Seine Funktionen entwickelte er aus einer mechanischen Analogie: Die Fläche entsteht aus einer druckbeanspruchten Membran, die an den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks festgehalten ist. In der Deviator-ebene entsteht annähernd ein Dreieck für kleine Werte von  $I_1$ , jedoch ein Kreis für große  $I_1$ -Werte.

Versagen tritt auf, wenn

$$f(I_1, J_2, \cos 3\vartheta) = A \frac{J_2}{f_c^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_c} + B \frac{I_1}{\sigma_c} - 1 = 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\lambda = \lambda(\cos 3\vartheta) = \begin{cases} K_1 \cos\left(\frac{1}{3} \arccos(K_2 \cos 3\vartheta)\right) & \text{für } \cos 3\vartheta \geq 0 \\ K_1 \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos(-K_2 \cos 3\vartheta)\right) & \text{für } \cos 3\vartheta \leq 0 \end{cases}$$

Der Beiwert  $K_1$  ist ein Größenfaktor,  $K_2$  ein Formfaktor. Diese beiden Koeffizienten und die Werte A und B sind für drei verschiedene Verhältnisse von  $f_t/f'_c$  in [94] tabelliert. Sie wurden so gewählt, daß die folgenden Zustände genau erfaßt werden:

1. einachsige Druckfestigkeit, 2. einachsige Zugfestigkeit,
3. Umschlingungsfestigkeit (=  $1,16 f'_c$ ). Als vierte Bedingung wurde der Druckmeridian aufgrund von Versuchswerten durch den Punkt  $(\xi/f'_c, \rho/f_t) = (-5, 0, 4, 0)$  geführt.

### A.3 Elastizitätsmodelle

Als Elastizitätsmodelle soll ein Materialkonzept verstanden sein, dessen konstitutive Gleichungen auf der Elastizitätstheorie beruhen, die durch einige Näherungsannahmen ergänzt werden, ohne Begriffe, wie Fließflächen, Fließregeln, endochrone Zeit usw., zu benutzen. Die Elastizitätstheorie wird von Truesdell (1955) in drei Stufen unterteilt: die elastische, die hyperelastische und die hypoelastische Formulierung (siehe Fung [95]).

1) elastische Formulierung

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{A.25})$$

es existiert eine lineare Beziehung zwischen Verzerrungen und Spannungen;

2) hyperelastische Formulierung

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \pi}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (\text{A.26})$$

wobei  $\pi$  eine Potentialfunktion ist, die von den Verzerrungen abhängt;

3) hypoelastische Formulierung

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (\text{A.27})$$

es existiert ein linearer Zusammenhang zwischen den Verzerrungs- und Spannungsgradienten.

Im Schrifttum werden die Formulierungen auch wie folgt eingeteilt:

1) totale Formulierung (mit gesamten Verzerrungen oder auch Sekantenformulierung)

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^S \epsilon_{kl} \quad (\text{A.28})$$

2) inkrementelle Formulierung (oder Tangentenformulierung)

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}^T d\epsilon_{kl} \quad (\text{A.29})$$

Diese zwei Formulierungen treten auch bei den Plastizitäts- und Endochronenmodellen auf.

Die totale Formulierung hat den Vorzug der einfachen Darstellungsform. Als Nachteil dieser Formulierung ist die Forderung nach der Wegunabhängigkeit anzusehen, was für den Beton nicht zutrifft. Das Entlasten ist auch mit Erschwernissen verbunden (siehe [80]).

Die inkrementelle Darstellung ist die meist verbreitete Formulierung für Betonstoffgesetze. Hierbei ist  $C_{ijkl}^T$  im allgemeinen eine Funktion der Spannungen, gelegentlich aber auch der Verzerrungen [80].

Hier soll bemerkt werden, daß die Elastizitätsmodelle im allgemeinen schlechte Voraussagen bei sehr hohen Spannungszuständen liefern. Dennoch werden sie im Rahmen der Schalen-FE-Analyse erfolgreich eingesetzt, da diese Zustände in den meisten Tragwerken beim Versagen der Struktur nicht auftreten. Das Versagen wird hauptsächlich durch das Reißen des Betons oder Fließen der Stahleinlagen beeinflusst.

### A.3.1 Elastizitätsmatrix

#### a) 3-dimensionaler Fall

In den Gl. (A.25) und Gl. (A.27) bis Gl. (A.29) ist die Elastizitätsmatrix  $C_{ijkl}$  definiert. Im dreidimensionalen Fall ( $i, j, k = 1$  bis 3) enthält die Matrix 81 Elemente. Es kann bewiesen werden ([31, 32]), daß diese Elemente nicht alle unabhängig sind. Für den allgemeinen anisotropen Fall werden 21 unabhängige Werte benötigt. Man kann die elastische Beziehung in Form einer 6x6-Matrix darstellen, indem die Symmetrie der Spannungen ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ) ausgenutzt und die Variablen  $\gamma_{ij} = \epsilon_{ij} + \epsilon_{ji}$  (für  $i \neq j$ ) eingeführt werden. Die Elastizitätsmatrix ist dann symmetrisch.

Zwei wichtige Sonderfälle sind die Orthotropie und die Isotropie. Bei der Orthotropie weist der Werkstoff drei Symmetrieebenen auf. Diese Ebenen besitzen die Eigenschaft, daß eine Spiegelung der Koordinatenachse normal zu dieser Ebene keine Änderung der Stoffmatrix bewirkt. Diese Ebenen können durch das Herstellungsverfahren (gewalzte Bleche), konstruktiv (Fahrbahnplatten) oder spannungsbedingt (Beton) entstanden sein.

Für die Beschreibung eines solchen Materials werden neun unabhängige Konstanten benötigt. Koaxialität zwischen Spannungen und

Verzerrungen existiert nur dann, wenn die Hauptspannungen mit den Symmetrieachsen zusammenfallen.

Im isotropen Fall ist jede Ebene eine Symmetrieachse. Hier werden zwei unabhängige Kennwerte benötigt, um das Werkstoffverhalten zu beschreiben. In den üblichen Werkstoffkennwerten  $E$  und  $\nu$  ausgedrückt, lautet das Elastizitätsgesetz:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{A. 30})$$

b) Ebener Spannungszustand

Für den ebenen Spannungszustand ( $\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0$  und  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$ ) wird der allgemeine anisotrope Fall mit sechs unabhängigen Werkstoffgrößen beschrieben.

Der für diese Arbeit wichtige orthotrope Fall kann mit den vier Parametern  $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2$  beschrieben werden (in den Hauptrichtungen):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E_1}{1-\nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_2 & \nu_2/\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_1 \nu_2}{1+2\nu_1 + \nu_1/\nu_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 31a})$$

mit der Dehnung in der dritten Richtung

$$\varepsilon_{33} = -(\sigma_1 + \sigma_2) \frac{\nu_1}{E_1}$$

Zum Einsatz in Abschnitt 3 wird Gl. (A.31a) umgeformt

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} E_1 \nu_2 E_1 & 0 \\ \nu_2 E_1 E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1(1-\nu_1 \nu_2)}{1+2\nu_1 + \nu_1/\nu_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 31b})$$

Bei Gln. (A.31a und A.31b) wurde bereits von folgender Eigenschaft Gebrauch gemacht [41]:

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} \quad (\text{A. 32})$$

Für den endgültigen zweiachsigen orthotropen Fall sind somit nur drei Werte zu bestimmen.

Für den isotropen zweiachsigen Fall reduziert sich Gl. (A.30) auf

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

mit den beiden üblichen Konstanten E,  $\nu$ .

### A.3.2 Einachsige Modelle

Für den einachsigen Fall beschränkt sich die Aufgabe auf die mathematische Beschreibung einer Spannungs-Verzerrungskurve. Im Bild A.1 ist die allgemeine Form dieser Kurve abgebildet. Popovics [96] und Wegner [17] geben mehrere Interpolationsformeln von anderen Autoren (Hognestad, Desayi & Krishnan, Saenz) an. Diese Modelle wurden mehrfach auch für zyklische Belastung mit Erfolg benutzt. Im Falle einachsiger Beanspruchung kann man die inkrementelle und die totale Formulierung mit gleichem Erfolg benutzen, da die Entlastung einfach zu erfassen ist.

### A.3.3 Zweiachsige Modelle

#### a) Modell von Kupfer/Gerstle [39]

Aus den Versuchen von Kupfer wurden die Kurven für die Oktaeder-spannungen und -verzerrungen für verschiedene Spannungsverhältnisse dargestellt (Bild A.15).

Aus diesen Bildern erkennt man, daß die Schubspannungskurve  $(\tau_o, \gamma_o)$  für denselben Beton unabhängig von den Spannungsverhältnissen ist, nicht aber die Normalspannungskurve  $(\sigma_o, \epsilon_o)$ .

Diese Eigenschaft wurde benutzt, um Werte für den Sekantengleitmodul ( $G_s$ ) zu ermitteln. Da der Gleitmodul G mit den elastischen Konstanten  $\nu, E$  von Gl. (A.33) in der Beziehung steht,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A.34})$$



Da ein wesentlicher Einfluß durch die Werte  $\tau_0$  und  $\gamma_0$  gegeben ist, schlagen die Autoren die folgende Formel zur Ermittlung von  $K_s$  vor

$$\frac{K_s}{K_0} = \frac{G_s/G_0}{e^{-(c\gamma_0)^p}} \quad (K_0 = \text{Anfangskompressionsmodul}) \quad (\text{A.39})$$

Da die Werte  $a, m, c, p$  für drei verschiedene Betonsorten in [39] angegeben werden, kann man die konstitutive Beziehung in  $G_s$  und  $K_s$  ausdrücken. Somit ist im Druckbereich ein elastisch, isotropes Stoffgesetz definiert. Schreibt man die Beziehung (A.30) mit Gl. (A.34) und Gl. (A.37) auf Kompressions- und Gleitmodul um und führt die Sekantenwerte ein, so erhält man für den zweiachsigen Spannungszustand

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = 4G_s \frac{3K_s + G_s}{3K_s + 4G_s} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3K_s - 2G_s}{2(3K_s + G_s)} & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{symm.} & & \frac{3K_s + 4G_s}{4(3K_s + G_s)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Für die inkrementelle FE-Analyse wird die Tangentenstoffmatrix benötigt. Mit den Ableitungen  $d\sigma_0/d\epsilon_0 = 3 K_T$  und  $d\tau_0/d\gamma_0 = 2 G_T$  werden die Tangentenwerte ermittelt, die - in Gl. (A.40) eingesetzt - die Tangentenmatrix liefern sollen.

