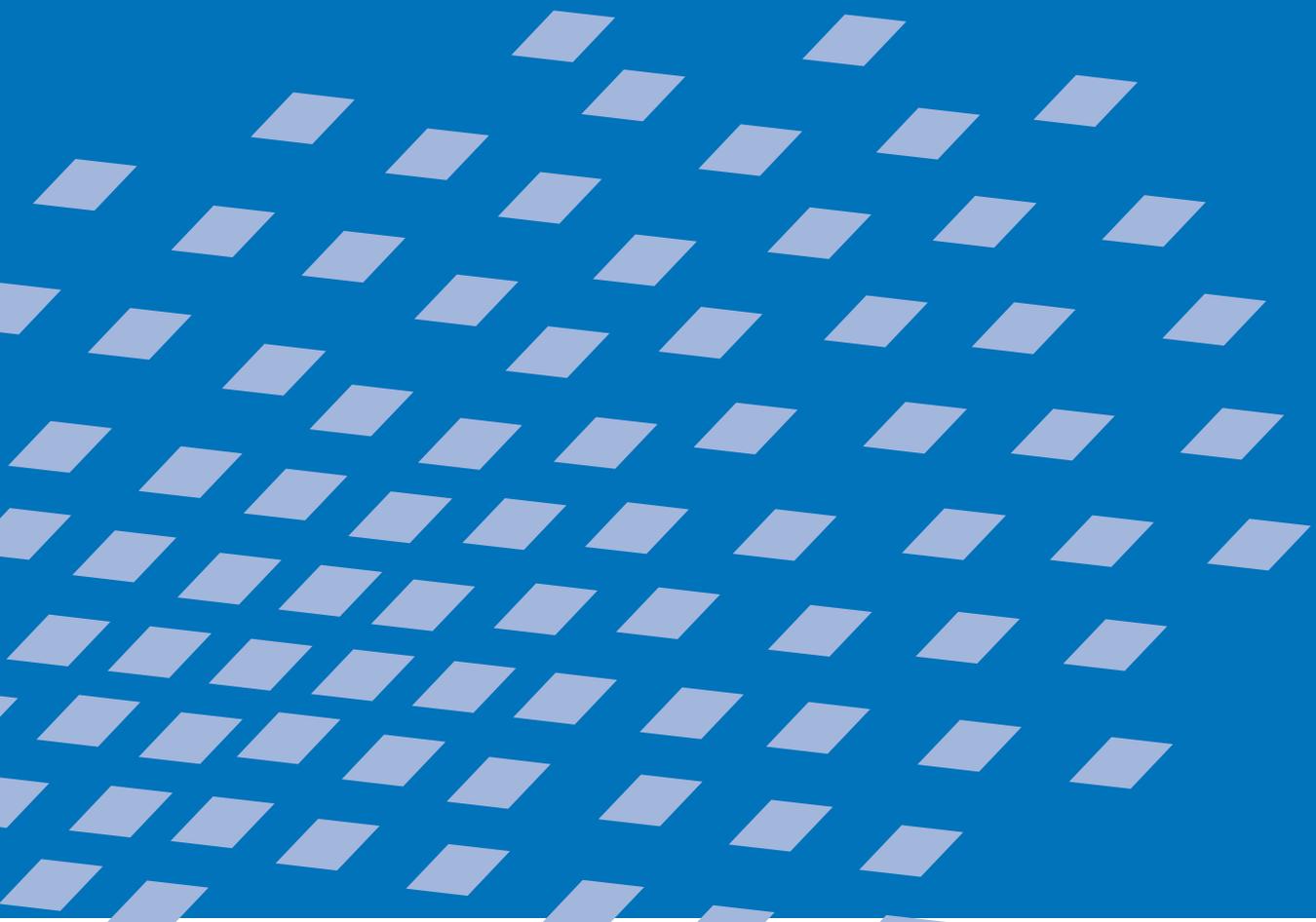




Universität Stuttgart
Institut für Baustatik
Prof. Dr.–Ing. E. Ramm

Fluid–Struktur–Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen

Wolfgang A. Wall



Fluid–Struktur–Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen

von

Wolfgang A. Wall

Bericht Nr. 31 (1999)
Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Professor Dr.–Ing. E. Ramm
Stuttgart 1999

Berichte können über das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart,
Pfaffenwaldring 7, D-70550 Stuttgart, bezogen werden.

Fluid–Struktur–Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen

Von der Fakultät Bauingenieur– und Vermessungswesen
der Universität Stuttgart zur Erlangung der Würde eines Doktors der
Ingenieurwissenschaften (Dr.–Ing.) genehmigte Abhandlung

vorgelegt von

Wolfgang A. Wall

aus St. Leonhard bei Salzburg / Österreich

Hauptberichter:	Prof. Dr.–Ing. Ekkehard Ramm
Mitberichter:	Prof. Dr.–Ing. Siegfried Wagner
Tag der mündlichen Prüfung:	3. November 1999

Institut für Baustatik der Universität Stuttgart
Stuttgart 1999

Zusammenfassung

Die meisten technisch-wissenschaftlichen Problemstellungen und reale Ingenieuraufgaben gehören genau genommen zur Gruppe sogenannter Mehrfeld-Probleme. Eine bedeutsame Untergruppe dieser ‘Multiphysics-Problems’ ist durch die Wechselwirkung von Fluiden und flexiblen Strukturen charakterisiert. Ziel dieser Arbeit ist es, numerische Verfahren zu entwickeln, die das Verhalten von solchen gekoppelten Fluid-Struktur-Interaktions-Problemen möglichst realitätsnah beschreiben. Aufgrund der Komplexität dieser Problemklassen ist es notwendig, auf ‘übliche’ Vereinfachungen und Einschränkungen vieler existierender Ansätze zu verzichten und entsprechend komplexe Modelle einzusetzen. In dieser Arbeit zur Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) sollen dabei die methodischen Aspekte im Vordergrund stehen.

Die einzelnen physikalischen Felder sind einerseits durch die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen und andererseits durch die Gleichungen der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik charakterisiert. Das Hauptinteresse dieses an einem Strukturmechanik-Institut bearbeiteten Projekts zur Fluid-Struktur-Interaktion liegt auf einer Vorhersage des auftretenden instationären, nichtlinearen Strukturverhaltens, hier insbesondere von schlanken Konstruktionen. Für solche Problemstellungen ist jedoch auch die Simulation des Strömungsteils vorrangig. Deshalb liegt ein Schwerpunkt dieser Arbeit in der Entwicklung eines Verfahrens zur numerischen Strömungsdynamik.

Der vorgestellte Ansatz für das gekoppelte Fluid-Struktur-Interaktions-Problem soll auf einem reinen Finite-Element-Konzept für sämtliche betrachteten Felder basieren. Dazu wird ein neues stabilisiertes Finite-Element-Verfahren zur Simulation instationärer, inkompressibler, viskoser Strömungen entwickelt. Wesentliche Aspekte betreffen die eingesetzten, zum Teil neu entwickelten und verbesserten Stabilisierungsansätze und neue Kombinationen algorithmischer Ansätze. Das entwickelte Verfahren ist in der Lage, Elemente niederer und beliebiger höherer Ordnung bei gleicher Interpolationsordnung für Geschwindigkeiten und Druck einzusetzen. Es erlaubt für instationäre Strömungsberechnungen auch eine einfache adaptive Zeitschrittweitensteuerung. Die Erweiterung des Strömungslösers auf zeitveränderliche Gebiete, die auf einer ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’-Betrachtungsweise (ALE) aufbaut, bildet einen zweiten Schwerpunkt. Dabei stehen eine konsistente Ableitung für die Stabilisierungsverfahren und die algorithmische Umsetzung im Vordergrund. Damit wird eine neue semi-diskrete, konsistente, voll stabilisierte ALE-FEM vorgestellt. Um eine möglichst breite Anwendungspalette zu erreichen, wird ein leistungsfähiges Werkzeug zur Beschreibung der Netzbewegung innerhalb der ALE-Formulierung zur Strömungssimulation entwickelt. Für das Struktur-Feld des Mehrfeld-Problems werden existierende Verfahren zur geometrisch nichtlinearen Elastodynamik an diese gekoppelten Problemstellungen angepaßt. Sie werden ebenso wie die Strömungslöser und die ‘Netzlöser’ in eine neu entwickelte Umgebung zur Simulation von Mehrfeldproblemen eingebettet. Zur Lösung der gekoppelten Systeme werden einfache partitionierte Lösungsansätze umgesetzt. Die Kombination dieser einzelnen Bausteine mündet schließlich in einem neuen Dreifeld-FSI-Löser. Die Wirkungsweise dieses gekoppelten Löser und der einzelnen Verfahrenskomponenten wird durch numerische Beispiele demonstriert.

Abstract

Strictly speaking, most technical–scientific problems and especially real engineering tasks belong to so called multifield or multiphysics problems. One important subgroup of such coupled problems is characterized through the interaction of fluids and flexible structures. The present study aims at the development of numerical methods that allow a realistic description of the behavior of such coupled fluid structure interaction problems and in a level of complexity that is necessary for many applications. Because of this complexity of problem classes in mind, common simplifications and limitations of many existing approaches have to be waived and the approach has to be based on models with appropriate complexity. Thereby this study on fluid structure interaction (FSI) should concentrate mainly on methodical aspects.

The different physical fields are herein characterized by the instationary, incompressible Navier–Stokes equations and through the field equations of geometrically nonlinear elastodynamics, respectively. Main concern of this study on fluid structure interaction, that is undertaken within an Institute of Structural Mechanics, is the prediction of the instationary, nonlinear response of mainly thin–walled structures. However, even in such situations the flow part is dominating the whole coupled problems simulation. Hence, one main focus of this study is the development of a method for computational fluid dynamics.

The presented approach for the coupled fluid structure interaction problem should be purely based on a finite element concept for all fields under consideration. For this reason a new stabilized finite element method for the simulation of instationary, incompressible viscous flows is developed. Essential aspects concern the inserted, partly newly–developed and improved, stabilization approaches and new combinations of algorithmic approaches. The developed method is able to deal with low– and higher–order elements with equal order interpolation for velocities and pressure. For instationary flow simulations it also allows simple adaptive time–stepping procedures. The extension of the flow solver to domains with moving boundaries, based on an Arbitrary Lagrangean Eulerian (ALE) description, establishes the second main focus. Thereby a consistent derivation for the stabilization approaches and a respective algorithmic implementation are the main concerns. Hence, a new semi–discrete, consistent, fully stabilized ALE–FEM is introduced. In order to be able to tackle a broad range of applications a powerful tool for the moving grid description within the CFD–ALE–formulation is developed. For the structural part of this multifield problem, existing methods for geometrically nonlinear elastodynamics are adopted for the coupled problem requirements. Together with the CFD solver and the mesh solver these are embedded in a newly developed environment for the simulation of multifield problems. The coupled problems are then treated through simple partitioned analysis procedures. The combination of these individual building blocks finally results in the newly–introduced three–field FSI solver. The performance of the coupled solver as well as of the individual methodical components is demonstrated through a number of numerical examples.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1994 bis 1999 während meiner Tätigkeit am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart – als Stipendiat im Rahmen des Graduiertenkollegs *‘Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen’*, als wissenschaftlicher Mitarbeiter sowie als Mitglied des Sonderforschungsbereiches 404 *‘Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik’*.

Außerordentlichen Dank möchte ich an dieser Stelle Herrn Professor Dr.–Ing. Ekkehard Ramm aussprechen. Vom ersten Tag an war es fachlich und menschlich eine große Bereicherung, mit ihm arbeiten zu dürfen. Seine Person und das Umfeld, das er an diesem Institut geschaffen hat, waren ideale Voraussetzungen für ein begeistertes wissenschaftliches Arbeiten. Sein wissenschaftliches Interesse, sein Vertrauen und Rückhalt haben die erfolgreiche Bearbeitung eines derartigen Promotionsprojektes erst möglich gemacht.

Herrn Professor Dr.–Ing. Siegfried Wagner vom Institut für Aero– und Gasdynamik (IAG) der Universität Stuttgart danke ich sehr herzlich für die Übernahme des Mitberichtes. Sein Interesse an der vorliegenden Arbeit hat mich sehr gefreut.

Mein Dank gilt auch vielen Kollegen am Institut für Baustatik für die gute Zusammenarbeit und die sehr angenehme Arbeitsatmosphäre. Die Art einiger ganz besonderer Kollegen, ihre Ehrlichkeit, Loyalität und Offenheit und so manche heiße fachliche Diskussion oder private Aktivität in diesen Jahren möchte ich nicht missen.

Ein ganz besonderes Dankeschön möchte ich bei dieser Gelegenheit meiner Frau Andrea aussprechen. Sie hat in bewundernswerter Weise mein Interesse an dieser Art von Arbeit unterstützt und unter einigen Widrigkeiten stets mitgetragen. Ohne ihr großes Verständnis und ihre Unterstützung wäre dieses Vorhaben schon vor dem Beginn gescheitert. Auch meinen Eltern, Geschwistern und Großeltern möchte ich an dieser Stelle für ihre stete Unterstützung und ihr Verständnis danken.

Schließlich danke ich auch der deutschen Forschungsgemeinschaft für die Finanzierung des oben genannten Stipendiums und dieses hochinteressanten SFB–Forschungsprojektes. Das Stipendium hat es mir ermöglicht, den für mich wichtigen Schritt an das Institut für Baustatik der Universität Stuttgart zu tun.

Wolfgang A. Wall

Inhaltsverzeichnis

Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen	X
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.1.1 Klassifizierung von Mehrfeldproblemen	2
1.1.2 Fluid–Struktur–Interaktion	3
1.2 Zielsetzung	5
1.3 Übersicht	6
2 Kontinuumsmechanische Grundlagen	9
2.1 ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’– (ALE–) Betrachtungsweise	9
2.1.1 Lagrange versus Euler	9
2.1.2 ‘ALE = Lagrange U Euler’	11
2.1.3 Bilanzgleichungen in ALE–Betrachtungsweise	13
2.2 Struktur — Nichtlineare Elastodynamik	20
2.2.1 Kinematische und konstitutive Beziehungen	20
2.2.2 Anfangs–Randwertproblem der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik	22
2.3 Fluid — Instationäre, inkompressible, viskose Strömungen	23
2.3.1 Modellwahl und grundlegende Beziehungen	24
2.3.2 Anfangs–Randwertproblem für inkompressible, viskose Strömungen	26
2.3.3 Anmerkungen zu den inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen	30
3 Stabilisierte Finite–Element–Verfahren für Fluide	34
3.1 Standard–Galerkin–Finite–Element–Verfahren	34
3.1.1 Galerkin–Formulierung der inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen	35
3.1.2 Numerische Probleme der Standard–Galerkin–Formulierung	38
3.1.3 Analyse der numerischen Schwächen	40
3.2 Stabilisierte Finite–Element–Methoden	44
3.2.1 Advektionsstabilisierung	45
3.2.2 Druckstabilisierung	48
3.2.3 SUPG/PSPG–Verfahren	51
3.2.4 ‘Galerkin/Least–Squares’–Verfahren (GLS)	51
3.2.5 Stabilisierungsparameter	58
3.2.6 Interpretation stabilisierter Finite–Element–Verfahren	62
3.2.7 Erweiterungen von stabilisierten Finite–Element–Methoden	65
3.3 Eine stabilisierte Finite–Element–Methode für die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen	66
3.3.1 GLS–Verfahren für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen ...	66
3.3.2 Die stabilisierte Finite–Element–Methode	71
3.3.3 Numerische Beispiele	78
4 Lösungsverfahren für die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen	82
4.1 Einführung	82

4.2	Zeitdiskretisierung	84
4.2.1	Einleitung	84
4.2.2	Voll implizite Verfahren	86
4.2.3	Semi-implizite Ein- und Mehrschrittverfahren	91
4.2.4	Semi-explizite Verfahren	92
4.2.5	Adaptive Schrittweitenanpassung	94
4.3	Linearisierung und Iterationsverfahren	98
4.3.1	Einleitung	98
4.3.2	Linearisierung / Gâteaux-Ableitung	99
4.3.3	Iterative Verfahren für inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen	101
4.4	‘Navier-Stokes-Löser’	104
4.4.1	Algorithmen zur Lösung der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen	104
4.4.2	Stationärer Sonderfall	110
4.5	Numerische Beispiele	112
4.5.1	Stationäre Beispiele	112
4.5.2	Zylinderumströmung – Kármánsche Wirbelstraße	120
4.5.3	3D-Strömungsbeispiele	129
5	Navier-Stokes-Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten	133
5.1	Strömungen auf Gebieten mit bewegten / beweglichen Rändern	133
5.1.1	Einführung	133
5.1.2	Instationäre, inkompressible Navier-Stokes-Gleichungen in ALE-Formulierung	136
5.2	Algorithmische Umsetzung einer ALE-Formulierung – Eine stabilisierte ALE-Finite-Element-Methode	137
5.2.1	Zur Lösung der ALE-Gleichungen	137
5.2.2	Stabilisierung und ALE	138
5.2.3	Stabilisierte ALE-Finite-Element-Formulierung	140
5.2.4	Zeitintegrationsverfahren bei ALE-Ansätzen	141
5.2.5	Geometrische Bilanzgleichungen	143
5.3	Numerische Beispiele	145
5.3.1	ALE-quasistationäre und instationäre ‘Euler-’ Tests	145
5.3.2	Rohrströmung mit bewegter Verjüngung	147
6	Lösungsverfahren für Struktur- und Netzdynamik	153
6.1	‘Computational Structural Dynamics’	153
6.1.1	Grundgleichungen	153
6.1.2	Räumliche Diskretisierung	153
6.1.3	Zeitdiskretisierung	155
6.1.4	Effektive Strukturgleichung und Linearisierung	158
6.1.5	Ein Verfahren für die geometrisch nichtlineare Elastodynamik	158
6.2	‘Computational Mesh Dynamics’	159
6.2.1	Kontinuierliche Verfahren zur Netzbewegung	161

6.2.2	Kontinuierlicher, quasi-elastostatischer Pseudo-Struktur-Ansatz	164
6.2.3	Zusatzmaßnahmen	165
6.3	‘Computational Fluid Dynamics’	167
7	Fluid-Struktur-Interaktion	168
7.1	Einführung	168
7.1.1	Lösungsverfahren für Mehrfeldprobleme	168
7.1.2	Zusammenfassung der Einzelfelder bzw. Einfeld-Verfahren	172
7.2	Kopplung bzw. Interaktion der einzelnen Felder und Verfahren	173
7.2.1	Randbedingungen bei FSI-Problemen	173
7.2.2	Last- und Bewegungstransfer	176
7.3	Partitionierte Lösungsverfahren für FSI-Probleme	178
7.3.1	Partitionierte Verfahren für Fluid-Struktur-Interaktion	179
7.3.2	Einfaches gestaffeltes Lösungsverfahren	180
7.3.3	Anforderungen / Analysen zu partitionierten Integrationsverfahren	181
7.3.4	Verbesserungen gestaffelter Verfahren	184
7.3.5	Stark gekoppelte partitionierte Verfahren	186
7.4	Löser für das gekoppelte Dreifeld-Problem Fluid-Struktur-Interaktion	187
7.5	Numerische Beispiele	188
7.5.1	‘Klassische’ Strömungen mit flexiblem Rand	188
7.5.2	Flexibler bzw. ‘Atmender’ Zylinder	191
7.5.3	Wirbelerregte flexible Struktur	194
8	Zusammenfassung und Ausblick	198
A	Anhang	200
A1	Einführung in die ‘Computational Fluid Dynamics’	200
A1.1	Einleitung	201
A1.2	Strömungsmodelle und Approximationsebenen	202
A1.3	Variablen-Typen	205
A1.4	Diskretisierungsverfahren der CFD	206
A1.5	‘Inkompressible Navier-Stokes-Löser’	209
A2	Einige mathematische Grundlagen	210
A3	‘Computational Tools’	212
A3.1	CARAT — ‘Computer Aided Research Analysis Tool’	212
A3.2	Gleichungslöser	212
A3.3	Visualisierung	214
A3.4	Vernetzung	214
	Literatur	215

Bezeichnungen, Abkürzungen, Vereinbarungen

Zusätzlich zu den im Kontext der jeweiligen Kapitel eingeführten Größen und Begriffen wird in der vorliegenden Arbeit auf die hier angeführten Abkürzungen und Bezeichnungen mehrfach zurückgegriffen. Weiters gelten für die gesamte Arbeit auch folgende

Vereinbarungen

- Für Begriffe, denen keine eindeutige, kurze und gängige deutsche Übersetzung zugeordnet werden kann, werden in dieser Arbeit die englischen Fachausdrücke verwendet.
- In Teilen dieser Arbeit wird die Indexschreibweise verwendet. In diesem Zusammenhang wird auch die Einsteinsche Summationskonvention verwendet, d.h. ein wiederholt auftretender Index in einem Term schließt die Summation über den entsprechenden Indexbereich ein.
- An den Stellen der Arbeit an denen dies wesentlich erscheint, wird versucht, eine auch mathematisch exakte Schreibweise zu verwenden. In einigen Teilen der Arbeit wird jedoch auf diese mathematische Exaktheit bzw. Vollständigkeit (beispielsweise Angabe der Räume, usw.), zugunsten einer kürzeren Fassung und einer besseren Übersichtlichkeit, verzichtet. Die relevanten mathematischen Informationen können dabei jedoch durchwegs aus den im entsprechenden Umfeld angeführten Angaben entnommen werden, so daß dies keine Beeinträchtigung darstellen sollte.

Abkürzungen

AB	Anfangsbedingungen
AB2	Adams–Bashford–Verfahren zweiter Ordnung
ALE	Arbitrary Lagrangean Eulerian
ARWP	Anfangs–Randwertproblem
BE	‘Backward Euler’–Verfahren
CFD	Computational Fluid Dynamics
CN	Crank–Nicolson–Verfahren
DAE	Differential Algebraic Equations
FEM	Finite–Element–Methode
GCL	‘Geometric Conservation Laws’, geometrische Bilanzgleichungen
GLS	‘Galerkin/Least Squares’
LHS	‘Left Hand Side’, linke Seite eines Gleichungssystems
Pe, Pe_K	Peclet– bzw. Element–Pecletzahl
PvV	Prinzip der virtuellen Verschiebungen
RB	Randbedingungen
Re, Re_K	Reynolds– bzw. Element–Reynoldszahl
RHS	‘Right Hand Side’, rechte Seite eines Gleichungssystems
St	Strouhalzahl
ST	Stabilisierungsterm

Symbole, Schreibweisen

$(\cdot)_K$	Größen auf Elementebene
$(\cdot)^G$	Größe bezogen auf das Materialgebiet
$(\cdot)^F$	Größe des Feldes ‘Fluid’
$(\cdot)^G$	Größe bezogen auf das Referenzgebiet
$(\cdot)^M$	Größe des Feldes ‘Netz’ (Mesh)
$(\cdot)^S$	Größe des Feldes ‘Struktur’
$(\cdot)^n$	Größe zum Zeitpunkt t^n
$(\cdot)^\tau$	Matrizen die ausschließlich aus Stabilisierungstermen gebildet werden
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \Big _z$	partielle Ableitung nach t bei konstant gehaltenem z

Mathematische Notationen

$(.,.)$	L^2 – inneres Produkt
$\ \cdot\ _{L_p}$	L_p –Norm (ohne Index: L_2 –Norm)
∇	Gradientenoperator
$\nabla \cdot$	Divergenzoperator
$C^n(\Omega)$	Raum der n –fach stetigen Funktionen
$diag(\Omega_K)$	Elementdiagonale des Elementes K
$div_y \mathbf{u}$	Divergenz von \mathbf{u} bezüglich räumlichem Koordinatensystem y
$H^n(\Omega)$	Sobolevraum der Ordnung n
$L^2(\Omega)$	Raum der quadratintegrierbaren Funktionen
$meas(\Omega_K)$	Elementgröße (Fläche, Volumen) des Elementes K
$o(h)$	Term der Ordnung h
$R_k(K)$	Satz von Polynomen mit Grad k auf Elementgebiet K
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
\mathbb{R}^3	Dreidimensionaler Raum
$\tilde{\Omega}$	Summe über alle Elemente der Triangulierung des Gebietes Ω

Bezeichnungen

\mathbf{C}	Materialtensor
\mathcal{C}_h	Triangulierung
\mathbf{D}	Variablensatz – Struktur
\mathbf{E}	Green–Lagrangescher Verzerrungstensor
E^S	Elastizitätsmodul (Struktur)
\mathbf{F}	Materieller Deformationsgradient sowie RHS–Vektor
\mathbf{F}_i	Iterations–RHS
\mathbf{F}_T	Zeit–RHS
G^S	Schubmodul (Struktur)

\mathbf{G}	Gradientenmatrix
\mathbf{G}^T	Divergenzmatrix
J, J^G, \tilde{J}	Jacobideterminanten ($\Omega_z \rightarrow \Omega_y$), ($\Omega_x \rightarrow \Omega_y$), ($\Omega_z \rightarrow \Omega_x$)
\mathbf{J}	Jacobimatrix
K	Element (der Triangulierung \mathcal{C}_h)
\mathbf{K}	Stefigkeitsmatrix
L, \mathcal{L}	Differentialoperatoren
\mathcal{L}^*	adjungierter Differentialoperator
$\mathcal{L}_C, \mathcal{L}_M$	Differentialoperator – Massebilanz, Impulsbilanz
$\mathcal{L}_{adv}, \mathcal{L}_{cont}$	Differentialoperator – Advektionsterm, Kontinuitätsterm
\mathcal{L}_{conv}	Differentialoperator – Konvektionsterm
$\mathcal{L}_{pres}, \mathcal{L}_{visc}$	Differentialoperator – Druckterm, Viskositätsterm
\mathbf{M}	Massenmatrix
\mathbf{N}	Matrix der Ansatzfunktionen
$\mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{u}$	Matrix der nichtlinearen Terme
$\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^h$	infiniter bzw. diskreter Funktionenraum (Druck)
\mathbf{P}^G	1. Piola–Kirchhoffscher Spannungstensor (Referenzgebiet)
\mathfrak{R}	Residuum
\mathbf{R}	Variablensatz – Netz
\mathbf{S}	2. Piola–Kirchhoffscher Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{S}}$	vorgeschriebener Spannungsvektor (Neumann–RB – Struktur)
\mathbf{U}	Variablensatz – Fluid
$\mathcal{V}, \mathcal{V}^h$	infiniter bzw. diskreter Funktionenraum (Geschwindigkeiten)
W_S	spezifische Formänderungsenergie
\mathbf{a}	Geschwindigkeitsfeld
\mathbf{b}	Volumenkraftvektor
\mathbf{c}	ALE–konvektiver Geschwindigkeitsvektor
$\mathbf{d}, \dot{\mathbf{d}}, \ddot{\mathbf{d}}$	Strukturverschiebungen, –geschwindigkeiten, –beschleunigungen
\mathbf{d}_0	Anfangs–Strukturverschiebungsfeld
$\tilde{\mathbf{d}}$	Dirichletrandbedingungen der Strukturverschiebungen
\mathbf{g}	Dirichletrandbedingungen der Strömungsgeschwindigkeiten
h	Elementgröße
\mathbf{h}	Randlasten (Neumann–RB – Fluid)
k	Ansatzordnung der Geschwindigkeitsinterpolationen
l	Ansatzordnung der Druckinterpolationen
\mathbf{n}, \mathbf{n}^G	Normale (Raumgebiet bzw. Referenzgebiet)
n_{sd}	Anzahl der Raumdimensionen
\bar{p}, p	thermodynamischer bzw. kinematischer Druck
p^h	diskrete Druckfunktionen

q, q^h	Testfunktionen für Massebilanz
\tilde{q}^h	Petrov–Galerkin–Testfunktionen für Massebilanz
r, \dot{r}, \ddot{r}	Netzverschiebungen, –geschwindigkeiten, –beschleunigungen
s	Stromlänge
t	Zeit
t^G	Oberflächenkraftvektor (Referenzgebiet)
u	materieller Geschwindigkeitsvektor der Strömung
u^h	diskrete Geschwindigkeitsfunktionen
u^0	Anfangs–Strömungsgeschwindigkeitsfeld
u^G	Netzgeschwindigkeitsvektor (ALE)
v, v^h	Testfunktionenvektor für Impulsbilanz
\tilde{v}^h	Petrov–Galerkin–Testfunktionenvektor für Impulsbilanz
w	Partikelgeschwindigkeitsvektor im Referenzsystem (ALE)
x, y, z	Referenz–, räumliche bzw. materielle Koordinaten
Γ	Gebietsrand
Φ, Ψ	Abbildungen Referenzgebiet \rightarrow Raumgebiet, Referenzgebiet \rightarrow Materialgebiet
Γ	Gebietsrand
Γ_S, Γ_d	Neumannrand bzw. Dirichletrand – Struktur
Γ_g, Γ_h	Dirichletrand bzw. Neumannrand – Fluid
Ω	Gebiet
Ω^e, Ω_K	Gebiet eines Elementes
Ω_F, Ω_S	Fluidgebiet bzw. Strukturgebiet
$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$	Referenzgebiet, Raumgebiet bzw. Materialgebiet
α_f, α_m	Zeitintegrationsparameter – Struktur
β, γ	Zeitintegrationsparameter – Struktur
ϵ	Deformationsgeschwindigkeitstensor
θ	Zeitdiskretisierungsparameter – Fluid
κ	Diffusionskoeffizient
λ^S, λ^M	Lamé–Konstante für Struktur bzw. Netz
μ	dynamische Viskosität
μ^S, μ^M	Lamé–Konstante für Struktur bzw. Netz
ν	kinematische Viskosität
ν^S, ν^M	Querdehnzahl Struktur bzw. Netz
ρ, ρ^0, ρ^G	Dichte im räumlichen, im materiellen bzw. im Referenzsystem
ρ_∞	Spektralradius
σ	Cauchyscher Spannungstensor
τ	viskoser Spannungstensor
τ	Stabilisierungsparameter
ϕ	skalare Größe

1 Einleitung

1.1 Motivation

Die meisten technisch-wissenschaftlichen Problemstellungen und insbesondere reale Ingenieur-Aufgabenstellungen können zur Gruppe sogenannter *Mehrfeld-Probleme* gezählt werden. Der Grund hierfür liegt darin, daß im Normalfall gleichzeitig unterschiedliche physikalische ‘Felder’ wirken und sich gegenseitig beeinflussen. Andere Bezeichnungen für diese Aufgabengruppe sprechen auch von gekoppelten Problemen oder, mit einem englischen Modewort, von ‘Multiphysics Problems’. Die klassische Aufgabe von Ingenieuren und der Ingenieurwissenschaften ist, die tatsächlichen, äußerst komplexen Zusammenhänge der Natur durch einfachere Modelle zu beschreiben. Dies führte dazu, daß in einer Vielzahl von Problemstellungen die komplexen Mehrfeld-Probleme durch einfachere Einfeld-Probleme ersetzt wurden. Nötigenfalls wurde die Wirkung der nicht mitmodellierten Felder auf das extrahierte Einfeld-Problem über stark vereinfachte Modelle beschrieben, meist ohne eine tatsächliche Wechselwirkung zu berücksichtigen. Je mehr nun im Laufe der Jahre die Möglichkeiten und Verfahren zur detaillierten Beschreibung solcher Einfeld-Probleme verbessert wurden, umso eindringlicher und verständlicher wird auch der Wunsch, die tatsächliche Komplexität des ursprünglichen Problems bereits im Modell, und dann natürlich auch in den Simulationsverfahren, besser erfassen zu können. Dies ist oftmals ohne eine Beschreibung des vollständigen, gekoppelten Problems nicht möglich.

Eine für viele Anwendungsgebiete wichtige Gruppe solcher Mehrfeld-Probleme ist durch die Wechselwirkung von Fluiden, z.B. Strömungen, und beweglichen oder flexiblen Strukturen wie Festkörpern charakterisiert. Einige Anwendungsgebiete solcher Fluid-Struktur-Interaktions-Probleme sind in Abschnitt 1.1.2 angeführt. Auf Grund dieser Vielzahl an Anwendungen, die die Kenntnis des gekoppelten Verhaltens von Fluid-Struktur-Systemen benötigen, und deren praktischer Relevanz ist dieses Gebiet seit vielen Jahren Gegenstand intensiver Forschungs- und Entwicklungsbemühungen. In vielen Fällen weisen nicht nur das gekoppelte Problem sondern bereits die beteiligten Einzelfelder eine entsprechende Komplexität auf, die die Verwendung analytischer Methoden ausschließt. Nur leistungsfähige numerische Verfahren und Computer sind in der Lage, solche Systeme zu simulieren. Mittlerweile ist die Entwicklung der numerischen Verfahren zur ‘realitätsnahen’ Beschreibung des Verhaltens der Einzelfelder sowohl im Strukturbereich wie auch im Fluidbereich sehr weit fortgeschritten. Neben der Entwicklung immer besserer und leistungsfähigerer Einzelfeld-Verfahren entsteht dadurch der Wunsch, auch realitätsnähere gekoppelte Modelle besser numerisch erfassen zu können. Es scheint also an der Zeit, die somit entstandenen Möglichkeiten für eine realitätsnähere Beschreibung des gekoppelten Problems besser zu nutzen. Eine Vielzahl aktueller Forschungsbemühungen verfolgen genau diese Richtung.

Ein untrügliches Zeichen für ein immer stärkeres Interesse an gekoppelten Problemstellungen sind die Forschungs- und Entwicklungsanstrengungen, die von einigen Industrieunternehmen und verschiedenen Softwareunternehmen zur Zeit unternommen werden. Als ein Beispiel sei hier das Projekt *CISPAR* (*‘Coupling of Industrial Simulation codes on PARallel platforms’*) erwähnt. Dies ist ein europäisches Kooperationsprojekt zwischen mehreren High-Tech-Indu-

strie–Unternehmen und verschiedenen Software–Unternehmen. Hauptaufgabengebiet in diesem Projekt ist die Entwicklung von *COCOLIB*, einer Kommunikationsbibliothek für Kopplungen (*‘COupling COmmunication LIBrary’*). Im Rahmen dieses Projekts soll auch ein Standard für die Kopplung industrieller Codes entwickelt werden. Auch die mit CIPAR in Verbindung stehende Entwicklung einer Methoden–Datenbank für die numerische Lösung gekoppelter Probleme auf Parallelrechnern, GRISSLi, weist in diese Richtung und zeigt dabei das wachsende Interesse an der Simulation gekoppelter Problemstellungen.

1.1.1 Klassifizierung von Mehrfeldproblemen

In der Natur existiert eine Vielzahl von teils sehr unterschiedlichen Mehrfeld–Problemstellungen. Eine Möglichkeit, diese unterschiedlichen Aufgabenstellungen für gekoppelte Probleme zu klassifizieren, findet sich in Zienkiewicz (1984). Dort werden zwei unterschiedliche Klassen gekoppelter Probleme unterschieden, die *volumengekoppelten* und die *oberflächengekoppelten* Probleme.

Volumengekoppelte Probleme

Diese Klasse beinhaltet Probleme, in denen sich die einzelnen Felder teilweise oder ganz überlappen. Die Modellkopplung geschieht über die Differentialgleichungen, die sich auf unterschiedliche physikalische Phänomene beziehen. Beispiele für volumengekoppelte Probleme sind die Thermomechanik, die Elektromechanik oder die Beschreibung von Strömungen in porösen Medien. Auch Problemstellungen, in denen physikalische Felder im Gebiet mit ‘Modellfeldern’, z.B. mit stochastischen Feldern, interagieren, könnten in diese Klasse eingeordnet werden. Manchmal werden in diesem Zusammenhang auch die Navier–Stokes–Gleichungen mit der Kopplung des Geschwindigkeits– und des Druckfeldes als volumengekoppeltes Problem bezeichnet.

Oberflächengekoppelte Probleme

In diese Klasse fallen sämtliche Problemstellungen, in denen die Kopplung der einzelnen Felder nur an den Gebietsrändern erfolgt. Die einzelnen Felder überlappen sich dabei nicht oder kaum. Hier geschieht die Kopplung über die entsprechenden Randbedingungen. Die Problemstellungen dieser Klasse lassen sich weiter unterteilen in eine Klasse, in denen in den unterschiedlichen Feldern auch unterschiedliche physikalische Aufgabenstellungen vorliegen, und in eine Gruppe mit Feldern mit identischer Physik. In die erste Gruppe fallen die Problemstellungen der Struktur–Strömungs–Wechselwirkungen, während in die zweite Gruppe ‘algorithmische Mehrfeld–Probleme’, wie Substruktur–Techniken und Gebietszerlegungsansätze, fallen.

Es kann sehr einfach gezeigt werden, daß die angeführte Klasseneinteilung nicht immer eindeutig sein muß. Wird beispielsweise bei der Aufgabenstellung von Strömungen in porösen Medien eine andere, feinere, Skala verwendet, so kann sich dieses Problem auch als oberflächengekoppeltes Problem (Kopplung von Korngerüst und Strömung) darstellen. Je nachdem wie stark sich die einzelnen Felder gegenseitig beeinflussen, d.h. wie stark sie interagieren, ist auch eine alternative Unterteilung der Klassen in *stark gekoppelte Probleme* und in *schwach gekoppelte Probleme* denkbar.

1.1.2 Fluid–Struktur–Interaktion

”Eigentlich ist schon alles gesagt — aber noch nicht von jedem!”

Karl Valentin

Die dieser Arbeit zu Grunde liegende Aufgabenstellung der Fluid–Struktur–Interaktion (FSI) gehört in die Klasse der oberflächengekoppelten Probleme. Ein gezwungenermaßen unvollständiger Versuch der Aufzählung einiger Anwendungen und Verfahren, die Fragestellungen nach den Wechselwirkungen zwischen Fluiden und Strukturen beinhalten, soll hier im Folgenden kurz dargestellt werden.

Bemerkung: Zusätzlich zur inhärenten Volumenkopplung der Navier–Stokes–Gleichungen kommt in der vorliegenden Aufgabenstellung noch die Problematik der Oberflächenkopplung hinzu. Wie sich im Laufe der Arbeit zeigen wird, tritt jedoch im verfolgten Gesamtlösungsansatz durch die Verwendung einer ALE–Formulierung quasi noch ein zusätzliches algorithmisches, volumengekoppeltes Problem hinzu. In diesem Sinne kann die vorliegende Gesamtproblematik der FSI als ein ‘hybrides oberflächen–/volumengekoppeltes Problem’ bezeichnet werden.

Anwendungen

Typische Anwendungsgebiete, die zur Klasse der Fluid–Struktur–Interaktion gehören, sind: Die Aeroelastizität, d.h. die Wechselwirkung zwischen der Luftströmung und Flugzeugen, Helikoptern oder Luftschiffen; die Windumströmung von Brücken oder hohen Gebäuden; membranartige Strukturen im Wind bzw. pneumatische Strukturen unter Gas– und Flüssigkeitseinwirkung; das Verhalten von Fallschirmen oder Airbags; fluidgefüllte Behälter (Flüssigkeitstanks) bei Erdbeben oder während eines Transports; physiologische Strömungen (‘Hemodynamics’ bzw. ‘cardiovascular flows’) und die Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Zellen bzw. ganz allgemein die Bio–(fluid–)mechanik; akustische Problemstellungen; Förderleitungen und Tragkonstruktionen bei Bohrplattformen; Fragestellungen in der Motorentchnik und im Automobilbau, bei Stauanlagen, Turbinen und im Schiffsbau, bei mikromechanischen Vorrichtungen und hydraulischen Dämpfern.

Einige Anwendungsbeispiele sind zur Veranschaulichung in Bild 1.1 dargestellt. Bei diesen Anwendungen handelt es sich um winderregte Brückenschwingungen, um flüssigkeitsgefüllte und umströmte beulende Behälter und um physiologische Strömungen, d.h. um die Wechselwirkungen von Fluiden und Geweben im Körper. Eine Reihe der erwähnten Anwendungen fallen in den engeren Bereich des vorliegenden Projektes. Damit ist es generell möglich, solche Aufgabenstellungen mit den in dieser Arbeit verwendeten Modellen zu beschreiben. Die wesentlichen Kriterien hierfür sind die Möglichkeit des Auftretens großer Strukturdeformationen, die auftretenden dominierenden Zeitskalen und das viskose, quasi inkompressible Fluidverhalten.

Verfahren

Auf Grund der Vielzahl an potentiellen Anwendungsgebieten für Fluid–Struktur–Interaktionsprobleme ist dies auch ein Gebiet, auf dem bereits eine Unmenge an Forschungsanstrengungen unternommen wurden. Dabei wurden die unterschiedlichsten Modelle, Ansätze und Verfahren verfolgt, und bereits der geringste Versuch, eine Literaturübersicht zu erstellen, wäre ein hoff-

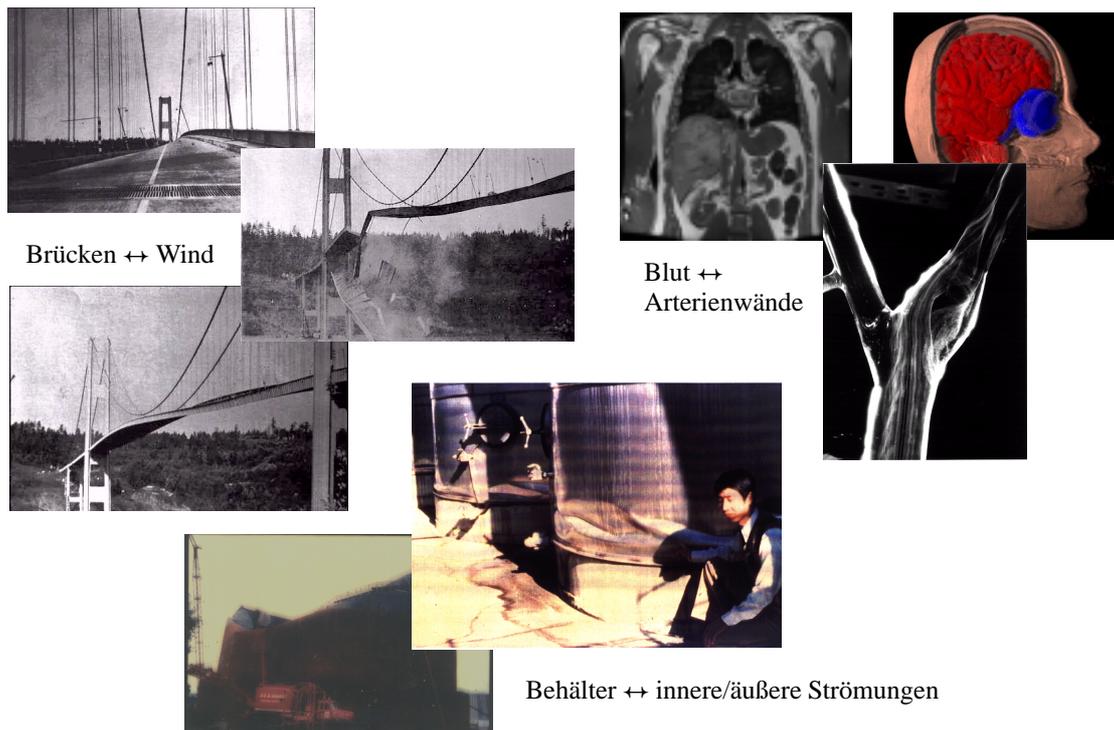


Bild 1.1: Anwendungsbeispiele für Fluid–Struktur–Interaktion

nungsloses Unterfangen. Im Folgenden sollen deshalb nur einige Streiflichter zu möglichen Verfahren für FSI angeführt werden. Den Versuch, einen teilweisen Überblick über bestimmte Arbeiten auf dem Gebiet der Fluid–Struktur–Interaktion zu geben, unternimmt auch Cebraal (1996). Dabei teilt er die publizierten Arbeiten in verschiedene Gruppen ein. Diese Gruppen beziehen sich auf die

- *Komplexität der Modelle für den Fluidbereich* — von Potentialströmungen bis hin zu direkten Navier–Stokes–Simulationen (DNS) turbulenter Strömungen
- *Komplexität der Strukturmodelle* — von starren Festkörpern, über einfache Modalanalysen bis hin zu voll instationären, geometrisch und materiell nichtlinearen Modellen
- *Komplexität der ‘Interface–Behandlung’* — zusammenpassende Diskretisierungen mit einfachem Informationstransfer bis hin zu völlig freien Diskretisierungen.

Aus der Übersicht von Cebraal (1996) wird klar, daß in den meisten Fällen, in denen komplexe Modelle eingesetzt werden, diese nur in einem Feld angewendet werden und mit einem einfachen Modell des anderen Feldes gekoppelt werden. Die wenigen Fälle, die auf komplexen Modellen für sämtliche involvierten Felder aufbauen, haben oftmals den Makel der geringen bzw. gar nicht versuchten theoretischen Absicherung der Verfahren.

Relativ viele Arbeiten der letzten Jahre beschäftigen sich mit der Simulation der instationären Wechselwirkung von einfachsten Strukturmodellen, z.B. flexibel gelagerter, starrer Festkörper, mit teils recht komplexen Strömungsmodellen, wie sogar den vollständigen Navier–Stokes–Gleichungen. Solche Modelle finden sich in den Arbeiten von Dahlheim (1996), Huerta und Liu (1988a), Johnson und Tezduyar (1994), Maruoka et al. (1994), Masud und Hughes (1997), Mittal (1992), Nomura (1994), Nomura und Hughes (1992), Piperno (1998), Tezduyar (1992) und Watanabe et al. (1996).

Verfahren mit komplexeren Strukturmodellen, dafür aber relativ einfachen Fluidmodellen, finden sich in Liu und Gvildys (1986), Rammerstorfer et al. (1990) und Wunderlich et al. (1994). Solche einfachen Fluidmodelle berücksichtigen die Wirkung des Fluides oft nur im Sinne eines ‘added mass’-Ansatzes. Auch dem Strukturmodell sind bezüglich geometrischer Komplexität oft Grenzen gesetzt, z.B. durch die Beschränkung auf Rotationssymmetrie.

Die Anwendung von Verfahren mit einer Kombination komplexerer Modelle für Struktur und Fluid findet sich in Bathe et al. (1995), Casadei und Halleux (1995), Donea et al. (1982), Farhat (1997), Hierholz und Wagner (1998), Kalro et al. (1996), Le Tallec und Mouro (1999), Liu und Ma (1982), Liu und Uras (1992), Löhner et al. (1995) und Wall und Ramm (1998). Auch wenn hier von der Kombination komplexer Modelle die Rede ist, heißt das auf Strukturseite oftmals nur, daß es sich um flexible Strukturen mit einfachem Verhalten handelt. Sie sind häufig nur linear elastisch oder ermöglichen auch nur die Beschreibung kleiner Deformationen.

Es soll nochmals betont werden, daß die erwähnten Arbeiten nur einen kleinen Ausschnitt der tatsächlich existierenden Ansätze darstellen. Das vermittelte Bild scheint jedoch eine größere Gültigkeit zu haben und zeigt sich in ähnlicher Weise auch mit Blick auf den Entwicklungsstand kommerzieller Softwarepakete. Aus den bisherigen Ausführungen und der angeführten Literatur wird klar: Trotz der Vielzahl an durchgeführten Arbeiten und unterschiedlichen entwickelten Ansätzen besteht für die Entwicklung zuverlässiger und effizienter Verfahren zur Behandlung allgemeiner und komplexer FSI-Problemstellungen noch ein großer Forschungsbedarf.

Auch wenn die neuesten und am weitesten entwickelten numerischen Verfahren noch nicht ausreichen, um eine genaue und zuverlässige Beschreibung des tatsächlichen gekoppelten Systemverhaltens zu ermöglichen, sind solche Verfahren doch hilfreich und notwendig. Dies soll ein Beispiel verdeutlichen. Für einen großen Hängebrückenentwurf waren nach Aussage eines der am Entwurf beteiligten Ingenieure (Brian Smith, ‘personal communications’) in der Entwurfsphase noch zahlreiche teure Windkanalversuche erforderlich. Teilweise dienten diese Versuche nur Variantenstudien zu Detailausbildungen des Brückenquerschnittes. Wenn auch eine realitätsgenaue Simulation einer gesamten Brücke unter Windeinwirkung sicher noch einige Zeit auf sich warten lassen wird, so wäre es im geschilderten Fall durch den Einsatz moderner Simulationsansätze für gekoppelte Probleme doch möglich gewesen, die Entwurfskosten beträchtlich zu verringern.

1.2 Zielsetzung

Ziel dieser Arbeit ist es, numerische Verfahren zu entwickeln, die es ermöglichen, das Verhalten von gekoppelten Fluid-Struktur-Interaktions-Problemen möglichst realitätsnah und in der für viele Anwendungen notwendigen Komplexität zu beschreiben. Auf Grund der Komplexität der ins Auge gefaßten Problemklassen ist es dabei notwendig, auf ‘übliche’ Vereinfachungen und Einschränkungen vieler existierender Ansätze zu verzichten, d.h. auf entsprechend komplexen Modellen aufzubauen. Dies erklärt auch das Ziel, hochentwickelte Verfahren und Algorithmen mit einer weitgehenden theoretischen Absicherung bereitzustellen.

In dieser Arbeit zur Fluid-Struktur-Interaktion sollen die methodischen Aspekte und weniger die eigentlichen Anwendungen im Vordergrund stehen. In den Ingenieurwissenschaften geht

es nicht nur um die Modellbildung und die tatsächliche Simulation, es geht auch darum numerische Werkzeuge zu entwickeln. Diese erlauben es dann, im Gegenzug neue sowohl für die Ingenieurwissenschaften als auch für die ‘Praxis’ relevante Problemklassen zu erschließen — ”If your only tool is a hammer, all your problems *have* to be nails!” (Autor unbekannt). Es geht in dieser Arbeit also um eine ‘zielgerichtete Werkzeugentwicklung’, um einen ‘Werkzeugkoffer’ für eine bestimmte Problemklasse zur Verfügung zu stellen.

Das Hauptinteresse dieses an einem Institut für Baustatik bearbeiteten Projekts zur Fluid–Struktur–Interaktion liegt auf einer Vorhersage des auftretenden Strukturverhaltens, vornehmlich von schlanken Konstruktionen. Daraus folgt, daß leistungsfähige Werkzeuge zur Simulation des komplexen Strukturverhaltens benötigt werden. Da aber in einer Vielzahl der interessanten Problemstellungen auch bei solchen Fragestellungen der Strömungsteil die numerische Simulation dominiert, war es wichtig und entscheidend, entsprechend leistungsfähige Werkzeuge zur numerischen Strömungsdynamik einzusetzen. Diese sollten gut zu den ‘Struktur–Werkzeugen’ passen, also beispielsweise auf demselben Diskretisierungsansatz (Finite Elemente) aufbauen. Aus der Tatsache, daß solche Werkzeuge aber bisher für das Projekt noch nicht ansatzweise zur Verfügung standen, erklärt sich der Umstand, daß der Schwerpunkt dieser Arbeit auf dem Bereich der numerischen Strömungsdynamik (CFD) liegt.

Ein weiteres Ziel dieser Arbeit ist auch die prinzipielle Sichtung, Evaluierung und Erarbeitung der für die Simulation gekoppelter Fluid–Struktur–Interaktions–Probleme relevanten Fragestellungen. Aus diesem Grund wird in den einzelnen Abschnitten auch versucht, kurze Überblicke zu geben und gelegentlich Ausblicke auf Verfahren einfließen zu lassen, die in der vorliegenden Arbeit numerisch noch nicht umgesetzt wurden, jedoch wichtig erscheinen.

1.3 Übersicht

*”I’m sorry for this long letter, but I couldn’t find time to write a shorter one!”
(vermutlich) G.B. Shaw (in einem seiner Briefe)*

Vorbemerkungen

Es wird in dieser Arbeit versucht, sämtliche Einzelthemen und Einzelaspekte der behandelten Gesamtproblematik zumindest so weit anzudiskutieren, daß ein Verständnis für die Zusammenhänge auch den Experten aus den jeweiligen Einzelgebieten dieses ‘interdisziplinären’ Themas ermöglicht wird. Um dabei den ‘üblichen Rahmen’ einer solchen Arbeit nicht zu sprengen, wurde auf eine ausführliche Darstellung sämtlicher erarbeiteter Gebiete jedoch verzichtet. So sollten vor allem jene Bereiche verständlich dargestellt werden, die für die Gesamtproblematik des Themas dieser Arbeit vorrangig sind. Am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart stellt die vorliegende Dissertation die erste Arbeit dar, die sich mit Fluiden beschäftigt. Vor diesem Hintergrund werden im folgenden die Grundlagen und Ansätze zum Thema Fluid ausführlicher besprochen. Zum Zwecke der Übersichtlichkeit werden dabei jedoch einige grundlegende Aspekte zur Fluidmechanik in den Anhang (A1) ausgelagert. Im Vergleich zur Strömungsmechanik wird versucht, die Themenkreise zur Strukturmechanik kürzer abzuhandeln. Ein eindeutiger Schwerpunkt bei der Darstellung wurde in der Arbeit auf das Thema der stabilisierten Finiten Elemente gelegt. Dies motiviert sich unter anderem aus der Tatsache, daß die Literatur zu diesem Thema leider oft viele Wünsche bezüglich Klarheit bzw. Verständlichkeit

offen läßt (T.J.R. Hughes, ‘personal communications’) und zu diesem Thema auch noch kaum zusammenfassende bzw. überblicksartige Arbeiten vorliegen.

Durch die notwendige Behandlung unterschiedlicher Themengebiete und die erforderliche Entwicklung der jeweiligen numerischen Verfahren schien es sinnvoll, die numerischen Beispiele nicht in einem einzigen Beispielkapitel zusammenzufassen. Deshalb wurden sie den jeweiligen Themengebieten und damit den entsprechenden Kapiteln direkt zugeordnet.

Die einzelnen Kapitel

In *Kapitel 2* werden die kontinuumsmechanischen Grundlagen für die Beschreibung der involvierten physikalischen Felder zur Verfügung gestellt. Dabei wird besonders auf eine konsistente Ableitung der erforderlichen Bilanzgleichungen im Sinne einer ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’-Formulierung Wert gelegt.

Eine ausführliche Darstellung zur Methode der stabilisierten Finiten Elemente findet sich in *Kapitel 3*. Probleme bei der Verwendung der klassischen Finite-Element-Methode zur Strömungssimulation werden besprochen und interpretiert sowie Maßnahmen zu deren Vermeidung vorgeschlagen. Die Entwicklung der stabilisierten Finite-Element-Methode wird skizziert und schließlich ein voll stabilisiertes Finite-Element-Verfahren für die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen vorgeschlagen.

Kapitel 4 diskutiert die algorithmische Behandlung der räumlich diskretisierten Strömungsgleichungen. Dazu werden Verfahren zur Behandlung der auftretenden Nichtlinearitäten ebenso vorgeschlagen wie (intelligente) Methoden zur zeitlichen Diskretisierung des Problems. Die einzelnen Bausteine werden dann zu Gesamtalgorithmen, sogenannten ‘Navier-Stokes-Lösers’, zur Behandlung der instationären und stationären Strömungsgleichungen zusammengesetzt.

Die Erweiterung des vorgestellten ‘Navier-Stokes-Lösers’ zur Beschreibung von Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten wird in *Kapitel 5* behandelt. Neben Maßnahmen zur korrekten Formulierung der Stabilisierungen kommt dabei auch die Notwendigkeit der Erfüllung einer zusätzlichen Bilanzgleichung, der sogenannten geometrischen Bilanzgleichung, zur Sprache.

Lösungsverfahren für die restlichen Felder werden in *Kapitel 6* besprochen. Für das zweite physikalische Feld, die Struktur, werden dazu sowohl die räumlichen als auch die zeitlichen Diskretisierungsansätze gezeigt. Kombiniert mit einem Ansatz zur Behandlung der Nichtlinearitäten resultiert dies in einem Verfahren zur Lösung geometrisch nichtlinearer, elastodynamischer Problemstellungen. Auch ein drittes, algorithmisches Feld, das ‘Diskretisierungsnetz’, ist Teil des vorliegenden Mehrfeld-Problems. In diesem Zusammenhang werden unterschiedliche Möglichkeiten zur Bestimmung der Netzbewegung angesprochen. Ein Pseudo-Struktur-Ansatz wird als bevorzugte und relativ allgemeine Möglichkeit mit mehreren algorithmischen Varianten ausführlich behandelt.

Kapitel 7 befaßt sich schließlich mit der eigentlichen gekoppelten Fragestellung. Nach einer einleitenden Übersicht über mögliche Lösungsverfahren gekoppelter Systeme wird dann speziell auf die eigentliche Kopplungsproblematik zwischen den Feldern Fluid, Struktur und Netz eingegangen. Partitionierte Lösungsansätze werden als effiziente Möglichkeit zur Lösung solcher Fragestellungen diskutiert. Verfahren aus sämtlichen besprochenen Bereichen finden dann Eingang in den skizzierten Dreifeld-Fluid-Struktur-Interaktions-Löser.

In *Kapitel 8* wird die Arbeit schließlich zusammengefaßt und ein kurzer Ausblick auf notwendige und mögliche Weiterentwicklungen zu dem behandelten Themengebiet gegeben.

Anhang A bietet einige kurze einführende Bemerkungen in die ‘Computational Fluid Dynamics’, stellt einige mathematische Grundlagen bereit und behandelt die Frage der verwendeten ‘Computational Tools’.

2 Kontinuumsmechanische Grundlagen

Dieses Kapitel soll die kontinuumsmechanische Basis für die weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit zur Verfügung stellen. Dazu werden die grundlegenden Gleichungen für die beteiligten physikalischen Felder abgeleitet bzw. angeführt. Dies scheint besonders im Kontext des hier bearbeiteten ‘interdisziplinären’ Themas angebracht, um auch Lesern aus den entsprechenden Spezialgebieten die Grundlagen des jeweils anderen Gebietes und somit eine gemeinsame Basis zu bieten. Ausführliche Darstellungen zur Kontinuumsmechanik finden sich u.a. in Altenbach und Altenbach (1994), Becker und Bürger (1975), Malvern (1969), Marsden und Hughes (1983) und Stein und Barthold (1992).

Bevor die Bestimmungsgleichungen für die Felder Struktur und Fluid angegeben werden, erfolgt die Ableitung der zu Grunde liegenden Bilanzgleichungen. Dies stellt eine Standardaufgabe der Kontinuumsmechanik dar und ist in jedem entsprechenden (Lehr-)Buch zu finden. Im Gegensatz zur ‘klassischen Kontinuumsmechanik’ soll hier jedoch eine konsistente Ableitung im Sinne einer ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’- (ALE-) Betrachtungsweise erfolgen, aus der die üblicherweise angeführte Lagrangesche bzw. Eulersche Betrachtungsweise als Sonderfälle abgeleitet werden. Diese in der ALE-Betrachtungsweise abgeleiteten Bilanzgleichungen ermöglichen dann in weiterer Folge eine einfache und elegante Formulierung des gekoppelten Fluid-Struktur-Interaktionsproblems.

2.1 ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’- (ALE-) Betrachtungsweise

2.1.1 Lagrange versus Euler

Zur Beschreibung der Bewegung eines Kontinuums werden hauptsächlich zwei Ansätze verwendet. Es sind dies die *Lagrangesche* oder *materielle* sowie die *Eulersche* oder *räumliche Betrachtungsweise*. Das Unterscheidungsmerkmal zwischen diesen beiden Betrachtungsweisen ist eine Frage des Beobachters des untersuchten kinematischen Vorgangs. Dieser wird dazu formal als Abbildung χ definiert, die jeden materiellen Punkt \mathcal{M} eines materiellen Körpers \mathfrak{B} zu jeder Zeit $t \in \mathbb{R}$ in den \mathbb{R}^3 abbildet.

$$\chi : \mathfrak{B} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.1)$$

Lagrangesche oder materielle Betrachtungsweise

Diese Betrachtungsweise wurde nach Truesdell (1952) von Leonhard Euler (1707–1783) in der Mitte des 18. Jahrhunderts eingeführt und ist nach Joseph Louis Lagrange (1736–1813) benannt. Der Beobachter verfolgt hier jeden einzelnen materiellen Punkt auf seiner Bahn durch den Raum und mißt dessen Eigenschaften und dessen Position im Raum. Er sitzt sozusagen im Rucksack des materiellen Punktes. Eine beliebige Eigenschaft f eines Materiepunktes wird also stets für eine konstante materielle Koordinate z gemessen.

$$f = f(z, t) : z = \text{const.} \mid z = \chi(\mathcal{M}, t_0) \quad (2.2)$$

Der Vorteil der Lagrangeschen Betrachtungsweise liegt darin, daß durch das Haften am Materiepunkt Gebietsränder (bewegliche Ränder, freie Oberflächen) sehr einfach beschrieben wer-

den können. Nachteilig wirkt sich dieses Verfolgen jedes Materiepunktes auf dem gesamten Deformationsweg jedoch bei Problemstellungen mit ‘großen Deformationen’ aus. Die Lagrangesche oder materielle Beschreibung hat sich als übliche Darstellungsweise in der Festkörpermechanik durchgesetzt.

Eulersche oder räumliche Betrachtungsweise

Diese nach Leonhard Euler benannte Betrachtungsweise geht laut Truesdell (1952) wiederum auf Daniel Bernoulli (1700–1782) und auf Jean le Rond D’Alembert (1717–1783) zurück. Hier sitzt der Beobachter fest an einem Raumpunkt und mißt die Eigenschaften der materiellen Punkte, die im Verlauf der Zeit diesen Ort einnehmen. Er steht gewissermaßen auf einer Brücke und beobachtet die vorbeifließenden Materiepunkte. Hier wird eine Eigenschaft f eines Materiepunktes für eine konstante räumliche Koordinate y gemessen.

$$f = f(y, t) : y = \text{const.} \quad | \quad y = \chi(\mathcal{M}, t) \quad (2.3)$$

Aufgrund der Fixierung auf einen festen Raumpunkt bereitet es der Eulerschen oder räumlichen Betrachtungsweise keine Schwierigkeiten, große Deformationen zu beschreiben. Allerdings bedarf es hier teils aufwendiger zusätzlicher Maßnahmen, um beispielsweise Gebietsränder (z.B. freie Oberflächen, ‘Interfaces’) während der Deformation zu beschreiben. Ein weiterer Nachteil – besonders im Hinblick auf die spätere numerische Umsetzung – besteht hier auch im Vorhandensein sogenannter konvektiver Effekte, welche durch die Relativbewegung zwischen Materiepunkten und Beobachter in den Bilanzgleichungen entstehen. Haupteinsatzgebiete der Eulerschen oder räumlichen Beschreibung sind die Strömungsmechanik, die Umformtechnik und teilweise auch Probleme der Festkörpermechanik mit endlichen Deformationen.

Die beiden vorgestellten Konzepte lassen sich mit zwei bei der Analyse von Geschwindigkeitsfeldern auftretenden Begriffen assoziieren. Es sind dies, wie in Bild 2.1 dargestellt, die Begriffe

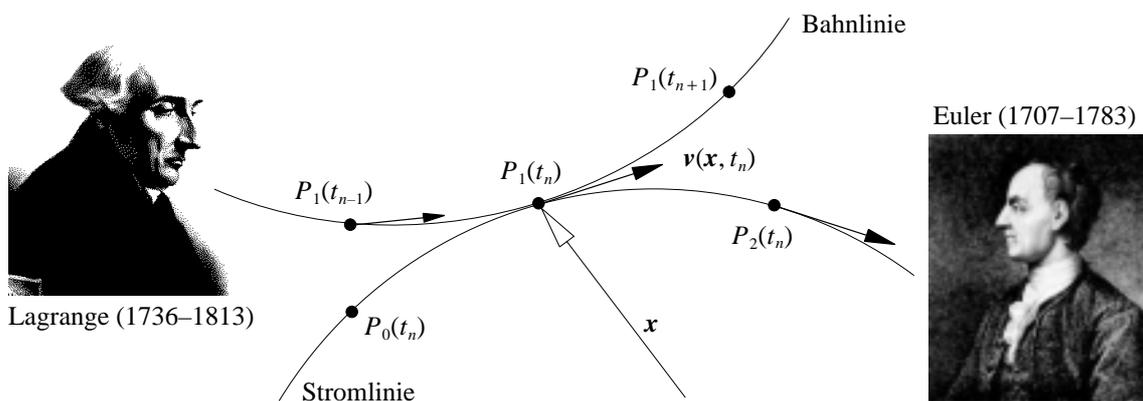


Bild 2.1: Bahnlinie und Stromlinie bzw. Lagrangesche und Eulersche Betrachtungsweise

der *Stromlinie* und der *Bahnlinie*. Eine Bahnlinie ist dabei der geometrische Ort aller Raumpunkte, die ein materieller Punkt während seiner Bewegung durchläuft, d.h. sie ist die Verbindungslinie aller Orte, an denen sich ein *spezieller materieller Punkt* zu unterschiedlichen Zeiten befindet. Die Assoziation zur Bahnlinie ist somit die Lagrangesche Betrachtungsweise. Die Eulersche Betrachtungsweise läßt sich durch das Konzept der Stromlinie verdeutlichen, die als Integralkurve des Geschwindigkeitsfeldes zu einem bestimmten Zeitpunkt definiert ist. Die Stromlinie ist somit die Verbindungslinie von Orten, an denen sich zur gleichen Zeit unter-

schiedliche materielle Punkte befinden, die bei einem entsprechenden stationären Strömungszustand dieselbe Bahnlinie hätten.

Bemerkung: Die sogenannte ‘Updated Lagrange’-Formulierung — hier wird der zur Beschreibung des kinematischen Vorgangs verwendete Referenzzustand ‘ständig’ aktualisiert — trägt ihren Namen zurecht und kann nicht, wie oft fälschlicherweise behauptet wird, als eine Eulersche Betrachtungsweise interpretiert werden. Dies läßt sich, entsprechend obigen Erläuterungen, allein schon aus der Tatsache erkennen, daß trotz Mitbewegen des Referenzsystems immer ein Materiepunkt *betrachtet* und verfolgt wird.

2.1.2 ‘ALE = Lagrange \cup Euler’

Aufgrund der angeführten Unzulänglichkeiten der beiden klassischen Formulierungen wurde die sogenannte ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’-Betrachtungsweise entwickelt, die in der Lage ist, die Vorteile beider Ansätze zu kombinieren. Erste entsprechende Verfahren, anfängliche Arbeiten sprachen auch von ‘Quasi-Eulerian’, ‘Coupled Eulerian-Lagrangean’ oder ‘Mixed Eulerian-Lagrangean’ Formulierungen, wurden u.a. von Noh (1964) und Hirt et al. (1974) im Zusammenhang mit Finite-Differenzen-Ansätzen umgesetzt. Erste ALE-Finite-Element-Verfahren stammen von Donea et al. (1977), Belytschko und Kennedy (1978), Belytschko et al. (1980) und Hughes et al. (1981). In Hughes et al. (1981) wurde dabei erstmals ein ALE Finite-Element-Verfahren für inkompressible, viskose Strömungen vorgestellt — die angeführten Vorgängerarbeiten beschäftigten sich vornehmlich mit nicht-viskosen, kompressiblen Strömungen. Alternative Konzepte zur Strömungssimulation auf zeitveränderlichen Gebieten sowie eine Diskussion der algorithmischen Umsetzung von ALE-Verfahren und weitere Literaturangaben finden sich in Kapitel 5.

Die prinzipielle Idee hinter der ALE kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise besteht darin, daß sich der Beobachter weder fix mit dem Materiepunkt bewegt noch fest an einem Raumpunkt haftet, sondern sich beliebig — ‘arbitrary’ — bewegen kann. Zu diesem Zweck wird, wie in Bild 2.2 dargestellt, zusätzlich zum Raumgebiet Ω_y und Materialgebiet Ω_z ein

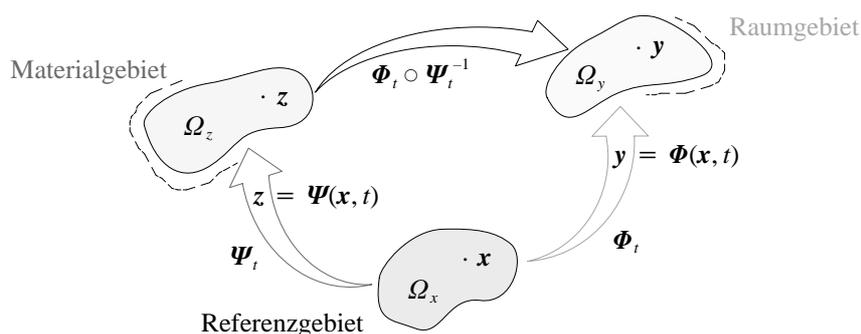


Bild 2.2: Gebiete im Rahmen einer ALE-Betrachtungsweise

drittes Gebiet, das sogenannte Referenzgebiet Ω_x , eingeführt. Entsprechend der Definition räumlicher Koordinaten (2.3) bezeichnet Ω_y jenes ‘räumliche’ Gebiet, in dem der kinematische Vorgang stattfindet. Analog zur Definition materieller Koordinaten (2.2) dient Ω_z der Bezeichnung der Materiepunkte und kann z.B. als jenes Gebiet gedacht werden, in welchem sich die Materialteilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ befinden — jene Teilchen die zum Zeitpunkt t das Gebiet Ω_y bedecken. Das neu eingeführte, beliebig bewegbare Referenzgebiet wird nun zur Beschreibung des betrachteten kinematischen Vorgangs verwendet. Die zugehörigen Koordinaten

werden als Referenzkoordinaten \mathbf{x} bezeichnet. Bezogen auf das Referenzgebiet Ω_x befinden sich die Gebiete Ω_y und Ω_z prinzipiell in Bewegung. Wie aus Bild 2.2 ersichtlich, sind diese Bewegungen durch die Abbildungen Φ_t und Ψ_t gegeben, die symbolisch durch

$$\Omega_x \times [0, \infty[\rightarrow \Omega_y, \quad (\mathbf{x}, t) \mapsto \Phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{y} \quad (2.4)$$

sowie durch

$$\Omega_x \times [0, \infty[\rightarrow \Omega_z, \quad (\mathbf{x}, t) \mapsto \Psi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{z} \quad (2.5)$$

dargestellt werden. Wird eine dieser Abbildungen zur Einheitsabbildung \mathbf{I} , so geht die ALE-Betrachtungsweise über in die Lagrangesche Betrachtungsweise, für $\Psi_t = \mathbf{I}$ bzw. $\Omega_x = \Omega_z$, oder, für $\Phi_t = \mathbf{I}$ bzw. $\Omega_x = \Omega_y$, in die Eulersche Betrachtungsweise. Die klassischen Formulierungen können somit als Sonderfälle einer ALE-Formulierung betrachtet werden.

Jede physikalische Eigenschaft f kann nun mit Bezug auf jedes der eingeführten Gebiete angegeben werden.

$$f(\mathbf{y}, t) = f^*(\mathbf{x}, t) = f^{**}(\mathbf{z}, t) \quad (2.6)$$

Hierbei sollen $(\cdot)^*$ sowie $(\cdot)^{**}$ die Veränderung des funktionalen Zusammenhangs entsprechend den eingeführten Abbildungen andeuten.

$$f^* = f \circ \Phi, \quad f^{**} = f \circ \Phi \circ \Psi^{-1} \quad (2.7)$$

Um eine übermäßige Notationswucherung zu vermeiden, wird in den folgenden Ableitungen eine abgekürzte Notation verwendet, d.h. (2.6) wird im folgenden verkürzt geschrieben als

$$f(\mathbf{y}, t) = f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{z}, t) \quad (2.8)$$

Grafische Interpretation im Finite-Element-Kontext

In der späteren numerischen Umsetzung wird das Finite-Element-Netz gewissermaßen die Rolle des Beobachters übernehmen. Somit lassen sich die 3 unterschiedlichen Betrachtungsweisen entsprechend Bild 2.3 grafisch interpretieren und verdeutlichen. Im Verlauf der Zeit befinden

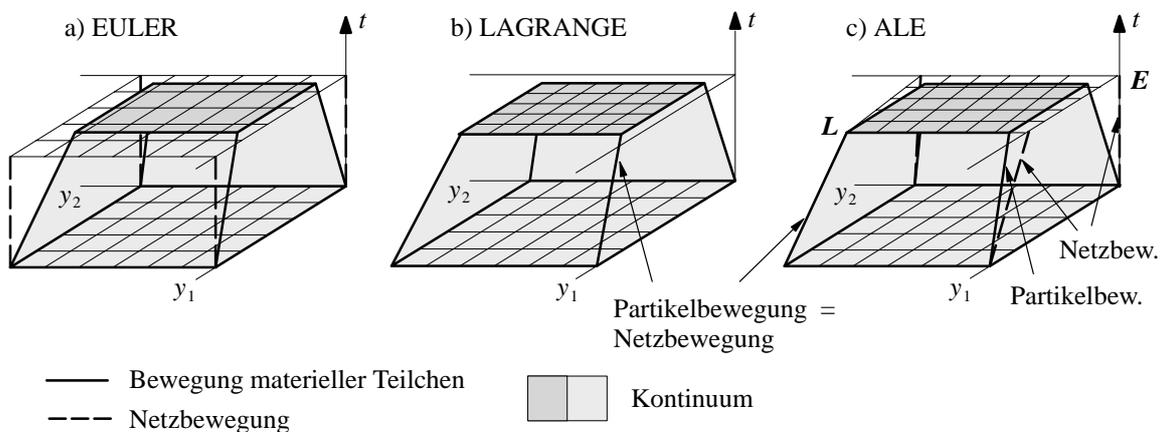


Bild 2.3: Grafische Interpretation für Euler-, Lagrange- und ALE-Formulierungen

det sich dabei das Finite-Element-Netz a) unverrückbar im räumlichen Koordinatensystem (Euler), b) in Bewegung mit der Materie (Lagrange) oder c) in einer beliebigen Bewegung

(ALE). Im ALE-Falle können einzelne Knoten natürlich auch ein zu den Fällen a) bzw. b) analoges Verhalten zeigen (Knoten E bzw. L in Bild 2.3 c). Man spricht in diesem Zusammenhang von *Euler-* bzw. *Lagrange-Knoten* oder auch von einer *lokalen Euler-* bzw. *lokalen Lagrangeschen Betrachtungsweise*. Ein weitere Verdeutlichung dieser Zusammenhänge erfolgt in Kapitel 5 und in den Skizzen in den Kapiteln 6.2 und 7.5.

Bemerkung: Die unter Umständen verwirrenden Bezeichnungen ‘materielle’ bzw. ‘räumliche’ Betrachtung beziehen sich nicht auf die Verwendung materieller bzw. räumlicher Koordinaten, sondern sollen auf das Bezugssystem Materiepunkt bzw. Raumpunkt verweisen. Die Unterscheidung zwischen den einzelnen Betrachtungsweisen (Lagrange, Euler oder ALE) ist also, entgegen häufig anzutreffenden Behauptungen, *keine* Frage der verwendeten Koordinaten (materielle, räumliche oder Referenzkoordinaten), sondern einzig eine Frage des gewählten Beobachters. Diese Verwirrung in der Literatur wird gelegentlich auch noch dadurch vergrößert, daß die materiellen bzw. die räumlichen Koordinaten als Lagrange- bzw. Euler-Koordinaten bezeichnet werden.

Anwendungsmöglichkeiten einer ALE kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise

In dieser Arbeit werden die Möglichkeiten, die sich durch Verwendung einer ALE kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise eröffnen, verwendet, um Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten zu simulieren. ALE-Formulierungen können jedoch auch in anderen Bereichen der ‘Computational Mechanics’, wie z.B. der nichtlinearen Strukturmechanik oder der Umformtechnik, eingesetzt werden. Beiträge hierzu finden sich u.a. in Huerta und Casadei (1994), Liu et al. (1986), Liu et al. (1991), Pijaudier-Cabot et al. (1995) sowie Wang und Gadala (1997). Ein weiteres Anwendungsgebiet wäre die Umsetzung im Sinne eines ‘r-adaptiven Algorithmus’ für eine Neuvernetzung in der Finiten-Element-Formulierung. Durch eine ALE-Formulierung würden hier die Bilanzgleichungen in den Adaptionsschritten automatisch erfüllt und es könnte eine Projektion der Zustandsvariablen zwischen altem und adaptiertem Netz vermieden werden.

2.1.3 Bilanzgleichungen in ALE-Betrachtungsweise

Im Folgenden werden die Bilanzgleichungen für Masse und Impuls im Rahmen einer ALE-Formulierung abgeleitet. Eine Ableitung weiterer, in dieser Arbeit jedoch nicht benötigten, Erhaltungsgrößen (wie z.B. Drall, Energie) kann völlig analog vorgenommen werden. Zur Ableitung der ALE-Bilanzgleichungen wird u.a. auf die Arbeiten von Huerta und Liu (1988b), Hughes et al. (1981) und Donea (1983) verwiesen.

Zwei Hilfsgrößen, die zur Formulierung der Bilanzgleichungen benötigt werden, sind die *materielle Zeitableitung* sowie die *materielle Zeitableitung einer integralen Größe*, die auch als *Reynoldssches Transporttheorem* bezeichnet wird.

Materielle Zeitableitung

Die materielle Zeitableitung $D(\cdot)/Dt$ folgt aus der Differenziation einer (skalaren, physikalischen) Eigenschaft eines Materieteilchens (d.h. $z = konst.$) nach der Zeit. Bezogen auf das Referenzgebiet resultiert diese Ableitung durch einfache Anwendung der Kettenregel in

$$\dot{f} = \frac{Df}{Dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) \right|_z = \left. \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|_x + \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_z \quad (2.9)$$

Darin wird die Notation

$$\left. \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \right|_z \quad (2.10)$$

für eine partielle Ableitung nach der Zeit t bei konstant gehaltenem z verwendet. Die Größe

$$w_i = \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_z \quad (2.11)$$

kann als Partikelgeschwindigkeit im Referenzsystem interpretiert werden. Wird in (2.9) als Eigenschaft die räumliche Koordinate spezifiziert, ergibt sich

$$\left. \frac{\partial y_i}{\partial t}(\mathbf{z}, t) \right|_z = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|_x + w_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \quad (2.12)$$

wobei die Materialgeschwindigkeit \mathbf{u} und die Netzgeschwindigkeit \mathbf{u}^G als

$$u_i = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t}(\mathbf{z}, t) \right|_z \quad (2.13)$$

und

$$u_i^G = \left. \frac{\partial y_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|_x \quad (2.14)$$

definiert werden können. Somit läßt sich die Materialgeschwindigkeit auch als

$$u_i = u_i^G + w_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \quad (2.15)$$

schreiben. Durch Verwendung der beiden in den Gleichungen (2.13) und (2.14) definierten Größen läßt sich die für die weiteren Ableitungen wesentliche Größe, die *(ALE-) konvektive Geschwindigkeit* \mathbf{c} , als Differenz der Materialgeschwindigkeit und der Netzgeschwindigkeit einführen.

$$c_i = u_i - u_i^G \quad (2.16)$$

Durch erneute Anwendung der Kettenregel in (2.9) und Einsetzen von (2.15) und (2.16) ergibt sich schließlich der Zusammenhang zwischen *materieller* und *referentieller Zeitableitung*

$$\frac{Df}{Dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \right|_x + c_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{y}, t) \quad (2.17)$$

die auch als *ALE Grundgleichung* bezeichnet werden kann.

Sonderfälle: Eine Spezifikation der Abbildung Referenzgebiet \leftrightarrow Materialgebiet als Einheitsabbildung, d.h. $\Psi_t = \mathbf{I}$ bzw.

$$\Omega_x = \Omega_z, \quad \mathbf{x} = \mathbf{z} \quad \text{bzw.} \quad u_i = u_i^G \Rightarrow c_i = 0 \quad (2.18)$$

liefert aus (2.17) die materielle Zeitableitung in der Lagrangeschen Betrachtungsweise

$$\frac{Df}{Dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{z}, t) \right|_z \quad (2.19)$$

Durch die Verwendung einer Einheitsabbildung $\Phi_t = \mathbf{I}$ zwischen Referenz- und Raumgebiet läßt sich der Eulersche Sonderfall aus der ALE Grundgleichung (2.17) mit

$$\Omega_x = \Omega_y, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} \quad \text{bzw.} \quad u_i^G = 0 \Rightarrow c_i = u_i \quad (2.20)$$

mit dem hierfür typischen konvektiven Anteil in der Zeitableitung ableiten

$$\frac{Df}{Dt} = \left. \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{y}, t) \right|_{\mathbf{y}} + u_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(\mathbf{y}, t) \quad (2.21)$$

Reynoldssches Transporttheorem

Zur Aufstellung der Bilanzgleichungen in Integralform wird die materielle Zeitableitung einer skalaren Größe $G(t)$ benötigt, die als Volumenintegral

$$G(t) = \int_{V_x} f(\mathbf{x}, t) \, d\Omega_x \quad \text{mit } V_x \subset \Omega_x \quad (2.22)$$

definiert ist. Die Änderung des Volumenintegrals mit der Zeit setzt sich zusammen aus der Änderung im Volumen und dem Fluß über den Rand. Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes bzw. des Divergenztheorems läßt sich die materielle Zeitableitung von (2.22) in weiterer Folge als reines Volumenintegral schreiben.

$$\left. \frac{\partial G(t)}{\partial t} \right|_z = \int_{V_x} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x d\Omega_x + \oint_{\partial V_x} w_i n_i^G f \, d\Gamma = \int_{V_x} \left\{ \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_x + (f w_i)_{,i} \right\} d\Omega_x \quad (2.23)$$

Darin bezeichnet \mathbf{n}^G die nach außen gerichtete Normale des Referenzgebietes und f steht jeweils für $f(\mathbf{x}, t)$. Alternativ läßt sich die Zeitableitung des Volumenintegrals über V_x auch sehr einfach bilden, indem es in ein Integral über V_z umgewandelt wird. Somit ist das Integrationsgebiet nicht mehr zeitabhängig, und es bedarf nur noch der Anwendung der Produktregel und der Ableitung einer Determinante (siehe z.B. Altenbach und Altenbach (1994)).

$$\left. \frac{\partial G(t)}{\partial t} \right|_z = \int_{V_z} \left\{ \tilde{J} \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_z + f \left. \frac{\partial \tilde{J}}{\partial t} \right|_z \right\} d\Omega_z = \int_{V_z} \left\{ \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_z + f \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right\} \tilde{J} \, d\Omega_z \quad (2.24)$$

Hierin steht f jeweils für $f(\mathbf{z}, t)$. \tilde{J} bezeichnet eine Jacobideterminante, in diesem Fall die Abbildung des Tangentialraumes des Materialgebietes in den Tangentialraum des Referenzgebietes. Beide Ableitungen (2.23) und (2.24) ergeben für das *ALE Reynoldssche Transporttheorem in Referenzdarstellung*

$$\frac{DG(t)}{Dt} = \int_{V_x} \left\{ \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} w_i + f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right\} d\Omega_x \quad (2.25)$$

Bemerkung: Durch die Einführung eines zusätzlichen Gebietes, nämlich des Referenzgebietes, müssen auch zusätzliche Jacobische Funktionaldeterminanten eingeführt werden, die jeweils die Abbildung der Tangentialräume zwischen den einzelnen Gebieten beschreiben. Die herkömmliche Jacobische Funktionaldeterminante, die auch als Determinante des materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F} definiert ist,

$$J = \det \mathbf{F} = \det \left[\frac{\partial y_i}{\partial z_j} \right] \quad (2.26)$$

wird also um zwei weitere Funktionaldeterminanten ergänzt.

$$J^G = \det \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right], \quad \tilde{J} = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial z_j} \right] \quad (2.27)$$

Sonderfälle: Aus (2.25) läßt sich mit (2.18) wiederum der Sonderfall der Lagrangebetrachtung

$$\frac{DG(t)}{Dt} = \int_{V_z} \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{z}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{z}} \right\} d\Omega_z \quad (2.28)$$

und mit (2.20) das Reynoldssche Transporttheorem in Eulerbetrachtung ableiten.

$$\frac{DG(t)}{Dt} = \int_{V_y} \left\{ \frac{Df(\mathbf{y}, t)}{Dt} + f(\mathbf{y}, t) \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \right\} d\Omega_y \quad (2.29)$$

Massenbilanz

Die Masse eines Körpers ist als das Volumenintegral über das Dichtefeld ρ bestimmt und läßt sich mit

$$\rho^0(\mathbf{z}, t_0) = J\rho(\mathbf{y}, t), \quad \rho^G(\mathbf{x}, t) = J^G\rho(\mathbf{y}, t) \quad (2.30)$$

bezogen auf die drei eingeführten Gebiete als

$$M = \int_{V_x} \rho^G(\mathbf{x}, t) d\Omega_x = \int_{V_y} \rho(\mathbf{y}, t) d\Omega_y = \int_{V_z} \rho^0(\mathbf{z}, t_0) d\Omega_z \quad (2.31)$$

schreiben. Das Prinzip der Massenerhaltung besagt, daß bei fehlendem Massenaustausch über die Oberfläche und fehlendem Verlust oder Zuwachs von Masse in einem Körper dessen Gesamtmasse für alle Zeiten konstant bleibt, d.h.

$$\frac{DM}{Dt} = \frac{\partial M}{\partial t} \Big|_{\mathbf{z}} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{z}} \int_{V_y} \rho d\Omega_y = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{z}} \int_{V_z} \rho^0 d\Omega_z = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\mathbf{z}} \int_{V_x} \rho^G d\Omega_x = 0 \quad (2.32)$$

Nach Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems in Referenzdarstellung (2.25) folgt der *globale ALE Massenerhaltungssatz in Referenzdarstellung*

$$\int_{V_x} \left\{ \frac{\partial \rho^G}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \frac{\partial \rho^G w_i}{\partial x_i} \right\} d\Omega_x = 0 \quad (2.33)$$

Da diese Aussage für jedes beliebige V_x gilt, muß der Integrand für jeden Punkt des Referenzgebietes verschwinden, woraus der *lokale ALE Massenerhaltungssatz in Referenzdarstellung* folgt

$$\left. \frac{\partial \rho^G}{\partial t} \right|_x + \frac{\partial \rho^{G w_i}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{in } \Omega_x \quad (2.34)$$

Wie bereits erwähnt, ist eine ALE-Formulierung keine Frage der verwendeten Koordinaten, sondern einzig eine Frage des Beobachters. Zur Verdeutlichung soll der *lokale ALE Massenerhaltungssatz* auch in *räumlicher Darstellung* angegeben werden. Unter Verwendung von (2.32) läßt sich dieser durch Einsetzen von (2.29) und (2.17) als

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_x + c_i \frac{\partial \rho}{\partial y_i} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial y_i} = 0 \quad \text{in } \Omega_y \quad (2.35)$$

angeben. Für den isothermen, barotropen Fall läßt sich mit der Druck-Dichte-Beziehung

$$d\rho = \frac{\rho}{K} dp \quad (2.36)$$

die Gleichung der Massebilanz für den schwach kompressiblen Fall ableiten. K bezeichnet darin den *Kompressionsmodul* ('bulk modulus'). Mit der *akustischen Wellengeschwindigkeit* $c = \sqrt{K/\rho}$ läßt sich in diesem Fall die Massebilanz (2.35) als

$$\frac{1}{c^2} \left(\left. \frac{\partial p}{\partial t} \right|_x + c_i \frac{\partial p}{\partial y_i} \right) + \rho \frac{\partial u_i}{\partial y_i} = 0 \quad \text{in } \Omega_y \quad (2.37)$$

schreiben. Für den Sonderfall einer konstanten Dichte oder eines hohen Kompressionsmoduls bzw. einer hohen Schallgeschwindigkeit folgt daraus die bekannte Bedingung der Quellenfreiheit für inkompressible Strömungen.

$$\operatorname{div}_y \mathbf{u} = 0 \quad (2.38)$$

Sonderfälle: Durch Einsetzen von (2.18) in (2.35) folgt die Massebilanz für den Sonderfall der Lagrangebetrachtung

$$\left. \frac{\partial \rho J}{\partial t} \right|_z = 0 \quad \text{bzw.} \quad \rho J = \rho^0 \quad \text{in } \Omega_z \quad (2.39)$$

und mit (2.20) der Sonderfall der Eulerbetrachtung

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|_y + \frac{\partial \rho u_i}{\partial y_i} = 0 \quad \text{in } \Omega_y \quad (2.40)$$

bzw.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}_y \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega_y \quad (2.41)$$

Bemerkung: Eine konstante Dichte im gesamten Strömungsfeld ist zwar eine hinreichende jedoch keine notwendige Bedingung für inkompressible Strömungen. Beispiele für inkompressible Strömungen mit ortsveränderlicher Dichte, d.h. jedes Teilchen behält seine Dichte, die jedoch im Strömungsfeld veränderlich ist, sind innere Schwerewellen oder Strömungen in Dichteschichtungen, z.B. im Ozean (siehe Schlichting und Gersten (1997)).

Impulsbilanz

Die globale Impulsbilanz entspricht dem verallgemeinerten 2. Newtonschen Gesetz und besagt, daß die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses bei der Deformation eines Körpers gleich der Summe aller auf den Körper und dessen Oberfläche wirkenden Kräfte ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_x} \rho^G(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega_x = \int_{\partial V_x} \mathbf{t}^G d\Gamma_x + \int_{V_x} \rho^G \mathbf{b} d\Omega_x \quad (2.42)$$

Hierin bezeichnet \mathbf{t}^G den auf die Oberfläche ∂V_x bezogenen Kraft- bzw. Spannungsvektor und \mathbf{b} den Volumenkraftvektor pro Masseneinheit. Mit der Normalen auf den Rand des Referenzgebietes \mathbf{n}^G und dem 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor \mathbf{P}^G läßt sich der Spannungsvektor schreiben als

$$t_i^G = P_{ji}^G n_j^G \quad (2.43)$$

Bemerkung: Klassischerweise sind die Komponenten des (unsymmetrischen) ersten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors definiert als die Kräfte der ‘Momentankonfiguration’ (hier: Raumgebiet) bezogen auf die Flächen der ‘Referenzkonfiguration’ (hier: Referenzgebiet). Durch Einführung eines zusätzlichen Gebietes im Rahmen der ALE-Betrachtungsweise muß auch hier, ebenso wie bei den Jacobischen Funktionaldeterminanten, eine weitere Unterscheidung erfolgen. Ausgehend von der Forderung, daß alle Spannungstensoren, unter Verwendung der entsprechenden Normalen, dieselbe Kraft ergeben müssen

$$(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) d\Gamma_y = (\mathbf{n}^G \cdot \mathbf{P}^G) d\Gamma_x = (\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{P}^0) d\Gamma_z \quad (2.44)$$

folgen die 1. Piola Kirchhoff Spannungstensoren bezogen auf das Materialgebiet

$$P_{ij}^0 = J \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \sigma_{kj} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}^0 = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (2.45)$$

bzw. bezogen auf das Referenzgebiet

$$P_{ij}^G = J^G \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \sigma_{kj} \quad (2.46)$$

$\boldsymbol{\sigma}$ bezeichnet dabei den Cauchyschen Spannungstensor oder auch ‘Tensor der wahren Spannungen’, d.h. aktuelle Kraft bezogen auf aktuelle Fläche, und \mathbf{F} den materiellen Deformationsgradienten. Der 2. *Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor*, bei dem sowohl die Kräfte als auch die Flächen auf die ‘Referenzkonfiguration’ bezogen sind, steht mit dem Cauchyschen bzw. dem materiellen 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor in Verbindung

$$S_{ij} := S_{ij}^0 = J \frac{\partial z_i}{\partial y_k} \sigma_{kl} \frac{\partial z_j}{\partial y_l} = P_{ik}^0 \frac{\partial z_j}{\partial y_k} \quad (2.47)$$

Da in dieser Arbeit nur der auf das Materialgebiet bezogene 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor verwendet wird, wird auf die notationskonsistente Schreibweise mit dem Index 0 verzichtet und statt S_{ij}^0 die Bezeichnung S_{ij} verwendet.

Aus (2.42) folgt durch Anwendung des Divergenztheorems sowie des Reynoldsschen Transporttheorems die *globale ALE Impulsbilanz in Referenzdarstellung*

$$\int_{V_x} \left\{ \frac{\partial \rho^G u_i}{\partial t} \Big|_x + \frac{\partial w_j \rho^G u_i}{\partial x_j} \right\} d\Omega_x = \int_{V_x} \left\{ \frac{\partial P_{ji}^G}{\partial x_j} + \rho^G b_i \right\} d\Omega_x \quad (2.48)$$

Da V_x wieder beliebig gewählt werden kann, läßt sich, unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung (2.34), die *lokale ALE Impulserhaltung in Referenzschreibweise* ableiten.

$$\rho^G \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_x + \rho^G w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_{ji}^G}{\partial x_j} + \rho^G b_i \quad \text{in } \Omega_x \quad (2.49)$$

Alternativ dazu kann die *lokale ALE Impulserhaltung* auch in *räumlicher Darstellung* angegeben werden.

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_x + \rho c_j \frac{\partial u_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} + \rho b_i \quad \text{in } \Omega_y \quad (2.50)$$

Hierbei bleiben die räumlichen Ableitungen im Koordinatensystem y , und als einzige Größe im Referenzsystem wird nur die referentielle Zeitableitung verwendet. Diese Darstellungsweise hat im Hinblick auf die numerische Umsetzung Vorteile und findet somit in weiterer Folge Verwendung.

Sonderfälle: Wiederum läßt sich mit (2.18) der Sonderfall der Impulsbilanz in Lagrangebetrachtung ableiten

$$\rho^0 \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_z = \frac{\partial P_{ji}^0}{\partial z_j} + \rho^0 b_i \quad \text{in } \Omega_z \quad (2.51)$$

bzw. unter Verwendung der räumlichen Koordinaten die Darstellung

$$\rho \dot{u}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} + \rho b_i \quad \text{in } \Omega_y \quad (2.52)$$

die auch als 1. Cauchy'sche Bewegungsgleichung bezeichnet wird. Mit (2.21) folgt die Impulsbilanz in Eulerbetrachtung

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \Big|_y + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial y_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y_j} + \rho b_i \quad \text{in } \Omega_y \quad (2.53)$$

die sich, was den Typ der Gleichung betrifft, vom Lagrangefall vor allem durch den hierin auftretenden konvektiven Term $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ unterscheidet.

Bemerkung: Die Wahl der kinematischen Beschreibung wird u.a. auch in den Typen von Nichtlinearitäten reflektiert, die gegebenenfalls in den Bestimmungsgleichungen auftreten. In diesem Sinne assoziiert sich eine *materielle Beschreibung* mit dem möglichen Vorhandensein einer *geometrischen Nichtlinearität*. Eine *räumliche Beschreibung* hingegen ist durch sogenannte *konvektive Nichtlinearitäten* gekennzeichnet, während bei einer ALE-Betrachtungsweise im allgemeinen Fall beide Arten von Nichtlinearitäten auftreten können. Wie aus Gleichung (2.50) ersichtlich, ist ein Nachteil der Eulerformulierung, nämlich das Auftreten von numerisch schwierig zu behandelnden konvektiven Effekten, auch in der ALE-Formulierung vorhanden. Unter Umständen können jedoch hier die konvektiven Anteile durch eine geeignete Wahl der Netzbewegung verringert und somit die numerischen Schwierigkeiten zumindest teilweise umgangen werden.

2.2 Struktur — Nichtlineare Elastodynamik

In diesem Kapitel werden die Bestimmungsgleichungen bis zur schwachen Form für den strukturmechanischen Teil des gekoppelten Problems bereitgestellt, die der Diskretisierung zu Grunde liegt. Hierbei wird auf die in Kapitel 2.1.3 abgeleiteten Bilanzgleichungen in der für strukturmechanische Probleme traditionellen Lagrangeformulierung zurückgegriffen. Eine ausführlichere Darstellung findet sich in der zu Beginn dieses Kapitels angegebenen Literatur. Die weitere numerische Behandlung dieser Gleichungen, d.h. die räumliche und zeitliche Diskretisierung und die entsprechende algorithmische Umsetzung, wird in Kapitel 6.1 behandelt.

2.2.1 Kinematische und konstitutive Beziehungen

Annahmen, Modellwahl

Für die im zu Grunde liegenden Projekt primär ins Auge gefaßte Klasse von Problemstellungen zur Fluid–Struktur–Interaktion soll die Strukturformulierung in der Lage sein, große Deformationen zu beschreiben. Es wird jedoch in weiterer Folge davon ausgegangen, daß dabei nur kleine Verzerrungen auftreten und sich nur elastische Deformationen einstellen. Es handelt sich also bei der Struktur um ein homogenes, isotropes Kontinuum dem ein linear elastisches Saint–Venant–Kirchhoff–Materialmodell zu Grunde gelegt wird. Daraus ergeben sich die Bestimmungsgleichungen der *geometrisch nichtlinearen*, und materiell linearen, *Elastodynamik*, die in weiterer Folge im Sinne einer *totalen (=materiellen) Lagrange Formulierung* aufbereitet und behandelt werden.

Kinematische Beziehungen

Analog zu Kapitel 2.1 wird die Bewegung des strukturellen Körpers durch die unverformte Referenzkonfiguration (entspricht dem Materialgebiet) und die deformierte Momentankonfiguration (entspricht dem Raumgebiet) dargestellt. Die Differenz der Ortsvektoren eines materiellen Punktes zwischen Momentan– und Referenzkonfiguration wird als Verschiebungsfeld \mathbf{d} bezeichnet. Der unsymmetrische materielle Deformationsgradient \mathbf{F} ist als die lineare Abbildung eines Linienelementes $d\mathbf{z}$ der Referenzkonfiguration auf ein Linienelement $d\mathbf{y}$ der Momentankonfiguration definiert.

$$d\mathbf{y} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{z} \quad \text{oder} \quad F_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial z_j} \quad (2.54)$$

Daraus läßt sich nun ein Dehnungsmaß ableiten, das den Deformationsvorgang vollständig beschreibt, jedoch im Gegensatz zum Deformationsgradienten keine Starrkörperanteile enthält. Dieses symmetrische Dehnungsmaß

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.55)$$

wird als *Green–Lagrangescher Verzerrungstensor* \mathbf{E} bezeichnet und kann als Differenz der Quadrate der Linienelemente aus Referenz– und Momentankonfiguration gedeutet werden. Für den Spezialfall der Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems läßt sich der Green–Lagrangesche Verzerrungstensor unter Verwendung des Verschiebungsfeldes \mathbf{d} als nichtlineare Verzerrungs–Verschiebungsbeziehung schreiben.

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (d_{i,j} + d_{j,i} + d_{k,i} d_{k,j}) \quad (2.56)$$

Konstitutive Gleichungen

Das zum Green–Lagrangeschen Verzerrungstensor energetisch konjugierte Spannungsmaß ist der 2. Piola–Kirchhoff Spannungstensor (siehe Gleichung (2.47)). Der 2. Piola–Kirchhoff Spannungstensor, bei dem beide Bezugssysteme (für Kraft und Fläche) in der Referenzkonfiguration (d.h. hier im Materialgebiet) liegen, und der wahre bzw. *Cauchysche Spannungstensor*, mit beiden Bezugssystemen in der Momentankonfiguration, können durch eine sogenannte ‘pull–back’–Operation

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.57)$$

bzw. durch eine ‘push–forward’–Operation

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (2.58)$$

ineinander überführt werden.

Im Rahmen der Greenschen Elastizität bzw. der Hyperelastizität — diese beschreiben Materialien, in denen die von der Spannung geleistete Arbeit wegunabhängig ist — wird die Existenz einer Verzerrungsenergiefunktion vorausgesetzt. Aus der Zeitableitung der spezifischen Formänderungsenergie W_S , die Potentialcharakter besitzt,

$$\dot{W}_S = \frac{\partial W_S}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.59)$$

kann durch Vergleich mit der spezifischen inneren Spannungsleistung $\dot{W}_S = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$ die konstitutive Gleichung gewonnen werden.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W_S}{\partial \mathbf{E}} \quad (2.60)$$

Die Linearisierung der Spannungs–Dehnungsbeziehung führt dann weiter auf die Form

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.61)$$

wobei $\mathbf{C} = \{C_{ijkl}\}$ den vierstufigen *Material– bzw. Elastizitätstensor* bezeichnet. Durch Beachtung a) der Symmetrieeigenschaften des 2. Piola–Kirchhoffschen Spannungstensors und des Green–Lagrangeschen Verzerrungstensors, b) des Potentialcharakters der spezifischen Formänderungsenergiefunktion und c) der Beschränkung auf isotrope, linear–elastische Materialien, lassen sich die möglichen $3^4 = 81$ Konstanten auf 2 Konstanten zur Beschreibung des Materialtensors reduzieren.

$$\mathbf{S} = \lambda^S \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{I} + 2 \mu^S \mathbf{E} + o(\|\mathbf{E}\|) \quad (2.62)$$

Die beiden Konstanten λ^S bzw. μ^S werden als *Lamé–Konstanten* bezeichnet. Der Index S wird hier verwendet um eine Verwechslung mit später eingeführten Fluidkonstanten zu vermeiden. Bei Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung folgt die konstitutive Gleichung des *Saint–Venant–Kirchhoff–Materials* in der Form

$$\mathbf{S} = \lambda^S \operatorname{tr} \mathbf{E} \mathbf{I} + 2 \mu^S \mathbf{E} \quad (2.63)$$

Bedingt durch obige Linearisierung sowie den Wegfall der Terme höherer Ordnung eignet sich dieses Materialmodell nur für *kleine Verzerrungen*. *Große Verschiebungen* dürfen auf Grund der Verwendung der vollständig nichtlinearen Beziehung zwischen dem Green–Lagrange’schen Verzerrungstensor und den Verschiebungen auftreten. Bei Beschränkung auf kleine Verschiebungen und bei Verwendung des linearisierten Verzerrungstensor ergibt sich aus der konstitutiven Beziehung (2.63) das klassische, linear elastische, sogenannte Hookesche Werkstoffgesetz. Die eingeführten Lamé–Konstanten können mit den anschaulich zu interpretierenden Materialparametern Elastizitätsmodul E^S , Schubmodul G^S , Querkontraktions– oder Poissonzahl ν^S sowie Kompressionsmodul K^S in Beziehung gesetzt werden.

$$E^S = \frac{\mu^S(3\lambda^S + 2\mu^S)}{\lambda^S + \mu^S}; \quad G^S = \mu^S; \quad \nu^S = \frac{\lambda^S}{2(\lambda^S + \mu^S)}; \quad K^S = \frac{1}{3}(3\lambda^S + 2\mu^S) \quad (2.64)$$

2.2.2 Anfangs–Randwertproblem der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik

Starke Form

Ausgehend von der Impulsbilanz in Lagrangeformulierung (2.52) kann nun das Anfangs–Randwertproblem (ARWP) der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik formuliert werden. Es setzt sich zusammen aus den Feldgleichungen und den Anfangs– bzw. Randbedingungen. Die Feldgleichungen, bestehend aus der Cauchy’schen Bewegungsgleichung

$$\rho^0 \ddot{\mathbf{d}} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \rho^0 \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega_S \times (0, T) \quad (2.65)$$

der kinematischen Beziehung und der konstitutiven Gleichung

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{I}); \quad \mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.66)$$

bilden ein nichtlineares, gekoppeltes System partieller, hyperbolischer Differentialgleichungen. $\ddot{\mathbf{d}}$ bezeichnet hierin das Beschleunigungsfeld. Als Anfangsbedingungen finden das Verschiebungsfeld \mathbf{d} sowie das Geschwindigkeitsfeld $\dot{\mathbf{d}}$ zum Anfangszeitpunkt ($t = 0$) auf dem gesamten durch die Struktur belegten Gebiet Ω_S Verwendung.

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0; \quad \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{d}}_0 \quad \text{in } \Omega_S \text{ für } t = 0 \quad (2.67)$$

Der Rand $\partial\Omega_S$ des strukturellen Gebietes Ω_S setzt sich aus Bereichen mit vorgeschriebenen geometrischen Randbedingungen Γ_d und aus Bereichen mit vorgeschriebenen statischen Randbedingungen Γ_S zusammen.

$$\partial\Omega_S = \Gamma_d \cup \Gamma_S \quad \Gamma_d \cap \Gamma_S = \emptyset \quad (2.68)$$

Γ_d wird auch als Dirichlet–Rand und die darauf vorgeschriebenen Verschiebungen $\tilde{\mathbf{d}}$ als wesentliche Randbedingungen bezeichnet.

$$\mathbf{d} = \tilde{\mathbf{d}} \quad \text{auf } \Gamma_d \times (0, T) \quad (2.69)$$

Die auf dem auch als Neumann–Rand bezeichneten Rand Γ_S vorgeschriebenen Spannungen $\tilde{\mathbf{S}}$ (bzw. die entsprechenden Oberflächenkräfte) heißen auch natürliche Randbedingungen.

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{S} = \tilde{\mathbf{S}} \quad \text{auf } \Gamma_S \times (0, T) \quad (2.70)$$

N bezeichnet die Normale auf dem entsprechenden Rand und \tilde{S} den vorgeschriebenen Spannungsvektor.

Die Gleichungen (2.65) bis (2.70) werden auch als lokale bzw. *starke Form* des Anfangs–Randwertproblems der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik bezeichnet.

Schwache Form

Zur Lösung des Anfangs–Randwertproblems (2.65) bis (2.70) mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) ist eine Integraldarstellung der Gleichungen erforderlich. Eine solche Integraldarstellung wird auch als *schwache Form* des Problems bezeichnet. Dies basiert einerseits auf der Tatsache, daß in dieser Darstellung schwächere Differenzierbarkeitsanforderungen an die Lösungsfunktionen gestellt werden. Andererseits folgt diese Bezeichnung aus der Tatsache, daß bestimmte Gleichungen nur schwach, d.h. nicht mehr punktweise, erfüllt werden. Im Folgenden wird die schwache Form in aller Kürze mittels des *Prinzips der virtuellen Arbeit* abgeleitet. Alternativ könnte die Ableitung der schwachen Form auch über Energie– bzw. Variationsprinzipien erfolgen, in denen das Minimal– bzw. Stationär–Werden eines Funktionals zu Grunde gelegt wird (siehe z.B. Finlayson (1972), Oden und Reddy (1976)). Als Beispiel einer stärker mathematisch orientierten Ableitung der schwachen Form sei auf das Kapitel 3.1.1 verwiesen, in dem die schwache Form für die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen abgeleitet wird. Zur Herleitung der der FEM zu Grunde liegenden Gleichungen sowie zur Äquivalenz von starker und schwacher Form siehe z.B. Bathe (1996), Hughes (1987b), Johnson (1987) und Zienkiewicz und Taylor (1989, 1991).

Das Prinzip der virtuellen Arbeit besagt, daß die bei einer virtuellen Verschiebung eines Systems aus seiner Gleichgewichtslage von den äußeren und inneren Kräften insgesamt verrichtete Arbeit gleich Null ist. Die Bewegungen, d.h. die Variationen des Verschiebungsvektors, sind virtuell, d.h. gedacht, infinitesimal klein, kinematisch zulässig und ansonsten beliebig. Mit δd als der virtuellen Verschiebung und, daraus abgeleitet, δE als Variation des Green–Lagrangischen Verzerrungstensors, folgt die schwache Form des Anfangs–Randwertproblems der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik.

$$\int_{\Omega_S} \rho^0 \ddot{d} \cdot \delta d \, d\Omega_S + \int_{\Omega_S} \delta E : S \, d\Omega_S = \int_{\Gamma_S} \tilde{S} \cdot \delta d \, d\Gamma_S + \int_{\Omega_S} \rho^0 b \cdot \delta d \, d\Omega_S \quad (2.71)$$

Zur weiteren Behandlung dieser Formulierung wird auch auf die Ausführungen in Kapitel 6.1 verwiesen.

2.3 Fluid¹ — Instationäre, inkompressible, viskose Strömungen

Nach der Motivation der Modellwahl werden in diesem Kapitel die Bestimmungsgleichungen für den strömungsmechanischen Teil des untersuchten gekoppelten Problems bereitgestellt. Klassischerweise geschieht dies, basierend auf den in Kapitel 2.1.3 abgeleiteten Bilanzgleichungen.

1. Fluide sind im Gegensatz zu Festkörpern (Strukturen) Substanzen, die in Ruhelage Scherkräften nicht widerstehen können. Fluide können sowohl Flüssigkeiten als auch Gase sein.

chungen, in einer Eulerbetrachtung. Die entsprechende Aufbereitung der Gleichungen für zeitveränderliche Gebiete erfolgt in Kapitel 5. Aufbauend auf der im Folgenden angeführten starken Form des Anfangs–Randwertproblems für inkompressible, viskose Strömungen werden die Ableitung der schwachen Form und die räumliche Diskretisierung in Kapitel 3 behandelt. Die zeitliche Diskretisierung sowie die algorithmische Behandlung des Anfangs–Randwertproblem (ARWP) findet sich in Kapitel 4.

2.3.1 Modellwahl und grundlegende Beziehungen

Für eine breitere Darstellung und Diskussion der Grundlagen der Strömungsmechanik sei besonders auch auf den Anhang A1 dieser Arbeit und die dort angeführte Literatur verwiesen.

Modellwahl

Ziel dieser Arbeit ist die Aufbereitung und Entwicklung von Simulationsverfahren für Fluid–Struktur–Interaktionsprobleme mit einem relativ breiten Anwendungsspektrum. Deshalb war es erforderlich, auf ein möglichst allgemeingültiges Fluidmodell zurückzugreifen, das auf einer hohen Approximationsebene (siehe A1.2) angesiedelt ist.

Zur Frage der Berücksichtigung der *Viskosität* wurden eine Reihe von Untersuchungen, u.a. am Beispiel der Umströmung eines Festkörpers, durchgeführt (Schneider (1996)). Vor allem die Wahl der Randbedingungen am Festkörper, ‘no–slip/slip’, und damit zusammenhängend die Modellwahl, viskos/nicht viskos, zeigte dabei erwartungsgemäß einen nicht vernachlässigbaren Einfluß sowohl auf das Strömungs– als auch auf das Druckfeld. Die Viskosität selbst hatte in lokalen Bereichen (z.B. Ecken) einen nicht unerheblichen Einfluß auf die Festkörperbeanspruchung. Da solche lokalen Effekte aber auf das Strukturverhalten, vor allem bei flexiblen Strukturen, entscheidend sein können, ist eine Vernachlässigung der Viskosität nicht ratsam. Ebenso erleichtert die Mitberücksichtigung der Viskosität die Simulation freier Oberflächen. Auf die Möglichkeit, strukturferne Strömungsbereiche als nicht–viskose Strömungen zu simulieren, wird im Rahmen dieser Arbeit verzichtet.

Der Wunsch nach einem entsprechend komplexen Fluidmodell mit Berücksichtigung der Viskosität resultierte in der Verwendung der vollständigen Navier–Stokes–Gleichungen. Diese stellen ein sehr allgemeines und auch komplexes Modell zur Beschreibung von Strömungen dar (siehe auch Kapitel A1.2) und sind in der Lage, Newtonsche Fluide vollständig — unter Einschluß von Turbulenzeffekten — zu beschreiben.

In vielen Fällen kann die Dichte eines Fluids als konstant betrachtet werden. Dies ist nicht nur bei Flüssigkeiten der Fall, bei denen die Kompressibilität wirklich vernachlässigt werden kann, sondern auch bei Gasen wenn die Machzahl (siehe Kap. 2.3.3) kleiner als 0.3 ist (Ferziger und Peric (1997)). Die Frage, ob die Kompressibilität einer Strömung berücksichtigt werden muß, ist also nicht nur eine Frage der tatsächlichen Fluideigenschaften sondern auch eine Frage der ‘Zeitskalen’ des untersuchten Problems. Sind die interessierenden dynamischen Vorgänge bzw. deren Geschwindigkeiten weit entfernt von der Schallgeschwindigkeit, wie dies in den vorliegenden Aufgabenstellungen der Fall ist, so kann die Strömung als *inkompressibel* betrachtet werden. Eine weitere Voraussetzung für die Gültigkeit der Inkompressibilitätsbedingung ist, daß keine großen Temperaturunterschiede auftreten dürfen. Dies ist in den vorliegenden Fällen, bei denen es sich um *isotherme* (und im übrigen auch *isotrope*) Strömungen handelt,

gegeben. Eine Auflistung von Hauptmerkmalen inkompressibler Strömungen findet sich im Abschnitt 2.3.3.

Die vorliegenden Problemstellungen werden im allgemeinen bezüglich des Verhältnisses der auftretenden Geschwindigkeiten zur vorhandenen Viskosität so eingestuft, daß konvektive Effekte nicht vernachlässigt werden dürfen. Dies bedeutet, daß die vollständigen Navier–Stokes–Gleichungen und nicht die einfacheren Stokes–Gleichungen verwendet werden müssen. Turbulenzeffekte müssen jedoch in diesem Bereich noch keine Berücksichtigung finden, d.h. diese Arbeit beschränkt sich auf *laminare* Strömungen (siehe A1.2).

Kinematik und konstitutive Beziehungen

Die Erfahrung zeigt, daß Fluide in Ruhe oder in gleichförmiger Strömung keinen Scherspannungen widerstehen können; d.h. in Ruhelage sind die maximalen Scherspannungen gleich Null bzw. es herrscht ein rein hydrostatischer Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma} = -\bar{p}_0\mathbf{I}$ mit dem hydrostatischen Druck \bar{p}_0 . Aufbauend auf den Arbeiten von George Gabriel Stokes (1819–1903) wird angenommen, daß der Unterschied im Spannungszustand eines sich deformierenden Fluides und der statischen Gleichgewichtslage eine Funktion des Tensors der Deformationsgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\epsilon}$

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) \quad \text{bzw.} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i}\right) \quad (2.72)$$

ist. Zur Vereinfachung wird hier die Schreibweise ∇ für den räumlichen Ableitungsoperator ∇_y verwendet. Daraus folgt für einen allgemeinen Spannungszustand unter Verwendung des thermodynamischen (oder ‘wahren’ — wenn es so etwas für ein inkompressibles Fluid gibt —) Druckes \bar{p}

$$\boldsymbol{\sigma} = -\bar{p}\mathbf{I} + \mathcal{F}(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.73)$$

Ist die tensorwertige Funktion $\mathcal{F}(\cdot)$ linear, wird das Fluid als *Newtonsches* Fluid bezeichnet. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften des Spannungstensors läßt sich die konstitutive Gleichung in der allgemeinsten Form mit Hilfe zweier unabhängiger Parameter λ und μ , als

$$\boldsymbol{\sigma} = -\bar{p}\mathbf{I} + \lambda(\text{tr}\boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \quad (2.74)$$

darstellen, wobei die Spur $\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}$ von $\boldsymbol{\epsilon}$ dessen erste Invariante darstellt. Gleichung (2.74) wird auch als *Navier–Poisson Gesetz für Newtonsche Fluide* bezeichnet. Die *Hypothese von Stokes* (zu Hintergrund und physikalischer Begründung siehe z.B. Schlichting und Gersten (1997), Malvern (1969)) stellt nun eine Beziehung zwischen dem Parameter λ und der *Viskosität* μ dar

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (2.75)$$

indem davon ausgegangen wird, daß die Volumenviskosität (auch viskoser Kompressionskoeffizient) gleich Null ist. Analog zur normalen Viskosität μ bei Verformung ist die Volumenviskosität dabei diejenige Eigenschaft, die für die Energiedissipation bei einer endlichen Volumenänderung verantwortlich ist.