Murray [81,97] widerspricht diesem Vorgehen und beweist, daß eine zusätzliche Matrix [B] zur ursprünglichen Tangentenmatrix [A] addiert werden sollte.

$$D_T = A + B \quad (\text{A.41})$$

mit

$$B_{ij} = \frac{8(G_T - G_s)}{3\gamma_0^2} (e_{ij} \cdot e_{ji}) \quad (\text{A.42})$$

Dieses gilt auch für das Stoffgesetz von Cedolin u.a. [18]. Dennoch liefert das von Kupfer/Gerstle vorgeschlagene Modell gute

Übereinstimmung mit Versuchen bei niedrigen Spannungswerten, jedoch nicht bei hoher Beanspruchung.

b) Liu, Nilson, Slate [99]

Diese Verfasser gehen von einer Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für den biaxialen isotropen Zustand aus. Mit den Bezeichnungen  $\sigma$  und  $\epsilon$  für die betrachteten Hauptrichtungen,  $\alpha$  für die dazu senkrechte Hauptrichtung und  $\alpha = \sigma_1 / \sigma$  für das Spannungsverhältnis, folgt

$$\sigma = \frac{E \epsilon}{1 - \nu \alpha} \quad (\text{A.43})$$

Diese lineare Beziehung wird den tatsächlichen Materialverhalten entsprechend auf folgende nichtlineare Gleichung erweitert,

$$\sigma = \frac{E}{1 - \nu \alpha} \left[ \frac{E_0}{1 + \left( \frac{1}{1 - \nu \alpha} \cdot \frac{E_0}{E_s} - 2 \right) \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_p} \right) + \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_p} \right)^2} \right] \quad (\text{A.44})$$

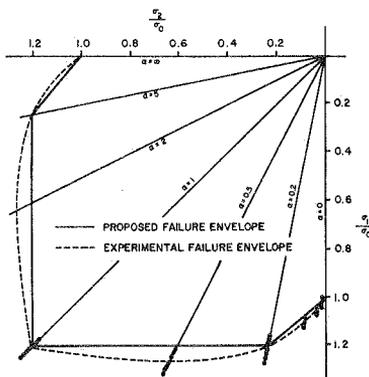
mit  $E_0$  = Anfangs-E-Modul

$E_s$  = Sekanten-E-Modul am Scheitelpunkt (=  $\sigma_p / \epsilon_p$ ) .

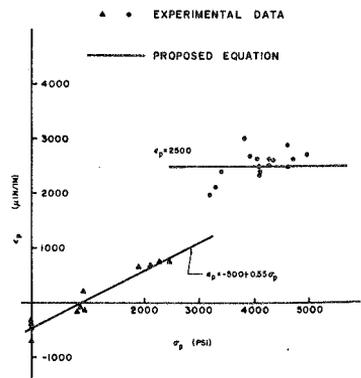
$\epsilon_p$  = Verzerrung am Scheitelpunkt

Für ein gegebenes Spannungsverhältnis  $\alpha$  kann aus Bild A.16a) die Grenzspannung in der betrachteten Richtung entnommen werden.

Bild 4.16b) gestattet dann hieraus die Ermittlung von  $\epsilon_p$  und damit des Sekantenmoduls  $E_s$ .



a)



b)

Bild A.16: Parameter-Ermittlung für Liu/Nilson/State Modell aus [99]

In [99] wird die konstitutive Gleichung (A.45) angegeben. Das inelastische Verhalten soll beschrieben werden, indem die Beanspruchung inkrementell aufgebracht wird.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{E_1}{E_2} & \lambda \nu_1 & 0 \\ \lambda \nu_1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2 + 2E_2 \nu_1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.45})$$

$$\text{mit } \lambda = \frac{E_1}{\left(\frac{E_1}{E_2} - \nu_1^2\right)}$$

Die Werte  $E_1$  und  $E_2$  sind die Tangentenelastizitätsmoduli. Für  $\nu_1$  wird der Wert 0,2 eingesetzt.  $E_1$  - und analog  $E_2$  - wird mit Ableitung von Gl. (A.44) gewonnen:

$$E_1 = \frac{dG_1}{dE_1} (1 - \alpha \nu) = \frac{E_0 \left[ 1 - \left( \frac{E_1}{E_p} \right)^2 \right]}{\left[ 1 + \left( \frac{1}{1 - \alpha} \frac{E_0}{E_s} - 2 \right) \left( \frac{E_1}{E_p} \right) + \left( \frac{E_1}{E_p} \right)^2 \right]^2} \quad (\text{A.46})$$

$E_1$  und  $E_2$  erfassen nur den Anteil der biaxialen Versteifung, die aus der Verhinderung der Mikrorißbildung entsteht. Der Querdehneffekt wird in Gl. (A.45) direkt berücksichtigt. Damit entsteht eine orthotrope Beschreibung des Verhaltens, die vom Belastungszustand abhängt.

Zu kritisieren ist die Annahme der Koaxialität des Verzerrungs- und Spannungstensors, die für Beton unter allgemeiner Belastung nicht zutreffend ist. Wie auch andere orthotrope Modelle mit ähnlichen theoretischen Mängeln konnte das Stoffgesetz dennoch in praktischen Rechnungen bestehen.

c) Link [41]

Dieses Stoffgesetz kann unter der Bezeichnung orthotrop, inkrementell und hyperelastisch (gleiche Spannungs-Verzerrungs-Wege bei Be- und Entlastung) eingereiht werden.

Die Werkstoffkennwerte werden in Abhängigkeit der Hauptspannungen  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$  formelmäßig durch Interpolationsformeln ausge-

drückt. Hierbei wurde auf die Versuche von Kupfer für mittlere Betonfestigkeit zurückgegriffen. Das Stoffgesetz ist demnach in folgender Form darzustellen

$$\Delta \sigma = f(\sigma_{11}/\beta_d, \sigma_{22}/\beta_d) \cdot \Delta \epsilon \quad (\text{A.47})$$

Zunächst wurden die Sekantenwerte ermittelt, um dann aus ihnen die Tangentenwerte auszurechnen (Bild A.17)

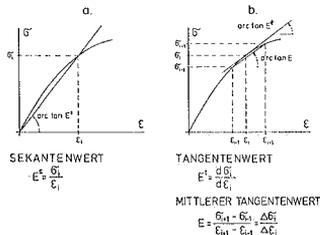


Bild A.17: Berechnung der mittleren Tangentenwerte (aus [41])

Für die inkrementelle Querdehnzahl ( $\nu^T$ ) wurden Werte größer als 0,5 erreicht. Diese für den üblichen Hookeschen Körper unzulässige Überschreitung kann anhand Bild A.2 erklärt werden. Dort ist zu erkennen, daß im höheren Druckbereich beim einachsigen Druckversuch eine Volumenvergrößerung auftritt. Schreibt man die Formel für die Dilatation in einem Inkrement, so entsteht

$$\Delta \frac{\Delta V}{V} = \Delta \epsilon_{11} + \Delta \epsilon_{22} + \Delta \epsilon_{33} = \frac{1}{E_1} (1 - 2\nu_1^T) \Delta \sigma_{11} + \frac{1}{E_2} (1 - 2\nu_2^T) \Delta \sigma_{22} \quad (\text{A.48})$$

Will man eine positive Dilatation bei Zunahme der Druckbeanspruchung erhalten, so müssen die Terme in Klammern von Gl. (A.48) negativ sein. Somit erhält man Werte  $\nu_1^T, \nu_2^T > 0,5$ .

Die mit diesen inkrementellen Verfahren ermittelten Spannungen werden daraufhin abgefragt, ob sie die Bruchkurve überschritten haben. Die mathematische Definition dieser Kurve wurde im Ab-

schnitt A.2.2e) erläutert. Für die Beschreibung des Nachbruchverhaltens wurden zwei Möglichkeiten zugelassen, je nachdem, ob Druck- oder Zugbruch auftritt. Diese beiden Varianten sind in Bild A.18 dargestellt.

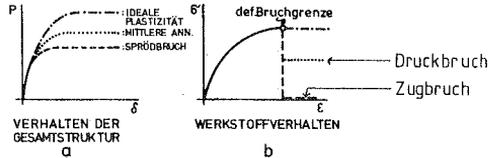


Bild A.18: Nachbruchverhalten für Struktur und Werkstoff  
(aus Link [41])

Druckbruch wird angenommen, wenn die Bruchkurve im gesamten Druck-Druck-Bereich, bzw. im Zug-Druck-Bereich bei einem Verhältnis  $\alpha < |\sigma_{0,07} / \sigma_{-1}|$  überschritten wird. In allen anderen Fällen wird Trennbruch in der Zughauptspannungsrichtung angenommen.

### A.3.4 Dreiaxiale Modelle

#### a) Coon/Evans [100]

Das allgemeine hypoelastische Stoffverhalten wird in diesem Modell in soweit eingeschränkt, daß der Tensor A nicht vom Verzerrentensor, aber linear von den Spannungen abhängen soll

$$d\sigma_{ij} = A_{ijkl}(\sigma_{ij}) d\epsilon_{kl} \quad (A.49)$$

In [100] ist der Werkstofftensor  $A_{ijkl}$  in Matrixform explizit angegeben. Er enthält sieben Werkstoffkonstanten und hängt nicht nur vom hydrostatischen Druck, sondern auch von den einzelnen Spannungswerten ab, was auf eine spannungsbedingte Anisotropie hinweist.

Mit dem Sonderfall der Gl. (A.49)

$$A_{ijkl}(\sigma_{ij}) d\epsilon_{kl} = 0 \quad (A.50)$$

wird der Versagenszustand beschrieben, bei dem - bei vorhandenen Verzerrungsinkrementen - keine Spannungsinkremente auftreten. Daraus folgt

$$\det A_{ijk}(\sigma_{ij}) = 0 \quad (\text{A.51})$$

Die Gleichung (A.51) wird in [100] ausführlich diskutiert. Die zugehörige Versagensfläche besteht aus zwei Flächen im Hauptspannungsraum. Eine ist pyramidenförmig (mit dreieckigem Schnitt), die andere ist gekrümmt. Es zeigt sich in manchen Spannungsbereichen, daß die inkrementellen Verzerrungen nicht dieselbe Richtung haben wie die inkrementellen Spannungen. Dies ist eine Eigenschaft der Stoffe mit innerer Reibung. In den restlichen Teilen der Fläche fallen die Richtungen der inkrementellen Verzerrungen und Spannungen zusammen. Da die Verzerrungsinkremente nicht immer senkrecht zur Versagensfläche ausfallen, schließen Coon/Evans die Verwendung der Plastizitätstheorie mit assoziierter Fließregel aus.

b) Elwi/Murray [101,81]

Bei diesem Modell wurde eine dreidimensionale Verallgemeinerung des zweiachsigen Stoffgesetzes von Darwin/Pecknold (siehe Abschnitt 3) vorgenommen. Dieses Modell wurde in achsensymmetrischen FE-Berechnungen eingesetzt.