Somit läßt sich die konstitutive Gleichung für die Newtonschen Fluide als

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \bar{p}\mathbf{I} \quad (2.76)$$

schreiben bzw. in Indexschreibweise und mit der Einführung der Notation $\boldsymbol{\tau}$ für den viskosen Spannungsanteil als

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \delta_{ij} \bar{p} \quad \text{mit} \quad \tau_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j} + \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \right) \quad (2.77)$$

Die Viskosität μ , mit der Dimension ‘Spannung mal Zeit’, wird auch als *dynamische Viskosität* bezeichnet. In den weiteren Ableitungen werden häufig die auf die Dichte ρ bezogenen Größen der *kinematischen Viskosität* ν und des *kinematischen Druckes* p verwendet.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}; \quad p = \frac{\bar{p}}{\rho} \quad (2.78)$$

Angaben zu Viskosität und Dichte verschiedener Fluide finden sich in Kapitel A1.1 im Anhang.

2.3.2 Anfangs–Randwertproblem für inkompressible, viskose Strömungen

Aufbauend auf den entsprechenden Bilanzgleichungen (Kapitel 2.1.3) und den soeben abgeleiteten konstitutiven Gleichungen ergeben sich zur Beschreibung viskoser Strömungen die Navier–Stokes–Gleichungen, die in ihrer vollständigen Form im Anhang (A1.2) angeführt sind. Der vorliegende Fall von inkompressiblen (und isothermen) Strömungen führt zu einer Separation der Energieerhaltungsgleichung, d.h. die Bilanzgleichungen für Impuls und Masse sind für die Beschreibung der Strömung ausreichend.

Instationäre, inkompressible Navier–Stokes²–Gleichungen

Die Feldgleichungen des ARWP für inkompressible, viskose Strömungen, also die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen, lauten

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega_F \times (0, T) \quad (2.79)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega_F \times (0, T) \quad (2.80)$$

Sie bestehen aus Impuls– (2.79) und Massebilanz (2.80). Hierin bezeichnet \mathbf{b} den Volumenkraftvektor pro Masseneinheit und Ω_F das offene, beschränkte Fluidgebiet ($\Omega_F \subset \mathbb{R}^{n_{sd}}$) mit $n_{sd} = 2$ oder 3 .

Eine anschauliche physikalische Interpretation der Navier–Stokes–Gleichungen besagt also, daß für ein Fluidpartikel die Trägheitskräfte mit den Druckgradientenkräften, den viskosen Kräften und den Volumenkräften bilanziert werden.

Eigenschaften der Feldgleichungen

Die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen stellen ein nichtlineares, gekoppeltes, gemischt hyperbolisch–parabolisches System partieller Differentialgleichungen dar.

2. Die Gleichungen wurden aufgrund von Betrachtungen über die Wirkung intermolekularer Kräfte zuerst von M. Navier (1827) und S.D. Poisson (1831) aufgestellt. Die Kontinuumstheorie stammt, aufbauend auf dem Newtonschen Reibungsgesetz (Newton (1687)), von B. de St. Venant (1843) und G.G. Stokes (1849).

Zur Klassifikation partieller Differentialgleichungen siehe z.B. Bronstein und Semendjajew (1996) und zur entsprechenden mathematischen Klassifizierung von Strömungen z.B. Ferziger und Peric (1997) und Fletcher (1991).

In Operatorschreibweise mit den Differentialoperatoren \mathcal{L} kann dieses System von Gleichungen als

$$\mathcal{L}_M(p, \mathbf{u}) = \partial \mathbf{u} / \partial t + \mathcal{L}_{conv} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{visc} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{pres} p = \mathbf{b} \quad (2.81)$$

$$\mathcal{L}_C(\mathbf{u}) = \mathcal{L}_{cont} \mathbf{u} = 0 \quad (2.82)$$

dargestellt werden. Dabei setzt sich der die Impulsbilanz darstellende Operator \mathcal{L}_M ('Momentum') aus einem *Beschleunigungsterm* $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, einem nichtlinearen, hyperbolischen *Advektions-* bzw. *Konvektionsterm* \mathcal{L}_{conv}

$$\mathcal{L}_{conv} \rightarrow u_j \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \quad (2.83)$$

einem linearen, elliptischen *Diffusions- oder Viskositätsterm* \mathcal{L}_{visc}

$$\mathcal{L}_{visc} \rightarrow -2\nu \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial u_j} = -\nu \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial y_i \partial y_j} \right] \quad (2.84)$$

und einem *Druck(gradienten)term* \mathcal{L}_{pres}

$$\mathcal{L}_{pres} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial y_i} \quad (2.85)$$

zusammen. Der Operator \mathcal{L}_C bzw. \mathcal{L}_{cont} ('Continuity') beschreibt die Massebilanz

$$\mathcal{L}_{cont} \rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial y_i} \quad (2.86)$$

Die Ableitung der schwachen Form der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen, die der Diskretisierung zu Grunde liegt, erfolgt in Kapitel 3.

Rand- und Anfangsbedingungen

Zur Demonstration der 'klassischen' Randbedingungen teilt sich der Rand $\partial \Omega_F$ des Fluidgebietes wieder in die zwei komplementären Untermengen Dirichlet–Rand Γ_g und Neumann–Rand Γ_h auf,

$$\partial \Omega_F = \Gamma_F = \Gamma_g \cup \Gamma_h \quad \Gamma_g \cap \Gamma_h = 0 \quad (2.87)$$

auf denen die Geschwindigkeiten \mathbf{g}

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma_g \times (0, T) \quad (2.88)$$

bzw. die Randlasten \mathbf{h} vorgeschrieben sind.

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{auf } \Gamma_h \times (0, T) \quad (2.89)$$

Die Kontinuitätsgleichung (2.80) ist gleichbedeutend mit der Feststellung, daß das Integral der Normalkomponente des Geschwindigkeitsfeldes über den Rand Null sein muß. Aus (2.88)

folgt für den Dirichletrand auch $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}$. Für den Fall eines reinen Dirichletrandes ergibt sich daraus eine zusätzliche Zwangsbedingung für die vorgeschriebenen Randbedingungen. Es handelt sich dabei um die Forderung, daß das Integral der Normalkomponente der vorgeschriebenen Geschwindigkeit über den Rand Null sein muß.

$$\Gamma_F = \Gamma_g \rightarrow \int_{\Gamma_F} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \rightarrow \int_{\Gamma_F} \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} = 0 \text{ auf } \Gamma_F \times (0, T) \quad (2.90)$$

Als Anfangsbedingung wird die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ auf dem gesamten Strömungsgebiet vorgeschrieben.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega_F \text{ für } t = 0 \quad (2.91)$$

Natürlich muß dabei auch das Anfangsgeschwindigkeitsfeld die Kontinuitätsgleichung (2.80) erfüllen. Das heißt \mathbf{u}_0 muß divergenzfrei sein, bzw. es muß auch $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_0$ gelten. Wenn $\nabla \cdot \mathbf{u}_0 \neq 0$ ist, ist das Problem ‘schlecht gestellt’ und es existiert keine Lösung.

Bemerkung: Aus diesen Betrachtungen wird auch klar, daß *Impulsstarts* (‘Impulsive Starts’) eines inkompressiblen Systems aus der Ruhelage nicht zulässig sind; diese Tatsache ist Experimentatoren wohlbekannt, erfährt jedoch im Zusammenhang mit numerischen Simulationen teils zu wenig Würdigung. Beispiel für einen solchen Impulsstart wäre eine Rohrströmung mit einem Null-Anfangsgeschwindigkeitsfeld und einer an einem Rand zum Zeitpunkt $t = 0$ vorgeschriebenen Randgeschwindigkeit $\neq 0$. Dies würde die Divergenzfreiheit verletzen und somit eine Lösung der inkompressiblen Gleichungen verhindern. ‘Schnelle Starts’ hingegen sind zugelassen, ebenso wie bestimmte Approximationen von Impulsstarts (siehe dazu z.B. auch Gresho (1992)).

Mit der Angabe der ‘klassischen’ Randbedingungen für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen ist die Frage der Randbedingungen für die Simulation der entsprechenden Strömungen noch nicht hinreichend geklärt. Im Folgenden werden einige weitere, wichtige Randbedingungen angeführt (siehe auch Kapitel 7.2).

- **Haft– oder ‘noslip’ Randbedingung**

Diese Randbedingung bedeutet, daß die Fluidteilchen an einem festen Rand haften. Sie kann direkt durch Gleichung (2.88) ausgedrückt werden. Sowohl Tangential– als auch Normalkomponente des Geschwindigkeitsfeldes müssen am Rand gleich Null bzw. bei bewegten Rändern gleich der Geschwindigkeit des Randes sein.

- **Gleit– oder ‘slip’ Randbedingung**

Hier dürfen die Fluidpartikel entlang des Randes gleiten, diesen jedoch nicht durchdringen. Die Tangentialkomponente des Geschwindigkeitsfeldes ist also frei und es verbleibt einzig die Dirichletrandbedingung

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ (bzw. } \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{g} \text{)} \quad (2.92)$$

- **Ausflußrandbedingung**

Eine der schwierigsten Randbedingungen in Strömungssimulationen ist die sogenannte Ausflußrandbedingung. Diese Randbedingung wird nicht von der Natur vorgegeben, sondern entsteht alleine aus der Notwendigkeit, ein ‘unbegrenztes’ Strömungsgebiet für die numerische

Simulation künstlich zu begrenzen. Selbst das Freilassen sämtlicher Druck- und Geschwindigkeitswerte — die sogenannte ‘do nothing’ Randbedingung — kann am entsprechenden Rand über den Umweg der vom Diskretisierungsverfahren implizierten natürlichen Randbedingungen den Strömungszustand stören und zu falschen Ergebnissen führen (siehe auch Kapitel 3.3). Die sogenannte ‘free boundary condition’ von Papanastasiou et al. (1992) erweitert die Gültigkeit der schwachen Form der Bestimmungsgleichungen über den Ausflußrand hinaus, anstatt sie durch die wesentlichen oder natürlichen Randbedingungen zu ersetzen. Eine ausführliche Diskussion der immer noch nicht endgültig geklärten und vom angewandten Diskretisierungs- und Lösungsverfahren abhängigen Frage der Ausfluß- oder offenen Randbedingungen findet sich z.B. in Heywood et al. (1996) und Gresho (1992).

- **Symmetrierandbedingung**

Symmetrierandbedingungen sind oft sehr nützlich, um den Rechenaufwand zu verringern. Dabei dürfen an der Symmetrielinie (–ebene) keine Normalenströmungen und keine Scherspannungen auftreten. Mit der Tangentialkomponente u_t der Geschwindigkeit lautet die Symmetrierandbedingung

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0; \quad \frac{\partial u_t}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad (2.93)$$

- **Druckrandbedingung**

Wie aus den Gleichungen (2.79) und (2.80) ersichtlich, erscheint dort der Druck nur in einer Gradientenform. Das hat zur Folge, daß bei der Lösung der inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen das Druckfeld nur bis auf eine Konstante bestimmt wird. Druckrandbedingungen erscheinen nur implizit in den Randausdrücken für die Spannungen. Unter Umständen können auch absolute Druckwerte diskret oder als Mittelwerte vorgegeben werden (siehe dazu auch Gresho und Sani (1987) bzw. Conca et al. (1995)).

- **Randbedingung an freien Oberflächen**

Eine einfache Form von freien Oberflächenrandbedingungen stellen direkt die Gleichungen (2.88) (evtl. auch nur beschränkt auf die Normalkomponente entsprechend (2.92)) und (2.89) dar, wobei h noch in Abhängigkeit der Oberflächenkrümmung und eines Oberflächenspannungskoeffizienten definiert werden kann (siehe z.B. Navti et al. (1997)).

Eine weitere ausführliche Diskussion zur Frage der Randbedingungen findet sich auch in Gresho (1991a+b), (1992) bzw. in Gresho und Sani (1998). Bei der Verwendung verschiedener Kombinationen von Randbedingungen bei inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen ist besonders deren Anwendbarkeit und vor allem die nicht triviale Frage, ob das Gesamtproblem ‘gut gestellt’ ist, zu beachten (siehe dazu z.B. Conca et al. (1995)).

Alternative Schreibweisen für Viskositäts- und Konvektionsterm

Alternativ zur oben eingeführten *Spannungs–Divergenzform* $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$ zur Formulierung des Viskositätstermes existieren noch weitere Formen. Sie sind im Kontinuum äquivalent, jedoch im allgemeinen nicht äquivalent bei einer räumlichen Diskretisierung. Einige Schreibweisen sind in Gresho (1992) und in Gunzburger (1989) angeführt. Als eine Möglichkeit sei hier die *konventionelle Form* $\mu \nabla^2 \mathbf{u}$ angegeben. Dies ist die meist einfachste Form zur numerischen Umsetzung und deswegen auch die gebräuchlichste Form. Betrachtet man jedoch die sich im Zusam-

menhang mit der Galerkin–Formulierung (siehe Kapitel 3.1.1) ergebende Bilinearform und die daraus resultierende natürliche Randbedingung

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \quad \rightarrow \quad \mu \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} - n p = \mathbf{h} \quad (2.94)$$

so wird ersichtlich, daß diese — wenn überhaupt — nur schwer physikalisch interpretiert werden kann. Allerdings kann diese Form zu hilfreichen Ausflußrandbedingungen führen. Für die Spannungs–Divergenzschreibweise, die die allgemeinste und fundamentale Form für den viskosen Term darstellt, folgen als Bilinearform und natürliche Randbedingung

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) : (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \, d\Omega \quad \rightarrow \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad (2.95)$$

Diese Form liefert also eine physikalisch sinnvolle, oben bereits als Neumannrandbedingung eingeführte Größe. Aus diesem Grund wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit ausschließlich die Spannungs–Divergenzform für den Viskositätsterm verwendet.

Ebenso wie für den Viskositätsterm existieren auch für den nichtlinearen Konvektionsterm unterschiedliche Schreibweisen (siehe z.B. Gresho (1992), Gunzburger (1989), Simo und Armero (1994)). Hier seien vor allem die *Divergenzform* $\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})$, die *advective / konvektive Form* $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ sowie die *schiefsymmetrische Form* $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 1/2 \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})$ (siehe Temam (1979)), die eine Mittelung der beiden anderen darstellt, erwähnt. Die angegebenen Formen sind natürlich völlig identisch, solange das Geschwindigkeitsfeld tatsächlich exakt divergenzfrei ist. Die Divergenz– und die schiefsymmetrische Form erleichtern im Zuge der Diskretisierung unter Umständen die Erhaltung von Impuls und innerer Energie sowie die mathematische Analyse von Lösungsverfahren. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit findet jedoch die einfachste und meistverbreitete advective / konvektive Form Verwendung.

2.3.3 Anmerkungen zu den inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen

Einige grundsätzliche und wesentliche Anmerkungen zu den inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen finden sich in diesem Abschnitt. Für eine weiterführende Diskussion wird auf Kapitel A1 im Anhang dieser Arbeit verwiesen.

Hauptmerkmale inkompressibler Strömungen

Im Folgenden sollen einige wesentliche Merkmale inkompressibler Strömungen zusammengefaßt angeführt werden (siehe dazu auch z.B. Gresho und Sani (1998)). Es handelt sich dabei um Merkmale, die einzigartig für inkompressible Strömungen sind, d.h. um Eigenschaften, die bei kompressiblen Strömungen nicht vorhanden sind.

- Die Gleichungen beinhalten einen elliptischen Anteil, der für die augenblickliche Übertragung eines Drucksignals über das gesamte Gebiet verantwortlich ist. Dies ist gleichbedeutend mit einer unendlichen Schallgeschwindigkeit im Medium bzw. wird durch sie verursacht.
- Die Anfangsbedingungen sind einer Zwangsbedingung unterworfen, d.h. sie müssen divergenzfrei sein.

- Die Randbedingungen müssen die Zwangsbedingung der globalen Massenerhaltung erfüllen.
- Impulsstarts (bzw. plötzliche Änderungen der Randbedingungen in Normalenrichtung) sind nicht möglich, d.h. es muß auch eine gewisse Kompatibilität zwischen Anfangs- und Randbedingungen erfüllt sein.
- Die ‘einfache’ Massenerhaltungsgleichung ist ‘allmächtig’, d.h. im gesamten Raum–Zeit–Gebiet mitentscheidend.

Numerische Schwierigkeiten

Die Modellannahme einer inkompressiblen Strömung vereinfacht zwar das gekoppelte Gleichungssystem (z.B. durch Wegfall der Energiegleichung), verursacht jedoch auch neue numerische Schwierigkeiten. Neben den in vielen Strömungsaufgaben auftretenden komplexen Strömungsstrukturen, die eine hohe Auflösung durch das Diskretisierungsverfahren und somit entsprechende Rechenzeit erfordern, stellen sich bei der Lösung der inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen vor allem folgende Probleme ein:

- vorhandene und eventuell dominierende Nichtlinearitäten
- die Inkompressibilitätsbedingung, die zu einem Sattelpunktverhalten führt
- der hyperbolische Charakter des Konvektionstermes
- es gibt keine Verbindung für den Druck zwischen Impuls- und Massebilanz, die bei den kompressiblen Gleichungen durch die Dichte erfolgt, der Druck wird also durch eine Gleichung (Kontinuitätsgleichung) ‘gesteuert’, in der er nicht explizit erscheint; weiterhin erscheint der Druck in keiner zeitabhängigen Form
- das Auftreten von Grenzschichten bei hohen Reynoldszahlen
- das sich bei einer Semi–Diskretisierung (siehe Kapitel 4), d.h. nach der räumlichen Diskretisierung, ergebende Differential–Algebraische Gleichungssystem (DAE) ist schwieriger zu lösen als gewöhnliche Differentialgleichungssysteme.

Gresho und Sani (1998) weisen weiters darauf hin, daß im Falle inkompressibler Strömungen die Anforderungen an die numerischen Verfahren bei langsamen Strömungen in mehrerer Hinsicht größer sind als bei schnellen Strömungen.

Alternative Formulierungen und Variablenwahl

Häufig werden die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen auch in anderen Formulierungen dargestellt. Ein populäres Beispiel dafür stellt die *Stromfunktion–Wirbel–Formulierung* dar. Diese besitzt einige Vorteile, wie z.B. die geringere Zahl an Unbekannten und vor allem das nicht vorhandene Problem mit divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldern. Die meist einfachere Definition von Randbedingungen, sowie vor allem die Erweiterbarkeit auf dreidimensionale Problemstellungen und die physikalische Relevanz der Variablen — dies erscheint speziell im Hinblick auf das gekoppelte Problem wichtig — führt in der vorliegenden Arbeit jedoch zur Verwendung einer *Geschwindigkeits–Druck–Formulierung*. Diese wird auch als Formulierung der ursprünglichen Variablen bzw. der ‘*primitive variables*’ (siehe auch Abschnitt A1.3) bezeichnet und fand bereits in den bisherigen Gleichungen Verwendung.

Strömungskennzahlen

Nicht nur für Modellversuche, sondern auch für die ‘Einordnung’ von Strömungen ist es hilfreich, die *dynamische Ähnlichkeit* von Strömungen beurteilen zu können. Zur Beschreibung

dieser Ähnlichkeit dienen dimensionslose Kennzahlen, von denen einige der wesentlichsten im Folgenden kurz erläutert werden sollen.

- **Reynoldszahl**

Diese nach dem englischen Physiker Osborne Reynolds (1842–1912) benannte Zahl beschreibt das Verhältnis der (*stationären*) *Trägheitskräfte* (d.h. Trägheitskräfte bei stationärer Strömung) zu den viskosen *Reibungskräften* und ist eine der wesentlichsten Kennzahlen zur Beschreibung der dynamischen Ähnlichkeit von Strömungen. Diese dimensionslose Strömungskennzahl wird im Laufe dieser Arbeit noch oft Verwendung finden und grenzt beispielsweise stabile von instabilen und laminare von turbulenten Strömungen ab. Die Reynoldszahl ist definiert als

$$Re = \frac{u L}{\nu} \quad (2.96)$$

wobei u ein Geschwindigkeitsmaß, L ein Längenmaß und ν die kinematische Viskosität sind. Beispiele für Reynoldszahlen einiger ‘typischer’ Strömungen finden sich im Anhang in Tabelle A.2. Im Grenzfall $Re \rightarrow 0$ können die Trägheitskräfte in erster Näherung vernachlässigt werden, was zu einer starken Vereinfachung der Gleichungen führt. Im Grenzfall $Re \rightarrow \infty$ können die viskosen Kräfte wiederum ‘fast’ vernachlässigt werden und die Navier–Stokes–Gleichungen gehen in die Euler–Gleichungen über (siehe auch Kapitel A1.2); ‘Fast’ deshalb, da sich beweisen läßt, daß die Lösungen der Eulergleichungen nur ‘fast überall’ mit den Navier–Stokes–Lösungen übereinstimmen. Die Ausnahme ist eine dünne Schicht nahe der Wand — die sogenannte Grenzschicht —, die eine Lösung der Grenzschichtgleichungen in diesem ‘Innenbereich’ der Strömungen verlangt (siehe Schlichting und Gersten (1997)). Diese Gleichungen sind entsprechend transformierte Navier–Stokes–Gleichungen.

Wird als Längenmaß ein Maß für die Größe eines Finiten Elementes eingesetzt, d.h. $L \rightarrow h$, erhält man die *Element–Reynoldszahl* Re_K . Diese beschreibt gewissermaßen die für die Diskretisierung sichtbare Strömungscharakteristik (siehe auch Kapitel 3).

- **Pecletzahl**

Das Analogon zur Reynoldszahl bei den Navier–Stokes–Gleichungen ist die Pecletzahl (nach Eugène Péclet (1793–1857)) für die Modellgleichungen des Advektions–Diffusionsproblems. Sie beschreibt also das Verhältnis der *advektiven bzw. konvektiven Flüsse* zu den *diffusiven Flüssen*. Die Pecletzahl ist definiert als

$$Pe = \frac{a L}{2 \kappa} \quad (2.97)$$

wobei a die konvektive Geschwindigkeit, L wiederum ein Längenmaß und κ den Diffusionskoeffizienten darstellt. Der Diffusionskoeffizient ist in diesen Gleichungen das Analogon zur Viskosität in den Navier–Stokes–Gleichungen. Für $L \rightarrow h$ ergibt sich wiederum die *Element–Pecletzahl* Pe_K .

Ebenso wie die Reynoldszahl steuert auch die Pecletzahl den Charakter der zu Grunde liegenden Gleichungen. Hohe Reynolds–/Pecletzahlen besagen, daß die konvektiven Anteile überwiegen, d.h. der hyperbolische Charakter der Gleichungen ausgeprägter wird. Niedrige Reynolds–/Pecletzahlen hingegen bedeuten einen überwiegend elliptischen und somit für die Numerik angenehmen Gleichungscharakter.

- **Strouhalzahl**

Für instationäre Strömungsphänomene kommt zusätzlich zu den in der Reynoldszahl bereits erfaßten Größen noch eine charakteristische Zeit t_c ins Spiel. Damit läßt sich eine *dimensionslose Frequenz* ableiten, die als Strouhalzahl (nach Vincez Strouhal (1850–1922)) bezeichnet wird.

$$St = \frac{L}{t_c u} \quad (2.98)$$

Sie stellt das Verhältnis der *transienten* zu den *stationären Trägheitskräften* dar (Malvern (1969)).

- **Froudezahl**

Einen Kennwert für das Verhältnis der (*stationären*) *Trägheitskräfte* zu den *Schwerkraften* stellt die Froudezahl (nach William Froude (1810–1879)) dar

$$Fr = \frac{u}{\sqrt{g L}} \quad (2.99)$$

g bedeutet hierin die Erdbeschleunigung. Sie spielt vor allem bei Strömungen von Flüssigkeiten mit freien Oberflächen eine Rolle.

- **Machzahl**

Die Machzahl (nach Ernst Mach (1838–1916)) beschreibt das Verhältnis der *Strömungsgeschwindigkeit* u zur *Schallgeschwindigkeit* c im Fluid. Sie ist als

$$Ma = \frac{u}{c} \quad (2.100)$$

definiert und stellt ein Maß für die Kompressibilität der Strömung bzw. die Dichteänderung dar.

3 Stabilisierte Finite-Element-Verfahren für Fluide

Dieses Kapitel ist vornehmlich dem verwendeten räumlichen Diskretisierungsverfahren für den Strömungsteil des Mehrfeldproblems gewidmet. Wie sich anhand der Ableitung der klassischen Methode der Finiten Elemente zeigen wird, treten hier im Zusammenhang mit den inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen erhebliche numerische Schwierigkeiten und Instabilitäten auf. Es zeigt sich in diesem Fall, daß die Anwendung der klassischen Galerkin-Finite-Element-Methode in dem Sinne ungenügende numerische Approximationen liefert, daß sie nicht dieselben Stabilitätseigenschaften wie das kontinuierliche Problem aufweisen. Sogenannte stabilisierte Finite-Element-Verfahren werden sodann als einheitliches Konzept vorgestellt, um diesen Schwierigkeiten bzw. Instabilitäten zu begegnen, d.h. das Stabilitätsverhalten zu verbessern, ohne die Genauigkeit zu beeinträchtigen. Zum Verständnis dieser Verfahren ist es erforderlich, deren Entwicklung kurz zu skizzieren. Anschließend wird jene Formulierung im Detail angeführt, die in dieser Arbeit vornehmlich Verwendung findet und die die Grundlage für notwendige Weiterentwicklungen für das angestrebte gekoppelte Problem darstellt.

3.1 Standard-Galerkin-Finite-Element-Verfahren

Obwohl die Ideen schon sehr alt sind die der Methode der Finiten Elemente zu Grunde liegen, hat sich das Verfahren selbst erst Mitte diese Jahrhunderts zu entwickeln begonnen. In einigen Arbeiten wird allerdings schon das Verfahren von Schellbach (1851) als ein erstes Finite-Element-Verfahren bezeichnet; zur Geschichte der FEM siehe z.B. Gupta und Meek (1996). Zu Beginn wurde diese Methode hauptsächlich auf strukturmechanische (elliptische) Probleme angewandt und erste Ansätze zur Verwendung der FEM zur Strömungssimulation starteten erst in den Sechziger- und Siebziger-Jahren (siehe z.B. Chung (1978), Temam (1979)).

Während die FEM zur Lösung strukturmechanischer Aufgabenstellungen sicherlich das populärste Diskretisierungsverfahren darstellt, ist die 'Konkurrenz' im CFD-Bereich viel größer. Auf diesem Gebiet genießen Finite-Differenzen-Verfahren und mittlerweile vor allem Finite-Volumen-Verfahren hohes Ansehen und sind großteils noch weiter verbreitet als die FEM. Eine kurze Einführung und Diskussion zu diesen alternativen Diskretisierungsverfahren der CFD finden sich im Anhang (Kapitel A1.4). Doch trotz großer und lang anhaltender Skepsis, nach einer anfänglichen Euphorie, hat sich auch die FEM mittlerweile einen bedeutenden Platz auf dem Gebiet der CFD erkämpft. Dies liegt vor allem daran, daß Techniken entwickelt werden konnten die im Stande sind, die Probleme zu lösen, mit denen Standard-Finite-Element-Verfahren bei Strömungsaufgaben zu kämpfen haben.

Gründe, vorerst auch für den Strömungsteil die Methode der Finiten Elemente zu benutzen, sind die im Kapitel A1.4 angeführten allgemeinen Vorteile gegenüber anderen Diskretisierungsverfahren, und der Wunsch, für das gesamte gekoppelte Problem *ein* einheitliches Diskretisierungskonzept zu verwenden.

Ausführliche Darstellungen zu den mathematischen und strömungsmechanischen Aspekten der Methode der Finiten Elemente, die als Grundlagen oder Ergänzungen zu den folgenden Ausführungen dienen können, finden sich in Brenner und Scott (1994), Brezzi und Fortin

(1991), Chung (1978), Cuvelier et al. (1986), Fortin (1993), Girault und Raviart (1986), Glowinski und Pironneau (1992), Gresho und Sani (1998), Gunzburger (1989), Heywood und Rannacher (1982–1990), Hughes (1987b), Johnson (1987), Pironneau (1989) und Quartapelle (1993).

3.1.1 Galerkin–Formulierung der inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen

Im Folgenden wird die (Standard–) Galerkin–Formulierung für die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen hergeleitet. Einige Erläuterungen zum dafür notwendigen mathematischen Rüstzeug finden sich im Anhang A2. Die in der Ableitung, die sich hier auf die räumliche Diskretisierung beschränkt (siehe auch Kapitel 4.2.1), verfolgte Vorgehensweise ist in Bild 3.1 dargestellt. Sie stellt ein mögliches, prinzipielles Schema zur Ableitung einer

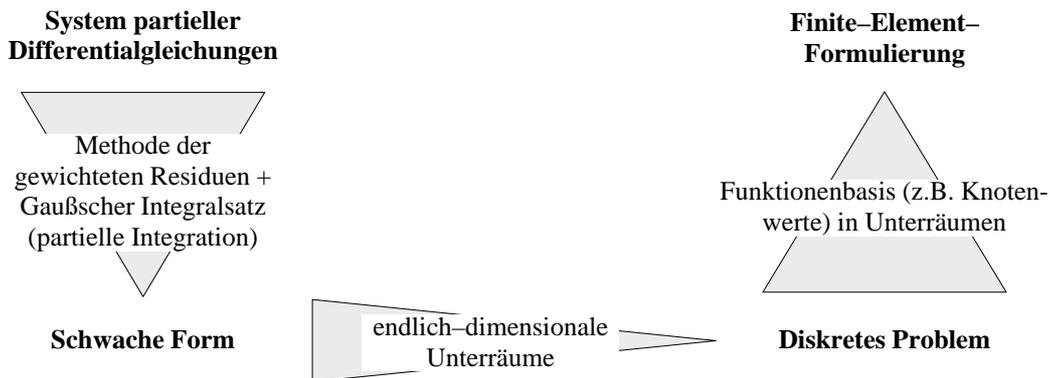


Bild 3.1: Partielle Differentialgleichungen \rightarrow FE–Formulierung

(Galerkin–) Finite–Element–Formulierung dar. In Fällen in denen Energie– bzw. Variationsprinzipien existieren, können FE–Formulierungen natürlich auch auf Basis dieser Prinzipien abgeleitet werden.

Partielles Differentialgleichungssystem

Den Ausgangspunkt der Ableitungen bildet das System gekoppelter, partieller Differentialgleichungen samt Anfangs– und Randbedingungen aus Kapitel 2.3.2, das hier nochmals kurz angeführt wird³. Es sind dies die Feldgleichungen

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (3.2)$$

und die Rand– und Anfangsbedingungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma_g \times (0, T) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{auf } \Gamma_h \times (0, T) \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega \text{ für } t = 0 \quad \text{mit } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad (3.5)$$

3. Da sich sämtliche Ausführungen in diesem Kapitel auf das Strömungsgebiet beziehen, wird hier zur Vereinfachung der Notation auf den Index F verzichtet.

Methode der gewichteten Residuen und Gaußscher Integralsatz

Da nur in seltenen Ausnahmefällen analytische Lösungen gefunden werden können, die die Gleichungen punktweise erfüllen, wird die abgeschwächte Bedingung eingeführt, daß das Residuum der Gleichungen im Integral über das Gebiet verschwinden muß. Wird dieses Residuum nun durch Testfunktionen gewichtet, ergibt sich die Methode der gewichteten Residuen. Mit den Testfunktionen \mathbf{v} für die Impulsbilanz und q für die Massenbilanz heißt das

$$(\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \mathbf{v}) + (\nabla p, \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) \quad (3.6)$$

Darin bedeutet $\dot{\mathbf{u}}$ die Beschleunigung und (\cdot, \cdot) das L^2 innere Produkt, d.h. zum Beispiel

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) = (\mathbf{b}, \mathbf{v})_{\Omega} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.7)$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes, d.h. einer partiellen Integration, werden so dann die Volumenintegrale des Viskositätstermes und des Druckgradienten in Volumenintegrale mit umgesetzten Ableitungen und in ein Randintegral umgewandelt

$$\frac{1}{\rho} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v})_{\Omega} = - (2\nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}))_{\Omega} + (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega} + (\mathbf{h}, \mathbf{v})_{\Gamma_h} \quad (3.8)$$

Wie in Kapitel 2.3.2 bereits angesprochen hängen dabei die sich ergebenden natürlichen Randbedingungen von der Wahl des Viskositätstermes ab (siehe Gleichungen (2.94), (2.95)). Durch den Transfer von Ableitungen auf die Testfunktionen haben sich auch die Differenzierbarkeitsanforderungen an die Funktionen abgeschwächt. Im Gegensatz zu den Ausgangsgleichungen ist nun nur noch die Existenz *schwacher Ableitungen* (siehe Kapitel A2) gefordert; daraus ergibt sich auch die Bezeichnung schwache Form.

Schwache Form

Diese lautet somit: Finde \mathbf{u} aus dem Raum \mathcal{V}_g und p aus dem Raum \mathcal{P} , so daß für alle \mathbf{v} und q aus den Räumen \mathcal{V} bzw. \mathcal{P} gilt

$$B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q) \quad (3.9)$$

mit

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &= (\dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (2\nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \\ F(\mathbf{v}, q) &= (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + (\mathbf{h}, \mathbf{v})_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die angegebenen Funktionenräume sind dabei entsprechend

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_g &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ auf } \Gamma_g \right\}; & \mathcal{V} &= \left\{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega) : \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ auf } \Gamma_g \right\} \\ \mathcal{P} &= \left\{ p \in L^2(\Omega) \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

zu wählen. $\mathbf{H}^1(\Omega)$ bezeichnet darin den Sobolev–Raum von Funktionen mit quadratintegrierbaren Werten und ersten Ableitungen auf Ω und $L^2(\Omega)$ den Raum von quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω . Weitere Ausführungen zu Funktionenräumen und einigen funktionalanalyti-

schen Fragen siehe Kapitel A2. Wenn $\partial\Omega = \Gamma_g$ ist, ist die Lösung für p nur bis auf einen konstanten Wert eindeutig.

Galerkin–Finite–Element–Approximation

Die (Galerkin–) Finite–Element–Approximation besteht darin, die Räume \mathcal{V}_g , \mathcal{V} und \mathcal{P} durch endlich–dimensionale (finite) Unterräume \mathcal{V}_g^h , \mathcal{V}^h und \mathcal{P}^h zu ersetzen. Die diskrete Form, oder auch *diskrete Variationsformulierung*, lautet somit: Finde $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}_g^h$ und $p^h \in \mathcal{P}^h$, so daß

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{v}^h, q^h) \quad \forall (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathcal{V}^h \times \mathcal{P}^h \quad (3.12)$$

erfüllt ist. Werden die Funktionen \mathbf{u}^h und p^h , die aus diesen endlichdimensionalen Räumen stammen, als Funktionen mit einem lokalen Träger, z.B. einem Element, gewählt und durch ihre Knotenwerte ausgedrückt, folgt die *Matrixform* der Galerkin–Formulierung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen.

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{u}} + N(\mathbf{u}) + G\mathbf{p} &= \mathbf{F} \\ G^T\mathbf{u} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Hierin bezeichnen \mathbf{u} die Knotenwerte der Geschwindigkeiten und \mathbf{p} die Knotenwerte der Druckansatzfunktionen, d.h. mit N_i als Elementansatzfunktionen des Knotens i

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{y}) = \mathbf{u}_i N_i(\mathbf{y}); \quad p^h(\mathbf{y}) = p_i N_i(\mathbf{y}) \quad (3.14)$$

Eine Verwechslung mit derselben Notation für die kontinuierlichen Funktionen ist, jeweils aus dem Zusammenhang begründet, nicht wahrscheinlich. Deswegen werden für die in den nächsten Kapiteln häufig verwendeten Knotenwerte diese einfachen Bezeichnungsweisen gewählt. Das Gleichungssystem (3.13) stellt ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen mit einer algebraischen Zwangsbedingung (‘constraint’), also ein *differential–algebraisches Gleichungssystem (DAE)*, dar.

Bemerkung: In vielen Fällen führt die (Standard–) Finite–Element–Methode zu symmetrischen Problemen (\rightarrow *selbstadjungierte* Operatoren), wo sie die *Eigenschaft der besten Approximation* besitzt, d.h. einen minimalen Fehler ergibt. Dies erklärt auch den fast konkurrenzlosen Einsatz dieser Methode für die elliptischen Probleme der Strukturmechanik. In Strömungsproblemen (oftmals *nicht–selbstadjungierte* Operatoren) ist die Matrix mit den konvektiven Termen unsymmetrisch und die FEM verliert ihre ‘beste Approximations–Eigenschaft’: Ein Grund für die unten diskutierten numerischen Probleme.

Bubnov– und Petrov–Galerkin–Verfahren

Werden, wie üblich, in der Galerkin–Finite–Element–Approximation, beispielsweise (3.12), die Testfunktionen analog den Ansatzfunktionen gewählt, so spricht man von einem *Bubnov–Galerkin–* oder einfach nur *Galerkin–Verfahren*. Sind die Funktionen, mit denen das Residuum getestet wird, verschieden von den Funktionen, die die Felder approximieren, so spricht man von einem sogenannten *Petrov–Galerkin–Verfahren*. Hinweise, im Rahmen eines historischen Überblicks, zu dieser Namensgebung, deren Berechtigung jedoch durchaus auch angezweifelt werden kann (siehe Hughes (1987a)), finden sich in Michlin (1962).

3.1.2 Numerische Probleme der Standard–Galerkin–Formulierung

Ein Großteil der numerischen Schwierigkeiten, die in Kapitel 2.3.3 schon kurz angesprochen wurden, betreffen die räumliche Diskretisierung und führen bei Verwendung der Standard–Galerkin–Formulierung zu Problemen. Diese Probleme werden im folgenden anhand zweier numerischer Beispiele verdeutlicht (Wall et al. (1998)). Sodann sollen die auftretenden Probleme in einer mathematischen Analyse der Modellgleichungen begründet sowie anschaulich interpretiert werden.

Beispiel zu oszillierendem Geschwindigkeitsfeld

Die erste hier angesprochene Art numerischer Probleme ist auf das Vorhandensein des konvektiven Terms zurückzuführen. Dies führt im Rahmen der Standard–Galerkin–Formulierung zu künstlichen Oszillationen im Geschwindigkeitsfeld, sogenannten ‘wiggles’. Diese ‘wiggles’ treten vor allem in konvektionsdominanten Strömungen auf, in denen stromabwärts liegende Randbedingungen eine abrupte Änderung der Lösung verlangen. Bild 3.2 zeigt die Problem-

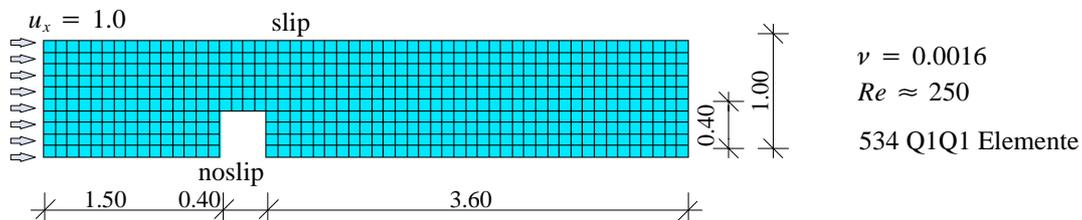


Bild 3.2: Strömung über Stufe — Problemstellung und Diskretisierung

stellung für ein Beispiel, an dem dieses Phänomen veranschaulicht werden soll. Es handelt sich dabei um die Strömung über eine Stufe in einem Kanal. Der Aufgabe liegen die stationären Navier–Stokes–Gleichungen zu Grunde, also (3.1) bis (3.4) ohne den Beschleunigungsterm. Die relative grobe Diskretisierung mit bilinearen Ansätzen für \mathbf{u} und p und sonstige Angaben sind Bild 3.2 zu entnehmen. Die Berechnungen wurden mit dem in Kapitel 3.3 angeführten stabilisierten Finite–Element–Verfahren durchgeführt. Die rechte Grafik in Bild 3.3 zeigt die

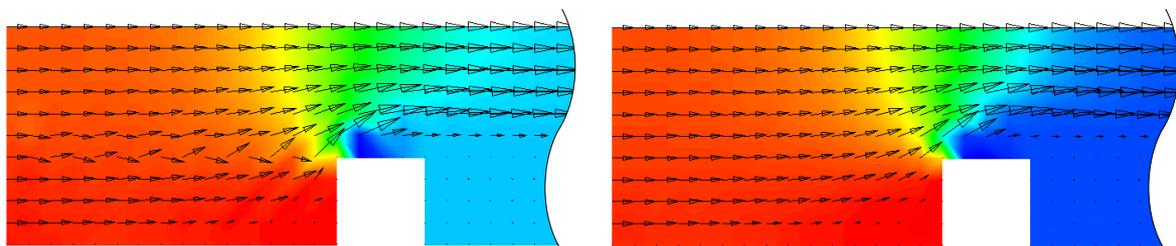


Bild 3.3: Geschwindigkeitsvektoren (und Druckfeld) für Strömung über Stufe — ohne (links) und mit (rechts) Konvektionsstabilisierung

‘richtige’ Lösung als Ergebnis des ‘voll stabilisierten’ Verfahrens aus Kapitel 3.3. In einer zweiten Simulation wurde auf die Stabilisierung des konvektiven Terms verzichtet, d.h. bezüglich der Konvektion wurde damit das Verhalten eines Standard–Galerkin–Verfahrens simuliert. Dieses defekte Ergebnis ist im linken Bild 3.3 dargestellt, in dem die Oszillationen der Geschwindigkeitsvektoren deutlich zu sehen sind. Die einzige Möglichkeit diese Oszillationen im Rahmen einer Standard–Galerkin–Methode zu vermeiden, ist eine beträchtliche Netzverfeinerung, damit die Konvektion bezogen auf die Elementgröße nicht mehr dominant wird und

die Grenzschichten (‘internal and boundary layers’) aufgelöst werden. Somit wäre eine deutliche Verfeinerung des Netzes nötig, nur um Oszillationen zu vermeiden, und nicht mehr nur deshalb, um die Lösung in einem bestimmten Bereich stärker aufzulösen.

Beispiel zu oszillierendem Druckfeld

Das zweite numerische Hauptproblem ist mit dem Druckterm assoziiert und mit der Tatsache, daß die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen in einer Geschwindigkeits–Druckformulierung auf eine sogenannte *gemischte Methode* führen. Aus der Theorie der gemischte Methoden ist bekannt, daß die Interpolationen der beiden involvierten Felder in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen sollten; dies wird später ausführlich diskutiert.

Als Beispiel soll hier das für die CFD klassische Beispiel der ‘Nischenströmung’ (‘driven cavity’) dienen. Die wiederum stationäre Problemstellung in Bild 3.4 soll also eine überströmte

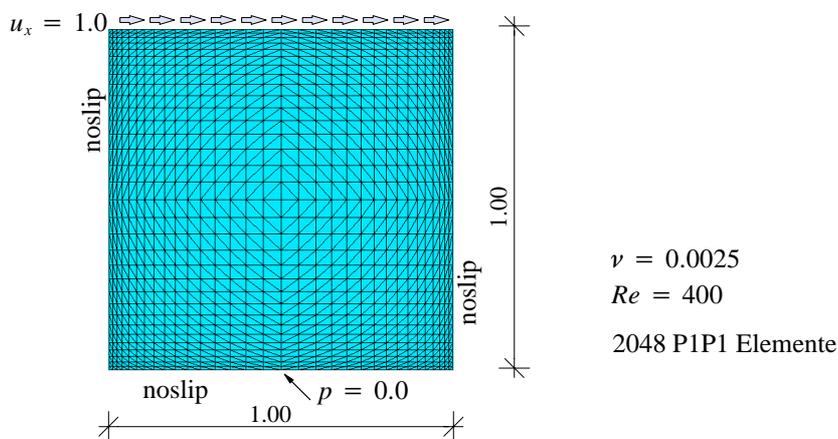


Bild 3.4: ‘Driven cavity’ — Problemstellung und Diskretisierung

Nische darstellen. Als ‘Druckdatum’ wird der Druck in der Mitte der Unterseite vorgeschrieben. Das in Bild 3.5 links dargestellte Ergebnis zeigt deutlich die auftretenden numerischen

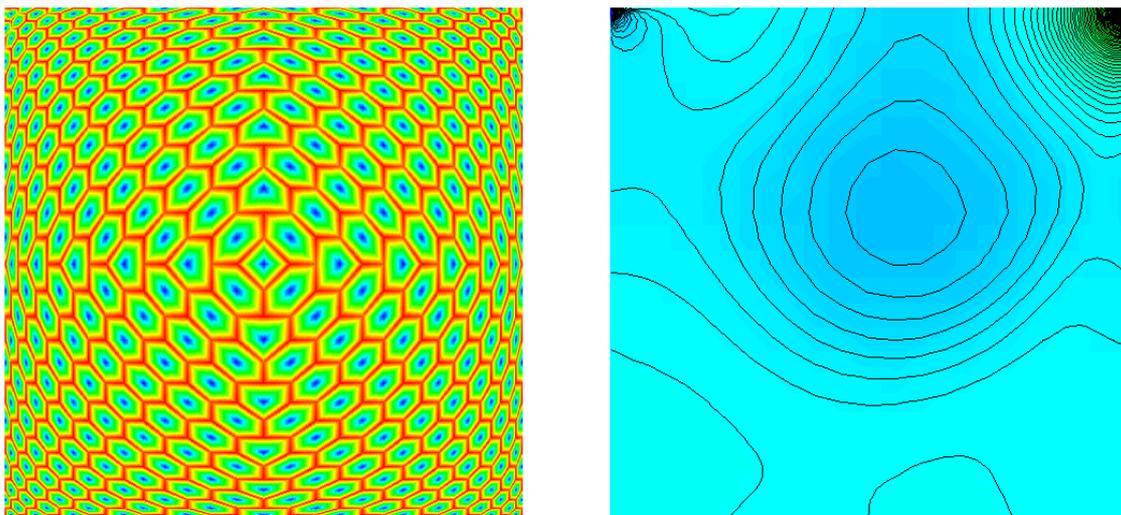


Bild 3.5: Druckfeld für ‘Driven cavity’ — ohne (links) und mit (rechts) Druckstabilisierung

Probleme in Form von starken, unphysikalischen Oszillationen des Druckfeldes. In Simulationen mit konstanten Druckansätzen zeigen diese ‘Oszillationen’ ein Schachbrettmuster und sind deshalb auch als Schachbrettmodes (‘checkerboard modes’) bekannt. Für die vorliegenden

Berechnungen wurden gleiche Interpolationsordnungen für Geschwindigkeit und Druck (Dreiecke mit jeweils linearen Ansätzen — P1P1) gewählt. Ausgehend vom Verfahren aus Kapitel 3.3 wurde beim linken Ergebnis auf die Druckstabilisierung verzichtet, also ein Standard–Galerkin–Verfahren bezüglich des Druckterms simuliert. Das rechte Bild zeigt wiederum das physikalisch sinnvolle ‘korrekte’ Ergebnis des ‘voll stabilisierten’ Verfahrens.

Bemerkung: Durch den angesprochenen Zwang zu einem bestimmten ‘Interpolationsverhältnis’ bei gemischten Methoden wird vor allem ein Fall ‘ausgeschlossen’, der in vielen Fällen sehr wünschenswert ist. Es ist dies der Fall von gleichen Interpolationsordnungen für die Geschwindigkeits– und Druckapproximationen. Vorteile solcher gleichen Interpolationsordnungen liegen u.a. in einer einfacheren Implementierung, einer einfachen Erweiterbarkeit auf 3D–Probleme und in der vorliegenden Problemstellung Fluid–Struktur–Interaktion auch darin, daß die Druckfreiwerte auch am Elementrand liegen, was die Umsetzung der Kopplung etwas erleichtert.

3.1.3 Analyse der numerischen Schwächen

Zur mathematischen Analyse der soeben aufgezeigten Defekte der Standard–Galerkin–Methode werden sogenannte Modellgleichungen verwendet. Diese zeigen jeweils analoge Effekte wie die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen, erleichtern jedoch die Analyse entscheidend und machen sie übersichtlicher (Brezzi et al. (1996), Franca et al. (1993) und Johnson (1987)).

Mathematische Analyse der Geschwindigkeitsoszillationen

Das Modellproblem zur Untersuchung des numerischen Defekts bei konvektionsdominanten Strömungen ist die skalare Advektions–Diffusions–Gleichung

$$\mathbf{a} \cdot \nabla \phi - \kappa \Delta \phi = f \quad \text{auf } \Omega \quad (3.15)$$

Sie beschreibt die Advektion einer skalaren Größe ϕ , beispielsweise der Temperatur, durch ein gegebenes Geschwindigkeitsfeld \mathbf{a} bei gleichzeitiger Diffusion mit dem Diffusionskoeffizienten κ . f beschreibt einen volumetrischen Quellterm. Wie in den Navier–Stokes–Gleichungen balancieren sich hier ein advektiver Term mit hyperbolischem Charakter und ein diffusiver, elliptischer Term. Zur Vereinfachung der weiteren Ausführungen werden homogene Dirichlet–Randbedingungen gewählt, d.h. $\phi = 0$ auf $\partial\Omega$. Nach einem Vorgehen analog Kapitel 3.1.1 lautet die Variationsformulierung dann: Finde ein $\phi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ für das gilt

$$\kappa(\nabla \phi, \nabla v) + (\mathbf{a} \cdot \nabla \phi, v) = (f, v) \quad \forall v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \quad (3.16)$$

Bei Verwendung von stückweise linearen Funktionen können sich für den Fall $h|\mathbf{a}| \gg \kappa$ auch hier störende Oszillationen auf dem gesamten Gebiet zeigen.

Bemerkung: Allgemein kann unter Verwendung der Bilinearform $a(u, v)$ eine Galerkinformulierung als

$$a(u^h, v^h) = (f, v^h) \quad \forall v^h \in \mathcal{Q}^h \quad (3.17)$$

geschrieben werden. Aus den Bedingungen der Stetigkeit der Bilinearform (3.18) und deren V–Elliptizität (3.19) (Johnson (1987), Franca und Hughes (1988))

$$a(u, v) \leq C_S \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \quad \forall u, v \in \mathcal{V} \quad (3.18)$$

$$a(v, v) \geq C_E \|v\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (3.19)$$

folgt die optimale Fehlerschranke

$$\|u - u^h\|_{\mathcal{V}} \leq \frac{C_S}{C_E} \inf_{v^h \in \mathcal{V}^h} \|u - v^h\|_{\mathcal{V}} \quad (3.20)$$

mit den beiden Konstanten $C_E > 0$ und $0 < C_S < \infty$. Dieses Rezept ist erfolgreich, wenn $C_S/C_E \approx 1$ ist.

Ein Anzeichen für zu erwartende Probleme bei der Formulierung (3.16) zeigt sich allein schon dadurch, daß die optimale Fehlerschranke (3.20) in diesem Falle praktisch nutzlos ist. Aus der Definition (3.16) liefert die Bilinearform, für den einfachsten Fall eines konstanten α ,

$$a(v^h, v^h) = \kappa \|\nabla v^h\|_{L^2}^2 \quad (3.21)$$

Aus Vergleich von (3.21) mit der V-Elliptizitätsforderung der Bilinearform (3.19) folgt, daß κ (mal der Poincaré-Konstanten, die von der Ordnung 1 ist) der Konstanten C_E in (3.20) entspricht. Die Konstante C_S , die der Stetigkeitsforderung (3.18) entstammt, ist in diesem Fall von der Größe $|\alpha|$ (Brezzi et al. (1996)). Mit diesen Betrachtungen folgt bereits aus (3.20), daß für kleine Werte κ die rechte Seite in (3.20) und damit der Fehler sehr groß werden kann und auch meist wird. Die Schätzung des Fehlers (Hughes (1987a))

$$\|\nabla e\| = o((1 + \alpha)h_K) \quad (3.22)$$

mit dem Fehler $e = \phi^h - \phi$, der Element-Pecletzahl $\alpha = |\alpha|h/(2\kappa)$ und der Ordnung des kompletten Polynoms in jedem Element K , zeigt diese Anzeichen für zu erwartende Probleme bei großem α ebenso deutlich wie die übliche optimale Ordnung des Fehlers im diffusionsdominanten Fall, d.h. bei kleinem α .

Mathematische Analyse der Druckoszillationen — LBB-Bedingung

Das Modellproblem zur Untersuchung der Druckoszillationen wird durch die Stokes-Gleichungen beschrieben

$$\begin{aligned} -2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p &= \mathbf{b} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei zur Vereinfachung wieder ausschließlich homogene Dirichlet-Randbedingungen vorausgesetzt werden sollen. Als Variationsformulierung folgt nun die Suche nach $\mathbf{u} \in \mathcal{V} = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ und $p \in \mathcal{P} = L^2(\Omega)$, für die gilt

$$(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v})) - (p, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathcal{V} \times \mathcal{P} \quad (3.24)$$

Würden nun beispielsweise kontinuierliche, stückweise lineare Ansatzfunktionen für \mathbf{u} und p gewählt, versagt die Galerkin-Methode für jede Netzgröße h . Leider ist in diesem Falle eine ähnlich einfache Abschätzung wie oben nicht möglich. Die Theorie der gemischten Methoden bildet den mathematischen Rahmen, um solche Probleme mit Zwangsbedingungen zu ana-

lysieren. Eine Diskussion dieser Theorie läßt sich beispielsweise in Brezzi und Fortin (1991), Girault und Raviart (1986) und Hughes (1987b) finden. Die wesentliche Erkenntnis dieser Theorie besagt, daß für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, außer den schon angeführten Bedingungen der Stetigkeit und der V-Elliptizität, auch die sogenannte *Ladyzhenskaya–Babuska–Brezzi–Bedingung* oder *LBB–Bedingung* erfüllt sein muß. Sie ist auch unter den Namen Babuska–Brezzi–, inf–sup– oder Divergenz–Stabilitäts–Bedingung bekannt und geht auf Babuska (1973), Brezzi (1974) bzw. im kontinuierlichen Fall auf Ladyzhenskaya (1969) zurück. Eine mögliche Schreibweise der LBB–Bedingung besagt, daß eine Konstante $c > 0$, unabhängig von h , existiert, so daß

$$\inf_{0 \neq q^h \in \mathcal{P}^h} \sup_{0 \neq \mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h} \frac{(\operatorname{div} \mathbf{v}^h, q^h)}{\|\mathbf{v}^h\|_1 \|q^h\|_0} \geq c \quad (3.25)$$

erfüllt ist. (3.25) bestimmt also das Verhältnis der Räume für die Geschwindigkeits– und die Druckapproximation zueinander, da anders ausgedrückt für jedes $q^h \in \mathcal{P}^h$ ein $\mathbf{v}^h \in \mathcal{V}^h$ existieren muß damit $(\operatorname{div} \mathbf{v}^h, q^h) \geq c \|q^h\|_0 \|\mathbf{v}^h\|_1$ gilt. Eine Untersuchung des Falles gleicher Interpolationsordnungen zeigt, daß (3.25) in diesem Fall nicht erfüllt ist und somit eine instabile Methode vorliegt. Für Elemente, die (3.25) erfüllen, folgt eine Fehlerabschätzung von optimaler Ordnung

$$\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}\|_1 + \|p^h - p\|_0 = o(h^{\min(k,l+1)}) \quad (3.26)$$

mit k und l als Ansatzordnungen der Geschwindigkeits– bzw. Druckinterpolationen.

Bemerkung: Bei Verletzung der LBB–Bedingung ist die Lösbarkeit des Gleichungssystems unter Umständen nicht mehr gegeben, es entsteht ein singuläres Gleichungssystem. Wenn es lösbar ist, können ein unbegrenzter Druck, d.h. bei $h \rightarrow 0$ geht $\|p\| \rightarrow \infty$, oder, wie oben gezeigt, störende (‘spurious’) Druckmoden auftreten (Sani et al. (1981)). Sowohl im Falle des unbegrenzten Druckes als auch bei den falschen Druckmoden kann die falsche Drucklösung jedoch außer mit einer ‘lockenden’ auch mit einer richtigen Geschwindigkeitslösung einhergehen. Dies führt auch dazu, daß relativ häufig Elemente verwendet werden, die die LBB–Bedingung nicht erfüllen. In diesem Fall müssen die künstlichen Druckmoden durch entsprechende Randbedingungen vermieden werden. Solche Elemente, sowie eine Reihe von Elementen die die LBB–Bedingung erfüllen, werden in Gunzburger (1989) diskutiert. Dort finden sich auch Verfahren zur Überprüfung, ob Elemente zulässig sind, d.h. die LBB–Bedingung erfüllen.

Interpretationen der Effekte

Zur weiteren Veranschaulichung der soeben angesprochenen Effekte und für ein besseres Verständnis der im weiteren Verlauf dieser Arbeit diskutierten Verfahren und deren Grundlagen sollen beide Phänomene nochmals anhand einfacher Beispiele gezeigt und interpretiert werden.

• Geschwindigkeitsoszillationen

Die eindimensionale Variante der Advektions–Diffusions–Gleichung (3.15) lautet mit $f = 0$

$$a\phi_{,y} - \kappa\phi_{,yy} = 0 \quad (3.27)$$

Es wird das Gebiet $\Omega = [0, 1]$ mit den Dirichlet Randbedingungen $\phi(y = 0) = 1.0$ sowie $\phi(y = 1) = 0.0$ betrachtet. Sind a und κ konstant, so lautet die exakte Lösung von (3.27)

$$\phi(y) = 1 + \frac{1 - e^{Pe y}}{1 - e^{Pe}}; \quad \text{mit } Pe = \frac{1 \times a}{\kappa} \quad (3.28)$$

Für hohe Pecletzahlen bei stark advektionsdominanten Strömungen wird aus (3.28) auch die dünne Grenzschicht am Ausflußrand deutlich (Bild 3.6). Die Anwendung des Galerkin-Finite-Element-Verfahrens

$$\int_{\Omega} N_i a \frac{d\phi^h}{dy} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{dN_i}{dy} \kappa \frac{d\phi^h}{dy} d\Omega = 0 \quad (3.29)$$

führt nach einigen weiteren Schritten zur diskreten Lösung

$$\phi_i = \phi(y_i = ih) = 1 - \frac{r^i - 1}{r^N - 1}; \quad \text{mit } r = \frac{1 + Pe_e}{1 - Pe_e} \quad \text{und } Pe_e = \frac{a h}{2\kappa} \quad (3.30)$$

wobei h die Elementgröße bedeutet und $y_N = 1.0$ ist. In Bild 3.6 sind diese Lösungen für

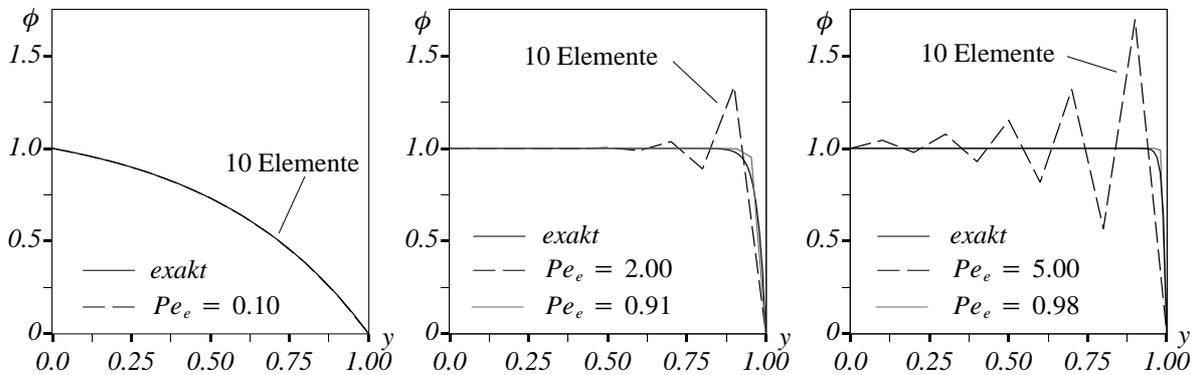


Bild 3.6: Lösung der eindimensionalen Advektions-Diffusions-Gleichung
 $Pe=2.0$ (links), $Pe=40.0$ (mitte), $Pe=100.0$ (rechts)

dominierende Diffusion ebenso dargestellt wie für dominierende Advektion. Im advektionsdominanten Fall mit klassischen FE-Ansätzen wird offensichtlich nur eine befriedigende Lösung erzielt, wenn die Grenzschicht entsprechend aufgelöst wird. Dies drückt sich wiederum in einer Element-Pecletzahl von ungefähr 1.0 aus. Wie aus (3.30) ersichtlich ist, führt $Pe_e \geq 1.0$ zu einem $r < 0$ und somit zu Oszillationen. Oszillationen beim Standard-Finite-Element-Verfahren sind also ein Zeichen für nicht genügend aufgelöste Grenzschichten (Gresho und Lee (1979)). Ein analoges Beispiel mit einem zentralen Differenzenverfahren diskretisiert, das einem Standard-Galerkin-Verfahren mit stückweise linearen Ansätzen entspricht, findet sich in Brooks und Hughes (1982)

• Druckoszillationen

Die Matrixformulierung der Stokes-Gleichung läßt sich analog zu (3.13) als

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

darstellen. Darin bedeuten \mathbf{G} die Gradientenmatrix und \mathbf{G}^T die Divergenzmatrix bzw. die diskreten Gradienten- und Divergenzoperatoren. Die Druckoszillationen bestehen aus sogenannten künstlichen Druckmoden, die entsprechend (3.31) Lösungen $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ darstellen, für die

$\mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ergibt, d.h. die zu den Null-Eigenwerten der Matrix \mathbf{G} gehörenden Eigenvektoren. Anders ausgedrückt, liefert der Term $(p^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h)_{\Omega^e}$ in der diskreten schwachen Form (3.24) für diese Moden keinen Beitrag. Das bedeutet, daß nicht genügend Testfunktionen für \mathbf{v}^h zur Verfügung stehen, um sämtliche künstlichen Druckmoden auszutesten, oder entsprechend der Aussage der LBB-Bedingung ausgedrückt, der Testfunktionenraum \mathcal{V}^h ist zu klein.

Dieser Sachverhalt soll an einem einfachen, konkreten Beispiel dargestellt werden (Pierre (1988)). Entsprechend Bild 3.7(b–d) handelt es sich dabei um die Vernetzung eines quadrati-

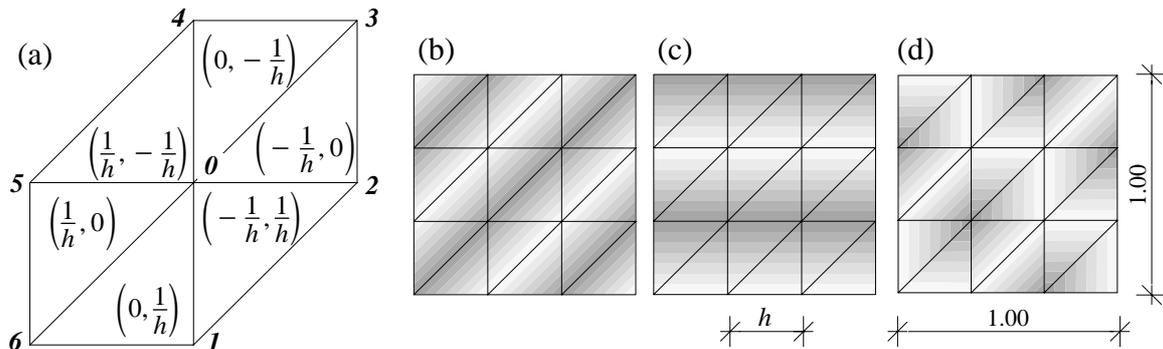


Bild 3.7: Künstliche Druckmoden bei P1P1-Elementen; (a) $\operatorname{div} \mathbf{v} \rightarrow (v_{x,x}, v_{y,y})$ auf Träger für Knoten $\mathbf{0}$, (b–d) Diskretisierungen und mögliche künstliche Druckmoden

schen Gebietes mit dreieckigen Elementen mit linearen Ansatzfunktionen für Geschwindigkeiten und Druck, d.h. um P1P1-Elemente. Es wird nun der Träger einer Testfunktion aus \mathcal{V}^h eines beliebigen inneren Knotens $\mathbf{0}$ betrachtet (Bild 3.7(a)). Für diesen Fall läßt sich der Ausdruck $(p^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h)_{\Omega} = 0$ als

$$\begin{aligned} (v_{x,x}^h, p^h) &\rightarrow -p_1 - 2p_2 - p_3 + p_4 + 2p_5 + p_6 = 0 \\ (v_{y,y}^h, p^h) &\rightarrow 2p_1 + p_2 - p_3 - 2p_4 - p_5 + p_6 = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

angeben, wobei p_i jeweils den Druckwert am Knoten i bezeichnet. Die Ausdrücke für den Divergenzoperator für den Knoten $\mathbf{0}$ sind in den jeweiligen Elementen in Bild 3.7(a) angegeben. Die allgemeine Lösung von (3.32) für die Variablen (p_1, p_2, \dots, p_6) lautet $(\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \delta, \beta - \delta, \gamma + \delta)$. α, β, γ und δ stellen darin beliebige Konstanten dar. Wird diese Vorgehensweise für sämtliche Knoten durchgeführt, ergeben sich bei Beachtung der Stetigkeitsanforderungen die möglichen künstlichen Druckmoden für diese Diskretisierung. Einige Beispiele dazu sind in Bild 3.7(b–d) skizziert.

Bemerkung: Ein Vergleich mit den Analysen in Pierre (1988) bzw. De Mulder (1997) zeigt, daß die dort angegebene scheinbar vollständige Lösungsmenge an Druckmoden nicht korrekt ist. So läßt sich beispielsweise der in Bild 3.7(d) dargestellte Mode (vergleiche auch Bild 3.5) nicht aus den in diesen beiden Arbeiten erzielten Ergebnissen ableiten.

3.2 Stabilisierte Finite-Element-Methoden

Den in Kapitel 3.1.2 besprochenen numerischen Problemen soll mit einem *einheitlichen* Konzept begegnet werden, den sogenannten *stabilisierten Finite-Element-Verfahren*. Um die zu Grunde liegenden Prinzipien und Wirkungsweisen der Methode der stabilisierten Finiten Ele-

mente zu verdeutlichen, ist es sinnvoll kurz die Entwicklung dieser Verfahren zu skizzieren, die eng mit der Entwicklung der Finiten Elemente in der CFD verbunden ist. Dabei sollen ohne Anspruch auf Vollständigkeit der mittlerweile umfangreichen Literatur auf diesem Gebiet vor allem jene Verfahren angesprochen werden, aus denen sich die im weiteren vorgestellten Diskretisierungsverfahren entwickelten. Vor allem soll hier versucht werden, anschauliche Interpretationen der Verfahren und ihrer einzelnen Komponenten zu geben und auf zu Tage getretene Stärken und Schwächen einzelner Ansätze hinzuweisen.

Stabilisierte Methoden wurden ursprünglich für inkompressible Strömungen entwickelt. Später wurden diese Verfahren auch intensiv auf kompressible Strömungsprobleme angewandt. Diese kompressiblen Ansätze sollen jedoch in dieser Arbeit größtenteils ausgeklammert werden (siehe dazu z.B. Shakib (1988) und die darin zitierten Arbeiten). Wohl auf Grund der relativ kurzen Zeit der Existenz solcher stabilisierter Verfahren sind zusammenfassende, überblicksartige Arbeiten zu diesem Thema noch kaum zu finden. Dies stellt eine weitere Motivation dar, im Folgenden die entsprechenden Entwicklungen solcher Verfahren für inkompressible Strömungen überblicksartig zu skizzieren. Weitere Ansätze für überblicksartige Darstellungen finden sich in Franca (1993), Hughes et al. (1994), Brezzi et al. (1996) und De Mulder (1997). Sofern die Ergebnisse der Fehleranalysen zu den einzelnen Verfahren wegen der kompakten Präsentation nicht angegeben sind, können diese den an der jeweiligen Stelle zitierten Arbeiten entnommen werden.

3.2.1 Advektionsstabilisierung

Zur Diskussion der Stabilisierung des advektiven Terms wird auf das schon in Kapitel 3.1.3 verwendete Modellproblem der Advektions–Diffusions–Gleichung (3.15) zurückgegriffen.

‘Upwinding’ und Finite Elemente

Im Finite–Differenzen–Kontext wird dem Problem von Oszillationen im advektionsdominanten Fall klassischerweise durch die Verwendung von *einseitigen* oder ‘*upwind*’–Differenzenverfahren begegnet. Das bedeutet, daß anstatt eines zentralen Differenzensterns ein stromaufwärts gerichteter Differenzenstern verwendet wird. Es wird also die stromaufwärts liegende Information ‘stärker gewichtet’ und somit ein Oszillieren der Lösung vermieden. Eine Analyse zeigt, daß das Standard–Finite–Element–Verfahren (bzw. das zentrale Differenzenverfahren) zu wenig diffusiv (‘underdiffusive’) ist, d.h. das Standard–Finite–Element–Verfahren hat eine *negative künstliche Diffusion*. Wird nun eine künstliche Diffusion entsprechend

$$\bar{\kappa} = \kappa Pe_e \left(\coth(Pe_e) - \frac{1}{Pe_e} \right) \quad (3.33)$$

in das Verfahren (3.29) eingebracht, ergeben sich im eindimensionalen Fall an den Knoten die exakten Werte. Auf diese Erfahrungen und Erkenntnisse wurde aufgebaut, als versucht wurde, erste ‘upwinding’–Verfahren auch für die FEM zu entwickeln. Erste Versuche waren sogenannte klassische künstliche oder balancierende Diffusionsverfahren (‘*classical artificial/balancing diffusion*’), in denen einfach eine zusätzliche, künstliche Diffusion eingebracht wird, *spezielle Quadraturverfahren*, mit stromaufwärts verschobenen Quadraturpunkten der numerischen Integration, oder *Petrov–Galerkin–Verfahren* mit stromaufwärts stärker gewichteten Testfunktionen (siehe auch Brooks und Hughes (1982), Hughes (1987a)). Alle diese Verfahren

funktionieren bei eindimensionalen Problemen durchwegs sehr gut. Im mehrdimensionalen Fall tritt jedoch wie bei upwind-Differenzenverfahren als zusätzliches Problem die eingebrachte exzessive unphysikalische Diffusion normal zur Stromrichtung auf, die sogenannte ‘crosswind diffusion’. Hinzu kommt eine Genauigkeit von höchstens erster Ordnung,.

Dieses Problem kann beseitigt werden, wenn anstatt einer skalaren künstlichen Diffusion ein künstlicher Diffusionstensor eingebracht wird. Ist dieser entsprechend der Advektionsrichtung ausgerichtet, wirkt die gewünschte Diffusion primär in Stromrichtung und verursacht so eine möglichst geringe numerische ‘crosswind’ Diffusion. Hughes und Brooks (1979) gelang dies mit der sogenannten ‘Streamline Upwind’ (SU)-Methode, die im folgenden als Ausgangspunkt für das äußerst populäre SUPG-Verfahren erläutert wird.

‘Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin’ (SUPG)-Verfahren

Die Grundidee der SU-Methode besteht in der Störung der Testfunktionen im Sinne eines Petrov-Galerkin-Ansatzes entsprechend

$$\tilde{v}^h = v^h + \tau \mathbf{a} \cdot \nabla v^h \quad (3.34)$$

Der lokal definierte Parameter τ wird dabei aufgrund seiner Dimension als innere Zeitskala bzw. ‘intrinsic time scale’ und in der späteren Verallgemeinerung als *Stabilisierungsparameter* bezeichnet. Ein Beispiel einer solchen Petrov-Galerkin-Testfunktion ist für ein eindimensionales Beispiel und lineare Finite-Elemente-Ansätze in Bild 3.8 dargestellt. Der Störungsterm führt

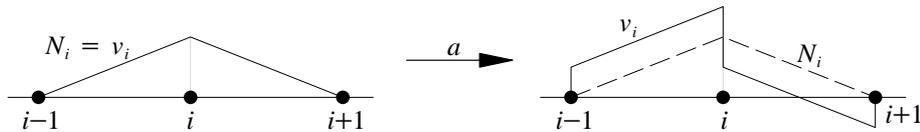


Bild 3.8: Ansatzfunktionen v_i und Testfunktionen N_i (1D) für Knoten i — Standard-Galerkin-Verfahren (links), SUPG (rechts)

zu einer stärkeren Gewichtung der stromaufwärts gelegenen Informationen, also zu einem ‘upwinding’. Beim ‘Streamline Upwind’-Verfahren wird diese Petrov-Galerkin-Testfunktion nur auf den advektiven Term angewandt. Die Multiplikation des Störungsterms der Testfunktion $\tau \mathbf{a} \cdot \nabla v^h$ mit dem Advektionsterm zeigt, daß der dabei resultierende Ausdruck als der oben gewünschte künstliche Diffusionstensor identifiziert werden kann, der nur in Strömungsrichtung wirkt. Im Unterschied zum SU-Verfahren wird beim ‘Streamline-Upwind/Petrov-Galerkin’-Verfahren die gestörte ‘upwind’-orientierte Testfunktion auf alle Terme der skalaren Advektions-Diffusions-Gleichung angewandt. Dadurch handelt es sich bei diesem auf Brooks und Hughes (1982) zurückgehenden Verfahren, im Gegensatz zum SU-Verfahren, um eine konsistente Formulierung. Die zu (3.16) analoge diskrete schwache Form lautet somit für das SUPG-Verfahren

$$\kappa(\nabla \phi^h, \nabla \tilde{v}^h) + (\mathbf{a} \cdot \nabla \phi^h, \tilde{v}^h) = (f, \tilde{v}^h) \quad (3.35)$$

Werden die Störungsterme der Testfunktionen zusammengefaßt, läßt sich das Verfahren auch als Bubnov-Galerkin-Verfahren mit einem Zusatzterm, dem sogenannten *Stabilisierungsterm* ST , schreiben.

$$\kappa(\nabla \phi^h, \nabla v^h) + (\mathbf{a} \cdot \nabla \phi^h, v^h) + ST = (f, v^h) \quad (3.36)$$

Der Stabilisierungsterm ist in diesem Falle durch

$$ST = \left(\mathbf{a} \cdot \nabla \phi^h - \kappa \Delta \phi^h - f, \tau \mathbf{a} \cdot \nabla v^h \right)_{\tilde{\Omega}} \quad (3.37)$$

gegeben, wobei betont werden soll, daß sich im linken ‘slot’ bzw. Argument der Bilinearform das Residuum $\mathfrak{R}(\phi^h)$ der Ausgangsgleichung (3.15) befindet. Daraus wird ersichtlich, daß es sich bei der SUPG–Formulierung im Gegensatz zur SU–Methode um ein konsistentes Verfahren handelt. $\tilde{\Omega}$ bezeichnet dabei die Summe über alle Elemente der Triangulierung des Gebietes Ω .

Die originalen Beiträge zur Entwicklung des SUPG–Verfahrens sind hauptsächlich intuitiven Ursprungs und stammen von der Gruppe um T.J.R. Hughes. Ausführliche mathematische Analysen von SUPG–artigen Verfahren und zugehörige Ergänzungen kamen bereits sehr früh von der Gruppe um C. Johnson, die diese Verfahren als ‘*streamline diffusion*’–Verfahren bezeichnen (Johnson et al. (1984), Johnson und Saranen (1986) und die dort angeführten Arbeiten). Sämtliche Bezeichnungen für diese ‘guten’ Verfahren können als ‘gleich schrecklich’ angesehen werden, wie in Hughes (1987a) ausführlich begründet wird. Bei der Bezeichnung SUPG ist vor allem die Verwendung des Terminus ‘Upwinding’ problematisch und irreführend, da dieser Begriff in vielen CFD–Kreisen eindeutig besetzt ist, es sich bei diesem Verfahren aber nicht um eines jener klassischen ‘Upwinding’–Verfahren handelt. Im Gegensatz zu diesen klassischen Verfahren, die eine hohe Stabilität auf Kosten der Genauigkeit erreichen, kombiniert SUPG nämlich eine hohe Genauigkeit mit guten Stabilitätseigenschaften. Das ist vor allem bei Verwendung von Elementen höherer Ordnung von Bedeutung.

Die mathematische Analyse des Verfahrens konnte die folgenden Konvergenzeigenschaften beweisen, die vor allem für Interpolationen höherer Ordnung eine deutliche Verbesserung im Vergleich zu den oben erwähnten nicht–konsistenten Verfahren mit höchstens erster Ordnung zeigen. Für den diffusionsdominanten Fall folgt dieselbe Genauigkeitsordnung $k + 1$ wie beim Galerkin–Verfahren, wobei k die Ordnung der stückweisen Polynome der Interpolationsfunktionen bezeichnet. Bei advektionsdominanten Problemen kann nur eine Ordnung $\geq k + 1/2$ bewiesen werden, wobei sich in der Praxis bei genügend glatten Lösungen oft auch fast $k + 1$ zeigt. Für diese Genauigkeitsordnungen muß auch τ im jeweiligen Fall die richtige Ordnung haben, d.h.

$$\tau = o(h / \|\mathbf{a}\|) \quad \text{für } Pe \gg 1; \quad \tau = o(h^2 / \kappa) \quad \text{für } Pe \ll 1 \quad (3.38)$$

Eine mögliche Definition für τ ist identisch mit der künstlichen negativen Diffusion entsprechend Gleichung (3.33). Eine detaillierte Behandlung der Frage der Stabilisierungsparameter findet sich in Kapitel 3.2.5. Weiters kann als sogenanntes Lokalisierungsergebnis gezeigt werden, daß scharfe Gradienten die Ordnung im Bereich glatter Lösungen nicht verringern. Um scharfe Gradienten besser zu erfassen bzw. dort ein leichtes Überschwingen der Lösung zu vermeiden, kann noch ein zusätzlicher (nichtlinearer) Term in die SUPG–Formulierung eingebracht werden. Hughes et al. (1986b) haben dafür einen sogenannten ‘discontinuity–capturing’ Term vorgeschlagen. Die aus den obigen Ausführungen direkt ableitbare Anwendung des SUPG–Verfahrens auf die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen findet sich bereits in Brooks und Hughes (1982).

Das SUPG–Verfahren von Hughes und Brooks und die damit im Zusammenhang stehenden Arbeiten können wohl als Ausgangspunkt jener Entwicklung gewertet werden, die schließlich in die stabilisierten Finite–Element–Methoden mündete.

3.2.2 Druckstabilisierung

Die Stabilisierung des Druckfeldes bzw. das Verhältnis der Interpolationen für Geschwindigkeits– und Druckapproximationen werden wiederum anhand des schon in Kapitel 3.1.3 verwendeten Modellproblems der Stokes–Gleichungen (3.23) untersucht.

Petrov–Galerkin–Verfahren für die Stokes–Gleichungen

Den Anfang der Entwicklung stabilisierter Finite–Element–Verfahren für eine Druckstabilisierung stellt die von Hughes et al. (1986a) entwickelte Petrov–Galerkin–Formulierung dar. Inspiriert durch den Erfolg des SUPG–Verfahrens und aus der dabei gewonnenen Erfahrung, daß Petrov–Galerkin–Verfahren die Stabilität einer Methode erhöhen, ohne deren Konsistenz zu beeinträchtigen, wurde in dieser Arbeit eine Formulierung vorgestellt, die gleiche Interpolationsordnungen für Geschwindigkeiten und Druck erlaubt. Ein ähnlicher Ansatz findet sich auch in der ‘streamline diffusion’–Methode für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen von Johnson und Saranen (1986). Die im Folgenden vorgestellte Formulierung von Hughes et al. (1986a) baut auf dem SUPG–Verfahren und auch auf einem Verfahren von Brezzi und Pitkäranta (1985) auf, das allerdings nicht konsistent ist.

Entsprechend Hughes et al. (1986a) lautet die modifizierte diskrete schwache Form für die Stokes–Gleichungen (vgl. (3.24))

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \right) - \left(p^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h \right) - \left(\nabla \cdot \mathbf{u}^h, q^h \right) + \left(\nabla p^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h), \tau \nabla q^h \right)_{\tilde{\Omega}} = \\ = \left(\mathbf{b}, \mathbf{v}^h \right) + \left(\mathbf{b}, \tau \nabla q^h \right)_{\tilde{\Omega}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Zur Vereinfachung werden wiederum ausschließlich homogene Dirichlet–Randbedingungen vorausgesetzt (siehe auch (3.23)). Diese Formulierung folgt aus der Anwendung einer im Petrov–Galerkin–Sinne modifizierten Testfunktion $\tilde{\mathbf{v}}$

$$\tilde{\mathbf{v}}^h = \mathbf{v}^h + \tau \nabla q^h \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\alpha h^2}{2\nu} \quad (3.40)$$

auf das Residuum der Impulsbilanz entsprechend (3.23)

$$\left(2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) - \nabla p^h + \mathbf{b}^h, \tilde{\mathbf{v}}^h \right)_{\tilde{\Omega}} \quad (3.41)$$

Die gewünschte Ordnung $o(h^2/\nu)$ des Stabilisierungsparameters τ folgt aus einer Konvergenzanalyse. τ wird entsprechend der empirischen Definition (3.40) elementweise bestimmt, h ist hier als $\text{dia}(\Omega^e)/\sqrt{n_{sd}}$ mit der Anzahl der Raumdimensionen n_{sd} definiert. Für α werden in Hughes et al. (1986a) für bestimmte Elemente empirisch gefundene Werte als untere Grenzen angegeben ($\alpha \geq 0.1$ für Q1Q1, $\alpha \geq 0.01$ für Q2Q2). Eine ausführlichere Diskussion der Frage der Stabilisierungsparameter findet sich in Kapitel 3.2.5.

Die Matrixformulierung von (3.39)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T + \mathbf{K}^\tau & \mathbf{G}^\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F}^\tau \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

zeigt eine unsymmetrische ‘Steifigkeitsmatrix’ bzw. linke Seite. Der für die Unsymmetrie zuständige ‘kleine’ Term $(-2\nu\nabla\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h), \nabla q^h)_{\tilde{Q}}$, der in (3.42) zu \mathbf{K}^T führt, sollte jedoch zugunsten höherer Genauigkeit und entgegen dem ursprünglichen Vorschlag in Hughes et al. (1986a) vor allem bei verzerrten Netzen nicht vernachlässigt werden. Der sogenannte Druck–Laplace–Term \mathbf{G}^T findet sich schon in Brezzi und Pitkäranta (1985), stellt dort allerdings den einzigen Stabilisierungsterm dar.

Die vorgestellte Formulierung erlaubt jede beliebige Kombination von Interpolationsfunktionen, also auch gleiche Interpolationsordnungen für Geschwindigkeit und Druck. Es setzt allerdings kontinuierliche Drücke voraus. Mathematische Analysen und Fehlerschätzungen zum Verfahren (3.39) und den unten besprochenen Modifikationen, finden sich außer in den für die jeweiligen Verfahren zitierten Arbeiten auch in Franca und Hughes (1988), Franca et al. (1993) sowie in Brezzi und Douglas (1988). Darin wird gezeigt, daß diese Formulierungen, teils unter bestimmten Voraussetzungen an die Stabilisierungsparameter, numerisch stabil sind und in optimaler Ordnung konvergieren. So können für das bereits angesprochene Verfahren unter der Bedingung $\tau = o(h^2)$ optimale Fehlerraten in der L^2 –Norm für Druck und Geschwindigkeit bewiesen werden.

SBB– versus CBB–Verfahren

Die klassische Diskretisierung der Stokes–Gleichungen führt, wie bereits erwähnt, auf eine sogenannte gemischte Methode und auf die zusätzliche Bedingung der Divergenz–Stabilität (3.25) von Ladyzhenskaya, Babuska und Brezzi (LBB). In Erweiterung dazu unterscheiden Franca und Hughes (1988) zwei Klassen von gemischten Methoden. Jene, die die LBB–Bedingung erfüllen, und jene, bei denen die Erfüllung dieser Bedingung vermieden bzw. umgangen wird. Die beiden Klassen werden als ‘*Satisfying Babuska Brezzi*’ (SBB)– und ‘*Circumventing Babuska Brezzi*’ (CBB)–Verfahren bezeichnet. Das soeben besprochene Verfahren stellt gewissermaßen das erste CBB–Verfahren dar. Es soll nun versucht werden, diese beiden unterschiedlichen Prinzipien anschaulich zu erläutern. Wie auch schon bei der mathematischen Analyse der Druckoszillationen in Kapitel 3.1.3, ist der Term $(p^h, \nabla\cdot\mathbf{v}^h)$ aus der diskreten schwachen Form der Stokes–Gleichungen (3.24) dabei entscheidend.

Aus (3.24) ist ersichtlich, daß $(p^h, \nabla\cdot\mathbf{v}^h)$ den einzigen Term darstellt, in dem das Druckfeld getestet wird. Das Auftreten von künstlichen Druckmoden bzw. Druckoszillationen bedeutet somit, daß einzelne nicht–physikalische Druckmoden durch dieses ‘Netz der Geschwindigkeitstestfunktionen’ fallen können. Bei den klassischen SBB–Verfahren müssen deshalb genügend Testfunktionen zur Verfügung gestellt werden, d.h. entsprechend der LBB–Bedingung muß \mathcal{V}^h groß genug gewählt werden, um dies zu verhindern. Im übertragenen Sinn wird also das Netz der Geschwindigkeitstestfunktionen feiner. In den CBB–Verfahren, vergleiche (3.39), werden im Gegensatz dazu nicht die diskreten Funktionenräume verändert, sondern die diskreten Gleichungen. Es werden darin zusätzliche Stabilisierungsterme, die aus Funktionen der vorhandenen Räume gebildet werden, in die diskreten Gleichungen eingeführt und somit der Druck mehrfach und auf unterschiedliche Weise getestet. Anstatt also das Test–Netz feiner zu gestalten, werden bei den CBB–Verfahren mehrere grobe Netze verschoben übereinander gelegt und so ebenfalls das ‘Durchfallen’ der künstlichen Druckmoden verhindert.

Bemerkung: Diese Interpretation läßt sich auch für das in Kapitel 3.1.3 angeführte Beispiel (Bild 3.7) zeigen. Für den Knoten 0 folgt aus dem neu hinzugekommenen Druckterm $(\nabla p^h, \nabla q^h)_{\hat{\Omega}}$ im Stabilisierungsausdruck die zusätzliche Gleichung (das ‘zusätzliche Netz’)

$$(\nabla p^h, \nabla q^h) \rightarrow 8p_0 - 2p_1 - 2p_2 - 2p_4 - 2p_5 = 0 \quad (3.43)$$

Werden die Gleichungen (3.32) jetzt gemeinsam mit (3.43) in analoger Vorgehensweise zu oben und nach Beachtung der Stetigkeitsanforderungen auf sämtliche Knoten angewandt zeigt sich, daß die in Bild 3.7(b–d) dargestellten künstlichen Druckmoden nun nicht mehr auftreten können.

Eine kürzlich durchgeführte Untersuchung von Norburn und Silvester (1998) zeigt, daß stabilisierte Finite Elemente im Vergleich zu ihren von vornherein stabilen Gegenspielern (z.B. das Crouzeix–Raviart–Element) mehr als konkurrenzfähig sind. Dabei wurden in diesen Untersuchungen sowohl Genauigkeit als auch Effizienz betrachtet. Dieses starke Argument für die Verwendung stabilisierter Finite–Element–Verfahren zeigt sich bereits im Blick auf deren *optimale* Konvergenzordnungen. Entsprechende mathematische Analysen (siehe z.B. Franca et al. (1992), Gerdes, Schötzau (1999) und die darin zitierte Literatur) zeigen für stabilisierte Verfahren für das Stokes–Problem eine optimale Konvergenzordnung von

$$\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}\|_1 + \|p^h - p\|_0 \leq c(h^k |\mathbf{u}|_{k+1} + h^{k+1} |p|_k) \quad (3.44)$$

Im Vergleich dazu führt ein Standard–Galerkin–Verfahren mit von vornherein stabilen Ansatzräumen nur zu einem Konvergenzergebnis von

$$\|\mathbf{u}^h - \mathbf{u}\|_1 + \|p^h - p\|_0 \leq ch^{k-1} (|\mathbf{u}|_k + |p|_{k-1}) \quad (3.45)$$

Druck–Stabilisierungs–Ansätze durch Zeitdiskretisierungs– bzw. Projektionsverfahren

Eine mögliche Variante zur zeitabhängigen Lösung der stationären Navier–Stokes–Gleichungen stellen ursprünglich auf Chorin (1968) zurückgehende, sogenannte gesplittete Verfahren dar. Verfahren dieser Art werden auch als Projektionsverfahren, ‘Fractional–Step’–Verfahren oder Geschwindigkeits–Korrektur–Verfahren bezeichnet (siehe dazu Kapitel A1.5). Wie von Kawahara und Ohmiya (1985) erstmals beobachtet, erlauben einige Varianten dieser Verfahren die Verwendung von gleichen Interpolationsordnungen für Geschwindigkeiten und Druck. Eine entsprechende Schreibweise zeigt, daß bei diesen Verfahren ein zeitabhängiger Stabilisierungsterm entsteht, der in diesen Fällen für die Druckstabilisierung sorgt. Untersuchungen und Verfahren dazu finden sich in Gresho et al. (1984), Zienkiewicz und Wu (1991), Rannacher (1993) und Zienkiewicz und Codina (1995). In Guermond und Quartapelle (1998) finden sich theoretische und numerische Analysen zu Stabilität, Konvergenz und die Rolle der LBB–Bedingung in unterschiedlichen Projektionsverfahren.

Codina und Blasco (1997) greifen diese Idee auf und entwickeln daraus ein Verfahren zur Druckstabilisierung der Stokes–Gleichungen, das auf der Projektion des Druckgradienten basiert. Sie zeigen darin, daß der Unterschied zwischen zwei diskreten Laplace–Operatoren, die auf unterschiedliche Weise berechnet werden, der Grund für die Stabilisierungswirkung von ‘Fractional–Step’–Verfahren ist. Daraus entwickeln sie ihr Verfahren für die Stokes–Gleichungen, das allerdings keine Zeitdiskretisierung der Gleichungen mehr voraussetzt.

Allen Druckstabilisierungsverfahren ist gemeinsam, daß durch den Stabilisierungsterm in der Kontinuitätsgleichung im Gegensatz zum Standardverfahren (Gleichung (3.31)) auch die Hauptdiagonalelemente der Druckfreiheitsgrade besetzt sind (vgl. (3.42)). Damit besteht ein weiterer Vorteil solcher Formulierungen, der sich in geringerem Rechenzeit- und Speicherbedarf ausdrückt, auch darin, daß bei direkten Lösern das aufwendige Pivottieren entfällt und das algebraische Gleichungssystem auch wieder Standard-Mehrgitterverfahren als iterative Löser zuläßt.

3.2.3 SUPG/PSPG-Verfahren

Erste kombinierte Anwendungen der oben besprochenen Konvektions- und Druckstabilisierungsmaßnahmen auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen stammen von Hansbo und Szepessy (1990) und Tezduyar et al. (1992c). Hansbo und Szepessy (1990) bauen dabei auf dem Verfahren von Johnson und Saranen (1986) für die inkompressiblen Strömungsgleichungen in Stromfunktions-Wirbel-Formulierung auf. Die Bezeichnungsweise SUPG/PSPG-Verfahren entstammt der Arbeit von Tezduyar et al. (1992c), während Hansbo und Szepessy (1990) ihr Verfahren, entsprechend der 'nordischen Notation', einfach als 'streamline diffusion'-Verfahren bezeichnen. In diesem Zusammenhang wird das von Hughes et al. (1986a) vorgestellte Verfahren (3.39) in Anlehnung an das SUPG-Verfahren als '*Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin*'- bzw. PSPG-Verfahren bezeichnet. Der Name SUPG/PSPG macht deutlich, daß es sich einfach um eine direkte Anwendung der in (3.36) bzw. (3.39) vorgestellten Verfahren auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen handelt.

Die Anwendung der Stabilisierungsverfahren auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen läßt sich dabei sehr einfach dadurch bewerkstelligen, daß die Residuen der Modellgleichungen in den Stabilisierungstermen durch die Residuen der neuen Bestimmungsgleichungen ersetzt werden. Natürlich muß auch der lineare Advektionsterm im Testfunktionen-'slot' $\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{v}^h$ durch den Konvektionsterm $\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h$ der Navier-Stokes-Gleichungen ersetzt werden, was zu zusätzlichen Nichtlinearitäten im Gleichungssystem führt. Bezüglich einer detaillierteren Besprechung dieses Verfahrens wird auf die Ausführungen in Kapitel 3.3.1 verwiesen. Die SUPG/PSPG-Methode läßt sich nämlich als Sonderfall des dort besprochenen 'Galerkin/Least-Squares'-Verfahrens für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen ableiten.

3.2.4 'Galerkin/Least-Squares'-Verfahren (GLS)

Die Bezeichnung '*Galerkin/Least-Squares*'-Verfahren geht auf die Arbeit von Hughes et al. (1989) zurück. Darin wird eine Erweiterung des SUPG-Verfahrens für die Advektions-Diffusions-Gleichungen vorgestellt. Die SUPG-Methode, ebenso wie das vorgestellte erweiterte Verfahren und andere bis dahin entwickelte Petrov-Galerkin-Stabilisierungsverfahren werden in diesem Zusammenhang neu interpretiert. Es zeigt sich dabei, daß die 'GLS-Interpretation' sowohl eine konzeptionell einfachere als auch umfassendere Methodik darstellt, um stabile Finite-Element-Formulierungen abzuleiten.

Der gewählte Name des Verfahrens läßt sich einfach dadurch begründen, daß sich der zur Standard-Galerkin-Formulierung neu hinzugekommene Teil direkt aus einer 'Least-Square'-Behandlung, bzw. Minimierung, des Residuums $\mathcal{R}(u) = \mathcal{L}(u) - f$ ableiten läßt.

$$\int_{\Omega} (\mathcal{L}(u) - f)^2 = \min. \rightarrow 2 \int_{\Omega} (\mathcal{L}(u) - f) \mathcal{L}(\delta u) = 0 \rightarrow \int_{\Omega} \mathfrak{R}(u) \mathcal{L}(v) = 0 \quad (3.46)$$

In Gleichung (3.46) werden dabei die Variationen der Lösungsfunktionen δu mit den Testfunktionen v identifiziert. Die Wirkungsweise von ‘Galerkin/Least–Square’–Verfahren beruht also auf ‘Least–Square’–Formen des Residuums, die, multipliziert mit dem Stabilisierungsparameter τ , zur ursprünglichen Galerkin–Formulierung hinzuaddiert werden. Diese neu hinzugenommenen Stabilisierungsterme ST erhöhen die Stabilität der Galerkin–Methode, ohne deren Genauigkeit zu beeinträchtigen.

$$[\text{Standard–Galerkin}] + ST ; \quad ST = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} (\mathfrak{R}(u), \tau L(v))_K \quad (3.47)$$

$L(v)$ bezeichnet darin jenen Operator, der im folgenden das jeweilige Verfahren charakterisieren wird. $L(v)$ setzt sich im allgemeinen aus Teilen des ursprünglichen Operators $\mathcal{L}(u)$ zusammen, der das Ausgangsproblem definiert. Die Zusatzterme werden über alle Elemente K der Triangulierung \mathcal{C}_h des Gebietes Ω aufsummiert. Zur Verdeutlichung läßt sich das SUPG–Verfahren (3.36) mit

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathbf{a} \cdot \nabla \phi - \kappa \Delta \phi; \quad L(v) = \mathbf{a} \cdot \nabla v; \quad \mathfrak{R}(\phi) = \mathbf{a} \cdot \nabla \phi - \kappa \Delta \phi - f \quad (3.48)$$

exemplarisch in dieser Formulierung darstellen.

Die GLS–Methodologie kann als ein allgemeines Konzept zur Entwicklung und Darstellung von stabilisierten FE–Verfahren angesehen werden. Im Folgenden sollen nun die weiteren Entwicklungen der in (3.36) und (3.39) angeführten Stabilisierungsverfahren für die Modellgleichungen bereits in der konzeptionellen Darstellung von GLS–Formulierungen entsprechend (3.47) gezeigt werden. Wie diese Ausführungen zeigen werden, stellen auch die bereits besprochenen Methoden (3.36) und (3.39) Teile dieser größeren Klasse von GLS–Verfahren dar. Eine analoge Darstellung der Entwicklungen für die vollständigen inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen findet sich in Kapitel 3.3.1.

GLS–Verfahren für die Stokes–Gleichungen

Zur Vereinfachung der Darstellung werden die Stokes–Gleichungen (3.23) in einer zu (2.81) und (2.82) analogen Operatorschreibweise dargestellt.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M(p, \mathbf{u}) &= \mathcal{L}_{visc} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{pres} p \\ \mathcal{L}_C(p, \mathbf{u}) &= \mathcal{L}_{cont} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Die unterschiedlichen GLS–Methoden für die Stokes–Gleichungen werden sodann durch die Operatoren $L_M(q^h, \mathbf{v}^h)$ bzw. $L_C(\mathbf{v}^h)$ im Stabilisierungsterm ST nach (3.47)

$$ST = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[\left(\mathfrak{R}_M(p^h, \mathbf{u}^h), \tau_M L_M(q^h, \mathbf{v}^h) \right)_K + \left(\mathfrak{R}_C(\mathbf{u}^h) \right)_K, \tau_C L_C(\mathbf{v}^h) \right] \quad (3.50)$$

oder durch die spezifischen Petrov–Galerkin–Testfunktionen $\tilde{\mathbf{v}}^h$ bzw. \tilde{q}^h charakterisiert. Die Indizes M und C zeigen den jeweiligen Bezug des Residuums \mathfrak{R} , des Differentialoperators L und des Stabilisierungsparameters τ an. M verweist dabei auf die Impulsbilanz (‘Momen-

tum') und C auf die Massebilanz oder Kontinuitätsgleichung ('Continuity'). Einige der wesentlichen Verfahren sind in Tabelle 3.1 zusammengefaßt und werden im Folgenden diskutiert.

Autoren / Bezeichnungen	Operatoren / Testfunktionen	Bemerkungen
Hughes, Franca, Balestra (1986a)	$L_M(q^h, \mathbf{v}^h) = \mathcal{L}_{pres}$ $\tilde{\mathbf{v}}^h = \mathbf{v}^h + \tau_M \nabla q^h$	unsymmetrisch, nur kontinuierliche Drücke
Hughes, Franca (1987) GLS+	$L_M(q^h, \mathbf{v}^h) = -\mathcal{L}_M^* = \mathcal{L}_{pres} - \mathcal{L}_{visc}$ $\tilde{\mathbf{v}}^h = \mathbf{v}^h + \tau_M [\nabla q^h + 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h)]$	symmetrisch, auch diskontinuierliche Drücke
Franca, Hughes (1988)	$L_M, \tilde{\mathbf{v}}^h$ wie GLS+ $L_C(\mathbf{v}^h) = \mathcal{L}_C, \tilde{q}^h = q^h + \tau_C [\nabla \cdot \mathbf{v}^h]$	symmetrisch, nur kont. Drücke, Kont.-stabilisierung
Douglas, Wang (1989) GLS-	$L_M(q^h, \mathbf{v}^h) = \mathcal{L}_M = \mathcal{L}_{pres} + \mathcal{L}_{visc}$ $\tilde{\mathbf{v}}^h = \mathbf{v}^h + \tau_M [\nabla q^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h)]$	unsymmetrisch, diskont. Drücke, absolut stabil

Tabelle 3.1 GLS-Verfahren für die Stokes-Gleichungen

Bemerkung: Die Angaben zur Charakterisierung der Verfahren in Tabelle 3.1 gelten in dieser Form nur für kontinuierliche Druckinterpolationen. Die Verfahren, die in ihrer ursprünglichen Formulierung auch für diskontinuierliche Drücke entwickelt wurden (siehe Bemerkungen in Tabelle 3.1), enthalten zusätzliche Druck-Sprungterme im Stabilisierungsausdruck. Mit diesen Sprungtermen scheint es keinen Grund mehr für die Verwendung diskontinuierlicher Druckansätze zu geben. Franca und Stenberg (1991) zeigen jedoch, daß unter bestimmten Voraussetzungen diese Sprungterme nicht notwendig sind. In 2D müssen beispielsweise mindestens quadratische Funktionen für die Geschwindigkeiten angesetzt werden. Dies wiederum erlaubt in solchen Fällen die Eliminierung der diskontinuierlichen Drücke auf Elementebene mittels einer Penalty-Technik und resultiert in nur einem symmetrischen, positiv definiten algebraischen System für die Geschwindigkeiten.

Das Verfahren von Hughes und Franca (1987) unterscheidet sich vom ursprünglichen Verfahren von Hughes et al. (1986a) durch die Hinzunahme des viskosen Terms. Dadurch entsteht ein symmetrisches Verfahren. \mathcal{L}_M^* in Tabelle 3.1 bezeichnet den adjungierten Operator zu \mathcal{L}_M . Da der viskose Term aus zweiten Ableitungen der Geschwindigkeiten besteht, ist er natürlich vor allem bei Elementen höherer Ordnung von Bedeutung. Auch die Residuen in den Stabilisierungstermen enthalten zweite Ableitungen. Der Grund hierfür ist darin zu finden, daß in den Stabilisierungstermen im Gegensatz zu den Termen der Standard-Galerkin-Formulierung kein 'shift' der Ableitungen von den Ansatz- auf die Testfunktionen mittels des Gaußschen Integralsatzes erfolgt. Das ist auch der Grund, warum die Integrale der Bilinearformen des Stabilisierungstermes nur jeweils über die einzelnen Elementgebiete gebildet werden. Die höheren Kontinuitäten zwischen den Elementen sind ja nicht gewährleistet. Aus dieser Betrachtung wird auch ersichtlich, daß diese Verfahren für Elemente niedriger Ordnung nicht vollständig konsi-

stente Verfahren darstellen. Diese Elemente approximieren die zweiten Ableitungen in den Residuen nicht exakt, d.h. das Residuum verschwindet nicht völlig, wenn die richtige Lösung eingesetzt wird.

Das Verfahren von Franca und Hughes (1988) stabilisiert die Impulsgleichung analog zu Hughes und Franca (1987), abgesehen davon, daß hier nur noch kontinuierliche Drücke Berücksichtigung finden. In Franca und Hughes (1988) wird jedoch auch noch ein zusätzlicher Term zur Stabilisierung der Kontinuitätsgleichung vorgeschlagen, der gelegentlich auch als eine Art ‘bulk viscosity’-Term (‘viskoser Dilatations-Term’) bezeichnet wird (De Mulder (1998)). Ein Term dieser Art wird bei den inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen in Kapitel 3.3.1 eine Rolle spielen und dort näher diskutiert. Wie bereits mehrfach ausgeführt addiert der τ_M -Term Stabilität zur Druckvariablen bzw. in einer abstrakteren Schreibweise zum Lagrange–Multiplikator. Wenn die Geschwindigkeitstestfunktionen nicht divergenzfrei sind, leiht er sich dazu jedoch gewissermaßen Stabilität vom druckfreien Term der Bilinearform. Der neu hinzugefügte τ_C -Term verbessert nun die Stabilität der Geschwindigkeit, d.h. der primären Variablen, ohne den Lagrange–Multiplikator zu beeinflussen. Somit ist dieser Term im Hinblick auf die Stabilität immer vorteilhaft.

Douglas und Wang (1989) schlagen eine sogenannte ‘absolut stabilisierte Finite–Element–Methode’ für das Stokes–Problem vor. Dieses Verfahren führt jedoch nur für Elemente höherer Ordnung auf ein besseres Stabilitätsverhalten als obige Methoden. Ein Vergleich der Verfahren von Hughes und Franca (1987) und Douglas und Wang (1989) zeigt, daß der einzige Unterschied im Vorzeichen vor dem viskosen Operator besteht. Dieser Unterschied hat jedoch zwei sehr positive Konsequenzen. So ist der Konvergenzbeweis für dieses Verfahren einfacher, und das Verfahren ist weniger vom Stabilisierungsparameter abhängig; es ist eben ‘absolut stabil’. Damit ist gemeint, daß ausgehend von der Definition (3.40) für den Stabilisierungsparameter das Verfahren für alle positiven Werte α stabil ist und optimal konvergiert, wohingegen im Verfahren von Hughes und Franca (1987) α noch durch eine Stabilitätskonstante nach oben begrenzt ist, d.h. $0 < \alpha < C_k$ (außer es handelt sich um stückweise lineare Approximationen, Franca et al. (1993)). Für Elemente niedriger Ordnung sind beide Verfahren mit dem Verfahren von Hughes et al. (1986a) identisch, und für eine verschwindende rechte Seite stimmen alle drei Verfahren zusätzlich noch mit dem Verfahren von Brezzi und Pitkäranta (1985) überein.

Zusätzlich zu den in Tabelle 3.1 angeführten Verfahren sollen noch zwei Ansätze aus der Arbeit von Franca und Stenberg (1991) Erwähnung finden. Diese erzielen die robusteren Stabilitätseigenschaften des Douglas–Wang–Verfahrens mit einer symmetrischen Formulierung. Dies wird durch eine Umformulierung der Stokes–Gleichungen durch Hinzunahme einer neuen Unbekannten, der ‘augmented’ Spannung möglich. Da diese Ansätze jedoch im Hinblick auf die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen von geringerer Bedeutung sind, sollen sie nicht näher besprochen werden (siehe dazu Franca et al. (1993)).

Abschließend sei hier noch eine Modifikation des Druckstabilisierungstermes für stark anisotrope Netze erwähnt, die von Becker und Rannacher (1995) vorgeschlagen wurde. Diese folgt aus der Forderung, daß der Stabilisierungsterm in L^2 begrenzt sein muß. Entsprechend dieser Modifikation unterscheidet der Stabilisierungsterm zwischen den unterschiedlichen Koordinatenrichtungen, was wiederum die Verwendung eines lokalen Koordinatensystems in der Stabilisierungsdefinition voraussetzt (Becker (1995)).

- **Randstörung des Druckes ('pressure boundary layer')**

Ein in manchen Fällen auftretender, unerwünschter Effekt des Stabilisierungstermes bei der Druckstabilisierung soll im Folgenden erläutert werden. Droux und Hughes (1994) zeigen einen Mangel an Genauigkeit der oben beschriebenen GLS-Verfahren zur Druckstabilisierung in den Stokes-Gleichungen bei Verwendung bilinear interpolierter Viereckselemente (Q1Q1). Sie zeigen trotz Konvergenz der Verfahren, daß die hinzugefügten 'least square'-Terme nicht gegen Null gehen, wenn sich p^h an p annähert. Dasselbe Verhalten zeigt sich in analogen Fällen auch bei den entsprechenden Verfahren für die vollständigen Navier-Stokes-Gleichungen in Kapitel 3.3.2. Es bildet sich eine sogenannte *künstliche 'Druckgrenzschicht'* an den Dirichleträndern aus. Nicht zuletzt auf Grund der Tatsache, daß im Hinblick auf das angestrebte gekoppelte Problem die Druckverteilung vor allem am Kopplungsrand zur Struktur eine große Rolle spielen wird, soll dieser Effekt hier etwas ausführlicher diskutiert werden.

Der auftretende Effekt läßt sich deutlich an einem einfachen Beispiel erläutern. Dabei handelt es sich um eine einfache Kanalströmung (Poiseuille-Strömung), deren Ein- und Ausströmrand jedoch nicht senkrecht zur Stromrichtung stehen. Sowohl am Einström- als auch am Ausströmrand wird ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil für die horizontale Geschwindigkeitskomponente vorgegeben. Am oberen und unteren Rand herrschen 'no-slip'-Randbedingungen und in der Mitte der unteren Kanalwandung wird zusätzlich ein Druckdatum gesetzt. Sämtliche Berechnungen verwenden das ursprüngliche Verfahren von Hughes et al. (1986a) (siehe Tabelle 3.1 bzw. (3.39)) mit einem Stabilisierungsparameter gemäß (3.40) und $\alpha = 0.1$. Die gewählte Diskretisierung mit 576 Q1Q1-Elementen und 625 Knoten kann Bild 3.9(a) entnommen werden. Bild 3.9(c) zeigt die Drucklösung, die nicht der erwarteten korrekten Lösung

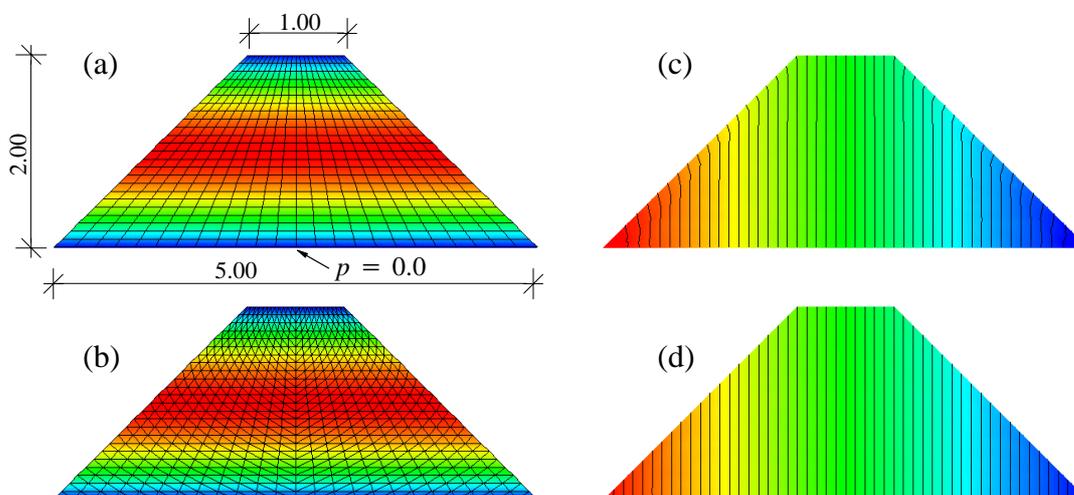


Bild 3.9: Kanalströmung — Druckrandstörung

(a) Geschwindigkeit u_x und Diskretisierung mit Q1Q1-Elementen bzw. (b) P1P1-Elementen, (c) Drucklösung Q1Q1 sowie P1P1, (d) Drucklösung Q2Q2 (exakt)

mit ausschließlich parallel verlaufenden Druckisolines entspricht. Es wird deutlich, daß die Drucklösung am Rand gestört ist. Obwohl Droux und Hughes (1994) diesen Defekt nur für Q1Q1-Interpolationen ansprechen, zeigt sich auch bei der in Bild 3.9(b) dargestellten Diskretisierung mit P1P1-Elementen mit gleicher Knotenanzahl wie die Q1Q1-Diskretisierung dasselbe Ergebnis (d.h. eine identische Lösung zu Bild 3.9(c)). Der Grund für diese Randstörungen bei linear interpolierten Elementen läßt sich relativ einfach zeigen.

Der hinzugefügte Stabilisierungsausdruck lautet $(2\nu\nabla\cdot\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) - \nabla p^h + \mathbf{b}^h, \boldsymbol{\tau} \nabla q^h)_{\hat{\Omega}}$. Bei Verwendung linear interpolierter Elemente kann der viskose Term im Residuum-‘slot’ auf Grund der darin vorkommenden zweiten Ableitungen nicht richtig dargestellt werden bzw. verschwindet völlig. Zur Stabilisierung bleibt somit nur der Ausdruck $(-\nabla p^h + \mathbf{b}^h, \boldsymbol{\tau} \nabla q^h)_{\hat{\Omega}}$. Dieser läßt sich aber ebenso als schwache Form der Druckrandbedingung $\partial p^h / \partial n = 0$ deuten. Der Stabilisierungsterm wirkt also wie eine im schwachen Sinne aufgezwungene *falsche natürliche Randbedingung* für den Druck. Diese Deutung wird auch durch das Ergebnis in Bild 3.9(c) untermauert, worin die Druckisolinien deutlich versuchen sich senkrecht zum Rand einzustellen (siehe auch Codina und Blasco (1997)).

Ohne eine solche Interpretation des Defektes anzusprechen, schlagen Droux und Hughes (1994) zur Konsistenzverbesserung die Hinzunahme eines Randintegraltermes zur GLS-Formulierung vor. Durch diesen neuen Randterm wird nach der oben angeführten Interpretation die Wirkung der falschen Randbedingung wieder entfernt und es ergeben sich für die als Beispiel diskutierte Poiseuille-Strömung an den Knoten die exakten Druckwerte. Eine weitere Möglichkeit, der in den weiteren Ausführungen in dieser Arbeit der Vorzug gegeben wird, ist die Verwendung von Elementen höherer Interpolationsordnung. Diese sind in der Lage den viskosen Term im Stabilisierungsausdruck darzustellen und sind somit auch ohne zusätzliche Terme konsistent. Bild 3.9(d) zeigt das Ergebnis für eine zur Q1Q1-Diskretisierung in Bild 3.9(a) analoge Diskretisierung (d.h. Verwendung derselben Knoten) mit Q2Q2-Elementen. Daraus wird deutlich, daß keine Randstörung des Druckes auftritt. Die erwartete, exakte Lösung mit parallel verlaufenden Druckisolinien stellt sich ein.