Die konstitutive Beziehung lautet:

$$\begin{bmatrix} d\sigma_1 \\ d\sigma_2 \\ d\sigma_3 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Phi} \begin{bmatrix} (1-\mu_{23}^2)E_1 & (\mu_{12}\mu_{13}\mu_{23})\sqrt{E_1 E_2} & (\mu_{13}+\mu_{12}\mu_{23})\sqrt{E_1 E_3} & 0 \\ & (1-\mu_{13}^2)E_2 & (\mu_{23}+\mu_{12}\mu_{13})\sqrt{E_2 E_3} & 0 \\ & & (1-\mu_{12}^2)E_3 & 0 \\ \text{symm.} & & & G_{12}\Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_1 \\ d\varepsilon_2 \\ d\varepsilon_3 \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.52})$$

$$\mu_{ij}^2 = \nu_i \cdot \nu_j \quad ; \quad \Phi = 1 - \mu_{12}^2 - \mu_{23}^2 - \mu_{13}^2 - 2\mu_{12}\mu_{23}\mu_{13}$$

$$G_{12} = \frac{1}{4\Phi} (E_1 + E_2 - 2\mu_{12}\sqrt{E_1 E_2} - \sqrt{E_1} \mu_{23} + \sqrt{E_2} \mu_{13})^2$$

Die Bedeutung der E-Moduli ist in Abschnitt 3 erläutert. Die Gl. (A.52) wird umgeformt, so daß auf der rechten Seite nur Ausdrücke auf der Hauptdiagonalen auftreten. Das Vorgehen ist ebenfalls in Abschnitt 3 beschrieben.

$$\begin{bmatrix} dG_1 \\ dG_2 \\ dG_3 \\ d\tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & E_3 & \\ & & & G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\varepsilon_{1u} \\ d\varepsilon_{2u} \\ d\varepsilon_{3u} \\ d\gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

Die in Gl. (A.53) eingeführten Verzerrungen sind die "äquivalenten einachsigen Verzerrungen" (Abschnitt 3). Sie sind im vorliegenden 3D-Modell folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{iu} &= B_{ik} \cdot d\varepsilon_k \\ B_{ij} &= \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{E_j}{E_i}} (\mu_{ij} + \mu_{i(k)} \mu_{(kj)}) \quad \text{für } i \neq j \\ B_{iij} &= (1 - \mu_{jk}) \frac{E_i}{\phi} \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

Die einachsigen Verzerrungen Gl. (A.53):

$$d\varepsilon_{iu} = \frac{dG_i}{E_i} \quad (\text{A.55})$$

Das Konzept der einachsigen Verzerrung wird auf das nichtlineare erweitert, wobei die Gesamtverzerrungen wie folgt definiert sind:

$$\varepsilon_{iu} = \int d\varepsilon_{iu} = \sum \frac{\Delta G_i}{E_i} \quad (\text{A.56})$$

Der einachsige Modul  $E_i$  wird aus der Ableitung der Spannungen nach den äquivalenten Verzerrungen gewonnen. Zur Anpassung der einachsigen  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Beziehung an das wirklichkeitsnahe Verhalten von Beton wird der Ansatz von Saenz (2) benutzt. Ohne Herleitung sei das Ergebnis angegeben:

$$E_i = \frac{dG_i}{d\varepsilon_{iu}} = E_0 \frac{1 + (2R-1) \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^2 - 2R \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^3}{1 + (R+R_E-2) \frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} - (2R-1) \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^2 + R \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}}\right)^3} \quad (\text{A.57})$$

$$\text{mit } R = R_E \frac{R_0 - 1}{(R_E - 1)^2} - \frac{1}{R_E} \quad R_E = \frac{E_0}{E_S} \quad R_E = \frac{\epsilon_{if}}{\epsilon_{ic}} \quad R = \frac{\sigma_{ic}}{\sigma_{if}}$$

$$E_S = \frac{\sigma_{ic}}{\epsilon_{ic}}$$

Die Stoffkennwerte  $\epsilon_{ic}$ ,  $\sigma_{ic}$  sind der 5-Parameter- Versagensfläche von Willam/Warnke zu entnehmen, die in Abschnitt A.2.2 erläutert wurde. Die Autoren haben für  $\epsilon_{if}$  und  $\sigma_{if}$  die Werte  $4 \epsilon_{ic}$  bzw.  $0,25 \sigma_{ic}$  gewählt.

Die Werte der Querdehnzahlen  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  wurden durch Anpassung an die Ergebnisse aus den Kupferschen Versuchen [42] gewonnen:

$$\nu_1 = \nu_0 \left[ 1 + 1,3763 \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} - 5,36 \left( \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} \right)^2 + 8,586 \left( \frac{\epsilon_{iu}}{\epsilon_{ic}} \right)^3 \right] \quad (\text{A.58})$$

c) Ottosen [81,102]

Der Materialbeschreibung von Ottosen liegt ein linear elastisches und isotropes Modell zugrunde. Die Spannungen werden aus den gesamten Verzerrungen gewonnen.

Kernstück dieser Formulierung ist die Einführung eines Nichtlinearitätsindex  $\beta$ . Dieser soll angeben, wie weit der vorhandene Spannungszustand vom Versagenszustand entfernt ist. Als besonders geeignet fand Ottosen die folgende Möglichkeit: Man ordnet die Hauptspannungen, so daß  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , und variiert  $\sigma_3$  bis ein Bruchzustand erreicht ist. Der Grenzwert von  $\sigma_3$  für den Bruchzustand wird mit  $\sigma_{3f}$  bezeichnet.  $\beta$  wird dann - wie im Bild A.19 gezeigt - ermittelt.

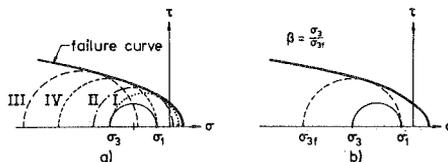


Bild A.19: Ermittlung des Nichtlinearitätsindex  $\beta$  (aus Ottosen [102])

Beim Auftreten von Zugspannung ist eine geringe Modifikation des Vorgehens vorgesehen.

Die Kurve von Bild A.19 kann eine beliebige Versagensfläche sein. Es empfiehlt sich jedoch, von allen drei Spannungsinvarianten eine Funktion zu wählen, um deren Einfluß auf  $\beta$  zu berücksichtigen.

Die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung wird durch eine von Sargin entwickelte Formel beschrieben [102]. Die wichtige Gleichung für den Sekantenmodul  $E_s = \sigma/\epsilon$ , die aus dieser Formel gewonnen wird, lautet:

$$E_s = \frac{1}{2} E_i - \beta \left( \frac{1}{2} E_i - E_f \right) \pm \sqrt{\left[ \frac{1}{2} E_i - \beta \left( \frac{1}{2} E_i - E_f \right) \right]^2 + E_f^2 \beta [D(1-\beta) - 1]} \quad (\text{A.59})$$

mit  $E_i = E_0$

$E_f$  = Sekantenwert des E-modul beim dreiachsigen Versagen  
(f = failure)

D = Parameter zur Steuerung des Nachversagensbereichs

$E_f$  wird aus  $E_c$  ermittelt ( $E_c = \sigma_c/\epsilon_c$ ; einachsig)

$$E_f = \frac{E_c}{1 + 4(A-1)x} \quad (\text{A.60})$$

mit  $A = E_i/E_c$

$$x = \left( \frac{\sqrt{J_2}}{\sigma_c} \right)_f - \frac{1}{\sqrt{3}} .$$

Der "Sekantenwert" der Querdehnzahl wird mit den Beziehungen

$$\begin{aligned} v_s &= v & \text{für } \beta < \beta_a \\ v_s &= v_f - (v_f - v) \sqrt{1 - \left( \frac{\beta - \beta_a}{1 - \beta_a} \right)^2} & \text{für } \beta > \beta_a \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

wobei Ottosen die folgenden Grenzwerte angibt:

$$\begin{aligned} \beta_a &= 0,8 \\ v_f &= 0,36 . \end{aligned}$$

Die zwei Werte  $E_S, \nu_S$  sind in Gl. (A.3o) an Stelle von  $E, \nu$  einzusetzen. In [1o2] ist die Tangentenmatrix nicht angegeben, die für eine inkrementelle FE-Analyse notwendig ist.

d) Weitere Modelle

Kotsovos und Newman [9o] stellen ein nichtlinear elastisches isotropes Modell vor. Es wurde dabei angenommen, daß der Beton keine Tragfähigkeit im Zugbereich besitzt. Als Versagenskriterium wird die 5-Parameter-Fläche von Warnke/Willam benutzt (siehe Abschnitt A.2.2f).

In dieser Arbeit wird mit den Sekantenwerten der Kompressions- und Gleitmoduli gearbeitet. Dabei werden die folgenden Gleichungen benutzt:

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{2G_S} \quad ; \quad \epsilon_0 = \frac{G_0 + G_{int}}{3K_S} \quad (A.62)$$

Wichtig ist der Spannungsterm  $\sigma_{int}$ , der wiederum von  $\tau_0$  und  $\sigma_0$  abhängt. Er erfaßt die Abhängigkeit der Volumenänderung vom hydrostatischen Druck.

$$\frac{G_{int}}{f_c} = A \left( \frac{\tau_0}{f_c} \right)^B \quad (A.63)$$

mit  $A = \frac{1,3}{1 + 0,444 \left( \frac{\tau_0}{f_c} \right)^{-2,415}} \quad ; \quad B = 1,0$

Die angegebenen Zahlenwerte sind nur für den in [9o] untersuchten Betontyp gültig.

In [9o] werden Formeln für  $K_S = f(K_0, \sigma_0)$ ,  $G_S = f(G_0, \tau_0)$  angegeben. Aus den Ableitungen von Gl. (A.63) können die Tangentenwerte  $K_T, G_T$  gewonnen werden. Für dieses Modell gilt die Einschränkung von Murray (siehe Abschnitt A.3.3a). Ferner soll bemerkt werden, daß dieses Modell wegunabhängig ist, was die Verfasser aufgrund von Versuchen als berechtigt ansehen.

Dieselben Verfasser erweitern in [1o3] dieses Stoffgesetz auf über den Bruch hinausgehende Zustände.

Bazant/Tsubaki [104] entwickelten ein Modell unter Verwendung von gesamten Verzerrungen. Es erfaßt den abfallenden Ast der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung und die Volumenänderung, die die Schubspannungen hervorrufen. Die Sekantenwerte ( $K_s, G_s$ ) hängen von den ersten und zweiten Invarianten der Spannungs- und Verzerrungstensoren ab. Das Modell wird für nichtproportionale monotone Belastung erweitert. Diese Erweiterung hat zur Folge, daß die Spannungs- und Verzerrungstensoren - wie in Versuchen bestätigt - nicht mehr koaxial sind.

#### A.4 Plastizitätsmodelle

Versuche haben gezeigt, daß der Beton nach der Entlastung bleibende Verformungen aufweist. Dieses führte zum Gedanken, die verbleibenden Verformungen mit der Plastizitätstheorie zu berücksichtigen. Die Merkmale der Plastizitätstheorie können im Buch von Salençon [91], Hill [105] oder in den Arbeiten [58,81] vertieft werden; hier sollen sie nur kurz dargelegt werden:

- 1) Fließbedingung - besagt, bei welcher Kombination und bei welcher Größe der Spannungen das Fließen eintritt.
- 2) Maß für die mehrachsigen plastischen Verzerrungen - gibt das Ausmaß der inelastischen Verzerrungen an.
- 3) Fließregel - zeigt die Verteilung von den plastischen Verzerrungen an.
- 4) Verfestigungsregel - beschreibt die Änderung der Fließbedingung im plastischen Bereich.

Anschließend werden ein paar elasto-plastische Betonmodelle vorgestellt, die erfolgreich angewendet worden sind. Hier soll bemerkt werden (siehe [80]), daß die physikalischen Grundgedanken der Plastizitätstheorie für den Beton nicht zutreffen. Geht die Plastizitätstheorie von Verschiebung der Kristallstruktur des Werkstoffs aus, so handelt es sich beim Beton um Rißprozesse. Dieser Gedanke wurde in der "Plastic-fracturing"-Theorie von Bazant/Kim [106,83] aufgenommen, die im Abschnitt (A.4e) näher erläutert wird.

a) Hand/Pecknold/Schnobrich [23]

Bei dem Modell handelt es sich um ein biaxiales, isotropes, idealplastisches Stoffgesetz. Für den einachsigen Vergleichszustand wird ein trilineares Verhalten eingeführt (Bild A.20a)

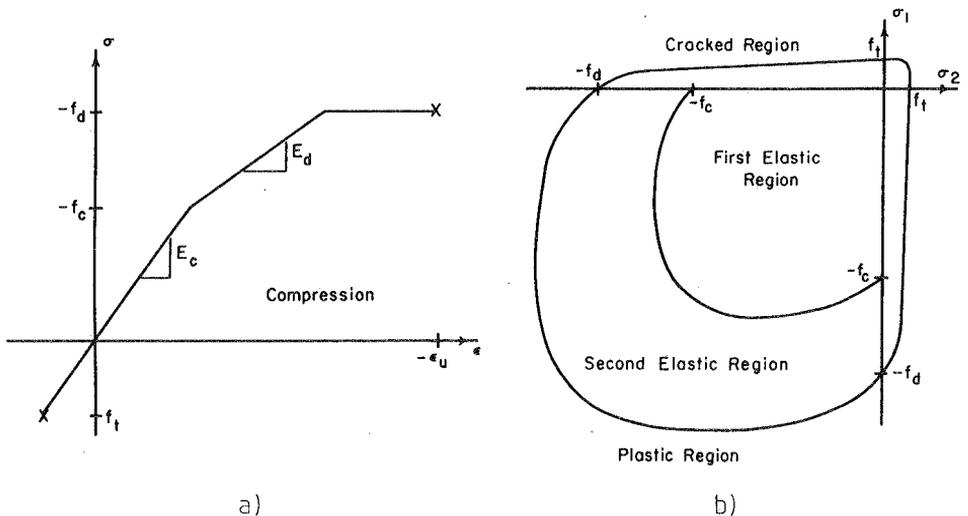


Bild A.20: Hand/Pecknold/Schnobrich-Modell [23]

Die ersten zwei Bereiche beschreiben das elastische Verhalten durch verschiedene E-Moduli. Sie werden im zweiachsigen Spannungsraum (im Druck/Druck-Bereich) mit einer Funktion gegeneinander abgegrenzt, deren mathematische Form auch der Fließbedingung entspricht. Die Form dieser Kurve wird aus den Versuchen von Kupfer [42] hergeleitet:

$$\tau_0 + \sqrt{2} \frac{1-\alpha}{1+\alpha} G_0 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\alpha}{1+\alpha} f'_c = 0 \quad (G_1 > 0) \quad \text{a)} \quad (\text{A.64})$$

$$\tau_0 + \sqrt{2} \frac{\beta-1}{2\beta-1} G_0 - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{\beta}{2\beta-1} f'_c = 0 \quad (G_1 < 0) \quad \text{b)}$$

wobei  $\alpha, \beta$  aus Versuchen stammen.

Um den ersten elastischen Bereich abzugrenzen, wird in Gl. (A.64) für  $f'_c \rightarrow f_c$  eingesetzt; um die Fließbedingung zu bekommen, setzt man anstelle von  $f'_c \rightarrow f_d$  ein. Um den Punkt  $(-f_d, -\epsilon_u)$  in Bild A.20a festzulegen, wird im biaxialen Bereich ein Verzerrungskriterium eingeführt. Dazu wird in Gl. (A.64b)  $\tau_0$  und  $\sigma_0$  durch  $\gamma_0$  und  $\epsilon_0$  ersetzt. Ebenso wird  $f'_c$  durch  $\epsilon_u$  abgelöst.

In der biaxialen konstitutiven Matrix Gl. (A.33) werden je nach Spannungszustand die Werte  $E_c$  bzw.  $E_d$  (Bild A.20b) eingesetzt. Im plastischen Bereich wird so verfahren, daß die Spannungen und Verzerrungen der Normalenregel genügen. Die konstitutive Matrix wird dann mit Hilfe der klassischen Plastizitätstheorie gewonnen. Wenn Gl. (A.64a) einen Riß anzeigt, wird die Steifigkeit in Rißrichtung (d.h. normal zur entsprechenden Hauptspannungsrichtung) gleich Null gesetzt, z.B. für Riß in Richtung 2:

$$C = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.65})$$

wobei  $E = E_c, E_d$  oder Null sein kann.

Der Schubfaktor  $\beta$  wird im allgemeinen als 0,4 angenommen. Bei zwei vorhandenen Rissen wird  $C = 0$  gesetzt. Abschließend soll bemerkt werden, daß dieses Modell keinen Entlastungsvorgang vorsieht, obwohl dieses bei nichtlinearen Problemen örtlich möglich ist, auch wenn die äußeren Lasten monoton steigen.

b) Murray u.a. [107,108,109]

In der Arbeit wurde ein verfeinertes biaxiales Stoffgesetz entwickelt, welches die Beschreibung über den Rißzustand hinaus erlaubt. Es kann mit der Bezeichnung anisotrop-verfestigend gekennzeichnet werden.

Die Fließbedingung wird mit drei Parametern definiert, die sich während des Belastungsvorgangs ändern. Im Zug/Zug-Bereich sind zwei unterschiedliche Werte ( $\sigma_{t1}, \sigma_{t2}$ ) für die Grenzspannungen vorgesehen, da verschiedene Verzerrungswerte in beiden Hauptrichtungen eine unterschiedliche Mitwirkung des Betons hervorgerufen. Der Druck/Druck-Zustand wird mit einem einzigen Parameter gekennzeichnet. Damit ist die Fließbedingung:

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{t1}, \alpha_{t2}, \alpha_t) = 0 \quad (\text{A.66})$$

wobei  $\sigma_1, \sigma_2$  Hauptspannungen sind. Das Modell wurde für achsensymmetrische dünne Schalenprobleme angewandt, weshalb keine Rotationen der Hauptspannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  im Stoffgesetz erforderlichlich sind.

Gl. (A.66) ist im Bild A.21b graphisch dargestellt.

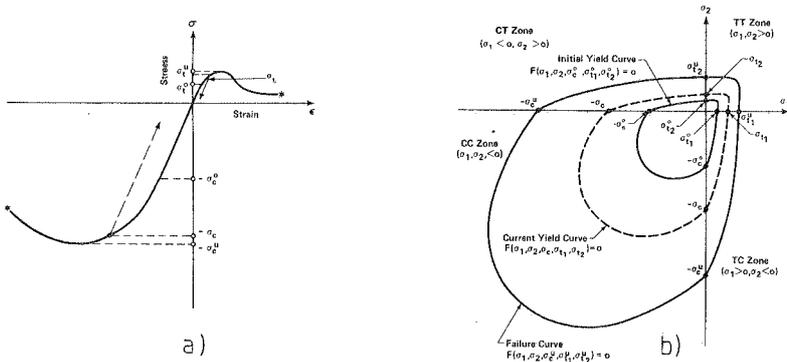


Bild A.21: Modell von Murray u.a. (aus [108])

Es ist zu erkennen, daß Fließbeginn und endgültiges Versagen mit derselben Kurvenform beschrieben wird. Allerdings müssen die Werte  $\sigma_{t1}, \sigma_{t2}, \sigma_c$  dem aktuellen Zustand entsprechend der Verfestigungsregel angepaßt werden. Die Fließregel, die bereichsweise definiert wird, ist im angegebenen Schrifttum näher beschrieben. Die plastischen Verzerrungen werden nach der Normalenregel bestimmt:

$$\dot{\epsilon}^P = \dot{\epsilon}^P \frac{B}{B} \quad (\text{A.67})$$

mit dem plastischen Verzerrungsmaß

$$\dot{\epsilon}^P = \sqrt{\dot{\epsilon}^{P1} \cdot \dot{\epsilon}^P}$$

und dem Normalenvektor

$$B = \frac{\partial F}{\partial \sigma}$$

und

$$B = \sqrt{B^T \cdot B}$$

Das gesamte plastische Verzerrungsmaß  $\dot{\epsilon}^P$  wird entsprechend des Spannungszustands über Faktoren  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  zerlegt. Dabei wird dem Druck ein Parameter  $\lambda$  und - wegen der Anisotropie im gerissenen Zustand - dem Zug zwei Parameter  $\mu_1$  und  $\mu_2$  zugeordnet.

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \alpha \dot{\epsilon}^P \\ \dot{\mu}_1 &= \beta_1 \dot{\epsilon}^P \\ \dot{\mu}_2 &= \beta_2 \dot{\epsilon}^P \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

$$\alpha + \beta_1 + \beta_2 = 1$$

Die Grenzwerte von  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  sind in [107, 108] angegeben. Die Integration von Gl. (A.68) führt zu den aktuellen Parametern  $\lambda, \mu_1, \mu_2$ .

Die Verfestigung, wie sie in Bild A.21a dargestellt ist, kann in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \sigma_c^0 + g(\lambda) \\ \sigma_{t_1} &= \sigma_{t_1}^0 + h(\mu_1) \\ \sigma_{t_2} &= \sigma_{t_2}^0 + h(\mu_2) \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

$g$  und  $h$  sind Verfestigungsfunktionen, die von den Aufteilungsparametern  $\lambda, \mu_1, \mu_2$  abhängen.

Aus den bisherigen Gleichungen kann das inkrementelle Stoffgesetz

$$\dot{\sigma} = D_{EP} \cdot \dot{\epsilon} \quad (\text{A.70})$$

ermittelt werden, wie es für die FE-Berechnung benötigt wird.

Die Stoffmatrix

$$D_{EP} = D \cdot (I - C) \quad (\text{A.71})$$

enthält die Matrix  $C$  für die plastischen Verzerrungen.

$$\dot{\epsilon}^P = C \cdot \dot{\epsilon} \quad (\text{A.72})$$

Unter Anwendung der Konsistenzbedingung (Prager) folgt für  $C$ :

$$C = \frac{B \cdot B^T \cdot D}{A} \quad (\text{A.73})$$

wobei

$$A = B^T D B - B \left[ \alpha g'(\lambda) \frac{\partial F}{\partial \sigma_c} + \beta_1 h'(\mu_1) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{t_1}} + \beta_2 h'(\mu_2) \frac{\partial F}{\partial \sigma_{t_2}} \right]$$

( )' = Ableitung nach der einzigen Variablen.

c) Chen/Chen [110]

Hier wurde ein elasto-plastisches Verfahren entwickelt, dessen Merkmal die kombiniert isotrope und kinematische Verfestigung ist.

Zunächst wird die Anfangsfließfläche vorgestellt, die dieselbe Form wie die Bruchfläche hat. Als Nachteil erweist sich, daß die Funktion nur von  $I_1, J_2$  abhängt, obwohl die dritte Invariante eine Rolle im Bruchverhalten aufweist.

$$f_u(\sigma_{ij}) = \frac{\chi^2}{3} J_2 - \frac{\chi^2}{36} I_1^2 \pm \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{1}{3} A_u I_1 = \tau_u^2 \quad (\text{A.74})$$

Der Index "u" kennzeichnet den Bruchzustand (ultimate), für den Fließbeginn wird er durch "0" ersetzt. Das Vorzeichen im dritten Term ist positiv für den Druck/Druck-Bereich, negativ für den Zug/Zug-Bereich. Der Wert  $\kappa$  gibt die Form der Kurve an (Ellypse, Parabel bzw. Hyperbel). In [110] wird  $\kappa = 3$  gesetzt, was einer

Parabel entspricht.  $A_u, \tau_u$  (ebenso  $A_o, \tau_o$ ) sind werkstoffabhängig und können durch  $f'_c, f'_t, f'_{cb}$  ausgedrückt werden.

Zwischen den Anfangs- und Bruchflächen sind die Zwischenzustände durch

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{\frac{\chi^2}{3} J_2 - \frac{\chi^2}{36} I_1^2 + \frac{1}{12} I_1^2 + \frac{\beta}{3} I_1}{1 - \frac{\alpha}{3} I_1} = \tau^2 \quad (A.75)$$

definiert. Die Werte  $\alpha, \beta$  sind in [111] explizit angegeben. Sie entstehen aus der Forderung, daß Gl. (A.75) für die Grenzzustände in Gl. (A.74) übergehen muß. Die Flächen nach Gl. (A.75) vergrößern sich formgleich und werden gleichzeitig auf der hydrostatischen Achse verschoben.

Die Kurven nach Gl. (A.74) und (A.75) sind im Bild A.22 graphisch dargestellt.