Bemerkung: Die Breite der Druckrandstörung beträgt im allgemeinen ungefähr eine Elementbreite. Dies ist auch aus dem angeführten Beispiel in Bild 3.9(c) ersichtlich. Wie De Mulder (1998), aufbauend auf der Arbeit von Idelsohn et al. (1995), zeigt, kann die Hinzunahme des im vorhergehenden Abschnitt eingeführten ‘bulk viscosity’-Termes die Breite dieser Randstörung erhöhen. Den Einfluß dieses zusätzlichen Stabilisierungstermes für die Kontinuitätsgleichung auf die Druckrandstörung soll das in Bild 3.10 dargestellte Beispiel einer

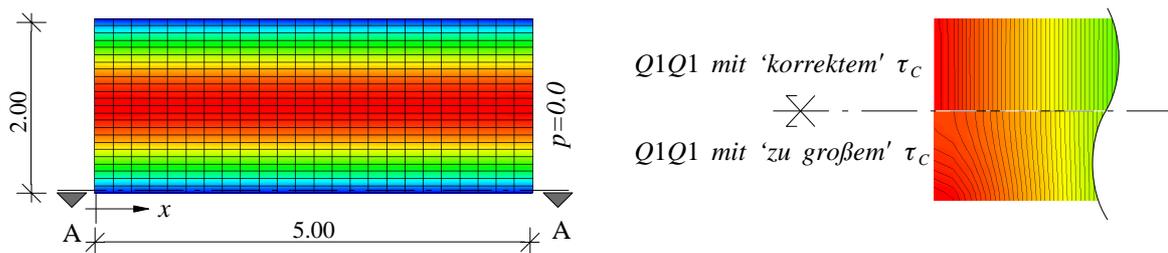


Bild 3.10: Poiseuille Strömung, Diskretisierung mit Q1Q1-Netz und Störungen der Druckisolinien im Randbereich

einfachen Kanalströmung (Poiseuille Strömung) zeigen. Dazu wurden drei Berechnungen durchgeführt. Zwei Berechnungen lag eine Q1Q1-Diskretisierung zu Grunde, einerseits unter Verwendung eines ‘korrekten’ Stabilisierungsparameters τ_C und andererseits mit einem stark vergrößerten (Faktor 1000) τ_C . Unter ‘korrekt’ wird hierbei die Wahl eines τ_C -Wertes nach der in Kapitel 3.2.5 angeführten optimalen Ordnung und Definition verstanden. Die dritte Berechnung erfolgte als Beispiel für Elemente höherer Ordnung mit einer Q2Q2-Diskretisierung und einer zur Q1Q1-Diskretisierung analogen Anzahl an Freiheitsgraden. Aus den in Bild 3.10 dargestellten Verläufen der Druckisolinien im Randbe-

reich sowie aus den Druckprofilen in Bild 3.11 ist für den Fall einer Q1Q1–Diskretisierung

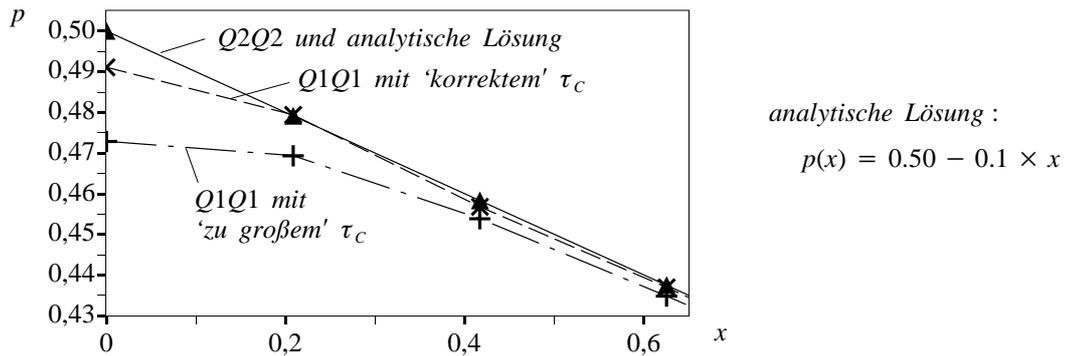


Bild 3.11: Vergleich der Druckprofile im Randbereich / Schnitt A–A (Bsp.: Bild 3.10)

mit ‘korrektem’ τ_c ersichtlich, daß diese nur in der ersten Elementreihe ($x = 0.2$) von der analytischen Lösung abweicht, sich dann aber dieser sehr gut annähert. Ein zu großes τ_c und damit ein zu großer ‘bulk viscosity’–Term vergrößert die vorhandene künstliche Druckrandstörung deutlich. Bei Verwendung einer Q2Q2–Diskretisierung ergibt sich die exakte, analytische Lösung, unabhängig von der Größe des Kontinuitätsstabilisierungstermes, wie aus Bild 3.11 gut ersichtlich ist. Weitere Hinweise zu den Auswirkungen der Verwendung eines ‘bulk viscosity’–Termes finden sich in Kapitel 3.3.1.

GLS–Verfahren für die Advektions–Diffusions–Gleichungen

Eine Übersicht einiger wesentlicher Entwicklungen von GLS–Verfahren für die Advektions–Diffusions–Gleichungen findet sich in Tabelle 3.2. Auf die Modellgleichungen (3.15) wird

Autoren	Operatoren / Testfunktionen	Bezeichnungen
Brooks, Hughes (1982)	$L(v^h) = \mathcal{L}_{adv}$ $\tilde{v}^h = v^h + \tau \mathbf{a} \cdot \nabla v^h$	SUPG
Hughes, Franca, Hulbert (1989)	$L(v^h) = \mathcal{L} = \mathcal{L}_{adv} + \mathcal{L}_{dif}$ $\tilde{v}^h = v^h + \tau [\mathbf{a} \cdot \nabla v^h - \kappa \Delta v^h]$	GLS+
Franca, Frey, Hughes (1992)	$L(v^h) = -\mathcal{L}^* = \mathcal{L}_{adv} - \mathcal{L}_{dif}$ $\tilde{v}^h = v^h + \tau [\mathbf{a} \cdot \nabla v^h + \kappa \Delta v^h]$	GLS–

Tabelle 3.2 GLS–Verfahren für die skalaren Advektions–Diffusions–Gleichungen

zu diesem Zwecke erneut in Operatorform zurückgegriffen.

$$\mathcal{L}(\phi) = \mathcal{L}_{adv} \phi + \mathcal{L}_{dif} \phi \tag{3.51}$$

Die Charakterisierung der unterschiedlichen GLS–Methoden in Tabelle 3.2 erfolgt wiederum durch die spezifischen Petrov–Galerkin–Testfunktionen \tilde{v}^h bzw. durch Angabe der Operatoren $L(v^h)$ im Stabilisierungsterm ST nach (3.47)

$$ST = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[\left(\mathfrak{R}_0(\phi^h), \tau L(v^h) \right)_K \right] \quad (3.52)$$

In der ersten auch namentlich so deklarierten ‘Galerkin/Least–Squares’–Arbeit von Hughes et al. (1989) wird das SUPG–Verfahren um den Diffusionsanteil erweitert. Franca et al. (1992) erweitern die Idee von Douglas und Wang (1989) von den Stokes–Gleichungen, wo sie zu einem besseren Stabilitätsverhalten führte, auf die skalaren Advektions–Diffusions–Gleichungen. Wiederum besteht der Unterschied dieser beiden Verfahren nur im Vorzeichen des diffusiven Termes. Daraus folgt, daß für stückweise lineare Elemente⁴ oder für den rein hyperbolischen Fall beide Verfahren wiederum mit dem SUPG–Verfahren identisch sind. Im Gegensatz zum Stokes–Fall zeigen im Zusammenhang mit dem Advektions–Diffusions–Problem die beiden Verfahren GLS+ und GLS– ähnliche Stabilitätseigenschaften.

Bemerkung: In vielen Arbeiten werden zur Stabilisierung stark konvektionsdominanter Strömungen unterschiedliche, ‘reine’ bzw. klassische Upwinding–Verfahren favorisiert. In dieser Arbeit werden im Falle konvektionsdominanter Strömungen jedoch ausschließlich Stabilisierungen im Sinne eines Petrov–Galerkin– bzw. GLS–Verfahrens angewandt. Dies ist unter anderem darauf zurückzuführen, daß sich diese Arbeit nicht, wie in der CFD häufig anzutreffen, auf Elemente niedriger Ordnung beschränkt. Bei Elementen höherer Ordnung würde sich durch die Verwendung von klassischen Upwinding–Verfahren ein Verlust an Genauigkeit ergeben und somit höhere Interpolationsordnungen unwirtschaftlich erscheinen lassen. Die hier verwendete Stabilisierungsphilosophie erhält im Gegensatz dazu die Genauigkeit und ist so in der Lage, die teils beeindruckenden Vorteile Elemente höherer Ordnung zur Geltung kommen zu lassen (siehe dazu auch kürzlich angestellte Vergleichsrechnungen in Nabh (1998)).

GLS–Verfahren für symmetrische Advektions– / Diffusionssysteme

Die Anwendung der GLS–Formulierung auf symmetrische Advektions–Diffusions–Systeme findet sich beispielsweise in Hughes et al. (1987). Dies ist insofern von besonderer Bedeutung, da sich viele physikalische Systeme, unter Umständen nach einer notwendigen Variablensubstitution, als symmetrische Advektions–Diffusions–Systeme schreiben lassen. Darunter befinden sich auch die Stokes– sowie die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen. GLS–Formulierungen für diese Fälle finden sich in Franca und Hughes (1993).

Bemerkung: Die in Franca und Hughes (1993) angegebene Stabilisierungsparameterdefinition (dort als τ_2 bezeichnet) für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen sollte nicht verwendet werden. Diese Definition liefert schlechte numerische Ergebnisse und ein Vergleich mit den Ausführungen in den Kapiteln 3.2.5 bzw. 3.3.1 zeigt auch, daß diese Definition die falsche Ordnung liefert. Es empfiehlt sich stattdessen, eine Definition analog zu der in dieser Arbeit vorgestellten Variante (siehe Gleichung (3.69)) zu verwenden.

3.2.5 Stabilisierungsparameter

Eine wesentliche bisher weitgehend ausgeklammerte Frage ist, wie die Stabilisierungsparameter τ gewählt werden sollen. Die folgende Darstellung soll zeigen, daß die Problematik der

4. Exakt gilt dies nur für P1P1–Elemente, da für Q1Q1–Elemente die gemischten zweiten Ableitungen nicht verschwinden.

Wahl optimaler Parameter in vielen Fällen noch nicht als völlig gelöst betrachtet werden kann. Ebenso verhält es sich mit der Frage der Eindeutigkeit der Art und Weise der numerischen Berechnung der Funktionenargumente und der oftmals aus numerischen Versuchen zu bestimmenden Anpassungsfaktoren. Harari und Hughes (1992) stellten die entsprechende Frage sehr markant im Titel ihrer Veröffentlichung ‘What are C and h ?’. Der Mangel an einer ‘felsenfesten’ Definition dieser Parameter war (und ist teilweise noch immer) Hauptkritikpunkt der stabilisierten Finite-Element-Verfahren. Es soll jedoch erwähnt werden, daß in letzter Zeit einige vielversprechende Ansätze entwickelt wurden, die teilweise schon in der Lage sind, Schemata ohne ‘freie Parameter’ abzuleiten oder dies für andere Fälle in naher Zukunft erhoffen lassen (siehe dazu weitere Ausführungen und Kapitel 3.2.6).

Bei der Suche nach einer erfolgversprechenden Definition der Stabilisierungsparameter stellen sich eine Reihe von unterschiedlich zu gewichtenden Fragen:

- Welche Größen gehen in die Parameterdefinition ein (Elementgröße, Viskosität, Reynoldszahl, Zeitschrittgröße, Interpolationsordnungen, usw.)?
- Von welcher Ordnung, vor allem in der Elementgröße h , müssen die Stabilisierungsparameter optimalerweise sein?
- Wie lautet die funktionale Abhängigkeit von der Reynoldszahl?
- Welche Definition der Elementgröße h soll angewendet werden?
- Wie können die involvierten Konstanten bestimmt werden?

Zu diesen Punkten kommt noch eine Reihe weiterer Fragen, die vor allem die algorithmische Umsetzung betreffen. Darin geht es beispielsweise darum, ob die Stabilisierungsparameter an jedem Integrationspunkt extra ausgewertet werden, welche Geschwindigkeit in die Definition eingesetzt wird (Geschwindigkeit am Integrationspunkt, gemittelte Geschwindigkeit über das Element, ein globales Geschwindigkeitsmaß) und ob die Stabilisierungsparameter in jedem Iterationsschritt neu berechnet werden.

Brezzi et al. (1996) beschreiben die häufigste Strategie zum Entwurf einer Stabilisierungsparameterdefinition wie folgt: Zuerst wird die Form geraten und danach folgt eine Fehleranalyse, um zu bestätigen, daß die Ordnung der Parameter optimale oder quasi-optimale Schätzungen (‘estimates’) liefert. Falls dies nicht der Fall ist, wird nochmals geraten, bis die besten erreichbaren Schätzungen erhalten werden. Sodann werden numerische Experimente für die getroffene Wahl durchgeführt, die ein möglichst breites Spektrum an Problemen abdecken sollen. Wenn auch das funktioniert, hat man eine Definition für die Stabilisierungsparameter τ .

Obwohl das nicht sehr befriedigend erscheint, wurden die meisten Verfahren so entwickelt. Dabei ist es in vielen Fällen gelungen, Methoden zu finden, die sehr robust gegenüber der Wahl der in den Definitionen involvierten Parameter bzw. Konstanten sind. Damit hat eine Änderung der Parameterform kaum Einfluß auf die Konvergenz. Ist diese Robustheit nicht in ausreichendem Maße gegeben, so bleibt doch die Mindestaussage, daß alle Varianten bei genügend feinen oder verfeinerten Netzen zu genauen Ergebnissen führen. Es sind mittlerweile auch Parameterdefinitionen vorgeschlagen worden, die ohne solche beliebigen oder nicht exakt definierten Größen auskommen.

Ordnungen der Stabilisierungsparameter

Die ‘optimalen Ordnungen’ für den Entwurf der Stabilisierungsparameter können direkt aus der mathematischen Fehleranalyse abgelesen werden, und zwar als jene Ordnungen der Parameter, die optimale Fehlerschätzungen liefern. Solche mathematischen Analysen, sowohl für die Modellgleichungen als auch für die vollständigen inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen, finden sich in Auge (1994), Franca et al. (1992), Franca und Hughes (1993), Harari und Hughes (1992), Hughes et al. (1989), Johnson et al. (1984), Tobiska und Verfürth (1996) und der in diesen Arbeiten zitierten Literatur. Die Frage nach den erforderlichen Ordnungen von τ soll im Folgenden für die bereits mehrfach verwendeten Modellgleichungen diskutiert werden.

Für das Modellproblem der Stokes–Gleichungen zeigt eine Konvergenzanalyse, daß die Ordnung des Stabilisierungsparameters

$$\tau = o\left(\frac{h^2}{\nu}\right) \quad (3.53)$$

sein sollte. Bereits die ursprünglich von Hughes et al. (1986a) eingeführte Definition aus Gleichung (3.40) entspricht dieser Ordnung und zeigt somit die entsprechenden Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften.

Im Fall der eindimensionalen, skalaren Advektions–Diffusionsgleichung kann gezeigt werden, daß die Stabilisierungsparameter entsprechend Gleichung (3.33) auch optimal in dem Sinne sind, daß sie knotenweise exakte Lösungen ergeben. Für den mehrdimensionalen Fall wurden ad–hoc–Generalisierungen dieser Definition vorgeschlagen (Brooks und Hughes (1982)). Wie bereits in Abschnitt 3.2.1 angesprochen, zeigen entsprechende mathematische Analysen für die skalaren Advektions–Diffusions–Modellgleichungen, daß bestimmte Stabilitäts-, Genauigkeits- und Konvergenzeigenschaften nur erreicht werden können, wenn die Ordnungen der Stabilisierungsparameter folgendes asymptotisches Verhalten aufweisen

$$\tau = o(h/\|\mathbf{a}\|) \quad \text{für } Pe_K \gg 1; \quad \tau = o(h^2/\kappa) \quad \text{für } Pe_K \ll 1 \quad (3.54)$$

Abhängigkeiten von der Element–Peclet– bzw. Element–Reynoldszahl

Dieses asymptotisch korrekte Verhalten wird üblicherweise durch die Einführung einer sogenannten ζ –Funktion bewerkstelligt. Sie gibt die Abhängigkeit von der Element–Peclet– bzw. Element–Reynoldszahl an und unterscheidet so beispielsweise die diffusionsdominanten von den advektionsdominanten Bereichen. Das geforderte asymptotische Verhalten von τ könnte sodann mit der Definition

$$\tau = \frac{h}{2\|\mathbf{a}\|} \zeta(Pe_K) \quad (3.55)$$

erreicht werden, wenn ζ die folgende Asymptotik aufweist

$$\zeta = 1 \quad \text{für } Pe_K \rightarrow \infty ; \quad \zeta \propto Pe_K \quad \text{für } Pe_K \rightarrow 0 \quad (3.56)$$

Aus dem Vergleich mit der analytisch bekannten Definition optimaler Stabilisierungsparameter aus Gleichung (3.33) ergibt sich als eine mögliche ζ –Funktion

$$\zeta(Pe_K) = \coth(Pe_K) - \frac{1}{Pe_K} \quad (3.57)$$

In der Literatur findet sich mittlerweile eine Vielfalt solcher ζ -Funktionen. Einige weitere ζ -Versionen sind in Abhängigkeit von der Element-Pecletzahl Pe_K bzw. der Element-Reynoldszahl Re_K in Bild 3.12 dargestellt. Daraus wird ersichtlich, daß sämtliche Verläufe einen

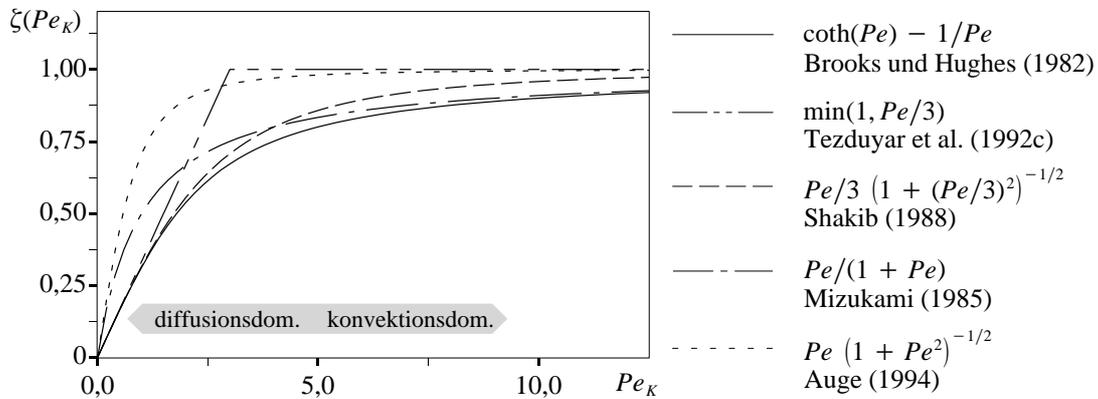


Bild 3.12: Vergleich unterschiedlicher ζ -Funktionen

ähnlichen Charakter aufweisen, d.h. alle die geforderte Asymptotik erfüllen. Es kann somit erwartet werden, und numerische Experimente bestätigen dies, daß der Wahl der ζ -Funktion keine besondere Bedeutung beigemessen werden muß. In einigen Arbeiten wird auch vorgeschlagen, ζ für den Druckstabilisierungsterm nicht von der lokalen Geschwindigkeit abhängig zu machen. So schlagen beispielsweise Tezduyar et al. (1992c) vor, anstelle der lokalen Geschwindigkeit ein globales Geschwindigkeitsmaß zur Ermittlung von ζ zu verwenden, was unter Umständen die Konvergenz des Verfahrens beschleunigen kann.

In manchen Definitionen werden die Stabilisierungsparameter im advektionsdominanten Fall noch mit einer Konstanten $\alpha \geq 1$ multipliziert. Wird der Wert α jedoch sehr groß gewählt, so nähert sich das Verfahren einem reinen 'least-squares'-Verfahren mit dem bekannten Nachteil zu dissipativer Ergebnisse. Deshalb wird in dieser Arbeit auf diese α -Skalierung verzichtet.

Elementgrößendefinitionen

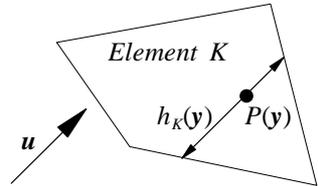
Wichtiger als die Wahl der ζ -Funktion erweist sich die Frage, welche Definition der Elementgröße h_K der Berechnung der Stabilisierungsparameter zu Grunde gelegt wird (Harari und Hughes (1992), De Mulder (1997)). In der Literatur finden eine Vielzahl unterschiedlicher Definitionen für die Elementgrößen Verwendung. Als Beispiele seien folgende Varianten angeführt:

- $meas(\Omega_K)^{\frac{1}{n_{sd}}}$, d.h. die Quadratwurzel der Elementfläche bzw. die Kubikwurzel des Elementvolumens (Auge (1994))
- der Durchmesser eines elementflächengleichen Kreises bzw. einer volumengleichen Kugel (Tezduyar et al. (1992c))
- $meas(\Omega_K) / \sqrt{n_{sd}}$, d.h. ein Maß für die Elementgröße (Fläche bzw. Volumen) dividiert durch die Quadratwurzel der Anzahl der Raumdimensionen (Hughes et al. (1986a))
- $\sqrt{2} meas(\Omega_K) / diag(\Omega_K)$ für Viereckselemente, mit $diag(\Omega_K)$ als der gemittelten Elementdiagonale, bzw.

$$h_K = \frac{4 \operatorname{meas}(\Omega_K)}{\sqrt{3} s}; \quad \text{mit } s^2 = \sum_{i=1}^3 |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_c|^2 \quad (3.58)$$

für Dreieckselemente, mit dem Elementmittelpunkt \mathbf{x}_c (Harari und Hughes (1992))

- ‘Stromlänge’, d.h die überströmte Länge des Elementes bzw. die Elementlänge in Strömungsrichtung (Mizukami (1985), Tezduyar et al. (1992c), Becker (1995)) — entsprechend Bild 3.13



$$h_K(\mathbf{y}) = 2 \left[\sum_i \left| \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} \cdot \nabla N_i(\mathbf{y}) \right| \right]^{-1} \quad (3.59)$$

Bild 3.13: Definition der ‘Stromlänge’ des Elementes K durch den Punkt P

Dabei bezeichnet $\operatorname{meas}(\Omega_K)$ jeweils die Elementgröße, d.h. Elementfläche oder Elementvolumen, und n_{sd} die Anzahl der Raumdimensionen.

Bemerkung: Die Berechnung der ‘Stromlänge’ in Richtung des Einheitsvektors $\mathbf{s} = \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$ durch einen Punkt $P(\mathbf{y})$ ist in Bild 3.13 bzw. Gleichung (3.59) angeführt. Auge (1994) verwendet zur Bestimmung von \mathbf{s} einen über das jeweilige Element gemittelten Geschwindigkeitsvektor \mathbf{u}_K

$$\mathbf{u}_K = \frac{1}{\operatorname{meas}(\Omega_K)} \int_{\Omega_K} \mathbf{u}^h d\Omega \quad (3.60)$$

Angaben dazu, welche der unterschiedlichen obigen Möglichkeiten der Elementgrößen bzw. der Reynoldszahl–Abhängigkeit im Rahmen dieser Arbeit eingesetzt wird, finden sich im Kapitel 3.3.1. Dort werden auch die erforderlichen Ordnungen der Stabilisierungsparameter für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen angegeben. Weiterhin finden sich dort auch die angewandten Definitionen für die entwickelten GLS–Verfahren für diesen Fall.

3.2.6 Interpretation stabilisierter Finite–Element–Verfahren

Wie bereits erwähnt stellen stabilisierte Finite–Element–Verfahren eine systematische Methodologie dar, ein im Vergleich zum kontinuierlichen Problem defizitäres Stabilitätsverhalten numerischer Approximationen zu verbessern, ohne die Genauigkeit zu beeinträchtigen. Dies geschieht durch Hinzunahme von elementweise ausgewerteten Störungstermen zur Standard–Galerkin–Methode. Die Konsistenz der Verfahren folgt direkt, da diese Störungsterme als Funktionen der Euler–Lagrange–Gleichungen gewählt werden.

Bereits zur Einführung der GLS–Verfahren in Kapitel 3.2.4 wurde eine Interpretation der Wirkungsweise stabilisierter Finite–Element–Verfahren gegeben. Diese Interpretation zeigte, daß bei GLS–Verfahren ein Term zur ursprünglichen Galerkin–Formulierung hinzugefügt wird, der den Fehler mittels eines ‘least–square’–Ansatzes minimiert. Dies wiederum gestattet eine weitere Interpretationsmöglichkeit: Während sich bei Standard–Galerkin–Verfahren und oszillierenden Lösungsfeldern positive und negative Fehleranteile aufheben können, wird dies bei den stabilisierten Verfahren durch die Minimierung des *quadranten* Residuums bzw. Fehlerquadrates verhindert.

Eine weitere Hilfe zur Interpretation und zum Verständnis stabilisierter Finite-Element-Methoden bietet deren Vergleich mit konzeptionell unterschiedlichen Denkansätzen, die aber teilweise äquivalente Verfahren liefern. Bild 3.14 zeigt den Zusammenhang stabilisierter Finite-Ele-

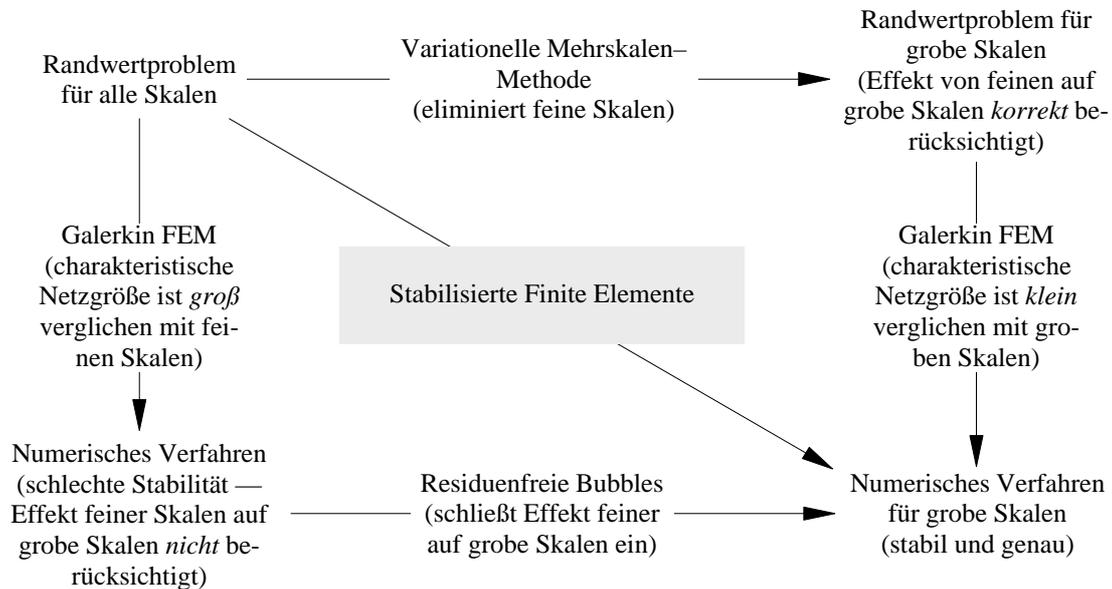


Bild 3.14: Zusammenhänge — Stabilisierte Finite Elemente (aus Brezzi et al. (1997))

ment-Verfahren mit Standard-Galerkin-Verfahren, in denen die Finite-Element-Räume mit sogenannten 'bubble'-Funktionen angereichert werden, sowie mit sogenannten Mehrskalens-Methoden, bei denen das ursprüngliche Problem in interagierende Unterprobleme unterschiedlicher Skalengrößenordnungen aufgespalten wird. Diese Denkansätze sollen nun kurz erläutert werden, da sie vielversprechende Möglichkeiten darstellen, sowohl die Wirkungsweise als auch die theoretischen Grundlagen stabilisierter Verfahren besser zu verstehen und auch Wege zur Entwicklung vollständig parameterfreier Methoden aufzeigen können.

'Bubble'-Methoden

Während bei stabilisierten Finite-Element-Verfahren die Bilinearform verändert wird, wird bei den 'Bubble-Methoden' die Standard-Galerkin-Methode mit einem erweiterten Funktionenraum verwendet. Die Erweiterung des Funktionenraumes geschieht dabei nach den jeweiligen problemspezifischen Anforderungen mit speziellen Funktionen, den sogenannten 'bubbles'. Aus der bisherigen Frage, wie die optimale Stabilisierung bzw. das optimale τ , zu wählen ist, entsteht dann die Frage nach der optimalen 'bubble'-Funktion.

Die Identifikation stabilisierter Finite-Element-Methoden mit Galerkin-Verfahren, die auf einem mit 'bubble'-Funktionen erweiterten Funktionenraum aufbauen, findet sich in den Arbeiten von Pierre (1988) und Brezzi et al. (1992). Baiocchi et al. (1993)⁵ zeigen, daß eine strikte Äquivalenz jedoch nur für speziell konstruierte 'bubbles' existiert. Vor wenigen Jahren führte die Frage nach dem optimalen 'bubble'-Ansatzraum (und damit über die entsprechenden Äqui-

5. In dieser Arbeit wurde auch der Begriff der 'virtual bubble' eingeführt. Damit ist ein Konzept gemeint, in dem man sich nicht für die tatsächliche Form der 'bubbles', sondern nur für den Ausdruck des Störungstermes interessiert, den diese nach dem Addieren und einer statischen Kondensation der 'bubble'-Freiheitsgrade erzeugen.

valenzbetrachtungen nach dem optimalen τ) dann auf das Konzept der ‘residual-free bubbles’ (Brezzi und Russo (1994), Russo (1995), Franca und Russo (1996), Russo (1996b)) bzw. der ‘pseudo residual-free bubbles’ (Brezzi et al. (1996a)). Darin wird die Frage nach der optimalen ‘bubble’ mit einem auf Elementebene formulierten Randwertproblem (RWP) verknüpft. Dieses RWP kann dann auf Elementebene beispielsweise wieder mit Finiten Elementen im Sinne einer ‘two-level FEM’ gelöst werden (Franca et al. (1997)).

Diese Methode kann auch als klassische Galerkin-Methode, die auf einen erweiterten Funktionenraum (Standardpolynome + ‘residual-free bubbles’) wirkt, interpretiert werden. Dies beugt jeglicher Kritik an der sich ergebenden stabilisierten Methode vor, denn die Anwendung des Galerkin-Verfahrens auf einen endlich-dimensionalen Unterraum mit guten problemspezifischen Eigenschaften ist fundiert und anerkannt. Das resultierende Verfahren ist komplett parameterfrei, d.h. die Stabilisierungsparameter beispielsweise im Falle des SUPG-Verfahrens können explizit berechnet werden. Der ‘residual-free bubble’-Anteil der Lösung kann zusätzlich auch noch als ‘a posteriori’-Fehlerschätzer, der sowohl in diffusions- wie in konvektionsdominanten Bereichen funktioniert, verwendet werden (Russo (1996a)).

‘Subgrid scale’-Methoden

Ein weiterer Ansatz, der eine fundierte theoretische Basis für stabilisierte Verfahren bereitstellt, ist die kürzlich von Hughes (1995) vorgestellte ‘variational multiscale method’ (Hughes et al. (1998)). Dieser Denkansatz geht davon aus, daß die Standard-Galerkin-Methode mit einfachen Polynomräumen ein unzulängliches numerisches Paradigma für viele wichtige praktische Probleme darstellt. Vor allem trifft dies auf Probleme zu, deren Lösungen im Vergleich zu den Elementgrößen *nicht auflösbare* feine Skalen aufweisen. Selbst wenn es nicht von Interesse ist, diese feinen Skalen aufzulösen und zu sehen, muß das Ziel einer numerischen Analyse sein, deren Effekt auf die *auflösbaren* groben Skalen zu berücksichtigen, um diese somit exakt berechnen zu können. Das ursprüngliche Problem wird also in ein von den groben Skalen getriebenes Unterproblem für die feinen Skalen und in ein modifiziertes Problem aufgespalten, das ausschließlich grobe Skalen enthält. Zusätzliche Annahmen (Hughes et al. (1998)) erlauben es, diese ‘subgrid scale models’ zu ‘lösen’. Ein möglicher ‘Lösungsweg’ für die feinen Skalen führt dabei auf die Greenschen Funktionen für das duale Problem.

Im Sinne obiger Ausführungen können ‘bubbles’ dann als approximierete Greensche Funktionen des ‘subgrid scale’-Modells und stabilisierte Methoden als approximierete ‘subgrid scale’-Modelle angesehen werden. In Hughes (1995) wird daraus eine Formel zur expliziten Berechnung der Stabilisierungsparameter τ als Elementmittelwert der Greenschen Funktion abgeleitet. Brezzi et al. (1997) zeigen in ihrer Arbeit die Äquivalenz zwischen dem residuenfreien ‘bubble’-Konzept und dem variationellen Mehrskalenansatz.

Die Äquivalenz von stabilisierten Finite-Element-Verfahren und den hier skizzierten ‘Mehrskalenmethoden’ läßt nicht nur ein besseres Verständnis und eine bessere Analyse stabilisierter Verfahren, sondern auch die Entwicklung neuer, fundierter und effizienter Stabilisierungsverfahren für ein breites Anwendungsspektrum erwarten.

3.2.7 Erweiterungen von stabilisierten Finite-Element-Methoden

GLS-Verallgemeinerungen

Wie in Kapitel 3.2.4 gezeigt wurde, stellt die GLS-Idee eine konzeptionell einfache und vielseitige Methodologie dar, um stabile Finite-Element-Formulierungen zu entwickeln. Aufbauend auf diesem Konzept wurden auch noch Erweiterungen bzw. Verallgemeinerungen zur Entwicklung neuer stabilisierter Finite-Element-Methoden vorgeschlagen. Die prinzipiellen Ideen hinter diesen Verallgemeinerungen sollen durch Darstellung des Stabilisierungsterms, d.h. jenes Störungstermes, der zur Standard-Galerkin-Methode hinzugefügt wird, angedeutet werden.

- ‘Galerkin/Least-Squares’ — GLS (Hughes, Franca, Hulbert (1989))

$$ST_{GLS} = \left(\mathfrak{R}(\phi^h), \tau \mathcal{L}(v^h) \right)_{\tilde{\Omega}} \quad (3.61)$$

- ‘Galerkin/Gradient Least-Squares’ — GGLS (Franca und Dutra do Carmo (1989))

$$ST_{GGLS} = \left(\nabla \mathfrak{R}(\phi^h), \tau \nabla \mathcal{L}(v^h) \right)_{\tilde{\Omega}} \quad (3.62)$$

- ‘Galerkin/Least-Squares/Gradient Least-Squares’ — GLSGLS (Harari und Hughes (1994), Valentin und Franca (1995))

$$ST_{GLSGLS} = \left(\mathfrak{R}(\phi^h), \tau \mathcal{L}(v^h) \right)_{\tilde{\Omega}} + \left(\nabla \mathfrak{R}(\phi^h), \tau \nabla \mathcal{L}(v^h) \right)_{\tilde{\Omega}} \quad (3.63)$$

Diese GLS-Verallgemeinerungen wurden im Zusammenhang mit weiteren Problemklassen entwickelt, beispielsweise für Advektions-Diffusions-Probleme mit einem Produktionsterm, für komplexe Randschichtphänomene bei der Analyse dünner Strukturen. Sie sind in der Lage numerische Defekte zu stabilisieren, die bei partiellen Differentialgleichungen mit Termen nullter, erster und zweiter Ordnung, je nach Gewichtung dieser Terme, auftreten können. Eine Interpretationsmöglichkeit des GGLS-Verfahren ist, daß es den Gradienten des Fehlers minimiert und somit zu einer gleichmäßigen Verteilung des Fehlers über das Gebiet führt. Das GLSGLS-Verfahren stellt eine Kombination von GLS- und GGLS-Verfahren dar.

Es sollte jedoch erwähnt werden, daß sämtliche dieser GLS-Verallgemeinerungen für die praktische Anwendbarkeit wohl zu aufwendig sind bzw. zu viele Terme beinhalten. Liegen also Problemstellungen mit Reaktionstermen bzw. Termen nullter Ordnung vor, wie dies bei bestimmten Turbulenzmodellen der Fall ist, sollte eher auf alternative Stabilisierungsvarianten zurückgegriffen werden (Franca et al. (1998), Codina (1999)). Es geht dabei darum, bei dominierenden Termen nullter Ordnung in der Variationsformulierung immer auch noch Kontrolle über die Ableitungen zu haben. In der sogenannten ‘unusual stabilized FEM’ (US-FEM, Franca et al. (1998)) geschieht dies durch die Verwendung des adjungierten Operators im Rahmen einer GLS-Strategie

$$ST_{US-FEM} = \left(\mathfrak{R}(\phi^h), \tau \mathcal{L}^*(v^h) \right)_{\tilde{\Omega}} \quad (3.64)$$

Dadurch wird in der stabilisierten schwachen Form ein entsprechender Term abgezogen (und nicht hinzuaddiert) und somit die Dominanz des Reaktionstermes verringert.

Stabilisierte Finite-Element-Methode für Strukturen

Auch für strukturmechanische Problemstellungen wurden stabilisierte Finite-Element-Verfahren entwickelt. Dabei soll aber deutlich zwischen den stabilisierten Methoden im Sinne der

obigen Ausführungen und sonstigen Stabilisierungsverfahren für Strukturelemente (z.B. die ‘Hourglass–Stabilisierungen’ nach Belytschko et al. (1989)) unterschieden werden. Arbeiten dazu existieren für die inkompressible Elastizität, deren Gleichungen, abgesehen von der physikalischen Interpretation der Variablen, identisch mit den Stokes–Gleichungen sind (Franca et al. (1988), Franca und Stenberg (1989, 1991)). Weitere Arbeiten behandeln ‘Locking’–Effekte bei Reissner–Mindlin–Plattenelementen (Hughes und Franca (1988), Lyly und Stenberg (1994)) oder Wellenausbreitungsprobleme bei Timoshenko–Balken (Grosh und Pinsky (1996)). Aufbauend auf obigen Erfahrungen im CFD–Bereich wurde kürzlich auch eine stabilisierte Finite–Element–Methode zur Verbesserung von ‘Enhanced–Assumed Strain’ (EAS)–Elementen bei großen Kompressionen vorgeschlagen (Wall et al. (1998), Wall et al. (1999a)). Mit dem darin vorgestellten Verfahren können die bei EAS–Elementen bei großen Verzerrungen auftretenden Instabilitäten beseitigt werden, ohne den gewünschten, aufweichenden Effekt einer EAS–Formulierung zu beeinträchtigen.

3.3 Eine stabilisierte Finite–Element–Methode für die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen

In diesem Abschnitt wird jenes Diskretisierungsverfahren vorgestellt, das in der weiteren Arbeit hauptsächlich Verwendung findet und gleichzeitig Ausgangspunkt für Weiterentwicklungen für gekoppelte FSI–Probleme ist. Zielvorstellung für die Entwicklung und Umsetzung dieses Verfahrens war der Wunsch nach einer stabilen, genauen und möglichst robusten Methode, die sowohl konvektionsdominante Strömungen als auch gleiche Interpolationsordnungen und Elemente höherer Ordnung zulässt. Bevor dieses Verfahren ausführlich vorgestellt wird, soll noch eine kurze Einführung zu GLS–Verfahren für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen gegeben werden. Dabei wird auf die Ausführungen in Kapitel 3.2 aufgebaut.

3.3.1 GLS–Verfahren für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen

Die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen (3.1) bzw. (3.2) lauten in Operatorform

$$\mathcal{L}_M(p, \mathbf{u}) = \partial \mathbf{u} / \partial t + \mathcal{L}_{conv} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{visc} \mathbf{u} + \mathcal{L}_{pres} p = \mathbf{b} \quad (3.65)$$

$$\mathcal{L}_C(\mathbf{u}) = \mathcal{L}_{cont} \mathbf{u} = 0 \quad (3.66)$$

und wurden in dieser Form bereits als Gleichungen (2.81) sowie (2.82) eingeführt. Wie bereits bei der Diskussion der GLS–Verfahren für Stokes–Probleme geschehen, werden die unterschiedlichen GLS–Methoden für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen durch die Operatoren $L_M(q^h, \mathbf{v}^h)$ bzw. $L_C(\mathbf{v}^h)$ im Stabilisierungsterm ST (siehe (3.47))

$$ST = \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[\left(\mathfrak{R}_M(p^h, \mathbf{u}^h), \tau_M L_M(q^h, \mathbf{v}^h) \right)_K + \left(\mathfrak{R}_C(\mathbf{u}^h) \right)_K, \tau_C L_C(\mathbf{v}^h) \right] \quad (3.67)$$

oder durch die spezifischen Petrov–Galerkin–Testfunktionen $\tilde{\mathbf{v}}^h$ bzw. \tilde{q}^h charakterisiert. Die Indizes M (‘Momentum’) und C (‘Continuity’) zeigen wieder den jeweiligen Bezug des Residuums \mathfrak{R} , des Differentialoperators L bzw. des Stabilisierungsparameters τ an. Einige der wesentlichen Entwicklungen, die alle auch im Zuge dieser Arbeit umgesetzt und getestet wur-

den, sind in Tabelle 3.3 skizziert. Alle diese Verfahren folgen ‘direkt’ durch Anwendung der

Autoren	Operatoren / Testfunktionen	Bezeichnungen
Hansbo, Szepessy (1990) bzw. Tezduyar et al. (1992c)	$L_M(q^h, \mathbf{v}^h) = \mathcal{L}_{conv} + \mathcal{L}_{pres}$ $\tilde{\mathbf{v}}^h = \mathbf{v}^h + \tau_M [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}^h + \nabla q^h]$ $L_C(\mathbf{v}^h) = \mathcal{L}_C, \quad \tilde{q}^h = q^h + \tau_C [\nabla \cdot \mathbf{v}^h]$	‘streamline diffusion’ bzw. SUPG/PSPG
Franca, Frey (1992)	$L_M(q^h, \mathbf{v}^h) = -\mathcal{L}_M^* = \mathcal{L}_{conv} + \mathcal{L}_{pres} - \mathcal{L}_{visc}$ $\tilde{\mathbf{v}}^h = \mathbf{v}^h + \tau_M [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}^h + \nabla q^h + 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h)]$ $L_C(\mathbf{v}^h) = \mathcal{L}_C, \quad \tilde{q}^h = q^h + \tau_C [\nabla \cdot \mathbf{v}^h]$	GLS+
Franca, Frey (1992) bzw. Lube, Auge (1992)	$L_M(q^h, \mathbf{v}^h) = \mathcal{L}_M = \mathcal{L}_{conv} + \mathcal{L}_{pres} + \mathcal{L}_{visc}$ $\tilde{\mathbf{v}}^h = \mathbf{v}^h + \tau_M [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}^h + \nabla q^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h)]$ $L_C(\mathbf{v}^h) = \mathcal{L}_C, \quad \tilde{q}^h = q^h + \tau_C [\nabla \cdot \mathbf{v}^h]$	GLS–

Tabelle 3.3 GLS–Verfahren für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen

in Kapitel 3.2.4 vorgestellten GLS–Verfahren. Diese Verfahren wurden dort für die klassischen Modellproblemen ausführlich diskutiert. Diese Diskussion läßt sich direkt auf die hier besprochenen Gleichungen anwenden, sodaß an dieser Stelle nur einige Bemerkungen zu diesen Verfahren angeführt werden.

Ein erster Ansatz für ein Stabilisierungsverfahren im Sinne einer GLS–Formulierung für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen stammt von Hansbo und Szepessy (1990). Es wird dort allerdings unter einem anderen Namen geführt. Unabhängig davon entwickelten Tezduyar et al. (1992c) ein ähnliches Verfahren unter dem Namen SUPG/PSPG (siehe Kapitel 3.2.3). Der in der Tabelle 3.3 angeführte Kontinuitäts–Stabilisierungsterm findet sich dabei nur im Verfahren von Hansbo und Szepessy (1990).

Die beiden mit GLS bezeichneten Verfahren von Franca und Frey (1992) und Lube und Auge (1992) in Tabelle 3.3 stellen die ‘konsistente’ Erweiterung des SUPG/PSPG–Verfahrens für Elemente höherer Ordnung dar. Die Verfahren GLS+ und GLS– unterscheiden sich wiederum nur durch das Vorzeichen des viskosen Terms im Stabilisierungsoperator, entsprechend der in Kapitel 3.2.4 diskutierten Idee von Douglas und Wang (1989).

Da sich sämtliche Verfahren in Tabelle 3.3 nur durch den viskosen Term unterscheiden, liefern sie für Elemente mit einer linearen Geschwindigkeitsinterpolation identische Verfahren. Exakt identische Verfahren ergeben sich allerdings nur für linear interpolierte Dreieckselemente und offensichtlich nicht für bilinear interpolierte Viereckselemente, da hier die zweiten Ableitungen im viskosen Term nicht vollständig verschwinden. Es wird auch deutlich, daß die hier besprochenen stabilisierten Finite–Element–Methoden nur für Elemente höherer Ordnung ($k \geq 2$) vollständig konsistente Verfahren darstellen. Dies ist durch die zweiten Ableitungen in der

schwachen Form bedingt. Der Grund hierfür sowie mögliche Auswirkungen, wie beispielsweise das Auftreten einer künstlichen Druckgrenzschicht, wurden bereits in Kapitel 3.2.4 diskutiert. Bei Verwendung linearer Interpolationen sind die ‘Least-Square’-Beiträge sämtlicher Verfahren vollständig (P1P1) bzw. beinahe (Q1Q1) *nicht-viskos*. Wenn nur Elemente niedriger Ordnung zur Anwendung kommen sollen und spezieller Wert auf eine Konsistenzverbesserung gelegt wird, so schlägt Hemforth (1996) zwei Verfahren vor, eine Approximation der zweiten Ableitungen durch Randintegrale und eine Approximation durch eine Interpolation auf Makroelementen.

Etwas ausführlicher soll der die Kontinuitätsgleichung betreffende Stabilisierungsterm aus Gleichung (3.67) bzw. Tabelle 3.3 diskutiert werden. Im Stokes-Fall skaliert sich die Lösung bekanntlich mit der Geschwindigkeit. Dies ist für die Navier-Stokes-Gleichungen nicht mehr der Fall. Wenn die Reynoldszahl sehr hoch ist, folgt daraus, daß auch τ_M sehr große Werte annimmt. In diesem Falle kann es vorkommen, daß die Inkompressibilitäts-Zwangsbedingung nur noch relativ schlecht approximiert wird. Deshalb besteht die Möglichkeit mit dem Stabilisierungsterm in Verbindung mit τ_C , also der Kontinuitäts- bzw. Divergenzstabilisierung, eine Art Penalisierung der Inkompressibilität zu bewirken. Ein Stabilisierungsterm dieser Art wurde für die Stokes-Gleichungen von Franca und Hughes (1988) eingeführt (siehe Kapitel 3.2.4). Im Hinblick auf die Stabilität ist die Berücksichtigung dieses Termes immer vorteilhaft und für hohe Reynoldszahlen fast unabdingbar. Da die klassische Stabilitätsanalyse der stabilisierten Verfahren für die Advektions-Diffusions-Gleichungen von der Divergenzfreiheit des Advektionsgeschwindigkeitsfeldes ausgeht, die normalerweise streng genommen erst bei $h \rightarrow 0$ erfüllt ist, beseitigt der τ_C -Term auch eine potentielle Instabilitätsquelle. Weiters kann dieser Term auch zu einer deutlichen Verbesserung des Konvergenzverhaltens iterativer Algorithmen führen (Behr (1992), De Mulder (1998)). Ein möglicher Nachteil des τ_C -Termes ist die Vergrößerung einer eventuell auftretenden künstlichen Druckgrenzschicht, wie bereits in Abschnitt 3.2.4 besprochen wurde. Je nach verwendetem Lösungsverfahren kann dieser Term jedoch auch zu einem zusätzlichen Rechenaufwand führen, da er eine direkte Kopplung der unterschiedlichen Geschwindigkeitskomponenten induziert (siehe Nabh (1998)).

Bemerkung: In diesem Zusammenhang soll, neben den bereits ausführlich besprochenen Vorteilen und Wirkungsweisen, noch ein weiterer Vorteil von stabilisierten Finiten Elementen erwähnt werden. Durch entsprechende Stabilisierungsmaßnahmen können nämlich auch deutliche Effizienzsteigerungen bei der iterativen Gleichungslösung erreicht werden (siehe auch Abschnitt A3.2).

Viele der grundlegenden obigen Arbeiten beschränken sich auf den rein stationären Fall. Ansätze für den instationären Fall zielen oft auf Raum-Zeit-Ansätze, d.h. auf diskontinuierliche Galerkin-Verfahren in der Zeit. Die Anpassung der Verfahren für die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen bei direkten Zeitintegrationsverfahren in dieser Arbeit erfolgt einfach, indem die *stationären Residuen* in den entsprechenden Argumenten im Stabilisierungsterm ST in Gleichung (3.67) durch die *instationären Residuen* ersetzt werden (siehe Kapitel 3.3.2).

Weitere Beiträge zu stabilisierten Finiten Elementen für inkompressible Strömungen finden sich in den Arbeiten von Auge (1994), Cruchaga und Oñate (1997), Franca (1993), Franca et al. (1994), Hansbo (1992), Lube und Auge (1993), Oñate (1998), Tezduyar (1992), Tobiska und Verfürth (1996). Zur Zeit wird auch an analogen Verfahren gearbeitet, die sowohl für

kompressible als auch für inkompressible Strömungsprobleme gleichermaßen geeignet sind (Hauke und Hughes (1994), Hauke und Hughes (1998), Abschnitt A1.3).

Stabilisierungsparameter

Ausgehend von den Betrachtungen in Kapitel 3.2.5 sollen hier nun Angaben zu den Definitionen der entsprechenden Stabilisierungsparameter für die soeben besprochenen GLS-Verfahren für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen folgen. In der Literatur wird mit einer großen Vielfalt an Stabilisierungsparameterdefinitionen gearbeitet. Definitionen für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen finden sich in Auge (1994), Becker (1995), Becker und Rannacher (1995), Behr (1992), Behr und Tezduyar (1994), Codina (1999), Cruchaga und Oñate (1997), Franca und Frey (1992), Gervasio und Saleri (1998), Hansbo (1992), Hansbo und Szepessy (1990), Hauke und Hughes (1998), Tezduyar et al. (1992c), Tobiska und Verfürth (1996). Viele der vorgestellten Definitionen wurden im Rahmen dieser Arbeit implementiert und getestet, wobei sich einige dieser Definitionen nur sehr geringfügig unterscheiden. Es soll aber erwähnt werden, daß sich in der Literatur auch sehr fragwürdige Definitionen finden, die sich in eigenen numerischen Experimenten als unbrauchbar herausstellten. Eine Analyse zeigt dann, daß diese Parameter weder die richtigen Ordnungen noch die geforderte Asymptotik aufweisen.

Die Definitionen für den Fall der stationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen (3.68) bis (3.74) sind im Ansatz ähnlich zu den in Franca et al. (1992) bzw. Franca und Frey (1992) vorgestellten Formeln. Diese Formeln wiederum stellen die im Laufe der Jahre erfolgten Verbesserungen der ursprünglichen Definitionen von Brooks und Hughes (1982) bzw. von Hughes et al. (1989) dar.

$$\tau_M(\mathbf{y}, Re_K(\mathbf{y})) = \frac{h_K}{2 |\mathbf{u}^h(\mathbf{y})|_p} \zeta(Re_K(\mathbf{y})) \quad (3.68)$$

$$\tau_C(\mathbf{y}, Re_K(\mathbf{y})) = \lambda \frac{|\mathbf{u}^h(\mathbf{y})|_p h_K}{2} \zeta(Re_K(\mathbf{y})) \quad (3.69)$$

$$Re_K(\mathbf{y}) = \frac{m_K |\mathbf{u}^h(\mathbf{y})|_p h_K}{2\nu(\mathbf{y})} \quad (3.70)$$

$$\zeta(Re_K(\mathbf{y})) = \begin{cases} Re_K(\mathbf{y}), & 0 \leq Re_K(\mathbf{y}) < 1 \\ 1, & Re_K(\mathbf{y}) \geq 1 \end{cases} \quad (3.71)$$

$$|\mathbf{u}^h(\mathbf{y})|_p = \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^N |u_i(\mathbf{y})|^p \right]^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1 \dots N} |u_i(\mathbf{y})|, & p = \infty \end{cases} \quad (3.72)$$

$$m_K = \min \left\{ \frac{1}{3}, 2C_K \right\} \quad (3.73)$$

$$C_K \sum_{K \in \mathcal{C}^h} h_k^2 \|\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^h)\|_{0,K}^2 \leq \|\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}^h)\|_0^2, \quad \mathbf{w}^h \in \mathcal{V}^h \quad (3.74)$$

Auf die wesentlichen Merkmale dieser Definitionen soll kurz hingewiesen werden:

- Durch (3.71) werden die diffusionsdominanten Bereiche ($0 \leq Re_K < 1$) von den konvektionsdominanten Bereichen ($Re_K \geq 1$) unterschieden. Dies führt zu folgenden Ordnungen der Stabilisierungsparameter

$$\tau_M = o(h) ; \quad \tau_C = o(h) \quad \text{für konvektionsdominante Bereiche} \quad (3.75)$$

$$\tau_M = o(h^2) ; \quad \tau_C = o(h^2) \quad \text{für diffusionsdominante Bereiche} \quad (3.76)$$

- In (3.70) wird die übliche Definition der Element–Reynoldszahl modifiziert, indem mit dem Parameter m_K der Effekt der gewählten Interpolationsordnung der Elemente berücksichtigt wird.
- Zur Bestimmung des Größenmaßes für die Geschwindigkeit wird, wie in Hughes et al. (1986b) eingeführt, die sogenannte p–Norm $|\cdot|_p$ entsprechend (3.72) verwendet.
- Inverse Abschätzungen der zweiten Ableitungen der Formfunktionen (3.74) sind Teil der Definition für Elemente höherer Ordnung. Im Gegensatz zu vielen sonst in der Literatur angeführten Definitionen eignet sich die vorliegende Definition somit auch für Elemente höherer Ordnung.
- Eine Dimensionskontrolle zeigt die richtigen Dimensionen der Stabilisierungsparameter, d.h. sie zeigt, daß τ_M die Dimension einer Zeit (\rightarrow ‘intrinsic time scale’) und τ_C die Dimension einer kinematischen Viskosität (\rightarrow ‘bulk viscosity’) hat.

Viele Verfahren aus der Literatur verwenden dieselben τ –Definitionen für den stationären und den instationären Fall. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Definition des Stabilisierungsparameters für die Impulsbilanz τ_M für den instationären Fall jedoch wie folgt modifiziert

$$\tau_M(\mathbf{y}, Re_K(\mathbf{y})) = \min \left[\Delta t, \frac{h_K}{2 |\mathbf{u}^h(\mathbf{y})|_p}, \frac{m_K h_K^2}{4\nu} \right] \quad (3.77)$$

Die neue hinzugekommene Berücksichtigung der Zeitschrittweite Δt in der Stabilisierungsparameterdefinition motiviert sich vor allem aus den Untersuchungen von Shakib (1988) für Raum–Zeit–Formulierungen der kompressiblen Euler– bzw. Navier–Stokes–Gleichungen. Die restlichen Terme sind entsprechend (3.72) bis (3.74) definiert. Eine zu (3.77) analoge Definition findet sich beispielsweise auch in Hauke und Hughes (1998).

Eine weitere Modifikation im Vergleich zu den ursprünglichen Definitionen, die die Grundlage für (3.68) bis (3.77) bilden, erfolgt durch eine ‘*physikalisch motivierte*’ Unterscheidung bei der Wahl der *Elementgrößendefinitionen*. ‘Physikalisch motiviert’ bedeutet, daß versucht wird die Definitionen für h_K an die ursächlich verschiedenen Formen von Instabilitäten der Galerkin–Formulierungen anzupassen. Da die Konvektionsstabilisierung eindeutig mit einer stromlinienorientierten Betrachtungsweise assoziiert ist, wird für h_K in dem entsprechenden Stabilisierungsterm die sogenannte ‘Stromlänge’ (Kapitel 3.2.5) angewendet. Diese Wahl wird auch durch jüngste Erkenntnisse bei der Verwendung von ‘adjoint residual free bubbles’–Verfahren bestätigt. Im Gegensatz dazu orientieren sich weder die Druck– noch die Divergenzstabilisierung an den Stromlinien, weshalb hier für die charakteristische Elementlänge eine der ‘klassischen’ Definitionen aus Kapitel 3.2.5 gewählt wird, beispielsweise der Durchmesser des elementflächengleichen Kreises. Bei ein und derselben Definition der Stabilisierungsparameter

für τ_M ergeben sich somit zwei unterschiedliche Zahlenwerte für die Konvektionsstabilisierung und für die Druck- und Divergenzstabilisierung. Dies wird in den folgenden Ausführungen gelegentlich durch die Notationen τ_M^u sowie τ_M^p verdeutlicht.

Entgegen der Tradition in der Fachliteratur sollen im folgenden noch einige Hinweise zur Wahl der restlichen noch offenen Parameter in den Definitionen (3.68) bis (3.74) gegeben werden, so wie sie in den meisten numerischen Beispielen in dieser Arbeit verwendet wurden. Um sich die numerisch herausfordernde Auswertung von (3.74) zu ersparen, wird der Parameter zur Berücksichtigung der Interpolationsordnung m_K oftmals schon vorab fixiert. Inverse Abschätzungen nach Gleichung (3.74) von Harari und Hughes (1992) in 2D ergeben für bilineare Interpolationen $C_K = \infty$ und für biquadratische Interpolationen $C_K = 1/24$. Diese Größen ergeben sich unabhängig von der (regulären) Form der Rechtecke, wobei Harari und Hughes (1992) $h_K = \sqrt{2} \text{Fläche}(\Omega_K) / \text{Diagonale}(\Omega_K)$ als Elementgrößendefinition verwendeten. Somit wird in den Berechnungen für (3.73) $m_K = 1/3$ für linear bzw. bilinear interpolierte Elemente und $m_K = 1/12$ für biquadratische Elemente gewählt. In einigen numerischen Beispielen wird eine weitere vereinfachende Näherung bei der Verwendung von Elementen höherer Ordnung eingesetzt. Um die tatsächliche Ermittlung der inversen Abschätzung (3.74) zu vermeiden wird die Elementgröße entsprechend dem Verhältnis Elementseitenlänge zum Abstand zweier benachbarter Knoten modifiziert. Eine ähnliche Idee wird auch in Codina (1999) verwendet. Für die p -Norm wird üblicherweise $p = 2$ gesetzt und der Parameter λ in (3.69) mit $\lambda = 1.0$ festgelegt.

Definitionen für zu (3.68) bis (3.74) analoge Stabilisierungsparameter für Methoden höherer Ordnung bzw. für stabilisierte spektrale Element-Approximationen finden sich in Gervasio und Saleri (1998) und Nabh (1998).

Eine interessante Möglichkeit zur Definition und *expliziten* Berechnung der Stabilisierungsparameter bei Elementen höherer Ordnung schlagen Franca und Madureira (1993) vor. Darin ist weder die explizite Berechnung von inversen Abschätzungen noch der Bezug auf bestimmte Netzparameter erforderlich. Diese Definition basiert auf dem größten Eigenwert eines generalisierten Eigenwertproblems, welches gewissermaßen die inverse Abschätzung ersetzt. Allerdings muß dieses Eigenwertproblem, wenn auch ‘nur’ auf Elementebene, tatsächlich gelöst werden. Details zu diesem Ansatz, der offensichtlich auf Interpolationspolynomgrade ≥ 2 ‘beschränkt’ ist, finden sich in Franca und Madureira (1993). Aufgrund des numerischen Aufwandes der Eigenwertbestimmung, speziell für die bei Fluid-Struktur-Interaktion durchzuführenden Strömungssimulationen auf zeitveränderlichen Gebieten (Kapitel 5), wird diese Definition in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Schließlich soll hier noch erwähnt werden, daß kürzlich durch sogenannte Mehrskalensätze (Abschnitt 3.2.6) ein wichtiger Schritt für eine fundiertere Definition der Stabilisierungsparameter gesetzt werden konnte. Es ist auch geplant, Ideen für Stabilisierungsparameter für die Verbesserung stabilisierter Verfahren bei anisotropen und verzerrten Elementen umzusetzen.

3.3.2 Die stabilisierte Finite-Element-Methode

Im Folgenden soll jene Formulierung dargestellt werden, die im Rahmen dieser Arbeit hauptsächlich Verwendung findet (Wall und Ramm (1998)). Abgesehen von einigen Weiterentwicklungen für die Stabilisierungsparameter und die spätere algorithmische Umsetzung handelt es sich dabei im Prinzip um die Formulierung *GLS*- von Franca und Frey (1992). Diese Formu-

lierung erwies sich in den numerischen Berechnungen bisher als das beste und robusteste Verfahren; alle Weiterentwicklungen sollen deshalb anhand dieses Verfahrens besprochen werden. Die Übertragung dieser Entwicklungen auf die alternativen Verfahren aus Tabelle 3.3 sollte jeweils direkt ersichtlich sein und wurde in analoger Weise durchgeführt. Ein weiterer Vorteil dieser Formulierung ist deren hervorragende Tauglichkeit für Elemente höherer Ordnung. Dieser Gesichtspunkt mag für die exzessive und beinahe ausschließliche Hinwendung zu Elementen niedriger Ordnung in der ‘CFD–Gemeinde’ auf den ersten Blick unwesentlich erscheinen. Verfahren höherer Ordnung stehen jedoch auf Dauer auch auf diesem Gebiet keineswegs auf verlorenem Posten, was auch schon einige Arbeiten und numerische Untersuchungen (Nabh (1998)) unterstützen. Die vorgestellte Methode stellt weiters ab einer Interpolationsordnung $k \geq 2$ ein vollständig konsistentes Verfahren dar.

Die stabilisierte Finite–Element–Methode für die inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen (3.1) bzw. (3.2) mit den Rand– bzw. Anfangsbedingungen (3.3) bis (3.5) läßt sich wie folgt darstellen:

Finde $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}_g^h$ und $p^h \in \mathcal{P}^h$, für die gilt

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{v}^h, q^h) \quad \forall (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathcal{V}^h \times \mathcal{P}^h \quad (3.78)$$

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \right) + (2\nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h)) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) - (\nabla \cdot \mathbf{u}^h, q^h) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} + \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) + \nabla p^h, \right. \\ & \quad \left. \tau_M^{u,p}(\mathbf{y}, \text{Re}_K(\mathbf{y})) (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) - \nabla q^h) \right]_K \\ & + (\nabla \cdot \mathbf{u}^h, \tau_C \nabla \cdot \mathbf{v}^h)_K \end{aligned}$$

$$F(\mathbf{v}^h, q^h) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}^h) + (\mathbf{h}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma_h} \quad (3.80)$$

$$+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[\mathbf{b}, \tau_M^{u,p}(\mathbf{y}, \text{Re}_K(\mathbf{y})) (\mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) - \nabla q^h) \right]_K$$

Die verwendeten Ansatzräume lauten

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^h &= \{ \mathbf{v}^h \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}^h|_K \in R_k(K)^N, K \in \mathcal{C}_h \} \\ \mathcal{V}_g^h &= \{ \mathbf{v}^h \in \mathbf{H}^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}^h|_K \in R_k(K)^N, K \in \mathcal{C}_h, \mathbf{v}^h = \mathbf{g} \text{ auf } \Gamma_g \} \\ \mathcal{P}^h &= \{ p^h \in C^0(\Omega) \cap L_0^2(\Omega) \mid p^h|_K \in R_k(K), K \in \mathcal{C}_h \} \end{aligned} \quad (3.81)$$

Darin bezeichnet $\mathbf{H}^1(\Omega)$ den Sobolev–Raum von Funktionen mit quadratintegrierbaren Werten und ersten Ableitungen auf Ω . $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ bezeichnet den Unterraum an \mathbf{H}^1 –Funktionen, die zusätzlich noch einen kompakten Träger aufweisen, d.h. deren Werte am Rand Null sind. $L^2(\Omega)$ bezeichnet den Raum von quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω und $L_0^2(\Omega)$ beinhaltet

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} &= \int_{\Omega} \mathbf{v}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} d\Omega \\
&+ \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^u \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} d\Omega^e - \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} d\Omega^e
\end{aligned} \tag{3.83}$$

bzw. für den einzigen Drucktestfunktioneneintrag

$$- \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nabla q^h \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} d\Omega^e \tag{3.84}$$

Alle restlichen nicht druckabhängigen Terme der linken Seite werden zur Matrix \mathbf{N} zusammengefaßt. Diese beinhaltet folgende linearen und nichtlinearen Terme in den Zeilen der Geschwindigkeitstestfunktionen

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{u} &= \int_{\Omega} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h d\Omega + \int_{\Omega} 2\nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) d\Omega \\
&+ \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^u \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h d\Omega^e - \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^u 2\nu \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) d\Omega^e \\
&- \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \cdot \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h d\Omega^e + \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p 4\nu^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) d\Omega^e \\
&+ \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_C \nabla \cdot \mathbf{v}^h \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega^e
\end{aligned} \tag{3.85}$$

sowie die folgenden Elementintegrale bei den Drucktestfunktionen.

$$\begin{aligned}
&- \int_{\Omega} q^h \nabla \cdot \mathbf{u}^h d\Omega \\
&- \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nabla q^h \cdot \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h d\Omega^e + \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla q^h \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) d\Omega^e
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Die Druckterme werden wiederum in der Matrix \mathbf{G} zusammengefaßt und lauten

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{p} &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v}^h p^h d\Omega \\
&+ \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^u \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \cdot \nabla p^h d\Omega^e - \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \cdot \nabla p^h d\Omega^e
\end{aligned} \tag{3.87}$$

und

$$- \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nabla q^h \cdot \nabla p^h d\Omega^e \quad (3.88)$$

Schließlich sind noch die Einträge in die rechte Seite bei den Geschwindigkeitstestfunktionen

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\mathbf{u}) = & \int_{\Omega} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{h} \, d\Gamma_h \\ & + \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^u \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{b} \, d\Omega^e - \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \cdot \mathbf{b} \, d\Omega^e \end{aligned} \quad (3.89)$$

bzw. im Zusammenhang mit den Drucktestfunktionen zu assemblieren.

$$- \sum_{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nabla q^h \cdot \mathbf{b} \, d\Omega^e \quad (3.90)$$

Als mögliche Schreibweise des Gleichungssystems folgt damit

$$\mathbf{M}(\mathbf{u})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{p} = \mathbf{F}(\mathbf{u}) \quad (3.91)$$

Alternativ kann dieses Gesamtgleichungssystem auch ausführlicher entsprechend

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K} + \mathbf{N}(\mathbf{u})] \mathbf{u} + \mathbf{G} \mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (3.92)$$

$$\overline{\mathbf{M}}^T \dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{G}^T + \overline{\mathbf{N}}^T(\mathbf{u})] \mathbf{u} + \overline{\mathbf{G}}^T \mathbf{p} = \overline{\mathbf{F}} \quad (3.93)$$

dargestellt werden. Darin bezeichnet der hochgestellte Index $(\cdot)^T$ Matrizen die ausschließlich aus Stabilisierungstermen gebildet werden. Die Notation $\overline{(\cdot)}$ dient hier zur Unterscheidung der Matrizen die sich durch die Drucktestfunktionen bilden, von jenen, die auf die Geschwindigkeitstestfunktionen zurückzuführen sind. Gleichung (3.92) stellt somit die resultierende Matrixdarstellung der Impulsbilanz dar, und Gleichung (3.93) jene der Massenerhaltung.

Darstellung der Elementmatrizen

Exemplarisch sollen die expliziten Rechenvorschriften für einige Elementmatrizen dargestellt werden, die dann nach den Gleichungen (3.83) bis (3.90) zu den globalen Systemmatrizen zusammengebaut werden. Es wird versucht, dafür eine Darstellungsweise zu verwenden, die einer direkten Umsetzung in einem Computerprogramm leicht zugänglich ist.

Die diskreten Ansatz- bzw. Testfunktionen lassen sich unter Verwendung der Formfunktionen N darstellen

$$u_\alpha^h(\mathbf{y}) = N^\alpha(\mathbf{y}) u_\alpha^a; \quad p^h(\mathbf{y}) = N^b(\mathbf{y}) p^b; \quad v_\alpha^h(\mathbf{y}) = N^\alpha(\mathbf{y}) v_\alpha^a; \quad q^h(\mathbf{y}) = N^b(\mathbf{y}) q^b \quad (3.94)$$

Dabei wird die Einsteinsche Summationskonvention angewendet, wobei die griechischen Indizes über die Anzahl der Raumdimensionen laufen, während die Summenschleifen der lateinischen Indizes über die Anzahl der Elementknoten laufen. u_2^3 bezeichnet somit die y -Komponente am Elementknoten 3 und N^3 die zum Elementknoten 3 gehörende Formfunktion.

Mit (3.94) zeigt sich beispielsweise als ‘Rechenvorschrift’ für den Galerkinanteil der Druckmatrix \mathbf{G}

$$\int_{\Omega^e} \nabla \cdot \mathbf{v}^h p^h d\Omega^e \rightarrow v_\alpha^a \int_{\Omega^e} N_{,\alpha}^a N^b d\Omega^e p^b \quad (3.95)$$

Der numerisch zu ermittelnde Integralausdruck stellt dabei den Eintrag in der Elementmatrix dar, v_α^a dient der Zeilenangabe beim Zusammenbau, und p^b ist der zu ermittelnde Druckfreiwert am Knoten b . Analog dazu lautet beispielsweise der Ausdruck für die Elementmatrix des GLS–Druck–Anteiles angewandt auf den Viskositätsterm

$$\int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla q^h \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) d\Omega^e \rightarrow q^a \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nu (N_{,\beta}^a N_{,\beta\alpha}^b + N_{,\alpha}^a N_{,\beta\beta}^b) d\Omega^e u_\alpha^b \quad (3.96)$$

Direkt als Matrix skizziert folgt daraus für den zweidimensionalen Fall

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2N_{,1}^1 N_{,11}^1 + N_{,2}^1 N_{,21}^1 + N_{,1}^1 N_{,22}^1 & N_{,1}^1 N_{,12}^1 + 2N_{,2}^1 N_{,22}^1 + N_{,2}^1 N_{,11}^1 & & \text{usw.} \\ \hline 2N_{,1}^2 N_{,11}^1 + N_{,2}^2 N_{,21}^1 + N_{,1}^2 N_{,22}^1 & N_{,1}^2 N_{,12}^1 + 2N_{,2}^2 N_{,22}^1 + N_{,2}^2 N_{,11}^1 & & \text{usw.} \\ \hline & & \text{usw.} & \text{usw.} \end{array} \right] \quad (3.97)$$

Hierbei wurden nur die Zeilen für q^1 und q^2 sowie die Spalten für u_1^1 und u_2^1 angeschrieben. Die angeführten Matrixeinträge müssen natürlich nach Gleichung (3.96) noch mit $\tau_M^p \nu$ multipliziert und über das jeweilige Elementgebiet Ω^e numerisch integriert werden.

Als Beispiel eines offensichtlich nichtlinearen Terms (vor der Linearisierung) folgt der GLS–Viskositäts–Anteil angewandt auf den Konvektionsoperator zu

$$\int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \cdot \mathbf{u}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h d\Omega^e \rightarrow \left[\begin{array}{l} v_\alpha^a \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nu N_{,\beta\alpha}^a N^b N_{,\gamma}^c u_\gamma^b d\Omega^e u_\beta^c + \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nu N_{,\beta\beta}^a N^b N_{,\gamma}^c u_\gamma^b d\Omega^e u_\alpha^c \end{array} \right] \quad (3.98)$$

Bemerkung: Aus den Ausführungen ist zu erkennen, daß einige Argumente in den Stabilisierungstermen einen sehr hohen Polynomgrad aufweisen. Das hat natürlich Auswirkungen auf die numerische Integration dieser Ausdrücke über die Elemente. Es ist jedoch nicht erforderlich, die entstehenden Ausdrücke exakt zu integrieren. Um die volle Konvergenz in der Energie zu erhalten, reicht es aus, den numerischen Integrationsfehler auf dem Niveau des Approximationsfehlers der polynomialen Ansatzfunktionen zu halten (Strang und Fix (1973)). Wird jener Term mit dem höchsten Polynomgrad als Grundlage genommen, so folgen als nötige Integrationsordnungen: für Q1Q1–Elemente — 2×2 Integrationspunkte, für P1P1 — 3, für Q2Q2 — 4×4 , für P2P2–Elemente — 12 Integrationspunkte. Dazu wurde zusätzlich die Annahme eines konstanten Stabilisierungsparameters über das Elementgebiet getroffen. Da jedoch nur einzelne Stabilisierungsausdrücke diesen

hohen Polynomgrad aufweisen, ist u.U. auch eine geringere Integrationspunktanzahl ausreichend.

Zur Berechnung der zweiten Ableitungen

Wie aus obigen Gleichungen sofort ersichtlich ist, enthält die Matrixform der Gleichungen noch zweite Ableitungen. In den Standard–Galerkin–Ausdrücken verschwinden diese auf dem Weg zur schwachen Form durch Anwendung des Divergenztheorems. Dieser ‘shift’ einer Ableitung von den Ansatz– zu den Testfunktionen entfällt bei den Stabilisierungstermen, womit diese zweiten Ableitungen in den Ausdrücken bestehen bleiben. Es müssen deshalb jedoch keine höheren Stetigkeitsanforderungen an die Ansatzfunktionen gestellt werden, da die Stabilisierungsterme elementweise Größen darstellen und somit auch nur elementweise berechnet werden.

Die ersten Ableitungen nach den globalen Koordinaten lassen sich mit Hilfe der Jacobi–Matrix \mathbf{J} aus den ersten lokalen Ableitungen, die durch Vorgabe der Ansatzfunktionen explizit vorliegen, bestimmen

$$\begin{Bmatrix} \partial_{y_1} \\ \partial_{y_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \partial_{\eta_1} \\ \partial_{\eta_2} \end{Bmatrix} \quad (3.99)$$

Die Bestimmung der zweiten Ableitungen hingegen ist etwas komplexer. Hierzu wird die Matrix $\bar{\mathbf{J}}$ eingeführt, die sich für den 2D–Fall als

$$\bar{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial y_1}{\partial \eta_1}\right)^2 & \left(\frac{\partial y_2}{\partial \eta_1}\right)^2 & 2 \frac{\partial y_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial y_2}{\partial \eta_1} \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial \eta_2}\right)^2 & \left(\frac{\partial y_2}{\partial \eta_2}\right)^2 & 2 \frac{\partial y_1}{\partial \eta_2} \frac{\partial y_2}{\partial \eta_2} \\ \left(\frac{\partial y_1}{\partial \eta_1}\right)\left(\frac{\partial y_1}{\partial \eta_2}\right) & \left(\frac{\partial y_2}{\partial \eta_1}\right)\left(\frac{\partial y_2}{\partial \eta_2}\right) & \frac{\partial y_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial y_2}{\partial \eta_2} + \frac{\partial y_2}{\partial \eta_1} \frac{\partial y_1}{\partial \eta_2} \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

schreiben läßt. Mit deren Hilfe lassen sich die zweiten Ableitungen nach den globalen Koordinaten aus den explizit vorliegenden zweiten lokalen Ableitungen und den nach (3.99) ermittelten ersten globalen Ableitungen berechnen.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{J}}^{-1} \cdot \left(\begin{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta_1^2} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \eta_1^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta_2^2} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \eta_2^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial y_2} \end{Bmatrix} \right) \quad (3.101)$$

Die zweiten globalen Ableitungen für den 3D–Fall lassen sich in analoger Weise zu Gleichung (3.101) ermitteln.

Bemerkung: Die in den Kapiteln 3.3.1 und 3.3.2 angeführten Stabilisierungsverfahren wurden im Zuge der vorliegenden Arbeit für lineare, quadratische und kubische Interpolationsord-

nungen, sowohl für Dreiecks- als auch für Viereckselemente (Serendipity und Lagrange) und auch für entsprechende 3D-Elemente umgesetzt.

3.3.3 Numerische Beispiele

An dieser Stelle sollen Konvergenzanalysen das Verhalten der entwickelten räumlichen Diskretisierungsverfahren zeigen. Für eine einfache und garantiert unverfälschte Fehlerermittlung ist es dabei vorteilhaft, auf analytische Lösungen zurückzugreifen. Leider liegen analytische Lösungen der inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen nur für sehr wenige Fälle vor. Oftmals werden solche Analysen in der Literatur deshalb an ‘ausgebildeten’ Kanalströmungen durchgeführt. Allerdings sollte dabei beachtet werden, daß solche Strömungen sehr einfach sind und einen verschwindenden konvektiven Term haben. Für eine aussagekräftige Analyse eines Verfahrens werden diese Strömungen aus diesem Grunde als nicht besonders geeignet betrachtet. Im folgenden sollen deshalb zwei komplexere Strömungen, für die analytische Lösungen vorliegen, herangezogen werden. Als Stabilisierungsverfahren wird in allen Beispielrechnungen das Verfahren nach Kapitel 3.3.2 verwendet.

- **‘Kovasznay’–Strömung**

Eine interessante analytische Strömungslösung geht auf Kovasznay (1948) zurück. Darin wird quasi die Strömung, d.h. der Strömungsnachlauf, hinter einem zweidimensionalen Gitter beschrieben. Die analytischen Lösungen für die beiden Geschwindigkeitskomponenten lauten

$$u_x(x, y) = 1 - e^{\lambda x} \cos(2\pi y) \quad (3.102)$$

$$u_y(x, y) = \frac{\lambda}{2\pi} e^{\lambda x} \sin(2\pi y) \quad (3.103)$$

Darin bedeutet

$$\lambda = \frac{1}{2\nu} - \left(\frac{1}{4\nu^2} + 4\pi^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.104)$$

In Anlehnung an Kovasznay (1948) wird in den folgenden Beispielen die Viskosität zu $\nu = 40$ gewählt. Für die Berechnungen wird das Gebiet $\Omega(x, y) = [-0.5, 0.5] \times [-0.5, 1.0]$ gleichmäßig und strukturiert vernetzt. An sämtlichen Rändern werden die analytischen Geschwindigkeitsrandbedingungen als Dirichlet–Randbedingungen vorgeschrieben. Die Simulationsergebnisse in Bild 3.15 sollen die Strömungslösung bei der gewählten Viskosität verdeutlichen.

Bild 3.16 zeigt den Verlauf des Geschwindigkeitsfehlers für unterschiedlich feine Diskretisierungen mit bilinear (Q1Q1), biquadratisch (Q2Q2) und bikubisch (Q3Q3) interpolierten Viereckselementen. Auf der Abszisse ist dabei jeweils die Anzahl an Knotenunterteilungen der kürzeren Kantenlänge angegeben. Das bedeutet also, daß beispielsweise ein Abszissenwert von 24 den Diskretisierungen 24×36 Q1Q1, 12×18 Q2Q2 sowie 8×12 Q3Q3 entspricht. Diskretisierungen mit demselben Abszissenwert weisen somit dieselbe Anzahl an Freiheitsgraden auf. Der auf der Ordinate aufgetragene Fehler wird nach den Formeln aus Bild 3.17 ermittelt. Ergänzend dazu zeigt Bild 3.17 auch den Geschwindigkeitsfehler für linear (P1P1) und quadratisch (P2P2) interpolierte Dreieckselemente.

Aus den dargestellten Ergebnissen zeigt sich, daß Elemente höherer Ordnung eine interessante Alternative zu den im Bereich der CFD dominierenden Elementen niedriger Ordnung (Q1,

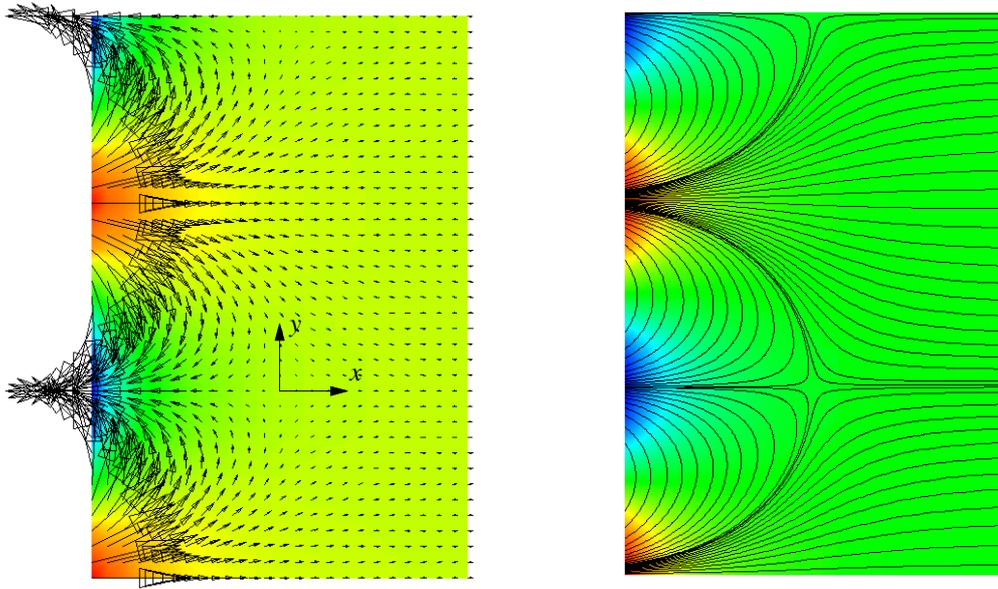


Bild 3.15: Kovaszny–Strömung —
Geschwindigkeitsvektoren auf p (8×12 Q3Q3), Stromlinien auf u_x (24×48 Q1Q1)

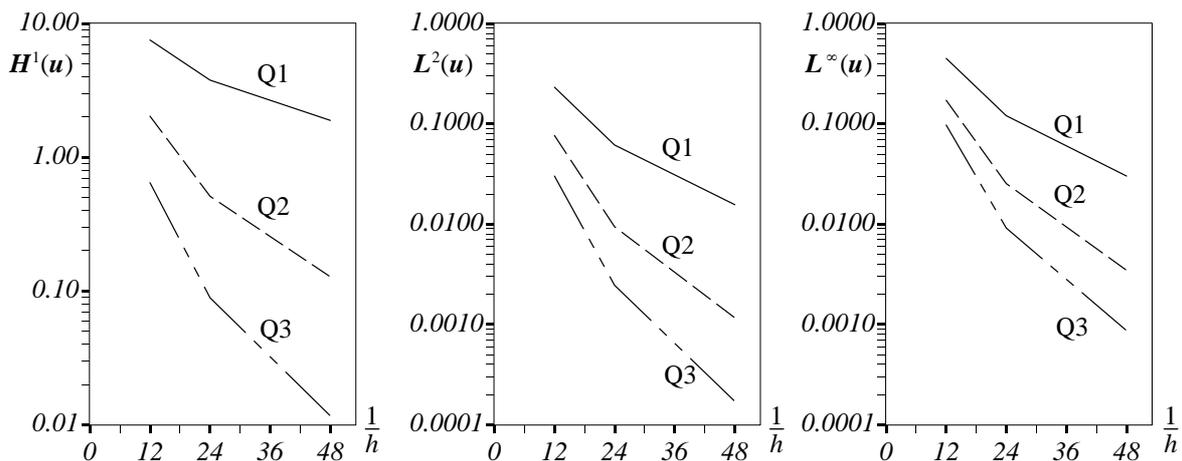


Bild 3.16: Verlauf des Geschwindigkeitsfehlers für Kovaszny–Strömung —
Hilbert–Norm H^1 (links), L^2 –Norm (mitte), L^∞ –Norm (rechts)

P1) darstellen können. Sie zeigen bei derselben Anzahl an Freiheitsgraden durchwegs einen geringeren Fehler. Es muß jedoch erwähnt werden, daß der Simulationsaufwand bei derselben Anzahl an Freiheitsgraden nicht identisch ist. Durch eine größere Belegung der globalen Matrix steigt der gesamte Speicher– und Lösungsaufwand bei Verwendung von Elementen höherer Ordnung.

- ‘Kim–Moin’–Strömung

In einem zweiten Beispiel soll der räumliche Diskretisierungsfehler bei einer zeitabhängigen Strömung getestet werden. Dazu wird auf die analytische Lösung aus Kim und Moin (1985) zurückgegriffen. Diese Aufgabenstellung wird gelegentlich auch als Taylor–Problem bezeichnet und stellt ein künstliches Modellproblem dar. Die Strömung wird auf dem Gebiet $\Omega(x, y) = [0, 1] \times [0, 1]$ berechnet und mit der analytischen Lösung

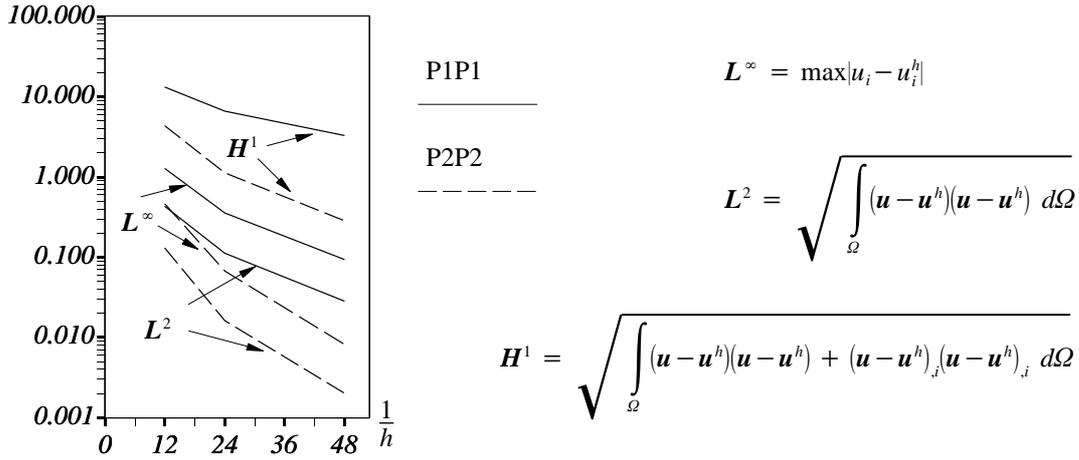


Bild 3.17: Geschwindigkeitsfehler für Kovasznyai-Strömung mit Dreieckselementen

$$u_x(x, y; t) = -\cos(\alpha\pi x) \sin(\alpha\pi y) e^{(-2\alpha^2\pi^2\nu t)} \quad (3.105)$$

$$u_y(x, y; t) = \sin(\alpha\pi x) \cos(\alpha\pi y) e^{(-2\alpha^2\pi^2\nu t)} \quad (3.106)$$

$$p(x, y; t) = -\frac{1}{4}[\cos(2\alpha\pi x) + \cos(2\alpha\pi y)] e^{(-4\alpha^2\pi^2\nu t)} \quad (3.107)$$

verglichen. An den Gebietsrändern werden wieder die analytischen Lösungen als Dirichlet-Randbedingungen aufgebracht. Für die Berechnungen wird $\alpha = 2$ und $\nu = 10^{-2}$ gewählt. In Anlehnung an Gervasio, Saleri (1998) wird die Lösung zum Zeitpunkt $t = 0.01$ herangezogen, die mit einem BE-Verfahren mit einer Zeitschrittweite von $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$ ermittelt wird. Das Bild 3.18 zeigt die Strömungslösung, die sich mit der Diskretisierung mit 24×24 Q1Q1-

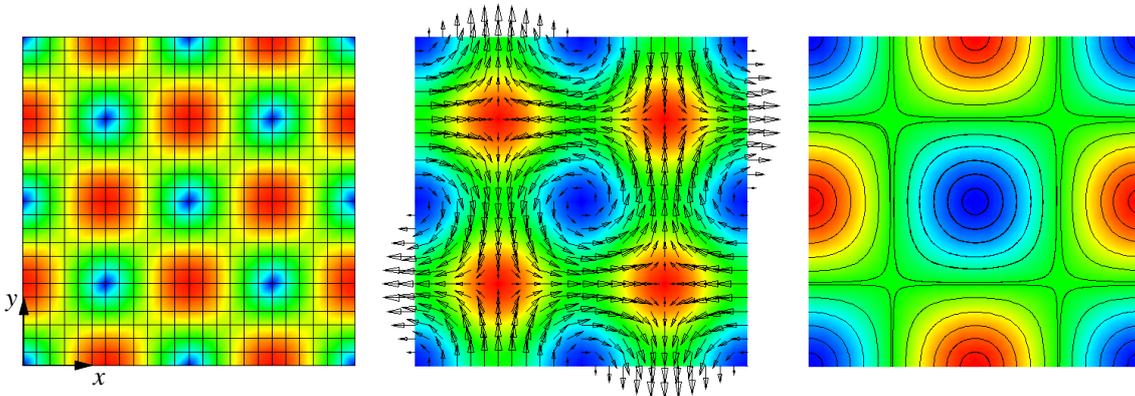


Bild 3.18: 'Kim-Moin'-Strömung zu $t=0.01$ — Diskretisierung (24×24 Q1Q1) auf $|u|$ (links), Geschwindigkeitsvektoren auf p (mitte), Stromlinien auf 'vorticity' (rechts)

Elementen ergibt. In diesem Beispiel werden bilinear interpolierte Rechteckselemente und linear interpolierte Dreieckselemente verglichen. Zum Vergleich werden wiederum Diskretisierungen herangezogen, die dieselbe Knotenanzahl ergeben. In Bild 3.19 sind die Hilbert-Norm H^1 , die L^2 -Norm und die L^∞ -Norm des Geschwindigkeitsfehlers sowie die L^2 -Norm und die L^∞ -Norm des Druckfehlers dargestellt.

Abschließend kann zu den durchgeführten numerischen Experimenten festgehalten werden, daß das entwickelte Verfahren die Tests bestanden hat. Das vorliegende stabilisierte Finite-Elemente-

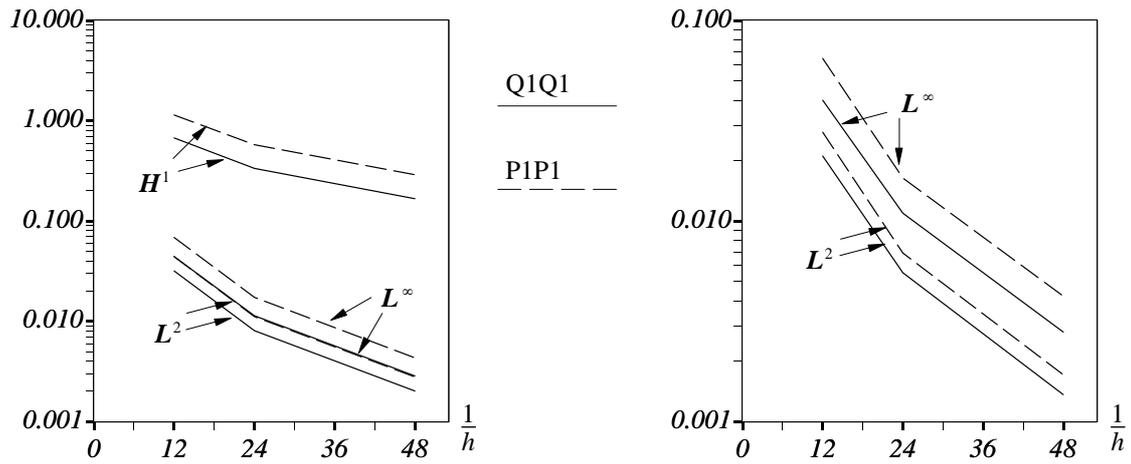


Bild 3.19: Geschwindigkeitsfehler (links) und Druckfehler (rechts) für ‘Kim–Moin’–Strömung

ment–Verfahren lieferte in den numerischen Berechnungen die jeweiligen *optimalen* Konvergenzordnungen. Diese optimalen theoretischen Konvergenzordnungen sind aus den entsprechenden mathematischen Analysen stabilisierter Verfahren (siehe z.B. Franca et al. (1992), Gerdes, Schötzau (1999)) bekannt und wurden im Kapitel 3.2 bereits kurz angesprochen.

4 Lösungungsverfahren für die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den eigentlichen Lösungsverfahren, d.h. mit den Algorithmen zur Lösung der räumlich diskretisierten, instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen. Dazu werden nach einer kurzen Einleitung Fragen zur erforderlichen Zeitdiskretisierung ebenso diskutiert wie der Umgang mit den auftretenden Nichtlinearitäten. Eine bestimmte Klasse von Gesamtalgorithmen, sowohl für die instationären Gleichungen wie auch für den stationären Sonderfall, werden daraufhin als sogenannte ‘Navier–Stokes–Löser’ vorgestellt. Abschließend sollen einige numerische Beispiele die Leistungsfähigkeit des vorgestellten Verfahrens verdeutlichen.

4.1 Einführung

Zur Lösung der Navier–Stokes–Gleichungen existiert eine Vielzahl unterschiedlicher und teilweise nicht klar trennbarer Verfahren. Ein solches ‘Gesamtverfahren’ resultiert dabei aus dem Zusammenwirken von Einzelverfahren zur Lösung der unterschiedlichen algorithmischen Fragestellungen. Überblicksartige Darstellungen, meist beschränkt auf einzelne ‘Löserphilosophien’, finden sich in den Arbeiten von Cuvelier et al. (1986), Gresho und Sani (1998), Quartapelle (1993), Rannacher (1993), Temam (1979), Turek (1999) und Venkatakrishnan (1996).

Eine eindeutige Einordnung existierender Verfahren nach der Behandlung der zeitlichen Dimension und der Nichtlinearitäten ist auf Grund ihres engen Zusammenspiels schwierig. Diese Verflechtung wird auch aus der teils recht unübersichtlichen Darstellung in den erwähnten Überblicksarbeiten deutlich. Zu den Fragen der Zeitdiskretisierung und der Behandlung der vorhandenen Nichtlinearitäten kommen noch die Fragen nach den eigentlichen Gleichungslösungsverfahren und nach der Wahl des räumlichen Diskretisierungsverfahrens hinzu. Bei der folgenden Darstellung soll trotz der erwähnten Interaktion versucht werden, die Fragen der Zeitdiskretisierung und der Iterationsverfahren weitgehend separat zu behandeln und nur über entsprechende Querverweise miteinander in Verbindung zu bringen.

Die Standarddarstellung der nach einem klassischen Galerkin–Ansatz räumlich diskretisierten instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen ((2.79) bis (2.91)) lautet

$$M\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K} + \mathbf{N}(\mathbf{u})]\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{u} = \bar{\mathbf{F}} \quad (4.2)$$

Diese Darstellung folgt direkt aus den Gleichungen (3.92) und (3.93) durch Weglassen der Stabilisierungsterme. Im weiteren Verlauf wird der Term $[\mathbf{K} + \mathbf{N}(\mathbf{u})]\mathbf{u}$ in Gleichung (4.1) meist nur als $\mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{u}$ geschrieben.

Bemerkung: Der möglicherweise unerwartete Eintrag $\bar{\mathbf{F}}$ auf der rechten Seite in Gleichung (4.2) stellt Beiträge dar, die von den Dirichlet–Randbedingungen des Geschwindigkeitsfeldes stammen. Daraus folgt auch, daß $\bar{\mathbf{F}}$ nur sehr spärlich, nämlich maximal ‘am Rand’, besetzt ist.

Die Gleichungen (4.1) und (4.2) stellen ein differential–algebraisches Gleichungssystem (DAE) dar. DAEs sind gewöhnliche Differentialgleichungssysteme (ODE), die einer algebra-

ischen Zwangsbedingung unterworfen sind und dadurch oft zusätzliche Schwierigkeiten aufwerfen. Sie können auch als steife ODE, mit *unendlicher* Steifigkeit, interpretiert werden. Ein Maß für den Schwierigkeitsgrad stellt der sogenannte *Index* eines DAE dar. Als Index wird die Minimalanzahl an notwendigen Differentiationen der Zwangsbedingung eines DAE nach der Zeit bezeichnet, um daraus eine ODE in den ursprünglichen Variablen zu machen. Er ist gewissermaßen ein Maß für die Singularität eines Systems. Die Gleichungen (4.1) und (4.2) stellen ein ‘Index 2’-System dar. Die erste Differentiation der Gleichung (4.2) nach der Zeit liefert nach einiger Umformung eine Druck–Poisson–Gleichung (siehe Anhang A1.5) und somit gelangen wir mittels einer zweiten Zeitableitung zu einem ODE in den Variablen \mathbf{u} und \mathbf{p} , woraus ein Index von 2 folgt.

Bemerkung: Die Definition der *Steifigkeit* eines ODE ist nicht völlig eindeutig. In einer allgemeinen Definition wird ein Problem als steif bezeichnet, wenn die kleinste Zeitkonstante ‘sehr klein’ ist im Vergleich zur Zeit, für die das Problem gelöst werden soll. Konkreter definiert, wird oftmals das Verhältnis der negativen Realteile des größten zum kleinsten Eigenwert von A als Maß für die Steifigkeit des ODE $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$ genommen (Hairer und Wanner (1996)).

Zwei prinzipiell unterschiedliche Philosophien von Navier–Stokes–Läsern werden durch Ansätze verfolgt, die entweder das Gesamtsystem (4.1) und (4.2) zusammen lösen oder das Gesamtproblem zur Lösung in Sub–Probleme aufspalten. Die beiden Ansätze werden hier als *gekoppelte* bzw. *entkoppelte Lösungsverfahren* bezeichnet. Aber auch diese Trennung ist nicht völlig eindeutig. So wird beispielsweise aus den folgenden Ausführungen ersichtlich, daß der Sonderfall eines gekoppelten Verfahrens wiederum ein entkoppeltes Verfahren darstellen kann.

Obwohl entkoppelte Verfahren sicherlich populärer sind, wird im Rahmen dieser Arbeit vor allem der Ansatz gekoppelter Verfahren verfolgt. Die Vorteile entkoppelter Verfahren, die auch zu deren weiten Verbreitung führten, bestehen in:

- den entstehenden kleineren Gleichungssystemen in den Zwischenschritten zur Lösung der Sub–Probleme
- der Möglichkeit zur Trennung unterschiedlicher numerischer Schwierigkeiten in die einzelnen speziell angepaßten Lösungsverfahren für diese Zwischenschritte
- der Möglichkeit die effizientesten Gleichungslösungsverfahren (z.B. Mehrgitterverfahren) für die Sub–Probleme anzuwenden, die im Vergleich zum Gesamtsystem sehr gutartig sind (elliptisch, gut konditioniert).

Die numerischen Kosten pro Iterationsschritt sind bei entkoppelten Verfahren also geringer als bei gekoppelten Verfahren. Allerdings zeigen gekoppelte Verfahren durch die Kopplung viel bessere Konvergenzraten. Dadurch wird die Entscheidung, welchem Ansatz der Vorzug zu geben ist, stark problemabhängig. Das angestrebte Ziel dieser Arbeit besteht jedoch nicht ‘nur’ in der Entwicklung eines effizienten Navier–Stokes–Lösers, sondern in der Entwicklung eines solchen Lösers, der sich für gekoppelte Fluid–Struktur–Interaktionsprobleme eignet. Dabei kommen zwei Nachteile vieler entkoppelter Lösungsverfahren im Vergleich zu den gekoppelten Verfahren zum Tragen:

- es können künstliche Randgrenzschichten auftreten

- es ist unklar, welche Randbedingungen in den einzelnen Zwischenschritten entkoppelter Verfahren aufgebracht werden müssen; außerdem sind diese oftmals physikalisch schwer begründbar und schwer konsistent ableitbar.

Gerade bei Fluid–Struktur–Interaktionsproblemen kommt dem Rand des Fluidgebietes und den zugehörigen Randbedingungen eine besondere Bedeutung zu. An diesem ‘Interface’ erfolgt die Kopplung und der Informationsaustausch zwischen den einzelnen physikalischen Feldern. Diese Situation verleiht den beiden angeführten Nachteilen im Vergleich zu den Vorteilen ein besonderes Gewicht. Aus diesem Grund fiel die Entscheidung zu Gunsten der Entwicklung eines gekoppelten Löser, mit dem Wunsch möglichst viele Vorteile der entkoppelten Verfahren einbeziehen zu können.

Das entwickelte Verfahren wird im Anschluß an die Diskussion zur Zeitdiskretisierung und zu den Iterationsverfahren in Abschnitt 4.4 beschrieben. Alternative Verfahren zur Lösung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen, darunter auch entkoppelte Löser, werden im Anhang A1.5 angesprochen.

Durch die verwendeten stabilisierten Finite–Element–Verfahren verändert sich das zu lösende Gesamtgleichungssystem im Vergleich zur Standarddarstellung (4.1) und (4.2). Diese Modifikationen werden aus den entsprechenden Ausführungen in Kapitel 3 ersichtlich und zeigen sich in der bereits angeführten Darstellung (3.92) und (3.93) des zu lösenden Gesamtsystems. Zur Vereinfachung der folgenden Diskussion zu algorithmischen Fragestellungen werden diese Gleichungen (3.92) und (3.93) in weiterer Folge meist zusammengefaßt zu

$$M\dot{u} + [K + N(u)]u + Gp = F \quad \text{oder} \quad M\dot{u} + N(u)u + Gp = F \quad (4.3)$$

Diese Darstellung soll jedoch nicht verbergen, daß es sich im Kern nach wie vor um ein DAE handelt und somit in den gewählten Zeitintegrationsverfahren auf die entsprechenden Komplikationen Rücksicht genommen werden muß.

Weiters sind durch die Stabilisierungsterme sämtliche Matrizen in (3.92) und (3.93) abhängig vom Lösungsvektor u und somit nichtlinear. Gleichung (4.3) müßte somit also

$$M(u)\dot{u} + N(u)u + G(u)p = F(u) \quad (4.4)$$

lauten (diese Darstellung wurde bereits als Gleichung (3.91) angeführt). Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im Folgenden jedoch meist auf die Form (4.3) zurückgegriffen.

4.2 Zeitdiskretisierung

4.2.1 Einleitung

Ausgehend von den jeweiligen Grundgleichungen ((2.79) bis (2.91)) existieren zwei prinzipiell unterschiedliche Diskretisierungsstrategien für zeitabhängige Probleme. Die erste Strategie besteht dabei in einer gleichzeitigen *simultanen* Diskretisierung der räumlichen und zeitlichen Dimension. Die zweite Strategie hingegen beruht darauf, die beiden Diskretisierungen hintereinander *sequentiell* durchzuführen.

Simultane Diskretisierung

Simultane Diskretisierungsverfahren beruhen im allgemeinen auf der Anwendung von Finite–Element–Ansätzen nicht nur in Raum– sondern auch in Zeitrichtung, also auf der Verwendung

sogenannter Raum–Zeit–Elemente. Das bedeutet, daß die Gleichungen in diesem Fall auch in Zeitrichtung schwach erfüllt werden. Das Raum–Zeit–Gebiet wird dazu zusätzlich zur normalen räumlichen Vernetzung in Zeitscheiben konstanter Stärke unterteilt; auf diesen werden dann die entsprechenden Zeitansätze gewählt. Um nicht die ganze Zeitdimension in einem Schritt auflösen zu müssen, werden meist diskontinuierliche Ansätze gewählt, d.h. die Ansätze weisen an den Grenzen der Zeitscheiben Sprünge auf. Man spricht in diesem Zusammenhang von *diskontinuierlichen Galerkin–Verfahren*. Entsprechende Ansätze in der numerischen Strömungsmechanik finden sich in Johnson, Saranen (1986), Shakib (1988), Hughes et al. (1989) und analoge Ansätze für die Elastodynamik beispielsweise in Hughes und Hulbert (1988). Einer der wesentlichen Vorteile von Raum–Zeit–Verfahren liegt in einer einfacheren, einheitlichen mathematischen Analyse des Gesamtproblems. Dieser Vorteil zeigt sich vor allem, wenn Fehlerabschätzungen und adaptive Verfahren zur Anwendung kommen sollen. Gerade für stabilisierte Finite–Element–Verfahren erfreuen sich Raum–Zeit–Ansätze großer Beliebtheit. Stabilisierte Raum–Zeit–Verfahren werden u.a. durch die Gruppe um T.E. Tezduyar in Minnesota (jetzt Rice University, Houston) für Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten forciert.

Die Nachteile einer simultanen Diskretisierungsstrategie durch Raum–Zeit–Ansätze bestehen in den deutlich größeren Gleichungssystemen und damit einem teilweise stark erhöhten Rechenaufwand zur Lösung solcher Systeme. Das trifft in noch stärkerem Maße für Verfahren höherer Ordnung in Zeitrichtung zu. Im Vergleich zu einem konstanten Zeitansatz verdoppelt ein linearer Zeitansatz die Anzahl N der Unbekannten, ein quadratischer Zeitansatz verdreifacht sie. Der Aufwand zur Lösung eines Gleichungssystems läßt sich durch $C \cdot N^\beta$ darstellen. Die Konstanten C und β variieren dabei je nach verwendetem Lösungsverfahren (siehe auch Mok (1996)); so weisen Skyline–Löser ein $\beta \approx 2$ auf, direkte ‘sparse’ Löser ein $\beta \approx 1.5$, gut angepaßte pcg–Löser (pcg — ‘vorkonditionierte konjugierte Gradienten’) bewegen sich im Bereich von $\beta \approx 4/3$ und auch Mehrgitterverfahren nähern sich nur im optimalen Fall einem $\beta \approx 1$. Daraus folgt, daß bei Verwendung eines quadratischen Zeitansatzes und eines Skyline–Lösers der Rechenaufwand für die Gleichungslösung bereits um den Faktor 9 ansteigt. Hinzu kommt noch der Aufwand für die numerische Integration in Zeitrichtung. Ein weiterer Nachteil bei der Verwendung von Raum–Zeit–Elementen zur Zeitdiskretisierung besteht darin, daß die entstehenden Verfahren im Normalfall stark dissipativ sind.

Sequentielle Diskretisierung

Bei einer sequentiellen Strategie werden die Diskretisierungen in Raum und Zeit nacheinander durchgeführt. Im Normalfall wird dabei zuerst im Raum diskretisiert. Dies liefert ein sogenanntes *semi–diskretes Anfangswertproblem* (siehe z.B. Gleichung (4.3)) das durch eine geeignete Diskretisierung in Zeitrichtung in ein algebraisches Problem übergeführt wird. Man spricht auch von ‘Semi–Diskretisierungstechnik’. Meist kommt dabei für die Zeitrichtung eine Diskretisierungsstrategie in Form eines Finite–Differenzen–Verfahrens zum Einsatz. Die Lösungsverfahren in Zeitrichtung werden auch als *direkte Zeitintegrationsverfahren* bezeichnet. Eine Übersicht zu solchen Zeitintegrationsverfahren findet man in den Büchern von Hairer et al. (1993), (1996), Hughes (1987b), Wood (1990) und Zienkiewicz und Taylor (1991).

Bemerkungen zur Wahl der Verfahren

In dieser Arbeit kommen ausschließlich sequentielle Diskretisierungsverfahren zur Anwendung; unter anderem deshalb, weil ein einheitliches Konzept zur Diskretisierung der Strömung

und der Struktur verwendet werden soll. In der Strukturdynamik dominieren durch ihre spezifischen Vorteile semi-diskrete Ansätze; somit empfiehlt sich dieser Ansatz auch für den Strömungsbereich. Sogar die oben als ‘Promoter’ simultaner Konzepte angeführte Gruppe um T.E. Tezduyar wendet in neueren Arbeiten über FSI wieder sequentielle Verfahren an; dort werden jetzt auch einfache flexible Strukturen berücksichtigt. Darüberhinaus handelt es sich bei diesen gekoppelten Problemstellungen oft um sehr große Systeme, weshalb die oben geschilderten Nachteile simultaner Ansätze besonders stark zum Tragen kommen. Ein weiterer Vorteil der sequentiellen Diskretisierung ist, daß auf äußerst umfangreiche Kenntnisse und hochentwickelte Verfahren der ‘ODE-community’ zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen bzw. differential-algebraischer Gleichungssysteme zurückgegriffen werden kann. In den Büchern von Hairer et al. (1993), (1996) finden sich eine große Anzahl nützlicher Hinweise, die im Folgenden bei der Lösung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes Gleichungen von Bedeutung sind.

Wie bereits erwähnt wurde, ist das DAE aus der räumlichen Diskretisierung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes Gleichungen ergebende DAE sehr steif ($\mathcal{O}(\nu h^{-2})$; Rannacher (1993)). Die Druck–Geschwindigkeits–Kopplung führt noch zu einer zusätzlichen Versteifung. Daraus ergeben sich erhöhte Anforderungen an die verwendeten Zeitdiskretisierungsverfahren. Damit beschränkt sich die Wahl möglicher Zeitintegrationsverfahren auf stark A–stabile bzw. zumindest ‘stiff stable’ Methoden. Weiters ist man im Normalfall auf implizite Verfahren beschränkt. Früher kamen auch explizite Verfahren zum Einsatz, meist um den Übergang zum stationären Grenzfall zu behandeln. Genaue Lösungen wirklich zeitabhängiger Strömungen wurden durch die deutlichen Stabilitätsprobleme und die erforderlichen kleinen Zeitschritte jedoch verhindert.

Einige in dieser Arbeit umgesetzten impliziten Verfahren sollen im Folgenden erläutert und diskutiert werden.

4.2.2 Voll implizite Verfahren

Einige der wohl am häufigsten verwendeten impliziten Verfahren sind das ‘Euler–Rückwärts’–(BE — ‘backward Euler’) und das Crank–Nicolson–Verfahren (CN). Beide Verfahren gehören zur Gruppe der sogenannten Einschnitt– θ –Verfahren.

Einschnitt– θ –Verfahren.

Diese Verfahren sind Teil der größeren Klasse der sogenannten *linearen Mehrschritt–Verfahren* (Hairer und Wanner (1996)). Für das einfache Modellproblem $\dot{u} = f(u, t)$ läßt sich das Einschnitt– θ –Verfahren wie folgt darstellen

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \theta f(u^{n+1}, t^{n+1}) + (1 - \theta) f(u^n, t^n); \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (4.5)$$

Je nach Wahl des θ –Parameters folgen daraus ein explizites (‘Euler vorwärts’ für $\theta = 0$) und eine Reihe von impliziten Verfahren. Spezialfälle sind das bereits angesprochene BE–Verfahren ($\theta = 1$) und das CN–Verfahren ($\theta = 1/2$). Manchmal werden auch die Fälle $\theta = 1/3$ bzw. $\theta = 2/3$ noch als sogenannte ‘Galerkin–Schemata’ bezeichnet.

Bemerkung: An dieser Stelle sei auf den engen Zusammenhang zwischen Finite–Element–Ansätzen in der Zeit und den hier besprochenen direkten Zeitintegrationsverfahren hingewie-

sen, die sich durch eine bestimmte Testfunktionenwahl daraus ableiten lassen. So entsprechen beispielsweise ‘Euler vorwärts’-, CN- und BE-Verfahren einer Punkt-Kollokation (d.h. Delta-Testfunktionen) zu den Zeitpunkten n , $n+1/2$ und $n+1$. Auch eine konstante Testfunktion über den Zeitschritt liefert, abgesehen von der rechten Seite, eine zum CN-Verfahren identische Methode.

Besondere Erwähnung verdient der Fall $\theta = 1/2$, also das Crank-Nicolson-Verfahren (CN), das auch als Trapezregel bezeichnet wird. Dieses Verfahren ist A-stabil, zeigt keine künstliche Dämpfung und besitzt eine Genauigkeit zweiter Ordnung. Entsprechend dem Dahlquist-Theorem (Hughes (1987b)) ist das die höchste Genauigkeitsordnung, die mit einem A-stabilen, linearen Mehrschritt-Verfahren erreicht werden kann. Dieses Theorem besagt auch, daß unter all diesen zweiter Ordnung genauen Methoden die Trapezregel das genaueste Verfahren darstellt.

Neben den ‘schlechten Dämpfungseigenschaften’ (Störungen, schlecht gestellte Anfangsbedingungen, usw.) werden am Crank-Nicolson-Verfahren hauptsächlich die möglicherweise auftretenden Oszillationen in der Lösung kritisiert. Eine genauere Betrachtung zeigt jedoch, daß diese Oszillationen speziell bei ‘zu großen Zeitschritten’ (oder bei schlecht gestellten Problemen durch falsche Anfangsbedingungen) auftreten. Sie können somit auch positiv, als Signal an den Programmanwender, interpretiert werden. Für fixe, also nicht adaptiv angepaßte Schrittgrößen schlagen Heywood und Rannacher (1990) zur Vermeidung von Oszillationen, speziell bei nicht-glaten Daten, eine leichte Verschiebung des CN-Verfahrens zur impliziten Seite, also eine leichte Erhöhung von θ , vor.

Bemerkung: Der Vergrößerungsfaktor für $\lambda \Delta t \rightarrow \infty$ geht für das CN-Verfahren gegen -1 , während er beispielsweise für das BE-Verfahren gegen 0 geht (Hughes (1987b)). Daraus erklärt sich auch das oszillierende Verhalten der Lösung, wenn beim CN-Verfahren ein zu großer Zeitschritt gewählt wird. Gleichzeitig macht dies auch die Dämpfungseigenschaft des BE-Verfahrens deutlich.

Ein weiteres Verfahren, das in der Literatur häufig mit dem CN-Verfahren vermischt wird, ist die *implizite Mittelpunktsregel (IMR)*

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = f\left(\frac{u^n + u^{n+1}}{2}\right) \quad (4.6)$$

als Sonderfall der allgemeineren Klasse impliziter Runge-Kutta-Verfahren. Die entsprechenden Darstellungen in der Literatur sind hier jedoch äußerst uneinheitlich, sowohl was die unterschiedlichen Bezeichnungen als auch was die Unterscheidung überhaupt betrifft. Die beiden Verfahren, CN und IMR, sind auch sehr ähnlich, jedoch nur im linearen Sonderfall identisch. Aufgrund der etwas einfacheren Umsetzung, speziell bei Verfahren mit variablen Schrittweiten, wird hier die Form (4.5) bevorzugt (Gresho und Sani (1998)).

Bemerkung: Eine weitere, sehr interessante Klasse von Verfahren stellen die Mehrschritt-Rückwärtsdifferenzen-Verfahren dar. Sie werden auch als Gear-Verfahren bezeichnet. Deren Vertreter zweiter Ordnung lautet

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{1}{3} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} + \frac{2}{3} f(u^{n+1}) \quad (4.7)$$

Dieses Verfahren ist stabiler als das CN-Verfahren und ist ebenso einfach umzusetzen, hat jedoch künstliche Dissipation. Es wird hier nur kurz angeführt, da es in der vorliegen-

den Arbeit nicht numerisch umgesetzt wurde. Gresho und Sani (1998) empfehlen es zum Einsatz als Dämpfungsschritt alle 50 bis 100 Zeitschritte innerhalb eines CN-Verfahrens mit Zeitschrittsteuerung.

Für die vorliegende Problemstellung (4.3) stellt sich die Zeitdiskretisierung mit Einschritt- θ -Verfahren wie folgt dar

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{M} + \theta \Delta t \left(\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K} \right) \right] \mathbf{u}^{n+1} + \theta \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}^{n+1} = \\ & = [\mathbf{M} - (1 - \theta) \Delta t \left(\mathbf{N}(\mathbf{u}^n) + \mathbf{K} \right)] \mathbf{u}^n - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}^n + \theta \Delta t \mathbf{F}^{n+1} + (1 - \theta) \Delta t \mathbf{F}^n \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nach den Untersuchungen von Heywood und Rannacher (1990) ist das CN-Verfahren hier von zweiter Ordnung genau in den Geschwindigkeiten und von erster Ordnung im Druck (siehe dazu auch analoge Erkenntnisse für DAE in der ODE-Literatur, z.B. Hairer und Wanner (1996)). Dies wurde in der erwähnten Arbeit unter bestimmten Regularitätsvoraussetzungen, speziell bei der Standard-Galerkin-Methode, gezeigt. Eine exakte Analysis für stabilisierte Verfahren steht noch aus. Die angeführte Genauigkeitsordnung bezieht sich auf den sogenannten lokalen Abbruchfehler. Wie Gresho und Sani (1998) feststellen, akkumuliert sich jedoch der lokale Geschwindigkeitsfehler während der Integration, so daß sich die globale Genauigkeitsordnung für die Geschwindigkeiten um eine Ordnung reduziert. Der lokale Druckfehler akkumuliert sich erfreulicherweise nicht, womit die globale Ordnung beim Druck der lokalen Ordnung entspricht. Eine Auflistung von lokalen Abbruchfehlern und globalen Fehlern für eine Vielzahl von Zeitintegrationsverfahren, wiederum für Standard-Galerkin-Methoden findet sich in Gresho und Sani (1998).