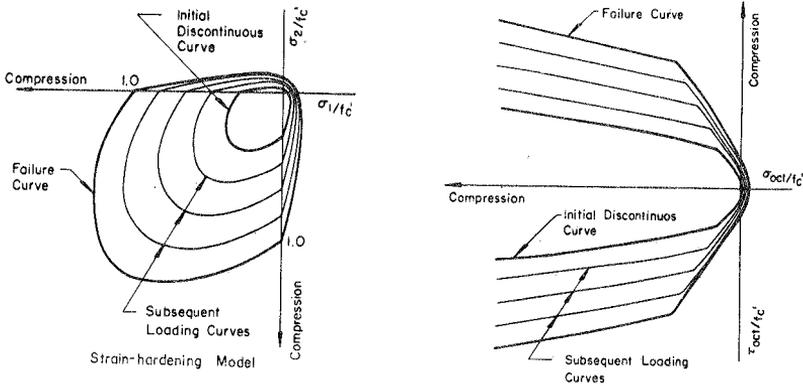


Bild A.22: Fließflächen nach Chen/Chen (aus [110])

Unter Benutzung der klassischen Plastizitätstheorie (Normalenregel und Konsistenzbedingung) wird die Beziehung hergeleitet:

$$d\epsilon_{ij} = \left[ H_{ijkl} + \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}{H \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \sigma_r} \frac{\partial f}{\partial \sigma_r}}} \right] d\sigma_{kl} \quad (A.76)$$

H ist der Verfestigungsgradient des äquivalenten einachsigen Stoffgesetzes,  $H_{ijkl}$  die Inverse der elastischen Stoffmatrix.

Die für die Verschiebungsformulierung notwendige inverse Beziehung zu Gl. (A.76) wird in [110] für den biaxialen und in [84] für den dreiaxialen Zustand angegeben.

Dieselben Funktionen nach Gl. (A.74), (A.75) wurden von Chen/Suzuki [111] benützt, um ein modifiziertes Modell zu entwickeln. Ausgangspunkt ist die Arbeit von Wu [112], in der er ein doppeltes Versagenskriterium vorschlägt, bei dem der Bruchzustand nicht nur von einer Spannungsbedingung, sondern auch von einer Verzerungsbedingung abhängt. Das Spannungskriterium wird mit Gl. (A.74) gebildet, das Verzerrungskriterium enthält zwei Bedingungen:

$$a) \quad g(\epsilon_{ij}) = J_2' + \frac{A_U}{3} \left( \frac{\epsilon_U}{f_c'} \right) I_1' = (\tau_U)' \left( \frac{\epsilon_U}{f_c'} \right)^2 \quad (A.77)$$

oder

$$b) \quad I_1' = \epsilon_U$$

Der biaxiale Fall ist in Bild A.23 graphisch dargestellt.

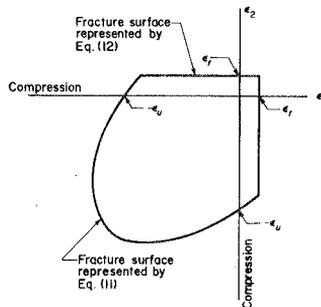


Bild A.23: Chen/Suzuki Verzerrungskriterium (aus [111])

Wenn eines von beiden Kriterien erfüllt ist, ist ein Bruchzustand erreicht.

Es wird bei diesem Modell auch zwischen Zug- und Druckbruch unterschieden. Druckbruch tritt auf, wenn

$$J_2 \leq -\frac{1}{\sqrt{3}} I_1 \quad \text{und} \quad I_1 \leq 0 \quad (\text{A.78})$$

Andernfalls wird ein Zugbruch angenommen, wobei die Normalspannung in der Spannungshaupttrichtung oder in der Verzerrungshaupttrichtung zu Null gesetzt wird, je nachdem, ob Gl. (A.74) oder Gl. (A.77) verletzt wird. Beim Druckbruch fällt der ganze Bereich für die Lastabtragung aus.

d) Chen/Schnobrich [113]

In der Arbeit wird ein Modell vorgestellt, das durch eine nicht-assozierte Fließregel und eine Behandlung des Nachrißverhaltens gekennzeichnet ist.

Die aktuelle Fließfläche wird über einen Verfestigungsparameter  $\omega$  kontrolliert; sie hat die Form

$$f(\sigma_{ij}, \omega) = \sqrt{2} J_2 - \omega [(1 - s^2 \vartheta_1^2) \rho_1 + s^2 \vartheta_1^2 \rho_2^2] = 0 \quad (\text{A.79})$$

mit  $0,3 \leq \omega \leq 1$ .

Die plastischen Verzerrungen werden durch eine nichtassozierte Fließregel beschrieben. Der Normalenwinkel  $\phi$  wird folgendermaßen transformiert (siehe Bild A.24):

$$\phi^* = \phi [(1 - s^2 \vartheta_1^2) + (s^2 \vartheta_1^2) \phi_g] \quad (\text{A.80})$$

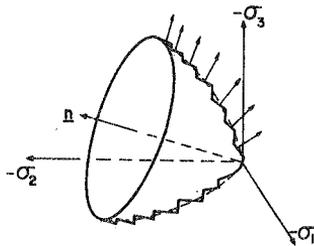


Bild A.24: Fließfläche mit Normalen (aus [113])

Zur Beschreibung des Nachrißverhaltens wird der ungestörten Stoffmatrix eine andere Matrix überlagert. Die Matrix, die eine Normalspannung und zwei Tangentialspannungen mit den zugehörigen Verzerrungen verbindet, wird in lokalen Rißkoordinaten definiert. Sie ist nicht symmetrisch, was durch eine Zwangssymmetrisierung aufgehoben wird.

Diese Matrix wird von den Rißkoordinaten aus transformiert und im Stoffgesetz mit einem Gewicht

$$W_i = \frac{1}{(1-\omega)^n} \quad (\text{A.81})$$

berücksichtigt. Somit hängt der Spannungsabbau nach dem Reißen von dem Verfestigungsparameter  $\omega$  ab.

Für Bruch und Reißen wird ein Verzerrungskriterium verwendet.

e) "Plastic-Fracturing"-Theorie (Bazant/Kim [106,83])

Wie der Name verrät, versucht dieses Stoffgesetz, zwei Phänomene in sich zu erfassen: erstens das plastische Verhalten im Beton, also die Zunahme der inelastischen Verzerrungen bei konstanter Spannung (ideale Plastizität), zweitens das Bruchverhalten, d.h. das Abfallen der Spannung bei konstanter Verzerrung. Unter Bruchverhalten ist nicht der endgültige Versagenszustand gemeint, sondern die Wirkung der Mikrorisse auf das gesamte Verhalten von Anfang an. Um dieses zu verdeutlichen, werden im Bild A.25 beide Anteile im einachsigen Fall gezeigt.

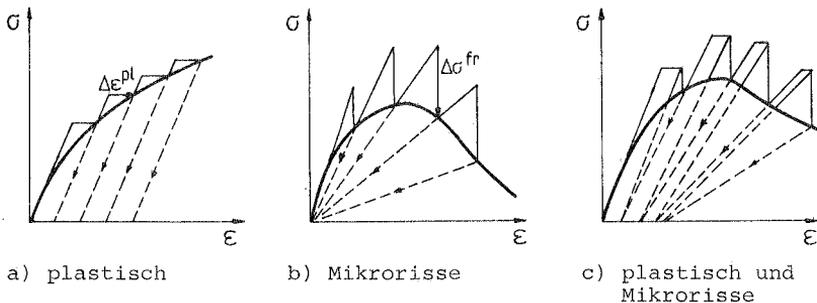


Bild A.25: Plastische und Mikrorißkomponenten

Für die plastische Komponente wird die Normalenregel nicht gefordert. Die Fließfläche ist vom Drucker-Prager-Typ:

$$F(\bar{\sigma}_{ij}, H_k) = \bar{\tau}^* + g(\sigma^*) - H_1 = 0 \quad (\text{A.82})$$

$$\text{mit } \bar{\tau}^* = \tau_0 \quad g(\bar{\sigma}^*) = \beta \frac{G_{kk}}{3}$$

$$G = G_0$$

Die mit "\*" gekennzeichneten Größen sind deviatorisch. Sie enthalten Terme, die die Verschiebung des Nullpunkts der Fließfläche bewirken, da später eine kinematische Verfestigung eingeführt wird, um die Inelastizität bei Entlastung zu erfassen (siehe dazu Bild A.26).

Die Ermittlung der plastischen Verzerrungen erfolgt zunächst durch Anwendung der Normalenregel auf Gl. (A.82). Die Herleitung wird von den Autoren in deviatorischen Größen vorgenommen und führt zu:

$$de_{ij}^{pl} = S_{ij}^* \frac{d\mu}{\bar{\tau}^*} \quad ; \quad de_v^{pl} = \frac{2}{3} \beta \cdot d\mu \quad (\text{A.83})$$

$$\text{wobei } d\mu = \frac{d\tau^* - \beta' d\sigma}{2h} \quad (\text{wenn } d\mu \geq 0; \text{ sonst } d\mu = 0)$$

Die Werte  $\beta$  und  $\beta'$  drücken den Unterschied zur klassischen Plastizitätstheorie aus.  $\beta$  beschreibt die plastische Volumenänderung, während  $\beta'$  (=  $dg(\sigma^*)/d\sigma^*$ ) die Reibungswirkung ausdrückt. Der Verfestigungsmodul  $h$  wird, zusammen mit  $\beta$  und  $\beta'$  in [106] explizit angegeben.

Mit den erwähnten Konstanten wird eine plastische Tangentensteifigkeit  $C_{ijkl}^{pl}$  aufgestellt, die zur Bildung der gesamten inkrementellen Stoffmatrix benötigt wird:

$$C_{ijkl}^{pl} = \frac{\left( \frac{G}{\bar{\tau}^*} S_{ij}^* + K \beta \delta_{ij} \right) \left( \frac{G}{\bar{\tau}^*} S_{km}^* + K \beta' \delta_{km} \right)}{G + h + K \beta \beta'} \quad (\text{A.84})$$

Ausdrücke für Kompressionsmodul  $K$  und Gleitmodul  $G$  werden von Budiansky/Connor [114] auf makroskopische Ebene angegeben. Sie werden auf der Grundlage eines Kontinuums mit wahllos verteilten elliptischen Rissen entwickelt.

$$f_K(v) = \frac{K}{K_0} = 1 - \frac{16}{9} \left( \frac{1 - v^2}{1 - 2v} \right) \cdot C$$

$$f_G(v) = \frac{G}{G_0} = 1 - \frac{8}{45} (10 - 7v) \cdot C \quad (\text{A.85})$$

$$C = \frac{45}{8} \frac{v_0 - v}{(1+v)(10v_0 - v - 8v_0v)}$$

In der Arbeit wird  $v$  nicht angegeben.

Die Mikrorißkomponente wird aus einer Arbeit von Dougill [115] hergeleitet. Dort wird ein Werkstoff untersucht, der zu keinen plastischen Verformungen fähig ist. Er besteht aus Fasern, die nur eine begrenzte Zug- bzw. Druckfestigkeit aufweisen. Da der Stoff sich elastisch verhält - beim Entlasten verschwinden die Verzerrungen -, kann man schreiben

$$G_{ij} = C_{ijkl} \cdot \epsilon_{km} \quad (\text{A.86})$$

Bei Bildung des Differentials

$$dG_{ij} = C_{ijkl} \cdot d\epsilon_{km} + dC_{ijkl} \cdot \epsilon_{km} = C_{ijkl} \cdot d\epsilon_{km} - d\sigma_{ij}^{fr} \quad (\text{A.87})$$

entsteht der Term  $d\sigma_{ij}^{fr} = -dC_{ijkl} \cdot \epsilon_{km}$ .