Bemerkung: Die angesprochenen lokalen Abschätzungen versagen allerdings für $t \rightarrow 0$. Es wird verschiedentlich vorgeschlagen, in Kombination mit dem CN-Verfahren in den ersten Zeitschritten einen Startalgorithmus (z.B. BE) zu verwenden, um die hoch oszillierenden Anteile zu dämpfen. Häufig wird bei nicht-glaten räumlichen Lösungen und/oder großen Zeitschritten zur Vermeidung von Oszillationen auch die Wahl eines $\theta > 0.5$ vorgeschlagen. Damit wird zwar wieder eine Dämpfungseigenschaft des Verfahrens geweckt, dies jedoch auf Kosten einer geringeren Genauigkeitsordnung.

Kurz soll auch die Behandlung des algebraischen Systems des DAE (4.2) in der hier beschriebenen Zeitdiskretisierung angesprochen werden. Hier ist, am Beispiel des CN-Verfahrens, der Variante

$$\frac{\Delta t}{2} \mathbf{G}^T (\mathbf{u}^n + \mathbf{u}^{n+1}) = \frac{\Delta t}{2} (\bar{\mathbf{F}}^n + \bar{\mathbf{F}}^{n+1}) \quad (4.9)$$

gegenüber der weiter verbreiteten Kurz-Variante $\mathbf{G}^T \mathbf{u}^{n+1} = \bar{\mathbf{F}}^{n+1}$ der Vorzug zu geben. Der Vorteil von (4.9) liegt darin, daß es mit einer oszillierenden Lösung auf einen Fehler der Divergenzfreiheit des Anfangsfeldes \mathbf{u}^0 reagiert. Im Gegensatz zu den 'üblichen' Druckoszillationen des CN-Verfahrens bei einem zu groß gewählten Zeitschritt *vergrößern* sich in diesem Fall die Oszillationen bei Verkleinerung von Δt . Sie können hier als Warnsignal an den Programmanwender dienen, die Input-Daten zu überprüfen. Bei der Kurzform werden schlechte Anfangsdaten in den ersten Zeitschritten unter Umständen so verändert, daß daraus ein gut gestelltes Problem wird; dies ist jedoch möglicherweise ein anderes als vom Programmanwender gedacht.

Entgegen der Kritik, der diese Einschritt- θ -Verfahren (speziell das CN) in der Literatur gelegentlich ausgesetzt sind, zeigen sie sich oftmals doch als gute Wahl — speziell für eine adaptive Zeitschrittsteuerung. Eine ähnliche Überzeugung bekunden auch Gresho und Sani (1998), die eine ungleich größere praktische Erfahrung besitzen.

Die Hauptargumente gegen Einschritt- θ -Verfahren sind entweder ihre geringere Genauigkeit (BE) oder ihre Neigung zu Oszillationen (CN), je nach Wahl von θ . Alternative Verfahren höherer Ordnung basieren auf (diagonal-) impliziten Runge-Kutta-Verfahren oder auf Mehrschritt-Rückwärtsdifferenzen-Verfahren (Hairer und Wanner (1996)). Wegen deren höherer Komplexität und größeren Speicheraufwand sind sie jedoch für Strömungsberechnungen nicht sehr weit verbreitet. Eine sehr interessante Alternative zu all diesen angesprochenen Möglichkeiten ist das sogenannte Zwischenschritt- θ -Verfahren.

Zwischenschritt- θ -Verfahren.

Dieses Verfahren hat dieselbe Komplexität und Genauigkeitsordnung wie das CN-Verfahren, ist im Gegensatz zu diesem jedoch *stark* A-stabil. Es besitzt weiters die volle Glättungseigenschaft von groben Anfangsdaten, neigt zu keinen Oszillationen und hat nur eine sehr geringe numerische Dissipation. Es verbindet also die Vorteile des BE- und des CN-Verfahrens. Dieses Verfahren geht für den Bereich der CFD u.a. auf Glowinski (1986) zurück. Dieser verwendete es allerdings nur in Form eines ‘Operator splitting’-Verfahrens. Als reines Zeitintegrationsverfahren wurde es u.a. von Rannacher (1993) vorgeschlagen. Eine ausführliche mathematische Analyse des Zwischenschritt- θ -Verfahrens findet sich in Müller-Urbaniak (1994).

Das Zwischenschritt- θ -Verfahren besteht aus der Aufspaltung eines ‘Makro-Zeitschrittes’ in 3 unterschiedliche Zwischenschritte, in denen jeweils ein Einschritt- θ -Verfahren mit einer angepaßten Parameterwahl und Zwischen-Zeitschritt-Größe angewendet wird. Das Verfahren in der Variante und Notation von Turek (1999) läßt sich in diesen drei Schritten darstellen

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \alpha\theta\Delta t(\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+\theta}) + \mathbf{K})]\mathbf{u}^{n+\theta} + \theta\Delta t\mathbf{G}\mathbf{p}^{n+\theta} &= & (4.10) \\ &= [\mathbf{M} - \beta\theta\Delta t(\mathbf{N}(\mathbf{u}^n) + \mathbf{K})]\mathbf{u}^n - \theta\Delta t\mathbf{F}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \beta\theta'\Delta t(\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+1-\theta}) + \mathbf{K})]\mathbf{u}^{n+1-\theta} + \theta'\Delta t\mathbf{G}\mathbf{p}^{n+1-\theta} &= & (4.11) \\ &= [\mathbf{M} - \alpha\theta'\Delta t(\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+\theta}) + \mathbf{K})]\mathbf{u}^{n+\theta} - \theta'\Delta t\mathbf{F}^{n+1-\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{M} + \alpha\theta\Delta t(\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K})]\mathbf{u}^{n+1} + \theta\Delta t\mathbf{G}\mathbf{p}^{n+1} &= & (4.12) \\ &= [\mathbf{M} - \beta\theta\Delta t(\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+1-\theta}) + \mathbf{K})]\mathbf{u}^{n+1-\theta} - \theta\Delta t\mathbf{F}^{n+1-\theta} \end{aligned}$$

Wie aus (4.10) bis (4.12) ersichtlich wird, schreitet das Verfahren über den Makro-Zeitschritt $t^n \rightarrow t^{n+1}$ hier also über die Zwischenschritte $t^n \rightarrow t^{n+\theta} \rightarrow t^{n+1-\theta} \rightarrow t^{n+1}$ fort. Die speziell gewählten Parameter für diese Zwischenschritte lauten

$$\begin{aligned} \theta &= 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} ; & \theta' &= 1 - 2\theta & (4.13) \\ \alpha &= \frac{1 - 2\theta}{1 - \theta} ; & \beta &= 1 - \alpha ; & \Rightarrow \alpha\theta &= \beta\theta' = \tilde{\theta} \end{aligned}$$

Eine theoretische Begründung für diese Parameterwahl findet sich in Müller-Urbaniak (1994). Sämtliche Anmerkungen zu den Einschritt- θ -Verfahren treffen natürlich in analoger Weise auf die einzelnen Zwischenschritte zu.

Bei genauer Betrachtung läßt sich feststellen, daß unterschiedliche Varianten des Zwischenschritt- θ -Verfahrens in der Literatur existieren. In der von Müller-Urbaniak (1994) analysierten Form wird der nichtlineare Term beispielsweise nur im mittleren Schritt (4.11) implizit behandelt. Vor allem bei höheren Reynoldszahlen empfiehlt sich jedoch eine implizite Behandlung der Nichtlinearität in jedem Zwischenschritt entsprechend der in (4.10) bis (4.12) angegebenen Formulierung. Eine weitere Unterscheidung betrifft die Auswertung der rechten Seite. Die Analyse in Müller-Urbaniak (1994) zeigt, daß die ursprünglich vorgeschlagene Auswertung mit $\theta\Delta t \mathbf{F}^{n+\theta}$, $\theta'\Delta t \mathbf{F}^{n+1-\theta}$ und $\theta\Delta t \mathbf{F}^{n+1}$ nicht von zweiter Ordnung ist. Die etwas aufwendigere, im Sinne der Analogie zu (4.8) konsistente Auswertung

$$(I) : \quad \alpha\theta\Delta t\mathbf{F}^{n+\theta} + \beta\theta\Delta t\mathbf{F}^n \quad (4.14)$$

$$(II) : \quad \beta\theta'\Delta t\mathbf{F}^{n+1-\theta} + \alpha\theta'\Delta t\mathbf{F}^{n+\theta}$$

$$(III) : \quad \alpha\theta\Delta t\mathbf{F}^{n+1} + \beta\theta\Delta t\mathbf{F}^{n+1-\theta}$$

zeigte sich von zweiter Ordnung genau und mit einer geringeren Fehlerkonstanten behaftet als alternative Auswertungen von ebenfalls zweiter Ordnung.

Das Zwischenschritt- θ -Verfahren stellt sicherlich ein sehr interessantes Verfahren dar, speziell für eine theoretische Analyse. Es soll aber auch angemerkt werden, daß sich in den numerischen Untersuchungen ein 'intelligentes' Einschritt- θ -Verfahren auch in diesem Vergleich sehr wohl als konkurrenzfähig erweist.

Bemerkungen zur Druckbehandlung

Sowohl für das Ein- als auch für das Zwischenschritt- θ -Verfahren ist noch die Frage der Behandlung des Druckes in der Zeitdiskretisierung anzusprechen. In der Literatur finden sich dazu unterschiedliche Möglichkeiten. Bereits aus dem Vergleich von (4.8) mit (4.10) werden zwei dieser unterschiedlichen Ansätze erkennbar.

Im ersten Konzept wird die Druckbehandlung 'algorithmisch konsistent' in die jeweilige Zeitdiskretisierung eingebunden (Cuvelier et al. (1986), Gresho und Sani (1998)). Für das Einschritt- θ -Verfahren bedeutet dies, vereinfachend ausgedrückt in der ursprünglichen starken Formulierung,

$$\theta\Delta t\nabla\mathbf{p}^{n+1} + (1-\theta)\Delta t\nabla\mathbf{p}^n \quad (4.15)$$

Im Gegensatz dazu wird der Druck im zweiten Konzept gewissermaßen nur als Lagrange-Multiplikator angesehen, der die Inkompressibilität erzwingt. In diesem Fall wird er analog zu (4.15) als $\Delta t\nabla\mathbf{p}$ bzw. genauer als $\Delta t\nabla\mathbf{p}^{n+\theta}$, nur auf der linken Gleichungsseite eingesetzt (Simo et al. (1995), Turek (1996)). Wird die Variante (4.15) bevorzugt, so ist zu beachten, daß für die Simulation außer für das BE-Verfahren ein Anfangsdruckfeld \mathbf{p}^0 erforderlich ist. Dieses Feld muß natürlich wiederum mit dem Anfangsgeschwindigkeitsfeld \mathbf{u}^0 kompatibel sein. Eine Kompatibilitätsforderung folgt dabei aus der Differentiation und Umformung von (4.1) und (4.2) zu

$$\mathbf{G}^T\mathbf{M}^{-1}\mathbf{G}\mathbf{p}^0 = \mathbf{G}^T\mathbf{M}\left(\mathbf{F} - \left[\mathbf{K} + \mathbf{N}(\mathbf{u}^0)\right]\mathbf{u}^0\right) - \dot{\bar{\mathbf{F}}} \quad (4.16)$$

Für den Fall, daß auf die Ermittlung des Anfangsdruckfeldes bei der Formulierung (4.15) verzichtet oder mit 'schlechten' Anfangsbedingungen gerechnet werden soll, wird verschie-

dentlich (Cuvelier et al. (1986)) die Verwendung eines BE-Verfahrens mit seinen starken Dämpfungseigenschaften in den ersten Zeitschritten vorgeschlagen. Die Notwendigkeit der Ermittlung eines Anfangsdruckfeldes sollte jedoch nicht nur als zusätzlicher Aufwand und somit als Nachteil angesehen werden. Es kann vielmehr auch zur Kontrolle der Anfangsbedingungen dienen und somit helfen, die oftmals nicht einfach zu beantwortende Frage nach der Richtigkeit der Angaben und ‘guten Gestelltheit’ des Problems zu beantworten.

Analoge Aussagen zur Druckbehandlung bei der Zeitdiskretisierung gelten auch für die im Folgenden behandelte Klasse von Verfahren.

4.2.3 Semi-implizite Ein- und Mehrschrittverfahren

Diese Gruppe von Verfahren wurde vor allem von Simo und Armero (1994) propagiert (Simo et al. (1995)). Die zu Grunde liegende Idee wurde schon viel früher, wahrscheinlich in den Sechziger-Jahren von Temam entdeckt (Gresho und Sani (1998)). In den Arbeiten der Gruppe um Simo finden sich jedoch eine sehr interessante Darstellung und eingehende Untersuchungen einer ganzen Klasse solcher Verfahren.

Das Prinzip dieser semi-impliziten Verfahren läßt sich an der algorithmischen Behandlung des nichtlinearen Termes (z.B. aus Gleichung (4.3)) zeigen

$$N(\mathbf{u})\mathbf{u} \rightarrow N(\mathbf{u}^{n+\gamma})\mathbf{u}^{n+\theta} \quad (4.17)$$

Es wird ersichtlich, daß die im nichtlinearen Term enthaltenen Geschwindigkeitsfelder unterschiedlich approximiert werden. Darin entspricht die Größe $\mathbf{u}^{n+\theta}$ der Zeitdiskretisierung im Sinne eines Einschritt- θ -Verfahrens.

$$\mathbf{u}^{n+\theta} := \theta\mathbf{u}^{n+1} + (1-\theta)\mathbf{u}^n ; \quad \text{mit } \theta \in [0, 1] \quad (4.18)$$

Analog werden auch die restlichen linearen Terme der Ausgangsgleichung zeitdiskretisiert. Im Gegensatz dazu wird die verbleibende Größe des nichtlinearen Termes unabhängig davon approximiert. Die angesprochene allgemeine Klasse von Verfahren folgt aus einer Approximation entsprechend

$$\mathbf{u}^{n+\gamma} := \begin{cases} \gamma\mathbf{u}^{n+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}^n ; & \gamma \geq 0 \\ \gamma\mathbf{u}^{n-1} + (1-\gamma)\mathbf{u}^n ; & \gamma < 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

Aus diesen Ausführungen wird bei genauer Betrachtung klar, daß es sich für den Fall

$\gamma \leq 0$ um *lineare Verfahren* und für den Fall

$\gamma > 0$ um *nichtlineare Verfahren*

handelt. Besonderes Augenmerk liegt hier naturgemäß auf den linearen Vertretern dieser Gruppe, da hier auf die sonst notwendige und teils aufwendige weitere algorithmische Behandlung der Nichtlinearitäten verzichtet werden kann. Solche linearen Verfahren resultieren aus der Tatsache, daß eines der beiden Geschwindigkeitsfelder rein aus bekannten Größen approximiert wird; \mathbf{u}^{n+1} hat in diesem Fall auf die Ermittlung von $\mathbf{u}^{n+\gamma}$ keinen Einfluß. Diese interessante Sub-Klasse läßt sich auch als eine Art *Linearisierung durch eine Extrapolation in der Zeit* deuten. Die Linearisierung ist also quasi in der Zeitdiskretisierung enthalten. Beispielsweise liefert die ($\gamma = 0, \theta = 1$)-Variante exakt dasselbe Verfahren wie die Kombination eines

BE-Verfahrens mit jeweils einem Schritt einer Fixpunktiteration pro Zeitschritt. Sämtliche Varianten mit $\gamma < 0$ definieren außerdem sogenannte *Zweischritt-Verfahren*, da die Lösungen der zwei zurückliegenden Zeitschritte in die Berechnung eingehen. Daraus wird auch offensichtlich, daß diese Verfahren ein Einschritt-Verfahren als Startalgorithmus benötigen.

Ausführliche theoretische und numerische Untersuchungen, u.a. auch zum Langzeitverhalten dieser Verfahren, bei den inkompressiblen Euler- und Navier-Stokes-Gleichungen finden sich in Simo und Armero (1994). Diese Untersuchungen weisen auf günstige Stabilitäts- und Dissipationseigenschaften bei guter Genauigkeit der linearen Verfahren hin. Wird zusätzlich auch die Effizienz dieser Verfahren im Vergleich zu nichtlinearen Verfahren berücksichtigt, stellen sie vor allem für Langzeitsimulationen attraktive Algorithmusvarianten dar.

Tabelle 4.1 faßt die Eigenschaften einzelner, ausgewählter Verfahren dieser Gruppe zusammen,

Verfahren	<i>Lineare Verfahren</i> $\rightarrow \gamma \leq 0$	<i>Nichtlineare Verfahren</i> $\rightarrow \gamma > 0$
erster Ordnung	$\gamma = 0, \theta = 1$ $\gamma = 0, \theta = 0.5$	$\gamma = 1, \theta = 1$
zweiter Ordnung	$\gamma = -0.5, \theta = 0.5$	$\gamma = 0.5, \theta = 0.5$

Tabelle 4.1 Übersicht über unbedingt stabile semi-implizite Verfahren

die sich bei einer entsprechenden Parameterwahl für θ und γ ergeben. Das Verfahren mit $\gamma = -0.5$ und $\theta = 0.5$ läßt sich als attraktivstes Verfahren identifizieren und kann gut mit einem $(\gamma = 0, \theta = 1)$ -Verfahren als Startprozedur kombiniert werden.

Ausgehend von Gleichung (4.3) und analog zu Gleichung (4.8) folgt die Darstellung der semi-impliziten Ein- und Mehrschrittverfahren als

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{M} + \theta \Delta t (\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+\gamma}) + \mathbf{K})] \mathbf{u}^{n+1} + \theta \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}^{n+1} &= & (4.20) \\
 = [\mathbf{M} - (1 - \theta) \Delta t (\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+\gamma}) + \mathbf{K})] \mathbf{u}^n - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}^n + \theta \Delta t \mathbf{F}^{n+1} + (1 - \theta) \Delta t \mathbf{F}^n
 \end{aligned}$$

Bemerkung: Der angewandte ‘Trick’ funktioniert im strengen Sinne nur für strikt schief-symmetrische Operatoren $\mathbf{N}(\mathbf{u})\mathbf{u}$ (siehe beispielsweise die schiefsymmetrische Form des Konvektionsterms in Kapitel 2.3.2), da nur so die Stabilität der Zeitintegration erhalten bleibt. Eine strikte Schief-Symmetrie ist allerdings nur für reine Dirichlet-Probleme wirklich gewährleistet. In einer Bemerkung in Gresho und Sani (1998) (Kap. 3.16.4) findet sich ein Hinweis, wie Simo und Armero (1994) durch eine Verletzung der Schief-Symmetrie auch für andere Randbedingungen ‘schöne’ und stabile Lösungen erhalten haben.

4.2.4 Semi-explizite Verfahren

Als letzte Klasse von Verfahren sollen noch sogenannte semi-explizite Verfahren angeführt werden, einerseits, da diese Verfahren mitunter sehr populär sind und in vielen Arbeiten Verwendung finden, und andererseits, da sie gewissermaßen den weitest möglichen Schritt in Richtung expliziter Zeitintegrationsverfahren für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen darstellen. Der grundlegende Ansatz basiert auf einem Prädiktor-Multikorrekter-Ansatz (Hughes (1987b) oder Shakib (1988)) und geht in der folgenden Form auf Brooks und Hughes (1982) zurück, die ihn auf die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen anwen-

den. Beispiele für die Vielzahl an Arbeiten, in denen dieser Ansatz aufgegriffen wurde, sind Franca und Frey (1992) oder Tezduyar et al. (1992c) und im Zusammenhang mit Fluid–Struktur–Interaktions–Problemen Nomura und Hughes (1992).

Ausgehend von den Gleichungen (3.92) und (3.93) soll das Prinzip dieser Verfahren hier nur schematisch skizziert werden. Nach Anwendung einer Einschnitt– θ –Zeitdiskretisierung auf die Gleichungen (3.92) und (3.93) lassen sich diese in den Beschleunigungen \mathbf{a} in einer inkrementellen Form vereinfacht darstellen als

$$\mathbf{M}^* \Delta \mathbf{a}_i + \mathbf{G}^* \Delta \mathbf{p}_i = \mathbf{R}_i \quad (4.21)$$

$$\bar{\mathbf{M}}^* \Delta \mathbf{a}_i + \bar{\mathbf{G}}^* \Delta \mathbf{p}_i = \bar{\mathbf{R}}_i \quad (4.22)$$

Darin bedeuten beispielhaft

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M} + \theta \Delta t \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{a}_i + \frac{\partial N(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{p}_i \right) \quad (4.23)$$

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{F} - \mathbf{M} \mathbf{a}_i - \mathbf{K} \mathbf{u}_i - N(\mathbf{u}_i) \mathbf{u}_i - \mathbf{G} \mathbf{p}_i \quad (4.24)$$

Die restlichen Ausdrücke ergeben sich in analoger Form. Die Grundidee des Verfahrens beruht nun auf einer Art ‘Operator splitting’, wobei die Geschwindigkeiten in der Impulsgleichung *explizit*, der Druck hingegen *implizit* behandelt werden. Daraus folgen mit einigen kleineren, zusätzlichen Vereinfachungen, wie sie z.B. auch in Tezduyar et al. (1992c) zu finden sind, die Matrizen der Gleichungen (4.21) und (4.22)

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_L ; \quad \mathbf{G}^* = -\mathbf{G} ; \quad \bar{\mathbf{M}}^* = \theta \Delta t \mathbf{G}^T ; \quad \bar{\mathbf{G}}^* = \bar{\mathbf{G}}^T \quad (4.25)$$

Die Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{G} bezeichnen hier die entsprechenden Standard–Galerkin–Anteile aus (3.83) bis (3.90). \mathbf{M}_L bezeichnet die ‘lumped’ Version von \mathbf{M} . Der einzige Stabilisierungsbeitrag auf der linken Gleichungsseite findet sich somit in der Matrix $\bar{\mathbf{G}}^*$, die sämtliche Anteile der entsprechenden Matrix in Gleichung (3.93) enthält. Die Auswirkungen der getroffenen Annahmen auf die Reduktion des numerischen Aufwandes zeigt sich in der folgenden alternativen Darstellung des zu lösenden Gleichungssystems

$$\left[\bar{\mathbf{G}}^* - \bar{\mathbf{M}}^* \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{G}^* \right] \Delta \mathbf{p}_i = \bar{\mathbf{R}}_i - \bar{\mathbf{M}}^* \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{R}_i \quad (4.26)$$

$$\Delta \mathbf{a}_i = \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{R}_i - \mathbf{M}^{*-1} \mathbf{G}^* \Delta \mathbf{p}_i \quad (4.27)$$

Nachdem die Matrix \mathbf{M}^* nun eine Diagonalmatrix ist und somit deren Inverse einfach zu ermitteln ist, verbleibt ein zu lösendes Gleichungssystem mit der Größe der Anzahl der Druckunbekannten. Die Ähnlichkeit des Verfahrens in der Form (4.26), (4.27) zu einem Uzawa–Algorithmus bzw. zu Projektionsverfahren (Anhang A1.5) zeigt den mitunter fließenden Übergang zwischen gekoppelten und entkoppelten Lösungsverfahren.

Zur Lösung innerhalb eines Zeitschrittes wird das Gleichungssystem (4.21), (4.22) bzw. (4.26), (4.27) dann im Sinne eines Prädiktor–(Multi–)Korrektor–Verfahrens durchlaufen, wobei nach jedem Durchlauf die kinematischen Größen entsprechend aktualisiert werden. Im Normalfall werden dabei ohne Abfrage einer Konvergenz 2 bis 3 Iterationen pro Zeitschritt ausgeführt.

Bemerkung: Verfahren, die hier als *semi–explizit* bezeichnet werden, sind mitunter auch nur unter der Bezeichnung *explizit* zu finden. Die entsprechenden Autoren halten die *immer*

notwendige implizite Behandlung des Druckes nicht mehr für erwähnenswert. Da in der Literatur aber auch noch rein explizite Verfahren zu finden sind, wird hier auf die exakte Bezeichnungsweise zurückgegriffen.

4.2.5 Adaptive Schrittweitenanpassung

Ausgereifte adaptive Finite-Element-Verfahren mit einer quantitativen Fehlerkontrolle unter Berücksichtigung sowohl des räumlichen als auch des zeitlichen Fehlers stehen für einen weiten Teil der CFD noch aus (Johnson et al. (1995)). Die in instationären CFD-Simulationen auftretenden komplexen Strömungsphänomene einerseits und die Sensibilität existierender Zeitintegrationsverfahren bezüglich der korrekten Wahl der Zeitschrittgröße andererseits verlangen jedoch nach einer intelligenten Zeitschrittwahl. So sollte beispielsweise aus den bisherigen Ausführungen klar geworden sein, daß die Frage, ob das CN-Verfahren ein gutes oder ein schlechtes Zeitintegrationsverfahren für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen darstellt, sehr stark von der weiteren Frage abhängt, ob die jeweils ‘richtige’ Zeitschrittgröße gewählt wurde. Da eine richtige Zeitschrittgröße jedoch nur in den seltensten Fällen vor Beginn einer Simulation feststeht, sollten ‘intelligente’ Algorithmen (Abschnitt 4.4.1) die Zeitschrittgröße an die ‘Physik’, d.h. die aktuell auftretenden Strömungsphänomene, anpassen.

Ziel der zu entwickelnden Verfahren soll es also sein, den jeweiligen Zeitschritt Δt so zu wählen, daß

$$\| \mathbf{u}_{\text{exakt}} - \mathbf{u}_{\text{approx.}} \| \leq \epsilon \cdot u_{\text{char}} \quad (4.28)$$

erfüllt ist. Hierin bedeutet ϵ die dimensionslose Relativfehler-Toleranz und u_{char} einen charakteristischen Lösungswert. u_{char} kann beispielsweise ein passendes Maß der maximalen Geschwindigkeit, die Geschwindigkeitsnorm $\| \mathbf{u} \|$ oder eine andere, vom Benutzer vorgegebene Größe sein. Anstatt der direkten Verwendung der Geschwindigkeitswerte kann in Gleichung (4.28) auch der ‘Fehler’ in besonders interessanten lokalen Größen (Strömungswiderstand, Auftrieb, usw.) Verwendung finden (Turek (1999)). Dazu muß die Norm in (4.28) durch eine entsprechend gewählte Norm $\| J(\mathbf{u}_{\text{exakt}}) - J(\mathbf{u}_{\text{approx.}}) \|$ ersetzt werden, wobei $J(\mathbf{u})$ den Ausdruck für die jeweilige lokale Größe darstellt. Dabei sollte jedoch sichergestellt werden, daß nicht nur Größen mit phasenweise sehr kleinen Werten verwendet werden. In diesem Zusammenhang empfiehlt sich die Berücksichtigung mehrerer Größen, wobei am besten die in (4.28) angeführte Geschwindigkeitsnorm mit einbezogen wird. Bedingt durch die besondere Rolle des Druckes bei der Zeitdiskretisierung der vorliegenden Problemstellung basiert die vorgeschlagene Schrittweitensteuerung rein auf der Geschwindigkeitslösung.

Die zu Grunde liegenden Ideen der Verfahren werden im Folgenden an skalaren Gleichungen dargestellt und werden dann bei den in Kapitel 4.4.1 vorgestellten Algorithmen zur Lösung der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen angewendet.

Grundlagen

Im Folgenden werden einige Grundlagen für mögliche Algorithmen zur Zeitschrittweitenanpassung bereitgestellt. Ausführliche Darstellungen zu dieser Thematik finden sich in der Spezialliteratur für ODE bzw. DAE (Hairer et al. (1993)).

Zunächst sollen dazu die unterschiedlichen Fehlerbegriffe für Zeitintegrationsverfahren geklärt werden. Der *lokale Fehler* (bzw. *Einschrittfehler*) l^{n+1} eines Zeitschrittverfahrens ist der in

einem Schritt $t^n \rightarrow t^{n+1} = t^n + \Delta t$ entstehende Fehler, wenn für die Durchführung des Integrationssschrittes zum Zeitpunkt t^n die exakte Lösung vorausgesetzt wird.

$$l^{n+1} \equiv u^{n+1} - u(t^{n+1}) = \mathcal{O}(\Delta t^{p+1}) \quad (4.29)$$

$u(t^{n+1})$ stellt dabei die exakte Lösung und u^{n+1} die approximierte Lösung zum Zeitpunkt t^{n+1} dar. Variiert der in Gleichung (4.29) definierte lokale Fehler entsprechend $\mathcal{O}(\Delta t^{p+1})$, so spricht man von einem *Verfahren p -ter Ordnung*.

Der *lokale Abbruchfehler d^{n+1}* , der auch als lokaler Diskretisierungsfehler bezeichnet wird, stellt im Vergleich dazu jene Abweichung dar, um welche die exakte Lösungsfunktion die jeweilige Integrationsvorschrift in einem Schritt $t^n \rightarrow t^{n+1}$ nicht erfüllt. Es handelt sich dabei also um das entsprechende Residuum, wenn in sämtliche Terme der Integrationsvorschrift die exakte Lösung eingesetzt wird. Für explizite Verfahren ist diese Größe natürlich mit dem lokalen Fehler identisch.

Der *globale Fehler e^{n+1}*

$$e^{n+1} \equiv u^{n+1} - u(t^{n+1}) = \mathcal{O}(\Delta t^p) \quad (4.30)$$

stellt den tatsächlichen Fehler der approximierten Lösung zum Zeitpunkt t^{n+1} dar. Er beinhaltet also die Akkumulation der einzelnen lokalen Fehler. Dadurch ist er im allgemeinen auch größer als der lokale Fehler und zwar üblicherweise um eine Ordnung in Δt (Hairer et al. (1993)). Somit folgt für ein Verfahren p -ter Ordnung im Normalfall ein globaler Fehler entsprechend $\mathcal{O}(\Delta t^p)$.

Übliche Fehlerschätzungen gehen davon aus, daß sich der globale Fehler mittels der Summe der lokalen Abbruchfehler abschätzen läßt; abgesehen von den involvierten Konstanten ist somit

$$e^n \leq \sum_{m \leq n} d^m \quad (4.31)$$

Die ‘error per step’-Methode, die sich im Vergleich zur zweiten möglichen Variante, der ‘error per unit step’-Methode, nicht nur als dimensionskonsistent sondern auch als entscheidend besser erweist, setzt dann zur Abschätzung der Zeitschrittgröße auf eine lokale Fehlertoleranz, die vom jeweiligen lokalen Abbruchfehler nicht überschritten werden darf (siehe dazu und zu alternativen Abschätzungen Johnson (1988)).

Die im Folgenden präsentierten Ansätze gründen auf einfachen theoretischen Überlegungen und beinhalten einige heuristische Annahmen, liefern in numerischen Experimenten jedoch durchaus praktikable Ergebnisse. Solche numerische Untersuchungen wurden aufbauend auf den hier vorliegenden Ausführungen in Bornemann (1999) durchgeführt. In dieser Arbeit finden sich auch eine ausführlichere Darstellung der Grundlagen sowie weitere Verfahrensvarianten. Natürlich handelt es sich in den vorgestellten Ansätzen nur um *Fehlerindikatoren* und keine Fehlerschätzer, die die Grundlage zur Ermittlung der erforderlichen Zeitschrittgröße bilden. Eine wesentliche Voraussetzung für die folgenden Ideen und Verfahren zur Zeitschrittsteuerung ist, daß die Wahl von Δt nur von der gewünschten Genauigkeit und nicht oder kaum von Stabilitätsfragen abhängt. Sie benötigen somit für die hier vorliegenden Problemstellungen für die Simulation inkompressibler Strömungen implizite Verfahren, die A-stabil oder zumin-

dest ‘stiff–stable’ sind. Eine weitere wesentliche Voraussetzung betrifft die Kenntnis der tatsächlichen Ordnung des eingesetzten Integrationsverfahrens.

Einfache, rein implizite Zeitschrittsteuerung

Der erste Ansatz nutzt im Sinne einer *Richardson–Extrapolation* das bekannte Verhalten des Fehlers als Funktion von Δt . Einen analogen Ansatz verwendet auch Turek (1999) als Grundlage zur Zeitschrittsteuerung. Der globale Fehler eines Zeitintegrationsverfahrens p -ter Ordnung besitzt unter bestimmten Voraussetzungen eine asymptotische Entwicklung der Form (Hairer et al. (1993))

$$e^{n+1} = u^{n+1} - u(t^{n+1}) \approx \hat{e}(u)\Delta t^p + HOT \quad (4.32)$$

wobei der Fehlerterm $\hat{e}(u)$ als unabhängig von Δt angenommen wird. Für die folgenden Ableitungen wird der Einfachheit halber $u(t^{n+1})$ mit u und die Lösung zum Zeitpunkt t^{n+1} , die mit dem Zeitschritt Δt erhalten wurde, mit $u_{\Delta t}$ bezeichnet.

Wird nun mit einem Zeitintegrationsverfahren zweiter Ordnung (z.B. Crank–Nicolson) von $t^n \rightarrow t^{n+1}$ sowohl in zwei Schritten mit einer Schrittweite von Δt als auch in einem Schritt mit einer Schrittweite von $\Delta \tilde{t} = 2\Delta t$ integriert, so folgt für die entsprechenden Fehler

$$u - u_{\Delta t} \approx \hat{e}(u) \Delta t^2 + HOT \quad (4.33)$$

sowie

$$u - u_{2\Delta t} \approx \hat{e}(u) \Delta \tilde{t}^2 + HOT = 4 \hat{e}(u) \Delta t^2 + HOT \quad (4.34)$$

Unter Vernachlässigung der unterschiedlich großen Terme höherer Ordnung läßt sich aus diesen beiden Gleichungen die exakte Lösung u eliminieren, und der Fehlerterm $\hat{e}(u)$ wird mit

$$\hat{e}(u) \approx \frac{u_{\Delta t} - u_{2\Delta t}}{3 \Delta t^2} \quad (4.35)$$

ermittelt. Da dieser Fehlerterm unabhängig von der Zeitschrittweite ist, folgt als Bedingung für die neue Schrittweite Δt^{neu} oder Δt^{n+1}

$$u - u_{\Delta t^{neu}} \approx \frac{u_{\Delta t} - u_{2\Delta t}}{3 \Delta t^2} \Delta t^{neu2} \leq \epsilon \cdot u_{char} \quad (4.36)$$

Somit läßt sich die erforderliche neue Zeitschrittgröße einfach abschätzen.

$$\Delta t^{neu} = \Delta t \sqrt[3]{3 \epsilon \frac{u_{char}}{u_{\Delta t} - u_{2\Delta t}}} \quad (4.37)$$

Analoge Ableitungen können auch für andere Zeitintegrationsordnungen angestellt werden. Mit der Ordnung p des jeweiligen Zeitintegrationsverfahrens folgt analog zu (4.37) zur Abschätzung der Zeitschrittgröße

$$\Delta t^{neu} = \Delta t \left[(2^p - 1) \cdot \epsilon \cdot \frac{u_{char}}{u_{\Delta t} - u_{2\Delta t}} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (4.38)$$

Ähnliche Ableitungen, die sich auf den *lokalen Abbruchfehler* beziehen, liefern einen zu Gleichung (4.38) analogen Ausdruck, in dem nur die Potenz der Klammer von $1/p$ auf $1/(p + 1)$ verändert werden muß.

Bemerkung: Findet das Zwischenschritt- θ -Verfahren (Abschnitt 4.2.2) Anwendung, so bietet sich natürlich die Kombination aus einem Makro-Zeitschritt und *drei* Unter-Zeitschritten an. Die Ableitungen hierfür folgen analog aus den angegebenen Überlegungen, da auch das Zwischenschritt- θ -Verfahren über die erforderlichen drei Zwischenschritte eine Genauigkeit zweiter Ordnung besitzt (Turek (1996)).

Gemischte, explizit/implizite Zeitschrittsteuerung

Um den hohen numerischen Lösungsaufwand, der durch die *zusätzlich* notwendige implizite Lösung entsteht, zu vermeiden bzw. zu verkleinern, kann auch ein Ansatz mit deutlich geringerem Rechenaufwand zur Zeitschrittsteuerung gewählt werden. Der Trick in diesem Ansatz besteht darin, ein explizites Verfahren als eine Art Prädiktor zur Abschätzung des lokalen Abbruchfehlers des impliziten Verfahrens zu verwenden (Gresho und Sani (1998)). Dieser Ansatz soll hier wiederum für das CN-Verfahren gezeigt werden. Als explizites Pendant bietet sich in diesem Fall das Adams-Bashford-Verfahren zweiter Ordnung AB2 (Hairer und Wanner (1996)) an.

Eine Art Prädiktor \tilde{u}^{n+1} der AB2-Methode

$$\tilde{u}^{n+1} = u^n + \Delta t^n \dot{u}^n + \frac{\Delta t^{n2}}{2} \left(\frac{\dot{u}^n - \dot{u}^{n-1}}{\Delta t^{n-1}} \right) \quad (4.39)$$

bei variabler Schrittweite Δt besitzt den lokalen Abbruchfehler

$$\tilde{u}^{n+1} - u(t^{n+1}) = - \left(2 + \frac{3\Delta t^{n-1}}{\Delta t^n} \right) \frac{\Delta t^{n3} u^{III,n}}{12} + \mathcal{O}(\Delta t^{n4}) \quad (4.40)$$

Aus der Kenntnis des lokalen Abbruchfehlers des CN-Verfahrens

$$d^n = \frac{1}{12} \Delta t^{n3} u^{III,n} + \mathcal{O}(\Delta t^{n4}) \quad (4.41)$$

lassen sich dann die Unbekannten $u(t^{n+1})$ und $u^{III,n}$ eliminieren; $u^{III,n}$ ist die dritte Zeitableitung von u^n . Daraus läßt sich schließlich der lokale Fehler eines CN-Schrittes bis auf eine Ordnung $\mathcal{O}(\Delta t^{n4})$ genau durch

$$d^n = u^{n+1} - u(t^{n+1}) \cong \frac{u^{n+1} - \tilde{u}^{n+1}}{3(1 + \Delta t^{n-1}/\Delta t^n)} \quad (4.42)$$

ermitteln. Um für den nächsten CN-Schritt dann die Bedingung $|d^{n+1}| \leq \epsilon \cdot u_{char}$ erfüllen zu können, folgt als Bedingung für den nächsten Zeitschritt

$$\Delta t^{neu} = \Delta t^{n+1} = \Delta t^n \left[\frac{\epsilon \cdot u_{char}}{|d^n|} \right]^{1/3} \quad (4.43)$$

Ähnliche Verfahren lassen sich auch für andere implizite Integrationsmethoden entwickeln, in dem diesen ein Prädiktor eines expliziten Verfahrens entsprechender Ordnung zur Seite gestellt wird (z.B. Kombination aus Rückwärts- und Vorwärts-Euler-Verfahren).

Algorithmische Anmerkungen

In beiden Ansätzen ist es möglich, die bei der Zeitschrittsteuerung zusätzlich erhaltene Information zu nützen, um eine weiter verbesserte Lösung zu erhalten. Dazu muß nur der abgeschätzte

Fehler zur erzielten Lösung hinzuaddiert werden. Dies läßt sich wieder als Bestimmung einer verbesserten Lösung \hat{u} mittels Richardson–Extrapolation darstellen, beispielsweise für das einfache, rein implizite Verfahren

$$\hat{u} = u_{2\Delta t} + \frac{u_{2\Delta t} - u_{\Delta t}}{2^p - 1} \quad (4.44)$$

Die dabei erzielte Approximationsordnung ist dann um eine Ordnung höher, also $p + 1$. In Kombination mit der Verwendung des CN–Verfahrens folgt somit ein Verfahren dritter Ordnung. Allerdings muß man sich im klaren sein, daß damit auch die garantierten Eigenschaften eines Zeitintegrationsverfahrens (z.B. A–Stabilität) zerstört werden können. Um kein Risiko einzugehen, sollte auf die Verwendung der verbesserten Lösungen für die weiteren Integrations Schritte verzichtet werden (Gresho und Sani (1998)). Eine Verwendung dieser verbesserten Lösung \hat{u} zur Ergebnisauswertung ist jedoch in jedem Fall sinnvoll.

Abschließend sollen noch einige Hinweise gegeben werden, die bei jeder adaptiven Zeitschrittanpassung in die Überlegungen mit einbezogen werden sollten (Gresho und Sani (1998)):

- Wenn eine drastische Reduktion des Zeitschrittes vorgeschlagen wird ($\Delta t_{n+1}/\Delta t_n \ll 1$) sollte ein Warnhinweis den Benutzer auffordern, die Ursache hierfür genauer zu untersuchen.
- Ergibt sich eine Verkleinerung des Zeitschrittes unter ca. 80% des bisherigen Wertes, sollte der letzte Zeitschritt mit diesem neuen Δt wiederholt werden.
- Ergibt sich nur eine geringfügige Verkleinerung oder eine Vergrößerung des Zeitschrittes, ist mit diesem neuen Δt weiterzurechnen.
- Aus Sicherheitsgründen sollte auch eine zu starke Vergrößerung der Zeitschrittweite Δt in einem Schritt vermieden werden (max. Faktor 2 bis 5). Je nach eingesetzten Verfahren kann hier auch eine stärkere Schranke maßgebend werden. So wird beispielsweise ein BDF2–Verfahren mit variabler Schrittweite für ein Zeitschrittverhältnis von $\Delta t_{n+1}/\Delta t_n > 1 + \sqrt{2}$ instabil (siehe auch Hairer et al. (1993) bzw. Bornemann (1999)).

Die Toleranz ϵ wird im ‘Normalfall’ in der Größenordnung $10^{-3} - 10^{-4}$ gewählt.

4.3 Linearisierung und Iterationsverfahren

4.3.1 Einleitung

Die soeben beschriebenen Zeitdiskretisierungsverfahren erzeugen aus den semi–diskreten Bewegungsgleichungen (4.3) rein algebraische Gleichungssysteme, z.B. (4.8). Für einen Großteil der diskutierten Ansätze bleiben dabei die ursprünglich enthaltenen Nichtlinearitäten (Gleichung (4.4)) erhalten. Eine Ausnahme bildet dabei eine Untergruppe der semi–impliziten Verfahren. Zur Vervollständigung der algorithmischen Behandlung der räumlich diskretisierten Erhaltungsgleichungen müssen somit noch entsprechende Verfahren auf diese Nichtlinearitäten angewendet werden. Das angestrebte Ziel führt auf lineare algebraische Gleichungssysteme, die dann mit entsprechenden Gleichungslösern (Abschnitt A3.2) gelöst werden können.

Bemerkung: Besonders bei Verwendung von speziellen, iterativen Gleichungslösern (z.B. CG, GMRES, ...) sind auch Ansätze vorstellbar, die direkt die nichtlinearen Gleichungssysteme

lösen. Bei der Aktualisierung der Lösung im Zuge der Gleichungslösungsiterationen müssen dabei ‘einfach’ auch die nichtlinearen Terme entsprechend aktualisiert werden. Allerdings erhöht eine solche Vorgehensweise die ohnehin bereits komplexen Anforderungen an Gleichungslöser. In dieser Arbeit werden solche Ansätze deswegen nicht weiter diskutiert.

Bei der in den Ausgangsgleichungen vorhandenen Nichtlinearität handelt es sich um einen konvektiven Term der Form $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Durch die eingeführten Stabilisierungsterme kommt jedoch eine Vielzahl weiterer nichtlinearer Terme hinzu. Dies wird aus den Gleichungen (3.83) bis (3.90) bzw. aus Gleichung (4.4) klar ersichtlich. Bei diesen zusätzlichen Termen kommen in weiterer Folge zwei wesentliche Annahmen zum Tragen:

- Im Verlauf einer Iteration werden die Stabilisierungsparameter $\tau(\mathbf{u})$ jeweils mit der bekannten Lösung der letzten Iteration ermittelt; sie werden in den folgenden Ausführungen als \mathbf{u}_i bezeichnet.
- Auch der konvektive Stabilisierungsterm wird mit dem Lösungswert der letzten Iteration, also als $\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{v}$, in die Gleichungen eingesetzt.

Die Konsequenz dieser Annahmen ist, daß durch die Stabilisierungsterme keine neuen Arten von Nichtlinearitäten entstehen, die mitlinearisiert werden müßten. Vielmehr gehen sie jeweils im Sinne einer sukzessiven Approximation in die Iterationen ein. Dadurch ist natürlich eine vollständig konsistente Linearisierung und somit auch eine quadratische Konvergenz entsprechender Verfahren von vornherein ausgeschlossen. Im Vergleich zu anderen Gebieten, beispielsweise der nichtlinearen Strukturmechanik, hat dies bei der vorliegenden Problemstellung vor allem im instationären Fall jedoch eine untergeordnete Bedeutung. Dies sollte auch aus den weiteren Ausführungen deutlich werden. Diesem kleinen Nachteil der beiden Annahmen steht der große Vorteil einer wesentlich vereinfachten Umsetzung und eines geringeren Rechenaufwandes bei der Erstellung der Elementmatrizen gegenüber. Auch die rechte Seite in Gleichung (4.4) ist lösungsabhängig, wodurch normalerweise Linearisierungsanteile auch in den Matrizen der linken Gleichungsseite entstehen, analog zu deformationsabhängigen Lasten in der Strukturmechanik (Mok et al. (1999a)). Da diese Lösungsabhängigkeit jedoch wiederum nur aus den Stabilisierungsanteilen kommt, entfallen durch obige Annahmen auch diese Anteile auf der linken Seite des Gleichungssystems. Leider finden sich zur algorithmischen Behandlung stabilisierter Finite-Element-Verfahren in der Literatur bislang äußerst wenige Hinweise. Vereinzelt Anmerkungen, beispielsweise in Codina (1999), scheinen jedoch die Sinnhaftigkeit obiger Annahmen zu untermauern. In Codina (1999) wird als ‘zusätzliche Vereinfachung’ auch der konvektive Term im Residuums-‘slot’ des Stabilisierungsterms als $\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_{i+1}$ ermittelt. Dadurch werden nichtlineare Stabilisierungsterme völlig vermieden.

4.3.2 Linearisierung / Gâteaux-Ableitung

Die Linearisierung der nichtlinearen, zeitdiskretisierten Gleichungen (z.B. (4.8)) kann somit ohne Verlust an Allgemeingültigkeit an folgendem Modellproblem gezeigt werden

$$N(\mathbf{u})\mathbf{u} + \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{F} \quad \rightarrow \quad \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) = \mathbf{F} - N(\mathbf{u})\mathbf{u} - \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (4.45)$$

Darin bezeichnet $N(\mathbf{u})\mathbf{u}$ die konvektive Nichtlinearität der Form $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ und $\mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ das Residuum der Modellgleichung. Ausgehend von der Annahme einer bekannten Lösung $\{\mathbf{u}_i, \mathbf{p}_i\}$

am Iterationspunkt i wird das Residuum in eine Taylorreihe um diesen Iterationspunkt entwickelt

$$\mathfrak{R}(\mathbf{u}_{i+1}, \mathbf{p}_{i+1}) = \mathfrak{R}(\mathbf{u}_i, \mathbf{p}_i) + \left. \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i + \left. \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_i} \Delta \mathbf{p}_i + HOT = \mathbf{0} \quad (4.46)$$

Durch Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung HOT entsteht das lineare Problem

$$-\left. \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i - \left. \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_i} \Delta \mathbf{p}_i = \mathfrak{R}(\mathbf{u}_i, \mathbf{p}_i) \quad (4.47)$$

in den unbekanntem Lösungskrementen $\Delta \mathbf{u}_i$ und $\Delta \mathbf{p}_i$. Die darin enthaltenen Ausdrücke $\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) / \partial \mathbf{u}$ und $\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p}) / \partial \mathbf{p}$ entsprechen den Ableitungen des Residuums in Richtung von \mathbf{u} bzw. \mathbf{p} , den sogenannten *Richtungsableitungen* von $\mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})$. Im Normalfall wird dazu die Fréchet–Differenzierbarkeit von \mathfrak{R} vorausgesetzt. Eine gängige Möglichkeit zur Ermittlung der Fréchet–Ableitung in praktischen Rechnungen stellt die *Gâteaux–Ableitung* dar, die jedoch mathematisch streng genommen nur unter bestimmten Bedingungen mit der Fréchet–Ableitung identisch ist (siehe z.B. Simo und Hughes (1998)). Die Gâteaux–Ableitung bzw. Gâteaux–Variation eines Funktionals $\Pi : V \rightarrow \mathbf{R}$ an der Stelle $\mathbf{x} \in V$ in Richtung $\mathbf{u} \in V$ ermittelt sich entsprechend

$$\delta \Pi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) := \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\Pi(\mathbf{x} + \eta \mathbf{u}) - \Pi(\mathbf{x})}{\eta} = \left. \frac{d}{d\eta} \Pi(\mathbf{x} + \eta \mathbf{u}) \right|_{\eta=0} \quad (4.48)$$

Aus dieser Rechenvorschrift läßt sich der Zusammenhang mit den oben aufgetretenen Termen in der Taylorreihenentwicklung von $\mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})$ um \mathbf{u}_i bzw. \mathbf{p}_i darstellen. Zur Vereinfachung der Darstellung wird dies beispielhaft für $\mathfrak{R}(\mathbf{u})$ um \mathbf{u}_i gezeigt

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\eta} [\mathfrak{R}(\mathbf{u}_i + \eta \Delta \mathbf{u})] \right|_{\eta=0} &= \left[\frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}_i + \eta \Delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial (\mathbf{u}_i + \eta \Delta \mathbf{u})}{\partial \eta} \right] \bigg|_{\eta=0} \\ &= \left. \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u} = D\mathfrak{R}(\mathbf{u}_i) \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Die Richtungsableitungen aus Gleichung (4.47) lauten somit

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i &= - \left. \frac{\partial N(\mathbf{u}) \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i - \mathbf{K} \Delta \mathbf{u}_i ; \\ \left. \frac{\partial \mathfrak{R}(\mathbf{u}, \mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \right|_{\mathbf{p}_i} \Delta \mathbf{p}_i &= -\mathbf{G} \Delta \mathbf{p}_i \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die darin enthaltene Gâteaux–Ableitung des oben angeführten, nichtlinearen konvektiven Terms folgt als

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial N(\mathbf{u}) \mathbf{u}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u} &= \left. \frac{d}{d\eta} [N(\mathbf{u}_i + \eta \Delta \mathbf{u})(\mathbf{u}_i + \eta \Delta \mathbf{u})] \right|_{\eta=0} \\ &= \left. \frac{d}{d\eta} [(\mathbf{u}_i + \eta \Delta \mathbf{u}) \cdot \nabla (\mathbf{u}_i + \eta \Delta \mathbf{u})] \right|_{\eta=0} \\ &= \Delta \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_i + \mathbf{u}_i \cdot \nabla (\Delta \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.51)$$

beziehungsweise in einer Formulierung in den absoluten Lösungsgrößen anstatt den Lösungsincrementen, als

$$\left. \frac{\partial N(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mathbf{u}_i} \Delta \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_{i+1} + \mathbf{u}_{i+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_i - 2\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_i \quad (4.52)$$

Die dabei auf der linken Gleichungsseite entstehenden beiden Terme, die \mathbf{u}_{i+1} beinhalten, haben einen sehr unterschiedlichen Charakter. Während es sich offensichtlich bei dem Ausdruck $\mathbf{u}_i \cdot \nabla \mathbf{u}_{i+1}$ um einen ‘konvektionsartigen’ Term handelt, entspricht $\mathbf{u}_{i+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_i$ einem ‘reaktionsartigen’ Term. Zur Unterscheidung werden sie im Folgenden gelegentlich mit N_c bzw. N_r bezeichnet. Die Bezeichnungen werden klar, wenn beachtet wird, daß \mathbf{u}_{i+1} die gesuchte Größe und somit die Unbekannte darstellt, während \mathbf{u}_i für diesen Schritt als gegeben betrachtet werden kann. Somit läßt sich der erste Term als ‘klassischer’ Konvektionsterm mit einer gegebenen transportierenden Geschwindigkeit \mathbf{u}_i identifizieren, während die Unbekannte im zweiten Fall in der ‘nullten Ableitung’ erscheint und so einem ‘klassischen’ Reaktionsterm entspricht.

4.3.3 Iterative Verfahren für inkompressible Navier–Stokes–Gleichungen

Die einzelnen Iterationsverfahren werden im Folgenden ausgehend von der Gleichung (4.8) dargestellt. Zur Vereinfachung der Darstellung wird dabei ein Großteil der durch die Zeitdiskretisierung entstandenen rechten Seite (RHS) entsprechend Gleichung (4.8) zur sogenannten ‘Zeit–RHS’ F_T^n zusammengefaßt.

$$[\mathbf{M} + \theta \Delta t (\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K})] \mathbf{u}^{n+1} + \theta \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{F}_T^n + \theta \Delta t \mathbf{F}^{n+1} \quad (4.53)$$

Bedingt durch die Lösungsabhängigkeit des Lastvektors zum neuen Zeitpunkt $n + 1$, die durch die Stabilisierung entstanden ist, wird dieser Anteil aus der ‘Zeit–RHS’ herausgenommen. Nach den getroffenen Annahmen für die Behandlung der Stabilisierungsanteile bei der Linearisierung findet diese Lösungsabhängigkeit jedoch auf der linken Seite des Gleichungssystems (LHS) keinen Niederschlag. In den folgenden Ausführungen zur Erläuterung der einzelnen Iterationsverfahren wird zur Vereinfachung der Darstellung nur die in der Standard–Galerkin–Diskretisierung vorhandene Nichtlinearität berücksichtigt. Eine detaillierte exakte Darstellung der Verfahren unter Einschluß der durch die Stabilisierungsverfahren entstandenen Nichtlinearitäten findet sich in Kapitel 4.4.1.

Fixpunktverfahren

Das einfachste iterative Verfahren ist das sogenannte Fixpunktverfahren. Alternative Bezeichnungen sind beispielsweise Picard–Iteration, Verfahren der sukzessiven Approximation oder auch Defekt–Korrektur–Methode. Die Bezeichnungen wie auch die Abgrenzungen der Verfahren sind in der Literatur nicht eindeutig, und bei einer entsprechend allgemeinen Darstellungsweise lassen sich alle im Folgenden angeführten Verfahren als Fixpunktverfahren interpretieren. In dieser Arbeit soll damit aber ausschließlich die folgende Methode bezeichnet werden.

Das Prinzip dieses linear konvergierenden Verfahrens besteht darin, daß für den aktuellen Iterationsschritt einfach die Lösung des vorhergegangenen Iterationsschrittes in den nichtlinearen Term eingesetzt wird. Nach der i -ten Iteration folgt somit als Iterationsgleichung

$$[\mathbf{M} + \theta\Delta t \mathbf{K}] \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} + \theta\Delta t \mathbf{Gp}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{F}_T^n + \theta\Delta t \mathbf{F}^{n+1} - \theta\Delta t \mathbf{N}(\mathbf{u}_i^{n+1})\mathbf{u}_i^{n+1} \quad (4.54)$$

Der offensichtliche Vorteil dieses Verfahrens ist, daß sich die linke Seite während der Iteration nicht ändert, was speziell bei Verwendung eines direkten Gleichungslösers sehr effizient erscheint. Allerdings konvergiert dieses Verfahren sehr langsam. Für höhere Reynoldszahlen divergiert es im Normalfall sogar, was aber ohne Zusatzmaßnahmen (siehe Kapitel 4.4.2) mehr oder weniger auf sämtliche hier angeführte Iterationsverfahren zutrifft. Ein Vorteil der sich bei Verwendung eines Fixpunktverfahrens ergibt, ist die sehr einfache numerische Umsetzung neuer Ansätze, da entsprechende Änderungen in den nichtlinearen Termen jeweils nur auf der rechten Seite von (4.54) zu erfolgen haben.

Newton–Verfahren

Für das Newtonsche Verfahren werden sämtliche bei der Linearisierung entstandenen Terme im Iterationsverfahren berücksichtigt. In diesem Falle heißt dies, daß sich auf der linken Seite sowohl der ‘Konvektionsterm’ N_c wie auch der ‘Reaktionsterm’ N_r wiederfinden. Die Iterationsgleichung lautet somit

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{M} + \theta\Delta t \left(N_c(\mathbf{u}_i^{n+1}) + N_r(\mathbf{u}_i^{n+1}) + \mathbf{K} \right) \right] \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} + \theta\Delta t \mathbf{Gp}_{i+1}^{n+1} &= \quad (4.55) \\ &= \mathbf{F}_T^n + \theta\Delta t \mathbf{F}^{n+1} + \theta\Delta t \mathbf{N}(\mathbf{u}_i^{n+1})\mathbf{u}_i^{n+1} \end{aligned}$$

Die normalerweise quadratische und damit bestmögliche garantierte Konvergenz des Newton–Verfahrens in der Nähe der Lösung wird hier durch die unvollständige Linearisierung nicht ganz erreicht. Ein größeres Problem stellt jedoch der teils geringe Konvergenzradius dieses Verfahrens dar. Es empfiehlt sich daher, diese Methode mit einem robusteren Iterationsverfahren für die ersten Iterationsschritte zu kombinieren. Somit kann dann einfacher die Nähe der Lösung erreicht werden, in der dann die quadratische Konvergenz des Newton–Verfahrens zum Tragen kommt. Einen Nachteil im Vergleich zum vorhergehenden Verfahren stellt die Tatsache dar, daß die linke Seite in jedem Iterationsschritt aktualisiert werden muß. Ein weiterer Nachteil sind numerische Probleme, unter anderem durch den N_r –Term, denn während die konvektionsartigen Terme stabilisiert werden (Kapitel 3), kann die Präsenz des ‘reaktionsartigen’ Termes weiterhin zu Instabilitäten führen. Im instationären Fall trifft dies vor allem bei größeren Zeitschritten zu. Bezüglich einer möglichen zusätzlichen Reaktionsstabilisierung wird auf Kapitel 3.2.7 verwiesen. All dies führte dazu, daß das Newton–Verfahren im CFD–Bereich, im Gegensatz zur Strukturmechanik, nur relativ gering verbreitet ist.

Fixpunktartiges Verfahren

Eine sehr interessante Methode mit guten numerischen Eigenschaften bei der vorliegenden Aufgabenstellung stellt das sogenannte *fixpunktartige* Verfahren dar. Es läßt sich wie oben als ein reines Fixpunktverfahren beschreiben, dessen linker Seite noch zusätzliche Informationen bezüglich der vorhandenen Nichtlinearität mitgegeben werden. Dadurch entfällt zwar der Vorteil der konstanten LHS des Fixpunktverfahrens, allerdings führt die entsprechende Zusatzinformation zu einem stark verbesserten numerischen Verhalten. Die eingebrachte Zusatzinformation besteht aus einem der bei der Gâteaux–Ableitung entstehenden LHS–Terme. Somit kann das Verfahren auch als ‘Zwischenvariante’ zwischen Fixpunktiteration und Newton–Verfahren angesehen werden.

Die Iterationsgleichung für das fixpunktartige Verfahren lautet

$$\left[\mathbf{M} + \theta \Delta t \left(\mathbf{N}_c(\mathbf{u}_i^{n+1}) + \mathbf{K} \right) \right] \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} + \theta \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{F}_T^n + \theta \Delta t \mathbf{F}^{n+1} \quad (4.56)$$

In dieser Form wurde der konvektionsartige Term N_c als die erwähnte Zusatzinformation auf der linken Gleichungsseite berücksichtigt. Diese Vorgehensweise empfiehlt sich, obwohl die Variante mit dem N_r -Term auf der LHS zu einem symmetrischen Gleichungssystem führt. Oftmals (z.B. Cuvelier et al. (1986)) wird die Wahl des N_c -Termes für die LHS nur damit begründet, daß damit ein besseres numerisches Verhalten beobachtet werden konnte, weil dieser Term dem eigentlichen Charakter der Gleichungen wohl besser entspricht. Die numerische ‘Bösartigkeit’ des N_r -Ausdruckes wurde bereits erwähnt. Es ist jedoch festzustellen, daß die in der Literatur durchaus vertretene N_r -Variante tatsächlich ungeeignet ist. Ein dementsprechend formuliertes fixpunktartiges Iterationsverfahren läuft Gefahr, daß es zum falschen Fixpunkt konvergiert (DeBlois (1997)). Dies kann im Vergleich zu einem divergierenden Verfahren als schlimmer bezeichnet werden, da es dem Anwender ohne Warnung eine falsche Lösung liefert. Beispielrechnungen mit Lösungen, die zum falschen Fixpunkt konvergiert sind und dabei die Konvektion der Strömungslösung völlig vernachlässigen, finden sich in DeBlois (1997). In DeBlois (1997) wird die Problematik eines solchen Iterationsansatzes auch sehr schön und einfach an einem eindimensionalen Modellproblem gezeigt.

Allgemeine Anmerkungen

In dieser Arbeit kommt hauptsächlich das fixpunktartige Iterationsverfahren zum Einsatz. Eine Alternative dazu ist die Kombination eines robusten Fixpunkt- bzw. fixpunktartiges Verfahrens mit einem Newton-Verfahren, während sowohl das reine Fixpunktverfahren als auch das reine Newton-Verfahren selten Verwendung findet.

Der Abbruch des Iterationsvorganges kann sowohl nach einer festgelegten Anzahl von Schritten als auch entsprechend der Erfüllung bestimmter Genauigkeitskriterien erfolgen. Diese Genauigkeitskriterien können sich auf das Iterationsresiduum (Ungleichgewichtskräfte) oder den Defekt des Gleichungssystems beziehen. Eine unter Umständen einfacher auszuwertende Variante ist die Überprüfung der bezogenen Korrekturen der Lösungskomponenten, also z.B.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\|\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i\|}{\|\mathbf{u}_{i+1}\|} \leq \text{TOL}_u \quad ; \quad \frac{\|\Delta \mathbf{p}\|}{\|\mathbf{p}\|} = \leq \text{TOL}_p \quad (4.57)$$

Residuum oder bezogene Inkremente können in unterschiedlichen Normen (L_2, L_∞) gemessen werden und müssen kleiner als eine vom Anwender vorgegebene Toleranz sein. Speziell im instationären Fall ist es nicht sinnvoll, die vorgegebene Toleranz ‘zu klein’ zu wählen. ‘Zu klein’ heißt in diesem Fall, daß der erlaubte Iterationsfehler sinnvollerweise mindestens in der Größenordnung des ohnehin vorhandenen lokalen Fehlers des Zeitintegrationsverfahrens liegen darf (z.B. $\text{TOL}_u \leq 0,1 \cdot \epsilon$). Eine entsprechende Genauigkeit wird dann im Regelfall in sehr wenigen (ein, zwei oder drei) Iterationsschritten erreicht. Häufig finden sich auch Ansätze, die nur eine einzige Iteration pro Zeitschritt vorsehen. Mitunter werden solche Ansätze auch als ‘Einschritt-Newton’, ‘linearisierte Trapezregel’ oder ‘linear-implizite Verfahren’ bezeichnet. Natürlich muß dabei aber auch beachtet werden, daß in diesem Fall spezielle Eigenschaften der Zeitintegrationsverfahren, wie z.B. A-Stabilität, nicht mehr unbedingt garantiert werden können. Als wesentliche Verbesserung solcher Ansätze wird die Verwendung eines

guten Prädiktors empfohlen. Dadurch kann die Lösung nach diesem Prädiktorschritt (z.B. der explizite Prädiktor bei der gemischt expliziten/impliziten Zeitschrittsteuerung) schon so nahe an \mathbf{u}^{n+1} liegen, daß die Lösung nach einem Iterationsschritt schon als konvergiert betrachtet werden kann; hierzu wird auch auf den Vergleich mit den semi-impliziten Zeitdiskretisierungsansätze in Abschnitt 4.2.3 verwiesen. Eine verbreitete Variante (Brooks und Hughes (1982), Franca und Frey (1992)) mit der auch in der vorliegenden Arbeit gute Erfahrungen gemacht wurden, setzt auf einen Prädiktor–Multikorrekter–Ansatz mit einer fixierten Iterationsanzahl (meist 2) ohne Abprüfung der Toleranz.

4.4 ‘Navier–Stokes–Löser’

Gerade die erforderlichen Erweiterungen des in dieser Arbeit entwickelten Navier–Stokes–Lösers motivieren die Verwendung eines theoretisch gut analysierten und bezüglich der Umsetzung einfachen Verfahrens. Diese Anforderungen und relativ gute numerische Erfahrungen führten in vielen Beispielrechnungen dazu, eine algorithmische Kombination aus Einschritt- θ -Zeitdiskretisierung und einem fixpunktartigen Iterationsverfahren zu favorisieren (Wall und Ramm (1998)). Die folgende Darstellung geschieht somit speziell für diesen Algorithmus. Die Darstellung der alternativen Ansätze sollte daraus unschwer abzuleiten sein.

4.4.1 Algorithmen zur Lösung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen

Ausgehend von den Gleichungen (3.92) und (3.93) werden hier Algorithmen zur Lösung der zeitdiskretisierten (vergleiche (4.8)), linearisierten (vgl. (4.55)) Gleichungssysteme

$$\left[\mathbf{M} + \theta \Delta t \left(\bar{\sigma} N_c(\mathbf{u}_i^{n+1}) + \bar{\sigma} \sigma N_r(\mathbf{u}_i^{n+1}) + \mathbf{K} + N^{stab}(\mathbf{u}_i^{n+1}) \right) \right] \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} + \theta \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}_{i+1}^{n+1} = \mathbf{F}_T^n + \theta \Delta t \mathbf{F}_i^{n+1} + \sigma \theta \Delta t N(\mathbf{u}_i^{n+1}) \mathbf{u}_i^{n+1} \quad (4.58)$$

$$\left[\bar{\mathbf{M}}^r + \theta \Delta t \left(\mathbf{G}^T + \bar{N}^{stab}(\mathbf{u}_i^{n+1}) \right) \right] \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} + \theta \Delta t \bar{\mathbf{G}}^r \mathbf{p}_{i+1}^{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_T^n + \theta \Delta t \bar{\mathbf{F}}_i^{n+1} \quad (4.59)$$

skizziert. Wiederum bezeichnet $N(\cdot)$ ausschließlich die ursprünglichen Nichtlinearitäten, wohingegen sämtliche durch die Stabilisierungsverfahren verursachten Nichtlinearitäten im Term $N^{stab}(\cdot)$ zusammengefaßt sind. Durch die Stabilisierung ist nun auch der Ausdruck \mathbf{F}_i^{n+1} von der Lösung abhängig. Eine detaillierte Beschreibung zur Bedeutung der einzelnen Terme läßt sich aus den weiter unten angegebenen Gleichungen (4.64) bis (4.71) ablesen. Die Parameter σ und $\bar{\sigma}$ steuern die Terme für das verwendete iterative Verfahren. Das Parameterpaar $\{\sigma, \bar{\sigma}\}$ ist für ein Fixpunktverfahren mit $\{-1.0, 0.0\}$, für das Newton–Verfahren mit $\{1.0, 1.0\}$ und für ein fixpunktartiges Verfahren entsprechend $\{0.0, 1.0\}$ zu wählen. Die sogenannten ‘Zeit–RHS’ lauten darin

$$\mathbf{F}_T^n = [\mathbf{M} - (1 - \theta) \Delta t (N(\mathbf{u}^n) + \mathbf{K})] \mathbf{u}^n - (1 - \theta) \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}^n + (1 - \theta) \Delta t \mathbf{F}^n \quad (4.60)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_T^n = [\bar{\mathbf{M}}^r - (1 - \theta) \Delta t (\bar{N}^r(\mathbf{u}^n) + \mathbf{G}^T)] \mathbf{u}^n - (1 - \theta) \Delta t \bar{\mathbf{G}}^r \mathbf{p}^n + (1 - \theta) \Delta t \bar{\mathbf{F}}^n \quad (4.61)$$

Diese rechten Seiten können auch alternativ zu den Gleichungen (4.60) und (4.61) formuliert werden, z.B. für die Gleichung (4.60)

$$\mathbf{F}_T^n = \mathbf{M}\mathbf{u}^n + (1 - \theta)\Delta t \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}^n \quad (4.62)$$

‘Standard’-Algorithmus

Als ein Standard-Algorithmus soll hier das einfache Ablaufdiagramm eines Verfahrens zur Lösung der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen mit fix vorgegebenen Zeitschrittgrößen skizziert werden.

-
- (i) Setze oder ermittle Anfangsfelder \mathbf{u}^0 und \mathbf{p}^0 (\rightarrow Gleichung (4.16))
Initialisiere ‘Zeitähler’ $n = 0$
 - (ii) Zeitschleife ($t^{n+1} = t^n + \Delta t$)
Bestimme ‘Lasten’ (Dirichletwerte, Lasten, ...) für t^{n+1}
Initialisiere Iterationszähler $i = 0$
 - (iii) Berechne und assembliere ‘Zeit-RHS’ \mathbf{F}_T^n und $\bar{\mathbf{F}}_T^n$
(\rightarrow Gleichungen (4.64) und (4.65))
 - (iv) Iterationsschleife
 - (v) Berechne und assembliere die LHS-Matrizen
(\rightarrow Gleichungen (4.66) bis (4.69))
 - (vi) Berechne und assembliere die ‘Iterations-RHS’ $\mathbf{F}_{L,i}^{n+1}$ und $\bar{\mathbf{F}}_{L,i}^{n+1}$
(\rightarrow Gleichungen (4.70) und (4.71))
 - (vii) $\mathbf{F}_i^{n+1} = \mathbf{F}_T^n + \mathbf{F}_{L,i}^{n+1}$ und $\bar{\mathbf{F}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{F}}_T^n + \bar{\mathbf{F}}_{L,i}^{n+1}$
 - (viii) Löse das Gesamtgleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{eff} & \mathbf{G}_{eff} \\ \bar{\mathbf{K}}_{eff} & \bar{\mathbf{G}}_{eff} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} \\ \mathbf{p}_{i+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^{n+1} \\ \bar{\mathbf{F}}_i^{n+1} \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

- (ix) Konvergenz-Check bzw. Abfrage nach vorgeg. Iterationszahl und ($i = i + 1$)
IF {Residuum > TOL bzw. $i < i_{\max}$ oder i_{fix} } *GOTO* (iv)
(Postprocessing, Ergebnisausgabe, Sicherung Restart-Daten, ...)
 - (x) Zeit-Check und ($n = n + 1$)
IF { $n < n_{\max}$ bzw. $t < t_{\max}$ } *GOTO* (ii)
-

Algorithmus 4.1 Skizze eines einfachen instationären Navier-Stokes-Lösers

Bemerkungen:

- Alternativ kann das Gesamtgleichungssystem auch in den Lösungsincrementen $\Delta \mathbf{u}_{i+1}^{n+1}$ und $\Delta \mathbf{p}_{i+1}^{n+1}$ formuliert werden. Das kann unter Umständen Probleme mit Rundungsfehlern reduzieren, allerdings ändert sich dadurch auch der Aufwand zur Erstellung der rechten Seite geringfügig, da bei einer inkrementellen Formulierung mehr Terme in der RHS auftreten.
- Die ‘Prädiktoren’ \mathbf{u}_0^{n+1} und \mathbf{p}_0^{n+1} im ersten Schritt der Iterationsschleife im Algorithmus 4.1 können einfach zu $\mathbf{u}_{i_{\max}}^n$ bzw. $\mathbf{p}_{i_{\max}}^n$ gesetzt werden.

Zur Verdeutlichung werden im Folgenden noch die in Algorithmus 4.1 angesprochenen globalen Vektoren bzw. Matrizen detailliert angegeben. In den folgenden Ausführungen sind sämtliche Integrale über Ω als Summe der Integrale über die Elementgebiete Ω^e zu interpretieren. Die folgenden Formeln sollen also den Gesamttablauf der Erstellung der Elementmatrizen samt anschließendem Zusammenbau zu den globalen Matrizen verdeutlichen. Die Dirichlet-Randbedingungen werden dabei auf herkömmliche Art beim Zusammenbau berücksichtigt und werden hier nicht extra angeführt. Mit $\tau_{M,i}^u$, $\tau_{M,i}^p$ und $\tau_{C,i}$ werden die Stabilisierungsparameter bezeichnet, die mit den Lösungswerten \mathbf{u}_i^{n+1} ermittelt werden. Im Vergleich dazu bezeichnet im Folgenden τ_M^u beispielsweise die Kurzform für $\tau_M^u(\mathbf{u}^n)$.

Mit der effizienteren Schreibweise entsprechend Gleichung (4.62) ermitteln sich die globalen ‘Zeit-RHS’ zu

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T^n = & \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^n d\Omega + \int_{\Omega^e} \tau_M^u \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^n d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}^n d\Omega^e \\ & + (1-\theta)\Delta t \left[\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}}^n d\Omega + \int_{\Omega^e} \tau_M^u \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{u}}^n d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \tau_M^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \cdot \dot{\mathbf{u}}^n d\Omega^e \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

sowie zu

$$\bar{\mathbf{F}}_T^n = - \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nabla q \cdot \mathbf{u}^n d\Omega^e + (1-\theta)\Delta t \left[- \int_{\Omega^e} \tau_M^p \nabla q \cdot \dot{\mathbf{u}}^n d\Omega^e \right] \quad (4.65)$$

Die effektive ‘Steifigkeitsmatrix’ lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{eff} = & \int_{\Omega} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega + \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^u \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega^e \\ & + \theta \Delta t \left[\bar{\sigma} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega + \bar{\sigma} \sigma \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_i^{n+1} d\Omega \right. \\ & + \int_{\Omega} 2\nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) d\Omega \\ & + \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^u \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^u 2\nu \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) d\Omega^e \\ & - \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p 4\nu^2 \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) d\Omega^e \\ & \left. + \int_{\Omega^e} \tau_{C,i} \nabla \cdot \mathbf{v} \cdot \nabla \cdot \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega^e \right] \end{aligned} \quad (4.66)$$

Die mit $\bar{\mathbf{K}}_{eff}$ bezeichnete ursprüngliche Divergenz- bzw. transponierte Gradientenmatrix ermittelt sich aus

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{eff} = & - \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p \nabla q \cdot \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega^e \\ & + \theta \Delta t \left[- \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega - \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p \nabla q \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_{i+1}^{n+1} d\Omega^e \right. \\ & \left. + \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p 2\nu \nabla q \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) d\Omega^e \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

Die ursprüngliche Gradientenmatrix folgt aus

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{eff} = & \theta \Delta t \left[- \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} p_{i+1}^{n+1} d\Omega \right. \\ & \left. + \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^u \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla p_{i+1}^{n+1} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \cdot \nabla p_{i+1}^{n+1} d\Omega^e \right] \end{aligned} \quad (4.68)$$

und die Besetzung der Diagonalanteile in den Druckfreiwerten erfolgt durch

$$\bar{\mathbf{G}}_{eff} = \theta \Delta t \bar{\mathbf{G}}^T = \theta \Delta t \left[- \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p \nabla q \cdot \nabla p_{i+1}^{n+1} d\Omega^e \right] \quad (4.69)$$

Schließlich ergeben sich die 'Iterations-RHS' als

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{I,i}^{n+1} = & \theta \Delta t \left[\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}^{n+1} d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h}^{n+1} d\Gamma_h \right. \\ & + \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^u \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{b}^{n+1} d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{b}^{n+1} d\Omega^e \\ & \left. + \sigma \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_i^{n+1} d\Omega \right] \end{aligned} \quad (4.70)$$

sowie

$$\bar{\mathbf{F}}_{I,i}^{n+1} = \theta \Delta t \left[\int_{\Omega^e} \tau_{M,i}^p \nabla q \cdot \mathbf{b}^{n+1} d\Omega^e \right] \quad (4.71)$$

Die Umsetzung der einfachen, rein impliziten Zeitschrittsteuerung aus Kapitel 4.2.5 nach dem Algorithmus 4.2 ist problemlos und soll hier deshalb nicht extra angeführt werden. Für einen ‘Zeitähler’ n wird die Zeitschleife zweimal durchlaufen, einmal mit Δt und einmal mit zwei Schritten mit $\Delta t/2$. Anschließend wird daraus das erforderliche Δt^{neu} nach Gleichung (4.37) oder (4.38) ermittelt. Unter Berücksichtigung der algorithmischen Anmerkungen in Abschnitt 4.2.5 wird damit entweder der ‘Zeitähler’ erhöht und der neue Zeitschritt gerechnet oder der aktuelle Zeitschritt nochmals wiederholt.

Algorithmus mit gemischter, explizit/impliziter Zeitschrittsteuerung

Als Beispiel für ein Verfahren zur Lösung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen mit variablen Zeitschrittweiten soll hier ein Algorithmus mit der gemischten, explizit/impliziten Zeitschrittsteuerung aus Kapitel 4.2.5 skizziert werden. Der Algorithmus wird im Folgenden ausführlich dargestellt. Dabei wird ein Anfangsgeschwindigkeitsfeld \mathbf{u}^0 vorausgesetzt, das divergenzfrei ist bzw. die Inkompressibilitätsbedingung erfüllt. Ein analoger Algorithmus für eine Standard–Galerkin–Diskretisierung findet sich in Gresho und Sani (1998). Der vorliegende Ansatz wurde in Bornemann (1999) aufgegriffen und diskutiert. In diesem Zusammenhang werden auch mögliche Schwachstellen dieses Verfahrens angesprochen und erste Hinweise auf mögliche Varianten bzw. Verbesserungen gegeben.

-
- (i) Setze bzw. ermittle Anfangsfelder \mathbf{u}^0 , $\dot{\mathbf{u}}^0$ und \mathbf{p}^0
 Ermittle dabei $\dot{\mathbf{u}}^0$, \mathbf{p}^0 aus den Gleichungen (4.72)
 Bestimme (Gleichung (4.73)) oder wähle (um auf der sicheren Seite zu sein, eine kleines) Δt^0
 Initialisiere Zeitähler $n = 0$
 - (ii) Löse[□] das Gleichungssystem (4.75) für $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{p}^1\}$ (mit Prädiktor $\mathbf{u}^{P,1} = \mathbf{u}^0 + \Delta t^0 \dot{\mathbf{u}}^0$)
 Setze $\Delta t^1 = \Delta t^0$
 Bestimme $\dot{\mathbf{u}}^1$ aus Gleichung (4.74)
 - (iii) Zeitschleife ($t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$)
 Bestimme ‘Lasten’ (Dirichletwerte, Lasten, ...) für t^{n+1}
 - (iv) Bestimme den Geschwindigkeitsprädiktor mittels AB2 aus Gleichung (4.76)
 - (v) Löse[□] das Gleichungssystem (4.75) für $\{\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{p}^{n+1}\}$ (mit Prädiktor $\mathbf{u}^{P,n+1}$)
 - (vi) Bestimme $\dot{\mathbf{u}}^{n+1}$ für nächsten AB2–Schritt aus Gleichung (4.74)
 - (vii) Berechne \mathbf{d}^n (lokaler Abbruchfehler der Geschwindigkeiten) aus Gleichung (4.77)
 - (viii) Ermittle (mögliche) nächste Zeitschrittgröße Δt^{n+1} nach Gleichung (4.78)
 - (ix) Zeit–Check und ($n = n + 1$)
 IF $\{n < n_{\max}$ bzw. $t < t_{\max}\}$ GOTO (iii)
-

Algorithmus 4.2 Skizze eines instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Lösers mit variabler Zeitschrittweite[□]

Bemerkungen:

- ① Bezüglich Umsetzung des hier skizzierten Verfahrens soll nochmals auf die algorithmischen Anmerkungen am Ende von Kapitel 4.2.5 hingewiesen werden.
- ② Zur Lösung des Gleichungssystems (4.75) ist jeweils in analoger Weise die Iterationsschleife aus Algorithmus 4.1 zu verwenden. Da der AB2-Prädiktor oftmals schon eine sehr gute Näherung liefert, kann hier i_{fix} unter Umständen einfach auf 1 oder 2 gesetzt werden, ohne ein Auskonvergieren der Iteration zu überprüfen.

Die aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht im Algorithmus 4.2 angeführten Formeln werden im Folgenden zusammengefaßt dargestellt. So ermitteln sich Anfangsbeschleunigungsfeld $\dot{\mathbf{u}}^0$ und Anfangsdruckfeld \mathbf{p}^0 aus

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^0 + [\mathbf{K} + \mathbf{N}(\mathbf{u}^0)] \mathbf{u}^0 + \mathbf{G} \mathbf{p}^0 = \mathbf{F}^0 \quad (4.72)$$

$$\overline{\mathbf{M}}^T \dot{\mathbf{u}}^0 + [\mathbf{G}^T + \overline{\mathbf{N}}^T(\mathbf{u}^0)] \mathbf{u}^0 + \overline{\mathbf{G}}^T \mathbf{p}^0 = \overline{\mathbf{F}}^0$$

Die Größe des ersten Zeitschrittes läßt sich beispielsweise durch

$$\Delta t^0 = \mathcal{J} \cdot \epsilon^{1/3} \quad \text{mit} \quad \mathcal{J} = \frac{\max(\mathbf{u}_s, \max_i |\mathbf{u}^{0_i}|)}{\max_i |\dot{\mathbf{u}}^{0_i}|} \quad (4.73)$$

ermitteln. Hierin bezeichnen ϵ die relative Fehler-Toleranz (Gleichung (4.28)) und \mathbf{u}_s einen ‘Schwellenwert’ für den Fall $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$. Die Schätzung einer anfänglichen Zeitkonstante \mathcal{J} ist einem Vorschlag von Gresho und Sani (1998) für Advektions-Diffusions-Gleichungen entnommen.

Die erforderlichen Anfangsdaten für die Adams-Bashford-Integrationsvorschrift folgt aus der Invertierung des CN-Diskretisierungsansatzes

$$\dot{\mathbf{u}}^{n+1} = 2(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) / \Delta t^n - \dot{\mathbf{u}}^n \quad (4.74)$$

Das zu lösende zeitdiskretisierte, nichtlineare Gleichungssystem lautet

$$[\mathbf{M} + \theta \Delta t (\mathbf{N}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K})] \mathbf{u}^{n+1} + \theta \Delta t \mathbf{G} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{F}_T^n + \theta \Delta t \mathbf{F}^{n+1} \quad (4.75)$$

$$[\overline{\mathbf{M}}^T + \theta \Delta t (\mathbf{G}^T + \overline{\mathbf{N}}^T(\mathbf{u}^{n+1}))] \mathbf{u}^{n+1} + \theta \Delta t \overline{\mathbf{G}}^T \mathbf{p}^{n+1} = \overline{\mathbf{F}}_T^n + \theta \Delta t \overline{\mathbf{F}}^{n+1}$$

Aus der Integrationsvorschrift für das Adams-Bashford-Verfahren zweiter Ordnung folgt

$$\mathbf{u}^{P,n+1} = \mathbf{u}^n + \frac{\Delta t^n}{2} \left[\left(2 + \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} \right) \dot{\mathbf{u}}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta t^{n-1}} \dot{\mathbf{u}}^{n-1} \right] \quad (4.76)$$

Analog zu Gleichung (4.42) folgt der lokale Abbruchfehler in den Geschwindigkeiten

$$\mathbf{d}^n = \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{P,n+1}}{3(1 + \Delta t^{n-1} / \Delta t^n)} \quad (4.77)$$

Die Schätzung der nächsten Zeitschrittgröße (Gleichung (4.43)) bestimmt sich aus

$$\Delta t^{n+1} = \Delta t^n \left[\frac{\epsilon \cdot u_{char}}{\|\mathbf{d}^n\|} \right]^{1/3} \quad (4.78)$$

Bemerkung: Ein kleiner ‘Nachteil’ eines Zeitintegrationsverfahrens mit variabler Schrittweite ist, daß vorgegebene Ausgabe–Zeitpunkte nicht mehr automatisch direkt erreicht werden. Eine Interpolation der Werte aus den benachbarten Punkten ist erforderlich. Um auch zu den Ausgabezeitpunkten die volle Genauigkeitsordnung des verwendeten Zeitintegrationsverfahrens zur Verfügung zu haben, muß dabei auf entsprechende Interpolationsformeln zurückgegriffen werden. Bei Verwendung eines CN–Verfahrens, folgt für einen Ausgabezeitpunkt $t^n < t < t^{n+1}$ beispielsweise

$$u(t) = u^{n+1} - \frac{t^{n+1} - t}{\Delta t^n} \left(1 - \frac{t^{n+1} - t}{2\Delta t^n} \right) \Delta t^n \dot{u}^{n+1} - \frac{1}{2} \left(\frac{t^{n+1} - t}{\Delta t^n} \right)^2 \Delta t^n \ddot{u}^n \quad (4.79)$$

4.4.2 Stationärer Sonderfall

Ein stationärer Navier–Stokes–Löser läßt sich aus den Ausführungen in Abschnitt 4.4.1 sehr einfach extrahieren. Dazu müssen nur die zeitabhängigen Terme sowie die Zeitschleife in der dort angeführten Darstellung für den Standardalgorithmus weggelassen werden. Die Komplexität vieler Strömungslösungen schränkt den Einsatzbereich eines entsprechend einfachen Verfahrens jedoch stark ein.

Ein verbreiteter Ansatz zur Ermittlung einer stationären Navier–Stokes–Lösung ist deshalb der Umweg über die instationären Gleichungen und Verwendung der entsprechenden Algorithmen. Allerdings bedeutet dies oftmals einen beträchtlichen numerischen Aufwand, den man mitunter durch sehr große Zeitschritte verringern möchte. Weiterhin ist zu beachten, daß sich im Gegensatz zu den in dieser Arbeit verwendeten Ansätzen nicht alle instationären Verfahren (siehe Kapitel A1.5) als ‘stationäre’ Löser eignen. Auch können dann rein instationäre Problematiken künstlich in den stationären Fall einfließen. Hier soll deshalb noch ein zweiter Ansatz aufgezeigt werden.

‘Continuation’–Methoden

Dieser Ansatz geht von der Tatsache aus, daß es keine iterativen Verfahren gibt, die robust genug wären, die Lösung für eine komplexe Strömungslösung auf Anhieb zu finden. Weiterhin wurde in den bisherigen Ausführungen deutlich, daß einige Iterationsverfahren mit Startwerten ‘in der Nähe’ der Lösung sehr effizient sein können. Das Bemühen besteht nun darin, eine möglichst gute Startlösung für eine *Serie* von entsprechend umformulierten nichtlinearen Problemstellungen zu finden. Zu diesem Zwecke bedient man sich eines sogenannten *Homotopie*–Ansatzes. Eine Homotopie kann eine beliebige Verbindung zwischen zwei Funktionen sein. Formal läßt sich eine Homotopie zwischen zwei Funktionen $f, g : X \rightarrow Y$ als kontinuierliche Abbildung

$$h : [0, 1] \times X \rightarrow Y \quad (4.80)$$

so schreiben, daß $h(0, x) = g(x)$ und $h(1, x) = f(x)$ gilt. Existiert diese Verbindung, so heißt f ‘homotopisch’ zu g . Beispielhaft kann zur Lösung des Problems $f(x) = 0$ mit Hilfe des Homotopieparameters $t : [0, 1]$ folgende einfache Homotopie konstruiert werden

$$h(t, x) = t \cdot f(x) + (1 - t) \cdot g(x) = 0 \quad (4.81)$$

Für $t = 1$ entspricht also die neue Fragestellung dem Originalproblem. Zur Sinnhaftigkeit eines solchen Ansatzes sollte $g(x) = 0$ natürlich eine bekannte oder zumindest sehr einfach zu ermittelnde Lösung haben. Die sukzessive Lösung

$$h(t_i, x) = 0, \quad 0 \leq i \leq m \quad \text{mit} \quad 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1 \quad (4.82)$$

wird dann auch als Fortsetzungs- oder (verbreiteter) als ‘Continuation’-Methode bezeichnet, wobei die Lösung von Problem i für die Problemstellung $i + 1$ verwendet wird. Das Prinzip einer ‘Continuation’-Methode besteht also darin, ein schwierig zu lösendes (z.B. nichtlineares) Problem durch eine Serie von einfacher zu lösenden Problemen zu ersetzen.

Für die vorliegende Aufgabenstellung der Lösung der stationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen können solche ‘Continuation’-Verfahren vorteilhaft eingesetzt werden. In diesen Fällen ist die Komplexität einer Strömungslösung stark mit der Reynoldszahl korreliert. Es empfiehlt sich also eine Homotopie zu formulieren, in der die Reynoldszahl als Homotopieparameter fungiert. Die stationäre Lösung bei hohen Reynoldszahlen wird also durch eine Reihe Lösungen mit sukzessiver Steigerung der Reynoldszahl ermittelt. Diese Problemstellungsserie läßt sich sehr einfach generieren, beispielsweise über Veränderung der Viskosität oder der entsprechenden Dirichlet-Randbedingungen. Für jede neue Aufgabenstellung in dieser Serie wird dabei die Lösung des vorhergehenden ‘Continuation’-Schrittes als Startwert verwendet. Zur Verdeutlichung sei auch auf den folgenden Algorithmus verwiesen:

Stationärer Algorithmus

Als Beispiel für ein Verfahren zur Lösung der stationären Navier-Stokes-Gleichungen wird hier ein Algorithmus mit ‘Continuation’ und einem Wechsel von robustem auf ein schnell konvergierendes Iterationsverfahren skizziert. Ein solches kombiniertes Iterationsverfahren war bei den instationären Algorithmen weniger angebracht, da dort durch die Zeitintegration der Startwert der nichtlinearen Iteration oftmals ohnehin ‘sehr nahe’ der Lösung liegt, speziell bei Verwendung eines guten Prädiktors.

-
- (i) Setze oder ermittle Anfangsfelder \mathbf{u}^0 und \mathbf{p}^0 (\rightarrow Gleichung (4.16))
Initialisiere ‘Continuation-Zähler’ $n = 0$
 - (ii) ‘Continuation’-Schleife
Initialisiere Iterationszähler $i = 0$
Umschalten auf robustes Iterationsverfahren
 - (iii) Iterationsschleife
 - (iv) Berechne und assembliere die LHS-Matrizen
(\rightarrow analog \square Gleichungen (4.66) bis (4.69))
 - (v) Berechne und assembliere die RHS-Vektoren \mathbf{F}_i^{n+1} und $\bar{\mathbf{F}}_i^{n+1}$
(\rightarrow analog \square Gleichungen (4.70) und (4.71))
 - (vi) Löse das Gesamtgleichungssystem (\rightarrow analog \square Gleichung (4.63))
 - (vii) Wenn $\{Residuum < TOL_{robust}\}$ von robustem auf schneller konvergierendes Iterationsverfahren umschalten
 - (viii) Konvergenz-Check bzw. Abfrage nach vorgeg. Iterationszahl und ($i = i + 1$)
 $IF \{Residuum > TOL \text{ bzw. } i < i_{max} \text{ oder } i_{fix}\} GOTO (iii)$
(Postprocessing der Ergebnisse, Ergebnisausgabe, Sicherung Restart-Daten, ...)

- (ix) ‘Continuation’–Check und ($n = n + 1$)
IF $\{n < n_{cont}\}$ GOTO (ii)

Algorithmus 4.3 Skizze eines stationären Navier–Stokes–Lösers mit n_{cont} ‘Continuation’–Schritten

Bemerkungen:

- Die Gleichungen für die LHS–Matrizen und die RHS–Vektoren sollen hier nicht extra angegeben werden. Sie setzen sich aus den mit $\theta\Delta t$ multiplizierten Termen der Gleichungen (4.66) bis (4.71) zusammen.
- Sollte die ‘Continuation’ über die Viskosität gesteuert werden, so sind \mathbf{b}^{n+1} und \mathbf{h}^{n+1} durch \mathbf{b} bzw. \mathbf{h} sowie die Viskosität ν jeweils durch ν^{n+1} zu ersetzen.
 - Der angegebene Algorithmus ähnelt dem instationären Algorithmus 4.1, wenn die Zeitschleife durch die ‘Continuation’–Schleife ersetzt wird.

4.5 Numerische Beispiele

In den folgenden numerischen Beispielen soll die Leistungsfähigkeit der entwickelten Diskretisierungs– und Lösungsverfahren gezeigt werden. Von den berechneten Aufgabenstellungen wurden dabei großteils jene Beispiele zur Darstellung ausgewählt, die als klassische Testbeispiele für instationäre inkompressible Navier–Stokes–Löser gelten. Der Grund für die Beliebtheit dieser Aufgabenstellungen liegt darin, daß sie in mehrerlei Hinsicht entsprechend hohe und vor allem typische Anforderungen an die Lösungsverfahren stellen. Daß diese Beispiele auch durchaus als ‘harte’ Tests gelten, zeigt die Arbeit von Freitas (1995). In jener Arbeit werden eine Reihe gängiger kommerzieller CFD–Codes auf solche Testbeispiele angewendet und die erzielten Ergebnisse verglichen. Dabei zeigt sich, daß eine Reihe dieser Codes nicht in der Lage ist, selbst die einfacheren dieser Beispiele nur annähernd zufriedenstellend zu lösen.

Für sämtliche numerische Beispiele in dieser Arbeit wird das Stabilisierungsverfahren aus Kapitel 3.3.2 verwendet. Es wird auch in keinem der folgenden Beispiele von der empfohlenen Definition der Stabilisierungsparameter abgewichen. Ebenso werden die auftretenden Konstanten in diesen Definitionen, ohne Anpassung an einzelne Beispiele, auf die in Kapitel 3.3.1 empfohlenen Werte gesetzt.

4.5.1 Stationäre Beispiele

Zunächst sollen die entwickelten Verfahren herangezogen werden, um *die* beiden klassischen *stationären* Testbeispiele für inkompressible Navier–Stokes–Löser zu bearbeiten.

‘Driven Cavity’

Beim ersten Testbeispiel handelt es sich um einen überströmten Hohlraum oder, in der gebräuchlichen englischen Bezeichnung, um eine ‘driven cavity’. Die Geometrie sowie die Randbedingungen für die ‘driven cavity’–Strömung können Bild 4.1 entnommen werden.

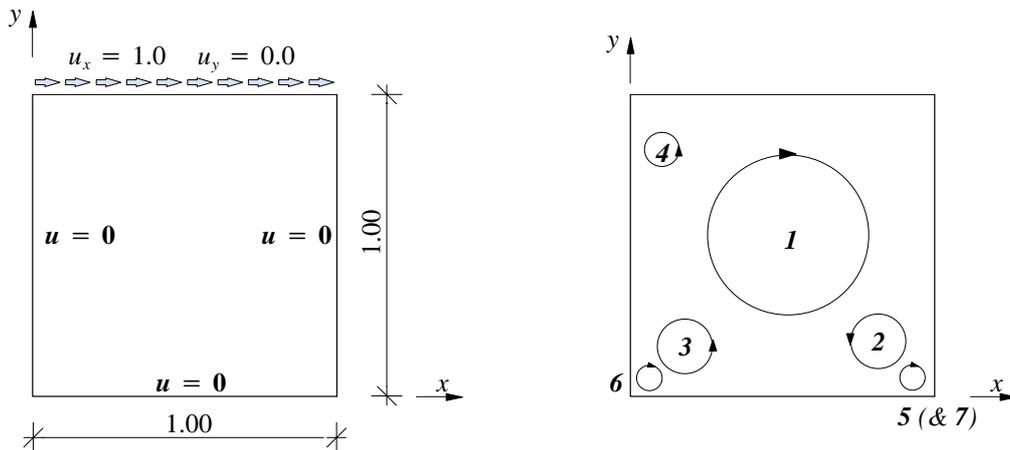


Bild 4.1: 'Driven cavity'-Strömung — Geometrie und Randbedingungen (links), Skizze zu charakteristischem Strömungsbild (rechts)

Im Folgenden wird das Beispiel mit den anspruchsvolleren 'nonleaky' Randbedingungen behandelt. Dies bedeutet, daß die Seitenwände bis ganz zum oberen Rand geschlossen sind. An den beiden oberen Eckknoten wird die Horizontalgeschwindigkeit ebenfalls zu Null gesetzt. Die Überströmung des Hohlraumes löst in Verbindung mit der Viskosität des Fluids Wirbelbildungen im Hohlraum aus. Je nach Viskosität, d.h. je nach Reynoldszahl der Strömung, entstehen dabei zwischen einem und sechs (bzw. sieben) Wirbel, so wie sie in Bild 4.1 angedeutet sind. Die entstehenden Geschwindigkeits- und Druckfelder sind also stark von der Reynoldszahl abhängig. Damit kann dieses Testbeispiel herangezogen werden, um die künstliche, numerische Diffusion der verwendeten Verfahren zu untersuchen.

Die Entwicklung der Strömung bei steigender Reynoldszahl ist in Bild 4.2 dargestellt. Die Abbildungen zeigen die ermittelten diskreten Lösungen für die Isobaren und die Stromlinien sowie die 'Vorticity'. Für eine Reynoldszahl von $Re = 10000$ wird die Strömung in Bild 4.3 zusätzlich im Detail dargestellt. Hier, wie auch in der vorhergehenden Abbildung, ist zu erkennen, daß das numerische Verfahren in der Lage war, sämtliche Wirbel aufzufinden. In den Berechnungen wurde dazu in diesem höheren Reynoldszahlbereich eine nicht gleichförmige Diskretisierung von 80×80 Q1Q1-Elementen verwendet.

Für die Beispielerrechnungen werden in den meisten Fällen strukturierte Netze verwendet, die zu den Rändern hin verfeinert werden. Das Größenverhältnis zwischen dem größten Element in der Mitte und dem kleinsten Element am Rand beträgt dabei jeweils $h_{\min}/h_{\max} \approx 1/5$. Ein Beispiel für eine solche Vernetzung ist in Bild 4.4(links) dargestellt. Das Bild stellt eine Diskretisierung mit 50×50 Q1Q1-Elementen dar.

Für Beispiele mit niedrigen Reynoldszahlen wird der stationäre Löser verwendet. Als Abbruchkriterium wird die Toleranz der bezogenen Korrekturen der Inkremente für Druck und Geschwindigkeit zu $TOL = 1 \cdot 10^{-6}$ gesetzt. Für die höheren Reynoldszahlbereiche ($Re \geq 1000$), in denen stationäre Löser Konvergenzprobleme zeigen, wird die Lösung mit dem vorgestellten instationären Löser ermittelt. Dabei wird die Lösung als stationär angenommen, sobald sich die normierten Größen für Geschwindigkeit und Druck pro Zeitschritt um weniger als 10^{-6} ändern.

Die hervorragend dokumentierten Ergebnisse von Ghia et al. (1982) gelten in der Literatur durchwegs als Referenzlösungen. Diese wurden auf einem sehr feinen Gitter mit einem zweiter

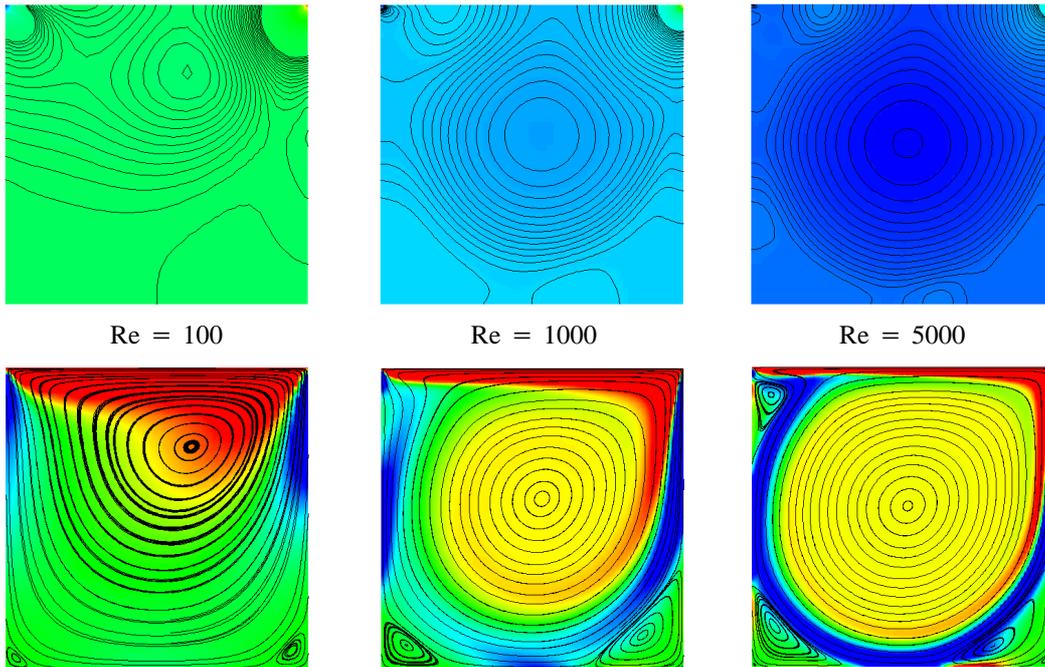


Bild 4.2: ‘Driven cavity’-Strömungen bei steigender Reynoldszahl —
 Isobaren (30 Inkremente im Bereich $[-0.12, 0.12]$) (obere Reihe) und
 Stromlinien auf ‘Vorticity’ – Farbskala $[-4, 4]$ (untere Reihe)

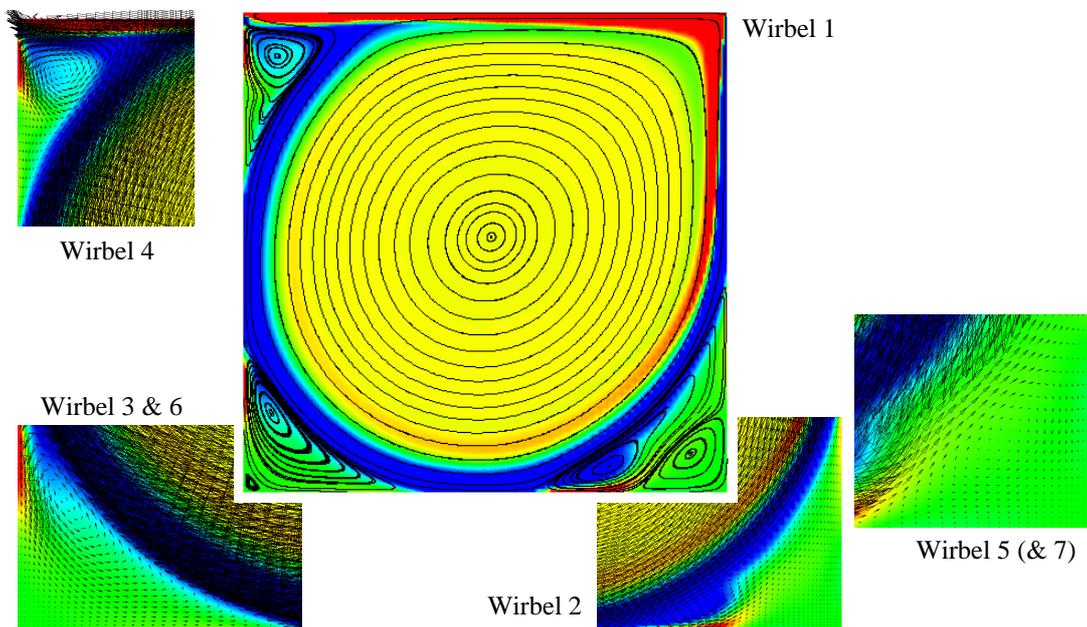


Bild 4.3: ‘Driven cavity’-Strömung bei Reynoldszahl 10000 —
 Stromlinien und Geschwindigkeitsvektoren auf ‘Vorticity’

Ordnung genauen Finiten-Differenzen-Verfahren erzielt, und zwar bis zu $Re \leq 3200$ mit einem 129×129 -Gitter und darüber mit einem 257×257 -Gitter. In Bild 4.5 werden die Ergebnisse des vorgestellten Verfahrens diesen Referenzwerten aus Ghia et al. (1982) für Reynoldszahlen von 100 bis 10000 gegenübergestellt. Die dargestellten Simulationsergebnisse wurden für den Reynoldszahlbereich $Re < 1000$ mit einer 32×32 Q1Q1-Diskretisierung und

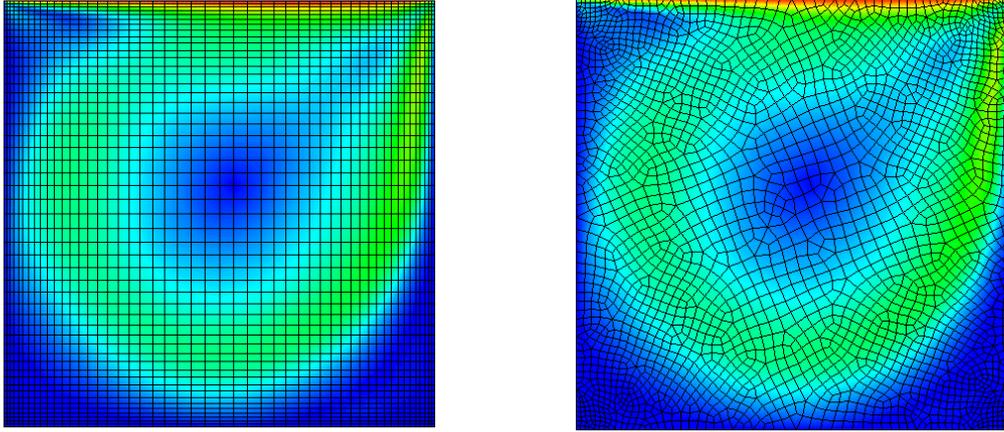


Bild 4.4: Beispiele für räumliche Diskretisierungen für 'Driven cavity'–Beispiel — Strukturiertes Netz mit lokaler Verfeinerung (links) und freie Vernetzung (rechts)

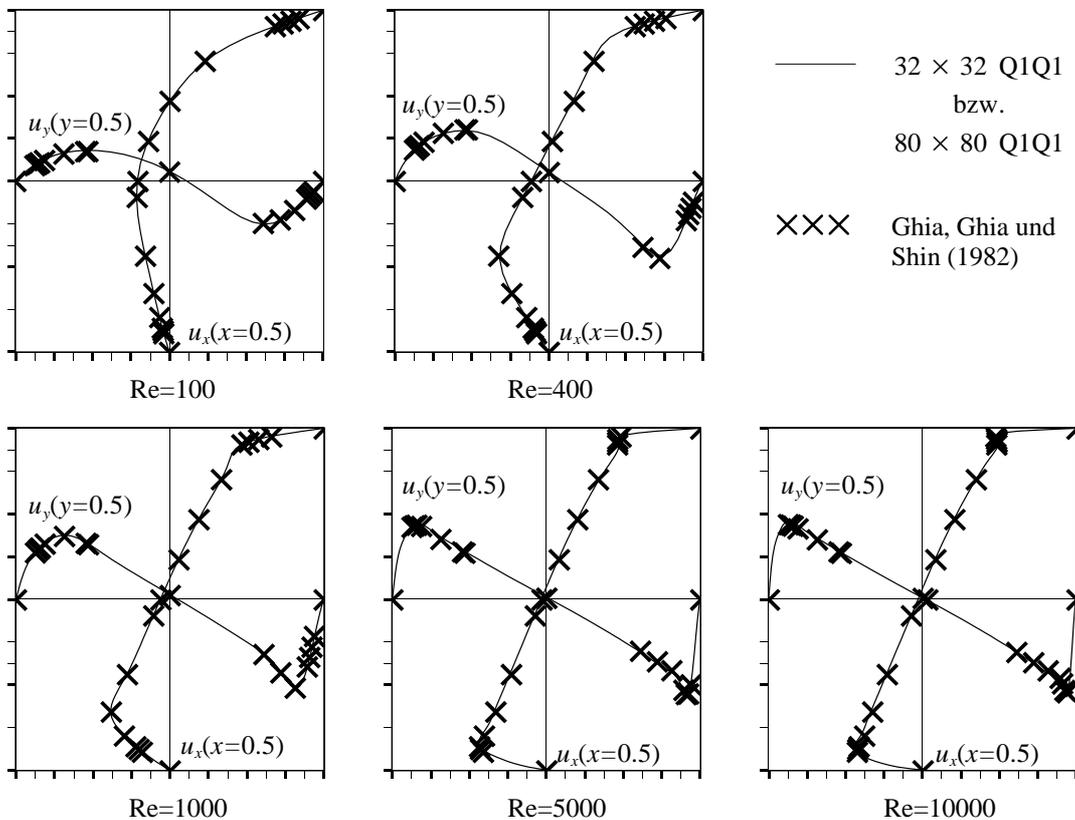


Bild 4.5: 'Driven cavity' — Vergleich der Simulationsergebnisse mit Ghia et al. (1982)

darüber mit einer 80×80 Q1Q1–Diskretisierung ermittelt. Aus der Abbildung ist gut zu erkennen, daß das entwickelte Verfahren mit den angegebenen größeren Diskretisierungen für den gesamten Reynoldszahlbereich sehr gute Ergebnisse liefert. Es ist auch zu erkennen, daß es selbst bei hohen Reynoldszahlen keine große künstliche Diffusion einbringt. Dadurch können auch die Geschwindigkeitsspitzen in wandnähe gut aufgelöst werden. Ein zusätzlicher, quantitativer Vergleich der Ergebnisse ist in Form der Positionen der Wirbelzentren in Tabelle 4.2 angeführt. Zusätzlich sind in die Tabelle noch verfügbare Zahlenwerte aus Arbeiten von Auge (1994) und Cruchaga und Oñate (1997) aufgenommen. Beide Arbeiten verwenden ebenfalls stabilisierte Elemente mit gleicher Interpolationsordnung für Geschwindigkeit und Druck. Die

Zahlenwerte aus Auge (1994) wurden mit 8192 linear interpolierten Dreieckselementen erhalten. Der Arbeit von Cruchaga und Oñate (1997) ist die Diskretisierung, mit der die Wirbelpositionen ermittelt wurden, leider nicht zu entnehmen. Beide Arbeiten verwenden jedoch ebenfalls eine lokale Verfeinerung in den Eckbereichen.

	Wirbel 1	Wirbel 2	Wirbel 3	Wirbel 4	Wirbel 5	Wirbel 6	Wirbel 7
Re=1000	0.5308 / 0.5660	0.8643 / 0.1115	0.0832 / 0.0775	0.9941 / 0.0066			
Ghia, Ghia, Shin (1982)	0.5313 / 0.5625	0.8594 / 0.1094	0.0859 / 0.0781	0.9922 / 0.0078			
Auge (1994)	0.530 / 0.562	0.868 / 0.116	0.090 / 0.076	—			
Cruchaga, Oñate (1997)	0.5409 / 0.5855	0.8684 / 0.1072	0.0760 / 0.0754	—			
Re=5000	0.5148 / 0.5362	0.7959 / 0.0706	0.0728 / 0.1365	0.0624 / 0.9076	0.9728 / 0.0223	0.0070 / 0.0073	
Ghia, Ghia, Shin (1982)	0.5117 / 0.5352	0.8086 / 0.0742	0.0703 / 0.1367	0.0625 / 0.9102	0.9805 / 0.0195	0.0117 / 0.0078	
Auge (1994)	0.520 / 0.535	0.849 / 0.084	0.076 / 0.131	0.063 / 0.907	0.974 / 0.023	0.015 / 0.018	
Cruchaga, Oñate (1997)	0.5029 / 0.5420	0.8012 / 0.0638	0.0754 / 0.1345	0.0585 / 0.9130	—	—	
Re=10000	0.5064 / 0.5284	0.7548 / 0.0555	0.0578 / 0.1659	0.0709 / 0.9092	0.9266 / 0.0791	0.0138 / 0.0163	0.9947 / 0.0055
Ghia, Ghia, Shin (1982)	0.5117 / 0.5333	0.7656 / 0.0586	0.0586 / 0.1641	0.0703 / 0.9141	0.9336 / 0.0625	0.0156 / 0.0195	0.9961 / 0.0039
Cruchaga, Oñate (1997)	0.5000 / 0.5420	0.7573 / 0.0551	0.0676 / 0.1536	0.0676 / 0.9130	—	—	—

Tabelle 4.2 Wirbelpositionen (x/y) für ‘Driven cavity’-Strömungen

In Bild 4.6 wird für eine ausgewählte Reynoldszahl von $Re = 1000$ schließlich noch der Ein-

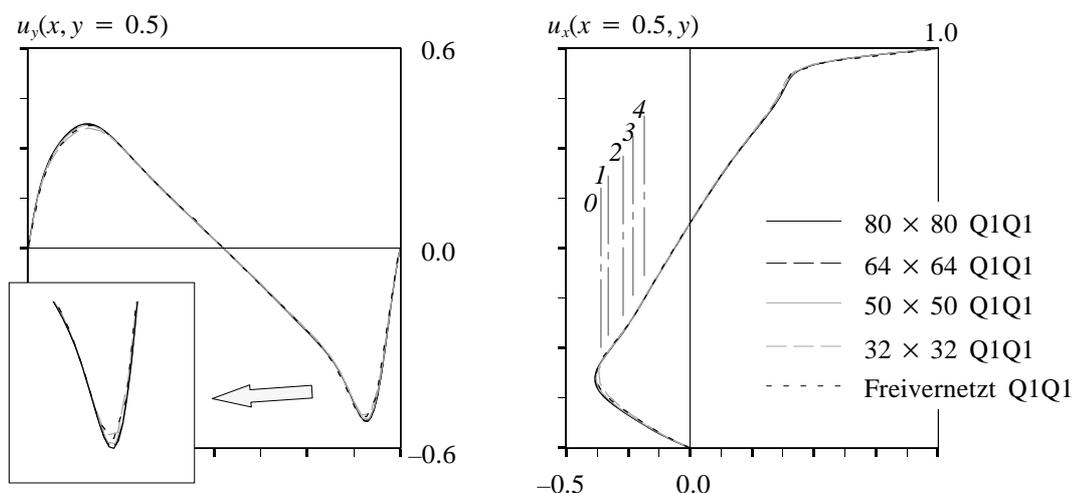


Bild 4.6: ‘Driven cavity’ — Vergleich unterschiedlicher Diskretisierungen bei $Re=1000$

fluß der Feinheit der Diskretisierung auf die Geschwindigkeitslösung dargestellt. Die verschiedenen Simulationsergebnisse lassen sich dabei kaum unterscheiden. Es zeigt sich also, daß

auch bei größeren Diskretisierungen die Geschwindigkeitsverläufe in den beiden mittigen Schnitten sehr gut erfaßt werden. Das Verfahren zeigt auch in diesen Fällen keine zu große künstliche Diffusion.

Hannani et al. (1995) untersuchten ebenfalls am Beispiel der ‘Driven cavity’-Strömung eine Reihe unterschiedlicher Stabilisierungsverfahren. In Bild 4.6(rechts) sind einige Minimalwerte der horizontalen Geschwindigkeitskomponente aus in Hannani et al. (1995) diskutierten Verfahren aufgenommen. Die angegebenen Werte entsprechen dabei den folgenden Verfahren und Diskretisierungen aus jener Arbeit: 0 – GLS 80×80 (‘nonuniform’), 1 – GLS 80×80 , 2 – GLS 45×45 , 3 – GLS 30×30 , 4 – SUPG 45×45 (Q1P0). Für die Lösungen 1 – 4 wurden dabei gleichförmige Q1Q1-Diskretisierungen verwendet. Es ist ersichtlich, daß einige dieser Verfahren zu teils starker künstlicher Diffusion neigen.

In den Vergleich in Bild 4.6 ist auch noch eine Beispielrechnung mit einem unstrukturierten Netz aufgenommen. Das verwendete Q1Q1-Netz ist in Bild 4.4(rechts) dargestellt und entspricht in Knoten- und Elementanzahl ungefähr dem strukturierten 50×50 -Netz. Das Ergebnis zeigt, daß sich die Lösungen des strukturierten und des unstrukturierten Netzes nicht unterscheiden.

‘Backward facing step’

Das zweite stationäre Beispiel soll dazu dienen, die numerischen Resultate mit experimentell erzielten Ergebnissen zu vergleichen. Es handelt sich dabei um die Strömung über eine Stufe, also um das sogenannte ‘Backward facing step’-Beispiel. Diese Strömungen zeigen im Bereich $Re < 1200$ laminaren Charakter. Der Bereich $1200 < Re < 6600$ markiert den Transitionsbereich und $Re > 6600$ turbulente Strömungen (Armaly et al. (1983)). Im höheren Reynoldszahlbereich können auch dreidimensionale Effekte beobachtet werden. Die folgenden Simulationen bauen auf einem zweidimensionalen, rein laminaren Strömungsmodell auf. Die folgenden Berechnungen werden bis zu $Re \leq 1600$ durchgeführt, also noch geringfügig in den Transitionsbereich hinein.

Die Geometrie dieser Strömungskonfiguration ist in Bild 4.7 dargestellt. Wichtig ist dabei das

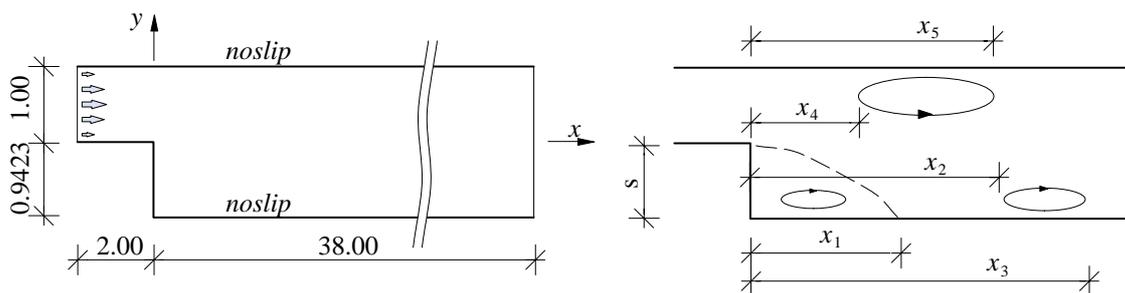


Bild 4.7: ‘Backward facing step’-Strömung — Geometrie und Randbedingungen (links), Skizze zu charakteristischem Strömungsbild (rechts)

Verhältnis aus Einströmkanalhöhe zu Stufenhöhe. Dieses Verhältnis wird wie in den Experimenten zu 5.2/4.9 gewählt. Diese Abbildung zeigt auch ein charakteristisches Strömungsbild und die Definitionen der unterschiedlichen ‘Reattachement’-Längen (‘Wiederanlegelängen’). Diese ‘Reattachement’-Längen stellen ein gutes Maß für die Strömung dar und wurden auch in den experimentellen Untersuchungen bestimmt. Der Ermittlung der Reynoldszahl wird als

Geschwindigkeitsmaß die mittlere Einströmgeschwindigkeit und als Längenmaß der hydraulischen Durchmesser, d.h. die doppelte Einströmhöhe, zu Grunde gelegt.

Die Berechnungen werden für $Re < 830$ mit einem Netz aus 7128 Q1Q1-Elementen und für den höheren Reynoldszahlbereich mit einer Diskretisierung aus 8946 Q1Q1-Elementen durchgeführt. Das feinere dieser beiden Netze ist in Bild 4.8 ausschnittsweise dargestellt. Zur

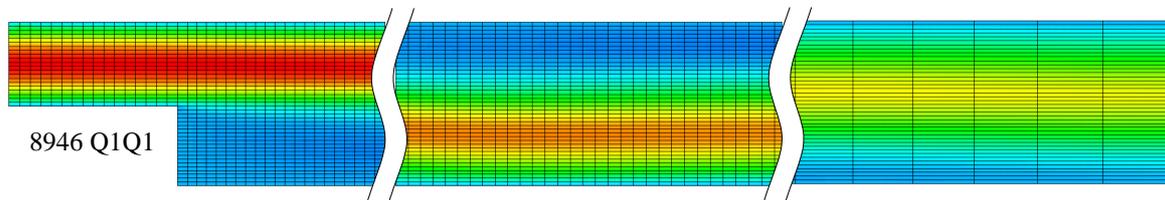


Bild 4.8: Details für feine 'Backward facing step'-Diskretisierung

Verdeutlichung eines charakteristischen Strömungsbildes ist das numerische Ergebnis der Simulation für $Re = 1600$ in Bild 4.9 in Form von Stromlinien, der 'Vorticity' und einiger ausge-

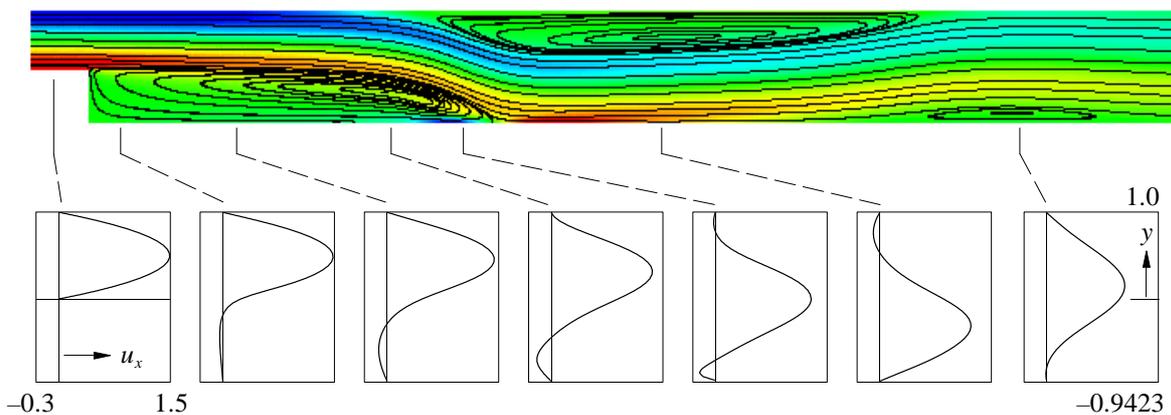


Bild 4.9: 'Backward facing step'-Strömung bei $Re=1600$ (zweifach überhöht) — Stromlinien auf 'Vorticity' (Farbskala $[-4,4]$) und Geschwindigkeitsprofile für u_x

wählter Profile der horizontalen Geschwindigkeitskomponenten dargestellt. Dabei soll erwähnt werden, daß das Verfahren sogar den Wirbel an der Kanalunterseite in Ausflußnähe entdeckt hat. Das Ergebnis für den Druckzustand im Kanal bei dieser Strömung ist in Bild 4.10 dargestellt. Dabei ist deutlich ein Druckhochpunkt an der Stelle des Auftreffens der Hauptströmung an der Kanalunterseite, d.h. im Bereich der Stelle x_1 , erkennbar. Im Vergleich dazu sind in Bild 4.11 exemplarisch Ausschnitte aus den Ergebnissen für eine Strömung im mittleren und eine Strömung im unteren Reynoldszahlbereich dargestellt.

In der Tabelle 4.3 werden die numerischen Ergebnisse für die 'Reattachment'-Längen des hier entwickelten Verfahrens mit den experimentellen Ergebnissen von Armaly et al. (1983) verglichen. Dafür werden aus den durchgeführten Simulationen exemplarisch eine niedrige, eine mittlere und eine hohe Reynoldszahl ausgewählt. Die restlichen Simulationen zeigen dasselbe Verhalten. Zusätzlich sind in den Vergleich auch die numerischen Ergebnisse der kürzlich erschienenen Veröffentlichung von Cruchaga (1998) aufgenommen, die sich rein mit der numerischen Simulation dieser Strömung beschäftigt. Analoge Ergebnisse dazu finden sich auch in Cruchaga, Oñate (1997).

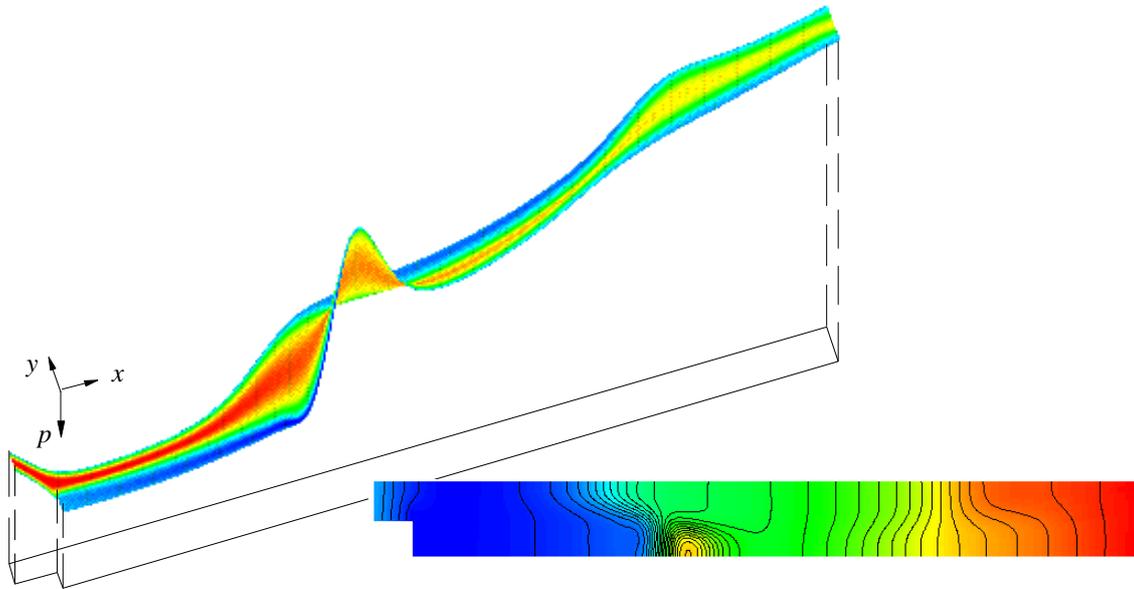


Bild 4.10: Geschwindigkeitsbetrag auf 'Druckgebirge' (Druckwert entspricht z -Koordinate) und Isobaren für 'Backward facing step'-Strömung

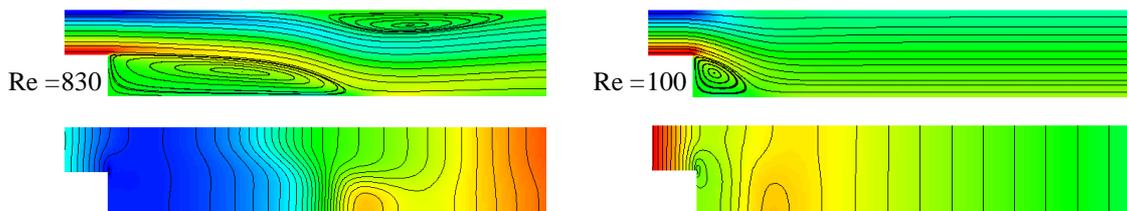


Bild 4.11: 'Backwardfacing step'-Strömungen (Ausschnitte, zweifach überhöht) — Stromlinien auf 'Vorticity' und Isobaren

	x_1 / s	x_4 / s	x_5 / s	x_2 / s	x_3 / s
Re=100	2.9				
Armaly et al. (1983)	3.0				
Cruchaga (1998)	3.0				
Re=830	11.9	9.9	20.2		
Armaly et al. (1983)	14.0	11.2	20.0		
Cruchaga (1998)	11.5	10.5	19.4		
Re=1600	14.9	12.2	31.1	30.2	38.9
Armaly et al. (1983)	13.9	9.5	22.0	22.3	24.3
Cruchaga (1998)	17.0	14.6	34.0	—	—

Tabelle 4.3 'Reattachment'-Längen bei 'Backward facing step'-Strömungen

In der Arbeit von Cruchaga (1998), und auch in Cruchaga, Oñate (1997), wird für sämtliche Reynoldszahlen auf eine Diskretisierung zurückgegriffen, die um ca. 15% feiner ist als die feinere der beiden hier verwendeten Diskretisierungen. Ebenso wird in den hier durchgeführten Simulationen auf den geringen Einfluß des Eigengewichtes verzichtet, der in Cruchaga (1998) berücksichtigt wurde und natürlich auch in den Experimenten von Armaly et al. (1983). Die

größeren Unterschiede zwischen numerischen und experimentellen Ergebnissen für $Re = 1600$ erklären sich aus der Tatsache, daß diese Strömung bereits im Transitionsbereich liegt, beide numerischen Ansätze jedoch auf laminaren, rein zweidimensionalen Ansätzen beruhen.

4.5.2 Zylinderumströmung – Kármánsche Wirbelstraße

Das Beispiel der Umströmung eines Zylinders kann als der ‘Klassiker’ unter den instationären, inkompressiblen, viskosen Strömungsbeispielen bezeichnet werden und es stellt, nach der Literatur zu schließen, nach wie vor eine Herausforderung an die numerischen Verfahren dar. Auch der vor wenigen Jahren durchgeführte DFG–Benchmark (Schäfer, Turek (1996)) zeigte, daß zuverlässige Simulationen solcher Problemstellungen noch immer eine ‘harte’ Prüfung für die numerischen Verfahren sind. Somit wurde dieses Beispiel quasi ein zwingender Test für transiente Navier–Stokes–Löser. An dieser Stelle soll auf die lange Aufzählung von Arbeiten, die sich mit diesem Beispiel befassen, verzichtet werden. Für solche Zylinderumströmungen existieren erfreulicherweise auch eine große Anzahl an experimentellen Ergebnissen. Ausführliche Informationen und Literaturangaben hierzu finden sich in den Arbeiten von Norberg (1994) und Williamson (1996).

Bei der Umströmung von Zylindern müssen im unteren Reynoldszahlbereich die folgenden Strömungsbereiche bzw. Strömungscharakteristiken unterschieden werden (Williamson (1996), Schlichting und Gersten (1997)):

- stationäres, laminares Regime $Re < 49$
- laminare Wirbelablösung $49 < Re < 140 - 194$
(Kármánsche Wirbelstraße)
- Übergang zu dreidimensionaler Wirbelbildung $190 < Re < 260$
- wachsende, feinskalige dreidimensionale Unordnungen; laminare Ablösungen; turbulente Ablösungen; ... $260 < Re$

Das Strömungsphänomen, das wohl hauptverantwortlich ist für die Attraktivität dieses Beispiels zum Test transienter Navier–Stokes–Löser, ist die sogenannte Kármánsche Wirbelstraße. Diese Strömungscharakteristik ist nach Theodor von Kármán (1881–1963) benannt. Es handelt sich dabei um eine Instabilität der laminaren Strömung. Diese bewirkt, daß sich die beiden Wirbel im Zylindernachlauf vom Zylinder abzulösen beginnen. Anschließend lösen sich in einer bestimmten Frequenz Wirbel abwechselnd von den beiden Seiten vom Zylinder ab. Eine spezielle Herausforderung bei der Zylinderumströmung ergibt sich nun dadurch, daß das numerische Verfahren im Gegensatz zur Umströmung scharfkantiger Profile hier in der Lage sein muß, auch die Ablösestelle an der glatten Zylinderoberfläche zu finden.

Die folgenden numerischen Beispiele werden aus jenen Bereichen der oben angeführten Strömungscharakteristiken gewählt, in denen auch im Experiment ein rein zweidimensionaler Strömungszustand beobachtet werden kann. Die Beispielkonfigurationen werden dabei so festgelegt, daß sowohl ein stationäres als auch ein instationäres Strömungsregime untersucht werden können. Daß es sich bei diesen Beispielen um Strömungen handelt, die tatsächlich in der Natur vorkommen, zeigen die Ausführungen im Anhang A1.

Beispielbeschreibung

Die Berechnungen sollen eigentlich einen Zylinder in einer unendlich ausgedehnten Strömung darstellen. Für die numerischen Berechnungen muß das Rechengebiet jedoch offensichtlich

begrenzt werden. Angaben zum Einfluß der Lage des Ausflußrandes können der Arbeit von Tezduyar und Shih (1991) entnommen werden. Die Untersuchungen von Behr et al. (1995) zur Lage der seitlichen Ränder zeigen, daß oberhalb und unterhalb des Zylinders ein Raum von acht Zylinderdurchmessern Platz sein sollte, um jeglichen künstlichen Einfluß auf die numerischen Ergebnisse zu vermeiden. Zur Rechensparnis wird hier jedoch, wie in der Literatur häufig anzutreffen, ein etwas kleineres Gebiet gewählt. Für die meisten der hier dokumentierten Simulationen können die Geometrie des Rechengebietes und die Randbedingungen dem Bild 4.12 entnommen werden. Die Diskretisierung dieses Gebietes mit 7298 Q1Q1-Elementen

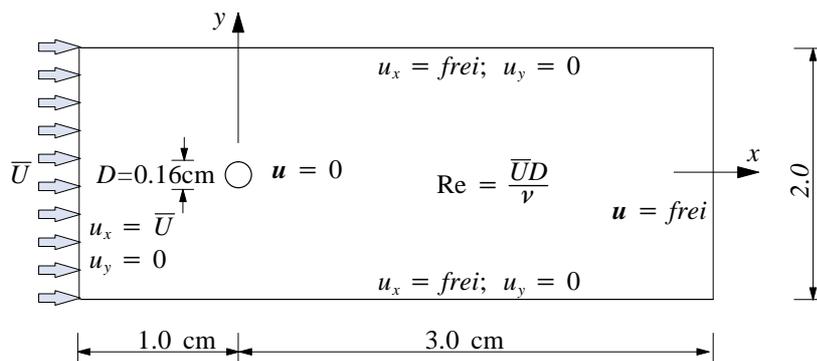


Bild 4.12: Umströmung eines Zylinders — Problemstellung, Geometrie, Randbedingungen ist in Bild 4.13 skizziert.

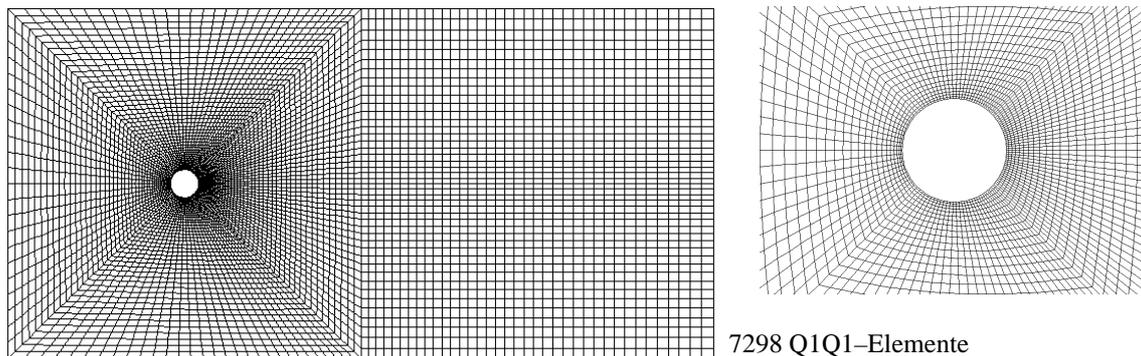


Bild 4.13: Umströmung eines Zylinders — Diskretisierung

Stationärer Strömungszustand

Zunächst wird ein Beispiel mit einer Reynoldszahl $Re = 40$ gewählt. Entsprechend obiger Klassifizierung wird dafür eine stabile stationäre Strömung erwartet. Die Strömung wird hier jedoch transient berechnet. Das Beispiel soll somit zeigen, ob derselbe Algorithmus, der später die instationäre Wirbelablösung entdecken soll, bei einer identischen Diskretisierung in der Lage ist, die erwartete stationäre Antwort zu liefern. Das Beispiel soll zusätzlich auch der weiteren quantitativen Verifizierung des entwickelten Verfahrens dienen.

Um für diesen stationären Fall einen Vergleich mit numerischen und experimentellen Ergebnissen aus der Literatur zu ermöglichen, wird die Beispielkonfiguration im Vergleich zu Bild 4.12 leicht modifiziert. Hierzu werden auch an den seitlichen Rändern die horizontalen Strömungsgeschwindigkeiten analog zur Einströmgeschwindigkeit \bar{U} vorgeschrieben. Die Einströmgeschwindigkeit wird zu $\bar{U} = 1.0 \text{ cm/s}$ gewählt. Bei einer Dichte von $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ muß

die Viskosität zu $\mu = 0.004 \text{ g/cm}\cdot\text{s}$ gesetzt werden, um die Reynoldszahl $Re = 40$ zu erhalten.

Ausschnitte aus der stationären Strömungslösung sind in Bild 4.14 dargestellt. Dabei sind so-

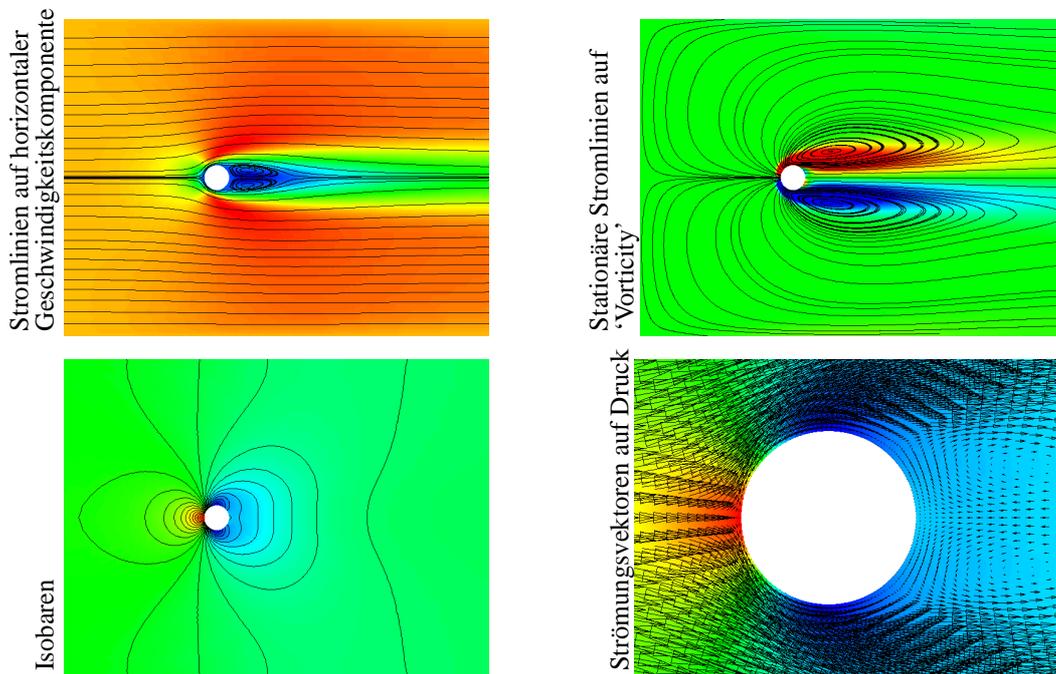


Bild 4.14: Stationäre Umströmung eines Zylinders bei $Re=40$ (Ausschnitte)

wohl die tatsächlichen Stromlinien, wie auch die sogenannten 'stationären Stromlinien' dargestellt. Diese stationären Stromlinien stellen eine mögliches Visualisierungshilfsmittel dar, um die Wirbel in einer Strömung besser darstellen zu können. Zu diesem Zweck bleibt bei der Integration der Stromlinien die horizontale Grundströmung (hier \bar{U}) unberücksichtigt.

Die erhaltene numerische Lösung stimmt sehr gut mit den in Choi et al. (1997) zitierten numerischen und experimentellen Ergebnissen überein. Dies betrifft die in Bild 4.15(links) darge-

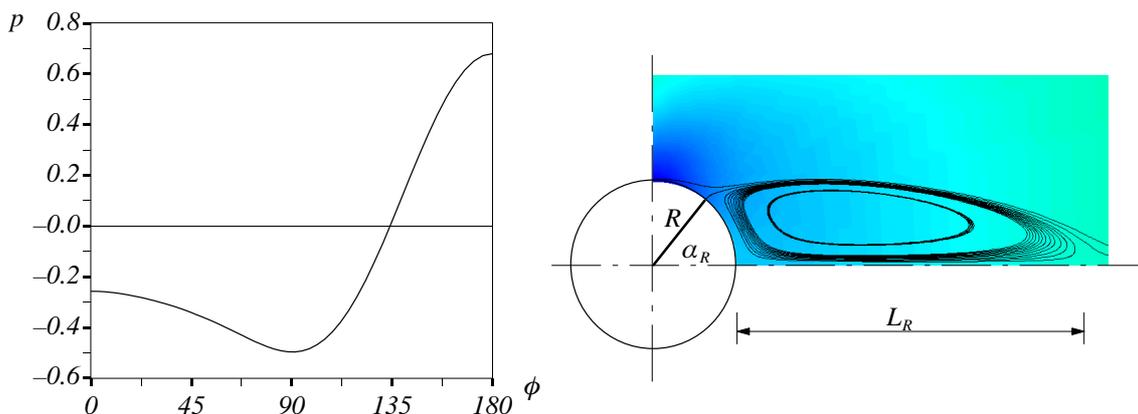


Bild 4.15: Druck an der Zylinderoberfläche und Skizze zu Definition von Ablöswinkel und 'Reattachement'-Länge

stellte Druckverteilung über die Zylinderoberfläche ebenso, wie die Zahlenwerte für den Ablöswinkel α_R und die 'Reattachement'-Länge L_R . Diese beiden Kenngrößen sind in Bild 4.15(rechts) definiert. Die vorliegenden Werte von $\alpha_R = 52^\circ$ und $L_R/R = 4.27$ liegen

dabei exakt im Bereich der in Choi et al. (1997) zitierten numerischen und experimentellen Werte von $51.5^\circ \leq \alpha_R \leq 54.0^\circ$ und $4.20 \leq L_R \leq 4.28$.

Instationärer Strömungszustand — Kármánsche Wirbelstraße

Wird nun die Reynoldszahl bei der Zylinderumströmung erhöht, wird der soeben beschriebene stationäre Strömungszustand instabil. Dies hat zur Folge, daß sich die beiden Wirbel im Zylindernachlauf abzulösen beginnen. Diese Ablösung erfolgt dann abwechselnd an der oberen und an der unteren Zylinderseite, die Kármánsche Wirbelstraße entsteht. Im oben beschriebenen Reynoldszahlbereich $49 < Re < 140 \div 194$ wird sich diese Wirbelstraße mit der Zeit als eine zweidimensionale periodische Lösung einstellen. Die wesentliche Kennzahl für diese periodische Lösung ist die Strouhalzahl. Diese ist hier als

$$St = D \bar{U}/T \quad (4.83)$$

definiert. D bedeutet darin den Zylinderdurchmesser und T die Periode einer Oszillation.

Die Simulationen für den erwarteten instationären Strömungszustand werden hier für $Re = 100$ durchgeführt. Für diesen Fall liegen eine große Reihe numerischer und experimenteller Vergleichsergebnisse vor. Geometrie und Randbedingungen werden entsprechend Bild 4.12 gewählt. Die Einströmgeschwindigkeit wird zu $\bar{U} = 1.0$ cm/s, Fluidichte und Viskosität mit $\rho = 1.0$ g/cm³ sowie $\mu = 0.0016$ g/cm·s festgelegt.

Die Berechnungen starten hier mit einem ruhenden Fluid und nicht, wie in der Literatur oftmals anzutreffen, ausgehend vom stationären Strömungszustand. Innerhalb von 1 Sekunde wird die Einströmgeschwindigkeit von Null auf \bar{U} gesteigert und dann konstant gelassen. Um die erwartete Schwingungsperiode gut aufzulösen, wird eine Zeitschrittweite von $\Delta t = 0.032$ s gewählt. Dies würde eine Auflösung von etwa 30 Zeitschritten pro Periode bedeuten. Entsprechend obigen Ausführungen wird pro Zeitschritt nur ein nichtlinearer Iterationsschritt ausgeführt. In Bild 4.16 sind die numerischen Ergebnisse für die zeitliche Entwicklung der Druck-

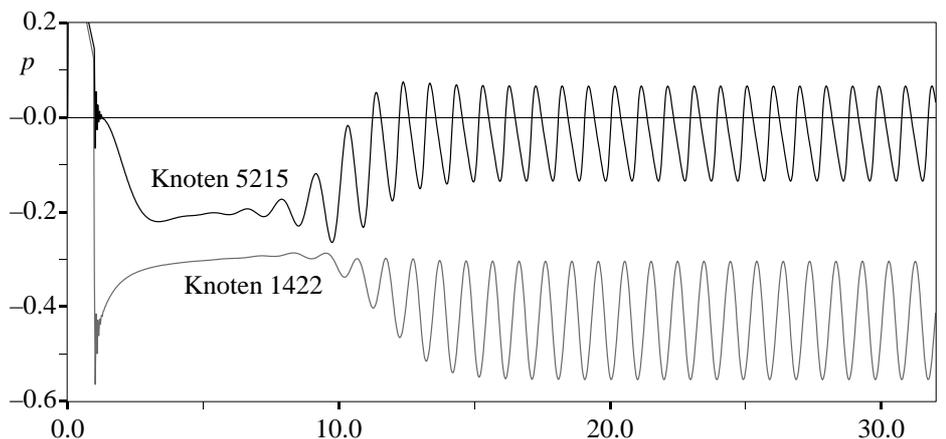


Bild 4.16: Zeitliche Druckentwicklung an zwei Knoten bei Zylinderumströmung mit $Re=100$

komponenten an zwei ausgewählten Knoten (Lage der Knoten siehe Bild 4.17) aufgetragen. Daraus ist ersichtlich, daß das entwickelte Verfahren in der Lage ist, die Instabilität in der Strömungslösung zu entdecken. Ebenso zeigt sich sehr gut, daß sich nach etwa 16 s eine periodische Lösung einstellt. Bild 4.17 zeigt einen Zoom in die periodische Lösung. Dazu sind die einzelnen Lösungskomponenten an drei Knoten über eine Dauer von zwei Perioden dargestellt.

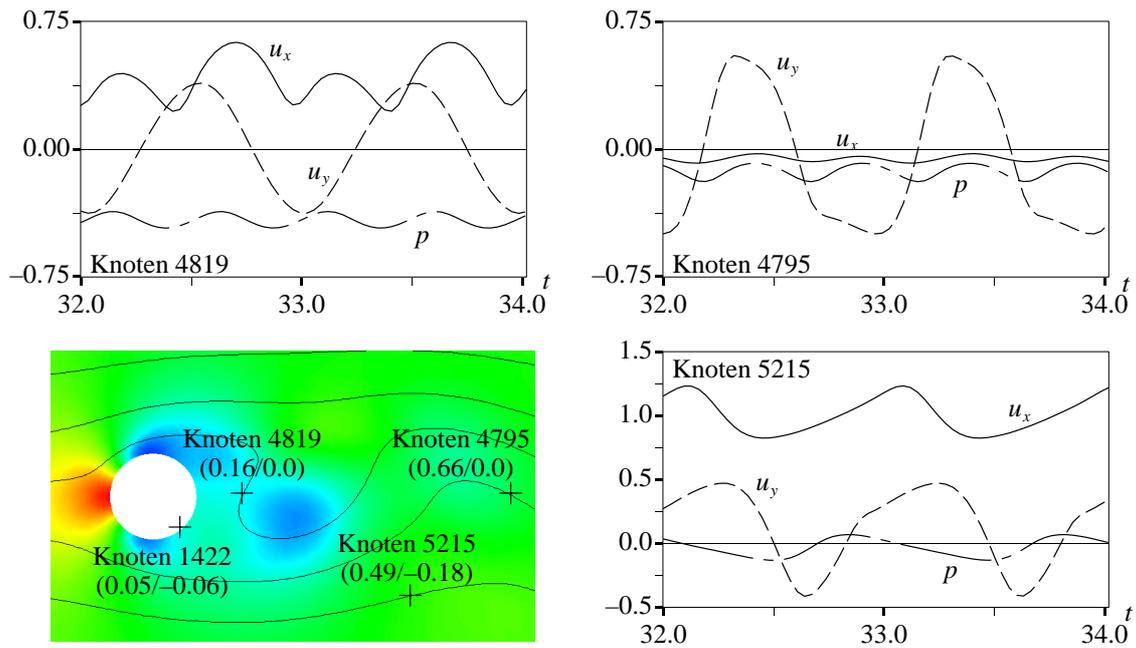
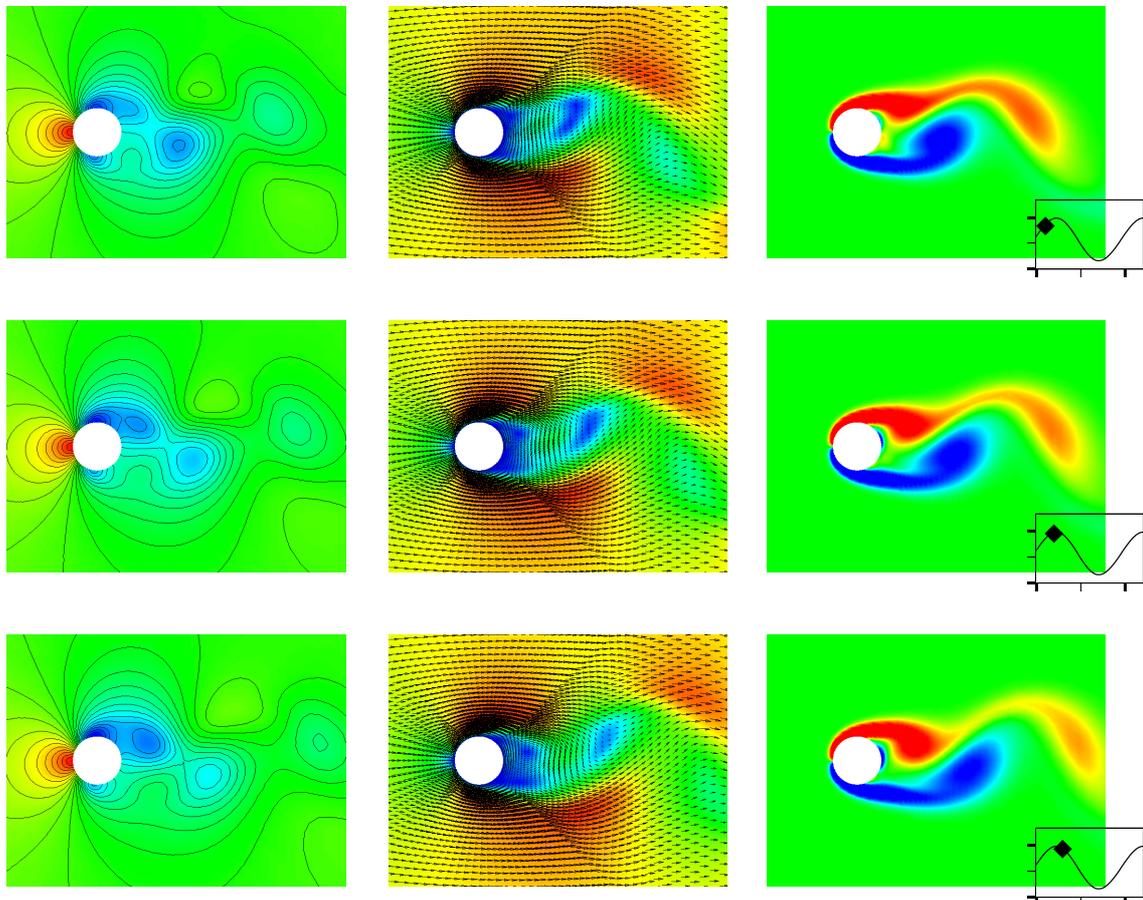
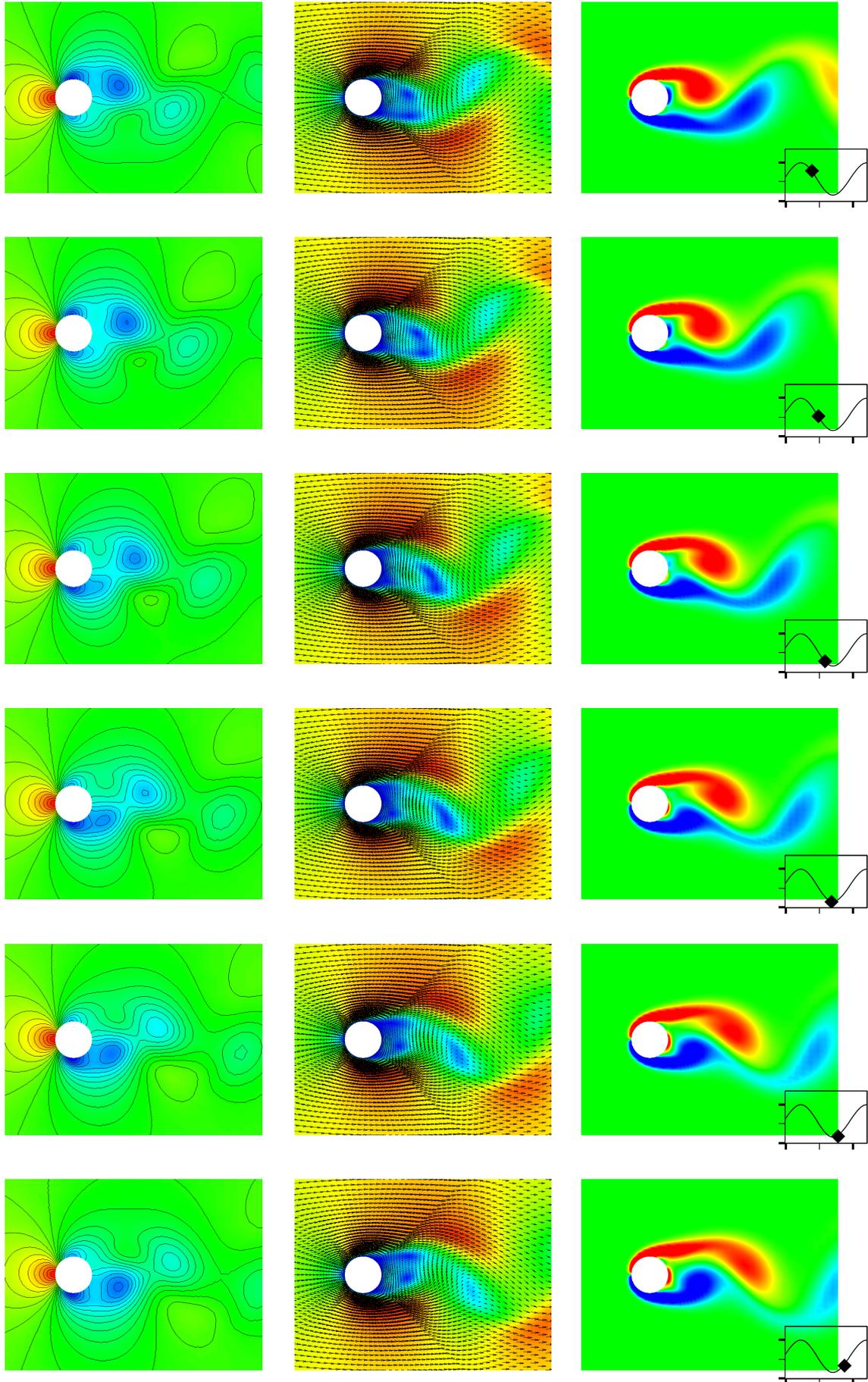


Bild 4.17: Zeitlicher Verlauf der Geschwindigkeiten und des Druckes (dimensionslos) an drei Knoten bei Zylinderumströmung und Skizze zur Lage der Knoten

Die Lösungen für einzelne Strömungszustände im Nahbereich des Zylinders im Verlauf einer Periode sind in einer Serie in Bild 4.18 dargestellt. Die Abbildungen zeigen die Isobaren, die Strömungsvektoren auf dem Betrag des Geschwindigkeitsfeldes und die 'Vorticity'. Die Lage





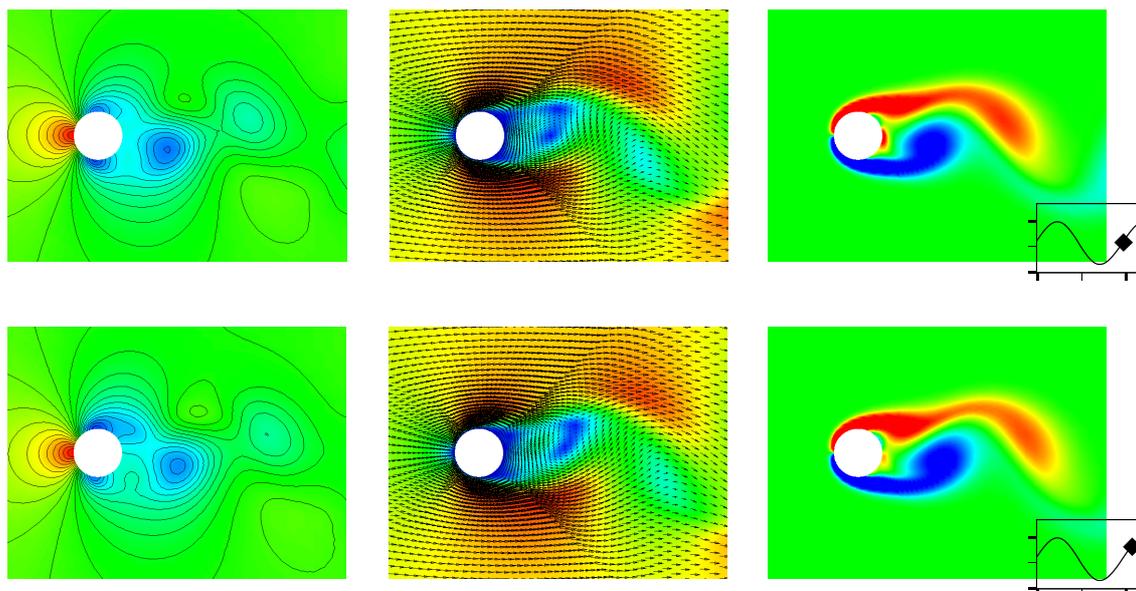


Bild 4.18: Isobaren, Geschwindigkeitsvektoren auf $|\mathbf{u}|$ und 'Vorticity' im Zylindernahbereich während der Periode $T=[32.10,33.06]$ – Zeitverlauf \rightarrow Druck am Knoten 1422

der einzelnen Bilder innerhalb der Periode zeigt das Zeitverlaufdiagramm des Druckes am Knoten 1422 an. Die Lösung für das gesamte Rechengebiet zum Zeitpunkt $t=32.1$ s ist in Bild 4.19 in Form der horizontalen Geschwindigkeitskomponente sowie der stationären Strom-

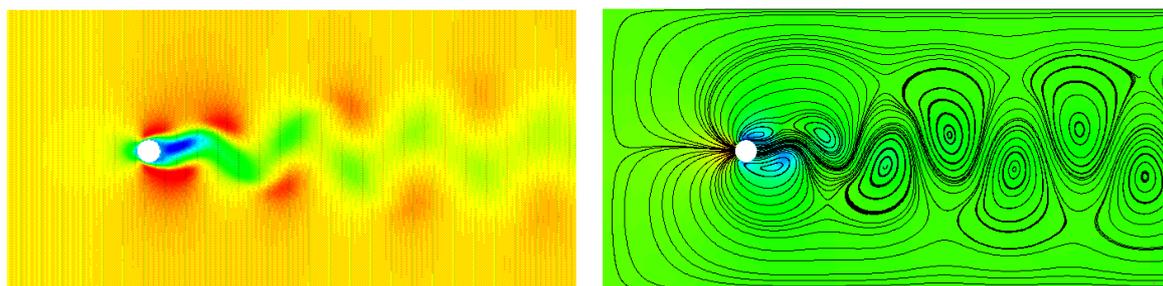


Bild 4.19: Horizontalgeschwindigkeit und stationäre Stromlinien auf Druck für das gesamte Rechengebiet zum Zeitpunkt $t=32.1$

linien und des Druckes dargestellt. Vor allem aus den stationären Stromlinien ist erkennbar, daß die 'do nothing'–Ausflußrandbedingungen kaum Störungen für die Lösungen der durchwandernden Wirbel bedeuten. Zur Verdeutlichung des komplexen Strömungszustandes im Zylindernachlauf ist in Bild 4.20 auch das 'Druckgebirge' zum selben Zeitpunkt dargestellt. Die Farben auf dem Gebirge zeigen jeweils die Größe der Horizontalgeschwindigkeit an dieser Stelle an. In Ergänzung dazu zeigt Bild 4.21 die Stromlinien und die stationären Stromlinien auf dem Druckfeld in der Nähe des Zylinders ebenfalls zum Zeitpunkt $t=32.1$ s.

	Simo, Ar- mero (1994)	Tezduyar et al. (1991)	Choi et al. (1997)	Blasco et al. (1998)	Mittal, Tez- duyar (1993)	Brooks, Hughes (1982)	Behr et al. (1995)
St	0.167–0.178	0.156–0.170	0.164	0.187	0.167	0.167	0.162–0.171

Tabelle 4.4 Ergebnisse für die Strouhalzahl bei $Re=100$ verschiedener Autoren

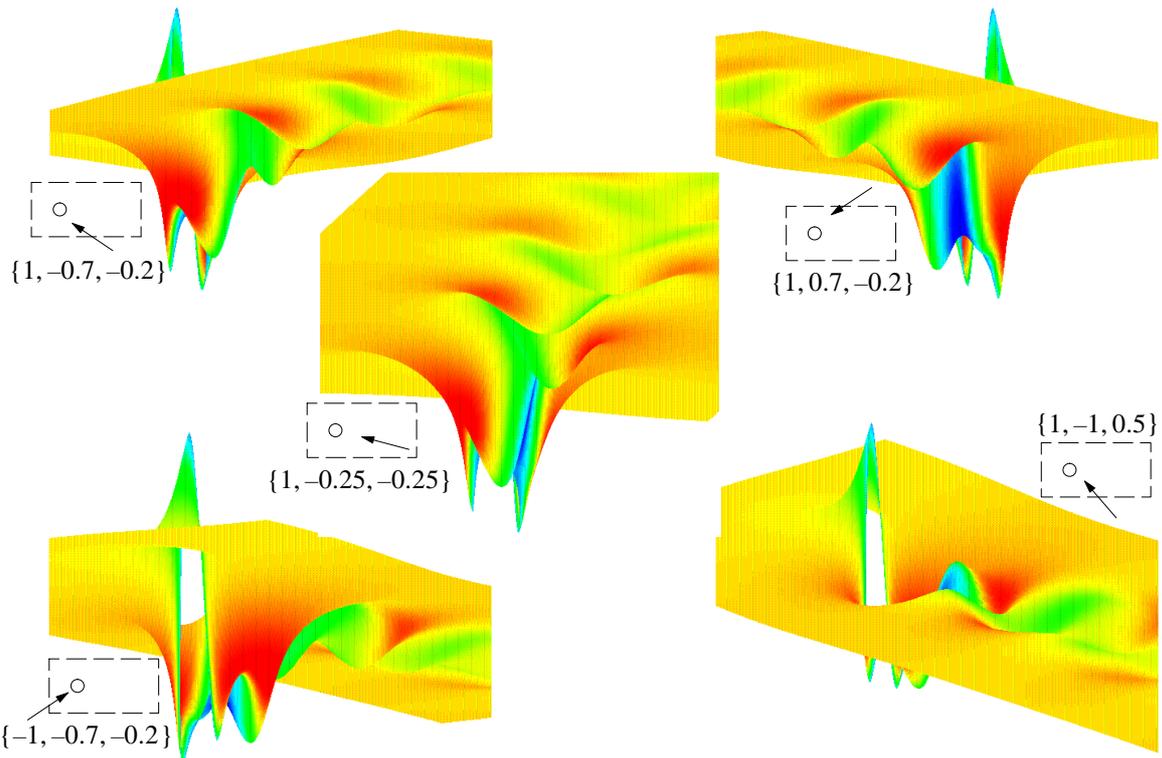


Bild 4.20: Horizontalgeschwindigkeit auf 'Druckgebirge' bei Zylinderumströmung (Blickrichtungen wie Normalen $\{x,y,z\}$ auf Abbildungsebene) zum Zeitpunkt $t=32.1$

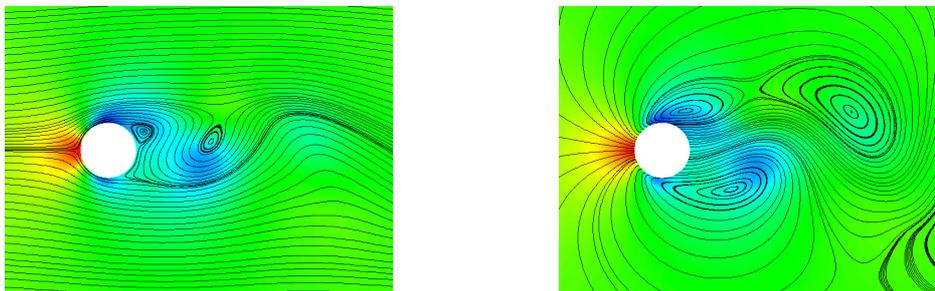


Bild 4.21: Stromlinien und stationäre Stromlinien im Zylindernahbereich zum Zeitpunkt $t=32.1$

Die wesentliche Größe zur Beurteilung der Qualität der numerischen Ergebnisse des transienten Strömungszustandes bei der Zylinderumströmung stellt die Strouhalzahl dar. Tabelle 4.4 zeigt die von verschiedenen Autoren numerisch ermittelten Werte für die Strouhalzahl. Dabei ist jedoch zu beachten, daß die unterschiedlichen Simulationen auf unterschiedlich großen und unterschiedlich fein diskretisierten Rechengebieten durchgeführt wurden. Deshalb kann beispielsweise ein bereits erwähnter Einfluß der Gebietsränder nicht völlig ausgeschlossen werden. Das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren führte für die oben beschriebene Diskretisierung auf eine Periodendauer von $T = 0.975 \text{ s}$ (Bild 4.17). Daraus folgt eine Strouhalzahl von $St = 0.164$. Dies entspricht exakt jenem Wert, den auch Norberg (1994) als Resultat umfangreicher experimenteller Untersuchungen angibt. Norberg (1994) gibt dabei als Unsicherheitschätzung für seine experimentell ermittelte Strouhalzahl $\pm 0,8\%$ an. Diese Untersuchungen von Norberg (1994) führten auch, zusammen mit einer großen Reihe früherer experimenteller Untersuchungen anderer Autoren, zu einem empirischen Zusammenhang zwischen Reynoldszahl und Strouhalzahl.

$$St = A/Re + B + C Re \quad (4.84)$$

Norberg (1994) ermittelte dafür die folgenden Konstanten: $A = -3.458$, $B = 0.1835$ und $C = 1.51 \times 10^{-4}$. Mit diesen Werten hat diese Beziehung einen Gültigkeitsbereich von $Re \approx 47$ bis $Re \approx 165$.

- **DFG–Benchmark 2D–3**

Zur quantitativen Verifikation des instationären Verfahrens wird noch ein zweites Beispiel zur Zylinderumströmung angeführt. Es handelt sich dabei um einen der bereits angesprochenen Benchmark–Beispiele aus Schäfer und Turek (1996). Da die Richtigkeit des globalen transienten Verhaltens bereits überprüft wurde, soll hier nur einem Teil der Fragestellungen dieses Benchmarks nachgegangen werden. Im Fall 2D–3 des Benchmarks wird nach einer bestimmten Größe der Strömungsantwort zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt gefragt. Diese Fragestellung wird hier verfolgt, um zumindest grob die Zeitgenauigkeit der entwickelten Verfahren zu verifizieren.

Bei dieser Benchmark–Konfiguration handelt es sich um einen Zylinder ($D = 0.1m$) in einem sehr schmalen ($H = 0.41m$) und langen Kanal mit einer oszillierenden Einströmung

$$u_x(0, y, t) = \frac{4u_my(H-y)}{H^2} \sin(\pi t/8) ; \quad u_y(0, y, t) = 0 \quad (4.85)$$

Der Abstand des Zylinders vom oberen Kanalrand beträgt $0.16m$. Die Kanallänge beträgt $2.2m$ und der Zylinder ist $0.15m$ vom Einströmrand entfernt. Am oberen und unteren Kanalrand sind ‘no–slip’–Randbedingungen vorgeschrieben. Fluidichte und Viskosität werden mit $\rho = 1.0 \text{ g/cm}^3$ sowie $\mu = 0.0016 \text{ g/cm}\cdot\text{s}$ festgelegt. Die Diskretisierung erfolgt hier ähnlich zu den vorhergehenden Beispielen mit 8970 Q1Q1–Elementen. Für die Zeitintegration wird ein BE–Verfahren mit einer Iteration pro Zeitschritt angewendet. Durch die zeitveränderliche Einströmung ergibt sich eine zusätzliche Dynamik in der Strömungslösung. Diese ist in Bild 4.22 in Form von Momentaufnahmen der ‘Vorticity’ angedeutet.

Die gesuchte Größe im Benchmark 2D–3 aus Schäfer und Turek (1996) ist die Druckdifferenz zwischen vorderem und hinteren Endpunkt des Zylinders, d.h. die Druckdifferenz der Schnittpunkte der Zylinderwand mit der horizontalen Zylinderachse, ΔP zum Zeitpunkt $t = 8s$. Der zeitliche Verlauf der Drücke an diesen beiden Punkten ist ebenfalls in Bild 4.22 dargestellt.

An diesem Benchmark nahmen eine Reihe von Arbeitsgruppen teil. Die in Schäfer und Turek (1996) dokumentierten Ergebnisse wurden dabei mit den unterschiedlichsten Verfahren berechnet. Als räumliche Diskretisierung wurden dabei sowohl Finite Differenzen als auch Finite Volumen und Finite Elemente bis hin zu Lattice–Boltzmann–Verfahren eingesetzt. Ebenso vielfältig waren die eingesetzten Zeitdiskretisierungsverfahren und ‘Upwind’–Techniken. Die Anzahl an Unbekannten reichte dabei bis zu 670000 und die Zeitschrittzahl bis zu 37000. Die eingereichten Ergebnisse für die Druckdifferenz $\Delta P(t=8)$ bewegen sich im Bereich -0.1220 bis $+0.0200$. In der Zusammenfassung der Werte geben Schäfer und Turek (1996) daraus obere und untere Grenzen für ein geschätztes Intervall des exakten Wertes für ΔP an. Diese Grenzen werden mit -0.1150 bis -0.1050 angegeben. Mit der angegebenen räumlichen Diskretisierung und einer Zeitschrittgröße von $\Delta t = 0.008$ bei 1000 Zeitschritten wurde mit dem vorliegenden Verfahren eine Druckdifferenz von $\Delta P(t=8) = -0.1081$ ermittelt.

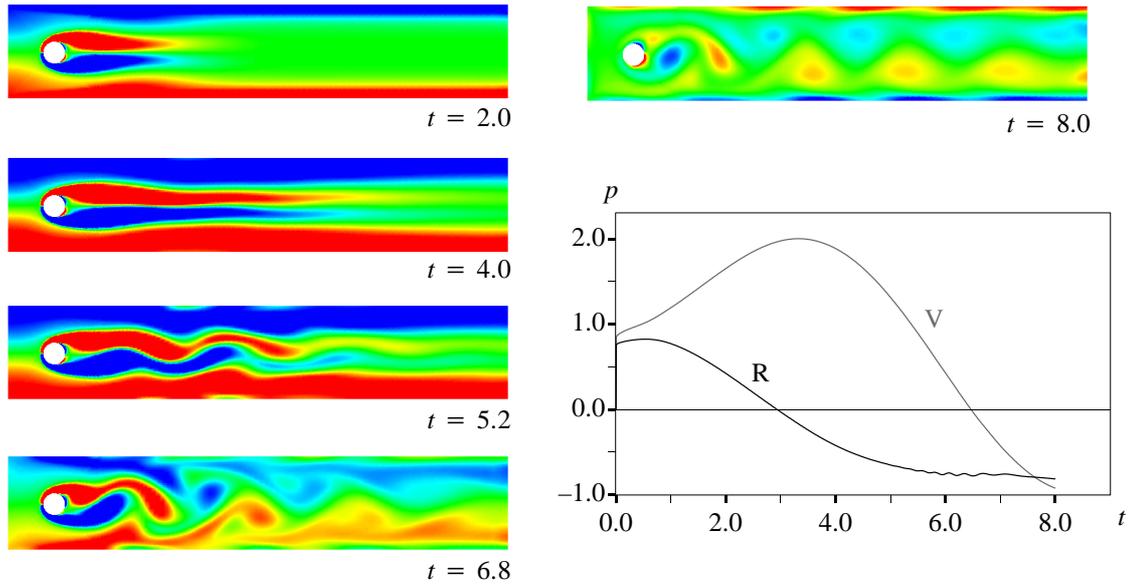


Bild 4.22: Momentaufnahmen der ‘Vorticity’ für Benchmarkbeispiel 2D–3 und Druckverlauf an Zylindervorderseite (V) und Zylinderrückseite (R)

4.5.3 3D–Strömungsbeispiele

Dreidimensionaler ‘Driven Cavity’

Das erste Beispiel behandelt wiederum einen überströmten Hohlraum. Dieses Mal handelt es sich jedoch um einen dreidimensionalen Hohlraum. Durch ‘no–slip’–Randbedingungen am Boden und vor allem an *allen* Seitenwänden des Hohlraumes werden für jeden Reynoldszahlbereich tatsächlich dreidimensionale Strömungen erwartet. Dieses Beispiel wird hier angeführt, um auch für die dreidimensionalen Modelle eine erste grobe quantitative Verifikation der Simulationsergebnisse durchführen zu können.

Für das vorliegende Beispiel wird ein würfelförmiger Hohlraum mit Seitenlängen von jeweils 1.0 gewählt. Der Hohlraum wird in x –Richtung mit einer Geschwindigkeit von 1.0 überströmt. Zusammen mit einer Viskosität von 0.01 ergibt dies die Reynoldszahl $Re = 100$. Die Diskretisierung mit $20 \times 20 \times 10$ Q1Q1–Elementen ist in Bild 4.23 dargestellt. Zur besseren Darstellung des Netzes wird ein Teil des Würfels aufgefüllt und farblich mit dem Wert der Geschwindigkeitskomponente u_x belegt. In Bild 4.23 werden die numerischen Ergebnisse, die das hier entwickelte Verfahren lieferte, auch mit den Werten aus Soulaïmani et al. (1987) und mit Ergebnissen aus Reddy et al. (1992) verglichen. Wie auch im zweidimensionalen Fall zeigt das vorliegende stabilisierte Finite–Element–Verfahren wenig künstliche Diffusion. Sowohl die Ergebnisse von Soulaïmani et al. (1987), mit einer $10 \times 8 \times 10$ –Diskretisierung, als auch die Ergebnisse von Reddy et al. (1992), mit einer $14 \times 14 \times 14$ –Diskretisierung, zeigen einen deutlich stärkeren diffusiven Charakter. Zur Verdeutlichung der Lösung ist in Bild 4.24 noch eine Isofläche für die Geschwindigkeitskomponente u_x und farblich darauf die Geschwindigkeitskomponente u_z dargestellt. Die Stromlinien in Bild 4.24 machen deutlich, daß es sich zwar um einen dreidimensionalen Strömungszustand handelt, die zweidimensionale Strömungscharakteristik jedoch dominiert.

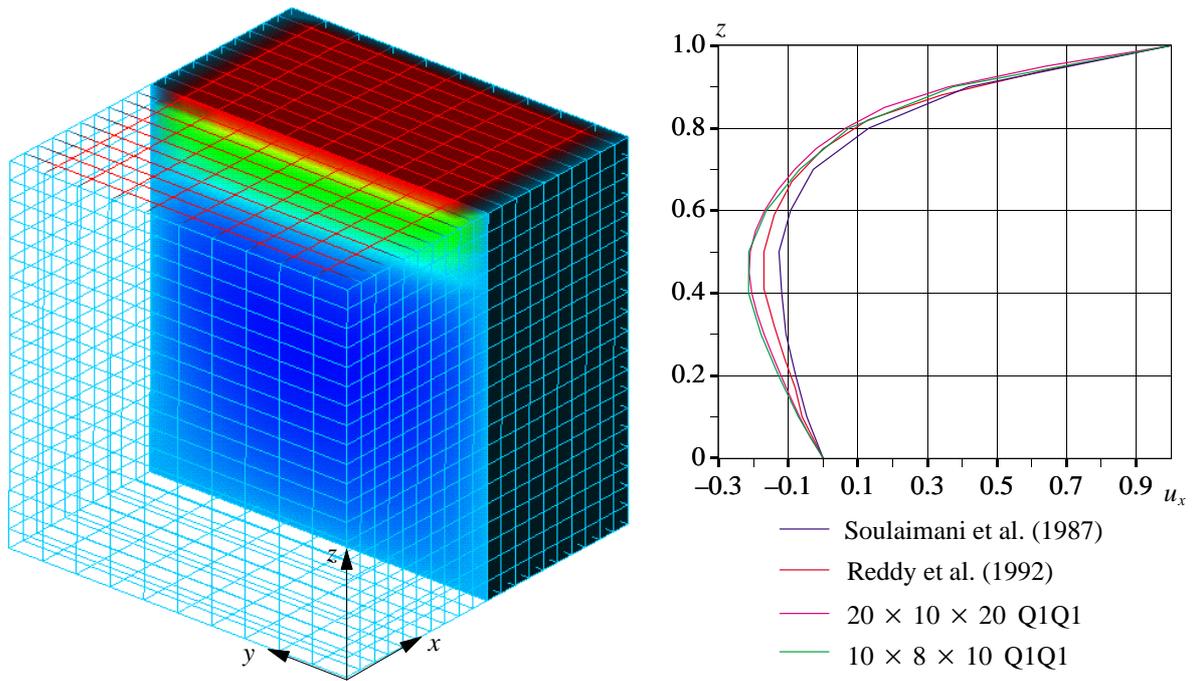


Bild 4.23: Dreidimensionaler 'Driven cavity' — Netz mit Geschwindigkeitskomponente u_x und Ergebnisvergleich für Geschwindigkeit u_x entlang der Geraden $(0.5, 0.5, z)$

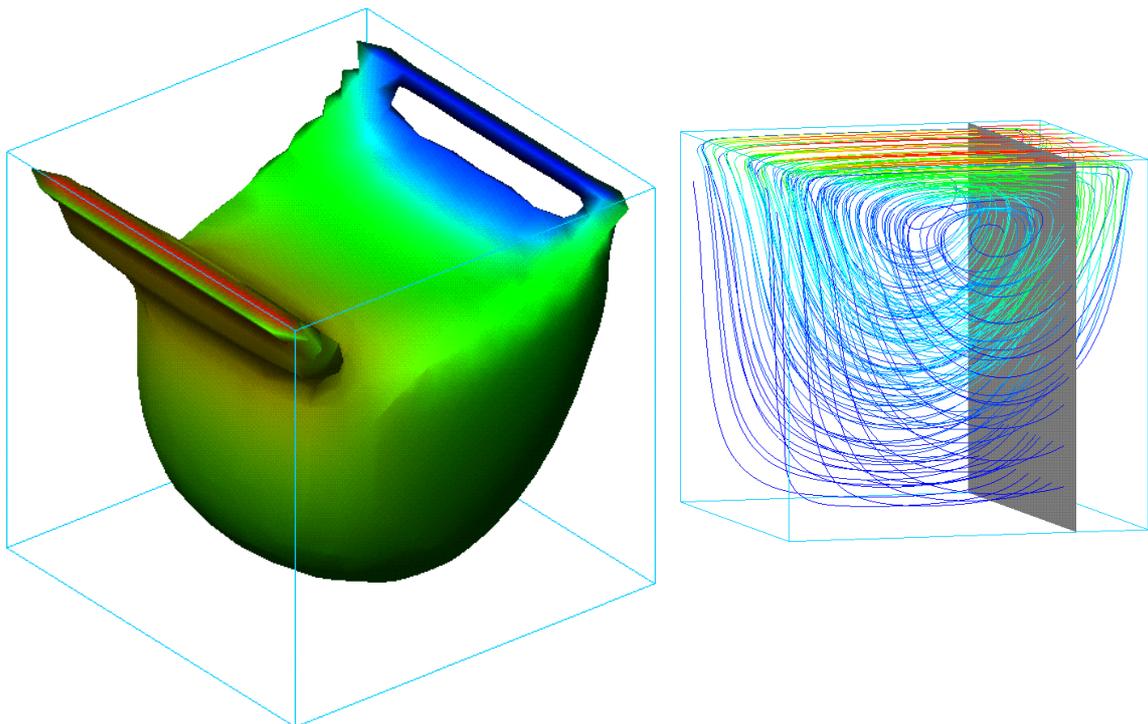


Bild 4.24: Dreidimensionaler 'Driven cavity' — Isofläche für Horizontalgeschwindigkeit ($u_x = -0.05$) mit farblicher Darstellung der Komponente u_z und Stromlinien

Strömung durch einen gekrümmten Kanal

Das zweite Beispiel behandelt die Strömung durch einen gekrümmten rechteckigen Kanal. An einem Kanalende wird eine parabolische Einströmung vorgeschrieben. Die Kanalwände werden mit 'no-slip'-Randbedingungen versehen. Der Kanal wird mit $8 \times 8 \times 40$ Q1Q1-Elementen diskretisiert. Diese Vernetzung ist in Bild 4.25 dargestellt.

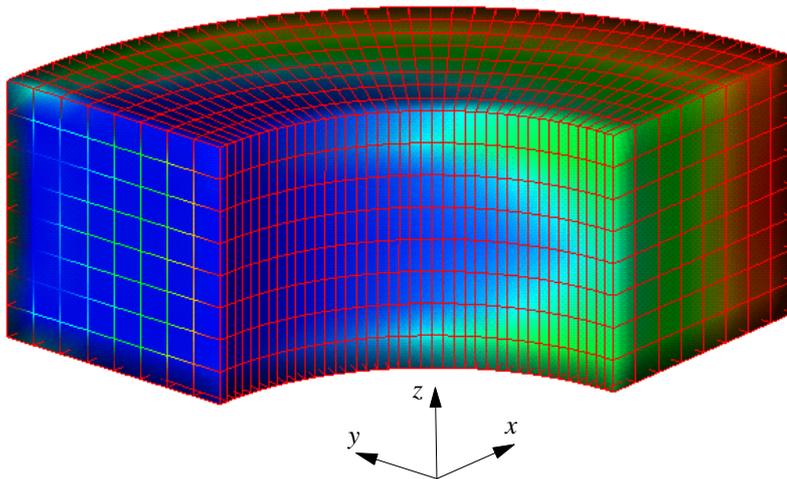


Bild 4.25: Strömung durch einen gekrümmten Kanal — Netz und u_y

Bild 4.26 zeigt die Stromlinien der numerisch ermittelten Lösung. Daraus wird in Ansätzen

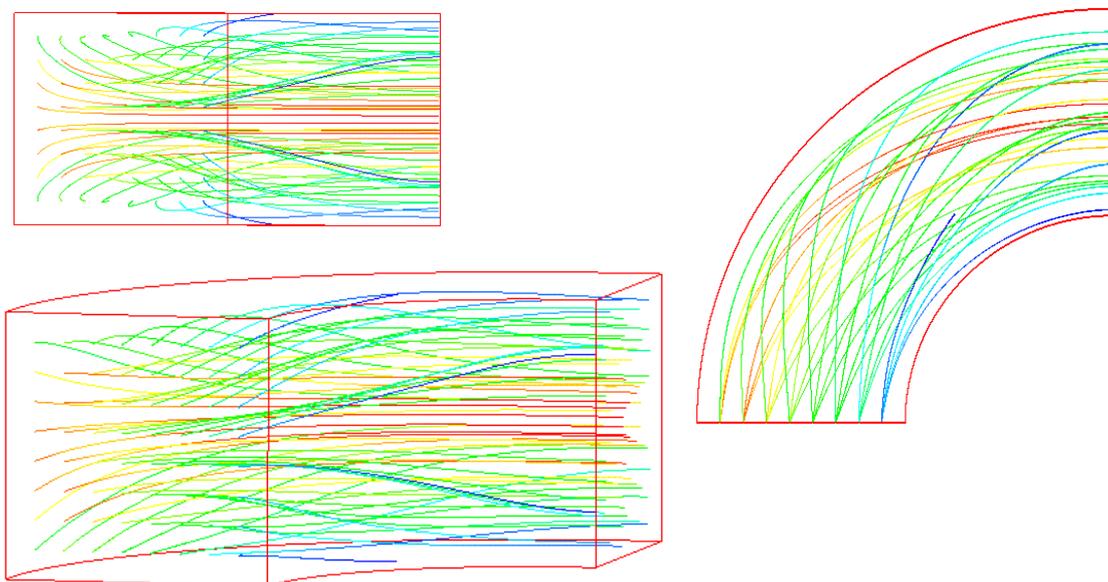


Bild 4.26: Strömung durch einen gekrümmten Kanal — Stromlinien

das Entstehen von sekundären Wirbeln ersichtlich. Die Ursache für dieses Strömungsphänomen läßt sich sehr leicht erklären. Durch die Zentrifugalkraft bei der Durchströmung der Krümmung wird das Fluid nach außen gedrückt. Das dort befindliche Fluid muß weichen und wird nach oben und unten und in weiterer Folge an die Kanalinnenseite verdrängt. Bild 4.27 zeigt schließlich die Isoflächen des Druckes und darauf die Geschwindigkeitsverteilung u_x für vier verschiedene Druckwerte.

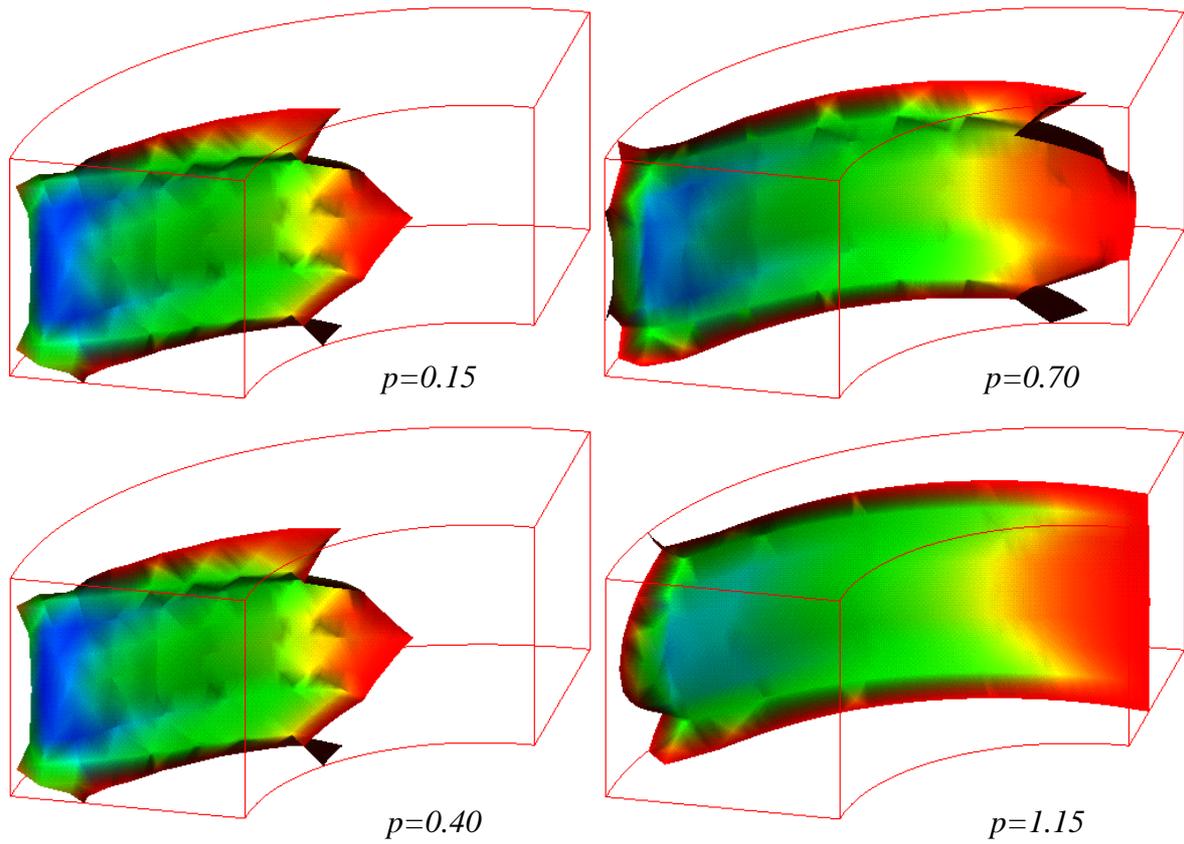


Bild 4.27: Strömung durch einen gekrümmten Kanal — Druck-Isflächen und farblich darauf die Geschwindigkeitskomponente u_x

5 Navier–Stokes–Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten

In diesem Kapitel werden die bisher erarbeiteten Verfahren zur Lösung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen dahingehend erweitert, daß damit auch eine Strömungssimulation auf zeitveränderlichen Gebieten möglich wird. Nach einer kurzen Übersicht über existierende Verfahren zur Behandlung von Strömungen mit bewegten und/oder beweglichen Rändern wird die ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’–Betrachtungsweise (ALE) als leistungsstarkes Werkzeug ausgewählt, und die Strömungs–Grundgleichungen werden in diesem Rahmen formuliert. Anschließend wird die algorithmische Umsetzung einer ALE–Formulierung diskutiert, einerseits für die Lösung der ALE–Gleichungen selbst, aber auch speziell für die angewandten Stabilisierungsverfahren. Daraufhin wird eine wesentliche zusätzliche Bedingung für ALE–Verfahren, die sogenannte ‘Geometrische Bilanzgleichung’, erläutert. Schließlich wird, aufbauend auf den Verfahren in den Kapiteln 3 und 4, ein stabilisiertes ALE–Finite–Element–Verfahren präsentiert und dessen Anwendung auf ausgewählte Beispiele mit bewegten Netzen und bewegten Rändern gezeigt.

5.1 Strömungen auf Gebieten mit bewegten / beweglichen Rändern

5.1.1 Einführung

Hier soll eine kurze Übersicht über Verfahren gegeben werden, die zur Simulation von Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten zur Verfügung stehen. Dabei werden nicht nur die üblichen Fälle mit bewegten Rändern sondern auch bewegliche Ränder, z.B. freie Oberflächen, Interaktions–Interface, berücksichtigt. Der derzeitige Kenntnisstand zu den assoziierten Fragestellungen ist bei weitem noch nicht vollständig. Ein leider etwas einseitig ausgerichteter und unvollständiger Übersichtsartikel zu Verfahren zur Simulation viskoser Strömungen mit beweglichen Rändern stammt von Floryan und Rasmussen (1989). Allgemein kann gesagt werden, daß für kleine bis mittelgroße Randbewegungen relativ effiziente und genaue Methoden zur Verfügung stehen. Für sehr große Randbewegungen existieren zwar Verfahren, die vom physikalischen Standpunkt aus sinnvolle Ergebnisse liefern, jedoch sind diese oft mit einer gewissen Unsicherheit bezüglich ihrer Genauigkeit verbunden. Es soll hier auch erwähnt werden, daß in vielen Übersichtsartikeln diese Verfahren oft fälschlicherweise den Lagrange– oder Euler–Verfahren zugeordnet werden, obwohl es sich im strengen Sinne um ALE–Verfahren handelt. Für die Grundlagen und Kriterien zur genauen Einordnung von Verfahren wird auf Kapitel 2.1 verwiesen, wo sich bereits einige Anmerkungen zu den Vor– und Nachteilen der einzelnen kontinuumsmechanischen Betrachtungen finden.

Fragestellungen mit freien Oberflächen stellen sicherlich die größte Herausforderung von Strömungssimulationen auf zeitveränderlichen Gebieten dar; es werden zwar Probleme mit freien Oberflächen in dieser Arbeit nicht direkt bearbeitet, dennoch sollen dazu einige Anmerkungen gemacht werden. Dies geschieht mit Blick auf weitere Aufgabenstellungen im zu Grunde liegenden Projekt, bei dem die Erweiterbarkeit auf freie Oberflächen einen Teilaspekt darstellt (Schmidt et al. (1999)).

Lagrange-Verfahren

Für bewegliche Ränder bieten sich Verfahren an, die auf einer Lagrangeschen kontinuumsmechanischen Betrachtungsweise basieren. Durch diese materialpunktorientierte Lagrangesche Sichtweise bereitet die Definition der bewegten Ränder selbst bei großen Deformationen keinerlei Probleme. Daraus folgt natürlich auch, daß die Aufbringung der entsprechenden Randbedingungen an diesen Rändern vergleichsweise einfach ist. Lagrangesche Ansätze zur Verwendung von FEM für Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten finden sich in Hansbo (1995), Ramaswamy und Kawahara (1987b) und Radovitzky und Ortiz (1998).

Nachteile dieser Verfahren sind Schwierigkeiten bei den üblicherweise sehr großen Partikelbewegungen in Strömungen. Hier liegen genau jene Gründe vor, die für die Dominanz der Euler-Betrachtungen bei Strömungsaufgaben entscheidend sind. Dabei sind nicht in erster Linie die großen Randbewegungen gemeint, sondern vor allem große Bewegungen inmitten des Strömungsgebietes, z.B. bei Wirbeln. Das Haften des Beobachters und damit des FEM-Netzes an den Materiepunkten führt zu großen Netzverzerrungen und schnell zu unbrauchbaren Netzen. Der einzige Ausweg des Neuvernetzens ('remeshing') des Gebietes ist nicht nur mit sehr hohen Rechenkosten (speziell in 3D) verbunden, sondern bringt durch den notwendigen Variablentransfer zwischen den Netzen auch zusätzliche Fehler in das Verfahren ein. Auch bringen Lagrange-Verfahren mit einer kontinuierlichen 'Remeshing'-Strategie eine Art ALE-Betrachtung durch die Hintertür ein und das oftmals ohne entsprechende kontinuumsmechanische Basis.

Euler-Verfahren

Euler-Verfahren, also die klassischen Verfahren für Strömungsprobleme, sind leider ohne Zusatzmaßnahmen nicht in der Lage, bewegte Ränder zu behandeln. Im Laufe der Jahre sind deshalb unterschiedliche Erweiterungen entwickelt worden, um diese Klasse von Problemstellungen den weit verbreiteten Euler-Verfahren zugänglich zu machen. Prinzipiell lassen sich diese Verfahren in 'Interface tracking'-Methoden (auch 'Surface tracking') und 'Interface capturing'-Methoden (bzw. 'Volume tracking') unterscheiden. Die Vorteile von Euler-Verfahren liegen mit der Möglichkeit auf der Hand, mit *einem Netz* auch sehr *große Deformationen* zu beschreiben. Die Nachteile verhalten sich wieder reziprok zu den Lagrange-Verfahren; es sind die ungenaue Definition von Interfaces, die damit in Zusammenhang stehenden Schwierigkeiten, Randbedingungen 'exakt' einzubringen, und die teils fraglichen Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften. Auch hier sind die beweglichen Ränder mit einem zusätzlichen numerischen Aufwand verbunden.

Zwei wesentliche Vertreter der 'Volume tracking'-Verfahren sollen kurz erläutert werden, um das Prinzip dieser weit verbreiteten Ansätze zu zeigen. Bei 'Volume tracking'-Verfahren wird das maximal mögliche Strömungsgebiet mit einem Netz überzogen; es wird versucht, die Volumenanteile der eventuell unterschiedlichen Fluide in den einzelnen Zellen zu bestimmen. Bei der 'Marker And Cell'-Methode (MAC) von Harlow und Welch (1965) geschieht dies durch massenlose Markierungsteilchen, die als 'tracer' in das Fluid eingebracht und bei der Simulation verfolgt werden. Damit ist natürlich ein hoher Daten- und Datenverarbeitungsaufwand verbunden. Die 'Volume Of Fluid'-Methode (VOF) von Hirt und Nichols (1981) benutzt zur Bestimmung der Volumenanteile in den einzelnen Zellen ein Skalarfeld $F(y, t)$, das die Fluid-

Anwesenheit ($F = 1$) bzw. die Fluid–Abwesenheit ($F = 0$) beschreibt. Dieses Skalarfeld wird dann entsprechend der Transportgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla F = 0 \quad (5.1)$$

durch die Strömung konvektiert. Wenn im Zusammenhang mit freien Oberflächen auch Phänomene modelliert werden sollen wie zusammenwachsende Ränder (‘coalescence phenomenon’) bei brechenden Wellen, stellen VOF–Verfahren in den unterschiedlichen Varianten sehr interessante Verfahren dar.

ALE–Verfahren

ALE–Ansätze wurden als Verfahren entwickelt um die jeweiligen Vorteile der Lagrange– und der Euler–Verfahren zu kombinieren. Diese Verfahren sind in der Lage, große Gebietsdeformationen zu behandeln, liefern eine genaue Beschreibung der Ränder mit einer exakten Implementierung der Randbedingungen, und bauen auf einer sauberen kontinuumsmechanischen Basis auf. Einen Nachteil haben solche Ansätze sicherlich im numerischen Aufwand, der überproportional ansteigt, je mehr sich das Problem extremen Randdeformationen und zusammenwachsenden Rändern nähert. ALE–Ansätze werden in der vorliegenden Arbeit verwendet und werden in den folgenden Kapiteln ausführlich besprochen.

Spezielle ALE–Verfahren

- **Raum–Zeit–Ansätze**

Eine elegante Möglichkeit zur Umsetzung von Finite–Element–Verfahren auf zeitveränderlichen Gebieten stellen Ansätze dar, die eine Finite–Element–Approximation in Raum– und Zeitrichtung verwenden. Solche Verfahren werden auch als Raum–Zeit–Verfahren bezeichnet. Sie gehen für Problemstellungen der vorliegenden Art auf Bonnerot und Jamet (1979), Jamet und Bonnerot (1975) für kontinuierliche Ansätze in der Zeit und auf Jamet (1978) für diskontinuierliche Ansätze in der Zeit zurück. Diese Verfahren, die irrtümlich immer wieder als Konkurrenz zu ALE–Verfahren bezeichnet werden, sind tatsächlich ALE–Verfahren. Die Nachteile dieser Verfahren bestehen vor allem darin, daß für Verfahren höherer Ordnung mit höheren Ansätzen in Zeitrichtung mehrere Stützstellen in einer Zeitscheibe benötigt werden. Dies führt zu einer Vervielfachung der ohnehin sehr großen Anzahl an Unbekannten und damit zu einem stark erhöhten Lösungsaufwand. Diese Ansätze wurden für Strömungen mit bewegten Rändern zu Anfang der 90er–Jahre von mehreren Gruppen neu aufgegriffen. Beispiele dazu finden sich in den Arbeiten von Behr (1992), Hansbo (1992), Masud (1993), Tezduyar et al. (1992a) und (1992b). In den Arbeiten der Gruppe um T.E. Tezduyar in Minnesota wurde dafür auch der Begriff der ‘Deforming Spatial Domain/Space–Time’–Verfahren, kurz DSD/ST, geprägt. Eine Variante für solche Ansätze besteht auch in der einfachen Möglichkeit, das Netz entlang der Charakteristiken auszurichten um damit die konvektiven Effekte zu verringern. Auch hier handelt es sich um ALE–Verfahren, selbst wenn damit Strömungen auf fixen Gebieten beschrieben werden.

- **‘Eingebettete Netze’**

Auch bei dieser Klasse von Verfahren, bei denen zwei oder mehrere sich relativ zueinander bewegende Netze Daten an den jeweiligen Netzgrenzen und Überlappungsbereichen austau-

schen, handelt es sich im kontinuumsmechanischen Sinne um ALE–Verfahren (siehe auch Kapitel 6.2).

Leider sind genaue Untersuchungen und ein Vergleich der unterschiedlichen Verfahren zur Simulation von Strömungen mit bewegten und beweglichen Rändern nicht verfügbar; dies betrifft vor allem Fragestellungen nach Genauigkeit, numerischem Aufwand und Effizienz, Komplexität der Umsetzung, maximal möglichen Deformationen. Für solche Untersuchungen wäre die Definition einer Reihe von standardisierten Problemstellungen sehr hilfreich. Auch spezielle mathematische Fragestellungen zum Charakter und zur ‘Gestelltheit’ des Problems, Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen scheinen für einen weiten Bereich noch unbeantwortet.

Abschließend kann gesagt werden, daß ein ‘general purpose’–Verfahren für Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten noch nicht existiert. Die Wahl eines Verfahrens hängt also stark von den jeweiligen Problemspezifika ab. In den Fällen, in denen keine allzu großen Deformationen oder zusammenwachsenden Ränder erwartet werden und die eine gute Interface–Auflösung und eine entsprechende Genauigkeit verlangen, sind ALE–basierte Algorithmen vorzuziehen.

5.1.2 Instationäre, inkompressible Navier–Stokes–Gleichungen in ALE–Formulierung

Es wird von den kontinuumsmechanischen Ableitungen in Kapitel 2.1.3 ausgegangen und es werden die instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen für eine ALE–Betrachtungsweise in starker und schwacher Form angegeben. Die Feldgleichungen dieses ARWP lassen sich direkt aus den jeweiligen Bilanzgleichungen (2.50) bzw. (2.38) ableiten, indem die konstitutiven Beziehungen für Newtonsche Flüssigkeiten eingesetzt werden. Analog zu den Gleichungen (3.1) sowie (3.2) lauten die Feldgleichungen der ALE–Formulierung somit

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}} + \mathbf{c} \cdot \nabla \mathbf{u} - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega_F \times (0, T) \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_F \times (0, T) \quad (5.3)$$

Dabei wird, wie aus Gleichung (5.2) teilweise ersichtlich ist, auf die *räumliche Darstellung* zurückgegriffen. Alle *räumlichen Ableitungen* werden also der Einfachheit halber auch im *räumlichen Koordinatensystem* \mathbf{y} durchgeführt und nur die *Zeitableitung* bleibt im beliebig bewegten *Referenzkoordinatensystem* \mathbf{x} . Zur neuerlichen Klarstellung bezeichnet \mathbf{c} die ALE–konvektive Geschwindigkeit

$$\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^G \quad (5.4)$$

also die Differenz aus tatsächlicher Partikelgeschwindigkeit \mathbf{u} und der Netzgeschwindigkeit \mathbf{u}^G . Analog zu den Gleichungen (3.3) bis (3.5) folgen hier die Rand– und Anfangsbedingungen wieder zu

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \Gamma_g \times (0, T) \quad (5.5)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{h} \quad \text{auf } \Gamma_h \times (0, T) \quad (5.6)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{in } \Omega_F \text{ für } t = 0 \quad \text{mit } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \quad (5.7)$$

Hinzu kommt noch eine Randbedingung an den beweglichen Teilen des Randes (Interfaces, freie Oberflächen) Γ_I ,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^G \cdot \mathbf{n} \quad \text{auf } \Gamma_I \times (0, T) \quad (5.8)$$

mit dem möglichen Sonderfall $\mathbf{u} = \mathbf{u}^G$, der einer lokalen Lagrange-Beschreibung am beweglichen Rand entspricht. Die Randbedingung (5.8) sorgt dafür, daß das Netz das gesamte Strömungsgebiet erfaßt und somit keine Partikel einen Rand bzw. eine Materialoberfläche kreuzen. Für die Formulierung in Gleichung (5.8) wird vorausgesetzt, daß \mathbf{n} mit der Normalen auf das Referenzgebiet \mathbf{n}^G übereinstimmt.

Die diskrete Variationsformulierung eines Standard-Galerkin-Verfahrens (vgl. Gleichung (3.10)) folgt als Suche nach den diskreten Funktionen \mathbf{u}^h und p^h in den entsprechenden Räumen, für die

$$\begin{aligned} \left(\dot{\mathbf{u}}^h \Big|_{\mathbf{x}}, \mathbf{v}^h \right) + \left(\mathbf{c}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \right) + \left(2\nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) \right) - \left(p^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h \right) - \left(\nabla \cdot \mathbf{u}^h, q^h \right) = \\ = \left(\mathbf{b}, \mathbf{v}^h \right) + \left(\mathbf{h}, \mathbf{v}^h \right)_{\Gamma_h} \end{aligned} \quad (5.9)$$

für alle \mathbf{v}^h und q^h erfüllt ist. Besonders zu beachten ist hier allerdings, daß das L^2 innere Produkt (\cdot, \cdot) nun als Integral über ein zeitveränderliches Gebiet $\Omega_y(t)$ durchzuführen ist. Auch bei diesen Gleichungen ist wieder eine Stabilisierung der Gleichungen erforderlich, die direkt aus den Ausführungen in den Kapiteln 5.2.2 bzw. 5.2.3 ersichtlich sein sollte.

5.2 Algorithmische Umsetzung einer ALE-Formulierung – Eine stabilisierte ALE-Finite-Element-Methode

Bevor in diesem Kapitel einige wesentliche Aspekte für eine ALE-Formulierung diskutiert werden, folgen noch einige einleitende Bemerkungen. Leider stehen genaue mathematische Analysen für Verfahren zur tatsächlichen Strömungssimulation auf zeitveränderlichen Gebieten noch aus. Mathematische Analysen dieser Problemklassen und zugehöriger Verfahren finden sich z.B. in Jamet (1978), Jamet (1980) oder in Lesaint und Touzani (1989). Diese sind jedoch meist beschränkt auf das eindimensionale Stefan-Problem, also die Wärmeleitungsgleichung mit freiem Rand.

5.2.1 Zur Lösung der ALE-Gleichungen

Zur Implementierung und Lösung der ALE-Gleichungen existieren zwei unterschiedliche Ansätze. Es handelt sich dabei um den *voll gekoppelten* Ansatz und den ‘*operator split*’-Ansatz. Diese Unterscheidung hat eine gewisse Analogie zur Aufteilung der Verfahren bei reinen Euler-Ansätzen zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen in gekoppelte und entkoppelte Verfahren.

‘Operator splitting’-Verfahren

In diesen Verfahren wird versucht durch eine entsprechende Aufspaltung des Operators die ‘materiellen’ von den konvektiven Effekten zu trennen, also ein komplexes Problem in eine Reihe weniger komplizierter Probleme aufzuspalten. Nach der in Kapitel 2.1.3 angeführten

Assoziation der einzelnen kontinuumsmechanischen Betrachtungsweisen mit verschiedenen Arten von auftretenden Nichtlinearitäten kann auch davon gesprochen werden, die geometrisch nichtlinearen Effekte von den konvektiven Nichtlinearitäten zu trennen. Aus der Aufspaltung des Operators stammt auch die Bezeichnung als ‘operator split’–Verfahren oder als ‘fractional step’–Methoden.

Der spezielle ‘operator split’ erfolgt als Trennung in einen reinen *Lagrange–Schritt* (auch ‘*material phase*’) und in einen *Konvektions– oder Transport–Schritt* (auch ‘*rezone phase*’). Im ersten Schritt wird das Netz dazu mit den Materialteilchen mitbewegt, und somit werden sämtliche konvektiven Terme in der Impulsbilanz und gegebenenfalls in den konstitutiven Gleichungen umgangen. Im zweiten Schritt wird das Netz dann bei festgehaltener Zeit in die gewünschte ALE–Lage bewegt, und die konvektiven Flüsse werden berechnet. Ein solcher ‘operator split’–Ansatz wird häufig dann verwendet, wenn der zu Grunde liegende Strömungslöser ein analoges Konzept aufweist, d.h auch hier ein entkoppeltes Verfahren eingesetzt wird. Beispiele für ‘operator split’–Ansätze zur Lösung der ALE–Gleichungen bei Strömungsproblemen finden sich in den Arbeiten von Donea (1980), Maruoka et al. (1994), Ramaswamy und Kawahara (1987).

Die Vorteile dieser Ansätze liegen mit den einfacheren Gleichungen in den Zwischenschritten auf der Hand. Dadurch entsteht die Möglichkeit einfachere und robustere Algorithmen zu verwenden. Dazu kann auf den gesamten Erfahrungsschatz der Strukturmechanik für den Lagrange–Schritt und der Strömungsmechanik für den Konvektionsschritt zurückgegriffen werden. Diese Vorteile sind jedoch durch einen Verlust an Genauigkeit zu erkaufen. Das heißt, daß selbst dann, wenn sowohl für den Lagrange–Schritt als auch für den Konvektions–Schritt jeweils zweiter Ordnung genaue Verfahren verwendet werden, die Aufspaltung des Operators zu einer Lösung führt, die nur von erster Ordnung genau ist.

Voll gekoppelte Verfahren

In diesem Ansatz werden, wie der Name schon ausdrückt, das voll gekoppelte Gleichungssystem (5.9) gemeinsam gelöst. Die Vorteile dieser Verfahren ergeben sich automatisch aus den Nachteilen der ‘operator split’–Verfahren und umgekehrt. Ansätze dieser Art finden sich in den Arbeiten von Belytschko und Kennedy (1978), Huerta und Liu (1988b), Hughes et al. (1981), Liu (1981), Nomura und Hughes (1992), Wall und Ramm (1997) und Wall und Ramm (1998). Hinzu kommen auch die auf Raum–Zeit–Ansätzen basierenden Arbeiten, die logischerweise meist auf die voll gekoppelte Lösung der ALE–Gleichungen hinauslaufen. Auch in der vorliegenden Arbeit wird, wie es schon beim zu Grunde liegenden Strömungslöser begründet wurde den voll gekoppelten Ansätzen der Vorzug gegeben.

5.2.2 Stabilisierung und ALE

Wie bereits angedeutet können auch die ALE–basierten inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen nicht mit dem Standard–Galerkin–Verfahren nach Gleichung (5.9) gelöst werden. Prinzipiell treten hier dieselben und einige neue numerischen Probleme auf wie im reinen Euler–Fall. Die ausführlichen Diskussionen dieser Probleme in Kapitel 3.1 lassen sich also direkt auf die jetzt vorliegende Aufgabenstellung übertragen. Ebenso übertragen lassen sich die entwickelten Stabilisierungsansätze aus Kapitel 3.2 und 3.3. Wiederum bestehen dabei die Stabilisierungsterme aus ‘least–square’–artigen Ansätzen, die sich nun aus dem neuen Residuum und den entsprechenden Differentialoperatoren zusammensetzen. Eine erneute Diskus-

sion dieser Ansätze scheint hier nicht mehr notwendig. Das resultierende Verfahren ist in Abschnitt 5.2.3 angeführt.

Ein Aspekt soll hier jedoch ausführlicher diskutiert werden, da er in einigen Arbeiten mit ähnlichen Ansätzen zur Kombination eines ALE-Ansatzes mit bestimmten Stabilisierungen keine Berücksichtigung fand. Es geht dabei nochmals um die Definitionen für die Stabilisierungsparameter. Ausgehend von den Gleichungen (3.68) bis (3.74) bzw. (3.77) lauten die für den ALE-Fall adaptierten Definitionen als stationäre Variante

$$\tau_M(\mathbf{y}, Re_K(\mathbf{y})) = \frac{h_K}{2 |\mathbf{c}^h(\mathbf{y})|_p} \zeta(Re_K(\mathbf{y})) \quad (5.10)$$

$$\tau_C(\mathbf{y}, Re_K(\mathbf{y})) = \lambda \frac{|\mathbf{c}^h(\mathbf{y})|_p h_K}{2} \zeta(Re_K(\mathbf{y})) \quad (5.11)$$

$$Re_K(\mathbf{y}) = \frac{m_K |\mathbf{c}^h(\mathbf{y})|_p h_K}{2\nu(\mathbf{y})} \quad (5.12)$$

$$\zeta(Re_K(\mathbf{y})) = \begin{cases} Re_K(\mathbf{y}), & 0 \leq Re_K(\mathbf{y}) < 1 \\ 1, & Re_K(\mathbf{y}) \geq 1 \end{cases} \quad (5.13)$$

und als instationäre Variante

$$\tau_M(\mathbf{y}, Re_K(\mathbf{y})) = \min \left[\Delta t, \frac{h_K}{2 |\mathbf{c}^h(\mathbf{y})|_p}, \frac{m_K h_K^2}{4\nu} \right] \quad (5.14)$$

Die hier nicht extra angegebenen Größen können direkt den Ausführungen zu den Gleichungen (3.68) bis (3.74) entnommen werden.

Der entscheidende Punkt mit diesen Definitionen ist, daß die tatsächlichen für die Konvektion zuständigen Geschwindigkeiten die Definitionen der Stabilisierungsparameter steuern, nämlich die ALE-konvektiven Geschwindigkeiten \mathbf{c}^h , und nicht die ursprünglichen Geschwindigkeiten \mathbf{u}^h . Es wurde bereits erwähnt, daß die ursprünglichen Definitionen in der Lage sind, für die jeweiligen Strömungsregimes die richtigen Ordnungen für die Stabilisierungsparameter zu gewährleisten, vergleiche dazu die Gleichungen (3.75) und (3.76). Die in den Definitionen (5.10) bis (5.14) eingeführte Modifikation führt dazu, daß sich diese wünschenswerte Eigenschaft auch auf den ALE-Fall überträgt. Im Zusammenhang mit einer ALE-Beschreibung der Strömungen sind Fälle denkbar, in denen durch ein Mitbewegen des Netzes mit der Materie in Teilbereichen in Form einer lokalen Lagrange-Betrachtung aus den ursprünglichen Navier-Stokes-Gleichungen ein zeitabhängiges Stokes-Problem entsteht. Auch hier stellen die eingeführten Definitionen Stabilisierungsparameter der richtigen Ordnung bereit.

In ähnlicher Weise sind natürlich die neuen ALE-Gegebenheiten auch in anderen Größen, wie z.B. den Elementgrößendefinitionen, zu berücksichtigen. Wie in Abschnitt 3.3.1 erwähnt, findet für einen Teil der Stabilisierungsterme die sogenannte Stromlänge Verwendung. Dabei ist jetzt natürlich zu berücksichtigen, daß sich die 'Überströmungsrichtung' aus der ALE-konvektiven Geschwindigkeit \mathbf{c}^h ergibt. Als Stromlängendefinition entsprechend Gleichung (3.59) folgt somit

$$h_K(\mathbf{y}) = 2 \left[\sum_i |s \cdot \nabla N_i(\mathbf{y})| \right]^{-1} \quad \text{mit } s = \mathbf{c} / \|\mathbf{c}\| \quad (5.15)$$

Als Fazit muß darauf geachtet werden, jene Konvektion zu stabilisieren, die das jeweilige Element auch tatsächlich ‘sieht’.

5.2.3 Stabilisierte ALE–Finite–Element–Formulierung

Aufbauend auf den Gleichungen (3.78) bis (3.80) soll hier die schwache Form des vollständig stabilisierten ALE–Finite–Element–Verfahrens nochmals ausführlich angegeben werden.

Die diskrete Variationsformulierung lautet somit:

Finde $\mathbf{u}^h \in \mathcal{V}_g^h$ und $p^h \in \mathcal{P}^h$ für die gilt

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = F(\mathbf{v}^h, q^h) \quad \forall (\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathcal{V}^h \times \mathcal{P}^h \quad (5.16)$$

$$B(\mathbf{u}^h, p^h; \mathbf{v}^h, q^h) = \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_x + \mathbf{c}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h \right) + (2\nu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h), \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h)) - (p^h, \nabla \cdot \mathbf{v}^h) - (\nabla \cdot \mathbf{u}^h, q^h) \\ & + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[\frac{\partial \mathbf{u}^h}{\partial t} \Big|_x + \mathbf{c}^h \cdot \nabla \mathbf{u}^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}^h) + \nabla p^h, \right. \\ & \quad \left. \tau_M^{u,p}(\mathbf{y}, \text{Re}_K(\mathbf{y})) (\mathbf{c}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) - \nabla q^h) \right]_K \end{aligned}$$

$$+ (\nabla \cdot \mathbf{u}^h, \tau_C \nabla \cdot \mathbf{v}^h)_K$$

$$F(\mathbf{v}^h, q^h) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}^h) + (\mathbf{h}, \mathbf{v}^h)_{\Gamma_h} \quad (5.18)$$

$$+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \left[\mathbf{b}, \tau_M^{u,p}(\mathbf{y}, \text{Re}_K(\mathbf{y})) (\mathbf{c}^h \cdot \nabla \mathbf{v}^h - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}^h) - \nabla q^h) \right]_K$$

Die Stabilisierungsparameter sind dabei nach den Gleichungen (5.10) bis (5.14) zu wählen. Die Anfangs– und Randbedingungen können den Gleichungen (5.5) bis (5.8) entnommen werden. Die Funktionenräume für die diskreten Test– und Ansatzfunktionen sind analog zu (3.81) zu wählen.

Die Unterschiede der gezeigten diskreten Variationsformulierung zum entsprechenden reinen Euler–Verfahren der Gleichungen (3.78) bis (3.80) zeigen sich in mehreren Punkten. Diese Hauptmerkmale sind die auftretenden ALE–konvektiven Geschwindigkeiten \mathbf{c} , der Bezug der Zeitableitung auf das Referenzsystem \mathbf{x} und vor allem der Umstand, daß die inneren Produkte (\cdot, \cdot) nun über zeitveränderliche Gebiete zu integrieren sind. Dies führt dazu, daß der reine Eigengewichts–Lastvektor in Gleichung (5.18) $(\mathbf{b}, \mathbf{v}^h)$ nun eine zeitabhängige Größe wird.

Hier stellen sich aber weitere wichtige Fragen, die in der Literatur leider unbeantwortet bleiben. Hierzu gehört die Wahl der zeitlichen Konfigurationen, in denen die konvektiven bzw. die viskosen Flüsse ermittelt werden müssen. Diese Fragen sollen in den restlichen beiden Abschnitten dieses Kapitels angeschnitten werden. Es wird sich dabei auch zeigen, daß die Frage

nach der Ermittlung der Netzgeschwindigkeit in einem Zeitintervall und damit der ALE-konvektiven Geschwindigkeit \mathbf{c} in den Gleichungen (5.17) bzw. (5.18) wesentlichen Einfluß auf die Qualität des resultierenden Verfahrens hat.

5.2.4 Zeitintegrationsverfahren bei ALE-Ansätzen

Hier sollen noch einige Anmerkungen zu den Eigenarten der direkten Zeitintegrationsansätze bei zeitveränderlichen Gebieten gemacht werden. Die wenigen vorliegenden Diskussionen zu den algorithmischen Aspekten für direkte Zeitintegrationsverfahren mit ALE-Formulierungen sind leider teils irreführend oder sogar falsch.

Ein wesentlicher Punkt folgt dabei aus den Ableitungen einer ALE-Formulierung in Kapitel 2.1 und wurde dort bereits erwähnt. Es handelt sich dabei um die Tatsache, daß die Zeitableitung einer Größe f nun, in Anlehnung an eine Einschnitt- θ -Zeitdiskretisierung analog zu Gleichung (4.5) diskretisiert werden muß.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \approx \frac{f(\mathbf{x}, t^{n+1}) - f(\mathbf{x}, t^n)}{t^{n+1} - t^n} \quad (5.19)$$

Damit haftet die Zeitableitung von f an einer konstanten Referenzposition \mathbf{x} , obwohl bei der räumlichen Darstellung die Integration über das räumliche Gebiet Ω_y durchgeführt wird,

Der soeben beschriebene Umstand führt dazu, daß bei einer ALE-Formulierung nicht mehr im klassischen Sinne von stationären (im Kontext strukturmechanischer Aufgabenstellungen von statischen) Problemen gesprochen werden kann. Bezogen auf das Referenzsystem Ω_x befinden sich sowohl das Materialgebiet Ω_z als auch das Raumgebiet Ω_y in Bewegung (vgl. Gleichungen (2.4) und (2.5)). Das heißt, ein in Ω_y stationäres Problem stellt sich in Ω_x als instationäres Problem dar. Da die Zeitableitung auf jeden Fall in Ω_x haftet, werden bei ALE-Formulierungen prinzipiell nur instationäre Lösungsverfahren angewendet. Der angedeutete Fall, daß die Zeitabhängigkeit des Problems einzig durch das bewegte Referenzsystem bedingt ist, wird auch als *ALE-quasistationärer* Fall bezeichnet; siehe dazu auch die entsprechenden Beispiele in Abschnitt 5.3.1.

Ein zweiter wesentlicher Aspekt bei der Umsetzung direkter Zeitintegrationsverfahren in einer ALE-Formulierung betrifft die Problematik der Integrale über zeitveränderliche Gebiete in den Gleichungen (5.17) und (5.18). Es stellt sich dabei die Frage, zu welchen diskreten Zeitpunkten innerhalb eines Zeitschrittes Δt diese Integrationen durchzuführen sind. Dies beinhaltet auch die Frage nach den Konfigurationen, die zur Ermittlung der konvektiven und viskosen Flüsse herangezogen werden. Diese Frage muß im Zusammenhang mit den Ausführungen zu den sogenannten geometrischen Bilanzgleichungen in Abschnitt 5.2.5 gesehen werden.

Die angesprochene Fragestellung wird hier bei einem Einschnitt- θ -Verfahren behandelt. Der Ansatz dieses Verfahrens soll dazu für das einfache Modellproblem $\dot{u} = f(u, t)$ wiederholt werden.

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \theta f(u^{n+1}, t^{n+1}) + (1 - \theta) f(u^n, t^n); \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (5.20)$$

Dabei existieren nun zwei Möglichkeiten zur richtigen Konfigurationswahl. In der ersten Möglichkeit muß die Integration vollständig über das Gebiet $\Omega^{n+\theta}$ durchgeführt werden. Als zweite Variante ist es denkbar, nur die Massenterme über $\Omega^{n+\theta}$ zu integrieren und die restlichen

Integrale entsprechend dem Zeitansatz teils über Ω^{n+1} (linke Seite) und teils über Ω^n (rechte Seite) zu integrieren. Diese beiden Ansätze zur zeitlichen Gebietsdiskretisierung sind analog zur Unterscheidung zwischen dem CN-Verfahren und der impliziten Mittelpunktsregel in Kapitel 4.2.2. Als einfacher Test zur Überprüfung dieser beiden Möglichkeiten werden ‘starke’ kontinuierliche und diskrete Lösungen der inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen in die zeitdiskretisierten, stabilisierten ALE–Finite–Element–Gleichungen eingesetzt. Eine Balance der linken und rechten Seite zeigt die Richtigkeit der Wahl an. Beide oben angeführten Ansätze zeigen erfreulicherweise diese Balance. Im Gegensatz dazu versagt bei diesem Test eine gelegentlich in der Literatur angeführte Variante, in der auch die beiden Massenterme über Ω^{n+1} bzw. Ω^n integriert werden. Da der erste Ansatz mit der Integration aller Terme über $\Omega^{n+\theta}$ zu einer leichten Rechenzeiterparnis führt, wird er in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich verwendet.

Bemerkung: Bei ALE–Verfahren, die auf Raum–Zeit–Ansätzen basieren, treten diese Fragestellungen nicht auf; einerseits, weil sich die Ansätze eben tatsächlich über Raum und Zeit gleichzeitig erstrecken, und andererseits, da die Integration über das gesamte Raum–Zeit–Kontinuum innerhalb einer ‘Zeitscheibe’ durchgeführt wird. Die meisten ALE–Raum–Zeit–Ansätze begnügen sich allerdings mit einer sehr geringen Genauigkeitsordnung in Zeitrichtung. Aufgrund der relativ schlechten Erfahrungen mit solchen Verfahren erster Ordnung arbeiten Hansbo und Hansbo (1999) zur Zeit an der Umsetzung eines Raum–Zeit–Ansatzes im Sinne eines Crank–Nicolson–artigen Verfahrens mit kontinuierlichen Galerkin–Ansätzen in der Zeit.

Auf die Analogie abgesehen von der rechten Seite zwischen Raum–Zeit–Ansätzen und bestimmten direkten Zeitintegrationsverfahren wurde bereits mehrfach hingewiesen. Die Beantwortung der obigen Frage kann auch über diese Analogie abgeleitet werden, z.B. Rückwärts–Euler und linearer Zeittestfunktion. Die beiden angeführten Denkansätze entsprechen den beiden unterschiedlichen Möglichkeiten, ein direktes Zeitintegrationsverfahren zweiter Ordnung über einen Raum–Zeit–Ansatz abzuleiten. Einerseits kann dies über eine Punktkollokation zum Zeitpunkt $t^n + \theta\Delta t$ erfolgen oder andererseits über eine über das Zeitintervall Δt konstant gewählte Testfunktion.

Anmerkungen zur Analyse

Ein Großteil der mathematischen Analysen zu Problemen mit zeitabhängigen Gebieten befaßt sich mit einfachen Modellen, vorwiegend mit dem Stefan–Problem. Hier sollen einige Gedanken zu möglichen Analyseansätzen und zu Eigenschaften der Verfahren für die komplexen Aufgabenstellungen dieser Arbeit angeführt werden.

Becker (1995) berücksichtigt viskose und inkompressible Strömungen. Er untersucht dabei die Ordnung von Zeitintegrationsverfahren für zeitabhängige partielle Differentialgleichungen auf Gebieten mit beweglichen Rändern. Unter der Voraussetzung, daß sich die Gebietsdeformationen aus einer glatten Abbildung aus einem festen Gebiet abbilden lassen, wird dort bewiesen, daß sich die Konvergenzraten der Zeitintegrationsverfahren auf die Probleme mit beweglichen Rändern übertragen. Trotzdem stellt Becker (1995) in numerischen Beispielen für sein Verfahren fest, daß viel kleinere Zeitschritte als für vergleichbare reine Euler–Beispiele zu verwenden sind.

Der Grund hierfür läßt sich einfach zeigen. Dazu muß die bisherige Formulierung Gleichung (5.9) bzw. (5.16) vom zeitveränderlichen Gebiet Ω_y in das fixe Referenzgebiet Ω_x zurückgezogen werden. Somit sind nur noch zeitunabhängige innere Produkte und Integrale in der Formulierung vorhanden. Zum Zurückziehen der Gleichungen wird jedoch die Abbildung F^G bzw. J^G (siehe Gleichung (2.27)) zwischen diesen beiden Gebieten benötigt, die ebenfalls zeitabhängig ist. Das Zeitintegrationsverfahren approximiert also nicht mehr nur die zeitliche Entwicklung der Variablen, sondern zusätzlich auch den zeitlichen Verlauf des entsprechenden Deformationsgradienten und somit den zeitlichen Verlauf der Netzbewegung. Auch diese zweite Approximation ist wieder mit einem Fehler behaftet und addiert sich zum üblichen Zeitintegrationsfehler hinzu. Für den gesamten Fehler und damit für die gesamte Ordnung des Zeitintegrationsverfahrens ist die Summe dieser beiden Fehleranteile maßgebend.

5.2.5 Geometrische Bilanzgleichungen

Eine Mindestanforderung an Lösungsverfahren für Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten ist, daß diese zumindest die triviale Lösung eines gleichförmigen Strömungsfeldes erhalten. Dies kann nur garantiert werden, wenn das Zusammenspiel aus Integration des Strömungsfeldes und Bestimmung der relevanten geometrischen Größen wie Netzpositionen und Netzgeschwindigkeiten bestimmte Bedingungen erfüllen. Diese Bedingungen werden auch als *geometrische Bilanzgleichungen* (*‘geometric conservation laws’* GCL), oder in einigen Arbeiten auch als *‘space conservation laws’* (Demirdzic und Peric (1988)), bezeichnet.

Frühe Arbeiten, die die Bedeutung dieser GCL bereits erkannt haben, stammen von Thomas und Lombard (1979) bzw. Warsi (1981). Obwohl diese GCL schon vor längerer Zeit angedacht wurden, spielten sie bisher in der Literatur keine entscheidende Rolle. In letzter Zeit scheint jedoch die Bedeutung dieser Bedingungen erkannt zu werden, sowohl für die Analyse als auch für den Entwurf von Verfahren zur Behandlung zeitabhängiger Gebiete. Wesentliche Arbeiten stammen von Farhat et al. (1995), Lesoinne und Farhat (1996), Koobus und Farhat (1996), Guillard und Farhat (1998), Le Tallec und Mani (1999) und Le Tallec und Mouro (1999).

Bemerkung: Zhang et al. (1993) zeigen die wichtige Rolle der GCL im Kontext von Finite-Volumen- und Finite-Differenzen-Verfahren für bewegte *und* fixe Netze. Für bewegte Netze wird dabei vom *‘volume conservation law’* (VCL) und für fixe Netze vom *‘surface conservation law’* (SCL) gesprochen. In der vorliegenden Arbeit wird diese eher unübliche Unterscheidung nicht vorgenommen, d.h. anstatt VCL wird hier direkt der gebräuchlichere Begriff der GCL verwendet. Unter bestimmten Umständen, z.B. bei der Behandlung von beweglichen starren Strukturen in Strömungen, kann diese Unterscheidung, und das Heranziehen der SCL, jedoch hilfreich sein.

Die Diskussion zu den GCL ist noch im Fluß und es zeigt sich noch kein befriedigendes einheitliches Bild. Auch decken viele Arbeiten nur den Fall von Zeitintegrationsverfahren erster Ordnung oder nur den einfacheren Fall nicht-viskoser Strömungen ab. Ein zusammenfassendes Bild ist zur Zeit noch kaum darstellbar. Eine kurze Diskussion scheint aber angebracht, da entsprechende Untersuchungen und Entwicklungen in nächster Zeit eine wichtige Rolle spielen werden.