Er beschreibt den Spannungsverlust infolge von Mikrorissen.

Um die Richtung dieser Spannungsverluste ermitteln zu können, wird wie bei der Plastizitätstheorie eine Fläche eingeführt, die alle ungerissenen Zustände einschließt. Diese Fläche wird in Verzerrungen ausgedrückt und ist wie oben auch vom Drucker-Prager-Typ:

$$\Phi(\epsilon_{ij}, H'_k) = \bar{Y}^* + k(\epsilon^*) - H'_1 = 0 \quad (\text{A.88})$$

Obwohl diese Funktion analog zur Gl. (A.82) ist, ersetzen hier Verzerrungsterme die Spannungsterme.

Zur Bestimmung der Spannungsabfälle durch die Rißbildung wird für die abfallenden Äste der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung ein Stabilitätskri-

terium benötigt, da die Drucker-Postulate keine Aussage in diesem Fall erlauben. Il'iushin [116] stellt ein erweitertes Stabilitätskriterium vor, welches den Be- und Entlastungsvorgang an Stelle von Spannungen durch Verzerrungen kontrolliert. Das Postulat hat eine Normalenregel zur Fläche  $\phi$  für die Reißspannungen zur Folge. Es ist damit analog zur Normalenregel der Plastizitätstheorie, allerdings sind Spannungs- und Verzerrungsterme vertauscht.

Die endgültige Steifigkeitsmatrix infolge von Mikrorissen lautet somit:

$$C_{ijkm}^{fr} = \phi \left( \frac{e_{ij}^*}{2\bar{\gamma}^*} + \frac{\alpha}{3} \delta_{ij} \right) \left( \frac{e_{km}^*}{2\bar{\gamma}^*} + \frac{\alpha'}{3} \delta_{km} \right) \quad (A.89)$$

$\phi$  = "fracturing modulus" (Formel im Schrifttum angegeben)  
analog zu  $h$  in Gl. (A.83)

$\alpha$  = "fracturing dilatancy modulus", analog zu  $\beta$  in Gl. (A.83)

$\alpha'$  = "volumetric fracturing stiffness", analog zu  $\beta'$  in Gl. (A.83).

Für  $\alpha = \alpha'$  wird die Normalenregel gegenüber der Reißfläche, für  $\beta = \beta'$  die Normalität zur Fließfläche erfüllt.

Damit lautet das gesamte Stoffgesetz

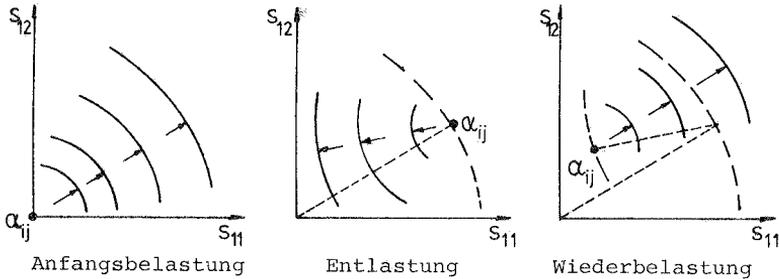
$$d\sigma_{ij} = C_{ijkm}^t \cdot d\epsilon_{km} = (C_{ijkm} - C_{ijkm}^{pl} - C_{ijkm}^{fr}) \cdot d\epsilon_{km} \quad (A.90)$$

wobei die elastische Stoffmatrix  $C_{ijkm}$  in Abhängigkeit von  $K$  und  $G$  aus Gl. (A.85) und  $C_{ijkm}^{pl}$ ,  $C_{ijkm}^{fr}$  aus Gl. (A.84) bzw. Gl. (A.89) ermittelt wird.

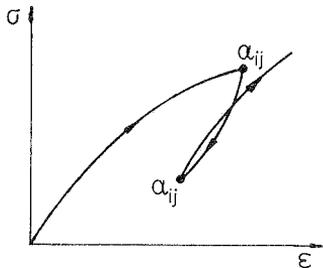
Folgende Bemerkungen seien angefügt: 1) Die Matrix  $C_{ijkm}^t$  ist im allgemeinen unsymmetrisch; dies ist eine sehr unangenehme Charakteristik. 2) Die Werte  $h, \phi, \beta', \alpha', \beta, \alpha$  sind Funktionen der Spannungs- und Verzerrungsinvarianten und der Betondruckfestigkeit  $f_c'$ . Sie wurden durch Anpassung an Versuchen ermittelt. 3) Die

dritte Invariante der Spannungs- bzw. Verzerrungstensoren wird nicht mitgenommen; die Versagenskurve weist aber durch die Interaktion von Reißwirkung und plastischer Wirkung einen nichtkreisförmigen deviatorischen Schnitt auf.

Eine interessante Variante für Entlastung und zyklischer Belastung wird vorgestellt. Dieses ist das "jump kinematic hardening". Um eine nichtelastische Antwort bei Entlastung zu bekommen, wird der Koordinatensprung von den Fließ- und Reißflächen beim Beginn der Entlastung zum aktuellen Punkt verschoben. Somit zielt der Entlastungsvorgang in Richtung heraus aus der Fläche. Dieser Vorgang wird im Bild A.26 verdeutlicht. Die Werte  $\alpha_{ij}$  gehen in den mit "\*" gekennzeichneten Werten in den angegebenen Gleichungen ein.



a) Verschiebung des Koordinatenursprungs



b) Auswirkung der Inelastizität bei Entlastung

Bild A.26: "Jump Kinematic Hardening" aus [106]

### A.5 Endochrone Theorie

Die endochrone Theorie stellt ein Vorgehen dar, das sich nicht den elastischen oder plastischen Modellen zuordnen läßt. Sie wurde ursprünglich von Valanis [117] für Metalle entwickelt und wurde von Bazant [118,119,120] für den Werkstoff Beton erweitert. Die zusätzlich eingebrachten Eigenschaften sind

1. Abhängigkeit der inelastischen Verzerrungen vom hydrostatischen Druck,
2. Volumendehnung infolge Schub und
3. abfallender Ast im  $\sigma$ - $\epsilon$ -Diagramm bei hohen Spannungen.

Die einzige (dem Verfasser bekannte) Anwendung dieses Verfahrens in der FE-Schalenberechnung findet sich bei Arnesen [20].

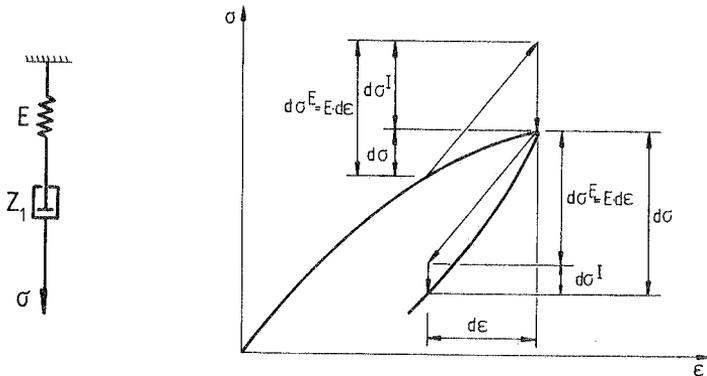
#### A.5.1 Prinzip

Die Gleichung eines inelastischen Maxwell-Körpers (Bild A.27a) lautet:

$$d\epsilon = \frac{d\sigma}{E} + \frac{\sigma dt}{E Z_1} \quad (\text{A.91a})$$

oder

$$d\sigma = E d\epsilon - \frac{\sigma dt}{Z_1} \quad (\text{A.91b})$$



a) Maxwell-Körper      b) Elastische und inelastische Anteile

Bild A.27: Prinzip der endochrone Theorie

Die ersten Terme dieser Gleichungen zeigen die elastischen, die zweiten die inelastischen Verzerrungen an. Grundgedanke der endochronen Theorie ist, die inelastischen Verzerrungen in Abhängigkeit von den Verzerrungsinkrementen darzustellen, d.h. den Parameter  $dt$  durch einen Parameter  $dZ$  ( $d\epsilon$ ) zu ersetzen, der, wie  $dt$ , nicht abnehmen kann und ein Maß für die Zerstörung des Werkstoffs ist. Wenn man im einfachsten Fall  $dt = d\epsilon$  in Gl. (A.91) einsetzt, so bekommt man nach Integration

$$\sigma = E Z_1 \left(1 - e^{-\frac{\epsilon}{Z_1}}\right) \quad (\text{A.92})$$

Diese Gleichung wird durch den aufsteigenden Ast in Bild A.27b) dargestellt. Da der Zeitparameter nicht abnehmen soll, kann die Beziehung (A.91b) für den Fall der Entlastung in folgender Form geschrieben werden

$$d\sigma = E \cdot d\epsilon - \frac{\sigma |d\epsilon|}{Z_1} \quad (\text{A.93})$$

Daraus ergibt sich der abfallende Ast von Bild A.27b), da der zweite Term von Gl. (A.93) stets positiv ausfällt, während der erste vom Vorzeichen der Verzerrungen abhängt.

Die Ähnlichkeit der so gewonnenen Kurven mit dem Verhalten des Betons im Versuch sowie die einfache Erfassung der Entlastung sind Gründe für die Verallgemeinerung des Konzepts auf 3-dimensionale Verhältnisse.

#### A.5.2 Erweiterung auf drei Dimensionen

Die konstitutiven Gleichungen im 3-dimensionalen Fall werden in deviatorischen und volumetrischen Größen geschrieben.

$$de_{ij} = de_{ij}^E + de_{ij}^I = \frac{ds_{ij}}{2G} + \frac{s_{ij}}{2G} \cdot dz \quad (\text{A.94})$$

$$de_v = de_v^E + de_v^I = \frac{d\sigma}{3K} + d\lambda \quad (\text{A.95})$$

In diesen Formeln wird nur die Kurzzeitbelastung untersucht. Der Parameter  $dz$  wird von Valanis "Intrinsic Time" genannt. Diese Bezeichnung stammt aus der Tatsache, daß - wie im vorherigen Abschnitt gezeigt - der Zeitparameter  $dt$  durch  $d\varepsilon$  (bzw.  $dz$ ) ersetzt wurde.  $d\lambda$  gibt die inelastische Volumendehnung wieder.

### A.5.3 Formeln für $dz$ , $d\lambda$ , $K$ und $G$

Der Parameter  $dz$  ist eine Funktion der Deviatorverzerrungsinkremente und der Vektoren  $\varepsilon$  und  $\sigma$ . Er wird folgendermaßen definiert:

$$dz = \frac{d\xi}{Z_1} \quad (\text{A.96})$$

Das Maß  $d\xi$  ist der "Intrinsic Time Parameter" und ist eine Funktion der deviatorischen Verzerrungen. Es wird als Kombination einer verfestigenden und einer abfallenden Funktion formuliert:

$$d\xi = f_1(\xi, \varepsilon, \sigma) d\xi \quad (\text{A.97a})$$

$$= \frac{d\eta}{f(\eta)} \quad (\text{A.97b})$$

$$= \frac{F(\varepsilon, \sigma) d\xi}{f(\eta)} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{abfallende Funktion} \\ \leftarrow \text{verfestigende Funktion} \end{array} \quad (\text{A.97c})$$

$\eta$  ist eine Zustandsvariable;  $d\xi = \sqrt{\frac{1}{2} de_{ij} de_{ij}}$  ist das deviatorische Verzerrungsmaß.