Die geometrischen Bilanzgleichungen lassen sich auf unterschiedliche Weise interpretieren. Aus *‘physikalischer Sicht’* läßt sich die Erfüllung der diskreten GCL so deuten: Die geometrischen Parameter müssen so berechnet werden, daß das resultierende numerische Verfahren

einen gleichförmigen Strömungszustand erhält. Aus ‘mathematischer Sicht’ bedeutet die Einhaltung der GCL, daß das Verfahren auf bewegten Netzen zumindest von erster Ordnung genau ist, vorausgesetzt die Netzbewegung ist zumindest stückweise linear (Le Tallec und Mani (1999)). Die theoretischen Untersuchungen von Guillard und Farhat (1998) zeigen, daß die Einhaltung der GCL die Zeitgenauigkeit des Verfahren verbessert. Im Kontext einer Finite–Volumen–Formulierung läßt sich die GCL sehr einfach als exakte Integration der ‘überstrichenen’ Fläche (bzw. des Volumens) einer Zelle beschreiben, d.h. die Flächen–(Volumen–) Änderung zwischen zwei Zeitschritten muß gleich der überstrichenen Fläche der Zellränder im selben Zeitinkrement sein. Bei der Simulation inkompressibler Strömungen kann eine Verletzung der GCL zu einer künstlichen Massenproduktion und somit zu einem deutlichen Fehler der gesamten Simulation führen (Demirdzic und Peric (1988), Abschnitt 5.3.1).

Eine formelmäßige Aufbereitung der diskreten geometrischen Bilanzgleichungen in der Schreibweise von Warsi (1981) oder Le Tallec und Mani (1999) für die Massenerhaltung lautet

$$\operatorname{div}_y (\mathbf{u}^G) := \frac{1}{J^G} \frac{\partial J^G}{\partial t} \quad (5.21)$$

wobei J^G wiederum die Funktionaldeterminante der Abbildung zwischen dem räumlichen Gebiet Ω_y und dem Referenzsystem Ω_x bezeichnet (siehe Gleichung (2.27)). Für alternative Interpretationen bzw. ausführliche Ableitungen der einzelnen Varianten wird auf die zitierte Literatur verwiesen.

Es existieren zwei Möglichkeiten, um die GCL innerhalb eines ALE–Verfahrens zu befriedigen. In einem ersten Ansatz kann die GCL als zusätzliche Erhaltungsgleichung gemeinsam mit den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und, bei kompressiblen Strömungen, Energie gelöst werden (Thomas und Lombard (1979)).

Zur Erfüllung der diskreten geometrischen Bilanzgleichungen wird hier jedoch dem zweiten Ansatz der Vorzug gegeben. Darin wird die Netzgeschwindigkeit aus der Netzposition, konsistent mit der Diskretisierung der anderen Erhaltungsgleichungen, so berechnet, daß die GCL immer exakt erfüllt wird. Die Vorgehensweise im vorgeschlagenen Algorithmus besteht also zunächst in der Ermittlung der Netzposition \mathbf{r}^{n+1} zum neuen Zeitpunkt t^{n+1} durch einen geeigneten Algorithmus (siehe Kapitel 6.2 zur ‘Computational Mesh Dynamics’). Nach den Untersuchungen von Lesoinne und Farhat (1996) für semi–diskrete Formulierungen wird sodann die Netzgeschwindigkeit für den Zeitschritt $t^n \rightarrow t^{n+1}$ über die Mittelpunktsregel

$$\mathbf{u}^G = \frac{\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n}{\Delta t} \quad (5.22)$$

ermittelt. Die Ergebnisse der Beispielrechnungen in Abschnitt 5.3.1 zeigen, daß die so entwickelten Verfahren die diskreten geometrischen Bilanzgleichungen erfüllen.

Bemerkung: Es kann gezeigt werden, daß die oben bereits angesprochenen Raum–Zeit–Ansätze bereits die geometrischen Bilanzgleichungen erfüllen (Lesoinne und Farhat (1996)).

Die Nichterfüllung der GCL bedeutet mindestens eine zusätzliche Zwangsbedingung an die Wahl der Zeitschrittgröße. In der Literatur wird gelegentlich gegen die Notwendigkeit der Einhaltung der GCL plädiert und die Wahl eines kleinen Zeitschrittes empfohlen. Selbst wenn eine Verkleinerung des Zeitschrittes die einzige Auswirkung der Verletzung der GCL darstellt, was nicht immer garantiert werden kann, wird diese Ansicht jedoch keineswegs geteilt. Beach-

tet man den ohnehin großen Rechenaufwand in den vorliegenden Problemstellungen so ist der Aufwand zur Erfüllung der GCL allein schon deshalb gerechtfertigt, um einer Reduktion der Zeitschrittweite zu entgehen. Die Einhaltung der GCL ist auch immer notwendig, um theoretisch konsistente Verfahren und zuverlässige numerische Ergebnisse zu erhalten.

In der vorliegenden Arbeit zeigte sich, daß die in der Literatur vorgeschlagene Verifikation eines Verfahrens nur über die Erhaltung eines gleichförmigen Strömungsfeldes besonders für viskose Strömungen nicht ausreichend scheint. Nicht alle ‘schlechten’ Verfahren können durch diesen Test entlarvt werden, er ist also zu ‘großzügig’. Aus diesem Grunde werden hier numerische und analytische diskrete Analysen für vorgegebene, nicht gleichförmige Lösungen der Navier–Stokes–Gleichungen zur Verifikation der verwendeten Ansätze durchgeführt (Abschnitt 5.3.1).

Zusammenfassend sei nochmals die wesentlichste Auswirkung der geometrischen Bilanzgleichungen erwähnt. Trotz der Bezeichnung ‘arbitrary’ in ALE, d.h. beliebige Lagrange–Euler–Formulierung, darf die Aktualisierung der Netzpositionen und der Netzgeschwindigkeiten in einem Zeitschritt nicht beliebig erfolgen. Diese Aktualisierungen müssen so durchgeführt werden, daß die GCL erfüllt werden.

5.3 Numerische Beispiele

5.3.1 ALE–quasistationäre und instationäre ‘Euler–’ Tests

Bevor die entwickelten Verfahren verwendet werden, um Strömungen auf zeitveränderlichen Gebieten zu berechnen, sollen zwei Tests helfen, die Richtigkeit der Verfahren zu überprüfen.

ALE–quasistationärer Test — Strömung mit bewegtem innerem Netz

Der erste Test entspricht einer einfachen Kanalströmung. Hier wird jedoch künstlich ein Teil des Netzes bewegt. Für das ALE–Verfahren stellt sich somit eine instationäre Aufgabe, und nach den obigen Ausführungen wird diese als ALE–quasistationärer Fall bezeichnet. Es sind dies also Fälle, die im Zuge der Verwendung reiner Euler–Verfahren als stationäre Probleme zu rechnen sind. Die Anforderung an ein ALE–Verfahren besteht nun darin, trotz des bewegten Netzes die ungestörte (‘Euler–stationäre’) Lösung zu erhalten. Das entwickelte Verfahren erfüllt diesen Test für sämtliche getesteten Varianten von stationären Strömungszuständen und künstlichen Netzbewegungen. Im Vergleich dazu soll hier das Ergebnis eines Verfahrens gezeigt werden, das die oben diskutierten Anforderungen an ALE–Verfahren, z.B. die richtige Wahl der Integrationsgebiete aus Kapitel 5.2.4, nicht erfüllt. Solche Verfahren finden sich gelegentlich auch in der Literatur. Bild 5.1(a) zeigt die gewählte Problemstellung in Form der ungestörten Kanalströmung. Im Zuge der Zeitintegration beginnt das Netz dann horizontal zu oszillieren. Sowohl die räumliche als auch die zeitliche Netzbewegungsfunktion werden vorsichtshalber als glatte Funktionen (Sinus, Cosinus) gewählt. Bild 5.1(b) und (c) zeigen die gestörten Strömungslösungen zusammen mit den Netzpositionen und den Netzgeschwindigkeitsvektoren. Die falsche Behandlung der Bilanzgleichungen auf den sich deformierenden Elementen führt zu starken Druckgradienten und lokal veränderlichen Strömungsgeschwindigkeiten. Die beiden rechts dargestellten Horizontalgeschwindigkeitsfelder in Bild 5.1(b) und (c) zeigen deutlich, daß das Verfahren fälschlicherweise versucht, durch eine Erhöhung der

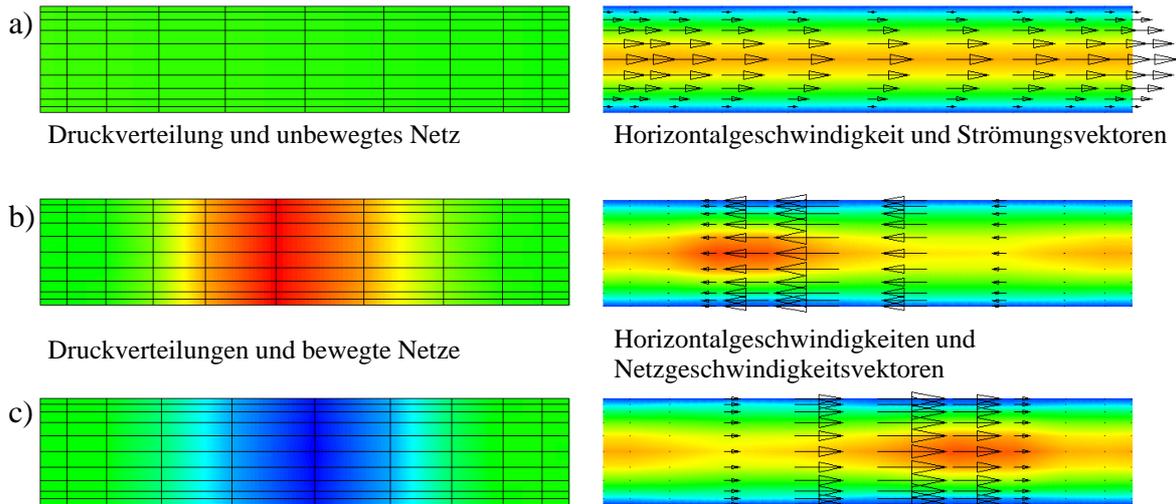


Bild 5.1: *Bewegtes Netz in stationärer Kanalströmung – inkorrektes Verfahren*
Kanalströmung mit festem Netz (a) und Strömungszustände mit bewegtem Netz (b, c)

Strömungsgeschwindigkeit zu viel Fluid aus den sich verkleinernden Elementen zu entfernen, um die Massenbilanz zu erhalten.

Instationärer ‘Euler’-Test — Umströmung eines längs-bewegten Zylinders

Es reicht natürlich nicht aus, Verfahren nur an einfachen Kanalströmungen zu testen. Eine etwas anspruchsvollere Testmöglichkeit für die entwickelten Lösungsverfahren stellt die Berechnung von entsprechend umformulierten, instationären Strömungen auf fixen Gebieten dar. Hier muß also die Zeitdiskretisierung nicht nur die zeitliche Entwicklung der Relativbewegung zwischen Referenz- und Raumgebiet, sondern auch den eigentlichen instationären Charakter der Strömung beschreiben. Als Beispiel soll der bereits in Kapitel 4.5.2 behandelte ‘Klassiker’ der Umströmung eines Zylinders dienen. Anstatt jedoch einen fix montierten Zylinder mit einer entsprechenden Strömungsgeschwindigkeit anströmen zu lassen, wird jetzt der Zylinder mit einer analogen Relativgeschwindigkeit durch ein ruhendes Fluid bewegt. Im Vergleich zum Zylinder in einer Strömung aus Bild 4.12 sind die Randbedingungen für die so modifizierte Problemstellung in Bild 5.2(a) dargestellt.

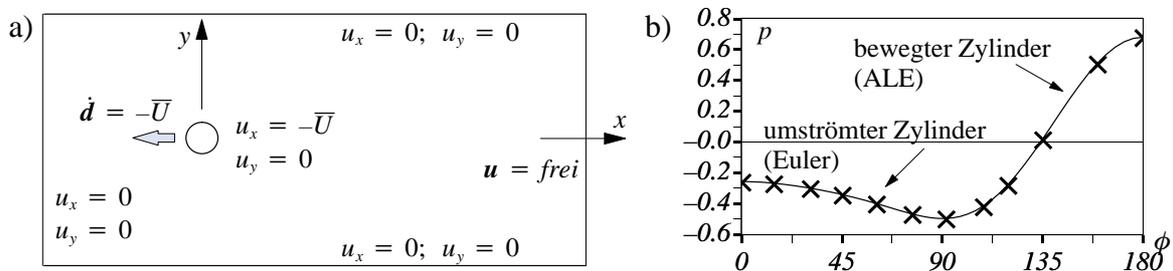


Bild 5.2: *Bewegter Zylinder in ruhendem Fluid — Problemstellung und Druckvergleich*

Der Zylinder wird aus der Ruhelage langsam beschleunigt bis er seine geplante Geschwindigkeit erreicht hat. Die Zylindergeschwindigkeit entspricht dabei der negativen Einströmgeschwindigkeit der Euler-Referenzlösung. Der Einfachheit halber wird hier nur der Fall mit $Re=40$ dargestellt, der eine Euler-stationäre Lösung erwarten läßt. Bild 5.2(b) zeigt exempla-

risch in Form der Druckverteilung an der Zylinderwand, daß die ALE-Lösung des bewegten Zylinders exakt mit der Euler-Lösung des umströmten Zylinders übereinstimmt.

Bemerkung: Dieses Beispiel erlaubt auch eine neue Interpretation der in den numerischen Beispielen in Kapitel 4.5 eingeführten stationären Stromlinien. Die normalen Stromlinien beim bewegten Zylinder entsprechen nämlich genau den stationären Stromlinien des umströmten Zylinders.

5.3.2 Rohrströmung mit bewegter Verjüngung

Nach den Testrechnungen zur Verifikation des entwickelten ALE-Verfahrens soll dieses nun angewendet werden, um eine Strömung auf einem tatsächlich zeitveränderlichen Gebiet zu berechnen. Es wird hier eine Problemklasse ausgewählt, für die umfangreiche experimentelle Ergebnisse vorliegen. Somit können diese Beispielrechnungen auch als zusätzliche Verifikation des gesamten instationären ALE-Navier-Stokes-Lösers angesehen werden.

Die Problemstellung in Bild 5.3 zeigt eine Kanalströmung mit einer bewegten Verjüngung.

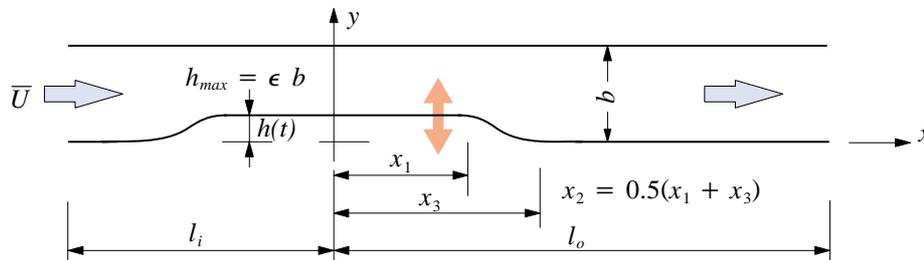


Bild 5.3: Kanalströmung mit bewegter Verjüngung – Problemstellung

Dieses Beispiel diene als Modellproblem für Untersuchungen von physiologischen Strömungen im Bereich der Biomechanik. Dabei werden die Anfangsstadien der Arteriosklerose untersucht. Ausführliche experimentelle Untersuchungen stammen von Pedley und Stephanoff (1985). Numerische Untersuchungen berichten unter anderem Ralph und Pedley (1989), Demirdzic und Peric (1990), Becker (1995), Wall und Ramm (1998) und Gatoinde (1998).

Die oszillierende Verjüngung des Kanals in den Experimenten von Pedley und Stephanoff (1985) wird als

$$y(x) = \begin{cases} h & \text{for } 0 < x < x_1 \\ 0.5h \{1 - \tanh[a(x-x_2)]\} & \text{for } x_1 < x < x_3 \\ 0 & \text{for } x > x_3 \end{cases} \quad (5.23)$$

definiert. Beginn und Ende der Verjüngung werden mit $x_1 = 4.0 b$ und $x_3 = 6.5 b$ gewählt und der Längenfaktor als $a = 4.14$ festgelegt. Die Kanalhöhe beträgt $b = 1.0$ cm und der Abstand der Mitte der symmetrischen Verjüngung zum Einströmrand $l_i = 8.0$ cm und zum Ausströmrand $l_o = 18.0$ cm. Der zeitliche Verlauf der Verjüngung wird durch die harmonische Funktion

$$h(t) = 0.5 \epsilon \left(1 - \cos(2\pi \hat{t})\right); \quad \hat{t} = \frac{t - t_0}{T} \quad (5.24)$$

beschrieben. T bezeichnet darin die Periode der Oszillation. Mit einer Volumengeschwindigkeit $\bar{U} = 1.0$ cm/s des quadratischen Einströmprofils folgen die dimensionslosen Parameter der Reynoldszahl und der Strouhalzahl zur Strömungscharakterisierung als

$$Re = \frac{\bar{U} b}{\nu} ; \quad St = \frac{b}{\bar{U} T} \quad (5.25)$$

An den Kanalwänden werden ‘no-slip’-Randbedingungen vorgeschrieben. Alle Berechnungen beginnen mit der ausgeprägten stationären Kanalströmung des undeformierten Kanals zum Zeitpunkt $t = t_0$. Für die Simulationen werden zwei Netze verwendet. Das gröbere Netz besteht aus $18 \times 208 \times 2$ P1P1-Elementen und das feinere aus 40×212 Q1Q1-Elementen. Als Zeitschrittgröße werden Werte von $\Delta t = T/175$ bis $\Delta t = T/200$ angewendet. Den visualisierten Ergebnissen in dieser Arbeit liegen die feineren Diskretisierungen zu Grunde. Die Ergebnisse in Wall und Ramm (1998) zeigen allerdings, daß das hier entwickelte Verfahren bereits mit der größeren räumlichen und zeitlichen Diskretisierung in der Lage ist, die auftretenden Strömungsphänomene genau zu beschreiben. Die feinere der beiden räumlichen Diskretisierungen wie auch die zeitliche Diskretisierungseinheit entsprechen ungefähr der Arbeit von Demirdzic und Peric (1990). Zur Beschreibung der Netzdeformation wird ein einfaches lineares

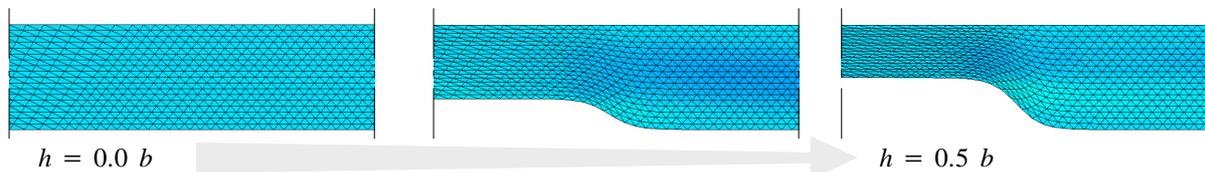


Bild 5.4: Momentaufnahmen des bewegten P1P1-Netzes

Interpolationsverfahren eingesetzt. Momentaufnahmen der Netzdeformation des stromabwärts liegenden Endes der Verjüngung für das $18 \times 208 \times 2$ P1P1-Netz zeigt Bild 5.4. Bild 5.5 zeigt eine unverzerrte Darstellung des gesamten Kanals, sowie Ausschnitte des deformierten Q1Q1-Netzes bei $\epsilon = 0.38$.

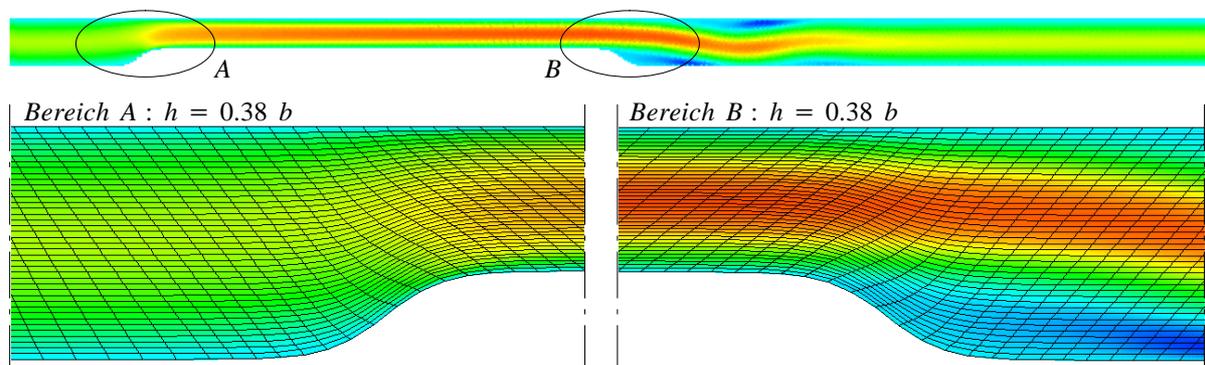


Bild 5.5: Unverzerrte Kanaldarstellung und Details des deformierten Q1Q1-Netzes

Quasi unabhängig von der Reynoldszahl, zumindest im Bereich von $360 < Re < 1260$, zeigten die Experimente zwei prinzipiell unterschiedliche Strömungsphänomene. Diese Strömungsphänomene werden in Pedley und Stephanoff (1985) ausführlich diskutiert, und die experimentellen Ergebnisse werden dort auch visuell dargestellt. Die beiden Phänomene werden durch eine kritische Strouhalzahl von $St = 0.005$ getrennt. Die sich einstellende Strömung ist also hauptsächlich von der Frequenz der Oszillation der Wand im Vergleich zur Strömungsgeschwindigkeit abhängig. Zwei Beispielrechnungen sollen zeigen, daß das hier entwickelte Verfahren diese beiden im Experiment beobachteten Strömungsphänomene erkennen und genau darstellen kann. Für beide Beispiele wird eine Reynoldszahl von $Re = 507$ und eine maxi-

male Verjüngung von 38%, d.h. $\epsilon = 0.38$, gewählt. Diese Fälle sind auch experimentell untersucht worden.

Strömungsregime I

Dem Beispiel zur Beschreibung des Strömungsregimes I wird eine Strouhalzahl von $St = 0.0033$ zugrunde gelegt. Es handelt sich um einen Wert unterhalb der kritischen Strouhalzahl, d.h. um eine langsame Oszillation der Kanalwand. Dieses Strömungsregime zeichnet sich in den Experimenten durch eine quasi-stationäre Strömung aus. Während der Verjüngung des Kanals entsteht am stromabwärts liegenden Ende der Verjüngung ein Wirbel. Dieser wächst und schrumpft in Phase mit der Verjüngung und bleibt an seinem Ort fixiert. Erreicht die Kanalhöhe bei der Oszillation die volle Breite, herrscht wieder der beinahe vollständig ungestörte Strömungszustand der einfachen Kanalströmung.

Die erzielten numerischen Ergebnisse sind in Bild 5.6 dargestellt. Sie bestätigen die Fähigkeit

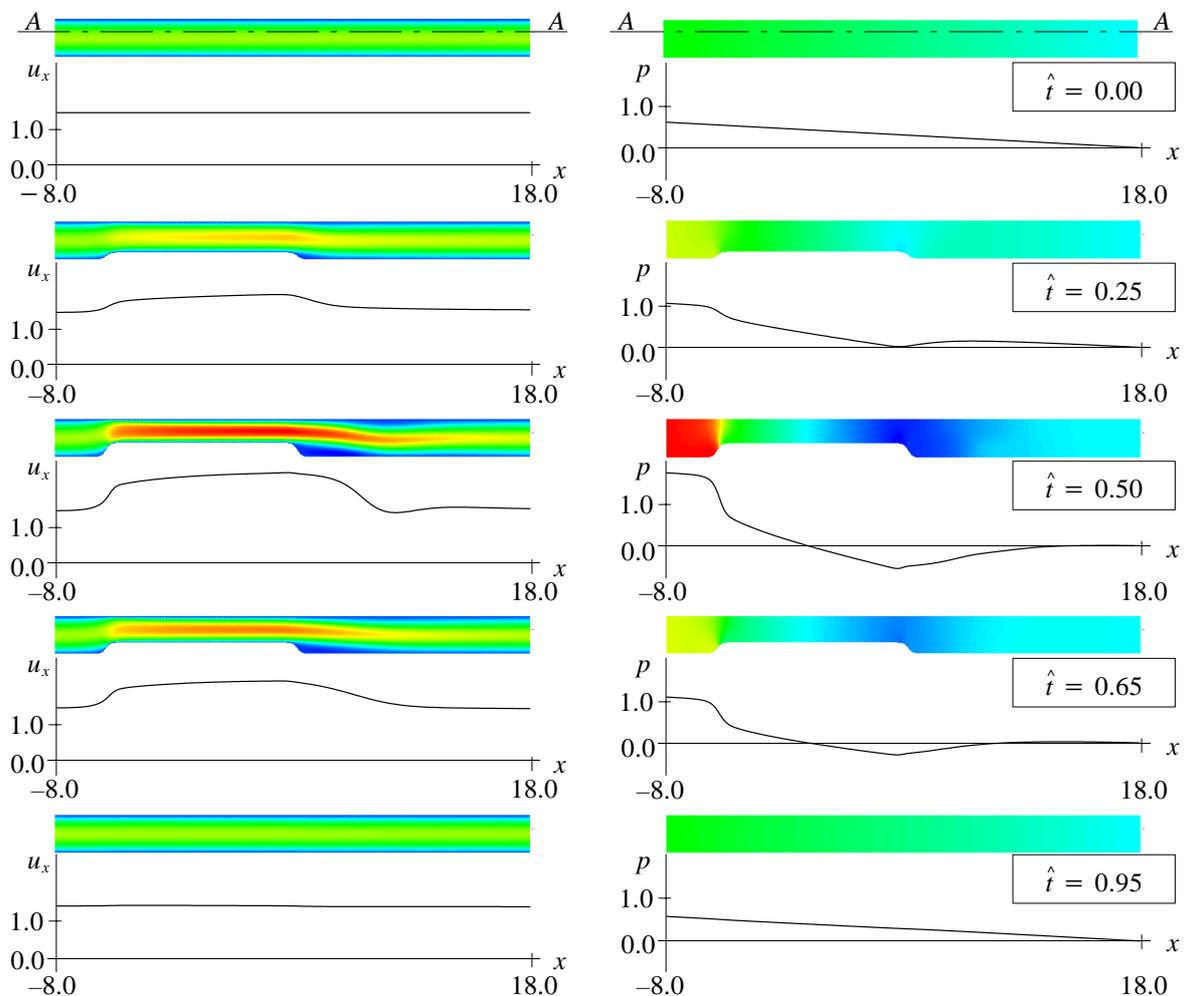


Bild 5.6: Strömungsregime I – Geschwindigkeitsfeld u_x und Druckfeld p für $St=0.0033$, $Re=507$, $\epsilon=0.38$ (zweifach überhöht) und zugehörige Längsschnitte A–A

des Verfahrens dieses einfache Strömungsmuster zu beschreiben und stimmen sehr gut mit den experimentellen und numerischen Ergebnissen der angeführten Arbeiten überein.

Strömungsregime II

Wird die Strouhalzahl über den kritischen Wert erhöht, handelt es sich keinesfalls mehr um eine quasi-stationäre Strömung. Vielmehr entwickelt sich ein sehr komplexes instationäres Szenario von Strömungsphänomenen. In jedem Zyklus entwickeln sich ausbreitende Serien von Wellen in der Hauptströmung unterhalb der Verjüngung. Wirbel bilden sich in abgetrennten Strömungsbereichen unterhalb der Wellenkämme und oberhalb ihrer Mulden. Eines der bemerkenswertesten Strömungsphänomene in solchen Strömungen ist die sogenannte ‘Wirbel-Verdopplung’ (‘Eddy-doubling’). Das bedeutet, daß einzelne Wirbel brechen und Sekundärwirbel entstehen. Diese bilden sich im selben abgetrennten Strömungsbereich stromaufwärts der Primärwirbel. Während des Zyklus liegt also eine stark gestörte und hochgradig instationäre Strömung vor. Diese Strömungsphänomene können den Strömungsvisualisierungen und schematischen Skizzen in Pedley und Stephanoff (1985) entnommen werden. Die auftretenden Störungen wandern jedoch gegen Ende des Zyklus stromabwärts, so daß am Ende der Periode wiederum ein fast ungestörter Strömungszustand vorliegt. Dies bedeutet auch, daß die Strömungszustände während einer Periode kaum mit den Zuständen der nächsten Periode interagieren. Für die numerischen Untersuchungen heißt dies, daß die Berechnungen auf die Untersuchung einer Periode beschränkt werden können.

Für die numerische Untersuchung wird der Fall mit einer Strouhalzahl von $St = 0.037$ ausgewählt, der sich auch in den experimentellen Ergebnissen findet. Eine detaillierte Darstellung der numerischen Simulationsergebnisse anhand einzelner Strömungszustände bzw. Wirbelbereiche zum Zeitpunkt $\hat{t} = 0.70$ zeigt Bild 5.7. Bild 5.8 zeigt einzelne Strömungslösungen im

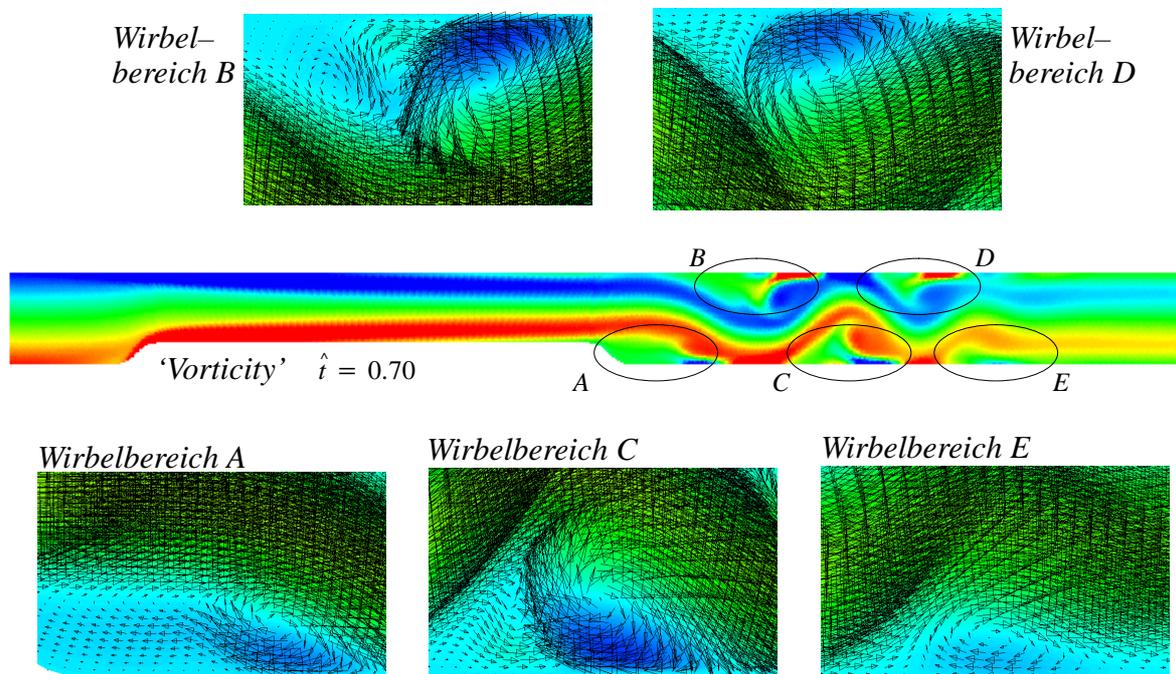


Bild 5.7: Strömungsregime II – Übersichtsbild ‘Vorticity’ und Zoom in einzelne Strömungsbereiche (Geschwindigkeitsvektoren auf u_x) (zweifach überhöht)

Verlauf einer gesamten Periode. Ein Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen zeigt eine hervorragende Übereinstimmung in den grundsätzlichen Strömungsphänomenen. Aus der Abbildung ist zu erkennen, daß das entwickelte Verfahren auch das Phänomen der Wirbel-Ver-

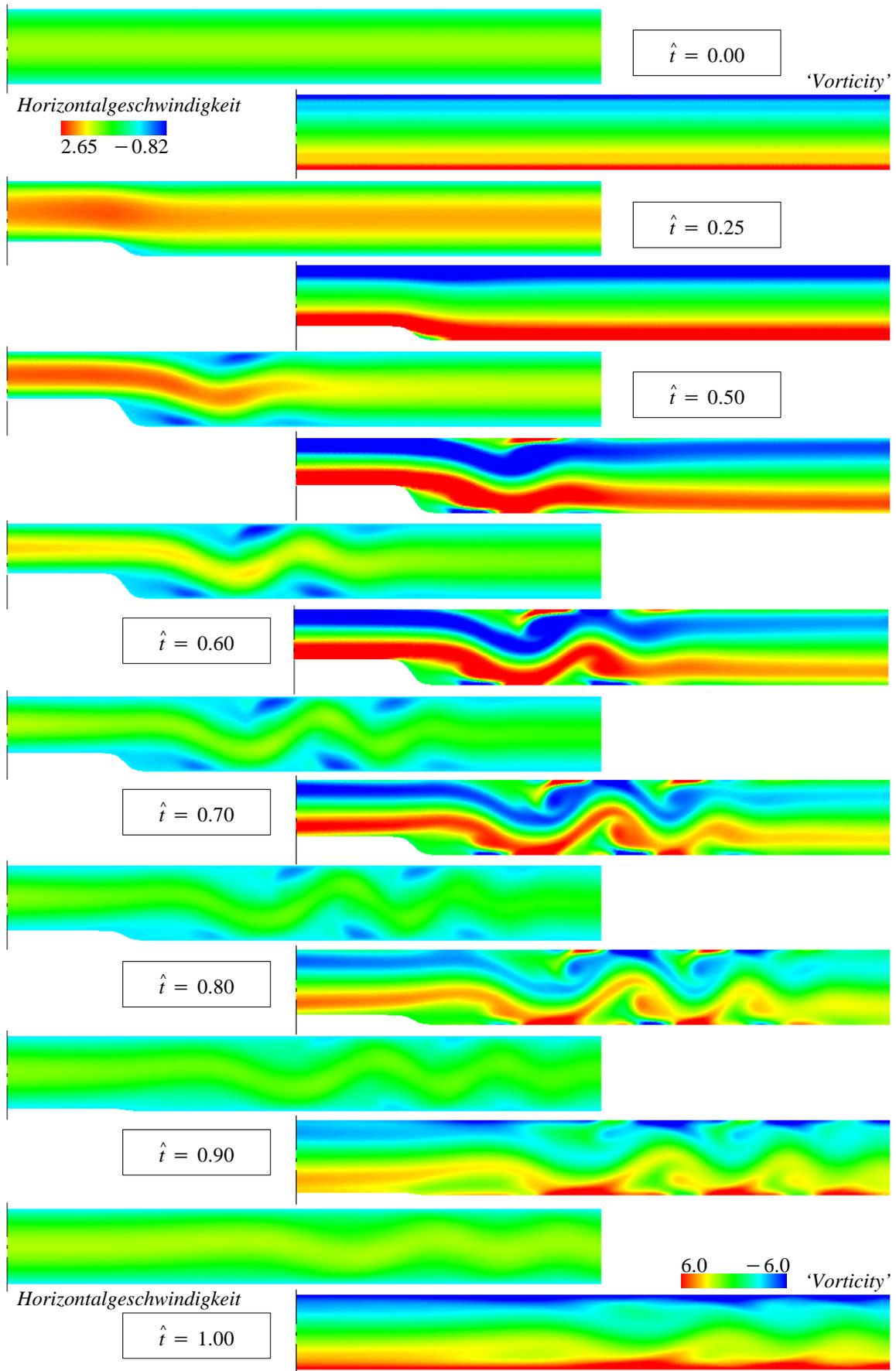


Bild 5.8: Strömungsregime II – Ausschnitte aus Geschwindigkeitsfeld u_x (links) und 'Vorticity' (rechts) für $St=0.037$, $Re=507$, $\varepsilon=0.38$ (zweifach überhöht)

dopplung erkennen und darstellen kann. Die gute Übereinstimmung betrifft aber auch die Zeitpunkte, an denen Primär- und Sekundärwirbel auftreten. Auch die Übereinstimmung mit den numerischen Ergebnissen in Ralph und Pedley (1989) und Demirdzic und Peric (1990) ist sehr gut. Der numerische Aufwand scheint jedoch im vorliegenden Verfahren geringer. Beispielsweise ist in Demirdzic und Peric (1990) von typischerweise 40 Iterationen pro Zeitschritt die Rede, während im vorliegenden Verfahren im Sinne einer 'Linearisierung durch eine Extrapolation in der Zeit' (Kapitel 4.3.3) meist nur eine oder maximal zwei Iterationen pro Zeitschritt durchgeführt werden.

6 Lösungsverfahren für Struktur- und Netzdynamik

Ein Großteil der Arbeit beschäftigt sich mit numerischen Verfahren zur Lösung strömungsmechanischer Aufgabenstellungen, allerdings bereits im Hinblick auf die zu behandelnden gekoppelten Probleme. In diesem Kapitel sollen nun auch die restlichen involvierten Felder besprochen werden. Dieses Kapitel stellt also sämtliche Einzelfeld-Verfahren des gekoppelten *Drei-Feld-Problems* zusammen. Dazu werden zunächst numerische Verfahren zur Lösung der Feldgleichungen des zweiten physikalischen Feldes, des *Strukturfeldes*, behandelt. Dabei wird sowohl die räumliche als auch die zeitliche Diskretisierung diskutiert. Entsprechend den gewählten Modellgleichungen wird ein Algorithmus zur geometrisch nichtlinearen Elastodynamik skizziert. Außer den physikalischen Feldern Struktur und Fluid ist für die ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’-Betrachtungsweise und die Strömungslösung auf zeitveränderlichen Gebieten noch ein weiteres ‘computational’ Feld, das sogenannte ‘*Netzfeld*’, zu betrachten. Für die Lösung dieses Feldes wird besonders Wert auf möglichst allgemein anwendbare Ansätze zur Bestimmung der Netzbewegung gelegt.

6.1 ‘Computational Structural Dynamics’

Zur Strukturdynamik, also zum Gebiet der ‘Computational Structural Dynamics’ CSD, kann auf zahlreiche Arbeiten und Entwicklungen zurückgegriffen werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit bedurfte es lediglich einer Adaptierung der vorhandenen Ansätze auf die Fragestellungen bei gekoppelten Problemen. Diese bestand hauptsächlich in einer Sichtung zu favorisierender theoretischer Ansätze und einer Ergänzung der vorhandenen Algorithmen.

6.1.1 Grundgleichungen

Für die Grundgleichungen der CSD in einer (totalen) Lagrangeschen Betrachtungsweise wird auf die Ausführungen in Kapitel 2.2 und die dort zitierte Literatur verwiesen. Ausgehend von der Cauchy’schen Bewegungsgleichung

$$\rho^0 \ddot{\mathbf{d}} = \nabla \cdot \mathbf{S} + \rho^0 \mathbf{b} \quad \text{in } \Omega_S \times (0, T) \quad (6.1)$$

wurde dort mit den entsprechenden kinematischen und konstitutiven Beziehungen und den jeweiligen Anfangs- und Randbedingungen die schwache Form über das Prinzip der virtuellen Arbeit formuliert

$$\int_{\Omega_S} \rho^0 \ddot{\mathbf{d}} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Omega_S + \int_{\Omega_S} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, d\Omega_S = \int_{\Gamma_S} \tilde{\mathbf{S}} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Gamma_S + \int_{\Omega_S} \rho^0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{d} \, d\Omega_S \quad (6.2)$$

Die einzelnen Größen wurden in Kapitel 2.2 definiert.

Analog zur Vorgehensweise der CFD wird auch hier eine sequentielle Diskretisierungsstrategie angewendet. Aus diesem Grund werden im Folgenden zuerst die räumliche und danach die zeitliche Diskretisierung besprochen.

6.1.2 Räumliche Diskretisierung

Die ‘direkte’ und einfachste Methode zur räumlichen Diskretisierung der schwachen Form in Gleichung (6.2) besteht in der Verwendung einer Verschiebungsformulierung. Die Vorge-

hensweise dabei entspricht einer klassischen Galerkin–Formulierung, wie sie bereits in Kapitel 3.1.1 besprochen wurde. Dazu werden die kontinuierlichen Funktionen für die Verschiebungen \mathbf{d} und die virtuellen Verschiebungen bzw. Testfunktionen $\delta\mathbf{d}$ aus einem entsprechend angepassten, diskreten, Unterraum gewählt. Dieser Unterraum wird durch die auf Elementebene formulierten Ansatz– bzw. Formfunktionen N_i aufgespannt

$$\mathbf{d}^h(\mathbf{z}) = \mathbf{d}_i N_i(\mathbf{z}); \quad \delta\mathbf{d}^h(\mathbf{z}) = \delta\mathbf{d}_i N_i(\mathbf{z}); \quad \text{bzw.} \quad \ddot{\mathbf{d}}^h(\mathbf{z}) = \ddot{\mathbf{d}}_i N_i(\mathbf{z}); \quad \text{etc.} \quad (6.3)$$

Zur Vereinfachung der Notation wird die Bezeichnung \mathbf{d} und $\ddot{\mathbf{d}}$ für die Verschiebungen und Beschleunigungen auch für die gesuchten, diskreten Knotenfreiwerte beibehalten.

Defekte und alternative Konzepte

Leider sind reine Verschiebungsformulierungen in vielen Fällen mit Problemen behaftet. Speziell für Schalenformulierungen, die den höchsten Anspruch an die jeweiligen Elementformulierungen stellen, werden solche Defekte und ihre Lösungsmöglichkeiten von Braun (1995) und Bischoff (1999) diskutiert. Eine zusammenfassende Behandlung für Scheiben–, Platten– bzw. Schalenprobleme findet sich in Haußer (1996) und Ramm et al. (1999). Im folgenden soll nur ein kurzer Abriß zu diesen Defekten und ihrer Beseitigung gegeben werden.

Die wesentlichen Probleme von Strukturelementen betreffen sogenannte Versteifungseffekte, meist nach der englischen Bezeichnung als ‘Locking’–Effekte bezeichnet. Diese haben eine teils verheerende Auswirkung auf die Konvergenz der Elemente. Anschaulich interpretiert liegen diese Versteifungseffekte darin begründet, daß bestimmte Deformationsmoden Spannungsgrößen in den Elementen wecken, die eigentlich nicht vorhanden sein sollten. Diese parasitären Spannungsgrößen ziehen einen Teil der Gesamtenergie an sich, wodurch sich die ‘primären Moden’ nur noch für einen Teil der Gesamtenergie einstellen. Das ergibt das zu steife Strukturverhalten. Je nach Strukturmodell (Scheiben, Platten, Schalen) handelt es sich dabei um die folgenden Locking–Effekte; sie werden jeweils mit den ungewollt erzeugten Größen angegeben:

- Querschub–Locking (Balken, Platten, Schalen) — Querschub (in Fällen reiner Biegung)
- ‘in–plane’ Schub–Locking (Scheiben, Schalen, 3D–Volumenelemente) — Schub (bei Biegemoden)
- volumetrisches Locking (Scheiben, Schalen, 3D–Volumenelemente) — Normalspannungen (bei nahezu volumenerhaltenden Deformationen)
- Membran–Locking (Schalen) — Membrankräfte (bei reiner Biegung)

Im Laufe der Jahre wurden eine ganze Reihe von Konzepten vorgeschlagen, um die unterschiedlichen Defekte zu beseitigen. Bei diesen Konzepten handelt es sich um die folgenden Verfahren (Haußer (1996))

- reduzierte Integration
- hybride Spannungsmethode
- Methode der erweiterten Verzerrungen — ‘Enhanced Assumed Strain’ (EAS)
- Methode der angenommenen Verzerrungen — ‘Assumed Natural Strain’ (ANS)
- ‘Freie Formulierung’

Die meisten dieser Verfahren gehen dabei nicht von der schwachen Form in Gleichung (6.2) aus, sondern basieren auf gemischten Funktionalen oder Mehrfeldfunktionalen. Die bedeutendsten Vertreter solcher Mehrfeldfunktionale sind das Prinzip von Hu–Washizu und das Prinzip von Hellinger–Reissner.

Die vorliegende Arbeit beschränkt sich für die gekoppelten Problemstellungen auf zweidimensionale Systeme. Aus diesem Grunde werden für die Strukturseite nur Scheibenelemente eingesetzt. Es werden *voll integrierte neunknotige Verschiebungselemente*, *reduziert integrierte acht-knotige Verschiebungselemente* und entsprechende gemischte bzw. hybrid–gemischte Elemente, wie *EAS–Elemente* oder *hybride Spannungselemente*, empfohlen. Diese Elemente sind zwar nicht für alle Fälle völlig problemlos anwendbar, zeigen jedoch über einen weiten Anwendungsbereich ein sehr gutmütiges Verhalten.

In der semidiskreten Formulierung, also nach dem gesamten räumlichen Diskretisierungsvorgang, verbleiben nur noch Verschiebungsfreiwerte als Unbekannte. Bei den hybrid–gemischten Formulierungen werden die zusätzlichen Größen auf Elementebene kondensiert und kommen im resultierenden Gleichungssystem nicht mehr vor. Dies ist eine wesentliche Eigenschaft beim Einsatz in einem oberflächengekoppelten Problem. Das ausschließliche Vorhandensein von den ‘primären Freiheitsgraden’, also den Verschiebungsfreiwerten, erleichtert nämlich den Last– und Bewegungstransfer am Interface zwischen den Feldern.

Matrixdarstellung

Unabhängig von der Wahl einer der oben angesprochenen speziellen räumlichen Diskretisierungsvarianten läßt sich das semidiskrete System in Matrixdarstellung schreiben

$$M\ddot{\mathbf{d}} + N(\mathbf{d}) = \mathbf{F} \quad (6.4)$$

Die Bedeutung der entsprechenden Anteile läßt sich direkt aus dem Vergleich mit Gleichung (6.2) ableiten. \mathbf{M} bezeichnet wieder die Massenmatrix, $N(\cdot)$ sämtliche nichtlinearen Anteile und \mathbf{F} die externen Lasten. Die semidiskrete Bewegungsgleichung könnte noch um einen viskosen Dämpfungsterm $\mathbf{C}^S \dot{\mathbf{d}}$ ergänzt werden, um eine Systemdämpfung zu beschreiben. Es liegt somit ein gekoppeltes, gewöhnliches Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0; \quad \dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{d}}_0 \quad \text{in } \Omega_S \text{ für } t = 0 \quad (6.5)$$

und entsprechenden Randbedingungen (2.69) und (2.70) vor.

6.1.3 Zeitdiskretisierung

Leider lassen sich die Diskussionen zur Zeitdiskretisierung aus Kapitel 4.2 nur sehr beschränkt auf die hier vorliegende Problematik übertragen. Einerseits liegt dies darin begründet, daß hier nach der Semi–Diskretisierung gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung vorliegen. Weiters treten bei strukturmechanischen Fragestellungen neue Anforderungen in den Vordergrund. Aus diesem Grunde wird die Zeitdiskretisierung nun im Lichte der Anforderungen der nichtlinearen Strukturmechanik nochmals aufgegriffen. Die Ausführungen beschränken sich dabei auf die hier ausschließlich verwendeten impliziten Einschritt–Zeitintegrationsverfahren. Empfehlenswerte Einführungen zur Zeitdiskretisierung strukturmechanischer

Problemstellungen finden sich in den Büchern von Bathe (1996), Belytschko und Hughes (1983), Crisfield (1997), Hughes (1987b), Wood (1990) und Zienkiewicz und Taylor (1991). Ein Überblick zu gebräuchlichen Zeitintegrationsverfahren in der Strukturodynamik wird in Fung (1998) oder Kuhl (1996) gegeben.

Ziel der Zeitintegrationsansätze ist es, Zusammenhänge zwischen den kinematischen Größen anzugeben, um den Variablensatz aus Verschiebungen \mathbf{d} , eventuell Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}$ und Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}$ auf eine Größe, in unserem Fall die Verschiebungen, zu reduzieren. Einige der populärsten Zeitintegrationsansätze der Strukturodynamik gehen auf Newmark (1959) zurück. Darin wird von einem linearen Beschleunigungsansatz über das Zeitintervall ausgegangen und die Geschwindigkeiten und Verschiebungen jeweils mit speziell wählbaren Parametern bei der Integration ermittelt. Die Verschiebungen \mathbf{d}^{n+1} und die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}^{n+1}$ zum neuen Zeitpunkt t^{n+1} lauten

$$\mathbf{d}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{d}}^n + 2\beta\ddot{\mathbf{d}}^{n+1}] \quad (6.6)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^{n+1} = \dot{\mathbf{d}}^n + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{d}}^n + \gamma\ddot{\mathbf{d}}^{n+1}]$$

Die Konstanten β und γ werden als Newmark-Parameter bezeichnet und steuern die Eigenschaften des Zeitintegrationsverfahrens. So lassen sich aus den angegebenen Ansätzen je nach Parameterwahl bedingt und unbedingt stabile, implizite und explizite Verfahren, sowohl erster als auch zweiter Ordnung erzeugen. Aus (6.6) lassen sich nun die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}^{n+1}$ und die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}^{n+1}$ durch die Verschiebungen \mathbf{d}^{n+1} und den im schrittweisen Vorgehen bekannten kinematischen Größen zum Zeitpunkt t^n ausdrücken

$$\dot{\mathbf{d}}^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) - \frac{\gamma - \beta}{\beta} \dot{\mathbf{d}}^n - \frac{\gamma - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^n \quad (6.7)$$

$$\ddot{\mathbf{d}}^{n+1} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} (\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n) - \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{d}}^n - \frac{1 - 2\beta}{2\beta} \Delta t \ddot{\mathbf{d}}^n$$

Das *Newmark-Verfahren* ergibt sich mit den Ansätzen (6.7), wenn das dynamische Gleichgewicht (6.4) zum Ende des Zeitschrittes t^{n+1} erfüllt wird. Bei entsprechenden Parameterkombinationen folgen aus den Newmark-Ansätzen eine Reihe von Unter-Verfahren, wie die Trapez- oder Mittelpunktsregel ($\beta = 1/4$), die lineare Beschleunigungsmethode ($\beta = 1/6$), das Fox-Goodwin-Verfahren ($\beta = 1/12$) oder das explizite zentrale Differenzenverfahren ($\beta = 0$), jeweils mit $\gamma = 1/2$. Obwohl diese Verfahren nach wie vor sehr populär sind, decken sie nur einen Teil der Anforderungen an Zeitintegrationsverfahren für Anwendungen in der nichtlinearen Strukturodynamik ab.

Die speziellen Anforderungen an Zeitintegrationsverfahren in der Strukturodynamik betreffen ihre *unbedingte Stabilität* und eine *kontrollierbare numerische Dissipation* hochfrequenter Anteile. Eine Verallgemeinerung von Ansätzen zur numerischen Dissipation hochfrequenter Moden geht auf Chung und Hulbert (1993) zurück und wird als *Generalisiertes- α -Verfahren* ('Generalized- α method') bezeichnet. Dieses Verfahren geht von den angeführten Newmark-Ansätzen in der Zeit aus und modifiziert über zwei 'Shift'-Parameter die semidiskrete Bewegungsgleichung im Sinne von

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^\alpha + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}^\alpha + \mathbf{K}\mathbf{d}^\alpha = \mathbf{F}^\alpha \quad (6.8)$$

Darin bedeuten

$$\ddot{\mathbf{d}}^\alpha = (1 - \alpha_m)\ddot{\mathbf{d}}^{n+1} + \alpha_m \ddot{\mathbf{d}}^n \quad \mathbf{d}^\alpha = (1 - \alpha_f)\mathbf{d}^{n+1} + \alpha_f \mathbf{d}^n \quad (6.9)$$

$$\dot{\mathbf{d}}^\alpha = (1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{d}}^{n+1} + \alpha_f \dot{\mathbf{d}}^n \quad \mathbf{F}^\alpha = \mathbf{F}(t^{n+1-\alpha_f}) \approx (1 - \alpha_f)\mathbf{F}^{n+1} + \alpha_f \mathbf{F}^n$$

Mit diesen Ansätzen kann ein erwünschter und vom Benutzer definierter Spektralradius ρ_∞ des Verfahrens direkt angesteuert werden. Weiters ermöglicht dieses Verfahren eine maximale Dissipation hochfrequenter Moden bei einer gleichzeitigen minimalen Dissipation niederfrequenter Moden und einer Genauigkeit von zweiter Ordnung. Dazu sind in den Ansätzen (6.9) die neu eingeführten Parameter in den Bereichen $\alpha_m \leq \alpha_f \leq 1/2$ und die Newmark-Parameter als $\gamma = 1/2 - \alpha_m + \alpha_f$ und $\beta = 1/4(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$ zu wählen. Für diese Parameterkombination ist das Verfahren im linearen Fall auch unbedingt stabil. Bei vorgegebenem Spektralradius ρ_∞ lassen sich die ‘Shift’-Parameter für das Generalisierte- α -Verfahren und die zwei bekanntesten Sub-Verfahren

- ‘Generalized- α ’: $\alpha_m = (2\rho_\infty - 1)/(\rho_\infty + 1) \quad \alpha_f = \rho_\infty/(\rho_\infty + 1) \quad (6.10)$

- ‘Hilber- α ’: $\alpha_m = 0 \quad \alpha_f = (1 - \rho_\infty)/(\rho_\infty + 1) \quad (6.11)$

- ‘Bossak- α ’: $\alpha_m = (\rho_\infty - 1)/(\rho_\infty + 1) \quad \alpha_f = 0 \quad (6.12)$

ermitteln (Kuhl (1996)). Diese Verfahren werden auch bei den Beispielen in Kapitel 7.5 verwendet. Werden sowohl α_m als auch α_f zu Null gesetzt, folgt die oben angeführte Verfahrensfamilie von Newmark.

Bei der Anwendung des Generalisierten- α -Verfahrens auf die hier betrachteten nichtlinearen Problemstellungen nach Gleichung (6.4)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}^\alpha + \mathbf{N}(\mathbf{d}^\alpha) = \mathbf{F}^\alpha \quad (6.13)$$

kommt noch der Ansatz zur Ermittlung der nichtlinearen Terme hinzu (Kuhl und Ramm (1996)). Dabei können die nichtlinearen inneren Kräfte alternativ als

$$\mathbf{N}^\alpha(\mathbf{d}) = (1 - \alpha_f)\mathbf{N}(\mathbf{d}^{n+1}) + \alpha_f\mathbf{N}(\mathbf{d}^n) \quad (6.14)$$

oder auch direkt über die Verschiebung am generalisierten Mittelpunkt, im Sinne von

$$\mathbf{N}(\mathbf{d}^\alpha) = \mathbf{N}\left((1 - \alpha_f)\mathbf{d}^{n+1} + \alpha_f\mathbf{d}^n\right) \quad (6.15)$$

ermittelt werden (Crisfield (1997) und Kuhl und Ramm (1999)).

Es hat sich jedoch gezeigt, daß viele Verfahren, die aus der linearen Dynamik als unbedingt stabil bekannt sind, diese unbedingte Stabilität im nichtlinearen Bereich verlieren. Ein Kriterium für Stabilität im nichtlinearen Bereich geht auf eine Energiebilanz zurück und besagt, daß ein Verfahren dann stabil ist, wenn die totale Energie innerhalb eines Zeitschrittes nicht zunimmt. Dies wird im allgemeinen durch Aktivierung numerischer Dissipation erreicht. Speziell für langzeitdynamische Simulationen können diese dissipativen Eigenschaften jedoch negative Auswirkungen haben. Aus diesem Grunde werden seit einigen Jahren verstärkt Anstrengungen unternommen, um energieerhaltende dissipative Algorithmen für nichtlineare strukturdynamische Probleme zu entwickeln. Ein Überblick zur Bedeutung und Entwicklung energieerhaltender Verfahren und ein algorithmischer Rahmen für eine Reihe der über die letzten Jahre entwickelten Verfahren findet sich in Kuhl und Ramm (1999).

6.1.4 Effektive Strukturgleichung und Linearisierung

Durch Einsetzen der Zeitdiskretisierungsansätze in das modifizierte semi-diskrete Gleichungssystem (6.13) entsteht ein nichtlineares algebraisches Gleichungssystem, das auch als *effektive Strukturgleichung* bezeichnet wird.

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\mathbf{d}^{n+1}) &= \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M}\mathbf{d}^{n+1} + \mathbf{N}(\mathbf{d}^{\alpha_f}) - \\ &- \mathbf{M} \left[\frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t^2} \mathbf{d}^n + \frac{1-\alpha_m}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{d}}^n + \left(\frac{1-\alpha_m}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{d}}^n \right] - \\ &- (1-\alpha_m)\mathbf{F}^{n+1} - \alpha_f \mathbf{F}^n = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Zur Lösung dieses nichtlinearen Gleichungssystems bedarf es zunächst einer Linearisierung. Dazu wird auf die bereits in Kapitel 4.3.2 diskutierte Gâteaux-Ableitung zurückgegriffen. Die Ableitung der inneren Kräfte $\mathfrak{N}_{,\mathbf{d}}(\mathbf{d})$ ergibt sich völlig analog zum statischen Fall, wird als tangentielle Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T bezeichnet und setzt sich aus elastischer Steifigkeitsmatrix, Anfangsverschiebungsmatrix und geometrischer Steifigkeitsmatrix zusammen. Die exakten Definitionen können den Büchern von Zienkiewicz und Taylor (1991) und Bathe (1996) entnommen werden. Die inkrementelle Form des zu lösenden Systems lautet

$$\mathfrak{R}_{,\mathbf{d}}(\mathbf{d}) \Delta \mathbf{d} = - \mathfrak{R}(\mathbf{d}) \quad (6.17)$$

Dabei wird die gesamte Ableitung des Gleichungsresiduums $\mathfrak{R}_{,\mathbf{d}}(\mathbf{d})$ als *effektive Steifigkeitsmatrix* \mathbf{K}_{eff} und die neu entstandene rechte Seite $-\mathfrak{R}(\mathbf{d})$ als *effektiver Lastvektor* \mathbf{F}_{eff} bezeichnet. Im betrachteten Einsatzgebiet der Strukturformulierung bei Fluid-Struktur-Interaktions-Problemen treten deformationsabhängige Lasten $\mathbf{F}(\mathbf{d})$ an der ‘benetzten’ Strukturoberfläche auf. Auf die Linearisierung dieser deformationsabhängigen Lasten wird jedoch hier verzichtet. Diese Linearisierung und die damit verbundenen Steifigkeitsanteile (Mok et al. (1999a), Mok (1997)) bewirken eine zusätzliche ‘Kopplung’ zwischen den Feldern. Diese ist numerisch nur sehr aufwendig umzusetzen und läuft dem in dieser Arbeit verfolgten partitionierten Lösungskonzept zuwider (siehe Kapitel 7).

6.1.5 Ein Verfahren für die geometrisch nichtlineare Elastodynamik

Ähnlich wie für die CFD existieren auch hier unterschiedliche Ansätze zur Lösung der nichtlinearen Gleichungssysteme, die hier nicht weiter diskutiert werden sollen. Für die Lösung der nichtlinearen strukturdynamischen Gleichungssysteme wird durchwegs das Newton-Raphson-Verfahren⁶ im Sinne einer Prädiktor-Multikorrekter-Strategie verwendet.

Algorithmusskizze

Im Folgenden soll noch ein einfacher Algorithmus zur Lösung geometrisch nichtlinearer, elastodynamischer Aufgabenstellungen skizziert werden. Dieser setzt sich aus der Kombination

6. In einem Großteil der mathematischen Literatur wird dieses Verfahren nur als Newton-Verfahren bezeichnet. In dieser Arbeit, wie auch in der Mehrzahl ingenieurwissenschaftlicher Publikationen, wird jedoch die Bezeichnung Newton-Raphson verwendet. Das Verfahren in seiner heutigen Verwendungsart geht nämlich auf ein zwar von Newton inspiriertes, aber vom englischen Mathematiker Joseph Raphson (1648–1715) vorgeschlagenes Verfahren zurück.

einer impliziten Einschritt-Zeitintegration ('Generalized- α ') und einem Newton-Raphson-Verfahren in einer Prädiktor-Multikorrekter-Strategie zusammen.

-
- (i) Setze Anfangsfelder \mathbf{d}^0 , $\dot{\mathbf{d}}^0$ und $\ddot{\mathbf{d}}^0$
Initialisiere 'Zeitzähler' $n = 0$
 - (ii) Zeitschleife ($t^{n+1} = t^n + \Delta t$)
Bestimme 'Lasten' (Dirichletwerte, Lasten, ...) für t^{n+1}
Initialisiere Iterationszähler $i = 0$
 - (iii) Setze Prädiktor-Größen $\mathbf{d}_0^{n+1} = \mathbf{d}^n$; $\dot{\mathbf{d}}_0^{n+1} = \dot{\mathbf{d}}^n$; $\ddot{\mathbf{d}}_0^{n+1} = \ddot{\mathbf{d}}^n$
 - (iv) Berechne iterationsunabhängige RHS-Anteile
 - (v) Iterationsschleife
 - (vi) Berechne und assembliere die effektive RHS
 - (vii) Berechne und assembliere die effektive Steifigkeitsmatrix
 - (viii) Löse das Gesamtgleichungssystem $\Delta \mathbf{d} = \mathbf{K}_{eff}^{-1} \mathbf{F}_{eff}$
 - (ix) Aktualisiere die Verschiebungen \mathbf{d}_{i+1}^{n+1} ,
sowie die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen
 - (x) Konvergenz-Check und ($i = i + 1$)
IF {Residuum > TOL} *GOTO* (v)
(Postprocessing, Ausgabe der Ergebnisse, Sicherung Restart-Daten, ...)
 - (xi) Zeit-Check und ($n = n + 1$)
IF { $n < n_{max}$ bzw. $t < t_{max}$ } *GOTO* (ii)
-

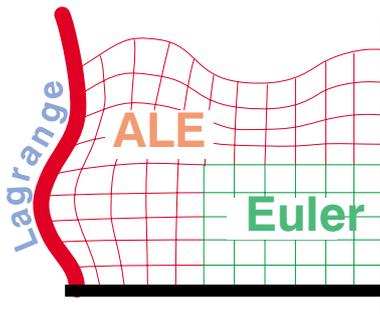
Algorithmus 6.1 Einfaches Lösungsverfahren für geometrisch nichtlineare Elastodynamik

6.2 'Computational Mesh Dynamics'

Wie in Kapitel 5.1 ausgeführt wird in dieser Arbeit ein ALE-Ansatz zur Simulation der Strömung für FSI-Probleme auf zeitveränderlichen Gebieten verwendet. Zur numerischen Umsetzung eines ALE-Verfahrens ist es notwendig, die eingeführte *beliebige* Netzbewegung zu beschreiben und zu bestimmen. Die Aufgabe des CMD-Lösers besteht also darin, die Netzgeschwindigkeit am Interface auf die physikalische Geschwindigkeit des Fluids bzw. der Struktur zu beziehen und diese Beziehung auf den gesamten ALE-Netzbereich auszudehnen. Der CMD-Löser bestimmt also die Netzpositionen des gesamten ALE-Gebietes (Bild 6.1) über die Fortdauer der Simulation hinweg. In den Gebietsdefinitionen (6.18) wird $\bar{\Omega}$ als Notation für das abgeschlossene Gebiet Ω eingeführt, also beispielsweise $\bar{\Omega}_F = \Omega_F + \Gamma_F$.

Anforderungen an Netzbewegungen

Da sowohl die Netzqualität als auch die Netzgeschwindigkeit der in Kapitel 5 beschriebenen Ansätze einen wesentlichen Einfluß auf die erzielbare Qualität der Simulationsergebnisse ha-



$$\begin{aligned}
 \Omega_{ALE} \cup \Omega_{Euler} \cup \Omega_{Lagrange} &= \\
 &= \Omega_{F(luid)} \cup \Omega_{S(truktur)} = \Omega \\
 \Omega_{ALE} \cup \Omega_{Euler} &= \Omega_{F(luid)} \\
 \bar{\Omega}_{ALE} \cap \bar{\Omega}_{Euler} + \Gamma_F \setminus \Gamma_{FS} &= \Gamma_{AE} \\
 \bar{\Omega}_{Lagrange} \cap \bar{\Omega}_{ALE} &= \bar{\Omega}_S \cap \bar{\Omega}_F = \Gamma_{FS}
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Bild 6.1: Skizze zu den Aufgaben des CMD-Lösers und zur Gebietsaufteilung

ben, sind entsprechende Anforderungen an die CMD-Verfahren zu stellen. Diese sollten in der Lage sein

- exzessive Elementdeformationen zu vermeiden,
- eine möglichst glatte Verteilung der Netzgeschwindigkeiten zu erreichen,
- bestimmte Netzcharakteristika zu erhalten (z.B. Grenzschichtnetz),
- Neuvernetzungen weitgehend zu vermeiden,
- möglichst ohne Benutzerinteraktion auszukommen.

Natürlich wird es bei entsprechender Komplexität der Aufgabenstellung nicht immer möglich sein, eine kontinuierliche Netzbewegung über den gesamten Simulationszeitraum hinweg zu definieren. Im Normalfall sind zwischendurch Neuvernetzungsschritte mit einem Transfer bestimmter Zustandsvariablen auf das neue Netz einzubauen. Zielvorstellung an die zu entwickelnden Verfahren der CMD ist, möglichst wenige Neuvernetzungen des Gebietes auf Grund stark deformierter oder irregulärer Netze zu erreichen. Der Grund hierfür liegt in unvermeidbaren Projektionsfehlern beim Transfer der Variablen zwischen zwei Netzen und in den beträchtlichen Kosten, die speziell in 3D mit einer Neuvernetzung verbunden sind. Diese Kosten erhöhen sich noch zusätzlich bei parallelen Rechenansätzen, da nach jeder Neuvernetzung eine Gebietspartitionierung, eine Aktualisierung der komplexeren Datenstrukturen und eine Verteilung auf die einzelnen Prozessoren erfolgen muß. Vor diesem Hintergrund ist es sinnvoll, leistungsfähige CMD-Verfahren zu entwickeln und dafür Rechenzeit zu opfern.

In dieser Arbeit werden ausschließlich *kontinuierliche ALE-Verfahren* umgesetzt, womit Methoden mit einer kontinuierlichen Netzbewegung und glatten Übergängen zu Euler- bzw. Lagrange-Gebieten bezeichnet werden. Für spezielle Problemklassen bieten sich auch diskontinuierliche Ansätze an, die die komplexe Aufgabe der Bestimmung der Netzbewegung vereinfachen und deren teils beträchtliche Kosten verringern.

‘Diskontinuierliche Ansätze’ für spezielle Problemklassen

Solche Ansätze werden in Fällen angewendet, in denen zwar große Deformationen einzelner Komponenten auftreten, diese sich jedoch in relativ einfachen oder absehbaren und festen geometrischen Formen abspielen. Typische Anwendungsbereiche sind rotierende Bauteile in Turbinen, Helikopter-Rotoren oder sich rein translatorisch bewegende Körper, wie z.B. Fahrzeuge. Prinzipiell werden in diesen Ansätzen zwei oder mehrere sich relativ zueinander bewegende, oftmals in sich fixe Netze definiert, die dann bei der Simulation Daten an den jeweiligen

Netzgrenzen oder Überlappungsbereichen austauschen. Solche Verfahren wurden bereits in Kapitel 5.1.1 als ‘eingebettete Netze’ bezeichnet. Je nach ‘Kopplungsart’ der Netze, lassen sich zwei Klassen von Ansätzen unterscheiden:

- ‘Oberflächengekoppelte Netze’

Hier handelt es sich um nicht–überlappende Netze, die sich entlang ihrer Ränder relativ zueinander bewegen, wie beispielsweise konzentrische Zylinder bei Turbinenberechnungen. Ein elegantes Verfahren, das den Datentransfer an der Oberfläche sehr vereinfacht, ist das ‘Shear–slip mesh update’–Verfahren von Behr und Tezduyar (1998). Dabei wird bei der Relativbewegung die Element–‘connectivity’ der Elementreihen am Netzkopplungsrand mit der Bewegung aktualisiert.

- ‘Volumengekoppelte Netze’

In diesem Ansatz überlappen sich die einzelnen relativ zueinander bewegten Netze, und die Daten werden im Zuge der Simulation kontinuierlich in diesen Überlappungsbereichen ausgetauscht. Ein prominenter Vertreter dieser Klasse ist die ‘Overlapping–Embedded–Grid’–Technik oder auch Chimera–Technik. Stangl und Wagner (1992) wenden diese Technik erfolgreich zur Simulation der Rotorumströmung bei Helikoptern an. Dieser Ansatz bietet im Vergleich zu den oberflächengekoppelten Netzen den Vorteil der einfacheren Netzerzeugung. Die einzelnen Netze können dabei nicht nur als starr beweglich sondern im allgemeinen ALE–Sinne auch als verformbar gewählt werden (Hierholz und Wagner (1998)).

Aufgrund irreführender Angaben in einigen Literaturstellen soll darauf hingewiesen werden, daß es sich auch bei diesen Verfahren im kontinuumsmechanischen Sinne um ALE–Betrachtungen handeln muß. Damit ist eine ALE–Formulierung eine Voraussetzung für eine ‘saubere’ numerische Umsetzung dieser Verfahren.

6.2.1 Kontinuierliche Verfahren zur Netzbewegung

Die existierenden kontinuierlichen Verfahren für die Netzbewegung \mathbf{r} werden hier in zwei Gruppen eingeteilt: Die erste Gruppe verwenden a priori vorgeschriebene Funktionen und die zweite Gruppe benötigen üblicherweise die Lösung eines eigenen Gleichungssystems und sind meist allgemeiner.

A priori vorgeschriebene Funktionen zur Netzbewegung

In diesen Ansätzen werden explizit und a priori vorgegebene Funktionen auf unterschiedliche Art verwendet.

- **Heuristische Ansätze**

Hierbei handelt es sich um empirische Formeln, die für bestimmte Problemklassen entwickelt wurden und sich bewährt haben. Ein Beispiel für einen solchen Ansatz mit einer relativ komplexen Formel findet sich in Donea et al. (1982).

- **Einfache Interpolationen**

Hier wird zunächst jedem beweglichen ALE–Gebietsknoten n_{ALE} ein bestimmter Knoten am bewegten Rand n_{FS} und ein Knoten am festen Rand des ALE–Gebietes n_{AE} zugeordnet. Im

besten Fall sollten dafür die zu n_{ALE} naheliegendsten Knoten an den entsprechenden Rändern gewählt werden. Die Netzposition oder Netzgeschwindigkeit des Gebietsknotens folgt dann durch einen Produktansatz mit einer skalaren Funktion

$$\mathbf{r}(n_{ALE}) = \kappa(s) \mathbf{r}(n_{FS}) ; \quad \kappa \in [0, 1] \quad : \quad \kappa|_{\Gamma_{FS}} = 1 ; \quad \kappa|_{\Gamma_{AE}} = 0 \quad (6.19)$$

s beschreibt dabei den Abstand des Knotens n_{ALE} von n_{FS} in Richtung n_{AE} . Die skalare Funktion $\kappa(s)$ muß am unbeweglichen Rand des Fluid-Gebietes oder am festen Rand des ALE-Gebietes Γ_{AE} (Gleichung (6.18)) den Wert 0 einnehmen und am bewegten Rand Γ_{FS} den Wert 1. Dazwischen kann eine lineare Interpolation

$$\kappa(s) = 1 - s \quad \text{mit} \quad s = \frac{\overline{n_{ALE}n_{FS}}}{n_{AE}n_{FS}} \quad (6.20)$$

erfolgen. Für geometrisch einfache Problemstellungen wurden solche Ansätze auch hier verwendet und haben sich dabei bewährt.

- **Allgemeine Interpolationen**

Eine interessante Erweiterung dieses Ansatzes mit einfachen Interpolationsfunktionen für allgemeinere Geometrien bewegter Festkörper findet sich in Kjellgren und Hyvärinen (1998). Darin wird erstens eine verbesserte Interpolationsfunktion vorgeschlagen, bei der die Ableitung der Interpolationsfunktion nach s an den Rändern Null wird.

$$\kappa(s) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad s \leq \delta \\ \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{(s-\delta)\pi}{s_{\max} - \delta} \right) \right) & \text{für} \quad \delta < s < s_{\max} \\ 0 & \text{für} \quad s \geq s_{\max} \end{cases} \quad (6.21)$$

Diese Bedingung sorgt für einen möglichst glatten Übergang an den Rändern des bewegten Netzes. s_{\max} stellt dabei entweder einen konstanten, vom Benutzer vorgegebenen Wert dar oder entspricht dem Abstand $\overline{n_{AE}n_{FS}}$ zwischen den zu n_{ALE} gehörigen Randknoten. Bei großen Randbewegungen wird empfohlen, die Wahl der zu n_{ALE} naheliegendsten Randknoten n_{AE} und besonders n_{FS} im Zuge der Simulation zu aktualisieren. Schließlich wird zur Verbesserung der Netzqualität noch eine Glättungsprozedur vorgeschlagen. Darin wird der ermittelte $\kappa(s)$ -Wert an einem Knoten durch den Mittelwert der $\kappa(s)$ -Werte sämtlicher Nachbarknoten ersetzt. Diese Maßnahme empfiehlt sich vor allem bei bewegten Körpern mit scharfen Ecken. Beispiele für die positiven Auswirkungen dieser Zusatzmaßnahmen finden sich in Kjellgren und Hyvärinen (1998).

Obwohl der Ansatz für die Netzbewegung nach Kjellgren und Hyvärinen (1998) mit a priori oder explizit vorgeschriebenen Funktionen arbeitet, eignet er sich bereits relativ gut auch für allgemeine Fälle. Im Vergleich zu den folgenden Ansätzen kann in diesem Interpolationsansatz auf die Lösung eines eigenen Gleichungssystems zur CMD verzichtet werden. Allerdings bedeutet auch die Punktsuche zur Aktualisierung der nächstgelegenen Randpunkte einen gewissen Rechenaufwand. Die empfohlenen Glättungsschritte können als erste Schritte einer iterativen Gleichungslösung betrachtet werden.

Eine weitere Möglichkeit mit explizit vorgeschriebenen Funktionen wird von Le Tallec und Mouro (1999) eingesetzt. Darin wird für die Interpolationsfunktion $\kappa(s)$ in Gleichung (6.19)

eine Approximation der Greenschen Funktion des Laplace-Operators verwendet, die zu n_{ALE} gehört

‘Allgemeine’ Verfahren

Wie der Name bereits andeuten soll sind die folgenden Verfahren allgemein einsetzbar. Diese Eigenschaft muß jedoch durch einen entsprechenden Rechenaufwand, der im Normalfall die Lösung eines Gleichungssystems beinhaltet, erkauft werden. Eine intelligente Anwendung bzw. Erweiterung dieser Verfahren kann aber die Rechenzeiten beträchtlich reduzieren und eine Lösung eines Gleichungssystems auf wenige Rechenschritte reduzieren.

- **Netzglättungsverfahren**

Einen brauchbaren Ansatz zur Bestimmung der Netzbewegung stellen sogenannte Netzglätter dar. Diese basieren auf unterschiedlichen theoretischen Ansätzen und sind in vielen FE-Programmen bereits als Teil der Freivernetzer vorhanden. Ein prominenter Glättungsansatz basiert auf der Lösung des Laplace-Operators auf dem Netzgebiet. Löhner, Yang (1996) verwenden einen solchen Laplace-Glätter zur Bestimmung der Netzgeschwindigkeiten. Als Besonderheit wird in jener Arbeit zusätzlich eine veränderliche Diffusivität eingeführt, die vom Abstand des betrachteten Knotens vom beweglichen Rand abhängt. Eine Art Netzglättung stellt auch das bereits angeführte Verfahren dar, die Greensche Funktion des Laplace-Operators zu verwenden.

- **Pseudo-Struktur-Ansätze**

Ein sehr leistungsfähiger und für komplexere Anwendungen populärer Ansatz basiert auf der Betrachtung des beweglichen Netzes als eine Pseudo-Struktur. Am beweglichen Rand werden auf diese Struktur die Randverschiebungen bzw. -geschwindigkeiten als Dirichletrandbedingungen aufgebracht, und die ‘Strukturdeformation’ beschreibt die gesuchte Netzbewegung im Gebiet. Batina (1991) hat einen derartigen Ansatz im Sinne eines *diskreten Pseudo-Struktur-Ansatzes* vorgeschlagen. Dazu werden sämtliche Kanten der Dreiecks- oder Tetraederelemente durch lineare Federn ersetzt. Zur Wahl der Federsteifigkeit schlägt Batina (1991) die inverse Kanten- bzw. Federlänge vor. Während bei Dreiecks- oder Tetraederelementen Kantenfedern ausreichen, sollten für viereckige oder Hexaederelemente auch Diagonalfedern eingebaut werden, um irreguläre Elemente besser vermeiden zu können. Ein Nachteil des reinen, linearen Federmodells ist, daß sich die Federsteifigkeit nur auf die Kantenlänge und nicht auf die Fläche des Elements oder die Kantenwinkel bezieht. Elemente, deren Bewegung zur Irregularität führt, werden somit nicht erkannt. Um solche überlappende Elemente zu vermeiden, schlagen Farhat et al. (1998a) für 2D-Fälle mit Dreiecken die Ergänzung dieses Federmodells um Torsionsfedern an den einzelnen Knoten vor.

Der allgemeine Fall eines diskreten Pseudo-Struktur-Ansatzes folgt, indem die fiktiven Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen auf die Knoten bzw. Kanten des Netzes konzentriert (‘lumped’) werden. Die Netzbewegung folgt dann aus der Lösung der dynamischen Gleichung

$$M\ddot{r} + C\dot{r} + Kr = F \quad (6.22)$$

Alternativ können für Pseudo-Struktur-Ansätze als CMD-Löser kontinuierliche Modelle verwendet werden.

6.2.2 Kontinuierlicher, quasi-elastostatischer Pseudo-Struktur-Ansatz

Die Alternative eines *kontinuierlichen Pseudo-Struktur-Ansatzes* setzt auf die Lösung des kontinuierlichen Scheiben- (für 2D) bzw. Kontinuumsmodells (3D). Der Vorteil der kontinuierlichen Modelle liegt in der besseren Möglichkeit, irreguläre Dreiecks- und Viereckselemente bei der Netzbewegung zu vermeiden. Ein Beispiel für eine Variante eines solchen Ansatzes findet sich in Johnson und Tezduyar (1994). Da in der vorliegenden Arbeit, abgesehen von geometrisch sehr einfachen Problemstellungen auf kontinuierliche Pseudo-Struktur-Ansätze zurückgegriffen wurde, soll dieser Ansatz im Folgenden ausführlicher diskutiert werden. Das eingesetzte Verfahren setzt aber im Gegensatz zur Formulierung in Gleichung (6.22) auf die Lösung eines *elastostatischen* Problems (Wall und Ramm (1998)). Da eine solche statische Lösung in jedem Zeitschritt der Integration des gekoppelten Problems erfolgt, wird die Bezeichnung *quasi-elastostatisch* verwendet. Die Quasi-Elastostatik wird im Vergleich zur Dynamik bevorzugt, um mögliche Probleme zu vermeiden, die die Simulation stören könnten. Beispielsweise können Eigenfrequenzen des Netzes angesprochen werden und zu einem unerwünschten Oszillieren der Netzknoten im Gebiet führen.

Der kontinuierliche, quasi-elastostatische Pseudo-Struktur-Ansatz beruht auf der Lösung der elastischen Gleichgewichtsbedingung mit reinen Dirichlet-Randbedingungen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{in } \Omega_{ALE}; \quad \text{mit } \mathbf{r} = \bar{\mathbf{r}} \quad \text{auf } \Gamma_{ALE} (= \Gamma_{AE} \cup \Gamma_{FS}) \quad (6.23)$$

wobei sich der Verzerrungs- und der Spannungstensor mit den Lamé-Konstanten (Gleichung (2.64)) entsprechend

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{r} + (\nabla \mathbf{r})^T); \quad \boldsymbol{\sigma} = \lambda^M(\text{tr} \boldsymbol{\epsilon})\mathbf{I} + 2\mu^M \boldsymbol{\epsilon} \quad (6.24)$$

definieren. Mit ein Grund, warum sich die Lösung einer Serie von elastostatischen Problemen gut als Grundlage zur Bestimmung der Netzdeformation eignet, liegt in den Eigenschaften des zu Grunde liegenden Operators. Wie auch bei manchen Netzglättungsverfahren, z.B. den Laplace-Glättern, handelt es sich hier um Lösungen elliptischer Operatoren, die bekanntermaßen zu glatten Verläufen neigen.

Auch die Lösung der in Gleichung (6.23) formulierten Problemstellung wird mit der Methode der Finiten Elemente erfolgen. Nach dem üblichen Prozedere folgt dabei als zu lösendes Gleichungssystem

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{F} \quad (6.25)$$

Die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} resultiert aus den assemblierten Elementsteifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{k}^{el} = \int_{\Omega^{el}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} J \, d\xi d\eta \quad (6.26)$$

J stellt die Determinante der Jacobi-Matrix als Abbildung zwischen lokalem Element-Koordinatensystem $\{\xi, \eta\}$ und räumlichem Koordinatensystem dar. \mathbf{B} bezeichnet die entsprechend angeordneten Ableitungen der Formfunktionen (B-Operatoren) und \mathbf{C} den Werkstofftensor. Der umgesetzten Formulierung liegt ein linear elastisches Hookesches Materialgesetz und ein ebener Spannungszustand zu Grunde. In den numerischen Beispielen in Kapitel 7.5 wurde

dazu meist eine Querdehnzahl $\nu^M = 0.0$ verwendet, die sich auch in Johnson und Tezduyar (1994) als vorteilhaft herausgestellt hat.

Der Lastvektor in Gleichung (6.25) stammt nur rein aus den aufgetragenen Dirichlet-Randbedingungen auf die Pseudo-Struktur ALE-Netz. Der Lastvektor ermittelt sich damit als Summation über sämtliche zu den Dirichlet-Freiheitsgraden gehörenden Steifigkeitsanteile, multipliziert mit den vorgeschriebenen Verschiebungswerten.

$$F_i = \sum_{j=1}^{NDOF} K_{ij} \bar{r}_j \quad (6.27)$$

6.2.3 Zusatzmaßnahmen

Im Folgenden sollen noch einige mögliche, teils auch erforderliche, Zusatzmaßnahmen angeführt werden, die entweder den Anwendungsbereich des beschriebenen CMD-Verfahrens erweitern, die entstehenden Kosten reduzieren oder die erzielbare Netzqualität noch weiter verbessern. Zur besseren Gliederung sind den einzelnen Maßnahmen kurze Schlagworte zugeordnet.

- ‘Beschränkung des ALE-Gebietes’

Ein wesentliches Maß für den Aufwand für jeden CMD-Löser bildet die Größe des ALE-Gebietes. Eine ganz natürliche Methode zur Reduzierung der CMD-Rechenkosten stellt somit eine Beschränkung des ALE-Gebietes auf nur einen Teil des Fluidgebietes dar, d.h. $\Omega_{ALE} \subset \Omega_{F(luid)}$ (Nomura und Hughes (1992), Maruoka et al. (1994)). Neben der Ersparnis im CMD-Löser selbst, bringt diese Maßnahme noch einen weiteren entscheidenden Rechenzeitvorteil mit sich, da der entwickelte CFD-Löser im Euler-Fall ‘billiger’ ist als im ALE-Fall. Eine solche einfache Beschränkung des ALE-Gebietes ist in Bild 6.2 schematisch dargestellt und wurde bereits in Bild 6.1 und Gleichung (6.18) angedeutet.

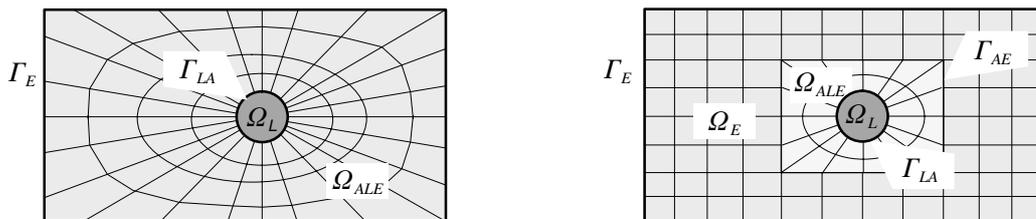


Bild 6.2: Beschränkung des ALE-Gebietes

- ‘CMD-Löserkosten’

Der Großteil der Rechenkosten in den Pseudo-Struktur-Ansätzen wird zur Lösung des Gleichungssystems verbraucht. Hier bieten sich einige Maßnahmen an, die diesen Aufwand drastisch reduzieren können. So wurde beispielsweise in den durchgeführten Simulationen die undeformierte Netzlage über einen möglichst langen Simulationszeitraum beibehalten. Dies hat bei Verwendung eines direkten Gleichungslösers den großen Vorteil, daß die Steifigkeitsmatrix nur einmal aufgestellt und vor allem auch nur einmal faktorisiert werden muß. In sämtlichen weiteren Schritten ist nur noch ein Rückwärtseinsetzen der neuen rechten Seite erforderlich, was eine Operation mit dem geringstmöglichen Aufwand $o(N)$ darstellt. Bei Verwendung iterativer Gleichungslöser läßt sich eine Rechenzeitersparnis durch Reduzierung der Iterations-

schritte oder eine hohe Toleranz in der Iteration erreichen. Dies ist möglich, da nicht die wirkliche Lösung der elastostatischen Aufgabe interessiert, sondern einzig ein glattes deformiertes Netz ermittelt werden muß. In diesem Zusammenhang wirkt sich die bekannte Eigenschaft iterativer Löser äußerst positiv aus, daß hochfrequente Fehleranteile sehr schnell eliminiert werden und damit in wenigen Iterationsschritten eine glatte Lösung erreicht wird.

- ‘Kleine Elemente’

Es ist erstrebenswert, das Netz vor allem in den fein diskretisierten Bereichen in einem möglichst guten Zustand zu erhalten. Eine einfache Möglichkeit von Johnson und Tezduyar (1994), die zusätzlich das gesamte Verfahren noch verbilligt, ist die Vernachlässigung der Jacobi-Determinante in Gleichung (6.26) bei der Integration der Elementsteifigkeitsmatrix, d.h.

$$\mathbf{k}^{el} = \int_{\Omega^{el}} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, d\xi d\eta \quad (6.28)$$

Durch diese Maßnahme erhalten kleinere Elemente automatisch eine relativ höhere Steifigkeit.

- ‘Lokale Netzcharakteristika’

Ein weiteres Qualitätsmerkmal für einen guten CMD-Löser bei Navier-Stokes-Gleichungen im Vergleich zu den Euler-Strömungen ist die angestrebte Erhaltung des höher auflösenden Randschichtnetzes. Bereits die Maßnahme zum Erhalt kleiner Elemente stellt einen Beitrag hierzu dar. Für Randschichten läßt sich noch eine weitere effektive Maßnahme verwirklichen. Dabei werden die ersten Elementreihen der Randschicht als ‘starr’ betrachtet und fix mit dem Rand mitbewegt; erst anschließend folgt der kontinuierliche Übergang. Diese Maßnahme entspricht der Wirkungsweise des eingeführten δ -Wertes im allgemeinen Interpolationsverfahren in Gleichung (6.21).

- ‘Numerische Integration’

Wie bereits erwähnt ist die ‘richtige’ Lösung der elastostatischen Aufgabe nicht entscheidend. Es können somit auch bei der Ermittlung der Elementsteifigkeitsmatrizen Einsparungen erzielt werden. Beispielsweise kann eine Unterintegration (1-Punkt-Quadratur bei Q1-Elementen, mit einer einfachen ‘Hourglass’-Stabilisierung) verwendet werden.

- ‘Konvektionsverringering’

Eine weitere Zusatzmaßnahme zielt nicht auf die Qualität des CMD-Lösers selbst ab, sondern kann eine Erleichterung für den CFD-Löser darstellen. Dabei werden der rechten Seite in Gleichung (6.25) die skalierten aktuellen Strömungsgeschwindigkeiten zugeschlagen.

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + c \mathbf{u} \quad (6.29)$$

Damit können die konvektiven Anteile der Strömung verringert werden, da das Referenzgebiet versucht sich mit der Strömung mitzubewegen; die ALE-Formulierung tendiert also mehr in Richtung Lagrange.

Je nach spezifischer Aufgabenstellung werden unterschiedliche Kombinationen einiger der Zusatzmaßnahmen in den Beispielrechnungen in Kapitel 5.3 und 7.5 angewendet.

‘Remeshing’

Für komplexe Aufgabenstellungen mit großen Deformationen wird es nicht möglich sein, Netzbewegungsverfahren zu entwickeln, die nur ein einziges Netz während der gesamten Simula-

tion verwenden. Im Regelfall sind während einer längeren Simulation ‘Remeshing’-Schritte einzubauen. Dabei wird das Gebiet neu vernetzt, die erforderlichen Daten werden vom alten auf das neue Netz übertragen und die Simulation fortgesetzt. Hierbei kommt dem Datentransfer zwischen altem und neuem Netz eine entscheidende Bedeutung zu, da der dabei unvermeidliche Fehler so klein wie möglich gehalten werden soll. Ein interessanter Ansatz zum Datentransfer bei Strömungsberechnungen findet sich in Radovitzky und Ortiz (1998). Ähnliche Fragestellungen des Transfers von bestimmten Größen zwischen unterschiedlichen Netzen werden auch in Kapitel 7.2.2 bei dem Datentransfer am Interface des gekoppelten Problems aufgegriffen.

Untersuchungen zu Kriterien als Entscheidungsgrundlage zu einer Neuvernetzung, zur Anpassung des verwendeten Freivernetzers und zum eigentlichen Datentransfer wurden für strukturelle Aufgabenstellungen in Gee (1999) durchgeführt.

6.3 ‘Computational Fluid Dynamics’

Das dritte Feld im vorliegenden Mehrfeldproblem stellt das Strömungsfeld dar. Dieses Einzel-
feld stand bereits im Mittelpunkt der bisherigen Ausführungen. Es wird das in Kapitel 3 vorge-
stellte räumliche Diskretisierungsverfahren zusammen mit den Zeitdiskretisierungsverfahren
und nichtlinearen Iterationsverfahren aus Kapitel 4 angewendet. Es wird auf zeitveränderliche
Gebiete nach Kapitel 5 erweitert. Ein möglicher Algorithmus kann Kapitel 5.2 entnommen
werden.

7 Fluid–Struktur–Interaktion

Das letzte thematische Hauptkapitel dieser Arbeit behandelt die angestrebte Lösung der gekoppelten Mehrfeld–Problemstellung der Fluid–Struktur–Interaktion. Die Einleitung von Kapitel 6 zeigte bereits, daß dieses aus physikalischer Sicht *gekoppelte Zweifeld–Problem* numerisch als ein *gekoppeltes Dreifeld–Problem* behandelt wird. In einem einführenden Abschnitt werden mögliche Lösungsverfahren für Fluid–Struktur–Interaktionsprobleme diskutiert und die Einfeldverfahren nochmals zusammenfassend dargestellt. Bevor die entwickelten und angewandten *partitionierten Lösungsverfahren* ausführlicher diskutiert werden, wird die *Interaktion* bzw. *Kopplung* der Einzelfelder und Einzelfeldverfahren besprochen. Schließlich wird der entwickelte Löser für das gekoppelte Dreifeld–Problem Fluid–Struktur–Interaktion angegeben und seine Leistungsfähigkeit anhand einer Reihe von numerischen Beispielen demonstriert.

7.1 Einführung

7.1.1 Lösungsverfahren für Mehrfeldprobleme

Abgesehen von einigen Sonderverfahren sollen nun die Möglichkeiten von Lösungsverfahren für Mehrfeldprobleme erläutert und diskutiert werden.

Klassifizierung existierender Verfahren

In der Literatur werden die folgenden Ansätze zur Analyse gekoppelter Feld–Probleme unterschieden (Felippa und Park (1980), Lübbing (1997)):

- Simultane Lösung der Felder (‘simultaneous solution’)
- Partitionierte Lösung (‘partitioned solution’)
- Gestaffelte Lösung (‘staggered solution’)
- Feld–Elimination (‘field elimination’)

In der vorliegenden Arbeit wird diese Einteilung jedoch nicht vollständig übernommen und stattdessen versucht, eine konsistentere Klassifizierung vorzunehmen. Dazu werden zunächst die beiden Gruppen der partitionierten und der gestaffelten Verfahren zu einer Gruppe unter der Bezeichnung *partitionierte Verfahren* zusammengefaßt. Die Unterscheidung dieser beiden Gruppen geht in der Literatur mit der Frage einher, ob die Einzelfelder sequentiell oder parallel zueinander bearbeitet werden. Im Lichte neu entwickelter Lösungsverfahren für gekoppelte Probleme ist diese Trennung nicht mehr sinnvoll. Dadurch sind die drei Gruppen (Bild 7.1) auch eindeutig unterscheidbar. In einer symbolischen Schreibweise in Bild 7.1 bedeuten \mathbf{x} , \mathbf{y} die Feldvariablen, \mathcal{L} , \mathcal{D} die Differentialoperatoren und \mathbf{F} die jeweiligen rechten Seiten der getrennten Felder. Die getroffene Einteilung soll eine eindeutige Klassifizierung gekoppelter Lösungsverfahren zulassen.

- **Simultane Verfahren**

Bei simultanen Verfahren wird das Gesamtproblem mit sämtlichen physikalischen und algorithmischen (‘computational’) Feldern in einem simultanen bzw. monolithischen Ansatz formuliert

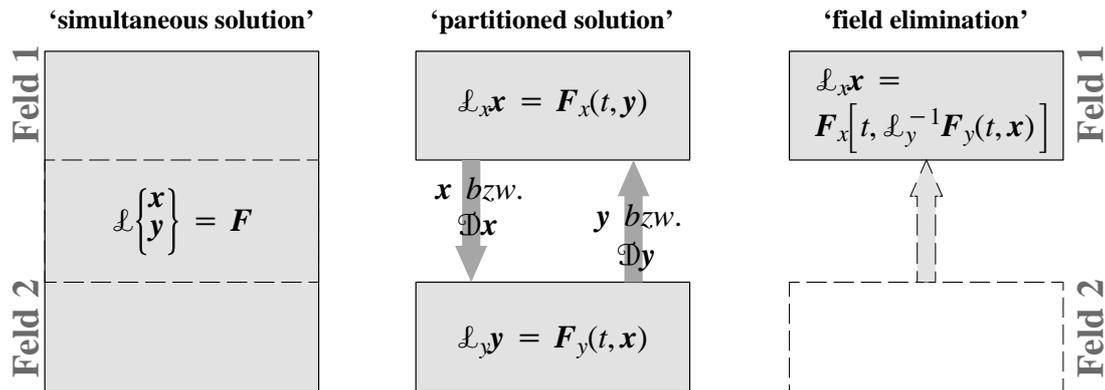


Bild 7.1: Lösungsansätze für gekoppelte Probleme

und dann gelöst. In dieser Formulierung werden stets sämtliche Abhängigkeiten über alle Kopplungsterme zwischen den Feldern berücksichtigt.

• Partitionierte Verfahren

Unter partitionierten Verfahren werden Ansätze verstanden, die auf einer getrennten numerischen Behandlung der einzelnen Felder als isolierte Einheiten beruhen. Interaktionseffekte werden über Lastgrößen berücksichtigt, die zwischen den einzelnen Komponenten übergeben werden. Für diese Kommunikation zwischen den Komponenten werden Vorhersage- (Prädiktor-), Substituierungs- und Synchronisationstechniken eingesetzt. Eine Übersicht über weitere Kommunikationstechniken und Werkzeuge bei partitionierten Verfahren wird in Felippa et al. (1998) gegeben. Zur Klärung der Terminologie wird unter einer *Partition* eine Zerlegung der *räumlichen* Diskretisierung verstanden — im Gegensatz zur Zerlegung der *zeitlichen* Diskretisierung, die in diesem Zusammenhang als *'splitting'* bezeichnet wird (Felippa et al. (1998)).

• Feld-Elimination

Bei diesem Ansatz werden die Feldgrößen eines Feldes eliminiert und in die Gleichungen des anderen Feldes eingesetzt, die dann gelöst werden. Da dieser Ansatz allerdings auf relativ einfache, lineare Problemstellungen beschränkt ist, soll er für die vorliegende komplexe, instationäre Aufgabenstellung nicht vertieft werden. Auch Park und Felippa (1983) kommen bei der Beurteilung dieses Ansatzes für komplexere Probleme zum Schluß, die Feld-Elimination 'can be properly characterized as a poor strategy that eventually leads to a computational horror show for more general problems'.

Vor- und Nachteile simultaner bzw. partitionierter Verfahren

Bei einem Vergleich zwischen den simultanen und den partitionierten Verfahren werden die großen Vorteile partitionierter Verfahren deutlich. Die meisten dieser Vorteile zeigen sich umso stärker, je komplexer die Problemstellungen werden.

- *Modularität*: Bereits die grundsätzliche Idee entspricht einem modularen Aufbau eines Algorithmus. Dadurch können nicht nur ausgereifte und getestete Einzelfeldverfahren verwendet werden, sondern sie können auch einfacher modifiziert oder ausgetauscht werden.
- *Diskretisierungen*: Sowohl für die räumlichen als auch für die zeitlichen Diskretisierungen können die speziellen Erfordernisse der Einzelfelder berücksichtigt werden. Dadurch können

die stark unterschiedlichen dynamischen Charakteristika der Einzelfelder berücksichtigt werden. Auch die räumliche Diskretisierung und die gesamte Modellbildung kann unabhängig voneinander, auch von unterschiedlichen Arbeitsgruppen, durchgeführt werden.

- *Lösungsverfahren:* Es können spezielle, dem Einzelfeld–Problem angepaßte und bewährte Lösungsverfahren eingesetzt werden.
- *Problemgröße:* Durch ein Aufsplitten in Partitionen reduziert sich die Größe des zu lösenden Gesamtsystems und damit unter Umständen der Lösungsaufwand.
- *Kondition der Gesamtmatrix:* Die Koeffizienten der Systemgleichungen der einzelnen Felder können sehr unterschiedlich sein. Durch die Aufspaltung in die Einzelprobleme führen diese teils um Größenordnungen unterschiedlichen ‘Steifigkeitseinträge’ zu keinem extrem schlecht konditionierten Gesamtproblem.

Auf Grund dieser Vorteile ist hier eine Entscheidung zur ausschließlichen Verwendung partitionierter Lösungsverfahren getroffen worden. Partitionierte Verfahren zeigen allerdings auch Nachteile im Vergleich zu simultanen Ansätzen. Diese betreffen die Frage nach der Stabilität und Genauigkeit des Gesamtverfahrens. So sind bestimmte partitionierte Verfahren nur bedingt stabil, auch wenn für jedes einzelne Feldproblem ein unbedingt stabiles Zeitintegrationsverfahren verwendet wird. Daraus wird ersichtlich, daß man die Vorteile der partitionierten Verfahren nicht umsonst erhält. Um schwerwiegende Verluste für Stabilität und Genauigkeit dieser partitionierten Integrationsansätze zu vermeiden, erfordern sie eine sorgfältige Formulierung und Implementierung (Abschnitt 7.3).

Bemerkung: In der Literatur findet sich eine weitere Gruppe möglicher Lösungsverfahren für gekoppelte Probleme, die als Prädiktor–Multikorrekter–Verfahren bezeichnet werden. Verfahren mit derselben Bezeichnung sind zur Lösung von strukturdynamischen oder strömungsdynamischen Gleichungen, also allgemein von nichtlinearen Problemstellungen oder ‘Operator–split’–Ansätzen, bekannt (Hughes (1987b), Brooks und Hughes (1982), Shakib (1988)). Die Vorgehensweise bei der Lösung von gekoppelten Problemstellungen entspricht dabei demselben Prinzip und kann in der üblichen Variante als spezielle Umsetzung eines simultanen Verfahrens interpretiert werden. Ansätze für Fluid–Struktur–Interaktions–Problemstellungen finden sich in Liu und Gvildys (1986), Huerta und Liu (1988a) und Nomura und Hughes (1992).

Partitionierte Verfahren

Im Folgenden sollen die unterschiedlichen Realisierungsmöglichkeiten der partitionierten Lösungsverfahren zur Integration von Mehrfeldproblemen dargestellt werden. Die Verfahren für Fluid–Struktur–Interaktions–Probleme werden ausführlich in Kapitel 7.3 besprochen. Einige der ersten Arbeiten zu partitionierten Ansätzen für gekoppelte Problemstellungen stammen von Park et al. (1977), Felippa und Park (1980) und Park und Felippa (1983). Ein Überblick über prinzipielle Ideen, Ansätze und unterschiedliche Einsatzgebiete partitionierter Analyseverfahren wird in Felippa et al. (1998) gegeben.

Die angeführte Definition von partitionierten Verfahren läßt einen großen Spielraum für die Entwicklung unterschiedlicher Ansätze. Sie lassen sich in die beiden Gruppen

- stark gekoppelte, partitionierte Verfahren

- schwach gekoppelte, partitionierte Verfahren

einteilen. Auf die sorgfältige Unterscheidung der Bezeichnungen ‘stark gekoppeltes Verfahren’ und ‘stark gekoppeltes Problem’ sei hingewiesen. Die Bezeichnung ‘stark gekoppelt’ bezieht sich auf völlig unterschiedliche Kriterien. Ein gewisser Zusammenhang ist dadurch gegeben, daß ein stark gekoppeltes Problem auch nach einem stark gekoppelten Verfahren, wenn nicht sogar nach einem simultanen Verfahren, verlangt.

- **Schwach gekoppelte, partitionierte Verfahren (‘one way staggered’)**

Diese Verfahren entsprechen den klassischen gestaffelten Ansätzen. Dabei werden die einzelnen Partitionen getrennt voneinander und meist sequentiell gelöst. Nach jeder erfolgten Einzel-feldlösung werden die Kopplungsinformationen an das andere Feld übergeben, das mit diesen Informationen in der Zeit voranschreitet (Bild 7.2). Dies bedeutet aber auch, daß die jeweiligen

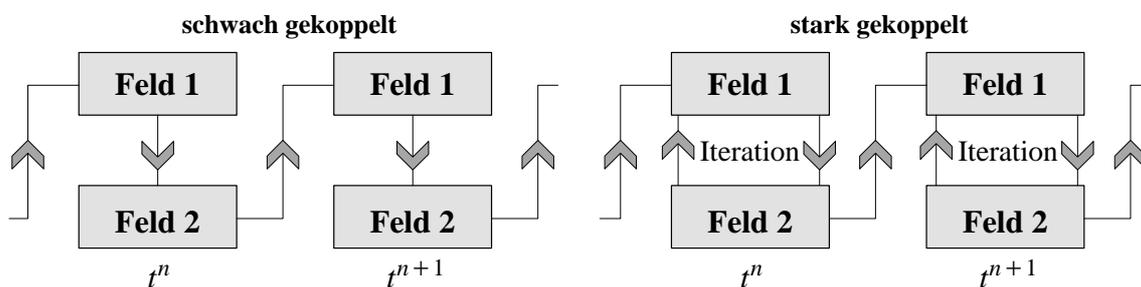


Bild 7.2: Schwach bzw. stark gekoppelte, partitionierte Verfahren

Kopplungsbedingungen zu einem bestimmten Zeitpunkt nicht exakt erfüllt werden.

- **Stark gekoppelte, partitionierte Verfahren (‘iterative staggered’)**

Die stark gekoppelten partitionierten Verfahren zeichnen sich dadurch aus, daß am Ende eines Zeitschrittes sämtliche Kopplungsbedingungen zwischen den Feldern erfüllt sind und sich das Gesamtsystem in der Gleichgewichtslage befindet. Dies wird bei einem partitionierten Ansatz durch eine Iteration über die Felder erreicht (Bild 7.2). Die ausiterierte Lage, so sie erreicht wird, entspricht der Lösung eines simultanen Verfahrens. Bei nichtlinearen Problemen lassen sich auch Ansätze vorstellen, in denen die Toleranzschranke für die nichtlinearen Iterationen innerhalb der einzelnen Felder erst sukzessive während der Iteration über die Felder gesteigert wird.

Bei volumengekoppelten Mehrfeldproblemen werden diese beiden Gruppen der schwach bzw. stark gekoppelten Verfahren gelegentlich auch als ‘one way staggered schemes’ und als ‘iterative staggered schemes’ bezeichnet (Lübbing (1997)). Auch mit diesen Bezeichnungen ist eine eindeutige Unterscheidung möglich.

Für den Fall, daß für eine gegebene Problemstellung ein stabiles, einfach gestaffeltes Verfahren zur Verfügung steht, richtet sich die Entscheidung für ein Verfahren nach dem Verhältnis der erzielbaren Genauigkeit zum Rechenaufwand. Die Fragen sind also, um wieviel der Zeitschritt beim schwach gekoppelten Verfahren kleiner sein muß oder wieviele Iterationen über die Felder ein stark gekoppelter partitionierter Ansatz pro Zeitschritt benötigt. Werden keine Spezialmaßnahmen eingesetzt, kann diese Iterationsanzahl über die Felder sehr hoch sein, weshalb oftmals die einfacheren schwach gekoppelten Verfahren vorgezogen werden.

Bemerkung: Die erwähnten Vorteile partitionierter Verfahren motivieren die Verwendung solcher Ansätze nicht nur für Mehrfeldprobleme, sondern auch für physikalische Einfeld-Pro-

bleme, in denen unterschiedliche Teilbereiche stark unterschiedliche dynamische Charakteristika aufweisen (Mok et al. (1999b)).

7.1.2 Zusammenfassung der Einzelfelder bzw. Einfeld-Verfahren

Bevor auf die eigentliche Interaktion im Detail eingegangen wird, soll das Gesamtsystem des Fluid-Struktur-Interaktions-Problems zusammenfassend gezeigt werden. Dies geschieht nach einer Idee von Le Tallec und Mouro (1999), deren Darstellung besonders dadurch erleichtert wird, daß hier dem gesamten Mehrfeldproblem ein einheitliches Diskretisierungskonzept zu Grunde liegt, nämlich die Methode der Finiten Elemente. Der Vorteil dieser allgemeinen und mathematisch reizvollen Darstellung liegt darin, daß das Gesamtproblem einer mathematischen Analyse besser zugänglich wird (Le Tallec und Mouro (1999), Le Tallec und Mani (1999)).

Dazu werden die grundlegenden Erhaltungsgleichungen, Masse- und Impulsbilanz, für das Gesamtproblem in der Ausgangskonfiguration bzw. dem Materialgebiet formuliert.

$$\int_{\Omega_z} \left[\frac{\partial \rho^0}{\partial t} \Big|_z + \nabla \cdot (\rho^0 (\mathbf{u} - \mathbf{u}^G) \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right] \hat{q} \, d\Omega_z = 0, \quad \forall \hat{q} \in \mathcal{Q} \quad (7.1)$$

$$\int_{\Omega_z} \left[\frac{\partial \rho^0 \mathbf{u}}{\partial t} \Big|_z + \nabla \cdot (\rho^0 \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}^G) \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right] \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega_z + \int_{\Omega_z} [\mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}] : \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{z}} \, d\Omega_z = \quad (7.2)$$

$$\int_{\Omega_y(t)} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega_y + \int_{\Gamma_y(t)} \mathbf{h} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma_y = 0, \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}$$

Die Verwendung des Materialgebietes Ω_z auf den linken Seiten dient nur der Vermeidung zeitabhängiger Integrale. Die Bezeichnungen entsprechen den in Kapitel 2 eingeführten Notationen. Werden in die Gleichungen (7.1) und (7.2) die konstitutiven Gleichungen eingeführt, folgt daraus die Spezifikation auf das zu behandelnde Fluid-Struktur-Interaktions-Problem. Durch diese Formulierung der schwachen Form folgt die Kontinuität der Kräfte am Interface als Konsequenz der globalen Erhaltungsgleichungen und muß nicht extra behandelt werden. Ein Aufspalten der 'globalen' Räume der Testfunktionen

$$\mathcal{Q} = \{ \hat{q} : \Omega_z \rightarrow \mathbb{R}, \hat{q} \in L^2(\Omega_z) \}, \quad \mathcal{V} = \{ \hat{\mathbf{u}} : \Omega_z \rightarrow \mathbb{R}^3, \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_z) \} \quad (7.3)$$

in lokale Unterräume führt zu Testfunktionenräumen $\mathcal{V}_F, \mathcal{Q}_F$, die nur auf dem Fluidgebiet wirken, und zu Testfunktionenräumen $\mathcal{V}_S, \mathcal{Q}_S$, die sich auf das Strukturgebiet beschränken.

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^S \oplus \mathcal{Q}^F, \quad \mathcal{V} = \mathcal{V}^S \oplus \mathcal{V}^F \quad (7.4)$$

Diese Aufspaltung führt dann gewissermaßen automatisch zur erwünschten Partitionierung des Problems. Dabei bleibt noch die Frage offen, wie diese Räume am Interface gestaltet sind. Hierbei bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. Eine davon lautet

$$\mathcal{Q}^F = \left\{ \hat{q} \in L^2(\Omega_z), \hat{q}|_{\Omega_0^S} = 0 \right\}, \quad \mathcal{V}^F = \left\{ \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_z), \hat{\mathbf{u}}|_{\Omega_0^S} = 0 \right\} \quad (7.5)$$

$$\mathcal{Q}^S = \left\{ \hat{q} \in L^2(\Omega_z), \hat{q}|_{\Omega_0^F} = 0 \right\}, \quad \mathcal{V}^S = \left\{ \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{H}^1(\Omega_z), \hat{\mathbf{u}}|_{\Omega_0^F} = \text{Tr}^{-1}(\hat{\mathbf{u}}|_{\Gamma_z}) \right\} \quad (7.6)$$

Darin bezeichnet $Tr^{-1}(\cdot)$ einen sogenannten ‘inversen Spur–Operator’ (Le Tallec und Mouro (1999)), der dafür zu sorgen hat, die nicht verschwindenden Struktur–Testfunktionen in das Fluidgebiet zu ‘verteilen’, $Tr^{-1} : \mathcal{V}(\Gamma_2) \rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega_2^F)$. Diese Festlegungen der Testfunktionen am Interface schreiben eine kinematische Kontinuität (Dirichlet–RB) für das Fluid und eine ‘Kraft–Kontinuität’ (Neumann–RB) für die Struktur vor. Dadurch wird die Kopplung also im Sinne einer Dirichlet–Neumann–Partitionierung realisiert. Dies stellt die übliche, und auch hier verwendete Variante dar, ist aber offensichtlich nicht die einzige.

Die Formulierungen für die einzelnen Partitionen werden nun in jene Gebiete bzw. Konfigurationen transformiert, in denen sie am günstigsten zu lösen sind. Wie aus den bisherigen Ausführungen ersichtlich ist, wird das Strukturfeld im Materialgebiet belassen und das Fluidfeld in das räumliche Gebiet abgebildet. Daraus folgen, die mittlerweile bekannten Matrixdarstellungen für die einzelnen Felder Fluid F , Struktur S und Netz M

$$\mathbf{M}^F \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}^F(\mathbf{u}) + \mathbf{G}^F \mathbf{p} = \mathbf{F}^F \quad (7.7)$$

$$\mathbf{M}^S \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}^S(\mathbf{d}) = \mathbf{F}^S \quad (7.8)$$

$$\mathbf{K}^M \mathbf{r} = \mathbf{F}^M \quad (7.9)$$

Zur Übersichtlichkeit wurden die Kurzformen gewählt und die einzelnen Matrizen mit Kennern für das jeweilige Feld versehen. Ausführlichere Betrachtungen zu dieser Formulierungsart und Details zur mathematischen Analyse werden in Le Tallec und Mouro (1999) und Le Tallec und Mani (1999) angegeben.

7.2 Kopplung bzw. Interaktion der einzelnen Felder und Verfahren

Die Kopplung der einzelnen Felder soll die geometrische Kompatibilität zwischen ihnen ebenso respektieren wie die kinematischen und kinetischen Bedingungen am gemeinsamen Interface zwischen dem Fluid und der Struktur. Außerdem soll damit die Erhaltung der Masse *und* der Energie gewährleistet werden. Dazu werden die für die Interaktion wesentlichen Punkte der Randbedingungen und des Informationstransfers am gemeinsamen Interface–Rand diskutiert.

7.2.1 Randbedingungen bei FSI–Problemen

Bild 7.3 zeigt in einer schematischen Skizze einen Überblick über mögliche und üblicherweise bei Fluid–Struktur–Interaktions–Problemen auftretende Situationen, die durch geeignete Randbedingungen beschrieben werden müssen.

Für Navier–Stokes–Gleichungen, also viskosen Strömungen, werden am Interface zwischen Fluid und Struktur in der Regel sogenannte ‘no–slip’–Randbedingungen vorgeschrieben. Damit wird davon ausgegangen, daß die Fluidteilchen ständig an der Struktur haften bleiben. Somit ergeben sich für das Interface zwischen Fluid und Struktur Γ_{FS} als kinematische Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{d}} \ , \quad \dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^G \cdot \mathbf{n} \quad (7.10)$$

wobei \mathbf{n} die Normale auf den Rand bedeutet. Die Netzgeschwindigkeit wird mit \mathbf{u}^G bezeichnet, obwohl die Netzpositionen mit \mathbf{r} bezeichnet werden. Der Verzicht auf die Bezeichnungsweise

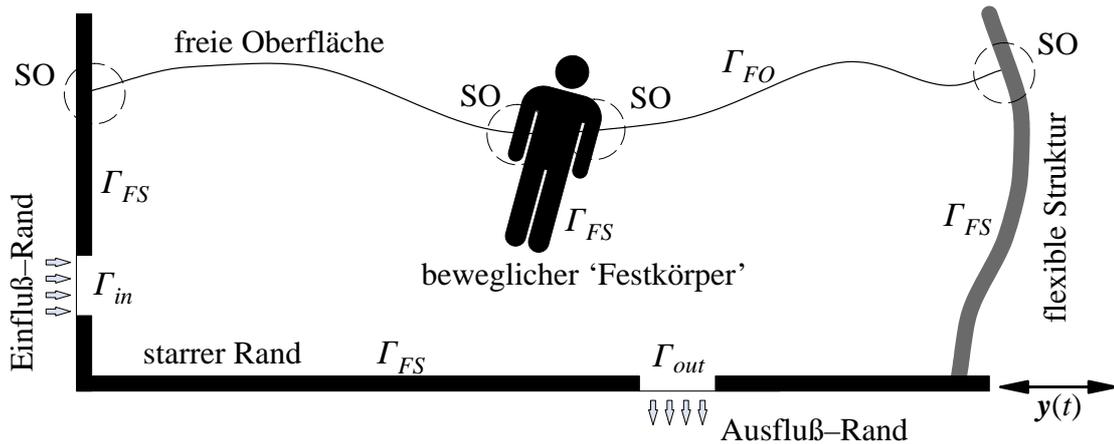


Bild 7.3: Schematische Darstellung der Randbedingungen bei Fluid-Struktur-Interaktion

$\dot{\mathbf{r}}$ für die Netzgeschwindigkeiten soll klarstellen, daß diese nicht ausschließlich aus einem dynamischen Netzbewegungsverfahren ermittelt werden, sondern auch die geometrischen Bilanzgleichungen (GCL) zu berücksichtigen haben.

Für den Fall eines gleitenden Fluids an der Struktur, für den 'slip'-Randbedingungen auf Γ_{FS} zu formulieren sind, modifiziert sich der erste Ausdruck der Gleichung (7.10) zu

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{n} \quad (7.11)$$

In beiden Fällen werden die kinematischen Randbedingungen noch ergänzt durch die Kontinuitätsanforderungen an die Spannungen am Interface

$$\boldsymbol{\sigma}^S \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^F \cdot \mathbf{n} \quad (7.12)$$

Für die Struktur-Formulierung im Sinne einer 'totalen Lagrange-Formulierung', muß der Cauchy-Strukturspannungstensor in Gleichung (7.12) noch in den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungstensor transformiert werden. Die Kopplung des Netzes an die Struktur nach Gleichung (7.10) läßt mehrere Varianten der relativen Netzbewegungen zu (Bild 7.4). So kann ein Gleiten

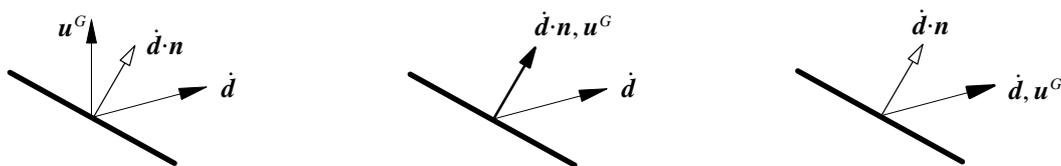


Bild 7.4: Netzbewegung an Rändern

des Fluidnetzes an der Struktur erlaubt werden, was für die in Bild 7.3 mit SO bezeichneten Bereiche ($SO = \Gamma_{FS} \cap \Gamma_{FO}$) wesentlich ist. Die Vorteile einer ALE-Formulierung zeigen sich auch darin, daß im Falle von 'slip'-Randbedingungen das Strukturnetz und das Fluidnetz fest miteinander verbunden sein können. Dies kann zu erheblichen Einsparungen bei der Rechenzeit führen (siehe Anmerkungen zu 'sticking/sliding grids' in Abschnitt 7.2.2). Der Fluid-Massentransfer in Tangentialrichtung wird dabei alleine durch die grundlegenden ALE-Bilanzgleichungen gewährleistet.

Bemerkung: Bei der Verwendung von Normalen- bzw. Tangential-Randbedingungen empfiehlt sich die übliche Definition eines entsprechenden lokalen Koordinatensystems und der Verwendung von Drehmatrizen zur Transformation zwischen lokalem und globalem

Bezugssystem. Die entscheidende Frage ist jedoch die richtige Berechnung des Normalenvektors. Es ist offensichtlich, daß bei einer C^0 -Approximation eines gekrümmten Randes auch eine geometrische Normale nicht eindeutig definiert ist (Bild 7.5a). Für die Berücksichtigung von Normalen- bzw. Tangential-Randbedingungen ist es jedoch unbedingt erforderlich, eindeutige und vor allem ‘richtige’ Normalen- und Tangential-Vektoren zu ermitteln. Die richtige, ‘massen-konsistente’ Einheitsnormale ergibt sich nach einigen Ableitungen aus der Inkompressibilitätsbedingung (Gresho und Sani (1998)) zu

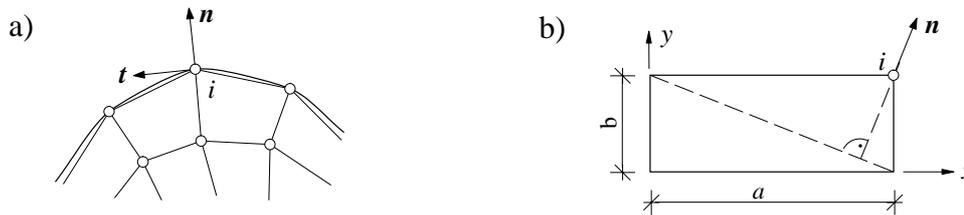


Bild 7.5: Normalen- und Tangentialvektor (Gresho und Sani (1998))

sichtigung von Normalen- bzw. Tangential-Randbedingungen ist es jedoch unbedingt erforderlich, eindeutige und vor allem ‘richtige’ Normalen- und Tangential-Vektoren zu ermitteln. Die richtige, ‘massen-konsistente’ Einheitsnormale ergibt sich nach einigen Ableitungen aus der Inkompressibilitätsbedingung (Gresho und Sani (1998)) zu

$$\mathbf{n}_i = \frac{\int_{\Omega} \nabla N_i}{\left| \int_{\Omega} \nabla N_i \right|} = \frac{\int_{\Gamma} \mathbf{n} N_i}{\left| \int_{\Gamma} \mathbf{n} N_i \right|} \quad (7.13)$$

und kann als ansatzfunktionengewichtete geometrische Normale interpretiert werden. Daraus folgt bei rechteckigen Elementen für die konsistente Normale an der Ecke eines Gebietes die in Bild 7.5b dargestellte Einheitsnormale zu

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{Bmatrix} b \\ a \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

Der Vollständigkeit halber sollen noch mögliche Randbedingungen an freien Oberflächen angeführt werden. Solche Problemstellungen werden in Schmidt et al. (1999) behandelt. Das ‘Minimum’ an Randbedingungen für freie Oberflächen lautet

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^G \cdot \mathbf{n} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \quad (7.15)$$

wobei \mathbf{h} einen möglichen Außendruck bezeichnet. Besonders schwierig gestaltet sich die richtige Formulierung der Randbedingungen im Kontaktbereich zwischen freier Oberfläche und Struktur (SO in Bild 7.3). Bei Verwendung von ‘no-slip’-Randbedingungen auf Γ_{FS} entsteht eine Inkompatibilität der Randbedingungen und eine Singularität der Fluidspannungen. Abhilfe kann die Verwendung der ‘zero shear-stress’-Bedingung (Yeung und Ananthkrishnan (1997)) oder der Einsatz einer ‘Navier-slip’-Bedingung (Güler et al. (1998)) schaffen. Eine ausführliche Diskussion zu Randbedingungen an freien Oberflächen bei Fluid-Struktur-Interaktion, d.h. mit beweglichen, oberflächendurchdringenden Körpern, findet sich in Ananthkrishnan (1991).

Bemerkung: Auch die Frage der Ausflußrandbedingungen ist bei freien Oberflächenströmungen neu zu stellen. Bei Abwesenheit einer Volumenkraft wird als Ausflußrandbedingung oftmals die spannungsfreie Randbedingung verwendet. Bei freien Oberflächenströmungen sind die Spannungen am Ausflußrand jedoch nicht Null, und somit müssen andere Ausflußrandbedingungen angewendet werden. Güler et al. (1998) schlagen eine sogenannte ‘no

boundary condition outflow boundary condition’ vor, die der ‘free boundary condition’ aus Kapitel 2.3.2 entspricht.

7.2.2 Last- und Bewegungstransfer

Unabhängig vom Lösungsansatz ist der Informationstransfer zwischen den Feldern bei der Kopplung bzw. Interaktion ein wesentliches Element. Auch in aktuellen Arbeiten zu oberflächengekoppelten Problemen wird diese Frage in den Mittelpunkt gerückt (Cebal (1996), Cebal und Löhner (1996) und (1997), Farhat et al. (1998b), Maman und Farhat (1995)).

Ein Vorteil partitionierter Lösungsansätze für oberflächengekoppelte Probleme besteht in der Freiheit, die jeweiligen räumlichen Diskretisierungen an die Erfordernisse des Feldes anzupassen. Dadurch können zwei unterschiedliche Interfacearten entstehen.

- **‘Matching grids’**

Dies bedeutet, daß die Netze der Einzelfelder an der gemeinsamen Oberfläche zusammenpassen. Die Knoten sind also fest miteinander verbunden, und dazwischen werden dieselben Interpolationsansätze verwendet. Hier ist der korrekte Informationstransfer sowohl theoretisch als auch softwaretechnisch einfach zu realisieren.

- **‘Non-Matching grids’**

Die Möglichkeiten der partitionierten Lösungsansätze werden bei den ‘non-matching grids’ deutlich. Hier müssen weder die Knoten der einzelnen Diskretisierungen zusammenfallen, noch die jeweiligen Interpolationsansätze zueinander passen.

Die weitere Unterscheidung in *fest verbundene Netze* (*‘sticking grids’*) und *gleitende Netze* (*‘sliding grids’*) soll hier nicht weiter vertieft werden. Die einzige zusätzliche Schwierigkeit bei gleitenden Netzen ist die Realisierung der relativen Netzbewegung. Hinzu kommen die softwaretechnisch anspruchsvollere Umsetzung der laufenden Aktualisierung der Datenstrukturen (wiederholte Punktsuche) und die damit verbundenen Rechenkosten. Für den Informationstransfer kommt jedoch keine zusätzliche theoretische Anforderung im Vergleich zu ‘non-matching grids’ ins Spiel.

Bei der Kopplung zwischen zwei allgemeinen Netzen stellen sich die folgenden Aufgaben:

- Ermittlung der ‘Nachbarschaftsbeziehungen’ in Form einer Punktsuche,
- Interpolation der Felder und ‘Fluxes’ (Kräfte) für den Last- und Bewegungstransfer,
- Behandlung der relativ bewegten Netze am Interface.

Im Folgenden soll nur auf den Informationstransfer am Interface ausführlicher eingegangen werden. Die beiden anderen Punkte sind mehr oder weniger aufwendige ‘Informatikaufgaben’. Angaben dazu finden sich in Cebal (1996) oder Brakkee et al. (1998). Auch können Informationen aus der Literatur zu ‘Remeshing’-Strategien und zur Adaptivität mit Neuvernetzungsstrategien entnommen werden. Interessante Arbeiten auf diesen Gebieten stammen von Camacho und Ortiz (1997), Gee (1999) und Radovitzky und Ortiz (1998).

Obwohl in den gerechneten Beispielen durchwegs ‘matching grids’ verwendet wurden, soll die Frage des Informationstransfers am Interface in einem allgemeineren, also auch für ‘non-matching grids’ verwendbaren, Rahmen behandelt werden. Dabei wird davon ausgegangen, daß die Bestimmung der Nachbarschaftsbeziehungen bereits gelöst ist, d.h. jeder Knoten oder

Gaußpunkt des einen Feldes sein ‘zugehöriges’ Element des anderen Feldes kennt. Die Gliederung dieser Ausführungen bezieht sich auf Farhat et al. (1998b). Weitere Untersuchungen zu demselben Fragenkomplex werden in Cebal (1996) und Cebal und Löhner (1996), (1997) beschrieben.

Last-Transfer (‘load projection’)

Für die gewählte Neumann-Dirichlet-Partitionierung wird das Strukturfeld als Neumann-Partition behandelt. Das bedeutet, daß über das Interface Lasten auf die Struktur übertragen werden müssen.

- **Lasttransfer über konsistente Interpolation**

Die Normalkomponente der konsistenten Knotenlast in der Methode der Finiten Elemente am Knoten i des Strukturelementes e folgt aus

$$F_i^S = \int_{\Omega_{(e)}^S} N_i \boldsymbol{\sigma}^F \cdot \mathbf{n} \, d\Omega_{(e)}^S \quad (7.16)$$

N_i bezeichnet die Ansatzfunktion des Knotens i am betrachteten Element. Diese Integrale werden üblicherweise numerisch mit einer Quadratur ausgewertet. Eine *konsistente Interpolationsmethode* zeichnet sich dadurch aus, daß die Fluid-Spannungswerte an den Quadraturpunkten auch mit den entsprechenden Fluid-Ansatzfunktionen ausgewertet werden.

Es können jedoch im Strukturfeld und im Fluidfeld unterschiedliche Ansatzfunktionen eingesetzt werden. Durch diese Vorgehensweise wird nicht gewährleistet, daß die Summe der diskreten Knotenkräfte an der benetzten Strukturoberfläche exakt der Summe der Fluidlasten am selben Rand entspricht. Der Ansatz ist also theoretisch nicht strikt konservativ, was aber nicht bedeutet, daß er notwendigerweise unzuverlässige Ergebnisse liefert. Numerische Untersuchungen haben gezeigt, daß konsistente Interpolationsmethoden selbst bei relativ groben Diskretisierungen nicht nur genaue, sondern auch numerisch konservative Ergebnisse liefern. Dieser Ansatz wird deshalb auch hier eingesetzt.

In Farhat et al. (1998b) wird als Verbesserung der konsistenten Interpolationsmethode eine neue ‘konservative Methode’ vorgestellt. Diese beruht auf der Idee, für beide Felder dieselbe Interfacediskretisierung zu verwenden, wofür sich die feinere der beiden Felddiskretisierungen anbietet. Dadurch wird gewährleistet, daß der Impuls aller Lasten am Interface verschwindet. Eine Zusatzbetrachtung über die virtuellen Arbeiten der beiden Felder führt dann zum neuen Verfahren. Es zeigt sich allerdings, daß sich identische numerische Ergebnisse zeigen obwohl dieses Verfahren garantiert konservativ ist. Einen ähnlichen Ansatz verfolgen auch Cebal und Löhner (1996).

- **Lastgröße**

Nachdem Möglichkeiten aufgezeigt wurden, auf welche Weise die Lastgrößen transferiert werden, soll die Frage nach den zu verwendenden Lasten diskutiert werden. Nach Gleichung (2.76) setzt sich der Cauchysche Spannungstensor für die Newtonschen Fluide

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) - \bar{p}\mathbf{I} \quad (7.17)$$

aus einem Druckanteil und einem viskosen Spannungsanteil zusammen. Im Vergleich zu den herrschenden Drücken am Interface sind die viskosen Spannungen normalerweise sehr klein.

Es ist deshalb üblich, auf die Ermittlung der Interfacelasten aus den viskosen Spannungen zu verzichten. Damit lassen sich die Interfacelasten auf die Struktur ausschließlich aus den Fluiddrücken ermitteln. Der naheliegende Umkehrschluß, daß man auch die Viskosität selbst vernachlässigen und auf einfachere Strömungsmodelle und damit auf einfachere numerische Verfahren zurückgreifen könnte, ist allerdings falsch. Die Viskosität im Fluidmodell ist wichtig, da durch sie und die entsprechenden Randbedingungen das gesamte Strömungsfeld und damit auch das Druckfeld entscheidend beeinflußt werden.

Le Tallec und Mouro (1998) schlagen vor, die Interfacelasten nicht direkt über den integrierten Spannungstensor, sondern als die Residuen der Fluidgleichungen zu ermitteln, die über die Testfunktionen am Interface ausgewertet werden. Wie auch Le Tallec und Mani (1999) erwähnen, hat diese Ermittlung der Strukturlasten den Vorteil, daß die Formulierung sowohl im kontinuierlichen als auch im diskreten Fall sinnvoll ist; auch liefert sie stabilere Ergebnisse (Farhat et al. (1998b)). Der dortige ‘Residuen–Ansatz’ zur Bestimmung der Kopplungslasten ist eine Voraussetzung dafür, daß die in Le Tallec und Mani (1999) durchgeführte Stabilitätsanalyse für das gekoppelte Problem in Form der Energieerhaltung auch im räumlich diskreten Fall ihre Gültigkeit behält.

Bewegungs–Transfer (‘surface tracking’)

Auch für den Bewegungstransfer bietet sich wieder eine *konsistente Interpolationsmethode* an. Das Prinzip ist hier analog zu den obigen Ausführungen und wird deshalb nicht mehr vertieft. Wieder stellt dieses Verfahren zwar nicht die mathematisch optimale Variante dar, überzeugt jedoch in den numerischen Ergebnissen und der einfachen Umsetzung und wird deshalb häufig angewendet.

Farhat et al. (1998b) schlagen für den Bewegungstransfer ein alternatives Verfahren vor. Obwohl diese alternative Methode hier nicht eingesetzt wird, soll das Prinzip der ‘Vollständigkeit’ halber geschildert werden. Die den Gebietszerlegungsverfahren entlehnte Idee besteht darin, die Kontinuität der kinematischen Größen am Interface über ein Feld von Lagrange–Multiplikatoren zu gewährleisten.

$$\int_{\Gamma_{FS}} \lambda (\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{d}}) d\Gamma_{FS} = 0 \quad (7.18)$$

Wird dieses Lagrange–Multiplikatoren–Feld mit der Spur der beiden Diskretisierungsräume am Interface diskretisiert, so wird das resultierende gewichtete Residuen–Verfahren als *Mortar–Methode* bezeichnet.

Als Alternative zur Mortar–Methode kann auch die Methode von Nitsche angewendet werden. Diese Methode wurde von Becker und Hansbo (1999) für Gebietszerlegungsverfahren eingesetzt und kann als interessante Variante auch für die angesprochenen Fragestellungen bei gekoppelten Problemen angesehen werden.

7.3 Partitionierte Lösungsverfahren für FSI–Probleme

In den folgenden Ausführungen findet sich eine detailliertere Behandlung der partitionierten Integrationsverfahren Verfahren für komplexe Fluid–Struktur–Interaktions–Probleme. Eine er-

schöpfende Verifikation numerischer Verfahren und Ergebnisse ist in diesem Zusammenhang schwierig. Umso mehr soll deshalb versucht werden, für die einzelnen Verfahrenskomponenten theoretisch möglichst abgesicherte Methoden mit bekannten und garantierten Eigenschaften zu verwenden. So sind die Erfüllung der geometrischen Bilanzgleichungen (Kapitel 5.2.5) oder die Erhaltung der kinetischen Energie erstrebenswerte Ziele bei der Verfahrensentwicklung. Solche Eigenschaften sind auch entscheidend, wenn die Stabilität oder die Konvergenz der numerischen Verfahren zu zeigen ist. Sie sind aber auch zur Beurteilung des simulierten und tatsächlichen Systemverhaltens wichtig, beispielsweise wenn es um die physikalische Stabilität geht.

Die Entwicklungen zu partitionierten Lösungsverfahren und deren Analyse sind längst nicht abgeschlossen. Offene Fragen werden von Felippa et al. (1998) angesprochen und beziehen sich auf die unbedingte Stabilität und Genauigkeit. Verbesserte gestaffelte Verfahren sowie stark gekoppelte partitionierte Verfahren für Ein- und Mehrfeldprobleme werden in Mok et al. (1999b), Wall et al. (1999b) entwickelt. Die Qualität und Anwendbarkeit partitionierter Lösungsansätze hängt auch stark von problemspezifischen Eigenschaften ab. So stellen beispielsweise dünne, fast masselose, flexible Strukturen mit hohen Eigenmoden und inkompressible Strömungen für partitionierte Ansätze eine spezielle Herausforderung dar.

7.3.1 Partitionierte Verfahren für Fluid–Struktur–Interaktion

Das Prinzip partitionierter Verfahren besteht in einer getrennten sequentiellen oder parallelen Behandlung der einzelnen Felder. Die einzelnen Felder interagieren vorwiegend über die rechte Seite. Die gegenseitigen Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Feldern für das gekoppelte FSI–Problem werden durch die Feldgleichungen (7.7) bis (7.9) für das Fluid–, das Struktur– und das Netzfeld entsprechend

$$\mathbf{M}^F(\mathbf{r})\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}^F(\mathbf{r}, \mathbf{u}, \mathbf{u}^G) + \mathbf{G}^F(\mathbf{r})\mathbf{p} = \mathbf{F}^F(\mathbf{r}, \mathbf{u}^G|_{\Gamma_{FS}}) \quad (7.19)$$

$$\mathbf{M}^S\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{N}^S(\mathbf{d}) = \mathbf{F}^S(\boldsymbol{\sigma}^F|_{\Gamma_{FS}}) \quad (7.20)$$

$$\mathbf{K}^M\mathbf{r}^M = \mathbf{F}^M(\mathbf{d}|_{\Gamma_{FS}}) \quad (7.21)$$

beschrieben. Der Skizze in Bild 7.6 (Wall und Ramm (1998)) können das prinzipielle Vorgehen der partitionierten Analyse, die Einzelfeldprobleme und die eigentliche Kopplung mit deren Daten und dem Informationstransfer zwischen den Feldern entnommen werden. Diese Skizze soll dabei nur das grundsätzliche Schema darstellen. Konkrete Ausformulierungen dieses Prinzips werden in den Abschnitten 7.3.2 bis 7.3.5 beschrieben.

Es soll jedoch darauf hingewiesen werden, daß schwach gekoppelte, partitionierte Integrationsverfahren nicht automatisch die numerischen Eigenschaften der verwendeten Einzelfeldverfahren erben. So sind herkömmliche schwache, partitionierte Integrationsverfahren nur von erster Ordnung, auch wenn für die Einzelfelder ausschließlich Verfahren zweiter Ordnung verwendet werden. Auch zeigt sich im Normalfall für solche Gesamtverfahren nur eine bedingte Stabilität, trotz ausschließlicher Verwendung unbedingt stabiler Einzelfeldverfahren. Trotz Entwicklung verbesserter Verfahren und neuer Analysemethoden stellt ein Nachweis der Stabilität in der Zeit bei realen Aufgabenstellungen immer noch ein Problem dar.

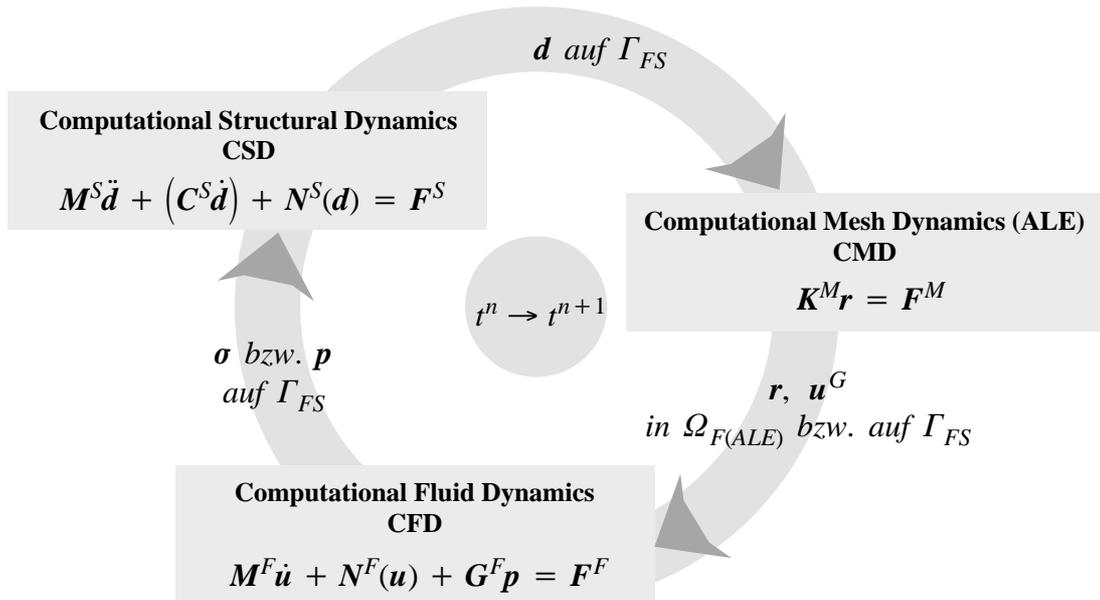


Bild 7.6: Prinzipielles Vorgehen bei einer partitionierten Lösungsprozedur

7.3.2 Einfaches gestaffeltes Lösungsverfahren

Dieses ‘konventionelle gestaffelte Verfahren’ stellt die Urform der gestaffelten Ansätze dar und findet sich bereits in der Arbeit von Felippa und Park (1980). Die prinzipielle Vorgehensweise ist für das zu behandelnde Dreifeld–Problem in Bild 7.7 dargestellt. Dabei stellen R ,

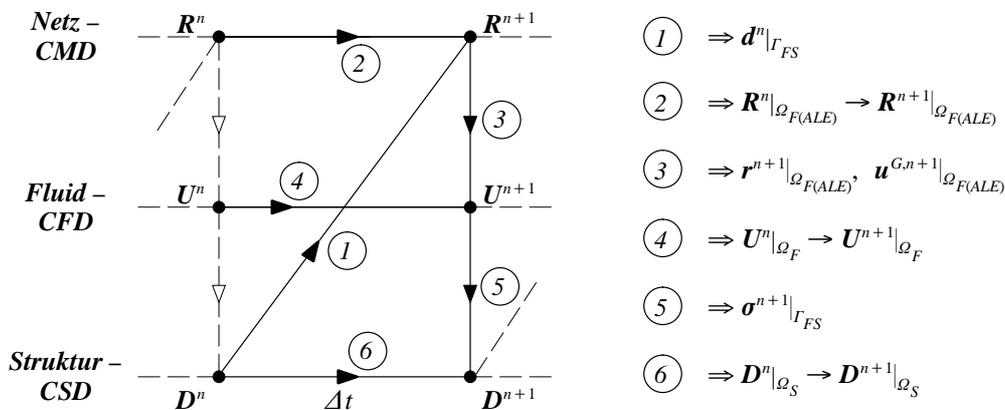


Bild 7.7: Konventionelles gestaffeltes Verfahren für das Dreifeld–Problem FSI

U und D den jeweiligen Variablensatz für das entsprechende Feld dar. Der Algorithmus wird im Folgenden nochmals explizit beschrieben. Dabei wird der Einfachheit halber auf die Darstellung der offensichtlichen ‘Serviceschritte’ (Initialisierung) verzichtet und nur der Kern der Zeitschleife dargestellt.

- Übertrage die Strukturverschiebungen zum Zeitpunkt t^n auf das Netz zum Zeitpunkt t^{n+1}
- Bestimme die daraus folgenden neuen Netzdeformationen (CMD : $t^n \rightarrow t^{n+1}$)
- Übertrage die Netzdaten auf das Fluid–Feld

- (iv) Integriere das Fluid-Feld mit den neuen Randbedingungen und Netzgeschwindigkeiten (CFD : $t^n \rightarrow t^{n+1}$)
- (v) Übertrage die Fluid-Lasten auf die benetzten Strukturoberflächen
- (vi) Integriere das Struktur-Feld mit diesen Lasten (CSD : $t^n \rightarrow t^{n+1}$)
- (vii) Erhöhe den Zeitzähler $n = n + 1$ und gehe zu (i)

Algorithmus 7.1 Beschreibung des konventionellen gestaffelten Verfahrens

Als Variante kann der Algorithmus in analoger Weise auch beginnend mit dem Fluid-Feld durchgeführt werden. Beide gleichwertige Varianten werden in der Literatur verwendet.

Eine Analyse dieses Verfahrens zeigt, daß es höchstens von erster Ordnung in Δt ist, selbst wenn die Einzelfeldverfahren eine höhere Ordnung haben. Eine genaue Betrachtung zeigt, daß das Verfahren einen expliziten Anteil hat, auch wenn beide Einzelfeldverfahren implizit sind. Cebra und Löhner (1997) bezeichnen dieses Verfahren auch als ‘explizites Kopplungsverfahren’. Auch daraus folgt, daß der Zeitschritt einer Stabilitätsgrenze unterworfen ist. Weiters ermöglicht dieser Ansatz nicht die gleichzeitige Erfüllung der Verschiebungs- und Geschwindigkeitskontinuität am Interface (Abschnitt 7.3.3).

Zur Vereinfachung der Darstellung werden in weiterer Folge die Algorithmen nicht mehr für das tatsächliche Dreifeld-Problem, sondern nur für die beiden physikalischen Felder skizziert. Die ‘Plazierung’ des CMD-Lösers in diesen Skizzen ist jeweils offensichtlich. Zur schematischen grafischen Darstellung der Algorithmen sollen dabei für den Algorithmus aus Bild 7.7 zwei Möglichkeiten gezeigt werden. Die erste Darstellungsart Bild 7.8a wird ‘üblicherweise’

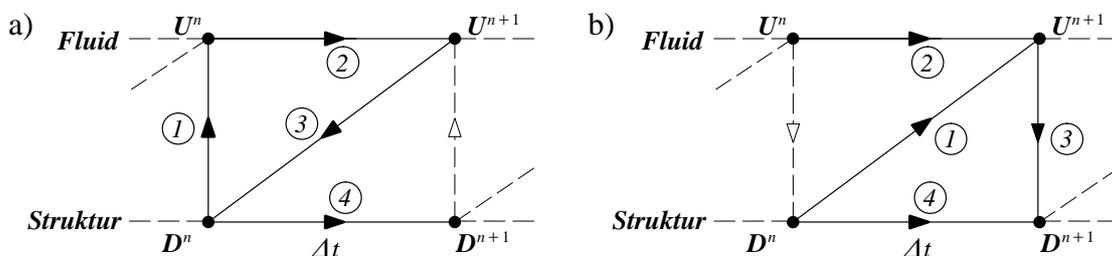


Bild 7.8: Zwei Darstellungsarten des selben einfachen gestaffelten Lösungsverfahrens

bei partitionierten Verfahren gekoppelter Probleme verwendet (Farhat et al. (1995), Piperno et al. (1995)). Sie hat den Vorteil, daß sie einen geschlossenen ‘Algorithmusfluß’ zeigt, jedoch auf Kosten unklarer und irreführender Aussagen zur tatsächlichen Algorithmusumsetzung. Die zweite Darstellungsart ist von den Arbeiten über ‘multi-timestep’-Verfahren in der Strukturdynamik angeregt (Belytschko und Lu (1992)). Diese Darstellungsart Bild 7.8b zeigt auf Kosten eines nicht geschlossenen ‘Algorithmusflusses’ den richtigen Informationsfluß zwischen den Partitionen. Hier wird auf die zweite Darstellungsart zurückgegriffen.

7.3.3 Anforderungen / Analysen zu partitionierten Integrationsverfahren

Erst sollen erst einige wesentliche Anforderungen an die gewählten Verfahren und existierende Analyseansätze diskutiert werden.

Kontinuität der kinematischen Größen

Von den partitionierten Integrationsverfahren wird erwartet, daß sie die Kontinuität der kinematischen Größen am Interface gewährleisten. Auf den ersten Blick scheint darin auch kein Problem zu bestehen. Ein kurzer Rückblick auf Kapitel 5.2.5 zeigt jedoch, daß die Erfüllung der geometrischen Bilanzgleichungen bestimmte Zwangsbedingungen an den Zusammenhang der Netzpositionen \mathbf{r} und der Netzgeschwindigkeiten \mathbf{u}^G stellt.

Als Zeitintegrationsverfahren für die Strukturodynamik kommen oftmals Verfahren zweiter Ordnung zum Einsatz (siehe auch Kapitel 6.1). Für einige dieser Vertreter gilt

$$\dot{\mathbf{d}} \neq \frac{\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n}{\Delta t} \quad (7.22)$$

Wird nun die Zwangsbedingung an die Ermittlung der Netzgeschwindigkeiten aus Gleichung (5.22) berücksichtigt, die auch am Interface gilt, zeigt sich der folgende Zusammenhang

$$\mathbf{u}^G = \frac{\mathbf{r}^{n+1} - \mathbf{r}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{d}^{n+1} - \mathbf{d}^n}{\Delta t} \neq \dot{\mathbf{d}} \quad (7.23)$$

Aus Gleichung (7.23) ist zu erkennen, daß es nicht möglich ist, sowohl die Verschiebungs- als auch die Geschwindigkeitskontinuität am Interface zu gewährleisten. Dadurch wird ein Fehler im Energieaustausch zwischen dem Fluid- und dem Strukturfeld erzeugt (Lesoinne und Farhat (1996, 1998)). Ein leicht modifizierter Verfahrensentwurf, um die Kontinuität beider Größen zu gewährleisten, wird in Abschnitt 7.3.4 vorgestellt.

Blom (1998) bezeichnet die Forderung, daß die Zeitabhängigkeiten der Randbedingungen für den CFD- und den CSD-Löser konsistent mit den diskreten Zeitintegrationsverfahren dieser beiden Löser sein müssen, als *'Interaction Consistency Law'* (ICL). Das heißt so wie die GCL die Konsistenz zwischen Netzbewegung (CMD) und CFD-Löser diktiert, diktiert die ICL die Konsistenz der Randbedingungen zwischen CFD- und CSD-Löser. Auch diese Konsistenzbedingung der ICL steht damit im Zusammenhang mit der Energieerhaltung und zeigt deren Bedeutung für Entwurf und Analyse partitionierter Verfahren.

Energieerhaltung

Die Erhaltung der Energie ist für ein partitioniertes Integrationsverfahren ein wichtiges Kriterium. Für das einfache gestaffelte Verfahren aus Abschnitt 7.3.2 läßt sich zeigen, daß es die Energie nicht erhält. Dazu wird zuerst die Arbeit der Kräfte im Interface zum Zeitpunkt t^{n+1} dargestellt

$$W_{FS}^{n+1} = \int_{\Gamma_{FS}} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{n+1} \cdot (\dot{\mathbf{d}}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}) \, d\Gamma \quad (7.24)$$

Da sich aber die Fluidgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t^{n+1} über den Umweg der Netzgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der GCL in diesem Verfahren entsprechend

$$\mathbf{u}^{n+1} = \frac{\mathbf{d}^n - \mathbf{d}^{n-1}}{\Delta t} \quad (7.25)$$

ermittelt, wird deutlich, daß der Ausdruck für die Arbeit (7.24) nicht Null wird. Die Energie, die die Fluidlasten an der Struktur erzeugt, wird also durch die Energie, die das Fluid im

Gegenzug dafür erhält, nicht ausbalanciert. Verursacht wird dieses Energieungleichgewicht durch eine Art Versatz der Kopplungsinformationen um die Zeitschrittgröße Δt . Gestaffelte Verfahren mit einer verbesserten Genauigkeit zur Vermeidung dieser Inkonsistenz werden in Abschnitt 7.3.4 angeführt. Diese Problematik läßt sich vermeiden, wenn stark gekoppelte Verfahren verwendet werden (Abschnitt 7.3.5).

Kontrolle von ‘Added Mass’-Effekten

Eine wichtige Anforderung an partitionierte Verfahren, speziell bei inkompressiblen Strömungen und flexiblen Strukturen, ist die *Kontrolle der ‘Added Mass’-Effekte* (Le Tallec und Mouro (1998)). Zur Erläuterung soll dazu die Impulsbilanz (2.79) für das Strömungsfeld näher betrachtet werden. Unter der vereinfachenden Annahme eines gewichtslosen Fluides und kleiner viskoser und konvektiver Anteile wird die Fluidbeschleunigung nur durch den Druckgradienten balanciert. Im gekoppelten Problem belastet dieser Druck dann wiederum die Struktur. Das Fluid wirkt wie eine zusätzliche Fluidmasse (‘added mass’) auf das Beschleunigungsfeld der Struktur. Wird jetzt wie im Verfahren aus Abschnitt 7.3.2 die Randkinematik des Fluidfeldes nur über einen expliziten Prädiktor vorgegeben, so birgt dies eine potentielle Instabilitätsquelle. Da sich die Beschleunigungen weiters als Differenz der Geschwindigkeiten dividiert durch den Zeitschritt berechnen, ist diese Instabilitätsgefahr bei kleinen Zeitschritten sogar noch ausgeprägter. Speziell bei expliziten Integrationsansätzen bzw. expliziten Verfahrenskomponenten ist darauf zu achten, daß dieser ‘Added mass’-Effekt unter Kontrolle bleibt und keine Instabilität erzeugt. Aus diesem Zusammenhang erklärt sich die besondere Herausforderung an partitionierte Verfahren bei fast masselosen, flexiblen Strukturen und inkompressiblen Strömungen. Diesbezügliche Probleme werden beispielsweise bei der Anwendung gekoppelter Verfahren für numerische Simulation von Blutströmungen berichtet. Abgesehen von der Kontrolle dieser Effekte kann dieser Instabilität auch durch ein rein implizites Verfahren (Abschnitt 7.3.5) begegnet werden.

Analyseansätze

Leider sind einfache und aussagekräftige Analysemethoden für partitionierten Integrationsverfahren noch selten. Ein neuer und auf den ersten Blick sehr interessanter Ansatz stammt von Le Tallec und Mani (1999). Sie zeigen darin über eine Betrachtung der Energieerhaltung, daß klassische dissipative, unbedingt stabile und genaue Zeitintegrationsverfahren für Strömungen auf fixen Gebieten ihre Langzeitstabilitätseigenschaften bei beweglichen Gebieten verlieren. Für den dort betrachteten Fall der Interaktion von Strukturen mit kompressiblen Strömungen wird auch gezeigt, daß nur teilweise nicht-konservative Formulierungen in der Variablen $\sqrt{\rho}J\mathbf{u}$, mit der Dichte ρ und der Jacobideterminante J , die kinetische Energie genau erhalten. Eine weitere Vertiefung dieser aktuellen Analyseansätze von Le Tallec und Mani (1999) sind für eine weitere Untersuchung lohnenswert.

Weitere Analyseansätze partitionierter Verfahren beschreiben Piperno und Farhat (1997) und Grandmont et al. (1998). Die Analysemethode von Piperno und Farhat (1997) basiert dabei auf der Ermittlung der durch die Staffelung numerisch erzeugten Energie am Fluid-Struktur-Interface. Sie zeigen Untersuchungen sowohl für synchrone als auch für asynchrone gestaffelte Verfahren (Abschnitt 7.3.4) und für unterschiedliche ‘Detailvarianten’ der Algorithmen, beispielsweise bezüglich der konkreten Lastermittlung.

7.3.4 Verbesserungen gestaffelter Verfahren

Ausgehend vom oben vorgestellten einfachen gestaffelten Verfahren sind im Laufe der Zeit einige Verbesserungen vorgeschlagen worden. Ziel dabei sind Verbesserungen für die Robustheit, Stabilität und die Genauigkeit der Verfahren. Es muß jedoch auch hier angemerkt werden, daß das tatsächliche Verhalten und die Frage nach den wirklichen Verbesserungen der unterschiedlichen Verfahren beispielabhängig ist — eine prinzipielle ‘Eigenschaft’ der schwach gekoppelten Verfahren. Es soll erwähnt werden, daß für die meisten der angeführten Verfahren auch spezielle Varianten für den Einsatz in parallelen Rechenumgebungen entwickelt wurden (Piperno et al. (1995)).

‘Subcycling’

Ein großer Vorteil partitionierter Verfahren ist ihre prinzipielle Flexibilität für die Anpassung an die Einzelfelderfordernisse. Für die räumliche Diskretisierung wurde dies bereits bei der Diskussion zu ‘non-matching grids’ deutlich. Auch die zeitlichen Diskretisierungsansprüche der einzelnen Felder können stark unterschiedlich sein, d.h. beispielsweise nach stark unterschiedlichen Zeitschrittgrößen verlangen. Es ist wünschenswert, die jeweiligen Felder so weit wie möglich in ihrer jeweils eigenen Zeitskala zu integrieren. Diese Möglichkeit bietet sich bei partitionierten Verfahren durch die Verwendung sogenannter ‘Subcycling’-Ansätze. In einer einfachen Ausgestaltung wird dabei der größte Einzelfeldzeitschritt zum ‘Master’-Zeitschritt erklärt. Die restlichen Felder werden dann an die jeweilig erforderliche Zeitschrittgröße angepaßt und in einer entsprechenden Anzahl von Zwischenschritten, den sogenannten ‘subcycles’, gelöst.

Das Prinzip eines ‘Subcycling’-Ansatzes ist in dem Verfahren in Bild 7.9 dargestellt. Darin bezeichnet $k_{F/S}$ die Anzahl der Fluid-‘Subcycling’-Schritte pro Struktur-‘Master’-Zeitschritt Δt . Die Auswirkungen des ‘subcyclings’ auf die Fehler in den einzelnen Feldern oder den einzelnen Verfahren werden in Piperno et al. (1995) behandelt. Bei Verzicht auf solche ‘Subcycling’-Ansätze ist die Alternative eine unter Umständen extrem rechenzeitintensive Integration aller Einzelfelder und des Gesamtsystems mit dem jeweils kleinsten Einzelfeldzeitschritt. In der vorliegenden Aufgabenstellung der Fluid-Struktur-Interaktion stellt sich meist das Struktur-Feld als das ‘Master’-Feld heraus. Die zu übertragenden Größen vom ‘Master’-Feld Struktur auf das Sub-Feld Fluid über das algorithmische Feld Netz sind die Netzpositionen. Diese werden dann für die Zwischenschritte üblicherweise linear interpoliert. Laut Farhat et al. (1995) ist das die beste Wahl, auch im Vergleich zu höheren Interpolationsansätzen.

Verwendung eines Strukturprädiktors

Der erste Schritt im konventionellen gestaffelten Verfahren (Algorithmus 7.1) kann auch als Strukturprädiktor \tilde{D} interpretiert werden. Die Leseweise als Prädiktorschritt führt dabei auf die Notation $\tilde{D}^{n+1} = D^n$. Aus dieser Sichtweise ergibt sich eine logische Verbesserungsmöglichkeit des einfachen Verfahrens durch Verwendung besserer, d.h. von höherer Ordnung genauer, Prädiktoren. Mit solchen Möglichkeiten beschäftigt sich Piperno (1997). Er vergleicht dabei den Prädiktor erster Ordnung

$$\tilde{d}^{n+1} = d^n + \Delta t \dot{d}^n \quad (7.26)$$

mit Prädiktoren höherer Ordnung. Als solche verwendet er die beiden linearen Prädiktoren

$$\tilde{\mathbf{d}}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \frac{\Delta t}{2} (3 \dot{\mathbf{d}}^n - \dot{\mathbf{d}}^{n-1}) \quad (7.27)$$

$$\tilde{\mathbf{d}}^{n+1} = \mathbf{d}^n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}^n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}^n \quad (7.28)$$

und einen Prädiktor, der aus der tatsächlichen Integration der Struktur mit der Last $\mathbf{F}^{S,n}$ folgt. Dieser letzte Prädiktor stellt einen viel höheren numerischen Aufwand dar und empfiehlt sich laut Piperno (1997), wenn ein impliziter Fluid-Löser mit relativ großen Zeitschritten verwendet wird. Diese Variante kann auch als erster Schritt eines stark gekoppelten, partitionierten Verfahrens angesehen werden (Abschnitt 7.3.5).

Die Verwendung von Prädiktoren höherer Genauigkeit führt dazu, daß auch der Fehler des Gesamtverfahrens im Vergleich zum einfachen gestaffelten Verfahren geringer wird. Piperno (1997) skizziert dies für die Forderung nach Erhaltung der Energie am Interface. Vor allem die Verwendung des Prädiktors (7.27) zeigt dabei oftmals gute Genauigkeits- und Stabilitätseigenschaften bei sehr geringen Kosten.

Die Skizze eines gestaffelten Verfahrens, daß durch einen Strukturprädiktor verbessert wird, ist in Bild 7.9 dargestellt. Darin bezeichnet (1) den Prädiktorschritt der Struktur, der am Bei-

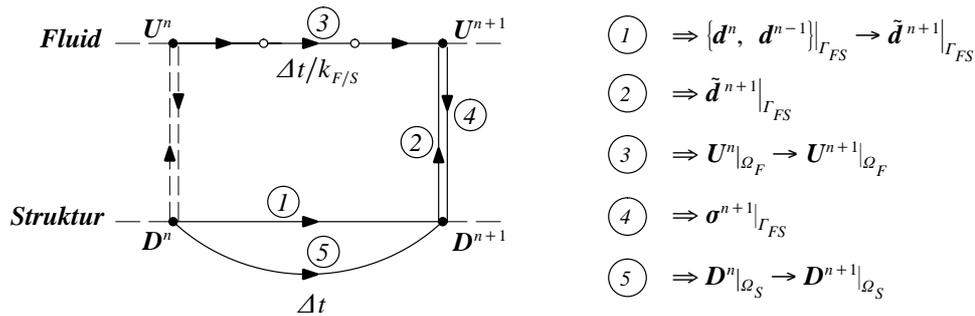


Bild 7.9: Gestaffeltes Integrationsverfahren mit Strukturprädiktor

spiel der Gleichung (7.27) dargestellt wird, und (5) den Strukturkorrektorschritt. Siehe dazu auch den Algorithmus 7.2 in Kapitel 7.4.

Zeitversatz

Das beschriebene Energie-Ungleichgewicht des konventionellen gestaffelten Verfahrens läßt sich vermeiden, indem ein Zeitversatz zwischen den zwei Feldern eingeführt wird. Lesoinne und Farhat (1998) schlagen einen Zeitversatz der Größe $\Delta t/2$ beim Einsatz der impliziten Mittelpunktsregel für die Strukturintegration vor. Eine Prinzipskizze des Verfahrens ist in Bild 7.10 dargestellt. Wie aus der Skizze ersichtlich ist, erfolgt dabei die Aktualisierung des Netzes und damit des Fluid-Feldes zum Zeitpunkt $t^{n+1/2}$ aus den Strukturdaten zum Zeitpunkt t^n . Diese Aktualisierung kann beispielsweise in der Form

$$\mathbf{r}^{n+1/2}|_{\Gamma_{FS}} = \mathbf{d}^n|_{\Gamma_{FS}} + \frac{\Delta t}{2} \dot{\mathbf{d}}^n|_{\Gamma_{FS}} \quad (7.29)$$

erfolgen. Ein einfacher Vergleich mit dem Zeitintegrationsansatz der impliziten Mittelpunktsregel bzw. mit Gleichung (5.22) zur Bestimmung der Netzgeschwindigkeit zeigt, daß es durch diese Maßnahme möglich wird, sowohl die geometrischen Bilanzgleichungen (GCL) wie auch

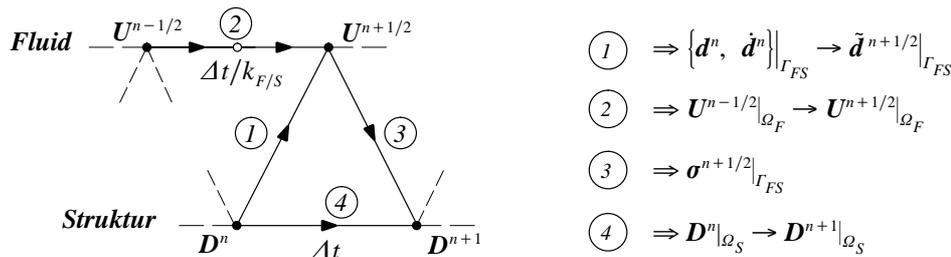


Bild 7.10: Verbessertes gestaffeltes Integrationsverfahren durch ‘Zeitversatz’

die Verschiebungs- und die Geschwindigkeitskontinuität am Interface zu erfüllen (Abschnitt 7.3.3). Wie aeroelastische Berechnungen in Lesoinne und Farhat (1998) zeigen, besitzt dieses gestaffelte Zeitversatzverfahren im Vergleich zum einfachen gestaffelten Verfahren aus Abschnitt 7.3.2 bessere Stabilitäts- und Genauigkeitseigenschaften bei ungefähr demselben numerischen Aufwand.

7.3.5 Stark gekoppelte partitionierte Verfahren

Als Alternative zu den schwach gekoppelten Verfahren existiert auch die Möglichkeit, stark gekoppelte partitionierte Verfahren umzusetzen. Mit diesen Ansätzen können viele der angesprochenen Probleme gestaffelter Verfahren vermieden werden. Man geht damit auf ‘Nummer sicher’, meist jedoch auf Kosten sehr hoher Rechenzeiten. Bei stark gekoppelten Verfahren werden sämtliche Kontinuitätsbedingungen ebenso wie die Energie- und Impulsbilanz am Interface zum neuen Zeitpunkt t^{n+1} erfüllt. In Cebal und Löhner (1997) wird dieser Ansatz im Gegensatz zur expliziten Kopplung deshalb auch mit ‘implizitem Kopplungsverfahren’ bezeichnet. Im Zuge eines partitionierten Ansatzes wird so ein stark gekoppeltes bzw. implizites Verfahren durch eine Iteration über die Felder innerhalb eines Zeitschrittes erreicht (Bild 7.2). Die Vorteile der implizitem Kopplungsverfahren, in denen beispielsweise größere Zeitschritte verwendet werden können, werden durch die relativ teure Iteration über die Felder erkauft. Die ausiterierte Lage, so sie erreicht wird, entspricht dann aber exakt der Lösung eines entsprechenden simultanen Ansatzes.

Leider führt die Realisierung einfacher Iterationsverfahren über die Felder oftmals zu sehr hohen Iterationszahlen und Rechenkosten. Teilweise kann bei einfachen Algorithmen auch keine Konvergenz dieser ‘äußeren Iteration’ erreicht werden. Daraus erklärt sich die Popularität der schwach gekoppelten Verfahren, die dann mit einem kleiner zu wählenden Zeitschritt immer noch viel effizienter sind, vorausgesetzt sie sind stabil. Es sind also verstärkte Anstrengungen zur Entwicklung effizienterer Iterationsverfahren über die Felder erforderlich.

Entsprechende Entwicklungen für den Modell-Spezialfall eines künstlich gekoppelten, physikalischen Einfeld-Problems finden sich in Mok et al. (1999b). Darin wird auch ein verbessertes, stark gekoppeltes Verfahren vorgestellt, das auf einem relaxierten Fixpunktverfahren aufbaut. Einen weiter verbesserten Ansatz für ein stark gekoppeltes, partitioniertes Verfahren beschreiben Wall et al. (1999b). Er war in den durchgeführten Testrechnungen in der Lage, die erforderliche Iterationszahl über die Felder entsprechend niedrig zu halten. Dieses Verfahren basiert auf der Lösung des ‘Kopplungsoperators’ im Sinne eines Gradienten- bzw. ‘steepest descent’-Verfahrens mit einigen speziellen Erweiterungen. Auch werden Ansätze für nichtlineare Problemstellungen vorgeschlagen, die die Einzelfeld-Nichtlinearitäten erst in der Iteration über die Felder ausiterieren und zu einer weiteren Rechenzeiterparnis führen. Einen stark

gekoppelten, ‘gradienten-basierten’ Ansatz für Fluid-Struktur-Interaktionsprobleme schlagen Le Tallec und Mouro (1998) vor.

Hilfreich bei solchen Verfahren ist die Analogie der vorliegenden Problemstellung zu klassischen Substrukturtechniken oder Gebietszerlegungsverfahren (‘domain decomposition methods’) (Schulte (1998)).

7.4 Löser für das gekoppelte Dreifeld-Problem Fluid-Struktur-Interaktion

In diesem Abschnitt wird ein Gesamt-Lösungsverfahren für das vorgestellte gekoppelte Dreifeld-Problem Fluid-Struktur-Interaktion skizziert.

Algorithmusskizze mit Strukturprädiktor

Als Beispiel für einen Dreifeld-FSI-Löser wird das gestaffelte Verfahren mit Strukturprädiktor Bild 7.9 für die ausführlichere Besprechung verwendet.

-
- (i) Initialisiere Gesamtalgorithmus und sämtliche Löser (CMD, CFD, CSD)
 - (ii) Globale Zeitschleife ($t^{n+1} = t^n + \Delta t$)
 - (iii) Bestimme Strukturprädiktor $\tilde{\mathbf{d}}^{n+1}$ auf Γ_{FS} (\Rightarrow (7.27))
 - (iv) Übertrage Strukturverschiebungen an benetzter Oberfläche ($\tilde{\mathbf{d}}^{n+1}|_{\Gamma_{FS}}$) auf den CMD-Löser (\Rightarrow Kapitel 7.2.2)
 - (v) Bestimme Netzdeformationen \mathbf{r}^{n+1} und Netzgeschwindigkeiten $\mathbf{u}^{G, n+1}$ (Gleichung (5.22)) auf $\Omega_{F(ALE)}$ (\Rightarrow Kapitel 6.2)
[CMD : $t^n \rightarrow t^{n+1}$]
 - (vi) Übertrage Netzdeformationen und Netzgeschwindigkeiten auf $\Omega_{F(ALE)}$ bzw. auf Γ_{FS} an den CFD-Löser (\Rightarrow Kapitel 7.2.2)
 - (vii) Bestimme Fluidgrößen \mathbf{u}^{n+1} und \mathbf{p}^{n+1} auf Ω_F (\Rightarrow Kapitel 4.4 und 5.2)
[CFD : $t^n \rightarrow t^{n+1}$]
 - (viii) Ermittle Fluidlasten ($\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$ oder \mathbf{p}^{n+1} bzw. Residuen der Fluidgleichungen) auf Γ_{FS} und übertrage sie an den CSD-Löser (\Rightarrow Kapitel 7.2.2)
 - (ix) Bestimme Strukturverschiebungen \mathbf{d}^{n+1} und die weiteren kinematischen Größen $\dot{\mathbf{d}}^{n+1}$, $\ddot{\mathbf{d}}^{n+1}$ auf Ω_S (\Rightarrow Kapitel 6.1)
[CSD : $t^n \rightarrow t^{n+1}$]
 - (x) Zeit-Check und ($n = n + 1$)
IF { $n < n_{\max}$ bzw. $t < t_{\max}$ } *GOTO* (ii)
-

Algorithmus 7.2 Gestaffelter Dreifeld-FSI-Löser mit Strukturprädiktor

Bemerkungen:

- Für ein Fluid-‘subcycling’ muß der Schritt (vii) im Algorithmus 7.2 durch $k_{F/S}$ CFD-Schritte mit der Schrittweite $\Delta t/k_{F/S}$ ersetzt werden. Die erforderlichen Netzdaten werden dabei über den gesamten Zeitschritt Δt linear interpoliert.

- Als Strukturlast in Schritt (ix) können anstatt der direkten Fluidlasten zum Zeitpunkt t^{n+1} auch alternative, entsprechend dem jeweiligen Zeitanatz korrigierte Lasten eingesetzt werden (Piperno (1997), Piperno und Farhat (1997) und Piperno (1998)).

Die Vorgehensweise wurde an einem gestaffelten Algorithmus mit Strukturprädiktor ausführlicher vorgestellt. Dieser Algorithmus kann weiter modifiziert werden, z.B. entsprechend den in Kapitel 7.3 besprochenen Maßnahmen. Die Beispiele in Kapitel 7.5 wurden mit diesem Algorithmus oder mit dem konventionellen gestaffelten Grundalgorithmus bearbeitet (Wall und Ramm (1998)).

Die Erweiterung auf einen ‘stark gekoppelten’ Ansatz durch eine Iteration über die Felder im Zeitschritt wird hier nicht weiter behandelt. Ein einfacher Schritt für einen stark gekoppelten Ansatz ist es, den Mittelteil des Algorithmus 7.2 in eine Iterationsschleife einzubetten und bis zur Konvergenz der Netzpositionen, Geschwindigkeiten und Drücke an der benetzten Oberfläche zu iterieren (Cebal (1996)). Dabei sollen die zwischen den Feldern übertragenen Größen zusätzlich noch relaxiert werden. Mangels besserer Definitionen kann dies nur mit einem a-priori fixierten oder mit einem aus dem letzten Iterationsverlauf extrapolierten Relaxationsparameter erfolgen (Le Tallec und Mouro (1998)). Wenn jedoch ein stark gekoppelter Algorithmus angestrebt wird, soll aus den erwähnten Gründen auf leistungsfähigere Ansätze zurückgegriffen werden (Kapitel 7.3.5).

7.5 Numerische Beispiele

Zum Abschluß sollen noch Simulationen zum Interaktionsverhalten von Fluiden mit deformierbaren Strukturen diskutiert werden. Leider konnten in der Literatur keine dokumentierten instationären Beispiele zur Interaktion flexibler Strukturen und inkompressibler viskoser Strömungen gefunden werden, die zur Verifikation der entwickelten Verfahren dienen können. Dieselben Erfahrungen machten auch andere Gruppen. Ebenso beklagen renommierte kommerzielle Softwarehäuser das Fehlen von Beispielen, die zur Validation geeignet sind. Dies zeigt, daß trotz der Vielzahl an Veröffentlichungen fundierte und ausführliche Arbeiten in der hier bearbeiteten Modellklasse zur FSI noch relativ rar sind. Aus diesem Grund war eine exakte Verifikation im instationären Fall mit flexiblen Strukturen nicht möglich. Es konnte also im Rahmen dieser Arbeit ‘nur’ eine quantitative Überprüfung der einzelnen Verfahrenskomponenten und eine qualitative Überprüfung des Gesamtverfahrens durch ingenieurmäßige Betrachtungen und Plausibilitätsüberlegungen erfolgen. Eine instationäre Verifikation durch Experimente sollte allerdings in der Zukunft erfolgen. Für die folgenden Beispiele wurden bisher noch keine Konvergenzstudien bzgl. Diskretisierungsfeinheiten etc. durchgeführt. Die dargestellten Ergebnisse sollen das qualitative Verhalten der gekoppelten Systeme darstellen und können somit nur sehr bedingt als Referenzlösungen dienen.

7.5.1 ‘Klassische’ Strömungen mit flexiblem Rand

An den Beginn der Beispiele zur Fluid–Struktur–Interaktion werden zwei modifizierte klassische Strömungsaufgaben gestellt. Dabei wird ein gekoppeltes FSI–Problem durch Ersatz eines starren Wandabschnittes durch eine flexible Struktur generiert.

Kanalströmung mit flexiblen Wandabschnitten

Im ersten Beispiel einer Kanalströmung wird ein Teil der Kanalwand durch eine flexible Struktur ersetzt. Bild 7.11 zeigt diese um die x-Achse symmetrische Problemstellung. Da auch eine

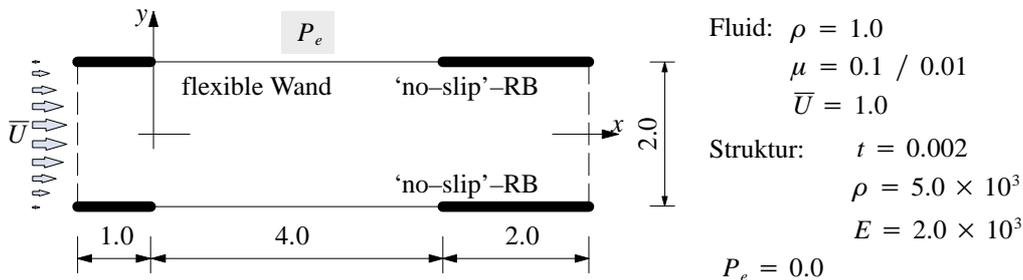


Bild 7.11: Kanalströmung mit flexiblen Randteilen

symmetrische Lösung erwartet wird, beschränkt sich die Simulation auf das halbe System. Als Ausflußrandbedingungen werden wiederum die 'do nothing'-RB eingeführt, und an einem Knoten des Ausflußrandes wird ein Druckdatum von Null gesetzt. Die Lösung ist dann stark vom herrschenden Außendruck P_e abhängig. Dieser entscheidet, ob sich der flexible Wandabschnitt nach innen oder nach außen deformiert. Die Berechnungen starten jeweils mit der ausgebildeten Kanalströmung. Die Diskretisierung des Strömungsgebietes erfolgt mit 1200 Q1Q1-Elementen, für den Strukturteil werden unterintegrierte (2×2) achtknotige Verschiebungselemente angewendet. Das ALE-Gebiet beschränkt sich auf den Bereich zwischen den flexiblen Wandabschnitten. Der CMD-Löser basiert auf dem ausführlich besprochenen Pseudo-Struktur-Ansatz. Zwei Momentaufnahmen der damit ermittelten deformierten Netze zeigt Bild 7.12.

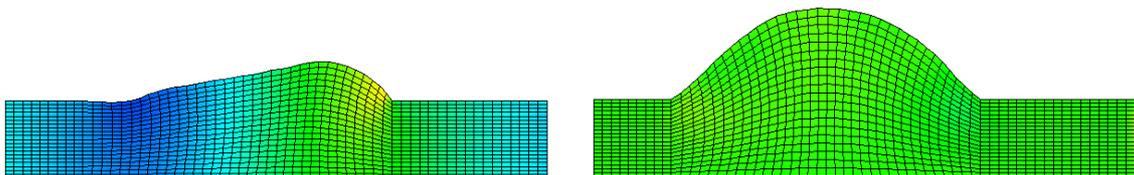


Bild 7.12: Kanalströmung mit flexiblen Randteilen – Deformierte Netze

Die Viskosität des Fluides hat einen beträchtlichen Einfluß auf die Systemantwort. Wie aus Bild 7.13 ersichtlich ist, führt eine hohe Viskosität zu einer viel stärkeren Dämpfung der Struk-

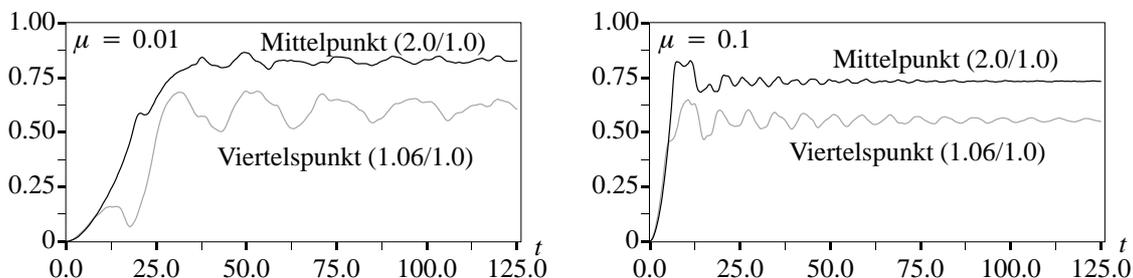


Bild 7.13: Kanalströmung mit flexiblen Randteilen – Zeitverläufe der Vertikalverschiebungen zweier Strukturpunkte bei unterschiedlicher Viskosität des Fluides

turschwingungen. Momentaufnahmen des Strömungsfeldes für den Fall mit der höheren Reynoldszahl ($Re = 200$) und einem Außendruck von Null zeigt Bild 7.14.

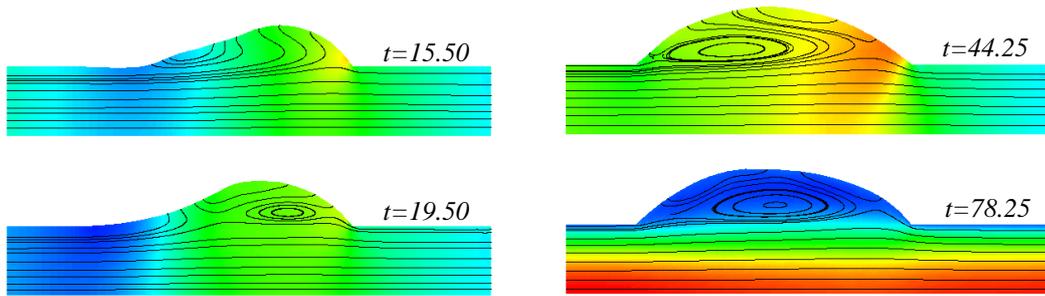


Bild 7.14: Kanalströmung mit flexiblen Randteilen – Momentaufnahmen des Strömungsfeldes für $\mu=0.01$ (Stromlinien auf Druck (links) und Stromlinien auf horizontaler Geschwindigkeitskomponente (rechts))

‘Driven Cavity’ mit flexiblem Boden

Dem zweiten Beispiel dient der klassische überströmte Hohlraum als Vorlage. Diesmal wird

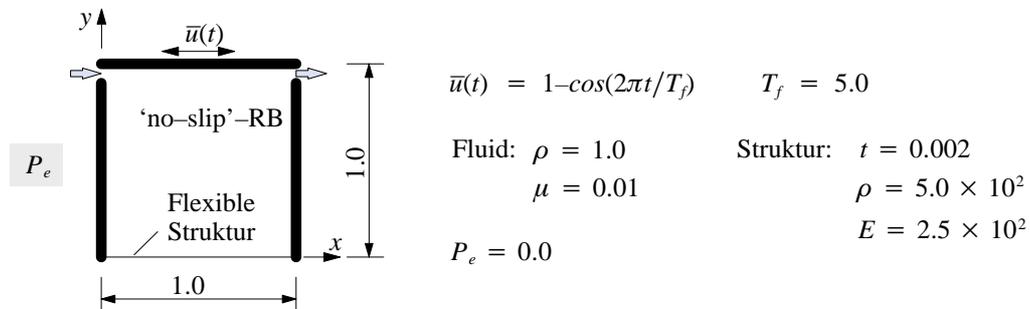


Bild 7.15: Oszillierend überströmter Hohlraum – Problemstellung

jedoch der Boden des Hohlraumes flexibel ausgebildet. Zusätzlich wird der Hohlraum nicht

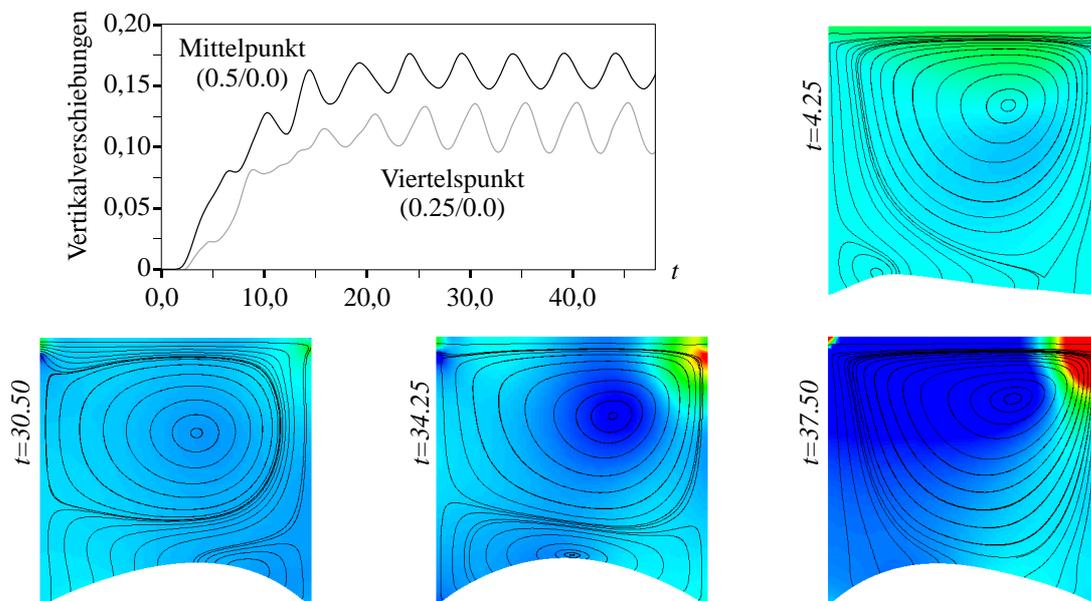


Bild 7.16: Oszillierend überströmter Hohlraum – Zeitverlauf der Strukturdeformationen und Momentaufnahmen des Strömungsfeldes (Stromlinien auf Druck)

konstant, sondern oszillierend überströmte. Die zeitliche Entwicklung der Überströmung ist zusammen mit der gesamten Problemstellung in Bild 7.15 dargestellt.

Die berechnete Lösung wird in Bild 7.16 in Form der Stromlinien und des Druckes zu diskreten Zeitpunkten und als Zeitverlauf zweier ausgewählter Strukturknoten gezeigt. Das Strömungsgebiet ist mit 64×64 Q1Q1-Elementen und der Strukturteil mit 32 unterintegrierten (2×2) achtknotigen Verschiebungselementen diskretisiert. Die CMD-Lösung erfolgt wieder mit dem kontinuierlichen quasi-statischen Pseudo-Struktur-Ansatz.

7.5.2 Flexibler bzw. ‘Atmender’ Zylinder

Auf das viel behandelte Beispiel eines federnd gelagerten starren Zylinders soll hier verzichtet werden. Das Hauptaugenmerk der Fluid-Struktur-Interaktion liegt in dieser Arbeit auf flexiblen Strukturen mit großen Deformationen. Die Umströmung eines starren Zylinders zeigt bereits sehr interessante und anspruchsvolle Strömungslösungen. Aus diesem Grund soll hier als weiteres Beispiel zur FSI der starre Zylinder durch einen flexiblen Zylinder ersetzt werden.

Die Geometrie des Strömungsgebietes und die Fluideigenschaften orientieren sich an der Problemstellung des umströmten, federnd gelagerten starren Zylinders in Nomura, Hughes (1992). Die entsprechenden Angaben können Bild 7.17 entnommen werden. Aus den angegebenen

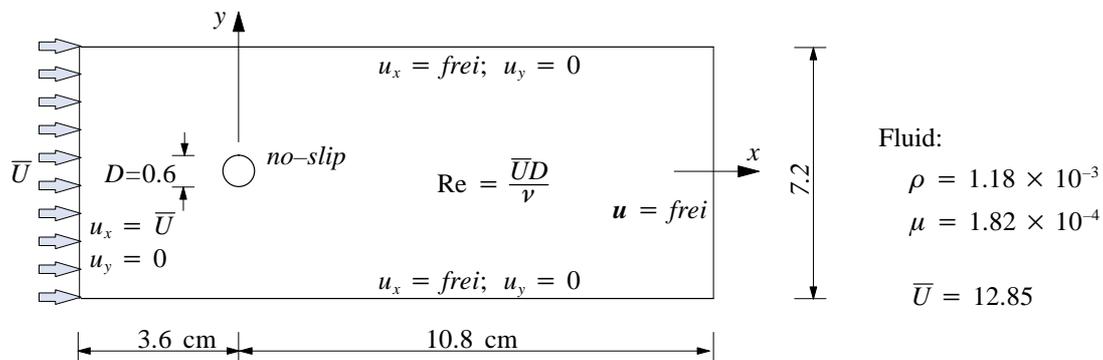


Bild 7.17: Umströmter flexibler Zylinder – Problemstellung, Geometrie, Randbedingungen

Daten folgt für den undeformierten Zylinder eine Reynoldszahl von $Re = 40$. Der flexible Zylinder hat eine Wandstärke von $t^S = 0.02$, eine Querdehnzahl von $\nu^S = 0.30$ und einen Elastizitätsmodul von $E^S = 1000$. Diese Angaben sind analog zu den Ausführungen in Ghattas und Li (1995) gewählt. Die Aufgabenstellung wird hier als instationäres Problem betrachtet. Die Ausgangskonfiguration bildet dabei ein spannungsloser Zylinder in einem ruhenden Fluid. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ beginnt die Einströmung, die in einem harmonischen Zeitverlauf nach $t = 0.3$ den Wert \bar{U} erreicht. Die dargestellte Simulation erstreckt sich über einen Zeitraum von $0.0 \leq t \leq 4.4$. Kurz nach diesem Zeitraum würde in der vorliegenden Simulation Kontakt zwischen den Zylinderwänden auftreten.

Die Vernetzung des Fluidgebietes mit 7298 Q1Q1-Elementen wird analog zu der in Bild 4.13 dargestellten Diskretisierung gewählt. Die Diskretisierung des dünnwandigen flexiblen Zylinders erfolgt mit 63 neunknotigen vollintegrierten Verschiebungselementen und ist in Bild 7.18(links) dargestellt. Die Aufteilung des CFD-Gebietes in ALE- und Euler-Bereiche zeigt Bild 7.18(rechts).

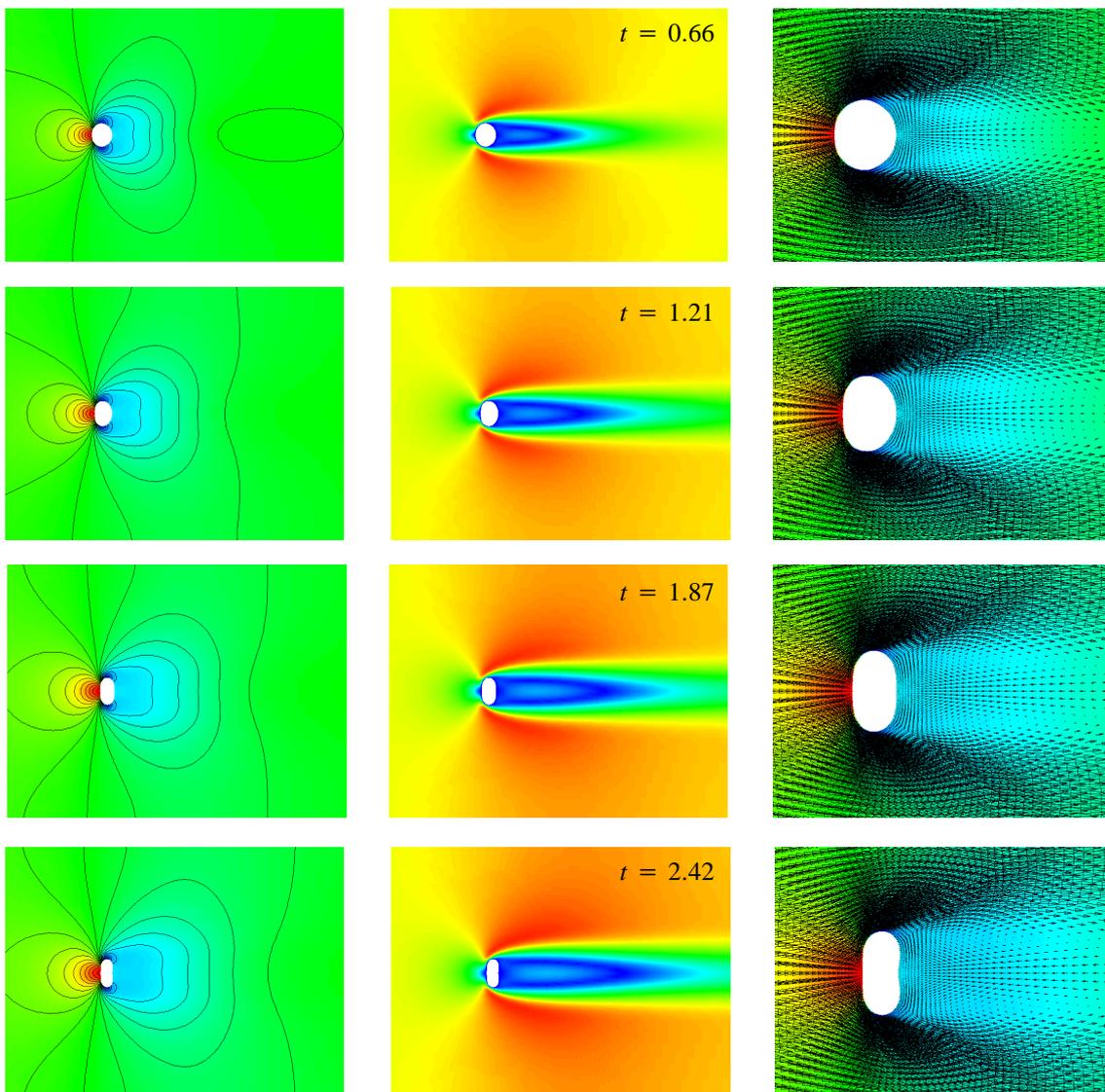
Als Gesamtalgorithmus zur Lösung des gekoppelten Problems wird der gestaffelte Dreifeld-FSI-Löser mit Strukturprädiktor eingesetzt. Die Zeitschrittweite wird zu $\Delta t = 0.01$ gewählt. Die zeitliche Integration des Strömungsfeldes erfolgt mit einem Einschritt- θ -Verfahren und zwei Iterationen pro Zeitschritt zur Behandlung der Nichtlinearitäten. Das Strukturfeld wird



Bild 7.18: Diskretisierung des Zylinders und Aufteilung des Strömungsgebietes

mit dem Generalisierten- α -Verfahren in der Variante des Bossak- α -Verfahrens integriert. Der Spektralradius wird dabei zu $\rho_\infty = 0.9$ gesetzt. Dies führt auf die Zeitintegrationsparameter $\alpha_m = -0.0526$, $\alpha_f = 0.0$, $\beta = 0.2770$ und $\gamma = 0.5526$.

In Bild 7.19 sind Momentaufnahmen der Strömungslösungen vom unverformten Zylinder bis hin zum stärksten Zylinderverformungszustand dargestellt. Die Abbildungen für einen Ausschnitt des Strömungsgebietes zeigen die Isobaren, die Verteilung des Betrages der Strömungsgeschwindigkeiten und die Geschwindigkeitsvektoren im Nahbereich des Zylinders.



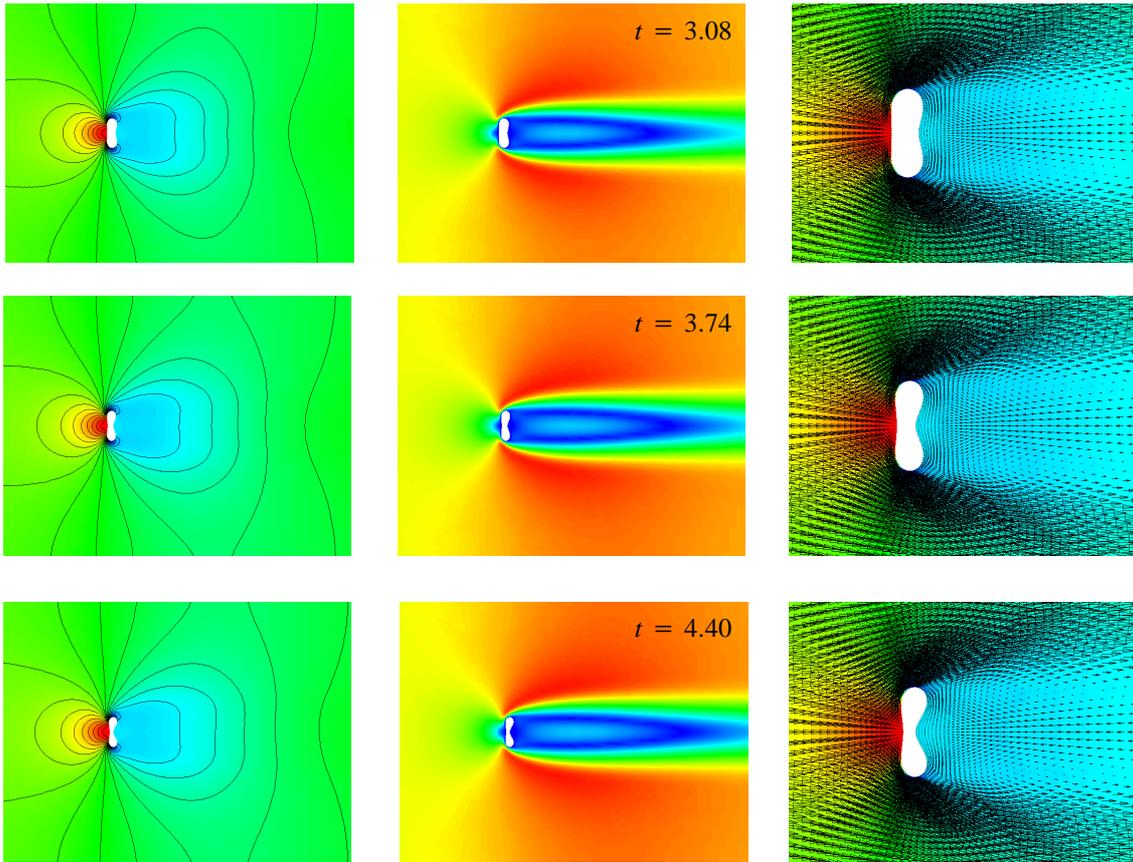


Bild 7.19: Strömungslösungen bei umströmten flexiblem Zylinder – Ausschnitte aus Momentenaufnahmen der Isobaren, des Geschwindigkeitsbetrages und der Geschwindigkeitsvektoren im Zylindernahbereich

Bild 7.20 zeigt einen Vergleich der stationären Umströmung eines starren Zylinders bei einer Reynoldszahl $Re = 40$ mit einer Momentaufnahme der Strömungslösung bei einer starken Zylinderverbreiterung. Aus der Abbildung werden die stark vergrößerten Nachlaufwirbel im zweiten Fall deutlich.

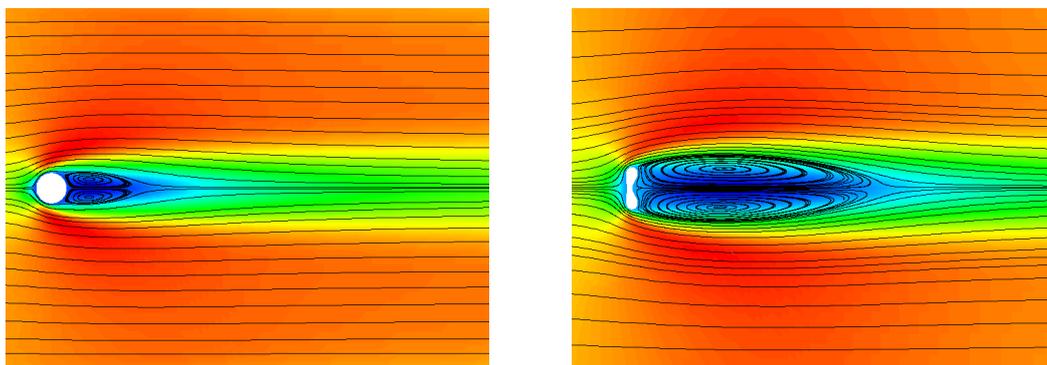


Bild 7.20: Vergleich der Stromlinien (auf u_x) bei der stationären Umströmung eines fixen Zylinders (links) und der Umströmung eines flexiblen Zylinders (rechts)

Eine Reihe von Momentenaufnahmen der Strukturdeformationen zeigt Bild 7.21. Darin sind auch die Drucklasten des Fluides in Form der äquivalenten Knotenkräfte eingetragen. Die seitliche Sogwirkung des Fluides auf den Zylinder ist klar zu erkennen. Ghattas und Li (1995) behandeln

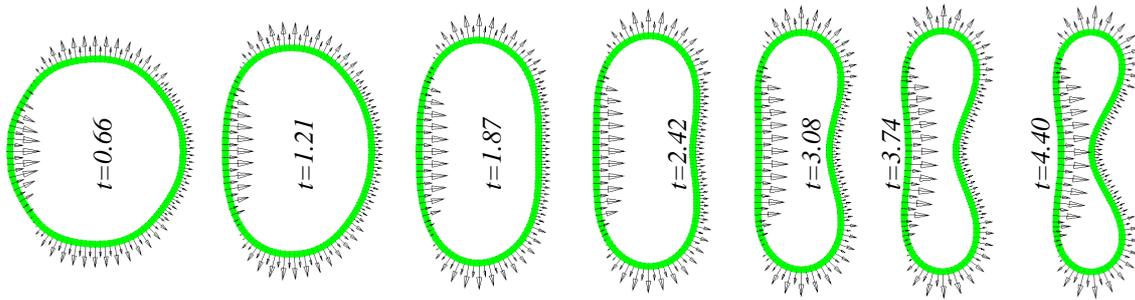


Bild 7.21: Momentaufnahmen der Strukturdeformationen eines umströmten flexiblen Zylinders mit äquivalenten Knotenkräften aus dem Fluiddruck

denselben Fall eines umströmten flexiblen Zylinders. Leider ist das dort entwickelte Verfahren nur in der Lage, rein stationäre gekoppelte FSI-Probleme zu behandeln. Die skizzierten Ergebnisse aus Ghattas und Li (1995) lassen jedoch die hier gefundenen Lösungen als plausibel erscheinen.

Zur Skizzierung der Ergebnisse des CMD-Lösers sind in Bild 7.22 schließlich noch drei Netz-

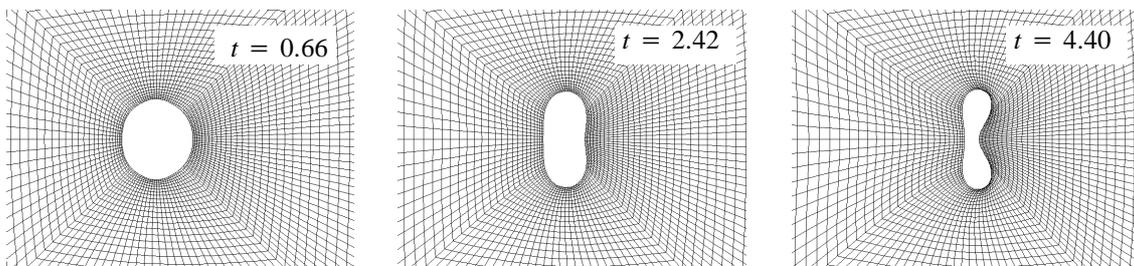


Bild 7.22: Netzdeformationen bei umströmten flexiblen Zylinder

deformationszustände wiedergegeben. Dabei ist für den gesamten Simulationszeitraum nur eine einzige Faktorisierung der Pseudo-Struktur-Stifigkeitsmatrix erforderlich. Sämtliche Netzdeformationen konnten damit durch reines Rückwärtseinsetzen erhalten werden. Dies bedeutet bei 11340 Pseudo-Struktur-Freiheitsgraden eine beträchtliche Rechenzeitersparnis.

7.5.3 Wirbelerregte flexible Struktur

Dieses Beispiel wurde bereits in Wall, Ramm (1998) beschrieben. Es soll dazu dienen, die Kopplung komplexer instationärer Strömungsphänomene mit großen Strukturdeformationen zu untersuchen und zu zeigen, ob die entwickelten Verfahren eine sinnvolle gekoppelte Systemantwort liefern können.

Die Konfiguration ist in Bild 7.23 dargestellt. Es handelt sich um eine flexible elastische Struktur, die an der Nachlaufseite an einen nicht stromlinienförmigen Körper montiert ist. Bei einer Umströmung dieses Körpers mit einer Reynoldszahl von $Re=100$ wird das bereits diskutierte Phänomen einer Wirbelstraße erwartet. Diese Wirbel treffen nun auf die flexible Struktur und regen diese zum Schwingen an. Je nach Verhältnis der Wirbelfrequenz zu den Eigenfrequenzen der Struktur werden unterschiedliche Strukturdeformationen erwartet. Diese Deformationen können umgekehrt wiederum die Wirbelfrequenz oder allgemeiner die dynamischen Kenngrößen der Strömung beeinflussen. Fluideigenschaften und Einströmgeschwindigkeiten sind dem Beispiel des oszillierenden starren Zylinders aus Nomura und Hughes (1992) entnommen.

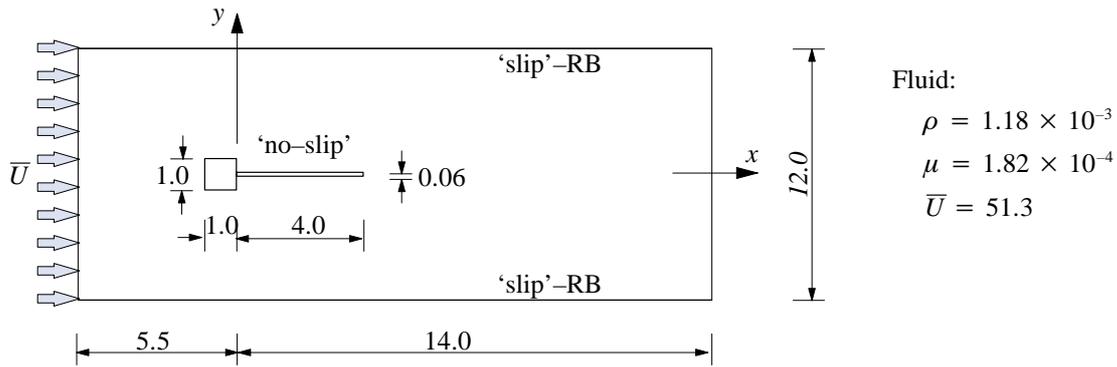


Bild 7.23: Wirbelerregte flexible Struktur – Problemstellung

Die verwendeten Lösungs- und Zeitintegrationsalgorithmen werden in Kapitel 7.5.2 angegeben. Bild 7.24 zeigt die räumliche Diskretisierung des Strömungsgebietes und dessen Auftei-

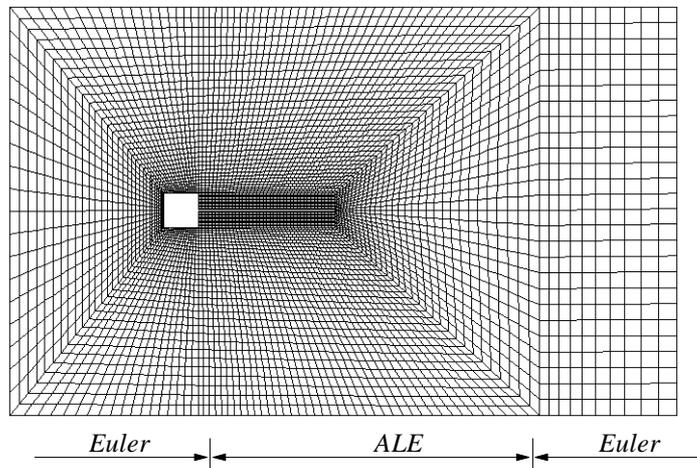


Bild 7.24: Wirbelerregte flexible Struktur – Netz und Gebietsaufteilung für CFD (Euler – ALE)

lung in reine Euler-Gebiete und in ALE-Gebiete. Für das Fluidgebiet werden 6340 Q1Q1-Elemente eingesetzt; 4352 Elemente davon liegen im ALE-Bereich. Die Strukturdiskretisierung erfolgt mit 20 vollintegrierten neunknotigen Verschiebungselementen.

Zunächst soll die Veränderung der gekoppelten Strukturantwort bei einer Änderung der Strukturparameter untersucht werden. Bild 7.25 zeigt den Verlauf der Vertikalverschiebungen für zwei verschiedene Strukturkonfigurationen. Es wird ersichtlich, daß Struktur 1 hauptsächlich im ersten Mode schwingt. Im Vergleich dazu werden in der Struktur 2 durch die Umströmung auch höhere Moden angeregt. Der Unterschied zwischen den beiden Modellen besteht in einer kleinen Änderung des Elastizitätsmoduls und einer drastischen Änderung der Strukturdichte. Beiden Modellen liegt eine Poissonzahl von $\nu = 0.35$ zugrunde. Eine analoge Änderung der Strukturparameter würde für ein lineares Strukturmodell eine Verschiebung der ersten Eigenfrequenz von 19.1 nach 3.8 bedeuten. Dies ist gleichbedeutend mit einer Änderung der Schwingungsperiode des ersten Schwingungsmodes von 0.33 nach 1.65.

Die komplexere der beiden Strukturantworten (Struktur 2) soll noch ausführlicher dargestellt werden. Bild 7.26 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt der Strukturantwort. Zur Verdeutlichung des dynamischen Verhaltens der Struktur sind in Bild 7.26 einzelne Deformationszustände der Struktur dargestellt.

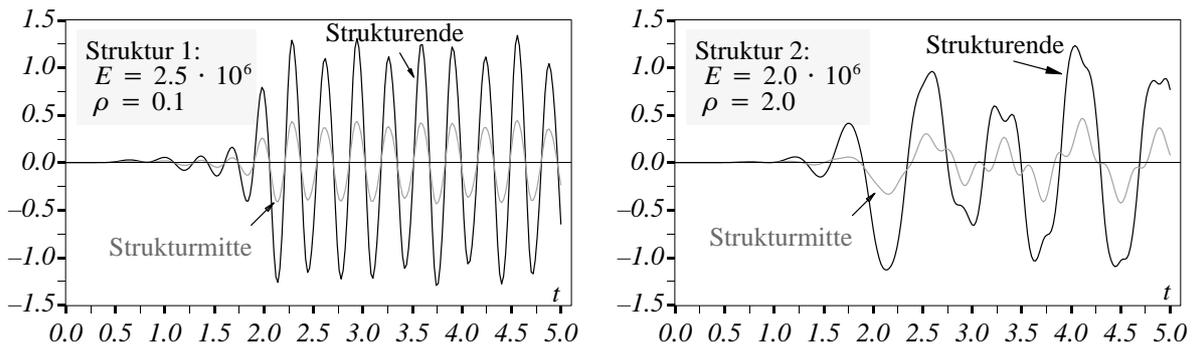


Bild 7.25: Wirbelerregte flexible Struktur – Zeitverläufe der Strukturdeformationen für zwei verschiedene Strukturkonfigurationen

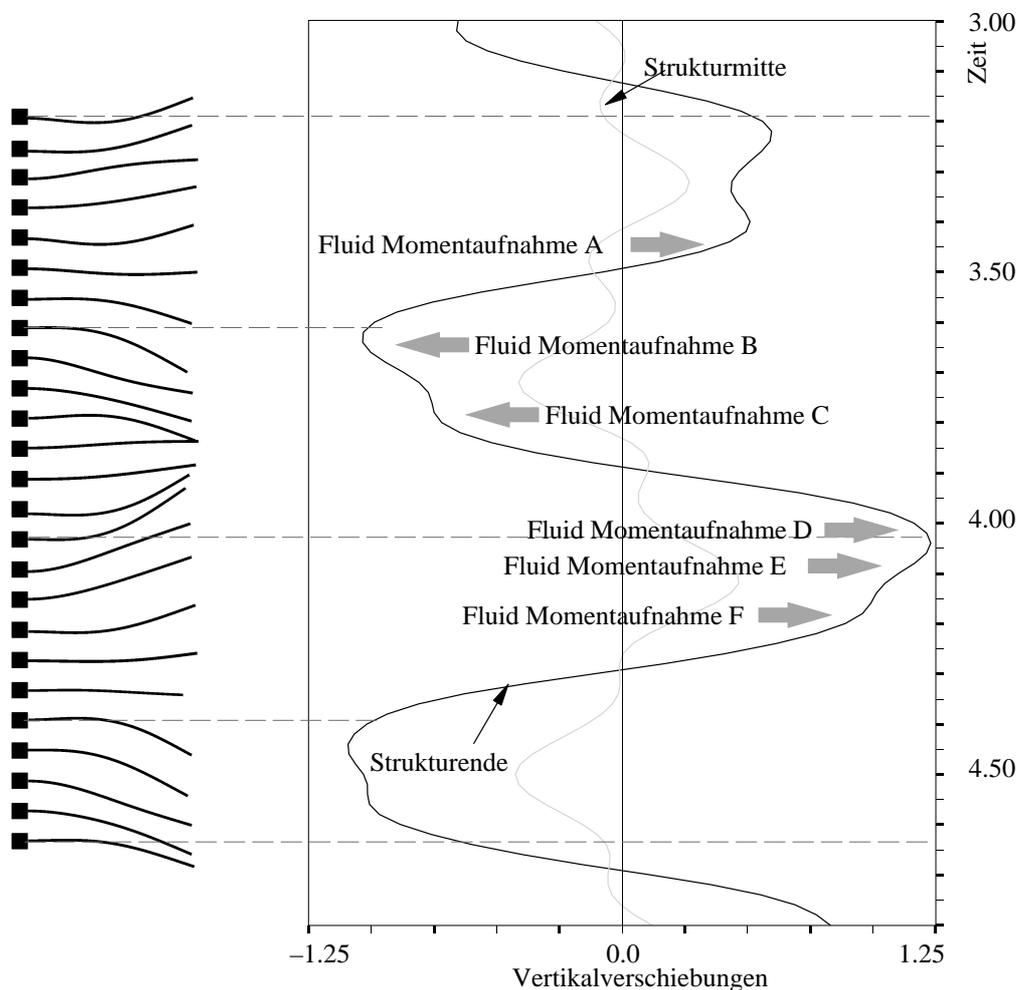
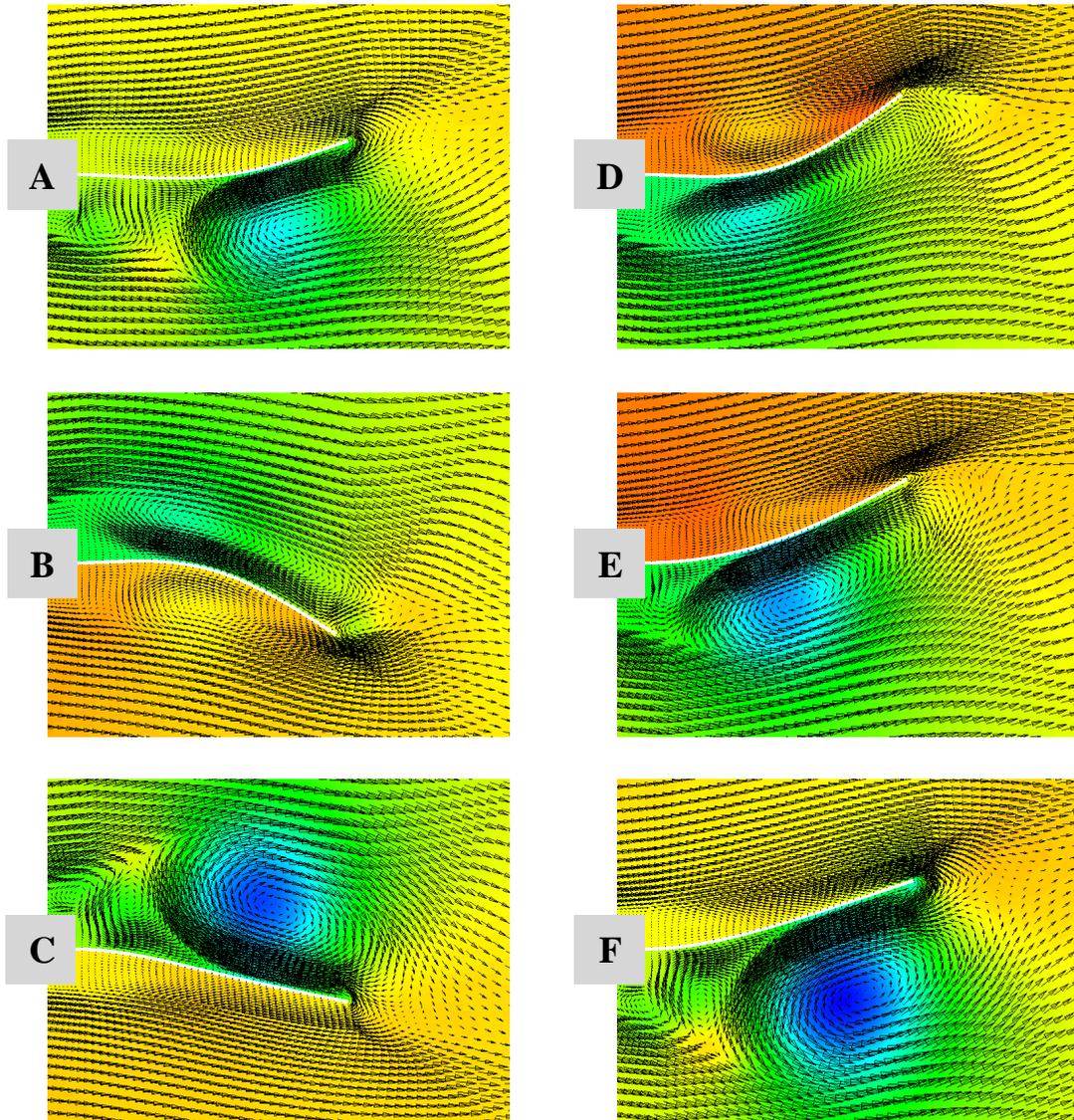


Bild 7.26: Wirbelerregte flexible Struktur – Ausschnitt aus dem Zeitverlauf und Momentaufnahmen der Strukturdeformationen

Vor allem die Strömungslösung in der Nähe der Struktur zeigt eine hohe Komplexität. Einzelne Momentaufnahmen des Strömungszustandes in Form der Geschwindigkeitsvektoren des Fluides und des Druckfeldes werden in Bild 7.27 wiedergegeben. Die Farbskala zeigt dabei mit blau einen ‘niedrigen’ negativen Druck (Sog) und mit rot einen hohen Druck an. In den Abbil-



*Bild 7.27: Wirbelerregte flexible Struktur – Momentaufnahmen des Strömungsfeldes (Geschwindigkeitsvektoren auf Druck) im Nahbereich der flexiblen Struktur
A ($t=3.44$), B ($t=3.64$), C ($t=3.78$), D ($t=4.02$), E ($t=4.08$), F ($t=4.18$)*

dungen sind eine Reihe von unterschiedlich großen Wirbeln erkennbar, die entlang der flexiblen Struktur ‘abrollen’. Die Strukturdeformationen in Bild 7.27 sind nicht überhöht, d.h. es handelt sich hier tatsächlich um große Strukturdeformationen. Auch der quadratische Körper ist in den Abbildungen maßstabgetreu dargestellt. Der entwickelte Pseudo-Struktur-CMD-Löser ist in der Lage, die Netzdeformation über den gesamten Simulationszeitraum ohne ‘Remeshing’ zu beschreiben. Auch hier ist nur eine Faktorisierung der CMD-Matrix erforderlich.

Für das dargestellte Beispiel wurden keine Konvergenzstudien durch ausführliche Vergleichsrechnungen mit verschiedenen räumlichen und zeitlichen Diskretisierungsfeinheiten durchgeführt. Die Rechnungen legen den Schluß nahe, daß die dargestellten Ergebnisse nicht als exakt zeitgenaue Ergebnisse betrachtet werden können. Die grundsätzlichen dynamischen Phänomene sowohl in der Strukturlösung, z.B. die Größen der Amplituden und die angeregten Frequenzen, wie auch in der Fluidlösung scheinen jedoch prinzipiell erfaßt zu werden.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Der Anfang ist gemacht: ‘Was bisher geschah’

In dieser Arbeit konnte ein allgemeiner Ansatz zur numerischen Simulation von Fluid–Struktur–Interaktions–Problemen erfolgreich umgesetzt werden. Basis dafür waren komplexe Modelle und die Entwicklung entsprechender Verfahren für *sämtliche* Teilbereiche und das Gesamtsystem dieses Mehrfeld–Problems. Dazu lagen die Hauptaugenmerke auf der Sichtung, der selbstständigen Konzeption und schließlich der Umsetzung von Verfahren für die angestrebten Problemklassen. Diese Umsetzung konnte mit einer Reihe von Neu– bzw. Weiterentwicklungen in den einzelnen Themenbereichen verbunden werden. Durch das umgesetzte Konzept wird es möglich, viele der sonst üblichen Einschränkungen an die gekoppelten Systeme fallen zu lassen. Es wird dadurch möglich komplexe gekoppelte Fluid–Struktur–Interaktions–Systeme zu beschreiben.

Der Ansatz für das gekoppelte Fluid–Struktur–Interaktions–Problem basiert auf einem reinen Finite–Element–Konzept für sämtliche betrachteten Felder. Dazu konnte ein neues stabilisiertes FE–Verfahren zur Simulation instationärer, inkompressibler, viskoser Strömungen entwickelt werden. Wesentliche Aspekte betreffen die eingesetzten, zum Teil neu entwickelten und verbesserten Stabilisierungsansätze und neue Kombinationen algorithmischer Ansätze. Das entwickelte Verfahren ist in der Lage, Elemente niederer und beliebiger höherer Ordnung bei gleicher Interpolationsordnung für Geschwindigkeiten und Druck einzusetzen. Es erlaubt für instationäre Strömungsberechnungen eine einfache adaptive Zeitschrittweitensteuerung. Die Erweiterung des Strömungslösers auf zeitveränderliche Gebiete, aufbauend auf einer ‘Arbitrary Lagrangean Eulerian’–Betrachtungsweise (ALE), bildet einen zweiten Schwerpunkt. Dabei standen eine konsistente Ableitung insbesondere für die Stabilisierungsverfahren und eine entsprechende algorithmische Umsetzung im Vordergrund. Dadurch konnte eine neue semi–diskrete, konsistente, voll stabilisierte ALE–FEM entwickelt werden. Um eine möglichst breite Anwendungspalette zu erreichen, wurde ein leistungsfähiges Werkzeug zur Beschreibung der Netzbewegung innerhalb der ALE–Formulierung zur Strömungssimulation entwickelt. Für das Struktur–Feld des Mehrfeld–Problems wurden existierende Verfahren zur geometrisch nichtlinearen Elastodynamik für die Erfordernisse der gekoppelten Problemstellung adaptiert. Diese wurden ebenso wie die Strömungslöser und die ‘Netzlöser’ in eine neu entwickelte Umgebung zur Simulation von Mehrfeldproblemen eingebettet. Für die gekoppelten Systeme wurden partitionierte Lösungsansätze umgesetzt. Die Kombination dieser einzelnen Bausteine mündete schließlich im neu vorgestellten Dreifeld–FSI–Löser.

Ein möglicher Ausblick: ‘Es gibt noch viel zu tun’

Die Entwicklung eines numerischen ‘Basis–Werkzeugkoffers’ stand im Vordergrund, um das Bild aus dem Einleitungskapitel 1.1 nochmals aufzugreifen. Dieser sollte die Simulation von komplexen Fluid–Struktur–Interaktions–Problemen ermöglichen. Die Erläuterungen der dazu notwendigen Teilschritte und ‘Einzelwerkzeuge’ haben gezeigt, daß bei der Entwicklung der diskutierten Ansätze und Verfahren auch auf die theoretischen Aspekte Wert zu legen ist.

Prinzipiell lassen sich zukünftige Aufgaben in zwei Gruppen einteilen. Die erste Gruppe betrifft die weitere theoretische Absicherung und Verbesserung der bereits entwickelten Verfahren. Die zweite Gruppe zielt auf eine Erweiterung der behandelbaren Problemklassen.

In die erste Aufgabengruppe fallen Analysen und Weiterentwicklungen der ALE-Verfahren und Untersuchungen zu den GCL. Dabei sollte eine einheitliche Formulierung der GCL für die vorliegenden Verfahren, auch für Zeitintegrationen und Elemente höherer Ordnung, gefunden werden. Hierzu gehören Untersuchungen der wesentlichen Erhaltungseigenschaften, des Langzeitverhaltens und der Stabilität für FSI-Löser. Auch bei den eingesetzten stabilisierten Finite-Element-Verfahren ist sicher noch weitere Arbeit nötig. Hier geht es um die Frage der Definitionen der Stabilisierungsparameter und Verbesserungen für den Einsatz bei stark verzerrten Netzen. Adaptive Ansätze in sämtlichen Verfahrenskomponenten sind weitere Schritte hin zu einer qualitätsgesicherten Simulation gekoppelter Fluid-Struktur-Probleme.

Ist die Problemklasse zu erweitern, spielen Effizienzfragen die zentrale Rolle; Hierzu gehören effiziente Löser und parallele Rechenansätze. Erst dann kann beispielsweise das dynamische Stabilitätsverhalten komplexer Schalenstrukturen in dreidimensionalen Strömungen beschrieben werden. Eine Problemklassenerweiterung ist auch durch den Einbau weiterer Strömungs- und Strukturmodelle, wie Turbulenzmodelle bzw. materiell nichtlinearer Ansätze, sinnvoll.

Die Komplexität der behandelten Fragestellungen macht eine Verifikation der Modelle und Verfahren sehr schwierig. Experimente sind hierzu unumgänglich. Die Erfahrungen rufen förmlich nach der Definition von instationären Benchmarkbeispielen. Diese sollten vergleichend experimentell und numerisch behandelt werden.

A Anhang

A1 Einführung in die ‘Computational Fluid Dynamics’

Die vorliegende Arbeit stellt die erste Arbeit am Institut für Baustatik dar, die sich mit Fluiden beschäftigt. Aus diesem Grunde sollen hier, in Ergänzung zu den Ausführungen in Kapitel 2.3, einige einführende Bemerkungen zur Fluidodynamik und im speziellen zur ‘Computational Fluid Dynamics’ gegeben werden. Dieses Kapitel soll also als zusätzliche Einstiegshilfe für den mit den Grundlagen der Strömungsmechanik nicht so vertrauten Leser angesehen werden. Ausführliche Darstellungen finden sich u.a. in Cuvelier et al. (1986), Ferziger und Peric (1997), Fletcher (1991), Gresho (1991a & b bzw. 1992), Gresho und Sani (1998), Gunzburger (1989), Hirsch (1988 und 1990), Schlichting und Gersten (1997) und Warsi (1993).

Bevor die eigentliche Einführung erfolgt, sollen die Möglichkeiten der CFD, tatsächliche Strömungsphänomene in der Natur zu beschreiben, nochmals anschaulich gemacht werden. Bild A.1 zeigt die Luftaufnahme einer windumströmten Insel. Darin visualisieren die Wolken

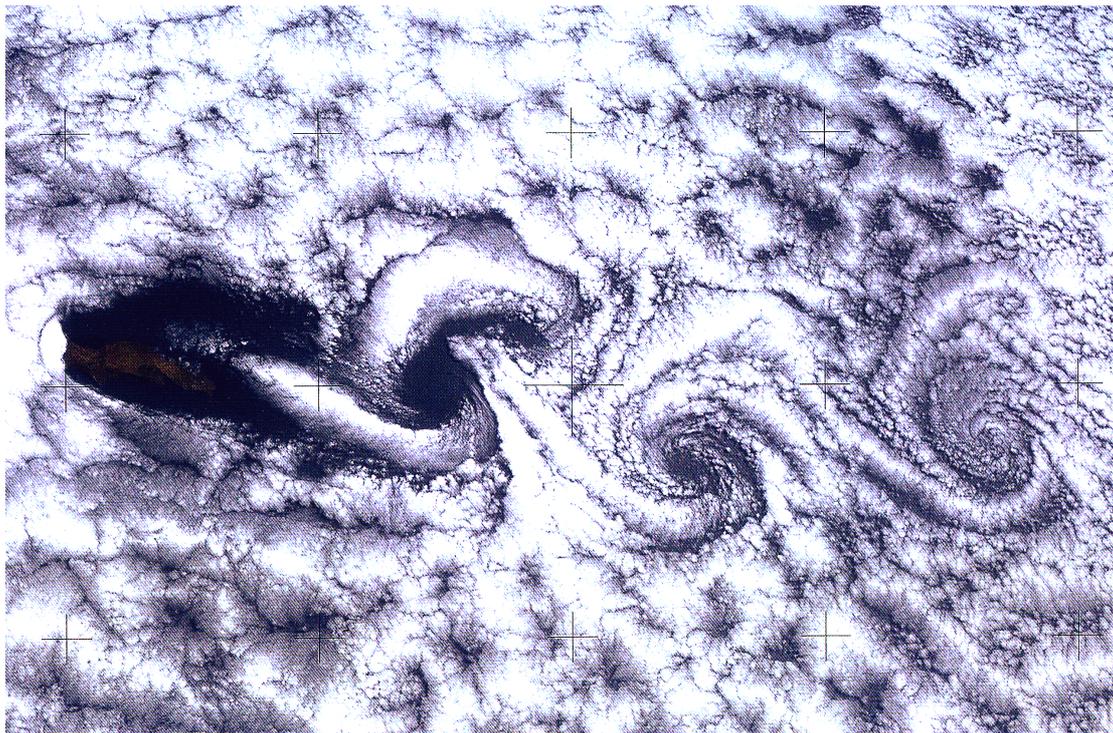
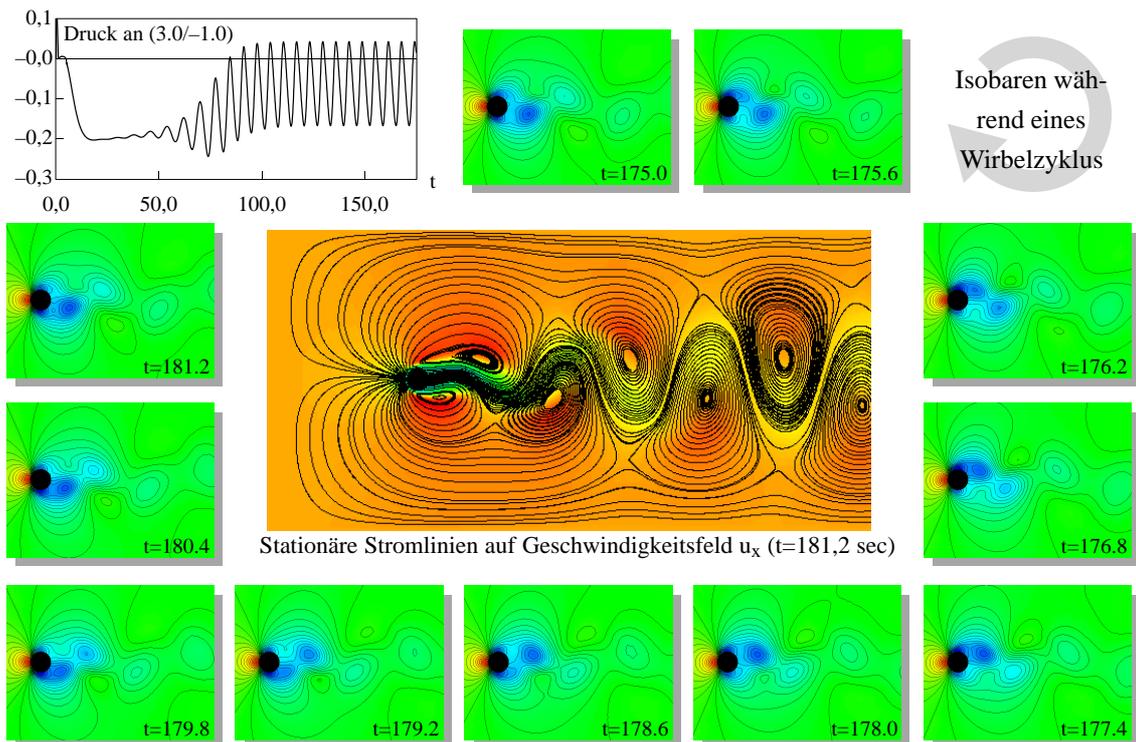


Bild A.1: ‘Islands in the wind’ – Wirbelbildung im Nachlauf der Insel Guadalupe (Mexiko)
(ORBIT – NASA Astronauts Photograph the Earth, National Geographic Society)

gewissermaßen die Wirbelstraße im Nachlauf der Insel. Im Vergleich dazu zeigt Bild A.2 das Ergebnis der numerischen Berechnung (analog zu den Ausführungen in Kapitel 4.5) einer Zylinderumströmung. Dieses Beispiel zeigt sehr schön die Ähnlichkeit von Strömungen, die sich auch in den in der Arbeit diskutierten dimensionslosen Kennzahlen ausdrückt. Der Nachlauf der Strömung in Bild A.1 erstreckt sich über eine Länge von ca. 150 Meilen.



ild A.2: Kármánsche Wirbelstraße in einem Zylindernachlauf

A1.1 Einleitung

Am Beginn dieser kurzen Einführung scheint es angebracht, sich mit dem Medium, das im Kern der ‘Computational Fluid Dynamics’ liegt, dem Fluid, etwas vertrauter zu machen. Die Definition eines Fluides wurde in Kapitel 2.3 ja bereits kurz angeführt. Fluide sind demnach, im Gegensatz zu Festkörpern (Strukturen), Substanzen, die in der Ruhelage Scherkräften nicht widerstehen können. Dies können sowohl Flüssigkeiten als auch Gase sein. Die für die Fragestellungen und Formulierungen der vorliegenden Arbeit wesentlichen Kenngrößen bzw. Materialparameter für Fluide sind deren Dichte und Viskosität, d.h. Zähigkeit. In Tabelle A.1 sind diese Materialparameter für einige, ganz unterschiedliche Fluide angegeben.