Es soll eine wirklichkeitsnahe Beschreibung der  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Beziehung durch eine geeignete Form für  $F$  und  $f$  (Gl. (A.97c)) erreicht werden. In Bild A.28 sind diese Einflüsse graphisch dargestellt.

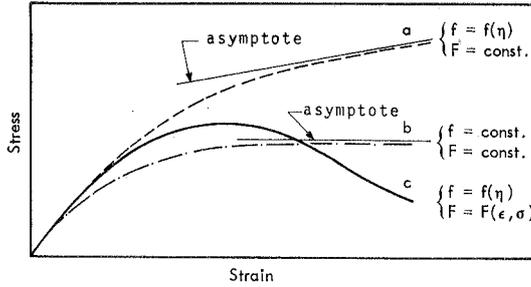


Bild A.28: Auswirkung von  $f$  und  $F$  (Gl. (A.97c)) auf die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung (aus Arnesen [20])

- Wahl der verfestigenden Funktion  $f(\eta)$ :

- a) bei größeren  $\zeta$ -Werten sollen kleinere  $d\zeta$  geliefert werden.  
Um dies zu erreichen, setzt man den Ansatz für  $f(\eta)$  (Gl. A.98) in Gl. (A.97b) ein und integriert über  $\eta$ . So erhält man im  $\zeta$ - $\eta$ -Diagramm eine Kurve affin zur Kurve a) aus Bild A.28.  $\zeta$  ist ein Maß der Zerstörung des Materials.
- b) bei großen Verzerrungen soll keine Verfestigung auftreten, sobald die Bruchspannung erreicht ist.
- c) bei zyklischer Belastung und kleinen deviatorischen Verzerrungen sollen die Hysterisis-Schleifen schmaler ausfallen.

In [120] wird für  $f(\eta)$  vorgeschlagen:

$$f(\eta) = \left( 1 + \frac{\beta_1 \cdot \eta + \beta_2 \cdot \eta^2}{1 + \alpha_7 F_1} \right) F_2 \quad (\text{A.98})$$

$$\text{mit: } F_2 = \left( 1 + \frac{\alpha_8}{\left( 1 + \frac{\alpha_9}{\eta^2} \right) \cdot J_2(\epsilon)} \right)$$

bei kleiner werdenden  $J_2(\epsilon)$

anwachsen von  $f(\eta)$

kleineres  $d\zeta$   
(Bedingung c)

In [12o] wird festgestellt, daß bei richtiger Wahl von  $\beta_1$  und  $\beta_2$  eine Verfestigung nach Erreichen der Bruchspannung ausgeschaltet wird. Somit wäre Bedingung b) erfüllt.

Die Konstanten  $Z_1, \beta_1, \beta_2, a_7, a_8, a_9$  sind in [12o] angegeben.

- Die abfallende Funktion  $F(\epsilon, \sigma)$  sorgt dafür, daß die  $\sigma$ - $\epsilon$ -Beziehung einen abfallenden Ast erhält und daß die Volumendehnung bei hydrostatischem Druck erfaßt wird. Bazant gibt die Formel für  $F(\epsilon, \sigma)$  wie folgt an:

$$F(\epsilon, \sigma) = \left( \frac{\overbrace{\chi}^{\text{X}}}{a_0} + F_1 \right) \cdot F_3 \quad (\text{A.99})$$

mit

$$F_1 = \frac{a_2 (1 + a_5 I_2(\sigma)) \sqrt{J_2(\epsilon)}}{(1 - a_1 I_1(\sigma) - [a_3 I_3(\sigma)]^{1/3}) (1 + a_4 I_2(\sigma) \sqrt{J_2(\epsilon)})}$$

$$F_3 = 1 + \left[ 50 \left( 1 - \frac{\max \epsilon}{\epsilon_0} \right) \left( 1 - \frac{\max \sigma}{f_t} \right) \right]^{-3}$$

$a_0$  bis  $a_6$  Konstanten (siehe [12d]).

In dieser Gleichung stellt  $\chi$  die plastische Komponente dar, die bei hohem hydrostatischem Druck ( $p$ ) überwiegt, da in diesem Fall die Mikrorißbildung verhindert wird. Die Mikrorißkomponente wird mit der Funktion  $F_1$  behandelt. Da die Mikrorißkomponente bei niedrigem  $p$  an Einfluß gewinnt, wird in  $F_1$  der Invariante  $I_1$  im Nenner gesetzt. Die Invarianten  $I_2$  und  $I_3$  kontrollieren das zweiachsige bzw. dreiachsige Verhalten, da für einachsige Beanspruchung  $I_2$  und für ein- und zweiachsige Beanspruchung  $I_3$  gleich Null ist. Die Mikrorißwirkung hängt von den Schubverzerrungen ab, die durch die Invariante  $J_2$  im Zähler von  $F_1$  eingehen. Ist  $J_2 = 0$ , so verschwindet der Einfluß der Mikrorißkomponente in der abfallenden Funktion.

$F_3$  behandelt die Rißbildung im Zugbereich. Diese Funktion hat einen annähernd konstanten Verlauf mit dem Wert 1. Lediglich

in der Nähe des Reißzustandes baut sie sich schlagartig auf. Dies bezeichnet man in der herkömmlichen Stoffgesetzsprache mit "Tension cut-off".

Die inelastische Volumendehnung  $d\lambda$  wird ähnlich wie  $dz$  mit einer verfestigenden und einer abfallenden Funktion beschrieben.

$$d\lambda = l(\lambda) \cdot L(\epsilon, \sigma, \lambda) \cdot d\epsilon \quad (\text{A.100})$$

$\uparrow$   
 verfestigende  
 Funktion

$\uparrow$   
 abfallende  
 Funktion

wobei

$$l(\lambda) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda_0}$$

$$L(\epsilon, \sigma, \lambda) = \frac{1}{1 - c_1 I_1(\sigma)} \left[ \left( \frac{\lambda}{\lambda_0} \right)^2 + \left( \frac{J_2(\epsilon)}{c_2^2 + J_2(\epsilon)} \right)^3 \right] \cdot c_0$$

$c_0, c_1, c_2, \lambda_0$  Konstanten (siehe [120]).

Das Phänomen, das  $d\lambda$  widerspiegeln soll, ist die Volumenvergrößerung, die im einachsigen Versuch bei hohen Lasten auftritt (siehe Bild A.2). Ursache dafür ist das Öffnen der Mikrorisse. Daher soll  $d\lambda$  von  $J_2(\epsilon)$  abhängen. Bei hohem hydrostatischem Druck ist diese Vergrößerung behindert; dafür sorgt  $I_1(\sigma)$ .  $\lambda_0$  ist der größte Wert, den  $\lambda$  annehmen kann (= 0,001 nach Bazant).

Die inkrementellen Kompressions- und Schubmodule sollen mit  $\lambda$  reduziert werden. In Versuchen [121,122] wurde festgestellt, daß  $K$  und  $G$  bis zum Versagen des Materials um 10% bis 20% abnehmen. Bazant gibt folgende Werte an:

$$G = G_0 \left( 1 - 0,25 \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) \quad ; \quad K = K_0 \left( 1 - 0,25 \frac{\lambda}{\lambda_0} \right) \quad (\text{A.101})$$

Die Querdehnzahl bleibt konstant in der endochronen Theorie. Die tatsächlichen Volumenänderungen werden durch die inelastischen Verzerrungen ausgedrückt.

Die 17 Konstanten, die in den Formeln für  $dz$ ,  $d\lambda$ ,  $K$  und  $G$  auftauchen, wurden mittels eines Optimierungsprogramms von Bazant [120] an Versuche angepaßt. Als unabhängige Variable blieb lediglich die Druckfestigkeit des Betons.

#### A.5.4 Iteratives Lösungsverfahren

Für die Anwendung in der FE-Methode müssen Gl. (A.94) und Gl. (A.95) umgeformt werden. Da  $dz$  und  $d\lambda$  vorab nicht bekannt sind, müssen die Gleichungen iterativ gelöst werden. Nach Umformung ergibt sich für die Inkremente:

$$\Delta s_{ij} + \Delta s_{ij}^I = 2G \Delta e_{ij} \quad (\text{A.102})$$

$$\Delta \sigma + \Delta \sigma^I = 3K \Delta e_v \quad (\text{A.103})$$

wobei

$$\Delta s_{ij}^I = s_{ij} \Delta z$$

$$\Delta \sigma^I = 3K \Delta \lambda \quad \text{fiktive Teilspannungen sind.}$$

Diese Gleichungen können in die üblichen Spannungen rücktransformiert werden.

$$\Delta \sigma^E = \begin{bmatrix} \Delta \sigma_{xx} + \Delta \sigma_{xx}^I \\ \Delta \sigma_{yy} + \Delta \sigma_{yy}^I \\ \Delta \sigma_{zz} + \Delta \sigma_{zz}^I \\ \Delta \sigma_{xy} + \Delta \sigma_{xy}^I \\ \Delta \sigma_{yz} + \Delta \sigma_{yz}^I \\ \Delta \sigma_{xz} + \Delta \sigma_{xz}^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ & D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_3 & 0 & 0 \\ & \text{symm.} & & & D_3 & 0 \\ & & & & & D_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \epsilon_{xx} \\ \Delta \epsilon_{yy} \\ \Delta \epsilon_{zz} \\ \Delta \gamma_{xy} \\ \Delta \gamma_{yz} \\ \Delta \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

(A.104)

Hier ist:

$$D_1 = K + \frac{4}{3}G$$

$$D_2 = K - \frac{2}{3}G$$

$$D_3 = G$$

Die Bedeutung der elastischen und inelastischen Terme kann man Bild A.27b) entnehmen.

Die Iteration des Schritts  $r$  wird wie folgt beschrieben:

1. Schätzung der Spannungen im Schritt von  $r-1$  nach  $r$  mit:

$$\sigma_{ij(r-\frac{1}{2})} = \sigma_{ij(r-1)} + \frac{1}{2} \Delta \sigma_{ij} \text{ (vorheriger Schritt)}$$

$$\epsilon_{ij(r-\frac{1}{2})} = \epsilon_{ij(r-1)} + \frac{1}{2} \Delta \epsilon_{ij} \quad (\text{A.105})$$

$$\lambda_{(r-\frac{1}{2})} = \lambda_{(r-1)} + \frac{1}{2} \Delta \lambda \text{ (vorheriger Schritt)}$$

2. Mit diesem Spannungs- und Verzerrungszustand berechnet man

$$\left. \begin{array}{l} F(\epsilon, \sigma)_{(r-\frac{1}{2})} \text{ mit Gl. (A.99)} \\ \Delta \xi = \sqrt{\frac{1}{2} \Delta \epsilon_{ij} \Delta \epsilon_{ij}} \\ f(\eta)_{(r-\frac{1}{2})} \text{ mit Gl. (A.98)} \end{array} \right\} \rightarrow \Delta \eta = F(\epsilon, \sigma) \Delta \xi \left. \begin{array}{l} \rightarrow \Delta \xi \text{ (Gl.(A.97c))} \\ \rightarrow \Delta z \text{ (Gl.(A.96))} \end{array} \right\}$$

$$\Delta \lambda \text{ (Gl. (A.100))}$$

$$\xi_{(r-\frac{1}{2})} = \xi_{(r-1)} + \frac{1}{2} \Delta \xi$$

$$K_{(r-\frac{1}{2})}, G_{(r-\frac{1}{2})} \quad (\text{Gl. (A.101)})$$

3. Mit den so ermittelten  $K_{(r-1/2)}$  und  $G_{(r-1/2)}$  kann man  $\Delta G^E$  aus Gl. (A.104) mit den inkrementellen Verzerrungen  $\Delta \epsilon$  von  $r-1$  bis  $r$  berechnen.
4.  $\Delta S_{ij}^I$ ,  $\Delta \sigma^I$  können mit  $K_{(r-1/2)}$ ,  $\Delta z$ ,  $\Delta \lambda$  und mit Hilfe von Gl. (A.102) und Gl. (A.103) gefunden werden.
5. Durch Rücktransformation von  $\Delta S_{ij}^I$  und  $\Delta \sigma^I$  ergibt sich  $\Delta \sigma_{ij}^I$ . Es kann jetzt  $\Delta G = \Delta G^E - \Delta G^I$  ermittelt werden.
6. Mit diesen neuen Werten  $\Delta G$  und  $\Delta \lambda$  wird bei Schritt 1 neu begonnen. Der Vorgang wird wiederholt, bis sich  $\Delta z$  und  $\Delta \lambda$  in zwei darauffolgenden Schritten um weniger als 0.1% unterscheiden.