Fluid	Dichte ρ [kg/m ³]	Dynamische Viskosität μ [kg/m·s]
Luft	1.18	$1.98 \cdot 10^{-5}$
Wasser	0° C	$1.79 \cdot 10^{-3}$
	40° C	$0.65 \cdot 10^{-3}$
	100° C	$0.28 \cdot 10^{-3}$
Silikonöl	956	$1.45 \cdot 10^{-1}$
Mineralöl	935	$0.41 \cdot 10^{-1}$

Tabelle A.1 Eigenschaften verschiedener Fluide

Für den Laien scheint es wohl auf den ersten Blick etwas verwirrend, daß Flüssigkeiten und Gase auf dieselbe Weise behandelt werden. Thermodynamisch haben diese auch durchaus unterschiedliche Charakteristika, und dennoch ist auf der betrachteten Ebene eine gemeinsame

Behandlung möglich und angebracht. Bereits frühe Arbeiten zur Strömungsmechanik bezeichnen die Strömungen von inkompressiblen, viskosen Fluiden, auf Grund ihrer fundamentalen Eigenschaften und ihrer praktischen Bedeutung, als im ‘Zentrum der Strömungsdynamik’ stehend. Exakterweise müßte jedoch eher von *inkompressiblen Strömungen* — ein strömungsmechanischer Terminus — als von *inkompressiblen Fluiden* — ein thermodynamischer Ausdruck — gesprochen werden. Diese Unterscheidung soll deutlich machen, daß das Thema der Untersuchungen auch *inkompressible Strömungen* von *kompressiblen Fluiden* sein können. Im Laufe der Arbeit wurde bereits mehrfach darauf verwiesen, daß die Frage der Inkompressibilität eine Frage der Zeitskalen ist. Dabei kommt es darauf an, wo die Zeitskala des untersuchten Phänomens im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit in diesem Medium liegt.

Eine der wesentlichen Kennzahlen zur Beschreibung einer Strömung, d.h. zur Charakterisierung einer Strömung, ist die Reynoldszahl (siehe Kapitel 2.3.3). Diese dimensionslose Kennzahl beschreibt das Verhältnis der Trägheitskräfte zu den viskosen Reibungskräften. Um ein Gefühl für die Größenordnungen der Reynoldszahlen, und der damit verbundenen Strömungsphänomene, zu bekommen, sind in Tabelle A.2 einige ‘typische’ Reynoldszahlen für mehr oder weniger wichtige bzw. vorstellbare Strömungen angeführt.

Description	Re
Spermatozoon (L=0.07 mm) swimming at max. speed	6×10^{-3}
Water droplet (D=0.07 mm) falling through air	6.4×10^{-1}
Blood flow (U=13.5 cm/s) in a circular artery (r=0.2 cm)	1.35×10^2
Wind blowing (10 m/s) over telegraph wires	1×10^3
Cricket or baseball propelled at 35 m/s	2×10^5
Car (L=4.5 m) at U=15 m/s (i.e. 54 km/h)	4×10^6
Shark (L=1.5 m) swimming at max. speed	8×10^6
Large jet transport aircraft (747) at cruise altitude	7×10^7
Ocean liner (Q.E. II, L=324 m) at U=15 m/s	4.5×10^9
Planetary boundary layer (L=1000 km, U=20 m/s)	18×10^{12}

Tabelle A.2 Einige ‘typische’ Reynoldszahlen (teilweise aus Fletcher (1991))

A1.2 Strömungsmodelle und Approximationsebenen

Approximationsebenen

Die Wahl des passenden bzw. notwendigen Strömungsmodells richtet sich nach der tatsächlichen Komplexität einer Strömung bzw. der konkreten vorliegenden Fragestellung. Jedes dieser Strömungsmodelle basiert dabei auf gewissen Approximationen. Die unterschiedlichen Strömungsmodelle können dementsprechend unterschiedlichen Approximationsebenen zugeordnet werden. Eine schöne Darstellung dieser möglichen Approximationsebenen findet sich z.B. in Hirsch (1990). Die geringfügig geänderte bzw. kommentierte Darstellung aus Hirsch (1990)

zeigt Bild A.3. Die höchste Ebene stellt dabei das System der Navier–Stokes–Gleichungen

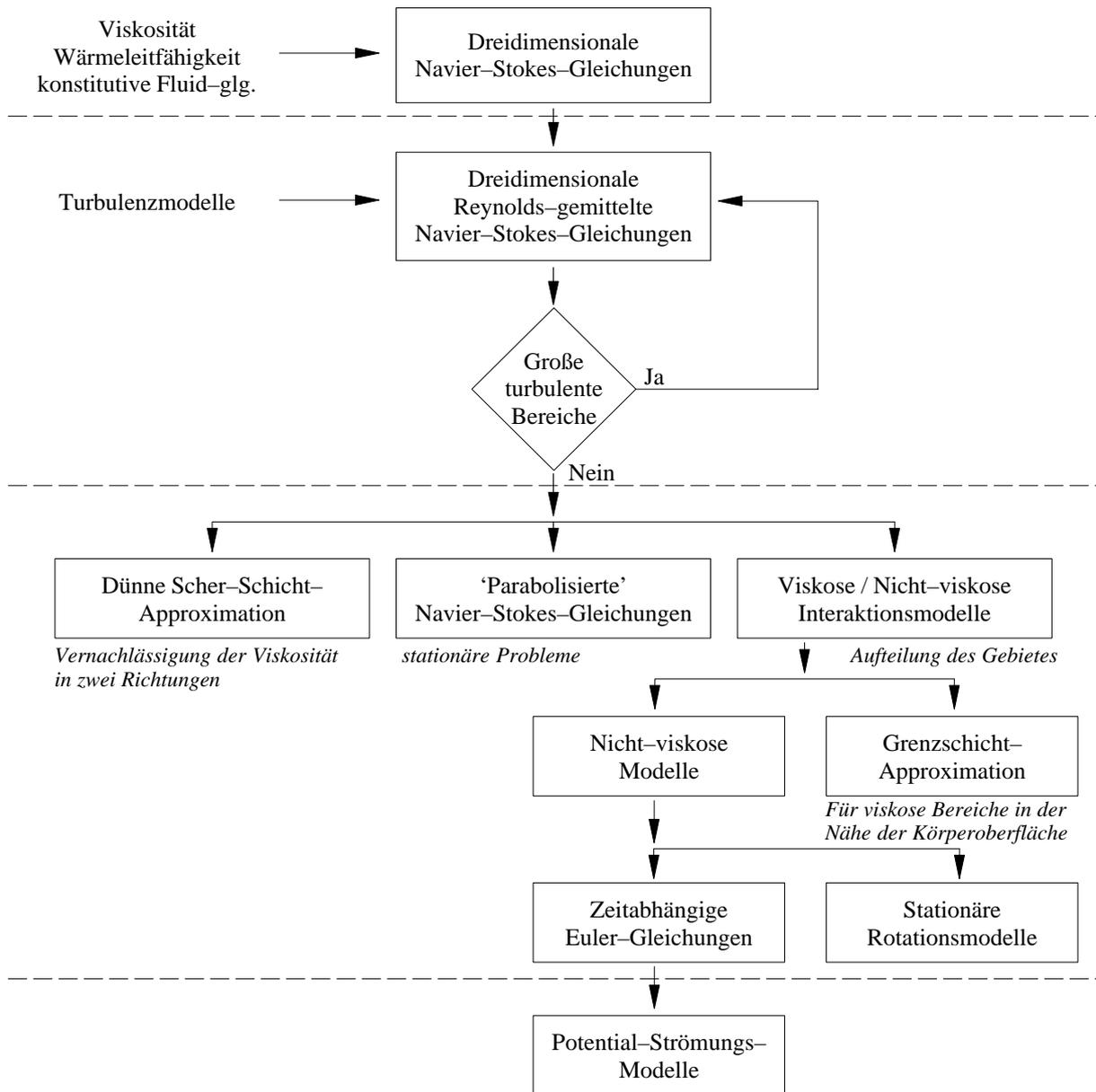


Bild A.3: Approximationsebenen für Strömungsmodelle

dar. Unterstützt durch empirische Gesetze zur Abhängigkeit der Viskosität und der Wärmeleitfähigkeit von den restlichen Strömungsvariablen und durch eine konstitutive Gleichung können damit alle Strömungsphänomene erfaßt werden.

Strömungsmodelle

Nun sollen einige der unterschiedlichen Strömungsmodelle, ausgehend vom komplexesten Modell bis hin zur einfachsten Strömung, kurz angesprochen werden (vergleiche dazu auch die Ausführungen in Kapitel 2 bzw. speziell in 2.3). Auf eine Darstellung der Formeln wird in diesem Zusammenhang verzichtet. Diese können, in den unterschiedlichsten Schreibweisen und Varianten, einfach der zu Beginn des Kapitels A1 angeführten Literatur entnommen werden.

- **Navier–Stokes–Gleichungen**

Die vollständigen Navier–Stokes–Gleichungen stellen sich als ein System von (in 3D) fünf gekoppelten, nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Diese beschreiben die Erhaltung von Masse, Impuls und Energie.

- **Inkompressible Navier–Stokes–Gleichungen**

Ein häufig Verwendung findender Spezialfall der Navier–Stokes–Gleichungen ergibt sich, wenn für das Fluid ein inkompressibles Verhalten vorausgesetzt wird. Dies ist möglich bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten, d.h. wenn die Zeitskala des untersuchten bzw. dominierenden dynamischen Vorgangs weit entfernt liegt von der Schallgeschwindigkeit des Fluids bzw. wenn keine großen Temperaturdifferenzen vorliegen.

- **Stokes–Gleichungen**

Wenn die Strömungsgeschwindigkeiten sehr klein sind, das Fluid stark viskos ist oder die geometrischen Dimensionen sehr klein sind, d.h. wenn die Reynoldszahl sehr klein ist, können die konvektiven Effekte in den Navier–Stokes–Gleichungen vernachlässigt werden. Diese ‘kriechenden Strömungen’ werden dann ausschließlich durch die viskosen Kräfte, die Druck- und die Volumenkräfte bestimmt. Sie werden auch als Stokes–Strömungen bezeichnet.

- **Euler–Gleichungen**

Im allgemeinen sind die Viskositätseffekte weit entfernt von den Körperoberflächen sehr klein und können unter Umständen vernachlässigt werden. In diesem Fall entstehen aus den Navier–Stokes–Gleichungen die Euler–Gleichungen. Im Gegensatz zu den Navier–Stokes–Gleichungen stellen diese ein gekoppeltes System von (in 3D) fünf nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen *erster* Ordnung dar. Auch die Euler–Gleichungen können für kompressible und inkompressible Strömungen formuliert werden.

- **Potentialströmungen**

Die stärkste Vereinfachung der Strömungsgleichungen ergibt sich, wenn die Strömung nicht-viskos und rotations- bzw. drehungsfrei ($\xi = \nabla \times \mathbf{u} = 0$) angenommen wird. In diesem Fall kann sie mit Hilfe einer skalaren Potentialfunktion beschrieben werden. Im stationären und inkompressiblen Fall folgt daraus die auch numerisch sehr einfache Potential- bzw. Laplace-Gleichung. Die Bestimmung der drei (oder zwei) Geschwindigkeitskomponenten kann also hier durch die Bestimmung einer einzigen skalaren Funktion ersetzt werden. Die Drehungsfreiheit eines homogenen Fluids schließt das Fehlen einer Zähigkeitskraft von selbst mit ein. Für reibungsfreie Strömungen kann postuliert werden, daß jede Bewegung aus der Ruhe heraus drehungsfrei ist, kein Fluidelement in Drehung kommt, das nicht von Anfang an in Drehung war, und Wirbel weder entstehen noch verschwinden können.

Laminare und turbulente Strömungen

Bereits Leonardo da Vinci, und später auch z.B. O. Reynolds in seinem berühmten Farbfadenversuch (siehe z.B. Schlichting und Gersten (1998)), erkannten, daß es notwendig ist, prinzipiell zwei Strömungsformen zu unterscheiden. In dem Farbfadenversuch wird dazu einer Wasserströmung eine farbige Flüssigkeit zugeführt. Während sich nun bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten (bzw. Reynoldszahlen) ein geradliniger Farbfaden zeigt, ist bei höheren Reynoldszahlen ein vollständiges ‘Zerflattern’ des Farbfadens zu beobachten. Stocha-

stische, dreidimensionale, turbulente Fluktuationen überlagern sich der Grundströmung. Turbulenz kann quasi als eine Art Instabilität der laminaren Strömung angesehen werden. Der Übergang zwischen diesen beiden unterschiedlichen Strömungsarten wird über eine kritische Reynoldszahl beschrieben. Dieser Wert Re_{krit} zur Abgrenzung der turbulenten von den laminaren Strömungszuständen ist beispielabhängig (siehe beispielsweise Schlichting und Gersten (1998) bzw. auch Kapitel 4.5.2) und hat sich z.B. in den Rohrströmungsversuchen von Reynolds zu $Re_{krit} = 2300$ ergeben.

Da die Navier–Stokes–Gleichungen Strömungen vollständig beschreiben können, ermöglichen sie prinzipiell auch die direkte Simulation turbulenter Strömungen. Dieser Ansatz wird als ‘Direct Numerical Simulation’ (DNS) bezeichnet. Dazu müssen die entsprechenden feinen Skalen jedoch durch das Rechengitter auch vollständig aufgelöst werden, was meist weit über die Grenzen der vorhandenen Rechenleistung geht. Die erforderliche Anzahl an Gitterpunkten für die Anwendung einer DNS beträgt ca. $Re^{9/4}$. Unter Berücksichtigung der Auflösung sämtlicher relevanter Skalen, folgt eine überschlägige Entwicklung des Rechenzeitbedarfs in Abhängigkeit von der Reynoldszahl von Re^3 . DNS–Ansätze finden jedoch relativ häufig in der Untersuchung der ‘Transitions’–Bereiche bei turbulenten Strömungen Verwendung.

Eine andere, numerisch um Größenordnungen weniger aufwendige, Methode besteht in der Berücksichtigung der Turbulenzeffekte über Turbulenzmodelle im Sinne von Reynolds–gemittelten Navier–Stokes–Gleichungen (‘Reynolds–averaged Naviers–Stokes equations’ — RANS). Dabei werden die Strömungsgleichungen für die Mittelwerte gelöst und über einen Reynolds–Spannungsterm quasi die gemittelten turbulenten Fluktuationen berücksichtigt. Allerdings scheint dabei *das* Turbulenzmodell für alle möglichen Anwendungsbereiche noch nicht gefunden zu sein. Bekannte Vertreter solcher Turbulenzmodelle sind das algebraische Baldwin–Lomax–Turbulenzmodell oder das Zwei–Gleichungs–($K - \epsilon$)–Modell. In letzterem wird die turbulente Viskosität als Funktion der Energie K und der Dissipationsrate ϵ ausgedrückt.

Eine weitere Möglichkeit, die zwischen der DNS und der RANS angesiedelt ist, besteht in der Verwendung sogenannter ‘Large Eddy Simulation’–Ansätze (LES). Dabei werden die großen Skalen genau berechnet und nur die feinen Skalen werden über Turbulenzmodelle berücksichtigt. Diese Philosophie entspricht in gewisser Weise auch den besprochenen Grundüberlegungen zu den entwickelten stabilisierten Finite–Element–Verfahren (vergleiche Kapitel 3). Eine Kombination von LES–Ansätzen mit den entwickelten CFD–Verfahren in dieser Arbeit scheint sich deshalb geradezu aufzudrängen. Der Begriff der ‘subgrid–scale’–Ansätze (SGS) ist auch hier zu finden bzw. hat hier schon ‘Tradition’. Die meisten ‘subgrid–scale’–Modelle in diesem Zusammenhang sind Wirbel–Viskositäts–Modelle (‘eddy viscosity models’), die die sogenannte Wirbelviskosität mit den Eigenschaften des Dehnungsgeschwindigkeitstensors verknüpfen. Ein sehr bekanntes SGS–Modell ist durch das Smagorinsky–Modell gegeben.

A1.3 Variablen–Typen

Zur Formulierung bzw. Lösung der Strömungsgleichungen können unterschiedliche Sätze von Variablen herangezogen werden. In der Literatur sind dazu die unterschiedlichsten Varianten zu finden. Bedingung dabei ist nur, daß es möglich ist, die grundlegenden Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie mit diesen Variablen auszudrücken. Einige (wichtige) Variablenätze sollen hier kurz aufgelistet werden.

In der vorliegenden Arbeit kommen die sogenannten *Primärvariablen*, bzw. ‘*primitive variables*’, in der Form $\{p, \mathbf{u}\}$ zur Anwendung. Bei kompressiblen Strömungen können die Primärvariablen auch auf der Dichte ρ basieren und müssen noch eine zusätzlich Größe, z.B. die Temperatur T , beinhalten. Eine weitere Möglichkeit für zweidimensionale, inkompressible Strömungen besteht in der Verwendung der Wirbelzahl $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ und der Stromfunktion ψ , mit $\partial\psi/\partial y = u_x$ und $\partial\psi/\partial x = u_y$, als Variablen. Daraus folgt dann die sogenannte ‘Vorticity–Streamfunction’–Formulierung (siehe auch Kapitel 2.3.3).

Ein alternativer Variablensatz wird als *konservative Variablen* bezeichnet, da es sich hier um eine Formulierung in den ‘erhaltenen’ Größen selbst handelt. Die fünf Variablen (in 3D) lauten hier $\{\rho, \rho\mathbf{u}, \rho E\}$, wobei E die totale Energie bezeichnet. Diese folgt mit e als der inneren Energie aus $E = e + \mathbf{u}^2/2$.

Der letzte hier angeführte Variablensatz wird als *Entropievariablen* bezeichnet. Dabei finden die Größen $\{\tilde{\mu}/T, \mathbf{u}/T, -1/T\}$ Verwendung, wobei $\tilde{\mu}$ mit der Entropie s entsprechend $\tilde{\mu} = e + p/\rho - T s - \mathbf{u}^2/2$ ermittelt wird.

Variablen für inkompressible und kompressible Strömungen

Der Grund warum diese unterschiedlichen Variablentypen hier kurz angeführt werden liegt darin, daß diese für eine mögliche Erweiterung der entwickelten Verfahren eine Rolle spielen. Üblicherweise kommen nämlich für die unterschiedlichen Strömungsklassen der kompressiblen und inkompressiblen Strömungen nicht nur unterschiedliche Verfahren, sondern auch unterschiedliche Variablentypen zum Einsatz. Im ‘Normalfall’ sind dies die Primärvariablen für den inkompressiblen Fall und die konservativen Variablen für die kompressiblen Strömungen. Hauke und Hughes (1994) schlagen einen interessanten Ansatz für ein stabilisiertes Finite–Element–Verfahren vor, das in der Lage ist, sowohl kompressible als auch inkompressible Strömungen zu berechnen. Hauke und Hughes (1998) untersuchen nun welche Variablensätze sich für eine kombiniertes Verfahren am besten eignen. Aus dieser Studie folgen die Entropievariablen und die Primärvariablen, basierend auf dem Druck und inkl. Temperatur $\{p, \mathbf{u}, T\}$, als die geeignetsten für ein solches Unterfangen.

A1.4 Diskretisierungsverfahren der CFD

Hier sollen kurz die möglichen, räumlichen Diskretisierungsverfahren für partielle Differentialgleichungen bzw. die Strömungsgleichungen angesprochen werden. Dabei werden ausschließlich Verfahren behandelt bei denen das gesamte Rechengebiet diskretisiert wird, d.h. Verfahren wie z.B. die Randlement–Methode werden weiters nicht behandelt. Dieser kleine Überblick motiviert sich aus der Tatsache, daß in der vorliegenden Arbeit ausschließlich die Methode der Finiten Elemente verwendet wird, im CFD–Bereich jedoch alternative Verfahren wohl noch weiter verbreitet sind. Nachdem die Verfahren mit ihrem jeweiligen Grundprinzip kurz vorgestellt wurden, erfolgt ein kurzer Vergleich des verwendeten Ansatzes mit einer zur Zeit ebenfalls sehr populären Methode.

Verfahren

Bei den besprochenen Diskretisierungsverfahren handelt es sich um das Finite–Differenzen–Verfahren (FD), die Finite–Volumen–Methode (FV) und die Methode der Finiten Elemente

(FE). Das FD-Verfahren ist die klassische, und noch immer sehr weit verbreitete, Methode in der numerischen Strömungsmechanik. Die FEM wurde ja bereits in der vorliegenden Arbeit ausführlich beschrieben. Die FVM wird oftmals als eine Mischung aus FDM und FEM bezeichnet.

Die eigentlichen Problemstellungen, d.h. die partiellen Differentialgleichungen, sind kontinuierlich. Aufgabe der Diskretisierungsverfahren ist es, dieses unendlich-dimensionale Problem, um es einer numerischen Lösung zugänglich zu machen, in eine endlich-dimensionale Form zu bringen. Hier können, in einer vielleicht etwas ungewöhnlichen Form, zwei prinzipiell unterschiedliche Konzepte unterschieden werden. Während nämlich im FD-Verfahren der Operator selbst diskretisiert wird, indem der kontinuierliche Differentialoperator durch den diskreten Differenzenoperator ersetzt wird, ersetzt bei den FV- und FE-Verfahren ein endlich-dimensionaler Raum den eigentlich unendlich-dimensionalen Funktionenraum zur Lösung des Variationsproblems.

Der *prinzipielle* Unterschied zwischen FE- und FV-Verfahren (siehe auch Bild A.4) läßt sich



Bild A.4: Testfunktionen für FE- bzw. FV-Ansätze

sehr einfach formelmäßig zeigen. Dazu wird von einem Integralterm ausgegangen, der aus einer partiellen Differentialgleichung, z.B. durch einen gewichteten Residuenansatz für einen Term der allgemeinen Advektions-Diffusions-Gleichungen, entstanden sein könnte.

$$\int_{\Omega} \text{div}(\phi \nabla u) \cdot v \, d\Omega \quad (\text{A.1})$$

u bezeichnet wieder die Ansatzfunktion und v die Testfunktion. Für die Methode der Finiten Elemente (siehe auch Kapitel 3.1) werden nun beliebige Testfunktionen v zugelassen und durch eine partielle Integration folgt

$$\int_{\Omega} \phi \nabla u \nabla v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \phi \nabla u \cdot \mathbf{n} \, v \, d\Gamma \quad (\text{A.2})$$

Da für den Testfunktionenraum aber ein kompakter Träger gewählt wird, d.h. $v = 0$ auf $\partial\Omega$, wird das Randintegral identisch Null und im Rahmen der FEM verbleibt nur ein Gebietsintegral. Im Gegensatz dazu wird die Testfunktion in Gleichung (A.1) im Rahmen eines FV-Ansatzes konstant angenommen, d.h. $v = \text{konst.}$ (z.B. $v = 1$). Da die Ableitung dieser konstanten Funktion nach der partiellen Integration identisch Null wird, bleibt im Rahmen der FV-Diskretisierung nur der Randintegralterm

$$\int_{\partial\Omega} \phi \cdot \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, d\Gamma \quad (\text{A.3})$$

übrig. Im Normalfall wird hier zur Diskretisierung das duale Netz verwendet (entspricht einem zellen-zentrierten Kontrollvolumen). Die so entstandenen Boxen (oder Zellen) führen auch

auf die teilweise anzutreffende Bezeichnung als ‘Box–Verfahren’. Aus Gleichung (A.3) werden gleich zwei häufig angeführte Vorteile der FV deutlich. Sie sind in dieser Form lokal konservativ, d.h. sie erhalten die Bilanz im Vergleich zur Standard–FE auch lokal, da sich die Flüsse über den (lokalen) Box–Rand direkt bilanzieren. Und zweitens sind die numerischen Integrationsgebiete um eine Dimension reduziert, da nur Randintegrale auszuwerten sind.

Der Unterschied der Grundformen dieser Verfahren ist dabei allerdings oftmals nicht groß. Für bestimmte Fälle kann sogar ihre Äquivalenz gezeigt werden, oder auch gezeigt werden, daß beide Ansätze sogar die selben Steifigkeitsmatrizen und nur geringfügig unterschiedliche rechte Seiten liefern. Speziell mit Blick auf bestimmte Varianten der beiden Vertreter ist auch die Grenze zwischen diesen Verfahren nicht mehr ganz eindeutig. So haben beispielsweise kontrollvolumen–basierte FE–Verfahren schon eine sehr große Ähnlichkeit mit FV–Ansätzen. Teilweise wird die FEM sogar als ‘verallgemeinerte FVM’ bezeichnet (siehe z.B. Gresho und Sani (1998)).

FVM versus FEM

An dieser Stelle soll noch eine kurze Argumentation für das in dieser Arbeit verwendete Diskretisierungsverfahren, die Methode der Finiten Elemente, im Vergleich zu den in der ‘CFD–Community’ sehr populären Finite–Volumen–Verfahren angestellt werden. Dabei werden aber nur die ‘allgemeinen’ Gründe angeführt, da eine speziell auf das vorliegende Projekt bezogene Begründung ja bereits in der Arbeit gegeben wurde (siehe z.B. Kapitel 3 oder 7). Die ausschließlich auf FE beruhenden Ansätze in dieser Arbeit stellen, wie bereits erwähnt, die ersten und bisher einzigen CFD–Schritte am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart dar, d.h. eigene Erfahrungen mit FVM liegen nicht vor. Der Argumentation ist deshalb vorzustellen, daß diese nicht auf eigenen praktischen und numerischen Erfahrungen beruht. Die Argumente beruhen vielmehr auf grundsätzlichen, theoretischen Überlegungen bzw. auf Erkenntnissen aus der Literatur. Hier sei vor allem auf die umfangreichen Diskussionen in Gresho und Sani (1998) verwiesen, die auf umfangreichen theoretischen und praktischen (der populäre kommerzielle CFD–Code FIDAP kommt z.B. aus dieser ‘Ecke’) Erfahrungen beruhen. Weitere ‘Vergleiche’ stammen z.B. von Idelsohn und Oñate (1994) bzw. Zienkiewicz und Oñate (1991).

Die wesentlichen Vorteile der FEM liegen in der inherenten geometrischen Flexibilität und in der ebenfalls inherenten Fähigkeit, einfach und genau physikalische Randbedingungen aufzubringen. Finite–Element–Ansätze zeigen im allgemeinen auch geringere Fehler in den Phasengeschwindigkeiten und vor allem ganz grundsätzlich bei elliptischen Problemen. Dies ist hier von Bedeutung, da elliptischen Probleme ja auch als Teil tatsächlicher Strömungsprobleme auftreten können. Ein weiterer Vorteil der FEM betrifft die Verfügbarkeit einer viel rigoroseren mathematischen (Konvergenz–) Theorie (siehe auch z.B. Rannacher (1993)). Auch die Schwierigkeiten im Rahmen einer FVM, Verfahren höherer Ordnung zu entwickeln, sprechen für die FEM. Dort ist dies, z.B. im Sinne des in dieser Arbeit gezeigten Ansatzes und auch mit befriedigenden Stabilitätseigenschaften, sehr leicht möglich. Morgan und Peraire (1999) sehen vor allem in der einfachen Möglichkeit, FE auf ‘beliebigen’ Diskretisierungen komplexer Gebiete anzuwenden, *den* entscheidenden Vorteil für industrielle Anwendungen.

In Bezug auf den vielgepriesenen Vorteil der lokalen Konservativität der FV–Verfahren ist auch anzumerken, daß Finite–Volumen–Verfahren oftmals mit ‘mass lumping’ bzw. Modifikationen des Konvektionstermes einhergehen, wodurch diese positive Eigenschaft wieder ent-

scheidend gestört werden kann. Auch ist lokale Konservativität nicht direkt mit lokaler Genauigkeit gleichzusetzen. Gresho und Sani (1998) versuchen auch zu zeigen, daß, wenn richtig verstanden und interpretiert, auch FEM lokale Konservierung sowohl auf Knoten– als auch auf Elementebene zeigen können. Es sollte auch erwähnt werden, daß FVM im allgemeinen nur Größen garantiert erhält, für die das Divergenztheorem zutrifft. Quadratische Größen werden also bei FVM im allgemeinen nicht (lokal oder global) erhalten.

Für weitere ausführliche vergleichende Betrachtungen, speziell im Hinblick auf kontrollvolumen–basierte FE–Verfahren, wird auf das Buch von Gresho und Sani (1998) verwiesen.

A1.5 ‘Inkompressible Navier–Stokes–Löser’

In der vorliegenden Arbeit kommt ein voll gekoppeltes Verfahren zur direkten Lösung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen in den Primärvariablen zum Einsatz. In der Literatur werden eine Reihe weiterer, teils populärerer, Verfahren behandelt, die hier auch kurz angesprochen werden sollen. Die Gründe, warum in der vorliegenden Arbeit einem voll gekoppelten Ansatz der Vorzug gegeben wurde, können Kapitel 4.1 entnommen werden.

Entkoppelte Lösungsansätze werden sehr häufig zur Lösung der instationären, inkompressiblen Navier–Stokes–Gleichungen eingesetzt. Diese Verfahren basieren auf einer Aufspaltung des Operators und sind in unterschiedlichsten Varianten anzutreffen. Eine sehr populäre Bezeichnung spricht von sogenannten *Projektionsmethoden*. Alternative Bezeichnungen für Verfahren dieser Art sind *Druck–Korrektur–Verfahren*, *‘Fractional–Step’–Verfahren* oder *Geschwindigkeits–Korrektur–Verfahren*. Hier soll nur das einfache Prinzip der Verfahren besprochen werden. Die theoretische Basis dieser Verfahren beruht auf dem Ladyzhenskaya–Theorem, das besagt, daß ein Vektorfeld \boldsymbol{w} eindeutig in

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \nabla\phi \quad \text{mit} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad (\text{A.4})$$

zerlegt werden kann. Mit anderen Worten, wird \boldsymbol{w} in einen Raum divergenzfreier Vektoren und in einen Raum von Vektoren, die die Gradienten einer skalaren Funktion sind, projiziert. Das Prinzip dieser Verfahren besteht in der Aufspaltung des ursprünglichen Operators. Die klassische Variante der ‘Fractional–Step’– bzw. der Projektions–Verfahren geht auf Chorin (1968) zurück (siehe auch Temam (1979)). Ausgehend von den Gleichungen für die Impuls– und die Massenerhaltung, wird dabei in einem ersten Schritt ein Zwischen–Geschwindigkeitsfeld $\tilde{\boldsymbol{u}}$ erzeugt,

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} + \tilde{\boldsymbol{u}} \cdot \nabla \tilde{\boldsymbol{u}} - 2\nu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\tilde{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{b} \quad (\text{A.5})$$

das allerdings die Bedingung der Divergenzfreiheit nicht erfüllt. In einem zweiten Schritt wird dieses Feld dann auf den Raum divergenzfreier Vektoren *projiziert*.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = P_{div} \left(\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} \right) \quad (\text{A.6})$$

Der Projektionsschritt kann über Lösung einer Laplace–Gleichung für das Druckfeld \boldsymbol{p} , bzw. eine Druck–Poisson–Gleichung, erfolgen. Mit diesem Druckfeld wird dann das *Zwischen–Geschwindigkeitsfeld korrigiert*. Wird im ersten Schritt der Druck nicht vollständig eliminiert, sondern z.B. über das alte Druckfeld in der Formulierung behalten, entspricht der Druck aus

dem zweiten Schritt nur noch einer *Druck–Korrektur*. Dies liefert eine als Druck–Korrektur–Verfahren bezeichnete Variante, die ursprünglich auf Harlow und Welsch (1965) zurückgeht. Um die ursprüngliche, voll gekoppelte Gleichung zu erfüllen, müssen diese Schritte natürlich in einem iterativen Vorgehen wiederholt durchgeführt werden. Der Vorteil dieser Verfahren besteht in einer Entkopplung der Unbekannten, wodurch sich die Größe des zu lösenden Gleichungssystems reduziert. Hinzu kommt, daß die zu lösende Gleichung zur Bestimmung des Druckfeldes äußerst ‘gutmütig’ ist. Diese Vorteile müssen allerdings durch die durchzuführenden Iterationen, bzw. die, durch die Entkopplung der Gleichungen, geringere Konvergenzrate in der Gesamtiteration erkaufte werden.

Ein populäres Verfahren zur Simulation inkompressibler Strömungen ist das sogenannte ‘*Artificial compressibility*’–Verfahren. Darin wird die normale Massenbilanz (z.B. Gleichung (2.80)) durch eine zeitabhängige Gleichung der Form

$$\frac{1}{\beta^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (\text{A.7})$$

ersetzt (vergleiche auch Gleichung (2.37)). β ist darin so etwas wie eine Pseudo–Schallgeschwindigkeit, die entsprechend groß gewählt werden muß. Durch den zusätzlichen Term wird künstlich eine Druckkopplung zwischen den Erhaltungsgleichungen hergestellt. Ein ähnliches Verfahren, das jedoch zur stationären Lösung keinen pseudo–transienten Ansatz benötigt, ist das sogenannte *Penaltyfunktionen*–Verfahren.

Weitere und ausführlichere Diskussionen zu inkompressiblen Navier–Stokes–Lösungen finden sich beispielsweise in Gresho und Sani (1998), Hirsch (1990) oder Turek (1999),

A2 Einige mathematische Grundlagen

Hier sollen einige Anmerkungen zu den notwendigsten mathematischen Grundlagen, speziell den Funktionenräumen, gegeben werden. Ausführlichere Diskussionen zu wichtigen mathematischen Grundlagen und exakte Betrachtungen zu diesem Thema finden sich z.B. in Brenner und Scott (1994), Hackbusch (1986), Johnson (1987), Renardy und Rogers (1996) oder Strang und Fix (1979).

Schwache Ableitungen

Für eine Darstellung der Räume ist zunächst der Begriff der *schwachen Ableitung* zu definieren. Der Begriff einer schwachen Ableitung für eine Funktion heißt, daß die Existenz dieser Ableitung nicht mehr punktweise, sondern nur in einem integralen Sinne, gefordert wird. Mathematisch exakter heißt dies: $u \in L^2(\Omega)$ besitzt eine schwache Ableitung $v := D^\alpha u \in L^2(\Omega)$, falls für dieses $v \in L^2(\Omega)$ und $\forall w \in C_0^\infty(\Omega)$, gilt:

$$(w, v)_0 = (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha w, u)_0 \quad \text{mit } |\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i \text{ und } D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad (\text{A.8})$$

Die Notwendigkeit bzw. der Sinn solcher schwachen Ableitungen kann, unabhängig von der FEM, sehr einfach erklärt werden. Es sei beispielsweise die Lösung der Laplace–Gleichung $\Delta u = f$ auf dem Gebiet Ω gesucht. Um diese Gleichung erfüllen zu können, muß die Funktion

u zwei mal differenzierbar, also aus dem Raum $C^2(\Omega)$, sein. Hat Ω nun beispielsweise eine einspringende Ecke, wäre im strengen (starken) Sinne eine Lösung ausgeschlossen, da an dieser einen Stelle eine zweite Ableitung von u nicht definiert ist. Und doch würde im gesamten restlichen Gebiet eine Lösung von u sinnvoll sein. Entsprechend obiger Definition ermöglicht in diesem Falle die Einführung der schwachen Ableitung eine Lösung auf dem Gebiet, da die ‘fehlende’ starke Ableitung an dem einen Punkt an der Existenz der schwachen Lösung im Gebiet nichts ändert.

Eine Hierarchie der Räume

Ein linearer (Vektor-) Raum, der eine Norm besitzt, wird als *normierter Raum* bezeichnet. Ist dieser normierte Raum vollständig, d.h. konvergiert jede Cauchy-konvergente Folge dieses Raumes gegen einen Wert in diesem Raum, so heißt er *Banach-Raum*. Dabei heißt eine Folge $\{x_n \in X : n \geq 1\}$ Cauchy-konvergent, wenn $\sup\{\|x_n - x_m\|_X : n, m \geq k\} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Ein Banach-Raum, in dem ein Skalarprodukt definiert ist, schließlich heißt *Hilbert-Raum*. Und damit ist der für die FEM so wichtige *Sobolev-Raum* erreicht. Der Sobolev-Raum $H^k(\Omega)$ ist nämlich ein Hilbert-Raum mit dem ganz speziellen Skalarprodukt

$$(u, v)_k = \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_0 \quad (\text{A.9})$$

und der Norm

$$\|u\|_k = \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_0^2} \quad (\text{A.10})$$

$(\cdot, \cdot)_0$ und $\|\cdot\|_0$ bezeichnen darin wieder das $L^2(\Omega)$ innere Produkt und die $L^2(\Omega)$ Norm. $H^k(\Omega)$ ist also der Raum mit quadratintegrierbaren k -ten, schwachen Ableitungen bzw., alternativ geschrieben, $H^k(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq k\}$. Der Sobolev-Raum $H_0^k(\Omega)$ ist schließlich der Raum aller Funktionen aus $H^k(\Omega)$, die einen kompakten Träger haben, d.h. die am Rand 0 sind.

Der Raum $H_0^k(\Omega)$ kann auch als Vervollständigung des Raumes $C_0^k(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_k$ angesehen werden. Ein Sobolev-Raum stellt auch den größten Raum dar, in dem eine bestimmte Variationsformulierung sinnvoll ist. Aus den obigen Ausführungen folgt weiters, daß $L^2(\Omega) = H^0(\Omega) = H_0^0(\Omega)$. Ebenso gilt $H^0 \supset H^1 \supset \dots H^k \supset \dots C^\infty$ bzw. $H_0^1 \subset H^1$.

Zur Verdeutlichung sollen diese Ausführungen für den, in dieser Arbeit vorwiegend auftretenden, Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ nochmals spezifiziert werden. Der Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ ist die Sammlung aller Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit endlichen $H^1(\Omega)$ -Normen. Diese sind über das $H^1(\Omega)$ innere Produkt

$$(u, v)_1 = \int_{\Omega} (uv + u_{,i}v_{,i}) \, d\Omega \quad (\text{A.11})$$

mit einer Summation über $1 \leq i \leq n$, definiert als

$$\|u\|_1 = \sqrt{(u, v)_1} \quad (\text{A.12})$$

A3 ‘Computational Tools’

Erdachte und entwickelte Verfahren der ‘Computational Mechanics’ beweisen ihre Tauglichkeit und Leistungsfähigkeit nur zu einem Teil in theoretischen Analysen und einfachsten, akademischen Testbeispielen. Wesentlichen Anteil zur Beurteilung, sozusagen die ‘A-Note’, sollte die Umsetzbarkeit bzw. die tatsächliche Umsetzung im Computer und auch die Anwendung auf ‘aussagekräftige’ Beispiele einnehmen.

A3.1 CARAT — ‘Computer Aided Research Analysis Tool’

Sämtliche in dieser Arbeit entwickelten Verfahren wurden in der Forschungssoftware CARAT (‘Computer Aided Research Analysis Tool’ — **CARAT**) des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart umgesetzt. Folglich wurden natürlich auch sämtliche in dieser Arbeit angeführten Beispiele mit CARAT berechnet. Dazu wurde CARAT vor allem um zwei- und dreidimensionale Fluidelemente, stationäre und instationäre (ALE) CFD-Algorithmen und auch um die Möglichkeit zur Behandlung gekoppelter Mehrfeldprobleme erweitert. Speziell die Umsetzung von Mehrfeldproblemen in *einer* dafür gar nicht vorgesehenen Software stellt dabei doch eine gewisse Herausforderung dar. Dies unter anderem auch, da sowohl Programmkonzeption, als auch in ganz besonderem Ausmaß die Datenstrukturen, weitestgehend erhalten werden sollten.

Obwohl CARAT mittlerweile schon ein gestandener ‘Teenie’ ist, was für eine Software heutzutage schon fast ein biblisches Alter bedeutet, beweist es immer noch seine Leistungsfähigkeit. Vor allem, daß es, wenn auch mit einigen ‘Anstrengungen und Kraftakten’, möglich war, die neuen Aufgabenstellungen dieser Arbeit, die beim Design von CARAT zu Mitte der Achtzigerjahre noch nicht im geringsten angedacht waren, softwaretechnisch umzusetzen, spricht für die weitblickende und allgemeine Konzeption dieses Programmsystems. Dafür sei den ‘CARAT-Vätern’, Kai-Uwe Bletzinger, Stefan Kimmich und Hans Stegmüller, an dieser Stelle gedankt.

A3.2 Gleichungslöser

Ein Problem, das mit der Behandlung von Aufgabenstellungen der CFD einhergeht, ist die große Anzahl von Unbekannten und somit, falls nicht auf explizite Verfahren zurückgegriffen werden kann, die Lösung von großen Gleichungssystemen. Selbst in der Entwicklungsphase von Verfahren ist es nur in den wenigsten Fällen möglich, kleine Testbeispiele zu finden. Deshalb mußte im Zuge dieser Arbeit auch der Frage von Gleichungslösern ein gewisses Augenmerk geschenkt werden. Hinzu kamen dabei auch die zusätzlichen Anforderungen an die Lösungsverfahren, die sich aus den unsymmetrischen Gleichungssystemen ergaben. Auf eine umfangreichere Diskussion der Frage der Gleichungslöser wird in dieser Arbeit verzichtet. Es sollen hier nur kurz jene Verfahren angeführt werden, die in dieser Arbeit hauptsächlich verwendet wurden.

Zu Beginn der Entwicklungen wurde ein in CARAT vorhandener Skyline-Löser eingesetzt, der auch in der Lage ist, unsymmetrische Gleichungssysteme zu bearbeiten. Sowohl im Hinblick auf die erforderlichen Rechenzeiten, als auch in Bezug auf den notwendigen Speicherbedarf, sind dem unsymmetrischen Skyline-Löser bei CFD-Berechnungen bereits ‘frühzeitig’ Grenzen gesetzt. Deswegen wurden, im Zuge einer Seminararbeit (Mok (1996)), alternative Lösungsverfahren untersucht. Dabei lag ein Hauptaugenmerk auf effizienten *direkten* Lösungsver-

fahren. Da in dieser Arbeit viele Verfahren völlig neu entwickelt werden mußten, sollten somit zumindest mögliche Löser-Probleme, vor allem bezüglich Robustheit, weitgehend ausgeschaltet werden. Als extrem leistungsfähiges direktes Lösungsverfahren stellte sich dabei ein kombiniertes Einfront-Mehrfront-Verfahren von Davis und Duff (1997) heraus. Dieses im Programmpaket UMFPACK umgesetzte Verfahren ermöglicht sowohl die Lösung von symmetrischen als auch von unsymmetrischen Gleichungssystemen. Durch die Verwendung einer symbolischen Vorfaktorisierung zeigt es speziell bei mehrmaligen Löseraufrufen mit derselben Matrixstruktur, also z.B. in besonders zeitintensiven nichtlinearen oder dynamischen Berechnungen, einen zusätzlichen Rechenzeitgewinn. Der Rechenzeitaufwand eines Löser läßt sich durch

$$CPU = c \cdot NDOF^\beta \quad (A.13)$$

abschätzen. Darin bedeuten $NDOF$ die Anzahl der Unbekannten, c eine Konstante und die für die Löserqualität entscheidende Größe wird als β bezeichnet. Im 'Regelfall' wird für einen direkten Skyline-Löser von einem $\beta = 7/3$, bei den besten direkten 'Sparse'-Lösern von $\beta = 1.5$ und bei den besten pcg-Verfahren (vorkonditionierte konjugierte Gradienten) von $\beta = 4/3$ ausgegangen (z.B. laut J. Fish, 'personal communications'). Optimale Mehrgitterverfahren zeigen ein $\beta = 1.0$. In den Untersuchungen von Mok (1996) lag β für die untersuchten symmetrischen strukturmechanischen Aufgabenstellungen im Bereich von $\beta = 1.3$. Dieses gute Ergebnis erzielte wohlgerneht der unsymmetrische UMFPACK-Löser, d.h. ohne die spezielle Kenntnis, hier ein symmetrisches Problem zu bearbeiten. Bezüglich Details zu diesem hervorragenden direkten Löser wird auf die Arbeit von Davis und Duff (1997) verwiesen.

Speziell für noch größere Aufgabenstellungen, und vor allem für Berechnungen dreidimensionaler Probleme, muß jedoch auf iterative Lösungsverfahren zurückgegriffen werden. Die großen Vorteile dieser Verfahren liegen im Normalfall vor allem im sehr geringen Speicherbedarf. Entsprechend problemangepaßte und vorkonditionierte Verfahren zeichnen sich auch durch geringe Rechenzeiten aus. Untersuchungen zu iterativen Lösungsverfahren für Strömungsprobleme, speziell unter Verwendung der in dieser Arbeit entwickelten Verfahren, wurden im Zuge einer Seminararbeit von Spieth (1999) durchgeführt. Darin wurde auch die Abhängigkeit der Leistungsfähigkeit iterativer Löser von der Reynoldszahl untersucht. Auch numerische Untersuchungen zum Einfluß der angewandten Stabilisierungen auf die erforderlichen Lösungszeiten finden sich in dieser Arbeit. Dabei erwies sich vor allem ein BiCGSTAB-Löser mit ILU-Vorkonditionierung als für die vorliegenden strömungsmechanischen Aufgabenstellungen interessantes Verfahren (speziell auch im Vergleich zu den in der Literatur häufig anzutreffenden GMRES-Lösern).

Es muß hier nicht besonders erwähnt werden, daß sich iterative Löser im Normalfall nicht als 'Black-Box'-Löser eignen und oftmals mit einer relativ geringen Robustheit zu kämpfen haben. Ein wesentliches Augenmerk ist in diesem Zusammenhang der Vorkonditionierung zu widmen, die, aufbauend auf möglichst viel problemspezifischer Information, sozusagen die Aufgabe hat, dem eigentlichen Löser ein gutmütiges Problem zur Lösung zu übergeben.

Für die im vorliegenden Projekt ins Auge gefaßten Problemstellungen ist aber allein die Entwicklung bzw. Verwendung von effizienten, seriellen Lösungsverfahren nicht ausreichend und stößt ebenfalls 'bald' an Grenzen. Aus diesem Grunde werden zur Zeit in der Arbeitsgruppe erste Schritte zur Anwendung paralleler Rechenverfahren unternommen.

A3.3 Visualisierung

Auch im Hinblick auf die Ergebnisdarstellung ergaben sich, durch die für das Institut und für CARAT neuen Aufgabenstellungen der ‘Computational Fluid Dynamics’ bzw. der Behandlung von Mehrfeldproblemen, neue Aufgabenstellungen bzw. Herausforderungen. Besonders bei der numerischen Lösung von Strömungsproblemen sind zur Ergebnisbeurteilung bzw. Ergebnisauswertung, vielmehr noch als bei vielen strukturmechanischen Problemen, angepaßte und effiziente Visualisierungstechniken unabdingbar.

Im Rahmen dieser Arbeit kamen eine Reihe von Visualisierungswerkzeugen zur Anwendung. Einerseits handelt es sich dabei um das am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart, im Zuge der CARAT-Erstellung, entwickelte Paket *CGS* (‘CARAT Graphic Subsystem’). Dazu wurde *CGS* zumindest für die elementaren Erfordernisse der CFD adaptiert. Beispiele für eine Visualisierungen mit *CGS* finden sich in Bild 4.10 und Bild 4.20.

Als hauptsächliches Visualisierungswerkzeug kam das Programmpaket *Visual2* (siehe z.B. Haimes (1992)) zur Anwendung. Bob Haimes vom MIT sei an dieser Stelle für das zur Verfügung stellen der von ihm entwickelten Visualisierungspakete speziell gedankt. Dieses Programmpaket wurde über eine Schnittstelle an CARAT angeschlossen und fand in dieser Arbeit fast für sämtliche zweidimensionalen Strömungsvisualisierungen Verwendung.

Für die Darstellung dreidimensionaler Strömungsprobleme wurde auf die ebenfalls über Schnittstellen an CARAT angeschlossenen Visualisierungswerkzeuge *Visual3* (Haimes (1998)) und das von ‘Advanced Visual Systems Inc.’ kommerziell erhältliche *AVS/Express* zurückgegriffen. Beispiele für eine *AVS*-Visualisierung zeigen Bild 4.23 bis Bild 4.27.

A3.4 Vernetzung

In dieser Arbeit kamen weitgehend strukturierte Netze zur Anwendung. Zur Erstellung dieser Netze fand sowohl für 2D- wie auch für 3D-Beispiele der CARAT-Preprozessor *DESIGN* von Bletzinger (1990) Verwendung. Für die freivernetzten 2D-Beispiele wurde auf den Netzgenerator *FREEM* (Rehle (1996)) und für die entsprechenden 3D-Beispiele auf *NETGEN* (Schöberl (1997)) zurückgegriffen.

Literatur

- Altenbach, J., Altenbach, H. (1994)**, *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- Ananthakrishnan, P. (1991)**, *Surface Waves Generated by a Translating Two-dimensional Body: Effects of Viscosity*. Ph.D. Thesis, Department of Naval Architecture and Offshore Engineering, University of California, Berkeley.
- Armaly, B.F., Durst, F., Pereira, J.C.F., Schönung, B. (1983)**, 'Experimental and Theoretical Investigation of Backward-Facing Step Flow', *J. Fluid Mech.*, **127**, 473–496.
- Auge, A. (1994)**, *Numerische Untersuchung einer Galerkin/least-squares-Finite-Element-Methode zur Simulation inkompressibler Strömungen*. Ph.D.-Dissertation, Fakultät für Maschinenwesen, TU Dresden.
- Babuska, I. (1973)**, 'The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers', *Numer. Math.*, **20**, 179–192.
- Baiocchi, C., Brezzi, F., Franca, L.P. (1993)**, 'Virtual Bubbles and Galerkin-Least-Squares Type Methods (Ga.L.S.)', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **105**, 125–141.
- Bathe, K.J., Zhang, H., Wang, M.H. (1995)**, 'Finite Element Analysis of Incompressible and Compressible Fluid Flows with Free Surfaces and Structural Interactions', *Computers & Structures*, Vol. **56**, No. 2/3, 193–213.
- Bathe, K.-J. (1996)**, *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- Batina, J.T. (1991)**, 'Unsteady Euler Algorithm with Unstructured Dynamic Mesh for Complex Aircraft Aerodynamic Analysis', *AIAA Journal*, **29**, 327–333.
- Becker E., Bürger, W. (1975)**, *Kontinuumsmechanik*. Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- Becker, R. (1995)**, *An Adaptive Finite Element Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations on Time-Dependent Domains*. Ph.D.-Dissertation, Universität Heidelberg. IWR Preprint 95-44 (SFB 359).
- Becker, R., Rannacher, R. (1995)**, 'Finite Element Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on Anisotropically Refined Meshes', *Fast Solvers for Flow Problems* (Proc. 10th GAMM-Seminar). Hackbusch, W., Wittum, G. (eds.). Notes on Numerical Fluid Mechanics Vol. **49**, Vieweg, 52–62.
- Becker, R., Hansbo, P. (1999)**, 'A Finite Element Method for Domain Decomposition with Non-Matching Grids', *Rapport de Recherche INRIA* 3613.
- Behr, M. (1992)**, *Stabilized Finite Element Methods for Incompressible Flows with Emphasis on Moving Boundaries and Interfaces*. Ph.D. Thesis, Department of Aerospace Engineering and Mechanics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota.
- Behr, M., Tezduyar, T.E. (1994)**, 'Finite element solution strategies for large-scale flow simulations', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **112**, 3–24.
- Behr, M., Hastreiter, D., Mittal, S., Tezduyar, T.E. (1995)**, 'Incompressible Flow past a Circular Cylinder: Dependence of the Computed Flow Field on the Location of the Lateral Boundaries', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **123**, 309–316.
- Behr, M., Tezduyar, T.E. (1998)**, 'The Shear-Slip Mesh Update Method for Computation of Flow Problems with Spinning Geometries', *Computational Mechanics, Proc. WCCM IV Conf. – Buenos Aires*. Oñate, E., Idelsohn, S. (eds.). CIMNE, Barcelona.
- Belytschko, T., Kennedy, J.M. (1978)**, 'Computer Modells for Subassembly Simulation', *Nuclear Engineering and Design*, **49**, 17–38.
- Belytschko, T., Kennedy, J.M., Schoeberle, D.F. (1980)**, 'Quasi-Eulerian Finite Element Formulation for Fluid Structure Interaction', *Journal of Pressure Vessel Technology*, **102**, 62–69.
- Belytschko, T., Hughes, T.J.R. (1983)**, *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T.J.R. Hughes (eds.), Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam.
- Belytschko, T., Wong, B.L., Stolarski, H. (1989)**, 'Assumed Strain Stabilization Procedure for the 9-Node Lagrange Shell Element'. *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **28**, 385–414.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. (1992)**, 'An Explicit Multi-Time Step Integration for Parabolic and Hyperbolic Systems', *PVP*, **246**, 25–39.

- Bischoff, M. (1999)**, *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 30, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Blasco, J., Codina, R., Huerta, A. (1998)**, ‘A Fractional–Step Method for the Incompressible Navier–Stokes Equations Related to a Predictor–Multicorrector Algorithm’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **28**, 1391–1419.
- Bletzinger, K.–U. (1990)**, *Formoptimierung von Flächentragwerken*. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 11, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Blom, F.J. (1998)**, ‘A Monolithic Fluid–Structure Interaction Algorithm Applied to the Piston Problem’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **167**, 369–391.
- Bonnerot, R., Jamet, P. (1979)**, ‘A third Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the One–Dimensional Stefan Problem’, *Journal of Computational Physics*, **32**, 145–167.
- Bornemann, B. (1999)**, *Adaptive Zeitschrittsteuerung bei inkompressiblen Strömungssimulationen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Brakkee, E., Post, P., Wolf, K., Schüller, A. (1998)**, ‘Specification of the COupling COmmunications LIBrary’. *CISPAR – report*, Esprit project 20161, GMD–SCAI.
- Braun, M. (1995)**, *Nichtlineare Analysen von geschichteten elastischen Flächentragwerken*. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 19, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Brenner, S.C., Scott, L.R. (1994)**, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Springer, New York.
- Brezzi, F. (1974)**, ‘On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Points Problems arising from Lagrangian Multipliers’, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, **8**, 129–151.
- Brezzi, F., Pitkäranta, J. (1985)**, ‘On the Stabilization of Finite Element Approximations of the Stokes Equations’. *Efficient Solutions of Elliptic Systems* (Proc. GAMM–Seminar – Kiel). Hackbusch, W. (ed.). Notes on Numerical Fluid Mechanics Vol. **10**, Vieweg, 11–19.
- Brezzi, F., Douglas, J. (1988)**, ‘Stabilized Mixed Methods for the Stokes Problem’, *Numerische Mathematik*, **53**, 225–235.
- Brezzi, F., Fortin, M. (1991)**, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, New–York.
- Brezzi, F., Bristeau, M.–O., Franca, L.P., Mallet, M., Rogé, G. (1992)**, ‘A Relationship between Stabilized Finite Element Methods and the Galerkin Method with Bubble Functions’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **96**, 117–129.
- Brezzi, F., Russo, A. (1994)**, ‘Choosing Bubbles for Advection–Diffusion Problems’, *Mathematical Models and Methods in Applied Science M³AS*, **4**, 571–587.
- Brezzi, F., Franca, L.P., Hughes, T.J.R., Russo, A. (1996)**, ‘Stabilization Techniques and Subgrid Scales Capturing’. *Preprint – Istituto di Analisi Numerica*, Pavia, Pubb. 1011.
- Brezzi, F., Marini, D., Russo, A. (1996a)**, ‘Pseudo Residual–Free Bubbles and Stabilized Methods’, *Computational Methods in Applied Sciences ’96*, Proc. of ECCOMAS ’96, Paris, France. Désidéri et.al. (eds.), J. Wiley & Sons, 3–8.
- Brezzi, F., Franca, L.P., Hughes, T.J.R., Russo, A. (1997)**, ‘b=fg’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **145**, 329–339.
- Bronstein, I.N., Semendjajew, K.A. (1996)**, *Teubner–Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt / Main.
- Brooks, A.N., Hughes, T.J.R. (1982)**, ‘Streamline Upwind/Petrov–Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **32**, 199–259.
- Camacho, G.T., Ortiz, M. (1997)**, ‘Adaptive Lagrangian Modelling of Ballistic Penetration of Metalluc Targets’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **142**, 269–301.
- Casadei, F., Halleux, J.P. (1995)**, ‘An Algorithm for Permanent Fluid–Structure Interaction in Explicit Transient Dynamics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **128**, 231–289.

- Cebral, J.R. (1996)**, *Loose Coupling Algorithms for Fluid–Structure Interaction*. Ph.D.–Dissertation, Institute for Computational Sciences and Informatics, George Mason University.
- Cebral, J.R., Löhner, R. (1996)**, ‘Conservative Load Projection and tracking for Fluid–Structure problems’, *AIAA–96–0797* and *AIAA Journal*, Vol. **35**, No. 4, 687–692.
- Cebral, J.R., Löhner, R. (1997)**, ‘Fluid–Structure Coupling: Extensions and Improvements’, *AIAA–97–0858*.
- Choi, H.G., Choi, H., Yoo, J.Y. (1997)**, ‘A Fractional Four–Step Finite Element Formulation of the Unsteady Incompressible Navier–Stokes Equations using SUPG and Linear Equal–Order Element Methods’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **143**, 333–348.
- Chorin, A.J., (1968)**, ‘Numerical Solution of the Navier–Stokes Equations’. *Math. Comput.*, **22**, 745–762.
- Chung, T.J. (1978)**, *Finite Element Analysis in Fluid Dynamics*. McGraw–Hill, New York.
- Chung, T.J., Hulbert, G.M. (1993)**, ‘A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized– α Method’, *Journal of Applied Mechanics*, **60**, 371–375.
- Codina, R., Blasco, J. (1997)**, ‘A Finite Element Formulation for the Stokes Problem Allowing Equal Velocity–Pressure Interpolation’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **143**, 373–391.
- Codina, R. (1999)**, ‘A Stabilized Finite Element Method for Generalized Stationary Incompressible Flows’, Preprint – *CIMNE Publication* No. 148, submitted to: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Conca, C., Pares, C., Pironneau, O., Thiriet, M. (1995)**, ‘Navier–Stokes Equations with Imposed Pressure and Velocity Fluxes’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **20**, 267–287.
- Crisfield, M. (1997)**, *Non–linear Finite Element Analysis of Solids and Structures – Volume 2: Advanced Topics*. John Wiley & Sons, England.
- Cruchaga, M.A. (1998)**, ‘A Study of the Backward–Facing Step Problem Using a Generalized Streamline Formulation’, *Comm. in Numerical Methods in Engineering*, **14**, 697–708.
- Cruchaga, M.A., Oñate, E. (1997)**, ‘A Finite Element Formulation for Incompressible Flow Problems using a Generalized Streamline Operator’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **143**, 49–67.
- Cuvelier, C., Segal, A., van Steenhoven, A.A. (1986)**, *Finite Element Methods and Navier–Stokes Equations*. D. Reidel Publishing Company.
- Dahlheim, J. (1996)**, ‘An ALE Finite Element Method for Interaction of a Fluid and a Flexible Cylinder’, *Numerical Methods in Engineering ’96*, Proc. of ECCOMAS ’96, Paris, France. Désidéri et.al. (eds.), J. Wiley & Sons, 881–887.
- Davis, T.A., Duff, I.S. (1997)**, ‘A Combined Unifrontal / Multifrontal Method for Unsymmetric Sparse Matrices’, Technical Report TR–97–016, Computer and Information Science and Engineering Department, Univ. of Florida. to appear in *ACM Transactions on Mathematical Software*.
- De Mulder, T. (1997)**, ‘Stabilized Finite Element methods (SUPG, GLS, ...) for Incompressible Flows’, *28th CFD Lecture Series*, von Karman Institute for Fluid Dynamics.
- De Mulder, T. (1998)**, ‘The Role of Bulk Viscosity in Stabilized Finite Element Formulations for Incompressible Flow: A Review’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **163**, 1–10.
- DeBlois, B.M. (1997)**, ‘Linearizing Convection Terms in the Navier–Stokes Equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **143**, 289–297.
- Demirdzic, I., Peric, M. (1988)**, ‘Space Conservation Law in Finite Volume Calculations of Fluid Flow’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **8**, 1037–1050.
- Demirdzic, I., Peric, M. (1990)**, ‘Finite Volume Method for Prediction of Fluid Flow in Arbitrarily Shaped Domains with Moving Boundaries’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **10**, 771–790.
- Donéa, J., Fasoli–Stella, P., Giuliani, S. (1977)**, ‘Lagrangian and Eulerian Finite Element Techniques for Transient Fluid–Structure Interaction Problems’, *Transactions of the 4th Int. Conference on SMIRT*, San Francisco. B1/2.
- Donéa, J. (1980)**, ‘Finite Element Analysis of Transient Dynamic Fluid–Structure Interaction’, *Advanced Structural Dynamics*. J. Donéa (ed.), Applied Science Publishers Ltd., London, 255–290.

- Donéa, J. (1983)**, ‘Arbitrary Lagrangian–Eulerian Finite Element Methods’, *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T.J.R. Hughes (eds.), Elsevier Science Publishers B.V., 473–516.
- Donéa, J., Giuliani, S., Halleux, J.P. (1982)**, ‘An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Finite Element Method for Transient Dynamic Fluid–Structure Interactions’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **33**, 689–723.
- Douglas, J.Jr., Wang, J. (1989)**, ‘An Absolutely Stabilized Finite Element Method for the Stokes Problem’, *Mathematics of Computation*, **186**, 495–508.
- Droux, J–J., Hughes, T.J.R. (1994)**, ‘A Boundary Integral Modification of the Galerkin Least Squares Formulation for the Stokes Problem’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **113**, 173–182.
- Farhat, C., Lesoinne, M., Maman, N. (1995)**, ‘Mixed Explicit/Implicit Time Integartion of Coupled Aeroelastic Problems: Three–Field Formulation, Geometric Conservation and Distributed Solution’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **21**, 807–835.
- Farhat, C. (1997)**, ‘Parallel and Distributed Solution of Coupled Nonlinear Dynamic Aeroelastic Response Problems’, *Parallel Solution Methods in Computational Mechanics*, Papadrakakis, M. (ed.), J. Wiley & Sons, 243–301.
- Farhat, C., Degand, C., Koobus, B., Lesoinne, M. (1998a)**, ‘Torsional Springs for Two–Dimensional Dynamic Unstructured Fluid Meshes’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **163**, 231–245.
- Farhat, C., Lesoinne, M., Le Tallec, P. (1998b)**, ‘Load and Motion Transfer Algorithms for Fluid/Structure Interaction Problems with Non–Matching Discrete Interfaces: Momentum and Energy Conservation, Optimal Discretization and Application to Aeroelasticity’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **157**, 95–114.
- Felippa, C.A., Park, K.C. (1980)**, ‘Staggered Transient Analysis Procedures for Coupled Mechanical Systems: Formulations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **24**, 61–111.
- Felippa, C.A., Park, K.C., Farhat, C. (1998)**, ‘Partitioned Analysis of Coupled Systems’. *Computational Mechanics, Proc. WCCM IV Conf. – Buenos Aires*. Oñate, E., Idelsohn, S. (eds.). CIMNE, Barcelona.
- Ferziger, J.H., Peric, M. (1997)**, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin Heidelberg.
- Finlayson, B.A. (1972)**, *The Method of Weighted Residuals and Variational Principles*. Academic Press, New York.
- Fletcher, C.A.J. (1991)**, *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Volume I & II*. Springer, Berlin Heidelberg.
- Floryan, J.M., Rasmussen, H. (1989)**, ‘Numerical methods for Viscous Flows with Moving Boundaries’, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. **42**, No. 12, 323–341.
- Fortin, M. (1993)**, ‘Finite Element Solution of the Navier–Stokes Equations’, *Acta Numerica*, 239–284.
- Franca, L.P., Hughes, T.J.R. (1988)**, ‘Two Classes of Mixed Finite Element Methods’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **69**, 89–129.
- Franca, L.P., Hughes, T.J.R., Loula, A.F.D., Miranda, I. (1988)**, ‘A New Family of Stable Elements for Neraly Incompressible Elasticity Based on a Mixed Petrov–Galerkin Finite Element Formulation’, *Numerische Mathematik*, **53**, 123–141.
- Franca, L.P., Dutra do Carmo, E.G. (1989)**, ‘The Galerkin Gradient Least–Squares Method’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **74**, 41–54.
- Franca, L.P., Stenberg, R. (1989)**, ‘Finite Element Approximation of a New variational Principle for Compressible and Incompressible Linear Isotropic Elasticity’, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. **42**, No. 11, S64–S68.
- Franca, L.P., Stenberg, R. (1991)**, ‘Error Analysis of Some Galerkin Least Squares Methods for the Elasticity Equations’, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **28**, No. 6, 1680–1697.
- Franca, L.P., Frey, S.L. (1992)**, ‘Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, 209–233.
- Franca, L.P., Frey, S.L., Hughes, T.J.R. (1992)**, ‘Stabilized Finite Element Methods: I. Application to the Advection–Diffusive Model’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **95**, 253–276.

- Franca, L.P. (1993)**, ‘Incompressible Flows Based upon Stabilized Methods’, *Numerical Methods for the Navier–Stokes Equations* (Proc. Int. Workshop – Heidelberg). Hebeker, F.–K., Rannacher, R., Wittum, G. (eds.). Notes on Numerical Fluid Mechanics Vol. **47**, Vieweg, 89–100.
- Franca, L.P., Hughes, T.J.R. (1993)**, ‘Convergence Analysis of Galerkin Least–Squares Methods for Symmetric Advective–Diffusive Forms of the Stokes and Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **105**, 285–298.
- Franca, L.P., Hughes, T.J.R., Stenberg, R. (1993)**, ‘Stabilized Finite Element Methods’, *Incompressible Computational Fluid Dynamics – Trends and Advances*, Gunzberger, M.D. and Nicolaides, R.A. (eds.), Cambridge University Press.
- Franca, L.P., Madureira, A.L. (1993)**, ‘Element Diameter Free Stability Parameters for Stabilized Methods Applied to Fluids’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **105**, 395–403.
- Franca, L.P., Frey, S.L., Madureira, A.L. (1994)**, ‘Two– and Three–Dimensional Simulations of the Incompressible Navier–Stokes Equations Based on Stabilized Methods’, *Computational Fluid Dynamics ’94*, Wagner, S., et.al. (eds.), Wiley & Sons Ltd. 121–128.
- Franca, L.P., Russo, A. (1996)**, ‘Deriving Upwinding, Mass Lumping and Selective Reduced Integration by Residual–Free Bubbles’, *Applied Mathematical Letters*, **9**, 83–88.
- Franca, L.P., Nesliturk, A., Stynes, M. (1997)**, ‘On the Stability of Residual–Free Bubbles for Convection–Diffusion Problems and Their Approximation by a Two–Level Finite Element Method’, Preprint – *UCD/CCM Report No. 119*, Univ. of Colorado at Denver.
- Franca, L.P., Farhat, C., Lesoinne, M., Russo, A. (1998)**, ‘Unusual Stabilized Finite Element Methods and Residual–Free–Bubbles’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **27**, 159–168.
- Freitas, C.J. (1995)**, ‘Perspective: Selected Benchmarks from Commercial CFD Codes’, *Journal of Fluids Engineering*, **117**, 208–218.
- Fung, T.C. (1998)**, ‘Complex–Time–Step Newmark Methods with Controllable Numerical Dissipation’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 65–93.
- Gatoinde, A.L. (1998)**, ‘A Dual–Time Method for Two–Dimensional Unsteady Incompressible Flow Calculations’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, 1153–1166.
- Gee, M. (1999)**, ‘Remeshing’ für Finite Elemente Berechnungen mit großen Deformationen. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Gerdes, K., Schötzau, D. (1999)**, ‘hp–Finite Element Simulations for Stokes Flow – Stable and Stabilized’, *Finite Elements in Analysis and Design*, **33**, 143–165.
- Gervasio, P., Saleri, F. (1998)**, ‘Stabilized Spectral Element Approximation for the Navier–Stokes Equations’, *Num. Methods Partial Differential Eq*, **14**, 115–141.
- Ghattas, O., Li, X. (1995)**, ‘A Variational Finite Element Method for Stationary Nonlinear Fluid–Solid Interaction’, *Journal of Computational Physics*, **121**, 347–356.
- Ghia, U., Ghia, K.N., Shin, C.T. (1982)**, ‘High–Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier–Stokes Equations and a Multigrid Method’, *Journal of Computational Physics*, **48**, 387–411.
- Girault, V., Raviart, P.–A. (1986)**, *Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations – Theory and Algorithms*. Springer, Berlin Heidelberg.
- Glowinski, R. (1986)**, ‘Splitting Methods for the Numerical Solution of the Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Vistas in Applied Mathematics*, Balakrishnan, A.V. et.al. (eds.). Springer–Verlag. 57–95.
- Glowinski, R., Pironneau, O. (1992)**, ‘Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations’, *Annual Review of Fluid Mechanics*, **24**, 167–204.
- Grandmont, C., Guimet, V., Maday, Y. (1998)**, ‘Numerical Analysis of Some Decoupling Techniques for the Approximation of the Unsteady Fluid–Structure Interaction’, in *Analyse Mathématique et Numérique de quelques Problèmes D’Interaction Fluide–Structure*. PhD–Thesis, Université Paris 6.
- Gresho, P.M., Lee, R.L. (1979)**, ‘Don’t Suppress the Wiggles – They’re Telling You Something’, *Finite Element Methods in Convection Dominated Flows*, Hughes, T.J.R. (ed.), ASME AMD, **34**, 37–61.
- Gresho, P.M., Chan, S.T., Lee, R.L., Upson, C.D. (1984)**, ‘A Modified Finite Element Method for Solving the Time–Dependent, Incompressible Navier–Stokes Equations. Part 1: Theory & Part 2: Applications’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **4**, 557–598 & 619–640.

- Gresho, P.M., Sani, R.L. (1987)**, ‘On Pressure Boundary Conditions for the Incompressible Navier–Stokes Equations’. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **7**, 1111–1145.
- Gresho, P.M. (1990)**, ‘On the Theory of Semi–Implicit Projection Methods for Viscous Incompressible Flow and its Implementation via a Finite Element Method that also introduces a Nearly Consistent Mass Matrix – Part 1: Theory’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **11**, 587–620.
- Gresho, P.M. (1991a)**, ‘Incompressible Fluid Dynamics: Some Fundamental Formulation Issues’. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **23**, 413–453.
- Gresho, P.M. (1991b)**, ‘Some Current CFD Issues Relevant to the Incompressible Navier–Stokes Equations’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **87**, 201–252.
- Gresho, P.M. (1992)**, ‘Some Interesting Issues in Incompressible Fluid Dynamics, Both in the Continuum and in Numerical Simulation’, *Advances in Applied Mechanics*, **28**, 45–140.
- Gresho, P.M., Sani, R.L. (1998)**, *Incompressible Flow and the Finite Element Method*. John Wiley & Sons, England.
- Grosh, K., Pinsky, P.M. (1996)**, ‘Design of Galerkin Generalized Least Squares Methods for Timoshenko Beams’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **132**, 1–16.
- Güler, I., Behr, M., Tezduyar, T.E. (1998)**, ‘Parallel Finite Element Computation of Free–Surface Flows’, *University of Minnesota Supercomputer Institute Research Report*, UMSI 98/41.
- Guermont, J.–L., Quartapelle, L. (1998)**, ‘On Stability and Convergence of Projection Methods Based on Pressure Poisson Equation’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **26**, 1039–1053.
- Guillard, H., Farhat, C. (1998)**, ‘On the Significance of the Geometric Conservation Law for Flow Computations on Moving Meshes’, *Research Report*, CU–CAS–98–08, Center for Aerospace Structures, University of Colorado.
- Gunzburger, M.D. (1989)**, *Finite Element Methods for Viscous Incompressible Flows, A Guide to Theory, Practice and Algorithms*. Academic Press Inc., San Diego.
- Gupta, K.K., Meek, J.L. (1996)**, ‘A Brief History of the Beginning of the Finite Element Method’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **39**, 3761–3774.
- Hackbusch, W. (1986)**, *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- Haines, B. (1992)**, ‘VISUAL2 User’s & Programmer’s Manual’, *Report*, Massachusetts Institute of Technology, Boston, (<http://raphael.mit.edu/visual2/visual2.html>).
- Haines, B. (1998)**, ‘VISUAL3 User’s & Programmer’s Manual’ and ‘VISUAL3 Advanced Programmer’s Guide’, *Reports*, Massachusetts Institute of Technology, Boston, (<http://raphael.mit.edu/visual3/visual3.html>).
- Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G. (1993)**, *Solving Ordinary Differential Equations I – Nonstiff Problems*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg.
- Hairer, E., Wanner, G. (1996)**, *Solving Ordinary Differential Equations II – Stiff and Differential–Algebraic Problems*. Springer–Verlag, Berlin Heidelberg.
- Hannani, S.K., Stanislas, M., Dupont, P. (1995)**, ‘Incompressible Navier–Stokes Computations with SUPG and GLS Formulations – A Comparison Study’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **124**, 153–170.
- Hansbo, P., Szepessy, A. (1990)**, ‘A Velocity–Pressure Streamline Diffusion Finite Element Method for the Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **84**, 175–192.
- Hansbo, P. (1992)**, ‘The Characteristic Streamline Diffusion Method for Time–Dependent Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **99**, 171–186.
- Hansbo, P. (1995)**, ‘Lagrangian Incompressible Flow Computation in Three Dimensions by Use of Space–Time Finite Elements’, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **20**, 989–1001.
- Hansbo, A., Hansbo, P. (1999)**, ‘A Crank–Nicolson Type Space–Time Finite Element Method for Computing on Moving Meshes’, *Preprint – in preparation*.

- Harari, I., Hughes, T.J.R. (1992)**, ‘What are C and h ?: Inequalities for the Analysis and Design of Finite Element Methods’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **97**, 157–192.
- Harari, I., Hughes, T.J.R. (1994)**, ‘Stabilized Finite Element Methods for Steady Advection–Diffusion with Production’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **115**, 165–191.
- Harlow, F.H., Welch, J.E. (1965)**, ‘Numerical Calculation of Time–Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface’, *Phys. Fluids*, **8**, 2182–2189.
- Hauke, G., Hughes, T.J.R. (1994)**, ‘A unified approach to compressible and incompressible flows’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **113**, 389–395.
- Hauke, G., Hughes, T.J.R. (1998)**, ‘A Comparative Study of different Sets of Variables for Solving Compressible and Incompressible Flows’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **153**, 1–44.
- Haußer, C. (1996)**, *Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke*. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 21, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Hemforth, F. (1996)**, *Die Behandlung der Instationären Navier–Stokes–Gleichungen mit $P1/P1$ –Elementen: Diskretisierung und Löser*. Ph.D.–Dissertation, Ruhr–Universität Bochum.
- Heywood, J.G., Rannacher, R. (1982, 1986, 1988)**, ‘Finite Element Approximation of the Nonstationary Navier–Stokes Problem, Part I: Regularity of Solutions and Second–Order Error Estimates for Spatial Discretization, Part II: Stability of Solutions and Error Estimates Uniform in Time, Part III: Smoothing Property and Higher Order Error Estimates for Spatial Discretization’, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **19**, No. 2, 275–311. Vol. **23**, No. 4, 750–777. Vol. **25**, No. 3, 489–512.
- Heywood, J.G., Rannacher, R. (1990)**, ‘Finite Element Approximation of the Nonstationary Navier–Stokes Problem, Part IV: Error Analysis for Second–Order Time Discretization’, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **27**, No. 2, 353–384.
- Heywood, J.G., Rannacher, R., Turek, S. (1996)**, ‘Artificial Boundaries and Flux and Pressure Conditions for the Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **22**, 325–352.
- Hierholz, K.–H., Wagner, S. (1998)**, ‘Simulation of Fluid–Structure Interaction at the Helicopter Rotor’, *Proc. 21st Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences (ICAS)*, Melbourne, Australia.
- Hirsch, C. (1988)**, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume I – Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons, New York.
- Hirsch, C. (1990)**, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Volume II – Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*. John Wiley & Sons, New York.
- Hirt, C.W., Amsden, A.A., Cook, J.L. (1974)**, ‘An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Computing Method for All Flow Speeds’, *Journal of Computational Physics*, **14**, 227–253.
- Hirt, C.W., Nichols, B.D. (1981)**, ‘Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries’, *Journal of Computational Physics*, **39**, 201–225.
- Huerta, A., Liu, W.K. (1988a)**, ‘Viscous Flow Structure Interaction’, *Journal of Pressure Vessel Technology*, **110**, 15–21.
- Huerta, A., Liu, W.K. (1988b)**, ‘Viscous Flow with Large Free Surface Motion’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **69**, 277–324.
- Huerta, A., Casadei, F. (1994)**, ‘New ALE Applications in Non–Linear Fast–Transient Solid Dynamics’, *Engineering Computations*, **11**, 317–345.
- Hughes, T.J.R., Brooks, A.N. (1979)**, ‘A Multidimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion’, *Finite Element Methods in Convection Dominated Flows*, Hughes, T.J.R. (ed.), ASME AMD, **34**, 19–35.
- Hughes, T.J.R., Liu, W.K., Zimmermann, T.K. (1981)**, ‘Lagrangian–Eulerian Finite Element Formulation for Viscous Flows’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **29**, 329–349.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Balestra, M. (1986a)**, ‘A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: V. Circumventing the Babuska–Brezzi Condition: A Stable Petrov–Galerkin Formulation of the Stokes Problem accommodating equal–order Interpolation’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **59**, 85–99.

- Hughes, T.J.R., Mallet, M., Mizukami, A. (1986b)**, ‘A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: II. Beyond SUPG’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **54**, 341–355.
- Hughes, T.J.R. (1987a)**, ‘Recent Progress in the Development and Understanding of SUPG Methods with Special Reference to the Compressible Euler and Navier–Stokes Equations’, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **7**, 1261–1275.
- Hughes, T.J.R. (1987b)**, *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P. (1987)**, ‘A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VII. The Stokes Problem with various well–posed Boundary Conditions: Symmetric Formulations that converge for all Velocity /Pressure Spaces’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **65**, 85–96.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P., Mallet, M. (1987)**, ‘A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VI. Convergence analysis of the generalized SUPG formulation for linear time–dependent multi–dimensional advective–diffusive systems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **63**, 97–112.
- Hughes, T.J.R., Franca, L.P. (1988)**, ‘A Mixed Finite Element Formulation for Reissner–Mindlin Plate Theory: Uniform Convergence of All Higher–Order Spaces’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **67**, 223–240.
- Hughes, T.J.R., Hulbert, G.M. (1988)**, ‘Space–Time Finite Element Methods for Elastodynamics: Formulations and Error Estimates’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **66**, 339–363.
- Hughes, T.J.R., Franca, P., Hulbert, M. (1989)**, ‘A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least–squares method for advective–diffusive equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **73**, 173–189.
- Hughes, T.J.R., Hauke, G., Jansen, K., Johan, Z. (1994)**, ‘Stabilized Finite Element Methods in Fluids: Inspirations, Origins, Status and Recent Developments’, *Recent Developments in Finite Element Methods*, Hughes, T.J.R., Oñate, E., Zienkiewicz, O.C. (eds.), CIMNE, Barcelona.
- Hughes, T.J.R. (1995)**, ‘Multiscale Phenomena: Green’s Functions, The Dirichlet–to–Neumann Formulation, Subgrid Scale Models, Bubbles and the Origins of Stabilized Methods’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **127**, 387–401.
- Hughes, T.J.R., Feijóo, G., Mazzei, L., Quincy, J.–B. (1998)**, ‘The Variational Multiscale Method – A Paradigm for Computational Mechanics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **166**, 3–24.
- Idelsohn, S.R., Oñate, E. (1994)**, ‘Finite Volumes and Finite Elements: Two ‘Good Friends’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 3323–3341.
- Idelsohn, S., Storti, M., Nigro, N. (1995)**, ‘Stability of Mixed Finite Element Formulations with Special Mention of Equal–Order Interpolations’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **20**, 1003–1022.
- Jamet, P., Bonnerot, R. (1975)**, ‘Numerical Solution of the Eulerian Equations of Compressible Flow by a Finite Element Method which follows the Free Boundary and the Interfaces’, *Journal of Computational Physics*, **18**, 21–45.
- Jamet, P. (1978)**, ‘Galerkin–Type Approximations which are Discontinuous in Time for Parabolic Equations in a Variable Domain’, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **15**, No. 5, 912–928.
- Jamet, P. (1980)**, ‘Stability and Convergence of a Generalized Crank–Nicolson Scheme on a Variable Mesh for the Heat Equation’, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **17**, No. 4, 530–539.
- Johnson, A.A., Tezduyar, T.E. (1994)**, ‘Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **119**, 73–94.
- Johnson, C., Nävert, U., Pitkäranta, J. (1984)**, ‘Finite Element Methods for Linear Hyperbolic Problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **45**, 285–312.
- Johnson, C., Saranen, J. (1986)**, ‘Streamline Diffusion Methods for the Incompressible Euler and Navier–Stokes Equations’, *Mathematics of Computation*, Vol. **47**, No. 175, 1–18.
- Johnson, C. (1987)**, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Johnson, C. (1988)**, ‘Error Estimates and Adaptive Time–Step Control for a Class of One–Step Methods for Stiff Ordinary Differential Equations’, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **25**, No. 4, 908–926.
- Johnson, C., Rannacher, R., Boman, M. (1995)**, ‘Numerics and Hydrodynamic Stability: Toward Error Control in Computational Fluid Dynamics’, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **32**, No. 4, 1058–1079.
- Kalro, V., Aliabadi, S., Garrard, W., Tezduyar, T.E., Mittal, S., Stein, K. (1996)**, ‘Parallel Finite Element Simulation of Large Ram–Air Parachutes’, *AHPCRC Preprint 96–003*, University of Minnesota.
- Kawahara, M., Ohmiya, K. (1985)**, ‘Finite Element Analysis of Density Flow using the Velocity Correction Method’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **5**, 981–993.
- Kim, J., Moin, P. (1985)**, ‘Application of a Fractional–Step Method to Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Journal of Computational Physics*, **59**, 308–323.
- Kjellgren, P., Hyvärinen, J. (1998)**, ‘An Arbitrary Lagrangean–Eulerian Finite Element Method’, *Computational Mechanics*, **21**, 81–90.
- Koobus, B., Farhat, C. (1996)**, ‘Time–Accurate Schemes for Computing Two– and Three–Dimensional Viscous Fluxes on Unstructured Dynamic Meshes’, *Rapport de Recherche INRIA 2823*.
- Kovasznyai, L.I.G. (1948)**, ‘Laminar Flow behind a Two–Dimensional Grid’, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **48**, 58–62.
- Kuhl, D. (1996)**, *Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke*. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 22, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Kuhl, D., Ramm, E. (1996)**, ‘Constraint Energy Momentum Algorithm and its Application to Nonlinear Dynamics of Shells’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **136**, 293–315.
- Kuhl, D., Ramm, E. (1999)**, ‘Generalized Energy–Momentum Method for Non–Linear Adaptive Shell Dynamics’, appearing in: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Ladyzhenskaya, O.A. (1969)**, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon & Breach, New York.
- Le Tallec, P., Mani, S. (1999)**, ‘Conservation Laws for Fluid Structure Interactions’, Preprint, Proc. of the Int. Symposium on *Computational Methods for Fluid–Structure Interaction*, Trondheim, Norway.
- Le Tallec, P., Mouro, J. (1999)**, ‘Fluid Structure Interaction with large Structural Displacements’, Preprint submitted to: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Lesaint, P., Touzani, R. (1989)**, ‘Approximation of the Heat Equation in a Variable Domain with Application to the Stefan Problem’, *SIAM J. Numer. Anal.*, , 366–379.
- Lesoinne, M., Farhat, C. (1996)**, ‘Geometric Conservation Laws for Flow Problems with Moving Boundaries and Deformable Meshes, and their Impact on Aeroelastic Computations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **134**, 71–90.
- Lesoinne, M., Farhat, C. (1998)**, ‘Improved Staggered Algorithms for the Serial and Parallel Solution of Three–Dimensional Nonlinear Transient Aeroelastic Problems’, *Computational Mechanics, Proc. WCCM IV Conf. – Buenos Aires*. Oñate, E., Idelsohn, S. (eds.). CIMNE, Barcelona.
- Liu, W.K. (1981)**, ‘Finite Element Procedures for Fluid–Structure Interactions and Application to Liquid Storage Tanks’, *Nuclear Engineering and Design*, **65**, 221–238.
- Liu, W.K., Ma, D.C. (1982)**, ‘Coupling Effect between Liquid Sloshing and Flexible Fluid–Filled Systems’, *Nuclear Engineering and Design*, **72**, 345–357.
- Liu, W.K., Belytschko, T., Chang, H. (1986)**, ‘An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Finite Element Method for Path–dependent Materials’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **58**, 227–245.
- Liu, W.K., Gvildys, J. (1986)**, ‘Fluid–Structure Interaction of Tanks with an Eccentric Core Barrel’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **58**, 51–77.
- Liu, W.K., Chen, J.–S., Belytschko, T., Zhang Y.F. (1991)**, ‘Adaptive ALE Finite Elements with particular Reference to External Work Rate on Frictional Interface’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **93**, 189–216.
- Liu, W.K., Uras, R.A. (1992)**, ‘Arbitrary Lagrangian–Eulerian Finite Elements for Fluid–Shell Interaction Problems’, *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, **XIV(4)**, 347–368.

- Löhner, R., Yang, C., Cebal, J., Baum, J.D., Luo, H., Pelessone, D., Charman, C. (1995)**, ‘Fluid–Structure Interaction using a Loose Coupling Algorithm and Adaptive Unstructured Grids’, *Computational Fluid Dynamics Review 1995*, M. Hafez, K. Oshima (eds.), J. Wiley & Sons.
- Löhner, R., Yang, C. (1996)**, ‘Improved ALE Mesh Velocities for Moving Bodies’, *Comm. in Numerical Methods in Engineering*, **12**, 599–608.
- Lube, G., Auge, A. (1992)**, ‘Stabilized Mixed Finite Element Approximations of Incompressible Flow Problems’, *ZAMM – Z. angew. Math. Mech.*, **72**, 6, T483–T486.
- Lube, G., Auge, A. (1993)**, ‘Regularized Mixed Finite Element Approximations of Non–Isothermal Incompressible Flow Problems’, *ZAMM – Z. angew. Math. Mech.*, **73**, 7/8, T908–T911.
- Lübbing, C. (1997)**, *Zur Stabilität von gestaffelten Finite–Elemente Berechnungen*. Ph.D.–Dissertation, Institut für Statik und Dynamik der Luft– und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart.
- Lyly, M., Stenberg, R. (1994)**, ‘Stabilized MITC Plate Bending Elements’, *Proc. of 2nd Int. Conf. on Computational Structures Technology*, Athens, Greece, 11–16.
- Malvern, L.E. (1969)**, *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice–Hall, London.
- Maman, N., Farhat, C. (1995)**, ‘Matching Fluid and Structure Meshes for Aeroelastic Computations: A Parallel Approach’, *Computers & Structures*, **54**, 779–785.
- Marsden, J.E., Hughes, T.J.R. (1983)**, *Mathematical Foundations of Elasticity*. Dover, New York.
- Maruoka, A., Anju, A., Kawahara, M. (1994)**, ‘An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Finite Element Method for Fluid–Structure Interaction Problem’, *Computational Methods in Water Resources X*. A. Peters et. al. (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1233–1238.
- Masud, A. (1993)**, *A Space–Time Finite Element Method for Fluid–Structure Interaction*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, Stanford University, Stanford.
- Masud, A., Hughes, T.J.R. (1997)**, ‘A Space–Time Galerkin/Least–Squares Finite Element Formulation of the Navier–Stokes Equations for Moving Domain Problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **146**, 91–126.
- Michlin, S.G. (1962)**, *Variationsmethoden der mathematischen Physik*. Akademie–Verlag, Berlin.
- Mittal, S. (1992)**, *Stabilized Space–Time Finite Element Formulations for Unsteady Incompressible Flows involving Fluid–Body Interactions*. Ph.D. Thesis, Department of Aerospace Engineering and Mechanics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota.
- Mittal, S., Tezduyar, T.E. (1993)**, ‘Direct Time–integration Methods: Stabilized Space–Time Finite Element Formulation of Incompressible Flows’, *Solving Large–scale Problems in Mechanics*, Papadrakakis, M. (ed.), 357–389.
- Mizukami, A. (1985)**, ‘An Implementation of the Streamline–Upwind/Petrov–Galerkin Method for Linear Triangular Elements’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **49**, 357–364.
- Mok, D.P. (1996)**, *Zur Lösung schwachbesetzter Gleichungssysteme*. Seminararbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Mok, D.P. (1997)**, *Verformungsabhängige Lasten bei nichtlinearen Finite Elemente Berechnungen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Mok, D., Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1999a)**, ‘Algorithmic Aspects of Deformation Dependent Loads in Nonlinear Static Finite Element Analysis’, *Engineering Computations*, Vol. **16**, No. 5, 601–618.
- Mok, D., Wall, W.A., Ramm, E. (1999b)**, ‘Partitioned Multi–Time Step Finite Element Analysis for Nonlinear Structural Dynamics’, *Structural Dynamics – EURO DYN ’99*, Proc. 4th International Conference of the European Association of Structural Dynamics – Prague, Czech Republic, L. Fryba, J. Naprstek (eds.), Balkema, Rotterdam, 351–356.
- Morgan, K., Peraire, J. (1999)**, ‘Unstructured Grid Finite Element Methods for Fluid Mechanics’, Preprint submitted to: *Inst. of Phys. Reviews*.
- Müller–Urbaniak, S. (1994)**, *Eine Analyse des Zwischenschritt– θ –Verfahrens zur Lösung der instationären Navier–Stokes–Gleichungen*. Ph.D.–Dissertation, Universität Heidelberg. IWR Preprint 94–01 (SFB 359).

- Nabh, G. (1998)**, *On High Order Methods for the Stationary Incompressible Navier–Stokes Equations*. Ph.D.–Dissertation, Preprint, IWR, Universität Heidelberg.
- Navti, S.E., Ravindran, K., Taylor, C., Lewis, R.W. (1997)**, ‘Finite Element Modelling of Surface Tension Effects Using a Lagrangian–Eulerian Kinematic Description’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **147**, 41–60.
- Newmark, N.M. (1959)**, ‘A Method of Computation for Structural Dynamics’, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **85**, EM3, 67–94.
- Noh, W.F. (1964)**, ‘CEL: A Time–Dependent Two–Space–Dimensional Coupled Eulerian–Lagrangian Code’, *Meth. in Comp. Phys.*, **3**, B. Alder et al. (eds.), Academic Press, New York, 117–179.
- Nomura, T., Hughes, T.J.R. (1992)**, ‘An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Finite Element Method for Interaction of Fluid and a Rigid Body’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **95**, 115–138.
- Nomura, T., (1994)**, ‘ALE Finite Element Computations of Fluid–Structure Interaction’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **112**, 291–308.
- Norberg, C. (1994)**, ‘An Experimental Investigation of the Flow around a Circular Cylinder: Influence of Aspect Ratio’, *J. Fluid Mech.*, **258**, 287–316.
- Norburn, S., Silvester, D. (1998)**, ‘Stabilised vs. Stable Mixed Methods for Incompressible Flow’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **166**, 131–141.
- Oden, J.T., Reddy, J.N. (1976)**, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg.
- Oñate, E. (1998)**, ‘Derivation of Stabilized Equations for Numerical Solution of Advective–Diffusive Transport and Fluid Flow Problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **151**, 233–265.
- Papanastasiou, T.C., Malamataris, N., Ellwood, K. (1992)**, ‘A New Outflow Boundary Condition’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **14**, 587–608.
- Park, K.C., Felippa, C.A., DeRuntz, J.A. (1977)**, ‘Stabilization of Staggered Solution Procedures for Fluid–Structure Interaction Analysis’, *Computational Methods for Fluid–Structure Interaction Problems*, T. Belytschko and T.L. Geers (eds.), AMD Vol. 26, ASME, 95–124.
- Park, K.C., Felippa, C.A. (1983)**, ‘Partitioned Analysis of Coupled Systems’, *Computational Methods for Transient Analysis*, T. Belytschko and T.J.R. Hughes (eds.), Elsevier Science Publishers B.V., 157–219.
- Pedley, T.J., Stephanoff, K.D. (1985)**, ‘Flow along a channel with a time–dependent indentation in one wall: the generation of vorticity waves’, *J. Fluid Mech.*, **160**, 337–367.
- Pelletier, D., Fortin, A., Camarero, R. (1989)**, ‘Are FEM Solutions of Incompressible Flows really Incompressible? (or how Simple Flows can cause Headaches)’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **9**, 99–112.
- Pierre, R. (1988)**, ‘Simple C^0 Approximations for the Computation of Incompressible Flows’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **68**, 205–227.
- Pijaudier–Cabot, G., Bode, L., Huerta, A. (1995)**, ‘Arbitrary Lagrangian–Eulerian Finite Element Analysis of Strain Localisation in Transient Problems’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 4171–4191.
- Piperno, S., Farhat, C., Larrouturou, B. (1995)**, ‘Partitioned Procedures for the Transient Solution of Coupled Aeroelastic Problems Part I: Model Problem, Theory and Two–Dimensional Application’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **124**, 79–112.
- Piperno, S. (1997)**, ‘Explicit/Implicit Fluid/Structure Staggered Procedures with a Structural Predictor and Fluid Subcycling for 2D Inviscid Aeroelastic Simulations’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **25**, 1207–1226.
- Piperno, S., Farhat, C. (1997)**, ‘Design and Evaluation of Staggered Partitioned Procedures for Fluid–Structure Interaction’, *Rapport de Recherche INRIA 3241*.
- Piperno, S. (1998)**, ‘Numerical Simulation of Aeroelastic Instabilities of Elementary Bridge Decks’, *Rapport de Recherche INRIA 3549*.
- Pironneau, O. (1989)**, *Finite Element Methods for Fluids*. John Wiley & Sons.

- Quartapelle, L. (1993)**, *Numerical Solution of the Incompressible Navier–Stokes Equations*. Birkhäuser–Verlag.
- Radovitzky, R., Ortiz, M. (1998)**, ‘Lagrangian Finite Element Analysis of Newtonian Fluid Flows’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**, 607–619.
- Ralph, M.E., Pedley, T.J. (1989)**, ‘Viscous and Inviscid Flows in a Channel with a Moving Indentation’, *J. Fluid Mech.*, **209**, 543–566.
- Ramaswamy, B., Kawahara, M. (1987a)**, ‘Arbitrary Lagrangian–Eulerian Finite Element Method for Unsteady, Convective, Incompressible Viscous Free Surface Fluid Flow’, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, **7**, 1053–1075.
- Ramaswamy, B., Kawahara, M. (1987b)**, ‘Lagrangian Finite Element Analysis Applied to Viscous Free Surface Fluid Flow’, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, **7**, 953–984.
- Ramm, E., Wall, W.A., Bischoff, M. (1999)**, *Nichtlineare Strukturanalyse und Finite Elemente*, Vorlesungsnotizen. Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Rammerstorfer, F.G., Scharf, K., Fischer, F.D. (1990)**, ‘Storage Tanks under Earthquake Loading’, *Applied Mechanic Reviews*, **43**, 261–282.
- Rannacher, R. (1993)**, ‘On the Numerical Solution of the Incompressible Navier–Stokes Equations’, *ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, **73**, 9, 203–216.
- Reddy, M.P., Reddy, J.N., Akay, H.U. (1992)**, ‘Penalty Finite Element Analysis of Incompressible Flows using Element by Element Solution Algorithms’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **100**, 169–205.
- Rehle, N. (1996)**, *Adaptive Finite Elemente Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken*. Ph.D.–Dissertation, Bericht Nr. 20, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Renardy, M., Rogers, R.C. (1996)**, *An Introduction to Partial Differential Equations*. Springer, Berlin Heidelberg.
- Russo, A. (1995)**, ‘Residual Free Bubbles and Stabilized Methods’, *Finite Elements in Fluids – New Trends and Applications*, Proc. of the 9th Int. Conference, Venezia, Italy. Morandi Cecchi, M. et. al. (eds.).
- Russo, A. (1996a)**, ‘A Posteriori Error Estimators via Bubble Functions’, *Mathematical Models and Methods in Applied Science M³AS*, **6**, 33–41.
- Russo, A. (1996b)**, ‘Bubble Stabilization of Finite Element Methods for the Linearized Incompressible Navier–Stokes Equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **132**, 335–343.
- Sani, R.L., Gresho, P.M., Lee, R.L., Griffiths, D.F. (1981)**, ‘The Cause and Cure(?) of the Spurious Pressures Generated by certain FEM Solutions of the Incompressible Navier–Stokes Equations: Part 1’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **1**, 17–43.
- Schäfer, M., Turek, S. (1996)**, ‘Benchmark Computations of Laminar Flow Around a Cylinder’, *Flow Simulation with High–Performance Computers II*, Hirschel, E.H. (ed.). Notes on Numerical Fluid Mechanics Vol. **52**, Vieweg, 547–566.
- Schellbach, (1851)**, ‘Probleme der Variationsrechnung’, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **41**, 293–363.
- Schlichting, H., Gersten, K. (1997)**, *Grenzschicht–Theorie*. Springer, Berlin Heidelberg.
- Schmidt, J., Wall, W.A., Ramm, E. (1999)**, ‘Transient Free Surface Flows via a Stabilized ALE Finite Element Method’, appearing in: *ZAMM – Z. angew. Math. Mech.*
- Schneider, S. (1996)**, *Einflüsse auf Strömungs– und Druckfelder bei der numerischen Simulation von Festkörperumströmungen*. Diplomarbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Schulte, S. (1998)**, *Modulare und hierarchische Simulation gekoppelter probleme*. Ph.D.–Dissertation, Fakultät für Informatik, TU München.
- Schöberl, J. (1997)**, ‘NETGEN – An Advancing Front 2D/3D–Mesh Generator based on Abstract Rules’, *Comput. Visual. Sci.*, **1**, 41–52.

- Shakib, F. (1988)**, *Finite Element Analysis of the Compressible Euler and Navier–Stokes Equations*. Ph.D. Thesis, Department of Mechanical Engineering, Stanford University.
- Simo, J.C., Armero, F. (1994)**, ‘Unconditional Stability and Long–Term Behavior of Transient Algorithms for the Incompressible Navier–Stokes and Euler Equations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **111**, 11–154.
- Simo, J.C., Armero, F., Taylor, C.A. (1995)**, ‘Stable and Time–Dissipative Finite Element Methods for the Incompressible Navier–Stokes Equations in Advection Dominated Flows’, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**, 1475–1506.
- Simo, J.C., Hughes, T.J.R. (1998)**, *Computational Inelasticity*. Springer, New York.
- Soulaïmani, A., Fortin, M., Ouellet, Y., Dhatt, G., Bertrand, F. (1987)**, ‘Simple Continuous Pressure Elements for Two– and Three– Dimensional Incompressible Flows’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **86**, 265–296.
- Spieth, C.H.C. (1999)**, *Iterative Löser für unsymmetrische Gleichungssysteme aus FE–Simulationen inkompressibler Strömungen*. Seminararbeit, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart.
- Stangl, R., Wagner, S. (1992)**, ‘Calculation of the Steady Rotor Flow Using an Overlapping Embedded Grid Technique’, *18th European Rotorcraft Forum*, Avignon, France.
- Stein, E., Barthold, F.–J. (1992)**, *Elastizitätstheorie*, Vorlesungsmanuskript. Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover.
- Strang, G., Fix, G.J. (1973)**, *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice–Hall, Englewood Cliffs.
- Temam, R. (1979)**, *Navier–Stokes Equations – Theory and Numerical Analysis*. North–Holland, Amsterdam.
- Tezduyar, T.E. (1992)**, ‘Stabilized Finite Element Formulations for Incompressible Flow Computations’, *Advances in Applied Mechanics*, **28**, 1–44.
- Tezduyar, T.E., Behr, M., Liou, J. (1992a)**, ‘A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – The deforming–spatial–domain/space–time procedure: I. The concept and the preliminary numerical tests’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **94**, 339–351.
- Tezduyar, T.E., Behr, M., Mittal, S., Liou, J. (1992b)**, ‘A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces – The deforming–spatial–domain/space–time procedure: II. Computation of free–surface flows, two–liquid flows with drifting cylinders’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **94**, 353–371.
- Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E., Shih, R. (1992c)**, ‘Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal–order–interpolation velocity–pressure elements’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **95**, 221–242.
- Tezduyar, T.E., Mittal, S., Shih, R. (1991)**, ‘Time–Accurate Incompressible Flow Computations with Quadrilateral Velocity–Pressure Elements’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **87**, 363–384.
- Tezduyar, T.E., Shih, R. (1991)**, ‘Numerical Experiments on Downstream Boundary of Flow Past Cylinder’, *Journal of Engineering Mechanics*, **117**, 854–871.
- Thomas, P.D., Lombard, C.K. (1979)**, ‘Geometric Conservation Law and its Application to Flow Computations on Moving Grids’, *AIAA Journal*, Vol. **17**, No. 10, 1030–1037.
- Tobiska, L., Verfürth, R. (1996)**, ‘Analysis of a Streamline Diffusion Finite Element Method for the Stokes and Navier–Stokes Equations’, *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **33**, No. 1, 107–127.
- Truesdell, C. (1952)**, ‘The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics’, *J. Rational Mech. Anal.*, **1**, 125–300.
- Turek, S. (1996)**, ‘A Comparative Study of some Time–Stepping Techniques for the Incompressible Navier–Stokes Equations: From Fully Implicit Nonlinear Schemes to Semi–Implicit Projection Methods’, *Int. Journal for Numerical Methods in Fluids*, **22**, 987–1011.
- Turek, S. (1999)**, *Efficient Solvers for Incompressible Flow Problems: An Algorithmic Approach in View of Computational Aspects*. Preprint, Springer, Berlin Heidelberg.
- Valentin, F.G.C., Franca, L.P. (1995)**, ‘Combining Stabilized Finite Element Methods’, *Comp. Appl. Math.*, Vol. **14**, No. 3, 285–300.

- Venkatakrishnan, V. (1996), 'Perspective on Unstructured Grid Flow Solvers', *AIAA Journal*, **34**, 533–547.
- Wall, W.A., Ramm, E. (1997), 'A Stabilized Finite Element Method for Incompressible Navier–Stokes on Time–Dependent Domains', *Abstracts of the Fourth U.S. National Congress on Computational Mechanics*, San Francisco.
- Wall, W.A., Ramm, E. (1998), 'Fluid–Structure Interaction Based upon a Stabilized (ALE) Finite Element Method', *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, Proc. 4th World Congress on Computational Mechanics – Buenos Aires, S.R. Idelsohn, E. Oñate, E.N. Dvorkin (eds.), CIMNE, Barcelona.
- Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1998), 'Stabilization Techniques for Fluid and Structural Finite Elements', *Computational Mechanics – New Trends and Applications*, Proc. 4th World Congress on Computational Mechanics – Buenos Aires, S.R. Idelsohn, E. Oñate, E.N. Dvorkin (eds.), CIMNE, Barcelona.
- Wall, W.A., Bischoff, M., Ramm, E. (1999a), 'A Deformation Dependent Stabilization Technique, Exemplified by EAS–Elements at Large Strains', Preprint – *SFB 404 – Report 98/17*, University of Stuttgart, appearing in: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- Wall, W.A., Mok, D.P., Ramm, E. (1999b), 'Partitioned Analysis Approach for the Transient, Coupled Response of Viscous Fluids and Flexible Structures', appearing in: *Proc. ECCM '99, European Conference on Computational Mechanics – Solids, Structures and Coupled Problems*, München.
- Wang, J., Gadala, M.S. (1997), 'Formulation and Survey of ALE Method in Nonlinear Solid Mechanics', *Finite Elements in Analysis and Design*, **24**, 253–269.
- Warsi, Z.U.A. (1981), 'Conservation Form of the Navier–Stokes Equations in General Nonsteady Coordinates', *AIAA Journal*, Vol. **19**, No. 2, 240–242.
- Warsi, Z.U.A. (1993), *Fluid Dynamics – Theoretical and Computational Approaches*. CRC Press, Boca Raton.
- Watanabe, S., Hirano, H., Kawahara, M. (1996), 'A Fluid–Structure Interaction Analysis by ALE Finite Element Method', *Numerical Methods in Engineering '96*, Proc. of ECCOMAS '96, Paris, France. Désidéri et.al. (eds.), J. Wiley & Sons, 894–897.
- Williamson, C.H.K. (1996), 'Vortex Dynamics in the Cylinder Wake', *Annual Review of Fluid Mechanics*, **28**, 477–539.
- Wood, W.L. (1990), *Practical Time–Stepping Schemes*. Oxford University Press, Oxford.
- Wunderlich, W., Schaeperstoens, B., Temme, C. (1994), 'Dynamic Stability of Non–Linear Shells of Revolution under Consideration of the Fluid–Solid–Structure Interaction', *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, 2679–2697.
- Yeung, R.W., Ananthakrishnan, P. (1997), 'Viscosity and Surface–Tension Effects on Wave Generation by a Translating Body', *Journal of Engineering Mathematics*, **32**, 257–280.
- Zhang, H., Reggio, M., Trépanier, J.Y., Camarero, R. (1993), 'Discrete Form of the GCL for Moving Meshes and its Implementation in CFD Schemes', *Computers & Fluids*, Vol. **22**, No. 1, 9–23.
- Zienkiewicz, O.C. (1984), 'Coupled problems and their Numerical Solution', *Numerical Methods in Coupled Systems*, R.W. Lewis, P. Bettess and E. Hinton (eds.), John Wiley & Sons Ltd., 35–58.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1989), *The Finite Element Method, Volume 1*. McGraw–Hill, Singapore.
- Zienkiewicz, O.C., Oñate, E. (1991), 'Finite Volumes vs Finite Elements. Is there Really a Choice?', *Nonlinear Computational Mechanics – State of the Art*, P. Wriggers, W. Wagner (eds.), Springer–Verlag.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. (1991), *The Finite Element Method, Volume 2*. McGraw–Hill, Singapore.
- Zienkiewicz, O.C., Wu, J. (1991), 'Incompressibility without Tears– How to avoid Restrictions of Mixed Formulation', *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, **32**, 1189–1203.
- Zienkiewicz, O.C., Codina, R. (1995), 'A General Algorithm for Compressible and Incompressible Flow – Part I: The Split, Characteristic–Based Scheme', *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **20**, 869–885.

Lebenslauf

- Name: Wolfgang A. Wall
- Geburtsdatum: 19. April 1964
- Geburtsort: Taxach/Hallein – Österreich (A)
- Eltern: Friedrich und Angela Wall, geb. Kurz
- Nationalität: Österreich
- Zivilstand: verheiratet seit 28.08.1995 mit Dr.med.univ. Andrea Wall, geb. Bereuter
- 1970 – 1974: Volksschule, Grödig/Salzburg (A)
- 1974 – 1978: Bundesrealgymnasium, Hallein (A)
- 1978 – 1983: Höhere Technische Bundeslehranstalt – Abteilung Bautechnik, Salzburg (A)
- Juni 1983: Reifeprüfung (mit Auszeichnung)
- 1983 – 1984: Mitarbeiter im Zivilingenieurbüro Dr. Medicus, Salzburg (A)
- 1984 – 1991: Studium an der Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur der Universität Innsbruck (A), Studienrichtung: Bauingenieurwesen – Studienzweig: Konstruktiver Ingenieurbau
- 1985 – 1988: Zuerkennung von Leistungsstipendien für besondere Studienleistungen in den Studienjahren 1985/86, 1986/87, 1987/88
- 1988: Aufnahme in das Österreichische Studienförderungswerk PRO SCIENTIA
- 1990: Forschungsaufenthalt am ‘Department of Civil Engineering and Operations Research’ der ‘Princeton University’, New Jersey (USA)
- Juli 1991: Sponsion zum Diplom–Ingenieur (mit Auszeichnung)
- 1991 – 1992: Zivildienst bei der Lebenshilfe Salzburg (A)
- 1992 – 1994: Universitätsassistent am Institut für Mechanik der Universität Innsbruck (A)
- 1994 – 1997: Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Graduiertenkolleg “Modellierung und Diskretisierungsmethoden für Kontinua und Strömungen” an der Universität Stuttgart
- seit Nov. 1997: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Baustatik der Universität Stuttgart

Berichte des Instituts für Baustatik der Universität Stuttgart

- 74–1** **M. Becker, J. Bühler, G. Lang–Lendorff, K. Papailiou, J. M. Sättele:**
Kontaktkurs EDV im konstruktiven Ingenieurbau.
- 74–2** **G. Werner:**
Experimentelle und theoretische Untersuchungen zur Ermittlung des
Tragverhaltens biege– und verdrehbeanspruchter Stäbe mit I–Querschnitt.
- 74–3** **K. Tompert:**
Berechnung kreiszylindrischer Silos auf elastischer Unterlage.
- 74–4** **W. Riehle:**
Studie über verallgemeinerte Variationsfunktionale und ihre Anwendung bei
der Methode der finiten Plattenelemente.
- 75–1** **G. Müller, R. W. Rembold, J. M. Sättele, K. H. Schweizerhof, W. Wissmann:**
Platten–Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil I.
- 75–2** **G. Müller:**
Numerische Behandlung der Kirchhoffschen und Reissnerschen Plattentheorie
nach einer diskretisierten und erweiterten Trefftz–Methode.
- 75–3** **E. A. Castrillón O.:**
Beitrag zur Berechnung langer dünnwandiger dreizelliger Träger
unter Berücksichtigung der Profilverformung.
- 76–1** **W. Block, G. Eisenbiegler, R. D. Kugler, H. Lieb, G. Müller, J. Müller,
K.–H. Reineck, J. Schlaich, K. H. Schweizerhof, F. Seible:**
Platten–Theorie, Berechnung, Bemessung. Teil II.
- 76–2** **E. Ramm:**
Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente.
- 77–1** **B.–M. Sulke:**
Berechnung dünnwandiger prismatischer Falwerke
mit verformbarem mehrzelligen Querschnitt.
- 78–1** **F. Fujii:**
Anwendung der Methode der finiten Elemente auf die Berechnung
von Stahlbetonplatten.
- 79–1** **B. Brendel:**
Geometrisch nichtlineare Elastostabilität.

- 79-2** **H. G. Berg:**
Tragverhalten und Formfindung versteifter Kuppelschalen über quadratischem Grundriß auf Einzelstützen.
- 79-3** **F. W. Bornscheuer, B. Brendel, L. Häfner, E. Ramm, J. M. Sättele:**
Fallstudien zu Schalentragsystemen (in englischer Sprache).
- 80-1** **R. I. Del Gaizo:**
Liegende zylindrische Behälter und Rohre auf Sattellagern endlicher Breite.
- 80-2** **R. W. Rembold:**
Beitrag zum Tragverhalten ausgewählter Plattentragsysteme unter Berücksichtigung der Reissnerschen Theorie und der Methode der gemischten finiten Elemente.
- 80-3** **J. M. Sättele:**
Ein finites Elementkonzept zur Berechnung von Platten und Schalen bei stofflicher und geometrischer Nichtlinearität.
- 82-1** **L. Häfner:**
Einfluß einer Rundschweißnaht auf die Stabilität und Traglast des axialbelasteten Kreiszyklinders.
- 82-2** **K. Schweizerhof:**
Nichtlineare Berechnung von Tragsystemen unter verformungsabhängiger Belastung mit finiten Elementen.
- 82-3** **H.-P. Andrä:**
Zum Tragverhalten des Auflagerbereichs von Flachdecken.
- 1 (1983)** **P. Osterrieder:**
Traglastberechnung von räumlichen Stabwerken bei großen Verformungen mit finiten Elementen.
- 2 (1983)** **T. A. Kompfner:**
Ein finites Elementmodell für die geometrisch und physikalisch nichtlineare Berechnung von Stahlbetonschalen.
- 3 (1983)** **A. Diack:**
Beitrag zur Stabilität diskret längsversteifter Kreiszyklinderschalen unter Axialdruck.
- 4 (1984)** **A. Burmeister, F. W. Bornscheuer, E. Ramm:**
Traglasten von Kugelbehältern mit Stützen und Formabweichungen unter Innendruck und Stützenlängskraft.

- 5 (1985) H. Stegmüller:**
Grenzlastberechnungen flüssigkeitsgefüllter Schalen mit "degenerierten" Schalenelementen.
- 6 (1987) A. Burmeister:**
Dynamische Stabilität nach der Methode der finiten Elemente mit Anwendungen auf Kugelschalen.
- 7 (1987) G. Kammler:**
Ein finites Elementmodell zur Berechnung von Trägern und Stützen mit offenem, dünnwandigem Querschnitt unter Berücksichtigung der Interaktion zwischen globalem und lokalem Versagen.
- 8 (1988) A. Matzenmiller:**
Ein rationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen.
- 9 (1989) D. Tao:**
Die Technik der reduzierten Basis bei nichtlinearen finiten Element-Berechnungen.
- 10 (1989) K. Weimar:**
Ein nichtlineares Balkenelement mit Anwendung als Längsstreifen axialbelasteter Kreiszyylinder.
- 11 (1990) K.-U. Bletzinger:**
Formoptimierung von Flächentragwerken.
- 12 (1990) S. Kimmich:**
Strukturoptimierung und Sensibilitätsanalyse mit finiten Elementen.
- 13 (1991) U. Andelfinger:**
Untersuchungen zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter finiter Elemente für Flächentragwerke.
- 14 (1992) N. Büchter:**
Zusammenführung von Degenerationskonzept und Schalentheorie bei endlichen Rotationen.
- 15 (1992) Th. J. Hofmann:**
Beitrag zur verfeinerten Balkentheorie.
- 16 (1994) D. Roehl:**
Zur Berechnung von großen elastoplastischen Deformationen bei Flächentragwerken und Kontinua.
- 17 (1994) R. Reitinger:**
Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke.

- 18 (1995) R. Suanno:**
Ein dreidimensionales Simulationsmodell für Stahlbeton mit Plastizität und Schädigung.
- 19 (1995) M. Braun:**
Nichtlineare Analysen von geschichteten, elastischen Flächentragwerken.
- 20 (1996) N. Rehle:**
Adaptive Finite Element Verfahren bei der Analyse von Flächentragwerken.
- 21 (1996) C. Haußer:**
Effiziente Dreieckselemente für Flächentragwerke.
- 22 (1996) D. Kuhl:**
Stabile Zeitintegrationsalgorithmen in der nichtlinearen Elastodynamik dünnwandiger Tragwerke.
- 23 (1998) H. Schmidts:**
Zur effizienten Modellierung und Analyse von Hochhaustragwerken.
- 24 (1998) H. Wang:**
Interaktion des lokalen und globalen Stabilitätsverhaltens dünnwandiger Stäbe.
- 25 (1998) K. Maute:**
Topologie- und Formoptimierung von dünnwandigen Flächentragwerken.
- 26 (1998) B. Maurer:**
Karl Culmann und die graphische Statik.
- 27 (1998) F. Çirak:**
Adaptive Finite-Element-Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken.
- 28 (1998) M. Trautz:**
Zur Entwicklung von Form und Struktur historischer Gewölbe aus der Sicht der Statik.
- 29 (1999) H. Menrath:**
Numerische Simulation des nichtlinearen Tragverhaltens von Stahlverbundträgern.
- 30 (1999) M. Bischoff:**
Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung.



Universität Stuttgart