A N H A N G B

Interpolationsfunktionen und Elementmatrizen

Tafel B.1: Interpolationsfunktionen der linearen und biquadratischen Elemente

Element-Knoten i	Koord.		Interpolationsfunktionen $\phi^i$										
	r	s	4 Knoten						8 Knoten				9 Kn.
			$\frac{1+r}{2}$	$\frac{1-r}{2}$	$1-r^2$	$\frac{1+s}{2}$	$\frac{1-s}{2}$	$1-s^2$	$\frac{\phi^5}{2}$	$\frac{\phi^6}{2}$	$\frac{\phi^7}{2}$	$\frac{\phi^8}{2}$	$\phi^9$
1	1	1	1	-	-	1	-	-	-1	-	-	-1	$-\frac{1}{4}$
2	-1	1	-	1	-	1	-	-	-1	-1	-	-	$-\frac{1}{4}$
3	-1	-1	-	1	-	-	1	-	-	-1	-1	-	$-\frac{1}{4}$
4	1	-1	1	-	-	-	1	-	-	-	-1	-1	$-\frac{1}{4}$
5	0	1	-	-	1	1	-	-	-	-	-	-	$-\frac{1}{2}$
6	-1	0	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	$-\frac{1}{2}$
7	0	-1	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	$-\frac{1}{2}$
8	1	0	1	-	-	-	-	1	-	-	-	-	$-\frac{1}{2}$
9	0	0	-	-	1	-	-	1	-	-	-	-	-

Tafel B.2: Interpolationsfunktionen des bikubischen Elements

Element-Knoten i	Koord.		Interpolationsfunktionen $256 \cdot \phi^i$									
	r	s	Faktor	1+r	3r+1	3r-1	1-r	1+s	3s+1	3s-1	1-s	
1	1	1	1	1	1	1	-	1	1	1	-	
2	-1	1	1	-	1	1	1	1	1	1	-	
3	-1	-1	1	-	1	1	1	-	1	1	1	
4	1	-1	1	1	1	1	-	-	1	1	1	
5	$\frac{1}{3}$	1	9	1	1	-	1	1	1	1	-	
6	$-\frac{1}{3}$	1	-9	1	-	1	1	1	1	1	-	
7	-1	$\frac{1}{3}$	9	-	1	1	1	1	1	-	1	
8	-1	$-\frac{1}{3}$	-9	-	1	1	1	1	-	1	1	
9	$-\frac{1}{3}$	-1	-9	1	-	1	1	-	1	1	1	
10	$\frac{1}{3}$	-1	9	1	1	-	1	-	1	1	1	
11	1	$-\frac{1}{3}$	-9	1	1	1	-	1	-	1	1	
12	1	$\frac{1}{3}$	9	1	1	1	-	1	1	-	1	
13	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	81	1	1	-	1	1	1	-	1	
14	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	-81	1	-	1	1	1	1	-	1	
15	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	81	1	-	1	1	1	-	1	1	
16	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-81	1	1	-	1	1	-	1	1	

Tafel B.3: Matrix  ${}^m B$  (Ausschnitt des Knotenanteils i)

e	Knoten i					
	$u_1^i$	$u_2^i$	$u_3^i$	$\alpha^i$	$\beta^i$	
$e_{11}$	$\phi_{,1}^i \cdot l_{11}$	$\phi_{,1}^i \cdot l_{21}$	$\phi_{,1}^i \cdot l_{31}$	$\bar{l}_{11} \cdot \phi_{,1}^i$	$\bar{l}_{12} \cdot \phi_{,1}^i$	
$e_{22}$	$\phi_{,2}^i \cdot l_{12}$	$\phi_{,2}^i \cdot l_{22}$	$\phi_{,2}^i \cdot l_{32}$	$\bar{l}_{21} \cdot \phi_{,2}^i$	$\bar{l}_{22} \cdot \phi_{,2}^i$	
$e_{33}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{13}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{23}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{33}$	$\bar{l}_{31} \cdot \phi_{,3}^i$	$\bar{l}_{32} \cdot \phi_{,3}^i$	
$2 e_{12}$	$\phi_{,2}^i \cdot l_{11} + \phi_{,1}^i \cdot l_{12}$	$\phi_{,2}^i \cdot l_{21} + \phi_{,1}^i \cdot l_{22}$	$\phi_{,2}^i \cdot l_{31} + \phi_{,1}^i \cdot l_{32}$	$\bar{l}_{11} \cdot \phi_{,2}^i + \bar{l}_{21} \cdot \phi_{,1}^i$	$\bar{l}_{12} \cdot \phi_{,2}^i + \bar{l}_{22} \cdot \phi_{,1}^i$	
$2 e_{13}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{11} + \phi_{,1}^i \cdot l_{13}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{21} + \phi_{,1}^i \cdot l_{23}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{31} + \phi_{,1}^i \cdot l_{33}$	$\bar{l}_{11} \cdot \phi_{,3}^i + \bar{l}_{31} \cdot \phi_{,1}^i$	$\bar{l}_{12} \cdot \phi_{,3}^i + \bar{l}_{32} \cdot \phi_{,1}^i$	
$2 e_{23}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{12} + \phi_{,2}^i \cdot l_{13}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{22} + \phi_{,2}^i \cdot l_{23}$	$\phi_{,3}^i \cdot l_{32} + \phi_{,2}^i \cdot l_{33}$	$\bar{l}_{21} \cdot \phi_{,3}^i + \bar{l}_{31} \cdot \phi_{,2}^i$	$\bar{l}_{22} \cdot \phi_{,3}^i + \bar{l}_{32} \cdot \phi_{,2}^i$	

mit  $\phi_{,j}^i > \phi_{,j}^j$  s. Tafel B.4

$l_{jk} = {}^m u_{j,k} + \delta_{jk}$  ( ${}^m u_{j,k}$  = Verschiebungsableitung,  $\delta_{jk}$  = Kronecker Symbol)

$\bar{l}_{jk} = {}^m F_{jk}^i \cdot l_{1j} + {}^m F_{2k}^i \cdot l_{2j} + {}^m F_{3k}^i \cdot l_{3j}$

Tafel B.4: Matrix  ${}^m\hat{B}$  (Ausschnitt des Knotenanteils i)

d	Knoten i						$\beta^i$
	$u_1^i$	$u_2^i$	$u_3^i$	$\alpha^i$			
$u_{1,1}$	$\bar{\phi}_{,1}^i$	0	0	$\bar{\phi}_{,1}^i \cdot {}^mF_{11}^i$			$\bar{\phi}_{,1}^i \cdot {}^mF_{12}^i$
$u_{1,2}$	$\bar{\phi}_{,2}^i$	0	0	$\bar{\phi}_{,2}^i \cdot {}^mF_{11}^i$			$\bar{\phi}_{,2}^i \cdot {}^mF_{12}^i$
$u_{1,3}$	$\bar{\phi}_{,3}^i$	0	0	$\bar{\phi}_{,3}^i \cdot {}^mF_{11}^i$			$\bar{\phi}_{,3}^i \cdot {}^mF_{12}^i$
$u_{2,1}$	0	$\bar{\phi}_{,1}^i$	0	$\bar{\phi}_{,1}^i \cdot {}^mF_{21}^i$			$\bar{\phi}_{,1}^i \cdot {}^mF_{22}^i$
$u_{2,2}$	0	$\bar{\phi}_{,2}^i$	0	$\bar{\phi}_{,2}^i \cdot {}^mF_{21}^i$			$\bar{\phi}_{,2}^i \cdot {}^mF_{22}^i$
$u_{2,3}$	0	$\bar{\phi}_{,3}^i$	0	$\bar{\phi}_{,3}^i \cdot {}^mF_{21}^i$			$\bar{\phi}_{,3}^i \cdot {}^mF_{22}^i$
$u_{3,1}$	0	0	$\bar{\phi}_{,1}^i$	$\bar{\phi}_{,1}^i \cdot {}^mF_{31}^i$			$\bar{\phi}_{,1}^i \cdot {}^mF_{32}^i$
$u_{3,2}$	0	0	$\bar{\phi}_{,2}^i$	$\bar{\phi}_{,2}^i \cdot {}^mF_{31}^i$			$\bar{\phi}_{,2}^i \cdot {}^mF_{32}^i$
$u_{3,3}$	0	0	$\bar{\phi}_{,3}^i$	$\bar{\phi}_{,3}^i \cdot {}^mF_{31}^i$			$\bar{\phi}_{,3}^i \cdot {}^mF_{32}^i$

mit  $\bar{\phi}_{,j}^i = {}^oJ_{j1}^{-1} \cdot \phi_{,r}^i + {}^oJ_{j2}^{-1} \cdot \phi_{,s}^i$

$\bar{\phi}_{,j}^i = \frac{h^i}{2} (t \cdot \bar{\phi}_{,j}^i), j = \frac{h^i}{2} ({}^oJ_{j3}^{-1} \cdot \phi^i + t \cdot \bar{\phi}_{,j}^i)$

${}^mF_{jk}^i$  : siehe Gl. (4.28)

${}^oJ_{jk}^{-1}$  : Element der inversen Jakobi Matrix

## L E B E N S L A U F

Name: Tomás Alejandro Kompfner  
geboren: 17. März 1953 in Buenos Aires, Argentinien  
Eltern: Dipl.-Ing. Arch. Hans Kömpfner und  
Ehefrau Edith geb. Herzka

Schule: 1958 - 1970 Volksschule und Gymnasium am Institut  
"San Andrés" in Olivos, Argentinien  
Abschlüsse:  
Abitur (in Argentinien) im Dezember 1970  
School Certificate der Universität  
Cambridge (England), 1968.

Studium: 1971 Studium der Ökonomie an der Universität  
Buenos Aires, Argentinien  
1972 - 1977 Studium des Zivil-Ingenieurwesens an der  
Universität Buenos Aires, Argentinien  
Abschluß:  
Dezember 1977.  
1979 seit Oktober 1979 Stipendiat des Deut-  
schen Akademischen Austauschdienstes  
(DAAD) am Institut für Baustatik der  
Universität Stuttgart.

Beruf: 1/1973 - Zeichner für Beleuchtungskörper bei der  
4/1973 Fa. Ilum, Buenos Aires.  
5/1977 - Angestellt bei der Firma "Fernandez Long  
y Reggini", Beratende Ingenieure, in  
7/1979 Buenos Aires, tätig im Bereich statischer  
Berechnung und Bauaufsicht.